

**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ**

**ΤΟΜΕΑΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΓΙΑ ΤΟ ΜΔΕ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ
ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ
Αθήνα 2016**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Συγγραφέας: Λυκουργιάς Παναγιώτης (ΑΜ 201412)

*Υπό την επίβλεψη του Καρανίκα Αλέξανδρου
και με τριμελή επιτροπή βαθμολόγησης τους
Καρανίκα Αλέξανδρο –Αναπληρωτή Καθηγητή,
Διάκονο Φώτιο –Αναπληρωτή Καθηγητή,
και Ξάνθο Μαϊντά –Επίκουρο Καθηγητή:*

**ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΚΒΑΝΤΙΚΟΙ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΚΒΑΝΤΙΚΟ
ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ HALL**

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I. Εισαγωγή.....	3
1. Τα αξιώματα της κβαντομηχανικής.....	4
2. Το τελευταίο αξίωμα.....	5
3. Ανυόνια και ντόνατς.....	13
4. Στοιχεία κβαντικού hardware.....	14
5. Στοιχεία θεωρίας της πληροφορίας.....	15
6. Ανυονικός υπολογισμός.....	21
7. Αριθμός Chern.....	22
II. Κβαντικό φαινόμενο Hall.....	29
A. Ακέραιο (IQHE).....	30
1. Αναγωγική διερεύνηση.....	30
2. Στις αιχμές.....	33
3. Η ιδέα του Laughlin.....	36
4. Η νέα βαθμίδα.....	36
5. Και τώρα η αντλία.....	38
6. Αταξία, προσμίξεις και γεωγραφία.....	39
7. Η αντλία του Laughlin και το IQHE ως ανακύπτον φαινόμενο.....	41
8. Ήταν τοπολογικό;.....	45
B. Κλασματικό (FQHE).....	48
1. Τα πειραματικά αποτελέσματα.....	48
2. Χαμιλτονιανή.....	50
3. Εργαλειοθήκη.....	51
4. Η πρόταση του Laughlin.....	53
5. Σύνθετα φερμιόνια (CF).....	54
6. Σε μαθηματική γλώσσα.....	57
7. Deus ex machina.....	58
8. Τα άνθη.....	65
9. Τα αγκάθια.....	72
III. Fade out.....	78
1. Κάποια άλλα τοπολογικά συστήματα.....	79
2. Θαυμαστός, κβαντικός κόσμος.....	81
<i>Βιβλιογραφία.....</i>	<i>83</i>

I. Εισαγωγή

Με το νυχτερινό του σκούφο και τα κουρέλια της ρόμπας του, μπαλώνει τα κενά στη δομή του σύμπαντος.

Heine, Το καλωσόρισμα

1. Τα αξιώματα της κβαντομηχανικής

Η κβαντική μηχανική πολύ συχνά αναφέρεται ως μια νέα θεωρία φυσικής που εμφανίστηκε στις αρχές του εικοστού αιώνα, πηγάζοντας από την ανικανότητα της τότε φυσικής να εξηγήσει κάποια πειραματικά δεδομένα, όπως η ακτινοβολία μέλανος σώματος ή το φαινόμενο Compton. Στην πραγματικότητα, η κβαντική μηχανική δεν είναι ακριβώς μια νέα θεωρία φυσικής, αλλά μια ολόκληρη κατηγορία θεωριών φυσικής. Ακόμη και η θεωρία της σχετικότητας που χαρακτηρίστηκε ως «νέα θεωρία φυσικής» είναι μια κλασική θεωρία –πάλι αναζητούνται οι τροχιές των σωμάτων και αυτές είναι που ορίζουν την «κατάσταση» του υπό μελέτη σώματος, απλώς είναι τροχιές σε ένα χώρο μη Ευκλείδειο.

Η συγκλονιστική διαφορά των θεωριών κβαντομηχανικής σε σχέση με τις «κλασικές» θεωρίες, έχει να κάνει με το πρώτο και πιο βαθυστόχαστο χαρακτηριστικό που πρέπει να ορίζει μια θεωρία φυσικής: την κατάσταση.

Η κβαντική θεωρία στήνεται από τα εξής αξιώματα:

Αξίωμα 1 (της κατάστασης): Η κατάσταση ενός φυσικού συστήματος είναι η πλήρης γνώση και περιγραφή του. Στην κβαντομηχανική η κατάσταση είναι μια δέσμη σε έναν χώρο Hilbert H .

Αξίωμα 2 (των μετρήσιμων μεγεθών): Ως μετρήσιμο μέγεθος ορίζεται μια ιδιότητα του φυσικού συστήματος που –τουλάχιστον κατ' αρχήν- μπορεί να μετρηθεί. Είναι προφανές ότι ένα φυσικό σύστημα που δεν έχει τέτοιες ιδιότητες είναι από κάθε άποψη απρόσιτο προς μελέτη και δεν έχει νόημα να ασχοληθεί κανείς μαζί του. Στη θεωρία μας, το μετρήσιμο μέγεθος περιγράφεται από έναν αυτοσυζυγή τελεστή.

Αξίωμα 3 (του αποτελέσματος της μέτρησης): Το αριθμητικό αποτέλεσμα της μέτρησης ενός μεγέθους που αντιστοιχεί στον τελεστή A είναι μια από τις ιδιοτιμές a_n του A . Επίσης, ακριβώς μετά τη μέτρηση, η κατάσταση του συστήματος είναι μια ιδιοκατάσταση του A που έχει την ιδιοτιμή που μετρήθηκε.

Αξίωμα 4 (Της δυναμικής): Η χρονική εξέλιξη ενός κβαντικού συστήματος περιγράφεται από ένα μοναδιακό (το γινόμενο του με τον αυτοσυζυγή του είναι ο μοναδιαίος), αυτοσυζυγή τελεστή, που συνδέεται με έναν άλλο τελεστή που ονομάζεται Χαμιλτονιανή. Στην εικόνα Schrodinger (στο σύστημα μονάδων όπου $\hbar=1$) η χρονική εξέλιξη περιγράφεται από την εξίσωση Schrodinger $\frac{d|\psi\rangle}{dt} = -iH|\psi\rangle$, H η Χαμιλτονιανή, $|\psi\rangle$ η κυματοσυνάρτηση, η οντότητα που περιγράφει την κατάσταση.

Δε θα αναφερθώ εδώ στους μαθηματικούς ορισμούς των μεγεθών που εμπλέκονται στα παραπάνω αξιώματα· κάθε εισαγωγικό βιβλίο κβαντικής μηχανικής περιέχει όλα όσα χρειάζονται για την κατανόηση αυτών των μεγεθών.

Τα φαινόμενα που επάγουν αυτά τα τέσσερα αξιώματα, οι θεωρητικές, πειραματικές και τεχνικές κατευθύνσεις που μπορεί να ακολουθήσει κανείς μοιάζουν απεριόριστες. Η τεχνολογική επανάσταση του 20^{ου} αιώνα και οι συγκλονιστικές ανακαλύψεις της σύγχρονης φυσικής δε θα μπορούσαν να είχαν συμβεί χωρίς την ανάπτυξη της κβαντικής μηχανικής, και συνακόλουθα της κβαντικής θεωρίας πεδίου.

Τώρα, παρατηρώντας κανείς τα τέσσερα αυτά αξιώματα, γίνεται σαφές ότι δείχνουν να αναφέρονται σίγουρα σε ένα σώματιο, σε κατάσταση ενός σωμάτιου. Η κβαντική θεωρία προς το παρόν δεν έχει μιλήσει αναλυτικά για πολυσωματιδιακό σύστημα, και το πώς λειτουργούν εκεί τα αξιώματά της. Στην πραγματικότητα,

υπάρχει ένα πέμπτο αξίωμα, το οποίο όμως δεν είναι αξίωμα, δε χρειάζεται να μπει με το χέρι, αλλά μπορεί να αποδειχθεί. Είναι όμως τόσο θεμελιώδες, τόσο σημαντικό για τη θεωρία, που είθισται πολλές φορές να αναφέρεται ως αξίωμα:

Αξίωμα 5 (του συστήματος): Είναι σε σύνδεση με την Απαγορευτική Αρχή του Pauli και έχει να κάνει με συστήματα που αποτελούνται από δύο πανομοιότυπα σωματίδια και πάνω. Σύμφωνα με αυτήν, είναι αδύνατον δύο φερμιόνια (σωμάτια με ημιακέραιο σπιν, όπως είναι τα ηλεκτρόνια με σπιν $\frac{1}{2}$) να βρίσκονται ακριβώς στην ίδια κατάσταση, ή αλλιώς η κυματοσυνάρτηση ενός συστήματος ιδίων φερμιονίων πρέπει να είναι αντισυμμετρική κάτω από την ανταλλαγή δυο εξ αυτών. Αντίθετα, δύο ή και περισσότερα μποζόνια (σωμάτια με ακέραιο σπιν, όπως τα φωτόνια με σπιν 1) μπορούν να βρεθούν ακριβώς στην ίδια κατάσταση, ή αλλιώς η κυματοσυνάρτησή τους πρέπει να είναι συμμετρική κάτω από την ανταλλαγή δυο εξ αυτών.

2. Το τελευταίο αξίωμα

Το αξίωμα αυτό φαίνεται να κάνει ένα διαχωρισμό των σωματιδίων σε δυο κατηγορίες: μποζόνια και φερμιόνια. Αν η κβαντική θεωρία είναι μια πλήρης θεωρία περιγραφής του κόσμου, από τη στιγμή που το τελευταίο αξίωμά της αναφέρεται σε σωματίδια ως μποζόνια και φερμιόνια, και ως τίποτε άλλο, πάει να πει ότι κάθε σωματίδιο είναι μποζόνιο ή φερμιόνιο, δηλαδή υπάρχουν σωματίδια με ακέραιο σπιν και σωματίδια με ημιακέραιο σπιν, αλλά όχι σωματίδια με οποιαδήποτε άλλη τιμή σπιν (οι φράσεις «ακέραιο», «ημιακέραιο» αναφέρονται σε ακέραια και ημιακέραια πολλαπλάσια του $\hbar = h/2\pi$ και θα τις χρησιμοποιούμε από 'δω και μπρος για συντομία).

Αυτό είναι το αξίωμα με το οποίο θα ασχοληθούμε και θα προσπαθήσουμε να διαφωτίσουμε παρακάτω. Πριν το κάνουμε, λίγα πράγματα σχετικά με το γιατί αυτό είναι σημαντικό, και μια λίγο καλύτερη ανάλυση του γιατί τα πράγματα είναι όπως είναι.

Η πρώτη εύλογη απορία πάνω στο θέμα είναι η εξής: γιατί ποτέ στις κλασικές θεωρίες φυσικής δεν υπήρξε ένας αντίστοιχος κανόνας; Πράγματι, από τη στιγμή που πολυσωματιδιακά συστήματα εμφανίζονται πολύ εύκολα –και είναι και πολύ σημαντικά– και στην κλασική φυσική, γιατί εκεί δεν υπάρχουν μποζόνια και φερμιόνια; Το κλειδί είναι και πάλι στον ορισμό του τι είναι κατάσταση. Στις κλασικές θεωρίες, όπως ξέρουμε, η κατάσταση του σωματίου είναι η τροχιά του. Άρα, κλασικά, δυο πανομοιότυπα σωματίδια είναι δυο σωματίδια με τα ίδια ακριβώς εσωτερικά χαρακτηριστικά (μάζα, φορτίο κλπ) και την ίδια τροχιά. Τώρα, για να έχουν την ίδια τροχιά, ξέρουμε από τους νόμους του Νεύτωνα, ότι πρέπει να βρίσκονται υπό την επίδραση ακριβώς του ίδιου πεδίου, και την ίδια στιγμή να έχουν ακριβώς τις ίδιες αρχικές (ή συνοριακές) συνθήκες. Δηλαδή, θα πρέπει να έχουν ακριβώς την ίδια μορφή στο χώρο των φάσεων. Όμως είναι προφανές ότι αυτό δε μπορεί να συμβεί: αν έχουν ακριβώς την ίδια τροχιά σημαίνει ότι συμπίπτουν. Στην κλασική φυσική ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ ΑΞΕΔΙΑΚΡΙΤΑ ΣΩΜΑΤΙΑ! Το κάθε σωματίδιο ακολουθεί τη δική του τροχιά, ακόμα και δυο ηλεκτρόνια που είναι βέβαια ακριβώς ίδια, από φυσικής απόψεως είναι κατ' αρχήν διαφορετικά γιατί ακολουθούν διαφορετικές τροχιές, και άρα μπορώ από την τροχιά τους να αποφανθώ ποιο είναι ποιο, να τους βάλω ετικέτες και να τα ξεχωρίζω.

Αντίθετα, κβαντομηχανικά, η κατάσταση δεν είναι πια τροχιά! Είναι μια άλλη οντότητα, η κυματοσυνάρτηση, που συνδέεται με την πυκνότητα πιθανότητας εμφάνισης του σωματίου σε κάποιο χώρο. Άρα, είναι ευνόητο ότι εδώ είναι πιθανό δυο σωματίδια να έχουν ακριβώς την ίδια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, και άρα να ταυτίζονται οι καταστάσεις τους.

Όλα τα ηλεκτρόνια στο σύμπαν –απ’ όσο ξέρουμε!- είναι αξεδιάκριτα, έχουν ίδιο φορτίο, μάζα, σπιν κλπ. Άρα, αν έχω ένα πολυηλεκτρονιακό σύστημα, και αποφασίσω να ανταλλάξω δυο από τα ηλεκτρόνιά του, τότε αν ξανακοιτάξω το σύστημα, προφανώς η φυσική δεν πρέπει να έχει αλλάξει, αφού τα δυο ηλεκτρόνια που ανταλλάχθηκαν δε μπορούν να ξεχωρίσουν μεταξύ τους (επαναλαμβάνω ότι κλασικά, ξεχωρίζουν, κοιτώντας την τροχιά τους, την ιστορία τους, η κβαντομηχανική δεν έχει τροχιές για να τα ξεχωρίσω μέσω αυτών). Άρα, η ανταλλαγή είναι μια συμμετρία του συστήματος!

Τώρα, ας θεωρήσουμε δυο πανομοιότυπα σωματίδια. Η συνολική τους κατάσταση, όποια κι αν είναι, θα σχετίζεται και με τα δυο, οπότε την αναφέρω ως $\psi(1,2)$. Έστω ο τελεστής $\mathbf{P}$ που ανταλλάζει τα δυο σωματίδια μεταξύ τους. Τότε είναι εμφανές ότι $\mathbf{P}\psi(1,2)=\psi(2,1)$, αλλά και ότι $\mathbf{P}^2\psi(1,2)=\psi(1,2)$, διότι δυο ανταλλαγές των 1,2 προφανώς επαναφέρουν το σύστημα στην αρχική κατάσταση. Επίσης, η εξίσωση ιδιοτιμών του $\mathbf{P}$ είναι $\mathbf{P}\psi(1,2)=\rho\psi(1,2)$, και άρα $\mathbf{P}^2\psi(1,2)=\rho^2\psi(1,2)$, άρα $\rho^2=1$, άρα $\rho=1$ ή -1 . Γι’ αυτό υπό την ανταλλαγή δυο πανομοιότυπων σωματίων η συνολική κυματοσυνάρτηση είτε παραμένει ίδια ($\rho=1$, συμμετρική) είτε γίνεται αντίθετη ($\rho=-1$, αντισυμμετρική). Στην περίπτωση $\rho=1$ λέμε ότι τα σωματίδια είναι μποζόνια, και υπακούν στατιστική Bose- Einstein. Στην περίπτωση $\rho=-1$ λέμε ότι τα σωματίδια είναι φερμιόνια, και υπακούν στατιστική Fermi-Dirac. Για δυο φερμιόνια, θεωρώ ότι έχουν ακριβώς την ίδια κατάσταση δηλαδή $\psi(1)=\psi(2)$, και η συνολική κατάσταση, λαμβάνοντας υπ’ όψιν τον πιθανοτικό χαρακτήρα των ψ , είναι $\psi(1,2)=\psi(1)\psi(2)=\psi^2$. Δρώντας με τον τελεστή ανταλλαγής των δύο, όπως είπαμε για φερμιόνια δίνει την ίδια ακριβώς κυματοσυνάρτηση πολλαπλασιασμένη με ένα μείον, δηλαδή $\mathbf{P}\psi(1,2)=-\psi(1,2)$, ή $\psi(2,1)=-\psi(1,2)$, ή $\psi(1)\psi(2)=-\psi(2)\psi(1)$ ή $\psi^2=-\psi^2$, που οδηγεί στο ότι $\psi=0$ δηλαδή η κυματοσυνάρτησή τους είναι 0, τετριμμένο (φυσικά η ψ εν γένει μπορεί να έχει τμήματα σε διάφορους χώρους, πχ στο χώρο των θέσεων αλλά και στο χώρο των σπιν, και τότε $\psi=\sum_i \psi_i(1)\psi_i(2)$, το i τρέχει σε όλους τους χώρους, και το να είναι $\psi(1)=\psi(2)$ σημαίνει $\psi_i(1)=\psi_i(2)$ για κάθε i , και άρα το συμπέρασμα επεκτείνεται κι εδώ). Αυτή είναι και η Απαγορευτική Αρχή του Pauli, που δείχνει ότι δυο φερμιόνια –προς το παρόν ως φερμιόνια κατανοούνται τα σωματίδια με αντισυμμετρική υπό την ανταλλαγή τους κυματοσυνάρτηση- δε μπορούν να βρεθούν ακριβώς στην ίδια κατάσταση. Αν έκανα το ίδιο για μποζόνια, θα έβγαινε $\psi(1)\psi(2)=\psi(1)\psi(2)$, που προφανώς ισχύει πάντα, δεν απαγορεύει $\psi(1)=\psi(2)$.

Ακόμα δε μίλησα για το τι σχέση έχει αυτό με το σπιν, αλλά προς το παρόν θα το αφήσω για να επισημάνω κάτι σχετικά με την ανταλλαγή των σωματίων, και να αποκαλύψω που «έκλεψε» το τελευταίο αξίωμα της κβαντομηχανικής.

Στην προηγούμενη παράγραφο απέδειξα ότι η κυματοσυνάρτηση θα είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική υπό την ανταλλαγή των δυο πανομοιότυπων σωματίων. Εκεί που έκλεψα είναι ότι πήρα ως δεδομένο χωρίς να το πω, ότι η ανταλλαγή δυο σωματιδίων μπορεί να γίνει. Εντάξει, για έναν κόσμο όπως ο δικός μας, τριδιάστατος κόσμος είναι προφανές ότι δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα στο να

ανταλλάξω δυο σωμάτια, το μόνο που έχω να κάνω είναι να τα βάλω να κάνουν μια οποιαδήποτε διαδρομή που θα τα φέρει το ένα στη θέση του άλλου. Το ίδιο μπορώ να κάνω φυσικά σε κόσμο που ο αριθμός των διαστάσεων του είναι μεγαλύτερος από τρία. Οι τροχιές είναι ελεύθερες, και τα επιχειρήματά μου είναι σωστά.

Ωστόσο, τα πράγματα δεν είναι έτσι σε έναν κόσμο μιας διάστασης! Πράγματι, στον 1D κόσμο, ανταλλαγή δυο σωματίων δε μπορεί να συμβεί, παρά μόνο αν το ένα σωματίο διεισδύσει μέσα στο άλλο, αφού δεν έχει κάθετη διάσταση, από την οποία μπορεί να περάσει. Άρα, αν μετά την ανταλλαγή βρω ότι η κυματοσυνάρτηση κατέληξε να αλλάξει πρόσημο, το να αποφανθούμε ότι είχα μη αλληλοεπιδρώντα φερμιόνια μπορεί να είναι βεβιασμένο, γιατί δε μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι αυτό το -1 δεν προήλθε από την αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματίων που εισήχθη όταν το ένα διαπερνούσε το άλλο, και άρα ίσως να ήταν αλληλοεπιδρώντα μποζόνια. Παρ' όλα τη φαινομενική αβεβαιότητα, μια βαθύτερη μελέτη της περίπτωσης 1D οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι ακόμη κι εδώ στέκει ο χαρακτηρισμός φερμιονίου ή μποζονίου, υπό συνθήκες κάθε φορά.

Τώρα, για το 2D κόσμο ανάμεσα στις δυο περιπτώσεις, παρόλο που εκ πρώτης όψεως η ανταλλαγή μπορεί να γίνει χωρίς διείσδυση του ενός στο άλλο όπως και στο 3D, εμφανίζεται μια εξαιρετικά ευρεία ποικιλία στατιστικών τύπων στην ανταλλαγή των σωματίων. Συγκεκριμένα, μια μελέτη της υπόθεσης αποκαλύπτει ότι η ανταλλαγή δυο πανομοιότυπων σωματίων δεν οδηγεί απαραίτητα σε συμμετρική ή αντισυμμετρική κυματοσυνάρτηση, αλλά πολλαπλασιάζει την κυματοσυνάρτηση με έναν μη τετριμμένο παράγοντα φάσης $e^{i\theta}$ (φυσικά δε θα μπορούσε παρά να είναι μια φάση και όχι μια άλλη ποσότητα διαφορετικού μέτρου, γιατί τότε θα σήμαινε ότι η ανταλλαγή των πανομοιότυπων σωματίων άλλαξε την πυκνότητα πιθανότητας $|\psi|^2$, κάτι που δε στέκει απλά με ανταλλαγή, ενώ δεν πρέπει να αποκλειστεί και το να είναι ένας μοναδιακός πίνακας). Τέτοια σωματίδια, ξεκάθαρα δεν είναι ούτε φερμιόνια ούτε μποζόνια, και για να χαρακτηρίζεται το ότι η γωνία θ μπορεί να είναι οποιαδήποτε, αποκαλούνται ανυόνια (από το any).

Πριν προχωρήσω στο γιατί να ασχοληθεί κανείς με αυτά τα παράξενα σωματίδια, καθώς και στο γιατί τελικά η στατιστική σχετίζεται με το σπιν, η πιο προφανής απορία είναι αν υπάρχουν! Πράγματι, αφού δεν έχει βρεθεί σύμπαν 2D, μπορώ να ξεγελάσω το 3D κόσμο, τα σωμάτια του 3D κόσμου, και να τα κάνω να συμπεριφερθούν ως σωμάτια διδιάστατου κόσμου, έτσι ώστε να φτιάξω ένα ανυονικό σύστημα; Μια αφελής, πρώτη σκέψη είναι η εξής: αν πάρω ένα σύνθετο ηλεκτρονικό αέριο, και το βάλω σε δυο πάρα πολύ ισχυρά, ίσα και αντίθετα μαγνητικά πεδία, τότε προφανώς μπορώ να περιορίσω δραματικά την κίνηση των ηλεκτρονίων στον άξονα που είναι παράλληλος στη διεύθυνση του πεδίου, και το 3D αέριο να γίνει σαν 2D αέριο. Αν επίσης κατεβάσω πάρα πολύ και τη θερμοκρασία, τότε περιορίζω και τις θερμικές κινήσεις, και με συνδυασμό των δυο διαδικασιών μπορώ, τουλάχιστον προσεγγιστικά, να «μιμηθώ» ένα διδιάστατο κόσμο, αφού πια τα ηλεκτρόνια έχουν κολλήσει σε ένα επίπεδο. Το ίδιο μπορώ να κάνω αποτελεσματικότερα παγιδεύοντας τα ηλεκτρόνια σε ένα λεπτό στρώμα ανάμεσα σε υπεραγωγούς. Αν λοιπόν τότε αποπειραθώ να ανταλλάξω δυο ηλεκτρόνια, θα συμπεριφερθούν αυτά ως ανυόνια, δηλαδή η συνολική κυματοσυνάρτηση θα πάρει μια τυχούσα φάση $e^{i\theta}$; Η απάντηση είναι βέβαια όχι: έχει ήδη επισημανθεί ότι η στατιστική των σωματίων σχετίζεται με την τιμή του σπιν τους, κι αυτό όσο και να περιορίσω την κίνηση των σωματίων

παραμένει μια εγγενής τους ιδιότητα, δε μπορεί να αλλάξει. Τα ηλεκτρόνια θα είναι και πάλι φερμιόνια, και ως τέτοια θα συμπεριφέρονται, γιατί είναι χαραγμένο στην ταυτότητά τους το ότι ζουν σε τριδιάστατο κόσμο.

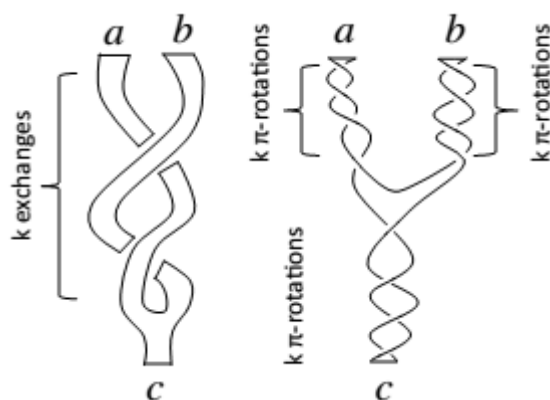
Όμως, ας δούμε το εξής: έστω ότι καταφέραμε και παγιδέψαμε τα ηλεκτρόνια, και φτιάξαμε ένα διδιάστατο κβαντικό αέριο. Τότε μια λεπτομερής ανάλυση δείχνει, ότι σε πολύ μικρές ενέργειες (χαμηλές θερμοκρασίες) εμφανίζεται μια διεμπλεγμένη, συνολική θεμελιώδης κατάσταση (θεμελιώδης λέγεται η ιδιοκατάσταση της Χαμιλτονιανής που απ' όλες αποδίδει τη χαμηλότερη ενέργεια) η οποία διαχωρίζεται ενεργειακά από τις καταστάσεις ανώτερης ενέργειας από μη μηδενικό ενεργειακό χάσμα. Τώρα ας θυμηθούμε το τέχνασμα της κβαντικής θεωρίας πεδίου, το οποίο χρησιμοποιείται κατά κόρον σε όλες τις σύγχρονες κβαντικές θεωρίες: την αντιμετώπιση των ενεργειακών διεγέρσεων και των πεδίων ως σωμάτια-κβάντα (πχ το κβάντο του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που αντιμετωπίζεται ως το σωμάτιο φωτόνιο, ή το κβάντο των πλεγματικών ταλαντώσεων που αντιμετωπίζεται ως το σωμάτιο φωνόνιο). Εδώ λοιπόν, αν θεωρήσω τις χαμηλής ενέργειας διεγέρσεις των σωματιδίων ως σωματίδια, η μελέτη δείχνει ότι αυτά δεν έχουν τους κβαντικούς αριθμούς των ηλεκτρονίων, δεν έχουν καν φορτία ακέραια πολλαπλάσια του φορτίου του ηλεκτρονίου, αλλά κλασματικά! Αυτά τα σωματίδια, μπορούν πράγματι να θεωρηθούν ως σωματίδια που ζουν σε διδιάστατο κόσμο, διότι προέρχονται από το κομμάτι της κυματοσυνάρτησης που ζει στο επίπεδο, και άρα είναι απογυμνωμένο από τον κβαντικό αριθμό που σχετίζεται με την ύπαρξη της τρίτης διάστασης (θυμηθείτε το πώς η μέθοδος χωριζομένων μεταβλητών χωρίζει την κυματοσυνάρτηση σε κομμάτια που το καθένα δείχνει την εξάρτηση από μια συντεταγμένη). Στη συνέχεια, όταν αναφερθούμε στο κλασματικό φαινόμενο Hall, όλα αυτά θα αποσαφηνιστούν πλήρως, σε περίπτωση που προς το παρόν δείχνουν μυστηριώδη.

Τώρα, πριν εξηγήσουμε για ποιο λόγο μας ενδιαφέρουν τα ανυόνια και γιατί είναι όντως κάτι παραπάνω απ' αυτό που φαίνεται, δηλαδή μια νοητική άσκηση τραβηγμένη μάλλον ωμά για να βγάλει αυτό που ψάχνουμε, το τελευταίο συστατικό, το πώς η στατιστική σχετίζεται με το βαθμό ελευθερίας που ονομάζεται σπιν.

Θεωρώ τη γενικότερη περίπτωση, ότι δηλαδή έχω δυο ανυόνια a, b , το αποτέλεσμα της σύντηξης των οποίων είναι ένα άλλο ανυόνιο, c . Εδώ ο όρος «σύντηξη» δεν υπονοεί απαραίτητα το μηχανισμό όπως το μελετά η πυρηνική φυσική όπου τα σωμάτια συντήκονται σε ένα, αλλά σημαίνει γενικότερα τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζεται το σύμπλεγμα των a, b ως συνολικό σωμάτιο, όπως για παράδειγμα δυο ηλεκτρόνια σε έναν υπεραγωγό σχηματίζουν ένα ζεύγος Cooper, αλλά βέβαια δε συντήκονται σε ένα σώμα. Ανταλλαγή των a, b δε θα μπορούσε βέβαια να αλλάξει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, αφού η συνολική εικόνα είναι και πάλι η ίδια, αλλά θα μπορούσε εν γένει να επιφέρει έναν παράγοντα φάσης στη συνολική κυματοσυνάρτηση, τον οποίο ονομάζω R_{ab}^c . Το γιατί δεν τον γράφω απλά ως μια φάση αλλά σε μια τανυστική μορφή θα εξηγηθεί αργότερα.

Τώρα, ως επέκταση του όρου «κοσμική γραμμή», που περιγράφει ένα σωμάτιο στο χωρόχρονο, επειδή εδώ ενδιαφερόμαστε για τον προσανατολισμό του σωματίου λόγω του ότι μπαίνει στο παιχνίδι το σπιν, εισάγω μια επέκταση του όρου της κοσμικής γραμμής, την κοσμική κορδέλα. Η κοσμική κορδέλα είναι μια κοσμική γραμμή αλλά με πάχος, όπου οι δυο πλευρές της κορδέλας δεν ταυτίζονται, έτσι ώστε

να φαίνεται ο προσανατολισμός του σπιν. Αυτή η εικόνα εισάγεται κυρίως για να μας επιτρέψει να εντοπίσουμε πέρα από τυχόν ανταλλαγές σωματιδίων και ιδιοπεριστροφές τους.



Όπου οι κοσμικές γραμμές των a , b , c είναι πια πεπλατυσμένες κοσμικές κορδέλες, ενώ απεικονίζουμε το πώς τα a , b συντήκονται για να δώσουν το c . Δεξιά παρουσιάζουμε σχηματικά το επιχείρημα που ακολουθεί.

Έστω τώρα ότι ανταλλάζω k φορές τα δυο ανυόνια, με αντιρολογιακή φορά, αντιρολογιακή εννοώ αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Τώρα μπορούμε πολύ εύκολα να παρατηρήσουμε το εξής: αν υποθέσουμε ότι ανταλλάζουμε τα a, b k φορές ρολογιακά (σύμφωνα με τη φορά των δεικτών του ρολογιού), τότε το αποτέλεσμα της σύντηξης c έχει περιστραφεί k φορές κατά π . Πράγματι, κάθε ανταλλαγή των δυο σωματιδίων είναι ισοδύναμη με το να περιφέρω το ένα σωματίο γύρω από το άλλο κατά μια γωνία π και στη συνέχεια να μετακινήσω τα δυο σωματίδια προς τα πίσω ώστε να έρθουν το ένα στην αρχική θέση του άλλου, με την τελευταία μετακίνηση να μην παίζει όμως κανένα ρόλο στην ανταλλαγή. Είναι ευνόητο ότι η περιφορά του ενός γύρω από το άλλο κατά π είναι απολύτως ισοδύναμη με την ιδιοπεριστροφή του συνολικού συστήματος κατά π . Όμως οι δυο διαδικασίες δεν είναι ισοδύναμες, διότι δεν πρέπει να ξεχάσουμε ότι το c έχει εσωτερική δομή. Πράγματι, μια ιδιοπεριστροφή του c κατά π θα οδηγήσει σε περιστροφή των συστατικών του κατά π , κάτι που εδώ δε συνέβη, τα a, b απλώς ανταλλάχθηκαν. Έτσι, για να φανεί αυτό, πρέπει να ιδιοπεριστρέψω τα a, b κατά π , αλλά με την αντίθετη φορά για να αναιρέσω την επιπλέον στροφή.

Έτσι, με τη βοήθεια των κοσμικών κορδέλων που μας επιτρέπουν να εντοπίσουμε και τον προσανατολισμό των σωματιδίων, δείξαμε με πολύ απλά επιχειρήματα ότι k ρολογιακές ανταλλαγές των a, b είναι ισοδύναμες με k ρολογιακές ιδιοπεριστροφές του αποτελέσματος της σύντηξής τους c κατά γωνία π , και k αντιρολογιακές ιδιοπεριστροφές των a, b κατά π . Τα επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε ήταν στην πραγματικότητα τοπολογικά, κάτι που αποτελεί και την καρδιά του ζητήματος, και το λόγο που εξετάζουμε τα ανυόνια. Το τι ακριβώς σημαίνει «τοπολογικά» ακολουθεί παρακάτω. Για να αποφύγουμε τυχόν ασάφειες ή παρανοήσεις, τονίζουμε το ότι η ισοδυναμία των δυο διαδικασιών που δείξαμε σημαίνει ότι η μια διαδικασία μπορεί να μετασχηματιστεί με συνεχή τρόπο στην άλλη.

Αυτή η ισοδυναμία επιβάλλει τα πλάτη των δυο διαδικασιών να είναι τα ίδια. Την ίδια στιγμή, ενθυμούμενοι και τον κανόνα του δεξιού χεριού για τις στροφορμές, η ρολογιακή ιδιοπεριστροφή ενός αντικειμένου κατά ϕ , έχει ως αποτέλεσμα να πολλαπλασιάζεται η κυματοσυνάρτησή του με μια φάση $e^{-i\phi s}$, s το σπιν του σωματιδίου, το οποίο οφείλεται στο ότι η στροφορμή γεννάει στροφές στο χώρο, και αγνοώ την τροχιακή στροφορμή γιατί πουθενά δεν αναφέρθηκε ότι έχει τέτοια, ενώ σπιν σίγουρα έχει. Άρα, σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν παραπάνω για την ισοδυναμία των δυο διαδικασιών, $(R_{ab}^c)^k = e^{ik s_a} e^{ik s_b} e^{-ik s_c}$, s_a, s_b, s_c τα σπιν των a, b, c . Θεωρώ τώρα την περίπτωση της μιας ανταλλαγής, $k=1$, και ότι τα a, b είναι το ένα το αντισωματίο του άλλου, δηλαδή $s_a = s_b = s$, και ότι το μοναδικό κανάλι σύντηξής τους είναι το κενό, που φυσικά δεν έχει σπιν, $s_c=0$. Έτσι, $R_{ab}^c = e^{2i\pi s}$.

Τώρα ας θεωρήσουμε την εξής διαδικασία: έστω ότι δημιουργούνται την ίδια στιγμή δυο ζεύγη ανυονίου-αντιανυονίου από το κενό, τα δυο ανυόνια, ένα από κάθε ζεύγος, ανταλλάσσονται αντιρολογιακά και στη συνέχεια εξαυλώνονται στο κενό, το καθένα με το άλλο αντιανυόνιο απ' αυτό με το οποίο δημιουργήθηκε. Θεωρώντας το σχήμα της διαδικασίας στο χωρόχρονο με τις κοσμικές γραμμές κατά τα γνωστά από τα διαγράμματα Φάινμαν, αν περιστρέψουμε το σύστημα κατά 90° βλέπουμε μια νέα διαδικασία όπου: δημιουργείται ζεύγος ανυονίου, αντιανυονίου, τα δυο τους ανταλλάσσονται ρολογιακά (φαίνεται από το ότι το βέλος που είναι μπροστά έρχεται από δεξιά αυτή τη φορά, βλ. σχήμα) και στη συνέχεια εξαυλώνονται εκ νέου. Άρα οι δυο αυτές διαδικασίες έχουν τα ίδια πλάτη, αφού η μια προέκυψε με συνεχή μετασχηματισμό της άλλης στο χωρόχρονο.

$$R_{aa} = \text{diagram 1} = R_{a\bar{a}}^{-1} = \text{diagram 2} = R_{\bar{a}\bar{a}} = \text{diagram 3}$$

Όπου δείχνουμε σχηματικά την ισοδυναμία των διαδικασιών που περιγράφονται στο κείμενο. Το βέλος του χρόνου δείχνει προς τα πάνω.

Άρα $R_{aa} = R_{aa}^{-1}$, το -1 στον εκθέτη για να υποδείξει ότι η ανταλλαγή ήταν στη δεύτερη περίπτωση αντιρολογιακή, δηλαδή με αντίθετη γωνία από την πρώτη.

Άρα η ανταλλαγή δυο ανυονίων a, a οδηγεί σε $R_{aa} = e^{-i2\pi s}$, που για μποζόνια (s ακέραιος) δίνει 1, και για φερμιόνια (s ημιακέραιο) δίνει -1.

Άρα, δείξαμε το πώς η στατιστική είναι σε σύνδεση με το σπιν του σωματίου.

Ιδιαίτερα ενδιαφέρον είναι το εξής σημείο: η στατιστική φαίνεται να μην έχει κάποια ιδιαίτερη σχέση με το σε τι ακριβώς χώρο βρισκόμαστε. Δε χρησιμοποίησα πουθενά τη μετρική, που σημαίνει ότι δε χρειάστηκε να υπολογίσω κανένα μήκος! Το μόνο κρίσιμο συστατικό της μελέτης, ήταν ότι υπάρχουν σωματίδια και το καθένα έχει κάποιο αντισωματίο, με το οποίο μπορεί να εξαυλώνεται στο κενό, και να δημιουργείται απ' αυτό. Ωστόσο, το παραπάνω δεν είναι απόδειξη του θεωρήματος σπιν –στατιστικής: είναι στην καλύτερη περίπτωση μια ένδειξη του τι πρέπει να αναμένουμε από φερμιόνια και μποζόνια. Μια πραγματική απόδειξη –δε θα αναλωθούμε όμως εδώ σε αυτή– μπορεί να γίνει μόνο στα πλαίσια σχετικιστικών θεωριών, και ο λόγος είναι ότι μόνο σχετικιστικές θεωρίες με μια χρονική διάσταση

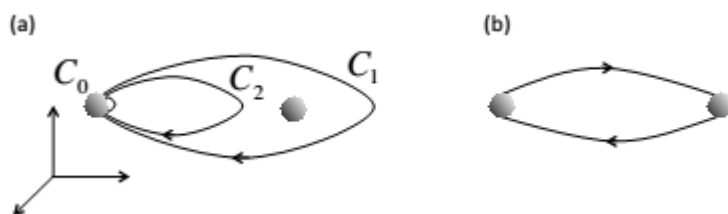
διαθέτουν ένα σημείο –κλειδί για την αποδεικτική πορεία, την αρχή της μικροαιτιότητας, που λέει ότι χωρικά διαχωρισμένα πεδία μετατίθενται ή αντιμετατίθενται, το οποίο μπορεί να ερμηνευθεί ότι δεν υπάρχουν τοπικά πεδία που μόνο δημιουργούν ή μόνο καταστρέφουν σωματίδια. Επίσης, λίγη προσοχή στη διάσταση που έχει η έννοια του κενού εδώ: σημαίνει μια οντότητα που όλοι οι κβαντικοί της αριθμοί είναι τετριμμένοι, ώστε να στέκει η σύντηξη σωματίων-αντισωματίων σε αυτό.

Τώρα, ο λόγος που έγραψα τη φάση ανταλλαγής υπό μορφή τανυστή: Πολύ γρήγορα η ενασχόληση με τα ανυόνια, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ανταλλαγή δυο εξ αυτών, δεν είναι απαραίτητο ότι διατηρεί το αποτέλεσμα της σύντηξης. Ήτοι, η σειρά των a, b έχει σημασία εν γένει για το ποιο είναι το αποτέλεσμα της σύντηξης c , οπότε το R_{ab}^c έχει τανυστικό χαρακτήρα. Μάλιστα, επειδή η μεταθετικότητα των ανυονίων δεν ισχύει πάντα, αν μια ομάδα ανυονίων έχουν την ιδιότητα της μεταθετικότητας, τότε δανειζόμενοι την ορολογία από τις ομάδες που τα στοιχεία τους μετατίθενται, αποκαλούμε τα αντίστοιχα ανυόνια Αβελιανά, ενώ σε αντίθετη περίπτωση τα αποκαλούμε μη Αβελιανά. Προφανώς στα παραπάνω ασχοληθήκαμε μόνο με Αβελιανά ανυόνια.

Κλείνοντας το κεφάλαιο σπιν-στατιστικής, δεν έχει γίνει ακόμα απολύτως σαφές το γιατί τα ανυόνια ζουν αποκλειστικά στο 2D κόσμος, τι απαγορεύει ακριβώς από τον τριδιάστατο κόσμο μας να φιλοξενήσει τέτοιου είδους σωματίδια, παρά είναι τόσο περιορισμένος σε μποζόνια και φερμιόνια; Μια νύξη έχει ήδη γίνει παραπάνω, όπου έδειξα ότι $\rho=1$ ή $\rho=-1$ για τον τελεστή ανταλλαγής, ωστόσο και στο 2D μοιάζουν να μπορούν να γίνουν αυτές οι ανταλλαγές ακριβώς όπως γίνονται και στο 3D. Θα εξηγήσω πού ακριβώς διαφέρουν οι δυο περιπτώσεις, με την εξήγηση να αποτελεί μια πρώτης τάξεως εισαγωγή στη σπουδαία έννοια της τοπολογίας.

Έστω ότι στο γνωστό 3D κόσμο έχουμε δυο πανομοιότυπα σωματίδια, και το ένα κάνει μια κλειστή διαδρομή Γ_1 που το επαναφέρει στην αρχική του θέση, με το βρόχο της διαδρομής αυτής να περικλείει το άλλο σωματίδιο, και τη διαδρομή να γίνεται αντιρολογιακά. Θέλω να εξετάσω τη στατιστική των δυο αυτών σωματίων, η οποία δε μπορεί να εξαρτάται από λεπτομέρειες όπως η αλληλεπίδραση των σωματίων μεταξύ τους ή το ακριβές σχήμα της διαδρομής. Αυτό σημαίνει ότι μπορώ να αναμορφώσω –να ανασχηματίσω ομογενώς– τη διαδρομή Γ_1 στη διαδρομή Γ_2 , ο βρόχος της οποίας δεν περικλείει το δεύτερο σωματίδιο. Με τον όρο ομογενής ανασχηματισμός, εννοώ ότι μπορώ να το καταφέρω με τοπικούς χειρισμούς (αλλάζοντας τη διαδρομή γύρω από ένα σημείο κάθε φορά) και χωρίς να κόψω ή να αλλάξω δραστικά με οποιοδήποτε τρόπο τη διαδρομή. Αυτό μπορεί να γίνει στο 3D διότι ο βρόχος μπορεί να «σηκωθεί» από το επίπεδο απεικόνισης στο σχήμα, και έτσι να παρακάμψει το δεύτερο σωματίδιο. Με άλλα λόγια οι διαδρομές Γ_1, Γ_2 είναι τοπολογικά ισοδύναμες (στον όρο «τοπολογικά» περικλείεται η έννοια της μη-δραστικής αναμόρφωσης των διαδρομών), οπότε η κυματοσυνάρτηση που θα προκύψει μετά την πραγματοποίησή τους είναι η ίδια και για τις δύο. Με τη σειρά της όμως η Γ_2 είναι τοπολογικά ισοδύναμη με τον τετριμμένο βρόχο, αφού μπορώ να τον εξαντλήσω πάνω στο ίδιο το σωματίδιο, ο οποίος τετριμμένος βρόχος προφανώς δεν έχει καμία απολύτως επιρροή στην κυματοσυνάρτηση. Άρα $\psi_{\text{αρχ}} = \psi(\Gamma_1) = \psi(\Gamma_2)$. Τώρα παρατηρούμε ότι η Γ_1 ισοδυναμεί τοπολογικά με δυο διαδοχικές ανταλλαγές σωματίων. Άρα, αν θεωρήσω ότι κάθε ανταλλαγή επιφέρει έναν παράγοντα φάσης

$e^{i2\pi s}$ στην κυματοσυνάρτηση, είναι προφανές ότι οι δυο ανταλλαγές επιφέρουν παράγοντα $e^{4i\pi s}$, δηλαδή $\psi(\Gamma_1)=e^{4i\pi s}\psi_{\text{αρχ}}$, και αφού $\psi(\Gamma_1)=\psi_{\text{αρχ}}$, $e^{4i\pi s}=1$, και άρα $4\pi s=2\pi n$, n ακέραιος, ή $s=n/2$ που οδηγεί σε ακέραιες ή ημιακέραιες τιμές του σπιν. Αυτός είναι ο λόγος που στον 3D κόσμο συναντώνται μόνο φερμιόνια ή μποζόνια. Εξυπακούεται ότι αν είχα επιλέξει ρολογιακή ανταλλαγή, θα έβγαине $s=-n/2$, που οδηγεί βέβαια ακριβώς στο ίδιο συμπέρασμα για n ακέραιο.



Όπου (α) ένα σωματίο χαράζει ρολογιακά κλειστό βρόχο γύρω από ένα άλλο (στο κείμενο οι διαδρομές καλούνται Γ_1, Γ_2 , στο σχήμα συμβολίζονται C_1, C_2 αντίστοιχα, και C_0 ο τετριμμένος βρόχος) και (β) τα ίδια δυο σωματίδια ανταλλάσσονται ρολογιακά μεταξύ τους.

Τώρα, με αυτή την κατασκευή θα πρέπει να είναι σαφές για ποιο λόγο τα ανυόνια με τις πλούσιες στατιστικές συμπεριφορές εμφανίζονται στο 2D κόσμο. Αν θεωρήσουμε το ίδιο ακριβώς νοητό πείραμα αλλά σε 2D κόσμο, είναι προφανές το πού κολλάει η διαδικασία: στο σημείο που θα προσπαθήσει κανείς να ανασχηματίσει το βρόχο Γ_1 στο Γ_2 (ο οποίος παραμένει ισοδύναμος με τον τετριμμένο) θα δει ότι αυτό είναι αδύνατο να γίνει τοπολογικά, διότι δεν υπάρχει πρόσβαση στην έξτρα διάσταση στην οποία θα σηκώναμε το βρόχο για να αποφύγουμε το δεύτερο σωματίο. Επομένως, θα πρέπει, στην προσπάθειά μας, να κόψουμε το βρόχο ώστε να περάσει το δεύτερο σωματίο έξω απ' αυτόν, και μετά να τον ξανακολλήσουμε. Αυτή διαδικασία είναι που καταστρέφει την τοπολογία, και άρα οι δυο κυματοσυναρτήσεις για την εξέλιξη στους Γ_1, Γ_2 δεν είναι πια ισοδύναμες. Αυτός είναι ο λόγος που η ανταλλαγή μπορεί να εισάγει οποιοδήποτε παράγοντα φάσης. Για την ακρίβεια μπορεί να μην είναι καν παράγοντας φάσης, αλλά στη γενικότερη περίπτωση ένας μοναδιακός τελεστής (τα μη Αβελιανά ανυόνια που αναφέρθηκαν πριν).

Παρά τη φαινομενική αβεβαιότητα στην ανταλλαγή των ανυονίων, πρέπει να τονίσουμε ότι για την ανταλλαγή δυο συγκεκριμένων ανυονίων, ο παράγοντας φάσης ή ο μοναδιακός τελεστής θα είναι πάντα ο ίδιος, και άρα η εξέλιξη της κατάστασης υπό την ανταλλαγή χαρακτηρίζει το είδος των ανυονίων που ανταλλάχθηκαν.

Επίσης, στην περίπτωση των μη Αβελιανών ανυονίων όπου η εξέλιξη περιγράφεται από πίνακα, επειδή αυτός ο πίνακας είναι μοναδιακός, η κυματοσυνάρτηση που περιγράφει την κατάσταση των ανυονίων ανήκει σε έναν εκφυλισμένο υπόχωρο καταστάσεων, με την ανταλλαγή να τη μετασχηματίζει σε μια άλλη κατάσταση αυτού του υπόχωρου, χωρίς βέβαια να αλλάζει η ενέργεια, αφού οι καταστάσεις είναι εκφυλισμένες. Μια σπουδαία λεπτομέρεια για τα ανυόνια αυτά είναι ότι για να είναι η στατιστική εξέλιξη σε συμφωνία με τη συμμετρία ανταλλαγής, ώστε η φυσική μετά την ανταλλαγή δυο πανομοιότυπων μη Αβελιανών ανυονίων να μην αλλάζει, είναι οι εκφυλισμένες καταστάσεις που αναφέραμε πριν να είναι αξεδιάκριτες παρατηρώντας το ένα ανυόνιο μόνο, ή αλλιώς με τοπικές μετρήσεις! Ο

μόνος τρόπος να ξεχωρίσουν αυτές οι καταστάσεις μεταξύ τους, και άρα να εντοπιστεί η ακριβής στατιστική είναι να κάνω συνολική μέτρηση του αποτελέσματος της σύντηξης των δύο, δηλαδή να τα φέρω κοντά. Αυτός είναι και ο λόγος που τα ανυόνια έχουν τόσο ενδιαφέρον για τη θεωρία της πληροφορίας, το σύστημα των μη Αβελιανών ανυονίων είναι προστατευμένο από τοπικές παρεμβολές, από την ίδια του τη γέννηση!

3. Ανυόνια και ντόνατς

Τοπολογία είναι ένας κλάδος των μαθηματικών ο οποίος ασχολείται και μελετά τις ιδιότητες ενός χώρου που διατηρούνται υπό συνεχείς ανασχηματισμούς του. Συνεχείς ανασχηματισμοί είναι το τέντωμα, το δίπλωμα, το τσαλάκωμα. Δεν είναι το κόψιμο, ούτε η επικόλληση.

Γι' αυτό στην παραπάνω μελέτη συναντήθηκε τόσες φορές ο συγκεκριμένος όρος: μελετήσαμε τη στατιστική, που ήταν ιδιότητα που διατηρείται υπό συνεχείς ανασχηματισμούς των βρόχων. Διαπιστώθηκε δε, ότι στο 3D χώρο όλοι οι κλειστοί βρόχοι που μπορούμε να στήσουμε, είτε περικλείουν άλλο σωματίο είτε όχι, είναι απολύτως ισοδύναμοι, οπότε η αντίστοιχη μελέτη υπάγεται στον κλάδο της τοπολογίας. Στον 2D χώρο, αντίθετα, δεν είναι όλοι οι βρόχοι ισοδύναμοι: συγκεκριμένα στο νοητό πείραμα που μελετήσαμε εμφανίστηκαν δυο υποκατηγορίες κλειστών βρόχων: εκείνοι που περιείχαν το δεύτερο σωματίο κι εκείνοι που δεν το περιείχαν. Επισημαίνεται ότι ο λόγος της μη ισοδυναμίας ήταν η παρουσία του δεύτερου σωματίου και η ανικανότητα του βρόχου να το διαπεράσει χωρίς να διαλυθεί, ήτοι χωρίς να πάψει το σύστημα να είναι τοπολογικό. Είναι σαν να έχει ο χώρος μια τρύπα, που αντιστοιχεί στο δεύτερο σωματίο, και άρα ο βρόχος, καθότι περιορισμένος σε επίπεδο, δε μπορεί να συσταλεί στον τετριμμένο βρόχο. Η τρύπα - σωματίο υπάρχει βέβαια και στο 3D αλλά είναι μια τρύπα που παρακάμπτεται λόγω της έξτρα διάστασης που μας επιτρέπει να σηκωθούμε από το επίπεδό των δυο σωματίων.

Σημειώνουμε ότι πουθενά δε χρησιμοποιήθηκε κάποιο ακριβές σχήμα για τους βρόχους. Τα συμπεράσματα περί στατιστικής είναι άσχετα με το με ποιον ακριβώς τρόπο ανταλλάχθηκαν τα σωματία, ή ισοδύναμα με το με ποια ακριβώς διαδρομή κλείστηκε το ένα σωματίο μέσα στο βρόχο του άλλου. Στην τοπολογία δεν έχουν σημασία τα ακριβή σχήματα των αντικειμένων, αρκεί το ένα αντικείμενο να μπορεί να ανασχηματιστεί στο άλλο χωρίς ακραία μεταβολή του –να μην το κόψω ούτε να το κολλήσω. Με επίσημους όρους, λέμε ότι δύο τέτοια αντικείμενα είναι ομομορφικά. Έτσι, μια κούπα κι ένα ντόνατ είναι τοπολογικά ακριβώς το ίδιο πράγμα: μπορώ τσαλακώνοντας και απλώνοντας την κούπα να τη μετατρέψω σε ντόνατ, χωρίς ποτέ να κόψω πουθενά ούτε να κολλήσω κάπου αλλού. Οι βρόχοι Γ_1 , Γ_2 στο 3D κόσμο είναι επίσης τοπολογικά ακριβώς το ίδιο πράγμα: μπορώ να μετατρέψω τον έναν στον άλλον χωρίς να κόψω ούτε να κολλήσω. Οι ίδιοι βρόχοι στο 2D δεν είναι ομομορφικοί: για να μετατρέψω τον έναν στον άλλον πρέπει να διαπεράσω το σωματίο –τρύπα και για να γίνει αυτό πρέπει να σκίσω το βρόχο και να τον ξανακολλήσω.

Ο ομομορφισμός είναι η πιο βασική έννοια για να χαρακτηρίσουμε μια τοπολογική ισοδυναμία. Υπάρχει όμως και η ομοτοπική ισοδυναμία. Δε θα την

αναλύσουμε τεχνικά, άλλωστε εδώ απλώς θέλουμε να επισημάνουμε σε αδρές γραμμές κάποια γενικά χαρακτηριστικά της υπόθεσης. Αρκεί να πούμε ότι δυο αντικείμενα είναι ομοτοπικά ισοδύναμα αν προέκυψαν από «συμπίεση» ενός μεγαλύτερου αντικείμενου. Μια τάξη ομοτοπικής ισοδυναμίας μπορεί να εν γένει να περιέχει πολλές τάξεις ομομορφισμών, είναι δηλαδή πιο ευρεία έννοια. Φερ' ειπείν τα γράμματα A, R ανήκουν στην ίδια τάξη ομομορφισμών, είναι ξεκάθαρο ότι μπορώ να ανασχηματίσω συνεχώς το ένα στο άλλο, δε χρειάζεται να κόψω ούτε να κολλήσω κάπου. Αντίστοιχα, τα P, Q κι εκείνα ανήκουν στην ίδια τάξη ομομορφισμού μεταξύ τους, αλλά όχι στην ίδια τάξη ομομορφισμού με τα A, R. Ωστόσο και τα τέσσερα αυτά γράμματα είναι ομοτοπικά ισοδύναμα, διότι μπορώ να συμπίεσω τις δυο ουρές των A, R και τη μια ουρά των P, Q και να μείνει απλώς μια τρύπα, σαν να λέμε το O.

Με πολύ απλά λόγια, όσον αφορά τα γράμματα του αλφαβήτου, το αν ανήκουν στην ίδια τάξη ομομορφισμού κρίνεται από το αν έχουν τόσο ίδιο αριθμό από τρύπες όσο και ίδιο αριθμό από ουρές, ενώ το αν ανήκουν στην ίδια τάξη ομοτοπικής ισοδυναμίας κρίνεται μόνο από το αν έχουν ίδιο αριθμό από τρύπες.

Γενικότερα η τρύπα είναι πολύ σημαντική υπόθεση για την τοπολογία: θα πρέπει να έχει γίνει ξεκάθαρο ήδη από τη μελέτη των ανυονικών βρόχων ότι είναι η οντότητα εκείνη την οποία στην ουσία «κοιτάζει» η τοπολογία, μιας και η ύπαρξη τρυπών είναι ένα πεντακάθαρο εμπόδιο στους συνεχείς ανασχηματισμούς. Μάλιστα είναι τόσο σπουδαία ώστε οι μαθηματικοί της έχουν δώσει βαθυστόχαστη ονομασία, την ονομάζουν γένος. Φυσικά υπάρχει πιο αυστηρός μαθηματικός ορισμός του, αλλά επί της ουσίας γένος μιας προσανατολισμένης επιφάνειας είναι ο αριθμός από τρύπες που έχει. Σε μη προσανατολισμένες επιφάνειες, τα πράγματα είναι λίγο πιο πολύπλοκα, αλλά κι εκεί υπάρχουν οι κατάλληλοι μαθηματικοί ορισμοί, που όμως ξεφεύγουν τεχνικά (πχ η μπουκάλα του Κλάιν, τυπική μη προσανατολισμένη επιφάνεια, έχει γένος 2). Πάντως εδώ θα ασχοληθούμε με προσανατολισμένες επιφάνειες.

4. Στοιχεία κβαντικού hardware

Τα ανυόνια και η μελέτη τους φαίνονται να αποτελούν σίγουρα μια πολύ ενδιαφέρουσα θεωρητική μελέτη, αλλά στην πραγματικότητα τα ενδιαφέροντα τοπολογικά τους χαρακτηριστικά, τα καθιστούν μια θελκτική υπόθεση και για την πραγμάτωση του κβαντικού υπολογισμού!

Δε θα μπω σε πολλές λεπτομέρειες όπως τον τρόπο που θα μπορούσε να κωδικοποιηθεί η πληροφορία σε ένα ανυονικό σύστημα, ή τις κβαντικές πύλες που μπορούν να προσληφθούν για να πραγματώσουν τελικά τον κβαντικό υπολογισμό, αλλά θα επικεντρωθώ σε ένα άλλο πάρα πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό κάθε οντότητας που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για υπολογισμό: την σταθερότητα.

Μπορούμε να δεχτούμε ότι, έτσι όπως φαίνεται να στήνεται το ανυονικό μοντέλο, ανεξαρτήτως των λεπτομερειών του, θα περιλαμβάνει σίγουρα κάποιου είδους ανυονικές διαδρομές. Το θεμελιώδες είναι ότι δεν έχει καμία σημασία το ακριβές σχήμα αυτών των διαδρομών, όπως εξηγήσαμε: το μόνο που πρέπει να προσέξουμε είναι η τοπολογία. Έτσι η μηχανική που θα προσληφθεί για να διαχειριστεί τον υπολογισμό, δε χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή: το μόνο που χρειάζεται είναι να πραγματώσει τα ιδιαίτερα τοπολογικά χαρακτηριστικά, που

τονίσαμε ότι είναι πολύ αδρά, κάτι που είναι σίγουρα οικονομικότερο υλικά και χρονικά, σε σύγκριση με ένα hardware όπου ο μηχανικός πρέπει να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός για να μη χαλάσει ούτε στο ελάχιστο το σύστημα (πχ για ένα σύστημα όπου τα qubit, οι μονάδες κβαντικής πληροφορίας, πραγματώνεται μέσω ηλεκτρονικών σπιν, ο μηχανικός θα πρέπει να περιορίσει δραματικά την παραμικρή αλλαγή θερμοκρασίας, αφού το σύστημα είναι πολύ ευαίσθητο σε θερμικές διακυμάνσεις, για να μη μιλήσω για εξωτερικά μαγνητικά πεδία).

Κάτι άλλο πολύ σπουδαίο, ίσως το πιο ελκυστικό απ' όλα τα χαρακτηριστικά των ανυονίων, είναι η εξαιρετική τους αντίσταση σε σφάλμα κατά τον υπολογισμό, και μάλιστα από την ίδια τους τη φύση. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι κάποιος κωδικοποιεί την πληροφορία στη σύντηξη δυο ανυονίων. Υπενθυμίζουμε ότι σύντηξη δε σημαίνει εδώ μετατροπή των δυο σωματιδίων σε ένα όπως στην πυρηνική, αλλά μάλλον συνολική εικόνα των δυο ανυονίων. Έστω επίσης ότι τα δυο ανυόνια κρατούνται μακριά το ένα από το άλλο. Τότε είναι προφανές ότι οποιαδήποτε τοπική περιβαλλοντική παρεμβολή δε μπορεί να καταστρέψει την πληροφορία, διότι αυτή είναι κωδικοποιημένη μη τοπικά, στο αποτέλεσμα της σύντηξης, το οποίο πρέπει να χειραγωγηθεί συνολικά, κάτι που είναι αδύνατο με τοπικές διαδικασίες όσο τα ανυόνια κρατούνται απομακρυσμένα. Με άλλα λόγια, οι τοπικές διαταραχές της Χαμιλτονιανής δε μπορούν να παραλλάξουν το χώρο σύντηξης, γεγονός το οποίο σχετίζεται εκτός από την τοπολογία και με το πεπερασμένο ενεργειακό χάσμα πάνω από τη θεμελιώδη. Αυτό είναι το εγγενές χαρακτηριστικό των ανυονίων που τα κάνει και τόσο θελκτικά για την πραγμάτωση ανεκτικού σε σφάλματα κβαντικού υπολογισμού, τόσο ανεκτικά όσο ίσως κανένα άλλο κβαντικό σύστημα απ' όσα έχουν προταθεί ως τώρα.

Τα χαρακτηριστικά αυτά των ανυονίων τα κάνουν μια πρώτης τάξεως κβαντική μνήμη, και έχουν προταθεί και μοντέλα που συνδυάζουν ανυόνια με μη τοπολογικές εξελίξεις για να πραγματώσουν κάποιον κβαντικό υπολογισμό, και συγκεκριμένα να φτάσουν στον πολυπόθητο «καθολικό κβαντικό υπολογισμό». Για να εξηγήσουμε το τι ακριβώς σημαίνει, αναφέρουμε κάποιες σημαντικές, απλές ως επί το πλείστο έννοιες της θεωρίας της πληροφορίας, που ενδεχομένως φωτίζουν καλύτερα τη χρησιμότητα τόσο του κβαντικού υπολογιστή συγκριτικά με τον κλασικό, όσο και του ανυονικού hardware σε σχέση με άλλα.

5. Στοιχεία θεωρίας της πληροφορίας

Γενικά, υπολογισμός είναι μια διαδικασία που πραγματοποιείται συνδυάζοντας μια σειρά από απλές λειτουργίες. Η μονάδα πληροφορίας για τον κλασικό υπολογιστή είναι το bit, μια οντότητα που μπορεί να πάρει μια εκ των τιμών 0,1, η οποία τιμή σχετίζεται με την ύπαρξη ή μη ηλεκτρικού ρεύματος. Οποιαδήποτε πληροφορία κωδικοποιείται σε μια αλυσίδα από bits, τα οποία ο κλασικός υπολογιστής διαχειρίζεται –αλλάζει την τιμή τους με συστηματικό, επιλεκτικό τρόπο αναλόγως του υπολογισμού που πρέπει να εκτελεστεί– δρώντας σε αυτά με συγκεκριμένες λογικές πύλες. Για παράδειγμα, ένας υπολογισμός του αθροίσματος δυο αριθμών γίνεται ως εξής: οι δυο αριθμοί κωδικοποιούνται με bits, διάφορες πύλες προσλαμβάνονται οι οποίες κάνουν τους κατάλληλους χειρισμούς στα bits ώστε η

τελική κατάστασή τους να αποδίδει το επιθυμητό αποτέλεσμα, το άθροισμα των δυο αριθμών.

Στο πέρας των χρόνων έχει προταθεί σωρεία αλγορίθμων –έτσι ονομάζονται οι λογικές διαδικασίες, η σειρά βημάτων που οδηγεί στην πραγματοποίηση μιας διαδικασίας- η οποία μπορεί να πραγματώσει σχεδόν οποιονδήποτε υπολογισμό. Άλλα είναι ευνόητο ότι γενικά αυτό δεν αρκεί για να είναι ένα σύστημα χρήσιμο: θα πρέπει αυτός ο υπολογισμός να γίνεται μέσα σε ένα λογικό χρονικό διάστημα, και βέβαια με χρήση όσο το δυνατόν λιγότερων πόρων γίνεται, δηλαδή προσλαμβάνοντας όσο λιγότερες λογικές πύλες γίνεται. Πράγματι, ακόμη κι αν γνωρίζουμε πώς να εκτελέσουμε κατ' αρχήν έναν υπολογισμό, αν αυτό απαιτεί αιώνες –και υπάρχουν τέτοιου είδους υπολογισμοί ακόμη και για τους γρηγορότερους σημερινούς υπολογιστές- ή δισεκατομμύρια λογικές πύλες, τότε είναι τόσο ασύμφορο να τον εκτελέσουμε, ώστε είναι σαν να είναι απραγματοποίητος, όπως θα πρέπει να έχει διαπιστώσει οποιοσδήποτε προσπάθησε να εντοπίσει όλους τους πρώτους αριθμούς μέχρι τον 1943875664652454344456758 –το κόσκινο του Ερατοσθένη είναι αποτελεσματική μέθοδος, αλλά συμφέρει για αριθμούς μέχρι κάποιον αριθμό ψηφίων, για έναν τέτοιο αριθμό είναι σαν να μη το έχουμε, αν δουλεύουμε με χαρτί και μολύβι.

Η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας, της φυσικής, η βελτίωση του βιοτικού επιπέδου, ο εμπορικός ανταγωνισμός, οι συνεχείς νέες κατευθύνσεις διαφόρων ερευνητικών πεδίων και πολλοί ακόμη λόγοι, φέρνουν την ολοένα αυξανόμενη ζήτηση για αύξηση της υπολογιστικής δύναμης των συσκευών. Απληστία, επίδειξη δύναμης, φυσική εξέλιξη ή τυχαίο γεγονός, αυτή η υπόθεση απασχολεί τεράστιο αριθμό πόρων για τη βελτίωση της ταχύτητας και της επεξεργαστικής ισχύος των υπολογιστικών συστημάτων.

Όλα τα σύγχρονα υπολογιστικά συστήματα και μοντέλα, βασίστηκαν στην εξαιρετικά απλή, αλλά συγκλονιστικά βαθυστόχαστη μηχανή Turing. Η μηχανή Turing είναι μια θεωρητική συσκευή επεξεργασίας της πληροφορίας που συγκροτείται από μια σειρά από στοιχειώδεις λογικές πύλες. Το πώς ακριβώς λειτουργεί δε μας απασχολεί εδώ· αναφέρουμε πληροφοριακά ότι αποτελείται από μια ταινία χωρισμένη σε κελιά (σαν ρολό χαρτί υγείας χωρισμένο σε χαρτιά) με κάθε κελί να περιέχει ακριβώς ένα σύμβολο από ένα αλφάβητο, ένα «μάτι –μολύβι» που μπορεί να διαβάζει και να γράφει σύμβολα πάνω στην ταινία και να τη μετακινεί κατά ένα κελί τη φορά, ένα μητρώο καταστάσεων που αποθηκεύεται η κατάσταση της μηχανής, και ένα φύλλο οδηγιών που δίνει τις στοιχειώδεις εντολές του αλγόριθμου (πχ πήγαινε στη θέση 127 κι αν έχει έναν ήλιο τότε γράψε ένα σύννεφο, αν έχει ένα μπαλόνι τότε πήγαινε στη θέση 1112 κι αν εκεί έχει μια νότα, τότε γράψε στη θέση 3 ένα ποδήλατο κλπ, όπου ήλιος, σύννεφο, μπαλόνι, νότα, ποδήλατο είναι γράμματα του αλφαβήτου). Το σπουδαίο με τη μηχανή Turing είναι ότι προσομοιώνει αποτελεσματικά οποιαδήποτε συσκευή μπορεί να υλοποιήσει έναν αλγόριθμο. Όμως, μην ξεχνάμε ότι οποιαδήποτε τεχνική πραγματοποίηση τέτοιων διαδικασιών απαιτεί τη χρήση φυσικών συστημάτων –ο υπολογισμός δεν είναι πια νοητική διαδικασία αλλά φυσική- και άρα οι βασικές αρχές της φυσικής, πχ μη αντιστρεπτότητα, πέρασαν σχεδόν αμέσως στα προγράμματα.

Ο Φάινμαν διαπίστωσε πολλά χρόνια μετά την ανακάλυψη (ή επινόηση;) των μηχανών Turing ότι η χρήση του κλασικού υπολογιστή για προσομοίωση κβαντικών

συστημάτων έχει σχεδόν ανυπέρβλητες τεχνικές δυσκολίες: απαιτεί την προσομοίωση ενός καθαρά και από τη βάση του πιθανοκρατικού συστήματος (βλ. κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης) με ένα ντετερμινιστικό σύστημα! Φυσικά υπάρχουν γνωστές διαδικασίες προσομοίωσης της τυχαιότητας, αλλά στην πραγματικότητα εκεί είναι οι διαδικασίες ψευδοτυχαίες και όχι τυχαίες, κι ενώ τέτοιες προσομοιώσεις αρκούν για την προσομοίωση της ρίψης ενός νομίσματος, δεν αρκούν για ένα κβαντικό σύστημα όπου το αποτέλεσμα είναι αυστηρά τυχαίο. Έτσι προτάθηκε ο κβαντικός υπολογιστής –μια κβαντική μηχανή Turing- που χρησιμοποιεί κβαντικά συστήματα και κβαντικές πύλες, που εκτός του ότι θα μπορούσε να προσομοιώσει ένα κβαντικό σύστημα, σύντομα φάνηκε ότι υπερβαίνει τις δυνάμεις του οποιοδήποτε κλασικού υπολογιστή.

Τι διαφορά έχει τώρα ένα κβαντικό σύστημα από το κλασικό με τα bits: κατ' αρχάς, σε κλασικά συστήματα είναι ευνόητο ότι οι δυο πιθανές τιμές του bit είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες, από την ίδια την κατασκευή τους, αφού το ηλεκτρικό ρεύμα ή υπάρχει ή δεν υπάρχει. Όμως, δεν υπάρχει κανένας καλός λόγος να υποθέτουμε ότι πληροφορία μπορεί να κωδικοποιείται μόνο με ηλεκτρικό ρεύμα: μπορώ να στήσω ένα δυαδικό σύστημα με κάθε οντότητα που παίρνει μία από δύο τιμές, απλώς επιλέχθηκε να δουλεύουμε με ηλεκτρικά ρεύματα για τεχνικούς λόγους. Η κβαντική φυσική με τη σειρά της διαθέτει ακριβώς τέτοια συστήματα που παίρνουν μία από δυο τιμές (πχ σπιν άνω ή κάτω για ένα ηλεκτρόνιο, πόλωση δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη για φωτόνια) αλλά μπορεί εκτός απ' αυτές να πάρουν και οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό τους, με την αντίστοιχη στοιχειώδη μονάδα πληροφορίας να αποκαλείται qubit. Στην κβαντομηχανική υπάρχει και μια ακόμη επιπλέον δυνατότητα χωρίς κανένα απολύτως κλασικό ανάλογο, η δυνατότητα υπέρθεσης καταστάσεων πολλών qubits, η λεγόμενη κβαντική διεμπλοκή ή εναγκαλισμός. Αυτές οι καταστάσεις έχουν πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες, και μπορούν βέβαια κι αυτές να χρησιμοποιηθούν για πραγματοποίηση υπολογισμού.

Τα qubits χειραγωγούνται και διαχειρίζονται από κβαντικές πύλες. Μια κβαντική πύλη περιγράφεται από ένα μοναδιακό τελεστή και επιτελεί μια συγκεκριμένη λειτουργία (πχ μια κβαντική πύλη σε ένα σύστημα που κωδικοποιείται από σπιν είναι ο πίνακας σ_x του Pauli, ο οποίος στη βάση των δυο ιδιοκαταστάσεων του σ_z ανταλλάζει τις δυο συντεταγμένες του qubit). Μια σειρά από βασικές πύλες γενικά μπορούν να πραγματοποιήσουν οποιοδήποτε μετασχηματισμό της κατάστασης, κι αυτό εκφράζει την ικανότητα πραγματοποίησης υπολογισμού.

Ακόμη κι αν δε γνώριζε κανείς πολλά περί της ικανότητας του κβαντικού υπολογιστή –αν και είναι εύλογο το ότι είναι πολύ πιο ισχυρός αν φανταστεί κανείς μια μηχανή Turing που τα κελιά της επιδέχονται γραμμικό συνδυασμό συμβόλων- σίγουρα έχει πολύ ενδιαφέρον, έστω από τη σκοπιά του φυσικού, να πραγματώσει ένα τέτοιο υπολογιστικό σύστημα. Πέρα από εικασίες όμως, ήδη αναφέραμε ότι το συγκεκριμένο υπολογιστικό μοντέλο είναι πολύ πιο αποτελεσματικό απ' αυτό που χρησιμοποιούμε τώρα. Γιατί ωστόσο δεν υπάρχει κβαντικός υπολογιστής και δεν είναι διαθέσιμος αυτός στην αγορά αντί του κλασικού; Η αλήθεια είναι ότι ενώ θεωρητικά πράγματι είναι πανίσχυρος και πολύ πιο συμφέρων, υπάρχουν πολλά εμπόδια στην τεχνική πλευρά του πράγματος. Για την πραγματοποίηση του κβαντικού υπολογισμού, θα πρέπει να έχει γίνει σαφές το πόσο νευραλγικό ρόλο έχουν οι διαδικασίες της αρχικοποίησης μιας αλυσίδας qubit, της εφαρμογής κβαντικών πυλών σε αυτή με ελεγχόμενο τρόπο, παρόμοια με τον τρόπο που

λειτουργεί η μηχανή Turing, και φυσικά η ανάγνωση του αποτελέσματος στο τέλος. Το πρόβλημα είναι ότι τα κβαντικά συστήματα που έχουν δοκιμαστεί ως τώρα (αλυσίδες ηλεκτρονίων, αλυσίδες πυρήνων, κοιλότητες φωτονίων κλπ) είναι εξαιρετικά ευαίσθητα σε ανεξέλεγκτες διαταραχές του περιβάλλοντος, πχ θερμικές διακυμάνσεις, σκεδάσεις με σωμάτια της ατμόσφαιρας. Το ίδιο συμβαίνει και στον κλασικό υπολογιστή, αλλά εκεί τα εξαρτήματα που χρησιμοποιούνται έχουν τη δυνατότητα να προστατεύουν την πληροφορία όντας ανθεκτικά σε απομαγνήτιση. Εκεί έχουν αναπτυχθεί και τεχνικές επιδιόρθωσης σφαλμάτων που συμβαίνουν κατά τον υπολογισμό, και το ίδιο έχουν κάνει μελετητές και για τον κβαντικό υπολογιστή, και τουλάχιστον σε θεωρητικό επίπεδο η επιδιόρθωση των κβαντικών σφαλμάτων έχει επιτευχθεί. Ωστόσο, οι τωρινές τεχνικές μας δυνατότητες δε μπορούν να πλησιάσουν εκείνες που χρειάζονται για πραγματικά αξιόπιστη επιδιόρθωση, κάτι που είναι καταστροφικό για αυτά τα συστήματα, λόγω και της αυξημένης τους ευαισθησίας. Έτσι, υπάρχει ενεργή έρευνα τόσο για βελτιστοποίηση των τεχνικών μέσων, όσο και για αναζήτηση νέας αρχιτεκτονικής που θα προστατεύει καλύτερα τον υπολογισμό από σφάλματα.

Σε επίσημη ορολογία, η αλληλεπίδραση του κβαντικού συστήματος με το περιβάλλον του περιγράφεται με τον όρο «αποσυννοχή». Το αποτέλεσμα της αποσυννοχής είναι ότι όταν δεν είναι ακριβώς γνωστή η κατάσταση του συστήματος, τότε τα πλάτη των κβαντικών καταστάσεων εμπλέκονται με κλασικές πιθανότητες. Αλλά, βέβαια η κβαντομηχανική μας δίνει σίγουρους κανόνες για την εξέλιξη ενός συστήματος, οπότε εξετάζοντας το συνολικό κβαντικό σύστημα μαζί με το περιβάλλον του, καταστρώνοντας την εξίσωση Schrodinger μπορούμε να λύσουμε κατ' αρχήν τα πάντα, και να μην έχουμε ούτε σφάλματα ούτε οποιαδήποτε άλλη δυσκολία, αφού η εξέλιξη περιγράφεται από έναν γνωστό τελεστή. Ωστόσο το σύστημα «περιβάλλον» είναι τόσο χαώδες, λόγω του τεράστιου αριθμού βαθμών ελευθερίας του, που οποιαδήποτε προσπάθεια να καταστρώσουμε Χαμιλτονιανή είναι καταδικασμένη να αποτύχει. Αγνοώντας όμως το περιβάλλον, η εξέλιξη του συστήματος παύει να περιγράφεται από μοναδιακή εξέλιξη. Η ρίζα του προβλήματος λοιπόν –και μια βαθύτερη μελέτη δείχνει ότι είναι και η ρίζα του μηχανισμού κατάρρευσης της κυματοσυνάρτησης που κάνει τη μέτρηση τόσο ριζικά διαφορετική από την εξέλιξη του συστήματος στο χρόνο- είναι η ανικανότητά μας να παρακολουθήσουμε το χαώδες περιβάλλον και τον τρόπο που διεμπλέκεται με το σύστημα προκαλώντας αποσυννοχή.

Δε θα αναλωθούμε εδώ περαιτέρω σε ανάλυση των αντίστοιχων εννοιών που περιγράφουν αυτή την υπόθεση, είναι βαθυστόχαστο θέμα που απαιτεί πολύ βαθιά κατανόηση της κβαντικής μηχανικής. Τονίζουμε όμως ότι το πρόβλημα μας είναι η διεμπλοκή συστήματος –περιβάλλοντος, και η έλλειψη λεπτομερούς γνώσης της διαδικασίας ελέγχου. Ο τοπολογικός υπολογιστής με τα ανύονια που περιεγράφηκε παραπάνω, έχει ως στόχο να δημιουργεί καταστάσεις τέτοιες ώστε να έχουν όσο γίνεται λιγότερη διεμπλοκή με το περιβάλλον (αγνές καταστάσεις).

Τώρα, κάποιες έννοιες για να εξηγηθεί καλύτερα το τι τελικά καθιστά έναν υπολογιστή αξιόπιστο, καθώς και το πώς ακριβώς κρίνεται η ισχύς του.

Εξηγήσαμε παραπάνω ότι ο τρόπος που πραγματοποιείται ο κάθε υπολογισμός είναι μέσω ενός συγκεκριμένου αλγόριθμου, δηλαδή μιας σειράς λογικών βημάτων, τα οποία πραγματώνονται στο hardware του υπολογιστή από

λογικές πύλες. Στον κβαντικό υπολογιστή, ξεκινάμε από μια κατάσταση $|\psi_0\rangle$ που εν γένει αποτελείται από κάποιον αριθμό qubits (έστω n) και αφού εφαρμοστούν οι απαραίτητες λογικές πύλες η κατάσταση αυτή μετασχηματίζεται –εξελισσεται μοναδιακά– σε μια κατάσταση $|\psi\rangle$. Άρα, ο συνολικός αλγόριθμος περιγράφεται από έναν τελεστή U : $|\psi\rangle = U|\psi_0\rangle$, με το U να ανήκει στην ομάδα των μοναδιακών $U(2^n)$, αφού δρα σε μια κατάσταση αποτελούμενη από n qubits, και τα qubits έχουν όλα διάσταση 2 στο χώρο Hilbert τους. Η κατάσταση $|\psi\rangle$ είναι η λύση του προβλήματος, το αποτέλεσμα του υπολογισμού.

Τώρα, ακριβώς όπως στις περισσότερες διαδικασίες της φυσικής και των μαθηματικών, ψάχνουμε απλούστερες δομικές μονάδες, από τις οποίες μπορούμε να στήσουμε με κατάλληλους συνδυασμούς το κάθε αποτέλεσμα. Έτσι κι εδώ, στόχος είναι η ανάλυση του τυχόντα, πολύπλοκου αλγόριθμου U σε απλούστερες λογικές πύλες (πχ πύλες που δρουν σε ένα ή σε δύο qubit), οι οποίες με κατάλληλους συνδυασμούς να μπορούν να αποδώσουν κάθε αλγόριθμο.

Έτσι, είμαστε σε αναζήτηση μιας σειράς κβαντικών πυλών (τελεστών), οι οποίες μπορούν να φέρουν εις πέρας οποιονδήποτε αλγόριθμο. Αυτή η αναζήτηση εισάγει την έννοια της καθολικότητας: Ένα πεπερασμένο σετ από κβαντικές πύλες που μπορούν να αποδώσουν επαρκώς οποιονδήποτε μοναδιακό πίνακα –αλγόριθμο αποκαλείται καθολικό.

Αν έχω ένα φυσικό σύστημα που μπορεί να υποστηρίξει ένα καθολικό σετ κβαντικών πυλών –μοναδιακών τελεστών– τότε μπορεί κατ’ αρχήν να λειτουργήσει ως καθολικός κβαντικός υπολογιστής. Στον τοπολογικό υπολογιστή, η στατιστική εξέλιξη παρέχει το σετ των μοναδιακών πινάκων.

Ο κβαντικός υπολογιστής τράβηξε τα βλέμματα πολλών ερευνητών και μελετητών έξω από τον κύκλο της φυσικής, όταν αποδείχθηκε ότι είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικός για την επίλυση δυο πολύ σημαντικών προβλημάτων που απασχολούν τη σύγχρονη πληροφορική. Είναι η αποτελεσματικότητα του όσον αφορά κυρίως αυτά τα δυο προβλήματα, που κάνει την κατασκευή και χρήση του τόσο θελκτική.

Το πρώτο είναι το πρόβλημα της παραγοντοποίησης ενός ακεραίου, δηλαδή –λόγω του θεωρήματος πρώτων αριθμών– της εύρεσης των πρώτων διαιρετών ενός τυχαίου αριθμού. Στον κλασικό υπολογιστή, μέχρι στιγμής δεν έχει βρεθεί ένας αποτελεσματικός αλγόριθμος που να εκτελεί αυτό τον υπολογισμό! Αποτελεσματικός κρίνεται ένας αλγόριθμος, όταν τα απαραίτητα εφόδια που απαιτούνται για την πραγματοποίηση του (οι λογικές πύλες) αυξάνονται πολυωνμικά με το μέγεθος της εισόδου, του αριθμού που απαιτείται να παραγοντοποιήσουμε. Στον κλασικό υπολογιστή όλοι οι γνωστοί αλγόριθμοι για αυτή τη δουλειά απαιτούν εκθετικά αυξανόμενο αριθμό πυλών με την αύξηση του μεγέθους του αριθμού. Αυτός είναι και ο λόγος που χρησιμοποιούν το συγκεκριμένο πρόβλημα για την κρυπτογράφηση δεδομένων σε πρωτόκολλα ασφαλείας: ο υπολογιστής –εισβολέας, για να μπει στο σύστημα καλείται να παραγοντοποιήσει έναν αριθμό. Φυσικά, μπορεί να επιλύσει το πρόβλημα, αλλά αν του ζητηθεί η παραγοντοποίηση ενός αριθμού τέτοιου ώστε να πρέπει να προσλάβει κολοσσιαίο αριθμό πυλών για να το κάνει, δεν πρόκειται να μπει, παρά μόνο αν ο χειριστής γνωρίζει εκ των πρότερων το αποτέλεσμα. Άρα, το σύστημα προστατεύεται, αφού ο υπολογιστής, όσο ισχυρός κι αν είναι, δεν έχει στη διάθεσή του αρκετά ισχυρό σκεπτικό (αλγόριθμος) για να επιλύσει το πρόβλημα. Ο

Peter Shor όμως επινόησε έναν αλγόριθμο για κβαντικό υπολογιστή, ο οποίος απαιτεί πολυωνυμικά αυξανόμενο αριθμό πυλών, δηλαδή επιλύει το πρόβλημα αποτελεσματικά! Αυτό σημαίνει ότι ο κβαντικός υπολογιστής είναι ικανός να παραβιάσει οποιοδήποτε σημερινό πρωτόκολλο ασφαλείας, στημένο με τον κλασικό τρόπο! Καταλαβαίνει κανείς εύκολα το πόσο θελκτική υπόθεση είναι η κατασκευή του, μόνο και μόνο απ' αυτό.

Το άλλο πρόβλημα είναι της αναζήτησης ενός στοιχείου σε μια ατακτοποιητή βάση δεδομένων, ανατρέχοντας σε όλα τα στοιχεία της. Ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί η αναζήτηση, σε έναν κλασικό υπολογιστή, αυξάνεται γραμμικά με το μέγεθος της βάσης δεδομένων, και έχει αποδειχθεί ότι αυτό είναι το μέγιστο της ικανότητας ενός κλασικού υπολογιστή. Ο Lov Grover επινόησε με τη σειρά του έναν κβαντικό αλγόριθμο που επιταχύνει τη διαδικασία τετραγωνικά.

Έχουν αναπτυχθεί κι άλλοι αλγόριθμοι, αλλά κανείς δεν είχε την απήχηση αυτών των δύο, και κανείς καταλαβαίνει βέβαια την έλξη που άσκησαν σε κάθε είδους σύγχρονο επιστήμονα και τεχνοκράτη, γεγονός που δικαιολογεί την προσπάθεια για κατασκευή του κβαντικού υπολογιστή.

Ωστόσο, πριν κλείσουμε αυτό το θέμα, ας κάνουμε λίγο και το συνήγορο του διαβόλου: η θεωρία πληροφορίας κατατάσσει τα προβλήματα σε τάξεις πολυπλοκότητας, αναλόγως του χρόνου που απαιτείται για την επίλυσή τους. Έτσι, στην τάξη πολυπλοκότητας P ανήκουν όλα τα προβλήματα που ο κλασικός υπολογιστής μπορεί να επιλύσει σε πολυωνυμικά αυξανόμενο με το μέγεθος της εισόδου χρόνο, και στην τάξη NP ανήκουν όλα τα προβλήματα για τα οποία ο κλασικός υπολογιστής μπορεί να αποφανθεί σε πολυωνυμικό χρόνο αν μια πρόταση είναι λύση του προβλήματος (προφανώς η εύρεση λύσης ισοδυναμεί με ικανότητα απόφασης αν μια πρόταση είναι λύση, οπότε σίγουρα όλα τα στοιχεία της P ανήκουν και στην NP , ωστόσο το αντίστροφο δεν είναι υποχρεωτικό να ισχύει για την ακρίβεια μια απόδειξη ότι οι δυο τάξεις πολυπλοκότητας δεν ταυτίζονται, ότι δηλαδή η NP έχει προβλήματα που δεν είναι P , έχει αποδειχτεί το Άγιο Δισκοπότηρο της θεωρίας της πληροφορίας ως τώρα: όλοι οι αλγόριθμοι που έχουν βρεθεί δείχνουν ότι υπάρχουν προβλήματα NP που δεν είναι P αλλά μια αυστηρή απόδειξη ακόμη αναζητείται, και για πολλούς μελετητές είναι και το σημαντικότερο ανοιχτό πρόβλημα της θεωρίας της πληροφορίας). Παρομοίως, με την επινόηση του κβαντικού υπολογιστή εμφανίστηκε και η αντίστοιχη τάξη πολυπλοκότητας στην οποία ανήκουν τα προβλήματα τα οποία λύνει ο κβαντικός υπολογιστής σε πολυωνυμικό χρόνο, η BQP . Τα όσα είπαμε παραπάνω περί αποτελεσματικότητας του υπολογιστή αυτού σε σχέση με τον κλασικό, προτείνουν ότι η BQP θα πρέπει να περιέχει προβλήματα τα οποία δεν ανήκουν στην P , δηλαδή ότι υπάρχουν προβλήματα τα οποία στον κλασικό υπολογιστή απαιτούν εκθετικό χρόνο για την επίλυσή τους, αλλά στον κβαντικό μπορούν να λυθούν πολυωνυμικά. Ωστόσο, πρέπει να επισημάνουμε ότι μέχρι στιγμής δεν έχει βρεθεί τέτοιο πρόβλημα (στο πρόβλημα της παραγοντοποίησης είπαμε ότι όλοι οι γνωστοί κλασικοί αλγόριθμοι απαιτούν εκθετικό αριθμό δαπανών, αλλά δεν αποκλείεται να υπάρχει ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος τον οποίον όμως δεν έχουμε καταφέρει να εντοπίσουμε, ενώ σ' εκείνο τη αναζήτησης και ο κλασικός και ο κβαντικός υπολογιστής επιλύουν το πρόβλημα πολυωνυμικά με το χρόνο, απλώς ο κβαντικός το κάνει με άλλη εξάρτηση, πιο αποτελεσματικά). Ακόμη χειρότερα, θα ευχόταν κανείς ότι θα έχει βρεθεί κάποιο

πρόβλημα για το οποίο ο κλασικός υπολογιστής δε μπορεί καν να αποφανθεί σε πολυωνυμικό χρόνο για μια λύση (NP δύσκολο πρόβλημα), το οποίο όμως είναι BQP εύκολο αλλά δεν έχει συμβεί καν αυτό. Όλα αυτά όμως είναι εξαιρετικά πιθανό να μην οφείλεται στην κατ' αρχήν αναποτελεσματικότητα του συστήματος· η κβαντομηχανική παρά το σχεδόν έναν αιώνα της ιστορίας της, δε μπορεί κανείς να πει ότι έχει φωτιστεί πλήρως από κάθε πλευράς της. Η εμπειρία μας με τον κβαντικό κόσμο ίσως να μην είναι αρκετή για έναν ρηξικέλευθο χειρισμό των φυσικών διαδικασιών, ένα χειρισμό που θα προωθούσε ταχύτατα τις υπολογιστικές ικανότητες των μηχανών μας. Ακόμη κι ο κλασικός υπολογιστής, απ' ότι φαίνεται έχει ακόμα μυστικά σημεία, τουλάχιστον όσον αφορά τα κομμάτια που εμπίπτουν στη θεωρία της πληροφορίας.

6. Ανυονικός υπολογισμός

Εδώ θα δώσουμε περισσότερες λεπτομέρειες, ένα θεωρητικό υπόβαθρο, για τον τρόπο με τον οποίο πραγματώνονται μηχανικά κάποια στοιχεία hardware ενός κβαντικού υπολογιστή, μέσω ανυονίων.

Για να ξεκινήσει να λειτουργεί οποιοδήποτε τέτοιο σύστημα, θα πρέπει πρώτα να δημιουργηθούν κάποια ανυόνια. Έτσι, απαιτούμε τη δημιουργία ενός σετ από ανυόνια, προετοιμασμένα σε μια καλά ορισμένη κατάσταση σύντηξης. Αυτό μπορεί να γίνει αν δημιουργήσω δυο ανυόνια, α , $\bar{\alpha}$ τα οποία προέρχονται από το κενό. Επίσης, θεωρώ τα ανυόνια αυτά μη Αβελιανά, δηλαδή εκτός του κενού από το οποίο προήλθαν έχουν κι άλλα πιθανά κανάλια σύντηξης. Ο χώρος Hilbert των καταστάσεων σύντηξης, δεν είναι απαραίτητο να έχει τανυστική δομή, όμως κάποιος υπόχωρός του υπάρχει που έχει τη δομή τανυστικού γινομένου qubit, με τη διάστασή του να αυξάνεται εκθετικά με τον αριθμό των qubits. Για να εξηγηθεί αυτό, θα πρέπει να αναλωθούμε σε τεχνικές λεπτομέρειες, που δε χρειάζονται σ' αυτό το επίπεδο: αρκούμαστε να επισημάνουμε ότι στη μελέτη της σύντηξης των ανυονίων βολεύει να αναφερόμαστε όχι μόνο στη συνήθη διάσταση, αλλά και σε μια επέκταση του όρου, που καλείται κβαντική διάσταση, και η οποία εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η διάσταση ενός χώρου Hilbert που αποτελείται από πανομοιότυπα ανυόνια, με την προσθήκη ενός ακόμα. Η συνήθης διάσταση του χώρου σύντηξης είναι βέβαια ακέραιος, καθότι μετράει τα διαφορετικά πιθανά αποτελέσματα και είναι ανάλογη της κβαντικής διάστασης, που όμως δε χρειάζεται να είναι ακέραιος, κι αυτός είναι και ο λόγος που δεν έχει ο χώρος Hilbert απαραίτητα δομή τανυστικού γινομένου –για να γραφεί ένα αποτέλεσμα ως τανυστικό γινόμενο η διάστασή του είναι το γινόμενο των διαστάσεων των επιμέρους χώρων. Αφού υπάρχει όμως υπόχωρος με δομή τανυστικού γινομένου, μπορώ να κωδικοποιήσω σ' αυτόν την πληροφορία με τρόπο ανάλογο της κωδικοποίησης σε qubits, πχ σπιν.

Αφού κωδικοποιηθεί η πληροφορία στον υπόχωρο του χώρου Hilbert, πρέπει να βρω έναν τρόπο να τη διαχειριστώ, δηλαδή να βρω φυσικές διαδικασίες που ανταποκρίνονται στις λογικές κβαντικές πύλες. Πάλι δε θα αναλωθούμε στις έννοιες που εμπλέκονται, αλλά έχει δειχθεί ότι μέσω της λεγόμενης «πλεξίδας» των ανυονίων –υποδεικνύει διπλή ανταλλαγή ανυονίων με την ίδια φορά- και της συντηκτικής αναδιάταξης –υποδεικνύει αλλαγή της σειράς των επιμέρους συντήξεων μιας πολυανυονικής σύντηξης- μπορεί να αποδοθεί επαρκώς καθολικός κβαντικός

υπολογισμός. Αυτές οι λογικές πύλες κωδικοποιούνται από φυσικές διαδικασίες που δεν αλλάζουν τις ιδιότητες των επιμέρους ανυονίων, ούτε οποιοδήποτε τοπικό τους χαρακτηριστικό, αλλά μπορούν να έχουν μη τετριμμένο αποτέλεσμα στις καταστάσεις του χώρου σύντηξης. Αυτό το συνολικό αποτέλεσμα, εξελίσσει την αρχική κατάσταση, με την εξέλιξη αυτή, αναλόγως του τρόπου που θα συνδυαστούν οι παραπάνω διαδικασίες, να αντιστοιχεί σε αυθαίρετο πίνακα, και άρα να μπορεί να εκφράσει φυσικά κάθε αλγόριθμο.

Τέλος, πρέπει βέβαια να διαβάσουμε το αποτέλεσμα. Αφού αυτό κωδικοποιείται στο χώρο σύντηξης, θα πρέπει να διαβάσουμε το αποτέλεσμα της σύντηξης. Αυτό μπορεί να γίνει αρχίζοντας να συντήσουμε τα ανυόνια στη σειρά, πρώτα τα δυο πρώτα, μετά το αποτέλεσμα με το τρίτο κλπ. Επισημαίνεται ότι η συνολική σύντηξη μπορεί να είναι υπέρθεση πολλών καταστάσεων βάσης που σχετίζονται με ενδιάμεσα προϊόντα σύντηξης, οπότε γενικά η ανάγνωση του αποτελέσματος έχει στοχαστικό χαρακτήρα, εν γένει.

Ένα ανυονικό μοντέλο, με τις λογικές πύλες που αντιστοιχούν στις φυσικές διαδικασίες που περιεγράφηκαν, έχει πολύ σπουδαία χαρακτηριστικά που οδηγούν σε στιβαρό υπολογισμό: οι διαδικασίες πλεξίδας και συντηκτικής αναδιάταξης δε σχετίζονται με την ακριβή διαδρομή που ακολούθησαν τα ανυόνια, παρά μόνο με την τοπολογία και το πώς άλλαξε αυτή στην πορεία του υπολογισμού, η πληροφορία κωδικοποιείται μη τοπικά αφού σχετίζεται με το κανάλι σύντηξης, και άρα είναι προστατευμένη από περιβαλλοντικές παρεμβολές –αποφεύγεται το πρόβλημα της αποσυννοχής. Για λόγους πληρότητας επισημαίνουμε και πάλι ότι πολλά ανυονικά μοντέλα, έχουν μεν τα απαραίτητα τοπολογικά χαρακτηριστικά για να λειτουργήσουν ως προστατευμένες κβαντικές μνήμες, αλλά οι λογικές πύλες που αναφέραμε δεν αρκούν για να στήσουν καθολικό σετ πυλών, οπότε έχει προταθεί χρήση τους ως κβαντικές μνήμες, αλλά διαχείριση της πληροφορίας με μη τοπολογικές εξελίξεις, για να επιτευχθεί καθολικό κβαντικό μοντέλο.

7. Αριθμός Chern

Για να αποφανθούμε ότι ένα σύστημα έχει τοπολογικά χαρακτηριστικά, από όσα ειπώθηκαν για την τοπολογία, θα πρέπει να ψάξουμε για ιδιότητές του που δεν αλλοιώνονται υπό μη δραστικούς ανασχηματισμούς του υποφώσκοντος χώρου. Το συμπέρασμα της ανεξαρτησίας των ιδιοτήτων της στατιστικής από το ακριβές σχήμα της διαδρομής ξυπνάει μνήμες ηλεκτρομαγνητισμού, και σε αναλογία με τα όσα είναι γνωστά από τη μελέτη του, θα παρουσιάσουμε μια μικρή πορεία που ξεκινά από το αρχικό πρόβλημα ιδιοτιμών της Χαμιλτονιανής για ένα τυχόν κβαντικό σύστημα, και καταλήγει απλώς ακολουθώντας την τροχιά του ηλεκτρομαγνητισμού σε μια ποσότητα, τον αριθμό Chern, ο οποίος φαίνεται να μπορεί να εντοπίζει τοπολογία στο κβαντικό σύστημα.

Ο ήδη γνώστης του βαθύτερου θεωρητικού λόγου της ανεξαρτησίας του έργου από τη διαδρομή στον ηλεκτρομαγνητισμό, ο οποίος είναι η ελευθερία που έχουμε στον ορισμό βαθμίδας, πιθανόν να αντιμετωπίσει καχύποπτα μια τέτοια πορεία: είναι η γεωμετρία εκείνη που κρίνει τα πάντα στον ηλεκτρομαγνητισμό: ο νόμος του Gauss, ο νόμος του Ampere και οι υπολογισμοί των ροών που απαιτούν,

καθώς βέβαια και ο ορισμός της βαθμίδας (το βαθμωτό δυναμικό ορίζεται με απόκλιση, το ανυσματικό με στροβιλισμό!) υπάγονται στη σφαίρα της γεωμετρίας και όχι της τοπολογίας. Όμως, αν και δεν έχει φανεί εκπεφρασμένα ακόμη, υπάρχει σοβαρή συσχέτιση της γεωμετρίας με την τοπολογία: σκεφτείτε δυο διδιάστατους κόσμους, Ευκλείδειους, που όμως ο ένας είναι επίπεδο και ο άλλος τόρος. Οι τόσο διαφορετικές γεωμετρικές ιδιότητες που θα παρατηρηθούν εκεί οφείλονται στην πραγματικότητα στην τρύπα του τόρου, δηλαδή έχουν ρίζα τοπολογική. Αυτό είναι απλώς ένδειξη, παρακάτω η συλλογιστική πορεία θα πρέπει να φωτίσει καλύτερα αυτή τη σύνδεση.

Θεωρώ, λοιπόν, ένα Ερμητιανό σύστημα. Στον ηλεκτρομαγνητισμό, το πεδίο βαθμίδας σχετίζεται με το βαθμωτό και το ανυσματικό δυναμικό. Στο τυχόν σύστημα που μελετάμε θεωρώ μια τυχούσα παράμετρο g –δεν είναι αυτή η βαθμίδα!– η οποία δεν ξέρω καν τι διάσταση έχει, οπότε θεωρώ ότι μπορεί να έχει συντεταγμένες g^μ , $\mu=1, \dots, N$. Οπότε το πρόβλημα ιδιοτιμών είναι $H(g)|u_n(g)\rangle = E_n(g)|u_n(g)\rangle$, το n αριθμεί απλώς τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα, τα οποία θα θεωρήσω μη εκφυλισμένα.

Όπως γνωρίζουμε από την κβαντομηχανική, οι καταστάσεις $|u_n\rangle$ ορίζονται με απροσδιοριστία μιας συνολικής φάσης, η οποία είναι απρόσιτη φυσικώς. Αναλόγως κι εδώ, με τη διαφορά ότι τώρα η φάση θα εξαρτάται από την παράμετρο, ήτοι η αλλαγή $|u_n(g)\rangle \rightarrow e^{i\chi(g)}|u_n(g)\rangle$, δεν επηρεάζει κανένα παρατηρήσιμο μέγεθος, δεν αλλάζει το χώρο Hilbert των ιδιοκαταστάσεων, και θυμίζει ακριβώς τη συμμετρία $U(1)$ του ηλεκτρομαγνητισμού –αυτή η φάση είναι η βαθμίδα.

Νευραλγικό σημείο είναι το ότι το παραμετρικό πεδίο είναι μια βαθύτερη φυσική ποσότητα, που δεν επηρεάζει την κβαντομηχανική· αν μπορεί να ειπωθεί έτσι, είναι ένα στοιχείο ταυτότητας των εμπλεκόμενων μεγεθών, και ως τέτοιο θα το αντιμετωπίσω προς το παρόν. Αυτός είναι ο λόγος που αποφαινόμεστε ότι ο χώρος Hilbert των ιδιοκαταστάσεων είναι ο ίδιος για όλα τα g , με τον ίδιο τρόπο που μπορώ να επιλέγω να εκφράσω μια τροχιά παραμετροποιώντας τη με διάφορους τρόπους, αλλά αυτή πάντα είναι η ίδια.

Πώς θα μπορούσε κανείς να αποφανθεί για το πώς διαφέρουν δυο ιδιοκαταστάσεις για επιλογή διαφορετικού ανύσματος παραμέτρου; Το πιο λογικό είναι να υπολογίσει το εσωτερικό τους γινόμενο, το οποίο θα είναι ένας μιγαδικός αριθμός, και το γράφω: $\langle u_n(g_1)|u_n(g_2)\rangle = |\langle u_n(g_1)|u_n(g_2)\rangle| e^{iA_n(12)}$, $A_n(12)$ μια φάση που εξαρτάται βέβαια από το n και από τη βαθμίδα, αφού θα αλλάξει αν επιλέξω να γράψω τη $|u_n(g)\rangle$ ως $|u_n(g)\rangle e^{i\chi(g)}$.

Αν τώρα θεωρήσω μια τροχιά στον παραμετρικό χώρο g , η συνολική αλληλοεπικάλυψη επεκτείνοντας το παραπάνω θα είναι:

$$\prod_{m=1}^{M-1} \langle u_n(g_m)|u_n(g_{m+1})\rangle = \prod_{m=1}^{M-1} \{ |\langle u_n(g_m)|u_n(g_{m+1})\rangle| \exp(\sum_{i=1}^{M-1} i A(m, m+1)) \}.$$

Όσον αφορά τη συνολική φάση, και πάλι εξαρτάται από τη βαθμίδα που έχει επιλεγεί, ωστόσο είναι εμφανές από το άθροισμα που υπάρχει σε αυτήν ότι όποια κι αν είναι η φάση που θα επιλεγεί, αν κάνω έναν τοπικό μετασχηματισμό βαθμίδας θα ακυρωθούν μεταξύ τους όλες οι φάσεις των εσωτερικών σημείων, εκτός του αρχικού και του τελικού (το κάθε εσωτερικό $\chi_i(g)$ που εμφανίζεται στον εκθέτη ακολουθείται από ένα $-\chi_i(g)$, λόγω του ότι το ket γίνεται bra με μιγαδική συζυγία).

Όσον αφορά όμως το συνολικό μέτρο της αλληλοεπικάλυψης, ως γινόμενο των επιμέρους μέτρων ξεκάθαρα εξαρτάται από την παραμετρική διαδρομή, δε μπορούν να ακυρωθούν τα εσωτερικά μέτρα με τον ίδιο τρόπο που ακυρώθηκαν οι φάσεις.

Τώρα, μπορώ να επεκτείνω τα παραπάνω αποτελέσματα που προέκυψαν για διακριτό παραμετρικό χώρο, στο συνεχές. Κατά τα γνωστά, θεωρώντας ότι δυο διαδοχικές παράμετροι απέχουν δg :

$\exp(iA_n(g)\delta g) = \langle u_n(g)|u_n(g+\delta g)\rangle / |\langle u_n(g)|u_n(g+\delta g)\rangle|$. Αναπτύσσοντας σε πρώτη τάξη ως προς δg , εύκολα προκύπτει:

$$A_n^a(g) = (\langle u_n(g)|\nabla_g^a u_n(g)\rangle - \langle \nabla_g^a u_n(g)|u_n(g)\rangle) / 2i\langle u_n(g)|u_n(g)\rangle.$$

Αν κανονικοποιήσω και τις ιδιοκαταστάσεις κατά το συνήθη τρόπο στη μονάδα, τότε $A_n^a(g) = -i\langle u_n(g)|\nabla_g^a u_n(g)\rangle$. Το ανυσματικό πεδίο $A(g)$ είναι γνωστό ως σύνδεση Berry.

Απ' αυτήν, αν κάνω ένα μετασχηματισμό βαθμίδας, τότε εύκολα φαίνεται ότι $A_n^a(g) \rightarrow A_n^a(g) + \nabla_g^a \chi_n(g)$. Βρήκαμε δηλαδή έναν τύπο ακριβώς όπως εκείνον που περιγράφει τους μετασχηματισμούς βαθμίδας του ηλεκτρομαγνητισμού, για το ανυσματικό δυναμικό, αφού η φάση $\chi_n(g)$ στο ερμητιανό πρόβλημα ιδιοτιμών είναι το ισοδύναμο του πεδίου βαθμίδας στον ηλεκτρομαγνητισμό –και τα δυο εκφράζουν τη συμμετρία $U(1)$ που χαρακτηρίζει τα δυο φαινόμενα.

Στον ηλεκτρομαγνητισμό πάντα υπολογίζαμε και στροβιλισμούς των μεγεθών. Το ίδιο θα κάνουμε και εδώ. Αφού μάλιστα εντοπίσαμε αναλογία της σύνδεσης Berry με το ανυσματικό δυναμικό, και ξέρουμε ότι ο στροβιλισμός του είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου, τότε υπολογίζοντας το στροβιλισμό της σύνδεσης Berry θα βρούμε ένα βαθμηδόν αναλλοίωτο ανάλογο της επίσης βαθμηδόν αναλλοίωτης έντασης του μαγνητικού πεδίου –το ότι είναι βαθμηδόν αναλλοίωτο προκύπτει από τον ορισμό του στροβιλισμού, δεν παίζει ρόλο η σειρά των παραγωγίσεων του $\chi(g)$, οπότε αυτό δε θα εμφανίζεται στο τελικό αποτέλεσμα. Το ότι είναι βαθμηδόν αναλλοίωτο δε, το καθιστά και φυσικά παρατηρήσιμο.

Πράγματι, το αντίστοιχο μέγεθος, ένας αντισυμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης, είναι $F_{ab}^n(g) = \nabla_g^a A^b(g) - \nabla_g^b A^a(g)$, και καλείται καμπυλότητα Berry.

Τώρα, περνάμε στην καρδιά της μελέτης μας, τις κλειστές διαδρομές. Το σημαντικό μέγεθος είναι η φάση Berry. Η φάση Berry είναι η φάση εκείνη που τσακώνει η $|u_n(g)\rangle$ όταν επιλέξω στον παραμετρικό χώρο μια διαδρομή κλειστή. Επεκτείνοντας λοιπόν τα συμπεράσματα του διακριτού για διαδοχικές αλληλοεπικαλύψεις στο συνεχές, εύκολα προκύπτει ότι η φάση αυτή είναι:

$$\exp(i\gamma_n(C)) = \exp(i\oint_C dg_a A^a(g)), \quad C \text{ η εν λόγω κλειστή διαδρομή.}$$

Τέλος, αν θυμηθούμε το θεώρημα Stokes, ευρέως χρησιμοποιούμενο και στο ηλεκτρομαγνητισμό, η φάση Berry εκφράζεται ως ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα της καμπυλότητας Berry: $\exp(i\gamma_n(C)) = \exp(i\oint_{S_C} F_{ab}^n dg_a \wedge dg_b)$.

Σημειωτέο, η φάση Berry ορίζεται mod 2π .

Ο δε πολύπλοτος αριθμός Chern συγγενεύει με τη φάση Berry: ορίζεται εν γένει ως το ολοκλήρωμα της καμπυλότητας Berry σε μια κλειστή 2D πολλαπλότητα δια 2π (πολλαπλότητα διάστασης N λέγεται ένας χώρος όταν κάθε σημείο του έχει μια γειτονιά ομομορφική στον ευκλείδειο χώρο διάστασης N , πιο περιγραφικά είναι

ένας χώρος που όταν κάνουμε ζουμ σε οποιοδήποτε σημείο του βλέπουμε Ευκλείδειο χώρο).

Είπαμε ότι ο αριθμός Chern κρίνει την «τοπολογικότητα» ενός συστήματος. Όμως αποκλίσεις, στροβιλισμοί, παραμετρικοί χώροι, εσωτερικά γινόμενα, όλα όσα χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω ήταν βαθυστόχαστες εκφάνσεις γεωμετρικών δομών. Πού ακριβώς ήταν στα βήματά της συλλογιστικής μας πορείας η τοπολογία; Γιατί όπως φαίνεται από τα παραπάνω, απλώς κάναμε διάφορους υπολογισμούς με γεωμετρικά εργαλεία, και βέβαια ορίσαμε κάποια χρήσιμα μεγέθη, όμως αυτοί οι ορισμοί έγιναν και πάλι με τη βοήθεια αυτών ακριβώς των εργαλείων, απλώς δώσαμε σε δομές ανάλογες γνωστών ήδη δομών νέα ονόματα.

Η τοπολογία μπαίνει στο παιχνίδι στο σημαντικό σημείο όπου κάποιος αποφασίζει ότι τα παραπάνω μεγέθη υπάρχουν, ή ακριβέστερα είναι μη τετριμμένα. Η φάση Berry $\gamma_n(C)$ είναι το κλειστό ολοκλήρωμα ενός πεδίου σε μια διαδρομή του παραμετρικού χώρου, δηλαδή το αρχικό και το τελικό σημείο είναι το ίδιο! Σε έναν τετριμμένο τοπολογικά χώρο –όλα είναι απλώς γεωμετρία- αυτός ο αριθμός είναι πάντα μηδέν, ολοκληρώνουμε και το τελικό σημείο ταυτίζεται με το αρχικό. Με το να ορίσουμε τη φάση Berry και κατ' επέκταση τον αριθμό Chern, αποδεχόμαστε ότι τα πράγματα δεν είναι έτσι πάντα, και πράγματι δεν είναι. Υπάρχουν δομές όπου μια κλειστή διαδρομή αποδίδει μη τετριμμένη φάση Berry, είναι ακριβώς οι δομές που μας αφορούν.

Όμως και πάλι δε φάνηκε η ρίζα του «κακού», πώς προέκυψαν αυτές οι δομές, ποιος είναι ο φυσικός λόγος που τους αποτρέπει να αποδράσουν από την τετριμμένη τοπολογία; Για να απαντήσουμε ας αναφερθούμε και πάλι στα διδάγματα του ηλεκτρομαγνητισμού, όπου διδάχθηκε ο φυσικός τα παρακάτω, αν και επί της ουσίας πρόκειται ως επί το πλείστο για μαθηματικά.

Αυτό που ρωτάμε είναι: τι μπορεί να κάνει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός πεδίου πάνω σε μια διαδρομή διάφορο του μηδενός; Ο ηλεκτρομαγνητισμός μας δίδαξε –αλλά αυτό είναι απλώς το θεώρημα του Stokes!- ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα συνδέεται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του στροβιλισμού· γι' αυτό στη μαγνητοστατική αντί να λύνουμε το στριφνό νόμο Biot –Savart, ψάχνουμε κομψές τροχιές για να εφαρμόσουμε το γεωμετρικά κατανοητό Νόμο του Ampere. Άρα αν έχω ένα αστρόβιλο πεδίο, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι σίγουρα μηδέν, αν έχω στροβιλό εν γένει δεν είναι μηδέν. Όμως ο μη μηδενικός στροβιλισμός ξέρουμε από τις εξισώσεις του Maxwell ότι συνδέεται με πηγές ή καταβόθρες ροής! Τώρα θα πρέπει να είναι πιο ξεκάθαρο το τι σημαίνει αριθμός Chern μη μηδενικός: σημαίνει ότι είχα στροβιλό –προσοχή, ο στροβιλισμός υπολογίζεται όχι όπως στον ηλεκτρομαγνητισμό παραγωγίζοντας ως προς τις θέσεις αλλά ως προς τις συντεταγμένες της παραμέτρου g που δεν είναι απαραίτητα άνυσμα θέσης- πεδίο, δηλαδή μέσα στην κλειστή μου διαδρομή υπάρχει μια οντότητα που γεννάει ροή. Τώρα, το τι ακριβώς ροή είναι αυτή προφανώς εξαρτάται από το τι είναι η παράμετρος και από το τι είναι το πεδίο, στο εκάστοτε φυσικό σύστημα τα πράγματα θα είναι διαφορετικά. Ωστόσο, ενθυμούμενοι ότι όλα ξεκίνησαν από ένα Ερμητιανό πρόβλημα ιδιοτιμών, όπου εκεί η βαθμίδα είναι η φάση γιατί αυτό το πρόβλημα πάντα έχει τη συμμετρία $U(1)$, τολμούμε να πούμε τώρα ότι η τοπολογία κρίνεται από την ικανότητά μας να επιλέξουμε σε όλα τα σημεία του παραμετρικού χώρου που αγκαλιάζει η διαδρομή μας φάση πραγματική, γιατί τότε σε όλο τον έγκλειστο χώρο

τα «διανύσματα φάσης» (εννοώ οι μιγαδικοί) είναι παράλληλα, οπότε το πεδίο τους είναι αστρόβιλο. Αν υπάρχει ροή κάπου εκεί μέσα, η φάση είναι στροβιλή, δεν μπορώ να πω ότι είναι παντού πραγματική, γιατί θα πρέπει στη συνολική κλειστή διαδρομή να περιστραφεί (πάντα κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π)! Η «τρύπα» που αναφέραμε ως τώρα, που αποκαλείται με τη fancy ονομασία γένος, ενσαρκώνει αυτή ακριβώς την αδυναμία μας να μετατοπίζουμε παράλληλα το διάνυσμα φάσης σε όλη την περιοχή: όταν πέσουμε στην τρύπα μοιραία η φάση δε μπορεί να αποδοθεί τόσο απλά, πρόκειται για ένα σημείο όπου η καμπυλότητα Berry δεν είναι καλά ορισμένη, ακριβώς όπως στο Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων όταν μια κλειστή διαδρομή περικλείει πόλους μια συνάρτησης (σημεία που δεν είναι καλά ορισμένη) αυτοί κάνουν το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πάνω σ' αυτή μη μηδενικό.

Τέλος, αναφέρουμε ένα παλιότερο αποτέλεσμα, που μπορούμε να προσλάβουμε προς ισχυροποίηση των όσων λέμε. Εκεί η σύνδεση γεωμετρίας – τοπολογίας εγκολπώνεται στο σπουδαίο και κομψότατο θεώρημα Gauss – Bonnet:

$\oint_S K ds / 2\pi = 2 - 2g$, K η καμπυλότητα Gauss, S μια συμπαγής επιφάνεια, g το γένος της. Αυτή η σχέση είναι ο μαθηματικός λόγος που οι τρύπες γεννούν μη τετριμμένους αριθμούς Chern.

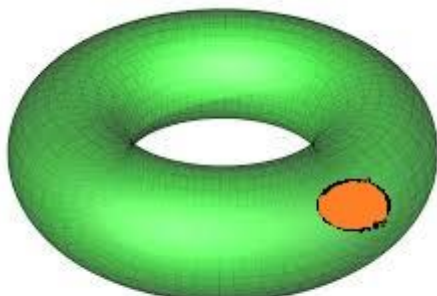
Πρόκειται για καθαρά μαθηματικό θεώρημα, η απόδειξή του είναι μακροσκελής, απαιτεί βαθιά γνώση διαφορικής γεωμετρίας, και εδώ δε μας απασχολεί. Είναι όμως τόσο ενδιαφέρον που είμαστε υποχρεωμένοι να επισημάνουμε τη σημασία του. Το πρώτο μέλος της σχέσης θα πρέπει να είναι σαφές ακόμα και αν δεν αναλωθούμε σε τεχνικές λεπτομέρειες ότι έχει γεωμετρικό χαρακτήρα: η γεωμετρική καμπυλότητα K – έχει αποδειχτεί ότι η σχέση επεκτείνεται και για καμπυλότητα του χώρου Hilbert, περισσότερα παρακάτω- εξαρτάται από το σχήμα της επιφάνειας. Το δεύτερο μέλος είναι καθαρά τοπολογικό: το μόνο που βλέπει είναι οι τρύπες του χώρου, η γεωμετρία είναι γι' αυτό αόρατη. Το θεώρημα δείχνει ότι μπορώ να αλλάζω την καμπυλότητα σε οποιοδήποτε σημείο ή το σχήμα της επιφάνειας κατά βούληση: πάλι την ίδια συνολική καμπυλότητα θα παίρνω, όπως πιέζοντας ένα μπαλόνι σε ένα σημείο αυξάνεται η πίεση σε άλλα σημεία ή/και φουσκώνει περισσότερο αλλού – πάει να πει αλλάζει και αλλού η καμπυλότητα, με αντίθετο πρόσημο της αλλαγής που κάναμε, αφού στο ένα σημείο το μπαλόνι συμπιέζεται και στο άλλο φουσκώνει. Απ' ότι φαίνεται μια αλλαγή σε ένα σημείο θα φέρει μια αντίστοιχη αλλαγή σε ένα άλλο, με τρόπο ώστε να προστατεύεται η τοπολογία: ο μαθηματικός χώρος είναι από τα ίδια του τα εγγενή συστατικά έτσι δομημένος ώστε το μπαλόνι ή το ντόνατ επ' ουδενί να μην σκάσει!

Αδράχνουμε την ευκαιρία που μας έδωσε αυτό το θεώρημα για να επισημάνουμε και πάλι τη στιβαρότητα της τοπολογίας: τα πεδία από μόνα τους δεν προστατεύονται από τίποτα, αν κανείς αποφασίσει να κωδικοποιήσει πληροφορία σε κάποιο τέτοιου είδους συστατικό αργά ή γρήγορα θα βρεθεί αντιμέτωπος με το συνήθως ανυπέρβλητο πρόβλημα του να προστατεύσει την καμπυλότητα τοπικά: το θεώρημα αυτό από μόνο του, ακόμη κι αν δε γνωρίζουμε τίποτα για ανυδρία μας δίνει τη διέξοδο: κωδικοποιήστε την πληροφορία στην τοπολογία! Ό, τι και να γίνει τοπικά, όσο και να τσαλακωθούν οι επιφάνειές σας, όσο και να τεντωθούν, όσο και να αλλοιωθούν τοπικά τα πεδία σας, ο κόσμος είναι έτσι φτιαγμένος που την τοπολογία θα την κρατήσει ανέπαφη!

Εκείνο που μας απασχολεί στο τέλος της μέρας και αναφέρουμε τα παραπάνω, είναι να μπορούμε να αποφανθούμε αν ένα μοντέλο έχει μη τετριμμένες τοπολογικές ιδιότητες, κι ένας τρόπος να το κάνουμε είναι να εντοπίζουμε μη μηδενικούς αριθμούς Chern: ένα τετριμμένο τοπολογικά μοντέλο δε θα μπορούσε ποτέ να βγάλει αριθμό Chern διάφορο του μηδενός. Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο δεν είναι απαραίτητο: μηδενικοί αριθμοί Chern δε σημαίνει εν γένει ότι το μοντέλο έχει τετριμμένη τοπολογία.

Ο δε αριθμός Chern είναι η γενίκευση του γένους του θεωρήματος Gauss-Bonnet στο χώρο των ιδιοκαταστάσεων, αλλά δε μετράει τρύπες. Ωστόσο παραμένει ακέραιος. Όπως είπαμε, θα ήταν 0 αν είχαμε την ικανότητα να κάνουμε παράλληλη μετατόπιση του παραμετρικού ανύσματος σε μια κλειστή διαδρομή. Αν αρχίσω και μετατοπίζω παράλληλα ένα άνυσμα σε ένα βρόχο και μετά το τέλος της διαδρομής, το άνυσμα δε δείχνει προς την ίδια κατεύθυνση, σημαίνει μη μηδενική καμπυλότητα του χώρου –όπως το εκκρεμές του Φουκώ, που το επίπεδο ταλάντωσής του υφίσταται παράλληλη μετατόπιση και μετά από είκοσι τέσσερις ώρες ταλαντώνεται σε άλλη διεύθυνση λόγω της καμπυλότητας της επιφάνειάς όπου ταλαντώνεται- άρα έχω το δικαίωμα να κάνω παράλληλη μετατόπιση του παραμετρικού ανύσματος στο χώρο Hilbert σε κλειστό βρόχο για να αποφανθώ για την καμπυλότητά του. Αυτή η καμπυλότητα είναι η καμπυλότητα Berry.

Είναι ξεκάθαρο ότι ακριβώς αυτό έψαχνε η προηγούμενη ανάλυση: κουνούσε το παραμετρικό άνυσμα και ήλεγχε πόσο άλλαξαν οι καταστάσεις, ώσπου στο τέλος έκλεισε τη διαδρομή κι εκεί βρήκε τη φάση Berry. Στο Gauss –Bonnet ολοκληρώνεται η καμπυλότητα σε μια κλειστή επιφάνεια χωρίς όρια και βγαίνει ένας ακέραιος που συνδέεται με τις τρύπες. Στο χώρο Hilbert ολοκληρώνεται η καμπυλότητά του σε μια κλειστή επιφάνεια χωρίς όρια και βγαίνει 2π επί τον αριθμό Chern, το 2π έχει το νόημα ότι μιλάμε για φάσεις εδώ, και μιλάμε για φάσεις διότι μέχρις αλλαγή φάσης επιτρέπει η συμμετρία $U(1)$ στις καταστάσεις, αν δεν αλλάξει η Χαμιλτονιανή. Όμως αυτό δεν εξασφαλίζει ότι ο αριθμός Chern είναι ακέραιος. Θα προσπαθήσουμε να αιτιολογήσουμε ότι πράγματι είναι, δανειζόμενοι ένα γεωμετρικό σχήμα, αλλά είναι αρκετά εύλογο να επεκτείνονται τα συμπεράσματα και στο χώρο Hilbert. Αν ψάχνω πόσο άλλαξε η φάση στην παράλληλη μετατόπιση της παραμέτρου γύρω από το βρόχο του παρακάτω σχήματος, πρέπει να ολοκληρώσω την καμπυλότητα επάνω στην επιφάνεια.



Αλλά σε ποια από τις δύο, στη μικρή ή στη μεγάλη; Δεν έχει βέβαια σημασία, η αναντιστοιχία φάσης μεταξύ αρχικής και τελικής κατάστασης το ίδιο θα βγει, $\pm 2\pi n$ φυσικά. Όμως, ο αριθμός Chern είναι ακριβώς η διαφορά των δυο ολοκληρωμάτων δια 2π , οπότε πράγματι είναι ακέραιος.

Ενδεχομένως να μοιάζει διαφορετικός αυτός ο ορισμός από τον προηγούμενο, όπου ο αριθμός Chern ήταν το ολοκλήρωμα της καμπυλότητας σε μια κλειστή επιφάνεια δια 2π και όχι η διαφορά δυο τέτοιων ολοκληρωμάτων. Ωστόσο, αν συρρικνώσω απερίοριστα τη μικρή επιφάνεια, δηλαδή εξαντλήσω το βρόχο στο τίποτα, κι έχω δικαίωμα να το κάνω διότι δεν τρυπάω ούτε κολλάω τίποτα με τέτοια διαδικασία, είναι σαφές ότι το ένα από τα δυο ολοκληρώματα τώρα είναι 0 και το άλλο είναι το ολοκλήρωμα της καμπυλότητας σε όλη την επιφάνεια, και αν το διαιρέσω με 2π , είναι ακριβώς ο αριθμός Chern όπως τον όρισα πριν.

II. Κβαντικό φαινόμενο Hall

*Η σύνθεση της άμεσης αίσθησης ακολουθείται από την αίσθηση της αντίληψης.
Αφού πρώτα ένιωσες ότι είναι ένα πράγμα, τώρα νιώθεις ότι είναι πράγμα.*

Τζέιμς Τζόυς, Πορτραίτο του καλλιτέχνη σε νεαρά ηλικία

A. Ακέραιο (IQHE)

Στην εισαγωγή είδαμε τι σημαίνει τοπολογικό σύστημα, και τους λόγους που ιντριγκάρει πέρα από φυσικούς και ερευνητές της πληροφορικής. Τώρα θα αναφερθούμε σε δυο αρχετυπικά φαινόμενα που είναι από τη βάση τους τοπολογικά, το Ακέραιο Κβαντικό Φαινόμενο Hall (Integer Quantum Hall Effect -IQHE) και το Κλασματικό Κβαντικό Φαινόμενο Hall (Fractional Quantum Hall Effect -FQHE).

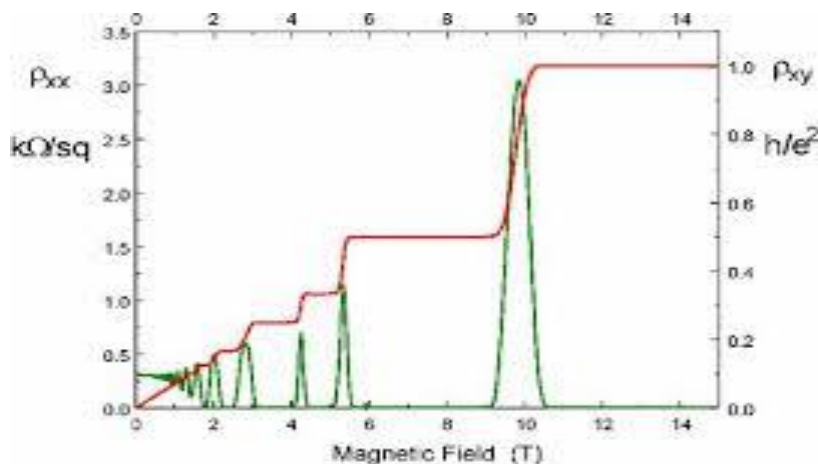
Αρχικά θα μιλήσουμε για το IQHE, που δεν είναι παρά ένα πρόβλημα ηλεκτρομαγνητισμού, και θα δούμε γιατί είναι τοπολογικό. Στη συνέχεια θα εξηγήσουμε τι είναι το FQHE, όπου θα δούμε ότι φαίνεται να απαγορεύεται να συμβαίνει αν όσα ειπώθηκαν για το IQHE είναι σωστά. Θα εξηγήσουμε όμως ότι δεν είναι έτσι, και ότι μάλιστα είναι και αυτό IQHE.

Τα δυο αυτά φαινόμενα, πέραν του τοπολογικού τους χαρακτήρα, είναι θαυμάσια αντικείμενα μελέτης διότι όπως θα φανεί, ενώ είναι μακροσκοπικά φαινόμενα, ταυτόχρονα είναι αμιγώς κβαντικά.

1. Αναγωγική διερεύνηση

Το σύστημα όπου λαμβάνει χώρα το IQHE είναι ένα σύστημα ηλεκτρονίων δεσμευμένο σε δύο διαστάσεις –δεσμευμένο με την έννοια που εξηγήσαμε στην εισαγωγή- και αυτό γίνεται εφαρμόζοντας στο ηλεκτρονιακό σύστημα ισχυρό μαγνητικό πεδίο, και κατεβάζοντας πάρα πολύ τη θερμοκρασία.

Υπό αυτές τις συνθήκες, ο Klaus von Klitzing το 1980 μέτρησε την αγωγιμότητα δειγμάτων πυριτίου ως συνάρτηση μιας εξωτερικής τάσης, και βρήκε ότι παρουσίαζε πλατώματα, τα οποία δίνονταν από τις τιμές για την αγωγιμότητα $\sigma = (e^2/h)n$, n ακέραιος, εξ ου και η ονομασία Ακέραιο, για να επιβεβαιώσει την πρόβλεψη που είχαν κάνει οι Ando, Matsumoto και Uemura πέντε χρόνια νωρίτερα – όμως οι ίδιοι πίστευαν ότι ήταν λάθος- και για να κερδίσει το Νόμπελ το 1985.



Όπου βλέπουμε το πλάτωμα στην αντίσταση, που βέβαια είναι το αντίστροφο της αγωγιμότητας, και άρα και εκείνη έχει πλάτωμα.

Στο δια ταύτα:

Ξεκινάμε από τη Lagrangian του ηλεκτρομαγνητισμού:

$$\mathcal{L} = (m/2)\dot{x}^\mu\dot{x}_\mu - e\dot{x}_\mu A^\mu, \text{ όπου } \dot{x}_\mu = dx_\mu/dt.$$

Η κανονική ορμή (παράγωγος της $\mathcal{L}$ ως προς $\dot{x}_\mu$) είναι $p^\mu = m\dot{x}^\mu - eA^\mu$, οπότε η Hamiltonian είναι:

$$H = \dot{x}_\mu p^\mu - \mathcal{L} = (p_\mu + eA_\mu)(p^\mu + eA^\mu)/2m.$$

Άρα έχουμε την $H = (1/2m)(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2$. Στη μελέτη του IQHE επιλέγεται η λεγόμενη βαθμίδα Landau (το $\mathbf{A}$ δεν είναι βαθμηδόν αναλλοίωτο, για να κάνω υπολογισμούς όπου εμπλέκεται πρέπει να διαλέγω βαθμίδα), στην οποία $\mathbf{A} = Bxy$ (αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι όντως ο στροβιλισμός αυτού είναι $\mathbf{B} = B\mathbf{z}$, και θέλουμε ακριβώς αυτό, ένα πεδίο κάθετο στο επίπεδο όπου ζουν τα ηλεκτρόνια, το οποίο εδώ θα είναι το xy).

$$\text{Άρα, } H = (p_x^2 + (p_y + exB)^2)/2m.$$

Αυτή δεν εξαρτάται καθόλου από τη συντεταγμένη y , κι αυτό μας υποψιάζει ότι οι ιδιοκαταστάσεις αυτής της H θα πρέπει να είναι στην μορφή $e^{iky}f_k(x)$. Τότε, η εξίσωση Schrodinger $H\psi = E\psi$, αποδίδει μια νέα εξίσωση ιδιοτιμών $h_k f = E f$, όπου:

$$h_k = -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (x + kl^2)^2, \quad \omega_c = eB/m, \quad l = (\hbar/eB)^{1/2}.$$

Δηλαδή, είναι η Χαμιλτονιανή ενός απλού, μονοδιάστατου, αρμονικού ταλαντωτή, που έχει τη θέση ισορροπίας στη θέση $-kl^2$. Οι λύσεις αυτής της Χαμιλτονιανής είναι γνωστές. Οι ιδιοτιμές της είναι:

$$E = \hbar \omega_c (n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Κάθε δείκτης n ορίζει και ένα διαφορετικό ενεργειακό επίπεδο, επίπεδα τα οποία αποκαλούνται επίπεδα Landau (LL για συντομία), με το $n=0$ να έχει το δικό του αρκτικόλεξο LLL (Lowest Landau Level). Γι' αυτό το επίπεδο η ιδιοκατάσταση είναι:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi^{1/2} L_y l}} e^{iky} e^{-\frac{1}{2l^2}(x + kl^2)^2}$$

ήτοι, μια Γκαουσιανή με κέντρο στη θέση $-kl^2$.

Το ότι κάθε k αποδίδει μια κατάσταση με διαφορετικό κέντρο, δείχνει ότι το LLL είναι εκφυλισμένο, μιας και χωράνε πολλές τέτοιες Γκαουσιανές στο δείγμα. Πόσες όμως; Όσον αφορά την y -διάσταση, προφανώς πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν την περιοδικότητα σε αυτό τον άξονα. Αν το δείγμα έχει μήκος L_y σ' αυτή τη διεύθυνση, τότε όσον αφορά αυτή τη διάσταση, απαιτώντας περιοδικές συνοριακές συνθήκες, δηλαδή $e^{ikL_y} = e^{ik \cdot 0} = 1$, $kL_y = 2\pi n_y$, οπότε ο αριθμός των πιθανών λύσεων είναι $n_y = kL_y/2\pi$. Όμως πρέπει ταυτόχρονα να δούμε πόσα k επιτρέπονται. Στη x -διάσταση, $0 \leq k l^2 \leq L_x$, ώστε τα κέντρα των Γκαουσιανών να είναι όλα μέσα στο δείγμα. Έτσι ο αριθμός εκφυλισμένων καταστάσεων γίνεται $N = (L_y/2\pi) \int_0^{L_x/l^2} dk = L_x L_y B / \Phi_0$, $\Phi_0 = h/e$.

Το Φ_0 όπως φαίνεται από τον τελευταίο τύπο αποτελεί μια θεμελιώδη στο πρόβλημα ποσότητα ροής, από την άποψη ότι η συνολική ροή που υπάρχει στο δείγμα, $B L_x L_y$ (η ροή είναι το $\oint \mathbf{B} d\mathbf{S}$ σε όλο το επίπεδο, κι εδώ B σταθερό και παράλληλο στην επιφάνεια που ορίζει το επίπεδο των ηλεκτρονίων) είναι ίση με τον αριθμό των εκφυλισμένων καταστάσεων επί ακριβώς αυτή την υποδιαίρεση ροής, δηλαδή σε κάθε εκφυλισμένη κατάσταση στο LLL αντιστοιχεί ροή Φ_0 , γι' αυτό αυτή τη ροή την αποκαλούμε κβάντο ροής.

Είναι προφανές ότι για μεγάλο πεδίο και για αρκετά εκτεταμένο δείγμα, θα έχουμε έναν τεράστιο εκφυλισμό, για την ακρίβεια για να μην είναι και τόσο μεγάλος θα πρέπει να έχω ένα πραγματικά μικρό δείγμα, καθότι η Φ_0 είναι μικρή ροή. Πού οφείλεται αυτός ο εκφυλισμός; Στη μη εξάρτηση της ενέργειας από το k . Αυτή η αδυναμία της ενέργειας να «δει» το κυματόνισμα της y -διεύθυνσης, την αναγκάζει να αποδώσει ως ιδιοκαταστάσεις όλες εκείνες που «χωράνε» στο δείγμα για τα διάφορα k , όπως υπολογίσαμε.

Αυτό δεν είναι καλή κατεύθυνση για απόδοση ρεύματος. Καταλαβαίνει κανείς ότι μεγάλος αριθμός ιδιοκαταστάσεων στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο, σημαίνει ότι δεν ευνοείται απολύτως καμία προσανατολισμένη κίνηση των ηλεκτρονίων!

Το ρεύμα στην y -διεύθυνση δίνεται από τον τελεστή $J_y = (-e/m)(p_y + eA_y)$, οπότε μπορούμε να βρούμε στο LLL το ρεύμα $\langle \psi | J_y | \psi \rangle$, ολοκληρώνοντας ως προς x, y . Αν θεωρήσω μακροσκοπικό δείγμα, δηλαδή όρια ολοκλήρωσης για το dx στο άπειρο, τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι το ρεύμα αυτό είναι 0:

$\langle \psi | J_y | \psi \rangle = -(e/m\pi^{1/2}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x - X_k) / l^2 (\hbar k + eBx) dx = - (e\omega_c / \pi^{1/2}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(x - X_k) / l^2 (x - X_k) dx = 0$, λόγω του ότι η ολοκληρωτέα είναι περιττή συνάρτηση του $x - X_k$.

Ο εντοπισμός του λόγου του εκφυλισμού μας παρέχει και μια συνταγή για να τον σπάσουμε: θα πρέπει να εισάγω στη Χαμιλτονιανή έναν όρο που θα οδηγήσει την ενέργεια να εξαρτάται και από το k .

Η πιο εύλογη σκέψη είναι να ψάξουμε τι γίνεται με εφαρμογή εξωτερικής τάσης. Θα ήθελα να κρατήσω την y -μεταφορική συμμετρία που διέπει το πρόβλημα λόγω της πολύ βολικής μορφής λύσεων που αποδίδει, οπότε θα προτιμήσω ένα δυναμικό eEx , ήτοι ένα πεδίο στη x -διεύθυνση. Το μόνο που έχω να κάνω είναι να βάλω αυτό τον όρο στη Χαμιλτονιανή και να συμπληρώσω εκ νέου τα τετράγωνα, αφού τώρα θα έχω όρο $(1/2)m\omega_c^2(x + kl^2) + eEx$. Με απλή άλγεβρα η νέα Χαμιλτονιανή βγαίνει:

$$\begin{aligned} h_k &= -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (x + kl^2)^2 + eEx \\ &= -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 \left(x + kl^2 + \frac{eE}{m\omega_c^2} \right)^2 - eEX'_k + \frac{1}{2} m \bar{v}, \end{aligned}$$

Όπου τα X'_k είναι τα νέα κέντρα των Γκαουσιανών $-kl^2 - eE/m\omega_c^2$, και $\bar{v} = -E/B$.

Άρα, τώρα η ενέργεια εξαρτάται από τα X_k και άρα πετύχαμε αυτό που θέλαμε, άρση του εκφυλισμού.

Τώρα, μπορώ να υπολογίσω την ομαδική ταχύτητα, που είναι $v_g = (1/\hbar) \frac{\partial E}{\partial k} = -E/B$.

Άρα $\langle J_y \rangle = -\rho v_g = eE/B$, που δίνει το κβάντο αγωγιμότητας $\sigma_{xy} = e\rho/B$, (ρ η σωματιδιακή πυκνότητα των e).

Αυτό είναι το κλασικό αποτέλεσμα, όπως εύκολα μπορεί να επαληθεύσει κανείς. Αν βάλω ένα καθαρό δείγμα πυκνότητας ρ σε μαγνητικό πεδίο B υπό τάση E στη μια διεύθυνση, στην άλλη θα εμφανιστεί ρεύμα, και με τις γνώσεις του κλασικού ηλεκτρομαγνητισμού μπορούμε να υπολογίσουμε ακριβώς αυτή την αγωγιμότητα.

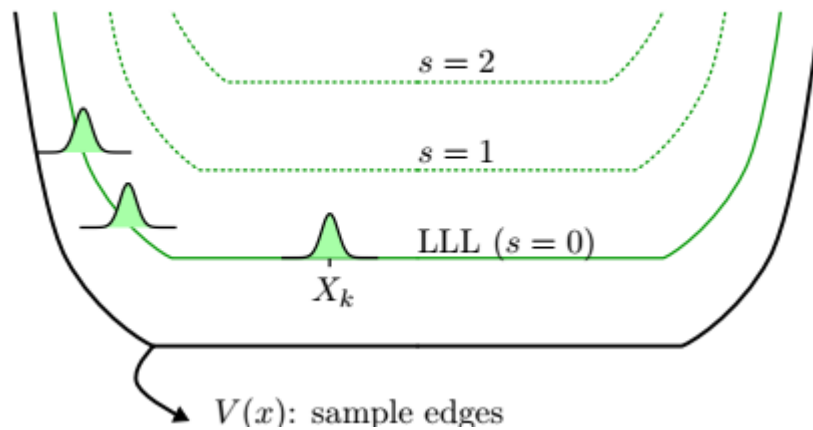
Έχουμε θεωρήσει ότι είμαστε σε κατάσταση όπου έχω πλήρως συμπληρωμένα n επίπεδα Landau, άρα η πυκνότητα θα είναι $\rho = nN/L_x L_y$, N ο αριθμός των εκφυλισμένων καταστάσεων σε κάθε LL, μιας και η εφαρμογή του εξωτερικού πεδίου, παρόλο που ήρε τον εκφυλισμό, δε θα μπορούσε να επηρεάσει τον αριθμό των ηλεκτρονίων στο δείγμα, τα οποία μπορούν να μετρηθούν από το πόσες καταστάσεις καταλαμβάνουν πριν αρθεί ο εκφυλισμός, μιας και είναι φερμιόνια κι έκαστο καταλαμβάνει ακριβώς μια κατάσταση. Άρα, $\rho = nB/\Phi_0$, οπότε $\sigma_{xy} = ne\Phi_0 = ne^2/h$.

Η ανάλυση βασίστηκε μόνο στην μεταφορική συμμετρία, σε ένα δείγμα με μεταφορική συμμετρία αυτή θα πρέπει να είναι αγωγιμότητα. Ωστόσο υπάρχει ένα πρόβλημα, και είναι σοβαρό: στις πραγματικές ετεροδομές (πχ GaAs) όπου μετρήθηκε πολλάκις η αγωγιμότητα, η πυκνότητα δεν είναι με ακρίβεια κβαντισμένη, φιζάρεται με εισαγωγή προσμίξεων. Το ακέραιο κβαντικό φαινόμενο Hall, για την ακρίβεια, συμβαίνει ακόμη και σε δείγματα στα οποία δεν υπάρχει η παραμικρή μεταφορική συμμετρία, που ήταν θεμελιώδες συστατικό της ανάλυσής μας. Τα παραπάνω, επαληθεύουν τα πλατώματα, αλλά την ίδια στιγμή δε δίνουν καμία πειστική εξήγηση για τη στιβαρότητα του φαινομένου, και την αδιαφορία του για την καθαρότητα του δείγματος. Μάλιστα, αντιθέτως αν σκεφτούμε τι θα συνέβαινε σε αυθαίρετες πυκνότητες, τότε καταλαβαίνουμε ότι χρειάζεται να σκεφτούμε διαφορετικά για μια πλήρη εξήγηση του φαινομένου.

Είμαστε άρα αναγκασμένοι να στραφούμε στα συστατικά του ρεαλιστικού δείγματος, τα οποία μπορούν να αναιρέσουν τη μεταφορική συμμετρία. Αυτά είναι οι αιχμές του δείγματος – κανένα δείγμα δεν εκτείνεται στο άπειρο- και οι ατέλειες, οι περιοχές αταξίας. Αυτά θα μελετήσουμε, ελπίζοντας να βρεθεί τρόπος να αποδοθούν τα σωστά πλατώματα.

2. Στις αιχμές

Για να μη χαλάσω –για λίγο ακόμη- την τόσο βολική μεταφορική συμμετρία στον y –άξονα, θεωρώ σε αυτή τη διεύθυνση περιοδικές συνθήκες, ή εναλλακτικά ότι εκτείνεται στο άπειρο, δεν κάνει διαφορά σε όσα θα πούμε. Για τη βαθμίδα του δυναμικού, θα κρατήσω και πάλι τη βαθμίδα Landau, γιατί αποδίδει βολικές κυματοσυναρτήσεις, εντοπισμένες γύρω από κάποια κέντρα οι οποίες εκτείνονται σε ένα τυπικό εύρος L , όπως ξέρουμε ότι κάνουν οι Γκαουσιανές. Τώρα, θέλω να περιορίσω το πρόβλημα σε ένα συγκεκριμένο εύρος στη x –διεύθυνση. Αυτό θα το επιτύχω θεωρώντας ένα δυναμικό ικανό να περιορίσει τα ηλεκτρόνια σε ένα συγκεκριμένο εύρος, το οποίο, για να παραμείνουν προσεγγιστικά Γκαουσιανές οι λύσεις, θεωρώ ότι αλλάζει ομαλά στην κλίμακα που ορίζει το L .



Όπου φαίνεται το περιοριστικό δυναμικό και η επίδρασή του στις Γκαουσιανές.

Στον κυρίως όγκο του δείγματος, όπου το δυναμικό είναι περίπου σταθερό, δεν αναμένουμε καθόλου μεγάλες αλλαγές στις κυματοσυναρτήσεις. Όμως στη γειτονιά των αιχμών, τα πράγματα δεν είναι έτσι: οι Γκαουσιανές που έχουν τα κέντρα τους εντοπισμένα στις αιχμές, λόγω του ότι η δυνατότητά τους να επεκταθούν στο τυπικό μήκος l από το δυναμικό είναι περιορισμένη, αναγκάζονται να ανυψωθούν ενεργειακά. Αυτό γιατί αφού μειώνεται το εύρος τους Δx , η αρχή της αβεβαιότητας απαιτεί να αυξηθεί το εύρος του Δp , σε τάξη μεγέθους και του p , άρα αυξάνουν και την ενέργειά τους. Κοντά στις αιχμές, οι διάφορες καταστάσεις αναγκάζονται από το περιοριστικό δυναμικό να ανυψωθούν ενεργειακά.

Τότε, λόγω του ότι στο ίδιο επίπεδο Landau έχω διαφορετικές ενέργειες, έχω και πάλι διασπορά, που διέπεται από την:

$$v_g = (1/\hbar) \frac{\partial E}{\partial k} = (1/\hbar) \frac{\partial E}{\partial X_k} \frac{\partial X_k}{\partial k} = -(\ell^2/\hbar) \frac{\partial E}{\partial X_k}$$
 Στην αριστερή αιχμή, προφανώς καθώς προχωράμε στα X_k , δηλαδή κινούμαστε προς τον όγκο του δείγματος η ενέργεια μειώνεται, οπότε $v_g > 0$ στην αριστερή αιχμή, και όμοια $v_g < 0$ στη δεξιά αιχμή. Αυτό μεταφράζεται απλά ως ότι οι δυο αιχμές φέρουν αντίθετα ρεύματα. Μάλιστα, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι στον όγκο το ρεύμα είναι 0 απουσία πεδίου, σημαίνει ότι το ρεύμα στον όγκο κάνει κλειστές διαδρομές, οπότε μπορούμε να απεικονίσουμε αυτά τα ρεύματα αιχμών ως χειραλικές καταστάσεις, που ανοίγουν κανάλι διέλευσης του ρεύματος.

Τώρα, εφαρμόζω όπως και πριν μια τάση στη x –διεύθυνση και υπολογίζω το ρεύμα στην y –διεύθυνση (ας μην ξεχνάμε ότι είμαστε σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, το ρεύμα θα είναι στην y –διεύθυνση). Το ρεύμα είναι η συνολική συνεισφορά $e v_g$ για όλες τις κατειλημμένες καταστάσεις, άρα πρέπει να ολοκληρώσω την ταχύτητα ομάδας πάνω σε όλα τα k :

$$I_y = -e \int_{-\infty}^{\infty} (dk/2\pi) (1/\hbar) \frac{\partial E}{\partial k} n_k$$
 n_k η πιθανότητα κατάληψης του τρόπου k . Αν έχω το επίπεδο Fermi του συστήματος να βρίσκεται ανάμεσα σε 2 επίπεδα Landau, ο αριθμός κατάληψης n_k για κάθε k προφανώς θα είναι n , όπου n ο αριθμός των γεμάτων LL, μιας και το καθένα απ' αυτά έχει κατειλημμένο κι έναν τρόπο k . Έτσι,

$$I_y = -(ne/h) \int_{\mu_L}^{\mu_R} dE = -(ne/h)(\mu_R - \mu_L)$$
, μ τα χημικά δυναμικά στις δυο αιχμές, και βέβαια είναι προφανές ότι η διαφορά τους είναι η εξωτερική τάση που εφαρμόσαμε, άρα $I_y = -(ne/h)eV \Rightarrow I_y/V = -ne^2/h$, που είναι ακριβώς τα πλατώματα

αγωγιμότητας που παρατηρήθηκαν. Σημειώστε ότι ο ακέραιος αριθμός κβάντων αγωγιμότητας μετράει τα επίπεδα Landau.

Σημειώνεται ότι τυπικά για να χρησιμοποιηθεί ο όρος «επίπεδο Fermi» πρέπει να είμαστε σε θερμοδυναμική ισορροπία, και πράγματι στο πείραμα η αγωγιμότητα υπό τέτοιες συνθήκες μετράται, οπότε είμαστε έγκυροι.

Προς το παρόν λοιπόν, φαίνεται ότι ο τρόπος που διαμορφώνεται το δείγμα αν απαιτήσω να έχει αιχμές, είναι υπεύθυνος για το IQHE, και αυτό δίνει και μια αμυδρή απόχρωση τοπολογίας, μιας και το μόνο που χρειάστηκε ήταν αιχμές, αφού δείξαμε ότι παρουσία αιχμών εμφανίζεται ένα κανάλι μεταφοράς ρεύματος από τη μια στην άλλη.

Το φαινόμενο όμως παρατηρείται ακόμη και σε δείγματα με αταξία. Πού οφείλεται αυτό; Εν γένει το ρεύμα που φέρει ένα κανάλι είναι $e^2|T|^2/h$, $|T|^2$ το πλάτος πιθανότητας το ηλεκτρόνιο να μεταβεί μέσα από την άτακτη περιοχή. Εδώ, από τη στιγμή που άνοιξε το κανάλι –με εφαρμογή της τάσης– οι καταστάσεις στις αιχμές είναι χειραλικές, κι αυτό είναι σημαντικό γιατί σημαίνει ότι το ρεύμα στις αιχμές δεν έχει τρόπο να σκεδαστεί προς τα πίσω στο δείγμα! Αν είχαμε οπισθοσκέδαση, θα σήμαινε ότι στην τυχούσα αταξία υπήρχε ένα ρεύμα πιθανότητας προς τη μια πλευρά και ένα προς την άλλη· εδώ το ρεύμα πιθανότητας είναι μόνο προς τη μια πλευρά, που σημαίνει ότι $|T|^2=1$, οπότε όσα είπαμε δεν επηρεάζονται από την αταξία που μπορεί να υπάρχει μέσα στο δείγμα.

Τώρα, κι ενώ όλα δείχνουν εντάξει, προς μεγάλη μας απόγνωση, παρατηρούμε το εξής: για να λειτουργήσουν όλα όσα είπαμε πρέπει να υπάρχει ένα τουλάχιστον πληρωμένο LL, ήτοι πρέπει το επίπεδο Fermi να βρίσκεται κάπου ανάμεσα σε δυο LL. Όμως είμαστε βέβαιοι ότι δεν είναι κάτω από το LLL;

Για να το ελέγξουμε, σκεφτόμαστε ως εξής: υποθέτουμε ότι το εύρος του δείγματος που δουλεύουμε είναι L_x και το εύρος της περιοχής που θεωρούμε τυπικά ως αιχμή είναι W_x , και βέβαια $W_x \ll L_x$. Ενθυμούμενοι ότι στην y –διεύθυνση το σύστημα είναι περιοδικό, επιτρέπονται οι τιμές $k=(2\pi/L_y)n$, n ακέραιος, οπότε έχουμε για τις Γκαουσιανές κέντρα στις θέσεις $X_n=(2\pi\ell^2/L_y)n$.

Έτσι, μπορώ να μετρήσω τον αριθμό των διαθέσιμων καταστάσεων:

Στον όγκο: (Εύρος όγκου)/(Εύρος διαστήματος μεταξύ δυο διαδοχικών καταστάσεων) $= L_x/(X_n - X_{n-1}) = L_x L_y / 2\pi\ell^2$

Στις αιχμές: $W_x/(X_n - X_{n-1}) = W_x L_y / 2\pi\ell^2$, δηλαδή ο αριθμός των καταστάσεων στον όγκο είναι πολύ μεγαλύτερος από εκείνον στις αιχμές!

Γιατί αυτό είναι ενοχλητικό για όσα είπαμε; Διότι αν υποθέσω συγκεκριμένη πυκνότητα, δηλαδή συγκεκριμένο αριθμό ηλεκτρονίων, τότε σχεδόν για οποιοδήποτε μαγνητικό πεδίο, λόγω της πολύ μεγαλύτερης διαθεσιμότητας στον όγκο τα ηλεκτρόνια θα καταλάβουν τις δικές του καταστάσεις, και το χημικό δυναμικό θα εντοπίζεται εκεί· τα ηλεκτρόνια δε θα τοποθετηθούν στις καταστάσεις αιχμής, πάει να πει δεν έχει συμπληρωθεί ούτε το LLL, που σημαίνει ότι δεν ανοίγει το κανάλι ρεύματος!

Το μέχρι τώρα σκεπτικό, είναι η δοκιμασμένη συνταγή που θα ακολουθούσε ο κάθε γνώστης της κβαντομηχανικής. Άλλωστε, ένα πρόβλημα κβαντομηχανικής επιλύσαμε και προσπαθήσαμε να το προσαρμόσουμε σε πραγματικές συνθήκες, με τις αιχμές. Είναι η τελευταία διαπίστωση, ότι το επίπεδο Fermi εντοπίζεται στον όγκο, που μας αναγκάζει να το γκρεμίσουμε.

Η ανάλυση που κάναμε ως τώρα ήταν απλουστευμένη σε πολλά σημεία της. Η χρησιμότητά της κι ο λόγος που αναφέρθηκε εδώ αντί να δοθούν κατευθείαν οι εξηγήσεις που πρέπει, είναι ότι αναδεικνύει το IQHE ως ένα φαινόμενο ιδιαίτερα βαθυστόχαστο, που η κατανόησή του υπερβαίνει το αναγωγικό σκεπτικό του να αναλύσουμε τα επιμέρους τμήματα (τα ηλεκτρόνια) και να βγάλουμε συμπέρασμα για τη συνολική συμπεριφορά.

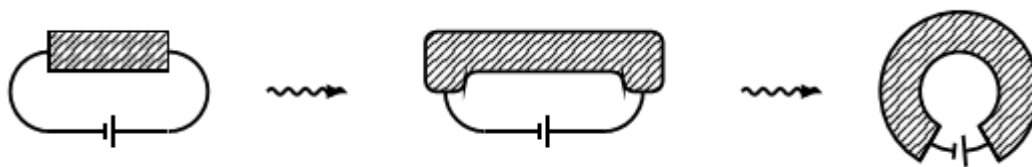
Στην πραγματικότητα είναι ένα ανακύπτον φαινόμενο, όπως χαρακτηρίζονται, εκείνα τα φαινόμενα που εμφανίζουν μοτίβα και συμπεριφορές λόγω των αλληλεπιδράσεων των συστατικών τους που τα ίδια τα συστατικά δεν τις εμφανίζουν. Όπως τα άτακτα τοποθετημένα μόρια του νερού καταφέρνουν και σχηματίζουν συμμετρικές δομές στις χιονονιφάδες, η κβάντωση της αγωγιμότητας είναι μια θαυμαστή συμπεριφορά, που απλώς δε μπορεί να προκύψει επαγωγικά από το ένα στα πολλά.

3. Η ιδέα του Laughlin

Ο Laughlin για να δώσει μια πειστική εξήγηση των πλατωμάτων της αγωγιμότητας, κατέφυγε σε ένα κομψό επιχείρημα.

Το σκεπτικό του ήταν το εξής: αφού η αγωγιμότητα σ_{xy} είναι κβαντισμένη, δε θα εξαρτάται από τη λεπτομερή γεωμετρία του δείγματος. Ήδη, απ' αυτό είναι ξεκάθαρος ο τοπολογικός χαρακτήρας του επιχειρήματος. Άρα, η λωρίδα που έχουμε χρησιμοποιήσει ως τώρα ως δείγμα, μπορεί να παραμορφωθεί ως εξής: μπορούμε να αρχίσουμε να τη διπλώνουμε, να κολλήσουμε τις δυο αιχμές τις λωρίδας στις οποίες εφαρμόζαμε πριν τάση, κι έτσι να σχηματιστεί ένας κυκλικός δίσκος με τρύπα στη μέση. Τώρα βέβαια, κόλλησα δυο πλευρές που όπως είπαμε αυτό αλλάζει την τοπολογία, ωστόσο μην ξεχνάμε ότι μιλάμε για την περίπτωση που έχω ήδη εφαρμόσει εξωτερική τάση, πάει να πει έχω ήδη συνδέσει τις δυο πλευρές που κόλλησα με το καλώδιο και τη μπαταρία, οπότε με το να τις κολλήσω απλώς συρρίκνωσα το καλώδιο, που φυσικά επιτρέπεται τοπολογικά.

Τώρα υπάρχουν αιχμές στην εσωτερική και την εξωτερική πλευρά του δίσκου, αλλά οι περιοδικές συνθήκες σ' αυτό τον άξονα μας επιτρέπουν να μην ανησυχούμε ιδιαίτερα –ήδη εμφανίζεται μια τοπολογία τόρου, θα αναφερθούμε παρακάτω.



Όπου δείχνουμε το πώς διπλώνει το δείγμα.

4. Η νέα βαθμίδα

Είναι και ξεχωριστή ενότητα! Στην ιδέα του Laughlin αυτή η βαθμίδα έχει κάποια πράγματα να πει, ωστόσο η αξία της θα φανεί στο πόσο σημαντικές ιδιότητες του FQHE μπορεί να αποδώσει, και μάλιστα με πολύ απλά επιχειρήματα.

Στη νέα μας γεωμετρία λοιπόν, θα είναι πιο βολικό αν επιλέξουμε μια άλλη βαθμίδα για το $\mathbf{A}$, μιας και η βαθμίδα Landau δεν είναι πια τόσο βολική, με την προτίμησή της προς μια διεύθυνση. Αντίθετα, βολικότερη είναι η επιλογή $\mathbf{A}=(1/2)\mathbf{B}\mathbf{A}r$, το Λ συμβολίζει εξωτερικό γινόμενο. Το πεδίο $\mathbf{B}=\mathbf{B}z$ παραμένει ως έχει, έτσι κι αλλιώς ο z -άξονας παραμένει ο κάθετος στο επίπεδο του δείγματος. Οπότε $\mathbf{A}=(B/2)(-y, x, 0)$. Η Χαμιλτονιανή και πάλι θα είναι

$$H=(1/2m)(\mathbf{p}+e\mathbf{A})^2=(1/2m)[(p_x-(eB/2)y)^2+(p_y+(eB/2)x)^2], \text{ όπου πάντα } p_{x,y}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x,y}.$$

Υπάρχει λίγη άλγεβρα στα παρακάτω βήματα, που δε θα την επαναλάβω πλήρως. Πρώτα θέτω $x-iy=z$, $x+iy=\bar{z}$, και τότε με στοιχειώδεις πράξεις προκύπτει:

$$H=(\hbar^2/2m)[z\bar{z}/4l^2 - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} -(1/l^2)(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}})].$$

Τώρα θέτω κατάλληλους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής ή σκάλας όπως αλλιώς λέγονται,

$\alpha^+=(1/2^{1/2})(\bar{z}/2l^2-2\frac{\partial}{\partial z})$, $\alpha=(1/2^{1/2})(z/2l^2+2\frac{\partial}{\partial \bar{z}})$. Είναι όντως τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, γιατί μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι υπακούν στη σχέση $[\alpha, \alpha^+]=1$. Με αυτό ανά χείρας, και ακόμη λίγη άλγεβρα, βρίσκουμε ότι $H=\hbar\omega_c(\alpha^+\alpha+1/2)$, που είναι και πάλι Χαμιλτονιανή ταλαντωτή, και γνωρίζουμε ότι αποδίδει τις ενέργειες $\hbar\omega_c(n+1/2)$, με τα $n=0,1,2,\dots$ να αποτελούν εδώ τα επίπεδα Landau, και να είναι οι ιδιοτιμές του $\alpha^+\alpha$.

Την ίδια στιγμή, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν κι άλλοι διαθέσιμοι τελεστές δημιουργίας και καταστροφής, οι $\beta^+=(1/2^{1/2})(z/2l^2-2\frac{\partial}{\partial \bar{z}})$, $\beta=(1/2^{1/2})(\bar{z}/2l^2+2\frac{\partial}{\partial z})$, και μπορούμε και πάλι να επαληθεύσουμε τη σχέση $[\beta, \beta^+]=1$.

Προφανώς η μονοσωματιδιακή κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στο κενό της θεωρίας ορίζεται από την απαίτηση $\alpha\psi(0,0)=\beta\psi(0,0)=0$.

$\alpha\psi=0 \Rightarrow \bar{z}\psi/2l^2+2\frac{\partial\psi}{\partial z}=0 \Rightarrow \psi(0,0)=(1/2\pi l^2)^{1/2}\exp(-z\bar{z}/4l^2)$, που επαληθεύει και την $\beta\psi(0,0)=0$ (ο συντελεστής προέκυψε απ' τη συνήθη απαίτηση το πλάτος πιθανότητας σε όλο το χώρο να δίνει μονάδα).

Στο LLL, είναι $n=0$, δηλαδή όλοι οι μονοσωματιδιακές κυματοσυναρτήσεις που βρίσκονται σ' αυτό το επίπεδο θα κρίνονται αποκλειστικά από τη δράση του β^+ στο κενό:

$$\eta_{0,m}=(\beta^+)^m\psi(0,0)/(m!)^{1/2}=(1/(2\pi 2^m m!))^{1/2}z^m\exp(-|z|^2/4l^2).$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η εξάρτηση τους από το $z^m\exp(-|z|^2/4l^2)$.

Μπορεί να προκαλεί ενδοιασμούς η επιλογή $z=x-iy$, αντί $z=x+iy$ ως συνήθως. Δεν είναι κάτι πολύ σημαντικό, άλλωστε πώς θα μπορούσε, αφού είναι καθαρά θέμα σύμβασης; Όπως και να 'χει, για λόγους πληρότητας: οι τελεστές α , α^+ δεν ξέραμε απ' την αρχή ποιοι θα βόλευε να είναι για να φτάσω απ' την H που είχα στην H του αρμονικού ταλαντωτή, που ξέρω να τη χειριστώ. Ωστόσο, αν παρατηρήσει κανείς την $H/\hbar\omega_c - 1/2$, παραγοντοποιείται, και με λίγη φαντασία ή λίγο reverse engineering ξέροντας ότι θέλει να φτάσει σε H ταλαντωτή, θα βρει ότι οι α , α^+ έτσι πρέπει να οριστούν, για να έχουν και την ιδιότητα $[\alpha, \alpha^+]=1$. Οι β , β^+ , πέραν του ότι είναι οι α , α^+ υπό την ανταλλαγή $z \rightarrow \bar{z}$, $\bar{z} \rightarrow z$, δεν είναι και πολύ ξεκάθαρο από πού ακριβώς προέκυψαν. Στην πραγματικότητα, δεν προέκυψαν στην τύχη, ούτε έχει κάποια σχέση το θέμα της ανταλλαγής: εκείνο που έχει σχέση είναι η στροφορμή. Αν πάει κανείς να

υπολογίσει τη z –συνιστώσα της $L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta}$ (ο ορισμός απαιτεί $z = x - iy = re^{-i\theta}$), αφού γράψει τη μερική παράγωγο συναρτήσεων των μερικών ως προς τους μιγαδικούς, θα τη βρει να είναι $L_z = \hbar(\alpha^+ \alpha - \beta^+ \beta)$. Δηλαδή, δε θα ήξερε ακόμα το β , αλλά πηγαίνοντας να την εκφράσει συναρτήσεων των γνωστών α , α^+ θα έβλεπε ότι το τμήμα που περισσεύει μπορεί να γραφεί ως $\beta^+ \beta$, και με την απαίτηση $[\beta, \beta^+] = 1$, θα τους όριζε έτσι (το γιατί τόση εμμονή με τους τελεστές σκάλας, είναι γνωστό εξ απαλών ονύχων στην κβαντομηχανική: από μια γνωστή κατάσταση μπορούν να μας στέλνουν με κατά βούληση εφαρμογή τους σε κάθε άλλη κατάσταση). Τώρα, η εξίσωση ιδιοτιμών του L_z απαιτεί $L_z = \hbar m$, δηλαδή $\beta^+ \beta = \alpha^+ \alpha - m$, όπου τώρα, αν φιξάρω το επίπεδο Landau n , προφανώς $m = n, n-1, n-2, \dots$. Για να βρω την τυχούσα κατάσταση $|n, m\rangle$ κατά τα γνωστά δρω στο κενό $|0, 0\rangle$ με τις ποσότητες $(\beta^+)^{n-m}(\alpha^+)^n / \sqrt{n! (n-m)!}$.

Ποια θα ήταν η διαφορά με το συνήθη ορισμό; Αφού ο συνήθης ορισμός δεν είναι άλλος από το να αλλάξω πρόσημο στα φανταστικά μέρη των $z, \bar{z}$, απλώς θα άλλαζε τις θέσεις των $\alpha^+ \alpha, \beta^+ \beta$ στη στροφορμή, όμως τότε $\beta^+ \beta = \alpha^+ \alpha + m$, με το m τώρα να παίρνει τιμές $m = -n, -n+1, \dots$ και η τυχούσα $|n, m\rangle$ θα δινόταν απ' τη δράση στο κενό $|0, 0\rangle$ της ποσότητας $(\beta^+)^{n+m}(\alpha^+)^n / \sqrt{n! (n+m)!}$, που όμως λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι τώρα το m παίρνει ακριβώς τις αντίθετες τιμές με πριν, αποδίδει τις ίδιες καταστάσεις, ως όφειλε. Ωστόσο, στον υπολογισμό των καταστάσεων στο χαμηλότερο επίπεδο Landau $n=0$, εκεί που είναι οι κυματοσυναρτήσεις ανάλογες του z^{-m} (το $-$ δεν πειράζει, αφού το $m \leq 0$) θα ήταν ανάλογες του $\bar{z}^m$, όπου φυσικά δεν έχει διαφορά, μιλάμε πάντα για την ποσότητα $x - iy$. Και φυσικά προτιμήσαμε να έχουμε μιγαδικούς αριθμούς και όχι συζυγείς κάποιων μιγαδικών αριθμών.

Στα σπουδαία τώρα: στο LLL $n=0$, οπότε $-m=0, 1, 2, \dots$ ήτοι οι καταστάσεις είναι όλες πολυώνυμα του z , ο συζυγής του δεν εμφανίζεται πουθενά στην κυματοσυνάρτηση (το εκθετικό είναι πραγματικός αριθμός). Σκεφτείτε ότι σε κάθε άλλο επίπεδο Landau, υπάρχουν δυνατές τιμές για το m που είναι θετικές, όπερ σημαίνει θα υπάρχουν εν γένει όροι $1/z, 1/z^2$ κλπ (φυσικά τέτοιοι όροι μπορούν να γραφούν $\bar{z}/|z|^2$, κοκ δηλαδή τα άλλα επίπεδα Landau περιέχουν και όρους συζυγείς του z).

Δηλαδή, το LLL έχει τη σημαντικότερη ιδιότητα να είναι το μοναδικό που έχει κυματοσυναρτήσεις που είναι αναλυτικές ως προς z ! Αλλά και αντίστροφα, κάθε συνάρτηση αναλυτική βρίσκεται στο χαμηλότερο επίπεδο Landau, αφού μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο Taylor, οπότε θα είναι απλώς μια υπέρθεση καταστάσεων για τις οποίες $n=0$. Αυτό έχει συγκλονιστική σημασία στο FQHE, όπως θα δούμε παρακάτω.

5. Και τώρα η αντλία

Αν γράψω τους μιγαδικούς σε πολικές συντεταγμένες $z = re^{-i\theta}$, οι κυματοσυναρτήσεις του LLL είναι ανάλογες του $\exp(-r^2/4\ell^2) r^m e^{-i\theta m}$. Τώρα, θα πρέπει να φανεί το ότι αυτή η βαθμίδα είναι πράγματι πιο βολική για τη μελέτη του δίσκου που προέκυψε όταν δίπλωσα το δείγμα.

Είναι εμφανές ότι καθεμιά απ' αυτές είναι μια Γκαουσιανή επί πολυώνυμο, οπότε ψάχνω που παρουσιάζει την κορυφή της, παραγωγίζοντας ως προς r : πολύ εύκολα προκύπτει ότι $r_m = (2m)^{1/2} \ell$. Εδώ μια σύντομη διευκρίνιση: τα m ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ

επίπεδα Landau. Είναι απλώς δείκτες που όπως φαίνεται απ' την τελευταία σχέση αποδίδουν τις ακτίνες όπου είναι κεντραρισμένες οι κυματοσυναρτήσεις, οι οποίες ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ LLL. Αν πρέπει, για να αποφεύγεται η σύγχυση που μπορεί να επιφέρουν οι δυο δείκτες, μπορούμε να σκεφτούμε τα επίπεδα Landau ότι απεικονίζουν και κινητικότητα, πόσο ανυψωμένα ενεργειακά είναι τα σωμάτια μας, όχι που βρίσκονται κεντραρισμένα, τα m είναι αν θέλετε άλλος ένας τρόπος να μετράμε τον εκφυλισμό των LL.

Τώρα, μπορούμε να υπολογίσουμε τη ροή που περικλείεται μέσα στην m – οστή κυματοσυνάρτηση: $\Phi = B\pi r_m^2 = 2m(\hbar/eB)\pi B = m\hbar/e = m\Phi_0$, Φ_0 ακριβώς το ίδιο κβάντο ροής που βρήκαμε όταν υπολογίζαμε πόση ροή αντιστοιχεί σε κάθε εκφυλισμένη κατάσταση, οπότε πράγματι συνεπής η εικόνα που εισήγαμε.

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι από το κέντρο του δίσκου εισάγεται άλλο ένα κβάντο ροής – αυτή είναι η δουλειά της μπαταρίας, αφού αυτό κάνει, θυμηθείτε το Νόμο του Faraday). Πολύ σημαντικό είναι αυτή η εισροή να γίνει με τρόπο αδιαβατικό, σε χρόνο $\tau \gg 1/\omega_c$. Αυτό για να μη διεγείρω καμία κατάσταση σε ανώτερο LL. Τότε, η νέα ροή που θα περικλείεται από την m – οστή κατάσταση προφανώς θα είναι η παλιά συν τη νέα, δηλαδή $(m+1)\Phi_0$, που όμως είναι η ροή που περικλείεται από την $(m+1)$ – οστή κυματοσυνάρτηση. Δηλαδή με την εισροή ενός κβάντου ροής, μεταφέραμε μια κατάσταση από τα ενδότερα του δίσκου προς τα εξώτερα. Αυτή είναι η αντλία του Laughlin, παρόλο που κάναμε εισαγωγή ροής, οπότε εδώ δεν είναι τόσο αντλία όσο κρουνός, αλλά βέβαια με αντίθετο πεδίο θα δημιουργούσα αντίθετη ροή, οπότε θα είχα αντλία, δεν κάνει διαφορά σ' αυτό που θέλαμε να πούμε, απλώς τότε θα τραβούσε καταστάσεις προς τα μέσα. Το σπουδαίο είναι ότι η εισαγωγή ή εξαγωγή μιας σειράς κβάντων ροής από το κέντρο μετακινεί όλες τις καταστάσεις του δείγματος.

Είμαστε έτοιμοι τώρα: είναι $V = -d\Phi/dt = -\Phi_0/\tau$, λόγω της αδιαβατικής προσέγγισης όλα έγιναν γραμμικά. Επίσης $I = dQ/dt = e/\tau$, έτσι $I/V = -e/\Phi_0 = -e^2/h$, που δίνει ακριβώς το κβάντο της $\sigma_{xy} = I/V$. Η εισροή ενός κβάντου ροής μετέφερε κβαντισμένα φορτία κατά μήκος της ακτινικής διεύθυνσης του δίσκου, και γι' αυτό παρατηρήθηκαν τα πλατώματα.

Πολύ συχνά το φαινόμενο καλείται και φασματική ροή, διότι ενώ το φάσμα είναι το ίδιο – δεν άλλαξα LL- η θεμελιώδης, το κενό της θεωρίας, έχει διεγερθεί αφού το $m=0$ έγινε $m=1$. Τώρα, θα εξηγήσουμε για ποιο λόγο η εισαγωγή ροής στο κέντρο του δίσκου, μπορεί να «πείραξε» μια κατάσταση που βρίσκεται στην εξώτερη αιχμή του.

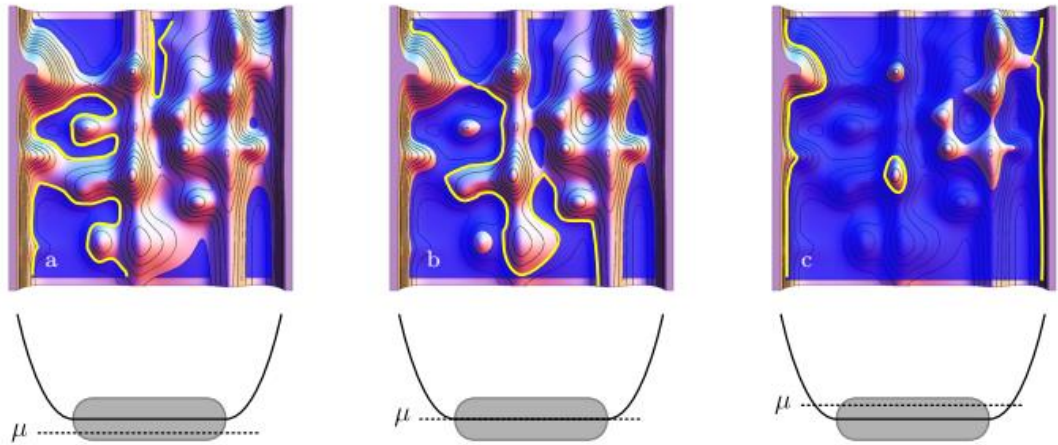
Ας το συνηθίσουμε: είμαστε σε τοπολογικό σύστημα, οπότε θα αλλάζουμε γεωμετρία κατά βούληση. Έτσι, επανερχόμαστε στο αρχικό ορθογώνιο δείγμα, για να δούμε τι σημαίνει η αταξία που αναφέραμε παραπάνω, και αν και κατά πόσο επηρεάζει την αντλία του Laughlin.

6. Αταξία, προσμίξεις και γεωγραφία

Αναφερόμαστε σε κάτι πολύ γενικό, οπότε το καλύτερο που έχουμε να κάνουμε είναι να προσθέσουμε στη γνωστή μας Χαμιλτονιανή, ένα πολύ γενικό όρο που θα περιγράφει τα πάντα που σχετίζονται με οποιαδήποτε αταξία μέσα στο δείγμα: $H = (1/2m)(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 + V(x,y)$. Εννοείται ότι αν δε βάλω συγκεκριμένο δυναμικό δεν

πρόκειται να λύσω την εξίσωση ιδιοτιμών –βασικά, και συγκεκριμένο $V(x,y)$ να βάλω δεν είναι και πολλές οι συναρτήσεις που μπορούν να αποδώσουν λύση αναλυτικά. Ωστόσο, μπορούμε να βγάλουμε ένα γενικό συμπέρασμα που εδώ αρκεί: ας υποθέσουμε ότι δεν ξέρουμε το δυναμικό, όμως με κάποιο τρόπο ξέρουμε τις ισοδυναμικές γραμμές, δηλαδή τις τροχιές στο δείγμα για τις οποίες $V(x, y) = \text{σταθερό}$. Τότε, προφανώς επάνω σε αυτές τις γραμμές το μόνο που έχω είναι μια μετατόπιση στην ενέργεια, οπότε έχω να λύσω το ίδιο πρόβλημα που έλυσα ήδη, αλλά με μια σταθερή ενεργειακή μετατόπιση. Άρα, οι ιδιοκαταστάσεις στο πρόβλημα αυτό δίνονται από τροχιές επάνω στις ισοδυναμικές γραμμές, σε κάθε επίπεδο Landau. Έτσι, στο αποδιατεταγμένο δείγμα μπορώ να απεικονίσω τις ιδιοκαταστάσεις επάνω στις ισοδυναμικές γραμμές. Επόμενως, είναι σαφές ότι αν σε κάθε LL υπάρχει μια τροχιά που να συνδέει τις δυο αιχμές, όποιο και αν είναι το δυναμικό μας, το κανάλι αγωγιμότητας θα ανοίξει, οπότε η αντλία του Laughlin βγάζει νόημα, η εισροή από το εσωτερικό μπορεί να φτάσει στο εξωτερικό, διότι οι δυο αιχμές συνδέονται από τις γεωμετρικές κατανομές ιδιοκαταστάσεων στο δείγμα –που βέβαια δεν απεικονίζουν παρά κατανομές ικανότητας εμφάνισης σωματιδίων- πάνω στις ισοδυναμικές γραμμές.

Ας σκεφτούμε λοιπόν τις ισοδυναμικές γραμμές μέσα στο LLL, πάνω στις οποίες κείνται οι ιδιοκαταστάσεις, δηλαδή τις τροχιές που μπορεί να ακολουθήσει ένα σωματίδιο, σε ένα δείγμα που κατά τα γνωστά υπόκειται σε περιοριστικό δυναμικό που χρειάζεται για να έχουμε αιχμές. Μια βολική εικόνα για να κατανοούμε τις ισοδυναμικές γραμμές, είναι να απεικονίσουμε μέσα στο δείγμα τη γεωγραφία του δυναμικού που εισάγει η αταξία ως ανάγλυφο. Έτσι, έχουμε ένα τοπίο με κοιλάδες, βουνά, υψώματα και οτιδήποτε άλλο, όσο πιο γενικό γίνεται. Παραμένοντας στο LLL πάντα, αρχίζουμε και δίνουμε στα σωματία μας κάποιο χημικό δυναμικό, δηλαδή αυξάνουμε την ενέργεια ανά σωματίο. Τότε, τα σωματίδια αρχίζουν να φτιάχνουν τις ιδιοκαταστάσεις τους μέσα στο τοπίο, πάνω σε ισοδυναμικές γραμμές. Ακολουθώντας την ποιητική αδεία, μπορούμε να φανταστούμε τις κοιλάδες μας να γεμίζουν σταδιακά με νερό με τις ακτογραμμές να αποτελούν τις τροχιές των ιδιοκαταστάσεων –οι ακτογραμμές κείνται πάνω σε ισοβαρυντικές γραμμές, οπότε η εικόνα είναι συνεπής. Στα χαμηλά χημικά δυναμικά λοιπόν, έχουμε μια εικόνα όπου οι ιδιοκαταστάσεις έχουν σχηματίσει λίμνες μέσα στο χάρτη μας, με τις τροχιές να είναι οι ακτές των λιμνών. Άνοδος στο χημικό δυναμικό, αντιστοιχεί στο να γεμίζουμε με νερό τις λίμνες μας. Σε κάποια συγκεκριμένη τιμή του χημικού δυναμικού, θα περάσουμε ένα πολύ σημαντικό κατώφλι: θα καταφέρουμε, αφού έχουμε ανυψώσει αρκετά τις λίμνες μας, να φτάσουμε σε μια εικόνα του γεωφυσικού χάρτη όπου πια έχει εμφανιστεί μια ακτογραμμή που συνδέει τις δυο αιχμές του δείγματος. Αυτό σημαίνει ότι τότε υπάρχει τροχιά ισοδυναμικών γραμμών που συνδέει τις δυο αιχμές, και άρα τότε η αντλία του Laughlin στέκει. Τώρα το ανάγλυφο δε μοιάζει με στεριά με λίμνες, αλλά με θάλασσα από χημικό δυναμικό με νησάκια, με τις ακτογραμμές των νησιών να είναι τώρα οι τοπικοποιημένες ιδιοκαταστάσεις. Συνεχίζοντας την αύξηση του χημικού δυναμικού, το μόνο που μένει είναι ιδιοκαταστάσεις εντοπισμένες στην περίμετρο των νησιών του δείγματος, και βέβαια οι δυο καταστάσεις αιχμής, ακριβώς όπως όταν στην περίπτωση που δεν είχαμε φαινόμενα αταξίας, που είναι λογικό, γιατί στα μεγάλα χημικά δυναμικά η αταξία πια μοιάζει πολύ μικρή, δεν επηρεάζει το σύστημα.



Όπου παρουσιάζεται το ανάγλυφο να γεμίζει με χημικό δυναμικό.

Η ανάλυση των φαινομένων αταξίας ήταν πολύ σημαντική: αφενός εντόπισε την εκτεταμένη κατάσταση στο δείγμα που χρειάζεται για να σταθεί η αντλία του Laughlin, και αφετέρου προέβλεψε το IQHE ακόμη και για δείγματα με αταξία - γεγονός που δεν ήταν καθόλου προφανές με τα προηγούμενα επιχειρήματα που αναφέραμε, τα οποία αφορούσαν καθαρά δείγματα- και παρατηρείται στο πείραμα.

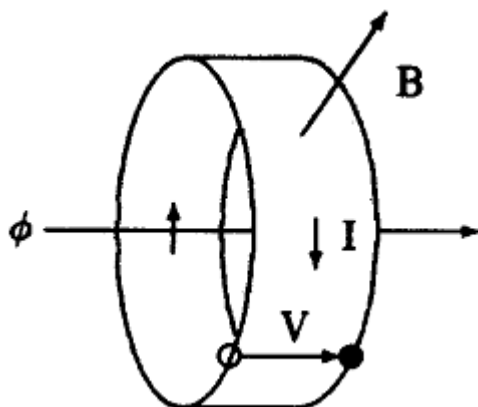
Επισημαίνουμε και το ότι, θεωρώντας ένα τυχόν δυναμικό $V(x,y)$ δεν υπάρχει κανένας καλός λόγος να αποκλείσουμε την περίπτωση να μην είναι η κορυφή του κάτω από το όριο του LLL: έτσι η αταξία επιτρέπει στο χημικό δυναμικό να αλλάζει ομαλά μεταξύ διαφόρων LL! Αυτό μας παρέχει εν γένει όχι κανάλι, αλλά παράθυρο καναλιών αγωγιμότητας, για τα οποία έχουμε $\sigma_{xy} = -Ne^2/h$, N ακέραιος.

7. Η αντλία του Laughlin και το IQHE ως ανακύπτον φαινόμενο

Θα μπορούσε κανείς να περιορίσει μόνο τόσο την ανάλυση της αντλίας, όπως άλλωστε κάνουν πολλοί συγγραφείς επί του θέματος, αλλά το όλο επιχείρημα έχει τόσο βάθος που αξίζει να αναφερθεί κανείς περισσότερο για να φωτίσει τις αθέατες πλευρές του, να κατανοηθεί επαρκέστερα το φαινόμενο και να αναδειχτεί και το σκεπτικό που πυροδότησε το Laughlin να κάνει αυτό το χειρισμό.

Ξεκινάμε από την απλή παρατήρηση ότι η κάθε συνιστώσα του ρεύματος είναι απλώς η μερική παράγωγος της Χαμιλτονιανής ως προς την αντίστοιχη συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού. Στο ορθογώνιο ακόμα δείγμα έχουμε θέσει τώρα $\mathbf{A} = B\mathbf{y}\mathbf{x}$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι προσθέτουμε σε αυτό κι έναν σταθερό όρο $A_0\mathbf{x}$. Αυτό είναι ένας μετασχηματισμός βαθμίδας, και άρα χωρίς φυσικό περιεχόμενο. Πράγματι, αν επιχειρήσει κανείς να υπολογίσει τη ροή που εισάγει αυτός ο μετασχηματισμός, $\oint \mathbf{B} d\mathbf{S}$, με το θεώρημα Stokes λαμβάνει $\oint_{\text{ορθογώνιο}} \mathbf{A} d\mathbf{l} = 0$. Αν όμως τυλίξουμε το δείγμα, τότε $\oint_{\text{βρόχο}} \mathbf{A} d\mathbf{l} = A_0 L_x = \Phi$ (εδώ θεώρησα ότι τύλιξα το δείγμα σε ρολό, που τοπολογικά ισοδυναμεί με το δίσκο που δουλέψαμε πριν).

Επειδή, δε, το A μετά το τύλιγμα είναι στη ϕ -διεύθυνση, αυτό το ολοκλήρωμα μεταφράζεται ως μια μαγνητική ροή ϕ μέσα από το βρόχο.



Όπου το δείγμα τυλίχτηκε ενώνοντας τις πλευρές $x=0$, $x=L_x$.

Τώρα, κάθε ϕ αποδίδει μια διαφορετική Χαμιλτονιανή, και έτσι η εξίσωση ιδιοτιμών για μια οικογένεια από ϕ (στην πραγματικότητα είναι τα A_0 που μπορώ να αλλάζω αλλά αντίστοιχα αυτό αλλάζει και τη ϕ) είναι $H_\phi|\psi_\phi\rangle = E_\phi|\psi_\phi\rangle$.

Άρα, $\langle\psi_\phi|H_\phi|\psi_\phi\rangle = E_\phi \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (d\langle\psi_\phi/d\phi)H|\psi_\phi\rangle + \langle\psi_\phi|(dH_\phi/d\phi)|\psi_\phi\rangle + \langle\psi_\phi|H_\phi(d|\psi_\phi\rangle/d\phi) &= dE_\phi/d\phi \Rightarrow \\ E_\phi[(d\langle\psi_\phi/d\phi)|\psi_\phi\rangle + \langle\psi_\phi|(d|\psi_\phi\rangle/d\phi)] + \langle\psi_\phi|(dH_\phi/d\phi)|\psi_\phi\rangle &= dE_\phi/d\phi \Rightarrow \\ E_\phi d(\langle\psi_\phi|\psi_\phi\rangle)/d\phi + \langle\psi_\phi|(dH_\phi/d\phi)|\psi_\phi\rangle &= dE_\phi/d\phi \Rightarrow \langle\psi_\phi|(dH_\phi/d\phi)|\psi_\phi\rangle = dE_\phi/d\phi. \end{aligned}$$

Άρα $\langle J_x \rangle = L_x dE_\phi/d\phi$, αφού $J_x = \frac{\partial H}{\partial A_x}$, και αλλάζοντας αδιαβατικά το A_0 , όπως εξηγούμε ευθύς αμέσως, αυτό δίνει $J_x = L_x \frac{\partial H}{\partial \phi}$ (το κομμάτι του $A_x = B_y$ το κρατάω πάντα ως έχει, δε θέλω να αλλάξει το πεδίο B).

Στο αδιαβατικό όριο, όπου όλα συμβαίνουν πολύ αργά, μπορώ να θεωρήσω ότι σε πολλά διαδοχικά βήματα αλλάζει το A_0 αυξάνοντας κάθε φορά και λίγο. Αυτό οδηγεί σε μια ακολουθία από εισαγωγές ροής στο σύστημα, πολύ μικρής κάθε φορά, μέχρις ότου εισαχθεί ολόκληρο το κβάντο ροής, που αναφέρθηκε στην αντλία. Ποιο είναι το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου και γιατί προσελήφθη; Η τελική Χαμιλτονιανή που έχουμε όταν έχει εισαχθεί ολόκληρο το κβάντο ροής είναι η αρχική υπό μια σειρά από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Προσοχή: αυτό ισχύει μόνο στο αδιαβατικό όριο! Όμως ο μετασχηματισμός βαθμίδας δεν έχει φυσικό αντίκρισμα, επομένως δε μπορεί να προκαλέσει καμία αλλαγή στο χώρο Hilbert των καταστάσεων- οι καταστάσεις της αρχικής Χαμιλτονιανής κι εκείνες της τελικής – πάντα στο αδιαβατικό όριο- είναι ακριβώς οι ίδιες, οπότε δε μπορεί να αλλάξουν οι ενέργειές τους. Ωστόσο, η ενέργεια του ολικού συστήματος αυξήθηκε, αυτό το ξέρουμε από το ότι εισήχθη ροή, ο νόμος του Faraday διατυπώνει ότι μια τέτοια διαδικασία φέρνει παραγωγή έργου.

Τι συνέβη; Πώς γίνεται να άλλαξε η ενέργεια, και την ίδια στιγμή να μην άλλαξαν καθόλου οι ιδιοκαταστάσεις του συστήματος; Μια νέα ιδιοτιμή της Χαμιλτονιανής θα έπρεπε να φέρει μια αλλαγή των ιδιοκαταστάσεων. Ο μόνος τρόπος να μην είναι αντιφατικό αυτό είναι να ανακατοικήθηκαν από τα ηλεκτρόνια οι αρχικές καταστάσεις! Είναι αυτό που είδαμε να συμβαίνει όταν η κάθε κατάσταση στο δίσκο γινόταν η επόμενη της. Καθώς η ροή αρχίζει να αυξάνεται από 0 σε Φ_0 αργά, οι καταστάσεις αρχίζουν και γλιστράνε αργά από τα αριστερά του σωλήνα στα

δεξιά, με ολικό αποτέλεσμα να είναι μια μετατροπή κάθε κατάστασης ακριβώς στην επόμενη της, αφού ένα κβάντο ροής εισήχθη. Αυτό συνέβη σε κάθε επίπεδο Landau που ήταν συμπληρωμένο.

Το γεγονός ότι κάθε κατάσταση αντιστοιχεί σε ένα ακριβώς ηλεκτρόνιο (φερμιόνια), σημαίνει ότι σε κάθε επίπεδο Landau μεταφέρθηκε ΑΚΡΙΒΩΣ ένα ηλεκτρόνιο από τη μια πλευρά του δείγματος προς την άλλη!

Ο υπολογισμός τώρα είναι σχεδόν τετριμμένος: θεωρώντας διαφορά δυναμικού ΔV (είναι αυτή η διαφορά δυναμικού που μας επέτρεπε να κάνουμε τους μετασχηματισμούς βαθμίδας βάζοντας ροή στο σύστημα, όπως εξηγεί ο νόμος του Faraday), και στο αδιαβατικό όριο όπου $dE_F/d\phi = \Delta E/\Delta\phi$, $\Delta E = ne\Delta V$, η τα πληρωμένα LL, ΔV η τάση που ασκήθηκε. Τώρα, επειδή η τάση ασκήθηκε μέσω της μπαταρίας στον y -άξονα και αυξανόταν αδιαβατικά, μπορώ να γράψω $\Delta V = EL_y$, ενώ $\Delta\phi = \Phi_0$. Άρα, $J_x = L_x L_y E n e^2 / h$, αλλά αυτό είναι το ρεύμα καταστάσεων της Χαμιλτονιανής επί το φορτίο του ηλεκτρονίου $J = en$, για να περάσω στη συνήθη πυκνότητα ρεύματος $J = \rho n$ που μετράμε, πρέπει να διαιρέσω με το εμβαδό του δείγματος, οπότε προκύπτει η $\sigma_{xy} = ne^2/h$ ($E = E_y$, η τάση ασκήθηκε σ' αυτή τη διεύθυνση). Η αγωγιμότητα φαίνεται να είναι ακριβώς κβαντισμένη, διότι μετράει φορτία σωματίων που αντλούνται, που εδώ είναι ηλεκτρόνια.

Στην περίπτωση της αταξίας, επανερχόμαστε στο γεωφυσικό χάρτη. Το θεμελιώδες ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι τι συμβαίνει στις τοπικοποιημένες καταστάσεις –λίμνες και νησιά- κατά την αδιαβατική εισαγωγή της ροής. Γιατί αυτές δεν προκαλούν εμφάνιση ρεύματος ή τέλος πάντων δεν επηρεάζουν απολύτως σε τίποτα τα πλατώματα της αγωγιμότητας; Αυτή η τοπικοποίηση είναι εμβληματικής σημασίας: μια τοπικοποιημένη κατάσταση εντοπισμένη στο δίσκο, πώς αντιλαμβάνεται την εισαγωγή ροής, ή μάλλον γιατί δεν την αντιλαμβάνεται; Γιατί αν την αντιλαμβανόταν θα έρεε περαιτέρω ρεύμα και θα χαλούσε τα πλατώματα! Η αλήθεια είναι ότι αυτή αντιλαμβάνεται ένα μετασχηματισμό βαθμίδας και μόνο. Αυτό που κάνουν οι καταστάσεις σ' αυτή την περίπτωση είναι να αλλάζουν φάση, αυτό γίνεται κι εδώ, δεν αλλάζει την ενέργειά της και δε μετακινείται. Αυτό δεν είναι καθόλου προφανές όταν το δείγμα είναι επίπεδο, όπου η εφαρμογή τάσης στα άκρα αναμένεται να γίνει αντιληπτή από κάθε φορτίο, όμως αναδεικνύεται ξεκάθαρα στο τυλιγμένο δείγμα: εκεί όλα κωδικοποιούνται από την εισαγωγή ροής στο κέντρο, την οποία μπορεί να καταλάβει ως ροή και όχι ως μετασχηματισμό βαθμίδας μόνο μια εκτεταμένη κατάσταση που φτάνει από τα ενδότερα στα εξώτερα, από τα αριστερά στα δεξιά, όχι μια τοπικοποιημένη. Αυτό δείχνει ότι η κβάντωση της αγωγιμότητας αντέχει ακόμη και στην περίπτωση που τοποθετούνται καταστάσεις στο επίπεδο Fermi, αρκεί οι καταστάσεις αυτές να είναι τοπικοποιημένες. Το επίπεδο Fermi, υπό συνθήκες, μπορεί και να μη βρίσκεται καν μέσα σε ζωνικό χάσμα!

Η τοπικοποίηση είναι το σημείο –κλειδί για την κατανόηση της αγωγιμότητας Hall. Αν οι καταστάσεις δεν ήταν τοπικοποιημένες θα ήμασταν στο σενάριο που εξετάσαμε στην αρχή, όπου οι καταστάσεις στον όγκο είναι τόσο πολύ περισσότερες από εκείνες στις αιχμές, που το επίπεδο Landau δε θα γέμιζε ποτέ. Το χημικό δυναμικό θα ήταν καρφωμένο ακριβώς σε ένα επίπεδο Landau, και το φαινόμενο δε θα μπορούσε να συμβεί. Τώρα το επίπεδο Landau μπορεί να γεμίσει, γιατί οι καταστάσεις αιχμής είναι εκτεταμένες καταστάσεις που φτάνουν στον κυρίως όγκο, οι οποίες φυσικά μπορούν να καταληφθούν από σωματίδια.

Την ίδια στιγμή, η τοπικοποίηση δείχνει γιατί δεν παρατηρείται παράλληλη αγωγιμότητα. Πράγματι ο von Klitzing όταν έβλεπε τα πλατώματα της σ_{xy} , για τις παράλληλες αγωγιμότητες έβλεπε αγωγιμότητες 0. Επειδή εδώ έχουμε ντοπαρισμένο με προσμίξεις ημιαγωγό –σε τέτοια υλικά γίνονται τα πειράματα- θα πρέπει να διεγείρουμε κάποια ηλεκτρόνια που βρίσκονται ελαφρώς κάτω από το επίπεδο Fermi και να τα φέρουμε ελαφρώς πάνω από αυτό. Γιατί ειδικά όσα είναι ακριβώς από κάτω; Γιατί απλούστατα όλα τα υπόλοιπα έχουν τοποθετημένα στις υπερκείμενες ενεργειακές θέσεις άλλα ηλεκτρόνια –μιλάμε για συμπληρωμένα επίπεδα Landau- και με τις μικρές ενέργειες που προσφέρουν η τάση και το περιβάλλον (θερμότητα) δε μπορούν να διεγερθούν αρκετά ώστε να υπερκεράσουν το επίπεδο Fermi. Αν όμως – στο όριο των μη αλληλεπιδρώντων ηλεκτρονίων- στο επίπεδο Fermi οι καταστάσεις είναι τοπικοποιημένες, τότε δε μπορούμε να περιμένουμε να γίνει μια τέτοια μετάβαση, οι δυο καταστάσεις είναι εντοπισμένες σε απομακρυσμένους τόπους και δεν επικοινωνούν. Αλλιώς, ο μέσος χρόνος μεταξύ δυο συγκρούσεων ενός ηλεκτρονίου, ο οποίος υποδεικνύει την ύπαρξη ρεύματος, τείνει στο άπειρο, αφού η σύγκρουση δε θα συμβεί ποτέ, γι' αυτό οι αγωγιμότητες κατά μήκος της διεύθυνσης που ασκείται η τάση είναι 0 αν έχω συμπληρωμένα επίπεδα Landau. Το χημικό δυναμικό μπορεί να ταξιδεύει ελεύθερα στις τοπικοποιημένες καταστάσεις, μπορεί να κινεί τα ηλεκτρόνια, ακόμη και να τα τοποθετεί ή να τα εξαφανίζει, χωρίς αυτό να επηρεάζει σε τίποτα την αγωγιμότητα Hall.

Το όλο IQHE με τη στιβαρότητά του, οφείλεται αποκλειστικά στην ύπαρξη της εκτεταμένης κατάστασης που συνδέει τις δυο αιχμές, και είναι συλλογική ιδιότητα όλου του συστήματος, το φαινόμενο δε μπορεί να κατανοηθεί κοιτώντας ξεχωριστά τα ηλεκτρόνια και εφαρμόζοντας επαγωγική λογική για να φανεί τι κάνουν όλα μαζί. Πρέπει να καταστρωθεί η συνολική ζωνική δομή και τότε να δούμε από μακριά τι συμβαίνει.

Είναι σαφές ότι πρέπει να υπάρχει ακριβώς τόση αταξία όση χρειάζεται για να έχουμε ανοιχτό το παράθυρο της εκτεταμένης κατάστασης. Στο όριο της τεράστιας αταξίας οι καταστάσεις πια έχουν τοπικοποιηθεί πλήρως. Αλλά στο όριο της ασθενούς αταξίας, αν είμαστε δηλαδή κοντά στο καθαρό δείγμα, δεν είναι καθόλου σαφές το πού θα εμφανιστεί η εκτεταμένη κατάσταση. Οι ερευνητές πιστεύουν ότι σ' αυτό το όριο, μπορεί να εμφανιστεί ακριβώς σε μια ενέργεια που βρίσκεται κοντά στο κέντρο του διευρυμένου επιπέδου Landau.

Το IQHE είναι ένα ανακύπτον φαινόμενο, γιατί σε τίποτα δε μοιάζει με τη μικροσκοπική συμπεριφορά του κάθε ηλεκτρονίου ξεχωριστά, και η δικαιολόγησή του δεν έχει καν σχέση με ηλεκτρομαγνητισμό. Μιλάμε για καθαρά κβαντικούς μηχανισμούς που σχηματίζουν τις τοπικοποιημένες καταστάσεις και την εκτεταμένη, που όμως εκδηλώνονται απευθείας στις μακροσκοπικές παρατηρήσεις! Στην πραγματικότητα αν παρατηρήσουμε προσεκτικά την ανάλυση, το μόνο που χρειάστηκε το IQHE για να εκδηλωθεί ήταν η αναλλοιώτητα βαθμίδας –που στο κβαντικό επίπεδο εγκολπώνεται στη συμμετρία $U(1)$ του ερμητιανού προβλήματος- και η κβάντωση του ηλεκτρονιακού φορτίου! Είναι εντυπωσιακό το πώς δυο τόσο απλές, μικροσκοπικές φυσικές ιδιότητες καταφέρνουν να εκδηλώνονται στο μέγακοσμο γεννώντας φαινόμενα που με αναγωγική διερεύνηση του συστήματος μοιάζουν απαγορευμένα!

8. Ήταν τοπολογικό;

Μια μικροσκοπική ανάλυση για τον υπολογισμό της αγωγιμότητας, είναι εφικτή αν γνωρίζει κανείς θεωρία γραμμικών ανταποκρίσεων. Αυτό που γίνεται εκεί, είναι να εκφράζονται όσα είπαμε παραπάνω, μέσα από τη γλώσσα της θεωρίας διαταραχών. Συγκεκριμένα, υπολογίζεται η ανταπόκριση του συστήματός μας, όταν η διαταραχή είναι ένα εφαρμοζόμενο ηλεκτρικό πεδίο, $E = -\frac{\partial A}{\partial t}$, όπως εξηγήσαμε νωρίτερα, και ερευνάται πώς θα ανταποκριθεί σε αυτό η πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{j}$. Καταστρώνονται η αδιατάρακτη Χαμιλτονιανή, η διαταραχή, και γίνονται διάφοροι χειρισμοί που εν τέλει αποδίδουν τη μέση τιμή του τελεστή πυκνότητας ρεύματος. Δε θα ασχοληθώ εδώ με την άλγεβρα, δεν έχει να προσφέρει πολλά στη φυσική του φαινομένου, παρά θα χρησιμοποιήσω το αποτέλεσμα που έχει σημασία, για να προχωρήσω από εκεί προσπαθώντας να αναδείξω –αν υπάρχει!– την τοπολογική φύση των όσων είπαμε.

Ο τύπος που μας ενδιαφέρει είναι ο τύπος του Kubo:

$$\sigma_{\alpha\beta}(t) = (i\tau/\hbar L_x L_y) \int_{-\infty}^t dt' e^{t'/\tau} \langle [J_\alpha(t), J_\beta(t')] \rangle.$$

Ο πρώτος τελεστής ρεύματος είναι εκείνος που θέλουμε να μετρήσουμε, ενώ ο δεύτερος εμφανίζεται επειδή η διαταρακτική Χαμιλτονιανή είναι και εκείνη ανάλογη του ρεύματος: ο μεταθέτης εμφανίστηκε από τους τύπους της θεωρίας διαταραχών. Το τ , χαρακτηριστικός χρόνος του φαινομένου, έχει να κάνει με το ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι η χρονική παράγωγος του διανυσματικού δυναμικού που εμπλέκεται στη Χαμιλτονιανή. Σημειωτέο, για την εξαγωγή του τύπου είναι απολύτως απαραίτητη η υπόθεση της αδιαβατικής εξέλιξης.

Τώρα κάποια αλγεβρικά τερτίπια:

$$\sigma_{xy}(0) = (i\tau/\hbar L_x L_y) \int_{-\infty}^0 dt' e^{t'/\tau} \langle [J_x(0), J_y(t')] \rangle = (i/\hbar L_x L_y) \int_0^\infty dt \int_{-\infty}^0 dt' e^{(t'-t)/\tau} \langle [J_x(t), J_y(t')] \rangle, \text{ όπου υποθέσαμε αδιαβατική εξέλιξη.}$$

$$\text{Θέτω } Q_\alpha^+ = (1/L_\alpha) \int_0^\infty dt e^{-t/\tau} J_\alpha(t), \quad Q_\alpha^- = (1/L_\alpha) \int_{-\infty}^0 dt e^{t/\tau} J_\alpha(t), \text{ οπότε}$$

$$\sigma_{xy}(0) = (i/\hbar) \langle [Q_x^+, Q_y^-] \rangle.$$

Στην αδιαβατική προσέγγιση, θεωρείται ότι το δυναμικό μεταβάλλεται αργά με το χρόνο, δηλαδή τίθεται $A = (\Phi_x/L_x, \Phi_y/L_y) e^{t/\tau}$. Η θεμελιώδης την $t=0$ θεωρείται ότι εξελίχθηκε από την κυματοσυνάρτηση την $t = -\infty$, και για μικρή $\phi_\alpha = \Phi_\alpha/\Phi_0$, αποδεικνύεται ότι μπορεί να γραφεί:

$$|\psi(0)\rangle = |\psi(t=-\infty)\rangle - \Sigma_\alpha (i/e) \phi_\alpha Q_\alpha^- |\psi(t=-\infty)\rangle.$$

Υποθέτοντας ότι δεν υπήρξαν μεταβάσεις σε καταστάσεις πάνω από κάποιο συγκεκριμένο ενεργειακό χάσμα, και επειδή η $|\psi(t=-\infty)\rangle$ δεν εξαρτάται από το ϕ_α , είναι: $Q_\alpha^- |\psi(0)\rangle = i e \frac{\partial |\psi(0)\rangle}{\partial \phi_\alpha}$.

Τώρα, εισάγοντας τη σύνδεση Berry $A_\alpha = i \langle \psi_0 | \frac{\partial}{\partial(\phi_\alpha)} | \psi_0 \rangle$ και την αντίστοιχη καμπυλότητα Berry $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$, προκύπτει $\sigma_{xy} = (e^2/\hbar) F_{xy}$.

Δεν προέβην σε αυτή την ανάλυση μόνο για λόγους μαθηματικής πληρότητας. Άλλωστε και η αντλία του Laughlin είχε την απαραίτητη μαθηματική τεκμηρίωση. Αναφερθήκαμε σε αυτά, διότι τα όσα ακολουθούν δείχνουν ότι υπάρχει μια πλευρά του νοητικού πειράματος της αντλίας που «κρύφτηκε» κατά την ανάλυση, και είναι σημαντικό να το τονίσουμε.

Το επιχείρημα του Laughlin ήταν με λίγα λόγια ότι: αν πάρουμε το σωλήνα και συνδέσουμε καθεμιά από τις πλευρές του με μια δεξαμενή ηλεκτρονίων, τότε η αποστολή ενός κβάντου ροής μέσα από το σωλήνα αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό βαθμίδας –βασικά αυτό που έλεγε και η αρχή Bohm –Aharonov- οπότε θα χαρτογραφήσει την αρχική κατάσταση στον εαυτό της. Επομένως, η μια δεξαμενή άντλησε από το δείγμα ακριβώς ένα ηλεκτρόνιο, όλα τα ηλεκτρόνια στο δείγμα κινήθηκαν κατά ένα βήμα –κατάσταση προς αυτή, με το δείγμα με τη σειρά του να αντλεί από τη δεύτερη δεξαμενή ένα ηλεκτρόνιο, ώστε να επανέλθει στην αρχική κατάσταση. Αυτή η κίνηση ήταν το ρεύμα που παρατηρήθηκε, και έτσι εξηγήθηκε η κβάντωση της αγωγιμότητας σε έναν κύκλο, δηλαδή με εισαγωγή ενός κβάντου ροής.

Όμως τι συμβαίνει αν στείλει κανείς διαδοχικά κβάντα Φ_0 μέσα από το σωλήνα; Μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι σε όλους τους κύκλους το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο; Ναι μεν η αναλλοιώτητα βαθμίδας που θα ισχύει για όλους τους κύκλους, θα αναπαράγει ακριβώς την ίδια κατάσταση, όμως ξέρουμε πολύ καλά ότι στον κβαντικό κόσμο η ίδια κατάσταση δε συνεπάγεται ίδιο αποτέλεσμα στη μέτρηση. Αυτό ισχυροποιείται και από την ανάλυση περί εκτεταμένων καταστάσεων: η εκτεταμένη κατάσταση στην ουσία είναι γέφυρα μεταξύ των δυο δεξαμενών· μπορούμε να είμαστε πάντα βέβαιοι ότι μετά το τέλος κάθε κύκλου, όταν θα μετράμε τον αριθμό των ηλεκτρονίων στις δυο δεξαμενές –φυσικά αυτός ο αριθμός θα είναι ακέραιος- θα βρίσκουμε πάντα τη μια δεξαμενή να έχει ένα λιγότερο και την άλλη να έχει ένα περισσότερο; Η αλήθεια είναι πώς όχι: η εσωτερική κατάσταση στο σωλήνα πάντα θα είναι η ίδια, λόγω της αναλλοιώτητας βαθμίδας. Αλλά για τις δυο δεξαμενές δεν υπάρχει κάποιο στιβαρό επιχείρημα που να αποκλείει μετά το πέρας κάποιου κύκλου να βρούμε οποιοδήποτε αριθμό ηλεκτρονίων! Τότε, αν συμβεί αυτό η κβάντωση της αγωγιμότητας θα έπρεπε να αναιρεθεί.

Ευτυχώς υπάρχει τρόπος να επιλύσουμε αυτό το πρόβλημα. Είμαστε σε κβαντικό σύστημα, επομένως οι μετρήσεις μας δεν είναι παρά υπολογισμοί μέσω τιμών: αν αποδειχτεί ότι η μέση τιμή του μεταφερόμενου φορτίου σε μια σειρά από κύκλους είναι όντως κβαντισμένη σε ακέραια πολλαπλάσια του e , τότε πράγματι η αγωγιμότητα έχει ακριβώς τη συμπεριφορά που παρατηρούμε.

Άρα, η παραπάνω αγωγιμότητα που υπολόγισα δεν είναι αυτή που μετράται. Εκείνη που έχει σημασία είναι η μέση τιμή αυτού του αριθμού, σε μια σειρά από εισαγωγές ροής. Ήτοι, πρέπει να ολοκληρώσω πάνω στις ϕ_x, ϕ_y , και επειδή σε κάθε κύκλο εισάγεται η ίδια ποσότητα ροής μπορώ να τις θεωρήσω ως περιστρεφόμενες φάσεις συναρτήσει του χρόνου, επομένως ολοκληρώνουμε από 0 ως 2π . Τότε

$$\langle \sigma_{xy} \rangle = (e^2/h) \iint F_{xy} d\phi_x d\phi_y / \iint_{[0,2\pi] \times [0,2\pi]} d\phi_x d\phi_y = (e^2/h) C 2\pi / (2\pi)^2 = (e^2/h) C, \text{ όπου}$$

C ο αριθμός Chern, που είναι ακέραιος όπως ξέρουμε, οπότε πράγματι η αγωγιμότητα έρχεται σε κβάντα της ποσότητας e^2/h , και αυτό ολοκληρώνει την ανάλυσή μας, που συνέδεσε το φαινόμενο με τοπολογία. Συγκεκριμένα, όπως δείχνει η τελευταία σχέση, η αγωγιμότητα δεν είναι τίποτα άλλο από τη φάση Berry της θεμελιώδους όταν κινήσει το σύστημα γύρω από ένα τόρο $[0,2\pi] \times [0,2\pi]$!

Θα σταματήσουμε εδώ την ανάλυση του IQHE. Φυσικά, ακόμη πάρα πολλοί ερευνητές ασχολούνται με τις λεπτομέρειες και τις προεκτάσεις θεμάτων που αναφέρθηκαν, και υπάρχουν πολύ ενδιαφέρουσες κατευθύνσεις γύρω από το θέμα. Είναι ένα γοητευτικό και μυστηριώδες φαινόμενο, πιθανώς αρχετυπικό παράδειγμα

κβαντικών διεργασιών που υποκινούν κατευθείαν φαινόμενα του μεγάκοσμου, και εύλογα κανείς αναρωτιέται αν πολλά βασικά, ανεξήγητα φαινόμενα φυσικής είναι κι εκείνα ανακλύπτοντα· ο Laughlin στην ομιλία του όταν του απονεμήθηκε το βραβείο Νόμπελ υποστήριξε ότι υποψιάζεται πως τέτοια είναι και η κβαντική βαρύτητα!

Εν συνεχεία θα περάσουμε στο κλασματικό κβαντικό φαινόμενο Hall, όπου θα δούμε πως το πείραμα, παρά τις φιλότιμες προσπάθειες επεξήγησης των ακέραιων πλατωμάτων, έφερε για μια ακόμη φορά απρόβλεπτα αποτελέσματα, προκαλώντας τη διάνοια να ακολουθήσει ακόμη πιο ενδιαφέρουσες διαδρομές.

B. Κλασματικό (FQHE)

Το FQHE είναι ακριβώς ίδιο στη φαινομενολογία του με το IQHE. Παρουσιάζονται κι εκεί πλατώματα σε συγκεκριμένες τιμές της αγωγιμότητας σ_{xy} , σε τιμές που είναι πολλαπλάσια του e^2/h , αλλά όχι ακέραια πολλαπλάσια εδώ. Οι παράλληλες αγωγιμότητες στα πλατώματα είναι και εδώ 0. Η μόνη διαφορά είναι τα κβάντα αγωγιμότητας.

Αυτή η διαφορά, αν δεν είχε γίνει η ανάλυση του IQHE θα μπορούσε να παρασύρει σε εικασίες ότι τα δυο φαινόμενα έχουν την ίδια φυσική προέλευση· αν μη τι άλλο απλώς στο διάγραμμα προστίθενται μερικά πλατώματα, τα οποία θα έπρεπε να βρεθεί ένας θεωρητικός μηχανισμός που να τα τοποθετεί κι αυτά στο πλαίσιο που αναλύσαμε. Όμως τα τελευταία συμπεράσματα, ότι δηλαδή τα πλατώματα του IQHE αντιστοιχούν σε αριθμούς Chern, μας απαγορεύει να βγάλουμε αυτό το συμπέρασμα. Δεν μπορούμε να κάνουμε χαρτογράφηση του συστήματος σε ένα σύστημα μη αλληλοεπιδρώντων ηλεκτρονίων, γιατί σε αυτά όπως είδαμε τα κβάντα της αγωγιμότητας είναι οι αριθμοί Chern, που είναι πάντα ακέραιοι. Εδώ συμβαίνει κάτι άλλο, κάτι ριζικά διαφορετικό: μια νέα κατάσταση ύλης!

Στο IQHE τα απαραίτητα τεχνικά συστατικά ήταν η παρουσία χάσματος στα ακέραια γεμίσματα του ανώτερου LL, η οποία φροντίζει και για την ταπείνωση των παράλληλων αγωγιμοτήτων, και ασθενής αταξία, για να στήσει τις τοπικοποιημένες καταστάσεις, απαραίτητες για να εδραιωθεί η κβάντωση της αγωγιμότητας.

Για να λάβουμε μια ευκρινή εικόνα του φαινομένου, ας δούμε τι παρατηρήθηκε, και άρα τι είχε να εξηγήσει η νέα θεωρία.

1. Τα πειραματικά αποτελέσματα

Στα παρακάτω θα αναφέρομαι στον παράγοντα πλήρωσης. Ορίζεται ως ο αριθμός των ηλεκτρονίων του δείγματος ανά κβάντο ροής: $\nu = \rho / (B/\Phi_0)$. Επειδή το κβάντο ροής ορίστηκε ως η ροή που αντιστοιχεί σε μια εκφυλισμένη κατάσταση, είναι σαφές ότι ο παράγοντας αυτός μετράει την κατάληψη των επιπέδων Landau, είναι ο αριθμός ηλεκτρονίων ανά διαθέσιμη κατάσταση. Το IQHE συμβαίνει σε ακέραια ν .

Το 1982, οι Tsui, Stormer και Gossard χρησιμοποίησαν δείγματα πολύ πιο περιορισμένης αταξίας –αλλά πάντως όχι εντελώς εξαλειμμένης– από εκείνα του von Klitzing νωρίτερα. Το πείραμα ήταν να γίνει έλεγχος, παρουσία υψηλού μαγνητικού πεδίου, και πολύ χαμηλών θερμοκρασιών, σε ποιες τιμές του παράγοντα πλήρωσης εμφανίζονται πλατώματα. Σύμφωνα με το IQHE, θα έπρεπε να εμφανίζονται μόνο για ν ακέραιο. Ωστόσο, πρώτα αυτοί, και εν συνεχεία άλλοι πειραματικοί στην πορεία των χρόνων, εντόπισαν μια μεγάλη σειρά από πλατώματα που αντιστοιχούσαν σε διάφορες κλασματικές τιμές ν !

Θα πρέπει να έχει γίνει κατανοητό, ότι για να συμβεί ένα πλάτωμα σε οποιοδήποτε σημείο, θα πρέπει να αντιστοιχεί σε παράγοντα πλήρωσης τέτοιο ώστε να υπάρχει ένα ενεργειακό χάσμα. Πράγματι, χωρίς ενεργειακό χάσμα, τα σωμάτια θα επιτρεπόταν να υπερπηδήσουν σε υπερκείμενες καταστάσεις, γεγονός που θα απαγόρευε η αγωγιμότητα να παίρνει αυστηρά καθορισμένες τιμές. Σύμφωνα με την τοποθέτηση σε επίπεδα Landau που κάναμε πριν, είναι σαφές το γιατί τα πλατώματα αγωγιμότητας αντιστοιχούν σε πλήρως γεμισμένα επίπεδα Landau: σε μερικώς

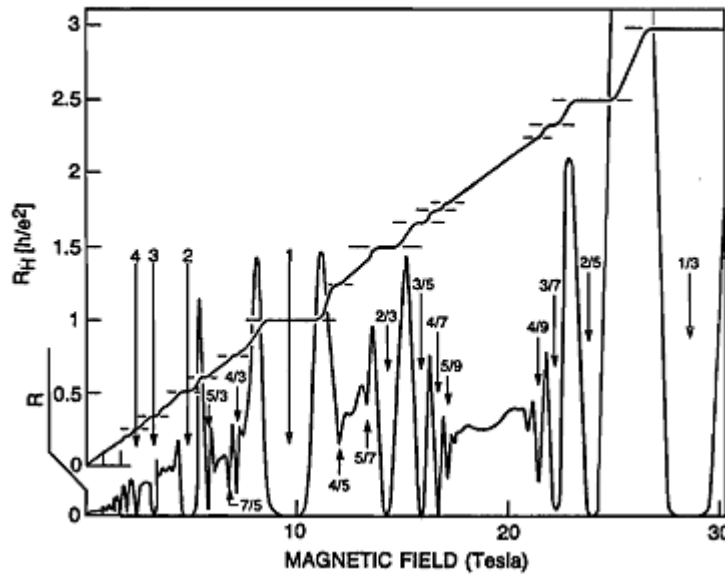
γεμισμένα, υπάρχουν ακόμα διαθέσιμες καταστάσεις οι οποίες δεν είναι διαχωρισμένες ενεργειακά από τις κατειλημμένες, αφού είναι στο ίδιο LL, επομένως τα σωμάτια μπορούν να τις καταλαμβάνουν κατά βούληση, και άρα δε μπορεί να εμφανιστεί σταθερή ροή ρεύματος με αύξηση της τάσης, ενώ και η παράλληλη αγωγιμότητα δεν υπάρχει κανένας λόγος να είναι 0, και όντως δεν είναι. Αντίθετα, παρουσία υπερκείμενου χάσματος –στα πλήρη επίπεδα Landau- συμβαίνουν όλα τα ενδιαφέροντα που περιγράψαμε. Είναι απαραίτητο για να εμφανιστούν πλατώματα αγωγιμότητας να υπάρχει ένα υπερκείμενο χάσμα που να διαχωρίζει τις κατειλημμένες καταστάσεις από τις κενές. Έτσι, η θεωρία του FQHE θα πρέπει να προβλέπει το ότι ανοίγουν χάσματα ακόμη και για κλασματικούς παράγοντες γεμίσματος, πάλι να πει, για μη συμπληρωμένα επίπεδα Landau! Και μόνο απ' αυτό φαίνεται το πόσο ριζικά διαφορετικό είναι το φαινόμενο: πρέπει με κάποιο τρόπο να περιορίσει τα ηλεκτρόνια από το να καταλάβουν καταστάσεις ελεύθερες στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο!

Το πείραμα επίσης έδειξε ότι στο LLL, όλοι οι παράγοντες πλήρωσης για τους οποίους εμφανίζονται πλατώματα έχουν περιττό παρονομαστή. Συγκεκριμένα, δεν εμφανίζονται σε μεμονωμένα, τυχαιωδώς κατανεμημένα ν , αλλά στα $1/3, 2/5, 3/7, 4/9, 5/11$ κοκ, που είναι τα μέλη της ακολουθίας $n/(2n+1)$, $n=1, 2, 3, \dots$. Την ίδια στιγμή το απλούστερο κλάσμα $\nu=1/2$ ΔΕΝ εμφανίζει πλάτωμα.

Στο δεύτερο LL –που αν λάβουμε υπ' όψιν και τα σπιν συμβαίνει στο εύρος $2 < \nu < 4$, διότι ο βαθμός ελευθερίας του σπιν επιτρέπει να καταλάβουν δυο ηλεκτρόνια την ίδια κατάσταση σε ένα LL αφού είναι ακόμη σε διαφορετική κατάσταση μεταξύ τους λόγω της διαφορετικής πόλωσης σπιν- τα κλάσματα είναι πολύ λιγότερο προφανή, δεν εμφανίζουν την ξεκάθαρη δομή μιας ακολουθίας όπως στο LLL. Φερ' ειπείν εκεί εμφανίζεται πλάτωμα και στον παράγοντα πλήρωσης $\nu=5/2$, που όπως θα δούμε η παρουσία του αποτελεί και ένα από τα άλυτα προβλήματα της φυσικής.

Επίσης καταστάσεις FQHE με πλήρη πόλωση σπιν –δηλαδή όπου το σπιν όλων των σωματιδίων έχει προσανατολιστεί σε μία διεύθυνση- συμβαίνει ακόμη και σε σχετικά μικρά μαγνητικά πεδία, όπου ο όρος Zeeman που προσανατολίζει τα σπιν δεν είναι τόσο ισχυρός.

Φυσικά στο πέρας των χρόνων έχουν εμφανιστεί πάρα πολλά ακόμη δεδομένα: είναι κι αυτό εξαιρετικά ενδιαφέρον φαινόμενο που ιντριγκάρει την περιέργεια του ερευνητή. Υπάρχει σειρά από συμπεράσματα τόσο από πειράματα όσο και από θεωρητικές μελέτες γύρω από χάσματα, διαγράμματα φάσεων για το σπιν, σχέσεις διασποράς και άλλα, που μπορούν να προσληφθούν για θεωρητική μελέτη. Ωστόσο, τα παραπάνω είναι οι ακρογωνιαίοι λίθοι των πειραματικών δεδομένων που πυροδότησαν τη μελέτη του FQHE: είναι τα δεδομένα που κάθε θεωρητική προσπάθεια πρέπει να μπορεί να εξηγήσει.



Όπου βλέπουμε τα πλατώματα της R_{xy} (οπότε εκεί έχει και η σ_{xy}), και την R_{xx} , ενώ υποδεικνύονται τα κλάσματα που συνδέονται με πλατώματα.

2. Χαμιλτονιανή

Κι ενώ στο IQHE δουλέψαμε στο όριο των μη αλληλοεπιδρώντων ηλεκτρονίων, εδώ λόγω του πολύ ισχυρού πεδίου, δε μπορούμε να αποτινάξουμε από τη μελέτη την αλληλεπίδρασή τους. Να το γιατί:

Η γενικότερη Χαμιλτονιανή που μπορώ να γράψω για το σύστημα είναι η:

$$H = \sum_j \frac{1}{2m_b} \left[\frac{\hbar}{i} \nabla_j + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_j) \right]^2 + \frac{e^2}{\epsilon} \sum_{j < k} \frac{1}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|} + \sum_j U(\mathbf{r}_j) + g\mu \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}.$$

Ο πρώτος όρος είναι ο γνωστός, κινητικός όρος, που υπήρχε και στη Χαμιλτονιανή του IQHE. Ο δεύτερος είναι η αλληλεπίδραση Coulomb μεταξύ των ηλεκτρονίων. Ο τρίτος είναι ένα μονοσωματιδιακό δυναμικό στο οποίο έχει αποδοθεί η αλληλεπίδραση κάθε ηλεκτρονίου με το θετικό υπόστρωμα της ετεροδομής, ενώ ο τελευταίος είναι ο γνωστός όρος Zeeman, που περιγράφει την αλληλεπίδραση του σπιν των σωματιδίων με το πεδίο.

Δουλεύουμε στο όριο του πάρα πολύ ισχυρού μαγνητικού πεδίου. Τότε, τα ηλεκτρόνια καταλαμβάνουν το LLL, τα σπιν των ηλεκτρονίων έχουν προσανατολιστεί πλήρως με το πεδίο, οπότε η ενέργεια Zeeman γίνεται μια σταθερά, και δε λαμβάνεται υπ' όψιν, ενώ ο βαθμός ελευθερίας του σπιν έχει κατακερματιστεί κάθε κατάσταση στο LLL να μην επιδέχεται δύο ηλεκτρόνια με διαφορετική πόλωση σπιν, αλλά εδώ τα ηλεκτρόνια έχουν προσανατολιστεί πλήρως, η δεύτερη πόλωση έχει εξαλειφθεί από το ισχυρό πεδίο. Επίσης, σταθερή είναι και η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων, οπότε ξεσκαρτάρεται κι αυτή, ενώ αγνοούμε και την αταξία, που όπως είπαμε έτσι κι αλλιώς ήταν μικρή, και σβήνουμε έτσι και τον όρο που περιγράφει το φόντο. Έτσι, σε μονάδες ενέργειας Coulomb:

$H = \sum_{j < k} 1/|r_j - r_k|$, και έχω να τη λύσω στο LLL.

Το όριο αυτό, δικαιολογείται από το ότι πράγματι οι παράμετροι που εξαλειφθηκαν δεν επηρεάζουν το FQHE: πολλές παράμετροι που όντως δε χρειάζονται έχουν εξαλειφθεί το μόνο που έχει μείνει να κρίνει το φαινόμενο είναι η κλίμακα της αλληλεπίδρασης Coulomb.

Αν σβήσω και την αλληλεπίδραση αυτή, τότε $H=0$. Τι σημαίνει αυτό: αν έχω τοποθετήσει N ηλεκτρόνια στο σύστημα, τότε ο αριθμός των διαθέσιμων καταστάσεων στο LLL, όπως εξηγήσαμε θα δίνεται από την ποσότητα N/ν , αφού είμαστε ακόμα σε γεμίσματα <1 . Δηλαδή, έχουμε έναν τεράστιο αριθμό πιθανών διατάξεων $\binom{N/\nu}{N}$, που όλες αποδίδουν την ίδια ενέργεια, ένα πλήθος εκφυλισμένων καταστάσεων. Αν ανοίξω τώρα την αλληλεπίδραση, το πείραμα δείχνει ότι με κάποιον τρόπο, σε κάποια συγκεκριμένα ν , οι εκφυλισμένες αυτές καταστάσεις συνδυάζονται γραμμικά κάπως, αποδίδοντας μια μοναδική θεμελιώδη κατάσταση, που διαχωρίζεται από τη διεγερμένη με χάσμα, ώστε να παρατηρείται πλάτωμα αγωγιμότητας. Το θέμα είναι ότι εδώ δεν είμαστε στη λογική της θεωρίας διαταραχών, η επίδραση του δυναμικού Coulomb είναι εκ προοιμίου μη διαταρακτική, γιατί απλώς ορίζει μια κλίμακα αλληλεπίδρασης, ενώ το FQHE παρατηρείται ανεξαρτήτως αυτής της κλίμακας, το χάσμα ανοίγει και για αυθαίρετα μικρό δυναμικό. Είμαστε σε μια Χαμιλτονιανή που δεν περιέχει ούτε μια παράμετρο, κι αυτό μας εμποδίζει να εντοπίσουμε αδιατάρακτη Χαμιλτονιανή, και να κουνήσουμε την παράμετρο για να λύσουμε το πρόβλημα, όπως πχ κάναμε διερευνώντας μικροσκοπικά την ανταπόκριση του ρεύματος Hall σε μετασχηματισμούς βαθμίδας. Παρά την απλή μορφή που έχει η Χαμιλτονιανή, η επίλυσή της είναι μη τετριμμένη, γιατί στερεί τη δυνατότητα χρήσης του πλέον ισχυρού εργαλείου επίλυσης εξίσωσης ιδιοτιμών: τη θεωρία διαταραχών.

3. Εργαλειοθήκη

Εδώ κάνουμε μια παύση για να δώσουμε κάποια μαθηματικά συστατικά, που θα διευκολύνουν πολύ την ανάλυση μας.

Το πρώτο είναι να υπενθυμίσουμε ότι στο LLL, στη σφαιρική βαθμίδα, οι μονοσωματιδιακές κυματοσυναρτήσεις δίνονται από τον τύπο $z^m \exp(-|z|^2/4)$ (μετράω σε μονάδες $\ell=1$ για ευκολία), και ότι κάθε συνάρτηση στη μορφή $f(z) \exp(-|z|^2/4)$, $f(z)$ αναλυτική, είναι στο LLL.

Ο Laughlin στο IQHE δίπλωσε το δείγμα σε ρολό κι έβαλε το πεδίο να αντιστοιχεί σε κάτι σαν λεπτό σωληνοειδές στο εσωτερικό του ρολού: ο Haldane τύλιξε με το δείγμα την επιφάνεια μιας σφαίρας κι έβαλε το πεδίο να γεννιέται από ένα μαγνητικό μονόπολο Dirac στο κέντρο της με $\mathbf{B} = (2Q\Phi_0/4\pi R^2)\mathbf{r}$, γεννώμενο από δυναμικό $\mathbf{A} = -(\hbar c Q/eR) \cot\theta \boldsymbol{\phi}$. Βλέπουμε ότι το $\mathbf{A}$ δεν είναι καλά ορισμένο στις θέσεις $\theta=0$ και $\theta=\pi$, που οφείλεται στην ανικανότητα του επιπέδου να τυλίξει κάθε σημείο της σφαίρας: πχ αν το επίπεδο εφάπτεται στο νότιο πόλο της σφαίρας με τη σφαίρα, τότε ό,τι και να κάνουμε ποτέ δε θα καταφέρουμε να τυλίξουμε το βόρειο πόλο μέσα χωρίς να κολλήσουμε το επίπεδο εκεί, δηλαδή να χαλάσουμε την τοπολογία. Αυτό το πρόβλημα υπάρχει άμα τη επινόηση του μαγνητικού μονόπολου, για την ακρίβεια συναντάται και αλλού, πχ όταν ψάχνει κανείς παραμετροποίηση όλων των ιδιοκαταστάσεων στη σφαίρα Bloch για τα σπιν αναγκάζεται να

χρησιμοποιήσει δυο λωρίδες καταστάσεων, οι οποίες ράβονται στον Ισημερινό με μια σχετική φάση. Αντίστοιχα κι εδώ μπορεί να οριστεί ένα σετ δυναμικών για το βόρειο κι ένα για το νότιο ημισφαίριο, που θα διαφέρουν κατά ένα μετασχηματισμό βαθμίδας, και θα ράβονται στον Ισημερινό.

Ασχετα με αυτό, όπως βλέπουμε, η ροή μέσα από την επιφάνεια της σφαίρας είναι $2Q$ φορές το κβάντο ροής, και θεωρούμε το $2Q$ ακέραιο, θετικό ή αρνητικό. Ο παράγοντας πλήρωσης εδώ ορίζεται $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2Q}$.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι η τροχιακή στροφορμή και η προβολή της στο z – άξονα είναι καλοί κβαντικοί αριθμοί. Όπως αποδεικνύεται στο σύνηθες πρόβλημα της κβαντομηχανικής ότι $\ell=0, 1, 2, \dots$ έτσι κι εδώ ακολουθώντας την ίδια διαδικασία –δε θα την επαναλάβουμε εδώ– αποδεικνύεται ότι $\ell=|Q|, |Q|+1, |Q|+2, \dots$ οι πιθανές τιμές του ℓ , ενώ κατά τα γνωστά $m=-\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$.

Το πλεονέκτημα αυτής της γεωμετρίας είναι η συμπαγής της φύση: εδώ τα επίπεδα Landau αντιστοιχούν στα διάφορα ℓ . Έτσι, ο εκφυλισμός κάθε επιπέδου είναι ίσος με τον αριθμό πιθανών m για κάθε επίπεδο, $2\ell+1$, και προφανώς αυξάνεται κατά 2 ανά επίπεδο που ανεβαίνουμε. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε n συμπληρωμένα επίπεδα, τότε ο εκφυλισμός για κάθε επίπεδο είναι $2|Q|+1+2i$, $i=0, 1, 2, \dots, n$, και άρα ο συνολικός αριθμός διαθέσιμων καταστάσεων για τα φερμιόνια είναι $\sum_{i=0}^{n-1} (2|Q|+1+2i) = 2|Q|n + n^2$, οπότε έχουμε n συμπληρωμένα επίπεδα όταν $Q=\pm(N-n^2)/2n$.

Θα κριθεί σημαντικό να βγουν κάποια συμπεράσματα για την πολυσωματιδιακή κατάσταση στο LLL, για τυχόν γέμισμα. Απ' όσα είπαμε για τη μονοσωματιδιακή κατάσταση, και λαμβάνοντας υπ' όψιν το ότι το σύστημα είναι φερμιονικό, μπορούμε να καταλάβουμε ότι η μορφή της κυματοσυνάρτησης θα είναι $\Psi=F(\{z_j\})\exp(-\sum_j |z_j|^2)$, με την F πολυωνυμική των z_j , και αντισυμμετρική ως προς την ανταλλαγή δυο οποιονδήποτε εξ αυτών. Εννοείται ότι μπορώ να θεωρήσω ότι η F είναι ένα πολυώνυμο μιας συγκεκριμένης z_i , και ότι όλες οι άλλες συντεταγμένες αντιμετωπίζονται ως συντελεστές των z_i^m . Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας μας δίνει τον αριθμό των ριζών του πολυωνύμου, ως το βαθμό του πολυωνύμου, δηλαδή το μεγαλύτερο εκθέτη m των z_i^m . Όμως είμαστε στο LLL, οπότε $\ell=|Q|$, και υπάρχουν $2|Q|+1$ διαθέσιμες καταστάσεις, οπότε το m που μετράει πόσες φορές δράσαμε με τον β^+ στο κενό της θεωρίας μπορεί να πάει μέχρι $2|Q|+1$, ενώ $2|Q|$ είναι τα κβάντα ροής που διεισδύουν στο δείγμα. Επομένως, ο μέγιστος δυνατός εκθέτης είναι αυτός ο αριθμός των κβάντων ροής $\text{mod}(O(1))$ όρους, και αυτός είναι N/v , σύμφωνα με τον ορισμό του v . Αν τώρα ένα σωματίο διαγράψει έναν κλειστό βρόχο γύρω από ένα μηδενισμό, θα τσακώσει φάση Bohm –Aharonov 2π , ως φερμιόνιο, οπότε κάθε σημείο μηδενισμού είναι μια δίνη (δίνες ονομάζουμε τα αντικείμενα που κλειστές διαδρομές γύρω τους αποδίδουν φάση 2π).

Όσον αφορά κυματοσυναρτήσεις ανώτερων LL, λόγω της μη αναλυτικότητάς τους, δε μπορούμε να προβούμε σε τέτοιου είδους συμπεράσματα για τους μηδενισμούς της κυματοσυνάρτησης.

Αν όμως έχουμε $v=n$ ακέραιο, δηλαδή πλήρως συμπληρωμένα LL, τότε η θεμελιώδης κατάσταση είναι μοναδική, και μάλιστα γνωρίζουμε από την κβαντομηχανική ότι είναι η ορίζουσα Slater των κατειλημμένων μονοσωματιδιακών τροχιακών. Αν έχουμε τυχόν παράγοντα πλήρωσης, επειδή το ανώτερο LL έχει περισσότερες θέσεις από ηλεκτρόνια, αυτά μπορούν να τις καταλάβουν με διάφορους

τρόπους που όλοι αποδίδουν την ίδια ενέργεια, γεγονός που σημαίνει ότι στα n μη ακέραια, η θεμελιώδης παρουσιάζει έντονο εκφυλισμό.

Στο συμπληρωμένο LLL, τέλος, αν εξαιρέσουμε τον παράγοντα κανονικοποίησης η κυματοσυνάρτηση, λαμβάνοντας υπ' όψιν το ότι η είναι η ορίζουσα Slater και το ότι οι μονοσωματιδιακές καταστάσεις έχουν τη μορφή που είπαμε, λαμβάνει τη μορφή:

$$\Phi_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \exp \left[-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2 \right]$$

Αυτή η ορίζουσα είναι γνωστή στα μαθηματικά: ονομάζεται ορίζουσα Vandermonde και αποδεικνύεται ότι μπορεί να λάβει την απλούστερη μορφή:

$$\Phi_1 = \prod_{j < k} (z_j - z_k) \exp(-\sum_i |z_i|^2 / 4).$$

Η σχέση αυτή έχει και ξεκάθαρο φυσικό περιεχόμενο: δεν είναι τίποτα παραπάνω από την απαγορευτική Αρχή του Pauli. Στα σημεία όπου οι θέσεις δυο τυχόντων ηλεκτρονίων συμπίπτουν αυτομάτως η Φ_1 μηδενίζεται, ενώ είναι και ένας τρόπος εκπλήρωσης της αντισυμμετρίας υπό την ανταλλαγή δυο τυχόντων z_i , αφού μια τέτοια επιχείρηση ξεκάθαρα αποδίδει $\Phi_1 \rightarrow -\Phi_1$. Είναι μάλλον ο απλούστερος τρόπος να εκφράσει κανείς αυτές τις δυο αρχές.

4. Η πρόταση του Laughlin

Οι πειραματικοί είχαν τη μεγάλη τύχη να παρατηρήσουν πρώτα το πλάτωμα στον παράγοντα πλήρωσης $\nu=1/3$. Και ήταν τύχη, διότι ο Laughlin κατάφερε να βρει μια κυματοσυνάρτηση που αποδίδει σωστά τη θεμελιώδη, για την ακρίβεια έδωσε τις κυματοσυναρτήσεις για παράγοντα πλήρωσης $\nu=1/m$ ως:

$$\Psi_{1/m}^{\text{Laughlin}} = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \exp(-\sum_i |z_i|^2 / 4).$$

Η κυματοσυνάρτηση αυτή οφείλει να είναι αντισυμμετρική υπό την ανταλλαγή δυο τυχόντων συντεταγμένων, οπότε πρέπει να είναι περιττή ως προς τη διαφορά τους. Αυτό επιτρέπει μόνο περιττές τιμές για το m , με την περίπτωση $m=1$ να είναι φυσικά η τετριμμένη Φ_1 . Ο παράγοντας $\prod_{j < k} f(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)$ κυκλοφορεί στη βιβλιογραφία με την ονομασία παράγοντας Jastrow.

Παρακάτω θα εξηγήσουμε την πρόταση του Laughlin, και θα προσπαθήσουμε να αναλύσουμε το τι ακριβώς σημαίνει από φυσικής απόψεως. Μια πρώτη ματιά στη συνάρτηση δείχνει ότι στα απαγορευμένα σημεία για το ηλεκτρόνιο –τις τρύπες στο δείγμα!– η κυματοσυνάρτηση αυτή ισχυροποιεί την απαγόρευση, αυξάνοντας το βαθμό του αντίστοιχου παράγοντα. Ωραία το έθεσε ο Halperin: στο γέμισμα $1/m$, αν θεωρήσω ένα z_i , τότε για αυτό η κυματοσυνάρτηση περιέχει αριθμό μηδενισμών $N/\nu = Nm$, όπως εξηγήσαμε πριν. Οι N μηδενισμοί προέρχονται σίγουρα από την Απαγορευτική Αρχή του Pauli, που απαγορεύει τη σύμπτωση 2 ηλεκτρονίων. Εν γένει, οι υπόλοιποι $(m-1)N$ μηδενισμοί μπορεί να βρίσκονται οπουδήποτε μέσα στο δείγμα: η κυματοσυνάρτηση του Laughlin τοποθετεί αυτούς τους μηδενισμούς επάνω στα υπόλοιπα σωματίδια, δε σπαταλά κανέναν σε τυχαίες θέσεις, ώστε να αποφύγει τις αλληλεπιδράσεις. Θα δούμε επίσης ότι η κατάσταση $1/m$ είναι μέρος μιας μεγαλύτερης δομής που περιέχει κι άλλες καταστάσεις.

Πριν όμως το κάνουμε αυτό, πρέπει να επισημάνουμε πως όλα όσα θα ειπωθούν έχουν φαινομενολογικό έρεισμα, πάει να πει σχεδιάστηκαν για να κλειδώσουν τέλεια πάνω στα πειραματικά δεδομένα. Η αλήθεια είναι πως η μικροσκοπική αιτία του FQHE δεν είναι γνωστή, και όλα όσα θα λέμε προέρχονται από την εκ των προτέρων γνώση των πειραματικών αποτελεσμάτων.

Η λογική της πορείας του Laughlin είναι ότι το FQHE είναι στην πραγματικότητα IQHE –το οποίο έχει ερμηνευθεί- αλλά όχι IQHE ηλεκτρονίων, αλλά IQHE κάποιων άλλων δομών, μιας άλλης κατάστασης ύλης, που ονομάστηκαν σύνθετα φερμιόνια (Composite Fermions –CF). Ενώ θα αναφερθούμε σε αυτά αρκετά αναλυτικά, ο πραγματικός λόγος της ύπαρξής τους και το γιατί σχηματίζονται όπως σχηματίζονται, δεν έχει κατανοηθεί.

5. Σύνθετα φερμιόνια (CF)

Η αλήθεια είναι, ότι ανεξαρτήτως αν τα πλατώματα αγωγιμότητας εμφανίζονται σε ακέραια ή κλασματικά γεμίσματα, η φαινομενολογία είναι ακριβώς ίδια, οπότε είναι αρκετά εύλογη η προσπάθεια ενοποίησης των δυο φαινομένων IQHE και FQHE, έχοντας μάλιστα ανά χείρας ότι η κβάντωση της αγωγιμότητας περιλαμβάνει την παρουσία χάσματος.

Ο «σχηματισμός» των νέων αυτών σωματίων, των CF, είναι κι εκείνος ένα ανακύπτον φαινόμενο, ένας συλλογικός μηχανισμός του συστήματος. Το IQHE δεν απαιτεί την παρουσία αλληλεπιδράσεων, όπως οι αλληλεπιδράσεις Coulomb της Χαμιλτονιανής που βρήκαμε, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα νέα αντικείμενα αλληλοεπιδρούν ασθενώς μεταξύ τους, και είναι αυτά τα οποία θα βιώσουν IQHE, το οποίο όμως θα καθρεφτιστεί στο ηλεκτρονιακό σύστημα ως FQHE, με τον τρόπο που θα εξηγήσουμε.

Πώς θα ορίσουμε ένα σύνθετο φερμιόνιο; Το ότι είναι τα ανακύπτοντα αντικείμενα φερμιόνια εξυπακούεται από το ότι είναι απαραίτητο να έχουμε φερμιονικό σύστημα για να προκύψει το IQHE –σκεφτείτε μόνο τα επίπεδα Landau αν μπορούσαν να δεχτούν οι καταστάσεις οποιοδήποτε αριθμό σωματιδίων: το ρεύμα θα ήταν πάντα ελεύθερο να πάρει οποιοσδήποτε τιμές. Ξεκινάμε από ένα ηλεκτρόνιο και εξετάζουμε πώς από αυτό θα μπορούσε να προκύψει φερμιόνιο. Ενθυμούμενοι ότι βασικά συστατικά της πολυσωματιδιακής κυματοσυνάρτησης ήταν οι δίνες –τα σημεία μηδενισμού της- ορίζουμε ένα CF ως ένα ηλεκτρόνιο συν ένα άρτιο αριθμό κβαντισμένων δινών. Είναι σαφές ότι οι δίνες είναι συστατικό του συνολικού ηλεκτρονιακού συστήματος, οπότε και το CF είναι ανακύπτον σωματίο που σχετίζεται με όλα τα ηλεκτρόνια. Γιατί ήταν άρτιος ο αριθμός των δινών; Ας φανταστούμε ένα CF να διαγράφει κλειστό βρόχο γύρω από ένα άλλο CF. Τότε όπως εξηγήσαμε θα τσακώσει τη φάση Bohm –Aharonov που σχετίζεται με την έγκλειστη ροή, αλλά και τη στατιστική φάση. Αν το CF είχε περιττό αριθμό δινών, τότε η φάση Bohm –Aharonov που θα τσάκωνε το CF θα ήταν 2π , λ ο αριθμός των δινών, περιττός, ενώ κατά τα γνωστά η στατιστική φάση θα ήταν 2π . Όμως η κλειστή διαδρομή ισοδυναμεί με δυο διαδοχικές ανταλλαγές των CF, οπότε η κάθε ανταλλαγή αποδίδει στη συνολική κυματοσυνάρτηση φάση $(2\pi\lambda+2\pi)/2=\pi(\lambda+1)$, λ περιττός, δηλαδή άρτιο πολλαπλάσιο του π , πάει να πει συμμετρική κυματοσυνάρτηση, οπότε τα CF θα ήταν μποζόνια. Γι' αυτό ο αριθμός των δινών που συρράπτεται σε κάθε

ηλεκτρόνιο είναι άρτιος. Τότε λ άρτιο, οπότε η φάση είναι περιττό πολλαπλάσιο του π, αντισυμμετρική κυματοσυνάρτηση.

Τώρα ποιο το πλεονέκτημα που προσφέρει αυτή η εικόνα σε σχέση με την αρχική: ας υποθέσουμε ότι έχουμε σύστημα μη αλληλοεπιδρώντων ηλεκτρονίων, όπως στο σύστημα του IQHE, με παράγοντα πλήρωσης $\nu^* = n$ ακέραιο, οπότε η θεμελιώδης περιλαμβάνει n συμπληρωμένα LL. Η δε πρώτη διεγερμένη συμβαίνει όταν ένα ηλεκτρόνιο του ανώτερου γεμισμένου LL καταφέρει να πεδήσει στο υπερκείμενο LL, αφήνοντας ένα κενό πίσω του, διεγερση που αναφέρεται για ευνόητους λόγους ως ζεύγος σωματίου –οπής. Το μαγνητικό πεδίο σχετίζεται κατά τα γνωστά με τον παράγοντα πλήρωσης: $|B^*| = r\Phi_0/\nu^* = r\Phi_0/n$, με το απόλυτο να σημαίνει απλώς ότι το B δείχνει στη θετική ή στην αρνητική κατεύθυνση του z –άξονα.

Η μεγάλης εμβέλειας σταθερότητα του συστήματος σε ακέραια γεμίσματα, υπαγορεύεται μόνο και μόνο από το ότι τα σωματίδια είναι φερμιόνια, κι εκδηλώνεται από την παρουσία του χάσματος μεταξύ θεμελιώδους και πρώτης διεγερμένης.

Τώρα μετατρέπουμε τα ηλεκτρόνια σε CF: τοποθετούμε σε κάθε ηλεκτρόνιο ένα απεριόριστα λεπτό, άμαζο σωληνοειδές που φέρει ροή ίση με 2π κβάντα ροής. Αυτή η αλλαγή είναι φυσικώς μη παρατηρήσιμη, διότι η έλλειψη ή το πλεόνασμα ακέραιου αριθμού κβάντων ροής δεν εκδηλώνει καμία διαφορά στις κλειστές διαδρομές, ενώ η φερμιονική φύση των αρχικών σωματιδίων εξασφαλίζει τη φερμιονική φύση και των τελικών, λόγω του ότι ήταν άρτιος ο αριθμός των κβάντων ροής που συρράψαμε, όπως το εξηγήσαμε πριν, οπότε δεν υπάρχει διαφορά ούτε στις ανταλλαγές. Άρα, το αρχικό πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το τελικό: μετατρέψαμε την ασυμπίεστη κατάσταση των ηλεκτρονίων σε ασυμπίεστη κατάσταση των CF.

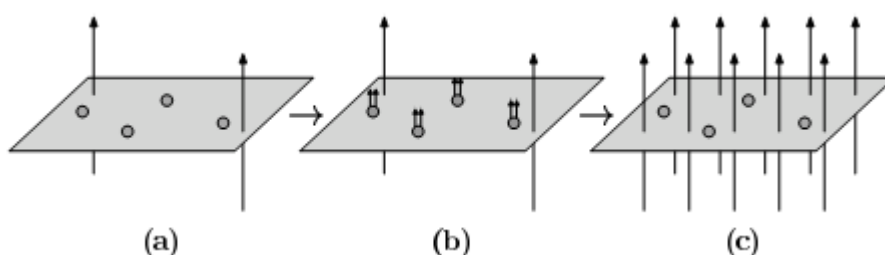
Τέλος, κάνουμε την αδιαβατική προσέγγιση: θεωρούμε ότι πάρα πολύ αργά (σε χρόνο πολύ μεγαλύτερο του $\hbar/\Delta$, Δ το χάσμα, ώστε να μη διεγείρουμε τίποτα) η συνολική ροή από όλες τις δίνες που έχουν τσακώσει τα ηλεκτρόνια απλώνεται ομοιόμορφα –επειδή ομοιόμορφη είναι η αρχική πυκνότητα των ηλεκτρονίων!- στο δείγμα, και γίνεται έτσι κι αυτή μέρος του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Άρα, έχουμε τώρα ένα ηλεκτρονιακό σύστημα το οποίο υπόκειται σε μαγνητικό πεδίο: $B = \pm B^* + 2\pi r\Phi_0$. Όμως το B σχετίζεται με τον παράγοντα πλήρωσης για το ηλεκτρονιακό σύστημα $B = r\Phi_0/\nu$, και έτσι $r\Phi_0/\nu = \pm r\Phi_0/n + 2\pi r\Phi_0 \Rightarrow \nu = n/(2\pi n \pm 1)$.

Είναι ζωτικό για να είναι πράγματι αυτή η σωστή συνταγή, να μην κλείσει το χάσμα, δηλαδή να μην έχω μετάβαση σε άλλη φάση. Αυτό εν γένει δε μπορεί να είναι σίγουρο για οποιαδήποτε p, n, ενώ είναι βέβαιο ότι θα συμβούν ποσοτικές αλλαγές: στο IQHE το χάσμα είναι η διαφορά δυο διαδοχικών LL $\hbar\omega_c$, που αναφέρεται συχνά και ως ενέργεια κύκlotρου· στο FQHE η Χαμιλτονιανή δεν περιέχει καμία παράμετρο, η μάζα της ηλεκτρονιακής ζώνης –η μάζα που φαίνεται να έχει το ηλεκτρόνιο σε κάθε σημείο της ζώνης λόγω της ζωνικής δομής που σχηματίζεται και που σχετίζεται με την πυκνότητα καταστάσεων· είναι η μάζα που αν την είχε ένα σωματίο ελεύθερο θα το έκανε να συμπεριφερθεί όπως το ηλεκτρόνιο στη συγκεκριμένη δομή- η οποία σχετίζεται με την ενέργεια κύκlotρου εδώ δεν υπεισέρχεται στο φαινόμενο! Η κατανομή της ροής στο δείγμα δεν είναι ότι θα «κουνήσει» την ενεργειακή διαφορά που αντιστοιχεί στο χάσμα –απλώς μια ανακανονικοποίηση- αλλά θα αλλάξει εντελώς την ενεργειακή κλίμακα. Το θέμα είναι ότι όπως και να ‘χει, αν γίνει η υπόθεση ότι το χάσμα δεν έκλεισε, αλλά η ενέργεια κύκlotρου μετατράπηκε σε ένα χάσμα Δ , τότε μπορούμε να καταλάβουμε

ότι είμαστε στο σωστό δρόμο: όσα είπαμε δείχνουν ότι όντως μπορεί και να σχηματίζεται ένα χάσμα σε παράγοντες πλήρωσης $\nu=n/(2n+1)$ (για $p=1$ και πεδίο προς τα θετικά z), που είναι και τα πλατώματα του FQHE που παρατηρήθηκαν. Θα πρέπει από τις πειραματικές ενδείξεις να υποθέσουμε ότι η αδιαβατική εξάπλωση των δινών πράγματι κράτησε ανοιχτό το χάσμα.

Αντίστροφα, μπορούμε να δούμε την κατάσταση όπου έχουμε ηλεκτρονικό σύστημα υπό πολύ ισχυρό μαγνητικό πεδίο και παρατηρείται το FQHE ως εξής: τα ηλεκτρόνια κλέβουν από το πεδίο $2p$ δίνες –κβάντα ροής το καθένα, αποδυναμώνοντας την ισχύ του, και ταυτόχρονα μετατρέπονται σε CF. Τα CF βιώνουν πλέον ένα ασθενέστερο πεδίο B^* , αλλά επειδή συμπεριφέρονται ως ηλεκτρόνια υπό ασθενές πεδίο, για αυτά συμβαίνει το IQHE στους παράγοντες πλήρωσης $\nu^*=n$ (σημειώνουμε ότι θα αναφερόμαστε από ‘δω και στα εξής στα επίπεδα Landau των CF όχι ως LL, αλλά ως ΛΛ για να τα ξεχωρίζουμε από εκείνα των ηλεκτρονίων).

Είναι σαφές ότι η μικροσκοπική αιτιολόγηση του γιατί τα ηλεκτρόνια να κλέψουν από το πεδίο ένα μέρος του, καθώς βέβαια και ο μηχανισμός που συρράπτουν τις δίνες, δεν είναι καθόλου ξεκάθαρος. Απλώς από την απαίτηση να ερμηνευθεί το φαινόμενο, φαίνεται εύλογο ότι έτσι έγιναν τα πράγματα. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι η φύση, στην προσπάθειά της να εξαλείψει τον τεράστιο εκφυλισμό του συστήματος των ισχυρά αλληλοεπιδρώντων ηλεκτρονίων, δημιούργησε ασθενώς αλληλοεπιδρώντα, ανακλύπτοντα σωματίδια, αλλά το πώς έγινε αυτό δεν είναι ακόμα καθαρό.



Όπου στο (a) βλέπουμε τα ηλεκτρόνια σε ασθενές πεδίο, στο (b) τους συρράπτουμε 2 δίνες (περίπτωση $p=1$) και στο (c) έχουμε απλώσει τη ροή των δινών στο δείγμα ισχυροποιώντας το μαγνητικό πεδίο.

Το τεράστιο πλεονέκτημα της νέας εικόνας, είναι ότι παρέχει τη δυνατότητα προσέγγισης μέσου πεδίου, αδύνατη στην αρχική Χαμιλτονιανή. Είναι ακριβώς το σημείο που υποθέτουμε ομοιόμορφο άπλωμα της ροής στο δείγμα.

Η κατάσταση του FQHE είναι μια αμιγώς τοπολογική κατάσταση. Η δίνη είναι τοπολογικό αντικείμενο, από την άποψη ότι το σχήμα ή το μέγεθος του βρόχου που θα κλείσει γύρω της είναι άσχετο: η φάση που θα τσακώσει θα είναι πάντα 2π . Επομένως όλες οι καταστάσεις των CF, αφού περιλαμβάνουν δίνες, είναι τοπολογικές. Βασικά, το σύστημα αυτό είναι δυο φορές τοπολογικό, αν είναι δόκιμος ένας τέτοιος όρος. Πέραν των δινών, μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον αριθμό των πληρωμένων ΛΛ ως έναν τοπολογικό δείκτη με τον ίδιο τρόπο που το κάναμε στο IQHE για τον αριθμό των πληρωμένων LL, που ήταν το τοπολογικό αναλλοίωτο που ονομάσαμε αριθμό Chern.

Επισημαίνουμε ότι είναι θελκτικό να θεωρούμε συνεχώς την αναλογία ηλεκτρονίων στα LL και CF στα ΛΛ. Όμως υπάρχει η ειδοποιός διαφορά ότι το στήσιμο των LL έχει νόημα στο πλαίσιο ακόμη και του ενός ηλεκτρονίου. Αντιθέτως, το πλαίσιο όπου θεωρούμε ένα CF στερείται νοήματος: δε μπορεί να υπάρξει δίνη χωρίς να υπάρχουν άλλα ηλεκτρόνια. Το στήσιμο των ΛΛ μπορεί να γίνει μόνο κατά την επίλυση του πολυσωματιδιακού προβλήματος, τα CF είναι ανακλύπτοντα σωματίδια, δεν έχουν κανένα νόημα ούτε ανάλογο στη μικροσκοπική μελέτη του προβλήματος, εμφανίζονται όπως ένα πρόσωπο φτιαγμένο σε κολάζ, όπου οι επιμέρους φωτογραφίες του κολάζ δεν έχουν καμία σχέση μ' αυτό.

Τέλος, το FQHE είναι κι εκείνο ένα ξεχωριστό παράδειγμα μακροσκοπικού, κβαντικού φαινομένου. Το CF είναι αρχετυπικά διαφορετικό από οποιοδήποτε άλλο συμπύκνωμα δομών εμφανίζεται στη φυσική. Φερ' ειπείν δε θυμίζει σε τίποτα την κατάσταση στους υπεραγωγούς BCS, όπου οι σύνθετες δομές των ζευγών Cooper εμφανίζονται λόγω της αυθόρμητης θραύσης της συμμετρίας βαθμίδας, εξαιτίας μιας αστάθειας στη θάλασσα Fermi και το σύστημα γίνεται συμπύκνωμα Bose –Einstein. Εδώ τα CF δεν εμφανίζονται εξαιτίας κάποιας σπασμένης συμμετρίας, βασικά δεν υπάρχει καν κάτι που να θυμίζει την παράμετρο τάξης της θεωρίας Landau! Από εκεί άλλωστε προερχόταν και η δυσκολία να χειριστούμε τη Χαμιλτονιανή υπό όρους θεωρίας διαταραχών.

6. Σε μαθηματική γλώσσα

Η μαθηματική θεμελίωση της διαδικασίας που περιγράψαμε, έρχεται από το φορμαλισμό που είναι γνωστός ως Chern –Simons.

Ξεκινάμε με το πραγματικό σύστημα: ηλεκτρόνια υπό εξωτερικό πεδίο $\mathbf{B}$, με ενεργό μάζα ζώνης m_b . Τότε η εξίσωση Schrodinger είναι:

$$[(1/2m_b)\sum_i(\mathbf{p}_i+e\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)/c)^2+V]\Psi=E\Psi, \quad V \text{ το δυναμικό αλληλεπίδρασης.}$$

Όλα ξεκινούν από το μετασχηματισμό Chern –Simons:

$\Psi=\prod_{j<k}[(z_j-z_k)/|z_j-z_k|]^{2p}\Psi_{CS}$, που είναι μετασχηματισμός βαθμίδας βέβαια αφού κάθε όρος στο γινόμενο είναι το εκθετικό μιας φάσης επί i , και το γινόμενο απλώς προσθέτει αυτές τις φάσεις.

Τότε, με αυτό το μετασχηματισμό προκύπτει $H'\Psi_{CS}=E\Psi_{CS}$,
 $H'=[(1/2m_b)\sum_i(\mathbf{p}_i+e(\mathbf{A}(\mathbf{r}_i)-\mathbf{a}(\mathbf{r}_i))/c)^2+V]$, $\mathbf{a}(\mathbf{r}_i)=(2p\Phi_0/2\pi)\nabla\theta_{ij}$.

Ένας βιαστικός θα έλεγε ότι αυτό το $\mathbf{a}$ είναι τετριμμένο, αφού είναι ανάλογο μιας απόκλισης, οπότε ο στροβιλισμός του αποδίδει 0, δηλαδή πεδίο 0. Όμως μην ξεχνάμε ότι η θ_{ij} δεν είναι καλά ορισμένη, είναι $\theta_{ij}=-\ln[(z_i-z_j)/|z_i-z_j|]$, δηλαδή δεν είναι καλά ορισμένη στο σημείο $z_i=z_j$. Άρα, ενώ παντού πράγματι το πεδίο είναι 0, υπάρχει ένα σημείο που το δυναμικό δεν είναι καλά ορισμένο, και άρα ο στροβιλισμός του σε εκείνο το σημείο θα πρέπει να συνδέεται με τη δ συνάρτηση του Dirac, δηλαδή το $\mathbf{a}$ αντιστοιχεί σε πεδίο $\mathbf{b}=(2p\Phi_0/2\pi)A\delta(z_i-z_j)$, A σταθερά που μένει να βρεθεί. Είναι $\iint \mathbf{b}d\mathbf{S}=\oint \mathbf{a}d\mathbf{r}$, από το Θεώρημα Stokes, και άρα αν ολοκληρώσω σε μια οποιαδήποτε περιοχή που να περικλείει μέσα το z_j , το $\oint \nabla\theta_{ij}d\mathbf{r}$ είναι το ολοκλήρωμα διαδρομής που περικλείει δίνη (μιλάμε για ηλεκτρόνια οπότε η φάση που τσακώνει το ένα ηλεκτρόνιο κλείνοντας βρόχο γύρω από το άλλο είναι 2π), δηλαδή ισούται με 2π . Άρα, και εκμεταλλευόμενοι το ότι $\iint \delta(z_i-z_j)d\mathbf{S}=1$, $A=2\pi$. Έτσι, $\mathbf{b}_i=2p\Phi_0\delta(z_i-z_j)$, και επειδή το $\mathbf{a}$ δείχνει σε αντίθετη κατεύθυνση από το $\mathbf{A}$, το $\mathbf{a}$

αντιστοιχεί ακριβώς σ' αυτό που είπαμε πριν, αποδίδει σε κάθε ηλεκτρόνιο ροή $-2p\Phi_0$, αφού τέτοιο πεδίο βλέπει το κάθε ηλεκτρόνιο σε όλα τα υπόλοιπα, δηλαδή $2p$ κβάντα ροής, τοποθετημένα σε απεριόριστα μικρό σωληνοειδές, όπως μας εξασφαλίζει η συνάρτηση δ . Δηλαδή, με ένα μετασχηματισμό βαθμίδας, είναι εφικτό να ειπωθεί το σύστημα ως μια σειρά από ηλεκτρόνια που φέρουν κβάντα ροής, υπό ένα διαφορετικό από το αρχικό πεδίο.

Εδώ η ανάλυση κολλάει αν δε γίνει η προσέγγιση μέσου πεδίου, η οποία τώρα αντιστοιχεί φυσικώς στο ομοιόμορφο άπλωμα της ροής κάθε σύνθετου φερμιονίου που έχουμε στη νέα εικόνα, και αντιμετώπιση του νέου πεδίου ως το άθροισμα του εξωτερικού και εκείνου που προέρχεται από τις ροές.

Δηλαδή το πεδίο που βιώνουν τα CF είναι $B^* = B - 2pr\Phi_0$, όπως το βρήκαμε και πριν δηλαδή, ενώ γράφουμε $\mathbf{A} - \mathbf{a} = \mathbf{A}^* + \delta\mathbf{A}$, όπου $\nabla \times \mathbf{A}^* = \mathbf{B}^*$.

Τώρα, $H' = [(1/2m_b)\sum_i (\mathbf{p}_i + e\mathbf{A}^*(\mathbf{r}_i)/c)^2 + V + V'] = H_0' + V + V'$, όπου στο V' έχουμε μαζέψει όλους τους όρους που είναι υπόλοιπα του $\delta\mathbf{A}$.

Όμως η H_0' είναι ακριβώς η Χαμιλτονιανή του IQHE, περιγράφει δηλαδή ελεύθερα φερμιόνια που βιώνουν μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}^*$. Το δε τμήμα $V + V'$ αντιμετωπίζεται ως διαταραχή.

Αγνοώντας τη διαταραχή, και για τις τιμές $\nu = n/(2pn+1)$, θεωρώντας $\Phi_n(B^*)$ τις λύσεις του αδιατάρακτου προβλήματος, δηλαδή τις λύσεις για μη αλληλοεπιδρώντα φερμιόνια υπό πεδίο B^* , προκύπτει ότι $\Psi_n(B) = \prod_{j < k} [(z_j - z_k)/|z_j - z_k|]^{2p} \Phi_n(B^*)$. Αυτό δείχνει, ότι οι ενέργειες είναι ίδιες για τα ηλεκτρόνια στο πεδίο B , με εκείνες για τα φερμιόνια στο πεδίο B^* , δηλαδή το χάσμα είναι το τυπικό χάσμα των LL, $\Delta = \hbar\omega_c^* = \hbar eB^*/m_b c = \hbar eB/m_b c(2pn+1)$. Αυτή η λύση, όπως εξηγήσαμε, απέχει πολύ από την πραγματική. Η μάζα δεν εμφανίζεται στη Χαμιλτονιανή, δεν είναι παράμετρος της, επομένως το χάσμα δε μπορεί να έχει καμία σχέση μ' αυτή, όπως βγήκε εδώ. Για την ακρίβεια, το χάσμα θα έπρεπε να βγει να σχετίζεται μόνο με το $e^2/\epsilon\ell$ (αφού το χαρακτηριστικό μήκος για το πρόβλημα είναι το μαγνητικό μήκος ℓ) που είναι ανάλογο του $B^{1/2}$, που στο LLL είναι η μοναδική ενεργειακή κλίμακα. Επίσης, η κυματοσυνάρτηση αποδίδει ακριβώς τα ίδια πλάτη πιθανότητας με εκείνη του IQHE, ενώ για $\nu = 1/m$ δεν ανάγεται στην πρόταση του Laughlin. Τα βασικά προβλήματα συνοψίζονται στα να εμφανιστούν οι απωστικοί συσχετισμοί που αντιστοιχούν στο όριο των αλληλοεπιδρώντων πια ηλεκτρονίων –εδώ δε φαίνεται τίποτα τέτοιο, αφού η κυματοσυνάρτηση αποδίδει ίδια πλάτη πιθανότητας με εκείνη των ασυσχέτιστων ηλεκτρονίων- και να ξεφορτωθεί από τα χάσματα τη μάζα. Όλα αυτά, η προσέγγιση μέσου πεδίου πρέπει να τα κάνει χωρίς να έχει μικρή παράμετρο!

Προσέξτε όμως κάτι: πόσες ελπίδες είχαμε για κάτι διαφορετικό, από τη στιγμή που το μόνο που κάναμε ήταν ένας μετασχηματισμός βαθμίδας; Επίσης αντιμετωπίσαμε το μοναδικό όρο που επιβίωσε αρχικά στη Χαμιλτονιανή, ως κομμάτι της διαταραχής. Αυτή η συνταγή, είναι καλή γιατί θεμελιώνει τη φυσική που χρειάζεται για τη μετατροπή των ηλεκτρονίων σε CF με μια μαθηματική γλώσσα, αλλά είναι καλή μέχρι εδώ. Απαιτείται κάτι πιο ριζικό για να προχωρήσουμε.

7. Deus ex machina

Αυτό είναι το αξίωμα των CF:

Κάθε ηλεκτρόνιο στο LLL, αιχμαλωτίζει $2p$ κβαντομηχανικές δίνες και το σύστημα μεταμορφώνεται σε σύστημα νέων οντοτήτων, που ονομάζονται σύνθετα

φερμιόνια, και αυτά μπορούν να αντιμετωπιστούν ως ασθενώς αλληλοεπιδρώντα σε καλή προσέγγιση. Ο λόγος που γίνεται αυτό, είναι για να ελαχιστοποιήσει το σύστημα την ενέργεια αλληλεπίδρασης.

Δυο σπουδαίες επισημάνσεις:

A) το αξίωμα μοιάζει ίδιο με αυτά που είπαμε πριν, ότι δηλαδή κάθε ηλεκτρόνιο κλέβει από το πεδίο κβάντα ροής· δεν είναι το ίδιο! Σε αυτή την εικόνα επάνω στα ηλεκτρόνια δεν υπάρχουν πραγματικά κβάντα ροής, δεν υπάρχουν αυτά τα απεριόριστα μικρά σωληνοειδή. Η δέσμευση των κβάντων ροής ήταν η αντανάκλαση του μετασχηματισμού Chern –Simons. Εδώ ο μετασχηματισμός που γίνεται, ο μετασχηματισμός που θα κάνει το κάθε ηλεκτρόνιο να συλλάβει τις δίνες δεν είναι ο ίδιος, για την ακρίβεια δεν είναι κατ' αρχήν μετασχηματισμός βαθμίδας. Ο μετασχηματισμός που γίνεται εδώ είναι, από τον ορισμό της δίνης, όπως ο Chern – Simons όμως χωρίς τον παρονομαστή $|z_j - z_k|$. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευθεί ως προβολή στο LLL, αφού ο όρος $((z_j - z_k)/|z_j - z_k|)^{2p}$ περιέχει και όρους $\bar{z}$ ενώ χωρίς τον παρονομαστή δεν περιέχει! Δηλαδή, αυτό αντιστοιχεί στην προσέγγιση ότι η κυματοσυνάρτηση των Chern –Simons με τα κλεμμένα κβάντα ροής εδράζεται στο LLL, γεγονός που δεν είναι ευνόητο, αφού και μόνο από τα χάσματα βλέπουμε σημαντική μίξη των επιπέδων Landau. Αλλά αν γίνει αυτό, δηλαδή να μετατρέψουμε τα σημειακά κβάντα ροής που έκλεψαν τα ηλεκτρόνια στην προηγούμενη εικόνα σε δίνες, τότε η κυματοσυνάρτηση έχει καλούς συσχετισμούς –το καταλαβαίνουμε από την εντονότερη απωστική αλληλεπίδραση που εκφράζεται από τον μεγαλύτερο εκθέτη-, αναπαράγει την πρόταση του Laughlin στο $1/m$, ενώ πράγματι εδράζεται κυρίως στο LLL, όπως δείχνουν αριθμητικές μελέτες (θα αναλυθούν καλύτερα εν συνεχεία αυτά).

Επειδή μπορεί να υπάρχει ακόμα κάποια σύγχυση μεταξύ των όρων «κβάντο ροής» και «δίνη» ξεκαθαρίζω ότι: στον μετασχηματισμό Chern –Simons βρήκαμε κάθε ηλεκτρόνιο να δεσμεύει επάνω του ένα μέρος του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, το οποίο κατά τα γνωστά είναι ένας απείρως μικρός σωλήνας που περικλείει μαγνητική ροή, η οποία ήταν $2p$ κβάντα: το φαινόμενο ήταν φαινόμενο ηλεκτρομαγνητισμού, το ολοκλήρωμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου σε μια περιοχή είναι η μαγνητική ροή, μόνο που εδώ το πεδίο είναι εντοπισμένο μέσα σε σωληνοειδή μηδενικής ακτίνας. Η δίνη δεν είναι ηλεκτρομαγνητικό αντικείμενο: είναι απλώς μια οντότητα που κλειστές διαδρομές γύρω της αποδίδουν φάση 2π , είναι τοπολογική οντότητα. Συγκεκριμένα εδώ, εξηγήσαμε ότι το γεγονός ότι κάθε ηλεκτρόνιο είναι για τα υπόλοιπα μια δίνη οφείλεται στη στατιστική τους: μια βόλτα του ενός γύρω από το άλλο αποδίδει φάση 2π , χωρίς να υπάρχουν πουθενά κβάντα ροής ή μαγνητικά πεδία. Αν θέλετε, τα κβάντα ροής έχουν αύρα από Bohm – Aharonov, οι δίνες έχουν αύρα τοπολογίας. Θα δούμε στη συνέχεια ακριβώς αυτή τη διάκριση: ναι μεν έχουμε τοπολογικές δίνες, όμως αυτές υπολογίζοντας φάσεις Berry θα αποδώσουν το σωστό ενεργό πεδίο που βρήκαμε και πριν.

B) Το αξίωμα των CF υπονοεί ότι ο μόνος ουσιαστικός ρόλος των αλληλεπιδράσεων είναι να δημιουργήσουν τα CF! Όμως γιατί να τα δημιουργήσουν; Όπως λέει το αξίωμα: για να ελαχιστοποιήσει το σύστημα την ενέργεια αλληλεπίδρασης. Που υπονοεί ότι αυτός είναι ο ενεργειακά πιο συμφέρων τρόπος. Ωστόσο, αυτό δεν το εγγυάται κανείς, γι' αυτό είναι αξίωμα και όχι θεώρημα των CF. Θα μπορούσε κανείς να αποκλείσει η φύση να μπορεί να επινοήσει έναν πιο έξυπνο

τρόπο για να ελαχιστοποιεί τη συνολική ενέργεια; Όχι, για την ακρίβεια όλοι οι μέθοδοι που έχουμε για να αποφανθούμε για το ποια κατάσταση αποδίδει τη θεμελιώδη, πέφτουν πάνω σε μια Χαμιλτονιανή –Μονόλιθο του Άρθουρ Κλαρκ. Ψάχνοντας ένα ελάχιστο ή ένα μέγιστο, πρέπει να κουνήσω μια παράμετρο και να δω πώς ανταποκρίνεται η συνάρτηση (όπως ακριβώς παραγωγίζαμε –βρίσκαμε το ρυθμό μεταβολής- για να βρούμε τα ακρότατα). Εδώ είναι μια Χαμιλτονιανή χωρίς παράμετρο, ως προς τι θα ελαχιστοποιήσω; Έτσι ο θεωρητικός δρα διπλωματικά: γνωρίζοντας εκ των προτέρων τι πρέπει να βρει, τι συσχετισμούς πρέπει να περιγράψει, προτείνει υποψήφιες κυματοσυναρτήσεις και ελέγχει αν πράγματι ταιριάζουν στο πείραμα. Είναι το πείραμα εκείνο που θα επιβεβαιώσει ότι πράγματι η φύση επιλέγει αυτό τον τρόπο και όχι κάποιον άλλον για να ελαχιστοποιήσει την ενέργεια.

Συνεχίζουμε: πριν τα ηλεκτρόνια τσακώσουν τις δίνες δεν υπάρχει κανένας καλός λόγος να υποθέσουμε ότι βρίσκονται στο LLL, για την ακρίβεια είναι σημαντικό να επιτρέψουμε να βρίσκονται σε υψηλότερα LL, όπως θα φανεί. Έτσι, θεωρώ για τα ηλεκτρόνια την κυματοσυνάρτηση $\Phi_{\pm v^*}$, v^* ο παράγοντας πλήρωσης, το $\pm$ παριστάνει απλώς την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Αρμόζει όμως για ισχυρά μαγνητικά πεδία να θεωρούμε ότι βρισκόμαστε στο LLL, χώρια που είναι και πολύ βολικό. Επίσης, αριθμητικοί υπολογισμοί δείχνουν ότι πράγματι οι επιμεϊξίες των τελικών κυματοσυναρτήσεων αφού συρράψουμε και τις δίνες με ανώτερα LL, είναι όντως μικρές (αποχρώσα ένδειξη αυτού είναι η εξής: για να ανέβω LL θα πρέπει να δράσω με τον τελεστή a^+ . Έτσι, απ' το LLL για το επόμενο, κοιτώντας τη μορφή του a^+ , προκύπτει στην κυματοσυνάρτηση ακριβώς ένας όρος που περιέχει το $\bar{z}$. Αν ξαναδράσω με τον a^+ , εύκολα προκύπτει ότι θα υπάρχουν δύο όροι να περιέχουν το $\bar{z}$, και γενικά κάθε φορά που θα δρω μ' αυτό τον τελεστή θα προκύπτει άλλος ένας όρος. Άρα στη γενική κυματοσυνάρτηση, αν n είναι ο αριθμός των LL που περιέχουν σωματίο, υπάρχουν το πολύ $n-1$ όροι που περιέχουν κάποιο $\bar{z}$. Ο δε παράγοντας Jastrow που συρράπτει τις δίνες δείχνει ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον N όροι που περιέχουν z , N ο αριθμός των ηλεκτρονίων, και άρα πολύ περισσότεροι από n , δηλαδή η κυματοσυνάρτηση είναι «σχεδόν αναλυτική». Φυσικά, αυτό δεν είναι πλήρες επιχείρημα, απλώς μια ένδειξη.). Ωστόσο, για λόγους πληρότητας θεωρούμε ότι η κυματοσυνάρτηση των ηλεκτρονίων προβάλλεται στο LLL.

Έτσι, βάζοντας όλα αυτά μαζί, η κυματοσυνάρτηση των CF θα είναι:

$\Psi_v^{CF} = \mathbf{P}_{LLL} \Phi_{\pm v^*} \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p}$, $\mathbf{P}_{LLL}$ η προβολή στο LLL, και βέβαια η Φ μια αντισυμμετρική κυματοσυνάρτηση, ενώ ο παράγοντας Jastrow υποδεικνύει ότι κάθε σωματίο βλέπει $2p$ δίνες σε κάθε άλλο σωματίο.

Επισημαίνουμε προς υπεράσπιση του ότι αυτή η κυματοσυνάρτηση είναι συμφέρουσα ενεργειακά, ότι αναπαράγει τους απωστικούς συσχετισμούς: το πλάτος πιθανότητας να βρούμε δυο ηλεκτρόνια σε απόσταση r φθίνει ως $r^{2(p+1)}$ που είναι πολύ πιο γρήγορα από την r^2 άπωση που υπαγορεύει η Αρχή του Pauli (αυτή αντιστοιχεί σε $z_j - z_k$).

Επίσης, η κυματοσυνάρτηση που βρήκαμε μπορεί, σύμφωνα με τα παραπάνω, να ερμηνευθεί είτε ως η κυματοσυνάρτηση ισχυρά αλληλοεπιδρώντων ηλεκτρονίων σε παράγοντα πλήρωσης v , είτε ως η κυματοσυνάρτηση ασθενώς αλληλοεπιδρώντων CF σε παράγοντα πλήρωσης v^* .

Η χρησιμότητα αυτής της σχέσης είναι ότι αποδίδει τις κυματοσυναρτήσεις των ισχυρά αλληλοεπιδρώντων ηλεκτρονίων, τις οποίες δε μπορούμε να βρούμε λόγω της άβολης Χαμιλτονιανής του FQHE, συναρτήσει των κυματοσυναρτήσεων των ασθενώς αλληλοεπιδρώντων φερμιονίων Φ , τις οποίες από τη Χαμιλτονιανή του IQHE τεχνικά μπορούμε να βρούμε για οποιοδήποτε παράγοντα πλήρωσης. Φυσικά, αφού για τυχόν παράγοντα πλήρωσης η $\Phi_{\pm\nu^*}$ δεν είναι μοναδική λόγω του εκφυλισμού, μοναδική δεν είναι εν γένει και η Ψ_v^{CF} είναι όλες οι κυματοσυναρτήσεις για τον εκάστοτε παράγοντα πλήρωσης.

Ωστόσο, όπως έχουμε εξηγήσει στο IQHE, στις τιμές $\nu^*=\pm n$ ο εκφυλισμός αίρεται και η $\Phi_{\pm n}$ είναι μοναδική, οπότε μοναδική είναι και η Ψ_v^{CF} για τον αντίστοιχο παράγοντα πλήρωσης.

Άρα, πρέπει να συσχετίσουμε τους παράγοντες πλήρωσης ν , ν^* . Αν βρούμε ότι για $\nu^*=\pm n$, το ν λαμβάνει τις τιμές στις οποίες βρίσκουμε τα πλατώματα του FQHE, σημαίνει ότι το πείραμα συνηγορεί με την υπόθεση της αιχμαλωσίας των δινών από τα ηλεκτρόνια και της μετατροπής του συστήματος σε σύστημα CF, που ήταν κι ο αρχικός στόχος. Τότε θα έχουμε δείξει ότι το FQHE για τα ηλεκτρόνια είναι IQHE για τα CF, μια νέα κατάσταση ύλης. Βασικά, αν είναι έτσι τα πράγματα, το σύστημα των CF είναι ένα πανίσχυρο εργαλείο: καταφέρνει να άρει τον εκφυλισμό σε ένα κλασματικό γέμισμα!

Θα βρω τη σχέση των ν , ν^* βρίσκοντας τη μέγιστη στροφορμή στη σφαιρική γεωμετρία και στην επίπεδη, και θα συγκρίνω τα αποτελέσματα, τα οποία φυσικά πρέπει να είναι ίδια.

Ορίζω το μέγεθος του δίσκου από το μεγαλύτερο κατειλημμένο τροχιακό, με στροφορμή $m_{\max}$. Είπαμε παραπάνω ότι ο βαθμός του πολωνύμου Jastrow είναι ακριβώς αυτό το $m_{\max}$, αλλά υπάρχει και ο παράγοντας Pauli της $\Phi_{\pm\nu^*}$, οπότε ο βαθμός του πολωνύμου ως προς κάποιο z_i είναι $m_{\max}+1$, που δείξαμε ότι είναι και ο αριθμός των κβάντων ροής που διεισδύουν στο δίσκο. Όμως $\nu=(\text{αριθμός ηλεκτρονίων})/(\text{αριθμός κβάντων ροής})=N/(m_{\max}+1)$, ή $m_{\max}=N/\nu -1$.

Για την Ψ_v^{CF} , στην επίπεδη γεωμετρία, η μέγιστη κατειλημμένη στροφορμή προκύπτει και ως εξής: η $\Phi_{\pm\nu^*}$ έχει αριθμό κβάντων ροής $\pm N/\nu^*$, κατά τα γνωστά. Επίσης ο παράγοντας Jastrow αποδίδει σε κάθε z_i μέγιστο βαθμό $2p(N-1)$, επειδή το εκάστοτε z_i εμπλέκεται σε όλους τους όρους $z_j - z_i$ ή $z_i - z_j$, που είναι $N-1$ αφού ο αριθμός των διαφορετικών z_i είναι N , και λείπει όρος $z_i - z_i$, ενώ όλοι αυτοί έχουν εκθέτη $2p$ (αν δεν είναι αρκετά σαφές, θεωρήστε πχ το z_1 : επειδή είναι ο μιγαδικός με το μικρότερο δείκτη, προφανώς οι όροι της Jastrow που το περιέχουν είναι οι $(z_1 - z_2)$, $(z_1 - z_3)$, ..., $(z_1 - z_N)$, που είναι $N-1$ όροι, και πολλαπλασιάζοντάς τους, ο μέγιστος εκθέτης του z_1 είναι $N-1$, οπότε όλο αυτό εις την $2p$, έχει μέγιστο εκθέτη $2p(N-1)$). Εννοείται ότι το z_1 δεν έχει τίποτα το ξεχωριστό, θα μπορούσε να είναι στη θέση του οποιοδήποτε άλλο, απλώς θα είχα και όρους που το τυχόν z_i είναι ο αφαιρετέος στους όρους Jastrow που το περιέχουν). Τώρα, από τη στοιχειώδη κβαντομηχανική, γνωρίζουμε καλά ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του L_z είναι ανάλογες του $e^{im\phi}$, οπότε πολλαπλασιάζοντας δυο τέτοιες κυματοσυναρτήσεις, η τελική έχει συνολική στροφορμή το άθροισμα των επιμέρους (με τη σχέση $L_z = -i\hbar d/d\phi$ αποδεικνύεται πολύ εύκολα τόσο η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων, όσο και ότι η ολική στροφορμή είναι καλός κβαντικός αριθμός και για το γινόμενο). Επομένως, στην περίπτωση μας έχουμε: για τη $\Phi_{\pm\nu^*}$ ο αριθμός των κβάντων ροής, που είναι και η μέγιστη στροφορμή,

είναι $\pm N/v^*$, και για τον παράγοντα Jastrow ο μέγιστος εκθέτης, που επίσης είναι η μέγιστη στροφομορμή, είναι $2p(N-1)$.

Άρα εξισώνοντας τα αποτελέσματα για τις δυο γεωμετρίες: $N/v-1=\pm N/v^*+2p(N-1)$. Το N είναι ο αριθμός των ηλεκτρονίων, που είναι φυσικά πάρα πολύ μεγάλος στα δείγματα που εξετάζουμε, οπότε $N-1\cong N$, και για γεμίσματα γενικά στα χαμηλά επίπεδα Landau, $N/v-1\cong N/v$. Τότε, $1/v=\pm 1/v^*+2p\Rightarrow v=v^*/(2pv^*\pm 1)$.

Αυτή για $v^*=n$, n ακέραιος, αποδίδει πράγματι ακριβώς τα πολυπόθητα κλάσματα του FQHE (πχ για $p=1$ και επιλέγοντας πρόσημο + προκύπτει η ακολουθία $n/(2n+1)$).

Τώρα για να βρούμε το ενεργό πεδίο που βιώνουν τα CF, ξεκινάμε από την κυματοσυνάρτηση της δίνης που ορίζεται $\Psi_\eta=N\prod_j(z_j-\eta)\Psi$, Ψ η κυματοσυνάρτηση της εκάστοτε θεμελιώδους, N παράγοντας κανονικοποίησης, $\eta=Re^{-i\theta}$ η θέση της δίνης. Τα ηλεκτρόνια αποφεύγουν τις θέσεις των δινών, όπως φαίνεται, και άρα σ' αυτές τις θέσεις αντιστοιχούν οπές, θετικού φορτίου σε σχέση με το υπόστρωμα. Οι χειρισμοί που θα κάνουμε παρακάτω μπορεί να φανούν λάθος, αν δε διευκρινίσουμε ότι αντιμετωπίζουμε τη δίνη ως παράμετρο της Χαμιλτονιανής, πράγμα εύλογο αφού στην πραγματική εικόνα των ηλεκτρονίων υπό ισχυρό πεδίο δεν υπάρχει πουθενά. Τι μπορεί να σημαίνει; Ενδεχομένως κάποια πρόσμιξη που παράγει στο σημείο όπου βρίσκεται ένα δυναμικό, το οποίο να δεσμεύει τη δίνη.

Κινούμε τη δίνη ώστε να εκτελέσει κυκλική τροχιά ακτίνας R , από 0 ως 2π . Τότε, όπως ορίσαμε πριν, η φάση Berry που τσακώνει η δίνη είναι:

$$\gamma=\oint d\eta \langle \Psi_\eta | i \frac{d}{d\eta} | \Psi_\eta \rangle = \oint d\theta \langle \Psi_\eta | i \frac{d}{d\theta} | \Psi_\eta \rangle = -i \oint d\theta (d\eta/d\theta) \langle \Psi_\eta | \sum_j (1/(z_j - \eta)) | \Psi_\eta \rangle$$
, όπου παραγωγίσαμε την Ψ_η , το αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα.

Τώρα, παρατηρούμε ότι $\int d^2r \sum_j \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r})/(z - \eta) = \sum_j 1/(z_j - \eta)$, διότι οι z, z_j είναι οι μιγαδικοί που αντιστοιχούν στα διανύσματα θέσης $\mathbf{r}, \mathbf{r}_j$ αντίστοιχα.

Άρα, $\gamma = -i \oint d\theta (d\eta/d\theta) \int d^2r \langle \Psi_\eta | \sum_j \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r})/(z - \eta) | \Psi_\eta \rangle$. Όμως $\sum_j \delta(\mathbf{r}_j - \mathbf{r})$ είναι η πυκνότητα των ηλεκτρονίων $\rho(\mathbf{r})$. Άρα $\gamma = -i \oint d\eta \int d^2r \langle \Psi_\eta | \rho(\mathbf{r})/(z - \eta) | \Psi_\eta \rangle = -i \int d^2r \oint d\eta \langle \Psi_\eta | \rho(\mathbf{r})/(z - \eta) | \Psi_\eta \rangle$. Το $\oint d\eta \langle \Psi_\eta | \rho(\mathbf{r})/(z - \eta) | \Psi_\eta \rangle$ υπολογίζεται με το Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων: επειδή η συνάρτηση έχει πόλο στο z , το ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι το $\lim_{\eta \rightarrow z} \langle \Psi_\eta | \rho(\mathbf{r})/(z - \eta) | \Psi_\eta \rangle (z - \eta) = -\langle \Psi_z | \rho(\mathbf{r}) | \Psi_z \rangle$, οπότε επειδή η η έχει οριστεί ως $Re^{-i\theta}$, δηλαδή κλείνει ο βρόχος δεξιόστροφα, είναι $\oint d\eta \langle \Psi_\eta | \rho(\mathbf{r})/(z - \eta) | \Psi_\eta \rangle = -2\pi i (-\langle \Psi_z | \rho(\mathbf{r}) | \Psi_z \rangle) = 2\pi i \langle \Psi_z | \rho(\mathbf{r}) | \Psi_z \rangle$. Όμως $|\Psi_z\rangle$ δεν είναι παρά η $\Psi(\mathbf{r})$, οπότε στην πραγματικότητα αυτό που έμεινε είναι η μέση τιμή του αριθμού των σωματιδίων που περικλείονται στο βρόχο! Δηλαδή, $\gamma = -i(2\pi i)N = 2\pi N$, N αυτός ο αριθμός των σωματιδίων στο εσωτερικό του βρόχου.

Τώρα ας θεωρήσουμε ένα CF να χαράζει έναν παρόμοιο κλειστό βρόχο. Επειδή έχω ορίσει και τις συντεταγμένες των z δεξιόστροφες ($z=x-iy$), και το CF τέτοιο βρόχο χαράζει.

Το CF δε βλέπει δίνες, το μόνο που βλέπει είναι το ενεργό μαγνητικό πεδίο, οπότε θα τσακώσει τη φάση Bohm – Aharonov που αρμόζει σε αυτό το πεδίο, και λόγω της αντισυμβατικής φοράς που διαγράφει το βρόχο θα έχει ένα πρόσημο μείον, δηλαδή η φάση για το CF είναι $\Phi^* = -2\pi B^* A/\Phi_0$, A το εμβαδό της περιοχής που εγκλείει ο βρόχος. Ομοίως, το ηλεκτρόνιο του CF το μόνο που αντιλαμβάνεται είναι το πεδίο B , το πραγματικό πεδίο, και για τον ίδιο λόγο τσακώνει τη φάση Bohm – Aharonov $\Phi = -2\pi B A/\Phi_0$. Όμως το CF έχει συραμμένες στο ηλεκτρόνιο και $2p$ δίνες,

που όπως είδαμε τσακώνουν σε έναν τέτοιο βρόχο φάση $2\pi N$ έκαστην, άρα συνολικά $2\pi N^2 p$. Όμως προφανώς η φάση Φ^* που τσακώνει το CF είναι ίση με το άθροισμα των φάσεων που τσακώνουν τα συστατικά του, οπότε: $\Phi^* = \Phi + 2\pi p N = -2\pi B^* A / \Phi_0 = -2\pi B A / \Phi_0 + 2\pi p A^2 p = B^* = B - 2p r \Phi_0$, που είναι όντως το πεδίο που βρήκαμε νωρίτερα με το μετασχηματισμό Chern –Simons πλην όμως τώρα προήλθε από πολύ διαφορετικές φυσικές απαιτήσεις. Να σημειωθεί η υπόθεση ομοιόμορφης πυκνότητας $N = rA$ · δε το έχουμε δείξει ακόμα, αλλά θα δείξουμε τώρα με ένα πολύ απλό επιχείρημα ότι στο LLL πράγματι έτσι έχουν τα πράγματα. Για την ακρίβεια έτσι έχουν τα πράγματα για οποιοδήποτε αριθμό συμπληρωμένων ΛΛ.

Όπως είπαμε, στη σφαιρική γεωμετρία τα επίπεδα Landau αντιστοιχούν στις τιμές του κβαντικού αριθμού ℓ . Άρα, τα m που μετράνε τον αριθμό των καταστάσεων που αντιστοιχούν στο ίδιο ℓ , μετράνε τον εκφυλισμό του κάθε επιπέδου Landau. Στην ουσία, αυτά τα έχουμε πει για τη μονοσωματιδιακή κατάσταση, αλλά ξέρουμε από την κβαντομηχανική ότι αν η στροφορμή είναι καλός κβαντικός αριθμός για τη μονοσωματιδιακή, είναι και για την πολυσωματιδιακή κατάσταση. Άρα, οι ακριβείς ιδιοκαταστάσεις είναι πολυπλέτες στροφορμών στη σφαιρική γεωμετρία. Τώρα, όπως ξέρουμε, για ακέραιο παράγοντα πλήρωσης $\nu^* = n$, που σημαίνει πλήρως γεμισμένα ΛΛ, ο εκφυλισμός αίρεται πλήρως. Άρα, τότε η κατάσταση δεν είναι πολυπλέτα, αλλά απλέτα στροφορμής (αφού έχει αρθεί ο εκφυλισμός, υπάρχει ακριβώς μία κατάσταση που να αντιστοιχεί σε ακέραιο αριθμό πλήρως συμπληρωμένων ΛΛ). Όμως ο αριθμός των εκφυλισμένων καταστάσεων για οποιοδήποτε παράγοντα πλήρωσης κρίνεται από το συνολικό αριθμό πιθανών m , οπότε εδώ αυτός είναι 1, και βέβαια ο αριθμός των πιθανών m ισούται με $2\ell + 1$, οπότε $\ell = 0$. Άρα όλες οι καταστάσεις με πλήρως συμπληρωμένο ακέραιο αριθμό ΛΛ έχουν στροφορμή 0. Στροφορμή 0 σημαίνει ότι η κατάσταση είναι αναλλοίωτη υπό περιστροφές, κι αυτό στην επίπεδη γεωμετρία μεταφράζεται ως αναλλοιότητα υπό χωρικές μεταθέσεις. Άρα, αφού η κατάσταση είναι αναλλοίωτη υπό χωρικές μεταθέσεις, αναγκαστικά έχει ομοιόμορφη πυκνότητα, και αφού τα CF έχουν ομοιόμορφη πυκνότητα, το ίδιο θα έχουν και τα ηλεκτρόνια. Η σφαιρική γεωμετρία μας έδωσε πολύ βολικά τη λύση· στην επίπεδη γεωμετρία η απόδειξη της ομοιόμορφης πυκνότητας είναι πολύ πιο κοπιαστική.

Επισημαίνουμε ότι το πεδίο B^* και συγκεκριμένα το ότι μειώθηκε σε σχέση με το B , σχετίζεται αμιγώς με την τοπολογική φάση Berry, δεν υπάρχει κάποιο ρεύμα που να το μειώνει, η διαφορά δεν έχει ηλεκτρομαγνητική αιτιολόγηση! Είναι καθαρά κβαντομηχανικό φαινόμενο· ένα μαγνητόμετρο ποτέ δε θα το ανίχνευε, απαιτείται η χρήση CF για να μετρηθεί, διότι απλούστατα αυτά μόνο το αντιλαμβάνονται! Θα πρέπει να έχει γίνει κατανοητό απ' όσα είπαμε ότι η δίνη είναι οντότητα που υπεισέρχεται στην κυματοσυνάρτηση, δηλαδή είναι οντότητα μικροσκοπική, δε σχετίζεται με καμία μαγνητική ροή, δε σχετίζεται με κανένα ρεύμα. Το επισημαίνουμε τόσο έντονα για να αποφευχθεί η σύγχυση αυτής εδώ της δίνης με την δίνη όπως υπεισέρχεται στους υπεραγωγούς· εκεί οι δίνες σχετίζονται με την παράμετρο τάξης, εκεί υπάρχουν πραγματικά ρεύματα που τις κυκλώνουν, και έτσι υπάρχει μαγνητική ροή. Εδώ δεν υπάρχει καν παράμετρος τάξης.

Αν ήθελε κανείς να συνοψίσει όλα αυτά τα σπουδαία σε μια φράση, πιθανότατα η σοφότερη επιλογή θα ήταν:

Το FQHE των ηλεκτρονίων είναι το IQHE των CF.

Υποθέτουμε ότι τα CF δεν αλληλοεπιδρούν μεταξύ τους.

Όπως εξηγήσαμε, το LLL, θα διαμελιστεί σε ΛΛ των CF, τα οποία είναι εντελώς ανάλογα των LL των ηλεκτρονίων. Οι καταστάσεις που αποδίδουν χάσμα, που είναι κι εκείνες που μας ενδιαφέρουν επειδή εκεί συμβαίνουν τα πλατώματα της αγωγιμότητας, προκύπτουν για ακέραιο παράγοντα πλήρωσης των CF $\nu^* = n$, που αντιστοιχεί σε παράγοντα πλήρωσης για τα ηλεκτρόνια $\nu = n/(2p \pm 1)$.

Επίσης, εκμεταλλευόμενοι τη συμμετρία σωματιδίων –οπών, μέσα στο LLL μπορούμε να εκφράσουμε το αρχικό πρόβλημα συναρτήσει οπών, οι οποίες φτιάχνουν αντίστοιχα σύνθετες οπές, οι οποίες ακριβώς με τον ίδιο τρόπο αποδίδουν παράγοντες πλήρωσης αντίστοιχους των ηλεκτρονίων. Όμως, επειδή προφανώς οι παράγοντες πλήρωσης των οπών και εκείνοι των ηλεκτρονίων έχουν άθροισμα 1 (γιατί η οπή δεν είναι τίποτα άλλο παρά εντοπισμένη απουσία ηλεκτρονίου), υπό όρους πλήρωσης οπών, οι παράγοντες πλήρωσης ηλεκτρονίων είναι $\nu = 1 - n/(2p \pm 1)$.

Μια εύλογη απορία είναι αν μπορεί η συνολική φάση Berry των δινών να ακυρώσει πλήρως τη φάση Bohm –Aharonov του πεδίου, και αν ναι, τι συμβαίνει τότε; Αν συμβεί αυτό, προφανώς είμαστε στην περίπτωση όπου $B^* = 0$ ή αλλιώς $B = 2\pi r \Phi_0$, δηλαδή τα CF δεν αντιλαμβάνονται πεδίο. Αφού δεν αντιλαμβάνονται καθόλου ενεργό πεδίο, τότε σχηματίζουν μια θάλασσα Fermi, και φυσικά δε μπορούν να εδραιώσουν κάποιο χάσμα, οπότε δεν αναμένεται να παρατηρηθεί FQHE. Επειδή $\nu = r\Phi_0/B$, καταλαβαίνουμε ότι αυτό θα συμβεί στους παράγοντες πλήρωσης $1/2p$, και άρα για $p=1$, $\nu=1/2$, και αυτό εξηγεί γιατί στο απλούστερο κλάσμα $\nu=1/2$ δεν έχουμε πλάτωμα αγωγιμότητας: εκεί τα CF σχηματίζουν θάλασσα Fermi.

Γιατί θάλασσα Fermi; Γιατί αν θέσω $\nu=1/2p$, τότε από τη σχέση $\nu = \nu^*/(2p\nu^* \pm 1)$, προκύπτει $2p\nu^* = 2p\nu^* \pm 1$, που δε μπορεί να συμβεί εκτός από το όριο όπου $\nu^* \rightarrow \infty$. Δηλαδή αντιστοιχεί σε παράγοντα πλήρωσης για τα CF που τείνει στο άπειρο, οπότε όλα τα ΛΛ γεμίζουν ανεξέλεγκτα –σύμφωνα με το να ικανοποιούν την Απαγορευτική Αρχή του Pauli πάντα- που είναι ακριβώς αυτό που αποκαλείται θάλασσα Fermi, και είναι ευνόητο ότι αφού απαιτείται γέμισμα άπειρων ΛΛ, δε μπορεί ποτέ να επιτευχθεί χάσμα από την άποψη ότι δεν υπάρχουν υπερκείμενες καταστάσεις χωρίς σωματίδια.

Η πρόβλεψη πλατωμάτων αγωγιμότητας σε συγκεκριμένους παράγοντες πλήρωσης είναι το μακροσκοπικό αξιοθέατο που στήνουν τα CF. Όμως τι κάνουν στο μικρόκοσμο; Αυτό θα το δούμε από τις κυματοσυναρτήσεις τους. Όπως είδαμε, μικροσκοπικά τα CF παρέχουν μια συνταγή για να βρίσκουμε τις ενέργειες, τις κυματοσυναρτήσεις και τους κβαντικούς αριθμούς των καταστάσεων των ισχυρά αλληλοεπιδρώντων ηλεκτρονίων για οποιοδήποτε παράγοντα πλήρωσης, συνδέοντάς αυτές τις οντότητες με τις αντίστοιχες των μη αλληλοεπιδρώντων CF στους αντίστοιχους ενεργούς παράγοντες πλήρωσης αυτών των CF. Συγκεκριμένα, προέβλεψε ότι σε κάποιους παράγοντες πλήρωσης των ηλεκτρονίων –σε εκείνους που αντιστοιχούν σε ακέραιους παράγοντες πλήρωσης των CF- το ενεργειακό φάσμα των ηλεκτρονίων περιέχει μια ζώνη καταστάσεων μικρής ενέργειας, που διαχωρίζεται από τις υπερκείμενες με χάσμα, γεγονός ζωτικής σημασίας για τα πλατώματα της αγωγιμότητας.

Όπως οι μεταβάσεις από το ένα ακέραιο πλάτωμα στο επόμενο συμβαίνουν όταν το επίπεδο Fermi περνάει μέσα από τα LL ώστε πριν και μετά απ' αυτά να βρίσκεται σε χασματική περιοχή και να είναι σταθερή η αγωγιμότητα, έτσι και οι μεταβάσεις από το ένα κλασματικό πλάτωμα στο επόμενο συμβαίνουν όταν το επίπεδο Fermi περνάει μέσα από τα ΛΛ.

Η στιβαρότητα του φαινομένου, δηλαδή ο αφανισμός των πλατωμάτων ακόμα και για γέμισμα ελάχιστα διαφορετικό από αυτό που προβλέπει η θεωρία, οφείλεται ακριβώς στο ότι εμπλέκονται μόνο ακέραιοι στη σχέση $\nu = n/(2\rho n \pm 1)$, οι οποίοι βέβαια δεν υπόκεινται σε συνεχείς μεταβολές -αν κουνήσω λίγο τον ακέραιο παύει να είναι ακέραιος.

Το πιο ικανοποιητικό όμως αποτέλεσμα των CF είναι η ικανότητά τους να εξηγήσουν την εμφάνιση χάσματος σε μη ακέραια γεμίσματα των LL: όταν σχηματίζονται τα CF το LLL διαμελίζεται σε μια σειρά από ΛΛ των CF· για εμφάνιση χάσματος απαιτείται να γεμίσει ακέραιος αριθμός από αυτά τα ΛΛ, και πράγματι τότε λαμβάνονται ασυμπίεστες καταστάσεις, αίρεται πλήρως ο εκφυλισμός και έχουμε το πολυπόθητο χάσμα.

$$H\nu = 1/2$$

Προς ισχυροποίηση της θεωρίας των CF έρχονται και μια σειρά πειραματικών δεδομένων που αφορούν την κατάσταση $\nu = 1/2$ που αντιστοιχεί σε θάλασσα Fermi των CF. Αυτό γιατί η θάλασσα Fermi έχει μια σειρά από ειδικά χαρακτηριστικά, τα οποία εάν εντοπιστούν στον παράγοντα πλήρωσης $1/2$ προσδίδουν ιδιαίτερη αξιοπιστία στη θεωρία.

Πρώτα απ' όλα η κατάσταση $\nu = 1/2$ παραμένει συμπίεσιμη ακόμα και για πάρα πολύ χαμηλές θερμοκρασίες. Αν υποθέταμε ότι δεν έχουμε άπειρα γεμισμένα επίπεδα σε εκείνο τον παράγοντα πλήρωσης, τότε θα περίμενε κανείς ότι σε κάποια θερμοκρασία, αρκούντως χαμηλή, η κατάσταση θα ήταν αδύνατον να συμπίεστεί περισσότερο, αφού όλες οι διαθέσιμες θέσεις θα είχαν καλυφθεί, οπότε θα υπήρχε επίπεδο Fermi. Τα πειράματα δείχνουν ότι στις χαμηλότερες επιτευγμένες θερμοκρασίες η κατάσταση παραμένει συμπίεσιμη.

Στη γειτονιά του $\nu = 1/2$, σε σειρά πειραμάτων έχει μετρηθεί ότι τα αντικείμενα που φέρουν ρεύμα εκτελούν ημικλασικές τροχιές κύκλου, με ακτίνες συμβατές της $R_c^* = \hbar k_F / eB^*$, $k_F = (4\pi\rho)^{1/2}$, που είναι ακριβώς η ακτίνα που αρμόζει να εκτελούν τέτοια αντικείμενα σε πλήρως πολωμένη θάλασσα Fermi από CF (στην ημικλασική προσέγγιση, η ακτίνα κύκλου προκύπτει απ' την κλασική απαίτηση η κεντρομόλος να ισούται με τη δύναμη Lorentz δηλαδή $Bv_F = mv_F^2/R$ ή $Be = p_F/R$ ή $R = \hbar k_F / eB$, ενώ το ότι $k_F = (4\pi\rho)^{1/2}$ είναι η συνεισφορά της κβαντομηχανικής -εξ ου και η έννοια «ημικλασική»- και προέρχεται από το ότι στις δυο διαστάσεις για $T=0$ τα φερμιόνια καταλαμβάνουν όλες τις καταστάσεις ως την ενέργεια Fermi, οπότε στο χώρο των κυματανυσμάτων καταλαμβάνουν όλα τα πλεγματικά σημεία εντός ενός κύκλου ακτίνας k_F , δηλαδή μια περιοχή εμβαδού πk_F^2 λόγω συμμετρίας της Χαμιλτονιανής ελεύθερων σωματιδίων ως προς τις διευθύνσεις x, y , ενώ λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι σε κάθε διεύθυνση δυο διαδοχικά κυματανύσματα απέχουν λόγω περιοδικότητας $2\pi/L_x$ ή $2\pi/L_y$, ο αριθμός των πλεγματικών σημείων στην κυκλική περιοχή είναι $\pi k_F^2 / [(2\pi)^2 / L_x L_y]$, και αυτό είναι ο αριθμός των καταστάσεων οπότε λόγω του

ότι έχουμε φερμιόνια και ο αριθμός των σωματιδίων –αγνοούμε την πόλωση σπιν αφού την έχουμε θεωρήσει ομοιόμορφη- δηλαδή $N = \pi k_F^2 L_x L_y / 4\pi^2$, και $N/L_x L_y = \rho$, οπότε $k_F = (4\pi\rho)^{1/2}$. Μάλιστα, η παρατηρούμενη ακτίνα είναι πολύ μεγαλύτερη από εκείνη που θα εκτελούσε ένα ηλεκτρόνιο παρουσία του πραγματικού εξωτερικού πεδίου, που δε μπορεί παρά να σημαίνει ότι έχουμε οντότητες που αντιλαμβάνονται μικρότερο μαγνητικό πεδίο, ακριβώς όπως συμβαίνει με τα CF (εννοείται ότι η πυκνότητα ηλεκτρονίων και CF είναι η ίδια λόγω της ένα προς ένα αντιστοιχία τους, οπότε όλα τα υπόλοιπα στη σχέση για την ακτίνα είναι ίδια, εκτός του πεδίου).

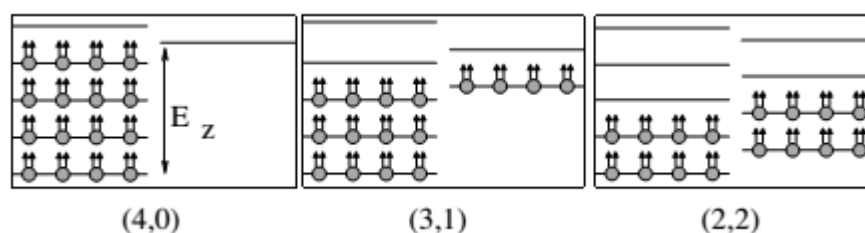
Περαιτέρω, έχουν παρατηρηθεί κβαντικές ταλαντώσεις που περιγράφονται ικανοποιητικά από τις συνήθεις εκφράσεις που είναι γνωστές για μια θάλασσα Fermi (Οι κβαντικές ταλαντώσεις είναι μια πανέξυπνη πειραματική τεχνική που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της επιφάνειας Fermi ενός υλικού, δηλαδή της επιφάνειας που οριοθετεί στο χώρο των κυματανυσμάτων την περιοχή επιτρεπόμενων καταστάσεων. Στη γενική περίπτωση αυτή έχει αυθαίρετο σχήμα. Χρησιμοποιείται ως εξής: αν έχουμε το χημικό δυναμικό –ενέργεια Fermi για $T=0$ - να κείται σε κάποιο χάσμα, αυξάνοντας το μαγνητικό πεδίο σηκώνονται τα LL, οπότε κάποια στιγμή το υποκείμενο του χημικού δυναμικού LL φτάνει στο χημικό δυναμικό. Τότε, μπορούμε να αυξομειώνουμε το πεδίο, με σκοπό να παρατηρήσουμε χαρακτηριστικές συχνότητες της ταλάντωσης που θα προκαλέσει αυτή η αυξομείωση στην αγωγιμότητα. Αν τώρα στρέψουμε τον άξονα του πεδίου, είναι ευνόητο ότι θα συμμετέχει κάποια ενεργός διατομή της επιφάνειας Fermi στο φαινόμενο, και πάλι, κουνώντας αυτή τη φορά τον άξονα του πεδίου, μπορούμε να αποφανθούμε για την περιοχή ενεργού διατομής της επιφάνειας Fermi, καθώς οι συχνότητες ταλάντωσης που παρατηρούνται αντιστοιχούν σε μέγιστα και ελάχιστα της διατομής της. Πάντως, όπως και να ‘χει οι ταλαντώσεις θα συμβαίνουν στις περιοχές όπου τα LL αγγίζουν το χημικό δυναμικό. Κατ’ αυτό τον τρόπο, παρατηρώντας τις χαρακτηριστικές συχνότητες ανταπόκρισης στην αγωγιμότητα μπορεί κανείς να αποφανθεί για το σχήμα της επιφάνειας Fermi. Αυτό που ενδιαφέρει εδώ είναι ότι η ικανότητα ενός υλικού να επιδείξει τέτοιου είδους ταλαντώσεις αποτελεί την υπογραφή ρευστού Fermi, αφού αυτές είναι αποτέλεσμα του στησίματος του φάσματος σε ζώνες, το οποίο με τη σειρά του είναι απευθείας συνέπεια του ότι το σύστημα αποτελείται από φερμιόνια).

Η δε εξάρτηση της πόλωσης των σπιν για την κατάσταση όπου $\nu=1/2$ από τη θερμοκρασία είναι εκείνη που προβλέπεται από μια θάλασσα Fermi μη αλληλοεπιδρώντων φερμιονίων (εννοείται ότι μεγαλύτερη θερμοκρασία θα συμβάλλει στην αταξία και άρα σε καταστροφή του πλήρους προσανατολισμού των σπιν που έχουμε υποθέσει).

Τώρα, ας επικεντρωθούμε στο σπιν, όχι στην κατάσταση $\nu=1/2$ αλλά πιο γενικά. Στο IQHE, υπήρχε λόγος που ποτέ δε βάλουμε τον όρο Zeeman στη Χαμιλτονιανή, που τοποθετούσαμε ένα ηλεκτρόνιο σε κάθε κατάσταση, και που γενικά ξεχάσαμε τη σπιν –πλευρά των ηλεκτρονίων (πολλές φορές συναντάται και ο όρος φερμιόνια χωρίς σπιν, με την έννοια ότι ναι μεν είναι αντισυμμετρικά ως προς την ανταλλαγή, αλλά ο βαθμός ελευθερίας του σπιν είναι βουβός). Ο λόγος ήταν ότι οι ενέργειες κύκlotρου για τα ηλεκτρόνια –που ερμηνεύονται ως τα χάσματα μεταξύ

των LL- είναι πολύ μεγαλύτερες της ενέργειας Zeeman, και γι' αυτό η απόκλιση από την εντελώς ομοιόμορφη πόλωση σπιν είναι μηδαμινή και επουσιώδης. Για τα CF αντιθέτως, επειδή αυτά βιώνουν πολύ μικρότερο μαγνητικό πεδίο, οι ενέργειες κύκλοτρου ($\hbar\omega_c = \hbar eB/m$) είναι πολύ μικρότερες, και μάλιστα γίνονται συγκρίσιμες με την ενέργεια Zeeman, κι αυτό παράγει πλουσιότερη φυσική γύρω απ' τα σπιν. Σημειώνουμε, όλα αυτά για το GaAs, που είναι η κύρια ετεροδομή στην οποία μελετάται το φαινόμενο.

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι το FQHE αντέχει να συμβεί ακόμα και για ενέργειες Zeeman όχι τόσο μεγάλες ώστε να πολώνουν πλήρως τα σπιν, τότε τα CF σχηματίζονται ακόμα και για τέτοιες ενέργειες, και το IQHE –που είπαμε ότι είναι το FQHE των ηλεκτρονίων- θα συμβεί πάλι όταν $\nu^* = n$, μολονότι τώρα $n = n_\uparrow + n_\downarrow$, όπου $n_\uparrow/\downarrow$ αντιστοιχούν στο αριθμό των CF με σπιν άνω/ κάτω αντίστοιχα (αυτοί προφανώς είναι ακέραιοι). Άρα, τα κλάσματα του FQHE είναι και πάλι τα ίδια, μόνο που $\nu = (n_\uparrow + n_\downarrow) / [2p(n_\uparrow + n_\downarrow) \pm 1]$, ενώ η συνολική πόλωση σπιν της κατάστασης ως γνωστόν δίνεται από τη $\gamma = (n_\uparrow - n_\downarrow) / (n_\uparrow + n_\downarrow)$. Καθώς χαμηλώνουμε την ενέργεια Zeeman (αυτό μπορεί να γίνει επιβάλλοντας συνιστώσα μαγνητικού πεδίου παράλληλη στο δείγμα: τότε σε πρώτη τάξη η ενέργεια αλληλεπίδρασης δεν αλλάζει, πράγμα σημαντικό για να αντέξει το FQHE, αλλά η Zeeman επηρεάζεται, αφού αυτό αντιστοιχεί σε νέο συνολικό πεδίο σε νέα διεύθυνση, οπότε αλλάζει η γωνία των διανυσμάτων στη Zeeman), το σύστημα θα αρχίσει να υφίσταται μαγνητικές μεταβάσεις φάσης μεταξύ των ασυμπίεστων καταστάσεων διαφορετικής πόλωσης.



Όπου βλέπουμε την εξέλιξη της κατάστασης $\nu = 4/9$, που αντιστοιχεί σε $\nu^* = n = 4$ πληρωμένα LL, στις πιθανές καταστάσεις πόλωσης συναρτήσει της ενέργειας Zeeman (όσο μικραίνει επιτρέπεται όλο και μεγαλύτερη απόκλιση από την κατάσταση ομοιόμορφης πόλωσης).

Σε οπτικά πειράματα, έχουν παρατηρηθεί οι μεταβάσεις φάσης, και οι διχοτομήσεις των επιπέδων Zeeman όπου συμβαίνουν συμφωνούν με τις θεωρητικές προβλέψεις, ενώ οι πολώσεις σπιν που έχουν μετρηθεί επίσης συμφωνούν με τη $\gamma = (n_\uparrow - n_\downarrow) / (n_\uparrow + n_\downarrow)$.

Μια άλλη πολύ ενδιαφέρουσα πλευρά τους θέματος έχει να κάνει με το τοπικό φορτίο που σχετίζεται με μια φορτισμένη διέγερση (σωμάτιο ή οπή).

Ας υποθέσουμε μια ασυμπίεστη κατάσταση ($\nu^* = n$, n ακέραιος) σε παράγοντα πλήρωσης ν . Εισάγουμε αδιαβατικά ένα κβάντο ροής από ένα σημείο στο εσωτερικό της κατάστασης. Η εξίσωση Faraday είναι $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Ολοκληρώνοντάς την, και με το Θεώρημα Stokes, γίνεται $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$, Φ η ροή, και εκμεταλλευόμενοι το ότι

εισάγουμε τη ροή από ένα σημείο, οπότε υπάρχει ακτινική συμμετρία, αυτή δίνει $E_\varphi = -(1/2\pi r) \frac{d\Phi}{dt}$, και άρα αφού είμαστε σε $v^*=n$, οπότε πλάτωμα αγωγιμότητας, $j_r = \sigma E_\varphi = -(1/2\pi r)(ve^2/h) \frac{d\Phi}{dt}$. Είναι $j_r = \frac{dQ}{dxdt}$, οπότε $Q = \int j_r dxdt = -ve^2\Phi/h$, στην αδιαβατική προσέγγιση. Αφού Φ είναι η συνολική ροή που εισήλθε, δηλαδή ένα κβάντο, $\Phi = \Phi_0$, $Q = -ve$.

Όμως γνωρίζουμε ότι με την εισαγωγή ενός κβάντου ροής στο εσωτερικό της ασυμπίεστης κατάστασης, παράγεται μια ακριβής ιδιοκατάσταση της Χαμιλτονιακής, μια διέγερση. Αυτό που βρήκαμε εδώ είναι ότι η αυτή η διέγερση αντιστοιχεί σε τοπικό φορτίο $Q = e_\varphi = -ve$, που δείχνει ότι υπάρχουν αντικείμενα με φορτία που δεν είναι ακέραια πολλαπλάσια του ηλεκτρονίου σ' αυτή την εικόνα!

Τώρα, παρατηρούμε ότι το τοπικό φορτίο μιας διέγερσης (περίσσεια ενός CF), δε μπορεί παρά να είναι το άθροισμα των φορτίων που φέρουν τα συστατικά του, που είναι ένα ηλεκτρόνιο και $2p$ δίνες. Η κάθε δίνη εισάγει στο δείγμα ένα κβάντο ροής, επομένως, αφού έχουμε βρει το τοπικό φορτίο που επιφέρει η εισαγωγή ενός κβάντου ροής, το συνολικό φορτίο που φέρει η διέγερση (δηλαδή το φορτίο ενός CF, στην ουσία) είναι $e^* = e + 2pe_\varphi = e - 2pve = (1 - 2pn)e = [\pm 1/(2pn \pm 1)]e$, e το φορτίο του ηλεκτρονίου. Δηλαδή, αναλόγως του παράγοντα πλήρωσης, τα CF που ανακύπτουν φέρουν φορτία που είναι κλασματικά πολλαπλάσια του στοιχειώδους e ! Εννοείται ότι οι αντίστοιχες διεγέρσεις –οπές φέρουν τα αντίθετα φορτία.

Επισημαίνουμε, ότι το εύλογο ερώτημα αν αυτές οι διεγέρσεις –CF είναι όντως στοιχειώδεις ή αν έχουν εσωτερική δομή, μπορεί να απαντηθεί από το ότι αν δεν ήταν στοιχειώδεις, τότε αυτό θα κατάστρεφε όλη τη δομή της θεωρίας των CF, κι αυτό γιατί ο αριθμός των καταστάσεων χαμηλής ενέργειας που μετράμε θα ήταν διαφορετικός, κι αυτό θα αιχμαλωτιζόταν από το πείραμα ως ασυνέπεια. Τα CF είναι στοιχειώδη σωμάτια, δεν υπάρχουν εσωτερικοί βαθμοί ελευθερίας· ακόμη κι αν κανείς ελαφρά τη καρδιά προσλάμβανε το γεγονός ότι προέκυψαν από ηλεκτρόνια και δίνες για να θεωρήσει ότι δεν είναι στοιχειώδη, θα έπρεπε να θυμηθεί ότι οι κυματοσυναρτήσεις των ηλεκτρονίων έχουν χαρτογραφηθεί πάνω σε εκείνες των CF, οπότε έχουν εκλείψει από την εικόνα: η έκφραση «ένα CF αποτελείται από όλα τα ηλεκτρόνια επειδή συμμετέχουν οι κυματοσυναρτήσεις τους στην κυματοσυνάρτησή του» είναι λάθος· το CF είναι η κβαντική κατάσταση που προέκυψε από μια συγκεκριμένη χαρτογράφηση ηλεκτρονιακών κβαντικών καταστάσεων, οι βαθμοί ελευθερίας δεν εγκλωβώθηκαν σε ένα CF, απλώς άλλαξε ο τρόπος που τους κοιτάμε. Η σωστή έκφραση είναι «ένα CF είναι συλλογική έκφραση όλων των ηλεκτρονίων, ένα κβαντικό, συνολικό μανιφέστο που δεν αναλύεται σε επιμέρους φωνές». Το κλασματικό φορτίο τους είναι τοπολογικής φύσης παρά κβαντικής από την άποψη του χώρου Hilbert τους.

Παραπάνω, δε, υπολογίσαμε τη φάση Berry που τσακώνει ένα CF όταν χαράζει ένα κλειστό βρόχο που κυκλώνει μια περιοχή. Αν υποθέσουμε ότι προστίθεται άλλο ένα CF μέσα στην περιοχή που κλείνει ο βρόχος, τότε η φάση Berry θα αλλάξει κατά $\Delta\varphi = 2\pi 2p\Delta\langle N_{\text{εγκ}} \rangle$, και επειδή $\Delta q = e^*$, αλλά και $\Delta q = \Delta\langle N_{\text{εγκ}} \rangle e$, καθότι το $N_{\text{εγκ}}$ μετράει ηλεκτρόνια (δείτε την πορεία της απόδειξης για τον τύπο της φάσης Berry), είναι $\Delta\varphi = 2\pi 2p(e^*/e) = 2\pi(2p/(2pn+1))$, για την περίπτωση $v=n/(2pn+1)$. Τώρα, αν θεωρήσω ότι αρχικά ο βρόχος ήταν άδειος από σωμάτια, τότε αυτό που βρήκα είναι η φάση που τσακώνει ένα CF όταν χαράζει μια κλειστή διαδρομή που

περικλείει το άλλο –δεν πρέπει τα δυο τους να αλληλεπικαλύπτονται σε κανένα σημείο της τροχιάς- που αντιστοιχεί σε δυο διαδοχικές ανταλλαγές τους, οπότε σε κάθε ανταλλαγή δυο CF, η κυματοσυνάρτησή τους τσακώνει φάση $2\pi p/(2pn+1)$. Εύκολα καταλαβαίνει κανείς ότι η κλασματική στατιστική των CF κληροδοτήθηκε από το κλασματικό τοπικό τους φορτίο.

Εδώ όμως ανακύπτει το σπουδαίο ερώτημα του πώς παντρεύεται η φερμιονική φύση των CF (αντισυμμετρία υπό ανταλλαγή, ή αλλιώς φάση π) με την κλασματική στατιστική που βρήκαμε! Φαίνεται να πέσαμε σε κάποιου είδους αντίφαση. Όμως βέβαια, δε μπορεί να υπάρχει αντίφαση απ' τη στιγμή που έχουμε τις κυματοσυναρτήσεις των CF υπεράνω πάσης αμφιβολίας.

Οι δυο διαφορετικές στατιστικές προέκυψαν λόγω των διαφορετικών καταστάσεων αναφοράς, η καθεμιά τους εμφανίζεται όταν θεωρήσει κανείς δυο διαφορετικά κενά της θεωρίας.

Θεωρώντας ως κενό της θεωρίας την κατάσταση όπου δεν υπάρχουν καθόλου σωμάτια, τότε όλα τα CF είναι συνήθη φερμιόνια –η ανταλλαγή δυο εξ αυτών αποδίδει φάση π στη συνολική κατάσταση- κατά τα γνωστά, έχουν το φορτίο του ηλεκτρονίου, και στήνουν ένα συνηθισμένο φερμιονικό ρευστό. Ας μην ξεχνάμε άλλωστε ότι η ικανότητά τους να παρουσιάσουν IQHE, καθώς και η ικανότητά τους να σχηματίζουν στον παράγοντα πλήρωσης $\nu=1/2$ θάλασσα Fermi, γεγονότα θεμελιώδους σημασίας για τη θεωρία, είναι καθαρές ενδείξεις της φερμιονικής τους φύσης· τα δυο φαινόμενα έχουν στα θεμέλιά τους τη φερμιονική στατιστική, από την άποψη ότι δε μπορούν να συμβούν σε συστήματα από σωμάτια που δεν απαγορεύεται να καταλάβουν την ίδια κατάσταση.

Απ' την άλλη πλευρά, θεωρώντας ως κενό της θεωρίας της κατάσταση όπου είναι συμπληρωμένα n ΛΛ, n ακέραιος, τότε το μόνο που μας αφορά για να περιγράψουμε την κατάσταση είναι τα CF από το $(n+1)$ –οστό ΛΛ και άνω, δηλαδή πρέπει να ολοκληρώσουμε πάνω σε όλους τους βαθμούς ελευθερίας που σχετίζονται με CF που ζουν κάτω από αυτό. Αυτός ο κατακερματισμός των βαθμών ελευθερίας είναι που οδηγεί στην κλασματική στατιστική και στα κλασματικά φορτία. Αυτό γιατί το κάθε CF βλέπει $2p$ δίνες σε όλα τα άλλα CF, δεν κοιτάει μόνο όσα ζουν στο $(n+1)$ –οστό ΛΛ, αλλά και όσα ζουν στο κενό της θεωρίας, ο παράγοντας Jastrow το κάνει ξεκάθαρο αυτό.

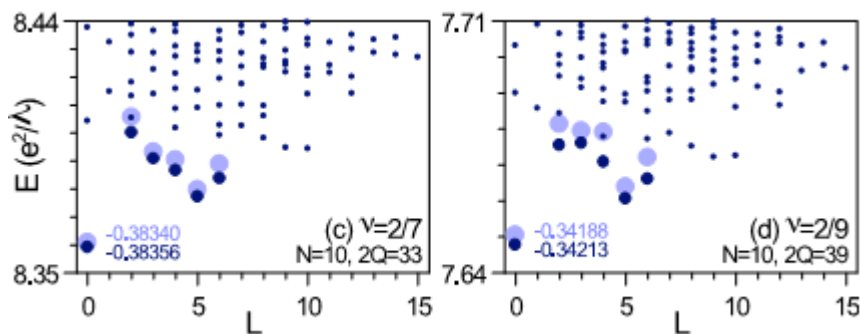
Το κενό στην κβαντομηχανική δεν έχει τετριμμένο ρόλο στην κατανόηση της κβαντικής κατάστασης, έχει σημασία ποιο θα επιλεγεί να είναι. Φυσικά, η φυσική πραγματικότητα είναι μια, το πείραμα ένα αποτέλεσμα θα δώσει, το φορτίο του CF δε θα είναι και e και $e/3$ (για $p=n=1$ και πρόσημο $+$). Το θέμα είναι πώς θα γίνει το πείραμα. Στην περίπτωση που το κενό αποτελείται από CF, που έχουν ηλεκτρικό φορτίο, προφανέστατα υπάρχει ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση του κενού και του κάθε CF, που σημαίνει ότι αυτό θα καθρεφτιστεί στον υπολογισμό του ενεργού φορτίου! Ένα γαλβανόμετρο καλιμπραρισμένο στο νέο κενό της θεωρίας –ή μια σταγόνα Millikan από λάδι φτιαγμένο από CF- θα δώσει ακριβώς αυτό το νέο ενεργό φορτίο· αυτός είναι και ο λόγος που απαιτείται CF για να ανιχνεύσουμε το ενεργό μαγνητικό πεδίο B^* : τα μαγνητόμετρα που χρησιμοποιούμε δεν είναι καλιμπραρισμένα σε αυτό το κενό της θεωρίας, τα CF μπορούν να καλιμπραριστούν! Οι δυο εικόνες συνδέονται επειδή τα δυο κενά της θεωρίας συνδέονται. Στη γλώσσα της δεύτερης κβάντωσης, επικοινωνούν μέσω των τελεστών δημιουργίας. Το κενό της

θεωρίας που αντιστοιχεί σε η συμπληρωμένα ΛΛ δεν είναι παρά η κατάσταση που προέκυψε από τη δράση των αντίστοιχων τελεστών δημιουργίας απαραίτητο αριθμό φορών για κάθε σωματίο. Όλα αυτά έχουν να κάνουν με το ότι τα μετρούμενα μεγέθη στην κβαντομηχανική είναι οι μέσες τιμές τελεστών, και άρα εξαρτώνται από το πάνω σε ποια βάση υπολογίζουμε, αλλά οι βάσεις συνδέονται μεταξύ τους, και αν γνωρίζουμε τον τρόπο, οι δυο εικόνες που θα υπολογίζουμε πάντα θα είναι συνεπείς μεταξύ τους. Τα κλασματικά φορτία και οι κλασματικές στατιστικές προκύπτουν επειδή αλλάξαμε βάση ιδιοκαταστάσεων πάνω στην οποία υπολογίζουμε τα διάφορα μεγέθη, επειδή αλλάξαμε το κενό.

Με τα τελευταία, μπορούμε να καταπνίξουμε κάθε αμφιβολία σχετικά με τη νομιμότητα της αντιμετώπισης των CF ως πραγματικά, έγκυρα σωματίδια. Στον ορισμό τους βάλαμε πέραν του ηλεκτρονίου και την πολύπλοκη οντότητα «δίνη» που ήταν συλλογική ιδιότητα όλων των ηλεκτρονίων. Η πολυπλοκότητα αυτού του ορισμού ενδεχομένως να δημιούργησε αμφιβολίες για το κατά πόσο τα CF είναι πράγματι σωματίδια, ή είναι απλώς μια βολική μαθηματικώς εικόνα. Τώρα βλέπουμε τα CF να έχουν ιδιότητες που έχει κάθε συνηθισμένο σωματίδιο: έχουν συγκεκριμένο φορτίο, έχουν spin και καθορισμένη στατιστική, από την ενέργεια κύκλοτρου μπορούμε να ορίσουμε ενεργό μάζα τους, από το μαγνητικό μήκος που αντιστοιχεί στο ενεργό πεδίο που βλέπουν μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθός τους, έχουν καλούς κβαντικούς αριθμούς! Άρα είναι σωματίδια, έγκυρα και νόμιμα, από κάθε άποψη.

Κάνουμε κβαντομηχανική. Ένα σωματίδιο δεν είναι πια ένα «μπαλάκι» κατά τον τρόπο της κλασικής μηχανικής. Το σωματίδιο πια ανταποκρίνεται σε μια κβαντική κατάσταση, ή αλλιώς αν μια κβαντική κατάσταση έχει καλά ορισμένους τους κβαντικούς αριθμούς που αποδίδουμε στα σωματίδια, ανταποκρίνεται σε σωματίδιο. Άλλωστε, αν το ότι τα CF αιχμαλωτίζουν λίγο απ' όλα τα ηλεκτρόνια του συστήματος μοιάζει ενοχλητικό στον ορισμό τους, μην ξεχνάμε το εξής: ένα τυχόν, συνηθισμένο ηλεκτρόνιο με θετική ενέργεια, θα δημιουργεί στη γειτονιά του ένα πεδίο Coulomb, το οποίο κατά τα γνωστά θα απωθεί όλα τα ηλεκτρόνια που υπάρχουν εκεί γύρω. Ακόμη κι αν δεν υπάρχουν τα συνήθη ηλεκτρόνια με θετική ενέργεια, πάντα υπάρχει η θάλασσα του Dirac των ηλεκτρονίων αρνητικής ενέργειας. Άρα, κάθε ηλεκτρόνιο δημιουργεί γύρω του μια πόλωση της θάλασσας του Dirac, με διάφορες συνέπειες (πχ το φορτίο χρειάζεται διόρθωση, μετράται μικρότερο από το πραγματικό λόγω της πόλωσης). Μη βιαστείτε να απορρίψετε τα παραπάνω λόγω της μπανάλ ιδέας της θάλασσας του Dirac με τις αρνητικές ενέργειες: στα πλαίσια της μοντέρνας θεωρίας πεδίου έχουμε την εικονική δίδυμη γένεση ηλεκτρονίου – ποζιτρονίου στο πεδίο Coulomb, και το ποζιτρόνιο έλκεται από το ηλεκτρόνιο, ενώ το ηλεκτρόνιο της δίδυμης γένεσης απωθείται, κάτι που δείχνει πάλι πόλωση του κενού. Άρα το φορτίο που μέτρησε ο Millikan, ορόσημο για τη φυσική, θέλει διόρθωση, το ηλεκτρόνιο καθώς ταξιδεύει δεν είναι γυμνό, κουβαλάει γύρω του την πόλωση του κενού! Άρα, ακόμη και το απλούστερο σωματίο που υπάρχει, φέρει επάνω του την πόλωση όλων των σωματίων της θάλασσας του Dirac, και άρα αιχμαλωτίζει στην ύπαρξή του μια πολυσύνθετη κίνηση όλων των σωματίων της θάλασσας! Αυτό ποτέ δε μας εμπόδισε να το αντιμετωπίσουμε ως σωματίο: αν έχει καλά ορισμένους κβαντικούς αριθμούς είμαστε καλυμμένοι.

Τέλος, αναφέρουμε την ύπαρξη μιας σωρείας αριθμητικών μελετών που επιβεβαιώνουν την έντονη σύμπνοια των αποτελεσμάτων που δίνει για τις κυματοσυναρτήσεις, τα φάσματα και τους κβαντικούς αριθμούς του πολυηλεκτρονιακού συστήματος η θεωρία των CF, και των αποτελεσμάτων που προκύπτουν για το ίδιο σύστημα από την αρχική Χαμιλτονιανή (αν και είπαμε ότι είναι αναίσθητη σε αλγεβρικούς χειρισμούς, φυσικά δοθείσας αρκετής υπολογιστικής δύναμης είναι εφικτή μια ωμή διαγωνοποίηση του δυναμικού Coulomb).



Όπου βλέπουμε τη σύγκριση των φασμάτων από τη θεωρία των CF για $p=2$, $n=2$ και των πραγματικών (σκούρες τελείες: πραγματικά φάσματα, ανοιχτές τελείες: CF. Πηγή: A. Wojs).

9. Τα αγκάθια

Σ' αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε μια σειρά από κατευθύνσεις όπου κινήθηκε η έρευνα τα χρόνια που ακολούθησαν την ανακάλυψη του FQHE και τη θεωρητική τεκμηρίωσή του με τα σύνθετα φερμιόνια, αλλά φάνηκε να πέφτει πάνω σε τοίχο. Είναι μάλλον πιο ενδιαφέρουσα ενότητα από την προηγούμενη λόγω του μυστηρίου που ακόμα σκεπάζει τα όσα θα αναφέρουμε παρακάτω.

Για διάφορες καταστάσεις FQHE, μπορεί κανείς να υπολογίσει την ενέργεια που απαιτείται για ταυτόχρονη δημιουργία ζεύγους σωματίου –οπής για CF, απομακρυσμένα μεταξύ τους (ουδέτερη διέγερση). Αυτή η ενέργεια μπορεί να συγκριθεί με την ενέργεια ενεργοποίησης που εμφανίζεται στη θερμοκρασιακή εξάρτηση της αντίστασης, διότι το σε ποια θερμοκρασία θα αρχίσει να άγει μια αντίσταση μετράει ακριβώς τη δυνατότητα ενός σωματίου να κινηθεί αρκετά μακριά από τη θέση του –ώστε να ξεκινήσει η διέλευση ρεύματος- αφήνοντας την ίδια στιγμή πίσω του μια οπή, και άρα τη δυνατότητα δημιουργίας του προαναφερθέντος ζεύγους. Έτσι, εξάγοντας την ενέργεια ενεργοποίησης από τα πειράματα, μπορούμε να αποφανθούμε για το ενεργειακό χάσμα που διαχωρίζει τη θεμελιώδη από τη διεγερμένη που αντιστοιχεί στη δημιουργία του ζεύγους σωματίου –οπής CF. Θεωρητικώς αναμένεται όσο μεγαλύτερο είναι το ενεργειακό χάσμα για τη δημιουργία του ζεύγους, τόσο πιο σταθερή να είναι η κατάσταση, και αυτό επαληθεύεται από το πείραμα, ωστόσο τα μετρούμενα χάσματα είναι μικρότερα από τα θεωρητικώς προβλεπόμενα κατά έναν παράγοντα 2. Την ίδια στιγμή, οι διασπορές των ουδετέρων διεγέρσεων ακολουθούν ποιοτικά τη θεωρία, αλλά παρουσιάζουν

μικρότερες ενέργειες. Οι μελετητές εκτιμούν ότι οι διαφορές σχετίζονται με φαινόμενα αταξίας που δεν έχουν ληφθεί υπ' όψιν στη θεωρία.

Αν δεν υπήρχε η παραμικρή αλληλεπίδραση μεταξύ των σύνθετων φερμιονίων, τότε θα περιμέναμε απολύτως επίπεδα $\Lambda\Lambda$, δηλαδή όλες οι καταστάσεις στη χαμηλότερη ζώνη θα ήταν εκφυλισμένες: την ίδια στιγμή, η πρώτη διέγερση (δημιουργία ενός CF στη ενεργειακά πιο συμφέρουσα θέση στα $\Lambda\Lambda$) θα περιμέναμε να μην παρουσιάζει διασπορά. Όμως, αναφέραμε πριν ότι στη χαμηλότερη ζώνη υπάρχει διαχωρισμός των καταστάσεων (θυμηθείτε ότι προβάλλαμε στο LLL για την κυματοσυνάρτηση των CF), ενώ έχει παρατηρηθεί και διασπορά στην ενέργεια της πρώτης διέγερσης. Και τα δύο αυτά φαινόμενα υποδεικνύουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των CF. Γι' αυτό μιλούσαμε για ασθενώς αλληλοεπιδρώντα CF και όχι για μη αλληλοεπιδρώντα: «ασθενώς αλληλοεπιδρώντα» σημαίνει ότι οι ενεργειακές διαφορές μεταξύ καταστάσεων στη χαμηλότερη ενεργειακή ζώνη είναι πολύ μικρότερες από τα χάσματα που τις διαχωρίζουν από ανώτερες ζώνες. Η διασπορά στην ενέργεια της πρώτης διεγερμένης μπορεί να ερμηνευθεί ακριβώς ως ενεργειακές διαφορές μεταξύ των διαθέσιμων καταστάσεων στην αντίστοιχη ζώνη. Αν και οι κυματοσυναρτήσεις των CF κατασκευάζονται από κυματοσυναρτήσεις μη αλληλοεπιδρώντων ηλεκτρονίων, ο τρόπος που τους αποδόθηκαν οι δίνες καταφέρνει με θαυμαστό τρόπο να απαθανατίζει τη φυσική που κρύβει η αλληλεπίδραση μεταξύ των CF, το οποίο υπογραμμίζει τη στιβαρότητα της τοπολογικής φύσης της δίνης.

Αυτά τα απομεινάρια αλληλεπίδρασης, ενώ είναι επουσιώδη σε ακέραιους παράγοντες πλήρωσης των $\Lambda\Lambda$, αποκτούν ενδιαφέρον για μη ακέραια ν^* . Ο πιο ακριβής τρόπος για να διαχειριστεί κανείς ένα τέτοιο σύστημα είναι να κατασκευάσει τη βάση των ιδιοκαταστάσεων των CF για όλες τις καταστάσεις της χαμηλότερης ενεργειακής ζώνης για παράγοντα πλήρωσης ν^* , και τη χρησιμοποιήσει για να διαγωνοποιήσει την αλληλεπίδραση Coulomb.

Εκείνο που έχει εδώ σημασία είναι η δυνατότητα που έχουν αυτές οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις να αποδώσουν πολύπλοκες δομές που δεν έχουν ληφθεί υπ' όψιν ως τώρα.

Ένα παράδειγμα είναι η κατάσταση με παράγοντα πλήρωσης για τα ηλεκτρόνια $\nu=n/(4n\pm1)$. Κατά τα γνωστά, το πλάτωμα που εμφανίζεται σε αυτή την κατάσταση, ερμηνεύεται ως το IQHE CF που αποτελούνται από ηλεκτρόνια που έχουν τσακώσει τέσσερις δίνες ($p=2$). Όμως, λαμβάνοντας υπ' όψιν την ενοποίηση IQHE, FQHE, μπορεί κανείς να το ερμηνεύσει ως το FQHE υπερσύνθετων φερμιονίων (sic) που έχουν τσακώσει δύο δίνες! Θυμηθείτε και τη σύγκριση του διαγράμματος του FHQE με το ίδιο, προωθημένο στο πεδίο.

Η δυνατότητα εμφάνισης τέτοιων πολύπλοκων δομών ανοίγει νέα παράθυρα στη μελέτη, που θα μπορούσαν να αποδώσουν κι άλλα πλατώματα στο FQHE, σε ανέλπιστους ως τώρα παράγοντες πλήρωσης, ακριβώς όπως τα CF απέδωσαν τα πρώτα πλατώματα σε κλασματικούς –ανέλπιστους– για τα ηλεκτρόνια παράγοντες πλήρωσης.

Φερ' ειπείν, έστω η κατάσταση $\nu^*=4/3$ (αγνοώ τα σπιν), που σημαίνει συμπληρωμένο κατώτερο $\Lambda\Lambda$, και το αμέσως επόμενο $\Lambda\Lambda$ συμπληρωμένο κατά $1/3$. Αφού $\nu^*=4/3$, ο γνωστός τύπος $\nu=\nu^*/(2p\nu^*+1)$ δίνει $\nu=4/11$. Με όσα είχαν ειπωθεί ως τώρα, αναμέναμε αφού ν^* δεν είναι ακέραιος, να μην έχουμε πλάτωμα. Στο δεύτερο

ΛΛ, ωστόσο, οι απομένουσες, ασθενείς αλληλεπιδράσεις των CF, ενδέχεται να είναι τέτοιας μορφής που να ευνοούν ενεργειακά το να τσακώσουν αυτά τα CF άλλες 2 δίνες, και έτσι να μετατραπούν στις εν λόγω πολυσύνθετες δομές. Τότε, η κατάσταση μας είναι μια κατάσταση όπου στο χαμηλότερο ΛΛ έχουμε CF με 2 δίνες, και στο επόμενο CF με 4 δίνες. Με το σχηματισμό των νέων δομών στο δεύτερο ΛΛ, έχουμε ότι το FQHE των CF θα συμβαίνει για παράγοντα πλήρωσής τους $1/3$, αφού αυτός αντιστοιχεί σε παράγοντα πλήρωσης 1 για τις νέες πολυσύνθετες δομές (είναι στη μορφή που μελέτησε ο Laughlin στις κυματοσυναρτήσεις του, $v=1/m$, m περιττός ακέραιος και σε τέτοιους παράγοντες πλήρωσης αναμένεται πλάτωμα), οπότε αναμένουμε τελικά πλάτωμα για $v=4/11$, παρόλο που αντιστοιχεί σε $v^*=4/3$!

Με άλλα λόγια η απομένουσα ασθενής αλληλεπίδραση των CF, καταφέρνει να άρει τον εκφυλισμό που αναμενόταν σε τέτοιο παράγοντα πλήρωσης, και να δημιουργήσει μια ομοιόμορφη θεμελιώδη (θυμηθείτε ότι αντιστοιχούν σε στροφορμή 0) που να διαχωρίζεται από τις διεγερμένες με χάσμα, ακριβώς όπως έχουμε δει ως τώρα.

Παρομοίως, κι άλλα πλάτωματα, σε κλάσματα που προκύπτουν με αυτή τη λογική, μπορούν να συμβούν. Στη γειτονιά του $1/3$, υπάρχουν πειραματικές ενδείξεις για τέτοιες καταστάσεις, οι οποίες είναι πολύ πιο ευαίσθητες στην ανίχνευσή τους από τις κυρίαρχες. Για να επιβεβαιωθεί η ύπαρξή τους όμως υπεράνω πάσης αμφιβολίας, καθώς και για να μάθουμε τελικά πόσες και ποιες τέτοιες εμφανίζονται, απαιτούνται ευκρινέστερα πειραματικά δεδομένα, ενώ είναι σημαντικό να μπορούμε να αναγνωρίσουμε το πόσο βαθιά μπορεί να προχωρήσει η δημιουργία σύνθετων οντοτήτων, πόσες διαφορετικές γενιές από σύνθετα φερμιόνια με διαφορετικό αριθμό δινών μπορούν να επιμειγνύονται σε καταστάσεις, και γιατί. Πιθανώς, για την απάντηση να μην αρκεί μια φαινομενολογική διερεύνηση όπως η διαθέσιμη, αλλά να απαιτείται βαθύτερη κατανόηση του FQHE, στο θεμελιώδες επίπεδό του, μικροσκοπικά.

Παραπάνω επισημάνθηκε ότι το FQHE δεν επηρεάζεται από το μέγεθος της αλληλεπίδρασης Coulomb, οπότε τα στοιχεία πίνακα της αλληλεπίδρασης –που διαφέρουν από LL σε LL- δεν επηρεάζουν το φαινόμενο. Η μυωπική συμπεριφορά του FQHE ως προς τα στοιχεία πίνακα της αλληλεπίδρασης Coulomb, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι κυματοσυναρτήσεις στο δεύτερο LL θα σχετίζονται απευθείας με εκείνες του LLL απλώς με μια αλλαγή του δείκτη LL, και τα πλάτωματα αγωγιμότητας που αντιστοιχούν σ' αυτό θα έχουν την ίδια προέλευση με εκείνα που αντιστοιχούν στο LLL.

Αυτή η συλλογιστική όμως φαίνεται να καταρρέει κοιτώντας τα πειραματικά δεδομένα.

Όταν έχουμε γεμίσει το μισό δεύτερο LL, $v=5/2$ επειδή στο δεύτερο LL δε μπορούμε να αγνοήσουμε τις συνιστώσες του σπιν όπως ήδη αναφέρθηκε, παρατηρούμε πλάτωμα αγωγιμότητας, κάτι απαράδεκτο για μισογεμάτο LLL, όπου είχαμε τη θάλασσα Fermi των CF, που όπως είπαμε δε διαθέτει χάσμα. Το πλάτωμα στον παράγοντα πλήρωσης $v=5/2$ αποτελεί ένα από τα άλυτα προβλήματα της φυσικής.

Ακόμη, στο δεύτερο LL εντοπίζονται πολύ λιγότερα πλάτωματα απ' όσα στο LLL, και αυτά είναι πολύ πιο ευαίσθητα: η χαρτογράφησή τους απαιτεί πολύ

καθαρότερα δείγματα κι ακόμη χαμηλότερες θερμοκρασίες. Ωστόσο, όσα κλάσματα παρατηρούνται ανταποκρίνονται σε εκείνα του LLL (πχ $2+1/3$, $2+2/5$...). Παρ' όλα αυτά, οι αριθμητικοί υπολογισμοί δείχνουν ότι οι κυματοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σ' αυτά δε συμφωνούν με εκείνες των CF όπως προκύπτουν από τη θεωρία.

Αυτές οι ασυμφωνίες με τα αναμενόμενα, προς το παρόν ερμηνεύονται ως υπογραφές φυσικής πέραν του μοντέλου των ασθενώς αλληλοεπιδρώντων CF.

Οι Moore και Read πρότειναν μια κυματοσυνάρτηση για τη θεμελιώδη της $\nu=5/2$, η οποία ερμηνεύεται ως κατάσταση ζευγών CF που φέρουν δύο δίνες. Η κατάσταση όπου δύο CF σχηματίζουν ζεύγος –όμοια με τους υπεραγωγούς όπου δυο ηλεκτρόνια σχηματίζουν ζεύγος Cooper- δε μπορεί βέβαια να σχηματιστεί, εκτός κι αν έχουμε εισάγει στην εικόνα αλληλεπιδράσεις CF. Πράγματι, οι περισσότεροι σήμερα πιστεύουν ότι το πλάτωμα στο γέμισμα $\nu=5/2$ σχετίζεται με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των CF που καταφέρνουν να καθιστούν το άνοιγμα χάσματος εκεί ενεργειακά συμφέρον. Μάλιστα υπάρχει η πολύ ενδιαφέρουσα άποψη ότι αυτά τα ζεύγη CF ικανοποιούν μη Αβελιανή στατιστική, είναι δηλαδή μη Αβελιανά ανυόνια, κάτι που είναι υπό θεωρητική και πειραματική έρευνα.

Ακόμη, όσον αφορά κλάσματα με άρτιο παρονομαστή, έχουν εντοπιστεί και τα $7/2$ και $19/8$. Αυτά όμως ποτέ δεν κατάφεραν να φτάσουν σε διασημότητα το $5/2$ λόγω του ότι τα πειράματα που τα εντόπισαν είχαν πολύ δύσκολες απαιτήσεις. Για παράδειγμα η κατάσταση με παράγοντα πλήρωσης $19/8$ βρέθηκε να έχει χάσμα 5mK , που για να ανιχνευθεί απαιτεί περιβάλλον ηλεκτρονικής θερμοκρασίας (άλλη θερμοκρασία από την περιβαλλοντική πλεγματική θερμοκρασία που παρέχουν οι κρυοστάτες) πολύ χαμηλότερης απ' όση μπορούν τα περισσότερα εργαστήρια να διανοηθούν σήμερα. Ήδη η $5/2$ είναι πολύ δύσκολο τεχνικά να παρατηρηθεί κι ως έχει χάσμα 100 φορές μεγαλύτερο! Μιλάμε για τεχνικά πάρα πολύ δύσκολες υποθέσεις, που ίσως με την πρόοδο των πειραματικών διατάξεων να αποσαφηνίσουν περισσότερο τα πράγματα, αλλά προς το παρόν –και λόγω της δύσκολης επαναληψιμότητας τέτοιων πειραμάτων- τα αποτελέσματα ενδεχομένως αντιμετωπίζονται με σκεπτικισμό.

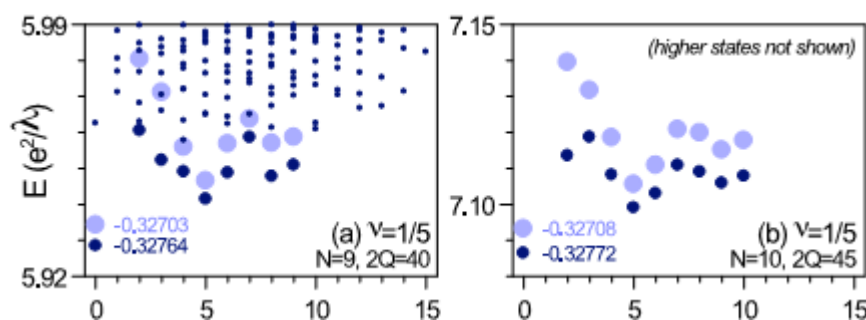
Ακόμη, ο Wigner είχε προβλέψει πως όταν η δυναμική ενέργεια ενός συστήματος ηλεκτρονίων κυριαρχεί της κινητικής, τότε η χωρική διάταξη των σωματίων γίνεται σημαντική, και θα υπάρχει κάποια συγκεκριμένη διάταξη που θα ελαχιστοποιεί την ενέργεια, κάτι που αντιστοιχεί σε σχηματισμό κρύσταλλου, το λεγόμενο κρύσταλλο Wigner. Στο 2D, για παράδειγμα, για να ελαχιστοποιήσουν την ενέργεια τα ηλεκτρόνια, στήνουν τριγωνικό πλέγμα.

Επειδή εδώ το ισχυρό μαγνητικό πεδίο που εφαρμόζεται, όπως εξηγήσαμε, κατακερματίζει τον κινητικό όρο από τη Χαμιλτονιανή και τοποθετεί όλα τα ηλεκτρόνια στο LLL, οι μελετητές πριν ανακαλύψουν το FQHE, περίμεναν να εντοπίσουν ακριβώς τέτοιο κρύσταλλο Wigner στο υπό μελέτη σύστημα.

Όμως, φαίνεται ότι η ενέργεια αλληλεπίδρασης τελικά δεν ευνοεί το σχηματισμό κρυστάλλου, αλλά το σχηματισμό CF, τα οποία βρίσκονται σε κατάσταση ρευστού!

Θα ήταν ευχής έργο να μπορούσε να σχηματιστεί ένας κρύσταλλος Wigner από CF: τα CF θα ήταν περιορισμένα σε συγκεκριμένες πλεγματικές θέσεις, κατάσταση ιδανική για πειραματική μελέτη τους, σε σχέση με την άβολη, ρευστή κατάσταση που έχουμε συζητήσει ως τώρα. Αυτό θα αναμέναμε να συμβεί σε πολύ μικρούς παράγοντες πλήρωσης, αφού στους σχετικά μεγάλους που έχουμε δει ως τώρα ευνοείται η ρευστή κατάσταση. Έχουν γίνει αναλυτικοί υπολογισμοί, κι έχουν δείξει ότι η ενέργεια του κρύσταλλου Wigner των CF πράγματι είναι μικρότερη από εκείνη του κρύσταλλου Wigner για ηλεκτρόνια, οπότε ακόμη και στα μικρά γεμίσματα συμφέρει ενεργειακά το σύστημα να φτιάξει τα CF και αυτά να βάλει να σχηματίσουν κρύσταλλο. Βασικά, αυτό που θα συνέβαινε τότε θα ήταν τα ηλεκτρόνια να τσακώσουν λιγότερο αριθμό από τις διαθέσιμες δίνες –χρειάζεται ακόμα ένα ισχυρό πεδίο για να στηθεί ο κρύσταλλος- και οι υπόλοιποι βαθμοί ελευθερίας θα «παγώσουν» με το σχηματισμό του κρύσταλλου.

Κι ενώ η συλλογιστική φαίνεται ελπιδοφόρα, δυστυχώς δεν είναι γνωστό ποια ακριβώς ιδιότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποφανθούμε αν ένας κρύσταλλος Wigner που παρατηρείται είναι από CF ή από ηλεκτρόνια.



Όπου βλέπουμε τη σύγκριση των φασμάτων από τη θεωρία των CF για $\nu=2$, $n=1$ και των πραγματικών (σκούρες τελείες: πραγματικά φάσματα, ανοιχτές τελείες: CF. Πηγή: A. Wojs). Εδώ η απόκλιση και στις δύο περιπτώσεις που παρουσιάζουμε είναι ελαφρώς μεγαλύτερη σε σχέση με τις περιπτώσεις $\nu=2/7$, $\nu=2/9$. Πιστεύεται ότι οφείλεται στην εγγύτητα της κατάστασης σε κρύσταλλο Wigner (η πραγματικά μεγάλη απόκλιση στα μικρά L οφείλεται στο ότι η ακριβής κατάσταση περιέχει και διεγέρσεις).

Τέλος, θα περίμενε κανείς ότι όλα τα κλάσματα στα οποία αναμένεται πλάτωμα αγωγιμότητας, με την πρόοδο της τεχνολογίας που θα φέρει ακόμη πιο καθαρά δείγματα κι ακόμη χαμηλότερες θερμοκρασίες, θα παρατηρηθούν. Ωστόσο, δεν είναι έτσι: η αλληλεπίδραση Coulomb θα αναδείξει μόνο ένα πεπερασμένο πλήθος από τα άπειρα. Μάλιστα, ήδη έχουν βρεθεί παράγοντες πλήρωσης που θα έπρεπε να αποδώσουν πλάτωμα αλλά δεν αποδίδουν. Ο λόγος φαίνεται να είναι ότι δεν είναι πάντοτε ο σχηματισμός των CF ο ενεργειακά οικονομικότερος τρόπος διαχείρισης της κατάστασης. Στα υψηλά LL το FQHE δεν εμφανίζεται πια: προτιμάται ο σχηματισμός άλλων δομών, όχι CF. Στο δε LLL αλλά στα πάρα πολύ χαμηλά γεμίσματα, θα προτιμηθεί ο σχηματισμός κρυστάλλου Wigner, και βέβαια ένας κρύσταλλος (ηλεκτρονίων ή CF) δε μπορεί να συσχετιστεί με ροή ρεύματος, τα πλάτωματα αγωγιμότητας στερούνται νοήματος, αφού στερείται νοήματος η ίδια η αγωγιμότητα. Εκεί το σύστημα είναι μονωτής. Για να είμαστε ακριβείς, μέχρι στιγμής

το πείραμα, για $\nu \geq 4$, έχει αποδώσει μόνο τα κλασματικά πλατώματα $21/5$ και $24/5$ κι αυτά για το θερμοκρασιακό εύρος από 80mK ως 120mK.

III. Fade out

Υπάρχει μια θεωρία που λέει πως, αν ποτέ κανείς ανακαλύψει για ποιο σκοπό ακριβώς υπάρχει το σύμπαν και τι εξυπηρετεί, θα εξαφανιστεί αμέσως και θα αντικατασταθεί από κάτι ακόμα πιο παράξενο και ανεξήγητο.

Υπάρχει και μια άλλη θεωρία που λέει πως αυτό έχει ήδη συμβεί.

Douglas Adams, Το Ρεστοράν στο τέλος του Σύμπαντος

1. Κάποια άλλα τοπολογικά συστήματα

Πολλά είναι τα φυσικά συστήματα για τα οποία υπάρχει ελπίδα να εμφανιστούν τα πολυπόθητα για τον τοπολογικό υπολογισμό ανυόνια, και δε χωρά αμφιβολία ότι με το πέρας των χρόνων και την εξοικείωση των ερευνητών με την υπόθεση θα γίνουν περισσότερα. Μιας και στην παραπάνω ανάλυση των IQHE και FQHE έγινε προσπάθεια να κεντράρουμε στην τοπολογική φύση του πράγματος, και στη φυσική που την περιβάλλει, είναι εύλογο για λόγους πληρότητας να αναφέρουμε ενδεικτικά και μερικά ακόμη συστήματα που αποτελούν αντικείμενο ενεργής έρευνας και παρέχουν εφελκύσματα για τοπολογικούς υπολογισμούς, με το ξύπνημα ανυονικών στατιστικών.

Αναφέρθηκε στην εισαγωγή ότι ένα μονοδιάστατο σύστημα, είναι εφικτό να θεωρηθεί ότι έχει ανυονική στατιστική, που εισάγεται από το ότι τα σωματίδια δεν είναι τετριμμένα διαμπερή, πάει να πει ο μηχανισμός της ανταλλαγής που απαιτεί διείσδυση του ενός στο άλλο δεν είναι βέβαιο το τι αποτέλεσμα θα έφερνε στην κυματοσυνάρτηση. Αυτό προσπαθεί να εκμεταλλευτεί το θεωρητικό μοντέλο Anyon Hubbard, όπως κυκλοφορεί στη βιβλιογραφία. Το μοντέλο Hubbard τυχόντων σωματιδίων είναι γνωστό στη φυσική στερεάς κατάστασης: η 1D έκδοση του στήνεται από μια πλεγματοειδή αλυσίδα με μια Χαμιλτονιανή που περιέχει έναν όρο ο οποίος περιγράφει άλμα ενός σωματίου σε κάποια από τις πρώτες γειτονικές του θέσεις (θυμηθείτε τους τελεστές δημιουργίας και καταστροφής: ένας τέτοιος όρος είναι ανάλογος του τελεστή δημιουργίας να δρα στην τελική θέση και του τελεστή καταστροφής να δρα στην αρχική, αφού αυτό είναι το άλμα), τον ερμητιανό συζυγή του ώστε η Χαμιλτονιανή να είναι ερμητιανός τελεστής, και άλλον έναν όρο που εκφράζει τον αριθμό κατάληψης κάθε θέσης του πλέγματος. Στο μοντέλο Anyon Hubbard υποτίθεται θεωρητικά ότι οι πλεγματοειδείς θέσεις της αλυσίδας μπορούν να καταληφθούν από ανυόνια συγκεκριμένης στατιστικής φάσης ανταλλαγής. Πρωτοποριακές και ευφυείς πειραματικές τεχνικές έχουν αναπτυχθεί για την προσομοίωση τέτοιου συστήματος: κάποιοι πραγματώσαν τα ανυόνια ως στοιχειώδεις, χαμηλής ενέργειας διεγέρσεις του μοντέλου Hubbard συμβατικών φερμιονίων με διαδικασίες συσχετισμένων αλμάτων· αλλού χρησιμοποιήθηκε μποζονική αλυσίδα, με μιγαδικά πλάτη άλματος μεταξύ γειτονικών πλεγματοειδών θέσεων, εξαρτώμενα από τον αριθμό κατάληψης κάθε θέσης, με τα πλάτη αυτά να πραγματώνονται από φαινόμενα σύραγγας που διαδίδονται με φωτόνια σε 1D οπτικό πλέγμα. Επίσης, έχει προταθεί η απλούστερη διάταξη υπέρψυχρων μποζονίων σε οπτικό πλέγμα, η οποία έχει το πλεονέκτημα ότι δε χρειάζονται άλλα laser εκτός από εκείνα που χρησιμοποιήθηκαν για να στηθεί το οπτικό πλέγμα (τα προηγούμενα απαιτούν ταλαντώσεις Raman). Οι έρευνες έδειξαν για το μοντέλο Anyon Hubbard μια πάρα πολύ πλούσια φυσική στη θεμελιώδη κατάσταση και μόνο, όπου βρέθηκαν φάσεις απομονωτών, Mott –απομονωτών, ζευγών υπερρευστών, και πολυκρίσιμα σημεία. Τα πράγματα γίνονται ακόμα πιο περίπλοκα –και ενδεχομένως πιο ενδιαφέροντα- αν συμπεριλάβουμε στο μοντέλο και εξωτερικά δυναμικά. Το επιμύθιο όλων αυτών των πολύπλοκων εννοιών που δε μας ενδιαφέρει να αναλωθούμε εδώ, είναι ότι οι πειραματικοί βρίσκουν τρόπους να πραγματώσουν προσομοιώσεις ανυονίων, με χρήση συμβατικών φερμιονίων, συμβατικών μποζονίων, και laser.

Την ίδια στιγμή, ένα από τα πιο γοητευτικά concept –και απ’ τα πιο αμφιλεγόμενα- είναι η υπόθεση των φερμιονίων Majorana. Ο θρυλικός λόγω της σκιώδους ιστορίας της εξαφάνισής του Majorana, πριν περάσει στη σφαίρα των θεωριών συνομοσίας, πρόλαβε να κάνει μια πολύ ενδιαφέρουσα παρατήρηση στην εξίσωση του Dirac: οι γ πίνακες που πρότεινε ο Dirac και οδήγησαν σε όλα εκείνα τα επαληθευμένα συμπεράσματα της κβαντικής θεωρίας πεδίου (σπιν, αντιύλη κλπ), δεν είναι οι μόνοι που μπορούν να ικανοποιούν την άλγεβρα Clifford που πρέπει να ικανοποιούν οι γ . Αντίθετα, ο Majorana βρήκε ένα σετ πινάκων που είχαν αμιγώς φανταστικά στοιχεία όλοι, και επειδή στην εξίσωση του Dirac οι γ πολλαπλασιάζονται με το i , βρήκε μια εξίσωση Dirac με αμιγώς πραγματικούς συντελεστές, η οποία δε μπορεί παρά να αποδίδει πραγματική λύση –βρήκε δηλαδή πραγματικό, φερμιονικό πεδίο, ήτοι σωμάτια που είναι φερμιόνια, αλλά ταυτόχρονα είναι τα ίδια τους τα αντισωματίδια, και έδειξε θεωρητικώς ότι αυτό είναι συμβατό με την κβαντική θεωρία πεδίου και τη σχετικότητα. Όλα τα φερμιόνια του Καθιερωμένου Μοντέλου έχει αποδειχτεί πειραματικά ότι είναι φερμιόνια Dirac (έχουν διαφορετικό αντισωματίο), εκτός από το νετρίνο, που δεν έχει αποσαφηνιστεί το κατά πόσο έχει μάζα ώστε να μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι Dirac ή Majorana φερμιόνιο (για να είναι ένα σωματίο το αντισωματίο του πρέπει να έχει μηδενική μάζα). Ωστόσο, τα φερμιόνια Majorana περιέργως βρήκαν πάτημα και στη φυσική στερεάς κατάστασης: σε έναν υπεραγωγό μπορούν να εμφανιστούν –έχουν παρατηρηθεί υπεράνω πάσης αμφιβολίας- τέτοιου είδους φερμιόνια Majorana, ως συλλογικές διεγέρσεις (θυμηθείτε τα ανακλύπτοντα φαινόμενα!), που καλούνται κβάζα, και αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν προς σχηματισμό δέσμιων καταστάσεων που επιδεικνύουν μη Αβελιανές στατιστικές! Και πάλι δε θα εντυπώσουμε στις λεπτομέρειες της υπόθεσης, ωστόσο θα αναφερθούμε επί τροχάδην στο προαναφερθέν κβάζο, μιας και αποτελεί κι εκείνο ανακλύπτουσα ιδιότητα: τα κβάζα και οι αντίστοιχες βέβαια οπές τους εμφανίζονται σε πάρα πολλά κβαντικά συστήματα. Φερ’ ειπείν αναφερθήκαμε ωρρίτερα στις ουδέτερες διεγέρσεις CF: ένα CF ανέρχεται αφήνοντας πίσω του οπή και η θεμελιώδης γίνεται διεγερμένη: αυτή η διεγερση είναι κβάζο, το ίδιο το CF είναι ένα σωματίο –κβάζο, είναι ανακλύπτουσα ιδιότητα. Συμβατικά, καλείται ένα σωματίο κβάζο αν σχετίζεται με φερμιόνια, όπως το CF που σχετίζεται με ηλεκτρόνια, και συλλογική διεγερση αν σχετίζεται με μποζόνια: όπως και να ‘χει, είναι συλλογική διεγερση, οπότε η σύμβαση είναι μάλλον ατυχής. Γενικά, κβάζα προκύπτουν στην κατάσταση όπου έχουμε ένα πολύπλοκο μικροσκοπικά σύστημα, το οποίο όμως συμπεριφέρεται σαν να περιείχε διαφορετικά ασθενώς αλληλοεπιδρώντα σωματίδια στον ελεύθερο χώρο: αυτά είναι τα κβάζα. Τέλος, αναφέρουμε ότι οι τρόποι Majorana εμφανίζονται ακραία αποτοπικοποιημένοι –πχ σε 1D υπεραγωγό εδράζονται στα δυο άκρα της αλυσίδας και φθίνουν εκθετικά προς το εσωτερικό- και αυτό είναι που τους καθιστά πολύ θελκτικούς για χαμηλής αποσυννοχής κβαντικό υπολογισμό.

Στην ίδια κατεύθυνση, πολλά βλέμματα έχει τραβήξει και το μοντέλο του Kitaev, που είναι εξαγωνικό πλέγμα –για την ακρίβεια δυο τριγωνικά πλέγματα συνδυασμένα- φερμιονίων, στο 2D. Εκεί, η θεωρητική μελέτη έδειξε ότι σχηματίζονται διεγέρσεις –δίνες, που δεσμεύουν επάνω τους τοπικοποιημένους τρόπους Majorana, για μη τετριμμένους αριθμούς Chern. Αυτό υπογραμμίζει ότι από το μοντέλο ανακλύπτον μη Αβελιανά ανυόνια –πράγματι ανακλύπτον γιατί οι τρόποι

Majorana προκύπτουν ως συλλογικό φαινόμενο των φερμιονίων, που γίνεται αντιληπτό ως τοπικοποιημένη ιδιοκατάσταση της Χαμιλτονιανής, όπως ακριβώς το CF στο FQHE.

Τέλος, έχουν βρεθεί φωτονικά πλέγματα που επιδεικνύουν κάτω από κατάλληλες συνθήκες –κουρδίζοντας κατάλληλα την ηλεκτρική και τη μαγνητική διαπερατότητα- μη μηδενικούς αριθμούς Chern, που αποτελεί την υπογραφή τοπολογικού φαινομένου.

2. Θαυμαστός, κβαντικός κόσμος

Πέραν της τεχνικής και θεωρητικής πλευράς των τοπολογικών συστημάτων, το κβαντικό φαινόμενο Hall –ακέραιο ή κλασματικό- έχει μια ξεχωριστή, βαρύνουσα θέση σε σχέση με τα υπόλοιπα που αναφέρθηκαν: είναι ένα θαυμάσιο μανιφέστο ανακύπτοντος φαινομένου στη φυσική, πράγμα που λίγες φορές είχε απαντηθεί ως την ανακάλυψη και ερμηνεία του, με τόσο καθαρό τρόπο. Τα ανακύπτοντα φαινόμενα δεν ήταν άγνωστα στον κόσμο της διανόησης: η ίδια η ζωή πολλές φορές έχει ερμηνευθεί στο επίπεδο που μελετάται από τη βιολογία ως ανακύπτον φαινόμενο των αλληλεπιδράσεων μεταξύ μορίων, ατόμων και ιόντων –στο επίπεδο μελέτης, δηλαδή, της χημείας- με τη σειρά τους οι αλληλεπιδράσεις αυτές μπορούν να ερμηνευθούν ως ανακύπτον φαινόμενο που πηγάζει από τις αλληλεπιδράσεις ηλεκτρονίων, κουάρκ, φωτονίων κλπ, όπως τις μελετά η φυσική στοιχειωδών σωματιδίων.

Ή μήπως μπορεί κανείς να αποκλείσει η τόσο ριζικά διαφορετική φύση της βαρύτητας σε σχέση με τις άλλες στοιχειώδεις αλληλεπιδράσεις και η αντίστασή της στο να εισαχθεί στο Καθιερωμένο Μοντέλο, να οφείλεται στο ότι στην πραγματικότητα είναι μια ανακύπτουσα ιδιότητα των υπόλοιπων αλληλεπιδράσεων στις μεγάλες κλίμακες; Το ότι δεν παρουσιάζει σπουδαία χαρακτηριστικά που παρουσιάζουν οι υπόλοιπες –ένα απλό παράδειγμα είναι ότι δεν υπάρχει απωστική βαρύτητα- δεν είναι πρόβλημα: οι ανακύπτουσες δομές εξ ορισμού παρουσιάζουν πολύ διαφορετική φαινομενολογία από τα συστατικά που τις αποδίδουν.

Την ίδια στιγμή, η κλασική μηχανική μπορεί να ερμηνευτεί ως η ανακύπτουσα κατάσταση του κβαντικού κόσμου, στο όριο των μεγάλων μεγεθών!

Ακόμη, ας θυμηθούμε ότι οι νόμοι του Νεύτωνα είναι χρονικά αντιστρεπτοί – κοιτώντας μια κίνηση δεν υπάρχει τρόπος να αποφανθούμε αν βλέπουμε το πραγματικό βίντεο ή το rewind, δεν υπάρχει βέλος του χρόνου- μολονότι στο θερμοδυναμικό όριο μπορούμε να αποφανθούμε για το βέλος του χρόνου μετρώντας την εντροπία: η χρονική στιγμή με τη μικρότερη εντροπία ήταν προγενέστερη. Ίσως ο δεύτερος θερμοδυναμικός νόμος να είναι κι εκείνος ένα ανακύπτον φαινόμενο, ίσως η εντροπία –όπως την εξετάζει η θερμοδυναμική, όχι πχ η εντροπία της πληροφορίας- να είναι ένα ανακύπτον μέγεθος, κάτι τρομερό αν σκεφτεί κανείς ότι την ίδια στιγμή είναι και εκτατικό μέγεθος! Άλλωστε και η θερμοκρασία με τον τρόπο που συσχετίζεται με τις μικροκαταστάσεις του θερμοδυναμικού συστήματος, δε θα ήταν εντελώς άτοπο να ερμηνευθεί ως ανακύπτουσα ιδιότητα, και το ίδιο και η πίεση, και μάλιστα πιο εύλογα από την εντροπία, αφού αυτά είναι εντατικά μεγέθη.

Σε άλλα πεδία, είναι πια ξεκάθαρο ότι η ψυχολογική κατάσταση δεν είναι τίποτα παραπάνω από το τι ανακύπτει από τη νευροφυσιολογία, ενώ κάθε οικονομικό

φαινόμενο, λόγω του ότι στη διαμόρφωσή του συμμετέχει συνολικά όλη η κοινωνία με τα αντικρουόμενα συμφέροντά της, ωστόσο στη μεγάλη εικόνα παρουσιάζεται μια συγκεκριμένη δομή απούσα όταν ζουμάρουμε στο κάθε υποκείμενο, μπορεί να θεωρηθεί κατ' αρχήν ανακύπτον.

Πότε είναι κάτι ανακύπτον, λοιπόν, μετά απ' όλα αυτά; Σε αδρές γραμμές, θεωρείται ότι κάτι είναι ανακύπτον όταν δε μπορεί να αναχθεί οντολογικά σε χαμηλότερα επίπεδα ανάλυσης.

Σε μια ίσως λογοτεχνική ερμηνεία, όπως η μάνταλα των Βουδιστών που με τις πολύπλοκες γεωμετρικές δομές έχει σκοπό να απεικονίσει μια συνολική, υλική και πνευματική, πραγματικότητα, που όμως για να ερμηνευθεί πρέπει να παρατηρηθεί στην ολότητά της –ή αν θέλουμε μια άλλη μεταφορά που να περιλαμβάνει τη μάνταλα, όπως αυτή μολονότι αποτελείται κυρίως από τρίγωνα και τετράγωνα απεικονίζει δομή γύρω από ένα κέντρο, δηλαδή έχει το χαρακτήρα κύκλου- έτσι και το κβαντικό φαινόμενο Hall –ακέραιο ή κλασματικό- αποτελεί μια «κβαντική μάνταλα» που ναι μεν παρουσιάζει τοπικά κάποια χαρακτηριστικά, αλλά η ανακύπτουσα εικόνα όταν θεωρήσουμε το συνολικό σύστημα είναι εκείνη που αποδίδει τα πλατώματα αγωγιμότητας, και θα πρέπει να το κάναμε πια απολύτως ξεκάθαρο ότι η αναγωγική διερεύνηση των επιμέρους δεν έχει ως αντίκρισμα αυτή την ανακύπτουσα εικόνα.

Κινδυνεύοντας να αγγίξω τη σφαίρα της φαντασίας –μα τουλάχιστον αποφεύγοντας τον πνευματικά θανάσιμο, για ένα θεωρητικό μελετητή, κίνδυνο του να μην την πλησιάσω καθόλου!- στην κατακλείδα της ανάλυσής αυτής αφήνομαι στην ελπίδα ότι ο κβαντικός κόσμος με την όλο και καλύτερη κατανόησή του και ευκρινέστερη πειραματική του απαθανάτιση με το πέρας των χρόνων, θα φέρει κι άλλες κβαντικές μάνταλα, κι άλλα φαινόμενα που θα μας κάνουν πρώτα να κοιτάξουμε τη φύση με ακόμα μεγαλύτερο δέος για τις συγκλονιστικές αποκαλύψεις που μας επιφυλάσσει, και σε δεύτερο χρόνο να επωφεληθούμε απ' αυτές για τη βελτιστοποίηση των βιοτικών μας συνθηκών και τη διεύρυνση των πνευματικών μας αναζητήσεων. Το αν ο τοπολογικός κβαντικός υπολογιστής είναι ένα τέτοιο μέσο μένει να φανεί, δεν έχουμε ακόμα ανά χείρας το δια ταύτα. Όπως και να 'χει, για μια ακόμη φορά ο κβαντικός κόσμος μας κλείνει το μάτι προκαλώντας μας να τον εξερευνήσουμε με μεγαλύτερο πάθος και προσήλωση, καθότι πίσω από το πέπλο που ακόμη σκεπάζει τη βάση του, φαίνονται οι σιλουέτες συγκλονιστικών φαινομένων. Για αρχή, σε κάθε περίπτωση, η μικροσκοπική ερμηνεία του FQHE παραμένει άγνωστη, κι αυτό αποτελεί πρώτης τάξεως πρόκληση για κάθε ενδιαφερόμενο θεωρητικό ερευνητή και πειραματικό· τα φαινόμενα και οι δυνατότητες που περιστρέφονται γύρω απ' αυτό είναι αρκούντως γοητευτικά για να μαγνητίσουν τόσο την ανήσυχη διάνοια, όσο και το στυγνό επιχειρηματία. Οι εξελίξεις αναμένονται με τεράστιο ενδιαφέρον.

Βιβλιογραφία

- 1) Jiannis K. Pachos, *Introduction to Topological Quantum Computation*, Cambridge University Press, 2012.
- 2) Michael L. Nielsen and Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, 10th Anniversary Edition, Cambridge University Press, 2010.
- 3) Στέφανος Τραχανάς, *Κβαντομηχανική II, Θεμελιώδεις Αρχές και Μέθοδοι, Κβαντικοί Υπολογιστές*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 2009.
- 4) Sebastian Huber, *Condensed Matter Theory and Quantum Optics, Lecture Notes*, ITP, ETH Zurich, 2015 (link: <https://cmt-go.phys.ethz.ch/teaching/tqn/>).
- 5) Srinivas Raghu, *Topological aspects of systems with broken time-reversal symmetry*, A Dissertation Presented to the Faculty of Princeton University in Candidacy for the Degree of Doctor of Philosophy, 2006.
- 6) Joseph E. Avron, Daniel Osadchy, and Ruedi Seiler, *A Topological Look at the Quantum Hall Effect*, Physics Today, 2003.
- 7) X. Lin, R. R. Du and X. C. Xie, *Recent Experimental Progress of Fractional Quantum Hall Effect: 5/2 Filling State and Graphene*, 2015.
- 8) Jainendra K. Jain, *Composite Fermions And The Fractional Quantum Hall Effect: A Tutorial*, Lecture Notes, International Summer School, Bangalore, 2011.
- 9) Min Ru, *The Gauss –Bonnet Theorem*, (link: <http://www.math.uh.edu/~minru/4350-11/gb.pdf>), 2011.
- 10) Aaron Halper, *A PROOF OF THE GAUSS –BONNET THEOREM*, (link: <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2008/REUPapers/Halper.pdf>), 2008.
- 11) Robert B. Laughlin, *FRACTIONAL QUANTIZATION*, Nobel Lecture, 1998.
- 12) John Singleton, *Band Theory and Electronic Properties of Solids*, Oxford University Press, 2001.
- 13) Al. Kitaev, C. Laumann, *Topological phases and quantum computation*, Oxford University Press, 2009.
- 14) Al. Yu. Kitaev, *Fault-tolerant quantum computation by anyons*, Annals Phys. 303 (2003) 2-30, 2008.
- 15) Frank Wilczek, *Majorana and Condensed Matter Physics*, Chapter for “The Physics of Majorana”, to be published by Cambridge University Press, 2014.
- 16) John Preskill, *Lecture Notes for Physics 219: Quantum Computation*, California Institute of Technology, 2004.
- 17) Martin Leijnse and Karsten Flensberg, *Introduction to topological superconductivity and Majorana fermions*, Semicond. Sci. Technol. 27 (2012) 124003 (11pp), 2012.
- 18) Savannah Garmon, Mariagiovanna Gianfreda and Naomichi Hatano, *Bound states, scattering states and resonant states in PT-symmetric open quantum systems*, Phys. Rev. A 92, 022125 (2015), 2015.
- 19) Guixin Tang, Sebastian Eggert and Axel Pelster, *Ground-state properties of anyons in a one-dimensional lattice*, arXiv:1509.01888v1 [cond-mat.quant-gas], 2015.

Περίληψη:

Ο κβαντικός υπολογιστής είναι ένα τρέχον, ανοιχτό θέμα της σύγχρονης επιστήμης, σε θεωρητικό και τεχνικό επίπεδο. Παρουσιάζεται ένα συγκεκριμένο είδος κβαντικών συστημάτων, τα λεγόμενα τοπολογικά, τα οποία διαθέτουν μοναδικές ιδιότητες που τα καθιστούν ελπιδοφόρες πλατφόρμες για την πραγματοποίηση κβαντικού υπολογισμού. Εξ άλλου, εξετάζεται ένα κατά βάση απλό πρόβλημα ηλεκτρομαγνητισμού, η διερεύνηση του οποίου αποδίδει ανέλπιστα πλούσια φυσική, και αποδεικνύεται τοπολογικής φύσεως. Το αντίστοιχο φαινόμενο αποκαλείται κβαντικό φαινόμενο Hall. Παρουσιάζονται οι δύο εκδόσεις του, το ακέραιο και το κλασματικό, αναλύεται το πώς η συμβατική κβαντομηχανική αποτυγχάνει να το ερμηνεύσει, και αναδεικνύεται η ανακλύπτουσα φύση του φαινομένου –το ότι παρουσιάζει μακροσκοπικά χαρακτηριστικά που η μικροσκοπική, αναγωγική προσέγγιση αδυνατεί να ερμηνεύσει! Εξετάζεται η σύμπνοια των θεωρητικών αποτελεσμάτων με τα περισσότερα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα, και γίνεται λόγος για τα δεδομένα εκείνα που η θεωρία αδυνατεί να ερμηνεύσει, για τα άλυτα προβλήματα φυσικής που συνδέονται με το φαινόμενο, και για τους πιθανούς λόγους που μπορεί να συμβαίνει αυτό. Τέλος, αναδεικνύεται η σύνδεση του φαινομένου με την πραγμάτωση τοπολογικού, κβαντικού υπολογισμού.

Summary:

Quantum computer is a currently open subject of modern science, both theoretically and practically. We present a specific kind of quantum systems, the topological ones, whose remarkable features makes them strong candidates for the realization of quantum computation. We, then, analyze a rather simple problem of electromagnetism, which turns out to capture surprisingly rich physics, and also turns out to be of topological nature. The corresponding phenomenon is called quantum Hall effect: we present its versions, both the integer and the fractional one, and we emphasize on its emergent nature –ie, it presents macroscopic features that the microscopic, redundant analysis can't take into account. We show the agreement between theoretical predictions with most experimental facts and we approach those that the theory can't capture: we also present the unsolved problems of physics linked with the phenomenon, and why could this be the case. Finally, we point out the link between the phenomenon and the realization of topological, quantum computation.

Λέξεις Κλειδιά:

Ελληνικά	Αγγλικά
Τοπολογία	Topology
Ανυόνια	Anyons
Κβαντικός υπολογισμός	Quantum computation

Ανακύπτουν	Emergent
Διεγέρσεις	Excitations