Αννα Καραπιπερη

Υπολογισμός υποοριζουσών πινάκων στάθμισης $W(n, n-1)$ με μηδενικά στη διαγώνιο

Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Αθήνα 2011

Αφιερώνεται
σε όσους με στήριξαν.

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Το πρόβλημα του υπολογισμού οριζουσών είναι σημαντικό και ενδιαφέρον στη Γραμμική Άλγεβρα, καθώς έχει πολυάριθμες εφαρμογές. Μία μεγάλη πρόκληση είναι να εξάγουμε αναλυτικούς τύπους για την ορίζουσα και τις υποορίζουσες ενός τυχαίου δοθέντος πίνακα, αλλά μοιάζει πιο ρεαλιστικό να έχει κανείς τέτοια αποτελέσματα για πίνακες ειδικής δομής.

Σε αρκετές εφαρμογές στις θετικές επιστήμες απαιτείται ο υπολογισμός των οριζουσών και υποοριζουσών πινάκων. Αυτές οι εφαρμογές περιλαμβάνουν τον εντοπισμό των P πινάκων[9], τη δημιουργία self validating αλγορίθμων, την ανάλυση πινάκων κατά διάστημα και τον προσδιορισμό της δομής των οδηγών στοιχείων πινάκων [11]. Η ευθεία προσέγγιση προσδιορισμού όλων των υποοριζουσών ενός πίνακα A τάξης n εφαρμόζοντας παραγοντοποιήσεις LU [1] συνεπάγεται μία αξιοσημείωτη πολυπλοκότητα $O(2^n n^3)$ [17]. Επομένως, αναλυτικοί τύποι θα είναι χρήσιμοι, όποτε αυτό μπορεί να επιτευχθεί. Γενικά, είναι πολύ δύσκολη η εξαγωγή αναλυτικών τύπων για την ορίζουσα ενός δοθέντος πίνακα ή για τις υποορίζουσές του. Όμως κάτι τέτοιο είναι εφικτό, όταν έχουμε πίνακες ειδικής δομής, όπως πίνακες Hadamard [10], Vandermonde, Hankel.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνουμε τη μελέτη μας στον υπολογισμό υποοριζουσών πινάκων στάθμισης $W(n, n-1)$ με μηδενικά στη διαγώνιο. Τέτοιοι πίνακες βρίσκουν εφαρμογές στη Θεωρία Κωδίκων και στη Στατιστική σε πειράματα και σχεδιασμούς ζύγισης (ή στάθμισης), από όπου προκύπτει η ονομασία "πίνακες στάθμισης".

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνονται βασικοί ορισμοί, συμβολισμοί, ιδιότητες των πινάκων στάθμισης, χρήσιμες προτάσεις για τις αποδείξεις των θεωρημάτων και η εφαρμογή των υποοριζουσών στο πρόβλημα του συντελεστή μεγέθυνσης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα έως και σήμερα γνωστά αποτελέσματα για τον υπολογισμό υποοριζουσών πινάκων στάθμισης τάξης μέχρι $n-3$ [14]. Επιπλέον, αποδεικνύεται η ύπαρξη αναλυτικού τύπου για την εξαγωγή αναλυτικού τύπου υπολογισμού υποοριζουσών τάξης $n-r$ για κάθε φυσικό $r \geq 1$ με εφαρμογή του Θεωρήματος Απλοποίησης Οριζουσών (Determinant Simplification Theorem) [13].

Στο τρίτο κεφάλαιο αποδεικνύονται προτάσεις για τον υπολογισμό υποοριζουσών πινάκων στάθμισης με μηδενικά στη διαγώνιο τάξης μέχρι $n-3$ και αναπτύσσεται μια νέα μεθοδολογία για τον υπολογισμό υποοριζουσών τάξης $n-r$ για κάθε $r \geq 1$.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα της διπλωματικής εργασίας κ. Μ. Μητρούλη για την επιλογή του θέματος και την καθοδήγηση που μου προσέφερε όλα αυτά τα χρόνια. Επιπλέον, ευχαριστώ τα μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Β. Δουγαλή και τον κ. Σ. Νοτάρη για τη συνεργασία που είχαμε κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας αλλά και στη διάρκεια των προπτυχιακών και μεταπτυχιακών σπουδών μου.

Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω την καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Wollongong J. Seberry για τη συνεργασία μας τα τελευταία δύο χρόνια, από όπου προέκυψαν νέες ιδέες που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία.

Τέλος, ευχαριστώ το συνάδελφο και φίλο Ε. Καστή για τη βοήθειά του σε καίρια σημεία της απόδειξης της Πρότασης (3.3).

Κεφάλαιο 1

Πίνακες Στάθμισης

1.1 Ορισμοί

Ορισμός 1.1. *[14]*

i. Ένας $(0, 1, -1)$ *πίνακας* $W = W(n, n-k)$, $k = 1, 2, \ldots$, *τάξης* n *με* $W^T W = W W^T = (n-k)I_n$ *καλείται* πίνακας στάθμισης τάξης n και βάρους $n-k$ *ή απλά* **πίνακας στάθμισης (weighing matrix)**.

ii. Ένας $W(n, n)$, $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, *είναι ένας* πίνακας **Hadamard** τάξης n.

iii. Ένας $W = W(n, n-k)$, *για τον οποίο ισχύει* $W^T = -W$, $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, *καλείται* ***skew-weighing***.

Ορισμός 1.2. *Ένας πίνακας* ***conference*** *C τάξης n είναι ένας $n \times n$ πίνακας με διαγώνια στοιχεία 0 και λοιπά στοιχεία ± 1 που ικανοποιεί τη σχέση*

$$CC^T = (n-1)I_n.$$

Με άλλα λόγια, ο C είναι ένας πίνακας στάθμισης $W = W(n, n-1)$ με μηδενικά στη διαγώνιο. Ένας πίνακας $W = W(n, n-1)$ καλείται ***συμμετρικός*** *πίνακας conference, όταν $W^T = W$, $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$.*

Ορισμός 1.3. *Δύο πίνακες λέγονται* Hadamard ισοδύναμοι *ή* **H - ισοδύναμοι** *εάν ο ένας μπορεί να προκύψει από τον άλλο με μία ακολουθία από τις παρακάτω διαδικασίες :*

1. *εναλλαγή οποιουδήποτε ζεύγους γραμμών και / ή στηλών·*

2. *πολλαπλασιασμό γραμμών και / ή στηλών με* -1.

Η παραπάνω σχέση ισοδυναμίας θα συμβολίζεται με $\sim_H$.

1.2 Συμβολισμοί

Στην παρούσα εργασία υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι τα πρώτα μη μηδενικά στοιχεία κάθε γραμμής και στήλης ενός πίνακα στάθμισης $W(n, n-k)$ είναι πάντα $+1$. Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί πολλαπλασιάζοντας τις γραμμές και/ή στήλες με -1, δηλαδή με ένα μετασχηματισμό H - ισοδυναμίας που αφήνει αναλλοίωτη την απόλυτη τιμή της ορίζουσας, πράγμα το οποίο μας ενδιαφέρει.
Τα στοιχεία ενός $(0, 1, -1)$ πίνακα θα συμβολίζονται με $(0, +, -)$. Συμβολίζουμε με $x_{m\times n}$ το $m\times n$ μπλοκ με στοιχεία x, x πραγματικός, και με $X_{m\times n}$ το $m\times n$ μπλοκ με την ειδική μορφή ενός πίνακα X. Όταν $m = n$, θα γράφουμε απλά X_m. Με I_n συμβολίζουμε τον ταυτοτικό πίνακα τάξης n, με $J_{m\times n}$ και $O_{m\times n}$ θα συμβολίζουμε τον $m \times n$ πίνακα με μονάδες και μηδενικά, αντίστοιχα. Γράφουμε $W(n-r)$ για την απόλυτη τιμή της ορίζουσας οποιουδήποτε $(n-r)\times(n-r)$ υποπίνακα ενός πίνακα W.

Έστω $\widetilde{x}^T_{\beta+1}$ τα διανύσματα που περιέχουν τη δυαδική αναπαράσταση κάθε ακεραίου $\beta + 2^{r-1}$ για $\beta = 0, \dots, 2^{r-1} - 1$. Αντικαθιστούμε όλες τις μηδενικές εισόδους του $\widetilde{x}^T_{\beta+1}$ με -1 και ορίζουμε τα $r \times 1$ διανύσματα $\widetilde{u}_k = \widetilde{x}_{2^{r-1}-k+1}$, $\quad k = 1, \dots, 2^{r-1}$. Γράφουμε U_r για όλους τους πίνακες με r γραμμές και τον κατάλληλο αριθμό στηλών, όπου το διάνυσμα $\widetilde{u}_k$ εμφανίζεται u_k φορές. Έτσι

$$U_r = \begin{array}{ccccc} \overbrace{+\dots+}^{u_1} & \overbrace{+\dots+}^{u_2} & \dots & \overbrace{+\dots+}^{u_{2^{r-1}-1}} & \overbrace{+\dots+}^{u_{2^{r-1}}} \\ +\dots+ & +\dots+ & \dots & -\dots- & -\dots- \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ +\dots+ & +\dots+ & \dots & +\dots+ & -\dots- \\ +\dots+ & -\dots- & \dots & +\dots+ & -\dots- \end{array} = \begin{array}{ccccc} \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 & \dots & \widetilde{u}_{2^{r-1}-1} & \widetilde{u}_{2^{r-1}} \\ + & + & \dots & + & + \\ + & + & \dots & - & - \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ + & + & \dots & - & - \\ + & - & \dots & + & - \end{array}$$

Παράδειγμα 1.1. *Για* $r = 3$ *και* $r = 4$*, αντίστοιχα, λαμβάνουμε*

$$U_3 = \begin{array}{cccc} \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 & \widetilde{u}_3 & \widetilde{u}_4 \\ + & + & + & + \\ + & + & - & - \\ + & - & + & - \end{array} \quad \textit{και} \quad U_4 = \begin{array}{cccccccc} \widetilde{u}_1 & \widetilde{u}_2 & \widetilde{u}_3 & \widetilde{u}_4 & \widetilde{u}_5 & \widetilde{u}_6 & \widetilde{u}_7 & \widetilde{u}_8 \\ + & + & + & + & + & + & + & + \\ + & + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & - & - & + & + & - & - \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{array}$$

Σε αυτό το παράδειγμα τα διανύσματα $\widetilde{u}_i$ εμφανίζονται $u_i = 1$ φορές, για κάθε i.

Τέλος, με $\cdot$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο.

1.3 Ιδιότητες

Ιδιότητες πινάκων στάθμισης

Δύο σημαντικές ιδιότητες των πινάκων στάθμισης, οι οποίες προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό, είναι

1. Κάθε γραμμή και στήλη ενός πίνακα $W(n, n-k)$ περιέχει ακριβώς k μηδενικά
2. Κάθε δύο διαφορετικές γραμμές και στήλες ενός πίνακα $W(n, n-k)$ είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, που σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενό τους είναι μηδέν.

Ιδιότητες conference πινάκων

Έστω C ένας $n \times n$ πίνακας conference.

1. Πολλαπλασιάζοντας τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα C με -1, μπορεί αυτός να γραφτεί στην κανονική μορφή

$$C = \begin{pmatrix} 0 & e^T \\ e & S \end{pmatrix}$$

όπου $e^T = (1, 1, \ldots, 1)$ είναι το $1 \times (n-1)$ διάνυσμα μονάδων και S ο τετραγωνικός πίνακας που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$SS^T = (n-1)I - J \text{ και } SJ = JS = 0.$$

Παράδειγμα 1.2. *Οι κανονικοποιημένοι πίνακες conference τάξης 2 και 4 είναι*

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα.

2. Αν ο C υπάρχει, τότε ο n είναι άρτιος. Αν $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 4)$ τότε ο C μπορεί να γίνει συμμετρικός πολλαπλασιάζοντας γραμμές και στήλες με -1, ενώ αν $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 4)$, τότε ο C γίνεται αντισυμμετρικός με την ίδια διαδικασία.

3. Αντίστροφα, αν ένας συμμετρικός πίνακας conference C υπάρχει, τότε $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 4)$ και ο αριθμός $n-1$ μπορεί να γραφτεί ως $n-1 = a^2+b^2$ με $a, b \in \mathbb{N}$. Αν ένας αντισυμμετρικός πίνακας conference υπάρχει τότε $n = 2$ ή $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 4)$.

Για περισσότερες πληροφορίες, ιδιότητες και την κατασκευή των πινάκων στάθμισης ο αναγνώστης προτρέπεται να ανατρέξει στο βιβλίο των Geramita και Seberry [7].

1.4 Χρήσιμες προτάσεις

Λήμμα 1.1. *[14] Έστω A ένας $m \times m$ πίνακας που ικανοποιεί $A = (k-\lambda)I_m + \lambda J_m$, τότε*

$$det\, A = [k + (m-1)\lambda](k-\lambda)^{m-1}. \tag{1.1}$$

και

$$A^{-1} = \frac{1}{k^2 + (m-2)k\lambda - (m-1)\lambda^2}\{[k + (m-2)\lambda + \lambda]I - \lambda J\} \tag{1.2}$$

Λήμμα 1.2. *[6] Έστω n περιττός και A αντι-συμμετρικός πίνακας με πραγματικά στοιχεία. Τότε*

$$det\, A = 0.$$

Πρόταση 1.1. ***(Τύπος του Schur)*** *[2]*
Έστω τετραγωνικός πίνακας M της μορφής

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

όπου D τετραγωνικός. Εάν D είναι μη ιδιάζων, το συμπλήρωμα Schur του D στο M είναι

$$(M/D) = A - BD^{-1}C.$$

Τότε

$$det\, M = det\, D \cdot det\,(M/D). \tag{1.3}$$

Απόδειξη. Δεδομένης της ειδικής μορφής του πίνακα M, έχουμε

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & BD^{-1} \\ O & I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (M/D) & O \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς,

$$det\, M = det\, D \cdot det\,(M/D).$$

□

Λήμμα 1.3. *[14] Ένας πίνακας στάθμισης $W(n, n-1)$, εφόσον $WW^T = (n-1)I_n$, έχει ορίζουσα*

$$det\, W \equiv W(n) = (n-1)^{\frac{n}{2}}$$

Σημείωση 1.1. *Στην παρούσα διπλωματική εργασία, συμβολίζουμε με $W(j)$ την απόλυτη τιμή της $j \times j$ υποορίζουσας ενός πίνακα W.*

Λήμμα 1.4. *[8] Για $n \equiv 0 (\bmod 4)$, ο πίνακας $W(n, n-1)$ είναι πάντα ισοδύναμος με έναν πίνακα U όπου $U^T = -U$. Για $n \equiv 2 (\bmod 4)$ ο $W(n, n-1)$ είναι πάντα ισοδύναμος με έναν πίνακα U όπου $U^T = U$.*

Λήμμα 1.5. *[8] Για κάθε $W(n, n-1)$ υπάρχει H-ισοδύναμος πίνακας με μηδενικά στη διαγώνιο.*

Για $W(n,n-2)$ όλα τα μηδενικά τοποθετούνται σε 2×2 μπλοκ κατά μήκος της διαγωνίου, όπως φαίνεται παρακάτω [3], [14]

$$\left(\begin{array}{cc|c|cc} 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ \hline & & \ddots & & \\ \hline & & & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Πίνακες στάθμισης με μηδενικά στη διαγώνιο χρησιμοποιούνται προκειμένου να λάβουμε ένα πλήθος κατασκευών για *ορθογώνια σύνολα*, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι γραμμές αλλάζουν κατά ζεύγη των οποίων τα μηδενικά καταλαμβάνουν τις ίδιες θέσεις [3].

Θεώρημα Απλοποίησης Οριζουσών (The Determinant Simplification Theorem)

Συμβολισμοί. Γράφουμε $J_{b_1,b_2,\cdots,b_z}$ για όλους τους πίνακες με στοιχεία μονάδες και διαγώνια μπλοκ διαστάσεων $b_1\times b_1,\ b_2\times b_2\ \cdots\ b_z\times b_z$, και $a_{ij}J_{b_1,b_2,\cdots,b_z}$ για τον πίνακα, για τον οποίο τα στοιχεία του μπλοκ με γωνίες $(i+b_1+b_2+\cdots+b_{j-1}, i+b_1+b_2+\cdots+b_{i-1})$, $(i+b_1+b_2+\cdots+b_{j-1}, b_1+b_2+\cdots+b_i)$, $(b_1+b_2+\cdots+b_j, i+b_1+b_2+\cdots+b_{i-1})$, $(b_1+b_2+\cdots+b_j, b_1+b_2+\cdots+b_i)$ είναι ακέραιοι a_{ij}. Γράφουμε $(k_i-a_{ii})I_{b_1,b_2,\cdots,b_z}$ για το ευθύ άθροισμα $(k_1-a_{11})I_{b_1}+(k_2-a_{22})I_{b_2}+\cdots+(k_z-a_{zz})I_{b_z}$.

Παράδειγμα 1.3. *Ο πίνακας*

$$A=\begin{bmatrix} \overbrace{k\ \ a}^{2} & \overbrace{b\ \ b\ \ b}^{3} \\ a\ \ k & b\ \ b\ \ b \\ b\ \ b & k\ \ a\ \ a \\ b\ \ b & a\ \ k\ \ a \\ b\ \ b & a\ \ a\ \ k \end{bmatrix},$$

τάξης $(2+3)\times(2+3)$ *μπορεί να γραφτεί ως* $A=(k-a_{ii})I_{2,3}+a_{ij}J_{2,3}$, όπου $(a_{ij})=\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a\end{smallmatrix}\right]$.

Θεώρημα 1.1. ***(Γενικευμένη μορφή του Θεωρήματος Απλοποίησης Οριζουσών)***
Έστω $A = (k_i - a_{ii})I_{b_1,b_2,\cdots,b_z} + a_{ij}J_{b_1,b_2,\cdots,b_z}$, $i, j = 1, \ldots, z$.
Τότε

$$det\, A = \prod_{i=1}^{z}(k_i - a_{ii})^{b_i-1} det\ D$$

όπου

$$D = \begin{bmatrix} k_1 + (b_1-1)a_{11} & b_2a_{12} & b_3a_{13} & \cdots & b_za_{1z} \\ b_1a_{21} & k_2 + (b_2-1)a_{22} & b_3a_{23} & \cdots & b_za_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1a_{z1} & b_2a_{z2} & b_3a_{z3} & \cdots & k_z + (b_z-1)a_{zz} \end{bmatrix}$$

Απόδειξη. Ο πίνακας A είναι της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} \overbrace{k_1\ a_{11}\ \cdots\ a_{11}}^{b_1} & \overbrace{a_{12}\ a_{12}\ \cdots\ a_{12}}^{b_2} & \cdots & \overbrace{a_{1z}\ a_{1z}\ \cdots\ a_{1z}}^{b_z} \\ a_{11}\ k_1\ \cdots\ a_{11} & a_{12}\ a_{12}\ \cdots\ a_{12} & \cdots & a_{1z}\ a_{1z}\ \cdots\ a_{1z} \\ \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots & \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots & \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots & \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots \\ a_{11}\ a_{11}\ \cdots\ k_1 & a_{12}\ a_{12}\ \cdots\ a_{12} & \cdots & a_{1z}\ a_{1z}\ \cdots\ a_{1z} \\ & & & \\ a_{21}\ a_{21}\ \cdots\ a_{21} & k_2\ a_{22}\ \cdots\ a_{22} & \cdots & a_{2z}\ a_{2z}\ \cdots\ a_{2z} \\ a_{21}\ a_{21}\ \cdots\ a_{21} & a_{22}\ k_2\ \cdots\ a_{22} & \cdots & a_{2z}\ a_{2z}\ \cdots\ a_{2z} \\ \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots & \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots & \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots & \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots \\ a_{21}\ a_{21}\ \cdots\ a_{21} & a_{22}\ a_{22}\ \cdots\ k_2 & \cdots & a_{2z}\ a_{2z}\ \cdots\ a_{2z} \\ & & & \\ \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots & \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots & \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots & \vdots\ \vdots\ \ \ \vdots \\ & & & \end{bmatrix},$$

διάστασης $(b_1 + b_2 + \ldots + b_z) \times (b_1 + b_2 + \ldots + b_z)$ και με διαγώνια στοιχεία διαστάσεων $b_1 \times b_1$, $b_2 \times b_2$, …, $b_z \times b_z$.
Συμβολίζουμε τον πίνακα A με $[\underline{c}_1\ \underline{c}_2\ \ldots\ \underline{c}_{b_1+b_2+\ldots b_z}]$ σε μορφή στήλης (column form) και με $[\underline{r}_1^T\ \underline{r}_2^T\ \ldots\ \underline{r}_{b_1+b_2+\ldots b_z}^T]$ σε μορφή γραμμής (row form) .
Αντικαθιστούμε τις $\underline{r}_2^T, \ldots, \underline{r}_{b_1}^T$ με $\underline{r}_2^T - \underline{r}_1^T, \ldots, \underline{r}_{b_1}^T - \underline{r}_1^T$, αντίστοιχα, τις $\underline{r}_{b_1+2}^T, \ldots, \underline{r}_{b_1+b_2}^T$ με

$\underline{r}^T_{b_1+2} - \underline{r}^T_{b_1+1}, \ldots, \underline{r}^T_{b_1+b_2} - \underline{r}^T_{b_1+1}$, αντίστοιχα, κλπ., και έτσι έχουμε

$$\begin{bmatrix} k_1 & a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} & a_{12} & a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} & \cdots \\ a_{11}-k_1 & k_1-a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & & \\ a_{11}-k_1 & 0 & 0 & \cdots & k_1-a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & & & & & & & & \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} & k_2 & a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{22} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{22}-k_2 & k_2-a_{22} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{22}-k_2 & 0 & 0 & \cdots & k_2-a_{22} & \cdots \\ & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & \vdots & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Για λόγους απλούστευσης και καλύτερης παρουσίασης δεν αναγράφουμε τα υπόλοιπα μπλοκ.

Προκειμένου να μηδενίσουμε τις εισόδους κάτω από τα k_1, k_2 κλπ. στο ίδιο μπλοκ, αντικαθιστούμε τις στήλες $\underline{c}_1, \underline{c}_{b_1+1}$, κλπ. με $\underline{c}_1 + \ldots + \underline{c}_{b_1}, \underline{c}_{b_1+1} + \ldots + \underline{c}_{b_1+b_2}$, κλπ., αντίστοιχα, και έχουμε

$$\begin{bmatrix} k_1+(b_1-1)a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{11} & b_2 a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} & \cdots \\ 0 & k_1-a_{11} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & k_1-a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & & & & & & \\ b_1 a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} & k_2+(b_2-1)a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{22} & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & k_2-a_{22} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_2-a_{22} & \cdots \\ & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Έπειτα μπορούμε να μηδενίσουμε τις εισόδους a_{ii} της πρώτης γραμμής κάθε διαγώνιου μπλοκ αντικαθιστώντας τις γραμμές $\underline{r}^T_1, \underline{r}^T_{b_1+1}$, κλπ. με $\underline{r}^T_1 - \frac{a_{11}}{k_1-a_{11}}\underline{r}^T_2 - \ldots - \frac{a_{11}}{k_1-a_{11}}\underline{r}^T_{b_1}$, $\underline{r}^T_{b_1+1} - \frac{a_{22}}{k_2-a_{22}}\underline{r}^T_{b_1+2} - \ldots - \frac{a_{22}}{k_2-a_{22}}\underline{r}^T_{b_1+b_2}$, κλπ., αντίστοιχα.

Έχουμε $A' \equiv$

$$\begin{bmatrix}
k_1+(b_1-1)a_{11} & 0 & \cdots & 0 & b_2a_{12} & a_{12} & \cdots & a_{12} & \cdots \\
0 & k_1-a_{11} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & k_1-a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
 & & & & & & & & \\
b_1a_{21} & a_{21} & \cdots & a_{21} & k_2+(b_2-1)a_{22} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & k_2-a_{22} & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & k_2-a_{22} & \cdots \\
 & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & \vdots & & & \ddots
\end{bmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι ο πίνακας A', που προέκυψε από τον A με εφαρμογή στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών και γραμμών (πιο συγκεκριμένα, πρόσθεση ενός πολλαπλασίου μιας στήλης /γραμμής σε μια άλλη), έχει την ίδια ορίζουσα με τον A, σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα των οριζουσών.

Στη συνέχεια, αναπτύσσουμε την ορίζουσα του A' ως προς τη δεύτερη γραμμή. Από το γεγονός ότι η δεύτερη γραμμή περιέχει μόνο μηδενικές εισόδους εκτός της $k_1 - a_{11}$ έπεται ότι η ορίζουσα του A ισούται με το γινόμενο του $k_1 - a_{11}$ και της ορίζουσας του εναπομείναντος $(b_1 + b_2 + \ldots + b_z - 1) \times (b_1 + b_2 + \ldots + b_z - 1)$ πίνακα A'', που ουσιαστικά είναι ο A' χωρίς τη δεύτερη γραμμή και στήλη του. Ομοίως, αναπτύσσουμε τον A'' ως προς τη δεύτερη γραμμή του, η οποία περιέχει ξανά $k_1 - a_{11}$ και στις υπόλοιπες εισόδους έχει όλο μηδενικά. Αφού έχουμε αναπτύξει με τον ίδιο τρόπο την ορίζουσα ως προς όλες τις γραμμές στο πρώτο διαγώνιο μπλοκ, συνεχίζουμε ομοίως με τις εισόδους $k_2 - a_{22}$ στο δεύτερο διαγώνιο μπλοκ κλπ., μέχρι να φτάσουμε το τελευταίο (z-οστό) διαγώνιο μπλοκ.

Μετά από όλα αυτά τα βήματα προκύπτει

$$det\, A = det\, A' = \prod_{i=1}^{z} (k_i - a_{ii})^{b_i - 1} det\ D,$$

με

$$D = \begin{bmatrix}
k_1+(b_1-1)a_{11} & b_2a_{12} & b_3a_{13} & \cdots & b_za_{1z} \\
b_1a_{21} & k_2+(b_2-1)a_{22} & b_3a_{23} & \cdots & b_za_{2z} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
b_1a_{z1} & b_2a_{z2} & b_3a_{z3} & \cdots & k_z+(b_z-1)a_{zz}
\end{bmatrix}$$

. □

Ειδικές περιπτώσεις του Θεωρήματος Απλοποίησης Οριζουσών. [10]

1. Ένας $v \times v$ πίνακας

$$CC^T = \begin{bmatrix} k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & k \end{bmatrix},$$

ικανοποιεί την

$$CC^T = (k-\lambda)I_v + \lambda J_v.$$

Τότε,

$$det\, CC^T = [k + (v-1)\lambda](k-\lambda)^{v-1}.$$

2. Ένας $(u+v) \times (u+v)$ πίνακας

$$CC^T = \begin{bmatrix} \overbrace{k \; a \; \cdots \; a}^{u} & \overbrace{b \; b \; \cdots \; b}^{v} \\ a \; k \; \cdots \; a & b \; b \; \cdots \; b \\ \vdots \; \vdots \; \ddots \; \vdots & \vdots \; \vdots \; \ddots \; \vdots \\ a \; a \; \cdots \; k & b \; b \; \cdots \; b \\ b \; b \; \cdots \; b & k \; a \; \cdots \; a \\ b \; b \; \cdots \; b & a \; k \; \cdots \; a \\ \vdots \; \vdots \; \ddots \; \vdots & \vdots \; \vdots \; \ddots \; \vdots \\ b \; b \; \cdots \; b & a \; a \; \cdots \; k \end{bmatrix},$$

ικανοποιεί την

$$CC^T = (k - a_{ii})I_{u,v} + a_{ij}J_{u,v},$$

όπου $(a_{ij}) = [\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}]$.

Τότε,

$$det\, CC^T = (k-a)^{n-2} det\ D,$$

όπου

$$D = \begin{bmatrix} k + (u-1)a & ub \\ vb & k + (v-1)a \end{bmatrix}.$$

3. Ένας $(u+v+w+x)\times(u+v+w+x)$ πίνακας

$$CC^T = \left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
\multicolumn{4}{c}{\overbrace{k \;\; a \;\; \cdots \;\; a}^{u}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{b \;\; b \;\; \cdots \;\; b}^{v}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{c \;\; c \;\; \cdots \;\; c}^{w}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{d \;\; d \;\; \cdots \;\; d}^{x}} \\
a & k & \cdots & a & b & b & \cdots & b & c & c & \cdots & c & d & d & \cdots & d \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a & a & \cdots & k & b & b & \cdots & b & c & c & \cdots & c & d & d & \cdots & d \\
b & b & \cdots & b & k & a & \cdots & a & e & e & \cdots & e & f & f & \cdots & f \\
b & b & \cdots & b & a & k & \cdots & a & e & e & \cdots & e & f & f & \cdots & f \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
b & b & \cdots & b & a & a & \cdots & k & e & e & \cdots & e & f & f & \cdots & f \\
c & c & \cdots & c & e & e & \cdots & e & k & a & \cdots & a & g & g & \cdots & g \\
c & c & \cdots & c & e & e & \cdots & e & a & k & \cdots & a & g & g & \cdots & g \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
c & c & \cdots & c & e & e & \cdots & e & a & a & \cdots & k & g & g & \cdots & g \\
d & d & \cdots & d & f & f & \cdots & f & g & g & \cdots & g & k & a & \cdots & a \\
d & d & \cdots & d & f & f & \cdots & f & g & g & \cdots & g & a & k & \cdots & a \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
d & d & \cdots & d & f & f & \cdots & f & g & g & \cdots & g & a & a & \cdots & k
\end{array}\right],$$

ικανοποιεί την

$$CC^T = (k - a_{ii})I_{u,v,w,x} + a_{ij}J_{u,v,w,x},$$

όπου

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & e & f \\ c & e & a & g \\ d & f & g & a \end{bmatrix}.$$

Τότε,

$$det\, CC^T = (k-a)^{n-4} det\ D,$$

όπου

$$D = \begin{bmatrix} k+(u-1)a & vb & wc & xd \\ ub & k+(v-1)a & we & xf \\ uc & ve & k+(w-1)a & xg \\ ud & vf & wg & k+(x-1)a \end{bmatrix}.$$

1.5 Εφαρμογή στο πρόβλημα του συντελεστή μεγέθυνσης

Μία σημαντική εφαρμογή των υποοριζουσών των πινάκων στάθμισης στην Αριθμητική Ανάλυση είναι η χρησιμότητά τους στη μελέτη του προβλήματος του συντελεστή μεγέθυνσης αυτών των πινάκων.

Η προς τα πίσω ανάλυση σφάλματος (backward error analysis) για τη μέθοδο απαλοιφής του Gauss που εφαρμόζουμε σε έναν πίνακα $A = (a_{ij}^{(0)})$ εκφράζεται συναρτήσει του *συντελεστή μεγέθυνσης (growth factor)*

$$g(n, A) = \frac{max_{i,j,k}|a_{ij}^{(k)}|}{max_{i,j}|a_{ij}^{(0)}|},$$

ο οποίος περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία $a_{ij}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ που εμφανίζονται κατά την απαλοιφή. Για έναν Completely Pivoted (CP) [1], πίνακα A έχουμε

$$g(n, A) = \frac{max\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}}{|a_{11}^{(0)}|},$$

όπου $p_1, p_2, \ldots, p_n$ είναι οι οδηγοί (pivots) του A [13].

Ο Cryer [4] όρισε $g(n) = \sup\{ g(n, A) \mid A \in R^{n \times n}, CP\}$. Το πρόβλημα προσδιορισμού του $g(n)$ για διάφορες τιμές του n καλείται το *πρόβλημα του συντελεστή μεγέθυνσης (growth problem)*. Ο προσδιορισμός του $g(n)$, για τον τυχαίο $n \in \mathbb{N}$, παραμένει ένα ανοικτό πρόβλημα. Ο Wilkinson [18] απέδειξε ότι $g(n) \leq (n \cdot 2 \cdot 3^{1/2} \ldots n^{1/(n-1)})^{1/2}$ και ότι αυτό το φράγμα δεν είναι εφικτό.

Στο [4] ο Cryer διατύπωσε τον ισχυρισμό ότι "$g(n, A) = n$, αν και μόνο αν ο A είναι πίνακας Hadamard". Αυτός ο ισχυρισμός έγινε ένα από τα πιο διάσημα ανοιχτά προβλήματα στην Αριθμητική Ανάλυση, μελετήθηκε από πολλούς μαθηματικούς και παραμένει ανοικτό ακόμη και σήμερα. Μία παρόμοια εικασία του συντελεστή μεγέθυνσης για πίνακες στάθμισης έχει ως εξής [11]

[1] δεν απαιτούνται αλλαγές γραμμών και στηλών κατά την απαλοιφή του Gauss με ολική οδήγηση

Εικασία για το συντελεστή μεγέθυνσης πινάκων στάθμισης $W(n, n-1)$. Έστω $W(n, n-1)$ ένας CP πίνακας στάθμισης. Εάν εφαρμόσουμε στον W την απαλοιφή του Gauss, τότε

(i) $g(n, W) = n - 1$.

(ii) Οι τρεις τελευταίοι οδηγοί είναι $n - 1$ ή $\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}, n-1$.

(iii) Κάθε οδηγός έχει απόλυτη τιμή το πολύ $n - 1$.

(iv) Οι τέσσερις πρώτοι οδηγοί είναι $1,\ 2,\ 2,\ 3$ ή 4, για $n > 14$.

Τα (*ii*), (*iv*) της παραπάνω εικασίας έχουν αποδειχθεί στο [11].

Μπορεί να δειχθεί [5] ότι η τιμή των οδηγών στοιχείων που εμφανίζονται στην εφαρμογή της μεθόδου απαλοιφής του Gauss σε έναν CP πίνακα W δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$p_j = \frac{W(j)}{W(j-1)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad W(0) = 1. \tag{1.4}$$

Είναι, λοιπόν, προφανές ότι ο υπολογισμός των υποοριζουσών είναι σημαντικός για τη μελέτη της δομής των οδηγών στοιχείων, και περισσότερο για το πρόβλημα του συντελεστή μεγέθυνσης για CP πίνακες στάθμισης. Η διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω στοχεύει στον υπολογισμό $(n - j) \times (n - j)$ υποοριζουσών, προκειμένου, με τη βοήθεια της σχέσης (1.4), να υπολογίσουμε οδηγά στοιχεία από το τέλος. Στο [12] δόθηκε μία αλγοριθμική τεχνική για τον προσδιορισμό οδηγών στοιχείων από την αρχή. Έτσι, ο συνδυασμός αυτών των δύο μεθόδων μπορεί να οδηγήσει στον υπολογισμό ολόκληρης της δομής των οδηγών στοιχείων για έναν πίνακα $W(n, n-k)$.
Ως ένα παράδειγμα της θεωρίας που αναπτύχθηκε παραπάνω δίνουμε τη δομή οδηγών στοιχείων και το συντελεστή μεγέθυνσης του πίνακα $W(12, 11)$.

Λήμμα 1.6. *Η δομή των οδηγών στοιχείων του* $W(12, 11)$ *είναι*
$(1, 2, 2, 3, \frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \frac{11}{17/5}, \frac{11}{5/2}, \frac{11}{4}, \frac{11}{2}, \frac{11}{2}, 11)$ *ή* $(1, 2, 2, 4, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{10/3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{2}, \frac{11}{2}, 11)$ *ή*
$(1, 2, 2, 3, 3, 4, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{2}, \frac{11}{2}, 11)$.

Απόδειξη. Για κάθε $W(n, n-1)$ οι πρώτοι τέσσερεις οδηγοί του είναι $1, 2, 2, 3$ ή 4. Επίσης
$$p_{12} = 11, \quad p_{11} = \frac{11}{2}.$$
Ακόμη ισχύει [16] ότι για έναν πίνακα $W(12, 11)$
$$W(5) = 48 \text{ ή } 40 \text{ ή } 36$$
Ο 5×5 πίνακας με ορίζουσα 48 περιέχει στην άνω δεξιά γωνία του τον 4×4 πίνακα A_1 με ορίζουσα 16. Οι 5×5 πίνακες με ορίζουσα 40 και 36 περιέχουν στην άνω δεξιά γωνία τους τον 4×4 πίνακα A_2 με ορίζουσα 12. Έτσι, το πέμπτο οδηγό στοιχείο του $W(12, 11)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.4)
$$p_5 = \frac{W(5)}{W(4)} \Rightarrow p_5 = \frac{48}{16} \text{ ή } \frac{36}{12} \text{ ή } \frac{40}{12} \Rightarrow p_5 = 3 \text{ ή } \frac{10}{3}.$$
Ομοίως, για το έκτο οδηγό στοιχείο έχουμε
$$W(6) = 160 \text{ ή } 144 \text{ ή } 136 \text{ ή } 120 \text{ για έναν } W(12, 11).$$
Οι 6×6 πίνακες με ορίζουσα 160 περιέχουν στην άνω δεξιά γωνία τους έναν 5×5 πίνακα με ορίζουσα 48. Οι 6×6 πίνακες με ορίζουσα 144 περιέχουν στην άνω δεξιά τους έναν 5×5 πίνακα με ορίζουσα 36. Οι 6×6 πίνακες με ορίζουσα 136 περιέχουν στην άνω δεξιά γωνία τους έναν 5×5 πίνακα με ορίζουσα 40. Οι 6×6 πίνακες με ορίζουσα 120 περιέχουν στην άνω δεξιά γωνία τους έναν 5×5 πίνακα με ορίζουσα 36. Επομένως, το έκτο οδηγό στοιχείο του $W(12, 11)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.4)
$$p_6 = \frac{W(6)}{W(5)} \Rightarrow p_6 = \frac{160}{48} \text{ ή } \frac{144}{36} \text{ ή } \frac{136}{40} \text{ ή } \frac{120}{36} \Rightarrow p_6 = 4 \text{ ή } \frac{10}{3} \text{ ή } \frac{17}{5}.$$
Όσον αφορά το έβδομο οδηγό στοιχείο έχουμε
$$W(7) = 528 \text{ ή } 440 \text{ για έναν } W(12, 11).$$

Οι 7×7 πίνακες με ορίζουσα 528 περιέχουν στην άνω δεξιά γωνία τους έναν 6×6 πίνακες με ορίζουσα 160 ή 144. Οι 7×7 πίνακες με ορίζουσα 440 περιέχουν στην άνω δεξιά γωνία τους έναν 6×6 πίνακα με ορίζουσα 136. Συνεπώς, το έβδομο οδηγό στοιχείο του $W(12, 11)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.4)

$$p_7 = \frac{W(7)}{W(6)} \Rightarrow p_7 = \frac{528}{160} \text{ ή } \frac{528}{144} \text{ ή } \frac{440}{136} \Rightarrow p_7 = \frac{11}{17/5} \text{ ή } \frac{11}{10/3} \text{ ή } \frac{11}{3}.$$

Για το όγδοο οδηγό στοιχείο έχουμε

$$W(8) = 1936 \;\text{ ή }\; 1452 \text{ για έναν } W(12, 11).$$

Οι 8×8 πίνακες με ορίζουσα 1936 περιέχουν στην άνω δεξιά γωνία τους έναν 7×7 πίνακα με ορίζουσα 528 ή 440. Επομένως, το όγδοο οδηγό στοιχείο του $W(12, 11)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.4)

$$p_8 = \frac{W(8)}{W(7)} \Rightarrow p_8 = \frac{1936}{528} \text{ ή } \frac{1936}{440} \Rightarrow p_7 = \frac{11}{5/2} \text{ ή } \frac{11}{3}.$$

Καθώς έχουμε $W(9) = 5324$ για έναν $W(12, 11)$, μπορούμε να υπολογίσουμε το p_9 ως εξής

$$p_9 = \frac{W(9)}{W(8)} \Rightarrow p_9 = \frac{5324}{1936} \Rightarrow p_9 = \frac{11}{4}.$$

Τότε

$$p_{10} = \frac{det(W(12, 11))}{\prod_{i=1_{i\neq 10}}^{12} p_i} \quad = \quad \frac{11^6}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{17}{5} \cdot \frac{11}{17/5} \cdot \frac{11}{5/2} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{11}{2} \cdot 11}$$

ή

$$= \frac{11^6}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{11}{10/3} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{11}{2} \cdot 11}$$

ή

$$= \frac{11^6}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{11}{3} \cdot \frac{11}{4} \cdot \frac{11}{2} \cdot 11}.$$

Επομένως

$$p_{10} = \tfrac{11}{2}.$$

□

Θεώρημα 1.2. *Ο συντελεστής μεγέθυνσης του $W(12, 11)$ είναι 11.*

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το Λήμμα 1.6 και από τους ορισμούς για το συντελεστή μεγέθυνσης και τα οδηγά στοιχεία. □

Κεφάλαιο 2

Υπολογισμός υποοριζουσών πινάκων στάθμισης $W(n, n-k)$, όπου n άρτιος και $k \geq 1$

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε αποτελέσματα για τις $(n-1)\times(n-1)$, $(n-2)\times(n-2)$ υποορίζουσες ενός πίνακα στάθμισης $W(n, n-k)$, όπου n άρτιος και $k \geq 1$ [14], καθώς και για τις $(n-3)\times(n-3)$ υποορίζουσες ενός πίνακα στάθμισης $W(n, n-1)$ [13]. Επίσης, παρουσιάζεται μία προσέγγιση, μέσω του Θεωρήματος Απλοποίησης Οριζουσών (Determinant Simplification Theorem), για τον προσδιορισμό υποοριζουσών τάξης $n-r$, $r \geq 1$, ενός πίνακα $W(n, n-1)$ [13].

2.1 Υπολογισμός υποοριζουσών τάξης μέχρι $n-3$

Σχετικά με τις τιμές που μπορούν να πάρουν οι υποορίζουσες τάξης $n-1$, $n-2$ των πινάκων στάθμισης $W(n, n-k)$ έχουν αποδειχθεί στην [14] τα αποτελέσματα που ακολουθούν.

Πρόταση 2.1. Έστω W ένας πίνακας στάθμισης $W(n, n-k)$, όπου n άρτιος και $k \geq 1$. Τότε όλες οι πιθανές $(n-1)\times(n-1)$ υποορίζουσες του W είναι: 0 και $(n-k)^{\frac{n}{2}-1}$.

Απόδειξη. Εφόσον ο W είναι ένας πίνακας στάθμισης $W(n, n-k)$, υποθέτουμε ότι μπορεί να γραφτεί σε μία από τις ακόλουθες μορφές :

$$W = \left[\begin{array}{c|c} + & \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{k}\ +\ \ldots\ + \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \mathrm{B} \\ + & \\ \vdots & \\ + & \end{array}\right] \quad \text{ή} \quad \left[\begin{array}{c|c} 0 & \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{k-1}\ +\ \ldots\ + \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \mathrm{B}' \\ + & \\ \vdots & \\ + & \end{array}\right],$$

όπου οι πρώτες στήλες περιέχουν επίσης k και $k-1$ μηδενικά κάτω από την οριζόντια γραμμή, αντιστοίχως.

Από τον ορισμό του $W(n, n-k)$ έχουμε ότι $WW^T = (n-k)I_n$. Συνεπώς, ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας BB^T έχει τη μορφή

$$BB^T = \begin{bmatrix} C & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D \end{bmatrix},$$

όπου $C = (n-k)I_k$ και $D = (n-k)I_{n-k-1} - J_{n-k-1}$. Προφανώς, τα μπλοκ των μηδενικών στην άνω δεξιά και κάτω αριστερή γωνία του BB^T έχουν διάσταση $k \times (n-k-1)$ και $(n-k-1) \times k$, αντίστοιχα.

Τότε, από (1.1), έχουμε

$det\, BB^T = det\ C \cdot det\ D = (n-k)^k[n-k-1-(n-k-2)](n-k)^{n-k-2} = (n-k)^{n-2}$.

Άρα, $det\, B = (n-k)^{\frac{n}{2}-1}$.

Εργαζόμενοι αναλόγως, η δεύτερη περίπτωση του πίνακα $W(n, n-k)$ θα μας δώσει $det\, B' = 0$. □

Πόρισμα 2.1. Οι πιθανές τιμές $(n-1)\times(n-1)$ υποοριζουσών ενός πίνακα στάθμισης $W = W(n, n-1)$ είναι

$$0\ ,\ (n-1)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Λήμμα 2.1. *Δεδομένης μίας γραμμής ενός πίνακα $W(n, n-k)$, όπου n άρτιος και $k \geq 1$, μπορούμε πάντα να βρούμε μία δεύτερη γραμμή, τέτοια ώστε οι δύο γραμμές να εμφανίζονται ως :*

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{j} & \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{k-j} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{k-j} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s} \\ 0\ 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & -\ \ldots\ - \end{array}, \qquad (P)$$

για κάποιο j άρτιο, $0 \le j \le k$. Αυτό μπορούμε πάντα να το επιτύχουμε εφαρμόζοντας τους κατάλληλους μετασχηματισμούς H-ισοδυναμίας. Ειδικά για $k = 1$, το αποτέλεσμα ισχύει τετριμμένα για $j = 0$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η δομή (P) δεν επιτυγχάνεται για κανένα j, $2 \le j \le k$, $k \ge 2$. Τότε, προφανώς, δύο γραμμές του $W(n, n-k)$ είτε δεν έχουν κοινά μηδενικά (αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση $j = 0$) ή μπορούν να γραφτούν, κάτω από Η-ισοδυναμία, ως :

$$\begin{array}{cccc} \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{k} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{k-1} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s_1} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s_2} \\ 0\ +\ \ldots\ + & 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & -\ \ldots\ - \end{array}$$

Πράγματι, αυτό μπορεί πάντα να επιτευχθεί με εναλλαγή στηλών και πολλαπλασιασμό στηλών με -1, όπου είναι απαραίτητο. Από το εσωτερικό γινόμενο αυτών των δύο γραμμών λαμβάνουμε $s_1 - s_2 = 0 \;\Rightarrow\; s_1 = s_2 \equiv s$, καθώς οι γραμμές του πίνακα είναι ορθογώνιες ανά δύο.

Από την τάξη του πίνακα έχουμε : $2k - 1 + 2s = n \;\Rightarrow\; 2k + 2s - n = 1$, από όπου προκύπτει ότι ο n είναι περιττός. Αυτό είναι άτοπο. Επομένως, οι δύο γραμμές του $W(n, n-k)$ θα έχουν τη μορφή

$$\begin{array}{ccccc} \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{j} & \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{k-j} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{k-j} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s} \\ 0\ 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & -\ \ldots\ - \end{array},$$

για κάποιο $j \ge 2$. Προφανώς, $j \le k$, καθώς το j δεν μπορεί να υπερβαίνει το πλήθος των μηδενικών ανά γραμμή, ενώ, θεωρώντας πάλι την τάξη του πίνακα έχουμε: $2k - j + 2s = n \;\Rightarrow\; 2k + 2s - n = j$, οπότε το j είναι άρτιος.

Το δεύτερο μέλος της εκφώνησης του λήμματος αποδεικνύεται άμεσα. Πράγματι, για $k = 1$ εύκολα βλέπουμε ότι δύο γραμμές ενός $W(n, n-1)$ μπορούν να έχουν τη μορφή

$$\begin{array}{ccc} 0 & + & \overbrace{+ \ \ldots \ +}^{s} & \overbrace{+ \ \ldots \ +}^{s} \\ + & 0 & + \ \ldots \ + & - \ \ldots \ - \end{array}, \qquad (P')$$

συνεπώς το αποτέλεσμα ισχύει τετριμμένα για $j = 0$. □

Σημείωση 2.1. Καθώς η δομή (P) υπάρχει πάντα στις γραμμές ενός πίνακα $W(n, n-k)$, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι εμφανίζεται στις δύο πρώτες του πίνακα. Στο εξής θα θεωρούμε οποιονδήποτε πίνακα στάθμισης $W(n, n-k)$ σε αυτή τη μορφή.

Πρόταση 2.2. Έστω W ένας πίνακας στάθμισης $W(n, n-k)$, όπου n άρτιος και $k \geq 1$. Τότε όλες οι πιθανές τιμές $(n-2)\times(n-2)$ υποοριζουσών του W είναι: 0, $(n-k)^{\frac{n}{2}-2}$ και $2(n-k)^{\frac{n}{2}-2}$.

Απόδειξη. Έστω

$$W = \left[\begin{array}{ccccc} \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{j} & \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{k-j} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{k-j} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s} \\ 0\ 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & -\ \ldots\ - \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} (P) \\ \hline \\ \\ \end{array}\right]$$

ένας $W(n, n-k)$, όπου n άρτιος και $k \geq 2$, στη μορφή που δίνεται στο Λήμμα 2.1. Προκειμένου να υπολογίσουμε όλες τις πιθανές $(n-2)\times(n-2)$ υποορίζουσες, χρειάζεται να καθορίσουμε όλες τις πιθανές 2×2 άνω αριστερά γωνίες που μπορεί να εμφανιστούν.

Υπάρχουν δέκα περιπτώσεις, κάτω από H - ισοδυναμία :

$$\begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} + & + \\ 0 & \pm \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} + & 0 \\ 0 & \pm \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} + & + \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} + & 0 \\ + & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & + \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για κάθε περίπτωση απομονώνουμε από τη δομή (P) τις δύο στήλες, που θα αποτελέσουν τον αντίστοιχο 2×2 πίνακα, και τις γράφουμε ξεχωριστά στη θέση της άνω αριστερά 2×2 γωνίας. Θα συνεχίσουμε την απόδειξη για την πρώτη περίπτωση, καθώς οι υπόλοιπες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται με παρόμοιο τρόπο.

Στην πρώτη περίπτωση, λοιπόν, ο πίνακας W μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή, για $k \geq 2$:

$$W = \left[\begin{array}{cc|cccc|ccc|ccc|ccc|ccc}
+ & + & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{0\ \ 0\ \ \dots\ \ 0}^{j}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{0\ \ \dots\ \ 0}^{k-j}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{+\ \ \dots\ \ +}^{k-j}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{+\ \ \dots\ \ +}^{u}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{+\ \ \dots\ \ +}^{u}} \\
+ & - & 0 & 0 & \dots & 0 & + & \dots & + & 0 & \dots & 0 & + & \dots & + & - & \dots & - \\
\hline
 & & \multicolumn{16}{c}{} \\
 & & \multicolumn{16}{c}{C} \\
 & & \multicolumn{16}{c}{}
\end{array}\right],$$

όπου $u = s - 1$.

Από την τάξη του πίνακα W λαμβάνουμε $2u + 2k - j + 2 = n \ \Rightarrow\ u = \frac{n-2k+j-2}{2}$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του $W(n, n-k)$, $W^T W = (n-k)I_n$, ο $(n-2)\times(n-2)$ πίνακας $C^T C$ έχει τη μορφή

$$C^T C = \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & D \end{bmatrix}, \quad \text{με } C_1 = (n-k)I_j, \quad D = \begin{bmatrix} E & F \\ F^T & G \end{bmatrix},$$

όπου

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & E_1 \end{bmatrix}, \quad E_1 = (n-k)I_{k-j} - J_{k-j}, \quad F = \begin{bmatrix} -1_{(k-j)\times u} & 1_{(k-j)\times u} \\ -1_{(k-j)\times u} & -1_{(k-j)\times u} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} G_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & G_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{και} \quad G_1 = (n-k)I_u - 2J_u.$$

Έχουμε

$$det\, C^T C = det\, C_1 \cdot det\, D \ = \ (n-k)^j \cdot det\, D \tag{2.1}$$

Σύμφωνα με την (1.3),

$$det\, D \ = \ det\, E \cdot det\, (G - F^T E^{-1} F) \tag{2.2}$$

Έχουμε $det\, E = (det\, E_1)^2$ και σύμφωνα με την (1.1),

$$det\, E_1 = [n-k-1-(k-j-1)](n-k-1+1)^{k-j-1} \ = \ (n-2k+j)(n-k)^{k-j-1},$$

άρα

$$det\, E \ = \ (n-2k+j)^2 (n-k)^{2(k-j-1)}. \tag{2.3}$$

Μετά τους απαραίτητους υπολογισμούς, με τη βοήθεια της (1.2), λαμβάνουμε

$$X \equiv G - F^T E^{-1} F = \frac{n-k}{n-2k+j} \begin{bmatrix} G_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & G_2 \end{bmatrix},$$

όπου $G_2 = (n-2k+j)I_u - 2J_u$.

Επομένως,

$$det\, X = \left(\frac{n-k}{n-2k+j}\right)^{n-2k+j-2} \cdot (det\, G_2)^2 \tag{2.4}$$

Σύμφωνα με την (1.1),

$det\, G_2 =$

$$\left[n-2k+j-2-2\left(\frac{n-2k+j-2}{2}-1\right)\right](n-2k+j-2+2)^{\frac{n-2k+j-2}{2}-1} = 2(n-2k+j)^{\frac{n-2k+j-4}{2}}.$$

Από την (2.4) έπεται

$$\begin{aligned} det\, X &= \left(\frac{n-k}{n-2k+j}\right)^{n-2k+j-2} 4(n-2k+j)^{n-2k+j-4} \\ &= 4(n-k)^{n-2k+j-2}(n-2k+j)^{-2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Τελικά, από τις (2.1)-(2.3) και (2.5) έχουμε

$$det\, C^T C = (n-k)^j (n-2k+j)^2 (n-k)^{2(k-j-1)} 4(n-k)^{n-2k+j-2}(n-2k+j)^{-2} = 4(n-k)^{n-4}.$$

Επομένως,

$$det\, C = 2(n-k)^{\frac{n}{2}-2}.$$

Με ανάλογο τρόπο, οι υπόλοιπες εννέα περιπτώσεις δίνουν τις τιμές 0 και $(n-k)^{\frac{n}{2}-2}$.

Για παράδειγμα, για την επιλογή των $\left[\begin{smallmatrix} + & + \\ 0 & + \end{smallmatrix}\right]$ και $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & + \end{smallmatrix}\right]$ σαν άνω αριστερή γωνία, η απόδειξη θα ξεκινάει με τον W να έχει ως πρώτες δύο γραμμές :

$$\begin{array}{cc|ccccc} + & + & \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{j} & \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{k-j} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{k-j-1} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s-1} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s} \\ 0 & + & 0\ 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & -\ \ldots\ - \end{array}$$

και

$$\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 0 & \overbrace{0\ 0\ \ldots\ 0}^{j-1} & \overbrace{0\ \ldots\ 0}^{k-j-1} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{k-j} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s} & \overbrace{+\ \ldots\ +}^{s} \\ 0 & + & 0\ 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & 0\ \ldots\ 0 & +\ \ldots\ + & -\ \ldots\ - \end{array},$$

αντίστοιχα, και ακολουθώντας μία εντελώς όμοια διαδικασία, η απόδειξη ολοκληρώνεται. Αυτές οι δύο περιπτώσεις δίνουν $(n-k)^{\frac{n}{2}-2}$ και 0, αντιστοίχως.

Η απόδειξη για $k=1$ είναι όμοια και πιο εύκολη. Γίνεται με δεδομένο ότι δύο γραμμές του $W(n,n-1)$ μπορούν να έχουν τη μορφή (P') που δίνεται στο Λήμμα 2.1 και δίνει ως αποτελέσματα τις τιμές 0, $(n-1)^{\frac{n}{2}-2}$ και $2(n-1)^{\frac{n}{2}-2}$. □

Παρατήρηση 2.1. Είναι φανερό από την ανωτέρω απόδειξη ότι το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.2 δεν εξαρτάται από το j. Αυτή η παρατήρηση συμφωνεί με το Λήμμα 2.1, το οποίο εγγυάται την ύπαρξη της δομής (P) χωρίς να δίνει συγκεκριμένη τιμή για το j. Άρα είναι διαισθητικά λογικό ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του j.

Από την Πρόταση 2.2 έπεται άμεσα το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 2.2. Οι πιθανές τιμές $(n-2)\times(n-2)$ υποοριζουσών ενός πίνακα στάθμισης $W=W(n,n-1)$ είναι: 0, $(n-1)^{\frac{n}{2}-2}$, $2(n-1)^{\frac{n}{2}-2}$.

Όσον αφορά στις τιμές που μπορούν να πάρουν οι $n-3$ υποορίζουσες πινάκων στάθμισης $W(n,n-1)$ έχει αποδειχθεί [13] η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.3. Έστω W ένας πίνακας στάθμισης $W(n,n-1)$, όπου n άρτιος. Τότε όλες οι πιθανές $(n-3)\times(n-3)$ υποορίζουσες του W είναι : 0 ή $2(n-1)^{\frac{n}{2}-3}$ ή $4(n-1)^{\frac{n}{2}-3}$, για $n\equiv 0(mod\,4)$ και $2(n-1)^{\frac{n}{2}-3}$ ή $4(n-1)^{\frac{n}{2}-3}$ για $n\equiv 2(mod\,4)$.

Απόδειξη. Υπάρχουν 48 πιθανές περιπτώσεις, κάτω από H- ισοδυναμία, για την άνω αριστερά γωνία:

$$\begin{bmatrix} + & + & + \\ + & \pm & \pm \\ + & \pm & \pm \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & \pm & \pm \\ + & \pm & \pm \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & \pm \\ + & \pm & \pm \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & + & + \\ + & 0 & \pm \\ + & \pm & 0 \end{bmatrix}.$$

Θα παρουσιάσουμε την απόδειξη για έναν πίνακα της δεύτερης περίπτωσης, καθώς οι άλλες περιπτώσεις μπορούν να αποδειχθούν με όμοιο τρόπο. Εφόσον ο πίνακας W είναι ένας πίνακας στάθμισης $W(n,n-1)$ ας υποθέσουμε ότι μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή:

$$W = \left[\begin{array}{ccc|cccccc}
+ & + & + & 0 & + & \overbrace{+ \ \ldots \ +}^{u} & \overbrace{+ \ \ldots \ +}^{v} & \overbrace{+ \ \ldots \ +}^{x} & \overbrace{+ \ \ldots \ +}^{y} \\
+ & - & 0 & + & \pm & + \ \ldots \ + & + \ \ldots \ + & - \ \ldots \ - & - \ \ldots \ - \\
+ & + & - & \pm & 0 & + \ \ldots \ + & - \ \ldots \ - & + \ \ldots \ + & - \ \ldots \ - \\ \hline
0 & + & \pm & & & & & & \\
+ & 0 & \pm & & & & & & \\
+ & + & + & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & \\
+ & + & + & & & & & & \\
+ & + & - & & & & D & & \\
 & \vdots & & & & & & & \\
+ & + & - & & & & & & \\
+ & - & + & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & \\
+ & - & + & & & & & & \\
+ & - & - & & & & & & \\
 & \vdots & & & & & & & \\
+ & - & - & & & & & &
\end{array}\right],$$

όπου οι τρεις πρώτες στήλες περιέχουν επίσης u $[+,+,+]$, v $[+,+,-]$, x $[+,-,+]$ και y $[+,-,-]$. Πρώτα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου η είσοδος $(2,5)$ είναι $+1$ και η $(3,4)$ είναι -1.

Από τη διάσταση του πίνακα W και την ορθογωνιότητα των τριών πρώτων γραμμών του λαμβάνουμε το ακόλουθο σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων

$$\begin{cases} u+v+x+y = n-5 \\ u+v-x-y = -1 \\ u-v+x-y = -1 \\ u-v-x+y = 1 \end{cases},$$

το οποίο έχει ως ακριβή λύση την $(u,v,x,y) = \dfrac{1}{4}(n-6, n-6, n-6, n-2)$ και σε αυτή την περίπτωση προφανώς $n \equiv 2 (mod\, 4)$.

Σύμφωνα με τις ιδιότητες ενός πίνακα στάθμισης $W(n, n-1)$, ο $(n-3) \times (n-3)$ πίνακας DD^T έχει τη μορφή $DD^T = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}$, όπου

$$A=\begin{bmatrix} n-3 & -1 \\ -1 & n-3 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \overbrace{0}^{u} & \overbrace{-2}^{v} & \overbrace{2}^{x} & \overbrace{0}^{y} \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} C_{1u\times u} & -1_{u\times v} & -1_{u\times x} & 1_{u\times y} \\ -1_{v\times u} & C_{1v\times v} & 1_{v\times x} & -1_{v\times y} \\ -1_{x\times u} & 1_{x\times v} & C_{1x\times x} & -1_{x\times y} \\ 1_{y\times u} & -1_{y\times v} & -1_{y\times x} & C_{1y\times y} \end{bmatrix},\quad C_1=\begin{bmatrix} n-4 & -3 & \dots & -3 \\ -3 & n-4 & \dots & -3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -3 & -3 & \dots & n-4 \end{bmatrix}.$$

Από εδώ και στο εξής, η ιδέα της απόδειξης είναι να εφαρμόσουμε διαδοχικά τον τύπο (1.3) κατάλληλα για το εμφανιζόμενο μπλοκ πινάκων και να κάνουμε τους υπολογισμούς με τη βοήθεια των (1.1) και (1.2). Σύμφωνα με την (1.3), έχουμε

$$det\ DD^T = det\ A\cdot det(C-B^TA^{-1}B). \tag{2.6}$$

Μετά τους απαραίτητους υπολογισμούς λαμβάνουμε

$$det\ A=(n-4)(n-2) \tag{2.7}$$

$$\text{και } C-B^TA^{-1}B=\begin{bmatrix} E_{u\times u} & F \\ F^T & G \end{bmatrix}, \text{ όπου}$$

$$E=(n-1)I-\tfrac{3n^2-14n+12}{(n-4)(n-2)}J,\quad F=\begin{bmatrix} -n_{u\times v} & (-n^2+6n-4)_{u\times x} & 1_{u\times y} \end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix} H_{v\times v} & n_{v\times x} & -1_{v\times y} \\ n_{x\times v} & E_{x\times x} & -1_{x\times y} \\ -1_{y\times v} & -1_{y\times x} & C_{1y\times y} \end{bmatrix}, \text{ με } H=(n-1)I-\tfrac{3n-4}{(n-4)}J.$$

Έτσι, σύμφωνα με τον τύπο (1.3),

$$det(C-B^TA^{-1}B)=det\ E_{u\times u}\cdot det(G-F^TE_{u\times u}^{-1}F). \tag{2.8}$$

Από την (1.1) έχουμε

$$det\ E_{u\times u}=\frac{(n^3+4n^2-40n+40)(n-1)^{\frac{n-10}{4}}}{4(n-2)(n-4)} \tag{2.9}$$

και από (1.2) προκύπτει ότι $E_{u\times u}^{-1}=(n-1)I_u-\dfrac{4(3n^2-14n+12)}{4(n-4)(n-2)}J_u.$

Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
G - F^T E_{u\times u}^{-1} F &= \frac{n-1}{n^3+4n^2-40n+40} \begin{bmatrix} K_{1v\times v} & L_{1v\times x} & -L_{2v\times y} \\ L_{1x\times v} & K_{2x\times x} & -L_{3x\times y} \\ -L_{2y\times v} & -L_{3y\times x} & K_{3y\times y} \end{bmatrix} \\
&\equiv \frac{n-1}{n^3+4n^2-40n+40} \begin{bmatrix} K_{1v\times v} & N_2 \\ N_2^T & N_1 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

όπου

$K_1 = (k_1 - \lambda_1)I + \lambda_1 J,\ k_1 = n^3 - 60n + 80,\ \ \lambda_1 = -4(n^2 + 5n - 10),$

$K_2 = (k_2 - \lambda_2)I + \lambda_2 J,\ k_2 = (n-2)(n^2 + 2n - 44),\ \ \lambda_2 = -4(n^2 + 2n - 12),$

$K_3 = (k_3 - \lambda_3)I + \lambda_3 J,\ k_3 = (n-1)(n-4)(n^2 + 4n - 28),\ \ \lambda_3 = -4(n^2 + n - 18),$

$L_1 = \lambda_4 J,\ \lambda_4 = 16n,$

$L_2 = \lambda_5 J,\ \lambda_5 = 3n - 10$ και

$L_3 = \lambda_6 J,\ \lambda_6 = -16(n-4).$

Οι πίνακες I, J παραπάνω είναι κατάλληλης τάξης.

Επομένως, σύμφωνα με την (1.3),

$$det(G - F^T E_{u\times u}^{-1} F) = det\ K_{1v\times v} \cdot det(N_1 - N_2^T K_{1v\times v}{}^{-1} N_2). \tag{2.10}$$

Συνεχίζουμε να εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο, προκειμένου να υπολογίσουμε τις $det\, K_{1v\times v}$ και $det(N_1 - N_2^T K_{1v\times v}{}^{-1} N_2)$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.1), (1.2) και (1.3), έχουμε

$$det\, K_{1v\times v} = \frac{5(n-1)(n-2)(n+2)(n-1)^{\frac{n-10}{4}}}{n^3+4n^2-40n+40} \tag{2.11}$$

$$N_1 - N_2^T K_{1v\times v}{}^{-1} N_2 = \frac{n-1}{n^2-4} \begin{bmatrix} P_{1x\times x} & Q_{1x\times y} \\ Q_{1y\times x} & P_{2y\times y} \end{bmatrix},$$

όπου

$P_1 = (p_1 - q_1)I + q_1 J,\ p_1 = \dfrac{5n^2 - 20n - 44}{5},\ q_1 = \dfrac{-4(5n+6)}{5},$

$P_2 = (p_2 - q_2)I + q_2 J,\ p_2 = \dfrac{5n^5 + 252n^3 + 5120n - 1736n^2 - 4640 - 36n^4}{5(n^3+4n^2-40n+40)},$

$q_2 = \dfrac{-4(5n-6)}{5}$ και $Q_1 = q_3 J$, $q_3 = \dfrac{-32}{5}$.

Σύμφωνα με την (1.3),

$$det(N_1 - N_2^T {K_{1v\times v}}^{-1} N_2) = det\ P_{1x\times x} \cdot det(P_{2y\times y} - Q_{1y\times x} {P_{1x\times x}}^{-1} Q_{1x\times y}). \tag{2.12}$$

$$det\, P_{1x\times x} = \frac{8(3n+2)(n-1)(n-1)^{\frac{n-10}{4}}}{5(n^2-4)} \tag{2.13}$$

$$P_{2y\times y} - Q_{1y\times x} {P_{1x\times x}}^{-1} Q_{1x\times y} = R_{3y\times y}, \tag{2.14}$$

όπου $R_{3y\times y} = (r_1 - s_1)I + s_1 J$, $r_1 = \dfrac{(n-1)(3n-10)}{3n+2}$, $s_1 = \dfrac{-12(n-1)}{3n+2}$

$$det\, R_{3y\times y} = \frac{8(n-1)^{\frac{n-2}{4}}}{3n+2} \tag{2.15}$$

Τελικά, από τις (2.6)-(2.15) έχουμε

$det\ DD^T = det\, A\ \ det\, E_{u\times u}\ \ det\, K_{1v\times v}\ \ det\, P_{1x\times x}\ \ det\, R_{3y\times y} = 16(n-1)^{n-6}$. Άρα,

$$det\ D \equiv W(n-3) = 4(n-1)^{\frac{n}{2}-3}.$$

Ομοίως χειριζόμαστε και τις άλλες περιπτώσεις για τις πιθανές εισόδους $(2,5)$ και $(3,4)$ και λαμβάνουμε τα αποτελέσματα $W(n-3) = 0, 4(n-1)^{\frac{n}{2}-3}$.

Ανάλογοι υπολογισμοί για τις άλλες περιπτώσεις της άνω αριστερά γωνίας ολοκληρώνουν την απόδειξη. □

2.2 Υπολογισμός υποοριζουσών τάξης $n-r$, $r \geq 1$

Η γενικευμένη μορφή του Θεωρήματος Απλοποίησης Οριζουσών, η οποία αναπτύχθηκε στο 1ο κεφάλαιο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό υποοριζουσών τάξης $n-r$, $r \geq 1$, ενός πίνακα στάθμισης.

Θεώρημα 2.1. *Η $(n-r)\times(n-r)$ υποορίζουσα ενός πίνακα στάθμισης $W = W(n, n-1)$ ισούται με*

$$W(n-r) = ((n-1)^{n-2^{r-1}-r} \cdot det\ D)^{1/2},$$

όπου ο πίνακας D, διάστασης 2^{r-1}, έχει την ακόλουθη μορφή

$$D = \begin{bmatrix} n-1-ru_1 & u_2a_{12} & u_3a_{13} & \cdots & u_za_{1z} \\ u_1a_{21} & n-1-ru_2 & u_3a_{23} & \cdots & u_za_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1a_{z1} & u_2a_{z2} & u_3a_{z3} & \cdots & n-1-ru_z \end{bmatrix},$$

όπου $z = 2^{r-1}$.

Απόδειξη. Κάθε πίνακας στάθμισης $W = W(n, n-1)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$W = \begin{bmatrix} M & U_r \\ U_r^T & C \end{bmatrix},$$

όπου οι πίνακες M, C είναι διάστασης $r \times r$ και $(n-r)\times(n-r)$, αντίστοιχα, με μηδενικά στη διαγώνιο. Προφανώς, ο M έχει r μηδενικά στη διαγώνιο και ο C έχει $n-r$ μηδενικά στη διαγώνιο. Τα στοιχεία του $(n-r)\times(n-r)$ πίνακα CC^T, που σχηματίστηκαν από τη μετακίνηση των πρώτων r γραμμών και στηλών του πίνακα W, μπορούν να αντιμετατεθούν ώστε να έχουμε τελικά τη μορφή

$$CC^T = (n-1-r-a_{ii})I_{u_1,u_2,\cdots,u_{2^{r-1}}} + a_{ik}J_{u_1,u_2,\cdots,u_{2^{r-1}}},$$

όπου $(a_{ik}) = (-\underline{u}_i \cdot \underline{u}_k)$, $a_{ii} = (-\underline{u}_i \cdot \underline{u}_i) = -r$.

Από το θεώρημα απλοποίησης οριζουσών έχουμε

$$det\ CC^T = (n-1)^{n-2^{r-1}-r} \cdot det\ D,$$

όπου ο πίνακας D έχει διάσταση 2^{r-1} και δίνεται από τον τύπο

$$D = \begin{bmatrix} n-1-ru_1 & u_2a_{12} & u_3a_{13} & \cdots & u_za_{1z} \\ u_1a_{21} & n-1-ru_2 & u_3a_{23} & \cdots & u_za_{2z} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1a_{z1} & u_2a_{z2} & u_3a_{z3} & \cdots & n-1-ru_z \end{bmatrix},$$

όπου $z = 2^{r-1}$.

Η $(n-r)\times(n-r)$ υποορίζουσα, $W(n-r)$, του W είναι η ορίζουσα του C, για την οποία έχουμε $det\ C = ((n-1)^{n-2^{r-1}-r} \cdot det\ D)^{1/2}$. Συνεπώς,

$$W(n-r) = ((n-1)^{n-2^{r-1}-j} \cdot det\ D)^{1/2}.$$

$\square$

Σημείωση 2.2. *Προκειμένου να βρούμε όλες τις πιθανές τιμές των $(n-r)$ υποοριζουσών, θα έπρεπε να εισάγουμε όλους τους πιθανούς πίνακες M στην άνω δεξιά $r \times r$ γωνία του W.*

Κεφάλαιο 3

Υπολογισμός Υποοριζουσών πινάκων στάθμισης $W(n, n-1)$ με μηδενικά στη διαγώνιο.

Σε αυτό το κεφάλαιο επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στον υπολογισμό υποοριζουσών πινάκων στάθμισης $W(n, n-1)$ με μηδενικά στη διαγώνιο (πίνακες conference). Θυμίζουμε ότι τέτοιοι πίνακες ορίζονται για n άρτιο.

3.1 Υπολογισμός υποοριζουσών $W(n-r)$, για $r = 1, 2, 3$.

Στην παρούσα ενότητα για τον υπολογισμό των υποοριζουσών τάξης $n-1$ και $n-2$ ακολουθούμε τη μεθοδολογία που έχει προταθεί στο [15]. Για την περίπτωση $n-3$ παρουσιάζουμε μία νέα προσέγγιση.

Πρόταση 3.1. *Έστω W ένας πίνακας στάθμισης, $W(n, n-1)$, τάξης $n > 6$, με μηδενικά στη διαγώνιο. Τότε οι $(n-1) \times (n-1)$ υποορίζουσες του W είναι $W(n-1) = 0$.*

Απόδειξη. Εφόσον ο W είναι ένας πίνακας στάθμισης $W(n, n-1)$ με μηδενικά στη διαγώνιο, υποθέτουμε ότι μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$W = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & + & \dots & + \\ \hline + & & & \\ \vdots & & C & \\ + & & & \end{array}\right],$$

όπου ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας C είναι αντισυμμετρικός.

Λόγω της ορθογωνιότητας των γραμμών/στηλών του πίνακα W και της βασικής ιδιότητάς του, $WW^T = (n-1)I_n$, ο $(n-1)\times(n-1)$ πίνακας CC^T θα έχει τη μορφή

$$CC^T = \begin{bmatrix} n-2 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-2 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-2 \end{bmatrix} = (n-1)I_{n-1} - J_{n-1}.$$

Από την (1.1) έπεται ότι

$$det\, CC^T = (n-2) - [(n-1)-1](n-1)^{(n-1)-1} = 0 \Rightarrow det\, C = 0.$$

Συνεπώς,

$$W(n-1) = 0.$$

□

Παρατήρηση 3.1. *Δείξαμε ότι, όταν έχουμε μηδενικά στη διαγώνιο, λαμβάνουμε τη μικρότερη τιμή από αυτές που παρουσιάστηκαν στο Πόρισμα 2.1. Αυτό συμφωνεί με το αποτέλεσμα του Λήμματος 1.2, καθώς $n-1$ περιττός και ο υποπίνακας C είναι αντι-συμμμετρικός με πραγματικά στοιχεία.*

Πρόταση 3.2. *Έστω W ένας πίνακας στάθμισης, $W(n, n-1)$, τάξης $n > 6$, με μηδενικά στη διαγώνιο. Τότε οι $(n-2)\times(n-2)$ υποορίζουσες του W είναι $W(n-2) = (n-1)^{\frac{n}{2}-2}$.*

Απόδειξη. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Εάν $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 4)$, τότε ο W μπορεί να γραφτεί ως

$$W = \left[\begin{array}{c|c}
\begin{matrix}0 & +\\ + & 0\end{matrix} & \begin{matrix}\overbrace{+\cdots+}^{u_1} & \overbrace{+\cdots+}^{u_2}\\ +\cdots+ & -\cdots-\end{matrix}\\ \hline
\begin{matrix} u_1\left\{\begin{matrix}+ & -\\ \vdots & \vdots\\ + & -\end{matrix}\right.\\ \\ u_2\left\{\begin{matrix}+ & +\\ \vdots & \vdots\\ + & +\end{matrix}\right.\end{matrix} & C
\end{array}\right],$$

όπου ο $(n-2)\times(n-2)$ πίνακας C είναι αντισυμμετρικός.

Αν $n \equiv 2(\bmod 4)$, τότε ο W παίρνει τη μορφή

$$W = \left[\begin{array}{c|c}
\begin{matrix}0 & +\\ + & 0\end{matrix} & \begin{matrix}\overbrace{+\cdots+}^{u_1} & \overbrace{+\cdots+}^{u_2}\\ +\cdots+ & -\cdots-\end{matrix}\\ \hline
\begin{matrix} u_1\left\{\begin{matrix}+ & +\\ \vdots & \vdots\\ + & +\end{matrix}\right.\\ \\ u_2\left\{\begin{matrix}+ & -\\ \vdots & \vdots\\ + & -\end{matrix}\right.\end{matrix} & C
\end{array}\right],$$

όπου ο $(n-2)\times(n-2)$ πίνακας C είναι συμμετρικός. Εδώ, $u_1 = u_2 = \frac{n-2}{2}$, καθώς $2 + u_1 + u_2 = n$.

Και στις δύο περιπτώσεις ο $(n-2)\times(n-2)$ πίνακας CC^T έχει την ακόλουθη δομή

$$CC^T = \begin{bmatrix} D & O \\ O & D \end{bmatrix},$$

όπου ο $m \times m$ πίνακας D έχει τη μορφή

$$D = \begin{bmatrix} n-3 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & n-3 & \dots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & \dots & n-3 \end{bmatrix} = (n-1)I_m - 2J_m, \quad m = \frac{n}{2} - 1.$$

Από την (1.1) έχουμε $det\, D = (n-1)^{\frac{n}{2}-2}$.
Όμως, $det\, CC^T = (det\, D)^2$. Άρα, $det\, C = (det\, CC^T)^{\frac{1}{2}} = det\, D = (n-1)^{\frac{n}{2}-2}$.

Συνεπώς,

$$W(n-2) = (n-1)^{\frac{n}{2}-2}.$$

□

Παρατήρηση 3.2. *Δείξαμε ότι, όταν έχουμε μηδενικά στη διαγώνιο, λαμβάνουμε τη μικρότερη μη μηδενική τιμή από αυτές που παρουσιάστηκαν στο Πόρισμα 2.2.*

Πρόταση 3.3. *Έστω W ένας πίνακας στάθμισης, $W(n, n-1)$, τάξης $n \geq 8$, με μηδενικά στη διαγώνιο. Τότε οι $(n-3) \times (n-3)$ υποορίζουσες του W είναι*
(i) 0 *για* $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$ *και*
(ii) $2(n-1)^{\frac{n}{2}-3}$ *για* $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 4)$.

Απόδειξη. **(*i*)** Όταν $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, έχουμε

$$W=\left[\begin{array}{ccc|cccc}
0 & + & + & \overbrace{+\cdots+}^{u_1} & \overbrace{+\cdots+}^{u_2} & \overbrace{+\cdots+}^{u_3} & \overbrace{+\cdots+}^{u_4}\\
+ & 0 & + & +\cdots+ & +\cdots+ & -\cdots- & -\cdots-\\
+ & - & 0 & +\cdots+ & -\cdots- & +\cdots+ & -\cdots-\\
\hline
\multicolumn{3}{c|}{u_1\left\{\begin{matrix}+ & - & -\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ + & - & -\end{matrix}\right.} & & & & \\
\multicolumn{3}{c|}{u_2\left\{\begin{matrix}+ & - & +\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ + & - & +\end{matrix}\right.} & & & & \\
\multicolumn{3}{c|}{} & \multicolumn{4}{c}{C}\\
\multicolumn{3}{c|}{u_3\left\{\begin{matrix}+ & + & -\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ + & + & -\end{matrix}\right.} & & & & \\
\multicolumn{3}{c|}{u_4\left\{\begin{matrix}+ & + & +\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ + & + & +\end{matrix}\right.} & & & &
\end{array}\right]$$

Από την ορθογωνιότητα των γραμμών/στηλών και από τη διάσταση του πίνακα W, έχουμε ότι $u_1 = u_2 = u_4 = u$ και $u_3 = u + 1$, όπου $u = \frac{n}{4} - 1$.

Ο $(n-3)\times(n-3)$ πίνακας CC^T έχει τη μορφή

$$CC^T \sim_H \begin{bmatrix}
B_{u\times u} & -J_{u\times u} & -J_{u\times(u+1)} & -J_{u\times u}\\
-J_{u\times u} & B_{u\times u} & J_{u\times(u+1)} & J_{u\times u}\\
-J_{(u+1)\times u} & J_{(u+1)\times u} & B_{(u+1)\times(u+1)} & J_{(u+1)\times u}\\
-J_{u\times u} & J_{u\times u} & J_{u\times(u+1)} & B_{u\times u}
\end{bmatrix},$$

όπου $B_{m\times m} = (n-1)I_{m\times m} - 3J_{m\times m}$, με $m = u, u+1$.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών και στηλών, μπορούμε τελικά να μετατρέψουμε τον CC^T στην ακόλουθη μορφή

$$CC^T \sim \begin{bmatrix}
B_{u\times u} & -J_{u\times u} & -J_{u\times(u+1)} & -J_{u\times u}\\
P_{u\times u} & P_{u\times u} & O_{u\times(u+1)} & O_{u\times u}\\
P_{(u+1)\times u} & O_{(u+1)\times u} & P_{(u+1)\times(u+1)} & O_{(u+1)\times u}\\
P_{u\times u} & O_{u\times u} & O_{u\times(u+1)} & P_{u\times u}
\end{bmatrix},$$

όπου

$$P_{m\times m} = (n-1)I_{m\times m} - 4J_{m\times m}, \quad m = u, u+1 ,$$

$$P_{(u+1)\times u} = \left[\begin{array}{c} P_{u\times u} \\ \hline P_u^{(1)} \end{array} \right], P_u^{(1)} \text{ η 1η γραμμή του πίνακα } P_u.$$

Γράφουμε τον πίνακα CC^T στη μορφή

$$CC^T \equiv M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

με

$$A = B_{u\times u}, \quad B = \begin{bmatrix} -J_{u\times u} & -J_{u\times(u+1)} & -J_{u\times u} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} P_{u\times u} \\ P_{(u+1)\times u} \\ P_{u\times u} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} P_{u\times u} & O_{u\times(u+1)} & O_{u\times u} \\ O_{(u+1)\times u} & P_{(u+1)\times(u+1)} & O_{(u+1)\times u} \\ O_{u\times u} & O_{u\times(u+1)} & P_{u\times u} \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.3), έχουμε $det\, M = det\, D \cdot det\,(A - B\,D^{-1}\,C)$.
Θα δείξουμε ότι $det\,(A - B\,D^{-1}\,C) = 0$.
Έχουμε,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} P_u^{-1} & O_{u\times(u+1)} & O_u \\ O_{(u+1)\times u} & P_{u+1}^{-1} & O_{(u+1)\times u} \\ O_u & O_{u\times(u+1)} & P_u^{-1} \end{bmatrix}, \quad D^{-1}\,C = \begin{bmatrix} P_u^{-1} \cdot P_u \\ P_{u+1}^{-1}\,P_{(u+1)\times u} \\ P_u^{-1} \cdot P_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_u \\ P_{u+1}^{-1}\,P_{(u+1)\times u} \\ I_u \end{bmatrix}$$

$$\text{και } B\,D^{-1}\,C = -2J_u - J_{u\times(u+1)} \cdot P_{u+1}^{-1}\,P_{(u+1)\times u}.$$

Θεωρώντας $P_{u+1}^{-1} = (p_{i,j})_{u+1}$, έχουμε

$$P_{u+1}^{-1}\,P_{(u+1)\times u} = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,u+1} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,u+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{u,1} & p_{u,2} & \dots & p_{u,u+1} \\ p_{u+1,1} & p_{u+1,2} & \dots & p_{u+1,u+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n-5 & -4 & \dots & -4 \\ -4 & n-5 & \dots & -4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -4 & -4 & \dots & n-5 \\ n-5 & -4 & \dots & -4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_u & 0 & \dots & 1 \\ x_{u+1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \text{ όπου}$$

$$x_i = (n-5)\, p_{i,1} - 4 \sum_{j=2}^{u} p_{i,j} + (n-5)\, p_{i,u+1}, \;\; i = 1, \dots, u+1. \tag{3.1}$$

Συνεπώς,

$$B\,D^{-1}\,C = \begin{bmatrix} -2 - \sum_{i=1}^{u+1} x_i & -3 & \dots & -3 \\ -2 - \sum_{i=1}^{u+1} x_i & -3 & \dots & -3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 - \sum_{i=1}^{u+1} x_i & -3 & \dots & -3 \end{bmatrix}$$

και

$$A \,-\, B\,D^{-1}\,C = \begin{bmatrix} n-2+\sum_{i=1}^{u+1} x_i & 0 & \dots & 0 \\ -1+\sum_{i=1}^{u+1} x_i & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1+\sum_{i=1}^{u+1} x_i & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}.$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξω ότι

$$\sum_{i=1}^{u+1} x_i = -n+2.$$

Από την 1η στήλη του γινομένου $P_{u+1}^{-1} P_{u+1} = I_{u+1}$, ή ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,u} & p_{1,u+1} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,u} & p_{2,u+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ p_{u,1} & p_{u,2} & \dots & p_{u,u} & p_{u,u+1} \\ p_{u+1,1} & p_{u+1,2} & \dots & p_{u+1,u} & p_{u+1,u+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n-5 & -4 & \dots & -4 & -4 \\ -4 & n-5 & \dots & -4 & -4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -4 & -4 & \dots & n-5 & -4 \\ -4 & -4 & \dots & -4 & n-5 \end{bmatrix} = I_{u+1}$$

προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{array}{cccccccc}
(n-5)\,p_{1,1} & -4\,p_{1,2} & -\ldots & -4\,p_{1,u} & -4\,p_{1,u+1} & = & 1, \\
-4\,p_{2,1} & +(n-5)\,p_{2,2} & -\ldots & -4\,p_{2,u} & -4\,p_{2,u+1} & = & 0, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
-4\,p_{u,1} & -4\,p_{u,2} & -\ldots & +(n-5)\,p_{u,u} & -4\,p_{u,u+1} & = & 0\ , \\
-4\,p_{u+1,1} & -4\,p_{u+1,2} & -\ldots & -4\,p_{u+1,u} & +(n-5)\,p_{u+1,u+1} & = & 0\ .
\end{array}$$

Τότε, από την (3.1), έπεται ότι

$$x_i = \delta_{1,i} + (n-1)p_{i,u+1},$$

όπου $\delta_{1,i}$ είναι το δέλτα του Kronecker [1].

Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{u+1} x_i = 1 + (n-1)\sum_{i=1}^{u+1} p_{i,u+1}.$$

Το άθροισμα των $p_{i,u+1}$ δίνεται από την τελευταία στήλη του γινομένου $P_{u+1}^{-1}P_{u+1}$. Το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων που προκύπτει μας δίνει τη σχέση $\sum_{i=1}^{u+1} p_{i,u+1} = -1$. Οπότε, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{u+1} x_i = -n + 2.$$

[1]Συγκεκριμένα, εδώ $\delta_{1,i} = \begin{cases} 1\ , & i=1 \\ 0\ , & \text{αλλιώς} \end{cases}$.

(*ii*) Τώρα, εάν $n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 4)$, έχουμε

$$W = \left[\begin{array}{c|cccc}
\begin{matrix} 0 & + & + \\ + & 0 & + \\ + & + & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \overbrace{+\cdots+}^{u_1} \\ +\cdots+ \\ +\cdots+ \end{matrix} & \begin{matrix} \overbrace{+\cdots+}^{u_2} \\ +\cdots+ \\ -\cdots- \end{matrix} & \begin{matrix} \overbrace{+\cdots+}^{u_3} \\ -\cdots- \\ +\cdots+ \end{matrix} & \begin{matrix} \overbrace{+\cdots+}^{u_4} \\ -\cdots- \\ -\cdots- \end{matrix} \\
\hline
u_1\left\{\begin{matrix} + & + & + \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ + & + & + \end{matrix}\right. & & & & \\
u_2\left\{\begin{matrix} + & + & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ + & + & - \end{matrix}\right. & & & & \\
 & \multicolumn{4}{c}{C} \\
u_3\left\{\begin{matrix} + & - & + \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ + & - & + \end{matrix}\right. & & & & \\
u_4\left\{\begin{matrix} + & - & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ + & - & - \end{matrix}\right. & & & &
\end{array}\right].$$

Από την ορθογωνιότητα των γραμμών/στηλών και από τη διάσταση του πίνακα W, έχουμε ότι $u_2 = u_3 = u_4 = u + 1$ και $u_1 = u$, όπου $u = \frac{n-6}{4}$.

Ο $(n-3) \times (n-3)$ πίνακας CC^T έχει τη μορφή

$$CC^T \sim_H \begin{bmatrix} B_{u\times u} & -J_{u\times(u+1)} & -J_{u\times(u+1)} & -J_{u\times(u+1)} \\ -J_{(u+1)\times u} & B_{(u+1)\times(u+1)} & J_{(u+1)\times(u+1)} & J_{(u+1)\times(u+1)} \\ -J_{(u+1)\times u} & J_{(u+1)\times(u+1)} & B_{(u+1)\times(u+1)} & J_{(u+1)\times(u+1)} \\ -J_{(u+1)\times u} & J_{(u+1)\times(u+1)} & J_{(u+1)\times(u+1)} & B_{(u+1)\times(u+1)} \end{bmatrix},$$

όπου $B_{m\times m} = (n-1)I_{m\times m} - 3J_{m\times m}$, με $m = u, u+1$.

Χρησιμοποιώντας κατάλληλους μετασχηματισμούς γραμμών και στηλών, μπορούμε τελικά να φέρουμε τον CC^T στην ακόλουθη μορφή

$$CC^T \sim \begin{bmatrix} E_{u\times u} & F_{u\times(u+1)} & F_{u\times(u+1)} & F_{u\times(u+1)} \\ G_{(u+1)\times u} & P_{(u+1)\times(u+1)} & O_{(u+1)\times(u+1)} & O_{(u+1)\times(u+1)} \\ G_{(u+1)\times u} & O_{(u+1)\times(u+1)} & P_{(u+1)\times(u+1)} & O_{(u+1)\times(u+1)} \\ G_{(u+1)\times u} & O_{(u+1)\times(u+1)} & O_{(u+1)\times(u+1)} & P_{(u+1)\times(u+1)} \end{bmatrix},$$

όπου

$$E_{u\times u} = \begin{bmatrix} n-4 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ n-1 & 2(n-1) & n-1 & \dots & n-1 \\ n-1 & n-1 & 2(n-1) & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 2(n-1) \end{bmatrix}, \quad F_{u\times(u+1)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$G_{(u+1)\times u} = \begin{bmatrix} n-5 & n-1 & \dots & n-1 \\ n-5 & n-1 & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ n-5 & n-1 & \dots & n-1 \end{bmatrix} \text{και}$$

$$P_{(u+1)\times(u+1)} = \begin{bmatrix} n-5 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 \\ -4 & -(n-1) & 0 & \dots & 0 \\ -4 & 0 & -(n-1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ -4 & 0 & 0 & \dots & -(n-1) \end{bmatrix}.$$

Γράφουμε τον πίνακα CC^T στη μορφή

$$CC^T \equiv M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

με

$$A = E_{u\times u}, \quad B = \begin{bmatrix} F_{u\times(u+1)} & F_{u\times(u+1)} & F_{u\times(u+1)} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} G_{(u+1)\times u} \\ G_{(u+1)\times u} \\ G_{(u+1)\times u} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} P_{(u+1)\times(u+1)} & O_{(u+1)\times(u+1)} & O_{(u+1)\times(u+1)} \\ O_{(u+1)\times(u+1)} & P_{(u+1)\times(u+1)} & O_{(u+1)\times(u+1)} \\ O_{(u+1)\times(u+1)} & O_{(u+1)\times(u+1)} & P_{(u+1)\times(u+1)} \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} P^{-1} & O & O \\ O & P^{-1} & O \\ O & O & P^{-1} \end{bmatrix}, \quad B \cdot D^{-1} = \begin{bmatrix} -P^{-1}_{(1)} & -P^{-1}_{(1)} & -P^{-1}_{(1)} \\ O & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & O \end{bmatrix},$$

όπου $P^{-1}_{(1)}$ η 1η γραμμή του P^{-1},

$$\text{και } B \cdot D^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} (n-5)(-3)\sum_{i=1}^{u+1} p_{1,i} & (n-1)(-3)\sum_{i=1}^{u+1} p_{1,i} & \ldots & (n-1)(-3)\sum_{i=1}^{u+1} p_{1,i} \\ O & O & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & O \end{bmatrix},$$

όπου $p_{1,i}$ τα στοιχεία της 1ης γραμμής του P^{-1}.

Προφανώς, ισχύει ότι $P^{-1}P = I_{u+1}$. Έχουμε, λοιπόν,

$$\begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} & \ldots & p_{1,u+1} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} & \ldots & p_{2,u+1} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} & \ldots & p_{3,u+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ p_{u+1,1} & p_{u+1,2} & p_{u+1,3} & \ldots & p_{u+1,u+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n-5 & n-1 & n-1 & \ldots & n-1 \\ -4 & -(n-1) & 0 & \ldots & 0 \\ -4 & 0 & -(n-1) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ -4 & 0 & 0 & \ldots & -(n-1) \end{bmatrix} = I_{u+1}.$$

Επομένως, έχουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} (n-5)\,p_{1,1} - 4\,p_{1,2} - 4\,p_{1,3} - \ldots - 4\,p_{1,u+1} \;&=\; 1, \\ (n-1)\,p_{1,1} \;-\; (n-1)\,p_{1,2} \;&=\; 0, \\ (n-1)\,p_{1,1} \;-\; (n-1)\,p_{1,3} \;&=\; 0, \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ (n-1)\,p_{1,1} \;-\; (n-1)\,p_{1,u+1} \;&=\; 0 \end{aligned}$$

με λύση $p_{1,1} = p_{1,2} = p_{1,3} = \ldots = p_{1,u+1} = p = 1$.

Τότε $\sum_{i=1}^{u+1} p_{1,i} = u + 1 = \frac{n-2}{4}$.

Άρα,

$$B \cdot D^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4}(n-2)(n-5) & -\frac{3}{4}(n-2)(n-1) & \ldots & -\frac{3}{4}(n-2)(n-1) \\ O & O & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & O \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$A - BD^{-1}C =$$

$$\begin{bmatrix} n-4+\frac{3}{4}(n-2)(n-5) & n-1+\frac{3}{4}(n-2)(n-1) & \dots & n-1+\frac{3}{4}(n-2)(n-1) \\ n-1 & 2(n-1) & \dots & n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & n-1 & \dots & 2(n-1) \end{bmatrix}.$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι γραμμο-ισοδύναμος με τον

$$\begin{bmatrix} n-4+\frac{3}{4}(n-2)(n-5) & 3(n-1) & 3(n-1) & \dots & 3(n-1) \\ n-1 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ n-1 & 0 & n-1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 0 & 0 & \dots & n-1 \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.3), έχουμε

$$det\,(A - B \cdot D^{-1} \cdot C) = (n-1)^{u-1} \cdot 4(n-1) = 4(n-1)^u = 4(n-1)^{\frac{n-6}{4}}.$$

Τελικά, πάλι με χρήση του τύπου (1.3), έχουμε

$$det\,M = det\,D \cdot det\,(A - B \cdot D^{-1} \cdot C) = ((n-1)^{\frac{n-6}{4}})^3 \cdot 4(n-1)^{\frac{n-6}{4}} = 4(n-1)^{n-6}.$$

Συνεπώς,

$$det\,C = \sqrt{det\,(CC^T)} = 2(n-1)^{\frac{n-6}{2}}.$$

□

3.2 Υπολογισμός υποοριζουσών $W(n-r)$ για $r \geq 1$.

Στην παρούσα ενότητα μελετάμε τον υπολογισμό υποοριζουσών στη γενική περίπτωση. Πρόκειται για μία νέα προσέγγιση, η οποία μπορεί να οδηγήσει σε έναν αποτελεσματικό αλγόριθμο υπολογισμού υποοριζουσών.

Θεώρημα 3.1. *Έστω W ένας πίνακας στάθμισης, $W(n, n-1)$, n αρκετά μεγάλο, με μηδενικά στη διαγώνιο. Τότε η $(n-r) \times (n-r)$, $r \geq 1$, υποορίζουσα του W είναι*

$$W(n-r) = [(n-1)^{n-r-2^{r-1}} \cdot det\,M]^{1/2},$$

όπου

$$M = \begin{bmatrix} n-1-ru_1 & u_1c_{1,2} & u_1c_{1,3} & \cdots & u_1c_{1,2^{r-1}} \\ u_2c_{1,2} & n-1-ru_2 & u_2c_{2,3} & \cdots & u_2c_{2,2^{r-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{2^{r-1}}c_{1,2^{r-1}} & u_{2^{r-1}}c_{2,2^{r-1}} & u_{2^{r-1}}c_{3,2^{r-1}} & \cdots & n-1-ru_{2^{r-1}} \end{bmatrix}_{2^{r-1}\times 2^{r-1}},$$

$c_{i,j} = -\widetilde{u_i}^T \cdot \widetilde{u_j}, \quad i,\ j = 1, \ldots, 2^{r-1}.$

Απόδειξη. Έστω πίνακας στάθμισης, $W = W(n, n-1)$, n αρκετά μεγάλο, με μηδενικά στη διαγώνιο. Από το Λήμμα 1.4, γνωρίζουμε ότι $W^T = -W$, εάν $n \equiv 0(mod 4)$, δηλαδή ο πίνακας είναι αντι-συμμετρικός, και $W^T = W$, εάν $n \equiv 2(mod 4)$, δηλαδή ο πίνακας είναι συμμετρικός.

Θα δείξουμε ότι, εάν διαγράψουμε r γραμμές και στήλες, τότε ο πίνακας που προκύπτει έχει ορίζουσα

$$W(n-r) = [(n-1)^{n-r-2^{r-1}} \cdot det\, M]^{1/2},$$

όπου ο M είναι ένας $2^{r-1} \times 2^{r-1}$ πίνακας, ο οποίος υπολογίζεται μέσω της διαδικασίας που περιγράφουμε παρακάτω.

Χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε αλγόριθμο ομαδοποίησης των $r+1$ έως n στηλών του W (έχοντας ως οδηγό τα πρώτα r στοιχεία), λαμβάνουμε έναν H-ισοδύναμο πίνακα W'.

Επεξήγηση: Οι πρώτες r στήλες του W δεν αλλάζουν αλλά οι υπόλοιπες στήλες μετακινούνται ούτως ώστε τα πρώτα r στοιχεία τους, εφόσον είναι όμοιες στήλες, να εμφανίζονται σε μπλοκ. Για παράδειγμα, $n = 6$ στήλες της μορφής

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & - & 1 & - & - & 1 \\ 1 & 1 & - & 1 & - & - \end{matrix} \quad \text{θα γραφούν ως} \quad \begin{matrix} \overbrace{1}^{u_1} & \overbrace{1 \quad 1}^{u_2} & \overbrace{1 \quad 1}^{u_3} & \overbrace{1}^{u_4} \\ 1 & 1 \quad 1 & - \quad - & - \\ 1 & - \quad - & 1 \quad 1 & -. \end{matrix}$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στις γραμμές του W' και λαμβάνουμε τον H-ισοδύναμο πίνακα W''.

Επεξήγηση: Όπως πριν οι πρώτες r γραμμές του W'' παραμένουν ως έχουν, ενώ οι υπόλοιπες γραμμές μετακινούνται ούτως ώστε τα πρώτα r στοιχεία τους, εφόσον είναι ίδια, να σχηματίζουν μπλοκ.

Σημείωση 3.1. *Τέτοιες διαδικασίες ομαδοποίησης δεν επηρεάζουν τη συμμετρία. Εάν η στήλη i γίνει στήλη j, τότε η γραμμή i θα γίνει γραμμή j. Έτσι, διατηρούμε τη συμμετρία ή αντι-συμμετρία.*

Τώρα ο W'' έχει την ακόλουθη μορφή

$$W'' = \left[\begin{array}{c|c} A_{r\times r} & \overbrace{\widetilde{u}_1 \ \dots \ \widetilde{u}_1}^{u_1} \ \dots \ \overbrace{\widetilde{u}_i \ \dots \ \widetilde{u}_i}^{u_i} \ \dots \ \overbrace{\widetilde{u}_{2^{r-1}} \ \dots \ \widetilde{u}_{2^{r-1}}}^{u_{2^{r-1}}} \\ \hline u_1\left\{\begin{matrix}\widetilde{u}_1^T \\ \vdots \\ \widetilde{u}_1^T\end{matrix}\right. & \\ \dots & \\ u_i\left\{\begin{matrix}\widetilde{u}_i^T \\ \vdots \\ \widetilde{u}_i^T\end{matrix}\right. & \\ & C_{(n-r)\times(n-r)} \\ \dots & \\ u_{2^{r-1}}\left\{\begin{matrix}\widetilde{u}_{2^{r-1}}^T \\ \vdots \\ \widetilde{u}_{2^{r-1}}^T\end{matrix}\right. & \end{array}\right]$$

Διαγράφουμε τις r πρώτες γραμμές του W'' και τις αντίστοιχες r στήλες και προκύπτει ο πίνακας C.

Βρίσκουμε τον CC^T. Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό της ορίζουσάς του, δίνουμε πρώτα μερικές χρήσιμες ιδιότητες.

1. Ο πίνακας C έχει διάσταση $n - r$. Έχει μηδενικά διαγώνια στοιχεία και τα υπόλοιπα στοιχεία ± 1.

2. Ο CC^T είναι συμμετρικός με διαγώνια στοιχεία $n-r-1$. Το (i,j) στοιχείο του CC^T είναι το εσωτερικό γινόμενο της i-οστής γραμμής και της j-οστής γραμμής του C.

3. Εφόσον ο W'' είναι Η-ισοδύναμος με τον W, έπεται ότι οι γραμμές (στήλες) του είναι ανά δύο ορθογώνιες. Συνεπώς,

$$CC^T = \begin{bmatrix} D_1 & c_{1,2}J & c_{1,3}J & \dots & c_{1,2^{r-1}}J \\ c_{1,2}J^T & D_2 & c_{2,3}J & \dots & c_{2,2^{r-1}-1}J \\ c_{1,3}J^T & c_{2,3}J^T & D_3 & \dots & c_{3,2^{r-1}-1}J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1,2^{r-1}}J^T & c_{2,2^{r-1}-1}J^T & c_{3,2^{r-1}-1}J^T & \dots & D_{2^{r-1}} \end{bmatrix},$$

$$\text{όπου } D_i = \begin{bmatrix} n-r-1 & -r & \dots & -r & -r \\ -r & n-r-1 & \dots & -r & -r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -r & -r & \dots & -r & n-r-1 \end{bmatrix}_{u_i \times u_i},$$

και οι συντελεστές $c_{i,j}$ προκύπτουν από τον υπολογισμό των αντίστοιχων εσωτερικών γινομένων.

Για παράδειγμα, για $n = 16, k = 3$, έχουμε $\widetilde{u}_1^T \cdot \widetilde{u}_3 = 1$, άρα $c_{1,3} = -1$. Ομοίως, για $n = 24, k = 4$, έχουμε $\widetilde{u}_3^T \cdot \widetilde{u}_7 = 2$ άρα, $c_{3,7} = -2$.

Ένας αλγόριθμος υπολογισμού της ορίζουσας του πίνακα CC^T

1ο Βήμα: Γράφουμε $v_i = \sum_{j=1}^{i} u_j$. Αφαιρούμε τη στήλη v_i από τις στήλες $v_{i-1}+1$, $v_{i-1}+2$, $\dots$, $v_{i-1}+u_i-1$, $i = 1, 2, \dots, 8$. (Στο εξής θεωρούμε $v_0 = 0$). Τότε, οι παραπάνω υποπίνακες του CC^T τροποποιούνται ως εξής

$$D_i^* = \begin{bmatrix} n-1 & 0 & \dots & 0 & -r \\ 0 & n-1 & \dots & 0 & -r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & -r \\ -n+1 & -n+1 & \dots & -n+1 & n-r-1 \end{bmatrix}_{u_i \times u_i}, \quad c_{i,j}J^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & c_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{i,j} \\ 0 & 0 & \dots & c_{i,j} \end{bmatrix}_{u_i \times u_j},$$

$i = 1, 2, \ldots, 2^{r-1}$.

2ο Βήμα: Στη γραμμή v_i προσθέτουμε τις γραμμές $v_{i-1}+1$, $v_{i-1}+2$, $\ldots$,$v_{i-1}+u_i-1$, $i = 1$, 2, ..., 8, $i = 1, 2, \ldots, 8$. Τότε,

$$D_i^{\dagger} = \begin{bmatrix} n-1 & 0 & \ldots & 0 & -r \\ 0 & n-1 & \ldots & 0 & -r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & n-1 & -r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n-u_ir-1 \end{bmatrix}_{u_i \times u_i}, \; c_{i,j}J^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & c_{i,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_{i,j} \\ 0 & 0 & \ldots & u_ic_{i,j} \end{bmatrix}_{r \times u_i}$$

3ο Βήμα: Χρησιμοποιώντας το βασικό ορισμό της ορίζουσας, αναπτύσσουμε την ορίζουσα του πίνακα, που έχει προκύψει, ως προς τις στήλες με ένα μη μηδενικό στοιχείο. Έτσι,

$$det\, CC^T = (n-1)^{n-r-2^{r-1}} \cdot det\, M,$$

όπου

$$M = \begin{bmatrix} n-1-ru_1 & u_1c_{1,2} & u_1c_{1,3} & \cdots & u_1c_{1,2^{r-1}} \\ u_2c_{1,2} & n-1-ru_2 & u_2c_{2,3} & \cdots & u_2c_{2,2^{r-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{2^{r-1}}c_{1,2^{r-1}} & u_{2^{r-1}}c_{2,2^{r-1}} & u_{2^{r-1}}c_{3,2^{r-1}} & \cdots & n-1-ru_{2^{r-1}} \end{bmatrix}_{2^{r-1} \times 2^{r-1}},$$

$c_{i,j} = -\widetilde{u_i}^T \cdot \widetilde{u_j}, \quad i,\ j = 1, \ldots, 2^{r-1}.$

Τώρα,

$$det\, C = ((n-1)^{n-r-2^{r-1}} \cdot det\, M)^{\frac{1}{2}}$$

και τελικά,

$$W(n-k) = ((n-1)^{n-r-2^{r-1}} \cdot det\, M)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Αριθμητικά Αποτελέσματα

Υπολογίσαμε υποορίζουσες για πίνακες στάθμισης $W(n, n-1)$ μέχρι τάξη 32. Τα αποτελέσματα δίνονται στον Πίνακα 1 και ισχύουν για υποορίζουσες τάξης $n-k$ ικανοποιητικά μικρότερη από n.

n	$W(n-1)$	$W(n-2)$	$W(n-3)$	$W(n-4)$	$W(n-5)$
14	0	$(n-1)^{n-4}$	$(n-1)^7 \cdot det\, M_{4\times4}$	$(n-1)^3 \cdot det\, M_{7\times7}$	-
16	0	$(n-1)^{n-4}$	$0 = (n-1)^9 \cdot det\, M_{4\times4}$	$(n-1)^4 \cdot det\, M_{8\times8}$	-
18	0	$(n-1)^{n-4}$	$(n-1)^{11} \cdot det\, M_{4\times4}$	$(n-1)^7 \cdot det\, M_{7\times7}$	-
20	0	$(n-1)^{n-4}$	$0 = (n-1)^{13} \cdot det\, M_{4\times4}$	$(n-1)^8 \cdot det\, M_{8\times8}$	$0 = (n-1)^3 \cdot det\, M_{12\times12}$
24	0	$(n-1)^{n-4}$	$0 = (n-1)^{17} \cdot det\, M_{4\times4}$	$(n-1)^{12} \cdot det\, M_{8\times8}$	$0 = (n-1)^7 \cdot det\, M_{12\times12}$
32	0	$(n-1)^{n-4}$	$(n-1)^{25} \cdot det\, M_{4\times4}$	$(n-1)^{20} \cdot det\, M_{8\times8}$	$(n-1)^{12} \cdot det\, M_{15\times15}$

Πινακας 1

Σημείωση 3.2. *Για $n = 32, k = 5$ αναμένουμε την ακόλουθη τιμή $(n-5)\times(n-5)$ υποορίζουσας :*

$$W(n-5) = (n-1)^{11} \cdot det\, M_{16\times16}.$$

Όμως κάνοντας υπολογισμούς στον υπολογιστή για έναν από τους πάνω από 30000 $W(32, 31)$, *βρήκαμε*

$$W(n-5) = (n-1)^{12} \cdot det\, M_{15\times15}$$

το οποίο δείχνει ότι για "ειδικούς" πίνακες στάθμισης n $(n-k)\times(n-k)$ υποορίζουσα μπορεί να υπολογιστεί με $det\, M_a$, όπου $a < 2^{k-1}$.

Κεφάλαιο 4

Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε πίνακες στάθμισης $W(n, n-1)$ με μηδενικά στη διαγώνιο και αναπτύξαμε

- μία νέα μεθοδολογία για τον υπολογισμό υποοριζουσών $(n-r)\times(n-r)$, $\quad r = 1, 2, 3$
- ένα νέο αλγόριθμο προσδιορισμού της $(n-r)\times(n-r)$ υποορίζουσας, για κάθε $r \geq 1$.

Το πλεονέκτημα αυτής της νέας προσέγγισης συγκριτικά με την προϋπάρχουσα μεθοδολογία που υπαγορεύει το Θεώρημα Απλοποίησης Οριζουσών (Determinant Simplification Theorem) είναι η μικρότερη υπολογιστική πολυπλοκότητα κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου, καθώς και ότι απαιτεί τον υπολογισμό ορίζουσας ενός πίνακα M του οποίου η διάσταση ενδέχεται, ανάλογα με τη μορφή του πίνακα στάθμισης, να είναι μικρότερη από τη διάσταση του πίνακα D που προκύπτει από το Θεώρημα Απλοποίησης Οριζουσών (Determinant Simplification Theorem).

Παράρτημα Α΄

Παράρτημα

Α΄.1 Υποορίζουσες τάξης $n-3$

1η περίπτωση $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$

Για $n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ ας θεωρήσουμε τον πίνακα $W = W(16, 15)$

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	0	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	0	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	0	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	-1	0	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1	-1	0	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	0	-1	-1	1	1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	0	1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	0	-1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	0	1	-1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	0	-1	1	1
1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	0	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	0	1
1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	0

Ονομάζουμε C το κάτω δεξιά $(n-3)\times(n-3)$ μέρος του W και $A = CC^T$. Παρατηρούμε ότι ο A είναι γραμμο-ισοδύναμος με τον ακόλουθο πίνακα.

12	-3	-3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-3	12	-3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-3	-3	12	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	12	-3	-3	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-3	12	-3	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-3	-3	12	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	12	-3	-3	-3	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	-3	12	-3	-3	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	-3	-3	12	-3	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	-3	-3	-3	12	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	12	-3	-3
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-3	12	-3
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-3	-3	12

Εφαρμόζοντας κατάλληλους μετασχηματισμούς *Η-ισοδυναμίας*, μπορούμε να φέρουμε τον A σε μια πιο δομημένη μορφή, από την οποία η ορίζουσα εξάγεται εύκολα. Συνεχίζουμε τη διαδικασία στο πνεύμα της απόδειξης που δόθηκε στην Πρόταση 3.3.

Βήμα 1: Ξεκινάμε με το πρώτο μπλοκ των $u_1 = 3$ γραμμών, το προσθέτουμε σε κάθε μπλοκ u_1 γραμμών και επίσης προσθέτουμε την 1η γραμμή στη γραμμή $u_1 + u_2 + u_3 = 10$. Παίρνουμε λοιπόν τον πίνακα A_1.

12	-3	-3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-3	12	-3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-3	-3	12	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
11	-4	-4	11	-4	-4	0	0	0	0	0	0	0
-4	11	-4	-4	11	-4	0	0	0	0	0	0	0
-4	-4	11	-4	-4	11	0	0	0	0	0	0	0
11	-4	-4	0	0	0	11	-4	-4	-4	0	0	0
-4	11	-4	0	0	0	-4	11	-4	-4	0	0	0
-4	-4	11	0	0	0	-4	-4	11	-4	0	0	0
11	-4	-4	0	0	0	-4	-4	-4	11	0	0	0
11	-4	-4	0	0	0	0	0	0	0	11	-4	-4
-4	11	-4	0	0	0	0	0	0	0	-4	11	-4
-4	-4	11	0	0	0	0	0	0	0	-4	-4	11

Ορίζουμε $M = A_1 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, όπου A είναι το 3×3 πάνω αριστερά μέρος του πίνακα M, B το 3×10 πάνω δεξί μέρος, C το 10×3 κάτω αριστερά μέρος και D το 10×10 κάτω δεξί μέρος του πίνακα M.

Το συμπλήρωμα του Schur του D στον M είναι $M/D = A - BD^{-1}C$, όπου $B \cdot D^{-1} \cdot C = \begin{bmatrix} 12 & -3 & -3 \\ 12 & -3 & -3 \\ 12 & -3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-4 & -3 & -3 \\ n-4 & -3 & -3 \\ n-4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$.

Έτσι έχουμε $det\, M = det\, D \cdot det\,(M/D) = det\, D \cdot 0 = 0$, δηλαδή $det\, M = 0$.

$$\text{Τότε, } det\,(CC^T) = 0, \text{ άρα } det\, C = 0.$$

2η περίπτωση $n \equiv 2(\text{mod}\, 4)$

Για $n \equiv 2(\text{mod}\, 4)$ ας θεωρήσουμε τον πίνακα $W = W(14, 13)$

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	0	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	1	0	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1
1	1	1	-1	0	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	1	0	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	0	1	-1	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	1	1	0	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	0	1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	0	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	0	1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	0	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	0	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	0

Θέτουμε C το κάτω $(n-3) \times (n-3)$ μέρος του W και $A = CC^T$. Παρατηρούμε ότι ο A είναι γραμμο-ισοδύναμος με τον ακόλουθο πίνακα.

10	-3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-3	10	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	10	-3	-3	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-3	10	-3	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-3	-3	10	1	1	1	1	1	1
-1	-1	1	1	1	10	-3	-3	1	1	1
-1	-1	1	1	1	-3	10	-3	1	1	1
-1	-1	1	1	1	-3	-3	10	1	1	1
-1	-1	1	1	1	1	1	1	10	-3	-3
-1	-1	1	1	1	1	1	1	-3	10	-3
-1	-1	1	1	1	1	1	1	-3	-3	10

Με κατάλληλους μετασχηματισμούς *Η-ισοδυναμίας*, μπορούμε να φέρουμε τον M σε μια πιο δομημένη μορφή από την οποία η ορίζουσά του μπορεί εύκολα να εξαχθεί. Συνεχίζουμε τη διαδικασία στο πνεύμα της απόδειξης που δόθηκε στην Πρόταση 3.3.

Βήμα 1: Ξεκινάμε με το πρώτο μπλοκ $u_1 = 2$ στηλών, ξαναγράφουμε την 1η στήλη χωρίς καμία αλλαγή και αφαιρούμε τις στήλες 2, 3, … , u_1 (εδώ $u_1 = 2$) από την 1η στήλη. Εξακολουθούμε την ίδια διαδικασία με τα επόμενα μπλοκ, δηλαδή αφήνουμε αναλλοίωτη την 1η γραμμή του μπλοκ και αντικαθιστούμε τις υπόλοιπες με τη διαφορά τους από την 1η γραμμή του μπλοκ. Έτσι καταλήγουμε στον πίνακα A_1.

10	13	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0
-3	-13	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0
-1	0	10	13	13	1	0	0	1	0	0
-1	0	-3	-13	0	1	0	0	1	0	0
-1	0	-3	0	-13	1	0	0	1	0	0
-1	0	1	0	0	10	13	13	1	0	0
-1	0	1	0	0	-3	-13	0	1	0	0
-1	0	1	0	0	-3	0	-13	1	0	0
-1	0	1	0	0	1	0	0	10	13	13
-1	0	1	0	0	1	0	0	-3	-13	0
-1	0	1	0	0	1	0	0	-3	0	-13

Βήμα 2: Στο πρώτο μπλοκ $u_1 = 2$ γραμμών, ξαναγράφουμε την 1η γραμμή χωρίς αλλαγές και αφαιρούμε τις γραμμές 2, 3, …, u_1 από την 1η γραμμή. Στις υπόλοιπες

γραμμές του πίνακα προσθέτουμε την 1η γραμμή (του πίνακα). Έτσι, παίρνουμε τον πίνακα A_2.

10	13	-1	0	0	-1	0	0	-1	0	0
13	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	13	9	13	13	0	0	0	0	0	0
9	13	-4	-13	0	0	0	0	0	0	0
9	13	-4	0	-13	0	0	0	0	0	0
9	13	0	0	0	9	13	13	0	0	0
9	13	0	0	0	-4	-13	0	0	0	0
9	13	0	0	0	-4	0	-13	0	0	0
9	13	0	0	0	0	0	0	9	13	13
9	13	0	0	0	0	0	0	-4	-13	0
9	13	0	0	0	0	0	0	-4	0	-13

Θέτουμε $M = A_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, όπου A είναι το 2×2 άνω αριστερό μέρος του πίνακα M, B το 2×9 άνω δεξί μέρος, C το 9×2 κάτω αριστερά μέρος και C το 9×9 κάτω δεξί μέρος.

Το συμπλήρωμα του Schur του D στον M είναι $M/D = A - BD^{-1}C$,
όπου $BD^{-1}C = \begin{bmatrix} 9^2 & \text{-}9{\cdot}13 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n-5)^2 & -(n-5)(n-1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Επομένως, $det\,(M/D) = det\,(A - BD^{-1}C) = 676 = 4 \cdot (n-1)^2$, $det\,D = 4826809 = (n-1)^6$, άρα $det\,M = det\,D \cdot det\,(M/D) = 3.2629 \cdot 10^9 = 4 \cdot (n-1)^8$.

$$\text{Δηλαδή, } det\,(CC^T) = 4 \cdot (n-1)^8 \text{ και } det\,C = 2(n-1)^4.$$

Α΄.2 Υποορίζουσες τάξης $n-4$

Θεωρούμε τον πίνακα $W = W(24, 23)$

0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	0	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	0	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	0	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	-1	0	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
-1	-1	-1	1	-1	-1	0	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	-1	0	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1
-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	0	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	0	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	0	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	-1
-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1
-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	0	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1
-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	0	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	0	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1
-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	0	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0	1	1	1	-1	-1	-1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	0	1	1	1	1	-1	-1
-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	0	1	1	-1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	0	-1	-1	1	1
-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	0	1	1	-1
-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	0	-1	1
-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	0	-1
-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	0

Θέτουμε C το κάτω δεξιά $(n-4) \times (n-4)$ μέρος του W και $A = CC^T$. Τότε, ο A είναι ο ακόλουθος πίνακας.

19	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	0	-2	-2	-2	-2	0	0	0	0	2	2	2
-2	19	-4	-4	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	-2	2	2	0	0	0
-2	-4	19	-4	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	-2	2	2	0	0	0
-2	-4	-4	19	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	-2	2	2	0	0	0
-2	0	0	0	19	-4	-4	-4	-2	0	0	0	0	2	2	-2	-2	0	0	0
-2	0	0	0	-4	19	-4	-4	-2	0	0	0	0	2	2	-2	-2	0	0	0
-2	0	0	0	-4	-4	19	-4	-2	0	0	0	0	2	2	-2	-2	0	0	0
-2	0	0	0	-4	-4	-4	19	-2	0	0	0	0	2	2	-2	-2	0	0	0
0	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	19	2	2	2	2	0	0	0	0	-2	-2	-2
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	19	-4	-4	-4	-2	-2	-2	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	-4	19	-4	-4	-2	-2	-2	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	-4	-4	19	-4	-2	-2	-2	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	-4	-4	-4	19	-2	-2	-2	-2	0	0	0
0	-2	-2	-2	2	2	2	2	0	-2	-2	-2	-2	19	-4	0	0	-2	-2	-2
0	-2	-2	-2	2	2	2	2	0	-2	-2	-2	-2	-4	19	0	0	-2	-2	-2
0	2	2	2	-2	-2	-2	-2	0	-2	-2	-2	-2	0	0	19	-4	-2	-2	-2
0	2	2	2	-2	-2	-2	-2	0	-2	-2	-2	-2	0	0	-4	19	-2	-2	-2
2	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	-2	-2	-2	19	-4	-4
2	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	-2	-2	-2	-4	19	-4
2	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	-2	-2	-2	-4	-4	19

Για τον υπολογισμό της ορίζουσας του πίνακα A ακολουθούμε την αλγοριθμική διαδικασία που περιγράφεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.

Βήμα 1: Γράφουμε $v_i = \sum_{j=1}^{i} u_j$. Αφαιρούμε τη στήλη v_i από τις στήλες $v_{i-1}+1$, $v_{i-1}+2$, …, $v_{i-1}+u_i-1$, $i = 1, 2, \ldots, 8$. (Στο εξής θεωρούμε $v_0 = 0$).

19	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	2
-2	23	0	-4	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	2	0	0	0
-2	0	23	-4	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	2	0	0	0
-2	-23	-23	19	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	2	0	0	0
-2	0	0	0	23	0	0	-4	-2	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	23	0	-4	-2	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	23	-4	-2	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	0
-2	0	0	0	-23	-23	-23	19	-2	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	0
0	0	0	-2	0	0	0	-2	19	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	-2
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	23	0	0	-4	0	-2	0	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	23	0	-4	0	-2	0	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	23	-4	0	-2	0	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	-23	-23	-23	19	0	-2	0	-2	0	0	0
0	0	0	-2	0	0	0	2	0	0	0	0	-2	23	-4	0	0	0	0	-2
0	0	0	-2	0	0	0	2	0	0	0	0	-2	-23	19	0	0	0	0	-2
0	0	0	2	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	0	0	23	-4	0	0	-2
0	0	0	2	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	0	0	-23	19	0	0	-2
2	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	-2	23	0	-4
2	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	-2	0	23	-4
2	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	-2	-23	-23	19

Σχόλιο: Σε αυτό το παράδειγμα $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 4$, $u_4 = 1$, $u_5 = 4$, $u_6 = 2$, $u_7 = 2$, $u_8 = 3$.

Βήμα 2: Στη γραμμή v_i προσθέτουμε τις γραμμές $v_{i-1}+1$, $v_{i-1}+2$, …,$v_{i-1}+u_i-1$, $i = 1$, 2, …, 8, $i = 1, 2, \ldots, 8$.

19	0	0	-2	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	0	2
-2	23	0	-4	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	2	0	0	0
-2	0	23	-4	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	2	0	0	0
-6	0	0	11	0	0	0	0	-6	0	0	0	0	0	-6	0	6	0	0	0
-2	0	0	0	23	0	0	-4	-2	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	23	0	-4	-2	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	23	-4	-2	0	0	0	0	0	2	0	-2	0	0	0
-8	0	0	0	0	0	0	7	-8	0	0	0	0	0	8	0	-8	0	0	0
0	0	0	-2	0	0	0	-2	19	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	-2
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	23	0	0	-4	0	-2	0	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	23	0	-4	0	-2	0	-2	0	0	0
-2	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	23	-4	0	-2	0	-2	0	0	0
-8	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	7	0	-8	0	-8	0	0	0
0	0	0	-2	0	0	0	2	0	0	0	0	-2	23	-4	0	0	0	0	-2
0	0	0	-4	0	0	0	4	0	0	0	0	-4	0	15	0	0	0	0	-4
0	0	0	2	0	0	0	-2	0	0	0	0	-2	0	0	23	-4	0	0	-2
0	0	0	4	0	0	0	-4	0	0	0	0	-4	0	0	0	15	0	0	-4
2	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	-2	23	0	-4
2	0	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	0	0	-2	0	-2	0	23	-4
6	0	0	0	0	0	0	0	-6	0	0	0	0	0	-6	0	-6	0	0	11

Βήμα 3: Χρησιμοποιώντας το βασικό ορισμό της ορίζουσας, αναπτύσσουμε την ορίζουσα του πίνακα Α ως προς τις στήλες με ένα μη μηδενικό στοιχείο. Έτσι, διαγράφουμε τις γραμμές/στήλες $2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 19$ και η ορίζουσα του πίνακα Α είναι 23^{12} φορές την ορίζουσα του ακόλουθου πίνακα Μ.

19	-2	-2	0	-2	0	0	2
-6	11	0	-6	0	-6	6	0
-8	0	7	-8	0	8	-8	0
0	-2	-2	19	2	0	0	-2
-8	0	0	8	7	-8	-8	0
0	-4	4	0	-4	15	0	-4
0	4	-4	0	-4	0	15	-4
6	0	0	-6	0	-6	-6	11

Τελικά, $det\,A = 23^{12} \cdot det\,M = 23^{12} \cdot 279841 = 6.1326 \cdot 10^{21}$.

Βιβλιογραφία

[1] Γ.Δ. Ακρίβης - Β.Α. Δουγαλής, Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, 5η, αναθεωρημένη έκδοση, *Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης*, 2006.

[2] C. Brezinski, The Schur Complement in Numerical Analysis, *The Schur Complement and its Applications*, (Editor F. Zhang), Springer, 2004, 227-228.

[3] R. Craigen, The structure of Weighing Matrices having Large Weights, Designs, *Codes and Cryptography*, **5**, 199-216 (1995).

[4] C.W. Cryer, Pivot size in Gaussian elimination, *Numer. Math.*, **12** (1968), 335-345.

[5] J. Day and B. Peterson, Growth in Gaussian Elimination, *Amer. Math. Monthly*, **95** (1988), 489-513.

[6] Evens Howard, Elementary Matrix Theory, Dover Publications, 1980.

[7] A.V. Geramita, and J. Seberry, Orthogonal Designs: Quadratic Forms and Hadamard Matrices, Marcel Dekker, New York-Basel, 1979.

[8] J.M. Goethals and J.J. Seidel, Orthogonal matrices with zero diagonal, *Canad. J. Math*, **19** (1967), 1001-1010.

[9] K. Griffin and M. J. Tsatsomeros, Principal minors, Part I: A method for computing all the principal minors of a matrix, *Linear Algebra Appl.*, **419** (2006), 107-124.

[10] C. Koukouvinos, M. Mitrouli and J. Seberry, An algorithm to find formulae and values of minors for Hadamard matrices, $W(n, n-1)$, *Linear Algebra and its Appl.*, **330** (2001), 129-147.

[11] C. Koukouvinos, M. Mitrouli and J. Seberry, Growth in Gaussian elimination for weighing matrices, $W(n, n-1)$, *Linear Algebra Appl.*, **306** (2000).

[12] C. Kravvaritis, M. Mitrouli and J. Seberry, Counting Techniques Specifying the Existence of Submatrices in Weighing Matrices, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, **3718** (2005), 294-305.

[13] C. Kravvaritis, and M. Mitrouli, Determinant evaluations for weighing matrices, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. **34** No **2** (2007), 163-176.

[14] C. Kravvaritis, and M. Mitrouli, Evaluation of minors associated to weighing matrices, *Linear Algebra Appl.*, **426** (2007), 774-809.

[15] C. Kravvaritis, M. Mitrouli and J. Seberry, On the growth problem for skew and symmetric conference matrices, *Linear Algebra Appl.*, **403** (2005), 183-206.

[16] C. Kravvaritis, M. Mitrouli and J. Seberry, On the pivot structure for the weighing matrix $W(12, 11)$, *Linear and Multilinear Algebra*, Vol. **55**, No **5** (2007), 471-490.

[17] M. Tsatsomeros and L. Li, A recursive test for P-matrices, *BIT* **40** (2000), 404-408.

[18] J. H. Wilkinson, Error analysis of direct methods of matrix inversion, *J. Assoc. Comput. Mach.*, **8** (1961), 281-330.