



Εθνικό και Καποδιστριακό
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Bundle Gebres και Συνεστραμμένη K-Θεωρία

Ζαβιτσάνος Γεώργιος

Αθήνα, Σεπτέμβρης 2012



Εθνικό και Καποδιστριακό
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Bundle Gerbes και Συνεστραμμένη K-Θεωρία

Μεταπτυχιακή Εργασία

Ζαβιτσάνος Ε. Γεώργιος

Επιβλέπων Καθηγητής:
Ανδρουλιδάκης Ιάκωβος, Επίκουρος Καθηγητής

Μέλη Επιτροπής:

1. Εμμανουήλ Ιωάννης
Καθηγητής
2. Λάππας Διονύσιος
Αναπληρωτής Καθηγητής

Περιεχόμενα

1	Συνομολογία Deligne	1
1.1	Ανασκόπηση της Συνομολογίας Δεματιού	1
1.1.1	Ομάδες Υπερσυνομολογίας	4
1.2	Συνομολογία Deligne	5
1.2.1	Σύντομες ακριβείς ακολουθίες	6
1.3	Μονοδιάστατες διανυσματικές δέσμες με συνοχή	7
1.3.1	Ταξινόμηση των γραμμικών δεσμών με συνοχή	9
2	Bundle Gerbes	11
2.1	Ορισμοί	11
2.2	Αλγεβρικές κατασκευές	12
2.3	Η κλάση Dixmier-Douady	13
2.3.1	Ορισμός και ιδιότητες της κλάσης Dixmier-Douady	13
2.3.2	Το ταυτολογικό bundle gerbe	15
2.3.3	Το ανυψωμένο bundle gerbe	16
2.3.4	Σταθερά ισόμορφα bundle gerbes	17
2.4	Συνοχή και κυρτότητα	18
2.5	Bundle gerbe πρότυπα	21
2.5.1	Η ημιομάδα $Mod(L)$	22
2.5.2	Προβολικές δέσμες	23
3	Τοπολογική και Αλγεβρική K-Θεωρία	27
3.1	Η ομάδα Grothendieck	27
3.2	Η ομάδα $K^0(X)$	28
3.2.1	Η ομάδα $\tilde{K}^0(X)$	29
3.2.2	Ο χώρος ταξινόμησης $BU \times \mathbb{Z}$	30
3.3	Αλγεβρική K-Θεωρία	31
3.3.1	C^* -άλγεβρες	34
3.3.2	Ομάδες ανώτερου βαθμού	35
3.3.3	Η ακολουθία των έξι όρων	36
3.3.4	Η ακολουθία Mayer-Vietoris	37
3.3.5	Υπολογισμός των K-ομάδων για την S^3	38
4	Η άποψη του Atiyah για την K-Θεωρία	39
4.1	Τελεστές Fredholm και Fredholm δείκτης	39
4.2	Το κύριο Θεώρημα	41

5 Bundle gerbe K-Θεωρία και Συνεστραμμένη K-Θεωρία	47
5.1 K-Θεωρία για Bundle Gerbes με στρέψη	47
5.2 Συνεστραμμένη K-Θεωρία	48
5.3 Συνεστραμμένη K-Θεωρία στην περίπτωση στρέψης	51
5.4 Συνεστραμμένη K-Θεωρία στην περίπτωση μη στρέψης	53
5.4.1 U_K bundle gerbe πρότυπα	54
A' Δεμάτια και προδεμάτια	57
B' Descent Data	59
Γ' Θεώρημα ταξινόμησης για διανυσματικές δέσμες	61
Δ' Τα αξιώματα Eileberg-Steenrod	63

Κεφάλαιο 1

Συνομολογία Deligne

Στο κεφάλαιο αυτό συζητούμε την γεωμετρική αναπαράσταση των κλάσεων της συνομολογίας Deligne και ιδιαίτερα τα bundle gerbes.

1.1 Ανασκόπηση της Συνομολογίας Δεματιού

Θα αρχίσουμε με μερικές πληροφορίες για την συνομολογία δεματιού (sheaf cohomology). Ακολουθούμε το βιβλίο του Brylinski [Βρυλ] για να δώσουμε κάποιες πληροφορίες απαραίτητες για να ορίσουμε την συνομολογία Deligne.

Έστω A ένα δεμάτι αβελιανών ομάδων επί πολλαπλότητας M . Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε ανοιχτό σύνολο $U \subseteq M$, επισυνάπτουμε μια αβελιανή ομάδα $A(U)$ η οποία ικανοποιεί μερικά αξιώματα για τους περιορισμούς στα υποσύνολα. Πάντοτε, υποθέτουμε ότι η πολλαπλότητα είναι παρασυμπαγής, το οποίο σημαίνει ότι κάθε ανοιχτό κάλυμμα έχει τοπικά πεπερασμένο υποκάλυμμα. Τα παραδείγματα δεματιών που θα μας αποσχολήσουν είναι:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_M, \mathbb{R}_M, U(1)_M & : \text{δεμάτι τοπικά σταθερών συναρτήσεων επί της } M \\ \underline{\mathbb{R}}_M, \underline{U}(1)_M & : \text{δεμάτι λείων } \mathbb{R}\text{- ή } U(1)\text{-συναρτήσεων επί της } M \\ \Omega_M^p & : \text{δεμάτι μιγαδικών διαφορικών } p\text{-μορφών επί της } M \end{aligned}$$

Ένα σύμπλεγμα δεματιών K^\bullet είναι μια ακολουθία

$$\dots \xrightarrow{d^{n-1}} K^n \xrightarrow{d^n} K^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

όπου $n \in \mathbb{Z}$ και $d^n : K^n \rightarrow K^{n+1}$ είναι μορφισμοί δεματιών αβελιανών ομάδων που ικανοποιούν $d^n \circ d^{n+1} = 0$. Η απεικόνιση d^n ονομάζεται διαφορικό του συμπλέγματος. Ορίζουμε ότι $K^p = 0$ για $p < 0$. Ένας μορφισμός συμπλεγμάτων δεματιών $\phi : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ αποτελείται από μια οικογένεια μορφισμών δεματιών $\phi^n : K^n \rightarrow L^n$ τέτοιοι ώστε $\phi^{n+1} \circ d_K^n = d_L^n \circ \phi^n$. Ένα χρήσιμο παράδειγμα για περαιτέρω μελέτη είναι:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}_M & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}_M & \xrightarrow{d} & \Omega_M^1 \\ \downarrow 0 & & \downarrow \exp & & \downarrow id \\ 0 & \longrightarrow & \underline{U}(1)_M & \xrightarrow{d \log} & \underline{\Omega}_M^1 \end{array}$$

Στην πάνω σειρά, έχουμε το σύμπλεγμα των σταθερών \mathbb{Z} -συναρτήσεων επί της M , οι οποίες περιέχονται στο δεμάτι των \mathbb{R} -συναρτήσεων επί της M , οι οποίες με τη σειρά τους μας δίνουν το δεμάτι των 1-διαφορικών μορφών Ω^1 επί της M και η απεικόνιση είναι η συνήθης παραγωγός d των συναρτήσεων. Στην κάτω σειρά, το δεμάτι των $U(1)$ -συναρτήσεων επί της M μας δίνει το δεμάτι των 1-μορφών Ω^1 επί της M μέσω της απεικόνισης $d \log : U(1) \rightarrow \Omega^1, f \mapsto d \log(f) = f^{-1}df$. Όπως μπορεί να δει κανείς το διάγραμμα μετατίθεται, δηλαδή $id \circ d = d \log \circ \exp$.

Δεδομένων δύο μορφισμών ϕ και ψ από το K^\bullet στο L^\bullet , η ομοτοπία H από τον ϕ στον ψ αποτελείται από μια σειρά μορφισμών $H^n : K^n \rightarrow L^{n-1}$ τέτοιων ώστε

$$d_L^n H^n + H^{n+1} d_K^n = \phi^n - \psi^n$$

Ένας μορφισμός συμπλεγμάτων δεματιών $\phi : K^\bullet \rightarrow L^\bullet$ είναι μια ομοτοπική ισοδυναμία αν υπάρχει ένας μορφισμός $\psi : L^\bullet \rightarrow K^\bullet$ και $\phi\psi$ και $\psi\phi$ είναι ομοτοπικές με την ταυτοτική απεικόνιση. Ένα σύμπλεγμα δεματιών καλείται άκυκλο αν $Ker(d^n) = Im(d^{n-1})$ για όλα τα n . Η συνομολογία δεματιού $\underline{H}^p(K^\bullet)$ είναι το συσχετιζόμενο δεμάτι του προδεματιού $Ker(d^j)/Im(d^{j-1})$. Για ένα άκυκλο σύμπλεγμα, όλες οι συνομολογίες δεματιών είναι μηδέν.

Ορισμός 1. [Bρυλ] Το δεμάτι \mathcal{F} των αβελιανών ομάδων επί του X , καλείται 1-1 αν για κάθε διάγραμμα στην κατηγορία των δεματιών των αβελιανών ομάδων επί του X , $\mathcal{AB}(X)$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ & & \downarrow f \\ & & \mathcal{F} \end{array}$$

με $Ker(i) = 0$, υπάρχει μορφισμός $g : B \rightarrow \mathcal{F}$ στην $\mathcal{AB}(X)$ τέτοιος ώστε $g \circ i = f$.

Ορισμός 2. [Bρυλ] Μία 1-1 ανάλυση ενός δεματιού $A \in \mathcal{AB}(X)$ είναι ένα σύμπλεγμα από 1-1 δεμάτια K^\bullet μαζί με έναν μορφισμό $i : A \hookrightarrow K^0$ στην $\mathcal{AB}(X)$ τέτοιοι ώστε,

1. i να είναι μονομορφισμός με εικόνα ίση με $Ker(d^0)$
2. Το σύμπλεγμα

$$A \xrightarrow{i} K^0 \longrightarrow K^1 \longrightarrow \dots$$

να είναι άκυκλο, δηλαδή $\underline{H}^0(K^\bullet) = A$ και $\underline{H}^j(K^\bullet) = 0$ φορ $j \geq 0$.

Οι 1-1 αναλύσεις υπάρχουν πάντα και είναι μοναδικές (στον χώρο πηλίκου με σχέση ισοδυναμίας την ομοτοπική ισοδυναμία).

Έστω $\Gamma(M, \cdot)$ ένας συναρτητής ολικών τομών ο οποίος απεικονίζει το δεμάτι A στην αβελιανή ομάδα $\Gamma(M, A)$ οριζόμενη ως $A(M)$. Το δεμάτι των συνομολογικών ομάδων $H^p(M, A)$ ορίζεται ως η p -ομάδα συνομολογίας του συμπλέγματος

$$\dots \longrightarrow \Gamma(M, I^j) \longrightarrow \Gamma(M, I^{j+1}) \longrightarrow \dots$$

όπου I^\bullet είναι μια 1-1 ανάλυση του A . Για την σύντομη ακριβή ακολουθία δεματιών

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

υπάρχει η μακρά ακριβής ακολουθία στην συνομολογία δεματιών,

$$\dots \longrightarrow H^n(M, A) \longrightarrow H^n(M, B) \longrightarrow H^n(M, C) \longrightarrow H^{n+1}(M, A) \longrightarrow \dots$$

Αν ένας μορφοισμός συμπλεγμάτων δεματιών επάγει έναν ισομορφοισμό στην συνομολογία δεματιών $\underline{H}^n(K^\bullet) \cong \underline{H}^n(L^\bullet)$ τότε αυτός λέγεται *σχεδόν-ισομορφοισμός*.

Παράδειγμα 1: Ένα σημαντικό παράδειγμα μια σύντομης ακριβής ακολουθίας δεματιών είναι η *εκθετική ακριβής ακολουθία*. Για M μια λεία πολλαπλότητα και G μία ομάδα Lie, συμβολίζουμε με \underline{G}_M το δεμάτιων λείων συναρτήσεων $g : U \subset M \rightarrow G$. Ο πυρήνας της εκθετικής απεικόνισης $\exp : \mathbb{R} \rightarrow U(1)$ είναι η υποομάδα $2\pi i \cdot \mathbb{Z}$ του \mathbb{C} , η οποία συμβολίζεται με $\mathbb{Z}(1)$. Έτσι, έχουμε την σύντομη ακριβή ακολουθία,

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}(1) \longrightarrow \underline{\mathbb{R}}_M \xrightarrow{\exp} \underline{U}(1)_M \longrightarrow 0$$

Τότε υπάρχει μια μακρά ακριβής ακολουθία στην συνομολογία δεματιού,

$$\dots \rightarrow H^{n-1}(M, \underline{\mathbb{R}}) \longrightarrow H^{n-1}(M, \underline{U}(1)) \longrightarrow H^n(M, \mathbb{Z}(1)) \longrightarrow H^n(M, \underline{\mathbb{R}}) \rightarrow \dots$$

Ένα χρήσιμο παράδειγμα ανάλυσης η οποία δεν είναι 1-1, είναι η ανάλυση *Čech*. Έστω \mathcal{U} ένα ανοιχτό κάλυμμα της M και έστω U_{i_0, \dots, i_p} η τομή $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ ανοιχτών συνόλων στο κάλυμμα. Η ανάλυση *Čech* είναι ένα σύμπλεγμα $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, A)$ το οποίο ορίζεται ως $\check{C}^p(\mathcal{U}, A) = \prod_{i_0, \dots, i_p} A(U_{i_0, \dots, i_p})$ και η απεικόνιση $\delta : \check{C}^p(\mathcal{U}, A) \rightarrow \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, A)$ ορίζεται ως,

$$\delta(\underline{\alpha})_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (\alpha_{i_0, \dots, i_{j-1}, i_{j+1}, \dots, i_{p+1}})|_{U_{i_0, \dots, i_{p+1}}}$$

όπου έχουμε εισαγάγει τον συμβολισμό $\underline{\alpha} \in \check{C}^{p+1}(\mathcal{U}, A)$ με την υπογράμμιση να σημαίνει την οικογένεια $\alpha_{i_0, \dots, i_p} \in A(U_{i_0, \dots, i_p})$.

Γενικά, η ανάλυση και η συνομολογία δεματιού, εξαρτώνται από την επιλογή του ανοιχτού καλύμματος αλλά για πολλαπλότητες που επιδέχονται ένα καλό κάλυμμα και όλες οι μη κενές τομές συνόλων είναι συσταλτές, η κατασκευή είναι ανεξάρτητη της επιλογής του ανοιχτού καλύμματος και η *Čech* ανάλυση υπολογίζει την συνομολογία δεματιού. Αν A είναι το δεμάτι \mathbb{Z} , τότε ανακτούμε τις ομάδες συνομολογίας *Čech* $\check{H}^p(M, \mathbb{Z})$, για παράδειγμα μια κλάση στην $\check{H}^1(M, \mathbb{Z})$ αποτελείται από μια οικογένεια \mathbb{Z} -συναρτήσεων c_{ij} πάνω από τις διπλές τομές U_{ij} τέτοιες ώστε $c_{jk} - c_{ik} + c_{ij} = 0$ στο U_{ijk} και την σχέση ισοδυναμίας $c_{ij} \sim c_{ij} + b_j - b_i$ όπου b_i και b_j είναι όροι μιας οικογένειας σταθερών οριζόμενων πάνω από τα ανοιχτά σύνολα.

Παρατήρηση: Στην συνομολογία de Rham, είναι γνωστό ότι το *λήμμα Poincare* μας δίνει ότι $H_{dR}^n(M, \mathbb{R}) = 0, n \geq 1$ για κάθε πολλαπλότητα M . Έτσι, από την ισομορφοισμό de Rham και *Čech* συνομολογίας, παίρνουμε ότι $H^n(M, \mathbb{R}) = 0$. Από το Παράδειγμα 1, παίρνουμε τον πολύ χρήσιμο ισομορφοισμό $\check{H}^{n-1}(M, \underline{U}(1)) \xrightarrow{\cong} \check{H}^n(M, \mathbb{Z}(1))$ για κάθε $n \geq 1$.

1.1.1 Ομάδες Υπερσυνολογίας

Ένα διπλό σύμπλεγμα δεματίων, $K^{\bullet, \bullet}$, αποτελείται από δεμάτια $K^{p,q}$ και δύο παραγωγίσεις $d : K^{p,q} \rightarrow K^{p+1,q}$ και $\delta : K^{p,q} \rightarrow K^{p,q+1}$ τέτοιες ώστε $dd = 0$, $\delta\delta = 0$ και $d\delta = \delta d$. Ένα διπλό σύμπλεγμα, μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
 \dots & \xrightarrow{\delta} & K^{p,q} & \xrightarrow{\delta} & K^{p+1,q} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
 \dots & \xrightarrow{\delta} & K^{p,q-1} & \xrightarrow{\delta} & K^{p+1,q-1} & \xrightarrow{\delta} & \dots \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
 \end{array}$$

Κάθε γραμμή και στήλη, αναπαριστά ένα σύμπλεγμα δεματίων που συμβολίζουμε με $K^{\bullet, q}$ και $K^{p, \bullet}$ αντίστοιχα. Το ολικό σύμπλεγμα ενός διπλού συμπλέγματος $K^{\bullet, \bullet}$ είναι ένα σύμπλεγμα K^{\bullet} το οποίο ορίζουμε ως $K^n = \bigoplus_{p+q=n} K^{p,q}$ με το διαφορικό να δίνεται από $D = d + (-1)^p d$.

Έστω K^{\bullet} ένα σύμπλεγμα από δεμάτια με διαφορικό d_K . Μία 1-1 ανάλυση του K^{\bullet} είναι ένα διπλό σύμπλεγμα $I^{\bullet, \bullet}$ με διαφορικά d και δ τέτοια ώστε για κάθε q το σύμπλεγμα $I^{\bullet, q}$ με διαφορικό d να είναι μια 1-1 ανάλυση του K^q , το σύμπλεγμα $d(I^{\bullet, q-1}) \subseteq I^{\bullet, q}$ να είναι μια 1-1 ανάλυση του $d_K(K^{q-1})$, το σύμπλεγμα δεματίων $\text{Ker}(d) \subseteq I^{\bullet, q}$ να είναι μια 1-1 ανάλυση του $\text{Ker}(d_K : K^{q-1} \rightarrow K^q)$ και το σύμπλεγμα συνολογίας δεματίων των γραμμών $\underline{H}^{\bullet, q}$ να είναι μια 1-1 ανάλυση του $\underline{H}^q(K^{\bullet})$.

Ορισμός 3. [Bryl] Δεδομένου ενός συμπλέγματος K^{\bullet} , η ομάδα υπερσυνολογίας $H^p(M, K^{\bullet})$ ορίζεται ως η p -συνολογία του διπλού συμπλέγματος $\Gamma(M, I^{p,q})$, όπου $I^{\bullet, \bullet}$ είναι μια 1-1 ανάλυση του K^{\bullet} .

Δεδομένης μια σύντομης ακριβής ακολουθίας συμπλεγμάτων δεματίων, υπάρχει μια μακρά ακριβής ακολουθία στην υπερσυνολογία. Οι σχεδόν-ισομορφισμοί $\phi : K^{\bullet} \rightarrow L^{\bullet}$ επάγουν ισομορφισμούς στην υπερσυνολογία δεματίων $H^n(M, K^{\bullet}) \cong H^n(M, L^{\bullet})$.

Η ανάλυση Čech που ορίστηκε πριν, μπορεί να γενικευτεί στην περίπτωση ενός συμπλέγματος δεματίων, παίρνοντας την συνήθη ανάλυση Čech για κάθε σύμπλεγμα. Ένα παράδειγμα είναι:

Παράδειγμα 2: Έστω $K^\bullet = \underline{U(1)}_M \xrightarrow{d\log} \Omega_M^1$. Η ανάλυση Čech είναι,

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \Omega_M^1 & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^1) & \xrightarrow{\delta} & \dots \\ \uparrow d\log & & \uparrow d\log & & \uparrow d\log & & \\ \underline{U(1)}_M & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}, \underline{U(1)}) & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^1(\mathcal{U}, \underline{U(1)}) & \xrightarrow{\delta} & \dots \end{array}$$

Μια κλάση της $H^0(M, \underline{U(1)} \rightarrow \Omega^1)$ αποτελείται από $\underline{f} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \underline{U(1)})$ ώστε $f_\beta f_\alpha^{-1} = 1$ και $d\log f_\alpha = 0$, δηλαδή τις τοπικά σταθερές $U(1)$ -συναρτήσεις επί της M .

Μια κλάση της $H^1(M, \underline{U(1)} \rightarrow \Omega^1)$ αποτελείται από ένα ζεύγος $(\underline{g}, \underline{A}) \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \underline{U(1)}) \oplus \check{C}^0(\mathcal{U}, \Omega^1)$ ώστε $g_{\beta\gamma} g_{\alpha\gamma}^{-1} g_{\alpha\beta} = 1$ και $d\log g_{\alpha\beta} = A_\beta - A_\alpha$ και ορίζεται modulo ακριβής σύγκυκλους της μορφής $(h_\alpha^{-1} h_\beta, d\log h_\alpha)$ για κάποια $\underline{h} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \underline{U(1)})$. Οι κλάσεις ανώτερου βαθμού ορίζονται παρόμοια.

1.2 Συνομολογία Deligne

Έστω M μια λεία πολλαπλότητα. Εισάγουμε την κυκλική υποομάδα $\mathbb{Z}(p) = (2\pi\sqrt{-1})^p \cdot \mathbb{Z}$ του \mathbb{C} και θέτουμε $\underline{\Omega}_M^k$ να είναι το δεμάτι των πραγματικών k -διαφορικών μορφών επί της M .

Ορισμός 4. ([Bryl]) Ορίζουμε το σύμπλεγμα δεματίων $\mathbb{Z}(p)_D$, για $p > 0$ ως,

$$\mathbb{Z}(p)_M \xrightarrow{i} \underline{\Omega}_M^0 \xrightarrow{d} \underline{\Omega}_M^1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \underline{\Omega}_M^{p-1}$$

όπου το δεμάτι $\underline{\Omega}^0$ των 0-μορφών ορίζεται ως το δεμάτι των λείων συναρτήσεων \mathbb{R}_M επί της M . Ορίζουμε $\mathbb{Z}(0)_M$ να είναι \mathbb{Z}_M . Οι ομάδες συνομολογίας Deligne ορίζονται ως οι υπερσυνομολογικές ομάδες $H^q(M, \mathbb{Z}(p)_D)$.

Οι κλάσεις Deligne αναπαριστώνται χρησιμοποιώντας τον σχεδόν-ισομορφισμό δεματίων

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}(p) & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}_M & \xrightarrow{d} & \underline{\Omega}_M^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{\Omega}_M^{p-1} \\ & & & & \downarrow \text{exp} & & \downarrow \text{id} \\ & & & & \underline{U(1)}_M & \xrightarrow{d\log} & \underline{\Omega}_M^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{\Omega}_M^{p-1} \\ & & & & & & \downarrow \text{id} \end{array} \quad (1.1)$$

ο οποίος επάγει τον ισομορφισμό,

$$H^q(M, \mathbb{Z}(p)_D) \cong H^{q-1}(M, \underline{U(1)}_M \xrightarrow{d\log} \underline{\Omega}_M^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{\Omega}_M^{p-1}) \quad (1.2)$$

Γενικά, θα συμβολίζουμε το σύμπλεγμα

$$\underline{U(1)}_M \xrightarrow{d\log} \underline{\Omega}_M^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \underline{\Omega}_M^{p-1}$$

με \mathcal{D}^{p-1} και έτσι γράφουμε την (1.2) ως

$$H^q(M, \mathbb{Z}(p)_D) \cong H^{q-1}(M, \mathcal{D}^{p-1})$$

Συνήθως θα χρησιμοποιούμε τις ομάδες $H^{q-1}(M, \mathcal{D}^{p-1})$ και έτσι θα αναφερόμαστε σε αυτές ως συνομολογία Deligne. Οι κλάσεις αυτής της συνομολογίας δεματίων αναπαριστώνται μέσω μιας ανάλυσης Čech σε σχέση με ένα καλό ανοιχτό κάλυμμα, όπως στο Παράδειγμα 2.

1.2.1 Σύντομες ακριβείς ακολουθίες

Στο διάγραμμα (1.1) θεωρούμε την απεικόνιση $d \log \circ \exp \circ i : \mathbb{Z}(p) \rightarrow \Omega_0^1(M)$, την οποία θα συμβολίζουμε απλώς με d . Λόγω του ότι οι απεικονίσεις d και δ μετατίθενται (βλέπε Παράδειγμα 2), έχουμε $d \circ \delta c_i = 0$ για κάθε σταθερή $U(1)$ -συνάρτηση $c_i \in H^0(M, U(1))$. Έτσι, παίρνουμε την ακριβή ακολουθία,

$$0 \longrightarrow H^0(M, U(1)) \xrightarrow{\cong} H^1(M, \mathbb{Z}(1)_D) \xrightarrow{d} \Omega_0^1(M) \longrightarrow 0 \quad (1.3)$$

όπου με $\Omega_0^p(M)$ συμβολίζουμε το σύνολο των κλειστών ακεραίων p -μορφών επί της M (δηλαδή, το ολοκλήρωμα πάνω από έναν κλειστό p -κύκλο να παίρνει τιμές στην ομάδα $\mathbb{Z}(1)$). Ας εξηγήσουμε γιατί η ακολουθία (1.3) είναι ακριβής :

Δεδομένων των $f_i \in \ker(d \log)$, υπάρχουν $U(1)$ -σταθερές $c_i = f_i$ που είναι κλάσεις στην $H^0(M, U(1))$. Έτσι, έχουμε τον ακριβή όρο στην μέση. Έστω επίσης $A \in \Omega_0^1(M)$. Τότε έχουμε $dA|_{U_i} = 0$ και έτσι υπάρχουν \mathbb{R} -συναρτήσεις f_i , τέτοιες ώστε $A_i = d \log f_i$ για κάθε $U_i, i \in I$. Από την $dA_i = dA_j$ στο $U_{ij} = U_i \cap U_j$ παίρνουμε $d \log(\frac{f_i}{f_j}) = 0$ καθώς $f_i^{-1} f_j = i(c_{ij}) = \text{σταθερά}$. Έτσι, υπάρχουν $\hat{f}_{ij} \in \mathbb{Z}$ -συναρτήσεις έτσι ώστε $\hat{f}_{jk} \hat{f}_{ik}^{-1} \hat{f}_{ij} = 1 \implies \hat{f} \in H^1(M, \mathbb{Z}(1))$.

Με παρόμοιο τρόπο, κατασκευάζουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow H^1(M, U(1)) \xrightarrow{i} H^1(M, \mathcal{D}^1) \xrightarrow{d} \Omega_0^2(M) \longrightarrow 0 \quad (1.4)$$

Η (1.4) είναι ακριβής:

Αν $dA_\alpha = 0$ τότε υπάρχουν $f_\alpha \in U(1)$ -συναρτήσεις τέτοιες ώστε $d \log f_\alpha = A_\alpha \implies d \log g_{\alpha\beta} = d \log f_\alpha - d \log f_\beta$ από το Παράδειγμα 2. Έτσι, υπάρχουν $U(1)$ -συναρτήσεις $c_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \cdot f_\alpha \cdot f_\beta$ τέτοιες ώστε $c_{\beta\gamma} c_{\alpha\gamma}^{-1} c_{\alpha\beta} = 1 \implies [c] \in H^1(M, \underline{U}(1))$. Έτσι παίρνουμε τον ακριβή μεσαίο όρο.

Δοσμένης τώρα μιας $\omega \in \Omega_0^2(M)$ με $d\omega = 0$, υπάρχει $A \in \Omega^1(M)$ τέτοια ώστε $\omega_i = dA_i$ πάνω από κάθε $U_i, i \in I$. Επιπλέον, $dA_i = dA_j$ στην τομή U_{ij} και έτσι, $A_j - A_i = d \log g_{ij}$ για τις $U(1)$ -συναρτήσεις g_{ij} . Στην τομή U_{ijk} παίρνουμε την συνθήκη συκύκλου $g_{jk} g_{ik}^{-1} g_{ij} = 1$ και έτσι $(\underline{g}, \underline{A}) \in H^1(M, \mathcal{D}^1)$.

Με παρόμοια επιχειρήματα, η ακολουθία

$$0 \longrightarrow H^2(M, U(1)) \xrightarrow{i} H^2(M, \mathcal{D}^2) \xrightarrow{d} \Omega_0^3(M) \longrightarrow 0 \quad (1.5)$$

είναι ακριβής, δηλαδή για μία $\omega \in \Omega_0^3(M)$ χρησιμοποιώντας το Λήμμα Poincare, μπορεί κανείς να αποδείξει την ύπαρξη μιας 2-μορφής η τέτοιας ώστε $\omega = d\eta$ τοπικά, μιας 1-μορφής A_{ij} τέτοιας ώστε $\eta_j - \eta_j = dA_{ij}$ και $U(1)$ -συναρτήσεων g_{ijk} ώστε $g_{jkl}g_{ikl}^{-1}g_{ijl}g_{ijk}^{-1} = 1$ και έτσι $(g, \underline{A}, \underline{\eta}) \in H^2(M, \mathcal{D}^2)$.

Στην επόμενη ενότητα, θα δούμε ότι η ακριβής ακολουθία (1.4) ταξινομεί τις μονοδιάστατες διανυσματικές δέσμες με συνοχή και καμπυλότητα. Η ακριβής ακολουθία (1.5) θα μας δώσει την ταξινόμηση των bundle gerbes με συνοχή, κυρτότητα και 3-καμπυλότητα (ή αλλιώς Dixmier-Douady κλάση).

1.3 Μονοδιάστατες διανυσματικές δέσμες με συνοχή

Το περιεχόμενο αυτής της ενότητας περιέχεται στο παράρτημα του [ΜιλνΣ]. Έστω, M μια παρασυμπαγής πολλαπλότητα. Τότε,

Ορισμός 5. *Μια λεία μονοδιάστατη διανυσματική δέσμη (εν συντομία γραμμική δέσμη) $p : \zeta \rightarrow M$ είναι μια (τοπικά τετριμμένη) διανυσματική μιγαδική δέσμη διάστασης ένα, η οποία είναι επίσης μια λεία πολλαπλότητα. Για κάθε $x \in M$, η ίνα $\zeta_x = p^{-1}(x)$ είναι ένας μονοδιάστατος μιγαδικός διανυσματικός χώρος.*

Θα θέλαμε να παραγωγίσουμε μια τομή s πάνω από ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset M$. Η ' παράγωγος ' της s θα είναι μια 1-διαφορική μορφή πάνω από το U με τιμές στην ζ . Έστω,

$$T_{\mathbb{C}}^*M = Hom_{\mathbb{R}}(TM, \mathbb{C})$$

η συνεφαπτόμενη δέσμη επί της M με μιγαδική δομή. Τότε το γινόμενο $T_{\mathbb{C}}^*M \otimes \zeta$ είναι επίσης μια μιγαδική διανυσματική δέσμη επί της M . Ο διανυσματικός χώρος των λείων τομών της δέσμης αυτής θα συμβολίζεται με $C^\infty(T_{\mathbb{C}}^*M \otimes \zeta)$.

Ορισμός 6. [ΜιλνΣ] *Μια συνοχή στην ζ είναι μια \mathbb{C} -γραμμική απεικόνιση*

$$\nabla : C^\infty(\zeta) \longrightarrow C^\infty(T_{\mathbb{C}}^*M \otimes \zeta)$$

η οποία ικανοποιεί τον κανόνα Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$$

για κάθε $s \in C^\infty(\zeta)$ και κάθε $f \in C^\infty(M, \mathbb{C})$.

Επιπλέον, η απεικόνιση $s \mapsto \nabla(s)$ είναι συμβατή με τους περιορισμούς σε ανοιχτά υποσύνολα. Η εικόνα $\nabla(s)$ καλείται συναλλοίωτη παράγωγος της s .

Για μια συλλογή (αρχετά μικρών) ανοιχτών συνόλων $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ που καλύπτουν την M , μια ολική συνοχή ορίζεται μοναδικά από τους περιορισμούς στα U_i πάνω από τα οποία η $\zeta|_{U_i}$ είναι τετριμμένη. Επίσης, τοπικά παίρνουμε

$$\nabla_{U_i} : \Gamma(\zeta|_{U_i}) \longrightarrow \Gamma(T_{\mathbb{C}}^*M \otimes \zeta|_{U_i}) \Leftrightarrow \nabla_{U_i} : C^\infty(U_i, \mathbb{C}) \longrightarrow C^\infty(U_i, \mathcal{M}_{n \times n} \otimes \mathbb{C})$$

το οποίο σημαίνει ότι $\nabla(s_i) = \sum \omega_{ij} \otimes s_j$, όπου ω_{ij} είναι ένας τυχαίος $n \times n$ πίνακας με στοιχεία C^∞ μιγαδικές 1-μορφές επί του U .

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση μιας pull-back διανυσματικής δέσμης. Για μια λεία απεικόνιση μεταξύ δύο πολλαπλοτήτων $f : N \rightarrow M$, κάθε συνοχή ∇ στην ζ επάγει μια συνοχή $f^{-1}\nabla$ στην pull-back γραμμική δέσμη $f^{-1}\zeta$ επί της N , για την οποία ισχύει $(f^{-1}\nabla)(f^{-1}s) = f^{-1}\nabla(s)$ για κάθε τοπική τομή s της ζ .

Για μια συνοχή ∇ στην ζ , κατασκευάζουμε μια συνοχή στην δέσμη $T_{\mathbb{C}}^*M \otimes \zeta$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ∇ μαζί με τον τελεστή εξωτερικής παραγώγισης $d : C^\infty(T_{\mathbb{C}}^*) \rightarrow C^\infty(\wedge^2 T_{\mathbb{C}}^*)$.

Λήμμα 1. *[ΜιλνΣ] Για την ∇ , υπάρχει μοναδική \mathbb{C} -γραμμική απεικόνιση*

$$\hat{\nabla} : C^\infty(T_{\mathbb{C}}^* \otimes \zeta) \rightarrow C^\infty(\wedge^2 T_{\mathbb{C}}^* \otimes \zeta)$$

η οποία ικανοποιεί τον κανόνα Leibniz

$$\hat{\nabla}(\theta \otimes s) = d\theta \otimes s - \theta \wedge \nabla(s)$$

για κάθε 1-μορφή θ και για κάθε τομή $s \in C^\infty(\zeta)$. Επιπλέον, $\hat{\nabla}$ ικανοποιεί την ταυτότητα $\hat{\nabla}(f(\theta \otimes s)) = df \wedge (\theta \otimes s) + f\hat{\nabla}(\theta \otimes s)$

Απόδειξη. Για την βάση τομών s_1, \dots, s_n πρέπει να ισχύει

$$\hat{\nabla}(\theta_1 \otimes s_1 + \dots + \theta_n \otimes s_n) = \sum d\theta_i \otimes s_i - \theta_i \wedge \nabla(s_i)$$

Παίρνοντας τον τύπο αυτό ως ορισμό της $\hat{\nabla}$, οι ζητούμενες ταυτότητες εύκολα επαληθεύονται. \square

Θεωρούμε τώρα την σύνθεση $K = \hat{\nabla} \circ \nabla$ δύο \mathbb{C} -γραμμικών απεικονίσεων

$$C^\infty(\zeta) \xrightarrow{\nabla} C^\infty(T_{\mathbb{C}}^* \otimes \zeta) \xrightarrow{\hat{\nabla}} C^\infty(\wedge^2 T_{\mathbb{C}}^* \otimes \zeta)$$

Λήμμα 2. *[ΜιλνΣ] Η τιμή της τομής $K(s) = \hat{\nabla}(\nabla(s))$ στο x εξαρτάται μόνο από το $s(x)$ και όχι από τις τιμές στα υπόλοιπα σημεία της M . Έτσι η αντιστοιχία*

$$s(x) \mapsto K(s)(x)$$

ορίζει μια λεία τομή της μιγαδικής διανυσματικής δέσμης $\text{Hom}(\zeta, \wedge^2 T_{\mathbb{C}}^* \otimes \zeta)$.

Απόδειξη. Προφανώς, ο K είναι ένας τοπικός τελεστής και ο υπολογισμός $\hat{\nabla}(\nabla(fs)) = \hat{\nabla}(df \otimes s + f\nabla(s)) = f\hat{\nabla}(\nabla(s))$ δείχνει ότι ο $K = \hat{\nabla}(\nabla(s))$ είναι $C^\infty(M, \mathbb{C})$ -γραμμικός. Αν $s(x) = s'(x)$, τότε για την βάση s_1, \dots, s_n τομών, έχουμε

$$s' - s = f_1 s_1 + \dots + f_n s_n$$

κοντά στο x , όπου $f_i(x) = 0$. Έτσι,

$$K(s') - K(s) = \sum f_i K(s_i)$$

μηδενίζεται στο x . \square

Ορισμός 7. Η τομή $K = K_{\nabla}$ της διανυσματικής δέσμης $\text{Hom}(\zeta, \wedge^2 T_{\mathbb{C}}^* \otimes \zeta) \cong \wedge^2 T_{\mathbb{C}}^* \otimes \text{Hom}(\zeta, \zeta)$ καλείται *καμπυλότητα της συνοχής* ∇

Σύμφωνα με ένα σημαντικό θεώρημα, το οποίο δεν θα αποδείξουμε (βλέπε [ΚομπΝ]), η καμπυλότητα K είναι μηδέν αν και μόνον αν στην περιοχή κάθε σημείου της M , υπάρχει μια βάση τομών s_1, \dots, s_n της ζ τέτοια ώστε $\nabla(s_1) = \dots = \nabla(s_n) = 0$. Από την ταυτότητα του Leibniz στον ορισμό 6, παρατηρούμε ότι για την ύπαρξη συνάρτησης f τέτοιας ώστε για τη νέα τομή $s' = fs$ να ισχύει $\nabla(s') = 0$, πρέπει να ισχύει ότι ο όρος $d(\frac{\nabla(s)}{s})$ είναι μηδέν. Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε την καμπυλότητα ως την κλειστή 2-μορφή με $K = d(\frac{\nabla(s)}{s})$.

1.3.1 Ταξινόμηση των γραμμικών δεσμών με συνοχή

Θεωρούμε τώρα μια γραμμική δέσμη L επί της M^1 , με τομές s_i (εξαιρούμε την μηδενική τομή) για το ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ της M . Έχουμε την τομή $g_{ij} = \frac{s_i}{s_j}$ του δεματιού $\underline{\mathbb{C}}_M^*$ πάνω από τα U_{ij} (δηλαδή το δεμάτι των λείων μιγαδικών μη-μηδενικών συναρτήσεων πάνω από τα U_{ij}), το οποίο μας δίνει έναν Čech 1-σύγκυκλο με τιμές στο $\underline{\mathbb{C}}_M^*$. Χρησιμοποιώντας την συνοχή, παίρνουμε μια 1-μορφή $\alpha_i = \frac{\nabla(s)}{s}$ πάνω από τα U_i . Έχουμε $\alpha_i - \alpha_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}$ πάνω από τα U_{ij} . Έτσι, παίρνουμε ότι $\delta(\underline{\alpha}) = -d \log(\underline{g})$ όπου $d \log : \underline{\mathbb{C}}_M^* \rightarrow \underline{\Omega}_M^1$ είναι ομομορφισμός αβελιανών δεματιών. Εδώ η απεικόνιση δ συμβολίζει την συνοριακή Čech απεικόνιση. Έτσι, παίρνουμε έναν σύγκυκλο $(\underline{g}, -\underline{\alpha})$ στο Čech διπλό σύμπλεγμα που σχετίζεται με το σύμπλεγμα δεματιών $\underline{\mathbb{C}}_M^* \xrightarrow{d \log} \underline{\Omega}_M^1$.

Έπεται η επόμενη Πρόταση ταξινόμησης,

Πρόταση 1. [Brυλ] Η ομάδα των κλάσεων ισόμορφων γραμμικών δεσμών με συνοχή είναι ισόμορφη με την ομάδα $H^1(M, \mathcal{D}^1)$.

Απόδειξη. Πρώτον, για μια επιλογή του ανοιχτού καλύμματος, δείχνουμε ότι η αλλαγή στις τομές s_i , μας δίνει έναν επιπλέον συνσυνοριακό όρο του $(\underline{g}, \underline{A})$. Πράγματι, έστω $s'_i = f_i s_i$, τότε οι g_{ij} αντικαθίστανται από τις $g'_{ij} = \frac{f_i}{f_j} g_{ij}$ και οι α_i από τις $\alpha'_i = \alpha_i + d \log(f_i)$. Ο επιπλέον συνσυνοριακός όρος είναι ο $(\delta + d \log)(\underline{f})$ για κάποιες $\underline{f} \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \underline{U}(1))$.

Τώρα θα δείξουμε την ανεξαρτησία από το ανοιχτό κάλυμμα. Υποθέτουμε ότι το ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{V} = (V_j)_{j \in J}$ είναι μια επιλέπτυνση του αρχικού $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$, το οποίο σημαίνει ότι υπάρχει μια απεικόνιση $f : J \rightarrow I$ τέτοια ώστε $V_j \subseteq U_{f(j)}$ για κάθε $j \in J$. Τότε για $s_i \in \Gamma(U_i, L)$, παίρνουμε μια τομή t_j της L πάνω από τα V_j ως των περιορισμών των $s_{f(j)}$ στα $V_j \subseteq U_{f(j)}$. Ο Čech 1-σύγκυκλος για το κάλυμμα \mathcal{V}_j που λαμβάνεται από τις t_j είναι προφανώς η εικόνα του 1-σύγκυκλου κάτω από την επαγόμενη απεικόνιση $f_* : C^1(\mathcal{U}, \underline{U}(1)_M) \rightarrow C^1(\mathcal{V}, \underline{U}(1)_M)$. Έτσι, έχουμε τον ομομορφισμό ομάδων

¹Εδώ, θεωρούμε την περίπτωση όπου η πολλαπλότητα M είναι παρασυμπαγής με πεπερασμένο καλό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. Τότε, μπορεί να δείξει κανείς ότι $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \cong H^p(M, \mathbb{R}) \cong H^p_{dR}(M)$ [BoτT].

από την ομάδα των κλάσεων των ζεύγων (L, ∇) στην ομάδα συνολογίας $H^1(M, \mathcal{D}^1)$.

Δείχνουμε το 1-1. Αν η κλάση συνολογίας $(\underline{g}, -\underline{\alpha})$ είναι τετριμμένη, αλλάζουμε τις s_i έτσι ώστε να πετύχουμε $g_{ij} = 1$ και $\alpha_i = 0$. Η πρώτη ισότητα σημαίνει ότι οι s_i κολλούν μεταξύ τους ώστε να σχηματίσουν μια ολική τομή s της L . Η δεύτερη ισότητα σημαίνει ότι $\nabla(s) = 0$. Αυτό συνεπάγεται ότι το ζεύγος (L, ∇) είναι ισόμορφο με την τετριμμένη κλάση των γραμμικών δεσμών με συνοχή.

Για το επί της απεικόνισης, αρχίζει κανείς με έναν Čech 1-σύγκυκλο $(\underline{g}, -\underline{\alpha})$ του ανοιχτού καλύμματος (U_i) με τιμές στο $\underline{U}(1)_M \rightarrow \underline{\Omega}_M^1$.

Έχουμε την συνθήκη του συγκύκλου $g_{jk}g_{ik}^{-1}g_{ij} = 1$ όπως επίσης και την σχέση $d \log g_{ij} = \alpha_i - \alpha_j$. Η πρώτη συνθήκη, μας δίνει μια πρωτεύουσα $U(1)$ -δέσμη και έτσι την συσχετιζόμενη γραμμική δέσμη L [**Παράρτημα Β**]. Η δεύτερη συνθήκη, μας δίνει την ολικά οριζόμενη συνοχή. Ισχυριζόμαστε ότι οι ∇_i και ∇_j συμφωνούν πάνω στα U_{ij} . Αρκεί να δείξουμε ότι $\nabla_i(s_i) = \nabla_j(s_i)$ στα U_{ij} . Έχουμε,

$$\begin{aligned} \nabla_j(s_i) &= \nabla_j(g_{ij}s_j) = g_{ij}\alpha_j \otimes s_j + dg_{ij} \otimes s_j \\ &= \left(\alpha_j + \frac{dg_{ij}}{g_{ij}}\right) \otimes s_i = \alpha_i \otimes s_i \\ &= \nabla_i(s_i) \end{aligned}$$

Έτσι, οι ∇_i κολλούν μεταξύ τους δίνοντας μια ολική συνοχή ∇ . Ο Čech σύγκυκλος που σχετίζεται με το ζεύγος (L, ∇) και τις τομές s_i είναι ακριβώς ο $(\underline{g}, -\underline{\alpha})$. \square

Γεωμετρικά, από την ακριβής ακολουθία (1.4) έχουμε ότι η d απεικονίζει μια γραμμική δέσμη με συνοχή στην 2-μορφή καμπυλότητα της. Επίσης, αναφέρουμε ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ των επίπεδων γραμμικών δεσμών με την ομάδα $H^1(M, \underline{U}(1))$.

Κεφάλαιο 2

Bundle Gerbes

Τα Bundle Gerbes προσφέρουν μια γεωμετρική αναπαράσταση των κλάσεων της $H^3(M, \mathbb{Z})$. Είναι το σημαντικό αντικείμενο μελέτης αυτής της εργασίας και εδώ παρουσιάζουμε την βασική θεωρία.

2.1 Ορισμοί

Ορισμός 8. Έστω $Y \xrightarrow{\pi} M$ μια εμβάπτιση¹. Ένα $U(1)$ -bundle gerbe είναι μια τριάδα (P, Y, M) τέτοια ώστε,

1. $P \xrightarrow{\pi_R} Y^{[2]}$ είναι μια ερμιτιανή γραμμική δέσμη, όπου $Y^{[2]} = Y \times_{\pi} Y = \{(y, y') \in Y^2 : \pi(y) = \pi(y')\}$
2. υπάρχει ένας ισομορφισμός γραμμικών δεσμών $m_P : P_{(y_1, y_2)} \otimes P_{(y_2, y_3)} \xrightarrow{\cong} P_{(y_1, y_3)}$ επί του $Y^{[3]}$ το οποίο ονομάζεται bundle gerbe γινόμενο.

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε το bundle gerbe (P, Y, M) με το εξής διάγραμμα,

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow & \\ Y^{[2]} & \xrightarrow[\pi_2]{\pi_1} & Y \\ & & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

όπου π_1 και π_2 είναι απεικονίσεις από το $Y^{[2]}$ στο Y οριζόμενες ως,

$$\begin{aligned} \pi_1(y_1, y_2) &= y_2, \\ \pi_2(y_1, y_2) &= y_1 \end{aligned}$$

Αυτός ο συμβολισμός μας επιτρέπει να γενικεύσουμε τις απεικονίσεις π_i στα $Y^{[p]} \rightarrow Y^{[p-1]}$ για $i = 1, \dots, p$.

¹Μια διαφορική απεικόνιση μεταξύ δύο διαφορικών πολλαπλοτήτων $Y \xrightarrow{\pi} M$ είναι εμβάπτιση αν και μόνον αν το διαφορικό $d\pi : TY \rightarrow TM$ είναι επί (έχει μέγιστη τάξη). Συνεπώς, τοπικά η Y είναι τοπικά ένα γινόμενο $M \times \mathbb{R}^n$ και $\pi^{-1}(x)$ είναι υποπολλαπλότητα της Y για κάθε $x \in M$.

Παρατήρηση: Η ονομασία $U(1)$ -bundle gerbe προέρχεται από την αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ ερμιτιανών γραμμικών δεσμών και πρωτεύουσών $U(1)$ -δεσμών. Πράγματι, για την ερμιτιανή γραμμική δέσμη $L \rightarrow M$, συμβολίζουμε με L^+ το συμπλήρωμα της μηδενικής τομής στην L . Δύο σημεία y_1, y_2 στην ίδια ίνα διαφέρουν κατά ένα μη-μηδενικό $U(1)$ στοιχείο y_2/y_1 . Η απεικόνιση $L^+ \rightarrow M$ είναι τοπικά πρωτεύουσα δέσμη με δομή $U(1) \cong \mathbb{C}^*$, όπου η ομάδα $U(1)$ δρα με βαθμωτό πολλαπλασιασμό στις ίνες. Αντίστροφα, παίρνουμε την L από την L^+ ορίζοντας $L = (L^+ \times \mathbb{C})/U(1)$, όπου η $U(1)$ δρα στην $L^+ \times \mathbb{C}$ με $\lambda(y, u) = (\lambda^{-1}y, \lambda u)$ για κάθε $\lambda \in U(1)$.

Επειδή θα ασχοληθούμε μόνο με τα $U(1)$ -bundle gerbes, θα αναφερόμαστε σε αυτά ως bundle gerbes. Συχνά θα λέμε ότι το (P, Y) ή το P είναι ένα bundle gerbe επί της M , όταν δεν υπάρχει παρεξήγηση.

2.2 Αλγεβρικές κατασκευές

Πολλές κατασκευές είναι δυνατές για τα bundle gerbes.

- Έστω (P, Y) ένα bundle gerbe επί της M . Για την απεικόνιση πολλαπλοτήτων $\phi : N \rightarrow M$, ορίζουμε το pull-back bundle gerbe $\phi^{-1}P$ το οποίο είναι ένα bundle gerbe επί της N . Έστω ο μορφισμός των εμβαπτίσεων ,

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\hat{\phi}} & Y \\ \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

Δηλαδή, η $Z \rightarrow N$ είναι μια εμβάπτιση και η $\hat{\phi}$ είναι μια απεικόνιση ινών που καλύπτει την ϕ . Τότε υπάρχει η επαγόμενη απεικόνιση $\hat{\phi} : Z^{[2]} \rightarrow Y^{[2]}$, μέσω της οποίας ορίζουμε το pull-back bundle gerbe $(\phi^{-1}P, Z)$.

- Αν (P, Y) και (Q, X) είναι δύο bundle gerbes, ορίζουμε το bundle gerbe γινόμενο $(P \otimes Q)$ επί του $Y \times_{\pi} X = \{(y, x) \in Y \times X : \pi_Y(y) = \pi_X(x)\}$.
- Αν (L, Y) είναι ένα bundle gerbe, τότε μπορούμε να ορίσουμε το δυικό bundle gerbe (L^*, Y) , απλά παίρνοντας την δυική δέσμη L^* επί της Y .

Ορισμός 9. Ένα bundle gerbe (P, Y, M) ονομάζεται τετριμμένο, αν υπάρχει μια γραμμική δέσμη $J \rightarrow Y$ τέτοια ώστε να υπάρχει ένας ισομορφισμών δεσμών,

$$P \cong \pi_1^{-1}(J) \otimes \pi_2^{-1}(J)^* \quad (2.1)$$

όπου π_1 και π_2 είναι οι προβολές κάθε συνιστώσας του $Y^{[2]}$ στην Y .

Παρατήρηση: Εξηγούμε τον ορισμό (2.1). Αν $J \rightarrow Y$ είναι μια πρωτεύουσα $U(1)$ -δέσμη επί της Y , ορίζουμε την ίνα $P_{(x,y)} = \text{Aut}_{U(1)}(J_x, J_y) = J_x^* \otimes J_y$ δηλαδή την ομάδα αυτομορφισμών μεταξύ των ινών της J πάνω από τα $x, y \in Y$ τα στοιχεία της οποίας μετατίθενται με την $U(1)$ δράση στις ίνες. Λόγω του bundle gerbe γινομένου, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τετριμμένο bundle gerbe $P \rightarrow Y^{[2]}$.

Συμβολισμός: Το γινόμενο $\pi_1^{-1}(J) \otimes \pi_2^{-1}(J)^*$ συμβολίζεται επίσης ως $\delta(J)$.

Ορισμός 10. Ένας μορφισμός *bundle gerbes* μεταξύ των (P, Y, M) και (Q, X, N) είναι μια τριάδα από απεικονίσεις (α, β, γ) όπου $\beta : Y \rightarrow X$ είναι μια απεικόνιση ινών που καλύπτει την $\gamma : M \rightarrow N$ και $\alpha : P \rightarrow Q$ είναι ένας μορφισμός δεσμών που καλύπτει την επαγόμενη απεικόνιση $\beta^{[2]} : Y^{[2]} \rightarrow X^{[2]}$. Επιπλέον, η α πρέπει να μετατίθενται με το γινόμενο του *bundle gerbe*. Ένας ισομορφισμός *bundle gerbes* είναι ένας μορφισμός με $M = N$ και όπου η γ είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

2.3 Η κλάση Dixmier-Douady

Κατασκευάζουμε μια κλάση $[g] \in H^2(M, \underline{U}(1)) \cong H^3(M, \mathbb{Z})$ η οποία είναι γνωστή ως Dixmier-Douady κλάση, που αντιστοιχεί στο *bundle gerbe* (P, Y, M) .

2.3.1 Ορισμός και ιδιότητες της κλάσης Dixmier-Douady

Έστω s_α και s_β δύο τοπικές τομές της $Y \rightarrow M$ ορισμένες στα $U_\alpha \subset M$ και $U_\beta \subset M$ αντίστοιχα. Ορίζεται τότε μια τομή $(s_\alpha, s_\beta) : U_{\alpha\beta} \rightarrow Y^{[2]}$. Από την τομή αυτή, κατασκευάζουμε την pull back δέσμη $P_{\alpha\beta} = (s_\alpha, s_\beta)^{-1}P$ επί του $U_{\alpha\beta}$. Επειδή το $U_{\alpha\beta}$ είναι συσταλτό, η $P_{\alpha\beta}$ είναι τετριμμένη και έτσι επιδέχεται μια ολική τομή την οποία συμβολίζουμε ως $\sigma_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow P_{\alpha\beta}$. Πάνω από τις τριπλές τομές $U_{\alpha\beta\gamma}$ το γινόμενο του *bundle gerbe* μας δίνει έναν ισομορφισμό $P_{\alpha\beta} \otimes P_{\beta\gamma} \cong P_{\alpha\gamma}$. Έτσι, υπάρχει μια απεικόνιση $g_{\alpha\beta\gamma} : U_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow U(1)$ τέτοια ώστε

$$\sigma_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.2)$$

Στις τετραπλές τομές έχουμε,

$$\sigma_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\beta\gamma} \otimes \sigma_{\gamma\delta} = \sigma_{\alpha\gamma} \otimes \sigma_{\gamma\delta} g_{\alpha\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta\gamma} g_{\alpha\gamma\delta}$$

αλλά από την άλλη,

$$\sigma_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\beta\gamma} \otimes \sigma_{\gamma\delta} = \sigma_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\beta\delta} g_{\beta\gamma\delta} = \sigma_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta\delta} g_{\beta\gamma\delta}$$

Λόγω προσεταιριστικότητας, καταλήγουμε ότι οι $\{g_{\alpha\beta\gamma}\}$ ικανοποιούν έναν Čech σύγκυκλο

$$g_{\alpha\beta\gamma}^{-1} g_{\alpha\beta\delta} g_{\alpha\gamma\delta}^{-1} g_{\beta\gamma\delta} = 1$$

και έτσι ορίζεται ένα στοιχείο $[g] \in H^2(M, \underline{U}(1))$. Την κλάση του στοιχείου αυτού, την ονομάζουμε Dixmier-Douady κλάση.

Πρόταση 2. Η κλάση Dixmier-Douady του *bundle gerbe* (L, Y) είναι μηδέν αν και μόνον αν το (L, Y) είναι τετριμμένο.

Απόδειξη. Αν το P είναι τετριμμένο, τότε υπάρχει μια γραμμική δέσμη Q επί του Y τέτοια ώστε $P \cong \pi_1^{-1}Q^* \otimes \pi_2^{-1}Q$. Ορίζουμε

$$Q_\alpha = s_\alpha^{-1}(Q)$$

επί του $U_\alpha \subset M$. Τότε έχουμε έναν κανονικό ισομορφισμό,

$$P_{\alpha\beta} = (s_\alpha, s_\beta)^{-1}(\pi_1^{-1}Q^* \otimes \pi_2^{-1}Q) = s_\alpha^{-1}(Q^*) \otimes s_\beta^{-1}(Q)$$

που μετατίθεται με το γινόμενο. Έτσι, υπάρχει μια τομή δ_α του Q_α , τέτοια ώστε,

$$\sigma_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^{-1} \otimes \delta_\beta$$

Έτσι, από την (2.2) ο σύγκυκλος g είναι τετριμμένος. Αν από την άλλη, ο g είναι τετριμμένος, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε $g = 1$. Έστω $Y_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$. Ορίζουμε την πρωτεύουσα $U(1)$ -δέσμη $R_\alpha \rightarrow Y_\alpha$ με την ίνα στο $y \in Y_\alpha$ να είναι

$$(R_\alpha)_y = P_{(y, s_\alpha(\pi(y)))}$$

Κατασκευάζουμε τον ισομορφισμό $\chi_{\alpha\beta}(y) : R_\alpha \xrightarrow{\cong} R_\beta$ παρατηρώντας ότι

$$P_{(y, s_\alpha(\pi(y)))} = P_{(y, s_\beta(\pi(y)))} \otimes P_{(s_\beta(\pi(y)), s_\beta(\pi(y)))}$$

και χρησιμοποιώντας ότι $\sigma_{\alpha\beta} \in P_{(s_\beta(\pi(y)), s_\beta(\pi(y)))}$ επί του $Y_\alpha \cap Y_\beta$. Επειδή $g = 1$, έχουμε $\sigma_{\beta\gamma}\sigma_{\alpha\gamma}\sigma_{\alpha\beta} = 1$ και έτσι παίρνουμε την συνθήκη σύγκυκλου

$$\chi_{\alpha\beta}(y) \circ \chi_{\beta\gamma}(y) = \chi_{\alpha\gamma}(y)$$

Η συλλογή τέτοιων ισομορφισμών, όπως και η συνθήκη του σύγκυκλου, ορίζουν μια *descent data* για το R_y και όπως δείχνουμε στο [Παράρτημα Β] αυτό είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη μιας πρωτεύουσας $U(1)$ -δέσμης $R \rightarrow Y$. Επιπλέον, έχουμε,

$$\delta(R)_{(y_1, y_2)} = R_{y_2} \otimes R_{y_1}^* \cong P_{(y, y_2)} \otimes P_{(y, y_1)}^* \cong P_{(y_1, y_2)}$$

το οποίο σημαίνει ότι το P είναι τετριμμένο. □

Πρόταση 3. Αν L και J είναι *bundle gerbes* επί της M , τότε,

1. $DD(L \otimes J) = DD(L) + DD(J)$.
2. $DD(L^*) = -DD(L)$

Αν $Z \rightarrow N$ μια άλλη εμβάπτιση και $\hat{\phi} : Z \rightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση ινών που καλύπτει την $\phi : N \rightarrow M$, τότε

3. $DD(\phi^{-1}(L), Z) = \phi^{-1}(DD(L, Y))$.

Ειδικότερα, αν $M = N$ και ϕ η ταυτοτική απεικόνιση τότε $DD(\phi^{-1}(L)) = DD(L)$.

Απόδειξη. 1. Από την σύντομη ακριβή ακολουθία ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \underline{U}(1) \longrightarrow 0$$

και τον ισομορφισμό $H^2(M, \underline{U}(1)) \cong H^3(M, \mathbb{Z})$, είναι προφανές ότι για τον σύγκυκλο $[g_{\alpha\beta\gamma} \otimes \hat{g}_{\alpha\beta\gamma}] \in H^2(M, \underline{U}(1))$ που αναπαριστά την κλάση Dixmier-Douady για το *bundle gerbe* $L \otimes J$, έχουμε ότι

$$DD(L \otimes J) = \log(g_{\alpha\beta\gamma} \otimes \hat{g}_{\alpha\beta\gamma}) = \log(g_{\alpha\beta\gamma}) + \log(\hat{g}_{\alpha\beta\gamma}) = DD(L) + DD(J)$$

2. Από τον ισομορφισμό δεσμών $L^* \otimes L \cong \text{Hom}(L, L)$ παίρνουμε ότι το bundle gerbe $L^* \otimes L$ είναι τετριμμένο και έτσι,

$$0 = DD(L^* \otimes L) \stackrel{(1)}{=} DD(L^*) + DD(L)$$

3. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε το διάγραμμα,

$$\begin{array}{ccc} P_{\alpha\beta} & \longleftarrow & \phi^{-1}(P_{\alpha\beta}) \\ \sigma_{\alpha\beta} \uparrow & & \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \uparrow \\ M & \xleftarrow{\phi} & N \end{array}$$

Συμπεραίνουμε ότι $\hat{\sigma}_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} \circ \phi$ και έτσι αντικαθιστώντας στην συνθήκη συγκύκλου, έχουμε

$$\hat{g}_{\alpha\beta\gamma} = \hat{\sigma}_{\alpha\beta} \hat{\sigma}_{\gamma\beta}^{-1} \hat{\sigma}_{\gamma\alpha} = \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\beta}^{-1} \sigma_{\gamma\alpha} \circ \phi = g_{\alpha\beta\gamma} \phi \Rightarrow [\hat{g}_{\alpha\beta\gamma}] = \phi^{-1}[g_{\alpha\beta\gamma}] \in H^3(N, \mathbb{Z})$$

□

Παρατήρηση: Είναι λογικό να σκεφτούμε ότι η Πρόταση 3 ορίζει έναν μορφισμό μεταξύ bundle gerbes επί του M και της ομάδας $H^3(M, \mathbb{Z})$ μέσω της κλάσης Dixmier-Douady. Όπως θα δούμε στις επόμενες ενότητες αυτό είναι αλήθεια όταν περιοριστούμε στις κλάσεις σταθερά ισόμορφων bundle gerbes. Στην περίπτωση αυτή, η Πρόταση 2 υποδεικνύει το 1-1 αυτού του μορφισμού. Θα δούμε αμέσως τώρα το επί, με την κατασκευή του ταυτολογικού bundle gerbe.

2.3.2 Το ταυτολογικό bundle gerbe

Για μια πολλαπλότητα M 2-συνεκτική υπάρχει μια κατασκευή ενός bundle gerbe για μια δεδομένη κλάση $\frac{1}{2\pi i}\omega \in H^3(M, \mathbb{Z})$ ² το οποίο ονομάζεται ταυτολογικό bundle gerbe ([Μαρ1]). Σταθεροποιούμε ένα σημείο x_0 στην M και θεωρούμε την νηματική δομή (fibration),

$$Y = P_0M = \{\rho : [0, 1] \rightarrow M \mid \rho(0) = x_0\}$$

όπου η προβολή $\pi : Y \rightarrow M$ δίνεται από $\pi(\rho) = \rho(1)$. Τότε ο $Y^{[2]}$ είναι ο χώρος των ζευγών λείων μονοπατιών που αρχίζουν από το x_0 και έχουν τέλος στο ίδιο σημείο. Κατασκευάζουμε την $U(1)$ -δέσμη Q επί του $Y^{[2]}$, ορίζοντας την ίνα στο (ρ_0, ρ_1) να είναι ο χώρος των κλάσεων των ζευγών $[\mu, z]$ όπου $\mu : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ είναι μια λεία ομοτοπία με σταθερά σημεία αρχής και τέλους από το ρ_0 στο ρ_1 και z ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός. Δύο ζεύγη $[\mu, z]$ και $[\mu', z']$ ανήκουν στην ίδια κλάση αν για κάθε ομοτοπία

$$F : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$$

μεταξύ μ και μ' έχουμε

$$\exp\left(\int F^*\omega\right)z = z'$$

²Ορίζουμε $H_{dR}^3(M, \mathbb{R}) := \check{H}^3(M, \mathbb{R}) \cong \check{H}^3(M, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$. Έτσι, έχουμε $H_{dR}^3(M, \mathbb{Z}) \cong \check{H}^3(M, \mathbb{Z}) \otimes 1$.

όπου το ολοκλήρωμα λαμβάνεται επί του $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Έχοντας ορίσει την συνάρτηση μεταφοράς της Q ως την απεικόνιση $g : Y^{[2]} \rightarrow U(1)$ με

$$g(\mu, \mu') = \exp\left(\int_{I^3} F^* \omega\right)$$

ο ισομορφισμός γραμμικών δεσμών

$$Q_{(\rho_1, \rho_2)} \otimes Q_{(\rho_2, \rho_3)} \rightarrow Q_{(\rho_1, \rho_3)}$$

$$[\alpha, z] \otimes [\beta, w] \mapsto [\alpha \circ \beta, zw]$$

ορίζεται καλά λόγω του ότι $\alpha(1, t) = \beta(0, t)$ και έτσι με την διαδικασία συγκόλλησης ορίζουμε την ομοτοπία $\alpha * \beta$.

Στην επόμενη ενότητα έχοντας ορίσει την συνοχή στο bundle gerbe, θα αποδείξουμε ότι η κλάση $[\frac{1}{2\pi i} \omega] \in H^3(M, \mathbb{Z})$ είναι πράγματι η κλάση Dixmier-Douady του ταυτολογικού bundle gerbe.

2.3.3 Το ανυψωμένο bundle gerbe

Το ανυψωμένο bundle gerbe εισήχθη ως ένα σημαντικό παράδειγμα στην θεωρία των bundle gerbes ([Μαρε1]). Έστω

$$0 \longrightarrow U(1) \xrightarrow{i} \hat{G} \xrightarrow{p} G \longrightarrow 0 \quad (2.3)$$

μια ακριβής ακολουθία ομάδων Lie με πυρήνα $U(1) \subset \hat{G}$. Αν $Y \rightarrow M$ μια G -δέσμη τότε μπορούμε να αναρωτηθούμε αν ανυψώνεται σε μια \hat{G} -δέσμη $\hat{Y} \rightarrow M$. Αυτό σημαίνει, αν μπορούμε να βρούμε μια \hat{G} -δέσμη $\hat{Y} \rightarrow M$ και ένα μορφοισμό δεσμών $f : \hat{Y} \rightarrow Y$ τέτοιον ώστε $f(yg) = f(y)p(g)$ για όλα τα $y \in \hat{Y}$ και $g \in \hat{G}$. Στην ύπαρξη της \hat{Y} , υπάρχει ένα τοπολογικό εμπόδιο το οποίο υπολογίζουμε όπως παρακάτω.

Επιλέγουμε ένα καλό κάλυμμα \mathcal{U} της M και τοπικές τομές της Y οι οποίες επάγουν τις συναρτήσεις μεταφοράς

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow G$$

κατά τον συνήθη τρόπο. Λόγω του ότι οι διπλές τομές είναι συσταλτές διαλέγουμε ανυψώσεις για κάθε $g_{\alpha\beta}$ στις $\hat{g}_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \hat{G}$, τέτοιες ώστε $p(\hat{g}_{\alpha\beta}) = g_{\alpha\beta}$. Αυτές είναι οι υποψήφιος συναρτήσεις μεταφοράς για την ανυψωμένη δέσμη \hat{Y} . Παρόλαυτα, μπορεί να μην ικανοποιούν την συνθήκη σύγκυκλου όπως οι $g_{\alpha\beta}$ και έτσι υπάρχει μια απεικόνιση

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} : U_{\alpha\beta\gamma} \longrightarrow U(1)$$

ορισμένη ως

$$i(\epsilon_{\alpha\beta\gamma}) = \hat{g}_{\alpha\beta} \hat{g}_{\beta\gamma} \hat{g}_{\gamma\alpha}$$

Επειδή η (2.3) είναι μια ακριβής ακολουθία, έπεται ότι ο $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ είναι ένας σύγκυκλος και έτσι ορίζει μια κλάση στην $H^2(M, U(1)) \cong H^3(M, \mathbb{Z})$ ο οποίος είναι το εμπόδιο για

την ανύψωση της Y .

Έστω $Y_G \rightarrow M$ μια G -δέσμη. Το ανυψωμένο bundle gerbe Q ορίζεται από το επόμενο διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccc} Q & & \hat{G} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Y_G^{[2]} & \xrightarrow{\rho} & G \end{array}$$

Η απεικόνιση $\rho : Y_G^{[2]} \rightarrow G$ ορίζεται έτσι ώστε το $\rho(y_1, y_2)$ να είναι στοιχείο της G το οποίο να ικανοποιεί $y_2 = y_1 \rho(y_1, y_2)$. Από την (2.3) έχουμε μια $U(1)$ -δέσμη $\hat{G} \xrightarrow{p} G$ από την οποία παίρνουμε ως pull back μια $U(1)$ -δέσμη $Q \rightarrow Y_G^{[2]}$, όπου ορίζουμε

$$Q = \{(y_1, y_2, \hat{g}) \in Y_G^{[2]} \times \hat{G} : \rho(y_1, y_2) = p(\hat{g})\}$$

Επιπλέον, από την συνθήκη $\rho(y_1, y_2)\rho(y_2, y_3) = \rho(y_1, y_3)$ παίρνουμε το bundle gerbe γινόμενο,

$$Q_{(y_1, y_2)} \otimes Q_{(y_2, y_3)} \longrightarrow Q_{(y_1, y_3)}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η κλάση Dixmier-Douady του ανυψωμένου bundle gerbe που μόλις ορίσαμε, είναι ακριβώς το εμπόδιο για την ανύψωση της G -δέσμης Y στην \hat{Y} .

Πράγματι, αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι τομές $\sigma_{\alpha\beta}$ της pull back δέσμης $Q_{\alpha\beta} = (s_\alpha, s_\beta)^* Q \rightarrow M$, όπου

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta} &= \{(x, y_1, y_2, \hat{g}) \in M \times Y^{[2]} \times \hat{G} : (s_\alpha, s_\beta)(x) = (y_1, y_2), \rho(y_1, y_2) = p(\hat{g})\} \\ &= \{(x, \hat{g}) \in M \times \hat{G} : \rho \circ (s_\alpha, s_\beta)(x) = p(\hat{g})\} \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμες με \hat{G} -ισομεταβλητές απεικονίσεις $\hat{g}_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \hat{G}$ ³. Έτσι η κλάση $[\epsilon_{\alpha\beta\gamma}]$ που ορίστηκε προηγουμένως, είναι ακριβώς η κλάση Dixmier-Douady του ανυψωμένου bundle gerbe.

Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι,

Πρόταση 4. *Το ανυψωμένο bundle gerbe που προέρχεται από την πρωτεύουσα G -δέσμη $Y \rightarrow M$ και την ακριβή ακολουθία της \hat{G} είναι τετριμμένο αν και μόνον αν η Y ανυψώνεται σε μια \hat{G} -δέσμη.*

2.3.4 Σταθερά ισόμορφα bundle gerbes

Ορισμός 11. Δύο bundle gerbes (P, Y) και (Q, Z) ονομάζονται σταθερά ισόμορφα αν υπάρχουν τετριμμένα bundle gerbes T_1 και T_2 τέτοια ώστε

$$P \otimes T_1 = Q \otimes T_2$$

³Μια απόδειξη αυτού του γεγονότος θα γίνει σε επόμενη ενότητα όταν θα ορίσουμε την συνεστραμμένη K -Θεωρία.

Ισοδύναμοι ορισμοί δίνονται από την παρακάτω,

Πρόταση 5. Για δυο *bundle gerbes* (P, Y) και (Q, Z) τα επόμενα είναι ισοδύναμα,

1. P και Q είναι σταθερά ισοδύναμα
2. $P \otimes Q^*$ είναι τετριμμένο
3. $DD(P) = DD(Q)$

Απόδειξη. $(1 \Rightarrow 3)$ Προφανώς σταθερά ισόμορφα *bundle gerbes* έχουν την ίδια Dixmier-Douady κλάση καθώς τα τετριμμένα *bundle gerbes* έχουν μηδενική Dixmier-Douady κλάση η οποία είναι προσθετική για το γινόμενο *bundle gerbes*.

$(3 \Rightarrow 2)$ Αν $DD(P) = DD(Q)$ τότε $DD(P \otimes Q^*) = DD(P) - DD(Q) = 0$. Έτσι, $P \otimes Q^*$ είναι τετριμμένο.

$(2 \Rightarrow 1)$ Τέλος, αν $P \otimes Q^*$ είναι τετριμμένο, έχουμε

$$\begin{aligned} Q &= Q \Leftrightarrow \\ (P \otimes Q^*) \otimes Q &= Q \otimes (P \otimes Q^*) \Leftrightarrow \\ P \otimes (Q^* \otimes Q) &= Q \otimes (P \otimes Q^*), \end{aligned}$$

έτσι P και Q είναι σταθερά ισόμορφα καθώς το $Q \otimes Q^*$ είναι επίσης τετριμμένο καθώς έχει μηδενική Dixmier-Douady κλάση. \square

Από την (3) παρατηρούμε ότι ο σταθερά ισομορφισμός είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Από την παρατήρηση στο τέλος της ενότητας 2.3.1, καταλήγουμε στο ότι,

Πρόταση 6. Η κλάση Dixmier-Douady ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ κλάσεων σταθερά ισόμορφων *bundle gerbes* επί της M και της $H^3(M, \mathbb{Z})$.

2.4 Συνοχή και κυρτότητα

Ορισμός 12. Έστω (P, Y, M) ένα *bundle gerbes*. Μια *bundle gerbes* συνοχή, ∇_P , είναι μια συνοχή στην γραμμική δέσμη $P \rightarrow Y^{[2]}$ η οποία μετατίθεται με το *bundle gerbes* γινόμενο, δηλαδή

$$\pi_1^{-1}\nabla_P + \pi_3^{-1}\nabla_P = m_P^{-1} \circ \pi_2^{-1}\nabla_P \circ m_P \quad (2.4)$$

όπου $m_P : \pi_1^{-1}P \otimes \pi_3^{-1}P \xrightarrow{\cong} \pi_2^{-1}P$ το γινόμενο στο $Y^{[3]}$.

Από τον ορισμό της καμπυλότητας θα χρειαστούμε το επόμενο,

Πρόταση 7. [Marε1] Έστω $\Omega^q(Y^{[p]})$ ο χώρος των διαφορικών q -μορφών στο $Y^{[p]}$. Ορίζουμε την απεικόνιση,

$$\delta : \Omega^q(Y^{[p-1]}) \rightarrow \Omega^q(Y^{[p]}) \quad \beta\psi \quad \delta(\omega) = \sum_{i=1}^p (-1)^i \pi_i^*(\omega)$$

Αυτές οι απεικονίσεις δημιουργούν ένα σύμπλεγμα

$$\Omega^q(M) \xrightarrow{\pi^*} \Omega^q(Y) \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \Omega^q(Y^{[p-1]}) \xrightarrow{\delta} \Omega^q(Y^{[p]}) \xrightarrow{\delta} \dots$$

το οποίο είναι ακριβές και επομένως οι συνομολογικές ομάδες *de Rham* μηδενίζονται.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της απεικόνισης δ , παρατηρούμε ότι $\delta^2 = 0$. Έτσι, το $\Omega^q(Y^{[\bullet]})$ είναι σύμπλεγμα. Επιπλέον, αν $\eta \in \Omega^q(Y^{[p-1]})$, τότε αν ψ_α είναι μια διαμέριση της μονάδος με βάση ένα ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in \Sigma}$ της νηματικής δομής Y , τότε μπορούμε να γράψουμε ότι, $\eta_{\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \psi_\alpha \omega_{\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}}$ όπου $\omega \in \Omega^q(Y^{[p]})$.

Έτσι παίρνουμε,

$$\delta \eta_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} = \sum_i (-1)^i \eta_{\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_{p-1}} = \sum_{i, \alpha} (-1)^i \psi_\alpha \omega_{\alpha, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p}$$

Από το γεγονός ότι

$$\delta(\omega)_{\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_p} = 0 = \omega_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} + \sum_i (-1)^{i+1} \omega_{\alpha, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p}$$

συμπεραίνουμε ότι,

$$\delta \eta_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} = \sum_\alpha \psi_\alpha \sum_i (-1)^i \omega_{\alpha, \alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_p} = \sum_\alpha \psi_\alpha \omega_{\alpha, \alpha_0, \dots, \alpha_p} = \omega_{\alpha_0, \dots, \alpha_p}$$

δηλαδή για κάθε $\omega \in \Omega^q(Y^{[\bullet]})$, υπάρχει μια $\eta \in \Omega^q(Y^{[\bullet-1]})$, τέτοια ώστε $\delta(\eta) = \omega$. \square

Ορισμός 13. Έστω (P, Y, M) ένα *bundle gerbes* με συνοχή ∇_P . Έστω επίσης $F_{\nabla_P} \in \Omega^2(Y^{[2]})$ η καμπυλότητα της ∇_P θεωρούμενη ως συνοχή της δέσμης $P \rightarrow Y^{[2]}$. Η κυρτότητα είναι μια 2-μορφή f στο Y που ικανοποιεί την $\delta(f) = F_{\nabla_P}$.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε μια κλάση Deligne που σχετίζεται με το *bundle gerbe* (P, Y, M) με συνοχή ∇_P και κυρτότητα f .

Για τις τοπικές τομές $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow Y$ ορίζουμε τις τοπικές κυρτότητες

$$f_\alpha = s_\alpha^* f$$

Οι τομές (s_α, s_β) επάγουν συνοχές στις pull back δέσμες $P_{\alpha\beta}$ και οι τομές $s_{\alpha\beta}$ επάγουν μια συλλογή 1-διαφορικών μορφών $\nabla_{\alpha\beta}$ επί των ανοιχτών συνόλων $U_{\alpha\beta}$ της M . Αυτές τις συνοχές τις ονομάζουμε *τοπικές συνοχές*.

Πρόταση 8. Έστω (P, Y, M) ένα *bundle gerbe* με συνοχή και κυρτότητα. Έστω $g_{\alpha\beta\gamma}$ η κλάση *Dixmier-Douady*, $\nabla_{\alpha\beta}$ οι τοπικές συνοχές και f_α οι τοπικές κυρτότητες. Τότε η $(g_{\alpha\beta\gamma}, \nabla_{\alpha\beta}, f_\alpha)$ ορίζει μια κλάση στην συνομολογία *Deligne* $H^2(M, \mathcal{D}^2)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύμπλεγμα δεματιών

$$\underline{U}_M(1) \xrightarrow{d \log} \underline{\Omega}_M^1 \xrightarrow{d} \underline{\Omega}_M^2$$

σε μια πολλαπλότητα M . Διαλέγουμε ένα ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \Sigma}$ της M τέτοιο ώστε να υπάρχουν τοπικές τομές της $\pi : Y \rightarrow M$ πάνω από κάθε U_α και όλες οι μη κενές τομές να είναι συσταλτές. Κατασκευάζουμε τις απεικονίσεις $(s_\alpha, s_\beta) : U_{\alpha\beta} \rightarrow Y^{[2]}$ και διαλέγουμε τομές $\sigma_{\alpha\beta}$ της pull back γραμμικής δέσμης $P_{\alpha\beta} = (s_\alpha, s_\beta)^{-1}P$ πάνω από τα $U_{\alpha\beta}$. Η συνοχή ∇_P επάγει την συνοχή $\nabla_{\alpha\beta}$ στην $P_{\alpha\beta}$ και έχουμε

$$\nabla_{\alpha\beta}(\sigma_{\alpha\beta}) = A_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\alpha\beta}$$

για κάποια 1-μορφή $A_{\alpha\beta}$ στις $U_{\alpha\beta}$. Η $P_{\alpha\beta}$ έχει καμπυλότητα $F_{\alpha\beta} = (s_\alpha, s_\beta)^* F_{\nabla_P}$ με βάση την $\nabla_{\alpha\beta}$. Επειδή $F_{\nabla_P} = \delta(f)$ έχουμε $F_{\alpha\beta} = f_\beta - f_\alpha$. Από την άλλη, εύκολα βλέπουμε ότι $F_{\alpha\beta} = dA_{\alpha\beta}$ και έτσι παίρνουμε

$$dA_{\alpha\beta} = f_\beta - f_\alpha \quad (2.5)$$

Τέλος, ο ισομορφισμός γραμμικών δεσμών $m_P : \pi_1^{-1}P \otimes \pi_3^{-1}P \rightarrow \pi_2^{-1}P$ επάγει τον ισομορφισμό γραμμικών δεσμών $m_P : P_{\beta\gamma} \otimes P_{\alpha\beta} \rightarrow P_{\alpha\gamma}$ και έτσι $m_P(\sigma_{\beta\gamma} \otimes \sigma_{\alpha\beta}) = \sigma_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta\gamma}$ όπου $g_{\alpha\beta\gamma} : U_{\alpha\beta\gamma} \rightarrow U(1)$ είναι ένας αντιπρόσωπος της Dixmier-Douady κλάσης του P που ικανοποιεί την συνθήκη συγκύκλου

$$g_{\beta\gamma\delta} g_{\alpha\gamma\delta}^{-1} g_{\alpha\beta\delta} g_{\alpha\beta\gamma}^{-1} = 1 \quad (2.6)$$

Έτσι απο την μία πλευρά έχουμε,

$$(\nabla_{\beta\gamma} + \nabla_{\alpha\beta})(\sigma_{\beta\gamma} \otimes \sigma_{\alpha\beta}) = (A_{\beta\gamma} + A_{\alpha\beta}) \otimes (\sigma_{\beta\gamma} \otimes \sigma_{\alpha\beta}),$$

και από την άλλη, απο την εξίσωση (2.4),

$$\begin{aligned} (\nabla_{\beta\gamma} + \nabla_{\alpha\beta})(\sigma_{\beta\gamma} \otimes \sigma_{\alpha\beta}) &= m_P^{-1} \circ \nabla_{\alpha\gamma} \circ m_P(\sigma_{\beta\gamma} \otimes \sigma_{\alpha\beta}) \\ &= m_P^{-1} \circ \nabla_{\alpha\gamma}(\sigma_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta\gamma}) \\ &= m_P^{-1}((A_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\beta\gamma}^{-1} dg_{\alpha\beta\gamma}) \otimes (\sigma_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta\gamma})) \\ &= (A_{\alpha\gamma} + g_{\alpha\beta\gamma}^{-1} dg_{\alpha\beta\gamma}) \otimes (\sigma_{\beta\gamma} \otimes \sigma_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

και άρα παίρνουμε

$$A_{\beta\gamma} - A_{\alpha\gamma} + A_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta\gamma}^{-1} dg_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.7)$$

Από τις εξισώσεις (2.5), (2.6) και (2.7) βλέπουμε ότι η τριάδα $(f_\alpha, A_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta\gamma})$ αναπαριστά μια κλάση $(L, \nabla_P, f) \in H^2(M, \underline{U}(1)_M) \rightarrow \underline{\Omega}_M^1 \rightarrow \underline{\Omega}_M^2$ και κανείς μπορεί να ελέγξει ότι αυτή είναι αναξάρτητη από τις επιλογές που έγιναν ⁴.

Όπως και στην περίπτωση των γραμμικών δεσμών με συνοχή, από την (1.5), η απεικόνιση d μας δίνει την 3-καμπυλότητα $\omega \in H^3(M, \mathbb{Z})$ του bundle gerbe με συνοχή και κυρτότητα που ικανοποιεί την $\pi^*(\omega) = df$ ⁵. \square

⁴Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή της Πρότασης 1.

⁵Πράγματι, η $dF_{\alpha\beta} = 0$ έπεται ότι $\pi_1^{-1}df = \pi_2^{-1}df$ για τις προβολές $\pi_i : Y^{[2]} \rightarrow Y$. Αυτό έπεται ότι $df(X_1, X_2, X_3) = df(Z_1, Z_2, Z_3)$ για τα $X_i \in T_x Y$ και $Z_i \in T_z Y$ όπου $(x, z) \in Y^{[2]}$ με $\pi(x) = \pi(z)$ και $\pi_*(X_i) = \pi_*(Z_i)$.

Έτσι, αν $m \in M$ και $\xi_i \in T_m M$ διαλέγουμε $x \in Y$ και $X_i \in T_x Y$ τέτοια ώστε $\pi(x) = m$ και $\pi_*(X_i) = \xi_i$ και ορίζουμε την $\omega(m)(\xi_i) = df(X_i)$ η οποία έπεται ότι η ω είναι κλειστή, ανεξάρτητη από την επιλογή των x και X_i και ότι $\pi^*(\omega) = df$.

Επιστρέφουμε τώρα στην περίπτωση του ταυτολογικού bundle gerbe (ενότητα 2.3.2). Ορίζουμε ως συνοχή την 1-μορφή A στην $(P_0M)^{[2]}$ ($= Y^{[2]}$),

$$A = \int_{\Sigma} ev^* \omega$$

όπου $ev : (P_0M)^{[2]} \times S^1 \rightarrow M$ είναι η απεικόνιση εκτίμησης και Σ μια 2-επιφάνεια πάνω από τον $(P_0M)^{[2]}$ τέτοια ώστε η ίνα πάνω από το $\gamma \in (P_0M)^{[2]}$ να είναι επιφάνεια με σύνορο την γ . Επιπλέον, ορίζουμε την κυρτότητα η ως

$$\eta = \int_{[0,1]} ev^* \omega$$

Τότε,

$$\begin{aligned} dA_{\alpha\beta} &= \eta_{\beta} - \eta_{\alpha} \\ d\eta &= \pi^* \omega \end{aligned}$$

Ως αποτέλεσμα, η $\frac{1}{2\pi i} \omega \in H^3(M, \mathbb{Z})$ ορίζει την Dixmier-Douady κλάση του ταυτολογικού bundle gerbe.

2.5 Bundle gerbe πρότυπα

Ορισμός 14. Έστω (L, Y) ένα bundle gerbe επί της M και έστω $E \rightarrow Y$ μια ερμιτιανή διανυσματική δέσμη πεπερασμένης διάστασης. Αν υπάρχει ένας ισομορφισμός ερμιτιανών δεσμών

$$\phi : L \otimes \pi_1^{-1} E \xrightarrow{\cong} \pi_2^{-1} E \quad (2.8)$$

ο οποίος να είναι συμβατός με το bundle gerbe γινόμενο, με την έννοια ότι οι δύο απεικονίσεις

$$L_{(y_1, y_2)} \otimes (L_{(y_2, y_3)} \otimes E_{y_3}) \longrightarrow L_{(y_1, y_2)} \otimes E_{y_2} \longrightarrow E_{y_1}$$

και

$$(L_{(y_1, y_2)} \otimes L_{(y_2, y_3)}) \otimes E_{y_3} \longrightarrow L_{(y_1, y_3)} \otimes E_{y_3} \longrightarrow E_{y_1}$$

είναι οι ίδιες, η δέσμη E καλείται bundle gerbe πρότυπο και λέμε ότι το L δρα επί του E .

Παρατηρήστε ότι αν η E έχει διάσταση ένα, τότε είναι μια τετριμμενοποίηση της L . Επιπλέον, αν η E έχει διάσταση n τότε το L^n δρα στην $\wedge^n(E)$ και έτσι καταλήγουμε στο ότι,

Πρόταση 9. Αν το (L, Y) έχει ένα bundle gerbe πρότυπο $E \rightarrow Y$ πεπερασμένης διάστασης n , τότε η Dixmier-Douady κλάση έχει στρέψη, δηλαδή $n \cdot DD(L, Y) = 0$.

Απόδειξη. Αν $rkE = 1$, τότε η E αποτελεί προφανώς μια τετριμμενοποίηση του L δηλαδή $DD(L) = 0$. Αν $rkE = n$, τότε το $L^{\otimes n}$ δρα στην δέσμη $\wedge^n(E)$ διάστασης ένα. Έτσι το $L^{\otimes n}$ πρέπει να είναι τετριμμένο και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της Dixmier-Douady κλάσης, συμπεραίνουμε ότι $DD(L^{\otimes n}) = n \cdot DD(L) = 0$. \square

2.5.1 Η ημιομάδα $Mod(L)$

Ορισμός 15. Δύο *bundle gerbe* πρότυπα θα είναι ισόμορφα αν είναι ισόμορφες ως διανυσματικές δέσμες και ο ισομορφισμός διατηρεί την δράση του *bundle gerbe*. Θα συμβολίζουμε με $Mod(L)$ το σύνολο των κλάσεων ισόμορφων *bundle gerbe* προτύπων για ένα *bundle gerbe* L .

Αν το (L, Y) δρα επί του E και επίσης επί του F , τότε δρα και επί του $E \oplus F$ με τον προφανή διαγώνιο τρόπο. Οπότε το σύνολο $Mod(L)$ είναι ημιομάδα.

Αν συμβολίσουμε με $Bun(M)$ την ημιομάδα των κλάσεων ισόμορφων διανυσματικών δεσμών επί της M , τότε έχουμε το ακόλουθο,

Πρόταση 10. Μια τετριμμενοποίηση του *bundle gerbe* (L, Y) ορίζει έναν ισομορφισμό ημιομάδων $Mod(L) \cong Bun(M)$.

Απόδειξη. Αν το L είναι τετριμμένο, τότε $L_{(y_1, y_2)} = K_{y_2} \otimes K_{y_1}^*$ για μια γραμμική δέσμη $K \rightarrow Y$. Έτσι, αν E είναι ένα (L, Y) πρότυπο, από την (2.8) έχουμε έναν ισομορφισμό $\chi(y_1, y_2) : K_{y_2} \otimes E_{y_2} \xrightarrow{\cong} K_{y_1} \otimes E_{y_1}$ που είναι descent data και άρα η $K \otimes E$ είναι pull back μιας διανυσματικής δέσμης επί της M . Αντιστρόφως, αν η F είναι μια διανυσματική δέσμη επί της M τότε το L δρα επί του $K^* \otimes \pi^{-1}(F)$. Αυτός ο ισομορφισμός εξαρτάται από την επιλογή της τετριμμενοποίησης. Αν αλλάξουμε τετριμμενοποίηση παίρνοντας το γινόμενο με μια pull back γραμμική δέσμη J επί της M , τότε ο ισομορφισμός αλλάζει πολλαπλασιάζοντας με την J , συνθέτοντας δηλαδή με ένα ενδομορφισμό της $Bun(M)$. \square

Ένας σταθερά ισομορφισμός από το *bundle gerbe* (L, Y) στο (J, X) είναι μια τετριμμενοποίηση του $L^* \otimes J$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια δέσμη $K \rightarrow Y \times_\pi X$ και ένας ισομορφισμός $L^* \otimes J \rightarrow \delta(K)$ ή αλλιώς για κάθε (y_1, y_2) και (x_1, x_2) έχουμε τον ισομορφισμό,

$$L_{(y_1, y_2)}^* \otimes J_{(x_1, x_2)} \rightarrow K_{(y_2, x_2)} \otimes K_{(y_1, x_1)}^* \quad (2.9)$$

Πρόταση 11. Αν τα *bundle gerbes* (L, Y) και (J, X) είναι σταθερά ισόμορφα, τότε $Mod(L) \cong Mod(J)$.

Απόδειξη. Αρχίζοντας με ένα L -πρότυπο, $E \rightarrow Y$, ορίζουμε την δέσμη $\hat{F}_{(y, x)} = K_{(y, x)}^* \otimes E_y$ ον $Y \times_\pi X$. Τότε,

$$\begin{aligned} \hat{F}_{(y_2, x)} &= K_{(y_2, x)}^* \otimes E_{y_2} \\ &= K_{(y_1, x)}^* \otimes L_{(y_1, y_2)} \otimes E_{y_2} \quad (\text{από την (2.9), θέτοντας } x_1 = x_2 = x) \\ &= K_{(y_1, x)}^* \otimes E_{y_1} \quad (E \text{ είναι } L\text{-πρότυπο}) \\ &= \hat{F}_{(y_1, x)} \end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε μια descent data της \hat{F} για την απεικόνιση $Y \times_\pi X \rightarrow X$ παίρνοντας μια δέσμη $F \rightarrow X$. Παρατηρούμε ότι καθώς τα εσωτερικά γινόμενα διατηρούνται παντού,

η F είναι ερμιτιανή δέσμη. Επίσης έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} J_{(x_1, x_2)} \otimes F_{x_2} &= J_{(x_1, x_2)} \otimes K_{(y, x_2)}^* \otimes E_y \quad (\text{από (2.9), θέτοντας } y_2 = y) \\ &= K_{(y, x_1)}^* \otimes E_y \\ &= F_{x_1} \end{aligned}$$

και αυτό κάνει την F ένα (J, X) -πρότυπο. Έτσι η επιλογή του σταθερού ισομορφισμού ορίζει μια απεικόνιση

$$Mod(L) \rightarrow Mod(J)$$

Παρόμοια, μπορούμε να ορίσουμε μια αντίστροφη απεικόνιση $Mod(J) \rightarrow Mod(L)$.
6 □

Ο ισομορφισμός αυτός εξαρτάται από την επιλογή του σταθερού ισομορφισμού. Αλλάζοντας τον σταθερά ισομορφισμό πολλαπλασιάζοντας με το pull back μιας γραμμικής δέσμης K επί της M , ο ισομορφισμός αλλάζει κατά έναν ενδομορφισμό της $Mod(J)$ που επάγεται πολλαπλασιάζοντας με το pull back της K .

2.5.2 Προβολικές δέσμες

Υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ bundle gerbe προτύπων και δεσμών προβολικών χώρων. Στην πραγματικότητα, μπορεί κανείς να δει την ημιομάδα $Mod(L)$ ως τις κλάσεις ισομορφιών πρωτεύουσών $PU(n)$ -δεσμών επί της M , με κλάση Dixmier-Douady ίση με αυτή του ανυψωμένου bundle gerbe L . Ας δώσουμε μια εξήγηση για αυτό.

Έστω (L, Y) ένα bundle gerbe. Έστω επίσης s_α μια τοπική τομή $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow Y$ της $Y \rightarrow M$. Ένα bundle gerbe πρότυπο $E \rightarrow Y$ διάστασης n μπορεί να γίνει pull back σε μια τετριμμένη δέσμη $E_\alpha = s_\alpha^{-1}(E)$. Τότε ο ισομορφισμός (2.8) γίνεται ισομορφισμός δεσμών,

$$L_{\alpha\beta} \otimes E_\beta \xrightarrow{\sim} E_\alpha$$

Έστω $\delta_\alpha : U_\alpha \rightarrow E_\alpha$ μια ολική τομή της E_α . Ο παραπάνω ισομορφισμός ορίζει το σύνολο $h_{\alpha\beta}$ $n \times n$ πινάκων με,

$$\sigma_{\alpha\beta} \otimes \delta_\beta = \delta_\alpha h_{\alpha\beta}$$

που ικανοποιούν την συνθήκη του \underline{g} -συνεστραμμένου σύγκυκλου. Αυτό επαληθεύεται θεωρώντας την τομή,

$$\sigma_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\beta\gamma} \otimes \delta_\gamma \in \Gamma(M, L_{\alpha\beta} \otimes L_{\beta\gamma} \otimes E_\gamma)$$

η οποία, χρησιμοποιώντας το bundle gerbe γινόμενο και την δομή του bundle gerbe προτύπου, πάνω στις τριπλές τομές μας δίνει

$$\sigma_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\beta\gamma} \otimes \delta_\gamma = \sigma_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta\gamma} \otimes \delta_\gamma = \delta_\alpha h_{\alpha\gamma} g_{\alpha\beta\gamma}$$

⁶Κανείς μπορεί να αποδείξει το αντίστροφο της Πρότασης, δηλαδή αν $Mod(L) \cong Mod(L)$ τότε τα (L, Y) και (J, X) είναι σταθερά ισομόρφα.

και από την άλλη

$$\sigma_{\alpha\beta} \otimes \sigma_{\beta\gamma} \otimes \delta_\gamma = \sigma_{\alpha\beta} \otimes \delta_\beta h_{\beta\gamma} = \delta_\alpha h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma}$$

Για να είναι τα αποτελέσματα ίδια, τα $h_{\alpha\beta}$ πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη του \underline{g} -συνεστραμμένου συγχύκλου

$$h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} h_{\alpha\gamma}^{-1} = g_{\alpha\beta\gamma} \quad (2.10)$$

Ενώ οι \underline{g} -συνεστραμμένες συναρτήσεις μεταφοράς $h_{\alpha\beta}$ δεν ορίζουν $U(n)$ -δέσμη, χρησιμοποιώντας την ακριβή ακολουθία ομάδων

$$0 \longrightarrow U(1) \longrightarrow U(n) \xrightarrow{p} PU(n) \cong U(n)/U(1) \longrightarrow 0$$

οι εικόνες τους στην ομάδα $PU(n)$ όντως ορίζουν μια πρωτεύουσα $PU(n)$ -δέσμη $P \rightarrow M$.

Πρόταση 12. *Το ανυψωμένο bundle gerbe που αντιστοιχεί στην $PU(n)$ -δέσμη $P \rightarrow M$ είναι σταθερά ισόμορφο με το bundle gerbe (L, Y) .*

Απόδειξη. Όπως και στην ενότητα 2.3.3, κατασκευάζουμε το ανυψωμένο bundle gerbe για την $P \rightarrow M$ και το συμβολίζουμε με (J, P) . Η Dixmier-Douady κλάση του είναι το τοπολογικό εμπόδιο για την δυνατότητα ανύψωσης της $PU(n)$ -δέσμης P σε μια $U(n)$ -δέσμη, που είναι απλά η διαφορά του \underline{g} στην (2.10) να είναι συνσύνоро. Παρολαυτά, η εικόνα του $[g]$ κάτω από τον ισομορφισμό $H^2(M, \underline{U}(1)) \cong H^3(M, \mathbb{Z})$ είναι ακριβώς η Dixmier-Douady κλάση του αρχικού bundle gerbe (L, Y) . Έτσι, τα (J, P) και (L, Y) είναι σταθερά ισόμορφα. \square

Ο ισομορφισμός της Πρότασης 11 ταυτίζει τα bundle gerbe πρότυπα στα οποία το (J, P) και το (L, Y) δρουν. Επίσης, διαφορετικοί σταθερά ισομορφισμοί μεταξύ των (L, Y) και (J, P) συνεπάγονται διαφορετικά bundle gerbe πρότυπα για το (L, Y) , αλλά από την Πρόταση 11, αυτά διαφέρουν κατά έναν παράγοντα που είναι μια pull back δέσμη κάποιας γραμμικής δέσμης επί της M . Έτσι, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα,

Πρόταση 13. *Έστω $Lin(X)$ η ομάδα των κλάσεων ισόμορφων γραμμικών δεσμών επί της M και έστω $Proj(M, [H])$ το σύνολο των κλάσεων ισόμορφων προβολικών δεσμών πεπερασμένης διάστασης με Dixmier-Douady κλάση $[H]$. Αν (L, Y) είναι ένα bundle gerbe επί της M με $DD(L) = [H]$, τότε η παραπάνω κατασκευή ορίζει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση*

$$\frac{Mod(L)}{Lin(M)} \longrightarrow Proj(M, [H])$$

Σύμφωνα με τη Πρόταση 9, ένα bundle gerbe με Dixmier-Douady κλάση ελευθέρας στρέψεως, δεν μπορεί να έχει ένα bundle gerbe πρότυπο πεπερασμένης διάστασης. Η προφανής λύση είναι να επιτρέψουμε τα bundle gerbe πρότυπα να είναι δέσμες προβολικών χώρων Hilbert άπειρης διάστασης. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε τις πρωτεύουσες $PU(\mathcal{H})$ -δέσμες με την φυσική τοπολογία να είναι η ισχυρή τοπολογία

τελεστών ⁷.

Αποδεικνύουμε μια Πρόταση που θα μας χρειαστεί σε επόμενο κεφάλαιο.

Πρόταση 14. Έστω M μια συμπαγής πολλαπλότητα. Οι κλάσεις ισόμορφων $PU(\mathcal{H})$ -δεσμών επί της M είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις κλάσεις της $H^3(M, \mathbb{Z})$. Επιπλέον, υπάρχει μια απεικόνιση επί μεταξύ των κλάσεων ισόμορφων προβολικών δεσμών πεπερασμένης διάστασης επί της M και της αβελιανής υποομάδας $\text{Tor}_3(H^3(M, \mathbb{Z}))$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στην επόμενη,

Πρόταση 15. [Bru1] Έστω G μια ομάδα Lie και έστω \underline{G} το δεμάτι των συνεχών G -συναρτήσεων. Τότε, η $H^1(M, \underline{G})$ ταυτίζεται με το σύνολο των κλάσεων ισόμορφων πρωτευουσών G -δεσμών επί της M ⁸.

Στην περίπτωση των άπειρων διαστάσεων, έχουμε την επόμενη σύντομη ακριβής ακολουθία Lie ομάδων

$$1 \longrightarrow U(1) \longrightarrow U(\mathcal{H}) \longrightarrow PU(\mathcal{H}) \longrightarrow 1$$

Από το θεώρημα του Kuiper [Κουιπ], η ομάδα $U(\mathcal{H})$ ως χώρος είναι συσταλτός στην τοπολογία SOT σε σημείο και έτσι έχουμε

$$H^3(M, \mathbb{Z}) \cong H^2(M, \underline{U(1)}) \cong H^1(M, \underline{PU(\mathcal{H})})$$

και άρα την 1-1 και επί αντιστοιχία

$$\{\text{κλάσεις ισόμορφων } PU(\mathcal{H})\text{-δεσμών επί της } M\} \rightarrow H^3(M, \mathbb{Z})$$

Η απόδειξη για τις πεπερασμένες διαστάσεις δίνεται στο [NtoK]. Παρολαυτά, θα δώσουμε μια άλλη απόδειξη χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία των bundle gerbe προτύπων και προβολικών δεσμών πεπερασμένης τάξης.

Για δοσμένη κλάση $[H] \in H^3(M, \mathbb{Z})$, κατασκευάζουμε το ταυτολογικό bundle gerbe με Dixmier-Douady κλάση ίση με $[H]$. Από την αντιστοιχία της Πρότασης 13, παίρνουμε το σύνολο των κλάσεων ισόμορφων προβολικών δεσμών πεπερασμένης διάστασης με Dixmier-Douady κλάση $[H]$. Καθώς οι προβολικές δέσμες είναι επίσης bundle gerbe πρότυπα, από την Πρόταση 9 έχουμε $n \cdot [H] = 0$.

Για $[H] \neq 0$, αφού η Dixmier-Douady κλάση έχει στρέψη, έχουμε ότι $n \neq 0$. Έτσι παίρνουμε κλάσεις ισόμορφων $PU(n)$ -δεσμών. \square

⁷Έστω \mathcal{H} ένας χώρος Hilbert. Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (SOT) στην $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι η τοπολογία της κατά σημείου σύγκλισης για έναν τελεστή στον χώρο \mathcal{H} . Δηλαδή, μια ακολουθία (T_i) φραγμένων τελεστών συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή T στην τοπολογία SOT αν και μόνον αν $\|T_i x - T x\| \rightarrow 0$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$.

⁸Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη της Πρότασης 1.

Κεφάλαιο 3

Τοπολογική και Αλγεβρική K-Θεωρία

Αρχίζουμε με τον ορισμό της ομάδας Grothendieck μιας ημιομάδας. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε την ομάδα Grothendieck της ημιομάδας των κλάσεων ισόμορφων διανυσματικών δεσμών επί ενός συμπλέγματος κελιών πεπερασμένης διάστασης. Ακολουθούμε τα βιβλία των Karoubi [Καρου] και [Pλλ] όπως και τα βιβλία [Χλτν] και [Χατσ2].

3.1 Η ομάδα Grothendieck

Ας θεωρήσουμε την αβελιανή ημιομάδα S , δηλαδή ένα σύνολο με τον κανόνα της σύνθεσης (συμβολίζουμε ως $+$) το οποίο ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες μιας αβελιανής ομάδας με εξαίρεση την ύπαρξη αντιστρέψιμων στοιχείων. Τότε μπορούμε να σχετίσουμε με αυτήν μια αβελιανή ομάδα $\mathcal{G}(S)$ - την ομάδα Grothendieck της S - με την S και έναν ομομορφισμό $\gamma : S \rightarrow \mathcal{G}(S)$ που ικανοποιεί την ακόλουθη καθολική συνθήκη: Για κάθε αβελιανή ομάδα A και κάθε ομομορφισμό $\phi : S \rightarrow A$ υπάρχει ένας μοναδικός ομομορφισμός $\tilde{\phi} : \mathcal{G}(S) \rightarrow A$ ο οποίος κάνει το διάγραμμα μεταθετικό,

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{G}(S) \\ \downarrow \phi & & \swarrow \tilde{\phi} \\ A & & \end{array} \quad (3.1)$$

Η ομάδα $\mathcal{G}(S)$ λαμβάνεται ως εξής:

Ορίζουμε τα ζεύγη $(a, b)(c, d) \in S \times S$ να είναι ισοδύναμα αν και μόνον αν υπάρχει $u \in S$ τέτοιο ώστε $a + b + u = c + d + u$. Αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας, \sim , στην $S \times S$. Ορίζουμε ως $\mathcal{G}(S) = S \times S / \sim$. Συμβολίζουμε με $[a, b]$ την κλάση των ζευγών $(a, b)(c, d) \in S \times S$ και ορίζουμε το άθροισμα $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$. Αν το 0 είναι το μηδενικό στοιχείο της S , το στοιχείο $[0, 0] \in \mathcal{G}(S)$ δρα ως μηδενικό στοιχείο.

Ο ομομορφισμός ημιομάδων $\gamma : S \rightarrow \mathcal{G}(S)$ ορίζεται από τον κανόνα $\gamma(a) = [a, 0]$, για κάθε $a \in S$. Τέλος, για την $\phi : S \rightarrow A$ ορίζουμε $\tilde{\phi}[a, b] = \phi(a) - \phi(b)$. Είναι

εύκολο να δει κανείς ότι η $\tilde{\phi}$ είναι ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός ομάδων και είναι ο μόνος για τον οποίο ισχύει ότι $\tilde{\phi}\gamma = \phi$.

Αν $\rho : S_1 \rightarrow S_2$ είναι ομομορφισμός ημιομάδων, ορίζουμε τον ομομορφισμό ομάδων $\rho^* : \mathcal{G}(S_1) \rightarrow \mathcal{G}(S_2)$ με $\rho^*[a, b] = [\rho(a), \rho(b)]$, για κάθε $[a, b] \in \mathcal{G}(S_1)$. Παρατηρούμε ότι αν $\gamma_1 : S_1 \rightarrow \mathcal{G}(S_1)$ και $\gamma_2 : S_2 \rightarrow \mathcal{G}(S_2)$ είναι οι ομομορφισμοί που ικανοποιούν την (3.1), τότε $\gamma_2 \circ \rho = \rho^* \circ \gamma_1$.

Παράδειγμα 1 Ένα από τα πιο φυσικά παραδείγματα είναι να θεωρήσουμε την $S = \mathbb{N}$. Τότε παίρνουμε $\mathcal{G}(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$

Παράδειγμα 2 Ας θεωρήσουμε $S = \mathbb{Z} - \{0\}$, μια αβελιανή ημιομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό. Τότε $\mathcal{G}(S) = \mathbb{Q} - \{0\}$

Παράδειγμα 3 Έστω S μια αβελιανή ημιομάδα με την ιδιότητα ότι υπάρχει ένα στοιχείο $\infty \in S$ με $u + \infty = \infty$ για κάθε $u \in S$. Τότε $\mathcal{G}(S) = 0$, καθώς κάθε στοιχείο της $\mathcal{G}(S)$ μπορεί να γραφτεί ως $\gamma(a) - \gamma(b) = \gamma(a) + \gamma(\infty) - \gamma(b) - \gamma(\infty) = \gamma(\infty) - \gamma(\infty) = 0$.

3.2 Η ομάδα $K^0(X)$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τις παραπάνω ιδέες στην αβελιανή ημιομάδα των κλάσεων ισόμορφων μιγαδικών διανυσματικών δεσμών επί του X με πράξη το άθροισμα Whitney $(Vect(X), \oplus)$ (Θεώρημα ταξινόμησης στο [Παράρτημα Γ]).

Για έναν χώρο X , στην κατηγορία του πεπερασμένης διάστασης συμπλέγματος κελιών \mathcal{C} , σχετίζουμε με αυτήν, την αβελιανή ομάδα $K^0(X)$ που ορίζεται ως η ομάδα Grothendieck της $Vect(X)$.

Αν $f : Y \rightarrow X$ είναι μορφισμός στην \mathcal{C} , η απεικόνιση εγκλεισμού μιας διανυσματικής δέσμης επί του Y ορίζει έναν ομομορφισμό ημιομάδων $Vect(X) \rightarrow Vect(Y)$ και έναν ομομορφισμό ομάδων $f^* : K^0(X) \rightarrow K^0(Y)$. Από το θεώρημα ταξινόμησης [Παράρτημα Γ] προκύπτει ότι η $K^0(X)$ είναι αναλλοίωτη κάτω από ομοτοπίες. Επιπλέον, ο K είναι ένας ανταλλοίωτος συναρτητής από τη κατηγορία \mathcal{C} στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων.

Έστω $i : \{pt\} \rightarrow X$ η απεικόνιση εγκλεισμού ενός σημείου στον X και $c : X \rightarrow \{pt\}$ η σταθερή απεικόνιση. Αφού $c \circ i = Id_{pt}$ και $i^* \circ c^* = Id_{K^0(X)}$ η i^* είναι επιμορφισμός. Ορίζοντας ως $\tilde{K}^0(X)$ τον πυρήνα του i^* , παίρνουμε μια ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \tilde{K}^0(X) \longrightarrow K(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{i^*} \\ \xleftarrow{c^*} \end{array} K(\{pt\}) \longrightarrow 0$$

και συνεπώς $K^0(X) = \tilde{K}^0(X) \oplus K^0(\{pt\}) = \tilde{K}^0(X) \oplus \mathbb{Z}$, καθώς κάθε διανυσματική δέσμη επί ενός σημείου είναι τετριμμένη και άρα $Vect(\{pt\}) = \mathbb{N}$, οπότε $\mathcal{G}(\{pt\}) = \mathbb{Z}$.

3.2.1 Η ομάδα $\tilde{K}^0(X)$

Δίνουμε έναν χαρακτηρισμό της $\tilde{K}^0(X)$ με όρους διανυσματικών δεσμών επί του X .

Ορισμός 16. Δύο διανυσματικές δέσμες ξ και ξ' επί του X λέγονται σταθερά ισόμορφες, γράφουμε $\xi \sim \xi'$, αν υπάρχουν δύο τετριμμένες δέσμες ϵ και ϵ' επί του X τέτοιες ώστε $\xi \oplus \epsilon \cong \xi' \oplus \epsilon'$.

Προφανώς οι ισόμορφες δέσμες είναι και σταθερά ισόμορφες, έτσι ο σταθερά ισόμορφισμός θεωρείται ως σχέση ισοδυναμίας στην ημιομάδα $Vect(X)$. Συμβολίζουμε με $[\xi]$ την κλάση της ξ και με $Stab(X)$ την ημιομάδα των κλάσεων σταθερά ισόμορφων δεσμών στην $Vect(X)$. Το μηδενικό στοιχείο της $Stab(X)$ είναι η κλάση της τετριμμένης δέσμης.

Λήμμα 3. Η ημιομάδα $Stab(X)$ είναι αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη. Θεωρούμε ότι ο $X \in \mathcal{C}$ είναι συνεκτικός και έτσι οι ίνες μιας διανυσματικής δέσμης έχουν την ίδια διάσταση. Αλλιώς, η διαδικασία που θα περιγράψουμε μπορεί να ακολουθηθεί για κάθε συνεκτική συνιστώσα..

Το μόνο που απομένει, είναι να δείξουμε την ύπαρξη αντιστρόφου, δηλαδή για κάθε δέσμη ξ να υπάρχει μια δέσμη η τέτοια ώστε $\xi \oplus \eta$ να είναι ισόμορφη με την τετριμμένη δέσμη.

Πρώτον, ορίζουμε την συμπαγή πολλαπλότητα $G_{k,n}$, τον χώρο όλων των k -διάστατων επιπέδων που περνούν από την αρχή του \mathbb{C}^n . Για μια μιγαδική k -διάστατη διανυσματική δέσμη επί του X , γνωρίζουμε από το θεώρημα ταξινόμησης [Παράρτημα Γ], ότι υπάρχει η απεικόνιση $f : X \rightarrow G_{k,n}$ τέτοια ώστε η διανυσματική δέσμη ξ να είναι ισόμορφη με την pull back δέσμη $f^*(\gamma_{k,n})$, όπου $\gamma_{k,n}$ είναι η κανονική k -διάστατη δέσμη επί της $G_{n,k}$.

Έστω $\eta_{k,n}$ η $(n-k)$ -διάστατη διανυσματική δέσμη $(E_{k,n}, \pi, G_{k,n})$ όπου $E_{k,n} = \{(V, u) \in G_{k,n} \times \mathbb{C}^n \mid u \in V^\perp\}$, όπου V^\perp είναι το κάθετο $(n-k)$ -επίπεδο στο V εν \mathbb{C}^n . Αφού $\gamma_{k,n} \oplus \eta_{k,n} \approx \epsilon^n$, συμπεραίνουμε ότι η $f^*(\gamma_{k,n} \oplus \eta_{k,n}) = \xi \oplus f^*(\eta_{k,n})$ είναι ισομορφική με την τετριμμένη δέσμη επί του X . \square

Για κάθε κλάση ισόμορφων διανυσματικών δεσμών επί του X , έχουμε μια κλάση σταθερά ισόμορφων δεσμών και άρα παίρνουμε έναν ομομορφισμό ημιομάδων $\phi : Vect(X) \rightarrow Stab(X)$. Τότε από την καθολική ιδιότητα (3.1) υπάρχουν μοναδικοί ομομορφισμοί $\tilde{\phi} : \tilde{K}^0(X) \rightarrow Stab(X)$ τέτοιοι ώστε το διάγραμμα να μετατίθεται. Από την μοναδικότητα του $\tilde{\phi}$ τον ορίζουμε ως $\tilde{\phi}[\xi, \eta] = [\xi \oplus \eta^*] = [\xi] - [\eta]$.

Λήμμα 4. Υπάρχει ο ισομορφισμός $\tilde{K}^0(X) \cong Stab(X)$.

Απόδειξη. Για οποιαδήποτε n -διάστατη δέσμη $[\xi] \in Stab(X)$, θεωρούμε την κλάση $[\xi, \epsilon^n] \in \tilde{K}^0(X)$. Αφού $i^*[\xi, \epsilon^n] = [i^*\xi, i^*\epsilon^n]$ και επίσης οι $i^*\xi$ και $i^*\epsilon^n$ είναι τετριμμένες, συνεπάγεται ότι $[\xi, \epsilon^n] \in Ker i^* \equiv \tilde{K}^0(X)$.

Από την άλλη, αν $[\xi, \eta] \in \tilde{K}^0(X)$ με $\tilde{\phi}[\xi, \eta] = 0$, τότε έχουμε ότι $[\xi] = [\eta]$ το οποίο σημαίνει ότι οι ξ και η είναι σταθερά ισόμορφες και έτσι η κλάση $[\xi, \eta] = [\xi, \xi] = 0_{\tilde{K}^0(X)}$, όπως προκύπτει από την κατασκευή της ομάδας Grothendieck. \square

3.2.2 Ο χώρος ταξινόμησης $BU \times \mathbb{Z}$

Προχωρούμε σε μια πιο αλγεβρική οπτική των πολλαπλοτήτων Grassmann.

Έστω $U(n)$ η ομάδα των μοναδιαίων μετασχηματισμών του \mathbb{C}^n . Αν, \mathbb{C}^k είναι ένας k -υπόχωρος του \mathbb{C}^n και \mathbb{C}^{n-k} το ορθογώνιο συμπλήρωμά του, η υποομάδα $U(n)$ που απεικονίζει τον \mathbb{C}^n στον εαυτό του, χωρίζεται σε ένα ευθύ άθροισμα $U(k) \times U(n-k)$ όπου $U(k)$ είναι η υποομάδα της $U(n)$ που αφήνει τον \mathbb{C}^k αναλλοίωτο και η $U(n-k)$ είναι η υποομάδα που αφήνει τον \mathbb{C}^{n-k} αναλλοίωτο. Κατα αυτόν τον τρόπο, κανει ταυτίζει την $G_{k,n} \equiv U(n)/U(k) \times U(n-k)$.

Υπάρχει ένας φυσικός εγκλεισμός του $G_{k,n} \hookrightarrow G_{k,n+1}$ που έρχεται από τον εγκλεισμό $U(n) \hookrightarrow U(n+1)$. Ορίζουμε ¹

$$G_k = \varinjlim_n G_{k,n}$$

Επιπλέον, θεωρώντας τον εγκλεισμό του $G_k \hookrightarrow G_{k+1}$, ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική, τελικά ορίζουμε τον χώρο,

$$BU = \varinjlim_k \varinjlim_n G_{k,n}$$

Για κάθε πεπερασμένης διάστασης πολλαπλότητα X , οι κλάσεις ισόμορφων διανυσματικών k -δέσμων επί του X ταξινομούνται από το $[X, G_k]$.

Πρόταση 16. Υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση μεταξύ της αβελιανής ομάδας $\tilde{K}^0(X)$ και του $[X, BU]$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η X είναι συνεκτική. Θεωρούμε το σύνολο των κλάσεων ομοτοπικών απεικονίσεων $X \rightarrow BU$. Αφού η X είναι πεπερασμένης διάστασης, ένα στοιχείο $u \in [X, BU]$ αναπαρίσταται με μια απεικόνιση $X \rightarrow G_k$, για κάποιο k και έτσι έχουμε σχετίσει σε κάθε τέτοιο στοιχείο μια διανυσματική k -δέσμη επί της X . Επιπλέον, αν $f : X \rightarrow G_k$ και $f' : X \rightarrow G_{k'}$ είναι δύο αντιπρόσωποι του u , που αντιστοιχούν στις δέσμες ξ και ξ' επί της X , τότε για κάποιο $r > k, k'$ οι απεικονίσεις f και f' είναι ομοτοπικές όταν θεωρούνται ως απεικονίσεις της X στο G_r . Αυτό σημαίνει ότι

$$\xi \oplus \epsilon^{r-k} \cong \xi' \oplus \epsilon^{r-k'}$$

δηλαδή, οι ξ και ξ' είναι σταθερά ισόμορφες. Ως αποτέλεσμα, έχουμε ότι $[\xi] \in \text{Stab}(X)$.

Επιπλέον, όπως είναι γνωστό [**Παράρτημα Γ**], η τετριμμένη δέσμη επί της X μπορεί να θεωρηθεί ως η pull back δέσμη της κανονικής δέσμης επί του σημείου. Έτσι το μηδενικό στοιχείο στην $\text{Stab}(X)$ λαμβάνεται ως η απεικόνιση $g : X \rightarrow G_k$ που είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με τη σταθερή απεικόνιση σημείου. \square

¹Αυτό ονομάζεται το ευθύ όριο (ή επαγωγικό όριο) από πολλαπλότητες Grassmann. Ορίζουμε το \mathbb{C}^∞ ως ένωση των διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^{n+1} \subset \dots$ όπου ένα υποσύνολο του \mathbb{C}^∞ είναι ανοιχτό αν και μόνον αν η τομή του με κάθε \mathbb{C}^n είναι ένα ανοιχτό σύνολο. Τότε, το $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ θα είναι η ένωση όλων των k -διάστατων διανυσματικών υποχώρων του \mathbb{C}^∞ . Αυτή είναι μια τοπολογική πολλαπλότητα με την τοπολογία του ευθέως ορίου, όπου ένα υποσύνολο του $G_k(\mathbb{C}^\infty)$ είναι ανοιχτό αν και μόνον αν η τομή με κάθε $G_k(\mathbb{C}^n)$ είναι ανοιχτό σύνολο.

Αν η X δεν είναι συνεκτική, τότε γράφουμε $\tilde{K}^0(X) \approx [X, BU \times \mathbb{Z}]$, όπου οι συνεκτικές συνιστώσες παραμετροποιούνται από το \mathbb{Z} .

3.3 Αλγεβρική Κ-Θεωρία

Θα παραφράσουμε την παραπάνω κατασκευή της ομάδας $K^0(X)$ για έναν συμπαγή και Hausdorff χώρο X σε όρους της συσχετισμένης άλγεβρας συναρτήσεων $C(X, \mathbb{R})$ των συνεχών συναρτήσεων $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Έστω E μια διανυσματική δέσμη επί ενός συμπαγή και Hausdorff χώρο X . Θεωρούμε τον ομομορφισμό δεσμών $f : E \rightarrow E$. Μπορούμε να θεωρήσουμε ως πυρήνα της f , την νατίστροφη εικόνα της μηδενικής τομής. Παρολαυτά, η εικόνα και ο πυρήνας της f δεν είναι πάντα διανυσματικές δέσμες καθώς δεν είναι πάντα τοπικά τετριμμένες. Για παράδειγμα, θεωρούμε τον X να είναι το διάστημα $[0, 1]$ και E η τετριμμένη δέσμη $[0, 1] \times \mathbb{C}$. Τότε, ο πυρήνας και η εικόνα της $f(x, \xi) = (x, x\xi)$ δεν είναι τοπικά τετριμμένα.

Παρολαυτά, το ακόλουθο λήμμα μας δίνει μια κλάση μορφισμών διανυσματικών δεσμών που ο πυρήνας και η εικόνα είναι διανυσματικές δέσμες,

Λήμμα 5. Έστω X ένας συμπαγής και Hausdorff χώρος. Έστω E μια (πραγματική ή μιγαδική) δέσμη επί του X και έστω $p : E \rightarrow E$ ένας μορφισμός διανυσματικών δεσμών για τον οποίο $p^2 = p$, δηλαδή, ο p είναι ένα ταυτοδύναμο στοιχείο της άλγεβρας $End(E)$. Τότε ο πυρήνας και η εικόνα του p είναι τοπικά τετριμμένα.

Απόδειξη. Για το ταυτοδύναμο στοιχείο p της $End(E)$, κανείς βλέπει ότι $Ker(p) = Im(1 - p)$. Έτσι, περιοριζόμαστε στην $Im(p)$. Αφού η E είναι διανυσματική δέσμη, είναι τοπικά τετριμμένη. Επιπλέον, το p είναι μορφισμός δεσμών, δηλαδή απεικονίζει ίνες σε ίνες που σημαίνει ότι το p είναι ο τελεστής προβολής από τον \mathbb{C}^n στον \mathbb{C}^m . Τώρα, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η $Im(p)$ είναι τοπικά τετριμμένη. \square

Παρατηρούμε ότι αν $p^2 = p$ τότε επίσης $(1 - p)^2 = 1 - p$. Συμβολίζοντας την εικόνα του p με pE , έχουμε ότι,

$$E \cong pE \oplus (1 - p)E$$

Υπάρχει επίσης μια δεύτερη ιδιότητα των διανυσματικών δεσμών που είναι αρκετά σημαντική [**Χατσ2**],

Θεώρημα 1. (Serre-Swan) Έστω X ένας συμπαγής και Hausdorff χώρος και E μια (πραγματική ή μιγαδική) διανυσματική δέσμη επί του X . Τότε, υπάρχει διανυσματική δέσμη F επί του X τέτοια ώστε η $E \oplus F$ να είναι η τετριμμένη δέσμη.

Συνδιάζοντας τα δύο αποτελέσματα, μπορούμε να αναπαραστήσουμε κάθε δέσμη επί του X ως την εικόνα pE ενός ταυτοδύναμου στοιχείου $p : E \rightarrow E$ όπου E είναι η τετριμμένη δέσμη.

Ενδιαφερόμαστε για την ταξινόμηση των κλάσεων ισόμορφων διανυσματικών δεσμών και έτσι πρέπει να ορίσουμε πότε δύο ταυτοδύναμα στοιχεία είναι ισοδύναμα.

Λήμμα 6. Έστω X ένας συμπαγής και Hausdorff χώρος. Έστω E και F δύο τετριμμένες δέσμες επί του X με τους μορφισμούς δεσμών $p : E \rightarrow E$ και $q : F \rightarrow F$ τέτοιοι ώστε $p^2 = p$ και $q^2 = q$. Οι διανυσματικές δέσμες pE και qF είναι ισόμορφες αν και μόνον αν υπάρχει ένας μορφισμός διανυσματικών δεσμών $u : E \rightarrow F$ τέτοιος ώστε ,

$$uu^* = p, \quad u^*u = q.$$

Απόδειξη. Έστω $pE \cong qF$ μέσω του $u : pE \rightarrow qF$ και $u^* : pF \rightarrow qE$ τέτοιος ώστε uu^* και u^*u να είναι οι ταυτοτικές απεικονίσεις στις pE και qF αντιστοίχως. Επεκτείνωντας τις u και u^* ως,

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : pE \oplus (1-p)E \rightarrow qF \oplus (1-q)F$$

$$\tilde{u}^* = \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : pF \oplus (1-p)F \rightarrow qE \oplus (1-q)E$$

παίρνουμε αμέσως ότι,

$$\tilde{u}\tilde{u}^* = q, \quad \tilde{u}^*\tilde{u} = p.$$

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι υπάρχουν απεικονίσεις $u : E \rightarrow F$ και $u^* : F \rightarrow E$ που ικανοποιούν τις σχέσεις αυτές. Ορίζουμε $u' = uu^*u$ και $u'^* = u^*uu^*$. Τότε $u'u'^* = uu^*uu^*uu^* = qqq = q$ και ομοίως $u'^*u' = p$. Τότε, $u'p = uu^*uu^*u = qu'$ και $u' = uu^*u = up = upp = uu^*uu^*u$, ή εν συντομία $u'p = qu' = u'$.

Αυτό σημαίνει ότι το u' περιορίζεται σε μια απεικόνιση $pE \rightarrow qF$. Ομοίως, η u'^* περιορίζεται σε μια απεικόνιση $qF \rightarrow pE$. Έτσι, το $u'u'^* = q$ περιορίζεται στην ταυτοτική απεικόνιση στην qF και ομοίως $u'^*u' = p$ περιορίζεται στην ταυτοτική απεικόνιση στην pE , κάτι που σημαίνει ότι πράγματι $pE \cong qF$. \square

Παρατήρηση: Θα λέμε ότι δύο ταυτοδύναμα στοιχεία p, q είναι αλγεβρικά ισοδύναμα , συμβολίζουμε με $p \sim_0 q$, αν είναι ισόμορφες σαν δέσμες.

Υπάρχει μια φυσική ταύτιση μεταξύ του διανυσματικού χώρου $Hom(E, F)$ των μορφισμών διανυσματικών δεσμών από την $E \rightarrow F$ και του χώρου των συνεχών τομών της διανυσματικής δέσμης $Hom(E, F) \cong E^* \otimes F$, δηλαδή,

$$Hom(E, F) \cong C(X, Hom(E, F))$$

Υποθέτουμε ότι $F \cong E \cong X \times \mathbb{C}^k$. Τότε ταυτίζουμε,

$$C(X, Hom(E, F)) \cong C(X, Hom(E, E)) \cong C(X) \otimes \mathcal{M}_k$$

όπου $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ συμβολίζει την άλγεβρα των $(k \times k)$ μιγαδικών πινάκων. Ένας μορφισμός διανυσματικών δεσμών $p : E \rightarrow E$ με $p^2 = p$ είναι τότε ισοδύναμος με ένα ταυτοδύναμο στοιχείο στην άλγεβρα $C(X) \otimes \mathcal{M}_k$.

Το τελευταίο βήμα είναι να εξαφανίσουμε την εξάρτηση από την διάσταση της τετριμμένης δέσμης $E \cong X \times \mathbb{C}^k$. Μπορούμε να περάσουμε στην τετριμμένη δέση

$E' \cong X \times \mathbb{C}^m$ με $m > k$, απλά τοποθετώντας τον $(k \times k)$ πίνακα στην πάνω αριστερή γωνία ενός $(m \times m)$ πίνακα, γεμίζοντας τις υπόλοιπες εισόδους με μηδενικά. Αλγεβρικά, αυτή η επέκταση από την E στην E' αντιστοιχεί στον φυσικό εγκλεισμό

$$C(X) \otimes \mathcal{M}_k \hookrightarrow C(X) \otimes \mathcal{M}_m, \quad k \leq m$$

Περνώντας από τις πεπερασμένης διάστασης άλγεβρες \mathcal{M}_k στο αλγεβρικό ευθύ όριο

$$\mathcal{M}_\infty = \varinjlim \mathcal{M}_k$$

έχουμε εξαφανίσει την τυχαία διάσταση της E και έχουμε μείνει με ένα ταυτοδύναμο στοιχείο $p \in C(X) \otimes \mathcal{M}_\infty$.

Ορισμός 17. [Ρλλ] Έστω $C(X)$ το σύνολο των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων στον συμπαγή και Hausdorff χώρο X . Έστω επίσης, $\text{Idem}(C(X) \otimes \mathcal{M}_\infty)$ η αβελιανή ημιομάδα των κλάσεων αλγεβρικά ισοδύναμων ταυτοδύναμων στοιχείων της $C(X) \otimes \mathcal{M}_\infty$ με πράξη την πρόσθεση,

$$[p] + [q] \equiv \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right]$$

Τότε η $K(C(X))$ ορίζεται ως η ομάδα Grothendieck της ημιομάδας $\text{Idem}(C(X) \otimes \mathcal{M}_\infty)$.

Εύκολα βλέπουμε ότι η κατασκευή της $\text{Idem}(C(X) \otimes \mathcal{M}_\infty)$ είναι συναρτησιακή (συναλλοίωτη αυτή τη φορά) για τυχαίους δακτυλίους.

Πρόταση 17. [Ρλλ] Έστω ένας συμπαγής και Hausdorff χώρος X και έστω $C(X)$ ο δακτύλιος μιγαδικών συναρτήσεων στον X . Τότε η τοπολογική K -ομάδα του χώρου X και η αλγεβρική K -ομάδα του δακτυλίου $C(X)$ είναι ισόμορφες, δηλαδή,

$$K(X) \cong K(C(X)).$$

Απόδειξη. Σχετίζουμε μια διανυσματική δέσμη ξ_p σε κάθε $p \in \text{Idem}(C(X) \otimes \mathcal{M}_\infty)$ ως εξής. Υποθέτουμε ότι το p ανήκει στην $\text{Idem}(C(X) \otimes \mathcal{M}_n)$ και έστω $\xi_p = (E_p, \pi, X)$, όπου,

$$E_p = \{(x, v) \in X \times \mathbb{C}^n : v \in p(x)(\mathbb{C}^n)\},$$

χρησιμοποιώντας την ταύτιση $\mathcal{M}_n(C(X)) = C(X, \mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $\pi(x, v) = x$ και όπου η ίνα $(E_p)_x = p(x)(\mathbb{C}^n)$ είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{C}^n .

Έστω $p, q \in \text{Idem}(C(X) \otimes \mathcal{M}_\infty)$. Τότε $\xi_p \cong \xi_q$ αν και μόνον αν $p \sim_0 q$ και $\xi_{p \oplus q} \cong \xi_p \oplus \xi_q$. Έπεται ότι η απεικόνιση

$$\phi : \text{Idem}(C(X) \otimes \mathcal{M}_\infty) / \sim_0 \longrightarrow \text{Vect}(X), \quad [p]_0 \mapsto [\xi_p]$$

είναι καλά ορισμένη, 1-1 και προσθετική.

Από την άλλη, κάθε διανυσματική δέσμη $\xi = (E, \pi, X)$ είναι ευθύς προσθετός της τετριμμένης δέσμης (από το θεώρημα Serre-Swan). Έτσι, θεωρούμε την $p(x)$ ως προβολή από τον \mathbb{C}^n στον E_x . Τότε, η $p : X \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ είναι συνεχής και ανήκει στην $\text{Idem}(C(X) \otimes \mathcal{M}_n)$ και $\xi_p = \xi$. Αυτό δείχνει ότι η ϕ είναι επί και άρα ισομορφισμός αβελιανών ημιομάδων. \square

Παρατήρηση: Η Κ-Θεωρία ορίζεται γενικά για έναν τυχαίο δακτύλιο R . Εδώ, η άλγεβρα $C(X) \otimes \mathcal{M}_n$ είναι ένας δακτύλιος αλλά και C^* -άλγεβρα, αφού $C(X) \otimes \mathcal{M}_n \cong \mathcal{M}_n(C(X))$ όπου κάθε στοιχείο $\alpha_{ij} \in \mathcal{M}_n$ ανήκει στην $C(X)$ που είναι μια C^* -άλγεβρα. Έτσι, η νόρμα $\|\alpha\|_{\mathcal{M}_n(C(X))} = \|\phi_n(\alpha)\|$ όπου $\phi_n : \mathcal{M}_n(C(X)) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι ένας $*$ -μονομορφισμός για έναν χώρο Hilbert \mathcal{H} .

Παρολαυτά, η άλγεβρα $C(X) \otimes \mathcal{M}_\infty$ είναι ένας δακτύλιος και όχι μια C^* -άλγεβρα, αφού είναι μια μη-πλήρης $*$ -άλγεβρα.² Για αυτόν τον λόγο, στην επόμενη ενότητα θα αντικαταστήσουμε την $A \otimes \mathcal{M}_\infty$ με την πλήρωση της $A \otimes \mathcal{K}$, όπου \mathcal{K} είναι οι συμπαγείς τελεστές (**[ΕγγΟ]**).

3.3.1 C^* -άλγεβρες

Ένα στοιχείο p μιας C^* -άλγεβρας, ονομάζεται *προβολή* αν $p = p^2 = p^*$ και *ταυτοδύναμο* αν $p = p^2$. Τα στοιχεία u για τα οποία u^*u όπως και uu^* είναι προβολές, ονομάζονται *μερικές ισομετρίες*. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε $u = uu^*u$.

Πρόταση 18. Για μια C^* -άλγεβρα, κάθε ταυτοδύναμο στοιχείο είναι αλγεβρικά ισοδύναμο με μια προβολή. Δύο προβολές p και q σε μια C^* -άλγεβρα είναι αλγεβρικά ισοδύναμες αν και μόνον αν υπάρχει μια μερική ισομετρία u τέτοια ώστε

$$p = u^*u, \quad q = uu^*.$$

Απόδειξη. Αν αναπαραστήσουμε μια C^* -άλγεβρα με τελεστές που δρουν σε έναν χώρο Hilbert \mathcal{H} , τα ταυτοδύναμα στοιχεία αντιστοιχούν σε (γεωμετρικές) προβολές σε έναν κλειστό υπόχωρο του \mathcal{H} και οι προβολές αντιστοιχούν σε ορθογώνιες προβολές. Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα όπως αυτά της προηγούμενης παραγράφου, κανείς δείχνει ότι δύο ταυτοδύναμα στοιχεία p και q είναι αλγεβρικά ισοδύναμα ακριβώς όταν οι εικόνες τους $p\mathcal{H}$ και $q\mathcal{H}$ είναι ισομετρικά ισόμορφες μέσω μιας μερικής ισομετρίας στην C^* -άλγεβρα. \square

Παρατήρηση: Υπάρχουν επίσης δύο επιπλέον τρόποι να οριστούν οι κλάσεις ισοδυναμίας σε μια C^* -άλγεβρα:

- Αν p και q είναι προβολές σε μια C^* -άλγεβρα (με μονάδα) A , είναι *μοναδιαία ισοδύναμα* αν υπάρχει ένα μοναδιαίο στοιχείο $u \in A$ τέτοιο ώστε $upu^* = q$.
- Οι προβολές p και q καλούνται *ομοτοπικά ισοδύναμα*, αν υπάρχει μονοπάτι από συνεχείς προβολές στην C^* -άλγεβρα που να συνδέει τα p και q .

Παρατήρηση: Όλοι οι παραπάνω ορισμοί των κλάσεων ισοδυναμίας συμπίπτουν όταν περνάμε από την C^* -άλγεβρα A στην $*$ -άλγεβρα $A \otimes \mathcal{M}_\infty$ με την κανονική νόρμα, που επάγεται από τους εγκλεισμούς $M_k \hookrightarrow M_\infty$ [**Ρλλ**].

²Με άλλα λόγια δεν μπορούμε να βρούμε μια νόρμα με βάση την οποία η άλγεβρα $C(X) \otimes \mathcal{M}_\infty$ να είναι ένας πλήρης διανυσματικός χώρος. Δηλαδή, δεν υπάρχει ένας $*$ -μονομορφισμός $\phi : \mathcal{M}_\infty(C(X)) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, καθώς οι πίνακες άπειρης διάστασης δεν αντιστοιχούν σε φραγμένους τελεστές σε έναν χώρο Hilbert.

Καθώς η $A \otimes \mathcal{M}_\infty$ δεν είναι C^* -άλγεβρα, παίρνουμε την πλήρωση της,

$$\lim_{\rightarrow} A \otimes \mathcal{M}_k = A \otimes \mathcal{K}$$

όπου \mathcal{K} είναι οι συμπαγείς τελεστές σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert. Έτσι, έχουμε,

Ορισμός 18. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα. Συμβολίζουμε με $\text{Proj}(A \otimes \mathcal{K})$ το σύνολο των κλάσεων (αλγεβρικά, ομοτοπικά ή μοναδιαία) ισοδύναμων προβολών στην C^* -άλγεβρα $A \otimes \mathcal{K}$. Η πρόσθεση στο $\text{Proj}(A \otimes \mathcal{K})$ ορίζεται ως,

$$[p] + [q] = [p + q]$$

όπου οι αντιπρόσωποι p και q έχουν επιλεγεί έτσι ώστε $pq = qp = 0$. Η ομάδα *Grothendieck* του $\text{Proj}(A \otimes \mathcal{K})$ είναι η K -ομάδα της A , που συμβολίζουμε απλά με $K_0(A)$.

3.3.2 Ομάδες ανώτερου βαθμού

Από τα αξιώματα Eilenberg-Steenrod [**Παράρτημα Δ**], εύκολα παρατηρούμε την ισότητα,

$$H^p(\text{point}) \cong \tilde{H}^0(S^p)$$

εκφράζοντας τις ομάδες συνολογίας υψηλότερου βαθμού, σε σχέση με την ομάδα συνολογίας μηδενικής διάστασης της p -σφαίρας S^p . Έτσι, για να ορίσουμε τις K -ομάδες υψηλότερου βαθμού, πρέπει να ορίσουμε την ανάρτηση (suspension) μιας C^* -άλγεβρας.

Ορισμός 19. [Μπλακ] Η ανάρτηση μιας C^* -άλγεβρας A , συμβολίζουμε με SA , ορίζεται ως

$$SA = \{f : \mathbb{R} \rightarrow A \mid f \text{ συνεχής, } \lim_{x \rightarrow \infty} \|f(x)\| = 0\} = A \otimes C_0(\mathbb{R})$$

Με τις κατά σημείο πράξεις και την νόρμα *supremium*, η SA είναι μια C^* -άλγεβρα.

Επίσης μπορούμε να ορίσουμε τον κώνο (cone) CA της A , που ορίζεται ως,

$$CA = C_0([1, \infty), A) \cong A \otimes C_0([1, \infty))$$

Όπως μπορούμε εύκολα να δούμε, η σύντομη ακολουθία

$$0 \longrightarrow SA \xrightarrow{i} CA \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

όπου i είναι ο εγκλεισμός και $\pi(f) = f(1)$, είναι ακριβής. Με βάση τα αξιώματα, υπάρχει η μακρά ακριβής ακολουθία

$$\cdots \longrightarrow K_{p+1}(CA) \longrightarrow K_{p+1}(A) \xrightarrow{\partial} K_p(SA) \longrightarrow K_p(CA) \longrightarrow \cdots \quad (3.2)$$

Το σημαντικό με αυτές τις κατασκευές είναι η επόμενη,

Πρόταση 19. [Μπλακ] Ο κώνος CA είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με το μηδενικό στοιχείο της C^* -άλγεβρας.

Απόδειξη. Ορίζουμε τους $*$ -ομομορφισμούς $f_t : CA \rightarrow CA$ με

$$f_t(h)(s) \begin{cases} 0, & \text{αν } t = 0, \\ h(s/t), & \text{αν } t \in (0, 1] \end{cases}$$

για $h \in C_0([1, \infty), A)$ και $s \in [1, \infty)$. Παρατηρούμε ότι η f_0 είναι η μηδενική απεικόνιση και η f_1 είναι η ταυτοτική. Η συνέχεια των απεικονίσεων $t \mapsto f_t(h)$ στο $t = 0$, έπεται από ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|f_t(h)\| = \lim_{t \rightarrow 0} \sup_{s \in [1, \infty)} \|h(s/t)\| = \lim_{s \rightarrow \infty} \|h(s)\| = 0.$$

□

Από τα αξιώματα της γενικευμένης συνομολογίας και την ιδιότητα του ομοτοπικά αναλλοίωτου για τον συναρτητή K_0 , παίρνουμε ότι $K_0(CA) = 0$. Από την μακρά ακριβής ακολουθία (3.2), συμπεραίνουμε την ύπαρξη φυσικού ισομορφισμού

$$K_p(A) \cong K_0(S^p A), p \geq 0$$

όπου με S^p συμβολίζουμε τον συναρτητή ανάρτησης που εφαρμοσμένο p φορές. Ειδικά για τον συναρτητή K_1 , έχουμε,

Πρόταση 20. [Μπλακ] Για μια C^* -άλγεβρα A , η αβελιανή ομάδα $K_1(A)$, που ορίζουμε ως $K_1(A) = K_0(SA)$, συμπίπτει με την ομάδα,

$$K_1(A) = \varinjlim GL_k(A)/GL_k(A)_0.$$

όπου $GL_k(A)/GL_k(A)_0$ συμβολίζει την (όχι απαραίτητα αβελιανή) ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων της A modulo την σχέση ομοτοπίας στην A .

Παρατήρηση: Η ανάρτηση μιας C^* -άλγεβρας A , μπορεί να οριστεί ισοδύναμα ως,

$$SA \cong C_0([0, 1] \rightarrow A) \cong \{f \in C(\mathbb{T} \rightarrow A) \mid f(1) = 0\}$$

Γεωμετρικά, για έναν χώρο X , μπορούμε να ορίσουμε την ανάρτηση του SX , ως τον χώρο πηλίκο του $X \times I$ ταυτίζοντας τον $X \times \{0\}$ με σημείο και τον $X \times \{1\}$ με ένα άλλο σημείο. Για παράδειγμα, αν $X = S^1$, τότε $SX = S^2$. Αν X είναι χώρος CW σύμπλεγμα, τότε και οι χώροι SX και CX είναι, ως χώροι πηλίκο του $X \times I$.

Προχωρούμε τώρα στο βαθύτερο θεώρημα στην Κ-Θεωρία που μας είναι απαραίτητο για τον υπολογισμό των Κ-ομάδων.

3.3.3 Η ακολουθία των έξι όρων

Το θεμελιώδες θεώρημα στην Κ-Θεωρία είναι το θεώρημα περιοδικότητας του **Bott** το οποίο είναι,

Θεώρημα 2. [Μπλακ] Για κάθε C^* -άλγεβρα A , υπάρχει ο ισομορφισμός $\beta_A : K_0(A) \rightarrow K_1(SA)$ αβελιανών ομάδων, τέτοιος ώστε το ακόλουθο διάγραμμα μετατίθεται για κάθε μορφισμό C^* -αλγεβρών $\alpha : A \rightarrow B$:

$$\begin{array}{ccc} K_0(A) & \xrightarrow{\alpha_*} & K_0(B) \\ \downarrow \beta_A & & \downarrow \beta_B \\ K_1(SA) & \xrightarrow{\alpha_*} & K_1(SB) \end{array}$$

Η μακρά ακριβής ακολουθία (3.2) δικαιολογεί το όνομα ‘‘περιοδικότητα’’ καθώς έχουμε,

$$K_0(A) \cong K_0(S^2 A) \text{ και } K_1(A) \cong K_1(S^2 A)$$

όπου $S^2 A$ είναι η διπλή ανάρτηση $SSA \cong C_0(\mathbb{R}^2) \otimes A$.

Συνεπώς, αν A είναι μια C^* -άλγεβρα (με μονάδα) και J ένα ιδεώδες της A , τότε από την σύντομη ακριβής ακολουθία,

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow A \longrightarrow B \cong A/J \longrightarrow 0 \quad (3.3)$$

κατασκευάζουμε την ακριβής ακολουθία έξι όρων K -ομάδων

$$\begin{array}{ccccc} K_0(J) & \longrightarrow & K_0(A) & \longrightarrow & K_0(B) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(B) & \longleftarrow & K_1(A) & \longleftarrow & K_1(J) \end{array} \quad (3.4)$$

η οποία αποτελεί και το μοναδικό χαρακτηριστικό της C^* -αλγεβρικής K -Θεωρίας.

3.3.4 Η ακολουθία Mayer-Vietoris

Η ακολουθία Mayer-Vietoris [ΒοτΤ] είναι ένα χρήσιμο εργαλείο στον υπολογισμό των ομάδων συνομολογίας ενός τοπικά συμπαγή χώρου X ως συνάρτηση των τοπολογικά απλούστερων υποχώρων του.

Υποθέτουμε ότι $X = U_1 \cup U_2$ όπου U_1 και U_2 είναι κλειστοί υπόχωροι (τοπικά συμπαγείς). Τότε, υπάρχει μια ακολουθία εγκλεισμών

$$X \longleftarrow U_1 \amalg U_2 \xrightarrow[\iota]{j} U_1 \cap U_2$$

όπου $U_1 \amalg U_2$ συμβολίζει την ξένη ένωση συνόλων. Στο πλαίσιο των C^* -αλγεβρών έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccc} C_0(X) & \xrightarrow{pr_1} & C_0(U_1) \\ \downarrow pr_2 & & \downarrow \pi_1 \\ C_0(U_2) & \xrightarrow{\pi_2} & C_0(U_1 \cap U_2) \end{array}$$

όπου $C_0(X) \cong \{(f_1, f_2) \in C_0(U_1) \oplus C_0(U_2) \mid \pi_1(f_1) = \pi_2(f_2)\}$ με π_1, π_2 έναν $*$ -επιμορφισμό και pr_1, pr_2 τους περιορισμούς των φυσικών προβολών $C_0(U_1) \oplus C_0(U_2) \rightarrow C_0(U_1)$ και $C_0(U_1) \oplus C_0(U_2) \rightarrow C_0(U_2)$ αντιστοίχως.

Η μακρά ακριβής ακολουθία των K -ομάδων (Mayer-Vietoris) που επάγεται, λόγω της περιοδικότητας του Bott παίρνει την μορφή, ([Μπλακ])

$$\begin{array}{ccc} K^0(X) & \xrightarrow{(pr_1^*, pr_2^*)} & K^0(U_1) \oplus K^0(U_2) \xrightarrow{\pi_2^* - \pi_1^*} K^0(U_1 \cap U_2) \\ \uparrow & & \downarrow \\ K_1(U_1 \cap U_2) & \longleftarrow & K^1(U_1) \oplus K^1(U_2) \longleftarrow K^1(X) \end{array} \quad (3.5)$$

3.3.5 Υπολογισμός των K -ομάδων για την S^3

Ανακαλώντας το πως ορίσαμε τις K -ομάδες υψηλότερου βαθμού, το γεγονός ότι $K^0(pt) = \mathbb{Z}$ και λόγω της περιοδικότητας του Bott, κανείς εύκολα βλέπει ότι,

$$K^0(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & n \text{ άρτιο} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ περιττό} \end{cases}, \quad K^1(S^n) \cong \begin{cases} 0, & n \text{ άρτιο} \\ \mathbb{Z}, & n \text{ περιττό} \end{cases} \quad (3.6)$$

Παραθέτουμε ένα βασικό παράδειγμα υπολογισμού των ομάδων $K^\bullet(S^3)$ χρησιμοποιώντας την ακολουθία Mayer-Vietoris, που θα γενικεύσουμε στην περίπτωση της συνεστραμμένης K -θεωρίας [Βουκ2].

Παράδειγμα : Από την (3.5), θέτουμε $X = S^3$ και παίρνουμε για U_i το άνω και το κάτω (κλειστά) ημισφαίρια D_\pm αντίστοιχα. Αφού τα D_\pm είναι συσταλτά, παίρνουμε ότι $K^0(D_\pm) = \mathbb{Z}, K^1(D_\pm) = 0$ ενώ $D_+ \cap D_- \sim_h S^2$. Έτσι, η (3.5) μας δίνει

$$\begin{array}{ccc} K^0(S^3) & \xrightarrow{i_*} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_*} K^0(S^2) \\ \uparrow & & \downarrow \\ K^1(S^2) & \xleftarrow{\pi_*} & 0 \xleftarrow{i_*} K^1(S^3) \end{array}$$

Από την (3.6) έχουμε ότι $K^0(S^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ και $K^1(S^2) = 0$ και επομένως παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow K^0(S^3) \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow K^1(S^3) \longrightarrow 0$$

όπου η απεικόνιση π_* δίνεται από $\pi_*(m, n) = (m - n, 0)$. Καταλήγουμε στο ότι

$$K^0(S^3) = \mathbb{Z} \quad \text{ανδ} \quad K^1(S^3) = \mathbb{Z}.$$

που επαληθεύει τους προηγούμενους συλλογισμούς μας.

Κεφάλαιο 4

Η άποψη του Atiyah για την K-Θεωρία

4.1 Τελεστές Fredholm και Fredholm δείκτης

Στην ενότητα αυτή θα δούμε την K-Θεωρία μέσα από τους χώρους Hilbert και τελεστών που δρουν πάνω τους. Ακολουθούμε το βιβλίο του Atiyah [Ατι2], όπου πρώτα έγινε χρήση αυτών των ιδεών. Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας, θα μας χρειαστούν στο επόμενο κεφάλαιο όπου θα δώσουμε τον ορισμό της συνεστραμμένης K-Θεωρίας και θα δούμε τι γίνεται στις περιπτώσεις που η κλάση Dixmier-Douady έχει στρέψη ή είναι ελευθέρως στρέψεως.

Έστω \mathcal{H} ένας διαχωρίσιμος μιγαδικός χώρος Hilbert, και έστω $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ η άλγεβρα των φραγμένων τελεστών στον \mathcal{H} . Δίνουμε στην \mathcal{B} την τοπολογία που επάγεται από την νόρμα τελεστών. Τότε η \mathcal{B} είναι μια άλγεβρα Banach. Ειδικά, η υποσομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων \mathcal{B}^* της \mathcal{B} είναι ένα ανοιχτών σύνολο. Από το θεώρημα κλειστού γραφήματος¹, κάθε $T \in \mathcal{B}$ που είναι αλγεβρικός ισομορφισμός $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ είναι επίσης και τοπολογικός ισομορφισμός, δηλαδή ο T^{-1} υπάρχει στην \mathcal{B} και έτσι $T \in \mathcal{B}^*$.

Ορισμός 20. Ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ονομάζεται Fredholm αν οι χώροι $\text{Ker}(T)$ και $\text{Coker}(T)$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Αν συμβολίσουμε τον χώρο των τελεστών Fredholm ως $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ τότε, η απεικόνιση

$$\text{Index} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad T \mapsto \text{Index}(T) = \dim \text{Ker}(T) - \dim \text{Coker}(T)$$

ονομάζεται Fredholm δείκτης του T .

Παρατηρούμε ότι για τον τελεστή Fredholm T , η εικόνα $T(\mathcal{H})$ είναι κλειστή. (Από το θεώρημα κλειστού γραφήματος, η εικόνα κάθε κλειστού συνόλου κάτω από μια συνεχή απεικόνιση είναι κλειστή).

Συμβολίζουμε με \mathcal{K} τους συμπαγείς τελεστές στον χώρο \mathcal{H} . Τότε το πηλίκο $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}$ είναι γνωστό ως Calkin άλγεβρα. Έστω $\pi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}$ η απεικόνιση πηλίκο.

¹Αν X είναι ένας τοπολογικός χώρος και Y χώρος Hausdorff, τότε το γράφημα της συνάρτησης $f : X \rightarrow Y$ είναι κλειστό όταν η f είναι συνεχής. Το αντίστροφο αληθεύει όταν η f είναι γραμμική και ορίζεται για κάθε $x \in X$.

Τότε υπάρχει η ακριβής ακολουθία,

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{i} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K} \longrightarrow 0 \quad (4.1)$$

Θεώρημα 3. Θεώρημα Atkinson [Μερφ] Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

1. Η $T(\mathcal{H})$ είναι κλειστή και ισχύει ότι $\dim \text{Ker}(T) < \infty$ και $\dim \text{Coker}(T) < \infty$,
2. υπάρχει τελεστής $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τέτοιος ώστε οι τελεστές $1 - ST$ και $1 - TS$ να είναι συμπαγείς,
3. ο $\pi(T)$ είναι αντιστρέψιμος στην Calkin άλγεβρα.

Έστω $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ ο υπόχωρος των Fredholm τελεστών. Αν $T, S \in \mathcal{F}$ τότε,

$$\begin{aligned} \dim \text{Ker}(TS) &\leq \dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Ker}(S) \\ \dim \text{Coker}(TS) &\leq \dim \text{Coker}(T) + \dim \text{Coker}(S) \end{aligned}$$

και έτσι ο TS είναι επίσης τελεστής Fredholm. Έτσι η \mathcal{F} είναι ομάδα.

Ορισμός 21. Θα ονομάζουμε δύο τελεστές $S, T \in \mathcal{F}$ ομοτοπικούς, θα συμβολίζουμε ως $S \sim_h T$, αν αυτοί συνδέονται μέσω ενός μονοπατιού από Fredholm τελεστές, δηλαδή αν υπάρχει μια οικογένεια συνεχών απεικονίσεων $F_t : \mathcal{F} \times I \rightarrow \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $F_0 = S$ και $F_1 = T$.

Πρόταση 21. Αν συμβολίσουμε με \mathcal{F}/\sim_h τον χώρο πηλίκου των τελεστών Fredholm με την σχέση ομοτοπίας, τότε

$$\text{Index} : \mathcal{F}/\sim_h \longrightarrow \mathbb{Z}$$

είναι ισομορφισμός ομάδων.

Απόδειξη. Έστω $X, Y, Z \subset \mathcal{H}$. Τότε, αν $B : X \rightarrow Y$ και $A : Y \rightarrow Z$ είναι δύο τελεστές Fredholm, από την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \text{Ker}(B) \longrightarrow \text{Ker}(AB) \xrightarrow{B} \text{Ker}(A) \cap \text{Im}(B) \longrightarrow 0$$

παίρνουμε ότι $\dim \text{Ker}(AB) = \dim \text{Ker}(B) + \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(B))$ και από την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow \frac{\text{Ker}(A)}{\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(B)} \longrightarrow \frac{Y}{\text{Im}(B)} \xrightarrow{A} \frac{Z}{\text{Im}(AB)} \longrightarrow \frac{Y}{\text{Im}(A)} \longrightarrow 0$$

παίρνουμε ότι $\dim \text{Coker}(AB) = \dim \text{Coker}(A) + \dim \text{Coker}(B) - \dim \text{Ker}(A) + \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Im}(B))$. Έτσι,

$$\begin{aligned} \text{Index}(AB) &= \dim \text{Ker}(AB) - \dim \text{Coker}(AB) \\ &= \dim \text{Ker}(A) - \dim \text{Coker}(A) + \dim \text{Ker}(B) - \dim \text{Coker}(B) \\ &= \text{Index}(A) + \text{Index}(B) \end{aligned}$$

δηλαδή η απεικόνιση $Index$ είναι ομομορφισμός ομάδων.

Επίσης, η απεικόνιση είναι 1-1, καθώς δύο τελεστές με τον ίδιο δείκτη είναι ομοτοπικοί². Τέλος, δεδομένου ενός ακεραίου $k \in \mathbb{Z}$ ο τελεστής που ορίζεται σε σχέση με την ορθομοναδιαία βάση $\{e_i\}, i = 1, 2, \dots$ ως

$$T_k(e_i) = \begin{cases} e_{i-k} & , \text{ για } i - k \geq 1 \\ 0 & , \text{ αλλιώς} \end{cases}$$

είναι τελεστής Fredholm και έχει δείκτη k . (ο τελεστής μονομερούς μετατόπισης) \square

Παρατήρηση: Για την σύντομη ακριβή ακολουθία (4.1), η ακολουθία έξι όρων (3.4) μας δίνει ότι,

$$K_1(\mathcal{B}/\mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} K_0(\mathcal{K})$$

καθώς $K_1(\mathcal{B}) = K_0(\mathcal{B}) = 0$. Έτσι, ανακαλώντας τον ορισμό της ομάδας $K_1(A)$ στην Πρόταση 20, όπος A είναι μια C^* -άλγεβρα, παρατηρούμε αμέσως ότι η Πρόταση 21 ισχύει.

4.2 Το κύριο Θεώρημα

Προχωρούμε τώρα στην οπτική του Atiyah.

Παρατηρούμε από την Πρόταση 21, ότι $\mathcal{F}/\sim_h = [pt, \mathcal{F}]$ δηλαδή, το σύνολο των κλάσεων ομοτοπικών απεικονίσεων από το σημείο στον χώρο των τελεστών Fredholm και ότι $\mathbb{Z} = K^0(pt)$.

Θα θέλαμε να γενικεύσουμε αυτόν τον ορισμό της απεικόνισης του δείκτη για τελεστές Fredholm πάνω από μια συμπαγή πολλαπλότητα X αντί για ένα σημείο.

Η νέα απεικόνιση δείκτη θα παίρνει τιμές στην ομάδα $K^0(X)$ αντί για την ομάδα \mathbb{Z} . Θα θέλαμε να ορίσουμε την απεικόνιση δείκτη για έναν τελεστή Fredholm \tilde{T} επί της X ως

$$Index(\tilde{T}) = [Ker(\tilde{T}_x)_{x \in X}] - [Coker(\tilde{T}_x)_{x \in X}] \in K^0(X) \quad (4.2)$$

αλλά γενικά, οι $[Ker(\tilde{T}_x)_{x \in X}]$ και $[Coker(\tilde{T}_x)_{x \in X}]$ δεν είναι τοπικά σταθερής διάστασης και άρα δεν είναι διανυσματικές δέσμες επί της X . Έτσι, κάνουμε χρήση της ημιομάδας $[X, \mathcal{F}]$, του συνόλου δηλαδή των κλάσεων ομοτοπικών απεικονίσεων $X \rightarrow \mathcal{F}$.

Θεώρημα 4. Για κάθε συμπαγή πολλαπλότητα X , έχουμε τον ισομορφισμό ημιομάδων

$$Ind : [X, \mathcal{F}] \longrightarrow K^0(X)$$

Για κάθε $x \in X$ έχουμε μια επί απεικόνιση

$$T : X \rightarrow \mathcal{F}, \quad x \mapsto T_x \in \mathcal{F}$$

²Αυτό συνεπάγεται από την συνέχεια της απεικόνισης $Index : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{Z}$ [Μερφ] και το γεγονός ότι ο χώρος ηλίκο \mathcal{F}/\sim_h είναι η ξένη ένωση των συνεκτικών συνιστωσών $\coprod_n Fred_n$ δηλαδή των χώρων τελεστών Fredholm με δείκτη n . Καθώς το \mathbb{Z} είναι διακριτό σύνολο, τελεστές με τον ίδιο δείκτη πρέπει να είναι ομοτοπικοί.

Για κάθε y στην περιοχή του x , παίρνουμε ότι $T_y \sim_h T_x$. Έτσι, λόγω της ομοτοπικής αναλλοιωτότητας της απεικόνισης δείκτη (Πρόταση 21) παίρνουμε ότι $\dim \text{Ker} T_x$ είναι τοπικά σταθερή. Έτσι, αν

$$T = (id_X, \tilde{T}) : X \times \mathcal{H} \longrightarrow X \times \mathcal{H}$$

είναι ένας μορφισμός διανυσματικών δεσμών, όπου \tilde{T} είναι τελεστής Fredholm, τότε $\dim \text{Ker}(T_x)_{x \in X}$ είναι τοπικά σταθερή. Για τις πεπερασμένες διαστάσεις έχουμε,

Πρόταση 22. [Ατι2] Έστω $f : F \rightarrow E$ ένας μορφισμός διανυσματικών δεσμών με $\dim \text{Ker}(f_x)$ τοπικά σταθερή. Τότε,

- $\text{Ker}(f) = \bigcup_x \text{Ker}(f_x)$ είναι υποδέσμη της F
- $\text{Im}(f) = \bigcup_x \text{Im}(f_x)$ είναι υποδέσμη της E
- $\text{Coker}(f) = \bigcup_x \text{Coker}(f_x)$ είναι δέσμη με την δομή πηλίκου, δηλαδή το πηλίκο διανυσματικών χώρων $E/\text{Im}(f) = \bigcup_x E_x/\text{Im}(f_x)$ με την τοπολογία πηλίκου είναι δέσμη.

Για τις άπειρες διαστάσεις έχουμε την επόμενη Πρόταση,

Πρόταση 23. [Ατι2] Έστω $T \in \mathcal{F}$ και έστω V ένας κλειστός υπόχωρος του \mathcal{H} πεπερασμένης συνδιάστασης, τέτοιος ώστε $V \cap \text{Ker}(T) = 0$. Τότε υπάρχει περιοχή $U \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τέτοια ώστε, για κάθε $S \in U$, έχουμε

1. $V \cap \text{Ker}(S) = 0$
2. $\bigcup_{S \in U} \mathcal{H}/S(V)$ με την τοπολογία του χώρου πηλίκου του $U \times \mathcal{H}$, είναι τετριμμένη διανυσματική δέσμη επί του U .

Απόδειξη. Έστω $W = T(V)^\perp$ (το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $T(V)$ στον \mathcal{H}). Τότε $T \in \mathcal{F}$ και $\dim \mathcal{H}/V$ είναι πεπερασμένη και άρα η $\dim W$ είναι πεπερασμένη. Ορίζουμε για $S \in \mathcal{B}$,

$$\phi_S : V \oplus W \rightarrow \mathcal{H}$$

με $\phi_S(V \oplus W) = S(V) + W$. Τότε η $S \rightarrow \phi_S$ μας δίνει μια συνεχή απεικόνιση

$$\phi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{L}(V \oplus W, \mathcal{H})$$

όπου \mathcal{L} συμβολίζει των χώρο συνεχών γραμμικών απεικονίσεων με την τοπολογία νόρμας τελεστών. Ο ϕ_T είναι ισομορφισμός και άρα δημιουργεί ένα ανοιχτό σύνολο στην \mathcal{L} (όπως τα στοιχεία \mathcal{B}^* στην \mathcal{B}). Έτσι, υπάρχει περιοχή του U του \mathcal{B} στην \mathcal{B} τέτοια ώστε ο ϕ_S να είναι ισομορφισμός για κάθε $S \in U$. Αυτό συνεπάγεται τα (1) και (2). \square

Πρόταση 24. Έστω $T : X \rightarrow \mathcal{F}$ μια συνεχής απεικόνιση με το X συμπαγή χώρο. Τότε υπάρχει υπόχωρος $V \subset \mathcal{H}$, κλειστός και πεπερασμένης συνδιάστασης τέτοιος ώστε,

1. $V \cap \text{Ker} T_x = 0$ για κάθε $x \in X$

2. Για κάθε τέτοιον χώρο V έχουμε ότι $\bigcup_{x \in X} \mathcal{H}/T_x(V)$ είναι τετριμμένη υποδέσμη της $X \times \mathcal{H}$ επί του X .

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε $V_x = (\text{Ker}T_x)^\perp$. Έστω $U_x = \phi_T^{-1}(T(V_x))$. Τότε ο $V = \bigcap_{x \in X} U_x$ ικανοποιεί το (1). Για να δείξουμε το (2) εφαρμόζουμε την Πρόταση 23 σε κάθε T_x και συμπεραίνουμε ότι η $\bigcup_y \mathcal{H}/T_y(V)$ είναι τετριμμένη κοντά στο x και έτσι μια διανυσματική δέσμη. \square

Για συντομία, συμβολίζουμε τη δέσμη $\bigcup_{x \in X} \mathcal{H}/T_x(V)$ στην Πρόταση 24 με $\mathcal{H}/T(V)$.

Αυτή η δέσμη είναι 'υποψήφια' για την δέσμη του συνπυρήνα. Για την δέσμη του πυρήνα παίρνουμε την τετριμμένη δέσμη $X \times \mathcal{H}/V$. Παρατηρούμε ότι $\dim(\mathcal{H}/V)$ είναι μεγαλύτερη από την $\dim(\text{Ker}T_x)$. Αν $\hat{T}_x := T_x|_{\mathcal{H}/V}$ τότε η διαφορά είναι $\dim(\text{Im}(\hat{T}_x))$. Επίσης η $\dim(\mathcal{H}/T_x(V))$ είναι μεγαλύτερη από την $\dim(\text{Coker}(T_x)) = \dim(\mathcal{H}/T_x(\mathcal{H}))$ και πάλι η διαφορά είναι $\dim(\text{Im}(\hat{T}_x))$. Με βάση αυτό κατασκευάζουμε την απεικόνιση δείκτη,

Ορισμός 22. Έστω ο υπόχωρος $V \subset \mathcal{H}$ όπως στην Πρόταση 24. Τότε ορίζουμε ως

$$\text{Ind}(T) = [\mathcal{H}/V] - [\mathcal{H}/T(V)] \in K^0(X)$$

όπου με \mathcal{H}/V συμβολίζουμε την τετριμμένη δέσμη $X \times \mathcal{H}/V$.

Πρόταση 25. Η απεικόνιση $\text{Ind} : [X, \mathcal{F}] \rightarrow K^0(X)$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του V όπως και ομοτοπικά αναλλοίωτη.

Απόδειξη. Αν W είναι ένας άλλος υπόχωρος, τότε και ο $V \cap W$ είναι και άρα αρκεί να υποθέσουμε ότι $W \subset V$. Αλλά τότε έχουμε τις ακριβείς ακολουθίες διανυσματικών δεσμών,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow V/W \rightarrow \mathcal{H}/W \rightarrow \mathcal{H}/V \rightarrow 0 \\ 0 &\rightarrow V/W \rightarrow \mathcal{H}/T(W) \rightarrow \mathcal{H}/T(V) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$[\mathcal{H}/V] - [\mathcal{H}/W] = [V/W] = [\mathcal{H}/T(V)] - [\mathcal{H}/T(W)]$$

δηλαδή το ζητούμενο.

Αν $f : Y \rightarrow X$ είναι μια άλλη συνεχής απεικόνιση, τότε,

$$\text{Ind}(Tf) = f^{-1}\text{Ind}(T)$$

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η επιλογή του υποχώρου V για τον T είναι επίσης επιλογή για τον Tf . Τώρα, αν $T : X \times I \rightarrow \mathcal{F}$ είναι μια ομοτοπία μεταξύ των T_0 και T_1 τότε η $\text{Ind}(T) \in K^0(X \times I)$ περιορίζεται στις $\text{Ind}(T_i) \in K^0(X \times \{i\}), i = 0, 1$. Αφού,

$$K^0(X \times I) \rightarrow K^0(X \times \{i\}) \cong K^0(X)$$

είναι ισομορφισμός, έπεται ότι,

$$\text{Ind}(T_0) = \text{Ind}(T_1)$$

Έτσι η απεικόνιση,

$$Ind : [X, \mathcal{F}] \longrightarrow K^0(X)$$

είναι καλά ορισμένη. □

Πρόταση 26. Η απεικόνιση Ind είναι ομομορφισμός.

Απόδειξη. Έστω $S : X \rightarrow \mathcal{F}$, $T : X \rightarrow \mathcal{F}$ δύο συνεχείς απεικονίσεις. Έστω $W \subset \mathcal{H}$ μια επιλογή για τον T . Αντικαθιστώντας τον S με την ομοτοπική απεικόνιση $\pi_W S$ (όπου π_W είναι η προβολή στον W), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $S(\mathcal{H}) \subset W$. Αν $V \subset \mathcal{H}$ είναι μια επιλογή για τον S τότε είναι και για τον TS και έτσι έχουμε την ακριβή ακολουθία,

$$0 \longrightarrow W/S(V) \xrightarrow{T} \mathcal{H}/TS(V) \longrightarrow \mathcal{H}/T(W) \longrightarrow 0$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} Ind(TS) &= [\mathcal{H}/V] - [\mathcal{H}/TS(V)] \\ &= [\mathcal{H}/V] + [W/S(V)] - [\mathcal{H}/T(W)] \\ &= [\mathcal{H}/V] - [\mathcal{H}/S(V)] + [\mathcal{H}/W] - [\mathcal{H}/T(W)] \\ &= Ind(S) + Ind(T) \end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Τώρα που ξέρουμε ότι η απεικόνιση $Ind : [X, \mathcal{F}] \longrightarrow K^0(X)$ είναι ομομορφισμός, κανείς μπορεί να αποδείξει το θεώρημα 4. Η απόδειξη βασίζεται στις δύο επόμενες προτάσεις:

Πρόταση 27. [Ατι2] Η ακολουθία ημιομάδων

$$[X, \mathcal{B}^*] \longrightarrow [X, \mathcal{F}] \xrightarrow{Ind} K^0(X) \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι είναι επιμορφισμός, έστω F μια διανυσματική δέσμη επί του X τέτοια ώστε $E \oplus F = X \times V$. Έστω $\pi_x : V \rightarrow V$ η προβολή στον υπόχωρο E_x . Ορίζουμε την απεικόνιση

$$S : X \rightarrow Fred(\mathcal{H} \times V) \cong Fred(\mathcal{H})$$

με $S_x = T_{-1} \otimes \pi_x + T_0 \otimes (1 - \pi_x)$, όπου T_k είναι ο τελεστής μονομερούς μετατόπισης με δείκτη k . Τώρα, έχουμε $Ker(S_x) = 0 \quad \forall x$ και $\mathcal{H} \otimes V/S(\mathcal{H} \otimes V) \cong E$ και άρα,

$$Ind(S) = -[E]$$

Επίσης,

$$Ind(T_k \cdot S) = k - [E]$$

Επομένως η απεικόνιση Ind είναι επί καθώς κάθε στοιχείο της $K^0(X)$ είναι της μορφής $k - [E]$.

Επιπλέον, από το θεώρημα Atkinson, παρατηρούμε ότι αν ένας τελεστής $T \in \mathcal{B}$ είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $T \in \mathcal{B}^*$, τότε έχει δείκτη μηδέν. Αλλά, όπως έχουμε δει, οι τελεστές με τον ίδιο δείκτη είναι ομοτοπικοί. Έτσι, το σύνολο των τελεστών με δείκτη μηδέν είναι συνεκτικό, ανοιχτό και κλειστό και άρα $Ker(Ind) = [X, \mathcal{B}^*]$. \square

Πρόταση 28. [Κουιπ] Η ομάδα $\mathcal{B}^*(\mathcal{H})$ με την τοπολογία που επάγεται από την νόρμα τελεστών, είναι χώρος συσταλτός, δηλαδή $[X, \mathcal{B}^*] = 0$.

Κεφάλαιο 5

Bundle gerbe K-Θεωρία και Συνεστραμμένη K-Θεωρία

5.1 K-Θεωρία για Bundle Gerbes με στρέψη

Αν η Dixmier-Douady κλάση $[H]$ είναι ελεύθερα στρέψεως στην $H^3(M, \mathbb{Z})$, τότε από την Πρόταση 9, είναι κατανοητό ότι δεν υπάρχουν bundle gerbe πρότυπα πεπερασμένης διάστασης. Η γενίκευση στην περίπτωση αυτή, θα μας επιτρέψει να ορίσουμε bundle gerbe πρότυπα ως άπειρης διάστασης προβολικές Hilbert δέσμες .

Τότε, οι επαγόμενες προβολικές δέσμες επί της M είναι πρωτεύουσες $PU(\mathcal{H})$ -δέσμες. Στην περίπτωση αυτή, όπως γνωρίζουμε, υπάρχει μόνο μία τέτοια δέση για δεδομένη Dixmier-Douady κλάση (Πρόταση 14). Συνεπώς, η K-Θεωρία δεν μπορεί να οριστεί με αυτόν τον τρόπο καθώς η Πρόταση 13 υποδεικνύει ότι η ημιομάδα $Mod(L)$ είναι τετριμμένη .

Έτσι, θεωρούμε την περίπτωση όπου η κλάση Dixmier-Douady $[H] \in H^3(M, \mathbb{Z})$ έχει στρέψη. Έστω ένα bundle gerbe (L, Y) με την κλάση Dixmier-Douady να έχει στρέψη. Συμβολίζουμε με $K(L)$ την ομάδα Grothendieck της ημιομάδας $Mod(L)$ των κλάσεων σταθερά ισόμορφων bundle gerbes.

Πρόταση 29. Έστω (L, Y) και (J, X) δύο bundle gerbes. Ένας σταθερά ισομορφισμός, επάγει έναν ισομορφισμό $K(L) \cong K(J)$.

Απόδειξη. Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει η Πρόταση, παρατηρώντας από την Πρόταση 11 ότι ένας σταθερά ισομορφισμός από το L στο J επάγει έναν ισομορφισμό ημιομάδων μεταξύ $Mod(L)$ και $Mod(J)$. \square

Παρατηρούμε ότι η ομάδα $K(L)$ εξαρτάται μόνο από το στοιχείο $DD(L) \in H^3(M, \mathbb{Z})$. Η κλάση της $DD(L)$ ορίζει μια κλάση ισόμορφων bundle gerbes και έτσι για κάθε κλάση $[H] \in H^3(M, \mathbb{Z})$ μπορούμε να ορίσουμε ένα bundle gerbe L με $DD(L) = [H]$ και έτσι μια ομάδα $K(L)$. Για να τονίσουμε την εξάρτηση από την $[H]$, συμβολίζουμε με $K_{bg}(M, [H])$.

Πρόταση 30. Η K-Θεωρία των bundle gerbes ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

1. Αν το (L, Y) είναι τετριμμένο, τότε $K_{bg}(M, [H]) = K(M)$

2. Η $K_{bg}(L)$ είναι πρότυπο πάνω από την $K(M)$
3. Για δύο διαφορετικές κλάσεις $[H], [H'] \in H^3(M, \mathbb{Z})$ υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων,

$$K_{bg}(M, [H]) \otimes K_{bg}(M, [H']) \longrightarrow K_{bg}(M, [H] + [H'])$$

4. Αν $[H]$ είναι μια κλάση στην $H^3(M, \mathbb{Z})$ και $f : N \rightarrow M$ μια απεικόνιση, τότε υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων,

$$K_{bg}(M, [H]) \longrightarrow K_{bg}(N, f^{-1}[H])$$

Απόδειξη. 1. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι μια τετριμμενοποίηση του (L, Y) ορίζει έναν ισομορφισμό ημιομάδων από την $Mod(L)$ στην ημιομάδα κλάσεων ισόμορφων διανυσματικών δεσμών επί της M , $Bum(M)$.

2. Αν θεωρήσουμε την pull-back διανυσματική δέσμη $\pi^{-1}F \rightarrow Y$ της δέσμης $F \rightarrow M$, όπου $\pi : Y \rightarrow M$ είναι η προβολή, το γινόμενο $\pi^{-1}F \otimes E \rightarrow Y$, όπου $E \rightarrow Y$ είναι ένα bundle gerbe πρότυπο, παραμένει ακόμα ένα bundle gerbe πρότυπο.
3. Αν $E \rightarrow Y$ είναι ένα bundle gerbe πρότυπο για το (L, Y) και $F \rightarrow X$ ένα bundle gerbe πρότυπο για το (J, X) , τότε είναι εύκολο να δούμε ότι το $E \otimes F$ ορίζει μια διανυσματική δέσμη πάνω από το $Y \times_{\pi} X$ το οποίο είναι ένα bundle gerbe πρότυπο για το $L \otimes J$. Έτσι έχουμε τον ομομορφισμό,

$$Mod(L) \otimes Mod(J) \longrightarrow Mod(L \otimes J)$$

4. Από την Πρόταση 3, αν $Z \rightarrow N$ είναι μια άλλη εμβάπτιση και $\hat{f} : Z \rightarrow Y$ είναι μια απεικόνιση ινών που καλύπτει την $f : N \rightarrow M$, τότε $DD(\hat{f}^{-1}(L), Z) = \hat{f}^{-1}(DD(L, Y))$. Το αποτέλεσμα προκύπτει από την ανταλλοιωτήτα του συναρτητή $K(X)$, όπου X είναι ένας συμπαγής χώρος.

□

Σε επόμενη ενότητα, θα εισαγάγουμε την *Συνεστραμμένη Κ-Θεωρία*, όπου σχετίζουμε σε κάθε κλάση $[H] \in H^3(M, \mathbb{Z})$ την συνεστραμμένη Κ-ομάδα $K(M, [H])$. Η συνεστραμμένη Κ-Θεωρία έχει τις ιδιότητες της Πρότασης 30. Όπως θα δείξουμε, στην περίπτωση που η κλάση Dixmier-Douady έχει στρέψη, η Κ-Θεωρία που μόλις ορίσαμε συμπίπτει με την συνεστραμμένη Κ-Θεωρία.

5.2 Συνεστραμμένη Κ-Θεωρία

Για μια κλάση $[H] \in H^3(M, \mathbb{Z})$ επιλέγουμε μια πρωτεύουσα $PU(\mathcal{H})$ -δέσμη ¹ Y της οποίας η Dixmier-Douady κλάση είναι η $[H]$ με στρέψη ή χωρίς. Σχηματίζουμε την συσχετισμένη διανυσματική δέσμη

$$Y(Fred) = Y \times_{PU(\mathcal{H})} Fred$$

¹Αυτό είναι εφικτό από την Πρόταση 14

όπου με $Fred$ συμβολίζουμε τον χώρο των Fredholm τελεστών στον \mathcal{H} όπου επιδέχεται την δράση της $PU(\mathcal{H})$ με συζυγία. Συμβολίζουμε με $[M, Y(Fred)]$ τον χώρο όλων των κλάσεων ομοτοπικών τομών της $Y(Fred)$. Τότε έχουμε

Ορισμός 23. Αν $[H] \in H^3(M, \mathbb{Z})$, η συνεστραμμένη K-Θεωρία ορίζεται ως

$$K(M, [H]) = [M, Y(Fred)] \quad (5.1)$$

Μια τομή της $Y(Fred)$, είναι μια απεικόνιση $\sigma : M \rightarrow Y(Fred)$ τέτοια ώστε $\pi \circ \sigma = id|_M$ όπου π είναι η προβολή της πρωτεύουσας $PU(\mathcal{H})$ δέσμης με την οποία αρχίσαμε.

Έστω τώρα, $y \in \pi^{-1}(x)$, θέτουμε $\sigma(x) = [y, g(y)]$, για μια απεικόνιση $g : Y \rightarrow Fred$.

Πρόταση 31. Οι τομές της $Y(Fred)$ είναι ισοδύναμες με $PU(\mathcal{H})$ ισομεταβλητές απεικονίσεις $Y \rightarrow Fred$.

Απόδειξη. Καταρχήν, παρατηρούμε ότι η σ είναι καλά ορισμένη. Για ένα άλλο $y' \in \pi^{-1}(x)$, υπάρχει ένα στοιχείο $u \in PU\mathcal{H}$, τέτοιο ώστε $y' = yu$. Τότε, από τον ορισμό της συσχετιζόμενης δέσμης $Y(Fred)$, έχουμε ότι $g(y') = g(yu) = u^{-1}g(y)u$. Συνεπώς, έχουμε ότι,

$$[y', g(y')] = [yu, u^{-1}g(y)u] = [y, g(y)].$$

Τώρα, για μια ισομεταβλητή απεικόνιση $g : Y \rightarrow Fred$, κατασκευάζουμε μια τομή σ οφ $Y(Fred)$, ορίζοντας $\sigma : [y] \rightarrow [y, g(y)]$. Αν $\sigma[y] = [y', g(y')]$, αφού $\pi \circ \sigma[y] = [y]$ και φυσικά $\pi([y', g(y')]) = [y']$, έχουμε ότι $[y] = [y'] \Leftrightarrow y' = yu$. Έτσι, καταλήγουμε στο ότι η απεικόνιση

$$\sigma : Y/PU(\mathcal{H}) \cong X \longrightarrow Y(Fred), \quad [y] \mapsto [yu, g(yu)] = [y, u^{-1}g(y)u]$$

ορίζει μια τομή της $Y(Fred)$.

Από την άλλη, για μια τομή σ της $Y(Fred)$, θεωρούμε την απεικόνιση $g : Y \rightarrow Fred$. Έχουμε ότι η g είναι ισομεταβλητή. Αυτό συνεπάγεται από το γεγονός ότι η σ είναι καλά ορισμένη, δηλαδή για $[y] = [y']$ έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \sigma[y] &= \sigma[y'] \Leftrightarrow \\ [y, g(y)] &= [y', g(y')] = [yu, g(yu)] = [y, ug(yu)u^{-1}] \Leftrightarrow \\ g(yu) &= u^{-1}g(y)u \end{aligned}$$

□

Συνεπώς, ορίζουμε την συνεστραμμένη K-Θεωρία ως

$$K(M, [H]) = [Y, Fred]_{PU(\mathcal{H})}$$

όπου $[Y, Fred]_{PU(\mathcal{H})}$, ο χώρος των κλάσεων ομοτοπικών ισομεταβλητών απεικονίσεων με τις ομοτοπίες να δίνονται από ισομεταβλητές απεικονίσεις.

Παράδειγμα (ενότητα 3.3.5) Επιστρέφουμε στο παράδειγμα της ενότητας 3.3.5 όπου είχαμε υπολογίσει την K-Θεωρία για την πολλαπλότητα S^3 στην περίπτωση που η κλάση Dixmier-Douady είναι μηδέν. Θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια διαδικασία για να υπολογίσουμε την συνεστραμμένη K-Θεωρία για την S^3 .

Για τον λόγο αυτό, θεωρούμε την πρωτεύουσα $\lim_{n \rightarrow \infty} SU(n)/\mathbb{Z}_n = PU(\mathcal{H})$ -δέσμη $\mathcal{E}_{[H]}$ η οποία είναι τετριμμένη πάνω από τα ημισφαίρια U_i της S^3 , δηλαδή,

$$\begin{array}{ccc} \lim_{n \rightarrow \infty} SU(n)/\mathbb{Z}_n & \longrightarrow & \mathcal{E}_{[H]} \\ & & \downarrow \\ & & S^3 \end{array}$$

Από τον ισομορφισμό $PU(\mathcal{H}) \cong Aut(\mathcal{K})$ ² έχουμε την C^* -άλγεβρα, $C_0(S^3, \mathcal{E}_{[H]})$ των τομών της δέσμης. Η δέσμη $\mathcal{E}_{[H]}$ είναι τετριμμένη πάνω από τα ημισφαίρια U_1 και U_2 , δηλαδή $\mathcal{E}_{[H]} = S^3 \times \mathcal{K}$ και έτσι $C_0(U_i, \mathcal{E}_{[H]}) = C_0(U_i) \times \mathcal{K}$.

Οι τομές δίνονται από την συγκόληση των $C_0(U_1) \otimes \mathcal{K}$ και $C_0(U_2) \otimes \mathcal{K}$ πάνω από τις διπλέα τομές $U_1 \cap U_2$ μέσω της απεικόνισης $g_{[H]} : U_1 \cap U_2 \rightarrow PU(\mathcal{H})$, δηλαδή,

$$C_0(S^3, \mathcal{E}_{[H]}) = \{(f_1, f_2) | f_i \in C_0(U_i) \otimes \mathcal{K}, f_1|_{U_1 \cap U_2} = g_{[H]} f_2|_{U_1 \cap U_2}\}$$

και έτσι έχουμε της σύντομη ακριβή ακολουθία,

$$0 \longrightarrow C_0(S^3, \mathcal{E}_{[H]}) \xrightarrow{i} C_0(U_1) \otimes \mathcal{K} \oplus C_0(U_2) \otimes \mathcal{K} \xrightarrow{\pi} C_0(U_1 \cap U_2) \otimes \mathcal{K} \longrightarrow 0$$

όπου

$$i(f_1, f_2) = f_1 \oplus f_2 \quad \text{και} \quad \pi(f_1 \oplus f_2) = f_1|_{U_1 \cap U_2} - g_{[H]} f_2|_{U_1 \cap U_2}.$$

Η σχετική ακολουθία έξι όρων στην συνεστραμμένη K-Θεωρία είναι³

$$\begin{array}{ccccc} K^0(S^3, [H]) & \xrightarrow{i_*} & K^0(U_1) \oplus K^0(U_2) & \xrightarrow{\pi_*} & K^0(U_1 \cap U_2) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K^1(U_1 \cap U_2) & \longleftarrow & K^1(U_1) \oplus K^1(U_2) & \longleftarrow & K^1(S^3, [H]) \end{array}$$

η οποία μας δίνει την ακριβή ακολουθία,

$$0 \longrightarrow K^0(S^3, [H]) \xrightarrow{i_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow K^1(S^3, [H]) \longrightarrow 0$$

²Κάθε $\phi \in Aut(\mathcal{K})$ είναι της μορφής $\phi_g = Ad(g)$ για κάποιο στοιχείο $g \in U(\mathcal{H})$ ([EγγO]). Η απεικόνιση,

$$Ad : U(\mathcal{H}) \rightarrow Aut(\mathcal{K}) \quad g \mapsto Ad(g) = gTg^{-1}, \forall T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

είναι ένας συνεχής ομομορφισμός με πυρήνα $U(1)$, όπου $Aut(\mathcal{K})$ έχει την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης σε όλα τα συμπαγή υποσύνολα του \mathcal{H} [Ατ1].

³Η C^* -άλγεβρα $C_0(U_i) \otimes \mathcal{K}$ ονομάζεται η σταθεροποίηση της C^* -άλγεβρας $C_0(U_i)$. Αποδεικνύεται στο [Pλλ] ότι ο εγκλεισμός $C_0(U_i) \longrightarrow C_0(U_i) \otimes \mathcal{K}$ επάγει έναν ισομορφισμό $K(C_0(U_i)) \longrightarrow K(C_0(U_i) \otimes \mathcal{K})$.

όπου τώρα η απεικόνιση π_* δίνεται από $\pi_*(m, n) = (m - n, -nN)$ αν $[H] = N[H_0]$ όπου $[H_0]$ είναι ο γεννήτορας της $H^3(S^3, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Αν $N \neq 0$, παίρνουμε

$$K^0(S^3, [H]) = 0 \quad \text{ανδ} \quad K^1(S^3, [H]) = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}.$$

Προχωρούμε τώρα στον ορισμό της συνεστραμμένης Κ-Θεωρίας στην περίπτωση που η κλάση Dixmier-Douady έχει στρέψη ή είναι ελεύθερα στρέψεως.

5.3 Συνεστραμμένη Κ-Θεωρία στην περίπτωση στρέψης

Στην περίπτωση όπου η κλάση Dixmier-Douady $[H]$ έχει στρέψη, αποδεικνύουμε ότι η Κ-Θεωρία που ορίσαμε για τα bundle gerbes συμπίπτει με την συνεστραμμένη Κ-θεωρία που μόλις ορίσαμε.

Από την Πρόταση 14, υπάρχει μια πρωτεύουσα $PU(n)$ -δέσμη $X \rightarrow M$, με κλάση Dixmier-Douady ίση με $[H]$. Ορίζουμε την δράση

$$U(n) \times \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^n$$

με κάθε $g \in U(n)$ να δρα ως $g \otimes 1$. Έτσι, παίρνουμε την αναπαράσταση $\rho_n : U(n) \rightarrow U(\mathcal{H}^n)$ η οποία επάγει μια πρωτεύουσα $PU(\mathcal{H}^n)$ -δέσμη με Dixmier-Douady κλάση $[H]$. Επειδή $\mathcal{H}^n \cong \mathcal{H}$ και όλες οι $PU(\mathcal{H})$ -δέσμες χαρακτηρίζονται από την Dixmier-Douady κλάση τους, υποθέτουμε ότι η $PU(\mathcal{H})$ -δέσμη Y , που εισάγαμε στην αρχή της ενότητας, περιέχει την $PU(n)$ -δέσμη X ως $U(n)$ αναγωγή. Επομένως έχουμε,

$$(Y \times Fred)/PU(\mathcal{H}) \cong (X \times Fred)/PU(n)$$

και άρα,

$$K(M, [H]) = [Y, Fred]_{PU(\mathcal{H})} \cong [X, Fred]_{PU(n)}$$

Επιπλέον, το ανυψωμένο bundle gerbe L για την $X \rightarrow M$ είναι το pull back του ανυψωμένου bundle gerbe για την $Y \rightarrow M$.

Αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα,

Θεώρημα 5. Για μια πρωτεύουσα $PU(n)$ -δέσμη $X \rightarrow M$ με Dixmier-Douady κλάση $[H]$ με στρέψη, υπάρχει ο καλά ορισμένος ισομορφισμός ημιομάδων

$$Ind : [X, Fred(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H})]_{U(n)} \longrightarrow K_{bg}(M, L)$$

όπου L είναι το ανυψωμένο bundle gerbe επί της M για την X του οποίου η κλάση Dixmier-Douady είναι $[H]$ και όπου η ομάδα $U(n)$ δρα στον χώρο $Fred$ με συζυγία.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 24, ταυτίζοντας $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^n \cong \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}$ έχουμε ότι υπάρχει ένας κλειστός υπόχωρος πεπερασμένης συνδιάστασης $V \subset \mathcal{H}$ τέτοιος ώστε για κάθε συνεχή απεικόνιση $f : X \rightarrow Fred(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H})$, όπου X συμπαγής πολλαπλότητα, έχουμε ότι \mathcal{H}/V και $\mathcal{H}/f(V)$ είναι ερμιτιανές διανυσματικές δέσμες πεπερασμένης διάστασης

επί της X , όπου η \mathcal{H}/V είναι η τετριμμένη δέσμη.

Επιπλέον είναι bundle gerbe πρότυπα, καθώς η ομάδα $U(n)$ δρα στον ολικό χώρο $\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}$ όπως τονίστηκε προηγουμένως. Έτσι, ορίζουμε την απεικόνιση,

$$Ind : [X, Fred(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H})]_{U(n)} \longrightarrow K_{bg}(M, L), \quad f \mapsto [\mathcal{H}/V] - [\mathcal{H}/f(V)]$$

Από τις Προτάσεις 25 και 26 η απεικόνιση Ind είναι ένας καλά ορισμένος ομομορφισμός. Επιπλέον, $Ker(Ind) = [X, U(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H})]_{U(n)}$ και από το θεώρημα του Kuiper (Πρόταση 28) έχουμε ότι η Ind είναι μονομορφισμός.

Για το επί, θα πρέπει να βρούμε μια $U(n)$ -ισομεταβλητή απεικόνιση $f : X \rightarrow Fred(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H})$ της οποίας ο δείκτης να είναι η δοσμένη κλάση $[\epsilon] - [E] \in K_{bg}(M, L)$, όπου $[\epsilon]$ είναι η τετριμμένη δέσμη και $[E]$ συμβολίζει την κλάση ισόμορφων bundle gerbe πρότυπα $E \rightarrow X$ για το L .

Από το θεώρημα *Serre-Swan*, έχουμε ότι υπάρχει μια αναπαράσταση $\mu : U(n) \rightarrow U(N)$, τέτοια ώστε το E να είναι ευθύς προσθετός του τετριμμένου bundle gerbe προτύπου $\mathbb{C}^N \otimes X$. Όπως και στην Πρόταση 27, μπορούμε να επιλέξουμε μια $U(n)$ -ισομεταβλητή απεικόνιση $\hat{f} : X \rightarrow Fred(\mathbb{C}^N \otimes \mathcal{H})$ με $Ind(\hat{f}) = [\epsilon] - [E]$, όπου η δράση της $U(n)$ στον $\mathbb{C}^N \otimes \mathcal{H}$ είναι η επαγόμενη από την αναπαράσταση μ .

Υπάρχει μια δέσμη $X \times_{\rho_n} U(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H})$ που επάγει η αναπαράσταση $\rho_n : U(n) \rightarrow \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}$ και μια δέσμη $X \times_{\rho_N} U(\mathbb{C}^N \otimes \mathcal{H})$ που επάγει η αναπαράσταση $\rho_N : U(N) \rightarrow \mathbb{C}^N \otimes \mathcal{H}$, που αποτελούνται από τα συνσύνολα $[x, u] = [xg, \rho_n^{-1}(g)u]$ και $[x, u] = [xg, \rho_N^{-1}(g)u]$ αντιστοίχως.

Καθώς οι δύο δέσμες έχουν την ίδια Dixmier-Douady κλάση, είναι ισόμορφες, έτσι υπάρχει μια απεικόνιση

$$\phi : X \times_{\rho_n} U(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}) \longrightarrow X \times_{\rho_N} U(\mathbb{C}^N \otimes \mathcal{H})$$

που ικανοποιεί την $\phi([x, u]) = \phi([x, 1])\tilde{\phi}[u]$ όπου

$$\tilde{\phi} : U(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H}) \longrightarrow U(\mathbb{C}^N \otimes \mathcal{H}), \quad u \mapsto \tilde{\phi}[u] = \tau^{-1}u\tau$$

είναι ο ισομορφισμός που επάγεται από τον ισομορφισμό $\tau : \mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}^N \otimes \mathcal{H}$.

Ορίζουμε την $\alpha(x) : X \rightarrow U(\mathbb{C}^N \otimes \mathcal{H})$ απαιτώντας $\phi([x, 1]) = [x, \alpha(x)]$. Τότε αν $g \in U(n)$ έχουμε,

$$\begin{aligned} [xg, \alpha(xg)] &= \phi([xg, 1]) \\ &= \phi([x, \rho_n(g)]) \\ &= \phi([x, 1])\tilde{\phi}[\rho_n(g)] \\ &= [x, \alpha(x)]\tilde{\phi}[\rho_n(g)] \\ &= [x, \alpha(x)\tilde{\phi}[\rho_n(g)]] \\ &= [xg, \rho_N^{-1}(g)\alpha(x)\tilde{\phi}[\rho_n(g)]] \end{aligned}$$

και έτσι

$$\alpha(xg) = \rho_N^{-1}(g)\alpha(x)\tilde{\phi}[\rho_n(g)] \quad (5.2)$$

Έτσι, ορίζουμε την $f : X \rightarrow Fred(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H})$ ως,

$$f(x) = \alpha(x)\tilde{\phi}^{-1}[\hat{f}(x)] \quad (5.3)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η (5.3) ορίζει μια $U(n)$ -ισομεταβλητή απεικόνιση χρησιμοποιώντας την (5.2). Επιπλέον, από την (5.3) έχουμε ότι $Ker(\hat{f}) \cong Ker(f)$ και έτσι η απεικόνιση $f : X \rightarrow Fred(\mathbb{C}^n \otimes \mathcal{H})$ έχει δείκτη $[ε] - [E]$. \square

5.4 Συνεστραμμένη Κ-Θεωρία στην περίπτωση μη στρέψης

Παρόλο το γεγονός ότι η Κ-Θεωρία δεν ορίζεται στην περίπτωση που η κλάση Dixmier-Douady είναι ελευθέρα στρέψεως, μπορούμε να ορίσουμε μια νέα συνεστραμμένη Κ-Θεωρία στην περίπτωση των απείρων διαστάσεων .

Για τον σκοπό, αντικαθιστούμε τον χώρο των Fredholm τελεστών με τον ομοτοπικά ισοδύναμο χώρο $BU_K \times \mathbb{Z}$.

Θεωρούμε την υποομάδα των μοναδιαίων τελεστών $U_K \subseteq U(\mathcal{H})$ οι οποίοι διαφέρουν από την μονάδα κατά έναν συμπαγή τελεστή K . Ισχυριζόμαστε ότι,

Πρόταση 32. *Ο χώρος ταξινόμησης $BU_K = U(\mathcal{H})/U_K$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με $PU(\mathcal{H})$ -ισομεταβλητό τρόπο με τον χώρο των τελεστών Fredholm δείκτη μηδέν.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η ομάδα $U(\mathcal{H})$ συμβολίζει τους (μοναδιαίους) αντιστρέψιμους τελεστές της άλγεβρας $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ στον χώρο \mathcal{H} και η υποομάδα U_K τους (μοναδιαίους) αντιστρέψιμους τελεστές που διαφέρουν από την μονάδα κατά έναν συμπαγή τελεστή. Έτσι, ο χώρος πηλίκο BU_K όπως ορίστηκε, αναπαριστά την συνεκτική συνιστώσα των αντιστρέψιμων στοιχείων της άλγεβρας $\text{Calkin } \mathcal{B}(\mathcal{H})/K$, δηλαδή τον χώρο των τελεστών Fredholm που είναι ομοτοπικοί κατά $PU(\mathcal{H})$ -ισομεταβλητό τρόπο με τους τελεστές Fredholm δείκτη μηδέν. (δηλαδή τον δείκτη του μοναδιαίου τελεστή.) \square

Στην περίπτωση της Dixmier-Douady κλάσης χωρίς στρέψης, ένας χώρος ταξινόμησης για την συνεστραμμένη Κ-Θεωρία, είναι ο χώρος των τελεστών Fredholm με δείκτη μηδέν. Έτσι, στον αρχικό ορισμό της συνεστραμμένης Κ-Θεωρίας (Ορισμός 5.1), αντικαθιστούμε τον χώρο $Fred$ με τον ομοτοπικά ισοδύναμο χώρο BU_K ⁴.

Για μια πρωτεύουσα $PU(\mathcal{H})$ -δέσμη $Y \rightarrow M$ με κλάση $[H] \in H^3(M, \mathbb{Z})$, σχηματίζουμε την συσχετιζόμενη δέσμη,

$$Y(BU_K) = Y \times_{PU(\mathcal{H})} BU_K$$

όπου η ομάδα $PU(\mathcal{H})$ δρα στον χώρο BU_K με συζυγία.

⁴Επιλέγουμε τους τελεστές Fredholm με δείκτη μηδέν, καθώς σε κάθε άλλη περίπτωση η συσχετιζόμενη δέσμη $Y \times_{PU(\mathcal{H})} Fred_n$ όπου $Fred_n$ είναι η συνεκτική συνιστώσα της Calkin άλγεβρας τελεστών δείκτη $n \in \mathbb{Z}$ δεν επιδέχεται τομές [Ατι1].

Ορισμός 24. Αν η $[H]$ δεν έχει στρέψη στην $H^3(M, \mathbb{Z})$, τότε η συνεστραμμένη K -Θεωρία της M , ορίζεται ως

$$\tilde{K}(M, [H]) = [M, Y(BU_K)]$$

δηλαδή, οι κλάσεις ομοτοπικών τομών της $Y(BU_K)$. Από προηγούμενα αποτελέσματα, παίρνουμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με τον ορισμό,

$$\tilde{K}(M, [H]) = [Y, BU_K]_{PU(\mathcal{H})}$$

δηλαδή, της κλάσεις ομοτοπικών $PU(\mathcal{H})$ -ισομεταβλητών απεικονίσεων από τον χώρο Y στον BU_K .

5.4.1 U_K bundle gerbe πρότυπα

Θα θέλαμε τώρα να ορίσουμε τα bundle gerbe πρότυπα στην ελευθέρα στρέψης περίπτωση. Στην περίπτωση με στρέψη (Πρόταση 13), αυτά ήταν προβολικές δέσμες με Dixmier-Douady κλάση ίση με την κλάση του bundle gerbe.

Αρχικά δίνουμε τον παρακάτω ορισμό,

Ορισμός 25. Έστω $Y \rightarrow M$ μια πρωτεύουσα $PU(\mathcal{H})$ -δέσμη. Αν $R \rightarrow Y$ είναι μια πρωτεύουσα U_K -δέσμη, αυτή θα ονομάζεται $PU(\mathcal{H})$ συναλλοίωτη αν υπάρχει μια δράση της ομάδας $PU(\mathcal{H})$ στα δεξιά του R που να καλύπτει την δράση της στο Y , δηλαδή,

$$(rg)[u] = r[u]u^{-1}gu, \quad \text{φορ ανψ} \quad r \in R, \quad [u] \in PU(\mathcal{H}), \quad g \in U_K$$

όπου $[u]$ είναι η προβολική κλάση για κάποιο στοιχείο $u \in U(\mathcal{H})$.

Τώρα, για μια $PU(\mathcal{H})$ -δέσμη Y , κατασκευάζουμε το ανυψωμένο bundle gerbe, το οποίο θα συμβολίζουμε με (P, Y) . Έχουμε το εξής,

Πρόταση 33. Δεδομένης μιας $PU(\mathcal{H})$ συναλλοίωτης U_K -δέσμης $R \rightarrow Y$, η συσχετιζόμενη διανυσματική δέσμη επί του Y ,

$$E = R \times_{U_K} \mathcal{H} \tag{5.4}$$

είναι ένα bundle gerbe πρότυπο για το ανυψωμένο bundle gerbe (P, Y) .

Απόδειξη. Έστω E όπως στην (5.4). Θεωρούμε την U_K κλάση ισοδυναμίας $[r, v] \in E_{y_1}$ με $r \in R_{y_1}$ την ίνα της R πάνω από το $y_1 \in Y$ και $v \in \mathcal{H}$. Αν $u \in P_{y_1, y_2}$ είναι ένα στοιχείο του ανυψωμένου bundle gerbe, τότε εξ' ορισμού $u \in U(\mathcal{H})$. Ορίζοντας την δράση $[r, v]u = [r[u], u^{-1}v]$ μπορεί κανείς να ελέγξει ότι αυτή είναι καλά ορισμένη (χρησιμοποιώντας ότι η R είναι $PU(\mathcal{H})$ συναλλοίωτη δέσμη). Επιπλέον, εξ' ορισμού έχουμε ότι $y_1[u] = y_2$ και έτσι έχουμε τον μορφοισμό δεσμών $P_{y_1, y_2} \otimes E_{y_2} \xrightarrow{\cong} E_{y_1}$ και έτσι η E είναι πράγματι bundle gerbe πρότυπο. \square

Απο την άλλη μεριά, για το ανυψωμένο bundle gerbe (P, Y) , μια Hilbert $U(\mathcal{H})$ -δέσμη $E \rightarrow Y$ είναι ένα $U_{\mathcal{K}}$ bundle gerbe πρότυπο για το P , αν και μόνον αν $uvu^{-1} \in R_{y_2}$, για κάθε $v \in R_{y_1}$ όπου κάθε R_y είναι η τροχιά της $U_{\mathcal{K}} \subset U(\mathcal{H})$ και όπου $u \in P_{y_1, y_2}$ είναι επίσης στοιχείο του $U(\mathcal{H})$.

Από κατασκευής, έχουμε ότι η συσχετιζόμενη δέσμη R , είναι μια $U_{\mathcal{K}}$ -δέσμη επί του Y πάνω στο οποίο η ομάδα $PU(\mathcal{H})$ δρα ([Βουκ2]).

Αν συμβολίσουμε με $Mod_{U_{\mathcal{K}}}(M, [H])$ την ημιομάδα όλων των $U_{\mathcal{K}}$ bundle gerbe προτύπων για το ανυψωμένο bundle gerbe της $PU(\mathcal{H})$ -δέσμης με Dixmier-Douady κλάση ίση με $[H]$. Καθώς κάθε δύο $PU(\mathcal{H})$ -δέσμες με ίδια Dixmier-Douady κλάση είναι ισόμορφες, παρατηρούμε ότι η ημιομάδα $Mod_{U_{\mathcal{K}}}(M, [H])$ εξαρτάται μόνο από την κλάση $[H]$.

Έτσι έχουμε το παρακάτω

Θεώρημα 6. *Αν (P, Y) είναι το ανυψωμένο bundle gerbe για την $PU(\mathcal{H})$ -δέσμη με Dixmier-Douady κλάση $[H]$, τότε έχουμε τον ισομορφισμό ημιομάδων*

$$\tilde{K}(M, [H]) \cong Mod_{U_{\mathcal{K}}}(M, [H])$$

Παρατήρηση: Στο [Χαρβ] υπάρχει ο ισχυρισμός ότι η ομάδα βαθμίδος για τις μη-μεταθετικές θεωρίες πεδίου αποτελείται από απεικονίσεις στον χώρο των $U_{\mathcal{K}}$ τελεστών πάνω σε ένα χώρο Hilbert.

Παράρτημα Α'

Δεμάτια και προδεμάτια

Θα δώσουμε μια βασική εισαγωγή στην θεωρία δεματιών η οποία είναι αναγκαία στο υπόλοιπο της εργασίας. Ακολουθούμε τα βιβλία [Βρυλ], [ΒοτΓ] και [Τενν].

Ορισμός 26. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Ένα προδεμάτι \mathcal{F} επί του X είναι μια συνάρτηση που σε κάθε ανοιχτό σύνολο U του X επισυνάπτει μια αβελιανή ομάδα $\mathcal{F}(U)$ και σε κάθε εγκλεισμό ανοιχτών συνόλων

$$i_U^V : V \longrightarrow U$$

έναν ομομορφισμό ομάδων που ονομάζεται περιορισμός

$$\mathcal{F}(i_U^V) : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

που ικανοποιεί τα ακόλουθα

1. $\mathcal{F}(i_V^V) =$ ταυτοτική απεικόνιση
2. $\mathcal{F}(i_V^W)\mathcal{F}(i_U^V) = \mathcal{F}(i_U^W)$ (μεταβατικότητα)

Ο περιορισμός $\mathcal{F}(i_U^V) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ συχνά συμβολίζεται με $\rho_{V,U}$.

Ένας ομομορφισμός δύο προδεματιών, $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, είναι μια συλλογή από απεικονίσεις $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ που μετατίθενται με τους περιορισμούς :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{V,U} \downarrow & & \downarrow \rho_{V,U} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Έστω $Open(X)$ η κατηγορία αντικειμένων που είναι τα ανοιχτά σύνολα στον X και οι μορφισμοί είναι οι εγκλεισμοί ανοιχτών συνόλων. Σε συναρτησιακή γλώσσα, ένα προδεμάτι είναι απλά ένας ανταλλοίωτος συναρτητής από την κατηγορία $Open(X)$ στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων και ο ομομορφισμός προδεματιών $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ είναι ο φυσικός μετασχηματισμός από τον συναρτητή \mathcal{F} στον συναρτητή \mathcal{G} .

Ορίζουμε το σταθερό προδεμάτι με ομάδα G , το προδεμάτι \mathcal{F} που επισυνάπτει σε κάθε ανοιχτό σύνολο U τοπικά σταθερές συναρτήσεις: $U \rightarrow G$ και σε κάθε εγκλεισμό ανοιχτών συνόλων $V \subset U$ τον περιορισμό συναρτήσεων: $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$.

Ορισμός 27. Έστω \mathcal{F} ένα προδεμάτι επί του χώρου X . Τότε, το \mathcal{F} είναι ένα δεμάτι αν για κάθε ανοιχτό σύνολο V του X , για κάθε ανοιχτό κάλυμμα $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ του V και κάθε οικογένεια $(s_i)_{i \in I}$ όπου $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ τέτοια ώστε

$$\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j), \quad (A.1)$$

υπάρχει μοναδική $s \in \mathcal{F}(V)$ τέτοια ώστε $\rho_{U_i, V}(s) = s_i$.

Για ένα δεμάτι \mathcal{F} , χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\Gamma(U, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$. Ένα στοιχείο $s \in \mathcal{F}(U)$ καλείται τομή του \mathcal{F} πάνω από το U . Μια τομή s του \mathcal{F} επί του X , λαμβάνεται κολλώντας τις τομές s_i του \mathcal{F} πάνω από τα U_i όπου η συνθήκη συγκόλλησης φαίνεται στην (A.1).

Παράρτημα Β'

Descent Data

Έστω $Y \xrightarrow{\pi} X$ μια εμβάπτιση. Αν $E \rightarrow Y$ είναι μια διανυσματική δέσμη, τότε η *descent data* για την E είναι μια συλλογή ερμιτιανών ισομορφισμών $\phi(y_1, y_2) : E_{y_2} \rightarrow E_{y_1}$ τέτοιων ώστε $\phi(y_1, y_2) \circ \phi(y_2, y_3) = \phi(y_1, y_3)$. Η ύπαρξη της descent data είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μιας διανυσματικής δέσμης $F \rightarrow X$ και ενός ισομορφισμού $E \xrightarrow{\cong} \pi^{-1}(F)$. Το εξηγούμε στο πλαίσιο των πρωτευουσών G -δεσμών, όπου G μια ομάδα Lie.

Έστω X και Y δύο λείες πολλαπλότητες και $\pi : Y \rightarrow X$ μια εμβάπτιση. Για μια G -δέσμη $p : P \rightarrow X$ θέτοντας $Q = P \times_X Y$, παίρνουμε την pull back δέσμη $Q \rightarrow Y$. Υπάρχει ένας φυσικός ισομορφισμός $\phi : p_1^*Q \xrightarrow{\cong} p_2^*Q$ των δύο pull back δεσμών επί του $Y \times_X Y$ αφού $\pi(p_1) = \pi(p_2)$, ο οποίος ικανοποιεί την επόμενη συνθήκη συγκύκλου,

$$p_{13}^*(\phi) = p_{23}^*(\phi) \circ p_{12}^*(\phi) \quad (B'.1)$$

μια ισότητα μορφισμών $p_1^*Q \rightarrow p_3^*Q$ G -δεσμών πάνω από το τριπλό γινόμενο $Y \times_X Y \times_X Y$. Στην $(B.1)$, $p_1, p_2, p_3 : Y \times_X Y \times_X Y \rightarrow Y$ είναι οι προβολές στους πρώτους τρεις παράγοντες και $p_{12}, p_{13}, p_{23} : Y \times_X Y \times_X Y \rightarrow Y \times_X Y$ είναι οι προβολές στους δύο από τους τρεις παράγοντες.

Αντιστρόφως, θεωρούμε μια G -δέσμη $\hat{\pi} : Q \rightarrow Y$ μαζί με έναν ισομορφισμό $\phi : p_1^*Q \xrightarrow{\cong} p_2^*Q$ των δύο pull back δεσμών πάνω από το $Y \times_X Y$ που ικανοποιεί την συνθήκη συγκύκλου $(B.1)$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια G -δέσμη $P \rightarrow X$, της οποίας η pull back δέσμη στο Y ταυτίζεται με την $Q \rightarrow Y$.

Πράγματι, κατασκευάζουμε τον ολικό χώρο P ως τον χώρο πηλίκου της Q με μια σχέση ισοδυναμίας \sim . Η σχέση αυτή ταυτίζει τα q_1 και q_2 αν τα $y_1 = \hat{\pi}(q_1)$ και $y_2 = \hat{\pi}(q_2)$ ικανοποιούν την $\pi(y_1) = \pi(y_2)$ και ο ισομορφισμός ϕ G -δεσμών επί του $Y \times_X Y$ εκτιμώμενος στο σημείο (y_1, y_2) του $Y \times_X Y$ στέλνει το $(q_1; y_1, y_2)$ στο $(q_2; y_1, y_2)$. Η συνθήκη $(B.1)$ σημαίνει ακριβώς ότι η \sim είναι πράγματι σχέση ισοδυναμίας. Τότε, είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $P \rightarrow X$ είναι μια G -δέσμη. Η φυσική απεικόνιση $Q \rightarrow P$ επιτρέπει στην G -δέσμη $Q \rightarrow Y$ να ταυτιστεί με την pull back δέσμη της $P \rightarrow X$ στο Y .

Παράρτημα Γ'

Θεώρημα ταξινόμησης για διανυσματικές δέσμες

Αρχίζουμε με μια ιδιότητα ομοτοπίας των διανυσματικών δεσμών.

Θεώρημα 7. [BotT] Έστω Y μια συμπαγής πολλαπλότητα. Αν f_0 και f_1 είναι δύο ομοτοπικές απεικονίσεις από την Y σε μια πολλαπλότητα X και E είναι μια διανυσματική δέσμη επί του X , τότε οι δέσμες $f_0^{-1}E$ και $f_1^{-1}E$ είναι ισόμορφες, δηλαδή ομοτοπικές απεικονίσεις επάγουν ισόμορφες δέσμες.

Προχωρούμε τώρα στην ταξινόμηση των διανυσματικών δεσμών. Καταρχήν μια **πολλαπλότητα Grassmann** $G_n(\mathbb{R}^k)$ για μη αρνητικούς ακεραίους $n \leq k$ σαν σύνολο, είναι η συλλογή όλων των n -διάστατων διανυσματικών υπόχωρων του \mathbb{R}^k , δηλαδή, όλα τα n -διάστατα επίπεδα στον \mathbb{R}^k που περνούν από την αρχή. Επίσης ορίζουμε την **πολλαπλότητα Stiefel** $V_n(\mathbb{R}^k)$ ως τον χώρο των ορθογωνίων n -πλασιών στον \mathbb{R}^k , δηλαδή, n -άδες από ορθογώνια διανύσματα στον \mathbb{R}^k . Υπάρχει μια απεικόνιση επί $V_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^k)$ που στέλνει ένα n -πλαίσιο στο επίπεδο που ορίζεται από αυτό και η $G_n(\mathbb{R}^k)$ έχει την τοπολογία πηλίκου με βάση αυτήν την απεικόνιση. Έτσι η $G_n(\mathbb{R}^k)$ είναι συμπαγής καθώς και η $V_n(\mathbb{R}^k)$ είναι συμπαγής.

Λήμμα 7. [Χατσ2] Έστω ο τοπολογικός χώρος $E_n(\mathbb{R}^k) = \{(l, v) \in G_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k \mid v \in l\}$. Η προβολή $p : E_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^k)$, $p(l, v) = l$, είναι διανυσματική δέσμη για άπειρα είτε πεπερασμένα k .

Ενδιαφερόμαστε τώρα για την περίπτωση όπου $k = \infty$ και για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό, θα γράφουμε G_n για την $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ και E_n για την $E_n(\mathbb{R}^\infty)$.

Θεώρημα 8. Για μια παρασυμπαγής πολλαπλότητα X , η απεικόνιση $[X, G_n] \rightarrow \text{Vect}^n(X)$, $[f] \rightarrow f^*(E_n)$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Για μια n -διάστατη διανυσματική δέσμη $p : E \rightarrow X$ ο ισομορφισμός $E \cong f^*(E_n)$ είναι ισοδύναμος με την απεικόνιση $g : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ δηλαδή μια γραμμική 1-1 απεικόνιση σε κάθε ίνα. Για να το δούμε αυτό, υποθέτουμε ότι έχουμε μια απεικόνιση

$f : X \rightarrow G_n$ και έναν ισομορφισμό $E \cong f^*(E_n)$. Τότε το διάγραμμα μετατίθεται

$$\begin{array}{ccccc} E & \xrightarrow{\cong} & f^*(E_n) & \xrightarrow{\tilde{f}} & E_n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^\infty \\ & \searrow p & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & X & \xrightarrow{f} & G_n & & \end{array}$$

όπου $\pi(l, v) = v$. Η σύνθεση των απεικονίσεων στην πάνω γραμμή είναι μια απεικόνιση $g : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ που είναι γραμμική και 1-1 σε κάθε ίνα, αφού και οι δύο απεικονίσεις \tilde{f} και π έχουν αυτήν την ιδιότητα. Αντίστροφα, για την απεικόνιση $g : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ που είναι γραμμική και 1-1 σε κάθε ίνα, ορίζουμε την $f : X \rightarrow G_n$ με $f(x)$ να είναι το n -διάστατο επίπεδο $g(p^{-1}(x))$. Έτσι, το διάγραμμα παραπάνω είναι μεταθετικό.

Για να δείξουμε το επί της απεικόνισης $[X, G_n] \rightarrow \text{Vect}^n(X)$, υποθέτουμε ότι $p : E \rightarrow X$ είναι μια n -διάστατη διανυσματική δέσμη. Έστω $\{U_\alpha\}$ ένα ανοιχτό κάλυμμα της X τέτοιο ώστε η E να είναι τετριμμένη σε κάθε U_α . Έστω $\{\phi_i\}$ μια διαμέριση της μονάδας με φορέα σε κάποιο $U_i \subseteq U_\alpha$. Έστω $g_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^n$ η σύνθεση της τετριμμενοποίησης $p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ με την προβολή στον \mathbb{R}^n . Η απεικόνιση $(\phi_i p)g_i$, $v \rightarrow \phi_i(p(v))g_i(v)$, επεκτείνεται στην απεικόνιση $E \rightarrow \mathbb{R}^n$ η οποία μηδενίζεται εκτός του $p^{-1}(U_i)$. Κοντά σε κάθε σημείο του X μόνο πεπερασμένα ϕ_i δεν είναι μηδέν και τουλάχιστον ένα ϕ_i δεν είναι μηδέν. Έτσι, οι επεκτάσεις $(\phi_i p)g_i$ είναι οισυντεταγμένες της απεικόνισης $g : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ που είναι γραμμική και 1-1 σε κάθε ίνα.

Για το επί, αν έχουμε τους ισομορφισμούς $E \cong f_0^*(E_n)$ και $E \cong f_1^*(E_n)$ για τις απεικονίσεις $f_0, f_1 : X \rightarrow G_n$, τότε παίρνουμε τις απεικονίσεις $g_0, g_1 : E \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ που είναι γραμμικές και 1-1 στις ίνες, όπως προηγουμένως. Ισχυριζόμαστε ότι οι g_0 και g_1 είναι ομοτοπικές μέσω των απεικονίσεων g_t που είναι γραμμικές και 1-1 στις ίνες. Τότε, οι f_0 και f_1 θα είναι ομοτοπικές μέσω της $f_t(x) = g_t(p^{-1}(x))$.

Το πρώτο βήμα κατασκευής της ομοτοπίας g_t είναι να συνθέσουμε την g_0 με την ομοτοπία $L_t : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$ που ορίζεται ως $L_t(x_1, x_2, \dots) = (1-t)(x_1, x_2, \dots) + t(x_1, 0, x_2, 0, \dots)$. Για κάθε t , η L_t είναι μια γραμμική απεικόνιση με πυρήνα μηδέν και άρα 1-1. Συνθέτοντας την ομοτοπία L_t με την g_0 η g_0 απεικονίζεται στις περιττές συντεταγμένες. Ομοίως, μπορούμε να απεικονίσουμε την g_1 στις άρτιες συντεταγμένες. Ονομάζοντας τις νέες απεικονίσεις ως g_0 και g_1 αντίστοιχα, θέτουμε $g_t = (1-t)g_0 + tg_1$. Αυτή είναι μια γραμμική και 1-1 απεικόνιση στις ίνες για κάθε t καθώς και οι g_0 και g_1 έχουν αυτήν την ιδιότητα. \square

Παράδειγμα: Ως παράδειγμα του πως μια διανυσματική δέσμη είναι ισόμορφη με την pull back δέσμη $f^*(E_n)$, θεωρούμε την εφαπτόμενη δέσμη επί της S^n . Αυτή είναι μια διανυσματική δέσμη $p : E \rightarrow S^n$ όπου $E = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} | x \perp v\}$. Κάθε ίνα $p^{-1}(x)$ είναι ένα σημείο του συνόλου $G_n(\mathbb{R}^{n+1})$ και έτσι έχουμε μια απεικόνιση $S^n \rightarrow G_n(\mathbb{R}^{n+1}), x \mapsto p^{-1}(x)$. Μέσω του εγκλεισμού $\mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ μπορούμε να θεωρήσουμε την απεικόνιση αυτή ως μια απεικόνιση $f : S^n \rightarrow G_n(\mathbb{R}^\infty) = G_n$ και τότε η E είναι ακριβώς η pull back δέσμη $f^*(E_n)$.

Παράρτημα Δ'

Τα αξιώματα Eileberg-Steenrod

Μια θεωρία συνομολογίας με συντελεστές στο \mathbb{Z} είναι μια διπλή άπειρη ακολουθία $H^* = \{H^p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ ανταλλοιώτων συναρτητών από την κατηγορία των συμπαγών ζευγών στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων τέτοιων ώστε να ισχύουν τα αξιώματα *Eileberg-Steenrod*:

- **Ομοτοπίας:** Αν $\{f_t\}$ είναι μια ομοτοπία μορφισμών από ένα συμπαγές ζεύγος¹ σε άλλο, τότε ισχύει ότι $H^p(f_0) = H^p(f_1)$ για όλα τα p .
- **Ακρίβειας:** Για ένα συμπαγές ζεύγος (X, A) , ο εγκλεισμός του A στον X επάγει μια μακρά ακριβή ακολουθία

$$\dots \rightarrow H^p(A) \xrightarrow{i^*} H^p(X) \xrightarrow{\pi^*} H^p(X, A) \rightarrow H^{p+1}(A) \rightarrow \dots$$

- **Εκτομής:** Για ένα συμπαγές ζεύγος (X, A) και ένα υποσύνολο U του X του οποίου η κλειστότητα είναι στο εσωτερικό του A , ο μορφισμός εγκλεισμού από το $(X/U, A/U)$ στο (X, A) επάγει έναν ισομορφισμό από την $H^p(X, A)$ στην $H^p(X/U, A/U)$ για όλα τα p .
- **Διάστασης:** Αν για την συνομολογία ισχύει ότι

$$H^p(\{pt\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{αν } p = 0 \\ 0 & \text{αν } p \neq 0 \end{cases}$$

λέμε ότι η ακολουθία H^* ορίζει μια συνήθης συνομολογία. Αλλιώς η H^* ονομάζεται ασυνήθης συνομολογία.

Η K -Θεωρία είναι μια ασυνήθης συνομολογία.

¹Ένα συμπαγές ζεύγος (X, A) είναι ένας συμπαγής χώρος Hausdorff X και ένας κλειστός υποχώρος του A . Ένας μορφισμός $\phi : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ συμπαγών ζευγών είναι μια συνεχής απεικόνιση $\phi : X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε $\phi(A) \subset B$.

Βιβλιογραφία

- [Ατ1] Atiyah, M., Segal, G., *Twisted K-Theory*, arxiv.org/abs/math/0407054v2
- [Ατ2] Atiyah, M., *K-theory* New York: W.A. Benjamin, 1967
- [Μπλακ] Blackadar, B., *K-theory for Operator Algebras* 2nd edition, Cambridge University Press, 1998
- [Βουκ1] Bouwknegt, P., Mathai, V., *D-Branes, B-Fields and Twisted K-Theory*, arxiv.org/abs/hep-th/0002023v3
- [Βουκ2] Bouwknegt, P., Carey, A.L., Mathai, V., Murray, M.K., Stevenson, D., *Twisted K-Theory and K-Theory of Bundle Gerbes* Commun. Math. Phys. 228, 17 • 45 (2002)
- [Βρυλ] Brylinski, J-L. *Loop spaces, Characteristic classes and Geometric Quantization*. Birkhauser, Berlin, 1992.
- [Βοτ] Bott, Tu, L., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Math (1986), Springer Verlag
- [Καρ1] Carey, A.L., Crowley, D., Murray, M.K., *Principal Bundles and the Dixmier Douady Class*, arxiv.org/abs/hep-th/9702147v2
- [Καρ2] Carey, A.L., Murray, M.K., Wang, B.L., *Higher Bundle Gerbes and Cohomology Classes in Gauge Theories*, arxiv.org/abs/hep-th/9511169v1
- [Κουν] Cuntz, J., Meyer, R., Rosenberg, J., *Topological and Bivariant K-Theory*, Birkhauser, 2007.
- [ΝτοΚ] Donovan, P., Karoubi, M., *Graded Brauer groups and K-theory with local coefficients*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math, 38, 5-25 (1970).
- [ΓραΒ] Gracia-Bondia, J.M., Varilly, J.C., Figueroa, H., *Elements of noncommutative geometry*, Birkhauser, 2000.
- [Χλτν] Hilton, P., *General Cohomology Theory and K-Theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1971.
- [Χαουζ] Husemoller, D., *Fibre Bundles* McGraw-Hill, Springer-Verlag, 1966

- [Χαφβ] Harvey, J.A., *Topology of the Gauge Group in Noncommutative Gauge Theory*, arxiv.org/abs/hep-th/0105242
- [Χατσ1] Hatcher, A., *Algebraic Topology* Cambridge University Press (2001)
- [Χατσ2] Hatcher, A., *Vector Bundles and K-Theory* Draft Version 2.1, May 2009, www.math.cornell.edu/hatcher/VBKT/VBpage.html
- [Τζονς] Johnson, S., *Constructions with Bundle Gerbes*, arxiv.org/abs/math/0312175v1
- [Καρου] Karoubi, M. *K-theory* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 226. Berlin: Springer-Verlag, 1978
- [ΚομπΝ] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry, Vol. 1*, Wiley-Interscience, 1996
- [Κουιπ] Kuiper, N., *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space*, *Topology*, 3 (1965), 19-30.
- [Μαρε1] Murray, M.K., *Bundle Gerbes*, arxiv.org/abs/dg-ga/9407015v1
- [Μαρε2] Murray, M.K., *An Introduction to Bundle Gerbes*, arxiv.org/abs/0712.1651v3
- [ΜιλνΣ] Milnor, J., Stasheff, J.D., *Characteristic Classes* Princeton University Press, 1974
- [Μερφ] Murphy, G.J., *C*-algebras and operator theory* Academic Press, London, 1990
- [Ρλλ] Rørdam, M., Larsen, F., Laustsen, N.J. *An introduction to K-theory for C*-algebras* London Mathematical Society Student Texts 49. Cambridge: Cambridge University Press, 2000
- [Σικ] Bunke, U., Schick T.,: *On the topology of T-duality* arxiv.org/abs/math/0405132
- [Στηβ] Stevenson, D. *The Geometry of Bundle Gerbes* PhD thesis, Department of Pure Mathematics, University of Adelaide, 2000, math.DG/0004117
- [Τενν] Tennison, B.R.: *Sheaf Theory* Cambridge University Press (1975)
- [ΚΒαλ] Kahle, A., Valentino A.,: *T-duality and Differential K-Theory* arxiv.org/abs/0912.2516
- [ΕγγΟ] Wegge-Olsen, N.E.: *K-theory and C*-algebras* Oxford: Oxford University Press, 1993