



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η Μαθηματική Επαγωγή στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά Mathematical Induction in Ancient Greek Mathematics

Ροϊδούλα Κιούφτη
Α.Μ. 201331

Επιβλέπων Καθηγητής

Στυλιανός Νεγρεπόντης

Ομότιμος Καθηγητής

Αθήνα
Σεπτέμβριος 2016

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 30^η Σεπτεμβρίου 2016 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από
τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Σ. Νεγρεπόντη (Επιβλέπων)	Ομοτ. Καθηγητή
▪ Β. Φαρμάκη	Καθηγήτρια
▪ Γ. Ψυχάρη	Επικ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την
καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Σ. Νεγρεπόντη (Επιβλέπων)	Ομοτ. Καθηγητή
▪ Β. Φαρμάκη	Καθηγήτρια
▪ Ι. Θωμάϊδη	Δρ. Διδακτικής των Μαθηματικών

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά

Τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Στυλιανό Νεγρεπόντη για την πολύτιμη καθοδήγηση και συμβολή του στην ερευνητική εργασία, τον άπλετο χρόνο που πρόθυμα μου διέθεσε καθόλη αυτή τη διαδρομή αλλά κυρίως για τις δημιουργικές και παραγωγικές συζητήσεις μας. Η βοήθεια, η υποστήριξη και η υπομονή του ήταν στοιχεία που με συντρόφευσαν σε αυτό το ταξίδι από την αρχαιότητα ως τον μεσαίωνα.

Την καθηγήτρια κα. Βασιλική Φαρμάκη και τον καθηγητή κ. Ιωάννη Θωμαΐδη, τόσο για την τιμή που μου έκαναν να συμμετέχουν στην Συμβουλευτική Επιτροπή όσο και για το ενδιαφέρον και τις παρατηρήσεις τους σχετικά με την προσπάθεια αυτή.

Όλους τους διδάσκοντες του Προγράμματος για τις γνώσεις που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Την κα. Διονυσία Μπακογιάννη και την κα. Ελένη Κλη, για την άμεση ενημέρωση και την αμέριστη βοήθειά τους οποτεδήποτε χρειάστηκε κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Όλους τους συμφοιτητές μου για τις στιγμές που περάσαμε μαζί αυτά τα τρία χρόνια, την βοήθειά τους, τη συμπαράστασή τους και κυρίως για την θέση που άνοιξαν στις ζωές τους για τις καινούριες φιλίες που δημιουργήσαμε. Θα ήθελα να ευχαριστήσω ξεχωριστά τον Γιάννη και την Ελένη, για τις πολύωρες συζητήσεις μας και την φίλη μου Βάσω, που αν και φιλόλογος, η βοήθεια και στήριξή της όλους αυτούς τους μήνες ήταν ανεκτίμητη.

Τέλος, ιδιαίτερα ευχαριστώ την οικογένειά μου και κυρίως τις αδελφές μου Κωνσταντίνα και Θεοδώρα για τη στήριξη, τη συμπαράσταση, την υπομονή και την αμέριστη κατανόησή τους.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1.....	23
Οι Πυθαγόρειες απαρχές του ορισμού με πεπερασμένη αναδρομή και απόδειξης με πεπερασμένη επαγωγή στις Προτάσεις 7.1, 7.2, και 10.3 των Στοιχείων.....	23
Κεφάλαιο 2.....	30
Ορισμός με (πεπερασμένη, αλλά απειρίοριστα επεκτάσιμη) αναδρομή και απόδειξη με (πεπερασμένη, αλλά απειρίοριστα επεκτάσιμη) επαγωγή στις Προτάσεις IX 8 και IX 9 των Στοιχείων.....	30
2.1. Πρόταση IX 8 και IX 9.....	30
2.2. Τα επιχειρήματα του Unguru κατά της παρουσίας μαθηματικής επαγωγής στην Πρόταση IX 8 και IX 9.....	32
2.3. Κριτική στο επιχείρημα του Unguru για την απόδειξη της Πρότασης IX 9.....	33
Κεφάλαιο 3.....	34
Το θεωρητικό επιχείρημα του Unguru κατά της δυνατότητας απόδειξης με μαθηματική επαγωγή από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς.....	34
3.1. Η έννοια του αριθμού στα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά κατά τον Jacob Klein.....	35
3.2. Το βασικό θεωρητικό επιχείρημα του Unguru κατά της δυνατότητας ύπαρξης μαθηματικής επαγωγής στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά και η κριτική του.....	37
Κεφάλαιο 4.....	40
Ορισμός με άπειρη αναδρομή στην Πρόταση X 2 και στους πλευρικούς διαμετρικούς αριθμούς-Αποδόμηση του θεωρητικού επιχειρήματος του Unguru.	40
4.1. Ορισμός της άπειρης αναδρομικής ακολουθίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων $\alpha > \beta > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n > \dots$	40
της ανθυφαίρεσης δύο μεγεθών α προς β στην Πρόταση X 2 των Στοιχείων.	40
4.2. Ορισμός της άπειρης αναδρομικής ακολουθίας των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών (Θέων, Ιάμβλιχος, Πρόκλος).....	41
4.3. Κριτική του θεωρητικού επιχειρήματος Unguru στο Κεφάλαιο 3.....	42
4.4. Παράρτημα.	44
Ο θεωρητικός ισχυρισμός του Unguru ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δεν είχαν την έννοια της ολότητας των φυσικών αριθμών.....	44
Κεφάλαιο 5.....	46
Απόδειξη με άπειρη επαγωγή: Ρητές διάμετροι - Πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί (Πλάτων, Θέων, Ιάμβλιχος, Πρόκλος).....	46
5.1.1. Ανακάλυψη πλευρικών διαμετρικών αριθμών και της Βασικής ιδιότητάς τους.	46
5.1.2. Η ιδέα των Πυθαγορείων για την απόδειξη της βασικής ιδιότητας με την μετατροπή της ρητής διαμέτρου σε όντως διάμετρο.	46
5.1.3. 2,25,12-13.....	47
5.2. Η παρεμβολή του γεωμετρικού γλαφυρού θεωρήματος.....	47
5.2.1. Το γλαφυρόν θεώρημα: η γεωμετρική μορφή του αναδρομικού ορισμού.....	47
5.2.2. Η επινόηση της γεωμετρικής Πρότασης II.10, αντίστοιχης της αριθμητικής ιδέας των Πυθαγορείων, για την απόδειξη του γλαφυρού θεωρήματος.....	48
5.2.3. Η απόδειξη του γλαφυρού θεωρήματος.....	49

5.2.4. Η λεκτική συνάφεια της αριθμητικής Πυθαγόρειας ιδέας και της διατύπωσης της Πρότασης Π.10.	49
5.3 Η απόδειξη με επαγωγή της βασικής ιδιότητας των ρητών διαμέτρων	50
5.3.1. 2,28,9-10.....	50
5.3.2.1. Η αρχική ρητή διάμετρος δ_1 είναι -1 ελλείπουσα, 2,28,11-15.....	50
5.3.2.2. Η δεύτερη ρητή διάμετρος δ_2 είναι +1 πλεονάζουσα.....	50
5.3.2.2.1. Η επίκληση της προσθήκης μονάδος στην πρώτη ρητή διάμετρο,	50
δηλαδή της αριθμητικής μορφής της Π.10, 2,28,15-16	50
5.3.2.2.2. Η αριθμητική μορφή του γλαφυρού θεωρήματος, 2,28,17-21.....	51
5.3.2.2.3. Η δεύτερη ρητή διάμετρος $\delta_2=3$, $\pi_2=2$ αποδεικνύεται +1 πλεονάζουσα, 2,28,21-22 ...	52
5.3.2.3. Την +1 πλεονάζουσα διάμετρο π_2 , δ_2 καθιστούμε όντως διάμετρο με την αριθμητική μορφή της Π.10 για την δυάδα δ_2 , π_2 :	53
Κεφάλαιο 6.	55
Η επαγωγική δομή της απόδειξης της Πρότασης IX 20 των Στοιχείων	55
6.1. Πρόταση IX 20.	55
6.2. Κριτική μελετητών για την απόδειξη της IX 20.	55
6.3. Άπειρη αναδρομή και επαγωγή στην Πρόταση IX 20.....	55
Κεφάλαιο 7.	57
Φιλοσοφικά χωρία με Επαγωγικό περιεχόμενο.....	57
7.1. Παρμενίδης 142b1-143a3.....	57
7.2. Παρμενίδης 149a4-c3.....	59
Κεφάλαιο 8.	67
Αποσπάσματα B1 και B3 Ζήνωνος.	67
Απόσπασμα B1 Ζήνωνος.....	67
8.1. Συμπλίκιος Εις Φυσικά αποσπάσματα B1, B2, B3 του Ζήωνα.	67
8.1.1. Αποσπάσματα B2, B1-, B3-, B3+	67
8.1.1.1. Η ερμηνεία του B3+ ένεκα του παραρτήματος 8.1.1.1.A.....	69
8.1.1.1.A. Παράρτημα	69
8.1.2. Το απόσπασμα B1+ και η ανθυφαιρετική ερμηνεία αυτού, ανάλογη με το χωρίο 142d4-143a3 του Πλατωνικού διαλόγου Παρμενίδης.....	70
8.2.1.A. Παράρτημα Η έννοια του «ἀπέχειν», «προέχειν» στο B1+, ως ελλιπές, πλεονάζον, αντίστοιχα. Ζωτικής σημασίας στο B1+ είναι οι λέξεις «ἀπέχειν», «προέχειν».....	74
Κεφάλαιο 9.	80
Αρχιμήδης, Περί Ελίκων: Αναδρομή και επαγωγή στη Γεωμετρία	80
9.1. Ορισμοί του έργου Περί Ελίκων	80
9.2. Προτάσεις 10 και 11 του έργου Περί Ελίκων.....	81
9.2.1. Πρόταση 10	81
9.2.1. 1. 1η παράφραση της απόδειξης - Heath, The Works of Archimedes	83
9.2.1.2. 2η παράφραση της απόδειξης:.....	85
9.2.2. Πρόταση 11	87

9.3. Προτάσεις 24 και 25 του έργου Περί Ελίκων.....	89
9.4. Η Επαγωγική Πρόταση 27 του έργου Περί Ελίκων	90
Κεφάλαιο 10.....	93
Γεωμετρική αναδρομή και επαγωγή Αρχιμήδειου τύπου (Πάππος, Συναγωγή, Βιβλίο IV, Αρβηλος)	93
10.1. Η Πρόταση 14.	93
10.2. Οι Προτάσεις 15 και 16: λήμματα για την απόδειξη της Πρότασης 17.....	94
10.3. Πρόταση 17: επαγωγικό λήμμα για την απόδειξη της Πρότασης 18.....	96
10.4. Οι επαγωγικές Προτάσεις 18, 20 και παραλλαγές αυτών στο έργο Συναγωγή.	100
Κεφάλαιο 11.....	111
Νικόμαχος ο Γερασηνός – Άθροισμα Κύβων	111
Κεφάλαιο 12.....	114
Αραβες (Abu Kamil, Al-Karaji και al-Samaw'al).....	114
12.1 Abu Kamil	114
12.2 Al-Karajī & Al-Samaw'al	118
12.2.1 Αναδρομικός ορισμός δυνάμεων στο Al-Fakhri.....	118
12.2.2. Η μη επαγωγική απόδειξη της Αρχιμήδειας Πρότασης $(12+22+\dots+n^2): (1+2+\dots+n) = (2n+1)/3$ κατά al-Karaji	119
12.2.3. Η επαγωγική απόδειξη της Πρότασης $(13+23+\dots+n^3) = (1+2+\dots+n)^2$ κατά al-Karaji και al-Samaw'al	120
12.2.4. Η επαγωγική απόδειξη της Αρχιμήδειας Πρότασης $(12+22+\dots+n^2): (1+2+\dots+n) = (2n+1)/3$ κατά al-Samaw'al.	123
12.2.5. Το διωνυμικό ανάπτυγμα.....	128
Κεφάλαιο 13.....	131
Rabbi Levi Ben Gershon	131
13.1. Προτάσεις 26, 27, 28.	131
Η μη επαγωγική απόδειξη της Αρχιμήδειας Πρότασης $1+2+\dots+n = n(n+1)/2$	131
13.2. Πρόταση 29	132
13.3. Πρόταση 38. Η μη επαγωγική απόδειξη της Αρχιμήδειας Πρότασης $(2n+1)S_n = 3(n^2+(n-1)^2+\dots+22+12)$	132
13.4. Προτάσεις 41 & 42. Η επαγωγική απόδειξη της Πρότασης $13+23+\dots+n^3 = (1+2+\dots+n)^2 = S_n^2$ κατά την μέθοδο των al-Karaji και al-Samaw'al.....	132
13.5. Προτάσεις 63, 64 & 65. Η πρωτότυπη επαγωγική απόδειξη της Πρότασης $P_n = n!$, όπου P_n είναι το σύνολο των μεταθέσεων n στοιχείων	134
Κεφάλαιο 14.....	137
Fransisco Maurolycus.....	137
14.1. Προτάσεις 4 και 6 του έργου Arithmeticonum libri duo.	139
14.2. Προτάσεις 13 και 15 του έργου Arithmeticonum libri duo.	140
Βιβλιογραφία.....	142

Περίληψη

Στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι

(α) να καταγράψουμε τις θέσεις των μελετητών στο θέμα της ύπαρξης και ακριβούς μορφής της αποδεικτικής μεθόδου της πλήρους μαθηματικής επαγωγής στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά, όπως των Freudenthal, Wedberg, Mueller, Unguru, Fowler, Acerbi, και

(β) να διατυπώσουμε, σε αρχική και προκαταρκτική μορφή, την δική μας θέση στο θέμα αυτό, η οποία διαφοροποιείται από τις υπάρχουσες.

Η έρευνα αυτή λαμβάνει υπόψη τις αρχαίες πηγές, όπως τα *Στοιχεία* Ευκλείδη, την παρουσίαση των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών από τους Πλάτων, Θέων, Ιάμβλιχο, Πρόκλο, την δεύτερη υπόθεση του Πλατωνικού διαλόγου *Παρμενίδης*, το έργο *Περί Ελίκων* του Αρχιμήδη, τις Προτάσεις για την Άρβηλο στη *Συναγωγή* του Πάππου.

Επίσης μελετούμε τις βασικές μεσαιωνικές πηγές που σχετίζονται με την μαθηματική επαγωγή, συμπεριλαμβανομένων των Αράβων Abu Kamil, Al-Karaji, Al-Samaw'al και Ibn al-Haytham, του Εβραϊκής καταγωγής Γάλλου Levi Ben Gerson, και του Ελληνικής καταγωγής Φραγκίσκου Μαυρόλυκου, προκειμένου να διαχωρίσουμε, κατά το δυνατόν, στις επαγωγικές μεθόδους που ακολουθήθηκαν αυτή την περίοδο εκείνες που αποτελούν συνέχεια στο πλαίσιο των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών από εκείνες που αποτελούν νέα βήματα πέραν των Ελληνικών μεθόδων.

Λέξεις κλειδιά: αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, μαθηματική επαγωγή, Στοιχεία Ευκλείδη, πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί, Πλατωνικός διάλογος Παρμενίδης, Αρχιμήδης, 'Άρβηλος'.

Abstract

The purpose of the present Master's Thesis on *Mathematical Induction in Ancient Greek Mathematics* is twofold,

(a) to record and evaluate the position of scholars, especially Freudenthal (1953), Mueller (1981), Unguru (1991), Fowler (1994), Acerbi (2000), on the question of presence and exact form of the deductive method of complete mathematical induction in Greek Mathematics, and

(b) to present, in an initial and preliminary form, our position on the subject, a position that is differentiated from the existing ones.

Our research takes into account the ancient sources, including Euclid's *Elements*, the presentation of the side and diameter numbers by Plato, Theon, Iamblichus, Proclus, the second hypothesis of the Platonic dialogue *Parmenides*, Archimedes' work *On Spirals*, Nicomachus' *Introduction to Arithmetic*, the propositions on 'Arbelos' in Pappus' *Collection*.

We also study the basic medieval sources related to mathematical induction, including the Arabs Abu- Kamil, Al-Karaji, Al-Samaw'al and Ibn al-Haytham, the French-Jewish Levi Ben Gerson, and Francisco Maurolico, of Greek origin.

The reason we delve with the medieval period lies with our intent to separate, as far as this is possible, the instances of inductive reasoning of that period that in essence constitute continuation of techniques already occurring in Greek Mathematics from those that may be genuine steps beyond Greek methods.

Key words: ancient Greek Mathematics, mathematical induction, Euclid's *Elements*, Platonic dialogue *Parmenides*, side and diameter numbers, Archimedes, 'Arbelos'.

Εισαγωγή

Η διπλωματική εργασία αποτελείται από 13 Κεφάλαια τα οποία τώρα συνοψίζουμε.

Στο **πρώτο κεφάλαιο**, αναλύοντας την λογική δομή των Προτάσεων 7.1, 7.2, 7.31 και 10.3 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, διακρίνουμε τις **απαρχές** τόσο του **ορισμού με αναδρομή** όσο και της **απόδειξης με μαθηματική επαγωγή**. Στις προτάσεις αυτές (1) δίδεται κατά τρόπο αναδρομικό ο ορισμός της ακολουθίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων της ανθυφαίρεσης δύο φυσικών αριθμών,

(2) αποδεικνύεται, με επίκληση της αρχής του ελαχίστου, ότι η αναδρομική ακολουθία είναι πεπερασμένη, και

(3) εφαρμόζεται απόδειξη με πεπερασμένη μαθηματική επαγωγή επί της πεπερασμένης αναδρομικής ακολουθίας.

Η αρχή του ελαχίστου (ή αρχή της κατάβασης), η οποία χρησιμοποιείται στο (2), είναι τυπικά ισοδύναμη με την αρχή της (πλήρους, άπειρης) μαθηματικής επαγωγής, και αυτή η ισοδυναμία θεωρήθηκε επιχείρημα από τον Fowler (1994), σ. 261-264¹, υπέρ της άποψης ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί γνώριζαν την αρχή της μαθηματικής επαγωγής και την ισοδύναμη της μορφή-αρχή του ελαχίστου. Όπως όμως παρατηρούν οι Mueller (1981), σ. 78², και Acerbi (2000), σ.63³, δεν υπάρχουν στοιχεία που να τεκμηριώνουν την άποψη ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί είχαν συλλάβει και, πόσο μάλλον, αποδείξει την ισοδυναμία. Συμφωνούμε με τον Mueller ότι φαίνεται πιο φυσικό να υποθέσουμε ότι η αρχή του ελαχίστου είναι, για τους αρχαίους, συνέπεια του ορισμού που έδιδαν για τον αριθμό ως (πεπερασμένο) πλήθος μονάδων.

Η επαγωγή, που συναντάμε στις εν λόγω προτάσεις, αποτελείται από ένα αρχικό βήμα και από την **μετάδοση** της προς απόδειξη ιδιότητας από το πρώτο όρο της αναδρομικής ακολουθίας στο δεύτερο από το δεύτερο στο τρίτο,..., και ου το καθεξής μέχρι τον τελευταίο όρο (και στην περίπτωση των 7.2 και 10.3, και αντιστρόφως), με βάση μια επαλήθευση της ίδιας μορφής.

Η ανάλυση των παραπάνω αποδείξεων δείχνει ότι η σύλληψη της ιδέας της μαθηματικής επαγωγής (3) καθώς και η υλοποίησή της, η εφαρμογή της ως αποδεικτικής τεχνικής, συνδέεται άμεσα με εκείνη του επαγωγικού ορισμού (1).

¹ “It is in this sense that I believe that the Greeks did use principles equivalent to mathematical induction, and that they could have used mathematical induction itself had the situation presented itself. Moreover, such a situation did present itself, in the properties of figured numbers and side-and-diagonal numbers [. . .] I believe it very probable that some earlier, now lost, treatment of some of these topics, in particular the side-and-diagonal numbers, did in fact prove the described properties – [. . .] – and that these proofs could very probably have been by some form of mathematical induction.”

² “unlike the principle of induction, the least number principle or the denial of infinitely descending chains does not seem to depend upon a genuinely structural conception of the positive integers. For these principles can be understood solely in terms of the Euclidean conception of numbers as finite concatenations of units”

³ ‘I think that FOWLER’s argument must be rejected:

– an equivalence between PCI and PD may be established only after the validity of both of them as patterns of proof is accepted, and after an outline is provided of a proof (even informal) of their equivalence. To require this, even before the 19th century, is not a “historical solecism” but a necessary condition for the argument’s consistency. If this does not occur, so much the worse for the argument.’

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** εξετάζουμε τις Προτάσεις 9.8 και 9.9 των *Στοιχείων*, οι οποίες αναφέρονται σε ιδιότητες πεπερασμένων ακολουθιών αριθμών (χ_n) σε συνεχή αναλογία. Και σε αυτές τις Προτάσεις διαπιστώνουμε

(1) τον αναδρομικό ορισμό της ακολουθίας, ο οποίος έπεται από την υπόθεση της συνεχούς αναλογίας

($\chi_1=1$, $\chi_{n-1}:\chi_n=\chi_n:\chi_{n+1}$), καθώς η τιμή χ_{n+1} καθορίζεται από τις δύο προηγούμενες χ_{n-1} , χ_n ,

(2) το γεγονός ότι η ακολουθία (χ_n) είναι πεπερασμένη, και

(3) ότι η επαγωγή, όπως και προηγουμένως, συνίσταται από ένα αρχικό βήμα και από την **μετάδοση** της προς απόδειξη ιδιότητας από τον έναν όρο στον επόμενο, μέσω του αναδρομικού ορισμού με την χρήση μιας βοηθητικής πρότασης, της ίδιας πάντα σε κάθε βήμα (π.χ. της 8.22).

Οι ακολουθίες είναι και εδώ πεπερασμένες (2), όμως διαφέρουν από εκείνες του πρώτου κεφαλαίου κατά το ότι οι ακολουθίες, που ορίζονται αναδρομικά και επί των οποίων εφαρμόζεται η αποδεικτική διαδικασία, είναι απεριόριστα επεκτάσιμες. Έτσι, η περίπτωση αυτών των Προτάσεων μπορεί να θεωρηθεί ως γέφυρα μεταξύ της πεπερασμένης και της άπειρης επαγωγής.

Ακόμη η έννοια της συνεχούς αναλογίας είναι το αριθμητικό ανάλογο της σχέσης ευθυγράμμων τμημάτων σε μέσο και άκρο λόγο, η δε ακολουθία αριθμών σε συνεχή αναλογία είναι το αριθμητικό ανάλογο της αναδρομικής ανθυφαιρετικής ακολουθίας της ανθυφαίρεσης μέσου και άκρου λόγου.

Ο Freudenthal (1953) παρουσιάζει αυτές τις Προτάσεις ως δείγμα μαθηματικής επαγωγής, ενώ κατά τον Unguru (1991) στις Προτάσεις αυτές δεν μπορεί να διαπιστωθεί η παρουσία της μαθηματικής επαγωγής. Το κρίσιμο σημείο το οποίο δεν εντοπίζουν αμφότεροι είναι η έμμεση, μέσω της υπόθεσης της συνεχούς αναλογίας, παρουσία του αναδρομικού ορισμού, η οποία δημιουργεί την προϋπόθεση για τη εφαρμογή του επαγωγικού αποδεικτικού επιχειρήματος, με πεπερασμένο πάντως αριθμό βημάτων.

Στο **τρίτο κεφάλαιο** εξετάζουμε τις θεωρητικές απόψεις των Unguru (1991), Mueller (1981), Acerbi (2000) για την παρουσία ή μη της μεθόδου της απόδειξης με (πλήρη, άπειρη) μαθηματική επαγωγή στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά.

Ο **Unguru (1991)**, βασιζόμενος στην μελέτη του Klein (1968) για την δομή και φύση των φυσικών αριθμών στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά, αναπτύσσει το βασικό θεωρητικό επιχείρημα ότι απουσιάζουν σε αυτά η έννοια του απείρου συνόλου των φυσικών αριθμών και, ακόμη περισσότερο, η έννοια του φυσικού αριθμού ως παραμέτρου-ανεξάρτητης μεταβλητής, γεγονός το οποίο καθιστά αδύνατη για τους αρχαίους την ανακάλυψη της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής, της οποίας η έγκυρη, σύγχρονη διατύπωση εμπεριέχει κατ' ανάγκη τους φυσικούς αριθμούς ως ανεξάρτητη μεταβλητή. (Για μια ιδιότητα $\Pi(n)$ η οποία αναφέρεται σε κάθε αριθμό, αν η $\Pi(1)$ ισχύει και αν υποθέτοντας την $\Pi(n)$ αποδεικνύεται η $\Pi(n+1)$, τότε η $\Pi(n)$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n).⁴

Ο **Mueller (1981)**, δέκα χρόνια πριν, έχει διατυπώσει μια προσεκτική εκτίμηση για την μαθηματική επαγωγή στα Στοιχεία του Ευκλείδη, η οποία κατ' ουσίαν εμπεριέχει μια τεκμηριωμένη απάντηση στο θεωρητικό επιχείρημα του Unguru. Σε ένα βαθμό δέχεται τη συλλογιστική του Unguru, όταν γράφει:

⁴ “without a number that can serve as an independent variable, it is impossible to formulate a true proof by mathematical induction, in which the claim requiring proof is a function of the natural numbers” (p. 284).

«[. . .] numbers are not characterized as generated from units in a serial order. They are simply finite aggregates of units. (paraphrase of *Elem.* VII def. 2: 'Αριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος) "Of course, there are important relations between these aggregates, but the relation of successor is not one which plays an important role in the *Elements*. Thus it can be said that the integers themselves are not conceived in the structural way conducive to the use of induction',

αλλά συνεχίζει

«*but that there is inductive reasoning about collections or sequences of positive integers. This difference might be compared to the difference in formal theories between the use of induction in the object language and its use in the metalanguage*» .

Όπως παρατηρεί ο Acerbi (2000), σ.62, 'In this way, Mueller denies that Euclides could consciously use the *principle* of CI, but does not assert that could be impossible for him to present proofs in the scheme of CI. In fact, not even this latter case does occur in the *Elements* (see Sect. 4), and Mueller rightly points out that "where Euclid proceeds in this quasi-inductive way, the implicit induction is on the number of terms involved in a construction or assertion and not on the integers themselves" .

Ο **Acerbi (2000)**, σελ. 64, γράφει:

'Summarizing, the conception of number we may extract from the ancient mathematical corpus seems to rule out the possibility that a *principle* of CI could be used. Indeed, the latter is never attested, not even in a rudimentary stage. Proofs in the scheme of CI, working on the number of terms involved in a statement and not on the integers as such – even proofs such that the steps from A to D above outlined are verbalized and formalized in a way which is coherent with what we *think* to be the ontology underlying "ancient Greek mathematics" – seem to be well within the range of possibilities.'

Σύμφωνα με τους Mueller και Acerbi ο τρόπος με τον οποίο οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί θεωρούσαν τους φυσικούς αριθμούς δεν ήταν κατάλληλος για την εφαρμογή σε αυτούς της αποδεικτικής μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής. Στο σημείο αυτό συμφωνούν εν πολλοίς με την ανάλυση του Unguru, και συμφωνούν με την διαπίστωση ότι αυτή η θεώρηση τους οδήγησε σε αδυναμία να διατυπώσουν την αρχή της μαθηματικής επαγωγής, μιας αρχής που αναφέρεται στους φυσικούς αριθμούς και έχει ενσωματωθεί, στα σύγχρονα μαθηματικά, στα αξιώματα του Peano. Όμως για τους Mueller και Acerbi, σε αντίθεση με τον Unguru, αυτή η θεώρηση των φυσικών αριθμών δεν απέτρεψε τους αρχαίους από το να χρησιμοποιήσουν την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής σε σύνολα ή ακολουθίες φυσικών αριθμών ('there is inductive reasoning about collections or sequences of positive integers (Mueller)), ή στον αριθμό των όρων σε μια πρόταση ('Proofs in the scheme of CI [=Complete Induction], working on the number of terms involved in a statement' (Acerbi)).

Η διαφοροποίηση μεταξύ της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, η οποία εφαρμόζεται στο σύνολο των φυσικών αριθμών, και σε περιπτώσεις μαθηματικής επαγωγής, στις οποίες εφαρμόζεται 'σε σύνολα ή ακολουθίες φυσικών αριθμών' ή 'στον αριθμό των όρων σε μια πρόταση' δεν είναι σαφής, καθώς δεν είναι σαφές τι ακριβώς εννοείται με σύνολα ή ακολουθίες φυσικών αριθμών ή με αριθμό των όρων σε μια πρόταση. Οι Mueller και Acerbi ασφαλώς εννοούν ότι οι αρχαίοι δεν είχαν στην διάθεσή τους την **γενική αρχή** της μαθηματικής επαγωγής, αλλά χρησιμοποιούσαν την μέθοδο σε **ειδικές περιπτώσεις**. Δεν εξηγούν όμως πώς προέκυπταν αυτές οι περιπτώσεις.

Στο **τέταρτο κεφάλαιο** θα επιχειρηθεί μια πιο προσεκτική περιγραφή του τρόπου με τον οποίο προκύπτει και εφαρμόζεται η μαθηματική επαγωγή στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά. Η έννοια-κλειδί η οποία εμφανίζεται στα αρχαία μαθηματικά είναι ο ορισμός μιας **αναδρομικής ακολουθίας** ($\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$). Σήμερα μια αναδρομική ακολουθία είναι κατ' αρχήν μια ακολουθία, δηλαδή μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών, των υποδεικτών στο σύγχρονο συμβολισμό. Αλλά για τους αρχαίους η αναδρομική ακολουθία αντιστοιχούσε περισσότερο σε **στάδια μιας διαδικασίας**, στο πρώτο, δεύτερο, τρίτο, κ.ο.κ. στάδιο, και το πρώτο, δεύτερο, τρίτο, κ.ο.κ.. Οι αριθμοί που προσδιόριζαν κάθε στάδιο δεν είχαν σχέση με την αριθμοθεωρητική έννοια του αριθμού ένα, δύο, τρία, κ.ο.κ. (πλήθος μονάδων), δηλαδή με την έννοια του αριθμού στην θεωρία αριθμών π.χ. των βιβλίων 7-9 των *Στοιχείων*, αλλά με την **διατακτική έννοια του αριθμού**. Σε αντίθεση με την αρχαία αριθμοθεωρητική έννοια του αριθμού, η διατακτική έννοια του αριθμού ήταν πρόσφορη στον ορισμό μιας αναδρομικής ακολουθίας και στην απόδειξη ιδιοτήτων με επαγωγή επί της συγκεκριμένης αναδρομικής ακολουθίας.

Για τους αρχαίους μια ακολουθία ($\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$) έχει ως δείκτες αριθμούς με τη διατακτική, και όχι αριθμοθεωρητική, έννοια, και αυτή η ακολουθία ορίζεται **αναδρομικά** αν η χ_2 προκύπτει από την χ_1 με κάποιο κανόνα, η χ_3 προκύπτει από την χ_2 με τον ίδιο κανόνα, κ.ο.κ., επ' άπειρον. Είναι σαφές ότι το θεωρητικό επιχείρημα του Unguru για τη φύση των αριθμοθεωρητικών αριθμών δεν έχει καμία εφαρμογή και επίπτωση στην αρχαία αναδρομική ακολουθία η οποία ορίζεται επί των διατακτικών αριθμών. Είναι σαφές ότι οι υποδείκτες που χρησιμοποιούμε σήμερα για να περιγράψουμε αυτή την ακολουθία ταυτίζονται με τους φυσικούς αριθμούς αλλά στην αρχαιότητα δεν έχουν σχέση με την έννοια του αριθμού ως πλήθος μονάδων. Αντίθετα η διατακτική έννοια του αριθμού σχετίζεται με τα στάδια μιας μαθηματικής διαδικασίας και έχει έτσι την έννοια της μεταβλητής, η οποία απαιτείται για την μαθηματική επαγωγή.

Το ερώτημα είναι πώς προέκυψαν στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά αναδρομικοί ορισμοί ακολουθιών;

Ο βασικός ορισμός μιας αναδρομικής ακολουθίας είναι ο ορισμός της ακολουθίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων (γ_n) της άπειρης ανθυφαίρεσης δύο (ασύμμετρων) μεγεθών α και β , και δίδεται στην Πρόταση Χ.2 των *Στοιχείων*. Τα υπόλοιπα γ_n προκύπτουν από τις σχέσεις $\alpha = \kappa_1\beta + \gamma_1$, $\gamma_1 < \beta$, $\beta = \kappa_2\gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_2 < \gamma_1$, κ.ο.κ., επ' άπειρον. Η ακολουθία αυτή μεγεθών είναι η φυσική γενίκευση της πεπερασμένης ακολουθίας αριθμών των υπολοίπων μιας ανθυφαίρεσης δύο αριθμών, την οποία εξετάσαμε στο κεφάλαιο 1.

Ένας άλλος σημαντικός ορισμός αναδρομικής ακολουθίας είναι η διπλή ακολουθία των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών, η οποία περιγράφεται από τον Πλάτωνα, Θεώνα Σμυρναίο, Ιάμβλιχο και Πρόκλο. Βέβαια και αυτός ο αναδρομικός ορισμός έχει προέλευση την ανθυφαιρετική διαδικασία της διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου.

Η ύπαρξη αναδρομικών ορισμών αυτού του είδους δεν σημαίνει αυτόματα ότι αυτές οι ακολουθίες θα χρησιμοποιηθούν για αποδείξεις με μαθηματική επαγωγή. Αλλά είναι βέβαιο ότι η ύπαρξή τους ήδη σημαίνει ότι ο διατακτικός αριθμός χρησιμοποιείται ως μεταβλητή, και αυτή η χρήση των διατακτικών αριθμών αποδομεί, επί της ουσίας, το θεωρητικό επιχείρημα του Unguru (1991).

Η σύγχρονη θεμελίωση των αριθμών κατά Peano κατ' ουσία περιγράφει διατακτικούς αριθμούς, και γι' αυτό είναι πρόσφορη για την διατύπωση της αρχής της πλήρους, άπειρης επαγωγής. Από τα αξιώματα του Peano, με κατάλληλους ορισμούς εισάγεται η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός αριθμών, και έτσι οι αρχικά μόνο διατακτικοί αριθμοί μετατρέπονται και σε αριθμοθεωρητικούς, και κατάλληλους για την θεωρία αριθμών των βιβλίων 7-9 των *Στοιχείων*. Στα αρχαία όμως μαθηματικά οι διατακτικοί αριθμοί δεν ταυτίστηκαν ποτέ με τους αριθμοθεωρητικούς, με αποτέλεσμα οι αριθμοθεωρητικοί αριθμοί να μην αποτελούν πρόσφορο έδαφος για την ανάπτυξη της μαθηματικής επαγωγής.

Όμως, όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο ορισμός αυτών των αναδρομικών ακολουθιών πράγματι χρησιμοποιείται για αποδείξεις με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Στο πέμπτο κεφάλαιο εξετάζεται η επαγωγή στην αναδρομική ακολουθία των πλευρικών διαμετρικών αριθμών, προκειμένου ν' αποδειχθεί η βασική ιδιότητα των πλευρικών διαμετρικών αριθμών.

Στο έβδομο και όγδοο κεφάλαιο η αναδρομική ακολουθία των υπολοίπων μιας περιοδικής φιλοσοφικής ανθυφαίρεσης παίζει κεντρικό ρόλο στην δεύτερη υπόθεση του Πλατωνικού διαλόγου *Παρμενίδης*. (Η πλήρης εξέταση αυτών των ισχυρισμών παρουσιάζεται στην εργασία

S.Negrepontis, *The periodic anthyphairetic nature of the One of the Second Hypothesis in Plato's Parmenides*, to appear in the Proceedings of Conference, edited by X.Hascher, A. Papadopoulos, *'Mathematiques et musique: des Grecs a Euler*, Universite de Strasbourg, 10-11 Sept.2015).

Στο **πέμπτο κεφάλαιο** μέσω των αρχαίων κειμένων, Πρόκλος (εις *Πολιτείαν* 2,24,16-2,25,8), Θέων (44,18-45,8), Ιάμβλιχος, (εις *Νικόμαχον* 92,23-93,6) θα μελετήσουμε διεξοδικά τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, οι οποίοι, όπως αναφέρθηκε, αποτελούν παράδειγμα ορισμού με άπειρη αναδρομή. Θα αποδείξουμε ότι η βασική ιδιότητα των πλευρικών διαμετρικών αριθμών p_n, q_n , ότι δηλαδή $q_n^2 = 2p_n^2 + (-1)^n$, αποδεικνύεται, βάσει των περιγραφών των αρχαίων πηγών από τους Θέωνα Σμυρναίο, Ιάμβλιχο, και Πρόκλο, με άπειρη μαθηματική επαγωγή επί της αναδρομικής ακολουθίας των πλευρικών διαμετρικών αριθμών.

Τούτο δε παρά τους ισχυρισμούς περί του αντιθέτου τόσο από τον πολέμιο κάθε αρχαίας επαγωγής Unguru (1991), όσο και από τον ένθερμο υπέρμαχο της ύπαρξης αρχαίων αποδείξεων με μαθηματική επαγωγή Fowler (1994), αλλά και τον λιγότερο ένθερμο Acerbi (2000). Όλοι οι παραπάνω διατείνονται ότι από τις τρεις αρχαίες πηγές που έχουμε για τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς δεν είναι δυνατόν να συμπεράνουμε ότι η απόδειξη της βασικής ιδιότητας, με την οποία ασχολούνται, προχωρεί με μαθηματική επαγωγή. Η ανάλυση και ερμηνεία των αρχαίων κειμένων που προτείνουμε στο παρόν κεφάλαιο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι Πυθαγόρειοι όντως απέδειξαν την βασική ιδιότητα των πλευρικών διαμετρικών αριθμών και η μέθοδος απόδειξής τους είναι η μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής.

Η μέθοδος εδώ, όπως περιγράφεται και από τους τρεις Θέωνα, Ιάμβλιχο, Πρόκλο, βασίζεται στην ισχύ της ιδιότητας στο αρχικό ζεύγος πλευρικών διαμετρικών αριθμών, και την **μετάδοση** της ιδιότητας στο επόμενο ζεύγος με εφαρμογή σε κάθε βήμα της αριθμητικής Πρότασης II.10, του αριθμητικού γλαφυρού θεωρήματος, και του αναδρομικού ορισμού.

Η μετάδοση της ιδιότητας από τον έναν όρο στον επόμενο εδώ συνεχίζεται **επ' άπειρον** με την ίδια ακριβώς επιχειρηματολογία σε κάθε βήμα. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι η παρουσία άπειρης αναδρομής δημιουργεί, κατ' αναλογία προς την πεπερασμένη αναδρομή, αποδείξεις με άπειρη μαθηματική επαγωγή στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά. Η ανάλυση αυτής της μαθηματικής επαγωγής οφείλεται στον Σ. Νεγρεπόντη, παρουσιάζεται στο υπό ετοιμασία σύγγραμμα των Σ. Νεγρεπόντη και Β. Φαρμάκη, *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών* και περιλαμβάνεται εδώ με την άδειά τους.

Το **έκτο κεφάλαιο** είναι αφιερωμένο στην πολύ γνωστή Πρόταση ΙΧ.20, στην οποία ο Ευκλείδης κατ' ουσίαν αποδεικνύει ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι το πλήθος. Η παραπάνω πρόταση αποτελεί αμφιλεγόμενο παράδειγμα απόδειξης με μαθηματική επαγωγή. Οι Σταμάτης (1953), Freudenthal (1953), Ernest (1982), κ.α. υποστηρίζουν είτε ότι η πρόταση είναι αμιγώς επαγωγική είτε ότι τουλάχιστον πρέπει να αποδοθεί στον Ευκλείδη επαγωγική σκέψη σ' αυτήν την απόδειξη. Σε αντιδιαστολή με αυτούς οι Unguru (1991), Stenlund (2014), κ.α. αντικρούοντάς τους δηλώνουν ότι η επαγωγική σκέψη είναι πλήρως απύσχα. Όμως, αυτό το οποίο δεν έχει παρατηρηθεί μέχρι τώρα είναι ότι και εδώ υπάρχει αναδρομικός ορισμός μιας ακολουθίας πρώτων αριθμών, ως εξής: [$\chi_1=2$ και] αν $\chi_2, \dots, \chi_n$ είναι πρώτοι αριθμοί, τότε χ_{n+1} είναι ένας πρώτος αριθμός, διάφορος των $\chi_2, \dots, \chi_n$, που διαιρεί τον αριθμό $(\chi_1 \cdot \chi_2 \cdot \dots \cdot \chi_n) + 1$ (και υπάρχει από την Πρόταση 7.31). Ο ορισμός της αναδρομικής ακολουθίας (χ_n) δημιουργεί και πάλι, πρόσφορο έδαφος για απόδειξη με μαθηματική επαγωγή.

Στο **έβδομο κεφάλαιο** θα ασχοληθούμε με τα χωρία 142b-143a, 144e, 149a-e του Πλατωνικού διαλόγου *Παρμενίδης*.

Ο Σ. Νεγρεπόντης, στην εργασία *The periodic anthyphairetic nature of the One of the Second Hypothesis in Plato's Parmenides*, που αναφέρθηκε παραπάνω, έχει αναπτύξει την ακόλουθη ερμηνεία.

Ο σκοπός της δεύτερης υπόθεσης του Παρμενίδης είναι η περιγραφή του Εν που είναι κατάλληλο για ένα νοητό Ον, για μια Πλατωνική Ιδέα.

Η πρώτη βασική ιδιότητα μιας Πλατωνικής Ιδέας (142b-143a) είναι ότι αποτελείται από μια αρχική δυάδα μερών Εν, Ον, με $\text{Εν} > \text{Ον}$. Στο χωρίο **ορίζεται**, με τις υποθέσεις

ότι [H_1] το Εν διαιρεί το Ον και γεννάται ένα νέο μέρος Εν_1 , με $\text{Εν}_1 < \text{Ον}$ (ώστε $\text{Εν} = \text{Ον} + \text{Εν}_1$, $\text{Ον} > \text{Εν}_1$),

ότι [H'_1] το Ον διαιρεί το Εν_1 και γεννάται ένα νέο μέρος Ον_1 , με $\text{Ον}_1 < \text{Εν}_1$ (ώστε $\text{Ον} = \text{Εν}_1 + \text{Ον}_1$, $\text{Εν}_1 > \text{Ον}_1$),

ότι [H_2] το Εν_1 διαιρεί το Ον_1 και γεννάται ένα νέο μέρος Εν_2 , με $\text{Εν}_2 < \text{Ον}_1$ (ώστε $\text{Εν}_1 = \text{Ον}_1 + \text{Εν}_2$, $\text{Ον}_1 > \text{Εν}_2$),

ότι [H'_2] το Ον_1 διαιρεί το Εν_2 και γεννάται ένα νέο μέρος Ον_2 , με $\text{Ον}_2 < \text{Εν}_2$ (ώστε $\text{Ον}_1 = \text{Εν}_2 + \text{Ον}_2$, $\text{Εν}_2 > \text{Ον}_2$),

κ.ο.κ. επ' άπειρον,

μια ανθυφαιρετική αναδρομική ακολουθία

$\text{Εν} > \text{Ον} > \text{Εν}_1 > \text{Ον}_1 > \text{Εν}_2 > \text{Ον}_2 > \dots$,

η οποία αποδεικνύεται με επαγωγή ότι είναι **άπειρη το πλήθος**.

Η δεύτερη και ισχυρότερη ιδιότητα μιας Πλατωνικής Ιδέας (144c-e, 138a) είναι ότι η ακολουθία των λόγων διαδοχικών μερών, των **άψεων** όπως τους ονομάζει ο Πλάτων, $Εν: Ον, Ον: Εν_1, Εν_1: Ον_1, Ον_1: Εν_2, Εν_2: Ον_2, \dots$

είναι **πεπερασμένη**, δηλαδή

η ανθυφαίρεση $Εν$ προς $Ον$ ικανοποιεί το φιλοσοφικό ανάλογο της **περιοδικής ανθυφαίρεσης**, και υπάρχει δείκτης $κ$, ώστε

$Εν:Ον=Εν_κ:Ον_κ$.

Είναι σαφές ότι μια περιοδική ανθυφαίρεση ικανοποιεί τις υποθέσεις $[H_1], [H'_1], [H_2], [H'_2], \dots, [H_n], [H'_n], \dots$, και άρα από την πρώτη ιδιότητα είναι **άπειρη (144e)**.

Στα χωρία 142b-143a και 144e αυτά παρατηρούμε ότι αξιοποιείται το φιλοσοφικό ανάλογο του αναδρομικού ορισμού της ακολουθίας ανθυφαιρετικών υπολοίπων της Πρότασης Χ.2 (που αναφέρθηκε στο τέταρτο κεφάλαιο) για την απόδειξη της απειρίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων.

Η τρίτη ιδιότητα μιας Πλατωνικής Ιδέας (149a-e) είναι ότι, λόγω της περιοδικότητας, εντός μιας Πλατωνικής Ιδέας ορίζονται μονάδες και αριθμοί. Ο Πλατωνικός αριθμός **ορίζεται** ως εξής: μια ακολουθία **διαδοχικών** μερών

$Εν>Ον>Εν_1>Ον_1>Εν_2>Ον_2>\dots>Εν_μ>Ον_μ$

αποτελούν μονάδες **Πλατωνικού αριθμού** αν όλοι οι λόγοι διαδοχικών μερών-άψεων

$Εν:Ον, Ον: Εν_1, Εν_1: Ον_1, Ον_1: Εν_2, Εν_2: Ον_2 \dots Εν_μ: Ον_μ$

είναι ανά δύο διάφοροι.

Στο χωρίο *Παρμενίδης* 149a4-c3 ο Πλάτων αποδεικνύει με μαθηματική επαγωγή ότι «τὰς ἄψεις τοῦ πλήθους τῶν ἀριθμῶν μιᾶ ἐλάττους εἶναι.»,

ότι δηλαδή

ο αριθμός των μονάδων μιας Πλατωνικής Ιδέας είναι ίσος με τις άψεις+1.

Είναι σαφές ότι η μαθηματική επαγωγή που αναπτύσσει εδώ ο Πλάτων είναι αυστηρά πεπερασμένη, μήκους ίσου με την περίοδο των άψεων +1, και η προς απόδειξη ιδιότητα μεταδίδεται από τον έναν όρο στον επόμενο, με τρόπο παρόμοιο με όσα έχουμε δει και στα προηγούμενα κεφάλαια. Πρόκειται δηλαδή για παράδειγμα απόδειξης με μαθηματική επαγωγή υπό την έννοια της Πρότασης 7.1 ή 7.2.

Το χωρίο *Παρμενίδης* 149a4-c3, έχει μελετηθεί από τον Wedberg (1955) και αργότερα από τον Acerbi (2000). Σύμφωνα με τον Acerbi, σελ.64

‘Surprisingly, the only full-fledged example [of complete induction], though very simple, does not appear in a mathematical work, but in Plato’s *Parmenides* [149a7-c3].’ Όμως οι συγγραφείς αυτοί μελέτησαν το χωρίο σε απομόνωση, χωρίς να επιδιώξουν την κατανόηση του συγκεκριμένου χωρίου μέσα στην δεύτερη υπόθεση του *Παρμενίδης*, και εσφαλμένα εξέλαβαν την επαγωγή, ως πλήρη, άπειρη.

Στο **ογδοο κεφάλαιο** αναφέρονται εν συντομία τα αποσπάσματα Β1 και Β3 και τα παράδοξα κίνησης του Ζήνωνος, τα οποία βρίσκονται σε στενή σχέση με την δεύτερη υπόθεση του Παρμενίδης. Η λεπτομερής ανάλυση, η οποία ευρίσκεται στην εργασία του Σ. Νεγρεπόντη που αναφέρθηκε παραπάνω, εκφεύγει του σκοπού της παρούσης διπλωματικής εργασίας.

Στο **ένατο κεφάλαιο** εξετάζεται εν συντομία η συμβολή του Αρχιμήδη στην μαθηματική επαγωγή. Ο Αρχιμήδης φαίνεται να είναι ο πρώτος μαθηματικός ο οποίος μετέφερε την μέθοδο απόδειξης με μαθηματική επαγωγή σε προβλήματα γεωμετρίας,

απομακρυνόμενος από την περιοχή της ανθυφαίρεσης και γενικότερα της αριθμητικής, στην οποία αναφέρονταν από τους Πυθαγόρειους μέχρι και τον Ευκλείδη.

Αν και στο σύνολο σχεδόν του έργου του ερχόμαστε αντιμέτωποι με αναδρομικούς αλγορίθμους, κατά κύριο λόγο εντός των αποδείξεων, στην παρούσα εργασία θα περιοριστούμε στο τμήμα *Περί Ελίκων* του Κώδικα του Αρχιμήδη.

Η ανακάλυψη κλειστών τύπων για τα αθροίσματα των δυνάμεων των φυσικών αριθμών, υπαγορεύεται από την αναγκαιότητα επίλυσης προβλημάτων υπολογισμού-προσεγγίσεων εμβαδών και όγκων. Είναι ίσως η πιο εκτεταμένη κλωστή σε όλη την ανάπτυξη των διακριτών μαθηματικών σε διάφορους ανθρώπινους πολιτισμούς για χιλιάδες χρόνια. Η ιστορία τους εκτείνεται από την αρχαιότητα, όπου εμφανίζεται στα ενδιαφέροντα της Πυθαγόρειας σχολής, κατά τη διάρκεια του 6^{ου} π.Χ. αιώνα έως το 18^ο αιώνα, στο έργο του Leonhard Euler σχετικά με ένα γενικό τύπο για διακριτά αθροίσματα σχεδόν οποιαδήποτε μορφής.

Η Πρόταση 10, αλλά και η 11, του *Περί Ελίκων*, συμπεριλαμβάνονται στις αρχαιότερες γραπτές μαρτυρίες της ενασχόλησης των μαθηματικών με τα εν λόγω αθροίσματα. Ο συγγραφέας αποδεικνύει μεταξύ άλλων τις Προτάσεις

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = (1 + n) \cdot \frac{n}{2},$$

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{2n + 1}{3} \quad \text{και}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i(i-1).$$

Τα αθροίσματα αυτά τα συναντάμε πολλά χρόνια αργότερα σε διάφορους πολιτισμούς, και μάλιστα σε μαθηματικούς στους οποίους καταλογίζονται επαγωγικές αποδείξεις, όπως στους Ινδούς (Aryabhata), στον Ισλαμικό κόσμο (Abu Kamil, al-Karaji, al-Samaw'al, al-Haytham), στον Εβραϊκό πολιτισμό (Levi Ben Gershon), στον Μαυρόλυκο, στον Pascal, κ.α..

Το άθροισμα $1 + 2 + 3 + \dots + n = (1 + n) \cdot \frac{n}{2}$ αποδεικνύεται από τους μεταγενέστερους με

την ίδια τεχνική που εφαρμόζει ο Αρχιμήδης, ενώ το $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

αντιμετωπίζεται αρκετές φορές με διαφορετικές προσεγγίσεις, κάποιες από τις οποίες έχουν χαρακτηριστεί ως επαγωγικές.

Παρά τον ισχυρισμό της Serfin-Weis (2010, σ. 209) «*Very few examples for what amounts to complete induction are attested in ancient geometry. The ones known to me are by Archimedes: SL 10 and 11 and QP 23.*»⁵, οι Προτάσεις 10 και 11 δεν αποδεικνύονται με επαγωγικό τρόπο στο *Περί Ελίκων*.

Ωστόσο, κατόπιν συστηματικής και διεξοδικής μελέτης του *Περί Ελίκων* της υποφαινόμενης σπουδαστριάς, εξάγεται το συμπέρασμα ότι στο έργο αυτό μπορούμε να διακρίνουμε επαγωγικές Προτάσεις. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται και προτείνεται, για πρώτη φορά στην βιβλιογραφία, ως τέτοια περίπτωση η Πρόταση 27, η οποία αναφέρεται στον υπολογισμό του εμβαδού της επιφάνειας που περιέχεται από μια

⁵ SL 10 and 11: Spiral Lines Proposition 10 and 11,
QP 23: Quadratura Parabolae Proposition 23

επίπεδη έλικά συμπληρώνουσα ν περιστροφές. Ειδικότερα, ο Αρχιμήδης αποδεικνύει ότι το εμβαδόν του τρίτου χωρίου (το χωρίο που περικλείεται από την ευθεία περιστροφής και την έλικά κατά την τρίτη περιστροφή) είναι διπλάσιο του εμβαδού του δεύτερου χωρίου, του δε τέταρτου είναι τριπλάσιο, του δε πέμπτου είναι τετραπλάσιο και πάντοτε το επόμενο είναι πολλαπλάσιο του δεύτερου χωρίου κατά τους ακόλουθους στη σειρά αριθμούς.

Το είδος της επαγωγής που εφαρμόζει εδώ ο Αρχιμήδης είναι η αναλυτική μορφή της μεθόδου και το συναντάμε για πρώτη φορά στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά.

Αναφορικά με τα λοιπά χαρακτηριστικά της επαγωγικής απόδειξης σημειώνουμε ότι ακολουθεί όσα είπαμε στο κεφάλαιο 4: βασίζεται ουσιωδώς σε αναδρομικούς ορισμούς, η ισχύς της προς απόδειξη πρότασης πραγματοποιείται μέσω της ισχύος της στο πρώτο βήμα και της δυνατότητας μετάδοσης αυτής της ιδιότητας σε κάθε επόμενο βήμα και, τέλος, τόσο οι αναδρομικοί ορισμοί όσο και η επαγωγική απόδειξη έχουν πεπερασμένο αλλά απεριόριστα επεκτάσιμο μήκος.

Στο **δέκατο κεφάλαιο** θα εξετάσουμε τις γεωμετρικές Προτάσεις 17, 18 και 20 του τέταρτου βιβλίου της Συναγωγής του Πάππου, οι οποίες αναφέρονται στο γεωμετρικό σχήμα **Αρβηλος**, και τις οποίες ο Πάππος περιγράφει ως αρχαίες. Πολλοί σύγχρονοι μελετητές πιστεύουν ότι οι αξιοσημείωτες αυτές Προτάσεις οφείλονται στον Αρχιμήδη, και σε κάθε περίπτωση περιγράφονται ως μαθηματικά τύπου Αρχιμήδη.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την παρούσα μελέτη παρουσιάζουν οι προτάσεις 18 και 20, οι οποίες αποδεικνύονται με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Επιπρόσθετα, η πρόταση 17, η οποία ενέχει το ρόλο λήμματος-επαγωγικού βήματος για τις προηγούμενες, υποστασιοποιεί το επαγωγικό επιχείρημα. Διαπιστώνουμε και εδώ την ύπαρξη αναδρομικού ορισμού μιας άπειρης ακολουθίας κύκλων, ενώ η επαγωγική διαδικασία, η οποία πραγματοποιείται επί αυτής της αναδρομικής ακολουθίας, αποτελείται από ένα αρχικό βήμα και από την μετάδοση της προς απόδειξη ιδιότητας, χρησιμοποιώντας σε κάθε βήμα την Πρόταση 17, από τον πρώτο όρο της αναδρομικής ακολουθίας στον δεύτερο, από τον δεύτερο στον τρίτο, ... , «καὶ τοῦτο συμβαῖνον ἐπὶ τὸ ἄπειρον», όπως αυτολεξεί δηλώνει ο Πάππος.

Εκτός των Προτάσεων 17, 18 και 20 στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται επίσης οι Προτάσεις, 15, 16, με την βοήθεια των οποίων ο Πάππος αποδεικνύει την Πρόταση 17, ώστε να καταστεί δυνατό να την εφαρμόσει στην απόδειξη της 18. Η διάταξη αυτή καθώς και η επιλογή των εν λόγω προτάσεων δεν είναι καθόλου συμπτωματική. Η Πρόταση 18 αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα αυτού του τμήματος της Συναγωγής και διατυπώνεται από τον Πάππο αρχικά ως Πρόταση 14, χωρίς να αποδεικνύεται. Για να καταστεί αυτό δυνατό με την μέθοδο που ακολουθεί ο συγγραφέας απαιτείται η 17 και αυτή με την σειρά της απαιτεί τις προηγούμενες.

Έτσι μπορούμε εύλογα να εικάσουμε είτε ότι ο Πάππος αναγκάζεται για την απόδειξη της 18 εκ των συνθηκών να επαναανακαλύψει την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, είτε ότι το σύνολο των προτάσεων, με την διάρθρωση και επιχειρηματολογία που παρουσιάζεται από τον Πάππο, προέρχεται από κάποιο προγενέστερο έργο και άρα η μέθοδος του ήταν ήδη γνωστή.

Τέλος, στο κεφάλαιο αυτό θα διαπιστώσουμε ότι ο συγγραφέας αντιμετωπίζει την επαγωγική μέθοδο ως αξιόπιστη και ολοκληρωμένη αποδεικτική διαδικασία. Επίσης διακρίνεται τόσο η οικειότητά του με αυτό το είδος απόδειξης όσο και η πλήρης

συνειδητοποίηση από μέρους του της αναγκαιότητας των δύο βασικών συστατικών της μεθόδου: της ισχύς της πρότασης στην πρώτη περίπτωση και του επαγωγικού βήματος. Τα συμπεράσματα αυτά προκύπτουν τόσο από τα σχόλια του Πάππου μετά την Πρόταση 18 όσο και από την Πρόταση 19.

Στο **ενδέκατο κεφάλαιο** θα μας απασχολήσει μία πρόταση από την *Αριθμητική Εισαγωγή* του Νικόμαχου του Γερασηνού η οποία σχετίζεται με το άθροισμα κύβων των πρώτων n διαδοχικών ακεραίων.

Με βάση το έργο αυτό μελετητές της Ιστορίας των Μαθηματικών, όπως οι Heath (1921), Cajori (1919), Loria (1972), Boyer (2011), θεωρούν ότι το εν λόγω άθροισμα ήταν γνωστό στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, παρόλο που ο Νικόμαχος δεν διατυπώνει τον τύπο του αθροίσματος. Ωστόσο, όπως πολύ σωστά προτείνει ο Heath (1921) στην ανάλυσή του, η πρόταση την οποία διατυπώνει ο Νικόμαχος στην σε συνδυασμό με την Πυθαγόρεια Πρόταση για το άθροισμα τετραγώνων των πρώτων n διαδοχικών ακεραίων, έχει ως άμεση συνέπεια τον τύπο $1^3+2^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$, ο οποίος κάνει επίσης την εμφάνισή στα επόμενα τρία τελευταία κεφάλαια, όπου ακολουθούμε την μαθηματική επαγωγή σε άλλους πολιτισμούς.

Στο τελικό μέρος της εργασίας εξετάζουμε την μεσαιωνική περίοδο από το τέλος της αρχαιότητας μέχρι την σύγχρονη περίοδο, αναφερόμενοι στη συμβολή στην μαθηματική επαγωγή των Αράβων μαθηματικών (**δωδέκατο κεφάλαιο**), του Levi Ben Gershon (**δέκατο τρίτο κεφάλαιο**) και του Φραγκίσκου Μαυρόλυκου (**δέκατο τέταρτο κεφάλαιο**).

Για πολλούς αιώνες οι Άραβες είναι οι αληθείς συνεχιστές του Ελληνικού πολιτισμού. Οι Άραβες μαθηματικοί είχαν μελετήσει στο πρωτότυπο ή σε μετάφραση, μεταξύ άλλων, τα έργα του Ευκλείδη και του Αρχιμήδη.

Ένα θέμα με το οποίο ασχολήθηκαν ήταν αθροίσματα της μορφής $1^k+2^k+\dots+n^k$ για φυσικούς αριθμούς $k=1, 2, 3, 4$ και κάθε n .

Ο υπολογισμός του αθροίσματος $\Sigma_n=1+2+\dots+n$ δίδεται από τους Άραβες επαναλαμβάνοντας την απόδειξη που παρέχεται από τον Αρχιμήδη στο *Περί Ελίκων*, συνεπώς με μη επαγωγικό τρόπο.

Ο υπολογισμός του αθροίσματος $T_n=1^2+2^2+\dots+n^2$, όπως ήδη αναφέρθηκε, είχε δοθεί από τον Αρχιμήδη στην Πρόταση 10 στο *Περί Ελίκων*, με μη επαγωγική απόδειξη. Πιο συγκεκριμένα ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι $T_n:\Sigma_n=(1/3)(2n+1)$.

Ο Abu-Kamil αναφέρει ότι η Πρόταση $T_n:\Sigma_n=(1/3)(2n+1)$ έχει δοθεί από τους αρχαίους, ασφαλώς εννοώντας τον Αρχιμήδη, ο ίδιος δε προτείνει μια επαγωγική απόδειξη αβέβαιας αυστηρότητας. Το επιχείρημα του Abu-Kamil, το οποίο εφαρμόζεται για $n=4$, είναι διαφορετικό από του Αρχιμήδη, και σύμφωνα με τους Yadegary (1978)⁶ και Rashed (2012)⁷ είναι επαγωγικό. Παρόλο που θα μπορούσε, ίσως, κανείς να θεωρήσει ότι είναι επαγωγικό δεν πιστεύουμε ότι μπορεί ανεπιφύλακτα να καταχωρηθεί ως τέτοιο. Η αδυναμία αυτή έγκειται στο ότι η αντιμετώπισή του, αν και δηλώνει μια επαγωγικότητα,

⁶ «In my research on the history of mathematical induction, I came across an example of the "quasi-general" form of induction used by Abu-Kamil Shuja' Ibn Aslam.»

⁷ «Il procède d'abord par un raisonnement par récurrence archaïque, c'est-à-dire qu'il établit le résultat pour $n=1, 2, 3, 4$, pour conclure qu'il est vrai pour tout n , sans toutefois formuler explicitement l'hypothèse de la récurrence. Ce type de démonstration va survivre encore pendant huit siècles.»

δεν αναφέρεται σε αυτήν αλλά ούτε και είναι προφανές ποιο είναι το επαγωγικό επιχείρημα με το οποίο εξασφαλίζεται η ισχύς της πρότασης από την προηγούμενη στην επόμενη περίπτωση.

Ο Al-Karaji στο *al-Fakhrī fī 'l-jabr wa 'l-muqābala* διατυπώνει στο θεώρημα 2 την ισότητα $T_n: \Sigma v = (1/3)(2v+1)$

Η σχέση που διατυπώνουν και οι δύο συγγραφείς μας παραπέμπει έμμεσα στον Αρχιμήδη, παρόλο που δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι γι' αυτό.

Ο Al-Karaji αποδεικνύει τελικά, χωρίς επαγωγική απόδειξη, την ισοδύναμη μορφή

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i(i-1) \text{ του τύπου του θεωρήματος 2, σχέση που όπως επίσης}$$

αναφέρθηκε, αποδεικνύεται από τον Αρχιμήδη εντός της Πρότασης 10 στο *Περί Ελίκων*.

Αργότερα ο Al-Samaw'al έδωσε απόδειξη με εκείνη την μορφή επαγωγής, που ο Freudenthal (1953) αποκαλεί «regression». Σύμφωνα με τον τελευταίο η αποδεικτική αυτή τεχνική δεν μπορεί να ταυτιστεί με την μαθηματική επαγωγή αλλά όταν εφαρμόζεται υπό συγκεκριμένες προϋποθέσεις είναι πιο κοντά στη μαθηματική επαγωγή από οποιαδήποτε άλλη. Την μορφή αυτή την συναντάμε αρχικά στον Al-Karaji, στην

απόδειξη του τύπου $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$, όπου ενδιαφέρον πέρα από την ίδια την απόδειξη,

παρουσιάζει το ότι ο Al-Karaji για να εφαρμόσει αυτή την διαδικασία μετατρέπει αρχικά

την ακολουθία $\left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$ σε αναδρομική μέσω του τύπου $\left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 = n^3 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right)^2$, το ίδιο

πράττει και ο al-Samaw'al στο άθροισμα των τετραγώνων, που αναφέρθηκε παραπάνω.

Η επαγωγική απόδειξη του αθροίσματος των κύβων επαναλαμβάνεται με τον ίδιο τρόπο από τον Al-Samaw'al αλλά και από τον Gershon.

Την επαγωγική μέθοδο των al-Karaji και al-Samaw'al μπορούμε εν συντομία να την περιγράψουμε ως εξής.

Ορισμός ακολουθίας Λ_n . $\Lambda_n = (1+2+\dots+n)^2$.

Πρόταση (Αναδρομικός ορισμός της ακολουθίας Λ_n . $\Lambda_n = n^3 + \Lambda_{n-1}$.

Πρόταση. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$.

Απόδειξη. Από τον αναδρομικό ορισμό με αρχαϊκού τύπου επαγωγή.

Την απόδειξη του al-Samaw'al μπορούμε να την περιγράψουμε ως εξής:

1. Ορισμός ακολουθίας. $M_n = (n+2)S_n$.

2. Πρόταση (Αναδρομικός ορισμός ακολουθίας M_n).

$$M_n = 3n^2 + M_{n-2}.$$

Από τον τύπο του Αρχιμήδη για S_n , πρέπει ν' αποδείξουμε ότι

$$(n+2)((n+1)n/2) - (n((n-2)(n-1)/2)) = 3n^2$$

Με απλοποιήσεις, ότι

$$(n+2)(n+1) - (n-2)(n-1) = 6n,$$

το οποίο ελέγχεται χωρίς δυσκολία.

2. Πρόταση (Αρχιμήδης). $(2n+1)S_n = 3(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2)$.

Λήμμα α. $(2n+1)S_n = nS_{n+1} + (n+1)S_{n-1} = nS_{n+1} + M_{n-1}$

Από τον τύπο του Αρχιμήδη για S_n , πρέπει ν' αποδείξουμε ότι

$$(2n+1)n(n+1)/2 = n(n+1)(n+2)/2 + (n+1)(n-1)n/2.$$

Με απλοποιήσεις, ότι

$$2n+1 = (n+2) + (n-1).$$

Λήμμα β. $nS_{n+1} = (n+2)S_n = M_n$

Από τον τύπο του Αρχιμήδη για S_n , πρέπει ν' αποδείξουμε ότι

$$n((n+1)(n+2)/2) = (n+2)(n(n+1)/2),$$

το οποίο ισχύει ταυτοτικά.

Λήμμα γ. $(2n+1)S_n = (n+2)S_n + (n+1)S_{n-1} = M_n + M_{n-1}$

Άμεσο από α. και β.

Απόδειξη (al-Samaw'al). Από γ. $(2n+1)S_n = M_n + M_{n-1} =$

$$3n^2 + 3(n-1)^2 + M_{n-2} + M_{n-3} =$$

... =

$$3(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2)$$

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος απόδειξης των δύο Προτάσεων

$$(2n+1)S_n = 3(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = S_n^2, \text{ και}$$

από τον al-Karaji και al-Samawal, είναι αυτή: ορίζεται μια κατάλληλη ακολουθία, το κύριο επιχείρημα είναι η περιγραφή της ακολουθίας με αναδρομικό τρόπο, από την οποία, με μία στοιχειώδη και αρχαϊκή επαγωγή, η βασική πρόταση αποδεικνύεται. Ακολουθείται δηλαδή η μεθοδολογία που έχουμε δει στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά.

Στην τελευταία παράγραφο του κεφαλαίου θα μας απασχολήσουν κάποιες προτάσεις από το έργο Al-Bahir του al-Samaw'al. Οι προτάσεις αυτές σχετίζονται με το διωνυμικό θεώρημα και τους διωνυμικούς συντελεστές.

Τα παραπάνω επιτεύγματα αποδίδονται ρητά από τον al-Samaw'al στον al-Karaji, αλλά το συγκεκριμένο έργο, στο οποίο ο al-Karaji διαπραγματεύεται αυτά τα θέματα, δεν σώζεται πλέον. Έτσι, οι αποδείξεις που παρουσιάζονται είναι από το Al-Bahir του al-Samaw'al. Στις προτάσεις αυτές εμφανίζεται μια μορφή επαγωγής οι οποία παρουσιάζει μεγάλη ομοιότητα με εκείνη που φέρεται να χρησιμοποίησε ο Abu-Kamil. Οι προς απόδειξη σχέσεις αποδεικνύονται για $n=1, 2, 3, 4$ με χρήση κάθε φορά της προηγούμενης

περίπτωσης και στην συνέχεια γενικεύονται για κάθε τιμή του n . Ωστόσο ισχύουν κι εδώ όσα αναφέρθηκαν για τον Abu-Kamil.

Να σημειώσουμε ότι και πάλι οι προτάσεις επί των οποίων επιχειρούνται επαγωγικές αποδείξεις είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με επαγωγικούς ορισμούς και οι αποδείξεις τους χτίζονται πάνω στα θεμέλια αυτών των ορισμών.

Στο δωδέκατο κεφάλαιο θα περάσουμε στον Εβραϊκής καταγωγής μαθηματικό Levi Ben Gershon και το βιβλίο του *Maasei Hoshev*. Με βάση το έργο αυτό αρκετοί ιστορικοί των Μαθηματικών πιστώνουν στον Gershon χειρισμό επαγωγικών αποδείξεων.

Το πρώτο παράδειγμα στο οποίο ανιχνεύεται η εφαρμογή της μεθόδου είναι στην αρχή του *Maasei Hoshev*, όπου ο Gershon ασχολείται με ιδιότητες των πράξεων των φυσικών αριθμών.

Στην Πρόταση 9 ο Gershon, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1, αποδεικνύει την προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού για $n=3$, στην Πρόταση 10, χρησιμοποιώντας την 9 και την ίδια ακριβώς απόδειξη με εκείνης, την επεκτείνει για $n=4$ και στην συνέχεια γενικεύει για την περίπτωση του γινομένου οποιουδήποτε πλήθους αριθμών, δηλώνοντας ότι αυτό ισχύει ακριβώς εξαιτίας της επαναληπτικότητας της απόδειξης. Παρά το ότι η διαδικασία θυμίζει έντονα την αποδεικτική τεχνική που ακολούθησαν οι Άραβες μαθηματικοί, στην περίπτωση για παράδειγμα του διωνυμικού, ο Gershon φροντίζει να παρουσιάσει αναλυτικά την απόδειξη για $n=3$ και από αυτήν για $n=4$, οι οποίες όπως είπαμε είναι πανομοιότυπες με μόνη διαφορά ότι τώρα χρησιμοποιούμε την προηγούμενη. Μπορούμε λοιπόν να ισχυριστούμε ότι το βήμα από το $n=3$ στο $n=4$ είναι, για τον Gershon, το γενικό επαγωγικό βήμα. Είναι το επιχείρημα που αιτιολογεί την γενίκευση στην οποία προβαίνει μετά την ολοκλήρωση των αποδείξεων.

Το παραπάνω δεν είναι το μοναδικό παράδειγμα που θα μας απασχολήσει σε αυτό το κεφάλαιο. Ο συγγραφέας στο *Maasei Hoshev* κάνει συστηματική χρήση αυτής της αποδεικτικής τεχνικής αλλά και της μορφής που καλέσαμε «regression». Έτσι παρουσιάζονται επιπλέον οι Προτάσεις 63, 64, 65, οι οποίες σχετίζονται με την Συνδυαστική, καθώς και οι Προτάσεις 41 και 42, οι οποίες θα μας επαναφέρουν στα γνωστά μας αθροίσματα δυνάμεων.

Την πρωτότυπη επαγωγική απόδειξη του Gershon μπορούμε να την περιγράψουμε ως εξής:

Ορισμός ακολουθίας P_n . P_n είναι το σύνολο των μεταθέσεων n στοιχείων

Πρόταση (Αναδρομικός ορισμός ακολουθίας P_n). $P_{n+1}=(n+1).P_n$.

Πρόταση (Gershon). $P_n=n!$

Απόδειξη. Η βασική πρόταση αποδεικνύεται με μια στοιχειώδη και αρχαϊκή επαγωγή, που βασίζεται στον αναδρομικό ορισμό των μεταθέσεων σε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Ακολουθείται και εδώ η μεθοδολογία που έχουμε δει στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά.

Το **δέκατο τρίτο** αναφέρεται στον Ελληνικής καταγωγής Francisco Maurolico και οι προτάσεις με τις οποίες θα έρθουμε σε επαφή προέρχονται από την πραγματεία του για

την αριθμητική *Arithmeticon libri duo* και συγκεκριμένα από το πρώτο βιβλίο, όπου ο Maurolico ασχολείται με τους “figurate numbers” εξαντλητικά.

Οι επαγωγικοί ορισμοί εδώ είναι ξεκάθαροι και κάνουν αισθητή την παρουσία τους εν τη γεννέσει του βιβλίου, μιας και οι κατηγορίες των “figurate numbers” ορίζονται με αυτό τον τρόπο στην αρχή του.

Από το συγγραφέα αυτό θα παρουσιάσουμε δύο παραδείγματα. Το πρώτο αποτελείται από τις Προτάσεις 4 και 6. Η Πρόταση 6 είναι εκείνη που αποδεικνύεται επαγωγικά ενώ η 4 λειτουργεί ως λήμμα και επί της ουσίας συνιστά το επαγωγικό επιχείρημα για την μετάβαση από την μία περίπτωση στην αμέσως επόμενη. Το δεύτερο παράδειγμα, ίσως και το πιο διάσημο του βιβλίου, απαρτίζεται από τις Προτάσεις 13 και 15, οι οποίες έχουν αντίστοιχο ρόλο με τις προηγούμενες. Οι αποδείξεις των Προτάσεων 6 και 15 πραγματοποιούνται για $n=3$ και στην συνέχεια γενικεύονται για κάθε τιμή του n .

Το είδος της επαγωγής που εμφανίζεται εδώ είναι ίδιο με εκείνο που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 5, δηλαδή η αλήθεια της Πρότασης εξασφαλίζεται μέσω του ότι

α) η Πρόταση είναι αληθής στην πρώτη περίπτωση

β) η ιδιότητα αυτή μεταδίδεται από το έναν όρο στον επόμενο, με την ίδια ακριβώς επιχειρηματολογία σε κάθε βήμα, και αυτό μπορεί να συνεχίζεται **επ’ άπειρον**.

Από αυτή την μελέτη προκύπτει ότι η μέθοδος απόδειξης με μαθηματική επαγωγή δημιουργήθηκε από τους Πυθαγόρειους στα πλαίσια της μελέτης της πεπερασμένης και άπειρης ανθυφαίρεσης, και συνδυάστηκε όχι με τους αριθμο-θεωρητικούς αριθμούς (οι οποίοι είναι πλήθος μονάδων), αλλά με διατακτικούς αριθμούς και με έναν αναδρομικό ορισμό. Τυπικά παραδείγματα είναι η πεπερασμένη και άπειρη ανθυφαίρεση, και η μελέτη των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών. Σημαντικά δείγματα επαγωγής υπάρχουν σε προτάσεις των στοιχείων του Ευκλείδη. Η χρήση της ανθυφαίρεσης ως βάση για την φιλοσοφία του Πλάτωνος, και ωρίτερα του Ζήνωνος, κατέστησε δυνατή την μεταφορά της μεθόδου της επαγωγής σε φιλοσοφικό επίπεδο, όπως διαπιστώνεται από χωρία στον Πλατωνικό διάλογο Παρμενίδης και από αποσπάσματα του Ζήνωνος. Ο Αρχιμήδης μετέφερε την διπλή μέθοδο του αναδρομικού ορισμού και της επαγωγικής απόδειξης στη γεωμετρία, ιδίως στο έργο του Περί Ελίκων, ενώ ουσιώδεις γεωμετρικές προτάσεις, για την Άρβηλο, βασιζόμενες σε αναδρομή-επαγωγή, διασώζονται από τον Πάππο στη *Συναγωγή*. Η διπλή μέθοδος της αναδρομής-επαγωγής αριθμοποιήθηκε και εξελίχθηκε από τους Αραβες (Abu-Kamil, al-Karaji, al Samaw’al, ibn al-Haytham), οι οποίοι ασχολήθηκαν με αθροίσματα διαδοχικών δυνάμεων αριθμών, εισάγοντας ενδιαφέρουσες επαγωγικές αποδείξεις σε Προτάσεις με τις οποίες είχε ασχοληθεί ο Αρχιμήδης με μη επαγωγικό τρόπο. Στην ίδια γενική ατμόσφαιρα συνέβαλε ο Gerson, με την μελέτη των μεταθέσεων n στοιχείων, πάντοτε ακολουθώντας την διπλή διαδικασία αναδρομής-επαγωγής, και ο Ελληνικής καταγωγής Φραγκίσκος Μαυρόλυκος. Στο διάστημα αυτό βαθμιαία συντελέστηκε η συνένωση των, αρχικά χωριστών, αριθμοθεωρητικών αριθμών με τους διατακτικούς αριθμούς, γεγονός που οδήγησε στη αρχή της μαθηματικής επαγωγής από τον Pascal και από την θεμελίωση των φυσικών αριθμών με βάση τους διατακτικούς αριθμούς και την μαθηματική επαγωγή από τον Peano.

Κεφάλαια 1 μέχρι 8.

Ορισμός με αναδρομή και απόδειξη με μαθηματική επαγωγή
στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά μέχρι τον Ευκλείδη

Κεφάλαιο 1.

Οι Πυθαγόρειες απαρχές του ορισμού με πεπερασμένη αναδρομή και απόδειξης με πεπερασμένη επαγωγή στις Προτάσεις 7.1, 7.2, και 10.3 των Στοιχείων

Εξετάζοντας τα Αριθμητικά βιβλία των Στοιχείων, ήδη, στις αρχικές Προτάσεις 7.1 και 7.2, καθώς και στην 10.3 που είναι η αντίστοιχη της 7.2 για μεγέθη, συναντάμε μία πρώιμη μορφή επαγωγής. Την ίδια μορφή επαγωγής συναντάμε και στην 7.31, στην οποία επιπλέον εφαρμόζεται με εξαιρετική σαφήνεια η αρχή Ελαχίστου. Στις προτάσεις αυτές, Πυθαγόρειας προέλευσης, διακρίνουμε με σαφήνεια τις δίδυμες απαρχές του ορισμού με αναδρομή και της απόδειξης με μαθηματική επαγωγή. Τόσο ο ορισμός με αναδρομή, όσο και η απόδειξη με μαθηματική επαγωγή πραγματοποιούνται στο πλαίσιο της ανθυφαίρεσης δύο αριθμών, και άρα έχουν πεπερασμένο μήκος το οποίο καθορίζεται από το μήκος της ανθυφαίρεσης.

Πρόταση 7.1

Δύο αριθμών άνισων εκκειμένων, ανθυφαιρουμένου δὲ αὐτοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρήῃ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς, οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσσονται.

Απόδειξη:

Δύο γὰρ [άνισων] ἀριθμῶν τῶν AB, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου αὐτοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρεῖται τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ λειφθῇ μονάς· λέγω, ὅτι οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, τουτέστιν ὅτι τοὺς AB, ΓΔ μονὰς μόνη μετρεῖ.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμὸς. μετρεῖται, καὶ ἔστω ὁ Ε· καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν BZ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΗ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ τὸν ΖΘ μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν BZ μετρεῖ καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν BZ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΖ μετρήσει. ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΗ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΔΗ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΗ μετρήσει.

ὁ δὲ ΓΗ τὸν ΖΘ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΘ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν ΑΘ μονάδα μετρήσει ἀριθμὸς ὢν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμὸς· οἱ AB, ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Παρατηρούμε ότι η απόδειξη της πρότασης βασίζεται:

α) στον αναδρομικό ορισμό της πεπερασμένης ακολουθίας ανθυφαιρετικών υπολοίπων:

[Σημείωση: Κατασκευή της πεπερασμένης αναδρομικής ακολουθίας

$\alpha > \beta > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n$

των ανθυφαιρετικών υπολοίπων της ανθυφαίρεσης **δύο αριθμών** α, β , με $\alpha > \beta$.
 Δοθέντων δύο αριθμών α, β , με $\alpha > \beta$, ορίζεται **αναδρομικά** μια πεπερασμένη ακολουθία αριθμών, από την διαδικασία της ανθυφαίρεσης των α, β , ως εξής:
 $\gamma_1 = \alpha - \kappa_1 \beta$, όπου κ_1 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός κ , ώστε $\alpha \geq \kappa \beta$,
 $\gamma_2 = \beta - \kappa_2 \gamma_1$, όπου κ_2 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός κ , ώστε $\beta \geq \kappa \gamma_1$.
 Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, υπάρχει γ_n ώστε $\gamma_{n-1} = \kappa_{n+1} \gamma_n$,
 [διότι **κάθε γνήσια φθίνουσα ακολουθία αριθμών** είναι πεπερασμένη.]

Τον αναδρομικό αυτό ορισμό συναντάμε τόσο στην διατύπωση της πρότασης (στίχοι 1-2) όσο φυσικά και στην απόδειξη (στίχοι 6-7 και 14-17).

Έτσι, σύμφωνα με την απόδειξη, αν $AB > \Gamma\Delta$ δύο αριθμοί όχι πρώτοι μεταξύ τους, τότε υπάρχει αριθμός $E \neq 1$ ο οποίος είναι κοινό μέτρο των $AB, \Gamma\Delta$
 και μία μοναδική πεπερασμένη ακολουθία αριθμών $AB > \Gamma\Delta > ZA > H\Gamma > \Theta A = 1$ ώστε:
 $AB = BZ [= \kappa_1 \cdot \Gamma\Delta] + ZA$, $ZA < \Gamma\Delta$
 $\Gamma\Delta = \Delta H [= \kappa_2 \cdot ZA] + H\Gamma$, $H\Gamma < AZ$
 $ZA = Z\Theta [= \kappa_3 \cdot H\Gamma] + \Theta A$, $1 = \Theta A < H\Gamma$

β) στην μαθηματική επαγωγή πεπερασμένου μήκους (στίχοι 12-13 και 18-27):

η ιδιότητα του αριθμού E

ως μέτρο των αρχικών αριθμών αριθμών $AB, \Gamma\Delta$ (στίχοι 12-13) [1^ο βήμα]

μεταδίδεται από το αρχικό ζεύγος $AB, \Gamma\Delta$,

στο δεύτερο ζεύγος $\Gamma\Delta, AZ$, (στίχοι 18-20) [2^ο βήμα]

με χρήση του αναδρομικού ορισμού, και με τον ίδιο τρόπο από αυτό

στο τρίτο ζεύγος $AZ, H\Gamma$ (στίχοι 20-22) και από αυτό [3^ο βήμα]

στο τέταρτο ζεύγος $H\Gamma, \Theta A$ (στίχοι 22-24). [4^ο βήμα]

Βλέπουμε λοιπόν, ότι η Πρόταση 7.1 αποδεικνύεται με μαθηματική επαγωγή πεπερασμένου μήκους, η οποία βασίζεται στον αναδρομικό ορισμό της πεπερασμένης ακολουθίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων [1-2, 6-7, 14-17].

Η επαγωγή αποτελείται από ένα αρχικό βήμα [12-13] και από την **μετάδοση** της προς απόδειξη ιδιότητας από το πρώτο όρο της αναδρομικής ακολουθίας στο δεύτερο από το δεύτερο στο τρίτο, ..., μέχρι τον τελευταίο όρο [18-17].

Τέλος, το 'αει', στίχοι 2, 6, σημαίνει επαναληπτικότητα, εδώ μόνο πεπερασμένη.

γ) στην εις άτοπο απαγωγή [στίχοι 12 (υπόθεση της εις άτοπον απόδειξης) – 25 (συμπέρασμα της εις άτοπον απόδειξης)].

Πρόταση 7.2

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὐρεῖν.

Απόδειξη:

Ἐστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ $AB, \Gamma\Delta$. δεῖ δὴ τῶν $AB, \Gamma\Delta$ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὐρεῖν.

Εἰ μὲν οὖν ὁ $\Gamma\Delta$ τὸν AB μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν, ὁ $\Gamma\Delta$ ἄρα τῶν $\Gamma\Delta, AB$ κοινὸν μέτρον ἐστίν. καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον· οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ $\Gamma\Delta$ τὸν $\Gamma\Delta$ μετρήσει.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ $\Gamma\Delta$ τὸν AB , τῶν $AB, \Gamma\Delta$ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος λειφθήσεται τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. μονὰς μὲν γὰρ οὐ

λειφθήσεται· εἰ δὲ μή, ἔσονται οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. λειφθήσεταιί τις ἄρα ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν BE μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν EA, ὁ δὲ EA τὸν ΔΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖτω. ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ, καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. ὁ δὲ ΓΔ τὸν BE μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν BE μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ μετρεῖ. ὁ ΓΖ ἄρα τῶν AB, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον. εἰ γὰρ μή ἐστὶν ὁ ΓΖ τῶν AB, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Η. καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν BE μετρεῖ, καὶ ὁ Η ἄρα τὸν BE μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΕ μετρήσει. ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσει ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς AB, ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ ΓΖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν AB, ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον· [ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Ανάλυση της Πρότασης:

Στην διατύπωση της Πρότασης έχουμε:

Στίχος 1:

Υπόθεση Πρότασης: «Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρῶτων πρὸς ἀλλήλους»

Στίχος 2:

Κατασκευὴ -Συμπέρασμα Πρότασης: «τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν»

Στην ἀπόδειξη της Πρότασης έχουμε:

Στίχοι 3-4:

Υπόθεση Πρότασης: «Ἐστῶσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ AB, ΓΔ.»

Στίχοι 4-5:

Κατασκευὴ-Συμπέρασμα Πρότασης: «δεῖ δὴ τῶν AB, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.»

Στίχοι 6-9:

Απόδειξη της Πρότασης στην τετριμμένη περίπτωση μέσω αναδρομικοῦ ορισμοῦ πεπερασμένου μήκους: «Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν AB μετρεῖ, ... , Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν AB»

Στίχοι 10-16:

Αναδρομικὸς ορισμὸς πεπερασμένου μήκους:

«τῶν AB, ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος

λειφθήσεταιί τις ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ.

μονὰς μὲν γὰρ οὐ λειφθήσεται· εἰ δὲ μή,

ἔσονται οἱ AB, ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους·

ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

λειφθήσεταιί τις ἄρα ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ.»

[Στίχοι 17-20:

Αναδρομικὸς ορισμὸς πεπερασμένης ἀκολουθίας ἀνθυφαιρετικῶν υπολοίπων της ἀνθυφαίρεσης τῶν ἀριθμῶν AB, ΓΔ: $[AB > ΓΔ > ΕΑ > ΖΓ]$

«καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΒΕ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ»
 $[BA=BE=[\kappa_1\Gamma\Delta]+EA, EA<\Gamma\Delta]$
 «ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΖ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΓ»
 $[\Delta\Gamma=\Delta Z=[\kappa_2 EA]+Z\Gamma, Z\Gamma<EA]$
 «ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖτω.»
 $[AE=\kappa_3\Gamma Z]$

Ισχυρισμός 1.: Ο ΓΖ είναι κοινό μέτρο των ΑΒ, ΓΔ

Στίχοι 20-25:

Απόδειξη Ισχυρισμού 1 με πεπερασμένη μαθηματική επαγωγή ('προς τα επάνω').

- **πρώτο βήμα επαγωγής: ο ΓΖ μετρά τον ΑΕ]**

ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ,

- **δεύτερο βήμα επαγωγής: το γεγονός ότι ο ΓΖ μετρά τον ΑΕ μεταδίδεται, με χρήση του πρώτου βήματος και του αναδρομικού ορισμού, στο γεγονός ότι ο ΓΖ μετρά τον ΓΔ**

«ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ,

καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει·

μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν·

καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει.»

- **τρίτο και τελευταῖο βήμα επαγωγής: το γεγονός ότι ο ΓΖ μετρά τον ΓΔ μεταδίδεται, με χρήση του δεύτερου βήματος και του αναδρομικού ορισμού, στο γεγονός ότι ο ΓΖ μετρά τον ΑΒ**

«ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ·

μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ·

καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ μετρήσει·

μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ·

ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ, ΓΔ μετρεῖ.

ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν.»

Ισχυρισμός 2.: Ο ΓΖ είναι κοινό το μέγιστο μέτρο των ΑΒ, ΓΔ

«λέγω δὴ, ὅτι καὶ μέγιστον.»

Στίχοι 27-37:

Απόδειξη Ισχυρισμού 2 με εἰς άτοπον και πεπερασμένη μαθηματική επαγωγή ('προς τα κάτω').

- **Αρχικό βήμα της επαγωγικής απόδειξης:**

η εἰς άτοπον υπόθεση ότι Η είναι κοινό μέτρο των ΑΒ, ΓΔ, και $H>\Gamma Z$

«εἰ γὰρ μὴ ἐστὶν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ, ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον,

μετρήσει τις τοὺς ΑΒ, ΓΔ ἀριθμοὺς

ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ.

μετρεῖτω, καὶ ἔστω ὁ Η.»

- **Δεύτερο βήμα της επαγωγικής απόδειξης, η μετάδοση του γεγονότος ότι το H είναι κοινό μέτρο από τα $AB, \Gamma\Delta$ στο AE , με χρήση του πρώτου βήματος και του αναδρομικού ορισμού**

«καὶ ἐπεὶ ὁ H τὸν $\Gamma\Delta$ μετρεῖ, ὁ δὲ $\Gamma\Delta$ τὸν BE μετρεῖ, καὶ ὁ H ἄρα τὸν BE μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν BA · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν AE μετρήσει.

- **Τρίτο και τελευταίο βήμα της επαγωγικής απόδειξης, η μετάδοση του γεγονότος ότι το H είναι κοινό μέτρο από το AE στο ΓZ , με χρήση του δεύτερου βήματος και του αναδρομικού ορισμού**

«ὁ δὲ AE τὸν ΔZ μετρεῖ· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔZ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν $\Delta\Gamma$ · καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓZ μετρήσει»

- **Τελικό βήμα της απόδειξης του Ισχυρισμού 2 – κατάληξη εις άτοπον**

«ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς $AB, \Gamma\Delta$ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ ΓZ · ὁ ΓZ ἄρα τῶν $AB, \Gamma\Delta$ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον·»

[ὅπερ ἔδει δεῖξαι].

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση, παρατηρούμε ότι η απόδειξη της πρότασης βασίζεται:

1. Στον αναδρομικό ορισμό της ακολουθίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων δύο αριθμών α, β .

2. Στην αρχή Ελαχίστου για την απόδειξη ότι η ακολουθία των ανθυφαιρετικών υπολοίπων είναι πεπερασμένη (εντός της απόδειξης του Ισχυρισμού 1).

Η αρχή Ελαχίστου χρησιμοποιείται εδώ αναμφισβήτητα αλλά χωρίς ιδιαίτερη αναφορά, κάτι το οποίο όμως, όπως θα δούμε, συμβαίνει στην Πρόταση 7.31.

Η αρχή Ελαχίστου είναι μαθηματικά ισοδύναμη με την άπειρη μαθηματική επαγωγή. Υπό αυτή την έννοια η 7.2 χρησιμοποιεί την πλήρη επαγωγή, χωρίς βέβαια να μπορούμε να πούμε ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί γνώριζαν αυτή την ισοδυναμία. Πιθανόν χρησιμοποιούσαν αυτήν την αρχή διαισθητικά.

3.

3.1.: Απόδειξη με πεπερασμένη επαγωγή ότι το τελευταίο υπόλοιπο είναι διαιρέτης των αρχικών αριθμών, δηλαδή:

Ισχυρισμός 1. Ο γ_n είναι κοινό μέτρο των α, β

Απόδειξη. Με πεπερασμένη επαγωγή (‘προς τα επάνω’).

Αρχικό βήμα: Ο γ_n μετρά τον γ_{n-1} .

Δεύτερο βήμα: Από το πρώτο βήμα και τον αναδρομικό ορισμό, έπεται ότι ο γ_n μετρά τον γ_{n-2} . Με το βήμα αυτό το γεγονός ότι το γ_n είναι μέτρο **μεταδίδεται** από το

γ_{n-1} στο γ_{n-2} .

Μετά από πεπερασμένο αριθμό επαγωγικών βημάτων, αποδεικνύεται ότι

ο γ_n μετρά τον β και τον α .

3.2.: Απόδειξη με πεπερασμένη επαγωγή ότι αυτός ο διαιρέτης (το τελευταίο υπόλοιπο) των αρχικών αριθμών είναι ο μέγιστος, δηλαδή:

Ισχυρισμός 2. Ο γ_n διαιρεί κάθε κοινό μέτρο των α , β , και άρα ο γ_n είναι το μέγιστο κοινό μέτρο των α , β .

Απόδειξη. Με πεπερασμένη επαγωγή ('προς τα κάτω').

Αρχικό βήμα: Εστω ότι γ είναι ένα κοινό μέτρο των α , β .

Δεύτερο βήμα: Από το πρώτο βήμα και τον αναδρομικό ορισμό, έπεται ότι ο γ διαιρεί τον γ_1 . Με το βήμα αυτό **το γεγονός** ότι ο γ είναι μέτρο **μεταδίδεται** από τα α , β , στο γ_1 .

Μετά από πεπερασμένο αριθμό επαγωγικών βημάτων, αποδεικνύεται ότι ο γ μετρά τον γ_n .

Την Πρόταση 7.31 δεν θα την παρακολουθήσουμε τόσο αναλυτικά κι αυτό γιατί πλέον, μετά τις δύο προηγούμενες προτάσεις, κάτι τέτοιο θα ήταν περιττό. Παρόλα αυτά, για να αποσαφηνιστεί πλήρως ότι ειπώθηκε παραπάνω στο (2), θα την παραθέσουμε και θα δούμε τα κρίσιμα σημεία της.

Πρόταση 7.31

"Απας σύνθετος αριθμός υπό πρώτου τινός αριθμού μετρείται.

Απόδειξη:

"Εστω σύνθετος αριθμός ο A . λέγω, ότι ο A υπό πρώτου τινός αριθμού μετρείται.

"Επει γάρ σύνθετός ἐστιν ὁ A , μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ B . καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ B , γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ . καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ, ὁ δὲ B τὸν A μετρεῖ, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν A μετρεῖ. καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ , γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. τοιαύτης δὴ γινομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεται τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει. εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν A ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοί, ὧν ἕτερος ἐτέρου ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς. ληφθήσεται τις ἄρα πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν A μετρήσει.

"Απας ἄρα σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινός ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διαπιστώνουμε ότι και σε αυτήν την απόδειξη ισχύουν όσα ειπώθηκαν για την 7.2 με εξαίρεση ασφαλώς του τελευταίου (πεπερασμένη επαγωγή 'προς κάτω').

Έχουμε:

1. Αναδρομικό ορισμό φθίνουσας πεπερασμένης ακολουθίας διαιρετών ενός σύνθετου αριθμού α .

[$A > B > \Gamma > \Delta > \dots > \Pi$, όπου Π ο μόνος πρώτος αριθμός στην ακολουθία]

Στίχοι 5-7:

«'Επει γάρ σύνθετός ἐστιν ὁ A , μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ B .»

[Επειδὴ A σύνθετος ὑπάρχει ἀριθμὸς $B < A$: ο B διαιρεῖ τὸν A]

Στίχοι 8-9:

«εἰ δὲ σύνθετος [α B], μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ .»

[Επειδὴ B σύνθετος ὑπάρχει ἀριθμὸς $\Gamma < B$: ο Γ διαιρεῖ τὸν B]

Στίχος 12:

«εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός.»

[Επειδὴ Γ σύνθετος ὑπάρχει ἀριθμός $\Delta < \Gamma$: ο Δ διαιρεῖ τον Γ]

Στίχοι 13-14:

«τοιαύτης δὴ γινομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεται τις πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει.»

[Ἡ διαδικασία αὐτὴ συνεχίζεται ἕως ὅτου ληφθεῖ πρῶτος ἀριθμός καὶ σε ἐκεῖνο το βήμα τερματίζει]

2. Τὴν ἀρχὴν Ἐλαχίστου γιὰ τὴν ἀπόδειξη ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν διαιρετῶν ἐνὸς σύνθετου ἀριθμοῦ a εἶναι πεπερασμένη.

Στίχοι 14-16:

«εἰ γὰρ οὐ ληφθήσεται, μετρήσουσι τὸν A ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοί, ὧν ἕτερος ἑτέρου ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς.»

[Ἀν δὲν ληφθεῖ σε κάποιο βήμα πρῶτος ἀριθμός που νὰ διαιρεῖ τον A , τότε θὰ μετρούν τον A ἄπειροι ἀριθμοὶ καθένας ἀπὸ τοὺς ὁποῖους εἶναι μικρότερος ἀπὸ αὐτὸν που «παράχθηκε» στο προηγούμενο βήμα, ἀτοπον]

3. Ἀπόδειξη με πεπερασμένη ἐπαγωγή (‘πρὸς τὰ πάνω’) ὅτι ὁ πρῶτος ἀριθμός στὸν ὁποῖο καταλήγει ἡ ἀκολουθία διαιρετῶν διαιρεῖ τὸν ἀρχικὸ ἀριθμὸ A .

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἀκριβῶς ἴδια με τοῦ Ἰσχυρισμοῦ 1, ἀρα δὲν χρειάζονται περαιτέρω λεπτομέρειες.

Στίχοι 9-11:

«καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν B μετρεῖ, ὁ δὲ B τὸν A μετρεῖ, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν A μετρεῖ.»

Στίχοι 16-18:

«ληφθήσεται τις ἄρα πρῶτος ἀριθμός, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν A μετρήσει.»

Τέλος, αναφορικά μόνο νὰ πούμε ὅτι καὶ στὴν Πρόταση 10.3, που εἶναι ἀνάλογη τῆς 7.2 γιὰ σύμμετρα μεγέθη, ἀκολουθεῖται ἡ ἴδια ἀποδεικτικὴ τεχνική.

Κεφάλαιο 2.

Ορισμός με (πεπερασμένη, αλλά απεριόριστα επεκτάσιμη) αναδρομή και απόδειξη με (πεπερασμένη, αλλά απεριόριστα επεκτάσιμη) επαγωγή στις Προτάσεις IX 8 και IX 9 των Στοιχείων

Συνεχίζοντας με τα Στοιχεία, στις Προτάσεις 9.8 και 9.9, όπου μελετώνται οι ιδιότητες των όρων μιας πεπερασμένης ακολουθίας αριθμών σε **συνεχή αναλογία** με πρώτο όρο την μονάδα 1 και δεύτερο όρο τον αριθμό A, διακρίνουμε και πάλι ορισμό με αναδρομή και η συναφή απόδειξη με επαγωγή. Οι διαδικασίες είναι και εδώ πεπερασμένες, όπως και στις Προτάσεις 7,1 & 7.2. όμως διαφέρουν από εκείνες κατά το ότι, αντίθετα με την κατάσταση στις Προτάσεις 7.1 & 7.2, εδώ, στις Προτάσεις 9.8 & 9.9 οι ακολουθίες είναι απεριόριστα επεκτάσιμες

[πρβλ.

‘Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἐξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσιν’ (9.9,1-2),
‘Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, Δ, E, Z’ (9.,6-7),

‘Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ [ἐξῆς] ἀνάλογον ᾧσιν’ (9,10,1-2),

‘Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, Δ, E, Z’ (9,10,8-9)],

και ἄρα μποροῦν να θεωρηθοῦν ως ἓνα βῆμα προς τον ορισμό με ἀπειρη αναδρομή και απόδειξη με ἀπειρη επαγωγή.

Ὅμως αὐτὸ το βῆμα δεν πραγματοποιεῖται στα **Στοιχεία**, ὅπως και η ευθεία γραμμή, εἶναι μεν απεριόριστα επεκτάσιμη, αλλά πάντοτε πεπερασμένη.

Πριν περάσουμε στις προτάσεις, να σημειώσουμε ὅτι η ἔννοια της συνεχούς αναλογίας $1:A=A:B=B:\Gamma=\dots=X:\Psi$ εἶναι το αριθμητικὸ ἀνάλογο της αναλογίας που εμφανίζεται στην ανθυφαίρεση διαμέτρου προς πλευρά (μετά το πρώτο βῆμα) και στην ανθυφαίρεση μέσου και ἄκρου λόγου (‘χρυσή τομή’), ἄρα μπορεί να θεωρηθεῖ ὅτι ἔχει ανθυφαιρετική προέλευση.

2.1. Πρόταση IX 8 και IX 9

‘Εὰν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνος ἔσται **καὶ οἱ ἓνα διαλείποντες**, ὁ δὲ τέταρτος κύβος **καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες**, ὁ δὲ ἑβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος **καὶ οἱ πέντε διαλείποντες**.

Απόδειξη.

Ἐστωσαν ἀπὸ μονάδος ὅποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ A, B, Γ, Δ, E, Z· λέγω, ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ B τετράγωνος ἔστι καὶ οἱ ἓνα διαλείποντες **πάντες**, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες **πάντες**, ὁ δὲ ἑβδομος ὁ Z κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες **πάντες**.

Ἐπεὶ γάρ ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν A, οὕτως ὁ A πρὸς τὸν B, ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν A ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ A τὸν B. ἡ δὲ μονὰς τὸν A ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ A ἄρα τὸν B μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ A μονάδας. ὁ A ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν B πεποίηκεν· **τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ B.**

καὶ ἐπεὶ οἱ B, Γ, Δ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ B τετράγωνος ἐστὶν, καὶ ὁ Δ ἄρα **τετράγωνός ἐστιν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Z τετράγωνός ἐστιν.**

ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες τετράγωνοί εἰσιν.
 λέγω δὴ, ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ἰσάκεις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ. ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ.
 καὶ ἐπεὶ οἱ Γ, Δ, Ε, Ζ ἐξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος ἐστίν, καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ ἄρα ἔβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. **ομοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι τέ εἰσι καὶ τετράγωνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.**

Θα εστιάσουμε στην απόδειξη του πρώτου μέρους της πρότασης, η οποία βασίζεται:
 α) στον αναδρομικό ορισμό της πεπερασμένης (αλλά επεκτάσιμης) ακολουθίας αριθμών σε **συνεχή αναλογία** με πρώτο ὄρο την μονάδα 1 και δεύτερο ὄρο τον αριθμό Α:

[Η υπόθεση ότι οι αριθμοί 1, Α, Β, Γ, Δ, ... ευρίσκονται σε συνεχή αναλογία συνεπάγεται ότι οι αριθμοί αυτοί ορίζονται ἑμμεσα με **αναδρομικό** τρόπο:
 οι αρχικοί ορισμοί είναι

$\chi_1=1, \chi_2=A$, και

$\chi_{v-1}:\chi_v=\chi_v:\chi_{v+1}$, ισοδύναμα (7.19) $\chi_{v+1}\cdot\chi_{v-1}=\chi_v^2$,

σε αυτή τη μορφή αναδρομικού ορισμού ο γενικός ὄρος ορίζεται ἀπὸ τους δύο προηγούμενους και ὄχι μόνο ἀπὸ τον ἀμέσως προηγούμενο.]

Τον αναδρομικό αυτό ορισμό συναντάμε, ὡπως και προηγουμένως, τόσο στην διατύπωση της πρότασης, στίχοι 1-2, ὅσο φυσικά και στην απόδειξη, στίχοι 6-9, 15-17, 21-22 και ἑμμεσα στον 23.

Έτσι, σύμφωνα με την απόδειξη, ἔχουμε τους αριθμούς 1, Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ σε συνεχή αναλογία, δηλαδή: $1:A=A:B=B:\Gamma=\Gamma:\Delta=\Delta:E=E:Z$.

γ) στην μαθηματική επαγωγή πεπερασμένου αλλά επεκτάσιμου μήκους, στίχοι 17-21 και 22-25:

στίχοι 17-21: αποτελούν το αρχικό βήμα της επαγωγικής απόδειξης, δηλαδή ότι:
 ο Β είναι τετράγωνος αριθμός.

[$1:A=A:B$, ἄρα, ἀπὸ 7.19, ο $B=A^2$ είναι τετράγωνος αριθμός.]

στίχοι 21- 23: το δεύτερο βήμα, είναι το βασικό επαγωγικό βήμα απόδειξης:

ο Δ είναι τετράγωνος αριθμός.

[Μετάδοσης της ιδιότητος τετραγώνου ἀπὸ τον ὄρο Β στον ὄρο Δ, βάση

- του αρχικού βήματος ότι ο Β είναι τετράγωνος αριθμός,

- της υπόθεσης συνεχούς αναλογίας $B:\Gamma=\Gamma:\Delta$, δηλαδή βάσει του αναδρομικού ορισμού της ακολουθίας, και

- της Πρότασης 8.22.]

στίχοι 23- 24: το τρίτο βήμα της επαγωγικής απόδειξης:

ο Ζ είναι τετράγωνος αριθμός.

[Μετάδοση της ιδιότητος τετραγώνου ἀπὸ τον ὄρο Δ στον ὄρο Ζ, βάση

- του προηγούμενου βήματος ότι δηλαδή ο Δ είναι τετράγωνος αριθμός,
- της υπόθεσης συνεχούς αναλογίας $\Delta:E=E:Z$, και
- της Πρότασης 8.22.]

στίχοι 24- 25: γενίκευση της ιδιότητας για κάθε όρο της ακολουθίας που αφήνει έναν εκτός, ξεκινώντας πάντα από τον B.

Είναι λογικό από την μέχρι τώρα διαδικασία να θεωρήσουμε ότι η γενίκευση της μετάδοσης της ιδιότητας του τετραγώνου από τον όρο Σ στον $\Sigma+2$, γίνεται βάσει των υποθέσεων $\Sigma:\Sigma+1=\Sigma+1:\Sigma+2$, Σ τετράγωνος και 8.22.

Είναι σαφές ότι ο Ευκλείδης δεν έχει καμία αμφιβολία ότι έχει δώσει μια απολύτως έγκυρη απόδειξη. Άλλωστε ο ίδιος ο Ευκλείδης, στις πρώτες γραμμές της απόδειξης της αμέσως επόμενης πρότασης, γράφει:

«Ἐστῶσαν ἀπὸ μονάδος ἐξῆς ἀνάλογον ὅσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ οἱ $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ A τετράγωνος ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ B τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται.».

Η ίδια τεχνική εφαρμόζεται και στο δεύτερο μέρος της Πρότασης 9.8. με την διαφορά ότι σε αυτό το επαγωγικό βήμα γίνεται με βάση την VIII 23, καθώς και στην Πρόταση 9.9, γι' αυτό και παρατίθεται στη συνέχεια χωρίς απόδειξη.

Πρόταση IX 9:

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὅποιοι οὖν ἐξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ᾧσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα τετράγωνος ᾗ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾗ, καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.).

2.2. Τα επιχειρήματα του Unguru κατά της παρουσίας μαθηματικής επαγωγής στην Πρόταση IX 8 και IX 9

Κατά τον Unguru (1991) μελετητές, όπως ο Freudenthal, που αναγνωρίζουν αυτή την απόδειξη ως επαγωγική, στηρίζονται σε μία απαράδεκτη μετάφραση του ρητορικού Ευκλείδη σε συμβολική γλώσσα, ενώ είναι ξεκάθαρο ότι

«*First, it is clear that Euclid **did not, and could not, rely** on the axiom of mathematical induction which was not yet invented and formulated.*» (σελ. 276).

Επίσης

«*Second ... **not** only is there no reliance in IX.8 on the axiom of complete induction, **but**, and this is the crucial consideration, Euclid's grasp of what he is engaged in the demonstration of the claim contained in the enunciation of IX.8 seems to me to furnish evidence that his understanding of his procedure is mathematically non-inductive. Otherwise it is impossible to comprehend his explicit statement, which repeated twice, in connection with squares and cubes, that "Similarly we can prove that **all those which leave out one are square**" and "Similarly we can prove that **all the numbers which leave out five are also both cube and square**"*» (σελ. 278)

Με άλλα λόγια ο Ευκλείδης **δεν** φαίνεται να αναγνωρίζει ότι έχει δώσει μία απόδειξη που καλύπτει όλους τους αριθμούς που αφήνουν εκτός ένα και όλους τους αριθμούς που αφήνουν εκτός πέντε, **αλλά** μάλλον ότι έδειξε πως η πρόταση μπορεί να αποδειχθεί για οποιοδήποτε συλλογή ('assemblage') αριθμών σε συνεχή αναλογία.

Καταλήγοντας, το συμπέρασμα του συγγραφέα είναι

«... the proof in the Elements being a token, an example for any future proofs. And this, to my way of thinking, is **not** an instance of a proof by mathematical induction, a method that does **not** stand in need of reinforcement and supplementation by an indefinite number of proofs with identical conceptual structure. Mathematical induction, the substance of which consist in the inference from n to $n+1$, is **not** a faulty method of proof. **On the contrary**, it is flawless. Its conclusion are **not** illustrations or token **and**, as is well known, they are valid» (σελ. 278)

Ότι αναφέρθηκε για την IX 8 ισχύει, όπως γράφει ο συγγραφέας, «*mutatis mutandis*» και για την IX 9.

2.3. Κριτική στο επιχείρημα του Unguru για την απόδειξη της Πρότασης IX 9

Κατ' αρχήν ο Unguru δεν αντιλαμβάνεται ότι η υπόθεση της **συνεχούς αναλογίας** ['Έστωσαν από μονάδος **όποσοιὸν ἀριθμοὶ ἐξῆς ἀνάλογον οἱ $A, B, Γ, Δ, E, Z$** '] δημιουργεί έναν **αναδρομικό ορισμό** για την ακολουθία, και επομένως, όπως και στην περίπτωση του αναδρομικού ορισμού των πλευρικών-διαμετρικών αριθμών, που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, είναι ένα πρόσφορο πεδίο για την εφαρμογή της μεθόδου της **μαθηματικής επαγωγής**.

Η κριτική του Unguru φαίνεται να είναι ότι ο Ευκλείδης στην πρόταση 9.8 αποδεικνύει το συμπέρασμα για κάθε **πεπερασμένη** συλλογή αριθμών σε συνεχή αναλογία και όχι για την άπειρη ακολουθία, επί της οποίας πρέπει να εφαρμόζεται η αρχή της επαγωγής. Αυτό όντως ισχύει και πράγματι η απόδειξη του Ευκλείδη αφορά σε πεπερασμένη αλλά αυθαίρετα μεγάλη ακολουθία αριθμών σε συνεχή αναλογία. Αλλά η δομή της απόδειξης της Πρότασης 9.8 είναι επαγωγική, ακριβώς η ίδια με την δομή της απόδειξης με περασμένη επαγωγή των Πρόταση 7.2 ή 7.31.

Και στις δύο περιπτώσεις η απόδειξη βασίζεται σε ένα αναδρομικό ορισμό.

Και στις δύο περιπτώσεις η προς απόδειξη ιδιότητα

- ισχύει για **ένα αρχικό βήμα** και

- ακολουθώντας η **μετάδοση της ιδιότητας** (εδώ του ότι είναι τετράγωνος) από το κάθε βήμα στο επόμενο γίνεται με την βοήθεια του αναδρομικού ορισμού και κάποιας συγκεκριμένης, και πάντα της ίδιας, μαθηματικής Πρότασης.

Διαφέρει ωστόσο από αυτές κατά το ότι είναι κατά μοναδικό τρόπο απεριόριστα επεκτάσιμη.

Όλες όμως οι ακολουθίες αριθμών σε συνεχή αναλογία με πρώτο όρο την μονάδα και δεύτερο όρο τον A αποτελούν η μία μοναδική προέκταση της άλλης, επομένως το επαγωγικό επιχείρημα απλώς σταματάει εκεί που τελειώνει η συγκεκριμένη ακολουθία αλλά συνεχίζεται σε μια άλλη μακρότερη.

Μπορεί έτσι να θεωρηθεί ως γέφυρα μεταξύ της πεπερασμένης επαγωγής και της άπειρης.

Η διαφορά είναι ανάλογη των διαφορών της Ευκλείδειας (πεπερασμένης) ευθείας, της Ευκλείδειας (δυνάμει) άπειρης ευθείας, και της (ενεργεία άπειρης) ευθείας κατά Hilbert, καθώς η Ευκλείδεια άπειρη ευθεία και η κατά Hilbert άπειρη ευθεία αποτελούν μοναδική προέκταση της Ευκλείδειας πεπερασμένης ευθείας.

Κεφάλαιο 3.

Το θεωρητικό επιχείρημα του Unguru κατά της δυνατότητας απόδειξης με μαθηματική επαγωγή από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς

Το 1991 ο S. Unguru στο άρθρο του *Greek Mathematics and Mathematical Induction* τάσσεται σθεναρά υπέρ της ιστορικής αδυναμίας ύπαρξης αποδείξεων στο σχήμα της μαθηματικής επαγωγής, εντός του σώματος των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών.

Ο Unguru στοιχειοθετεί τους ισχυρισμούς του έχοντας ως βασικά στηρίγματα, τον ορισμό της Μαθηματικής Επαγωγής, αναφορές σε Αρχαία Ελληνικά κείμενα, εκτενείς παραπομπές σε σχετικά χωρία από το *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* του J. Klein (1968), καθώς και μία-δύο παραπομπές στους L. Wittgenstein και W.C. Booth.

Ο ορισμός της Πλήρους Επαγωγής ή Μαθηματικής Επαγωγής που χρησιμοποιεί ο Unguru στην μελέτη του, αν και δεν τον χαρακτηρίζει ως ορισμό αλλά ως την ουσία της, αναφέρεται στη σελίδα 274 και είναι ο εξής:

If $P(1)$ and

$P(n) \rightarrow P(n + 1)$ for all n are both true (valid)

then : $P(n)$ is true (valid) for all n .

Οι πρωτότυπες πηγές τις οποίες επικαλείται ο Unguru, είναι:

1. Αρχικά, ασφαλώς τα παραδείγματα που εξετάζει, τα οποία είναι:

- το απόσπασμα Αναλυτικά Ύστερα 73b32 του Αριστοτέλη,
- οι Προτάσεις IX 8, IX 9 και IX 20 των Στοιχείων του Ευκλείδη, καθώς επίσης

κι οι προτάσεις VII 20, VII 31, VIII 22, VIII 23 οι οποίες σχετίζονται με τις προς μελέτη προτάσεις IX 8, IX 9 και IX 20,

- τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς των Πυθαγορείων και
- ένα σχόλιο του Συμπλίκιου στα Φυσικά του Αριστοτέλη.

2. Ορισμός VII 2 των Στοιχείων:

«Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος».

3. Αριστοτέλους *Μεταφυσικά*

1020a13:

«πλῆθος τὸ πεπερασμένον»

(τούτων δὲ πλῆθος μὲν τὸ πεπερασμένον ἀριθμὸς μῆκος δέ...).

1057a2-5:

«τὸ δὲ πλῆθος οἷον γένος ἐστὶ τοῦ ἀριθμοῦ· ἔστι γὰρ ἀριθμὸς πλῆθος ἐνὶ μετρητόν, καὶ ἀντίκειται πῶς τὸ ἐν καὶ ἀριθμός, οὐχ ὡς ἐναντίον ἀλλ' ὥσπερ εἴρηται τῶν πρὸς τι ἕνια· ἢ γὰρ μέτρον τὸ δὲ μετρητόν, ταύτῃ ἀντίκειται».

4. Αλεξάνδρου *Αφροδισίεως*

Σχόλια εἰς τὰ Μεταφυσικά του Αριστοτέλη p.86, 5-6 «πᾶς γὰρ ἀριθμὸς τινὸς ἐστὶ».

Όσον αφορά τώρα, τα αποσπάσματα του *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra* (J. Klein, 1968) στα οποία παραπέμπει ο Unguru είναι ξεκάθαρο, ακόμα κι όταν δεν αναφέρει το συγκεκριμένο εγχειρίδιο, ότι οι αντιλήψεις σχετικά με την έννοια του αριθμού, τη γενικότητα της απόδειξης και τη γενικότητα του αντικειμένου στα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά καθώς και τις διαφορές μεταξύ Αρχαίων Ελληνικών και

σύγχρονων μαθηματικών οι οποίες προβάλλονται στο άρθρο και λειτουργούν ως το θεωρητικό στήριγμα του Unguru πηγάζουν, πιθανόν εξ' ολοκλήρου, και ταυτίζονται με την οπτική του J. Klein.

Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο στην πρώτη παράγραφο αυτού του κεφαλαίου θα ασχοληθούμε με τη συγκεκριμένη οπτική.

3.1. Η έννοια του αριθμού στα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά κατά τον Jacob Klein

Αν και θεωρούμε ότι τόσο η θέση του J. Klein όσο και το βιβλίο του *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, αναφορικά με τα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά, είναι γνωστή, τουλάχιστον σε εκείνους που ασχολούνται με την Ιστορία των Μαθηματικών, παραθέτουμε ενδεικτικά μερικά αποσπάσματα από αυτό, λόγω του ότι η θέση αυτή, όπως ήδη αναφέρθηκε, αποτελεί κατ' ουσία το θεωρητικό υπόβαθρο μέσω του οποίου «τεκμηριώνεται» η αδυναμία ανακάλυψης της αποδεικτικής μεθόδου της Μαθηματικής επαγωγής στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά. Θεωρούμε ότι είναι απαραίτητο για τον αναγνώστη να έχει μια ικανοποιητική εικόνα αυτής της οπτικής, ώστε να μπορεί να παρακολουθήσει τα επιχειρήματα του Unguru αλλά και να καταλήξει στα δικά του συμπεράσματα.

Αναφορικά, με την έννοια του αριθμού στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά, μπορούμε να πούμε ότι συμπυκνώνεται στις παρακάτω δηλώσεις:

«The fundamental phenomenon which we should never lose sight of in determining the meaning of arithmos is counting, or more exactly, the counting-off, of some number of things. These things, however different they may be, are taken as uniform when counted;... Thus the arithmos indicates in each case a definite number of definite things. It proclaims that there are precisely so and so many of these things. It intends the things insofar as they are present in this number, and cannot, at least at first, be separated from the things at all.» (σελ. 46)

«This fact cannot be adequately described by speaking of “concrete” or “specified” as opposed to “abstract” or “unspecified” numbers. For even a “pure” number, i.e., a number of “pure” units, is no less “concrete” or “specified” than a number of apples. What distinguishes such a number is in both cases its twofold determinateness: it is, first of all, a number of objects determined in such and such a way, and it is, secondly, an indication that there are just so and so many of these objects. Nor can it be said of such a number that it is “the comprehensive unity of a multiplicity.”» (σελ. 46)

«The “unit” as such is no arithmos, a fact which seems strange only if we presuppose the notion of the “natural number series.” The smallest number of things or units is: two things or units. The unit itself is, of course, still smaller than the smallest number. It is just because this is the case that it has the character of a “beginning” or “source” such as makes something of the nature of “counting” originally possible.» (σελ. 48)

«The “scientific” arithmetician and logistician deals with numbers of pure monads. And, as we have seen, Plato stresses emphatically that there is “no mean difference” between these and the ordinary numbers. It would indeed seem strange if there should be numbers of — nothing. How will he who is involved in “natural” counting and calculating become aware of these monads which are in no way to be touched or seen? Only a careful consideration of the fact that it is really necessary to suppose that there

are numbers different from the ordinary kind, if the possibility and the successful execution of counts and calculations are to be understood, forces us into the further supposition that there must indeed be a special “nonsensual” material to which these numbers refer.» (σελ. 49)

«**Thus an unlimited field of “pure” units presents itself to the view of the “scientific” arithmetician and logistician.** The particular multitudes which may be chosen from this field are precisely those “pure” numbers (of units) with which he deals. This is how the traditional “classical” definitions of arithmos are to be understood; **“A number is a finite multitude [of units]”, “limited multitude” “the multitude composed of units” furthermore: “a set [composed] of units”**» (σελ. 49)

Τέλος, σχετικά με τις θεμελιώδεις διαφορές μεταξύ αρχαίων Ελληνικών και σύγχρονων Μαθηματικών, ο Klein σημειώνει:

«**Greek scientific arithmetic and logistic are founded on a “natural” attitude to everything countable as we meet it in daily life.** This closeness to its “natural” basis is never betrayed in ancient science. It follows that, strictly speaking, **it is not possible to call arithmoi “numbers.”**» (σελ. 59)

«On the other hand, the ancient mode of thinking and conceiving is, after all, not totally “strange” or closed to us. **Rather, the relation of our concepts to those of the ancients is oddly “ruptured”** — our approach to an understanding of the world is rooted in the achievements of Greek science, but it has **broken loose** from the presuppositions which determined the Greek development.

... Our science, the “new” science whose foundations were laid in the sixteenth and seventeenth century, is very differently circumstanced. **Here the “natural” foundations are replaced by a science already in existence, whose principles are denied, whose methods are rejected, whose “knowledge” is mocked** — but whose place within human life as a whole is placed beyond all doubt.» (σελ. 99 - 100)

«The most characteristic expression of the above connection is to be found in the **symbolic formalism and calculational techniques of modern mathematics.** We shall see it displayed in all that follows. In particular, this intimate relation between the mode of **generalization employed by the new science** and its “art” character has determined the modern interpretation of ancient mathematics.» (σελ. 102)

«The **problem of the “general” applicability of a method** is therefore for the ancients the **problem of the “generality”** (of the mathematical objects themselves, and this problem they can solve only **on the basis of an ontology of mathematical objects.** In contrast to this, modern mathematics, and thereby also the modern interpretation of ancient mathematics, **turns its attention first and last to method as such. It determines its objects by reflecting on the way in which these objects become accessible through a general method.** Thus, arguing from the “generality” of the linear presentation in Euclid’s “arithmetical” books, namely from the fact that with their aid all arithmoi, in all their possible relations to one another, can be grasped, its proponents reach the conclusion that this “generality” of presentation is intent upon **“general magnitude.”** Now what is characteristic of this “general magnitude” is its **indeterminateness**, of which, as such, **a concept can be formed only within the realm of symbolic procedure.**» (σελ. 103)

*«But the **Euclidean presentation is not symbolic**. It always intends determinate numbers of units of measurement, and it does this without any detour through a “general notion” or a concept of a “general magnitude.” In illustrating each determinate number of units of measurement by measures of distance it does not do two things which constitute the heart of the symbolic procedure: It does not identify the object represented with the means of its representation, and it does not replace the real determinateness of an object with a possibility of making it determinate, such as would be expressed by a sign which, instead of illustrating a determinate object, would signify possible determinacy.» (σελ. 103)*

3.2. Το βασικό θεωρητικό επιχείρημα του Unguru κατά της δυνατότητας ύπαρξης μαθηματικής επαγωγής στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά και η κριτική του

Ο βασικός ανασταλτικός φραγμός κατά τον Unguru για την επινόηση της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, έγκειται στην οντολογία της **έννοιας του αριθμού**, εκείνη την χρονική περίοδο στην εν λόγω γεωγραφική περιοχή, η οποία, για τον συγγραφέα, είναι εκείνη που απορρέει από την οπτική του Klein που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Περίληπτικά, σύμφωνα με το άρθρο, **ο αριθμός για τους Έλληνες είναι πάντα καθορισμένος, περιορισμένος. Είναι ένα πεπερασμένο πλήθος συγκεκριμένων ‘πραγμάτων’, είναι μια πεπερασμένη συλλογή από μονάδες**. Η έννοια του αριθμού στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά δεν απαλλάσσεται ποτέ από την διττή αυτή περατότητά της. Έναντι αυτού, ο σύγχρονος αριθμός είναι απόγονος μιας αφαίρεσης, της γέννησης των συμβόλων. Είναι το σύμβολο ενός αόριστου πλήθους, είναι η έννοια των γενικών μεγεθών.

Επιπλέον η έννοια ‘όλου του συνόλου των φυσικών αριθμών’, εννοώντας το σύνολο των φυσικών όπως ορίζεται κατά τον 19ο αιώνα στο αξιωματικό σύστημα του Peano, είναι ξένη στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά.

Το επιχείρημα του Unguru (1991), ουσιαστικά συνοψίζεται στα επόμενα τρία καίρια αποσπάσματα του άρθρου του:

[1] *«If $P(1)$ and $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ for all n are both true (valid) then $P(n)$ is true (valid) for all n .» (σελ. 274)*

[2] *«Mathematical induction, the substance of which consists in the inference from n to $n+1$ » (σελ. 278)*

[3] *«The fact that a number is always determinate in Greek mathematics prevents it from playing the role of independent variable in any numerical expression. Greek number is always a function of the units of measurement, it is always a ‘number of’. For a genuine, not a potential, proof by induction, a ‘pure’, ‘unadulterated’, indeterminate, general, abstract number is needed and not a ‘number of’. In other words, without a number that can serve as an independent variable, it is impossible to formulate a true proof by mathematical induction, in which the claim requiring proof is a function of the natural numbers.» (σελ. 284)*

Στο [1] η $P(n)$ συμβολίζει μια πρόταση P στη γλώσσα της θεωρίας αριθμών με μεταβλητή n στο σύνολο των φυσικών αριθμών, και η ουσία της μαθηματικής επαγωγής, κατά το [2], συνίσταται στην συνεπαγωγή ‘αν $P(n)$, τότε $P(n+1)$ ’.

Εφόσον η διατύπωση της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής προϋποθέτει μια πρόταση $P(n)$ με μεταβλητή τον φυσικό αριθμό n , και εφόσον ο Unguru αναπτύσσει επιχειρήματα, τα οποία κορυφώνονται στο [3], σύμφωνα με τα οποία, στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά η έννοια του φυσικού αριθμού καθιστά αδύνατη την ύπαρξη και λειτουργία αυτού ως ‘παραμέτρου, ανεξάρτητης μεταβλητής, αγνώστου’ καθώς και της ύπαρξης του συνόλου των φυσικών αριθμών με την σύγχρονη μορφή του, ως εκ τούτου, θα ήταν αδύνατον να διατυπωθεί η αποδεικτική μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής, πόσο μάλλον να εφαρμοσθεί σε συγκεκριμένες μαθηματικές αποδείξεις.

Ο **Mueller (1981)**, δέκα χρόνια νωρίτερα, έχει διατυπώσει μια προσεκτική εκτίμηση για την μαθηματική επαγωγή στα Στοιχεία του Ευκλείδη, η οποία κατ’ ουσίαν εμπεριέχει μια τεκμηριωμένη απάντηση στο θεωρητικό επιχείρημα του Unguru. Σε ένα βαθμό ο Mueller δέχεται τη συλλογιστική του Unguru, όταν γράφει:

«[. . .] numbers are not characterized as generated from units in a serial order. They are simply finite aggregates of units. (paraphrase of Elem. VII def. 2: ‘Αριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος)’ Of course, there are important relations between these aggregates, but the relation of successor is not one which plays an important role in the Elements. Thus it can be said that the integers themselves are not conceived in the structural way conducive to the use of induction,»

αλλά συνεχίζοντας δηλώνει

«but that there is inductive reasoning about collections or sequences of positive integers. This difference might be compared to the difference in formal theories between the use of induction in the object language and its use in the metalanguage»,

(Mueller, 1981, σελ. 69).

καθώς επίσης

«where Euclid proceeds in this quasi-inductive way, the implicit induction is on the number of terms involved in a construction or assertion and not on the integers themselves».

(Mueller, 1981, σελ. 69).

Όπως παρατηρεί ο Acerbi (2000),

«In this way, Mueller denies that Euclides could consciously use the principle of CI, but does not assert that could be impossible for him to present proofs in the scheme of CI. In fact, not even this latter case does occur in the Elements»,

(Acerbi, 2000, σελ. 62)

και συνοψίζοντας γράφει

« the conception of number we may extract from the ancient mathematical corpus seems to rule out the possibility that a principle of CI could be used. Indeed, the latter is never attested, not even in a rudimentary stage. Proofs in the scheme of CI, working on the number of terms involved in a statement and not on the integers as such –even proofs such that the steps from A to D above outlined are verbalized and formalized in a way which is coherent with what we think to be the ontology underlying “ancient Greek mathematics” – seem to be well within the range of possibilities.»

(Acerbi, 2000, σελ.64)

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι οι Mueller και Acerbi συμφωνούν εν πολλοίς με την ανάλυση του Unguru, για τον τρόπο με τον οποίο οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί θεωρούσαν τους

φυσικούς αριθμούς και ότι ο τρόπος αυτός δεν ήταν κατάλληλος για την εφαρμογή της αποδεικτικής μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής, γι' αυτό οδήγησε σε αδυναμία διατύπωσης της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, μιας αρχής που αναφέρεται στους φυσικούς αριθμούς και έχει ενσωματωθεί, στα σύγχρονα μαθηματικά, στα αξιώματα του Peano.

Όμως για τους Mueller και Acerbi, σε αντίθεση με τον Unguru, αυτή η θεώρηση των φυσικών αριθμών δεν απέτρεψε τους αρχαίους από το να χρησιμοποιήσουν την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής σε σύνολα ή ακολουθίες φυσικών αριθμών ή τον αριθμό των όρων σε μια πρόταση. Ισχυρισμός ο οποίος διαπιστώνεται αρχικά από τον Mueller⁸ και επισημαίνει δύο δεκαετίες αργότερα και ο Acerbi⁹.

Παρόλα αυτά, η διαφοροποίηση μεταξύ της αρχής της μαθηματικής επαγωγής, η οποία εφαρμόζεται στο σύνολο των φυσικών αριθμών, και σε περιπτώσεις μαθηματικής επαγωγής, στις οποίες εφαρμόζεται 'σε σύνολα ή ακολουθίες φυσικών αριθμών' ή 'στον αριθμό των όρων σε μια πρόταση' δεν είναι σαφής, καθώς δεν είναι σαφές τι ακριβώς εννοείται με 'σύνολα ή ακολουθίες φυσικών αριθμών' ή με 'αριθμό των όρων' σε μια πρόταση.

Οι Mueller και Acerbi ασφαλώς εννοούν ότι οι αρχαίοι δεν είχαν στην διάθεσή τους την **γενική αρχή** της μαθηματικής επαγωγής, αλλά χρησιμοποιούσαν την μέθοδο σε **ειδικές περιπτώσεις**, σε ειδικές ακολουθίες αριθμών και όχι σε όλες, διαφορετικά θα μπορούσαν, για παράδειγμα, να την χρησιμοποιήσουν και για την ακολουθία των φυσικών αριθμών.

Όμως, ποιές είναι αυτές οι ακολουθίες αριθμών; Ποιά είναι τα σύνολα στα οποία εφαρμόζαν την μαθηματική επαγωγή; Προέκυπταν μέσω κάποιας συγκεκριμένης διαδικασίας; Παρατηρείται κάποια κανονικότητα;

Όσον αφορά το ποιές ακριβώς είναι αυτές οι περιπτώσεις, αν εξαιρέσουμε τα παραδείγματα που αναφέρουν¹⁰, οι συγγραφείς δεν μας κατατοπίζουν περαιτέρω. Μας αφήνουν δε χωρίς καμία πληροφορία σχετικά με το πώς προέκυπταν αυτές οι περιπτώσεις.

Όπως ήδη αναφέραμε θεωρούμε ότι η εκτίμηση του Mueller για την μαθηματική επαγωγή στα Στοιχεία, παρόλο που προηγείται, απαντά ικανοποιητικά στο θεωρητικό επιχείρημα του Unguru και πολύ σωστά η θέση αυτή επαναφέρεται από τον Acerbi. Στην συνέχεια θα απαντήσουμε στα ερωτήματα που τέθηκαν παραπάνω και θα αρθρώσουμε την δική μας θέση η οποία, αν και σε κάποια σημεία συγκλίνει με εκείνη των Mueller και Acerbi, διαφοροποιείται επί της ουσίας.

⁸ 'there is inductive reasoning about collections or sequences of positive integers' (σελ. 69)

⁹ 'Proofs in the scheme of CI [=Complete Induction], working on the number of terms involved in a statement' (σελ. 64)

¹⁰ 'On the other hand, there are other proofs in the arithmetic books which do suggest a conception of the idea of induction. For sometimes Euclid proves separate propositions for the cases $n = 2$ and $n = 3$, carrying out the second by a reduction to the first in a way which could be repeated for « $n = 4$, $n = 5$, and so on. For example, having shown how to find the greatest common measure (GCD) of two numbers in VII,2, he shows in VII,3 that the GCD of three numbers k_1, k_2, k_3 is $\text{GCD}(\text{GCD}(k_1, k_2), k_3)$. It would seem perverse to deny Euclid's intention is to convey a general result, especially in the light of his later use of the procedure for finding the GCD in a proposition formulated for arbitrarily many numbers (VII,33).'

(Mueller, 1981, σελ. 69),

'I suggest to regard a Platonic passage, i.e. *Parmenides* 149a7-c3, as a full-fledged example of proof by CI.' (Acerbi, 2000, σελ.58)

Κεφάλαιο 4.

Ορισμός με άπειρη αναδρομή στην Πρόταση X 2 και στους πλευρικούς διαμετρικούς αριθμούς-Αποδόμηση του θεωρητικού επιχειρήματος του Unguru.

Στο παρών κεφάλαιο θα επιχειρηθεί μια πιο προσεκτική περιγραφή του τρόπου με τον οποίο προκύπτει η μαθηματική επαγωγή στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά. Η δική μας θέση είναι ότι η έννοια-κλειδί γι' αυτή την ανακάλυψη είναι ο ορισμός μιας **αναδρομικής ακολουθίας** ($\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$) και, βάση της μελέτης μας, η αποδεικτική μέθοδος της μαθηματικής επαγωγής εφαρμόζεται στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά σε τέτοιου τύπου ακολουθίες. Η έννοια της αναδρομικής ακολουθίας εμφανίζεται στα αρχαία Μαθηματικά, όπως θα γίνει σαφές στις δύο επόμενες παραγράφους, όπου παρατίθενται τέτοιου είδους ακολουθίες.

4.1. Ορισμός της άπειρης αναδρομικής ακολουθίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων $\alpha > \beta > \gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_n > \dots$

της ανθυφαίρεσης δύο μεγεθών α προς β στην Πρόταση X 2 των Στοιχείων.

Δοθέντων δύο μεγεθών α, β , με $\alpha > \beta$ ¹¹, ορίζεται **αναδρομικά** μια ακολουθία μεγεθών, από την διαδικασία της ανθυφαίρεσης των α, β , ως εξής:

$\gamma_1 = \alpha - \kappa_1 \beta$, όπου κ_1 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός κ , ώστε $\alpha \geq \kappa \beta$,

$\gamma_2 = \beta - \kappa_2 \gamma_1$, όπου κ_2 είναι ο μεγαλύτερος αριθμός κ , ώστε $\beta \geq \kappa \gamma_1$.

...

$\gamma_{n+1} = \gamma_{n-1} - \kappa_{n+1} \gamma_n$, όπου κ_n είναι ο μεγαλύτερος αριθμός κ , ώστε $\gamma_{n-1} \geq \kappa_n \gamma_n$.

...

Η αναδρομική οριζόμενη ακολουθία (γ_n) μπορεί να είναι πεπερασμένη, όπως είδαμε στην Πρόταση X 3 αν τα α, β σύμμετρα, ή άπειρη, σύμφωνα με την X 2 αν τα α, β ασύμμετρα.

Η ύπαρξη και ο ορισμός της άπειρης αναδρομικής ακολουθίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων δύο ασύμμετρων μεγεθών περιέχεται στην Πρόταση X 2, στην απόδειξη της οποίας σημειώτων εφαρμόζεται και πάλι πεπερασμένη μαθηματική επαγωγή 'προς τα πάνω'.

Πρόταση X 2

Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Απόδειξη:

¹¹ Υποθέτουμε ότι η ακολουθία είναι τέτοια ώστε αποδεικνύεται ότι ισχύει η συνθήκη όρος 5.4 του Ευδόξου

Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῶν AB, ΓΔ καὶ ἐλάσσονος τοῦ AB ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρεῖται τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ AB, ΓΔ μεγέθη. Εἰ γὰρ ἐστὶ σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρεῖται, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ E· καὶ τὸ μὲν AB τὸ ΖΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο **ἀεὶ** γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὃ ἐστὶν ἔλασσον τοῦ E. γεγονέντω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ E. ἐπεὶ οὖν τὸ E τὸ AB μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ AB τὸ ΔΖ μετρεῖ, καὶ τὸ E ἄρα τὸ ΖΔ μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ E ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ AB· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μείζον τὸ ἔλασσον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ AB, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ AB, ΓΔ μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων, καὶ τὰ ἐξῆς.

Συμπεραίνουμε λοιπὸν ὅτι ἡ διαδικασία εὗρεσης των ανθυφαιρετικών υπολοίπων δύο ἀνίσων ἀσύμμετρων μεγεθῶν α, β εἶναι χωρὶς πέρας, δηλαδή ἡ αναδρομικὴ ἀκολουθία των ανθυφαιρετικών υπολοίπων εἶναι ἀπειρη.

4.2. Ορισμός της ἀπειρης αναδρομικῆς ἀκολουθίας των πλευρικών-διαμετρικών ἀριθμῶν (Θέων, Ιάμβλιχος, Πρόκλος)

Ορισμός. *Οι πλευρικοί p_n καὶ διαμετρικοί q_n ἀριθμοί, εἶναι μια διπλὴ ἀκολουθία (p_n, q_n) φυσικῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία ορίζεται ὡς ἐξῆς:*

Για κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ n ,

$p_1 = 1, q_1 = 1$ καὶ,

$p_{n+1} = p_n + q_n, q_{n+1} = 2p_n + q_n$

Οι πλευρικοί καὶ διαμετρικοί ἀριθμοί ἦταν ἤδη γνωστοί στον Πλάτωνα, καὶ ὑπάρχει σαφὴς ἀναφορά στην *Πολιτεία* 546b-c, ὅπου γίνεται λόγος γιὰ τον Γεωμετρικὸ ἀριθμὸ. Αναφέρονται ἐπίσης ἀπὸ τους σχολιαστὲς Θέων ο Σμυρνεύς, Ιάμβλιχος καὶ Πρόκλος¹². Ἀποδίδονται στὴν Πυθαγόρεια Μαθηματικὴ παράδοση καὶ μποροῦν νὰ χρησιμεύσουν

¹² **Θέων 43,7-12**

‘καὶ τῆς διαμέτρου καὶ τῆς πλευρᾶς λόγος ἐν τῇ μονάδι εὐρίσκεται. οἷον ἐκτίθενται δύο μονάδες, ὧν τὴν μὲν θῶμεν εἶναι διάμετρον, τὴν δὲ πλευράν, ἐπειδὴ τὴν μονάδα, πάντων οὖσαν ἀρχὴν, δεῖ δυνάμει καὶ πλευρὰν εἶναι καὶ διάμετρον. καὶ προστίθεται τῇ μὲν πλευρᾷ διάμετρος, τῇ δὲ διαμέτρῳ δύο πλευραί’

Ιάμβλιχος, εἰς Αριθμητὴν Νικομάχου 91,21-92,2

‘δεῖ δὴ πάλιν ἀπὸ μονάδος τὴν γένεσιν τοῦ πλευρικοῦ καὶ διαμετρικοῦ λόγου μεθοδεῦσαι, ἐπειδὴ πάντων τῶν ἐν ἀριθμοῖς λόγων ἔφαμεν αὐτὴν ἀφηγεῖσθαι. ὀνομάσαι γὰρ δεῖ δύο μονάδας τὴν μὲν πλευρὰν τὴν δὲ διάμετρον, καὶ χρῆσασθαι καθολικαῖς τισὶ προσθέσεσι καὶ ἀεὶ ταῖς αὐταῖς, τῇ μὲν πλευρᾷ διάμετρον προστιθέντας τῇ δὲ διαμέτρῳ δύο πλευράς’

Πρόκλος, εἰς Πολιτεῖαν 2,24,18-22

‘ἐπεὶ γὰρ ἡ μονὰς πάντα ἐστὶν σπερματικῶς, δηλὸν, φασίν, ὅτι καὶ πλευρά ἐστὶν καὶ διάμετρος. ἔστων οὖν δύο μονάδες, ἡ μὲν ὡς πλευρὰ [ἢ δ] ὡς διάμετρος, καὶ προσκείσθω τῇ μὲν ὡς πλευρᾷ μία διάμετρος, τῇ δὲ ὡς διαμέτρῳ πλευραὶ δύο

για την επίτευξη διαρκώς καλύτερων ρητών προσεγγίσεων του άρρητου λόγου της διαγωνίου προς την πλευρά ενός τετραγώνου.

Πληροφορικά να αναφέρουμε, σε αυτό το σημείο ότι έχει γίνει πολύς λόγος σχετικά με τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς και την μαθηματική επαγωγή. Ενδεικτικά παραθέτουμε τα παρακάτω αποσπάσματα:

«Zusammenfassend kann man sagen, dass auch Euklid einige Beispiele vollstandiger induktion auftreten, die sogar weniger elementarsind als bei Maurolico, dass aber von systematischer Anwendung oder gar formulierung des Prinzips keine Rede sein kann.»
(Freudenthal, 1953, σελ. 30)

«Mathematical induction is implicit in some of Euclid's proofs, for example, in the proof that there exist infinitely many primes.»
(Ernest, 1982, σελ. 120)

«... One could not wish for a more lucid and succinct description of what we now call the principle of descent than this last sentence.»
(Fowler, 1994, σελ. 262)

«In these Greek and Hindu writings the recurrent process is used for finding one solution from another solution, rather than to show the generality of some particular formula or theorem. It is easy to see how some slight change in the mode of presentation or in the point of view would yield the modern mathematical induction. [...] The recurrent modes of inference of the Hindus and Greeks are more nearly the modern process of mathematical induction than is the mode of inference used by Fermât.»
(Cajori, 1909, σελ. 409)

«Das ist nun ein Induktionsbeweis optimae formae – wie gesagt das schönste Beispiel bis zum 19. Jahrhundert. Natürlich spielt sich alles (in unserer Bezeichnungweise) quasi-allgemein ad.»
(Freudenthal, 1953, σελ. 31)

Ωστόσο, να επισημάνουμε ότι οι παραπάνω συγγραφείς δεν τεκμηριώνουν τους ισχυρισμούς τους. Εμείς θα συμφωνήσουμε ως προς το ότι οι πλευρικοί και διαμετρικοί αποτελούν ένα εξαιρετικό επαγωγικό παράδειγμα της αρχαιότητας αλλά θα επανέλθουμε σε αυτούς στο επόμενο κεφάλαιο για να στοιχειοθετήσουμε πλήρως αυτή την πρόταση.

4.3. Κριτική του θεωρητικού επιχειρήματος Unguru στο Κεφάλαιο 3

Στα σύγχρονα Μαθηματικά μια αναδρομική ακολουθία είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών, των υποδεικτών στο σύγχρονο συμβολισμό. Αλλά για τους αρχαίους η αναδρομική ακολουθία αντιστοιχούσε περισσότερο σε **στάδια μιας διαδικασίας**, στο πρώτο, δεύτερο, τρίτο, κ.ο.κ. στάδιο, και αυτό το πρώτο, δεύτερο, τρίτο, κ.ο.κ. δεν είχε σχέση με την αριθμοθεωρητική έννοια του αριθμού ένα, δύο, τρία, κ.ο.κ.. Οι αριθμοί αυτοί δεν δηλώνουν πλήθος μονάδων και δεν αναφέρονται ούτε σε αισθητά 'πράγματα' ούτε σε νοητά. Δηλαδή δεν ταυτίζονται με τους αριθμούς της θεωρίας αριθμών, για παράδειγμα των βιβλίων VII-IX των *Στοιχείων* (δεν ορίζονται πράξεις μεταξύ αυτών των αριθμών, δεν δηλώνουν μήκος, εμβαδόν κ.τ.λ.), δηλώνουν απλώς στάδιο, βήμα, θέση, σειρά. Έτσι δεν έχουν την έννοια του αριθμού που προτείνουν οι Klein και Unguru αλλά έχουν την **διατακτική έννοια του αριθμού**.

Σε αντίθεση με την αρχαία αριθμοθεωρητική έννοια του αριθμού, η διατακτική έννοια του αριθμού ήταν πρόσφορη στον ορισμό μιας αναδρομικής ακολουθίας και στην απόδειξη ιδιοτήτων με επαγωγή επί της συγκεκριμένης αναδρομικής ακολουθίας. Για τους αρχαίους μια ακολουθία ($\chi_1, \chi_2, \chi_3, \dots$) έχει ως δείκτες αριθμούς με τη διατακτική, και όχι αριθμοθεωρητική, έννοια, και αυτή η ακολουθία ορίζεται **αναδρομικά** αν η χ_2 προκύπτει από την χ_1 με κάποιο κανόνα, η χ_3 προκύπτει από την χ_2 με τον ίδιο κανόνα, κ.ο.κ., επ' άπειρον, αν και όχι κατ' ανάγκη. Είναι σαφές ότι το θεωρητικό επιχείρημα του Unguru για τη φύση των αριθμοθεωρητικών αριθμών δεν έχει καμία εφαρμογή και επίπτωση στην αρχαία αναδρομική ακολουθία η οποία ορίζεται επί των διατακτικών αριθμών. Είναι σαφές ότι οι υποδείκτες που χρησιμοποιούμε σήμερα για να περιγράψουμε αυτή την ακολουθία ταυτίζονται με τους φυσικούς αριθμούς αλλά στην αρχαιότητα δεν έχουν σχέση με την έννοια του αριθμού ως πλήθος μονάδων. Αντίθετα η διατακτική έννοια του αριθμού σχετίζεται με τα στάδια μιας μαθηματικής διαδικασίας και έχει έτσι την έννοια της μεταβλητής, η οποία απαιτείται για την μαθηματική επαγωγή.

Το ερώτημα είναι πώς προέκυψαν στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά αναδρομικοί ορισμοί ακολουθιών;

Ο βασικός ορισμός μιας αναδρομικής ακολουθίας είναι ο ορισμός της ακολουθίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων (γ_n) της άπειρης ανθυφαίρεσης δύο (ασυμμέτρων) μεγεθών α και β , και δίδεται στην Πρόταση Χ.2 των Στοιχείων. Τα υπόλοιπα γ_n προκύπτουν από τις σχέσεις $\alpha = \kappa_1\beta + \gamma_1$, $\gamma_1 < \beta$, $\beta = \kappa_2\gamma_1 + \gamma_2$, $\gamma_2 < \gamma_1$, κ.ο.κ., επ' άπειρον. Η ακολουθία αυτή μεγεθών είναι η φυσική γενίκευση της πεπερασμένης ακολουθίας αριθμών των υπολοίπων μιας ανθυφαίρεσης δύο αριθμών, την οποία εξετάσαμε στο 1^ο κεφάλαιο. Ένας άλλος σημαντικός ορισμός αναδρομικής ακολουθίας είναι η διπλή ακολουθία των πλευρικών και διαμετρικών αριθμών, η οποία περιγράφεται από τον Πλάτωνα, Θεώνα Σμυρναίο, Ιάμβλιχο και Πρόκλο. Βέβαια και αυτός ο αναδρομικός ορισμός **έχει προέλευση την ανθυφαιρετική** διαδικασία της διαμέτρου προς πλευρά τετραγώνου. Η ύπαρξη αναδρομικών ορισμών αυτού του είδους δεν σημαίνει αυτόματα ότι αυτές οι ακολουθίες θα χρησιμοποιηθούν για αποδείξεις με μαθηματική επαγωγή. Αλλά είναι βέβαιο ότι η ύπαρξή τους ήδη σημαίνει ότι ο διατακτικός αριθμός χρησιμοποιείται ως μεταβλητή, και αυτή η χρήση των διατακτικών αριθμών αποδομεί, επί της ουσίας, το θεωρητικό επιχείρημα του Unguru (1991).

Η σύγχρονη θεμελίωση των αριθμών κατά Peano κατ' ουσίαν περιγράφει διατακτικούς αριθμούς, και γι' αυτό είναι πρόσφορη για την διατύπωση της αρχής της πλήρους, άπειρης επαγωγής. Από τα αξιώματα του Peano, με κατάλληλους ορισμούς εισάγεται η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός αριθμών, και έτσι οι αρχικά μόνο διατακτικοί αριθμοί μετατρέπονται και σε αριθμοθεωρητικούς, και κατάλληλους για την θεωρία αριθμών των βιβλίων 7-9 των Στοιχείων. Στα αρχαία όμως Μαθηματικά οι διατακτικοί αριθμοί δεν ταυτίστηκαν ποτέ με τους αριθμοθεωρητικούς, με αποτέλεσμα οι αριθμοθεωρητικοί αριθμοί να μην αποτελούν πρόσφορο έδαφος για την ανάπτυξη της μαθηματικής επαγωγής.

Είναι σαφές λοιπόν, ότι υπάρχει ένα σοβαρό πρόβλημα με το θεωρητικό επιχείρημα του Unguru, το οποίο εξ όσων γνωρίζουμε δεν έχει επισημανθεί. Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί είχαν την δυνατότητα, όπως έγινε φανερό στις δύο προηγούμενες παραγράφους, να προβαίνουν σε αναδρομικούς ορισμούς. Για παράδειγμα, μία

περίπτωση, και όχι η μόνη όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, καθαρού αναδρομικού ορισμού είναι ο ορισμός των πλευρικών διαμετρικών αριθμών, όπως παραδέχεται και αναφέρει και ο Unguru.¹³

Είναι σαφές ότι ο ορισμός που δίδεται από τους Θέωνα, Ιάμβλιχο, και Πρόκλο, αν και δεν έχουν τον σύγχρονο συμβολισμό για να τον εκφράσουν, είναι εν τούτοις **αναδρομικός**, έχει δηλαδή την εξής δομή:

- ορίζεται το πρώτο στοιχείο της (διπλής) ακολουθίας

$\Delta(1)$: $p_1=1$, $q_1=1$, και

- αν έχει ορισθεί το n -οστό στοιχείο της (διπλής) ακολουθίας

$\Delta(n)$: p_n , q_n ,

τότε ορίζεται και το $(n+1)$ -οστό στοιχείο της διπλής ακολουθίας

$\Delta(n+1)$: $p_{n+1}=p_n+q_n$, $q_{n+1}=2p_n+q_n$.

Όμως ο αναδρομικός ορισμός, ακριβώς όπως και η μαθηματική επαγωγή, προϋποθέτει μια πρόταση $\Delta(n)$ με μεταβλητή τον φυσικό αριθμό n , και το γεγονός ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί προχώρησαν σε ένα αναδρομικό ορισμό δείχνει ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί είχαν την δυνατότητα να σχηματίσουν λογική πρόταση, την Δ , με μεταβλητή n το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Συμπεραίνουμε έτσι ότι η ύπαρξη αναδρομικών ορισμών στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά αποδυναμώνει πλήρως το θεωρητικό επιχείρημα του Unguru κατά της δυνατότητας μαθηματικής επαγωγής στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά.

4.4. Παράρτημα.

Ο θεωρητικός ισχυρισμός του Unguru ότι οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δεν είχαν την έννοια της ολότητας των φυσικών αριθμών

Ένας επιπλέον ανασταλτικός παράγοντας κατά τον Unguru αποτελεί το ότι η έννοια “all natural numbers” είναι ξένη στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά.

«*Needless to emphasize that the concept of ‘all natural numbers’ is foreign to Greek mathematics.*» (σελ. 278).

Υπάρχουν όμως σαφή αντιπαραδείγματα σε αυτό τον ισχυρισμό του Unguru.

Ενδεικτικά τέτοια αντιπαραδείγματα αποτελούν τα παρακάτω:

Οι πλευρικοί διαμετρικοί αριθμοί d_n , p_n ορίζονται για κάθε φυσικό αριθμό n , και η βασική τους ιδιότητα $d_n^2=2p_n^2+1$ ισχύει, όπως είδαμε, για κάθε φυσικό αριθμό n (‘και αεί ούτως’).

Προτάσεις IX. 20, IX. 32 των στοιχείων.

Ο Πλάτων, όταν χρειασθεί και την απειρία του συνόλου των φυσικών αριθμών επικαλείται, και **διαμερίζει** το σύνολο των φυσικών αριθμών σε δύο μέρη.

Παρμενίδης 144a6

‘ἢ οὐκ ἄπειρος ἀριθμὸς πλήθει’

¹³ Unguru (1991, p.285) ‘side and diameter numbers are a series of numbers obtained from a certain **recursive** relation’; (p.287) ‘Actually, it is not at all difficult for us to see that the **recursive** relationship between s_n and d_n lends itself marvelously to be proved by induction.’

Θεαίτητος 147e5-148a4

‘ΘΕΑΙ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα

δίχα διελάβομεν·

τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίγνεσθαι

τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες

τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν.

ΣΩ. Καὶ εὖ γε.

ΘΕΑΙ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου,

ῶν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς

ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι,

ἀλλ’ ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίγνεται,

μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει,

τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

Ανώνυμα Σχόλια στον Πλατωνικό Θεαίτητο 37,44-38,13

‘πῶς οὖν ἐ[ῖ]πεν

τὸν ἀριθμὸν πάντα;

τοῦτο γὰρ ἤδη περιειληφότος ἐστὶν

τὸν σύμπαντα.

τοιοῦτο δὴ δεῖ ἐξακούειν, ὅτι,

ὃς ἂν ᾖ ἀριθμός, ἐκεῖνος

ἦτοι τετράγωνός ἐστιν

ἢ προμήκης.

ἐδύνατο μὲν οὖν

καὶ εἰς

ἄρτιον

καὶ περιττὸν

διελεῖν

καὶ

πρῶτον

καὶ σύνθετον,

ἀλλὰ ἐχρήσατο

τῷ τετραγώνῳ

καὶ προμήκει,

ἵνα ἐφαρμόσῃ τοῖς μεγέθεσιν.’

Κεφάλαιο 5.

Απόδειξη με άπειρη επαγωγή: Ρητές διάμετροι - Πλευρικοί και διαμετρικοί αριθμοί (Πλάτων, Θέων, Ιάμβλιχος, Πρόκλος)

Το γεγονός ότι το θεωρητικό υπόβαθρο Klein-Unguru κατά της ύπαρξης απόδειξης με μαθηματική επαγωγή στα ελληνικά Μαθηματικά έχει αποδομηθεί από την αναντίρρητη ύπαρξη άπειρων αναδρομικών ορισμών δεν συνεπάγεται βέβαια την ύπαρξη άπειρης μαθηματικής επαγωγής στα ελληνικά Μαθηματικά.

Ωστόσο η παρουσία άπειρης αναδρομής δημιουργεί εύλογα την προσδοκία ότι, κατ' αναλογία προς την πεπερασμένη αναδρομή, θα πρέπει να αναμένουμε και αποδείξεις με άπειρη μαθηματική επαγωγή στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε αν αυτή η προσδοκία δικαιώνεται μελετώντας προσεκτικά τους πλευρικούς και διαμετρικούς αριθμούς, μέσω των αρχαίων κειμένων που αναφέρονται σε αυτούς.

5.1.1. Ανακάλυψη πλευρικών διαμετρικών αριθμών και της Βασικής ιδιότητάς τους.

Ο Πρόκλος (εις *Πολιτείαν* 2,24,16-2,25,8) μας πληροφορεί για την ανακάλυψη των ρητών διαμετρικών πλευρικών αριθμών από τους Πυθαγορείους, καθώς και για το ότι παρατήρησαν ότι οι πρώτες τρεις ή τέσσερις ρητές διάμετροι ήταν εναλλάξ ή ελλείπουσες ή πλεονάζουσες κατά μια μονάδα κατά το τετράγωνο ($\delta^2 = 2\pi^2 \pm 1$) ως προς το διπλάσιο του τετραγώνου των αντίστοιχων πλευρικών αριθμών. Παρατήρησαν δηλαδή την βασική ιδιότητα των αριθμών αυτών. Συνεχίζοντας μας ενημερώνει ότι οι Πυθαγόρειοι αναζήτησαν, και τελικά βρήκαν, μέθοδο ώστε να την αποδείξουν.

Στη συνέχεια θα δούμε πως βρήκαν την μέθοδο και ποια ακριβώς είναι.

5.1.2. Η ιδέα των Πυθαγορείων για την απόδειξη της βασικής ιδιότητας με την μετατροπή της ρητής διαμέτρου σε όντως διάμετρο.

Η ιδέα τους για την εύρεση της απόδειξης, η οποία περιγράφεται με προσοχή και από τους τρεις Θέωνα, Ιάμβλιχο, Πρόκλο¹⁴, ήταν να καταστήσουν την ± 1 διάμετρο δ

¹⁴ Πρόκλος, εις *Πολιτείαν* 2,25,9-12

‘ἐὰν δὲ λάβωμεν **ἀπάσας** τὰς ἀπὸ τῶν τοιούτων διαμέτρων, ἔσονται **διπλάσιαι ὄντως**, ὧν ἐκάστη μονάδι μείζων ἢ ἐλάσσων διπλασίου· οἷον ἡ ἐννέα **μετὰ τοῦ** μθ' τῆς τοῦ κε' **καὶ δ'.**’ [2,25,12]

Θέων 44,18-45,8

αἱ δὲ διάμετροι τῶν πλευρῶν ἐναλλάξ παρὰ μίαν ποτὲ μὲν μονάδι μείζους ἢ διπλάσιαι δυνάμει, ποτὲ δὲ μονάδι ἐλάττους ἢ διπλάσιαι ὁμαλῶς·

πᾶσαι οὖν αἱ διάμετροι πασῶν τῶν πλευρῶν γενήσονται δυνάμει διπλάσιαι, τοῦ ἐναλλάξ πλείονος καὶ ἐλάττονος τῇ αὐτῇ μονάδι ἐν πάσαις ὁμαλῶς τιθεμένη ἰσότητα ποιούντος εἰς τὸ μήτε ἐλλείπειν μήτε ὑπερβάλλειν ἐν ἀπάσαις τὸ διπλάσιον· τὸ γὰρ τῇ προτέρᾳ διαμέτρῳ λείπον δυνάμει τῇ ἐφεξῆς ὑπερβάλλει.

Ιάμβλιχος, εις *Νικόμαχον* 92,23-93,6

ἀλλ' οὖν ἐπειδὴ ἐναλλάξ

πραγματική, **όντως διπλάσια** διάμετρο (δηλαδή να ισχύει η ισότητα χωρίς τον όρο ± 1), και ο τρόπος για να το πετύχουν ήταν με το να αθροίσουν το τετράγωνο δ^2 με το τετράγωνο δ'^2 της **αμέσως επόμενης** (στον αναδρομικό ορισμό) της ρητής διαμέτρου, οπότε προέκυπτε η ισότητα $\delta^2 + \delta'^2 = (2\pi^2 - 1) + (2\pi'^2 + 1) = 2(\pi^2 + \pi'^2)$, δηλαδή η ισότητα $\delta^2 + (\delta + 2\pi)^2 = 2(\pi^2 + (\delta + \pi)^2)$.

Εδώ έχουμε το πρώτο κρίσιμο σημείο: η ιδέα για την απόδειξη ήταν **να θεωρήσουν από κοινού δύο διαδοχικά ζεύγη πλευρικών και διαμετρικών αριθμών**.

Εξαιρετική αν όχι ριζοσπαστική σκέψη, για εκείνη την εποχή, η οποία αποτελεί την ουσία της επαγωγής: να θεωρήσουμε από κοινού δύο διαδοχικούς όρους και όχι κάθε έναν ανεξάρτητα.

Έτσι λοιπόν

5.1.3. 2,25,12-13

«διὸ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι ἐθάρρησαν τῇ μεθόδῳ.»

Οι Πυθαγόρειοι 'εθάρρησαν τη μεθόδω', απέκτησαν δηλαδή εμπιστοσύνη στο ότι αυτή η ιδέα τους, **να θεωρήσουν από κοινού δύο διαδοχικές σχέσεις πλευρικών διαμετρικών**, θα μπορούσε να τους οδηγήσει στην απόδειξη της βασικής ιδιότητας των ρητών διαμέτρων.

Στη συνέχεια αναπάντεχα το χωρίο στρέφεται στην Γεωμετρία.

5.2. Η παρεμβολή του γεωμετρικού γλαφυρού θεωρήματος

5.2.1. Το γλαφυρόν θεώρημα: η γεωμετρική μορφή του αναδρομικού ορισμού

Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* 2,27,11-16

‘Προετίθεσαν δὲ οἱ Πυθαγόρειοι **τούτου** [του θεωρήματος ἐπὶ τῶν ρητῶν διαμέτρων] **τοιόνδε** θεώρημα γλαφυρόν περὶ τῶν διαμέτρων καὶ πλευρῶν,

ποτὲ μὲν δυνάμει μείζους εἰσὶν ἢ διάμετροι διπλάσιαι πλευρῶν,
ποτὲ δὲ μονάδι ἐλάττους ἢ διπλάσιαι,
ἔσονται κατ' ἐπίνοιαν

πᾶσαι ὁμοῦ αἱ διάμετροι **πασῶν ὁμοῦ τῶν** πλευρῶν
δυνάμει διπλάσιαι·

ἀπίσῳσις γὰρ γίνεται τοῦ μείζονος τῷ ἐλάττονι ἀναμιγέντος,
διότι στάσις τοῦ ὑπερέχοντος πρὸς ὑπερεχόμενον **ἢ** **ισότης** ἐστὶ,
διόπερ κἀνταῦθα

τὸ μονάδι μείζον ἢ διπλάσιον προστεθὲν
τῷ μονάδι ἐλάττονι ἢ διπλασίῳ **ἀπισώσκει τὸ πᾶν**,
ὥστε ἀεὶ τὴν διάμετρον **δυνάμει διπλασίαν** εἶναι τῆς πλευρᾶς,
καθάπερ καὶ ἐπὶ τῶν γραμμικῶν δείκνυται.

ὅτι

ἢ μὲν διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν πλευράν, ἥς ἐστὶν διάμετρος,
γίνεται πλευρά,

ἢ δὲ πλευρὰ ἐαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα τὴν διάμετρον τὴν ἐαυτῆς
γίνεται διάμετρος.'

Γλαφυρόν θεώρημα:

Αν π , δ εἶναι πλευρά καὶ διάμετρος τετραγώνου (δηλαδή $\delta^2=2\pi^2$), τότε $\pi+\delta$, $\pi+2\delta$ εἶναι πλευρά καὶ διάμετρος τετραγώνου (δηλαδή $(\delta+2\pi)^2=2(\delta+\pi)^2$).

Το γλαφυρό θεώρημα αποτελεί εργαλείο **παραγωγῆς** μίας νέας διαμέτρου ἀπὸ μὴ παλιά διάμετρο, μιμούμενο σὲ γεωμετρικὸ ἐπίπεδο τὸν αναδρομικὸ ὀρισμὸ τῶν πλευρικῶν διαμετρικῶν ἀριθμῶν.

Γιατί, σὲ μὴ συζήτηση γιὰ τοὺς πλευρικοὺς-διαμετρικοὺς ἀριθμοὺς παρεμβάλλεται ἡ γεωμετρικὴ αὐτὴ ἀναφορά καὶ διατυπώνεται τὸ γλαφυρὸ θεώρημα εἶναι ἓνα ἐρώτημα ποὺ χρειάζεται ἀπάντηση.

5.2.2. Ἡ ἐπινόηση τῆς γεωμετρικῆς Πρότασης II.10, ἀντίστοιχης τῆς ἀριθμητικῆς ιδέας τῶν Πυθαγορείων, γιὰ τὴν ἀποδείξη τοῦ γλαφυροῦ θεωρήματος

Πρόκλος, *εἰς Πολιτείαν* 2,27,16-22

καὶ **τοῦτο** δείκνυται

διὰ τῶν ἐν τῷ δευτέρῳ στοιχείῳ γραμμικῶς ἀπ' ἐκείνου.

ἐὰν εὐθεῖα τμηθῇ δίχα, προσλάβῃ δὲ εὐθεῖαν,

τὸ ἀπὸ τῆς [ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ] **καὶ** τὸ ἀπὸ [ταύτης] [μόνης
τετράγωνα

δι]πλάσια

τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισεί[ας καὶ τοῦ ἀπὸ] τῆς συγκειμένης ἐκ τῆς ἡμ[ισείας καὶ
τῆς] προσληφθείσης.

Οἱ Πυθαγόρειοι μετέβησαν ἀπὸ τὴν ἀριθμητικὴν στὴν γεωμετρίαν, ὅπου, μετὰ τὴν βοήθειαν τῶν Γνωμόνων ἢ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος, ἐπέτυχαν νὰ ἀποδείξουν τὴν γεωμετρικὴν ταυτότητα:

$\delta^2+(\delta+2\pi)^2=2(\pi^2+(\delta+\pi)^2)$ γιὰ κάθε δύο εὐθύγραμμα τμήματα δ , π ,

δηλαδή τὴν Πρόταση II.10 τῶν *Στοιχείων*.

Ἡ πρόταση II.10 σχετίζεται στενὰ μετὰ τὸν αναδρομικὸ ὀρισμὸ διαμετρικῶν & πλευρικῶν ἀριθμῶν, καθὼς γιὰ κάθε ζεύγος δ , π εὐθυγράμμων τμημάτων, σχηματίζεται τὸ ζεύγος $\delta'=2\pi+\delta$, $\pi'=\pi+\delta$, καὶ ἀποδεικνύεται ὅτι ὅσο ἐλλείπει ἀπὸ τὸ νὰ εἶναι ἡ δ πραγματικὴ διάμετρος, τόσο πλεονάζει ἡ δ' , καὶ ὅσο πλεονάζει ἀπὸ τὸ νὰ εἶναι ἡ δ πραγματικὴ διάμετρος, τόσο ἐλλείπει ἡ δ' .

Απὸ τὴν γεωμετρικὴν Πρόταση II.10 προκύπτει βέβαια ἡ ἀριθμητικὴ ταυτότης

$\delta^2+(\delta+2\pi)^2=2(\pi^2+(\delta+\pi)^2)$ γιὰ κάθε δύο ἀριθμοὺς π , δ .

Ἡ ἀριθμητικὴ ταυτότητα προκύπτει διότι, ἀσφαλῶς, ἡ πρόταση ἰσχύει γιὰ ἀκεραίους.

Γιὰ παράδειγμα αὐτὸ μπορεῖ νὰ συμβεῖ μετὰ τὸ νὰ λάβουμε μὴ προτεθεῖσα εὐθεῖαν ρ καὶ νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν II.10 γιὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $\delta\rho$, $\pi\rho$.

5.2.3. Η απόδειξη του γλαφυρού θεωρήματος

Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* 2,27,2-28,9

ἔστω γὰρ πλ[ευρά ἢ AB καὶ ἴση] αὐτῇ ἢ [BΓ]

καὶ διάμετρος τῆς [AB ἢ ΓΔ διπλάσιον αὐτῆς δυναμένη,

διὰ τὸ θεώρημα ἔσται

τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ἀπὸ τῆς ΒΔ.[2,27,24-28,1]

ῶν

τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ·

καὶ λο[ιπὸν] ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ διπλάσιον·

ἐὰν γὰρ ᾗ ὥς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφα[ιρεθὲν] πρὸς ἀφαιρεθὲν,

ἔσται καὶ τὸ λοιπὸν [πρὸς τὸ λοιπὸν] ὥς ὅλον πρὸς ὅλον.

[ἢ] ἄρα ΓΔ διάμετρος προσλαβοῦσα τὴν ΒΓ πλευρὰν ἐστὶ πλευρά·

ἢ δὲ ΑΒ ἑαυτὴν προσλαβοῦσα τὴν ΒΓ καὶ τὴν διάμετρον ἑαυτῆς τὴν ΓΔ ἐστὶ διάμετρος·
δύν[αται] γὰρ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τῆς ΔΒ.

5.2.4. Η λεκτική συνάφεια της αριθμητικής Πυθαγόρειας ιδέας και της διατύπωσης της Πρότασης II.10.

Η στενή συνάφεια της αριθμητικής Πυθαγόρειας ιδέας [1γ] με την Πρόταση II.10 [2β] αναδεικνύεται και από μια ασυνήθιστη, σκόπιμη ή υποσυνείδητη, λεκτική ομοιότητα, στην οποία υποπίπτει ο Πρόκλος στην διατύπωση της Πυθαγόρειας ιδέας στο [2,25,9-12] [1β] και στην επίκληση της Πρότασης II.10 [2β] στην απόδειξη του γλαφυρού θεωρήματος 2,27,24-28,1[2γ]

Πράγματι, η επίκληση της Πρότασης II.10

‘τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ

διπλάσιον

τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ἀπὸ τῆς ΒΔ.’,

η οποία πραγματοποιείται στην απόδειξη του γλαφυρού θεωρήματος [2γ] 2,27,24-28,1, συμπίπτει με την διατύπωση της αριθμητικής Πυθαγόρειας ιδέας

‘ἐὰν δὲ λάβωμεν

ἀπάσας τὰς ἀπὸ τῶν τοιούτων διαμέτρων,

ἔσονται διπλάσιαι ὄντως,

ῶν ἐκάστη μονάδι μείζων ἢ ἐλάσσων διπλασίου·

οἷον

ἢ ἐννέα μετὰ τοῦ μθ’

τῆς τοῦ κε’ καὶ δ’.

στο [1β], [2,25,9-12].

Η ασυνήθιστη λεκτική σύμπτωση ἐγκείται στο ότι η πρώτη ἀθροισή $ΑΔ^2+ΔΓ^2$ στην διατύπωση του II.10 αποδίδεται με την λέξη **‘μετά’**, ὅπως και η πρώτη ἀθροισή

$3^2+7^2=9+49$ στην περιγραφή της αριθμητικής Πυθαγόρειας ιδέας,

ενώ η δεύτερη ἀθροισή $ΑΒ^2+ΒΔ^2$ στην διατύπωση του II.10 αποδίδεται

με την λέξη ‘και’, όπως και η πρώτη άθροιση $5^2+2^2=25+4$ στην περιγραφή της αριθμητικής Πυθαγόρειας ιδέας,

5.3 Η απόδειξη με επαγωγή της βασικής ιδιότητας των ρητών διαμέτρων

5.3.1. 2,28,9-10

‘Ταῦτα μὲν οὖν

δεικνύσθω δὲ

ἀριθμητικῶς,

ταύτη [τηι διαμετρῳ] ·

ἐπὶ τῶν ῥητῶν διαμέτρων

ἃς εἵπομεν μονάδι μείζους εἶναι ἢ ἐλάσσους.’

Αφού έχει συμπληρωθεί η γεωμετρική απόδειξη [ταῦτα] για την (γεωμετρική) διάμετρο [ταύτη], την οποία οι Πυθαγόρειοι ‘προετίθεσαν’, το χωρίο επιστρέφει και μας λέει ότι ακολουθεί τώρα η απόδειξη με αριθμητική μέθοδο για τις ρητές διαμέτρους.

5.3.2.1. Η αρχική ρητή διάμετρος δ₁ είναι -1 ελλείπουσα, 2,28,11-15

	‘ἔστω μονάς, περὶ δὲ αὐτὴν ἔστω μονάς, <ἢ> καὶ πλευρά ἐστιν ἑαυτῆς, διότι ἅπαξ τὸ ἐν γίνεται ἓν, καὶ διάμετρος ῥητή, μονάδι ποιοῦσα ἐλάσσον τοῦ ἀπὸ τῆς πλευρᾶς, τοῦτ' ἐστιν τοῦ ἀφ' ἑαυτῆς
--	--

Η αρχική ρητή διάμετρος, η δυάς πλευρικών διαμετρικών αριθμών, $\pi_1=1$, $\delta_1=1$ είναι -1 ελλείπουσα ρητή διάμετρος.

5.3.2.2. Η δεύτερη ρητή διάμετρος δ₂ είναι +1 πλεονάζουσα

5.3.2.2.1. Η επίκληση της προσθήκης μονάδος στην πρώτη ρητή διάμετρο, δηλαδή της αριθμητικής μορφής της Π.10, 2,28,15-16

	‘ἂν γὰρ προσλάβῃ μονάδα τὸ ἀπ' αὐτῆς, ὃ ἐστὶ τὸ ἐν, γίνεται τοῦ ἀπὸ αὐτῆς ὡς πλευρᾶς διπλάσιον.’

Η Πυθαγόρεια ιδέα, η οποία είχε διατυπωθεί γενικά στο [1β], και επαναφέρεται ρητά εδώ στο 3.1.β, είναι να καταστήσουμε **την ελλείπουσα διάμετρο δι όντως διάμετρο**, με την προσθήκη μιας μονάδας στο δ_1^2 .

Σύμφωνα με τη Πυθαγόρεια ιδέα, όπως έχει ήδη εξηγηθεί από τους Θέωνα, Ιάμβλιχο, Πρόκλο, **η προσθήκη της ελλείπουσης μονάδας** του δ_1^2 θα πραγματοποιηθεί με το να θεωρήσουμε την δυάδα $\pi_1 + \delta_1 = 2$, $2\pi_1 + \delta_1 = 3$, δηλαδή το αμέσως επόμενο ζεύγος πλευρικών διαμετρικών αριθμών, και να χρησιμοποιήσουμε την σχέση-ταυτότητα $\delta_1^2 + (\delta_1 + 2\pi_1)^2 = 2(\pi_1^2 + (\delta_1 + \pi_1)^2)$,

Αντιλαμβανόμαστε ότι αυτή είναι ακριβώς η αριθμητική μορφή της Πρότασης Π.10, η οποία, διατυπώνεται στο [2β], και χρησιμοποιείται, στο [2γ] για την απόδειξη του γλαφυρού θεωρήματος, το οποίο διατυπώνεται στο [2α]

$$1^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 = 2(1 + 4) = 2(1^2 + 2^2).$$

5.3.2.2.2. Η αριθμητική μορφή του γλαφυρού θεωρήματος, 2,28,17-21

‘λαβέτω οὖν ἡ διαμετρικὴ μονὰς πλευράν, ὅ ἐστι μονάδα

(καὶ γὰρ αὕτη διάμετρος ἦν),

γίνεται δυὰς καὶ πλευρὰ τετράδος·

ἡ δὲ πλευρικὴ μονὰς **ἐαυτῇ συντεθεῖσα λαβέτω** διάμετρον ἄλλην μονάδα

(ἦν γὰρ καὶ ἡ διαμετρικὴ),

γίνεται τριάς

καὶ **ποιεῖ** τὸν ἐννέα, **μονάδι μείζονα** τοῦ ἀπὸ δυάδος·’

Το μόριο **οὖν** (2,28,17) σημαίνει ότι

η αμέσως επόμενη πρόταση (2,28,17-21) αποτελεί λογική συνέχεια της αμέσως

προηγούμενης πρότασης (2,28, 15-16)¹⁵, και

άρα χρησιμοποιεί την ιδέα των Πυθαγορείων να μετατραπεί ἡ -1 ελλείπουσα διάμετρος δ_1 σε όντως διάμετρο. Αυτή η ιδέα των Πυθαγορείων σχετίζεται, όπως είδαμε στενά με την Πρόταση Π.10.

Το πλέον εντυπωσιακό στοιχείο της αυτής της Πρότασης 2,28,17-21 είναι ότι

η Πρόταση 2,28,17-21 αποτελεί **πιστή λέξη προς λέξη μίμηση**

της διατύπωσης του γλαφυρού θεωρήματος [2β], με μοναδική διαφορά ότι έχουμε μεταφερθεί από την γεωμετρία στην αριθμητική.

Διατύπωση γραμμικού γλαφυρού θεωρήματος 2,27,11-16	Βήμα 3.1.γ Διατύπωση αριθμητικού βήματος 2,28,17-21
ἡ μὲν διάμετρος προσλαβοῦσα	λαβέτω οὖν ἡ διαμετρικὴ μονὰς [q1]
τὴν πλευράν,	πλευράν, [p1]
ἣς ἐστὶν διάμετρος,	ὅ ἐστι μονάδα (καὶ γὰρ αὕτη διάμετρος ἦν),
γίνεται	γίνεται

¹⁵ Liddell-Scott-Jones, p. 1271 ‘Il. to continue a narrative, so, then’

πλευρά,	δυάς [q1+p1] καὶ πλευρά τετράδος
ἢ δὲ πλευρά	ἢ δὲ πλευρική μονάς [p1]
ἐαυτῇ συντεθεῖσα καὶ προσλαβοῦσα	ἐαυτῇ συντεθεῖσα [2p1] λαβέτω
τὴν διάμετρον τὴν ἐαυτῆς	διάμετρον [q1] ἄλλην μονάδα
	(ἦν γὰρ καὶ ἡ διαμετρική),
γίνεται	γίνεται
διάμετρος,	τριάς [q1+2p1]

5. 3.2.2.3. Η δεύτερη ρητή διάμετρος $\delta_2=3$, $\pi_2=2$ αποδεικνύεται +1 πλεονάζουσα, 2,28,21-22

	‘καὶ ποιεῖ τὸν ἐννέα, μονάδι μείζονα τοῦ ἀπὸ δυάδος·
	καὶ ἐξῆς ἡ δυάς... ’

Χρησιμοποιούμε τώρα την ειδική αριθμητική μορφή της ταυτότητας II.10, κατά μίμηση της χρήσης της γενικής γεωμετρικής μορφής της II.10 για την απόδειξη του γεωμετρικού γλαφυρού θεωρήματος.

Στο γλαφυρό θεώρημα από την όντως διάμετρο δ , π , **γίνεται** η όντως διάμετρος δ' , π' , με την χρήση της γεωμετρικής Πρότασης II.10.

Στο παρόν πρώτο βήμα επιθυμούμε να αποδείξουμε ότι

από την -1 ελλείπουσα ρητή διάμετρο δ_1 , π_1 **γίνεται** η +1 πλεονάζουσα ρητή διάμετρος δ_2 , π_2 ,

με την χρήση κάποιου αριθμητικού γλαφυρού θεωρήματος.

ΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΗΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑΣ II.10

Ότι ακριβώς αυτό επιχειρείται καθίσταται σαφές από την ταύτιση της διατύπωσης του γλαφυρού θεωρήματος 2β με την διατύπωση του αριθμητικού γλαφυρού θεωρήματος, όπως φαίνεται από την παρακάτω σύγκριση.

Αμέσως αντιλαμβανόμαστε ότι με την **διαδικασία** αυτή **μεταδίδεται**

το -1 ελλείπον της πρώτης διαμέτρου

στο +1 πλεονάζον της δεύτερης διαμέτρου,

μέσω μιας αριθμητικής μορφής γλαφυρού θεωρήματος,

το οποίο αποδεικνύεται από την αριθμητική μορφή της Πρότασης II.10.

Αμέσως γίνεται αντιληπτό ότι

το παρεμβαλλόμενο γεωμετρικό γλαφυρό θεώρημα αποτελεί

το πρότυπο **επαγωγικό** βήμα για την ζητούμενη αριθμητική απόδειξη.

$\pi_1=1, \delta_1=1$, η πρώτη ρητή διάμετρος $\delta_1^2=2\pi_1^2-1$, η δ_1 είναι -1 ελλείπουσα διάμετρος	
Unguru	S.N.
Εφαρμογή αναδρομικού ορισμού πλευρικών-διαμετρικών αριθμών	Εφαρμογή της αριθμητικής μορφής της Πρότασης II.10 για τους αριθμούς π_1, δ_1

$\pi_2=\pi_1+\delta_1=2, \delta_2=2\pi_1+\delta_1=3$	$(2\pi_1+\delta_1)^2+\delta_1^2=2((\pi_1+\delta_1)^2+\pi_1^2)$
επαλήθευση ότι η δ_2, π_2 είναι +1 πλεονάζουσα διάμετρος $\delta_2^2=9=8+1=2\pi_2^2+1$	Εφαρμογή της αριθμητικής μορφής του γλαφυρού θεωρήματος $(2\pi_1+\delta_1)^2=2(\pi_1+\delta_1)^2+1$
	Εφαρμογή αναδρομικού ορισμού πλευρικών διαμετρικών αριθμών $\delta_2^2=9=8+1=2\pi_2^2+1$

5. 3.2.3. Την +1 πλεονάζουσα διάμετρο π_2, δ_2 καθιστούμε όντως διάμετρο με την αριθμητική μορφή της Π.10 για την δυάδα δ_2, π_2 :

$$(2\pi_2+\delta_2)^2+\delta_2^2=2((\pi_2+\delta_2)^2+\pi_2^2)$$

$$3^2+7^2=9+49=58=2(4+25)=2(2^2+5^2).$$

Έπεται από την αριθμητική μορφή του γλαφυρού θεωρήματος ότι

$$(2\pi_2+\delta_2)^2=2(\pi_2+\delta_2)^2-1,$$

$$7^2=2\cdot 5^2-1.$$

και τέλος, εφαρμόζοντας τον αναδρομικό ορισμό συμπεραίνουμε ότι η τρίτη διάμετρος $\delta_3=2\pi_2+\delta_2=7, \pi_3=\pi_2+\delta_2=5$ είναι -1 ελλείπουσα.

$$[5.3.\beta.4] \quad 7^2+17^2=49+289=338=2(25+144)=2(5^2+12^2).$$

[5.3.β.η]

Είναι σαφές από τα παραπάνω, ότι ο Πρόκλος, ξεκινώντας από το ζεύγος $\pi_1=1, \delta_1=1$ **δεν**

--υπολογίζει **πρώτα**, από τον αναδρομικό ορισμό, ότι $\delta_2=3, \pi_2=2$, **και**

--**μετά** επαληθεύει ότι $\delta_2^2=9=8+1=2\pi_2^2+1$,

δηλαδή ότι η διάμετρος $\delta_2=3, \pi_2=2$ είναι +1 πλεονάζουσα ρητή διάμετρος

(όπως νομίζει ο Unguru¹⁶, οπότε πράγματι δεν θα είχαμε απόδειξη με επαγωγή)¹⁷

αλλά

--εφαρμόζει **πρώτα** την αριθμητική μορφή της Π.10,

$$(2\pi_1+\delta_1)^2+\delta_1^2=2((\pi_1+\delta_1)^2+\pi_1^2),$$

η οποία ήταν σε αριθμητικό επίπεδο ακριβώς η Πυθαγόρεια ιδέα να προσθέσει μια μονάδα στο τετράγωνο της -1 ελλείπουσας διαμέτρου

$$1^2+3^2=1+9=10=2(1+4)=2(1^2+2^2),^{18} \text{ και}$$

¹⁶ (1991, p.286) 'Starting with the couple 1,1 representing the first side and diagonal numbers, Proclus

--forms the second side, $1+1=2$, and second diagonal, $1+2\cdot 1=3$, the third side, $2+3=5$, and the third diagonal, $2\cdot 2+3=7$, the fourth side $5+7=12$, and the fourth diagonal, $2\cdot 5+7=17$, and so forth,

[εφαρμόζοντας τον αναδρομικό ορισμό]

--pointing out that that the squares of the diagonal numbers are always either greater or smaller than the double of the squares of the corresponding side numbers by one.' [επαληθεύοντας ότι η νέα διάμετρος είναι εναλλάξ ή -1 ελλείπουσα ή +1 πλεονάζουσα]

¹⁷ (1991, p.286) 'He ends his *description* (this is clearly NOT a rigorous proof as was the geometrical demonstration above) with the words Q "And thus always". These words clearly show Proclus' perception that the relation between side and diameter numbers he was describing was always valid and they also underscore the fact that not only is there no inductive proof here but no proof *tout court*.'

¹⁸ Έχουμε εντοπίσει παραπάνω πέντε σημεία στα οποία οι αρχαίοι συγγραφείς σαφώς συνδέουν την αριθμητική ιδέα των Πυθαγορείων με την αριθμητική μορφή της Πρότασης Π.10, συγκεκριμένα Θέων 44,18-45,8, Ιάμβλιχος, *εις Νικόμαχον* 92,23-93,6, Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* [2,25,9-12], [2,25,12], [2,28,15-16]

--μετά¹⁹ με αφαίρεση, μιμούμενος την απόδειξη του γλαφυρού θεωρήματος, αποδεικνύει

ότι $2\pi_1 + \delta_1 = 3$, $\pi_1 + \delta_1 = 2$ είναι +1 πλεονάζουσα ρητή διάμετρος, και

-τέλος, από τον **αναδρομικό ορισμό**, συμπεραίνει ότι

$\delta_2 = 2\pi_1 + \delta_1 = 3$, $\pi_2 = \pi_1 + \delta_1 = 2$ είναι +1 πλεονάζουσα ρητή διάμετρος²⁰.

Κατόπιν αυτών η **σύγχρονη απόδοση** της μεθόδου απόδειξης των Πυθαγορείων είναι η ακόλουθη:

(1) επαληθεύεται ότι η αρχική ρητή διάμετρος $\delta_1 = 1$, $\pi_1 = 1$ είναι -1 ελλείπουσα.

(2) εφαρμόζεται η αριθμητική μορφή της Π.10 για το ζεύγος δ_1 , π_1 , από το αριθμητικό γλαφυρό θεώρημα για το ζεύγος δ_1 , π_1 , προκύπτει ότι $\delta_1 + 2\pi_1 = 3$, $\delta_1 + \pi_1 = 2$ είναι +1

πλεονάζουσα ρητή διάμετρος, και από τον **αναδρομικό ορισμό** των ρητών διαμέτρων προκύπτει ότι $\delta_2 = 3$, $\pi_2 = 2$ είναι +1 πλεονάζουσα διάμετρος.

(3) εφαρμόζεται η αριθμητική μορφή της Π.10 για τα ζεύγος δ_2 , π_2 , από το αριθμητικό γλαφυρό θεώρημα για το ζεύγος δ_2 , π_2 , προκύπτει ότι $\delta_2 + 2\pi_2 = 7$, $\delta_2 + \pi_2 = 5$ είναι -1

ελλείπουσα ρητή διάμετρος, και από τον **αναδρομικό ορισμό** των ρητών διαμέτρων προκύπτει ότι $\delta_2 = 7$, $\pi_2 = 5$ είναι +1 πλεονάζουσα διάμετρος.

(4) Ακολουθείται τώρα η ίδια διαδικασία επ' άπειρον, με εφαρμογή σε κάθε βήμα της αριθμητικής Πρότασης Π.10, του αριθμητικού γλαφυρού θεωρήματος, και του **αναδρομικού ορισμού**.

Είναι σαφές ότι η μέθοδος απόδειξης των Πυθαγορείων είναι η μέθοδος της **μαθηματικής επαγωγής** και βασίζεται στον **αναδρομικό ορισμό** των ρητών διαμέτρων.

Απόδειξη με μαθηματική επαγωγή για τους αρχαίους σημαίνει

μετάδοση, διάδοση της προς απόδειξη ιδιότητας

από ένα προηγούμενο βήμα στο επόμενο,

χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό ορισμό, την ισχύ της πρότασης στο προηγούμενο βήμα και μία πρόταση (διαφέρει κατά περίπτωση) η οποία διασφαλίζει την ισχύ του επαγωγικού βήματος.

Σε περίπτωση που ο αναδρομικός ορισμός είναι άπειρος η επαγωγή θα λάβει την μορφή Πρώτο βήμα,

Διάδοση από το πρώτο στο δεύτερο,

Διάδοση από το δεύτερο στο τρίτο,

‘Και ούτως αεί’.

Βιβλιογραφική σημείωση. Το περιεχόμενο του Κεφαλαίου 5 οφείλεται στον Σ.

Νεγρεπόντη, ευρίσκεται στο χειρόγραφο των Σ. Νεγρεπόντη και Β. Φαρμάκη, *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*, και περιλαμβάνεται εδώ με την άδειά τους.

¹⁹ Το μόριο οὖν (Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* 2,28,17)

²⁰ Έχουμε εντοπίσει παραπάνω τρία σημεία στα οποία ο Πρόκλος σαφώς συνδέει την διατύπωση ότι η δεύτερη, τρίτη, και τέταρτη ρητή διάμετρος είναι +1 πλεονάζουσα, -1 ελλείπουσα, +1 πλεονάζουσα με την αριθμητική μορφή του γλαφυρού θεωρήματος, συγκεκριμένα Πρόκλος, *εις Πολιτείαν* [2,28,17-21], [2,28,22-24], [2,28,217-29,1].

Κεφάλαιο 6.

Η επαγωγική δομή της απόδειξης της Πρότασης IX 20 των Στοιχείων

6.1. Πρόταση IX 20.

Οί πρώτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν.

Απόδειξη.

Ἐστῶσαν οἱ προτεθέντες πρώτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ · λέγω, ὅτι τῶν A, B, Γ πλείους εἰσὶ πρώτοι ἀριθμοί.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν A, B, Γ ἐλάχιστος μετρούμενος καὶ ἔστω ΔE , καὶ προσκεῖσθω τῷ ΔE μονὰς ἢ ΔZ . ὁ δὲ EZ ἦτοι πρῶτός ἐστιν ἢ οὐ. ἔστω πρότερον πρῶτος· εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρώτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ, EZ πλείους τῶν A, B, Γ . Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ EZ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. μετρεῖσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ H · λέγω, ὅτι ὁ H οὐδενὶ τῶν A, B, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω. οἱ δὲ A, B, Γ τὸν ΔE μετροῦσιν· καὶ ὁ H ἄρα τὸν ΔE μετρήσει. μετρεῖ δὲ καὶ τὸν EZ · καὶ λοιπὴν τὴν ΔZ μονάδα μετρήσει ὁ H ἀριθμὸς ὧν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ὁ H ἐνὶ τῶν A, B, Γ ἐστιν ὁ αὐτός. καὶ ὑπόκειται πρῶτος. εὐρημένοι ἄρα εἰσὶ πρώτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν A, B, Γ οἱ A, B, Γ, H · ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

6.2. Κριτική μελετητῶν για την απόδειξη της IX 20.

Στην παραπάνω απόδειξη καταλογίζεται ἀπὸ τον E. Σταμάτη (1953), στα σχόλιά του στο βιβλίο IX, «φανερὰ ἡ χρησιμοποίησις τοῦ **αναδρομικοῦ** συλλογισμοῦ».

Ο Freudenthal (1953) παρόλο που αναγνωρίζει ὅτι δεν εἶναι επαγωγικὴ ἀπόδειξη στη συνέχεια ἀποδίδει με ἐπιφύλαξη στον Εὐκλείδη επαγωγικὴ σκέψη σ' αὐτὴν τὴν ἀπόδειξη.

Αντικρουοντάς τους ο Unguru υποστηρίζει ὅτι ἡ επαγωγικὴ σκέψη εἶναι πλήρως ἀπούσα καὶ ὅτι ἡ πηγὴ τοῦ λάθους ἐγκεῖται, μεταξύ ἄλλων:

«... in the treacherous transcription of the Euclidean proof by means of an historically unacceptable algebraic symbolism coupled with the readiness to modify, more or less, Euclid's enunciation, steps which enable one to shunt the proof onto inductive tracks» (σελ.280).

Επιπλέον

«... even though Euclid's proof is undertaken only for three primes, and these primes are themselves determinate, specific, A, B , and C , it is a completely general proof, i.e., the procedure is independent of the specific number of primes taken and of their peculiar identity. It is this that explains why, unlike the case of IX.8, Euclid does not say at the end of the proof that the claim can be shown to be true in the same manner for any multitude of prime numbers.» (σελ. 284).

6.3. Ἀπειρη αναδρομὴ καὶ επαγωγή στην Πρόταση IX 20

Ἡ ἀπόδειξη τῆς Πρότασης 9.20 ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο βήματα.

Στο πρῶτο βήμα (Ἐστῶσαν οἱ προτεθέντες πρώτοι ἀριθμοὶ οἱ A, B, Γ . . . μετρεῖσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ H ·) ὀρίζεται κατὰ ἔμμεσο **αναδρομικὸ** τρόπο μια ἀκολουθία (χ_n) πρώτων ἀριθμῶν ὡς ἐξῆς:

$\chi_1=2, \chi_2=3$, καὶ

αν έχουμε ορίσει τους πρώτους $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$,
τότε ορίζεται χ_{n+1} ο (μικρότερος) πρώτος αριθμός που διαιρεί, τον αριθμό $(\chi_1 \cdot \chi_2 \cdot \dots \cdot \chi_n) + 1$.
βάσει της πρότασης VII 31.

Στο δεύτερο βήμα (‘λέγω, ότι ό H ούδενι τῶν A, B, Γ ἐστὶν ό αὐτός. . . . τοῦ προτεθέντος
πλήθους τῶν A, B, Γ οί A, B, Γ, H ’) αποδεικνύεται ότι κάθε χ_{n+1} είναι διαφορετικός από
τους $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n$, άρα η ακολουθία (χ_n) αποτελείται από διαφορετικούς ανά δύο πρώτους
αριθμούς, και άρα είναι μια άπειρη ακολουθία πρώτων.

‘ὅπερ ἔδει δεῖξαι.’

και εδώ ο Ευκλείδης δεν αμφιβάλλει ότι έχει δώσει απόδειξη της πρότασης 9.20.

Με αυτές τις διευκρινήσεις και η μέθοδος απόδειξης της Πρότασης 9.20 μπορεί να
θεωρηθεί κατ’ ουσίαν η ίδια με την μέθοδο που ακολουθήθηκε στις δύο προηγούμενες
προτάσεις που εξετάσαμε. Εδώ βέβαια ο ίδιος ο αναδρομικός ορισμός της ακολουθίας
 (χ_n) , χρησιμοποιεί την Πρόταση VII 31.

Κεφάλαιο 7.

Φιλοσοφικά χωρία με Επαγωγικό περιεχόμενο

Ο ορισμός με άπειρη αναδρομή της ακολουθίας των ανθυφαιρετικών υπολοίπων μιας άπειρης ανθυφαίρεσης μιας δυνάδας μεγεθών δεν συμπληρώνεται με κάποια απόδειξη με άπειρη επαγωγή σε κάποιο διασωζόμενο κείμενο των Ελληνικών μαθηματικών. Ωστόσο αυτό συμβαίνει σε φιλοσοφικά κείμενα Παρμενίδης Πλάτωνος, Αποσπάσματα B1 & B3 του Ζήνωνος. Τα χωρία 142-143, 144, 148-149 του Πλατωνικού διαλόγου Παρμενίδης είναι χωρία με επαγωγικό περιεχόμενο και συνδέονται στενά με τα προαναφερθέντα αποσπάσματα του Ζήνωνος. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε πολύ συνοπτικά το πρώτο χωρίο του Πλάτωνος, μιας και η πλήρης ανάλυση είναι εκτός των ορίων της παρούσας εργασίας, και λεπτομερώς το τρίτο από αυτά. Στο Κεφάλαιο 8 θα δούμε, επίσης περιληπτικά, τα αποσπάσματα B1 & B3 του Ζήνωνος με τα οποία συνδέονται στενά τα Πλατωνικά χωρία.

Για την πλήρη ανάλυση και ερμηνεία των χωρίων 142-143, 144 και των B1 & B3 του Ζήνωνος παραπέμπουμε στην βιβλιογραφική σημείωση στο τέλος του κεφαλαίου.

7.1. Παρμενίδης 142b1-143a3

Βούλει οὖν ἐπὶ τὴν ὑπόθεσιν πάλιν ἐξ ἀρχῆς ἐπανέλ-
θωμεν, ἐάν τι ἡμῖν ἐπανιοῦσιν ἄλλοιον φανῇ; — Πάνυ μὲν
οὖν βούλομαι. — Οὐκοῦν ἐν εἰ ἔστιν, φαμέν, τὰ συμβαί-
νοντα περὶ αὐτοῦ, ποῖα ποτε τυγχάνει ὄντα, διομολογητέα
ταῦτα· οὐχ οὕτω; — Ναί. — Ὅρα δὴ ἐξ ἀρχῆς· ἐν εἰ ἔστιν,
ἄρα οἷόν τε αὐτὸ εἶναι μὲν, οὐσίας δὲ μὴ μετέχειν; — Οὐχ
οἷόν τε. — Οὐκοῦν καὶ ἡ οὐσία τοῦ ἐνὸς εἴη ἂν οὐ ταὐτὸν
οὔσα τῷ ἐνί· οὐ γὰρ ἂν ἐκείνη ἦν ἐκείνου οὐσία, οὐδ' ἂν
ἐκεῖνο, τὸ ἐν, ἐκείνης μετεῖχεν, ἀλλ' ὅμοιον ἂν ἦν λέγειν ἐν
τε εἶναι καὶ ἐν ἑν. νῦν δὲ οὐχ αὕτη ἐστὶν ἡ ὑπόθεσις,
εἰ ἐν ἑν, τί χρὴ συμβαίνειν, ἀλλ' εἰ ἐν ἔστιν· οὐχ
οὕτω; — Πάνυ μὲν οὖν. — Οὐκοῦν ὥς ἄλλο τι σημαῖνον τὸ
ἔστι τοῦ ἐν; — Ἀνάγκη. — Ἄρα οὖν ἄλλο ἢ ὅτι οὐσίας
μετέχει τὸ ἐν, τοῦτ' ἂν εἴη τὸ λεγόμενον, ἐπειδὴν τις
συλλήβδην εἶπη ὅτι ἐν ἔστιν; — Πάνυ γε. — Πάλιν δὴ λέγω-
μεν, ἐν εἰ ἔστιν, τί συμβήσεται. σκόπει οὖν εἰ οὐκ ἀνάγκη
ταύτην τὴν ὑπόθεσιν τοιοῦτον ὄν τὸ ἐν σημαίνειν, οἷον
μέρη ἔχειν; — Πῶς; — Ὡδε· εἰ τὸ ἔστι τοῦ ἐνὸς ὄντος
λέγεται καὶ τὸ ἐν τοῦ ὄντος ἐνός, ἔστι δὲ οὐ τὸ αὐτὸ ἢ τε
οὐσία καὶ τὸ ἐν, τοῦ αὐτοῦ δὲ ἐκείνου οὐ ὑπεθέμεθα, τοῦ
ἐνός ὄντος, ἄρα οὐκ ἀνάγκη τὸ μὲν ὅλον ἐν ὄν εἶναι αὐτό,
τούτου δὲ γίνεσθαι μέρη τὸ ἐν καὶ τὸ εἶναι; — Ἀνάγκη.
— Πότερον οὖν ἐκάτερον τῶν μορίων τούτων μόνον
προσεροῦμεν, ἢ τοῦ ὅλου μόνον τὸ γε μόνον προσρη-
τέον; — Τοῦ ὅλου. — Καὶ ὅλον ἄρα ἐστί, ὃ ἂν ἐν ἦ, καὶ
μόριον ἔχει. — Πάνυ γε. — Τί οὖν; τῶν μορίων ἐκάτερον
τούτων τοῦ ἐνός ὄντος, τὸ ἐν καὶ τὸ ὄν, ἄρα ἀπολείπεσθον
ἢ τὸ ἐν τοῦ εἶναι μορίου ἢ τὸ ὄν τοῦ ἐνός μορίου; — Οὐκ

ἂν εἴη. — Πάλιν ἄρα καὶ τῶν μορίων ἐκάτερον τό τε ἐν ἴσχει καὶ τὸ ὄν, καὶ γίγνεται τὸ ἐλάχιστον ἐκ δυοῖν αὐτῶν μορίων τὸ μόριον, καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον οὕτως αἰεὶ, ὅτιπερ ἂν μόριον γένηται, τούτῳ τὸ μόριον αἰεὶ ἴσχει· τό τε γὰρ ἐν τὸ ὄν αἰεὶ ἴσχει καὶ τὸ ὄν τὸ ἐν· ὥστε ἀνάγκη δύ' αἰεὶ γιγνόμενον μηδέποτε ἐν εἶναι. — Παντάπασι μὲν οὖν. — Οὐκοῦν ἄπειρον ἂν τὸ πλῆθος οὕτω τὸ ἐν ὄν εἴη; — Ἔοικεν.

Ανάλυση του χωρίου

Ορισμός (Παρμενίδης ?, Πρόκλος, εις Παρμενίδην ?).

Το χ μετέχει στο ψ σημαίνει

$\chi > \psi$,

το χ διαιρείται δια του ψ , και

γεννᾶται ένα νέο μέρος χ_1 , ὥστε $\chi = \psi + \chi_1$ με $\chi_1 < \psi$.

Υπόθεση 0. Αρχική Δυάς $\alpha = \text{Εν} > \text{Ον} = \beta$

Υπόθεση H1α. Το α μετέχει στο β .

Αναδρομικός ορισμός (γέννηση) του α_1 , $\alpha_1 < \beta$.

Αρχικό επαγωγικό βήμα.: Το α δεν μένει εν, αλλά διαιρείται σε δύο, β και α_1 .

Υπόθεση H1β. Το β μετέχει στο α_1 .

Αναδρομικός ορισμός (γέννηση) του β_1 , $\beta_1 < \alpha_1$.

Αρχικό επαγωγικό βήμα.: Το β δεν μένει εν, αλλά διαιρείται σε δύο, α_1 και β_1 .

Με τις δύο υποθέσεις H1α και H1β πραγματοποιούνται τα πρώτα βήματα αναδρομικού ορισμού και επαγωγικής απόδειξης.

Υπόθεση H2α. Το α_1 μετέχει στο β_1 .

Αναδρομικός ορισμός (γέννηση) του α_2 , $\alpha_2 < \beta_1$.

Αρχικό επαγωγικό βήμα.: Το α_1 δεν μένει εν, αλλά διαιρείται σε δύο, β_1 και α_2 .

Υπόθεση H2β. Το β_1 μετέχει στο α_2 .

Αναδρομικός ορισμός (γέννηση) του β_2 , $\beta_2 < \alpha_2$.

Αρχικό επαγωγικό βήμα.: Το β_1 δεν μένει εν, αλλά διαιρείται σε δύο, α_2 και β_2 .

Με τις δύο υποθέσεις H2α και H2β πραγματοποιούνται τα δεύτερα βήματα αναδρομικού ορισμού και διάδοσης, μετάδοσης της επαγωγικής απόδειξης.

‘Και ούτως αεί.’

Πρόταση (Παρμενίδης 142-143, Φύληβος εριστική απόδειξη).

Αν $\alpha > \beta$ και ισχύουν οι υποθέσεις H1, H2, H3, ...,

τότε ορίζεται (παράγεται) μια **άπειρη** αναδρομική ακολουθία

$\alpha > \beta > \alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \beta_2 > \dots$

7.2. Παρμενίδης 149a4-c3

Το δεύτερο απόσπασμα αποτελείται από τους στίχους 149a4-c3. Το συγκεκριμένο απόσπασμα αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία, σύμφωνα τουλάχιστον με τη δική μας γνώση, και από δύο ακόμα μελετητές της Ιστορίας των Μαθηματικών, ως ένα παράδειγμα απόδειξης με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Πρώτος ο Σουηδός φιλόσοφος Anders Wedberg στο βιβλίο του *Plato's Philosophy of Mathematics* (1955) αναφέρει: «*In a passage in the Parmenides ... he gives evidence that he was not completely unfamiliar with the possibility of proving universal arithmetical propositions by what nowadays known as mathematical induction or proof by recursion*» (σελ. 23). Στη σημείωση 13(σελ. 140-141) του ίδιου βιβλίου διευκρινίζει ότι αναφέρεται στους στίχους 149a-c. Παραθέτει σε ελεύθερη μετάφραση τους παραπάνω στίχους καθώς επίσης και μία Μαθηματική παράφραση του αποσπάσματος, χωρίς όμως καμία ιδιαίτερη ανάλυση του κειμένου. Η Μαθηματική απόδοση του χωρίου σύμφωνα με τον Wedberg είναι η εξής:

«*Let us designate by $C(n)$ the number of contacts corresponding to n terms. Plato calls our attention to the facts:*

- (i) $2 = C(2) + 1$
- (ii) $C(n + 1) = C(n) + 1$

From which he infers that, for any $n \geq 2$:

- (iii) $n = C(n) + 1.$

Since (ii) entails:

- (ii') *If $n = C(n) + 1$, then $n + 1 = C(n + 1) + 1$,*

This is us a matter of fact, a regular proof by recursion».

Όπως είπαμε όμως δεν δίνει περαιτέρω επεξηγήσεις σχετικά με την ερμηνεία του, παρά μόνο ότι συναντάμε μία παρόμοια επιχειρηματολογία στον Αριστοτέλη, στο έργο Πρώτερα Αναλυτικά 42b1-10.

Ο δεύτερος μελετητής, που αναφέρεται στο εν λόγω χωρίο, είναι ο Ιταλός Fabio Acerbi μέσα από το άρθρο του «*Plato: Parmenides 149a7-c3. A Proof by Complete Induction?*» το 2000. Ο Acerbi κάνει, πράγματι, μία πολύ προσεκτική ανάλυση του χωρίου μέσω της οποίας, όπως είναι άλλωστε εμφανές και από τον τίτλο του άρθρου, ισχυρίζεται ότι είναι ίσως το μοναδικό παράδειγμα πλήρους επαγωγής που συναντάμε στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά. Μάλιστα και ο Acerbi προβαίνει σε έναν παραλληλισμό αυτού του χωρίου με το απόσπασμα Πρώτερα Αναλυτικά 42b1-10, στο οποίο αναγνωρίζει παρόμοιο επαγωγικό επιχείρημα, χωρίς όμως αυστηρή απόδειξη,

Ακολουθεί το απόσπασμα και η ανάλυση αυτού.

149a4-c3

— *Τί δή;*

— *“Οτι, φασμέν, τὸ μέλλον ἄψεσθαι χωρὶς ὃν ἐφεξῆς δεῖ ἐκείνῳ εἶναι οὗ μέλλει ἄψεσθαι, τρίτον δὲ αὐτῶν ἐν μέσῳ μηδὲν εἶναι.*

— *Ἀληθῆ.*

— *Δύο ἄρα δεῖ τὸ ὀλίγιστον εἶναι, εἰ μέλλει ἄψις εἶναι.*

- Δεῖ.
 — Ἐὰν δὲ τοῖν δυοῖν ὄροιν τρίτον προσγένηται ἐξῆς, αὐτὰ μὲν τρία ἔσται, αἱ δὲ ἄψεις δύο.
 — Ναί.
 — Καὶ οὕτω δὴ ἀεὶ ἐνὸς προσγινομένου μία καὶ ἄψις προσίγνεται, καὶ συμβαίνει τὰς ἄψεις τοῦ πλήθους τῶν ἀριθμῶν μιᾷ ἐλάττους εἶναι. ὅ γὰρ τὰ πρῶτα δύο ἐπλεονέκτησαν τῶν ἄψεων εἰς τὸ πλείω εἶναι τὸν ἀριθμὸν ἢ τὰς ἄψεις, τῷ ἴσῳ τούτῳ καὶ ὁ ἔπειτα ἀριθμὸς πᾶς πασῶν τῶν ἄψεων πλεονεκτεῖ· ἤδη γὰρ τὸ λοιπὸν ἅμα ἐν τε τῷ ἀριθμῷ προσίγνεται καὶ μία ἄψις ταῖς ἄψεσιν.
 — Ὅρθως.
 — Ὅσα ἄρα ἐστὶν τὰ ὄντα τὸν ἀριθμὸν, ἀεὶ μιᾷ αἱ ἄψεις ἐλάττους εἰσὶν αὐτῶν.
 — Ἀληθῆ.

[Μετάφραση:]

- Γιατί λοιπόν;
 — Επειδή, είπαμε, εκείνο που πρέπει να έχει επαφή, επειδή είναι χωριστά, πρέπει να είναι συνεχόμενο με εκείνο που πρόκειται να έρθει σε επαφή, και ανάμεσα σε αυτά να μην είναι κανένα τρίτο.
 — Επομένως δύο το λιγότερο πρέπει να είναι, αν πρόκειται να υπάρξει άψη <επαφή>.
 — Πρέπει.
 — Εάν δε στους δύο όρους προστίθεται σε άμεση διαδοχή τρίτος, αυτά θα είναι τρία, οι δε άψεις δύο.
 — Ναι.
 — Και έτσι τώρα κάθε φορά που <πάντοτε όταν> προστίθεται ένας όρος και μία άψη προστίθεται, και προκύπτει ότι οι άψεις είναι μία λιγότερες από το πλήθος των αριθμών· επειδή τα πρῶτα δύο <όντα-όροι> ἐπλεονέκτησαν των άψεων όσο περισσότερα είναι <αυτά> στον αριθμό από τις άψεις, τόσο και ο επόμενος συνολικός αριθμός <των διαδοχικών όρων> υπερβαίνει όλων των άψεων· έτσι πλέον λοιπόν όταν προστίθεται ένας αριθμός και μία άψη στις άψεις <προστίθεται>.
 — Σωστά.
 — Οποιοσδήποτε επομένως είναι ο αριθμός των όντων, οι άψεις θα είναι λιγότερες από αυτά κατά μία.
 — Αληθές.]

Το χωρίο είναι ενσωματωμένο στο διάλογο στο σημείο όπου οι συμμετέχοντες εξετάζουν τις συνέπειες της δεύτερης υπόθεσης του Παρμενίδη: «εάν το Έν είναι <υπάρχει>» (142b3). Συγκεκριμένα αποτελεί βασικό επιχείρημα του ότι αν το έν υπάρχει τότε έχει και δεν έχει επαφή με τον εαυτό του, έχει και δεν έχει επαφή με τα άλλα. Ο Πλάτωνας στο συγκεκριμένο χωρίο θεωρεί μια σειρά διαδοχικών όρων-όντων, στην οποία κάθε δύο όροι που βρίσκονται σε άμεση διαδοχή άπτονται. Αναπτύσσεται δηλαδή μία συγκεκριμένη σχέση μεταξύ τους ή σύμφωνα με τον όρο του Πλάτωνα μία «ἄψις». Η σχέση που αποδεικνύεται διαλεκτικά στο παραπάνω απόσπασμα είναι η εξής: Ἀψεις = Αριθμός ὄντων -1.
 Ας ακολουθήσουμε μέσα από το κείμενο τα επιχειρήματα του Πλάτωνα, μεταφράζοντάς τα παράλληλα με σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό, ώστε να καταστεί ευκολότερη για τον αναγνώστη η λογική δομή της απόδειξης καθώς και η ερμηνεία μας.

Θα συμβολίσουμε με n την θέση-σειρά στην οποία βρίσκεται ο n -οστός όρος της ακολουθίας όρων-όντων, με $\Pi(n)$ το πλήθος αυτών και με $A(n)$ τις άψεις που δημιουργούνται σε αυτή την ακολουθία διαδοχικών όρων. Με αυτούς τους όρους η σχέση που αποδεικνύεται είναι:

$A(n)=\Pi(n) - 1$ και η απόδειξη, σύμφωνα πάντα με το κείμενο, συνίσταται από τα εξής βήματα:

• **Στίχοι 149a4-7:**

«— *Τί δή;*

— *”Οτι, φαμέν, τὸ μέλλον ἄψεσθαι χωρὶς ὃν ἐφεξῆς δεῖ ἐκείνῳ εἶναι οὐ μέλλει ἄψεσθαι, τρίτον δὲ αὐτῶν ἐν μέσῳ μηδὲν εἶναι.*

— *’Αληθῆ.*

— *Δύο ἄρα δεῖ τὸ ὀλίγιστον εἶναι, εἰ μέλλει ἄψεις εἶναι.*

— *Δεῖ.*

— *’Εὰν δὲ τοῖν δυοῖν ὅροιν τρίτον προσγένηται ἐξῆς, αὐτὰ μὲν τρία ἔσται, αἱ δὲ ἄψεις δύο.*

— *Ναί.»*

Ο Πλάτων εδώ θέτει και ταυτόχρονα αποδεικνύει τη βάση της επαγωγής. Με βάση τον ορισμό του, για το πότε και υπό ποιες συνθήκες δημιουργείται άψη: «*εκείνο που πρέπει να έχει επαφή, επειδή είναι χωριστά, πρέπει να είναι συνεχόμενο με εκείνο που πρόκειται να έρθει σε επαφή, και ανάμεσα σε αυτά να μην είναι κανένα τρίτο*». Έτσι αν η ακολουθία των όρων περιλαμβάνει έναν μόνο όρο τότε δεν υπάρχει επαφή. Άρα η ακολουθία πρέπει να έχει το λιγότερο δύο όρους για να υπάρξει μία επαφή (ἄψεις: ενικός, συνεπώς μία άψη).

Επομένως αν $n=2$, τότε:

$$\Pi(2)=2,$$

$$A(2)=1 \text{ και}$$

$$A(2)=\Pi(2)-1, \text{ δηλαδή η πρόταση ισχύει για } n=2.$$

• **Στίχοι 149a8-b1:**

«— *’Εὰν δὲ τοῖν δυοῖν ὅροιν τρίτον προσγένηται ἐξῆς, αὐτὰ μὲν τρία ἔσται, αἱ δὲ ἄψεις δύο.*

— *Ναί.»*

Αποδεικνύει την πρόταση για αμέσως επόμενη επέκταση της προηγούμενης σειράς όρων, δηλαδή για την περίπτωση που στους όρους της ακολουθίας προστίθεται σε άμμεση διαδοχή ένας επιπλέον όρος.

Άρα αν $n=2+1=3$, τότε έχουμε:

$$\Pi(3)=\Pi(2)+1=2+1=3,$$

$$A(3)=A(2)+1=1+1=2 \text{ και}$$

$$A(3)=\Pi(3)-1, \text{ δηλαδή η πρόταση ισχύει για } n=2.$$

Εδώ, λοιπόν, παρατηρούμε ότι έχουμε ένα επαγωγικό βήμα από το $n=2$ στο $n=2+1$. Από την αμέσως επόμενη φράση «*Καὶ οὕτω δὴ αἰετὸς προσγιγνομένου μίας καὶ ἄψεις προσγίγνεται, καὶ συμβαίνει τὰς ἄψεις τοῦ πλήθους τῶν ἀριθμῶν μιᾶ ἐλάττους εἶναι*», όπου διατυπώνεται η σχέση η οποία ισχύει, καθώς και από το γεγονός ότι δεν κλείνει την απόδειξη της πρότασης σ’ αυτόν τον στίχο, αλλά συνεχίζει τα επιχειρήματα και την επαναδιατυπώνει στο 149c2-3 ως συμπέρασμα πλέον του συλλογισμού που προηγήθηκε, θεωρούμε ότι το συγκεκριμένο επαγωγικό βήμα ο Πλάτων το παραθέτει ως παράδειγμα

για να διευκρινίσει την επαναληπτική μέθοδο που θα ακολουθήσει ώστε να αποδειχθεί η πρόταση στην γενικότητά της. Κάθε βήμα λοιπόν προκύπτει από το προηγούμενο με προσθήκη ενός νέου όρου σε άμεση διαδοχή με τον τελευταίο όρο της προηγούμενης περίπτωσης. Έτσι μεταβάλλεται κατά ένα τόσο το πλήθος των όρων όσο και οι άψεις ενώ οι σχέσεις μεταξύ αυτών παραμένει αναλλοίωτη. Τα δύο πρώτα είναι εντελώς προφανή και, γι' αυτό ίσως όπως θα δούμε στη συνέχεια, δεν τα αποδεικνύει λεπτομερώς κάτι όμως που δεν ισχύει και για τη μεταξύ τους σχέση.

• **Στίχοι 149b1-4:**

«Καὶ οὕτω δὴ αἰεὶ ἐνὸς προσγιγνομένου μία καὶ ἄψις προσγίνεται, καὶ συμβαίνει τὰς ἄψεις τοῦ πλήθους τῶν ἀριθμῶν μιᾷ ἐλάττους εἶναι».

Ισχυρίζεται ότι η ίδια διαδικασία, που περιέγραψε προηγουμένως από το $n=2$ στο $n=3$, μπορεί να επαναλαμβάνεται συνεχώς («Καὶ οὕτω δὴ αἰεὶ»). Δηλαδή κάθε φορά που προστίθεται στην ακολουθία ένας όρος σε άμεση διαδοχή με τον τελευταίο όρο της ακολουθίας που είχαμε στο αμέσως προηγούμενο βήμα, προστίθεται και μία άψη στις άψεις που ήδη είχαμε.

Έτσι για $n=4, 5, \dots, k, \dots$ ισχύει:

$$A(4)=A(3+1)=A(3)+1 \quad \text{και} \quad \Pi(4)=\Pi(3+1)=\Pi(3)+1$$

$$A(5)=A(4+1)=A(4)+1 \quad \text{και} \quad \Pi(5)=\Pi(4+1)=\Pi(4)+1$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$A(k)=A[(k-1)+1]=A(k-1)+1 \quad \text{και} \quad \Pi(k)=\Pi[(k-1)+1]=\Pi(k-1)+1$$

Και λόγω αυτού προκύπτει («καὶ συμβαίνει») ότι:

$$\Pi(k) = A(k) - 1$$

Το παραπάνω προκύπτει επειδή («ὅ γάρ»):

• **Στίχοι 149b4-6:**

«ὅ γάρ τὰ πρῶτα δύο ἐπλεονέκτησεν τῶν ἄψεων εἰς τὸ πλείω εἶναι τὸν ἀριθμὸν ἢ τὰς ἄψεις, τῷ ἴσῳ τούτῳ καὶ ὁ ἔπειτα ἀριθμὸς πᾶς πασῶν τῶν ἄψεων πλεονεκτεῖ»

Επειδή $\Pi(2) > A(2)$ («ὅ γάρ τὰ πρῶτα δύο ἐπλεονέκτησεν τῶν ἄψεων»)

συμπεραίνουμε ότι: $\Pi(k) > A(k)$ («εἰς τὸ πλείω εἶναι τὸν ἀριθμὸν ἢ τὰς ἄψεις») και

$\Pi(k) - A(k) = \Pi(2) - A(2)$ («τῷ ἴσῳ τούτῳ καὶ ὁ ἔπειτα ἀριθμὸς πᾶς πασῶν τῶν ἄψεων πλεονεκτεῖ»).

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \Pi(2) - A(2) &= \\ &= \Pi(2) + 1 - A(2) - 1 = \\ &= [\Pi(2) + 1] - [A(2) + 1] = && \text{από βήμα 2} \\ &= \Pi(3) - A(3) = \\ &= \dots\dots\dots = \\ &= \Pi(k-1) + 1 - A(k-1) - 1 = \\ &= [\Pi(k-1) + 1] - [A(k-1) + 1] = && \text{από βήμα 3} \end{aligned}$$

$$= \Pi(k) - A(k)$$

Σε αυτούς τους στίχους έχουμε την απόδειξη για την γενική περίπτωση η οποία συνίσταται και πάλι στην μετάδοση της ιδιότητας από τους δύο όρους στους τρεις, από τους τρεις στους τέσσερις και ου το καθεξής.

Ο Πλάτωνας ολοκληρώνει τον συλλογισμό με το συμπέρασμα στους επόμενους στίχους:

• **Στίχοι 149b6-c3:**

«ἤδη γὰρ τὸ λοιπὸν ἅμα ἔν τε τῷ ἀριθμῷ προσγίγνεται καὶ μία ἄψις ταῖς ἄψεσιν.

— Ὅρθως.

— Ὅσα ἄρα ἐστὶν τὰ ὄντα τὸν ἀριθμὸν, αἰὲ μὶα αἱ ἄψεις ἐλάττους εἰσὶν αὐτῶν.

— Ἀληθῆ.»

Ας ξαναδούμε συνοπτικά τη λογική διαδικασία μέσω της οποίας ο Πλάτωνας καταλήγει στο συμπέρασμα, στο χωρίο που μόλις αναλύσαμε. Έχουμε τις προτάσεις:

Υ: «Καὶ οὕτω δὴ αἰὲ ἐνὸς προσγιγνομένου μία καὶ ἄψις προσγίγνεται»,

Σ: «τὰς ἄψεις τοῦ πλήθους τῶν ἀριθμῶν μὶα ἐλάττους εἶναι»

Ε: «ὅ γὰρ τὰ πρῶτα δύο ἐπλεονέκτησεν τῶν ἄψεων εἰς τὸ πλείω εἶναι τὸν ἀριθμὸν ἢ τὰς ἄψεις, τῷ ἴσῳ τούτῳ καὶ ὁ ἔπειτα ἀριθμὸς πᾶς πασῶν τῶν ἄψεων πλεονεκτεῖ».

Σύμφωνα, λοιπόν, με ὅσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, ο συλλογισμός είναι ο εξής: αν ισχύει η Υ τότε προκύπτει ότι ισχύει η Σ. Αυτό συμβαίνει επειδή από την Υ έπεται η Ε, άρα η Σ ισχύει. Την πρόταση Υ την θεωρεί προφανή, τετριμμένη έτσι δίνει μόνο ένα διευκρινιστικό παράδειγμα στο βήμα 2. Αντίθετα την πρόταση Σ την αποδεικνύει. Η απόδειξη γίνεται με μαθηματική επαγωγή. Το επαγωγικό βήμα είναι η πρόταση Ε, ενώ το επαγωγικό επιχείρημα αποτελεί η πρόταση Υ. Μάλιστα, όπως είδαμε οι προτάσεις Υ και Σ εμφανίζονται δύο φορές μέσα στο κείμενο. Την πρώτη φορά μετά την διατύπωσή τους, παρεμβάλλεται ως επεξήγηση-απόδειξη αυτών η πρόταση Ε και στη συνέχεια τις επαναδιατυπώνει ως βεβαιότητα: «ἤδη γὰρ τὸ λοιπὸν ἅμα» (έτσι πλέον λοιπόν αν - από εδώ και στο εξής λοιπόν αν) ισχύει η Υ «αἰὲ» (πάντα) θα ισχύει και η Σ.

Ο Acerbi (2000), κάνοντας μία πολύ προσεκτική ανάλυση του χωρίου, προτείνει το παραπάνω απόσπασμα ως το μόνο ολοκληρωμένο παράδειγμα απόδειξης με την τεχνική της μαθηματικής επαγωγής:

«I suggest to regard a Platonic passage, i.e. *Parmenides 149a7-c3*, as a **full-fledged example of proof by CI**.» (σελ. 58).

Διευκρινίζει ότι θεωρεί ακατάλληλο για μία τέτοια εξέταση τόσο τον ορισμό της μαθηματικής επαγωγής που χρησιμοποιεί ο Unguru όσο και Fowler και ο ίδιος στη μελέτη του, εξετάζει το συγκεκριμένο με βάση το παρακάτω πλαίσιο:

«... I think the following sequence could correctly describe the series of steps which are necessary to achieve a proof by CI:

A. To set the basis of induction.

B. To enunciate the inductive step and to explicitly recognize its generality (≈universal quantification ≈ An. post. 73b32).¹¹

C. To prove the inductive step and to explicitly recognize the generality of the proof (≈ universal quantification ≈ An. post. 73b32).

D. To recognize the generality of the conclusion (≈ universal quantification ≈ An. post. 73b32).» (σελ. 60)

Αναλύοντας το χωρίο μέσω αυτού του «ορισμού» ο Acerbi καταλήγει ότι το απόσπασμα ικανοποιεί τις συνθήκες : A, B, C, D και αποτελεί έτσι παράδειγμα πλήρους επαγωγής. Παρόλο που η ανάλυση του Acerbi είναι αρκετά προσεκτική θα διαφοροποιηθούμε επί της ουσίας σε δύο σημεία, τόσο ως προς τον ίδιο όσο και ως προς τον Wedberg:

α) δεν θεωρούμε, όπως είδη ειπώθηκε, ότι έχουμε απόδειξη με επαγωγή στην οποία για την γενική περίπτωση μεταβαίνουμε από το n στο $n+1$, αλλά έχουμε μετάδοση της ιδιότητα από τον πρώτο όρο στον δεύτερο, από τον δεύτερο στον τρίτο «**Καὶ οὕτω δὴ ἄει**»

β) Η αναδρομή και επαγωγή στο Παρμενίδης 148-149 είναι αυστηρά πεπερασμένη.

Η σημασία του παραπάνω αποσπάσματος είναι αδύνατο να κατανοηθεί σωστά χωρίς συνολική εικόνα του διαλόγου. Σύμφωνα με την ανάλυση του Πλατωνικού διαλόγου από τον κ. Νεγρεπόντη η ακολουθία όρων στην οποία αναφέρεται εδώ ο Πλάτων είναι η **άπειρη αναδρομική ακολουθία**

$$En = \alpha > \beta = On > \alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \beta_2 > \dots,$$

με την οποία γεννώνται **κατά την φιλοσοφική ανθυφαιρετική διαδικασία τα υπόλοιπα της δυάδας** $\langle En, On \rangle$, η διάταξη της οποίας είναι η αντίστροφη της διάταξης μεγέθους, καθώς η ανθυφαιρετική ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα.

Άψις είναι ο λόγος δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας.

Με την υπόθεση της περιοδικότητας της φιλοσοφικής ανθυφαίρεσης α προς β , η οποία διατυπώνεται στους στίχους 138α3-7, ο Πλάτων στο χωρίο 148-149 ορίζει τους **διαλεκτικούς αριθμούς**, με μονάδες τα μέρη αυτής της **άπειρης αναδρομικής ακολουθίας**

$$En = \alpha > \beta = On > \alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \beta_2 > \dots,$$

αλλά επιτυγχάνοντας, μέσω της κυκλικότητας, **την εξίσωση** των μονάδων κάθε διαλεκτικού αριθμού, σύμφωνα με την βασική επιταγή που πρέπει να ικανοποιεί κάθε διαλεκτικός αριθμός (Φίληβος 56, Παρμενίδης 526).

Το τμήμα που πρέπει να πληρωθεί για να επιτευχθεί η εξίσωση των μονάδων είναι ότι σε κάθε πλατωνικό ον παράγεται

ΜΟΝΟ πεπερασμένο και όχι άπειρο πλήθος μονάδων, λόγω φυσικά της περιοδικότητας.

Περιγράφουμε τώρα, σύμφωνα με το χωρίο Παρμενίδης 148-149, τον **αναδρομικό ορισμό** των διαλεκτικών αριθμών, και **την επαγωγική απόδειξη** της ισότητας αριθμός μονάδων = άψεις +1, από την οποία προκύπτει η εξίσωση των διαλεκτικών μονάδων.

Ο ορισμός του διαλεκτικού, πλατωνικού, ειδητικού αριθμού βασίζεται στον ορισμό των διαλεκτικών μονάδων οι οποίες ορίζονται από τις άψεις αναδρομικά ως εξής:

Οι δύο αρχικές μονάδες α, β , συγκροτούν τον διαλεκτικό αριθμό δύο, διότι η δυάς $\alpha > \beta$ είναι μία από τις άψεις-λόγους της περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης α προς β .

Εξετάζουμε το αμέσως επόμενο υπόλοιπο α_1 .

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Αν οι άψεις=λόγοι $\alpha/\beta, \beta/\alpha_1$ είναι ίσοι, τότε η διαδικασία παραγωγής νέων μονάδων τελειώνει και ο μεγαλύτερος διαλεκτικός αριθμός που μπορεί να σχηματιστεί είναι ο δύο, διότι δεν υπάρχει δυνατότης παραγωγής νέων άψεων πέραν της αρχικής.

Αν οι άψεις=λόγοι α/β , β/α_1 είναι άνισοι, τότε παράγεται μια νέα άψη β/α_1 , και άρα και μια νέα μονάδα διαλεκτικού αριθμού. Το α_1 είναι η τρίτη μονάδα για τον διαλεκτικό αριθμό τρία, α , β , α_1 .

Εξετάζουμε το αμέσως επόμενο υπόλοιπο β_1 .

Αν οι άψεις=λόγοι β/α_1 , α_1/β_1 είναι ίσοι, τότε η διαδικασία παραγωγής νέων μονάδων τελειώνει και ο μεγαλύτερος διαλεκτικός αριθμός που μπορεί να σχηματιστεί είναι ο τρία, διότι δεν υπάρχει δυνατότης παραγωγής νέων άψεων πέραν των δύο

Αν οι άψεις=λόγοι β/α_1 , α_1/β_1 είναι άνισοι, τότε παράγεται μια νέα άψη α_1/β_1 , και άρα και μια νέα μονάδα διαλεκτικού αριθμού. Το β_1 είναι η τέταρτη μονάδα για τον διαλεκτικό αριθμό τέσσερα, α , β , α_1 , β_1 .

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε σε κάποιο δείκτη κ , ώστε οι λόγοι α/β , $\beta/\alpha_1, \dots, \alpha_{\kappa-1}/\beta_{\kappa-1}$, $\beta_{\kappa-1}/\alpha_{\kappa}$ είναι ανά δύο άνισοι, και $\alpha/\beta_1 = \alpha_{\kappa}/\beta_{\kappa}$.

Στο σημείο αυτό συμπληρώνεται ένας κύκλος της φιλοσοφικής περιοδικής ανθυφαίρεσης, δεν παράγονται πλέον νέες άψεις-λόγοι, και άρα ούτε και νέες μονάδες και ο μεγαλύτερος αριθμός που μπορεί να παραχθεί είναι ο αριθμός με μονάδες α , β , $\dots$, $\alpha_{\kappa-1}$, $\beta_{\kappa-1}$, α_{κ} , δηλαδή ο αριθμός $2\kappa-1$.

Εδώ λοιπόν, με αυστηρά πεπερασμένη αναδρομή συμπληρώνεται η παραγωγή νέων διαλεκτικών μονάδων.

Συγχρόνως δε έχει αποδειχθεί με πεπερασμένη μαθηματική επαγωγή η ακόλουθη

Πρόταση:

Ο αριθμός των όρων=πλήθος άψεων+1.

Το επιχείρημα με το οποίο ο Πλάτων καταλήγει στην ισότητα

αριθμός όρων=άψεις +1

είναι ασφαλώς επαγωγικό, όπως άλλωστε είδαμε και όπως παρατήρησαν οι Wedberg και Acerbi, ωστόσο οι συγγραφείς δεν κατανόησαν ότι η επαγωγή είναι **αυστηρά πεπερασμένη, όχι απλώς** με την έννοια π.χ. της Πρότασης 9.8, όπου το μήκος της επαγωγής είναι πεπερασμένο μεν, αλλά απεριόριστα επεκτάσιμο με την κατά βούληση προσθήκη προσθέτων όρων στην συνεχή ακολουθία (όπως το μήκος της γεωμετρικής ευθείας), **αλλά** με την έννοια π.χ. της Πρότασης 7.1 ή 7.2, όπου το μήκος της επαγωγής καθορίζεται από το μήκος της ανθυφαίρεσης. Εδώ το μήκος της επαγωγής καθορίζεται από το μήκος της περιόδου των λόγων-άψεων.

Επομένως αν με μαθηματική επαγωγή εννοείται η άπειρη επαγωγή, τότε το χωρίο αυτό δεν αποτελεί παράδειγμα τέτοιου είδους μαθηματικής επαγωγής (όπως πιστεύουν οι Wedberg και Acerbi).

Παρατηρήσεις:

Η επαγωγή στον αριθμό των όρων είναι πεπερασμένη, διότι τόσο **ο αριθμός** των όρων όσο και **το πλήθος** των άψεων-λόγων είναι πεπερασμένο, λόγω περιοδικότητας της ανθυφαίρεσης.

Το ‘αεί’ (Παρμενίδης 149b2, c3) δεν δημιουργεί πρόβλημα στο πεπερασμένο της διαδικασίας, όπως δεν δημιουργεί πρόβλημα και η παρουσία του ‘αεί’ στην Πρόταση 7.2 των *Στοιχείων*.

Βιβλιογραφική σημείωση. Το περιεχόμενο του Κεφαλαίου 7 επιχείρημα οφείλεται στον Σ. Νεγρεπόντη, ευρίσκεται στο χειρόγραφο με τίτλο *The periodic anthyphairetic nature of the One of the Second Hypothesis in Plato's Parmenides* και περιλαμβάνεται εδώ με την άδειά του.

Κεφάλαιο 8.

Αποσπάσματα B1 και B3 Ζήνωνος.

Απόσπασμα B1 Ζήνωνος

«προδείξας γὰρ ὅτι “εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν οὐδ’ ἂν εἴη”, ἐπάγει
“εἰ δὲ ἔστιν,
ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ **ἀπέχειν** αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου.
καὶ περὶ **τοῦ προύχοντος** ὁ αὐτὸς λόγος.
καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἔξει μέγεθος καὶ **προέξει** αὐτοῦ τι.

ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν».

Η βασική φράση στην οποία καταλογίζεται ότι δείχνει το επαγωγικό βήμα είναι η τελευταία: «ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν».
Αλλά «*Weell, what I said once (actually more than once, but, then it is the same thing...) is enough this is not mathematical induction, despite the opposite declarations of van der Waerden και Freudental.*» (σελ. 288).²¹

Ο Unguru δεν μελετάει σε βάθος το ίδιο το απόσπασμα B1 του Ζήνωνος, ειδικότερα δεν εξηγεί καθόλου το κρίσιμο νόημα των όρων ‘προέχον’ και ‘ἀπέχον’, στην ερμηνεία των οποίων προηγούμενοι μελετητές όπως ο Βλαστός, βάσισαν την ερμηνεία του αποσπάσματος.

Στην επόμενη παράγραφο θα αναλύσουμε το επιχείρημα B1 του Ζήωνα, το οποίο αναφέρεται από το Συμπλίκιο στο έργο Εἰς Φυσικά. Πεποίθησή μας είναι ότι το επιχείρημα του Πλάτωνα, που παρακολουθήσαμε παραπάνω, και το επιχείρημα B1 του Ζήωνα σχετίζονται άμεσα και είναι σχεδόν σε πλήρη αναλογία.
Όπως και προηγουμένως έτσι κι εδώ στο πρώτο τμήμα 8.1 θα δούμε το απόσπασμα και την ανάλυση αυτού και στο δεύτερο τμήμα 8.2 θα εστιάσουμε στη μαθηματική δομή του επιχειρήματος.

8.1. Συμπλίκιος Εἰς Φυσικά αποσπάσματα B1, B2, B3 του Ζήωνα.

Υπάρχουν τρία αποσπάσματα του Ζήωνα στο έργο του Συμπλίκιου Εἰς Φυσικά, τα οποία προσδιορίζονται ως B1, B2, B3.

Θα φανεί πρακτικό για τη μελέτη μας να διαχωρίσουμε το B1 σε B1- και B1+ και το B3 στο B3- και B3+

8.1.1. Αποσπάσματα B2, B1-, B3- , B3+

Απόσπασμα B2 139, 11-15

“εἰ γὰρ ἄλλω ὄντι, φησί, **προσγένειτο**, οὐδὲν ἂν μεῖζον ποιήσειεν·
μεγέθους γὰρ μηδενὸς ὄντος,
προσγενομένου δὲ οὐδὲν οἶόν τε εἰς **μέγεθος** ἐπιδοῦναι.
καὶ οὕτως ἂν ἤδη **τὸ προσγινόμενον** οὐδὲν εἴη.

²¹ Ο Unguru δεν μελετάει σε βάθος το ίδιο το απόσπασμα B1 του Ζήνωνος, χωρίς εκ των προτέρων ερμηνείες.

εἰ δὲ ἀπογινόμενον τὸ ἕτερον μηδὲν ἔλαττον ἐστὶ,
μηδὲ αὖ προσγινόμενον αὐξήσεται,
δηλον ὅτι τὸ προσγενόμενον οὐδὲν ἦν οὐδὲ τὸ ἀπογενόμενον.”

[(έστω κάτι X το οποίο υπάρχει αλλά έχει μηδενικό μέγεθος, τότε:)
αν προστεθεί σε κάτι άλλο που υπάρχει, δεν το αυξάνει (δεν το κάνει ευρύτερο).
Γιατί αφού (το X) είναι άνευ μεγέθους προστιθέμενο σε κάτι τίποτα δεν προστίθεται που
θα μπορούσε να το αυξήσει κατά μέγεθος.
Και έτσι προκύπτει αμέσως ότι αυτό που προστίθεται δεν είναι τίποτα.
Αν (το X) δε αφαιρεθεί από κάτι άλλο που υπάρχει δεν μειώνει το μέγεθος αυτού,
ούτε πάλι αυξάνεται όταν προστίθεται (το X), τότε ξεκάθαρα το πράγμα που προστίθεται
δεν είναι τίποτα ούτε αυτό που αφαιρείται. (δηλαδή δεν υπάρχει, άρα άτοπο)]

Απόσπασμα B1- 139,18

[[ἕκαστον τῶν πολλῶν καὶ ἀπείρων]] οὐδὲν ἔχει μέγεθος

[[[κάθε ένα από τα πολλά και άπειρα]] δεν έχει μέγεθος]

Απόσπασμα B3- 140,29-31

“εἰ πολλά ἐστίν,

ἀνάγκη

τοσαῦτα εἶναι

ὅσα ἐστὶ

καὶ οὔτε πλείονα

αὐτῶν

οὔτε ἐλάττονα.

Εἰ δὲ

τοσαῦτά ἐστίν

ὅσα ἐστί,

πεπερασμένα ἂν εἴη.

[Εάν υπάρχουν πολλά (όντα), αναγκαστικά
πρέπει να είναι ακριβώς τόσα όσα είναι, ούτε περισσότερα ούτε λιγότερα.
Αλλά αν είναι τόσα όσα είναι, τότε πρέπει να είναι πεπερασμένα.]

Απόσπασμα B3+ 140,31-33

εἰ πολλά ἐστίν,

ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστίν.

ἀεὶ γὰρ

ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστί,
καὶ πάλιν ἐκείνων ἕτερα μεταξύ.
καὶ οὕτως ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστί.

[Εάν υπάρχουν πολλά,
τα όντα που υπάρχουν είναι άπειρα,

δεδομένου ότι μεταξύ των όντων που υπάρχουν πάντα υπάρχουν άλλα, και πάλι άλλα μεταξύ αυτών.

Και ως εκ τούτου, τα όντα που υπάρχουν είναι άπειρα.]

Το απόσπασμα B2, μέσω του οποίου ο Ζήνων δηλώνει ότι το πραγματικό Όν έχει μέγεθος, αντιστοιχεί στην δήλωση του Παρμενίδη 141e9-10, ότι το Έν της πρώτης υπόθεσης, το οποίο είναι εντελώς χωρίς μέρη, δεν είναι πραγματικό Όν.

Έτσι, τόσο το πραγματικό Όν του Ζήωνα όσο και το Έν της δεύτερης υπόθεσης του Παρμενίδη έχουν μέρη.

Να σημειώσουμε επίσης, ότι απόσπασμα B2 είναι ένα επιχείρημα που δεν προκύπτει ως αντίφαση της υπόθεσης «εί πολλά έστιν».

8.1.1.1. Η ερμηνεία του B3+ ένεκα του παραρτήματος 8.1.1.1.A.

Λαμβάνοντας υπόψη την απόδοση της λέξης «μεταξύ», όχι κυριολεκτικά σαν μεταξύ-ανάμεσα, αλλά ως «απογόνος», «έκγονον», όπως χρησιμοποιείται από τον Πλάτωνα σε αρκετές περιπτώσεις (που αναφέρονται στο Παράρτημα 8.2.2.A. παρακάτω), το απόσπασμα B3+ αφορά την παραγωγή των μερών από τα ζεύγη των υφιστάμενων:

«Αν υπάρχουν πολλά πράγματα,

τα πράγματα που υπάρχουν είναι άπειρα στο πλήθος,

γιατί πάντα

υπάρχουν και άλλοι απόγονοι που παράγονται από τα ήδη υπάρχοντα όντα

και πάλι άλλοι απόγονοι που παράγονται από αυτά »

8.1.1.1.A. Παράρτημα

Η έννοια του «μεταξύ» στο B3+ ως «έκγονον», απογόνος.

Για να κατανοήσουμε το δεύτερο μισό, B3+, του αποσπάσματος B3, είναι σημαντικό να κατανοήσουμε την έννοια με την οποία ο Ζήνων χρησιμοποιεί τη λέξη «μεταξύ». Με την πιο προφανή ερμηνεία κάτι είναι «μεταξύ» δύο αντικειμένων εάν είναι ενδιάμεσο και διαχωρίζει αυτά τα δύο αντικείμενα, με μια σιωπηρή συμφωνία, και ως εκ τούτου το επιχείρημα του Ζήωνα φαίνεται να είναι ένα επιχείρημα «πυκνότητας» (π.χ. η πυκνότητα των ρητών αριθμών σημαίνει ότι αν δίνονται οποιοιδήποτε δύο αριθμοί, θα υπάρχει πάντα ένας άλλος μεταξύ τους), αυτό λοιπόν οδηγεί σε άπειρα μέρη. Στην πραγματικότητα, αυτή είναι η ερμηνεία που οι Fraenkel, 1942 και Βλαστός, αποδίδουν στη λέξη «μεταξύ» του B3.

Όπως θα δούμε, η λέξη «μεταξύ» έχει άλλο νόημα και είναι κρίσιμης σημασίας για την περιγραφή της γένεσης στον Πλάτωνα, όπου ένα ον είναι ανάμεσα σε δύο άλλα, όχι αν διαχωρίζει αυτά τα δύο πράγματα, αλλά αν αυτό το ον παράγεται από αυτά τα δύο άλλα πράγματα , και ως εκ τούτου είναι ένας απόγονος αυτών των δύο.

Στον Φαίδωνα 71a12-b4, 71c6-7

δύο όντα «έναντία αλλήλων» για παράδειγμα το μεγαλύτερο και το μικρότερο, («Ετέρα» στο Σοφιστή), δίνουν δύο «γεννήσεις», μεταξύ αυτών των δύο όντων.

Είναι σαφές ότι τα πράγματα που είναι «μεταξύ» των αρχικών όντων αυτής της γέννησης, ενέχουν το ρόλο των απογόνων.

Στον Θεαίτητο 153e4-a2, 157c6-158b8, 182a3-b7

τα δύο αντίθετα όντα είναι «το ενεργό» φως (ή η «ταχύτητα», το γρήγορο) και «το παθητικό» μάτι (ή η «βραδύτητα», το αργό), που πληρούν το δίδυμο «γένεσις» του «οράματος» και του «χρώματος», κάθε ένα από αυτά χαρακτηρίζετε ως «παραγόμενο» («γεγεννημένον», «γενόμενος», «γιγνόμενα»), και «**μεταξύ**» των δύο αρχικών μερών.

Στον Τίμαιο 50c7-d4

η «γένεσις» περιγράφεται ως το αποτελούμενο από «τὸ δ' ὅθεν πατρί» και την «μὲν δεχόμενον μητρί» και το «**μεταξύ**» ως τον απόγονο αυτής της «γένεσις» («τὴν δὲ μεταξύ τούτων φύσιν ἐκγόνω,»).

Πάλι εδώ έχουμε μια σαφή ερμηνεία του «**μεταξύ**» ως απόγονο της «γένεσις».

Η έννοια του «**μεταξύ**» ως απόγονος, είναι διατηρημένη και από τον Συμπλίκιο Εἰς Φυσικά, στα χωρία:

186,8-15

(όπου εξηγεί ότι στη Γένεση το «**μεταξύ**» είναι "όχι αυτό που διαχωρίζει δύο άλλα, αλλά εκείνο-α που δημιουργείται από δύο άλλα, «πᾶν ἂν γίνοιτο τὸ γινόμενον καὶ φθείροιτο τὸ φθειρόμενον ἢ ἐξ ἐναντίων ἢ εἰς ἐναντία καὶ τὰ τούτων **μεταξύ**».

μεταξύ δὲ

οὐ τὰ κεχωρισμένα ἀμφοῖν,
ἀλλὰ τὰ ἐξ ἀμφοῖν συνεστῶτα»).

186,36-187,9 και 223,24-26

(Όπου περιγράφει το «**μεταξύ**» ακριβώς όπως στο Τίμαιο: «Και μπορούμε να παρομοιάσουμε την αρχή λήψης με μια μητέρα, και την πηγή ή την άνοιξη με έναν πατέρα, και στο ενδιάμεσο της φύσης σε ένα παιδί", Τίμαιος 50d, 2-4).

Μπορεί κάποιος να δει επίσης τα χωρία 284,9 και 313,16.

Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω αλλά και λόγο της αντιστοιχίας του επιχειρήματος με τον Πλατωνικό διάλογο, στην δική μας ανάλυση η απόδοση της λέξης «**μεταξύ**», που προτείνουμε και θα χρησιμοποιήσουμε, είναι ως «απόγονος», «ἐκγονον».

8.1.2. Το απόσπασμα B1+ και η ανθυφαιρετική ερμηνεία αυτού, ανάλογη με το χωρίο 142d4-143a3 του Πλατωνικού διαλόγου Παρμενίδης.

Απόσπασμα B1+ 141, 2-6

“εἰ δὲ ἔστιν,
ἀνάγκη

ἕκαστον [B]

μέγεθός τι ἔχειν καὶ **πάχος**

καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ [B]

τὸ ἕτερον [b] ἀπὸ τοῦ ἑτέρου [a].

καὶ περὶ τοῦ προύχοντος [a] ὁ αὐτὸς λόγος.

καὶ γὰρ ἐκεῖνο [a]

ἔξει **μέγεθος**

καὶ προέξει αὐτοῦ [a] τι [x].

ὅμοιον δὴ τοῦτο

ἄπαξ τε εἰπεῖν

καὶ ἀεὶ λέγειν·

οὐδὲν γὰρ

αὐτοῦ [a] τοιοῦτον [x]

ἔσχατον

ἔσται

οὔτε

ἕτερον [a] πρὸς ἕτερον [b]

οὐκ

ἔσται. 141,6

[Αν λοιπόν υπάρχει, το καθένα (πράγμα) πρέπει να έχει κάποιο μέγεθος και πάχος, και το ένα μέρος του να απέχει από το άλλο.

Και το ίδιο σκεπτικό ισχύει όσον αφορά το μέρος που προέχει (το μεγαλύτερο μέρος).

Γιατί και εκείνο έχει μέγεθος, και προέχον μέρος.

Μάλιστα, το να το πω αυτό μία φορά είναι το ίδιο πράγμα με το να συνεχίσω να το λέω για πάντα. Γιατί κανένα τέτοιο μέρος δεν θα είναι το τελευταίο ούτε θα υπάρχει κανένα τέτοιο μέρος που να μην συνδέεται με (ένα) άλλο.]

Θα υποστηρίξουμε ότι το απόσπασμα B1+ πρέπει να αποδοθεί με τον ακόλουθο, σαφώς ανθυφαιρετικό, τρόπο:

«Είναι αναγκαίο

κάθε τμήμα [B] να έχει μέγεθος και πάχος («πάχος») και

ένα μέρος [b] που είναι ελλιπές («ἀπέχειν») σε σχέση με το άλλο μέρος [a].

Και όσον αφορά το τμήμα που υπερβαίνει («προύχοντος») [α], ισχύει η ίδια συλλογιστική [Όπως και για το μέρος B].

Επειδή

αυτό το [α], επίσης, θα έχει μέγεθος

και ένα μέρος [b] του [α] θα είναι πλεονάζον («προέξει»).

Και το ίδιο ισχύει και εάν αυτό το πούμε μία φορά («ἄπαξ»)

και εάν αναφέρεται για πάντα («ἀεὶ»).

Επειδή

δεν υπάρχει τελευταίο μέρος

πλεονάζον [ck + 1] του μέρους [ck], και

δεν υπάρχει μέρος [ck], το οποίο δεν είναι

άλλο σε κάποιο άλλο [CK-1].»

• 141, 2-6

Ξεκινάμε με οποιοδήποτε μέρος B, το οποίο υπάρχει άρα έχει μέγεθος (σύμφωνα με το επιχείρημα B2) και ένα μέρος b που είναι το έτερον απέχον του B, και ένα μέρος a που είναι το έτερον προέχον του B.

([141,2-3] ‘εἰ δὲ ἔστιν,

ανάγκη

**ἔκαστον [B] μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος
καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ [B] τὸ ἕτερον [b] ἀπὸ τοῦ ἑτέρου [a]'**)

Ἐτσι το B εἶναι το ὅλον, καὶ ἀποτελεῖται ἀπὸ μία δυνάδα ἀπὸ ἕτερα, το ἓνα τοῦ ἄλλου, ἓνα προέχον a καὶ ἓνα ἄλλο ἀπέχον b, ἐπομένως ἔχουμε:

$B = a + b$, καὶ $a > b$.

Συνεχίζοντας μας λέει ὅτι το μέρος a πρέπει νὰ ἀντιμετωπίζεται με τὸν ἴδιο τρόπο ὡς καὶ το B.

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ ἔχει μέγεθος καὶ δύο μέρη ἓνα ἕτερον προέχον καὶ ἓνα ἕτερον ἀπέχον.

([141, 3-4] «καὶ περὶ τοῦ προέχοντος [a] ὁ αὐτὸς λόγος».)

[141,4-5] «καὶ γὰρ ἐκεῖνο [a] ἔξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ [a] τι. [b]»)

Γνωρίζουμε ἤδη ὅτι το a ἔχει μέγεθος, σύμφωνα με το B₂, δεδομένου ὅτι βρισκόμαστε σὲ ἓνα ἀληθινὸ ὄν καὶ τὰ μέρη a, b ὑπάρχουν, καὶ ὅτι $a > b$, ἀφοῦ το a εἶναι το προέχον καὶ το b το ἀπέχον.

Τώρα, μας λέει ὅτι το προέχον μέρος a ἔχει ἓνα προέχον («προέξει τι»).

Δεν εἶναι ἀμέσως σαφές ποιο εἶναι το προέχον τοῦ a, δηλαδὴ «προέξει τι αὐτοῦ».

Αλλὰ σὲ αὐτὸ το σημεῖο ὑπάρχει ζωτικὴ σημασίας βοήθεια ἀπὸ το ἀπόσπασμα τοῦ Συμπλίκιου **139, 17-18**, το ὁποῖο ἀναφέρετε ἀκριβῶς στο B1 ἐπιχείρημα τοῦ Ζήνωνα:

«πρὸ τοῦ λαμβανομένου αἰεί τι εἶναι

διὰ τὴν ἐπ' ἄπειρον τομήν»

Το πρῶτο «λαμβανομένου» στο χωρίο αὐτὸ εἶναι το μέρος a, καὶ το ἀπόσπασμα τοῦ Συμπλίκιου, δηλώνοντας ὅτι «πρὸ τοῦ λαμβανομένου αἰεί τι εἶναι», συμφωνεῖ με τὴν δήλωση τοῦ Ζήνωνα «προέξει αὐτοῦ τι». Αλλὰ καίρια ὁ Συμπλίκιος προσθέτει «διὰ τὴν ἐπ' ἄπειρον τομήν», σὲ τὴν προκειμένη περίπτωση μέσω τῆς διαίρεσης τοῦ μέρους B στο προέχον μέρος a καὶ το ἀπέχον μέρος b. Ἐτσι, το προέχον τοῦ a, το ὁποῖο πρέπει νὰ εἶναι ἓνα μέρος τοῦ a, πρέπει νὰ προέρχεται ἀπὸ τὴν διαίρεση τοῦ B σὲ a καὶ b. Αλλὰ το μόνον μέρος ἐκτὸς τοῦ a σὲ αὐτὴ τὴν διαίρεση εἶναι το ἀπέχον μέρος b τοῦ B. Ἐτσι, το προέχον μέρος τοῦ a εἶναι το μέρος b.

Ἐπομένως, το μέρος a ἔχει ἓνα προέχον μέρος b. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι το a ἔχει καὶ ἓνα ἄλλο συμπληρωματικὸ τμήμα το ὁποῖο εἶναι το ἀπέχον ἕτερον.

Σὲ αὐτὸ το σημεῖο ἓνα νέο τμήμα πρέπει νὰ παραχθεῖ το ἀπέχον ἕτερον τοῦ μέρους a.

Ὁ Πλάτων στὸν Παρμενίδη, σὲ αὐτὸ το σημεῖο, γράφει:

«Καὶ το μικρότερον μέρος («τὸ μῶριον τὸ ἐλάχιστον») παράγεται ἀπὸ τὰ δύο υφιστάμενα τμήματα» (142e4-5).

Ὁ Ζήνων, στο B1+ ἔχει ἤδη πει ὅτι το ὑπάρχον μέρος b εἶναι το προέχον, το μεγαλύτερο, μέρος τοῦ a, ὁπότε χρειάζεται μόνον νὰ δημιουργήσῃ το δεύτερο μέρος ὡς «ἕτερον», το ὁποῖο θὰ εἶναι αὐτόματα το ἀπέχον, το μικρότερο ἕτερον μέρος.

Ὡστόσο, ἡ παραγωγή τῶν μερῶν δεν ἀναφέρεται καθόλου στο B1+, ἀλλὰ ὑπάρχει ἡ γένεση τῶν «ἑτέρων» ἀπὸ τὰ ἤδη ὑπάρχοντα τμήματα στο B3+ («αἰεὶ γὰρ ἕτερα [c₁] μετὰ τῶν ὄντων [a>b] ἐστὶ', *Εἰς Φυσικά* 140,32),

το ὁποῖο ταιριάζει ἐδῶ, δεδομένου ὅτι ἕτερον μέρος εἶναι ἀκριβῶς αὐτὸ που χρειάζεται.

Ἐτσι, σὲ αὐτὸ το σημεῖο, κατ' ἀναλογία με το B3+, καὶ ὡς ὁ Πλάτωνας ἀργότερα

προσθέτει στην δική του εκδοχή στον Παρμενίδη 142e4,6, το τμήμα «απέχον έτερον», τμήμα $c_1=a-b$ παράγεται.

Το αποτέλεσμα, ακριβώς όπως ανακοινώθηκε στο Εις Φυσικά 141,3-4, είναι ότι το προέχον μέρος a πράγματι αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο όπως και το αρχικό τμήμα B , δεδομένου ότι
το a έχει μέγεθος,
το b είναι το προέχον έτερον του a , το c_1 είναι το απέχον έτερον του a , οπότε:
 $a = b+c_1$, με $b > c_1$.

*«ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαζ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν·
οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ $[c_k]$ τοιοῦτον $[c_{k+1}]$ ἔσχατον ἔσται
οὔτε ἔτερον $[c_k]$ πρὸς ἔτερον $[c_{k-1}]$ οὐκ ἔσται.»*

Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται τώρα για πάντα.
Από το ζεύγος έτερον προς έτερον του προέχοντος $c_k >$ απέχοντος c_{k+1} ,
πάμε, μέσω μιας εναλλαγής ρόλων, από το απέχον $[c_{k+1}]$ και το προέχον $[c_k]$, στο
προέχον $[c_{k+1}]$ του προέχοντος $[c_k]$,
πάμε, στην παραγωγή, του ζεύγους έτερον προς έτερον του προέχοντος $c_{k+1} >$
απέχοντος c_{k+2} .

Έτσι τα επιχειρήματα B1+ [Συμπλίκιος 141,2-6] και B3+ [Συμπλίκιος 140, 31-33]
περιγράφουν μια άπειρη ανθυφαίρεση που συμπίπτει ουσιαστικά με την άπειρη
ανθυφαίρεση που περιγράφεται στον Παρμενίδη 142d4-145a3.

Παράγονται έτσι οι ακόλουθες σχέσεις:

$$B=a+b, b<a,$$

$$a=b+c_1, c_1<b,$$

...

$$c_n=c_{n+1}+c_{n+2}, c_{n+2}<c_{n+1},$$

...

και μια άπειρη ανθυφαιρετική διαίρεση περιγράφεται
ξεκινώντας με μια δυάδα $\langle a, b \rangle$ σε ένα όλον B ,
που αντιστοιχεί στην άπειρη ανθυφαιρετική διαίρεση του Έν
στον Παρμενίδη 142d4-143a3.

Προς τούτο κρίνουμε σκόπιμο να συγκρίνουμε την άπειρη ανθυφαίρεση του Πλάτωνα
στον Παρμενίδη του Οντος Έν με την άπειρη ανθυφαίρεση του επιχειρήματος B1+ του
Ζήνωνα .

Ένα πλήρες βήμα στο κοινό επιχείρημα διχοτόμησης B1+ & B3+ του Ζήνωνα	Ένα πλήρες βήμα στον Παρμενίδη 142d4-143e3
--	---

Το όλον B έχει Ένα προέχον έτερον a και ένα απέχον μέρος b. $B=a+b$, με $a>b$.	Το όλον B έχει Έν a και Όν b, με $a>b$.
Το προέχον a έχει το b ως προέχον.	Το Έν a έχει ως μέρος το Όν b
Το προέχον a και το προέχον του a, δηλαδή το b παράγουν το έτερον μέρος $a1=a-b$. [B3+]	Το Έν a και το Όν b παράγουν το μικρότερο μέρος Έν1 $=a1=a-b$
Αφού το b είναι το προέχον έτερον του a, Το νέο έτερον a1 είναι το απέχον του a. Έτσι $a=b+a1$, με $b>a1$	Έτσι το Έν a ως μέρη ένα Όν b και ένα Έν1 Έν a = Όν b + Έν1, με $b>a1$.

Παρατηρούμε ότι τα βήματα του Παρμενίδη και του Ζήνωνα είναι παρόμοια και συνδέονται στενά, με δύο διαφορές: (α) στο B1+ δεν υπάρχει καμία αναφορά σε δημιουργία ενός νέου στοιχείου από τα δύο προηγούμενα, όπως στο απόσπασμα του Παρμενίδη, αλλά ένα τέτοιο βήμα εμφανίζεται στο Ζήωνα στο B3+, και, (β) η κρίσιμη ανθυφαιρετική σχέση $a = b + a1$, $b > a1$, αποδεικνύεται στο Ζήωνα στο απόσπασμα B3+ μέσω της δήλωσης ότι το b είναι το προέχον μέρος του a, ενώ στον Παρμενίδη, μέσω της δήλωσης ότι το a1 είναι το μικρότερο μέρος του a.

8.2.1.A. Παράρτημα

Η έννοια του «απέχειν», «προέχειν» στο B1+, ως ελλιπές, πλεονάζον, αντίστοιχα.

Ζωτικής σημασίας στο B1+ είναι οι λέξεις «απέχειν», «προέχειν».

Οι Fraenkel και Βλαστός έχουν ερμηνεύσει τις λέξεις αυτές σχεδόν ως συνώνυμες.

--G. Vlastos, Review of H. Fraenkel's *Wege und Formen Fruehgriechischen Denkens*, Gnomon 31 (1959), 193-204

--Studies in Greek Philosophy Gregory Vlastos Volume 1: the Presocratics, edited by D.W.Graham, Princeton University Press, p. 164-179

Αλλά αυτό είναι σε διαφωνία με τη χρήση αυτών των λέξεων στην ελληνική γλώσσα, όπου η σημασία τους είναι αντίθετη η μία της άλλης, «απέχειν» ελλιπές, «προέχειν» πλεονάζον.

Παραθέτουμε εδώ είναι ένα δείγμα αυτής της χρήσης.

Πολιτεία 484d5-10 (προέχειν, αντίθετο του ελλείπειν)	
	Πολιτεία

	571c7-d4 (ἀπέχειν, συνώνυμο του ἐλλείπειν)
Diodorus, <i>Bibliotheca historica</i> 12,79,6,1-2 (proechonta, opposite to leipomena)	
	Galenus, <i>de temperamentis</i> 1,691,1-8 (apechein, synonymous to apoleipesthai)
Πρόκλος, Πλατωνική Θεολογία 2,27,4-28,2 (proechei. opposite to hupoleipesthai)	
Πρόκλος, Πλατωνική Θεολογία 4,33,2-16 (proechei, opposite to apoleipein)	
Πρόκλος, <i>Εἰς Ευκλείδη</i> 4,16-5,10 (proechonta, opposite to leipomena)	
proechein, synonymous to pleonazein, huperechein, Opposite of elleipein	apechein, synonymous to elleipein

Πολιτεία 484d5-10 (προέχειν, αντίθετο του ἐλλείπειν)

Τούτους οὖν μᾶλλον φύλακας στησόμεθα	
	ἢ τοὺς ἐγνωκότας μὲν ἕκαστον τὸ ὄν, ἐμπειρία δὲ μηδὲν
ἐκείνων	
	ἐλλείποντας μηδ' ἐν ἄλλῳ μηδενὶ μέρει ἀρετῆς ὕστεροῦντας;
	Ἄτοπον μεντᾶν, ἔφη, εἴη
ἄλλους αἰρεῖσθαι,	
	εἴ γε τᾶλλα μὴ ἐλλείποιντο· τούτῳ γὰρ αὐτῷ σχεδόν τι τῷ μεγίστῳ ἂν προέχοιεν.

Πολιτεία 571c7-d4 (ἀπέχειν, συνώνυμο του ἐλλείπειν)

οἶσθ' ὅτι
πάντα ἐν τῷ τοιούτῳ τολμᾷ ποιεῖν,

ὥς ἀπὸ πάσης λελυμένον τε καὶ ἀπηλλαγμένον αἰσχύνης καὶ φρονήσεως.
μητρὶ τε γὰρ ἐπιχειρεῖν μείγνυσθαι, ὥς οἶεται,
οὐδὲν ὀκνεῖ, ἄλλω τε ὁτφοῦν ἀνθρώπων καὶ θεῶν καὶ θηρίων, μαιφονεῖν τε ὁτιοῦν,
βρώματός τε **ἀπέχεσθαι μηδενός**
καὶ ἐνὶ λόγῳ οὔτε ἀνοίας οὐδὲν ἐλλείπει οὔτ' ἀναισχυντίας.

Galenus, de temperamentis 1,691,1-8 (ἀπέχειν, συνώνυμο του ἀπολείπεσθαι)

ταῦτα τ' οὖν διορίζεσθαι καὶ πειρᾶσθαι	
κατὰ τὸ ποσὸν τῆς ἀπλῆς διαθέσεως	
	ἐξευρίσκειν τὸ ποσὸν τῆς τοῦ φαρμάκου δυνάμεως,
οἶον	
εἰ ἄκρως ἢ διάθεσις θερμῇ,	
	καὶ τὸ φάρμακον ἄκρως εἶναι ψυχρόν,
εἰ δ' ὀλίγον ἀπολείποιο τῆς ἀκρότητος ἢ διάθεσις,	
	ὀλίγον χρὴ καὶ τὸ φάρμακον ἀπολείπεσθαι,
κἂν εἰ πλεον ἀπέχοι τῆς ἄκρας θερμότητος ἢ διάθεσις,	
	ἀνάλογον ἀπέχειν τῆς ἄκρας ψυχρότητος τὸ φάρμακον.

**Πρόκλος, Πλατωνική Θεολογία 2,27,4-28,2
(προέχει, ἀντίθετο του ὑπολείπεσθαι)**

Εἰ δὲ ἄπειρα πρὸς τὸ κάτω,
πότερον
καὶ ἕκαστον αὐτῶν ἄπειρον κατωτέρω χωροῦν αἰεί,
καθάπερ καὶ τὰ πάντα φαμέν,
ἢ πεπέρασται μὲν ἕκαστον
ὅλον ἄπειρα δὲ τὰ ἐκ τούτων αἰεὶ γινόμενα τὰ ὄντα;

Εἰ μὲν γὰρ καὶ τῶν ὄντων ἕκαστον
κατὰ τὴν ἀρχὴν ὠρισμένον τὴν ἑαυτοῦ
κατὰ τὴν τελευτὴν ἄπειρόν ἐστίν,
οὔτε ἐν τοῖς μέρεσιν
οὔτε ἐν ὅλοις
τοῖς οὖσιν
ἐπιστροφή τῶν ὄντων ἔσται
πρὸς τὴν οἰκείαν ἀρχήν,
οὐδὲ
ὑποστήσεται ποτε
τὸ τῇ τάξει δεύτερον ὁμοιούμενον
τῷ ἐσχάτῳ τοῦ προϋπάρχοντος,

ὥσπερ δὴ πολλαχοῦ λέγομεν
τὰς ἀκρότητας τῶν ὑφειμένων
συνάπτειν
τοῖς πέρασι τῶν ἀνωτέρω·

οὐδενὸς γὰρ ὄντος ἐσχάτου,

τίς μηχανή
τὴν τοιαύτην ὁμοιότητα τῆς προόδου
καὶ τὴν ἀλληλουχίαν τῶν ὄντων
ὑπολείπεσθαι,
καθ' ἣν αἰεὶ τὰ δεύτερα συνῆπται τοῖς πρὸ αὐτῶν;

Εἰ δὲ
τὰ πάντα
μόνον
ἔχει τὴν τοιαύτην ἀπειρίαν,
ἐκάστου πρὸς τὸ μετ' αὐτὸ περαίνοντος,
τὰ ὅλα
τῶν μερῶν
ἔσται καταδεέστερα
καὶ τὰ μέρη
τῶν ὅλων
τελεώτερα κατὰ φύσιν.

Τὰ μὲν γὰρ **ἀνεπίστροφα**

πρὸς τὴν ἀρχὴν ἔσται τὴν πρὸ αὐτῶν,

τὰ δὲ ἐπιστρέφει

μετὰ τὴν πρόοδον·

ὅσῳ δὴ **προέχει** τὸ συνάπτεσθαι
πρὸς τὸ τελειότερον,
τοσοῦτον, οἶμαι,
καὶ **τῶν ὄντων ἕκαστον**

παντὸς ὁμοῦ τοῦ ὄντος

προέχειν ἀναγκαῖον,

[καὶ] εἶπερ εἰς ἄπειρον χωροῦντος <τοῦ> ὅλου

τοῦτο συνελίττεται πρὸς τὴν ἀκρότητα τὴν ἑαυτοῦ
καὶ κατὰ κύκλον ἐπιστρέφει
καὶ τελειοῦται κατὰ τὴν τοιαύτην ἐπιστροφὴν.

Πρόκλος, Πλατωνικὴ Θεολογία 4,33,2-9 (προέχει, ἀντίθετο τοῦ ἀπολείπειν)

Καὶ διὰ ταῦτα ὁ Πλάτων	
	ἐκείνην μὲν προσεῖρηκεν ἐν ὧν,
ταύτην δὲ οὐσίαν τὴν ὄντως οὖσαν.	
	Ἐκείνη μὲν γὰρ ἀπλότητι θαυμαστῇ καὶ κρυφίῳ
τοῦ ὄντος	
	ἐνότητι

	προέχει
τῶν ὄντων ἀπάντων	
	(αὐτὸ γάρ ἐστι νοητὸν τὸ ὄν ἐκεῖνο, καὶ οὐ
πῇ μὲν νοητόν, πῇ δὲ νοερόν,	
	οὐδὲ
πεπονθὸς τὸ ὄν,	
	ἀλλ' ἐστία καὶ μονὰς ἢ πρεσβυτάτη τοῦ ὄντος)·
αὕτη δὲ ἡ τάξις	
	τῆς ἐνώσεως ἐκείνης
ἀπολείπεται καὶ μετέχει τοῦ ὄντος, ἀλλ' οὐ	
	τὸ ἀπλῶς ἐστὶν ὄν.

Πρόκλος, *Εἰς Εὐκλείδη 4,16-5,10*

(προέχοντα, συνώνυμο του πλεονάζοντα, αντίθετο του λειπόμενα)

		καὶ τὰ μὲν νοητὰ πάντων ὑπερήπλωται ταῖς ἐνοειδέσιν ὑπάρξεσι,
τὰ δὲ αἰσθητὰ τοῖς πᾶσιν ἀπολείπεται τῶν πρώτων οὐσιῶν.		
	τὰ δὲ μαθηματικὰ καὶ ὅλως τὰ διανοητὰ μέσσην κεκλήρωται τάξιν,	
		τῶν μὲν
	τῇ διαιρέσει πλεονάζοντα,	
τῶν δὲ		
	τῇ αὐλῷ προέχοντα, καὶ	
		τῶν μὲν
	τῇ ἀπλότητι λειπόμενα,	
τῶν δὲ		
	τῇ ἀκριβείᾳ προυπάρχοντα καὶ τρανεστέρας μὲν ἐμφάσεις ἔχοντα	
τῶν αἰσθητῶν		
	τῆς νοητῆς οὐσίας, εἰκόνες δὲ ὅμως ὄντα καὶ μεριστῶς μὲν	

		τὰ ἀμέριστα,
	πολυειδῶς δὲ	
		μονοειδῆ παραδείγματα τῶν ὄντων
	ἀπομιμούμενα καὶ ὥς συλλήβδην εἶπεῖν ἐν προθύροις μὲν τεταγμένα	
		τῶν πρώτων εἰδῶν
	καὶ ἐκφαίνοντα	
		τὴν ἡνωμένην καὶ ἀμερῇ καὶ γόνιμον ἐκείνων ὑπαρξιν,
	οὕτω δὲ ἄρα	
	τοῦ μερισμοῦ καὶ τῆς συνθέσεως τῶν λόγων	
	ὑπερέχοντα	
	καὶ τῆς προσηκούσης ταῖς εἰκόσιν ὑποστάσεως, οὐδὲ	
	ὑπερδράμοντα	
	τὰς ποικίλας καὶ διεξοδικὰς τῆς ψυχῆς νοήσεις καὶ αὐταῖς συναρμολογούμενα ταῖς ἀπλάϊς καὶ ὕλης ἀπάσης καθαρευούσαις γνώσεσιν.	

Βιβλιογραφική σημείωση. Το περιεχόμενο του Κεφαλαίου 8 επιχείρημα οφείλεται στον Σ. Νεγρεπόντη, ευρίσκεται στο χειρόγραφο με τίτλο *The periodic anthyphairetic nature of the One of the Second Hypothesis in Plato's Parmenides* και περιλαμβάνεται εδώ με την άδειά του.

Κεφάλαιο 9.

Αρχιμήδης, Περί Ελίκων: Αναδρομή και επαγωγή στη Γεωμετρία

Ένα τμήμα του Κώδικα του Αρχιμήδη είναι το έργο του *Περί Ελίκων*, το οποίο αποτελείται από επτά ορισμούς, είκοσι οκτώ προτάσεις και πέντε πορίσματα. Από το έργο αυτό για την παρούσα μελέτη ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι Προτάσεις 10 και 11. Η Πρόταση 10 σχετίζεται με το άθροισμα $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ καθώς και με το $1 + 2 + \dots + n$, τα οποία επαναλαμβάνονται σε πολλούς μεταγενέστερους μαθηματικούς που θα μας απασχολήσουν στα επόμενα κεφάλαια. Επιπρόσθετα, οι προτάσεις αυτές του Αρχιμήδη έχουν χαρακτηριστεί ως επαγωγικές. Η δική μας θέση είναι αντίθετη ως προς αυτό. Παρά ταύτα, μελετώντας συνολικά το συγκεκριμένο έργο, μπορεί εύκολα κανείς να παρατηρήσει ότι ο συγγραφέας στο *Περί Ελίκων* φλερτάρει έντονα με την επαγωγή. Διακρίνονται: επαγωγικοί ορισμοί, προτάσεις που προσφέρονται για επαγωγική απόδειξη, «επαγωγική» διάταξη των προτάσεων (Προτ. Α: κάποια ιδιότητα για την 1^η περίπτωση, Προτ. Β: η ίδια ιδιότητα για την 2^η περίπτωση, Πόρισμα: γενικεύει για κάθε περίπτωση). Παρόλα αυτά, δεν φαίνεται να χρησιμοποιεί την επαγωγική μέθοδο στις αποδείξεις του. Όμως, στην προτελευταία πρόταση του έργου έχουμε τελικά επαγωγική απόδειξη. Μία αρκετά περίπλοκη απόδειξη, που η σχολαστική της ανάλυση δεν αφήνει αμφιβολίες για την ορθότητα του προηγούμενου ισχυρισμού. Προτείνουμε έτσι, για πρώτη φορά στην βιβλιογραφία, ως επαγωγική την Πρόταση 27, στην οποία όμως στην παρούσα εργασία θα αναφερθούμε συνοπτικά.

Παρατίθενται επίσης οι ορισμοί, από το αρχαίο κείμενο αλλά και σε μετάφραση, μιας και ορισμένοι από αυτούς ορίζουν με ανδρομικό τρόπο γεωμετρικά αντικείμενα, γεγονός που, όπως έχουμε δει, δημιουργεί πρόσφορο έδαφος για την ανάπτυξη της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής. Τέλος, παρουσιάζονται οι διατυπώσεις των Προτάσεων 24 και 25 καθώς και το Πόρισμα που ακολουθεί μετά από αυτές. Οι προτάσεις αυτές σχετίζονται με την απόδειξη της Πρότασης 27 και επιπλέον λειτουργούν ως παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο διατάσσονται, σε αρκετές περιπτώσεις, από τον συγγραφέα οι προτάσεις στο εν λόγω έργο. Αυτά τα δύο στοιχεία, οι ορισμοί και η διάταξη των προτάσεων, μαρτυρούν την συσχέτιση, που προαναφέραμε, μεταξύ του *Περί Ελίκων* και της μαθηματικής επαγωγής.

9.1. Ορισμοί του έργου *Περί Ελίκων*

ΟΡΟΙ

α'. Εἴ κα εὐθεῖα ἐπιζευχθῇ γραμμὰ ἐν ἐπιπέδῳ καὶ μένοντος τοῦ ἑτέρου πέρατος αὐτᾶς ἰσοταχέως περιενεχθεῖσα ὅσακισοῦν ἀποκατασταθῇ πάλιν, ὅθεν ὥρμασεν, ἅμα δὲ τᾶ γραμμᾷ περιανομένη φέρηται τι σαρμεῖον ἰσοταχέως αὐτὸ ἑαυτῷ κατὰ τᾶς εὐθείας ἀρξάμενον ἀπὸ τοῦ μένοντος πέρατος, τὸ σαρμεῖον ἔλικα γράψει ἐν τῷ ἐπιπέδῳ.

β'. Καλείσθω οὖν τὸ μὲν πέρας τᾶς εὐθείας τὸ μένον περιανομένης αὐτᾶς ἀρχὰ τᾶς ἔλικος.

γ'. Ἀ δὲ θέσις τᾶς γραμμᾶς, ἀφ' ἧς ἀρξάτο ἡ εὐθεῖα περιφέρεισθαι, ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς.

δ'. Εὐθεῖα, ἂν μὲν ἐν τᾷ πρώτῳ περιφορᾷ διαπορευθῇ τὸ σαρμεῖον τὸ κατὰ τᾶς εὐθείας φερόμενον, πρώτα καλείσθω, ἂν δ' ἐν τᾷ δευτέρῳ περιφορᾷ τὸ αὐτὸ σαρμεῖον διανύσῃ, δευτέρα, καὶ αἱ ἄλλαι ὁμοίως ταύταις ὁμωνύμως ταῖς περιφοραῖς καλείσθωσαν.

ε'. Τὸ δὲ χωρίον τὸ περιλαφθὲν ὑπὸ τε τῆς ἑλικος τῆς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τῆς εὐθείας, ἃ ἐστὶν πρώτη, πρῶτον καλείσθω, τὸ δὲ περιλαφθὲν ὑπὸ τε τῆς ἑλικος τῆς ἐν τῇ δευτέρᾳ περιφορᾷ γραφείσας καὶ τῆς εὐθείας τῆς δευτέρας δεύτερον καλείσθω, καὶ τὰ ἄλλα ἐξῆς οὕτω καλείσθω.

ζ. Καὶ εἴ κα ἀπὸ τοῦ σαμείου, ὃ ἐστὶν ἀρχὰ τῆς ἑλικος, ἀχθῇ τις εὐθεῖα γραμμή, τῆς εὐθείας ταύτας τὰ ἐπὶ τὰ αὐτά, ἐφ' ἧ κα ἡ περιφορὰ γένηται, προαγουμένα καλείσθω, τὰ δὲ ἐπὶ θάτερα ἐπόμενα.

ζ'. Ὁ τε γραφεὶς κύκλος κέντρῳ μὲν τῷ σαμείῳ, ὃ ἐστὶν ἀρχὰ τῆς ἑλικος, διαστήματι δὲ τῇ εὐθείᾳ, ἃ ἐστὶν πρώτη, πρῶτος καλείσθω, ὁ δὲ γραφεὶς κέντρῳ μὲν τῷ αὐτῷ, διαστήματι δὲ τῇ διπλασίᾳ εὐθείᾳ δεύτερος καλείσθω, καὶ οἱ ἄλλοι δὲ ἐξῆς τούτοις τὸν αὐτὸν τρόπον.

[Ορισμοί:

1. Εάν μία ευθεία γραμμή αχθεί σε επίπεδο, και διατηρουμένου του ἑνὸς ἄκρου της σταθεροῦ, αφοῦ περιστραφεῖ ἰσοταχῶς ὡσεοδῆποτε φορές, επιστρέψει πάλι ἐκεῖ ἀπὸ ὅπου ἀναχώρησε, συγχρόνως δε καθὼς ἡ ευθεία περιστρέφεται, σημεῖο κινεῖται ἰσοταχῶς κατὰ μήκος της ευθείας αὐτῆς ξεκινώντας ἀπὸ το σταθερὸ ἄκρο της, τότε το σημεῖο θα γράψει μία **ἑλικά** στο ἐπίπεδο.

2. Ἀς καλεῖται λοιπὸν το μὲν ἄκρο της ευθείας που παραμένει σταθερὸ κατὰ την περιστροφή αὐτῆς **αρχὴ της ἑλικας**.

3. Ἡ δε θέση [ο φορέας] της ευθείας, ἀπὸ ὅπου ἀρχισε να περιστρέφεται ἡ ευθεία, **αρχὴ της περιστροφῆς**.

4. Ἡ **ευθεία**, την οποία διανύει το σημεῖο κατὰ την πρώτη περιστροφή, ἀς καλεῖται **πρώτη** [ευθεία], ἐκεῖνη δε που θα διανύσει το ἴδιο σημεῖο κατὰ την δεύτερη περιστροφή, **δεύτερη**, και **ομοίως οἱ ἄλλες** μ' αὐτὲς ἀς καλοῦνται ὁμώνυμα με τις [αντίστοιχες] περιστροφές.

5. Το δε **χωρίο** το περιεχόμενο ἀπὸ την ἑλικά που γράφεται κατὰ την πρώτη περιστροφή και την πρώτη ευθεία, ἀς καλεῖται **πρῶτο**, το δε περιεχόμενο ἀπὸ την ἑλικά που γράφεται κατὰ την δεύτερη περιστροφή και την δεύτερη ευθεία ἀς καλεῖται **δεύτερο**, και τα ἄλλα **ἐν συνεχείᾳ ἀς καλοῦνται ομοίως**.

6. Καὶ εἴ ἀπὸ το σημεῖο, το οποίο εἶναι ἡ ἀρχὴ της ἑλικας, αχθεί ευθεία γραμμή, τα μέρη της ευθείας αὐτῆς που βρίσκονται πρὸς την κατεύθυνση που γίνεται ἡ περιστροφή, ἀς καλοῦνται προηγούμενα, τα δε κείμενα πρὸς την ἄλλη κατεύθυνση ἐπόμενα.

7. Καὶ ὁ **κύκλος** που γράφεται με κέντρο μὲν το σημεῖο, που εἶναι ἀρχὴ της ἑλικας, ἀκτῖνα δε την ευθεία που εἶναι πρώτη, ἀς καλεῖται **πρῶτος**, ὁ δε που γράφεται με το ἴδιο κέντρο, ἀκτῖνα δε τῇ διπλάσιᾳ ευθείᾳ ἀς καλεῖται **δεύτερος**, και οἱ **ἄλλοι στὴν συνεχείᾳ ομοίως** με τον ἴδιο τρόπο.]

Εἶναι σαφές ὅτι οἱ ὀρισμοὶ τόσο της ἰδίας της ἑλικας ὅσο και οἱ 4, 5, 7 εἶναι αναδρομικοί.³

9.2. Προτάσεις 10 και 11 του ἔργου Περί Ελίκων

9.2.1. Πρόταση 10

Στην Πρόταση 10 που ακολουθεί ο Αρχιμήδης διατυπώνει στην γενική της μορφή και αποδεικνύει, για $n=8$, ότι αν έχουμε οσεσδήποτε διαδοχικές ευθείες αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο και διαφορά μία προτεθείσα ευθεία α , τότε ισχύει:

$$(n+1) \cdot n^2 \alpha^2 + \alpha(\alpha + 2\alpha + \dots + n\alpha) = 3[\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \dots + (n\alpha)^2] \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \dots + (n\alpha)^2 = \alpha^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{2}{3}n + \frac{1}{2}$$

Επίσης, εντός της απόδειξης αποδεικνύονται, ως ενδιάμεσα βήματα, οι σχέσεις

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = (1+n) \cdot \frac{n}{2} \text{ και } \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n i + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i(i-1), \text{ οι οποίες και πάλι αφορούν σε}$$

ευθείες και όχι σε αριθμούς. Παρόλα αυτά, η μέθοδος απόδειξης του Αρχιμήδη είναι γενική, έτσι η πρόταση ισχύει για μεγέθη, που ικανοποιούν φυσικά τις ίδιες αρχικές συνθήκες.

Η Serfin-Weis (2010), δηλώνει ότι οι προτάσεις αυτές είναι από τα ελάχιστα παραδείγματα, στην γεωμετρία της αρχαιότητας, στα οποία ανιχνεύεται η μέθοδος της πλήρους μαθηματικής επαγωγής.

Όπως θα διαπιστώσουμε όμως ο παραπάνω ισχυρισμός δεν είναι σωστός. Οι Προτάσεις αυτές δεν αποδεικνύονται, σε αυτό το έργο, επαγωγικά. Αυτό ισχύει τόσο για τις αποδείξεις των προτάσεων αυτών καθ'αυτών όσο και για τις υπόλοιπες ιδότητες που αποδεικνύονται, ως βοηθητικές, εντός αυτών.

Οι προτάσεις παρατίθενται από το αρχαίο κείμενο και, χάριν συντομίας, θα αποφύγουμε την λεπτομερή ανάλυση. Ωστόσο θα σκιαγραφήσουμε, με σύγχρονη σημειολογία, την απόδειξη του Αρχιμήδη, ώστε τα παραπάνω να γίνουν διαφανή.

ι'.

Εἴ κα γραμμαὶ ἐξῆς τεθέωντι ὅποσαι οὖν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, ἧ δὲ ἂ ὑπεροχὰ ἴσα τᾷ ἐλάχιστῳ, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῷ μὲν πλήθει ἴσαι ταύταις, τῷ δὲ μεγέθει ἐκάστα τᾷ μεγίστῳ, τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τᾶν ἴσῶν τᾷ μεγίστῳ ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς μεγίστας τετράγωνον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς ἐλάχιστας καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχούσαις τριπλάσια ἐσσοῦνται τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν.

[Απόδειξη]

Ἐστων γραμμαὶ ὅποσαι οὖν ἐφεξῆς κείμεναι τῷ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι αἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ἂ δὲ Θ ἴσα ἔστω τᾷ ὑπεροχᾷ, ποτικείσθω δὲ ποτὶ τὰν Β ἴσα τᾷ Θ ἂ Ι, ποτὶ δὲ τὰν Γ ἂ Κ ἴσα τᾷ Η, ποτὶ δὲ τὰν Δ ἂ Λ ἴσα τᾷ Ζ, ποτὶ δὲ τὰν Ε ἂ Μ ἴσα τᾷ Ε, ποτὶ δὲ τὰν Ζ ἂ Ν ἴσα τᾷ Δ, ποτὶ δὲ τὰν Η ἂ Ξ ἴσα τᾷ Γ, ποτὶ δὲ τὰν Θ ἂ Ο ἴσα τᾷ Β· ἐσσοῦνται δὴ αἱ γενόμεναι ἴσαι ἀλλάλαις καὶ τᾷ μεγίστῳ. Δεικτέον οὖν ὅτι τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασᾶν τᾶς τε Α καὶ τᾶν γενομενᾶν ποτιλαμβάνοντα τό τε ἀπὸ τᾶς Α τετράγωνον καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τᾶς Θ καὶ τᾶς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τριπλάσια ἐντι τῶν τετραγώνων πάντων τῶν ἀπὸ τᾶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ.

Ἔστιν δὴ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΙ τετράγωνον ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν Ι, Β τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν Β, Ι περιεχομένοις, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΓ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν Κ, Γ τετραγώνοις καὶ δύο τοῖς ὑπὸ τῶν Κ, Γ περιεχομένοις· ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἄλλων τῶν ἰσῶν τῇ Α τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τμαμάτων τετραγώνοις καὶ δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν τμαμάτων περιεχομένοις. Τὰ μὲν οὖν ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ξ, Ο ποτιλαβόντα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον διπλάσιά ἐντι τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τετραγώνων· λοιπὸν δὲ ἐπιδειξοῦμεν ὅτι τὰ διπλάσια τῶν περιεχομένων ὑπὸ τῶν τμαμάτων τῶν ἐν ἐκάστα γραμμῇ τῶν ἰσῶν τῇ Α ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἴσα ἐντὶ τοῖς ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Καὶ ἐπεὶ δύο μὲν τὰ ὑπὸ Β, Ι περιεχόμενα ἴσα δυσὶ τοῖς ὑπὸ τῶν Β, Θ περιεχομένοις, δύο δὲ τὰ ὑπὸ τῶν Κ, Γ ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς τετραπλασίας τῆς Γ διὰ τὸ τὴν Κ διπλασίονα εἶμεν τῆς Θ, δύο δὲ τὰ ὑπὸ τῶν Δ, Λ ἴσα τῷ ὑπὸ τῆς Θ καὶ τῆς ἐξαπλασίας τῆς Δ διὰ τὸ τὴν Λ τριπλασίαν εἶμεν τῆς Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἄλλα τὰ διπλάσια τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν τμαμάτων ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς πολλαπλασίας ἀεὶ κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς ἀρτίους τῆς ἐπομένης γραμμῆς, τὰ οὖν σύμπαντα ποτιλαβόντα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς ἴσας πάσαις ταῖς Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ ἐσσοῦνται ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς ἴσας πάσαις τῇ τε Α καὶ τῇ τριπλασίᾳ τῆς Β καὶ τῇ πενταπλασίᾳ τῆς Γ καὶ ἀεὶ τῇ [περισσῇ] κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τῆς ἐπομένης γραμμῆς. Ἐντὶ δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ τετράγωνα ἴσα τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν αὐτῶν γραμμῶν. Ἔστι γὰρ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἴσον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς ἴσας [πάσαις] τῇ τε Α καὶ τῇ ἴσᾳ ταῖς λοιπαῖς, ἅν ἐκάστα ἴσα τῇ Α· ἰσάκις γὰρ μετρεῖ ἅ τε Θ τὴν Α καὶ ἅ Α τὰς ἴσας αὐτῇ πάσας σὺν τῇ Α· ὥστε ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ Α τετράγωνον τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς ἴσας τῇ Α καὶ τῇ διπλασίᾳ τῶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ· αἱ γὰρ ἴσαι τῇ Α πᾶσαι χωρὶς τῆς Α διπλάσιαί ἐντι τῶν Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ. Ὅμοίως δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον ἴσον ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς ἴσας τῇ τε Β καὶ τῇ διπλασίᾳ τῶν Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, καὶ πάλιν τὸ ἀπὸ τῆς Γ τετράγωνον ἴσον τῷ ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς ἴσας τῇ τε Γ καὶ τῇ διπλασίᾳ τῶν Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἄλλων τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τοῖς περιεχομένοις ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς ἴσας αὐτῇ τε καὶ τῇ διπλασίᾳ τῶν λοιπῶν. Δῆλον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασῶν τετράγωνα ἴσα ἐντὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς Θ καὶ τῆς ἴσας πάσαις τῇ τε Α καὶ τῇ τριπλασίᾳ τῆς Β καὶ τῇ πενταπλασίᾳ τῆς Γ καὶ τῇ κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς περισσοὺς πολλαπλασίᾳ τῆς ἐπομένης.

9.2.1. 1. 1η παράφραση της απόδειξης - Heath, The Works of Archimedes

(σελ. 107-109).

Ἐστω ευθεῖες α, 2α, ..., nα. Θα αποδειχθεῖ ὅτι

$$(n+1) \cdot n^2 \alpha^2 + \alpha(\alpha + 2\alpha + \dots + n\alpha) = 3[\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \dots + (n\alpha)^2]$$

Πριν προχωρήσουμε να επαναλάβουμε ὅτι ὁ Αρχιμήδης γιὰ τὴν ἀπόδειξη θεωρεῖ οκτώ ευθεῖες α, 2α, ..., 8α. Το γεγονός αὐτό δεν βλάπτει σε τίποτα τὴν γενικότητα τῆς ἀπόδειξης. Εἶναι μία τακτικὴ ποὺ ἀκολουθεῖ συχνά ὁ συγγραφέας γιὰ γενικὲς προτάσεις. Αποδεικνύει τὴν πρόταση γιὰ κάποιο συγκεκριμένο φυσικὸ ἀριθμό, ὄχι πάντα γιὰ τὸν ἀριθμό οκτώ ποὺ χρησιμοποιοῖ ἐδῶ, χωρὶς ὅμως νὰ βασίζεται διόλου στὶς ἰδιότητες αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ ἀπόδειξή του θα ἦταν πανομοιότυπη ὡς πρὸς τὴν συλλογιστικὴ ὁποιοσδήποτε κι ἂν ἦταν αὐτός ὁ ἀριθμός. Ελλείπει συμβολισμοῦ ο

συγκεκριμένος φυσικός, που θεωρεί κάθε φορά ο Αρχιμήδης, παίζει το ρόλο του γενικού, τυχαίου φυσικού αριθμού n .

Επανερχόμαστε στην απόδειξη.

1ο Βήμα: αποδεικνύεται η σχέση

$$\begin{aligned} (n+1) \cdot (n\alpha)^2 &= 2[\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \dots + (n\alpha)^2] + \\ [1] \quad &+ 2\{\alpha[(n-1)\alpha]\} + 2\{2\alpha[(n-2)\alpha]\} + \dots + 2\{[(n-1)\alpha]\alpha\} \end{aligned}$$

Για την απόδειξη της παραπάνω ο Αρχιμήδης θεωρεί τις ισότητες

$$2(n\alpha)^2 = 2(n\alpha)^2$$

$$[\alpha + (n-1)\alpha]^2 = \alpha^2 + [(n-1)\alpha]^2 + 2\alpha[(n-1)\alpha]$$

$$[2\alpha + (n-2)\alpha]^2 = (2\alpha)^2 + [(n-2)\alpha]^2 + 2\{2\alpha[(n-2)\alpha]\}$$

$$[3\alpha + (n-3)\alpha]^2 = (3\alpha)^2 + [(n-3)\alpha]^2 + 2\{3\alpha[(n-3)\alpha]\}$$

...

$$[(n-1)\alpha + \alpha]^2 = [(n-1)\alpha]^2 + \alpha^2 + 2[(n-1)\alpha]\alpha$$

στην συνέχεια αθροίζει κατά μέλη και αφού ισχύει

$$[2\alpha + (n-2)\alpha]^2 = [2\alpha + (n-2)\alpha]^2 = \dots = [(n-1)\alpha + \alpha]^2 = (n\alpha)^2 \text{ προκύπτει η ισότητα}$$

$$(n+1)(n\alpha)^2 = 2[\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \dots + (n\alpha)^2] + 2\{\alpha[(n-1)\alpha] + 2\alpha[(n-2)\alpha] + \dots + [(n-1)\alpha]\alpha\}$$

2ο Βήμα: αποδεικνύεται τη σχέση

$$\begin{aligned} [2] \quad &2\{\alpha[(n-1)\alpha] + 2\alpha[(n-2)\alpha] + \dots + [(n-1)\alpha]\alpha\} + \alpha[\alpha + (2\alpha) + \dots + (n\alpha)] = \\ &[\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \dots + (n\alpha)^2] \end{aligned}$$

δείχνοντας τις δύο παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha) \quad \alpha + (2\alpha) + \dots + (n\alpha) = \frac{n(n+1)}{2} \alpha$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad &2\{\alpha[(n-1)\alpha] + 2\alpha[(n-2)\alpha] + \dots + [(n-1)\alpha]\alpha\} + \alpha[\alpha + (2\alpha) + \dots + (n\alpha)] = \\ &\alpha[(n\alpha) + 3[(n-1)\alpha] + 5[(n-2)\alpha] + \dots + (2n-1)\alpha] \end{aligned}$$

-

$$\gamma) \quad \alpha[(n\alpha) + 3[(n-1)\alpha] + 5[(n-2)\alpha] + \dots + (2n-1)\alpha] = [\alpha^2 + (2\alpha)^2 + \dots + (n\alpha)^2]$$

Από [1] και [2] έπεται το ζητούμενο.

Οι σχέσεις β) και γ) αποδεικνύονται με την ίδια τακτική, που ακολουθείται στο 1^ο βήμα. Ο Αρχιμήδης αθροίζει και πάλι κατά μέλη κατάλληλες ισότητες.

Η σχέση α), που μας ενδιαφέρει εξίσου με την Πρόταση 10, αποδεικνύεται ως εξής:

$$\alpha + (2\alpha) + \dots + (n-1)\alpha + (n\alpha)$$

$\frac{(n\alpha) + (n-1)\alpha + \dots + (2\alpha) + \alpha}{\oplus 2(1+2+\dots+n)a = (n+1)n}$, δηλαδή θεωρεί το άθροισμα δύο φορές γράφοντάς το

$$\oplus 2(1+2+\dots+n)a = (n+1)n$$

την μία φορά από τον μικρότερο όρο προς το μεγαλύτερο και την άλλη αντίστροφα, αθροίζοντας έτσι το άθροισμα n ζευγών που το κάθε ένα από αυτά είναι $n+1$.

9.2.1.2. 2^η παράφραση της απόδειξης:

Θέτουμε $\Sigma_v = 1+2+\dots+v$, $T_v = 1^2+2^2+\dots+v^2$.

Πρόταση (Αρχιμήδης, Περί Κωνοειδών και Σφαιροειδών, Λήμμα στην Πρόταση 2).
 $(2v+1)T_v = \Sigma_v$.

Απόδειξη.

[1] Κατ'αρχήν ο Αρχιμήδης θεωρεί το τετράγωνο v^2 με την Πυθαγόρεια γωνμονική αποψη, ως άθροισμα διαδοχικών περιττών γωνμώνων. Έτσι

$$v^2 = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_{v-1} + \Gamma_v,$$

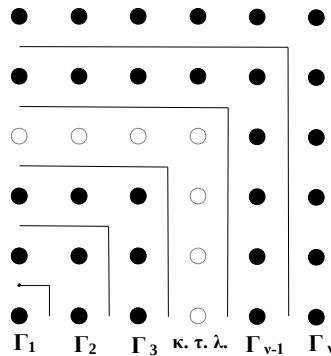
με $\Gamma_1 = 1$, ο πρώτος γνώνων,

$\Gamma_2 = 3$, ο δεύτερος γνώνων,

...

$$\Gamma_{v-1} = 2v-3,$$

$$\Gamma_v = 2v-1.$$



Είναι σαφές ότι

$$\begin{aligned} T_v &= 1^2 + \\ &\quad 2^2 + \\ &\quad \dots + \\ &\quad (v-1)^2 + \\ &\quad v^2 = \end{aligned}$$

$$\Gamma_1 +$$

$$\Gamma_1 + \Gamma_2$$

...

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_{v-1}$$

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_{v-1} + \Gamma_v =$$

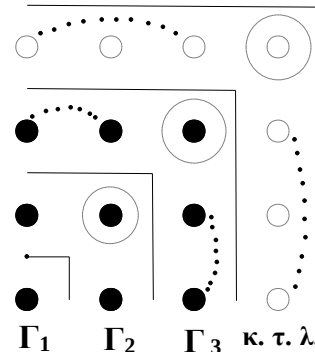
$$1 \cdot \Gamma_v + 2 \cdot \Gamma_{v-1} + \dots + (v-1) \cdot \Gamma_2 + v \cdot \Gamma_1$$

Όμως κάθε γνώνων αποτελείται από την μονάδα στην διάμετρο συν δύο ίσα σκέλη, ένα οριζόντιο και ένα κάθετο:
 $\Gamma_v = 1 + 2(v-1)$, $\Gamma_{v-1} = 1 + 2(v-2)$, ..., $\Gamma_2 = 1 + 2 \cdot 1$, $\Gamma_1 = 1$.

Άρα

$$T_v = 1 + 2(v-1) + 2 + 4(v-2) + \dots + (v-1) + (v-1) \cdot 2 + v$$

$$= \Sigma_v + 2(v-1) + 4(v-2) + \dots + (v-1) \cdot 2$$



Θέτουμε $\Phi_v = 1(v-1) + 2(v-2) + \dots + (v-2)2 + (v-1)1$.

Άρα $T_v = \Sigma_v + 2\Phi_v$,

[1] $\Sigma_v = T_v - 2\Phi_v$.

[2] Μετά ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί την σχέση

$$2\Sigma_v = v(v+1),$$

την οποία έχει ήδη αποδείξει, ώστε

$$2v\Sigma_v = (v+1)v^2, \text{ και}$$

ερμηνεύει (παρόμοια με την μέθοδο που χρησιμοποίησε για τον υπολογισμό του Σ_v) την έκφραση $(v+1)v^2$ ως

‘το άθροισμα των $v+1$ δυνατών διαφορετικών τρόπων να γράψουμε v^2 ως

$$(v+0)^2, (v-1+1)^2, (v-2+2)^2, \dots, (2+v-2)^2, (1+v-1)^2 + (v+0)^2,$$

και λαμβάνει, χρησιμοποιώντας, για κάθε μία από τις $v-1$ εκφράσεις, ένα αριθμητικό ανάλογο της Πυθαγόρειας-γνωμονικής Πρότασης II.4 των *Στοιχείων*:

$$2v\Sigma_v =$$

$$= (v+1)v^2 = (v+0)^2 + (v-1+1)^2 + (v-2+2)^2 + \dots + (2+v-2)^2 + (1+v-1)^2 + (0+v)^2$$

$$= v^2 + ((v-1)^2 + 1^2 + 2 \cdot (v-1) \cdot 1) + ((v-2)^2 + 2^2 + 2 \cdot (v-2) \cdot 2) +$$

...

$$+ (2^2 + (v-2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot (v-2)) + (1^2 + (v-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (v-1)) + v^2 =$$

$$= (v^2 + (v-1)^2 + (v-2)^2 + \dots + 2^2 + 1^2) + (1^2 + 2^2 + \dots + (v-2)^2 + (v-1)^2 + v^2) +$$

$$2 \cdot (v-1) \cdot 1 + 2 \cdot (v-2) \cdot 2 + \dots + 2 \cdot 2 \cdot (v-2) + 2 \cdot 1 \cdot (v-1) =$$

$$= 2T_v + 2\Phi_v, \text{ αρα}$$

[2] $2v\Sigma_v = 2T_v + 2\Phi_v$.

[3] Προσθέτουμε κατά μέλη [1] και [2],

$$(2v+1)\Sigma_v = 2v\Sigma_v + \Sigma_v = (2T_v + 2\Phi_v) + (T_v - 2\Phi_v) = 3T_v.$$

Όποια παράφραση κι αν επιλέξει κανείς, είναι σαφές ότι ούτε η ίδια η Πρόταση αλλά ούτε και κάποια από τις ενδιάμεσες ισότητες δεν αποδεικνύεται από τον Αρχιμήδη επαγωγικά.

Παρατηρήσεις:

(α) Η περιγραφή της απόδειξης, ιδίως για την σχέση [1], από τον Heath δεν είναι διαφωτιστική. Από την παραπάνω περιγραφή μας καθίσταται σαφές ότι οι ρίζες της Αρχιμήδειας απόδειξης είναι Πυθαγόρειες-γνωμονικές. Η βασική σχέση είναι η [1].

(γ) Η ανεπιτυχής προσπάθεια του Al-Karaji.

Στο 11^ο κεφάλαιο, το οποίο αναφέρεται στους Άραβες, θα δούμε μια ανεπιτυχή προσπάθεια του Al-Karaji να αποδείξει την Αρχιμήδεια πρόταση $(2v+1)\Sigma_v = 3T_v$. Η προσπάθεια αυτή περιγράφεται από τον Woepcke στο *Extrait du Fakhri, traité d'algèbre par Abou Bekr Mohammed Ben Alhasan Alkarkhi 1853*, (1982, σελ. 60).

Η πρώτη σχέση που επικαλείται ο Al-Karaji είναι η

$$[K_5] \quad 5^2 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + \dots + 1 \cdot 9 = 5^3 - T_4.$$

Η γενική μορφή της $[K_5]$ είναι

$$[K_v] \ v^3 = T_v - 1 + [1(2v-1) + 2(2v-2) + \dots + (v-1)(v+1) + v \cdot v].$$

Μετά ο Al-Karaji υπολογίζει τον αριθμό T_{10} , βασιζόμενος στην ταυτότητα

$$T_{10} = \Sigma_{10} \cdot 10 - \Phi_{10},$$

η οποία είναι ειδική περίπτωση της

$$T_v = v \Sigma_v - \Phi_v,$$

η οποία συμπίπτει με τη σχέση [2] στην απόδειξη του Αρχιμήδη.

Η $[K_v]$ ισχύει και φαίνεται να είναι μια παραλλαγή της [2].

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Al-Karaji περιέγραψε και ίσως απέδειξε την [2], με την οποία το T_v υπολογίζεται με βάση το Σ_v και το Φ_v , αλλά βέβαια δεν μπορεί να αποδείξει την σχέση T_v και Σ_v .

Καθίσταται σαφές γιατί ο Al-Karaji δεν μπόρεσε να καταλήξει σε μια απόδειξη της

Αρχιμήδειας Πρότασης: λείπει παντελώς η γνωμονική σχέση [1].

Επίσης καθίσταται σαφές ότι η προσπάθεια του Al-Karaji έγινε στα πλαίσια της απόδειξης του Αρχιμήδη.

(δ) Σύγκριση απόδειξης Αρχιμήδη και al-Samaw'al.

Στο 11^ο κεφάλαιο θα δούμε ακόμα ότι και ο al-Samaw'al απέδειξε την Πρόταση

$$(2v+1)\Sigma_v = 3T_v.$$

Η απόδειξη της Πρότασης $(2v+1)\Sigma_v = 3T_v$ από τον Αρχιμήδη είναι, όπως παρατηρήσαμε, μη επαγωγική: **χωρίζει το $(2v+1)\Sigma_v$ σε $2v\Sigma_v$ και Σ_v** , και εκφράζει $2v\Sigma_v$ με [2] και Σ_v με [1].

Η απόδειξη του al-Samaw'al είναι επαγωγική: **χωρίζει το $(2v+1)\Sigma_v$ σε $(v+2)\Sigma_v$ και $(v-1)\Sigma_v$** (όπως φαίνεται στην ανάλυσή μας στο Κεφάλαιο 11).

Η (πρωτότυπη απ' όσο ξέρουμε) απόδειξη του al-Samaw'al είναι ουσιαστικά διαφορετική από την απόδειξη του Αρχιμήδη.

9.2.2. Πρόταση 11

Με παρόμοιο τρόπο εργάζεται και στην Πρόταση 11, χρησιμοποιώντας επιπλέον το Πόρισμα της Πρότασης 10, γι' αυτό και δεν θα επιμείνουμε περισσότερο. Ωστόσο, για του λόγου το αληθές, αλλά και για όποιον ενδιαφέρεται να μελετήσει την πρόταση, παραθέτουμε την πρόταση χωρίς περεταίρω ανάλυση.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Ἐκ τούτου οὖν φανερόν ὅτι τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τῶν ἰσᾶν τῶ μεγίστα τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν τῶ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν ἐλάσσονά ἐστιν ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ ποτιλαβόντα τινὰ τριπλάσιά ἐντι, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστας τετραγώνου μείζονα ἢ τριπλάσια, ἐπειδὴ τὰ ποτιλαφθέντα ἐλάσσονά ἐντι ἢ τριπλάσια τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστας τετραγώνου. Καὶ τοίνυν, εἴ κα ὁμοῖα εἶδεα ἀναγραφέωντι ἀπὸ πασᾶν, ἀπὸ τῶν τῶ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν καὶ ἀπὸ τῶν ἰσᾶν τῶ μεγίστα, τὰ εἶδεα τὰ ἀπὸ τῶν ἰσᾶν τῶ μεγίστα τῶν μὲν ἀπὸ τῶν τῶ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν εἰδέων ἐλάσσονα ἐσσοῦνται ἢ τριπλάσια, τῶν δὲ λοιπῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστας εἰδεος μείζονα ἢ τριπλάσια· τὸν γὰρ αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον τὰ ὁμοῖα εἶδεα τοῖς τετραγώνοις.

ια'.

Εἴ κα γραμμαὶ ἐξῆς τεθέωντι ὅποσαι οὖν τῶ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσαι, καὶ ἄλλαι γραμμαὶ τεθέωντι τῶ μὲν πλήθει μιᾷ ἐλάσσονες τῶν τῶ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερεχουσᾶν, τῶ

δὲ μεγέθει ἐκάστα ἴσα τῶ μεγίστα, τὰ τετράγωνα πάντα τὰ ἀπὸ τῶν ἰσῶν τῶ μεγίστα ποτὶ μὲν τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τῶ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσιν χωρὶς τῆς ἐλαχίστας ἐλάσσονα λόγον ἔχοντι ἢ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς μεγίστας ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῶ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς μεγίστας καὶ τῆς ἐλαχίστας καὶ τῶ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχῆς τετραγώνου, ᾧ ὑπερέχει ἡ μεγίστα τῆς ἐλαχίστας, ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν τῶ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσιν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς μεγίστας τετραγώνου μείζονα τοῦ αὐτοῦ λόγου.

[Απόδειξη]

Ἔστωσαν γὰρ γραμμαὶ ὅποσαι οὖν τῶ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσιν ἐξῆς κείμεναι, ἡ μὲν AB τῆς ΓΔ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς EZ, ἡ δὲ EZ τῆς ΗΘ, ἡ δὲ ΗΘ τῆς ΙΚ, ἡ δὲ ΙΚ τῆς ΛΜ, ἡ δὲ ΛΜ τῆς ΝΞ, ποτικεῖσθω δὲ ποτὶ μὲν τὰν ΓΔ ἴσα μιᾷ ὑπεροχῇ ἡ ΓΟ, ποτὶ δὲ τὰν EZ ἴσα δυσὶν ὑπεροχαῖς ἡ ΕΠ, ποτὶ δὲ τὰν ΗΘ ἴσα τρισὶν ὑπεροχαῖς ἡ ΗΡ, καὶ ποτὶ τὰς ἄλλας τὸν αὐτὸν τρόπον· ἐσσοῦνται δὲ αἱ γενόμεναι ἀλλάλαις ἴσαι καὶ ἐκάστα τῶ μεγίστα. Δεικτέον οὖν ὅτι τὰ ἀπὸ πασῶν τῶν γενομενῶν τετράγωνα ποτὶ μὲν πάντα τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ πασῶν τῶν τῶ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσιν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΞ τετραγώνου ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον ποτὶ τὸ ἴσον ἀμφοτέροις τῶ τε περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν AB, ΝΞ καὶ τῶ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΥ τετραγώνου, ποτὶ δὲ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν αὐτῶν χωρὶς τοῦ ἀπὸ τῆς AB τετραγώνου μείζονα λόγον ἔχει τοῦ αὐτοῦ λόγου.

Ἀπολελάφθω ἀφ' ἐκάστας τῶν τῶ ἴσῳ ἀλλαλᾶν ὑπερέχουσιν ἴσα τῶ ὑπεροχῇ· ὃν δὲ λόγον ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς AB ποτὶ συναμφοτέρα τό τε ὑπὸ τῶν AB, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΦ τετραγώνου, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον τό τε ἀπὸ τῆς ΟΔ τετράγωνον ποτὶ τε τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΟΔ, ΔΧ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΧΟ τετραγώνου καὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ΠΖ ποτὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ΠΖ, ΨΖ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΠ τετραγώνου καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ἄλλων τετράγωνα ποτὶ τὰ ὁμοίως λαμβανόμενα χωρία· καὶ τὰ πάντα δὲ τὰ ἀπὸ πασῶν τῶν ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ ποτὶ τε πάντα τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τε τῆς ΝΞ καὶ τῆς ἴσας πάσαις ταῖς εἰρημέναις γραμμαῖς καὶ τὰ τριταμόρια τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΗ, Τη, ΥΝ τὸν αὐτὸν ἐξοῦντι λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς AB τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τό τε ὑπὸ τῶν AB, ΦΒ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ ΦΑ τετραγώνου. Εἰ οὖν κα δειχθῇ τό τε περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς ΝΞ καὶ τῆς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΗ, Τη, ΥΝ τῶν μὲν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ ἐλάττονα, τῶν δὲ τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΓΔ, EZ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ μείζονα, δεδειγμένον ἐσσεῖται τὸ προτεθέν.

Ἐντὶ δὲ τὸ μὲν περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς ΝΞ καὶ τῆς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΔ, ΠΖ, ΡΘ, ΣΚ, ΤΜ, ΥΞ καὶ τὰ τρίτα μέρη τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΗ, Τη, ΥΝ ἴσα τοῖς τετραγώνοις τοῖς ἀπὸ ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΗΚ, ΗΜ, ΝΞ καὶ τῶ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς ΝΞ καὶ τῆς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΗ, Τη, ΥΝ καὶ τῶ τρίτῳ μέρει τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΗ, Τη, ΥΝ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν AB, ΓΔ, EZ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ τετράγωνα ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΦ, ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΗΚ, ΗΜ τετραγώνοις καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΗ, Λη καὶ τῶ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς ΒΦ καὶ τῆς διπλασίας τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΗ, Λη. Κοινὰ μὲν οὖν ἐντὶ ἐκατέρων τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ἰσῶν τῶ ΝΞ, τὸ δὲ περιεχόμενον ὑπὸ τε τῆς ΝΞ καὶ τῆς ἴσας ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΩΡ, ΗΣ, ΗΤ, ΥΝ ἔλασσόν ἐστι τοῦ περιεχομένου ὑπὸ τε τῆς ΒΦ καὶ τῆς διπλασίας τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΗ, Λη διὰ τὸ τὰς νῦν εἰρημένας γραμμὰς ταῖς μὲν ΓΟ, ΕΠ, ΡΗ, ΙΣ, ΑΤ, ΥΝ ἴσας εἶμεν, τὰν δὲ λοιπῶν μείζονας, καὶ τὰ τετράγωνα δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΦ, ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΗ, Λη

μείζονά ἐντι τοῦ τρίτου μέρους τῶν ἀπὸ τῶν ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΗ, Τι, ΥΝ· δέδεικται γὰρ τοῦτο ἐν τοῖς ἐπάνω· ἐλάττονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ.

Λοιπὸν δὲ δεῖξοῦμες ὅτι μείζονά ἐντι τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ. Πάλιν δὴ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ ἴσα ἐντὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΧΓ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΗ, Λι καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΗΚ, ιΜ, ΝΞ καὶ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τε τῆς ΝΞ καὶ τῆς διπλασίας πασῶν τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΗ, Λι. Καὶ ἐστὶ κοινὰ μὲν τὰ ἀπὸ τῶν ΧΔ, ΨΖ, ΩΘ, ΗΚ, Μι, ΝΞ, μείζον δὲ τὸ ὑπὸ τε τῆς ΝΞ καὶ τῆς ἴσας πάσαις ταῖς ΟΧ, ΠΨ, ΡΩ, ΣΗ, Τι, ΥΝ τοῦ ὑπὸ τῆς ΝΞ καὶ τῆς διπλασίας πασῶν τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΗ, Λι, ἐντὶ δὲ καὶ τὰ τετράγωνα τὰ ἀπὸ τῶν ΧΟ, ΨΠ, ΩΡ, ΗΣ, ιΤ, ΥΝ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΧ, ΕΨ, ΗΩ, ΙΗ, Λι μείζονα ἢ τριπλάσια· δέδεικται γὰρ καὶ τοῦτο· μείζονα ἄρα ἐντὶ τὰ ῥηθέντα χωρία τῶν τετραγώνων τῶν ἀπὸ τῶν ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, ΙΚ, ΛΜ, ΝΞ. Οἱ προτάσεις 24 καὶ 25, που ακολουθοῦν, παρατίθενται χωρὶς ἀπόδειξη.

9.3. Προτάσεις 24 καὶ 25του ἔργου Περί Ελίκων

κδ'.

Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τῆς ἑλικος τῆς ἐν τῇ πρώτῃ περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τῆς εὐθείας τῆς πρώτας τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κύκλου τοῦ πρώτου.

$$[\text{Δηλαδή: } E_1 = \frac{1}{3} K_1 \text{ ἢ ἰσοδύναμα } \frac{E_1}{K_1} = \frac{1}{3},$$

όπου E_1 τὸ πρῶτο χωρίο καὶ K_1 ὁ πρῶτος κύκλος.]

κε'.

Τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τῆς ἑλικος τῆς ἐν τῇ δευτέρῃ περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τῆς εὐθείας τῆς δευτέρας τῶν ἐν τῇ ἀρχῇ τῆς περιφορᾶς ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ζ ποτὶ τὰ ιβ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὰ συναμφότερα τὸ τε περιεχόμενον ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πρώτου κύκλου καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχᾶς, ἢ ὑπερέχει ἂ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ πρώτου κύκλου ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ δευτέρου κύκλου.

$$[\text{Δηλαδή: } \frac{E_1 + E_2}{K_2} = \frac{7}{12} = \frac{\rho_2 \cdot \rho_1 + \frac{1}{3}(\rho_2 - \rho_1)^2}{\rho_2^2},$$

όπου E_1, E_2 τὸ πρῶτο, δεύτερο χωρίο ἀντίστοιχα καὶ K_2 ὁ δεύτερος κύκλος.]

ΠΟΡΙΣΜΑ

Διὰ δὲ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δειχθήσεται καὶ διότι τὸ περιλαφθὲν χωρίον ὑπὸ τε τῆς ἑλικος τῆς ἐν ὁποιαοῦν περιφορᾷ γεγραμμένης καὶ τῆς εὐθείας τῆς κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ταῖς περιφοραῖς λεγομένης ποτὶ τὸν κύκλον τὸν κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λεγόμενον ταῖς περιφοραῖς λόγον ἔχει, ὃν συναμφότερον τὸ τε ὑπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν κύκλου καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κατὰ τὸν ἐνὶ ἐλάσσονα τῶν περιφορᾶν λεγομένου καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀπὸ τῆς ὑπεροχᾶς, ἢ

ὑπερέχει ἅ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τῶν εἰρημένων, ποτὶ τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τᾶς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ μείζονος κύκλου τῶν εἰρημένων.

$$[\text{Δηλαδή: } \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_n}{K_n} = \frac{\rho_n \cdot \rho_{n-1} + \frac{1}{3}(\rho_n - \rho_{n-1})^2}{\rho_n^2},$$

όπου $E_1, E_2, \dots, E_n$ το πρώτο, δεύτερο, ..., n-οστό χωρίο αντίστοιχα και K_n ο δεύτερος n-οστός κύκλος.]

Παρατηρούμε ὅτι ἡ διάρθρωση τῶν προτάσεων εἶναι ἡ ἐξῆς:

Πρόταση 24: διατύπωση-ἀπόδειξη ιδιότητος γιὰ τὴν πρώτη περίπτωσι.

Πρόταση 25: διατύπωση-ἀπόδειξη ιδιότητος γιὰ τὴν δεύτερη περίπτωσι.

Πόρισμα: διατύπωση –«ἀπόδειξη» ιδιότητος γιὰ τὴν γενικὴ περίπτωσι.

Παρά τὸ ὅτι οἱ προτάσεις δὲν ἀποδεικνύονται ἐπαγωγικά, παρουσιάζει ἐνδιαφέρων ἡ διάρθρωση τῶν προτάσεων με αὐτὸν τὸν τρόπο, ὁ ὁποῖος ἀκολουθεῖται ἀρκετές φορές στὸ Περί Εῤῥων, ἀλλὰ δὲν θὰ ἐπιμείνουμε περισσότερο σὲ αὐτὸ στὴν παρούσα ἐργασία.

9.4. Ἡ Επαγωγικὴ Πρόταση 27 τοῦ ἔργου Περί Εῤῥων

κζ'.

Τῶν χωρίων τῶν περιεχομένων ὑπὸ τε τᾶν ἐλίκων καὶ τᾶν εὐθειᾶν τᾶν ἐν τᾷ περιφορᾷ τὸ μὲν τρίτον τοῦ δευτέρου διπλάσιόν ἐστι, τὸ δὲ τέταρτον τριπλάσιον, τὸ δὲ πέμπτον τετραπλάσιον, καὶ αἰεὶ τὸ ἐπόμενον κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου χωρίου, τὸ δὲ πρῶτον χωρίον ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ δευτέρου.

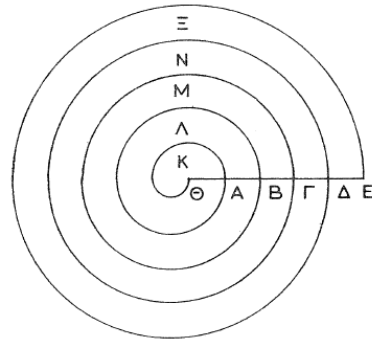
[Απόδειξι]

Ἐστω ἅ προκειμένα ἔλιξ ἐν τε τᾷ πρώτῳ περιφορᾷ γεγραμμένα καὶ ἐν τᾷ δευτέρῳ καὶ ἐν ταῖς ἐπομέναις ὅποσαι σοῦν, ἔστω δὲ ἀρχὰ μὲν τᾶς ἑλικὸς τὸ Θ σαρμεῖον, ἅ δὲ ΘΕ εὐθεῖα ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς, τῶν δὲ χωρίων ἔστω τὸ μὲν Κ τὸ πρῶτον, τὸ δὲ Λ τὸ δεύτερον, τὸ δὲ Μ τὸ τρίτον, τὸ δὲ Ν τὸ τέταρτον, τὸ δὲ Ξ τὸ πέμπτον.

Δεικτέον ὅτι τὸ μὲν Κ χωρίον ζ' μέρος ἐστὶ τοῦ ἐπομένου, τὸ δὲ Μ διπλάσιον τοῦ Λ, τὸ δὲ Ν τριπλάσιον τοῦ Λ, καὶ τῶν ἐξῆς αἰεὶ τὸ ἐπόμενον πολλαπλάσιον τοῦ Λ κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμοὺς.

Ἐτι μὲν οὖν τὸ Κ ζ' μέρος ἐστὶ τοῦ Λ, ὧδε δέικνυται.

Ἐπει τὸ ΚΛ χωρίον ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον δέδεικται τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἔχει τὰ ζ ποτὶ τὰ ιβ, ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ποτὶ τὸν πρῶτον κύκλον ὡς ιβ ποτὶ τὰ γ· δηλὸν γάρ ἐστιν· ὁ δὲ πρῶτος κύκλος ποτὶ τὸ Κ χωρίον ἔχει ὡς γ ποτὶ α, ζ' ἄρα ἐστὶ τὸ Κ χωρίον



τοῦ Λ. Πάλιν δὲ καὶ τὸ ΚΛΜ χωρίον ποτὶ τὸν τρίτον κύκλον δέδεικται ὅτι τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφοτέρων τὸ τε ὑπὸ ΓΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΒ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τετράγωνον. Ὁ δὲ τρίτος κύκλος ἔχει ποτὶ τὸν δεύτερον κύκλον ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΓΘ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΒ, ὁ δὲ δεύτερος κύκλος ἔχει ποτὶ τὸ ΚΛ χωρίον ὃν τὸ ἀπὸ ΒΘ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τὸ τε ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου· καὶ τὸ ΚΛΜ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΓΘ, ΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΒ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΒΘ, ΘΑ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΑΒ τετραγώνου. Ταῦτα δὲ ἔχει ποτὶ ἄλλαλα λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ· ὥστε καὶ τὸ ΚΛΜ χωρίον ποτὶ τὸ ΛΚ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ιθ ποτὶ τὰ ζ· αὐτὸ οὖν τὸ Μ ποτὶ τὸ ΚΛ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ιβ ποτὶ τὰ ζ. Τὸ δὲ ΚΛ ποτὶ τὸ Λ λόγον ἔχει, ὃν τὰ ζ ποτὶ τὰ C· δηλον οὖν ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ Μ τοῦ Λ.

Ὅτι δὲ τὰ ἐπόμενα τὸν τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχει, δειχθήσεται. Τὸ γὰρ ΚΛΜΝΞ ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἅ ΘΕ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἔχει συναμφοτέρων τὸ τε ὑπὸ τᾶν ΕΘ, ΘΔ περιεχόμενον καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΕ τετραγώνου ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΕ τετράγωνον. Ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἅ ΘΕ, ποτὶ τὸν κύκλον, οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἅ ΘΔ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΕ τετράγωνον ποτὶ τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΔ τετράγωνον, ὁ δὲ κύκλος, οὗ ἐστὶν ἐκ τοῦ κέντρου ἅ ΔΘ, ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ἀπὸ τᾶς ΘΔ τετράγωνον ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τὸ τε ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου· καὶ τὸ ΚΛΜΝΞ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΕ, ΘΔ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ· διελόντι καὶ τὸ Ξ χωρίον ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ λόγον ἔχει, ὃν ἅ ὑπεροχὰ τοῦ τε ὑπὸ ΕΘ, ΘΔ μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τᾶς ΕΔ καὶ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ μετὰ τοῦ τρίτου μέρους τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ ποτὶ τὸ τε ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ· ὑπερέχει δὲ τὰ συναμφοτέρα τῶν συναμφοτέρων ᾧ καὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΕΘΔ τοῦ ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ, ὑπερέχει δὲ τῷ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΓΕ· τὸ Ξ ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου. Διὰ δὲ τῶν αὐτῶν δειχθήσεται καὶ τὸ Ν ποτὶ τὸ ΚΛΜ χωρίον λόγον ἔχον τοῦτον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΒΔ ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τὸ τε ὑπὸ ΓΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ ΓΒ τετραγώνου· τὸ Ν ἄρα ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ χωρίον τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ ποτὶ τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΒΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΘΓ, ΘΒ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΒ [καὶ ἀνάπαλιν]· ταῦτα δὲ ἴσα ἐντὶ τῷ τε ὑπὸ τᾶν ΔΘ, ΘΓ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν Ξ χωρίον ποτὶ τὸ ΚΛΜΝ τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὰ συναμφοτέρα τὸ τε ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΓΔ τετραγώνου, τὸ δὲ ΚΛΜΝ ποτὶ τὸ Ν ὃν τὰ συναμφοτέρα τὸ τε ὑπὸ τᾶν ΔΘΓ καὶ τὸ τρίτον μέρος τοῦ ἀπὸ τᾶς ΔΓ τετραγώνου ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ, ἔχει ἄρα καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Ν τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ. Τὸ δὲ ὑπὸ τᾶν ΘΔ, ΓΕ ποτὶ τὸ ὑπὸ τᾶν ΘΓ, ΔΒ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ὃν ἅ ΘΔ ποτὶ τὰν ΘΓ, ἐπεὶ ἴσαι ἐντὶ αἱ ΓΕ, ΒΔ· δηλον οὖν ὅτι καὶ τὸ Ξ ποτὶ τὸ Ν τοῦτον ἔχει τὸν λόγον, ὃν ἅ ΘΔ ποτὶ τὰν ΘΓ.

Ὅμοιως δὲ καὶ δειχθήσεται καὶ τὸ Ν ποτὶ τὸ Μ τοῦτον ἔχον τὸν λόγον, ὃν ἅ ΘΓ ποτὶ τὰν ΘΒ, καὶ τὸ Μ ποτὶ τὸ Λ, ὃν ἅ ΒΘ ποτὶ τὰν ΑΘ· αἱ δὲ [ΕΘ] ΔΘ, ΓΘ, ΒΘ, ΑΘ εὐθεῖαι τὸν τῶν ἐξῆς ἀριθμῶν λόγον ἔχοντι.

Αν και δεν θα αναλύσουμε, ὅπως προαναφέρθηκε, λεπτομερώς την παραπάνω πρόταση, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την απόδειξη:

Βήμα 1^ο: Αποδεικνύει ότι $E_1 = \frac{1}{6}E_2$, χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις 24, 25 και προτάσεις των βιβλίων XII, V των Στοιχείων.

Βήμα 2^ο: Αποδεικνύει ότι $E_3 = 2E_2$, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 25, το Πόρισμα αυτής, την προηγούμενη περίπτωση (βήμα 1^ο) και προτάσεις των βιβλίων XII, V των Στοιχείων.

Βήμα 3^ο: Αποδεικνύει την γενική περίπτωση, δηλαδή ότι $E_n = (n-1)E_2$, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 25, το Πόρισμα αυτής και προτάσεις των βιβλίων XII, V των Στοιχείων, αποδεικνύει ότι:

$$\frac{E_n}{E_{n-1}} = \frac{\rho_{n-1}}{\rho_{n-2}} = \frac{n-1}{n-2},$$

$$\frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} = \frac{\rho_{n-2}}{\rho_{n-3}} = \frac{n-2}{n-3},$$

.....

$$\frac{E_4}{E_3} = \frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{E_3}{E_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2}{1}.$$

Στην συνέχεια εφαρμόζοντας κάθε φορά τη δι' ίσου και την προηγούμενη περίπτωση δείχνει ότι $E_4 = 3E_2$, $E_5 = 4E_2$, κ.ο.κ..

Θεωρούμε ότι ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί εδώ ένα είδος επαγωγής. Το είδος αυτό είναι η πρώτη φορά που το συναντάμε στα Αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά και συνδυάζει την αναλυτική μορφή της μεθόδου με εκείνη την μορφή που θα συναντήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο στους Άραβες μαθηματικούς και το οποίο θα μπορούσαμε να καλέσουμε «αναδρομή» ή «κάθοδο» ή «regression» κατά τον Freudenthal (1953).

Αναφορικά με τα λοιπά χαρακτηριστικά της επαγωγικής απόδειξης σημειώνουμε ότι ακολουθεί τα προηγούμενα: βασίζεται ουσιαστικά σε αναδρομικούς ορισμούς, η ισχύς της προς απόδειξη πρότασης πραγματοποιείται μέσω της ισχύς της στο πρώτο βήμα και της δυνατότητας μετάδοσης, μέσω του ίδιου πάντα επιχειρήματος, αυτής της ιδιότητας σε κάθε επόμενο βήμα. Τέλος, τόσο οι αναδρομικοί ορισμοί όσο και η επαγωγική απόδειξη έχουν πεπερασμένο αλλά απεριόριστα επεκτάσιμο μήκος.

Κεφάλαιο 10.

Γεωμετρική αναδρομή και επαγωγή Αρχιμήδειου τύπου (Πάππος, Συναγωγή, Βιβλίο IV, Άρβηλος)

Μείζον έργο του Πάππου στη γεωμετρία είναι Συναγωγή· μια μαθηματική συλλογή οκτώ βιβλίων τα οποία πιστεύεται ότι έχουν γραφτεί γύρω στο 340 μ.Χ. (αν και μερικοί ιστορικοί πιστεύουν ότι ο Πάππος είχε ολοκληρώσει το έργο του το 325 μ.Χ.). Στην παρούσα μελέτη θα ασχοληθούμε με ορισμένες προτάσεις από το Βιβλίο IV της Συναγωγής. Το συγκεκριμένο Βιβλίο δεν παρουσιάζει συνολική θεματική συνοχή στο επίπεδο, τουλάχιστον, του μαθηματικού περιεχομένου, με αποτέλεσμα από πολλούς να θεωρείται απλά ως μια τυχαία συλλογή από διαφορετικές μαθηματικές βινιέτες. Ωστόσο, η Heike Serfin-Weis, η οποία μετέφρασε και σχολίασε το συγκεκριμένο Βιβλίο στα Αγγλικά, δεν έχει την ίδια άποψη. «An overall governing plan can, after all, be detected in Coll. IV. It is to be found not on the level of literal, mathematical content, but on the level of methodology. The famous programmatic statement on the three kinds of geometry serves as a focal point of reference for the material presented by Pappus. In all the vignettes he presents, even where the topic he chooses to exemplify a certain methodological approach is very appealing and interesting in itself (e.g., squaring the circle), it is the methods that are profiled and emphasized, with the content serving as an incentive, to capture the reader's interest. Just as the copyist indicates at the end of Coll. IV, the book contains "splendid theorems, plane, solid and linear ones." (σελ. xxi)»

Εδώ θα ασχοληθούμε με τις προτάσεις 14 έως και 20, εκ των οποίων οι 14 και 20 έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την έρευνά μας. Οι εν λόγω προτάσεις αποτελούν μια αυτόνομη ενότητα και σχετίζονται με το μαθηματικό σχήμα το οποίο ο Αρχιμήδης καλεί άρβηλο. Η αρίθμηση των προτάσεων δίνεται από τον Πάππο και η παρουσίαση κάθε πρότασης σε αυτήν την εργασία έχει τρεις όψεις: το αρχαίο κείμενο, την μετάφραση αυτού και τέλος μια παράφραση χρησιμοποιώντας σύγχρονο μαθηματικό συμβολισμό. Παρατίθενται δε οι αποδείξεις μόνο των προτάσεων 17, 18 ($\equiv 14$) και 20.

Ο Πάππος ξεκινά αυτή την ενότητα διατυπώνοντας την πρόταση 14, η οποία αποτελεί ουσιαστικά τον πυρήνα της ενότητας. Στη συνέχεια διατυπώνει και αποδεικνύει τις προτάσεις 15, 16, οι οποίες λειτουργούν ως λήμματα για την απόδειξη της 17, και αυτή με τη σειρά της ως λήμμα για την απόδειξη της πρότασης 18, η οποία είναι επαναδιατύπωση της 14. Η πρόταση 19 παίζει επίσης το ρόλο λήμματος για ειδική περίπτωση της 18 και τέλος στην πρόταση 20 ο Πάππος αλλάζει τις συνθήκες που ισχύουν στην 18 και καταλήγει σε αντίστοιχα συμπεράσματα.

10.1. Η Πρόταση 14.

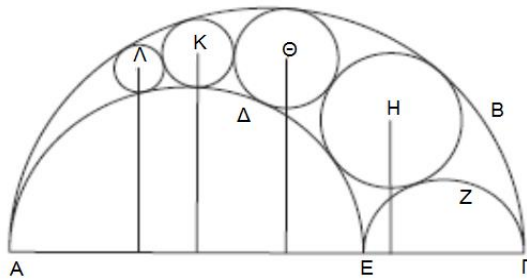
ιδ'

Φέρεται ἔν τισιν ἀρχαία πρότασις τοιαύτη· ὑποκείσθω τρία ἡμικύκλια ἐφαπτόμενα ἀλλήλων τὰ ΑΒΓ ΑΔΕ ΕΖΓ, καὶ εἰς τὸ μεταξύ τῶν περιφερειῶν αὐτῶν χωρίον, ὃ δὴ καλοῦσιν ἄρβηλον, ἐγγεγράφθωσαν κύκλοι ἐφαπτόμενοι τῶν τε ἡμικυκλίων καὶ ἀλλήλων ὅσοιδηποτοῦν, ὥς οἱ περὶ κέντρα τὰ Η Θ Κ Λ· δεῖξαι τὴν μὲν ἀπὸ τοῦ Η κέντρου κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ ἴσην τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Η κύκλου, τὴν δ' ἀπὸ τοῦ Θ κάθετον διπλασίαν τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Θ κύκλου, τὴν δ' ἀπὸ τοῦ Κ κάθετον τριπλασίαν, καὶ τὰς ἐξῆς καθέτους τῶν οἰκείων διαμέτρων πολλαπλασίας κατὰ τοὺς ἐξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμοὺς ἐπ' ἅπειρον γινομένης τῆς τῶν κύκλων

έγγραφης. δειχθήσεται δὲ πρότερον τὰ λαμβανόμενα.

Πρόταση 14:

Αναφέρεται σε ορισμένα [βιβλία] μια αρχαία πρόταση τέτοια: τοποθετώ τρία ημικύκλια εφαπτόμενα το ένα στο άλλο τα ΑΒΓ, ΑΔΕ, ΕΖΓ, και στο χωρίο μεταξύ των περιφερειών τους, το οποίο καλείται ἄρβηλος, εγγράφονται οσοιδήποτε κύκλοι εφαπτόμενοι των ημικυκλίων και ο ένας στον άλλο, όπως αυτοί περί τα κέντρα Η, Θ, Κ, Λ. Δείξε ότι η μεν από το κέντρο Η κάθετη στην ΑΓ ίση με τη διάμετρο του περί το Η κύκλου, η δε από το Θ κάθετος διπλάσια της διαμέτρου του περί το Θ κύκλου, η δε από το Κ κάθετος τριπλάσια, και οι κάθετες στη σειρά πολλαπλάσια των αντίστοιχων διαμέτρων σύμφωνα με την αλληλουχία των αριθμών που υπερβαίνουν ο ένας του άλλου κατά μία μονάδα, όταν η εγγραφή των κύκλων συνεχίζεται επ' άπειρον. Θα αποδειχθούν δε πρώτα τα λαμβανόμενα.



10.2. Οι Προτάσεις 15 και 16: λήμματα για την απόδειξη της Πρότασης 17.

ιε'

Ἐστωσαν δύο κύκλοι οἱ ΖΒ ΒΜ περί κέντρα τὰ Α Γ ἐφαπτόμενοι ἀλλήλων κατὰ τὸ Β, καὶ μείζων ἔστω ὁ ΒΜ, ἄλλος δέ τις ἐφαπτόμενος αὐτῶν κατὰ τὰ Κ Λ περί κέντρον τὸ Η ὁ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ ΑΗ

(πεσοῦνται δὴ διὰ τῶν Κ Λ), καὶ ἡ ἐπὶ τὰ Κ Λ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη τεμεῖ μὲν τὸν ΖΒ κύκλον, συμπίπτει δὲ τῇ διὰ τῶν Α Γ κέντρων ἐκβαλλομένη εὐθεῖα διὰ τὸ μείζονα εἶναι τὴν ΑΚ πλευρὰν τῆς ΓΔ τοῦ ΑΚΔΓ

τραπεζίου· συμπιπτέτω οὖν κατὰ τὸ Ε τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ Δ· δεῖξαι ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ.

Καὶ τὸ ἀναστροφίον δὲ φανερόν ἐστιν. ἐὰν γὰρ ᾗ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΚΔ ἐπ' εὐθείας γίνεται τῇ ΔΕ.

Πρόταση 15:

Ἐστω δύο κύκλοι ΖΒ, ΒΜ περί τα κέντρα Α, Γ εφαπτόμενοι ο ένας στον άλλο στο Β, και μεγαλύτερος ἔστω ο ΒΜ, ἄλλος δε <κύκλος> ο ΚΛ περί το κέντρο Η ἐφάπτεται σε αυτούς στα Κ, Λ, και σχηματίζονται οι ΓΗ, ΑΗ (που διέρχονται από τα Κ, Λ) και η ευθεία που ενώνει τα Κ, Λ προεκτεινόμενη τέμνει μεν τον κύκλο ΖΒ, τέμνει δε την ευθεία που ενώνει τα κέντρα Α, Γ όταν προεκταθεί, επειδή η ΑΚ πλευρά του τραπεζίου ΑΚΔΓ είναι μεγαλύτερη από την ΓΔ. Ας συμπίπτουν στο Ε [το σημείο τομής των ΚΛ, ΑΓ] και ας τέμνει τον κύκλο στο Δ [το σημείο τομής της ΚΛ και του κύκλου]. Δείξε ότι η ΑΒ προς την ΒΓ είναι όπως η ΑΕ προς την ΕΓ.

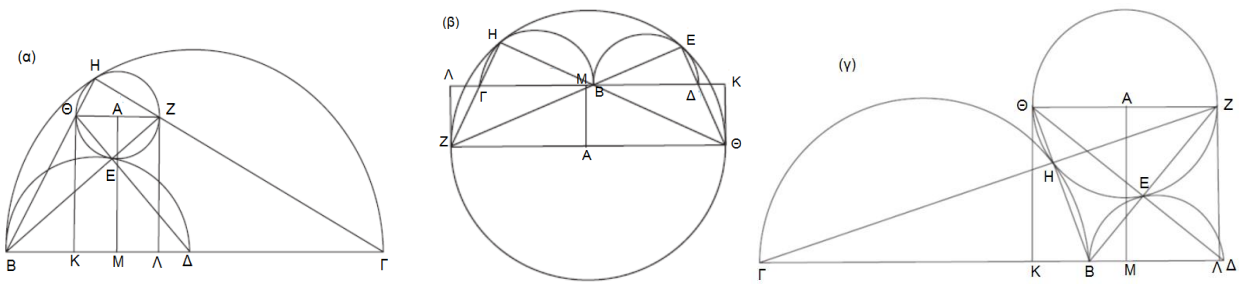
Και το αντίστροφο είναι φανερό. Εάν η ΑΒ προς την ΒΓ είναι όπως η ΑΕ προς την ΕΓ, η ΚΔ είναι στην ίδια ευθεία με τη ΔΕ.


$$K, \Delta, E \text{ συνευθειακά} \Leftrightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AE}{E\Gamma} \text{ .}$$

Δύο ἡμικύκλια τὰ ΒΗΓ ΒΕΔ, καὶ ἐφαπτόμενος αὐτῶν κύκλος ὁ ΕΖΗΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου αὐτοῦ τοῦ Α κάθετος ἦχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν τῶν ἡμικυκλίων ἢ ΑΜ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, οὕτως ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς ἀμφοτέρως ἡ ΓΒ ΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης οὕτως ἡ τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς συναμότερον τὴν ΓΒ ΒΔ, τουτέστιν τὴν ΓΔ.

[Έστω] δύο ημικύκλια ΒΗΓ, ΒΕΔ και ο εφαπτόμενος σε αυτά κύκλος ΕΖΗΘ, από το κέντρο αυτού Α άγουμε την ΑΓ κάθετη στη βάση ΒΓ των ημικυκλίων. Ότι είναι η ΜΒ προς την ακτίνα του κύκλου ΕΖΗΘ, έτσι είναι, στην μεν πρώτη καταγραφή [πρώτη περίπτωση] το άθροισμα των ΓΒ, ΒΔ προς την διαφορά τους ΓΔ, στην δεύτερη και τρίτη δε [περίπτωση] έτσι είναι η διαφορά των ΓΒ, ΒΔ προς το άθροισμα των ΓΒ, ΒΔ, τουτέστιν την ΓΔ.

1. Τα σημεία Β, Γ, Δ είναι συνευθειακά. Έτσι τα δεδομένα της παραπάνω πρότασης, ανάλογα με τη θέση και τη σχέση που έχουν μεταξύ τους τα δύο ημικύκλια, οδηγούν στην κατασκευή τριών σχημάτων. Έχουμε, λοιπόν, τις τρεις παρακάτω περιπτώσεις:



Σύμφωνα λοιπόν με την πρόταση για την πρώτη περίπτωση ισχύει:

$$\frac{MB}{\rho_A} = \frac{B\Gamma + B\Delta}{B\Gamma - B\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{MB}{\rho_A} = \frac{B\Gamma + B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

ενώ για την δεύτερη και τρίτη:

$$\frac{MB}{\rho_A} = \frac{B\Gamma - B\Delta}{B\Gamma + B\Delta} \quad \text{ή} \quad \frac{MB}{\rho_A} = \frac{B\Gamma - B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

Θα εστιάσουμε μόνο στην πρώτη περίπτωση, μιας και είναι εκείνη που σχετίζεται με τον προβληματισμό μας. Ωστόσο, η απόδειξη της πρότασης παραλείπεται.

2. Στην απόδειξη της πρότασης, ως ενδιάμεσο βήμα αποδεικνύει ότι ισχύει:

$$B\Gamma \cdot B\Delta = B\Delta \cdot B\Delta.$$

Σχέση την οποία θα χρησιμοποιήσει στην απόδειξη της πρότασης 18 για να αποδείξει τη βάση της επαγωγής.

10.3. Πρόταση 17: επαγωγικό λήμμα για την απόδειξη της Πρότασης 18.

ιζ'

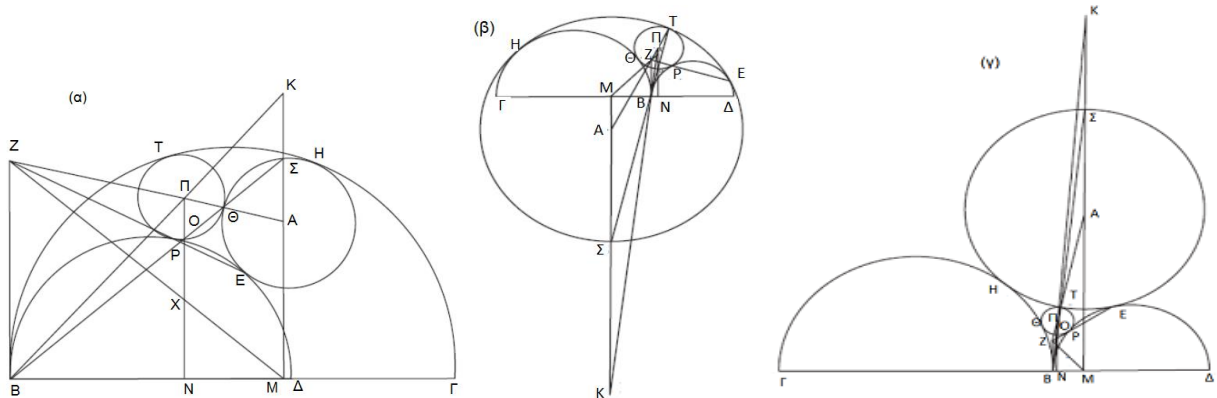
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων γεγράφθω κύκλος ὁ ΘΡΤ ἐφαπτόμενος τῶν τε ἐξ ἀρχῆς ἡμικυκλίων καὶ τοῦ ΕΗΘ κύκλου κατὰ τὰ Θ Ρ Τ σημεία, καὶ ἀπὸ τῶν Α Π κέντρων κάθετοι ἤχθωσαν ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν αἱ ΑΜ ΠΝ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΜ μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ ΕΗ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον αὐτοῦ, οὕτως ἡ ΠΝ πρὸς τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου διάμετρον.

Πρόταση 17:

Με τις ίδιες συνθήκες [όπως στην 16] εγγράφουμε κύκλο ΘΡΤ εφαπτόμενο στα αρχικά ημικύκλια και στον κύκλο ΕΗΘ στα σημεία Θ, Ρ, Τ, από τα κέντρα Α, Π άγουμε τις ΑΜ, ΠΝ κάθετες στη βάση ΒΓ. Ισχυρίζομαι ότι η ΑΜ μαζί με τη διάμετρο του ΕΗ κύκλου προς τη διάμετρο αυτού είναι όπως η ΠΝ προς την διάμετρο του κύκλου ΘΡΤ.

Παρατήρηση:

Εδώ έχουμε και πάλι τρεις δυνατές διαμορφώσεις, σε αντιστοιχία με την πρόταση 16. Δηλαδή, οδηγούμαστε στην κατασκευή των τριών παρακάτω σχημάτων:



Το συμπέρασμα και στις τρεις περιπτώσεις είναι κοινό:

$$\frac{\Pi\text{N}}{\delta_{\Pi}} = \frac{\text{AM} + \delta_A}{\delta_A} \quad \text{ή}$$

$$\frac{d_2}{\delta_2} = \frac{d_1 + \delta_1}{\delta_1}, \text{ όπου } d_1, d_2 \text{ η απόσταση των κέντρων } K_1 \equiv \Pi, K_2 \equiv A \text{ αντίστοιχα από την } B\Gamma$$

και δ_1, δ_2 οι διάμετροι των κύκλων με κέντρα K_1, K_2 αντίστοιχα.

Απόδειξη:

Ἦχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ· ἐφάπτεται ἄρα τοῦ ΒΗΓ ἡμικυκλίου. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΠ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ. ἐπεὶ διὰ τὸ προδειχθὲν ὡς συναμφότερος ἡ ΓΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν τὴν ΓΔ, οὕτως καὶ ἡ ΒΜ ἐπὶ μὲν τῆς πρώτης καταγραφῆς πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου, ἐπὶ δὲ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης ὡς ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς συναμφότερον, τουτέστιν ὡς ἡ τῶν ΓΒ ΒΔ ὑπεροχὴ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου, καὶ ἡ ΒΝ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου, ἔσται ἄρα καὶ ἐναλλάξ ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, ἡ ΑΘ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν ΘΠ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΝ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΠ (ἐπιζευχθείσης γὰρ τῆς ΖΜ ἔσται ὡς ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΞ). καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΠ, οὕτως ἡ ΑΘ ἐκ τοῦ κέντρου

τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν ΘΠ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΘΡΤ κύκλου. καὶ τῶν ΕΗΘ ΡΘΤ κύκλων ἐφάπτεται τις κύκλος ὁ ΒΡΕΔ κατὰ τὰ Ρ Ε σημεία· διὰ ἄρα τὸ προδειχθὲν ἰε' θεώρημα ἡ τὰ Ρ Ε σημεία ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον πεσεῖται, καὶ ἴσον ἔσται τὸ ὑπὸ ΕΖΡ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΘΖ τετραγώνῳ. ἔστιν δὲ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ τετραγώνῳ ἴσον τὸ ὑπὸ ΕΖΡ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΖΒ τῷ ἀπὸ ΖΘ· ἴση ἄρα ἡ ΒΖ τῇ ΖΘ. ἐπεὶ δὲ καὶ ἡ μὲν ΜΑ ἐκβληθεῖσα τέμνει τὴν τοῦ ΕΗΘ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Σ, ἡ δὲ ΠΝ τέμνει τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου περιφέρειαν κατὰ τὸ Ο σημείον, ἴση ἄρα ἔστιν ἡ μὲν ΑΘ τῇ ΑΣ, ἡ δὲ ΠΟ τῇ ΠΘ, καὶ ἡ τὰ Ο Σ σημεία

ἐπιζευγνύουσα ἤξει διὰ τοῦ Θ· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΘΑΣ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΠΟ γωνίᾳ ἐναλλάξ, καὶ ἰσογώνιον ἐστὶν τὸ ΑΘΣ τρίγωνον τῷ ΠΘΟ τριγώνῳ, καὶ ἔστιν εὐθεῖα ἡ ΑΠ· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ διὰ τῶν Σ Θ Ο σημείων ἀπαγομένη. ἤξει δὲ καὶ διὰ τοῦ Β· εὐθεῖα γάρ ἡ ΘΟΒ διὰ τὸ εἶναι ὡς τὴν ΒΖ πρὸς ΖΘ, οὕτως τὴν ΟΠ πρὸς τὴν ΠΘ, ἴσων οὐσῶν τῶν ὑπὸ ΒΖΘ ΟΠΘ γωνιῶν ἐν παραλλήλοις ταῖς ΒΖ ΟΠ· καὶ τοῦτο γὰρ προδεδεικται ἰε'. ἐπιζευχθεῖσα δὲ καὶ ἡ ΒΠ ἐκβεβλήσθω καὶ συμπιπτέτω τῇ ΜΑ ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ Κ. ἐπεὶ οὖν ἦν ὡς ἡ ΜΒ πρὸς ΒΝ, τουτέστιν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΠ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς ΖΠ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΠ, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΚΒ πρὸς ΒΠ, ἡ ΑΣ πρὸς ΠΟ καὶ ἡ ΣΚ πρὸς ΠΟ· ἴση ἄρα ἡ ΑΣ τῇ ΣΚ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΑΚ ὅλη τῇ διαμέτρῳ τοῦ ΕΗΘ κύκλου ἐστὶν ἴση, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΚΜ πρὸς ΚΣ, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς ΟΠ, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ὡς ἡ ΜΑ μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ ΕΗΘ κύκλου πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ἡ ΝΠ πρὸς τὴν τοῦ ΘΡΤ κύκλου διάμετρον, ὅπερ·

[Μετάφραση:

Φέρουμε τὴ ΒΖ κάθετὴ στὴν ΒΔ. Εφάπτεται ἄρα τοῦ ἡμικυκλίου ΒΗΓ. Ἡ εὐθεῖα ΑΠ προεκτείνουμεν [τέμνει τὴν ΒΖ] στὸ Ζ. Λόγῳ αὐτοῦ ποῦ ἀποδείχθηκε [πρόταση 16] στὴ μὲν πρώτη καταγραφὴ τὸ ἄθροισμα ΓΒΔ πρὸς τὴν ὑπεροχὴ αὐτῶν ΓΔ, εἶναι ὅπως καὶ ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ἀκτὶνα τοῦ κύκλου ΕΗΘ, στὴ δε δευτέρῃ καὶ τρίτῃ ὅπως ἡ ὑπεροχὴ αὐτῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα, τουτέστιν ὅπως ἡ ὑπεροχὴ τῶν ΓΒ, ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔτσι εἶναι ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ἀκτὶνα τοῦ κέντρου ΕΗΘ, καὶ ἡ ΒΝ πρὸς τὴν ἀκτὶνα τοῦ κύκλου ΘΡΤ, εἶναι ἄρα καὶ ἐναλλάξ ὅπως ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, ἡ ΑΘ ἀκτὶνα τοῦ κύκλου ΕΗΘ πρὸς τὴν ΘΠ ἀκτὶνα τοῦ κύκλου ΘΡΤ. Ἀλλὰ ὅπως ἡ ΜΒ πρὸς τὴ ΒΝ, ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΠ (διότι ἐνώνοντες τὰ Ζ, Μ εἶναι ὅπως ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, ἔτσι καὶ ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΞ). Καὶ ὅπως ἄρα ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΠ, ἔτσι καὶ ἡ ΑΘ ἀκτὶνα τοῦ κύκλου ΕΗΘ πρὸς τὴν ΘΠ ἀκτὶνα τοῦ κύκλου ΘΡΤ. Καὶ τῶν ΕΗΘ, ΡΘΤ κύκλων ἐφάπτεται ὁ κύκλος ΒΡΕΔ στὰ σημεῖα Ρ, Ε. Ἀπὸ ὅτι ἄρα ἀποδείχθηκε στὸ θεώρημα 15 ἐνώνοντες τὰ σημεῖα Ρ, Ε προεκτείνουμεν ἡ εὐθεῖα τοὺς διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο Ζ, καὶ ἰσο εἶναι τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρὲς ΕΖ, ΖΡ με τὸ τετράγωνο πλευράς ΘΖ. Εἶναι δε τὸ τετράγωνο πλευράς ΖΒ ἰσο καὶ με τὸ [ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο] ὑπὸ ΕΖΡ. Ἰσο ἄρα καὶ τὸ [τετράγωνο πλευράς] ΖΒ με τὸ [τετράγωνο πλευράς] ΖΘ. Ἰση ἄρα ἡ ΒΖ με τὴν ΖΘ. . Επιπλέον δε ἀφοῦ καὶ ἡ μὲν ΜΑ προεκτείνουμεν τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΕΗΘ στὸ Σ καὶ ἡ δε ΠΝ τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ΘΡΤ στὸ σημεῖο Ο, ἴση ἄρα εἶναι ἡ μὲν ΑΘ με τὴν ΑΣ, ἡ δε ΠΟ με τὴν ΠΘ, καὶ ἡ εὐθεῖα τῶν Ο, Σ θα περάσει ἀπὸ τὸ Θ. Ἐπειδὴ [εἶναι] ἐναλλάξ ἴση εἶναι ἡ γωνία ΘΑΣ με τὴν ΘΠΟ γωνία, εἶναι καὶ ἰσογώνια τὰ τρίγωνα ΑΘΣ, ΠΘΟ, καὶ ἡ ΑΠ εἶναι εὐθεῖα. Ἄρα εὐθεῖα εἶναι ἡ [γραμμὴ] ποῦ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Σ, Θ, Ο. Θα περάσει δε καὶ ἀπὸ τὸ Β. Ἡ ΘΟΒ εἶναι εὐθεῖα ἐπειδὴ ὅπως εἶναι ἡ ΒΖ πρὸς ΖΘ, ἔτσι ἡ ΟΠ πρὸς τὴν ΠΘ, ἀφοῦ οἱ γωνίες ΒΖΘ, ΟΠΘ εἶναι ἴσες, ἀπὸ τὶς παράλληλες ΒΖ, ΟΠ. Καὶ αὐτὸ ἐπειδὴ ἀποδείχθηκε στὴν 15. Προεκτείνοντας δε καὶ τὴν εὐθεῖα ποῦ ἐνώνει τὰ Β, Π τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΜΑ στὸ Κ. Ἐπειδὴ ὅπως εἶναι ἡ ΜΒ πρὸς τὴν ΒΝ, ὁμοίως ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΠ, ἔτσι ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΠ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΠ, εἶναι καὶ ὅπως ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΠ, ἡ ΑΣ πρὸς τὴν ΠΟ καὶ ἡ ΣΚ πρὸς τὴν ΠΟ. Ἰση ἄρα ἡ ΑΣ με τὴν ΣΚ. Τώρα ἀφοῦ ὅλη ἡ ΑΚ εἶναι ἴση με ὅλη τὴν διάμετρο τοῦ κύκλου ΕΗΘ, καὶ εἶναι ὅπως ἡ ΚΜ πρὸς τὴν ΚΣ, ἔτσι ἡ ΝΠ πρὸς τὴν ΟΠ, εἶναι καὶ ὅπως ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΑ, τουτέστιν ὅπως ἡ ΜΑ μαζί με τὴν διάμετρο τοῦ

κύκλου ΕΗΘ προς την διάμετρο, έτσι η ΝΠ προς την διάμετρο του κύκλου ΘΡΤ, που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.]

Παράφραση της απόδειξης:

Φέρουμε $BZ \perp B\Delta$, όπου Ζ το σημείο τομής της καθέτου και της ευθείας ΑΠ, η οποία προφανώς εφάπτεται του ημικυκλίου ΒΗΓ.

Από την πρώτη περίπτωση της Πρότασης 16 έχουμε:

$$\frac{BM}{\rho_A} = \frac{B\Gamma + B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

και

$$\frac{BN}{\rho_{\Pi}} = \frac{B\Gamma + B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

Ενώ από την δεύτερη και τρίτη περίπτωση της Πρότασης 16 έχουμε:

$$\frac{BM}{\rho_A} = \frac{\Gamma B - B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

και

$$\frac{BN}{\rho_{\Pi}} = \frac{\Gamma B - B\Delta}{\Gamma\Delta}, \text{ όπου } \rho_A, \rho_{\Pi} \text{ οι ακτίνες των κύκλων } (A, A\Theta) \text{ και } (\Pi, \Pi\Theta)$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση ισχύει:

$$\frac{\rho_A}{\rho_{\Pi}} = \frac{BM}{BN}$$

Αλλά,

$$\frac{AZ}{Z\Pi} = \frac{BM}{BN} \quad (\text{επειδή: } \begin{array}{l} \Pi\Xi // AM, \text{ άρα } \frac{AZ}{Z\Pi} = \frac{ZM}{Z\Xi} \\ BZ // N\Xi, \text{ άρα } \frac{ZM}{Z\Xi} = \frac{BM}{BN} \end{array})$$

Επομένως,

$$\frac{\rho_A}{\rho_{\Pi}} = \frac{AZ}{Z\Pi}$$

Ο κύκλος ΒΡΕΔ εφάπτεται των κύκλων ΕΗΘ, ΡΘΤ στα σημεία Ρ, Ε.

Επομένως από Πρόταση 15 τα σημεία Ρ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά και $EZ \cdot ZP = \Theta Z^2$.

Επίσης είναι $EZ \cdot ZP = ZB^2$ <δύναμη του σημείου Ζ ως προς τον κύκλο ΒΡΕΔ>

Επομένως $\Theta Z^2 = ZB^2$, άρα και $\Theta Z = ZB$.

Επιπλέον, τα τρίγωνα ΑΘΣ, ΠΘΟ είναι ισογώνια, διότι:

η ΜΑ τέμνει τον κύκλο ΕΗΘ στο Σ και η ΠΝ τον κύκλο ΘΡΤ στο Ο, άρα έχουμε:

$A\Theta = A\Sigma = \rho_A$, $\Pi O = \Pi\Theta = \rho_{\Pi}$ και $\hat{\Theta A\Sigma} = \hat{\Theta \Pi O}$, ως εντός εναλλάξ.

Αφού, τα τρίγωνα ΑΘΣ, ΠΘΟ είναι ισογώνια και η ΑΠ ευθεία γραμμή, έπεται ότι Σ, Θ, Ο συνευθειακά. Η ευθεία τους διέρχεται επίσης από το Β, διότι:
από Πρόταση 15 έχουμε:

$BZ : Z\Theta = O\Pi : \Pi\Theta$, αφού $BZ // O\Pi$, άρα $\hat{BZ\Theta} = \hat{O\Pi\Theta}$ <εντός εκτός κα επί τα αυτά>, άρα η ΘΟΒ είναι ευθεία .

Έστω Κ το σημείο τομής των ΒΠ και ΜΑ.

Αφού, $\frac{MB}{BN} = \frac{KB}{B\Pi} = \frac{AZ}{Z\Pi} = \frac{A\Theta}{\Theta\Pi A}$ [από $\hat{BN\Pi} \approx \hat{BMK}$]

Θα είναι $\frac{KB}{B\Pi} = \frac{A\Sigma}{\Pi O} = \frac{\Sigma K}{\Pi O}$

Επομένως, $A\Sigma = \Sigma K$

Τώρα, αφού $AK = \delta_A$ και $\frac{N\Pi}{\Pi O} = \frac{KM}{KS}$

έχουμε:

$\frac{AM + \delta_A}{\delta_A} = \frac{\Pi N}{\delta_{\Pi}}$, που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε.

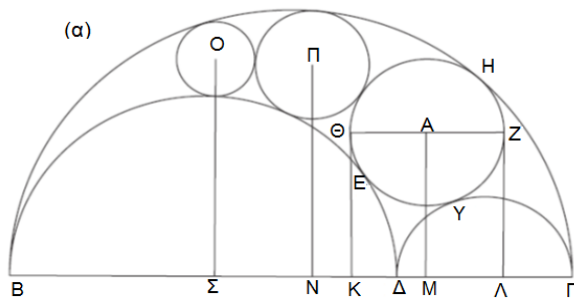
10.4. Οι επαγωγικές Προτάσεις 18, 20 και παραλλαγές αυτών στο έργο Συναγωγή.

ιη'

Τούτων προτεθεωρημένων υποκείσθω ήμικύκλιον τὸ ΒΗΓ, καὶ ἐπὶ τῆς βάσεως αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον εἰλήφθω τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τῶν ΒΔ ΔΓ ήμικύκλια γεγράφθω τὰ ΒΕΔ ΔΥΓ, καὶ ἐγγεγράφθωσαν εἰς τὸν μεταξὺ τὸν τριῶν περιφερειῶν τὸν καλούμενον ἄρβηλον κύκλοι ἐφαπτόμενοι τῶν ήμικυκλίων καὶ ἀλλήλων ὁσοιδηποτοῦν, ὥς οἱ περὶ τὰ κέντρα τὰ Α Π Ο, καὶ ἀπὸ τῶν κέντρων αὐτῶν κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ ἤχθωσαν αἱ ΑΜ ΠΝ ΟΣ· λέγω ὅτι ή μὲν ΑΜ ἴση ἐστὶν τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, ή δὲ ΠΝ διπλῇ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου, ή δὲ ΟΣ τριπλῇ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου, καὶ αἱ ἐξῆς κάθετοι τῶν οἰκείων διαμέτρων πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἐξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμούς.

Πρόταση 18:

Με αὐτὰ που ἔχουν ἤδη θεωρηθεῖ [εξεταστεί] υποθέτω ήμικύκλιο το ΒΗΓ, και στη βάση αὐτοῦ λαμβάνω τυχαῖο σημείο το Δ, και ἐπὶ τῶν ΒΔ, ΔΓ γράφω τα ήμικύκλια ΒΕΔ, ΔΥΓ, και στο χωρίο μεταξύ των τριῶν περιφερειῶν το καλούμενο ἄρβηλος εγγράφονται ὁσοιδήποτε κύκλοι ἐφαπτόμενοι των ήμικυκλίων και ο ένας του ἄλλου, ὅπως οἱ περὶ τα κέντρα Α, Π, Ο, και ἀπὸ τα κέντρα αὐτῶν ἄγουμε τις κάθετες ΑΜ, ΠΝ, ΟΣ στην ΒΓ. Ισχυρίζομαι ὅτι ή μεν ΑΜ είναι ἴση με τη διάμετρο του περὶ το Α κύκλου, ή δε ΠΝ διπλάσια της διαμέτρου του περὶ το Π κύκλου, ή δε ΟΣ τριπλάσια της διαμέτρου του περὶ το Ο κύκλου, και οἱ κάθετες στη σειρά πολλαπλάσια των ἀντίστοιχων διαμέτρων σύμφωνα με την ἀλληλουχία των ἀριθμῶν που υπερβαίνουν ο ένας τον ἄλλο κατὰ μία μονάδα.



προγεγραμμένα τὸ μὲν ὑπὸ ΓΒ ΒΚ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ὑπὸ ΛΒ ΒΔ, τὸ δὲ ὑπὸ ΒΓ ΓΛ τῷ ὑπὸ ΚΓ Δ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς ΛΓ· ἑκάτερος γὰρ λόγος ὁ αὐτός ἐστιν τῷ τῆς ΒΔ πρὸς ΔΓ (ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΓΒ ΒΚ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΛΒ ΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΛ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΚ· ἐναλλάξ ὡς ἡ ΓΒ πρὸς ΒΔ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς ΒΚ· διελόντι ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, ἡ ΛΚ πρὸς ΚΒ· ἀνάπαλιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ· πάλιν ἐπεὶ τὸ ὑπὸ ΒΓ ΓΛ ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ ΚΓ ΓΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΓΛ· ἐναλλάξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΓ· ἦν δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΓ)· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚ ΓΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ. προδέδεικται δὲ τὸ ὑπὸ ΒΚ ΛΓ ἴσον καὶ τῷ ἀπὸ ΑΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΚΛ, τουτέστιν τῇ ΖΘ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου. ἐπεὶ δὲ καὶ τοῦτο προδέδεικται ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΜ μετὰ τῆς ΖΘ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΠΝ πρὸς τὴν τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου διάμετρον, καὶ ἔστιν ἡ ΑΜ μετὰ τῆς ΖΘ διπλῇ τῆς ΖΘ, ἔσται καὶ ἡ ΠΝ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου διπλῇ. ἡ ΠΝ ἄρα μετὰ τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Π κύκλου τριπλασία τῆς διαμέτρου, καὶ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἡ ΟΣ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου· καὶ ἡ ΟΣ ἄρα τριπλασία τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Ο κύκλου. καὶ ὁμοίως καὶ ἡ τοῦ ἐξῆς κύκλου κάθετος τῆς διαμέτρου τετραπλασία, καὶ αἱ ἐξῆς κάθετοι τῶν καθ' αὐτὰς διαμέτρων εὑρεθήσονται πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἐξῆς μονάδι ἀλλήλων ὑπερέχοντας ἀριθμούς, καὶ τοῦτο συμβαῖνον ἐπὶ τὸ ἄπειρον ἀποδειχθήσεται.

[Μετάφραση:

Φέρω τὴν διάμετρο ΘΖ παράλληλῃ στὴ ΒΓ, καὶ καθέτους ΘΚ, ΖΛ. Εἶναι βέβαια σύμφωνα με ὅσα γράψαμε [παραπάνω] τὸ μὲν περιεχόμενο ὀρθογώνιο ἀπὸ τῆς ΓΒ, ΒΚ ἴσο με αὐτὸ [που περιέχεται] ἀπὸ τῆς ΛΒ, ΒΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ΓΛ με τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ, ΓΔ.

καὶ γιὰ αὐτὸ ὅπως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, ἔτσι ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΓ· ἐπειδὴ κάθε ἕνας ἀπὸ αὐτοὺς τοὺς λόγους εἶναι ἴδιος με τῆς ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ (διότι, ἐπειδὴ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ΒΚ ἴσο εἶναι με τὸ ἀπὸ τῆς ΛΒ, ΒΔ, εἶναι ἄρα ὅπως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΛ, ἔτσι ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΚ. Ἐναλλάξ ὅπως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, ἔτσι ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ. Διαιρώντας ὅπως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ, ἡ ΛΚ πρὸς τὴν ΚΒ. Ἀντιστρόφως ὅπως ἡ ΒΔ πρὸς ΔΓ, ἡ ΒΚ πρὸς ΚΛ. Πάλι ἐπειδὴ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ΓΛ εἶναι ἴσο με τὸ ἀπὸ τῆς ΚΓ, ΓΔ, εἶναι ἄρα ὅπως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΚ, ἔτσι ἡ ΓΔ πρὸς ΓΛ. Ἐναλλάξ ὅπως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΛ.

Διαιρώντας ἄρα εἶναι ὅπως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, ἔτσι ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΓ. Εἶναι δὲ ὅπως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ. Καὶ ἄρα ὅπως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, ἔτσι ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΛΓ).

Ίσο άρα το [ορθογώνιο] υπό των ΒΚ, ΓΛ με το [τετράγωνο] από της ΚΛ. Ωστόσο αποδείχθηκε ότι το υπό των ΒΚ, ΛΓ [είναι] ίσο και με το από της ΑΜ. Άρα είναι ίση η ΑΜ με την ΚΛ, τουτέστιν η διάμετρος ΖΘ του κύκλου περί το κέντρο Α. επειδή δε και αυτό έχει ήδη αποδειχθεί ότι είναι όπως η ΑΜ μαζί με την ΖΘ προς την ΖΘ, όπως η ΠΝ προς την διάμετρο του κύκλου περί το Π, και είναι η ΑΜ μαζί με την ΖΘ διπλάσια της ΖΘ, είναι και η ΠΝ διπλάσια της διαμέτρου του κύκλου περί το Π. Η ΠΝ άρα μαζί με τη διάμετρο του κύκλου περί το Π τριπλάσια της διαμέτρου, και έχει τον ίδιο λόγω η ΟΣ προς τη διάμετρο του κύκλου περί το Ο. Και η ΟΣ άρα τριπλάσια της διαμέτρου του κύκλου περί το Ο. Και ομοίως η κάθετος [από το κέντρο] του επόμενου κύκλου τετραπλάσια της διαμέτρου [αυτού του κύκλου], και οι κάθετες [από το κέντρο των κύκλων] στη σειρά θα βρεθούν να είναι πολλαπλάσια των διαμέτρων αυτών των κύκλων σύμφωνα με την ακολουθία των αριθμών που υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά μία μονάδα, και αυτό αποδεικνύεται ότι συμβαίνει επ' άπειρον.]
 Η παραπάνω απόδειξη ισχύει και για τις τρεις διαμορφώσεις σχημάτων που προκύπτουν από την εκφώνηση. Αυτό γιατί, όπως είδαμε, από την Πρόταση 16 δεν χρησιμοποιεί το συμπέρασμα αλλά το ενδιάμεσο βήμα που αναφέρουμε στην Παρατήρηση 2 τις Πρότασης 16.

Παράφραση της απόδειξης:

Φέρουμε ΘΖ//ΒΓ και $\Theta K \perp B\Gamma, Z\Lambda \perp B\Gamma$

Από την Πρόταση 16 (βλ. Πρόταση 16, Παρατήρηση 2), έχουμε:

$$\Gamma B \cdot B K = \Lambda B \cdot B \Delta$$

ενώ

$$\Gamma B \cdot \Gamma \Lambda = K \Gamma \cdot \Gamma \Delta$$

και γι' αυτό

$$\frac{BK}{K\Lambda} = \frac{K\Lambda}{\Lambda\Gamma}, \text{ επειδή } \frac{K\Lambda}{\Lambda\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \text{ και } \frac{BK}{K\Lambda} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$$

$$(\text{επειδή } \Gamma B \cdot B = \Lambda B \cdot B \Delta)$$

$$\text{Άρα } \frac{\Gamma B}{B\Lambda} = \frac{\Delta B}{BK}$$

$$\text{Εναλλάξ } \frac{\Gamma B}{B\Delta} = \frac{\Lambda B}{BK}$$

$$\text{Διαιρώντας } \frac{\Gamma\Delta}{\Delta B} = \frac{\Lambda K}{KB}$$

$$\text{Αντιστρόφως } \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{BK}{K\Lambda}$$

$$\text{Πάλι επειδή } B\Gamma \cdot \Gamma\Delta = K\Gamma \cdot \Gamma\Delta$$

$$\text{Άρα } \frac{B\Gamma}{\Gamma K} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\Lambda}$$

$$\text{Εναλλάξ } \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{K\Gamma}{\Gamma\Lambda}$$

$$\text{Διαιρώντας } \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{K\Lambda}{\Lambda\Gamma}$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι δε} \quad & \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta} = \frac{BK}{\text{ΚΛ}} \\ \text{Και άρα} \quad & \frac{BK}{\text{ΚΛ}} = \frac{\text{ΚΛ}}{\Lambda\Gamma} \end{aligned})$$

$$\text{Άρα } BK \cdot \Lambda\Gamma = \text{ΚΛ}^2$$

Ωστόσο, έχει επίσης δειχθεί (Πρόταση 16) ότι $BK \cdot \Lambda\Gamma = AM^2$

$$\text{Άρα } AM = \text{ΚΛ},$$

$$\text{αλλά } \text{ΚΛ} = \delta_A, \text{ άρα } \mathbf{AM} = \delta_A.$$

Έχει λοιπόν αποδείξει έως εδώ την βάση της επαγωγής. Δηλαδή ότι η απόσταση του κέντρου του πρώτου κύκλου από την ΒΓ ισούται με την διάμετρο του κύκλου αυτού.

Ας δούμε τώρα πως συνεχίζει.

Ωστόσο, από την πρόταση 17 ισχύει:

$$\frac{\Pi\text{N}}{\delta_{\Pi}} = \frac{AM + Z\Theta}{Z\Theta}$$

$$\text{και από το προηγούμενο έχουμε ότι } AM + Z\Theta = 2Z\Theta = 2\delta_A$$

$$\text{άρα θα είναι } \frac{\Pi\text{N}}{\delta_{\Pi}} = \frac{2\delta_A}{\delta_A}$$

$$\text{άρα } \frac{\Pi\text{N}}{\delta_{\Pi}} = \frac{2}{1}$$

$$\text{οπότε } \mathbf{\Pi\text{N} = 2\delta_{\Pi} .}$$

Ομοίως από Πρόταση 17 ισχύει:

$$\frac{O\Sigma}{\delta_O} = \frac{\Pi\text{N} + \delta_{\Pi}}{\delta_{\Pi}}$$

$$\text{και από προηγούμενη περίπτωση έχουμε } \Pi\text{N} + \delta_{\Pi} = 3\delta_{\Pi}$$

$$\text{Άρα } \frac{O\Sigma}{\delta_O} = \frac{3\delta_{\Pi}}{\delta_{\Pi}}$$

$$\text{συνεπώς } \frac{O\Sigma}{\delta_O} = \frac{3}{1}$$

$$\text{οπότε } \mathbf{O\Sigma = 3\delta_O .}$$

$$\text{Και ομοίως } d(A_4, B\Gamma) = 4\delta_4$$

και οι κάθετες [από το κέντρο των κύκλων] στη σειρά θα βρεθούν να είναι πολλαπλάσια των διαμέτρων αυτών των κύκλων σύμφωνα με την ακολουθία των αριθμών που υπερβαίνουν ο ένας τον άλλο κατά μία μονάδα, και αυτό αποδεικνύεται ότι συμβαίνει επ' άπειρον.

Σχόλια:

1. Ο Πάππος ορίζει μία αναδρομική ακολουθία κύκλων. Για την κατασκευή κάθε κύκλου απαιτείται ο προηγούμενος.
2. Θέτει τις βάσεις για την επαγωγική απόδειξη αποδεικνύοντας την πρόταση 17. Η Πρόταση 18 αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα αυτού του τμήματος της Συναγωγής και

διατυπώνεται από τον Πάππο αρχικά ως Πρόταση 14, χωρίς να αποδεικνύεται. Για να καταστεί αυτό δυνατό με την μέθοδο που ακολουθεί ο συγγραφέας απαιτείται η 17 και αυτή με την σειρά της απαιτεί τις 15 και 14. Η διάταξη αυτή των προτάσεων δηλώνει ότι ο Πάππος χρησιμοποιεί συνειδητά τη μέθοδο, , καθώς η 17 συνιστά το επαγωγικό επιχείρημα μέσω του οποίου εξασφαλίζεται η μετάβαση από τον ένα κύκλο στον αμέσως επόμενο.

3. Παρατηρούμε και εδώ την ύπαρξη αναδρομικής σχέσης της προς απόδειξη ιδιότητας, η οποία ασφαλώς είναι εκείνη που επιβάλει η πρόταση 17.

Αν συμβολίσουμε με $K_1, K_2, K_3, \dots$ το κέντρο του $1^{ου}, 2^{ου}, 3^{ου}, \dots$ κύκλου, αντίστοιχα, με $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ τις αντίστοιχες διαμέτρους των κύκλων αυτών, με $d_1, d_2, d_3, \dots$ τις αντίστοιχες αποστάσεις των κέντρων τους από την ΒΓ και με λn το λόγο $dn/\delta n$ τότε η

αναδρομική σχέση που ορίζεται από την 17, είναι:
$$\frac{d_{n+1}}{\delta_{n+1}} = \frac{d_n + \delta_n}{\delta_n}$$

4. Με βάση τα προηγούμενα σχόλια, ας ξαναδούμε συνοπτικά την παραπάνω απόδειξη:

1. Αποδεικνύει, με τη βοήθεια της Πρότασης 16, ότι η πρόταση ισχύει για την **πρώτη περίπτωση**.

Δηλαδή ότι ισχύει $d_1 = \delta_1$.

2. Αναδρομικός ορισμός: κατασκευή $2^{ου}$ κύκλου.

Αποδεικνύει ότι η πρόταση ισχύει για την **επόμενη περίπτωση, εφαρμόζοντας την Πρόταση 17 και την προηγούμενη περίπτωση**:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d_2}{\delta_2} = \frac{d_1 + \delta_1}{\delta_1} \\ d_1 = \delta_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d_2}{\delta_2} = \frac{2\delta_1}{\delta_1} \Rightarrow \frac{d_2}{\delta_2} = \frac{2}{1} \Rightarrow d_2 = 2\delta_2$$

3. Αναδρομικός ορισμός: κατασκευή $3^{ου}$ κύκλου.

Αποδεικνύει ότι η πρόταση ισχύει για την **επόμενη περίπτωση, εφαρμόζοντας την Πρόταση 17 και την προηγούμενη περίπτωση**:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d_3}{\delta_3} = \frac{d_2 + \delta_2}{\delta_2} \\ d_2 = 2\delta_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d_3}{\delta_3} = \frac{3\delta_2}{\delta_2} \Rightarrow \frac{d_3}{\delta_3} = \frac{3}{1} \Rightarrow d_3 = 3\delta_3$$

4. Και ομοίως $d_4 = 4\delta_4$

5. Και ομοίως $d_n = n\delta_n$, για κάθε n έως το άπειρο.

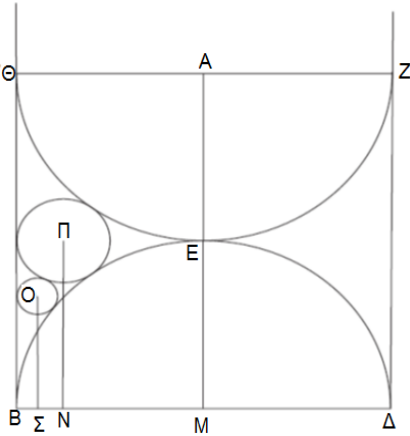
Ο Πάππος στο τέλος της παραπάνω απόδειξης, αλλάζοντας τις αρχικές συνθήκες, εξετάζει δύο επιπλέον περιπτώσεις:

1^η περίπτωση:

”Αν δ' ἀντὶ τῶν ΒΗΓ ΔΥΓ περιφερειῶν εὐθεῖαι ὥσιν ὀρθαὶ πρὸς τὴν ΒΔ, ὥς ἐπὶ τῆς τρίτης ἔχει καταγραφῆς, τὰ αὐτὰ συμβήσεται περὶ τοὺς ἐγγραφομένους κύκλους· αὐτόθεν γὰρ ἢ ἀπὸ τοῦ Α κέντρου κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ ἴση γίνεται τῇ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου διαμέτρῳ.

[Μετάφραση:

Αν δε αντί των περιφερειών BHΓ, ΔΥΓ υπάρχουν ευθείες γραμμές σε ορθές γωνίες με την ΒΔ, όπως στην τρίτη διαμόρφωση τα ίδια θα προκύψουν σχετικά με τους εγγεγραμμένους κύκλους. **Και αυτό γιατί η κάθετος από το κέντρο Α στην ΒΔ καταλήγει να είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου με κέντρο το Α.]**



Σχόλιο: Παρατηρούμε εδώ ότι ο Πάππος δεν μπαίνει στην διαδικασία να αποδείξει αναλυτικά την πρόταση και γι' αυτή την περίπτωση αν και ισχυρίζεται ότι ισχύει το ίδιο συμπέρασμα. Γιατί; Γιατί όπως ο ίδιος αναφέρει και τώρα ισχύει το ζητούμενο για τον πρώτο εγγεγραμμένο κύκλο. Θεωρεί, λοιπόν, ότι λόγω αυτού και όσον προηγήθηκαν το συμπέρασμα θα ισχύει και για τους υπόλοιπους κύκλους της ακολουθίας. Μπορούμε, λοιπόν, να επαναλάβουμε την απόδειξη ακριβώς όπως και προηγουμένως: εφαρμόζοντας σε κάθε βήμα την προηγούμενη περίπτωση και την Πρόταση 17: ισχύει προφανώς $d_1 =$

$AM = 2AE = \delta_1$ και από Πρόταση 17 $\frac{d_2}{\delta_2} = \frac{d_1 + \delta_1}{\delta_1} \Rightarrow d_2 = 2\delta_2$ και από Πρόταση 17

$\frac{d_3}{\delta_3} = \frac{d_2 + \delta_2}{\delta_2} \Rightarrow d_3 = 3\delta_3$ και από Πρόταση 17 ... $\Rightarrow \dots \Rightarrow$ επ' άπειρον.

Από αυτό το σημείο είναι ξεκάθαρο ότι ο Πάππος αντιλαμβάνεται πλήρως την αναγκαιότητα της ισχύος της πρώτης περίπτωσης καθώς και του επαγωγικού επιχειρήματος.

2^η περίπτωση:

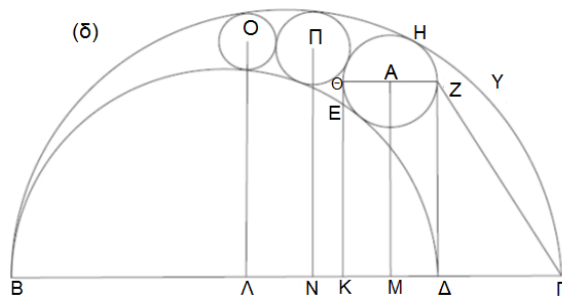
“Αν δὲ αἱ μὲν BHΓ BEΔ μένωσιν περιφέρειαι, ἀντὶ δὲ τῆς ΔΥΓ περιφερείας εὐθεῖα ὑποτεθῇ (ὡς ἐπὶ τῆς τετάρτης ἔχει καταγραφῆς) ἢ ΔΖ ὀρθὴ πρὸς τὴν ΒΓ, τῆς μὲν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ τετραγωνικὸν ἐν ἀριθμοῖς λόγον ἐχούσης, σύμμετρος ἔσται ἢ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος τῇ διαμέτρῳ τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, εἰ δὲ μή, ἀσύμμετρος. καθόλου γὰρ ὄν ἔχει λόγον ἢ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, τοῦτον ἔχει τὸν λόγον δυνάμει ἢ ΔΖ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, ὡς ἐξῆς δείκνυται. οἷον ἐὰν ᾗ τετραπλασία μήκει ἢ ΒΓ τῆς ΓΔ, γίνεται διπλῇ μήκει ἢ ΔΖ, τουτέστιν ἢ ἀπὸ τοῦ Α κάθετος, τῆς διαμέτρου τοῦ περὶ τὸ Α κύκλου, καὶ ἢ μὲν ἀπὸ τοῦ Π τριπλῇ, ἢ δ' ἀπὸ τοῦ Ο τετραπλῇ, καὶ ἐξῆς κατὰ τοὺς ἐξῆς ἀριθμούς.

[Μετάφραση:

Αν δε οι δύο περιφέρειες BHΓ και BEΔ παραμένουν, και αντί της περιφέρειας ΔΥΓ ὑποτεθεῖ ευθεία γραμμή ΔΖ (όπως στην τέταρτη διαμόρφωση) κάθετη στην ΒΓ, [τότε

όταν] η ΒΓ προς την ΓΔ έχουν λόγω τετραγωνικό αριθμό, η κάθετος από το Α θα είναι σύμμετρη με την ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Α, ενώ δε όταν αυτό δεν συμβαίνει, θα είναι ασύμμετρες. Γενικά βέβαια ότι λόγο έχει η ΒΓ προς την ΓΔ, το ίδιο λόγο έχει το τετράγωνο της ΔΖ προς το τετράγωνο της διαμέτρου του κύκλου με κέντρο Α, όπως αποδεικνύεται αμέσως μετά <αυτό όπως διευκρινίζει ο Πάππος αποδεικνύεται στην επόμενη Πρόταση 19>.

Για παράδειγμα εάν η ΒΓ είναι τετραπλάσια σε μήκος της ΓΔ, η ΔΖ γίνεται διπλάσια σε μήκος, δηλαδή η κάθετη από το Α, [αποδεικνύεται ότι είναι διπλάσια] της διαμέτρου του κύκλου με κέντρο το Α, και η μεν από το Π τριπλάσια, η δε από το Ο τετραπλάσια, και ούτω καθεξής στην σειρά, σύμφωνα με την αλληλουχία των αριθμών.]



Έτσι αν $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \kappa^2$, για κάποιο θετικό ακέραιο κ , τότε ΑΜ, ΑΖ σύμμετρες ενώ

αν $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} \neq \kappa^2$, για κάποιο θετικό ακέραιο κ , τότε ΑΜ, ΑΖ ασύμμετρες.

Έτσι αν για παράδειγμα $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ τότε $\Delta Z^2 = 4\delta_1^2 \Rightarrow \Delta Z = 2\delta_1 \Rightarrow \mathbf{d_1 = 2\delta_1}$.

Άρα και $\mathbf{d_2 = 3\delta_2}$, $\mathbf{d_3 = 4\delta_3}$, ...]

Στη συνέχεια αποδεικνύει το λήμμα που απαιτείται για την απόδειξη της πρώτης περίπτωσης του προηγούμενου σχήματος. δηλαδή για να αποδειχθεί ότι $d_1 = k\delta_1$, όπου

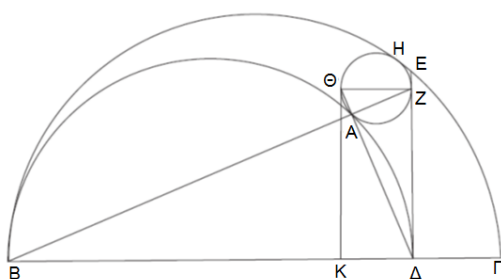
$$k = \frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta Z^2}{\delta_1^2}.$$

10'

Τὸ ὑπερτεθὲν λήμμα. ἡμικύκλια τὰ ΒΗΓ ΒΑΔ, καὶ ὀρθή ἡ ΔΕ, καὶ κύκλος ἐφαπτόμενος ὁ ΘΗΖΑ· ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ μήκει, οὕτως ἡ ΔΖ πρὸς τὴν διάμετρον τοῦ ΘΗΖΑ κύκλου δυνάμει.

Πρόταση 19:

Το προαναφερθέν λήμμα. [Έστω] ημικύκλια ΒΗΓ, ΒΑΔ, και η κάθετη ΔΕ [στην ΒΓ], και ο εφαπτόμενος κύκλος ΘΗΖΑ. [Θα δειχθεί] ότι όπως είναι ως προς το μήκος η ΒΓ προς την ΓΔ, έτσι το τετράγωνο της ΔΖ προς το τετράγωνο της διαμέτρου του κύκλου ΘΗΖΑ.



Ισχύουν και εδώ τα σχόλια που κάναμε στην προηγούμενη περίπτωση. Είναι εμφανές ότι ο Πάππος αντιλαμβάνεται πλήρως τη διαδικασία που ακολουθεί θεωρώντας την σαφώς ως ολοκληρωμένη απόδειξη.

 κ'

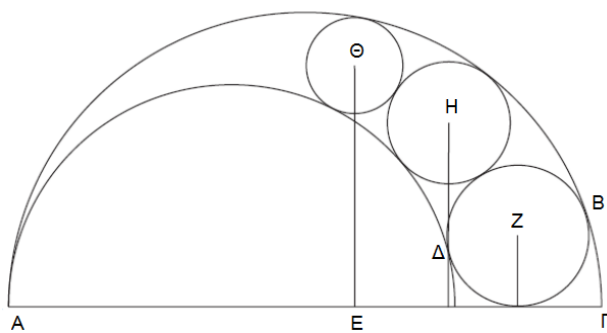
Ἐτι καὶ τοῦτο διὰ τῶν προγεγραμμένων λημμάτων τεθεώρηται. ἔστω ἡμικύκλια τὰ ΑΒΓ ΑΔΕ, καὶ γεγράφθωσαν ἐφαπτόμενοι τῶν περιφερειῶν αὐτῶν κύκλοι οἱ περὶ τὰ κέντρα τὰ Ζ Η Θ, καὶ οἱ συνεχεῖς αὐτοῖς ὥς ἐπὶ τὸ Α. ὅτι μὲν οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ Ζ κύκλου δῆλον, λέγω δ' ὅτι καὶ ἡ μὲν ἀπὸ τοῦ Η κάθετος τριπλασία τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ Η κύκλου, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ Θ πενταπλασία, καὶ αἱ ἐξῆς κάθετοι τῶν ἐκ τῶν κέντρων πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἐξῆς περισσοὺς ἀριθμοὺς.

Πρόταση 20:

Επιπλέον τα ακόλουθα επίσης έχουν καταδειχθεί μέσω των λημμάτων που είναι γραμμένα παραπάνω. Έστω τα ημικύκλια $AB\Gamma$, $A\Delta E$, και οι εγγεγραμμένοι εφαπτόμενοι των περιφερειών αυτών κύκλοι με κέντρα Z , H , Θ και αυτοί συνεχίζονται προς την κατεύθυνση του A . Τώρα ότι η μεν από το Z στην $A\Gamma$ είναι ίση με την [ακτίνα] του κύκλου με κέντρο το Z , είναι βέβαια φανερό. Ισχυρίζομαι δε ότι και η μεν κάθετος από το H είναι τριπλάσια της [ακτίνας] του κύκλου με κέντρο το H , η δε [κάθετος] από το Θ είναι πενταπλάσια [από την ακτίνα του κύκλου με κέντρο το Θ], και οι κάθετες στην ακολουθία [είναι] τα πολλαπλάσια των ακτίνων σύμφωνα με τους επόμενους περιττούς αριθμούς στην σειρά.

[Δηλαδή: $\mathbf{d}_1 = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{d}_2 = 3\mathbf{r}_2$, $\mathbf{d}_3 = 5\mathbf{r}_3$, . . . ,

όπου $r_1, r_2, r_3, \dots$ η ακτίνα του $1^{ου}, 2^{ου}, 3^{ου}$, κ.τ.λ. κύκλου αντίστοιχα και $d_1, d_2, d_3, \dots$ η απόσταση του κέντρου του $1^{ου}, 2^{ου}, 3^{ου}$, κ.τ.λ. κύκλου αντίστοιχα.]



Απόδειξη:

Ἐπεὶ γὰρ προδεδείχεται ὡς ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος πρὸς τὴν ἰδίαν διάμετρον, καὶ ἔστιν ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου ἡμιολία τῆς διαμέτρου, τῆς ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἔσται τριπλασία. πάλιν ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον, οὕτως ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ δ' ἀπὸ τοῦ Η κάθετος μετὰ τῆς διαμέτρου πρὸς τὴν διάμετρον λόγον ἔχει ὃν ἔχει τὰ πέντε πρὸς τὰ δύο, ἔξει καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος πρὸς τὴν διάμετρον τὸν αὐτὸν λόγον· τῆς ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἔσται πενταπλασία.

ὁμοίως δειχθήσονται καὶ αἱ ἐξῆς κάθετοι τῶν ἐκ τῶν κέντρων πολλαπλάσιαι κατὰ τοὺς ἐξῆς περισσοὺς ἀριθμοὺς.

[Μετάφραση:

Δεδομένου ὅτι ἔχει ἤδη αποδειχθεῖ ὅπως ἡ κάθετος ἀπὸ τοῦ Ζ μαζί με τὴν διάμετρο [τοῦ κύκλου με κέντρο το Ζ] πρὸς τὴν διάμετρο, ἔτσι ἡ κάθετος ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὴν ἀντίστοιχη διάμετρο [τοῦ κύκλου με κέντρο το Η], καὶ εἶναι ἡ κάθετος ἀπὸ τοῦ Ζ μαζί με τὴν διάμετρο τὰ τρία δεύτερα τῆς διαμέτρου, ἄρα ἡ κάθετος ἀπὸ τοῦ κέντρου εἶναι τριπλάσια [τῆς διαμέτρου]. Πάλιν αφοῦ ὅπως εἶναι ἡ κάθετος ἀπὸ τοῦ Η μαζί με τὴν διάμετρο πρὸς τὴν διάμετρο, ἔτσι ἡ κάθετος ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν διάμετρο, ἡ κάθετος ἀπὸ τοῦ Η μαζί με τὴν διάμετρο πρὸς τὴν διάμετρο ἔχει λόγον αὐτὸν ποὺ ἔχουν τὰ πέντε πρὸς τὰ δύο, επομένως καὶ ἡ κάθετος ἀπὸ τοῦ Θ πρὸς τὴν διάμετρο ἔχει τὸν ἴδιο λόγο. Ἀρα τῆς ἐκ τοῦ κέντρου [δηλαδὴ τῆς ακτίνας] εἶναι πενταπλάσια.

Ὁμοίως αποδεικνύονται καὶ οἱ κάθετοι στὴν ἀκολουθία τῶν ἐκ τῶν κέντρων παλλαπλάσια σύμφωνα με τὴν ἀκολουθία τῶν περιττῶν ἀριθμῶν.]

Παράφραση τῆς ἀπόδειξης:

Εἶναι προφανές ὅτι $ZK = \rho_Z$,

Απὸ Πρόταση 17 ἔχουμε:

$$\frac{(ZK + \delta_Z)}{\delta_Z} = \frac{H\Lambda}{\delta_H}$$

Αλλὰ ἀπὸ προηγούμενη περίπτωση ἔχουμε:

$$\frac{(ZK + \delta_Z)}{\delta_Z} = \frac{3}{2} \quad [\text{από προηγούμενη περίπτωση έχουμε } ZK = \rho_Z, \text{ οπότε}]$$

$$ZK + \delta_Z = \rho_Z + \delta_Z = \frac{1}{2}\delta_Z + \delta_Z = \frac{3}{2}\delta_Z]$$

$$\text{Επομένως } \frac{H\Lambda}{\delta_H} = \frac{3}{2}, \text{ δηλαδή } H\Lambda = \frac{3}{2}\delta_H = \frac{3}{2}2\rho_H = 3\rho_H,$$

Πάλι από Πρόταση 17 έχουμε:

$$\frac{(H\Lambda + \delta_H)}{\delta_H} = \frac{\Theta M}{\delta_\Theta}$$

και από προηγούμενη περίπτωση ισχύει:

$$\frac{(H\Lambda + \delta_H)}{\delta_H} = \frac{5}{2} \quad [\text{από προηγούμενη περίπτωση έχουμε } \frac{H\Lambda}{\delta_H} = \frac{3}{2}]$$

$$\text{άρα εφαρμόζοντας την δι' ίσου } \frac{(H\Lambda + \delta_H)}{\delta_H} = \frac{(3+2)}{2}]$$

$$\text{Άρα } \frac{\Theta M}{\delta_\Theta} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Επομένως } \Theta M = 5\rho_\Theta,$$

Ομοίως αποδεικνύονται και οι κάθετοι στην ακολουθία των εκ των κέντρων πολλαπλάσια σύμφωνα με την ακολουθία των περιττών αριθμών.

Σχόλια:

Όπως και στην Πρόταση 18 θα συμβολίσουμε με $K_1, K_2, K_3, \dots$ το κέντρο του $1^{\text{ου}}, 2^{\text{ου}}, 3^{\text{ου}}, \dots$ κύκλου, αντίστοιχα, με $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ τις αντίστοιχες διαμέτρους των κύκλων αυτών και με $d_1, d_2, d_3, \dots$ τις αντίστοιχες αποστάσεις των κέντρων τους από την ΒΓ. Επίσης εξακολουθούν να ισχύουν τα δύο πρώτα σχόλια που αφορούν στην 18, σχετικά με την ύπαρξη αναδρομικού ορισμού αλλά και του επαγωγικού επιχειρήματος.

Τέλος θα δούμε και πάλι συνοπτικά την απόδειξη της πρότασης:

1. Αποδεικνύει, με τη βοήθεια της Πρότασης 16, ότι η πρόταση ισχύει για την

πρώτη περίπτωση.

Δηλαδή ότι ισχύει $d_1 = r_1$.

2. Αποδεικνύει ότι η πρόταση ισχύει για την **επόμενη περίπτωση, εφαρμόζοντας την Πρόταση 17 και την προηγούμενη περίπτωση:**

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d_2}{\delta_2} = \frac{d_1 + \delta_1}{\delta_1} \\ d_1 = r_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d_2}{\delta_2} = \frac{r_1 + 2r_1}{2r_1} \Rightarrow \frac{d_2}{2r_2} = \frac{3r_1}{2r_1} \Rightarrow \frac{d_2}{2r_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow d_2 = 3r_2$$

3. Αποδεικνύει ότι η πρόταση ισχύει για την **επόμενη περίπτωση, εφαρμόζοντας την Πρόταση 17 και την προηγούμενη περίπτωση:**

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d_3}{\delta_3} = \frac{d_2 + \delta_2}{\delta_2} \\ d_2 = 3r_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d_3}{\delta_3} = \frac{3r_2 + 2r_2}{2r_2} \Rightarrow \frac{d_3}{2r_3} = \frac{5r_2}{2r_2} \Rightarrow \frac{d_3}{2r_3} = \frac{5}{2} \Rightarrow \mathbf{d_3 = 5r_3}$$

- 4. Και ομοίως αποδεικνύονται και οι κάθετοι στην ακολουθία των εκ των κέντρων πολλαπλάσια σύμφωνα με την ακολουθία των περιττών αριθμών, δηλαδή: $\mathbf{d_n = (n-1) \cdot r_n}$, για κάθε n έως το άπειρο.**

Κεφάλαιο 11.

Νικόμαχος ο Γερασηνός – Άθροισμα Κύβων

Ο Νικόμαχος ο Γερασηνός ήταν νεο-Πυθαγόρειος μαθηματικός, έζησε τον 2ο μ.Χ. αιώνα και καταγόταν από την πόλη Γέρασα της ρωμαϊκής Συρίας. Είναι γνωστός στην ιστορία της επιστήμης κυρίως για το έργο του «*Αριθμητική Εισαγωγή*», όπου για πρώτη φορά η Αριθμητική εξετάζεται και μελετάται εντελώς διαχωρισμένη από τη Γεωμετρία. Η *Αριθμητική Εισαγωγή* ήταν ένα δημοφιλές και ισχυρό βιβλίο, το οποίο άσκησε μεγάλη επίδραση στην αριθμητική παιδεία ανατολικών και δυτικών πολιτισμών.

Χρονολογικά θα έπρεπε το κεφάλαιο αυτό να τοποθετηθεί μεταξύ του 9^{ου} και 10^{ου} κεφαλαίου αλλά επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με μία συγκεκριμένη Πρόταση από το έργο του Νικόμαχου, η οποία σχετίζεται με Προτάσεις που θα μελετήσουμε από το έργο Αράβων μαθηματικών στο επόμενο κεφάλαιο, επιλέξαμε να παρακάμψουμε αυτή τη διάταξη.

Με βάση το έργο αυτό μελετητές της Ιστορίας των Μαθηματικών, όπως οι Heath (1921), Cajori(1919), Loria (1972), Boyer (2011), θεωρούν ότι το άθροισμα κύβων ήταν γνωστό στους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς, παρόλο που ο Νικόμαχος δεν διατυπώνει τον τύπο του αθροίσματος. Ωστόσο, όπως πολύ σωστά προτείνει ο Heath (1921) στην ανάλυσή του, την οποία θα δούμε στην συνέχεια, διατυπώνει την Πρόταση 2, που ακολουθεί, η οποία σε συνδιασμό με την Πυθαγόρεια Πρόταση 1 οδηγούν άμεσα στο συμπέρασμα ότι το άθροισμα των πρώτων των κύβων των πρώτων n ακεραίων ισούτε με το τετράγωνο του αθροίσματος των πρώτων n ακεραίων.

Πρόταση 1 (Πυθαγόρειοι Αριθμητικοί Γνώμονες).

$$1=1^2$$

$$1+3=2^2$$

$$1+3+5=3^2$$

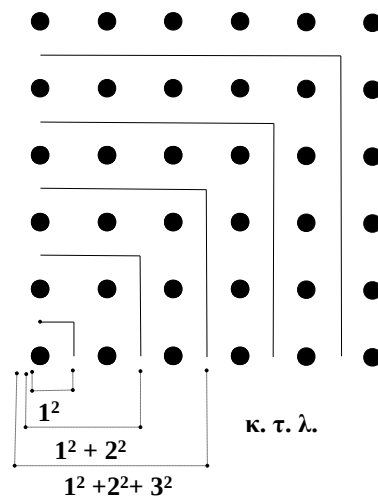
...

$$1+3+\dots+(2v-1)=v^2.$$

Ορισμός ακολουθίας. $\Lambda_v = v^2$.

Αναδρομικός ορισμός της Λ_v . $\Lambda_v = 2v-1 + \Lambda_{v-1}$.

[Πράγματι, $\Lambda_v - \Lambda_{v-1} = v^2 - (v-1)^2 = v^2 - (v^2 - 2v + 1) = 2v - 1$ – αριθμητικός γνώμων]



Απόδειξη Πρότασης 1 με επαγωγή.

Ισχύει για $v=1$.

Έστω ότι ισχύει για v , δηλαδή $1+3+\dots+(2v-1)=v^2$.

Τότε ισχύει για $v+1$: από τον αναδρομικό ορισμό $(v+1)^2 = v^2 + 2v + 1$.

Νικόμαχος, Αριθμητική Εισαγωγή 2,20,5,17-23

‘έκτεθέντων γάρ τῶν ἀπὸ μονάδος ἐπ’ ἅπειρον συνεχῶν περισσῶν ἐπισκόπει οὕτως,

ὁ πρῶτος τὸν δυνάμει κύβον ποιεῖ,

οἱ δὲ δύο μετ' ἐκεῖνον συντεθέντες τὸν δεύτερον,
οἱ δὲ ἐπὶ τούτοις τρεῖς τὸν τρίτον,
οἱ δὲ συνεχεῖς τούτοις τέσσαρες τὸν τέταρτον,
οἱ δὲ ἐφεξῆς τούτοις πέντε τὸν πέμπτον
καὶ οἱ ἐξῆς ἕξ τὸν ἕκτον
καὶ τοῦτο μέχρις αἰεὶ.'

Σχηματικά:

1	3+	5	7+	9+	11	13+	15+	17+	19
=1 ³	=8=2 ³		=27=3 ³			=64=4 ³			
21+	23+	25+	27+	29					
=5 ³									
31+	33+	35+	37+	39+	41				
=6 ³									

Ο Νικόμαχος, λοιπόν, διατυπώνει την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2 (Νικόμαχος, Αριθμητική 2,20). Για κάθε αριθμό n , οι n το πλήθος διαδοχικοί περιττοί αριθμοί $n^2-n+1, n^2-n+3, [[n^2]], \dots, n^2-n-(2n-3)=n^2+n-3, n^2-n+(2n-1)=n^2+n-1$. έχουν άθροισμά n^3 .

Ο Νικόμαχος δεν δίνει απόδειξη της Πρότασης 2, και θα πρέπει να δεχθούμε ότι η Πρόταση είναι παλαιότερη, ίσως Πυθαγόρεια. Μια εύλογη και σχεδόν άμεση απόδειξη, βασισμένη στην Πυθαγόρεια Πρόταση 1, έχει δοθεί στο έργο του Heath, *History of Mathematics* (vol. I, p. 108-110), και είναι η ακόλουθη.

Απόδειξη.

Έστω $2\chi+1$ ο αρχικός περιττός αριθμός της ζητούμενης ακολουθίας.

Τότε οι n διαδοχικοί περιττοί είναι

$2\chi+1, 2\chi+3, \dots, 2\chi+2n-1$.

Από την πρόταση 1, το άθροισμα αυτών είναι $2\chi n+n^2$.

Άρα πρέπει να έχουμε $2\chi n+n^2=n^3$, άρα $2\chi+n=n^2$, άρα $\chi=(1/2)(n^2-n)$.

Άρα το αρχικό στοιχείο της ζητούμενης ακολουθίας είναι n^2-n+1 , και

όλη η ζητούμενη ακολουθία είναι η

$n^2-n+1, n^2-n+3, [[n^2]], \dots, n^2-n-(2n-3)=n^2+n-3, n^2-n+(2n-1)=n^2+n-1$.

$$n^3=[n(n-1)+1]+[n(n-1)+3]+\dots+[n(n-1)+(2n-1)]$$

Πρόταση 3. $1^3+2^3+\dots+n^3=(n(n+1)/2)^2$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2

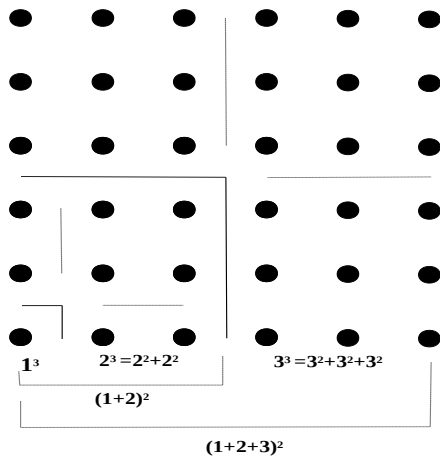
$$1^3+2^3+\dots+n^3=1+(3+5)+\dots+(n^2-n+1+\dots+n^2+n-1).$$

Από την Πρόταση 1

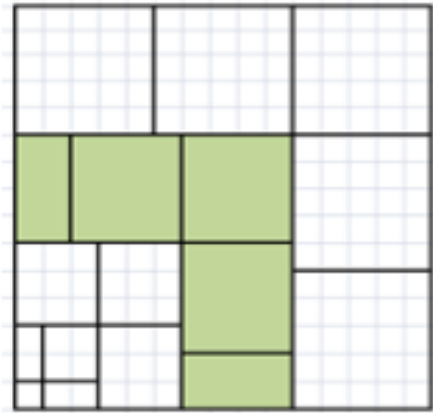
$$1+3+5+\dots+(v^2+v-1)=(v(v+1)/2)^2.$$

Ο Νικόμαχος δεν διατυπώνει την Πρόταση 3.

Η απόδειξη της Πρότασης 3 είναι με την μορφή γνωμόνων κατά τα Πυθαγόρεια πρότυπα:



κ. τ. λ.



Ο Heath αναφέρει, χωρίς να παραθέτει πηγές, ότι οι Ρωμαίοι εκτιμητές-μετρητές γης (agrimensores) γνώριζαν αυτό τον τύπο.

Ο Ινδός Aryabhata (499 μ.Χ.) στο έργο του *Ganitapada*, στίχος 22, γράφει:

«*The product of the three quantities, the number of terms plus one, the same increased by the number of terms, and the number of terms, when divided by 6, $[(n+1) \cdot 2n + 1 \cdot n]/6$ gives the sum of squares of natural numbers $[1^2 + 2^2 + \dots + n^2]$.*

The square of the sum of natural numbers $[S_n^2]$

gives the sum of the cubes of natural numbers $[1^3 + 2^3 + \dots + n^3]$.»

Δεν υπάρχει κάποια ένδειξη απόδειξης.

Επίσης ο Heath γράφει:

«*It would seem that there were at the time two schools in Arabia which were opposed to one another in that one favoured Greek, and the other Indian, methods²². Alkarkhi²³ was one of those who followed Greek models almost exclusively, and he has a proof of the theorem now in question by means of a figure with gnomons drawn in it, furnishing an excellent example of the geometrical algebra which is so distinctively Greek.*» (σελ.109)

Στην συνέχεια παραθέτει την απόδειξη του Al-Karaji (σελ. 109-110), και συνεχίζει (σελ. 110):

«*It is easy to see that the first gnomon about the small square is $3+5=23$, the next gnomon is $7+9+11=33$, and so on.*

The demonstration therefore hangs together with the theorem stated by Nicomachus. [...] we can hardly doubt the Greek origin of the summation of the series of cubes.»,

διαπίστωση με την οποία είναι δύσκολο να διαφωνήσουμε.

²² Για την διαίρεση αυτή πρβλ. van der Waerden, *A History of Algebra*, Springer, 1985, σελ.14-15 &20.

²³ =Al-Karaji, πρβλ. R. Rashed, *The Development of Arabic Mathematics*, σελ. 22.

Κεφάλαια 12 μέχρι 14.

Η Μαθηματική Επαγωγή από τα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά μέχρι τον Pascal (Αραβες, Gerson, Μαυρόλυκος)

Κεφάλαιο 12.

Άραβες (Abu Kamil, Al-Karaji και al-Samaw'al)

Η διαδικασία σύνδεσης της αριθμητικής με την άλγεβρα, ξεκίνησε από τον al-Khwarizmi (780-850 μ.Χ.) και τον Abu Kamil (~850-930 μ.Χ.) και συνεχίστηκε στον ισλαμικό κόσμο με το έργο του al-Karaji (~950-1030) και του al-Samaw'al (~1130-1180), στη διάρκεια των επόμενων δύο αιώνων. Αυτοί οι τελευταίοι μαθηματικοί έπαιξαν καθοριστικό ρόλο, δείχνοντας ότι οι τεχνικές της αριθμητικής θα μπορούσαν να εφαρμοστούν εποικοδομητικά στην άλγεβρα και, αμοιβαίως, ότι οι ιδέες που αναπτύχθηκαν αρχικά στην άλγεβρα θα μπορούσαν επίσης να είναι σημαντικές όσον αφορά την αντιμετώπιση των αριθμών (Katz, 2009).

Μια άλλη σημαντική ιδέα, που αποδίδεται, από ιστορικούς των μαθηματικών, στους al-Karaji και al-Samaw'al είναι η εισαγωγή από τον πρώτο και η συνέχιση από τον δεύτερο μιας μορφής επαγωγικής απόδειξης, για την αντιμετώπιση ορισμένων αριθμητικών – αλγεβρικών προτάσεων. Την ίδια ιδέα όμως συναντάται και στον προγενέστερό τους Abu Kamil.

12.1 Abu Kamil

Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση του Abu Kamil. Ο Yadegari (1978) δηλώνει «*In my research on the history of mathematical induction, I came across an example of the "quasi-general" form of induction used by Abu-Kamil Shuja' Ibn Aslam.*» (σελ. 260), ενώ ο Rashed (2012) «*Il procède d'abord par un raisonnement par récurrence archaïque, c'est-à-dire qu'il établit le résultat pour $n = 1, 2, 3, 4$, pour conclure qu'il est vrai pour tout n , sans toutefois formuler explicitement l'hypothèse de la récurrence.* ...

Nous sommes en présence des premières démonstrations par récurrence archaïque en algèbre. Les successeurs d'Abū Kāmil, notamment al-Karaji et al-Samaw'al, redonnent des démonstrations de ces mêmes formules, et de bien d'autres, par récurrence ou par régression.» (σελ. 193, 195).

Την αποδεικτική διαδικασία η οποία θα μπορούσε, με βάση τους προαναφερθέντες, να χαρακτηριστεί ως ένα είδος αρχαϊκής μαθηματικής επαγωγής, βρίσκουμε στο έργο του Abu Kamil *Fi al-jabr wa al-muqibala*. Χειρόγραφο του έργου αυτού βρέθηκε σε βιβλιοθήκη της Κωνσταντινούπολης από τον Martin Levey, ο οποίος το μετέφρασε το χωρίζοντάς το παράλληλα σε τρία τμήματα. Το τρίτο μέρος, που τιτλοφορείται *Indeterminate Problems of Abu Kamil*, περιλαμβάνει προβλήματα τα οποία καταλήγουν σε επίλυση εξισώσεων. Προς το τέλος αυτού του μέρους προστίθεται, ως παράρτημα κατά κάποιο τρόπο, μια σχετικά σύντομη μελέτη αθροισμάτων φυσικών αριθμών.

Συγκεκριμένα ο Abu Kamil καταπιάνεται με τα αθροίσματα $\sum_{i=1}^n i^2$, $\sum_{i=1}^n i$, $\frac{\sum_{i=1}^n i^2}{\sum_{i=1}^n i}$, και $\sum_{i=0}^n 2^i$.

Σύμφωνα με τον Rashed (2012), ο Abu Kamil στην αρχή του παραρτήματος δηλώνει ότι προτίθεται να αποδείξει την σχέση:
$$\sum_{i=1}^n i^2 = (n + n^2) \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Συνεχίζοντας δηλώνει ότι το προηγούμενο είναι σωστό διότι ισχύει
$$\frac{\sum_{i=1}^n i^2}{\sum_{i=1}^n i} = \frac{2}{3} n + \frac{1}{3},$$
 την

οποία αμέσως μετά «αποδεικνύει».

Ο Yadegari (1978) μας πληροφορεί ότι το πρώτο άθροισμα ο Abu Kamil αναφέρει ότι συνάντησε σε ένα αρχαίο βιβλίο άγνωστου συγγραφέα.

Η παρακάτω μετάφραση του προβλήματος είναι από το άρθρο του *THE USE OF MATHEMATICAL INDUCTION BY ABU KAMIL SHUJA' IBN ASLAM (850-930)*.

«Βρήκα ένα κεφάλαιο στα κεφάλαια για τα μαθηματικά γραμμένο στα βιβλία των αρχαίων. Ωστόσο, δεν είναι γνωστό ποιος το έγραψε ή ποιος είναι ο δημιουργός του. Όλοι όσοι ασχολούνται με τα μαθηματικά επαναλαμβάνουν τους κανόνες του και μιμούνται το περιεχόμενό του. Δεν γνωρίζουν τους λόγους πίσω από αυτούς [τους κανόνες], και ούτε καν σκέφτονται γι' αυτούς. Ως εκ τούτου, ρώτησα πολλούς ειδικούς στις επιστήμες των μαθηματικών και της γεωμετρίας για τους λόγους και την προέλευση τους. Αλλά κανείς δεν είχε μια απάντηση. Έτσι, σκέφτηκα πάνω σε ότι είχαν εκθέσει στα βιβλία τους. Ο Θεός, ο δοξασμένος και ο ύψιστος, κατέστησε εύκολο για μένα να ανακαλύψω τον λόγο μέσω της καλοσύνης Του, της χάρης Του, και Της δυναμής του. Θα το περιγράψω εδώ, στο βιβλίο μου.

Έτσι, αν λένε προσθέσετε από το 1 επί 1 έως το 10 επί 10 ή έως το 100 επί 100 ή όσο επιθυμείτε σε αύξουσα σειρά όπως 1 επί 1 συν 2 επί 2 συν 3 επί 3 συν 4 επί 4, κ.λ.π. μέχρι όπου εσείς επιθυμείτε.

Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να πάτε στο 10 επί 10. Το κεφάλαιο για το οποίο μίλησα νωρίτερα περιγράφει ότι θα πρέπει να προσθέσετε το 1 στον τελευταίο όρο που είναι 10. Αυτό είναι 11, πολλαπλασιάστε το με 10, γίνεται 110, κρατήστε το. Τώρα πάρτε το 1/3 του 10, αυτό είναι 3 και 1/3, προσθέστε 1/6 σ' αυτό για να πάρετε 3 και 1/2. Τώρα πολλαπλασιάστε το με 100 συν 10 [δηλαδή το 110]. Το αποτέλεσμα θα είναι 385, που είναι το άθροισμα των αριθμών 1 επί 1 - 10 επί 10 σε αύξουσα [109] σειρά.

Ο λόγος για αυτό είναι ότι αν βρείτε το άθροισμα του γινομένου του 1 με το 1 και του 2 με το 2 και του 3 με το 3 και ούτω καθεξής και ούτω καθεξής, στη συνέχεια διαιρέσουμε το ποσό αυτό με το άθροισμα των 1 και 2 και 3 σε αύξουσα σειρά όλη τη διαδρομή μέχρι τον τελευταίο όρο του αθροίσματος των γινομένων, το αποτέλεσμα θα είναι τα 2/3 του αριθμού των όρων που έχετε πολλαπλασιάσει και προσθέσει συν το 1/3.

Είναι σαφές ότι η Πρόταση τη οποία περιγράφει ο Abu Kamil είναι η εξής:

Κατά συνέπεια, αν πολλαπλασιάσουμε 1 επί 1, παίρνουμε 1. Αν το διαιρέσουμε με το 1, αποδεικνύεται να είναι 1, το οποίο είναι 2/3 του 1 συν 1 / 3. Αν πολλαπλασιάσουμε 2 επί 2, παίρνουμε 4, προσθέστε το πρώτο 1 σε αυτό και μπορείτε να πάρετε 5. Αν διαιρέσουμε το 5 με 1 συν 2 που είναι 3, το αποτέλεσμα θα είναι 1 και 2/3 που είναι 2/3 του 2 συν 1/3.

Αν πολλαπλασιάσουμε 3 επί 3, θα είναι 9. Αν σε αυτό προσθέσουμε το 5, θα είναι 14. Τώρα, αν διαιρέσουμε το 14 με 1 συν 2 συν 3 που είναι 6, το αποτέλεσμα θα είναι 2 και 1/3, το οποίο είναι 2/3 του 3 και 1/3. Και αν πολλαπλασιάσετε το 4 επί 4, θα είναι 16. Προσθέστε το 14 σε αυτό και έχουμε 30. Διαιρούμε με το 1 συν 2 συν 3 συν 4 το οποίο είναι 10, το αποτέλεσμα θα είναι 3. Αυτό είναι 2/3 του 4 συν 1/3 και ούτω καθεξής και ούτω καθεξής. Έτσι, αν διαιρέσουμε το άθροισμα των γινομένων του 1 επί 1 έως 10 επί 10 σε αύξουσα σειρά από το άθροισμα των 1 και 2 και 3 έως 10 σε μια αύξουσα σειρά, το πηλίκο θα είναι 2/3 του 10 συν 1/3. Σε αυτό το παράδειγμα, η απάντηση είναι 7.

Αυτός ο κανόνας είναι σωστός ανεξάρτητα από τη γεωμετρία.»

Είναι σαφές ότι η πρόταση αναφέρεται στο άθροισμα τετραγώνων των φυσικών αριθμών και διατυπώνεται στο αρχαίο βιβλίο στη γενική της μορφή, ισχύει δηλαδή για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό («μέχρι όπου εσείς επιθυμείτε»). Ο υπολογισμός του αναφερόμενου αθροίσματος και μέσω αυτού η γνωστοποίηση του τύπου γίνεται, παρόλα αυτά, για τον φυσικό αριθμό $n=10$. Είναι όμως ξεκάθαρο («Ας υποθέσουμε ότι θέλετε να πάτε στο 10 επί 10») ότι αυτό λειτουργεί ως παράδειγμα.

Γι' αυτήν λοιπόν την περίπτωση, σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + 10 \cdot 10 = (1+10) \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{1}{6} \right).$$

Άρα θα μπορούσαμε να πούμε ότι η μαθηματική διατύπωση της πρότασης είναι:

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + n \cdot n = (1+n) \cdot n \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot n + \frac{1}{6} \right)$$

ή

$$\sum_{i=1}^n i^2 = (1+n) \cdot n \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot n + \frac{1}{6} \right) \left[= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right].$$

Ο Abu Kamil δηλώνει ότι δεν υπήρχε απόδειξη αυτής της πρότασης στο αρχαίο βιβλίο στο οποίο την ανακάλυψε. Ωστόσο, είναι σαφές ότι ο Abu Kamil περιγράφει την πρόταση

$$\frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \dots + n \cdot n}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3}$$

$$\left(\text{ή } \sum_{i=1}^n i^2 \div \sum_{i=1}^n i = \frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3} \right),$$

σε γενική μορφή και ειδικότερα για $n=10$.

Ένα ακόμη στοιχείο το οποίο προκύπτει από την πρόταση που αναφέρεται παρακάτω «Αυτός ο κανόνας είναι σωστός ανεξάρτητα από τη γεωμετρία.» γεννάει ερωτηματικά. Ο Abu Kamil, όπως είδαμε, την αντιμετωπίζει εντελώς αριθμητικά. Έτσι μπορούμε, ίσως, να υποθέσουμε ότι η αναφορά στην Γεωμετρία σχετίζεται με το αρχαίο βιβλίο και ότι πιθανόν εκεί η πρόταση να είχε γεωμετρική διατύπωση.

Από όλα αυτά προκύπτει ότι η Πρόταση που αναφέρει ο Abu Kamil συμπίπτει με την Πρόταση 10 στο έργο Περί Ελίκων του Αρχιμήδη, η οποία διατυπώνεται γενικά σε γεωμετρική γλώσσα και αποδεικνύεται για $n=10$ από τον Αρχιμήδη. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο Abu Kamil είχε μπροστά του κάποιο χειρόγραφο με την διατύπωση, χωρίς συγγραφέα και απόδειξη.

Η απόδειξη που προτείνει ο Abu Kamil είναι εντελώς διαφορετική από την μη επαγωγική απόδειξη του Αρχιμήδη, και περιγράφεται ως εξής:

1^ο : αποδεικνύει την πρόταση για n=1

(«αν πολλαπλασιάσουμε 1 επί 1, παίρνουμε 1. Αν το διαιρέσουμε με το 1, αποδεικνύεται να είναι 1, το οποίο είναι 2/3 του 1 συν 1 / 3.»)

$$\frac{1 \cdot 1}{1} = 1 = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3}$$

2^ο : χρησιμοποιώντας το 1^ο την αποδεικνύει για n=2

(«Αν πολλαπλασιάσουμε 2 επί 2, παίρνουμε 4, προσθέστε το πρώτο 1 σε αυτό και μπορείτε να πάρετε 5. Αν διαιρέσουμε το 5 με 1 συν 2 που είναι 3, το αποτέλεσμα θα είναι 1 και 2/3 που είναι 2/3 του 2 συν 1/3.»)

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$4 + 1 = 5$$

$$\frac{5}{1+2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3}$$

3^ο : χρησιμοποιώντας το 2^ο την αποδεικνύει για n=3

(«Αν πολλαπλασιάσουμε 3 επί 3, θα είναι 9. Αν σε αυτό προσθέσουμε το 5, θα είναι 14. Τώρα, αν διαιρέσουμε το 14 με 1 συν 2 συν 3 που είναι 6, το αποτέλεσμα θα είναι 2 και 1/3, το οποίο είναι 2/3 του 3 και 1 / 3.»)

$$3 \cdot 3 = 9$$

$$9 + 5 = 14$$

$$\frac{14}{1+2+3} = \frac{14}{6} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3}$$

4^ο : χρησιμοποιώντας το 3^ο την αποδεικνύει για n=4

(«Και αν πολλαπλασιάσετε το 4 επί 4, θα είναι 16. Προσθέστε το 14 σε αυτό και έχουμε 30. Διαιρούμε με το 1 συν 2 συν 3 συν 4 το οποίο είναι 10, το αποτέλεσμα θα είναι 3. Αυτό είναι 2/3 του 4 συν 1/3 και ούτω καθεξής και ούτω καθεξής.»)

$$4 \cdot 4 = 16$$

$$16 + 14 = 30$$

$$\frac{30}{1+2+3+4} = \frac{30}{10} = 3 = \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιεί τη φράση «...και ούτω καθεξής και ούτω καθεξής.» και φαίνεται να έχει ολοκληρώσει την απόδειξή του και να μπορεί να την χρησιμοποιήσει για

οποιαδήποτε περίπτωση. Μάλιστα αμέσως μετά βρίσκει το πηλίκο $\frac{1^2 + 2^2 + \dots + 10^2}{1 + 2 + \dots + 10}$,

υπολογίζοντας μόνο την παράσταση $\frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3}$.

Συνιστούν όμως τα παραπάνω απόδειξη; Σύμφωνα με τα παραπάνω, δηλαδή, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αποδείχτηκε η ισότητα

$$\sum_{i=1}^n i^2 \div \sum_{i=1}^n i = \frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{3}$$

για κάθε φυσικό αριθμό n;

Το επιχείρημα του Abu-Kamil, το οποίο εφαρμόζεται για $n=4$, είναι διαφορετικό από του Αρχιμήδη, και σύμφωνα με τους Yadegary (1978)²⁴ και Rashed (2012)²⁵ είναι επαγωγικό. Παρόλο που θα μπορούσε, ίσως, κανείς να θεωρήσει ότι είναι επαγωγικό δεν πιστεύουμε ότι μπορεί ανεπιφύλακτα να καταχωρηθεί ως τέτοιο. Η αδυναμία αυτή έγκειται στο ότι η αντιμετώπισή του, αν και δηλώνει μια επαγωγικότητα, δεν αναφέρεται σε αυτήν αλλά ούτε και είναι προφανές πιο είναι το επαγωγικό επιχείρημα με το οποίο εξασφαλίζεται η ισχύς της πρότασης από την προηγούμενη στην επόμενη περίπτωση.

12.2 Al-Karajī & Al-Samaw'al

Ο al-Karajī (Abū Bakr ibn Muḥammad ibn al-Ḥusayn al-Karajī), γνωστός επίσης και ως al-Karkhī, ήταν μαθηματικός και μηχανικός του 10ου μ.χ. αιώνα (περίπου 950-1030). Το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του έζησε και εργάστηκε στη Βαγδάτη, όπου και έγραψε πολλά μαθηματικά έργα, καθώς και έργα για μηχανικά θέματα. Στην πρώτη δεκαετία του ενδέκατου αιώνα, συνέθεσε ένα μεγάλο έργο για την άλγεβρα με τίτλο *Al-Fakhri (al-Fakhri fī l-jabr wa l-muqābala)* το οποίο ήταν αφιερωμένο στον ηγεμόνα της Βαγδάτης. Ο σκοπός της άλγεβρας σε αυτή την πραγματεία ήταν σε γενικές γραμμές σύμφωνα με τον al-Karajī «Ο καθορισμός των αγνώστων ξεκινώντας από τους γνωστούς».

Ο al-Samaw'al (al-Samaw'al ibn Yahyā al-Maghribī) γεννήθηκε στη Βαγδάτη, γύρω στο 1130 μ.χ. σε μια Εβραϊκή οικογένεια η οποία έδινε μεγάλη αξία στην μάθηση. Σε ηλικία μόλις δεκαεννέα ετών, συνέθεσε το μαθηματικό του έργο *al-Bahir fī l-jabr*, για το οποίο είναι κυρίως γνωστός. Πρόκειται για ένα έργο μεγάλης σημασίας τόσο για τις πρωτότυπες ιδέες που περιέχει, καθώς και για τις πληροφορίες που αφορούν μη σωζόμενα έργα του al-Karajī.

Η σημασία του έργου του al-Karajī στην ανάπτυξη των μαθηματικών δεν εκτιμάται μάλλον με τον ίδιο τρόπο από διαφορετικούς συγγραφείς. Ορισμένοι, όπως ο Crossley (1980), θεωρούν ότι η δουλειά του είναι απλώς αναδιατύπωση ιδεών από προηγούμενους μαθηματικούς (Διόφαντου, al-Khwarizmi, Abū Kāmil κ.α.), ενώ άλλοι, όπως οι Woerpcke (1853) και ο Rashed (1994), τον βλέπουν ως το πρώτο πρόσωπο στην ιστορία των Αραβικών, κι όχι μόνο, Μαθηματικών που χρησιμοποιεί μια εντελώς νέα προσέγγιση στην παράδοση του αλγεβρικού λογισμού.

12.2.1 Αναδρομικός ορισμός δυνάμεων στο Al-Fakhri

Ο al-Karajī στο *Al-Fakhri* ξεκινά κάνοντας μια συστηματική μελέτη των δυνάμεων. Ήταν ο πρώτος, σύμφωνα με τον Katz (2009), που κατανόησε πλήρως ότι αυτές οι δυνάμεις μπορεί να επεκταθούν επ' αόριστον και ανέπτυξε μια μέθοδο για την ονομασία των διαφόρων δυνάμεων x^n καθώς και των αντιστρόφων τους $\frac{1}{x^n}$. Κάθε δύναμη ενός αριθμού ορίζεται από τον al-Karajī, και επαναλαμβάνεται από τον al-Samaw'al,

²⁴ «In my research on the history of mathematical induction, I came across an example of the "quasi-general" form of induction used by Abu-Kamil Shuja' Ibn Aslam.»

²⁵ «Il procède d'abord par un raisonnement par récurrence archaïque, c'est-à-dire qu'il établit le résultat pour $n = 1, 2, 3, 4$, pour conclure qu'il est vrai pour tout n , sans toutefois formuler explicitement l'hypothèse de la récurrence.

Ce type de démonstration va survivre encore pendant huit siècles.»

αναδρομικά ως το γινόμενο του αριθμού με την προηγούμενη δύναμή του. Στην μετάφραση του Al-Fakhri από τον Woerpcke (1853), δίνεται ο παρακάτω πίνακας:

$$\alpha^2 = \alpha \cdot \alpha$$

$$\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha$$

$$\alpha^4 = \alpha^3 \cdot \alpha = \alpha^2 \cdot \alpha^2$$

$$\alpha^5 = \alpha^4 \cdot \alpha = \alpha^3 \cdot \alpha^2$$

$$\alpha^6 = \alpha^5 \cdot \alpha = \alpha^4 \cdot \alpha^2 = \alpha^3 \cdot \alpha^3$$

$$\alpha^7 = \alpha^6 \cdot \alpha$$

$$\alpha^8 = \alpha^7 \cdot \alpha$$

$$\alpha^9 = \alpha^8 \cdot \alpha$$

(σελ. 48)

Είναι σαφές ότι έχουμε εδώ έναν **αναδρομικό ορισμό**, γεγονός που θεωρούμε ότι είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την ανάπτυξη επαγωγικών επιχειρημάτων στα μαθηματικά.

12.2.2. Η μη επαγωγική απόδειξη της Αρχιμήδειας Πρότασης (12+22+...+n2): (1+2+...+n)=(2n+1)/3 κατά al-Karaji.

Ο Al-Karaji στο επόμενο θεώρημα διατυπώνει την σχέση

$$1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = (1+10) \cdot 10 \cdot \left(\frac{10}{3} + \frac{1}{6}\right) = (1+2+\dots+10) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{6}\right), \text{ για την οποία,}$$

σύμφωνα με τον Woerpcke (1853), παραδέχεται ότι δεν έχει καταφέρει να βρει την απόδειξη και ότι το μόνο που μπορεί να παρατηρήσει κάποιος είναι ότι ισχύει πάντα:

$$(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) : (1 + 2 + \dots + n) = \left(\frac{2}{3} \cdot n + \frac{1}{6}\right).$$

Υπόσχεται όμως να δώσει μία άλλη απόδειξη, η οποία θα βασίζεται στην ισότητα:

$$5^2 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 1 \cdot 9 = 5^3 - \{1^2 + 2^2 + \dots + (5-1)^2\}, \text{ σχέση την οποία αιτιολογεί μέσω της ταυτότητας } (a-n)(a+n) = a^2 - n^2.$$

Έτσι στην συνέχεια υπολογίζει το άθροισμα $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2$, σχηματίζοντας διαδοχικά τις εκφράσεις:

$$\left\{ (1+10) \cdot \frac{10}{2} \right\} \cdot 10 = 550$$

$$10 - 1 = 9$$

$$9 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 5^2 = 95$$

$$95 - 5^2 = 70$$

$$550 - (95 + 70) = 385$$

$$\text{Δηλαδή, } 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = (1+2+\dots+10) \cdot 10 - \{2(1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + \dots + 6 \cdot 4 + 5^2)\} - 5^2.$$

Κατά τον Woerpcke (1853) ο συγγραφέας οδηγήθηκε σε αυτή την σχέση ως εξής:

$$\begin{aligned}
 (1+2+\dots+10) \cdot 10 &= 1 \cdot (1+9) + 2 \cdot (2+8) + 3 \cdot (3+7) + \dots + 9 \cdot (9+1) + 10 \cdot 10 = \\
 &= 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 + 2(1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6) + 5 \cdot 5 = \\
 &= 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 + 2(1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 5) - 5^2
 \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = (1+2+\dots+10) \cdot 10 - \{2(1 \cdot 9 + 2 \cdot 8 + \dots + 6 \cdot 4 + 5^2)\} - 5^2$ Από τα προηγούμενα λοιπόν, είναι ξεκάθαρο ότι η απόδειξη των δύο πρώτων θεωρημάτων αυτής της ενότητας του al-Karaji δεν είναι επαγωγικές.

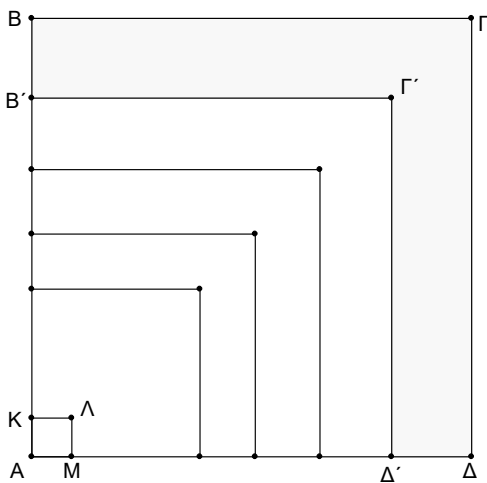
12.2.3. Η επαγωγική απόδειξη της Πρότασης $(1^3+2^3+\dots+n^3)=(1+2+\dots+n)^2$ κατά al-Karaji και al-Samaw'al

Η πρώτη απόδειξη στο Al-Fakhri στην οποία ο al-Karaji χρησιμοποιεί μια μορφή επαγωγής είναι στον υπολογισμό του **αθροίσματος των κύβων διαδοχικών φυσικών αριθμών**. Βέβαια η πρόταση ούτε διατυπώνεται ούτε αποδεικνύεται στη γενική της μορφή. Ουσιαστικά αυτό που αποδεικνύεται είναι το εξής θεώρημα:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (1+2+3+\dots+10)^2$$

(Woerpcke, 1853, σελ. 61)

Για την απόδειξη του θεωρήματος ο al-Karaji θεωρεί ένα τετράγωνο ABΓΔ με πλευρά $AB = 1+2+3+\dots+10$, τα ευθύγραμμα τμήματα $BB'=\Delta\Delta'=10$ και το γνώμονα ΒΓΔΔ'Τ'Β'.



Ο Al-Karaji υπολογίζει αρχικά το εμβαδόν του γνώμονα ΒΓΔΔ'Τ'Β' :

$$\begin{aligned}
 &2 \cdot 10 \cdot (1+2+3+\dots+9) + 10^2 = \\
 &= 2 \cdot 10 \cdot \frac{10 \cdot 9}{2} + 10^2 = \\
 &= 10^2 \cdot 9 + 10^2 = \\
 &= 10^2 \cdot (9+1) = \\
 &= 10^3
 \end{aligned}$$

Επομένως από τη σχέση των εμβαδών: $(AB\Gamma\Delta) = (B\Gamma\Delta\Delta'T'B') + (AB'T'\Delta')$ έχουμε:

$$(1+2+3+\dots+10)^2 = (1+2+3+\dots+9)^2 + 10^3$$

Ομοίως

$$(1+2+3+\dots+9)^2 = (1+2+3+\dots+8)^2 + 9^3$$

$$(1+2+3+\dots+8)^2 = (1+2+3+\dots+7)^2 + 8^3$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο έως το τελευταίο τετράγωνο ΑΚΛΜ και παρατηρώντας εδώ ότι (ΑΚΛΜ) = $1^2=1=1^3$.

Τελικά έχουμε:

$$(1+2+3+\dots+10)^2 = (1+2+3+\dots+9)^2 + 10^3 =$$

$$= (1+2+3+\dots+8)^2 + 9^3 + 10^3 =$$

$$= (1+2+3+\dots+7)^2 + 8^3 + 9^3 + 10^3 =$$

$$= \dots =$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3$$

Όπως είδαμε, στην απόδειξη ο al-Karaji χρησιμοποιεί μόνο τον Αρχιμήδειο τύπο του

αθροίσματος $1+2+3+\dots+n = (1+n) \cdot \frac{n}{2}$, για $n=9, 8, \dots, 1$. Το θεώρημα αυτό είναι το

πρώτο που αποδεικνύει σε αυτή την ενότητα του βιβλίου για $n=10$. Δηλαδή ο

συγγραφέας έχει ήδη αποδείξει την σχέση: $1+2+3+\dots+10 = (1+10) \cdot \frac{10}{2}$ και παρόλο,

που το θεώρημα δεν διατυπώνεται και δεν αποδεικνύεται στην γενική του μορφή ο al-Karaji δεν διστάζει να το εφαρμόσει, χωρίς φυσικά να το αποδεικνύει εκ νέου κάθε φορά, για τον υπολογισμό των αθροισμάτων $1+2+3+\dots+9$, $1+2+3+\dots+8$, κ.τ.λ.. Το γεγονός αυτό φανερώνει ότι ο Al-Karaji αντιλαμβάνονταν τις αριθμητικές αυτές προτάσεις στη γενικότητά τους, δηλαδή ότι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει:

$1+2+3+\dots+n = (1+n) \cdot \frac{n}{2}$. Να σημειώσουμε όμως ότι η απόδειξη αυτής της σχέσης δεν

γίνεται με επαγωγικό τρόπο. Αυτό που κάνει ο Al-Karaji είναι από τους αριθμούς 1, 2, ..., 10 να σχηματίζει τα ίσα μεταξύ τους αθροίσματα $(1+10)$, $(2+9)$, $(3+8)$, $(4+7)$ και $(5+6)$

οπότε το άθροισμα $1+2+\dots+10$ ισούται πράγματι με $(1+10) \cdot \frac{10}{2}$.

Την Πρόταση αυτή αποδεικνύει και ο **al-Samaw'al**, με περίπου την ίδια επαγωγική μέθοδο. Η πρόταση για το άθροισμα κύβων διατυπώνεται από τον al-Samaw'al στο έργο al-Bahir με γενικούς όρους:

«if we want to add the cubes of the number that follow one another from 1 [according to the natural order] we multiply their sum by itself. The product is the sum of their cubes.» (Rashed 1972, σελ. 71).

$$\left[\text{Δηλαδή, } \sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 \right]$$

και αποδεικνύεται από τον συγγραφέα για $n=4$, με την ίδια αποδεικτική διαδικασία που ακολουθεί ο al-Karaji.

Σύμφωνα με τον Rashed (1972), για την απόδειξη της παραπάνω σχέσης ο al-Samaw'al, προβαίνει στις εξής ενέργειες:

α) Διατυπώνει το λήμμα:

«The cube of a number is equal to the sum of its square and the double product of this number by the sum of numbers that follow from one [according to the natural order] to the predecessor of this same number.»

(Rashed, 1972, σελ. 71).

$$\text{Δηλαδή, } n^3 = n^2 + 2n \sum_{i=1}^{n-1} i .$$

β) Αποδεικνύει το λήμμα για $n=4$:

(Για να διευκολύνουμε τους αναγνώστες να ακολουθήσουν τις αποδείξεις του al-Samaw'al, διευκρινίζουμε ότι η σημασία των συμβολισμών του είναι η εξής:

$$\overline{AB} = 1, \overline{BG} = 2, \overline{GD} = 3, \overline{DE} = 4,$$

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BG} + \overline{GD} + \overline{DE} = 1 + 2 + 3 + 4, \text{ κ.τ.λ.)}$$

Παράδειγμα: Έστω $\overline{AB}, \overline{BG}, \overline{GD}, \overline{DE}$ αυτοί οι αριθμοί. Ισχυρίζομαι ότι το τετράγωνο του $\overline{DE}$ και το διπλάσιο γινόμενο του $\overline{DE}$ με τον $\overline{AD}$ είναι ίσο με τον κύβο του $\overline{DE}$.

Απόδειξη: $\overline{AD} = (\overline{GD} \cdot \overline{DE}) / 2$ από όπου $2\overline{AD} = \overline{GD} \cdot \overline{DE}$, αλλά πολλαπλασιάζοντας και

τους δύο αριθμούς με $\overline{DE}$, έχουμε $2\overline{AD} \cdot \overline{DE} = \overline{GD} \cdot \overline{DE}^2$, αλλά

$$\overline{GD} \cdot \overline{DE}^2 = \overline{DE}^2 (\overline{DE} - 1) = \overline{DE}^3 - \overline{DE}^2, \text{ επομένως } \overline{DE}^3 = \overline{DE}^2 + 2\overline{AD} \cdot \overline{DE}.$$

[Παράφραση:

Έστω 1, 2, 3, 4, αυτοί οι αριθμοί. Ισχυρίζομαι ότι $4^3 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (1 + 2 + 3)$

Απόδειξη:

$$\text{Ισχύει } (1 + 2 + 3) = \frac{3 \cdot 4}{2}, \text{ άρα } 2(1 + 2 + 3) = 3 \cdot 4, \text{ οπότε } 2(1 + 2 + 3) \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$$

$$\text{Αλλά } 3 \cdot 4^2 = 4^2 (4 - 1) = 4^3 - 4^2, \text{ επομένως } 4^3 = 4^2 + 2 \cdot (1 + 2 + 3) \cdot 4]$$

γ) Αποδεικνύει την πρόταση για $n=4$ την πρόταση.

Παράδειγμα: Έστω $\overline{AB}, \overline{BG}, \overline{GD}, \overline{DE}$ αυτοί οι αριθμοί που ακολουθούν ο ένας τον άλλο σε φυσική σειρά από το ένα. Ισχυρίζομαι ότι το άθροισμα των κύβων των

$\overline{AB}, \overline{BG}, \overline{GD}, \overline{DE}$ είναι ίσο με το τετράγωνο του $\overline{AE}$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
\overline{AE^2} &= \overline{A\Delta^2} + \overline{\Delta E^2} + 2\overline{\Delta E \cdot A\Delta} = \\
&= \overline{\Delta E^3} + \overline{A\Delta^2} = && \text{(από το λήμμα για τους αριθμούς } \overline{AB}, \overline{B\Gamma}, \overline{\Gamma\Delta}, \overline{\Delta E}) \\
&= \overline{\Delta E^3} + \overline{A\Gamma^2} + \overline{\Gamma\Delta^2} + 2\overline{A\Gamma \cdot \Gamma\Delta} = && \text{(από το λήμμα για τους αριθμούς } \overline{AB}, \overline{B\Gamma}, \overline{\Gamma\Delta}) \\
&= \overline{\Delta E^3} + \overline{\Gamma\Delta^3} + \overline{A\Gamma^2} = \\
&= \overline{\Delta E^3} + \overline{\Gamma\Delta^3} + \overline{AB^2} + \overline{B\Gamma^2} + 2\overline{B\Gamma \cdot AB} = && \text{(από το λήμμα για τους αριθμούς } \overline{AB}, \overline{B\Gamma}) \\
&= \overline{\Delta E^3} + \overline{\Gamma\Delta^3} + \overline{B\Gamma^3} + \overline{AB^2}
\end{aligned}$$

Αλλά $\overline{AB^2} = \overline{AB^3}$, επομένως $\overline{AE^2} = \overline{\Delta E^3} + \overline{\Gamma\Delta^3} + \overline{B\Gamma^3} + \overline{AB^3}$.

[Παράφραση:

Έστω 1, 2, 3, 4, αυτοί οι αριθμοί. Ισχυρίζομαι ότι $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
(1+2+3+4)^2 &= (1+2+3)^2 + 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot (1+2+3) \\
&= 4^3 + (1+2+3)^2 = \\
&= 4^3 + (1+2)^2 + 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot (1+2) = \\
&= 4^3 + 3^3 + (1+2)^2 = \\
&= 4^3 + 3^3 + 1^2 + 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = \\
&= 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^2 = \\
&= 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3]
\end{aligned}$$

Χαρακτηρίσαμε την παραπάνω διαδικασία ως «αποδεικτική μέθοδο», δεδομένου του ότι, όπως παρατηρείται στο Al-Bahir, είναι μια τεχνική η οποία ακολουθείται συχνά για την απόδειξη προτάσεων.

Την επαγωγική μέθοδο των al-Karaji al-Samaw'al μπορούμε εν συντομία να την περιγράψουμε ως εξής.

Ορισμός ακολουθίας Λn . $\Lambda n = (1+2+\dots+n)^2$.

Πρόταση (Αναδρομικός ορισμός της ακολουθίας Λn . $\Lambda n = n^3 + \Lambda n - 1$.

Πρόταση. $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$.

Απόδειξη. Από τον αναδρομικό ορισμό με αρχαϊκού τύπου επαγωγή.

12.2.4. Η επαγωγική απόδειξη της Αρχιμήδειας Πρότασης ($1^2+2^2+\dots+n^2$):
 $(1+2+\dots+n) = (2n+1)/3$ κατά al-Samaw'al.

Με την ίδια μέθοδο αποδεικνύονται, στο ίδιο έργο, και οι προτάσεις [1], [2] που έπονται.

Στις αποδείξεις των προτάσεων δεν θα είμαστε το ίδιο αναλυτικοί όσο υπήρξαμε στην προηγούμενη πρόταση. Θα ακολουθήσουμε την παράφραση του Rashed (1972), η οποία

είναι πράγματι σύμφωνη με την απόδειξη του al-Samaw'al, με την διαφορά ασφαλώς ότι χρησιμοποιεί σύγχρονη σημειολογία καθώς και το ότι ο al-Samaw'al αποδεικνύει τις προτάσεις για συγκεκριμένη τιμή του n , χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν έχει συνείδηση της γενικότητάς τους.

$$[1] \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n i(i-1)$$

Απόδειξη:

$$n^2 = n[(n-1) + (n - (n-1))] = n[(n-1) + 1] = n(n-1) + n$$

$$(n-1)^2 = (n-1)[(n-2) + ((n-1)-(n-2))]=(n-1)-[(n-2)+1]=(n-1)(n-2)+(n-1)$$

...

$$1^2 = 1 \cdot 1$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^2 &= n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2 = \\ &= [n(n-1) + (n-1)(n-2) + \dots + 2 \cdot 1] + [n + (n-1) + \dots + 1] = \\ &= \sum_{i=1}^n i(i-1) + \sum_{i=1}^n i \end{aligned}$$

(Rashed, 1972, σελ. 70)

Η σχέση αυτή αποδεικνύεται επίσης από τον Αρχιμήδη για $n=10$ εντός της απόδειξης της Πρότασης 10 στο Περί Ελίκων. Η απόδειξη του al-Samaw'al γίνεται για $n=4$ αλλά κατά τα άλλα είναι ίδια με του Αρχιμήδη. Η σχέση [2] που ακολουθεί είναι η μαθηματική έκφραση της Πρότασης 10 του Αρχιμήδη αλλά ο al-Samaw'al ακολουθεί διαφορετική οδό για την απόδειξή της από εκείνη του πρώτου.

$$[2] \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Για την απόδειξη της πρότασης [2] ο συγγραφέας αποδεικνύει πρώτα τρία λήμματα. Το πρώτο και τρίτο είναι εκείνα που θα χρησιμοποιήσει για την πρόταση [2]:

$$[\Lambda_1] (n+2) \sum_{i=1}^n i = n \sum_{i=1}^{n+1} i$$

$$[\Lambda_2] n(n+1) + (n+1)(n+2) = 2(n+1)^2$$

$$[\Lambda_3] \quad n \sum_{i=1}^{n+1} i = n \sum_{i=1}^{n-2} i + 3n^2$$

Οι αποδείξεις των λημμάτων παραλείπονται.

Απόδειξη της [2]:

Ισχύει: $(2n+1) \sum_{i=1}^n i = n \sum_{i=1}^{n+1} i + (n+1) \sum_{i=1}^{n-1} i$ (έχει αποδειχθεί σε προηγούμενη πρόταση).

Αλλά $n \sum_{i=1}^{n+1} i = n \sum_{i=1}^{n-2} i + 3n^2$, από το Λ_3 .

και $(n+1) \sum_{i=1}^{n-1} i = (n-1) \sum_{i=1}^n i = (n-1) \sum_{i=1}^{n-3} i + 3(n-1)^2$, εφαρμόζοντας πρώτα το Λ_1 και μετά το

Λ_3 .

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} (2n+1) \sum_{i=1}^n i &= n \sum_{i=1}^{n+1} i + (n+1) \sum_{i=1}^{n-1} i = \\ &= 3n^2 + 3(n-1)^2 + \\ &\quad + n \sum_{i=1}^{n-2} i + (n-1) \sum_{i=1}^{n-3} i \end{aligned}$$

Αυτό είναι το πρώτο βήμα της απόδειξης.

Παρατηρούμε ότι αναλύει το άθροισμα $(2n+1) \sum_{i=1}^n i$ στα $n \sum_{i=1}^{n+1} i$ και $(n+1) \sum_{i=1}^{n-1} i$ και στην συνέχεια εφαρμόζοντας τα Λ_1 , Λ_3 κατορθώνει να εμφανίσει τους δύο τελευταίους όρους $3n^2$, $3(n+1)^2$ του αθροίσματος της πρότασης [2] και δύο παρόμοια αθροίσματα με τα προηγούμενα : το $n \sum_{i=1}^{n-2} i$ που είναι αντίστοιχο του $(n+1) \sum_{i=1}^{n-1} i$ και το $(n-1) \sum_{i=1}^{n-3} i$ που είναι αντίστοιχο του $n \sum_{i=1}^{n+1} i$.

Έτσι στο επόμενο βήμα επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία: εφαρμόζει στο άθροισμα

$n \sum_{i=1}^{n-2} i$ τα Λ_1 , Λ_3 και στο $(n-1) \sum_{i=1}^{n-3} i$ το Λ_3 , όπως έκανε πριν με τα αντίστοιχά τους.

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
(2n+1)\sum_{i=1}^n i &= n\sum_{i=1}^{n+1} i + (n+1)\sum_{i=1}^{n-1} i = \\
&= 3n^2 + 3(n-1)^2 + n\sum_{i=1}^{n-2} i + (n-1)\sum_{i=1}^{n-3} i = \\
&= 3n^2 + 3(n-1)^2 + 3(n-2)^2 + 3(n-3)^2 + \\
&\quad + (n-2)\sum_{i=1}^{n-4} i + (n-3)\sum_{i=1}^{n-5} i
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας την παραπάνω διαδικασία καταλήγει τελικά στην σχέση:

$$(2n+1)\sum_{i=1}^n i = 3n^2 + 3(n-1)^2 + \dots + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 = 3\sum_{i=1}^n i^2.$$

Να διευκρινίσουμε μόνο ότι η απόδειξη του al-Samaw'al είναι για $n=7$.

(Rashed, 1972, σελ. 73).

Την απόδειξη του al-Samaw'al μπορούμε να την περιγράψουμε ως εξής:

1. Ορισμός ακολουθίας. $M_n = (n+2)S_n$.

2. Πρόταση (Αναδρομικός ορισμός ακολουθίας M_n).

$$M_n = 3n^2 + M_{n-2}.$$

Από τον τύπο του Αρχιμήδη για S_n , πρέπει ν' αποδείξουμε ότι

$$(n+2)((n+1)n/2) - (n((n-2)(n-1)/2)) = 3n^2$$

Με απλοποιήσεις, ότι

$$(n+2)(n+1) - (n-2)(n-1) = 6n,$$

το οποίο ελέγχεται χωρίς δυσκολία.

2. Πρόταση (Αρχιμήδης). $(2n+1)S_n = 3(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2)$.

$$\text{Λήμμα α. } (2n+1)S_n = nS_{n+1} + (n+1)S_{n-1} = nS_{n+1} + M_{n-1}$$

Από τον τύπο του Αρχιμήδη για S_n , πρέπει ν' αποδείξουμε ότι

$$(2n+1)n(n+1)/2 = n(n+1)(n+2)/2 + (n+1)(n-1)n/2.$$

Με απλοποιήσεις, ότι

$$2n+1 = (n+2) + (n-1).$$

$$\text{Λήμμα β. } nS_{n+1} = (n+2)S_n = M_n$$

Από τον τύπο του Αρχιμήδη για S_n , πρέπει ν' αποδείξουμε ότι

$$n((n+1)(n+2)/2) = (n+2)(n(n+1)/2),$$

το οποίο ισχύει ταυτοτικά.

$$\text{Λήμμα γ. } (2n+1)S_n = (n+2)S_n + (n+1)S_{n-1} = M_n + M_{n-1}$$

Άμεσο από α. και β.

Απόδειξη (al-Samaw'al). Από γ. $(2n+1)S_n = M_n + M_{n-1} =$

$$3n^2 + 3(n-1)^2 + M_{n-2} + M_{n-3} =$$

...=

$$3(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2)$$

Παρατηρούμε ότι η μέθοδος απόδειξης των δύο Προτάσεων

$$(2n+1)S_n = 3(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2 = S_n^2, \text{ και}$$

από τον al-Samawal, είναι η αυτή: ορίζεται μια κατάλληλη ακολουθία, το κύριο επιχείρημα είναι η περιγραφή της ακολουθίας με αναδρομικό τρόπο, από την οποία, με μια στοιχειώδη και αρχαϊκή επαγωγή, η βασική πρόταση αποδεικνύεται. Ακολουθείται δηλαδή η μεθοδολογία που έχουμε δει στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν αυτή η αποδεικτική μέθοδος μπορεί να θεωρηθεί ως μια μορφή επαγωγής.

Σύμφωνα με τον Katz (2009) το επιχείρημα του al-Karaji, περιλαμβάνει τα δύο βασικά συστατικά ενός σύγχρονου επιχειρήματος με επαγωγή, δηλαδή, την αλήθεια της δήλωσης για $n = 1$ ($1 = 1^3$), και την αλήθεια που απορρέει για $n=k$ από την $n=k-1$. Φυσικά, το τελευταίο αυτό στοιχείο δεν είναι σαφές, δεδομένου ότι, κατά κάποιο τρόπο, το επιχείρημα του al-Karaji είναι αντίστροφο.

Κατά τον Rashed (1972) η παραπάνω διαδικασία θεωρείται ως μια αρχαϊκή μορφή της μαθηματικής επαγωγής, ενώ ο Freudenthal (1953) την αποκαλεί «regression» και η θέση του είναι ότι αν και δεν μπορεί να ταυτιστεί με την μαθηματική επαγωγή όταν εφαρμόζεται με έναν οιονεί γενικό τρόπο, δηλαδή δεν επαναλαμβάνεται η απόδειξη για όλες τις τιμές αλλά μόνο για αυτή που επιλέχθηκε αρχικά, η μορφή αυτή είναι πιο κοντά στη μαθηματική επαγωγή από οποιαδήποτε άλλη.

Η δική μας θέση, σύμφωνα πάντα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω, είναι ότι η μέθοδος απόδειξης των δύο Προτάσεων

$$(2n+1)S_n = 3(n^2 + (n-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2)$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2 = S_n^2, \text{ και}$$

από τον al-Karaji και al-Samawal, είναι η ίδια και αυτή μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

ορίζεται μια κατάλληλη ακολουθία, το κύριο επιχείρημα είναι η **περιγραφή της ακολουθίας με αναδρομικό τρόπο**, από την οποία, με μία στοιχειώδη και αρχαϊκή επαγωγή, αποδεικνύεται η βασική πρόταση. Ακολουθείται δηλαδή η μεθοδολογία που έχουμε δει στα αρχαία Ελληνικά Μαθηματικά.

12.2.5. Το διωνυμικό ανάπτυγμα.

Ένα άλλο επαγωγικό επιχείρημα που συναντάμε στο Al-Bahir σχετίζεται με το διωνυμικό θεώρημα και τους διωνυμικούς συντελεστές, γνωστούς στις μέρες μας ως τρίγωνο του Pascal. Τα παραπάνω επιτεύγματα αποδίδονται ρητά από τον al-Samaw'al στον al-Karaji, αλλά το συγκεκριμένο έργο, στο οποίο ο al-Karaji διαπραγματεύεται αυτά τα θέματα, δεν σώζεται πλέον. Έτσι, θα θεωρήσουμε τις αποδείξεις από το Al-Bahir του al-Samaw'al.

Ο συγγραφέας αρχικά αποδεικνύει τα εξής:

(Στα παρακάτω χρησιμοποιούμε σύγχρονο αλγεβρικό συμβολισμό.)

1. Πρόταση 1: $(\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\alpha\gamma)(\beta\delta)$, για οποιουσδήποτε τέσσερις αριθμούς.
2. Λήμμα: $(\alpha\beta)\gamma = (\alpha\gamma)\beta$, για οποιουσδήποτε τρεις αριθμούς.
3. Πρόταση 2: $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$, για οποιουσδήποτε τρεις αριθμούς, όπως έδειξε ο Ευκλείδης στο βιβλίο 2 σχήμα 1, γράφει ο al-Samaw'al.

Στη συνέχεια:

4. Θεωρεί ως γνωστό το ανάπτυγμα $(\alpha + \beta)^2$, το οποίο δίνεται από τον Al-Karaji στο al-Badi και παρατίθεται από τον συγγραφέα σε προηγούμενο κεφάλαιο.
5. Διατυπώνει και αποδεικνύει το θεώρημα για $n=3$, δηλαδή

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^3 &= (\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta) = \\&= (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)(\alpha + \beta) = && \text{από το ανάπτυγμα του } (\alpha + \beta)^2 \\&= \alpha^2(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta^2(\alpha + \beta) = && \text{από Πρωτ. 2} \\&= \alpha^3 + \alpha^2\beta + 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 + \alpha\beta^2 + \beta^3 = && \text{από Πρωτ. 1, 2 και Λήμμα} \\&= \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2\end{aligned}$$

6. Διατυπώνει και αποδεικνύει, με την ίδια τεχνική (χρησιμοποιώντας δηλαδή το προηγούμενο ανάπτυγμα $(\alpha + \beta)^3$), το θεώρημα για $n=4$, δηλαδή

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^4 &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^3 = \\&= \dots = \\&= \alpha^4 + \beta^4 + 4\alpha^3\beta + 4\alpha\beta^3 + 6\alpha^2\beta^2\end{aligned}$$

Για $n=5$ δεν αποδεικνύει το θεώρημα, αλλά γράφει: «*he who has understood what we have just said, can prove that for any number divided into two parts, its quadrato-cube is equal to the sum of the quadrato-cube of each of its parts, five times the product of each of its parts by the square-square of the other and ten*

times the product of the square of each of them by the cube of the other. And so on in ascending order.»

(Rashed, 1972, σελ. 65).

Στη συνέχεια δίνει τον πίνακα με τους διωνυμικούς συντελεστές από τον Al-Karaji, , μέσω του οποίου, λέει μπορούμε να γνωρίζουμε τον αριθμό μπροστά από τους διάφορους όρους για την ανάπτυξη των τετραγώνων, των κύβων, και ούτω καθεξής του αθροίσματος δύο όρων. Είναι φυσικά ο διάσημος πίνακας των διωνυμικών συντελεστών έως και $n=12$.

Ο al-Samawal δίνει επίσης την περιγραφή του Al-Karaji για τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζουμε τον πίνακα:

«Let us now recall a principle for knowing the necessary number of multiplications of these degrees by each other, for any number divided into two parts. Al-Karaji said that in order to succeed, we must place 'one' on a table and 'one' below the first 'one', move the [first] 'one' into another column, add the [first] 'one' to the one below it. We thus obtain 'two', which we put below the [transferred] 'one', and we place the [second] 'one' below two. We have therefore 'one', 'two', and 'one'. This shows that for every number composed of two numbers, if we multiply each of them by itself once – since the two extremes are 'one' and 'one' - and if we multiply each one by the other twice - since the intermediary term is two - we obtain the square of this number. If we then transfer the 'one' in the second column into another column, then add 'one' [from the second column] to 'two' [below it]. We obtain 'three' to be written under the 'one' [in the third column], if we then add 'two' [from the second column] to 'one' below it, we have 'three' which is written under 'three', then we write 'one' under this 'three'; we thus obtain a third column whose numbers are 'one', 'three', 'three' and 'one'. This teaches us that the cube of any number composed of two numbers is given by the sum of the cube of each of them and three times the product of each of them by the square of the other. If we transfer again 'one' from the third column to another column, and if we add 'one' [from the third column] to 'three' below it, we have 'four' which is written under 'one'; if we then add 'three' to the 'three' below it, we obtain 6 which is written under 'four'; if we then add the second 'three' to the 'one' below it, we have 'four' which is written under 'six', then we place 'one' below 'four'; the result is another column whose numbers are 'one', 'four', 6, 'four' and 'one'. This teaches us that the formation of the square-square of a number consisting of two numbers is given by the squaresquare of each of them - since we have 'one' at each end - then by four times the product of each number by the cube of the other - since 'four' follows 'one' at either end - since the root multiplied by the cube is the square-square, and lastly by six times the product of the square of each by the square of the other - since the product of the square by the square is a square-square. Then if we transfer 'one' from the fourth column into the fifth column, and we add 'one' to 'four' below it, 'four' to 'six', 'six' to 'four' and 'four' to 'one', then we write down the results under the transferred 'one' in the foresaid manner, and lastly write down last the remaining 'one', we have a fifth column whose numbers are 'one', 5, 'ten', 'ten', 5 and 'one'. This teaches us that for any number divided into two parts, its quadrato-cube is equal to the quadrato-cube of each part - since both ends have 'one' and one - to five times the product of each one by the square-square of the other - since 'five' succeeds at both ends on either side, and six times the product of the square of each one by the cube

of the other - since 'ten' succeeds each five. Each of these terms belongs to the kind of quadrato-cube since the product of the root by the square-square and that of the cube by the square, both give the quadratocube; we can thus find the numbers of squares and cubes to the power desired.»

(Rashed, 1972, σελ. 67)

x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
66	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1	
220	165	120	84	56	35	20	10	4	1		
495	330	210	126	70	35	15	5	1			
792	462	252	126	56	21	6	1				
924	462	210	84	28	7	1					
792	330	120	36	8	1						
495	165	45	9	1							
220	55	10	1								
66	11	1									
12	1										
1											

(Διάγραμμα από την Αγία Σοφία,

Sanaa Bajri, John Hannah, Clemency Montelle, 2015)

Κεφάλαιο 13.

Rabbi Levi Ben Gershon

Ο Rabbi Levi Ben Gershon, γνωστός επίσης ως Leo de Bagnolas, Leo Hebraeus, Maestro Leon, Gersonides ή με το ακρωνύμιο RALBAG, γεννήθηκε το 1288, πιθανόν στο Bagnols-sur-Ceze της Νότιας Γαλλίας και έζησε το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του στην κοντινή πόλη Orange. Ο Gersonides αναδεικνύεται ως ένας από τους πιο σημαντικούς και ολοκληρωμένους στοχαστές στη μεσαιωνική εβραϊκή παράδοση. Φιλόσοφος, Talmudist, Βιβλικός σχολιαστής, μαθηματικός, αστρονόμος και γιατρός, επιτυγχάνει διάκριση σε όλους τους τομείς με τους οποίους ασχολήθηκε. Όλα τα έργα του γράφτηκαν στα Εβραϊκά, αλλά τόσο μεγάλη ήταν η φήμη του, ώστε πολλά από αυτά μεταφράστηκαν στα λατινικά ήδη στη διάρκεια της ζωής του. Μεταξύ άλλων έγραψε τρία σημαντικά μαθηματικά έργα καθώς και σχόλια για αρκετά βιβλία των Στοιχείων του Ευκλείδη. Εδώ θα ασχοληθούμε με κάποιες προτάσεις από το βιβλίο του *Maasei Hoshev (The Art of the Calculator)*, το οποίο ολοκληρώθηκε, όπως ο ίδιος ο Gershon γράφει όταν ήταν στην ηλικία των τριάντα τριών ετών, δηλαδή το 1321. Το βιβλίο χωρίζεται σε δύο μέρη, το πρώτο είναι θεωρητικό, περιέχει εξήντα οκτώ προτάσεις, που αποδεικνύονται λεπτομερώς, και εφαρμόζονται στο δεύτερο, πρακτικό μέρος, για την επίλυση προβλημάτων. Με βάση το έργο αυτό αρκετοί ιστορικοί των Μαθηματικών πιστώνουν στον Gershon χειρισμό επαγωγικών αποδείξεων.

Στην παρούσα εργασία θα ξεκινήσουμε με τα, γνωστά μας πλέον, αθροίσματα

$$\sum_{i=1}^n n, \sum_{i=1}^n n^2, \text{ και } \sum_{i=1}^n n^3.$$

Στο *Maasei Hoshev* ο Gershonides διατυπώνει και αποδεικνύει αρκετούς τύπους αθροισμάτων, μεταξύ αυτών και τους προηγούμενους.

Ο Gersonides αποδεικνύει στις Προτάσεις 26, 27 και 28 ασχολείται με τον τύπο

$$\sum_{i=1}^n n = 1+2+\dots+n \text{ σε τρεις διαφορετικές εκδοχές, ανάλογα με το αν ο τελευταίος όρος του αθροίσματος είναι άρτιος ή περιττός.}$$

13.1. Προτάσεις 26, 27, 28.

Η μη επαγωγική απόδειξη της Αρχιμήδειας Πρότασης $1+2+\dots+n=n(n+1)/2$

Πρόταση 26

Αν n άρτιος τότε:
$$\sum_{i=1}^n n = 1+2+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1).$$

Απόδειξη.

Στην απόδειξη ο Gershon, ακολουθεί την στρατηγική του Αρχιμήδη σχηματίζοντας από τους 1, 2, 3, ..., n , ζεύγη αριθμών και θεωρώντας τα αθροίσματα αυτών $(1+n)$, $[2+(n-1)]$, ..., καθένα από τα οποία δείχνει ότι ισούνται με $n+1$ και ότι το πλήθος των ζευγών είναι $n/2$.

Πρόταση 27

Αν n περιττός τότε: $\sum_{i=1}^n n = 1+2+\dots+n = \frac{(n+1)}{2}n$.

Απόδειξη.

Στην απόδειξη ο Gershon, εργάζεται και πάλι δημιουργώντας ζεύγη αριθμών.

Πρόταση 28

$$\sum_{i=1}^n n = 1+2+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1).$$

Απόδειξη.

Εδώ ο Gershon, χρησιμοποιεί την Πρόταση 21 και αλγεβρικά επιχειρήματα.

Καμία από αυτές τις αποδείξεις δεν είναι επαγωγική. Ο συγγραφέας λειτουργεί, ως επί το πλείστον, παρόμοια με όσους προηγήθηκαν, μετατρέποντας το συνολικό άθροισμα σε άθροισμα ίσων αθροισμάτων ζευγών των αρχικών αριθμών και παρά τις όποιες παραλλαγές δεν γίνεται να μην μας θυμίζει την απόδειξη του Αρχιμήδη.

13.2. Πρόταση 29

Στην επόμενη Πρόταση (29) ο συγγραφέας αποδεικνύει την γνωστή από τους Πυθαγορείους σχέση $1+3+5+\dots+(2n-1) = n^2$.

13.3. Πρόταση 38. Η μη επαγωγική απόδειξη της Αρχιμήδειας Πρότασης $(2n+1)S_n=3(n^2+(n-1)2+\dots+22+12)$.

Η απόδειξη του αθροίσματος γίνεται στην Πρόταση 38 και είναι αρκετά περίπλοκη. Για την απόδειξή της χρησιμοποιεί, είτε άμεσα είτε έμμεσα, σχεδόν όλες τις Προτάσεις 29-37. Όπως και με τις προηγούμενες η απόδειξη δεν έχει να κάνει με επαγωγή.

13.4. Προτάσεις 41& 42. Η επαγωγική απόδειξη της Πρότασης $13+23+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2=S_n^2$ κατά την μέθοδο των al-Karaji και al-Samaw'al

Τέλος το άθροισμα των κύβων διαδοχικών φυσικών αντιμετωπίζεται στην Πρόταση 42, η απόδειξη της οποίας όπως θα δούμε, είναι ακριβώς ίδια με των Αράβων, al-Karaji και αργότερα al-Samaw'al, και επομένως έχουμε το είδος επαγωγής που ο Freudenthal (1953) αποκαλεί regression.

Παρατίθεται πρώτα η Πρόταση 41 η οποία χρησιμοποιείται ως λήμμα για την 42 και όπως θα παρατηρήσουμε είναι το ίδιο λήμμα που συναντήσαμε στους Άραβες. Οι Προτάσεις παρουσιάζονται εδώ ακολουθώντας τον Rabinovitch (1970)ι

Πρόταση 41.

Το τετράγωνο του αθροίσματος της σειράς των ακεραίων ξεκινώντας από το ένα έως ένα δεδομένο ακέραιο

είναι ίσο με

τον κύβο του δεδομένου ακεραίου συν το τετράγωνο του αθροίσματος της σειράς των ακεραίων από το ένα έως τον προηγούμενο του δεδομένου ακεραίου.

$$[\text{Συμβολικά: } \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 = n^3 + \left(\sum_{i=1}^{n-1} i \right)^2]$$

Απόδειξη.

Έστω ότι το άθροισμα της σειράς είναι το άθροισμα $a+b+c+d+e$. Λέω ότι το τετράγωνο του αθροίσματος $a+b+c+d+e$ ισούται με τον κύβο του e συν το τετράγωνο του αθροίσματος $a+b+c+d$. [Δηλαδή: $(a+b+c+d+e)^2 = e^3 + (a+b+c+d+e)^2$]

Έχουμε:

$$e^3 = e \cdot e^2$$

αλλά

$$e^2 = (a+b+c+d+e) + (a+b+c+d) \text{ (Πρόταση 30)}$$

έτσι

$$e \cdot e^2 = e \cdot \{(a+b+c+d+e) + (a+b+c+d)\}$$

αυτό είναι

$$e^3 = e^2 + 2e(a+b+c+d)$$

αλλά

$$(a+b+c+d+e)^2 = e^2 + 2e(a+b+c+d+e) + (a+b+c+d)^2$$

επομένως

$$e^3 + (a+b+c+d)^2 = (a+b+c+d+e)^2.$$

Πρόταση 42.

Το τετράγωνο του αθροίσματος της σειράς των ακεραίων από το ένα έως έναν δεδομένο αριθμό

ισούται με

το άθροισμα των κύβων των ακεραίων από το ένα έως το δεδομένο αριθμό.

$$[\text{Συμβολικά: } \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2 = \sum_{i=1}^n i^3]$$

Έστω ότι το άθροισμα είναι το άθροισμα $a+b+c+d+e$. Ισχυρισμός:

$$(a+b+c+d+e)^2 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$$

Απόδειξη:

$$(a+b+c+d+e)^2 = e^3 + (a+b+c+d)^2$$

Αλλά

$$(a+b+c+d)^2 = d^3 + (a+b+c)^2$$

και

$$(a+b+c)^2 = c^3 + (a+b)^2$$

και

$$(a+b)^2 = b^3 + a^2, \text{ αλλά το } a^2 \text{ είναι επίσης ίσο με } a^3, \text{ έτσι το τετράγωνο}$$

$$(a+b+c+d+e)^2 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$$

13.5. Προτάσεις 63, 64 & 65. Η πρωτότυπη επαγωγική απόδειξη της Πρότασης $P_n=n!$, όπου P_n είναι το σύνολο των μεταθέσεων n στοιχείων

Ο Gershon εφαρμόζει την παραπάνω αποδεικτική διαδικασία στο *Maasei Hoshev* σε αρκετές προτάσεις, οι οποίες μάλιστα διαφέρουν αρκετά ως προς το μαθηματικό τους περιεχόμενο αλλά και ως προς το βαθμό δυσκολίας ή πολυπλοκότητάς τους.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι επόμενες προτάσεις, όπου η επαγωγική μέθοδος εφαρμόζεται για πρώτη φορά, ίσως, σε θεωρήματα της Συνδυαστικής.

Πρόταση 63.

Αν ο αριθμός των μεταθέσεων ενός δεδομένου αριθμού διαφορετικών στοιχείων είναι κάποιος σταθερός αριθμός,

τότε

οι μεταθέσεις ενός συνόλου διαφορετικών στοιχείων που αριθμεί ένα περισσότερο από το δεδομένο αριθμό

είναι

όσο το γινόμενο του αριθμού των προηγούμενων μεταθέσεων με τον επόμενο του δεδομένου αριθμού.

[Συμβολικά: $P_{n+1} = (n+1)P_n$, όπου P_n το πλήθος των μεταθέσεων ενός συνόλου n στοιχείων.]

Έστω τα στοιχεία a, b, c, d, e τα οποία είναι n το πλήθος και έστω m ότι είναι ο επόμενος του n [$m=n+1$]. Έστω t ο αριθμός των μεταθέσεων των a, b, c, d, e [$t=P_n$]. Προσθέτοντας ένα στοιχείο στο σύνολο των a, b, c, d, e παίρνουμε a, b, c, d, e, f που περιλαμβάνει m στοιχεία. Λέμε ότι ο αριθμός των μεταθέσεων των a, b, c, d, e, f [$P_m=P_{n+1}$] είναι ίσος με το γινόμενο t επί m [$P_{n+1}=P_m=m P_n=(n+1) P_n$].

Απόδειξη:

Τοποθετήστε το επιπρόσθετο στοιχείο f στην πρώτη θέση κάθε μετάθεσης των a, b, c, d, e . Κάθε μία από αυτές τις τοποθετήσεις είναι μία διαφορετική μετάθεση. Έτσι ο αριθμός των μεταθέσεων με το f στην πρώτη θέση είναι t . Επίσης, αφού ο αριθμός των μεταθέσεων των a, b, c, d, e είναι t , υπάρχουν t μεταθέσεις των a, b, c, d, f [παραλείπεται το e]. Τώρα προσθέτοντας το στοιχείο e και τοποθετώντας το μπροστά από κάθε μια από αυτές τις μεταθέσεις, παίρνουμε διαφορετικές τοποθετήσεις με το e στην πρώτη θέση οι οποίες είναι το πλήθος t .

Ομοίως, κάθε ένα από τα στοιχεία μπορεί να τοποθετηθεί στην πρώτη θέση δίνοντας t διαφορετικές μεταθέσεις.

Οπότε, ο συνολικός αριθμός των μεταθέσεων είναι t πολλαπλασιασμένο με το πλήθος των στοιχείων που είναι m .

Στο τελευταίο μέρος της απόδειξης ο Gerson δείχνει ότι ανά δύο αυτές οι μεταθέσεις είναι διαφορετικές και ότι δεν υπάρχουν άλλες μεταθέσεις αυτών των στοιχείων. Έτσι εδώ παραλείπεται μιας και δεν σχετίζεται άμεσα με το θέμα μας.

Στη συνέχεια καταλήγει στο συμπέρασμα ότι αυτό αποδεικνύει ότι ο αριθμός των μεταθέσεων ενός δεδομένου συνόλου στοιχείων είναι ίσος με τον αριθμό που σχηματίζεται από το γινόμενο των φυσικών αριθμών από το 1 μέχρι τον αριθμό [που δηλώνει το πλήθος] των στοιχείων που δίνονται. Για τον αριθμό των μεταθέσεων 2 στοιχείων είναι 2, και αυτό είναι ίσο με $1 \cdot 2$, ο αριθμός των μεταθέσεων των 3 στοιχείων είναι ίση με το γινόμενο $3 \cdot 2$, η οποία είναι ίση με $1 \cdot 2 \cdot 3$, και έτσι κάποιος δείχνει αυτό το αποτέλεσμα περαιτέρω χωρίς τέλος.

Έτσι, εδώ ο Gerson αναδιατυπώνει το γενικό συμπέρασμα αναφέροντας το βασικό βήμα (για $n=2$) και, επισημαίνοντας ότι με το επαγωγικό βήμα, που έχει ήδη αποδειχθεί στην πρόταση 63, το αποτέλεσμα έχει επίσης αποδειχθεί, δηλαδή ότι τα παραπάνω αποτελούν την απόδειξη της σχέσης: $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

Με την ίδια τακτική ο Gerson αποδεικνύει την πρόταση 65, αφού πρώτα αποδείξει την 64, η οποία αποτελεί το βασικό βήμα της επαγωγής. Όπως θα δούμε η 64 χρησιμοποιείται μόνο αφού έχει αποδείξει την 65, η οποία συνιστά το επαγωγικό βήμα, για να ολοκληρώσει την απόδειξη.

Πρόταση 64.

Ο αριθμός των μεταθέσεων τάξης δύο ενός δεδομένου αριθμού διαφορετικών στοιχείων ισούται με

το γινόμενο του δεδομένου αριθμού με τον προηγούμενό του.

[Συμβολικά: $P_2^n = n \cdot (n-1)$, όπου P_2^n οι διατάξεις του n ανά 2]

Απόδειξη: παραλείπεται

Πρόταση 65.

Αν υπάρχει ένας δεδομένος αριθμός διαφορετικών στοιχείων και ο αριθμός των μεταθέσεων τάξης ίσης με έναν άλλο δεδομένο αριθμό μικρότερο του πρώτου είναι ένας τρίτος δεδομένος αριθμός, τότε

ο αριθμός των μεταθέσεων τάξης ίσης με τον επόμενο του δεύτερου δεδομένου αριθμού είναι

το γινόμενο του τρίτου δεδομένου αριθμού με το πλεόνασμα του πρώτου δεδομένου αριθμού από τον δεύτερο.

[Συμβολικά: $P_{j+1}^n = (n-j)P_j^n$, όπου P_j^n , P_{j+1}^n οι διατάξεις του n ανά j και $j+1$, αντίστοιχα].

Έστω τα στοιχεία a, d, c, e, f, g , πλήθους n . Έστω j ένας διαφορετικός και μικρότερος αριθμός από τον n , και έστω ότι ο αριθμός των μεταθέσεων τάξης j αυτών των στοιχείων είναι h [$h = P_j^n$]. Αν k [$k=j+1$] είναι ο επόμενος του j και η διαφορά του j από τον n είναι r [$r=n-j$], λέμε ότι το πλήθος των μεταθέσεων τάξης k [$= P_{j+1}^n$] αυτών των στοιχείων είναι το γινόμενο του h επί r [$P_{j+1}^n = (n-j)P_j^n$].

Απόδειξη:

Έστω ότι μία από τις μεταθέσεις τάξης j αυτών των στοιχείων είναι a, b, c , επομένως τα υπόλοιπα στοιχεία είναι d, e, f, g πλήθους r [$r=n-j$]. Τώρα τοποθετώντας κάθε ένα από τα d, e, f, g στην πρώτη θέση της a, b, c , κάθε τοποθέτηση είναι διαφορετική και τάξης k αφού περιέχει ένα επιπρόσθετο στοιχείο. Επειδή το πλήθος των στοιχείων d, e, f, g είναι r , ο αριθμός των μεταθέσεων που προκύπτουν από την a, b, c είναι r . Ομοίως, ο αριθμός των μεταθέσεων που προκύπτουν από κάθε μία από τις μεταθέσεις τάξης j είναι r . Επομένως ο συνολικός αριθμός των αυτών των μεταθέσεων δηλαδή, αυτών τάξης k , είναι το r πολλαπλασιασμένο με τον αριθμό των μεταθέσεων τάξης j . Αλλά ο αριθμός των μεταθέσεων τάξης j είναι h : έτσι ο αριθμός των μεταθέσεων τάξης k αυτών των στοιχείων είναι τόσες όσο το γινόμενο r επί h .

Όπως και στην πρόταση 64 παραλείπουμε το τελευταίο μέρος της απόδειξης όπου ο Gerson δείχνει ότι ανά δύο αυτές οι μεταθέσεις είναι διαφορετικές και ότι δεν υπάρχουν άλλες μεταθέσεις τάξης k αυτών των στοιχείων.

Στη συνέχεια, όμοια με πριν, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι εδώ έχει αποδειχθεί ότι **οι μεταθέσεις τάξης ενός δεδομένου αριθμού ενός δεύτερου δεδομένου αριθμού στοιχείων είναι ίσες με τον αριθμό που σχηματίζεται από το γινόμενο των ακεραίων στη φυσική αλληλουχία τους από το δεδομένο αριθμό τάξης έως και τον αριθμό των στοιχείων του συνόλου.**

Αμέσως μετά ο Gerson εφαρμόζει τα προηγούμενα αποτελέσματα για την περίπτωση $n=7$:

«If the number of elements be 7, the sequence of integers beginning from one is 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, it is clear that the number of permutations of order two from them is the product of 6 by 7. These are two numbers in the order of the integers, the last being 7. Now the permutations of order three are as many as the product of 5 by 6 by 7, since the excess of 7 over 2 is 5. This equals the composite of 5.6.7. These factors number three and they are in the order of the integers, the last being 7. Similarly it is shown that the number of permutations of order four equals the composite of 4.5.6.7 and, similarly too, it has been shown for any number whatever...»

(Rabinovitch, 1970, σελ. 243)

Κεφάλαιο 14. Fransisco Maurolycus

Ο Francisco Maurolico (Ελληνικά: Φραγκίσκος Μαυρόλυκος, Λατινικά: Franciscus Maurolycus ή Francisci Maurolyci, Ιταλικά: Francesco Maurolico ή Francisco Maurolico) γεννήθηκε και πέθανε στη Μεσσήνη της Σικελίας (19 Σεπτεμβρίου 1494-21 Ιουλίου 1575). Οι γονείς του ήταν Έλληνες από την Κωνσταντινούπολη που είχαν εγκαταλείψει την πόλη για να βρουν καταφύγιο στη Μεσσήνη το 1453, λίγο πριν από την κατάληψη του Βυζαντίου από τον Μωάμεθ.

Καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του, ασχολήθηκε με διάφορους τομείς όπως: γεωμετρία, οπτική, κωνικά, μηχανική, μουσική, και αστρονομία. Ο Maurolico έγραψε σημαντικά βιβλία στα ελληνικά μαθηματικά, αποκατέστησε πολλά αρχαία έργα και μετέφρασε πολλά κείμενα αρχαίων συγγραφέων όπως του Θεοδόσιου, του Μενέλαου, του Αυτόλυκου, του Ευκλείδη, του Απολλώνιου και του Αρχιμήδη.

Το πιο πρωτότυπο από τα έργα του είναι η πραγματεία του για την αριθμητική «*Arithmeticon libri duo*», που γράφτηκε το έτος 1557 και τυπώθηκε στη Βενετία το έτος 1575 στη συλλογή "*D. FRANCISCI MAUROLYCI Opuscula mathematica*."

Στο πρώτο βιβλίο της Αριθμητικής ο Maurolico ασχολείται με τους "figurate numbers" εξαντλητικά. Αρκετοί μελετητές, Vacca, Cantor, Gunther, Freudenthal, Bussey, Bourbaki, Cassinet, κ.α., θεωρούν ότι σε αυτό το βιβλίο, παρόλο που δεν εκφράζεται ρητά, χρησιμοποιείτε για πρώτη φορά η αρχή της Μαθηματικής επαγωγής ή έστω, αποδείξεις με την τεχνική της μαθηματικής επαγωγής.

Ενδεικτικά παραθέτουμε τα παρακάτω:

«This new and easy way is nothing else than the principle of mathematical induction. This principle is used at the beginning of the work only in the demonstration of very simple propositions, but in the course of the treatise is applied to the more complicated theorems in a systematic way.»

(Vacca, 1970, σελ. 71)

«Ich wurde durch Herrn G . Vacca darauf aufmerksam gemacht dass schon Maurolycus in seiner Arithmetik von 1575 die Methode genau geschildert und von ihr Gebrauch gemacht hat. Aus Maurolycus aber entnahm sie erst Pascal. Daruber kann nicht der

leiseste Zweifel obwalten da Pascal sich 1659 fur den Satz $2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - n = n^2$

ausdracklich auf Maurolycus beruft welcher gerade diesen Satz mittels voll-stiindiger Induktion bewiesen hat.»

(Cantor, 1902, σελ. 536)

«Bei grosser Liberalitait darf man das Verfahren vielleicht als vollstindige Induktion bezeichnen, obwohl der eigenartige formale Aufbau der vollstandigen Induktion fehlt.»

(Freudenthal, 1953, σελ. 27)

«This is a clear case of a complete induction proof. Proposition XIII is used as a lemma. It furnishes the argument from n to n + 1. The first few special cases are mentioned in Proposition XV itself.»

(Bussey, 1917, σελ. 203)

«For Maurolico the principle is not justified but its use is in most instances correct; he enumerates the numerical cases of verification up to the fifth index, ending with 'and thus

repeating to infinity, the proposition is proved', or again 'and in the same manner infinitely, until the proposition is concluded, but Maurolico's use of numerical support goes beyond simple verification because the numbers only serve to illustrate the proof and not to perform it.»

(Cassinet, 1988, σελ. 173)

Ο Maurolico στο Βιβλίο Ι αρχικά δίνει τον παρακάτω πίνακα, με διάφορα είδη αριθμών, στη συνέχεια ορίζει αυτούς τους αριθμούς και κατόπιν ακολουθούν οι προτάσεις του βιβλίου στις οποίες αποδεικνύονται διάφορες σχέσεις μεταξύ αυτών των αριθμών.

Numeri lineares.										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Radices
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	Impares
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	Pares
1						25				Prof. Ti
Superficiales primi.										
1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Trianguli primi.
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	Quadrati primi.
0	3	6	12	20	30	42	56	72	90	parte altera longiores.
1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	Pentagoni primi.
1	6	15	27	42	60	81	105	135	170	Hexagoni primi.
Pyramides Primæ.										
1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	Pyramides triangula prima.
1	5	14	30	55	91	140	204	285	385	Pyramides quadrata prima.
1	6	18	40	75	126	196	288	405	550	Pyramides pentagona prima.
1	7	22	50	95	161	252	372	525	715	Pyramides hexagona prima.
Columnæ primæ.										
1	6	18	40	75	126	196	288	405	550	Columna triangula prima.
1	7	27	64	125	216	343	512	729	1000	Columna quadrata prima. Vel Cubi.
1	10	36	88	175	306	490	756	1053	1450	Columna pentagona prima.
1	12	45	112	225	396	637	960	1377	1900	Columna hexagona prima.
Superficiales Secundi centrales.										
1	4	10	21	34	50	69	92	119	150	Trianguli secundi.
1	5	13	31	55	85	121	163	211	265	Quadrati secundi.
1	6	16	37	67	104	148	199	256	318	Pentagoni secundi.
1	7	19	41	77	119	169	227	293	368	hexagoni secundi. aquianguli.
1	8	22	47	87	134	190	255	329	410	heptagoni secundi.
1	9	25	52	97	149	217	290	369	455	Octagoni secundi.

Οι αριθμοί αυτοί (πολυγωνικοί και πολυεδρικοί αριθμοί), οι οποίοι έχουν συζητηθεί από την ελληνική αρχαιότητα (Πυθαγόρας, Ευκλείδης, Νικόμαχος, Διόφαντος κ.α.), ορίζονται επαγωγικά. Για παράδειγμα οι τρεις πρώτοι ορισμοί που δίνει ο Maurolico είναι:

Radices (ρίζες, ακέραιοι): σχηματίζονται από τη μονάδα μέσω συνεχούς προσθήκης της μονάδας.

Impares (περιττοί): προκύπτουν από τη μονάδα μέσω συνεχούς προσθήκης της δυάδας.
Pares (άρτιοι): σχηματίζονται από το δύο και συνεχή προσθήκη της δυάδας ή με το διπλασιασμό των ριζών.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι υπόλοιποι, *Perfecti*, *Trianguli primi*, *Quadrati primi*, *Pentagoni primi*, *Exagoni primi*, κ.τ.λ., “figurate numbers”.

Ως εκ τούτου, για να χρησιμοποιήσουμε τα λόγια του Cassinet «*It is therefore not surprising to find numerous reasonings by recurrence in this book*».

(Jean Cassinet, 1988, σελ. 166)

Οι αριθμοί που βρίσκονται στην ίδια στήλη καλούνται από τον Maurolico “collateral”, ενώ ένας αριθμός σε μία στήλη λέει ότι προηγείται του αριθμού κάθε επόμενης στήλης και ακολουθεί τον αριθμό κάθε προηγούμενης στήλης.

Η πιο γνωστή πρόταση σε αυτό το βιβλίο η οποία φέρετε να έχει αποδειχθεί με την μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής είναι η πρόταση 15. Θα παραθέσουμε εδώ, με απόδειξη, τις προτάσεις 6 και 15. Η αρίθμηση των προτάσεων είναι του Maurolico ενώ η μετάφραση, από τα Λατινικά στα Αγγλικά, είναι από τον Bussey (1917) και όπως ο ίδιος διευκρινίζει «*In some cases I give the proofs as given by him.*» (σελ. 201).

14.1. Προτάσεις 4 και 6 του έργου *Arithmeticon libri duo*.

Για την απόδειξη της Πρότασης 6 ο Maurolico χρησιμοποιεί την Πρόταση 4.

Πρόταση 4.

Οι περιττοί αριθμοί λαμβάνονται από την μονάδα με συνεχείς προσθέσεις του δύο.

Απόδειξη: Παραλείπεται.

Πρόταση 6.

Το άθροισμα κάθε ακεραίου με τον προηγούμενο του ισούται με τον collateral περιττό αριθμό.

[Συμβολικά: $n+(n-1)=P_n$ (=ο περιττός αριθμός που είναι στην ίδια στήλη με τον n).]

Απόδειξη:

Ο ακεραίος δύο προστιθέμενος στη μονάδα κάνει τον ακεραίο τρία

[$1+2=3$]

αλλά όταν προστίθεται στο τρία κάνει ένα ποσό μεγαλύτερο κατά δύο και αυτό (από Πρόταση 4) είναι ο επόμενος περιττός ακεραίος, πέντε.

[$3+2=(1+2)+2=5$, από Πρ. 4]

Πάλι αφού ο ακεραίος τρία προστιθέμενος στο δύο κάνει πέντε,

το οποίο είναι ο collateral περιττός ακεραίος, όταν προστίθεται στο

τέσσερα το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο κατά δύο, αυτό είναι (από Πρ. 4)

ο επόμενος περιττός ακεραίος αριθμός που είναι επτά.

[$3+4=(3+2)+2=5+2=7$, από Πρ. 4]

Και κατά τον ίδιο τρόπο στο άπειρο όπως αναφέρει η πρόταση.

(πράγματι, στο πρωτότυπο ο Maurolico γράφει: «*Eodemque modo in infinitum , ficut propositio concludit*» (σελ. 14)).

Σύμφωνα με τον Bussey (1917) αυτό δεν είναι μια σαφής απόδειξη με μαθηματική επαγωγή αλλά η ιδέα υπάρχει.

Η ιδέα του Maurolico μπορεί να αποτυπωθεί με μεγαλύτερη σαφήνεια ως εξής:

Το θεώρημα ισχύει με έλεγχο για την πρώτη περίπτωση, δηλαδή για τον πρώτο ακέрайος που έχει προηγούμενο, που είναι το 2. Έτσι για $n=2$ αφού $2+1=3 = \text{collateral περιττός ακέрайος του } 2$, η πρόταση ισχύει.

Αυτό είναι το πρώτο βήμα της επαγωγικής απόδειξης.

Στη συνέχεια από την προηγούμενη περίπτωση με εφαρμογή της Πρ.4 δείχνει ότι η πρόταση ισχύει για την αμέσως επόμενη περίπτωση, δηλαδή για $n=3$ επειδή το θεώρημα ισχύει για $n=2$ με εφαρμογή της Πρ.4 έχουμε: $3+2=5 = \text{collateral περιττός ακέрайος του } 3$.

Συνεχίζει ομοίως και στην επόμενη περίπτωση, δηλαδή για $n=4$ έχουμε: $3+4=7 = \text{collateral περιττός ακέрайος του } 4$, χρησιμοποιώντας ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα την προηγούμενη περίπτωση και την Πρ.4.

Τέλος γενικεύει λέγοντας ότι με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να συνεχίσουμε στο άπειρο.

Η Πρ.4 είναι αυτή που παρέχει εδώ το επιχειρήμα για το επαγωγικό βήμα από το n στο $n+1$, χωρίς παρόλα αυτά, όπως είδαμε, να διατυπώνεται αυτό ξεκάθαρα από το Maurolico. Ωστόσο, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αυτό συμβαίνει επειδή ο συγγραφέας δεν έχει αντίληψη του γεγονότος αλλά μάλλον το αντίθετο. Πιθανόν να το θεωρεί αυτονόητο και, σε συνδυασμό με το ότι η πρόταση είναι ιδιαίτερα απλή, μη άξιο αναφοράς.

14.2. Προτάσεις 13 και 15 του έργου *Arithmeticon libri duo*.

Στην συνέχεια θα δούμε μία ακόμα περίπτωση από τον Maurolico, την Πρόταση 15, η οποία διαφοροποιείται από την προηγούμενη ακριβώς σε αυτό το σημείο. Εδώ ο Maurolico, δηλώνει ξεκάθαρα ότι η αποδεικτική του διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον λόγω του επαγωγικού επιχειρήματος, που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι η Πρόταση 13.

Πρόταση 13.

Κάθε τετράγωνος αριθμός προστιθέμενος στον περιττό αριθμό που ακολουθεί ισούται με τον επόμενο τετράγωνο αριθμό.

Απόδειξη: Παραλείπεται.

Πρόταση 15.

Το άθροισμα των πρώτων n περιττών αριθμών ισούται με το n -οστό τετράγωνο αριθμό. [Συμβολικά: $1+3+\dots+2(n+1) = (n+1)^2$.]

Απόδειξη:

Από προηγούμενη πρόταση [εννοεί την 13] ο πρώτος τετράγωνος αριθμός προστιθέμενος στον περιττό αριθμό που ακολουθεί δίνει τον επόμενο τετράγωνο αριθμό.

[$1+3=4$]

Και ο δεύτερος τετράγωνος αριθμός προστιθέμενος στον τρίτο περιττό αριθμό δίνει τον τρίτο τετράγωνο αριθμό.

[4+5=9]

Και ομοίως ο τρίτος τετράγωνος αριθμός προστιθέμενος στον τέταρτο περιττό αριθμό δίνει τον τέταρτο τετράγωνο αριθμό.

[9+7=16]

Και έτσι **διαδοχικά στο άπειρο** η πρόταση αποδείχθηκε μέσω επαναλαμβανόμενης εφαρμογής της πρότασης 13.

Ο Bussey σε αυτό το σημείο σημειώνει:

«This is a clear case of a complete induction proof. Proposition XIII is used as a lemma. It furnishes the argument from n to $n + 1$. The first few special cases are mentioned in Proposition XV itself.»

(Bussey, 1917 σελ. 203)

Δεν θα επιμείνουμε περισσότερο στον Maurolico, να επισημάνουμε μόνο, κλείνοντας το κεφάλαιο, ότι ο συγγραφέας εφαρμόζει την παραπάνω αποδεικτική μέθοδο σε αρκετές προτάσεις, πολύ λιγότερο απλές ενίοτε από τις παραπάνω, του *Arithmeticon libri duo*, δείχνοντας έτσι ιδιαίτερη δεξιοτεχνία στο χειρισμό αυτού του τύπου την συλλογιστική.

Παρόλα αυτά όμως δεν μπορούμε να πούμε ότι η επαγωγική μέθοδος που εφαρμόζει ο Maurolico διαφέρει από εκείνη που συναντήσαμε στα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά.

Βιβλιογραφία

- Acerbi, F. (2000). *“Plato: Parmenides 149a7-c3. A Proof by Complete Induction?”*. Archive for History of Exact Sciences, 55, 57–76.
- Bankoff, L. (1981). *How did Pappus do it?*. The Mathematical Gardner. In Klarnar, D. A. (Eds.). Boston : Prindle, Weber, & Schmidt, 112–118.
- Bussey, W. H. (1917). *The Origin of “Mathematical Induction”*. The American Mathematical Monthly, 24(5), 199–207.
- Cajori, F. (1909). *Shorter Notices (Review of Ueber das Wesen der Mathematik by A. Voss)*. Bulletin of the American Mathematical Society, 25(5), 315-326.
- Cajori, F. (1918). *Origin of the Name “Mathematical Induction”*. The American Mathematical Monthly, 25(5), 197–201.
- Cajori, F. (1991). *A History of Mathematics*. 5th ed. N.Y: Chelsea Publishing Co.
- Cassinet, J. (1988) *The first arithmetic book of Francisco Maurolico, written in 1557 and printed in 1575: a step towards a theory of numbers*. In Cynthia, Hay (ed.), *Mathematics from Manuscript to Print 1300-1600* (pp. 162-179). New York: Oxford University Press.
- D., Francisci, Maurolyci. (1575). *Abbatis Messanensis, Mathematici Celeberrimi, Arithmeticorum Libri Duo*. Venetiis: F. Franciscium Senensem.
- Dijksterhuis, E. J. (1956). *Archimedes*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Fowler D. (1987). *The Mathematics of Plato’s Academy*. Oxford: Clarendon Press.
- Fowler, D. (1994). *Could the Greeks Have Used Mathematical Induction? Did They Use It?*. Physis, XXXI, 253–265.
- Freudental, H. (1953). *Zur Geschichte der vollständigen Induction*. Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 6, 17–37.
- Gow, J. (1884). *A Short History of Greek Mathematics*. Digitally printed version 2010. New York: Cambridge University Press.
- Gussett, J. C. (1986). *Let's Make Francesco Maurolico a Household Word*. School Science and Mathematics, 86(2), 144-148.
- Heath, T. L. (1987/1953). *The Works of Archimedes*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Θησαυρός της Ελληνικής Γλώσσας (Thesaurus Linguae Graecae - TLG).
- Katz, Victor J. (1996). *Combinatorics and induction in medieval Hebrew and Islamic mathematics*. In *Vita mathematica: Historical research and integration with teaching*. Ron Calinger, (ed.) Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 99–107.
- Katz, Victor J. (2009). *History of Mathematics: An Introduction*. 3rd ed. Boston, etc.: Addison-Wesley.

- Kleene, S. C. (1952). *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co.
- Klein, J. (1968). *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. Cambridge, Mass.: MIT Press.
- Lange, Gerson.(1909) *Sefer Maassei Chosheb-Die Praxis des Rechners, Ein hebraeisch arithmetisches Werk des Levi ben Gerschom aus dem Jahre 1321*, Frankfurt am Main: Louis Golde.
- Merzbach, Uta C., & Boyer, Carl B. (2011). *History of Mathematics*. 3rd ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Mueller, I. (1981). *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements*. Cambridge: MIT Press.
- Negrepontis, S. (2015). *The periodic anthyphairetic nature of the One of the Second Hypothesis in Plato's Parmenides*. In X.Hascher & A. Papadopoulos (Eds), *Proceedings of Conference Mathematiques et musique: des Grecs a Euler*, Universite de Strasbourg.
- Νεγρεπόντη Σ. και Φαρμάκη, Β. *Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*, υπό ετοιμασία.
- Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Pascal, B. (1954). *Oeuvres Completes. 'Edition etablie et annotee par J. Chevalier*. Paris: Gallimard.
- Polya, G. (1945). *How To Solve It A New Aspect of Mathematical Method*. 2nd ed. New Jersey: Princeton University Press.
- Rabinovitch, Nachum L. (1970). *Rabbi Levi Ben Gershon and the origins of mathematical induction*. *Archive for History of Exact Sciences*, 6(3), 237–248.
- Rashed, Roshdi (1972). *L'induction mathématique: al-Karajī, as-Samaw'al*. *Archive for History of Exact Sciences*, 9(1), 1–21.
- Σταμάτη, Ε. (1973). *Αρχιμήδους Άπαντα. Τόμος Β*. Εκδόσεις Τεχνικού Επιμελητήριου Ελλάδος, Αθήνα.
- Simonson , S. (2000). *The Missing Problems of Gersonides - A Critical Edition - Part I*. *Historia Mathematica*, 27(3), 243–302.
- Simonson , S. (2000). *The Missing Problems of Gersonides - A Critical Edition - Part II*. *Historia Mathematica*, 27(4), 384–431.
- Simonson, S. (2009). *A Rabbi, Three Sums, and Three Problems*. *Resources for Teaching Discrete Mathematics: Classroom Projects, History Modules, and Articles: 273-281* Edited by Brian Hopkins. Published by: Mathematical Association of America.
- Sanaa Bajri, John Hannah, Clemency Montelle. (2015). *Revisiting Al-Samaw'al's table of binomial coefficients: Greek inspiration, diagrammatic reasoning and mathematical induction*. *Archive for History of Exact Sciences*, 69(6), 537-576.

- Sefrin-Weis, Heike. (2010). *Pappus of Alexandria: Book 4 of the Collection, edited with translation and commentary*. London: Springer.
- Serafina, C. (2007). *Pappus of Alexandria and the Mathematics of Late Antiquity*. Cambridge :Cambridge University Press.
- Sören, Stenlund. (2014). *The Origin of Symbolic Mathematics and the End of the Science of Quantity*. Printed in Sweden by Elanders. Distributor: Department of Philosophy, Uppsala University.
- Szabo A. (1978). *The Beginnings of Greek Mathematics*. Dordrecht/Boston: D. Reidel Publishing Co.
- Unguru, S. (1991). *Greek Mathematics and Mathematical Induction*. *Physis*. XXVIII, 273–289.
- Unguru, S. (1994). *Fowling after Induction*. *Physis*, XXXI, 267–272.
- Vacca, G. (1909). *Maurolycus, the First Discoverer of the Principle of Mathematical Induction*. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 16(2), 70–73.
- Wedberg, A. (1955). *Plato's Philosophy of Mathematics*. Stockholm: Almqvist and Wiksell.
- Woepcke, F. (1982). *Extrait du Fakhri, traité d'algèbre par Aboû Bekr Mohammed Ben Alhaçan Alkarkhî, 1853*. Reprint: Georg Olms Verlag, Hildesheim.
- Yadegari, Mohammad. (1978). *The Use of Mathematical Induction by Abū Kāmil Shujā' Ibn Aslam (850-930)*. *Isis*, 69(2), 259–262.