ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΣΟΠΛΕΥΡΑ ΣΥΝΟΛΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ PETTY ΚΑΙ BRASS & DEKSTER

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΛΕΩΝΙΔΑ ΘΕΟΔΩΡΟΥ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Σ. ΜΕΡΚΟΥΡΑΚΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2016

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΣΟΠΛΕΥΡΑ ΣΥΝΟΛΑ
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ PETTY ΚΑΙ
BRASS & DEKSTER

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΛΕΩΝΙΔΑ ΘΕΟΔΩΡΟΥ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

Σ. ΜΕΡΚΟΥΡΑΚΗΣ, Καθηγητης Ε.Κ.Π.Α. (**Επιβλεπων**)

Α. ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ, Καθηγητης Ε.Κ.Π.Α.

Γ. ΚΟΥΜΟΥΛΛΗΣ, Καθηγητης Ε.Κ.Π.Α.

ΑΘΗΝΑ 2016

Στη Μαρία

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Σοφοκλή Μερκουράκη και τον κύριο Γιώργο Βασιλειάδη για την πολύτιμη καθοδήγηση κατά την εκπόνηση της διπλωματικής. Επίσης τους κυρίους Αποστόλη Γιαννόπουλο και Γεώργιο Κουμουλλή για την τιμή να συμμετάσχουν ως εξεταστική επιτροπή.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία μελετώνται ισόπλευρα (equilateral) σύνολα σε χώρους με νόρμα πεπερασμένης διάστασης. Ένα υποσύνολο S ενός χώρου με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται ισόπλευρο, όταν τα στοιχεία του ανά δύο έχουν σταθερή απόσταση. Με $e(X)$ συμβολίζουμε το μέγιστο πλήθος ενός ισόπλευρου συνόλου στον X· το πλήθος αυτό είναι πεπερασμένο, λόγω συμπάγειας της μοναδιαίας σφαίρας, όταν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση.

Είναι γνωστό ότι αν $X = l_2^n$(= ο ευκλείδειος χώρος διάστασης n) τότε $e(X) = n + 1$ και ότι $e(X) = 2^n$ στην περίπτωση της l_∞ νόρμας. Είναι ακόμη γνωστό ότι αν $\dim X = n$ τότε $e(X) \leq 2^n$ και ότι η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν ο X είναι ισομετρικός με τον l_∞^n.

Εικάζεται ότι αν $\dim X = n$, τότε $e(X) \geq n + 1$ (δηλαδή ο $n + 1$ είναι ένα κάτω φράγμα για τον αριθμό $e(X)$). Για $n = 1$ και $n = 2$ αποδεικνύεται εύκολα. Για $n = 3$ έχει αποδειχθεί από τον Petty [9] και για $n = 4$ πρόσφατα από τον Makeev [5]. Για $n \geq 5$ έχουμε τα κάτω φράγματα που μας δίνει το θεώρημα Brass και Dekster, το οποίο θα παρουσιάσουμε στο τρίτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας.

Η διάρθρωση της εργασίας έχει ως ακολούθως: Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η αρχική απόδειξη του θεωρήματος του Petty στο οποίο αναφερθήκαμε προηγουμένως [9]. Η απόδειξη αυτή χρησιμοποιεί το Λήμμα της μονοτονίας το οποίο παρουσιάζει γενικότερο ενδιαφέρον καθώς και ένα τοπολογικό επιχείρημα.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται μία εναλλακτική (πρόσφατη) απόδειξη του θεωρήματος του Petty η οποία οφείλεται στον Kobos [3]. Η απόδειξη αυτή (εδράζεται σε ιδέες ανάλογες με αυτές που χρησιμοποιεί ο Makeev για την απόδειξη του αποτελέσματός του [5] και) χρησιμοποιεί ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα των Kramer και Nemeth [4] το οποίο περιγράφει ικανές συνθήκες ώστε το ομοιόθετο ενός τριγώνου να εγγράφεται στο σύνορο ενός κυρτού σώματος.

Το αντικείμενο του τρίτου κεφαλαίου είναι η απόδειξη του θεωρήματος των Brass και Dekster: Αν m είναι θετικός ακέραιος τότε κάθε χώρος με νόρμα αρκετά μεγάλης (πεπερασμένης) διάστασης περιέχει ένα ισόπλευρο σύνολο πλήθους m. Με περισσότερη ακρίβεια, αν $\dim X = n$ τότε $e(X) \geq c(\log n)^{\frac{1}{3}}$, όπου $c > 0$ μία σταθερά. Έπεται εύκολα από αυτό το αποτέλεσμα ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος με νόρμα περιέχει ισόπλευρα σύνολα οσονδήποτε μεγάλου (πεπερασμένου) πλήθους. Για την απόδειξη αυτού του σημαντικού αποτελέσματος χρησιμοποιούνται αποτελέσματα της θεωρίας Cayley-Menger (η οποία ανήκει στην Γραμμική άλγεβρα), το θεώρημα Dvoretzky καθώς και το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer.

Κεφάλαιο 0

Προκαταρκτικά

Στην εργασία αυτή όταν θα αναφερόμαστε σε ένα χώρο με νόρμα X θα εννοούμε ότι ο X είναι διανυσματικός χώρος επί του σώματος των πραγματικών αριθμών. Η επόμενη πρόταση μας δείχνει ότι μπορούμε να ταυτίζουμε ένα n-διάστατο χώρο με νόρμα με έναν χώρο της μορφής $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Πρόταση 0.1
Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Μπορούμε να ορίσουμε μία νόρμα $\|\cdot\|'$ στον $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε ο X να είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$.

Απόδειξη
Έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα του X και έστω $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ μία βάση του. Ορίζουμε $T : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με $T(t_1x_1 + \cdots + t_nx_n) = t_1e_1 + \cdots + t_ne_n$ όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ορίζουμε $\|\cdot\|'$ στον $\mathbb{R}^n$ θέτοντας $\|t_1e_1 + \cdots + t_ne_n\|' = \|t_1x_1 + \cdots + t_nx_n\|$. Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\|T(x)\|' = \|x\|$, για κάθε $x \in X$. Άρα ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ των X και $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$.

Για έναν χώρο με νόρμα θα συμβολίζουμε τα σύνολα $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ και $\{x \in X : \|x\| = 1\}$ με B_x (μοναδιαία μπάλλα) και S_x (μοναδιαία σφαίρα) αντίστοιχα. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $C \subseteq X$. Με $\mathrm{B_d}\, C$ θα συμβολίζουμε το σύνορο του C ($\mathrm{B_d}\, C = \overline{C} \setminus C^{\circ}$). Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$ θα συμβολίζεται με l_2^n και με $\langle , \rangle$ θα συμβολίζουμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του l_2^n.

Ορισμός 0.1
Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα. Υποθέτουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y. Ορίζουμε την απόσταση Banach-Mazur των X και Y ως εξής:

$$d(X, Y) = \inf\{d > 0 : \exists T : X \longrightarrow Y \text{ γραμμικός ισομορφισμός του } X \text{ επί}$$

$$\text{του } Y \text{ ώστε } , B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq dB_Y\}$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι έαν $\dim X = \dim Y = n$ ορίζεται πάντα η απόσταση Banach-Mazur και «πιάνεται», λόγω συμπάγειας της μοναδιαίας σφαίρας, για κάποιον ισομορφισμό T, δηλαδή:

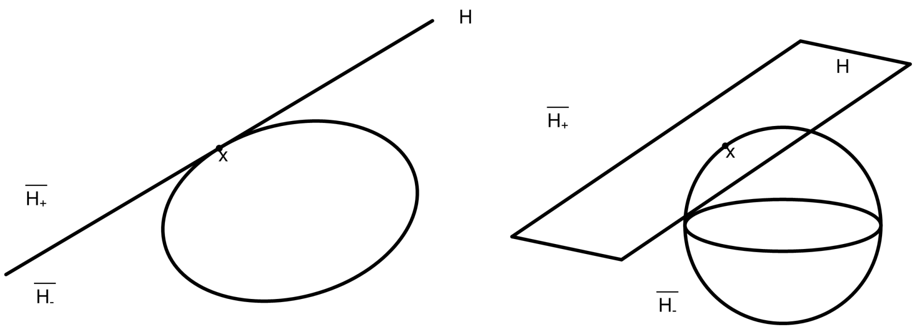
$$d(X,Y) = \min\{d > 0 : \exists T : X \longrightarrow Y \text{ γραμμικός ισομορφισμός του } X \text{ επί}$$

$$\text{του } Y \text{ ώστε },\, B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq dB_Y\}$$

Ορισμός 0.2
Ένα υποσύνολο W του $\mathbb{R}^n$ λέγεται υπερεπίπεδο αν $W = x + Y$, όπου Y υπόχωρος διάσταση $n-1$.

Ορισμός 0.3
Έστω $H = H(u,a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle = a\}$ όπου $u \neq 0$ και $a \in \mathbb{R}$ ένα υπερεπίπεδο. Θεωρούμε τους κλειστούς ημιχώρους $\overline{H}_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \geq a\}$ και $\overline{H}_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u \rangle \leq a\}$ όπου ορίζει το H. Αν A είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ λέμε ότι το H στηρίζει το A στο x (ή φέρει το A στο x) αν:

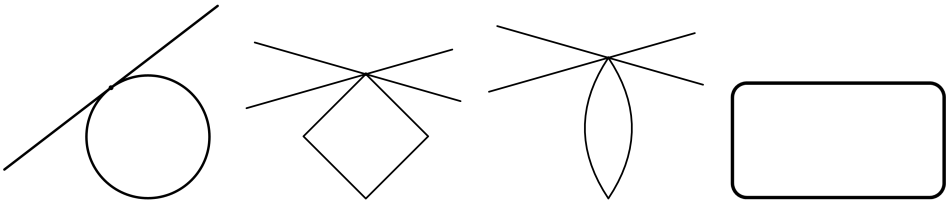
1. $x \in A \cap H$
2. Είτε $A \subseteq \overline{H}_+$ είτε $A \subseteq \overline{H}_-$



Στην περίπτωση που το $H = H(u,a)$ στηρίζει το A στο x το συναρτησοειδές $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ με $F(y) = \langle y, u \rangle$ θα καλείται συναρτησοειδές στήριξης του A στο x.

Θεώρημα 0.1
Έστω C ένα μη κενό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $y \in B_d(C)$ τότε υπάρχει υπερεπίπεδο που στηρίζει το C στο σημείο y.

Ορισμός 0.4
Με τον όρο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ εννοούμε ένα κυρτό και συμπαγές υποσύνολό του με μη κενό εσωτερικό. Το κυρτό σώμα χαρακτηρίζεται ως λείο αν σε κάθε σημείο του συνόρου του το υπερεπίπεδο στήριξης είναι μοναδικό. Το κυρτό σώμα χαρακτηρίζεται ως γνήσια κυρτό αν δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα στο σύνορό του.



(α′) Λείο και γνήσια κυρτό

(β′) Μη λείο και μη γνήσια κυρτό

(γ′) Μη λείο και γνήσια κυρτό

(δ′) Λείο και μη γνήσια κυρτό

Η μοναδιαία μπάλλα μίας νόρμας είναι ένα συμμετρικό ως προς το 0 κυρτό σώμα και κάθε συμμετρικό ως προς το 0 κυρτό σώμα C είναι η μοναδιαία μπάλλα μίας μοναδικής νόρμας (που ορίζεται από την σχέση $\|x\| = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}$). Μία νόρμα θα χαρακτηρίζεται ως λεία (γνήσια κυρτή) αν η μπάλλα που ορίζει είναι λεία (γνήσια κυρτή).

Για τους ορισμούς 0.3, 0.4 και το Θεώρημα 0.1 παραπέμπουμε στο [10].

Ορισμός 0.5
Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται απλά συνεκτικός αν είναι κατά τόξα συνεκτικός (δηλαδή για κάθε $a, b \in X$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\phi : [0,1] \longrightarrow X$ ώστε $\phi(0) = a$ και $\phi(1) = b$) και επιπλέον κάθε συνεχής κλειστή καμπύλη του X (δηλαδή συνεχής συνάρτηση $\sigma : [0,1] \longrightarrow X$ ώστε $\sigma(0) = \sigma(1)$) μπορεί να συσταλεί κατά τρόπο συνεχή μέσα στο X σε ένα σημείο.

Παραδείγματα απλά συνεκτικών τοπολογικών χώρων είναι ο ευκλείδειος χώρος l_2^n, τα κυρτά υποσύνολά του καθώς και η επιφάνεια $S^{n-1} = \{x \in l_2^n : \|x\| = 1\}$ της μοναδιαίας σφαίρας του.

Θεώρημα 0.2 (Brouwer)
Έστω K ένα κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : K \longrightarrow K$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχει $x_0 \in K$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.

Για τον ορισμό 0.5 και το Θεώρημα 0.2 παραπέμπουμε στο [8].

Ορισμός 0.6
Ομοιόθετο ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ένα σύνολο της μορφής $\lambda A + u = \{\lambda a + u : a \in A\}$ με $\lambda > 0$ και $u \in \mathbb{R}^n$. Η ειδική περίπτωση $\lambda = 1$ καλείται μεταφορά.

Ορισμός 0.7
Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ λέγονται συσχετισμένα ανεξάρτητα αν τα διανύσματα $x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_k - x_0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

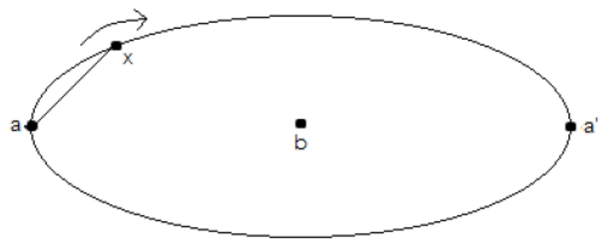
Στην περίπτωση που τα $x_0, x_1, \ldots, x_k$ είναι συσχετισμένα ανεξάρτητα η κυρτή τους θήκη $\mathrm{conv}(\{x_0, \ldots, x_k\})$ λέγεται $k - simplex$.

Κεφάλαιο 1

Θεώρημα Petty

Πρόταση 1.1
Σε έναν δισδιάστατο χώρο με νόρμα ισχύει ότι $e(X) \geq 3$.

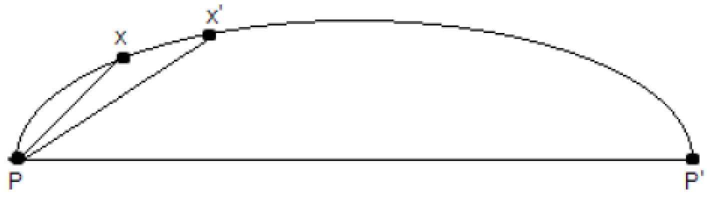
Απόδειξη
Έστω $a, b \in X$ με $\|b - a\| = 1$. Θεωρούμε την $S_2 = S(b, 1) = \{x \in X : \|x - b\| = 1\}$.



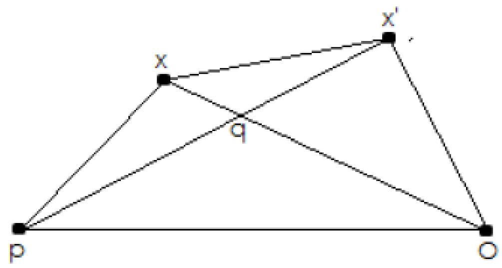
Έστω $f : S_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \|x - a\|$.
Παρατηρούμε ότι $f(a) = 0$ και $f(a') = 2$ (a' το αντιδιαμετρικό σημείο του a). Η συνέχεια της f, η συνεκτικότητα της S_2 και το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής εξασφαλίζουν την ύπαρξη ενός $y \in S_2 : \|y - a\| = 1$.

Στην περίπτωση όπου $n = 3$ θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα:

Λήμμα 1.1 (Λήμμα της μονοτονίας)
Έστω X ένας δισδιάστατος χώρος με νόρμα. Θεωρούμε ένα σημείο p πάνω στην S_x. Καθώς το x κινείται πάνω στην S_x από το p ως το $-p$ η απόσταση $\|p - x\|$ αυξάνει.



Απόδειξη
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
Περίπτωση 1
Έστω p, x, x' συνευθειακά. Τότε $\|p - x'\| = \lambda\|p - x\|$ με $\lambda > 1$.
Περίπτωση 2
Έστω p, x, x' όχι συνευθειακά. Τότε τα σημεία $p, x, x', 0$ σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο.



Έστω q το σημείο τομής των διαγωνίων. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{r} \|p-x\| \leq \|p-q\| + \|q-x\| \\ \|x'\| \leq \|q\| + \|q-x'\| \end{array}\right\} \rightarrow \|x'\| + \|p-x\| \leq \|p-q\| + \|q-x\| + \|q\| +$$

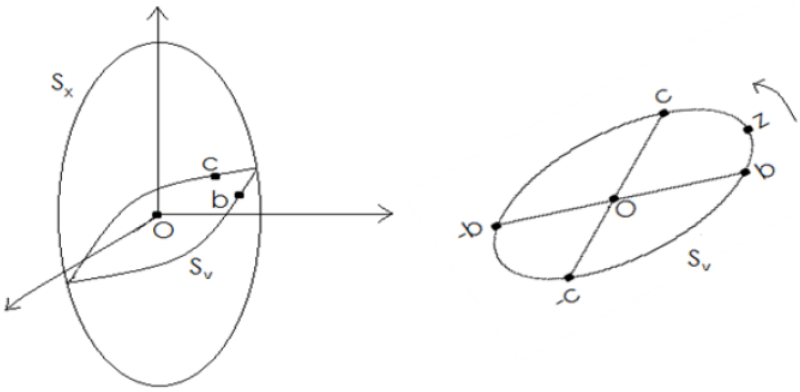
$$\|q - x'\| \xrightarrow[\|q\|+\|q-x\|=\|x\|]{\|p-q\|+\|q-x'\|=\|p-x'\|} \|x'\| + \|p-x\| \leq \|p-x'\| + \|x\| \xrightarrow{\|x\|=\|x'\|}$$

$$\|p - x\| \leq \|p - x'\|$$

Συμπέρασμα
Το Λήμμα τη μονοτονίας μας λέει ότι αν S_0 είναι το "ημικύκλιο" με άκρα p και $-p$ επί του οποίου κινείται το x τότε η συνάρτηση $x \longmapsto \|p - x\|$ είναι "αύξουσα" και, βέβαια, συνεχής.

Θεώρημα 1.1 (Petty)
Σε κάθε χώρο με νόρμα διάστασης μεγαλύτερης ή ίσης του 3 κάθε ισόπλευρο τρίγωνο μπορεί να επεκταθεί σε ισόπλευρο σύνολο 4 σημείων.

Απόδειξη
Έστω X με $\dim X = 3$ και a, b, c κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρές μήκους ίσου με 1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (με κατάλληλη μεταφορά) θεωρούμε $a = 0$. Έστω $V = \langle b, c\rangle$ ο υπόχωρος που παράγεται από τα b, c.



Θεωρούμε την συνάρτηση $f : S_x \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(z) = (\|z-b\|, \|z-c\|)$ και την περιορίζουμε στην S_V. Αρκεί να δείξουμε ότι το $(1,1)$ ανήκει στο πεδίο τιμών της f. Θα προσδιορίσουμε την καμπύλη που διαγράφει η f καθώς το z κινείται πάνω στην S_V.

Θα δείξουμε ότι είτε $(1,1) \in f(S_v)$ είτε το σημείο $(1,1)$ βρίσκεται στο εσωτερικό της $f(S_V)$.

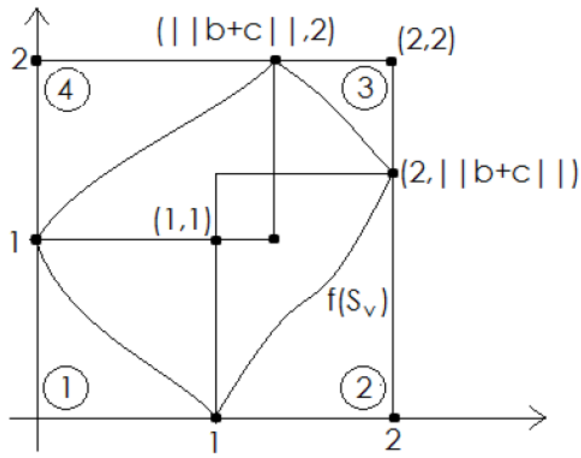
Προσανατολίζουμε την S_V με αρχή το b προς το c και αφήνουμε το z να κινηθεί κατά μήκος της S_V. Τότε, χρησιμοποιώντας το λήμμα της μονοτονίας έχουμε, καθώς το z κινείται:

1. Από το b στο c η $\|z-b\|$ αυξάνει ενώ η $\|z-c\|$ μειώνεται, $f(b) = (0,1)$ και $f(c) = (1,0)$.

2. Από το c στο $-b$ οι $\|z-b\|, \|z-c\|$ αυξάνονται, $f(c) = (1,0)$ και $f(-b) = (\|2b\|, \|b+c\|)$. $(\|2b\| = 2 \; |\|b-c\| - \|2c\|| \leq \|b+c\| \Rightarrow \|b+c\| \geq 1)$

3. Από το $-b$ στο $-c$ η $\|z-b\|$ μειώνεται ενώ η $\|z-c\|$ αυξάνεται, $f(-b) = (2, \|b+c\|)$ και $f(-c) = (\|b+c\|, 2)$ με $\|b+c\| \geq 1$.

4. Από το $-c$ στο b οι $\|z-b\|, \|z-c\|$ μειώνονται με $f(-c) = (\|b+c\|, 2)$ και $f(b) = (0,1)$.



Συνοψίζοντας, παρατηρούμε για την καμπύλη $f(z) = (x, y), z \in S_V$:

1. $b \to c$: η μεταβλητή x αυξάνεται και η μεταβλητή y μειώνεται. Αρχικό σημείο $(0, 1)$, τέλικό σημείο $(1, 0)$. Βρίσκεται εντός του τετραγώνου 1 $((0, 1), (0, 0), (1, 0), (1, 1))$.

2. $c \to -b$: η μεταβλητή x αυξάνεται και η μεταβλητή y αυξάνεται. Αρχικό σημείο $(1, 0)$, τελικό σημείο $(2, \|b + c\|)$ με $\|b + c\| \geq 1$. Βρίσκεται εντός του ορθογωνίου 2 $((1, 0), (2, 0), (2, \|b + c\|), (1, \|b + c\|))$.

3. $-b \to -c$: η μεταβλητή x μειώνεται και η μεταβλητή y αυξάνεται. Αρχικό σημείο $(2, \|b + c\|)$, τελικό σημείο $(\|b + c\|, 2)$, με $\|b + c\| \geq 1$. Βρίσκεται εντός του ορθογωνίου 3 $((2, \|b+c\|), (\|b+c\|, \|b+c\|), (\|b+c\|, 2), (2, 2))$.

4. $-c \to b$: η μεταβλητή x μειώνεται και η μεταβλητή y μειώνεται. Αρχικό σημείο $(\|b+c\|, 2)$, τελικό σημείο $(0, 1)$. Βρίσκεται εντός του ορθογωνίου 4 $((\|b + c\|, 1), (\|b + c\|, 2), (2, 2), (0, 1))$.

Είναι σαφές από τα προηγούμενα ότι η $f(S_V)$ είναι απλή κλειστή καμπύλη (καμπύλη $Jordan$) του επιπέδου.

Παρατηρούμε ότι είτε $(1, 1) \in f(S_V)$ είτε το $(1, 1)$ ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης. Εάν $(1, 1) \in f(S_V)$, τότε υπάρχει $z \in S_V$ με $\|z - b\| = \|z - c\| = 1$. $(O, a, b, c$ κορυφές παραλληλογράμμου$)$.

Εάν το (1,1) ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης τότε, εφόσον το S_X είναι απλά συνεκτικό σύνολο, η S_V μπορεί να συσταλεί σε σημείο πάνω στην S_X άρα και η καμπύλη $f(S_V)$ μπορεί να συσταλεί σε ένα σημειό. Σε κάποιο στάδιο της συστολής η καμπύλη πρέπει να περάσει από το (1,1). Άρα υπάρχει $z \in S_X$ με $\|z - b\| = \|z - c\| = 1$.

Κεφάλαιο 2

Θεώρημα Petty, απόδειξη T. Kobos

Λήμμα 2.1
Έστω $C \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα κυρτό σώμα και $0 \neq u \in \mathbb{R}^2$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Θεωρούμε την συνάρτηση $f_u(x) : C \longrightarrow [0, +\infty)$ ως εξής:

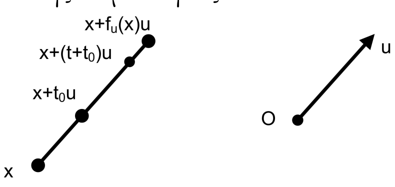
$$f_u(x) = \sup\{t \geq 0 : x + tu \in C\}$$

Τότε η f_u είναι συνεχής.

Απόδειξη
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ με $x_n \to x$. Η $f_u(x)$ είναι φραγμένη εφόσον το C είναι συμπαγές, επομένως αρκεί να ελέγξουμε τις συγκλίνουσες υπακολουθίες της $f_u(x_n)$. Έστω $f_u(x_{k_n})$ με $f_u(x_{k_n}) \to t_0$. Παρατηρούμε ότι $x_{k_n} + f_u(x_{k_n})u \in C$. Εφόσον το C είναι κλειστό και $x_{k_n} + f_u(x_{k_n})u \to x + t_0u$ το $x + t_0u \in C$. Από τον ορισμό της $f_u(x)$ συμπεραίνουμε πως $t_0 \leq f_u(x)$. Θα αποδείξουμε ότι $t_0 = f_u(x)$.

Αν $f_u(x) = 0$ τότε $t_0 = 0$.

Έστω $f_u(x) > 0$. Αν υποθέσουμε ότι $t_0 < f_u(x)$ τότε, σταθεροποιώντας έναν τυχόντα αριθμό t με $t \in (0, f_u(x) - t_0)$, παρατηρούμε ότι $x + (t_0 + t)u \in C$ λόγω της κυρτότητας του C.

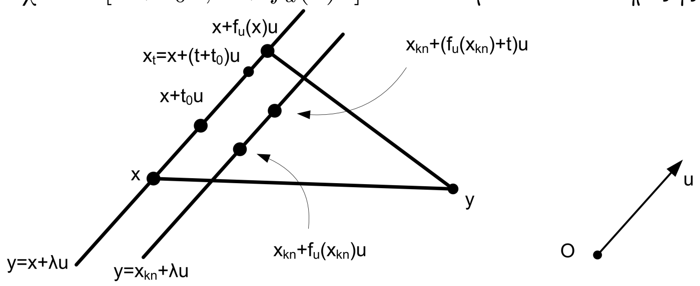


Η ακολουθία $x_{k_n} + (f_u(x_{k_n}) + t)u \notin C$ από τον ορισμό της f_u και το όριό της $x + (t_0 + t)u \in C$. Αναγκαστικά $x + (t_0 + t)u \in \mathrm{B_d}(C)$ με $t \in (0, f_u(x) - t_0)$. και επομένως $[x + t_0u, x + f_u(x)u] \subseteq \mathrm{B_d}(C)$.

Επομένως, αν το σώμα C είναι γνήσια κυρτό καταλήγουμε σε άτοπο (ακόμα και στη γενικότερη περίπτωση που $C \subseteq \mathbb{R}^n$ με $n \geq 2$).

Κατά συνέπεια $f_u(x) = t_0$.

Θα δείξουμε ότι στην περίπτωση του επιπέδου ($n = 2$) δεν απαιτείται η γνήσια κυρτότητα του C.
Εφόσον το $[x + t_0 u, x + f_u(x)u] \subseteq \mathrm{B_d}(C)$ η ευθεία $y = x + \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$ που περιέχει το $[x + t_0 u, x + f_u(x)u]$ είναι υπερεπίπεδο στήριξης του C.



Επιλέγουμε τυχόν σημείο $y \in C$ εκτός της ευθείας $y = x + \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα το τρίγωνο $\Delta = (x, y, x + f_u(x)u)$ με κορυφές τα σημεία $x, y, x + f_u(x)u$ περιέχεται στο C. Έστω $t \in (0, f_u(x) - t_0)$ τότε όπως ήδη παρατηρήσαμε η ακολουθία $x_{k_n} + (f_u(x_{k_n}) + t)\, u \notin C$ $\forall n \geq 1$ και βέβαια συγκλίνει στο εσωτερικό σημείο $x_t = x + (t + t_0)u$ της πλευράς $[x, x + f_u(x)u]$ του Δ. Όμως αν N αρκετά μεγάλος ακέραιος τότε το σημείο $x_{k_N} + f_u(x_{k_N})\, u$ του C είναι πολύ κοντά στο εσωτερικό σημείο $x + t_0 u$ της πλευράς $[x + f_u(x)u]$ του Δ, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι ανήκει στο Δ. Επειδή η ευθεία $y = x_{k_N} + \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι παράλληλη της $y = x + \lambda u$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και το σημείο $x_{k_N} + (f_u(x_{k_N}) + t)\, u$ είναι πολύ κοντά στο x_t έπεται ότι και αυτό θα ανήκει στο Δ και άρα στο C. Έτσι καταλήξαμε σε άτοπο.

Το θεώρημα των Kramer-Nemeth δίνει ικανές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ ώστε κάθε μη εκφυλισμένο simplex να έχει ομοιόθετο το οποίο εγγράφεται στην επιφάνειά του.

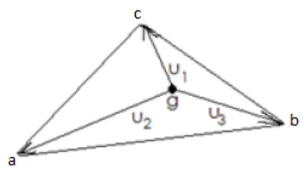
Θεώρημα 2.1 (Kramer-Nemeth)
Έστω $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα λείο και γνήσια κυρτό σώμα και $P_0, P_1, \ldots, P_n$ συσχετισμένα ανεξάρτητα σημεία στον $\mathbb{R}^n$ (κορυφές ενός μη εκφυλισμένου simplex). Τότε υπάρχουν $\lambda > 0$ και $u \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε τα σημεία $u + \lambda P_0, u + \lambda P_1, \ldots, u + \lambda P_n$ να ανήκουν στο σύνορο του C.

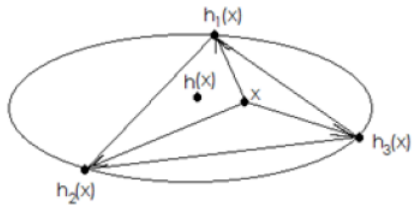
Αξίζει να αναφερθεί ότι η γνήσια κυρτότητα δεν είναι απαραίτητη όπως απεδείχθη από τους Gromov και Makeev. Για τον σκοπό μας θα περιοριστούμε στον $\mathbb{R}^2$. Έστω C ένα λείο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^2$ και a, b, c οι κορυφές ενός τριγώνου. Τότε υπάρχουν $\lambda > 0$ και $u \in \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $u + \lambda a, u + \lambda b, u + \lambda c \in \mathrm{B_d}(C)$. Πιο απλά, το τρίγωνο εγγράφεται στο σύνορο του C.

Απόδειξη
Έστω a, b, c οι κορυφές του τριγώνου και έστω $g = \frac{a+b+c}{3}$ το βαρύκεντρο. Θεωρούμε $u_1 = a - g, u_2 = b - g, u_3 = c - g$ και τις συναρτήσεις ορισμένες στο C $h_i(x) = x + f_{u_i}(x)u_i$, $i = 1, 2, 3$ όπου $f_{u_i}(x) = \max\{t \geq 0 : x + tu_i \in C\}$.

Από το λήμμα 2.1 για κάθε $i = 1, 2, 3$ οι f_{u_i} είναι συνεχείς, επομένως και οι h_i είναι συνεχείς.

Θέτουμε $h : C \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $h(x) = \frac{h_1(x)+h_2(x)+h_3(x)}{3}$. Προφανώς η h είναι συνεχής. Θα δείξουμε ότι $h(C) \subseteq C$.





Έστω $x \in C$ με $h(x) = \frac{h_1(x)+h_2(x)+h_3(x)}{3}$. Το $h(x)$ είναι κυρτός συνδυασμός των $h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ τα οποία ανήκουν στο C. Εφόσον το C είναι κυρτό, έχουμε ότι $h(x) \in C$. Το θεώρημα Brouwer, εξασφαλίζει ένα σταθερό σημείο για την h. Έστω $z \in C : h(z) = z$. Άρα $\frac{h_1(z)+h_2(z)+h_3(z)}{3} = z \Rightarrow$ $z + f_{u_1}(z)u_1 + z + f_{u_2}(z)u_2 + z + f_{u_3}(z)u_3 = 3z \Rightarrow$

$$f_{u_1}(z)u_1 + f_{u_2}(z)u_2 + f_{u_3}(z)u_3 = 0 \tag{1}$$

Όμως $u_1 + u_2 + u_3 = a - g + b - g + c - g = a + b + c - 3g = 0$. Δηλαδή $u_1 = -u_2 - u_3$ με u_2, u_3 γραμμικώς ανεξάρτητα. Από την (1) έχουμε ότι $f_{u_1}(z)u_1 = -f_{u_2}(z)u_2 - f_{u_3}(z)u_3$. Η μοναδικότητα της γραφής μας δίνει $f_{u_1}(z) = f_{u_2}(z) = f_{u_3}(z) = \lambda$.
Αν $\lambda > 0$

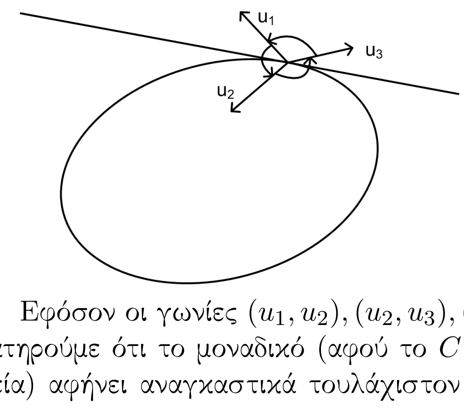
$$z + f_{u_1}(z)u_1 = z + \lambda u_1 = z + \lambda(a - g) = \lambda a + (z - \lambda g) \in \mathrm{B_d}(C)$$

Όμοια

$$\lambda b + (z - \lambda g), \lambda c + (z - \lambda g) \in \mathrm{B_d}(C)$$

Έχουμε δηλαδή ομοιοθεσία με λόγο λ και μεταφορά $z - \lambda g$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda > 0$.

Αν $\lambda = 0$, τότε $f_{u_1}(z) = f_{u_2}(z) = f_{u_3}(z) = 0$ και $z = h_1(z) = h_2(z) = h_3(z)$, άρα το z ανήκει στο σύνορο του C. Έτσι, στις κατευθύνσεις u_1, u_2, u_3 δεν υπάρχει σημείο του C εκτός του z.



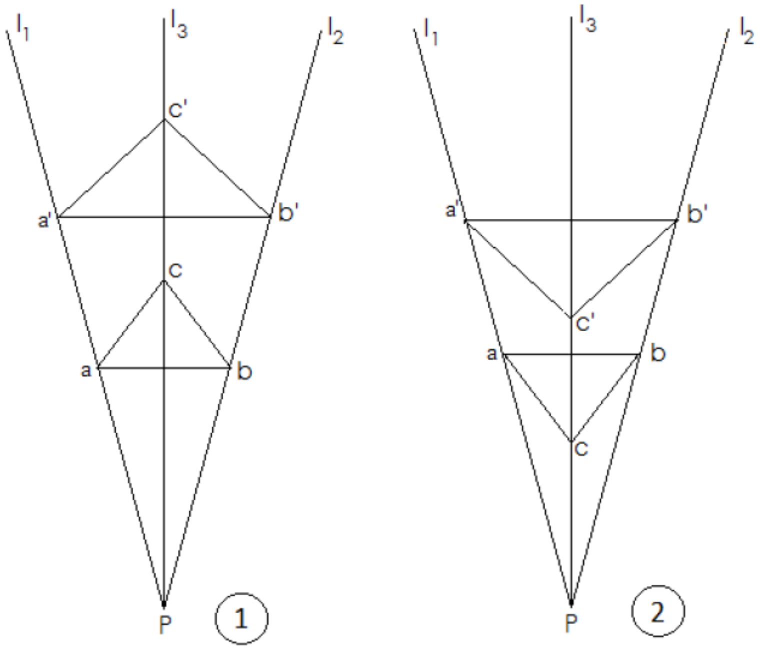
Εφόσον οι γωνίες $(u_1, u_2), (u_2, u_3), (u_3, u_1)$ είναι κυρτές από το σχήμα παρατηρούμε ότι το μοναδικό (αφού το C είναι λείο) υπερεπίπεδο στήριξης (ευθεία) αφήνει αναγκαστικά τουλάχιστον ένα εκ των u_1, u_2, u_3 να δείχνει στο εσωτερικό της σφαίρας. Άρα ένα εκ των $f_{u_i}(z)$ δεν είναι μηδέν και έχουμε άτοπο.

Πρόταση 2.1
Έστω C ένα γνήσια κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^2$ και a, b, c οι κορυφές ενός τριγώνου. Τότε υπάρχει το πολύ ένα ζεύγος $z \in \mathbb{R}^2$ και $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε τα σημεία $z + \lambda a, z + \lambda b, z + \lambda c$ να ανήκουν στο σύνορο του C.

Απόδειξη
Έστω C ένα γνήσια κυρτό σώμα με δύο ομοιόθετα τρίγωνα $A(a, b, c)$ και $A'(a', b', c')$ εγγεγραμμένα στο σύνορό του C. Θα δείξουμε ότι ένα εκ των σημείων a, b, c, a', b', c' βρίσκεται στην κυρτή θήκη των άλλων πέντε. Εάν το κέντρο ομοιοθεσίας είναι στο εσωτερικού του $A(a, b, c)$ (αντίστοιχα $A'(a', b', c')$) το ένα τρίγωνο είναι εντός του άλλου. επομένως το συμπέρασμε ισχύει.

Ας υποθέσουμε ότι το κέντρο ομοιοθεσίας p βρίσκεται εκτός των τριγώνων και έστω l_1, l_2, l_3 οι ημιευθείες που ξεκινούν από το p και περνούν από τα $(a, a'), (b, b'), (c, c')$. Αν δύο εξ αυτών ταυτίζονται, το αποτέλεσμα είναι άμεσο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ότι l_3 ανάμεσα στις l_1, l_2 και c ανάμεσα στο p και στο c'.



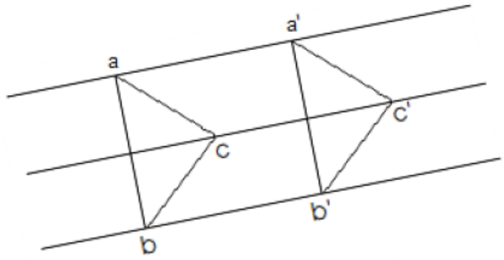
1. Αν c, p εκατέρωθεν την ευθείας $[a, b]$ τότε $c \in \mathrm{conv}(\{a, b, c'\})$. (Σχήμα 1)

2. Αν c, p επί τα αυτά της $[a, b]$ τότε $c' \in \mathrm{conv}(\{a', b', c\})$. (Σχήμα 2)

3. Εάν η ομοιοθεσία είναι μόνο μεταφορά, έχουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

α′) Αν η μεταφορά γίνεται κατά τη διεύθυνση μίας εκ των πλευρών του τριγώνου, αναγκαστικά δύο εκ των τεσσάρων βρίσκονται στην κυρτή θήκη των άλλων δύο.

β′) Διαφορετικά, έστω l_3 ανάμεσα στις l_1, l_2.



Αν c από την πλευρά της $[a, b]$ που βρίσκεται το a' τότε $c \in \operatorname{conv}(\{a, c', b\})$. Αν όχι, τότε $c' \in \operatorname{conv}(\{a', b', c\})$.

Έχουμε επομένως 6 σημεία στο σύνορο του C, ένα εκ των οποίων βρίσκεται στην κυρτή θήκη των άλλων 5. Αναγκαστικά το σύνορο του C θα περιέχει ευθύγραμμα τμήματα, που είναι άτοπο.

Παρατήρηση 2.1
Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες προτάσεις έχουμε ότι αν C είναι ένα λείο και γνήσια κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^2$ και a, b, c ένα τρίγωνο, τότε υπάρχει μοναδική εγγραφή στο σύνορο του C ενός ομοιόθετου με το a, b, c τριγώνου.

Πρόταση 2.2 (T. Kobos)
Θεωρούμε μία νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^2$ και ένα ισόπλευρο τρίγωνο abc ως προς την νόρμα $\|\cdot\|$ Τότε υπάρχει $u \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε

$$\|u - a\| = \|u - b\| = \|u - c\| \leq p = \|a - b\|$$

Ισοδύναμα, κάθε ισόπλευρο τρίγωνο εγγράφεται σε δίσκο με ακτίνα μικρότερη ή ίση από το μήκος της πλευράς του τριγώνου.

Απόδειξη
Υποθέτουμε ότι $p = 1(= \|a - b\| = \|a - c\| = \|b - c\|)$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : S \longrightarrow \mathbb{R}$, όπου $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$, με $f(x) = \max\{t \geq 0 : \|x + t(c - a)\| = 1\}$ και $g(x) = \max\{t \geq 0 : \|x + t(b - a)\| = 1\}$.

Ισχυρισμός
Η f και η g είναι φραγμένες από το 2.

Απόδειξη
Έστω $t > 2$.

$$\|x + tu\| \geq \|tu\| - \|x\| \xRightarrow{\|tu\|=t>2} \|x + tu\| > 2 - 1 = 1$$

Άρα εάν $x \in S$ και $\|x + tu\| \leq 1 \Rightarrow t \leq 2 \Rightarrow f(x) \leq 2$

Από το Λήμμα 2.1 και τον προηγούμενο ισχυρισμό οι f, g είναι συνεχείς και φραγμένες από το 2.

Παρατηρούμε ότι: $f(a-c) = g(a-b) = 2$ Επομένως:

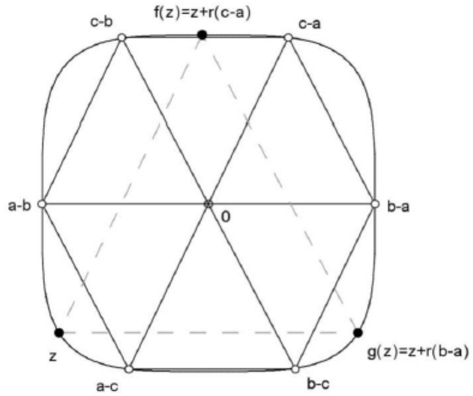
$$f(a-c) - g(a-c) \geq 0$$

$$f(a-b) - g(a-b) \leq 0$$

Το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής εξασφαλίζει ένα z στο κλειστό τόξο ανάμεσα στα $a-c$ και $a-b$ τέτοιο ώστε $f(z) = g(z) = r \geq 0$ δηλαδή $\|z + r(c-a)\| = \|z + r(b-a)\| = 1$.

Εάν το $r > 0$ το τρίγωνο με κορυφές $z, z + r(c-a), z + r(b-a)$ είναι εγγεγραμμένο στην S και ομοιόθετο με το a, b, c. Η απεικόνιση $w \overset{\sigma}{\mapsto} r(w-a)+z$, απεικονίζει το τρίγωνο $\{a, b, c\}$ επί του τριγώνου $\{z, z+r(b-a), z+r(c-a)\}$. Επομένως το $\{a, b, c\}$ εγγράφεται στον κύκλο με κέντρο $w = a - \frac{z}{r}$ $(\sigma(w) = 0)$ και ακτίνα $\frac{1}{r}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $r \geq 1$. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο με κορυφές $0, c-b, a-b, a-c$. Παρατηρούμε ότι τα σημεία z και $z + r(c-a)$ βρίσκονται εκτός του παραλληλογράμμου και το τμήμα που τα ενώνει είναι παράλληλο προς την πλευρά $(0, a-c)$. Το μήκος του είναι $\|z-(z+r(c-a))\| \geq 1 \Rightarrow \|r(c-a)\| \geq 1 \Rightarrow r \geq 1$.



Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα θα δώσουμε μία εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος του Petty.

Θεώρημα 2.2 (Petty)
Σε κάθε χώρο με νόρμα διάστασης μεγαλύτερης ή ίσης του 3 κάθε ισόπλευρο τρίγωνο μπορεί να επεκταθεί σε ισόπλευρο σύνολο 4 σημείων.

Απόδειξη (T. Kobos)
Υποθέτουμε πρώτα ότι η νόρμα είναι λεία και γνήσια κυρτή. Θεωρούμε ότι στον $\mathbb{R}^3$ ένα ισόπλευρο τρίγωνο a, b, c με μήκος πλευρών ίσο με 1. Θεωρούμε το επίπεδο (Π) που ορίζει το τρίγωνο a, b, c και ένα διάνυσμα v κάθετο σε αυτό. Μεταφέροντας το (Π) κατά τη διεύθυνση του v $(\Pi + tv)$ παρατηρούμε ότι οι τομές των μεταφορών με τη μπάλα B (τις συμβολίζουμε με $B_t = B \cap (\Pi + tv)$),

αν δεν είναι κενές ή μονοσύνολα, είναι λεία και γνήσια κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^2$. Έστω t_1, t_2 τέτοια ώστε $t \in (t_1, t_2) \Leftrightarrow |B_t| > 1$. B_{t_1}, B_{t_2} είναι τα εφαπτόμενα επίπεδα της B σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία και εφόσον η νόρμα είναι γνήσια κυρτή θα ισχύει $|B_{t_1}| = |B_{t_2}| = 1$.

Από την Παρατήρηση 2.1 έχουμε ότι για κάθε μία από τις τομές $B_t = B \cap (\Pi + tv)$ υπάρχει μοναδική εγγραφή στο σύνορο της B_t ενός ομοιόθετου με το a, b, c τριγώνου, επομένως για κάθε $t \in (t_1, t_2)$ υπάρχει ένα μοναδικό ζεύγος $z \in \Pi$ και $r > 0$ έτσι ώστε $\|z + ra + tv\| = \|z + rb + tv\| = \|z + rc + tv\| = 1$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$z : (t_1, t_2) \longrightarrow \Pi$$

$$r : (t_1, t_2) \longrightarrow (0, +\infty)$$

οι οποίες για κάθε $t \in (t_1, t_2)$ δίνουν τα μοναδικά $z(t), r(t)$ τέτοια ώστε

$$\|z(t) + r(t)a + tv\| = \|z(t) + r(t)b + tv\| = \|z(t) + t(t)c + tv\| = 1$$

Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $(z, r) : (t_1, t_2) \longrightarrow \Pi \times (0, +\infty)$ είναι συνεχής. Έστω $t_n \to t$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις z, r είναι φραγμένες. Θεωρούμε υπακολουθία t_{k_n} τέτοια ώστε

$$z(t_{k_n}) \to z'$$

$$r(t_{k_n}) \to r'$$

Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$\|z(t_{k_n}) + r(t_{k_n})a + t_{k_n}v\| = \|z(t_{k_n}) + r(t_{k_n})b + t_{k_n}v\| = \|z(t_{k_n}) + r(t_{k_n})c + t_{k_n}v\| = 1$$

Από την συνέχεια της νόρμας έπεται ότι:

$$\|z' + r'a + tv\| = \|z' + r'b + tv\| = \|z' + r'c + tv\| = 1$$

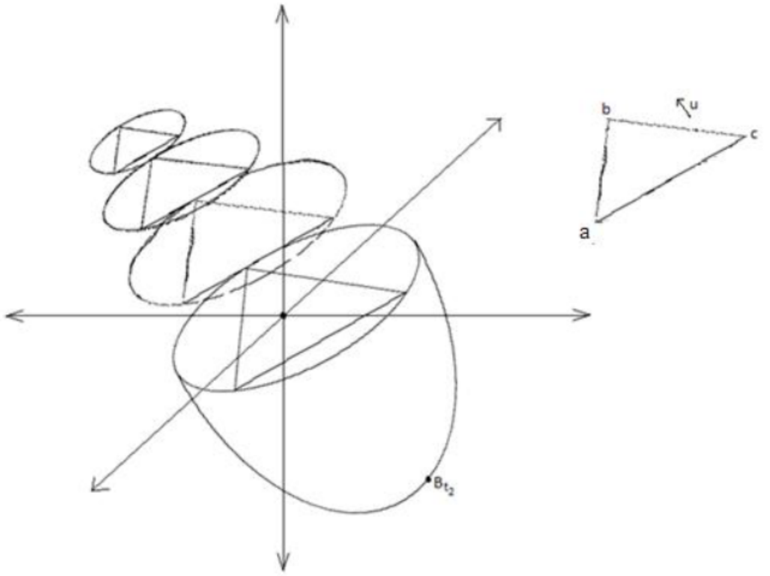
Η μοναδικότητα της εγγραφής του a, b, c (ισοδύναμα η μοναδικότητα για κάθε t των $z(t), r(t)$) μας δίνει ότι $z(t) = z', r(t) = r'$. Άρα (z, r) συνεχής και ιδιαίτερα η r είναι συνεχής.

Θεωρούμε $s \in (t_1, t_2)$ τέτοιο ώστε $0 \in B_S$. Το B_S είναι γνήσια κυρτό, λείο και συμμετρικό σώμα, επομένως ορίζει μία νόρμα (τον περιορισμό της αρχικής νόρμας στον υπόχωρο που είναι παράλληλος με το Π). Από την Πρόταση 2.2 έχουμε $r(s) \geq 1$. Επίσης, παρατηρούμε ότι καθώς το $t \to t_1$ $\mathrm{diam}(B_t) \to 0 \Rightarrow r(t) \to 0$. (Αν όχι, τότε για κάποια ακολουθία $t_n \to t_1$ θα είχαμε $r(t_n) \to r > 0$, δηλαδή 3 σημεία της B πάνω σε ένα υπερεπίπεδο στήριξης. Άτοπο, εφόσον η νόρμα είναι γνήσια κυρτή.)

Από την συνέχεια της r υπάρχει $t \in (t_1, t_2)$ τέτοιο ώστε $r(t) = 1$. Επομένως:

$$\|z(t) + tv + a\| = \|z(t) + tv + b\| = \|z(t) + tv + c\| = 1$$

Το σημείο $d = -(z(t) + tv)$ είναι το ζητούμενο που επεκτείνει το ισόπλευρο σύνολο $\{a, b, c\}$.



Για τη γενίκευση σε τυχούσα νόρμα θα χρειαστούμε τα ακόλουθα αποτελέσματα.

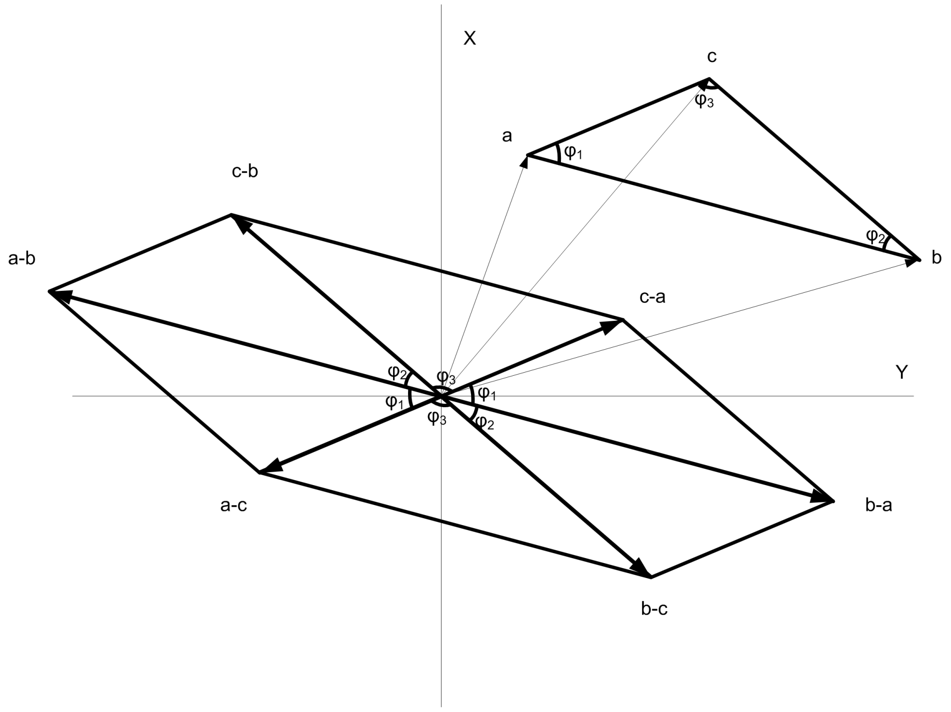
Πρόταση 2.3
Έστω μία νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ και τα μοναδιαία διανύσματα $\pm p_1, \pm p_2, \ldots, \pm p_m$ τα οποία είναι επίσης ακραία σημεία ενός κυρτού πολυέδρου. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μία λεία και γνήσια κυρτή νόρμα $\|\cdot\|_0$ στον $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $(1-\varepsilon)\|x\|_0 \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)\|x\|_0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $\|p_i\|_0 = 1$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$.

Απόδειξη
Για την απόδειξη αυτής της πρότασης παραπέμπουμε στο [2] όπου αποδεικνύεται ένα πολύ γενικότερο αποτέλεσμα.

Λήμμα 2.2
Έστω ένα τρίγωνο a, b, c του επιπέδου $\mathbb{R}^2$. Τότε τα σημεία $a-b, a-c, b-a, b-c, c-a, c-b$ είναι ακραία σημεία (κορυφές) του κυρτού εξαγώνου:

$$K = \mathrm{conv}(\{a-b, a-c, b-a, b-c, c-a, c-b\})$$

Απόδειξη
Το K αποτελείται από έξι αντίγραφα του αρχικού τριγώνου. Παρατηρούμε ότι οι γωνίες στα σημεία $a-b, a-c, b-a, b-c, c-a, c-b$ είναι σε κάθε περίπτωση το άθροισμα δύο γωνιών του αρχικού τριγώνου. Επομένως είναι μικρότερες των $180°$ και τα σημεία είναι ακραία.



Είμαστε τώρα έτοιμοι για την απόδειξη της γενικής περίπτωσης.

Έστω $\|\cdot\|$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^3$ (όχι απαραίτητα κυρτή και λεία) και έστω a, b, c ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές μήκους 1. Εφόσον από το λήμμα 2.2 τα μοναδιαία $a-b, a-c, b-a, b-c, c-a, c-b$ είναι ακραία σημεία ενός κυρτού εξαγώνου, από την πρόταση 2.3, μπορούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να βρούμε μία λεία και γνήσια κυρτή νόρμα $\|\cdot\|_n$ στον $\mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε:

$$(1-\frac{1}{n})\|x\|_n \leq \|x\| \leq (1+\frac{1}{n})\|x\|_n, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^3$$

και:

$$\|a-b\|_n = \|b-c\|_n = \|c-a\|_n = 1$$

Για κάθε μία από αυτές τις νόρμες από το θεώρημα 2.2 υπάρχει $d_n \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε

$$\|d_n - b\|_n = \|d_n - c\|_n = \|d_n - a\|_n = 1$$

Η ακολουθία d_n είναι φραγμένη, επομένως υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $d_{k_n} \to d$. Από τις ανισότητες

$$(1-\frac{1}{k_n})\|d_{k_n}-a\|_{k_n} \leq \|d_{k_n}-a\| \leq (1+\frac{1}{k_n})\|d_{k_n}-a\|_{k_n} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{k_n} \leq \|d_{k_n}-a\| \leq 1+\frac{1}{k_n}$$

Παίρνοντας όρια βλέπουμε ότι $\|d-a\| = 1$. Εντελώς ανάλογα $\|d-b\| = \|d-c\| = 1$.

Παρατηρήσεις

1. Είναι εύλογη ερώτηση αν η διαδικασία που ακολουθήθηκε μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περισσότερες διαστάσεις. Χρησιμοποιώντας παρόμοια προσέγγιση ο Makeev απέδειξε την περίπτωση $n = 4$. Η απόδειξη του Kobos (ακολουθώντας την προγενέστερη απόδειξη του Makeev) βασίστηκε στην ύπαρξη και μοναδικότητα των εγγραφών των τριγώνων σε λεία και γνήσια κυρτά σώματα (στις τομές της S_X). Σε περισσότερες διαστάσεις η ύπαρξη εγγεγραμμένων ομοιόθετων simplices εξασφαλίζεται από των θεώρημα των Kramer-Nemeth. Είναι όμως δύσκολη η μοναδικότητα (και άρα η συνέχεια των τομών). Δυσκολίες παρουσιάζονται και στην γενίκευση της πρότασης 2.2.

2. Περαιτέρω σημειώνουμε ότι είναι *ανοικτό* πρόβλημα (μάλιστα αποτελεί εικασία) ότι:

   Αν X ένας χώρος με νόρμα με $\dim X = n \geq 2$ τότε $e(X) \geq n + 1$.

   Έχουμε ήδη εύκολα εξακριβώσει (Πρόταση 1.1) ότι η απάντηση είναι θετική για $n = 2$. Το θεώρημα του Petty λέει ότι η απάντηση είναι θετική και για $n = 3$. Ο Makeev έχει σχετικά πρόσφατα (με μη τετριμμένες τοπολογικές μεθόδους) αποδείξει ότι η απάντηση είναι επίσης θετική για $n = 4$.

   Αξίζει εδώ να παρατηρήσουμε ότι δεν είναι σωστό ότι αν $\dim X = n \geq 4$ κάθε ισόπλευρο σύνολο με 4 σημεία μπορεί να επεκταθεί σε ισόπλευρο σύνολο με 5 σημεία. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο παράδειγμα του Petty [9]: Έστω $X = (l_2^{n-1} \oplus \mathbb{R})_1$, με $n \geq 3$. Δηλαδή πρόκειται για τον $\mathbb{R}^n$ με νόρμα

   $$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} + |x_n|,\ n \geq 3$$

   Η μοναδιαία σφαίρα του X είναι ένας διπλός κώνος με βάση την ευκλείδεια μπάλλα του $\mathbb{R}^{n-1}$

   $$B_{\|\cdot\|} = \mathrm{conv}(B_2^{n-1} \cup \{\pm e_n\})$$

   , όπου $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

   Για κάθε $n \geq 3$ ο X περιέχει ένα maximal (μεγιστικό) ως προς την σχέση του περιέχεσθαι ισόπλευρο σύνολο με 4 σημεία. Πράγματι, η μέγιστη πληθικότητα ενός ισοπλεύρου συνόλου που περιέχει τα σημεία $\pm e_n$ είναι 4. Για να το αποδείξουμε παρατηρούμε ότι αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε:

   $$\|x - e_n\| = \|x + e_n\| \Leftrightarrow x_n = 0$$

   Επειδή $\|e_n - (-e_n)\| = 2$, θα πρέπει $\|x \pm e_n\| = 2$. Επειδή $x_n = 0$ έπεται ότι $1 + \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2} = 2$, άρα $x \in S^{n-2} = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n : x_1^1 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1\}$.

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Cayley-Menger. Θεώρημα Brass & Dekster

Στην παράγραφο αυτή θα συζητήσουμε στοιχεία της θεωρίας Cayley-Menger, ένα ενδιαφέρον θέμα της γραμμικής άλγεβρας, με σκοπό να περιγράψουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος με $n+1$ σημεία να εμφυτεύεται ισομετρικά στον ευκλείδειο χώρο l_2^n. Τα αποτελέσματα αυτά θα χρησιμοποιηθούν στην επόμενη παράγραφο του παρόντος κεφαλαίου για την απόδειξη του θεωρήματος Brass και Dekster.

Θεωρούμε $n+1$ σημεία $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_n\}$ συσχετισμένα ανεξάρτητα στον l_2^n και έστω $\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_2 = \rho_{ij}$ και $\mathbf{p}_i = (p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, \dots, p_i^{(n)})$. Συμβολίζουμε με $\Delta = \mathrm{conv}\{\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n\}$ το πολύεδρο (simplex) με κορυφές $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$. Τότε για τον όγκο του Δ είναι γνωστό ότι ισχύει:

$$\pm\,\mathrm{Vol}(\Delta) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} p_0^{(1)} & p_1^{(1)} & \dots & p_n^{(1)} \\ p_0^{(2)} & p_1^{(2)} & \dots & p_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_0^{(n)} & p_1^{(n)} & \dots & p_n^{(n)} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Έπεται ότι:

$$(\mathrm{Vol}(\Delta))^2 = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{\det A = \det A^t}$$

$$= \frac{1}{(n!)^2}\begin{vmatrix} \mathbf{p}_0^{tr} & 1 \\ \mathbf{p}_1^{tr} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{p}_n^{tr} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{και την στήλη } (0,0,\dots,0,1)^t]{\text{προσθέτουμε τη γραμμή } (0,0,\dots,0,1)}$$

$$= \frac{1}{(n!)^2} \begin{vmatrix} \mathbf{p}_0^{tr} & 1 & 0 \\ \mathbf{p}_1^{tr} & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{p}_n^{tr} & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^{tr} & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{εναλλάσσουμε τις δύο τελευταίες}}{\underset{\text{στήλες του πρώτου}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$= -\frac{1}{(n!)^2} \det \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0^{tr} & 0 & 1 \\ \mathbf{p}_1^{tr} & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{p}_n^{tr} & 0 & 1 \\ \mathbf{0}^{tr} & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 & \dots & \mathbf{p}_n & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{(n!)^2} \begin{vmatrix} \langle p_0, p_0 \rangle & \langle p_0, p_1 \rangle & \dots & \langle p_0, p_n \rangle & 1 \\ \langle p_1, p_0 \rangle & \langle p_1, p_1 \rangle & \dots & \langle p_1, p_n \rangle & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle p_n, p_0 \rangle & \langle p_n, p_1 \rangle & \dots & \langle p_n, p_n \rangle & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{1}{(n!)^2 \cdot 2^{n+1}} \begin{vmatrix} 2\langle p_0, p_0 \rangle & 2\langle p_0, p_1 \rangle & \dots & 2\langle p_0, p_n \rangle & 1 \\ 2\langle p_1, p_0 \rangle & 2\langle p_1, p_1 \rangle & \dots & 2\langle p_1, p_n \rangle & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2\langle p_n, p_0 \rangle & 2\langle p_n, p_1 \rangle & \dots & 2\langle p_n, p_n \rangle & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα}}{\underset{2\langle p_i,p_j\rangle = \langle p_i,p_i\rangle + \langle p_j,p_j\rangle - \|p_i - p_j\|_2^2,\ \text{οπότε έχουμε:}}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=}}$$

$$-\frac{1}{2^{n+1}(n!)^2} \begin{vmatrix} 2\langle p_0, p_0 \rangle & \dots & \langle p_0, p_0 \rangle + \langle p_n, p_n \rangle - \rho_{0n}^2 & 1 \\ \langle p_0, p_0 \rangle + \langle p_1, p_1 \rangle - \rho_{1n}^2 & \dots & \langle p_1, p_1 \rangle + \langle p_n, p_n \rangle - \rho_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle p_0, p_0 \rangle + \langle p_n, p_n \rangle - \rho_{n0}^2 & \dots & 2\langle p_n, p_n \rangle & 1 \\ 2 & \dots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας κατάλληλα την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη και αφαιρώντας από τις άλλες έχουμε ότι:

$$(\mathrm{Vol}(\Delta))^2 = -\frac{1}{2^{n+1}(n!)^2} \begin{vmatrix} 0 & -\rho_{01}^2 & \dots & -\rho_{0n}^2 & 1 \\ -\rho_{10}^2 & 0 & \dots & -\rho_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\rho_{n0}^2 & -\rho_{n1}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}(n!)^2} \begin{vmatrix} 0 & \rho_{01}^2 & \dots & \rho_{0n}^2 & 1 \\ \rho_{10}^2 & 0 & \dots & \rho_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ \rho_{n0}^2 & \rho_{n1}^2 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n(n!)^2} \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & P & & \vdots \\ & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

όπου $P = [\rho_{ij}^2]$, $0 \leq i,j \leq n$

Έστω (X,d) μετρικός χώρος με $n+1$ σημεία, έστω $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$. Θέτουμε $\rho_{ij} = d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$, $0 \leq i,j \leq n$. Η ορίζουσα

$$\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n) \overset{\text{ορς}}{=\!=} \begin{vmatrix} & & & 1 \\ & P & & \vdots \\ & & & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

όπου $P = [\rho_{ij}^2]$, $0 \leq i,j \leq n$, ονομάζεται η ορίζουσα Cayley-Menger των $n+1$ σημείων του X.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι έχουμε αποδείξει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.1

Αν ένας μετρικός χώρος X με $n+1$ σημεία, $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$, μπορεί να εμφυτευθεί ισομετρικά στον l_2^n ως ένα συσχετισμένα ανεξάρτητο σύνολο, τότε η ορίζουσα Cayley-Menger των σημείων του X έχει πρόσημο $(-1)^{n+1}$

Παρατήρηση 3.1

Εάν τα σημεία $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ είναι συσχετισμένα εξαρτημένα στον l_2^n τότε

$$\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = 0$$

Θεώρημα 3.1 (Menger)

Ένας μετρικός χώρος με $n+1$ σημεία, $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$, μπορεί να εμφυτευθεί στον l_2^n ως ένα συσχετισμένα ανεξάρτητο σύνολο, αν για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$ η Cayley-Menger ορίζουσα $\mathrm{CMdet}(p_0, \dots, p_k)$ των $p_0, p_1, \dots, p_k$ έχει πρόσημο $(-1)^{k+1}$.

Απόδειξη

Για $n = 1$:

$$\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) = \begin{vmatrix} 0 & \rho_{01}^2 & 1 \\ \rho_1^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \rho_{01}^2 + \rho_{02}^2 > 0$$

Προφανώς τα $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ μπορούν να εμφυτευθούν στον $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε επαγωγικά ότι η υπόθεση ισχύει για $n-1$ $(n \geq 2)$. Τότε τα $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{n-1}$ εφυτεύονται στον l_2^{n-1} ως συσχετισμένα ανεξάρτητα. Ως ακολούθως: $\mathbf{p}_0 \mapsto 0, \mathbf{p}_1 \mapsto x_1 \dots, \mathbf{p}_{n-1} \mapsto x_{n-1}$. Τότε $\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle = \mathbb{R}^{n-1}$ και $x_1, \dots, x_{n-1}$ γραμμικά ανεξάρτητα.

Έχουμε ότι $\|x_i\|_2 = \rho_{i0}$ και $\|x_i - x_j\|_2 = \rho_{ij}$ για $1 \leq i, j \leq n-1$. Αναζητούμε $x \notin \mathbb{R}^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$\|x\|_2 = \rho_{0n} \tag{1}$$

$$\|x - x_i\|_2 = \rho_{in} \tag{2}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$.

Γράφουμε το $x = u + \lambda e_n$ με μοναδικό τρόπο, με $u \in \mathbb{R}^{n-1}, \lambda \neq 0$

$$\|x-x_i\|_2 = \rho_{in} \Rightarrow \|u+\lambda e_n - x_i\|_2^2 = \rho_{in}^2 \Rightarrow \langle u+\lambda e_n - x_i, u+\lambda e_n - x_i\rangle = \rho_{in}^2 \Rightarrow$$

$$\langle u+\lambda e_n, u+\lambda e_n\rangle - \langle u+\lambda e_n, x_i\rangle - \langle u+\lambda e_n, x_i\rangle + \langle x_i, x_i\rangle = \rho_{in}^2 \xRightarrow{\langle e_n, x_i\rangle = 0}$$

$$\|x\|_2^2 - 2\langle u, x_i\rangle + \|x_i\|_2^2 = \rho_{in}^2 \Rightarrow$$

$$2\langle u, x_i\rangle = \rho_{0n}^2 + \rho_{0i}^2 - \rho_{in}^2, \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, n-1 \tag{Σ}$$

Οι συντεταγμένες του u είναι οι λύσεις ενός γραμμικού συστήματος $n-1$ εξισώσεων Σ με $n-1$ αγνώστους. Η ορίζουσα του Σ, $D = \begin{vmatrix} x_1^{tr} \\ \vdots \\ x_{n-1}^{tr} \end{vmatrix} \neq 0$ εφόσον $x_1, \ldots, x_{n-1}$ γραμμικά ανεξάρτητα. Υπάρχει επομένως μοναδικό $u \in \mathbb{R}^{n-1}$ που να ικανοποιεί το Σ. Μένει να βρούμε $\lambda \neq 0$ τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η 1.

$$\|u+\lambda e_n\|_2 = \rho_{0n} \Rightarrow \langle u+\lambda e_n, u+\lambda e_n\rangle = \rho_{0n}^2 \Rightarrow \|u\|_2^2 + 2\lambda\langle u, e_n\rangle + \lambda^2 = \rho_{0n}^2 \xRightarrow{\langle u, e_n\rangle = 0}$$

$$\lambda^2 = \rho_{0n}^2 - \|u\|_2^2$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\rho_{0n}^2 - \|u\|_2^2 > 0$ και θα έχουμε δύο δυνατότητες για την επιλογή του λ (ισοδύναμα, μοναδική επιλογή του $x = u + \lambda e_n$ αν σταθεροποιήσουμε τον ημίχωρο $\mathbb{R}^{n-1} + \lambda e_n$, $\lambda > 0$).

Για να αποδείξουμε ότι $\rho_{0n}^2 - \|u\|_2^2 > 0$ θεωρούμε την $\mathrm{CMdet}(0, x_1, \ldots, x_{n-1}, u)$ η οποία από την Παρατήρηση 3.1 είναι 0.

$$\begin{vmatrix} 0 & \rho_{01}^2 & \cdots & \rho_{0,n-1}^2 & \|u\|_2^2 & 1 \\ \rho_{10}^2 & 0 & \cdots & \rho_{1,n-1}^2 & \|u-x_1\|_2^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n-1,0}^2 & 0 & \cdots & \rho_{n-1,n-1}^2 & \|u-x_{n-1}\|_2^2 & 1 \\ \|u\|_2^2 & \|u-x_1\|_2^2 & \cdots & \|u-x_{n-1}\|_2^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Επίσης,

$$\|u-x_i\|_2^2 = \|u\|_2^2 - 2\langle x_i, u\rangle + \|x_i\|_2^2 \xRightarrow[\|x_i\|_2^2 = \rho_{0i}^2]{2\langle x_i, u\rangle = \rho_{0n}^2 + \rho_{0i}^2 - \rho_{in}^2}$$

$$\|u-x_i\|_2^2 = \|u\|_2^2 - \rho_{0n}^2 - \rho_{0i}^2 + \rho_{in}^2 + \rho_{0i}^2 = \|u\|_2^2 - \rho_{0n}^2 + \rho_{in}^2$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία γραμμή και την τελευταία στήλη με $\rho_{0n}^2 - \|u\|_2^2$ και προσθέτοντας στις προτελευταίες:

$$\begin{vmatrix} 0 & \rho_{01}^2 & \cdots & \rho_{0,n-1}^2 & \|u\|_2^2 & 1 \\ \rho_{10}^2 & 0 & \cdots & \rho_{1,n-1}^2 & \|u\|_2^2 - \rho_{0n}^2 + \rho_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n-1,0}^2 & 0 & \cdots & \rho_{n-1,n-1}^2 & \|u\|_2^2 - \rho_{0n}^2 + \rho_{n-1,n}^2 & 1 \\ \|u\|_2^2 & \|u\|_2^2 - \rho_{0n}^2 + \rho_{n1}^2 & \cdots & \|u\|_2^2 - \rho_{0n}^2 + \rho_{n,n-1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \rho_{01}^2 & \cdots & \rho_{0,n-1}^2 & \rho_{0n}^2 & 1 \\ \rho_{10}^2 & 0 & \cdots & \rho_{1,n-1}^2 & \rho_{1n}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n-1,0}^2 & 0 & \cdots & \rho_{n-1,n-1}^2 & \rho_{n-1,n}^2 & 1 \\ \rho_{n0}^2 & \rho_{n1}^2 & \cdots & \rho_{n,n-1}^2 & -2(\|u\|_2^2 - \rho_{0n}) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Η προηγούμενη ορίζουσα διαφέρει από την $\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n)$ μόνο στην πρότελευταία στήλη (στη θέση του $-2(\|u\|_2^2 - \rho_{0n})$ έχει μηδέν). Αφαιρούμε την ορίζουσα αυτή από την $\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n)$ και αναπτύσσουμε την ορίζουσα που προκύπτει ως προς την προτελευταία στήλη:

$$\begin{vmatrix} 0 & \rho_{01}^2 & \cdots & \rho_{0,n-1}^2 & 0 & 1 \\ \rho_{10}^2 & 0 & \cdots & \rho_{1,n-1}^2 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{n-1,0}^2 & 0 & \cdots & \rho_{n-1,n-1}^2 & 0 & 1 \\ \rho_{n0}^2 & \rho_{n1}^2 & \cdots & \rho_{n,n-1}^2 & 2(\|u\|_2^2 - \rho_{0n}) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Διαγράφοντας τη στήλη και τη γραμμή που βρίσκεται το $2(\|u\|_2^2 - \rho_{0n})$ η ελάσσονα ορίζουσα που απομένει είναι η $\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1})$. Τελικά έχουμε:

$$\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n) - 2(\|u\|_2^2 - \rho_{0n}^2)\,\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1}) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n) = 2(\|u\|_2^2 - \rho_{0n}^2)\,\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{n-1})$$

Από υπόθεση η $\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n)$ έχει πρόσημο $(-1)^{n+1}$, ενώ η $\mathrm{CMdet}(\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_{n-1})$ έχει πρόσημο $(-1)^n$. Άρα $\|u\|_2^2 - \rho_{0n}^2 < 0$ και η $\lambda^2 = \rho_{0n}^2 - \|u\|_2^2$ έχει λύση.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια, με χρήση του θεωρήματος Menger ότι ένα n-simplex με όλες τις πλευρές του να έχουν μήκος πλησίον του 1 μπορεί να εμφυτευθεί ισομετρικά στον l_2^n. Έτσι καταλήγουμε στο να βρούμε το πρόσημο της ορίζουσας ενός πίνακα με 0 στην κύρια διαγώνιο και όλα τα άλλα στοιχεία του πλησίον του 1.

Πρόταση 3.2
Έστω $A = [\alpha_{ij}]$ ένας $(n+2) \times (n+2)$ πίνακας με $\alpha_{ii} = 0$, $|1 - \alpha_{ij}| \leq \frac{1}{n+\frac{3}{2}}$ για κάθε i, j με $1 \leq i \neq j \leq n+1$ και $\alpha_{i,n+2} = \alpha_{n+2,i} = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n+1$. Τότε η $\det(A)$ έχει πρόσημο $(-1)^{n+1}$.

Θα χρειαστούμε τα εξής λήμματα:

Λήμμα 3.1
Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Αν A συμμετρικός τότε

$$\|A\|_2 = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ ιδιοτιμή του } A\}$$

(όπου $\|A\|_2 = \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ και $A : l_2^n \longrightarrow l_2^n$, $x \mapsto Ax$) (Δηλαδή βλέπουμε τον A σαν ένα γραμμικό τελεστή από τον l_2^n στον l_2^n και $\|A\|_2$ είναι η νόρμα του τελεστή)

Απόδειξη
Εφόσον A συμμετρικός, γνωρίζουμε από το φασματικό θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας ότι υπάρχει βάση του $\mathbb{R}^n$ από ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του A, έστω $\{u_1, \ldots, u_n\}$ και $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές (όχι απαραίτητα διαφορετικές). Τότε $\|Au_i\|_2 = |\lambda_i|\|u_i\|_2 = |\lambda_i|$. Άρα $\|A\|_2 \geq \max\{|\lambda_i| : i = 1, \ldots, n\}$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1$. Αν $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$ τότε $\|x\|_2^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1$.

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle =$$

$$\langle \alpha_1\lambda_1 u_1 + \alpha_2\lambda_2 u_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n u_n, \alpha_1\lambda_1 u_1 + \alpha_2\lambda_2 u_2 + \cdots + \alpha_n\lambda_n u_n \rangle =$$

$$\alpha_1^2\lambda_1^2 + \alpha_2^2\lambda_2^2 + \cdots + \alpha_n^2\lambda_n^2 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2)\max\{|\lambda_i|^2 :\ \lambda_i \text{ ιδιοτιμή του } A\}$$

$$\leq \max\{|\lambda_i|^2 :\ \lambda_i \text{ ιδιοτιμή του } A\}$$

Άρα $\|A\|_2 = \max\{|\lambda_i|, \lambda_i \text{ ιδιοτιμή του } A\}$.

Λήμμα 3.2
Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Αν $A = [\alpha_{ij}]$, $1 \leq i, j \leq n$ τότε

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}^2}$$

Απόδειξη
Έστω x με $\|x\|_2 = 1$.

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right)^2} \overset{C.S.}{\leq} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)} \xlongequal{\sum_{j=1}^{n}x_j^2=1} \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}^2}$$

Λήμμα 3.3
Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Αν $\|A\|_2 < 1$ τότε ο $I - A$ αντιστρέφεται.

Απόδειξη
Υποθέτουμε ότι ο τελεστής $I-A$ δεν είναι $1-1$, τότε ο $Y = \ker(I-A) \neq \{0\}$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in Y$ με $x \neq 0$ τότε $I(x)-A(x) = 0 \Rightarrow x = I(x) = A(x)$. Άρα $\|A\|_2 \geq 1$.

Παρατήρηση 3.2
Έστω J ένας $n \times n$ πίνακας με 1 σε κάθε θέση, δηλαδή $\alpha_{ij} = 1 \ \forall i,j$ με $1 \leq i,j \leq n$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του J δίνεται από τον τύπο

$$\phi(x) = (-1)^n (x-n) x^{n-1}$$

Πράγματι,

$$\phi(x) = \det(J - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{τις στήλες στην 1η}]{\text{προσθέτουμε όλες}}$$

$$\begin{vmatrix} n-x & 1 & \dots & 1 \\ n-x & 1-x & \dots & 1 \\ n-x & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-x & 1 & \dots & 1-x \end{vmatrix} = (n-x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1-x \end{vmatrix} \xlongequal[\text{γραμμή από όλες τις άλλες}]{\text{αφαιρούμε την πρώτη}}$$

$$= (n-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & -x & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -x \end{vmatrix} = (-x)^{n-1} \cdot (n-x) = (-1)^n (x-n) x^{n-1}$$

2. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $J - I$ είναι το $\sigma(x) = \phi(x+1)$. Πράγματι, $\sigma(x) = \det(J - I - xI) = \det(J - (x+1)I) \xlongequal{\text{από 1}} \phi(x+1) = (-1)^n (x+1-n)(x+1)^{n-1}$. Επίσης ισχύει ότι, $\det(J - I) = \sigma(0) = (-1)^n (1-n) \neq 0$, για $n \geq 2$.

3. Επομένως, αν $n \geq 2$ ο $J - I$ είναι αντιστρέψιμος και έχει ιδιοτιμές (-1) με πολλαπλότητα $n-1$ και $n-1$ με πολλαπλότητα 1.

Παρατήρηση 3.3
Αν ένας μετρικός χώρος (M, d) εμφυτεύεται ισομετρικά σε έναν χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, τότε είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι για κάθε $\alpha > 0$, ο M με την μετρική $\sigma = \alpha d$, εμφυτεύεται ισομετρικά στον $(X, \|\cdot\|)$. (Αν $\phi : (M, d) \longrightarrow (X, \|\cdot\|)$ είναι ισομετρία τότε η $\Phi : x \in M \mapsto \alpha\phi(x)$ είναι ισομετρική εμφύτευση του (M, σ) στον $(X, \|\cdot\|)$.)

Απόδειξη (της πρότασης 3.2)
Θα δείξουμε πρώτα ότι ο A αντιστρέφεται. Θέτουμε $E = [\varepsilon_{ij}] \overset{\text{ορς}}{=\!=} J - I - A$ και από την υπόθεση έχουμε ότι:

$$\varepsilon_{i,n+2} = \varepsilon_{n+2,i} = \varepsilon_{ii} = 0, \text{ για κάθε } i \text{ και } |\varepsilon_{ij}| \leq \frac{1}{n + \frac{3}{2}}, \text{ για κάθε } i, j \text{ με } 1 \leq i \neq j \leq n+1.$$

Εφόσον $A = J - I - E = (J - I)(I - (J - I)^{-1}E)$, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα λήμματα παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι $\|(J-I)^{-1}E\|_2 < 1$. Ο $J - I$ είναι συμμετρικός αντιστρέψιμος πίνακας, άρα και ο $(J - I)^{-1}$ είναι συμμετρικός πίνακας και από το λήμμα 3.1 έχουμε:

$$\|(J - I)^{-1}\|_2 = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ιδιοτιμή του } (J - I)^{-1}\} = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{c} ((J - I)^{-1})^t = ((J - I)^t)^{-1} = (J - I)^{-1} \\ \text{οι ιδιοτιμές του } J - I \text{ είναι } \{-1, n - 1\} \\ \text{οι ιδιοτιμές του } (J - I)^{-1} \text{ είναι } \{-1, \frac{1}{n-1}\} \end{array} \right.$$

Επίσης, από το λήμμα 3.2 έχουμε:

$$\|E\|_2 \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n+2} \varepsilon_{ij}^2} \leq \sqrt{n(n+1) \cdot \frac{1}{\left(n + \frac{3}{2}\right)^2}} = \sqrt{\frac{n^2 + n}{n^2 + 3n + \frac{9}{4}}} < 1$$

Άρα $\|(J - I)^{-1}E\|_2 \leq \|(J - I)^{-1}\|_2 \|E\|_2 < 1$

Ενώνουμε τους πίνακες $J-I$ και A με μία συνεχή καμπύλη με τον ακόλουθο τρόπο:

Θεωρούμε για κάθε t με $0 \leq t \leq 1$ τους πίνακες $A_t = J-I-tE$ και ορίζουμε $\phi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ώστε $\phi(t) = \det(A_t)$. Οι πίνακες A_t είναι αντιστρέψιμοι για κάθε t με $0 \leq t \leq 1$ (όπως προηγουμένως $\|tE\|_2 \leq \|E\|_2 < 1$) και άρα η ϕ είναι καλά ορισμένη και προφανώς συνεχής. Η τιμή $\phi(0) = \det(J - I)$ έχει πρόσημο $(-1)^{n+1}$ και $\phi(t) \neq 0$ για κάθε t με $0 \leq t \leq 1$. Λόγω της συνέχειας η ϕ διατηρεί πρόσημο. Τελικά η τιμή $\phi(1) = \det(A)$ έχει πρόσημο $(-1)^{n+1}$.

Θεώρημα 3.2 (Dekster-Wilker)
Έστω $p_0, \ldots, p_n$ τα σημεία ενός μετρικού χώρου (M, d) των οποίων οι αποστάσεις $d(p_i, p_j)$ ικανοποιούν τη σχέση:

$$1 \leq d(p_i, p_j) \leq 1 + \frac{1}{n+1}, 0 \leq i \neq j \leq n$$

Τότε ο μετρικός χώρος (M, d) εμφυτεύεται ισομετρικά στον l_2^n και κάθε τέτοια εμφύτευση θα είναι συσχετισμένα ανεξάρτητο σύνολο.

Απόδειξη
Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Menger. Επειδή η Cayley-Menger ορίζουσα των $p_0, \ldots, p_k$ για $k \leq n$ είναι ένας $(k+2) \times (k+2)$ πίνακας για να δείξουμε ότι αυτή η ορίζουσα έχει πρόσημο $(-1)^{n+1}$ θα εφαρμόσουμε την πρόταση 3.2. Από την παρατήρηση 3.3 αρκεί να δείξουμε ότι για κάποια $\alpha > 0$ οι αποστάσεις $\alpha \cdot d(p_i, p_j)$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της πρότασης 3.2, δηλαδή $\left|1 - (\alpha \cdot d(p_i, p_j)))^2\right| \leq \frac{1}{n+\frac{3}{2}}$, $0 \leq i \neq j \leq n$. Πράγματι,

$$1 \leq d(p_i, p_j) \leq 1 + \frac{1}{n+1} \Rightarrow \alpha \leq \alpha \cdot d(p_i, p_j) \leq \alpha \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \Rightarrow$$

$$\alpha^2 \leq (\alpha d(p_i, p_j))^2 \leq \left(\alpha \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right)^2$$

Αναζητούμε $\varepsilon > 0$:

$$\left.\begin{array}{r} 1-\varepsilon = \alpha^2 \\ 1+\varepsilon = \alpha^2 \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 \end{array}\right\} \stackrel{\div}{\Rightarrow} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(n+2)^2 - \varepsilon(n+2)^2 = (n+1)^2 + \varepsilon(n+1)^2 \Rightarrow \varepsilon = \frac{(n+2)^2 - (n+1)^2}{(n+2)^2 + (n+1)^2}$$

Επομένως $1 - \varepsilon \leq (\alpha d(p_i, p_j))^2 \leq 1 + \varepsilon \Leftrightarrow$

$\left|1 - (\alpha d(p_i, p_j))^2\right| \leq \varepsilon$, για $\varepsilon = \frac{(n+2)^2-(n+1)^2}{(n+2)^2+(n+1)^2}$ και $\alpha = \sqrt{1-\varepsilon}$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\varepsilon \leq \frac{1}{n+\frac{3}{2}}$. Παρατηρούμε ότι:

$$\varepsilon = \frac{(n+2)^2 - (n+1)^2}{(n+2)^2 + (n+1)^2} = \frac{2n+3}{2n^2+6n+5} < \frac{2n+3}{2n^2+6n+\frac{9}{2}} = \frac{2n+3}{2\left(n^2+3n+\frac{9}{4}\right)} =$$

$$= \frac{2n+3}{2\left(n+\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{n+\frac{3}{2}}, \text{ δηλαδή το ζητούμενο.}$$

Πόρισμα 3.1 (Schütte)
Για κάθε $p_1, \ldots, p_{n+2}$ στον l_2^n ισχύει ότι:

$$\frac{\max \|p_i - p_j\|_2}{\min\limits_{i \neq j} \|p_i - p_j\|_2} > 1 + \frac{1}{n+2}$$

Απόδειξη
Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η ποσότητα $\alpha = \min\limits_{i \neq j} \|p_i - p_j\|_2 = 1$ (διαφορετικά διαιρούμε όλες τις αποστάσεις με α). Θα δείξουμε ότι $\max \|p_i - p_j\|_2 > 1 + \frac{1}{n+2}$

Έστω ότι $\max\|p_i - p_j\|_2 \leq 1 + \frac{1}{n+2}$. Τότε $1 \leq d(p_i, p_j) \leq 1 + \frac{1}{n+2}$, $1 \leq i \neq j \leq n+2$

Από το Θεώρημα 3.2 τα $p_1, \ldots, p_{n+2}$ εμφυτεύονται στον l_2^{n+1} ως συσχετισμένα ανεξάρτητα. Από την πρόταση 3.1 έχουμε ότι $\mathrm{CMdet}(p_1, \ldots, p_{n+2}) = (-1)^{n+2}$.

Άτοπο εφόσον $\mathrm{CMdet}(p_1, \ldots, p_{n+2}) = 0$ ($n+2$ σημεία του $\mathbb{R}^n$ είναι συσχετισμένα εξαρτημένα).

Πόρισμα 3.2
Αν $d(X, l_2^n) \leq 1 + \frac{1}{n+2}$ (όπου d η Banach-Mazur απόσταση) τότε $e(X) \leq n+1$.

Απόδειξη
Έστω $T : X \longrightarrow l_2^n$ με

$$\|x\| \leq \|T(x)\|_2 \leq \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)\|x\| \tag{1}$$

Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_{n+2}$ ένα 1-ισόπλευρο σύνολο στον X, τότε από την 1:

$$1 = \|x_i - x_j\| \leq \|T(x_i) - T(x_j)\|_2 \leq \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)\|x_i - x_j\| = 1 + \frac{1}{n+2} \Leftrightarrow$$

$$1 \leq \|T(x_i) - T(x_j)\|_2 \leq 1 + \frac{1}{n+2}$$

Άτοπο από το προηγούμενο Πόρισμα.

Το θεώρημα Brass και Dekster Το δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου είναι αφιερωμένο στην απόδειξη του θεωρήματος Brass και Dekster το οποίο ισχυρίζεται ότι: Δοθέντος ενός θετικού ακεραίου m, κάθε χώρος με νόρμα με επαρκώς μεγάλη (πεπερασμένη) διάσταση περιέχει ισόπλευρο σύνολο πληθικότητας m. Είναι προφανής συνέπεια αυτού του αποτελέσματος ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος με νόρμα περιέχει οσονδήποτε μεγάλης (πεπερασμένης) πληθικότητας ισόπλευρα σύνολα

Οι Brass και Dekster απέδειξαν ανεξάρτητα τα αποτελέσματά τους ([10] σελ 14), χρησιμοποιώντας και οι δύο το θεώρημα Dvoretzky και τοπολογικά επιχειρήματα. Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Brass ο οποίος χρησιμοποιεί το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης και αποτελέσματα του πρώτου μέρους αυτού του κεφαλάιου (Θεώρημα Menger και Dekster-Wilker).

Διατυπώνουμε πρώτα το θεώρημα Dvoretzky.

Θεώρημα 3.3 (Dvoretzky)
Υπάρχει μία απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N = N(m, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα:

κάθε χώρος με νόρμα με (πεπερασμένη) διάσταση $\dim X \geq N$ περιέχει γραμμικό υπόχωρο Y με $\dim Y = m$ και

$$d(Y, l_2^m) \leq 1 + \varepsilon$$

(δηλαδή η απόσταση Banach-Mazur του Y από τον l_2^m είναι το πολύ $1 + \varepsilon$)

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να έχουμε $\dim X \geq N = e^{cm\varepsilon^{-2}}$.

Θεώρημα 3.4 (Brass και Dekster)

Κάθε $n-$διάστατος χώρος με νόρμα περιέχει ένα ισόπλευρο σύνολο πληθικότητας $\geq c_1(\log n)^{\frac{1}{3}}$ για κάποια σταθερά $c_1 > 0$ και n αρκετά μεγάλο.

Απόδειξη

Έστω X χώρος με νόρμα διάστασης n και $c > 0$ η σταθερά του θεωρήματος Dvoretzky. Θέτουμε $\varepsilon = \frac{1}{m+1}$ και παρατηρούμε ότι

$$e^{cm\varepsilon^{-2}} < n \Leftrightarrow cm\varepsilon^{-2} < \log n \Leftrightarrow$$

$$cm(m+1)^2 < \log n \tag{1}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) $m = c_1 x$, όπου $x = (\log n)^{\frac{1}{3}}$ και $c_1 > 0$ (το οποίο θα προσδιοριστεί). Η (1) τότε γίνεται:

$$c(c_1 x)(c_1 x + 1)^2 < x^3 \Leftrightarrow (1 - cc_1^3)x^2 - 2cc_1^2 x - cc_1 > 0$$

Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta = 4cc_1 > 0$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν $c_1 \to 0$ και $c_1 > 0$ τότε $1 - c_1^3 c \to 1$ και οι ρίζες του τριωνύμου τείνουν επίσης στο 0. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να επιλέξουμε το $c_1 > 0$ αρκετά μικρό ώστε αφ' ενός $1 - c_1^3 c > 0$ και αφ' ετέρου οι ρίζες του να είναι π.χ. στο διάστημα $(-1, 1)$. Έτσι, για $x > 1$ το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές και άρα η (1) ισχύει για αυτό το c_1 και $m = c_1 x = c_1(\log n)^{\frac{1}{3}}$, όπου $\log n > 1 \Leftrightarrow n > e$.

Από το θεώρημα Dvoretzky έπεται ότι ο X περιέχει ένα $m-$διάστατο υπόχωρο Y με Banach-Mazur απόσταση το πολύ $1 + \frac{1}{m+1}$ από τον l_2^m. Η απόδειξη του θεωρήματος συμπληρώνεται αν εφαρμόσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα των Brass και Dekster το οποίο είναι η «καρδιά» του επιχειρήματός τους και έχει και ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Θεώρημα 3.5 ($Brass - Dekster$)

Έστω X ένας $n-$διάστατος χώρος με νόρμα με απόσταση Banach-Mazur $d(X, l_2^n) \leq 1 + \frac{1}{n+1}$. Τότε κάθε ισόπλευρο σύνολο στον X με το πολύ n σημεία μπορεί να επεκταθεί σε ισόπλευρο σύνολο με $n + 1$ σημεία. Ιδιαίτερα έπεται ότι $e(X) \geq n + 1$.

Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.4
Έστω $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ n σημεία στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $1 \leq \|p_i - p_j\|_2 \leq 1 + \frac{1}{n+1}$ για κάθε i, j με $0 \leq i \neq j \leq n-1$. Τότε για κάθε $n-$άδα αποστάσεων $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \left[1, 1+\frac{1}{n+1}\right]$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x - p_i\|_2 = \alpha_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Απόδειξη
Θέτουμε $\|p_i - p_j\|_2 = \rho_{ij}$ για i, j με $0 \leq i, j \leq n-1$ και θεωρούμε μεταφορά κατά $-p_0$. Δηλαδή $p_0 \mapsto 0, p_i \mapsto x_i = p_i - p_0$. Έχουμε δηλαδή $\|x_i\|_2 = \rho_{i0}$ και $\|x_i - x_j\|_2 = \rho_{ij}$ για $0 \leq i, j \leq n-1$. Αναζητούμε x τέτοιο ώστε

$$\|x\|_2 = \alpha_0 \tag{1}$$

$$\|x - x_i\|_2 = \alpha_i \tag{2}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n-1$. Το θεώρημα Dekster-Wilker εξασφαλίζει την γραμμική ανεξαρτησία των $x_1, \ldots, x_{n-1}$, οπότε $\langle x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle = \mathbb{R}^{n-1}$. Γράφουμε το $x = u + \lambda e_n$, με $u \in \mathbb{R}^{n-1}, \lambda \neq 0$. Η 2 γράφεται ως

$$\langle u + \lambda e_n - x_i, u + \lambda e_n - x_i\rangle = \alpha_i^2 \Rightarrow \alpha_0^2 - 2\langle u, x_i\rangle + \rho_{i0}^2 = \alpha_i^2 \Rightarrow$$

$$2\langle u, x_i\rangle = \alpha_0^2 + \rho_{i0}^2 - \alpha_i^2$$

Η γραμμική ανεξαρτησία των x_i εξασφαλίζει μοναδική λύση για το u.
Η (1) γράφεται ως

$$\|u + \lambda e_n\|_2 = \alpha_0 \Rightarrow \|u\|_2^2 + 2\lambda\langle u, e_n\rangle + \lambda^2 = \alpha_0^2 \Rightarrow \lambda^2 = \alpha_0^2 - \|u\|_2^2$$

Επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του θεωρήματος Menger θεωρούμε την $\mathrm{CMdet}(0, x_1, \ldots, x_{n-1}, u)$ η οποία από προηγούμενη παρατήρηση είναι 0.
Τελικά έχουμε

$$\mathrm{CMdet}(p_0, \ldots, p_{n-1}, x) = 2(\|u\|_2^2 - \alpha_0^2)\,\mathrm{CMdet}(p_0, p_1, \ldots, p_{n-1})$$

Το θεώρημα Dekster-Wilker εξασφαλίζει ότι τα σημεία $p_0, \ldots, p_{n-1}, x$ εμφυτεύονται ισομετρικά στον l_2^n ως συσχετισμένα ανεξάρτητο σύνολο. Από την πρόταση 3.1 έχουμε ότι η $\mathrm{CMdet}(p_0, \ldots, p_{n-1}, x)$ έχει πρόσημο $(-1)^{n+1}$ και η $\mathrm{CMdet}(p_0, \ldots, p_{n-1})$ έχει πρόσημο $(-1)^n$. Επομένως $\|u\|_2^2 - \alpha_0^2 < 0$ και η $\lambda^2 = \alpha_0^2 - \|u\|_2^2$ έχει λύση.

Το λήμμα μας δίνει δύο επιλογές για το λ, $\lambda = \pm\sqrt{\alpha_0^2 - \|u\|_2^2}$. Η επιλογή του x είναι μοναδική αν περιοριστούμε στον ημίχωρο $\mathbb{R}^{n-1} + \lambda e_n$ με $\lambda > 0$.

Παρατήρηση 3.4
Εάν σταθεροποιήσουμε έναν από τους ημιχώρους που ορίζουν τα $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση $f : \left[1, 1+\frac{1}{n+1}\right]^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ώστε $f(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) = x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x - p_i\|_2 = \alpha_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής.

Έστω ακολουθία $(\alpha_0^{(\kappa)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(\kappa)}) \longrightarrow (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$. Θέτουμε $f(\alpha_0^{(\kappa)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(\kappa)}) = x^{(\kappa)}$ και $f(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) = x$. Εφόσον f φραγμένη αρκεί να ελέγξουμε τις συγκλίνουσες υπακολουθίες της $x^{(\kappa)}$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας την ίδια την $x^{(\kappa)}$). Έστω $x^{(\kappa)} \to y \Rightarrow \|x^{(\kappa)} - p_i\|_2 = \alpha_i^{(\kappa)} \Rightarrow \|y - p_i\|_2 = \alpha_i$. Η μοναδικότητα του x εξασφαλίζει ότι $y = x$.

Προχωράμε στην απόδειξη του θεωρήματος 3.5.

Υποθέτουμε, όπως μπορούμε σύμφωνα με την Πρόταση 1.1, ότι έχουμε μία νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\|x\|,\ x \in \mathbb{R}^n$$

και ότι ο X είναι ισομετρικός με τον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Προχωράμε με επαγωγή σε υπόχωρους του $\mathbb{R}^n$ που βρίσκεται ο ένας μέσα στον άλλο.

Αν $p_0 \in \mathbb{R}^n$ τότε το p_0 ανήκει σε κάποιον μονοδιάστατο υπόχωρο και προφανώς υπάρχει p_1 στον ίδιο υπόχωρο ώστε $\|p_0 - p_1\| = 1$. Παρατηρούμε ότι αρκεί να δειχθεί ότι επεκτείνεται ένα σύνολο με n το πλήθος σημεία, εφόσον για $1 \leq \kappa < n$ το $\{p_0, p_1, \ldots, p_{\kappa-1}\}$ είναι ισόπλευρο υποσύνολο κάποιου $\kappa-$διάστατου υπόχωρου του $\mathbb{R}^n$ και ισχύει $\|x\| \leq \|x\|_2 \leq \left(1 + \frac{1}{\kappa+1}\right)\|x\|$ (εφόσον $\kappa < n$), επομένως το σύνολο επεκτείνεται από την επαγωγική υπόθεση.

Θεωρούμε λοιπόν ένα σύνολο $\{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ το οποίο είναι 1-ισόπλευρο. Εφόσον $\|p_i - p_j\| = 1$ έχουμε ότι $1 \leq \|p_i - p_j\|_2 \leq 1 + \frac{1}{n+1}$. Από το λήμμα 3.4, για κάθε $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \left[1, 1 + \frac{1}{n+1}\right]$ υπάρχει μοναδικό $x \in \mathbb{R}^n$: $\|x - p_i\|_2 = \alpha_i$ με $i = 1, 1, \ldots, n-1$ (σταθεροποιώντας έναν ημίχωρο που ορίζουν τα $\{p_0, p_1 \ldots p_{n-1}\}$).

Θεωρούμε συνάρτηση $f : \left[1, 1 + \frac{1}{n+1}\right]^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ως εξής: $f(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) = x \in \mathbb{R}^n$ όπου x το μοναδικό σημείο του $\mathbb{R}^n$ με $\|x - p_i\|_2 = \alpha_i$. Η f είναι καλά ορισμένη και συνεχής από την Παρατηρηση 3.4.

Έστω $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$. Ορίζουμε $\phi : [0, \varepsilon]^n \longrightarrow [0, \varepsilon]^n$ με $\phi(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}) = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ όπου $y_i = \delta_i + 1 - \|f(1 + \delta_0, \ldots, 1 + \delta_{n-1}) - p_i\|$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Αφού $\delta_i + 1 \leq 1 + \varepsilon$, κάθε y_i είναι καλά ορισμένο και έχουμε

$$y_i \leq \delta_i + 1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\|f(1 + \delta_0, \ldots, 1 + \delta_{n-1}) - p_i\|_2 = \delta_i + 1 - \frac{1}{1+\varepsilon}(1 + \delta_i) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)(1 + \delta_i) \leq \left(1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right)(1 + \varepsilon) = \varepsilon$$

Επίσης

$$y_i = \delta_i + 1 - \|f(1+\delta_0, \ldots, 1+\delta_{n-1}) - p_i\| \geq \delta_i + 1 - \|f(1+\delta_0, \ldots, 1+\delta_{n-1}) - p_i\|_2 =$$

$$= \delta_i + 1 - (1 + \delta_i) = 0$$

Τελικά οι τιμές της ϕ είναι στο $[0,\varepsilon]^n$, δηλαδή η ϕ είναι καλά ορισμένη και βέβαια συνεχής. Από το θεώρημα του Brouwer η ϕ έχει σταθερό σημείο $(\delta_0,\ldots,\delta_{n-1})$, δηλαδή υπάρχει $(\delta_0,\ldots,\delta_{n-1}) \in [0,\varepsilon]^n$ ώστε

$$\phi(\delta_0,\ldots,\delta_{n-1}) = (\delta_0,\ldots,\delta_{n-1})$$

το οποίο δίνει:

$$\delta_i = \delta_i + 1 - \|f(1+\delta_0,\ldots,1+\delta_{n-1}) - p_i\| \Rightarrow$$

$$\|f(1+\delta_0,\ldots,1+\delta_{n-1}) - p_i\| = 1, \text{ για κάθε } i = 0,1,\ldots,n-1$$

Το $f(1+\delta_0,\ldots,1+\delta_{n-1})$ είναι το ζητούμενο σημείο το οποίο επεκτείνει το ισόπλευρο σύνολο $\{p_0,p_1,\ldots,p_{n-1}\}$.

Πόρισμα 3.3 $(Brass - Dekster)$
Αν $d(X,l_2^n) \leq 1 + \frac{1}{n+2}$ τότε $e(X) = n+1$

Απόδειξη
Συνδυάζουμε το πόρισμα 3.2 με το προηγούμενο θεώρημα.

Παρατηρήσεις

1. Οι Swanepoel και Villa [12] δίνουν ένα καλύτερο κάτω φράγμα για τον αριθμό $e(X)$ (πρβλ. το θεώρημα Brass και Dekster), δηλαδή αν $\dim X = n$ τότε $e(X) \geq e^{c\sqrt{\log n}}$, όπου c είναι μία απόλυτη σταθερά.

2. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει από το αποτέλεσμα των Brass και Dekster, έπεται ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος με νόρμα περιέχει ισόπλευρα σύνολα αυθαίρετα μεγάλου (πεπερασμένου) πλήθους. Θα πρέπει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι όπως έχει αποδείξει ο P. Terenzi, ένας απειροδιάστατος χώρος με νόρμα δεν περιέχει κατ΄ ανάγκη άπειρο ισόπλευρο σύνολο Τ. Παραδείγματα απειροδιάστατων χώρων με την ίδια ιδιότητα δίνονται και στο πρόσφατο άρθρο [1].

Βιβλιογραφία

[1] E. Glakousakis, S. Merkourakis, *Examples of infinite dimensional Banach spaces whithout infinite equilateral sets*, to appear in Serdica Math. J. 42 (2016), no1, 65-88.
[2] M. Ghomi, *Optimal smoothing for convex polytopes*, Bull. London Math. Soc. 36 (2004), 483-492.
[3] T. Kobos, *Around the Petty's theorem on equilateral sets* Ann. Polon. Math. 109 (2013), 165-175.
[4] H. Kramer, A. B. Nemeth, *The application of Brouwer fixed point theorem to the geometry of convex bodies* Ann. Univ. Timisoara. Ser. Sti. Mat 13 (1975), 33-39.
[5] V. V. Makeev, *Equilateral simplices in a four dimensional normed-space* J. Math. Sci. (N.Y.) 140 (2007), 548-550.
[6] H. Martini, K.L. Swanepoel, G. Weiss, *The geometry of Minkowski spaces - a survey. Parti I*, Expo. Math. 19 (2001), 97-142. Erratum Expo. Math. 19 (2001), 364.
[7] R. E. Megginson, An Introduction to Banach Space Theory, G.T.M., Springer (1998).
[8] J.R. Munkres, *Topology, a first course*, Prentice Hull of India (1994).
[9] C. M. Petty, *Equilateral sets in Minkowski spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 29 (1971), 369-374.
[10] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge Univ. Press (1971).
[11] K. J. Swanepoel, *Equilateral sets in finite-dimensional normed spaces*, in: Seminar of Mathematical Analysis, Daniel Gilera Alvarez, Genaro Lopez Acedo, Rafael Villa Caro (eds.), Secretariado de Publicationes, Universidad de Sevilla, Seville (2004), 195-237.
[12] K. J. Swanepoel. R. Villa, *A lower bound for the equilateral number of normed spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 127-131.
[13] P. Terenzi, *Regular sequences in Banach spaces (Successioni regolari neglei spazi di Banach)*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 57, 1(1987), 275-285 (in Italian).