



**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΚΥΠΡΟΥ**

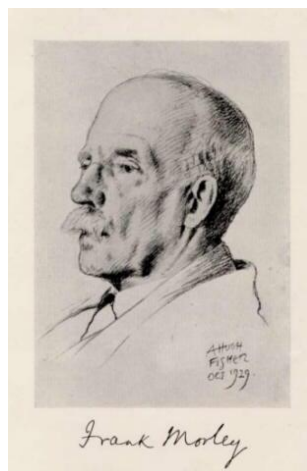
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

**ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
«ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**Με Αφορμή το θεώρημα του Morley:
Το σχήμα στο νομοποιητικό πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.**



Πιτσάς Κώστας

A.M:201408

Επιβλέπων Καθηγητής : Λάμπας Διονύσιος

Αθήνα 2017

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
Που απονέμει το

**Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών
Σπουδών**
Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Εγκρίθηκε την 13^η Ιανουαρίου 2017 από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους:

<u>Ονοματεπώνυμο</u>	<u>Βαθμίδα</u>
• Δ. ΛΑΠΠΑΣ (ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ)	Αν. Καθηγητής
• Ε. ΡΑΠΤΗΣ	Καθηγητής
• Δ. ΠΟΤΑΡΗ	Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματικής εργασίας πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση Συμβουλευτικής Επιτροπής αποτελούμενη από τους:

<u>Ονοματεπώνυμο</u>	<u>Βαθμίδα</u>
• Δ. ΛΑΠΠΑΣ (ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ)	Αν. Καθηγητής
• Ε. ΡΑΠΤΗΣ	Καθηγητής
• Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ	τ. Αναπλ. Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ MORLEY

Τα σημεία τομής των τριχοτόμων των γωνιών ενός τριγώνου είναι κορυφές ισοπλεύρου.

Το θεώρημα του Morley ανακαλύφθηκε περίπου το 1899 και έγινε γνωστό το 1924. Έκτοτε απασχολεί την μαθηματική κοινότητα ως αξιοπερίεργο, αφού δεν υπάρχει κατασκευαστική απόδειξη.

Στην παρούσα διατριβή:

1. Με αφορμή αυτό το θεώρημα μελετώνται η έννοια του σχήματος και η νομιμοποίησή του στα πλαίσια μιας αξιωματικής θεωρίας.
2. Διεξέρχονται ιστορικά διάφορες μέθοδοι απόδειξης του αποτελέσματος από τις «γεωμετρικές» μέχρι τις πλήρως «αλγεβροποιημένες», βλ. π.χ., την απόδειξη του Alain Connes.
3. Αναζητούνται οι γενικεύσεις ή και οι επεκτάσεις τόσο στο πλαίσιο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας όσο και με χρήση νέων τεχνολογιών, με στόχο την αποδέσμευση σχήματος και εποπτείας στα πλαίσια της διδασκαλίας σε μαθητές λυκείου.

Λέξεις κλειδιά: γεωμετρικό σχήμα, απόδειξη, αποδεικτική διαδικασία, Morley, διδακτική της γεωμετρίας, εικασία.

ABSTRACT

MORLEY's MIRACLE

The points of intersection of adjacent trisectors of any triangle form an equilateral triangle.

Morley's theorem was discovered around 1899 and became known in 1924. It has since attracted the attention of the mathematics community as being extraordinary given that there is no structural proof.

In our dissertation:

1. We study the concept of scheme as well as its validation within the frame of an axiomatic theory, in accordance with the aforesaid theorem.
2. We historically follow several methods of proof of the result, from the "geometric" to the fully algebrized, e.g. Alain Connes' proof.
3. We research on the generalizations or/and the expansion of the theorem in the frame of the Euclidean Geometry as well as with the use of IT, aiming to disengage the scheme from teacher supervision, in the context of teaching in Upper Secondary School students.

Keywords: conjecture, proof, proving argument, Morley, geometric shape, teaching geometry.

.....1. Η καθαρή Γεωμετρία, που πρώτη γνωστή ιστορικά αποκρυστάλλωσή της υπήρξαν τα « Στοιχεία» του Ευκλείδη, είναι, κατά την γνώμη μου, η μια από τις δύο καθαρότερες πηγές, όπου ο «δυνάμει» μαθηματικός νέος άνθρωπος ανακαλύπτει τον εαυτό του. Η άλλη τέτοια πηγή είναι η θεωρία Αριθμών.

Είναι, τάχα, σύμπτωση ότι ο Galois, από τους μεγαλύτερους αλγεβριστές όλων των αιώνων, αγάπησε τα μαθηματικά από το βιβλίο Ευκλείδεια Γεωμετρία του Legendre;

2. Η καθαρή Γεωμετρία, ανεπανάληπτα συνδυάζοντας την παραστατικότητα με την ανάγκη από άψογους συλλογισμούς, αποτελεί και παντοτινά θα αποτελεί πάλι μαζί με τη θεωρία Αριθμών το άριστο σχολείο για τη μαθηματική σκέψη.

3. Η καθαρή Γεωμετρία αποτελεί πάντα αφορμή για νέες γενικεύσεις και αξιωματοποιήσεις. Το κάθε θεώρημά της κλείνει μέσα έναν κόσμο από ανεκμετάλλευτες ακόμα δυνατότητες.

4. Ο «πόλεμος» που γίνεται στην καθαρή Γεωμετρία, ακόμα κι όταν προέρχεται από δικαιολογημένες αφορμές όπως η κατάχρηση σε πολύπλοκες ασκήσεις έξω από το κλίμα των «Στοιχείων» του Ευκλείδη, όμως τελικά εξυπηρετεί κάτι άλλο : τη γενικότερη προσπάθεια που καταβάλλει η καταναλωτική κοινωνία να πνίξει την πρωτόβουλη σκέψη και να μας μηχανοποιήσει · μια προσπάθεια που καταντά και ιδιαίτερα ανθελληνική, αφού θέλει να μας αφαιρέσει την Ευκλείδεια ταυτότητά μας και να μας αποσυνδέσει από τον πανάρχαιο ελληνικό έρωτα για τη Γεωμετρία.....

Αθήνα, 26 Αυγούστου 1978

Σ.Π. Ζερβός

Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον τ. Σχολικό Σύμβουλο Β' Αθήνας Στέφανο Κεϊσογλου γιατί χάρις σε αυτόν ξεκίνησε το ταξίδι στον τομέα της διδακτικής των μαθηματικών.

Φυσικά τον Αναπληρωτή Καθηγητή Διονύση Λάππα για την αποδοχή της επίβλεψης και της πρότασης θέματος, την καθοδήγηση, τη βοήθεια και τις καίριες υποδείξεις του κατά τη συγγραφή της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας.

Τους καθηγητές Ράπτη Ευάγγελο και Βασιλείου Ευστάθιο που με τίμησαν με την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Την Κατερίνα Πανοπούλου για την φιλολογική επιμέλεια της εργασίας.

Αντίστοιχα, θα ήθελα να ευχαριστήσω και όλους τους συναδέλφους και όλους τους καθηγητές για την βοήθεια που μου προσέφεραν. Ιδιαίτερα τον συνάδελφο μαθηματικό Α.Μαυρομάτη για τις ατελείωτες συζητήσεις που είχαμε και την συνάδελφο Β. Ζουριδάκη για την εύρεση σπάνιων βιβλίων που απαιτήθηκαν.

ΑΦΙΕΡΩΝΕΤΑΙ

Στη σύζυγό μου Μαίρη, τον γιο μου Σωτήρη, την κόρη μου Ήλια.

Και στους γονείς μου, Σωτήρη και Ευθυμία.

Περιεχόμενα:

Περίληψη	5
Κεφάλαιο Πρώτο	
Από τον συλλογισμό στην απόδειξη ²¹	
1.1 Διαφορετικοί τύποι συλλογισμού και απόδειξης	21
1.2 Προέλευση της έμφασης στην τυπική απόδειξη	21
1.3 Η σύγχρονη άποψη των μαθηματικών για την απόδειξη	23
1.4 Παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται η αποδοχή μιας απόδειξης	25
1.5 Η κοινωνική διαδικασία	26
1.6 Προσεκτική αιτιολόγηση	27
1.7 Το πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων	28
1.8 Επαλήθευση της απόδειξης των FIET-THOMPSON	29
1.9 Είναι δυνατόν μια απόδειξη να στηρίζεται σε νέες τεχνολογίες;	29
Κεφάλαιο Δεύτερο	
Γεωμετρικό σχήμα: Ευκλείδης-Πλάτωνας- Αριστοτέλης	32
2.1 Γεωμετρικό σχήμα-Ευκλείδης	32
2.2 Γεωμετρικό σχήμα-Πλάτωνας	33
2.3 Γεωμετρικό σχήμα- Αριστοτέλης	36
Κεφάλαιο Τρίτο	
Δέκατος Έβδομος αιώνας: Από τα σχήματα στον αλγεβρικό λογισμό	43
3.1 Το γεωμετρικό σχήμα στον δέκατο έβδομο αιώνα. Από τις εικόνες στα σύμβολα	43
3.2 Πρόταση 14 του βιβλίου VI των Στοιχείων	46
3.3 Πρόταση 16 του βιβλίου VI των Στοιχείων	46
3.4 Πρόταση 19 του VII βιβλίου των Στοιχείων	47
3.5 Στοιχεία: Εικόνες, ευθείες. Σύμβολα για ευθείες και αριθμούς	48
3.6 Arnould: Πολλαπλασιασμός αριθμών και μεγεθών	49
3.7 Τέσσερα ανάλογα μεγέθη : Αλγεβρικά μεγέθη και αλγεβρικά διαγράμματα στον Arnould	49
3.8 Πολλαπλασιασμός μεγεθών- Lamy	51
3.9 Πως ο Lamy εφαρμόζει τη μεταφορά – Βιβλίο II των Στοιχείων	53
3.10 Λόγος μεγεθών – Lamy	53
3.11 Συμπεράσματα	54
Κεφάλαιο Τέταρτο	
Σύγχρονη άποψη για το γεωμετρικό σχήμα με επίκεντρο τη διδακτική	55
4.1 Γεωμετρικό σχήμα- Duval-Fischbein-Tall-Vinner	55
4.2 Γεωμετρικό σχήμα –Απόδειξη	58
4.3 Σχήμα και απόδειξη Είναι όλα τα τρίγωνα ισοσκελή;	61

Κεφάλαιο Πέμπτο

Οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες-Απαλοιφή γεωμετρικού σχήματος-Διδακτικές επιπτώσεις 63

5.1 Διαμόρφωση σύγχρονης αξιωματικής προσέγγισης της γεωμετρίας-Αποδοχή-Κριτική 63

5.2 Αξιωματικό σύστημα Hielbert και δευτεροβάθμια εκπαίδευση
Απαλοιφή γεωμετρικού σχήματος -Επιπτώσεις 66

5.3 Σύγχρονες τάσεις για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας 68

Κεφάλαιο Έκτο

Μέρος Πρώτο

Θεώρημα Morley: Η ιστορία του και «κάποιες» αποδείξεις 69

6.1.1 Θεώρημα Morley 69

6.1.2 Η «ιστορία» του θεωρήματος Morley 74

Αποδείξεις του θεωρήματος Morley 74

6.1.3 Πρώτη απόδειξη(Γεωμετρική, Euclide Paracelso) 74

6.1.4 Δεύτερη απόδειξη(Γεωμετρική) 75

6.1.5 Τρίτη απόδειξη (Τριγωνομετρική) 76

6.1.6 Τέταρτη απόδειξη(Γεωμετρική με αντιστροφή διαδικασίας) 78

6.1.7 Πέμπτη απόδειξη (Με μιγαδικούς αριθμούς) 79

6.1.8 Έκτη απόδειξη- Η απόδειξη του Alan Connes 81

Μέρος Δεύτερο

Τρίγωνα Morley-Ισόπλευρα τρίγωνα Morley-Σχέσεις μεταξύ των τριγώνων Morley-Συμπτώσεις 85

6.2.1 Υπολογισμός όλων των τριγώνων Morley 85

6.2.2. Ποια από τα τρίγωνα Morley είναι ισόπλευρα 88

6.2.3 Συμπτώσεις σχετιζόμενες με το θεώρημα Morley 93

6.2.4 Σχέσεις μεταξύ των ισοπλεύρων τριγώνων Morley 94

Κεφάλαιο Έβδομο

Θεώρημα Morley: Διδακτικές προτάσεις 96

7.1 Ισχυρισμός ,επιχείρημα ή απόδειξη. Ακόμη ένα πρόβλημα που πρέπει να λύσουν οι καθηγητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης.
Η έρευνα του Kruth 96

7.2 Σχολιασμός της έρευνας 96

7.3 Διδασκαλία – Προτάσεις 98

7.4 Μερικές δοκιμαστικές προτάσεις για πρακτικές στη τάξη.
Οι ιδέες του G. Polya 99

7.5 Η διδασκαλία της Γεωμετρίας- Σύγχρονα Προγράμματα 101

7.6 DUVAL 102

7.7 VAN HIELE	103
7.8 Διδακτικές προτάσεις- VAN HIELE	105
7.9 Διδακτική αξιοποίηση θεωρήματος Morley με χρήση τεχνολογιών	107
7.10 Η διδασκαλία με χρήση τεχνολογιών αλλάζει την Γεωμετρία	109
7.11 Δραστηριότητα για την κατανόηση του θεωρήματος Morley	110
7.12 Πρώτη φάση δραστηριότητας	110
7.13 Δεύτερη φάση δραστηριότητας	113
7.14 Τρίτη φάση δραστηριότητας	113
7.15 Τέταρτη φάση δραστηριότητας	114
7.16 Πέμπτη φάση δραστηριότητας	115
7.17 Έκτη φάση δραστηριότητας	116
7.18 Έβδομη φάση δραστηριότητας-Γενίκευση	117
 Παράρτημα-Επιπλέον έννοιες και αποδείξεις	 119
Βιβλιογραφία	125

ΣΧΗΜΑΤΑ

Σχήμα 1	45
Σχήμα 2	45
Σχήμα 3	46
Σχήμα 4	47
Σχήμα 5	48
Σχήμα 6	48
Σχήμα 7	48
Σχήμα 8	49
Σχήμα 9	51
Σχήμα 10	52
Σχήμα 11	59
Σχήμα 12	61
Σχήμα 13	62
Σχήμα 14	62
Σχήμα 15	63
Σχήμα 16	69
Σχήμα 17	71
Σχήμα 18	74
Σχήμα 19	75
Ανακτήθηκε από http://www.ziti.gr/docs/ekp_pro_10.pdf	
Σχήμα 20	78
Ανακτήθηκε από http://theorhma.blogspot.gr/2011/04/morley-morleysmiracle.html	
Σχήμα 21	79
Ανακτήθηκε από kurser.math.su.se/pluginfile.../2007_15_abstract.pdf?	

Σχήμα 22	82
Τα σχήματα 16,18,43 ανακτήθηκαν από Cut the Knot, Morley's Miracle, http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml	
Σχήμα 23	83
Σχήμα 24	83
Σχήμα 25	86
Τα σχήματα 22,23,24, ανακτήθηκαν από https://mathematicalgarden.wordpress.com/2009/03/03/morleys-theorem-alain-conness-proof/?blogsub=confirming#subscribe-blog	
Σχήμα 26	88
Σχήμα 27	88
Σχήμα 28	89
Σχήμα 29	89
Σχήμα 30	90
Σχήμα 31	90
Σχήμα 32	91
Σχήμα 33	91
Σχήμα 34	92
Σχήμα 35	93
Σχήμα 36	94
Σχήμα 37	110
Ανακτήθηκε από http://www.helppost.gr/ypologismos/kyklikos-	
Σχήμα 38	111
Ανακτήθηκε από file:///C:/Users/user/Downloads/Eykleideia%20Gewmetria%201999%20%CE%9F%CE%95%CE%94%CE%92%20(1).pdf	

Σχήμα 39	112
Σχήμα 40	112
Σχήμα 41	112
Σχήμα 42	113
Σχήμα 43	114
Σχήμα 44	114
Σχήμα 45	115
Σχήμα 46	117
Τα σχήματα 17,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,36,42,44,46 ανακτήθηκαν από www.scielo.cl/pdf/cubo/v16n2/art05.pdf 7-06-2016	
Σχήμα 47	123

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

ΑΠΟ ΤΟΝ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟ ΣΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1.1 ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Στην πρακτική και στη διδασκαλία των μαθηματικών, διαφορετικοί τύποι μαθηματικών ισχυρισμών έχουν ενσωματωθεί. Κάποιοι από αυτούς θεωρούνται ως κατάλληλες αποδείξεις και κάποιοι άλλοι ως πειραματικές μέθοδοι. Εκτός από τις τυπικές αποδείξεις ως απόδειξη θεωρούνται:

- Οι ποικίλες μορφές της επαγωγής.
- Η αναλογία.
- Η απαρίθμηση.
- Οι αλγεβρικοί χειρισμοί.
- Η οπτικοποίηση.
- Ο πειραματισμός με τις νέες τεχνολογίες.
- Η μοντελοποίηση και η απόδειξη με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή.

1.2 ΠΡΟΕΛΕΥΣΗ ΤΗΣ ΕΜΦΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι γνωστό πως πριν τους Αρχαίους Έλληνες, οι Βαβυλώνιοι είχαν ανακαλύψει πολλά μαθηματικά θεωρήματα και προτάσεις. Αυτό υποδηλώνεται από τα σωστά αποτελέσματα που έβρισκαν στα προβλήματα που έλυναν. Ο Wilder αναφέρει: «Οι Βαβυλώνιοι είχαν φέρει τα μαθηματικά ακριβώς στο σημείο όπου δύο βασικές έννοιες των μαθηματικών ήταν έτοιμες να γεννηθούν στους Έλληνες, η ιδέα του θεωρήματος και η ιδέα της απόδειξης». Η απόδειξη ως παραγωγική διαδικασία γεννήθηκε από τους αρχαίους Έλληνες. Η ιδέα ότι τα μαθηματικά έχουν σχέση με το αφηρημένο και πως η απόδειξη ως αποτέλεσμα παραγωγικής διαδικασίας είναι αναγκαία για τη σωστή επιχειρηματολογία, ήταν ένα μεγάλο και πρωτόγνωρο βήμα για την εποχή (Kleiner, 1991) [9]. Το πως και το γιατί αυτό προέκυψε τη συγκεκριμένη εποχή δεν έχει απαντηθεί πλήρως. Κατά τον Kleiner οι πιο σημαντικοί από τους καταγεγραμμένους λόγους είναι οι εξής:

1. Η ανάγκη για κρίση και επεξεργασία των αποτελεσμάτων προηγούμενων πολιτισμών, τα οποία κληροδοτήθηκαν στους Έλληνες (π.χ. εμβασμόν κύκλου). Αυτό ενίσχυσε την ιδέα της επίδειξης και επεξεργασίας των υπολογισμών και των αποτελεσμάτων το οποίο αργότερα οδήγησε στον παραγωγικό συλλογισμό.
2. Η φύση της ελληνικής κοινωνίας. Η δημοκρατία στην Ελλάδα απαιτούσε τη χρήση της επιχειρηματολογίας και της πειθούς και έτσι ενίσχυσε τον ρόλο των λογικών, παραγωγικών επιχειρημάτων.

3. Η στάση των Ελλήνων απέναντι στη φιλοσοφία, την αναζήτηση της απάντησης σε βαθιά και αρχέγονα ερωτήματα (Πλάτωνας, Παρμενίδης) αλλά και την ανάγκη για γενίκευση κατηγοριών (Στοιχεία, Ευκλείδης).

4. Η ανάγκη για διδασκαλία. Η επιθυμία και η ανάγκη των δασκάλων της εποχής να διδάξουν τα μαθηματικά, τους ώθησε να μελετήσουν και να ψάξουν την ουσία και τους θεμέλιους λίθους από τους οποίους αποτελούνται ώστε να περιγραφούν για να διδαχθούν. Η παιδαγωγική θεώρηση του μαθήματος και όχι η επιστημολογική ήταν αυτή που τους ώθησε να δομήσουν τις αποδείξεις τους και κάθε απόδειξη να γίνεται με τυπική μορφή.

Στη δεκαετία του εξήντα θεωρούσαν ότι η τυπική απόδειξη ήταν ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά των σύγχρονων μαθηματικών. Η άποψη αυτή κυρίως οφείλεται στην εντυπωσιακή δουλειά που έγινε στη διάρκεια του πρώτου μισού του αιώνα στη θεμελίωση των μαθηματικών και η οποία είχε καταδείξει την τεράστια δύναμη των τυπικών συστημάτων που είχαν κατασκευαστεί βήμα-βήμα και στηριχτεί σε ορισμούς, αξιώματα και κανόνες.

Στο σχολικό περιβάλλον ο λογικισμός, ο φορμαλισμός και ο διαισθητισμός διαφέρουν σημαντικά από την φιλοσοφική αιτιολόγηση των μαθηματικών και τα κριτήρια ως προς την εγκυρότητα μιας απόδειξης. Πρωτεύοντα ρόλο δίνουν στην τυπική απόδειξη και αυτό έχει μεγάλη επίδραση στη μαθηματική παιδεία.

Η κεντρική θέση του λογικισμού είναι ότι τα μαθηματικά είναι επέκταση της λογικής και επομένως μπορούν να ενταχθούν να αναχθούν σε αυτή. Όλες οι μαθηματικές έννοιες είναι δυνατόν να αναχθούν σε αφηρημένες ιδιότητες, που έχουν τη δυνατότητα να παραχθούν μέσω λογικών αρχών. Ο σκοπός του λογικισμού ήταν να αποδειχτεί ότι τα μαθηματικά είναι μέρος της Λογικής. Το γενικό σχέδιο ήταν να διατυπωθεί ένας ορισμός της έννοιας του αριθμού και έπειτα να χρησιμοποιηθεί αυτό ως βάση για να συναχθούν οι μαθηματικές αλήθειες από τα καθαρώς λογικά αξιώματα. Ο λογικισμός κατηγορήθηκε ως προς την ιδεοληψία του για τον ακριβή λογικό συλλογισμό, επειδή άφηνε λίγα περιθώρια για τη διαίσθηση και την εικασία, που πολλοί θεωρούν ισχυρές γεννήτριες της δημιουργικής σκέψης.

Ο φορμαλισμός με κυριότερο εκφραστή τον D.Hilbert, αποδέχεται ότι τα μαθηματικά δεν αντιστοιχούν στον κόσμο της εμπειρίας και αρνούνται όλους τους μηχανισμούς της αναπαράστασης προκειμένου να σώσουν την συνέπειά τους. Οι φορμαλιστές θεωρούν ότι τα μαθηματικά είναι αντικείμενα χωρίς νόημα και εμφανίζουν τα τυπικά συστήματα και το μοντέλο των συμβόλων και των ορισμών ως το μοντέλο της αλήθειας και της βεβαιότητας. Ωστόσο ούτε έτσι δικαιώνεται η απόλυτη θέση των μαθηματικών αντικειμένων, αφού ο Godel το 1930 απέδειξε ότι τα συνεπή τυπικά συστήματα ακόμα και στο βασικό επίπεδο της αριθμητικής στερούνται πληρότητας.

«Για πολλά εκπαιδευμένα πρόσωπα, τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που χαρακτηρίζεται από σίγουρα και αλάθητα αποτελέσματα των οποίων βασικά στοιχεία είναι οι αριθμητικές πράξεις, οι αλγεβρικές διαδικασίες και οι γεωμετρικοί όροι και θεωρήματα» (A.Thompson, 1992) [3].

Οι περισσότεροι καθηγητές μαθηματικών πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι σύνολο από κανόνες που όταν χρησιμοποιηθούν σωστά παράγουν μοναδικές σωστές απαντήσεις.

Οι διαισθητικοί-ιντουϊσιονιστές δίνουν και αυτοί μεγάλη σημασία στην τυπική απόδειξη. Η διαφορά τους με τους λογικιστές και τους φορμαλιστές εστιάζεται στον τύπο της απόδειξης που μπορεί να θεωρηθεί έγκυρος. Η θέση των διαισθητικών είναι περισσότερο περιοριστική. Ο ιντουϊσιονισμός υποστηρίζει ότι μόνο προβλέψεις μπορούμε να κάνουμε για τα μαθηματικά αντικείμενα και όχι τελικές κρίσεις για αυτά, αφού αυτό που γνωρίζουμε πχ. για το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι η διαδικασία κατασκευής του βήμα-βήμα και όχι το σύνολο ως ολότητα. Είναι αυτό που ο Hilbert αποκαλεί «μερική κρίση». «*Η πραγματικότητα δεν είναι τίποτε άλλο από συλλογική διαίσθηση*» (S.Toulmin, 1958/1993) [88].

Στα πλαίσια της ιντουϊσιονιστικής θεωρίας η οποία αρνείται οτιδήποτε δεν γίνεται αντιληπτό από τις αισθήσεις και την εμπειρία μας πολλά από τα βασικότερα εργαλεία των μαθηματικών που συνήθως χρησιμοποιούμε χάνουν την εγκυρότητά τους αφού πολλές αποδείξεις παύουν να ισχύουν. Η δίτιμη αριστοτέλεια λογική σύμφωνα με την οποία κάτι είναι ψευδές ή αληθές και η οποία βασίζεται στο νόμο του αποκλεισμού του τρίτου παύει να ισχύει αφού μπορεί να υπάρχει και μια τρίτη πιθανή τιμή αλήθειας. Έγκυρες θεωρούνται μόνο οι κατασκευαστικές αποδείξεις. Η απόδειξη μιας πρότασης, δεν είναι μόνο το τελικό προϊόν, αλλά η ίδια η διαδικασία της απόδειξης. Η απόδειξη είναι πρώτιστα η πράξη όπως εκτελείται. Μόνο δευτερευόντως, αποδεχόμαστε ως απόδειξη την πράξη που έχει εκτελεστεί. Υπαρκτό σημαίνει κατασκευαστικά υπαρκτό και πεπερασμένα ελέγξιμο. Οποιαδήποτε άλλη απόδειξη δεν είναι αποδεκτή. Δεν απαιτείται κάποιο θεώρημα πληρότητας τουλάχιστον στην μορφή του κλασσικού θεωρήματος του Godel [89].

Ο Godel απέδειξε ότι σε ένα οποιοδήποτε μαθηματικό σύστημα θα υπάρχουν πάντοτε κάποιες προτάσεις, των οποίων η αλήθεια ή το ψεύδος θα είναι αδύνατο να αποδειχθούν στα πλαίσια του ίδιου συστήματος. Υπερβαίνοντας το αρχικό σύστημα, για την ακρίβεια κατασκευάζοντας ένα ευρύτερο, οι αναπόδεικτες προτάσεις θα μπορούν πλέον να αποδειχθούν, μόνο που το νέο σύστημα θα περιλαμβάνει κι αυτό κάποιες προτάσεις που είναι αδύνατο να αποδειχθούν. Συνεπώς πάντα θα υπάρχει αβεβαιότητα για την εγκυρότητα ή μη κάποιων μαθηματικών προτάσεων.

Το υποκείμενο παρεμβαίνει ουσιαστικά και ενεργά στη διαδικασία παραγωγής της γνώσης, η οποία εκλαμβάνεται ως διαισθητική εποπτική διαδικασία, ενώ στα κλασσικά Μαθηματικά το υποκείμενο δεν εμπλέκεται σε αυτή τη διαδικασία, η οποία κατά βάση είναι εννοιολογική.

1.3 Η ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΑΠΟΨΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Προς τα τέλη του προηγούμενου αιώνα, η παραδοσιακή επιστημολογία αμφισβητήθηκε έντονα, προτάθηκαν εναλλακτικές επιστημολογίες και ο λογικισμός στη Φιλοσοφία των μαθηματικών άρχισε να χάνει έδαφος καθώς ήρθε αντιμέτωπος με την ψυχολογία. Η άποψη ότι η «πρακτική των ερευνητών μαθηματικών» και όχι η φιλοσοφία των μαθηματικών πρέπει να έχει τον πρώτο λόγο άρχισε να κερδίζει έδαφος. Μετά από την αποτυχία του θεμελιωτισμού [1Π] διάφοροι φιλόσοφοι των

μαθηματικών πρότειναν νέες απόψεις σχετικά με τη φύση και τη διαδικασία απόκτησης μαθηματικής γνώσης.

Την τελευταία εικοσαετία οι ερευνητές μαθηματικών έχουν καταλήξει ότι τα μαθηματικά δεν είναι μόνο ένα τυπικό σύστημα. Αυτή η θέση αναγνωρίζει την πραγματικότητα της μαθηματικής πρακτικής. Οι μαθηματικοί παραδέχονται ότι οι αποδείξεις μπορούν να έχουν διαφορετικούς βαθμούς τυπικής εγκυρότητας και ακόμη αποκτούν τον ίδιο βαθμό αποδοχής. Οι μαθηματικοί συμφωνούν ότι όταν μια απόδειξη είναι έγκυρη εξ αιτίας της τυπικής της απόδειξης, χωρίς να εξετάσουμε το περιεχόμενό της, είναι πιθανό να αυξήσουμε την κατανόηση του υποκειμένου και ειρωνεία της τύχης ότι αυτή δεν είναι πολύ πειστική.

Η απόδειξη είναι ένα επιχείρημα που χρειάζεται για να επικυρώσει μια πρόταση, ένα επιχείρημα για το οποίο υπάρχουν πολλοί τρόποι ώστε να είναι πειστικό. Η απόδειξη μπορεί να περιγραφεί ως ένα «*debating forum*» (Davis, 1986) , «*που είναι ανοικτή και ευέλικτη*» (Tymoczko, 1986) [88] και πιθανώς εξαρτάται η εγκυρότητά της από «την σωστή ή λογική κοινωνική πρακτική» (Kitcher, 1984) [88].

Ο Lakatos έχει εκφράσει την άποψη, ότι να υπάρχει λάθος στα μαθηματικά είναι πολύ φυσικό. Τα μαθηματικά που παράγονται από λογικισμό και φορμαλισμό, χωρίς αμφιβολία επηρεάζονται από τα μειονεκτήματά τους. Αν και τα μαθηματικά δεν είναι εμπειρική επιστήμη ο Lakatos πιστεύει ότι οι μέθοδοι που είναι παρόμοιες με αυτούς των εμπειρικών επιστημών τα αναπτύσσουν μέσα από μια ασταμάτητη βελτίωση της εικασίας και της κριτικής μαζί με τη λογική της απόδειξης και της ανασκευής (Lakatos, 1976) [88]. Συνεπώς δεν υπάρχει τελική απόδειξη και στην πραγματικότητα είναι μια διαπραγμάτευση παρά μια εφαρμογή τυπικών κριτηρίων, που οδηγεί στη βελτίωση της απόδειξης και στην αύξηση της αποδοχής της.

Σύμφωνα με τον Kitcher (1984) [88], για να κατανοήσουμε την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης πρέπει να εξετάσουμε την εξέλιξη της μαθηματικής πρακτικής που έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

- ✓ τη γλώσσα
- ✓ ένα σύνολο αποδεκτών προτάσεων
- ✓ ένα σύνολο αποδεκτών ερωτημάτων
- ✓ ένα σύνολο αποδεκτών αιτιολογιών
- ✓ ένα σύνολο μαθηματικών θέσεων

Ο Kitcher επίσης θεωρεί ότι δεν εξελίσσεται μόνο το συνολικό έργο των μαθηματικών αλλά και οι τρόποι με τους οποίους τα μαθηματικά παράγονται. Επίσης δεν δέχεται ότι η μαθηματική γνώση βασίζεται στην απόδειξη και επιτίθεται στην άποψη που «σκοπεύει να χαρακτηρίσει ως απόδειξη την κατασκευή». Είναι ιστορικά αναληθές να υποθέτουμε ότι η αλλαγή στα μαθηματικά συνίσταται μόνο στην ανακάλυψη προηγούμενων λαθών και στην διόρθωσή τους. Η μαθηματική γνώση είναι πάντα ευαίσθητη να εξετάζει προσεκτικά προκλήσεις και είναι συνεχής από την μαθηματική κοινότητα η αποδοχή υποθέσεων και τεχνικών.

Υπάρχουν παραδείγματα από τις εργασίες των Euler, Cauchy, Weierstrass & Newton, αναφέρει ο Kitcher στα οποία η απόδειξη δεν είναι πάντα αναγκαία για την μαθηματική γνώση και αυτό δεν είναι ο ίδιος με την ορθολογική απόδειξη. Είναι μια

απάντηση σε αυτούς που είναι υπέρ της αυστηρότητας γιατί η τυπική απόδειξη δεν ευνοεί την ανάπτυξη των μαθηματικών εμποδίζοντας την επίλυση προβλημάτων. Από το σύνολο των αποδεκτών ισχυρισμών οι πιο ενδιαφέροντες είναι οι μη αυστηροί.

Ο Tymoczko είναι ένας φιλόσοφος των μαθηματικών ο οποίος θεωρεί ότι η αντίληψη για τον «ιδανικό μαθηματικό» είναι ότι ο συνολικά λογικός παράγοντας που χρειάζεται είναι η αφαιρετική διαδικασία, για να παραχθεί η αιώνια και αλάνθαστη γνώση. Πιστεύει επίσης ότι η έννοια της απόδειξης και η πρακτική της απόδειξης θεωρημάτων είναι μια δημόσια δραστηριότητα. Συμφωνεί με τον Lakatos ότι η «ιδέα της απόδειξης» είναι θέμα για εξέταση. Οι αναληθείς αποδείξεις είναι συχνά πειστικές και μπορεί να οδηγήσουν σε νέες ανακαλύψεις. Αυτές θεωρούνται κοινοί όροι και ενσωματώνονται στη μαθηματική εκπαίδευση..

Ο Davis (1986) [88] θεωρεί ότι η απόδειξη μπορεί να παίξει διαφορετικούς ρόλους. Μπορεί να είναι η επικύρωση, που οδηγεί σε νέες ανακαλύψεις, μπορεί να αποτελέσει το επίκεντρο συζητήσεων και μπορεί να βοηθήσει στην απαλοιφή λαθών. Σύμφωνα με τον Davis αλλά και τον Tymoczko, η φορμαλιστική παράδοση διατηρεί μια ισχυρή επίδραση στην ανάπτυξη των μαθηματικών. Τα μαθηματικά πρέπει να θεωρηθούν ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα, μια δραστηριότητα που δεν στηρίζεται σε μια μορφή σκέψης. Ο Davis πιστεύει ότι στον πραγματικό κόσμο των μαθηματικών, μια απόδειξη δεν είναι ποτέ συμπληρωμένη και δεν μπορεί να συμπληρωθεί.. Όταν οι υπολογιστικές διαδικασίες παραλείπονται, αναζητούμε βοήθεια στη διαίσθηση και στην εικόνα. Θα υπάρχουν μερικές μεταμαθηματικές αντιρρήσεις, αλλά αρκετές από αυτές τις αποδείξεις θα είναι πειστικές γιατί απευθύνονται σε άτομα που μετέχουν σε μια μαθηματική υποκουλτούρα στην οποία ένα ημιτελές επιχείρημα είναι κατανοητό και θεωρείται ως επαρκές. Κατά την διδασκαλία εφαρμόζουμε ευκολίες όπως:

- Είναι εύκολο να αποδειχτεί.
- Μπορείς να το εξακριβώσεις αυτό.
- Ολοκληρώνεται η απόδειξη με ένα στοιχειώδη υπολογισμό τον οποίο αφήνω σε σένα.

1.4 ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΟΠΟΙΟΥΣ ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ Η ΑΠΟΔΟΧΗ ΜΙΑΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Κατά την Gila Hanna [88] ξεκάθαρα η αποδοχή ενός θεωρήματος είναι μια κοινωνική διαδικασία που περισσότερο εξαρτάται από την κατανόηση και τη σημασία παρά από την αυστηρότητα της απόδειξης. Πράγματι η παρουσία αυστηρών ή μη στοιχείων δεν καθορίζει αποκλειστικά την αποδοχή της. Η σπουδαιότητα ενός θεωρήματος, για τα μαθηματικά, και η κατανόηση του παίζουν σημαντικότερο ρόλο στην αποδοχή του από την ύπαρξη αυστηρής απόδειξης. Η επικρατούσα άποψη, ως προς την αποδοχή ενός καινούργιου θεωρήματος, είναι ότι απαιτείται συνδυασμός των εξής παραγόντων:

- Η κατανόηση του θεωρήματος, οι έννοιες που περιέχει, η προηγούμενη λογική και οι επιπτώσεις που προκαλεί. Υπάρχει ένδειξη λάθους;

- Οι επιπτώσεις που έχει σε ένα ή περισσότερους κλάδους των μαθηματικών.
- Συμφωνεί με τα αποδεκτά μαθηματικά αποτελέσματα;
- Ο συγγραφέας έχει άψογη φήμη ως προς το υπό συζήτηση θέμα;
- Υπάρχει πειστικό μαθηματικό επιχείρημα για αυτό (αυστηρό ή όχι), που να έχει ανακαλυφθεί προηγούμενα;

Εάν τα παραπάνω κριτήρια είναι παραδεκτά τότε οι πέντε αυτοί παράγοντες κατέχουν υψηλότερη θέση κατάταξης από την αυστηρή απόδειξη.

Κατανοώντας τη σημασία, τη συμβατότητα, την καλή φήμη και την πειστικότητα του επιχειρήματος είμαστε «θετικοί» στην αποδοχή του. Αυτοί οι παράγοντες που συγκεντρώνουν την προσοχή των φιλόσοφων μαθηματικών πάνω σε ένα νέο θεώρημα και στην αποδοχή του, το τοποθετούν πάνω από ίσης εγκυρότητας αλλά λιγότερο ελκυστικά θεωρήματα που προηγήθηκαν.

Από την άλλη μεριά, η κατασκευαστική εγκυρότητα του μαθηματικού επιχειρήματος για ένα νέο θεώρημα, η πραγματική ή η πιθανή εγκυρότητα ξεχωρίζει από το περιεχόμενο και είναι ένας υγιεινός παράγοντας που θεωρούμε ότι είναι δεδομένος.

Η κοινοποίηση μιας μη αυστηρής απόδειξης παρέχει όχι πρόσθετη θετική κινητοποίηση αποδοχής της και την απόρριψή της όταν λείπουν οι παράγοντες που αναφέρονται ανωτέρω.

1.5 Η ΚΟΙΝΩΝΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

Μια απόδειξη γίνεται απόδειξη ύστερα από την κοινωνική πράξη της «αποδοχής ότι είναι απόδειξη». Αυτή είναι η αλήθεια στα μαθηματικά, όπως και στη φυσική, στη γλωσσολογία και στη βιολογία (Manin, 1977, p.48) [88].

Ο Manin προσπαθεί να εξηγήσει ότι η νέα απόδειξη χρειάζεται να γίνει αποδεκτή και να εγκριθεί και από άλλους μαθηματικούς, οι οποίοι προσπαθούν να την βελτιώσουν και να τη τελειοποιήσουν. Ο εξονυχιστικός έλεγχος στον οποίο υποβάλλουν οι μαθηματικοί μια απόδειξη, επισημαίνει, σκοπεύει περισσότερο από την αληθοφάνεια του αποτελέσματος να επαληθεύσει την αφαιρετική διαδικασία. Όταν οι μαθηματικοί έχουν αμφιβολία για ένα αποτέλεσμα τότε προσπαθούν να βρουν αντιπαράδειγμα. Ο Manin θεωρεί ότι η αιτία που η αποδοχή της αλήθειας ενός θεωρήματος γίνεται έμμεσα, όχι γιατί επαληθεύτηκε, χωρίς να βρεθεί λάθος, αλλά γιατί τα αποτελέσματα είναι συμβατά με άλλα αποδεκτά αποτελέσματα και τα επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη μοιάζουν με επιχειρήματα που χρησιμοποιήθηκαν σε άλλες αποδεκτές αποδείξεις.

Από τα 200,000 θεωρήματα που δημοσιεύθηκαν ετήσια (Ulam, 1976) [88], πάρα πολύ λίγα προκάλεσαν κινητικότητα στην μαθηματική κοινότητα. Τα θεωρήματα που κρίνονται σημαντικά είναι αυτά που οι αποδείξεις τους έχουν γίνει προσεκτικά, είναι σωστές και ραφιναρισμένες ενώ οι αποδείξεις των άλλων θεωρημάτων δεν εξετάζονται. Αυτό οφείλεται στα πολλά λάθη που βρέθηκαν σε αυτές τις δημοσιευμένες αποδείξεις και αναφέρθηκε από τον εκδότη του περιοδικού Mathematical Reviews ότι περισσότερες από τις αποδείξεις είναι λάθος, ωστόσο τα

θεωρήματα που επιχειρούν να αποδείξουν είναι ουσιαστικά αληθή. Όταν ένα λάθος αναγνωρίζεται στην απόδειξη ενός σημαντικού θεωρήματος, η απόδειξη συχνά αλλάζει ενώ το θεώρημα παραμένει αδιαμφισβήτητο.

Ο ρόλος της απόδειξης στη διαδικασία της αποδοχής είναι παρόμοιος με το ρόλο της στην ανακάλυψη. Οι μαθηματικές ιδέες ανακαλύφθηκαν μέσα από δημιουργικές πράξεις στις οποίες η τυπική λογική δεν εμπλεκόταν άμεσα. Αυτές δεν εξήχθηκαν ή έγιναν αντιληπτές μέσω της τυπικής απόδειξης αλλά λόγω άτυπης διαίσθησης. Ενώ η απόδειξη θεωρείται προϋπόθεση για την κοινοποίηση ενός θεωρήματος, δεν χρειάζεται αυστηρότητα ή συμπλήρωση. Πράγματι η επισκόπηση της απόδειξης, η ολική μεταφορά των ιδεών μέσω ενός δρόμου που τις κάνει κατανοητές και πειστικές είναι πιο σημαντική από την τυπική καταλληλότητα (Hanna, 1983). Το συμπέρασμα επομένως είναι ότι ο προσανατολισμός προς τον ακραίο φορμαλισμό δεν αντανakλά τη σύγχρονη μαθηματική πρακτική ή τη σύγχρονη φιλοσοφία των μαθηματικών. Ο Tymoczko είπε *ότι οι μαθηματικοί είναι ικανοί να παράγουν και να γνωρίζουν μαθηματικά μόνο συμμετέχοντας στη μαθηματική κοινότητα.*

1.6 ΠΡΟΣΕΚΤΙΚΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Παρόλα όσα ειπώθηκαν παραπάνω είναι φανερό πόση παρανόηση ως προς τη φύση των μαθηματικών δημιουργείται. Τα δημοσιευμένα μαθηματικά αποτελέσματα σταθερά παρουσιάζονται με τον εξής τρόπο: θεώρημα-απόδειξη. Αυτά διατηρούν αυτόν τον τύπο αντανakλώντας τη φύση των μαθηματικών ως ένα πολύ δομημένο σώμα γνώσης που διατηρεί την λογική ακόμα και αν οι αποδείξεις δεν είναι ολοκληρωμένες ή αυστηρές. Αν ένα άτομο ασχολείται περιστασιακά με τα μαθηματικά ή δεν μπορεί να αξιολογήσει ότι η σημασία της διαίσθησης είναι αναγκαία για τον επιτυχή έλεγχο μιας απόδειξης μπορεί εύκολα να θεωρήσει ότι ο ιδανικός τρόπος παρουσίασης είναι ο απόλυτα αυστηρός. Αυτή η ευχέρεια στα μαθηματικά εύκολα γίνεται εσφαλμένα αντιληπτό ότι είναι συνώνυμο με την ικανότητα να δημιουργήσουμε με αυστηρή απόδειξη.

Είναι μόνο ένα βήμα παραπέρα, έπειτα, να συμπεράνουμε ότι η μάθηση των μαθηματικών πρέπει να εμπεριέχει και τη δημιουργία αυτού του τύπου απόδειξης. Το να διδάσκεις ένα αρχάριο μαθητή συνεπάγεται ότι η διδασκαλία περιλαμβάνει τη φορμαλιστική απόδειξη. Παραδόξως, σε αυτό το σημείο παραλείπεται ο κρίσιμος παράγοντας. Όταν ένας μαθηματικός μελετά μian απόδειξη, δεν είναι το αφαιρετικό σχήμα που απαιτεί τη μεγαλύτερη προσοχή. Είναι, πράγματι, η μαθηματική ιδέα, ποιες σχέσεις ξεκαθαρίζονται με νέο τρόπο μέσω της απόδειξης, τι επικαλείται για κατανόηση και η διαίσθηση που γεφυρώνει τα κενά και είναι η διαίσθηση που γεφυρώνει τα κενά στη λογική που είναι το βασικό συστατικό αυτής της αντίληψης. Όταν αξιολογείται μια μαθηματική ιδέα είναι σημαντικό να αναζητείται ο σκοπός της και οι συνέπειές της, όχι η τυπική επάρκεια της λογικής με την οποία είναι διατυπωμένο.

Συνεπώς φαίνεται γιατί χρειάζεται να πεισθούν οι μαθητές για τη σημασία της προσεκτικής αιτιολόγησης και ότι ένα επίχειρημα πρέπει να μελετηθεί προσεκτικά και είναι δυνατόν να αναθεωρηθεί. Όταν τα παραπάνω περιλαμβάνουν και κάποιο επίπεδο φορμαλισμού, τότε η έμφαση πρέπει να δίνεται στην σαφήνεια της ιδέας.

1.7 ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΧΡΩΜΑΤΩΝ

Η υπόθεση των τεσσάρων χρωμάτων διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1852 από τον Francis Guthrie, όταν επιχειρώντας να χρωματίσει τις κομητείες της Αγγλίας διαπίστωσε πως τέσσερα χρώματα είναι αρκετά, ώστε κάθε κομητεία να έχει το δικό της χρώμα και γειτονικές κομητείες να έχουν διαφορετικά χρώματα. Ο Francis ήταν μαθητής του μαθηματικού και λογικολόγου August De Morgan, και φοιτούσε στο University College του Λονδίνου. Ανέφερε την παρατήρησή του στο μικρότερο αδελφό του, Frederic Guthrie, ο οποίος αργότερα και ενώ ο Francis εργαζόταν ως μαθηματικός στο πανεπιστήμιο της Νοτίου Αφρικής, στο Κέιπ Τάουν, έγινε και αυτός μαθητής του De Morgan. Με την άδεια του μεγαλύτερου αδελφού του ο Frederic Guthrie γνωστοποίησε στον De Morgan το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων, μαζί με μια απόδειξη που είχε κατασκευάσει ο μεγαλύτερος αδελφός του [89].

Ο De Morgan ενθουσιάστηκε με την υπόθεση αλλά βρήκε ανεπαρκή την απόδειξη. Στις 23 Οκτωβρίου 1952 ζήτησε από τον ιρλανδό διάσημο μαθηματικό William Rowan Hamilton να ασχοληθεί με το πρόβλημα αλλά δεν βρήκε ανταπόκριση. Στη συνέχεια στράφηκε στον διακεκριμένο φιλόσοφο William Whewell και στο μαθηματικό Robert Ellis.

Η πρώτη γνωστή εμφάνιση του προβλήματος των τεσσάρων χρωμάτων σχετίζεται με μια εργασία του William Whewell. Στις 14 Απριλίου 1860, ένας ανώνυμος κριτικός του βιβλίου «Η φιλοσοφία της ανακάλυψης» του Whewell, αναφέρθηκε στο πρόβλημα σχολιάζοντας πως ήταν ήδη γνωστό στους χαρτογράφους! Ο ανώνυμος κριτικός ήταν ο De Morgan. Ο Αμερικανός μαθηματικός, λογικολόγος και φιλόσοφος Charles Sanders Peirce, μελέτησε την κριτική και ασχολήθηκε με το πρόβλημα για την υπόλοιπη ζωή του χωρίς επιτυχία.

Μετά τον θάνατο του De Morgan, το 1871, ασχολήθηκαν χωρίς επιτυχία με το πρόβλημα, ο Arthur Cayley και ο Λονδρέζος ερασιτέχνης μαθηματικός Alfred Bray Kempe. Η περίπτωση του Kempe έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, αφού χρειάστηκαν έντεκα χρόνια για να ανακαλυφθεί ότι η απόδειξη που πρότεινε ήταν λανθασμένη.

Από το 1890 έως το 1976 η υπόθεση των τεσσάρων χρωμάτων συγκαταλεγόταν στα εξέχοντα, άλυτα μαθηματικά προβλήματα. Τελικά, τη λύση έδωσαν οι μαθηματικοί Kenneth Appel και Wolfgang Haken, του πανεπιστημίου του Ιλινόις. Η ολοκλήρωση της απόδειξης κατέστη δυνατή μόνο με τη χρήση ενός γρήγορου (για τα δεδομένα του 1976) υπολογιστή, ο οποίος για αρκετές ώρες έλεγχε έναν προς έναν όλους τους μετασχηματισμούς. Η τυπωμένη απόδειξη των αποτελεσμάτων ξεπερνούσε τις 500 σελίδες. Το 1996 οι Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour και Robin Thomas ανακοίνωσαν μια απόδειξη παρόμοια με εκείνη των Appel-Haken, η οποία απαιτούσε την εξέταση περισσότερων μετασχηματισμών. Η χρήση και σε αυτή την απόδειξη υπολογιστή ήταν επιβεβλημένη. Τέλος το 2004 οι Benjamin Werner, Georges Gonthier [25] τυποποίησαν μια απόδειξη μέσα στα πλαίσια του αυτοματοποιημένου συστήματος αποδείξεων Coq. Η συγκεκριμένη προσέγγιση δεν απαιτεί προγράμματα που ελέγχουν σχηματισμούς, απαιτεί όμως εμπιστοσύνη στην ορθή λειτουργία του Coq! [2Π].

1.8 ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΩΝ FIET –THOMPSON

Ένα από τα τελευταία επιτεύγματα της ίδιας κατηγορίας λογισμικών με τον Coq είναι η επαλήθευση της απόδειξης των Fiet-Thompson. Το θεώρημα αυτό είναι συναρπαστικό γιατί, είναι πολύ μικρό και έχει πολύ μεγάλη απόδειξη, 250 σελίδες (Burnside, 1911, Fiet et al., 1962, 1963) [24]. Σύμφωνα με το θεώρημα, κάθε πεπερασμένη ομάδα με περιττό αριθμό στοιχείων είναι επιλύσιμη. Στις 20 Σεπτεμβρίου 2012 η ερευνητική ομάδα Inria - Microsoft Research υπό την εποπτεία του George Gonthier ανακοίνωσε την επαλήθευση της ορθότητας με υπολογιστή, ποιο συγκεκριμένα με τη χρήση του λογισμικού Coq [2].

1.9 ΕΙΝΑΙ ΔΥΝΑΤΟΝ ΜΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΝΑ ΣΤΗΡΙΖΕΤΑΙ ΣΕ ΝΕΕΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΕΣ;

Μετά την ανακοίνωση για την απόδειξη της υπόθεσης των τεσσάρων χρωμάτων στις τάξεις των μαθηματικών αλλά και των φιλοσόφων επικράτησε σκεπτικισμός. Η απόδειξη περιελάμβανε πρόγραμμα υπολογιστή και ένα αποτέλεσμα που προερχόταν από την εκτέλεση του προγράμματος, χωρίς φυσικά να φαίνονται τα ενδιάμεσα βήματα που ακολουθήθηκαν. Αρκετοί μαθηματικοί και φιλόσοφοι χαρακτήρισαν την όλη εργασία ως ατελή και σίγουρα όχι ως «αληθινή» μαθηματική απόδειξη. Οι υπολογιστές πριν την ανακοίνωση της απόδειξης χρησιμοποιούνταν στην επιστημονική έρευνα γενικότερα αλλά και στα μαθηματικά ειδικότερα. Για παράδειγμα στα πλαίσια των εφαρμοσμένων μαθηματικών ο υπολογιστής μπορεί να μας δώσει μια προσεγγιστική, αριθμητική απάντηση. Αυτό είναι αποδεκτό όταν η θεωρία βεβαιώνει για την ύπαρξη απάντησης αλλά αδυνατεί να την προσδιορίσει (αριθμητικά) επακριβώς. Μετά την εύρεση μιας προσεγγιστικής απάντησης η θεωρία μπορεί να ξαναχρησιμοποιηθεί, ώστε να αποδείξουμε ότι η αριθμητική απάντηση του υπολογιστή είναι αρκετά κοντά στην πραγματική. Είναι όμως βέβαιο ότι ο υπολογιστής δεν υποκαθιστά τη θεωρία και η ανάπτυξή της δεν εξαρτάται από τον υπολογιστή.

Τα ίδια ισχύουν και στα καθαρά μαθηματικά. Για παράδειγμα, στα πλαίσια της θεωρίας αριθμών ενδιαφέρει η κατανομή των πρώτων αριθμών μεταξύ των ακεραίων. Η χρήση του υπολογιστή έγκειται στην εύρεση δεδομένων. Μελετώντας αυτά τα δεδομένα ίσως διατυπώσουμε μια εικασία για την κατανομή των πρώτων. Η απόδειξη της εγκυρότητας ή όχι της εικασίας είναι ανεξάρτητη από τον υπολογιστή.

Στην εργασία όμως των Appel-Haken η κατάσταση αλλάζει, αφού η απόδειξη που παρουσίασαν ήταν στενά συνδεδεμένη από πρόγραμμα υπολογιστή και ήταν αδύνατο να ελεγχθεί χωρίς τη χρήση τεχνολογίας.

Τον Φεβρουάριο του 1979 ο φιλόσοφος Thomas Tymoczko, σε κείμενο που δημοσίευσε στο Journal of Philosophy, αναρωτιέται αν η απόδειξη των Appel-Haken μπορεί να θεωρηθεί ως έγκυρη. Ο Tymoczko [89] έθεσε ορισμένα κριτήρια για την αναγνώριση μιας μαθηματικής απόδειξης. Η απόδειξη πρέπει να είναι πειστική και ταυτόχρονα αξιολογήσιμη, δηλαδή να μπορεί να επαληθευτεί πλήρως. Αν και η εργασία των Appel - Haken είναι πειστική, σίγουρα είναι προβληματική ως προς την

επαλήθευση. Η τελευταία αυτή άποψη ενισχύεται κι από το γεγονός ότι το πρόγραμμα του υπολογιστή ενδέχεται να περιλαμβάνει λάθη, το ίδιο το υλικό που τρέχει το πρόγραμμα να είναι ελαττωματικό ή και η έξοδος από τον υπολογιστή μπορεί να παρερμηνευτεί. Ο Tymoczko συμπεραίνει πως αν χαρακτηρίσουμε την απόδειξη των Appel-Haken ως έγκυρη, τότε τα μαθηματικά κινδυνεύουν να υποβαθμιστούν σε μια εμπειρική επιστήμη υποκειμένη σε σφάλματα, όπως, π.χ., είναι η φυσική. Ο φιλόσοφος καταλήγει εξηγώντας πως σε μια τέτοια περίπτωση η έννοια της μαθηματικής απόδειξης πρέπει να τροποποιηθεί, ώστε να δέχεται τον πειραματισμό ως μέθοδο για την επαλήθευση της μαθηματικής απόδειξης.

Οι φιλοσοφικές ανησυχίες αναφορικά με τη συμμετοχή υπολογιστή στη διαδικασία μιας μαθηματικής απόδειξης δεν έγιναν αποδεκτές από όλους τους μαθηματικούς. Μεταξύ αυτών ο Ted Swart (βραβείο Lester R. Ford από Mathematical Association of America) [89], ο οποίος θεωρούσε τη χρήση υπολογιστή ως προέκταση του χαρτιού με το μολύβι. Όπως ο ίδιος σχολίασε «... Δεν νομίζω πως υπάρχει διαχωριστική γραμμή που επιτρέπει τη χρήση χαρτιού και μολυβιού αλλά απαγορεύει τη χρήση υπολογιστή, με το φόβο ότι κάτι τέτοιο θα αλλοιώνει το μαθηματικό χαρακτήρα της απόδειξης. Προσωπικά δε βλέπω μια τέτοια διαχωριστική γραμμή, βρίσκω το όλο επιχείρημα κατά της χρήσης υπολογιστή παράξενο».

Σχετικά με το επιχείρημα ότι το πρόγραμμα ή το μηχανικό μέρος του υπολογιστή είναι πιθανό να περιλαμβάνει λάθη, τα οποία ναι μεν θα επιτρέψουν τη λειτουργία του προγράμματος αλλά θα δώσουν εσφαλμένα αποτελέσματα, μπορεί εύκολα να αντιστραφεί. Και οι άνθρωποι κάνουν λάθη και μάλιστα με μεγαλύτερη συχνότητα εν συγκρίσει με τους υπολογιστές.

Στην πορεία των μαθηματικών υπήρξαν αποδείξεις χωρίς χρήση υπολογιστή των οποίων η δημοσίευση προκάλεσε ενθουσιασμό, αλλά αργότερα ανακαλύφθηκε ότι περιείχαν λάθη. Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελεί η απόδειξη μιας περίφημης πρότασης της θεωρίας ομάδων (group theory), που εξέδωσαν το 1963 οι Walter Feit, John Thompson [24]. Η απόδειξη είχε έκταση 250 σελίδες και αρχικά έγινε δεκτή. Τελικά διαπιστώθηκε ότι περιείχε λάθη, τα οποία στη συνέχεια διορθώθηκαν. Δεύτερο παράδειγμα μπορεί να θεωρηθεί το περίφημο τελευταίο θεώρημα του Fermat. Άλλα παραδείγματα είναι οι λάθος αποδείξεις των Lagrange, Laplace, οι λάθος υπολογισμοί του Fourier στο βασικό άρθρο της θεωρίας του ή τα «βασιλικά» λάθη του Poincare χάρη στα οποία πήρε το βραβείο από τον βασιλιά Oscar το 1887.

Στηριζόμενοι στα παραπάνω παραδείγματα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι και με δεδομένη την ύπαρξη λάθους σε μια παραδοσιακή μαθηματική απόδειξη το γεγονός ότι και άλλοι μαθηματικοί είναι σε θέση να την εξετάσουν αποτελεί δικλείδα ασφαλείας. Όμως παρόμοια δικλείδα υπάρχει και στη χρήση υπολογιστή. Ο αντικειμενικός σκοπός ενός προγράμματος μπορεί να υλοποιηθεί με διαφορετικό τρόπο από διαφορετικούς ανθρώπους και, κατόπιν, οι εναλλακτικές εκδοχές μπορούν να αντιπαρατεθούν με την αρχική. Συνεπώς εξανεμίζεται η πιθανότητα κακής προγραμματιστικής ερμηνείας.

Μήπως πολλοί μαθηματικοί έχουν τη νοοτροπία να θεωρούν έγκυρα τα μαθηματικά που αποτελούν καθαρά ανθρώπινο πνευματικό καρπό; Φυσικά ένας υπολογιστής δεν μπορεί να αποδείξει τίποτα, χωρίς το πρόγραμμα που είναι ένα καθαρά πνευματικό ανθρώπινο έργο.

Η καθαυτή μαθηματική απόδειξη παραμένει άθικτη, το νέο είναι η έλευση ενός γραφειοκρατικού μηχανισμού έξω από τα ίδια τα μαθηματικά (βασισμένο στην λογική) που μπορεί να ελέγχει αποδείξεις, τα πειραματικά μαθηματικά.

Τα πειραματικά μαθηματικά σύμφωνα με έναν ορισμό που έδωσε ο Borwein et al (1996) [10], όπως και ο Delvin (2010) [10] είναι ένας τρόπος επικοινωνίας αποτελεσμάτων μεταξύ της μαθηματική κοινότητας, που έχουν εξαχθεί από μια συγκεκριμένη πειραματική διαδικασία διερεύνησης εικασιών, πεποιθήσεων και από την προσεκτική ανάλυση των δεδομένων που αποκτήθηκαν μέσα από αυτή τη διαδικασία.

Στα μαθηματικά η πειραματική διαδικασία έχει περιοριστεί στην σφαίρα της ανακάλυψης ενώ η απόδειξη παραμένει ο αποκλειστικός τρόπος επιβεβαίωσης των ισχυρισμών. Το πείραμα στα μαθηματικά θα λέγαμε ότι αντιστοιχεί στην ευρετική μέθοδο του F.Bacon. Δηλαδή στη μέθοδο που δίνει τη δυνατότητα σταδιακά να γενικευθεί το αποτέλεσμα και βασίζεται αποκλειστικά στην συσσώρευση δεδομένων μέσα από ποικίλα και πολύμορφα πειραματικά αποτελέσματα. Αντίθετα στις άλλες επιστήμες η πειραματική διαδικασία χρησιμοποιείται παραδοσιακά, σύμφωνα με τη μέθοδο του Γαλιλαίου, δηλαδή στην επιβεβαίωση μιας θεωρίας, στην ανακάλυψη και στη συλλογή δεδομένων. Θετική άποψη για το αν τα μαθηματικά πειραματικά εργαλεία, όπως οι αλγόριθμοι, μπορούν να επιβεβαιώσουν την αλήθεια ή όχι μιας μαθηματικής πρότασης έχουμε αρκετές όπως στο (Ekhad et al., 1996) [23].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ: ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ-ΠΛΑΤΩΝΑΣ-ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

2.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ-ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Γεωμετρικό σχήμα ή απλά σχήμα, σύμφωνα με τον ορισμό 14 του βιβλίου Ι των Στοιχείων, είναι ότι περιέχεται σε ένα ή περισσότερα σύνορα. Σύνορο δε, σύμφωνα με τον ορισμό 13, ονομάζεται ότι είναι πέρας κάποιου αντικειμένου.

Ένας άλλος απλός ορισμός για τα γεωμετρικά σχήματα είναι ο εξής: Σχήμα ονομάζεται ένα σύνολο σημείων. Μια πρόταση θεωρείται πλήρης όταν περιέχει:

A) Τη διατύπωση της πρότασης στην οποία δεν υπάρχουν σύμβολα.

B) Την αναπαράσταση της πρότασης με συγκεκριμένο σχήμα

.

Το σχήμα σύμφωνα με τον Ευκλείδη εμφανίζεται σε ένα από τα στάδια κατά την διαδικασία της απόδειξης μιας πρότασης και συγκεκριμένα στην έκθεση, δηλαδή το πέρασμα από την επαλήθευση στην συστηματική απόδειξη. Εκεί παρουσιάζονται τα σύμβολα των μεταβλητών με τα οποία σημαίνονται τα μαθηματικά αντικείμενα που εμφανίζονται στην εκφώνηση (Ευτύχης Παπαδοπετράκης. Η απόδειξη στον Ελληνικό Μαθηματικό Λόγο, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1991) [34].

Γ) Τους απαραίτητους προσδιορισμούς.

Δ) Την κατασκευή όταν αυτή είναι αναγκαία. Αυτή γίνεται με κανόνα και διαβήτη. Όταν δεν είναι αυτό εφικτό τότε το πρόβλημα θεωρείται άλυτο. Γνωστά είναι τα τρία άλυτα γεωμετρικά προβλήματα, της τριχοτόμησης της γωνίας, του τετραγωνισμού του κύκλου και του διπλασιασμού του όγκου κύβου δοσμένης της πλευράς του. Το ότι οι αρχαίοι γνώριζαν ότι υπάρχουν μόνο πέντε κυρτά κανονικά πολύεδρα δείχνει το πόσο ασχολούνταν με τις γεωμετρικές κατασκευές. Επίσης είναι γνωστά τα 13 στερεά του Αρχιμήδη που ονομάστηκαν έτσι γιατί εκείνος τα ανακάλυψε.

Ε) Την απόδειξη.

ΣΤ) Το συμπέρασμα.

Σε κάποιες προτάσεις μπορεί να λείπουν κάποια από τα παραπάνω βήματα. Αυτά που είναι υποχρεωτικά είναι η διατύπωση της πρότασης, η ανάλυση των δεδομένων, η απόδειξη και το συμπέρασμα.

Στα Στοιχεία χρησιμοποιούνται όλες οι γνωστές μέθοδοι απόδειξης: μέθοδος συνεπαγωγής, συνθετική μέθοδος, αναλυτική μέθοδος, μέθοδος της εις άτοπο

απαγωγής και ατελής μέθοδος της τέλει επαγωγής. Η Ευκλείδεια γεωμετρία είναι πιο συμπαγής από άλλα μοντέρνα αξιωματικά συστήματα, που συχνά εξασφαλίζουν μόνο την ύπαρξη και όχι την μέθοδο κατασκευής ενός αντικειμένου. Υπάρχουν και περιπτώσεις που εξασφαλίζεται η ύπαρξη αλλά η ίδια θεωρία δεν επιτρέπει την κατασκευή. Οι κατασκευαστικές αποδείξεις του Ευκλείδη πολλές φορές αντικαταστάθηκαν από άλλες μη-κατασκευαστικές. Οι Πυθαγόρειοι στις αποδείξεις περί ασυμμετρίας χρησιμοποίησαν μη κατασκευαστικές αποδείξεις.

Οι αρχαίοι Έλληνες δεν υιοθέτησαν απλώς τη βαβυλωνιακή άλγεβρα όπως ήταν, αλλά την έθεσαν σε γεωμετρική μορφή. Αυτό οφείλεται σε δύο βασικούς λόγους:

- Η απόλαυση του ορατού ήταν ένα ισχυρό κίνητρο για τους Έλληνες. Πλήθος αθάνατων έργων τέχνης, πάμπολλες μαρτυρίες στις καταπληκτικά ζωντανές περιγραφές του Ομήρου και στην εικόνα του σπηλαίου του Πλάτωνα το δείχνουν καθαρά.
- Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας, η οποία όπως αναφέρει ο Πάππος προέρχεται όντως από τη σχολή των Πυθαγορείων. Η διαγώνιος του τετραγώνου δεν είναι σύμμετρη με την πλευρά. Αλλά αυτό σημαίνει ότι όταν η πλευρά επιλεγεί ως μονάδα μήκους, η διαγώνιος δεν μπορεί να μετρηθεί. Το μήκος της δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί ούτε με ακέραιο αριθμό ούτε με κλάσμα. Στο πεδίο των αριθμών, η εξίσωση $x^2=2$, δεν μπορεί να επιλυθεί, όπως επίσης και στο πεδίο των λόγων των αριθμών. Επομένως πρέπει να περάσουμε από το πεδίο των αριθμών σε εκείνο των γεωμετρικών μεγεθών. Είναι επομένως η λογική αναγκαιότητα, όχι η απλή απόλαυση του ορατού, εκείνη που υποχρέωσε τους Πυθαγορείους να μετατρέψουν την άλγεβρα σε γεωμετρική μορφή (B.L.Van Der Vaerden. Η αφύπνιση της επιστήμης) [28].

2.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ-ΠΛΑΤΩΝΑΣ

Τα μαθηματικά, ή τουλάχιστον η γεωμετρία, παρέχει ένα κατ' ευθείαν παράδειγμα του κενού μεταξύ του ατελούς υλικού κόσμου γύρω μας και του καθαρού, ιδεώδους, και τέλει κόσμου των ιδεών. Από την εποχή πριν τον Πλάτωνα και μέχρι σήμερα είχαμε τελείως αυστηρούς ορισμούς για την ευθεία γραμμή, τον κύκλο και τα λοιπά, αλλά ο φυσικός κόσμος δεν περιέχει τέλει ευθείες γραμμές χωρίς πλάτος, ούτε και τέλει κύκλους, ή τουλάχιστον κάποιον που να μπορούμε να δούμε. Ίσως ευθείες χωρίς πλάτος και τέλει κύκλοι, και τα παρόμοια, να είναι μέρος ενός φυσικού χώρου (ή χωροχρόνου) που όλοι καταλαμβάνουμε, αλλά, ακόμα και έτσι, δεν τα συναντούμε ως τέτοια, με οιονδήποτε φυσικό τρόπο. Έτσι, τι μελετάμε στη γεωμετρία και πως το μελετάμε; Για να εξηγήσει το προφανές, ο Πλάτωνας πίστευε ότι τα θεωρήματα της γεωμετρίας είναι αντικειμενικά αληθή ή ψευδή, ανεξαρτήτως του νου, της γλώσσας και λοιπών χαρακτηριστικών των μαθηματικών (Stewart Shapiro) [11].

Κατά τον **Shapiro**, σε όλες τις περιόδους και σε όλες τις ερμηνείες ο κόσμος της γεωμετρίας του Πλάτωνα είναι χωρισμένος από τον φυσικό κόσμο και η γεωμετρική γνώση είναι χωρισμένη από την αισθητηριακή κατανόηση. Η γεωμετρική γνώση αποκτάται με την καθαρή σκέψη, ή με ανάμνηση της παρελθούσας εξοικείωσης μας με τον γεωμετρικό κόσμο. Στην Πολιτεία ο Πλάτωνας, στο εδάφιο [d] (Σελίδα 495-501.N.M. Σκουτερόπουλος) [12], διαιρεί μίαν ευθεία σε δύο άνισα τμήματα. Στο ένα μέρος βρίσκεται το τμήμα του ορατού γένους και στο άλλο το τμήμα του νοητού. Στη συνέχεια διαιρεί κάθε ένα από τα δύο μέρη σε δύο τμήματα κατά την αυτή αναλογία και προκύπτει η σχέση ως προς την σαφήνεια και την ασάφεια. Στο τμήμα του ορατού [e] το ένα κομμάτι θα αντιστοιχεί στις εικόνες – και λέγοντας εικόνες εννοεί πρώτον τις [510a] σκιές, έπειτα τα είδωλα των πραγμάτων, όπως καθρεπτίζονται στο νερό και στις συμπαγείς λείες και γυαλιστερές επιφάνειες, επίσης καθετί παρόμοιο.

Το άλλο κομμάτι αντιστοιχεί σε εκείνο του οποίου τούτο εδώ το κομμάτι αποτελεί ένα είδωλο, δηλαδή στα έμβια όντα γύρω μας, σε καθετί φυσικό και σε όλα τα ανθρώπινα κατασκευάσματα. Το αντίθετο κομμάτι που αντιστοιχεί στα ομοιώματα σχετίζεται με το κομμάτι που αντιστοιχεί στα πρότυπα όπως ακριβώς σχετίζεται το αντικείμενο της γνώμης με το αντικείμενο της γνώσης.

Κατά τον Πλάτωνα όσοι ασχολούνται με την γεωμετρία και την αριθμητική και τις συγγενικές επιστήμες: προϋποθέτουν τον περιττό και τον άρτιο, τα γεωμετρικά σχήματα, τα τρία είδη γωνιών και άλλα παρόμοια σε κάθε έρευνά τους. Και πάνω σε αυτά βασίζουν τις αποδείξεις τους, χωρίς να αισθάνονται υποχρεωμένοι να δώσουν στον εαυτό τους αλλά και στους άλλους κάποια εξήγηση για αυτά τα πράγματα [d], αφού κατά τη γνώμη τους αυτά τα πράγματα είναι προφανή, και με αυτά ως αφετηρία διεκπεραιώνουν τα υπόλοιπα αποδεικτικά βήματα για να καταλήξουν, με λογική ακολουθία, σε εκείνο το οποίο είχαν αρχικά ορίσει ως αντικείμενο της έρευνάς τους.

Πρέπει να δεχτούμε ότι αντίστοιχα σ' αυτά τα τέσσερα τμήματα υπάρχουν μέσα στη ψυχή τέσσερις καταστάσεις: η νόηση, αντίστοιχη στο ανώτερο τμήμα, η διάνοια στο αμέσως πιο κάτω, στο τρίτο η πίστη και, στο τελευταίο, η εικασία. Η κατάταξη αυτών των τεσσάρων πρέπει να γίνει με μίαν αναλογία τέτοια ώστε ο βαθμός της σαφήνιάς τους να ανταποκρίνεται στο βαθμό που τα υποκείμενά τους έχουν μερτικό στην αλήθεια και το ον.

Οι προτάσεις της γεωμετρίας αφορούν σημεία που δεν έχουν διάσταση, τέλειες ευθείες γραμμές που δεν έχουν πλάτος και τέλειους κύκλους. Ο φυσικός κόσμος δεν περιέχει τέτοια αντικείμενα, και δεν βλέπουμε ευκλείδεια σημεία, γραμμές και κύκλους. Επομένως η γεωμετρία δεν αφορά κάτι από τον φυσικό κόσμο και δεν κατανοούμε τα γεωμετρικά αντικείμενα μέσω των αισθήσεων. Τα φυσικά αντικείμενα ή κάποια από αυτά προσεγγίζουν τα ευκλείδεια σχήματα. Η περιφέρεια ενός πορτοκαλιού και ένας προσεκτικά σχεδιασμένος κύκλος στο χαρτί μοιάζουν με ευκλείδειους κύκλους, του πορτοκαλιού λιγότερο και του ζωγραφισμένου κύκλου περισσότερο. Όμως τα γεωμετρικά θεωρήματα δεν ισχύουν για αυτές τις

προσεγγίσεις. Για παράδειγμα το θεώρημα ότι η εφαπτόμενη και ο κύκλος έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο. Ακόμα και αν σχεδιάσουμε ένα κύκλο και μια εφαπτομένη ευθεία γραμμή, χρησιμοποιώντας ακριβή και μοντέρνα εργαλεία ή ένα υψηλής ανάλυσης εκτυπωτή θα δούμε ότι η γραμμή επικαλύπτεται από το σύνορο του κύκλου σε μια μικρή περιοχή, και όχι σε ένα μοναδικό σημείο. Φυσικά δεν αναιρείται το προηγούμενο θεώρημα. Η εξήγηση του Πλάτωνα γίνεται εύκολα κατανοητή. Οι ζωγραφισμένοι κύκλοι και οι γραμμές είναι φτωχές προσεγγίσεις του πραγματικού Κύκλου και της πραγματικής Ευθείας, τα οποία κατανοούμε με το νου. Το μικρό σύνορο στο οποίο επικαλύπτονται τα ζωγραφισμένα σχήματα είναι μια ανεπαρκής προσέγγιση ενός σημείου.

Ο Πλάτωνας στη περικοπή από το βιβλίο 7 της Πολιτείας αναφέρει ότι η επιστήμη της [γεωμετρίας] βρίσκεται σε πλήρη αντίφαση με την ορολογία που χρησιμοποιούν αυτοί που την έχουν επάγγελμά τους...[H] οι όροι δηλαδή που χρησιμοποιούν είναι πολύ γελοίοι αν και αναγκαίοι, καθότι λένε τετραγωνίζω, προεκτείνω και προσθέτω, σαν να τα έκαναν αυτά πραγματικά και ένεκα αυτής της πράξης, να δημιουργούν αυτή την ορολογία... ενώ στη πραγματικότητα αυτό το μάθημα είναι αφιερωμένο στη καθαρή γνώση...

Εάν ο Πλάτωνας έχει δίκιο ότι η γεωμετρία ασχολείται με αιώνια και αναλλοίωτα πράγματα στον κόσμο του Είναι, τότε δεν θα υπήρχε δυναμική γλώσσα στη γεωμετρία. Ένας Πλατωνιστής δύσκολα θα κατανοήσει τις κατασκευές στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Σύμφωνα με τον Πρόκλο το «πώς μπορούμε να εισάγουμε την κίνηση σε ακίνητα γεωμετρικά αντικείμενα», απασχόλησε για γενιές, πολλές από τις μεγαλύτερες διάνοιες της Ακαδημίας του Πλάτωνα.

Ένα παρόμοιο ζήτημα αφορά τα γεωμετρικά σχήματα που συνήθως συνοδεύουν τις γεωμετρικές αποδείξεις. Η εξήγηση του Πλάτωνα μπορεί να είναι ότι το γεωμετρικό σχήμα με κάποιον τρόπο βοηθά το νου να συλλάβει τον αιώνιο και αναλλοίωτο γεωμετρικό κόσμο, ή μας βοηθά στην ανάμνηση του κόσμου του Είναι. Ωστόσο μπορεί κανείς να αναρωτηθεί πως είναι αυτό δυνατόν, εφόσον ο κόσμος του Είναι δεν είναι προσεγγίσιμος μέσω των αισθήσεων. Στην Πολιτεία (510d) ο Πλάτωνας γράφει:

...Οπότε θα γνωρίζεις ότι [οι γεωμέτρες] χρησιμοποιούν και τα ορατά είδη (δηλαδή τα σχήματα και φτιάχνουν την ορολογία τους για αυτά, ενώ οι συλλογισμοί τους δεν αφορούν αυτά αλλά εκείνα τα οποία απεικονίζουν, γιατί για το τετράγωνο αυτό καθεαυτό και για τη διαγώνιο του καθεαυτή και όχι για αυτήν που ζωγραφίζουν, των οποίων υπάρχουν και σκιές και εικόνες στο νερό, αυτά μεν τα χρησιμοποιούν ως εικόνες. Ενώ δε αναζητούν δημιουργικά αυτά, προσπαθούν να δουν εκείνα για τα οποία δεν υπάρχει άλλος τρόπος να τα δεις παρά μόνο αυτός της καθαρής νόησης. Εδώ έχουμε την ίδια μεταφορά όπως στη χωρισμένη γραμμή: τις αντανakλάσεις και τις εικόνες. Υποθέτω ότι ο έμπειρος μαθηματικός δεν έχει ανάγκη από σχήματα, καθόσον είναι σε άμεση επαφή με τον γεωμετρικό κόσμο.

Σύμφωνα με την Πλατωνική οντολογία η μαθηματική γνώση είναι γενικά ανεξάρτητη από την αισθητηριακή εμπειρία. Η γεωμετρία δεν ασχολείται με φυσικά αντικείμενα στο φυσικό χώρο.

Αυτή η άποψη αφήνει αναπάντητο το πρόβλημα της εξήγησης του γιατί η γεωμετρία έχει εφαρμογές στο φυσικό κόσμο, έστω και κατά προσέγγιση.

Στον Τίμαιο, ο Πλάτωνας παρέχει μια λεπτομερή αλλά υποθετική ιστορία για το πώς ο κόσμος κατασκευάστηκε γεωμετρικά, από τα πέντε επονομαζόμενα πλατωνικά στερεά: τετράεδρο (πυραμίδα), οκτάεδρο, εξάεδρο (κύβος), εικοσάεδρο, δωδεκάεδρο.

2.3 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ – ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ

Τα περισσότερα από όσα λέει ο Αριστοτέλης σχετικά με τα μαθηματικά είναι μια πολεμική εναντίον των απόψεων του Πλάτωνα, και δεν υπάρχει ομοφωνία μεταξύ των ειδικών για τα διασκορπισμένα θετικά σχόλια που έκανε. Παρ' όλα αυτά, αποτελεί τουλάχιστον την κύρια κατεύθυνση μιας (ή περισσότερων) πραγματεύσεων των μαθηματικών που είναι προάγγελος κάποιων σύγχρονων στοχαστών. Η φιλοσοφία του Αριστοτέλη περιέχει σπέρματα εμπειρισμού (Stewart Shapiro) [11].

Σύμφωνα με τον **Shapiro** η φιλοσοφία του Πλάτωνα για τα μαθηματικά είναι συνδεδεμένη με την πραγματεία του περί των Μορφών ως αιώνιων, αναλλοίωτων οντοτήτων στην περιοχή του Είναι.. Κατά παρόμοιο τρόπο η φιλοσοφία του Αριστοτέλη για τα μαθηματικά είναι συνδεδεμένη με την απόρριψη του ξεχωριστού αυτού κόσμου του Είναι. Ο Αριστοτέλης δεχόταν την ύπαρξη των Μορφών. Η Ομορφιά, για παράδειγμα, είναι αυτό που όλα τα όμορφα πράγματα έχουν κοινό, και όχι πάνω και πέρα από αυτά τα όμορφα πράγματα. Εάν καταστραφούν όλα τα όμορφα πράγματα, θα καταστρέψει την Ομορφιά καθεαυτή – γιατί δεν θα μείνει τίποτα μέσω του οποίου να υπάρχει η Ομορφιά.

Στα Μεταφυσικά, Βιβλίο Μ, 1076 (η μετάφραση που χρησιμοποιείται εδώ και παρακάτω είναι του Annas 1976) [13] ο Αριστοτέλης αναφέρει:

«Εάν τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν, πρέπει να υπάρχουν σε αντιληπτά αντικείμενα όπως λένε μερικοί, ή σε ξεχωριστά από τα αντιληπτά αντικείμενα (μερικοί το λένε και αυτό), ή εάν δεν ισχύουν αυτά, τότε δεν υπάρχουν καθόλου ή υπάρχουν με κάποιον άλλο τρόπο. Επομένως η διαμάχη θα είναι όχι στο εάν υπάρχουν, αλλά με ποιον τρόπο υπάρχουν».

Ο Αριστοτέλης πιστεύει ότι τα μαθηματικά αντικείμενα «ενυπάρχουν στα αισθητά αντικείμενα», και όχι ξέχωρα από αυτά. Το ζήτημα κάπως φωτίζεται από μια

συζήτηση στα Φυσικά Β σχετικά με το τι είναι χαρακτηριστικό στη μαθηματική μεθοδολογία:

«Το επόμενο σημείο που θα θεωρήσουμε είναι σε τι διαφέρει ο μαθηματικός από το φυσικό. Προφανώς τα φυσικά σώματα περιέχουν επιφάνειες, όγκους, γραμμές και σημεία και αυτά είναι το θεματικό αντικείμενο των μαθηματικών ... Ο μαθηματικός τώρα, παρόλο που ασχολείται με αυτά τα πράγματα (επιφάνειες, όγκους, μήκη, σημεία), δεν τα θεωρεί ως τα όρια ενός φυσικού σώματος ούτε μελετά τις ιδιότητες που αναφέρονται ως ιδιότητες τέτοιων σωμάτων. Γι' αυτό τις ξεχωρίζει, γιατί στη σκέψη είναι διαχωρίσιμες από τη κίνηση και δεν υπάρχει καμία διαφορά ούτε κάποιος λάθος αν διαχωριστούν ... Ενώ η γεωμετρία ερευνά φυσικά μήκη, αλλά όχι ως φυσικά, η οπτική ερευνά μαθηματικά μήκη, όχι ως μαθηματικά» (193—194α).

Το βιβλίο Μ των Μεταφυσικών περιέχει παρόμοιες απόψεις: *Είναι δυνατόν να υπάρχουν δηλώσεις και αποδείξεις σχετικά με αισθητά μεγέθη, αλλά όχι ως αισθητά αλλά ως κάποιου συγκεκριμένου είδους ... Στην περίπτωση των κινούμενων αντικειμένων θα υπάρχουν δηλώσεις και τομείς γνώσης σχετικά με αυτά, όχι ως κινητά, αλλά απλά ως σώματα και πάλι απλά ως επίπεδα και απλά ως μήκη, ως διαιρετά και ως μη διαιρετά, αλλά με θέση ... Είναι επίσης αλήθεια να λέμε, χωρίς επιφύλαξη, ότι τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν και είναι όπως έχει ειπωθεί ότι είναι ... Οι μαθηματικοί κλάδοι της γνώσης δεν θα είναι για τα αισθητά αντικείμενα απλώς επειδή τα αντικείμενα τους συμβαίνει να είναι αισθητά, ... αλλά ούτε θα είναι σχετικά με άλλα ξεχωριστά αντικείμενα πάνω από αυτά ... Έτσι αν κανείς προϋποθέτει αντικείμενα ξεχωριστά από αυτά που ανήκουν συμπτωματικά σε αυτά και τα μελετά ως τέτοια, δεν θα τα καταφέρει να μιλά, λόγω αυτού, λανθασμένα περισσότερο από έναν που ζωγραφίζει ένα πόδι στο έδαφος και το ονομάζει ένα μακρύ πόδι, όταν δεν είναι ένα μακρύ πόδι ... Ένας άνδρας είναι ένας και αδιαίρετος ως άνδρας, και ο αριθμητικός υποθέτει ότι αυτός είναι αδιαίρετος και μελετά ότι συμπτωματικά εμπίπτει στον άνδρα ως αδιαίρετο· ο γεωμέτρης από την άλλη δεν τον μελετά ούτε ως άνδρα ούτε ως αδιαίρετο, αλλά ως ένα στερεό αντικείμενο ... Γι' αυτό οι γεωμέτρες μιλούν σωστά: μιλούν για υπάρχοντα πράγματα και πραγματικά υπάρχουν ... (1077ο – 1078α).*

Τα φυσικά αντικείμενα, με κάποιον τρόπο, κυριολεκτικά περιέχουν τις επιφάνειες τις γραμμές και τα σημεία που μελετούνται στα μαθηματικά.

Ο γεωμέτρης, ωστόσο, δεν μεταχειρίζεται αυτές τις επιφάνειες, για παράδειγμα, ως τις επιφάνειες των φυσικών αντικειμένων. Νοητικά μπορεί κανείς να διαχωρίσει επιφάνειες, γραμμές και σημεία από τα φυσικά αντικείμενα που τα περιέχουν. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εστιάσουμε στις επιφάνειες, στις γραμμές και στα επίπεδα, και να αγνοήσουμε το γεγονός ότι αυτά είναι φυσικά αντικείμενα. Αυτός ο διαχωρισμός είναι ψυχολογικός, ή ίσως λογικός. Αφορά τον τρόπο με το οποίο σκεπτόμαστε τα φυσικά αντικείμενα.

Ο Νικόλαος Κ. Αγγελάκης (2008) [14] στην εργασία του «Η Θεωρία της Γνώσης κατά τον Αριστοτέλη» αναφέρεται στις δύο πηγές της γνώσης την αισθητικότητα και τον νου.

[..]. Η γνώση προκύπτει από την δυναμική σχέση αλληλενέργειας, η οποία αναπτύσσεται ανάμεσα στα αντικείμενα του εξωτερικού κόσμου και τις δύο γνωστικές δυνάμεις της ανθρώπινης ψυχής, την αισθητικότητα και τον νου ή λόγο. [..]. Συνεπώς, η γνώση στο σύνολό της θα μπορούσε να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της ενεργοποίησης των δύο γνωστικών δυνάμεων της ψυχής, της αισθητικότητας και του νου, ενεργοποίηση η οποία προκαλείται από την επίδραση κυρίως των αντικειμένων του εξωτερικού κόσμου πάνω στις δύο γνωστικές δυνάμεις της ψυχής ή συνείδησης.

Και συνεχίζει την ανάλυση του, λέγοντας:

Οι αισθητές εικόνες, άυλες στην ουσία τους και αντικαθιστώντας τα αισθητά αντικείμενα, μεταφέρουν πληροφορίες στο εσωτερικό της συνείδησης. Θα λέγαμε, λοιπόν, ότι οι αισθητές εικόνες είναι φορείς πληροφοριών. Οι πληροφορίες αυτές είναι δύο ειδών. Κατ' αρχήν, με τις πέντε αισθήσεις βλέπουμε, ακούμε, αγγίζουμε, γευόμαστε και οσφραινόμαστε. Οι αισθητές εικόνες της όρασης, της ακοής και των άλλων αισθήσεων μας πληροφορούν πρώτα απ' όλα για την ύπαρξη των αντικειμένων. [...]. Εκτός, όμως, από την ύπαρξη του αντικειμένου, οι αισθήσεις μας πληροφορούν και για ένα σύνολο από ιδιότητες, όπως το χρώμα, τον ήχο την σκληρότητα, και ούτω καθεξής. Γνωρίζουμε αν το αντικείμενο είναι λευκό ή μαύρο, σκληρό ή μαλακό, γλυκό ή πικρό και ούτω καθεξής. Ταυτόχρονα, η επαφή με τ' αντικείμενα μας προξενεί ευχάριστα αισθήματα χαράς ή δυσάρεστα αισθήματα λύπης. Η αισθητικότητα, λοιπόν, εκτός από τις εικόνες φορείς πληροφοριών, προκαλεί και εικόνες, που είναι φορείς αισθημάτων χαράς ή λύπης. Και στις δύο περιπτώσεις, η γνώση συντελείται διαμέσου των αισθητών εικόνων, που παράγονται από τις αισθήσεις.

Βασιζόμενοι στην παραπάνω ανάλυση, θα μπορούσαμε να συντάξουμε μια αντιστοιχία εννοιών. Θα μπορούσαμε να κάνουμε την παραδοχή, πως στην γεωμετρία, οι άυλες αισθητές εικόνες, είναι τα κάθε είδους γεωμετρικά σχήματα, έτσι όπως τα αντιλαμβανόμαστε εποπτικά, σχήματα τα οποία αντικαθιστούν τα αισθητά αντικείμενα, και που φυσικά μεταφέρουν πληροφορίες στο εσωτερικό της συνείδησης. Αυτές οι εικόνες, φορείς των ιδιοτήτων των αντικειμένων του εξωτερικού κόσμου, είναι ικανές, να οδηγήσουν τον νου, στην κατασκευή παραγωγικών συλλογισμών και επομένως γεωμετρικής απόδειξης.

Ο Αριστοτέλης σημειώνει ότι το αίτημα για την ύπαρξη γεωμετρικών αντικειμένων είναι ακίνδυνο, αφού η πραγματική φυσική σφαίρα έχει επίσης όλες αυτές τις ιδιότητες που αποδίδουμε στην υποθετικά υπάρχουσα σφαίρα. Αυστηρά και κυριολεκτικά, ο γεωμέτρης μιλά μόνο για φυσικά αντικείμενα (μολονότι όχι 'ως φυσικά'). Με άλλα λόγια, τα αντικείμενα της γεωμετρίας είναι χρήσιμα αποκυήματα της φαντασίας. Ας υποθέσουμε ότι ένας γεωμέτρης λέει, «Ἐστω Α ένα ισοσκελές τρίγωνο». Αποδίδει τότε στο Α μόνο ιδιότητες που έπονται από το ότι είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο. Οι μαθηματικοί πολλές φορές λένε ότι το Α είναι ένα 'αυθαίρετο' ισοσκελές τρίγωνο, αλλά όλοι εννοούν ότι το Α μπορεί να είναι οποιοδήποτε τέτοιο τρίγωνο. Κατ' αναλογία με τη παρούσα θεώρηση, είναι μια αβλαβής μυθοπλασία να λέμε ότι το Α είναι ένα ειδικό αντικείμενο που έχει όλες τις ιδιότητες κοινές σ' όλα τα ισοσκελή τρίγωνα.

Ο μαθηματικός μελετά πραγματικές ιδιότητες των πραγματικών φυσικών αντικειμένων. Δεν είναι ανάγκη να αξιώσουμε ένα δεσμό μεταξύ του μαθηματικού και του φυσικού κόσμου, αφού δεν ασχολούμαστε με δύο διαφορετικούς κοσμούς. Αυτό είναι ένας σπόρος εμπειρισμού, ή τουλάχιστον συγκεκριμένες μορφές του.

Αφού η γεωμετρία ασχολείται με τα φυσικά αντικείμενα ή με κατ' ευθείαν αφαιρέσεις από τα φυσικά αντικείμενα, είναι φυσική και η αναφορά στον «τετραγωνισμό και στη μετακίνηση και την επίθεση ενός σχήματος σε ένα άλλο και στη πρόσθεση και τα παρόμοια».

Βεβαίως «τετραγωνίζουμε, εφαρμόζουμε και προσθέτουμε» φυσικά αντικείμενα, και αυτό μεταφέρεται σχεδόν κυριολεκτικά στη γεωμετρία. Ας θεωρήσουμε την αρχή του Ευκλείδη ότι μεταξύ δύο σημείων μπορεί κανείς να τραβήξει μια ευθεία γραμμή. Για τον Πλάτωνα, αυτή είναι μια παραποιημένη δήλωση για την ύπαρξη των Γραμμών. Ο Αριστοτέλης μπορούσε να χειριστεί την αρχή κυριολεκτικά ως μια δήλωση εγκρίσεων, που υποδηλώνουν τι μπορεί κανείς να κάνει.

Υπάρχει ένα πιθανό πρόβλημα που αφορά την ασυμφωνία μεταξύ των πραγματικών φυσικών αντικειμένων και των γεωμετρικών αντικειμένων ή των γεωμετρικών ιδιοτήτων. Αυτό, φυσικά, είναι μια στιγμή της ασυμφωνίας μεταξύ αντικειμένων και Μορφών η οποία εμπνέει τον πλατωνισμό. Θεωρούμε την μπρούντζινη σφαίρα και τον κύβο από πάγο. Η σφαίρα θα περιέχει ατέλειες και η επιφάνεια του πάγου οπωσδήποτε δεν είναι τελείως επίπεδη. Θυμηθείτε το θεώρημα ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου τέμνει τον κύκλο σε ένα μόνο σημείο. Το θεώρημα είναι λάθος αναφορικά με πραγματικούς κύκλους και πραγματικές γραμμές.

Αρα τι μπορούμε να συμπεράνουμε από τον ισχυρισμό του Αριστοτέλη ότι τα «μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν και είναι έτσι όπως έχει ειπωθεί ότι είναι», και τη δήλωση ότι «οι γεωμέτρες μιλούν σωστά»;

Με την ερμηνεία του αφαιρετικού, θέλουμε να καταλήξουμε σε αντικείμενα τα οποία συμφωνούν ακριβώς με τις μαθηματικές περιγραφές των σφαιρών, επιφανειών και γραμμών. Για να το καταφέρουμε αυτό, πρέπει να αφαιρέσουμε όλες τις ατέλειες από τα φυσικά δείγματα, όπως προεξοχές στην επιφάνεια του κύβου. Δηλαδή δεν αφαιρούμε μόνο τον μπρούτζο, αλλά και τις ατέλειες, για να φτάσουμε σε μια τέλεια σφαίρα. Εάν αυτή η περαιτέρω αφαίρεση επιτρέπεται, τότε αναρωτιέται κανείς σε τι διαφέρει η άποψη του Αριστοτέλη από του Πλάτωνα. Με ποια έννοια οι τελικές αφαιρέσεις σχημάτων είναι ακόμα μέρος του φυσικού κόσμου; Πώς οι τέλειες Μορφές υπάρχουν μέσα στα ατελή φυσικά αντικείμενα; Φαίνεται να έχουμε εισέλθει ξανά στον πλατωνικό κόσμο του Είναι, από την πίσω πόρτα, ή τουλάχιστον συναντούμε τα κύρια προβλήματα του κόσμου του Είναι. Για να λύσει το πρόβλημα της ασυμφωνίας, ο Αριστοτέλης θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι υπάρχουν φυσικά αντικείμενα που δεν έχουν ατέλειες.

Με άλλα λόγια, υπάρχουν φυσικές πραγματικές τέλειες σφαίρες, κύβοι με τελείως επίπεδες επιφάνειες και τελείως ευθείες ακμές, τέλεια τρίγωνα και τα λοιπά. Ο Αριστοτέλης πράγματι πίστευε ότι τα ουράνια σώματα είναι (τέλειες) σφαίρες και οι τροχιές τους είναι σφαιρικές. Ωστόσο, οι ουρανοί δεν μας δίνουν αρκετά αντικείμενα για μια πλούσια γεωμετρία, και αυτή η υπόδειξη δεν ισχύει για την εφαρμογή της γεωμετρίας εδώ, στον κόσμο κάτω από τη σελήνη. Μπορεί να είναι αρκετό για τον

Αριστοτέλη να πιστεύει ότι είναι δυνατόν να υπάρχουν τέλειες σφαίρες, γραμμές, επίπεδα και άλλα, έστω και αν δεν υπάρχει κανένα πραγματικό αντικείμενο (ή υπάρχουν λίγα) για να μελετήσει ο μαθηματικός. Πολλές από τις γεωμετρικές αποδείξεις προχωρούν μέσω κατασκευής. Ζητείται συνήθως από τον αναγνώστη να παραγάγει μια συγκεκριμένη ευθεία γραμμή ή έναν κύκλο. Σύμφωνα με τη δεύτερη ερμηνεία, ο Αριστοτέλης πρέπει να επιτρέψει ώστε αυτή η κατασκευή να είναι εφικτή -στον φυσικό κόσμο χρησιμοποιώντας μόνο φυσικά εργαλεία. Ομοίως στην αριθμητική, η αρχή του επομένου βεβαιώνεται όταν σημειωθεί ότι για κάθε δυνατή συλλογή από φυσικά αντικείμενα θα μπορούσε να υπάρχει μια συλλογή με ακόμα ένα αντικείμενο.

Ο Αριστοτέλης θα μπορούσε να επισημάνει ότι η γεωμετρία εφαρμόζεται στον υλικό κόσμο στο βαθμό που τα εν λόγω αντικείμενα προσεγγίζουν τα τέλεια αντικείμενα που περιγράφονται στις μαθηματικές πραγματείες, αλλά αυτή η απάντηση είναι επίσης διαθέσιμη και για τον Πλάτωνα.

Θα μπορούσε κανείς να σκεφθεί τα τέλεια αντικείμενα της γεωμετρίας (και της αριθμητικής) ως μέρη του φυσικού χώρου, αλλά, όπως παραπάνω, αυτό θα έσπαγε τους δεσμούς με τα παρατηρούμενα αντικείμενα. Οι ιδανικοί κύκλοι και οι γραμμές δεν θα μπορούσαν να είναι 'μέσα' στα αντικείμενα που βλέπουμε.

Όπως σημειώθηκε, ο Αριστοτέλης μοιράζεται με τον εμπειρισμό έναν στενό δεσμό μεταξύ του θεματικού αντικειμένου των μαθηματικών και του φυσικού κόσμου. Τέτοιες απόψεις θα καταπόντιζαν τους κλάδους των μαθηματικών που δεν έχουν άμεση σύνδεση με το υλικό σύμπαν.

Κάνοντας λοιπόν μια γρήγορη, ανασκόπηση παρατηρούμε πως η έννοια της αισθητικότητας παρουσιάζεται στα πρωταρχικά στάδια, μιας συλλογιστικής διαδικασίας, η οποία ενδεχομένως να εξελιχθεί παραγωγικά και να οδηγήσει σε μια τυπική γεωμετρική απόδειξη και ουσιαστικά σε κατασκευή νέας γνώσης. Βασικό στοιχείο, η ενσυνείδητη προσέγγιση των ιδιοτήτων, όπως αυτές προσλαμβάνονται μέσα από μια διαισθητική ενόραση.

Αντίστοιχα, οι Tall D., Yevdokimov O., Koichu B., Whiteley W., Kondratieva M. & Cheng Y. H. (2012) [18], μιλάνε για την δόμηση της απόδειξης μέσα από τον μακροπρόθεσμο σχηματισμό κρυσταλλικών εννοιών που ωριμάζουν μέσα από την κατασκευή της ολοένα και πιο εξελιγμένης δομής γνώσης. Η δομή αυτή έχει τα εξής στάδια:

- Αντιληπτική αναγνώριση των φαινομένων, όπου τα αντικείμενα έχουν ταυτόχρονες ιδιότητες.
- Λεκτική περιγραφή των ιδιοτήτων, που συχνά συνδέονται με οπτικές ή συμβολικές παραστάσεις, ως αφετηρία προσδιορισμού ιδιοτήτων και σχέσεων.
- Ορισμός και Αφαίρεση, προς καθορισμό εννοιών που ανταποκρίνονται στον ορισμό ώστε να αναπτυχθούν κατάλληλες αρχές απόδειξης, και να συμπεράνουμε ότι μια ιδιότητα συνεπάγεται μια άλλη.
- Συνειδητοποίηση, ότι ορισμένες ιδιότητες είναι ισοδύναμες, έτσι ώστε η έννοια έχει πλέον συγκεκριμένη δομή που σχετίζεται με παραγωγική απόδειξη.
- Συνειδητοποίηση πως οι ιδιότητες αυτές είναι διαφορετικοί τρόποι έκφρασης μιας

υποκείμενης κρυστάλλινης έννοιας, και συνδέονται μεταξύ τους με παραγωγική απόδειξη.

Και στο θεωρητικό πλαίσιο των Tall et al. (2012) [18], βεβαιώνεται πως η κατασκευή παραγωγικής απόδειξης, σχετίζεται με την αλληλεπίδραση μεταξύ των πιο πάνω έξι σταδίων, όπου όμως στα πρωταρχικά βήματα, επισημαίνεται η ανάγκη, αναγνώρισης φαινομένων αντιληπτικά, καθώς και η λεκτική περιγραφή των ιδιοτήτων που έχουν συχνά ως αφετηρία οπτικές αναπαραστάσεις. Η αντίληψη των φαινομένων και των ιδιοτήτων τους, εμπεριέχει στοιχεία διαίσθησης, ενστίκτου, αισθητικότητας, αφού οι αντιληπτικές και γλωσσολογικές δομές πυροδοτούν ενδεχομένως εικόνες και συναισθήματα, που αποτελούν αφετηρία παραγωγικού συλλογισμού. Κάτι τέτοιο, είναι σαφές πως συντελείται σε μια γεωμετρική απόδειξη, αφού ο ρόλος της εποπτείας είναι πρωταρχικός.

Συνεχίζοντας, την θεωρητική προσέγγιση, υπάρχει η άποψη του Longo (2012) [19], ο οποίος στο άρθρο του Theorems as Constructive Visions, αναφέρεται με πολύ ιδιαίτερο τρόπο στο θέμα της διαίσθησης σχετικά με το πώς αυτή συνδέεται και λειτουργεί με την δόμηση της ευκλείδειας γεωμετρικής απόδειξης. Ο τίτλος και μόνο του άρθρου του, καταδεικνύει εμφανώς, την άποψη του σχετικά με τη εμπλοκή των αισθήσεων ώστε να οδηγηθούμε σε κατασκευή θεωρημάτων μέσα από κατασκευαστικές οπτικές.

Οι Kidron et al. (2014) [16], αναφέρονται εκτενώς στο άρθρο τους, στην ιδιαίτερη στιγμή του Van Der Waarden, την οποία και περιγράφει ο ίδιος σε ένα μικρό σημειωματάριο, το λεγόμενο Einfall, την στιγμή δηλαδή, που κατά την διάρκεια μια απόδειξης, αντιλαμβανόταν κάτι στιγμιαία, έχοντας έντονη αίσθηση πως είναι σωστό, χωρίς να υπάρχει τυπική εξήγηση, που όμως ως ισχυρό συναίσθημα βεβαιότητας αληθείας, τον οδηγούσε στην προσπάθεια δόμησης τυπικής απόδειξης.

Ο Husserl [90] αναφέρεται σε αυτό που ονομάζει Wesensschau (όρος της μοντέρνας φιλοσοφίας, ιδιαίτερα της φαινομενολογίας) και που αποτελείται από τα εξής στάδια: Μια άμεσα δοσμένη υλική εικόνα, αντιλαμβανόμενη αισθητηριακά, η οποία μορφοποιείται μέσω της νόησης και που στην συνέχεια διαχωρίζονται οι μορφές από την ύλη, για να καταλήξει σε αυτό που ονομάζει ουσίες και που είναι αντικείμενο της εποπτείας. Το Wesensschau δηλώνει πολύ έντονα πως η μετάβαση στο νοητό μέρος της ψυχής γίνεται αισθητηριακά, και ουσιαστικά μέσω αισθητηριακής αντίληψης. Όλες οι υπόλοιπες διαδικασίες, έχουν ως σκοπό, να κρατήσουν πια τις βασικές ιδιότητες της υλικής εικόνας, οι οποίες θα συνθέσουν την άυλη εκείνη εικόνα, που η εποπτική της συνειδητή θεώρηση, εδραιώνει την εικόνα ως βεβαιότητα ή όχι.

Έχοντας λοιπόν μπροστά μας, ένα γεωμετρικό πρόβλημα, αντιλαμβανόμαστε πως με βεβαιότητα, υπάρχει ένα σχήμα. Το σχήμα αυτό, δεν είναι τίποτα άλλο, από μια πρώτη υλική εικόνα, η οποία είναι συνειδητά αντιληπτή μέσω των αισθήσεων και συγκεκριμένα της όρασης. Ουσιαστικά, το ερέθισμα του σχήματος πυροδοτεί, διάφορες νοητικές διαδικασίες.

Πριν μπούμε σε αυτές, αναγνωρίζουμε σε αυτό το σημείο, τα θεωρητικά πλαίσια του Αριστοτέλη, όπως αυτά αναφέρονται από τους Αγγελή (2008) [14], Hintikka (2003) [91] αλλά και από τους Θωμαΐδης et al (2006) [15], το θεωρητικό

Wesensschau του Husserl [90], αλλά και το πρώτο στάδιο των κρυστάλλινων εννοιών του Tall et al (2012) [18], σχετικά με την αντιληπτική αναγνώριση των φαινομένων, όπου τα αντικείμενα έχουν ταυτόχρονες ιδιότητες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΔΕΚΑΤΟΣ ΕΒΔΟΜΟΣ ΑΙΩΝΑΣ:

ΑΠΟ ΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

3.1 ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΣΤΟΝ ΔΕΚΑΤΟ ΕΒΔΟΜΟ ΑΙΩΝΑ

ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΙΚΟΝΕΣ ΣΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

Όπως αναφέρει η E. Barbin (Explanation and Proof in Mathematics Philosophical and Educational Perspectives, Gilla Hanna) [3] τον δέκατο έβδομο αιώνα σημειώθηκε μια μεγάλη αλλαγή στην έννοια της απόδειξης και μια γενικευμένη δυσaréσκεια ως προς τις γεωμετρικές αποδείξεις των Ελλήνων. Οι Arnauld & Nicole απarίθμησαν τις αντιρρήσεις τους για τον Ευκλείδη στο βιβλίο τους «The Logic or the Art of Thinking» (1662), γράφοντας ότι ο Ευκλείδης ανησυχούσε περισσότερο με τη βεβαιότητα παρά με την απόδειξη, και ακόμη περισσότερο, ενδιαφερόταν να πείσει το μυαλό παρά να το διαφωτίσει.

Αυτή η κριτική είχε ως συνέπεια την ανάπτυξη νέων μεθόδων από τους γεωμέτρες του δέκατου έβδομου αιώνα, και συγκεκριμένα η μέθοδος του Descartes να εξηγήσει την γεωμετρία με τη βοήθεια της άλγεβρας. Όταν ο Descartes παρουσίασε τη χρήση της άλγεβρας στο βιβλίο του Geometry (1637), δεν είχε πρόθεση να ξαναγράψει τη γεωμετρία του Ευκλείδη. Ωστόσο η μέθοδος του Descartes δημιουργούσε σύνθετες ιδέες που ήταν βασισμένες σε απλές. Ο Arnauld θεώρησε ότι αυτό είναι αντίθετο με τη «φυσιολογική ροή» της απόδειξης της πρότασης 2 του τέταρτου βιβλίου των Στοιχείων(*), η οποία είναι μια πρόταση για απλές γραμμές, αλλά χρησιμοποιούνται τρίγωνα που είναι σύνθετες έννοιες.

(*) (Από το βιβλίο του E. Σταμάτη (1953), Ευκλείδου Γεωμετρία, Τόμος II [92].

Ἐάν εἰς τρίγωνον ἀχθῇ εὐθεῖα τις παράλληλος πρὸς μίαν τῶν πλευρῶν, θὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα· καὶ ἐάν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τμηθῶσιν εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα ἢ ἐνοῦσα τὰ σημεῖα τῶν τομῶν θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Συνεπώς άλλαξε τη λογική ροή των προτάσεων του Ευκλείδη με μια δική του, που βασιζόταν στην Καρτεσιανή μέθοδο στο βιβλίο του «New Elements of Geometry» (Arnauld 1667). Σ' αυτό το βιβλίο τα σύνθετα πράγματα προκύπτουν αφαιρετικά από απλά χρησιμοποιώντας απλές σχέσεις. Ως απλά πράγματα θεωρούνται οι ευθείες, ως σύνθετα πράγματα, τα τρίγωνα και οι κύκλοι και ως απλές σχέσεις οι τέσσερις πράξεις της αριθμητικής και η εξαγωγή των ριζών.

Λίγα χρόνια αργότερα, ο Lamy δημοσίευσε τα δικά του Elements of Geometry, ο οποίος ακολούθησε τη μέθοδο του Descartes .

Η E. Barbin εξέτασε τη μεταχείριση των μεγεθών (μήκος, εμβαδό, όγκος) σ' αυτά τα βιβλία. Μια σημαντική συμβολή της γεωμετρίας του Descartes είναι η «αριθμητικοποίηση των μεγεθών», που επιτυγχάνεται με την εισαγωγή της έννοιας της μονάδας στη γεωμετρία. Αυτό καθιστά δυνατό να εκτελούνται υπολογισμοί με μεγέθη δίχως την ανάγκη να ερμηνεύονται άμεσα ως αριθμοί. Ένα βασικό ερώτημα που προκύπτει είναι πως αυτοί οι υπολογισμοί με μεγέθη , παράγουν μια απόδειξη η οποία φωτίζει, και δεν αναπαράγουν τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται στην Ευκλείδεια γεωμετρία.

Για να συγκριθούν τα Στοιχεία με Arnauld και Lamy, θα αναλυθούν παρακάτω πέντε αποδείξεις του Θαλή με βάση την αναλογία. Η παρακάτω πρόταση δίνεται σε δύο μορφές, μία του Ευκλείδη και μια, όπως επαναδιατυπώθηκε τον δέκατο έβδομο αιώνα: Όταν δύο μεγέθη είναι ανάλογα τότε το γινόμενο των άκρων ισούται με το γινόμενο των μέσων. Θα εξεταστούν ακόμα:

- ✓ Η απόδειξη της πρότασης 14 του VI βιβλίου.
- ✓ Η απόδειξη της πρότασης 19 του VII βιβλίου.
- ✓ Η απόδειξη του Arnauld.
- ✓ Η απόδειξη του Lamy(1667) στη δεύτερη έκδοση του βιβλίου του.
- ✓ Η απόδειξη του Lamy (1695) στη πέμπτη έκδοση του βιβλίου του.

Στην ανάλυση η E.Barbin [31] χρησιμοποιεί την ορολογία του Pierce για να διακρίνει τις διαφορές μεταξύ εικόνας, δείκτη, συμβόλου και διαγράμματος. Αυτή η ταξινόμηση είναι ενδιαφέρουσα για την μελέτη και κατανόηση των μαθηματικών, αλλά δεν χρησιμοποιείται συχνά όπως π.χ. του Fischbein (1993).

Ο Pierce γράφει ότι: «Ένα σημείο είναι κάτι που αντικαθιστά κάτι άλλο για κάποιον άνθρωπο μέσω κάποιας σχέσης ή ικανότητας. Απευθύνεται σε κάποιον, δηλαδή δημιουργεί στο νου αυτού του προσώπου ένα ισοδύναμο σημείο, ή ίσως ένα πιο αναπτυγμένο σημείο. Αυτό το σημείο που δημιουργεί το ονομάζω ερμηνευτή του πρώτου σημείου. Το σημείο παίρνει τη θέση κάποιου, του αντικειμένου» (Pierce 1955 στο Παπαγιώργης, επιμέλεια και μετάφραση, 1981) [42].

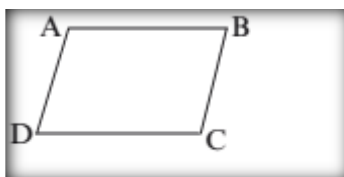
Ο Pierce(1992-1998) διακρίνει τρεις τύπους σημείων: Ένα **σημείο** λέγεται **εικόνα** όταν υπάρχουν κοινές ιδιότητες του σημείου και του αντικειμένου (Σχήμα 1).



ΣΧΗΜΑ 1

Εικόνα για ένα παραλληλόγραμμο

Ένα **σημείο (sign)** [3Π] λέγεται **δείκτης (index)** όταν έχει συνάφεια με το αντικείμενό του. Είναι η χωρική ή η χρονική του θέση που έχει τη συγκεκριμένη στιγμή και όχι τα ποιοτικά χαρακτηριστικά που το καθιστούν δείκτη. Η συνάφεια μπορεί να είναι τριών ειδών. Μπορεί να είναι *referential*, ή *designatives*, με την έννοια ότι υπάρχει η αντίληψη μιας άμεσης συνέχειας μεταξύ του σημείου και του αντικειμένου. Για παράδειγμα όπως ένα δάκτυλο που δείχνει, σχεδιάζει μια φανταστική γραμμή πάνω στο αντικείμενο που αναφέρεται. Επίσης μπορεί να είναι *casual* (ή *existential* ή *reagents*), δηλαδή τέτοια ώστε ο δείκτης να προκαλείται από το αντικείμενο που αντιπροσωπεύει. Ένα παράδειγμα είναι ο τρόπος με τον οποίο ο άνεμος στρέφει ένα ανεμούριο σε μια συγκεκριμένη θέση. Τέλος μπορεί να είναι αποτέλεσμα μιας αρχικής επισημάνσης, όπως και για παράδειγμα ένα κατάλληλο όνομα συνδέεται με κάποιον ή όπως στην περίπτωση που βάζουμε ένα γράμμα κάτω από ένα διάγραμμα (Σχήμα 2).



ΣΧΗΜΑ 2

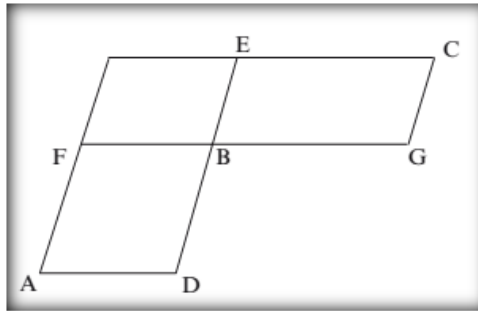
Παραλληλόγραμμο με δείκτες ΑΒΓΔ

Ένα σημείο [32] μπορεί να αναπαριστά το αντικείμενό του μέσω ορισμένων συμβάσεων, συνηθειών, ή νομιμοφανών σχέσεων. Τότε ονομάζεται **σύμβολο (symbol)** και συνδέεται με το αντικείμενό του λόγω της ιδέας του συμβόλου που χρησιμοποιεί η σκέψη, χωρίς να υπάρχει τέτοια σχέση. Για παράδειγμα τα γράμματα AC χρησιμοποιήθηκαν ως σύμβολο για το παραλληλόγραμμο στο σχήμα .

Ένα **διάγραμμα** αντιπροσωπεύει μια μορφή της σχέσης [...], ενώ ένα απλό διάγραμμα είναι σχεδιασμένο να εκπροσωπεί, και να κάνει κατανοητό τον τύπο μιας σχέσης. Κατά συνέπεια τα διαγράμματα περιορίζονται στην αναπαράσταση μιας ορισμένης κατηγορίας σχέσεων, δηλαδή εκείνων που είναι κατανοητές. Συνεπώς, οι εικόνες, τα διαγράμματα, οι δείκτες και τα σύμβολα συνδέονται με εκείνα της ομοιότητας, της ύπαρξης, της σύμβασης και των σχέσεων.

3.2 ΠΡΟΤΑΣΗ 14 ΤΟΥ VI ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Στα ισεμβαδικά και ισογώνια παραλληλόγραμμα οι πλευρές που περιέχουν τις ίσες γωνίες είναι αντιστρόφως ανάλογοι.



ΣΧΗΜΑ 3

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Θεωρούμε τα ισεμβαδικά και ισογώνια παραλληλόγραμμα ADBF και BGCE. Θα αποδείξουμε ότι: $DB/BE = GB/BF$. Από πρόταση 1 του VI βιβλίου των Στοιχείων (τα τρίγωνα και τα παραλληλόγραμμα που έχουν ίδιο ύψος έχουν λόγο εμβαδών ίσο με τον λόγο των βάσεων) προκύπτει ότι: $\frac{BD}{BE} = \frac{AB}{FE}$. Όμοια $\frac{GB}{BF} = \frac{BC}{FE}$. Αλλά από υπόθεση $AB=BC$. Επομένως από την πρόταση 5 του V βιβλίου των Στοιχείων προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

3.3 ΠΡΟΤΑΣΗ 16 ΤΟΥ VI ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Αν τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα είναι ανάλογα, το ορθογώνιο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές τους ακραίους όρους της αναλογίας είναι ισεμβαδικό προς το ορθογώνιο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές τους μέσους όρους της αναλογίας και αντιστρόφως

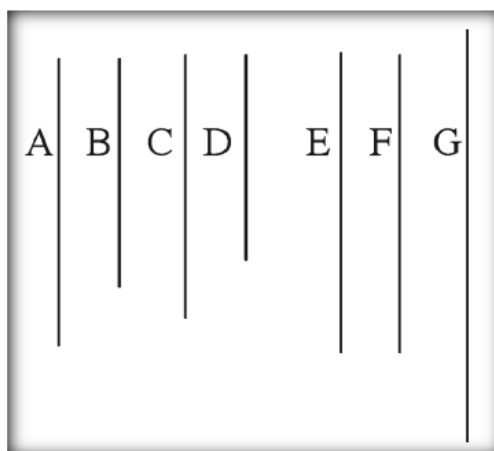
Η πρόταση 16 του V βιβλίου των Στοιχείων είναι συνέπεια της πρότασης 14 του ίδιου βιβλίου.

Ο Pierce (1978) [55] εξηγεί ότι «η αφαίρεση αποτελείται από την κατασκευή ενός διαγράμματος. Κάθε πράξη του παραγωγικού συλλογισμού, ακόμα και ένας απλός συλλογισμός, συνεπάγεται ένα στοιχείο παρατήρησης. Πράγματι, η αφαίρεση συνιστάται στην κατασκευή μιας εικόνας ή ενός διαγράμματος, έτσι ώστε οι σχέσεις

μεταξύ των μερών της εικόνας παρουσιάζουν μια πλήρη αναλογία με τα αντίστοιχα του αντικειμένου του συλλογισμού. Επομένως ο πειραματισμός σε αυτή την εικόνα με την φαντασία και την παρατήρηση του αποτελέσματος, συμβαίνουν κατά τέτοιο τρόπο που μπορούμε να ανακαλύψουμε τις σχέσεις που δεν μπορούσαμε να βρούμε γιατί ήταν κρυμμένες στα μέρη του αντικειμένου». Αντίθετα στις αποδείξεις των Στοιχείων, σύμφωνα με τον Pierce (1956) [20], υπάρχει μια αναλογία μεταξύ του επαγωγικού συλλογισμού και της παρατήρησης της γεωμετρικής εικόνας. Το συμπέρασμα που προκύπτει από τη σχέση μεταξύ των διαφόρων τμημάτων της γεωμετρικής εικόνας μας οδηγεί στην απόδειξη της πρότασης.

3.4 ΠΡΟΤΑΣΗ 19 ΤΟΥ VII ΒΙΒΛΙΟΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ ,τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον· καὶ ἔὰν τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τέταρτον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν τρίτον, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν ἀναλογίᾳ.



ΣΧΗΜΑ 4

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ας είναι A, B, C, D τέσσερις αριθμοί (Σχήμα 4) στην αναλογία, έτσι ώστε $A/B = C/D$. Αν το A πολλαπλασιαζόμενο με το D ισούται με E και το B πολλαπλασιαζόμενο με το C ισούται με F, τότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $F = E$.

Έστω ότι το A όταν πολλαπλασιαστεί με το C δίνει G και όταν πολλαπλασιαστεί με το D δίνει E. Συνεπώς από την πρόταση 17 του VII βιβλίου

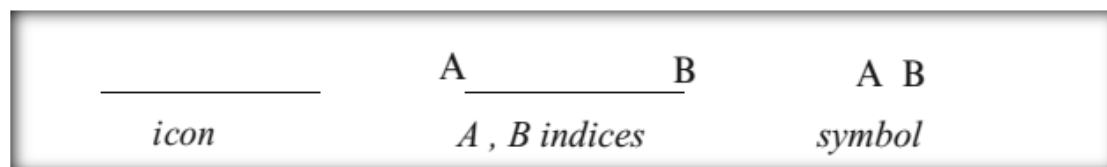
των Στοιχείων προκύπτει ότι $C/D = G/E$. Αλλά $C/D = A/B$, επομένως $A/B = G/E$. Όμοια, αν $A \cdot C = G$, $B \cdot C = F$ τότε $A/B = G/F$ από την πρόταση 18 του VII. Επομένως $G/E = G/F$, άρα από τη πρόταση 9 του V των Στοιχείων προκύπτει το ζητούμενο. Σε αυτή την απόδειξη δεν έχουμε εικόνες, μόνο σύμβολα και δείκτες.

3.5 ΣΤΟΙΧΕΙΑ:ΕΙΚΟΝΕΣ, ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΥΜΒΟΛΑ ΓΙΑ ΕΥΘΕΙΕΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Στα Στοιχεία οι ευθείες και οι αριθμοί παριστάνονται με διαφορετικό τρόπο. Για μια ευθεία έχουμε εικόνα (icon), δείκτη (index) και σύμβολο (symbol) (Σχήμα 5).

Για έναν αριθμό έχουμε σύμβολο και δείκτη (Σχήμα 6)

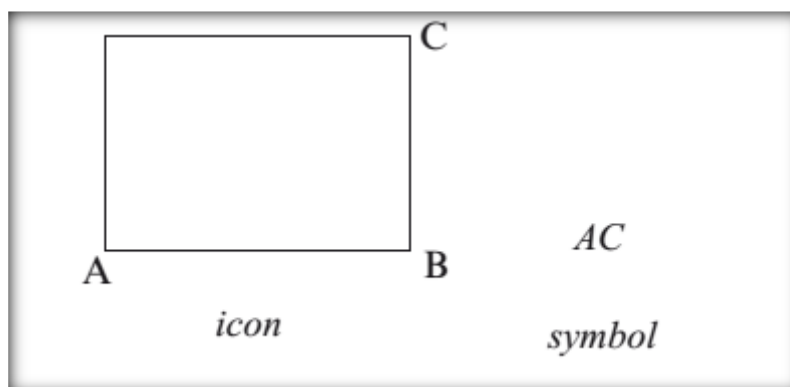
Ένα ορθογώνιο που κατασκευάστηκε από δύο ευθείες AB και BC δίνεται από μια εικόνα (icon) και ένα σύμβολο (symbol) (Σχήμα 7).



ΣΧΗΜΑ 5



ΣΧΗΜΑ 6



ΣΧΗΜΑ 7

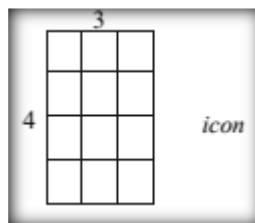
Αλλά δεν έχουμε εικόνες και σύμβολα για το γινόμενο δύο αριθμών.

3.6 ARNAULD: ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΩΝ

Ο Pierce(1978) [55] γράφει ότι «ο συλλογισμός των μαθηματικών στηρίζεται κυρίως στις ομοιότητες, που είναι σαν μεντεσέδες στις πόρτες της επιστήμης τους». Στα δικά του *New Elements of Geometry* ο Arnauld προτείνει μια μόνο αναπαράσταση για τις ευθείες και τους αριθμούς, γιατί καθιερώνει μια ομοιότητα ανάμεσα σε ένα ορθογώνιο και τον πολλαπλασιασμό. Στο βιβλίο I εξηγεί: «Υποθέτω ότι αυτός ο πολλαπλασιασμός μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα τα μεγέθη, και όχι μόνο στους αριθμούς. Για παράδειγμα, αν πολλαπλασιάσουμε μήκος επί πλάτος, όταν έχουμε ένα κομμάτι εδάφους με μήκος 4 perches και 3 perches πλάτος, εμείς γνωρίζουμε ότι το κομμάτι του εδάφους έχει εμβαδό 12 perches (Σχήμα 8).

Δίνει τον εξής ορισμό: «Ένα επίπεδο μέγεθος είναι ο αριθμός 12, όταν θεωρούμε ότι δημιουργήθηκε από τον πολλαπλασιασμό του 3 με το 4» (Σχήμα 8).

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, οι ίδιοι δείκτες θα χρησιμοποιηθούν για μεγέθη και αριθμούς. Ο Arnauld γράφει: Υποθέτω ότι συχνά χρησιμοποιούμε γράμματα γιατί έχουμε συνηθίσει να εννοούμε πράγματα με αυτά, χωρίς να ψάχνουμε τι σημαίνουν, και τελικά καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\alpha = \alpha$, $\beta = \beta$, κ. λ. π.



ΣΧΗΜΑ 8

Υπάρχει ένα σύμβολο για τον πολλαπλασιασμό, ένα μέγεθος γράφεται με ένα χαρακτήρα όπως α ή β , το οποίο καλείται γραμμικό μέγεθος. Όταν γράφουμε π.χ. $\alpha \beta$, αυτό δεν σημαίνει ότι αυτά έχουν προστεθεί, αλλά ότι το ένα πολλαπλασιάζεται με το άλλο.

3.7 ΤΕΣΣΕΡΑ ΑΝΑΛΟΓΑ ΜΕΓΕΘΗ: ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΚΑΙ ΑΛΕΒΡΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ARNAULD

Ο Arnauld στις αποδείξεις χρησιμοποιεί αλγεβρικές εικόνες. Ορίζει την αναλογία τεσσάρων μεγεθών, α , β , γ , όπως στη γεωμετρική πρόοδο και δίνει την εξής αλγεβρική εικόνα: $\alpha \cdot \beta :: \gamma \cdot \delta$

«Κάθε αλγεβρικό σύμβολο είναι μια εικόνα γιατί δείχνει, μέσω αλγεβρικών ενδείξεων, τη σχέση των ποσοτήτων» (Arnauld, 1978).

Για παράδειγμα στη πρόταση «αν δύο ανάλογα μεγέθη πολλαπλασιαστούν με ένα ίδιο μέγεθος, τότε η αναλογία ίδια με αυτή πριν τον πολλαπλασιασμό», διακρίνει δύο περιπτώσεις. Στην πρώτη, τα α, β έχουν ένα κοινό μέτρο γ :

$$\alpha . \beta :: \alpha \delta . \beta \delta$$

$$10\gamma . 9\gamma :: 10\delta\gamma . 9\delta\gamma$$

Στη δεύτερη περίπτωση τα α, β δεν έχουν κοινό μέτρο:

$$\alpha . \beta :: \alpha \delta . \beta \delta$$

$$10\gamma . 9\gamma + \psi :: 10\delta\gamma . 9\delta\gamma + \delta\psi$$

Αυτές οι εικόνες επιτρέπουν το χειρισμό μεγεθών και την εξαγωγή συμπεράσματος που προέρχεται από αυτούς τους χειρισμούς. «Το σημαντικότερο για την άλγεβρα είναι ότι, η ιδέα αυτής της τεχνικής παρουσιάζει μια φόρμουλα με την οποία ανακαλύπτουμε ιδιότητες, τις οποίες, χωρίς την παρατήρηση των αποτελεσμάτων αυτών των χειρισμών, θα ήταν αδύνατο να βρούμε» (Pierce, 1978).

Ο Arnauld, την πρόταση 19 του VII των Στοιχείων, την αποδεικνύει χωρίς τη χρήση του βελτιωμένου ορισμού της αναλογίας που δίνεται στο Βιβλίο V των στοιχείων του Ευκλείδη. Εισάγει ένα νέο τρόπο απόδειξης, ο οποίος είναι συνέπεια του δικού του πρώτου θεωρήματος (Δύο μεγέθη είναι ίσα όταν οι λόγοι τους προς το ίδιο μέγεθος είναι ίσοι). Πράγματι:

$$b . c :: f . g \text{ (από υπόθεση)}$$

$$b f . b g :: f . g \text{ (από την προηγούμενη πρόταση)}$$

$$\text{Όμοια } b f . c f :: b c$$

$$\text{Επομένως } b g = c f$$

Αυτές οι τέσσερις σειρές απαρτίζουν ένα διάγραμμα, επειδή καθιστούν κατανοητές διαφορετικές σχέσεις μεταξύ εικόνων. Αυτή η απόδειξη μοιάζει με την απόδειξη του Βιβλίου VII των Στοιχείων του Ευκλείδη, αλλά εδώ χρησιμοποιούνται αλγεβρικές εικόνες και αλγεβρικά διαγράμματα. Το συμπέρασμα προκύπτει από μια αναλογία μεταξύ των τμημάτων του συλλογισμού και τμημάτων του διαγράμματος. «Το διάγραμμα αντιπροσωπεύει όχι μόνο τους σχετικούς συσχετισμούς, αλλά επίσης και πολύ πιο σίγουρα, αντιπροσωπεύει τις σχέσεις μεταξύ τους, όπως και τα αντικείμενα από τις εικόνες» (Pierce, 1976) [53]. Εδώ το διάγραμμα χρησιμοποιεί μια χωρική διάταξη των σημείων (index).

Ο Arnauld εισάγει αλγεβρικά διαγράμματα για τις αποδείξεις του. Στο πρώτο πόρισμα γράφει: «από αυτή την πρόταση είναι εύκολο να δικαιολογήσουμε όλες τις αλλαγές που μπορούμε να κάνουμε μεταξύ τεσσάρων αναλόγων μεγεθών, χωρίς να πάψει να ισχύει η αναλογία». Έπειτα δίνει το παρακάτω διάγραμμα:

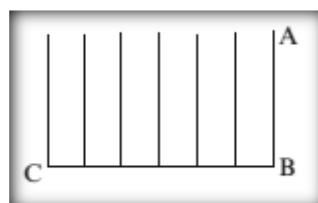
1.	1. Ant. $b.$	1. Conf. $c.$	2. Ant. $:: f.$	2. Conf. $g.$	Principale.
2.	2. Ant. $f.$	2. Conf. $g.$	1. Ant. $:: b.$	1. Conf. $c.$	Equivalen- te.
3.	1. Conf. $c.$	1. Ant. $b.$	2. Conf. $:: g.$	2. Ant. $f.$	Permuta- tion.
4.	2. Conf. $g.$	2. Ant. $f.$	1. Conf. $:: c.$	1. Ant. $b.$	Equivalen- te.
5.	1. Ant. $b.$	2. Ant. $f.$	1. Conf. $:: c.$	2. Conf. $g.$	Alterne.
6.	1. Conf. $c.$	2. Conf. $g.$	1. Ant. $:: b.$	2. Ant. $f.$	Equivalen- te.
7.	2. Ant. $f.$	1. Ant. $b.$	2. Conf. $:: g.$	1. Conf. $c.$	Permutatiō de l'Alterne
8.	2. Conf. $g.$	1. Conf. $c.$	2. Ant. $:: f.$	1. Ant. $b.$	Equivalen- te.

Ο Pierce (1976) σημειώνει συσχετίσεις μεταξύ διαγραμμάτων και εικόνων. «Ένα διάγραμμα είναι ουσιαστικά ένας τύπος εικόνας από την οποία κατανοούμε σχέσεις. Είναι αλήθεια ότι αυτό που πρέπει να βρεθεί δεν είναι απλό. Αλλά όταν λέμε ότι ο επαγωγικός συλλογισμός είναι απαραίτητος, δεν εννοούμε βέβαια ότι είναι αλάθητος. Αλλά ακριβώς αυτό που εννοώ είναι ότι το συμπέρασμα αυτό που προκύπτει από τη μορφή του συνόλου των σχέσεων, εκτίθεται στην παραδοχή».

Σε αυτή την περίπτωση το συμπέρασμα προκύπτει από την μορφή των σχέσεων. Εδώ δεν έχουμε μια λογική αφαίρεση των προτάσεων, αλλά μια σχεσιακή αφαίρεση των στοιχείων. Αυτό είναι μια τυπική καρτεσιανή αφαίρεση. Η λογική αφαίρεση είναι ένας τρόπος για να πείσει με την ομιλία αλλά η σχεσιακή αφαίρεση μπορεί να δια φωτίσει, χρησιμοποιώντας την εικόνα του διαγράμματος.

3.8 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΕΓΕΘΩΝ-LAMY

Στην δική του δεύτερη έκδοση των Elements of geometry(1695) [50] ο Lamy εισάγει μια μεταφορά μεταξύ ορθογωνίων που αποτελούνται από γραμμές και των πολλαπλασιασμό των αριθμών: για να πολλαπλασιάσουμε το a με το b , πρέπει να πάρουμε το a b φορές. Το αποτέλεσμα το συμβολίζουμε, ενώνοντας τα δύο γράμματα, με $a b$.



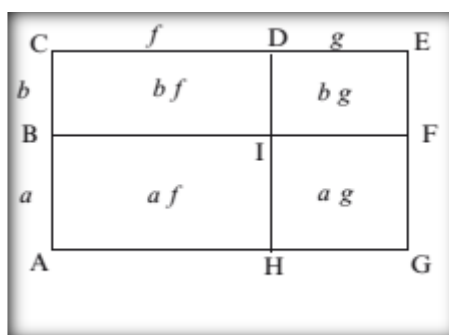
ΣΧΗΜΑ 9

Το a b συμβολίζει τον πολλαπλασιασμό των ευθυγράμμων τμημάτων AB , BC . Αυτές οι δύο γραμμές δημιουργούν το ορθογώνιο ABC . Είναι προφανές ότι αυτό το σχήμα δημιουργείται από την κίνηση της AB από το B προς το C . Η κίνηση αυτή επαναλαμβάνεται τόσες φορές όσα και τα τμήματα που υπάρχουν στο BC .

Σύμφωνα με τον Pierce (1992-1998) [54], εδώ μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μια μεταφορά. Πράγματι, ο Pierce, διακρίνει τρία είδη *hyponoms* (εικόνες που μοιάζουν με το αντικείμενο και το αναπαριστούν ουσιαστικά): την “εικόνα” που έχει απλές ιδιότητες, το “διάγραμμα” που αντιπροσωπεύει τις σχέσεις, και τη “μεταφορά” που αντιπροσωπεύει “ένα παραλληλισμό με κάτι άλλο”.

Ο Lamy δίνει δύο σύμβολα για τον πολλαπλασιασμό δύο ευθυγράμμων τμημάτων. Όπως γράφει: «Για να σημειώσουμε τον πολλαπλασιασμό δύο ευθυγράμμων τμημάτων εμείς πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πεζά γράμματα, και να αντιστοιχίσουμε ένα γράμμα σε κάθε ένα από αυτά, π.χ. a στο ένα και b στο άλλο. Η αιτία είναι ότι με δύο κεφαλαία γράμματα, π.χ. A, B παριστάνουμε το ευθύγραμμο τμήμα AB . Το AB δεν σημαίνει ότι πολλαπλασιάζουμε το A με το B , αλλά ότι τα A, B είναι τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος AB . Για να πολλαπλασιάσουμε τα $AB, B\Gamma$ βάζουμε ένα σταυρό ανάμεσά τους: $AB \times B\Gamma$. Αυτό είναι το σημάδι που χρησιμοποιώ για να εκφράσω ότι το AB πολλαπλασιάζεται με το $B\Gamma$ ». Το πρώτο σύμβολο $a b$ όταν έχουμε δείκτες για τις γραμμές και το δεύτερο σύμβολο $AB \times B\Gamma$ όταν έχουμε σύμβολα για τα ευθύγραμμα τμήματα.

Ο πρώτος κανόνας του Lamy καθιερώνει ένα παραλληλισμό ανάμεσα στην αλγεβρική και γεωμετρική εικόνα. **Πρώτος κανόνας:** Όταν δοθούν δύο μεγέθη που το καθένα περιλαμβάνει το $+$, όταν πολλαπλασιαστούν, το αποτέλεσμα πρέπει να περιέχει και αυτό το $+$. Για παράδειγμα, για να πολλαπλασιάσουμε $a+b$ με $f+g$, τότε θα προκύψει το αποτέλεσμα: $a f + b f + a g + b g$. Θέτουμε: $a + b = AC$, $a = BC$, $f + g = AG$, $f = AH$, $b = HG$. Αν υποθέσουμε ότι το $ACEG$ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και οι BF, DH το τέμνουν, όπως στο παρακάτω σχήμα, τότε:



ΣΧΗΜΑ 10

Σχηματίζονται τα παραλληλόγραμμα $ABIH, FGIH, BCDI, DEFI$ των οποίων το άθροισμα ισούται με το $ACEG$. Είναι προφανές ότι το $a f + b f + a g + b g$ είναι ίσο με τα τέσσερα παραλληλόγραμμα, επομένως είναι ίσο και με $AC \times AG$, δηλαδή με τον πολλαπλασιασμό $a+b$ με $f+g$.

Επομένως, στο πρώτο μέρος, ο πολλαπλασιασμός γίνεται με αλγεβρικές εικόνες. Και στο δεύτερο μέρος, χρησιμοποιώντας μια μεταφορά μεταξύ ορθογωνίου και πολλαπλασιασμού, αυτός αποκτά μια γεωμετρική εικόνα. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε δύο αποδείξεις με διαγράμματα και ένα παραλληλισμό μεταξύ τους.

3.9 ΠΩΣ Ο LAMY ΕΦΑΡΜΟΖΕΙ ΤΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ- ΒΙΒΛΙΟ II ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Με τον πρώτο κανόνα, ο Lamy μπορεί να αποδείξει όλες τις προτάσεις του δεύτερου βιβλίου των στοιχείων με μεταφορά. Στην πρόταση 2.4 των Στοιχείων αναφέρεται ότι: «Αν ευθύγραμμο τμήμα διαιρεθεί από σημείο σε δύο τμήματα, το τετράγωνο του όλου τμήματος είναι ίσο με τα τετράγωνα των δύο τμημάτων και το διπλάσιο ορθογώνιο που ορίζουν τα δύο τμήματα».

Ο Ευκλείδης δίνει μια κατασκευή χρησιμοποιώντας γεωμετρικές εικόνες και γεωμετρική απόδειξη.

Σύμφωνα με τον Lamy ότι διδάσκει ο Ευκλείδης είναι «οπτικά εμφανές». Για να αποδείξει την πρόταση 4 του V βιβλίου των Στοιχείων, συμβολίζει με ζ ένα ευθύγραμμο τμήμα, το χωρίζει σε δύο μέρη α , β , επομένως $\zeta = \alpha + \beta$. Ο πολλαπλασιασμός του $\alpha + \beta$ με το $\alpha + \beta$ ισούται με $\alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta$ και περιέχει τα τετράγωνα $\alpha\alpha$ και $\beta\beta$ των μερών α , β του ζ και $2\alpha\beta$ που είναι δύο φορές το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού των μερών α και β . Εδώ η απόδειξη είναι αλγεβρική με ένα διάγραμμα:

$$(\alpha + \beta)(\alpha + \beta) = \alpha\alpha + 2\alpha\beta + \beta\beta$$

Αυτός συνάγει την γεωμετρική εικόνα του Ευκλείδη με μια μεταφορά ανάμεσα σε ένα γεωμετρικό ορθογώνιο και ένα αριθμητικό πολλαπλασιασμό.

3.10 ΛΟΓΟΣ ΜΕΓΕΘΩΝ- LAMY

Ο Lamy χρησιμοποιεί το σύμβολο της διαίρεσης των αριθμών για να εκφράσει τον λόγο δύο μεγεθών. Ορίζει ως αναλογία δύο μεγεθών τον τρόπο που ένα μέγεθος περιέχει ή περιέχεται στο μέγεθος με το οποίο συγκρίνεται.

Εκφράζει την αναλογία των μεγεθών α , β ως εξής: $\frac{\alpha}{\beta}$.

Αυτή η έκφραση είναι φυσιολογική, γιατί όπως είδαμε προηγουμένως είναι το σύμβολο της διαίρεσης. Μ' αυτό τον τρόπο η διαίρεση μας υποχρεώνει να υπολογίσουμε πόσες φορές ένα μέγεθος περιέχεται σε ένα άλλο. Είναι σημαντικό να τονιστεί πως αυτό το σύμβολο αναπαριστά όχι τον λόγο μεταξύ δύο μεγεθών αλλά το αποτέλεσμα της διαίρεσης.

Ωστόσο, ο Lamy χρησιμοποιεί μια εικόνα για την αναλογία. Δηλαδή τον ορισμό 5 του IV βιβλίου των στοιχείων τον δίνει ως εξής:

$$A B : : \Gamma \Delta$$

Αυτή η εικόνα είναι παρόμοια με την: $A : B : : \Gamma : \Delta$

Στην 5^η έκδοση του βιβλίου του (1731) ο Lamy δίνει όνομα στον λόγο $\frac{A}{B}$ (exposant, στα Γαλλικά). Ο λόγος μιας γραμμής προς μια άλλη είναι ο αριθμός που δείχνει πόσες φορές περιέχει ή περιέχεται η μια γραμμή στην άλλη. Αυτό μπορεί να βρεθεί με διαίρεση. Με αυτόν τον τρόπο εκφράζεται ο λόγος μιας γραμμής με μια άλλη, π.χ. της γραμμής A με τη γραμμή B, και συμβολίζεται με: $\frac{A}{B}$ ή $\frac{B}{A}$.

Η διαφορά σε αυτή την έκδοση είναι ότι έχοντας δώσει ένα όνομα στον λόγο μπορεί τώρα να χρησιμοποιήσει το διάγραμμα:

$$\frac{A}{B} = \frac{\Gamma}{\Delta}, \text{ όταν έχει τέσσερις γραμμές.}$$

Επομένως, αντικαθιστά μια εικόνα που εκφράζει μια ομοιότητα, με ένα διάγραμμα, που εκφράζει μια σχέση.

3.11 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η εκτέλεση υπολογισμών με μεγέθη είναι συνέπεια της αριθμητικοποίησης της γεωμετρίας από τον Descartes. Αυτός ο υπολογισμός επιτυγχάνεται από τους Arnauld και Lamy με δύο διαφορετικούς τρόπους. Ο Arnauld είναι πιο κοντά στον Descartes. Χρησιμοποιεί αλγεβρικά σύμβολα για να αναπαραστήσει ευθείες γραμμές και ομοιότητες μεταξύ γεωμετρικών εικόνων για ορθογώνια και για τον πολλαπλασιασμό μεταξύ αριθμών. Επίσης αναπαριστά μ' ένα παρόμοιο δείκτη γραμμές και αριθμούς. Ο υπολογισμός από τον Lamy είναι περισσότερο ριζοσπαστικός, γιατί, με μια μεταφορά μεταξύ ορθογωνίων και πολλαπλασιασμού αριθμών, εγκαθιστά ένα παραλληλισμό μεταξύ μεγεθών και αριθμών.

Είναι φανερό ότι με τους υπολογισμούς μεταξύ μεγεθών αποφεύγουν τις δυσκολίες του V Βιβλίου των Στοιχείων. Το πρόβλημα που προκύπτει είναι αν οι ισχυρισμοί τους είναι νόμιμοι. Η χρήση του καρτεσιανού όρου «προφανές» δίνει την απάντηση. Οι αποδείξεις τους είναι προφανείς, άρα και σίγουρες, γιατί όπως παραδέχεται η E. Barbin : « Όλα τα προφανή είναι βέβαια, αλλά η βεβαιότητα δεν είναι προφανής».

Σύμφωνα με την ίδια η απόδειξη αλλάζει με το πέρασμα του χρόνου.

,

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΑΠΟΨΗ ΓΙΑ ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΜΕ ΕΠΙΚΕΝΤΡΟ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ

4.1 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ —DUVAL-FISCHBEIN-TALL-VINNER

Στα μαθηματικά, όπως έχει αναφερθεί παραπάνω, η εγκυρότητα μιας απόδειξης διαδραματίζει σπουδαίο ρόλο. Αυτό σημαίνει πως τα αντικείμενα πρέπει να δηλώνονται και να ορίζονται με τρόπο που δεν επιδέχεται αμφισβήτηση. Οι ιδιότητες των σχημάτων θεωρούνται ως αληθείς μόνο όταν εξάγονται από άλλες ήδη αποδεκτές δηλώσεις μέσω επιχειρημάτων πάνω στα οποία είναι σύμφωνη η «επιστημονική κοινότητα» (Fischbein & Mariotti, 1997) [59]. Οι ίδιοι υποστηρίζουν πως ο προηγούμενος ορισμός (ενός γνωστικού αντικείμενου) αποτελεί βασική συνιστώσα της γεωμετρικής γνώσης, και τα μαθησιακά προβλήματα σ' αυτού του είδους ορισμών αποτελούν βασικά προβλήματα στη μαθηματική εξαγωγή συμπερασμάτων.

Όσον αφορά στο γεωμετρικό συλλογισμό, σύμφωνα με την θεωρία των σχηματικών εννοιών (figural concepts) του Fischbein (στο Fischbein & Mariotti, 1997) [59] οι γεωμετρικές έννοιες (αρχές) έχουν μια διπλή φύση που χαρακτηρίζονται από δύο πτυχές: αυτή των σχημάτων και την εννοιολογική. Η πτυχή των σχημάτων αφορά το γεγονός πως οι γεωμετρικές έννοιες αναφέρονται στο χώρο, ενώ η εννοιολογική πτυχή αναφέρονται στη σύννοψη και στη θεωρητική φύση που οι γεωμετρικές έννοιες μοιράζονται με όλες τις άλλες έννοιες. Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία αναφέρουν οι Fischbein & Mariotti (1997), ο γεωμετρικός συλλογισμός μπορεί να χαρακτηριστεί από μια διαλεκτική αλληλεπίδραση ανάμεσα στις δύο πτυχές. Παρόλο όμως που οι δύο αναφερόμενες πτυχές πρέπει να αλληλεπιδρούν αρμονικά, εντούτοις στην πραγματικότητα αυτό δεν ισχύει και εμφανίζεται μια προσωρινή αυτονομία μεταξύ των δύο.

Ο Tall και ο Vinner (στο Fischbein, 1993) [49] προκαθόρισαν τη σχέση μεταξύ της «αρχής της εικόνας» και της «αρχής του ορισμού». Καθώς η «αρχή του ορισμού» εφαρμόζεται πάνω στη μαθηματική έννοια, σαν να ορίζεται επίσημα, ο κανόνας της αρχής της εικόνας περιγράφει «την ολική γνωστική κατασκευή» η οποία σχετίζεται με την αρχή που περιλαμβάνει όλες τις νοερές εικόνες καθώς και με τις ιδιότητες και τις διαδικασίες. Αποτελεί μια μακροχρόνια διαδικασία, μέσα από την εμπειρία όλων των ειδών, αλλάζοντας καθώς τα άτομα συναντούν νέα κίνητρα (Tall, 1991). Στη γεωμετρία μια σχηματική ιδέα είναι η αρχή που συνδιαλέγεται με τον ορισμό, ενώ αυτή η νοερή αντανάκλαση, με όλα τα συμπεράσματα και τις αμφιβολίες που αντιστοιχούν, με την «αρχή της εικόνας». «Η εικόνα», στην ορολογία τους δε

σημαίνει εικόνα ως αισθητική αναπαράσταση αλλά μια νοερή, ουσιαστική ανακατασκευή μιας επίσημης δοσμένης μαθηματικής οντότητας.

Τη διττή λειτουργία των γεωμετρικών σχημάτων επισημαίνουν αρκετοί ερευνητές (Parzyzs, 1998, Duval, 1988, Larobe, 1994) [63]. Η Mesquita (1998) αναφέρει σχετικά ότι τα γεωμετρικά σχήματα είναι αναπαραστάσεις με διπλή υπόσταση. Από τη μια το σχήμα στην ιδανική του αντικειμενικότητα, απαλλαγμένο από υλικούς περιορισμούς που χαρακτηρίζουν μια εξωτερική αναπαράσταση, και από την άλλη η ποικιλία πεπερασμένων μορφών.

Ο Lemonidis (1997) επισημαίνει ότι σχεδιάζοντας ένα γεωμετρικό σχήμα ώστε να εξεταστούν ή να εφαρμοστούν κάποιες ιδιότητες, είναι γνωστό ότι δε γίνεται αναφορά στο συγκεκριμένο σχήμα, αλλά σε μια τάξη άπειρων σχημάτων που υπακούουν στον ορισμό του. Στην Ευκλείδεια γεωμετρία τα χαρακτηριστικά των σχημάτων δεν εξαρτώνται από τη θέση ή τον προσανατολισμό με τον οποίο σχεδιάζονται. Επιπλέον τα σχήματα παραμένουν αναλλοίωτα με το μετασχηματισμό της ομοιότητας. Δεν ενδιαφέρει δηλαδή το συγκεκριμένο μήκος των σχημάτων, αλλά οι σχέσεις και οι αναλογίες μεταξύ των σχηματικών οντοτήτων.

Η διπλή φύση των γεωμετρικών σχημάτων αποτελεί τη βασική πηγή δυσκολιών των μαθητών όταν επιλύουν προβλήματα γεωμετρίας (Γαγάτσης 2007, Mesquita 1998, Fischbein & Nachieli, 1998). Αυτό συμβαίνει, σύμφωνα με τον (Fischbein 1993) [60], γιατί η εικόνα και η αρχή θα πρέπει να ενώνονται σε ένα μοναδικό νοερό αντικείμενο για να μπορεί να το κατανοήσει ο μαθητής.

Σε όλες τις γνωστικές θεωρίες, οι αρχές και οι εικόνες θεωρούνται δύο βασικές ξεχωριστές κατηγορίες νοερών οντοτήτων (Fischbein, 1993) [60]. Οι αρχές δεν μπορούν να μοιραστούν, να αντιστραφούν και να μείνουν απαράμιλλες. Επικοινωνούμε με ένα ιδεατό κόσμο με ιδεατό νόημα. Τα αντικείμενα στα οποία αναφερόμαστε (σημεία, πλευρές, γωνίες και η μεταξύ τους σχέση) έχουν μόνο μια ιδεατή υπόσταση (Fischbein 1993), και είναι αντιληπτικής φύσης. Διαθέτουν όμως και πληροφοριακή φύση. Ο Fischbein (1993) αναφέρει πως εκείνο που χαρακτηρίζει μια αρχή (έννοια) είναι το γεγονός ότι εκφράζει μια ιδέα, μια γενική ιδεατή αναπαράσταση μιας τάξης αντικειμένων βασισμένη στις κοινές τους ιδιότητες. Σε αντίθεση μια εικόνα (μια νοερή εικόνα) είναι μια αισθητική αναπαράσταση ενός αντικειμένου ή φαινομένου.

Εντούτοις φαίνεται τελείως φυσικό να μπορεί να παρουσιαστεί ένα σχέδιο σαν επεξήγηση μιας φράσης ή ενός κειμένου χωρίς άλλη εξήγηση (Βούργιας, Πέσκιας & Βούργιας, 2003) [57]. Οι ίδιοι αναφέρουν πως αυτή η ερμηνεία επιτρέπει να συνδέσουμε τις κατάλληλες ιδιότητες, τα θεωρήματα ή τις χρήσιμες διαπιστώσεις για την κατάσταση – πρόβλημα που προτείνεται. Αυτή η δραστηριότητα της φυσικής μετάφρασης εμποδίζεται από αυτό που ο Duval ονομάζει σημασιολογική ασυμφωνία.

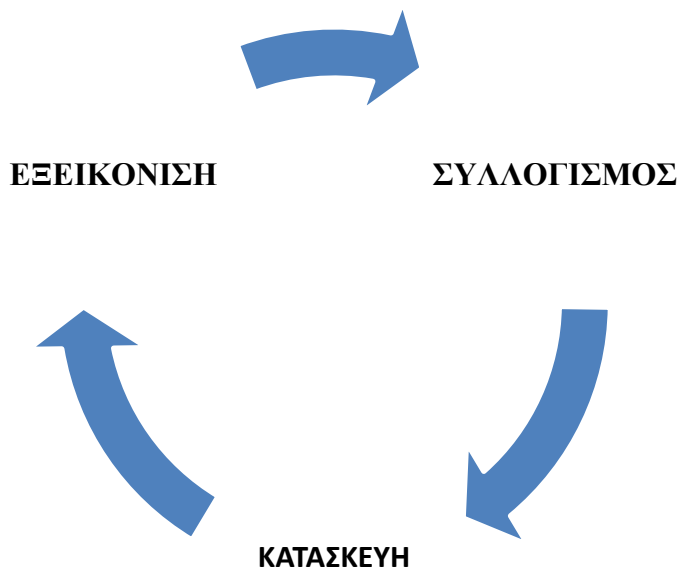
Ο Duval (1998) [65] αναφέρει πως η γεωμετρία περιλαμβάνει τρία είδη γνωστικών διαδικασιών, τα οποία εκπληρώνουν συγκεκριμένες επιστημολογικές λειτουργίες. Τη λειτουργία της εξεικόνισης, της κατασκευής και του συλλογισμού.

Η εξεικόνιση είναι μια διαδικασία σχετική με την αναπαράσταση του χώρου για επεξήγηση μιας δήλωσης, για διερεύνηση πολύπλοκων καταστάσεων, για συνοπτική αντίληψη του χώρου. Πολλοί ερευνητές τονίζουν το ρόλο της εξεικόνισης και της οπτικής αιτιολόγησης για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Οι Zazkis, Dubinsky και Dautermann (1996) δίνουν ένα πολύ ενδιαφέρον ορισμό για την εξεικόνιση λέγοντας πως «η εξεικόνιση είναι μια πράξη κατά την οποία το άτομο δημιουργεί μια ισχυρή σύνδεση μεταξύ μιας εσωτερικής δομής και κάτι στο οποίο η πρόσβαση πετυχαίνεται μέσω των αισθήσεων. Μια τέτοια σύνδεση μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Μια πράξη εξεικόνισης μπορεί να συνιστάται στην κατασκευή νοητικών αντικειμένων ή διαδικασιών τα οποία το άτομο συνδέει με αντικείμενα ή γεγονότα τα οποία λαμβάνει ως εξωτερικά. Επίσης, η πράξη της εξεικόνισης μπορεί να συνιστάται στην κατασκευή εξωτερικών αντικειμένων μέσω του χαρτιού, του πίνακα ή της οθόνης ηλεκτρονικού υπολογιστή, τα οποία το άτομο αναγνωρίζει, ως αντικείμενα ή διαδικασίες που βρίσκονται στο μυαλό του».

Η γνωστική διαδικασία της κατασκευής των σχημάτων, η οποία γίνεται με το χέρι, με τη χρήση οργάνων ή στον ηλεκτρονικό υπολογιστή (Duval, 2004) [64], μπορεί να λειτουργήσει ως μοντέλο. Οι ενέργειες για την αναπαράσταση και το παρατηρούμενο αποτέλεσμα συσχετίζονται με τα μαθηματικά αντικείμενα που αναπαριστούν.

Κάθε γνωστική διαδικασία που εμπλέκεται κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων θεωρείται μορφή συλλογισμού. Είναι ουσιαστικά μια διαδικασία η οποία μας καθιστά ικανούς να εξάγουμε νέες πληροφορίες από δοσμένες πληροφορίες.

Τα τρία αυτά είδη γνωστικών διαδικασιών δημιουργούν ένα κύκλο ενεργειών όπως φαίνεται πιο κάτω:



Η σημασιολογική ασυμφωνία σύμφωνα με τον Γαγάτση (2003) [58] κρύβει την ισοδυναμία της σημασίας που επιτρέπει να περνάμε από μια έκφραση σε κάποια άλλη, ή από μια έκφραση σε μια παράσταση. Αυτή η δυσκολία παραπέμπει σε μια γνωστική διάσταση ανεξάρτητη από αυτή της εννοιολογικής πολυπλοκότητας της έννοιας που εξετάζεται.

4.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ – ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει τα γεωμετρικά σχήματα αναπαριστούν νοερές κατασκευές, οι οποίες κατέχουν ταυτοχρόνως εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Για παράδειγμα ένα γεωμετρικό τρίγωνο αποτελεί ένα σχήμα, μια αναπαράσταση στο χώρο και μια έννοια. Η έννοια έχει δύο πλευρές:

A) Την εικόνα, που αφορά τη συνύπαρξη νοητικών εικόνων - του συνόλου των εικόνων που σχετίζονται στο νου με το σχήμα (π.χ. όλα όσα θυμίζουν τρίγωνο) - και ιδιοτήτων.

B) Τον ορισμό, μαθηματικό νόημα.

Σε ένα εννοιολογικό σχήμα το νόημα και οι επιτρεπόμενοι μετασχηματισμοί υπαγορεύονται από τυπικούς περιορισμούς (ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα). Επομένως στο εννοιολογικό σχήμα εμφανίζονται τρεις κατηγορίες νοητικών αντικειμένων:

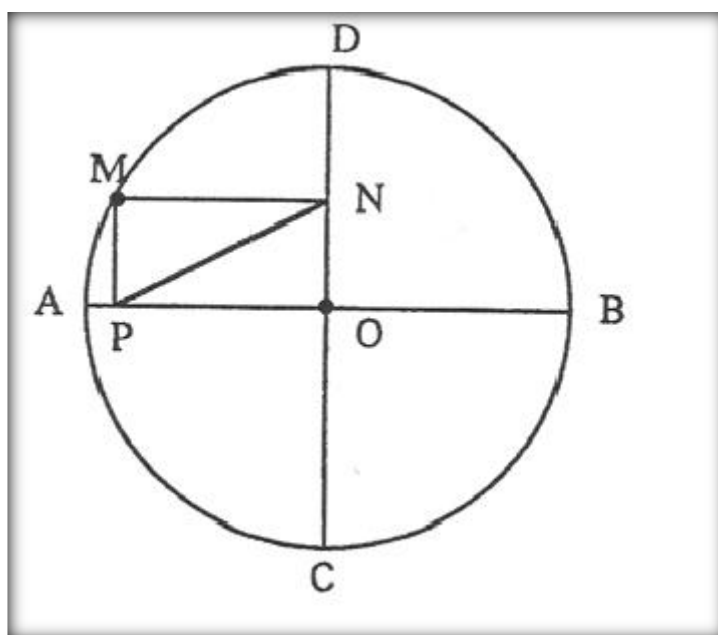
-Ορισμός στα πλαίσια ενός αξιωματικού συστήματος.

-Εικόνα (οπτικό αντικείμενο), με βάση την αισθησιοαντιληπτική εμπειρία.

-Σχηματική έννοια, η ιδέα που αντιστοιχεί στο σχέδιο.

Οι σχηματικές έννοιες αντανακλούν ιδιότητες του χώρου και ταυτόχρονα έχουν θεωρητικές ιδιότητες όπως ιδεατότητα, αφαιρετότητα, γενίκευση και τελειοποίηση.

Σε ανάλογο παράδειγμα που αναφέρει ο Fischbein (1993) [60] δίνει το ακόλουθο σχήμα και ζητείται να βρεθεί το μήκος της PN, καθώς το M διατρέχει τον κύκλο.



ΣΧΗΜΑ 11

Με την πρώτη ματιά φαίνεται ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση γιατί το μήκος των διαστημάτων MP και MN εξαρτάται από τη θέση του σημείου M. Όμως το τετράπλευρο MPON είναι ορθογώνιο και το διάστημα MO είναι η διαγώνιος του ορθογωνίου. Ως αποτέλεσμα αυτού $PN = MO$ και MO είναι η ακτίνα του κύκλου. Η ισότητα των διαγωνίων δε ζητείται, ούτε η ισότητα των ακτινών. Αυτές οι σχέσεις δεν εξαρτώνται μόνο από το σχήμα. Επιβάλλονται από τους ορισμούς και τα θεωρήματα. «Η βασική όψη που θέλουμε να τονίσουμε είναι το συμπέρασμα ότι δεν σχεδιάζουμε λαμβάνοντας την εικόνα με τον τυπικό περιορισμό αλλά με μια μοναδική διαδικασία στην οποία η φιγούρα είναι σεβαστή, συμπεριλαμβανομένων λογικών σχέσεων. Δεν έχουμε να καταβάλουμε οποιαδήποτε προσπάθεια με σκοπό να τελειοποιήσουμε τη φιγούρα. Η διαδικασία της εξιδανίκευσης της φιγούρας λαμβάνει χώρα αυτόματα με τέτοιο τρόπο ώστε να έρχεται ως ένα αναπόσπαστο, ενεργητικό συστατικό μιας αυστηρής λογικής αιτιολόγησης» (9^ο Συνέδριο Παιδαγωγικής εταιρείας Κύπρου, Π. Καλογήρου et al).

Η γεωμετρία διατηρεί την αυτονομία της ως θεωρητικό πεδίο, αλλά ταυτόχρονα στην πραγματικότητα ως μοντέλο εξαρτάται από τις ιδιότητες του ίδιου του μοντέλου (Fischbein & Mariotti, 1997) [59]. Ο Fischbein (1993) [60] αναφέρει πως όταν χειριζόμαστε λέξεις σε μια προφορική δραστηριότητα, οι ήχοι (που ακούγονται ή εκφράζονται είναι η εξωτερική, δηλαδή η παραστατική σημασία του υλικού. Η έννοια απλώνεται μεταξύ της πραγματικότητας της εκφραζόμενης λέξης: η έννοια είναι μια ιδέα που μένει αμετάβλητη μέσα σε πολύπλοκες σχέσεις. Η σχηματική αρχή είναι επίσης έννοια. Η ιδιαιτερότητα αυτού του τύπου της έννοιας είναι ότι περιλαμβάνει το σχήμα ως ουσιαστική ιδιότητα. Είναι μια εικόνα που ελέγχεται πλήρως από τον ορισμό. Χωρίς αυτού του είδους των εικόνων του χώρου, η γεωμετρία δεν θα υπήρχε ως κλάδος των μαθηματικών (Fischbein 1993).

Αυτό δείχνει πως οι γεωμετρικές έννοιες ανήκουν σε ένα γεωμετρικό σύστημα, αλλά την ίδια ώρα δεν είναι εντελώς ελεύθερες. Πρέπει να αναφέρονται σε μια σημασία που έχει τις ρίζες της και στην πραγματικότητα και καθιερώθηκε διαμέσου των αιώνων. Είμαστε τόσο συνηθισμένοι σε συγκεκριμένες έννοιες όπως αυτή της γραμμής, του κύκλου, ή της καθετότητας που δεν θα μπορούσαμε να σκεφτούμε διαφορετικά (Fischbein & Mariotti, 1997). Οι ίδιοι υποστηρίζουν πως η απόσταση ανάμεσα στη γεωμετρία και την αυθόρμητη αντίληψη της φυσιολογικής εμπειρίας, είναι πολύ μεγαλύτερη απ' ό,τι υπολογίζεται και πολύ συχνά υποτιμάται. Πρέπει να γίνει ξεκάθαρο ότι η συγχώνευση μεταξύ θεωρίας και φιγούρας στη γεωμετρική αιτιολόγηση εκφράζει μόνο μια ιδεατή, ακραία κατάσταση η οποία συνήθως δεν γίνεται απόλυτα αντιληπτή λόγω ψυχολογικών δεσμεύσεων (Fischbein, 1993).

Σ' αυτό το σημείο σπουδαίο ρόλο παίζει η διαισθητική αντίληψη των μαθητών. Η διαισθητική αντίληψη ενός φαινομένου στους μαθητές είναι διαφορετική συνήθως από την επιστημονική ερμηνεία (Fischbein 1993). Για παράδειγμα η ιδέα ότι ένα τετράγωνο είναι παραλληλόγραμμο δεν είναι σαφής για τους μαθητές. Μ' αυτόν τον τρόπο οι δάσκαλοι εμπλέκονται σε ένα ψυχολογικό τομέα που σε μεγάλη έκταση αγνοείτο προηγουμένως: στο επίκεντρο βρίσκονται οι διαισθητικές ερμηνείες και τα πιστεύω των μαθητών. Οι μηχανισμοί των διαισθήσεων είναι φυσικά κρυμμένοι στις νοητικές τους δραστηριότητες (Fischbein 1999) [61]. Η διαίσθηση ορίζεται ως η ικανότητα να αντιλαμβάνεσαι ευθέως τα αντικείμενα, σε αντίθεση με την κατανόηση που εμπεριέχεται στην εννοιολογική γνώση (Kant 1980 στο Fischbein 1999). Η διαίσθηση μπορεί να παραπλανήσει, γι' αυτό θα πρέπει να αποφεύγεται για την επιστημονική αιτιολόγηση (Hahn 1956, Bunge 1962 στο Fischbein 1999).

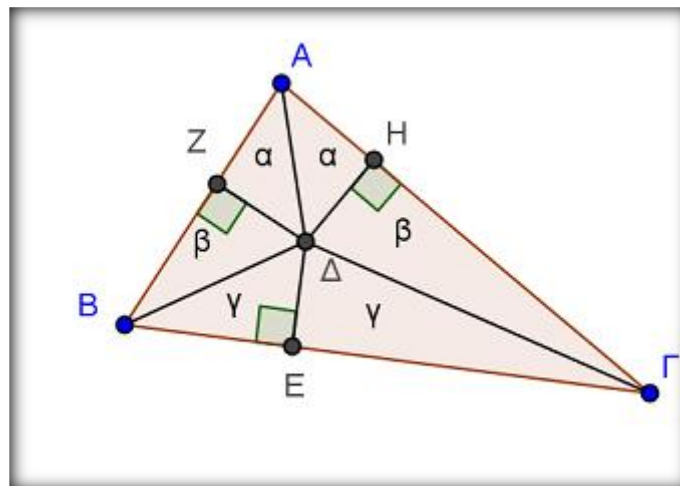
Η χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος κατά την ανάλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος θεωρείται αναμφισβήτητη, αφού παρέχει μια διαισθητική παρουσίαση των χαρακτηριστικών και σχέσεων σε μια γεωμετρική κατάσταση (Duval, 1995) [66].

4.3 ΣΧΗΜΑ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

ΕΙΝΑΙ ΟΛΑ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΣΚΕΛΗ;

Το παρακάτω παράδοξο, που είναι η «απόδειξη» ότι όλα τα τρίγωνα είναι ισοσκελή δικαιολογεί τις απόψεις του Fischbein και των υπολοίπων ως προς τα γεωμετρικά σχήματα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



ΣΧΗΜΑ 12

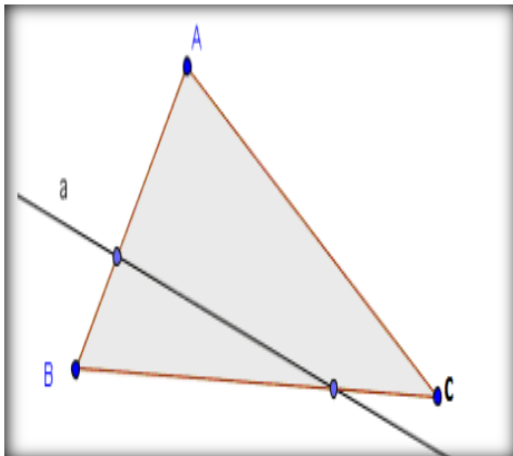
Έστω τρίγωνο ABΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας A και η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος BΓ τέμνονται στο σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. Φέρουμε τις κάθετες ΔΕ και ΔΗ στις πλευρές AB, AΓ. Τότε τα τρίγωνα που συμβολίζονται με α είναι ίσα (Γ-Π-Γ), άρα $\Delta Z = \Delta H$. Ομοίως τα τρίγωνα που συμβολίζονται με γ είναι ίσα, άρα $\Delta B = \Delta \Gamma$. Επομένως και τα τρίγωνα β είναι ίσα άρα $BZ + ZA = \Gamma H + \Gamma A$, άρα το ABΓ είναι ισοσκελές.

Λήμμα 1: Σε κάθε τρίγωνο η διχοτόμος μιας γωνίας και η μεσοκάθετος της πλευράς που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου.

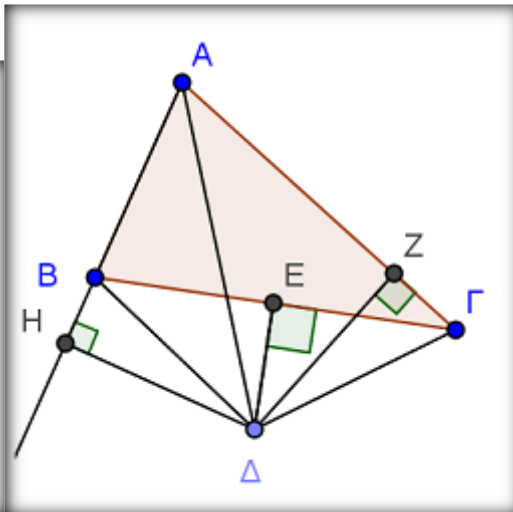
Λήμμα 2: Οι προβολές ενός σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου πάνω στις πλευρές του τριγώνου ανήκουν στην ίδια ευθεία (ευθεία του Simpson).

Αξίωμα του Pasch: Το αξίωμα του **Pasch** αφορά αξίωμα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία που διατυπώθηκε το 1882 από τον Γερμανό μαθηματικό Moritz Pasch προς τιμή του οποίου και φέρει το όνομά του.

Κατά το αξίωμα αυτό: Έστω τρίγωνο ABC και α μια ευθεία η οποία δεν περιέχει κανένα από τα σημεία A, B, C. Αν η α τέμνει μία από τις πλευρές του τριγώνου, έστω την AB, τότε κατ' ανάγκη θα τέμνει ή τη BC ή την AC αλλά όχι και τις δύο (Σχήμα 13).



ΣΧΗΜΑ 13



ΣΧΗΜΑ 14

Αν εφαρμόσουμε τα λήμματα 1, 2 και το αξίωμα του Pasch τότε θα προκύψει το σχήμα 14 που είναι το πραγματικό. Πράγματι σε αυτό:

- Το σημείο Δ βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου (εφόσον ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο).
- Τα σημεία H, Z βρίσκονται εκατέρωθεν της $B\Gamma$. Αν τα σημεία H, Z ήταν σημεία των ευθυγράμμων τμημάτων $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, τότε η ευθεία HZ (Λήμμα 2) θα έτεμνε τις πλευρές $AB, A\Gamma, B\Gamma$, άτοπο (Αξίωμα Pasch).

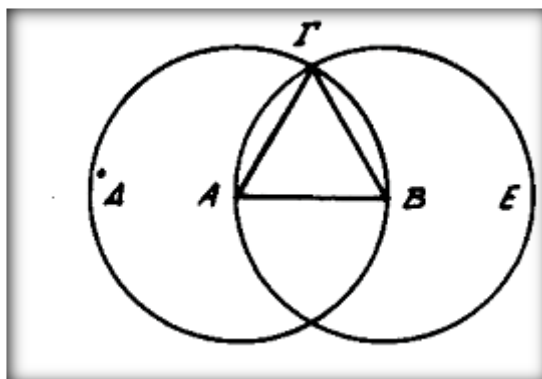
Ακόμα έχουμε $AH = AZ$, $\Delta H = \Delta\Gamma$ και $BH = Z\Gamma$. Τώρα όμως δεν προκύπτει ότι $AB = A\Gamma$, διότι ενώ το Z είναι ανάμεσα στα A και Γ , το H δεν είναι ανάμεσα στα A και B .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

ΟΙ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΕΣ-ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ-ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ

5.1 ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΣΥΓΧΡΟΝΗΣ ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ-ΑΠΟΔΟΧΗ-ΚΡΙΤΙΚΗ

Ο 19^{ος} αιώνας έπαιξε καθοριστικό στη διαμόρφωση των μαθηματικών της εποχής μας. Η προσεκτική μελέτη των «Στοιχείων» αποκάλυψε ότι ορισμένες αποδείξεις έχουν κενά ή σημαντικές ατέλειες, καθόσον βασίζονται σε διάφορες γεωμετρικές ιδιότητες, τις οποίες ο Ευκλείδης θεώρησε αυτονόητες, χωρίς όμως να δικαιολογούνται από τους ορισμούς και τα αξιώματα, ούτε και να προκύπτουν από άλλες γνωστές προτάσεις. Για παράδειγμα η απόδειξη της πρότασης 1.1, στην οποία κατασκευάζεται ισόπλευρο τρίγωνο με δεδομένη βάση. Η κορυφή του τριγώνου θα είναι μια από τις τομές του κύκλου που γράφεται με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΒ με τον κύκλο ίδιας ακτίνας και κέντρου Β, όπως στο παρακάτω σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 15

Κανένα αξίωμα δεν απαγορεύει οι κύκλοι να έχουν πολύ μικρές οπές, όπως θα μπορούσε να συμβεί στην γεωμετρία του Descartes, εάν αναφέρεται σε σημεία με καρτεσιανές συντεταγμένες.

Παρά τις αδυναμίες, καμιά από τις προτάσεις δεν καταλήγει σε λάθος συμπέρασμα. Η εμφάνιση όμως νέων γεωμετριών, των μη Ευκλείδειων [4Π], έκανε επιτακτική την ανάγκη της τακτοποίησης του αξιωματικού συστήματος κάθε γεωμετρίας. Αρκετοί μαθηματικοί, όπως ο Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916), ο Giuseppe Peano (1858-1932), ο David Hilbert (1862-1943) και ο George David Birkhoff (1884-1944), εργάστηκαν προς αυτή τη κατεύθυνση. Ο Hilbert χρησιμοποίησε τη μέθοδο της πλήρους τυποποίησης, κατά την οποία οι προτάσεις του αξιωματικού συστήματος είναι διατυπωμένες με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην αναφέρονται στον κόσμο της συνήθους εμπειρίας, αλλά να χρησιμοποιούνται ως αλυσίδα από σύμβολα άνευ περιεχομένου, των οποίων ο χειρισμός ακολουθεί τους τυπικούς κανόνες εξαγωγής

συμπερασμάτων. Τα σημεία μπορούν να αναφέρονται στα σημεία της εμπειρίας, όπως τα χρησιμοποιεί η Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά και στα στοιχεία ενός συνόλου, τα οποία αυθαιρέτως καλούμε έτσι. Ο ίδιος χειρισμός ακολουθείται και στις ευθείες. Η έννοια του «ανήκει» περιγράφεται από μια απλή μαθηματική σχέση.

«Η απαλλαγή από τις αντιφάσεις διασφαλίζεται μόνο με συνεπείς αποδείξεις και οι προηγούμενες αποδείξεις της συνέπειας είχαν βασιστεί σε ερμηνείες και μοντέλα, που συνήθως αυτό που έκαναν ήταν απλά να μεταφέρουν το ζήτημα της συνέπειας από τη μια περιοχή των μαθηματικών στην άλλη» (Τουμάσης, 2000) [41].

Ο Hilbert θεωρούσε ότι οι αντιφάσεις στη συνολοθεωρία οφείλονταν σε μια έλλειψη ακρίβειας στον ορισμό των βασικών εννοιών των μαθηματικών και μια έλλειψη αυστηρότητας στις παραγωγικές αποδείξεις.

Ο Poincare (Derniérieurs Pensées, Flammarion, Paris, 1913) [37] υποστηρίζει ότι :
...Οι εκφράσεις «*κείται επί, διέρχεται από*», κλπ. Δεν προορίζονται να ανακαλέσουν εικόνες · είναι απλώς συνώνυμα της λέξης προσδιορίζω. Οι λέξεις «σημείο, ευθεία και επίπεδο» αυτές καθ' εαυτές δεν πρέπει να προκαλούν στο πνεύμα καμία αισθητή παράσταση. Θα μπορούσαν αδιάφορα να αποδίδουν αντικείμενα οποιασδήποτε φύσης, αρκεί να μπορούμε να εγκαθιδρύσουμε μεταξύ αυτών των αντικειμένων μια αντιστοιχία, τέτοια ώστε σε κάθε σύστημα δύο αντικειμένων, που καλούνται σημεία, να αντιστοιχεί ένα από τα αντικείμενα που καλούνται ευθείες, και ένα μόνον.
...Τοιουτοτρόπως, ο Κορ Hilbert, για να το πούμε έτσι, προσπάθησε να θέσει τα αξιώματα σε μια τέτοια μορφή, που να μπορούν να εφαρμοστούν από οποιονδήποτε που δεν θα αντιλαμβανόταν το νόημά τους, γιατί δεν θα είχε δει ποτέ ούτε σημεία, ούτε ευθεία, ούτε επίπεδο. ...Θα μπορούμε έτσι να κατασκευάσουμε όλη τη γεωμετρία, δεν θα έλεγα ακριβώς χωρίς να καταλαβαίνουμε τίποτε, αφού θα συλλάβουμε τη λογική αλληλουχία των προτάσεων, αλλά το λιγότερο χωρίς να βλέπουμε τίποτε σ' αυτήν. Θα μπορούσαμε να εμπιστευθούμε τα αξιώματα σε μια λογική μηχανή, για παράδειγμα στο «λογικό πιάνο» του Stanley Jevons, και θα βλέπαμε να βγαίνει από αυτό όλη η γεωμετρία.

Τα παραπάνω είχαν ως συνέπεια την επικράτηση του φορμαλισμού στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι φορμαλιστές θεωρούσαν ότι η χρήση εικόνων ή σχημάτων ή ακόμα της διαίσθησης ή της διανοητικής φαντασίας δεν πρέπει να παρουσιάζονται σ' ένα μαθηματικό βιβλίο και μάλλον ούτε μέσα στην τάξη.

Οι πιο γνωστοί από αυτούς ήταν οι μαθηματικοί της ομάδας με το συλλογικό όνομα Nicolas Bourbaki. Στόχος της ομάδας αυτής ήταν η αναδιατύπωση, κωδικοποίηση και ενοποίηση της μαθηματικής γνώσης με τη βοήθεια μιας τυποποιημένης μαθηματικής γλώσσας.

Πολλοί πανεπιστημιακοί υιοθέτησαν το Μπουρμπακικό στυλ στις παραδόσεις και στα συγγράμματά τους. Αυτό προκάλεσε μεγάλες δυσκολίες στους φοιτητές αφού ήταν αντίθετο με το πνεύμα των σχολικών μαθηματικών. Στα μοντέρνα βιβλία τα σχήματα εμφανίζονται συχνά ως σημειοσύνολα. Δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Επομένως δύο διαφορετικά σχήματα δεν είναι ίσα, αφού δεν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία. Συνεπώς η έννοια της «ισότητας» αντικαθιστάται από την έννοια της «ισοδυναμίας». Αυτή η αλλαγή δυσκολεύει τους μαθητές γιατί η

ισότητα είναι άμεσα αντιληπτή ενώ η ισοδυναμία απαιτεί λογική διεργασία. Το κύριο επιχείρημά τους ήταν ότι οι μαθητές θα έπρεπε να αρχίσουν να μαθαίνουν τη βασική γλώσσα και της δομές των μαθηματικών όσο το δυνατόν γρηγορότερα, για να μπορέσουν για να μπορέσουν να κατανοήσουν αργότερα, πιο εύκολα, τα πανεπιστημιακά μαθηματικά.

Ο Rene Thom (Modern Mathematics: Does it Exist? ,Cambridge University Press, 1973) [36] αναφέρει ότι: «τα μαθηματικά είναι και γνωστικά εφόδια για τη ζωή και προφανώς δεν θα κάνει πράξεις, στην ενεργό ζωή του, ο σημερινός μαθητής με την θεωρία ομάδων!». Χαρακτήρισε δε την αντικατάσταση της γεωμετρίας ως επιζήμια «γιατί στην άλγεβρα τα ζητήματα είναι είτε τετριμμένα είτε απλησίαστα για τους μαθητές, ενώ τα γεωμετρικά προβλήματα παρουσιάζουν μια πλατιά σειρά προκλήσεων».

Στις αρχές του 19^{ου} αιώνα η καθιερωμένη μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών ήταν «να παρουσιάζεται ένας κανόνας, να δίνονται παραδείγματα και να προσφέρονται προβλήματα για λύση» (Jones & Oxford 1970 στο Τουμάσης, 2000). Στα μέσα του αιώνα, η παιδαγωγική των μαθηματικών άρχισε σταδιακά να ενσωματώνει τις αντιλήψεις και της αρχές της θεωρίας των χωριστών διανοητικών λειτουργιών (Facility Psychology). Σύμφωνα με τη ψυχολογική θεωρία της εποχής, που δίδασκε ότι οι διανοητικές ικανότητες είναι δυνατόν να βελτιωθούν με τη συνεχή εξάσκηση και καλλιέργεια που προσφέρουν κάποια μαθήματα, ειδικά για κάθε μια από αυτές. Η διδασκαλία, για παράδειγμα της αριθμητικής, θεωρούνταν κατάλληλη για την ανάπτυξη της ανθρώπινης σκέψης, λογικής και κρίσης. Βασικό επιχείρημα, για την επικράτηση της αριθμητικής, ήταν ότι την επιστήμη αυτή την διαπερνούσε το πνεύμα της λογικής. Παρουσιάστηκε με ένα τρόπο συναφή με την γεωμετρία, με αξιώματα, θεωρήματα, αποδείξεις. Θεώρησαν ότι η αριθμητική γύμναζε τους μαθητές και σε άλλες δεξιότητες.

Η θεωρία βέβαια αυτή αναθεωρήθηκε και σήμερα θεωρείται από επιστημονικής άποψης «το πιο μεγάλο σφάλμα στη ανθρώπινη σκέψη» (Strom 1969, p 147, στο Τουμάσης 2000).

Στο σεμινάριο του Royauumont (1959) για τη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών της μέσης εκπαίδευσης που είχε διοργανωθεί από τον Ο.Ο.Σ.Α., ο Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonné (1906-1992) είχε εκφράσει με οξύ τρόπο το πνεύμα εκείνης της μεταρρύθμισης, εκφωνώντας το ακραίο σύνθημα να «φύγει ο Ευκλείδης». Στόχος του Dieudonné ήταν να καταργηθεί η παράδοση που είχε εγκαινιάσει το 1792 ο συμπατριώτης του A.M. Legendre [5Π] με το βιβλίο «Στοιχεία Γεωμετρίας», το οποίο εκσυγχρόνισε το κλασσικό έργο του Ευκλείδη και συνέβαλε αποφασιστικά στη διάδοση της διδασκαλίας της Γεωμετρίας σε όλο τον κόσμο. Ο Dieudonné είχε προσεγγίσει το ζήτημα της μεταρρύθμισης με καθαρά τεχνοκρατικό τρόπο, από την σκοπιά των σύγχρονων Μαθηματικών, σύμφωνα με την οποία ο Ευκλείδειος χώρος δεν είναι παρά ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο. Κατά τον Dieudonné, όλη η παραδοσιακή ύλη για τα τρίγωνα, τα τετράπλευρα, τους κύκλους κλπ., είναι άχρηστη για τις μελλοντικές σπουδές των νέων, αφού έχει τόση σχέση με αυτό που οι μαθηματικοί κάνουν σήμερα όση έχουν και τα μαγικά τετράγωνα ή τα προβλήματα του σκακιού! Έτσι η Ευκλείδεια Γεωμετρία θα μπορούσε να διδαχτεί σε δύο ή τρεις ώρες – μια για την περιγραφή του

αξιοματικού συστήματος, μία για τις χρήσιμες συνέπειές του και πιθανώς μια τρίτη για λίγες ενδιαφέρουσες ασκήσεις.

Είναι γνωστό ότι η μεταρρύθμιση των «Νέων Μαθηματικών» κατάφερε τελικά να εκτοπίσει την Ευκλείδεια Γεωμετρία, ως αυτόνομο μάθημα, από τα αναλυτικά προγράμματα διδασκαλίας των Μαθηματικών στις περισσότερες χώρες του κόσμου, χωρίς να προσφέρει κάποια ισότιμη εναλλακτική λύση. Σήμερα, 60 χρόνια μετά, η κατάσταση στο χώρο της Γεωμετρίας παραμένει, διεθνώς θολή. Η καλύτερη περιγραφή της κατάστασης συνοψίζεται στην ακόλουθη φράση του Άγγλου μαθηματικού και παιδαγωγού Douglas Quadling [39]:

Ο Ευκλείδης έχει φύγει αλλά στο κενό που άφησε πίσω του επικρατεί.

Μια εντελώς διαφορετική άποψη, ως προς την χρησιμότητα των σχολικών μαθηματικών και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας βρίσκεται στις αυτογραφικές σημειώσεις του Albert Einstein, από τις οποίες, ακολουθεί το παρακάτω απόσπασμα:

.... Σε ηλικία 12 ετών δοκίμασα μια δεύτερη τελείως διαφορετική έκπληξη: σ' ένα μικρό βιβλίο Ευκλείδειας επίπεδης γεωμετρίας... Εδώ υπήρχαν ισχυρισμοί, όπως για παράδειγμα ότι τα τρία ύψη ενός τριγώνου τέμνονται στο ίδιο σημείο, οι οποίοι –αν και καθόλου προφανείς– μπορούσαν ωστόσο να αποδεχτούν με τέτοια βεβαιότητα, ώστε να μη χωρεί η παραμικρή αμφιβολία. Αυτή η σαφήνεια και βεβαιότητα μου προξένησαν μιαν εντύπωση που δεν μπορεί να περιγραφεί. Το γεγονός ότι, τα αξιώματα έπρεπε να γίνουν δεκτά χωρίς απόδειξη δεν με ενόχλησε. Σε κάθε περίπτωση μου αρκούσε πλήρως το γεγονός ότι, μπορούσα να στηρίζω τις αποδείξεις σε προτάσεις, η εγκυρότητα των οποίων ήταν για μένα αναμφισβήτητη.

Η περίπτωση του Einstein αποκαλύπτει τη σπουδαιότητα ορισμένων παιδαγωγικών σκοπών:

- Σαφήνεια στην έκθεση.
- Ολοκληρωτική απόδειξη κάθε υπόθεσης.
- Απόλυτη συνάφεια σχημάτων και συλλογισμών.
- Τάξη και ομορφιά.

Αν τα παραπάνω αποτελούν ουσιώδη συστατικά της μαθηματικής παιδείας, τότε έχουμε μια αυτονόητη απάντηση γιατί πρέπει να διδάσκεται η Ευκλείδεια Γεωμετρία (Θωμαϊδής & Πούλος, Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, 2000) [40].

5.2 ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ HILBERT ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Είναι γνωστό ότι στα διδακτικά βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν τα τελευταία 40 χρόνια στη χώρα μας δοκιμάστηκαν διάφοροι τρόποι αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Ζητούμενο ήταν κάθε φορά ο συνδυασμός της επιστημονικής εγκυρότητας και παιδαγωγικής επάρκειας. Αποτελεί, όμως, κοινό μυστικό ότι το κεφάλαιο των διδακτικών βιβλίων, στο οποίο θεμελιώνονταν η Γεωμετρία, ήταν το «μαύρο πρόβατο» της διδασκαλίας (συνοπτική και επιτροχάδην παρουσίαση, αφαίρεση από την εξεταστέα ύλη). Αυτό το γεγονός είχε πολλές

αρνητικές συνέπειες για τη μάθηση της Γεωμετρίας, με κυριότερη την ελλιπή κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας. Οι περισσότεροι μαθητές μάθαιναν κάποιες αποδείξεις, αλλά αγνοούσαν για ποιο λόγο γίνονται αυτές οι αποδείξεις, τη διαφορά μεταξύ προφανούς και μη, κλπ..

Παρακάτω παρατίθενται δύο παραδείγματα που δείχνουν την ανάγκη των συγγραφέων, σχολικών και μη βιβλίων, να εισαγάγουν νέα αξιώματα λόγω της μη ευκαμψίας και λειτουργικότητας του αξιωματικού συστήματος του Hilbert [6Π].

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Στο βιβλίο Θεωρητική Γεωμετρία Α΄ Ενιαίου Λυκείου (Αλιμπινίσης et al, 1996) στη σελίδα 23 αναφέρεται το θεώρημα: «Κάθε ευθύγραμμο τμήμα έχει ένα μόνο μέσο».

Στη Μεγάλη Γεωμετρία (Α. Πάλλας, 1971) στη σελίδα 10 το παραπάνω Θεώρημα αναφέρεται ως αξίωμα.

Ως αξίωμα αναφέρεται, στη σελίδα 10, στην Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Λυκείου (Θωμάδης et al, 1999).

Όμοια και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία Α και Β΄ Λυκείου (Αργυρόπουλος et al, 2011), στη σελίδα 11, αναφέρεται ως αξίωμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Στο βιβλίο Θεωρητική Γεωμετρία Α΄ Ενιαίου Λυκείου (Δ. Παπαμιχαήλ-Α Σκιαδά, 1976), στη σελίδα 9 αναφέρει ότι ορισμένα υποσύνολα του γεωμετρικού χώρου τα ονομάζουμε ευθείες και ότι μια ευθεία είναι γνήσιο υποσύνολο του γεωμετρικού χώρου.

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Λυκείου (Θωμάδης et al, 1999), σελίδα 10, και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία Α και Β΄ Λυκείου (Αργυρόπουλος et al, 2011), σελίδα 9 η ευθεία θεωρείται πρωταρχική έννοια.

5.3 ΣΥΓΧΡΟΝΕΣ ΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σε μια ειδική μελέτη της Διεθνούς Επιτροπής για τη Μαθηματική Εκπαίδευση (I.C.M.I) έγινε απόπειρα σύνθεσης των διαφόρων τάσεων και διατυπώθηκαν οι εξής τρεις εναλλακτικές λύσεις για τη διδασκαλία του μαθήματος:

1^η λύση: Απορρίπτουμε την ιδέα ότι η Γεωμετρία πρέπει ή μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο σχολείο ως ένα σύστημα γνώσεων (παραγωγικά οργανωμένο ή όχι), όπου οι έννοιες και τα γεγονότα πρέπει να γίνουν απλά γνωστά και μόνο επειδή ανήκουν στο σύστημα. Αντίθετα, η Γεωμετρία και ο χώρος θεωρούνται ως πηγές άντλησης εξαιρετικών θεμάτων για την οργάνωση πολλαπλών δραστηριοτήτων σε διαφορετικά επίπεδα. Οι «χρησιμοθηρικές» όψεις της Γεωμετρίας θα εξυπηρετηθούν με την παροχή αλγεβρικών μεθόδων.

2^η λύση: Εξακολουθούμε να επιχειρούμε τη διδασκαλία ενός αξιωματικού ή ψευδο-αξιωματικού μαθήματος σχολικής Γεωμετρίας (για παράδειγμα, αξιωματική θεμελίωση τύπου), το οποίο στηρίζεται είτε σε «τροποποίηση» των «Στοιχείων» του Ευκλείδη είτε, πχ., στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το αξιωματικό σύστημα του Poincaré το οποίο «αριθμητικοποιεί» τη σχολική γεωμετρία εισάγοντας το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων και το μέτρο των γωνιών σαν δοσμένες συναρτήσεις με μεταβλητές μέσα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών

3^η λύση: Για ορισμένες ομάδες μαθητών, τουλάχιστον, παρουσιάζουμε νησίδες Γεωμετρίας, δηλαδή «τοπικά» παραγωγικά συστήματα μέσα στο πλαίσιο του γενικού αναλυτικού προγράμματος (Έτσι μπορούμε, για παράδειγμα, να έχουμε ενότητες για τις ιδιότητες των εγγεγραμμένων σε κύκλο γωνιών ή τη στοιχειώδη Προβολική Γεωμετρία).

Στην Ελλάδα για προφανείς ιστορικούς και πολιτιστικούς λόγους συνεχίζεται μια παράδοση που προσεγγίζει τη δεύτερη από τις προηγούμενες εναλλακτικές λύσεις [40].

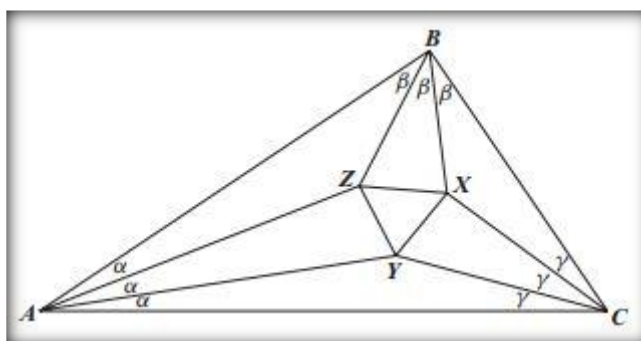
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΤΟ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

ΘΕΩΡΗΜΑ MORLEY: Η ΙΣΤΟΡΙΑ ΤΟΥ ΚΑΙ ‘ΚΑΠΟΙΕΣ’ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

6.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ MORLEY (MORLEY’S MIRACLE)

Το θεώρημα Morley



ΣΧΗΜΑ 16

Θεωρούμε τις τριχοτόμους [15Π] των γωνιών ενός τριγώνου. Αν Z, Y, X είναι τα σημεία τομής των ζευγών των τριχοτόμων που πρόσκεινται σε κάθε πλευρά του τριγώνου, τότε το τρίγωνο ZYX είναι ισόπλευρο (τρίγωνο του Morley).

Ανακαλύφθηκε από τον Frank Morley (1860-1937), από τους διασημότερους Μαθηματικούς της εποχής του, γύρω στο 1899. Τότε δημοσίευσε ένα πρόβλημα που έγινε αμέσως ένα από τα πιο δημοφιλή θέματα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Το σχήμα είχε ζωγραφιστεί με το χέρι καθώς δεν κατασκευάζεται με γεωμετρική κατασκευή (μόνο με νεύση ή με τεχνολογία).

Μετά από δέκα χρόνια δόθηκε μια τριγωνομετρική απόδειξη από τον M. Satyanarayana και μια στοιχειώδης γεωμετρική απόδειξη από τον M.T. Naraniengar. Το θεώρημα προκάλεσε αξιόλογο ενδιαφέρον στη μαθηματική κοινότητα όπως μαρτυρούν οι 150 δημοσιεύσεις μέχρι το 1978 και αρκετές άλλες μετά. Οι πρώτες βασίστηκαν σε τριγωνομετρικούς υπολογισμούς, στη συνέχεια έγιναν γεωμετρικές αποδείξεις (Ευκλείδεια Γεωμετρία), αποδείξεις που χρησιμοποιούν μιγαδικούς αριθμούς και τέλος μια αλγεβρική απόδειξη (1998) [73] του Alain Gonnies (1947-),

βραβευμένου (το 1982) με το μετάλλιο Fields, που είναι το αντίστοιχο του βραβείου Nobel στα Μαθηματικά. Σαφώς προκαλεί εντύπωση το συνεχιζόμενο ενδιαφέρον για ένα θεώρημα εκατό και πλέον ετών και γεννούνται ερωτήματα όπως τα παρακάτω:

- Πως έγινε αποδεκτό ένα θεώρημα χωρίς γεωμετρική κατασκευή;
- Με τι ασχολείτο ο Morley την εποχή που ανακάλυψε το θεώρημα;
- Τι προοπτική μπορεί να δώσει το θεώρημα;
- Η γενίκευση του θεωρήματος που οδηγεί;

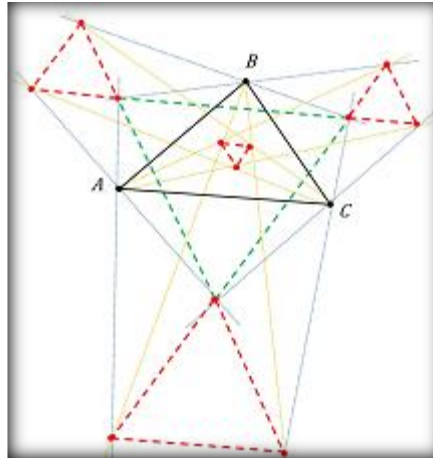
Έχει διαπιστωθεί ότι μεταξύ όλων των τριγώνων Morley, τα μόνα ισόπλευρα, είναι αυτά που προσδιορίζονται από τις τομές των εγγύτερων για κάθε πλευρά του τριχοτόμων, είτε εσωτερικών, είτε εξωτερικών, είτε μία εσωτερικής και δύο εξωτερικών γωνιών. Έχει δειχθεί ότι αυτά είναι όντως ισόπλευρα, με ομοιόμορφες αποδείξεις. Έχει έπειτα παρατηρηθεί ότι οι τομές των εσωτερικών τριχοτόμων με τις πλευρές του εσωτερικού ισοπλεύρου Morley σχηματίζουν 3 ισόπλευρα. Αυτά μαζί με το αξίωμα του Pasch έχουν χρησιμοποιηθεί για να δειχθεί ότι η θεωρία του Morley δεν εξηγεί εάν οι τριχοτόμοι της μία εσωτερικής και των 2 εξωτερικών γωνιών σχηματίζουν ισόπλευρα τρίγωνα.

6.1.2 Η «ΙΣΤΟΡΙΑ» ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Η συστηματική μελέτη της γωνίας των τριχοτόμων ενός τριγώνου ξεκίνησε μετά το 1899, όταν ο Frank Morley, ένας μαθηματικός από το Cambridge, που είχε πρόσφατα οριστεί καθηγητής στο κολλέγιο Haverford, στις Η.Π.Α καθώς διερευνούσε συγκεκριμένες γεωμετρικές ιδιότητες χρησιμοποιώντας αφηρημένες αλγεβρικές μεθόδους, έκανε την ακόλουθη εντυπωσιακή παρατήρηση, γνωστή από τότε ως η θεωρία του Morley.

Σε κάθε τρίγωνο οι τριχοτόμοι των γωνιών του, πλησίον προς τις τρεις πλευρές του αντίστοιχα, συναντώνται στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου.

Ένα τρίγωνο του Morley σχηματίζεται από τα τρία σημεία τομής των ζευγών τριχοτόμων γωνίας που συνδέονται με κάθε πλευρά του τριγώνου. Φυσικά για μία συγκεκριμένη πλευρά υπάρχουν 4 πιθανότητες για τη τομή των τριχοτόμων, αφού υπάρχουν τέσσερις εξ αυτών που συνδέει η πλευρά. Έτσι η θεωρία του Morley ισχυρίζεται ότι ένα τρίγωνο του Morley είναι ισόπλευρο, εάν σχηματίζεται από τις τομές των εγγύτερων τριχοτόμων στις τρεις πλευρές του αντίστοιχα.



ΣΧΗΜΑ 17

Πρέπει να σημειωθεί ότι η θεωρία του Morley, όπως έχει διατυπωθεί, είναι αντικείμενο ερμηνείας αφού ο όρος γωνία μπορεί να εννοεί είτε εσωτερική είτε εξωτερική γωνία, είτε ακόμα και συνδυασμός των δύο (Σχήμα 17).

Σύμφωνα με την έννοια της γωνίας, η θεωρία του Morley δίνει τα ακόλουθα ισόπλευρα του Morley. Οι τομές των εγγύτερων τριχοτόμων των εσωτερικών γωνιών σχηματίζουν το εσωτερικό ισόπλευρο του Morley. Επίσης οι τομές των εγγύτερων τριχοτόμων των εξωτερικών γωνιών σχηματίζουν το κεντρικό ισόπλευρο του Morley. Επιπλέον οι τομές των εγγύτερων τριχοτόμων της μίας εσωτερικής και των δύο εξωτερικών γωνιών σχηματίζουν ένα εξωτερικό ισόπλευρο του Morley και έτσι υπάρχουν τρία εξωτερικά ισόπλευρα του Morley. Το σχήμα 17 απεικονίζει τα παραπάνω ισόπλευρα του Morley. Οι αποδείξεις ότι τα παραπάνω τρίγωνα του Morley είναι όντως ισόπλευρα είναι παρόμοιες με την απόδειξη του εσωτερικού τριγώνου.

Όμως μία προφανής ερώτηση, που πολλοί συγγραφείς έχουν διατυπώσει, ικετεύει για μία απάντηση. Υπάρχουν άλλα ισόπλευρα του Morley εκτός από το εσωτερικό, το κεντρικό και τα τρία εξωτερικά ισόπλευρα του Morley;

Όπως φαίνεται η απαραίτητη προϋπόθεση της θεωρίας του Morley ικανοποιείται από τρία επιπλέον τρίγωνα του Morley που σχηματίζονται από συνδυασμούς των εγγύτερων τριχοτόμων μιας εσωτερικής και δύο εξωτερικών γωνιών. Ένα από αυτά παρουσιάζεται στο σχήμα 17. Κάποιοι πειραματισμοί χρησιμοποιώντας γραφήματα που δημιουργούνται από υπολογιστή για αυτά τα τρίγωνα έχουν ενισχύσει την πεποίθηση ότι η θεωρία του Morley ισχύει και για αυτά. Όμως έχει αποδειχθεί ότι αυτά δεν είναι ισόπλευρα.

Μετά από εξέταση όλων των τριγώνων του Morley αποδεικνύεται ότι από αυτά, τα ισόπλευρα είναι ακριβώς, το εσωτερικό, το κεντρικό και τα τρία εξωτερικά ισόπλευρα του Morley [78].

Αυτό παρέχει την δυνατότητα μιας αναλογίας μεταξύ των δομών των διχοτόμων της γωνίας και των τριχοτόμων της γωνίας σε ένα τρίγωνο. Ειδικότερα, η δομή των τριχοτόμων μοιάζει με τη δομή των διχοτόμων με το εσωτερικό και το εξωτερικό ισόπλευρο του Morley του τριγώνου $AB\Gamma$ που αντιστοιχεί στο έγκεντρο και στα

παράκεντρα του αντίστοιχα, ενώ το κεντρικό ισόπλευρο το Morley αντιστοιχεί στο τρίγωνο με κορυφές τα παράκεντρα του τριγώνου ΑΒΓ.

Η θεωρία του Morley συγκαταλέγεται στις πιο απροσδόκητες ανακαλύψεις στα μαθηματικά αν και περνούσε, κατά ανεξήγητο τρόπο, απαρατήρητη κατά τη διάρκεια των χρόνων. Οι αρχαίοι Έλληνες μελέτησαν τη γεωμετρία του τριγώνου εις βάθος και θα μπορούσαν να το είχαν βρει. Όμως περιέργως δεν το έκαναν και είχε αγνοηθεί κατά τη διάρκεια των επόμενων διακοσίων χρόνων. Ως προφανής αιτία μπορεί να θεωρηθεί η αδυναμία κατασκευής της τριχοτόμου μιας τυχαίας γωνίας.

Οι τριχοτόμοι της γωνίας υπάρχουν ανεξαρτήτως από το πως μπορούν να κατασκευαστούν. Εάν η δομή των τριχοτόμων της γωνίας διατηρεί την κανονικότητα που χαρακτηρίζει τη γεωμετρία του τριγώνου τότε πρέπει να υπάρχουν θεωρήματα για να την εκφράσουν.

Η πρώτη παρατήρηση για αυτή την κανονικότητα μπορεί να έχει ξεχαστεί. Ο Morley δεν την δημοσίευσε μέχρι και 25 χρόνια αργότερα παρέχοντας πρόχειρες αποδείξεις, όταν η θεωρία είχε ήδη γίνει γνωστή. Όμως ο Morley, ενθουσιασμένος από την ανακάλυψή του, ταξίδεψε πίσω στην Αγγλία για να την αναφέρει στους ειδήμονες φίλους του. Αυτό είχε αποτέλεσμα το θεώρημά του να εξαπλωθεί σε όλο τον κόσμο και πολλοί συγγραφείς προσπάθησαν να το αποδείξουν. Φυσικά η απλότητα της θεωρίας δημιουργεί την προσδοκία μίας εξίσου απλής απόδειξης. Αυτή η απλότητα προκαλεί το μαθηματικό ταλέντο.

Η συντριπτική πλειοψηφία των δημοσιεύσεων της θεωρίας του Morley έχει ασχοληθεί μόνο με τις τριχοτόμους των εσωτερικών γωνιών και παρέχει αποδείξεις για το εσωτερικό ισόπλευρο του Morley. Στον πρόλογο της πρώτης δημοσίευσης του θέματος, των Taylor και Marr, έχει αναγνωριστεί ότι η δουλειά του Morley στην διανυσματική ανάλυση, από την οποία η παραπάνω θεωρία έπεται, ισχύει και για εσωτερικές και για εξωτερικές τριχοτόμους. Η διαχείριση του άρθρου για την θεωρία όπου μόνο οι εσωτερικές τριχοτόμοι επεξηγούνται καθώς η δουλειά του Morley δεν δημοσιεύτηκε ποτέ και ήταν μόνο η συγκεκριμένη περίπτωση των εσωτερικών τριχοτόμων που έφτασε μέχρι τους συγγραφείς. Η ιδιαίτερα αξιοσέβαστη δοθείσα προσπάθεια παρήγαγε πολλών ειδών αποδείξεις, αξιοποιώντας μια ποικιλία στοιχείων και τομέων των μαθηματικών. Τριγωνομετρικές, αναλυτικές και αλγεβρικές αποδείξεις συμπληρώνουν τις αποδείξεις ενός θεωρήματος πλήρους γεωμετρικής φύσεως. Η ιστοσελίδα Cut the knot [77] παρουσιάζει 27 διαφορετικές αποδείξεις της θεωρίας του Morley από πολύ περισσότερες διαθέσιμες. Ιδιαίτερα, ο Roger Penrose χρησιμοποίησε μια τεχνική, ο Edsger Dijkstra εφάρμοσε τον νόμο των ημιτόνων τρεις φορές και μετά την μονοτονία της συνάρτησης $\psi = \sin(x)$ στο πρώτο τεταρτημόριο, ο Alan Connes παρείχε μια απόδειξη με χρήση αλγεβρικής γεωμετρίας, ο John Conway την έδειξε σε μια επίπεδη γεωμετρία σαν μία περίτεχνη λύση σε πάζλ, ενώ ο Richard Guy απέδειξε ότι είναι μια συνέπεια της θεωρίας του Lighthouse.

Ο Richard Guy αναφέρει ότι:

Υπάρχουν ενδείξεις ότι τα τρίγωνα Morley είναι περισσότερα από ένα, αλλά ο Hosberger [σελ.98] ζητά από τον αναγνώστη να αποδείξει ότι το θεώρημα του Morley ισχύει και για τις τριχοτόμους των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου.

Η πιο δημοφιλής τεχνική για την απόδειξη του θεωρήματος Morley, μπορεί να θεωρηθεί ως έμμεση, προς τα πίσω ή με μια αντίστροφη πορεία κατασκευής και εντάσσεται στο ακόλουθο σχήμα:

Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και υποθέτουμε ότι οι γωνίες του A, B, Γ είναι ίσες με $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$ αντίστοιχα. Προφανώς $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. Για να αποδείξουμε ότι το τρίγωνο του Morley είναι ισόπλευρο κάνουμε τα εξής:

Ξεκινάμε μ' ένα ισόπλευρο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ και κατασκευάζουμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ με γωνίες $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$ έτσι ώστε το τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ είναι το κατάλληλο (εσωτερικό, εξωτερικό ή κεντρικό) τρίγωνο Morley του τριγώνου $AB\Gamma$. Με αυτό τον τρόπο το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι όμοιο με το δεδομένο τρίγωνο. Οι αποδείξεις με την παραπάνω μέθοδο γίνονται κατασκευάζοντας εξωτερικά του τριγώνου $AB\Gamma$ τα τρίγωνα $B'A\Gamma', \Gamma'BA'$ και $A'\Gamma B'$ με την κατάλληλη επιλογή των γωνιών με τις πλευρές του τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

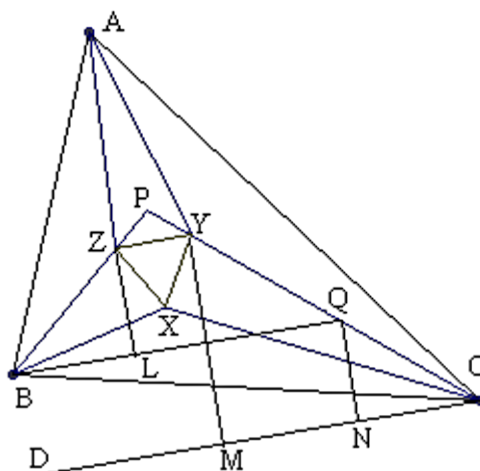
Επιπλέον αυτές οι αποδείξεις αποκαλύπτουν τις παρακάτω θεμελιώδεις ιδιότητες των τριγώνων Morley.

- Ποια τρίγωνα Morley δεν είναι ισόπλευρα.
- Οι προεκτάσεις δύο πλευρών του εσωτερικού τριγώνου Morley τέμνουν τις αντίστοιχες εσωτερικές διχοτόμους σε δύο σημεία τα οποία με την κοινή κορυφή των δύο πλευρών σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.
- Οι πλευρές των τριγώνων Morley είναι συγγραμμικές ή παράλληλες.
- Σε κάθε τρίγωνο οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών των εγγύτερων στις τρεις πλευρές αντίστοιχα, δεν σχηματίζουν πάντα ισόπλευρο. Αυτό ισχύει για την εσωτερική τριχοτόμο μιας γωνίας και τις εξωτερικές των άλλων δύο αντίστοιχα.

Η παρατήρηση όλων των παραπάνω και απόδειξή τους οφείλεται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία.

ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ MORLEY

6.1.3 ΠΡΩΤΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ) EUCLIDE PARACELSO BOMBASTO UMBIGIO, GUYAZUELA



ΣΧΗΜΑ 18

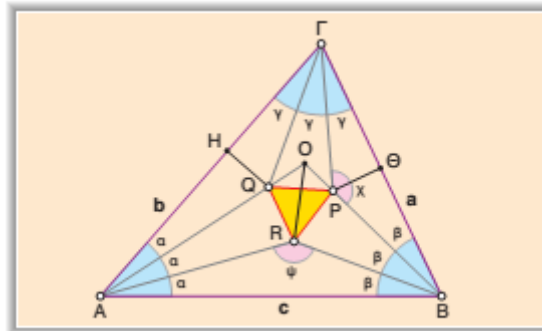
Έστω ότι οι προεκτάσεις των BZ και CY τέμνονται στο σημείο P (Σχήμα 18). Στο τμήμα PC, θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα $PQ = PB$. Ονομάζουμε L την προβολή του σημείου Z στο ευθύγραμμο τμήμα BQ. Από το C φέρνουμε ευθεία CD παράλληλη στη BQ. Έστω M, N οι προβολές των Y, Q στη CD. Από την ομοιότητα των τριγώνων BZL, YMC, QNC προκύπτει ότι

$$YM/YC = ZL/ZB = QN/QC$$

$$(YM - ZL) / (YC - ZB) = QN / QC$$

Αλλά $YM - ZL = QN$. Άρα $YC - ZB = QC$. Όμως $YC - YQ = QC$. Συνεπώς $YQ = ZB$ και ακόμη $PQ = PB$, επομένως $PZ = PY$ (1). Το X είναι το έγκεντρο του τριγώνου BCP άρα η PX διχοτομεί τη γωνία BPC. Από την (1) και την ισότητα των τριγώνων XYP και PZX προκύπτει ότι $ZX = XY$. Όμοια αποδεικνύουμε ότι $ZY = ZX$. Τελικά το τρίγωνο XYZ είναι ισόπλευρο.

6.1.4 ΔΕΥΤΕΡΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ)



ΣΧΗΜΑ 19

Έστω ένα τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$. Συμβολίζουμε τις γωνίες του $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ με 3α , 3β , 3γ αντίστοιχα. Προφανώς ισχύει $\alpha + \beta + \gamma = \pi/3$.

Θεωρούμε τα τρίγωνα ABR και ABO , των οποίων οι γωνίες που αντιστοιχούν στις κορυφές A , B είναι αντιστοίχως α , β για το πρώτο και 2α , 2β για το δεύτερο και των οποίων οι κορυφές R , O βρίσκονται στο εσωτερικό του τριγώνου $AB\Gamma$. Δεδομένου ότι η OR είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{O}B$ (το R είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου ABO), θα ισχύει:

$$A\hat{O}R = B\hat{O}R = \pi/6 + \gamma \quad (1).$$

Επί της OB θεωρούμε το σημείο P και επί της OA το σημείο Q :

$$O\hat{R}P = O\hat{R}Q = \pi/6 \quad (2).$$

Τα τρίγωνα ORP και ORQ έχουν μια κοινή πλευρά και ίσες προσκείμενες γωνίες, επομένως είναι ίσα, οπότε προκύπτει ότι $RP = RQ$ (3). Από (2) και (3) προκύπτει ότι το τρίγωνο PQR είναι ισόπλευρο. Θα δείξουμε ότι το τρίγωνο αυτό είναι το τρίγωνο του Morley.

Έστω ότι το σημείο H είναι το συμμετρικό του σημείου R ως προς την OA και Θ το συμμετρικό του ίδιου σημείου ως προς την OB . Προφανώς ισχύει $HQ = QP = P\Theta$. Θα αποδείξουμε ότι $H\hat{Q}P = \Theta\hat{P}Q = 2\phi$, όπου 2ϕ είναι η παραπληρωματική της γωνίας 2γ . Η γωνία $R\hat{P}B$, ως εξωτερική του τριγώνου ORP , ισούται με $\pi/6 + \gamma + \pi/6 = \pi/3 + \gamma$. Επομένως έχουμε $\Theta\hat{P}Q = 2\pi - \pi/3 - 2(\pi/3 + \gamma) = \pi - 2\gamma = 2\phi$.

Ομοίως αποδεικνύεται και η ισότητα $H\hat{Q}P = 2\phi$. Από την ισότητα των τριγώνων HQP και QPT προκύπτει ότι $P\hat{H}Q = P\hat{T}Q$. Άρα το τετράπλευρο $HQP\Theta$ προκύπτει ότι είναι εγγράψιμο σε ένα κύκλο C .

Επειδή τώρα οι χορδές HP και ΘQ του κύκλου C είναι χορδές εγγεγραμμένης γωνίας 2γ (ή 2ϕ) και επειδή $HQ = QR = P\Theta$, προκύπτει ότι κάθε χορδή HQ , QP , $P\Theta$ είναι χορδή εγγεγραμμένης γωνίας γ . Επομένως η $H\Theta$ είναι χορδή εγγεγραμμένης γωνίας 3γ . Αλλά $H\hat{\Gamma}\Theta = 3\gamma$. Άρα η κορυφή Γ ανήκει στον κύκλο C . Τότε όμως θα έχουμε $H\hat{\Gamma}Q = Q\hat{\Gamma}P = P\hat{\Gamma}\Theta = \gamma$, και επομένως το PQR είναι το τρίγωνο του Morley.

6.1.5 ΤΡΙΤΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ)

Λήμμα

Ισχύει ότι: $\eta\mu 3\varphi = 4\eta\mu\varphi\eta\mu(\pi/3 + \varphi)\eta\mu(\pi/3 - \varphi)$, (1)

$$\eta\mu^2\Gamma = \eta\mu^2A + \eta\mu^2B - 2\eta\mu A\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma, \quad (2)$$

όπου φ είναι μια τυχαία γωνία και A, B, Γ οι γωνίες ενός τριγώνου $AB\Gamma$.

Απόδειξη του τύπου (1): Ισχύει

$$\begin{aligned}\eta\mu 3\varphi &= 3\eta\mu\varphi - 4\eta\mu^3\varphi = 4\eta\mu\varphi\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \eta\mu^2\varphi\right] \\ &= 4\eta\mu\varphi\left(\eta\mu^2\frac{\pi}{3} - \eta\mu^2\varphi\right) \\ &= 4\eta\mu\varphi\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)\end{aligned}\quad (3)$$

Απόδειξη του τύπου (2): Αν δ είναι η διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$, οι πλευρές αυτού θα είναι ίσες με

$$a = \delta\eta\mu 3\alpha, \quad b = \delta\eta\mu 3\beta, \quad c = \delta\eta\mu 3\gamma \quad (\text{νόμος ημιτόνων})$$

Από το θεώρημα των συνημιτόνων προκύπτει τότε άμεσα η σχέση (2).

Απόδειξη του θεωρήματος Morley:

Θέτουμε $B\hat{P}\Gamma = \chi$ και $A\hat{R}B = \psi$ (Σχήμα 20).

Λόγω των σχέσεων

$$\chi + \beta + \gamma = \pi, \quad \psi + \alpha + \beta = \pi, \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi/3,$$

θα έχουμε

$$\eta\mu\chi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right), \quad \eta\mu\psi = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - \gamma\right). \quad (4)$$

Αν εφαρμόσουμε τον νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $B\Gamma P$, θα πάρουμε τη σχέση

$$BP = a \cdot \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\chi} = \frac{\delta\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu(\frac{\pi}{3} - \alpha)} \cdot \eta\mu\gamma. \quad (5)$$

Από την οποία λόγω του τύπου (1), θα προκύψει

$$BP = 4\delta\eta\mu\alpha\eta\mu\gamma\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right). \quad (6)$$

Θεωρώντας το τρίγωνο ARB θα προκύψει ανάλογα

$$BR = 4\delta\eta\mu\alpha\eta\mu\gamma\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right). \quad (7)$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος των συνημιτόνων στο τρίγωνο BRP προκύπτει η σχέση

$$\begin{aligned} RP^2 &= BR^2 + BP^2 - 2BR \cdot BP \sin\beta \\ &= 16\delta^2\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\gamma[\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\sin\beta] \quad (8) \end{aligned}$$

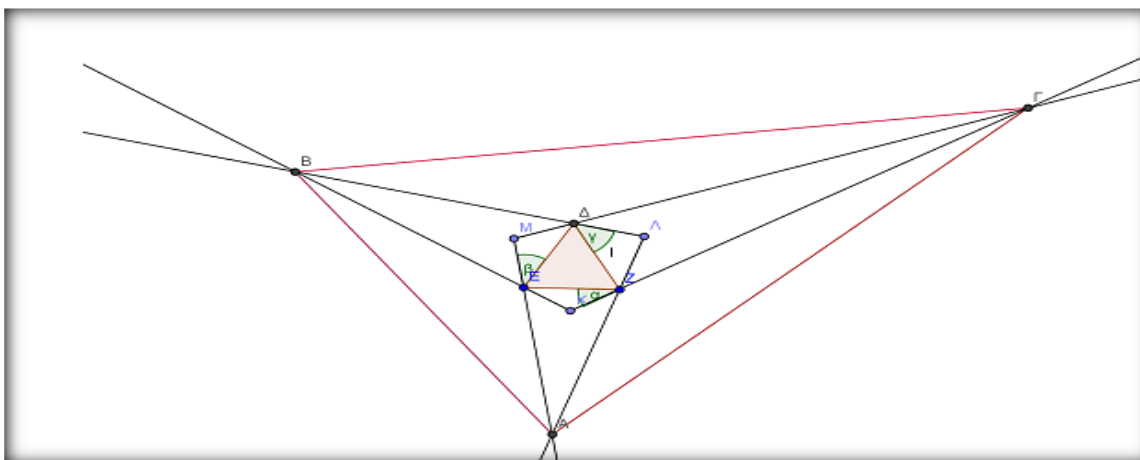
Επειδή όμως οι $\pi/3 + \gamma$, $\pi/3 + \alpha$, β είναι γωνίες τριγώνου, η εντός της αγκύλης στη σχέση (8) παράσταση θα ισούται με $\eta\mu 2\beta$, λόγω του τύπου (2). Επομένως έχουμε

$$RP = 4\delta\eta\mu\alpha\eta\mu\beta\eta\mu\gamma = 4\delta\eta\mu\frac{A}{3}\eta\mu\frac{B}{3}\eta\mu\frac{\Gamma}{3} \quad (9)$$

Το ίδιο μήκος θα προκύψει και για τις πλευρές PQ και QR, οπότε το τρίγωνο PQR είναι ισόπλευρο.

Η απόδειξη αυτή μας δίνει και το μήκος της πλευράς του τριγώνου Morley (βλ. σχέση (9)).

6.1.6 ΤΕΤΑΡΤΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ)



ΣΧΗΜΑ 20

Πολλές μαθηματικές αποδείξεις (όπως η δεύτερη απόδειξη) είναι μακροσκελείς και πολύπλοκες. Στην απόδειξη που ακολουθεί γίνεται αντιστροφή της διαδικασίας, δηλαδή από ένα ισόπλευρο τρίγωνο κατασκευάζεται ένα άλλο τρίγωνο όμοιο προς το αρχικό $AB\Gamma$.

Πάνω στις πλευρές EZ , $ΕΔ$, ΔZ του ισοπλεύρου τριγώνου $EZ\Delta$ κατασκευάζουμε τα ισοσκελή τρίγωνα KEZ , $ME\Delta$, $\Lambda Z\Delta$ ώστε οι γωνίες των βάσεων τους να πληρούν τις σχέσεις

$$\alpha + \beta + \gamma = 120^0, \alpha < 60^0, \beta < 60^0, \gamma < 60^0$$

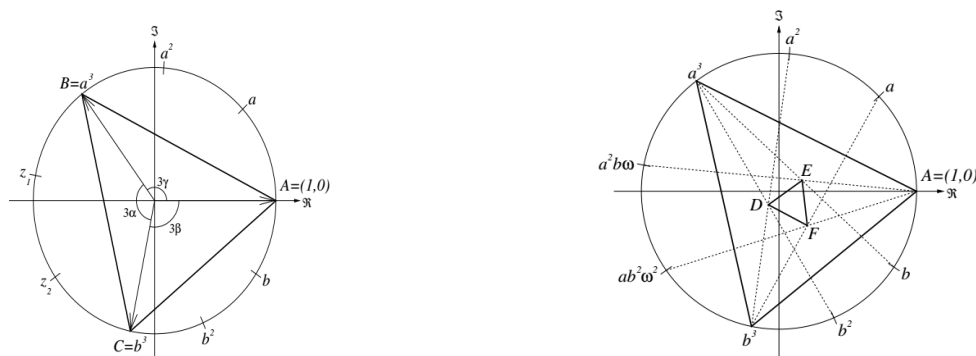
Προεκτείνουμε τις πλευρές των ισοσκελών τριγώνων που τέμνονται στα σημεία A , B , Γ (σχήμα 20).

Στο τρίγωνο $B\Gamma K$ η ΔK είναι διχοτόμος της γωνίας K αφού είναι μεσοκάθετος στο EZ (1).

$$\begin{aligned} \widehat{B\Delta\Gamma} &= 180^0 - \beta - \gamma - 60^0 = 120^0 - \beta - \gamma = \alpha. \text{ Άρα } \widehat{B\Delta\Gamma} = 180^0 - \alpha = \\ &= 90^0 + 90^0 - \alpha = 90^0 + \widehat{K}/2 \text{ (2).} \end{aligned}$$

Από (1), (2) προκύπτει ότι το Δ είναι έγκεντρο του τριγώνου $B\Gamma K$. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα Z , E είναι έγκεντρα των τριγώνων $AM\Gamma$, ALB , άρα οι γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ τριχοτομούνται. Άρα $\alpha = 60^0 - 1/3\widehat{A}$, $\beta = 60^0 - 1/3\widehat{B}$, $\gamma = 60^0 - 1/3\widehat{\Gamma}$. Επιλέγοντας για τις γωνίες α , β , γ τις παραπάνω τιμές και κάνοντας την παραπάνω κατασκευή, καταλήγουμε σε τρίγωνο όμοιο με το δοσμένο αρχικό τρίγωνο $AB\Gamma$.

6.1.7 ΠΕΜΠΤΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ)



ΣΧΗΜΑ 21

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε τα ακόλουθα λήμματα.

ΛΗΜΜΑ 1

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί a, b, c με $a \neq b \neq c$, με εικόνες τα σημεία A, B, Γ αντίστοιχα στο μιγαδικό επίπεδο.

Αν $\frac{b-a}{c-a} = \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{c}-\bar{a}}$, τότε τα σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά.

ΛΗΜΜΑ 2

Έστω a, b δύο σημεία του μοναδιαίου κύκλου. Τότε η εξίσωση της ευθείας που ενώνει τα a, b είναι

$$z + ab\bar{z} = a + b$$

ΛΗΜΜΑ 3

Έστω a, b, c, d τέσσερα σημεία του μοναδιαίου κύκλου. Οι χορδές που ενώνουν τα a, b και c, d τέμνονται στο σημείο

$$\bar{z} = \frac{a+b-c-d}{ab-cd} \quad \text{ή} \quad z = \frac{\bar{a}+\bar{b}-\bar{c}-\bar{d}}{\bar{a}\bar{b}-\bar{c}\bar{d}}$$

Απόδειξη του θεωρήματος Morley

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το τρίγωνο ABC εγγράφεται στο μοναδιαίο κύκλο, και η κορυφή A βρίσκεται στο σημείο $(1,0)$.

Θεωρούμε

$$\widehat{AOB} = 3\gamma, \quad \widehat{AOC} = 3\beta, \quad \widehat{BOC} = 3\alpha = 360^\circ - (3\gamma + 3\beta)$$

$$\text{Προφανώς } \alpha = 120^\circ - \gamma - \beta.$$

Τότε τα ορίσματα των σημείων που τριχοτομούν το τόξο $\widehat{BC}$ (που δεν περιέχει το A)

Είναι

$$3\gamma + \alpha = 2\gamma - \beta + 120^\circ, \quad -3\beta - \alpha = -2\beta + 240^\circ.$$

Αν θέσουμε τα σημεία που τριχοτομούν τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{AC}$ να είναι α, α^2 και b, b^2 αντίστοιχα, τότε B, C είναι α^3 και b^3 , και τα σημεία που τριχοτομούν το τόξο $\widehat{BC}$ δίνονται από $\alpha^2 b \omega$ και $\alpha b^2 \omega^2$, όπου $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

Πράγματι, $\arg z_1 = 3\gamma + \alpha = 2\gamma - \beta + 120^\circ = 2 \arg \alpha + \arg b + \arg \omega = \arg(\alpha^2 b \omega)$
και $\arg z_2 = -3\beta - \alpha = -2\beta + \gamma + 240^\circ = 2 \arg b + \arg \alpha + \arg \omega^2 = \arg(\alpha b^2 \omega^2)$

Έστω ότι L, D, F είναι τα σημεία τομής των ζευγών των τριχοτόμων που πρόσκεινται σε κάθε πλευρά του τριγώνου ABC (σχήμα 21). Τότε από το λήμμα 3 προκύπτει ότι

$$D = \frac{\bar{\alpha}^2 + \bar{b}^3 - \bar{b}^2 - \bar{\alpha}^3}{\bar{\alpha}^2 \bar{b}^3 - \bar{b}^2 \bar{\alpha}^3} = \frac{\alpha^{-2} + b^{-3} - b^{-2} - \alpha^{-3}}{\alpha^{-2} b^{-3} - b^{-2} \alpha^{-3}} = \frac{ab^3 + \alpha^3 - \alpha^3 b - b^3}{a - b} = (\alpha^2 + ab + b^2) - ab(\alpha + b),$$

$$E = \frac{1 + \overline{\alpha^2 b \omega} - \bar{\alpha}^3 - \bar{b}}{\alpha^2 b \omega - \alpha^3 \bar{b}} = \frac{1 + \alpha^{-2} b^{-1} \omega^{-1} - \alpha^{-3} - b^{-1}}{\alpha^{-2} b^{-1} \omega^{-1} - \alpha^{-3} b^{-1}} = \frac{b(\alpha^3 - \omega^3) + \alpha(\omega^2 - \alpha^2)}{\omega^2(\alpha - \omega)} = \omega[b(\alpha^2 + \alpha\omega + \omega^2) - \alpha(\alpha + \omega)] \text{ και με όμοιο τρόπο}$$

$$F = \dots\dots\dots = \omega^2[\alpha(b^2 + b\omega^2 + \omega) - b(b + \omega^2)].$$

Το τρίγωνο DEF είναι ισόπλευρο, αν και μόνο αν, $D + F\omega + E\omega^2 = 0$ που είναι ισοδύναμο με την ισότητα
 $\alpha^2 + ab + b^2 - ab(\alpha + b) + \alpha(b^2 + b\omega^2 + \omega) - b(b + \omega^2) + b(\alpha^2 + \alpha\omega + \omega^2) - \alpha(\alpha + \omega) = 0$ (1).

Εκτελώντας απλές πράξεις στην παραπάνω ισότητα έχουμε

$$\alpha^2 - \alpha^3 + b^2 - b^3 + ab(1 + \omega + \omega^2) + \alpha^2 b - \alpha^2 b - ab^2 + ab^2 + \alpha\omega - \alpha\omega + b\omega^2 - b\omega^2 = 0$$

Επομένως ισχύει η σχέση (1), επομένως το τρίγωνο DEF είναι ισόπλευρο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Όταν στην εκφώνηση του θεωρήματος θεωρούμε τις τριχοτόμους των γωνιών ενός τυχόντος τριγώνου, εννοούμε την κατασκευή αυτών με οποιοδήποτε δυνατό τρόπο.
2. Η πρώτη απόδειξη κοινοποιήθηκε από το μαθηματικό ‘Euclide Paracelso Bombasto Umbigio, Guyazuela’, στον Dr. Leon Bankoff, Los Angeles, California, ο οποίος την μετάφρασε και την δημοσίευσε στο Bankoff’s conundrum.
3. Η δεύτερη και Τρίτη απόδειξη έχουν παρουσιαστεί από τον καθηγητή του Α.Π.Θ Γ. Στάμου (Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί No 10 Απρίλιος 2003) [74].
4. Η τέταρτη απόδειξη του θεωρήματος, στην Ελληνική βιβλιογραφία, παρουσιάζεται στο βιβλίο Γεωμετρικά Θέματα (1978) του Μ. Μαραγκάκη [76].
5. Η πέμπτη απόδειξη παρουσιάστηκε από τον Magnus Ahl (Proofs of certain theorem in geometry, pedagogical benefits from the use of complex numbers, 2007-No 17) [7].

6.1.8 ΕΚΤΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ Η ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ALAN CONNES

Ο Alan Connes (1998) έδωσε μια νέα απόδειξη του θεωρήματος, βασισμένη στην αλγεβρική γεωμετρία. Ειδικότερα χρησιμοποίησε: ισομετρίες του Ευκλείδειου επιπέδου, ομομορφισμούς ομάδων και αφινικές ομάδες [9Π].

Έστω K ένα αντιμεταθετικό σώμα και G μια γραμμική αφινική ομάδα [10Π] πάνω στο K . Η G μπορεί να εκπροσωπείται από την ομάδα των 2×2 αντιστρέψιμων πινάκων του τύπου $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ όπου $a \in K$, $b \in K$ και κάθε $g_i \in G$ είναι της μορφής $\begin{pmatrix} \alpha_i & b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ορίζουμε τον αφινικό μετασχηματισμό [16] $g(x) = ax + b$ [8] όπου $a \neq 0$ και $x \in K$. Στη συνέχεια ορίζουμε τον ομομορφισμό $\delta: G \rightarrow K$, όπου στο K^* δεν ανήκουν τα μηδενικά στοιχεία του K , K είναι μια πολλαπλασιαστική ομάδα και $\delta(g) = a$. Τέλος, ορίζουμε $T = \ker \delta$, που είναι η ομάδα των μεταφορών, η προσθετική υποομάδα του K , και $\tau(g) = b$ (b η μετατόπιση).

Όταν $a \neq 1$, $g \notin T$, τότε το σημείο $x_0 = ax_0 + b$ ή $x_0 = b/(1-a)$ είναι σταθερό σημείο της g [11Π], δηλαδή ισχύει: $g(x_0) = x_0$ και συμβολίζουμε

$$\text{fix}(g) = b/(1-a)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ CONNES

Η απόδειξη του θεωρήματος του Morley είναι συνέπεια του παρακάτω θεωρήματος: Αν $g_1, g_2, g_3 \in G$ και $g_1g_2, g_2g_3, g_3g_1, g_1g_2g_3 \notin T$ (δεν είναι μεταφορές). Θέτουμε $j = \delta(g_1g_2g_3)$. Τότε οι ακόλουθες δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες.

$$\alpha) g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$$

$$\beta) j^3 = 1 \text{ και } \alpha + j b + j^2 c = 0 \text{ όπου } \alpha = \text{fix}(g_1g_2), b = \text{fix}(g_2g_3), c = \text{fix}(g_3g_1).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\alpha) \rightarrow \beta)$$

Εκτελώντας απλές πράξεις προκύπτει ότι:

$$g_i^3 = \begin{pmatrix} \alpha_i^3 & \alpha_i b_i + \alpha_i^2 b_i + b_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g_1 g_2 g_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 & \alpha_1 \alpha_2 b_3 + \alpha_1 b_2 + b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$g_1^3 g_2^3 g_3^3 = \begin{pmatrix} \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $B = (\alpha_1^2 + \alpha_1 + 1)b_1 + \alpha_1^3(\alpha_2^2 + \alpha_2 + 1)b_2 + (\alpha_1\alpha_2)^3(\alpha_3^2 + \alpha_3 + 1)b_3$.

Μ' ένα απλό υπολογισμό, χρησιμοποιώντας ότι $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = J$

($j \neq 1$ από υπόθεση) έχουμε:

$B = -j\alpha_1^2\alpha_2(\alpha_1 - j)(\alpha_2 - j)(\alpha_3 - j)(\alpha + j b + j^2 c)$ όπου α, b, c είναι τα σταθερά

σημεία με $\alpha = \frac{\alpha_1 b_2 + b_1}{1 - \alpha_1 \alpha_2}$, $b = \frac{\alpha_2 b_3 + b_2}{1 - \alpha_2 \alpha_3}$, $c = \frac{\alpha_3 b_1 + b_3}{1 - \alpha_3 \alpha_1}$

Αν $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$ τότε $\delta(g_1^3 g_2^3 g_3^3) = \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 = 1 = j^3$ και $B = 0$ (1).

Επομένως αν $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$ τότε $j^3 = 1$.

Επίσης από σχέση (1) $\tau(g_1^3 g_2^3 g_3^3) = B = 0$. Από υπόθεση όμως οι παράγοντες

$(\alpha_1 - j)$, $(\alpha_2 - j)$, $(\alpha_3 - j)$ είναι $\neq 0$ γιατί οι ισομετρίες g_i δεν είναι μετατοπίσεις.

Συνεπώς $B=0 \Leftrightarrow \alpha + j b + j^2 c = 0$.

$\beta) \rightarrow \alpha)$

Γνωρίζουμε ότι:

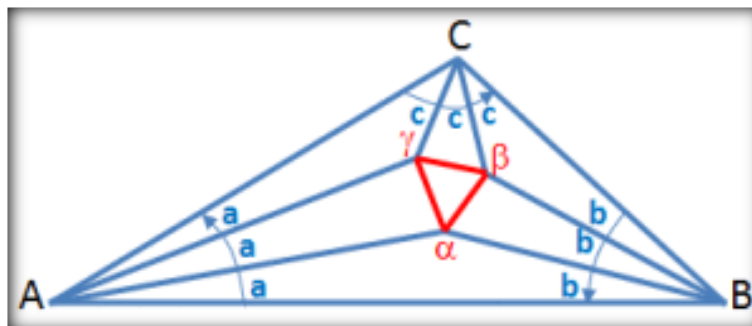
$J = \delta(g_1 g_2 g_3) = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

Αν $j^3 = 1$ τότε $\alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 = 1$. Αλλά από $\alpha) \quad B=0 \Leftrightarrow \alpha + j b + j^2 c = 0$.

Συνεπώς $g_1^3 g_2^3 g_3^3 = 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ MORLEY

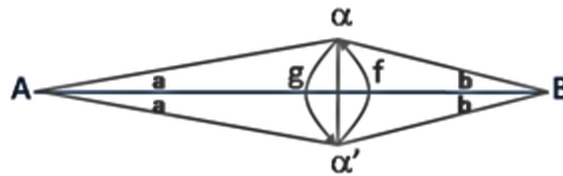
Θεωρούμε $k = C$ και ορίζουμε τα f, g, h ως εξής



ΣΧΗΜΑ 22

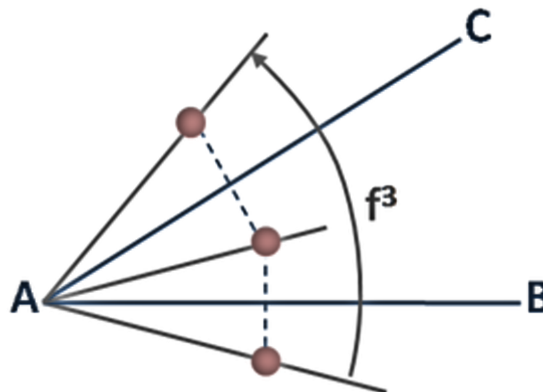
- f είναι η περιστροφή με κέντρο το σημείο A κατά γωνία $2a$, όπου $3a = \widehat{BAC}$
- g είναι η περιστροφή με κέντρο το σημείο B , κατά γωνία $2b$, όπου $3b = \widehat{CBA}$
- h είναι η περιστροφή με κέντρο το σημείο C , κατά γωνία $2c$, όπου $3c = \widehat{ACB}$

Θα εξετάσουμε το σημείο τομής α των τριχοτόμων των γωνιών A και B που βρίσκονται πλησιέστερα στην πλευρά AB . Η περιστροφή g μεταφέρει το α στο α' και η περιστροφή f μεταφέρει το α' στο α . Συνεπώς το α είναι ένα σταθερό σημείο της fg . Όμοια το β είναι ένα σταθερό σημείο της gh και το γ είναι ένα σταθερό σημείο της hf .



ΣΧΗΜΑ 23

Στη συνέχεια, f^3 είναι μια περιστροφή με κέντρο το A κατά γωνία $6a$. Αυτή είναι ισοδύναμη με το αποτέλεσμα δύο ανακλάσεων $S_{AC}S_{AB}$ [13]. Όμοια, η g^3 είναι ισοδύναμη με το αποτέλεσμα των ανακλάσεων [12Π] $S_{AB}S_{BC}$ και η h^3 είναι ισοδύναμη με το αποτέλεσμα των ανακλάσεων $S_{BC}S_{AC}$ (Με S_{AB} συμβολίζουμε την ανάκλαση ενός σημείου ως προς την ευθεία AB).



ΣΧΗΜΑ 24

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι: $f^3 g^3 h^3 = S_{AC} S_{AB} S_{AB} S_{BC} S_{BC} S_{AC} = 1$.

Επομένως ισχύει μια από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Connes (η α), άρα ισχύει και η άλλη (η β):

$$j^3=1 \quad \text{και} \quad \alpha + j\beta + j^2\gamma = 0.$$

Επειδή $K=\mathbb{C}$, η ισότητα $j^3 = 1$ σημαίνει ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει ο j είναι:

$$1 \text{ (απορρίπτεται)}, \cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3} = j, \cos \frac{4\pi}{3} + i\sin \frac{4\pi}{3} = j^2.$$

Η σχέση $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ μπορεί να ερμηνευτεί στο μιγαδικό επίπεδο ως εξής:

$$\alpha - \beta - j^2\beta + j^2\gamma = 0 \quad (j^2 + j + 1 = 0 \Leftrightarrow j = -j^2 - 1)$$

$$\alpha - \beta = -j^2(\gamma - \beta)$$

$$\alpha - \beta = e^{i\pi/3}(\gamma - \beta) \quad (1)$$

Το $e^{i\pi/3}$ προκαλεί περιστροφή κατά γωνία $\pi/3$ στο διάνυσμα που πολλαπλασιάζει. Επομένως από τη σχέση (1) προκύπτει ότι το διάνυσμα $\beta\alpha$ προκύπτει, από περιστροφή κατά γωνία $\pi/3$, του διανύσματος $\beta\gamma$. Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες δύο περιπτώσεις. Επομένως το τρίγωνο $\alpha\beta\gamma$ είναι ισόπλευρο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το θεώρημα του Morley δεν ισχύει σε μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες.
2. Αν οι κύβοι g_1^3, g_2^3, g_3^3 δεν αλλοιωθούν τότε πολλαπλασιάζοντας κάθε g_i με μια κυβική ρίζα του 1 προκύπτουν τα ισόπλευρα τρίγωνα των παραλλαγών του θεωρήματος.

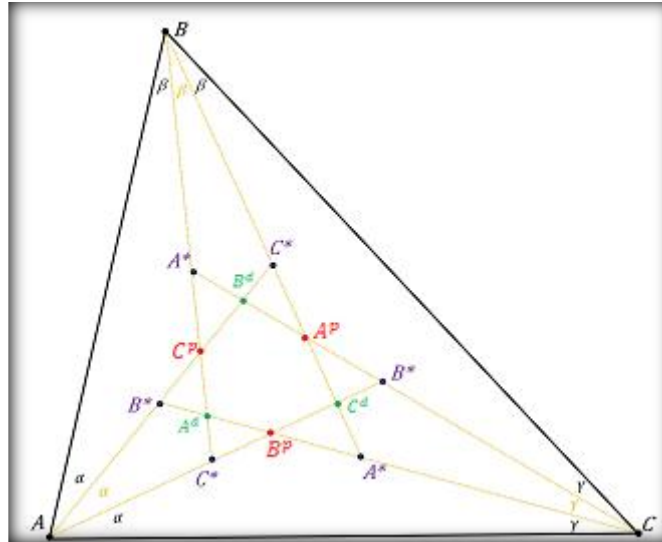
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

ΤΡΙΓΩΝΑ MORLEY-ΙΣΟΠΛΕΥΡΑ ΤΡΙΓΩΝΑ MORLEY- ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ MORLEY- ΣΥΜΠΤΩΣΕΙΣ

6.2.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ MORLEY

Σ' ένα τρίγωνο του Morley κάθε κορυφή είναι η τομή δύο τριχοτόμων, κάθε μια εκ των οποίων είναι είτε η εγγύτατη είτε η πιο απομακρυσμένη σε μια πλευρά του. Επομένως μια κορυφή του καλείται εγγύτατη ή περιφερική ή μίξη (mix), σε σχέση με μια πλευρά του τριγώνου, στην περίπτωση που οι τριχοτόμοι είναι και οι δύο εγγύτατοι ή και οι δύο περιφερικοί ή μια εγγύτατη και η άλλη περιφερική στην αντίστοιχη πλευρά. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να συμβολίζουμε μια εγγύτατη ή μια περιφερική ή μια μίξη (mix) κορυφή, μιας πλευράς του αρχικού τριγώνου, χρησιμοποιώντας τα σύμβολα p , d ή $*$ στο γράμμα της αντίστοιχης γωνίας του τριγώνου που βρίσκεται στην απέναντι πλευρά. Έτσι με A^p , A^d , A^* δηλώνεται η εγγύτατη, περιφερική ή μίξη εγγύτατης/περιφερικής κορυφής ενός τριγώνου Morley ως προς την πλευρά BC αντίστοιχα. Στο σχήμα 25 υπάρχουν οι τομές των εσωτερικών τριχοτόμων του τριγώνου. Ένα τρίγωνο Morley μπορεί να έχει είτε εγγύτατες κορυφές ή περιφερικές κορυφές ή ακριβώς δύο mix- κορυφές.

Ειδικότερα με τρίγωνο $A^p B^p C^p$ συμβολίζουμε το εσωτερικό τρίγωνο Morley, των εγγύτατων κορυφών, και καθορίζεται από τις τομές των εγγύτατων τριχοτόμων σε κάθε πλευρά του τριγώνου. Επίσης υπάρχει ένα μόνο τρίγωνο Morley με περιφερικές κορυφές που συμβολίζεται ως $A^d B^d C^d$. Επιπλέον υπάρχουν τρία τρίγωνα Morley με μια εγγύτατη κορυφή και δύο κορυφές mix. Αυτά συμβολίζονται ως $A^* B^* C^*$, $B^p C^* A^*$, $C^p A^* B^*$. Επιπρόσθετα υπάρχουν τρία τρίγωνα Morley με μια περιφερική κορυφή και δύο mix κορυφές και συμβολίζονται με $A^d B^* C^*$, $B^d C^* A^*$, $C^d A^* B^*$. Μια εγγύτατη ή μια περιφερική κορυφή είναι μοναδικά καθορισμένη ενώ η mix κορυφή δεν είναι καθώς υπάρχουν δύο τέτοιες που δηλώνονται με το ίδιο γράμμα. Όμως σε ένα τρίγωνο του Morley με ένα ζεύγος mix κορυφών, είτε είναι εγγύτατες είτε είναι περιφερικές κορυφές, οι mix κορυφές είναι μοναδικά ορισμένες λόγω των επιλεγμένων περιορισμών στο ζευγάρι των τριχοτόμων για τη δεύτερη και στη συνέχεια για την τρίτη κορυφή. Έτσι υπάρχουν οκτώ εσωτερικά τρίγωνα Morley που σχηματίζονται από τις τομές των τριχοτόμων των εσωτερικών γωνιών του τριγώνου ABC .



ΣΧΗΜΑ 25

Παρόμοια οι τομές των τριχοτόμων των εξωτερικών γωνιών του τριγώνου σχηματίζουν τρίγωνα Morley. Αυτά δηλώνονται ως $A_A^P B_B^P C_C^P$, για τα τρίγωνα Morley των εγγύτατων κορυφών, ως $A_A^d B_B^d C_C^d$, για τα τρίγωνα Morley των περιφερικών κορυφών, ως $A_A^P B_B^* C_C^*$, $B_B^P C_C^* A_A^*$ και $C_C^P A_A^* B_B^*$ για τα τρίγωνα Morley με μια εγγύτατη και δύο mix κορυφές, ως $A_A^d B_B^* C_C^*$, $B_B^d C_C^* A_A^*$ και $C_C^d A_A^* B_B^*$ για τα τρίγωνα Morley με μια περιφερική δυο mix κορυφές. Γενικά υπάρχουν οκτώ τρίγωνα του Morley που σχηματίζονται από τις τριχοτόμους των εξωτερικών γωνιών του. Οι κορυφές τους είναι στο εξωτερικό του τριγώνου και λόγω της σχετικά κεντρικής τους θέσης ονομάζονται κεντρικά τρίγωνα Morley.

Υπάρχουν δύο ακόμα δυνατότητες για τον σχηματισμό ενός τριγώνου Morley. Μια προκύπτει συνδυάζοντας τις τριχοτόμους μιας εσωτερικής γωνίας με τις τριχοτόμους των άλλων δύο εξωτερικών γωνιών και η δεύτερη προκύπτει από τον συνδυασμό των τριχοτόμων των δύο εσωτερικών γωνιών με τις τριχοτόμους της τρίτης εξωτερικής γωνίας του.

Τα τρίγωνα Morley σχηματίζονται με συνδυασμό των τριχοτόμων της εσωτερικής γωνίας A με τις τριχοτόμους των εξωτερικών γωνιών B και C δηλώνονται ως $A_A^P b_B^P c_C^P$ για τα τρίγωνα Morley με εγγύτατες κορυφές, $A_A^d b_B^d c_C^d$, για τα τρίγωνα Morley με περιφερικές κορυφές, $C_C^P a_B^* b_C^*$, $a_B^P b_C^* C_C^*$, $b_C^P C_C^* a_B^*$ για τα τρίγωνα Morley με μια εγγύτατη κορυφή και δύο mix κορυφές, και $A_A^d b_B^* c_C^*$, $b_B^d c_C^* A_A^*$, $c_C^d A_A^* b_B^*$ για τα τρίγωνα Morley με μια περιφερική και δύο mix κορυφές. Η χρήση ενός μικρού γράμματος γίνεται για τη δήλωση της τομής μιας εσωτερικής και μιας εξωτερικής τριχοτόμου. Οι κορυφές αυτών των οκτώ τριγώνων σχηματίζονται από τις τριχοτόμους της εσωτερικής γωνίας A με τις τριχοτόμους των εξωτερικών γωνιών B,C. Οι κορυφές αυτών των τριγώνων βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ABC και για αυτό τον λόγο ονομάζονται εξωτερικά τρίγωνα Morley ως προς την γωνία A.

Παρόμοια δηλώνονται τα τρίγωνα Morley ως προς την γωνία B, που σχηματίζονται με συνδυασμό των τριχοτόμων της εσωτερικής γωνίας B με τις τριχοτόμους των

εξωτερικών γωνιών C,A, και επίσης τα τρίγωνα Morley ως προς την γωνία C που σχηματίζονται με συνδυασμό των τριχοτόμων της εσωτερικής γωνίας C με τις τριχοτόμους των εξωτερικών γωνιών A, B. Επομένως υπάρχουν 24 εξωτερικά τρίγωνα Morley που καθορίζονται από τις τομές των τριχοτόμων μιας εσωτερικής και δύο εξωτερικών γωνιών του.

Τα τρίγωνα Morley που σχηματίζονται με συνδυασμό των τριχοτόμων των εσωτερικών γωνιών B και C με τις τριχοτόμους της εξωτερικής γωνίας A δηλώνονται ως $A^p b_A^p c_A^p$, για τα τρίγωνα Morley με εγγύτατες κορυφές, $A^d b_A^d c_A^d$, για τα τρίγωνα Morley με περιφερικές κορυφές, $A^d b_A^* c_A^*$, $b_A^p c_A^* A^*$, $c_A^p A^* b_A^*$, για τα τρίγωνα Morley με μια περιφερική κορυφή και δύο mix κορυφές. Πρέπει να τονιστεί, ότι με αυτόν τον τρόπο δήλωσης, το ίδιο σύμβολο για την τομή μιας εσωτερικής με μια εξωτερική τριχοτόμο μπορεί να αναφέρεται σε δύο διαφορετικά σημεία. Αυτό ξεκαθαρίζεται γιατί σε ένα τρίγωνο Morley μια από τις κορυφές καθορίζει τον συμβολισμό του και την κορυφή στην οποία αναφέρονται οι συμβολισμοί. Συνεπώς υπάρχουν ακόμη οκτώ τρίγωνα Morley ως προς την εξωτερική γωνία A, που προφανώς έχουν μια κορυφή στο εσωτερικό του τριγώνου ABC και δύο κορυφές στο εξωτερικό του. Συνολικά υπάρχουν 24 τρίγωνα Morley που καθορίζονται από τις τομές των τριχοτόμων μιας εξωτερικής και δύο εσωτερικών γωνιών του τριγώνου ABC.

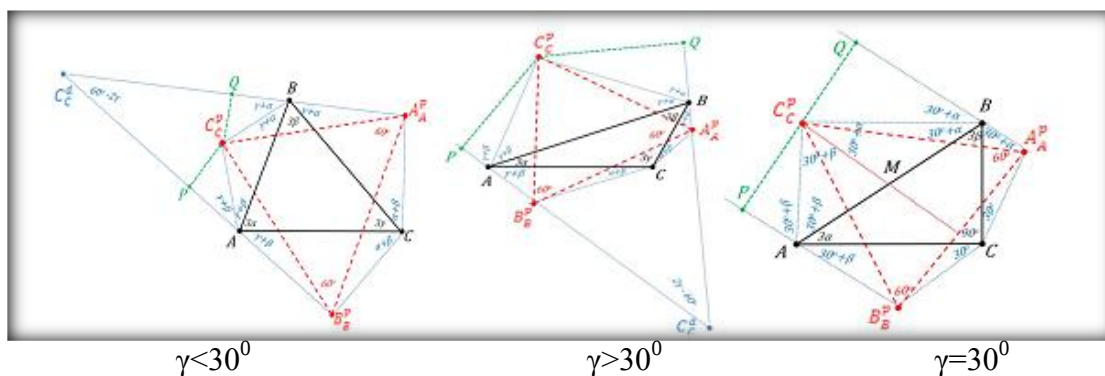
Συμπεραίνουμε ότι στο σύνολο υπάρχουν 64 τρίγωνα Morley.

6.2.2 ΠΟΙΑ ΑΠΟ ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ MORLEY ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΠΛΕΥΡΑ

Ο Spiridon Kuruklis στην εργασία του *Trisectors like Bisectors with equilaterals instead of Points* (CUBO A Mathematical Journal Vol, 16, No 01, (71-110). June 2014) [78]) χρησιμοποίησε τους παραπάνω συμβολισμούς και απόδειξε ποια από τα 64 τρίγωνα Morley είναι ισόπλευρα και ποια όχι. Οι αποδείξεις είναι γεωμετρικές και αντίστοιχες των προηγηθέντων γεωμετρικών αποδείξεων του θεωρήματος Morley για τις εσωτερικές τριχοτόμους.

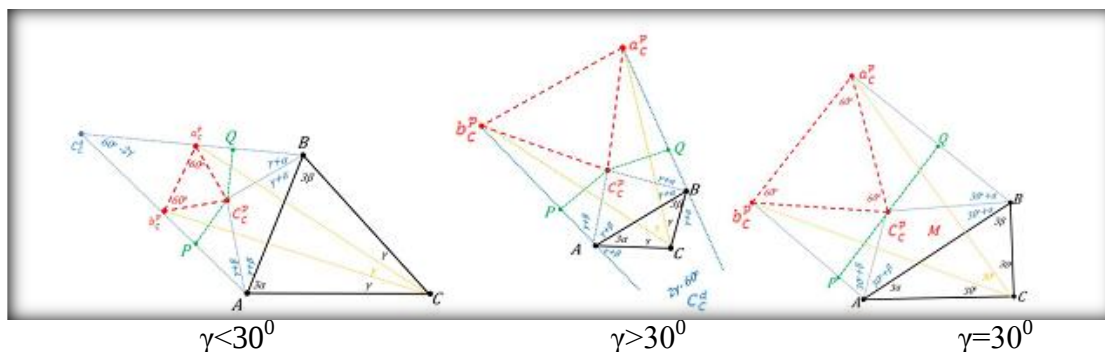
1) Σε κάθε τρίγωνο οι εσωτερικοί τριχοτόμοι των γωνιών του, οι πλησιέστερες προς τις τρεις πλευρές του αντίστοιχα, συναντώνται στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου.

2) Σε κάθε τρίγωνο οι εξωτερικοί τριχοτόμοι των γωνιών του, οι πλησιέστερες προς τις τρεις πλευρές του αντίστοιχα, συναντώνται στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου.



ΣΧΗΜΑ 26

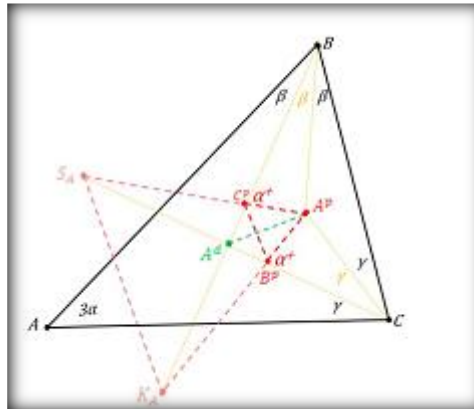
3) Σε κάθε τρίγωνο οι εσωτερικοί τριχοτόμοι μιας γωνίας και οι εξωτερικοί τριχοτόμοι των άλλων δύο γωνιών, οι εγγύτερες των πλευρών, σχηματίζουν ισόπλευρα τρίγωνα.



ΣΧΗΜΑ 27

Το τρίγωνο $b_c^P a_c^P c_c^P$ είναι ισόπλευρο. Υπάρχουν τρία ισόπλευρα τρίγωνα που σχηματίζονται με αυτόν τον τρόπο.

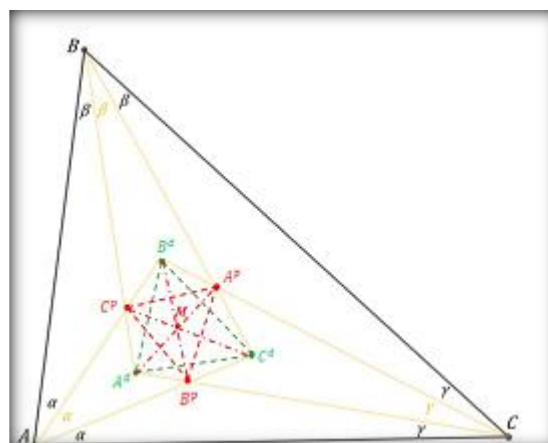
4) Οι προεκτάσεις δύο πλευρών του εσωτερικού ισόπλευρου τριγώνου Morley τέμνουν τις αντίστοιχες εσωτερικές τριχοτόμους σε δύο σημεία τα οποία με το κοινό σημείο των δύο πλευρών σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο.



ΣΧΗΜΑ 28

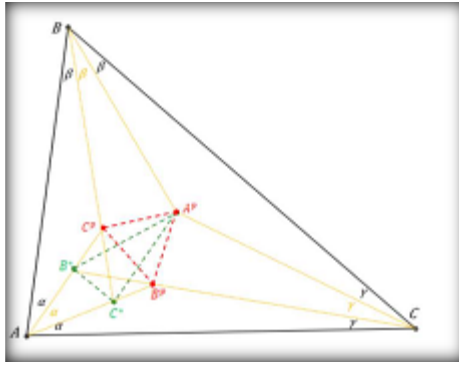
Το τρίγωνο $S_A A^P K_A$ είναι ισόπλευρο. Συνολικά υπάρχουν τρία ισόπλευρα τρίγωνα που σχηματίζονται με αυτόν τον τρόπο.

5) Το εσωτερικό τρίγωνο Morley που δηλώνεται ως $A^d B^d C^d$, όπου A^d, B^d, C^d περιφερικές κορυφές, δεν είναι ισόπλευρο όταν και το τρίγωνο ABC δεν είναι ισόπλευρο.



ΣΧΗΜΑ 29

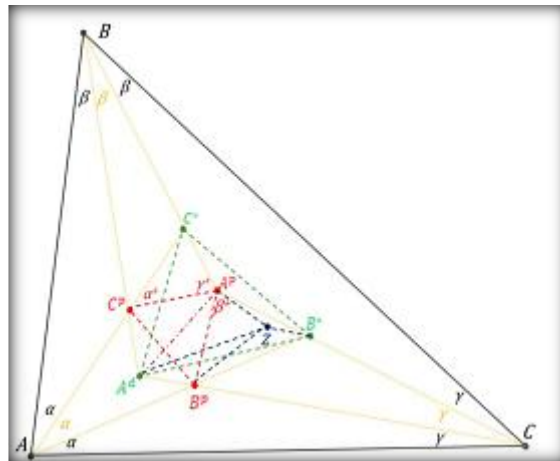
6) Τα εσωτερικά τρίγωνα Morley με μια εγγύτατη κορυφή και δύο mix κορυφές δεν είναι ισόπλευρα.



ΣΧΗΜΑ 30

Υπάρχουν τρία εσωτερικά τρίγωνα Morley με μια εγγύτατη κορυφή και δύο mix κορυφές που δηλώνονται ως $A^p B^* C^*$, $B^p C^* A^*$, $C^p A^* B^*$ και δεν είναι ισόπλευρα.

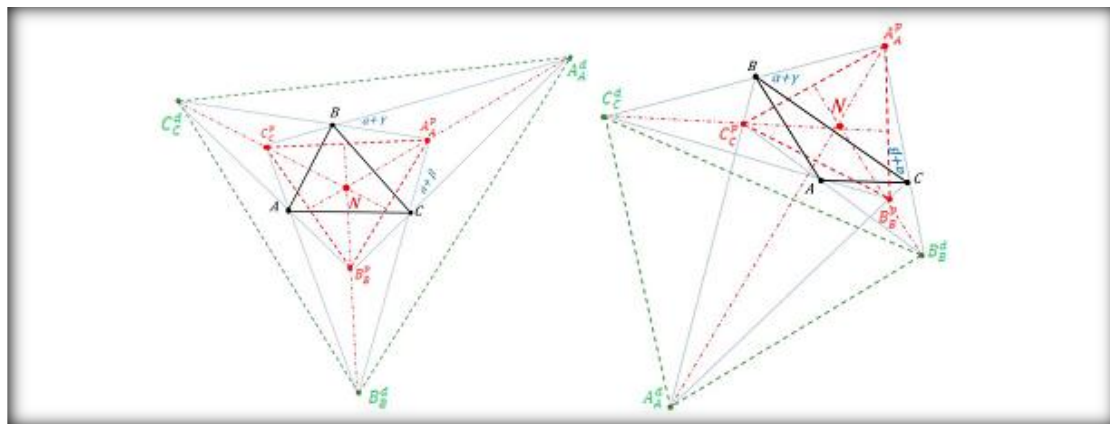
7) Τα εσωτερικά τρίγωνα Morley με μια περιφερική κορυφή και δύο mix κορυφές δεν είναι ισόπλευρα.



ΣΧΗΜΑ 31

Υπάρχουν τρία εσωτερικά τρίγωνα Morley με μια περιφερική κορυφή και δύο mix κορυφές που δηλώνονται ως $A^d B^* C^*$, $B^d C^* A^*$, $C^d A^* B^*$ και δεν είναι ισόπλευρα.

8) Το κεντρικό τρίγωνο Morley που δηλώνεται ως $A_A^d B_B^d C_C^d$, όπου A_A^d , B_B^d , C_C^d είναι τα σημεία τομής των πιο μακρινών τριχοτόμων των εξωτερικών γωνιών ως προς τις πλευρές BC, CA και AB αντίστοιχα, δεν είναι ισόπλευρο όταν και το τρίγωνο ABC δεν είναι ισόπλευρο.

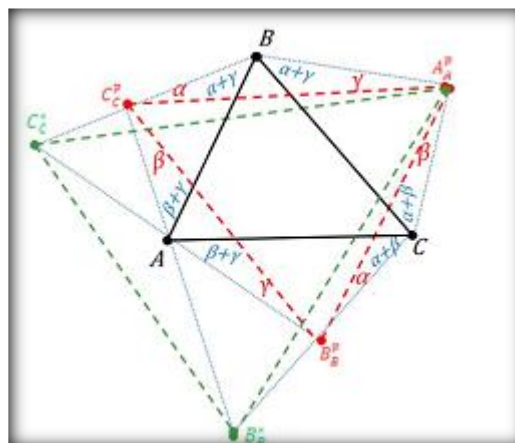


$\gamma < 30^\circ$

$\gamma > 30^\circ$

ΣΧΗΜΑ 32

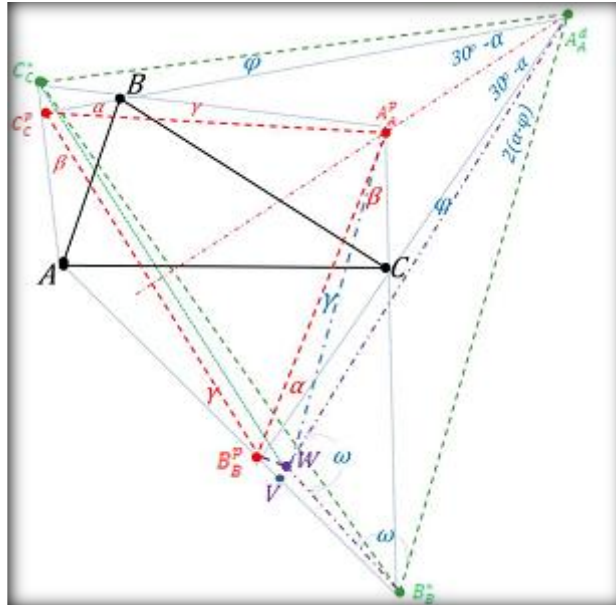
9) Τα κεντρικά τρίγωνα Morley με μια εγγύτατη και δύο mix κορυφές δεν είναι ισόπλευρα.



ΣΧΗΜΑ 33

Υπάρχουν τρία τέτοια τρίγωνα που δηλώνονται ως $A_A^P B_B^* C_C^*$, $B_B^P C_C^* A_A^*$, $C_C^P A_A^* B_B^*$.

10) Τα κεντρικά τρίγωνα Morley με μια περιφερική και δύο mix κορυφές δεν είναι ισόπλευρα.



ΣΧΗΜΑ 34

Υπάρχουν τρία τρίγωνα που δηλώνονται ως $A_A^d B_B^* C_C^*$, $B_B^d C_C^* A_A^*$, $C_C^d A_A^* B_B^*$.

11) Τα τρίγωνα Morley που σχηματίζονται από τις τριχοτόμους μιας εσωτερικής γωνίας και δύο εξωτερικών γωνιών του τριγώνου, οι οποίες δεν είναι εγγύτερες στις αντίστοιχες πλευρές, δεν είναι ισόπλευρα (υπάρχουν τέσσερα τρίγωνα αυτού του είδους).

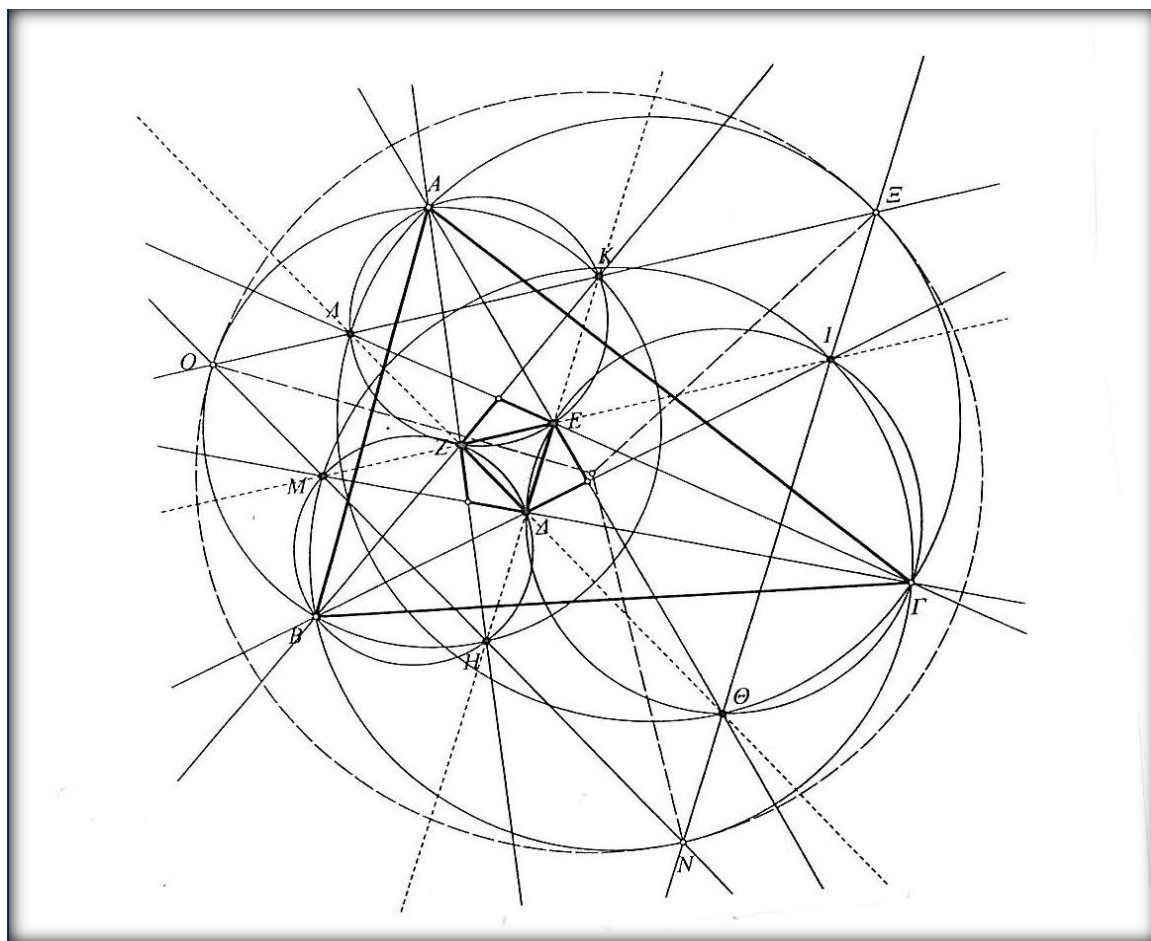
12) Τα τρίγωνα Morley που σχηματίζονται από τις τριχοτόμους μιας εξωτερικής γωνίας και δύο εσωτερικών γωνιών του τριγώνου δεν είναι ισόπλευρα (υπάρχουν οκτώ τρίγωνα αυτού του είδους).

6.2.3 ΣΥΜΠΤΩΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΕΣ ΜΕ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ MORLEY

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ με αντίστοιχες τριχοτόμους AH , $A\Theta$, BI , BK , ZM , $Z\Lambda$ και εσωτερικό τρίγωνο Morley το ΔEZ (Σχήμα 35) ισχύουν τα εξής:

Τα σημεία A , Λ , Z , E , K είναι ομοκυκλικά και έστω C_A ο κύκλος στον οποίο ανήκουν.

Τον κύκλο C_A τον συμβολίζουμε με $(A\Lambda ZEK)$. Το ίδιο συμβαίνει και με άλλες δύο ομάδες πέντε σημείων. Συνεπώς έχουμε τους κύκλους $C_B = (B\Lambda\Delta ZM)$ και $C_\Gamma = (\Gamma\Lambda\Delta\Theta)$. Επίσης έχουμε τους κύκλους $K_A = (B\Gamma IM)$, $K_B = (\Gamma\Lambda\Lambda\Theta)$ και $K_\Gamma = (A\Lambda\Lambda\Theta)$. Τέλος οι ευθείες $K\Lambda$, $M\Lambda$, ΘI είναι αντίστοιχα παράλληλες των πλευρών του ΔEZ και ορίζουν ισόπλευρο τρίγωνο $\Lambda\Xi\Theta$, του οποίου ο περιγεγραμμένος κύκλος εφάπτεται των κύκλων K_A , K_B , K_Γ (Πάρης Πάμφιλος, Γεωμετρικόν) [8].

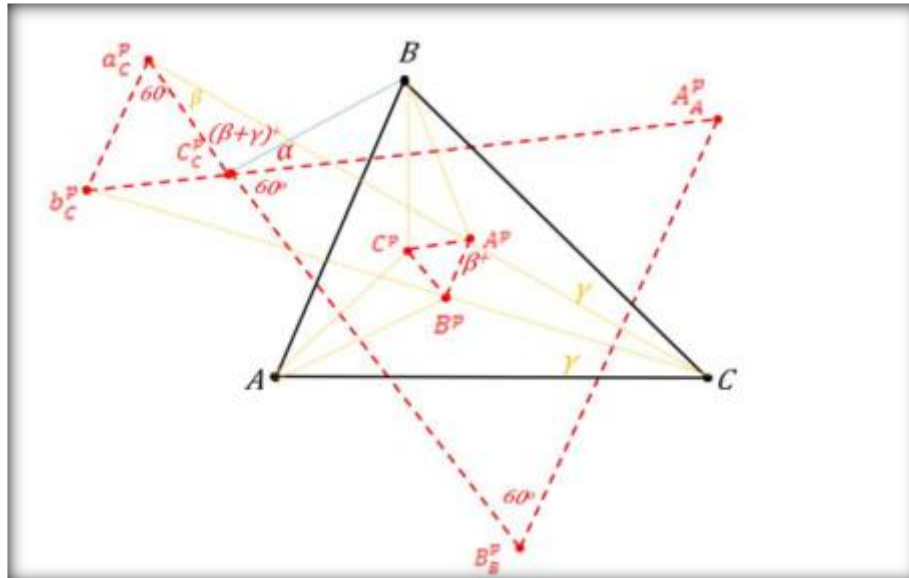


ΣΥΜΠΤΩΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΕΣ ΜΕ ΤΟ Θ. MORLEY

ΣΧΗΜΑ 35

6.2.4 ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΙΣΟΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ MORLEY

Σε κάθε τρίγωνο οι πλευρές των ισόπλευρων τριγώνων Morley είναι συγγραμμικές ή παράλληλες.



ΣΧΗΜΑ 36

Η ανάπτυξη της Γεωμετρίας του Τριγώνου στη διάρκεια του 19^{ου} αιώνα υπήρξε τόσο μεγάλη, ώστε η περίφημη «Εγκυκλοπαίδεια των Μαθηματικών Επιστημών» που εκδόθηκε στις αρχές του 20^{ου} αιώνα με εκδοτική επιμέλεια του F. Klein, αφιέρωσε ένα κεφάλαιο 100 σελίδων για να παρουσιάσει τα σχετικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια όμως, η αυξανόμενη πολυπλοκότητα των σχημάτων και η έλλειψη συσχέτισης με άλλους κλάδους των μαθηματικών περιόρισε βαθμιαία το ερευνητικό ενδιαφέρον σ' αυτό το πεδίο, χωρίς βέβαια να διακοπεί η ανακάλυψη κάποιων σημαντικών αποτελεσμάτων. Δύο τέτοιες περιπτώσεις που αιφνιδιάζουν με την απλότητα του περιεχομένου τους, αλλά και με το γεγονός ότι έμειναν απαρατήρητες για αιώνες, είναι τα θεωρήματα των Morley και Pompeiu που ανακαλύφθηκαν το 1924 και 1936 αντίστοιχα. Τα τελευταία χρόνια το ενδιαφέρον για τη γεωμετρία του Τριγώνου αναζωπυρώθηκε, όταν την παρατηρητικότητα και την ικανότητα προσεκτικής σχεδίασης πολύπλοκων σχημάτων αντικατέστησαν η ταχύτητα και τα γραφικά των ηλεκτρονικών υπολογιστών. Με τη χρήση κατάλληλων συντεταγμένων και υπολογιστικών μεθόδων της Αναλυτικής Γεωμετρίας έγινε δυνατή η ανακάλυψη ενός μεγάλου πλήθους νέων χαρακτηριστικών σημείων, ευθειών, κύκλων και γενικότερα κωνικών τομών που συνδέονται με ένα τρίγωνο. Ο Αμερικάνος ερευνητής C. Kimberling έχει εντοπίσει συνολικά 91 χαρακτηριστικά σημεία (όπως π.χ. το περίκεντρο, ορθόκεντρο, σημείο Fermat σημείο Lemoine κ. λ. π.) τα οποία ανήκουν σε 103 διαφορετικές ευθείες (όπως π.χ. η ευθεία Euler). Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι το πλήθος των ευθειών που ορίζουν 91 σημεία του επιπέδου, όταν μεταξύ τους δεν υπάρχουν 3 συνευθειακά, είναι $\frac{91 \times 90}{2} = 4095$. Είναι ενδεικτικό ότι στην ευθεία Euler εκτός από το ορθόκεντρο, βαρύκεντρο, περίκεντρο και κέντρο του κύκλου Euler, ανήκουν επίσης άλλα 8 χαρακτηριστικά σημεία του τριγώνου. Αυτές οι ανακαλύψεις επιβεβαιώνουν το ανεξάντλητο πλήθος των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά συγχρόνως θέτουν πολλά επιστημολογικά ζητήματα για το ρόλο των νέων τεχνολογιών στη διαδικασία της μαθηματικής ανακάλυψης και απόδειξης (Θωμαΐδης & Πούλος, Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, 2000) [40].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΒΔΟΜΟ

ΘΕΩΡΗΜΑ MORLEY: ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

7.1 ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ, ΕΠΙΧΕΙΡΗΜΑ Ή ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΑΚΟΜΑ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΛΥΣΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ- ΕΡΕΥΝΑ ΤΟΥ ΚΝΟΥΤΗ

Η έρευνα του Knuth, E. J. (2002) secondary school mathematics teacher's conceptions of proof. Journal for research in mathematics education (379-405 [1]) και τα αποτελέσματά της αποτέλεσαν μια από τις αιτίες της παρούσας εργασίας. Ο Knuth κατάληξε στο αποτέλεσμα ότι οι καθηγητές της δευτεροβάθμιας έχουν πρόβλημα να κατανοήσουν πότε ένας ισχυρισμός ή ένα επιχείρημα καθιστά έγκυρη απόδειξη ή όχι. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της έρευνας, σχολιασμό της, και διδακτικές προτάσεις ως βοήθεια προς τους εκπαιδευτικούς για να αντιμετωπίσουν το παραπάνω πρόβλημα. Τονίζεται ότι στην τριτοβάθμια εκπαίδευση οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί δεν διδάσκονται για την εγκυρότητα μιας απόδειξης και αυτό έχει συνέπεια ο κάθε εκπαιδευτικός να πράττει ανάλογα με την νοοτροπία και τις πεποιθήσεις του.

7.2 ΣΧΟΛΙΑΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η απόδειξη συνιστά βασικό συστατικό των μαθηματικών. Γι' αυτό και εντάσσεται σε μεγάλο βαθμό και στο σχολικό αναλυτικό πρόγραμμα και συμβάλλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης των μαθητών. Παρατηρείται όμως το φαινόμενο, εντός της σχολικής τάξης, οι εκπαιδευτικοί να προβάλλουν μόνο μία από τις ποικίλες όψεις της απόδειξης, αυτή της επιβεβαίωσης της αλήθειας μίας πρότασης. Αυτό συμβαίνει είτε διότι αγνοούν τις υπόλοιπες λειτουργίες μιας απόδειξης είτε διότι δε βρίσκουν τον τρόπο να εντάξουν και άλλες λειτουργίες στη διδασκαλία τους.

Στην κατεύθυνση αυτή κινούμενος ο Knuth (2002) καταγράφει πέντε λειτουργίες της απόδειξης που μπορεί κανείς να βρει στη βιβλιογραφία:

1. Να επιβεβαιώσει την αλήθεια μιας πρότασης.
2. Να εξηγήσει γιατί μια πρόταση αληθεύει.
3. Να επικοινωνήσει πληροφορίες μεταξύ των μαθηματικών.
4. Να ανακαλυφθούν ή να δημιουργηθούν νέα μαθηματικά.
5. Να οργανωθούν προτάσεις σε αξιωματικά συστήματα.

Στη συνέχεια ο ίδιος συγγραφέας μελετάει τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για την απόδειξη και τους ρόλους της και τη χρήση της απόδειξης από τους καθηγητές αυτούς κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας των μαθηματικών.

Ένα συμπέρασμα που προέκυψε από την παραπάνω έρευνα είναι ότι στις αντιλήψεις των καθηγητών κυριαρχεί η απόδειξη ως μέσο επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας πρότασης. Στον αντίποδα δε, βρίσκεται ο ρόλος της απόδειξης ως εξήγηση γιατί μια πρόταση αληθεύει μια και οι εκπαιδευτικοί αναφέρθηκαν σε αυτόν μόνο επιφανειακά.

Όσον αφορά στους άλλους ρόλους, η ανακάλυψη, η δημιουργία και η συστηματικοποίηση των μαθηματικών φαίνεται να είναι στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους στη σκέψη των εκπαιδευτικών, ενώ η επικοινωνία μεταξύ των μαθηματικών μέσω αποδείξεων αναγνωρίζεται ως ξεχωριστή λειτουργία.

Μια άλλη σημαντική παρατήρηση είναι ότι, ενώ οι εκπαιδευτικοί θεωρούν ότι η απόδειξη αποτελεί μέσο επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας πρότασης, εντούτοις στην πράξη διατηρούν ποικίλες επιφυλάξεις για αυτό όταν βρεθούν αντιμέτωποι με ιδιάζουσες καταστάσεις, όπως ένα μη-τυπικό σχήμα στη Γεωμετρία. Για να αντιμετωπίσουν τέτοιες καταστάσεις χρειάζονται – εκτός από την απόδειξη – και ένα είδος «εσωτερικής» - «ψυχολογικής» επιβεβαίωσης, η οποία επιτυγχάνεται πχ. με το σχεδιασμό δικών τους παραδειγμάτων. Αυτό σημαίνει ότι η έννοια «αποδεικνύω» ένα ισχυρισμό παραμένει σε κάποιες περιπτώσεις σκιώδης. Επιπλέον δεν λείπουν κι εκείνοι που συνδέουν την αλήθεια μιας απόδειξης με το αξιωματικό σύστημα. Το σκεπτικό τους είναι «ναι μεν ισχύει, αλλά όσο δεν αλλάζει το αξιωματικό σύστημα». Τέλος υπάρχουν ανάμεσα στους εκπαιδευτικούς κι εκείνοι οι οποίοι δεν εμπιστεύονται απόλυτα την απόδειξη αλλά επιφυλάσσουν ότι ίσως στο μέλλον ανακαλυφθεί κάποιο αντιπαράδειγμα που να την ανατρέπει.

Οι τελευταίες αυτές υποβόσκουσες αντιλήψεις πιθανόν εμποδίζουν τους εκπαιδευτικούς να τονίσουν τη σημασία της απόδειξης μέσα στην εκπαιδευτική διαδικασία. Επιπρόσθετα να σημειώσουμε ότι με θιγόμενη την έννοια της γενικότητας σε μία απόδειξη καθίσταται έτι δυσχερέστερη η αποδοτική διδασκαλία των αποδείξεων μέσα στη σχολική τάξη.

Περνώντας στην αξιολόγηση διαφόρων τύπων αποδείξεων, παρατηρείται έντονα το φαινόμενο εκπαιδευτικοί να «εμπιστεύονται» περισσότερο μεθόδους τις οποίες έχουν οι ίδιοι διδάξει ή διδάξει, ακόμα κι αν τα επιχειρήματα δεν επαρκούν ως πλήρης μαθηματική απόδειξη!

Αξιολογώντας διάφορα επιχειρήματα φαίνεται οι εκπαιδευτικοί εύκολα να διολισθαίνουν στην αποδοχή μιας λανθασμένης απόδειξης μόνο και μόνο εξαιτίας της μεθόδου που χρησιμοποιεί ή της αλγεβρικής μορφής της. Δηλαδή ενυπάρχει μία προτίμηση στις αλγεβρικές αποδείξεις έναντι όλων των άλλων, άσχετα με το αν είναι όλες σωστές και πλήρεις.

Ένα ακόμη στοιχείο είναι ότι οι εκπαιδευτικοί απαιτούν μια ολοκληρωμένη απόδειξη, χωρίς κάποια από τα βήματά της να αφήνονται να εννοηθούν. Αυτό ίσως συμβαίνει επειδή ως δάσκαλοι μέσα στην τάξη απαιτούν συνήθως το ίδιο από τους μαθητές τους.

Επιπλέον, οι προαπαιτούμενες γνώσεις μιας απόδειξης προκαλούν δυσάρεστα συναισθήματα στους εκπαιδευτικούς. Αρκετοί θα προτιμούσαν μια απόδειξη που να μη βασίζεται σε προηγούμενες γνώσεις αλλά να μπορεί εύκολα να γίνει αντιληπτή από τον μέσο αναγνώστη.

Τέλος, μια απόδειξη θεωρείται πειστική από αρκετούς εκπαιδευτικούς όταν δείχνει το γιατί ισχύει το συμπέρασμα. Η μέθοδος απόδειξης δηλαδή αποκαλύπτει και το υπόβαθρο ή το σκεπτικό πάνω στο οποίο έχει χτιστεί το πρόβλημα. Τέτοιου είδους αποδείξεις χαρακτηρίζονται «διαφανείς» και θα ήταν ευχής έργο αν μπορούσαν να βρεθούν για όλους τους ισχυρισμούς τέτοιες αποδείξεις.

Όλες οι αντιλήψεις που αναφέρθηκαν πιο πάνω σχετικά με τους ρόλους και την ποιότητα των αποδείξεων είναι φυσικό να επηρεάζουν ως ένα βαθμό και τη διδακτική διαδικασία. Όσο πιο ανοικτούς ορίζοντες έχει ο εκπαιδευτικός, τόσο περισσότερο μπορεί να κρατάει ανοικτούς και τους ορίζοντες των μαθητών του.

Επομένως είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να μην κλείνονται μέσα στα στενά πλαίσια στα οποία – πολύ πιθανόν να – εκπαιδεύτηκαν οι ίδιοι αλλά να προσπαθούν μέσα στην τάξη να αξιοποιούν όλες τις όψεις και τα χαρακτηριστικά των αποδείξεων προς όφελος των μαθητών τους.

7.3 ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ-ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Η αιτιολόγηση είναι ένα παιδαγωγικό ζήτημα που φανερώνει ότι η μάθηση των μαθηματικών είναι μια δυναμική παρά στατική διαδικασία με την οποία οι μαθητές βελτιώνουν σε μεγαλύτερο επίπεδο τη διορατικότητα και τις δεξιότητές τους. Συνεπώς η διδασκαλία που περιέχει φορμαλιστική ή μη φορμαλιστική αιτιολόγηση είναι αυτό που απαιτείται μόνο στο βαθμό που αυτό προάγει την κατανόηση. Το πρώτο θεμέλιο για την κατανόηση είναι η απλοϊκή μαθηματική ιδέα να είναι ριζωμένη στην καθημερινή εμπειρία. Η βάση για πρόοδο και βελτίωση της αρχέγονης ιδέας είναι ότι αυτή πρέπει να αναπτυχθεί και να γίνει σαφής. Αυτό απαιτεί ένα βαθμό φορμαλισμού. Αυτό όμως έχει κόστος. Όταν ο μαθητής απομακρύνεται από τη διαίσθηση και το πραγματικό περιβάλλον, τότε μπορεί να χάσει την αίσθηση της πραγματικότητας και απλά να μάθει να χρησιμοποιεί τα σύμβολα και τους κανόνες της μαθηματικής γλώσσας.

Το δεύτερο θεμέλιο της μαθηματικής αιτιολόγησης είναι η μαθηματική γλώσσα-σύμβολα, όροι, σημειογραφία, ορισμοί, αναπαραστάσεις και κανόνες λογικής και σύνταξης για την ουσιαστική χρήση τους στη διαμόρφωση των ισχυρισμών και των σχέσεων που χρησιμοποιούνται για να τους αιτιολογήσουν. Ο Galileo είπε: *«Το σύμπαν δεν μπορεί να διαβαστεί παρά μόνο αφού μαθευτεί η γλώσσα του και έχει γίνει εξοικείωση με τους χαρακτήρες με τους οποίους η γλώσσα του είναι γραμμένη. Η γλώσσα του είναι η μαθηματική γλώσσα, και τα γράμματα είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, χωρίς τα οποία είναι συνεπώς ανθρωπίνως αδύνατο να κατανοηθεί έστω και μια λέξη. Χωρίς αυτά κάποιος (που ασχολείται με την έρευνα για το σύμπαν) είναι σαν να περιπλανιέται σε ένα σκοτεινό λαβύρινθο»* (IL Saggiatore, 1623). Ο όρος «Γλώσσα» χρησιμοποιείται εδώ για να αναφερθεί σε ολόκληρη την

γλωσσική υποδομή που υποστηρίζει την μαθηματική επικοινωνία και τις απαιτήσεις της, για ακρίβεια, σαφήνεια, και οικονομία έκφρασης. Η γλώσσα είναι απαραίτητη για τη μαθηματική αιτιολόγηση και για την επικοινωνία σχετικά με τις μαθηματικές ιδέες, ισχυρισμούς, εξηγήσεις και αποδείξεις.

Οι έμπειροι μαθηματικοί έχουν μάθει να περιορίζουν αυτόν τον κίνδυνο με την απόκτηση της ικανότητας της νοητικής μετατόπισης και της κίνησης μεταξύ του φορμαλισμού και της γενικότητας. Χρησιμοποιούν στη διδασκαλία τους εξειδικευμένα παραδείγματα, αντλώντας μόνο εκείνα τα χαρακτηριστικά που είναι συναφή με μια πιο γενική κατάσταση. Αυτοί είναι ικανοί να ικανοποιούν συμβολισμούς και αλγορίθμους, να δουλεύουν αυτόματα και αποτελεσματικά, διατηρώντας την ικανότητα να παρεμβαίνουν στη δουλειά τους και να ελέγχουν την αποτελεσματικότητα και την ποιότητα αυτής.

Τα κρίσιμα ζητήματα κατά τη διδασκαλία και συγκεκριμένα την ανάπτυξη της δύναμης της συλλογιστικής είναι τα εξής:

1. Ο φορμαλισμός δεν θα πρέπει να θεωρηθεί ως μια πλευρά του ζητήματος, αλλά ένα σημαντικό εργαλείο για επεξήγηση, επαλήθευση και κατανόηση. Όταν η ανάγκη για αιτιολόγηση είναι αισθητή, και όταν μπορεί να ικανοποιηθεί αυτή η ανάγκη με κατάλληλο βαθμό ελευθερίας, τότε η μάθηση μπορεί να ενισχυθεί σημαντικά.
2. Δεν αρκεί να παρέχει μαθηματικές εμπειρίες. Είναι ο προβληματισμός με αυτές που οδηγεί στην ανάπτυξη. Όσο οι μαθητές βλέπουν τα μαθηματικά ως ένα μαύρο κουτί που παράγει στιγμιαίες απαντήσεις, δεν θα αναπτύξουν την αναγκαία υπομονή για να ανακαλύψουν τις πολλές και διαφορετικές πορείες αλλά το μυαλό τους απλά θα προσπαθεί να κατανοήσει τι περίπου είναι τα μαθηματικά. Ένας παιδαγωγικός στόχος πρέπει να είναι να βοηθηθούν οι μαθητές να διαπραγματεύονται τη δικαιολόγηση.
3. Οι μαθητές δυστυχώς δείχνουν μια ανοχή στην ασάφεια. Η σχολαστικότητα μπορεί να γίνει ο εχθρός της διορατικότητας. Μερικές φορές μια εξήγηση είναι καλύτερα να δοθεί εικονογραφικά, πρόχειρα με ένα παράδειγμα ή κατ' αναλογία. Πρέπει να γίνονται διευκρινίσεις και διαχωρισμοί (π.χ. οι διαφορετικοί ρόλοι του αρνητικού πρόσημου).
4. Την ίδια στιγμή, υπάρχει ο κίνδυνος η πραγματική σύγχυση που θα εμφάνιζε ο μαθητής, να έφερνε συνειδητή χαλαρότητα στην εφαρμογή της αναγκαίας αυστηρότητας.

7.4 ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΣΤΗ ΤΑΞΗ

Οι ιδέες του G.Polya(1973a,1973b,1965):

α) Η Μέθοδος

1. Κατανόηση του προβλήματος.

Ο λύτης πρέπει να διαβάσει το κείμενο και να αποσπάσει πληροφορίες με γραμματική και σημασιολογική ανάλυση.

2. Επινόηση ενός σχεδίου.

Αναγνώριση των σύγχρονων στρατηγικών .

3. Εκτέλεση του σχεδίου.

Πραγματοποίηση της επιλεγμένης στρατηγικής.

4.Ανασκόπηση.

Τι έχεις μάθει αφού έλυσες το πρόβλημα;

β) Η έννοια της Ευρετικής (Γενική Ευρετική):

Ευρετική [3Π] σημαίνει μια γενική οδηγία ή στρατηγική ανεξάρτητη από οποιοδήποτε ειδικό θέμα, που βοηθά το λύτη να προσεγγίσει και να καταλάβει το πρόβλημα και να διαχειριστεί αποτελεσματικά τις διαθέσιμες γνώσεις του για να το λύσει.

Παραδείγματα: (Ν.ΚΛΑΟΥΔΑΤΟΣ)

-Χαράζτε ένα σχήμα. Χρησιμοποιήστε κατάλληλο συμβολισμό.

-Γνωρίζετε κανένα σχετικό πρόβλημα; Γνωρίζετε κανένα θεώρημα που μπορεί να είναι χρήσιμο;

-Αν δεν μπορείτε να λύσετε το πρόβλημά σας, προσπαθήστε να λύσετε πρώτα ένα άλλο σχετικό πρόβλημα. Θα μπορούσατε να σκεφτείτε ένα σχετικό πρόβλημα πιο προσιτό; Ένα σχετικό πρόβλημα πιο προσιτό; Ένα γενικότερο πρόβλημα; Ένα ειδικότερο; Ένα ανάλογο πρόβλημα;

Με τον ευρετικό τρόπο παρουσίασης της απόδειξης οι μαθητές επαφίενται στον «από μηχανής θεό».

Αυτό που απαιτείται είναι κάθε βήμα στην απόδειξη πρέπει να αιτιολογείται στο σημείο όπου γίνεται. Για την επίτευξη του παραπάνω μια ευρετική παρουσίαση της απόδειξης χωρίς ιστορικά στοιχεία αρκεί. Το επόμενο βήμα είναι φανερό: Δεν υπάρχει λόγος, οι μαθητές στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση να μη διδάσκονται αποδείξεις της ανάλυσης. Οι δάσκαλοι θα έπρεπε να παρέχουν στους μαθητές μια προσεκτικά σχεδιασμένη λανθασμένη απόδειξη, τουλάχιστον σε πρώτη φάση. Η αλήθεια είναι ότι οι μαθητές θα πρέπει να μάθουν τις βασικές λογικές έννοιες (προϋπόθεση, συμπέρασμα, παραδοχή, κλπ) εκτός από τα καθαρά μαθηματικά. Η διόρθωση ελαττωματικών αποδείξεων είναι μια πολλά υποσχόμενη δραστηριότητα για την εκμάθηση αυτών των εννοιών, και μπορεί να συμπεριλάβει και ακόμα μερικές έννοιες (αντιπαράδειγμα, εις άτοπο απαγωγή) που δεν προκύπτουν όταν γίνεται κλασσική απόδειξη.

Λιγότερο προφανή οφέλη προκύπτουν από την ιστορία των μαθηματικών (Lakatos) και την ανησυχία του Polya για την ανάπτυξη του ηθικού των φοιτητών, του κινήτρου και του χαρακτήρα τους. Αρχικά πρέπει να ενθαρρυνθούν οι μαθητές δείχνοντάς τους ιδέες για τις οποίες αγωνίστηκαν διάσημοι μαθηματικοί και τώρα θεωρούνται βασικές. Οι μαθητές θα πρέπει να γνωρίζουν πόσο χρόνο και πόση προσπάθεια χρειάστηκε η μαθηματική κοινότητα για να κατανοήσει και να αποδεχτεί τους αρνητικούς αριθμούς, τους μιγαδικούς, και τους δεκαδικούς. Αυτό αποθαρρύνει κάποιον να αγωνιστεί με κάτι φαινομενικά βασικό, εάν δεν γνωρίζει ότι χρειάστηκε να εργαστούν πολλοί ειδικοί για να καθιερωθεί.

Γνωρίζοντας οι μαθητές ότι και οι διάσημοι μαθηματικοί αγωνίστηκαν για την γνώση, είναι ενθαρρυντικό αλλά όχι τόσο πολύτιμο όσο η εμπειρία να πειστούν,

βλέποντας την επίτευξη, έστω επιφυλακτικής εμπιστοσύνης σε μια ιδέα που αρχικά θεωρήθηκε λάθος. Μια τέτοια εμπειρία παρουσιάζει προφανώς μια ευκαιρία να μάθουν με την ευρετική μέθοδο αλλά και να σχηματίσουν χαρακτήρα. Οφείλουν να μάθουν να υποπτεύονται ατεκμηρίωτους ή αδοκίμαστους ισχυρισμούς και θα πρέπει να ελέγχουν την αξιοπιστία μιας εικασίας. Με αυτό τον τρόπο, θα δουν και εγκατεστημένες πεποιθήσεις τους και προσωπικές τους ιδέες ως εικασίες. Ο Polya δίνει μεγάλη σημασία στο συναίσθημα του ενδιαφέροντος και της εμπιστοσύνης που πρέπει να έχουν. Αυτά τα συναισθήματα δεν υπάρχουν έμφυτα αλλά πρέπει να αναπτυχθούν και να τελειοποιηθούν. Το να μην υπάρχει βεβαιότητα είναι μέρος αυτής της διαδικασίας. Αυτή η διαδικασία δεν αφορά μόνο τους σπουδαστές των μαθηματικών.

Τελικά αυτή η διαδικασία μοιάζει με τη λύση προβλήματος, στην οποία δεν γνωρίζουμε τη λύση και ίσως δοθεί λάθος απάντηση. Οι μαθηματικοί θα μπορούσαν να βρουν προβλήματα χωρίς άμεσα δημοσιευμένη απάντηση, ώστε οι μαθητές να θεωρούν ότι λύνουν το πρόβλημα σε πραγματικό χρόνο, οι μαθητές εκτός από την ευρετική εξάσκηση πρέπει στη συνέχεια να μάθουν πώς να αμφισβητούν την αλήθεια μιας απόδειξης. Οι μαθηματικοί αναμένουν οι μαθητές να αφήσουν τους σίγουρους δρόμους και να ακολουθούν και ρισκίνοντας μονοπάτια, έστω και αν καταλήξουν σε λάθος συμπέρασμα. Οι δάσκαλοι αυξάνουν το κύρος τους, λαμβάνοντας το ίδιο ρίσκο. Δεν πρέπει να φοβούνται μήπως οι μαθητές τους μπουν πρώτοι στην ουσία του προβλήματος. Ούτε, εάν κάνουν κάποιο λάθος, ή πρέπει να το αναγνωρίσουν.

7.5 Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Τα σύγχρονα προγράμματα των μαθηματικών ((NCTM, 2000) τονίζουν τη χρήση οπτικοποίησης, χωρικής αιτιολόγησης και γεωμετρικών μοντέλων, κατά την επίλυση ενός προβλήματος. Στη Γεωμετρία εμπλέκονται τρία σχήματα αναπαράστασης: **1)** της φυσικής γλώσσας **2)** των συμβόλων **3)** το σχηματικό (Masquita 1996) [68]. Η μάθηση της γεωμετρίας βασίζεται σε μια συνεχή αλληλεπίδραση ανάμεσα στη θεωρία και στα διαγράμματα.

Σύμφωνα με (Mesquita, 1998) [68] ο όρος σχήμα ταυτίζεται με την εξωτερική, εικονική αναπαράσταση μιας έννοιας ή κατάστασης στη γεωμετρία.

Ο Fischbein (1993) αναφέρει ότι το σχήμα δεν αποτελεί μια γνήσια έννοια, αλλά μπορεί να περιγραφεί έχοντας εννοιολογικές ιδιότητες. Αποτελεί μια οπτική εικόνα, η οποία κατέχει μια ιδιότητα που οι συνηθισμένες έννοιες δεν κατέχουν, αφού περιλαμβάνει τη νοητή αναπαράσταση των ιδιοτήτων του χώρου.

Κατά την διδακτική διαδικασία, πρέπει να επιτευχθεί μια ενεργή αρμονία ανάμεσα στις δύο πτυχές, την εννοιολογική και αυτή των σχημάτων (Fischbein & Mariotti, 1997) [59]. Προς επίτευξη αυτής της εκπαιδευτικής διαδικασίας, τα κύρια στάδια που πρέπει να ακολουθηθούν είναι τα εξής:

- Παρατήρηση.

- Αναγνώριση των κύριων χαρακτηριστικών.
- Δήλωση ιδιοτήτων σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά.
- Επιστροφή στην παρατήρηση, έλεγχος του ορισμού με αναγνώριση των διαφορών των σχημάτων κ.λπ.

7.6 DUVAL

Ο Duval (1995) [66] στο [63] μελέτησε γιατί ορισμένα σχήματα οδηγούν αμέσως τους μαθητές σε μια απόδειξη ενώ άλλα όχι. Στην ανάλυσή του κεντρική θέση κατέχει η περιγραφή τεσσάρων τύπων γνωστικής κατανόησης μέσα από τους οποίους οι μαθητές προσεγγίζουν το γεωμετρικό σχήμα:

1. *Η Αντιληπτική κατανόηση (perceptual apprehension)* σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνιστάται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος με την διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του. Περιλαμβάνει δεξιότητες όπως την ονομασία του σχήματος και αναγνώριση υποσχημάτων του σχήματος.
2. *Η Σειριακή κατανόηση (sequential apprehension)* απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος. Η οργάνωση των στοιχειωδών μονάδων του σχήματος δεν εμπίπτει σε νόμους της αντίληψης, αλλά καθορίζεται από κατασκευαστικούς περιορισμούς και από μαθηματικές ιδιότητες.
3. *Η Λεκτική κατανόηση (discursive apprehension)* συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική κατανόηση, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του.
4. *Η Λειτουργική κατανόηση (operative apprehension)* μας εξασφαλίζει την πρόσβαση στη λύση του προβλήματος. Εξαρτάται από τους διάφορους τρόπους τροποποίησης του σχήματος. Που μπορούν να οδηγήσουν σε μετασχηματισμούς που υποβοηθούν την επίλυση του προβλήματος. Οι μερεολογικές (mereologic) τροποποιήσεις αφορούν τη διάσπαση ολόκληρου του σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, στο συνδυασμό των υποσχημάτων αυτών σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και στην εμφάνιση νέων υποσχημάτων. Οι οπτικές (optic) τροποποιήσεις επιτρέπουν τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση του σχήματος ή το να εμφανίζεται λοξό, σαν να γίνεται χρήση φακών. Με τις τροποποιήσεις αλλαγής θέσης (place way) αλλάζει ο προσανατολισμός του σχήματος στο επίπεδο στο επίπεδο της εικόνας.

«Οι παραπάνω λειτουργίες συνθέτουν μια συγκεκριμένη επεξεργασία του σχήματος, η οποία του προσδίδει μια ευρετική λειτουργία» (Ε. Μιχαήλ et al, 9ο συνέδριο παιδαγωγικής εταιρείας Κύπρου).

Οι απόψεις του Duval (1995) επιβεβαιώθηκαν με έρευνες, όπως αυτή το 2011 των Deliyanni, Michael, Monoyiou, Gagatsis and Elia. Ο ρόλος των τριών τύπων τροποποίησης του σχήματος επιβεβαιώθηκε το 2010 στην έρευνα των Michael, Monoyiou, Gagatsis and Kalogirou.

7.7 VAN HIELE

Η θεωρία των Van Hiele (1986) επηρέασε σημαντικά τον κλάδο της μαθηματικής εκπαίδευσης, όσον αφορά τον κλάδο της γεωμετρίας και τη διδασκαλία της.

Τα επίπεδα της γεωμετρικής σκέψης ιεραρχούνται από τους Van Hiele ως εξής:

- Επίπεδο 1 της *«Σφαιρικής ή ολικής αντίληψης (οπτικοποίησης)»*: Οι μαθητές αναγνωρίζουν τα σχήματα από τη συνολική τους μορφή και όχι από τις ιδιότητές τους (Crowley, 1987, Saughnessy & Burger, 1985). Δεν μπορούν να δώσουν μαθηματικούς ορισμούς παρά μόνο περιγραφές φυσικών ιδιοτήτων του σχήματος. Για παράδειγμα, ονομάζουν ένα σχήμα ως ορθογώνιο, γιατί μοιάζει με μια πόρτα, ή ονομάζουν ένα σχήμα ως ρόμβο επειδή έχει το συγκεκριμένο σχήμα που έχουν μάθει να το αποκαλούν «ρόμβο». Μπορούν να αναπαραγάγουν και να διακρίνουν τα διάφορα σχήματα (Crowley, 1987) αλλά δεν μπορούν να διακρίνουν τις ιδιότητες ενός γεωμετρικού σχήματος (Crowley, 1987, Saughnessy & Burger, 1985). Επίσης μπορούν να περιγράψουν τα σχήματα με ορθή ή άτυπη ορολογία (Γαγάτσης 2013) [63].

- Επίπεδο 2 της *«Ανάλυσης ή Περιγραφής»*: «Οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν και να ονομάσουν ένα σχήμα βάσει των ιδιοτήτων του» (Crowley, 1987, Saughnessy & Burger, 1985, Prevost, 1985).

«Μπορούν επίσης να συγκρίνουν και να ταξινομούν σχήματα με βάση τις ιδιότητές τους» (Crowley, 1987, Saughnessy & Burger, 1985). Για τους μαθητές του επιπέδου αυτού απόδειξη σημαίνει πειραματική επαλήθευση μιας ιδιότητας για περιορισμένο αριθμό περιπτώσεων. Για παράδειγμα ένας μαθητής μπορεί να σκεφτεί πως ένας ρόμβος είναι ένα σχήμα με τέσσερις ίσες πλευρές. Οι μαθητές δεν μπορούν όμως να κάνουν συσχετίσεις μεταξύ διαφόρων ιδιοτήτων του σχήματος, ούτε μεταξύ διαφόρων σχημάτων.

- Επίπεδο 3 της *«Άτυπης παραγωγικής σκέψης»*: Οι μαθητές είναι σε θέση να αντιληφθούν τις σχέσεις ανάμεσα στο ίδιο σχήμα (π.χ. για να είναι οι απέναντι γωνίες ενός τετραπλεύρου ίσες πρέπει οι απέναντι πλευρές να είναι παράλληλες) και τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των σχημάτων (π.χ. ένας ρόμβος αναγνωρίζεται ως παραλληλόγραμμο με επιπλέον ιδιότητες)

(Prevost,1985). Μπορούν δηλαδή να περάσουν από την αποκλειστικού στη μη αποκλειστικού τύπου κατηγοριοποίηση. Μπορούν να κάνουν απλούς παραγωγικούς συλλογισμούς αλλά δε μπορούν να κατανοήσουν ή να συνθέσουν πλήρεις αποδείξεις των ισχυρισμών τους.

- Επίπεδο 4 της «Παραγωγικής σκέψης»: Οι μαθητές κατανοούν τη σημασία της απόδειξης και το ρόλο των αξιωμάτων, των θεωρημάτων και των αποδείξεων. Η απόδειξη είναι η ανώτατη και πλέον έγκυρη αρχή που καθορίζει την αλήθεια μιας πρότασης. Ο μαθητής μπορεί να επαναδιατυπώσει προβλήματα σε πιο σαφή γλώσσα. Μπορούν επίσης να κατανοήσουν ότι η απόδειξη μπορεί να γίνει με περισσότερους από ένα τρόπους. Δεν αναγνωρίζουν όμως την ανάγκη για αυστηρότητα στην απόδειξη και δεν κατανοούν τις σχέσεις μεταξύ διαφόρων αξιωματικών συστημάτων» (Crowley, 1987, Saughnessy & Burger, 1985).
- Επίπεδο 5 «Αυστηρό(τυπικό)»: Τα άτομα είναι σε θέση να κατανοήσουν την αναγκαιότητα της αυστηρής αιτιολόγησης και είναι ικανά να κάνουν αφηρημένους συλλογισμούς, να γνωρίζουν και να κατανοούν και άλλα αξιωματικά συστήματα (όπως οι η ευκλείδειες γεωμετρίες) και να μπορούν να τα συγκρίνουν.

Σύμφωνα με τους Crowley (1987), Usiskin (1982), Γαγάτση (2016):

A) Τα επίπεδα είναι ιεραρχικά και ένας μαθητής δεν μπορεί να προχωρήσει σε ένα επίπεδο εάν δεν έχει κατακτήσει τα προηγούμενα επίπεδα. **B)** Η πρόοδος από το ένα επίπεδο στο άλλο δεν εξαρτάται από την ηλικία, αλλά από τις εκπαιδευτικές εμπειρίες του μαθητή (διδασκτικές μέθοδοι και περιεχόμενο). **Γ)** Οι άτυπες έννοιες ενός επιπέδου γίνονται τυπικές στο επόμενο επίπεδο. **Δ)** Κάθε επίπεδο έχει τη δική του γλώσσα και το δικό του δίκτυο σχέσεων μεταξύ των γλωσσικών συμβόλων. Μια σχέση που θεωρείται ορθή σε ένα επίπεδο, μπορεί να τροποποιηθεί στο επόμενο επίπεδο. **Ε)** Εάν η διδασκαλία που επιδέχεται ο μαθητής δε συνάδει με το επίπεδό του, τότε δεν μπορεί να επιτύχει τους αναμενόμενους μαθησιακούς στόχους.

Το μοντέλο Van Hiele έχει δεχτεί κριτική. Ο Duval (2004) αναφέρει ότι η διδασκαλία της γεωμετρίας δεν πρέπει να αρχίζει με την αναγνώριση των σχημάτων, διότι έτσι οι μαθητές εγκλωβίζονται στην εικονική εξεικόνιση.

Ο Γαγάτσης (2016) αναφέρει ότι υπάρχουν μαθητές που βρίσκονται σε διαφορετικό επίπεδο στις διάφορες γεωμετρικές έννοιες.

Οι Burger & Shaughnessy (1996), Clements & Battista (1992), Geddes & Tischer (1988) προτείνουν την προσθήκη ενός πιο χαμηλού, προαναγνωριστικού επιπέδου. Στο επίπεδο αυτό οι μαθητές αναγνωρίζουν μέρος των οπτικών χαρακτηριστικών των σχημάτων, αλλά δεν μπορούν να αναγνωρίσουν πολλά όμοια σχήματα ή να

διακρίνουν μια κατηγορία σχημάτων ή να διακρίνουν μια κατηγορία σχημάτων μεταξύ άλλων κατηγοριών.

Σύμφωνα με τους Clements et al (1999), οι μαθητές αναπτύσσουν εικονικά «πρωτότυπα μοντέλα» και σταδιακά αποκτούν λεκτική περιγραφική γνώση των μοντέλων αυτών και γενικότερα των σχημάτων. Το οπτικό επίπεδο αποκτά μια νέα διάσταση που χαρακτηρίζεται από το συνδυασμό λεκτικής περιγραφικής γνώσης και αντίληψης.

Οι Houdement & Kuzniak (2003) αναφέρουν ότι ενώ το μοντέλο είναι αυστηρά γραμμικό, αντίθετα τα επίπεδα δεν είναι διακριτά, αλλά δυναμικά και αλληλένδετα.

Οι Piaget & Inhelder (1967) υποστηρίζουν ότι η αναπαράσταση του χώρου οικοδομείται από προηγούμενο χειρισμό του περιβάλλοντος από το παιδί. Οι γεωμετρικές ιδέες αναπτύσσονται προοδευτικά με βάση τοπολογικές σχέσεις, «Αντίθετα με τους Piaget & Inhelder οι σύγχρονοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι τα παιδιά διαθέτουν γεωμετρική σκέψη από πολύ μικρή ηλικία και μπορούν να ασχοληθούν με γεωμετρικές ιδέες» (9^ο Παιδαγωγικό συνέδριο Κύπρου).

Αν και το μοντέλο Van Hiele έχει αμφισβητηθεί ως προς τη γραμμικότητά του συνεχίζει να χρησιμοποιείται συστηματικά. Συμπληρώνεται όμως με στοιχεία όπως οι σχηματικές έννοιες (Fischbein 1993) και οι τρόποι αντίληψης των γεωμετρικών σχημάτων του Duval (1999) (Μ.Τζεκάκη, 2016) [29].

7.8 ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ-VAN HIELE

Σύμφωνα με τους Van Hiele (1986) για να περάσει ένας μαθητής από το ένα επίπεδο στο άλλο, η διδασκαλία οργανώνεται σε «πέντε φάσεις διδασκαλίας». Οι φάσεις αυτές είναι οι εξής (Mason. 2005):

1.Εισαγωγή της έννοιας (information): Μέσα από συζήτηση ο δάσκαλος εκμαιεύει τις προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών, γύρω από την έννοια που θέλει να εισαγάγει, ώστε να εξοικειωθούν οι μαθητές την νέα έννοια.

2.Καθοδηγούμενη ανακάλυψη (Guided orientation): Οι μαθητές εξερευνούν τη νέα έννοια μέσα από δραστηριότητες που έχει σχεδιάσει ο καθηγητής.

3.Έκφραση- Επεξήγηση (Explication): Οι μαθητές περιγράφουν με δικά τους λόγια αυτό που έμαθαν σχετικά με τη νέα έννοια και ο καθηγητής εισαγάγει τους νέους μαθηματικούς όρους.

4.Ελεύθερη διερεύνηση (Free Orientation):

Οι μαθητές εφαρμόζουν τις έννοιες που έχουν μάθει για την επίλυση προβλημάτων, δίνοντας έμφαση στα ανοικτά προβλήματα.

5.Ολοκλήρωση(Integration)

Οι μαθητές συνοψίζουν όσα έμαθαν και οικοδομούν ένα δίκτυο εννοιών και σχέσεων.

Παράδειγμα ακολουθίας δραστηριοτήτων: Σχέση ανάμεσα στην πλευρά

τετραγώνου και του εμβαδού και της περιμέτρου του.

1.Εισαγωγή της έννοιας (information):

Να κατασκευάσετε διάφορα τετράγωνα στο βελονοπίνακα. Να καταγράψετε τις παρατηρήσεις σας.

2.Καθοδηγούμενη ανακάλυψη (Guided orientation):

Να κατασκευάσετε στο βελονοπίνακα ένα τετράγωνο πλευράς 3cm και ένα δεύτερο τετράγωνο διπλάσιας πλευράς από τον πρώτο.

Πόσο είναι το εμβαδόν των δύο τετραγώνων που κατασκευάσατε;

Πόση είναι η περίμετρος των δύο τετραγώνων;

3.Έκφραση- Επεξήγηση (Explication):

Να γράψετε τον κανόνα που βρήκατε και να τον επεξηγήσετε. Ο κανόνας αυτός ισχύει και με άλλα τετράγωνα; Ο κανόνας ισχύει όταν η πλευρά τριπλασιαστεί;

4.Ελεύθερη διερεύνηση (Free Orientation):

Να δοκιμάσετε το ίδιο με ορθογώνια σχήματα. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Μήκος	Πλάτος	Περίμετρος	Εμβαδόν
2	3		
4	6		
8	12		

5.Ολοκλήρωση (Integration)

Εφαρμογές σε προβλήματα.

Στο παράδειγμα δεν χρησιμοποιήσαμε νέες τεχνολογίες! Η Pressmeg (2006) εξηγεί ότι «οι οπτικές εικόνες και οι διάφορες παραστάσεις αποτελούν σχηματικά οχήματα για την οπτικοποίηση στα μαθηματικά, στο βαθμό που παρουσιάζουν τη δομή ενός μαθηματικού αντικειμένου» [63].

«Η οπτική πληροφορία που συλλέγεται από την επαφή με τον χώρο και τα αντικείμενα μέσα σε αυτόν απεικονίζεται σε νοερές εικόνες, αρχικά απλές και στατικές και στη συνέχεια πιο σύνθετες και δυναμικές και για αυτό είναι τόσο κρίσιμες για τη μαθηματική ανάπτυξη» (Μαριάννα Τζεκάκη, 2016) [29].

7.9 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΑΞΙΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ MORLEY ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ

Έρευνα σχετικά με τη διδασκαλία και εκμάθηση της γεωμετρικής τεκμηρίωσης της γενίκευσης και της απόδειξης συγκεντρώνει ένα ειδικό ερευνητικό ενδιαφέρον, με την υποστήριξη της τεχνολογίας και ενθαρρυντικά αποτελέσματα. *Ωστόσο, αυτά τα αποτελέσματα είναι μόνο μέρος ενός μεγάλου μέρους έρευνας, καθώς ο γεωμετρικός συλλογισμός και η αποδεικτική διαδικασία αποτελούν από τα πιο σημαντικά συστατικά της μαθηματικής δραστηριότητας* (Jones & Tzekaki, 2016).

Ο υπολογιστής, από τη μέχρι τώρα εμπειρία, δεν βελτιώνει τις νοητικές ικανότητες του μαθητή, δηλαδή την ευφυΐα. Αυτό, το οποίο βελτιώνεται, είναι οι δυνατότητες, που παρέρχονται στον χρήστη, για περισσότερο δημιουργική δραστηριότητα, κάτι το οποίο συμβαίνει με όλα τα ανθρώπινα τεχνήματα. Υπάρχει ένα καίριο σημείο: η ανάγκη να έχει η χρήση της τεχνολογίας κάποια πρόσθετη παιδαγωγική αξία ως προς την εκπαιδευτική πράξη, δηλαδή τη μαθησιακή και διδακτική διαδικασία (Κυνηγός 2007). Μια σημαντική διδακτική ιδιότητα, που παρέχει η χρήση ψηφιακών δομημάτων, είναι η παρουσίαση πολλαπλών αναπαραστάσεων μιας έννοιας. Για παράδειγμα, κατά την μελέτη ενός γεωμετρικού φαινομένου, εμφανίζονται στην οθόνη συγχρόνως τα γεωμετρικά αντικείμενα, που μεταβάλλονται, οι μετρήσεις των μεγεθών που μεταβάλλονται, και η γραφική παράσταση της σχέσης που συνδέει τα μεγέθη αυτά. Οι πολλαπλές αυτές αναπαραστάσεις αν είναι απλά εντυπωσιακές ή ασύνδετες δημιουργούν σύγχυση στο μαθητή. Ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να διακρίνει τις δραστηριότητες, οι οποίες οδηγούν το μαθητή σε μια αναστοχαστική στάση, από εκείνες που περιορίζονται σε μια θεαματική προβολή εικόνων, χρωμάτων και κινουμένων σχεδίων. Συνοπτικά ο ρόλος του εκπαιδευτικού εναλλάσσεται μεταξύ των εξής θέσεων ως: «εισηγητής, συντονιστής, εξηγών, σύμβουλος, πηγή, εμπνευστής, συνερευνητής, σιωπηρός ερευνητής» (Κυνηγός, 2007) [93].

Με τη χρήση ενός δομήματος, οι μαθητές αμφισβητούν καταστάσεις, διαπραγματεύονται νοήματα και επιδιώκουν αρχικά την απάντηση στο πρόβλημα και στη συνέχεια την ανακάλυψη εκείνων των συνθηκών που επηρεάζουν την έκβαση του προβλήματος (Κυνηγός 2006) [93].

Η φύση των μαθηματικών αντικειμένων που προκύπτει είναι ποιοτικά διαφορετική από ότι σε αυτά που αναπαριστώνται με τα συμβατικά μέσα αναπαράστασης. Σ' αυτά: *Τα μαθηματικά γενικά και ειδικά η απόδειξη, παρουσιάζονται ως ένα τελειωμένο*

προϊόν. Ο μαθητής δεν είναι συμμετέτοχος στην κατασκευή της γνώσης αλλά περισσότερο ένας παθητικός δέκτης της (Alibert & Thomas, 1991).

Η ελαχιστοποίηση της χρονικής απόστασης μεταξύ δύο διαφορετικών θέσεων-μορφών ενός γεωμετρικού σχήματος είναι ειδοποιός διαφορά από τη χρονοβόρα κατασκευή, με κανόνα και διαβήτη, δεκάδων σχημάτων για τις διάφορες θέσεις του.

Η διδασκαλία με νέες τεχνολογίες:

- Βοηθά τους μαθητές ώστε να ανακαλύψουν ή/και να προσδιορίσουν γεωμετρικές ιδιότητες, αλλά δεν συμβάλλουν κατ' ανάγκη και στην ανάπτυξη της αποδεικτικής τους ικανότητας (Hoyles και Healy, 1999).
- Προσφέρουν στους μαθητές δυνατότητες για μάθηση μέσα από ένα παιχνιδιώδη τρόπο. Μπορούν ταυτόχρονα να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν ανώτερη μαθηματική σκέψη (NCTM, 2000), αφού τους παρέχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν, να κάνουν εικασίες, να αναπτύξουν την ικανότητα αιτιολόγησης και να κάνουν γενικεύσεις (Papert, 1996).
- Η απόδειξη δεν είναι μια τυπική διαδικασία, αλλά οι αρχικές διαδικασίες που προηγούνται της τυπικής απόδειξης οδηγούν τους μαθητές όχι απλά στη διατύπωση μιας πρότασης, αλλά στον πειραματισμό και στην ανάγκη να δικαιολογήσουν τις εικασίες τους και στη συνέχεια να προχωρήσουν στη φορμαλιστική απόδειξη. Στη λεγόμενη παραδοσιακή διδασκαλία μια μαθηματική πρόταση είναι αληθής αν και μόνο αν μπορεί να αποδειχθεί. Είναι αισθητή η διαφορά μεταξύ απόδειξης και ερευνητικής δραστηριότητας.
- Οι νέες τεχνολογίες δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να καλλιεργήσουν τη φαντασία τους, τη συνεργασία με άλλους μαθητές και εκπαιδευτικούς, χωρίς, ωστόσο, να αποκλείουν την ευγενή άμιλλα (Hoyles & Noss, 1996). Φυσικά, αξίζει να σημειωθεί ότι σε αυτό το νέο περιβάλλον οι μαθητές συνήθως καλούνται να εργαστούν σ' ένα έτοιμο περιβάλλον, να χειριστούν διατάξεις και κατασκευές, που έχουν σχεδιαστεί από άλλους, μ' αποτέλεσμα η ανάληψη χειριστικού μόνο ρόλου να περιορίζει τη δυνατότητα τους να εμβαθύνουν στον τρόπο λειτουργίας των κατασκευών (Noss et al., 1997).

«Η έμφαση τέλος, στις εναλλακτικές σχέσεις της τεχνολογίας μέσα στις συγκεκριμένες εκπαιδευτικές συνθήκες και όχι στις λειτουργικότητες της τεχνολογίας αυτής καθεαυτής επιτρέπει τη δόμηση ενός ρεπερτορίου διαφορετικών ρόλων για τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές, που διαφέρει από το παραδοσιακό σχήμα του 'πομπού – δέκτη', αλλά και την επαναχρησιμοποίηση και επεκτασιμότητα των προτεινόμενων δραστηριοτήτων σε διαφορετικό κοινό, ηλικία και εκπαιδευτικό πλαίσιο» (Kynigos & Argyris, 2004).

7.10 Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΙΚΟΥ «ΑΛΛΑΖΕΙ» ΚΑΙ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ.

Εάν είναι σωστό το ότι υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στις εικόνες και τις έννοιες τότε είναι λογικό να υποθέσουμε ότι υπάρχει μια βαθειά επίδραση των εξωτερικών εικόνων ή σχεδίων στις εσωτερικές διεργασίες (Mariotti, 1995). Σύμφωνα με την ερευνητήρια, οι εξωτερικές εικόνες αλληλεπιδρούν με τις εσωτερικές οι οποίες μπορεί να ερμηνεύονται σε εικονικές έννοιες ως εξής: Οι εξωτερικές εικόνες παρέχουν αισθητική παρότρυνση για τις εικονικές έννοιες.

Η Mariotti (1995), όπως έχουμε αναφέρει, υποστηρίζει ότι η γεωμετρία είναι ένας χώρος όπου οι εικόνες και οι έννοιες πρέπει να βρίσκονται σε αλληλεπίδραση. Επίσης είναι ένας χώρος για πειραματισμούς εικόνας – λογικής. Τα σχήματα στη γεωμετρία έχουν ένα σύνθετο ρόλο στην παρουσίαση της γεωμετρικής γνώσης. Τα σχήματα είναι «σχηματικές έννοιες» (Fischbein, 1993, σελ. 139). Ο Parzysz (1988) έκανε ένα διαχωρισμό ανάμεσα στο σχήμα και στο σχέδιο. Το σχήμα αποτελεί εικονική έκφραση σε κάποιο μέσο μιας νοητικής εικόνας. Το σχήμα δεν αποτελεί απλά ένα συγκεκριμένο αντικείμενο – εικόνα, αποτελεί εκπρόσωπο μιας κλάσης άπειρων αντικειμένων που έχουν κάποιες κοινές ιδιότητες σαφώς ορισμένες (Laborde, 1992). Με τη βοήθεια κατάλληλου λογικού (Software) είναι δυνατή η εξεικόνιση της αλληλοσυσχέτισης του σχεδίου και του σχήματος. Είναι δυνατή σε περιβάλλον υπολογιστή η αλληλεπίδραση της εικόνας (σχέδιο) με την έννοια την οποία υλοποιεί. Η γεωμετρία είναι ένας χώρος που στηρίζεται σε αυτή την αλληλεπίδραση χρησιμοποιώντας τις αισθήσεις ως διαμεσολαβητές μεταξύ σχημάτων και εννοιών (Strasser & Carponi, 1991). Οι εικόνες που δημιουργούνται με τη βοήθεια μικρόκοσμων δεν είναι φτωχές αναπαραστάσεις αισθητηριακού επιπέδου γιατί έχουν μια δική τους λογική που εξαρτάται από τη διαδικασία που τις παράγει και τις εμφανίζει στην οθόνη του υπολογιστή ή στον διαδραστικό πίνακα. Η λογική της μηχανής γίνεται λογική της σχεδίασης. Απαραίτητη προϋπόθεση για να αναπτυχθεί η παραγωγική [14Π] σκέψη του μαθητή είναι να έχει κατανοήσει και να μπορεί να διαχειριστεί αυτή τη λογική. Η αλληλεπίδραση μεταξύ του γεωμετρικού σχήματος και της έννοιας διαμεσολαβείται μέσα από τις εντολές που βρίσκονται στο περιβάλλον διεπαφής του λογισμικού οι οποίες κάθε φορά αντανακλούν ένα σκοπό εννοιολογικό και ταυτόχρονα αισθητηριακό. Η εικόνα στην οθόνη παριστά μόνο το ένα μέρος της φύσης της. Με την μετακίνηση ενός στοιχείου εμφανίζεται η εσωτερική λογική με την οποία κατασκευάστηκε. Με την λειτουργία του συρσίματος μπορεί να γίνει μετακίνηση ενός στοιχείου της εικόνας ενώ όλες οι υπονοούμενες γεωμετρικές σχέσεις παραμένουν αμετάβλητες. Μ' αυτόν τον τρόπο η εικόνα φαίνεται διαφορετική αλλά οι γεωμετρικές της ιδιότητες διατηρούνται. Η διαχείριση αυτών των εικόνων απαιτεί κατανόηση του εννοιολογικού τους περιεχομένου. Η εικονική επανατροφοδότηση σε συνδυασμό με τη δυνατότητα μεταβολής του σχήματος στην οθόνη ενώ διατηρεί τις βασικές του ιδιότητες:

- Διαμορφώνει ένα νέο είδος αισθητηριακής αντίληψης
- Περιέχει πληροφορία που μπορεί να βοηθήσει το μαθητή να ανακαλύψει αν οι εικασίες που έκανε σχετικά με τις ιδιότητες του σχήματος ισχύουν ή όχι.

7.11 ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ MORLEY

Οι μαθητές γνωρίζουν ότι η τριχοτόμηση μιας γωνίας με κανόνα και διαβήτη δεν είναι πάντοτε δυνατή. Αυτό μπορεί να γίνει μόνο σε ειδικές περιπτώσεις όπως π.χ. στην ορθή γωνία. Πριν την έναρξη της δραστηριότητας μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να μελετήσουν την ιστορία του προβλήματος της τριχοτόμησης μιας τυχαίας γωνίας. Στα βιβλία των Μπρίκα [80], Παπασταυρίδη [81], και Λάκκη [82], αποδεικνύεται ότι είναι αδύνατη η επίλυση του προβλήματος με κανόνα και διαβήτη.

Στο πρόβλημα της τριχοτόμησης μιας τυχαίας γωνίας, του τετραγωνισμού του κύκλου και του διπλασιασμού του κύβου δόθηκε οριστική απάντηση για την αδυναμία επίλυσής τους αφού πρώτα η έννοια γεωμετρική κατασκευή με χρήση μόνο κανόνα και διαβήτη ορίστηκε αλγεβρικά μέσα στο πλαίσιο της αναλυτικής γεωμετρίας και μελετήθηκε με τη βοήθεια της θεωρίας του Galois (Σημειώσεις Άλγεβρας, Ε. Ράπτη, ΠΜΣ, ΕΚΠΑ, 2015).

7.12 ΠΡΩΤΗ ΦΑΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Στην αρχή της δραστηριότητας δίνεται στους μαθητές το εξής πρόβλημα:
Τρεις μαθητές θέλουν να μοιραστούν το παρακάτω κομμάτι πίτσας. Πως θα το χωρίσουν σε τρία ίσα κομμάτια;



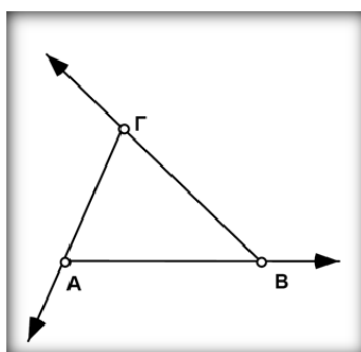
ΣΧΗΜΑ 37

Υπάρχουν πολλοί τρόποι τριχοτόμησης μιας τυχαίας γωνίας με τη βοήθεια προσεγγιστικών μεθόδων ή οργάνων διαφορετικών από τον κανόνα και το διαβήτη. Ένα παράδειγμα τέτοιας τριχοτόμησης, που επινοήθηκε από τον Αρχιμήδη και χρησιμοποιεί τη μέθοδο της ‘νεύσης’ (δηλαδή την τοποθέτηση τμήματος δεδομένου μήκους μεταξύ δύο γραμμών) παρουσιάζεται στη δραστηριότητα 4.2 του σχολικού βιβλίου (1999). Η τριχοτόμηση γωνίας γίνεται με τα παρακάτω βήματα:

Ένας άλλος τρόπος τριχοτόμησης μιας γωνίας είναι με τη χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας. Στο φωτόδενδρο [85] με το The Geometer's Sketchpad [30] αναφέρεται λεπτομερώς ο τρόπος με τον οποίο γίνεται η κατασκευή. Στην πρώτη σελίδα του αρχείου λογισμικού, έχουν τη δυνατότητα οι μαθητές να εμφανίσουν τις οδηγίες ώστε να κατασκευάσουν μόνοι τους τη δραστηριότητα και έτσι να κατανοήσουν τη διαδικασία κατασκευής μαθησιακών αντικειμένων σε λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας.

Οι μαθητές χρησιμοποιώντας το λογισμικό τριχοτομούν μια γωνία ενός τριγώνου και ο διδάσκων τους ζητά να κάνουν εξής βήματα:

1. Χρησιμοποιήστε το εργαλείο ημιευθειών για να κατασκευάσετε το τρίγωνο ΑΒΓ. Σχεδιάστε τις ημιευθείες σας με αριστερόστροφη φορά όπως στο σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 39

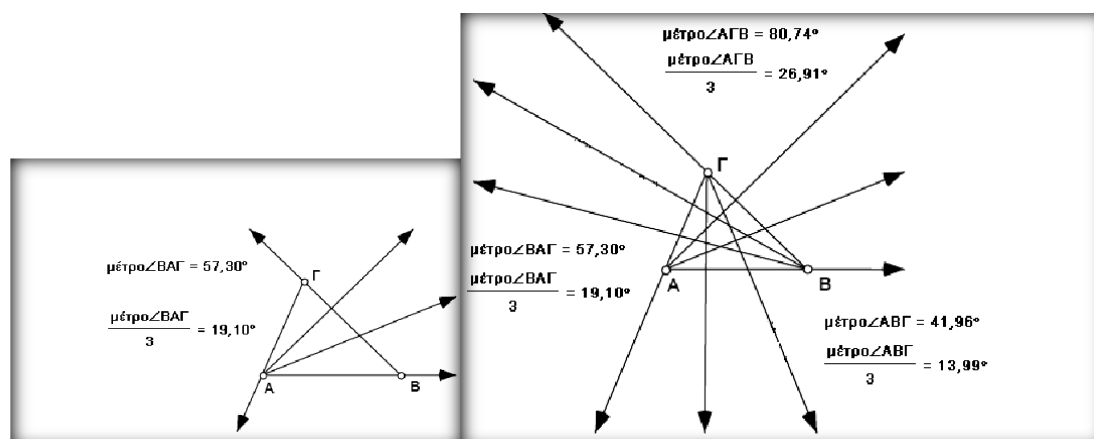
2. Μετρήστε τη γωνία ΒΑΓ.

3. Χρησιμοποιείτε τον υπολογιστή για τη δημιουργία μιας έκφρασης για το μέτρο $\frac{\widehat{ΒΑΓ}}{3}$.

4. Επιλέξτε το σημείο Α ως κέντρο περιστροφής.

5. Επιλέξτε τη μέτρηση της γωνίας $\frac{\widehat{ΒΑΓ}}{3}$.

6. Περιστρέψτε την ημιευθεία ΑΒ κατά την επιλεγμένη γωνία. Περιστρέψτε την ημιευθεία που προκύπτει για την τριχοτόμηση της γωνίας (σχήμα 40).



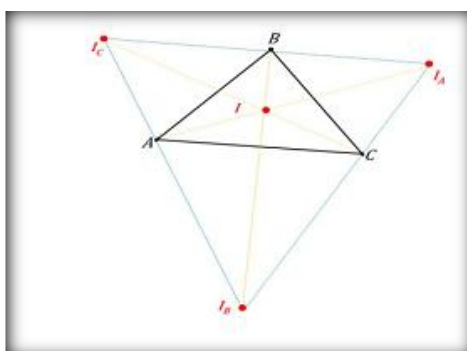
ΣΧΗΜΑ 40

ΣΧΗΜΑ 41

7. Να κατασκευάσετε τις τριχοτομούς και των άλλων δύο γωνιών του τριγώνου (Σχήμα 41).

7.13 ΔΕΥΤΕΡΗ ΦΑΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Πριν ζητήσει ο εκπαιδευτικός από τους μαθητές να αναγνωρίσουν το ισόπλευρο τρίγωνο που σχηματίζεται από τις τομές των εσωτερικών διχοτόμων κρίνεται σκόπιμο να ζητήσει από τους μαθητές να εξετάσουν τη δομή των εσωτερικών και των εξωτερικών διχοτόμων ενός τριγώνου. Μετά από διαπραγμάτευση με τους μαθητές προκύπτουν τα εξής:

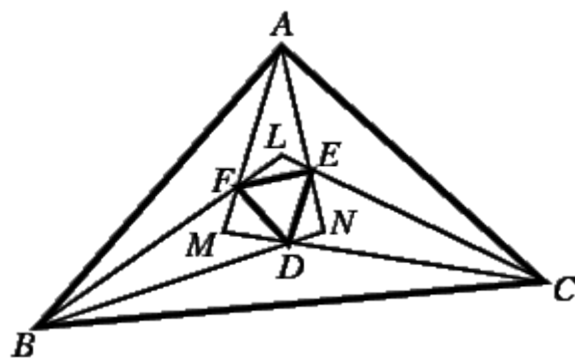


ΣΧΗΜΑ 42

1. Οι εσωτερικές διχοτόμοι περνούν από ένα μοναδικό σημείο (έγκεντρο).
2. Μια εσωτερική διχοτόμος και οι διχοτόμοι των άλλων δύο εξωτερικών γωνιών διέρχονται από ένα μοναδικό σημείο (παράκεντρο).
3. Το τρίγωνο $I_1I_2I_3$ που σχηματίζεται από τις εξωτερικές διχοτόμους του τριγώνου ABC έχει τις εσωτερικές διχοτόμους του τριγώνου ως ύψη, τα οποία διέρχονται από ένα κοινό σημείο I που είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $I_1I_2I_3$.

7.14 ΤΡΙΤΗ ΦΑΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

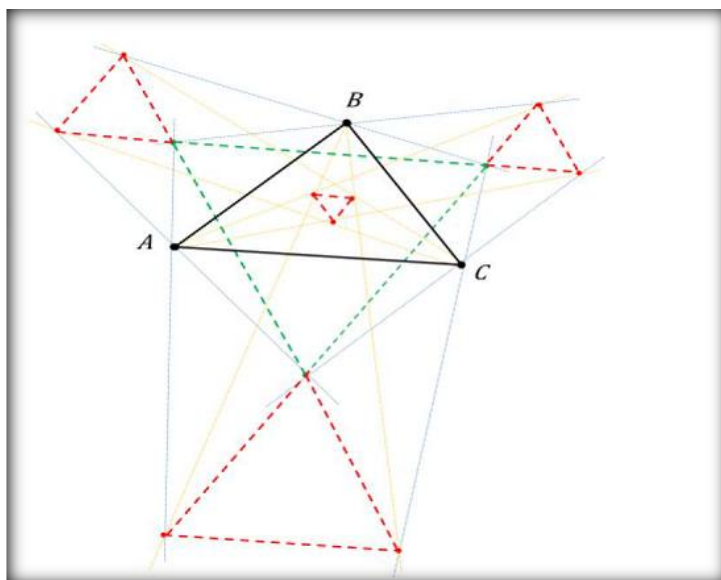
Σε αυτή τη φάση (Σχήμα 43) οι μαθητές προσπαθούν να βρουν το ισόπλευρο τρίγωνο που σχηματίζεται από τις εσωτερικές διχοτόμους. Στη συνέχεια με διαδοχικές μετρήσεις προσπαθούν να επαληθεύσουν την εικασία τους.



ΣΧΗΜΑ43

7.15 ΤΕΤΑΡΤΗ ΦΑΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Οι μαθητές έχουν ήδη μελετήσει τη δομή των διχοτόμων. Τους ζητείται να μελετήσουν και την δομή των τριχοτόμων. Στην τρίτη φάση βρήκαν το εσωτερικό τρίγωνο Morley.



ΣΧΗΜΑ 44

Στη συνέχεια τους ζητείται να πειραματιστούν και να βρουν αν σχηματίζονται και άλλα ισόπλευρα τρίγωνα. Έχοντας μελετήσει τη δομή των εσωτερικών διχοτόμων, με την καθοδήγηση του διδάσκοντα, αναμένεται να ανακαλύψουν την αντιστοιχία των κέντρων με τα ισόπλευρα τρίγωνα. Τέλος, μελετώντας τα τρίγωνα που σχηματίζονται από τις τριχοτόμους των εσωτερικών γωνιών και τις τριχοτόμους των εξωτερικών γωνιών, εικάζουν ότι σχηματίζονται και άλλα ισόπλευρα τρίγωνα και προσπαθούν να επαληθεύσουν τους ισχυρισμούς τους, πιθανόν με μέτρηση των γωνιών. Μ' αυτό τον τρόπο, συνεχίζουν να πειραματίζονται και να κάνουν εικασίες, ψάχνοντας να εντοπίσουν και τα υπόλοιπα ισόπλευρα τρίγωνα Morley.

Η έκπληξη που θα δοκιμάσουν όταν βρουν ακόμη ένα ισόπλευρο τρίγωνο, θα τους παρακινήσει να ερευνήσουν και να βρουν και τα υπόλοιπα ισόπλευρα τρίγωνα Morley.

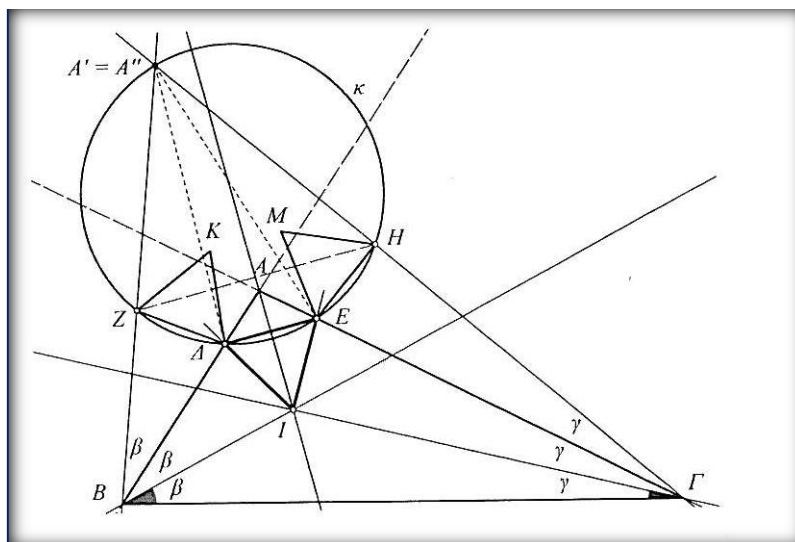
7.16 ΠΕΜΠΤΗ ΦΑΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Οι μαθητές έχοντας ανακαλύψει την ύπαρξη ισοπλεύρων τριγώνων, μπορεί να υποθέσουν ότι και τα υπόλοιπα τρίγωνα που σχηματίζονται από τομές εσωτερικών και εξωτερικών διχοτόμων είναι ισόπλευρα. Ο διδάσκων τους ζητά να εξετάσουν και αυτά τα τρίγωνα, ώστε να διαπιστώσουν ότι δεν είναι όλα τα τρίγωνα ισόπλευρα. Στην τέταρτη και πέμπτη φάση της δραστηριότητας οι μαθητές, με τον πειραματισμό και την γενίκευση, αναπτύσσουν επαγωγικό και απαγωγικό συλλογισμό [14Π].

7.17 ΕΚΤΗ ΦΑΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Σε αυτή τη φάση ζητείται από τους μαθητές να αποδείξουν ότι το εσωτερικό τρίγωνο Morley είναι ισόπλευρο. Με την προτεινόμενη δραστηριότητα η απόδειξη, ενώ θεωρείται συχνά ως μέσο για να αποφασίσει κάποιος την αλήθεια των δηλώσεων (εικασιών), γίνεται ταυτόχρονα ένα μέσο για την εξήγηση των φαινομένων που παρατηρήθηκαν στην οθόνη του υπολογιστή που προκαλούν εντύπωση και έκπληξη (Hanna, 1998). Οι μαθητές, στην τέταρτη φάση διδασκαλίας έκαναν την εικασία ότι τα σημεία τομής γειτονικών τριχοτόμων των γωνιών ενός τριγώνου αποτελούν τις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου. Τα τρία τρίγωνα που περιβάλλουν το ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελή. Υπάρχουν πολυάριθμες σχέσεις μεταξύ των γωνιών που μπορούν να ανακαλύψουν οι μαθητές. Οι σχέσεις αυτές παίζουν ρόλο στην απόδειξη. Ο διδάσκων, με δεδομένη την πληθώρα αποδείξεων, μπορεί να επιλέξει αυτή που θεωρεί καταλληλότερη για την επίτευξη των διδακτικών του στόχων. και να τους καθοδηγήσει, χωρίς βέβαια να τους δεσμεύσει. Αντίθετα αφήνοντας την απόδειξη ανοικτή πρέπει να μπορεί να διαφοροποιήσει τους αρχικούς του στόχους. Σε αυτή τη φάση ο μαθητής αναπτύσσει παραγωγικό συλλογισμό. Οι μαθητές αναμένεται να δυσκολευτούν στην ολοκλήρωση της απόδειξης του θεωρήματος λόγω των πολλών σχέσεων που πρέπει να βρουν. Ακολουθεί μια απόδειξη που είναι καταλληλότερη γιατί δεν απαιτούνται πολλές σχέσεις αλλά ανακλάσεις. Στα λογισμικά δυναμικής γεωμετρίας οι ανακλάσεις και γενικότερα οι μετασχηματισμοί απαιτούν απλούς χειρισμούς από τους μαθητές.

Η απόδειξη στηρίζεται σε ένα λήμμα για τις διχοτόμους του τριγώνου.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΜΕ ΑΝΑΚΛΑΣΕΙΣ

ΣΧΗΜΑ 45

Λήμμα. Αν από το έγκεντρο I του τριγώνου ABΓ και από τις δύο πλευρές της ΙΑ φέρουμε δύο ευθείες με κλίση 30° προς την ΙΑ, που τέμνουν τις άλλες πλευρές του τριγώνου στα σημεία Δ και Ε. Τότε το τρίγωνο ΙΔΕ είναι ισόπλευρο και η ΔΕ είναι κάθετη στην ΑΙ (Σχήμα 45).

Θεώρημα Morley. Σε κάθε τρίγωνο οι τριχοτόμοι των γωνιών του, πλησίον προς τις τρεις πλευρές του αντίστοιχα, συναντώνται στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου.

Απόδειξη: Η απόδειξη (Πάρις Πάμφιλος. Γεωμετρικόν) [8] στηρίζεται στο σχήμα 44, όπου δοθέντος του τριγώνου Α'ΒΓ, με βασικές γωνίες 3β και 3γ , ορίζουμε το τρίγωνο ABΓ με βασικές γωνίες 2β και 2γ και κατασκευάζουμε το τρίγωνο Α'ΒΓ, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα. Σύμφωνα με το λήμμα κάνουμε ανάκλαση της ΒΙ και του ΙΔΕ ως προς την ευθεία ΑΒ και παίρνουμε την ευθεία ΒΑ' και το ισόπλευρο ΔΖΚ. Ανάλογα, με ανάκλαση της ΙΓ ως προς την ΑΓ παίρνουμε την ευθεία ΓΑ' και το ισόπλευρο ΕΗΜ. Από τον τρόπο ορισμού τους, προκύπτει ότι

$$\widehat{\Gamma B A'} = 3\beta, \widehat{B \Gamma A'} = 3\gamma, \widehat{B A' \Gamma} = 180^\circ - 3\beta - 3\gamma \quad (1)$$

και ότι το Α' συμπίπτει με το Α'. Το τετράπλευρο ΖΔΕΗ, λόγω της συμμετρίας του ως προς την ΑΙ, είναι ισοσκελές τραπέζιο με τρεις ίσες πλευρές και η γωνία του

$$\widehat{Z \Delta E} = 60^\circ + 2(90^\circ - \alpha/2) = 60^\circ + 180^\circ - \alpha = 60^\circ + 2\beta + 2\gamma \rightarrow \widehat{Z H E} = 120^\circ - 2\beta - 2\gamma.$$

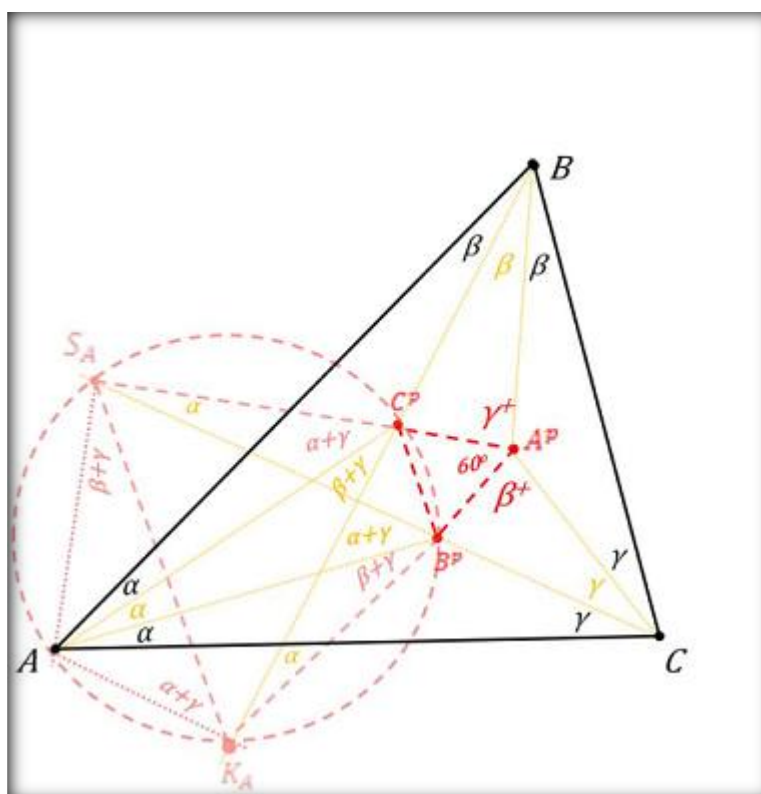
Λόγω της ισότητας των τόξων, του περιγεγραμμένου κύκλου κ του τραπέζιου, συμπεραίνουμε ότι

$$\widehat{Z H \Delta} = \frac{\widehat{Z H E}}{2} = 60^\circ - \beta - \gamma$$

Από την ισότητα των τόξων, οι εγγεγραμμένες γωνίες του κ , που βλέπουν το τόξο $Z\Delta\epsilon\eta$, θα είναι τριπλάσιες της $\widehat{Z\hat{H}\Delta}$. Συνεπώς, λόγω της (1), ο περίκυκλος του $Z\Delta\epsilon\eta$, διέρχεται από το A' . Επομένως, λόγω της ισότητας των τόξων, προκύπτει ότι οι $A'\Delta$ και $A'\epsilon$ είναι τριχοτόμοι της $B\hat{A}\Gamma$.

7.18 ΕΒΔΟΜΗ ΦΑΣΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ-ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Σε αυτή τη φάση ζητείται από τους μαθητές να βρουν τις σχέσεις (αν υπάρχουν) που έχουν οι πλευρές των ισοπλεύρων τριγώνων που σχηματίζονται και στη συνέχεια να τις αποδείξουν. Οι ημιευθείες που διέρχονται από τις κορυφές του αρχικού τριγώνου και τις απέναντι κορυφές του ισοπλεύρου τριγώνου συντρέχουν. Πιθανώς οι μαθητές να θεωρήσουν ότι πρόκειται για διχοτόμους, αλλά αυτό δεν ισχύει. Οι τριχοτόμοι ενός συνόλου εξωτερικών γωνιών τέμνονται έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα εξάγωνο. Μια ομάδα εναλλασσόμενων κορυφών αυτού του εξαγώνου συμπεριλαμβάνει τις κορυφές του αρχικού τριγώνου. Η άλλη ομάδα σχηματίζει ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Η αναφορά στην δομή των διχοτόμων του τριγώνου και η συνεχής ανατροφοδότηση, αναμένεται να προκαλέσει το ενδιαφέρον και την περιέργεια στους μαθητές ως προς την αναζήτηση των ζητούμενων σχέσεων.



ΣΧΗΜΑ 46

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Για την υλοποίηση της δραστηριότητας προτείνεται να διατεθούν τρείς ή τέσσερις διδακτικές ώρες.
2. Το παρόν σενάριο αποτελεί τροποποίηση και επέκταση του σεναρίου που υπάρχει στο Ψηφιακό Σχολείο για τη Γεωμετρία του Λυκείου [85].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: ΕΠΙΠΛΕΟΝ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

[1Π] Η Επιστημολογία αναφέρεται, με μια λέξη, στο κατά πόσο «έχουμε δικαίωμα να πιστεύουμε ότι πιστεύουμε» (Dancy, 1995:245). Ασχολείται με τη δικαιολόγηση των απόψεών μας, με τη δομή της δικαιολόγησης, αν δηλαδή οι γνώσεις μας αποτελούν ένα συνεκτικό οικοδόμημα στο οποίο οι γνώσεις συνέχονται σε ενιαίο σύνολο, θέση που θα μπορούσε, κάπως αδόκιμα, να ονομασθεί συνεκτικισμός, μετάφραση του αγγλικού coherentism, ή αν στηρίζουμε τις απόψεις μας σε κάποιο «θεμέλιο», θέση που ονομάζεται θεμελιωτισμός ή θεμελιοκρατία, μετάφραση του αγγλικού foundationalism. Τη θέση της συνοχής διατύπωσε πρώτος στη σύγχρονη φιλοσοφία ο Otto Neurath, μέλος του κύκλου της Βιέννης για ορισμένο διάστημα, χρησιμοποιώντας την παρομοίωση της βάρκας: είναι σαν να πλεύουμε στη θάλασσα και τη βάρκα μας πρέπει να τη διορθώνουμε εν πλω. Δεν έχουμε τη δυνατότητα να φθάσουμε σε λιμάνι. Κατά τον ίδιο τρόπο δεν μπορούμε να βρούμε μια γνώση απόλυτα σίγουρη (το λιμάνι) πάνω στην οποία θα βασιστούμε για το έργο μας. Άρα οι γνώσεις μας δεν «πατάνε» κάπου σταθερά, δεν ορθώνονται η μία πάνω στην άλλη, αλλά αλληλοϋποστηρίζονται, συνέχονται σε ένα σύνολο. Ο θεμελιωτισμός ή θεμελιοκρατία (foundationalism), είναι μια θεωρία σύμφωνα με την οποία η γνώση βασίζεται σε κάποιες πρωταρχικές θεμελιακές προτάσεις οι οποίες δεν χρειάζονται περαιτέρω θεμελίωση. (Για τη θεμελιοκρατία βλ. Πελεγρίνης, 2005:265 και Alston, 1993: 144-147).

[2Π] Τα λογισμικά που έχουν μια ουσιαστική μαθηματική πιστοποίηση και ακρίβεια και μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης, αφού διάνυσαν διάφορα στάδια εξέλιξης από το τέλος της δεκαετίας του '80 μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο ομάδες:

1) Formal Proof software: ξεκινώντας από τα αποτελέσματα στην δεκαετία του '50, πάνω στην τεχνητή ευφυΐα, δημιουργήθηκε μια σειρά λογισμικών (formal proof theory) που αφορούσαν τον λογικό έλεγχο των μαθηματικών αποδείξεων. Τέτοια λογισμικά (automatic reasoning systems) είναι τα: HOL Light, Mizar, Proof Power, Isabelle, Coq.

2) Symbolic Computation Software: ξεκινώντας κυρίως από φυσικούς (κλασσικό παράδειγμα ο Stephen Wolfram του University of Illinois και το δημιούργημά του mathematica) στόχευαν αρχικά σε αλγεβρικούς και αριθμητικούς υπολογισμούς μεγάλης ακρίβειας. Στη συνέχεια οι μαθηματικοί πέρασαν στο δεύτερο στάδιο εξέλιξης με τη δημιουργία αποτελεσματικότερων και γενικευμένων αλγορίθμων, όπως οι αλγόριθμοι ολοκλήρωσης και οι αλγόριθμοι της βάσης του Groebner. Το αποτέλεσμα αυτής της εξέλιξης είναι μια σειρά από αξιόπιστα υπολογιστικά συστήματα που αντικαθιστούν επίπονους υπολογισμούς ή ακόμα βεβαιώνουν την αλήθεια ή όχι ενός γεωμετρικού ή αλγεβρικού υπολογισμού.

[3Π] Διακρίνουμε δύο είδη ευρετικών:

1. Τις γενικές (general heuristics) δηλαδή τις ευρετικές του τύπου που προαναφέραμε .
2. Τις ειδικές ευρετικές (task - specific heuristics), δηλαδή ευρετικές που αναφέρονται σε συγκεκριμένες περιοχές μαθηματικής γνώσης.

[4Π] Σημείο είναι οποιοδήποτε σημάδι ή λέξη που κατευθύνει την προσοχή μας σε κάτι διαφορετικό. Όμως το σημείο έχει σημασία, ενώ τα πράγματα όχι.

Αναπαράσταση είναι η ικανότητά μας να σκεπτόμαστε ή να κάνουμε υποθέσεις για τον κόσμο. Ένα μαθηματικό αντικείμενο αναφέρει ο Otte, όπως ο αριθμός και η συνάρτηση δεν υπάρχει ανεξάρτητα από την ολότητα των πιθανών αναπαραστάσεών του. Τα σημεία και οι αναπαραστάσεις εδραιώνουν την διαλεκτική της ταυτοποίησης από την μια. Αλλά και της μεταφοράς από την άλλη που είναι απαραίτητες για την μάθηση και την γνώση γενικότερα. Τα σημεία για να αποκτούν βέβαια σημασία πρέπει να είναι σε συσχέτιση με τα αντικείμενα, που αναφέρονται έτσι ώστε να λειτουργήσουν ως σημεία. Αλλά και τα αντικείμενα και οι σημασίες μπορούν επίσης να είναι σημεία (Επιστημολογίες για τη διδακτική των μαθηματικών, Π. Σπύρου, 2010).

[5Π] Τα στοιχεία της Γεωμετρίας του Legendre εκδόθηκαν για πρώτη φορά το 1794 και απετέλεσαν το κατ' εξοχή σχολικό εγχειρίδιο πολλών χωρών (Ελλάδας, Ιταλίας) για πολλές δεκαετίες (18ο, 19ο και 20ο αιώνα). Οι διαφορές που έχει με τη γεωμετρία του Ευκλείδη είναι οι εξής:

- ο Ο Ευκλείδης συλλογίζεται πάντοτε με σχήματα γνωστής κατασκευής και εκθέτει ανάμεικτα προβλήματα και θεωρήματα ενώ ο Legendre ασχολείται με την αντίστροφη πορεία.
- ο Ο Ευκλείδης δεν διαχωρίζει τα σχήματα σε «ίσα» και «συμμετρικά» ενώ ο Legendre είναι ο πρώτος που καθιερώνει αυτό τον διαχωρισμό.
- ο Ο Legendre διαπραγματεύεται πληρέστερα τη στερεομετρία. Σ' αυτόν οφείλεται η κοινή κάθετη δύο ασυμβάτων ευθειών, όπως και πορίσματα για τα θεωρήματα του Euler για τα πολύεδρα.
- ο Ο Legendre γράφει σε πιο απλό στίλ και απομακρύνεται έτσι από έτσι από το βαρύ ύφος του Ευκλείδη που απευθυνόταν σε σοφούς της εποχής του. Ο Legendre εισάγει σύμβολα από κείμενα γεωμετρίας και διευκολύνει την ανάγνωσή τους.

Η γεωμετρία του Legendre επεκράτησε και στην Μέση Εκπαίδευση της Ελλάδας με τέσσερις διαφορετικές μεταφράσεις της. Η πρώτη έγινε το 1829 από τον Ι. Καρανδηνό στη Κέρκυρα και επανεκδόθηκε το 1840 στην Αθήνα. Η δεύτερη έγινε από τον Γ. Ζωχίο το 1857 και επανεκδόθηκε το 1862. Η Τρίτη έγινε από τον Χ. Βάφα το 1860 στην Αθήνα. Η τέταρτη έγινε από τον Α. Δαμασκηνό το 1862 στην ΑΘΗΝΑ και επανεκδόθηκε άλλες τέσσερις φορές.

[6Π] Αξιοματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κατά Hilbert.

Ο Hilbert θεωρεί ως πρωταρχικές έννοιες του συστήματος τις ακόλουθες πρωταρχικές έννοιες: σημείο, ευθεία (γραμμή), επίπεδο, «κείται (βρίσκεται) επί», «μεταξύ», «ισότητα/σύμπτωση. Δημιούργησε τις ακόλουθες πέντε ομάδες αξιωμάτων:

I. Τα αξιώματα σύνδεσης (7). Συνδέουν τις απροσδιόριστες έννοιες σημείο, ευθεία, και επίπεδο, δηλαδή καθορίζουν τις μεταξύ τους σχέσεις.

II. Τα αξιώματα διάταξης (4). Καθορίζουν την έννοια του μεταξύ, μέσω της οποίας μπορεί να εισαχθεί μια έννοια διάταξης ανάμεσα στα σημεία μιας ευθείας, ενός επιπέδου ή του χώρου.

III. Τα αξιώματα σύμπτωσης (5). Ορίζουν την έννοια της ισότητας και κατ' επέκταση την έννοια της κίνησης, οπότε αξιωματοποιείται η διαδικασία της μετακίνησης και υπέρθεσης που χρησιμοποιείται στα «Στοιχεία».

IV. Το αξίωμα της παραλληλίας (1). Το αξίωμα του Ευκλείδη με την ισοδύναμη διατύπωση του Playfer (Από ένα σημείο P εκτός ευθείας ε άγεται στο επίπεδο που ορίζεται από το P και την ε μια μοναδική ευθεία k παράλληλη προς την ε).

V. Τα αξιώματα συνέχειας (2).

Με τα παραπάνω αξιώματα η διαίσθηση και η παρατήρηση εξαφανίζονται γιατί το αξιωματικό σύστημα του Hilbert είναι διατυπωμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην αναφέρεται στον κόσμο της συνήθους εμπειρίας, προς την οποία είναι περισσότερο προσανατολισμένο το σύστημα του Ευκλείδη. Ο Hilbert είπε ότι σε μια κατάλληλη αξιωματοποίηση της γεωμετρίας θα μπορούσε κανείς να θεωρεί «αντί των σημείων, ευθειών, γραμμών και επιπέδων τραπέζια, καρέκλες και ποτήρια μπύρας. ...Σκεφτόμαστε τα σημεία, τις ευθείες και τα επίπεδα σαν να έχουν κάποιες αμοιβαίες σχέσεις τις οποίες υποδηλώνουμε μέσω λέξεων όπως «κείμαι», «μεταξύ», «παράλληλος», «ισοδύναμος», «ίσος», «συνεχής» κλπ.. Η ολοκληρωμένη περιγραφή των σχέσεων απορρέει ως συνέπεια των αξιωμάτων της γεωμετρίας» (Hilbert, 1935: 388-429).

[7Π] Μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες: Η έρευνα του αξιώματος των παραλλήλων ευθειών συνέβαλλε στην εμφάνισή τους.

Η άρνηση του 5^{ου} αξιώματος της παραλληλίας μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

1) Δεχόμαστε ότι από σημείο εκτός ευθείας άγονται δύο ή και περισσότερες ευθείες παράλληλες προς τη δοθείσα.

2) Αρνούμαστε εξ ολοκλήρου την ύπαρξη της παραλληλίας ευθειών.

Η άρνηση αυτή οδηγεί στη δημιουργία των λεγόμενων μη Ευκλειδείων Γεωμετριών. Ακριβέστερα η πρώτη περίπτωση οδηγεί στην Υπερβολική Γεωμετρία ενώ η δεύτερη περίπτωση στην ελλειπτική Γεωμετρία περίπτωση.

[8Π] Για την ισομετρία με τη μορφή $f(z) = az + b$, $\forall z \in \mathbb{C}$, γνωρίζουμε ότι: Εάν $z = 1$ είναι μετατόπιση στο επίπεδο κατά διάνυσμα $c \in \mathbb{C}$. Εάν $z \neq 1$, τότε η f διατηρεί σταθερό σημείο, το $p = \frac{b}{1-a} \in \mathbb{C}$ και αντιπροσωπεύει στροφή γύρω από το p κατά γωνία θ .

[9Π] Αφφινική ομάδα (affine group): Συγγραμμικότητα μιας αφφινικής γεωμετρίας λέγεται κάθε ένα προς ένα απεικόνιση του συνόλου των σημείων επί του εαυτού του μέσω της οποίας μεταφέρονται ευθείες σε ευθείες. Αποδεικνύεται ότι για κάθε αφφινική γεωμετρία, οι συγγραμμικότητες αποτελούν ομάδα, που ονομάζεται αφφινική ομάδα, με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων.

[10Π] Η γενική γραμμική ομάδα (general linear group)

$GL(n, F) = \{A \in M_n \times_n(F) / \det A \neq 0\}$

Όπου $F = \mathbb{R}$ ή $F = \mathbb{C}$. Η ονομασία της γενικής γραμμικής ομάδας $GL(n, \mathbb{R})$ οφείλεται στο γεγονός ότι κάθε $A \in GL(n, \mathbb{R})$ αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει σημεία σε γενική θέση στον $\mathbb{R}^n$ σε σημεία σε γενική θέση στον $\mathbb{R}^n$.

[11Π] ΠΡΟΤΑΣΗ

Εάν $f(z) = \zeta z + c$, $\forall z \in \mathbb{C}$ με $\zeta = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \neq 1$, τότε

A) Το $p = \frac{c}{1-\zeta} \in \mathbb{C}$, είναι σταθερό σημείο της f , δηλαδή ισχύει

$$f(p) = p$$

B) Ισχύει $f(z) - p = \zeta(z-p)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ και η f όπως ορίστηκε αντιπροσωπεύει στροφή του $z \in \mathbb{C}$ γύρω από το $p \in \mathbb{C}$ κατά γωνία θ .

Απόδειξη

A) $f(p) = \zeta p + c = \zeta \cdot \frac{c}{1-\zeta} + c = p$. Άρα $f(p) = p$, δηλαδή η f διατηρεί το p .

B) Είναι: $f(z) - p = \zeta(z-p) \Leftrightarrow \zeta z + c - p = \zeta z - \zeta p \Leftrightarrow p = \frac{c}{1-\zeta}$ το οποίο και ισχύει, άρα ισχύει και η αρχική μας υπόθεση. Γνωρίζουμε όμως ότι το $z - p$ αντιπροσωπεύει διάνυσμα με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών z , p και κατεύθυνση από την εικόνα του p προς την εικόνα του z . Επίσης το $f(z) - p$ αντιπροσωπεύει διάνυσμα με κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $f(z)$, p και κατεύθυνση από την εικόνα του p προς την εικόνα του $f(z)$. Τέλος το $\zeta = e^{i\theta}$ προκαλεί περιστροφή κατά γωνία θ στο διάνυσμα που πολλαπλασιάζει. Άρα τα z , $f(z)$ ανήκουν σε κύκλο κέντρου p και ακτίνας $|z - p|$. Άρα το $f(z)$ αντιπροσωπεύει τη στροφή του $z \in \mathbb{C}$ γύρω από το p κατά γωνία θ .

[12Π] Ανάκλαση ή κατοπτρισμός. Ανάκλαση ως προς μια ευθεία (ϵ) του επιπέδου (συμβολίζουμε με S_ϵ) είναι η απεικόνιση, που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο A του επιπέδου το συμμετρικό του A' ως προς την ευθεία αυτή.

[13Π] ΠΡΟΤΑΣΗ. Ναδειχθεί ότι η στροφή στο επίπεδο $\mathbb{C}$ γύρω από ένα σημείο Σ κατά γωνία θ μπορεί να επιτευχθεί μέσω δύο διαδοχικών κατοπτρισμών ως προς ευθείες που διέρχονται από το Σ και σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\theta/2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επιλέγουμε την πρώτη ευθεία ως προς την οποία γίνεται ο πρώτος κατοπτρισμός την ευθεία $\chi\chi'$ (πρόκειται για μια συζυγία).

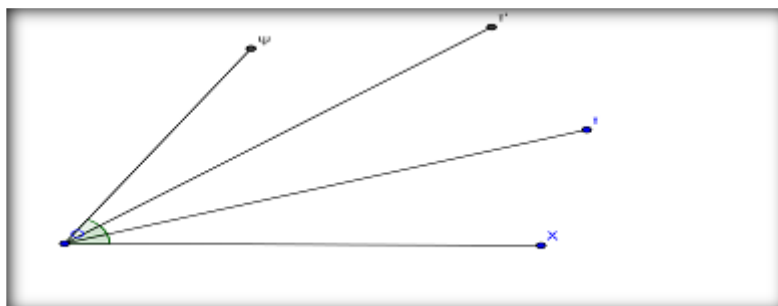
Έστω $f(z) = \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$ και $g(z) = \zeta \bar{z}$ με $\zeta = \cos\theta + i\sin\theta$, δηλαδή η δεύτερη απεικόνιση είναι κατοπτρισμός γύρω από την ευθεία με κλίση $\tan \theta/2$ που διέρχεται από το O . Τότε $g(f(z)) = \zeta z$, η οποία έχει σταθερό σημείο το O και αντιπροσωπεύει στροφή του επιπέδου $\mathbb{C}$ κατά γωνία θ γύρω από το O .

[14Π] Παραγωγικός, Επαγωγικός και Απαγωγικός τρόπος σκέψης. Παραγωγικός(Deduction): Το «β» συνάγεται από το «α» ως τυπική λογική συνέπειά του αλλά αν «α» αληθές τότε υποχρεωτικά και «β» αληθές.

Επαγωγικός(Induction): Το β συνάγεται από το α , όχι ως αναγκαστική συνέπειά του αλλά το α είναι καλή αιτία για το β , δεν το εξασφαλίζει απαραίτητα.

Απαγωγικός (Abduction): Το «α» συνάγεται ως η καλύτερη μεταξύ άλλων, εξήγηση για το «β» - τυπικά ισοδύναμη με τη λογική πλάνη “Post hoc ergo propter hoc ”: κατόπιν τούτου, άρα εξ αιτίας τούτου.

[15Π] Ορισμός. Έστω γωνία $\chi\hat{O}\psi$. Ονομάζουμε **τριχοτόμο** προσκείμενη στη πλευρά Οχ, την εσωτερική ημιευθεία Οτ της $\chi\hat{O}\psi$ για την οποία ισχύει $\chi\hat{O}\tau = \frac{1}{3}\chi\hat{O}\psi$ (Σχήμα 45).



ΣΧΗΜΑ 47

Όμοια ορίζεται και η τριχοτόμος Οτ' που είναι προσκείμενη στην πλευρά Οψ.

Παρατήρηση: Κάθε γωνία έχει δύο τριχοτόμους ,μια προσκείμενη στην μια πλευρά της και μια προσκείμενη στην άλλη.

[16Π] Ένας αφφινικός μετασχηματισμός είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός συνοδευόμενος και από μια μετατόπιση

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + \delta x$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + \delta y$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + \delta z$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$$

$$r' = Ar + \delta \text{ με } \det A \neq 0$$

Ο αφφινικός μετασχηματισμός δεν διατηρεί όλα τα σχήματα, αλλά μόνο τις παραλληλίες μεταξύ των ευθειών καθώς και τους λόγους ευθυγράμμων τμημάτων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teacher's conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, 379-405.
- [2] Φτάνουν τα 4 χρώματα ,για όλους της χάρτες του κόσμου; Ανακτήθηκε από Posted by subZraw/ 24-11-2012, 22.02/Published in mind hacks.
<https://deltahacker.gr>ftanooun-4-chrom...>
- [3] Gilla Hanna- Hans Jahnke -Helmut Pulte. Explanation and Proof in Mathematics. Philosophical and Educational Perspectives.
- [4] Mara V. Martinez- Bettina Pedemonte. Relationship between inductive argumentation and deductive algebraic proof. Published on line 23 March 2014.
- [5] Ν. Κλαουδάτος. Σημειώσεις του μαθήματος Δ7: 1.Διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων. 2.Εισαγωγή στη θεωρία της διδασκαλίας. 2011
- [6] ΤΙ ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ. Η λέξη έχει τη ρίζα της ...
openeclass.panteion.gr/modules/document/file.php/TMC257/1.pdf · PDF αρχείο
- [7] Magnus Ahl (Proofs of certain theorem in geometry, pedagogical benefits from the use of complex numbers, 2007-No 17).
- [8] Πάρις Πάμφιλος. Γεωμετρικόν. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2016.
- [9] Kleiner, 1991. Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, 64(5), 291-314.
- [10] Λυγάτσικας Ζήνων. Επαναπροσδιορίζοντας το ρόλο της τεχνολογίας στη μαθηματική παιδεία αιχμής. Έρκυνα, Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών-Επιστημονικών θεμάτων. Τεύχος 1ο, 216-232, 2014
- [11] Stewart Shapiro (17-06-2016) ΣΚΕΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.
Ανακτήθηκε από
http://grmath4.phpnet.us/istoria/stewart_shapiro_skepsis_math/stewart_shapiro_skepsis_math.pdf
- [12] Ν.Μ. ΣΚΟΥΤΕΡΟΠΟΥΛΟΣ. Πλάτων .Πολιτεία. ΕΙΣ.ΣΗΜΕΙΩΜΑ-ΜΕΤΑΦΡΑΣΗ-ΕΡΜ.ΣΗΜΕΙΩΜΑΤΑ.
- [13] Julia Annas. Aristotle's Metaphysics: Books M and N, 1976.
- [14] Αγγελής Ν. (2008). Η Θεωρία της Γνώσης κατά τον Αριστοτέλη. Ανακτήθηκε από <http://www.antifono.gr/portal/κατηγορίες/φιλοσοφία-επιστημολογία/άρθρα/>
- [15] Θωμαΐδης Γ., Πετράκης Γ., Τουλουμής Κ., Σταφυλίδου Μ. (2006). Γλώσσα, Ιστορία και Ευκλείδεια Γεωμετρία. Εκδόσεις: Πανεπιστημίου Μακεδονίας.
- [16] Kidron Ivy, and Tommy Dreyfus, (2014). "Proof image". *Educational Studies in Mathematics* 87.3: 297-321.
- [17] Lewis C. I. (1990). *Mind and the world-order: Outline of a theory of knowledge*. Courier Corporation.
- [18] Tall D.,Yevdokimov O., Koichu B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. *Journal of Humanistic Mathematics*, (1), 2-32 (2012).
- [19] Longo, G. (2012) Theorems as constructive visions. In *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 51 - 66). Springer Netherlands.

- [20] Pierce, C. S., On the algebra of logic: a contribution to the philosophy of notation, 1885, quotation in Pierce, *Écrits sur le signe*, Éditions du Seuil, Paris, p.146.
- [21] Αντώνης Μ. Σταμπουλής. Σχεδίαση και Υλοποίηση Γλώσσας Υψηλού επιπέδου για Προγραμματισμό με Αποδείξεις. Διπλωματική εργασία..ΕΜ.Π. 7-7-2006.
- [22] Delvin K.(2010) What is Experimental Mathematics? Ed .Mircea Polici,pp.32-36.
- [23] Ekhad, S.B. and Zeilberg, D.(1996), The number of solutions of $X^2=0$ in triangle matrices over $GF(q)$, Electronic Journal of Combinatorics 3 (R^2), 1-2.
- [24] Feit, W. Thompson, John G.,(1962) “A solvability criterion for finite groups and some consequences” Proc,Nat.Acad,Sci.48 (6).
- [25] Gonthier, G. (2008). Formal Proof- The four Color. Ανακτήθηκε από <http://www.ams.org/notices/200811/tx081101382p.pdf>
- [26] Σημειώσεις από τη διδακτική 1, ΕΚΠΑ, Γιώργος Ψυχάρης.
- [27] Αναστασία Δ Λύρη. Διπλωματική εργασία. Μαθηματική απόδειξη-Επίλυση προβλήματος.
- [28] B.L. Van Der Vaerden, Η ΑΦΥΠΝΙΣΗ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ.ΑΠΟΔΟΣΗ ΣΤΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ –ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ :ΓΙΑΝΝΗΣ ΧΡΙΣΤΑΝΙΔΗΣ
- [29] Μαριάννα Τζεκάκη. Σύγχρονα ΘΕΜΑΤΑ ΔτΜ ,Γεωμετρία, εαρ.2016. Ανακτήθηκε από <http://eclass.uowm.gr>>ELED271 (4/7/2016).
- [30] Μαθαίνοντας Γεωμετρία με το THE GEOMETER’S SKETCHPAD Έκδοση 4 Βιβλίο Μαθητή, Key Curriculum Press. Ανακτήθηκε από users.sch.gr>Sketchpad _Student
- [31] Evelyn Barbin: Evolving Geometric Proofs in the Seventeenth Century: From Icons to Symbols. Από G.Hanna et al. (eds.), Explanation and proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives, Chapter 16.
- [32] Π. Σπύρου .Επιστημολογίες για την διδακτική των μαθηματικών, 2010.
- [33] Euclid Elements, translate by Heath, vol 2, second edition, Dover, pp. 318-319.
- [34] Ευτύχης Παπαδοπετράκης. Η απόδειξη στον Ελληνικό Μαθηματικό Λόγο, Πανεπιστήμιο Πατρών, 1991.
- [35] Ε. Βασιλείου: Θέματα Γεωμετρίας, Σημειώσεις για το ΠΜΣ Διδακτικής, Αθήνα 2015.
- [36] Rene Thom. Modern Mathematics: Does it Exist? Cambridge University Press, 1973.
- [37] H. Poincare. *Dernièriers Pensées*, Flammarion, Paris, 1913.
- [38] Thom R. Μοντέρνα μαθηματικά Ένα εκπαιδευτικό και φιλοσοφικό λάθος. Μαθηματική επιθεώρηση , τεύχος 21, σελ. 15-33(1981).
- [39] Quadling D. Algebra, Analysis, Geometry. Περιέχεται στο R.Morris [ed], Studies in Mathematics education, vol 4, Paris: Unesco 1985
- [40] Θωμαΐδης & Πούλος, Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, 2000.
- [41] Μπ. Τουμάσης. Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, 2000.
- [42] Pierce C.(1955) «Logic as Semeiotic: the theory of signs». Στο Κ. Παπαγιώργης (επιμέλεια και μετάφραση)(1981) Κείμενα Σημειολογίας ,εκδόσεις Νεφέλη.
- [43] Hielbert David. The Foundations of Geometry. The open Court Publishing Company, La Salle, Translated from 2nd German edition, 1950.
- [44] David Hilbert,Θεμέλια της Γεωμετρίας. Μετάφραση-Πρόλογος- Εισαγωγή από την 7^η γερμανική έκδοση (Leipzig 1930), Στρατής Παπαδόπουλος, Εκδόσεις Τροχαλία 1995.
- [45] Arnould A (1667), *Nouveaux élément de géométrie*. Paris: Savreux.

- [46] Arnould A., & Nicole, P.(1662, reissued 1965). *La logique ou l'art de penser*. Paris: PUF.
- [47] Barbin E. The meaning of mathematical proof. In J. M. Anthony (Ed). *Eves circles*. The Mathematical Association of America, 34, 41-52.
- [48] Descartes R. (1637). *La Géométrie*. Reprinted in facsimile with English translation by D.E Smith, & M.L>Latham (1954) as *The Geometry of Descartes*. New York: Dover.
- [49] Fischbein E. (1993).The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139-162.
- [50] Lamy B. (1695). *Les éléments de géométrie.ou de l'etendue,corps*, 2nd edn. Paris: Praland.
- [51] Lamy B. (1731) . *Géométrie.ou de la mesure du corps*, 5nd edn. Paris: Niom.
- [52] Pierce C. S. (1931-1958).*Collected Papers of Charles Sanders Pierce*,8 volumes. Cambridge: Harvard University Press.
- [53] Pierce C. S.(1976).*The new elements of mathematics*, 4 volumes. La Hague: Mouton Publishes.
- [54] Pierce, C. S (1992-1998). *The essential Pierce, Selected Philosophical Writings*, Volumes. Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press.
- [55] Pierce, C.S (1978). *Écris sur le Signe*.Paris: Éditions du Seuil.
- [56] Ευκλείδεια Γεωμετρία, Βιβλίο του καθηγητή Α και Β Λυκείου. Θωμαΐδης Ι. et al.O.E.Δ.B.
- [57] Βούργιας Δ. Χ., Πέσκιας, Α. & Βούργια Σ., (2003). Η ικανότητα αντιληπτικής σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων. Στου Γαγάτση Α. & Ηλία Ι. (2003) (επιμ.), *Οι Αναπαραστάσεις και τα Γεωμετρικά Μοντέλα στη Μάθηση των Μαθηματικών* Λευκωσία: Εκδόσεις Intercollege.
- [58] Γαγάτση, Α. & Ηλία, Ι., (2003). *Οι Αναπαραστάσεις και τα Γεωμετρικά Μοντέλα στη Μάθηση των Μαθηματικών*. Λευκωσία: Εκδόσεις Intercollege.
- [59] Fischbein, E. & Mariotti, M.A. (1997). Defining in classroom activities. *Educational studies in Mathematics*.34: 219- 248, 1997. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- [60] Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts *Educational Studies in Mathematic*, 24(2), 139-62.
- [61] Fischbein, E. (1999), Intuitions and schemata in mathematical reasoning, *Educational Studies in Mathematics*, 38, 11-50.
- [62] Kuzniak A. & Rauscher, JC. (2004). Processus de formation de Professeurs d' Ecole et Anamnèse géométrique. In *Actes du XXXeme colloque COPIRELEM*, pp 231-248 IREM de Marseille.
- [63] Αθανάσιος Γαγάτσης & Παναγιώτα Καλογήρου. Ανάπτυξη της χωρικής ικανότητας και της αντίληψης του γεωμετρικού σχήματος. Ερευνητικό πρόγραμμα- Πανεπιστήμιο Κύπρου, 2013.
- [64] Duval R, *Geometrical Pictures: kind of representation and specific processing's*. Strasbourg U.L.P.
- [65] Duval R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century* (pp. 37- 66. Dordrecht: Kluwer Academic.
- [66] Duval R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer- Verlag.

- [67] Duval R. (1999). Representation, vision and Visualization: Cognitive Functions in mathematical Thinking. Basic issues for learning, Retrieved from ERIC ED 466 379.
- [68] Αθ. Γαγάτσης & Παρασκευή Μιχαήλ. Σημειώσεις από το μάθημα Διδακτική της γεωμετρίας. Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών, ΕΚΠΑ, 2016.
- [69] Κεϊσόγλου Στέφανος. Θέματα διδακτικής των μαθηματικών: Από τη θεωρία στη πράξη. Εκδόσεις Μπόνια.
- [70] Μ. Κορδάκη, Ο υπολογιστής ως εργαλείο μάθησης, Κεφάλαιο 7 Ανακτήθηκε από [de.teikav.edu.gr> dinfo pdf> chapter 7.21/7/2016](http://de.teikav.edu.gr/dinfo/pdf/chapter%207.21/7/2016)
- [71] Alain Connes. A New Proof of Morley's Theorem, IHES, 1998, pp. 43-46
- [72] Newsletter European Mathematical Society, December 2004, Issue 54
- [73] Morley's Theorem, Alain Connes's Proof, March 3. 2009. Ανακτήθηκε από <https://mathematicalgarden.wordpress.com/2009/03/03/morleys-theorem-alain-conness-proof/?blogsub=confirming#subscribe-blog>
- [74] Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί, Νο 19-Απρίλιος 2003, Εκδόσεις Ζήτη.
- [75] Azzarello .Abduction and conjecturing in Mathematics(1998).
- [76] Μ. Γ. Μαραγκάκη. Γεωμετρικά Θέματα. Αθήνα 1978.
- [77] Cut the Knot, Morley's Miracle.Ανακτήθηκε από <http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml>
- [78] Spiridon Kuruklis Trisectors like Bisectors with equilaterals instead of Points (CUBO A Mathematical Journal Vol, 16, No 01, (71-110). June 2014). Ανακτήθηκε από www.scielo.cl/pdf/cubo/v16n2/art05.pdf 7-06-2016
- [79] Λάκκης Κ, Άλγεβρα. Θεσσαλονίκη (1974).
- [80] Μπρίκας Μ. Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας. Αθήναι (1970).
- [81] Παπασταυρίδης Σ. Γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. Μαθηματική Επιθεώρηση 27, σς. 1-34 (1984).
- [82] Ε. Ράπτη. Σημειώσεις Άλγεβρας, , ΠΜΣ, ΕΚΠΑ. 2015.
- [83] Θωμαΐδης, Ξένος, Παντελίδης, Πούλος, Στάμου. Ευκλείδεια Γεωμετρία Α και Β Ενιαίου Λυκείου Αθήνα 1999.
- [84] Θωμαΐδης, Ξένος, Παντελίδης, Πούλος, Στάμου. Ευκλείδεια Γεωμετρία. Βιβλίο του καθηγητή. Αθήνα 1999.
- [85]http://photodentro.edu.gr/photodentro/GSP_theorima_Morley_pidx0030718/GSP_theorima_Morley_odigies_kathigiti.pdf
- [86] John B. Fraleigh. Εισαγωγή στην άλγεβρα. Μετάφραση Απόστολος Γιαννόπουλος. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.
- [87] Σανιδάς Αλέξανδρος. Διπλωματική εργασία: Οι ισομετρίες των Ευκλείδειων χώρων: R , R^2 , R^3 . Επιβλέπων Καθηγητής: Ράπτης Ευάγγελος.
- [88] David Tall. Advanced Mathematical Thinking. Matematics Education .Library kluwer.Academic Publishers.
- [89] Four Colors Suffice: How the Map Problem was Solved-Robin J. Wilson
- [90] Edmund Housserl. Η έννοια της διαίσθησης. Στο International Review of Philosophy 2003/2 (No 224).
- [91] J Hintikka. The Harvard review of philosophy. Wittgestein. Ανακτήθηκε από www.hcs.harvard.edu/hrp/issues/2003/Hintikka.pdf
- [92] Ευάγγελου Σ. Σταμάτη. Ευκλείδου Γεωμετρία, τόμος II, 1953.
- [93] Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης. Τεύχος 4: Κλάδος ΠΕΟ3.EAITY, Πάτρα 2010.

[94] Pierce, C. S., On the algebra of logic: a contribution to the philosophy of notation, 1885, quotation in Pierce, *Écrits sur le signe*, Éditions du Seuil, Paris, p.146.