Κριτήρια των κβαντικών συσχετισμών για αυθαίρετες διμερείς καταστάσεις

Ιωάννης Λυρής, Α.Μ. 201517

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών,
Τμήμα Φυσικής,
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και στοιχειωδών σωματιδίων
2016

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, στόχος είναι η αναφορά στη θεμελίωση των μέτρων του entanglement και της κβαντικότητας των διμερών καταστάσεων, οι οποίες πλέον αποτελούν ένα ευρέως διαδεδομένο αντικείμενο έρευνας για πολλούς τομείς της σύγχρονης θεωρίας κβαντικής πληροφορίας. Για αυτόν το λόγο, θα εξετάσουμε τις μεθόδους κατασκευής κατάλληλων συναρτήσεων για την ποσοτικοποίηση των διαφόρων κβαντικών συσχετισμών, αλλά και τις δυσκολιές που προβάλλονται κατά τον υπολογισμό τους. Τέλος, θα εφαρμόσουμε κάποια από τα κριτήρια που θα κατασκευάσουμε, ώστε να υπολογίσουμε τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσονται οι διάφοροι κβαντικοί συσχετισμοί σε ένα ρεαλλιστικό σύστημα διμερούς κατάστασης σε θερμικό λουτρό, μέσω της οποίας μελέτης θα κατανοήσουμε βαθύτερα τον τρόπο με τον οποίο τα κριτήρια αυτά σχετίζονται μεταξύ τους.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικά εργαλεία της θεωρίας κβαντικής πληροφορίας

1.1 Ορισμός της αναπαράστασης μέσω τελεστών πυκνότητας

Γνωρίζοντας ότι κάθε κατάσταση του χώρου Hilbert μπορεί να αναπαρασταθεί ως άνυσμα $|\psi\rangle$, μπορούμε ισοδύναμα να αντιστοιχήσουμε σε αυτό τελεστή $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$, που περιέχει την ίδια ποσότητα πληροφορίας για την κατάσταση, αλλά ο οποίος πλέον δρα στο χώρο Hilbert της. Εάν μάλιστα μία κατάσταση είναι καθαρή, δηλαδή εάν τη γνωρίζουμε πλήρως (π.χ. το στοιχείο ενός συνόλου βάσεων), τότε για τον τελεστή ρ ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- Ο ρ είναι θετικά ορισμένος, άρα και ερμητιανός: $\langle\phi| \rho |\phi\rangle \geq 0 \; \forall |\phi\rangle \in H_d$
- $tr\rho = 1$
- $\rho^2 = \rho$, οπότε $tr\rho^2 = 1$

Το πλεονέκτημα όμως του συμβολισμού $\rho = |\psi\rangle \langle\psi|$, είναι ότι υποστηρίζει τη γενίκευση σε καταστάσεις που αποτελούν στατιστική μείξη καθαρών καταστάσεων, και τις οποίες ονομάζουμε μεικτές. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι μεικτές καταστάσεις μπορούν να αναπαρασταθούν στη μορφή:

$$\rho = \sum_i P_i \rho_i$$

όπου οι ρ_i είναι αυθαίρετες καθαρές καταστάσεις, και P_i το ποσοστό των καταστάσεων αυτών στη μεικτή κατάσταση.

Στην περίπτωση των μεικτών καταστάσεων, από τις τρεις ιδιότητες που αναφέραμε προηγουμένως για τις καθαρές καταστάσεις, μόνο οι δύο π΄ρωτες ισχύουν, αφού για κανονικοποιημένη κατάσταση $\rho = \sum_i P_i \rho_i$ με $\sum_i P_i = 1$ θα ισχύει $\sum_i {P_i}^2 < 1$, άρα και

$$tr\rho^2 < 1$$

Η ιδιότητα αυτή μας δίνει τη δυνατότητα να διαχωρίζουμε πρακτικά τις καθαρές από τις μεικτές καταστάσεις, με κριτήριο την τιμή του ίχνους των τετραγώνων των τελεστών πυκνότητάς τους.

Μία γενική ιδιότητα, που ισχύει και για τις καθαρές και για τις μεικτές καταστάσεις είναι η δυνατότητα να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή οποιουδήποτε τελεστή A που δρα στο χώρο που αυτές ορίζονται, μέσω της σχέσης:

$$< A >= \langle\psi| A |\psi\rangle = tr[\rho A]$$

Τους ίδιους ορισμούς και ιδιότητες μπορούμε να γενικεύσουμε με φυσικό τρόπο και σε καταστάσεις που ορίζονται σε γινόμενα χώρων Hilbert. Σε τέτοιες περιπτώσεις μία κατάσταση ορισμένη σε χώρο Hilbert $H_1 \otimes H_2 \otimes ... \otimes H_N$, διαστάσεων $dim_{H_1} \times dim_{H_2} \times ... \times dim_{H_N}$ είναι δυνατό να αναπαρασταθεί στη γενικότερη μορφή της ως

$$|\phi\rangle \langle\phi| = \sum_{i,j,...,N} P_{i,j,...,N} |i,j,...,N\rangle \langle i,j,...,N|$$

με τις καταστάσεις $\{|i,j,...,N\rangle \langle i,j,...,N|\}$ να οριζουν ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert $H_1 \otimes H_2 \otimes ... \otimes H_N$. Βλέπουμε ότι όπως και σε απλούς χώρους Hilbert μία κατάσταση θα είναι καθαρή αν και μόνο αν υπάρχει βάση τέτοια ώστε να έχουμε μόνο ένα μη μηδενικό $P_{i,j,...,N}$, αφού μόνο τότε το ίχνος του τετραγώνου της θα είναι ίσο με 1. Τέλος, αποδεικνύεται ότι η αναμενόμενη τιμή οποιουδήποτε τελεστή που ορίζεται σε αυτόν το σύνθετο χώρο Hilbert, όπως και προηγουμένως μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:
$< A >= \langle\psi| A |\psi\rangle = tr[\rho \cdot A]$.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να αναφέρουμε μία θεμελιώδη διαφορά των καθαρών με τις μεικτές καταστάσεις, η οποία είναι η δυνατότητα των μεικτών καταστάσεων να αναπαρασταθούν σε άπειρες ισοδύναμες βάσεις, αντίθετα από τις καθαρές καταστάσεις που έχουν μία μόνο δυνατή αναπαράσταση, η οποια είναι αποτέλεσμα της πλήρους βεβαιότητας που έχουμε σχετικά με αυτές.

Στην περίπτωση των πολυδιάστατων καταστάσεων σε χώρο $H_1 \otimes H_2 \otimes ... \otimes H_N$ υπάρχει μία ειδική περίπτωση καταστάσεων, οι οποίες μπορούν να γραφούν με τρόπο παρόμοιο με αυτόν των κλάσικών στατιστικών μειγμάτων, ως άθροισμα από κάταστάσεις γινόμενα καθαρών (γνωστών) καταστάσεων:

$$\rho^{AB...N} = \sum_{r=1}^{m} P_r {\rho_r}^A \otimes {\rho_r}^B \otimes ... \otimes {\rho_r}^N$$

όπου οι ${\rho_r}^i$ είναι οι r-οστές καταστάσεις, με $r = 1, 2, ..., m$, του i-οστού από τα συστήματα που δομούν τη μεικτή κατάσταση. Οι μεικτές αυτές καταστάσεις ορίζονται ως διαχωρίσιμες και υπάρχουν ορθοκανονικές βάσεις στους χώρους H_r, $\{|j_r\rangle\}$ τέτοιες ώστε

$$\rho^{AB...N} = \sum_{r=1}^{m} P_r |\alpha_r\rangle \langle\alpha_r| \otimes |\beta_r\rangle \langle\beta_r| \otimes ... \otimes |\nu_r\rangle \langle\nu_r|$$

Στην περίπτωση των καθαρών καταστάσεων η διαχωρισιμότητα φαίνεται στη μορφή τους όταν αυτές αποτελούν ένα τελεστικό γινόμενο ενός αριθμού καθαρών καταστάσεων ορισμένων σε μικρότερους χώρους Hilbert.

Η ιδιαιτερότητα των καταστάσεων αυτών είναι ότι οι καθαρές καταστάσεις που δομούν τα τελεστικά γινόμενα δεν είναι entangled μεταξύ τους[1], δηλαδή στο σύνολό τους δεν περιέχουν συσχετισμούς των υποσυστημάτων τους που να μην είναι δυνατό να αναπαραχθούν ή να προσομοιωθούν σε κλασικά συστήματα. Ένα παράδειγμα entangled κατάστασης είναι η $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, που αποτελεί μία από τις τέσσερις καταστάσεις του Bell, οι οποίες έχουν το μέγιστο ποσοστό entanglement με αποτέλεσμα να θεωρούνται maximally entangled.

Βλέπουμε λοιπόν ότι εάν προσπαθήσουμε να ορίσουμε κάποια ποσότητα για την ποσοτικοποίηση του entanglement, τότε θα πρέπει ο γεωμετρικός τόπος των καταστάσεων που την ελαχιστοποιούν να αποτελείται από το σύνολο όλων των διαχωρίσιμων καταστάσεων. Η απαίτηση αυτή θα αποτελέσει μία από τις βασικές προυποθέσεις των κριτηρίων του entanglement, στα οποία θα αναφερθούμε στα πλαίσια αυτής της εργασίας.

[1]είναι δυνατό όμως οι ίδιες οι καθαρές καταστάσεις να περιέχουν entanglement, αλλά στην περίπτωση της διαχωρησιμότητας των μεικτών καταστάσεων δε μας ενδιαφέρουν οι εσωτερικοί συσχετισμοί. Αυτό μπορούμε να το δούμε από το γεγονός ότι εάν η βάση ενός χώρου εξεφραστεί ως προς μία διαφορετική βάση του ίδιου χώρου, τότε αυτή παρουσιάζει entanglement, το οποίο όμως δεν αλλάζει το ότι στο σύνολο της τη θεωρούμε καθαρή κατάσταση

1.2 Ορισμός της εντροπίας Von-Neumann και των ιδιοτήτων της

Εάν αναφερθούμε σε μία κατάσταση εξεφρασμένη σε μία ορθοκανονική βάση $\{|d_i\rangle\}$ του χώρου Hilbert στην οποία διαγωνοποιείται:

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} P_i \left|d_i\right\rangle \left\langle d_i\right|$$

τότε σε αντιστοιχία με τα κλασσικά στατιστικά μείγματα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εντροπία της κατάστασης είναι ίση με την εντροπία του Shannon ως

$$H(P_i) = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 P_i$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η ποσότητα αυτή με τη χρήση του φορμαλισμού των τελεστών πυκνότητας μπορεί να γραφεί ως

$$S(\rho) = -tr[\rho \log_2 \rho] \tag{1.1}$$

Η νέα αυτή συνάρτηση, η οποία στην ειδική περίπτωση των διαγονιοποιημένων καταστάσεων ταυτίζεται με την εντροπία του Shannon, μπορούμε να δούμε ότι ικανοποιεί όλες τις επιθυμητές ιδιότητες που θα απαιτούσαμε από ένα μέτρο τις εντροπίας, με αποτέλεσμα να την ορίζουμε ως την εντροπία των κβαντικών συστημάτων ή ως εντροπία του Von-Neumann. Οι ιδιότητες που καθιστούν την εντροπία του Von-Neumann ως καλό μέτρο της αβεβαιότητας μας σχετικά με μία κατάσταση είναι οι εξής:

- Για μία καθαρή κατάσταση $\rho = \left|\psi\right\rangle \left\langle\psi\right|$ έχει τιμή $S(\rho) = 0$
- Είναι μη αρνητική, και αποκτά τη μέγιστη τιμή $S(\rho) = \log_2(d)$ για την maximally mixed κατάσταση $\rho = \frac{1}{d}1$ σε χώρο Hilbert d διαστάσεων, όπου 1 ο μοναδιαίος πίνακας στο συγκεκριμένο χώρο
- Αποτελεί concave συνάρτηση των ορισμάτων της:

  $$S(P_1\rho_1 + P_2\rho_2 + ... + P_r\rho_r) \geq P_1S(\rho_1) + P_2S(\rho_2) + ... + P_rS(\rho_r)$$

  όπου $\sum_j P_j = 1$ και $P_j > 0$. Η ιδιότητα αυτή υποδηλώνει την απώλεια πληροφορίας που θα είχαμε εάν αντί για μία πλήρη κατάσταση μελετήσουμε ανεξάρτητα κάθε συνιστώσα της, όπου $\rho = \sum_j P_j\rho_j$.

Ακόμα δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες που προκύπτουν εάν μελετήσουμε ένα σύστημα που αποτελείται από δύο υποσυστήματα (bipartite states) είναι η *subadditivity* της εντροπίας,

$$S(A,B) \leq S(A) + S(B) \tag{1.2}$$

και η *triangle inequality*[2]

$$S(A,B) \geq |S(A) - S(B)| \tag{1.3}$$

Οι ίδιες ιδιότητες μπορούν να γενικευτούν και στην περίπτωση μίας κατάστασης που αποτελείται από τρία υποσυστήματα A, B και C, όπου η αντίστοιχη μελέτη μας οδηγεί στις δύο ισοδύναμες μορφές της *strong subbaditivity* της εντροπίας:

$$S(A) + S(B) \leq S(A,C) + S(B,C) \tag{1.4}$$

$$S(A,B,C) + S(B) \leq S(A,B) + S(B,C) \tag{1.5}$$

οι οποίες αποτελούν πολύ ισχυρά εργαλεία της quantum information theory.

[2] Η ιδιότητα αυτή διαχωρίζει την κβαντική εντροπία από την κλασική, αφού στην περίπτωση της εντροπίας του Shannon ισχύει $H(A,B) \geq \begin{cases} H(A) \\ H(B) \end{cases}$

1.3 Η εντροπία των υποσυστημάτων καθαρών καταστάσεων ορίζει το entanglement

Για τον υπολογισμό των $S(A)$ και $S(B)$ που παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, χρειάστηκε να μελετήσουμε κάθε υποσύστημα ανεξάρτητα. Αυτό γίνεται δυνατό ορίζοντας τους reduced density matrices $\rho^A = tr_B \rho^{AB}$ και $\rho^B = tr_A \rho^{AB}$, οι οποίοι κατασκευάζονται κάνοντας tracing out τους βαθμούς ελευθερίας του ενός απο τα δύο υποσυστήματα ώστε να μελετήσουμε μόνο το άλλο. Τότε οι εντροπίες των υποσυστημάτων ορίζονται ως

$$S(A) = -tr_A[\rho^A \log_2 \rho^A] \tag{1.6}$$

$$S(B) = -tr_B[\rho^B \log_2 \rho^B] \tag{1.7}$$

Από την triangle inequality και την απόκλισή της από την κλασική θεωρία πληροφορίας, βλέπουμε ότι μελετώντας το κάθε σύστημα ανεξάρτητα, προκαλούμε αύξηση στην αβεβαιότητα σχετικά με τη συνολική κατάσταση, η οποία γίνεται μέγιστη εάν αναφερόμαστε σε μία maximally entangled κατάσταση[3]. Μία τέτοια απώλεια πληροφορίας κατά την εφαρμογή του μερικού ίχνους είναι φυσιολογική, αφού δε λαμβάνεται υπόψην η φάση που συσχετίζει τις καταστάσεις, η οποία είναι δυνατό να περιέχει ακόμα και όλη την πληροφορία για μία κατάσταση.

Εάν λοιπόν αναφερόμαστε σε μία καθαρή κατάσταση (στην οποία έχουμε εξ ορισμού θεωρήσει $S(A, B) = 0$) η εύρεση των εντροπιών των δύο υποσυστημάτων αποτελεί ένα πολύ καλό κριτήριο σχετικά με τους μη κλασικούς συσχετισμούς που αυτή περιέχει. Εύκολα βλέπουμε ότι για μία product state η εντροπία των υποσυστημάτων θα είναι μηδενική, ενώ για maximally entangled καταστάσεις θα είναι μέγιστη. Μάλιστα, είναι αρκετός ο υπολογισμός της εντροπίας μόνο ενός από τα δύο υποσυστήματα όταν αναφερόμαστε σε καθαρές bipartite states, αφού όπως θα αποδείξουμε στη συνέχεια υπάρχει μία κοινή αναπαράσταση στην οποία διαγωνοποιούνται και οι δύο reduced density matrices, με αποτέλεσμα να βρίσκουμε κοινές ιδιοτιμές και για τους δύο.

Για να το δούμε αυτό μπορούμε αρχικά να θεωρήσουμε μία καθαρή κατάσταση ορισμένη σε χώρο Hilbert ${H_n}^A \otimes {H_m}^B$, γραμμένη στη μορφή:

[3]Για την Bell state $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$, η οποία αποτελεί στοιχείο στο χώρο βάσεων των Bell states (άρα και καθαρή κατάσταση), ισχύει εξ ορισμού $S(A, B) = 0$. Επειδή όμως $\rho^A = \rho^B = \frac{1}{2}\mathbb{1}$, βλέπουμε ότι η εντροπία των υποσυστημάτων είναι μέγιστη $S(A) = S(B) = 1$, με αποτέλεσμα να έχουμε πλήρη άγνοια για την κατάστασή τους, αφού όλη η πληροφορία περιεχόταν στη φάση, η οποία χάθηκε κατά την εφαρμογή του ίχνους.

$|\psi\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} |ij\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} |i\rangle \otimes |j\rangle$, όπου οι $\{|i\rangle\}$ και $\{|j\rangle\}$ αποτελούν ορθοκανονικές βάσεις στους χώρους ${H_n}^A$ και ${H_m}^B$ αντίστοιχα. Είναι δυνατό να ορίσουμε τις καταστάσεις $|\tilde{w_i}\rangle = \sum_j a_{ij} |j\rangle$ μέσω των οποίων η $|\psi\rangle$ αποκτά τη μορφή: $|\psi\rangle = \sum_{i,j} |i\rangle \otimes |\tilde{w_i}\rangle$ όπου θεωρούμε τις $|\tilde{w_i}\rangle$ κανονικοποιημένες ως $\langle \tilde{w_i} | \tilde{w_j} \rangle = \delta_{ij} P_j$, με $P_j \geq 1$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι αν αναζητούσαμε τη βάση για το υποσύστημα A στο οποίο διαγωνοποιείται ο reduced density matrix του, τότε είναι δυνατό να να κατασκευάσουμε για το υποσύστημα B βάση σχετική με αυτήν του συστήματος A, την $\{|w_i\rangle\}$, η οποία είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα και ισχύει:

$$|\psi\rangle \langle\psi| = \sum_i^k P_i |i\rangle \langle i| \otimes |w_i\rangle \langle w_i| \tag{1.8}$$

Ο αριθμός k είναι ίσος με τη μικρότερη από τις δύο διαστάσεις m, n των δύο χώρων Hilbert του γινομένου, με αποτέλεσμα να βλέπουμε ότι κάθε τιμή P_j για $j > k = \min\{m, n\}$ είναι ίση με μηδέν, και οι καταστάσεις που χαρακτηρίζονται από αυτήν την τιμή ορίζονται ως null states. Δείξαμε λοιπόν ότι στη γενικότερη περίπτωση μίας καθαρής κατάστασης είναι δυνατό να βρεθεί βάση $\{|i, w_i\rangle\}$ του σύνθετου χώρου Hilbert, στην οποία διαγωνοποιούνται και οι δύο reduced density matrices, με αποτέλεσμα να βλέπουμε ότι και οι δύο τους έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές P_i. Το γεγονός αυτό έχει τεράστια σημασία αφού οι εντροπίες $S(A)$ και $S(B)$ έχοντας εξάρτηση μόνο από τις ιδιοτιμές θα είναι ίσες, με αποτέλεσμα να μπορούμε να θεωρήσουμε μονοσήμαντα το μέγεθος:

$$E(\rho) = S(A) = S(B) \tag{1.9}$$

ως μέτρο του entanglement για καθαρές bipartite states το οποίο μάλιστα ονομάζουμε και ως entanglement.

Οι τιμές του entanglement κυμαίνονται όπως και της εντροπίας από μηδέν για product states, έως $\log d$ για maximally entantgled καθαρές καταστάσεις σε χώρο Hilbert δαστάσεων d. Το "entanglement" ανήκει σε μία ευρύτερη οικογένεια μέτρων του entanglement που θα μελετήσουμε σε βάθος, και τα οποία θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε για μεικτές καταστάσεις.

Κεφάλαιο 2

Το πρόβλημα της διαχωρισιμότητας

2.1 Χαρακτηριστικά των κριτηρίων διαχωρησιμότητας

Μελετώντας το entanglement των καθαρών καταστάσεων μπορούμε να διακρίνουμε κάποιες ιδιότητες οι οποίες είναι απαραίτητο να ικανοποιούνται από κάθε συνάρτηση που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο του entanglement. Οι πιο χαρακτηριστικές από αυτές είναι οι εξής:

- Για κάθε LOCC (local operation and classical communication) διαδικασία (π.χ. non-selective measurement) η ποσότητα αυτή θα πρέπει να μην αυξάνεται, εφόσον δεν είναι δυνατό να αυξήσουμε το entanglement μέσω τοπικών διαδικασιών. Η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει τα entanglement monotones.

- Μετά από LOCC διαδικασίες απαιτούμε λόγω φυσικής λογικής, η μέση τιμή της συνάρτησης για τις καταστάσεις ενός μείγματος μετά τη διαδικασία, να είναι μικρότερη ή ίση από την τιμή της αρχικής συνάρτησης, δηλαδή:
$$\sum_i P_i E({\rho_i}^{out}) \leq E(\rho^{in}) \tag{2.1}$$
όπου $\rho^{in} = \sum_i P_i {\rho_i}^{out}$, $P_i \geq 0$ και $\sum_i P_i = 1$.

- Subadditivity, δηλαδή η συνάρτηση για μία κατάσταση δύο υποσυστημάτων να μην είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των συναρτήσεων για τα δύο υποσυστήματα ανεξάρτητα:
$$E(\rho^{AB}) \leq E(\rho^A) + E(\rho^B) \tag{2.2}$$

- Convexity ή Concavity ως προς τα ορίσματά της, δηλαδή

$$E(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2) \leq \lambda E(\rho_1) + (1-\lambda)E(\rho_2) \tag{2.3}$$

  εάν η συνάρτηση $E(\rho)$ είναι *convex*, ή

$$E(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2) \geq \lambda E(\rho_1) + (1-\lambda)E(\rho_2) \tag{2.4}$$

  εάν η συνάρτηση $E(\rho)$ είναι *concave*, όπου $\lambda \in [0.1]$.

- $E(\rho) = 0$ εάν ο ρ αναφέρεται σε διαχωρίσιμη κατάσταση.

Με βάση αυτά τα χαρακτηριστικά, σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε κάποιες κατάλληλες συναρτήσεις για καθαρές και μεικτές bipartite states 2×2 συστημάτων, και θα προτείνουμε πιθανούς τρόπους γενίκευσής τους.

2.2 Κριτήρια για bipartite καθαρές καταστάσεις

2.2.1 "Entanglement" για καθαρές 2×2 καταστάσεις

Στην περίπτωση των καθαρών 2×2 καταστάσεων είναι δυνατό να βρεθεί μία ακριβής έκφραση για το entanglement, όπως το ορίσαμε μέσω της συνάρτησης 1.9, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε θεωρώντας κανονικοποιημένη καθαρή κατάσταση:

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0,0\rangle + \beta\,|0,1\rangle + \gamma\,|1,0\rangle + \delta\,|1,1\rangle$$

όπου $|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+|\delta|^2 = 1$, και $\{|i,j\rangle\}$ η βάση του χώρου Hilbert $H_2 \otimes H_2$.

Εάν υπολογίσουμε τον reduced density matrix για το σύστημα A τότε θα τον βρούμε ίσο με:

$$\begin{aligned} \rho^A = tr_B\,|\psi\rangle\langle\psi| &= (|\alpha|^2+|\beta|^2)\,|0\rangle\langle 0| + (\alpha\gamma^\star + \beta\delta^\star)\,|0\rangle\langle 1| + \\ &\quad +(\alpha^\star\gamma + \beta^\star\delta)\,|1\rangle\langle 0| + (|\gamma|^2+|\delta|^2)\,|1\rangle\langle 1| \end{aligned}$$

και λύνοντας την εξίσωση ιδιοτιμών του, μπορούμε να δούμε ότι αυτή μας δίνει:

$$det[\rho^A - \lambda 1] = 0 \Rightarrow$$

$$(|\alpha|^2 + |\beta|^2)(|\gamma|^2 + |\delta|^2) - \lambda(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2) +$$

$$+\lambda^2 - |\alpha|^2|\beta|^2 - |\gamma|^2|\delta|^2 - \alpha\gamma^\star\beta^\star\delta - \alpha^\star\gamma\beta\delta^\star = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda + (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha^\star\delta^\star - \beta^\star\gamma^\star) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 - \lambda + |\alpha\delta - \beta\gamma|^2 = 0$$

όπου εάν ορίσουμε ως concurrence την ποσότητα $C(|\psi\rangle\langle\psi|) = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|$ τότε βρίσκουμε ότι η εξίσωση $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4}C^2 = 0$ εχει λύσεις

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - C^2}}{2} \tag{2.5}$$

Η spectral decomposition του τελεστή ρ^A στη βάση που τον διαγωνοποιεί είναι λοιπόν:

$$\rho^{\mathbf{A}}{}_{\mathbf{diag}} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{1-C^2}}{2} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

και βρίσκουμε την εντροπία του υποσυστήματος A ίση με:

$$\begin{aligned} S(A) &= -tr[\rho^A \log \rho^A] = \\ &= -(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}) \log(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}) - (\frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2}) \log(\frac{1 - \sqrt{1 - C^2}}{2}) \end{aligned}$$

Τέλος, εάν ορίσουμε τη μεταβλητή $x = \frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}$, τότε βλέπουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε την εντροπία για αυθαίρετη 2×2 κατάσταση $|\psi\rangle\langle\psi|$ ως:

$$E(\psi) = h(x), \text{ όπου } h(x) = -x \log x - (1 - x) \log(1 - x)$$

$$\text{η binary entropy function, και } x = \tfrac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}. \tag{2.7}$$

Βλέπουμε ότι για την concurrence ισχύει $C \leq 1$, και μάλιστα ότι έχει ακριβώς τα ίδια όρια με το entanglement $E(|\psi\rangle\langle\psi|)$, δηλαδή 0 για product states και 1 για maximally entangled states. Επίσης, η $E(|\psi\rangle\langle\psi|)$ είναι γνησίως αύξουσα και convex συνάρτηση της C, με αποτέλεσμα λόγω της convexity να ισχύει:

$$E(\sum_i P_i C(\phi_i)) \leq \sum_i P_i E(C(\phi_i)) \tag{2.8}$$

Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι από τη μελέτη του entanglement για καθαρές καταστάσεις σε χώρο Hilbert 2×2, προέκυψε με φυσικό τρόπο μία νέα ποσότητα, η concurrence, η οποία είναι ευκολότερο να υπολογιστεί. Η ποσότητα αυτή όπως θα δούμε στη συνέχεια είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί ως μέτρο του entanglement και να γενικευθεί για bipartite συστήματα περισσότερων διαστάσεων.

2.2.2 Concurrence

Η Concurrence όπως υπολογίστηκε προηγουμένως είναι δυνατό να γραφεί για καθαρές bipartite states στην ισοδύναμη μορφή της ως:

$$C(\psi) = |\langle\psi^\star|\sigma_y \otimes \sigma_y |\psi\rangle|| = 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \tag{2.9}$$

όπου $\sigma_y \otimes \sigma_y$ το τελεστικό γινόμενο των πινάκων του Pauli $\sigma_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ που δρουν στα συστήματα A και B ανεξάρτητα, ενώ

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} \psi_{ij} |ij\rangle, \tag{2.10}$$

$$\langle\psi| = \sum_{ij} \psi^\star_{ij} \langle ij|, \tag{2.11}$$

$$\langle\psi^\star| = \sum_{ij} \psi_{ij} \langle ij| \tag{2.12}$$

με $\{|ij\rangle\}$ ορθοκανονική βάση στο χώρο ${H_2}^A \otimes {H_2}^B$.

Όμως, η γενίκευση της Concurrence σε bipartite καταστάσεις περισσότερων διαστάσεων δεν είναι δυνατό να γίνει με φυσικό τρόπο, αφού δεν υπάρχει κάποια ικανή και μοναδική γενίκευση του πίνακα σ_y σε παραπάνω διαστάσεις, οπότε η κατάλληλη μέθοδος θα ήταν να αναζητήσουμε συναρτήσεις παρόμοιας μορφής που να έχουν κάποιες απαραίτητες ιδιότητες. Στη βιβλιογραφία είναι δυνατό να βρεθούν δύο τέτοιες αποδεκτές συναρτήσεις, και οι δύο από τις οποίες ταυτίζονται με την αρχική concurrence που έχουμε ορίσει όταν αναφερόμαστε σε 2×2 συστήματα. Οι συναρτήσεις αυτές είναι οι εξής:

- Η Θ-Concurrence, η οποία ορίζεται ως $C_\theta(\psi) = |\langle\psi|\Theta|\psi\rangle|$ όπου Θ ένας αντι-γραμμικός τελεστής, τέτοιος ώστε να μηδενίζεται η ποσότητα για κάθε διαχωρίσιμη κατάσταση, και να είναι θετική για κάθε entangled κατάσταση. Το μειονέκτημα αυτής της γενίκευσης είναι ότι ακόμα και αν στις δύο διαστάσεις η Θ είναι μοναδική και ίση με $\Theta = \sigma_y \otimes \sigma_y C_\star$ (ο τελεστής $C_\star$ οδηγεί από την κατάσταση $|\psi\rangle$ στην $|\psi^\star\rangle$), σε περισσότερες διαστάσεις δεν είναι μοναδική, ενώ είναι δυνατό να μηδενίζεται για κάποιες entangled καταστάσεις, με αποτέλεσμα να μην αποτελεί πλήρες κριτήριο για κάθε bipartite κατάσταση.

- Η I-Concurrence, η οποία ορίζεται για καθαρή κατάσταση $|\psi\rangle$ ως:

  $$C_I(\psi) = \sqrt{\langle\psi|(I_1 \otimes I_2 |\psi\rangle\langle\psi|)|\psi\rangle} \tag{2.13}$$

  όπου I_1 και I_2 τελεστές που δρουν στους H_1 και H_2 αντίστοιχα. Οι τελεστές αυτοί είναι απαραίτητο να ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

1. $I_i H = (I_i H)^\dagger$ $\forall$ ερμητιανό τελεστή H, γεγονός που μας εξασφαλίζει την πραγματικότητα της ποσότητας κάτω από τη ρίζα.
2. $[I_i, U] = 0$ $\forall$ μοναδιακό τελεστή U, ώστε να εξασφαλίζεται η αναλλοιότητα της I-concurrence κάτω από μοναδιακούς μετασχηματισμούς.
3. $\langle\psi|(I_1 \otimes I_2 |\psi\rangle\langle\psi|)|\psi\rangle \geq 0$ $\forall\, |\psi\rangle$, όπου η ισότητα θέλουμε να ισχύει μόνο για τις διαχωρίσιμες καταστάσεις.

Οι τρεις αυτές ιδιότητες ερμητιανότητας, αναλλοιότητας και μη αρνητικότητας επιτυγχάνονται μόνο από τον υπερτελεστή $S_D = \nu_D(I - J)$, όπου $I{\cdot}A = tr(A){\cdot}\mathbf{1}$ και $J{\cdot}A = A$, όπου $\mathbf{1}$ ο μαναδιακός πίνακας[1]. Στην ειδική περίπτωση που θα μελετήσουμε ισχύει $tr\rho = 1$, άρα και $S_D(\rho) = 1 - \rho$, με αποτέλεσμα η δράση του υπερτελεστή να μεταφέρει τον τελεστή ρ σε ορθογώνιο ως προς αυτόν τελεστή, και να επιτρέπει αυθαίρετη επιλογή ολικής φάσης ν_D, την οποία για διευκόλυνση θα θεωρήσουμε ίση με 1.

Βλέποντας ότι από τους δύο δυνατούς τρόπους γενίκευσης της concurrence μόνο ο δεύτερος έχει μοναδική και καλώς ορισμένη έκφραση για κάθε bipartite καθαρή κατάσταση, είναι φυσιολογικό να χρησιμοποιήσουμε ως γενίκευση της concurrence την I-concurrence, την οποία πλέον θα ονομάζουμε και απλώς ως concurrence.

Με τη χρήση λοιπόν του υπερτελεστή $I(\rho) = 1 - \boldsymbol{\rho}$ μπορούμε να δούμε ότι η concurrence παίρνει τη μορφή:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C(\rho)} &= \sqrt{\langle\psi|([\boldsymbol{I^A} - \boldsymbol{J^A}]\otimes[\boldsymbol{I^B} - \boldsymbol{J^B}](\boldsymbol{\rho^{AB}}))|\psi\rangle} = \\
&= \sqrt{[\langle\boldsymbol{\psi}|[\boldsymbol{I^A}\otimes\boldsymbol{I^B} - \boldsymbol{I^A}\otimes\boldsymbol{J^B} - \boldsymbol{J^A}\otimes\boldsymbol{I^B} + \boldsymbol{J^A}\otimes\boldsymbol{J^B}](\boldsymbol{\rho^{AB}})|\boldsymbol{\psi}\rangle} = \\
&= \sqrt{\langle\boldsymbol{\psi}|[\mathbf{1^A}\otimes\mathbf{1^B} - \mathbf{1^A}\otimes(\boldsymbol{J^B}{\cdot}\boldsymbol{tr_A}\boldsymbol{\rho^{AB}}) - (\boldsymbol{J^A}{\cdot}\boldsymbol{tr_B}\boldsymbol{\rho^{AB}})\otimes\mathbf{1^B} + \boldsymbol{\rho^{AB}}]|\boldsymbol{\psi}\rangle}
\end{aligned}$$

όπου $(\boldsymbol{J^A}\otimes\boldsymbol{J^B})\boldsymbol{\rho^{AB}} = \boldsymbol{\rho^{AB}}$ αφού ο τελεστής $\boldsymbol{J^A}\otimes\boldsymbol{J^B}$ οδηγεί το κάθε υποσύστημα στον εαυτό του, με αποτέλεσμα να μη μεταφέρει την $\boldsymbol{\rho^{AB}}$ σε νέα κατάσταση. Άρα

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C(\rho)} &= \sqrt{\langle\boldsymbol{\psi}|[\mathbf{1^A}\otimes\mathbf{1^B} - \mathbf{1^A}\otimes\boldsymbol{\rho^B} - \boldsymbol{\rho^A}\otimes\mathbf{1^B} + \boldsymbol{\rho^{AB}}]|\boldsymbol{\psi}\rangle} = \\
&= \sqrt{\boldsymbol{tr}[\boldsymbol{\rho^{AB}}(\mathbf{1^A}\otimes\mathbf{1^B} - \mathbf{1^A}\otimes\boldsymbol{\rho^B} - \boldsymbol{\rho^A}\otimes\mathbf{1^B} + \boldsymbol{\rho^{AB}})]}
\end{aligned}$$

Για τους τέσσερις όρους κάτω από τη ρίζα βρίσκουμε:

- $\boldsymbol{tr}[\boldsymbol{\rho^{AB}}(\mathbf{1^A}\otimes\mathbf{1^B})] = \mathbf{1}$ για κανονικοποίηση $\langle\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}\rangle = \mathbf{1}$.

[1] ο υπερτελεστής αυτός μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία ως universal inversion superoperator

- $tr[\rho^{AB}(1^A \otimes \rho^B)] = tr[\sum_{ij} P_i P_j |i\rangle \langle j| \otimes |i\rangle \langle j| \cdot \sum_{kl} |k\rangle \langle k| \otimes P_l^2 |l\rangle \langle l|]$ όπου θεωρήσαμε $|\psi\rangle = \sum_i P_i |i\rangle \otimes |i\rangle$ την κατάσταση εξεφρασμένη στη βάση Schmidt στην οποία διαγωνοποιούνται και οι δύο reduced density matrices, και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \sum_{ij} P_i P_j |i\rangle \langle j| \otimes |i\rangle \langle j|$, $\rho^A = \sum_i P_i^2 |i\rangle \langle i|$, $\rho^B = \sum_i P_i^2 |i\rangle \langle i|$, και $\sum_i P_i^2 = 1$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} tr[\rho^{AB}(1^A \otimes \rho^B)] &= tr[\sum_{ij} P_i P_j^3 |i\rangle \langle j| \otimes |i\rangle \langle j|] = \\ &= \sum_{ij} [tr_A P_i |i\rangle \langle j|][tr_B P_j^3 |i\rangle \langle j|] = \\ &= tr_B[\sum_j P_j^4 |j\rangle \langle j|] = tr\rho_B^2 \end{aligned}$$

- $tr[\rho^{AB}(\rho^A \otimes 1^B)] = tr\rho_A^2$ με την ίδια μέθοδο που μας έδωσε τον προηγούμενο όρο

- $tr[\rho^{AB}\rho^{AB}] = 1$, αφού η ρ^{AB} αποτελεί καθαρή κατάσταση, για την οποία εξ ορισμού ισχύει $\rho^2 = \rho$, άρα και $tr\rho^2 = 1$.

Βρίσκουμε λοιπόν

$$C(\psi) = \sqrt{2 - tr\rho_A^2 - tr\rho_B^2} \tag{2.14}$$

Η σχέση αυτή είναι δυνατό να βρεθεί στη βιβλιογραφία και στη μορφή

$$C(\psi) = \sqrt{2|\langle\psi|\psi\rangle|^2 - tr\rho_A^2 - tr\rho_B^2} \tag{2.15}$$

στην οποία επιτρέπει τον υπολογισμό της concurrence ακόμα και σε περιπτώσεις όπου η $|\psi\rangle$ δεν είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα, ενώ παραμένει θετική αφού $tr\rho_A^2 \leq |\langle\psi|\psi\rangle|^2$ και $tr\rho_B^2 \leq |\langle\psi|\psi\rangle|^2$

Η μορφή αυτή μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω εάν θυμηθούμε ότι για καθαρές καταστάσεις οι ιδιοτιμές των reduced density matrices είναι ίδιες, με αποτέλεσμα να είναι ίσα τα ίχνη των τετραγώνων τους που εμφανίζονται κάτω από τη ρίζα. Μπορούμε να εκφράσουμε λοιπόν την concurrence σε μία πιο εύχρηστη μορφή ως:

$$C(\psi) = \sqrt{2(|\langle\psi|\psi\rangle|^2 - tr\rho_r^2)} \tag{2.16}$$

όπου ρ_r οποιοσδήποτε από τους δύο reduced density matrices των υποσυστημάτων.

Εάν μελετήσουμε τη συμπεριφορά της ποσότητας αυτής για καθαρές καταστάσεις σε χώρο $\mathbf{2 \times 2}$, τότε μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι για τη γενικότερη καθαρή κατάσταση $|\psi\rangle = \boldsymbol{\alpha}\,|\mathbf{0,0}\rangle + \boldsymbol{\beta}\,|\mathbf{0,1}\rangle + \boldsymbol{\gamma}\,|\mathbf{1,0}\rangle + \boldsymbol{\delta}\,|\mathbf{1,1}\rangle$ οπου $\langle\boldsymbol{\psi}|\boldsymbol{\psi}\rangle = \mathbf{1}$, ισχύει σύμφωνα με τη σχέση 2.6

$$\boldsymbol{tr\rho^{A^2}} = \boldsymbol{tr\rho_D^{A^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}(\mathbf{1+1}-\boldsymbol{C}^2+\mathbf{1+1}-\boldsymbol{C}^2) = \mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{C}^2}{\mathbf{2}}$$

άρα και

$$\boldsymbol{C_I(\psi)} = \sqrt{\mathbf{2}(\mathbf{1}-\mathbf{1}+\frac{\boldsymbol{C}^2}{\mathbf{2}})} = |\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{\alpha\delta}-\boldsymbol{\beta\gamma}|.$$

όπως είχαμε απαιτήσει.

Τέλος, η ελάχιστη τιμή της γενικευμένης concurrence είναι όπως έχουμε απαιτήσει μηδέν για product states, ενώ μέγιστη για maximally entangled καταστάσεις, με τιμή $\sqrt{\mathbf{2}(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{d}})}$, όπου $\boldsymbol{d}$ η ελάχιστη διάσταση μεταξύ των διαστάσεων των δύο υποσυστημάτων.

Σε αυτό το σημείο, έχοντας ορίσει αυστηρά κάποιες κατάλληλες συναρτήσεις για την ποσοτικοποίηση του entanglement των καθαρών καταστάσεων, θα προσπαθήσουμε μέσω των κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων να γενικεύσουμε τους ορισμούς τους και σε μεικτές καταστάσεις. Με αυτόν τον τρόπο θα μπορέσουμε να μελετήσουμε σε τι βαθμό είναι δυνατός ο αναλυτικός υπολογισμός των συναρτήσεων αυτών είτε σε περιπτώσεις $\mathbf{2 \times 2}$ συστημάτων, είτε και σε bipartite καταστάσεις περισσότερων διαστάσεων.

2.3 Κριτήρια για bipartite μεικτές καταστάσεις

2.3.1 Γενίκευση των κριτηρίων για μεικτές bipartite καταστάσεις

Όταν αναφερόμαστε σε μεικτές καταστάσεις, εκτός από τους καθαρά κβαντικούς συσχετισμούς θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψην και τους κλασικούς πιθανοκρατικούς συσχετισμούς οι οποίοι περιέχονται σε αυτές. Η μεγαλύτερη λοιπόν δυσκολία που συναντάμε στην προσπάθεια γενίκευσης των κριτηρίων για μεικτές καταστάσεις είναι η αυθαιρεσία που έχουμε στην επιλογή της βάσης του χώρου στην οποία θα γίνει η αναπαράσταση. Όπως έχουμε αναφέρει, για κάθε πλήρες σύνολο από καθαρές καταστάσεις $\{|\psi_i\rangle\}$ στο χώρο Hilbert των αντίστοιχων διαστάσεων, υπάρχουν κατάλληλα $P_i > 0$ τέτοια ώστε να απεικονίσουμε μία μεικτή κατάσταση ρ ως:

$$\rho = \sum_i P_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$$

Για αυτόν το λόγο η γενίκευση ενός κριτηρίου του entanglement μέσω ορισμού ενός convex sum των αντίστοιχων συναρτήσεων/κριτηρίων των καθαρών καταστάσεων ως

$$E(\rho) = \sum_i P_i E(|\psi_i\rangle \langle\psi_i|)$$

όπου $E(|\psi_i\rangle \langle\psi_i|)$ η αντίστοιχη και γνωστή συνάρτηση για την καθαρή κατάσταση $|\psi_i\rangle$, είναι ελλειπής. Αυτό συμβαίνει επειδή το μέγεθος $E(\rho)$ θα εξαρτάται από την αναπαράσταση της μεικτής κατάστασης, γεγονός που θέλουμε να αποφύγουμε ώστε η συνάρτηση να είναι καλά ορισμένη και μονότιμη.

Εάν όμως ορίσουμε το μέτρο του entanglement που θέλουμε να γενικεύσουμε, ως την ελάχιστη τιμή μίας τέτοιας ποσότητας ως προς όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις της μεικτής κατάστασης στη μορφή

$$E(\rho) = \inf_{\{P_i,\psi_i\}} \sum_i P_i E(|\psi_i\rangle \langle\psi_i|)$$

τότε αυτή η ποσότητα είναι καλά ορισμένη για οποιαδήποτε τέτοια κατάσταση ρ. Μία τέτοια συνάρτηση αποτελεί ένα convex roof μέγεθος, το οποίο είναι μονοσήμαντα ορισμένο, και λόγω της φύσης του αποτελεί entanglement monotone αφού δεν είναι δυνατό να αυξηθεί κάτω από LOCC διαδικασίες.

Για την περίπτωση συναρτήσεων που ορίζονται σε χώρους Hilbert διαστάσεων $m \times n$ η ακριβής τιμή τους είναι δυνατό να υπολογιστεί ή τουλάχιστον να προσεγγιστεί μέσω εύρεσης ακροτάτων ή μέσω αριθμητικών μεθόδων. Τα δύο μεγέθη που μας ενδιαφέρει να γενικεύσουμε μέσω αυτών των μεθόδων είναι το entanglement και η concurrence.

Για να το κάνουμε αυτό ορίζουμε το *entanglement of formation* ως τη convex roof μέση τιμή των entanglement των καθαρών καταστάσεων που συνθέτουν τη μεικτή κατάσταση $\boldsymbol{\rho = \sum_i P_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|}$:

$$\boldsymbol{E_f(\rho) = \inf_{\{P_i,\psi_i\}} \sum_i P_i E(\left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|)} \tag{2.17}$$

όπου $\boldsymbol{E(\left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|)}$ το entanglement της καθαρής κατάστασης $\boldsymbol{\left|\psi_i\right\rangle}$, ενώ ορίζουμε την *concurrence* για την ίδια μεικτή καταστάση ως

$$\boldsymbol{C(\rho) = \inf_{\{P_i,\psi_i\}} \sum_i P_i C(\left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|)} \tag{2.18}$$

όπου ομοίως $\boldsymbol{C(\left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|)}$ η concurrence της καθαρής κατάστασης $\boldsymbol{\left|\psi_i\right\rangle}$. Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει λόγω της convexity του entanglement ως προς την concurrence των καθαρών καταστάσεων είναι ότι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E(C(\rho))} &= \boldsymbol{E(\inf_{\{P_i,\psi_i\}} \sum_i P_i C(\psi_i)) = \inf_{\{P_i,\psi_i\}} E(\sum_i P_i C(\psi_i)) \leq} \\
&\leq \boldsymbol{\inf_{\{P_i,\psi_i\}} \sum_i P_i E(C(\psi_i)) = E_f(\rho)}
\end{aligned}$$

που μας δείχνει ότι το entanglement σύμφωνα με τον ορισμό της σχέσης 1.9, για μία μεικτή κατάσταση είναι η ελάχιστη τιμή του entanglement of formation. Τονίζουμε ότι το infimum ήταν δυνατό να βγει από τη συνάρτηση επειδή η $\boldsymbol{E(C)}$ είναι μονότονη και αύξουσα ως προς $\boldsymbol{C}$.

Μάλιστα, η Concurrence για μεικτές καταστάσεις σε χώρο Hilbert διαστάσεων $\boldsymbol{2 \times 2}$ είναι δυνατό να υπολογιστεί ακριβώς, γεγονός που είναι πιο εύκολο αν χρησιμοποιήσουμε τη φόρμα $\boldsymbol{C(\psi) = |\left\langle\psi^\star\right|\sigma_y \otimes \sigma_y\left|\psi\right\rangle|}$ για την concurrence των καθαρών καταστάσεων. Για να βρούμε το ελάχιστο μία τέτοιας convex roof ποσότητας θα είναι χρήσιμο να απεικονίσουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης, από πρόβλημα εύρεσης κατάλληλης αναπαράστασης σε πρόβλημα εύρεσης κατάλληλων μοναδιακών πίνακων που να δρουν στη βάση μίας τέτοιας αναπαράστασης. Σε μία τέτοια περίπτωση θα μπορούσαμε να εκματαλλευτουμε μαθηματικά εργαλεία της γραμμικής άλγεβρας ώστε να μπορέσουμε να κάνουμε τον αναλυτικό υπολογισμό.

Ορίζουμε λοιπόν συνάρτηση

$$\boldsymbol{f_c(\psi_1, \psi_2) = \left\langle{\psi_2}^\star\right|\sigma_y \otimes \sigma_y\left|\psi_1\right\rangle} \tag{2.19}$$

η οποία για $\psi_2 = \psi_1 = \psi$ ταυτίζεται με την concurrence. Η συνάρτηση αυτή είνα γραμμική ως προς το πρώτο της όρισμα και αντιγραμμική ως προς το δεύτερο, δηλαδή:
$f_c(V\psi_1, \psi_2) = Vf_c(\psi_1, \psi_2)$ και $f_c(\psi_1, V\psi_2) = f_c(\psi_1, \psi_2)V^T$, όπου στην ιδιότητα της αντιγραμμικότητας εμφανίζεται ο ανάστροφος και όχι ο ερμητιανός σηζυγής του V, επειδή χρησιμοποιούμε το διπλά συζηγές στοιχείο για το δεύτερο όρισμα.

Μέσω κατάλληλης παραμετροποίησης της κατάστασης $\rho = \sum_i P_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$ με ορισμό των $|\tilde{\psi_i}\rangle = \sqrt{P_i}\left|\psi_i\right\rangle$ έτσι ώστε $\rho = \sum_i |\tilde{\psi_i}\rangle \langle\tilde{\psi_i}|$, και εκφράζοντας τις νέες καταστάσεις ως

$$|\tilde{\psi_i}\rangle = \sum_j V_{ij} \left|\phi_j\right\rangle$$

όπου $\left|\phi_j\right\rangle$ οι καθαρές καταστάσεις μίας διαφορετικής αναπαράστασης της κατάστασης ρ, μπορούμε να γράψουμε την concurrence ως

$$\begin{aligned} C(\rho) &= \inf \sum_i |f_c(\phi_i, \phi_i)| = \\ &= \inf \sum_i |\sum_{jk} V_{ij} f_c(\phi_j, \phi_k)[V^T]_{ki}| \end{aligned}$$

Η πληροφορία για όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις έχει μεταφερθεί στους πίνακες V, οι οποίοι απαιτούμε να είναι left-unitary, έτσι ώστε ${V_{ij}}^{\dagger}V_{jk} = \delta_{ik}$ και να διατηρείται η πιθανότητα. Ορίζοντας τη συνάρτηση $f_c(\phi_j, \phi_k)$ ως στοιχείο τ_{jk}, ώστε να αναφερόμαστε σε όλα τα μεγέθη ως στοιχεία πίνακα, βρίσκουμε

$$C(\rho) = \inf_V \sum_i |V\tau[V^T]|_{ii} = \inf_V tr|V\tau[V^T]| \tag{2.20}$$

Η τιμή της ποσότητας αυτής είναι δυνατό να υπολογιστεί αναλυτικά για κάθε σύστηματα $m{\times}n$ διαστάσεων, χρησιμοποιωντας το γεγονός ότι κάθε μιγαδικός πίνακας $M \in \mathbb{C}^{m\times n}$ είναι δυνατό να διαγωνιοποιηθεί ως
$M = U_l D U_r$ οπου οι $U_l \in \mathbb{C}^{m\times d}$ και $U_r \in \mathbb{C}^{d\times n}$ είναι left και right unitary πίνακες αντίστοιχα, και $D \in \mathbb{C}^{d\times d}$ ο διαγώνιος πίνακας με πραγματικά και θετικά διαγώνια στοιχεία και $d = \min(m, n)$. Τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα D ονομάζονται singular values και θα τα συμβολίζουμε ως S_i.

Οι U_l και U_r είναι δυνατό να κατασκευαστούν έτσι ώστε οι singular values να κατανέμονται σε φθίνουσα σειρά πάνω στη διαγώνιο. Εκμεταλλευόμενοι αυτό το θεώρημα μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της concurrence για διμερή κατάσταση $\mathbf{2 \times 2}$ διαστάσεων, την οποία βρίσκουμε ίση με:

$$\boldsymbol{C(\rho) = \inf_{V} tr|V\tau[V^T]| = \max(S_1 - \sum_{i=2}^{d} S_i, 0)} \tag{2.21}$$

όπου $\boldsymbol{S_1}$ είναι η μέγιστη singular value του πίνακα $\boldsymbol{\tau}$. Η απόδειξη του ακροτάτου αυτού μπορεί να βρεθεί στο Παράρτημα $\boldsymbol{B'}$. Στα πλαίσια της έρευνας, αν και το αποτέλεσμα αυτό είναι δυνατό να προσεγγιστεί μέσω αριθμητικών μεθόδων, είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστεί αναλυτικά, με αποτέλεσμα να έχει γίνει μεγάλη μελέτη ισοδύναμων ορισμών της Concurrence για μεικτές καταστάσεις, οι οποίοι να υποστηρίζουν πολύ πιο απλούς υπολογισμούς.

Ο πλέον πιο διαδεδομένος τέτοιος ορισμός είναι η Concurrence όπως αυτή ορίζεται από τον Wootters, σύμφωνα με τον οποίο αυτή είναι ίση με

$$\boldsymbol{C(\rho) = \max(r_1 - \sum_{i=2}^{d} r_i, 0)} \tag{2.22}$$

όπου $\boldsymbol{r_i}$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{\sqrt{\rho\tilde{\rho}}}$, ενώ $\boldsymbol{\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^\star(\sigma_y \otimes \sigma_y)}$ και $\boldsymbol{\rho^\star}$ ο συζηγής του πίνακα πυκνότητας της κατάστασης.

Για να δούμε την ισοδυναμία αυτή, μπορούμε να θυμηθούμε ότι κάθε κατάσταση $\boldsymbol{\rho}$ είναι δυνατό να εκφραστεί ως προς την ορθοκανονική βάση των ιδιοκαταστάσεών της $\boldsymbol{\{|i\rangle\}}$ ως

$$\boldsymbol{\rho = \sum_i |\tilde{i}\rangle \langle\tilde{i}|}$$

όπου $\boldsymbol{|\tilde{i}\rangle}$ τα αντίστοιχα υποκανονικοποιημένα ανύσματα, έτσι ώστε το μέτρο τους να είναι ίσο με τις ιδιοτιμές της $\boldsymbol{\rho}$. Εάν λοιπόν επιλέγαμε να κατασκευάσουμε τις καταστάσεις $\boldsymbol{|\tilde{\psi}_i\rangle}$ μέσω στροφών ως προς εκείνη τη συγκεκριμένη βάση, δηλαδή

$$\boldsymbol{|\tilde{\psi}_i\rangle = \sum_j V_{ij} |\tilde{j}\rangle}$$

όπου $\boldsymbol{V_{ij}}$ μοναδιακός ώστε να διατηρείται το ίχνος της $\boldsymbol{\rho}$, θα βρίσκαμε τα στοιχεία του πίνακα $\boldsymbol{\tau}$ ίσα με

$$\boldsymbol{\tau_{jk} = \langle\tilde{k}|\sigma_y \otimes \sigma_y|\tilde{j}\rangle}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, αναζητώντας τις singular values του πίνακα $\boldsymbol{\tau}$, οι οποίες είναι ίσες με τις ιδιοτιμές του πίνακα $\sqrt{\boldsymbol{\tau\tau^\dagger}}$, μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\tau\tau^\dagger})_{ik} &= \sum_j \langle \tilde{j^\star}|\boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}|\tilde{i}\rangle \langle \tilde{k}|\boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}|\tilde{j^\star}\rangle = \\
&= tr[\boldsymbol{\rho}^\star \boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}\, |\tilde{i}\rangle \langle\tilde{k}|\, \boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}] = \\
&= tr[|\tilde{i}\rangle \langle\tilde{k}|\, \boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}\boldsymbol{\rho}^\star \boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}] = \\
&= \langle\tilde{k}|\, \boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}\boldsymbol{\rho}^\star \boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}\, |\tilde{i}\rangle
\end{aligned}$$

Όμως λόγω της διαγωνιότητας του $\boldsymbol{\rho}^\star$ στη συγκεκριμένη βάση, μπορούμε να δούμε ότι τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία θα είναι τα διαγώνια, δηλαδή τα

$$(\boldsymbol{\tau\tau^\dagger})_{ii} = \langle\tilde{i}|\, \boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}\boldsymbol{\rho}^\star \boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}\, |\tilde{i}\rangle \tag{2.23}$$

και ο πίνακας $\boldsymbol{\tau\tau^\dagger}$ θα έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{\tau\tau^\dagger} = \sum_i |\tilde{i}\rangle \langle\tilde{i}|\, \langle i|\, \boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}\boldsymbol{\rho}^\star \boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y}\, |i\rangle \tag{2.24}$$

ή εκφράζοντάς τον στην επιθυμητή μορφή

$$\boldsymbol{\tau\tau^\dagger} = \boldsymbol{\rho\tilde{\rho}} \tag{2.25}$$

όπου $\boldsymbol{\tilde{\rho}} = (\boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y})\boldsymbol{\rho}^\star(\boldsymbol{\sigma_y}\otimes\boldsymbol{\sigma_y})$ και $\boldsymbol{\rho}^\star$ ο συζηγής του πίνακα πυκνότητας της κατάστασης. Δείξαμε λοιπόν ότι οι ιδιοτιμες των δύο αυτών πινάκων είναι ίσες, άρα και ότι οι Singular values του πίνακα $\boldsymbol{\tau}$ είναι ίσες με τις ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $\boldsymbol{\rho\tilde{\rho}}$, με αποτέλεσμα η Concurrence να μπορεί να βρεθεί ως

$$\boldsymbol{C(\rho) = \max(r_1 - \sum_{i=2}^{d} r_i, 0)} \tag{2.26}$$

όπου $\boldsymbol{r_i}$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $\sqrt{\boldsymbol{\rho\tilde{\rho}}}$. Αυτό το αποτέλεσμα θα χρησιμοποιήσουμε στο τέταρτο κεφάλαιο, όπου θα υπολογίσουμε την Concurrence για ένα ρεαλιστικό $\mathbf{2\times 2}$ σύστημα, και θα διαπιστώσουμε ότι είναι ένα πολύ χρήσιμο αλλά και εύχρηστο εργαλείο για τη μελέτη του entanglement.

2.3.2 H Concurrence για διμερείς μεικτές καταστάσεις περισσότερων διαστάσεων

Εάν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε την convex roof έκφραση και για την γενίκευση της concurrence σε μεικτές διμερείς καταστάσεις περισσότερων διαστάσεων, θα δούμε ότι ενώ χρησιμοποιούμε παρόμοιες τεχνικές με αυτές που χρησιμοποιήσαμε για την ειδική περίπτωση των $\mathbf{2 \times 2}$ καταστάσεων, η επεξεργασία που θα πρέπει να κάνουμε θα είναι πολύ πιο πολύπλοκη. Αρχικά θα απαιτήσουμε όπως και προηγουμένως $\boldsymbol{C(\rho) = \inf \sum_i C(\psi_i)}$, όπου η $\boldsymbol{\rho}$ είναι παραμετρικοποιημένη ως $\boldsymbol{\rho = \sum_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|}$, ενώ $\boldsymbol{\psi_i}$ οι καθαρές καταστάσεις που ορίζουν την αναπαράσταση της $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{C(\psi_i)}$ οι concurrences τους.

Αγνοώντας το σύμβολο $\boldsymbol{inf}$, το οποίο όμως σε κάθε περίπτωση θα θεωρούμε ότι επιβάλλεται στην άθροιση, μπορούμε να εκφράσουμε τη γενικευμένη concurrence για μεικτές καταστάσεις ως

$$\boldsymbol{C\{\psi_i\} = \sum_i C(\psi_i)} \tag{2.27}$$

Όπως προηγουμένως μας συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε μία γενικότερη συνάρτηση, μέσω της οποίας θα μεταφέρουμε την άθροιση ως προς τις δυνατές αναπαραστάσεις σε operator-sum decomposition, όπου η πληροφορία για το ελάχιστο θα περιέχεται στους τελεστές που δρουν στη συνάρτηση.

Η γενικότερη συνάρτηση που θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε για να εκφράσουμε την ποσότητα $\boldsymbol{1 - tr\rho_r{}^2}$ ή την $\boldsymbol{|\langle\psi|\psi\rangle|^2 - tr\rho_r{}^2}$, την οποία έχουμε συναντήσει κατά την γενίκευση της concurrence σε περισσότερες διαστάσεις, είναι η

$$\boldsymbol{f(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = \langle\psi_2|\psi_1\rangle \langle\psi_4|\psi_3\rangle - tr_1[(tr_2 |\psi_1\rangle \langle\psi_2|)(tr_2 |\psi_3\rangle \langle\psi_4|)]} \tag{2.28}$$

η οποία αποκτά τη μορφή της ποσότητας που θέλουμε όταν όλα τα ορίσματά της είναι ίσα.

Ορίζοντας μία οικογένεια left-unitary πινάκων $\boldsymbol{V}$ όπως και προηγουμένως μπορούμε να ορίσουμε νέες καταστάσεις $\boldsymbol{|\phi_j\rangle}$ τέτοιες ώστε $\boldsymbol{|\psi_j\rangle = \sum_i V_{ji} |\phi_i\rangle}$ και οι οποίες κατασκευάζουν κάποια διαφορετική αναπαράσταση της $\boldsymbol{\rho}$. Βλέποντας ότι η $\boldsymbol{f}$ είναι γραμμική ως προς το πρώτο και τρίτο όρισμα, και αντιγραμμική ως προς το δεύτερο και τέταρτο, μπορούμε να χρησιμοποήσουμε τη νέα οικογένεια καταστάσεων $\boldsymbol{|\phi_i\rangle}$ ώστε να εκφράσουμε την concurrence σε μορφή ίχνους όπως και προηγουμένως. Γράφουμε λοιπόν

$$\boldsymbol{C\{\psi_i\} = \sum_i \sqrt{2f(\psi_i, \psi_i, \psi_i, \psi_i)} = \inf_V \sum_i ([(V \otimes V) A (V^\dagger \otimes V^\dagger)]^{ii}_{ii})^{\frac{1}{2}}} \tag{2.29}$$

όπου $\boldsymbol{A_{jk}^{lm} = 2f(\phi_j, \phi_l, \phi_k, \phi_m)}$. Τα τελεστικά γινόμενα που έχουμε χρησιμοποιήσει στη προηγούμενη σχέση συμβολίζουν απλώς το ότι τα στοιχεία του τελεστή $\boldsymbol{V \otimes V}$ δρουν στα στοιχεία του $\boldsymbol{A}$ ως προς τους δείκτες $\boldsymbol{j}$ και $\boldsymbol{k}$ από τα αριστερά ενώ τα στοιχεία του $\boldsymbol{V^\dagger \otimes V^\dagger}$ δρουν στα στοιχεία $\boldsymbol{l}$ και $\boldsymbol{m}$ από τα δεξιά.

Ο πίνακας $\boldsymbol{A_{jk}^{lm}}$ είναι συμμετρικός στην ταυτόχρονη εναλλαγή των άνω και των κάτω δεικτών $\boldsymbol{A_{jk}^{lm} = A_{kj}^{ml}}$, και ερμητιανός στην αλλαγή των δύο ζευγών άνω και κάτω δεικτών $\boldsymbol{A_{jk}^{lm} = A_{lm}^{jk\,\star}}$. Εάν προσπαθήσουμε όμως να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι κάθε ερμητιανός πίνακας $\boldsymbol{H}$ είναι δυνατό να διαγωνιοποιηθεί μέσω μοναδιακού μετσχηματισμού $\boldsymbol{UHU^\dagger}$, θα δούμε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι γενικά δυνατό για αυτήν την περίπτωση, λόγω του τρόπου που ο $\boldsymbol{U}$ θα πρέπει να δρα στα δύο ζεύγη ορισμάτων (αφού παράγεται μόνο από το τελεστικό γινόμενο των $\boldsymbol{V}$). Αυτό σημαίνει ότι αφού οι $\boldsymbol{V \otimes V}$ και $\boldsymbol{V^\dagger \otimes V^\dagger}$ θα προέλθουν από στροφές των καταστάσεων $|\boldsymbol{\phi_i}\rangle$, για να είναι δυνατή μία τέτοια διαγωνιοποίηση για κάθε τέτοιον $\boldsymbol{A}$, θα πρέπει αυτός να διαγωνοποιείται ταυτόχρονα μέσω πίνακα $\boldsymbol{V}$ σε όλα τα ζέυγη ορισμάτων του.

Ένας τέτοιος πίνακας $\boldsymbol{A_{jk}^{lm}}$ θα προέκυπτε με φυσικό τρόπο εάν δεν είχαμε κάνει αυθαίρετη επιλογή της σειράς με την οποία θα εφαρμόζονταν τα μερικά ίχνη στο $\boldsymbol{tr\rho_r{}^2}$, κατά τον ορισμό της $\boldsymbol{f}$. Εάν λοιπόν ορίζαμε τη γενικότερη δυνατή $\boldsymbol{f}$, ως εκείνη που έχει δύο ανεξάρτητες συμμετρίες ως προς την εναλλαγή των δεικτών $\boldsymbol{j,k}$ με τους $\boldsymbol{l,m}$, θα έπρεπε να θεωρήσουμε μία συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f'(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)} &= \boldsymbol{\frac{1}{4}\langle\psi_2|\psi_1\rangle\langle\psi_4|\psi_3\rangle - \frac{1}{4}tr_1[(tr_2|\psi_1\rangle\langle\psi_2|)(tr_2|\psi_3\rangle\langle\psi_4|)] +} \\ &+ \boldsymbol{extra - terms} \end{aligned}$$

όπου οι όροι που συμβολίζονται ως extra terms είναι οι τρεις συνδυασμοί που προκύπτουν απ΄ τους δύο πρώτους όρους μέσω της εναλλαγής των $|\boldsymbol{\psi_1}\rangle$ με $|\boldsymbol{\psi_3}\rangle$, όπως και της σειράς με την οποία εφαρμόζονται τα μερικά ίχνη. Η συνάρτηση σε αυτή τη μορφή διατηρεί την ίδια γραμμικότητα και αντι-γραμμικότητα ως προς τα ορίσματα της, έτσι ώστε να μας οδηγεί σε σχέση ίδια με την 2.29, με μόνη διαφορά ότι στη θέση των στοιχείων του $\boldsymbol{A_{jk}^{lm}}$ θα προκύψουν τα στοιχεία $\boldsymbol{\mathcal{A}_{jk}^{lm}}$, τα οποία είναι πλήρως συμμετρικά στην εναλλαγή των $\boldsymbol{j,k}$ ή των $\boldsymbol{l,m}$ ορισμάτων τους.

Ο πίνακας $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ που προέκυψε με αυτόν τον τρόπο, έχει την επιθυμητή ιδιότητα να είναι συμμετρικός στην εναλλαγή των στοιχείων $\boldsymbol{j,k}$ και ανεξάρτητα συμμετρικός στην εναλλαγή των στοιχείων $\boldsymbol{l,m}$, γεγονός που πλέον επιτρέπει τη διαγωνοιοποίηση της πλήρους ποσότητας μέσω ένα κοινού πίνακα $\boldsymbol{V}$. Η συμμετρία αυτή μάλιστα μας επιτρέπει να ορίσουμε ορθοκανονική, ως προς το Hilbert-Schmidt βαθμωτό γινόμενο ($\boldsymbol{tr[\Lambda^a(\Lambda^b)^\dagger] = \delta_{a,b}}$) βάση πραγματικών και συμμετρικών πινάκων $\boldsymbol{\{\Lambda^a\}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n\times n}}$, οι οποίοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτσι ώστε να εκφράσουμε τα στοιχεία $\mathcal{A}_{jk}^{lm}$ ως γραμμικό συνδυασμό των γινομένων των στοιχείων αυτής της βάσης. Με αυτόν τον τρόπο θα κάνουμε άμεσα εμφανή τη συμμετρία στην εναλλαγή των covariant και contravariant δεικτών του $\mathcal{A}_{jk}^{lm}$. Μία τέτοια αναπαράσταση θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{A}_{jk}^{lm} = \sum_{a,b} B_{ab} \Lambda_{jk}^{a} \Lambda_{lm}^{b} \tag{2.30}$$

όπου το πλεονέκτημα της γραφής αυτής είναι ότι μπορέσαμε να εκφράσουμε τα στοιχεία του πίνακα $\mathcal{A}_{jk}^{lm}$ ως γραμμικό συνδυασμό στοιχείων πινάκων και όχι στοιχείων τελεστών, το οποίο μας διευκολύνει πολύ στη μελέτη μας λόγω της ευκολίας τους στη χρήση.

Μέσω αντίστροφης ανάλυσης Fourier μπορούμε να δούμε ότι

$$\sum_{j,k} \sum_{l,m} \mathcal{A}_{jk}^{lm} (\Lambda_{jk}^{a'})^{\dagger} (\Lambda_{lm}^{b'})^{\dagger} = \sum_{j,k} \sum_{l,m} B_{ab} \Lambda_{jk}^{a} \Lambda_{lm}^{b} (\Lambda_{jk}^{a'})^{\dagger} (\Lambda_{lm}^{b'})^{\dagger}$$

όπου λόγω της πραγματικότητας και συμμετρικότητας των πινάκων Λ ισχύει

$$\sum_{a,b} B_{ab} tr[\Lambda^{a} \Lambda^{a'^{\dagger}}] tr[\Lambda^{b} \Lambda^{b'^{\dagger}}] = \sum_{j,k} \sum_{l,m} \mathcal{A}_{jk}^{lm} (\Lambda_{jk}^{a'})^{\dagger} (\Lambda_{lm}^{b'})^{\dagger}$$

άρα και

$$B_{ab} = \sum_{j,k} \sum_{l,m} \Lambda_{jk}^{a} \mathcal{A}_{jk}^{lm} \Lambda_{lm}^{b} \tag{2.31}$$

όπου στοιχεία των πινάκων $\Lambda^{\dagger}$ αντικαταστήθηκαν από τα στοιχεία των Λ αφού στην ειδική αυτή περίπτωση ταυτίζονται μεταξύ τους.

Έχουμε δείξει λοιπόν ότι για κάθε πίνακα $\mathcal{A}$ υπάρχει κατάλληλη απεικόνιση μέσω οικογένειας συμμετρικών πινάκων Λ και κατάλληλων συντελεστών (πινάκων) B_{ab}. Μάλιστα οι ιδιοτιμές του B θα είναι πραγματικές όπως είναι και του $\mathcal{A}$, και θα τις συμβολίσουμε ως μ_a. Το σύνολο των ιδιοκαταστάσεων $\{x^a\}$ είναι πλήρες λόγω της ερμητιανότητας του B, ενώ κανονικοποιείται ως $x^a \cdot x^b = \mu_a \delta^{ab}$.

Εάν λοιπόν εκφράζαμε το B στο χώρο των ιδιοκαταστάσεων του, θα ήταν δυνατό να εκφράσουμε το $\mathcal{A}_{jk}^{lm}$ ως:

$$\mathcal{A}_{jk}^{lm} = \sum_{a} \mu_a \Lambda_{jk}^{a} \Lambda_{lm}^{a} \tag{2.32}$$

έχοντας επιλέξει κατάλληλη οικογένεια πινάκων $\{\Lambda^a\}$.

Μπορούμε λοιπόν μονοσήμαντα να ορίσουμε subnormalized πίνακες $T_{jk}^{a} = \sqrt{\mu_a} \Lambda_{jk}^{a}$, $([T^a (T^b)^{\star}] = \mu_a \delta_{a,b})$ μέσω των οποίων γράφουμε

$$\mathcal{A}_{jk}^{lm} = \sum_{a} T_{jk}^{a} T_{lm}^{a} \tag{2.33}$$

Έχοντας απλοποιήσει τόσο τη μορφή των στοιχείων του $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε τη μορφή αυτή με σκοπό να βρούμε την concurrence. Αντικαθιστώντας λοιπόν το αποτέλεσμα αυτό στη σχέση 2.29 βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C\{\psi_i\}} &= \sum_i \sqrt{2f(\psi_i,\psi_i,\psi_i,\psi_i)} = \\
&= \sum_i ([(\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{V})\boldsymbol{A}(\boldsymbol{V}^\dagger\otimes\boldsymbol{V}^\dagger)]^{ii}_{ii})^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sum_i (\sum_a \sum_{jklm} V_{ij}V_{ik}T^a_{jk}T^a_{lm}V^\dagger_{li}V^\dagger_{mi})^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sum_i (\sum_a \sum_{jklm} V_{ij}T^a_{jk}V_{ik}V^\dagger_{li}T^a_{lm}V^\dagger_{mi})^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sum_i (\sum_a [\sum_{jk} V_{ij}T^a_{jk}V_{ik}][\sum_{lm} V^\dagger_{li}T^a_{lm}V^\dagger_{mi}])^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sum_i (\sum_a [\sum_{jk} V_{ij}T^a_{jk}V_{ik}][\sum_{lm} V^\dagger_{li}(T^a_{lm})^\dagger V^\dagger_{mi}])^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sum_i (\sum_a [\sum_{jk} V_{ij}T^a_{jk}V_{ik}][\sum_{lm} V_{im}(T^a_{ml})V_{il}]^\dagger)^{\frac{1}{2}} = \\
&= \sum_i (\sum_a |\sum_{jk} V_{ij}T^a_{jk}V_{ik}|^2)^{\frac{1}{2}}) = \\
&= \sum_i (\sum_a |\sum_{jk} V_{ij}T^a_{jk}V^T_{ki}|^2)^{\frac{1}{2}})
\end{aligned}$$

ή εκφράζοντάς τη σε μορφή ίχνους:

$$\boldsymbol{C\{\psi_i\}} = \inf_{\boldsymbol{V}} \sum_i (\sum_a |\boldsymbol{V}\boldsymbol{T}^a\boldsymbol{V}^T|_{ii}{}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2.34}$$

Το infimum αυτής της ποσότητας μας δίνει την concurrence για μεικτή κατάσταση ορισμένη σε χώρο Hilbert $\boldsymbol{H_m}^{\boldsymbol{A}}\otimes\boldsymbol{H_n}^{\boldsymbol{B}}$. Στη μορφή αυτή η concurrence εξαρτάται από ένα πλήρες σύνολο συμμετρικών, πραγματικών πινάκων $\boldsymbol{T^a}$ με κανονικοποίηση $[\boldsymbol{T^a}(\boldsymbol{T^b})^\star] = \boldsymbol{\mu_a\delta_{a,b}}$, και από ένα κατάλληλο πίνακα μετασχηματισμού $\boldsymbol{V}$, τέτοιον ώστε να διαγωνοποιεί ταυτόχρονα όλα τα ζεύγη δεικτών του $\boldsymbol{\mathcal{A}^{lm}_{jk}}$.

Το πρόβλημα πλέον, το οποίο περιορίζει τις δυνατότητες εύρεσης αναλυτικής λύσης είναι ότι η μη γραμμικότητα που παρουσιάζει το αποτέλεσμα ως προς τους $\boldsymbol{T^a}$ είναι δυνατό να αρθεί μόνο αν αυτοί μπορούν να διαγωνοποιηθούν ταυτόχρονα. Δύο μιγαδικοί όμως (στη γενική ερίπτωση) πίνακες $\boldsymbol{T^a}$ και $\boldsymbol{T^b}$, είναι δυνατό να διαγωνιοποιηθούν ταυτόχρονα αν και μόνο αν ο πίνακας $(\boldsymbol{T^a})^{-1}\boldsymbol{T^b}$ είναι συμμετρικός, κριτήριο που δεν ικανοποιείται απαραίτητα για κάποιο αυθαίρετο σύνολο πινάκων $\boldsymbol{T^a}$. Στη γενική περίπτωση λοιπόν δεν είναι δυνατή η ταυτόχρονη διαγωνιοποίηση όλων των $\boldsymbol{T^a}$ έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα

$$\inf_{\boldsymbol{V}} \sum_i |\boldsymbol{V\tau[V^T]}|_{ii} = \mathbf{max}(\boldsymbol{S_1} - \sum_{i=2}^{d} \boldsymbol{S_i}, \mathbf{0})$$

Δεν είναι δυνατό λοιπόν με τεχνικές που έχουμε χρησιμοποιήσει έως τώρα να βρούμε μία γενική μορφή για το infimum της 2.29, αλλά έχουμε ακόμα τη δυνατότητα να μελετήσουμε κάποια όριά της. Ένα τέτοιο μέγεθος είναι το κάτω φράγμα της, μέγεθος που μπορούμε να κατασκευάσουμε με τη χρήση της Cauchy-Swartz ανισότητας

$$(\sum_a \boldsymbol{x_a}^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_a \boldsymbol{y_a}^2)^{\frac{1}{2}} \geq \sum_a \boldsymbol{x_a y_a} \tag{2.35}$$

Εάν λοιπόν εφαρμόσουμε την ανισότητα αυτήν στη γενικευμένη concurrence, θεωρώντας σύνολο από στοιχεία $\boldsymbol{y}$ τέτοια ώστε $\sum_a \boldsymbol{y_a}^2 = \mathbf{1}$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{C(\rho)} &= \sum_i (\sum_a \boldsymbol{y_a}^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_a |\boldsymbol{VT^aV^T}|_{ii}{}^2)^{\frac{1}{2}} \geq \\ &\geq \sum_i \sum_a \boldsymbol{y_a} |\boldsymbol{VT^aV^T}|_{ii} \end{aligned}$$

$\forall \{\boldsymbol{y_a} \in \mathbb{R}\}$ για τα οποία $\sum_a \boldsymbol{y_a}^2 = \mathbf{1}$. Αν και ακόμα δεν έχουμε λύσει το πρόβλημα της ταυτόχρονης διαγωνιοποίησης των πινάκων $\boldsymbol{T^a}$ το επόμενο βήμα είναι πολύ πιο απλό, αφού μέσω της γενικής ανισότητας $\sum_a |\boldsymbol{z_a}| \geq |\sum_a \boldsymbol{z_a}|$ (που ισχύει για κάθε $\boldsymbol{z_a} \in \mathbb{C}$) μπορούμε να κατασκευάσουμε ενα άθροισμα από γνωστές ποσότητες. Απαιτώντας λοιπόν $\boldsymbol{y_a} \geq \mathbf{0}$ βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{C(\rho)} \geq \sum_i |\boldsymbol{V}(\sum_a \boldsymbol{y_a T^a})\boldsymbol{V^T}|_{ii} \equiv \boldsymbol{W} \tag{2.36}$$

της οποίας ποσότητας την έκφραση γνωρίζουμε αναλυτικά ως

$$\mathbf{inf}\, \boldsymbol{W} = \mathbf{max}(\boldsymbol{S_1} - \sum_{i=2}^{d} \boldsymbol{S_i}, \mathbf{0}) \tag{2.37}$$

όπου $\boldsymbol{S_i}$ οι singular values του πίνακα $(\sum_a \boldsymbol{y_a T^a})$, με $\sum_a \boldsymbol{y_a}^2 = \mathbf{1}$.

Έχοντας σε αυτό το σημείο προσεγγίσει μία αναλυτική έκφραση για την concurrence μίας διμερούς μεικτής κατάστασης σε αυθαίρετες διαστάσεις, βλέπουμε το πόσο δύσκολος θα είναι ο υπολογισμός της ακόμα και αριθμητικά, αφού ένα τέτοιο πρόβλημα ελαχιστοποίησης μίας μη γραμμικής ποσότητας είναι πολύ πολύπλοκο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να οδηγούμαστε σε εφαρμογή προσεγγίσεων, όπως την έυρεση της ελάχιστης τιμής, όπου όμως θα μας οδηγήσουν με τη σειρά τους σε απώλεια πληροφορίας. Η απώλεια αυτή είναι αποτέλεσμα του ότι εάν υπολογίσουμε το ελάχιστο της γενικευμένης concurrence και το βρούμε μη αρνητικό για κάποια κατάσταση (ή για κάποια περιοχή μίας μεταβλητής της που λειτουργεί ως fidelity), τότε είμαστε βέβαιοι ότι μία ποσότητα είναι entangled. Εάν όμως (έστω και υπό κάποιες συνθήκες) το ελάχιστο προκύψει αρνητικό, τότε δε θα λάβουμε καμία απολύτως πληροφορία για τη διαχωρησιμότητα της κατάστασης, και το ελάχιστο δε θα αποτελεί κατάλληλο κριτήριο.

Το entanglement of formation και η concurrence είναι δύο μόνο από ένα μεγάλο αριθμό θεωρητικών μέτρων του entanglement, μεταξύ των οποίων κάποια είναι εύκολο να υπολογιστούν αλλά μπορεί να μη δίνουν έμπιστα αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση ή και το αντίθετο, όπως στην περίπτωση της γενικευμένης Concurrence. Κάποια από τα πλέον διαδεδομένα κριτήρια του entanglement για διμερείς καταστάσεις είναι το κριτήριο PPT που λειτουργεί με μεγάλη εγκυρότητα για καταστάσεις λίγων διαστάσεων, και το distillable entanglement που αποτελεί ασυμπτωτικό μέγεθος. Στη συνέχεια θα κάνουμε μία σύντομη αναφορά σε αυτά τα δύο χαρακτηριστικά κριτήρια είτε για να τα εφαρμόσουμε σε σύγκριση με την Concurrence (PPT κριτήριο), είτε για να ορίσουμε ένα διαφορετικό είδος entanglement, το bound entanglement, μέσω του distillable entanglement.

2.3.3 Distillable entanglement

Για να ορίσουμε το distillable entanglement θεωρούμε ότι για μία κατάσταση $\boldsymbol{\rho}$ που δρα στο χώρο $\boldsymbol{H = H^A \otimes H^B}$ υπάρχει κατάλληλο πρωτόκολλο $\boldsymbol{P}$ τέτοιο ώστε μέσω μίας αλληλουχίας LOCC διαδικασιών $\boldsymbol{\Lambda_n}$ να κάνει mapping την κατάσταση

$$\boldsymbol{\rho^{\otimes n} = \rho \otimes \rho \otimes ... \otimes \rho} \tag{2.38}$$

που αποτελεί την κατάσταση $\boldsymbol{n}$ ανεξάρτητων πανομοιότυπων καταστάσεων $\boldsymbol{\rho}$, σε μία κατάσταση $\boldsymbol{\sigma_n}$ που ορίζεται σε χώρο Hilbert $\boldsymbol{H_n^{out} = (H_2)^{\otimes m_n} \otimes (H_2)^{\otimes m_n}}$. Το $\boldsymbol{P}$ αποτελεί distillation protocol αν για μεγάλο αριθμό $\boldsymbol{n}$ η τελική κατάσταση $\boldsymbol{\sigma_n}$ πλησιάζει την κατάσταση $\boldsymbol{m_n}$ απλέτων (singlets) των δύο qubit.

Επιθυμόντας λοιπόν να οδηγηθούμε σε singlet κατάσταση $\boldsymbol{\psi_s}$ θέλουμε το μέγεθος που ορίζουμε ως Fidelity

$$\boldsymbol{F = \langle {\psi_s}^{\otimes m} | \sigma_n | {\psi_s}^{\otimes m} \rangle} \tag{2.39}$$

να τείνει προς το $\mathbf{1}$. Ο ασυμπτωτικός λόγος

$$\boldsymbol{D_P \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}} \tag{2.40}$$

που χαρακτηρίζει το πρωτόκολλο $\boldsymbol{P}$ μας οδηγεί στον ορισμό του distillable entanglement ως τη μέγιστη δυνατή τιμή που μπορεί να αποκτήσει ο $\boldsymbol{D_P}$ ως προς όλα τα δυνατά πρωτόκολλα:

$$\boldsymbol{E_D(\rho) \equiv \sup_P [\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}]} \tag{2.41}$$

Το distillable entanglement μας δείχνει ασυμπτωτικά το μέγιστο ποσοστό των qubit καταστάσεων που μπορούν να τηλεμεταφερθούν ή να χρησιμοποιηθούν για οποιαδήποτε άλλη μορφή κβαντικής επικοινωνίας η οποία απαιτεί ασυμπτωτικά καθαρές singlet καταστάσεις.

Η διαφορά του distillable entanglement από τα προηγούμενα κριτήρια που έχουμε αναφέρει είναι ότι μπορεί να υπολογίσει το ποσοστό του entanglement μίας κατάστασης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία singlet ζευγών (δηλαδή το ποσοστό του entanglement κάποιων εκ των καταστάσεων $\boldsymbol{\rho}$ που μπορεί να 'θυσιαστεί' με σκοπό την αύξηση του entanglement των υπολοίπων). Ο υπολογισμός του όμως, δε μας δίνει κάποιο στοιχείο σχετικά με το αν υπάρχει περαιτέρω entanglement στην κατάσταση το οποίο όμως δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Η ύπαρξη τέτοιας μορφής entanglement που περιέχεται σε μία κατάσταση αλλά δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί είναι δυνατή, με το entalglement αυτό να ορίζεται ως bound entanglement. Το entanglement αυτό παρατηρείται από την ελάχιστή τιμή της fidelity, όταν η κατάσταση $\boldsymbol{\rho}$ είναι διαχωρίσιμη, έως την τιμή της για την οποία αρχίζει να είναι δυνατό το entanglement distillation.

2.3.4 PPT κριτήριο

Το PPT κριτήριο (Positive Partial Transpose) βασίζεται στη θετικότητα ή όχι του μερικώς ανάστροφου πίνακα μίας κατάστασης $\boldsymbol{m \times n}$ ως προς οποιοδήποτε από τα δύο υποσυστήματα. Εκμεταλλευόμενο ένα θεώρημα της γραμμικής άλγεβρας το οποίο υποστηρίζει ότι για κάθε inseparable κατάσταση $\boldsymbol{\rho \in H_m \otimes H_n}$ υπάρχει ερμητιανός τελεστής $\boldsymbol{A}$ τέτοιος ώστε $\boldsymbol{tr(A\rho) < 0}$, ενώ $\boldsymbol{tr(A\sigma) \geq 0}$ για κάθε διαχωρίσιμη κατάσταση $\boldsymbol{\sigma}$, μας δίνει τη δυνατότητα για καταστάσεις $\boldsymbol{2 \times 2}$ και $\boldsymbol{2 \times 3}$ διαστάσεων, να ελέγξουμε τη διαχωρησιμότητά τους με τη χρήση μόνο ενός τέτοιου τελεστή, του μερικώς ανάστροφου της $\boldsymbol{\rho}$.

Κάτι τέτοιο είναι δυνατό βάσει ενός θεωρήματος των Stromer και Woronowicz, το οποίο υποστηρίζει ότι κάθε θετική απεικόνιση $\boldsymbol{\Lambda}$ μεταξύ δύο καταστάσεων, και οι δύο από τις οποίες ανήκουν σε χώρους $\boldsymbol{H^1 \otimes H^2}$ με διαστάσεις $\boldsymbol{dimH^1 = dimH^2 = 2}$ ή $\boldsymbol{dimH^1 = 2}$ και $\boldsymbol{dimH^2 = 3}$, είναι δυνατό να γραφεί στη μορφή

$$\boldsymbol{\Lambda = \Lambda_1^{CP} + \Lambda_2^{CP} T} \tag{2.42}$$

όπου $\boldsymbol{\Lambda_i^{CP}}$ πλήρως θετικές απεικονίσεις, και $\boldsymbol{T}$ ο τελεστής αναστροφής που δρα μόνο σε έναν από τους δύο υπόχωρους. Μέσω αυτού του θεωρήματος λοιπον είναι δυνατό να αποδειχθεί ότι μία κατάσταση σε χώρους Hilbert $\boldsymbol{2 \times 2}$ και $\boldsymbol{2 \times 3}$ διαστάσεων είναι διαχωρήσιμη αν και μόνο αν έχει θετικό μερικώς ανάστροφο πίνακα.

Το PPT κριτήριο είναι πλήρες για $\boldsymbol{2 \times 2}$ και $\boldsymbol{2 \times 3}$ καταστάσεις, αλλά λόγω του ότι το θεώρημα στο οποίο βασίζεται ισχύει μόνο για απεικονίσεις μεταξύ χώρων αυτών των διαστάσεων, είναι δυνατό να παραβιάζεται για καταστάσεις ορισμένες σε χώρους περισσότερων διαστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι είναι δυνατό σε καταστάσεις ορισμένες σε μεγαλύτερους χώρους Hilbert να παρατηρήσουμε θετικότητα των μερικών ανάστροφών τους, ακόμα και αν αυτές δεν είναι διαχωρίσιμες.

Σε πολλές περιπτώσεις το PPT κριτήριο χρησιμοποιείται ταυτόχρονα με το distillable entanglement, αφού με αυτόν τον τρόπο μπορούν να βρεθούν με ακρίβεια (για καταστάσεις σε χώρους Hilbert λίγων διαστάσεων), οι ακριβείς περιοχές της Fidelity στις οποίες περιέχεται bound entanglement, το οποίο δε μπορεί να δεχθεί distillation.

Έχοντας πλέον κάνει μία αναφορά στις βασικές ιδιότητες και χαρατηριστικά των μέτρων της διαχωρισιμότητας, στη συνέχεια της μελέτης μας θα κάνουμε μία αναφορά σε μία συνάρτηση που σχετίζεται πιο συγκεκριμένα με τη φύση μίας κβαντική κατάστασης. Όπως θα δούμε ένα τέτοιο κριτήριο, το οποίο ονομάζεται *quantum discord*, μπορεί να κατασκευαστεί μελετώντας την απόκλιση της έννοιας της κοινής πληροφορίας, όπως αυτή ορίζεται στη κλασική θεωρία πιθανοτήτων, από την ερμηνεία της για ένα κβαντικό σύστημα όπου πρέπει πλέον να λάβουμε υπόψην την κατάρρευση του συστήματος κατά την παρατήρηση.

Κεφάλαιο 3

Quantum Discord

Έως τώρα έχουμε ασχοληθεί κυρίως με το πρόβλημα της διαχωρησιμότητας, το οποίο μελετήσαμε στο μεγαλύτερο βαθμό του μέσω εργαλείων της γραμμικής άλγεβρας. Η διαχωρισιμότητα όμως αν και μας δείχνει ότι μία κατάσταση είναι δυνατό να κατασκευαστεί μέσω LOCC διαδικασιών ή ακόμα και να αναπαρασταθεί μεσω κλασσικών στατιστικών συστημάτων, είναι απλώς απόρροια του μηδενικού entanglement, γεγονός όμως που δεν την ταυτίζει με τη μηδενική κβαντικότητα μίας κατάστασης. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν έχουμε λάβει υπόψην την έννοια της παρατήρησης, η οποία καθιστά τόσο εύθραυστες τις κβαντικές καταστάσεις. Όπως θα δούμε μία διαχωρήσιμη κατάσταση είναι δυνατό να μη μπορεί να θεωρηθεί ¨κλασσική¨, αφού μπορεί να περιέχει ακόμα ποσοστά κβαντικότητας σε κάποια μορφή που δεν έχουμε μελετήσει έως τώρα.

Στην κλασική θεωρία πιθανοτήτων είναι γνωστό ότι για να μελετήσουμε τους συσχετισμούς μεταξύ δύο μεταβλητών μπορούμε να ορίσουμε την κοινή πληροφορία (mutual information)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I(X:Y)} &= \boldsymbol{H(X) - H(X|Y)} = \\ &= \boldsymbol{H(Y) - H(Y|X)} = \\ &= \boldsymbol{H(X) + H(Y) - H(X,Y)} \end{aligned}$$

όπου η απόδειξη της ισοδυναμίας των τριών αυτών μορφών μπορεί να βρεθεί στο Παράρτημα $\boldsymbol{\Gamma'}$, όπου αποδεικνύουμε τη σχέση
$\boldsymbol{H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)}$.

Τα μεγέθη που έχουμε χρησιμοποιήσει σε αυτές τις σχέσεις είναι τα εξής:

- $\boldsymbol{H(X) = -\sum_x P_{X=x} \log_2 P_{X=x}}$ η εντροπία του Shannon για τη μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ (ομοίως και για την $\boldsymbol{Y}$)

- $\boldsymbol{H(X|Y) = \sum_y P_{Y=y} H(X|Y=y) = H(X,Y) - H(Y)}$ και

- $H(Y|X) = \sum_x P_{X=x} H(Y|X=x) = H(X,Y) - H(X)$ οι conditional entropies

Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε θεωρεί ως μεταβλητές τις X και Y, όπου $\{x\}$ και $\{y\}$ οι πιθανές τιμές τους ατίστοιχα, και P_i τις πιθανότητες να επιλεχθούν.

Εάν σε αυτό το σημείο προσπαθήσουμε να ορίσουμε της conditional entropy για ένα κβαντικό διμερές σύστημα ρ^{XY}, θα πρέπει να εκφράσουμε στο φορμαλισμό μας το γεγονός ότι η παρατήρηση της μεταβλητής $Y = y$ δεν επηρεάζει απλώς την conditional entropy ή την mutual information, αλλά επηρεάζει το ίδιο το σύστημα, αφού αυτό καταρρέει στις ιδιοκαταστάσεις του ενός υποσυστήματος που έχουν την ιδιοτιμή που μετρήθηκε. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα για το άλλο υποσύστημα να επιβιώνουν μόνο οι καταστάσεις που είναι άμεσα συσχετισμένες με αυτές στις οποίες κατέρρευσε το πρώτο

Προβάλλοντας λοιπόν ένα σύστημα που αποτελείται από δύο υποσυστήματα S και A, ως προς μία πλήρη και ορθοκανονική βάση προβολικών τελεστών $\{{\Pi_j}^A\}$ $({\Pi_j}^A {\Pi_k}^A = \delta_{j,k} {\Pi_j}^A)$ που δρα μόνο στο σύστημα A, τότε κάθε μέτρηση θα μας οδηγεί σε κατάσταση

$$\rho_{S|{\Pi_j}^A} = \frac{{\Pi_j}^A \rho_{S,A} {\Pi_j}^A}{Tr_{S,A}[{\Pi_j}^A \rho_{S,A}]} \tag{3.1}$$

όπου $Tr_{S,A}[{\Pi_j}^A \rho_{S,A}]$ η κανονικοποίηση κάθε τέτοιας κατάστασης [1].

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε ως μέτρο της ελλείπουσας πληροφορίας για το σύστημα $\rho_{S,A}$ ή ακόμα και για την κατάσταση του υποσυστήματος S μετά τη δράση προβολικού τελεστή ${\Pi_j}^A$, την εντροπία Von-Neumann $S(\rho_{S|{\Pi_j}^A})$, ενώ ως μέτρο της ολικής αβεβαιότητας ως προς τη βάση των $\{{\Pi_j}^A\}$ μπορούμε να ορίσουμε την κβαντική conditional entropy

$$S(S|\{{\Pi_j}^A\}) = \sum_j P_j S(\rho_{S|{\Pi_j}^A}) \tag{3.2}$$

όπου $P_j = Tr_{S,A}[{\Pi_j}^A \rho_{S,A}]$ η αναμενόμενη τιμή του κάθε προβολικού τελεστή κατά τη δράση του στην κατάσταση $\rho_{S,A}$, με $\sum_j P_j = 1$.

Αντίστοιχα με τις κλασσικές καταστάσεις μπορούμε να ορίσουμε ως κβαντική κοινή πληροφορία το μέγεθος

$$J(S:A) = S(S) - S(S|\{{\Pi_j}^A\}) \tag{3.3}$$

[1] Η τιμή $Tr_{S,A}[{\Pi_j}^A \rho_{S,A}]$ ερμηνεύεται και ως πιθανότητα μέτρησης μέσω των $\{{\Pi_j}^A\}$ μίας συγκεκριμένης κατάστασης j του υποσυστήματος A, η οποία αποτελεί ιδιοκατάσταση του αντίστοιχου τελεστή ${\Pi_j}^A$.

όπου δεν μπορούμε πλέον να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Bayes το οποίο ισχύει μόνο για ανεξάρτητες μεταβλητές και επιτρέπει την απόδειξη της ισοδυναμίας αυτού του μεγέθους με τις άλλες δύο του μορφές, όπως στα κλασικά συστήματα. Βλέπουμε λοιπόν πως η διαφορά μεταξύ της κοινής πληροφορίας $\boldsymbol{I = S(\rho^S)+S(\rho^A)-S(\rho^{SA})}$, όπως ορίστηκε στην κλασσική θεωρία πιθανοτήτων (χρησιμοποιώντας όμως την εντροπία Von-Neumann), και της $\boldsymbol{J(S:A)}$ είναι δυνατό να ορίσει ένα μέτρο της ¨κβαντικότητας¨, το οποίο ονομάζεται *Quantum Discord* και εκφράζεται ως

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta(S:A)_{\{\Pi_j{}^A\}}} &= \boldsymbol{I(S:A)-J(S:A)} = && (3.4)\\
&= \boldsymbol{S(A)-S(S,A)+S(S|\{\Pi_j{}^A\})} && (3.5)
\end{aligned}$$

Για να μελετήσουμε περαιτέρω την quantum discord θα προσπαθήσουμε να βρούμε μία πιο εύχρηστη έκφραση για την ποσότητα $\boldsymbol{S(S|\{\Pi_j{}^A\})}$. Εάν ορίσουμε ως $\boldsymbol{\rho^D_{S,A} = \sum_j \Pi_j{}^A \rho_{S,A} \Pi_j{}^A}$ μία κατάσταση διαγώνια ως προς το σύστημα $\boldsymbol{A}$, στη βάση που κατασκευάζει η δράση των $\boldsymbol{\{\Pi_j{}^A\}}$, τότε μπορούμε να δούμε ότι οι ιδιοτιμές των $\boldsymbol{\Pi_j{}^A}$ σε αυτήν την κατάσταση είναι οι $\boldsymbol{\Pi^A_j \rho_{S,A} \Pi_j{}^A}$, αφού $\boldsymbol{\Pi_j{}^A \Pi_k{}^A = \delta_{j,k} \Pi_j{}^A}$. ¨Εχοντας όμως προηγουμένως ορίσει $\boldsymbol{\rho_{S|\Pi_j{}^A} = \frac{\Pi_j{}^A \rho_{S,A} \Pi_j{}^A}{Tr_{S,A}[\Pi_j{}^A \rho_{S,A}]}}$ μπορούμε να δούμε ότι ισχύει

$$\boldsymbol{\Pi_j{}^A \rho_{S,A} \Pi_j{}^A = P_j \rho_{S|\Pi_j{}^A}}$$

με αποτέλεσμα να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι ιδιοτιμές των $\boldsymbol{\Pi_j{}^A}$ είναι οι $\boldsymbol{P_j \rho_{S|\Pi_j{}^A}}$. Εάν υπολογίσουμε λοιπόν την εντροπία Von-Neumann για την κατάσταση $\boldsymbol{\rho^D_{S,A}}$ θα βρούμε:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S(\rho^D_{S,A})} &= \boldsymbol{S(\sum_j \Pi_j{}^A \rho_{S,A} \Pi_j{}^A)} = \\
&= \boldsymbol{S(\sum_j P_j \rho_{S|\Pi_j{}^A})} = \\
&= \boldsymbol{-tr_{S,A}[\rho^D_{S,A} \log \rho^D_{S,A}]} = \\
&= \boldsymbol{-tr_{S,A}[(\sum_j P_j \rho_{S|\Pi_j{}^A}) \log (\sum_k P_k \rho_{S|\Pi_k{}^A})]} = \\
&= \boldsymbol{-tr_{S,A}\{\sum_j [(P_j \rho_{S|\Pi_j{}^A}) \log (P_j \rho_{S|\Pi_j{}^A})]\}}
\end{aligned}$$

όπου για να αφαιρέσουμε τη μία άθροιση χρησιμοποιήσαμε την ορθοκανονικότητα των προβολικών τελεστών $\boldsymbol{\Pi_j{}^A}$, η οποία μεταφράζεταικαι ως ορθογωνιότητα των $\boldsymbol{\rho_{S|\Pi_j{}^A}}$.

Συνεχίζοντας τον υπολογισμό:

$$\begin{aligned}
S(\rho^D_{S,A}) &= -\sum_j tr_{S,A}[(P_j\rho_{S|\Pi_j{}^A})\log(P_j\rho_{S|\Pi_j{}^A})] = \\
&= -\sum_j tr_{S,A}[(P_j\rho_{S|\Pi_j{}^A})\log P_j] - \sum_j tr_{S,A}[(P_j\rho_{S|\Pi_j{}^A})\log\rho_{S|\Pi_j{}^A}] = \\
&= -\sum_j \{tr_{S,A}\rho_{S|\Pi_j{}^A}\}[P_j\log P_j] - \sum_j P_j\{tr_{S,A}[\rho_{S|\Pi_j{}^A}\log\rho_{S|\Pi_j{}^A}]\}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα:

$$tr_{S,A}[\rho_{S|\Pi_j{}^A}] = \frac{1}{Tr_{S,A}[\Pi_j{}^A\rho_{S,A}]}tr[\Pi_j{}^A\rho_{S,A}\Pi_j{}^A] = \frac{1}{Tr_{S,A}[\Pi_j{}^A\rho_{S,A}]}tr[\Pi_j{}^A\rho_{S,A}] = 1$$

$$\begin{aligned}
\rho^D_A &= tr_S[\rho^D_{AS}] = tr_S[\sum_j \Pi_j{}^A\rho_{S,A}\Pi_j{}^A] = \\
&= \sum_j tr_S[\Pi_j{}^A\rho_{S,A}\Pi_j{}^A] = \sum_j tr_S[P_j\rho_{S|\Pi_j{}^A}] = \\
&= \sum_j P_j tr_S[\rho_{S|\Pi_j{}^A}] = \sum_j P_j tr_S[\rho_S{}^j \otimes |j\rangle\langle j|] = \\
&= \sum_j P_j\,|j\rangle\langle j|
\end{aligned}$$

όπου τα στοιχεία $\{|j\rangle\}$ είναι η ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert του υποσυστήματος A, που κατασκευάστηκε από τη δράση των $\{\Pi_j{}^A\}$, και

$$\begin{aligned}
tr_{S,A}[\rho_{S|\Pi_j{}^A}] &= 1 \\
[tr_S\rho_S{}^j][tr_A\,|j\rangle\langle j|] &= 1 \\
[tr_S\rho_S{}^j]\cdot 1 &= 1 \\
tr_S[\rho^j_S] &= 1
\end{aligned}$$

Βρίσκουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
S(\rho^D_{S,A}) &= -\sum_j[P_j\log P_j] + \sum_j P_j S(\rho_{S|\Pi_j{}^A}) = \\
&= S(\rho^D_A) + S(S|\{\Pi_j{}^A\})
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$S(S|\{\Pi_j{}^A\}) = S(\rho^D_{S,A}) - S(\rho^D_A) \tag{3.6}$$

Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στη σχέση 3.5 βρίσκουμε την quantum discord ίση με

$$\boldsymbol{\delta(S:A)_{\{\Pi_j{}^A\}} = [S(\rho^D_{S,A}) - S(\rho^D_A)] - [S(\rho_{S,A}) - S(\rho_A)]} \tag{3.7}$$

Σε αυτή τη μορφή γίνεται εμφανής η εξάρτηση της quantum discord από την βάση των $\boldsymbol{\{\Pi_j{}^A\}}$, όπως και το ότι η quantum discord μηδενίζεται όταν η $\boldsymbol{\rho_{S,A}}$ είναι ήδη (από την αρχική της αναπαράσταση) εξεφρασμένη σε block diagonal μορφή ως προς τους $\boldsymbol{\Pi_j{}^A}$ ως

$$\boldsymbol{\rho_{S,A} = \Pi_j{}^A \rho_{S,A} \Pi_j{}^A} \tag{3.8}$$

Για να αποτελεί όμως καλά ορισμένο κριτήριο για την κβαντικότητα μίας κατάστασης, θα ήταν απαραίτητο η $\boldsymbol{\delta(S:A)_{\{\Pi_j{}^A\}}}$ να αλλάζει όλο και περισσότερο κατά την απομάκρυνση της $\boldsymbol{\rho_{S,A}}$ από την προηγούμενη έκφραση, αλλά ποτέ να μην αλλάζει πρόσημο. Σε μία περίπτωση όπου παρουσιαζόταν τέτοια αλλαγή προσήμου, η ασάφεια που θα προέκυπτε στον ορισμό της discord θα ήταν αποτέλεσμα του ότι θέλουμε ο μηδενισμός της να αποτελεί ακρότατο, και να ισχύει μόνο για τις καταστάσεις που αναπαρίστανται όπως στη σχέση 3.8. Είναι απαραίτητο λοιπόν να εξετάσουμε το πρόσημό της για αυθαίρετη κατάσταση.

Για να κάνουμε αυτήν τη μελέτη θα κάνουμε μία αναφορά στην concavity της ποσότητας $\boldsymbol{S(\rho_{S,A}) - S(\rho_A)}$, η οποία σε πολλά βιβλία αναφέρεται ως κβαντική conditional entropy, μέγεθος όμως που δεν ταυτίζεται με τον ορισμό που δώσαμε στην conditonal entropy $\boldsymbol{S(S|\{\Pi_j{}^A\})}$ σε αυτό το κεφάλαιο. Για αποφυγή συγχισης των δύο όρων, το μέγεθος αυτό θα το αποκαλούμε ημικλασσική conditonal entropy. Η απόδειξη της concavity της ημικλασικής conditional entropy $\boldsymbol{S(\rho_{S,A}) - S(\rho_A)}$ μπορεί να βρεθεί στο παράρτημα Δ′.

Η concavity αυτής της ποσότητας ως προς τα ορίσματα $\boldsymbol{\rho_{S,A}}$ έχει ως αποτέλεσμα, όπως και στην περίπτωση της Von-Neumann εντροπίας, την αύξησή της κατά τη διάρκεια μη επιλεκτικών προβολικών μετρήσεων, δηλαδή

$$\boldsymbol{[S(\rho^D_{S,A}) - S(\rho^D_A)] \geq [S(\rho_{S,A}) - S(\rho_A)]} \tag{3.9}$$

με αποτέλεσμα να βλέπουμε ότι

$$\boldsymbol{\delta(S:A)_{\{\Pi_j{}^A\}} = [S(\rho^D_{S,A}) - S(\rho^D_A)] - [S(\rho_{S,A}) - S(\rho_A)] \geq 0} \tag{3.10}$$

για κάθε κατάσταση $\boldsymbol{\rho_{S,A}}$.

Το τελευταίο κριτήριο που θα πρέπει να ελέγξουμε για την quantum discord είναι το αν αυτή είναι μηδενική αν και μόνο αν η κατάσταση είναι εξεφρασμένη στη μορφή $\boldsymbol{\rho_{S,A} = \Pi_j{}^A \rho_{S,A} \Pi_j{}^A}$, δηλαδή είναι block diagonal στο χώρο που κατασκευάζουν οι τελεστές $\boldsymbol{\Pi_j{}^A}$. Το ευθύ επιχείρημα εύκολα φαίνεται από το γεγονός ότι μία τέτοια κατάσταση θα ταυτίζεται με την αντίστοιχη διαγωνιοποιημένη μορφή της $\boldsymbol{\rho^D_{S,A}}$, με αποτέλεσμα να μηδενίζεται η discord.

Το ανίστροφο όμως επιχείρημα θα χρειαστεί την υπόθεση ότι υπάρχει κάποια κατάσταση για την οποία η discord είναι μηδενική, αλλά η οποία δεν είναι γραμμένη σε αυτήν τη μορφή. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να γράψουμε την κατάσταση αυτή στη μορφή:

$$\boldsymbol{\rho_{S,A} = {\Pi_j}^A \rho_{S,A} {\Pi_j}^A + c \left|i\right\rangle \left\langle j\right| \otimes \left|k\right\rangle \left\langle k'\right|} \tag{3.11}$$

όπου $\boldsymbol{|k\rangle}$ οι ιδιοκαταστάσεις του υποσυστήματος $\boldsymbol{A}$ στο χώρο που ορίζουν οι τελεστές $\boldsymbol{{\Pi_k}^A}$, με $\boldsymbol{k \neq k'}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θωρήσουμε κατάλληλη αναπαράσταση του πρώτου υπόχωρου, έτσι ώστε τα ανύσματα $\boldsymbol{i}$ και $\boldsymbol{j}$ να είναι κάθετα. Τότε εάν αφαιρούσαμε από την κατάσταση το μη διαγώνιο αυτό στοιχείο (και το συζηγές του), όπως περιμένουμε για τη νέα κατάσταση $\boldsymbol{\hat{\rho}_{SA}}$ θα έχουμε απώλεια πληροφορίας για το σύστημα, με αποτέλεσμα την αύξηση της εντροπίας του, ενώ στη βάση που $\boldsymbol{i \neq j}$ οι εντροπίες $\boldsymbol{S(\hat{\rho}_A)}$ και $\boldsymbol{S(\hat{\rho}^D_A)}$ θα ταυτίζονταν. Ταυτόχρονα όμως, αφού η κατάσταση $\boldsymbol{\hat{\rho}_{SA}}$ αποτελεί φυσική κατάσταση, όπως έχουμε δείξει θα πρέπει η discord της να είναι θετική, με αποτέλεσμα να βρίσκουμε ότι αν η discord της $\boldsymbol{\rho_{S,A}}$ είναι μηδενική, θα ισχύει

$$\begin{aligned} \boldsymbol{0} &= \boldsymbol{[S(\rho^D_{S,A}) - S(\rho^D_A)] - [S(\rho_{S,A}) - S(\rho_A)] \geq} \\ &\geq \boldsymbol{[S(\rho^D_{S,A}) - S(\rho^D_A)] - [S(\hat{\rho}_{S,A}) - S(\hat{\rho}_A)]} \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού μας δείχνει ότι η $\boldsymbol{\delta(S:A)_{\{{\Pi_j}^A\}}}$ για την κατάσταση $\boldsymbol{\hat{\rho}_{S,A}}$ θα έπρεπε να είναι αρνητική, αντιθέτα με ότι έχουμε αποδείξει προηγουμένως. Δείξαμε λοιπόν ότι η quantum discord, για οικογένεια προβολικών τελεστών $\boldsymbol{\{{\Pi_j}^A\}}$ είναι μηδενική αν και μόνο αν η κατάσταση είναι εξεφρασμένη στη μορφή $\boldsymbol{\rho_{S,A} = {\Pi_j}^A \rho_{S,A} {\Pi_j}^A}$.

Βλέποντας τη φυσική σημασία της quantum discord ως την πληροφορία που χάνεται για το ένα υποσύστημα, κατά τη μελέτη μίας κατάστασης του άλλου, σε βάση διαφορετική από αυτή που είναι εξεφρασμένο, είναι λογικό να μπορούμε να τη θεωρήσουμε ως ένα διαφορετικό μέτρο κβαντικότητας, ανεξάρτητο του entanglement που έχουμε μελετήσει ως τώρα. Μάλιστα, η ελαχιστοποίησή της θα μπορούσε να μας δώσει μία πολύ καθαρή εικόνα για το ποσοστό των καθαρά κβαντικών συσχετισμών σε μία κατάσταση, αφού τότε η discord θα μας έδινε το ποσοστό της πληροφορίας για τα υποσυστήματα, η οποία θα χανόταν μέσω των μετρήσεων, ακόμα και αν αυτές γίνονταν μέσω του καταλληλότερου συνόλου προβολικών τελεστών.

Έχοντας ορίσει το μέγεθος $\boldsymbol{I = S(\rho^S) + S(\rho^A) - S(\rho^{SA})}$ το οποίο είναι ανεξάρτητο της βάσης των $\boldsymbol{\{{\Pi_j}^A\}}$ που χρησιμοποιούμε, και βλέποντας ότι λόγω της subadditivity της εντροπίας είναι πάντα θετικό, μπορούμε να το θεωρήσουμε ως μέτρο των ολικών συσχετισμών. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα κατά τη ελαχιστοποίηση της discord, το μέγεθος $\boldsymbol{J(S:A) = S(\rho^S) - S(S|\{\Pi_j{}^A\})}$ να πρέπει να μεγιστοποιείται, και ταυτόχρονα να αποτελεί μέτρο των κλασικών συσχετισμών. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε την quantum discord, ως τη διαφορά της πληροφορίας που περιέχεται σε όλους τους συσχετισμούς, από αυτήν που περιέχεται μόνο στους κλασικούς, ώστε να αποτελεί με τη σειρά της μέτρο της πληροφορίας που περιέχεται μόνο στους κβαντικούς συσχετισμούς, δηλαδή

$$\begin{aligned} \boldsymbol{QD \equiv \delta(S:A)_{\{\Pi_j{}^A\}min}} &= \boldsymbol{I(\rho^{SA}) - \sup_{\{\Pi_j{}^A\}} J(S:A)} = \\ &= \boldsymbol{S(\rho^A) - S(\rho^{SA}) + \inf_{\{\Pi_j{}^A\}} S(S|\{\Pi_j{}^A\})} \end{aligned}$$

Έχοντας σε αυτό το σημείο ορίσει ένα μεγάλο πλήθος κριτηρίων κβαντικότητας, στο επόμενο κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την Concurrence και την Quantum Discord για ένα ρεαλιστικό σύστημα διμερούς κατάστασης σε χώρο Hilbert $\mathbf{2 \times 2}$, καθώς αυτή εξελίσεται σε ηλεκτρομαγνητική κοιλότητα. Σκοπός αυτού του υπολογισμού είναι η μελέτη της εξέλιξης του entanglement και της quantum discord με το χρόνο, καθώς και η προσπάθεια κατανόησης του τρόπου με τον οποίο αυτά τα μεγέθη σχετίζονται μεταξύ τους.

Κεφάλαιο 4

Μελέτη της εξέλιξης της **concurrence** και της **quantum discord** για **Werner State** παγιδευμένη σε ηλεκτρομαγνητική κοιλότητα

Το σύστημα το οποίο θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο αποτελείται από μία διμερή Werner state

$$\boldsymbol{\rho_{AB} = r\,|\psi^+\rangle\,\langle\psi^+| + \frac{1-r}{4}I_4} \tag{4.1}$$

η οποία κατασκευάζεται μέσω στατιστικής μείξης της Bell κατάστασης $\boldsymbol{|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)}$, και της πλήρως αναμεμειγμένης κατάστασης $\boldsymbol{I_4 = \frac{1}{4}\sum_{i,j}|ij\rangle\,\langle ij|\ (i,j=0,1)}$, σε ποσοστά $\boldsymbol{r}$ και $\boldsymbol{1-r}$ αντίστοιχα.

Η κατάσταση αυτή θα θεωρήσουμε ότι κατασκευάζεται από δύο ίδια δισταθμικά άτομα τοποθετημένα σε ηλεκτρομαγνητική κοιλότητα, τα οποία έχουν γνωστή διαφορά ενέργειας μεταξύ δύο σταθμών τους, και την οποία θέλουμε να εκμεταλλευτούμε ώστε ένας από τους τρόπους ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου να οδηγήσει σε ταλαντώσεις Rabi των ατόμων μεταξύ των δύο καταστάσεών τους. Με αυτόν τον τρόπο θα επιτύγχουμε φαινόμενα εξαναγκασμένης εκπομπής και απορρόφησης φωτονίων (μέσω των οποίων θα αλληλεπιδρά το πεδίο του λουτρού με τα άτομα), γεγονός που περιμένουμε να οδηγήσει σε κάποια μορφή απώλειας πληροφορίας της κατάστασης προς το περιβάλλον. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με κυρίαρχο τρόπο ταλάντωσης, μέσω του οποίου το πεδίο θα αλληλεπιδρά με κάθε άτομο ανεξάρτητα, όπως εάν είχαμε δύο ανεξάρτητα (ίδια με το αρχικό) ηλεκτρομαγνητικά πεδία, κάθε ένα από τα οποία αλληλεπιδρούσε με το αντίστοιχό άτομο με τον ίδιο τρόπο. Το μοντέλο που εκφράζει το σύστημα που θέλουμε να μελετήσουμε ονομάζεται πρότυπο των Jaynes-Cummings, τα βασικά στοιχεία του οποίου θα αναφέρουμε στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

4.1 Βασικά στοιχεία του Μοντέλου των Jaynes-Cummings

Θεωρώντας ότι τα πεδία είναι θερμικά, οι καταστάσεις τους γνωρίζουμε ότι θα χαρακτηρίζονται από πίνακα πυκνότητας

$$\rho_{f_m} = \frac{e^{-H_m/k_B T}}{tr[e^{-H_m/k_B T}]} \tag{4.2}$$

που έχει ως ιδιοκαταστάσεις τις καταστάσεις ενέργειας των φωτονίων, οι οποίες είναι κβαντισμένες αφού βρισκόμαστε σε ηλεκτρομαγνητική κοιλότητα πεπερασμένων διαστάσεων. Όπως βλέπουμε, αυτή είναι απλώς η κβαντική μορφή της στατιστικής κατανομής, όπου η Χαμιλτονιανή που εμφανίζεται στον εκθέτη αντικαθιστά την ενέργεια των φωτονίων. Η θερμοκρασία που εμφανίζεται στον πίνακα πυκνότητας των πεδίων αποτελεί τη στατιστική θερμοκρασία, η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι έχουμε θεωρήσει τα πεδία θερμικά. Στη μελέτη μας θα θεωρήσουμε κοινή θερμοκρασία και για τα δύο πεδία που αλληλεπιδρούν με τα άτομα, αφού θεωρούμε ότι αυτά αλληλεπιδρούν με τον ίδιο τρόπο.

Από τη θεωρία πεδίου γνωρίζουμε ότι για ένα ανυσματικό πεδίο παγιδευμένο σε κοιλότητα:

$$H_m = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2}\hbar\omega_i({a_i}^{\dagger} a_i + a_i {a_i}^{\dagger}) = \sum_{i=0}^{\infty} \hbar\omega_i({a_i}^{\dagger} a_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \hbar\omega_i \tag{4.3}$$

όπου a_i και ${a_i}^{\dagger}$ οι τελεστές καταστροφής και δημιουργίας του $i-$οστού τρόπου ταλάντωσης του πεδίου με χαρακτηριστική συχνότητα ω_i, για τους οποίους ισχύει η σχέση μετάθεσης $[a_i, {a_j}^{\dagger}] = \delta_{ij}$.

Λόγω του ότι μας ενδιαφέρουν μόνο οι διαφορές ενέργειας από την ενέργεια του κενού, μπορούμε να αγνοήσουμε το τελευταίο άθροισμα που οδηγεί σε απειρισμό, και να χρησιμοποιούμε ως ενέργεια του πεδίου την:

$$H_m = \sum_{i=0}^{\infty} \hbar\omega_i({a_i}^{\dagger} a_i) \tag{4.4}$$

Ενώ όμως στην πλήρη Χαμιλτονιανή θα συνεισφέρουν όλοι οι κανονικοί τρόποι του πεδίου, ο όρος αλληλεπίδρασης του πεδίου με τα άτομα θα έχει έναν κυρίαρχο όρο, που θα αντιστοιχεί στην κοντινότερη συχνότητα του πεδίου σε σχέση με την χαρακτηριστική συχνότητα της μετάβασης του ατόμου μεταξύ των δύο στάθμων που μας ενδιαφέρουν: $\boldsymbol{\omega_a = \frac{\Delta E}{\hbar}}$. Σε μία τέτοια περίπτωση αναμένουμε ότι θα παρατηρηθούν φαινόμενα συντονισμού και θα είναι δυνατή η μετάβαση αυτή με σημαντική συχνότητα.

Το τμήμα της κατάστασης του πεδίου, το οποίο θα αλληλεπιδράσει ισχυρά με το κάθε άτομο, αρκεί λοιπόν να περιέχει μόνο τα φωτόνια που παράγονται και καταστρέφονται με τη συγκεκριμένη ενέργεια (έστω $\boldsymbol{E = \hbar\omega}$), οπότε αγνοώντας τις υπόλοιπες ενέργειες μπορούμε να εκφράσουμε την κατάσταση του πεδίου στο χώρο των ιδιοκαταστάσεων του αριθμού των φωτονίων. Βρίσκουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho_{f_m}} = \frac{e^{-\hbar\omega(a^\dagger a)/k_B T}}{tr[e^{-\hbar\omega(a^\dagger a)/k_B T}]} \sum_n |n\rangle\langle n| &= \sum_n \frac{e^{-\hbar\omega n/k_B T}}{tr[e^{-\hbar\omega n/k_B T}]} |n\rangle\langle n| = \\ &= \sum_n e^{-\hbar\omega n/k_B T}(1 - e^{-\hbar\omega/k_B T}) |n\rangle\langle n| \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι για να κατασκευάσουμε αυτήν τη σχέση χρησιμοποιήσαμε τον μοναδιακό τελεστή στο χώρο του αριθμού των καταστάσεων των φωτονίων $\boldsymbol{I = \sum_n |n\rangle\langle n|}$, και θεωρώντας ως πιθανότητα εύρεσης $\boldsymbol{n}$ φωτονίων στο σύστημα την $\boldsymbol{P_n = e^{-\hbar\omega n/k_B T}(1 - e^{-\hbar\omega/k_B T})}$, μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο αριθμό φωτονίων συγκεκριμένης ενέργειας ως

$$\langle n\rangle = \sum_n nP_n = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \tag{4.5}$$

Ο αριθμός αυτός δεν είναι άλλος από τον μέσο αριθμό φωτονίων στη συγκεκριμένη ενέργεια, όπως αυτός προβλέπεται από την στατιστική Bose-Einstein. Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα στην κατάσταση του πεδίου βρίσκουμε λοιπόν

$$\rho_{f_m} = \sum_n \frac{\langle n\rangle^n}{(1 + \langle n\rangle)^{n+1}} |n\rangle\langle n| \tag{4.6}$$

η οποία θα είναι και η μορφή της κατανομής που θα χρησιμοποιήσουμε.

Η Χαμιλτονιανή των ατόμων, εκτός των κινηματικών τους συνεισφορών και των όρων αλληλεπίδρασης τους ως σύνολο με το πεδίο, θα περιέχει και όρους αλληλεπίδρασης που θα επηρεάζουν άμεσα τη δομή τους και οποίοι θα προέρχονται από την αλληλεπίδραση του ηλεκτρικού πεδίου με την διπολική ροπή τους (ή αντίστοιχα του μαγνητικού πεδίου με τη μαγνητική ροπή τους, την οποία θα αγνοήσουμε στο σύστημα που θα μελετήσουμε).

Οι όροι αυτοί θα έχουν μορφή

$$\boldsymbol{V = -pE} \tag{4.7}$$

όπου $\boldsymbol{p}$ η προβολή της διπολικής ροπής του κάθε ατόμου στη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου $\boldsymbol{E}$ της κοιλότητας, το οποίο είναι περιοδικό και εξαρτάται από τη θέση μέσα στη κοιλότητα. Η διπολική ροπή αντίστοιχα, σχετίζεται με την απόσταση του πυρήνα από το ηλεκτρόνιο του ατόμου, και έχει δύο δυνατές αναμενόμενες τιμές, μία για κάθε στάθμη στην οποία μπορεί να βρεθεί το άτομο. Παρατηρώντας λοιπόν ότι η διαφορά των δύο ενεργειακών σταθμών ορίζει στο πρόβλημά μας δύο καταστάσεις ενέργειας, των οποίων μας ενδιαφέρει μόνο η σχετική διαφορά, η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή που χαρακτηρίζει τις δύο αυτές ενεργειακές στάθμες θα έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{H_e = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z} \tag{4.8}$$

όπου $\boldsymbol{\sigma_z}$ ο τρίτος πίνακας του Pauli, ο οποίος έχει ως ιδιοκαταστάσεις του τις καταστάσεις ενέργειας $|\boldsymbol{e}\rangle$ και $|\boldsymbol{g}\rangle$, με ιδιοτιμές $\boldsymbol{E_e = \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}}$ και
$\boldsymbol{E_g = -\frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}}$ αντίστοιχα.

Για να υπολογίσουμε σε αυτό το σημείο την Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης, θα θεωρήσουμε την κοιλότητα προσανατολισμένη στον άξονα $\boldsymbol{z}$, και κατασκευασμένη έτσι ώστε ο μόνος βαθμός ελευθερίας του προβλήματος να είναι η απόσταση από το ένα εκ των δύο τοιχωμάτων. Τότε, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από έναν κανονικό τρόπο ταλάντωσης μπορεί να βρεθεί εύκολα και είναι ίση με

$$\boldsymbol{E(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}[a + a^\dagger]\sin kz} \tag{4.9}$$

όπου $\boldsymbol{V}$ ο όγκος της κοιλότητας, ενώ οι τελεστές $\boldsymbol{a}$ και $\boldsymbol{a^\dagger}$ είναι ορισμένοι στην εικόνα Schrodinger ώστε να μην εξαρτώνται από το χρόνο.

Η διπολική ροπή όπως γνωρίζουμε, στο χώρο των $|\boldsymbol{e}\rangle$ και $|\boldsymbol{g}\rangle$ θα έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{p = \sum_{i,j} \langle i|p|j\rangle\, |i\rangle \langle j|} \tag{4.10}$$

όποι $\boldsymbol{i, j = e, g}$. Οι όροι για τους οποίους $\boldsymbol{i = j}$ μπορούν να αγνοηθούν, επειδή σε καλή προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει προτιμητέα διεύθυνση για τη διπολική ροπή, με αποτέλεσμα αυτή να έχει αναμενόμενη τιμή ως προς την ενέργεια ίση με μηδέν. Άρα:

$$\boldsymbol{p = \langle e|p|g\rangle\, |e\rangle \langle g| + \langle g|p|e\rangle\, |g\rangle \langle e| \equiv p_{eg}\sigma_+ + p_{ge}\sigma_-} \tag{4.11}$$

όπου $\boldsymbol{\sigma_+}$ και $\boldsymbol{\sigma_-}$ οι πίνακες ανάβασης και κατάβασης μεταξύ των δύο ενεργειακών καταστάσεων του ατόμου.

Βλέπουμε λοιπόν ότι στην εικόνα του Schrodinger η Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης θα είναι η

$$\boldsymbol{H_{int} = \hbar g(\sigma_- + \sigma_+)(a + a^\dagger)\sin(kz)} \tag{4.12}$$

όπου $\boldsymbol{g = -\frac{p_{ge}}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V}}}$, και $\boldsymbol{p_{ge} = p_{eg}}$ αφού χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρήσαμε το $\boldsymbol{p_{eg}}$ πραγματικό.

Εάν μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα εξελισσόταν ο τελεστής της διαταραχής $\boldsymbol{\hbar g(\sigma_- + \sigma_+)(a + a^\dagger)\sin(kz)}$ στην εικόνα της αλληλεπίδρασης, οπου $\boldsymbol{H_0 = H_f + H_e = \hbar\omega(a^\dagger a) + \frac{1}{2}\hbar\omega_{eg}\sigma_z}$ θα βρούμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V(t)} &= \boldsymbol{e^{\frac{i}{\hbar}(H_f+H_e)}H_{int}e^{-\frac{i}{\hbar}(H_f+H_e)}} = \\
&= \boldsymbol{\hbar g\sin(kz)(\sigma_- a^\dagger e^{i(\omega-\omega_{eg})t} + \sigma_+ a e^{-i(\omega-\omega_{eg})t}} + \\
&+ \boldsymbol{\sigma_+ a^\dagger e^{i(\omega+\omega_{eg})t} + \sigma_- a e^{-i(\omega+\omega_{eg})t})}
\end{aligned}$$

όπου στην περίπτωση του συντονισμού που μας ενδιαφέρει βλέπουμε ότι οι δύο τελευταίοι αργοί τρόποι ταλάντωσης (οι οποίοι δε διατηρούν την ενέργεια) είναι δυνατό να απορριφθούν, με αποτέλεσμα η τελική Χαμιλτονιανή της αλληλεπίδρασης, γραμμένη στην εικόνα Schrodinger να είναι η

$$\boldsymbol{H_{int} = \hbar g(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)\sin(kz).} \tag{4.13}$$

Για αυτούς τους δύο όρους είναι εύκολο να κατανοήσουμε τη φυσική τους σημασία, με τον πρώτο να αναφέρεται σε απορρόφηση φωτονίου με ταυτόχρονη διέγερση του ατόμου, και τον δεύτερο να αναφέρεται σε εκπομπή φωτονίου, η οποία συνοδεύεται από αποδιέγερση του ατόμου.

Οι τελευταίες αλλαγές που θέλουμε να εφαρμόσουμε σε αυτήν την Χαμιλτονιανή σχετίζονται με τον κυματαριθμό, όπως αυτός προκύπτει λόγω των οριακών συνθηκών ($\boldsymbol{k = \frac{\mu\pi}{L}}$) όπου μ ο τρόπος ταλάντωσης του πεδίου που αλληλεπιδρά με το άτομο, και $\boldsymbol{L}$ το μήκος της κοιλότητας στη διεύθυνση του άξονα $\boldsymbol{z}$. Για να δώσουμε λοιπόν στο πρόβλημά μας τη φυσική έννοια της κίνησης του ατόμου, αρκεί να κάνουμε την αντικατάσταση $\boldsymbol{z = ut}$, όπου $\boldsymbol{u}$ η μέση ταχύτητα του κάθε ατόμου στη διεύθυνση του άξονα $\boldsymbol{z}$, και η οποία αντικατάσταση είναι πολύ καλή προσέγγιση, αφού θεωρώντας ότι το άτομο είναι παγιδευμένο στην κοιλότητα, ο όρος αυτός αλλάζει με περιοδικό ρυθμό την ένταση της αλληλεπίδρασής του με το πεδίο. Για διευκόλυνση στη μελέτη μας, θα θεωρήσουμε ότι και τα δύο άτομα έχουν ίδια ταχύτητα ίση με $\boldsymbol{u}$, και ότι αλληλεπιδρούν με τον ίδιο κανονικό τρόπο $\boldsymbol{\mu}$ των αντίστοιχων πεδίων.

4.2 Εξέλιξη του συστήματος των δύο δισταθμικών entangled ατόμων στην κοιλότητα

Η αρχική κατάσταση των δύο ατόμων και των δύο ανεξάρτητων πεδίων που αλληλεπιδρούν με αυτά θα θεωρήσουμε πως έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{\rho(0) = \rho_{AB}(0) \otimes \rho_1(0) \otimes \rho_2(0)} \tag{4.14}$$

όπου $\boldsymbol{\rho_{AB}}$ η Werner κατάσταση των δύο ατόμων, και $\boldsymbol{\rho_1}$, $\boldsymbol{\rho_2}$ οι καταστάσεις των δύο πεδίων που αλληλεπιδρούν ανεξάρτητα με το κάθε σωματίδιο. Η συνολική αυτή κατάσταση θα εξελιχθεί μέσω δύο μοναδιακών τελεστών εξέλιξης, οι οποίοι δρουν με τον ίδιο τρόπο στα ζεύγη των συστημάτων του ατόμου $\boldsymbol{A}$ με το πεδίο $\mathbf{1}$, και του ατόμου $\boldsymbol{B}$ με το πεδίο $\mathbf{2}$ στη μορφή

$$\boldsymbol{U_m(t) = Te^{-\int_0^t H_{int} dt'}} \tag{4.15}$$

όπου $\boldsymbol{m = 1, 2}$ χαρακτηρίζει σε ποιο από τα δύο πεδία αναφερόμαστε. Το $\boldsymbol{T}$ συμβολίζει το time order product που εφαρμόζεται, ώστε οι στοιχειώδεις τελεστές $\boldsymbol{dU_m(t)}$ που χρησιμοποιήσαμε ώστε να κατασκευάσουμε τον πλήρη τελεστή εξέλιξης, να δρουν ως $\boldsymbol{[dU_m(t_2)][dU_m(t_1)]\,|\psi(0)\rangle}$, όταν $\boldsymbol{0 < t_1 < t_2}$. Βρίσκουμε λοιπόν τη μορφή του ως:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{U_m(t)} &= \boldsymbol{Te^{-i\int_0^t \hbar g(\sigma_+ a + a^\dagger \sigma_-)\sin(\frac{\mu\pi u t'}{L})dt'}} = \\ &= \boldsymbol{Te^{-ig\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}\theta(t)}} \end{aligned}$$

όπου ορίσαμε

$$\boldsymbol{\theta(t) = \hbar\int_0^t \sin(\frac{\mu\pi u t'}{L})dt' = \frac{\hbar L}{\mu\pi u}[1 - \cos(\frac{\mu\pi u t}{L})]} \tag{4.16}$$

Συνεχίζοντας τον υπολογισμό, μέσω ανάπτυξης κατά Taylor, βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U_m(t)} &= 1 - ig\theta(t)\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2!}g^2(\theta(t))^2\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} + \\
&+ i\frac{1}{3!}g^3(\theta(t))^3\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \\
&= 1 - ig\theta(t)\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2!}g^2(\theta(t))^2\begin{pmatrix} aa^\dagger & 0 \\ 0 & a^\dagger a \end{pmatrix} + \\
&+ i\frac{1}{3!}g^3(\theta(t))^3\begin{pmatrix} aa^\dagger & 0 \\ 0 & a^\dagger a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \\
&= 1 - ig\theta(t)\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2!}g^2(\theta(t))^2\begin{pmatrix} \sqrt{aa^\dagger} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^\dagger a} \end{pmatrix}^2 + \\
&+ i\frac{1}{3!}g^3(\theta(t))^3\begin{pmatrix} \sqrt[3]{aa^\dagger} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{a^\dagger a} \end{pmatrix}^3\begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{\sqrt{aa^\dagger}} \\ \frac{a^\dagger}{\sqrt{a^\dagger a}} & 0 \end{pmatrix} + \ldots = \\
&= \cos[\begin{pmatrix} g\theta(t)\sqrt{aa^\dagger} & 0 \\ 0 & g\theta(t)\sqrt{a^\dagger a} \end{pmatrix}] - \\
&- i\sin[\begin{pmatrix} g\theta(t)\sqrt{aa^\dagger} & 0 \\ 0 & g\theta(t)\sqrt{a^\dagger a} \end{pmatrix}]\begin{pmatrix} 0 & \frac{a}{\sqrt{aa^\dagger}} \\ \frac{a^\dagger}{\sqrt{a^\dagger a}} & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \cos[g\theta(t)\sqrt{aa^\dagger}] & 0 \\ 0 & \cos[g\theta(t)\sqrt{a^\dagger a}] \end{pmatrix} - \\
&- i\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin[g\theta(t)\sqrt{aa^\dagger}]a}{\sqrt{aa^\dagger}} \\ \frac{\sin[g\theta(t)\sqrt{a^\dagger a}]a^\dagger}{\sqrt{a^\dagger a}} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ή σε ποιο εύχρηστη μορφή

$$\boldsymbol{U_m(t)} = \begin{pmatrix} \cos[g\theta(t)\sqrt{aa^\dagger}] & -i\frac{\sin[g\theta(t)\sqrt{aa^\dagger}]a}{\sqrt{aa^\dagger}} \\ -i\frac{\sin[g\theta(t)\sqrt{a^\dagger a}]a^\dagger}{\sqrt{a^\dagger a}} & \cos[g\theta(t)\sqrt{a^\dagger a}] \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

Ο τρόπος με τον οποίο θα έχει εξελιχθεί η συνολική κατάσταση σε μία χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$, είναι λοιπόν δυνατό να υπολογιστεί ως:

$$\boldsymbol{\rho(t)} = \{U_2 \otimes U_1\}\rho_{AB}(0) \otimes \rho_1(0) \otimes \rho_2(0)\{U_2 \otimes U_1\}^\dagger \tag{4.18}$$

όπου:

$$\boldsymbol{\rho_{AB}(0) = r\left|\psi^+\right\rangle\left\langle\psi^+\right| + \frac{1-r}{4}I_4 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+r & 2r & 0 \\ 0 & 2r & 1+r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-r \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\rho_m = \sum_n \frac{\langle n\rangle^n}{(1+\langle n\rangle)^{n+1}}\left|n\right\rangle\left\langle n\right| \equiv \sum_n P_n\left|n\right\rangle\left\langle n\right|}$$

Μέσω της δράσης των τελεστών εξέλιξης, και αφαιρώντας μέσω ίχνους τους βαθμούς ελευθερίας του περιβάλλοντος, μπορούμε να δούμε ότι η κατάσταση που θα κατασκευαστεί σε αυθαίρετη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t}$ θα έχει τη μορφή:

$$\boldsymbol{\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}} \tag{4.19}$$

όπου τα στοιχεία της θα είναι τα

$$\boldsymbol{\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{4}(1-r)\{\sum_{n,m} P_n P_m C_{n+1}^2 C_{m+1}^2 + \sum_{n,m} P_{n+1} P_{m+1} S_{n+1}^2 S_{m+1}^2\} + \\ &+ \frac{1}{4}(1+r)\{\sum_{n,m} P_n P_{m+1} C_{n+1}^2 S_{m+1}^2 + \sum_{n,m} P_{n+1} P_m S_{n+1}^2 C_{m+1}^2\} \end{aligned}}$$

$$\boldsymbol{\begin{aligned} \rho_{22} &= \frac{1}{4}(1-r)\{\sum_{n,m} P_n P_m C_{n+1}^2 S_{m+1}^2 + \sum_{n,m} P_{n+1} P_m S_{n+1}^2 C_m^2\} + \\ &+ \frac{1}{4}(1+r)\{\sum_{n,m} P_n P_m C_{n+1}^2 C_m^2 + \sum_{n,m} P_{n+1} P_m S_{n+1}^2 S_{m+1}^2\} \end{aligned}}$$

$$\boldsymbol{\begin{aligned} \rho_{33} &= \frac{1}{4}(1-r)\{\sum_{n,m} P_n P_m S_{n+1}^2 C_{m+1}^2 + \sum_{n,m} P_n P_{m+1} C_n^2 S_{m+1}^2\} + \\ &+ \frac{1}{4}(1+r)\{\sum_{n,m} P_n P_{m+1} S_{n+1}^2 S_{m+1}^2 + \sum_{n,m} P_n P_m C_n^2 C_{m+1}^2\} \end{aligned}}$$

$$\boldsymbol{\begin{aligned} \rho_{44} &= \frac{1}{4}(1-r)\{\sum_{n,m} P_n P_m S_{n+1}^2 S_{m+1}^2 + \sum_{n,m} P_n P_m C_n^2 C_m^2\} + \\ &+ \frac{1}{4}(1+r)\{\sum_{n,m} P_n P_m S_{n+1}^2 C_m^2 + \sum_{n,m} P_n P_m C_n^2 S_{m+1}^2\} \end{aligned}}$$

$$\boldsymbol{\rho_{23} = \frac{r}{2}\sum_{n,m} P_n P_m C_n C_m C_{n+1} C_{m+1}}$$

$$\boldsymbol{\rho_{32} = \frac{r}{2}\sum_{n,m} P_n P_m C_n C_m C_{n+1} C_{m+1} = \rho_{23}}$$

όπου $\boldsymbol{C_k = \cos(\sqrt{k} g \theta(t))}$ και $\boldsymbol{S_k = \sin(\sqrt{k} g \theta(t))}$.

Βλέπουμε ότι ο πίνακας πυκνότητας διατηρεί την αρχική του μορφή, ενώ μπορούμε να διακρίνουμε μία περαιτέρω συμμετρία σε αυτή, που μας επιτρέπει να τον θεωρήσουμε ως ειδική περίπτωση μίας ευρύτερης οικογένειας καταστάσεων της μορφής

$$\boldsymbol{\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}}$$

οι οποίες είναι δυνατό να βρεθούν στη βιβλιογραφία ως καταστάσεις $\boldsymbol{X}$ λόγω του σχήματός τους. Για τις καταστάσεις αυτές είναι δυνατός ο αναλυτικός υπολογισμός και της Concurrence, αλλά και της Quantum Discord $\boldsymbol{QD}$, στον οποίο θα αναφερθούμε στο επόμενο απόσπασμα.

Κεφάλαιο 5

Υπολογισμός της Concurrence και της Quantum Discord

5.1 Concurrence και Quantum Discord για γενική κατάσταση μορφής X

Για μία φυσική κατάσταση

$$\boldsymbol{\rho_X} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}$$

ο γενικότερος υπολογισμός που μπορούμε να κάνουμε είναι θεωρώντας ότι εργαζόμαστε με επτά παραμέτρους $\boldsymbol{\rho_{ij}}$, για τις οποίες πρέπει να ικανοποιούνται κάποιες ιδιότητες ώστε αυτή να αποτελεί φυσική κατάσταση. Οι συνθήκες αυτές είναι η απαίτηση θετικότητας η οποία μεταφράζεται ως $\boldsymbol{\rho_{22}\rho_{33} \geq |\rho_{23}|^2}$ και $\boldsymbol{\rho_{11}\rho_{44} \geq |\rho_{14}|^2}$, όπως και η απαίτηση $\boldsymbol{tr\rho_X = 1}$ που ικανοποιείται εάν $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{4} \rho_{ii} = 1}$. Τέλος, ο πίνακας είναι ερμητιανός, με αποτέλεσμα να ισχύει $\boldsymbol{\rho_{32} = \rho_{23}^\star}$ και $\boldsymbol{\rho_{41} = \rho_{14}^\star}$.

Οι ιδιοκαταστάσεις του πίνακα αυτού είναι οι

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[(\rho_{11} + \rho_{44}) + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{14}|^2}]$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}[(\rho_{11} + \rho_{44}) - \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{14}|^2}]$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}[(\rho_{22} + \rho_{33}) + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2}]$$

$$\boldsymbol{\lambda_4 = \frac{1}{2}[(\rho_{22} + \rho_{33}) - \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2}]}$$

οι οποίες είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό της Quantum Discord.

Τα μεγέθη που μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε ώστε να βρούμε την $\boldsymbol{QD}$, όπως την ορίσαμε στο τέλος του τρίτου κεφαλαίου, είναι η εντροπία του υποσυστήματος $\boldsymbol{B}$, του συνολικού συστήματος, αλλά και η κβαντική Conditional entropy την οποία θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε ως προς τις μετρήσεις στο σύστημα $\boldsymbol{B}$.

Οι πρώτες δύο συναρτήσεις είναι πολύ εύκολο να υπολογιστούν, με την πρώτη να είναι ίση με

$$\boldsymbol{S(\rho_X^B) = -[(\rho_{11}+\rho_{33})\log_2((\rho_{11}+\rho_{33}))+(\rho_{22}+\rho_{44})\log_2((\rho_{22}+\rho_{44}))]} \tag{5.1}$$

ή χρησιμοποιώντας την απαίτηση $\boldsymbol{\sum_{i=1}^4 \rho_{ii} = 1}$

$$\boldsymbol{S(\rho_X^B) = h(\rho_{11} + \rho_{33})} \tag{5.2}$$

όπου $\boldsymbol{h(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)}$ η binary entropy function. Η δεύτερη αντίστοιχα είναι ίση με

$$\boldsymbol{S(\rho_X^{AB}) = -\sum_{j=1}^{4} \lambda_j \log_2 \lambda_j} \tag{5.3}$$

Για τον υπολογισμό της τρίτης όμως, θα χρειαστεί να ορίσουμε μία βάση προβολικών τελεστών $\boldsymbol{\{\Pi_i = |i\rangle\langle i|\}}$ $\boldsymbol{(i = 1, 2)}$ οι οποίοι δρουν μόνο στο υποσύστημα $\boldsymbol{B}$, έχοντας στραφεί μέσω της χρήσης αυθαίρετου μοναδιακού τελεστή

$$\boldsymbol{V = tI + i\vec{y}\cdot\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} t + iy_3 & y_2 + iy_1 \\ -(y_2 - iy_1) & t - iy_3 \end{pmatrix}} \tag{5.4}$$

Με αυτόν τον τρόπο θα απεικονίσουμε τον προβολικό τελεστή σε μία οικογένεια νέων τελεστών $\boldsymbol{B_i = V\Pi_i V^\dagger}$ που δρουν στο υποσύστημα $\boldsymbol{B}$, με σκοπό το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της ποσότητας που θέλουμε, να μη σχετίζεται με την εύρεση κατάλληλου προβολικού τελεστή, αλλά με την εύρεση κατάλληλων στοιχείων $\boldsymbol{t, y_1, y_2, y_3} \in \mathbb{R}$. Από τα στοιχεία $\boldsymbol{t, y_1, y_2, y_3}$ μόνο τα τρία είναι ανεξάρτητα, λόγω της απαίτησης της μοναδιακότητας του $\boldsymbol{V}$, από την οποία προκύπτει $\boldsymbol{t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1}$. Επίσης, το γεγονός ότι τις θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πραγματικές παραμέτρους, μαζί με την προηγούμενη σχέση που τις συνδέει, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι μεταβλητές αυτές κυμαίνονται στο διάστημα $\boldsymbol{[-1, 1]}$.

Για να υπολογίσουμε λοιπόν την ποσότητα

$$\boldsymbol{S(A|\{B_j{}^B\}) = \sum_{j=1}^{2} p_j S(\rho_{A|B_j{}^B})}$$

θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις εντροπίες των καταστάσεων

$$\boldsymbol{\rho_{A|B_j{}^B} = \frac{B_j{}^B \rho_{A,B} B_j{}^B}{Tr_{A,B}[B_j{}^B \rho_{A,B}]} \equiv \frac{1}{p_j}[B_j{}^B \rho_{A,B} B_j{}^B]} \tag{5.5}$$

Εύκολα μπορούμε να βρούμε τους συντελεστές ως

$$\boldsymbol{p_1 = (\rho_{11} + \rho_{33})k + (\rho_{22} + \rho_{44})l} \tag{5.6}$$

$$\boldsymbol{p_2 = (\rho_{11} + \rho_{33})l + (\rho_{22} + \rho_{44})k} \tag{5.7}$$

όπου $\boldsymbol{k = t^2 + y_3^2}$ και $\boldsymbol{l = y_1^2 + y_2^2}$ δύο ποσότητες οι οποίες συναντώνται με μεγάλη συχνότητα στους υπολογισμούς, με αποτέλεσμα να μας διευκολύνει αυτή η απλοποίηση.

Οι ιδιοτιμές των δύο καταστάσεων που κατασκευάζονται μέσω των σχέσεων 5.5 είναι δυνατό να βρεθούν και είναι ίσες με

$$\boldsymbol{f_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \phi)} \tag{5.8}$$

για την πρώτη κατάσταση, και

$$\boldsymbol{f_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \phi')} \tag{5.9}$$

για τη δεύτερη, όπου

$$\boldsymbol{\phi = \sqrt{\frac{[(\rho_{11} - \rho_{33})k + (\rho_{22} - \rho_{44})l]^2 + \Phi}{[(\rho_{11} + \rho_{33})k + (\rho_{22} + \rho_{44})l]^2}}} \tag{5.10}$$

$$\boldsymbol{\phi' = \sqrt{\frac{[(\rho_{11} - \rho_{33})l + (\rho_{22} - \rho_{44})k]^2 + \Phi}{[(\rho_{11} + \rho_{33})l + (\rho_{22} + \rho_{44})k]^2}}} \tag{5.11}$$

και

$$\boldsymbol{\Phi = 4kl[|\rho_{14}|^2 + \rho_{23}|^2 + 2\Re(\rho_{32}\rho_{14})] - 16c\Re(\rho_{32}\rho_{14}) + 16d\Im(\rho_{32}\rho_{14})} \tag{5.12}$$

όπου $\boldsymbol{c = (ty_1 + y_2y_3)^2}$ και $\boldsymbol{d = (ty_2 - y_1y_3)(ty_1 + y_2y_3)}$.

Γνωρίζοντας ότι θα πρέπει για τον υπολογισμό της $\boldsymbol{QD}$ να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα

$$\boldsymbol{S(A|\{B_j{}^B\}) = \sum_{j=1}^{2} p_j S(\rho_{A|B_j{}^B}) = -\sum_{j=1}^{2} p_1 f_j \log_2 f_j - \sum_{j=3}^{4} p_2 f_j \log_2 f_j}$$

είναι ανάγκη αρχικά να μελετήσουμε αυτή για πιθανές συμμετρίες ως προς τα μεγέθη που περιέχει, έτσι ώστε να αποκτήσουμε μία πιο καθαρή εικόνα σχετικά με τα πιθανά της ακρότατα. Η πιο φανερή από τις συμμετρίες αυτές είναι η συμμετρία στην εναλλαγή των $\boldsymbol{k}$ με $\boldsymbol{l}$, οι οποίες μάλιστα σχετίζονται μέσω της σχέσης $\boldsymbol{k + l = 1}$, η οποία με τη σειρά της προκύπτει από τη σχέση $\boldsymbol{t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1}$.

Η συμμετρία αυτή είναι απόρροια της αρτιότητας της συνάρτησης αυτής ως προς $\boldsymbol{k}$ γύρω από την τιμή $\boldsymbol{k = \frac{1}{2}}$, η οποία μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα ακρότατα της συνάρτησης ως προς το $\boldsymbol{k}$ θα εμφανίζονται σε μία από τις τιμές $\boldsymbol{k = \{0, \frac{1}{2}, 1\}}$. Μάλιστα, στην περίπτωση της Werner State που μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε, όπου $\boldsymbol{\rho_{14} = \rho_{41} = 0}$, δε θα χρειαστεί να μελετήσουμε τη συνεισφορά της παραμέτρου $\boldsymbol{\Phi}$ στην ελαχιστοποίηση, αφού αυτή θα αποκτά τη μορφή $\boldsymbol{\Phi = 4kl|\rho_{23}|^2}$, η οποία είναι ανεξάρτητη των παραμέτρων $\boldsymbol{c}$ και $\boldsymbol{d}$. Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε τις τιμές των ιδιοτιμών $\boldsymbol{f_j}$ $(\boldsymbol{j = 1, 2, 3, 4})$ στις συγκεκριμένες τιμές $\boldsymbol{k = \{0, \frac{1}{2}, 1\}}$.

Υπολογισμός της Conditional εντροπίας για $k = 0$ ή $k = 1$

Μελετώντας τα αποτελέσματά μας έως τώρα για $\boldsymbol{k = 0}$, μπορούμε να δούμε ότι οι τιμές των παραμέτρων $\boldsymbol{\phi}$ και $\boldsymbol{\phi'}$, όπως αυτές παρουσιάζονται στις σχέσεις 5.10 και 5.11 αντίστοιχα, θα απλοποιούνται στη μορφή

$$\phi = \frac{\rho_{22} - \rho_{44}}{\rho_{22} + \rho_{44}}$$

$$\phi' = \frac{\rho_{11} - \rho_{33}}{\rho_{11} + \rho_{33}}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι οι ιδιοτιμές $\boldsymbol{f_j}$ θα είναι ίσες με

$$f_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{\rho_{22} - \rho_{44}}{\rho_{22} + \rho_{44}})$$

$$f_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{\rho_{11} - \rho_{33}}{\rho_{11} + \rho_{33}})$$

και οι αναμενόμενες τιμές $\boldsymbol{p_j}$

$$p_1 = \rho_{22} + \rho_{44}$$

$$p_2 = \rho_{11} + \rho_{33}$$

Η τιμή της $\boldsymbol{S(A|\{B_j{}^B\})}$ θα είναι λοιπόν

$$S(A|\{B_j{}^B\}) = (\rho_{22} + \rho_{44})h(\frac{\rho_{22}}{\rho_{22} + \rho_{44}}) + (\rho_{11} + \rho_{33})h(\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{33}}) \tag{5.13}$$

όπου $\boldsymbol{h(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x)}$ η binary entropy function.

Λόγω της συμμετρίας των αποτελεσμάτων ως προς την εναλλαγή μεταξύ των $\boldsymbol{k}$ και $\boldsymbol{l = 1 - k}$, στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως, μπορούμε να δούμε ότι στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε και στην περίπτωση όπου $\boldsymbol{k = 1}$, με αποτέλεσμα ο αντίστοιχος υπολογισμός να αποδεικνύεται περιττός.

Υπολογισμός της Conditional εντροπίας για $k = \frac{1}{2}$

Επαναλαμβάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς με προηγουμένως βρίσκουμε

$$\phi = \phi' = \sqrt{\frac{(\rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{23}|^2}{(\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44})^2}}$$

Οι ιδιοτιμές f_j θα είναι λοιπόν ίσες με

$$f_{1,3} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{\frac{(\rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{23}|^2}{(\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44})^2}})$$

$$f_{2,4} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{\frac{(\rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{23}|^2}{(\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44})^2}})$$

και οι αναμενόμενες τιμές p_j

$$p_1 = p_2 = \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} + \rho_{44})$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η κατάσταση έχει ίχνος ίσο με 1, δηλαδή ότι $\sum_i^4 \rho_{ii} = 1$ βρίσκουμε την τιμή της $S(A|\{B_j{}^B\})$ ίση με

$$S(A|\{B_j{}^B\}) = h(\frac{1 - \sqrt{(\rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{23}|^2}}{2}) \quad (5.14)$$

Υπολογισμός της QD

Επιστρέφοντας στον υπολογισμό της Quantum Discord, και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των σχέσεων 5.2 και 5.3, μπορούμε να δούμε ότι αυτή θα είναι ίση με

$$\boldsymbol{QD = h(\rho_{11} + \rho_{33}) - \sum_{j=1}^{4} \lambda_j \log_2 \lambda_j + \inf S(A|\{B_j{}^B\})} \tag{5.15}$$

όπου στην ειδική περίπτωση που $\boldsymbol{\rho_{14} = \rho_{41} = 0}$

$$\boldsymbol{\lambda_1 = \rho_{11}}$$

$$\boldsymbol{\lambda_2 = \rho_{44}}$$

$$\boldsymbol{\lambda_3 = \frac{1}{2}[(\rho_{22} + \rho_{33}) + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2}]}$$

$$\boldsymbol{\lambda_4 = \frac{1}{2}[(\rho_{22} + \rho_{33}) - \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2}]}$$

και

$$\boldsymbol{\inf S(A|\{B_j{}^B\}) = min\{F_1, F_2\}} \tag{5.16}$$

με

$$\boldsymbol{F_1 = (\rho_{22} + \rho_{44}) h(\frac{\rho_{22}}{\rho_{22} + \rho_{44}}) + (\rho_{11} + \rho_{33}) h(\frac{\rho_{11}}{\rho_{11} + \rho_{33}})} \tag{5.17}$$

και

$$\boldsymbol{F_2 = h(\frac{1 - \sqrt{(\rho_{11} + \rho_{22} - \rho_{33} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{23}|^2}}{2})} \tag{5.18}$$

Υπολογισμός της Concurrence

Στην προηγούμενη παράγραφο υπολογίσαμε αναλυτικά την τιμή της Quantum Discord για την κατάσταση που θέλουμε να μελετήσουμε, και το μόνο που μένει πλέον να υπολογίσουμε είναι η αντίστοιχη τιμή της Concurrence, με την οποία θέλουμε να τη συσχετίσουμε. Η τιμή της Concurrence για διμερή κατάσταση με διαστάσεις $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ έχουμε δείξει ότι είναι ίση με

$$\boldsymbol{C(\rho) = \max\{S_1 - \sum_{i=2}^{4} S_i, 0\}}$$

όπου $\boldsymbol{S_i}$ οι Singular values του πίνακα $\boldsymbol{\tau}$, με στοιχεία $\boldsymbol{\tau_{jk} = \langle \psi_j | \sigma_y \otimes \sigma_y | \psi_k \rangle}$, όπου $\boldsymbol{\{|\psi_i\rangle\}}$ οι καθαρές καταστάσεις που συνθέτουν μία αναπαράσταση της μεικτής $\boldsymbol{\rho}$. Οι τιμές αυτές μάλιστα, δείξαμε ότι ταυτίζονται με τις ιδιοτιμές του πίνακα $\boldsymbol{\sqrt{\rho\tilde{\rho}}}$, όπου

$$\boldsymbol{\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^\star(\sigma_y \otimes \sigma_y)} \tag{5.19}$$

και $\boldsymbol{\rho^\star}$ ο συζηγής πίνακας του πίνακα πυκνότητας της κατάστασης $\boldsymbol{\rho}$, το οποίο συμπέρασμα θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το σημείο.

Ο πίνακας $\boldsymbol{\rho\tilde{\rho}}$ είναι εύκολο να υπολογιστεί για μία διμερή κατάσταση μορφής $\boldsymbol{X}$, και όπως θα δούμε ακόμα ευκολότερο στην περίπτωσή μας όπου έχουμε απουσία δύο εκ των όρων της αντιδιαγωνίου. Θα θεωρήσουμε λοιπόν πίνακα

$$\boldsymbol{\rho_X = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{44} \end{pmatrix}} \tag{5.20}$$

με $\boldsymbol{\rho_{32} = \rho_{23}{}^\star}$, $\boldsymbol{\rho_{41} = \rho_{14}{}^\star}$, ο οποίος ικανοποιεί τις συνθήκες
$\boldsymbol{\rho_{22}\rho_{33} \geq |\rho_{23}|^2}$ και $\boldsymbol{\rho_{11}\rho_{44} \geq |\rho_{14}|^2}$, όπως και την απαίτηση $\boldsymbol{tr\rho_X = 1}$, έτσι ώστε αυτός να εκφράζει φυσική κατάσταση. Εύκολα υπολογίζουμε στη συνέχεια τον πίνακα

$$\boldsymbol{\rho_X\tilde{\rho}_X = \begin{pmatrix} |\rho_{14}|^2 + \rho_{11}\rho_{44} & 0 & 0 & 2\rho_{11}\rho_{14} \\ 0 & |\rho_{23}|^2 + \rho_{22}\rho_{33} & 2\rho_{22}\rho_{23} & 0 \\ 0 & 2\rho_{33}\rho_{32} & |\rho_{23}|^2 + \rho_{11}\rho_{44} & 0 \\ 2\rho_{44}\rho_{41} & 0 & 0 & |\rho_{14}|^2 + \rho_{11}\rho_{44} \end{pmatrix}}$$

ο οποίος έχει ιδιοτιμές τις

$$\boldsymbol{S_1{}^2 = (|\rho_{14}| + \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}})^2}$$

$$\boldsymbol{S_2{}^2 = (|\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}})^2}$$

$$\boldsymbol{S_3}^2 = (|\boldsymbol{\rho_{23}}| + \sqrt{\boldsymbol{\rho_{22}\rho_{33}}})^2$$
$$\boldsymbol{S_4}^2 = (|\boldsymbol{\rho_{23}}| - \sqrt{\boldsymbol{\rho_{22}\rho_{33}}})^2$$

Οι ρίζες των τιμών αυτών αποτελούν τις singular values που θέλουμε, οι οποίες λόγω των σχέσεων $\boldsymbol{\rho_{22}\rho_{33}} \geq |\boldsymbol{\rho_{23}}|^2$ και $\boldsymbol{\rho_{11}\rho_{44}} \geq |\boldsymbol{\rho_{14}}|^2$ θα είναι οι

$$\boldsymbol{S_1} = |\boldsymbol{\rho_{14}}| + \sqrt{\boldsymbol{\rho_{11}\rho_{44}}}$$
$$\boldsymbol{S_2} = \sqrt{\boldsymbol{\rho_{11}\rho_{44}}} - |\boldsymbol{\rho_{14}}|$$
$$\boldsymbol{S_3} = |\boldsymbol{\rho_{23}}| + \sqrt{\boldsymbol{\rho_{22}\rho_{33}}}$$
$$\boldsymbol{S_4} = \sqrt{\boldsymbol{\rho_{22}\rho_{33}}} - |\boldsymbol{\rho_{23}}|$$

Οι δύο μέγιστες τιμές της ποσότητας $\boldsymbol{S_1} - \sum_{i=2}^{4} \boldsymbol{S_i}$ είναι λοιπόν οι

$$\boldsymbol{2}|\boldsymbol{\rho_{14}}| - \boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{\rho_{22}\rho_{33}}}$$

και

$$\boldsymbol{2}|\boldsymbol{\rho_{23}}| - \boldsymbol{2}\sqrt{\boldsymbol{\rho_{11}\rho_{44}}}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι για μία διμερή $\boldsymbol{2 \times 2}$ κατάσταση μορφής $\boldsymbol{X}$, η Concurrence είναι ίση με

$$\boldsymbol{C(\rho_X) = 2\max\{|\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, 0\}}$$

Στην ειδική περίπτωση της Werner state που ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε, βλέπουμε ότι τα στοιχεία $\boldsymbol{\rho_{14} = \rho_{41} = 0}$, με αποτέλεσμα το πρώτο από τα μέγιστα να είναι αρνητικό και να απορρίπτεται. Για την κατάσταση της σχέσης 4.19, βρίσκουμε λοιπόν ότι η Concurrence είναι ίση με

$$\boldsymbol{C(\rho) = 2\max\{|\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}, 0\}}$$

Σε αυτό το σημείο είναι πλέον δυνατό να υπολογίσουμε τον τρόπο με τον οποίο η Concurrence και η Quantum Discord εξελίσσονται με το χρόνο ή και την ευαισθησία τους ως προς την μεταβολή της Fidelity $\boldsymbol{r}$. Αυτός είναι ο σκοπός της επόμενης ενότητας, στην οποία θα ολοκληρώσουμε την μελέτη μας με τον σχολιασμό των αποτελεσμάτων.

5.2 Μελέτη των αποτελεσμάτων και σχολιασμός

Το πρώτο βήμα πριν την απεικόνιση των συναρτήσεων που υπολογίσαμε είναι ο έλεγχος των περιοχών της $\boldsymbol{r}$ στις οποίες πρόκειται να ανιχνευτεί entanglement. Αυτό είναι δυνατό μέσω του $\boldsymbol{PPT}$ κριτηρίου, το οποίο στην περίπτωση $\mathbf{2 \times 2}$ συστήματος μας δίνει με πλήρη ακρίβεια αυτές τις περιοχές. Για την Werner state σε χρόνο $\boldsymbol{t}$, για να μην έχει ο μερικώς ανάστροφος του πίνακα πυκνότητα αρνητικές ιδιοτιμές, πρέπει η ορίζουσά του να είναι μη αρνητική, δηλαδή να ισχύει

$$\boldsymbol{\rho_{22}\rho_{33} \geq |\rho_{23}|^2} \tag{5.21}$$

το οποίο επιτυγχάνεται για $\boldsymbol{r} \in [\mathbf{0.33, 1}]$. Αναμένουμε λοιπόν, τουλάχιστον από την concurrence, να μηδενίζεται για τις τιμές αυτές του $\boldsymbol{r}$ λόγω του ότι είναι μέτρο του entanglement.

Σκοπός μας σε αυτήν την ανάλυση είναι η ποιοτική μελέτη των αποτελεσμάτων, και για αυτό το λόγο θα μας διευκολύνει ο επαναορισμός κάποιον μεγεθών, και η επιλογή συγκεκριμένων τιμών για κάποια άλλα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας είναι δυνατόν να ορίσουμε κατάλληλο μήκος $\boldsymbol{L}$ της κοιλότητας, τέτοιο ώστε η ποσότητα $\boldsymbol{\frac{\mu\pi u}{L}}$ να γίνεται ίση με $\boldsymbol{p}$, και αντίστοιχα κατάλληλη τιμή για τον όγκο τέτοια ώστε η ποσότητα $\boldsymbol{g = p_{ge}\sqrt{\frac{\omega}{\epsilon_0 V}}}$ (εκφρασμένη στο φυσικό σύστημα μονάδων $\boldsymbol{\hbar = 1}$) να είναι ίση με τη μονάδα. Η μεταβλητή $\boldsymbol{p}$ εισάγεται ως πολλαπλασιαστικός παράγοντας, έτσι ώστε οι μεταβολές της από την τιμή $\mathbf{1}$ να αναφέρονται σε όλες τις δυνατές μέσες ταχύτητες των ατόμων, και έχει μονάδες συχνότητας.

Μέσω αυτού του επαναορισμού βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\boldsymbol{\theta(t)}$ που περιέχεται στα στοιχεία $\boldsymbol{\rho_{ij}}$ της κατάστασης, στο φυσικό σύστημα μονάδων γίνεται ίση με

$$\boldsymbol{\theta(t) = p^{-1}(1 - \cos(pt))} \tag{5.22}$$

Με βάση αυτά τα δεδομένα, στα επόμενα γραφήματα παρουσιάζουμε την εξέλιξη της concurrence και της quantum discord ως προς το χρόνο, σε όλο το έυρος των τιμών του $\boldsymbol{r}$ για δύο τιμές της $\boldsymbol{p}$, ενώ στη συνέχεια με σκοπό τη μελέτη της σχέσης των τιμών των δύο αυτών μεγεθών για συγκεκριμένες τιμές του $\boldsymbol{r}$, θα παρουσιάσουμε τα διαγράμματά τους ως προς το χρόνο για $\boldsymbol{r = 0.3}$ και $\boldsymbol{r = 0.6}$.

Τα δύο πρώτα διαγράμματα αναφέρονται στην concurrence για τιμές της παραμέτρου $\boldsymbol{p = 1}$ και $\boldsymbol{p = 2}$ αντίστοιχα:

Όπως περιμέναμε και στις δύο περιπτώσεις παρατηρείται μηδενισμός της ποσότητας για τιμές του $\boldsymbol{r < 0.33}$, ενώ ταυτόχρονα όταν αυτό είναι μη μηδενικό, δηλαδή για τις τιμές $\boldsymbol{pt \approx 2\pi n}$ ($\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$), αυξάνεται γραμμικά ως προς το $\boldsymbol{r}$. Κατά τη χρονική εξέλιξη του φαινομένου βλέπουμε ότι η τιμή της concurrence παρουσιάζει διακυμάνσεις που παρατηρούνται συχνά σε κβαντικά συστήματα, και αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως collapse and revival του entanglement, η οποία διαδικασία στην περίπτωσή μας έχει συγκεκριμένη και καλώς ορισμένη περιοδικότητα. Κάτι τέτοιο δε θα περιμέναμε να συμβαίνει με τόσο ακριβή περιοδικότητα σε ένα πραγματικό σύστημα, αλλά σε κάθε περίπτωση αναμένουμε ότι θα αποτελούσε παρατηρήσιμο φαινόμενο. Σημαντικό είναι να τονίσουμε ότι με τον διπλασιασμό της παραμέτρου $\boldsymbol{p}$, η οποία αναφέρεται σε διπλασιασμό της ταχύτητας των ατόμων, παρατηρούμε διπλασιασμό και της συχνότητας με την οποία συμβαίνουν οι καταρρεύσεις και αναβιώσεις της concurrence.

Εάν μελετούσαμε τα αντίστοιχα διαγράμματα της quantum discord για τις ίδιες τιμές της $\boldsymbol{p}$, τα οποία παρουσιάζονται στη συνέχεια, μπορούμε να δούμε ότι η συμπεριφορά και αυτού του μεγέθους έχει πολλές ομοιότητες με αυτήν της concurrence:

Παρατηρώντας τα διαγράμματα αυτά, βλέπουμε ότι η quantum discord ενώ έχει την ίδια περιοδικότητα με την concurrence, σε αντίθεση με εκείνη δεν αυξάνεται γραμμικά στις τιμές $\boldsymbol{pt \approx 2\pi n}$, αλλά με τα κοίλα προς τα άνω, ενώ επίσης δε μηδενίζεται για $\boldsymbol{r < 0.33}$. Λόγω της ισχύος του κριτηρίου $\boldsymbol{PPT}$, μπορούμε με αυστηρότητα να πούμε ότι ο μη μηδενισμός της quantum discord σε αυτές τις τιμές του $\boldsymbol{r}$ δεν είναι αποτέλεσμα κάποιου κβαντικού συσχετισμού που προέρχεται από το entanglement, αλλά αποτελεί κάποιας άλλης μορφής συσχετισμό ο οποίος μηδενίζεται μόνο όταν η κατάσταση καταρρέει για $\boldsymbol{r = 0}$ στην πλήρως μεικτή κατάσταση. Όπως και στην περίπτωση της concurrence, παρατηρούμε φαινόμενα κατάρρευσης και αναβίωσης του μεγέθους, η συχνότητα των οποίων διπλασιάζεται με τον διπλασιασμό της ταχύτητας των ατόμων.

Σε μία τέτοια γραφική παράσταση δεν είναι εύκολο να παρατηρήσουμε τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσονται τα μεγέθη για τιμές του $\boldsymbol{t}$ στις οποίες συμβαίνει η κατάρρευση, και για μία πιο λεπτομερή ανάλυση σε αυτά θα επιλέξουμε δύο τιμές της fidelity $\boldsymbol{r}$, τις $\boldsymbol{r = 0,3}$ και $\boldsymbol{r = 0,6}$, στις οποίες θα προσπαθήσουμε να εξετάσσουμε την περαιτέρω διαφοροποίηση των δύο αυτών μεγεθών. Στα διαγράμματα αυτά, η διακεκομμένη γραμμή θα αναφέρεται στην concurrence, ενώ η συνεχής στην quantum discord.

Όπως περιμέναμε, στα διαγράμματα που αναφέρονται στην τιμή $\boldsymbol{r = 0.3}$, η concurrence είναι σε κάθε χρονική στιγμή μηδέν, με αποτέλεσμα να μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν είναι δυνατό να παρατηρηθεί entanglement σε ένα τέτοιο σύστημα. Αντιθέτως, η quantum discord διατηρεί το μέγιστό της στις τιμές $\boldsymbol{pt \approx 2\pi n}$, ενώ στις περιοχές κατάρρευσής της παρουσιάζει ένα επιπλέον μέγιστο για $\boldsymbol{pt \approx \pi n}$, ανάμεσα σε δύο στιγμιαίους μηδενισμούς της. Στην περίπτωση όμως που διπλασιάσουμε την ταχύτητα των ατόμων βλέπουμε ότι λόγω του διπλασιασμού της συχνότητας με την οποία προκύπτουν τα μέγιστα της αναβίωσης, δεν παρουσιάζεται κάποιο ενδιάμεσο μέγιστο, ενώ δεν παρατηρείται και κανένας μηδενισμός της κατά την εξέλιξη του φαινομένου.

Εάν μελετήσουμε τα γραφήματα που προκύπτουν για $\boldsymbol{r} = \mathbf{0.6}$, μπορούμε να δούμε ότι ενώ η concurrence έχει αναμενόμενη συμπεριφορά με πλήρη μηδενισμό στις περιοχές κατάρρευσης και για τις δύο ταχύτητες των ατόμων, η quantum discord παρουσιάζει ακριβώς την ίδια συμπεριφορά με την περίπτωση $\boldsymbol{r} = \mathbf{0.3}$, με μόνη διαφορά την αύξηση της τιμής του μεγίστου της. Ομοίως, η ίδια συμπεριφορά της discord με την περίπτωση $\boldsymbol{r} = \mathbf{0.3}$ μεταφέρεται και στην περίπτωση όπου $\boldsymbol{p} = \mathbf{2}$, στην οποία για άλλη μία φορά έχει αυξηθεί η τιμή του μεγίστου της. Συγκρίνοντας την quantum discord με την concurrence βλέπουμε ότι η πρώτη αυξάνεται πιο ομαλά στις περιοχές των αναβιωμένων μεγίστων, ενώ αποκτά μικρότερη τιμή από την concurrence. Επίσης, πολλές φορές στις περιοχές που η concurrence αποκτά μηδενική τιμή βλέπουμε ότι η discord παραμένει μη μηδενική.

Όλες αυτές οι παρατηρήσεις έως τώρα υποδεικνύουν ότι ενώ ένα μέρος της quantum discord μπορεί να είναι αποτέλεσμα της ύπαρξης entanglement, η απουσία αυτού δεν οδηγεί σε μηδενισμό της. Μπορούμε να συμπεράνουμε λοιπόν ότι η concurrence και η quantum discord αναφέρονται σε δύο όχι απαραίτητα συσχετίσιμες μορφές κβαντικών συσχετισμών.

Σε αυτό το σημείο ολοκληρώσαμε τον σκοπό μας να μελετήσουμε το entanglement και την quantum discord είτε θεωρητικά, είτε σε ένα ρεαλιστικό μεν, ιδανικό δε σύστημα, το οποίο μας βοήθησε να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο αυτά τα μεγέθη σχετίζονται. Σε κάθε περίπτωση παρατηρήσαμε ότι αυτά τα δύο μεγέθη δεν είναι άμεσα συσχετίσιμα, και ότι λειτουργούν και εξελίσσονται με διαφορετικό τρόπο, γεγονός που μας δείχνει ότι αν και ο τομέας της κβαντικής πληροφορίας έχει προοδεύσει σε μεγάλο βαθμό τα τελευταία έτη, ακόμα υπάρχουν πτυχές των κβαντικών συσχετισμών που δεν έχουν κατανοηθεί πλήρως ή και ανακαλυφθεί.

Αναμφισβήτητα λοιπόν, η μελέτη της quantum discord θα μπορούσε να οδηγήσει σε πολύ διαφωτιστικά συμπεράσματα σχετικά με τη φύση των κβαντικών συσχετισμών, ενώ μετά από περαιτέρω μελέτη θα μπορούσε ακόμα και να εφαρμοστεί για την κατανόηση και μελέτη της κβαντικής συμπεριφοράς πλήθους κβαντικών συστημάτων. Τέλος, η πιθανή εφαρμογή της quantum discord σε σύχρονα θέματα της θεωρητικής φυσικής, τα οποία έως σήμερα απομονώνονται στη μελέτη του entanglement, θα μπορούσε να οδηγήσει σε νέους και ίσως διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού της, οι οποίοι θα επέτρεπαν την πιο συχνή εφαρμογή της.

Παράρτημα Α΄

Μία μη επιλεκτική μέτρηση δεν είναι δυνατό να αυξήσει την εντροπία μίας κατάστασης

Μία από τις πιο χρήσιμες συναρτήσεις απόστασης μεταξύ δύο καταστάσεων αποτελεί η σχετική εντροπία

$$\boldsymbol{S(\rho||\sigma)}\equiv\boldsymbol{tr(\rho\log\rho)-tr(\rho\log\sigma)} \tag{Α΄.1}$$

η οποία είναι μία μη αρνητική ποσότητα που μηδενίζεται αν και μόνο αν οι καταστάσεις $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\sigma}$ ταυτίζονται. Χάρη σε αυτήν τη μη αρνητικότητά, είναι δυνατό να βρούμε μία σχέση μεταξύ της εντροπίας μίας κατάστασης $\boldsymbol{\rho}$ και της κατάστασης που παράγεται από αυτή μέσω μίας μη επιλεκτικής προβολικής μέτρησης ως προς μία βάση ορθοκανονικών προβολικών τελεστών $\boldsymbol{\{\Pi_i\}}$ για τους οποίους $\boldsymbol{\Pi_i\Pi_j=\delta_{i,j}\Pi_i}$ και $\boldsymbol{\sum_i\Pi_i=1}$. Η κατάσταση αυτή θα έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{\rho'=\sum_i\Pi_i\rho\Pi_i} \tag{Α΄.2}$$

Μέσω της θετικότητας της σχετικής εντροπίας, η οποία μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία και ως ανισότητα του Klein, μπορούμε να δούμε ότι

$$\boldsymbol{0\leq S(\rho||\rho')=-S(\rho)-tr(\rho\log\rho')} \tag{Α΄.3}$$

ενώ μέσω της ορθοκανονικότητας της βάσης των προβολικών τελεστών βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{\rho}\log\boldsymbol{\rho}') &= -\boldsymbol{tr}([\sum_i \boldsymbol{\Pi}_i]\boldsymbol{\rho}\log\boldsymbol{\rho}') = \\
&= -\boldsymbol{tr}([\sum_i \boldsymbol{\Pi}_i{}^2]\boldsymbol{\rho}\log\boldsymbol{\rho}') = \\
&= -\boldsymbol{tr}(\sum_i \boldsymbol{\Pi}_i\boldsymbol{\rho}\log\boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{\Pi}_i)
\end{aligned}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{\Pi}_i &= \sum_j \boldsymbol{\Pi}_j\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\Pi}_j\boldsymbol{\Pi}_i = \boldsymbol{\Pi}_i\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\Pi}_i\boldsymbol{\delta}_{i,j} = \\
&= \boldsymbol{\Pi}_i\sum_j \boldsymbol{\Pi}_j\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\Pi}_j = \boldsymbol{\Pi}_i\boldsymbol{\rho}'
\end{aligned}$$

οπότε βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
-\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{\rho}\log\boldsymbol{\rho}') &= -\boldsymbol{tr}(\sum_i \boldsymbol{\Pi}_i\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\Pi}_i\log\boldsymbol{\rho}') = \\
&= -\boldsymbol{tr}(\boldsymbol{\rho}'\boldsymbol{log}\boldsymbol{\rho}') = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\rho}')
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στη σχέση Α΄.3 βρίσκουμε

$$-\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\rho}') \geq \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\rho}') \geq \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\rho}) \tag{Α΄.4}$$

με αποτέλεσμα να έχουμε αποδείξει ότι μία μη επιλεκτική μέτρηση δεν είναι δυνατό να αυξήσει την εντροπία μίας αυθαίρετης κατάστασης $\boldsymbol{\rho}$.

Παράρτημα Β′

Απόδειξη της σχέσης $\inf tr|V\tau[V^T]| = \max(S_1 - \sum_{i=2}^d S_i, 0)$

Έχοντας φτάσει στο αποτέλεσμα της σχέσης 2.20, είναι δυνατό να δούμε ότι λόγω της συμμετρικότητας του τρόπου που εμφανίζονται οι πίνακες V και V^T, αρκεί η υπόθεση οι πίνακες V να είναι left-unitary, έτσι ώστε οι V^T να είναι αντίστοιχα right-unitary. Η διαγωνιοποίηση του πίνακα τ όπως γνωρίζουμε είναι δυνατή μέσω μετασχηματισμού ομοιότητας, θεωρώντας κατάλληλο μοναδιακό πίνακα U και τον ανάστροφό του ($U^{-1} = U^T$), αφού από την ίδια την κατασκευή του ο πίνακας τ είναι συμμετρικός. Θεωρούμε ως τον διαγωνιοποιημένο αυτόν πίνακα που κατασκευάζεται από τον τ τον

$$\tau_d \equiv U\tau U^T = diag[S_1, S_2, ..., S_n] \tag{Β′.1}$$

έτσι ώστε η ποσότητα που περιέχεται στο ίχνος να λαμβάνει τη μορφή

$$[VU^T][U\tau U^T][UV^T] = V'\tau_d V'^T \tag{Β′.2}$$

όπου ορίσαμε $V' = VU^T$. Εύκολα βλέπουμε ότι λόγω της μοναδιακότητας των V και U, ο V' θα είναι επίσης left-unitary.

Αγνοώντας τον τόνο για διευκόλυνση, δείξαμε ότι είναι δυνατό να βρεθεί left-unitary πίνακας τέτοιος ώστε το ίχνος που μας ενδιαφέρει να πάρει τη μορφή

$$\inf_V tr|V\tau_d[V^T]| \tag{Β′.3}$$

Αρχικά, θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση όπου ο κατάλληλος πίνακας μετασχηματισμού είναι πίνακας του Hadamard, δηλαδή left-unitary πίνακας διαστάσεων $n \times 2^k$ με $2^k \geq n$, του οποίου οι σειρές περιέχουν n ορθογώνια πραγματικά ανύσματα με τιμή $\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}$. Ο πίνακας αυτός έχει πολύ καλές ιδιότητες για μελέτη ακροτάτων, επειδή είναι ο left-unitary πίνακας που μεγιστοποιεί την ορίζουσα σε σχέση με οποιονδήποτε άλλο left-unitary πίνακα με τιμή στοιχείων $\leq \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}}$.

Η μόνη επιπλέον απαίτηση που θα κάνουμε θα είναι σε κάθε σειρά να περιέχεται το στοιχείο ii, με τα υπόλοιπα στοιχεία απλώς να μας ενδιαφέρει να κατανέμονται με κατάλληλο τρόπο. Χωρίς να παραβιάζουμε την μοναδιακότητα του τελεστή, μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι αυτά τα στοιχεία είναι πολλαπλασιασμένα με μία φάση $ie^{i\phi_i}$.

Βρίσκουμε λοιπόν για κάθε στοιχείο της διαγώνιου

$$[V_H \tau_d [V_H{}^T]]_{ii} = \frac{1}{2^k}(S_1 - \sum_{j>1} S_j e^{i\phi_j}) \tag{Β΄.4}$$

με αποτέλεσμα το ίχνος να το βρίσκουμε ίσο με

$$tr|V_H \tau_d [V_H{}^T]| = |S_1 - \sum_{j>1} S_j e^{i\phi_j}| \tag{Β΄.5}$$

Η ελαχιστοποίηση αυτής της ποσότητας απαιτεί πλέον τη μελέτη μόνο δύο περιπτώσεων

- $S_1 \leq \sum_{j>1} S_j e^{i\phi_j}$: Τότε η ποσότητα ελαχιστοποιείται όταν το $\sum_{j>1} S_j e^{i\phi_j} - S_1$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή όταν η φάση είναι τέτοια ώστε $\sum_{j>1} S_j e^{i\phi_j} - S_1 = 0$
- $S_1 \geq \sum_{j>1} S_j e^{i\phi_j}$: όπου η ποσότητα ελαχιστοποιείται όταν όλες οι φάσεις ϕ_i είναι μηδενικές. Τα δύο αυτά αποτελέσματα τα βρήκαμε με την απαίτητηση η ποσότητα που θα βρούμε εξ ορισμού να είναι πάντα θετική ως απόλυτη τιμή.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το ελάχιστο της ποσότητας που μελετάμε θα είναι ίσο με

$$tr|V_H \tau_d [V_H{}^T]| = \max(S_1 - \sum_{j>1} S_j, 0) \tag{Β΄.6}$$

Για να μπορούμε όμως να πούμε ότι αυτό είναι το ελάχιστο για κάθε αυθαίρετο left-unitary πίνακα U, θα πρέπει να θεωρήσουμε κάποιον αυθαίρετο τέτοιο μετασχηματισμό και να εξετάσουμε με τι τρόπο θα διαφέρει το αποτέλεσμά του ελαχίστου. Θα μελετήσουμε μόνο την περίπτωση όπου $S_1 \geq \sum_{j>1} S_j e^{i\phi_j}$, αφού το μηδέν είναι εξ ορισμού η μικρότερη τιμή που μπορεί να αποκτήσει μία μη αρνητική ποσότητα.

Έστω λοιπόν πίνακας $\boldsymbol{U_\rho = diag(1, i, ..., i)}$, τέτοιος ώστε

$$\boldsymbol{\tilde{\tau_d} \equiv U_\rho \tau_d {U_\rho}^T = diag[S_1, -S_2, ..., -S_n]} \tag{B'.7}$$

όπου $\boldsymbol{S_i}$ οι singular values του $\boldsymbol{\tau_d}$. Τότε η ποσότητα αποκτά τη μορφή

$$\boldsymbol{tr|V^n \tilde{\tau_d}[V^n]^T| = \sum_i |{V^n}_{i1}{}^2 S_1 - \sum_{j>1} {V^n}_{ij}{}^2 S_j|} \tag{B'.8}$$

όπου $\boldsymbol{V^n = VU^T {U_\rho}^T}$, όχι απαραίτητα πίνακες Hadamard.

Θεωρούμε μάλιστα χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα στοιχεία $\boldsymbol{{V^n}_{i1}}$ είναι πραγματικά για κάθε $\boldsymbol{i}$, ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία $\boldsymbol{{V^n}_{ij}}$ τα κατασκευάζουμε έτσι ώστε να ικανοποιούν τις έως τώρα προυποθέσεις. Λόγω της left-unitarity του πίνακα $\boldsymbol{V^n}$ (και αντίστοιχα right-unitarity του ανάστροφού του), βλέπουμε ότι ισχύει $\boldsymbol{\sum_i {V^n}_{i1}{}^2 = \sum_i |{V^n}_{ij}|^2 = 1}$, όπου λόγω της πραγματικότητας των στοιχείων $\boldsymbol{{V^n}_{i1}}$ θα ισχύει για αυτά $\boldsymbol{\sum_i |{V^n}_{i1}{}^2| = 1}$, ενώ λόγω της πιθανής μιγαδικότητας των $\boldsymbol{{V^n}_{ij}}$ θα ισχύει $\boldsymbol{\sum_i |{V^n}_{ij}{}^2| \leq 1}$.

Βρίσκουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sum_i |{V^n}_{i1}{}^2 S_1 - \sum_{j>1} {V^n}_{ij}{}^2 S_j|} \;&\geq\; \boldsymbol{\sum_i |{V^n}_{i1}{}^2| S_1 - \sum_i |\sum_{j>1} {V^n}_{ij}{}^2| S_j \geq} \\ &\geq\; \boldsymbol{S_1 - \sum_{j>1} S_j}\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι $\boldsymbol{S_i}$ είναι θετικοί αριθμοί. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο κατάλληλος πίνακας μετασχηματισμού δε θα ήταν δυνατό να ελαχιστοποιήσει περαιτέρω το ίχνος, με αποτέλεσμα να έχουμε αποδείξει ότι

$$\boldsymbol{\inf_V tr|V\tau[V^T]| = \max(S_1 - \sum_{i=2}^{d} S_i, 0)} \tag{B'.9}$$

όπου $\boldsymbol{S_i}$ οι singular values του πίνακα $\boldsymbol{\tau}$.

Παράρτημα Γ΄

Απόδειξη της σχέσης $H(X|Y) = H(X,Y) - H(Y)$

Στην κλασσική θεωρία πιθανοτήτων, ως conditional entropy μεταξύ δύο α-νεξάρτητων μεταβλητών $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$ με πιθανά αποτελέσματα $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$, ορίζεται η ποσότητα $\boldsymbol{H(X|Y) = \sum_y P_{Y=y} H(X|Y=y)}$, όπου η εντροπία $\boldsymbol{H(X|Y=y)}$ αποτελεί την αβεβαιότητα για μία μεταβλητή $\boldsymbol{X}$ εάν έχει συμβει η μέτρηση της μεταβλητής $\boldsymbol{Y}$ και έχει ληφθεί η τιμή $\boldsymbol{y}$. Από τη στιγμή που οι μεταβλητές $\boldsymbol{X}$ και $\boldsymbol{Y}$ θεωρούνται ανεξάρτητες, για τις πιθανότητες τους θα ισχύει το θεώρημα του Bayes σύμφωνα με το οποίο
$\boldsymbol{P(X=x, Y=y) = P(X=x|Y=y) P_{Y=y}}$.
Εφαρμόζοντάς το θεώρημα αυτό στη συνολική κλασσική conditional entropy

βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H(X|Y)} &= \sum_y \boldsymbol{P_{Y=y} H(X|Y=y)} = \\
&= -\sum_y \boldsymbol{P_{Y=y}} \sum_x [\boldsymbol{P(X=x|Y=y)} \log \boldsymbol{P(X=x|Y=y)}] = \\
&= -\sum_y \boldsymbol{P_{Y=y}} \sum_x [\frac{\boldsymbol{P(X=x,Y=y)}}{\boldsymbol{P_{Y=y}}} \log \frac{\boldsymbol{P(X=x,Y=y)}}{\boldsymbol{P_{Y=y}}}] = \\
&= -\sum_y \sum_x \boldsymbol{P(X=x,Y=y)} \log \boldsymbol{P(X=x,Y=y)} + \\
&+ \sum_y \sum_x \boldsymbol{P(X=x,Y=y)} \log \boldsymbol{P_{Y=y}} = \\
&= \boldsymbol{H(X,Y)} + \sum_y \sum_x \boldsymbol{P(X=x,Y=y)} \log \boldsymbol{P_{Y=y}} = \\
&= \boldsymbol{H(X,Y)} + \sum_y \boldsymbol{P_{Y=y}} \log \boldsymbol{P_{Y=y}} = \\
&= \boldsymbol{H(X,Y)} - \boldsymbol{H(Y)}
\end{aligned}$$

όπου εκμεταλλευτήκαμε το γεγονός ότι $\sum_x \boldsymbol{P(X=x,Y=y)} = \boldsymbol{P_{Y=y}}$ Βρίσκουμε λοιπόν

$$\boldsymbol{H(X|Y)} = \boldsymbol{H(X,Y)} - \boldsymbol{H(Y)} \tag{Γ'.1}$$

με τη χρήση της οποίας φαίνεται η ισοδυναμία των σχέσεων

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I(X:Y)} &= \boldsymbol{H(X)} - \boldsymbol{H(X|Y)} = \\
&= \boldsymbol{H(Y)} - \boldsymbol{H(X|Y)} = \\
&= \boldsymbol{H(X)} + \boldsymbol{H(Y)} - \boldsymbol{H(X,Y)}
\end{aligned}$$

Παράρτημα Δ′

Concavity της Conditional entropy

Δ′.1 Joint Convexity της σχετικής εντροπίας

Έχοντας αναφερθεί κυρίως στην concavity της εντροπίας, είναι πολύ σημαντικό να εξετάσουμε τις αντίστοιχες μονοτονικότητες της σχετικής και της conditional εντροπίας, οι οποίες προκύπτουν από αυτήν, αλλά και από το θεώρημα του Lieb σύμφωνα με το οποίο μία συνάρτηση $\boldsymbol{f(A,B)}$ της μορφής:

$$\boldsymbol{f(A,B) = tr[X^{\dagger}A^{t}XA^{1-t}]} \tag{Δ′.1}$$

είναι jointly concave ως προς θετικούς πίνακες $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{B}$.

Για να αποδείξουμε την convexity της σχετικής εντροπίας θα ορίσουμε μία συνάρτηση

$$\boldsymbol{I_t(A,X) = tr[X^{\dagger}A^{t}XA^{1-t}] - tr[X^{\dagger}XA]} \tag{Δ′.2}$$

όπου οι $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{X}$ δρουν στον ίδιο Hilbert. Ο πρώτος όρος της συνάρτησης αυτής είναι σύμφωνα με το θεώρημα του Lieb concave ως προς τον $\boldsymbol{A}$, ενώ ο δεύτερος είναι γραμμικός ως προς τον $\boldsymbol{A}$, με αποτέλεσμα στο σύνολό της η συνάρτηση $\boldsymbol{I_t(A,X)}$ να είναι επίσης concave ως προς τον $\boldsymbol{A}$.

Εάν παραγωγίσουμε ως προς $\boldsymbol{t}$ τη συνάρτηση $\boldsymbol{I_t(A,X)}$, και ορίσουμε

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I(A,X)} &= \boldsymbol{[\frac{d}{dt}I_t(A,X)]|_{t=0}} = \\
&= \boldsymbol{tr[X^{\dagger}(\ln A)A^{t}XA^{1-t}]|_{t=0} - tr[X^{\dagger}A^{t}X(\ln A)A^{1-t}]|_{t=0}} = \\
&= \boldsymbol{tr[X^{\dagger}(\ln A)XA] - tr[X^{\dagger}X(\ln A)A]}
\end{aligned}$$

τότε μέσω της concavity της $\boldsymbol{I_t(A,X)}$ ως προς τον $\boldsymbol{A}$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2, X)} &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\boldsymbol{I_{t=\Delta}(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2, X)}}{\boldsymbol{\Delta}} \geq \\ &\geq \lim_{\Delta\to 0} \frac{\boldsymbol{\lambda I_{t=\Delta}(A_1, X)}}{\boldsymbol{\Delta}} + \frac{\boldsymbol{(1-\lambda)I_{t=\Delta}(A_2, X)}}{\boldsymbol{\Delta}} = \\ &= \boldsymbol{\lambda I(A_1, X) + (1-\lambda)I(A_2, X)} \end{aligned}$$

όπου $\boldsymbol{\lambda \in [0,1]}$, με αποτέλεσμα να έχουμε αποδείξει ότι η $\boldsymbol{I(A,X) = [\frac{d}{dt}I_t(A,X)]|_{t=0}}$ είναι concave ως προς $\boldsymbol{A}$.

Ορίζοντας $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ και $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$, και αλλάζοντας τη βάση του λογαρίθμου ώστε να επιστρέψουμε στη βάση του $\mathbf{2}$ και να το φέρουμε στη μορφή εντροπίας ($\boldsymbol{\ln A = \frac{\log_2 A}{\log_2 e}}$), ορίζουμε συνάρτηση

$$\boldsymbol{I_2(A,X) = tr[X^\dagger(\log_2 A)XA] - tr[X^\dagger X(\log_2 A)A]} \qquad (\Delta'.3)$$

η οποία θα είναι επίσης concave ως προς $\boldsymbol{A}$. Για τους $\boldsymbol{A}$ και $\boldsymbol{X}$ που ορίσαμε προηγουμένως βρίσκουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I_2(A,X)} &= \boldsymbol{tr}[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \log_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}] - \\ &- \boldsymbol{tr}[\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \log_2 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}] = \\ &= \boldsymbol{tr[(\log_2 \sigma)\rho] - tr[(\log_2 \rho)\rho] = -S(\rho||\sigma)} \end{aligned}$$

Λόγω του αρνητικού προσήμου που εμφανίζεται μπροστά από τη σχετική εντροπία, η concavity της συνάρτησης $\boldsymbol{I_2(A,X)}$ ερμηνεύεται ως convexity της σχετικής εντροπίας, αφού αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην ανισότητα

$$\boldsymbol{I(\lambda A_1 + (1-\lambda)A_2, X) \geq \lambda I(A_1,X) + (1-\lambda)I(A_2,X)} \qquad (\Delta'.4)$$

βλέπουμε ότι

$$\boldsymbol{S(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2||\lambda\sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2) \leq \lambda I(\rho_1||\sigma_1) + (1-\lambda)I(\rho_2||\sigma_2)} \qquad (\Delta'.5)$$

Δείξαμε λοιπόν ότι η σχετική εντροπία είναι jointly convex συνάρτηση των ορισμάτων της $\boldsymbol{\rho}$ και $\boldsymbol{\sigma}$.

Δ′.2 Concavity της ημικλασσικής conditional entropy

Η απόδειξη της concavity της conditional entropy, όπως αυτή ορίζεται σε αντιστοιχία με τα κλασσικά συστήματα ανεξάρτητων μεταβλητών ως $\boldsymbol{S(S|A) = S(\rho^{SA}) - S(\rho^{A})}$, είναι πολύ πιο εύκολη επειδή βασίζεται στην convexity που αποδείξαμε προηγουμένως για την σχετική εντροπία. Ο ορισμός αυτός της conditional entropy διαφέρει από τον ορισμό που χρησιμοποιήσαμε στο κεφάλαιο **3** ($\boldsymbol{S(S|\{\Pi_j{}^A\}) = \sum_j P_j S(\rho_{S|\Pi_j{}^A})}$), όπου προσπαθήσαμε να είμαστε όσο πιο αυστηροί μπορούσαμε κατά τον ορισμό της ως μεγέθους, και για αυτό θεωρήσαμε την $\boldsymbol{S(\rho^{SA}) - S(\rho^{A})}$ ως μία ανεξάρτητη ποσότητα, της οποίας εκμεταλλευτήκαμε την concavity.

Έστω λοιπόν $\boldsymbol{d}$ η διάσταση του συστήματος $\boldsymbol{A}$. Τότε εξ ορισμού θα ισχύει

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S(\rho^{SA}||\frac{1}{d}\otimes\rho^{A})} &= \boldsymbol{-S(\rho^{SA}) - tr[\rho^{SA}\log(\frac{1}{d}\otimes\rho^{A})]} = \\
&= \boldsymbol{-S(\rho^{SA}) - tr[\rho^{SA}\log\frac{1}{d}] - tr[\rho^{SA}\log(\rho^{A})]} = \\
&= \boldsymbol{-S(\rho^{SA}) - tr_S[\rho^{S}\log\frac{1}{d}] - tr_A[\rho^{A}\log(\rho^{A})]} = \\
&= \boldsymbol{-S(\rho^{SA}) + tr_S[\rho^{S}]\log d - tr_A[\rho^{A}\log(\rho^{A})]} = \\
&= \boldsymbol{-S(\rho^{SA}) + \log d + S(\rho^{A})}
\end{aligned}$$

με αποτέλεσμα να έχουμε δείξει ότι

$$\boldsymbol{S(\rho^{SA}) - S(\rho^{A}) = -S(\rho^{SA}||\frac{1}{d}\otimes\rho^{A}) + \log d} \qquad (\Delta'.6)$$

Από τη σχέση αυτή βλέπουμε ότι η convexity της σχετικής εντροπίας μεταφράζεται ως concavity της ημικλασικής conditional entropy ($\boldsymbol{S(\rho^{SA}) - S(\rho^{A})}$), με αποτέλεσμα να έχουμε αποδείξει αυτό που θέλαμε.

Βιβλιογραφία

[1] Entangled Systems: New Directions in Quantum Physics, Jurgen Audretsch, 2007

[2] Fundamentals of Quantum Optics and Quantum Information, Peter Lambropoulos, David Petrosyan, 2007

[3] Measures and dynamics of entangled states, Florian Mintert, 2004

[4] Decoherence and the Transition from Quantum to Classical, W. H. Zurek, 2002

[5] Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits, William K. Wootters, 1997

[6] Separability Criterion for Density Matrices, Asher Peres, 1996

[7] Information-theoretic aspects of quantum inseparability of mixed states, Ryszard Horodecki, Michal Horodecki, 1996

[8] Jaynes-Cummings model with Atomic Motion, Rainer R. Schlicher, 1988

[9] Distributed Entanglement, Valerie Coffman, Joydip Kundu, William K. Wootters, 1999

[10] Classical, quantum andtotal correlations, L. Henderson, V. Vedral, 2001

[11] A complete classification of quantum ensembles having a given density matrix, Lane P. Hughston, Richard Jozsa, William K. Wootters, 1993

[12] Entanglement of Formation and Concurrence, William K. Wootters, 2001

[13] Quantum Discord: A Measure of Quantumness of Correlations, Harold Ollivier, Wojciech H. Zurek, 2001

[14] Quantum Discord for two-qubit X-states, Mazhar Ali, A. R. P. Rau, G. Alber, 2010

[15] Entanglement and Quantum Discord of two Moving Atoms, Nour Zidan, 2014