

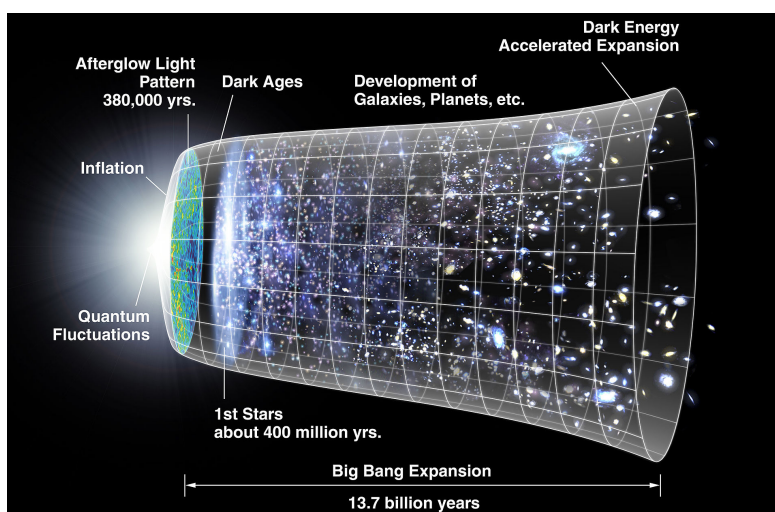


ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΔΕ ΠΤΗΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Κοσμολογικά Μοντέλα με Πλεονάζουσες Διαστάσεις



Καρύδας Στυλιανός

A.M.: 201219

Επιβλέπων Καθηγητής

Γεωργιάς Βασίλειος

Αθήνα, Ιανουάριος 2017

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ, ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΜΔΕ ΠΤΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Κοσμολογικά Μοντέλα με Πλεονάζουσες Διαστάσεις

Καρύδας Στυλιανός
Α.Μ.: 201219

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή:
Βασίλειος Γεωργαλάς, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΕΚΠΑ
Γεώργιος Διαμάντης, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΕΚΠΑ
Βασίλειος Σπανός, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Η πραγματοποίηση αυτής της εργασίας θα ήταν αδύνατη χωρίς την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του επιβλέποντος καθηγητή μου, Βασίλειου Γεωργαλά. Η προθυμία του να με βοηθήσει και να με διδάξει ήταν καθοριστικής σημασίας, όχι μόνο στο να ολοκληρώσω την εργασία αυτή, αλλά και στο να αντιληφθώ τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να εργάζεται κανείς όταν ασχολείται με τη Φυσική. Για όλους τους παραπάνω λόγους, τον ευχαριστώ θερμά.

Επιπλέον, ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζει να ειπωθεί στους κυρίους Γεώργιο Διαμάντη και Βασίλειο Σπανό, γιατί ως μέλη της εξεταστικής επιτροπής βοήθησαν, με την εμπειρία και τις παρατηρήσεις τους, τα μέγιστα στη σωστή εκτέλεση και ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω τον Αρχιλοχία Κωσταντίνο Μάσσα, που κατά τη διάρκεια της στρατιωτικής μου θητείας φρόντισε να έχω την ευχέρεια να δουλεύω για αυτή την εργασία στο μέτρο του δυνατού, αλλά και επειδή με τη γενικότερη συμπεριφορά του βοήθησε, με τον τρόπο του, στην ολοκλήρωσή της, ένα σημαντικό μέρος της οποίας πραγματοποιήθηκε ενώ υπηρετούσα.

Τέλος, δεν πρέπει να παραλείψω να ευχαριστήσω τους γονείς και τους κοντινούς μου φίλους, που με τον τρόπο τους με στήριξαν και με ενθάρρυναν να συνεχίσω κατά τη διάρκεια αυτής της, ομολογουμένως, δύσκολης περιόδου.

Πρόλογος

Στις αρχές του εικοστού αιώνα η επιστήμη της Φυσικής γνώρισε ραγδαία ανάπτυξη χάρη στη διατύπωση των νέων θεωριών, δηλαδή της Σχετικότητας και της Κβαντικής Μηχανικής. Πάνω σε αυτές τις δυο θεωρίες βασίστηκε στη συνέχεια η προοδευτική διατύπωση της Σύγχρονης Φυσικής, με τη σταδιακή θεμελίωση και συμπλήρωση αυτού που σήμερα αποκαλούμε Καθιερωμένο Μοντέλο. Οι πειραματικές επιβεβαιώσεις των προβλέψεων της θεωρίας τόσο σε μικροσκοπικές όσο και σε μακροσκοπικές κλίμακες, φάνηκε να οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η επιστημονική κοινότητα είχε μπει στην τελική ευθεία της διατύπωσης μιας πλήρους θεωρίας που να εξηγεί τον κόσμο γύρω μας.

Όμως στα τέλη του ίδιου αιώνα, σημειώθηκε μια ανακάλυψη εντελώς απροσδόκητη με βάση τα όσα πιστεύονταν ως τότε, η επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος, η οποία οδήγησε τόσο στην αναθεώρηση βασικών συμπερασμάτων, όσο και στη δημιουργία νέων ερωτημάτων, που έχουν να κάνουν με τη σύσταση και την εξέλιξη του. Από τότε και μέχρι σήμερα έχει πραγματοποιηθεί ένας πολύ μεγάλος αριθμός προσπαθειών εξήγησης της συγκεκριμένης ανακάλυψης, τόσο στα πλαίσια του Καθιερωμένου Μοντέλου, όσο και μέσω διατύπωσης νέων, εξωτικών πολλές φορές, θεωριών.

Σε αυτή την εργασία, αφού αναφερθούν συνοπτικά τα βασικά στοιχεία της Γενικής Σχετικότητας και του Καθιερωμένου Προτύπου της Κοσμολογίας, παρουσιάζουμε συνοπτικά την επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου μέσω της θεωρίας Kaluza-Klein. Στη συνέχεια δείχνουμε τον τρόπο κατασκευής των εξισώσεων πεδίου της βαρύτητας στα πλαίσια μιας ευρύτερης μετρικής.

Το εκτελεστικό μέρος αυτής της εργασίας θα προσπαθήσει να κατασκευάσει αναλυτικά, διάφορα απλά Κοσμολογικά μοντέλα με επιπλέον των τριών χωρικές διαστάσεις, με βασικότερο κίνητρο την προσπάθεια να συμπεριληφθούν σε αυτή την επέκταση του Καθιερωμένου Προτύπου, βασικά παρατηρησιακά δεδομένα, όπως η επιτάχυνση του Σύμπαντος.

Περιεχόμενα

1	Γενική Σχετικότητα	9
1.1	Εισαγωγή	9
1.2	Γενική θεωρία της Σχετικότητας	10
1.2.1	Αρχή της Ισοδυναμίας	10
1.2.2	Τανυστής Καμπυλότητας - Εξισώσεις Πεδίου	10
1.2.3	Σφαιρικά Συμμετρικοί Χώροι	12
2	Καθιερωμένη Κοσμολογία	19
2.1	Η Κοσμολογική Αρχή	19
2.2	Η Μετρική Robertson - Walker	20
2.3	Εξισώσεις Friedmann - Κοσμολογικά Μεγέθη	22
2.4	Η σημερινή εικόνα για το Σύμπαν	25
2.5	Καθιερωμένη Κοσμολογία	27
2.5.1	Κοσμολογική εξέλιξη και παρατηρούμενα μεγέθη	27
2.5.2	Ηλικία του Σύμπαντος	33
2.5.3	Εντροπία - Θερμική Ιστορία του Σύμπαντος	34
2.5.4	Οι μεγάλες επιτυχίες του Καθιερωμένου Προτύπου	37
2.5.5	Προβλήματα του μοντέλου της Μεγάλης Έκρηξης και του Καθιερωμένου Μοντέλου	44
2.6	Πληθωρισμός	46
2.6.1	Βαθμωτά Πεδία στην Κοσμολογία	46
2.7	Σύνοψη	49
3	Βασικά Στοιχεία Θεωρίας Kaluza - Klein	51
3.1	Γενικά περί θεωρίας Kaluza - Klein	52
3.2	Άλλα μοντέρνα σενάρια με επιπλέον διαστάσεις	54
4	Μοντέλα σε $3+n+1$ διαστάσεις	59
4.1	Κίνητρα για Καθολικές Επιπλέον Διαστάσεις	59
4.2	Ομογενείς Καθολικές Επιπλέον Διαστάσεις	60
4.3	Ισοδύναμη εικόνα στις 4 διαστάσεις	64

4.4	Η προσεγγιστική μέθοδος Picard	67
4.5	Ειδικές λύσεις και γενική λύση στο χώρο των $A, B(A)$	72
4.5.1	Λύσεις με παγιωμένη σχέση μεταξύ των $A(t), B(t)$	72
4.5.2	Ειδικές λύσεις για $n = 1$	74
4.5.3	Ειδικές λύσεις για $n > 1$	78
4.5.4	Η περίπτωση $w_a = w_b = 0$	85
4.5.5	Γενική λύση στο χώρο των φάσεων	86
4.5.6	Εφαρμογή της μεθόδου Picard στις εξισώσεις Friedmann για $n = 1$	98
4.5.7	Κατασκευή λύσης με τη μέθοδο Picard, για $n = 3$	117
4.6	Συμπεράσματα	124

Κεφάλαιο 1

Γενική Σχετικότητα

1.1 Εισαγωγή

Η μελέτη της γέννησης και της εξέλιξης του Σύμπαντος αποτελούσε πάντα μια από τις βασικές φιλοσοφικές αναζητήσεις της ανθρωπότητας. Γι' αυτό το λόγο ίσως, μέχρι τις αρχές του 20ου αιώνα, αντιμετωπιζόταν από την επιστήμη της Φυσικής με μια προσέγγιση που προσπαθούσε να χωρέσει μέσα στα πλαίσια της Φυσικής που πρότεινε η Νευτώνεια Μηχανική και ταυτόχρονα να συνδυάσει στοιχεία που ήταν αποδεκτά φιλοσοφικά, όπως για παράδειγμα η κυρίαρχη τότε αντίληψη ότι το Σύμπαν πρέπει να είναι στατικό. Με την εξέλιξη όμως των πειραματικών δυνατοτήτων φάνηκε βαθμιαία η αδυναμία της Νευτώνειας Μηχανικής να εξηγήσει φαινόμενα που δεν άπτονταν της καθημερινής ανθρώπινης εμπειρίας, όπως για παράδειγμα η διαφοροποίηση των νόμων της Ηλεκτροδυναμικής όταν κανείς μεταπηδούσε σε διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων. Κάπου εκεί εμφανίστηκε η ανάγκη για μια επανάσταση στον τρόπο που μελετούνταν τα διάφορα φαινόμενα.

Ένας από τους ηγέτες αυτής της επανάστασης ήταν ο Albert Einstein, η βασικότερη ίσως συνεισφορά του οποίου ήταν η διατύπωση της Θεωρίας της Σχετικότητας. Με βάση τη νέα θεώρηση που πρότεινε, έπρεπε η διατύπωση των φυσικών νόμων να πάψει να γίνεται με βάση την αναλλοιωτότητα του χώρου και του χρόνου ξεχωριστά, όπως την αντιλαμβάνεται στην καθημερινότητά του ο άνθρωπος, και να αντικατασταθεί από την αναλλοιωτότητα του συνδυασμού των δύο, του *χωρόχρονου*.

Με βάση τη νέα διατύπωση, το αναλλοίωτο σε μετασχηματισμούς συντεταγμένων μέγεθος, απαραίτητο για να διαφυλαχθεί η ισοδυναμία στη διατύπωση των Φυσικών νόμων ανάμεσα σε διαφορετικούς παρατηρητές, ήταν ο *ιδιόχρονος*, που χαρακτηρίζει τη διαφορά ανάμεσα σε δυο σημεία του χωρόχρονου:

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - d\vec{r}^2$$

Σε αυτό βασίστηκε η πρώτη νέα θεωρία, που ονομάστηκε Ειδική Σχετικότητα, και τα συμπεράσματά της οποίας θα συνοψίσουμε στα εξής δύο σημεία:

- Υπάρχει μια ανώτερη ταχύτητα στο Σύμπαν, η οποία είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό, $c = 299.992km/h$.
- Η μορφή όλων των Φυσικών νόμων θα είναι ίδια για διαφορετικούς αδρανειακούς (δηλαδή κινούμενους με σταθερή ταχύτητα μεταξύ τους) παρατηρητές.

Αυτή η νέα θεώρηση του κόσμου ήταν που άλλαξε τη γενικότερη αντίληψη για το πως παρατηρείται το ίδιο φαινόμενο από δύο διαφορετικούς παρατηρητές. Επιπλέον, εισήγαγε ένα νέο ερώτημα που μέχρι τότε η Νευτώνεια Μηχανική αντιμετώπιζε απλοϊκά: Αν υπάρχει ανώτερη ταχύτητα στο Σύμπαν, τότε με τι ταχύτητα διαδίδεται η πληροφορία ότι σε μια περιοχή του χώρου υπάρχει βαρυτικό πεδίο. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα ο Einstein διατύπωσε μια νέα θεωρία, τη *Γενική Θεωρία της Σχετικότητας*.

1.2 Γενική θεωρία της Σχετικότητας

1.2.1 Αρχή της Ισοδυναμίας

Ο βασικότερος πυλώνας πάνω στον οποίο στηρίχθηκε η νέα θεωρία ήταν η *Αρχή της Ισοδυναμίας*, μέσω της οποίας μπορούμε να περιγράψουμε τη συμπεριφορά ενός συστήματος υπό την παρουσία βαρυτικού πεδίου. Με βάση την Αρχή της Ισοδυναμίας σε κάθε χωροχρονικό σημείο ενός αυθαίρετα ισχυρού βαρυτικού πεδίου, θα είναι πάντα δυνατό να βρεθεί ένα τοπικά αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων, όπου η μορφή των φυσικών νόμων θα είναι ίδια με τη μορφή τους σε ένα μη επιταχυνόμενο και με απουσία βαρύτητας σύστημα συντεταγμένων.

1.2.2 Τανυστής Καμπυλότητας - Εξισώσεις Πεδίου

Για να μελετήσουμε ένα βαρυτικό πεδίο, όλη η πληροφορία που χρειζόμαστε εμπεριέχεται στη μετρική $g_{\mu\nu}$ και στο σύμβολο Christoffel. Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέουν τη γεωμετρία του χώρου όπως την αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής σε ένα σύστημα συντεταγμένων, x^μ , σε σχέση με το πως την αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής στο τοπικά ευκλείδιο σύστημα συντεταγμένων, ξ^μ . Η γενική τους μορφή είναι:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (1.1)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (1.2)$$

Η βαρυτική θεωρία όπως παρουσιάζεται μέσω της Θεωρίας της Σχετικότητας έχει, μια βαθιά σχέση με τη μη ευκλείδεια γεωμετρία. Η σύνδεση των δύο γίνεται ουσιαστικά

εφικτή χάρη στην Αρχή της Γενικής Συναλλοιώτητας με βάση την οποία:
Μια εξίσωση που περιγράφει ένα φυσικό σύστημα, θα ισχύει υπό την επίδραση ενός οποιουδήποτε βαρυτικού πεδίου, όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω προϋποθέσεις :

1. Η εξίσωση ισχύει υπό την απουσία της βαρύτητας
2. Η εξίσωση είναι γενικά συναλλοιώτη, δηλαδή διατηρεί τη μορφή της κατά το μετασχηματισμό : $x \rightarrow x'$

Για να μελετήσουμε ένα βαρυτικό πεδίο, πρέπει να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις που το περιγράφουν. Για να το κάνουμε αυτό, απαιτούμε να επιβεβαιώνουν το νευτώνειο όριο και να είναι συναλλοιώτες. Για να δουλέψουμε λοιπόν με τη μετρική, πρέπει να βρούμε τα συναλλοιώτα μεγέθη που μπορούμε να κατασκευάσουμε από αυτήν. Αποδεικνύεται ότι μόνο χρησιμοποιώντας τη μετρική και τις δεύτερες παραγώγους της μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν νέο ταυυστή. Τον ταυυστή αυτόν ονομάζουμε Riemann - Christoffel και συμβολίζουμε :

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta} \quad (1.3)$$

Από τον ταυυστή αυτόν, παράγονται εύκολα ο ταυυστής Ricci $R_{\mu\kappa}$ και η βαθμωτή καμπυλότητα R :

$$R_{\mu\kappa} = R^\lambda_{\mu\lambda\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \text{ και } R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}$$

Οι αλγεβρικές ιδιότητες του ταυυστή Riemann - Christoffel μας είναι πολύ χρήσιμες και γι' αυτό τις παρουσιάζουμε συνοπτικά εδώ:

1. Συμμετρία : $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$
2. Αντισυμμετρία : $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\mu\kappa\nu\lambda} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu}$
3. Συμμετρία κυκλικής εναλλαγής : $R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$

Ο ταυυστής Ricci εξ' άλλου είναι και αυτός συμμετρικός όπως φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις και θα είναι :

$$R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}$$

Τέλος, για τον ταυυστή αυτόν, υπάρχουν οι πολύ χρήσιμες ταυτότητες Bianchi. Πηγαινόντας σε ένα σύστημα όπου $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ έχουμε :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\eta} \left(\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right) \quad (1.4)$$

απόπου παίρνουμε με κυκλική εναλλαγή των ν, κ, η :

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + R_{\lambda\mu\eta\kappa;\nu} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (1.5)$$

Η παραπάνω έκφραση μας οδηγεί με σύμπτυξη δεικτών, στις πολύ πιο χρήσιμες μορφές των ταυτοτήτων Bianchi :

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R^{\nu}{}_{\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (1.6)$$

$$\left(R^{\mu}{}_{\eta} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\eta}R \right)_{;\mu} = 0 \quad (1.7)$$

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \right)_{;\mu} = 0 \quad (1.8)$$

Πλέον μπορούμε να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις πεδίου για τη βαρύτητα ξεκινώντας από το ασθενές όριο και στη συνέχεια γενικεύοντας τις εξισώσεις που βρίσκουμε. Η μορφή τους είναι:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.9)$$

όπου το $G_{\mu\nu}$ ονομάζεται τανυστής Einstein. Αντικαθιστώντας το βαθμωτό καμπυλότητας :

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^{\lambda}{}_{\lambda}) \quad (1.10)$$

Από τη μορφή των εξισώσεων πεδίου, συνάγουμε τα εξής συμπεράσματα :

- Στο κενό ισχύει $T_{\mu\nu} = 0$, άρα από τις εξισώσεις πεδίου καταλαβαίνουμε ότι $R_{\mu\nu} = 0$. Για $N = 2$ ή $N = 3$ ο τανυστής καμπυλότητας είναι $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$. Οπότε καταλαβαίνουμε ότι βαρυτικό πεδίο στο κενό υπάρχει μόνο στις 4 διαστάσεις.
- Η μόνη περίπτωση που περιλαμβάνει επιπλέον όρο, είναι να συμπεριλάβουμε το ίδιο το $g_{\mu\nu}$ με την εισαγωγή μιας κοσμολογικής σταθεράς:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}$$

Η κοσμολογική σταθερά που εισάγεται έτσι, δε συμφωνεί με το νευτώνειο όριο παρά μόνο αν $\lambda \cong 0$. Θα δούμε αργότερα ότι με βάση κάποιες σύγχρονες θεωρήσεις, η κοσμολογική σταθερά είναι ένας από τους υποψήφιους που μπορεί να οδηγούν στην παρατηρούμενη επιταχυνόμενη σιαστολή του Σύμπαντος.

1.2.3 Σφαιρικά Συμμετρικοί Χώροι

Σε αυτή την ενότητα θα παρακολουθήσουμε τα βασικά βήματα που πρέπει να γίνουν ώστε να παραχθεί η μετρική Robertson-Walker, δηλαδή η μετρική πάνω στην οποία βασίζεται το Καθιερωμένο Πρότυπο της Κοσμολογίας.

Μια μετρική λέγεται μορφικά αναλλοίωτη όταν κάτω από ένα μετασχηματισμό $x \rightarrow x'$, η g' είναι ίδια συνάρτηση του x' όπως η g είναι του x , δηλαδή:

$$g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x') \quad (1.11)$$

οπότε παίρνουμε:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x') \quad (1.12)$$

Ένας μετασχηματισμός αυτού του τύπου ονομάζεται *ισομετρία*. Για να μελετήσουμε τις ιδιότητες αυτών των μετασχηματισμών, παίρνουμε την περίπτωση όπου το νέο Σ μετακινείται απειροστά σε σχέση με το αρχικό:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon \xi^\mu, \quad |\varepsilon| \ll 1 \quad (1.13)$$

οπότε από το ανάπτυγμα Taylor και με χρήση των συναλλοίωτων συντεταγμένων, προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial \xi_\sigma}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \xi_\rho}{\partial x^\sigma} - 2\xi_\mu \Gamma_{\rho\sigma}^\mu = 0$$

Εύκολα επίσης αποδεικνύεται η ισοδύναμη σχέση:

$$\xi_{\rho;\sigma} + \xi_{\sigma;\rho} = 0 \quad (1.14)$$

Τα τετρανύσματα που ικανοποιούν την (1.14), ονομάζονται ανύσματα Killing (α.Κ.) της μετρικής $g_{\mu\nu}(x)$. Η έκφραση αυτή είναι αρκετή για να υπολογίσουμε όλη την ξ_μ , γνωρίζοντας μόνο τα $\xi_\sigma(X)$ και $\xi_{\sigma;\rho}(X)$ όπου το σχετιό ανάπτυγμα έχει τη μορφή:

$$\xi_\rho{}^n(x) = A_\rho{}^\lambda(x; X) \xi_\lambda{}^n(X) + B_\rho{}^{\lambda\nu}(x; X) \xi_{\lambda;\nu}{}^n(X) \quad (1.15)$$

Μια επιπλέον πληροφορία από την τελευταία αυτή σχέση είναι ότι για χώρο N διαστάσεων, ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων α.Κ. είναι $\frac{N(N+1)}{2}$.

Ορίζουμε τώρα δύο τύπους μετρικών με συγκεκριμένες και πολύ χρήσιμες ιδιότητες:

- **Ομογενής Μετρική** : Μια μετρική λέγεται *ομογενής* όταν υπάρχουν απειροστές ισομετρίες που μεταφέρουν το σημείο X οπουδήποτε στην άμεση γειτονιά του. Άρα τα α.Κ. της μετρικής θα παίρνουν σε κάθε σημείο όλες τις δυνατές τιμές.
- **Ισοτροπική Μετρική** : Μια μετρική λέγεται *ισοτροπική* όταν υπάρχουν απειροστές ισομετρίες τέτοιες ώστε : $\xi^\lambda(X) = 0$ και τα $\xi_{\lambda;\nu}(X)$ να παίρνουν όλες τις δυνατές τιμές υπακούοντας μόνο στην (1.14).

Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα :

1. Για χώρους που είναι ισότροποι σε κάθε σημείο μπορούμε να φτιάξουμε α.Κ. μέσω της $\xi_\lambda = \frac{\alpha_\nu}{N-1} \frac{\partial}{\partial X^\rho} \xi_\lambda^{\rho\nu}(x; X)$, οπότε κάθε χώρος που είναι παντού ισότροπος είναι και ομογενής.
2. Ένας ομογενής χώρος που είναι ισότροπος σε ένα σημείο είναι μέγιστα συμμετρικός, δηλαδή δέχεται $\frac{N(N+1)}{2}$ ανύσματα Killing. Το ίδιο ισχύει και για τους χώρους που είναι παντού ισότροποι, ενώ είναι προφανές ότι ένας μέγιστα συμμετρικός χώρος οφείλει να είναι ομογενής και ισότροπος.

Αποδεικνύεται επιπλέον ότι για 2 μέγιστα συμμετρικές μετρικές με ίδια σταθερά καμπυλότητας K , όπου $K : R^\lambda_\lambda = -N(N-1)K$, και ίδιους αριθμούς θετικών και αρνητικών ιδιοτιμών, θα μπορεί πάντα να βρεθεί μετασχηματισμός που μεταφέρει τη μία μετρική στην άλλη. Λόγω του παραπάνω θεωρήματος θα κάνουμε τώρα μια γενική κατασκευή ενός ΜΣΧ. Έστω ότι έχουμε ένα χώρο $N+1$ διαστάσεων με μετρική:

$$-d\tau^2 = g_{AB}dx^A dx^B = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + K^{-1}dz^2 \quad (1.16)$$

με $C_{\mu\nu}$ σταθερό $N \times N$ πίνακα και K μια σταθερά. Σε αυτό το χώρο μπορούμε να εμβαπτίσουμε έναν μη ευκλείδιο N -διάστατο χώρο περιορίζοντας τις μεταβλητές στην επιφάνεια μιας ψευδοσφαίρας:

$$KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu + z^2 = 1$$

οπότε έχουμε:

$$-d\tau^2 = C_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \frac{K(C_{\mu\nu}x^\mu dx^\nu)^2}{1 - KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma}$$

και η μετρική θα είναι:

$$g_{\mu\nu} = C_{\mu\nu} + \frac{K}{1 - KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma} C_{\mu\lambda}x^\lambda C_{\nu\kappa}x^\kappa \quad (1.17)$$

Βλέπουμε ότι η μετρική δέχεται $N(N+1)/2$ ισομετρίες καθώς η συνθήκη εμβαπτισμού και το γραμμικό στοιχείο είναι αναλλοίωτα στις στροφές του $(N+1)$ -διάστατου χώρου:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \mathfrak{R}^\mu_\nu x^\nu + \mathfrak{R}^\mu_z z$$

$$z \rightarrow z' = \mathfrak{R}^z_\mu x^\mu + \mathfrak{R}^z_z z$$

με R^α_β σταθερές που ικανοποιούν:

$$C_{\mu\nu}\mathfrak{R}^\mu_\rho \mathfrak{R}^\nu_\sigma + K^{-1}\mathfrak{R}^z_\rho \mathfrak{R}^z_\sigma = C_{\rho\sigma} \quad (1.18)$$

$$C_{\mu\nu}\mathfrak{R}^\mu_\rho \mathfrak{R}^\nu_z + K^{-1}\mathfrak{R}^z_\rho \mathfrak{R}^z_z = 0 \quad (1.19)$$

$$C_{\mu\nu}\mathfrak{R}^\mu_z \mathfrak{R}^\nu_z + K^{-1}(\mathfrak{R}^z_z)^2 = K^{-1} \quad (1.20)$$

Μπορούμε να σχηματίσουμε δύο κατηγορίες μετασχηματισμών που ικανοποιούν τα παραπάνω:

1. Αν $\mathfrak{R}^\mu{}_\nu = \mathcal{R}^\mu{}_\nu$, $\mathfrak{R}^z{}_\mu = \mathfrak{R}^z{}_\mu = 0$, $\mathfrak{R}^z{}_z = 1$ όπου ο $\mathcal{R}^\mu{}_\nu$ είναι $N \times N$ πίνακας :

$$C_{\mu\nu}\mathcal{R}^\mu{}_\rho\mathcal{R}^\nu{}_\sigma = C_{\rho\sigma}$$

που απλά περιγράφει τις στροφές γύρω από την αρχή:

$$x'^\mu = \mathcal{R}^\mu{}_\nu x^\nu$$

2. Αν $\mathfrak{R}^\mu{}_z = \mathbf{a}^\mu$, $\mathfrak{R}^z{}_\mu = -KC_{\mu\nu}\mathbf{a}^\nu$, $\mathfrak{R}^z{}_z = \sqrt{1 - KC_{\rho\sigma}\mathbf{a}^\rho\mathbf{a}^\sigma}$ και $\mathfrak{R}^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - bKC_{\nu\rho}\mathbf{a}^\rho\mathbf{a}^\mu$, με $\mathbf{a}^\rho$ αυθαίρετο αλλά τέτοιο ώστε το $\mathfrak{R}^z{}_z$ να είναι πραγματικός αριθμός, οπότε:

$$x'^\mu = x^\mu + \alpha^\mu \left(\sqrt{1 - KC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma} - bKC_{\rho\sigma}x^\rho x^\sigma \right) \quad (1.21)$$

Έτσι έχει μεταφερθεί η αρχή από το 0 στο $\mathbf{a}^\mu$.

Η πρώτη ισομετρία εξασφαλίζει ότι ο χώρος είναι ισότροπος γύρω από την αρχή ενώ η δεύτερη ότι είναι παντού ομογενής, οπότε φτάνουμε στο συμπέρασμα ότι ο χώρος είναι *μέγιστα συμμετρικός*.

Για την κατασκευή των α.Κ. θεωρούμε ότι οι αρχικοί μετασχηματισμοί πλησιάζουν το μοναδιαίο μετασχηματισμό. Για την πρώτη περίπτωση:

$$\mathcal{R}^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \varepsilon\Omega^\mu{}_\nu, \text{ με } |\varepsilon| \ll 1$$

οπότε τα α.Κ. είναι:

$$\xi_{(\Omega)}^\mu(x) = \Omega^\mu{}_\nu x^\nu$$

ενώ για τη δεύτερη περίπτωση $\mathbf{a} = \varepsilon\mathbf{a}^\mu$, με $|\varepsilon| \ll 1$ που μας δίνει:

$$\xi_{(\alpha)}^\mu(x) = \alpha^\mu \sqrt{1 - KC_{\mu\nu}x^\mu x^\nu}$$

Σημειώνουμε, ότι η σταθερά K της μετρικής, δεν είναι μια τυχαία σταθερά, αλλά εκφράζει την εσωτερική καμπυλότητα του χώρου. Όταν η καμπυλότητα είναι σταθερή, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τη μετρική χρησιμοποιώντας γραμμικό μετασχηματισμό όπου:

$$x^\mu = A^\mu{}_\nu x'^\nu$$

που διατηρεί το K αλλά αλλάζει τον πίνακα $C_{\mu\nu}$ ως εξής:

$$C'_{\mu\nu} = A^\rho{}_\mu A^\sigma{}_\nu C_{\rho\sigma}$$

Πλέον το μόνο που μένει είναι να μελετήσουμε το χώρο ανάλογα με τις τιμές της καμπυλότητάς του. Για να το κάνουμε αυτό, χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Sylvester για τις ιδιοτιμές, αλλά και το γεγονός ότι σε N -διάστατο ευκλείδιο χώρο οι ιδιοτιμές

της μετρικής είναι θετικές. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε για τον πίνακα $C_{\mu\nu}$ ότι:

$$C_{\mu\nu} = |K^{-1}| \mathbb{I}$$

και τελικά η μετρική θα παίρνει μία από τις παρακάτω μορφές ανάλογα με την τιμή της K :

$$K > 0 \rightarrow ds^2 = K^{-1} \left[dx^2 + \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1-x)^2} \right] \quad (1.22\alpha')$$

$$K = 0 \rightarrow C_{\mu\nu} \equiv \mathbb{I}, \text{ οπότε } ds^2 = dx^2 \quad (1.22\beta')$$

$$K < 0 \rightarrow ds^2 = K^{-1} \left[dx^2 - \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{(1+x)^2} \right] \quad (1.22\gamma')$$

Για $K > 0$ έχουμε λοιπόν μια μετρική ενός καμπύλου χώρου εμβαπτισμένου με την αρχική μας συνθήκη στον επίπεδο χώρο που μας δίνει η (1.16), ενώ για $K < 0$ δεν υπάρχει σημειακή ανωμαλία και τα x δεν έχουν όριο. Για να φτιάξουμε μια μέγιστα συμμετρική μετρική με 3 θετικές και 1 αρνητική ιδιοτιμή (χωρόχρονος) θέτουμε:

$$C_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$$

οπότε

$$-d\tau^2 = dx^2 - dt^2 + \frac{K(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - t dt)^2}{1 - K(x^2 - t^2)} \quad (1.23)$$

Για $K > 0$ μπορούμε με κατάλληλο μεταχρηματισμό να βρούμε συντεταγμένες στις οποίες η μετρική είναι χωρικά επίπεδη:

$$d\tau^2 = dt'^2 - \exp\{2\sqrt{K}t'\} d\mathbf{x}'^2$$

ενώ υπάρχει και μετασχηματισμός που την καθιστά χρονικά ανεξάρτητη:

$$d\tau^2 = (1 - K\mathbf{x}''^2) dt''^2 - d\mathbf{x}''^2 - \frac{K(\mathbf{x}'' \cdot d\mathbf{x}'')^2}{1 - Kx''^2}$$

Έστω τώρα κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων όπου όλος ο χώρος είναι N διαστάσεων και ο $M\Sigma$ υπόχωρός του έχει M διαστάσεις. Μεταξύ τους οι υπόχωροι θα ξεχωρίζουν από $N-M$ συντεταγμένες v^α , ενώ τα σημεία εντός τους καθορίζονται με τις συντεταγμένες u^i . Οι υπόχωροι με σταθερά v^α είναι $M\Sigma$ αν η μετρική του μητρικού χώρου είναι αναλλοίωτη κάτω από τους απειροστούς μετασχηματισμούς:

$$u^i \rightarrow u'^i = u^i + \varepsilon \xi^i(u, v)$$

και

$$v^\alpha \rightarrow v'^\alpha = v^\alpha$$

με $M(M+1)/2$ ανύσματα Killing ξ^i , και επειδή είναι $v'^\alpha = v^\alpha$, προκύπτει ότι $\xi^\alpha(u, v) = 0$. Αξίζει επίσης να σημειώσουμε ότι τα α.Κ. είναι ανεξάρτητα όσον αφορά στις μεταβλητές u και ότι οι μετασχηματισμοί μπορούν, εν γένει, να εξαρτώνται από τις μεταβλητές v .

Με βάση τα όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα: *Πάντα μπορούμε να επιλέξουμε συντεταγμένες u τέτοιες ώστε η μετρική όλου του χώρου να δίνεται από την εξίσωση:*

$$-d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\rho\sigma}dv^\rho dv^\sigma + f(v)\tilde{g}_{ij}(u)du^i du^j \quad (1.24)$$

Σε όλες τις περιπτώσεις που έχουν φυσική σημασία, οι ΜΣ υπόχωροι είναι χώροι και όχι χωρόχρονοι, κάτι που σημαίνει ότι οι ιδιοτιμές των μετρικών τους ($\tilde{g}_{ij}$) θα είναι θετικές. Με βάση τις γενικές μορφές μετρικών που δώσαμε παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τον όρο : $\tilde{g}_{ij}(u)du^i du^j$ και παίρνουμε τελικά:

$$-d\tau^2 = g_{\rho\sigma}(v)dv^\rho dv^\sigma + f(v) \left[dv^2 + \frac{k(u \cdot du)^2}{1 - ku^2} \right] \quad (1.25)$$

με $f(v) > 0$ και

$$k = \begin{cases} 1 & \text{αν ο ΜΣ υπόχωρος έχει } K > 0 \\ 0 & \text{αν ο ΜΣ υπόχωρος έχει } K = 0 \\ -1 & \text{αν ο ΜΣ υπόχωρος έχει } K < 0 \end{cases}$$

Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε τη μετρική ενός σφαιρικά συμμετρικού και ομογενούς χωρόχρονου. Η σημασία του συγκεκριμένου τύπου χωρόχρονου είναι τεράστια για την Κοσμολογία, λόγω της άμεσης σύνδεσής του με την Κοσμολογική Αρχή, όπως θα δούμε παρακάτω.

Θεωρούμε $N = 4$, η μετρική έχει 3 θετικές και 1 αρνητική ιδιοτιμή και μέγιστα συμμετρικούς υπόχωρους τριών διαστάσεων, που έχουν μετρικές με θετικές ιδιοτιμές και αυθαίρετη καμπυλότητα. Με αυτές τις προϋποθέσεις έχουμε 1 μεταβλητή τύπου v και 3 μεταβλητές τύπου u . Η μετρική είναι λοιπόν:

$$-d\tau^2 = g(v)dv^2 + f(v) \left[du^2 + \frac{k(u \cdot du)^2}{1 - ku^2} \right] \quad (1.26)$$

με $f > 0$, $g < 0$. Όμως αυτή τη μετρική μπορούμε να τη φέρουμε σε ακόμα πιο βολική μορφή κάνοντας τις εξής αλλαγές μεταβλητών:

$$t = \int \sqrt{-g(v)} dv$$

και

$$u^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad u^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad u^3 = r \cos \theta$$

οπότε έχουμε :

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (1.27)$$

με $R(t) = \sqrt{f(v)}$.

Αξίζει να τονιστεί ότι αυτή η μετρική, η οποία στην Κοσμολογία ονομάζεται μετρική Robertson-Walker, έχει παραχθεί μονοσήμαντα, έχοντας υποθέσει μόνο την ισοτροπία και την ομογένεια του χωρόχρονου. Αυτό ακριβώς το γεγονός την καθιστά θεμέλιο λίθο της Κοσμολογίας καθώς προκύπτει αβίαστα ως συμπέρασμα της Κοσμολογικής Αρχής.

Αναφορές Κεφαλαίου

[1],[2],[14],[15]

Κεφάλαιο 2

Καθιερωμένη Κοσμολογία

2.1 Η Κοσμολογική Αρχή

Το Καθιερωμένο Μοντέλο της Κοσμολογίας, όπως και τα περισσότερα κοσμολογικά μοντέλα, βασίζονται σε μια υπόθεση που ονομάζεται **Κοσμολογική Αρχή** και η οποία δηλώνει ότι το Σύμπαν είναι ομογενές και ισότροπο. Σε αυτή την ενότητα θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε μαθηματικά αυτή την αρχή, ώστε παρακάτω να μπορέσουμε να δούμε πως από αυτήν προκύπτει φυσiolογικά το Καθιερωμένο Μοντέλο της Κοσμολογίας.

Ορίζουμε λοιπόν το *Κανονικό Κοσμικό Σύστημα Συντεταγμένων* (ΚΚΣΣ), για το οποίο κάνουμε τις εξής θεωρήσεις : Θέτουμε $x^i = 0$ στο κέντρο του Γαλαξία και ορίζουμε τις κατευθύνσεις των συντεταγμένων με βάση κάποιους μακρινούς γαλαξίες. Για τη μέτρηση του χρόνου χρησιμοποιούμε ένα βαθμωτό πεδίο με γνήσια φθίνουσα συμπεριφορά, όπως είναι η θερμοκρασία της ακτινοβολίας ενός μέλανος σώματος.

Είναι προφανές από τη διατύπωση της Κοσμολογικής Αρχής, ότι θα υπάρχουν ισοδύναμα συστήματα συντεταγμένων με το ΚΚΣΣ στα οποία η εξέλιξη του Σύμπαντος θα φαίνεται η ίδια. Αυτό μαθηματικά εκφράζεται απλά μέσω της ισότητας των διαφόρων κοσμολογικών μεγεθών, όπως η μετρική ή ο ταχυστής ενέργειας-ορμής. Θέλουμε δηλαδή ο μετασχηματισμός $x \rightarrow x'$ να είναι μια ισομετρία που θα αφήνει τα μεγέθη αυτά μορφικά αναλλοίωτα :

$$g_{\mu\nu}(y) = g'_{\mu\nu}(y)$$

$$T_{\mu\nu}(y) = T'_{\mu\nu}(y)$$

Το ίδιο βέβαια θα συμβαίνει και για το μέγεθος το οποίο χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε το χρόνο $S(t) = S'(t)$ και άρα $t' = t$. Άρα λοιπόν όλα τα ισοδύναμα με το ΚΚΣΣ συστήματα, θα χρησιμοποιούν τον κανονικό κοσμικό χρόνο.

Η ισοτροπία μπορεί τώρα να εκφρασθεί ως η απαίτηση της ύπαρξης οικογένειας ΣΣ $x'(x, \theta)$ που θα εξαρτώνται από τρεις ανεξάρτητες συντεταγμένες, ισοδύναμες με

τις ΚΚΣ, με τις οποίες θα έχουν και την ίδια αρχή :

$$x^i(0, t, \theta) = 0$$

Η αντίστοιχη απαίτηση για την ομοιογένεια του χώρου είναι η εξής : Κάθε σημείο x^μ του χωρόχρονου βρίσκεται πάνω σε μια *θεμελιώδη τροχιά* $x^i = X^i(t)$. Αυτή η θεμελιώδης τροχιά μπορεί να αποτελέσει μια γεννήτρια για τα ισοδύναμα συστήματα συντεταγμένων x'^μ . Τα $\mathbf{X}(t)$ εξαρτώνται από 3 ανεξάρτητες μεταβλητές που μπορούν για παράδειγμα να είναι η τιμές $\alpha^i = X^i$ σε κάποια χρονική στιγμή. Έχουμε δηλαδή κατασκευάσει μια άλλη οικογένεια ισοδύναμων μεταβλητών, τις $\bar{x}^\mu(x; \alpha)$, που έχουν την αρχή τους κάπου στην τροχιά $X^i(t; \alpha)$.

Με λίγα λόγια, η Κοσμολογική Αρχή μπορεί να κωδικοποιηθεί στην ύπαρξη των δύο παραπάνω, ανεξάρτητων μεταξύ τους, ισομετριών, που αφήνουν εκτός των άλλων, και τη χρονική μεταβλητή αναλλοίωτη. Αυτό είναι αρκετό ώστε το *τετραδιάστατο Σύμπαν* να έχει μέγιστα συμμετρικούς τριδιάστατους υπόχωρους, με $t = \text{const}$, και μάλιστα υπό τις ισομετρίες των υπόχωρων αυτών οι κοσμικοί τανυστές να παραμένουν μορφικά αναλλοίωτοι.

2.2 Η Μετρική Robertson - Walker

Όπως είδαμε νωρίτερα, αν χρησιμοποιήσουμε τις υποθέσεις της Κοσμολογικής αρχής στα αποτελέσματά μας για τους Μέγιστα Συμμετρικούς Χώρους, βρίσκουμε ότι θα πρέπει να υπάρχουν μεταβλητές r, θ, ϕ, t ώστε :

$$d\tau^2 = dt^2 - a(t) \left[\frac{dr^2}{1 - k_a r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (2.1)$$

όπου $a(t)$: άγνωστη συνάρτηση του χρόνου, k : σταθερά που μπορεί να παίρνει μόνο τις τιμές 1, 0, -1 με κατάλληλη επιλογή μονάδων. Αυτή η μετρική λέγεται μετρική Robertson - Walker (R-W).

Τονίζεται ότι η μετρική αυτή έχει προκύψει χωρίς χρήση των εξισώσεων του Einstein, παρά μόνο με την υπόθεση ομοιογένειας και ισοτροπίας για έναν 3+1 διάστατο χώρο. Αυτό το αποτέλεσμα όμως μπορεί να βρεθεί και στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας, θεωρώντας ένα σύστημα που αποτελείται από σφαιρικά συμμετρικά κατανεμημένη «σκόνη», που έχει την ιδιότητα να καταρρέει ελεύθερα χωρίς να ασκεί πίεση. Στο συγχινούμενο σύστημα συντεταγμένων¹ αυτής της σκόνης, η μετρική μπορεί να γραφεί

$$d\tau^2 = dt^2 - U(r, t) dr^2 - V(r, t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.2)$$

¹ Δηλαδή στο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο θεωρούμε ότι κάθε σωματίδιο φέρει ένα δικό του ρολόι, ενώ του αντιστοιχούμε κάποιες σταθερές χωρικές συντεταγμένες με βάση ένα αυθαίρετο σύστημα συντεταγμένων όταν αυτό το ρολόι δείχνει 0.

Σε αυτή την περίπτωση ο ταχυστής ενέργειας ορμής παίρνει τη μορφή

$$T_{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu$$

όπου το U συμβολίζει το τετράνυσμα ταχύτητας για το ρευστό. Μπορούμε πλέον με αντικατάσταση στις εξισώσεις πεδίου της βαρύτητας να λάβουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τη μετρική και μπορεί κανείς να δει τότε, την ισοδυναμία του αποτελέσματος που παίρνουμε μέσω της Γενικής Σχετικότητας για ένα σφαιρικά συμμετρικό σύστημα που καταρρέει, και του αποτελέσματος που παίρνουμε αν κατασκευάσουμε απευθείας, όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, έναν ομογενή και ισότροπο χώρο.

Από τη μετρική αυτού του χώρου θα πάμε τώρα να κατασκευάσουμε τις εξισώσεις Friedmann που δίδουν την Κοσμολογική εξέλιξη. Για $t = \text{const}$ έχουμε για τα χωρικά στοιχεία της μετρικής ότι :

$$g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1 - k_a r^2}, \quad g_{\theta\theta} = r^2 a^2(t), \quad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta a^2(t)$$

Συγκρίνοντας αυτά με την ομάδα εξισώσεων (1.22), η βαθμωτή καμπυλότητα για τις 3 διαστάσεις είναι :

$$K = k_a a^{-2}(t)$$

Οι 3 τιμές του k_a οδηγούν σε :

$$\begin{cases} -1 & \text{ο χώρος είναι άπειρος} \\ 0 & \text{ο χώρος είναι άπειρος} \\ 1 & \text{ο χώρος είναι πεπερασμένος αλλά χωρίς όρια} \end{cases}$$

Στην τελευταία περίπτωση μάλιστα η ιδιοπεριφέρεια είναι $L^{(3)} = 2\pi a$ και ο ιδιοόγκος $V^{(3)} = 2\pi^2 a^3(t)$. Μπορούμε δηλαδή να θεωρήσουμε το $a(t)$ σαν την ακτίνα σφαίρας σε τετραδιάστατο χώρο και κατ'επέκταση ως την ακτίνα του Σύμπαντος. Αντίθετα, για $k_a = 0, -1$ δεν έχουμε κάποιο αντίστοιχο ευκλείδιο μέγεθος με το οποίο μπορούμε να παρομοιάσουμε το $a(t)$, αλλά μπορούμε και πάλι να το θεωρούμε ως μέτρο του μεγέθους του Σύμπαντος και γι'αυτό το ονομάζουμε *Κοσμικό Παράγοντα Μεγέθους*.

Από την κατασκευή αυτής της μετρικής βλέπουμε ότι τα διαγώνια στοιχεία της μένουν αναλλοίωτα. Οι μετασχηματισμοί που έχουν αυτή την ιδιότητα είναι οι στρώφες

$$x'^i = \mathfrak{R}^i_j x^j$$

με $\mathfrak{R}$ αυθαίρετο ορθογώνιο πίνακα και

$$x^1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x^3 = r \cos \theta$$

και οι μεταθέσεις που δίνονται αν θέσουμε $KC_{\rho\sigma} = k\mathbb{I}$ στην εξίσωση (1.21) δηλαδή :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a} \left[\sqrt{1 - k\mathbf{x}^2} - [1 - \sqrt{1 - k\mathbf{a}^2}] \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a}^2} \right) \right] \quad (2.3)$$

με $\mathbf{a}$ ένα αυθαίρετο διάνυσμα. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι κάθε σταθερό σημείο μπορεί να χρησιμεύσει σαν αρχή $\Sigma\Sigma$ ισοδύναμου με αυτό στο οποίο ισχύει η μετρική R-W. Επειδή ο Γαλαξίας είναι, σε σχέση με τους κοντινούς του γείτονες, σε ηρεμία, μπορούμε να καθορίσουμε καλά τις θεμελιώδεις τροχιές $\vec{X}(t)$ από τις κινήσεις του κοσμικού ρευστού των γαλαξιών και άρα να πούμε ότι το σύστημα συντεταγμένων r, θ, ϕ αποτελεί σύστημα ιδοσυντεταγμένων αφού οι γαλαξίες αυτού του ρευστού έχουν σταθερά r, θ, ϕ . Οι θεμελιώδεις τροχιές των παρατηρητών στους οποίους το Σύμπαν φαίνεται ίδιο όπως σε εμάς θα είναι λοιπόν $\mathbf{X}(t; \mathbf{a}) = \mathbf{a}$

Με τη χρήση της Κοσμολογικής Αρχής μαζί με τη μετρική R-W και τους διάφορους κοσμολογικούς τανυστές όπως τον $T_{\mu\nu}$ και το ρεύμα των γαλαξιών J_G^μ ², οι οποίοι πρέπει να παραμένουν μορφικά αναλλοίωτοι στους παραπάνω μετασχηματισμούς, θα μπορέσουμε να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της ύλης σε κοσμική κλίμακα.

2.3 Εξισώσεις Friedmann - Κοσμολογικά Μεγέθη

Έχουμε ήδη δει πως η μετρική ενός ομογενούς και ισότροπου Σύμπαντος είναι η μετρική R-W, με στοιχεία $g_{tt} = -1$, $g_{it} = 0$, $g_{kj} = a^2(t)\tilde{g}_{ij}(x)$ όπου $\tilde{g}_{ij}(x)$: η μετρική ενός τριδιάστατου $M\Sigma$ χώρου :

$$\tilde{g}_{rr} = (1 - k_a r^2)^{-1}, \tilde{g}_{\theta\theta} = r^2, \tilde{g}_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \theta, \tilde{g}_{ij} = 0 \text{ για } i \neq j$$

με $k_a = -1, 0, 1$. Μπορούμε τώρα να βρούμε τα μη μηδενικά στοιχεία του τανυστή Ricci και του συμβόλου Christoffel :

$$\Gamma_{ij}^t = a\dot{a} \tilde{g}^{ij}$$

$$\Gamma_{tj}^i = \frac{\dot{a}}{a} \delta_j^i$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2}(g^{-1})^{il} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial \tilde{g}_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial x^l} \right) \equiv \tilde{\Gamma}_{jk}^i$$

$$R_{tt} = \frac{3\ddot{a}}{a}$$

$$R_{ti} = 0$$

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2)\tilde{g}_{ij}$$

οπότε

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ki}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}^k}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}_{li}^k \tilde{\Gamma}_{kj}^l - \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{\Gamma}_{kl}^l \quad (2.4)$$

²Όπου $J_G^\mu = g^{-\frac{1}{2}}(x) \sum_n \int \delta^4(x - x_n) dx^\mu_n$, με την άθροιση να γίνεται στους γαλαξίες.

Επειδή όμως βρισκόμαστε σε ΜΣ χώρο η μορφή του τανυστή Ricci θα είναι :

$$\tilde{R}_{ij} = -2k\tilde{g}_{ij}$$

και μαζί με τα παραπάνω παίρνουμε το χωρικό κομμάτι του Ricci :

$$R_{ij} = -(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k_a)\tilde{g}_{ij} \quad (2.5)$$

Επιπλέον ο τανυστής ενέργειας ορμής πρέπει, όπως εξηγήσαμε παραπάνω, να έχει τη μορφή ιδανικού ρευστού :

$$T_{\mu\nu} = Pg_{\mu\nu} + (P + \rho)U_\mu U_\nu \quad (2.6)$$

και τα ρ και p να είναι συναρτήσεις μόνο του χρόνου ενώ $U^t = 1$, $U^i = 0$. Γράφοντας τις εξισώσεις Einstein ως :

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}$$

όπου

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda \quad (2.7)$$

θα έχουμε :

$$S_{tt} = \frac{1}{2}(\rho + 3P) \quad (2.8)$$

$$S_{it} = 0 \quad (2.9)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(\rho - P)a^2\tilde{g}_{ij} \quad (2.10)$$

Πλέον μπορούμε με χρήση των παραπάνω μαζί με τις εξισώσεις Einstein να πάρουμε :

$$3\ddot{a} = -4\pi G(\rho + 3p)a \quad (2.11)$$

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k_a = 4\pi G(\rho - P)a^2 \quad (2.12)$$

Από αυτές τις δύο προκύπτει η εξίσωση Friedmann:

$$\dot{a}^2 + k_a = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 \quad (2.13)$$

ενώ από τη διατήρηση ενέργειας παίρνουμε :

$$\frac{d}{da}(\rho a^3) = -3Pa^2 \quad (2.14)$$

Μας είναι λοιπόν αρκετό για να βρούμε το $a(t)$, να μας δίνεται μια καταστατική εξίσωση $P(\rho)$ η οποία μας οδηγεί στην $\rho(a)$. Δηλαδή, οι βασικές εξισώσεις που χρειαζόμαστε στη δυναμική Κοσμολογία είναι οι εξισώσεις Einstein, η εξίσωση

διατήρησης ενέργειας και η καταστατική εξίσωση. Τα μοντέλα που βασίζονται σε μετρική R-W ονομάζονται μοντέλα Friedmann.

Μπορούμε όμως και μόνο από τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα για το Σύμπαν, αρκεί να βρούμε το πρόσημο των $\ddot{a}$, $\dot{a}$, a . Το πρόσημο του a είναι βεβαίως πάντα θετικό εξ' ορισμού. Επιπλέον, το $\ddot{a}$ θα είναι αρνητικό για $\rho + 3P > 0$, οπότε το μόνο που μένει να βρούμε είναι το $\dot{a}$. Για να το κάνουμε αυτό χρειάζεται να υπολογίσουμε ένα μέγεθος που ονομάζεται ερυθρομετατόπιση και είναι το κοσμικό ανάλογο του φαινομένου Doppler.

Τοποθετώντας τον εαυτό μας στη θέση $r = 0$ και για κύμα που ταξιδεύει με θ, ϕ σταθερά τότε για ένα μέτωπο κύματος θα είναι:

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0$$

Άρα ένα μέτωπο κύματος από μια κοσμική θέση r_1, θ_1, ϕ_1 που φεύγει τη στιγμή t_1 και φτάνει σε εμάς τη στιγμή t_0 είναι:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(r_1) \quad (2.15)$$

όπου

$$f(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \begin{cases} \sin^{-1} r_1 & \text{για } k_a = 1 \\ r_1 & \text{για } k_a = 0 \\ \sinh^{-1} r_1 & \text{για } k_a = -1 \end{cases}$$

Το $f(r_1)$ είναι χρονοανεξάρτητο και το επόμενο κύμα θα φτάσει σε εμάς τη στιγμή $t_0 + \delta t_0$ οπότε

$$f(r_1) = \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.16)$$

Κάνοντας την πράξη : (2.16) - (2.15), και επειδή το $a(t) \approx \text{const}$ μεταξύ δύο μετώπων κύματος, έχουμε:

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_1}{a(t_1)} \quad (2.17)$$

Άρα η παρατηρούμενη με την εκπεμπόμενη συχνότητα έχουν την εξής σχέση:

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_0} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}$$

Αυτό το εκφράζουμε με τον παράγοντα ερυθρομετατόπισης z :

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \quad (2.18)$$

ή συναρτήσει του κοσμικού παράγοντα κλίμακας $a(t)$:

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 \quad (2.19)$$

Μια άυξηση του παράγοντα δομής οδηγεί σε ερυθρομετατόπιση (redshift), ενώ μια μείωσή του σε blueshift. Επιπλέον ορίζουμε δύο μεγέθη των οποίων η τιμή μας επιτρέπει να εξάγουμε συμπεράσματα για την εξέλιξη του Σύμπαντος. Αυτά τα μεγέθη είναι:

- Η παράμετρος Hubble: $H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, για την οποία αξίζει να σημειώσουμε ότι συμβολίζουμε με H_0 όταν αναφέρεται στο σήμερα.
- Η παράμετρος επιβράδυνσης³: $q = -\ddot{a}(t) \frac{a(t)}{\dot{a}^2(t)} = -1 - \frac{\dot{H}}{H^2}$

Από τις παρατηρήσεις έχει προκύψει ότι $\dot{a}, \ddot{a} > 0$, δηλαδή έχουμε μια επιταχυνόμενη διαστολή του Σύμπαντος, αντίθετα με ότι πιστευόταν μέχρι τα τέλη του προηγούμενου αιώνα. Εξάλλου, θα πρέπει σε κάποια στιγμή στο παρελθόν ο κοσμικός παράγοντας δομής $a(t)$ να έτεινε στο 0. Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι $\ddot{a} = 0$, μπορούμε να πάρουμε μια μέγιστη τιμή της ηλικίας του Σύμπαντος, αφού θα είναι τότε :

$$a(t)t_0 = a(t_0)t$$

και η οποία είναι:

$$t_0 = H_0^{-1} = \frac{a(t_0)}{\dot{a}(t_0)}$$

Όπως θα δούμε εκτενέστερα παρακάτω, η παρατήρηση ότι $q_0 < 0$ έρχεται σε αντίθεση με τις προβλέψεις του Καθιερωμένου Μοντέλου της Κοσμολογίας, και απαιτεί την επαναδιατύπωση της θεωρίας με κατάλληλη μεταρτοπή ώστε να προβλέπει αυτό το χαρακτηριστικό.

2.4 Η σημερινή εικόνα για το Σύμπαν

Πριν παρουσιάσουμε πιο αναλυτικά το Καθιερωμένο Μοντέλο, θα συγκεντρώσουμε σε αυτή την ενότητα κάποια από τα παρατηρησιακά δεδομένα που έχουν συλλεγεί και τα οποία διαμορφώνουν τη σημερινή εικόνα που έχουμε για το Σύμπαν. Τα δεδομένα αυτή προέρχονται ως επί το πλείστον από το διαστημικό τηλεσκόπιο COBE και από τους δορυφόρους WMAP και Planck πιο πρόσφατα.

Ίσως η πιο σημαντική από τις παρατηρήσεις που συντείνουν στη θεωρία της Μεγάλης Έκρηξης, είναι η λεγόμενη *Μικροκυματική Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου*.

³Η παράμετρος αυτή ορίστηκε με το πρόσημο (-) ώστε να είναι θετική για ένα επιβραδυνόμενο Σύμπαν.

Η ανακάλυψή της έγινε τη δεκαετία του 1960, αλλά η πιο ενδελεχής μελέτη της έγινε πιο πρόσφατα μέσω των δορυφόρων COBE και WMAP και συνεχίζεται με το δορυφόρο Planck. Από την ανάλυση των σχετικών δεδομένων, παρατηρείται να φτάνει σε εμάς από κάθε γωνία στην οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε, εξαιρετικά ισότροπη ακτινοβολία, με μήκος κύματος που αντιστοιχεί στα μικροκύματα. Αυτό το γεγονός δίνει για το Σύμπαν, την εικόνα ενός μέλανος σώματος, με θερμοκρασία $T \approx 2.72^\circ K$. Παρατηρούνται δε σε αυτήν, εξαιρετικά μικρές ανισotropίες, της τάξης του $\delta T \approx 2 \cdot 10^{-4}^\circ K$. Η ισοτροπία της ακτινοβολίας αυτής συμβαδίζει με ένα ρευστό που την εξέπεμψε ενώ βρισκόταν σε θερμική ισορροπία, ενώ οι μικρές διαφοροποιήσεις συμβαδίζουν με τοπικές ανισotropίες που είχε αυτό το ρευστό όταν αυτή η ακτινοβολία εξεπέμφθη. Όπως θα δούμε πιο αναλυτικά παρακάτω, αυτό το γεγονός αντιστοιχεί στην εποχή της αποσύζευξης της ύλης από την ακτινοβολία στα αρχικά στάδια της ζωής του Σύμπαντος, ένα γεγονός που προβλέφθηκε από το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης. Σύμφωνα με αυτό, στο υπέρθερμο αρχικό Σύμπαν, η θερμοκρασία ήταν τόσο υψηλή που η ύλη ήταν πλήρως ιονισμένη και η μέση ελεύθερη διαδρομή για ένα φωτόνιο ήταν τόσο μικρή που ουσιαστικά έφερε σε θερμική ισορροπία την ύλη με την ακτινοβολία, δίνοντας αυτή την ισότροπη εικόνα. Όταν η θερμοκρασία αυτού του ρευστού έπεσε κάτω από μια κρίσιμη τιμή, η ακτινοβολία απελευθερώθηκε, και αυτό που παρατηρούμε σήμερα είναι η τελευταία εικόνα αυτής της σκέδασης. Οι δε μικρές ανισotropίες, που επίσης προβλέφθηκαν, θεωρείται ότι είναι η εικόνα των πρωταρχικών σπόρων ύλης που οδήγησαν στην πορεία στη δημιουργία μέσω της βαρυτικής αλληλεπίδρασης όλων των μεγάλων δομών του Σύμπαντος.

Για τα χαρακτηριστικά και την ίδια τη σύσταση του Σύμπαντος, γνωρίζουμε σήμερα τα εξής:

- Με πολύ καλή ακρίβεια, από τα πειράματα και τις παρατηρήσεις του WMAP μεταξύ άλλων, το Σύμπαν διέπεται με εξαιρετική ακρίβεια από Ευκλείδια γεωμετρία, όπου η καμπυλότητα είναι $k = 0 \pm 0.4$.
- Η ηλικία του Σύμπαντος υπολογίζεται πως είναι $13.7 \cdot 10^9$ χρόνια.
- Από την ανάλυση των δεδομένων για τις ερυθρομετατοπίσεις των υπερκαινοφανών τύπου Ia, αποδεικνύεται ότι το Σύμπαν διαστέλλεται σήμερα με επιταχυνόμενο ρυθμό. Αυτή η ανακάλυψη στα τέλη της δεκαετίας του 1990 ήταν εντελώς απροσδόκητη, καθώς μέχρι τότε θεωρούνταν ότι διαστέλλεται επιβραδυνόμενα, ή ακόμα και ότι ήταν σταθερό. Συνοδεύεται δε από την υπόθεση, που φαίνεται να υποστηρίζεται από την αντιστοίχιση παρατηρησιακών δεδομένων σε υπάρχοντα μοντέλα⁴, ότι δε διαστελόταν επιταχυνόμενα σε όλη του τη ζωή, αλλά,

⁴Η παρατηρούμενη επιτάχυνση αποδίδεται, ανάλογα με τον τρόπο προσέγγισης, ως συνεισφορά στη συνολική πυκνότητα ενέργειας της «ενέργειας κενού». Από την ανάλυση των δεδομένων, από τύπου Ia υπερκαινοφανείς, φαίνεται ότι η ενέργεια του κενού δεν ξεκίνησε να αποτελεί την κυρίαρχη συνεισφορά στην πυκνότητα ενέργειας του Σύμπαντος παρά σχετικά πρόσφατα.

αντίθετα, για μια περίοδο που έληξε περίπου $5 \cdot 10^9$ χρόνια πριν, διαστελόταν επιβραδυνόμενα.

- Από σύγκριση με μοντέλα, φαίνεται ότι η ορατή και γνωστή σε εμάς ύλη αποτελεί μονάχα το 5% του περιεχομένου του Σύμπαντος. Αντίθετα, φαίνεται ότι το μεγαλύτερο ποσοστό ύλης αντιστοιχεί σε αυτό που ονομάζουμε *skotein'h 'ulh*, που αποτελεί συνολικά το $\approx 25\%$ του ενεργειακού περιεχομένου, ενώ το υπόλοιπο 70% αποτελεί η *skotein'h en'ergeia* στην οποία αποδίδεται το γεγονός ότι το Σύμπαν διαστέλεται επιταχυνόμενα.

2.5 Καθιερωμένη Κοσμολογία

Επιστρέφοντας στην κατασκευή του Καθιερωμένου Μοντέλου, υπενθυμίζουμε ότι έχοντας σα δεδομένες την ομογένεια και ισοτροπία του Σύμπαντος, έχουμε καταφέρει να γνωρίζουμε ακριβώς τις εξισώσεις που διέπουν την εξέλιξή του. Επομένως, απομένει να μελετήσουμε τις λύσεις που δίνονται από αυτές, ανάλογα με το ενεργειακό περιεχόμενο που έχει ο ταχυστής ενέργειας - ορμής, και κατ'επέκταση η καταστατική εξίσωση. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε κάποια συμπεράσματα στα οποία μπορούμε να φτάσουμε από όσα έχουμε δει παραπάνω. Με αυτό τον τρόπο θα έχουμε την ευκαιρία να δούμε τα σημεία στα οποία είναι επιτυχημένη η Καθιερωμένη Κοσμολογία, αλλά και τα προβλήματα που παρουσιάζονται από τη σύγκριση της θεωρίας με τα παρατηρησιακά δεδομένα.

2.5.1 Κοσμολογική εξέλιξη και παρατηρούμενα μεγέθη

Ξαναγράφουμε τις εξισώσεις Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k_a}{a^2} \quad (2.20)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) \quad (2.21)$$

Από αυτές τις δύο μπορούμε εύκολα να πάρουμε την εξίσωση συνέχειας. Λύνουμε την πρώτη ως προς ρ και παραγωγίζουμε:

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{k_a}{a^2} + H^2 \right) \quad (2.22)$$

οπότε

$$\dot{\rho} = -\frac{3}{8\pi G} \left(-2\frac{k_a\dot{a}}{a^3} + 2H\left(\frac{\ddot{a}}{a} - H^2\right) \right) \quad (2.23)$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη εξίσωση Friedmann μπορούμε να φτάσουμε στην εξίσωση:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0 \quad (2.24)$$

που αποτελεί την εξίσωση συνέχειας.

Για να πάρουμε τη σχέση που διέπει την κοσμολογική εξέλιξη θα υποθέσουμε μια καταστατική εξίσωση της μορφής:

$$P = w\rho$$

όπου θα θεωρήσουμε το w σταθερό. Για τις δυο συνήθεις μορφές της ύλης, μη σχετικιστική και σχετικιστική, που κατά περιόδους έχουν κυριαρχήσει στο Σύμπαν, η παράμετρος w παίρνει τιμές 0 και $\frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Επομένως αν ολοκληρώσουμε την εξίσωση συνέχειας μπορούμε να πάρουμε

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}$$

και να λάβουμε έτσι το νόμο δύναμης που περιγράφει στις δύο αυτές περιπτώσεις την εξέλιξη του παράγοντα δομής. Αν πάρουμε από τις παρατηρήσεις ως δεδομένο ότι το Σύμπαν φαίνεται με πολύ καλή ακρίβεια να είναι επίπεδο, $k_a = 0$, τότε μπορούμε από την πρώτη εξίσωση Friedmann, (2.20), να πάρουμε:

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

που δίνει εξέλιξη ως $a(t) \propto t^{1/2}$ για σχετικιστική ύλη και $a(t) \propto t^{2/3}$ για μη σχετικιστική.

Σήμερα όμως γνωρίζουμε ότι το Σύμπαν διαστέλλεται επιταχυνόμενα. Αυτό δε μπορεί να δικαιολογηθεί αν λάβουμε υπ' όψη μας το παραπάνω αποτέλεσμα για τη μη σχετικιστική ύλη που θεωρούμε ότι κυριαρχεί σήμερα με βάση το Καθιερωμένο Πρότυπο. Συγκεκριμένα, αυτό το αποτέλεσμα οδηγεί σε ένα επιβραδυνόμενο διαστελλόμενο Σύμπαν, καθώς η παράμετρος Hubble είναι θετική, όπως και η παράμετρος επιτάχυνσης, q , που όπως είδαμε από τον ορισμό της νωρίτερα συνεπάγεται επιβράδυνση.

Υποδεικνύεται λοιπόν ξεκάθαρα η ανάγκη να διατυπωθεί με, ενδεχόμενα, ένα νέο είδος Φυσικής, το ενεργειακό περιεχόμενο του τανυστή ενέργειας - ορμής, ή να συμπεριληφθεί μια κοσμολογική σταθερά, που θα «σπρώχνει» το Σύμπαν σε μια επιταχυνόμενη διαστολή. Η ύπαρξη κοσμολογικής σταθεράς μπορεί, όπως θα δούμε εκτενέστερα παρακάτω, να παραλληλισθεί με μια καταστατική εξίσωση στην οποία η παράμετρος w έχει τιμή -1. Για επίπεδο Σύμπαν, ο παράγοντας δομής θα εξελίσσεται τότε ως:

$$a(t) \propto \exp(Ht)$$

Επιστρέφοντας στο Καθιερωμένο Πρότυπο, για να μελετήσουμε καλύτερα το αποτέλεσμα που έχει το εκάστοτε ενεργειακό περιεχόμενο, που αποδίδουμε στον τανυστή ενέργειας - ορμής, ορίζουμε τις παραμέτρους πυκνότητας

$$\Omega_{0(i)} = \frac{8\pi G \rho_0^{(i)}}{3H_0^2} \quad (2.25)$$

όπου ο δείκτης 0 αναφέρεται στις σημερινές τιμές των εκάστοτε μεγεθών, και ο δείκτης i αναφέρεται στο κάθε είδος ύλης που έχει συνεισφορά στην πυκνότητα. Αυτές οι παράμετροι είναι αδιάστατες, και μπορούμε από την 2.20 να δούμε ότι:

$$\Omega_0 = \sum_i \Omega_{0(i)} = 1 + \frac{k_a}{a_0^2 H_0^2} \quad (2.26)$$

Για ένα επίπεδο Σύμπαν λοιπόν καταλαβαίνουμε ότι η ποσότητα

$$\rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

είναι η κρίσιμη πυκνότητα, που κάνει την παράμετρο Ω ίση με το 1. Επειδή μάλιστα το μέγεθος $H^2 a^2$ είναι θετικό, καταλαβαίνουμε ότι υπάρχει μια άμεση αντιστοιχία μεταξύ του προσήμου της καμπυλότητας k_a και του προσήμου του όρου $\Omega - 1$. Συνοπτικά είναι:

$$k_a = 1 \Rightarrow \Omega > 1 \rightarrow \text{κλειστό Σύμπαν}$$

$$k_a = 0 \Rightarrow \Omega = 1 \rightarrow \text{επίπεδο Σύμπαν}$$

$$k_a = -1 \Rightarrow \Omega < 1 \rightarrow \text{ανοικτό Σύμπαν}$$

Επιπλέον, μπορούμε να συσχετίσουμε την παράμετρο πυκνότητας με την παράμετρο επιβράδυνσης και ανάλογα με την παρατηρούμενη τιμή της δεύτερης να εξάγουμε συμπεράσματα για την πρώτη. Όπως έχουμε δει η παράμετρος επιβράδυνσης είναι ίση με:

$$q_0 = \frac{\ddot{a}_0}{\dot{a}_0} a_0 = -\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2}$$

Με χρήση της εξίσωσης (2.11) και μέσω του ορισμού της παραμέτρου Ω μπορούμε εύκολα να φτάσουμε στη σχέση

$$q_0 = \Omega_0(1 + \frac{3P}{\rho})/2 = \Omega_0(1 + 3w)/2 \quad (2.27)$$

Επομένως μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε συνοπτικά το πως συνδέεται η παρατήρηση του τύπου της ύλης που κυριαρχεί στο Σύμπαν με τη θεωρητική πρόβλεψη για την παράμετρο επιβράδυνσής του. Έχουμε:

$$q_0 = \Omega_0/2 \rightarrow \text{κυριαρχία μη σχετικιστικής ύλης}$$

$q_0 = \Omega_0 \rightarrow$ κυριαρχία σχετικιστικής ύλης

$q_0 = -\Omega_0 \rightarrow$ κυριαρχία ενέργειας κενού (κοσμολογική σταθερά)

Από τις παρατηρήσεις φαίνεται ότι το Σύμπαν είναι με πολύ καλή ακρίβεια επίπεδο αλλά και ότι η συνεισφορά της συνήθους (βαρυονικής) ύλης είναι της τάξης του $\Omega_b \approx 0,03$. Αυτό βεβαίως απέχει πολύ από την τιμή 1 που λαμβάνουμε για ένα επίπεδο Σύμπαν, και οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει και άλλη Φυσική που δε συμπεριλαμβάνεται από τις θεωρήσεις του Καθιερωμένου Προτύπου.

Όπως θα δούμε και παρακάτω, από την απαίτηση να υπάρχει αρκετή ύλη ώστε οι μεγάλης κλίμακας δομές του Σύμπαντος (γαλαξίες, σμήνη, κλπ.) να είναι σταθερές και να μη διαλύονται, υπολογίζεται ότι υπάρχει η ονομαζόμενη *σκοτεινή ύλη* με συνεισφορά $\Omega_{dm} \approx 0.28$ ενώ για να έχουμε την παρατηρούμενη επιτάχυνση στη διαστολή του Σύμπαντος, πρέπει να υπάρχει μια συνιστώσα, που ονομάζεται *σκοτεινή ενέργεια* και συνεισφέρει $\Omega_\Lambda \approx 0.69$. Η ύπαρξη αυτών των δύο συνιστωσών στο ενεργειακό περιεχόμενο του τανυστή ενέργειας ορμής αποτελεί ίσως το πιο καίριο πρόβλημα που η σύγχρονη Κοσμολογία καλείται να λύσει, ενώ θα δούμε ότι υπάρχουν και άλλα επιμέρους προβλήματα, που το μοντέλο της Μεγάλης Έκρηξης δε μπορεί να αντιμετωπίσει από μόνο του.

Πιο συγκεκριμένα, ένα από τα πιο διαδεδομένα μοντέλα που περιλαμβάνουν επεκτάσεις του Καθιερωμένου Προτύπου της Κοσμολογίας είναι το λεγόμενο μοντέλο Λ CDM, δηλαδή ενός μοντέλου που προβλέπει ένα Σύμπαν με ψυχρή σκοτεινή ύλη στο οποίο κυριαρχεί πλέον μια κοσμολογική σταθερά.

Το γενικό πλαίσιο ερωτημάτων στο οποίο απαντά η ψυχρή σκοτεινή ύλη (CDM) είναι το εξής:

- Η γραφική παράσταση των ταχυτήτων των άστρων στους γαλαξίες, συναρτήσει της απόστασής τους από το κέντρο του εκάστοτε γαλαξία δείχνει να μην υπακούει τα μοντέλα που κατασκευάζονται και περιέχουν μόνο την ορατή ύλη. Αυτό το φαινόμενο μπορεί να εξηγηθεί αν η ορατή ύλη κατοικεί μέσα σε μια άλω σκοτεινής ύλης με πυκνότητα που μειώνεται σαν $1/r^2$.
- Τα σμήνη γαλαξιών δείχνουν να έχουν μεγαλύτερα πηγάρδια δυναμικού από ότι δείχνουν τα μοντέλα που περιλαμβάνουν μόνο βαρυονική ύλη. Παρατηρησιακά αυτό φαίνεται για παράδειγμα στις κινήσεις των γαλαξιών αλλά και σε άλλα φαινόμενα. Μια άλω σκοτεινής ύλης που περιβάλλει τα σμήνη, μπορεί επίσης να εξηγήσει αυτό το φαινόμενο.
- Το φαινόμενο της διάχυσης θα έπρεπε να εμποδίζει, καθώς το Σύμπαν ενηλικιώνεται, τη δημιουργία δομών. Η ύπαρξη όμως της σκοτεινής ύλης μπορεί να διατηρήσει τις δομές και να αποτελεί το βαρυτικό σπόρο για τη δημιουργία των γαλαξιών.

Όσον αφορά στη σκοτεινή ενέργεια, οι πρώτες ενδείξεις για την ύπαρξή της, είχαν να κάνουν με το πόσο «ομαδοποιημένη» φαινόταν η ύλη σε μεγάλες κλίμακες, κάτι που ένα επίπεδο Σύμπαν που κυριαρχείτο από κρύα σκοτεινή ύλη δε μπορούσε να εξηγήσει απόλυτα. Φάνηκε δε από αναλύσεις ότι ένα Σύμπαν, στο οποίο υπάρχει κοσμολογική σταθερά, μπορεί να εξηγήσει αυτές τις δομές σε μεγάλη κλίμακα. Όμως το πιο αποφασιστικό παρατηρησιακό δεδομένο που υποστηρίζει την ύπαρξη μιας κοσμολογικής σταθεράς, Λ , ήταν η ανακάλυψη στα τέλη της δεκαετίας του 1990 ότι το Σύμπαν διαστέλεται επιταχυνόμενα.

Συνοπτικά λοιπόν τα επιχειρήματα υπέρ της ύπαρξης της σκοτεινής ενέργειας είναι τα εξής:

- Από μετρήσεις της φωτεινότητας των υπερκαινοφανών τύπου *Ia* φάνηκε ότι το Σύμπαν επιταχύνει τη διαστολή του. Αυτό το φαινόμενο συμφωνεί με την ύπαρξη μιας κοσμολογικής σταθεράς, που οδηγεί σε μια δύναμη αρνητική πίεση, και ταυτόχρονα είναι ασυνεπές με ένα Σύμπαν που κυριαρχείται από ψυχρή σκοτεινή ύλη. Μάλιστα, υπολογίζεται από τον παραπάνω τρόπο παρατήρησης ότι η καταστατική εξίσωση θα πρέπει να είναι

$$w = P/\rho = -0,97 \pm 0.05$$

- Από μετρήσεις στις μικρές ανισοτροπίες της Κοσμικής Μικροκυματικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου, σε διάφορες κλίμακες, και σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του SDSS (Sloan Digital Sky Survey), φαίνεται πως έχουμε συμφωνία με ένα Σύμπαν στο οποίο

$$\Omega_{\Lambda} = 0.725 \pm 0.016$$

και

$$w = -1.10 \pm 0.14$$

- Από τις μετρήσεις του δορυφόρου Planck, υποθέτοντας ότι $k_a = 0$ προκύπτουν οι εξής τιμές:

$$\Omega_{\Lambda} = 0.692 \pm 0.012$$

$$\Omega_m = 0.308 \pm 0.012$$

- Από συνδυασμό των αποτελεσμάτων διαφόρων μελετών για δομές μεγάλης κλίμακας με υπολογισμούς από το φαινόμενο Sachs-Wolfe (ISW)⁵ φαίνεται να απαιτείται

$$w = -1.01^{+0.30}_{-0.40}$$

⁵Με βάση αυτό το φαινόμενο, τα φωτόνια της Ακτινοβολίας Υποβάθρου, ερυθρομετατοπίζονται βαρυτικά και σε γωνίες παρατήρησης μεγαλύτερες των 10° είναι ο κυρίαρχος λόγος για τον οποίο η ακτινοβολία υποβάθρου παρουσιάζεται ανισότροπη.

- Η αριθμητική πυκνότητα σμηνών γαλαξιών σε συνάρτηση της ερυθρομετατόπισης, δείχνει την ύπαρξη τεράστιων σχηματισμών γαλαξιών σε μεγάλες ερυθρομετατοπίσεις ($z \approx 2$), κάτι που ευνοεί το σενάριο ενός επιταχυνόμενα διαστελόμενου Σύμπαντος.

Παρότι κάθε μια από τις παραπάνω παρατηρήσεις έχει κατα καιρούς εξηγηθεί από επι μέρους θεωρήσεις, το μόνο μοντέλο στα πλαίσια της ήδη γνωστής Φυσικής, που δείχνει να συμφωνεί με όλες είναι το μοντέλο Λ CDM, δηλαδή αυτό το οποίο περιλαμβάνει ταυτόχρονα την ύπαρξη ψυχρής, αλληλεπιδρούσας μόνο βαρυτικά, σκοτεινής ύλης και ταυτόχρονα την ύπαρξη μιας κοσμολογικής σταθεράς, Λ .

Βεβαίως, το μοντέλο αυτό έχει και αδυναμίες, τις πιο απλές και βασικές από τις οποίες παρουσιάζουμε συνοπτικά αμέσως:

- Η παρατηρούμενη τιμή της Λ είναι περίπου 120 τάξεις μεγέθους μικρότερη από την εκτίμηση ότι θα πρέπει να είναι της τάξης του M_{Pl}^4 . Αυτή της η τιμή οδηγεί εμμέσως σε προβλήματα fine-tuning, όπως για παράδειγμα όταν υπολογίζουμε την ενεργό ενέργεια του κενού, στην οποία συμπεριλαμβάνονται όροι τόσο από το ίδιο το κενό, όσο και από διάφορα σωματίδια. Πηγαίνοντας σε όλο και μικρότερες κλίμακες για να έχουμε την ίδια Φυσική, πρέπει οι όροι που περιγράφουν τη συνεισφορά του πραγματικού κενού να αλληλοεξουδετερώνονται σε βάθος τουλάχιστον 32 δεκαδικών ψηφίων.
- Ένα άλλο θέμα που εξετάζεται από την κοινότητα, είναι το γιατί οι συνεισφορές στην ενεργειακή πυκνότητα της κοσμολογικής σταθεράς και της ύλης είναι περίπου ίδιες. Ο λόγος για αυτό είναι ότι ο τρόπος με τον οποίο εξελίσσονται σε μεγέθη, καθώς εξελίσσεται γενικότερα το Σύμπαν, είναι τελείως διαφορετικός και δεν είναι προφανές το γιατί υπάρχει αυτή η μερική σύμπτωση στις συνεισφορές τους. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό ως coincidence problem.
- Ένα αντίστοιχο πρόβλημα εμφανίζεται αν σκεφτούμε τις συνεισφορές στην ενεργειακή πυκνότητα της σκοτεινής ύλης και της ορατής ύλης. Οι δυο αυτοί τύποι ύλης δημιουργούνται με πολύ διαφορετικούς μηχανισμούς. Τα βαρυόνια παράγονται μη θερμικά και εκτός της ισορροπίας, ενώ η κυρίαρχη άποψη για την ψυχρή σκοτεινή ύλη είναι ότι παράγεται θερμικά, καθώς οι ενεργοί διατομές που προκύπτουν από την ασθενή αλληλεπίδραση δείχνουν να δίνουν τη σωστή αφθονία στη σκοτεινή ύλη. Είναι λοιπόν απορίας άξιο το πως δύο τόσο διαφορετικοί τρόποι παραγωγής ύλης δίνουν συγκρίσιμες συνεισφορές στην ενεργειακή πυκνότητα.
- Από το σενάριο της σκοτεινής ύλης προβλέπεται επιπλέον, ότι μέσα στη γαλαξιακή άλω υπάρχει μια πολύ πλούσια δομή γαλαξιών νάνων. Για παράδειγμα για το δικό μας Γαλαξία, υπολογίζεται ότι θα έπρεπε να υπάρχουν περίπου 500

νάνοι γαλαξίες μέσα στην άλω του, αλλά από τις παρατηρήσεις αυτοί φτάνουν τους 30. Μια απλή εξήγηση σε αυτό βεβαίως θα μπορούσε να είναι η ύπαρξη σκοτεινών γαλαξιών, δηλαδή γαλαξιών φτιαγμένων από σκοτεινή ύλη που εκ των πραγμάτων δε μπορούμε να παρατηρήσουμε.

- Φαίνεται τέλος, ότι η υπολογιζόμενη από τη θεωρία κατανομή της πυκνότητας της σκοτεινής ύλης κοντά στα κέντρα των γαλαξιών ακολουθεί μια κατανομή $\rho_{CDM} \propto r^{-a}$, όπου η παράμετρος a υπολογίζεται ότι παίρνει τιμές στην περιοχή 0.7 – 1.5. Αντίθετα, από τις παρατηρήσεις φαίνεται ότι καθώς πλησιάζουμε κοντά στα κέντρα των γαλαξιών αυτή η εξάρτηση από την απόσταση εξανεμίζεται.

2.5.2 Ηλικία του Σύμπαντος

Μπορούμε να βρούμε την ηλικία του Σύμπαντος σα συνάρτηση των κοσμολογικών παραμέτρων με το να ολοκληρώσουμε την εξίσωση (2.20). Η πυκνότητα ενέργειας όπως είδαμε μεταβάλεται ως $\rho/\rho_0 = (a/a_0)^{-3}$ σε ένα Σύμπαν που κυριαρχείται από ύλη και ως $\rho/\rho_0 = (a/a_0)^{-4}$ σε ένα Σύμπαν που κυριαρχείται από ακτινοβολία. Σε αυτές τις δύο περιπτώσεις η (2.20) παίρνει τις μορφές

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k_a}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{-3}, \text{ κυριαρχία ύλης} \quad (2.28)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k_a}{a_0^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho_0\left(\frac{a_0}{a}\right)^{-4}, \text{ κυριαρχία ακτινοβολίας} \quad (2.29)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση (2.26), και τον ορισμό της ερυθρομετατόπισης παίρνουμε ότι

$$t = \int_0^{a(t)} \frac{da'}{\dot{a}'} \quad (2.30)$$

$$= H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{(1 - \Omega_0 + \Omega_0 x^{-1})^{-1/2}}, \text{ για κυριαρχία ύλης} \quad (2.31)$$

$$= H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{(1 - \Omega_0 + \Omega_0 x^{-2})^{-1/2}}, \text{ για κυριαρχία ακτινοβολίας} \quad (2.32)$$

Αξίζει να σημειωθούν τα εξής:

Κατά σύμβαση παίρνουμε ως χρόνο μηδέν, το χρόνο για τον οποίο ο παράγοντας δομής $a(t)$ πηγαίνει στο 0. Επιπλέον, θεωρούμε ότι ο χρόνος που παρήλθε από τη γέννηση του Σύμπαντος μέχρι τη χρονική στιγμή που άρχισαν να ισχύουν οι εξισώσεις και η Φυσική που γνωρίζουμε σήμερα είναι πολύ μικρός και χωρίς ουσιαστική

συνεισφορά στην ηλικία που υπολογίζουμε, υπό την προϋπόθεση ότι $a \propto t^n$ με $n < 1$ και για αυτή την περίοδο.

Ως παράδειγμα, θα βρούμε εδώ τον τύπο που δίνει την ηλικία ενός Σύμπαντος επιπέδου, που περιέχει μη σχετικιστική ύλη αλλά και στο οποίο επιδρά μια κοσμολογική σταθερά. Έχουμε ότι:

$$t_0 = \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_{vac}^{-1/2} \ln \left(\frac{1 + \Omega_{vac}^{1/2}}{(1 - \Omega_{vac})^{1/2}} \right) \quad (2.33)$$

όπου $\Omega_{vac} = \rho_{vac}/\rho_{cr}$ και ενώ θεωρούμε ότι $\Omega_{vac} + \Omega_{matter} = 1$, αν και σημειώνεται ότι δεν περιμένουμε η εξέλιξη του Σύμπαντος να είναι ακριβώς γραμμική.

2.5.3 Εντροπία - Θερμική Ιστορία του Σύμπαντος

Στο διαστελλόμενο Σύμπαν, σύμφωνα με το δεύτερο θερμοδυναμικό νόμο θα ισχύει

$$TdS = d(\rho V) + PdV = d[(\rho + P)V] - VdP \quad (2.34)$$

όπου ρ : η πυκνότητα, P : η πίεση και $V(=a^3)$ ο όγκος. Η πυκνότητα με την πίεση συνδέονται με τη σχέση

$$T \frac{dP}{dT} = \rho + P$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να βρούμε την εντροπία κατά συγκινούμενο όγκο

$$S = \frac{\rho + P}{T} a^3 \quad (2.35)$$

Μάλιστα με χρήση του πρώτου θερμοδυναμικού νόμου

$$d[(\rho + P)V] = VdP$$

μπορούμε να δείξουμε ότι

$$d \left[\frac{(\rho + P)V}{T} \right] = 0$$

δηλαδή ότι η εντροπία κατά συγκινούμενο όγκο διατηρείται. Η διατήρηση της εντροπίας σημαίνει ότι η πυκνότητα εντροπίας $s = S/V$ θα είναι ανάλογη του a^{-3} . Επειδή η πυκνότητα εντροπίας κυριαρχείται από σχετικιστικά σωματίδια, είναι

$$s \propto T^3$$

που μας οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$T \propto a^{-1} \quad (2.36)$$

Από πρακτικής απόψεως, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το Σύμπαν κατά το μεγαλύτερο μέρος της ζωής του βρίσκεται σε θερμική ισορροπία. Βεβαίως με την πάροδο του χρόνου διάφορα είδη σωματιδίων άρχιζαν να φεύγουν από την ισορροπία. Συγκρίνοντας το ρυθμό επέκτασης του Σύμπαντος με το ρυθμό των αλληλεπιδράσεων των σωματιδίων, μπορούμε να δούμε ποια από τα σωματίδια βρίσκονται σε ισορροπία και ποια έχουν ξεφύγει από αυτήν. Αν ο ρυθμός των αλληλεπιδράσεων είναι μεγαλύτερος από το ρυθμό διαστολής τότε μπορούμε να πούμε ότι το Σύμπαν εξελίσσεται περνώντας από διαδοχικές καταστάσεις αυτής της ισορροπίας, με τη θερμοκρασία του να εξελίσσεται, όπως είδαμε, σαν $T \propto R^{-1}$.

Θα παραθέσουμε τώρα μια συνοπτική περιγραφή των διαδοχικών βημάτων στη ζωή του Σύμπαντος.

- Σε πολύ αρχικές στιγμές όταν η θερμοκρασία ήταν μεγαλύτερη από $10^{12} K (\approx 80 MeV)$ το Σύμπαν περιείχε μεγάλη ποικιλία σωματιδίων, όπως λεπτόνια, φωτόνια και μεσόνια, σε θερμική ισορροπία, τα οποία αλληλεπιδρούσαν.
- Όταν η θερμοκρασία έφτασε στους $10^{12} K$ το Σύμπαν περιείχε φωτόνια, μίονια, ηλεκτρόνια, νετρίνα και τα αντισωματίά τους όπως και έναν μικρό αριθμό πρωτονίων και νετρονίων ίσων μεταξύ τους, ενώ η θερμική ισορροπία συνέχιζε να υπάρχει.
- Όταν η θερμοκρασία έπεσε κάτω από αυτό το όριο άρχισαν να εξαϋλώνονται τα μ^+ , μ^- . Όταν όλα τα μίονια εξαφανίστηκαν περίπου στους $1.3 \times 10^{11} K (\approx 10 MeV)$ τα νετρίνα και τα αντινετρίνα χωρίστηκαν από τα υπόλοιπα σωματίδια αφήνοντας τα φωτόνια και τα $e^\pm$ μαζί με κάποια νουκλεόνια σε θερμική ισορροπία, ενώ η θερμοκρασία έπεφτε με ρυθμό $T \propto R^{-1}$.
- Η θερμοκρασία συνέχιζε να πέφτει και 0.01 δευτερόλεπτα μετά την αρχική ανωμαλία, όταν η θερμοκρασία έχει φτάσει τους $10^{11} K$ η διαφορά μάζας μεταξύ πρωτονίων και νετρονίων οδηγεί σε μια αύξηση του αριθμού των πρωτονίων έναντι των νετρονίων.
- Περίπου στα 4 δευτερόλεπτα, όταν $T \approx 5 \times 10^9 K (\approx 0.4 MeV)$, τα ποζιτρόνια και τα ηλεκτρόνια αρχίζουν να εξαϋλώνονται και αφήνουν ως κυρίαρχα συστατικά του Σύμπαντος τα φωτόνια και τα νετρίνα, τα οποία διαδίδονται ελεύθερα, με τα φωτόνια να έχουν θερμοκρασία περίπου 40% μεγαλύτερη από αυτή των νετρίνων. Ταυτόχρονα, από την ψύξη των νετρίνων και των αντινετρίνων και την εξαϋλωση των ποζιτρονίων με τα ηλεκτρόνια, η αναλογία πρωτονίων και νετρονίων παγώνει στην τιμή 5:1.
- Όταν η θερμοκρασία έχει πια φτάσει στους $10^9 K (\approx 86 keV)$ τα πρωτόνια και τα νετρόνια συντήκονται σε βαρύτερους πυρήνες δίνοντας ένα ιονισμένο αέριο

H, He σε αναλογία 4 : 1, μαζί με κάποια άλλα βαρύτερα στοιχεία σε πολύ μικρό ποσοστό.

- Η διάδοση των φωτονίων και των νετρίνων συνεχίζεται με $T_\gamma = 1.4T_\nu \propto R^{-1}$ και η θερμοκρασία του ιονισμένου αερίου παραμένει στους $4000^\circ K$ μέχρι τον απιονισμό του υδρογόνου, ενώ σε κάποια στιγμή μεταξύ 10^3 και $10^5 K$ η ενεργειακή πυκνότητα των φωτονίων και των νετρίνων πέφτει αρκετά ώστε να μπορούμε στην εποχή της κυριαρχίας της ύλης.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το Σύμπαν περνάει από διάφορες φάσεις η κάθε μια από τις οποίες τελειώνει με την αποχώρηση ενός σημαντικού τύπου σωματιδίων από τη θερμική ισορροπία. Η πιο σημαντική από αυτές τις μεταβάσεις για την κοσμολογική εξέλιξη είναι αυτή από την κυριαρχία της ακτινοβολίας στην κυριαρχία της ύλης που συμβαίνει με την αποχώρηση των φωτονίων από τη θερμική ισορροπία.

Για να μελετήσουμε λίγο περισσότερο αυτές τις μεταβάσεις έχουμε τα εξής:

Αν έχουμε ένα σωματίο με ρυθμό αλληλεπίδρασης που δίνεται από την εξίσωση :

$$\Gamma = n\sigma|v|$$

όπου σ : ενεργός διατομή, τότε για να ξεφύγει αυτό το είδος σωματιδίων από τη γενικότερη ισορροπία θα πρέπει να είναι $\Gamma < H$, όπου H η σταθερά Hubble. Οι πιο σημαντικές περιόδους αποχώρησης σωματιδίων από την ισορροπία είναι οι εξής :

- Νετρινική αποχώρηση από την ισορροπία: Αρχικά τα νετρίνα, που έχουν προκύψει από διάσπαση σωματιδίων Z ή $W^\pm$, παραμένουν στην ισορροπία μέσω αντιδράσεων όπως οι

$$\bar{\nu}\nu \leftrightarrow e^+e^-$$

$$\bar{\nu}e \leftrightarrow \bar{\nu}e$$

$$\bar{e}\nu \leftrightarrow \bar{e}\nu$$

Η ενεργός διατομή αυτών των αντιδράσεων υπολογίζεται πως είναι ίση με $\sigma = G_W^2 T^2$, ενώ η πυκνότητα των άμαζων σωματιδίων συμπεριφέρεται σαν $n \propto T^3$ άρα συνολικά θα είναι :

$$\Gamma = G_W^2 T^5$$

Ο ρυθμός αυτός γίνεται μικρότερος από τον παράγοντα κλίμακας του Σύμπαντος σε θερμοκρασίες της τάξης του $1MeV$ όταν και αποχωρούν από την ισορροπία. Η σημερινή θερμοκρασία των νετρίνων υπολογίζεται πως είναι $T_\nu = 1.96^\circ K$

- Φωτονική αποχώρηση από την ισορροπία : Όταν η πυκνότητα των $e^\pm$ γίνεται πολύ χαμηλή για να διατηρήσει τη θερμική επαφή των φωτονίων και της ύλης έχουμε την οριστική παύση της ισορροπίας μεταξύ ύλης και ακτινοβολίας. Αυτό

συμβαίνει όταν $\Gamma_\gamma = n_e \sigma_T T$, όπου σ_T : η ενεργός διατομή της αλληλεπίδρασης Thomson, δηλαδή περίπου στους $4.000^\circ K$, ενώ ταυτόχρονα αρχίζουν να δημιουργούνται και τα πρώτα άτομα καθώς τα ηλεκτρόνια έχουν αρκετά χαμηλή θερμοκρασία ώστε να συνδεθούν με τα πρωτόνια. Τη στιγμή της πλήρους αποχώρησης των φωτονίων από την ισορροπία, μπορούμε να τη μελετήσουμε σήμερα από τις διακυμάνσεις στην Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου.

2.5.4 Οι μεγάλες επιτυχίες του Καθιερωμένου Προτύπου

Το Καθιερωμένο Πρότυπο της Κοσμολογίας, έχει με μεγάλη επιτυχία καλύψει την ανάγκη για θεωρητική εξήγηση δύο πολύ σημαντικών παρατηρήσεων της σύγχρονης Φυσικής. Αυτές είναι η ύπαρξη της Κοσμολογικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου, που παρατηρείται προς κάθε κατεύθυνση του ουρανού, αλλά και η αφθονία στην οποία παρατηρούνται τα διάφορα είδη ύλης στο Σύμπαν.

Κοσμική Ακτινοβολία Υποβάθρου (CMBR)

Από τις εξισώσεις Einstein βλέπουμε ότι το $R(t)$ πρέπει να έχει υπάρξει πολύ μικρό στο παρελθόν. Αν όντως αυτό συνέβη, θα πρέπει η ύλη και η ακτινοβολία να ήταν σε θερμική ισορροπία σε πολύ υψηλή θερμοκρασία. Όσο το Σύμπαν διαστελόταν η θερμοκρασία θα πρέπει να έπεφτε και όταν έφτασε στους $4000^\circ K$ τα ηλεκτρόνια ενώθηκαν με πρωτόνια δημιουργώντας υδρογόνο. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα η αδιαφάνεια του Σύμπαντος, η οποία οφειλόταν στην πολύ μικρή μέση ελεύθερη διαδρομή όλων των σωματιών μέχρι εκείνη την περίοδο, να πέσει κατακόρυφα. Η ακτινοβολία από τότε θα πρέπει να έχει διαχυθεί σε όλο το Σύμπαν και βεβαίως να έχει υποστεί μια τεράστια ερυθρομετατόπιση. Η ενεργειακή πυκνότητα των εναπομένων φωτονίων με συχνότητα μεταξύ ν και $\nu + d\nu$ δίνεται από:

$$n_{\gamma 0}(\nu_0) = 8\pi\nu_0^2 \int_{t_1}^{t_0} \exp\left(-\frac{h\nu_0 R(t_0)}{kT(t)R(t)}\right) \Lambda\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t)}, t\right) \\ \times \exp\left[-\int_{t_1}^{t_0} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_0 R(t_0)}{kT(t')R(t')}\right)\right] \Lambda\left(\nu_0 \frac{R(t_0)}{R(t')}, t'\right) dt'\right] dt$$

οπότε

$$\rho_{\gamma 0}(\nu)d\nu = 8\pi h\nu^3 d\nu \int_0^{t_0} \exp\left(-\frac{h\nu R_0}{kT(t)R(t)}\right) \Lambda\left(\frac{\nu R_0}{R(t)}, t\right) \mathcal{P}(t_0, t; \nu) dt$$

όπου h : σταθερά Planck, k : σταθερά Boltzmann, $T(t)$: θερμοκρασία ύλης, $\Lambda(\nu, t)$: ρυθμός απορρόφησης για φωτόνιο συχνότητας ν τη στιγμή t και $\mathcal{P}(t_0, t; \nu)$: η

πιθανότητα για φωτόνιο συχνότητας $\frac{\nu R_0}{R(t)}$ που ήταν παρόν τη στιγμή t να ζήσει μέχρι τη στιγμή t_0 :

$$\mathcal{P}(t_0, t; \nu) = \exp \left[- \int_t^{t_0} \left[1 - \exp \left(- \frac{h\nu R_0}{kT(t')R(t')} \right) \right] \Lambda \left(\frac{\nu R_0}{R(t')}, t' \right) dt' \right]$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την πυκνότητα ως:

$$\rho_{\gamma 0}(\nu) d\nu = 8\pi h\nu^3 d\nu \int_0^{t_0} \left[\exp \left(\frac{h\nu R_0}{kT(t)R(t)} \right) - 1 \right]^{-1} \times \frac{d\mathcal{P}(t_0, t; \nu)}{dt} dt \quad (2.37)$$

απόπου βλέπουμε ότι η πιθανότητα αυξάνει από 0 για $t = 0$, σε 1 για $t = t_0$. Αν η αδιαφάνεια πέφτει απότομα σε στιγμή t_R , τότε η συνάρτηση της πιθανότητας θα είναι σχεδόν μια συνάρτηση βήματος και από την (2.37) παίρνουμε τις:

$$\rho_{\gamma 0}(\nu) d\nu \approx \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{\exp(h\nu/kT_{\gamma 0}) - 1} \quad (2.38)$$

$$T_{\gamma 0} = \frac{T(t_R)R(t_R)}{R_0} \quad (2.39)$$

Αν λοιπόν η αδιαφάνεια έπεσε απότομα, η παρούσα ακτινοβολία υποβάθρου θα πρέπει να έχει μια κατανομή μέλανος σώματος θερμοκρασίας $T_{\gamma 0}$. Η πληροφορία που παίρνουμε άμεσα λόγω της ακτινοβολίας υποβάθρου είναι η τιμή του $\frac{R(t)}{R_0}$ τη στιγμή που το Σύμπαν έγινε διαφανές. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η θερμοκρασία της ύλης συμπεριφέρεται σαν $T(t) = \frac{A}{R(t)}$, με A μια σταθερά, τότε παίρνουμε την (2.38) ανεξάρτητα του πόσο απότομα έπεσε η αδιαφάνεια του Σύμπαντος. Επιπλέον από την (2.37) αν πάρουμε σαν t_0 έναν τυχαίο χρόνο t , η πυκνότητα δίνεται από μια εξίσωση μελανού σώματος:

$$\rho_{\gamma}(\nu, t) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3 d\nu}{\exp(h\nu/kT_{\gamma}(t)) - 1} \quad (2.40)$$

όπου

$$T_{\gamma}(t) = \frac{A}{R(t)} \quad (2.41)$$

και μάλιστα η ακτινοβολία θα ακολουθεί αυτή την κατανομή σε όλη τη διάρκεια του περάσματος από την αδιαφάνεια στη διαφάνεια και μέχρι το παρόν. Το A υπολογίζεται αν πάρουμε $t = t_0$ οπότε παίρνουμε για τη θερμοκρασία της ακτινοβολίας:

$$T_{\gamma}(t) = T_{\gamma 0} \left(\frac{R(0)}{R(t)} \right) \quad (2.42)$$

και για τη θερμοκρασία της ύλης:

$$T(t) = T_{\gamma 0} \left(\frac{R(0)}{R(t)} \right) \quad (2.43)$$

Από την παρούσα θερμοκρασία της ακτινοβολίας μπορούμε να υπολογίσουμε όλη τη θερμική ιστορία του Σύμπαντος, για όσο διάστημα ισχύει $TR = \text{const}$.

Για να δούμε πότε η συνθήκη $TR = \text{const}$ μπορεί να ήταν δυνατή, θεωρούμε ιδανικό αέριο σε ισορροπία με ακτινοβολία μελανού σώματος. Από ολοκλήρωση της (2.40) παίρνουμε:

$$\rho_\gamma(t) = aT_\gamma^4(t)$$

οπότε σε αυτή την περίπτωση η πυκνότητα και η πίεση γίνονται:

$$P = nkT + \frac{1}{3}aT^4 \quad (2.44)$$

$$\rho = nm + (\gamma - 1)nkT + aT^4 \quad (2.45)$$

όπου ν : αριθμητική πυκνότητα σωματιδίων αερίου, m : μάζα σωματιδίων αερίου, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$. Όμως ο αριθμός των σωματιδίων θα πρέπει να διατηρείται άρα:

$$nR^3 = n_0R_0^3$$

και μαζί με τη διατήρηση της ενέργειας μπορούμε φτάνουμε στην:

$$\frac{R}{T} \frac{dT}{dR} = - \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma + \frac{1}{3}(\gamma - 1)^{-1}} \right)$$

με σ : τη φωτονική εντροπία του κάθε σωματιδίου. Για $\sigma \ll 1$ έχουμε:

$$T \propto R^{-3(\gamma-1)} \quad (2.46)$$

που μοιάζει με την σχέση θερμοκρασίας - όγκου σε αδιαβατική εκτόνωση ιδανικού αερίου. Αν αντίθετα $\sigma \gg 1$, τότε $T \propto R^{-1}$. Όμως και για μεγάλη εντροπία όταν η ύλη φεύγει από τη θερμική ισορροπία με την ακτινοβολία, η συνάρτηση θερμοκρασίας - όγκου γίνεται όπως η (2.46). Αν όμως η εντροπία είναι πάρα πολύ μεγάλη η ακτινοβολία θα υπερισχύει της ύλης, της οποίας η θερμοκρασία θα έχει τη μορφή :

$$T(t) = \frac{A}{R(t)}$$

οπότε η εντροπία θα πρέπει τελικά να είναι σταθερή στην τιμή:

$$\sigma = \frac{4aT_{\gamma_0}^3}{3n_0k} \quad (2.47)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν ποτέ η εντροπία σ γίνει πολύ μεγάλη θα πρέπει να παραμείνει μεγάλη και σε αυτή την περίπτωση το Σύμπαν ονομάζεται *θερμό*. Η ακτινοβολία υποβάθρου ικανοποιεί πάντα τις (2.40), (2.41) και η ύλη την (2.43) μέχρι να

γίνει η αδιαφάνεια πολύ μικρή. Με λίγα λόγια, η συνθήκη για ένα θερμό Σύμπαν θα μπορούσε ποιοτικά να εκφραστεί ως η ύπαρξη μεγάλου αριθμού φωτονίων για κάθε νουκλεόνιο στο παρόν.

Εναλλακτικά, η ύπαρξη αυτού του υποβάθρου μπορεί να οφείλεται στην επανεκπομπή σε συχνότητες μικροκυμάτων από μεσοαστρική ύλη, της ακτινοβολίας των άστρων στους γαλαξίες. Μια άλλη εξήγηση θα ήταν η ύπαρξη διακριτών πηγών αυτής της ακτινοβολίας, η οποία όμως ενώ μπορεί να αναπαράγει την απαιτούμενη κατανομή Planck, αδυνατεί να εξηγήσει την ύπαρξη ισοτροπίας για όλες τις γωνίες σε μια σχετικά μικρή ακτίνα.

Παρόλα αυτά, η ακτινοβολία υποβάθρου όντως παρουσιάζει κάποιες μικρές διακυμάνσεις οι οποίες έχουν μετρηθεί και φτάνουν στην τιμή :

$$\frac{\Delta T}{T} = 1.1 \times 10^{-5}$$

με την ίδια την τιμή της θερμοκρασίας του υποβάθρου να είναι :

$$T_\gamma = (2.728 \pm 0.002)^\circ K$$

Αυτές όμως οι διακυμάνσεις ήταν αναμενόμενες και περισσότερο στηρίζουν παρά κλωνίζουν τη θεώρηση ότι αυτό το υπόβαθρο προέρχεται από μια αρχική ανωμαλία. Οι δυο πιο βασικοί λόγοι ύπαρξης διακυμάνσεων είναι οι εξής :

- Η κίνηση της ίδιας της Γης μέσα σε ένα ισοτροπικό μέσο, όπως η ακτινοβολία υποβάθρου, το οποίο ουσιαστικά καθορίζει ένα ειδικό σύστημα αναφοράς με βάση το οποίο οι διάφορες κινήσεις μπορούν να μετρηθούν.
- Η δημιουργία συγκεντρώσεων ύλης όπως οι γαλαξίες, τα σμήνη κλπ οφείλονται σε μικρές αρχικές διακυμάνσεις στην πυκνότητα της ύλης που με τη βοήθεια της βαρύτητας καταρρέουν προς το κέντρο τους. Ακριβώς αυτές οι αρχικές διακυμάνσεις είχε προβλεφθεί, και τελικά επιβεβαιώθηκε, ότι θα πρέπει να φαίνονται σαν μικρές ανισοτροπίες στη θερμοκρασία, σε ένα κατά τα άλλα ισότροπο υπόβαθρο.

Η παρουσία της ακτινοβολίας υποβάθρου δεν είχε μόνο αντίκτυπο στις αρχικές φάσεις του Σύμπαντος αλλά θα έχει ακόμα και τώρα. Για παράδειγμα θα πρέπει τα φωτόνια του υποβάθρου να σκεδάζονται με αντίστροφη σκέδαση Compton με σχετικιστικά ηλεκτρόνια. Μάλιστα έχει δείχθει ότι για εξωγαλαξιακά ηλεκτρόνια αυτή θα μπορούσε να είναι η εξήγηση για την παρατηρούμενη ακτινοβολία X. Επιπλέον λόγω της ύπαρξης του υποβάθρου θα πρέπει να υπάρχει ένα απότομο κόψιμο στο φάσμα των πρωτονίων και των φωτονίων της Κοσμικής Ακτινοβολίας, όγω της αλληλεπίδρασής τους με αυτό.

Βαρυογένεση - Νουκλεοσύνθεση

Η νουκλεοσύνθεση που έλαβε χώρα κατά τα αρχικά στάδια του Σύμπαντος είναι και ο νωρίτερος τρόπος να εξετάσουμε την καθιερωμένη Κοσμολογία. Επιπλέον, μπορεί να μας δώσει μια καλή θεωρητική προσέγγιση για την τιμή της παραμέτρου πυκνότητας που αντιστοιχεί στη συνήθη (βαρυονική) ύλη, που όπως είδαμε μπορεί να οδηγήσει σε άλλους τρόπους να ελέγξουμε το Καθιερωμένο Μοντέλο. Καθώς μας ενδιαφέρουν οι αφθονίες που υπήρχαν στο πρωταρχικό Σύμπαν και όχι αυτές που σχηματίστηκαν στην πορεία από αστροφυσικούς μηχανισμούς, ελέγχουμε τη συγκέντρωση των στοιχείων D, ^3He , ^4He , ^7Li που έχουν, ως επί το πλείστον, κοσμολογική προέλευση. Σημειώνουμε ότι τα σχετικά αποτελέσματα συνηθίζεται να δίνονται συναρτήσει της παραμέτρου $\eta = \frac{n_N}{n_\gamma}$, δηλαδή ως ο λόγος της πυκνότητας της βαρυονικής ύλης προς αυτή της πυκνότητας των φωτονίων.

Συγκεκριμένα λοιπόν, το δευτέριο, D, είναι πολύ ασθενώς συνδεδεμένο και καταστρέφεται σε χαμηλές θερμοκρασίες, ενώ είναι και δύσκολο να δημιουργηθεί. Άρα η σημερινή του αφθονία αποτελεί ένα κατώτατο όριο της πρωταρχικής αφθονίας του. Προκύπτει ότι η πρωταρχική αφθονία του θα έπρεπε να είναι $(\text{D}/\text{H}) \geq 10^{-5}$, που οδηγεί σε $\eta \leq 10^{-9}$. Το ^3He καταστρέφεται δυσκολότερα από το δευτέριο και από το συνδυασμό με τα δικά του αποτελέσματα παίρνουμε

$$\left[\frac{D + ^3\text{He}}{H} \right] \leq 8 \cdot 10^{-5}$$

που οδηγεί στο ότι πρέπει $\eta \geq 4 \cdot 10^{-10}$. Αυτή η θεωρητική πρόβλεψη βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με τις παρατηρήσεις που έχουμε σήμερα με βάση τις οποίες

$$\eta \approx (4 - 10) \cdot 10^{-10}$$

Για το ^7Li , η πρωταρχική αφθονία υπολογίζεται σε $(^7\text{Li}/\text{H})(1.1 \pm 0.4) \cdot 10^{-5}$ που οδηγεί σε

$$\eta \approx (2 - 5) \cdot 10^{-10}$$

Όπως φαίνεται και από το σχήμα 2.1, η σχετική αφθονία που παρατηρείται για το ^7Li σε σχέση με αυτή που προβλέπεται είναι διαφορετική. Αυτό είναι γνωστό ως πρόβλημα του ^7Li και θεωρείται το πιο σημαντικό πρόβλημα της πρωταρχικής νουκλεοσύνθεσης, το οποίο δε φαίνεται να μπορεί να λυθεί στα πλαίσια της ήδη γνωστής φυσικής, καθώς δεν υπάρχουν πυρηνικοί ή αστροφυσικοί μηχανισμοί που να μπορούν να εξηγήσουν αυτή την αφθονία. Τέλος, για το ^4He , υπολογίζεται ότι το ποσοστό βαρυονικής ύλης αιχμαλωτισμένης σε αυτή τη μορφή ήταν της τάξης του

$$Y_P \cong 0.25$$

Συνοψίζοντας, τα όρια που έχουμε για τη σημερινή τιμή της πυκνότητας των βαρυονίων είναι

$$4 \cdot 10^{-10} \leq \eta \leq 7 \cdot 10^{-10}$$

$$0.015 \leq \Omega_B \leq 0.16$$

$$6 \cdot 10^{-11} \leq \frac{\eta}{7} \leq 10^{-10}$$

Βλέπουμε δηλαδή και εδώ ότι η βαρυονική ύλη δείχνει να συνεισφέρει σε τάξη 1% της πυκνότητας της ύλης ενώ όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα, οι σταθερές δομές απαιτούν για την παράμετρο πυκνότητας μια τιμή τουλάχιστον κοντά στο $\Omega_0 \approx 0.25$.

Στα αρχικά στάδια του Σύμπαντος, θα πρέπει να υπάρχει μια διαδικασία η οποία οδηγεί στη δημιουργία των συστατικών των πυρήνων, δηλαδή των βαρυονίων p και n . Το κυρίαρχο βαρυόνιο που βλέπουμε στο Σύμπαν είναι το πρωτόνιο το οποίο έχει βαρυονικό αριθμό $B = 1$. Όμως επειδή ακριβώς βλέπουμε να κυριαρχεί το πρωτόνιο και να μην υπάρχουν αντίστοιχα πολλά αντιπρωτόνια, σημαίνει πως υπάρχει μια ασυμμετρία η οποία πρέπει να εξηγηθεί. Για παράδειγμα, μπορούμε να δούμε την αφθονία αντιπρωτονίων σε κοσμικές ακτίνες, η οποία είναι της τάξης του 10^{-4} . Μπορεί βέβαια κανείς να ισχυριστεί ότι η δικιά μας γειτονιά είναι συμπτωματικά φτιαγμένη από ύλη και υπάρχουν αντίστοιχα άλλες γειτονιές στο Σύμπαν που είναι φτιαγμένες από αντιύλη. Αυτό το επιχείρημα όμως συναντά ένα πολύ ισχυρό παρατηρησιακό εμπόδιο, καθώς θα έπρεπε σε μια τέτοια περίπτωση να υπάρχει ισχυρή ακτινοβολία γ από τις αλληλεπιδράσεις νουκλεονίων - αντινουκλεονίων. Επομένως το συμπέρασμα στο οποίο φαίνεται να καταλήγουμε είναι ότι σε κάποιο πρωταρχικό στάδιο του Σύμπαντος υπήρξε μια ασυμμετρία μεταξύ βαρυονίων και αντιβαρυονίων. Υπολογίζεται ότι η αρχική ασυμμετρία που χρειάζεται να υπήρξε ώστε να έχουμε τις σημερινές παρατηρήσεις είναι εξαιρετικά μικρή, της τάξης του

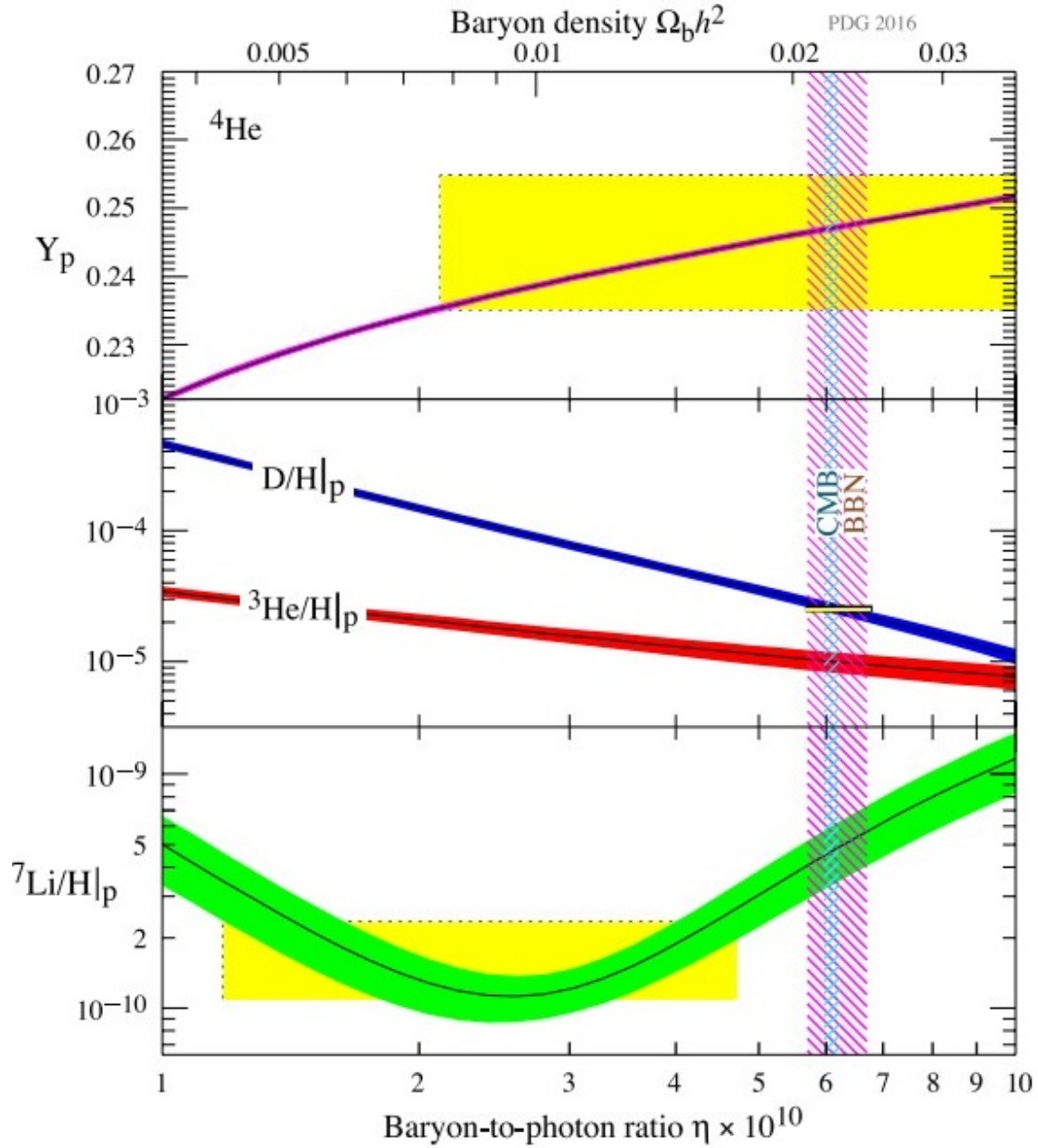
$$\frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q} \cong 3 \cdot 10^{-8}$$

Τα βασικά σημεία που πρέπει να ισχύουν σε μια θεωρία βαρυογένεσης ονομάζονται κριτήρια Sakharov και είναι τα εξής:

- *Αρχική παραβίαση του βαρυονικού αριθμού*, καθώς όπως είδαμε πρέπει ο αριθμός των βαρυονίων και των αντιβαρυονίων να μην είναι ίδιος.
- *Αρχική παραβίαση των συμμετριών C και CP* , καθώς αποδεικνύεται ότι αν αυτό δε συνέβαινε, δε θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε σε αυτή την ανισότητα των αριθμών μεταξύ b και $\bar{b}$.
- *Αποχώρηση από τη θερμική ισορροπία*, επειδή θα πρέπει να μην επιτρέπονται οι αντίστροφες των διαδικασιών αυτών που οδηγούν στην ανισότητα των βαρυονίων και των αντιβαρυονίων.

Για να δούμε στην πράξη πως η βαρυογένεση εξηγεί αυτή την παρατηρούμενη ασυμμετρία θα παραθέσουμε τη διάσπαση ενός σωματίου X το οποίο ας υποθέσουμε ότι έχει δύο δυνατές διασπάσεις:

$$X \rightarrow qq (B = 2/3)$$



Σχήμα 2.1: Οι πρωταρχικές αφθονίες των ^4He , D , ^3He , και ^7Li όπως προβλέπονται από τη νουκλεοσύνθεση στα πλαίσια του Καθιερωμένου Μοντέλου. Οι κίτρινες περιοχές απεικονίζουν τις παρατηρούμενες αφθονίες ενώ οι διακεκομμένες περιοχές απεικονίζουν την παρατήρηση μέσω της ακτινοβολίας υποβάθρου και την πρόβλεψη που προκύπτει από τη νουκλεοσύνθεση στα πλαίσια της νουκλεοσύνθεσης στο μόντελο της Μεγάλης Έκρηξης.

και

$$X \rightarrow \bar{q}l(B = -1/3)$$

Οι συμμετρίες C και CP παραβιάζονται αν τα ποσοστά διάσπασης σε qq και $\bar{q}\bar{q}$ για τα $X, \bar{X}$ είναι διαφορετικά. Έτσι λοιπόν, για το Q ο μέσος βαρυονικός αριθμός που παράγεται κατά τη διάσπασή του είναι

$$B_X = r(2/3) + (1 - r)(-1/3)$$

όπου r : το ποσοστό διάσπασης σε qq . Αντίστοιχα για το σωματίο $\bar{X}$ είναι:

$$B_{\bar{X}} = \bar{r}(-2/3) + (1 - \bar{r})(1/3)$$

Επομένως ο καθαρός βαρυονικός αριθμός που παράγεται από τη διάσπαση ενός ζεύγους σωματιδίων $X, \bar{X}$ είναι $\epsilon = r - \bar{r}$. Επειδή όμως γνωρίζουμε ότι στη φύση οι συμμετρίες C και CP παραβιάζονται, τα $r, \bar{r}$ δεν έχουν την ίδια τιμή και έτσι παίρνουμε αυτό τον μη μηδενικό καθαρό βαρυονικό αριθμό.

2.5.5 Προβλήματα του μοντέλου της Μεγάλης Έκρηξης και του Καθιερωμένου Μοντέλου

Όπως παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, το μοντέλο της μεγάλης έκρηξης έχει με μεγάλη επιτυχία εξηγήσει πολλές από τις παρατηρήσεις μας, όπως η σχετική αφθονία των βαρυονίων αλλά και η CMBR. Όμως υπάρχουν κάποια προβλήματα που παραμένουν ανεξήγητα από το βασικό σενάριο της Μεγάλης Έκρηξης και χρειάζονται ένα ευρύτερο πλαίσιο ώστε να εξηγηθούν.

Πρόβλημα Ομοιογένειας

Όπως γνωρίζουμε, οι ανομοιογένειες είναι πολύ ασταθείς λόγω της βαρύτητας και έχουν την τάση να εξαπλώνονται με την πάροδο του χρόνου. Επι παραδείγματι, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι οι ανομοιογένειες που παρατηρούνται σήμερα είναι πολύ μεγαλύτερες από αυτές που υπήρχαν στην εποχή της αποσύζευξης, όπως φαίνεται μέσω της CMBR. Επομένως, μπορεί να αναρωτηθεί κανείς το γιατί το Σύμπαν είναι με τόσο καλή ακρίβεια ομογενές και ισότροπο στην αρχή του, όπως φαίνεται από την επιτυχία της θεωρίας μέχρι στιγμής.

Πρόβλημα Επιπεδότητας

Συναρτήσει της παραμέτρου πυκνότητας η πρώτη εξίσωση Friedmann, (2.20), είναι:

$$\Omega - 1 = \frac{k_a}{a^2 H^2}$$

και είδαμε ότι ο παράγοντας δομής συμπεριφέρεται ως $a \propto t^p$, $p < 1$. Συνέπεια αυτού είναι ότι το μέγεθος $a^2 H^2$ μεγαλώνει καθώς περνάει ο χρόνος και θα πρέπει αντίστοιχα το μέγεθος $|\Omega - 1|$ να αλλάζει τιμή. Όμως, παρατηρούμε ότι το Σύμπαν είναι με πολύ καλή ακρίβεια επίπεδο, το οποίο στα πλαίσια αυτής της εξίσωσης σημαίνει ότι το Ω αρχικά θα πρέπει να είχε μια εξαιρετικά κοντινή τιμή στο 1, η οποία και θα παραμένει πολύ κοντά του μέχρι και σήμερα, ένα σενάριο που δε φαντάζει τόσο πιθανό εκ πρώτης όψεως.

Πρόβλημα του ορίζοντα

Ως ορίζοντα, ορίζουμε τη μέγιστη δυνατή απόσταση που μπορεί να καλύψει μια ακτίνα φωτός. Για μια φωτοειδή ακτινική τροχιά, θα ισχύει

$$dr = a(t)dt$$

και επομένως ο ορίζοντας θα δίνεται από

$$d_H(t) = a(t) \int_{t_i}^t \frac{dt'}{a(t')} = a(t) \frac{t^{1-q} - t_i^{1-q}}{1-q}$$

Όπως είπαμε ήδη, με τα αποτελέσματα της κλασικής Κοσμολογίας η τιμή του q είναι μικρότερη από το 1. Στο όριο όπου το t_i είναι 0 το ολοκλήρωμα υπάρχει και είναι της τάξης του H^{-1} :

$$d_H(t) = \frac{q}{1-q} H^{-1}$$

Αν τώρα σκεφτούμε την συγκινούμενη ακτίνα Hubble, $(aH)^{-1}$, που ουσιαστικά αντιπροσωπεύει το κομμάτι εκείνο του συγκινούμενου χώρου στο οποίο τα γεγονότα μπορούν να έχουν σχέση αιτίου - αιτιατού, μπορούμε να δούμε ότι αυτή μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου και άρα ένα όλο και μεγαλύτερο κομμάτι του Σύμπαντος θα έχει μια αιτιακή σχέση. Όμως, στην εποχή της αποσύζευξης όπως αναφέραμε νωρίτερα, παρατηρούμε μια ιδιαίτερη ομοιογένεια σε κλίμακες που συμπεριλαμβάνουν περιοχές το Σύμπαντος που δεν είχαν αιτιακή σχέση. Πρέπει επομένως να εξηγηθεί το γιατί περιοχές που δεν είχαν σχέση αιτίου - αιτιατού, παρουσιάζονται τόσο όμοιες στις παρατηρήσεις μας.

Μια απάντηση σε όλα τα παραπάνω προβλήματα δίνεται από το σενάριο πληθωρισμού που θα εξετάσουμε εκτενέστερα στην επόμενη ενότητα. Με βάση αυτό το σενάριο, στα αρχικά στάδια του Σύμπαντος υπήρξε μια αλματώδης αύξηση του μεγέθους του, τέτοια που μείωσε δραματικά το μέγεθος του ορίζοντα, και έτσι κρύβει από τις σημερινές παρατηρήσεις ότι στα πρωταρχικά στάδια τους, υπήρχαν περιοχές σε αιτιακή σύνδεση που στην εποχή της αποσύζευξης δείχνουν να μην συνδέονται.

2.6 Πληθωρισμός

Ως πληθωρισμό ονομάζουμε κάθε περίοδο της ζωής του Σύμπαντος κατά την οποία η διαστολή του επιταχύνεται, όταν δηλαδή ισχύει η συνθήκη

$$\ddot{a}(t) > 0$$

Επομένως, ακόμα και η σημερινή εποχή όπου παρατηρούμε το Σύμπαν να διαστέλεται επιταχυνόμενα, είναι μια πληθωριστική εποχή. Όμως στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη βασική θεωρία του πρωταρχικού πληθωρισμού που, όπως αναφέρθηκε, αποτελεί μια αναγκαία διεύρυνση του Καθιερωμένου Προτύπου ώστε να εξηγηθούν διάφορες παρατηρήσεις.

Για να έχουμε επιτάχυνση, μπορούμε να δούμε εύκολα από τη δεύτερη εξίσωση Friedmann, (2.21), ότι απαιτείται μια καταστατική εξίσωση η οποία θα ικανοποιεί τη συνθήκη

$$P < -\frac{1}{3}\rho$$

που εκ πρώτης όψεως φαίνεται αρκετά εξωτική, με την έννοια ότι μοιάζει να απαιτεί αρνητική πίεση. Ένα γνώριμο στην Κοσμολογία σενάριο που οδηγεί σε κάτι τέτοιο, είναι αυτό της ύπαρξης κοσμολογικής σταθεράς που δίνει

$$P = -\rho$$

Όμως υπάρχει και ένα άλλο σενάριο, το οποίο προβλέπει την ύπαρξη ενός βαθμωτού πεδίου, του *inflaton*, που μπορεί να οδηγήσει σε επιτάχυνση και το οποίο παρουσιάζουμε στην επόμενη ενότητα.

2.6.1 Βαθμωτά Πεδία στην Κοσμολογία

Για να περιγράψουμε δυναμικά την ύπαρξη ενός πεδίου που αλληλεπιδρά βαρυτικά, μπορούμε να γράψουμε την αρκετά γενική δράση:

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \right) \quad (2.48)$$

όπου $g = \det(g_{\mu\nu})$ και $V(\phi)$ το δυναμικό του βαθμωτού αυτού πεδίου. Για να πάρουμε τον ταυστή ενέργειας - ορμής, στασιμοποιούμε την παραπάνω δράση ως προς τη μετρική και παίρνουμε

$$T_{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\sigma \phi \partial_\sigma \phi + V(\phi) \right) \quad (2.49)$$

Για μια γεωμετρία ομογενή και ισότροπη, ο τανυστής είναι στη μορφή ιδανικού ρευστού, και η ενεργειακή πυκνότητα δίνεται από:

$$\rho = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.50)$$

ενώ η πίεση είναι

$$P = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$$

Η εξίσωση κίνησης ενός βαθμωτού πεδίου είναι η εξίσωση Klein-Gordon, την οποία μπορούμε να λάβουμε από την παραπάνω δράση, αν τη στασιμοποιήσουμε ως προς το πεδίο:

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = \frac{dV}{d\phi} \quad (2.51)$$

που οδηγεί στην

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0$$

Οι εξισώσεις λοιπόν που χρειαζόμαστε για να περιγράψουμε ένα τέτοιο πεδίο, και οι οποίες ουσιαστικά είναι οι επεκτάσεις της εξ. τεξτλατινΦριεδμανν και της διατήρησης ενέργειας, είναι οι εξής:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right) \quad (2.52)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' = 0 \quad (2.53)$$

ενώ από αυτές τις δύο προκύπτει και η αρκετά χρήσιμη

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2 \quad (2.54)$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να δώσει επιτάχυνση μόνο όταν η δυναμική ενέργεια κυριαρχεί έναντι της κινητικής του πεδίου (και ονομάζεται κατάλληλα περιοχή slow-roll). Σε αυτή την περιοχή λοιπόν, αγνοούμε την κινητική ενέργεια αλλά και την επιτάχυνση του πεδίου, $\ddot{\phi}$, και παίρνουμε τις σχέσεις

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} V \quad (2.55)$$

και

$$3H\dot{\phi} + V' \approx 0 \quad (2.56)$$

Για να βρούμε τις περιοχές στις οποίες ισχύει αυτή η προσέγγιση, μπορούμε να δούμε με χρήση της εξίσωσης (2.56) και της συνθήκης $\dot{\phi}^2/2 \ll V$ ότι φτάνουμε στη σχέση:

$$\epsilon_V \equiv \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1 \quad (2.57)$$

όπου $M_P = \frac{1}{\sqrt{8\pi G}}$ η μάζα Planck. Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε από την εξίσωση (2.55) και τη χρονική παράγωγο της εξίσωσης (2.56) να πάρουμε για τη συνθήκη $\ddot{\phi} \ll V$ ότι πρέπει να ισχύει

$$\eta_V \equiv M_P^2 \frac{V''}{V} \ll 1 \quad (2.58)$$

Ένα άλλο μέγεθος που μας ενδιαφέρει, είναι ο αριθμός των e-folds, δηλαδή το πόσες φορές μεγάλωσε κατά e φορές το Σύμπαν. Το μέγεθος αυτό ορίζεται ως:

$$N = \ln \frac{a_{end}}{a} \quad (2.59)$$

όπου a_{end} είναι ο παράγοντας δομής στο τέλος του πληθωρισμού και a η τιμή του ίδιου τη χρονική στιγμή που τον μελετάμε. Από αυτόν τον ορισμό δηλαδή καταλαβαίνουμε ότι το N μειώνεται όσο πιο κοντά είμαστε στο τέλος του πληθωρισμού και γίνεται ακριβώς 0 στο τέλος του.

Στη slow-roll προσέγγιση μπορούμε να εκφράσουμε το N συναρτήσει του ϕ , καθώς

$$dN = -d \ln a = -(H/\dot{\phi}) d\phi$$

οπότε

$$N(\phi) \approx \int_{\phi}^{\phi_{end}} \frac{V}{M_P^2 V'} d\phi$$

Επομένως, πρέπει το δυναμικό που περιγράφει αυτό το βαθμωτό πεδίο να είναι τέτοιο ώστε ο πληθωρισμός να έχει διαρκέσει αρκετά, άρα να έχουν συμβεί αρκετά e-folds, ώστε να εξηγούνται οι σημερινές παρατηρήσεις. Για να έχουμε μια αίσθηση του αριθμού των e-folds που χρειάζονται, κάνουμε τον εξής υπολογισμό:

Αγνοώντας το πέρασμα από την εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας σε αυτή της κυριαρχίας της ύλης και θεωρώντας για απλότητα ότι όλη η εξέλιξη του Σύμπαντος χαρακτηρίζεται από κυριαρχία της πρώτης, βρίσκουμε ότι η συγκινούμενη ακτίνα Hubble, $(aH)^{-1}$, αυξάνεται ως a . Για να λύνεται το πρόβλημα του ορίζοντα πρέπει η αύξηση της συγκινούμενης ακτίνας Hubble κατά την κυριαρχία της ακτινοβολίας, να αντισταθμίζεται κατά τουλάχιστον ίσο ποσό στη διάρκεια του πληθωρισμού. Επειδή λοιπόν στον πληθωρισμό η ακτίνα Hubble αλλάζει κατά a^{-1} , αρκεί να βρούμε τον αριθμό των e-folds από το τέλος του πληθωρισμού μέχρι σήμερα. Είναι:

$$\ln \left(\frac{a_0}{a_{end}} \right) = \ln \left(\frac{T_{end}}{T_0} \right) \approx \ln \left(10^{29} \frac{T_{end}}{10^{16} \text{GeV}} \right)$$

δηλαδή χρειάζονται περίπου 60 e-folds.

Σημειώνουμε, τέλος, ότι η πρόσφατη ανακάλυψη στο LHC του πεδίου Higgs έχει οδηγήσει την κοινότητα στο να μελετήσει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες το πεδίο inflaton, ϕ , μπορεί να ταυτίζεται με το πεδίο Higgs.

2.7 Σύνοψη

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάσαμε συνοπτικά το Καθιερωμένο Μοντέλο της Κοσμολογίας και την πλαisiώσή του από το μοντέλο του πληθωρισμού και το σενάριο Λ CDM. Είδαμε καθαρά ότι μέσω αυτών μπορούμε να εξηγήσουμε ένα πολύ μεγάλο ποσοστό των παρατηρήσεών μας.

Παρουσιάστηκαν όμως και κάποια από τα προβλήματα που έχει. Το ένα από αυτά είναι η δημιουργία και σταθερότητα των δομών μεγάλης κλίμακας στο Σύμπαν, καθώς η ορατή σε εμάς ύλη είναι λιγότερη από όση χρειάζεται ώστε να μένουν σταθερές και να μη διαλύονται αυτές οι δομές. Το δεύτερο είναι η παρατήρηση ότι το Σύμπαν διαστέλεται επιταχυνόμενα και όχι επιβραδυνόμενα όπως πιστευόταν στο μεγαλύτερο μέρος του 20ού αιώνα. Τα δύο προβλήματα αυτά συνηθίζεται να αποδίδονται με τους όρους *σκοτεινή ύλη* και *σκοτεινή ενέργεια* αντίστοιχα. Με βασική αφορμή αυτά αλλά και κάποια άλλα προβλήματα που παρουσιάζει η Κλασσική Κοσμολογία, έχουν αναπτυχθεί διάφορες προσεγγίσεις παράλληλα και με τη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων με σκοπο να τα αντιμετωπίσουν.

Μια από τις πιο ευρέως διαδεδομένες προσεγγίσεις βασίζεται στην υπόθεση της ύπαρξης επιπλέον διαστάσεων, που φαντάζει αρκετά ελκυστική και εκτός της Κοσμολογίας, καθώς στα πλαίσια για παράδειγμα της Θεωρίας Χορδών, μπορεί να αποτελεί τη βάση πάνω στην οποία όλες οι αλληλεπιδράσεις της φύσης ενοποιούνται. Στα επόμενα κεφάλαια, που αποτελούν και τον πυρήνα της παρούσας εργασίας, θα μελετήσουμε εκτενώς ένα από αυτά τα σενάρια, που συμπεριλαμβάνουν επιπλέον διαστάσεις, με σκοπό να διερευνήσουμε με την κατασκευή απλοϊκών μοντέλων, τις συνέπειες που έχει στα αποτελέσματα της Κοσμολογίας η συμπερίληψη νέων χωρικών διαστάσεων.

Αναφορές Κεφαλαίου

[1],[2],[3],[4],[14],[15]

Κεφάλαιο 3

Βασικά Στοιχεία Θεωρίας Kaluza - Klein

Από όσα έχουμε δει μέχρι στιγμής, δουλεύοντας μόνο στα πλαίσια της Κοσμολογίας, καταλαβαίνουμε ότι υπάρχουν προβλήματα που ενδεχόμενα υποδεικνύουν την ύπαρξη νέας Φυσικής. Συγκεκριμένα, στο μοντέλο Λ CDM βλέπουμε ότι για να μπορέσουμε να αιτιολογήσουμε κάποιες παρατηρήσεις όπως η σταθερότητα των γαλαξιών λλά και η επιτάχυνση στη διαστολή του Σύμπαντος, χρειαζόμαστε την εισαγωγή συνιστωσών στο ενεργειακό περιεχόμενο του Σύμπαντος με «σκοτεινή» προέλευση, που δεν είναι δυνατόν να τις παρατηρήσουμε. Όμως, ούτως ή άλλως, από τους υπόλοιπους τομείς της Φυσικής γνωρίζουμε ότι με τη Σχετικότητα, την Κβαντομηχανική και τη Θεωρία Πεδίου έχει καταστεί δυνατό μέχρι στιγμής να συμπεριληφθούν σε μια ενιαία θεωρία μόνο οι 3 από τις 4 βασικές αλληλεπιδράσεις της φύσης. Αντίθετα με τις άλλες 3, η βαρύτητα δεν έχει καταστεί δυνατό να διατυπωθεί με έναν τρόπο που να ενοποιείται με τις υπόλοιπες δυνάμεις.

Καθώς η γεωμετρία Riemann δεν είναι ανάγκη να περιοριστεί σε 3+1 διαστάσεις μπορούμε να μελετήσουμε τη βαρύτητα συμπεριλαμβάνοντας παραπάνω διαστάσεις. Μάλιστα σε πολλές από τις σύγχρονες θεωρίες που φιλοδοξούν να ενοποιήσουν όλες τις αλληλεπιδράσεις η συμπερίληψη επιπλέον χωρικών διαστάσεων είναι σχεδόν μονόδρομος. Όμως, η βαρύτητα φαίνεται να είναι μια δύναμη 4 διαστάσεων και όχι για παράδειγμα 10 ή 11 όπως λέει η Θεωρία Χορδών. Αυτό φαίνεται ανάγλυφα για παράδειγμα, στο γεγονός ότι το δυναμικό μιας σημειακής πηγής συμπεριφέρεται ως $\frac{1}{r^{D-3}}$, οπότε για $D = 4$ δε μπορούμε να έχουμε σταθερές τροχιές για αστρικά σώματα. Αν λοιπόν υπάρχουν, θα πρέπει οι παραπάνω διαστάσεις να «κρύβονται», από το πείραμα και την παρατήρηση.

Μια από τις πιθανότητες για επέκταση του Καθιερωμένου Μοντέλου λοιπόν είναι η επέκταση της Lorentz συμμετρίας σε παραπάνω χωρικές διαστάσεις

$$SO(1, 3) \rightarrow SO(1, 3 + n)$$

δηλαδή μια επέκταση που συνεπάγεται ότι όλα τα σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου των Στοιχειωδών Σωματιδίων μπορούν να διαδοθούν και σε n επιπλέον χωρικές διαστάσεις που περιλαμβάνονται σε μια μετρική ενός επίπεδου χώρου. Αυτές οι διαστάσεις ονομάζονται Καθολικές Επιπλέον Διαστάσεις (Universal Extra Dimensions - UED). Αυτός ο τρόπος επέκτασης πρωτοδιατυπώθηκε από τους Kaluza - Klein και θα παρουσιαστεί στην επόμενη ενότητα.

3.1 Γενικά περί θεωρίας Kaluza - Klein

Η αρχική ιδέα της θεωρίας Kaluza - Klein είχε σκοπό να ενοποιήσει τον Ηλεκτρομαγνητισμό με τη Βαρύτητα. Για το λόγο αυτό, συμπεριελήφθη αρχικά μια επιπλέον χωρική διάσταση. Για τη διάσταση αυτή θεωρούμε ότι έχει μικρό μέγεθος και ότι είναι συμπαγοποιημένη, δηλαδή ότι τα σημεία της x και $x + 2\pi R$ ταυτίζονται:

$$x = x + 2\pi R$$

όπου R : η ακτίνα συμπαγοποίησής της. Με βάση αυτό, μπορεί να διατυπωθεί μια επεκταμένη σε 5 διαστάσεις δράση Einstein - Hilbert από την οποία, όταν αναπτύξουμε αρμονικά ως προς την επιπλέον διάσταση, να μπορούμε να δείξουμε ότι φτάνουμε σε μια ενεργό τετραδιάστατη θεωρία που δεν αντιτίθεται με τις παρατηρήσεις. Αυτή η θεωρία περιέχει τον Ηλεκτρομαγνητισμό και τη Βαρύτητα. Ο λόγος για αυτό είναι ότι η συμπαγοποίηση μιας διάστασης εισάγει μια $U(1)$ συμμετρία που, όπως γνωρίζουμε, είναι ίδια με αυτή του Ηλεκτρομαγνητισμού. Όμως για να έχουμε συνέπεια με την ενεργό τετραδιάστατη θεωρία πρέπει η επιπλέον διάσταση να σταθεροποιείται σε ένα μικρό μέγεθος, από μια χρονική στιγμή και μετά. Αντίθετα, νωρίς στην εξέλιξη του Σύμπαντος, θα πρέπει κανείς να μελετήσει την πλήρη θεωρία καθώς αναμένεται εκεί το μέγεθός της να ήταν συγκρίσιμο με τις συνήθεις διαστάσεις.

Βεβαίως, απ' ευθείας μπορεί να βρεθεί πρόβλημα σε αυτή τη θεωρία, καθώς αν όντως η $U(1)$ συμμετρία ταυτιστεί με τον Ηλεκτρομαγνητισμό, προκύπτει ότι αν το κβάντο του φορτίου είναι το e^- , τότε όλα τα φορτισμένα σωματίδια πρέπει να έχουν μάζα κοντά στη μάζα Planck, δηλαδή πολύ μεγάλη.

Πριν παρουσιάσουμε αναλυτικά τη θεωρία, θα παραθέσουμε συνοπτικά τα στοιχεία που προκύπτουν από μια $3 + n + 1$ θεωρία επίπεδων διαστάσεων:

1. Προκύπτει ένας άπειρος «πύργος» από έμμαζα σωματίδια
2. Ο νόμος του Νεύτωνα για τη βαρύτητα επηρεάζεται σε μικρές αποστάσεις
3. Οι σταθερές σύζευξης θα επηρεάζονται από τον όγκο των έξτρα διαστάσεων.

Η αιτιολόγηση για τα παραπάνω θα γίνει για ευκολία στις 5 διαστάσεις και είναι η εξής:

1. Αν ένα σωματίδιο κινείται και στις επιπλέον διαστάσεις, θα έχει επιπλέον κινητική ενέργεια που σε έναν τρισδιάστατο παρατηρητή θα γίνεται αντιληπτή σαν να έχει το σωματίδιο επιπλέον μάζα. Αν οι συντεταγμένες είναι

$$\{\hat{x}^m\} = \{x^\mu, y^P\}$$

και $\hat{\Phi}(\hat{x})$: βαθμωτό πεδίο στις 5 διαστάσεις, τότε η εξίσωση Klein - Gordon είναι

$$(\hat{\square}^{(5)} + m^2)\hat{\Phi}(x^\mu, y) = (\partial_t^2 - \nabla^2 - \partial_y^2 + m^2)\hat{\Phi}(x^\mu, y) = 0 \quad (3.1)$$

όπου έχουμε συμπαγοποίηση $y = y + 2\pi R$. Κάνοντας το ανάπτυγμα Fourier παίρνουμε:

$$\hat{\Phi}(x^\mu, y) = \sum_n \Phi^{(n)}(x^\mu) e^{-i \frac{n}{R} y} \quad (3.2)$$

Για κάθε ένα από τα n έχουμε και ένα λεγόμενο mode που ικανοποιεί ξεχωριστά την τετραδιάστατη εξίσωση Klein - Gordon:

$$(\square + m_n^2)\Phi^{(n)}(x^\mu) = (\partial_t^2 - \nabla^2 + m_n^2)\Phi^{(n)}(x^\mu) = 0 \quad (3.3)$$

με μάζες

$$m_n^2 = m^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2$$

Επομένως, ένα πεδίο των 5 διαστάσεων εμφανίζεται στις 4 διαστάσεις σαν ένας πύργος από έμμαζες καταστάσεις Kaluza - Klein $\Phi^{(n)}$. Υπό αυτή την έννοια οι πολύ μικρές διαστάσεις θα χρειάζονται πολύ μεγάλες ενέργειες ώστε να φανερώσουν αυτές τις βαριές καταστάσεις.

2. Σε μικρές αποστάσεις, $r \ll R$, η κλίμακα συμπαγοποίησης δεν έχει επίπτωση ουσιαστικά, οπότε ο χώρος πρέπει να είναι αναλλοίωτος σε στροφές $3 + n$. Επομένως, η εξίσωση Laplace για το βαρυτικό δυναμικό σε απόσταση r_n από μάζα m είναι

$$\hat{\nabla}^2 V(r) = 0$$

όπου $\hat{\nabla}^2 = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2 + \dots + \partial_{x_{n+3}}^2$. Η λύση αυτή είναι

$$V(r) = G_{4+n} \frac{m}{r_n^{n+1}}, \quad r_n \ll R$$

ενώ σε μεγαλύτερες από R διαστάσεις το δυναμικό παραμένει $1/r$. Άρα σε μικρές κλίμακες το βαρυτικό δυναμικό βαθθάνει, ενώ σε μεγάλες αποστάσεις είναι

$$V(r) \propto \frac{G_{4+n}}{R^n} \frac{m}{r}, \quad r \gg R$$

Σημειώνουμε εδώ ότι, από πειράματα που έχουν γίνει σε μικρές κλίμακες, φαίνεται ότι σε αποστάσεις $\approx 100\mu m$, η απόκλιση από το νόμο του Νεύτωνα δε μπορεί να υπερβαίνει το 10%.

3. Από σύγκριση της μορφής που βρήκαμε

$$V(r) = -\frac{G_{4+n}}{R^n} \frac{m}{r}$$

με τη μορφή

$$V(r) = -G \frac{m}{r}$$

καταλαβαίνουμε ότι $G \approx \frac{G_{4+n}}{R^n}$. Αν λοιπόν η ακτίνα συμπαγοποίησης για την επιπλέον διάσταση αλλάζει καταλαβαίνουμε ότι θα μεταβάλλεται και η τιμή της σταθεράς σύζευξης. Για τη σταθερά σύζευξης της βαρύτητας συγκεκριμένα έχουν γίνει πειράματα σε κλίμακες μικρότερες του χιλιοστού και δεν έχει παρατηρηθεί καμία διαφοροποίηση στην τιμή της. Το ίδιο φαίνεται και από πειράματα σε κλίμακες ηλιακού συστήματος όπου τα όρια που τίθενται από της παρατηρήσεις είναι

$$|\Delta G/G| \leq 10^{-12}$$

Αντίστοιχα για τη σταθερά λεπτής υφής από διάφορες εργασίες έχουν τεθεί όρια της τάξης

$$|\Delta a/a| \leq 10^{-7} \text{ ως } 10^{-3}$$

Με λίγα λόγια δεν έχει παρατηρηθεί μέχρι στιγμής μια διαφοροποίηση στις τιμές των σταθερών σύζευξης που θα δικαιολογούσε επιπλέον διαστάσεις που μεταβάλλουν το μέγεθός τους.

3.2 Άλλα μοντέρνα σενάρια με επιπλέον διαστάσεις

Μια εναλλακτική προσέγγιση στη θεωρία Kaluza - Klein βασίζεται στην υπόθεση ότι ο αντιληπτός από εμάς κόσμος αποτελεί μια βράνη εμβαπτισμένη σε έναν χώρο μεγαλύτερης διάστασης. Σε αυτό το σενάριο οι επιπλέον διαστάσεις δεν είναι απαραίτητο να έχουν μικροσκοπικές διαστάσεις, αλλά, αντίθετα, μπορούν να είναι μέχρι και άπειρες. Για να μπορεί να συμβεί αυτό, υποθέτουμε ότι τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου δε διαδίδονται στις νέες διαστάσεις αλλά είναι εγκλωβισμένα στη βράνη (brane), που είναι εμβαπτισμένη στο μεγαλύτερο χώρο (bulk). Επιπλέον θεωρούμε ότι η μόνη αλληλεπίδραση που δεν είναι περιορισμένη στη βράνη είναι η βαρύτητα και υπ' αυτή την έννοια διαχέεται και γίνεται τόσο πιο ασθενής από τις υπόλοιπες αλληλεπιδράσεις.

Το σενάριο των βρανών έχει τη βάση του στη Θεωρία Χορδών, που περιέχει αντικείμενα γνωστά ως *D-branes*, πάνω στα οποία επιτρέπεται να βρίσκεται το τέλος ανοιχτών χορδών. Αυτές οι χορδές μπορούν να αντιστοιχηθούν στα σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου ενώ μόνο οι κλειστές χορδές μπορούν να διαδοθούν στον υπόλοιπο χώρο και γι' αυτό αντιστοιχούν στις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις.

Η επιτυχία αυτής της προσέγγισης ξεκίνησε με το μοντέλο ADD (Arkani - Dimopoulos - Dvali), με βάση το οποίο η μεγάλη έξτρα διάσταση βοηθά στο να εξηγηθεί το πρόβλημα της ιεραρχίας των μαζών. Τα σωματίδια του Καθιερωμένου μοντέλου εγκλωβίζονται σε έναν 3+1-διάστατο χώρο. Το «πάχος» αυτού του χώρου δε μπορεί να ξεπερνά σε κλίμακα το TeV^{-1} , ενώ ο αριθμός των μεγάλων διαστάσεων είναι D. Αντίθετα, αν υπάρχουν, οι μικροσκοπικές διαστάσεις συνεχίζουν να συμπεριφέρονται όπως στη θεωρία Kaluza - Klein. Η δράση τότε δίνεται από

$$S_{bulk} = \frac{M_D^{D-2}}{2} \int d^D X \sqrt{-\gamma} R \quad (3.4)$$

όπου M_D είναι η θεμελιώδης κλίμακα Planck στις D διαστάσεις, γ_{AB} η αντίστοιχη D-διάστατη μετρική και R : το βαθμωτό Ricci. Σε μεγάλες διαστάσεις πάνω στη βράνη οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις διαδίδονται από το 0-mode του βαρυτονίου. Ολοκληρώνοντας τις μεγάλες διαστάσεις, παίρνουμε τη δράση

$$S_{eff} = \frac{M_D^{D-2} V_n}{2} \int d^4 X \sqrt{-\gamma} R \quad (3.5)$$

όπου η ενεργός μάζα Planck δίνεται από

$$M_{Pl}^2 \approx M_D^{2+n} L^n$$

Αν λοιπόν πάρουμε τις επιπλέον διαστάσεις να είναι αρκετά μεγάλες μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα της ιεραρχίας

$$M_D \approx M_{EW} \approx 1TeV$$

το οποίο πια αντικαθίσταται από ένα πρόβλημα ιεραρχίας της κλίμακας των επιπλέον διαστάσεων

$$\mu \approx 1/L \ll M_{EW}$$

Βεβαίως υπάρχουν και άλλα προβλήματα στη συγκεκριμένη θεώρηση, καθώς για παράδειγμα προκύπτει ότι τα ελαφρύτερα Kaluza - Klein σωματίδια, αν υπάρχουν, θα πρέπει να είναι πολύ ελαφρά ($\approx 10^{-4}eV$) και εξαιρετικά πολλά στον αριθμό, ενώ είναι προφανές ότι θα επηρεάζονται σε μεγάλο βαθμό και τα αποτελέσματα της νουκλεοσύνθεσης που γνωρίζουμε από την Κλασσική Κοσμολογία. Αυτό γιατί αλλάζοντας τις κλίμακες, αλλάζουν και οι θερμοκρασίες στις οποίες θα συμβαίνουν τα διάφορα γεγονότα, όπως η βαρυογένεση και ο πληθωρισμός.

Στο γενικό σενάριο των βρανών δεν υπάρχει κάποιος λόγος για τον οποίο να πρέπει να θεωρηθεί ότι το bulk πρέπει να είναι επίπεδο. Ένα από τα πιο γνωστά μοντέλα στο οποίο δε συμβαίνει αυτό είναι το μοντέλο των Randall - Sundrum, στο οποίο αυτός ο χώρος είναι χώρος Anti-de Sitter, δηλαδή με αρνητική καμπυλότητα. Θα παρουσιάσουμε εδώ συνοπτικά το πως κατασκευάζεται αυτό το μοντέλο, ενώ στη συνέχεια θα δούμε κάποιες επιπτώσεις που θα είχε στην Κοσμολογία ένα Σύμπαν που αποτελείται από βράνες.

Βαρύτητα στο σενάριο Randall - Sundrum

Στο βασικό σενάριο Randall - Sundrum έχουμε δύο τρισδιάστατες βράνες εμβαπτισμένες σε χώρο anti-de Sitter που βρίσκονται στις θέσεις $z = 0$ και $z = z_c$. Σε κάθε μια από τις βράνες υποθέτουμε ότι υπάρχει συμμετρία $\mathbb{Z}_2$. Η δράση για αυτό το μοντέλο είναι:

$$S = \frac{M_5^3}{2} \int d^4x \int_{-z_c}^{z_c} dz \sqrt{-\gamma} (R - 2\Lambda) - \sigma_+ \int_{z=0} d^4x \sqrt{-g^{(+)}} - \sigma_- \int_{z=z_c} d^4x \sqrt{-g^{(-)}} \quad (3.6)$$

όπου γ_{ab} : η μετρική του bulk και $g_{\mu\nu}^{\pm}$: οι μετρικές των βρανών, ενώ M_5 είναι η 5-διάστατη μάζα Planck. Επιπλέον έχουμε συμπεριλάβει μια αρνητική κοσμολογική σταθερά $\Lambda = -\frac{6}{l^2}$. Αν πάρουμε κατάλληλα σ:

$$\sigma_+ = -\sigma_- = \frac{6M_5^3}{l} = \frac{3}{4\pi G_5 l}$$

τότε οι βράνες επιδέχονται μιας λύσης που έχει συμμετρία Poincaré:

$$ds^2 = e^{-2|z|/l} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dz^2 \quad (3.7)$$

για $-z_c \leq z \leq z_c$. Ο παράγοντας $e^{-2|z|/l}$ ονομάζεται warp factor.

Μπορούμε να βρούμε την ενεργό μάζα Planck και την ενεργό σταθερά της βαρύτητας:

$$M_{\pm}^2 = \pm M_5^3 l (1 - e^{\mp 2z_c/l})$$

$$G_{\pm} = \frac{G_5}{l} \left(\frac{\pm 1}{1 - e^{\mp 2z_c/l}} \right)$$

Το κέρδος από αυτό το σενάριο λοιπόν είναι ότι μπορούμε να εξαφανίσουμε το πρόβλημα της ιεραρχίας των αλληλεπιδράσεων με ένα γεωμετρικό τρόπο, αν ζούμε στη βράνη με το αρνητικό σ. Αν $M_5 \approx 1 \text{ TeV}$ η θεμελιώδης κλίμακα, $1/l \approx 0.01 M_5$ και $z_c/l \approx 35$ τότε παίρνουμε την επιθυμητή μάζα Planck $M_{\pm} \approx m_{Pl} \approx 10^{16} \text{ TeV}$.

Το πρόβλημα με αυτό το μοντέλο όπως παρουσιάστηκε εδώ είναι ότι στο όριο των χαμηλών ενεργειών δε δίνει ως θεωρία της βαρύτητας τη Γενική Σχετικότητα αλλά

τη βαρύτητα Brans - Dicke. Ένας τρόπος αντιμετώπισής του είναι το να θεωρηθεί ότι $z_c \rightarrow \infty$. Σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα της ιεραρχίας δε λύνεται αλλά έχει αντίστοιχη αντιμετώπιση με το μοντέλο ADD. Όμως μπορούμε μέσα από αυτό να πάρουμε την τετραδιάστατη Γενική Σχετικότητα, καθώς παρόλο που η απόσταση των βρανών είναι άπειρη, ο ογκος του bulk είναι πεπερασμένος. Αυτό προκύπτει επειδή έχουμε εκθετική πτώση καθώς απομακρυνόμαστε από τη βράνη, για το z και έτσι η βαρύτητα εντοπίζεται μονάχα στη βράνη.

Κοσμολογία στο σενάριο των βρανών

Η Κοσμολογία στο σενάριο των βρανών μπορεί να μελετηθεί χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικούς φορμαλισμούς, αυτόν που βασίζεται στις βράνες ή αυτόν που βασίζεται στο bulk. Οι δυο φορμαλισμοί είναι προφανώς ισοδύναμοι και δίνουν τις εξισώσεις Friedmann:

$$H^2 + \frac{k_a}{a^2} = \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{8\pi G_4}{3} \rho \left(1 + \frac{\rho}{2\sigma}\right) + \frac{\mu}{a^4} \quad (3.8)$$

$$\dot{H} - \frac{k_a}{a^2} = -4\pi G_4(\rho + P) \left(1 + \frac{\rho}{\sigma}\right) - \frac{2\mu}{a^4} \quad (3.9)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι διορθώσεις προς την κλασσική Κοσμολογία εμφανίζονται ως $\propto \rho^2$ ενώ υπάρχει και ένας όρος σκοτεινής ακτινοβολίας $\frac{\mu}{a^4} = \frac{8\pi G_4}{3} \rho_{Weyl}$. Και οι δύο αυτές συνεισφορές θα έχουν μεγάλη επίπτωση στην πρωταρχική νουκλεοσύνθεση, οπότε μπορούμε να κάνουμε μια πρόβλεψη για το μέγεθός τους, με βάση την αφθονία των ελαφρών στοιχείων. Αποδεικνύεται ότι η σκοτεινή ακτινοβολία δε μπορεί να υπερβαίνει το 10% της πυκνότητας των φωτονίων ενώ προκύπτει και ότι $\rho_{Weyl}/\rho_\gamma \leq 0.01$. Επιπλέον, οι διορθώσεις ρ^2 θα πρέπει να είναι κυρίαρχες στο πολύ νεαρό Σύμπαν και άρα να παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη δυναμική του πληθωρισμού. Υποθέτοντας λοιπόν ότι το πεδίο inflaton είναι περιορισμένο στη βράνη, μαζί με τα υπόλοιπα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου, προκύπτουν

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{16\pi G_4} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \left[\frac{1 + \frac{V}{\sigma}}{(1 + \frac{V}{2\sigma})^2}\right]$$

$$\eta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} = \frac{1}{8\pi G_4} \left(\frac{V''}{V}\right) \left[\frac{1}{1 + \frac{V}{2\sigma}}\right]$$

όπου $V(\phi)$ το δυναμικό του πεδίου inflaton. Σε χαμηλές ενέργειες, $V \ll \sigma$ τα δύο μεγέθη συμβαδίζουν με τα αναμενόμενα από την κλασσική Κοσμολογία αποτελέσματα

$$\epsilon \approx \epsilon_{Cl} = \frac{1}{16\pi G_4} \left(\frac{V'}{V}\right)^2, \quad \eta \approx \eta_{Cl} = \frac{1}{8\pi G_4} \left(\frac{V''}{V}\right)$$

Αντίθετα σε υψηλές ενέργειες

$$\epsilon \approx \epsilon_{Cl} \frac{4\sigma}{V} \ll \epsilon_{Cl} , \eta \approx \eta_{Cl} \frac{2\sigma}{V} \ll \eta_{Cl}$$

Επομένως καταλαβαίνουμε ότι στην περίπτωση των βρανών μπορούμε να έχουμε πιο απότομα δυναμικά. Σε αυτή την περίπτωση όμως θα αλλάζουν οι αναλογίες των βαθμωτών προς τα υπόλοιπα είδη σωματιδίων, μια συνθήκη που είναι αρκετά δύσκολο να ικανοποιηθεί με βάση τις παρατηρήσεις.

Αναφορές Κεφαλαίου

[4],[5],[10]

Κεφάλαιο 4

Μοντέλα σε $3+n+1$ διαστάσεις

4.1 Κίνητρα για Καθολικές Επιπλέον Διαστάσεις

Με τα όσα έχουν παρουσιαστεί μέχρι στιγμής, έχει γίνει κατανοητό ότι η κλασική Κοσμολογία παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες στο να περιγράψει πλήρως όλες τις σύγχρονες παρατηρήσεις για το Σύμπαν. Κυρίαρχη θέση ανάμεσα σε αυτές τις παρατηρήσεις, έχει η επιταχυνόμενη διαστολή του, που, ως επί το πλείστον, αποδίδεται στην ύπαρξη κάποιας κοσμολογικής σταθεράς¹, ή στην ύπαρξη νέων ειδών ύλης με εξωτικές ιδιότητες, που ενδεχόμενα ζουν σε κρυμμένες από εμάς χωρικές διαστάσεις ή απλώς δεν έχει καταστεί δυνατό να τις παρατηρήσουμε ακόμα. Αντίστοιχους υποψηφίους αναζητούμε και για τη σκοτεινή ύλη, που αποτελεί ένα ακόμα από τα μεγάλα μυστήρια που έχουν προκύψει από τις παρατηρήσεις.

Η παρούσα εργασία θα επικεντρωθεί σε μια επέκταση του σεναρίου των Καθολικών Επιπλέον Διαστάσεων, όπως αυτό παρουσιάστηκε νωρίτερα. Το σενάριο αυτό παρουσιάζει κάποια σχετικά πλεονεκτήματα σε σχέση με τα υπόλοιπα σενάρια που συμπεριλαμβάνουν επιπλέον διαστάσεις, τα οποία θα παρουσιάσουμε συνοπτικά εδώ:

- Είναι ο πιο απλός τρόπος να επεκτείνουμε το Καθιερωμένο Πρότυπο, όπως είδαμε στην ενότητα 3.1.
- Μπορεί με κατάλληλες τιμές για την ακτίνα συμπαγοποίησης και την ενέργεια πάνω από την οποία εμφανίζονται οι παραπάνω διαστάσεις να προβλέψει τη σταθερότητα του πρωτονίου.

¹Όπου σημειώνεται ότι θα πρέπει να έχει τιμή που να προκαλεί επιτάχυνση στο Σύμπαν. Η πρώτη εισήγηση για ύπαρξη κοσμολογικής σταθεράς όμως από τον Einstein είχε την αντίθετη σκοπιμότητα, λόγω της πεποίθησής του ότι το Σύμπαν πρέπει να είναι σταθερό, για την οποία αργότερα παραδέχτηκε ότι ήταν το μεγαλύτερο λάθος του.

- Έχει δυνάμει τη δυνατότητα να εξηγήσει το γιατί συναντάμε 3 γενιές ύλης, σχετίζοντας τον αριθμό τους με τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων.
- Έχει άμεση συσχέτιση και αντιστοίχιση με την Υπερσυμμετρία, κάτι που εν γένει προσφέρει νέους τρόπους πειραματικού ελέγχου των δύο θεωριών.
- Προσφέρει με φυσικό τρόπο έναν πολύ καλό υποψήφιο για τη σκοτεινή ύλη (LKPs), με την πρώτη διεγερμένη κατάσταση του φωτονίου.

4.2 Ομογενείς Καθολικές Επιπλέον Διαστάσεις

Θα παρουσιάσουμε τώρα κάποια βασικά στοιχεία της Κοσμολογίας με Καθολικές Επιπλέον Διαστάσεις που έχουν προκύψει από εργασίες όπως οι [6],[7],[8],[11],[12].

Όπως έχουμε δει, η Κλασική Κοσμολογία περιγράφει αρκετά καλά τις δομές του Σύμπαντος υποθέτοντας μια ομογενή και ισότροπη κατανομή στο εσωτερικό του. Υποθέτουμε λοιπόν ότι μια πολυδιάστατη Κοσμολογία θα περιγράφεται από μια επεκταμένη δράση Einstein - Hilbert που θα έχει σα βάση μια κατάλληλη μετρική. Έχουμε:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^{4+n}x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda + 2k^2 \mathcal{L}_{matter}) \quad (4.1)$$

όπου $k^2 = 8\pi G$. Βρίσκοντας το ακρότατο αυτής της δράσης ως προς τη μετρική, παίρνουμε τις εξισώσεις Einstein στις $3 + n + 1$ διαστάσεις:

$$R_{AB} - \frac{1}{2} R g_{AB} = k^2 T_{AB}^{matter} + \Lambda g_{AB} = k^2 T_{AB} \quad (4.2)$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε το τι συμβαίνει στην περίπτωση που επιθυμούμε, με βάση την παρατήρηση ότι οι σταθερές σύζευξης δεν αλλάζουν τιμή, δηλαδή όταν οι επιπλέον διαστάσεις είναι ακριβώς στάσιμες. Γράφουμε τη μετρική ως:

$$-g_{MN} dx^M dx^N = dt^2 - a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j - b^2(t) \tilde{\gamma}_{pq} dy^p dy^q \quad (4.3)$$

όπου γ_{ij} : το χωρικό κομμάτι της μετρικής FLRW και $\tilde{\gamma}_{pq}$: μια μέγιστα συμμετρική μετρική στον εσωτερικό χώρο. Η γενική μορφή του ταυυστή ενέργειας - ορμής σε αυτή την περίπτωση είναι

$$T_{00} = \rho, T_{ij} = P_a a^2 \gamma_{ij}, T_{3+p \ 3+q} = P_b b^2 \tilde{\gamma}_{pq} \quad (4.4)$$

που περιγράφει ένα ομογενές άλλα όχι απαραίτητα ισότροπο ρευστό. Έτσι μπορούμε να πάρουμε τις επεκταμένες σε επιπλέον διαστάσεις εξισώσεις Friedmann

$$3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k_a}{a^2}\right] + 3n\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{n(n-1)}{2}\left[\left(\frac{\dot{b}}{b}\right) + \frac{k_b}{b^2}\right] = k^2\rho \quad (4.5)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k_a}{a^2} + 2n\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + n\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{n(n-1)}{2}\left[\left(\frac{\dot{b}}{b}\right) + \frac{k_b}{b^2}\right] = k^2P_a \quad (4.6)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + 3\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + (n-1)\left[\left(\frac{\dot{b}}{b}\right) + \frac{k_b}{b^2}\right] = \frac{k^2}{n+2}(\rho - 3P_a + 2P_b) \quad (4.7)$$

Για επιπλέον διαστάσεις που είναι ακριβώς στατικές, $\dot{b} = 0$, οι πρώτες δύο εξισώσεις μετατρέπονται στις γνωριμες από την κλασσική Κοσμολογία εξισώσεις Friedmann, που έχουν δύναμη μια «ενέργεια του κενού», λόγω του k_b . Για να επιτρέπονται οι ακριβώς στατικές διαστάσεις, από την (4.7) έχουμε:

$$\rho - 3P_a + 2P_b = (n+2)(n-1)\frac{k_b}{k^2b^2} = \text{σταθ} \equiv C \quad (4.8)$$

Για το περιεχόμενο των πιέσεων, έχουμε τις καταστατικές εξισώσεις

$$P_{a,b}^{(i)} = w_{a,b}^{(i)}\rho^{(i)} \quad (4.9)$$

όπου το i αναφέρεται στο εκάστοτε είδος ύλης που συνεισφέρει στην καταστατική εξίσωση και w : η καταστατική παράμετρος που θα θεωρούμε στην εργασία αυτή σταθερή. Από διατήρηση της ενέργειας έχουμε:

$$T_{0;A}^A = 0$$

που οδηγεί σε

$$\rho^{(i)} \propto a^{-3(1+w_a^{(i)})}b^{-n(1+w_b^{(i)})} \quad (4.10)$$

όπου καταλαβαίνουμε ότι

$$\rho = \sum_i \rho^{(i)}, P_{a,b} = \sum_i w_{a,b}^{(i)}\rho^{(i)}$$

Καταλαβαίνουμε επομένως από τα παραπάνω ότι για $\dot{a} \neq 0$, $\dot{b} = 0$ οδηγούμαστε από την εξίσωση (4.10) στο συμπέρασμα ότι για να είναι συνεπής η εξίσωση (4.8) θα πρέπει είτε

$$w_a^{(i)} = -1$$

είτε να ισχύει η σχέση

$$1 - 3w_a^{(i)} + 2w_b^{(i)} = 0 \rightarrow w_b^{(i)} = \frac{3w_a^{(i)} - 1}{2} \quad (4.11)$$

Μάλιστα, αν ισχύει η πρώτη από αυτές τις περιπτώσεις και ταυτόχρονα δεν ισχύει η δεύτερη τότε ο εσωτερικός χώρος οφείλει να έχει $k_b \neq 0$, γιατί η σταθερά C θα είναι διάφορη του 0. Αντίστοιχα, καταλαβαίνουμε ότι δε μπορούμε με αυτές τις υποθέσεις να έχουμε, τόσο στις συνήθειες, όσο και στις επιπλέον διαστάσεις μια ενεργό τιμή w ίση με -1, δηλαδή δε μπορεί και στις δύο να κυριαρχεί ταυτόχρονα μια κοσμολογική σταθερά.

Όπως είδαμε ήδη, όλα τα σωματίδια του Καθιερωμένου Μοντέλου επιτρέπεται να κυκλοφορούν στις επιπλέον διαστάσεις. Η ορμή τους σε αυτές οδηγεί στην εμφάνιση βαρύτερων μορφών (modes) των ίδιων σωματιδίων. Από αυτό το αποτέλεσμα μάλιστα έχουν προκύψει θεωρίες που ισχυρίζονται ότι η ελαφρύτερη κατάσταση του φωτονίου, είναι αξιόλογος υποψήφιος ως συστατικό της σκοτεινής ύλης, αν η κλίμακα συμπαγοποίησης είναι σε τάξη του TeV .

Το γεγονός ότι τα ενδεχόμενα σωματίδια Kaluza - Klein που απαρτίζουν τη σκοτεινή ύλη, εμφανίζουν μάζα στις 4 διαστάσεις μπορεί να μας βοηθήσει να προβλέψουμε την πίεσή τους. Υποθέτοντας ξεχωριστή ισοτροπία για τους 2 υπόχωρους, και αν $\vec{K}^A$ η ορμή στην κατεύθυνση X^A έχουμε

$$3P_a + nP_b = \langle \frac{\vec{K}_{total}^2}{E} \rangle = \langle \frac{E^2 - m^2}{E} \rangle = \langle E \rangle - \langle \frac{m^2}{E} \rangle = \rho - \langle \frac{m^2}{E} \rangle \quad (4.12)$$

Κατά την κυριαρχία της ακτινοβολίας στις 4 διαστάσεις η εξίσωση αυτή είναι συνεπής (θεωρώντας ταυτόχρονα ότι η συνεισφορά της σκοτεινής ύλης είναι αμελητέα σε αυτή την περίοδο), γιατί $w_a = \frac{1}{3}$, $w_b = 0$. Κατά την κυριαρχία της ύλης, λόγω των καταστάσεων Kaluza - Klein μπορούμε πάλι να αγνοήσουμε τις μάζες του Καθιερωμένου Μοντέλου οπότε τότε θα είναι

$$w_a = 0, w_b = \frac{1}{n}$$

Καταλαβαίνουμε δηλαδή ότι κατά την κυριαρχία της ακτινοβολίας στις 4 διαστάσεις, ικανοποιείται και η δεύτερη συνθήκη που βρήκαμε νωρίτερα απαιτώντας στατικότητα για τις επιπλέον διαστάσεις, κάτι που δε συμβαίνει για την εποχή κυριαρχίας της ύλης.

Επομένως, οι ακριβώς στατικές επιπλέον διαστάσεις αποτυγχάνουν να δώσουν μια Κοσμολογία ίδια με την κλασσική. Θα δούμε τώρα τί γίνεται αν επικεντρωθούμε σε περιπτώσεις που έχουν κοινή καταστατική εξίσωση και στους δύο υπόχωρους:

$$P_a = P_b = w\rho$$

Για παράδειγμα σε μια εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας στις συνήθεις διαστάσεις το ίδιο θα έπρεπε να συμβαίνει και στις επιπλέον διαστάσεις. Οι εξισώσεις Friedmann γίνονται

$$3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k_a}{a^2}\right] + \frac{n(n-1)}{2}\left[\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{k_b}{b^2}\right] + 3n\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{b}}{b} = 8\pi G\rho \quad (4.13)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k_a}{a^2}\right] + n\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{b}}{b} = \frac{8\pi G\rho}{3+n} \quad (4.14)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + (n-1)\left[\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{k_b}{b^2}\right] + 3\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{b}}{b} = \frac{8\pi G\rho}{3+n} \quad (4.15)$$

Μπορούμε τώρα να δούμε ενδεικτικά κάποια ποιοτικά στοιχεία για το πως εξελίσσονται οι διαστάσεις. Αν $k_b > 0$ τότε από την τελευταία εξίσωση βλέπουμε ότι οι επιπλέον διαστάσεις φτάνουν το μέγιστό τους σε κάποια στιγμή, οπότε και γίνεται $\frac{\dot{b}}{b} = 0$ και μετά καταρρέουν. Αν ταυτόχρονα πάρουμε ότι $k_a \leq 0$ τότε οι συνήθεις διαστάσεις δεν αλλάζουν ποτέ την τάση τους και συνεχίζουν να διαστέλονται. Μάλιστα όταν $b(t) \rightarrow 0$ τότε ξεκινούν επιταχυνόμενη διαστολή, μιας και το $\frac{\dot{b}}{b}$ γίνεται πολύ αρνητικό οπότε $\ddot{a} > 0$.

Βεβαίως αναμένουμε οι κλασσικές εξισώσεις να μην ισχύουν κοντά σε μια ανωμαλία όπως το $b(t) \rightarrow 0$. Γενικώς, εκεί θεωρείται ότι φαινόμενα κβαντικής βαρύτητας αρχίζουν να γίνονται σημαντικά. Ας δούμε όμως το κατά πόσο ένας πληθωρισμός που προκύπτει με αυτό τον τρόπο μπορεί να είναι αρκετός για τα 60 – 65 e-folds που έχουμε δει ότι απαιτούν οι παρατηρήσεις. Η ακτίνα της «σφαίρας» στην οποία θα έχουν καμπυλωθεί οι επιπλέον διαστάσεις είναι $\frac{b}{\sqrt{k_b}}$ οπότε όταν $b \leq \sqrt{k_b}L_D$, όπου $L_D \propto G_d^{\frac{1}{D-2}}$ το μήκος Planck, οι εξισώσεις μας παύουν να είναι αξιόπιστες. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ότι υπάρχει ένας χρόνος, t_c , στον οποίο ο παράγοντας κλίμακας των επιπλέον διαστάσεων φτάνει σε μήκος $b(t_c) = \sqrt{k_b}L$, $L > L_D$ και εκεί παγιώνεται. Για να λυθεί για παράδειγμα το πρόβλημα της εντροπίας χρειάζεται $\ln S \approx 88$ το οποίο στη δική μας περίπτωση είναι φανερό ότι δε μπορεί να επιτευχθεί γιατί $\ln S \approx \ln \frac{L_D}{L}$. Επομένως, με αυτές τις υποθέσεις ο πληθωρισμός που οφείλεται στην Kaluza-Klein επέκταση που κάνουμε δεν είναι μια καλή εναλλακτική του πληθωρισμού μέσω του βαθμωτού πεδίου ϕ στην κλασσική Κοσμολογία.

Ας δούμε τι γίνεται αν αυτή τη φορά επιτρέψουμε στην παράμετρο w και στους δύο υπόχωρους να παίρνει ταυτόχρονα τιμή συμβατή με ύπαρξη κοσμολογικής σταθεράς, δηλαδή να είναι:

$$P_a = P_b = -\rho = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$$

Οι εξισώσεις Friedmann γίνονται σε αυτή την περίπτωση

$$3\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k_a}{a^2}\right] + \frac{n(n-1)}{2}\left[\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{k_b}{b^2}\right] + 3n\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \Lambda \quad (4.16)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k_a}{a^2}\right] + n\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \frac{8\Lambda}{2+n} \quad (4.17)$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + (n-1)\left[\left(\frac{\dot{b}}{b}\right)^2 + \frac{k_b}{b^2}\right] + 3\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = \frac{2\Lambda}{2+n} \quad (4.18)$$

Εδώ παίρνοντας $k_a = 0$, $k_b > 0$ πράγματι μπορούμε να πάρουμε εκθετική ανάπτυξη για τις συνήθεις διαστάσεις που διαστέλονται με $H = H_*$:

$$H_*^2 = \frac{n-1}{3} \frac{k_b}{b_*^2} = \frac{2\Lambda}{3(n+2)}$$

ενώ οι επιπλέον διαστάσεις μένουν σταθερές σε μια τιμή $b = b_*$. Όμως αυτή η τιμή είναι στο μέγιστο του αντίστοιχου δυναμικού και επομένως είναι ασταθής και καταρρέει. Υπολογίζεται ότι η χρονική κλίμακα στην οποία συμβαίνει αυτό είναι

$$\Delta t \approx \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{3}}\right)/4H_*$$

μετά την οποία παύει ο πληθωρισμός. Υπολογίζεται μάλιστα με θεωρία διαταραχών ότι το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι κατά δύο τάξεις μεγέθους μικρότερο από αυτό που θα θέλαμε για να έχουμε τα απαιτούμενα e-folds.

Καταλαβαίνει κανείς ότι με τις απαιτήσεις για τις παραμέτρους w που έχουμε δει μέχρι στιγμής τα μοντέλα που προκύπτουν δεν είναι ιδιαίτερος επιτυχημένα, με την έννοια ότι χρειάζονται πλαίσια και από άλλους μηχανισμούς για να εξηγήσουν κάποια από τα σημεία στα οποία έχει πρόβλημα και η κλασική Κοσμολογία.

4.3 Ισοδύναμη εικόνα στις 4 διαστάσεις

Με εφαρμογή ενός σύμμορφου μετασχηματισμού μπορούμε να μεταπείσουμε από τη 3+n+1-διάστατη δράση στην τετραδιάστατη και να δούμε έτσι ποια είναι η αντίστοιχη εικόνα για παρατηρητές που δε μπορούν να αντιληφθούν τις επιπλέον διαστάσεις. Έχουμε διαδοχικά:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int d^{4+n}X \sqrt{-g}(R - 2k^2 \mathcal{L}_m) \quad (4.19)$$

όπου η μετρική είναι:

$$g_{AB}dX^AdX^B = \bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + b^2(x^\mu)\tilde{g}_{pq}dy^p dy^q \quad (4.20)$$

και η $\tilde{g}$ εξαρτάται μόνο από τις y μεταβλητές. Μπορούμε τώρα να αποσυνθέσουμε το αρχικό βαθμωτό Ricci και να έχουμε ισοδύναμα:

$$S = \frac{\tilde{V}}{2k^2} \int d^4X \sqrt{-\bar{g}} b^n (\bar{R} + b^{-2}\tilde{R} + n(n-1)\partial_\mu b \partial^\mu b - 2k^2 \mathcal{L}_m) \quad (4.21)$$

όπου $\tilde{V} = \int d^n y \sqrt{\tilde{g}}$ και τα $\bar{R}$, $\tilde{R}$ είναι τα βαθμωτά Ricci των αντίστοιχων υπόχωρων. Επιλέγοντας μέγιστα συμμετρικό υπόχωρο και για τις επιπλέον διαστάσεις αποδεικνύεται ότι $\tilde{R} = n(n-1)k_b$. Πραγματοποιούμε τώρα ένα μετασχηματισμό Weyl:

$$\hat{g}_{\mu\nu} = b^n \bar{g}_{\mu\nu}$$

και θέτοντας $\hat{k}^2 = k^2/\tilde{V}$ και $\Phi = \sqrt{\frac{n(n+2)}{2\hat{k}^2}} \ln b$ φτάνουμε σε μια ισοδύναμη δράση με βαρύτητα μαζί με ένα βαθμωτό πεδίο Φ :

$$S = \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \left(\frac{1}{2\hat{k}^2} \hat{R} - \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi + V_{eff}(\Phi) \right) \quad (4.22)$$

όπου

$$V_{eff}(\Phi) = \frac{n(n-1)k_b}{2\hat{k}^2} \exp\left(-\sqrt{\frac{2(n+2)\hat{k}^2}{n}}\Phi\right) - \tilde{V} \mathcal{L}_m \exp\left(-\sqrt{\frac{2n\hat{k}^2}{n+2}}\Phi\right)$$

Είναι προφανές ότι οι δύο θεωρίες είναι ισοδύναμες μεταξύ τους, καθώς μπορούμε για παράδειγμα να επιβεβαιώσουμε ότι από την εξίσωση κίνησης για το βαθμωτό πεδίο

$$\hat{\square}\Phi = -V'_{eff}(\Phi)$$

παίρνουμε με αντικατάσταση τη διαφορική εξίσωση που χαρακτηρίζει τον παράγοντα b .

Όμως η παραπάνω διαδικασία μας οδηγεί στο να συμπεράνουμε ότι ο παράγοντας κλίμακας (και τα παραγόμενα από αυτόν μεγέθη), στον οποίο θα αντιστοιχίσουμε τα παρατηρησιακά δεδομένα δεν είναι ο $a(t)$ αλλά ο $\hat{a} = b^{n/2}a$, ενώ ο χρόνος βρίσκεται από τη σχέση $d\hat{t}^2 = b^n dt^2$. Η τελευταία αυτή σχέση καθιστά εν γένει δύσκολη την πλήρη αντιστοίχιση της εικόνας στις $3 + n + 1$ διαστάσεις με αυτή στις 4. Όμως, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι απαιτούμε σταθεροποίηση των επιπλέον διαστάσεων, και έτσι αυτή η αλλαγή γίνεται λιγότερο πολύπλοκη καθώς μπορούμε κατά προσέγγιση να θεωρήσουμε ότι $b = const$. Μάλιστα στα μοντέλα που θα μελετήσουμε, θα δούμε εκ των υστέρων ότι προσεγγιστικά είναι σωστή αυτή η θεώρηση

υπό την έννοια ότι πράγματι η αλλαγή του $b(t)$ με το χρόνο είναι αργή, και άρα είναι δικαιολογημένη η προσέγγιση ότι $b = \text{const}$ για να αντιστοιχίσουμε τα μεγέθη των μοντέλων με τις παρατηρήσεις. Πιο συγκεκριμένα:

$$d\hat{t}^2 = b^n dt^2 \Rightarrow t = g(\hat{t}) \quad (4.23)$$

που στην περίπτωση μας θα είναι απλά

$$t = b_0^{-\frac{n}{2}} \hat{t} \quad (4.24)$$

όπου b_0 είναι η σταθερή τιμή που θεωρούμε για το b σε αυτή την προσέγγιση. Αντίστοιχα:

$$\hat{a}(\hat{t}) = b^{\frac{n}{2}}(g(\hat{t}))a(g(\hat{t})) \quad (4.25)$$

που για την παραπάνω προσέγγιση δίνει αν παραγωγίσουμε ως προς $\hat{t}$

$$\dot{\hat{a}}(\hat{t}) = b_0^{\frac{n}{2}} \frac{da}{dg} \frac{dg}{d\hat{t}} = \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=b_0^{-\frac{n}{2}}\hat{t}} \quad (4.26)$$

όπου με $\dot{F}$ συμβολίζουμε την παράγωγο του μεγέθους F ως προς το χρόνο $\hat{t}$, για να τη διακρίνουμε από τη χρονική παράγωγο ως προς το t , $\dot{F}$.

Για την παράμετρο Hubble θα έχουμε τότε

$$\hat{A}(\hat{t}) = \frac{\dot{\hat{a}}(\hat{t})}{\hat{a}(\hat{t})} = b_0^{-\frac{n}{2}} A(g(\hat{t})) \quad (4.27)$$

$$\dot{\hat{A}}(\hat{t}) = b_0^{-1} \left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=b_0^{-\frac{n}{2}}\hat{t}} \quad (4.28)$$

και για την παράμετρο επιτάχυνσης:

$$q = -1 - \frac{\dot{\hat{A}}(\hat{t})}{\hat{A}^2(\hat{t})} = -1 - \frac{\dot{A}(g(\hat{t}))}{A^2(g(\hat{t}))} \quad (4.29)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι στην περίπτωση που έχουμε στατικές επιπλέον διαστάσεις οι παράμετροι επιτάχυνσης στις δύο εικόνες ταυτίζονται, ενώ οι παράμετροι Hubble έχουν διαφορά μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Επομένως, θα θέσουμε ενδεικτικά ότι $\hat{A}_0 = A_0$ για τη σημερινή τιμή της παραμέτρου Hubble στην 3 + n + 1-διάστατη εικόνα που θα μας επιτρέψει να μελετήσουμε ποιοτικά τα μοντέλα, ενώ θα παρουσιάσουμε και ένα μοντέλο στο οποίο έχουμε πρακτική ταύτιση μεταξύ των δύο εικόνων και η σχέση $\hat{A}_0 = A_0$ δεν είναι απλώς ενδεικτική, αλλά μια πολύ καλή προσέγγιση, που μας δίνει τη δυνατότητα να κάνουμε πιο χειροπιαστές προβλέψεις.

4.4 Η προσεγγιστική μέθοδος Picard

Πριν προχωρήσουμε σε κατασκευή μοντέλων που επιτρέπουν μεγαλύτερη ελευθερία για τις παραμέτρους w , και μελετούν τις λύσεις αναλυτικά, θα παρουσιάσουμε την προσεγγιστική κατασκευαστική μέθοδο Picard, μια ειδική περίπτωση της οποίας θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να ανακατασκευάσουμε την ιστορία των $A(t)$, $B(t)$ γνωρίζοντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά τους.

Η μέθοδος Picard μετατρέπει ένα διαφορικό πρόβλημα

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (4.30)$$

σε ολοκληρωτικό, το οποίο στη συνέχεια επιλύει. Δίνει σε διαδοχικά βήματα προσεγγίσεις της γενικής λύσης του προβλήματος που συγκλίνουν ταχέως προς αυτή. Υποθέτοντας λοιπόν ότι οι $f(t, y)$ και $\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, μπορούμε να ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη και θα έχουμε

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(z, y(z)) dz \quad (4.31)$$

Η ακολουθία των προσεγγίσεων είναι η εξής:

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \\ y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(z, y_0(z)) dz \\ &\vdots \\ y_n(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(z, y_{n-1}(z)) dz \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που έχουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων η μέθοδος Picard μπορεί και πάλι να εφαρμοστεί κάτω από ορισμένες συνθήκες.

Έστω λοιπόν ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που έχουν τη μορφή:

$$\frac{dx_i}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.32)$$

Τα συστήματα αυτά ονομάζονται *αυτόνομα* ή *στάσιμα*, ενώ *μη αυτόνομο* ονομάζεται ένα σύστημα της μορφής:

$$\frac{dx_i}{dt} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (4.33)$$

Για $t_0 = 0$ η λύση ενός αυτόνομου συστήματος γράφεται

$$x_i = x_i(t, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \quad (4.34)$$

Έστω ότι η γενική λύση περνάει από το σημείο $p(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ τη χρονική στιγμή 0. Τότε αν $x_i = f(p, t)$, για κάθε στιγμή t το σημείο $f(p, t) = q$ είναι ένα συγκεκριμένο σημείο της λύσης, αφού θα είναι

$$f(p, 0) = p$$

και

$$f(p, t_1 + t) = f(f(p, t_1), t)$$

Η $f(p, t)$ ονομάζεται *τροχιά* αυτού του συστήματος.

Επιπλέον, ορίζουμε την έννοια του ω -οριακού σημείου. Ένα σημείο q ονομάζεται ω -οριακό σημείο μιας τροχιάς $f(p, t)$ όταν υπάρχει μια ακολουθία $t_1, t_2, \dots, t_n \rightarrow \infty$ ώστε

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} \rho(f(p, t), q) = 0$$

όπου με

$$\rho(A, B)$$

συμβολίζουμε την απόσταση των σημείων A, B . Το σύνολο αυτών των σημείων συμβολίζεται με Ω_p . Αν ένα σημείο q είναι ω -οριακό σημείο μιας τροχιάς $f(p, t)$ τότε όλα τα υπόλοιπα σημεία της τροχιάς $f(q, t)$ είναι ω -οριακά σημεία.

Έχοντας ορίσει αυτές τις έννοιες θα δούμε τώρα δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες των αυτόνομων συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.

- Κάθε σημείο $x = (x_1, \dots, x_n)$ καθορίζει μια μοναδική τροχιά στο χώρο των x ανεξαρτήτως του χρόνου.
- Η μοναδική τροχιά ενός αυτόνομου συστήματος που καθορίζεται από ένα ω -οριακό σημείο x μιας ολοκληρωτικής καμπύλης, αποτελείται μόνο από ω -οριακά σημεία. Καταλαβαίνουμε δηλαδή, ότι η οριακή συμπεριφορά μιας ολοκληρωτικής καμπύλης μπορεί να περιγραφεί με όρους ολοκληρωτικών καμπυλών μέσω σημείων του συνόλου των ω -οριακών σημείων.

Από τα όσα έχουμε αναφέρει μέχρι στιγμής, γίνεται ήδη φανερό η πιθανή χρησιμότητα των παραπάνω, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι, για το σύστημα των εξισώσεων Friedman που μελετάμε εδώ, θα δούμε ότι γνωρίζουμε ακριβώς την ασυμπτωτική συμπεριφορά σε μια πληθώρα περιπτώσεων. Μένει λοιπόν να δούμε πως μπορεί να κατασκευαστεί η λύση. Για το λόγο αυτό θα «γραμμικοποιήσουμε» το σύστημά μας, ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε τα όσα θα αναφερθούν αμέσως.

Έστω λοιπόν ένα ομογενές σύστημα γραμμικών εξισώσεων που γράφεται στη μορφή

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} y_k \quad (4.35)$$

Αυτό το σύστημα μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$\frac{dy}{dt} = A(t) \cdot y \quad (4.36)$$

όπου $A(t) = \{\alpha_{(ik)}\}$ και $y = \{y_1, \dots, y_n\}$, ενώ ένα αντίστοιχο μη ομογενές σύστημα γράφεται:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} y_k + f_i(t) \quad (4.37)$$

ή ισοδύναμα:

$$\frac{dy}{dt} = A(t) \cdot y + F(t) \quad (4.38)$$

Στα ομογενή συστήματα, ορίζουμε ένα πολύ σημαντικό μέγεθος, τον *θεμελιώδη πίνακα λύσεων*, $Y(t) = \{y_{ij}\}$ για τον οποίο ισχύει

$$\frac{dY}{dt} = A(t) \cdot Y$$

και του οποίου οι στήλες αποτελούν θεμελιώδεις λύσεις του συστήματος. Τότε, η γενική λύση του συστήματος (4.36) είναι

$$y(t) = Y(t) \cdot c$$

όπου το c είναι ένα σταθερό διάνυσμα στήλη. Για μη ομογενή συστήματα τώρα ψάχνουμε λύση της μορφής

$$y(t) = Y(t) \cdot c(t)$$

Με αντικατάσταση στο σύστημά μας βρίσκουμε:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dY}{dt} \cdot c(t) + Y \cdot \frac{dc}{dt} = A(t) \cdot Y(t) \cdot c(t) + F(t) \quad (4.39)$$

οπότε

$$\frac{dc}{dt} = Y^{-1} \cdot F \quad (4.40)$$

Από τη θέση του προβλήματος, καταλαβαίνουμε ότι ο πίνακας $Y(t)$ είναι αντιστρέψιμος οπότε είναι:

$$c(t) = c(t_0) + \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot F(\tau) d\tau \quad (4.41)$$

και κατ' επέκταση:

$$y(t) = Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot F(\tau) d\tau \quad (4.42)$$

Επομένως, η γενική λύση θα δίνεται από τη σχέση:

$$y(t) = Y(t - t_0) \cdot a + Y(t) \cdot \int_{t_0}^t Y^{-1}(\tau) \cdot F(\tau) d\tau \quad (4.43)$$

όπου a : ένα σταθερό άνυσμα, το οποίο μάλιστα θα είναι:

$$a = y(t_0)$$

αν

$$Y(0) = \mathbb{I}$$

Τέλος, θα δούμε πως κατασκευάζεται αναδρομικά η γενική λύση για ένα σύστημα της μορφής:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + f(x, t) \quad (4.44)$$

όπου

$$f(0, t) = 0$$

και

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x_j} \rightarrow 0 \text{ καθώς } \|x\| \rightarrow 0$$

Αποδεικνύεται ότι κοντά στο σημείο - αρχή, οι ολοκληρωτικές καμπύλες του συγκεκριμένου προβλήματος σχετίζονται με τις αντίστοιχες του γραμμικού προβλήματος (4.36). Διατυπώνεται δε το εξής θεώρημα:

Αν όλες οι χαρακτηριστικές ρίζες του πίνακα A είναι αρνητικές, τότε όλες οι λύσεις του συστήματος (4.44), οι αρχικές συνθήκες του οποίου είναι αρκετά κοντά στο σημείο - αρχή, τείνουν στο 0 καθώς $t \rightarrow \infty$. Αν, υπάρχουν $k < n$ θετικές ρίζες, τότε υπάρχει manifold^2 που εξαρτάται από k παραμέτρους, τέτοιο ώστε οι ολοκληρωτικές καμπύλες που περνούν από τα σημεία του να τείνουν στο 0 καθώς $t \rightarrow \infty$. Αν, τέλος, όλες

²Στα ελληνικά συνήθως μεταφράζεται ως «πολύπτυχο μόρφωμα».

οι χαρακτηριστικές ρίζες είναι θετικές υπάρχει αντίστοιχο manifold τέτοιο ώστε κάθε ολοκληρωτική καμπύλη που περνάει από κάποιο σημείο του να τείνει στο 0 καθώς $t \rightarrow -\infty$.

Αν λοιπόν ο πίνακας $Y(t)$ είναι ο θεμελιώδης πίνακας του (4.36), τότε στην περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές έχουμε

$$z^{(0)} = Y(t) \cdot y(0) \quad (4.45)$$

και

$$z^{(j+1)} = Y(t) \cdot y(0) + \int_0^t Y(t-\tau) \cdot f(z^{(j)}, \tau) d\tau \quad (4.46)$$

Αν αντιθέτως είμαστε στην περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές, αποδεικνύεται ότι εφαρμόζεται η ίδια αναδρομική μέθοδος με την αλλαγή $t \rightarrow -t$. Αν τέλος, είμαστε στην περίπτωση όπου υπάρχουν τόσο θετικές όσο και αρνητικές ιδιοτιμές, αρκεί να χωρίσουμε το θεμελιώδη πίνακα $Y(t)$ σε δύο κομμάτια Y_1 και Y_2 , που περιέχουν τους όρους που συνδέονται με τις αρνητικές και τις θετικές ιδιοτιμές του πίνακα A αντίστοιχα, και τότε η ακολουθία είναι

$$z^{(0)}(t) = y(t) \quad (4.47)$$

με

$$y(t) = \sum_{i=1}^k a_i y^{(i)}(t)$$

όπου τα $y^{(i)}$ είναι k ανεξάρτητες λύσεις του (4.36) και

$$z^{(j+1)}(t) = y(t) + \int_0^t Y_1(t-\tau) \cdot f(z^{(j)}, \tau) d\tau - \int_t^\infty Y_2(\tau) \cdot f(z^{(j)}, \tau) d\tau \quad (4.48)$$

Σύνοψη

Σε αυτή την ενότητα, αρχικά παρουσιάσαμε συνοπτικά το γεγονός ότι οι διάφορες ολοκληρωτικές καμπύλες ενός διαφορικού συστήματος εμφανίζουν ασυμπτωτική συμπεριφορά, όταν αυτό το σύστημα έχει σταθερή λύση. Στη συνέχεια, είδαμε με την επέκταση της μεθόδου Picard σε συστήματα εξισώσεων, το πως μπορεί να παρασκευαστεί αναδρομικά η λύση ενός μη γραμμικού προβλήματος, αν γνωρίζουμε τη λύση του αντίστοιχου γραμμικού.

Θα δείξουμε παρακάτω, πως το γεγονός ότι η γενική λύση του συστήματος των εξισώσεων Friedmann συγκλίνει προς μια ειδική λύση ασυμπτωτικά, την οποία γνωρίζουμε ακριβώς, μας δημιουργεί την ευκαιρία, αν φέρουμε το σύστημα σε κατάλληλη μορφή, να εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο για να πάρουμε μια προσεγγιστική αναλυτική μορφή της λύσης.

4.5 Ειδικές λύσεις και γενική λύση στο χώρο των $A, B(A)$

Σε αυτή την ενότητα, θα παρουσιάσουμε τις αναλυτικές μορφές των ειδικών και της γενικής λύσης που έχει το σύστημά μας, για την περίπτωση $n = 1$, αλλά και για περιπτώσεις με $n > 1$ όπου θεωρούμε ότι $k_b = 0$.

4.5.1 Λύσεις με παγιωμένη σχέση μεταξύ των $A(t), B(t)$

Οι εξισώσεις Friedmann για επίπεδες συνήθεις διαστάσεις, στην περίπτωση όπου δεν περιλαμβάνουμε εκπεφρασμένα κοσμολογική σταθερά³, μπορούν να έρθουν σε μια μορφή συστήματος δύο εξισώσεων πρώτης τάξης για τις παραμέτρους Hubble. Συγκεκριμένα τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής:

- Κάνουμε την αντικατάσταση $A(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ και $B(t) = \frac{\dot{b}(t)}{b(t)}$.
- Παραγωγίζουμε τις παραπάνω σχέσεις με σκοπό να διώξουμε τον όρο δεύτερης τάξης ως προς τα a, b στις εξισώσεις Friedmann. Έχουμε τότε

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \dot{A}(t) + A^2(t)$$

και

$$\frac{\ddot{b}(t)}{b(t)} = \dot{B}(t) + B^2(t)$$

- Λύνουμε την εξίσωση (4.5) ως προς ρ και την αντικαθιστούμε στις 4.6, 4.7, αφού θυμηθούμε ότι $P_A = w_a \rho$, $P_B = w_b \rho$.

Αφού πραγματοποιήσουμε τα παραπάνω βήματα θα έχουμε φτάσει στο σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) = & \frac{3(-1 - n + (n-1)w_a - nw_b)}{2+n} A^2(t) + \frac{n((n-1)(3w_a - 1) - 3nw_b)}{2+n} A(t)B(t) \\ & + \frac{n(n-1)(1 + (n-1)w_a - nw_b)}{2(2+n)} B^2(t) + k_b \frac{n(n-1)(1 + (n-1)w_a - nw_b)}{2(2+n)} \frac{1}{b^2} \end{aligned} \quad (4.49)$$

³Μπορεί όμως το αποτέλεσμα αυτής να συμπεριλαμβάνεται στην ενεργό μορφή του ταχυστή ενέργειας - ορμής.

και

$$\begin{aligned}\dot{B}(t) = & \frac{-3(3w_a - 2w_b - 1)}{2+n}A^2(t) + \frac{-3(2 + 3nw_a - 2nw_b)}{2+n}A(t)B(t) \\ & + \frac{-n(5 + n + 3(n-1)w_a - 2(n-1)w_b)}{2(2+n)}B^2(t) \\ & + k_b \frac{(n-1)(4 + n + 3nw_a - 2nw_b)}{2(2+n)} \frac{1}{b^2}\end{aligned}\quad (4.50)$$

Αν σε αυτές τις εξισώσεις επιλέξουμε να είναι $k_b = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\dot{A}(t) = & \frac{3(-1 - n + (n-1)w_a - nw_b)}{2+n}A^2(t) + \frac{n((n-1)(3w_a - 1) - 3nw_b)}{2+n}A(t)B(t) \\ & + \frac{n(n-1)(1 + (n-1)w_a - nw_b)}{2(2+n)}B^2(t)\end{aligned}\quad (4.51)$$

και

$$\begin{aligned}\dot{B}(t) = & \frac{-3(3w_a - 2w_b - 1)}{2+n}A^2(t) + \frac{-3(2 + 3nw_a - 2nw_b)}{2+n}A(t)B(t) \\ & + \frac{-n(5 + n + 3(n-1)w_a - 2(n-1)w_b)}{2(2+n)}B^2(t)\end{aligned}\quad (4.52)$$

Παρατηρώντας τα δεξιά μέλη των εξισώσεων, βλέπει κανείς ότι υπάρχουν μόνο όροι δευτέρου βαθμού για τα πεδία $A(t)$, $B(t)$. Επομένως, είναι λογικό να υποτεθεί ότι τα πεδία αυτά θα έχουν ίδια εξάρτηση από το χρόνο, στην περίπτωση που οι παράμετροι πυκνότητας w_a , w_b είναι σταθερές. Θα δοκιμάσουμε λοιπόν να βρούμε λύση για το παραπάνω σύστημα εξισώσεων, υποθέτοντας ότι:

$$A(t) = cB(t)$$

Με αυτή την αντικατάσταση, θα φτάσουμε σε δύο διαφορετικές εξισώσεις του ίδιου πεδίου, και θα δούμε για ποιιά τιμή της σταθεράς ταυτίζονται. Αν λοιπόν $n \neq 1$ παίρνουμε 3 διαφορετικές τιμές για το c :

$$c = \frac{1}{6}(-3n - \sqrt{3}\sqrt{n(2+n)}) \quad (4.53)$$

$$c = \frac{1}{6}(-3n + \sqrt{3}\sqrt{n(2+n)}) \quad (4.54)$$

$$c = \frac{-1 + w_a - nw_a + nw_b}{-1 + 3w_a - 2w_b} \quad (4.55)$$

ενώ για την περίπτωση $n = 1$ έχουμε:

$$c = -1 \quad (4.56)$$

$$c = \frac{-1 + w_b}{-1 + 3w_a - 2w_b} \quad (4.57)$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι 2 από τις 3 αυτές ειδικές λύσεις (μια από τις δύο για $n = 1$), όχι μόνο προβλέπουν χρονικά παγιωμένη σχέση μεταξύ των παραμέτρων Hubble για τις κανονικές και τις επιπλέον διαστάσεις, αλλά φαίνεται να μην εξαρτώνται καθόλου και από την τιμή των w_a , w_b . Φυσικό επακόλουθο αυτών των λύσεων, που ονομάζονται λύσεις τύπου Kasner, είναι, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, να δίνουν παράμετρο επιτάχυνσης που δεν εξαρτάται από τα w_a , w_b , δηλαδή από τον τύπο της ύλης που περιέχουν οι διαστάσεις που περιγράφουν, παρά μόνο από τον αριθμό των επιπλέον διαστάσεων. Ένα ακόμα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό τους είναι το γεγονός ότι οδηγούν, όπως θα δούμε, σε πυκνότητα ενέργειας ίση με το 0.

4.5.2 Ειδικές λύσεις για $n = 1$

Περίπτωση $c = -1$

Όπως είδαμε, για την περίπτωση $n = 1$ η μια ειδική λύση είναι η $A(t) = -B(t)$. Αυτή η σχέση οδηγεί στις εξής μορφές για τις παραμέτρους Hubble:

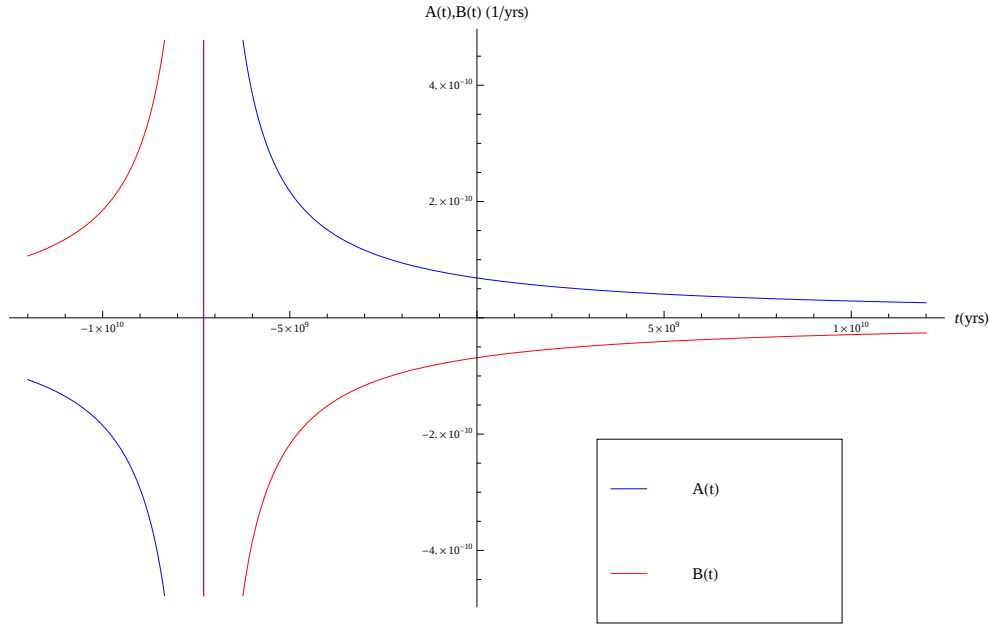
$$A(t) = \frac{A_0}{1 + 2A_0 t} \quad (4.58)$$

$$B(t) = -\frac{A_0}{1 + 2A_0 t} \quad (4.59)$$

Η παράμετρος επιτάχυνσης έχει και εδώ τιμή ανεξάρτητη των w_a , w_b και ίση με 1, προβλέπει δηλαδή επιβραδυνόμενη διαστολή. Επιπλέον με αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση Friedmann η οποία για $n = 1$ έχει γίνει

$$3A(t)^2 + 3A(t)B(t) = k^2 \rho$$

παίρνουμε ότι η πυκνότητα ενέργειας είναι 0. Το διάγραμμα των παραμέτρων Hubble είναι:



Περίπτωση $c = \frac{-1+w_b}{3w_a-2w_b-1}$

Η δεύτερη ειδική λύση που προκύπτει για $n = 1$ με $c = \frac{-1+w_b}{3w_a-2w_b-1}$. Οι παράμετροι Hubble δίνονται από:

$$A(t) = \frac{(1-w_b)A_0}{1-w_b+(w_b^2-3w_a w_b+2)A_0 t} \quad (4.60)$$

$$B(t) = \frac{(1-3w_a+2w_b)A_0}{1-w_b+(w_b^2-3w_a w_b+2)A_0 t} \quad (4.61)$$

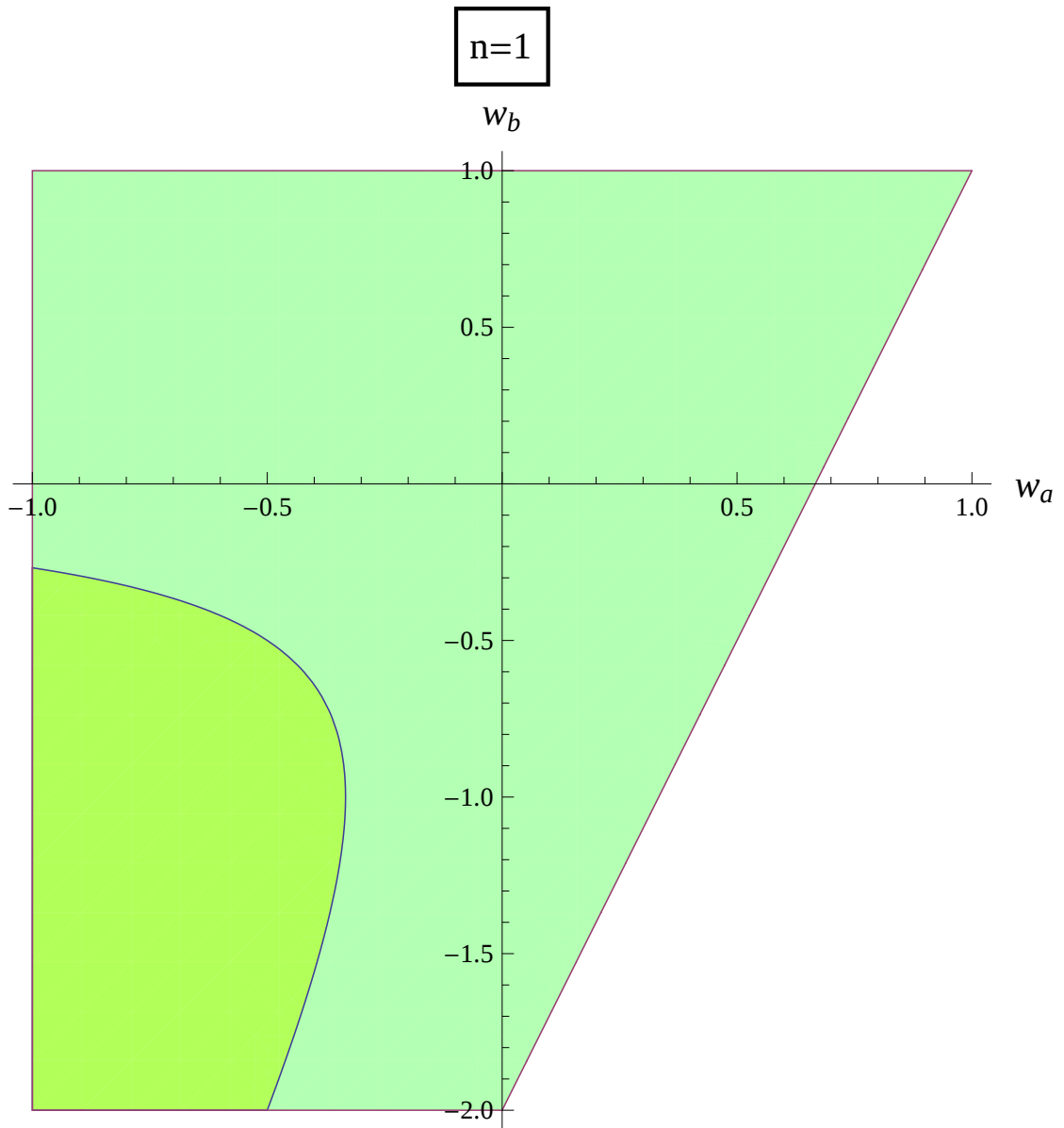
ενώ η παράμετρος επιτάχυνσης είναι ίση με

$$q = \frac{1+w_b-3w_a w_b+w_b^2}{1-w_b}$$

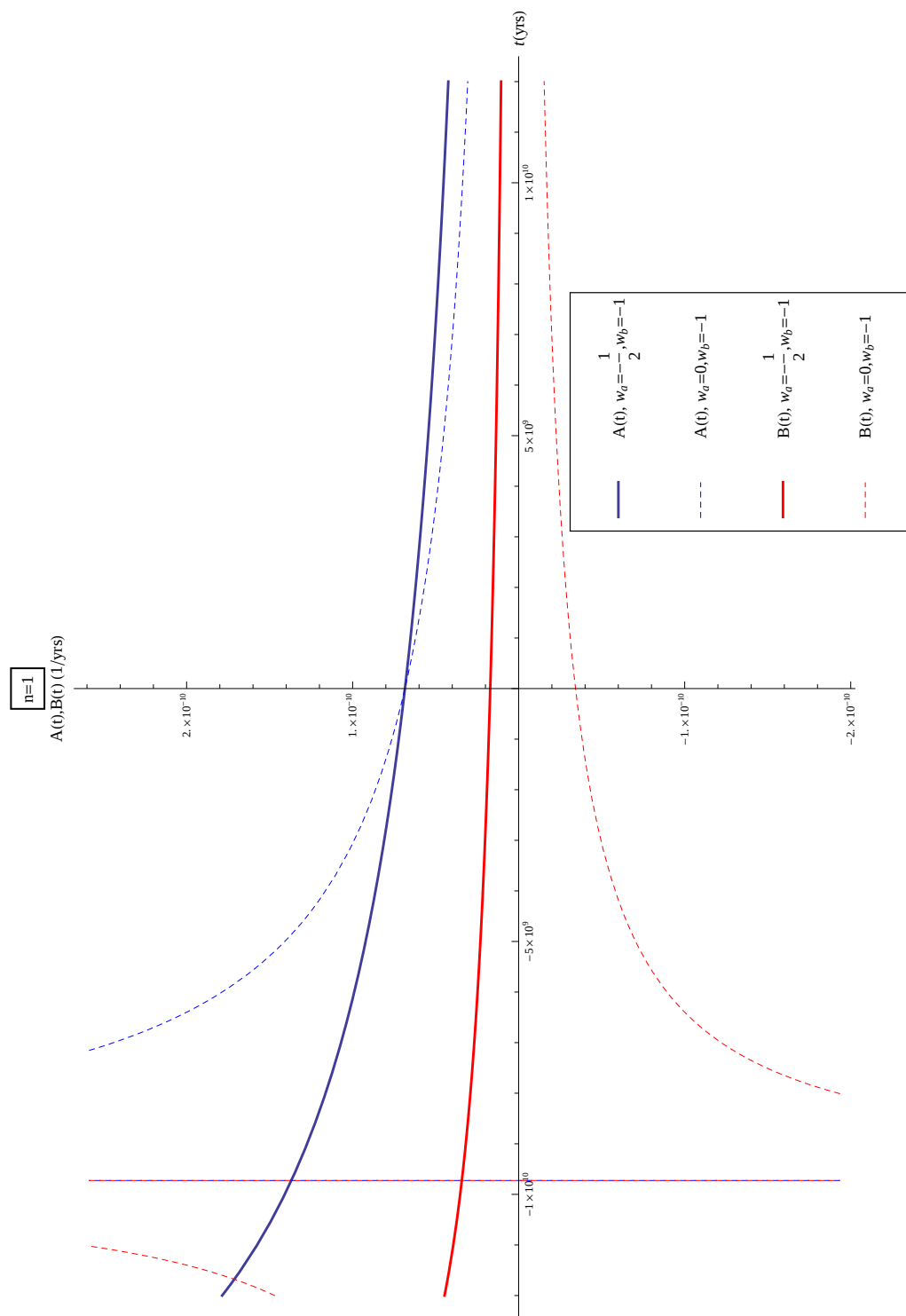
και η πυκνότητα ενέργειας δίνεται από τη σχέση:

$$k^2 \rho = \frac{3(-2+3w_a-w_b)(-1+w_b)}{(1-3w_a+2w_b)^2} B(t)^2$$

Από το διάγραμμα 4.1 μπορούμε να μελετήσουμε τις περιοχές όπου η λύση αυτή προβλέπει επιτάχυνση ή επιβράδυνση. Σε σύγκριση με τις περιπτώσεις για μεγαλύτερα n , θα δούμε ότι η περίπτωση $n = 1$ παρουσιάζει επιτάχυνση μόνο για κάποιες περιπτώσεις όπου και οι δύο παράμετροι w είναι αρνητικές. Τέλος, παραθέτουμε ενδεικτικά στο σχήμα 4.2 τη συμπεριφορά των παραμέτρων Hubble για δύο περιπτώσεις.



Σχήμα 4.1: Οι φωτοσκιασμένες με ανοιχτό πράσινο περιοχές περιγράφουν περιπτώσεις με μη αρνητική πυκνότητα ενέργειας ενώ η περιοχή με πιο έντονο πράσινο αποτελεί την περιοχή των w που αντιστοιχεί και σε επιταχυνόμενη διαστολή για αυτή την ειδική λύση. Σημειώνουμε ότι η επιτάχυνση αυτή είναι υπολογισμένη στο σύστημα των $3 + n + 1$ διαστάσεων και όχι στο ισοδύναμο τετραδιάστατο.



Σχήμα 4.2: Η συμπεριφορά των παραμέτρων Hubble για δυο διαφορετικά ζεύγη τιμών των παραμέτρων w .

4.5.3 Ειδικές λύσεις για $n > 1$

Περίπτωση $c = \frac{1}{6}(-3n - \sqrt{3}\sqrt{n(2+n)})$ με $n \geq 2$

Με τη συγκεκριμένη επιλογή για τη σταθερά c , τα $A(t)$, $B(t)$ παίρνουν τη μορφή:

$$A(t) = \frac{A_0(n-1)}{n-1 + (-3 + \sqrt{3n(2+n)})A_0t} \quad (4.62)$$

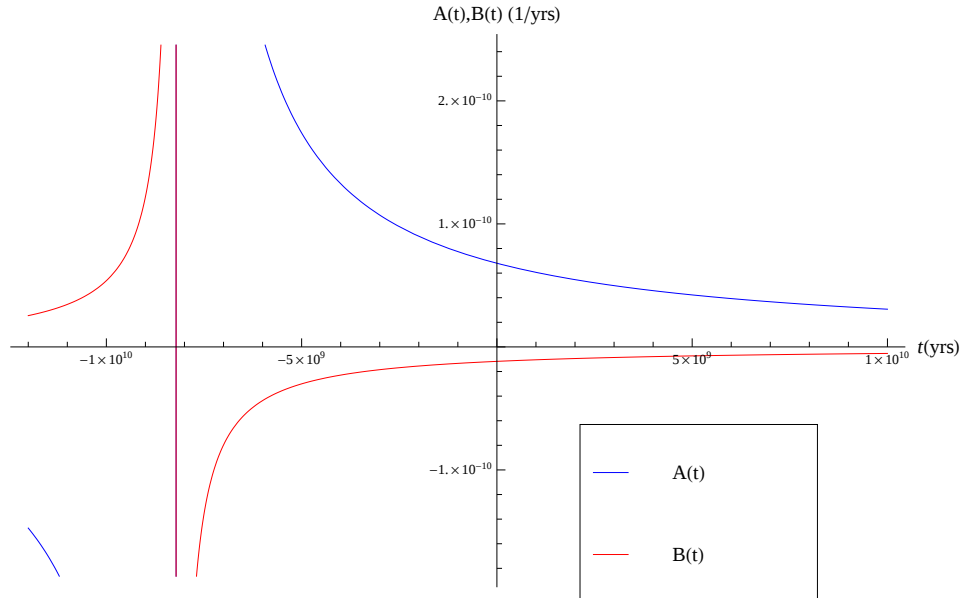
$$B(t) = -\frac{6A_0}{3n + \sqrt{3n(2+n)} + (3n + 3\sqrt{3n(2+n)})A_0t} \quad (4.63)$$

Οι αντίστοιχοι παράγοντες κλίμακας είναι:

$$a(t) = a_0 \left| -\sqrt{3}(-1+n) + 3 \left(\sqrt{3} - \sqrt{n(2+n)}tA_0 \right) \right|^{\frac{-1+n}{-3+\sqrt{3}\sqrt{n(2+n)}}} \quad (4.64)$$

$$b(t) = b_0 \left| \sqrt{n(2+n)} + 3\sqrt{n(2+n)}tA_0 + \sqrt{3n}(1+tA_0) \right|^{-\frac{2}{n+\sqrt{3}\sqrt{n(2+n)}}} \quad (4.65)$$

Ενδεικτικά θα παραθέσουμε και τη γραφική παράσταση των παραμέτρων Hubble για $n = 7$, σημειώνοντας ότι η συμπεριφορά αυτής της οικογένειας λύσεων είναι παρόμοια για κάθε n .



Παρατηρούμε από τη γραφική παράσταση που προκύπτει για αυτή την ειδική λύση ότι προβλέπει διαστολή για τις συνήθεις και συστολή για τις επιπλέον διαστάσεις αλλά και ότι περιλαμβάνει μια ανωμαλία κατά το παρελθόν, σε χρονική περίοδο που δε θα μπορούσε να ταυτιστεί με οποιοδήποτε παρατηρησιακό δεδομένο. Η παράμετρος επιτάχυνσης q είναι:

$$q = -1 - \frac{A'(t)}{A^2(t)} = \frac{-2 - n + \sqrt{3n(2+n)}}{n-1}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι για κάθε τιμή του n η τιμή της παραμέτρου επιτάχυνσης είναι θετική, επειδή $3n > 2 + n$, $\forall n > 1$, κάτι που συνεπάγεται επιβραδυνόμενα διαστελλόμενο Σύμπαν. Ένα τελευταίο χαρακτηριστικό που παρατηρεί κανείς είναι ότι και οι δύο παράμετροι Hubble δείχνουν να παρουσιάζουν μια ασυμπτωτική συμπεριφορά στο απώτερο μέλλον.

Όσον αφορά στην πυκνότητα ενέργειας, με απλή αντικατάσταση στην πρώτη από τις 3 εξισώσεις Friedmann της σχέσης $A(t) = \frac{1}{6}(-3n - \sqrt{3}\sqrt{n(2+n)})B(t)$ μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η πυκνότητα ενέργειας μηδενίζεται.

Περίπτωση $c = \frac{1}{6}(-3n + \sqrt{3}\sqrt{n(2+n)})$ με $n \geq 2$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$A(t) = \frac{A_0(n-1)}{n-1 - (3 + \sqrt{3n(2+n)})A_0t} \quad (4.66)$$

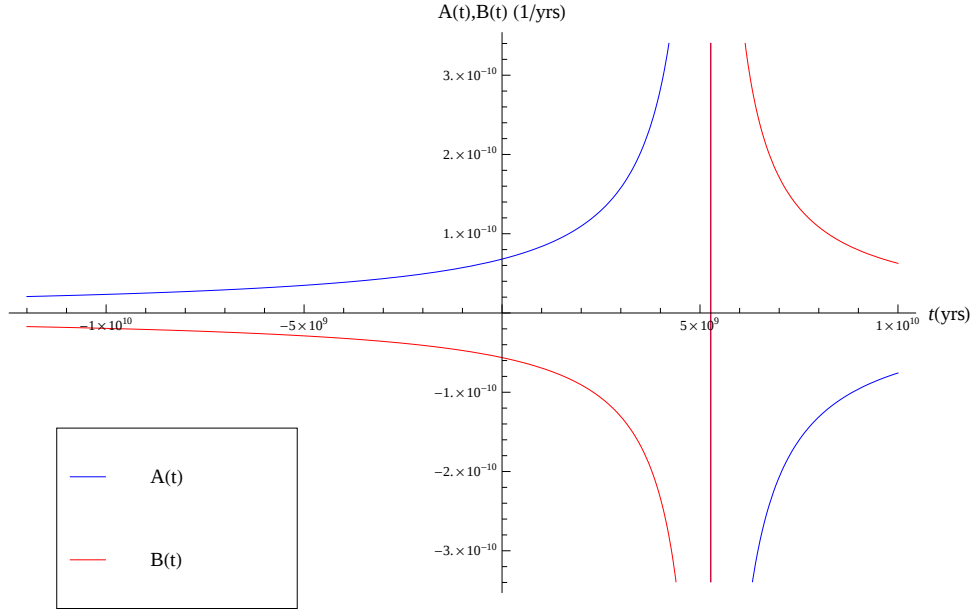
$$B(t) = \frac{6A_0}{-3n + \sqrt{3n(2+n)} + (-3n + 3\sqrt{3n(2+n)})A_0t} \quad (4.67)$$

και οι παράγοντες κλίμακας είναι:

$$a(t) = a_0 \left| -\sqrt{3}(-1+n) + 3 \left(\sqrt{3} + \sqrt{n(2+n)} \right) t A_0 \right|^{\frac{1-n}{3+\sqrt{3}\sqrt{n(2+n)}}} \quad (4.68)$$

$$b(t) = b_0 \left| -\sqrt{n(2+n)} - 3\sqrt{n(2+n)}tA_0 + \sqrt{3n}(1+tA_0) \right|^{\frac{2}{-n+\sqrt{3}\sqrt{n(2+n)}}} \quad (4.69)$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση για $n = 7$ (και πάλι για κάθε n έχουμε παρόμοιες συμπεριφορές) είναι:



Από αυτή τη γραφική παράσταση παρατηρούμε ότι προβλέπεται, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, για σήμερα, αλλά και για το παρελθόν, διαστολή των συνήθων και συστολή των επιπλέον διαστάσεων, αλλά η αντίστοιχη της πρώτης περίπτωσης ανωμαλία βρίσκεται στο μέλλον. Για την παράμετρο επιτάχυνσης έχουμε, σε αυτή την περίπτωση:

$$q = -1 - \frac{A'(t)}{A^2(t)} = \frac{2\sqrt{3n(2+n)}}{-3n + \sqrt{3n(2+n)}}$$

από όπου μπορούμε να καταλάβουμε ότι προβλέπεται επιταχυνόμενη διαστολή για κάθε δυνατή τιμή του n , ενώ παρατηρούμε και επιταχυνόμενη συστολή για τις επιπλέον διαστάσεις. Για την περίπτωση $n = 7$ που παρουσιάζουμε εδώ, η τιμή αυτή της επιτάχυνσης για το $A(t)$ είναι $q \cong -3.8$. Καταλαβαίνουμε ότι αυτή η ειδική λύση παρουσιάζει πιο επιθυμητή συμπεριφορά σε σχέση με την πρώτη, αν και σημειώνουμε και πάλι ότι αυτή η επιτάχυνση δεν θα ήταν η παρατηρούμενη από εμάς καθώς είναι υπολογισμένη στις $3+n+1$ διαστάσεις και όχι στην ισοδύναμη τετραδιάστατη εικόνα, ενώ παρουσιάζει και αυτή μηδενική ενεργειακή πυκνότητα. Επιπλέον, δεν καλύπτεται η συνθήκη της σταθεροποίησης⁴ (stabilisation) των επιπλέον διαστάσεων στην οποία αναφερθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

⁴Όπου τονίζεται πάλι ότι δεν πρόκειται απαραίτητα για σταθεροποίηση με τη στενή έννοια του όρου, αλλά για μια τιμή του $B(t)$ τέτοια, ώστε να μη μπορεί να γίνει αισθητή η αλλαγή που θα προκαλεί στη μάζα Planck.

Περίπτωση $c = \frac{-1+w_a-nw_a+nw_b}{-1+3w_a-2w_b}$ με $n \geq 2$

Η τρίτη από τις περιπτώσεις που είδαμε παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον, καθώς συμπεριλαμβάνει στη μορφή της λύσης, αντίθετα με τις προηγούμενες δύο, τις παραμέτρους w_a, w_b . Αυτό βεβαίως συνεπάγεται μεγαλύτερη ποικιλία στα μοντέλα που μπορούν να κατασκευαστούν όπως θα δούμε αμέσως. Οι εξισώσεις που μας δίνουν τις παραμέτρους Hubble εδώ, είναι:

$$A(t) = \frac{(2 + 2(n-1)w_a - nw_b)A_0}{2 + 2(n-1)w_a - 2nw_b + (3 - 3w_a^2 + n(1 + 3w_a^2 - 6w_aw_b + 2w_b^2))A_0t} \quad (4.70)$$

$$B(t) = \frac{2(1 - 3w_a + 2w_b)A_0}{2 + 2(n-1)w_a - 2nw_b + (3 - 3w_a^2 + n(1 + 3w_a^2 - 6w_aw_b + 2w_b^2))A_0t} \quad (4.71)$$

$$a(t) = a_0 | 2 + 2(-1 + n)w_a - 2nw_b \quad (4.72)$$

$$+ tA_0(3 - 3w_a^2 + n(1 + 3w_a^2 - 6w_aw_b + 2w_b^2)) \Big|^{ \frac{2+2(-1+n)w_a-2nw_b}{3-3w_a^2+n(1+3w_a^2-6w_aw_b+2w_b^2)} } \quad (4.73)$$

$$b(t) = b_0 | 2 + 2(-1 + n)w_a - 2nw_b \quad (4.74)$$

$$+ tA_0(3 - 3w_a^2 + n(1 + 3w_a^2 - 6w_aw_b + 2w_b^2)) \Big|^{ \frac{2-6w_a+4w_b}{3+n-3w_a^2+3nw_a^2-6nw_aw_b+2nw_b^2} } \quad (4.75)$$

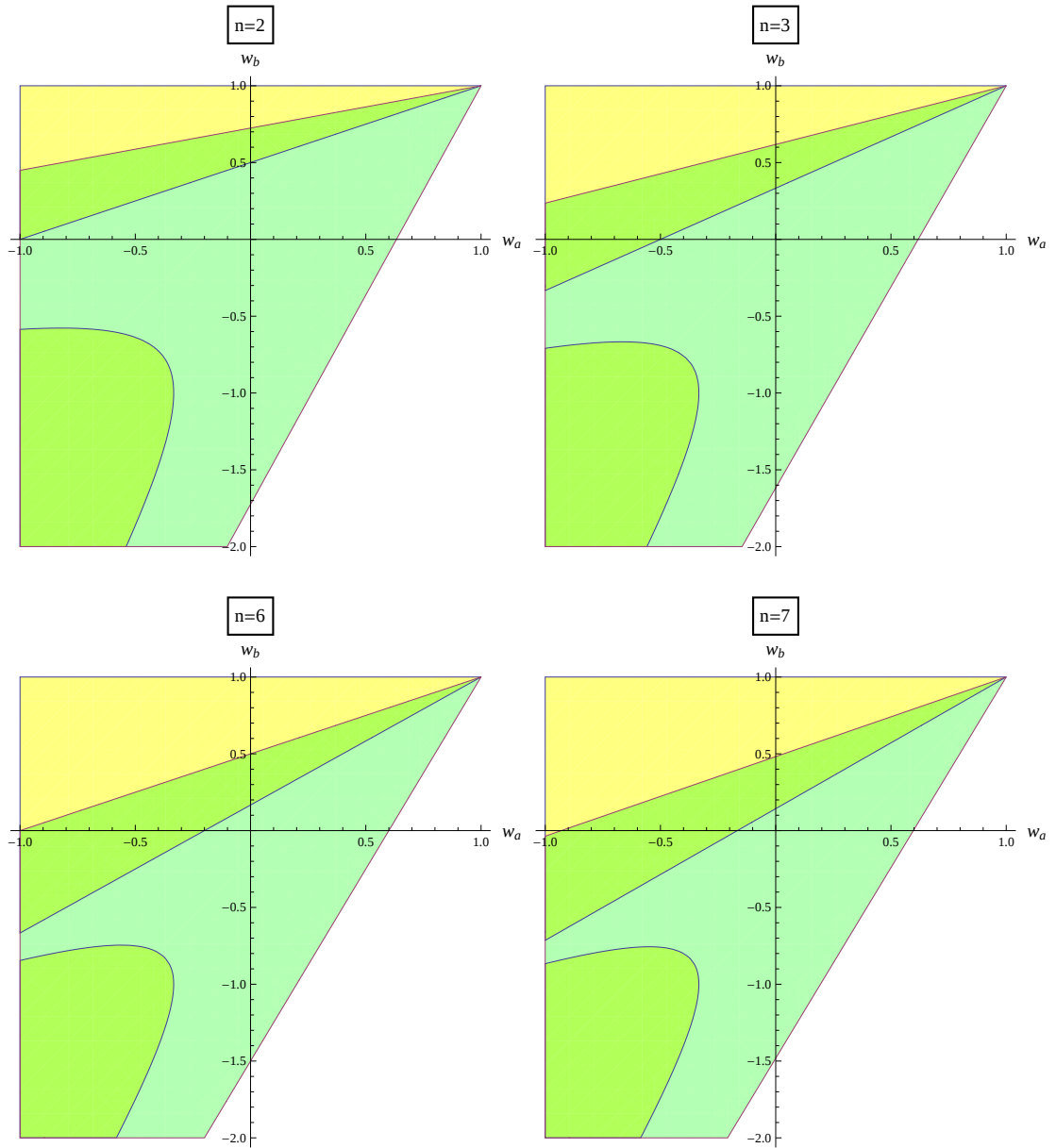
ενώ η παράμετρος επιτάχυνσης είναι για αυτή τη λύση:

$$q = \frac{1 + (2 - 3w_a)w_a + n(1 + 3w_a^2 + 2w_b(1 + w_b) - 2w_a(1 + 3w_b))}{2 + 2(n-1)w_a - 2nw_b}$$

και η πυκνότητα ενέργειας που προκύπτει από την πρώτη εξίσωση Friedmann:

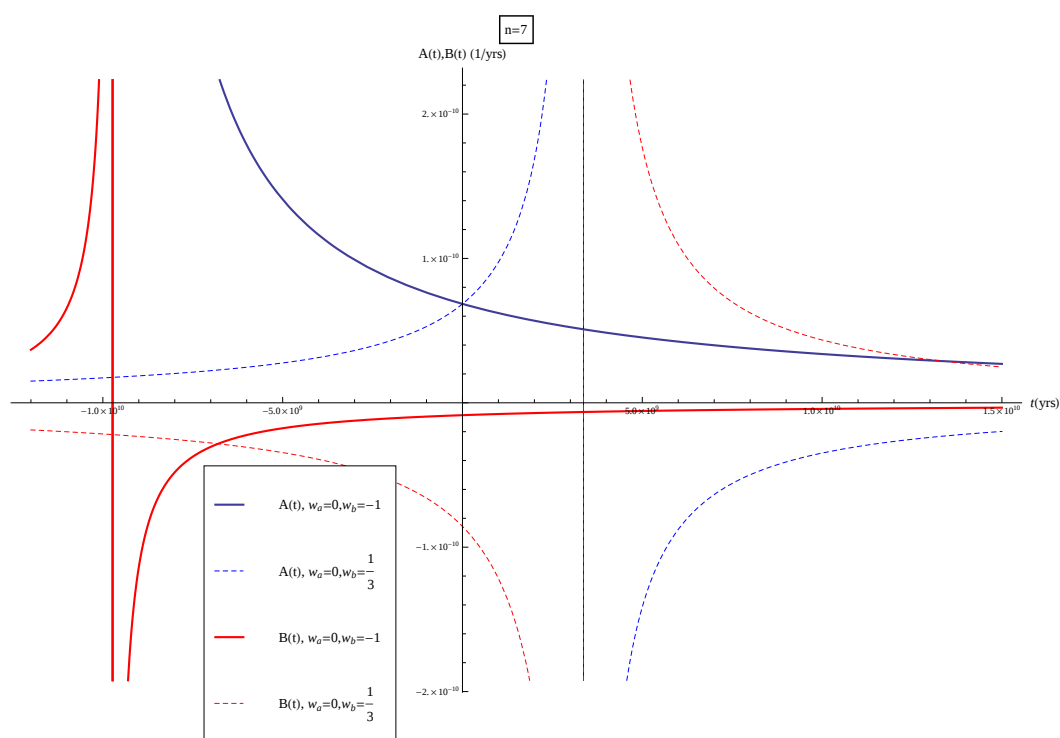
$$k^2\rho = - \frac{(2 + n)(-3(-1 + w_a)^2 + n(-1 + 3w_a^2 + 2w_b - 6w_aw_b + 2w_b^2))}{2(1 - 3w_a + 2w_b)^2}$$

Στο σχήμα 4.3 που ακολουθεί, μπορούμε να δούμε συγκεντρωτικά, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις για το n , τα διαστήματα τιμών των παραμέτρων w_a, w_b που προβλέπουν επιτάχυνση. Στα ίδια διαγράμματα φαίνονται και οι περιοχές που δίνουν μη αρνητική πυκνότητα ενέργειας, δίνοντας μας τη δυνατότητα να μελετήσουμε τις περιοχές των παραμέτρων w που καλύπτουν κάποιες από τις φαινομενολογικές μας συνθήκες. Σημειώνουμε ότι και για αυτή τη λύση η τιμή της επιτάχυνσης θα παραμένει σταθερή, καθώς τα w_a, w_b είναι σταθερά.



Σχήμα 4.3: Οι φωτοσκιασμένες με κίτρινο περιοχές δίνουν q που αντιστοιχεί σε επιτάχυνση για αυτή την ειδική λύση. Οι φωτοσκιασμένες με ανοιχτό πράσινο δίνουν μη αρνητική πυκνότητα ενέργειας, ενώ με πιο έντονο πράσινο φαίνονται οι περιοχές που συνδυάζουν και τις δυο αυτές απαιτήσεις.

Μπορούμε να δούμε από τη μορφή των παραμέτρων Hubble ότι αν μείνουμε εντός περιοχών που δίνουν σταθερό πρόσημο για το q , η συμπεριφορά για διάφορα n αλλά και για διάφορα ζεύγη w_a, w_b είναι παρόμοια. Γι' αυτό και πάλι θα αρκεστούμε στο να παραθέσουμε ως παράδειγμα την περίπτωση $n = 7$, με σκοπό να έχουμε μια ένδειξη για το πως συμπεριφέρονται οι παράμετροι Hubble με βάση την τρίτη οικογένεια λύσεων.



Βλέπουμε λοιπόν και από αυτή την ειδική λύση ότι προβλέπεται μια ανωμαλία είτε στο παρελθόν είτε στο μέλλον, ανάλογα με τα w_a, w_b που θα διαλέξουμε. Βεβαίως αυτό το αναμέναμε, καθώς η εξάρτηση από το χρόνο είναι της ίδιας μορφής όπως και στις προηγούμενες ειδικές λύσεις. Αξίζει τέλος να σημειώσουμε ότι υπάρχουν περιοχές τιμών για τα w_a, w_b που δίνουν παράμετρο Hubble για τις επιπλέον διαστάσεις που δεν παρουσιάζει συστολή αλλά διαστολή, η οποία μάλιστα διαρκεί σε όλη την εξέλιξη του συστήματος.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι καμία από αυτές τις λύσεις, από μόνη της, δε μπορεί να μας δώσει ταυτόχρονα επιταχυνόμενα διαστελόμενο Σύμπαν, που στο παρελθόν να ήταν επιβραδυνόμενο και άρα να ικανοποιήσει βασικές φαινομενολογικές συνθήκες.

Λύσεις με κρυμμένο k_b

Η μεθοδολογία που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι στιγμής μπορεί να εφαρμοστεί για να βρεθούν δύο ειδικές λύσεις και σε μια συγκεκριμένη περίπτωση όπου η καμπυλότητα k_b δεν είναι απαραίτητα μηδέν. Συγκεκριμένα, αν επιλέξουμε στις εξισώσεις (4.49), (4.50) να ισχύει

$$w_a = -1, w_b = -1 + \frac{2}{n}$$

τότε αυτές έρχονται στη μορφή:

$$A'(t) = -3A^2(t) - nA(t)B(t) \quad (4.76)$$

$$B'(t) = \frac{6}{n}A^2(t) + 3A(t)B(t) - B^2(t) \quad (4.77)$$

από όπου καταλαβαίνουμε ότι μπορούμε να πάρουμε με την ίδια μέθοδο λύσεις. Αν λοιπόν υποθέσουμε $A(t) = cB(t)$ οι δύο πιθανές τιμές για το c είναι:

$$c = \frac{1}{6}(-3n) \pm \sqrt{3(2n + n^2)}$$

Παρατηρούμε βέβαια ότι πρόκειται για λύσεις ίδιες με τις δύο πρώτες ειδικές λύσεις στην περίπτωση όπου $k_b = 0$. Ο λόγος για αυτό θα αναφερθεί παρακάτω.

Σχόλια

Συνοπτικά, για τις λύσεις που παρουσιάστηκαν σε αυτή την ενότητα, σχολιάζουμε τα εξής:

- Το σύστημα επιδέχεται λύσεων που δεν εξαρτώνται από τις παραμέτρους w και μάλιστα δίνουν μηδενική πυκνότητα ενέργειας. Οι λύσεις αυτές ονομάζονται λύσεις τύπου Kasner. Στην πραγματικότητα, είναι οι μοναδικές ρίζες της πρώτης εξίσωσης Friedmann, ανεξαρτήτως του n , αν επιλέξουμε $\rho = 0$. Εκτός αυτού, προβλέπουν η μία επιβράδυνση και η άλλη επιτάχυνση και αντίστοιχα μια ανωμαλία στο παρελθόν ή στο μέλλον. Παρότι παρουσιάζουν κάποια περίεργα χαρακτηριστικά, η ασυμπτωτική συμπεριφορά που επιδεικνύουν μπορεί να χρησιμεύσει στην κατασκευή κάποιων μοντέλων. Επιπλέον, σημειώνουμε ότι υπάρχουν κάποιες τιμές των w που, όπως είδαμε, μπορούν να φέρουν μοντέλα στα οποία δεν έχουμε θέσει εκ των προτέρων $k_b = 0$, σε μορφή όπου οι λύσεις ταυτίζονται με τις πρώτες 2 ειδικές λύσεις. Τέλος, στην περίπτωση $n = 1$ αυτές οι δύο λύσεις υποβιβάζονται σε μία με αντίστοιχα χαρακτηριστικά, όπου $A(t) = -B(t)$.

- Υπάρχει μια ειδική λύση που εξαρτάται από τα w_a, w_b , με την προϋπόθεση ότι αυτά είναι σταθερά. Αυτή περιλαμβάνει περιοχές των w που δίνουν επιθυμητά χαρακτηριστικά, όμως σε καμία περίπτωση δε μπορεί από μόνη της να προβλέψει ένα πέρασμα από επιβράδυνση σε επιτάχυνση, εφ' όσον τα w παραμένουν σταθερά. Για να κατασκευάσουμε ένα πιο πλήρες μοντέλο λοιπόν με τη χρήση μόνο αυτής της λύσης, θα πρέπει να καταφύγουμε στην υπόθεση ότι μια *ακαριαία* αλλαγή στις τιμές των w (αλλαγή φάσης) είναι αυτή που οδηγεί στο πέρασμα από επιβραδυνόμενη σε επιταχυνόμενη διαστολή στο Σύμπαν. Η μεγάλη όμως χρησιμότητα αυτής της λύσης, έγκειται στο γεγονός ότι ταυτίζεται με την ασυμπτωτική συμπεριφορά της γενικής λύσης στο χώρο των φάσεων $A, B(A)$, που θα μας επιτρέψει όπως θα δούμε στη συνέχεια να κατασκευάσουμε με αναδρομικό τρόπο τα πεδία $A(t), B(t)$.

4.5.4 Η περίπτωση $w_a = w_b = 0$

Επιλέγοντας για τις παραμέτρους $w_a = w_b = 0$ και για $n \neq 1$, οι εξισώσεις (4.51) και (4.52) πηγαίνουν στη μορφή

$$A'(t) = \frac{-3(1+n)}{2+n}A^2(t) + \frac{-n(-1+n)}{2+n}A(t)B(t) + \frac{n(-1+n)}{2(2+n)}B^2(t) \quad (4.78)$$

$$B'(t) = \frac{3}{2+n}A^2(t) + \frac{-6}{2+n}A(t)B(t) + \frac{-n(5+n)}{2(2+n)}B^2(t) \quad (4.79)$$

Αυτό το σύστημα έχει ένα ζεύγος λύσεων για κάθε $n \geq 2$ το οποίο γράφεται:

$$A(t) = \frac{2C_1(3tC_1 + n(-4 - 2n + tC_1 \mp 4(3+n)C_1C_2))}{-12n(2+n) + (3+n)^2C_1^2(t \mp 4nC_2)^2} \quad (4.80)$$

$$B(t) = \frac{1}{2(n-1)} \left(\frac{1}{n}C_1 + \left| \frac{1}{2}A(t)(3tC_1 + n(-4 - 2n + tC_1 \mp 4(3+n)C_1C_2) + \frac{4(-1+n)(2+n)(3+n)}{-3tC_1 \pm n(4+2n-tC_1+4(3+n)C_1C_2)}) \right| \right) - 6A(t) \quad (4.81)$$

όπου έχουμε γράψει το $B(t)$ συναρτήσει του $A(t)$ για συντομία και οι C_1, C_2 είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης.

Η λύση για $n = 1$ είναι αρκετά πιο εύκολη και έχει την εξής μορφή:

$$A(t) = \frac{A_0}{1 + 2A_0t} \quad (4.82)$$

$$B(t) = -\frac{A_0}{1 + 2A_0t} + \frac{A_0 + B_0}{(A_0 + B_0)t - 1} \quad (4.83)$$

4.5.5 Γενική λύση στο χώρο των φάσεων

Μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει ειδικές λύσεις αλλά και μία περίπτωση όπου το σύστημά μας έρχεται σε επιλύσιμη μορφή με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων w_a, w_b . Η γενική λύση του συστήματος μορφής Riccati, όπως αυτό που έχουμε, με (έστω σταθερούς) τυχαίους συντελεστές, δεν είναι γνωστή. Μπορούμε όμως απαλείφοντας το χρόνο, στην περίπτωση που οι συντελεστές είναι σταθεροί, να μεταπέσουμε από δύο εξισώσεις σε μία. Η εξίσωση που προκύπτει είναι μια ομογενής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης που είναι πάντα ολοκληρώσιμη. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, με αυτόν τον τρόπο αποκτούμε ουσιαστικά μια αλγεβρική σχέση μεταξύ των πεδίων $A(t), B(t)$. Αυτή η σχέση αποτελεί τη γενική λύση του συστήματος η οποία θα ισχύει σε κάθε περίοδο κατά την οποία οι συντελεστές w_a, w_b , είναι σταθεροί.

Αυτή η σχέση μεταξύ των πεδίων $A(t), B(t)$, έχει μεγάλη χρησιμότητα, επειδή μας επιτρέπει να ανακατασκευάσουμε αναδρομικά τα πεδία $A(t), B(t)$ υποδεικνύοντάς μας την ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος των εξισώσεων Friedmann.

Για να λάβουμε αυτή τη λύση έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} A'(t) = & \frac{3(-1-n+(n-1)w_a-nw_b)}{2+n}A^2(t) + \frac{n((n-1)(3w_a-1)-3nw_b)}{2+n}A(t)B(t) \\ & + \frac{n(n-1)(1+(n-1)w_a-nw_b)}{2(2+n)}B^2(t) \end{aligned} \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} B'(t) = & \frac{-3(-1+3w_a-2w_b)}{2+n}A^2(t) - \frac{3(2+3nw_a-2nw_b)}{2+n}A(t)B(t) \\ & - \frac{n(5+n+3(n-1)w_a-2(n-1)w_b)}{2(2+n)}B^2(t) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Απαλείφοντας το χρόνο έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dB} = & \frac{6(1+w_a+n(1-w_a+w_b))A^2 + 2n(-1+n+3w_a-3nw_a+3nw_b)AB}{6(3w_a-2w_b-1)A^2 + 6(2+n(3w_a-2w_b))AB + n(5+n+(n-1)(3w_a-2w_b))B^2} \\ & - \frac{n(n-1)(1+(n-1)w_a-nw_b)B^2}{6(3w_a-2w_b-1)A^2 + 6(2+n(3w_a-2w_b))AB + n(5+n+(n-1)(3w_a-2w_b))B^2} \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$(4.87)$$

Σε αυτό το σημείο θα θέσουμε

$$v = \frac{A}{B}$$

οπότε και

$$\frac{dA}{dB} = v + B \frac{dv}{dB}$$

Λύνοντας ως προς το $B \frac{dv}{dB}$ έχουμε:

$$B \frac{dv}{dB} = \frac{(1 + (n-1)w_a - nw_b + (3w_a - 2w_b - 1)v)((n-1)n + 6v(n+v))}{n(5 + n + (n-1)(3w_a - 2w_b)) + 6v(2 + 3nw_a - 2nw_b + (3w_a - 2w_b - 1)v)} \quad (4.88)$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η εξίσωση είναι χωριζομένων μεταβλητών και η ολοκλήρωση της είναι πλέον εύκολη. Πριν όμως ολοκληρώσουμε αξίζει να σημειώσουμε το εξής: Ο αριθμητής του παραπάνω κλάσματος θα έρθει σε θέση παρονομαστή στο αριστερό μέλος για να γίνει η ολοκλήρωση, που σημαίνει ότι οι ρίζες του θα πρέπει να μελετηθούν ξεχωριστά. Αποδεικνύεται, όπως θα δούμε, ότι οι ρίζες αυτού του πολυωνύμου δεν είναι άλλες από τις ειδικές λύσεις με παγιωμένη σχέση μεταξύ των $A(t)$, $B(t)$ που παρουσιάστηκαν νωρίτερα. Η εμφάνισή τους οφείλεται στο γεγονός ότι με το μετασχηματισμό $\frac{dA}{dB} = v + B \frac{dv}{dB}$, όταν η εξίσωση λυθεί ως προς την παράγωγο $\frac{dv}{dB}$ ο όρος v , που αλλάζει μέλος, συνδέει τον αριθμητή με τον παρονομαστή του αρχικού κλάσματος, συνδυάζοντας έτσι τις πληροφορίες από τις δύο αρχικές διαφορικές εξισώσεις και οδηγώντας στην εμφάνιση των ειδικών λύσεων.

Βεβαίως στη διάρκεια των πράξεων αυτών υπάρχουν και άλλοι περιορισμοί που πρέπει να τεθούν για τις σχέσεις μεταξύ των $A(t)$, $B(t)$ ή των w_a , w_b , όμως μπορούν σε κάθε περίπτωση να μελετηθούν ξεχωριστά και αποδεικνύεται ότι δεν παρουσιάζουν κάποιο ενδιαφέρον. Τέλος, σημειώνουμε ότι πρέπει να μελετηθεί ξεχωριστά και η περίπτωση κατά την οποία οι επιπλέον διαστάσεις είναι ακριβώς στάσιμες, δηλαδή όταν $B(t) = 0$.

Κάνοντας λοιπόν αυτή την ολοκλήρωση και αλλάζοντας πάλι από τη μεταβλητή v στη μεταβλητή A , φτάνουμε τελικά στην εξίσωση

$$\begin{aligned} & |BC_1|^{\sqrt{2+n} \left(-3(w_a-1)^2 + n(3w_a^2 - 6w_a w_b + 2w_b(1+w_b) - 1) \right)} = \\ & \left| \frac{6A^2}{B^2} + \frac{6nA}{B} + n(n-1) \right|^{\sqrt{2+n}(3+n-3w_a-nw_b)} \cdot \\ & \left| \frac{2\sqrt{3}A + (\sqrt{3}n + \sqrt{n(2+n)})B}{2\sqrt{3}A + (\sqrt{3}n - \sqrt{n(2+n)})B} \right|^{\sqrt{3n(2+n)}(w_a-w_b)} \cdot \\ & \left| 1 + (n-1)w_a - nw_b + \frac{(3w_a - 2w_b - 1)A}{B} \right|^{-\sqrt{2+n}(3-3w_a^2+n(1+3w_a^2-6w_a w_b+2w_b^2))} \end{aligned} \quad (4.89)$$

Αυτή η σχέση μπορεί να βελτιωθεί ακόμα περισσότερο, αν παρατηρήσουμε ότι τα περιεχόμενα των απολύτων περιέχουν και πάλι ακριβώς τις ειδικές λύσεις υψωμένες σε κάποιους εκθέτες, κάτι που γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 = & \left| 6A^2 + 6nAB + n(n-1)B^2 \right|^{\sqrt{2+n}(3+n-3w_a-nw_b)} \cdot \\ & \left| \frac{6A + 3nB + \sqrt{3n}\sqrt{2+n}B}{6A + 3nB - \sqrt{3n}\sqrt{2+n}B} \right|^{\sqrt{3n}(2+n)(w_a-w_b)} \cdot \\ & \left| \left((n-1)w_a - nw_b + 1 \right) B + (3w_a - 2w_b - 1)A \right|^{-\sqrt{2+n}(3-3w_a^2+n(1+3w_a^2-6w_aw_b+2w_b^2))} \end{aligned} \quad (4.90)$$

όπου έχουμε για ευκολία αντικαταστήσει τη σταθερά C_1 με τη $\tilde{C}_1$. Παρατηρούμε τώρα ότι ο όρος στο πρώτο απόλυτο, είναι το γινόμενο του αριθμητή με τον παρονομαστή του δεύτερου απολύτου. Παίρνουμε έτσι την τελική μορφή της λύσης:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 = & \left| 6A + 3nB + \sqrt{3n}\sqrt{2+n}B \right|^{\sqrt{2+n}(3+n-3w_a-nw_b)+\sqrt{3n}(2+n)(w_a-w_b)} \cdot \\ & \left| 6A + 3nB - \sqrt{3n}\sqrt{2+n}B \right|^{\sqrt{2+n}(3+n-3w_a-nw_b)-\sqrt{3n}(2+n)(w_a-w_b)} \cdot \\ & \left| \left((n-1)w_a - nw_b + 1 \right) B + (3w_a - 2w_b - 1)A \right|^{-\sqrt{2+n}(3-3w_a^2+n(1+3w_a^2-6w_aw_b+2w_b^2))} \end{aligned} \quad (4.91)$$

Βλέπουμε πλέον ξεκάθαρα ότι η γενική λύση γράφεται ως γινόμενο των ειδικών λύσεων του συστήματος, υψωμένων σε κάποιον εκθέτη. Καταλαβαίνει, όμως, κανείς από τη μορφή της, ότι η μελέτη της παραπάνω εξίσωσης δεν είναι ιδιαίτερος εύκολη και γι' αυτό η χρησιμότητά της δεν είναι προφανής. Όπως είπαμε όμως, μπορούμε να συνάγουμε το ποια είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της γενικής λύσης σε ορισμένες περιπτώσεις και έτσι να κατασκευάσουμε τα πεδία $A(t)$, $B(t)$. Πριν προχωρήσουμε σε τέτοιες κατασκευές θα μελετήσουμε τη μορφή της λύσης στο χώρο των φάσεων.

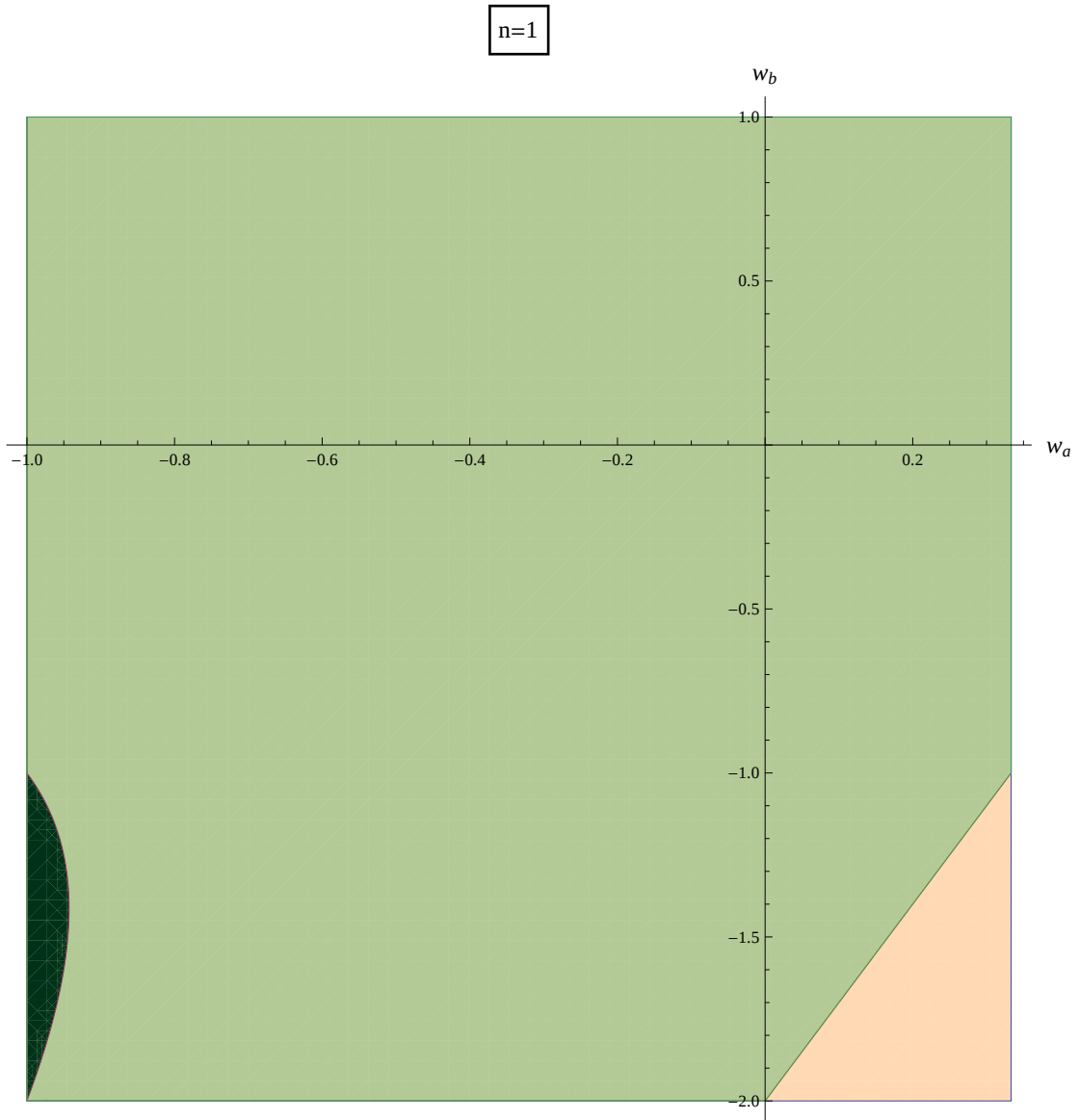
Μελέτη γενικής λύσης για $n = 1$.

Ενδεικτικά θα παραθέσουμε εδώ την περίπτωση $n = 1$, για την οποία η (4.91), μετά από κάποιες απλοποιήσεις, γίνεται:

$$\begin{aligned} const = & \left| 6 + \frac{6A}{B} \right|^{\sqrt{3}(4-3w_a-w_b)+3\sqrt{3}(w_a-w_b)} \cdot \left| \frac{A}{B} \right|^{\sqrt{3}(4-3w_a-w_b)-3\sqrt{3}(w_a-w_b)} \cdot \\ & \left| B \right|^{\sqrt{3}(1+3(w_a-1)^2-3w_a^2+6w_aw_b-2w_b(1+w_b))} \cdot \left| 1 - w_b + (3w_a - 2w_b - 1)\frac{A}{B} \right|^{-\sqrt{3}(4-6w_aw_b+2w_b^2)} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Σε αυτή τη μορφή είναι πιο εύκολο να μελετήσουμε τη λύση με βάση τη συγκριτική συμπεριφορά των παραμέτρων Hubble μέσω του κλάσματος A/B . Μπορούμε να βγάλουμε με αυτόν τον τρόπο κάποια συμπεράσματα για το που πρέπει να κινούνται οι παράμετροι w ,⁵ ώστε να έχουμε συνέπεια στα δύο μέλη της λύσης, αλλά και να συνάγουμε μια πολύ σημαντική τάση που έχει η γενική λύση σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Για το λόγο αυτό θα συγκεντρώσουμε στο παρακάτω σχήμα τις περιοχές τιμών των παραμέτρων w που καθιστούν θετικούς τους εκθέτες που εμφανίζονται στη σχέση (4.92), και στη συνέχεια θα αναλύσουμε τα συμπεράσματα που μπορούν να προκύψουν από αυτό.

⁵Για τις οποίες θεωρούμε ότι μπορούν να πάρουν τις τιμές $-1 < w_a < 1/3$ και $-2 < w_b < 1$.



Σχήμα 4.4: Η φωτοσκιασμένη με μαύρο περιοχή (περιοχή 1) αντιστοιχεί σε τιμές όπου όλοι οι εκθέτες είναι θετικοί. Με πράσινο σημειώνεται η περιοχή 2, όπου είναι θετικοί οι εκθέτες μόνο των τριών πρώτων όρων, (δηλαδή όχι αυτού που αντιστοιχεί στην ειδική λύση που έχει εξάρτηση από τα w_a, w_b), ενώ στην πορτοκαλί περιοχή (περιοχή 3) είναι θετικός μόνο ο εκθέτης του πρώτου όρου. Οι καμπύλες που διαχωρίζουν τις τρεις περιοχές είναι $w_a = \frac{2}{3w_b} + \frac{w_b}{3}$ και $w_a = \frac{2}{3} + \frac{w_b}{3}$ αντίστοιχα.

Γνωρίζοντας πια τις πληροφορίες σχετικά με το πρόσημο των εκθετών, μπορούμε να συνάγουμε τα εξής για τη χψέση (4.92):

- Στην περίπτωση όπου το κλάσμα $\frac{A}{B} \rightarrow \text{const}$ με $A, B \rightarrow 0$ ομοιόμορφα, τότε
 1. Στην περιοχή 1, δε μπορεί να ισχύει η γενική λύση, καθώς όλοι οι εκθέτες είναι θετικοί που σημαίνει ότι το γινόμενο των απολύτων δε μπορεί να πηγαίνει σε σταθερά.
 2. Στην περιοχή 2, ο μοναδικός εκθέτης που είναι αρνητικός είναι αυτός της ειδικής λύσης που εξαρτάται από τα w . Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για να έχουμε συνέπεια μεταξύ δεξιού και αριστερού μέλους, πρέπει το ίδιο το απόλυτο να τείνει στο 0. Με λίγα λόγια για τιμές των w σε αυτή την περιοχή για την περίπτωση που εξετάζουμε, γνωρίζουμε ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά του συστήματος είναι αναγκαστικά αυτή η ειδική λύση.
 3. Στην περιοχή 3, δε μπορούμε να έχουμε συνέπεια μεταξύ των δύο μελών, καθώς οι όροι δεν αλληλοεξουδετερώνονται ώστε να δίνουν μια σταθερή τιμή.
- Στην περίπτωση όπου το κλάσμα $\frac{A}{B} \rightarrow \text{const}$ με $A, B \rightarrow \infty$ ομοιόμορφα, τότε
 1. Στην περιοχή 1 μπορούμε να έχουμε συνέπεια μόνο όταν η γενική λύση τείνει στην ειδική, ώστε ο απειρισμός από τον όρο του B να αντισταθμίζεται ενδεχόμενα από το μηδενισμό της, ανάλογα με τις ακριβείς τιμές των εκθετών. Ένα τέτοιο σενάριο βεβαίως, όπως και όλα τα αντίστοιχα σενάρια απαιτούν το σύμπαν αυτό να αντιμετωπίζει μια ανωμαλία στο μέλλον.
 2. Στην περιοχή 2 δε μπορούμε να έχουμε συνέπεια μεταξύ των δύο μελών.
 3. Στην περιοχή 3 έχουμε πιθανώς συνέπεια και πάλι μόνο αν ασυμπτωτικά πάμε στην ειδική λύση και οι εκθέτες παίρνουν κατάλληλες τιμές ώστε να αλληλοεξουδετερώνονται.
- Στην περίπτωση όπου το κλάσμα $\frac{A}{B} \rightarrow \infty$ με $A \rightarrow \infty$ πιο γρήγορα από το B πρέπει να ελέγχουμε ξεχωριστά τη σχέση των εκθετών, καθώς οι διάφοροι απειρισμοί και μηδενισμοί δεν αλληλοεξουδετερώνονται απαραίτητα. Σε κάθε περίπτωση πάντως δε μπορούμε να καταλάβουμε το αν υπάρχει και ποια θα είναι η ασυμπτωτική συμπεριφορά.
- Αντίστοιχα, δε μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι χρήσιμο και στην περίπτωση όπου $\frac{A}{B} \rightarrow \infty$ με $B \rightarrow 0$ πιο γρήγορα από το A .

- Για τις περιπτώσεις όπου $A/B \rightarrow 0$, για να έχουμε συνέπεια πρέπει το B να τείνει στο άπειρο ώστε να αντισταθμίζει το μηδενισμό που προκύπτει από το δεύτερο απόλυτο, αν είμαστε στην περιοχή 2 ή να τείνει στο 0 για να αντισταθμίσει τον απειρισμό από το ίδιο απόλυτο όταν είμαστε στην περιοχή 3. Και πάλι όμως η συνέπεια εξαρτάται από τις σχετικές τιμές των εκθετών.
- Όταν κινούμαστε πάνω στο σύνορο της περιοχής 1 με την περιοχή 2 ($w_a = \frac{2}{3w_b} + \frac{w_b}{3}$) δε μπορούμε να έχουμε συνέπεια αν τα πεδία πηγαίνουν στο 0 ή στο άπειρο ομοιόμορφα, γιατί η γενική λύση παίρνει τη μορφή:

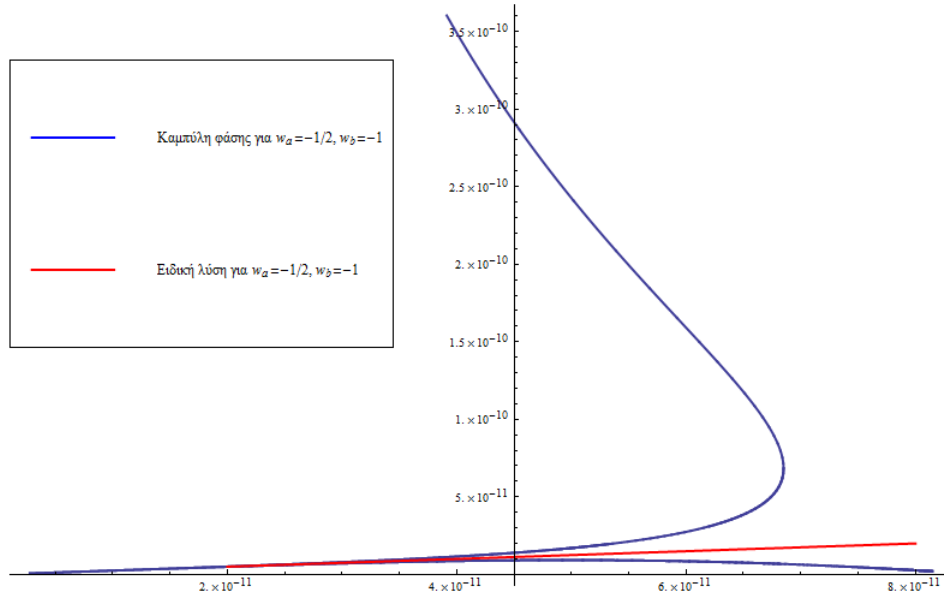
$$\tilde{C}1 = |A|^{\frac{4\sqrt{3}(w_b-1)}{w_b}} |A+B|^{-4\sqrt{3}(w_b-1)} \quad (4.93)$$

από όπου καταλαβαίνουμε εύκολα ότι για $w_b < 0$ και οι δύο εκθέτες είναι θετικοί οπότε δε μπορούν να αλληλοεξουδετερωθούν οι μηδενισμοί ή απειρισμοί, ενώ και για $0 < w_b < 1$, που οι εκθέτες έχουν αντίθετο πρόσημο, ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζουν είναι διαφορετικός οπότε και πάλι δε μπορούν να δώσουν κάτι σταθερό.

- Στο σύνορο της περιοχής 2 με την περιοχή 3 ($w_a = \frac{2}{3} + \frac{w_b}{3}$) όλοι οι εκθέτες μηδενίζονται και λαμβάνουμε μια σχέση χωρίς κάποιο ιδιαίτερο νόημα.

Έχοντας όλα τα παραπάνω κατά νου, καταλαβαίνουμε ότι οι μόνες περιπτώσεις που μπορούν να μας είναι άμεσα χρήσιμες, είναι αυτές που οδηγούν σε ασυμπτωτική συμπεριφορά που ταυτίζεται με την ειδική λύση. Η χρησιμότητα αυτών των περιπτώσεων έγκειται στο γεγονός ότι αν κανείς γνωρίζει ότι μια λύση έχει ασυμπτωτική συμπεριφορά, μπορεί κάτω από κάποιες προϋποθέσεις να κατασκευάσει αναδρομικά τη λύση με χρήση της μεθόδου Picard.

Θα σχεδιάσουμε τώρα για μερικές από αυτές τις περιπτώσεις το χώρο των φάσεων ώστε να επιβεβαιώσουμε τα παραπάνω στοιχεία.



Παρατηρούμε από το παραπάνω γράφημα τα εξής χαρακτηριστικά:

- Καθώς οι καμπύλες φάσης της γενικής λύσης βαίνουν προς το 0, αλλάζουν τη μορφή τους τείνοντας να γίνουν ευθεία. Αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση $A/B \rightarrow c$ που μελετήσαμε νωρίτερα. Βλέπουμε λοιπόν πράγματι ότι ταυτίζονται με την καμπύλη που αντιστοιχεί στην ειδική λύση:

$$A = \frac{-1 + w_b}{3w_a - 2w_b - 1} B$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε *ακριβώς* πως εξελίσσεται το σύστημα ασυμπτωτικά στο μέλλον.

- Παρατηρούμε επίσης ότι πηγαίνοντας σε μεγαλύτερες τιμές για τα πεδία (δηλαδή πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο), η καμπύλη φάσης χωρίζεται σε δύο κλάδους με αρκετά διαφορετική συμπεριφορά μεταξύ τους. Η πρώτη περίπτωση, στην οποία ανήκουν οι αρχικές συνθήκες που έχουμε επιλέξει, περιγράφει ένα Σύμπαν στο οποίο η παράμετρος Hubble των επιπλέον διαστάσεων παραμένει σε μια μικρή τιμή, όσο μεγαλύτερη και να είναι η παράμετρος των κανονικών διαστάσεων⁶, σε συνέπεια με την προηγούμενη ανάλυση μας. Η δεύτερη καμπύλη περιγράφει την περίπτωση όπου το B μεγαλώνει αυθαίρετα ενώ το A παραμένει μικρό σε σύγκριση μαζί του και ανήκει στο κομμάτι της ανάλυσης που κάναμε για $|B| \rightarrow \infty, \left| \frac{A}{B} \right| \rightarrow 0$.

⁶Τουλάχιστον μέχρι περιοχές όπου το A είναι κατά τρεις τάξεις μεγέθους μεγαλύτερο από το $|B|$, στις οποίες έχει περιοριστεί η παρούσα ανάλυση.

- Όσο απομακρυνόμαστε από το 0, η γενική λύση δείχνει να απομακρύνεται από τη συμπεριφορά της ειδικής λύσης, ειδικά το σκέλος της που αντιστοιχεί σε $|B| \rightarrow \infty$, $\left|\frac{A}{B}\right| \rightarrow 0$. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ, ότι οι τιμές για τις παραμέτρους Hubble που αντιστοιχούν στο σήμερα για τη συγκεκριμένη περίπτωση προβλέπουν επιβράδυνση.

Θα δούμε τώρα τι συμβαίνει αν προσπαθήσουμε να επιλέξουμε τις σημερινές τιμές των παραμέτρων Hubble με τέτοιο τρόπο ώστε να περιγράφουν ένα επιταχυνόμενο Σύμπαν με σταθεροποίηση της επιπλέον διάστασης, αφού σημειώσουμε το εξής: Επειδή όπως αναφέρθηκε νωρίτερα ο παράγοντας κλίμακας μέσω του οποίου πρέπει να αντιστοιχηθούν τα παρατηρησιακά δεδομένα είναι ο $\hat{a} = b^{\frac{n}{2}a}$ και ο αντίστοιχος χρόνος βρίσκεται από τη σχέση $d\hat{t} = b^{\frac{n}{2}}dt$, οι αντιστοιχήσεις που κάνουμε στις τιμές των παρατηρησιακών δεδομένων με τις παραμέτρους των μοντέλων είναι προσεγγιστικές και όχι ακριβείς (καθώς είναι πολύ πιο εύκολο να δουλέψουμε στο $3+n+1$ σύστημα). Είναι βέβαια σαφές ότι όσο πιο κοντά είμαστε σε μια πραγματική σταθεροποίηση, $B(t) = 0$, τόσο πιο ακριβείς θα είναι οι αντιστοιχήσεις των παρατηρησιακών μεγεθών και αντίστοιχα οι προβλέψεις των μοντέλων. Ο τύπος που δίνει την επιτάχυνση όπως έχουμε δει είναι:

$$q = -1 - \frac{\dot{A}}{A^2}$$

Επομένως, μπορούμε με χρήση της εξίσωσης Friedmann που αντιστοιχεί στο πεδίο $A(t)$ να συνδέσουμε την τιμή της επιτάχυνσης με το πεδίο $B(t)$. Έχουμε:

$$\dot{A} = -(1+q)A^2$$

οπότε

$$\begin{aligned} -(1+q)A^2 &= \frac{nAB((n-1)(3w_a-1)-3nw_b)}{2+n} \\ &+ \frac{(n-1)nB^2(1+(n-1)w_a-nw_b)}{2(2+n)} + \frac{3A^2(-1-n+(n-1)w_a-nw_b)}{2+n} \end{aligned} \quad (4.94)$$

που για $n=1$ γίνεται:

$$-(1+q)A^2 = -ABw_b - A^2(2+w_b) \quad (4.95)$$

Για τη «σταθεροποίηση» των επιπλέον διαστάσεων η συνθήκη που πρέπει να καλύπτεται σήμερα συνοψίζεται στη σχέση[10]:

$$|B_0| \leq \frac{1}{10n} A_0 \quad (4.96)$$

που για $n = 1$ μας λέει απλά ότι το μέτρο του B πρέπει να είναι κατά μια τάξη μεγέθους μικρότερο από το A . Η σχέση αυτή προκύπτει εύκολα, αν θυμηθούμε ότι για σενάρια Kaluza-Klein, η σταθερά της βαρύτητας θα εξελίσσεται ως

$$G_N \approx b^{-n} \Rightarrow \frac{\dot{G}_N}{G_N} = -n \frac{\dot{b}}{b} \quad (4.97)$$

Από τα πειράματα που έχουν γίνει για να μετρηθεί μια τυχούσα αλλαγή στην τιμή της σταθεράς της βαρύτητας, το ανώτερο όριο δίνουν τη σχέση

$$\left| \frac{\dot{G}_N}{G_N} \right| < 3 \cdot 10^{-19} s^{-1}$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σημερινή τιμή για την παράμετρο Hubble

$$A_0 \approx 70 \cdot 10^{-12} \text{ yrs}^{-1}$$

προκύπτει προσεγγιστικά η παραπάνω σχέση. Μπορούμε λοιπόν να δοκιμάσουμε να βρούμε τιμή για το B_0 που θα προβλέπει επιτάχυνση, δηλαδή αρνητικό q , και ταυτόχρονα θα καλύπτει για σήμερα την παραπάνω συνθήκη⁷.

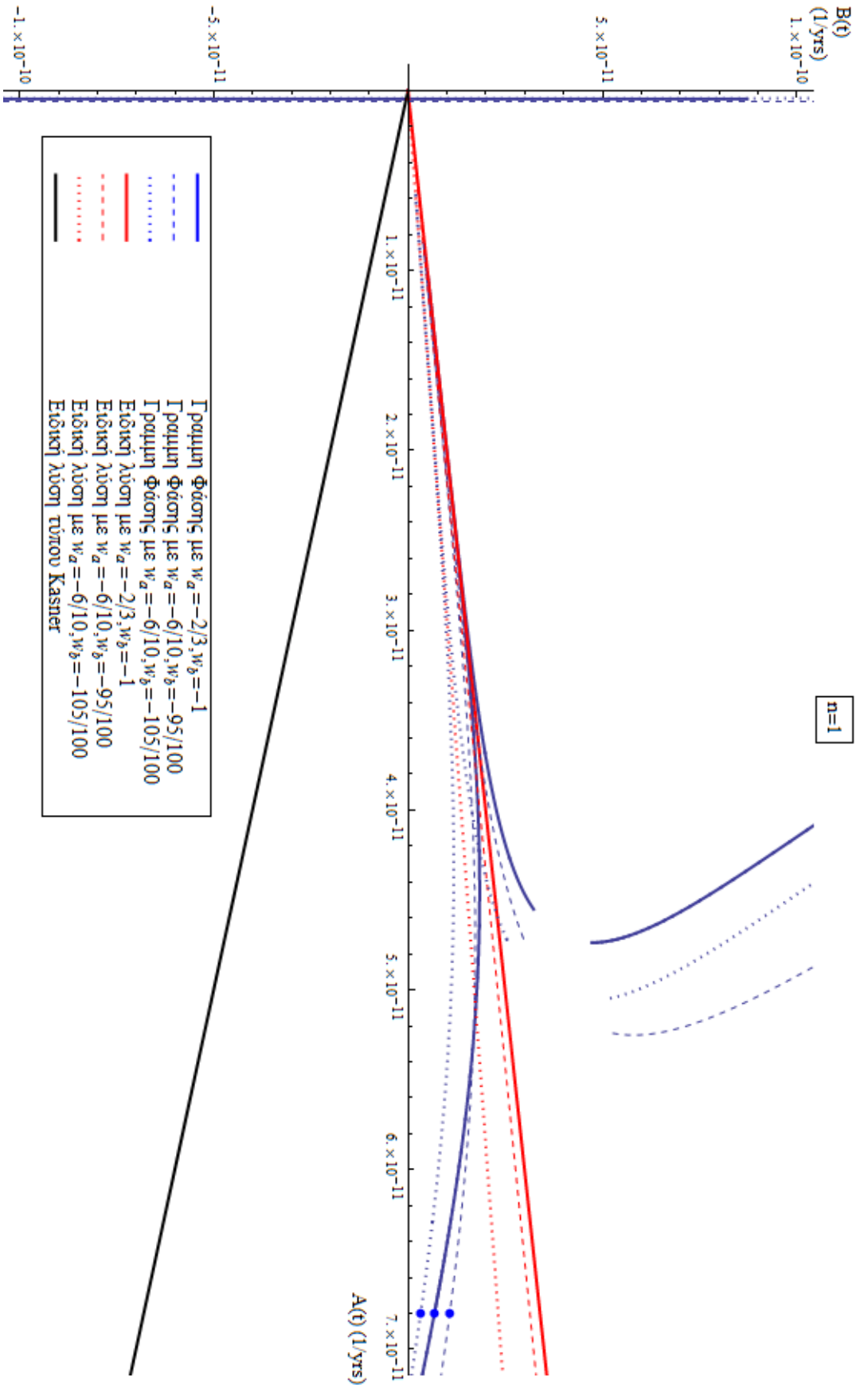
Έχοντας όλα τα παραπάνω κατά νου, είναι πράγματι δυνατό να βρούμε τιμές για τα w και για το B_0 που καλύπτουν αυτές τις συνθήκες. Συγκεκριμένα, στο σχήμα 4.5, παρουσιάζουμε 3 φασικές καμπύλες για την περίπτωση $n = 1$, που εμφανίζουν επιτάχυνση $q = -1/10^8$ και έχουν κατάλληλα επιλεγμένη τιμή για το B_0 ώστε να έχουμε μια φαινομενική «σταθεροποίηση» για την έξτρα διάσταση. Σημειώνουμε ότι έχουμε επιλέξει για αυτές τις καμπύλες συνθήκες για τις σημερινές τιμές των w που βρίσκονται αρκετά κοντά μεταξύ τους, για να τονίσουμε το γεγονός ότι το σύστημα μας εμφανίζει όμοια συμπεριφορά σε μικρές περιοχές γύρω από κάποιες τιμές των w .

Γενική λύση για $n = 3$.

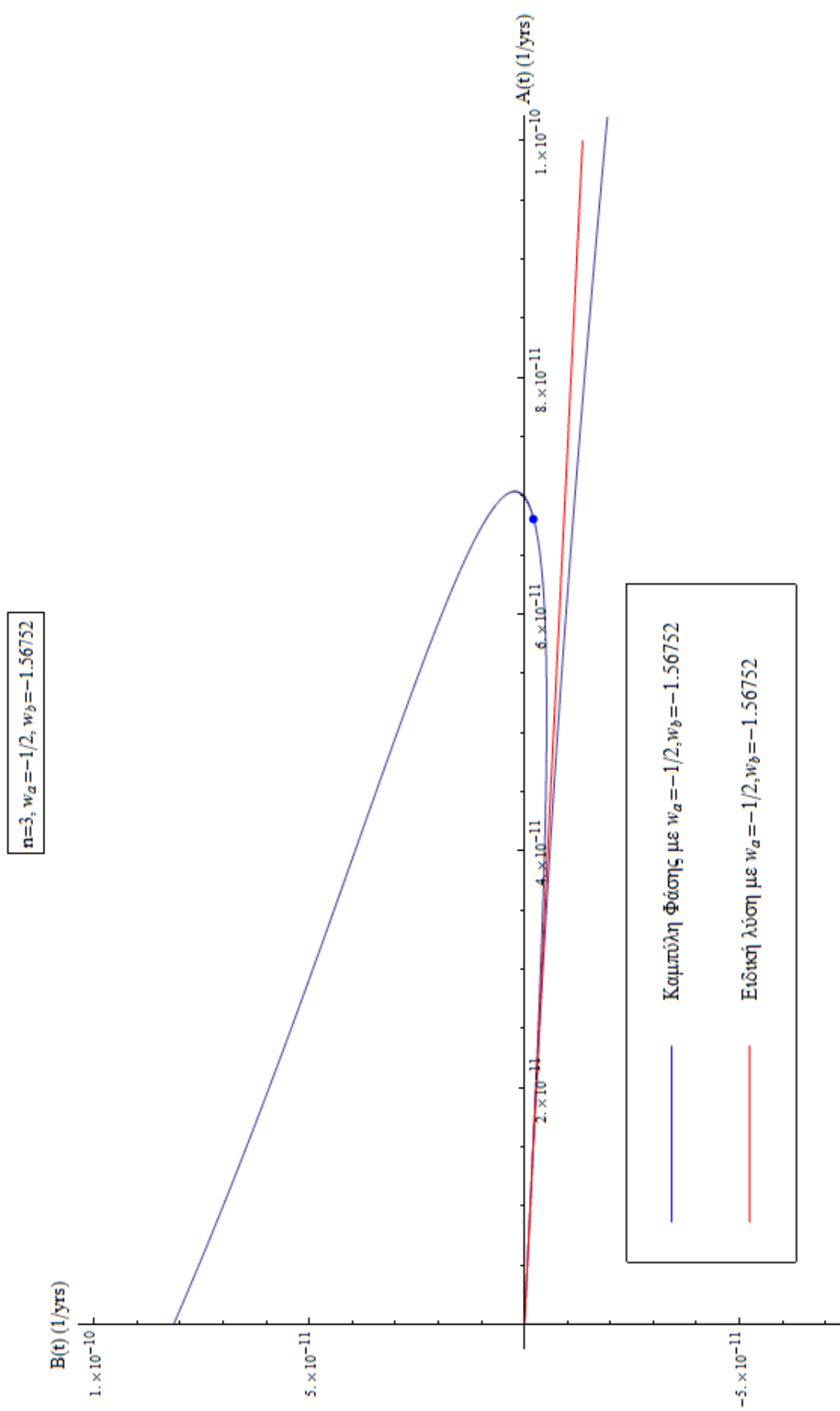
Αντίστοιχη μελέτη μπορεί να γίνει για οποιοδήποτε n και ως παράδειγμα εμφανίζουμε μια τέτοια περίπτωση για $n = 3$, που εμφανίζει επιτάχυνση $q_0 \approx -0.65$ και σταθεροποίηση στο σχήμα 4.6.

⁷Θα υποθέσουμε επομένως ότι «συμπτωματικά» σήμερα ζούμε σε μια περίοδο που το Σύμπαν εμφανίζει σχεδόν σταθεροποιημένες επιπλέον διαστάσεις, χωρίς να χρειάζεται να επιβάλουμε αυτή τη σταθερότητα σε όλη τη διάρκεια της εξέλιξής του, που θα ήταν ένας εξαιρετικά ισχυρότερος δεσμός.

⁸Όπου υπενθυμίζεται ότι αυτή η τιμή της παραμέτρου q δε θα είναι ακριβώς αυτή που θα παρατηρεί ένας παρατηρητής που δεν αντιλαμβάνεται τις επιπλέον διαστάσεις, όμως είναι μια καλή προσέγγισή της καθώς απαιτούμε να ικανοποιείται η συνθήκη σταθεροποίησης οπότε ισχύουν οι αντίστοιχες σχέσεις που παρουσιάστηκαν στην παράγραφο 4.3.



Σχήμα 4.5: Ανταπόκριση στο χώρο των γενικής λύσης για $n = 1$ σε 3 διαφορετικές περιπτώσεις. Τα σημεία που σημειώνονται σε κάθε μια φασική καμπύλη αντιστοιχούν στις σημεινές συνθήκες που έχουμε επιλέξει.



l) 97

Σχήμα 4.6: Αναπαράσταση στο χώρο των φάσεων της γενικής λύσης για $n = 3$. Το σημείο που σημειώνονται αντιστοιχεί στις σημερινές συνθήκες για τα A_0, B_0 που έχουμε επιλέξει.

4.5.6 Εφαρμογή της μεθόδου Picard στις εξισώσεις Friedmann για $n = 1$.

Όπως έχουμε δει, οι διαφορικές μας εξισώσεις για $n = 1$ είναι:

$$\dot{A}(t) = -A(t)A(t)w_b - A(t)^2(2 + w_b) \quad (4.98)$$

$$\dot{B}(t) = -A(t)^2 + A(t)B(t)(-2 - 3w_a + 2w_b) + A(t)^2(1 - 3w_a + 2w_b) \quad (4.99)$$

Για να εμφανίσουμε ένα γραμμικό κομμάτι σε αυτό το σύστημα, εισάγοντας ταυτόχρονα την ασυμπτωτική μορφή της λύσης, θα κάνουμε το μετασχηματισμό:

$$A(t) \rightarrow A_d(t) + A_{as}(t) \text{ και } B(t) \rightarrow B_d(t) + B_{as}(t) \quad (4.100)$$

Για τα A_d, B_d ισχύει προφανώς ότι $A_d, B_d \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, αφήνοντας μόνο την ασυμπτωτική λύση. Επιλύοντας ως προς τα πεδία A_d, B_d οι εξισώσεις μας γίνονται

$$\begin{aligned} \dot{A}_d(t) = & -2A_{as}(t)^2 - w_b A_{as}(t)^2 + (-2 - w_b) A_d(t)^2 - w_b A_{as}(t) B_{as}(t) \\ & - w_b A_{as}(t) B_d(t) + A_d(t)(-4A_{as}(t) - 2w_b A_{as}(t) - w_b B_{as}(t) - w_b B_d(t)) \\ & - \dot{A}_{as}(t) \end{aligned} \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_d(t) = & (1 - 3w_a + 2w_b) A_{as}(t)^2 + (1 - 3w_a + 2w_b) A_d(t)^2 \\ & - (2 + 3w_a - 2w_b) A_{as}(t) B_{as}(t) - B_{as}(t)^2 \\ & + (- (2 + 3w_a - 2w_b) A_{as}(t) - 2B_{as}(t)) B_d(t) \\ & - B_d(t)^2 + A_d(t)((2 - 6w_a + 4w_b) A_{as}(t) - (2 + 3w_a - 2w_b) B_{as}(t)) \\ & + (-2 - 3w_a + 2w_b) A_d(t) B_d(t) - \dot{B}_{as}(t) \end{aligned} \quad (4.102)$$

Η ειδική λύση για $n = 1$ μας δίνει:

$$A(t) = \frac{2(1 + (-1 + n)w_a - nw_b)A_0}{2 + 2(-1 + n)w_a - 2nw_b + t(3 - 3w_a^2 + n(1 + 3w_a^2 - 6w_a w_b + 2w_b^2))A_0}$$

και

$$B(t) = \frac{2(1 - 3w_a + 2w_b)A_0}{2 + 2(-1 + n)w_a - 2nw_b + t(3 - 3w_a^2 + n(1 + 3w_a^2 - 6w_a w_b + 2w_b^2))A_0}$$

Με αντικατάσταση της, ως ασυμπτωτική, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \dot{A}(t) = & \frac{((w_b - 1)(2 + w_b) - tA_0(2 + w_b)(2 - 3w_a w_b + w_b^2))A_d(t)^2}{1 - w_b + tA_0(2 - 3w_a w_b + w_b^2)} \\ & + \frac{-A_0 w_b B_d(t) + A_0 w_b^2 B_d(t)}{1 - w_b + tA_0(2 - 3w_a w_b + w_b^2)} \\ & + \frac{A_d(t)(A_0 w_b + 3A_0 w_a w_b - 4A_0 + (w_b - 1)w_b B_d(t) - tA_0 w_b(2 - 3w_a w_b + w_b^2)B_d(t))}{1 - w_b + tA_0(2 - 3w_a w_b + w_b^2)} \end{aligned} \quad (4.103)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_d(t) = & (1 - 3w_a + 2w_b)A_d(t)^2 \\ & + \frac{A_d(t)(3A_0 w_a(1 - 3w_a + 2w_b))}{-1 + w_b + tA_0(-2 + 3w_a w_b - w_b^2)} \\ & + \frac{((-2 - 3w_a + 2w_b)(-1 + w_b + tA_0(-2 + 3w_a w_b - w_b^2))A_d(t)B_d(t))}{-1 + w_b + tA_0(-2 + 3w_a w_b - w_b^2)} \\ & + \frac{A_0(4 + 2w_b^2 - 3w_a(1 + w_b))B_d(t) + (1 - w_b + tA_0(2 - 3w_a w_b + w_b^2))B_d(t)^2}{-1 + w_b + tA_0(-2 + 3w_a w_b - w_b^2)} \end{aligned} \quad (4.104)$$

Κάνοντας όλες τις απλοποιήσεις, μπορούμε τώρα να αναγνωρίσουμε τον πίνακα A και τα ανύσματα y, f ώστε να φέρουμε το σύστημα σε αντίστοιχη μορφή με την (4.44). Είναι λοιπόν:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{A_0(-4 + (1 + 3w_a)w_b)}{-1 + w_b + tA_0(-2 + 3w_a w_b - w_b^2)} & \frac{A_0(-1 + w_b)w_b}{1 - w_b + tA_0(2 - 3w_a w_b + w_b^2)} \\ \frac{3A_0 w_a(1 - 3w_a + 2w_b)}{-1 + w_b + tA_0(-2 + 3w_a w_b - w_b^2)} & \frac{A_0(3w_a(1 + w_b) - 2(2 + w_b^2))}{1 - w_b + tA_0(2 - 3w_a w_b + w_b^2)} \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

ενώ

$$y(t) = \begin{pmatrix} A_d(t) \\ B_d(t) \end{pmatrix}$$

και

$$F(A_d, B_d, t) = \begin{pmatrix} -A_d(2A_d + (A_d + B_d)w_b) \\ A_d^2 - 2A_d B_d - B_d^2 + A_d(A_d + B_d)(-3w_a + 2w_b) \end{pmatrix} \quad (4.106)$$

Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα λοιπόν γράφεται

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = & A(t) \cdot y(t) \\ = & \begin{pmatrix} \frac{A_0((-4 + (1 + 3w_a)w_b)A_d(t) + (-1 + w_b)w_b B_d(t))}{1 - w_b + tA_0(2 - 3w_a w_b + w_b^2)} \\ \frac{A_0(3w_a(-1 + 3w_a - 2w_b)A_d(t) + (3w_a(1 + w_b) - 2(2 + w_b^2))B_d(t))}{1 - w_b + tA_0(2 - 3w_a w_b + w_b^2)} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.107)$$

και έχει λύση την οποία θα αποφύγουμε να γράψουμε αναλυτικά εδώ στη γενική της μορφή καθώς είναι ιδιαίτερα μακροσκελής, αλλά βεβαίως θα σχεδιάσουμε τη συμπεριφορά της για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Αξίζει όμως πρώτα να σημειώσουμε τα εξής, σχετικά με την επιλογή αυτού αλλά και των επόμενων παραδειγμάτων:

- Η κατ' αρχήν επιλογή των παραμέτρων w γίνεται με γνώμονα το να έχουμε επιτάχυνση και σταθεροποίηση της (των) επιπλέον διάστασης (-εων), διαφυλάσσοντας ταυτόχρονα τη συνέπεια στη γενική λύση, επιλέγουμε δηλαδή στο σχήμα 4.4 τιμές που ανήκουν στην περιοχή 2.
- Το ομογενές πρόβλημα είναι πάντα επιλύσιμο, όμως αυτό προφανώς δε συνεπάγεται ότι τα ολοκληρώματα που χρειάζονται στην αναδρομική σχέση για να βρεθεί η προσέγγιση της γενικής λύσης είναι εύκολο να γίνουν. Για την ακρίβεια, θα επιλέξουμε επίτηδες το υποσύνολο εκείνο των περιπτώσεων για τα w , που καθιστούν τους εκθέτες που θα σημειώσουμε παρακάτω, ίσους με έναν ακέραιο αριθμό, ώστε να εξασφαλίσουμε την πραγματοποιησιμότητα των ολοκληρωμάτων. Αυτό προφανώς δε βλάπτει τη γενικότητα της μεθόδου, αλλά βεβαίως καταδεικνύει ότι δε μπορούμε για πρακτικούς λόγους να την εφαρμόσουμε για κάθε ζεύγος w .
- Παρά το γεγονός αυτό, είδαμε από την κατασκευή του φασικού χώρου στο σχήμα 4.5 ότι, για τιμές των w και του B_0 που βρίσκονται σχετικά κοντά μεταξύ τους, η καμπυλη φάσης είναι παρόμοια. Αυτό μας οδηγεί στο να υποθέσουμε με σχετική ασφάλεια ότι η χρονική εξέλιξη των πεδίων A , B δε θα αλλάζει σημαντικά, τουλάχιστον ποιοτικά, για ζεύγη τιμών των w που διαφοροποιούνται λίγο.

Για το πρώτο μας παράδειγμα, θα επιλέξουμε τις εξής παραμέτρους:

$$w_a = -2/3, w_b = -1, B_0 = 6.85 \cdot 10^{-13} \text{ yrs}^{-1}$$

Με τις τιμές αυτές μπορεί κανείς εύκολα να διαπιστώσει ότι ικανοποιούμε τη συνθήκη για σταθεροποίηση της επιπλέον διάστασης, αλλά και ότι πετυχαίνουμε επιτάχυνση μικρότερη του θεμιτού από τις παρατηρήσεις $q \in (-0.7, -0.4)$. Η λύση λοιπόν του ομογενούς συστήματος σε αυτή την περίπτωση είναι

$$A_d(t) = \frac{A_0^7 (80C_1 + t(80 + tA_0(80 + tA_0(40 + tA_0(10 + tA_0))))C_2)}{80(2 + tA_0)^7} \quad (4.108)$$

$$B_d(t) = \frac{A_0^6 (-320A_0C_1 + (160 + tA_0(80 + tA_0(80 + tA_0(40 + tA_0(10 + tA_0))))C_2)}{160(2 + tA_0)^7} \quad (4.109)$$

Σημειώνουμε πριν προχωρήσουμε ότι οι σταθερές ολοκλήρωσης είναι οι C_1, C_2 , ενώ το A_0 είναι η σημερινή, παρατηρούμενη, τιμή της παραμέτρου Hubble, που έχει μπει στη συγκεκριμένη σχέση από την εισαγωγή της ειδικής λύσης ως ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της γενικής λύσης.

Παρατηρούμε τώρα ότι η εξάρτηση από το χρόνο εκφράζεται μέσω συναρτήσεων του υψωμένων σε κάποια δύναμη, που εξαρτάται από τα w . Οι εκθέτες αυτών των όρων είναι αυτοί που καθορίζουν το κατά πόσο είναι υπολογίσιμο το ολοκλήρωμα της αναδρομικής μεθόδου Picard. Ο λόγος για αυτό είναι ότι πρόκειται ουσιαστικά για τους ίδιους όρους που παρουσιάζονται στο θεμελιώδη πίνακα $Y(t)$ του συστήματος αυτού. Όπως αναφέραμε ήδη, έχουμε φροντίσει οι τιμές τους να είναι ακέραιες, ενώ ταυτόχρονα καλύπτουμε και τις παρατηρησιακές συνθήκες για σήμερα. Ο θεμελιώδης πίνακας είναι:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} \frac{16(8+(2+tA_0)^5)}{5(2+tA_0)^7} & \frac{8(-32+(2+tA_0)^5)}{5(2+tA_0)^7} \\ \frac{8(-32+(2+tA_0)^5)}{5(2+tA_0)^7} & \frac{4(128+(2+tA_0)^5)}{5(2+tA_0)^7} \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

Η μηδενικής τάξης προσέγγιση στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι:

$$z_0(t) = \begin{pmatrix} \frac{A_0^7 \left(80C_1 + t(80+tA_0(80+tA_0(40+tA_0(10+tA_0)))) \right) C_2}{80(2+tA_0)^7} \\ \frac{A_0^6 \left(-320A_0C_1 + (160+tA_0(80+tA_0(80+tA_0(40+tA_0(10+tA_0)))) \right) C_2}{160(2+tA_0)^7} \end{pmatrix} \quad (4.111)$$

ενώ η πρώτης τάξης προσέγγιση είναι υπερβολικά μακροσκελής για να παρουσιαστεί εδώ αναλυτικά. Αντί αυτής θα παρουσιάσουμε τα σχετικά διαγράμματα, αφού πρώτα σχολιάσουμε κάποια σημεία της κατασκευής της.

Το πρώτο στοιχείο που θα σχολιάσουμε είναι η εύρεση των σταθερών C_1, C_2 . Για να καθορίσουμε αυτές τις σταθερές, παίρνουμε την τιμή της πρώτης προσέγγισης, $z_1(t)$ στη χρονική στιγμή 0, δηλαδή στο σήμερα, και επιβάλλουμε για το μεν A να έχει τη γνωστή τιμή της σταθεράς Hubble, για το δε B την τιμή που αναφέραμε νωρίτερα, ώστε να εξασφαλίζεται η σταθεροποίηση της επιπλέον διάστασης.

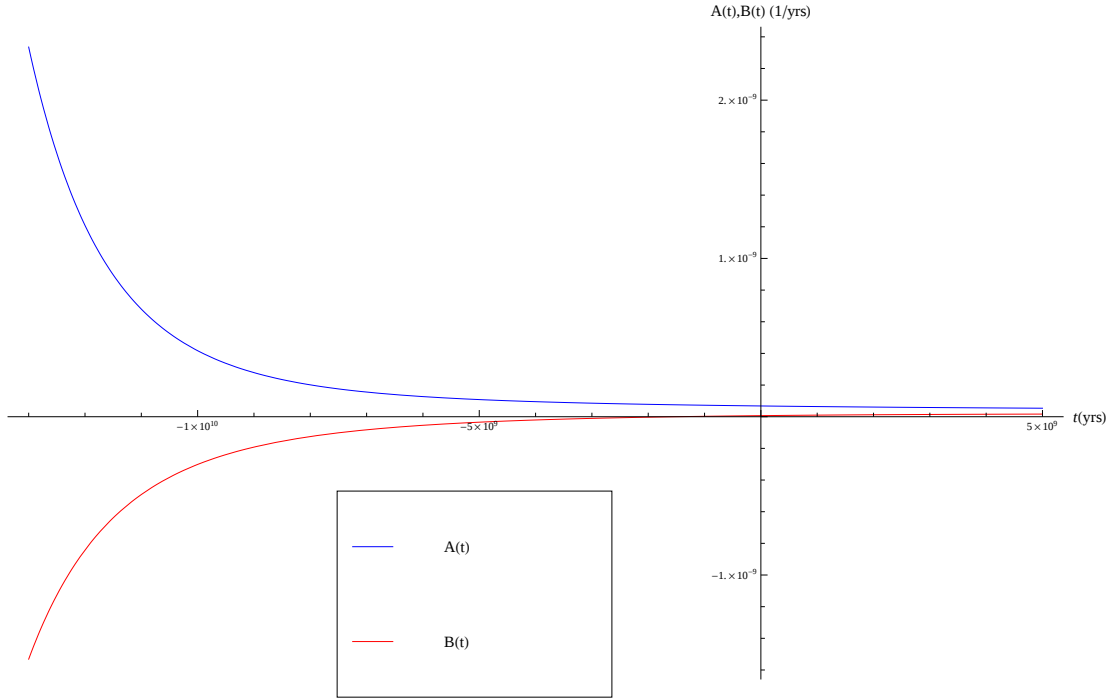
Υπάρχει όμως και ένα λεπτό σημείο που αξίζει να τονιστεί. Για την παραπάνω κατασκευή, έχουμε χρησιμοποιήσει τον αναδρομικό τύπο που αντιστοιχεί στην περίπτωση που ο πίνακας A έχει μόνο αρνητικές ιδιοτιμές. Αυτή η επιλογή μας δικαιολογείται από το γεγονός ότι πράγματι, για τη χρονική περίοδο που θα παρουσιάσουμε εδώ, οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι αρνητικές (αν και όχι σταθερές καθώς εξαρτάται από το t). Το αξιοσημείωτο είναι ότι λόγω του τρόπου κατασκευής, ο όρος που ουσιαστικά καθορίζει το που είναι αρνητικές αυτές οι ιδιοτιμές είναι ο παρονομαστής της ειδικής λύσης. Όμως, αυτός ο παρονομαστής⁹ μας επιτρέπει να ελέγξουμε εκ των προτέρων,

⁹Ο οποίος στη συγκεκριμένη περίπτωση μηδενίζεται για $t = -\frac{2}{A_0}$, δηλαδή περίπου στα $29 * 10^9$ χρόνια πριν, και άρα δε συμβαδίζει με την ηλικία του Σύμπαντος.

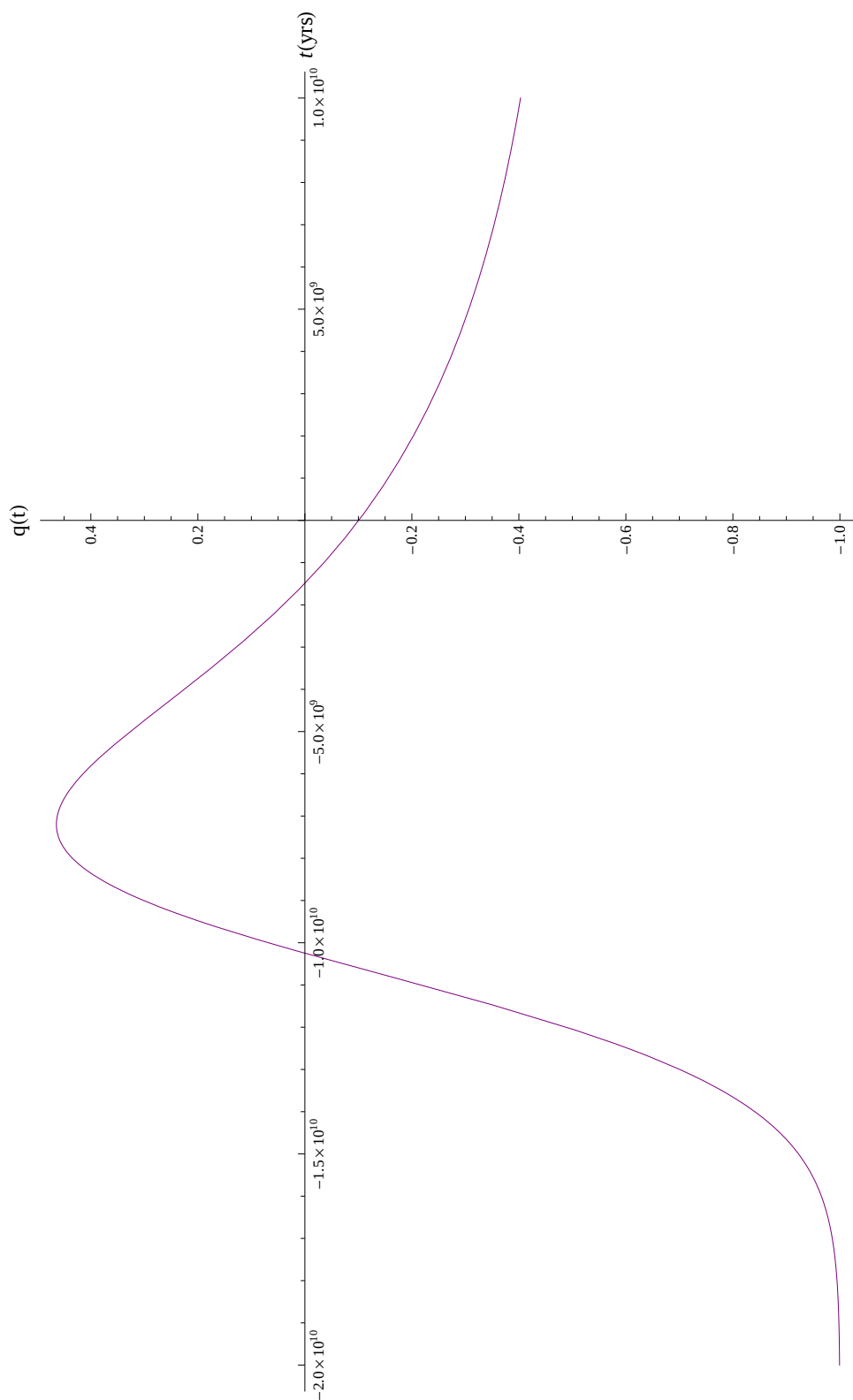
εκτός αυτού, και το πού θα έχει ανωμαλία το σύστημά μας (μπορούμε, με άλλα λόγια, «παίζοντας» με τα w να εισάγουμε, αν θέλουμε, και άλλο ένα παρατηρησιακό δεδομένο, αυτό της ηλικίας του Σύμπαντος. Παρότι όσο πιο πίσω πηγαίνουμε στο χρόνο με αυτή τη μέθοδο, τόσο λιγότερο αξιόπιστη γίνεται και χρειάζεται μεγαλύτερης τάξης βήματα για να διατηρεί την αξιοπιστία της, το σημείο στο οποίο θα εμφανίζει την ανωμαλία θα είναι το ίδιο καθώς προέρχεται από την κατασκευή της λύσης).

Γίνεται βέβαια αντιληπτό ότι, προσθέτοντας άλλη μια συνθήκη που θα πρέπει να ικανοποιούν τα w , μειώνεται κατά πολύ ο αριθμός των ζευγαριών τους που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. Αλλά παρότι δεν περιμένουμε προφανώς το μοντέλο αυτό να περιγράφει καλά το Σύμπαν στις πρωταρχικές του στιγμές, είναι σημαντικό το ότι βλέπουμε να διατηρεί κάποια από τα στοιχεία της Καθιερωμένης Κοσμολογίας όπως αυτό, πολλώ δε μάλλον όταν βλέπουμε ότι έχουμε τρόπο να πάρουμε μια ανωμαλία μαζί με τα υπόλοιπα παρατηρησιακά χαρακτηριστικά, χωρίς να χρειάζεται να συμπεριλάβουμε μια μετάπτωση στις τιμές των w .

Το διάγραμμα που απεικονίζει την τάξης 1 προσέγγιση της γενικής λύσης για τα πεδία $A(t)$, $B(t)$ βρίσκεται στο σχήμα 4.7 ενώ στο σχήμα 4.8 παρουσιάζεται το διάγραμμα της παραμέτρου επιτάχυνσης για τις συνήθεις διαστάσεις. Άλλη



Σχήμα 4.7: Η εξέλιξη των παραμέτρων Hubble όπως προβλέπεται από την πρώτης τάξης προσέγγιση. Παρατηρούμε ότι πηγαίνοντας πίσω στο χρόνο η παράμετρος της επιπλέον διάστασης προέρχεται από μια περίοδο σημαντικής σμικρυνσης.

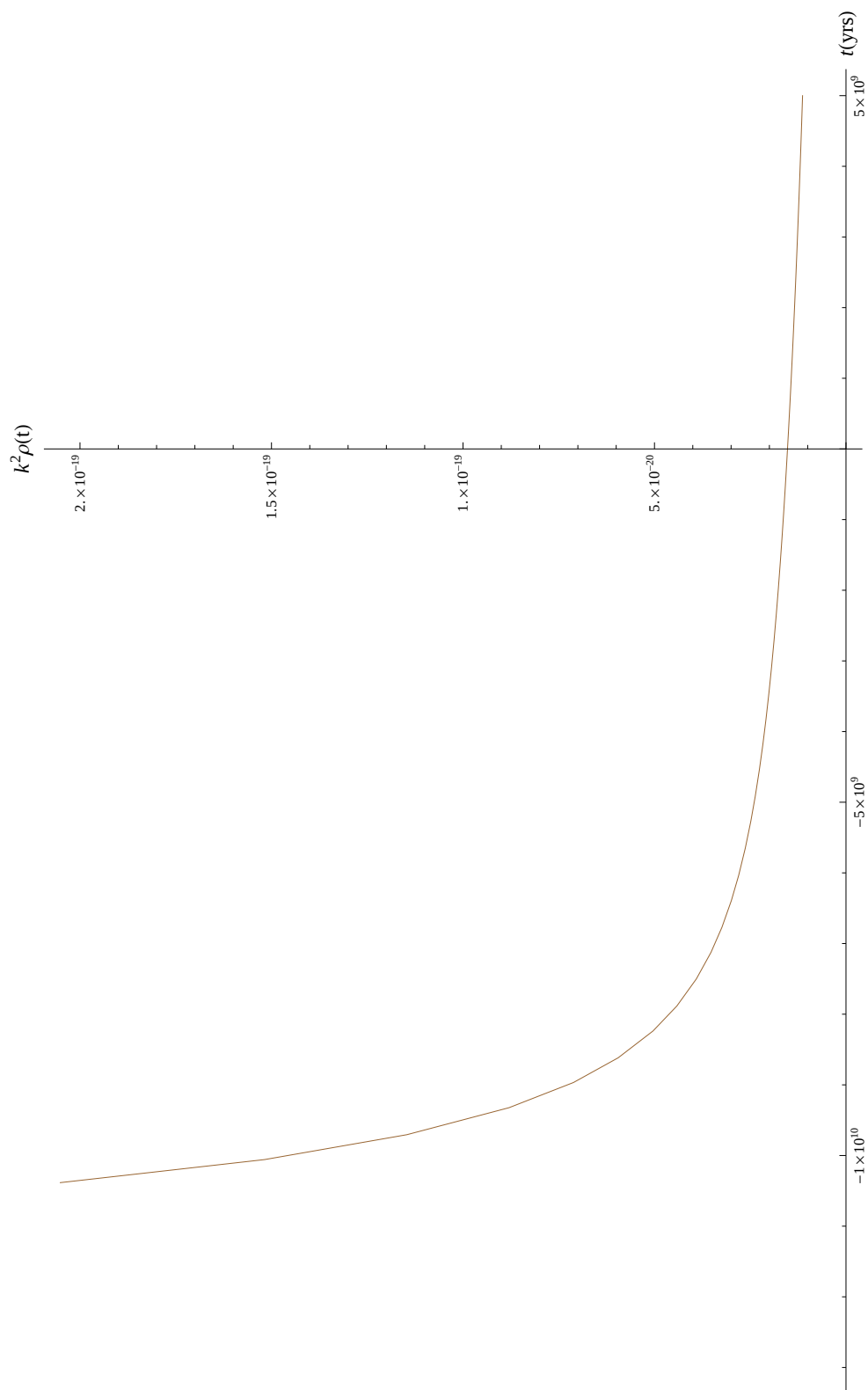


Σχήμα 4.8: Η παράμετρος επιτάχυνσης $q(t)$. Διακρίνεται για σήμερα μια μικρή τιμή επιτάχυνσης, που επιταχύνουμε διαλέγοντας κατάλληλα τις τιμές του w_b και του B_0 . Επιπλέον, παρατηρούμε ένα πέρασμα από επιβράδυνση κατά το κοιντό παρελθόν, ένα χαρακτηριστικό που συμφωνεί ποιοτικά με τις παρατηρήσεις και που προκύπτει χωρίς να το έχουμε απαιτήσει με κάποια συνθήκη.

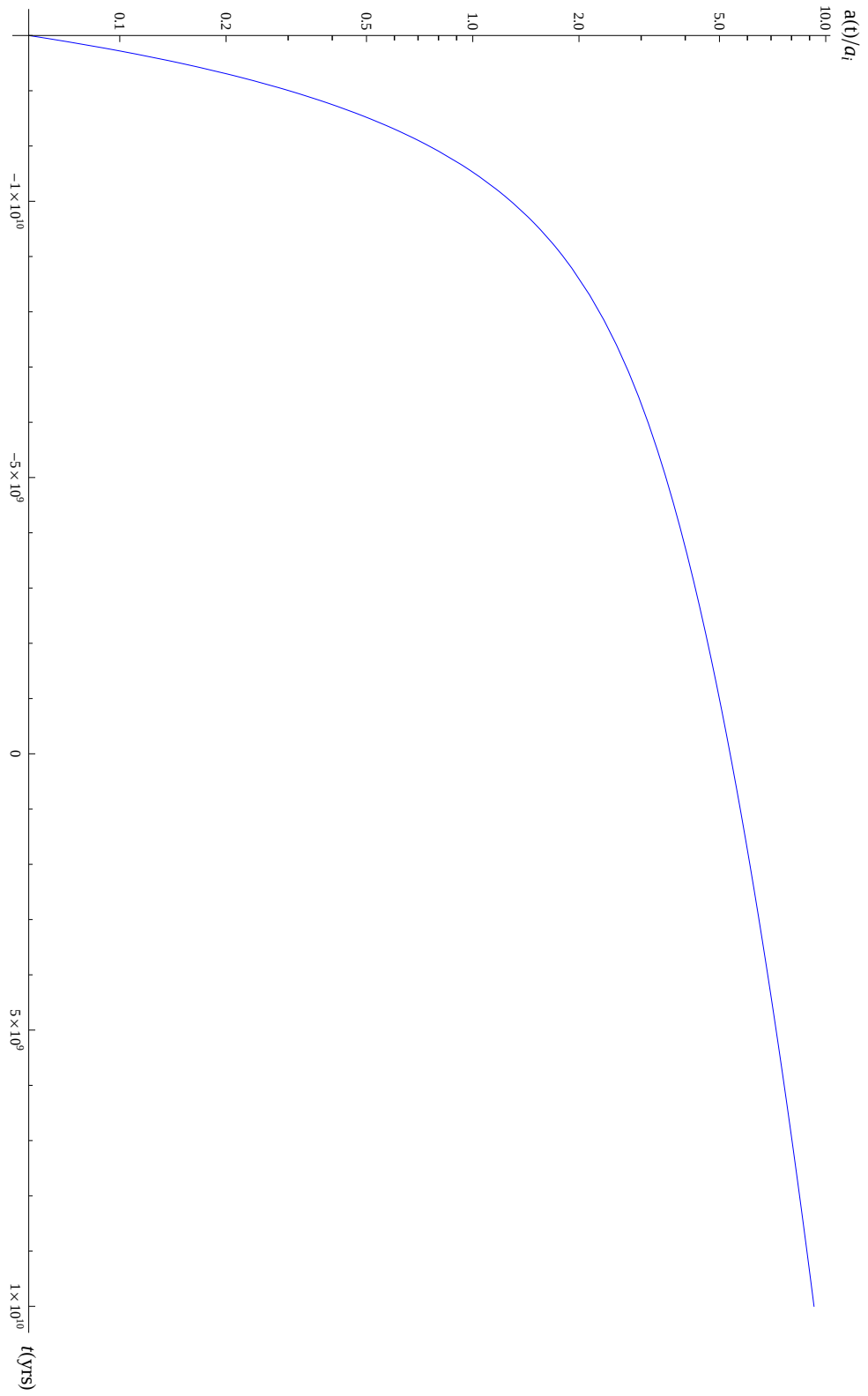
μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται είναι βεβαίως αυτή της θετικότητας της ενεργειακής πυκνότητας, που δίνεται για $n = 1$ από τη σχέση

$$3A^2 + 3AB = k^2\rho$$

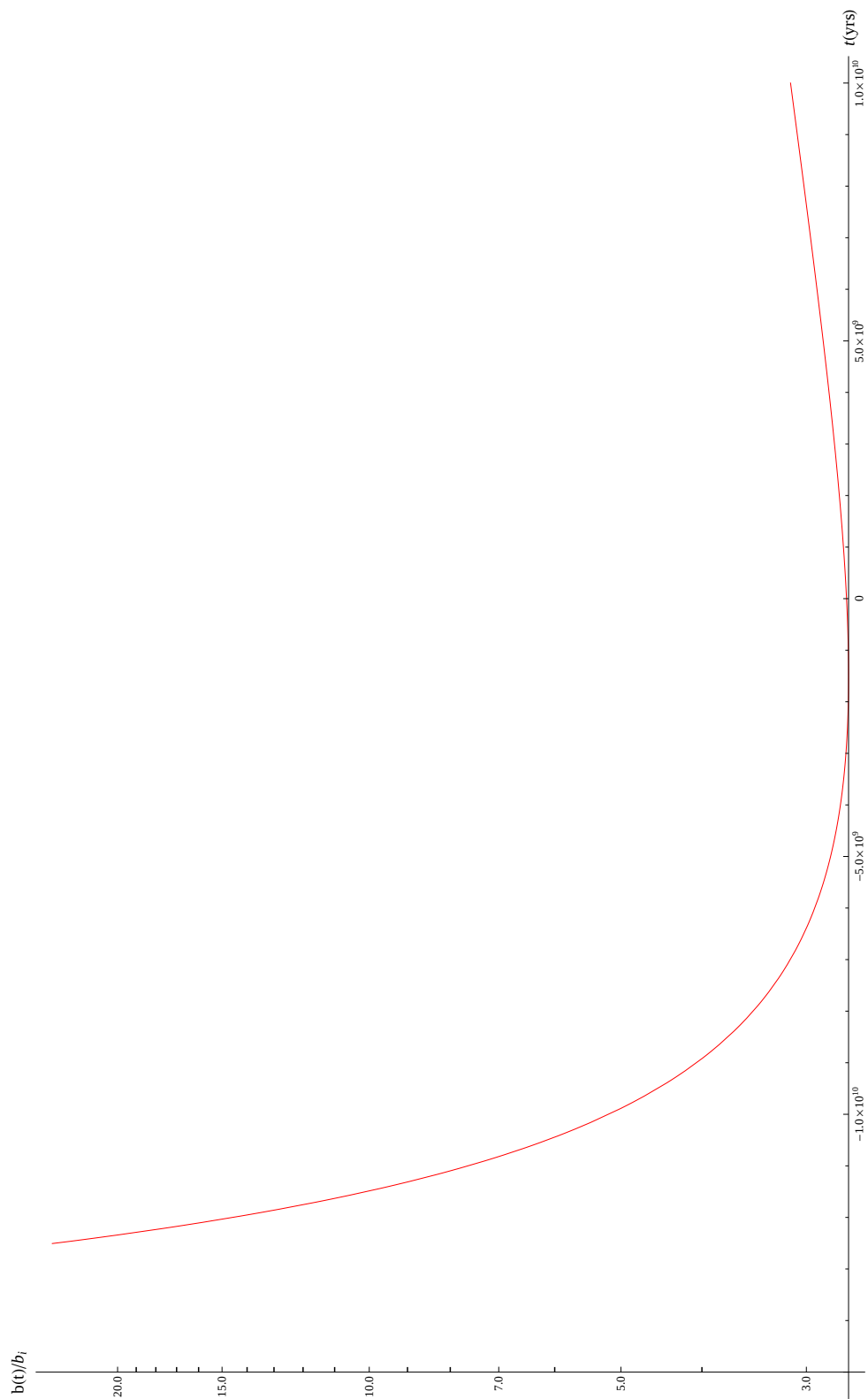
Στο διάγραμμα 4.9 που ακολουθεί βλέπουμε ότι και αυτή ικανοποιείται, ενώ στα διαγράμματα 4.10 και 4.11 έχουμε σχεδιάσει τους κοσμικούς παράγοντες κλίμακας.



Σχήμα 4.9: Η παράμετρος πυκνότητας ρ . Βλέπουμε ότι η θετικότητα της διατηρείται σε όλη την εξέλιξη του συστήματός μας.



Σχήμα 4.10: Το διάγραμμα του κοσμικού παράγοντα κλίμακας ($\ln \frac{a(t)}{a_i}, t$), όπου η παράμετρος a_i είναι μια απροσδιόριστη σταθερά ολοκλήρωσης.



Σχήμα 4.11: Το διάγραμμα του κοσμικού παράγοντα κλίμακας $(\ln \frac{b(t)}{b_i}, t)$, όπου η παράμετρος b_i είναι μια προσδιόριστη σταθερά ολοκλήρωσης.

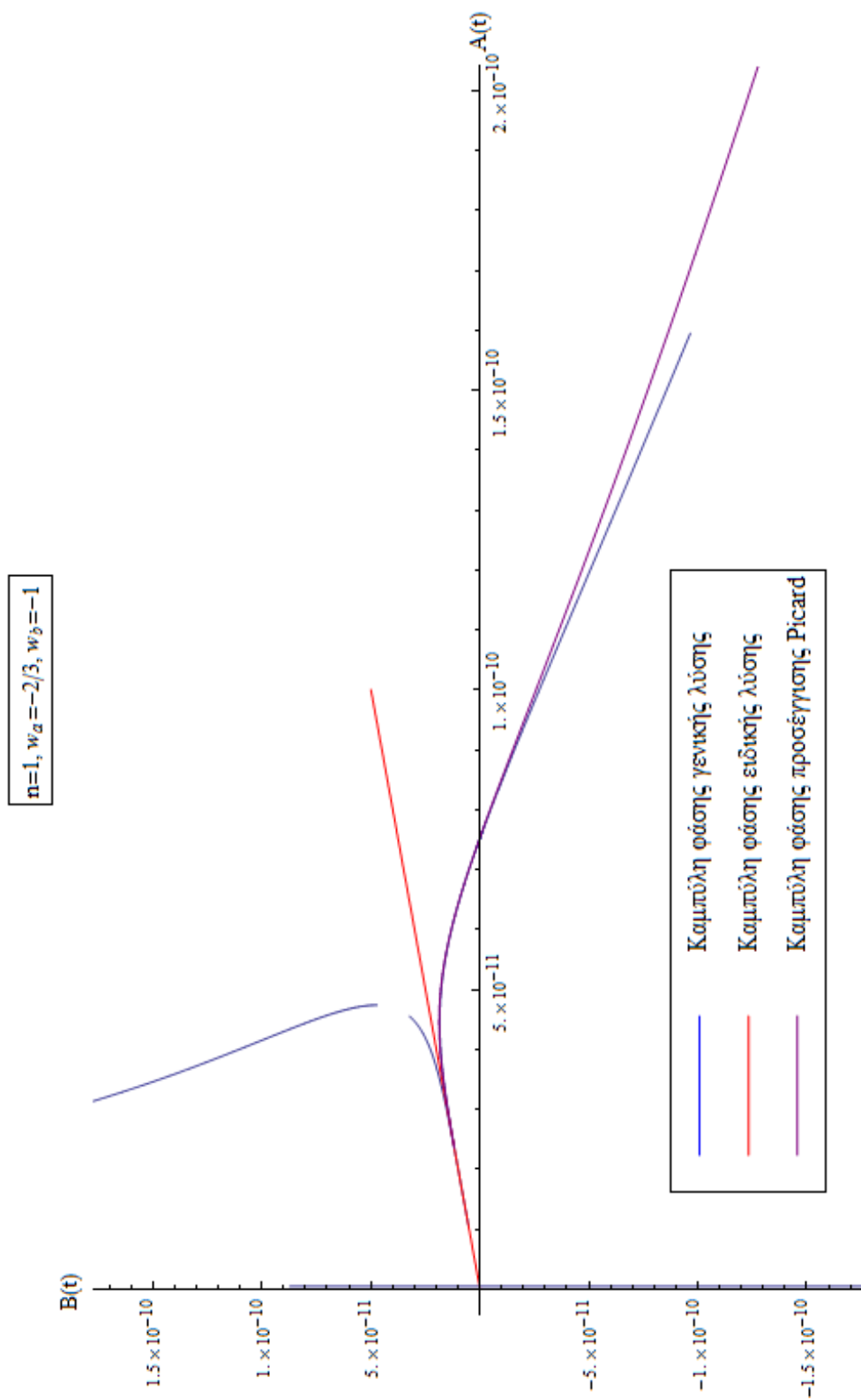
Σχόλια

Πέρα από τα σχόλια που έγιναν παρακολουθώντας την κατασκευή της παραπάνω προσέγγισης, αξίζει να σημειωθούν τα εξής:

- Όσον αφορά στις παραμέτρους Hubble, βλέπουμε μια αναμενόμενη εξέλιξη και για τις δύο. Η παράμετρος της επιπλέον διάστασης περιγράφει δραματική μείωση της «ακτίνας» της κατά το απώτατο παρελθόν, μειώνοντας όμως το ρυθμό που αυτό γίνεται καθώς το σύστημα εξελίσσεται. Προβλέπεται δε για το πρόσφατο παρελθόν ένα πέρασμα από μείωση σε αύξηση αυτής της ακτίνας, με τρόπο όμως που διαφυλάσσει τη φαινόμενη σταθεροποίησή της.
- Όσον αφορά στο διάγραμμα της επιτάχυνσης, παρατηρεί κανείς ότι εκτός από τη μικρή επιτάχυνση που προβλέπει για σήμερα, και που ουσιαστικά επιβάλαμε στο σύστημα με την επιλογή μας για τις σημερινές συνθήκες, προβλέπει και ένα πέρασμα από επιτάχυνση σε επιβράδυνση κατά το απώτατο παρελθόν και το αντίστροφο για το πρόσφατο. Αυτό είναι ένα ιδιαίτερος άξιο λόγου χαρακτηριστικό, καθώς, δεν το έχουμε επιβάλει με κανέναν τρόπο αλλά φαίνεται πως προκύπτει αυθόρμητα από τις απαιτήσεις για επιτάχυνση και σταθεροποίηση, με τον τρόπο που τις έχουμε εισάγει. Θα έλεγε μάλιστα κανείς ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι μη αναμενόμενο, καθώς δεν περιμέναμε η ποιοτική συμπεριφορά της παραμέτρου A να αλλάζει χωρίς να αλλάζει η καταστατική εξίσωση για τις συνθήκες ή την επιπλέον διάσταση. Με λίγα λόγια, φαίνεται σε μια πρώτη εκτίμηση πως είναι υπό κάποιες συνθήκες αρκετό το να επιλέξει κανείς κάποιες εξωτικές τιμές για τις παραμέτρους w και να απαιτήσει σταθεροποίηση μόνο για σήμερα ώστε να συμπεριλάβει, έστω ποιοτικά, πέντε από τις πιο βασικές παρατηρησιακές συνθήκες που πρέπει να έχει ένα κοσμολογικό μοντέλο:

1. $q_0 < 0$
2. $|B_0| < \frac{A_0}{10n}$
3. $\rho > 0$
4. Μετάβαση από επιβράδυνση σε επιτάχυνση κατά το παρελθόν.
5. Ανωμαλία κατά το παρελθόν.

Θα δούμε μάλιστα ότι αυτό δεν είναι ένα χαρακτηριστικό που έτυχε να υπάρχει μόνο σε αυτό το μοντέλο, αλλά υπάρχει και σε άλλα, που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια. Τέλος, για να καταδείξουμε την αξιοπιστία της μεθόδου Picard, θα παραθέσουμε στο διάγραμμα 4.12 τη σύγκριση της φασικής καμπύλης της γενικής λύσης με τη φασική καμπύλη που μπορούμε να κατασκευάσουμε από την προσέγγιση Picard.



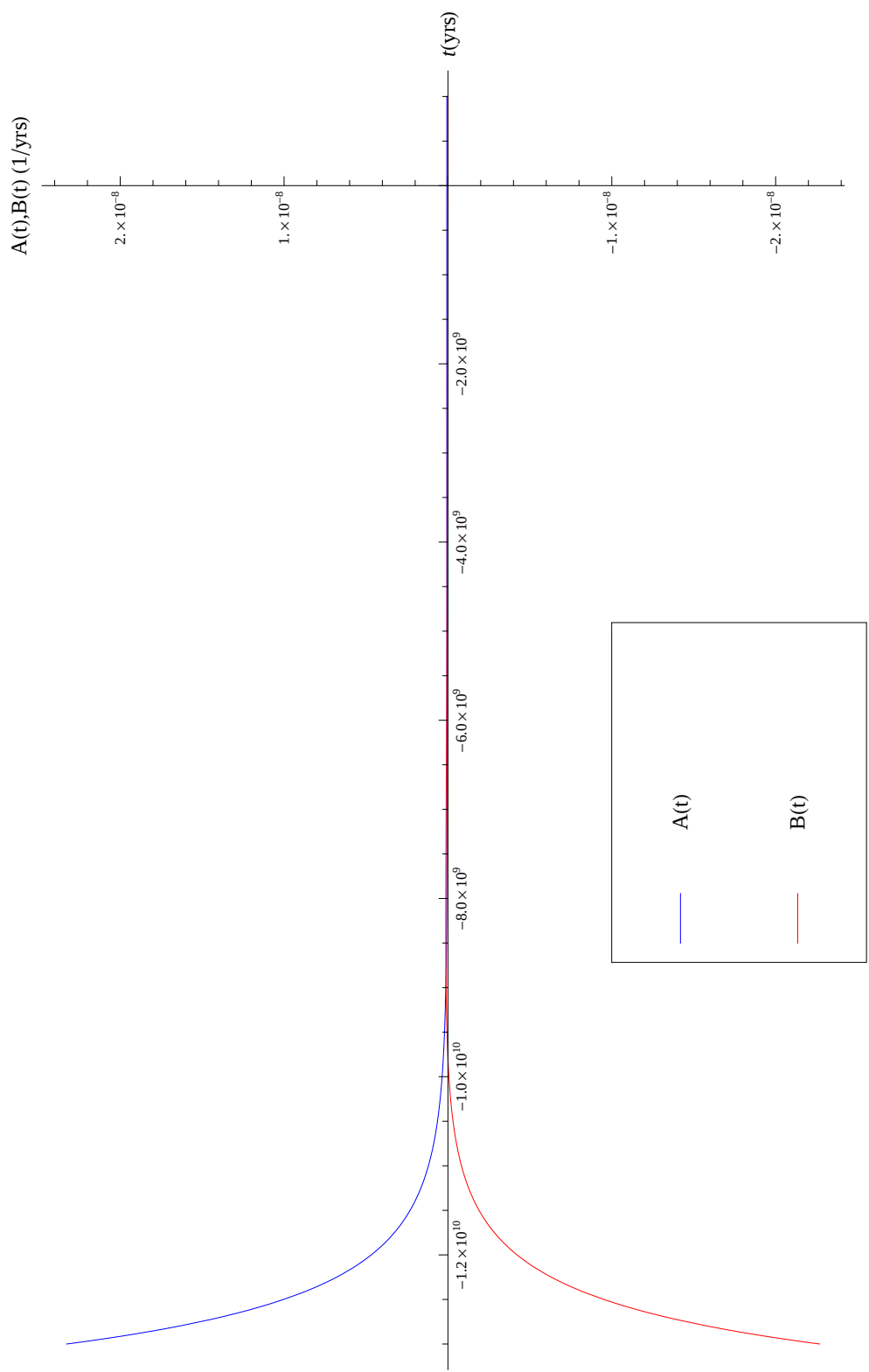
Σχήμα 4.12: Σύγκριση φασικής καμπύλης της γενικής λύσης και της λύσης Ricard. Η σύμπτωση τους είναι αξιοσημείωτη, ενώ μικρή διαφοροποίηση ξεκινάμε να βλέπουμε σε τιμές που, μέσω της μεθόδου Ricard, βλέπουμε ότι αντιστοιχούν σε χρόνους $\approx -8 * 10^9$ yrs.

Ένα καλύτερο μοντέλο για $n = 1$

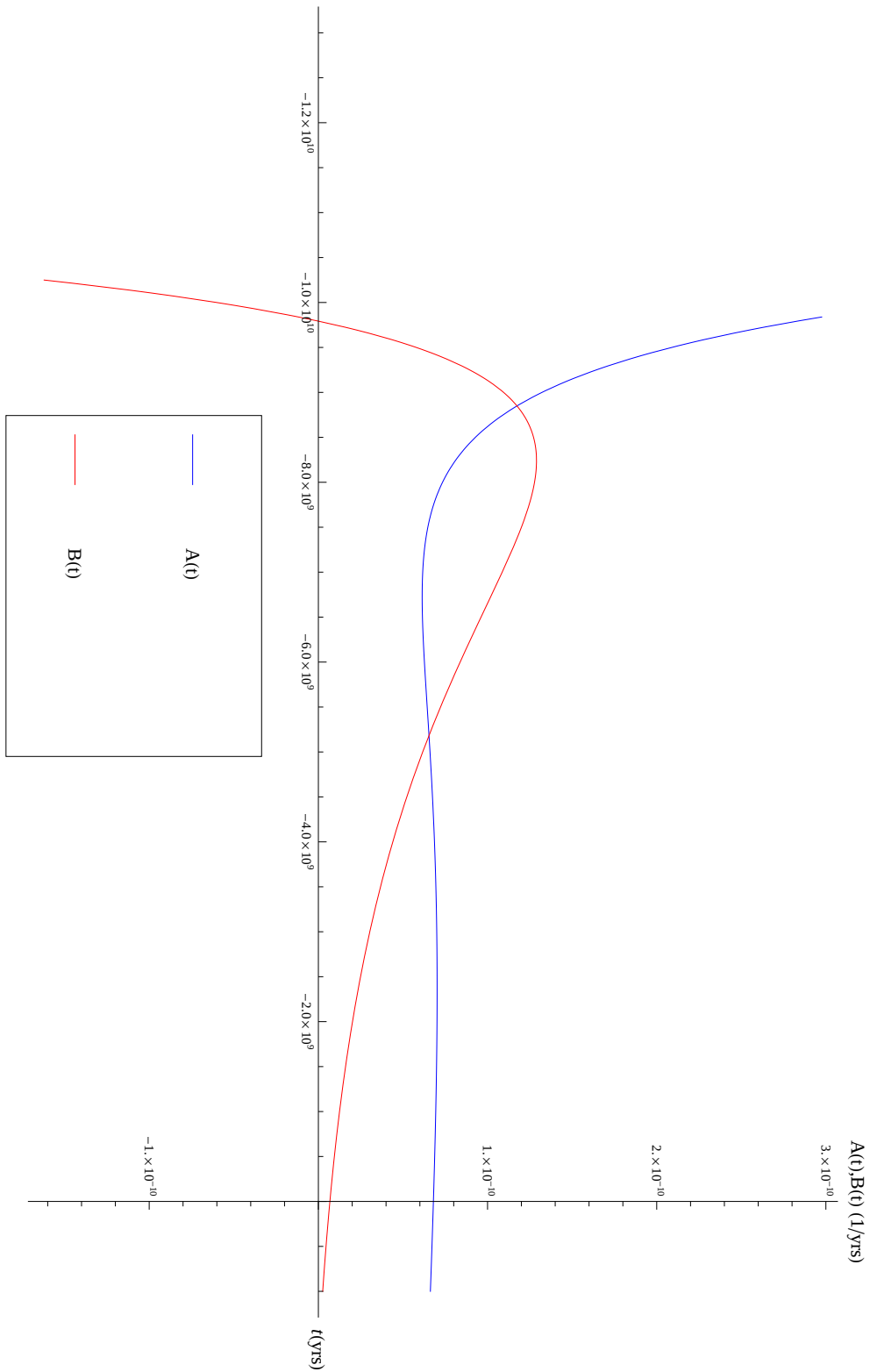
Έχοντας πια σημειώσει όλα τα σημαντικά στοιχεία, θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε εδώ ένα ακόμα μοντέλο, προσπαθώντας αυτή τη φορά να πετύχουμε καλύτερη σύμπτωση με τα παρατηρησιακά μας δεδομένα. Για το μοντέλο αυτό, οι σημερινές τιμές των παραμέτρων w και του B_0 που χρησιμοποιούμε είναι οι εξής:

$$w_a \approx -0.4394, w_b = -3/2, B_0 = 68 * 10^{-13} \text{ yrs}^{-1}$$

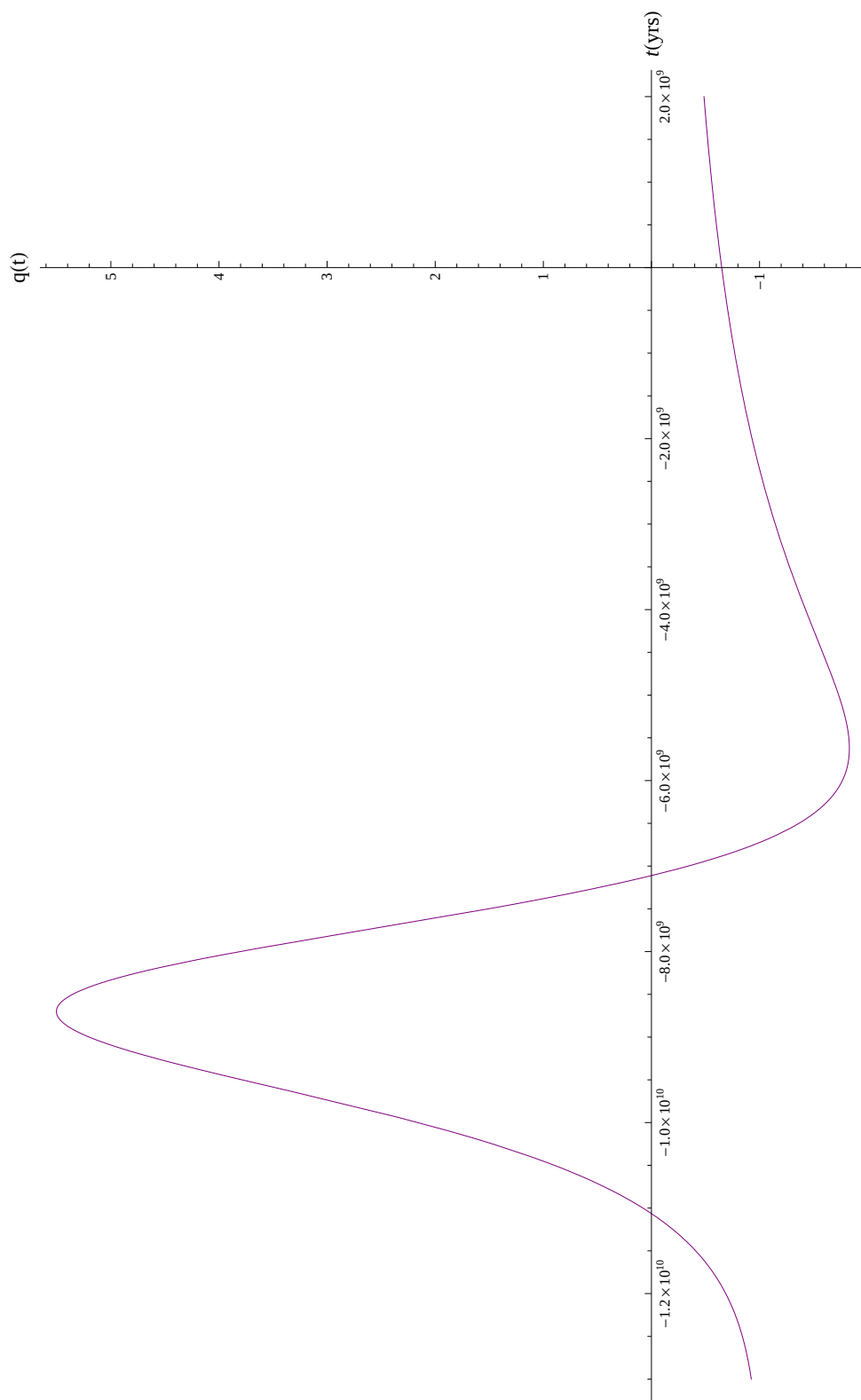
Η επιλογή των παραπάνω παραμέτρων έχει γίνει με σκοπό να προσεγγιστούν καλύτερα δύο παρατηρησιακά δεδομένα. Το πρώτο είναι η σημερινή τιμή της επιτάχυνσης, που οι καλύτερες σημερινές προσεγγίσεις το τοποθετούν στην περιοχή $q \approx -0.4 - 0.7$. Το δεύτερο στοιχείο που θέλουμε να διορθώσουμε είναι η χρονική στιγμή κατά την οποία παρουσιάζεται ανωμαλία στο σύστημά μας. Με τις συγκεκριμένες επιλογές πετυχαίνουμε η ανωμαλία να βρίσκεται περίπου στα $13 \cdot 10^9$ χρόνια πριν. Τα αντίστοιχα διαγράμματα ακολουθούν.



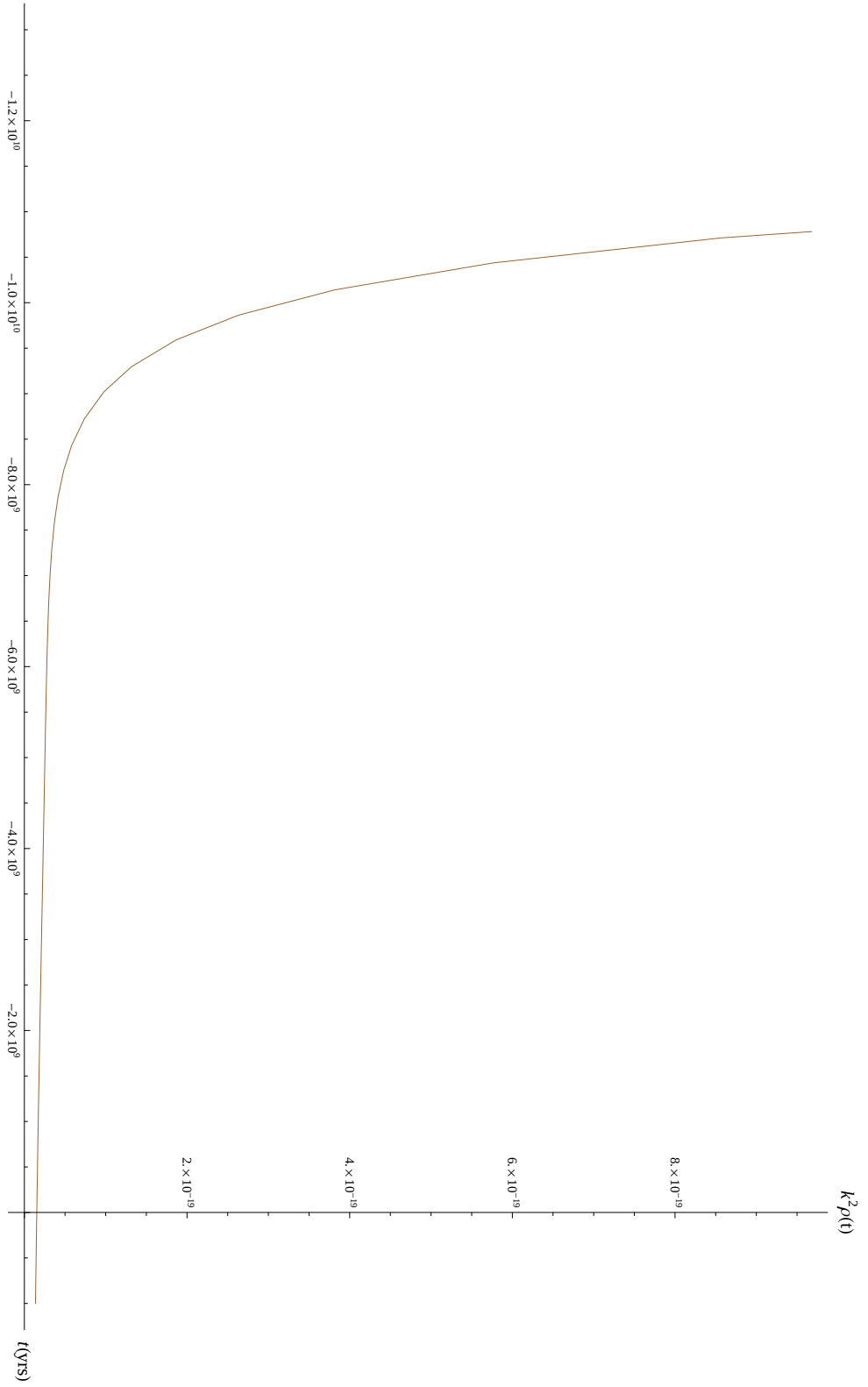
Σχήμα 4.13: Η εξέλιξη των παραμέτρων Hubble όπως προβλέπεται από την πρώτη τάξης προσέγγιση για $w_a \approx -0.4394$ και $w_b = -3/2$



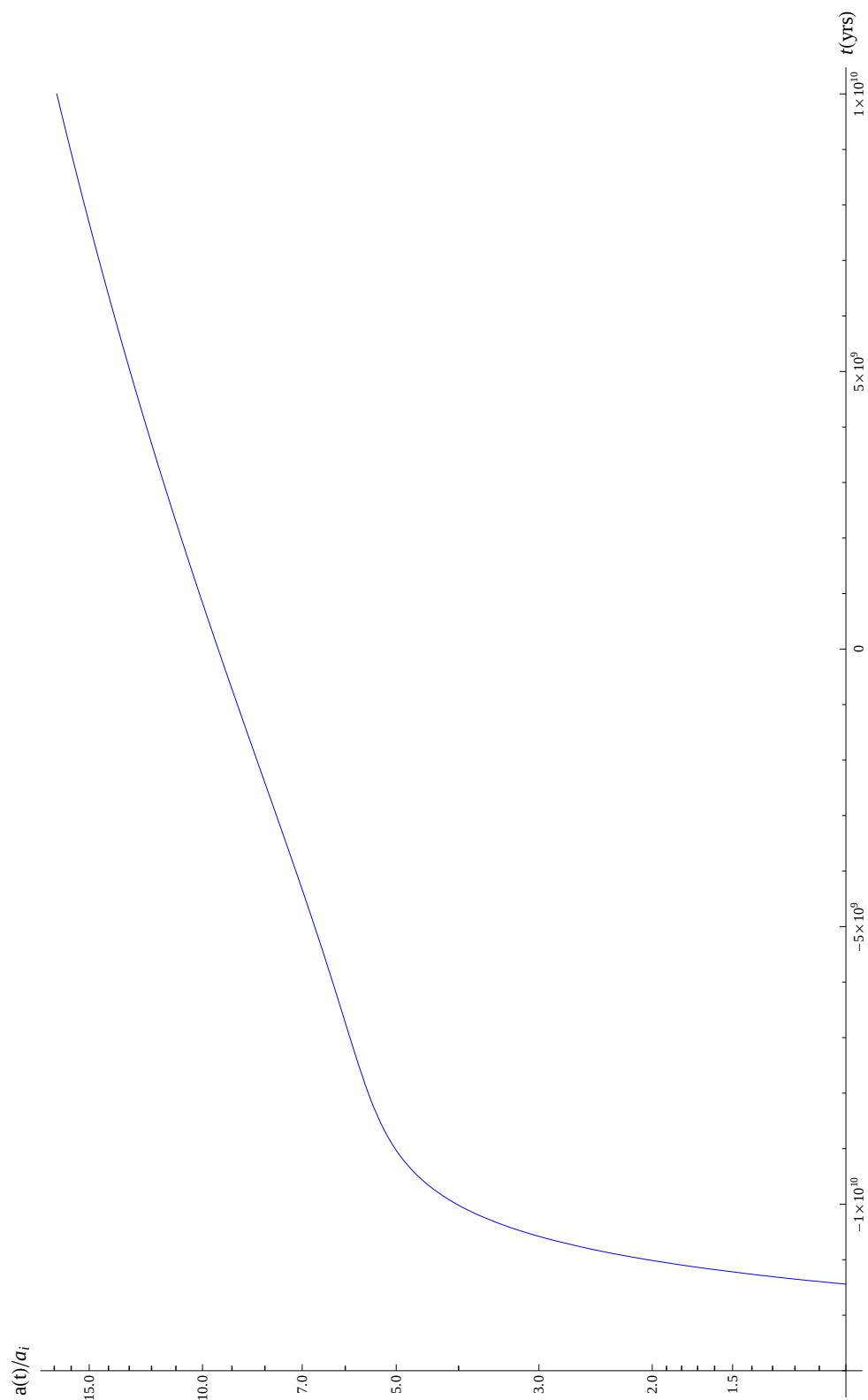
Σχήμα 4.14: Η εξέλιξη των παραμέτρων *Hubble* για το ίδιο μοντέλο με διαφορετική, όμως, μεγέθυνση ώστε να τονιστεί η συμπεριφορά τους, από τη στιγμή που αλλάζει πρόσημο η παράμετρος *B* και μετά.



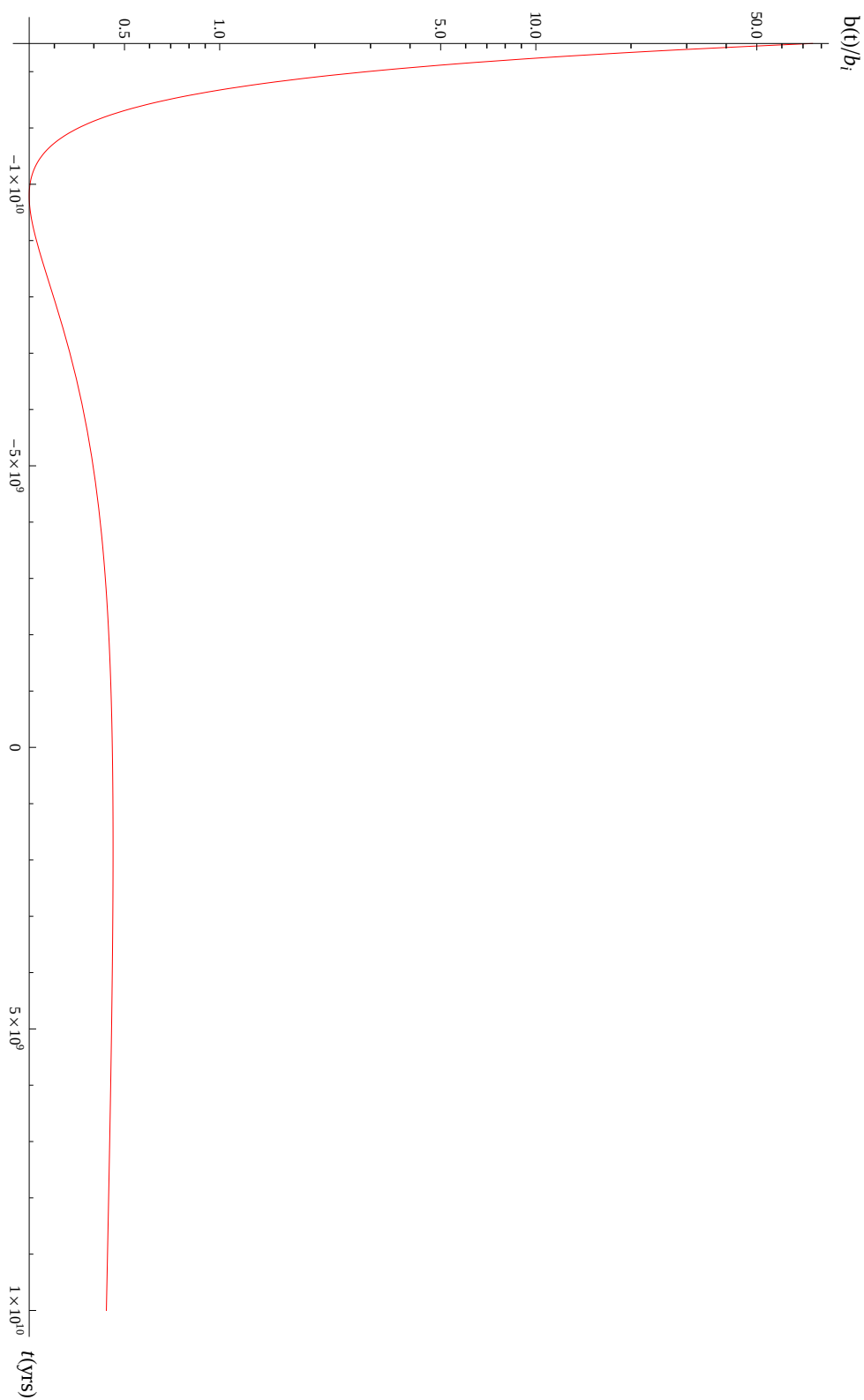
Σχήμα 4.15: Η παράμετρος επιτάχυνσης $q(t)$. Σε αυτό το μοντέλο έχουμε απαιτήσει πολύ καλύτερη συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα ($q = -0.65$). Ταυτόχρονα όμως επιτυγχάνεται, χωρίς να έχει επιχειρηθεί κάποια άλλη παραμετροποίηση, και η διόρθωση στην παρατηρούμενη χρονική στιγμή που συμβαίνει η μετάβαση από επιβράδυνση σε επιτάχυνση.



Σχήμα 4.16: Η παράμετρος πυκνότητας ρ . Βλέπουμε ότι η θετικότητα της διατηρείται σε όλη την εξέλιξη του συστήματός μας.



Σχήμα 4.17: Το διάγραμμα του κοσμικού παράγοντα κλίμακας $(\ln \frac{a(t)}{a_i}, t)$, όπου η παράμετρος a_i είναι μια απροσδιόριστη σταθερά ολοκλήρωσης.



Σχήμα 4.18: Το διάγραμμα του κοσμικού παράγοντα κλίμακας ($\ln \frac{b(t)}{b_i}, t$), όπου η παράμετρος b_i είναι μια απροσδιόριστη σταθερά ομοκλήρωσης. Παρατηρούμε πάλι το δραματική μείωση στα πρώτα στάδια της εξέλιξης του Σύμπαντος σε σχέση με το προηγούμενο μοντέλο.

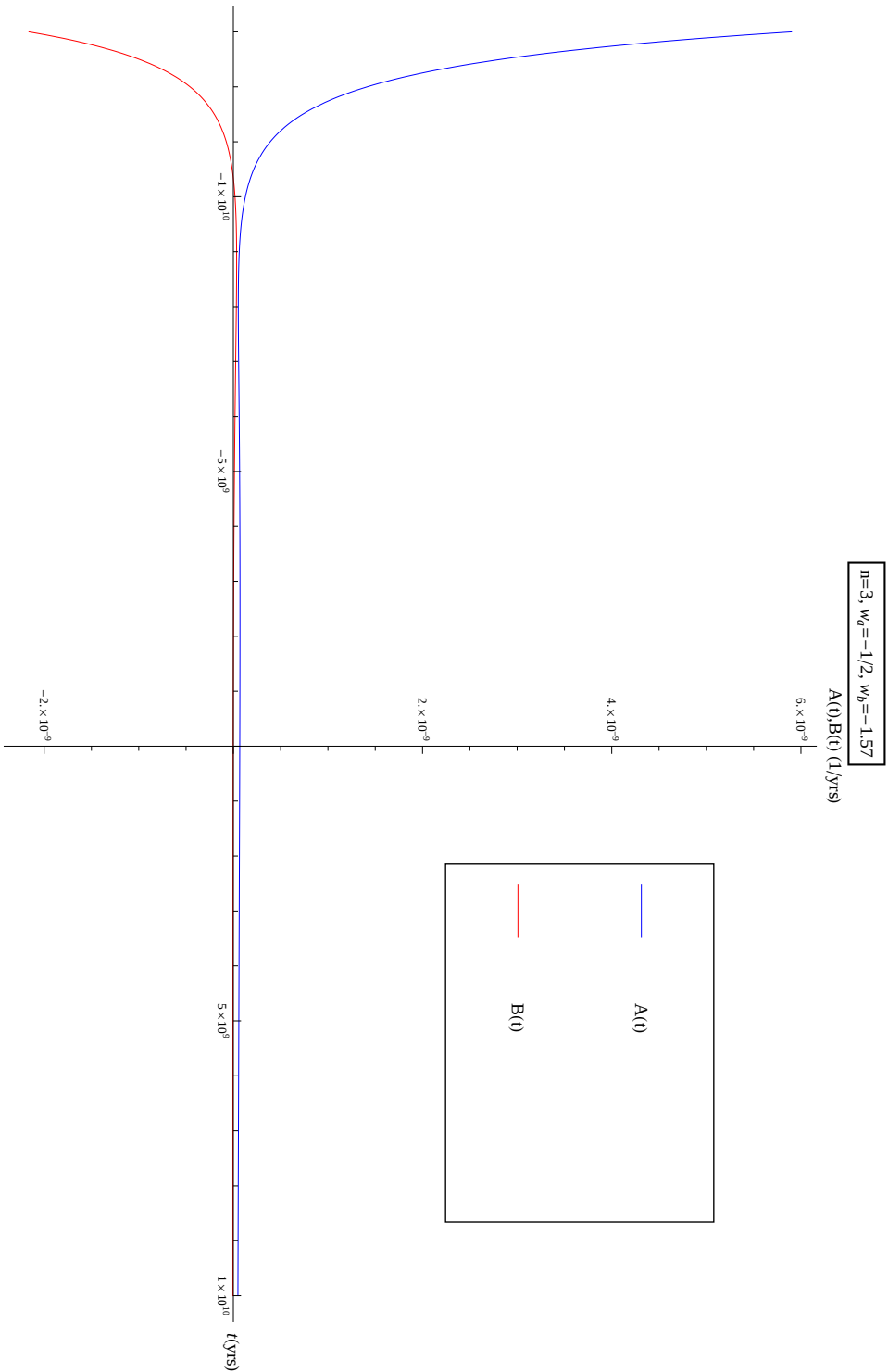
Σχόλια

Βλέπουμε λοιπόν από τα παραπάνω διαγράμματα ότι πράγματι είναι δυνατό να πετύχουμε καλύτερη συμφωνία με τα παρατηρησιακά δεδομένα αλλάζοντας τις τιμές των w . Αξιοσημείωτο είναι ότι προσπαθώντας να διορθώσουμε μονάχα την τιμή της σημερινής επιτάχυνσης και της ηλικίας του Σύμπαντος που προβλέπει αυτό το μοντέλο, διορθώθηκε και η χρονική στιγμή της μετάβασης από επιβράδυνση σε επιτάχυνση. Βεβαίως, τονίζεται ότι για να επιτευχθεί αυτό έχουμε επιλέξει για το w_b μια τιμή που στη βιβλιογραφία αντιστοιχεί σε σενάρια της λεγόμενης phantom energy. Επιπλέον, βλέπουμε από το διάγραμμα του παράγοντα $b(t)$ ότι είναι δικαιολογημένη η προσέγγιση που αναφέρθηκε στην παράγραφο 4.3 και επομένως η επιτάχυνση που βρίσκουμε εδώ ταυτίζεται με την επιτάχυνση από τετραδιάστατης σκοπιάς. Αντίθετα, για να ταυτίζεται η $\hat{A}_0$ με την A_0 που έχουμε στο μοντέλο πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλη τιμή για το b_0 . Όμως ίσως είναι εν γένει προτιμότερο να επιλέξει κανείς την τιμή του b_0 με σκοπό να ταυτίζονται τα χρονικά διαστήματα από τη μετάβαση από την επιβράδυνση στην επιτάχυνση μέχρι σήμερα στις δύο εικόνες, και να επιλέξει άλλη τιμή για την παράμετρο A_0 που θα δίνει $\hat{A}_0 = 70 \frac{km}{s \cdot Mpc}$. Συμπερασματικά λοιπόν καταλαβαίνουμε ότι είναι δυνατόν να πετύχουμε όλες τις βασικές συνθήκες που έχουμε θέσει για αυτό το μοντέλο με κατάλληλο φινε-τυνινγκ των διαφόρων σταθερών.

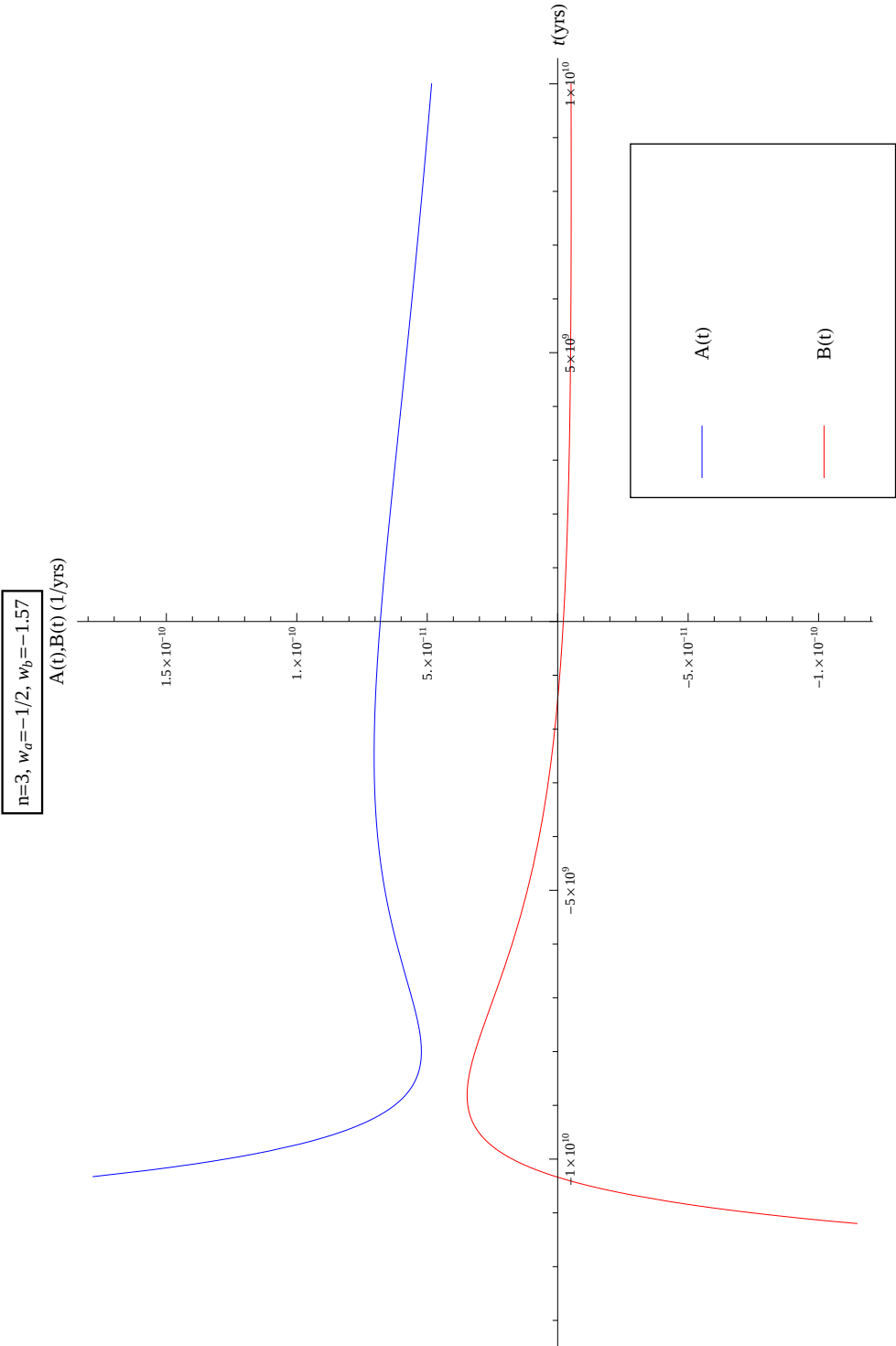
4.5.7 Κατασκευή λύσης με τη μέθοδο Picard, για $n = 3$

Παρά το ότι πετύχαμε για $n = 1$ να έχουμε σύμπτωση με τα παρατηρησιακά στοιχεία που επιθυμούσαμε, αξίζει να δούμε την εφαρμογή της ίδιας μεθόδου σε μοντέλα με περισσότερες επιπλέον διαστάσεις. Το κίνητρο για μια τέτοια μελέτη έχει περισσότερο να κάνει με τις θεωρίες που χρειάζονται σε μικροσκοπικό επίπεδο για να εξηγηθούν διάφορες παρατηρήσεις, όπως για παράδειγμα η θεωρία χορδών, που εν γένει εισάγουν περισσότερες της μίας επιπλέον διαστάσεις.

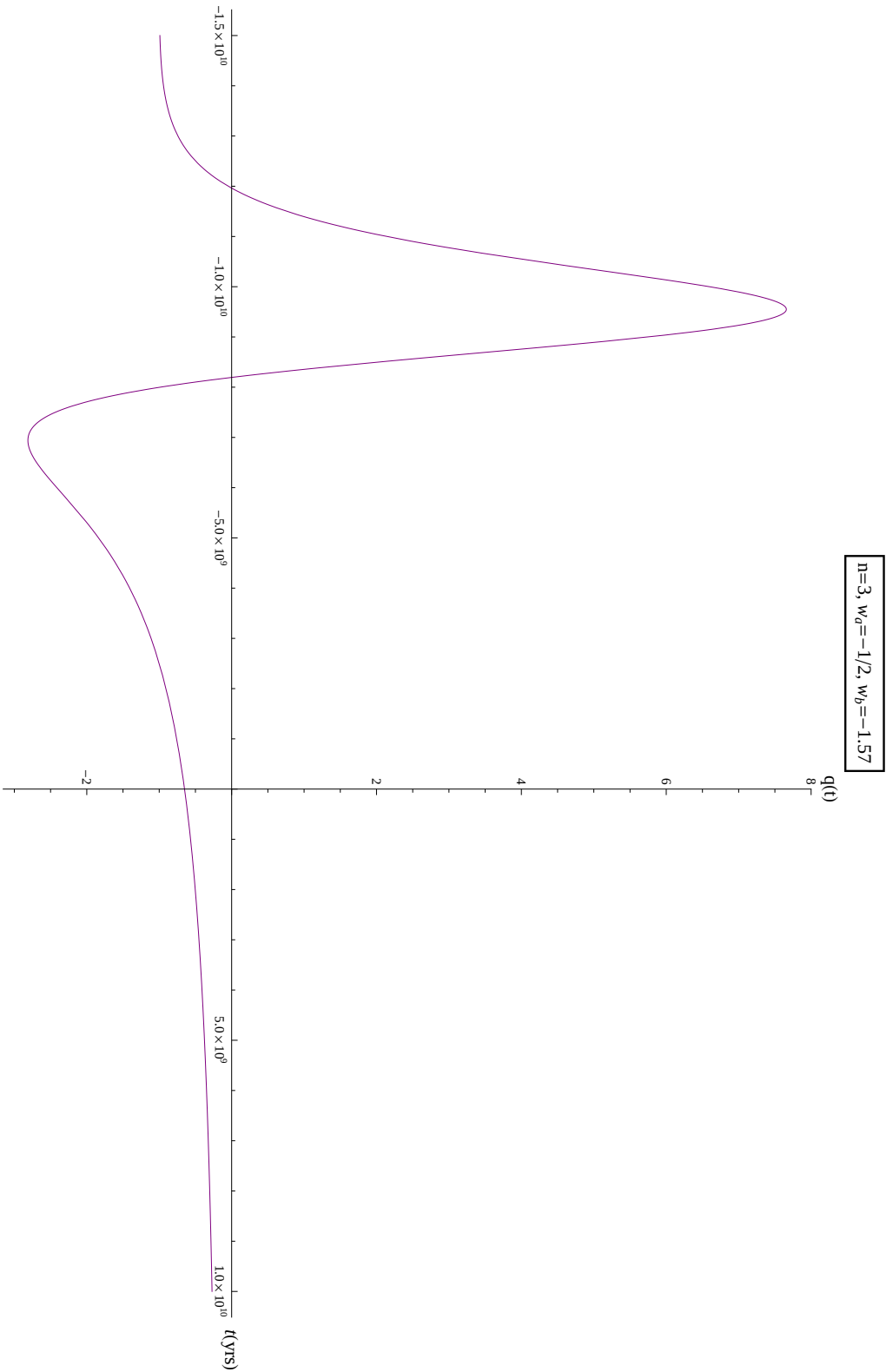
Θα παρουσιάσουμε την ίδια μέθοδο εφαρμοσμένη σε ένα μοντέλο με $n = 3$ επιπλέον διαστάσεις, για τις οποίες θεωρούμε $k_b = 0$. Πριν παρουσιάσουμε τα σχετικά διαγράμματα, επιστούμε την προσοχή στην ομοιότητα που παρουσιάζεται στα χαρακτηριστικά αυτού του μοντέλου σε σύγκριση με αυτό για $n = 1$, κάτι που σε ένα βαθμό είναι αναμενόμενο έχοντας δει τις ποιοτικές ομοιότητες στις φασικές καμπύλες και για τις δύο περιπτώσεις. Δεν πρέπει να περάσει απαρατήρητη η πρακτική ταύτιση των αποτελεσμάτων με την περίπτωση για $n = 1$ που παρουσιάσαμε μόλις, με τιμές των παραμέτρων w που βρίσκονται κοντά για τα δύο αυτά μοντέλα (για $n = 1$ επιλέξαμε $w_a = -0.44$ και $w_b = -1.5$ ενώ για $n = 3$ θα επιλέξουμε $w_a = -0.5$ και $w_b = -1.57$).



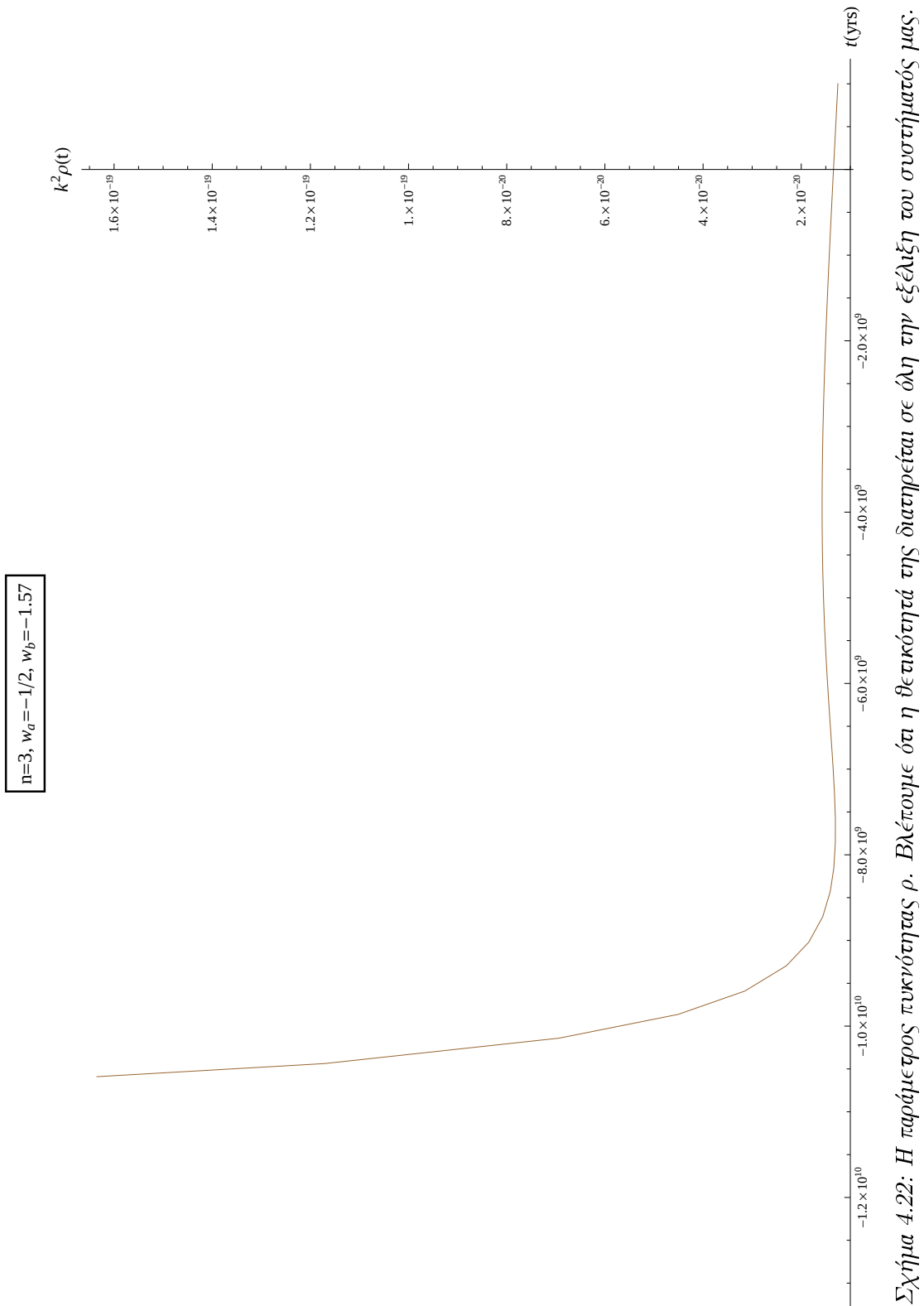
Σχήμα 4.19: Η εξέλιξη των παραμέτρων *Hubble* όπως προβλέπεται από την πρώτης τάξης προσέγγιση για $w_a \approx -1/2$ και $w_b \approx -1.57$

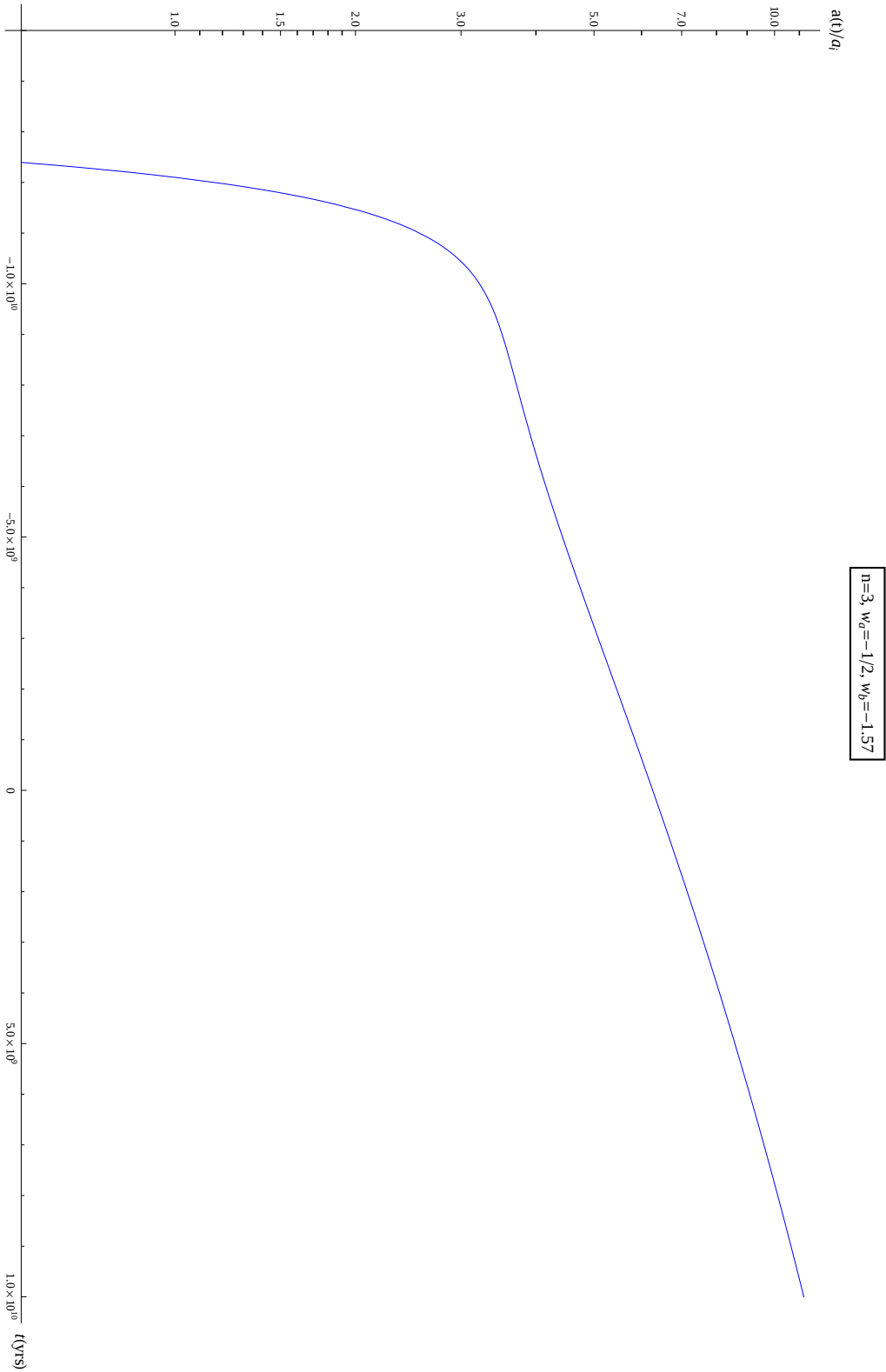


Σχήμα 4.20: Η εξέλιξη των παραμέτρων Hubble για το ίδιο μοντέλο με διαφορετική, όμως, μεγέθυνση ώστε να τονιστεί η συμπεριφορά τους, από τη στιγμή που αλλάζει πρόσημο η παράμετρος B και μετά.

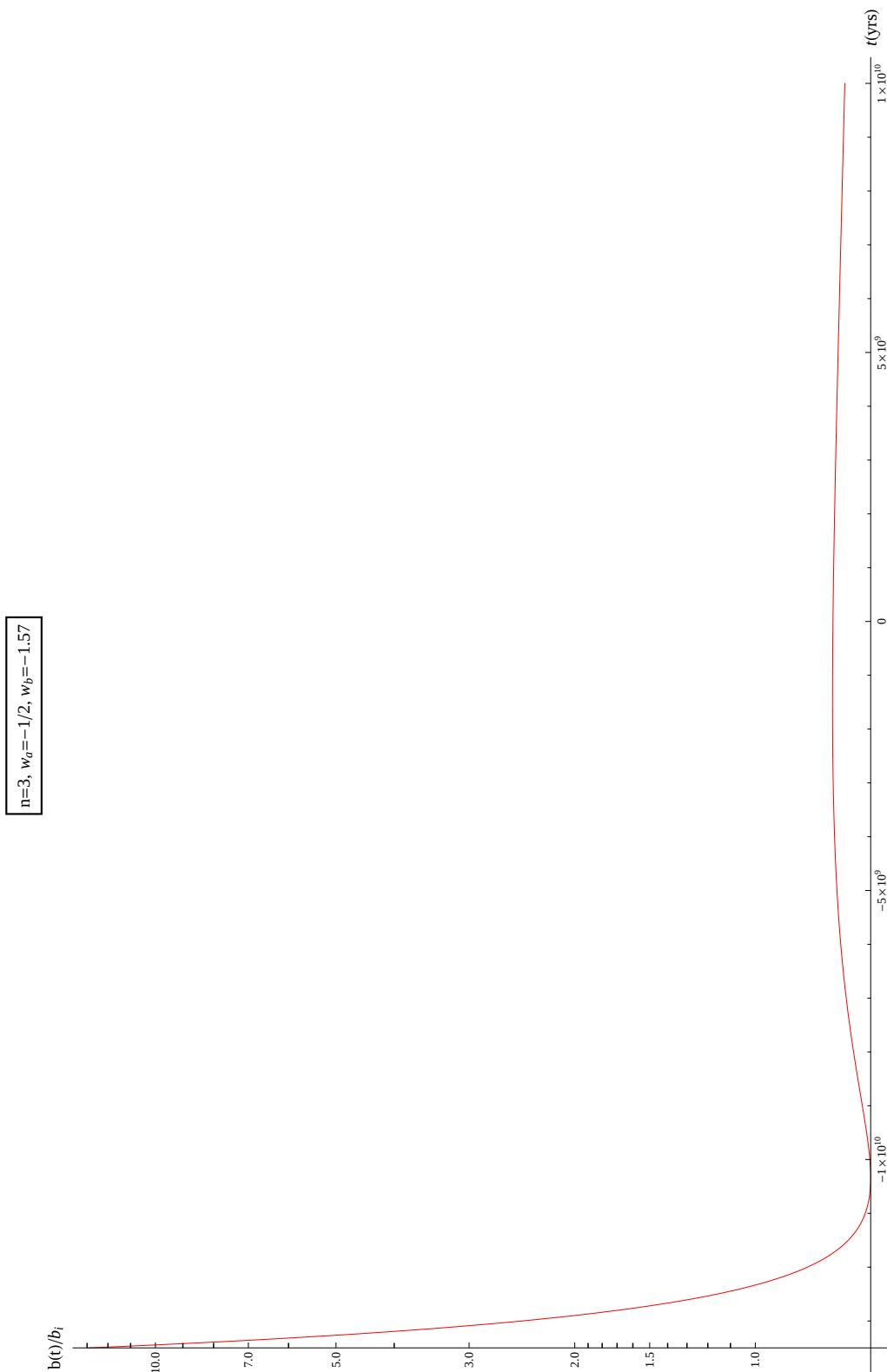


Σχήμα 4.21: Η παράμετρος επιτάχυνσης $q(t)$. Σε αυτό το μοντέλο έχουμε απαιτήσει ($q = -0.65$). Ταυτόχρονα επιτυγχάνεται και μετάβαση από επιβράδυνση σε επιτάχυνση σε μια εποχή που συμφωνεί με τις παρατηρήσεις.





Σχήμα 4.23: Το διάγραμμα του κοσμικού παράγοντα κλίμακας ($\ln \frac{a(t)}{a_i}, t$), όπου η παράμετρος a_i είναι μια απροσδιόριστη σταθερά ολοκλήρωσης.



Σχήμα 4.24: Το διάγραμμα του κοσμικού παράγοντα κλίμακας $(\ln \frac{b(t)}{b_i}, t)$, όπου η παράμετρος b_i είναι μια προσδιόριστη σταθερά ολοκλήρωσης. Παρατηρούμε και εδώ πολύ μεγάλη μείωση στον κοσμικό παράγοντα κλίμακας b στα πρώτα στάδια της εξέλιξης του συστήματος.

4.6 Συμπεράσματα

Από τα όσα είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο συνάγουμε ότι η εισαγωγή επιπλέον διαστάσεων, μέσω της απλής επέκτασης της μετρικής από τη θεωρία Kaluza-Klein, έχει ισχυρό αντίκτυπο στο πως εξελίσσονται οι λύσεις των εξισώσεων Friedmann. Όμως ο τρόπος με τον οποίο αυτό συμβαίνει δεν είναι θεμιτός, παρά μόνο σε συγκεκριμένες ομάδες περιπτώσεων. Είδαμε ότι για να είναι ένα τέτοιο μοντέλο αποδεκτό πρέπει να ικανοποιείται ένας αριθμός από συνθήκες, ενώ ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην ισοδύναμη εικόνα που θα πρέπει να αντιλαμβανόμαστε εμείς σαν τετραδιάστατοι παρατηρητές.

Σε μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας που ασχολείται με το συγκεκριμένο τρόπο επέκτασης της Κοσμολογίας, οι απαιτήσεις που τίθενται έχουν να κάνουν με τα εξής:

- Η σταθεροποίηση των επιπλέον διαστάσεων πρέπει να έχει επέλθει νωρίς και να διατηρείται σε όλη την εξέλιξη του Σύμπαντος, όπως και η σμίκρυνσή τους, ώστε να μην είναι αντιληπτές από εμάς.
- Οι παράμετροι w συνήθως θεωρούνται σταθερές, επιλέγονται δε με τέτοιο τρόπο όταν δεν είναι σταθερές (π.χ. [13]), που είτε έχουν ακριβώς την ίδια τιμή ($w_a = w_b$), είτε λαμβάνουν τιμές που αντιστοιχούν σε ήδη γνωστή φυσική. Στη μεν πρώτη περίπτωση σχεδόν όλες οι προσπάθειες αποτυγχάνουν να περιγράψουν τις παρατηρήσεις, ενώ στη δεύτερη, που υπονοεί ότι ο λόγος της επιτάχυνσης μπορεί να βρεθεί μόνο από τη μελέτη ενός μεγαλύτερου σε αριθμό διαστάσεων Σύμπαντος, που κατά τα άλλα έχει την ίδια ύλη (και την ίδια Φυσική), επιτυγχάνει να περιγράψει μετάβαση από επιβράδυνση σε επιτάχυνση σε κάποιες περιπτώσεις, με κατάλληλη επιλογή της μορφής των w .
- Η αναπαγωγή των επιτυχιών της Κλασσικής Κοσμολογίας, όπως η εποχή κυριαρχίας της ακτινοβολίας που οδηγεί στην ισοτροπία της Μικροκυματικής Κοσμικής Ακτινοβολίας Υποβάθρου κλπ, αναλαμβάνουν κεντρικό ρόλο στην κατασκευή αυτών των μοντέλων.

Όπως έχει γίνει ήδη αντιληπτό, για τα πλαίσια αυτής της εργασίας οι παραπάνω απαιτήσεις χαλάρωσαν, με βασικότερο σκοπό να εξεταστεί το κατά πόσο υπάρχει οποιοδήποτε σενάριο στα πλαίσια μιας Κοσμολογίας Kaluza-Klein που ικανοποιεί τα παρατηρησιακά δεδομένα αρχίζοντας από σήμερα και πηγαινόντας προς τα πίσω, μια δυνατότητα που μας δίνεται μέσω της μεθόδου Picard. Η χαλάρωση των συνθηκών που επιβάλαμε έχει να κάνει με τη «σταθεροποίηση» των επιπλέον διαστάσεων την οποία κατ' αρχήν απαιτούμε μόνο για σήμερα, αλλά κυριότερα, με τα είδη της εξωτικής ύλης που επιτρέπουμε να ζουν στους εκάστοτε υπόχωρους.

Για το λόγο αυτό μελετήσαμε το σύστημα των επεκταμένων εξισώσεων Friedmann αναλυτικά, αποτέλεσμα του οποίου ήταν να βρεθούν μια ομάδα ειδικών λύσεων αλλά και να κατασκευαστεί η γενική λύση στο χώρο των φάσεων, στην περίπτωση

που οι παράμετροι w είναι σταθερές. Από την αντίστοιχη μελέτη, είδαμε ότι αυτομάτως αποκλείονται κάποιες περιοχές για τις δυνατές τιμές των w για λόγους συνέπειας, αλλά και ότι είναι δυνατόν, με μόνη την υπόθεση ότι οι παράμετροι Hubble πηγαίνουν στο 0 με τον ίδιο ρυθμό, να δούμε ότι η γενική λύση εμφανίζει από ένα σημείο και μετά ταύτιση με μια από τις ειδικές λύσεις της.

Αυτή η παρατήρηση μας επέτρεψε να εφαρμόσουμε μια ειδική περίπτωση της προσεγγιστικής μεθόδου Picard για μια ομάδα περιπτώσεων ώστε να βρούμε τη γενική λύση στο χώρο των χρόνων. Η μεγάλη χρησιμότητα αυτού είναι ότι, αν κανείς πάει να μελετήσει αριθμητικά το πρόβλημα αυτό, με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, συναντάει μεγάλη δυσκολία στο να ξεπεράσει τη χρονική περίοδο στην οποία εκ των υστέρων, και μέσω της επιτυχημένης εφαρμογής της μεθόδου Picard, βλέπουμε ότι αντιστοιχεί σε μια αρκετά απότομη μετάπτωση της τιμής της παραμέτρου q . Επιπλέον, λόγω της αναλυτικής της φύσης, μας επιτρέπει να βγάλουμε περισσότερα συμπεράσματα για το πως επηρεάζουν οι τιμές των διαφόρων παραμέτρων την εξέλιξη του συστήματος (για παράδειγμα η δυνατότητα να επιβάλουμε τη χρονική στιγμή κατά την οποία το σύστημα μας θα έχει ανωμαλία μέσω των παραμέτρων w).

Είδαμε με χρήση αυτής της μεθόδου, για $n = 1$, ότι είναι δυνατόν, με τις πιο εύκολα επιτεύξιμες συνθήκες που επιβάλαμε, να συμπεριληφθούν ποιοτικά τα πιο σημαντικά δεδομένα της δυναμικής Κοσμολογίας, χωρίς ταυτόχρονα να απέχουμε σημαντικά στις ακριβείς τιμές τους ενώ εκ του αποτελέσματος φάνηκε ότι και με μεγαλύτερη ελευθερία στις δυνατές τιμές των w δε μπορούμε να πάρουμε ακριβώς σταθερές επιπλέον διαστάσεις για όλη τη διάρκεια της εξέλιξης του Σύμπαντος. Είναι δε σημαντικό το ότι εκ των υστέρων φάνηκε ότι η επιλογή των σημερινών τιμών για το q και το A_0 της πλήρους $3 + n + 1$ εικόνας να συμπίπτουν με τις παρατηρούμενες της τετραδιάστατης εικόνας, είναι εν πολλοίς δικαιολογημένη από τη σταθερότητα του παράγοντα κλίμακας $b(t)$. Επιπλέον, φάνηκε από την κατασκευή του μοντέλου για $n = 3$ με $k_b = 0$, ότι ο αριθμός των επιπλέον διαστάσεων δεν αλλάζει ποιοτικά τα αποτελέσματα, όταν επιβάλουμε τις ίδιες συνθήκες που θέλουμε να ικανοποιούνται σήμερα, σχετικά με την επιτάχυνση και τη σταθεροποίηση του εσωτερικού χώρου. Η διαφοροποίηση μεταξύ των περιπτώσεων, έγγυται στο ότι αυξάνοντας το n γίνεται πιο δύσκολο να επιτευχθεί η συνθήκη σταθεροποίησης, ενώ αλλάζουν ελαφρώς και οι περιοχές των τιμών των w που είναι συνεπείς με τη γενική λύση.

Επιπλέον, μέσω της ισοδύναμης εικόνας στις 4 διαστάσεις μπορούμε να αντιληφθούμε ότι το να πάρουμε σταθερές καταστατικές εξισώσεις στην $3 + n + 1$ εικόνα, δε συνεπάγεται ότι ένας τετραδιάστατος παρατηρητής θα πρέπει να βλέπει σταθερή την κοσμική καταστατική εξίσωση, καθώς αυτή εν γένει θα μεταβάλλεται, αν μεταβάλλεται ο παράγοντας κλίμακας $b(t)$. Στην πραγματικότητα μάλιστα αυτή είναι και η γενικότερη περίπτωση, η οποία όμως παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερη δυσκολία στο να αντιστοιχηθεί με την τετραδιάστατη εικόνα, λόγω της πολυπλοκότητας στην έκφραση του $b(t)$ που λαμβάνουμε από τη μέθοδο Picard. Βεβαίως είναι πάντα δυνατό

να κάνει κανείς κατά περιοχές προσεγγίσεις για τη μορφή του $b(t)$ που θα επιτρέψουν αρκετά αξιόπιστα συμπεράσματα.

Συμπερασματικά, δείξαμε ότι είναι δυνατόν μια Κοσμολογία που επεκτείνεται κατά Kaluza-Klein να έχει κάποια επιτυχία στην προσπάθεια να αντικαταστήσει την κλασσική Κοσμολογία, με βασικότερο κόστος μια μεγαλύτερη ελευθερία στις τιμές των παραμέτρων w , δηλαδή στις καταστατικές εξισώσεις, που ασφαλώς δημιουργεί ερωτηματικά σχετικά με το ποια θα μπορούσε να είναι η φύση της ύλης που χαρακτηρίζεται από τέτοιες τιμές. Η ύπαρξη νέας Φυσικής μελετάται σε μεγάλο βαθμό όχι μόνο στα πλαίσια της Κοσμολογίας αλλά, κυριότερα, στα πλαίσια των θεωριών Στοιχειωδών Σωματίων, όπου μάλιστα η επέκταση κατά Kaluza-Klein σημειώνει αρκετές επιτυχίες. Για παράδειγμα, ένας υποψήφιος για τη σκοτεινή ύλη που, όπως είδαμε, απαιτείται στην Κοσμολογία για να εξηγήσει τη σταθερότητα των μεγάλων δομών, προκύπτει στα πλαίσια των επεκτάσεων Kaluza-Klein αβίαστα, ως το πρώτο μωδε του φωτονίου.

Σημειώνουμε τέλος, ότι η παραπάνω μέθοδος έχει εφαρμοστεί θεωρώντας για τα w ότι δεν έχουν χρονική εξάρτηση. Είναι λοιπόν προφανές ότι τα αποτελέσματα μπορεί να είναι τελείως διαφορετικά, αν υπάρχει κάποιος ξεχωριστός μηχανισμός μετάπτωσης, ή εξέλιξης, στις καταστατικές εξισώσεις. Κάτι τέτοιο όμως προκαλεί πολύ μεγαλύτερη δυσκολία στην εφαρμογή της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε για την παρούσα εργασία.

Αναφορές Κεφαλαίου

[6],[7],[8],[9],[10],[11],[12],[13],[16]

Παράρτημα

Σύμβαση μετρικής: $\{-, +, +, +\}$

Ταχύτητα Φωτός: $c = 1$

Σημερινή τιμή παραμέτρου Hubble: $H_0 \approx 70 \frac{km}{s \cdot Mpc}$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$F, \hat{F}$: το αντικείμενο F στην $3 + n + 1$ και στην τετραδιάστατη εικόνα αντίστοιχα

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} \text{ (} t \text{: ο χρόνος στην } 3 + n + 1 \text{εικόνα)}$$

$$\dot{\hat{F}} = \frac{d\hat{F}}{d\hat{t}} \text{ (} \hat{t} \text{: ο χρόνος στην τετραδιάστατη εικόνα)}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, 1972.
- [2] Steven Weinberg, *Cosmology*, Oxford university Press, 2008.
- [3] William Kinney, Edward Kolb, Alessandro Melchiori, Antonio Riotto, astro-ph/0605338v1, 2006.
- [4] Timothy Clifton, Pedro Ferreira, Antonio Padilla, Constantinos Skordis, *Modified Gravity and Cosmology*, astro-ph/1106.2476.v3, 2012.
- [5] Hsin-Chia Cheng, *2009 TASI Lectures - Introduction to Extra Dimensions*, 2009.
- [6] Torsten Bringmann, Martin Ericsson, Michael Gustafsson, *Cosmological Evolution of Universal Extra Dimensions*, Physical Review D 68, 063516, 2003.
- [7] Torsten Bringmann, Martin Ericsson, astro-ph/0308498v2, 2003.
- [8] Michael Gustafsson, *Doctoral Thesis*, 2008.
- [9] Paul Townsend, Mattias Wohlfarth, hep-th/0303097v3, 2003.
- [10] James Cline, Jeremie Vinet, hep-ph/0211284v3, 2003.
- [11] Thomas Appelquist, Alan Chodos, *Quantum Effects in Kaluza - Klein Theories*, Physical Review Letters vol. 50, number 3, 1983.
- [12] Thomas Appelquist, Alan Chodos, *Quantum dynamics of Kaluza - Klein theories*, Physical Review D vol. 28, number 4, 1983.
- [13] G. Khadekar, V. Khamdi, *Higher Dimensional Cosmological Model of the Universe with Variable Equation of State Parameter in the Presence of G and Λ* , Rom. Journ. Phys., Vol. 55, Nos 7-8, p. 871-880, 2010.

- [14] Antonio Maroto, Juan Ramirez, *A conceptual Tour About the Standard Cosmological Model*, astro-ph/0409280v1, 2004.
- [15] Arjun Berera, *Cosmology Lectures, British Summer School in Theoretical Elementary Particle Physics*, 2004.
- [16] V. Nemytskii, V. Stepanov, *Qualitative Theory of Differential Equations*, 1960.