



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

Ομάδα Επανακανονικοποίησης και
μη Αβελιανές Θεωρίες Βαθμίδας

Γαλάνης Μάριος

ΑΜ: 1110 201300027

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων

Επιβλέπων

Καθηγητής Νικόλαος Τετράδης

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής & Στοιχειωδών Σωματιδίων

Αθήνα 2017

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετούμε την επανακανονικοποίηση των θεωριών βαθμίδας. Ξεκινούμε εξάγοντας αυτές τις θεωρίες από πρώτες αρχές συμμετρίας. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινούμε από μία ελεύθερη λαγκρανζιανή φερμιονίων και παρατηρούμε ότι είναι αναλλοίωτη σε καθολικούς μετασχηματισμούς της μονοπαραμετρικής ομάδας συμμετρίας $U(1)$ που δεν είναι τίποτε άλλο από αναλλοιώτητα σε πολλαπλασιασμό των πεδίων με κάποια αυθαίρετη φάση. Προάγοντας αυτήν την καθολική συμμετρία σε τοπική, προκύπτει ότι πρέπει να εισαχθούν νέα πεδία που θα αλληλεπιδρούν με τα φερμιονικά. Η απαίτηση της τοπικής $U(1)$ συμμετρίας δίνει την λαγκρανζιανή του ηλεκτρομαγνητισμού, η δράση της οποίας όταν στασιμοποιηθεί θα δώσει τις εξισώσεις Maxwell.

Στη συνέχεια γράφουμε μία θεωρία περισσοτέρων ελευθέρων φερμιονίων που είναι αναλλοίωτη κάτω από την καθολική $SU(N)$. Προάγουμε και αυτήν σε τοπική συμμετρία και βλέπουμε αποτελέσματα αντίστοιχα με τα προηγούμενα. Ωστόσο, τώρα εμφανίζονται και επιπλέον όροι αλληλεπίδρασης στην λαγκρανζιανή, λόγω της μη μεταθετικότητας των γεννητόρων της $SU(N)$. Για αυτό το λόγο λέγονται μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας αυτές.

Προχωρούμε να χβαντώσουμε τις λαγκρανζιανές των θεωριών αυτών που φτιάξαμε. Λόγω συμμετρίας βαθμίδας, τα ολοκληρώματα αποκλίνουν, οπότε χρησιμοποιούμε την μέθοδο Faddeev-Popov για να απομονώσουμε μόνο τους φυσικούς βαθμούς ελευθερίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στην μη αβελιανή περίπτωση να εισάγονται επιπλέον αφύσικοι βαθμοί ελευθερίας, τα ghosts.

Προχωρούμε στην ομάδα επανακανονικοποίησης, όπου εξάγουμε την εξίσωση Callan-Symanzik για τις επανακανονικοποιημένες συναρτήσεις Green. Σε αυτό το πλαίσιο ορίζουμε την συνάρτηση β , της οποίας αναλύουμε τις ιδιότητες. Προχωρούμε στην εύρεση ενός τρόπου υπολογισμού της διαταραχτικά. Σε όλη αυτή την συζήτηση προϋποθέτουμε εξοικείωση με τους όρους επανακανονικοποίησης, όπως counterterms, αποκλίνοντα διαγράμματα κλπ. Εφόσον έχουμε εξάγει αρκετές σχέσεις, συζητούμε το φυσικό νόημα της ομάδας επανακανονικοποίησης και της συνάρτησης β , καταλήγοντας στην έννοια της ενεργού σταθεράς αλληλεπίδρασης.

Στη συνέχεια, μελετούμε την QED στο επίπεδο του ενός βρόχου. Χρησιμοποιώντας την γνώση μας επάνω στην επανακανονικοποίησης από το δεύτερο κεφάλαιο, προχωρούμε να άρουμε τις απειρίες σε πρώτη τάξη στη θεωρία διαταραχών και να υπολογίσουμε τις πρώτες χβαντικές διορθώσεις στην ισχύ της αλληλεπίδρασης και στον γυρομαγνητικό λόγο του ηλεκτρονίου. Τα αποτελέσματά μας, αν και αποτελούν όλα μικρές διορθώσεις, έχουν επιβεβαιωθεί πειραματικά. Κλείνουμε αυτήν την ενότητα υπολογίζοντας την συνάρτηση β καθώς και την ενεργό σταθερά αλληλεπίδρασης της QED.

Έχοντας όλη την προηγούμενη εμπειρία, μελετούμε τα διαγράμματα στο επίπεδο ενός βρόχου σε μία γενική θεωρία βαθμίδας $SU(N)$. Ο σκοπός είναι να υπολογίσουμε την συνάρτηση β μιας τέτοιας θεωρίας, ώστε να δούμε την υψηλοενεργειακή και χαμηλοενεργειακή συμπεριφορά της. Αποδεικνύουμε στο τέλος ότι η Κβαντική Χρωμοδυναμική (QCD), η οποία είναι μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας με ομάδα συμμετρίας την $SU(3)$, είναι, σε αντίθεση με την (αβελιανή) Κβαντική Ηλεκτροδυναμική, ασυμπτωτικά ελεύθερη θεωρία, για έναν δεδομένο και μικρό αριθμό φερμιονίων.

Η εργασία αυτή έχει ως στόχο να εκθέσει την θεωρία της επανακανονικοποίησης στην εύληπτη περίπτωση της θεωρίας διαταραχών στο επίπεδο του ενός βρόχου. Δεν είναι σε καμία περίπτωση πλήρης έκθεση του ζητήματος. Παρουσιάζονται μόνο όσες πληροφορίες κρίνει ο γράφοντας απαραίτητες για την, πρώτα από όλα διαισθητική, και έπειτα επιφανειακά τεχνική κατάρτιση στο ζήτημα. Υπάρχουν πολλές λεπτομέρειες που παραλείπονται (αναφορά σε συμμετρίες, μοναδιακότητα κλπ) και πράγματα που δεν αγγίζονται καθόλου (θεωρία συνεχών ομάδων), αλλά πιστεύουμε ότι η γενική ιδέα, που είναι και το ζητούμενο, μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητή.

Περιεχόμενα

1	ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΘΕΩΡΙΩΝ ΒΑΘΜΙΔΑΣ	1
1.1	Εισαγωγή	1
1.2	Η αβελιανή περίπτωση	2
1.3	Η λαγκρανζιανή Yang-Mills	4
1.4	Η μέθοδος Faddeev-Popov	5
1.5	Κβάντωση θεωριών Yang-Mills	7
1.6	Ταυτότητα Ward-Takahashi για την QED	9
2	ΟΜΑΔΑ ΕΠΑΝΑΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ	11
2.1	Εισαγωγή	11
2.2	Εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης	11
2.3	Λύση της RGE	13
2.4	Υπολογισμός των β και γ	16
2.5	Φυσική σημασία της $\beta(\lambda)$	17
2.6	Ενεργός σταθερά αλληλεπίδρασης	18
3	QED ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΝΟΣ ΒΡΟΧΟΥ	20
3.1	Εισαγωγή	20
3.2	Ο κόμβος αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίου-φωτονίου	20
3.3	Διόρθωση στην ιδιοενέργεια του ηλεκτρονίου	24
3.4	Ιδιοενέργεια του φωτονίου	27
3.5	Επανακανονικοποίηση της θεωρίας	33
4	ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ β ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ YANG-MILLS	37
4.1	Εισαγωγή	37
4.2	Διάγραμμα ιδιοενέργειας φερμιονίου	38
4.3	Διαγράμματα διορθώσεων στους κόμβους	38
4.4	Διαγράμματα ιδιοενέργειας των μποζονίων βαθμίδας	41
4.5	Υπολογισμός συνάρτησης β	48
	Α' Κανόνες Feynman	49

Β' Τα Z στο MS scheme είναι ανεξάρτητα της μάζας	51
Γ' Ολοκληρώματα Βρόχων και Διαστατική Ομαλοποίηση	53
Δ' Άλγεβρα πινάκων γ^μ	56
Βιβλιογραφία	58

Κεφάλαιο 1

ΚΒΑΝΤΩΣΗ ΘΕΩΡΙΩΝ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

1.1 Εισαγωγή

Αφού γράψουμε από πρώτες αρχές την πιο γενική ελεύθερη λαγκρανζιανή που μπορούμε για σπιν $1/2$ φερμιονικά πεδία, καταλήγουμε στην λαγκρανζιανή του Dirac. Παρατηρούμε ότι αυτή έχει συμμετρία στροφής $U(1)$ των φερμιονικών πεδίων. Το ερώτημα που γεννιέται είναι αν μπορούμε να γράψουμε μία λαγκρανζιανή στην οποία αυτή η συμμετρία θα έχει προαχθεί σε τοπική συμμετρία, στην οποία η παράμετρος της $U(1)$ στροφής θα εξαρτάται από την χωροχρονική θέση. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ότι αυτό γίνεται για τοπική $U(1)$ συμμετρία και το αποτέλεσμα είναι η κλασική λαγκρανζιανή του ηλεκτρομαγνητισμού, στην οποία το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει συζευχθεί με το ρεύμα που προκύπτει από την εξίσωση του Dirac.

Η ίδια λογική μπορεί να ακολουθηθεί βάζοντας περισσότερα ελεύθερα φερμιόνια, η λαγκρανζιανή των οποίων παρουσιάζει $SU(N)$ καθολική συμμετρία. Προάγοντας αυτή σε τοπική συμμετρία, καταλήγει κανείς στις *μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας* ή *θεωρίες Yang-Mills*.

Το επόμενο βήμα είναι η κβάντωση αυτών των θεωριών, η οποία παρουσιάζει κάποια δυσκολία λόγω της συμμετρίας βαθμίδας. Για να ξεπεράσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιούμε την μέθοδο των Faddeev-Popov.

Τέλος, χρησιμοποιούμε τον συναρτησιακό φορμαλισμό για να δείξουμε πώς μπορούν να εξαχθούν ταυτότητες για τις συναρτήσεις Green στις θεωρίες βαθμίδας, χρησιμοποιώντας την πιο απλή περίπτωση των δύο φερμιονικών πεδίων στην QED.

1.2 Η αβελιανή περίπτωση

Έστω η Λαγκρανζιανή ενός ελεύθερου φερμιονικού πεδίου

$$\mathcal{L}_{\text{abelian}} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi.$$

Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{L}_{\text{abelian}}$ είναι αναλλοίωτη κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς των πεδίων με καθολική πραγματική παράμετρο a

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow e^{ia}\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow e^{-ia}\bar{\psi},\end{aligned}$$

όπου a κάποια σταθερά. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προάγουμε αυτήν την $U(1)$ καθολική συμμετρία σε τοπική συμμετρία (την ονομάζουμε $U(1)$ γιατί παραμετροποιείται από μία μοναδική παράμετρο, την a , και ο πίνακας του μετασχηματισμού έχει μοναδιαία ορίζουσα). Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε να προάγουμε την $\mathcal{L}_{\text{abelian}}$ σε μία λαγκρανζινή που να σέβεται την συμμετρία $U(1)$ με παράμετρο $a(x^\mu)$, που εξαρτάται, δηλαδή, από τον χωρόχρονο. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι

$$\begin{aligned}\psi(x) &\rightarrow e^{ia(x)}\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow e^{-ia(x)}\bar{\psi}(x).\end{aligned}\tag{1.1}$$

Προκειμένου να βρούμε πώς αλλάζει η παράγωγος ∂_μ κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό κοιτάμε τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου, στη διεύθυνση του η^μ . Αυτός είναι

$$\eta^\mu \partial_\mu \psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \epsilon\eta) - \psi(x)}{\epsilon},$$

το οποίο δεν καλώς ορισμένο νόμο μετασχηματισμού κάτω από την [1.1] γιατί αλλιώς μετασχηματίζεται το $\psi(x + \epsilon\eta)$ και αλλιώς το $\psi(x)$. Προκειμένου να οριστεί καλώς η παράγωγος, πρέπει η σύγκριση στο x και στο $x + \epsilon\eta$ να έχει νόημα, δηλαδή να ορίσουμε μία ποσότητα $U(y, x)$ τέτοια ώστε ο νόμος μετασχηματισμού των $\psi(y)$ και $U(y, x)\psi(x)$ να είναι ίδιος. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει αν ορίσουμε τον νόμο μετασχηματισμού του κάτω από την [1.1] με τον προφανή τρόπο:

$$U(y, x) \rightarrow e^{a(y)}U(y, x)e^{-a(x)}.$$

Τότε ορίζεται η συναλλοίωτη παράγωγος D_μ με λογικό τρόπο

$$\eta^\mu D_\mu \psi(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\psi(x + \epsilon\eta) - U(x + \epsilon\eta, x)\psi(x)}{\epsilon}.$$

Προφανώς ορίζουμε $U(y, y) = 1$, οπότε αναπτύσσουμε την παραπάνω ως προς ϵ . Ορίζοντας το ανάπτυγμα του U ως

$$U(x + \epsilon\eta, x) = 1 - i\epsilon\eta^\mu A_\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

με e αυθαίρετη σταθερά και A^μ αυθαίρετο πεδίο (οι μόνη συνθήκη που επιβάλλεται να ικανοποιούν είναι ο νόμος μετασχηματισμού του $U(y, x)$). Τότε ο ορισμός της D_μ δίνει

$$D_\mu\psi(x) = \partial_\mu\psi(x) + ieA^\mu(x),$$

ενώ από τον νόμο μετασχηματισμού του $U(y, x)$ προκύπτει ότι

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu a(x). \quad (1.2)$$

Για να γράψουμε την πιο γενική λαγκρανζιανή που είναι αναλλοίωτη σε αυτούς τους τοπικούς μετασχηματισμούς, πρέπει να εισάγουμε και κινητικούς ή ακόμα και όρους μάζας για τα πεδία A^μ , που δεν εξαρτώνται από το ψ . Είναι προφανές ότι, λόγω του μετασχηματισμού [1.2], όροι της μορφής $A^\mu A_\mu$ δεν μπορούν να υπάρξουν στην λαγκρανζιανή γιατί δεν είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό [1.1]. Οπότε αναζητούμε όρους με παραγώγους του A^μ . Για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε το $U(y, x)$ που ορίσαμε παραπάνω. Θεωρώντας ότι είναι μία απλή φάση, μπορούμε να γράψουμε

$$U(x + \epsilon\eta, x) = \exp \left[-i\epsilon\eta^\mu A_\mu(x + \frac{\epsilon}{2}\eta) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right].$$

Ορίζοντας ένα τετράγωνο στον χωρόχρονο (βλ ;;;) με πλευρές $\hat{1}$ και $\hat{2}$, και ξεκινώντας από το x μπορούμε να ορίσουμε την επιστροφή στο ίδιο σημείο ως:

$$\mathbf{U}(x) = U(x, x + \epsilon\hat{2})U(x + \epsilon\hat{2}, x + \epsilon\hat{1} + \epsilon\hat{2})U(x + \epsilon\hat{1} + \epsilon\hat{2}, x + \epsilon\hat{1})U(x + \epsilon\hat{1}, x),$$

το οποίο είναι τοπικά αναλλοίωτο σύμφωνα με τον μετασχηματισμό του $U(y, x)$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό για το $U(x + \epsilon\eta)$ και αναπτύσσοντας ως προς ϵ προκύπτει ότι η ποσότητα

$$\mathbf{U}(x) = 1 - i\epsilon^2 e [\partial_1 A_2(x) - \partial_2 A_1(x)] + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

πράγμα που σημαίνει ότι η ποσότητα αυτή είναι

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

είναι τοπικά αναλλοίωτη. Οπότε οι μόνοι συνδυασμοί ποσοτήτων που μπορούν να εισαχθούν στην λαγκρανζιανή είναι συναλλοίωτοι συνδυασμοί του $F^{\mu\nu}$. Παρατηρείστε ότι

$$[D_\mu, D_\nu] = ieF_{\mu\nu}.$$

Απαιτώντας P, T συμμετρία, τελικά καταλήγουμε στην πιο γενική λαγκρανζιανή για αβελιανή θεωρία με φερμιόνια, αναλλοίωτη κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς

$$\mathcal{L}_{\text{abelian}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi. \quad (1.3)$$

Παρατηρείστε ότι ο όρος $\sim F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ προέκυψε καθαρά από την απαίτηση της τοπικής συμμετρίας και αποτελεί ακριβώς την λαγκρανζιανή του ηλεκτρομαγνητισμού σε ελεύθερο χώρο, της οποίας την δράση αν ελαχιστοποιήσουμε θα πάρουμε τις εξισώσεις του Maxwell στο κενό. Άρα η [1.3] είναι η λαγκρανζιανή της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής με ένα φωτονικό και ένα φερμιονικό πεδίο.

1.3 Η λαγκρανζιανή Yang-Mills

Ας θεωρήσουμε τώρα μία θεωρία N φερμιονίων, ορίζοντας την N -πλέτα

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}$$

Ο μετασχηματισμός, τώρα, θα έχει να κάνει με την με παραμέτρους θ^a και με τους γεννήτορες t^a της ομάδας συμμετρίας, που τώρα θα είναι η $SU(N)$. Αυτοί ικανοποιούν την άλγεβρα της ομάδας

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c.$$

Οπότε έχουμε τώρα τον μετασχηματισμό

$$\psi(x) \rightarrow V(x)\psi(x) \equiv \exp(-i\theta^a(x)t^a)\psi(x),$$

όπου οι δείκτες a αθροίζονται (δεν είναι συναλλοίωτοι δείκτες, είναι δείκτες της ομάδας συμμετρίας (gauge group). Σε αναλογία με τα παραπάνω, ορίζουμε τον $U(y, x)$ να μετασχηματίζεται ως

$$U(y, x) \rightarrow V(y)U(y, x)V^\dagger(x), \quad (1.4)$$

και αναπτύσσουμε το $U(x + \epsilon\eta, x)$. Επειδή τώρα έχουμε $N^2 - 1$ γεννήτορες στην ομάδα συμμετρίας, απαιτούνται $N^2 - 1$ νέα διανυσματικά πεδία τύπου A^μ , ένα για κάθε γεννήτορα:

$$U(x + \epsilon\eta, x) = 1 + ig\epsilon\eta^\mu A_\mu^a t^a + \mathcal{O}(\epsilon^3),$$

και έτσι η συναλλοίωτη παράγωγος εδώ ορίζεται ως

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu^a t^a.$$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα του $U(y, x)$ για απειροστές μεταβολές, προκύπτει ο μετασχηματισμός των A_μ^a , ο οποίος είναι

$$\begin{aligned} A_\mu^a t^a &\rightarrow A_\mu^a t^a + \frac{1}{g}(\partial_\mu \theta^a) t^a + i \left[\theta^a t^a, A_\mu^b t^b \right] \\ &\rightarrow A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \theta^a + f^{abc} A_\mu^b \theta^c. \end{aligned}$$

Το αντίστοιχο του τανυστή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου θα δίνεται και πάλι από τον μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων, και θα είναι

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a t^a,$$

το οποίο σημαίνει

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

και έτσι η λαγκρανζιανή θεωρίας Yang-Mills που είναι αναλλοίωτη κάτω από την τοπική δράση της ομάδας $SU(N)$ είναι

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi \quad (1.5)$$

1.4 Η μέθοδος Faddeev-Popov

Θέλουμε τώρα την λαγκρανζιανή [1.4] να την κβαντώσουμε και να λάβουμε κανόνες Feynman για τα πεδία A_μ^a και για την αλληλεπίδρασή τους με τα φερμιόνια ψ . Θα υπολογίσουμε τον διαδότη των A_μ^a με την συναρτησιακή μέθοδο των Faddeev-Popov.

Θα μελετήσουμε αναλυτικά την αβελιανή περίπτωση στην οποία οι χειρισμοί της μεθόδου είναι πιο ξεκάθαροι. Ξεκινάμε γράφοντας το συναρτησιακό ολοκλήρωμα για το ελεύθερο φωτονικό πεδίο ως

$$\int \mathcal{D}A \exp \left[i \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \right].$$

Το πρόβλημα που υπάρχει εδώ είναι ότι η λαγκρανζιανή αυτή είναι αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς βαθμίδας

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x).$$

Οι προβληματικοί όροι είναι οι ισοδύναμοι στο $A_\mu(x) = 0$, γιατί τότε είναι σαν να αθροίζουμε άπειρες φορές την μονάδα στο συναρτησιακό μας ολοκλήρωμα. Για να το αποφύγουμε αυτό θα απομονώσουμε τον όρο του συναρτησιακού ολοκληρώματος που μετράει μόνο μία φορά το πεδίο $A_\mu(x) = 0$.

Για να το κάνουμε αυτό στην ουσία θα επιλέξουμε κάποια βαθμίδα. Έστω $G(A)$ κάποια συνάρτηση που θα θέσουμε ίση με το 0, ως συνθήκη καθορισμού βαθμίδας. Για παράδειγμα, η βαθμίδα Lorenz είναι η $G(A) = \partial_\mu A^\mu = 0$. Για να περιορίσουμε το συναρτησιακό ολοκλήρωμα μόνο σε αυτές τις διαμορφώσεις θα εισάγουμε μία $\delta(G(A))$ με την ταυτότητα

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right),$$

με $A_\mu^\alpha(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x)$. Η παραπάνω ορίζουσα, αν και δεν είναι προφανής κατασκευή, προέρχεται από την συνεχή γενίκευση της αντίστοιχης ταυτότητας σε διακριτό χώρο. Αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ είναι ότι είναι ανεξάρτητη του πεδίου A . Εισάγοντάς τη μονάδα, με αυτή τη μορφή, στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα της θεωρίας, έχουμε

$$\det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(G(A^\alpha)).$$

Αλλάζουμε μεταβλητή από A σε A^α . Η δράση παραμένει ίδια γιατί η λαγκρανζιανή είναι αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς βαθμίδας, ενώ, εφόσον ο μετασχηματισμός είναι γραμμικός στο A , θα είναι $\mathcal{D}A = \mathcal{D}A^\alpha$. Μετονομάζοντας τώρα το A^α σε A στην ολοκλήρωση, θα είναι

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha}\right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(G(A)),$$

οπότε το συναρτησιακό ολοκλήρωμα τώρα έχει τον περιορισμό της άθροισης στα πεδία που είναι μη φυσικά ισοδύναμα, ενώ ο όρος της απόκλισης λόγω των $\alpha(x)$ δίνει τώρα μόνο έναν (άπειρο) πολλαπλασιαστικό παράγοντα.

Ορίζουμε, τώρα, κάποια συνθήκη καθορισμού της βαθμίδας. Επιλέγουμε

$$G(A) = \partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x),$$

όπου $\omega(x)$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση, γενικεύοντας, έτσι, την συνθήκη Lorenz. Έτσι

$$\int \mathcal{D}A e^{iS[A]} = \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right) \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(\partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)).$$

Αυτή η ισότητα ισχύει για κάθε συνάρτηση $\omega(x)$, οπότε θα ισχύει και αν αντικαταστήσουμε το δεξί μέλος με έναν οποιονδήποτε σωστά κανονικοποιημένο γραμμικό συνδυασμό συναρτήσεων $\omega(x)$. Επιλέγουμε, λοιπόν, να ολοκληρώσουμε ως προς συναρτήσεις $\omega(x)$ με γκαουσιανή συνάρτηση βάρους, μέσης τιμής $\omega = 0$. Οπότε το δεξί μέλος της παραπάνω γίνεται

$$\begin{aligned} N(\xi) \int \mathcal{D}\omega \exp \left[-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi} \right] \det \left(\frac{1}{e} \partial^2 \right) \left(\int \mathcal{D}\alpha \right) \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \delta(\partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)) \\ = \mathcal{N} \cdot \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \exp \left[-i \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \right], \end{aligned}$$

όπου η σταθερά $N(\xi)$, όπως και η $\mathcal{N}$ έχουν να κάνουν με συνολικούς πολλαπλασιαστικούς παράγοντες (άπειρους ή μη). Το ξ μπορούμε να το επιλέξουμε ό,τι θέλουμε.

Προφανώς, οι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν είναι συναρτήσεις Green, οι οποίες, όπως είναι γνωστό, είναι κανονικοποιημένες ως εξής

$$\langle \Omega | T \{ \mathcal{O}(A) \} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}(A) \exp \left[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}{\int \mathcal{D}A \exp \left[i \int_{-T}^T d^4x \mathcal{L} \right]}.$$

Κάνοντας τους ίδιους χειρισμούς, θα καταλήξουμε στα ίδια εκθετικά σε αριθμητή και παρονομαστή, ενώ οι (άπειροι) συντελεστές θα αλληλοακυρωθούν. Οπότε, ισοδύναμα, με την μέθοδο αυτή εισήγαμε έναν όρο καθορισμού βαθμίδας στην λαγκρανζιανή, η οποία τώρα έγινε

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2.$$

Ο διαδότης του φωτονίου, τώρα, μπορεί να υπολογιστεί, αφού ο τελεστής της αντίστοιχης εξίσωσης Green είναι αντιστρέψιμος:

$$\tilde{D}_F^{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right).$$

1.5 Κβάντωση θεωριών Yang-Mills

Ακολουθούμε την ίδια μέθοδο με την αβελιανή περίπτωση, εισάγοντας στο αντίστοιχο συναρτησιακό ολοκλήρωμα την μονάδα

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha(x) \delta(G(A^\alpha)) \det \left(\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} \right),$$

όπου τώρα

$$(A^\alpha)_\mu^a = A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a + f^{abc} A_\mu^b \alpha^c = A_\mu^a + \frac{1}{g} D_\mu \alpha^a.$$

Το αντίστοιχο της ορίζουσας που απορροφήσαμε στην σταθερά κανονικοποίησης $\mathcal{N}$ στην αβελιανή περίπτωση θα έχει, τώρα, την συναλλοιώτη παράγωγο, αφού

$$\frac{\delta G(A^\alpha)}{\delta \alpha} = \frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu.$$

Αυτή όμως εξαρτάται από τα πεδία A και, άρα, πρέπει να συμπεριληφθεί στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα στα A . Ωστόσο, οι Faddeev-Popov βασίστηκαν στο γεγονός ότι οι συναρτησιακές ολοκληρώσεις τελεστών διγραμμικών σε Grassman μεταβλητές (όπως ο κινητικός όρος στην ελεύθερη λαγκρανζιανή του Dirac για παράδειγμα) δίνουν αποτέλεσμα ανάλογο της ορίζουσας του τελεστή, σε αντίθεση με τα μποζόνια που είναι γκαουσσιανές μεταβλητές και δίνουν αποτέλεσμα ανάλογο της αντίστροφης ρίζας της ορίζουσας του τελεστή. Έτσι γράψανε

$$\det \left(\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu \right) = \int \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} \exp \left[i \int d^4x \bar{c} (-\partial^\mu D_\mu) c \right].$$

Η οποία ταυτότητα για να ισχύει θα πρέπει τα πεδία c και $\bar{c}$ να είναι βαθμωτά σε μετασχηματισμούς Lorentz και να αντιμετωπίζονται. Αυτή η ιδιότητα παραβιάζει το θεώρημα σπιν-στατιστικής για τα φυσικά σωματίδια. Αυτό, ωστόσο, δεν είναι πρόβλημα, αφού κάθε πλάτος με εξωτερικό σωματίδιο κάποιο c είναι μηδενικό. Τα σωματίδια αυτά, τα οποία μπορεί να υπεισέρχονται σε διαγράμματα Feynman (και πράγματι θα δούμε στο [Κεφάλαιο 4](#) ότι χωρίς αυτά δεν είναι σωστή η συμπεριφορά των θεωριών Yang-Mills στο επίπεδο ενός βρόχου) και ονομάζονται *φαντάσματα* (*ghosts*) *Faddeev-Popov*.

Η πλήρης λαγκρανζιανή μίας γενικής θεωρίας Yang-Mills είναι λοιπόν:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \underbrace{\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a)^2}_{\text{gauge fixing}} + \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi + \underbrace{\bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ac}) c^c}_{\text{ghosts}}.$$

Η παραπάνω ανάλυση τελικά μας δίνει τον διαδότη για τα πεδία A , καθώς και τον διαδότη για τα ghosts. Οι υπόλοιποι κανόνες Feynman διαβάζονται εύκολα από την λαγκρανζιανή της θεωρίας και περιέχονται στο [Παράρτημα A](#).

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right) \delta^{ab} e^{-k \cdot (x-y)}.$$

Η επιλογή $\xi = 1$ (την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στο [Κεφάλαιο 4](#)) ονομάζεται *βαθμίδα Feynman-'t Hooft*.

1.6 Ταυτότητα Ward-Takahashi για την QED

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε την ταυτότητα Ward-Takahashi χρησιμοποιώντας τον συναρτησιακό φορμαλισμό.

Έστω η λαγκρανζιανή της QED, όπου αγνοούμε τον όρο βαθμίδας προς το παρόν:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi,$$

και έστω ο μετασχηματισμός στο φερμιονικό πεδίο μόνο

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x) + ie\alpha(x)\psi(x),$$

όπου το $\alpha(x)$ είναι απειροστό. Κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό η λαγκρανζιανή μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\mathcal{L}_{QED} \rightarrow \mathcal{L}_{QED} - e\partial_\mu\alpha \underbrace{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}_{j^\mu/e}.$$

Έστω, τώρα, το συναρτησιακό ολοκλήρωμα σε δύο φερμιονικά πεδία

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}\right).$$

Το μέτρο της συναρτησιακής ολοκλήρωσης παραμένει αναλλοίωτο γιατί ο μετασχηματισμός αυτός είναι μοναδιαχός (απλώς το ανάπτυγμα μιγαδικού εκθετικού σε πρώτη τάξη, το οποίο είναι μοναδιακό για α μικρό). Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό σε αυτό το ολοκλήρωμα και αναπτύσσοντας σε πρώτη τάξη ως προς α ισχύει η εξής ταυτότητα

$$0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A e^{i \int d^4x \mathcal{L}} \left\{ -i \int d^4x \partial_\mu\alpha(x) [j^\mu\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)] \right. \\ \left. + (ie\alpha(x_1)\psi(x_1))\bar{\psi}(x_2) + \psi(x_1)(-ie\alpha(x_2)\bar{\psi}(x_2)) \right\}.$$

Διαιρώντας με Z καταλήγουμε στην εξής σχέση για τις συναρτήσεις Green

$$i\partial_\mu \langle \Omega | T\{j^\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\} | \Omega \rangle = -ie\delta(x-x_1) \langle \Omega | T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\} | \Omega \rangle \\ + ie\delta(x-x_2) \langle \Omega | T\{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\} | \Omega \rangle,$$

της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier δίνει την ταυτότητα Ward-Takahashi

$$-ik_\mu \mathcal{M}^\mu(k;p;q) = -ie\mathcal{M}_0(p;q-k) + ie\mathcal{M}_0(p+k;q)$$

όπου ο συμβολισμός σημαίνει ότι έχουμε δύο φερμιόνια ορμών p και q , εισερχόμενα και εξερχόμενα αντίστοιχα, ενώ το $\mathcal{M}^\mu$ έχει και ένα εισερχόμενο φωτόνιο. Όταν τα φερμιόνια και το φωτόνιο του $\mathcal{M}^\mu$ είναι on-shell τότε τα φερμιόνια στο δεξί μέλος είναι off-shell και άρα το δεξί μέλος δεν συνεισφέρει όταν το $\mathcal{M}$ είναι στοιχείο του S-matrix. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε την ταυτότητα Ward για στοιχείο του S-matrix:

$$k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$$

Κεφάλαιο 2

ΟΜΑΔΑ

ΕΠΑΝΑΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗΣ

2.1 Εισαγωγή

Η ιδέα της ομάδας επανακανονικοποίησης βασίζεται στην παρατήρηση ότι σε μία δεδομένη θεωρία οι επανακανονικοποιημένες σταθερές είναι μαθηματικές παράμετροι που μπορούν να μεταβάλλονται, αλλάζοντας την αυθαίρετη κλίμακα επανακανονικοποίησης. Όταν αφαιρούμε τους απειρισμούς στα πλαίσια κάποιου σχεδίου επανακανονικοποίησης (renormalization scheme) R , τότε μπορούμε στη συνέχεια να εφαρμόσουμε και άλλα τέτοια (πεπερασμένα) σχέδια R' . Κάθε νέο τέτοιο σχέδιο στην ουσία αφορά μία επαναδιατάξη του διαταρακτικού αναπτύγματος ως προς τις νέες επανακανονικοποιημένες παραμέτρους. Κάθε φορά, οι επανακανονικοποιημένες παράμετροι σχετίζονται διαφορετικά με τις φυσικές ποσότητες, οι οποίες είναι ανεξάρτητες του R , για κάθε R .

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με σχέδια R τα οποία είναι ανεξάρτητα της μάζας και μπορούν να παραμετροποιηθούν από μία κλίμακα ενέργειας μ (αποδεικνύουμε ότι υπάρχει αυτή η κλάση στο [Παράρτημα B](#), όπου δείχνουμε πως το MS scheme είναι ανεξάρτητο της μάζας). Θα εξάγουμε την εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης και θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε την φυσική της σημασία. Θα αποδείξουμε, τέλος, μία γενική σχέση για την ενεργό σταθερά αλληλεπίδρασης μίας θεωρίας.

2.2 Εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης

Ας θεωρήσουμε μία bare («γυμνή») συνάρτηση Green κάποιας θεωρίας Γ_B . Σε κάποιο σχέδιο κανονικοποίησης (renormalization scheme) R , η νέα συνάρτηση Green θα συνδέεται με την παλιά μέσω της

$$\Gamma_R = Z(R)\Gamma_B,$$

όπου το $Z(R)$ συμβολίζει τον κατάλληλο γινόμενο σταθερών επανακανονικοποίησης που ορίζεται στα πλαίσια του R . Φυσικά μπορεί κανείς να αλλάξει το σχέδιο σε ένα R' και τότε θα είναι

$$\Gamma_{R'} = Z(R', R)\Gamma_R,$$

με $Z(R', R) = Z(R')/Z(R)$. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβεί ορίζοντας την θεωρία ως ένα cutoff Λ για την ορμή και μετά επαναορίζοντας την νέα θεωρία σε μία άλλη μικρότερη κλίμακα $b\Lambda$, $b < 1$. Το σημαντικό σημείο είναι ότι οι bare συναρτήσεις Green δεν εξαρτώνται από τις παραμέτρους που έχουμε βάλει με το χέρι μέσω του R , όπως το cutoff Λ . Όσα θα ακολουθήσουν αφορούν σχέδια επανακανονικοποίησης ανεξάρτητα της μάζας, όπως το minimal subtraction scheme, στο οποίο απορροφούμε μόνο τους αποκλίνοντες όρους στους counterterms (η απόδειξη για το ότι πράγματι αυτό το σχέδιο επανακανονικοποίησης είναι ανεξάρτητο της μάζας δίνεται στο [Παράρτημα Β](#)).

Ας μελετήσουμε τι γίνεται στην θεωρία ϕ^4 με bare σταθερές m_B και λ_B . Πηγαίνουμε σε $d = 4 - \epsilon$ διαστάσεις, στα πλαίσια της διαστατικής ομαλοποίησης (dimensional regularization). Σε αυτήν την περίπτωση, η σταθερά αλληλεπίδρασης λ αποκτά διαστάσεις, τις οποίες απορροφούμε σε μία κλίμακα μάζας, ορίζοντας $\lambda_B \rightarrow \lambda_B \mu^{-\epsilon}$. Οι επανακανονικοποιημένες 1PI συναρτήσεις Green είναι

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu, \epsilon) = Z_3^{n/2} \Gamma_B^{(n)}(p_i, \lambda_B, m_B, \epsilon). \quad (2.1)$$

Εφόσον το σχέδιο επανακανονικοποίησης είναι ανεξάρτητο της μάζας, θα ισχύει για τις σταθερές επανακανονικοποίησης:

$$Z_i = Z_i(\lambda_R, \epsilon),$$

όπου ορίζουμε

$$\lambda_B \mu^{-\epsilon} = Z_3^{-2} Z_1 \lambda_R$$

και

$$m_B = Z_3^{-1/2} Z_0^{1/2} m_R.$$

Επειδή, τώρα, $d\Gamma_B/d\mu = 0$, σύμφωνα με όσα είπαμε στην αρχή, προκύπτει η εξίσωση

$$\left[\mu \left(\frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{d\lambda_R}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \frac{dm_R}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m_R} \right) - \frac{1}{2} n \frac{1}{Z_3} \mu \frac{d}{d\mu} Z_3 \right] \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu, \epsilon) = 0.$$

από την οποία οδηγούμαστε να ορίσουμε τις εξής ποσότητες

$$\begin{aligned} \beta(\lambda_R, \epsilon) &= \mu \frac{d}{d\mu} \lambda_R \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \beta(\lambda_R) \\ \gamma(\lambda_R, \epsilon) &= \frac{1}{2} \mu \frac{d}{d\mu} \ln Z_3 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \gamma(\lambda_R) \\ \gamma_m(\lambda_R, \epsilon) &= \frac{\mu}{m_R} \frac{dm_R}{d\mu} = \frac{1}{2} \mu \ln(Z_3 Z_0^{-1}) \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \gamma_m(\lambda_R) \end{aligned}$$

όπου τα όρια $\epsilon \rightarrow 0$ υπάρχουν εφόσον η θεωρία είναι επανακανονικοποιήσιμη. Έτσι καταλήγουμε στην εξίσωση Callan-Symanzik (Renormalization Group Equation - RGE)

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(\lambda_R) \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + \gamma_m(\lambda_R) m_R \frac{\partial}{\partial m_R} - n \gamma(\lambda_R) \right) \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda_R, m_R, \mu, \epsilon) = 0. \quad (2.2)$$

Αυτή η εξίσωση στην ουσία μας λέει, με μια πρόχειρη ματιά, ότι υπάρχουν καθολικές συναρτήσεις $\beta(\lambda_R)$, $\gamma_m(\lambda_R)$ και $\gamma(\lambda_R)$ που μετρούν το πώς μεταβάλλεται η ισχύς της αλληλεπίδρασης, η μάζα και η ισχύς του πεδίου, προκειμένου να αντισταθμιστεί η αλλαγή στην κλίμακα επανακανονικοποίησης μ .

2.3 Λύση της RGE

Εισάγουμε μία παράμετρο που ποσοτικοποιεί την αλλαγή κλίμακας επανακανονικοποίησης, γράφοντας $\mu = \mu_0 \exp(-t)$, όπου μ_0 μία σταθερά. Θεωρώντας προς στιγμήν ότι $\gamma(\lambda_R) = 0$, καταλήγουμε στην

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \gamma_m(\lambda) m \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, m, \mu_0 \exp(-t)) = 0, \quad (2.3)$$

όπου έχουμε παραλείψει τον δείκτη R στις επανακανονικοποιημένες παραμέτρους.

Ορίζουμε τις ποσότητες $\bar{\lambda}(t, \lambda)$ και $\bar{m}(t, \lambda, m)$ ως λύσεις των εξισώσεων

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t, \lambda)} \frac{dx}{\beta(x)} &= t \\ \bar{m}(t, \lambda, m) &= m \exp \left[\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t, \lambda)} dx \frac{\gamma_m(x)}{\beta(x)} \right] = m \exp \left[\int_0^1 \gamma_m(\bar{\lambda}(t')) dt' \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Παίρνοντας την μερική παράγωγο $\partial/\partial t$ της παραπάνω εξίσωσης [2.4] προκύπτουν οι διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\lambda}(t, \lambda)}{\partial t} &= \beta(\bar{\lambda}) \\ \frac{\partial \bar{m}(t, \lambda, m)}{\partial t} &= \gamma_m(\bar{\lambda}) \bar{m},\end{aligned}\tag{2.5}$$

με προφανείς συνοριακές συνθήκες $\bar{\lambda}(0, \lambda) = \lambda$ και $\bar{m}(0, \lambda, m) = m$. Παραγωγίζοντας, τώρα, το $\bar{\lambda}(t, \lambda)$ ως προς λ από την [2.4] προκύπτει η εξίσωση

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right] \bar{\lambda}(t, \lambda) = 0.\tag{2.6}$$

Από αυτήν προκύπτει ότι κάθε συνάρτηση $f(\lambda, t, \mu_0) = f(\bar{\lambda}(t, \lambda), \mu_0)$ είναι ανεξάρτητη του μ και ικανοποιεί την

$$\mu \frac{d}{d\mu} f = \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) f(\bar{\lambda}(t, \lambda), \mu_0) = 0,\tag{2.7}$$

και επομένως η λύση της [2.3] μπορεί να γραφεί ως:

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, \lambda, m, \mu) = \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \mu \exp(t)) \exp \left[-n \int_0^1 \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt' \right].\tag{2.8}$$

Η εξίσωση αυτή συνδέει την συνάρτηση Green στην κλίμακα επανακανονικοποίησης μ με αυτήν στην κλίμακα $\mu \exp(t)$, όπου οι ποσότητες $\bar{\lambda}(t)$ και $\bar{m}(t)$ είναι, τώρα, οι επανακανονικοποιημένες παράμετροι.

Ας αναλύσουμε λίγο την φυσική σημασία της [2.8]. Το δεξί μέλος της εξίσωσης μας λέει ότι η συνάρτηση Green σε μία κλίμακα επανακανονικοποίησης μ μπορεί να γραφεί σε μία κλίμακα $\mu \exp(t)$, με μία ενεργό σταθερά αλληλεπίδρασης $\bar{\lambda}(t)$ και μία ενεργό μάζα $\bar{m}(t)$. Ο εκθετικός όρος στην ουσία μαζεύει τις επανακανονικοποιήσεις της ισχύος του πεδίου σε όλες τις ενδιάμεσες κλίμακες μεταξύ μ και $\mu \exp(t)$ (θυμηθείτε ότι $t = \ln(\mu_0/\mu)$). Αν το t ήταν τάξης μονάδας, δηλαδή αν δεν πηγαίναμε και πολύ μακριά από την αρχική κλίμακα, τότε η συνάρτηση Green στα λ είναι περίπου ίδια με αυτήν στα $\bar{\lambda}(t)$. Αυτή η παρατήρηση μπορεί να αποκτήσει φυσική σημασία αν, αντί να μεταβάλλουμε το μ , μεταβάλλουμε την κλίμακα των ορμών p_i .

Πράγματι, επειδή στον υπολογισμό διαγραμμάτων εμφανίζονται ποσότητες της μορφής $\lambda^2 \log(-p_i^2/\mu^2)$, το διαταραχτικό ανάπτυγμα μπορεί και να μην συγκλίνει όταν ο λόγος $-p_i^2/\mu^2$ είναι αρκετά μικρός ή μεγάλος, ακόμα και αν η σταθερά λ είναι μικρή. Επειδή, λοιπόν έχουμε

πάντα τον λόγο των ορμών προς την κλίμακα επανακανονικοποίησης, μπορούμε, τρόπον τινά, ισοδύναμα να κρατήσουμε σταθερό το μ και να μεταβάλλουμε τις εξωτερικές ορμές.

Έστω, λοιπόν, ότι αλλάζουμε κλίμακα σε όλες τις ορμές $p_i \rightarrow \rho p_i$, για δεδομένο μ . Έστω μία συνάρτηση Green διάστασης D . Για διαστατικούς λόγους μπορούμε να γράψουμε

$$\Gamma_R^{(n)}(\rho p_i, m, \lambda, \mu) = \mu^D f(\rho^2 p_i \cdot p_j / \mu^2, m/\mu, \lambda),$$

η οποία είναι ομογενής συνάρτηση των m , ρ και μ , ενώ η f είναι αδιάστατη. Αυτή η ιδιότητα μας δίνει τελικά, θέτοντας $t = \ln \rho$:

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + (\gamma_m - 1)m \frac{\partial}{\partial m} - n\gamma(\lambda) + D \right] \Gamma_R^{(n)}(\rho p_i, m, \lambda, \mu) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας αντίστοιχα επιχειρήματα με προηγουμένως, καταλήγει κανείς στο ότι

$$\Gamma_R^{(n)}(\exp(t)p_i, \lambda, m, \mu) = \rho^D \Gamma_R^{(n)}(p_i, \bar{\lambda}(t), \bar{m}(t), \mu) \exp\left(-n \int_0^t \gamma(\bar{\lambda}(t')) dt'\right), \quad (2.9)$$

με $\bar{m}(t) = m(t)/\rho$, όπου οι ποσότητες $\bar{\lambda}(t)$ και $\bar{m}(t)$ ικανοποιούν τις [2.4].

Η [2.9] μας λέει ακριβώς ότι, για να υπολογίσουμε την συνάρτηση Green στην κλίμακα $\exp(t)p_i$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια έκφραση στην κλίμακα p_i , αλλάζοντας κατάλληλα την ισχύ της αλληλεπίδρασης και την μάζα. Από αυτήν την έκφραση μπορούμε να κατανοήσουμε το νόημα της ενεργού σταθεράς αλληλεπίδρασης $\bar{\lambda}(t)$. Όταν αυξάνουμε τις εξωτερικές ορμές, για δεδομένη κλίμακα επανακανονικοποίησης, όπως είπαμε οι λογάριθμοι $\log(-p^2/\mu)$ μπορεί να αποκλίνουν ακόμα και αν η σταθερά στην οποία αναπτύσουμε μπορεί να θεωρηθεί μικρή. Η εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης μας λέει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την συνάρτηση σε τέτοιες ορμές, υπολογίζοντας τα αντίστοιχα διαγράμματα με μία άλλη, effective σταθερά αλληλεπίδρασης, η οποία μαζεύει τις συνεισφορές από τον επαναορισμό της κλίμακας της ορμής, μέσω της εξάρτησης από το t . Έτσι, εάν, για παράδειγμα, η σταθερά $\bar{\lambda}$ μεγαλώνει καθώς αυξάνει το t (μεγαλώνει η ορμή), κάποια στιγμή δεν θα είναι πια αρκετά μικρή ώστε να μπορούμε να αναπτύξουμε διαταρακτικά το αριστερό μέλος και άρα η θεωρία διαταραχών σπάει σε μία τέτοια κλίμακα. Την κλίμακα αυτή θα την συζητήσουμε στην [Ενότητα 2.6](#). Στην ουσία η εξίσωση αυτή μας λέει πώς να αθροίσουμε τις απειρίες των όρων $\lambda^{n+1} (\log(-p_i^2/\mu^2))^n$ σε μία ενεργό σταθερά αλληλεπίδρασης $\bar{\lambda}$, ώστε να έχει νόημα το διαταρακτικό ανάπτυγμα. Οπότε η εξίσωση της ομάδας επανακανονικοποίησης δίνει μία μερική λύση στο πρόβλημα των απειριών.

2.4 Υπολογισμός των β και γ

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις β και γ για κάποιο σχέδιο επανακανονικοποίησης ανεξάρτητο της μάζας. Στην θεωρία διαταραχών, μπορούμε να υπολογίσουμε τις σταθερές επανακανονικοποίησης Z_i , οι οποίες σχετίζονται με το λ με το λ_B

$$\lambda_B = \mu^\epsilon Z_\lambda \lambda = \mu^\epsilon \left[1 + \sum_\nu \frac{a_\nu(\lambda)}{\epsilon^\nu} \right] \lambda, \quad (2.10)$$

όπου στην θεωρία ϕ^4 είναι $Z_\lambda = Z_3^{-2} Z_1$. Οι συντελεστές a_i είναι σειρές στο λ

$$a_i = a_{i1}\lambda + a_{i2}\lambda^2 + \dots + a_{in}\lambda^n.$$

Γράφοντας

$$\beta(\lambda, \epsilon) = \mu \frac{d}{d\mu} \lambda,$$

προκύπτει τελικά ότι

$$\beta(\lambda, \epsilon) = -\epsilon\lambda - \lambda Z_\lambda^{-1} \mu \frac{d}{d\mu} Z_\lambda$$

και αφού

$$\mu \frac{d}{d\mu} Z_\lambda = \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{dZ_\lambda}{d\lambda} = \beta(\lambda, \epsilon) \frac{dZ_\lambda}{d\lambda},$$

καταλήγουμε στην σχέση

$$\beta(\lambda, \epsilon) Z_\lambda + \epsilon \lambda Z_\lambda + \beta(\lambda, \epsilon) \lambda \frac{dZ_\lambda}{d\lambda} = 0.$$

Αναζητώντας, τώρα, λύσεις για το $\beta(\lambda, \epsilon)$ με την μορφή σειράς $\sum_\nu \beta_\nu \epsilon^\nu$ (την οποία έχουμε γράψει ως ομαλή στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$ γιατί η θεωρία είναι επανακανονικοποιήσιμη), η εξίσωση των υπολοίπων των πόλων από την [2.10] δίνει το τελικό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \beta(\lambda, \epsilon) &= -\epsilon\lambda + \beta(\lambda) \\ \beta(\lambda) &= \lambda^2 \frac{da_1}{d\lambda} \\ \lambda^2 \frac{da_{\nu+1}}{d\lambda} &= \beta(\lambda) \frac{d}{d\lambda} (\lambda a_\nu). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Το συμπέρασμα από αυτές τις εξισώσεις είναι ότι η συνάρτηση $\beta(\lambda)$ προσδιορίζεται πλήρως από το υπόλοιπο των απλών πόλων της σταθεράς επανακανονικοποίησης Z_λ , ενώ τα υπόλοιπα των πόλων ανώτερης τάξης είναι εντελώς καθορισμένα από τον $a_1(\lambda)$. Αυτό το τελευταίο δίνει ένα σημαντικό στοιχείο της θεωρίας επανακανονικοποίησης, ότι δηλαδή σε κάθε τάξη

της θεωρίας διαταραχών μόνο μία νέα απόκλιση θα υπάρχει και αυτή θα δίνεται από τον απλό πόλο ως προς ϵ . Το υπόλοιπο των πόλων ανώτερης τάξης (προφανώς θα υπάρχουν και πόλοι ανώτερης τάξης $\sim 1/\epsilon^N$ στην N -στη τάξη) καθορίζεται από χαμηλότερες τάξεις του διαταρακτικού αναπτύγματος.

Ανάλογα προχωρά κανείς και για τις $\gamma(\lambda)$ και $\gamma_m(\lambda)$, παίρνοντας

$$\gamma(\lambda) = -\frac{1}{2}\lambda \frac{d}{d\lambda} Z_3(\lambda),$$

με

$$Z_3 = 1 + \sum_{\nu} \frac{Z_e^{(\nu)}}{\epsilon^{\nu}}$$

και

$$\gamma_m(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda \frac{dZ_m}{d\lambda},$$

με

$$m_B^2 = Z_m m^2 \quad \text{και} \quad Z_m = 1 + \sum_{\nu} \frac{Z_m^{(\nu)}}{\epsilon^{\nu}} /$$

2.5 Φυσική σημασία της $\beta(\lambda)$

Ας θυμηθούμε τον ορισμό της $\bar{\lambda}(t, \lambda)$, την οποία ονομάζουμε *ενεργό σταθερά σύζευξης*:

$$\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(t, \lambda)} \frac{dx}{\beta(x)} = t,$$

όπου η $\beta(\lambda)$ μπορεί να υπολογιστεί διαταρακτικά από την [2.11]. Υποθέτοντας ότι το t μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε μεταξύ του $-\infty$ και $+\infty$ (αλλιώς θα έπρεπε να υπάρχει κάποιο cutoff Λ και η θεωρία θα άλλαζε εκατέρωθεν, περίπτωση που δεν εξετάζουμε τώρα), μπορούμε πούμε ότι όταν $t \rightarrow \pm\infty$, η λύση $\bar{\lambda}(t, \lambda)$ πρέπει να πλησιάζει σε κάποιο μηδενικό της $\beta(x)$, ώστε να απειρίζεται το ολοκλήρωμα, ή να απειρίζεται η ίδια. Τα μηδενικά της $\beta(x)$ τα ονομάζουμε *σταθερά σημεία* και τα συμβολίζουμε με $\tilde{\lambda}$. Έστω το $\tilde{\lambda}$ ως το πιο κοντινό στο λ σταθερό σημείο. Τότε, όταν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\lambda}(t, \lambda) = \tilde{\lambda} \equiv \lambda_+,$$

λέμε ότι έχουμε ένα UV ευσταθές σταθερό σημείο. Η φυσική του είναι ότι, καθώς η κλίμακα ενέργειας τείνει στο άπειρο, η θεωρία τείνει σε μία σταθερή ισχύ σύζευξης. Όταν έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \bar{\lambda}(t, \lambda) = \tilde{\lambda} \equiv \lambda_-,$$

λέμε ότι έχουμε ένα IR ευσταθές σταθερό σημείο. Η φυσική του είναι αντίστοιχα ότι, καθώς η κλίμακα ενέργειας τείνει στο μηδέν, η θεωρία τείνει σε μία σταθερή ισχύ σύζευξης.

Ο χαρακτήρας του σταθερού σημείου έχει να κάνει με την παράγωγο της συνάρτησης β σε αυτό. Πράγματι ισχύουν οι εξής περιπτώσεις

$$\begin{aligned} \beta'(\lambda)|_{\tilde{\lambda}} < 0 & \quad \text{τότε το } \tilde{\lambda} \text{ είναι UV ευσταθές σταθερό σημείο} \\ \beta'(\lambda)|_{\tilde{\lambda}} > 0 & \quad \text{τότε το } \tilde{\lambda} \text{ είναι IR ευσταθές σταθερό σημείο} \end{aligned}$$

Είναι προφανές, αλλά πολύ σημαντικό να σημειωθεί, ότι για όλες τις θεωρίες με μία μοναδική σταθερά σύζευξης, η τιμή $\lambda = 0$ είναι σταθερό σημείο της συνάρτησης β . Μία θεωρία ονομάζεται *ασυμπτωτικά ελεύθερη* όταν το σημείο $\lambda = 0$ είναι UV ευσταθές σταθερό σημείο. Αυτό σημαίνει ότι η θεωρία, καθώς η ενεργειακή κλίμακα θα αυξάνεται, θα τείνει στην ελεύθερη θεωρία. Αντιθέτως, μία θεωρία λέγεται IR ευσταθής αν το $\lambda = 0$ είναι IR ευσταθές σταθερό σημείο. Μία τέτοια θεωρία προσεγγίζει την ελεύθερη θεωρία στις χαμηλές ενέργειες. Γενικά κάθε θεωρία με μία σύζευξη θα είναι είτε UV είτε IR ευσταθής. Η QED είναι IR ευσταθής θεωρία, όπως θα δούμε στο [Κεφάλαιο 3](#) ενώ η QCD είναι ασυμπτωτικά ελεύθερη θεωρία, όπως θα δούμε στο [Κεφάλαιο 4](#). Φυσικά, την συνάρτηση β μπορούμε να την υπολογίσουμε μόνο διαταρακτικά και μόνο κοντά στο $\lambda = 0$, οπότε η συμπεριφορά της για αυξανόμενο λ είναι μία εικασία. Οπότε η συμπεριφορά της θεωρίας για $t \rightarrow \infty$ στην QED (ή στην ϕ^4) και για $t \rightarrow -\infty$ στην QCD είναι μία εικασία.

2.6 Ενεργός σταθερά αλληλεπίδρασης

Έστω $\alpha(t)$ η ενεργός σταθερά αλληλεπίδρασης. Θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη από τις εξισώσεις [\[2.5\]](#) για να υπολογίσουμε τάξη προς τάξη την $\alpha(t)$ δεδομένης της $\beta(\alpha(t))$. Αναπτύσσουμε λοιπόν και τις δύο ως εξής:

$$\begin{aligned} \beta(\alpha(t)) &= \alpha(t) \left[\left(\frac{\alpha(t)}{\pi} \right) b_1 + \left(\frac{\alpha(t)}{\pi} \right)^2 b_2 + \dots \right] \\ \alpha(t) &= \sum_{\mu=1} a_{\mu}(t) \alpha^{\mu}, \quad a_1 = 1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Αντικαθιστώντας στην [\[2.5\]](#) και ολοκληρώνοντας τάξη προς τάξη, καταλήγει κανείς στην σχέση

$$\alpha(t) = \alpha \left[1 + \sum_{n=1} \left(\frac{b_1 t \alpha}{\pi} \right)^n + \mathcal{O}(t^{n-1} \alpha^n) \right].$$

Για μεγάλα t , μπορεί κανείς να αγνοήσει τους όρους ανώτερης τάξης $\mathcal{O}(t^{n-1} \alpha^n)$ μπροστά

στους $\mathcal{O}(t^n \alpha^n)$ και έτσι να πάρει την εκφραση

$$\alpha(t) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{2\pi} b_1 \ln\left(\frac{p^2}{p_0^2}\right)}, \quad \text{με } \alpha = \alpha(t=0).$$

Η κλίμακα p_0 είναι κάπως αυθαίρετη, οπότε, προκειμένου να συνδέσουμε την σχέση αυτή με το πείραμα, πρέπει να εκφράσουμε το αποτέλεσμα συναρτήσει κάποιας πειραματικά μετρήσιμης σταθεράς. Ας το δούμε αυτό στην QED.

Η ιδέα είναι να συνδέσουμε την $\alpha(t)$ με την σταθερά της λεπτής υφής $\alpha^{ON} = 1/137$, όπως ορίζεται από την (χαμηλοενεργειακή - μη σχετικιστική) σκέδαση Thomson. Άρα, αν ορίσουμε την θεωρία στην κλίμακα ενέργειας της μάζας του ηλεκτρονίου, περιμένουμε η επανακανονικοποιημένη σταθερά $\alpha(t=0)$ να είναι περίπου ίση με την α^{ON} . Πράγματι, τότε παίρνουμε:

$$\bar{a}(q) = \frac{a^{ON}}{1 - \frac{a^{ON}}{3\pi} \log\left(\frac{q^2}{Am^2}\right)}$$

Θα δούμε στο [Κεφάλαιο 3](#) ότι όντως αυτή είναι η σχέση για την ενεργό σταθερά $\bar{a}(q)$, με $A = \exp(5/3)$, σύμφωνα με την εξίσωση [\[3.9\]](#).

Κεφάλαιο 3

QED ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΝΟΣ ΒΡΟΧΟΥ

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε τα διαγράμματα Feynman για την QED στο επίπεδο του ενός βρόχου. Θα παρατηρήσουμε ότι οι διορθώσεις απειρίζονται και θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε προσεκτικά αυτές τις απειρίες, με την μέθοδο της διαστατικής ομαλοποίησης, πηγαίνοντας σε μη ακέραιες $d = 4 - \epsilon$ διαστάσεις.

Στη συνέχεια θα δούμε πώς διορθώνονται οι διαδότες και ο βρόχος αλληλεπίδρασης της QED, κατανοώντας ότι οι ποσότητες που εμφανίζονται στην Λαγκρανζιανή της θεωρίας δεν είναι οι φυσικά μετρούμενες ποσότητες. Έτσι, θα εκφράσουμε τα αποτελέσματα συναρτήσει των φυσικά μετρήσιμων ποσοτήτων με αποτέλεσμα να αρθούν οι απειρίες.

Τα πεπερασμένα, πια, αποτελέσματα σε πρώτη τάξη στη θεωρία διαταραχών θα μας δώσουν διορθώσεις στον γυρομαγνητικό λόγο του ηλεκτρονίου, στον νόμο του Coulomb, ενώ θα δούμε ότι η QED έχει μία ενεργό ισχύ (ενεργός σταθερά της λεπτής υφής), η οποία αυξάνει με την απόσταση. Το ποιοτικό αποτέλεσμα μας το δίνει η συνάρτηση β της QED, το οποίο επιβεβαιώνει ο αναλυτικός υπολογισμός σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών.

3.2 Ο κόμβος αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίου-φωτονίου

Το διάγραμμα με όλες τις διορθώσεις στον κόμβο αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίου-φωτονίου είναι το εξής:

$$[\sigma_{\text{αλε}}=0.25]/\Upsilon\text{σερς}/\mu.\gamma\alpha\lambda\alpha\nu\iota\varsigma/\Delta\omicron\sigma\upsilon\mu\epsilon\nu\tau\varsigma/\text{Τε}\Xi/\epsilon\lambda\pi\eta\epsilon\rho\varphi\upsilon\lambda\lambda.\pi\delta\varphi$$

Σχήμα 3.1: Διόρθωση στον κόμβο αλληλεπίδρασης

Σαν ένα πρώτο στάδιο, μας ενδιαφέρει να βρούμε την γενική ταυστική μορφή αυτού του κόμβου, σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών. Την μορφή αυτή την προσδιορίζουν αρκετά αυστηρά οι συμμετρίες της θεωρίας.

Κατ' αρχάς, οι κανόνες Feynman (βλ. [Παράρτημα 1](#)) για την QED μας περιορίζουν τον αριθμό των πιθανών φυσικών μεγεθών που θα υπεισέρχονται στην τελική έκφραση για τον κόμβο, τα οποία είναι τα τετρανύσματα $p^\mu, p'^\mu, \gamma^\mu$, καθώς και τα m, e και καθαροί αριθμοί. Ο κόμβος σε μηδενική τάξη είναι προφανώς, σύμφωνα με τους κανόνες Feynman $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$. Εφόσον είναι τετρανύσμα, δεν μπορεί παρά να είναι κάποιος γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων τετρανυσμάτων που επιτρέπονται, δηλαδή

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \cdot A + (p' + p)^\mu \cdot B + (p' - p)^\mu \cdot C. \quad (3.1)$$

Εφόσον ο κόμβος αυτός εμφανίζεται πάντα στα φερμιονικά ρεύματα $\bar{u}\Gamma^\mu u$, μπορούμε να περιορίσουμε το περιεχόμενο των A, B και C από την εξίσωση Dirac αφού $\not{p}u(p) = mu(p)$ και τα αντίστοιχα για το συζυγές $\bar{u}$. Συνεπώς, εφόσον οι συντελεστές μπορούν να περιέχουν μόνο βαθμωτά, η μόνη ποσότητα που έμεινε είναι η $q^2 = (p - p')^2$ (καθώς και οι φυσικές σταθερές).

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε την ταυτότητα Ward σε αυτό το διάγραμμα (βλ. Ενότητα 1.6)

$$q^\mu \left(\text{diagram} \right) = 0.$$

Ο δεύτερος όρος μηδενίζεται αυτόματα και ο πρώτος μηδενίζεται στον συνδυασμό $\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p)$. Ο τρίτος όρος δεν μηδενίζεται αυτόματα, πράγμα που σημαίνει ότι $C = 0$. Προκειμένου να φανεί το φυσικό νόημα των συντελεστών A και B , χρησιμοποιούμε την ταυτότητα του Gordon, η οποία υπαγορεύει ότι:

$$\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} \right] u(p)$$

και άρα:

$$\Gamma^\mu(p', p) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} F_2(q^2),$$

όπου οι όροι F_1 και F_2 λέγονται *παράγοντες δομής*. Η φυσική τους σημασία είναι εμφανής στο μη σχετικιστικό όριο.

Παίρνοντας ένα κλασικό ηλεκτροστατικό πεδίο $A_\mu^{\text{cl}}(x) = (\phi(\mathbf{x}), 0)$, θεωρώντας το μη σχετικιστικό όριο για τους σπίνορες του Dirac, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πλάτος σκέδασης $i\mathcal{M}$ της QED ταυτίζεται με αυτό που δίνει η προσέγγιση Born, στην μη σχετικιστική

κβαντομηχανική, για σκέδαση σε στατικό δυναμικό. Σε αυτήν την περίπτωση προκύπτει εύκολα ότι το κλασικό δυναμικό είναι:

$$V(\mathbf{x}) = eF_1(0)\phi(\mathbf{x})$$

Συνεπώς $F_1(0)$ είναι το ηλεκτρικό φορτίο του ηλεκτρονίου σε μονάδες e . Είναι προφανές από τα προηγούμενα αλλά και από εδώ ότι $F_1(q^2) = 1 + \mathcal{O}(q^2)$, οι οποίοι ανώτεροι όροι πρέπει να μηδενίζονται για $q^2 \rightarrow 0$.

Ακολουθώντας την ίδια ανάλυση σε στατικό μαγνητικό πεδίο $A_\mu^{\text{cl}}(x) = (0, \mathbf{A}^{\text{cl}}(\mathbf{x}))$ προκύπτει ένα κλασικό δυναμικό της μορφής $V(\mathbf{x}) = -\langle \boldsymbol{\mu} \rangle \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x})$, με $\langle \boldsymbol{\mu} \rangle = \frac{e}{m}[F_1(0) + F_2(0)]\xi'^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2} \xi$, όπου $\xi^\dagger = (1, 0)$. Αυτή η σχέση μας δίνει τον γυρομαγνητικό λόγο του ηλεκτρονίου ως:

$$g = 2[F_1(0) + F_2(0)] = 2 + 2F_2(0).$$

όπου βέβαια η πρώτη συνεισφορά στο $F_2(0)$ είναι τάξης α .

Το διάγραμμα Feynman που θα μας απασχολήσει εδώ είναι η διόρθωση σε πρώτη τάξη στη θεωρία διαταραχών (επίπεδο ενός βρόχου) στον κόμβο αλληλεπίδρασης. Σε πρώτη τάξη στη θεωρία διαταραχών ο κόμβος θα δέχεται μία διόρθωση $\delta\Gamma^\mu$ και θα είναι $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$.

Η διόρθωση αυτή δίνεται από το επόμενο διάγραμμα και είναι:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\rho}}{(k-p)^2} \bar{u}(p') (-ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} (-ie\gamma^\rho) u(p) \\ &= \bar{u}(p') \delta\Gamma^\mu u(p) \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του διαγράμματος χρησιμοποιούμε για αρχή παραμέτρους Feynman για να συνδυάσουμε τους παρονομαστές (βλ. [Παράρτημα 3](#)). Παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε τρεις τέτοιες παραμέτρους, x, y και z με $x + y + z = 1$. Ο παρονομαστής γράφεται

$$\begin{aligned} \text{Παρονομαστής} &= x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k - p)^2 \\ &= k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2. \end{aligned}$$

Αλλάζοντας μεταβλητή σε $\ell \equiv k + yq - zp$ και μαζεύοντας όρους, καταλήγουμε ότι ο παρονομαστής είναι ίσος με $\ell^2 - \Delta$, με $\Delta = -xyq^2 + (1 - z)^2 m^2$.

Χρησιμοποιώντας την αναλλοιώτητα κατά Lorentz για την αλλαγή των όρων $\ell^\mu \ell^\nu$ σε $\sim$

$\ell^2 g^{\mu\nu}$ ¹ καθώς και ταυτότητες της άλγεβρας των πινάκων Dirac (βλ. [Παράρτημα 4](#)) προκύπτει ότι ο αριθμητής είναι:

$$\begin{aligned} \text{Αριθμητής} &= \bar{u}(p') [k\gamma^\mu k' + m^2\gamma^\mu - 2m(k + k')^\mu] u(p) \\ &\rightarrow \bar{u}(p') \left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu \ell^2 + m^2\gamma^\mu - 2m((1-2y)q^\mu + 2zp^\mu) \right. \\ &\quad \left. + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu ((1-y)\not{q} + z\not{p}) \right] u(p). \end{aligned}$$

Προσπαθώντας να φέρουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα στην μορφή της εξίσωσης [\[3.1\]](#) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Gordon για να αντικαταστήσουμε τον όρο $(p' + p)$ με τον $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$, έχουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p', p)u(p) &= 2ie^2 \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{(\ell^2 - \Delta)^3} \\ &\times \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \cdot \left(-\frac{1}{2}\ell^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m} (2m^2z(1-z)) \right] u(p) \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι ο όρος που αντιστοιχεί στο F_1 έχει τόσο UV όσο και IR απόκλιση. Την πρώτη μπορούμε να την ρυθμίσουμε διαστατικά, το γνωστό *dimensional regularization*, ή να χρησιμοποιήσουμε άλλους ρυθμιστές (*regulators*). Ειδικά για τις υπέρυθρες αποκλίσεις χρησιμοποιούμε μία φανταστική μάζα για το φωτόνιο, από την οποία απαιτούμε να εξαρτώνται τα φυσικά αποτελέσματα. Γενικά, οι IR αποκλίσεις απαιτούν διορθώσεις ακτινοβολίας (*radiative corrections*), τις οποίες δεν αναλύουμε στην παρούσα εργασία (βλ. [\[Peskin\]](#) παράγραφο 6.5 για πλήρη ανάλυση). Για την UV απόκλιση μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και ρυθμιστή Pauli-Villars, ο οποίος έχει να κάνει με κάποιο cutoff που μηδενίζει το ολοκλήρωμα στις μεγάλες ορμές. Ωστόσο, τέτοιοι ρυθμιστές δεν σέβονται την συμμετρία βαθμίδας και άρα δεν είναι τόσο χρήσιμοι.

Θα χρησιμοποιήσουμε, λοιπόν, το dimensional regularization. Κάνοντας αναλυτική επέκταση σε d διαστάσεις από την αρχή, προκύπτουν μερικοί επιπλέον όροι στον αριθμητή λόγω της ελαφράς διαφοροποίησης της άλγεβρας των πινάκων Dirac σε $d = 4 - \epsilon$ διαστάσεις (αυτοί οι όροι είναι $\propto \epsilon$ και δίνουν πεπερασμένες συνεισφορές μόνο, εφόσον ο πόλος του διαγράμματος στη διάσταση είναι απλός, βλ. [Παράρτημα 4](#)). Εκτελώντας στροφή Wick στον Ευκλείδειο χώρο με $\ell^0 = i\ell_E^0$ και $\ell^j = \ell_E^j$ με $j = 1, 2, 3$ και χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες σχέσεις στο [Παράρτημα 3](#) έχουμε τελικά ότι:

¹επειδή το ολοκλήρωμα σε παρονομαστές περιττούς στο ℓ μηδενίζεται, καθώς ο παρονομαστής είναι τετραγωνικός στο ℓ , περιμένουμε ότι για $\mu \neq \nu$ το ολοκλήρωμα αυτό θα είναι μηδενικό. Επειδή είναι και αναλλοίωτο κατά Lorentz, θα πρέπει να είναι $\propto g^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma^\mu(p', p) = & \gamma^\mu \cdot \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} \right. \\
 & + \left. \frac{\Gamma(3-\frac{d}{2})}{\Delta^{3-d/2}} (q^2[2(1-x)(1-y) - \epsilon xy] + m^2[2(z^2 - 4z + 1) - \epsilon(1-z)^2]) \right] \\
 & + \frac{i\sigma^{\mu\nu}}{2m} \cdot \frac{e^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left(\frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 - q^2 xy} \right),
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

όπου τον όρο $F_2(q^2)$ τον έχουμε υπολογίσει κατευθείαν σε $d = 4$ γιατί δεν παρουσίαζε UV απόκλιση, ενώ το Δ είναι ελαφρώς τροποποιημένο από το παραπάνω λόγω της μάζας του φωτονίου m_γ που εισήγαμε για να απορροφήσουμε τις υπέρυθρες αποκλίσεις. Οπότε τώρα είναι $\Delta^{\text{new}} \equiv \Delta^{\text{old}} + m_\gamma^2 z$.

Μάλιστα ακριβώς επειδή το $F_2(q^2)$ είναι καλώς ορισμένο, μπορούμε να το υπολογίσουμε ακριβώς. Η στοιχειώδης αυτή ολοκλήρωση δίνει την διόρθωση στο g του ηλεκτρονίου:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

και έτσι λαμβάνουμε την διόρθωση στον γυρομαγνητικό λόγο του ηλεκτρονίου ως:

$$a_e \equiv \frac{g-2}{2} = F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} \simeq 0.0011614,$$

η οποία έχει επιβεβαιωθεί και πειραματικά, και είναι γνωστή ως *ανώμαλη μαγνητική ροπή του ηλεκτρονίου*. Στον όρο $F_1(q^2)$ θα επανέλθουμε στην συνέχεια, όταν θα επανακανονικοποιήσουμε την Κβαντική Ηλεκτροδυναμική στο επίπεδο ενός βρόχου.

3.3 Διόρθωση στην ιδιοενέργεια του ηλεκτρονίου

Προκειμένου να υπολογίσουμε ενεργές διατομές ή άλλες μετρήσιμες ποσότητες, απαιτείται πρώτα ο υπολογισμός ορισμένων συναρτήσεων Green. Στην παρούσα συζήτηση θα μας απασχολήσει η συνάρτηση Green δύο σημείων για το ηλεκτρόνιο. Για την ακρίβεια, όπου θα αναφερόμαστε στα αντίστοιχα διαγράμματα, θα τα θεωρούμε στον χώρο των ορμών, παραλείποντας παράγοντες e^{ipx} και ολοκληρώσεις στις ορμές, δηλαδή θα ασχοληθούμε με τον μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων που μας ενδιαφέρουν.

Έστω η συνάρτηση συσχετισμού δύο σημείων, δηλαδή ο πλήρης διαδότης:

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle = x \longrightarrow \text{---} \bigcirc \text{---} y$$

Ορίζουμε τώρα τα μονοσωματιδιακά μη αναγώγιμα διαγράμματα (one-particle irreducible - 1PI), ως εκείνα τα οποία δεν μπορούν να σπάσουν σε δύο μικρότερα, αν αφαιρεθεί μία οποιαδήποτε γραμμή. Έστω τώρα $-i\Sigma(p)$ το άθροισμα όλων αυτών των διαγραμμάτων:

$$\begin{aligned} -i\Sigma(p) &\equiv \text{---} \bigcirc \text{---} \\ &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \end{aligned}$$

Οπότε τώρα ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης συσχετισμού είναι:

$$\begin{aligned} \int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{ip \cdot (x-y)} &= \text{---} \bigcirc \text{---} \\ &= \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} (-i\Sigma) \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} (-i\Sigma) \frac{i}{\not{p} - m} (-i\Sigma) \frac{i}{\not{p} - m} \dots, \end{aligned}$$

και επειδή το Σ είναι συνάρτηση μόνο του $\not{p}$ και των δυνάμεων αυτού, μετατίθεται με τα υπόλοιπα και σχηματίζεται μία γεωμετρική σειρά. Έτσι, προκύπτει τελικά για τον πλήρη διαδότη ότι:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(0) \} | \Omega \rangle e^{ip \cdot (x-y)} = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(\not{p})}.$$

Είναι προφανές τώρα ότι ο πραγματικός πόλος του διαδότη δεν βρίσκεται επάνω στην μάζα m που εισήγαμε στην Λαγκρανζιανή της θεωρίας, αλλά στο σημείο όπου

$$[\not{p} - m - \Sigma(\not{p})] \Big|_{\not{p}=m_{\text{ph}}} = 0,$$

όπου m_{ph} είναι η φυσική μάζα, δηλαδή είναι μετρήσιμη στο πείραμα. Αναπτύσσοντας, τώρα, τον παρονομαστή του πλήρους διαδότη κοντά στον πόλο, έχουμε:

$$(\not{p} - m_{\text{ph}}) \cdot \left(1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m_{\text{ph}}} \right) + \mathcal{O}((\not{p} - m)^2),$$

και άρα το υπόλοιπο του πόλου (ο όρος residue της μιγαδικής ανάλυσης) δεν είναι πια μονάδα, αλλά αλλάζει σε

$$Z_2^{-1} = 1 - \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=m_{\text{ph}}} \quad (3.3)$$

Το αποτέλεσμα [3.3] είναι πολύ σημαντικό και θα το χρησιμοποιήσουμε παρακάτω όταν θα επανακανονικοποιήσουμε την θεωρία.

Έστω, τώρα, το ανάπτυγμα της συνάρτησης συσχετισμού δύο σημείων:

$$\langle \Omega | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | \Omega \rangle = \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

Το πρώτο διάγραμμα είναι ο γνωστός διαδότης της ελεύθερης θεωρίας, ενώ το δεύτερο, το οποίο και θα μας απασχολήσει σε αυτήν την ενότητα και είναι γνωστό ως *ιδιοενέργεια του ηλεκτρονίου*, είναι:

$$\text{---} \text{---} \text{---} \equiv -i\Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{-i}{(p-k)^2 - m_\gamma^2}, \quad (3.4)$$

όπου έχουμε αγνοήσει τους εξωτερικούς διαδότες και επικεντρωνόμαστε στο ολοκλήρωμα. Παρατηρείστε ότι αυτό το ολοκλήρωμα σε $d = 4$ φαίνεται να είναι γραμμικά αποκλίνον, αλλά λόγω ολοκλήρωσης σε όλο τον χώρο, ο γραμμικός όρος στο k στον αριθμητή δίνει μηδενική συνεισφορά και άρα το ολοκλήρωμα αυτό είναι μόνο λογαριθμικά αποκλίνον.

Χρησιμοποιώντας παραμέτρους Feynman και βάζοντας μία μάζα στο φωτόνιο με το χέρι, για να αποφύγουμε τις IR αποκλίσεις, έχουμε:

$$-i\Sigma_2(p) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^4} \frac{-2x\not{p} + 4m}{(\ell^2 - \Delta)^2}$$

όπου θέσαμε στην [3.4] $\ell \equiv k - xp$ και $\Delta = -x(1-x)p^2 + xm_\gamma^2 + (1-x)m^2$.

Πηγαίνοντας τώρα σε $d = 4 - \epsilon$ διαστάσεις για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (και έχοντας υπόψιν ότι θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και κάποιους όρους $\propto \epsilon$ λόγω της διαφοροποίησης της άλγεβρας των πινάκων του Dirac σε $d \neq 4$ διαστάσεις, βλ [Παράρτημα 4](#)), προκύπτει ότι

$$-i\Sigma_2(p) = -i \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \int_0^1 dx ((4-\epsilon)m - (2-\epsilon)x\not{p}) \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{2-d/2} \quad (3.5)$$

Η λογαριθμική απόκλιση είναι προφανής τώρα από την Γ συνάρτηση, η οποία έχει απλό πόλο στο $d = 4$.

τις αποκλίσεις που αντιμετωπίζουμε στην παρούσα εργασία.

Το ίχνος γράφεται ισοδύναμα:

$$\text{tr} \left(\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} + \not{q} - m} \right) = \text{tr} \left(\gamma^\mu \frac{i(k_\rho \gamma^\rho + m)}{k^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{i(k_\ell \gamma^\ell + \gamma^\ell q_\ell + m)}{(k + q)^2 - m^2} \right),$$

και τώρα περνάει στον αριθμητή τώρα, ο οποίος γίνεται $\sim \text{tr} (\gamma^\mu (k_\rho \gamma^\rho + m) \gamma^\nu (k_\ell \gamma^\ell + \gamma^\ell q_\ell + m))$.

Κάνοντας τις επιμεριστικές και χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες (βλ. [Παράρτημα 4](#))

$$\begin{aligned} \text{tr} (\text{περιττός αριθμός } \gamma^\mu) &= 0 \\ \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\ell) &= 4 (g^{\mu\rho} g^{\nu\ell} - g^{\mu\nu} g^{\rho\ell} + g^{\mu\ell} g^{\rho\nu}) \quad \text{και} \\ \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4 g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

καταλήγουμε στο ότι ο αριθμητής γράφεται:

$$4 [k^\mu (k + q)^\nu + k^\nu (k^\mu + q^\mu) - g^{\mu\nu} (k \cdot (k + q) - m^2)]$$

και άρα το διάγραμμα γίνεται:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4e^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu (k + q)^\nu + k^\nu (k^\mu + q^\mu) - g^{\mu\nu} (k \cdot (k + q) - m^2)}{(k^2 - m^2) ((k + q)^2 - m^2)}.$$

Είναι προφανές ότι στο όριο των μεγάλων ορμών με $|k| = E$, όπου $|q|/E \ll 1$, το ολοκλήρωμα αυτό συμπεριφέρεται ως

$$\sim \int \frac{E^4 dE}{E^4} \cdot E^2 = \int E dE \sim \Lambda^2,$$

όπου Λ είναι κάποιο cutoff για την ορμή. Παρατηρείστε μάλιστα ότι ο συνολικός τανυστικός τετραγωνικά αποκλίνων όρος είναι της μορφής $e^2 \Lambda^2 g^{\mu\nu}$, χωρίς τον αντίστοιχο όρο $q^\mu q^\nu$, πράγμα που σημαίνει ότι το φωτόνιο θα αποκτούσε (άπειρη!) μάζα στην πρώτη κιόλας τάξη της θεωρίας διαταραχών ή, ισοδύναμα, ότι θα παραβιαζόταν η ταυτότητα Ward. Ωστόσο, αν μελετήσουμε σωστά τον πόλο του διαγράμματος, δηλαδή αν δουλέψουμε ϵ κοντά σε αυτόν, θα δούμε ότι μπορούμε να εξάγουμε τις απειρίες με συνεπή τρόπο και έτσι να πάρουμε τα σωστά αποτελέσματα. Ο λόγος που η ρύθμιση του ολοκληρώματος με το cutoff Λ δίνει λάθος αποτέλεσμα είναι γιατί αυτού του είδους ο ρυθμιστής (regulator) δεν σέβεται την ταυτότητα του Ward, δηλαδή δεν σέβεται τις συμμετρίες της QED.

Χρησιμοποιούμε τώρα παραμέτρους Feynman για να φτιάξουμε τον παρονομαστή ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k^2 - m^2)[(k+q)^2 - m^2]} &= \int_0^1 dx dy \delta(x+y-1) \frac{1}{(y(k^2 - m^2) + x[(k+q)^2 - m^2])^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{((1-x)(k^2 - m^2) + x[(k+q)^2 - m^2])^2}. \end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $\ell = k + xq$, ο παρονομαστής γράφεται

$$\ell^2 + q^2 x(1-x) - m^2 \equiv \ell^2 - \Delta,$$

ενώ ο αριθμητής γίνεται:

$$\mathcal{N}^{\mu\nu} = 2\ell^\mu \ell^\nu - g^{\mu\nu} \ell^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2) + \mathcal{O}(\text{linear in } \ell^\mu).$$

Τους γραμμικούς όρους στο ℓ τους έχουμε παραλείψει γιατί είναι περιττές συναρτήσεις της ολοκληρωτέας μεταβλητής και άρα δίνουν μηδενική συνεισφορά ολοκληρούμενες σε όλο τον χώρο (παρατηρήστε ότι το Δ είναι άρτια συνάρτηση του ℓ).

Επίσης, τα ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{\Delta^2}$$

μηδενίζονται για $\mu \neq \nu$, αφού ισχύει το ίδιο επιχείρημα με παραπάνω. Λόγω αναλλοιωτικότητας κατά Lorentz, αυτό το ολοκλήρωμα πρέπει να είναι ανάλογο της μετρικής $g^{\mu\nu}$, δηλαδή

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - \Delta)^2} = c \cdot \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2 g^{\mu\nu}}{(\ell^2 - \Delta)^2},$$

όπου c κάποια σταθερά. Πολλαπλασιάζοντας με $g_{\mu\nu}$ και στα δύο μέλη προκύπτει τελικά ότι σε d διαστάσεις είναι $a = 1/d$.

και άρα

$$\int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - \Delta)^2} = \frac{1}{d} \cdot \int \frac{d^4 \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2 g^{\mu\nu}}{(\ell^2 - \Delta)^2} \quad (3.7)$$

Επομένως, πηγαίνοντας σε $d = 4 - \epsilon$ διαστάσεις, αντικαθιστώντας τα ολοκληρώματα στους όρους $\ell^\mu \ell^\nu$ με το παραπάνω και πετώντας τους γραμμικούς όρους στο ℓ^μ , τελικά καταλήγουμε στην σχέση:

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4e^2 \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\left(\frac{2}{d} - 1\right) g^{\mu\nu} \ell^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2)}{(\ell^2 - \Delta)^2}.$$

Εκτελούμε τώρα μία στροφή Wick, η οποία επιτρέπεται γιατί σε άρρητες διαστάσεις τα ολοκληρώματα αυτά είναι καλώς ορισμένα μέσω αναλυτικής συνέχισης (βλ. Hooft72). Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $\ell_E^0 = -i\ell^0$ και $\ell_E^j = \ell^j$, $j = 1, 2, \dots, d-1$. Ο δείκτης E δηλώνει ότι τώρα βρισκόμαστε στον Ευκλείδειο χώρο. Οπότε το διάγραμμα γίνεται

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int \frac{d^d \ell_E}{(2\pi)^d} \frac{\left(1 - \frac{2}{d}\right) g^{\mu\nu} \ell_E^2 - 2x(1-x)q^\mu q^\nu + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2)}{(\ell_E^2 + \Delta)^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τα αποτελέσματα του [Παραρτήματος 3](#) καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \Bigg[& \left(1 - \frac{2}{d}\right) \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-d/2} g^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \left(-2x(1-x)q^\mu q^\nu\right. \\ & \left. + g^{\mu\nu} (m^2 + x(1-x)q^2)\right) \Bigg]. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι ο πόλος στις $d = 2$ διαστάσεις παραμένει και είναι λογαριθμικός (απλός πόλος της Γ συνάρτησης), όπως αναμενόταν, αφού η τετραγωνική απόκλιση σε 4 διαστάσεις που βρήκαμε πριν πρέπει να γίνεται λογαριθμική σε 2 διαστάσεις. Ωστόσο, λόγω του παράγοντα $(1 - 2/d)$, ο πόλος αυτός αναιρείται και το αποτέλεσμα είναι πεπερασμένο στις $d = 2$ διαστάσεις. Άρα η τετραγωνική απόκλιση που βρήκαμε πριν αίρεται και βλέπουμε ότι η ταυτότητα Ward πράγματι δουλεύει. Από την ταυτότητα $(1 - 2/d)\Gamma(1 - 2/d) = \Gamma(2 - d/2)$ μπορούμε τώρα να βγάλουμε κοινούς παράγοντες. Με πολύ απλή άλγεβρα, το αποτέλεσμα είναι:

$$\begin{aligned} i\Pi_2^{\mu\nu}(q) &= (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \frac{-8ie^2}{(4\pi)^{d/2}} \int dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} x(1-x) \\ &\equiv (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) i\Pi_2(q^2). \end{aligned}$$

Σύμφωνα με το [Παράρτημα 4](#) έχουμε το ανάπτυγμα της $\Gamma(x)$ κοντά στον πόλο $x \simeq 0$

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x),$$

όπου $\gamma \simeq 0.5772$ ο αριθμός Euler-Mascheroni, από τον οποίο δεν πρέπει να εξαρτώνται τα φυσικά αποτελέσματα. Σε αυτό το όριο, λοιπόν, είναι

$$i\Pi_2^{\mu\nu}(q) \simeq (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \left[\frac{-2i\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \left(\frac{2}{\epsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \right] \quad (3.8)$$

Τώρα μπορούμε να βρούμε την διόρθωση στην ισχύ της αλληλεπίδρασης, δηλαδή στην σταθερά της λεπτής υφής. Γενικά το διάγραμμα που υπολογίσαμε έχει την μορφή:

$$\frac{ig^{\mu\nu}e^2}{1 - \Pi(q^2)},$$

όπου το $\Pi(q^2)$ το υπολογίσαμε σε πρώτη τάξη ως προς την σταθερά της λεπτής υφής α στην παρούσα παράγραφο. Ο πόλος του διαδότη είδαμε ότι είναι Z_3 , που δίνεται από την [3.6]. Προσέξτε ότι το e που γράφουμε σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις είναι η παράμετρος της $\mathcal{L}_{QED}$. Το ηλεκτρικό φορτίο που μετράει κανείς στα πειράματα θα είναι, λοιπόν, $e_{\text{phys}} = Z_3^{1/2}e$. Αντικαθιστώντας το Z_3 σε $\mathcal{O}(\alpha)$ ως $(1 - \Pi_2(0))^{-1}$ και κρατώντας όρους πρώτης τάξης ως προς α έχουμε τελικά μία ενεργό ισχύ αλληλεπίδρασης, η οποία εξαρτάται εμφανώς από την ενέργεια:

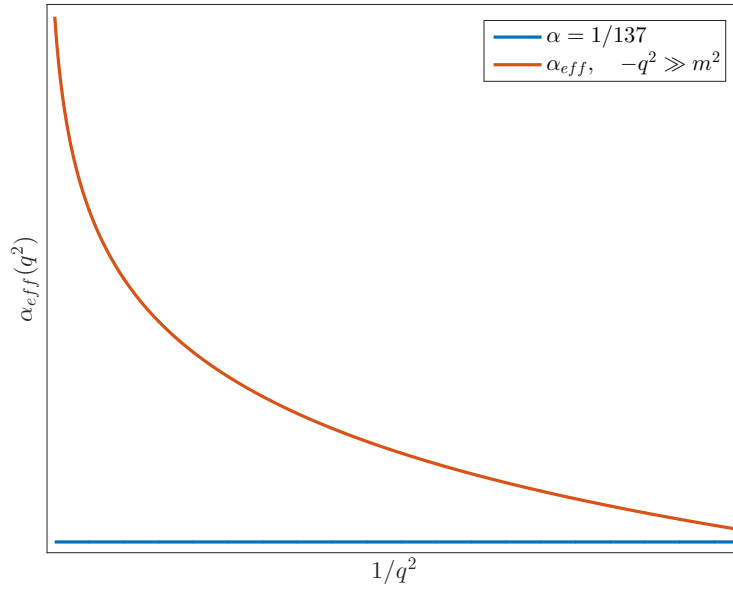
$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - (\Pi(q^2) - \Pi(0))} = \frac{\alpha}{1 - \frac{a}{3\pi} \log \left(\frac{-q^2}{Am^2} \right)}$$

όπου ως α τώρα έχουμε ορίσει την ποσότητα $e_{\text{phys}}^2/4\pi$ και $A = \exp(5/3)$. Εφόσον είμαστε σε πρώτη τάξη ως προς α αυτό γράφεται, αναπτύσσοντας τον παρονομαστή κατά Taylor ως:

$$\alpha_{\text{eff}}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{a}{3\pi} \log \left(\frac{-q^2}{Am^2} \right)}, \quad (3.9)$$

όπου έχουμε θεωρήσει το όριο των μικρών αποστάσεων (μεγάλων ενεργειών), δηλαδή $-q^2 \gg m^2$. Η γραφική παράσταση αυτού δίνεται στο [Σχήμα 3.2](#).

Εκτός από την εξάρτηση της ισχύος της αλληλεπίδρασης από την απόσταση, η διόρθωση στο επίπεδο ενός βρόχου έχει και άλλες μετρήσιμες συνέπειες. Μία από αυτές είναι η διόρθωση στο νόμο Coulomb, γνωστή ως δυναμικό Uehling. Για να βρούμε αυτήν την διόρθωση θα πάμε στο μη σχετικιστικό όριο, ταυτοποιώντας το κβαντομηχανικό πλάτος μετάβασης με το αντίστοιχο της πρώτης προσέγγισης του Born της μη σχετικιστικής θεωρίας σκέδασης ως εξής



Σχήμα 3.2: Running coupling της QED.

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{x}) &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{-e^2}{|\mathbf{q}|^2 [1 - (\Pi_2(-|\mathbf{q}|^2) - \Pi(0))]} \\
 &\simeq \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \frac{-e^2}{|\mathbf{q}|^2} [1 + (\Pi_2(-|\mathbf{q}|^2) - \Pi(0))] \\
 &= \frac{ie^2}{(2\pi)^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ \frac{Q e^{iQr}}{Q^2} [1 + (\Pi_2(-Q^2) - \Pi(0))],
 \end{aligned}$$

το οποίο υπολογίζεται κατά τα γνωστά, βάζοντας με το χέρι μία μάζα μ στο φωτόνιο (την οποία στο τέλος του υπολογισμού θα αφήσουμε να πάει στο 0) και ολοκληρώνοντας σε κλειστό άπειρο ημικύκλιο στο μιγαδικό επίπεδο, λαμβάνοντας την συνεισφορά από τους πόλους της συνάρτησης. Κάνοντας αυτή την πράξη προκύπτει τελικά το δυναμικό Uehling:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \left(1 + \frac{\alpha}{4\sqrt{\pi}} \frac{e^{-2mr}}{(mr)^{3/2}} + \mathcal{O}(a^2) \right) \quad (3.10)$$

Ας υπολογίσουμε αυτή τη διόρθωση στο άτομο του υδρογόνου. Δεδομένου ότι ο δεύτερος όρος έχει ισχύ σε τυπικές διαστάσεις $\sim 1/m$, οι κυματοσυναρτήσεις του ατόμου του υδρογόνου είναι σχεδόν σταθερές σε αυτήν την κλίμακα και άρα μπορούμε να προσεγγίσουμε τον δεύτερο όρο ως $\delta(\mathbf{x})$, πράγμα που δίνει:

$$V(\mathbf{x}) \simeq -\frac{\alpha}{r} - \frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{x}),$$

η οποία σε πρώτη τάξη στη θεωρία διαταραχών δίνει μία μεταβολή στην ενέργεια της στάθμης

2S:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \int d^3x |\psi(\mathbf{x})|^2 \left(-\frac{4\alpha^2}{15m^2} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \right) \\ &= -\frac{4\alpha^2}{15m^2} |\psi(0)|^2 \\ &\simeq -1.123 \times 10^{-7} \text{ eV}.\end{aligned}$$

και έχει μετρηθεί πειραματικά. Η διόρθωση αυτή είναι γνωστή ως *μετάπτωση Lamb*.

3.5 Επανακανονικοποίηση της θεωρίας

Βλέπουμε ότι σε πρώτη τάξη στη θεωρία διαταραχών οι διορθώσεις είναι άπειρες σε $d = 4$ διαστάσεις. Παραμετροποιήσαμε αυτές τις απειρίες πηγαίνοντας σε $d = 4 - \epsilon$ διαστάσεις και ελπίζουμε με κάποιον τρόπο να ανααιρεθούν οι λογαριθμικές απειρίες των όρων $1/\epsilon$ που βρήκαμε παραπάνω.

Για αυτόν τον λόγο θα θέσουμε κάποιες συνθήκες για τους πλήρεις διαδότες, οι οποίοι και θα ορίζουν τα πειραματικώς μετρούμενα αποτελέσματα. Η μέθοδος που θα ακολουθήσουμε εδώ είναι μία εκ των πολλών μεθόδων επανακανονικοποίησης και λέγεται *on shell renormalization scheme*.

Οπότε, ορίζουμε ο πόλος του διαδότη του ηλεκτρονίου να δίνει την φυσική και πειραματικώς μετρούμενη μάζα, ενώ ο διαδότης του να έχει πόλο τη μονάδα σε αυτή τη μάζα (αυτό είναι χρήσιμο όταν απορροφούμε τις επανακανονικοποιήσεις στα πεδία, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση LSZ για τα στοιχεία του S-matrix). Ομοίως, απαιτούμε ο πόλος του διαδότη του φωτονίου να είναι μονάδα και, τέλος, απαιτούμε σε σκέδαση με $q = p - p' = 0$, ο κόμβος αλληλεπίδρασης να δίνει το φυσικό φορτίο του ηλεκτρονίου. Οι απαιτήσεις αυτές δίνονται, αντίστοιχα, από τις επόμενες σχέσεις

$$\begin{aligned}\Sigma(\not{p} = m_{\text{phys}}) &= 0 \\ \frac{d}{d\not{p}} \Sigma(\not{p}) \Big|_{\not{p}=m_{\text{phys}}} &= 0 \\ \Pi(q^2 = 0) &= 0 \\ -ie\Gamma^\mu(p' - p = 0) &= -ie_{\text{phys}}\gamma^\mu\end{aligned}\tag{3.11}$$

Προκειμένου να απορροφήσουμε τις απειρίες, είναι χρήσιμο να γράψουμε την λαγκρανζιανή της θεωρίας ως προς τις φυσικές πειραματικώς μετρούμενες σταθερές. Από την

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu,$$

πρέπει να απορροφήσουμε τους όρους Z_2 και Z_3 των διαδοτών του ηλεκτρονίου και του φωτονίου αντίστοιχα, έτσι ώστε να τους απαλείψουμε από τον υπολογισμό των στοιχείων του S-matrix, από την σχέση LSZ. Αυτό μπορεί να γίνει επαναορίζοντας τα πεδία ως $\psi = Z_2^{1/2}\psi_r$ και $A^\mu = Z_3^{1/2}A_r^\mu$. Ορίζοντας το φυσικό φορτίο του ηλεκτρονίου μέσω της $eZ_2Z_3^{1/2} = eZ_1$ και εισάγοντας τις παραμέτρους $\delta_3 = Z_3 - 1$, $\delta_2 = Z_2 - 1$, $\delta_m = Z_2m - m_{\text{phys}}$ και $\delta_1 = Z_1 - 1$, η λαγκρανζιανή γράφεται:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QED}} = & -\frac{1}{4}F_r^{\mu\nu}F_{r,\mu\nu} + \bar{\psi}_r(i\cancel{\partial} - m_{\text{phys}})\psi_r - e_{\text{phys}}\bar{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r A_{r,\mu} \\ & -\frac{1}{4}\delta_3 F_r^{\mu\nu}F_{r,\mu\nu} + \bar{\psi}_r(i\delta_2\cancel{\partial} - \delta_m)\psi_r - e\delta_1\bar{\psi}_r\gamma^\mu\psi_r A_{r,\mu}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Οι όροι δ που εισήγαμε ονομάζονται counterterms και οι αντίστοιχοι όροι στην λαγκρανζιανή δίνουν τους δικούς τους κανόνες Feynman για την θεωρία διαταραχών, οι οποίοι είναι απολύτως ανάλογοι με αυτούς που περιλαμβάνονται στο [Παράρτημα 1](#), υπό την έννοια ότι απλώς «διαβάζονται» από την λαγκρανζιανή. Χρησιμοποιώντας αυτή τη λαγκρανζιανή, τώρα, μπορούμε να συμπεριλαμβάνουμε σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών τα διαγράμματα που οφείλονται στους counterterms και έτσι, χρησιμοποιώντας τις απαιτήσεις επανακανονικοποίησης της [\[3.11\]](#), θα έχουμε, τελικά, πεπερασμένο αποτέλεσμα σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών και η μέθοδος ονομάζεται *επανακανονικοποιημένη θεωρία διαταραχών*.

Τα διαγράμματα που προκύπτουν από τους πρώτους τρεις όρους της [\[3.12\]](#), σε πρώτη τάξη, είναι τα ίδια με αυτά που υπολογίσαμε στις προηγούμενες ενότητες, με την αντικατάσταση $e \rightarrow e_{\text{phys}}$ και $m \rightarrow m_{\text{phys}}$. Σύμφωνα με αυτήν την παρατήρηση, τα διαγράμματα Feynman για τους counterterms καθώς και την πρώτη σχέση της [\[3.11\]](#), παίρνουμε ότι (ο δείκτης phys παραλείπεται από εδώ και πέρα γιατί έχουμε απαλείψει τις bare παραμέτρους από την θεωρία μας και δεν απαιτείται διάκριση πια):

$$m\delta_2 - \delta_m = \Sigma_2(m) = \frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \int_0^1 dx \left((4 - \epsilon)m - (2 - \epsilon)x\cancel{p}\right) \left(\frac{1}{\Delta|_m}\right)^{2-d/2}$$

όπου το Δ είναι εκείνο που υπεισέρχεται στην σχέση [\[3.5\]](#).

Η δεύτερη συνθήκη δίνει

$$\begin{aligned}\delta_2 &= \frac{d}{d\phi} \Sigma_2(m) \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{((1-x)^2 m^2 + x m_{\text{ph}}^2)^{2-d/2}} [(2-\epsilon)x - \mathcal{O}(\epsilon)].\end{aligned}$$

Οι όροι $\sim \epsilon$ θα δώσουν πεπερασμένο αποτέλεσμα σε $d = 4$, γιατί πολλαπλασιάζουν τον απλό πόλο της Γ , ο οποίος είναι $\sim 1/\epsilon$.

Η τρίτη συνθήκη δίνει

$$\delta_3 = \Pi_2(0) = -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(m^2)^{2-d/2}} (8x(1-x)).$$

Τέλος, η τέταρτη συνθήκη της [3.11] δίνει

$$\begin{aligned}\delta_1 &= -\delta F_1(0) \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} \frac{(2-\epsilon)^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{\Delta^{3-d/2}} (-\epsilon xy + m^2[2(z^2 - 4z + 1) - \epsilon(1-z)^2]) \right].\end{aligned}$$

όπου το $\delta F_1(q^2)$ δίνεται από την [3.2] και $\Delta(q^2 = 0) = (1-z)^2 m^2 + z m_{\text{ph}}^2 - xy q^2$. Κάνοντας τις ολοκληρώσεις στα x και y και κάνοντας κατάλληλες παραγοντικές στο z , μπορεί να δείξει κανείς ότι $\delta_1 = \delta_2$. Αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι καθόλου τυχαίο και μπορεί ναδειχθεί ότι ισχύει σε κάθε τάξη στη θεωρία διαταραχών. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται εμφανώς στην ταυτότητα Ward της QED.

Η συνάρτηση β τώρα της QED θα είναι σε πρώτη τάξη

$$\beta(e) = M \frac{\partial e_{\text{eff}}}{\partial M} = M \frac{\partial}{\partial M} \left(\frac{e}{2} \delta_3 \right)$$

όπου M είναι ένα μία αυθαίρετη κλίμακα μάζας, με την οποία μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις m στους counterterms που βρήκαμε παραπάνω. Σε αυτήν την περίπτωση είναι σαν να ορίζουμε τον διαδότη του ηλεκτρονίου να έχει πόλο στην αφύσικη μάζα M (στο όριο της άμαζης κβαντικής ηλεκτροδυναμικής). Αυτό μας επιτρέπει να δούμε πώς αλλάζει η αλληλεπίδραση μεταβάλλοντας τη μάζα M και απαιτώντας η θεωρία να μην εξαρτάται από αυτήν την αλλαγή. Αυτά τα αναλύσαμε στο [Κεφάλαιο 2](#), για την ομάδα επανακανονικοποίησης.

Ο υπολογισμός εδώ δίνει τελικά, στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$

$$\beta(e) = \frac{e^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e^6)$$

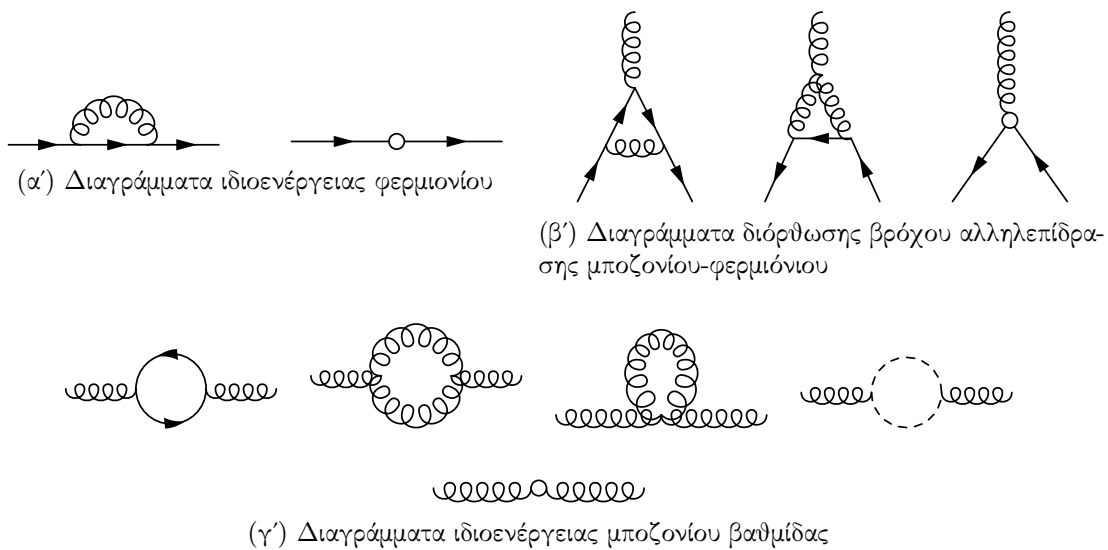
η οποία είναι εμφανώς θετική και μας δείχνει ότι η ισχύς της QED πρέπει να αυξάνεται με την ενέργεια, όπως δείχνει η σχέση [\[3.9\]](#).

Κεφάλαιο 4

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ β ΓΕΝΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ YANG-MILLS

4.1 Εισαγωγή

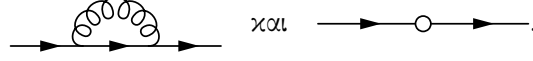
Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε την συνάρτηση β για μία γενική μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας, σε πρώτη τάξη στη θεωρία διαταραχών. Τα διαγράμματα Feynman που απαιτούνται για αυτόν τον υπολογισμό δίνονται στο [Σχήμα 4.1](#). Θα χρησιμοποιήσουμε τους κανόνες Feynman του [Παραρτήματος 1](#), την θεωρία του [Κεφαλαίου 2](#) καθώς και τις τεχνικές του [Κεφαλαίου 3](#) για να κάνουμε τον τελικό υπολογισμό. Έτσι, θα αποδείξουμε την ασυμπτωτική ελευθερία της Κβαντικής Χρωμοδυναμικής σε επίπεδο ενός βρόχου.



Σχήμα 4.1: Διαγράμματα Feynman για την συνάρτηση β σε επίπεδο ενός βρόχου

4.2 Διάγραμμα ιδιοενέργειας φερμιονίου

Ενδιαφερόμαστε, κατ' αρχάς, να υπολογίσουμε, σε επίπεδο ενός βρόχου, την διόρθωση στην ιδιοενέργεια των φερμιονίων της θεωρίας, στα πλαίσια της ανακανονικοποιημένης θεωρίας διαταραχών. Σε αυτήν την περίπτωση συνεισφέρουν τα διαγράμματα:



Το πρώτο διάγραμμα σύμφωνα με τους κανόνες του [Παραρτήματος 1](#) ισούται με:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (ig)^2 \gamma^\mu t^a \frac{i(\not{p} + \not{k} - m)}{(p+k)^2 - m^2} \gamma_\mu t^a \frac{-i}{p^2}.$$

Παρατηρούμε ότι ο παράγοντας $t^a t^a = C_2(r)$ είναι ανεξάρτητος του p (πράγμα προφανές αφού έχει να κάνει καθαρά με την δομή της ομάδας συμμετρίας G της θεωρίας), οπότε το εναπομείνον κομμάτι είναι ταυτόσημο με το αντίστοιχο της QED που υπολογίσαμε στην εξίσωση [\[3.5\]](#), με την προφανή αλλαγή $e \leftrightarrow g$.

Επιπλέον, το διάγραμμα αυτό μας δίνει την διόρθωση στην ισχύ του πεδίου, η οποία στα είναι ανεξάρτητη της μάζας στις συνθήκες ανακανονικοποίησης που χρησιμοποιούμε. Συνεπώς, μπορούμε να θέσουμε, για ευκολία, $m = 0$ στα παραπάνω και στα επόμενα. Τελικά έχουμε:

$$\text{diagram} = \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(r) \not{k} \int_0^1 dx (1-x)(d-2) \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}},$$

με $\Delta = -x(1-x)k^2$. Αν η κλίμακα ανακανονικοποίησης είναι M και ο counterterm της ανακανονικοποιημένης θεωρίας διαταραχών είναι

$$\text{diagram} \equiv i\not{p}\delta_2,$$

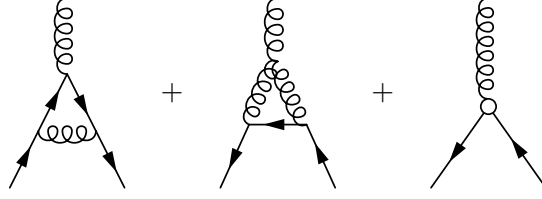
θα πρέπει το αποκλίνον κομμάτι του δ_2 να είναι σε $d \rightarrow 4$

$$\delta_2 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} C_2(r), \quad (4.1)$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει τα αναλλοίωτα ορμής του Δ με την κλίμακα μάζας/ενέργειας M .

4.3 Διαγράμματα διορθώσεων στους κόμβους

Στη συνέχεια θέλουμε να υπολογίσουμε τις διορθώσεις στους κόμβους, οι οποίες στο επίπεδο του ενός βρόχου προκύπτουν από τα διαγράμματα:



Θεωρούμε και πάλι το όριο όπου η μάζα του φερμιονίου m τείνει στο 0. Αυτή η θεώρηση μπορεί να δικαιολογηθεί με δύο τρόπους. Αρχικά, οι απειρίες στην ισχύ του πεδίου, που μας ενδιαφέρουν για τον υπολογισμό της συνάρτησης β , δεν εξαρτώνται από την μάζα του πεδίου (βλ. πχ Παράρτημα 2 για το MS scheme). Δεύτερον, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είμαστε στο όριο των υψηλών ενεργειών της θεωρίας, στο οποίο οι μάζες των φερμιονίων μπορούν να αγνοηθούν.

Επομένως, το πρώτο διάγραμμα στο όριο $m \rightarrow 0$ είναι:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} g^3 t^b t^a t^b \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k}') \gamma^\mu (\not{p} + \not{k}) \gamma_\nu}{(p + k')^2 (p + k)^2 p^2}.$$

Σε ορμές πολύ μεγαλύτερες από τις εξωτερικές, το ολοκλήρωμα αυτό σε $d = 4$ συμπεριφέρεται ως εξής

$$\int \frac{p^5}{p^6} dp \sim \ln p,$$

όπου έχουμε θεωρήσει σφαιρικές συντεταγμένες σε 4 διαστάσεις, με p είναι το μέτρο της ορμής. Αφού το ολοκλήρωμα αποκλίνει μόνο λογαριθμικά, αρκεί να πάρουμε το όριο στο οποίο οι εξωτερικές ορμές είναι αμελητέες. Ο συντελεστής του πόλου (εν προκειμένω της λογαριθμικής απόκλισης που μας ενδιαφέρει) θα δίνεται σωστά, παρόλο που το πεπερασμένο μέρος του διαγράμματος δεν θα είναι το σωστό. Και πάλι, το πεπερασμένο μέρος δεν μας ενδιαφέρει για τον κάτωθι υπολογισμό, καθώς οι counterterms που ψάχνουμε έχουν να κάνουν μόνο με τις αποκλίσεις των διαγραμμάτων (στο $\overline{MS}$ renormalization scheme που στην ουσία χρησιμοποιούμε).

Επομένως,

$$\text{Diagram} \simeq g^3 t^b t^a t^b \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \not{p} \gamma^\mu \not{p} \gamma_\nu}{p^2 \cdot p^2 \cdot p^2}.$$

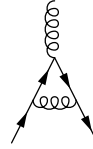
Χρησιμοποιώντας ξανά την αναλλοιώτητα κατά Lorentz του ολοκληρώματος αντικαθιστούμε το $p_\rho p_\sigma$ με $g_{\rho\sigma} p^2/d$ σε d διαστάσεις και το ολοκλήρωμα γίνεται τελικά

$$\sim \frac{1}{d} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\rho \gamma_\nu}{(p^2)^2}.$$

Η άλγεβρα Dirac σε d διαστάσεις δίνει (βλ. [Παράρτημα 4](#)) $\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\rho = -(d-2)\gamma^\mu$, ενώ η άλγεβρα της ομάδας δίνει

$$\begin{aligned} t^b t^a t^b &= t^b t^b t^a + t^b [t^a, t^b] \\ &= C_2(r) t^a + i t^b f^{abc} t^c \\ &= C_2(r) t^a + \frac{1}{2} i f^{abc} \cdot i f^{bcd} t^d \\ &= \left[C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G) \right] t^a, \end{aligned}$$

και έτσι

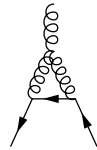


$$= \frac{ig^3}{(4\pi)^2} \left[C_2(r) - \frac{1}{2} C_2(G) \right] t^a \gamma^\mu \Gamma \left(2 - \frac{d}{2} \right) + \text{finite}.$$

Τα ίδια ισχύουν για το δεύτερο διάγραμμα, το οποίο επίσης αποκλίνει λογαριθμικά. Οπότε και πάλι το αποτέλεσμα που μας ενδιαφέρει μπορούμε να το εξάγουμε στο όριο $m \rightarrow 0$ και $|p|/|k| \ll 1$, όπου k οι εξωτερικές ορμές. Στο όριο $m \rightarrow 0$ είναι

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (ig\gamma_\nu t^b) \frac{i\not{p}}{p^2} (ig\gamma_\rho t^c) \frac{-i}{(k'-p)^2} \frac{-i}{(k-p)^2} g f^{abc} [g^{\mu\nu}(2k'-k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(2p-k'-k)^\mu \\ + g^{\rho\mu}(2k-k'-p)^\nu]. \end{aligned}$$

Η άλγεβρα της ομάδας δίνει $f^{abc} t^b t^c = \frac{1}{2} f^{abc} i f^{bcd} t^d = \frac{i}{2} C_2(G) t^a$ και έτσι



$$\simeq \frac{g^3}{2} C_2(G) t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\rho \frac{g^{\mu\nu} p^\rho - 2g^{\nu\rho} p^\mu + g^{\rho\mu} p^\nu}{(p^2)^3}.$$

Η άλγεβρα των πινάκων του Dirac δίνει:

$$\begin{aligned} \gamma_\nu \not{p} \gamma_\rho g^{\mu\nu} p^\rho &= \gamma_\nu \gamma^\sigma p_\sigma \gamma_\rho g^{\mu\nu} p^\rho \\ &= \gamma_\nu \gamma_\sigma p^\sigma p^\rho \gamma_\rho g^{\mu\nu} \xrightarrow[\text{Lorentz Invariance}]{p^\sigma p^\rho \rightarrow p^2 g^{\sigma\rho}/d} \gamma_\nu \gamma_\sigma g^{\sigma\rho} \gamma_\rho g^{\mu\nu} \frac{p^2}{d} \\ &= \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\rho \frac{p^2}{d}. \end{aligned}$$

Τελικά η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα είναι:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &\simeq -\frac{g^3}{2d} C_2(G) t^a \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2)^2} [\gamma^\mu \underbrace{\gamma^\rho \gamma_\rho}_d - 2 \underbrace{\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma_\rho}_{(2-d)\gamma^\mu} + \underbrace{\gamma^\sigma \gamma_\sigma}_d \gamma^\mu] \\
 &= \frac{ig^3}{(4\pi)^2} \frac{3}{2} C_2(G) t^a \gamma^\mu \Gamma \left(2 - \frac{d}{2} \right) + \text{finite}.
 \end{aligned}$$

Το διάγραμμα του counterterm είναι

$$\text{Diagram} \equiv i g t^a \gamma^\mu \delta_1.$$

Οπότε το δ_1 πρέπει να απορροφά τις απειρίες από τα προηγούμενα δύο διαγράμματα. Αυτό σημαίνει ότι έχουμε τελικά:

$$\delta_1 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} [C(r) + C_2(G)]. \quad (4.2)$$

Όπου έχουμε αντικαταστήσει τα αντίστοιχα Δ της QED, που είναι πολυώνυμα αναλλιώτων μάζας και ορμής, με μία κλίμακα μάζας M . Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [Peskin].

4.4 Διαγράμματα ιδιοενέργειας των μποζονίων βαθμίδας

Η συνεισφορά στην διόρθωση του διαδότη του μποζονίου βαθμίδας οφείλεται σε φερμιονικούς βρόχους από τα αλληλεπιδρώντα φερμιόνια της θεωρίας. Η συνεισφορά αυτή δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$\text{Diagram} = (ig)^2 \cdot (-1) \cdot \text{tr}[t^a t^b] \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(\gamma^\mu \frac{1}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} + \not{q} - m} \right).$$

Το διάγραμμα αυτό είναι ίδιο με το αντίστοιχο της QED που υπολογίσαμε στην [3.9], με την μόνη διαφορά ότι εδώ έχουμε $\text{tr}[t^a t^b] = C(r) \delta^{ab}$. Οπότε παίρνουμε έτοιμη την τιμή από την εξίσωση [3.9]:

$$C(r) \delta^{ab} i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \frac{-g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx 8x(1-x).$$

Το αποκλίνον κομμάτι του διαγράμματος για $d \rightarrow 4$ προέρχεται από την Γ συνάρτηση, οπότε σε αυτό το όριο το διάγραμμα αυτό είναι ίσο με

$$C(r)\delta^{ab}i(q^2g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\frac{-g^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \text{finite}.$$

Στην θεωρία αυτή έχουμε n_f φερμιόνια, κάθε ένα από τα οποία συνεισφέρει στον φερμιονικό βρόχο της διόρθωσης του διαδότη του μποζονίου βαθμίδας. Συνεπώς, η συνεισφορά των φερμιονίων είναι

$$\sum_{\text{fermions}} \left(\text{diagram} \right) = i(q^2g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\delta^{ab} \left(\frac{-g^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}n_f C(r)\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) + \text{finite} \right).$$

Για το επόμενο διάγραμμα, στην βαθμίδα των Feynman - 't Hooft $\xi = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \text{diagram} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-i}{p^2} \frac{-i}{(p+q)^2} g^2 f^{acd} f^{bcd} \times [g^{\mu\rho}(q-p)^\sigma + g^{\rho\sigma}(p+q+p)^\mu \\ &\quad + g^{\sigma\mu}(-q-p-q)^\nu] \\ &\quad \times [\delta_\rho^\nu(-q+p)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-p-q-p)^\nu \\ &\quad + \delta_\sigma^\nu(q+p+q)_\rho]. \end{aligned}$$

Ο παράγοντας $1/2$ είναι παράγοντας συμμετρίας (symmetry factor) και προκύπτει από την γνωστή συνδυαστική (βλ. [\[Diagrammar\]](#)).

Τους παρονομαστές τους ενώνουμε χρησιμοποιώντας παραμέτρους Feynman:

$$\frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(1-x)p^2 + x(p+q)^2]^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι $(1-x)p^2 + x(p+q)^2 = p^2 - xp^2 + xp^2 + xq^2 + 2pqx = p^2 + xq^2 + 2pqx$. Θέλουμε να τον φέρουμε στην μορφή $(P^2 - \Delta)^2$, καθώς τέτοια ολοκληρώματα ως προς P έχουμε ήδη δείξει (βλ. [\[Παράρτημα 3\]](#)) πώς υπολογίζονται. Συνεπώς, αν $P = p - qx$ τότε $P^2 - \Delta = (p+xq)^2 - \Delta = p^2 + x^2q^2 + 2pqx - \Delta$. Συγκρίνοντας με τα προηγούμενα, έχουμε $\Delta = -x(1-x)q^2$ και έτσι

$$\frac{1}{p^2} \frac{1}{(p+q)^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{(P^2 - \Delta)^2}.$$

Μπορούμε να αλλάξουμε μεταβλητή στο αρχικό ολοκλήρωμα στα p και να πάμε στα P . Επειδή το ολοκλήρωμα είναι διπλό, στην ουσία κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $p \rightarrow p + xq$, $x \rightarrow x$, η οποία έχει προφανώς μοναδιαία Ιακωβιανή ορίζουσα. Πηγαίνοντας σε d διαστάσεις έχουμε τελικά:

$$\int d^d p \rightarrow \int d^d P.$$

Ο αριθμητής δίνει τώρα

$$\begin{aligned} \mathcal{N}^{\mu\nu} = & [g^{\mu\rho}(q - P + xq)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2(P - xq) + q)^\mu + g^{\sigma\mu}(-2q - P + xq)^\nu] \\ & \times [\delta_\rho^\nu(-q + P - xq)_\sigma + g_{\rho\sigma}(-2(P - xq) - q)^\nu + \delta_\sigma^\nu(P - xq + 2q)_\rho]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο παρονομαστής είναι τετραγωνικός στο P . Αυτό σημαίνει ότι όλοι οι γραμμικοί στο P^μ όροι στον αριθμητή θα δίνουν μηδενική συνεισφορά στην τελική ολοκλήρωση πάνω στις τετραορμές, ως ολοκληρώματα περιττών συναρτήσεων σε όλο τον χώρο. Συνεπώς, αγνοούμε όλους τους γραμμικούς στο P^μ όρους στη συνέχεια.

Επιπλέον, τα γινόμενα $P^\rho P^\sigma$ αντικαθίστανται από το $P^2 g^{\rho\sigma}/d$ στην ολοκλήρωση, κατά τα γνωστά λόγω αναλλοιώτητας κατά Lorentz.

Μαζεύοντας τους όρους $g^{\mu\nu}$ βρίσκουμε ότι έχουν παράγοντα

$$g^{\mu\nu} : -2P^2 - q^2(5 + 2x^2 - 2x) + \mathcal{O}(\text{linear in } P^\mu).$$

Οι υπόλοιποι όροι δίνουν

$$\begin{aligned} P^\mu P^\nu : & (6 - 4d)P^\mu P^\nu \xrightarrow[\text{Invariance}]{\text{Lorentz}} P^2 g^{\mu\nu} \left(4 - \frac{6}{d}\right), \\ q^\mu q^\nu : & 6(x^2 - x + 1) - d(2x - 1)^2 + \mathcal{O}(\text{linear in } P^\mu) \end{aligned}$$

Τελικά ο αριθμητής γίνεται

$$\mathcal{N}^{\mu\nu} = -6g^{\mu\nu}P^2 \left(1 - \frac{1}{d}\right) - g^{\mu\nu}q^2 [(2 - x)^2 + (1 + x)^2] + q^\mu q^\nu [6(x^2 - x + 1) - d(2x - 1)^2].$$

Και έτσι αυτό το διάγραμμα Feynman είναι ίσο με:

$$-\frac{g^2}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} f^{acd} f^{bcd} \frac{\mathcal{N}^{\mu\nu}}{(P^2 - \Delta)^2} = -\frac{g^2}{2} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \frac{\mathcal{N}^{\mu\nu}}{(P^2 - \Delta)^2}.$$

καθώς ισχύει $f^{acd} f^{bcd} = C_2(G) \delta^{ab}$ (βλ. [\[Georgi\]](#))

Εκτελούμε στροφή Wick, κατά τα γνωστά, με $P^0 \rightarrow iP_E^0$ και έτσι $P^2 = -P_E^2$ και $d^d P \rightarrow id^d P_E$. Τελικά το διάγραμμα γίνεται:

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= -\frac{ig^2}{2} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{6g^{\mu\nu} P_E^2 \left(1 - \frac{1}{d}\right) - g^{\mu\nu} q^2 (2x^2 - 2x + 5)}{(P_E^2 + \Delta)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{q^\mu q^\nu [6(x^2 - x + 1) - d(2x - 1)^2]}{(P_E^2 + \Delta)^2} \right\} \\
 &= -\frac{ig^2}{2} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \left\{ 6g^{\mu\nu} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1 - \frac{d}{2}} \left(1 - \frac{1}{d}\right) + \right. \\
 &\quad - g^{\mu\nu} q^2 \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} \\
 &\quad \times (2x^2 - 2x + 5) + q^\mu q^\nu \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \\
 &\quad \times \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}} [6(x^2 - x + 1) - d(2x - 1)^2] \left. \right\}.
 \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram} &= \frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2 - \frac{d}{2}}} \left(\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \left[\frac{3}{2}(d-1)x(1-x) \right] + \right. \\
 &\quad + \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 \frac{1}{2}(2x^2 - 2x + 5) + \\
 &\quad \left. + \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu [3(x^2 - x + 1) - \frac{d}{2}(1 - 2x)^2] \right).
 \end{aligned}$$

Το επόμενο διάγραμμα:

$$\text{Diagram} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\rho\sigma}}{p^2} \delta^{cd} (-ig^2) \times \begin{bmatrix} f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \end{bmatrix}.$$

Ο πρώτος όρος είναι μηδενικός επειδή ο πίνακας $g^{\mu\nu}$ είναι συμμετρικός. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
 g_{\rho\sigma} f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) &= f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g_{\rho\sigma} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} g_{\rho\sigma}) \\
 &= f^{abe} f^{cde} (\delta_\sigma^\mu g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} \delta_\sigma^\nu) \\
 &= f^{abe} f^{cde} (g^{\nu\mu} - g^{\mu\nu}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Επίσης, η άλγεβρα της ομάδας δίνει:

$$f^{ace} f^{bde} \delta^{cd} = f^{ace} f^{bce} = C_2(G) \delta^{ab},$$

$$f^{ade} f^{bce} \delta^{cd} = f^{ade} f^{bde} = C_2(G) \delta^{ab}.$$

Σε d διαστάσεις είναι $g_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} = d$ και, προχωρώντας τις συναιρέσεις δεικτών, καταλήγουμε τελικά στην έκφραση

$$C_2(G) \delta^{ab} (2g^{\mu\nu} g_{\rho\sigma} g^{\rho\sigma} - 2g^{\nu\mu}) = 2C_2(G) \delta^{ab} g^{\mu\nu} (d-1),$$

και τελικά το διάγραμμα αυτό ισούται με:

$$\text{Diagram} = -g^2 \delta^{ab} C_2(G) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2} g^{\mu\nu} (d-1).$$

Αυτό το ολοκλήρωμα για $d < 2$ αποκλίνει, ενώ έχει πόλο για $d = 2$. Ειδικά σε $d = 4$ αποκλίνει τετραγωνικά $\propto \Lambda^2$, όπου Λ κάποιο cutoff για την ορμή. Προκειμένου να δείξουμε αναλυτικά την ακύρωση του πόλου σε $d = 2$ διαστάσεις (πράγμα απαραίτητο για την αναλυτική συνέχιση σε $d = 4$ κατά την διαστατική ανακανονικοποίηση), θα φέρουμε το ολοκλήρωμα στην μορφή των υπολοίπων διαγραμμάτων, στα οποία έχουμε εξάγει προσεκτικά την λογαριθμική απόκλιση που μας ενδιαφέρει. Συνεπώς πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με έναν παράγοντα $(p+q)^2$, χρησιμοποιούμε παραμέτρους Feynman και αλλάζουμε την μεταβλητή σε $P = p+xq$. Αγνοώντας όρους γραμμικούς στο P^μ και κάνοντας μία στροφή Wick έχουμε στον Ευκλείδειο χώρο:

$$\begin{aligned} \text{Diagram} &= +ig^2 \delta^{ab} C_2(G) \int \frac{d^d P_E}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx (d-1) \left[\frac{-P_E^2 g^{\mu\nu}}{(P_E^2 + \Delta)^2} + \frac{2qg^{\mu\nu}(1-x)^2}{(P_E^2 + \Delta)^2} \right] \\ &= +ig^2 \delta^{ab} C_2(G) g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \frac{d-1}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{d}{2} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{1-d/2} \right. \\ &\quad \left. - 2q(1-x)^2 \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \right] \\ &= +ig^2 \delta^{ab} C_2(G) g^{\mu\nu} \int_0^1 dx \frac{d-1}{\Delta^{2-d/2}} \left[-\Gamma(1-\frac{d}{2}) q^2 x(1-x)^{\frac{d}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(2-\frac{d}{2}) q^2 (1-x)^2 \right]. \end{aligned}$$

Τέλος, μένει η διόρθωση λόγω των ghosts:

$$\text{Diagram} = (-1) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (-g) f^{dac} (q+p)^\mu (-g) f^{cbd} p^\nu \frac{i\delta^{ab}}{p^2} \frac{i\delta^{ab}}{(p+q)^2}.$$

Ο παράγοντας (-1) στην αρχή οφείλεται στο ότι τα ghosts είναι αντιμετατιθέμενα πεδία.

Η άλγεβρα των παραγόντων δομής δίνει:

$$f^{dac} f^{cbd} = -f^{adc} f^{cbd} = +f^{adc} f^{bcd} = -f^{adc} f^{bdc} = -C_2(G) \delta^{ab}.$$

Ο αριθμητής θα είναι, θέτοντας $p = P - qx$, ίσος με:

$$\mathcal{N}^{\mu\nu} = x(x-1)q^\mu q^\nu + P^\mu P^\nu + \mathcal{O}(\text{linear in } P^\mu).$$

Χρησιμοποιώντας την αναλλοιώτητα κατά Lorentz του ολοκληρώματος αντικαθιστώντας σε d διαστάσεις

$$P^\mu P^\nu = \frac{P^2 g^{\mu\nu}}{d},$$

περιστρέφοντας κατά Wick και ολοκληρώνοντας στον Ευκλείδειο χώρο προκύπτει:

$$\begin{aligned} \text{ghost loop} &= -C_2(G) \delta^{ab} g^2 \int \frac{d^d P}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{\frac{g^{\mu\nu} P^2}{d} + q^\mu q^\nu x(x-1)}{(P^2 - \Delta)^2} \\ &= \frac{iC_2(G) \delta^{ab} g^2}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 dx \frac{1}{\Delta^{2-d/2}} \left\{ -g^{\mu\nu} q^2 \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \left[\frac{x}{2}(1-x)\right] \right. \\ &\quad \left. + q^\mu q^\nu \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) x(1-x) \right\}. \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις τρεις συνεισφορές στην διόρθωση του μποζονικού διαδότη σε επίπεδο ενός βρόχου βλέπουμε ότι ο συνολικός παράγοντας που πολλαπλασιάζει τον όρο $\Gamma(1 - d/2)$ είναι

$$\frac{1}{2}(3d - 3 - d^2 + d - 1) = \left(1 - \frac{d}{2}\right)(d - 2),$$

που μας δίνει την αναμενόμενη ακύρωση του πόλου σε $d = 2$ διαστάσεις. Αυτό σημαίνει ότι σε $d = 4$ διαστάσεις αναιρείται η τετραγωνική απόκλιση και άρα δεν υπάρχει ανακανονικοποίηση μάζας για το μποζόνιο βαθμίδας. Αυτή η απαίτηση, όπως σχολιάσαμε στην περίπτωση της QED, προκύπτει από τις αντίστοιχες ταυτότητες Ward-Takahashi για τις μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας, οι οποίες εν προκειμένω ονομάζονται Slavnov-Taylor (βλ. [WeinbergII] για περισσότερες λεπτομέρειες). Οι ταυτότητες αυτές, για την ακρίβεια, απαιτούν τα μποζόνια βαθμίδας να παραμένουν άμαζα σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών, πράγμα το οποίο αποδεικνύεται αναλυτικά εδώ για το επίπεδο του ενός βρόχου. Παρατηρήστε ότι το διάγραμμα των ghosts, παρότι αυτά είναι μη φυσικοί βαθμοί ελευθερίας (βλ συζήτηση στην [Ενότητα 1.5](#)), παίζει ουσιαστικό ρόλο σε αυτήν την ακύρωση του πόλου.

Από την ταυτότητα

$$\left(1 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) = \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right),$$

προκύπτει ότι ο συνολικός παράγοντας του όρου $\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2$ είναι

$$(d-2)x(1-x) + \frac{1}{2}(2-x)^2 + \frac{1}{2}(1+x)^2 - (d-1)(1-x)^2,$$

ενώ του όρου $\Gamma(2 - \frac{d}{2}) q^\mu q^\nu$ είναι

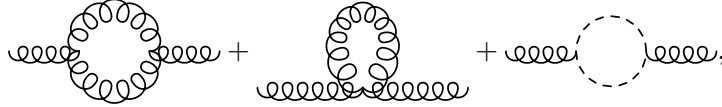
$$-(1 - \frac{d}{2})(1 - 2x)^2 - (1 + x)(2 - x) + x(1 - x) = -(1 - \frac{d}{2})(1 - 2x)^2 - 2.$$

Παρατηρώντας ότι το Δ είναι συμμετρικό στην εναλλαγή $x \leftrightarrow (1 - x)$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε όπου $(1 - x)$ το x στον αριθμητή. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να κάνουμε την εξής αλλαγή:

$$x \rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1 - x) = \frac{1}{2}.$$

Να σημειώσουμε ότι αυτή η συμμετρία δεν είναι τυχαία, αλλά πηγάζει από τον τρόπο ορισμού των παραμέτρων Feynman.

Τελικά το άθροισμα των τριών διαγραμμάτων



προκύπτει ότι είναι

$$\frac{ig^2}{(4\pi)^{d/2}} C_2(G) \delta^{ab} \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-d/2}} (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \left[\left(1 - \frac{d}{2}\right) (1 - 2x)^2 + 2 \right].$$

Η έκφραση αυτή είναι εκπεφρασμένα εγκάρσια, όπως αναμένεται από τις ταυτότητες Ward-Takahashi:

$$q^\mu \left(\text{gluon loop} \right) = 0.$$

Ο όρος δ_3 στην ανακανονικοποιημένη θεωρία διαταραχών θα πρέπει να απορροφά τις απειρίες των διαγραμμάτων. Εφόσον το Δ είναι συνδυασμός αναλλοιώτων ορμής, μπορούμε στην κλίμακα M που δουλεύουμε να αντικαταστήσουμε $\Delta = M^2$ προκειμένου να υπολογίσουμε την συνάρτηση β . Επομένως, από το διάγραμμα της ανακανονικοποιημένης θεωρίας διαταραχών με:

$$\text{gluon loop} \equiv ig\delta_3,$$

προκύπτει ότι ο counterterm ισούται με

$$\delta_3 = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(M^2)^{2-d/2}} \left[\frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} n_f C(r) \right], \quad (4.3)$$

όπου, προφανώς, έχουμε συμπεριλάβει και τα διαγράμματα με τους φερμιονικούς βρόχους.

4.5 Υπολογισμός συνάρτησης β

Η συνάρτηση β υπολογίζεται όπως και στην QED σε έναν βρόχο και είναι:

$$\beta(g) = gM \frac{\partial}{\partial M} \left(-\delta_1 + \delta_2 + \frac{1}{2}\delta_3 \right),$$

καθώς και πάλι προκύπτουν από τους counterterms για τον κόμβο φερμιονίου-γλουονίου, από το διάγραμμα ιδιοενέργειας του φερμιονίου καθώς και από τα διαγράμματα ιδιοενέργειας του γλουονίου.

Να σχολιάσουμε ότι ανάλογα με τις συνθηκών ανακανονικοποίησης που επιλέγουμε, οι πεπερασμένες συνεισφορές στους counterterms μπορεί να διαφέρουν, αλλά αυτές δεν συμβάλλουν, τουλάχιστον στο επίπεδο του ενός βρόχου που εξετάζουμε, στην συνάρτηση β .

Η παραπάνω απλή πράξη, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τις σχέσεις [4.1], [4.2] και [4.3] δίνει τελικά

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}n_f C(r) \right], \quad \text{για γενική θεωρία Yang-Mills.} \quad (4.4)$$

Αν η ομάδα συμμετρίας είναι η $G = \text{SU}(N)$ με φερμιόνια στην θεμελιώδη αναπαράσταση, τότε

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_f \right].$$

Η θεωρία λέγεται *ασυμπτωτικά ελεύθερη* αν (βλ. Ενότητα 2.5):

$$\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_f > 0.$$

Στην QCD έχουμε την $\text{SU}(3)$ ομάδα συμμετρίας βαθμίδας (Gauge Symmetry Group) και άρα

$$\beta_{QCD}(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2} \left(11 - \frac{2}{3}n_f \right).$$

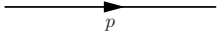
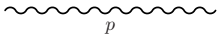
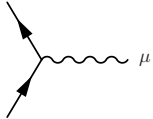
Το εξαιρετικά ενδιαφέρον αποτέλεσμα που προκύπτει από αυτήν την σχέση είναι ότι για $n_f \leq 16$ η QCD είναι ασυμπτωτικά ελεύθερη. Πράγματι, εφόσον γνωρίζουμε ότι τα φερμιόνια της θεωρίας (quarks) είναι 6, η Κβαντική Χρωμοδυναμική πρέπει να είναι ασυμπτωτικά ελεύθερη θεωρία.

Παράρτημα Α΄

Κανόνες Feynman

Στο παράρτημα αυτό απλώς θα παραθέσουμε τους κανόνες Feynman που χρησιμοποιούμε στον υπολογισμό των διαφόρων διαγραμμάτων στο [Κεφάλαιο 3](#) και στο [Κεφάλαιο 4](#).

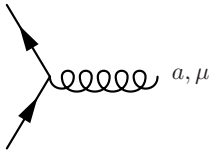
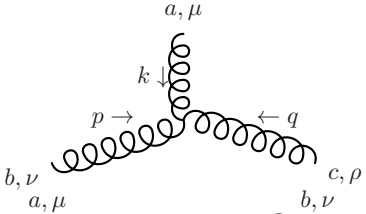
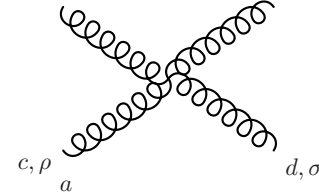
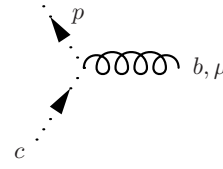
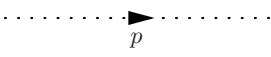
Κβαντική Ηλεκτροδυναμική: $\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$

Διαδότης Dirac:		$= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
Διαδότης φωτονίου:		$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}$
Κόμβος της QED:		$= iQe\gamma^\mu$

Επίσης, στον χώρο των ορμών τα εξωτερικά φερμιόνια πρέπει να πολλαπλασιάζονται με $u^s(p)$ ή $\bar{u}^s(p)$ αν είναι εισερχόμενα ή εξερχόμενα αντίστοιχα, ενώ τα αντιφερμιόνια πρέπει να πολλαπλασιάζονται με $\bar{v}^s(p)$ ή $v^s(p)$ αν είναι εισερχόμενα ή εξερχόμενα αντίστοιχα. Τα εισερχόμενα φωτόνια θα έχουν μία πόλωση $\epsilon_\mu(p)$ και τα εξερχόμενα μία $\epsilon_\mu^*(p)$.

Μη αβελιανή θεωρία βαθμίδας:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{YM} = & \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + gA_\mu^a \bar{\psi}\gamma^\mu t^a \psi \\ & - gf^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A^{\mu b}A^{\nu c} - \frac{1}{4}g^2(f^{eab}A_\mu^a A_\nu^b)(f^{ecd}A^{\mu c}A^{\nu d})\end{aligned}$$

Κόμβος φερμιονίου:		$= ig\gamma^\mu t^a$
Κόμβος 3 γκλουονίων:		$= gf^{abc} [g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$
Κόμβος 4 γκλουονίων:		$= -ig^2 [f^{abe} f^{cde} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ace} f^{bde} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) + f^{ade} f^{bce} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma})]$
Κόμβος ghost:		$= -gf^{abc} p^\mu$
Διαδότης ghost:		$= \frac{i\delta^{ab}}{p^2 + i\epsilon},$

όπου τα τελευταία δύο γραφήματα έχουν προέλθει από τους επιπλέον όρους που εισήγαμε στο [Κεφάλαιο 1](#), κατά την χβάντωση με την μέθοδο Faddeev-Popov, οι οποίοι είναι

$$\mathcal{L}_{\text{ghosts}} = \bar{c}^a \left(-\partial^2 \delta^{ac} - g\partial^\mu f^{abc} A_\mu^b \right) c^c$$

Κατ' αναλογία με αυτούς εξάγονται και οι όροι των counterterms που εισήγαμε στο [Κεφάλαιο 3](#) και στο [Κεφάλαιο 4](#).

Παράρτημα Β΄

Τα Z στο MS scheme είναι ανεξάρτητα της μάζας

Θα αποδείξουμε βάσει των [tHooft72], [tHooft73] και [Collins] ότι το Minimal Subtraction σχέδιο επανακανονικοποίησης είναι ανεξάρτητο της μάζας. Το γεγονός αυτό το χρησιμοποιούμε στο [Κεφάλαιο 4](#). Στο [Κεφάλαιο 2](#) υποθέτουμε ότι υπάρχει τέτοιο σχέδιο και εδώ αποδεικνύουμε ότι ένα από αυτά είναι το MS.

Στο MS σχέδιο απλώς απορροφούμε στους counterterms μόνο τις απειρίες που προέρχονται από τα διαγράμματα στις διάφορες τάξεις της θεωρίας διαταραχών. Επίσης, στις $d = 4 - \epsilon$ ορίζουμε την αδιάστατη σε $d = 4$ σταθερά σύζευξης g_B ως $g_B \mu^{(d-4)\rho}$, έτσι ώστε το g_B να παραμένει αδιάστατο. Το ρ εξαρτάται από την διάσταση των πεδίων που συζεύγνυνται με g_B . Οπότε, στο MS σχέδιο γράφουμε

$$\begin{aligned} g_B \mu^{(d-4)\rho} &= g_R + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(g_R, m_R, \mu)}{(d-4)^n} \\ m_B &= m_R + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(g_R, m_R, \mu)}{(d-4)^n} \equiv m_R Z_m \\ Z &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(g_R, m_R, \mu)}{(d-4)^n}. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι τα υπόλοιπα των πόλων στις $d = 4$ διαστάσεις είναι πεπερασμένα πολυώνυμα των εξωτερικών ορμών. Η απόδειξη έχει ως εξής: Αν ένα διάγραμμα αποκλίνει στις $d = 4$ διαστάσεις, τότε θα είναι καλά ορισμένο μόνο αριστερά των $d = 4$. Τα ολοκληρώματα που προκύπτουν ανάγονται στην μορφή

$$\Gamma(j - \tfrac{1}{2}d) \int dy_1 \dots \int dy_i \frac{1}{(M^2)^{j-n/2}} P(y, m, k),$$

όπου j είναι κάποιος ακέραιος και τα M^2 και P είναι πολυώνυμα στις παραμέτρους Feynman, στις μάζες και στις εξωτερικές ορμές εκ κατασκευής. Ο πόλος είναι φανερός από την συνάρτηση Γ , η οποία τον παρουσιάζει μόνο όταν $d \geq 2j$, καθώς μόνο τότε μπορεί το όρισμα να γίνει αρνητικό. Το υπόλοιπο του πόλου για $d \geq 2j$ είναι

$$C \int dy_1 \dots \int dy_i (M^2)^l P(y, m, k),$$

με $l = \frac{1}{2}d - j \geq 0$ και το αποτέλεσμα είναι κατά προφανή τρόπο πολυώνυμο στις εξωτερικές ορμές και στις μάζες.

Ας γυρίσουμε, τώρα, στην αρχική απόδειξη. Το μ εμφανίζεται μόνο ως δύναμη μ^{4-d} , που σημαίνει ότι όταν γίνει το ανάπτυγμα Laurent του ολοκληρώματος Feynman, λογάριθμοι του μ θα εμφανιστούν. Το m_R , αντίθετα, στα υπόλοιπα των πόλων αποδείξαμε ότι εμφανίζεται μόνο ως πολυώνυμο, οπότε στα υπόλοιπα εμφανίζεται μόνο σε θετικές δυνάμεις, ανεξάρτητες του d . Αλλά τα a_n και c_n είναι αδιάστατα, ενώ τα b_n , μ και m έχουν διάσταση 1, ανεξάρτητη της διάστασης d . Ο μόνος τρόπος για να έχουν τις σωστές διαστάσεις, λοιπόν, είναι τα a_n , b_n και c_n να μην εξαρτώνται από το μ (γιατί δεν μπορεί να δοθεί αδιάστατο αποτέλεσμα μόνο με γινόμενα m με λογάριθμους του μ), ενώ τα a_n και c_n δεν εξαρτώνται ούτε από το m_R , άρα το Z δεν εξαρτάται από την μάζα. Επίσης, το Z_m δεν εξαρτάται από το μ ή το m_R και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Αυτά επεκτείνονται και στο $\overline{MS}$ scheme κατά τετριμμένο τρόπο.

Παράρτημα Γ'

Ολοκληρώματα Βρόχων και Διαστατική Ομαλοποίηση

Εδώ θα υπολογίσουμε ένα από τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται κατά τον υπολογισμό διαγραμμάτων Feynman με βρόχους, μετά την εισαγωγή παραμέτρων Feynman, την επέκταση σε d διαστάσεις και την στροφή Wick στον Ευκλείδειο χώρο και θα δώσουμε κάποιες σχέσεις χωρίς απόδειξη.

Έστω το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 + \Delta)^2}.$$

Πρώτα πηγαίνουμε σε d -διάστατες σφαιρικές συντεταγμένες, γράφοντας

$$\int d^d \ell = \int d\Omega_d \ell^{d-1} d\ell.$$

Η επιφάνεια της d -διάστατης σφαίρας προκύπτει θεωρώντας το

$$I = \int d^d \mathbf{x} e^{-\mathbf{x}^2} \quad \text{με} \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d).$$

Επομένως, από την μία έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \int d\Omega_d dR R^{d-1} e^{-R^2} = \int d\Omega \int_0^\infty R^{d-1} e^{-R^2} dR \\ &= \frac{1}{2} \int d\Omega \int x^{d/2-1} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \int d\Omega. \end{aligned}$$

Από την άλλη, το I είναι γινόμενο γκαουσιανών ολοκληρωμάτων, οπότε

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots dx_d \exp\left(-\sum_{i=1}^d x_i^2\right) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2}\right]^d = (\sqrt{\pi})^d,$$

και έτσι

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Οπότε τώρα μένει το υπόλοιπο

$$J = \int d\ell \ell^{d-1} \frac{\ell^2}{(\ell^2 + \Delta)^2} = \int_0^\infty \frac{\ell^{d+1}}{(\ell^2 + \Delta)^2}.$$

Θέτουμε $x = \Delta/(\ell^2 + \Delta)$, οπότε

$$dx = -\frac{\Delta}{(\ell^2 + \Delta)^2} 2\ell d\ell.$$

και έτσι

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty d\ell \ell \frac{1}{(\ell^2 + \Delta)^2} \ell^d = - \int_1^0 \frac{dx}{2\Delta} \ell(x)^d \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{2\Delta} \left[\frac{\Delta(1-x)}{x} \right]^{d/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{1-d/2} \int dx x^{-d/2} (1-x)^{d/2}. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης $B(\alpha, \beta)$ έχουμε

$$\int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Τελικά, χρησιμοποιώντας και την ταυτότητα $(d/2)\Gamma(d/2) = \Gamma(1+d/2)$ παίρνουμε

$$\int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(1-\frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{1-d/2}.$$

Ακολουθούν μερικές χρήσιμες σχέσεις, χωρίς απόδειξη, τις οποίες χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία. Παρατηρείστε ότι τα επόμενα είναι ολοκληρώματα στον Minkowski χώρο:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\ell^2 - \Delta)^n} &= \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-d/2} \\ \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^2}{(\ell^2 - \Delta)^n} &= \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-d/2-1} \\ \int \frac{d^d \ell}{(2\pi)^d} \frac{\ell^\mu \ell^\nu}{(\ell^2 - \Delta)^n} &= \frac{(-1)^{n-1} i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{n-d/2-1}. \end{aligned}$$

Επίσης, δίνουμε τον γενικό τρόπο εισαγωγής παραμέτρων Feynman για τον συνδυασμό n παρονομαστών, για λόγους πληρότητας και αναφοράς:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]}$$

Τέλος, αποδεικνύμε τις σχέσεις που παίρνουμε στο όριο $d \rightarrow 4$, όταν οι εκθέτες μηδενίζονται. Για παράδειγμα για $d = 4 - \epsilon \rightarrow 4$

$$\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} = \exp(-(2-d/2)\ln\Delta) \simeq 1 - \epsilon \log\Delta + \mathcal{O}(\epsilon^3)$$

Ενώ ισχύει και το ανάπτυγμα της συνάρτησης $\Gamma(x)$ γύρω από τον πόλο της στο $-n$:

$$\Gamma(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{x+n} - \gamma + 1 + \cdots + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(x+n) \right)$$

όπου $\gamma = 0.5772$ η σταθερά Euler-Mascheroni.

Παράρτημα Δ΄

Άλγεβρα πινάκων γ^μ

Εδώ απλώς θα γράψουμε κάποιες σχέσεις για τους πίνακες γ^μ που θα χρειαστούμε στον υπολογισμό ιχνών των πινάκων αυτών κατά τον υπολογισμό φερμιονικών βρόχων. Τις παραθέτουμε χωρίς απόδειξη, καθώς είναι αρκετά εύκολο να δειχτούν. Κάνουμε ένα διαχωρισμό μεταξύ 4 και d διαστάσεων.

Σε τέσσερις διαστάσεις

$$\text{tr}(\mathbf{1}) = 4$$

$$\text{tr}(\text{περιττός αριθμός } \gamma^\mu) = 0$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho})$$

$$\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \dots) = \text{tr}(\dots \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu)$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4g^{\nu\rho}$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu$$

Σε d διαστάσεις

Σε $d = 4 - \epsilon$ διαστάσεις δεν τροποποιείται κανένα ίχνος (δεδομένου ότι δεν ασχολούμαστε εδώ με τον πίνακα γ^5), αλλά αλλάζουν οι ταυτότητες που σχετίζονται με την συστολή των δεικτών:

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \gamma_\mu &= d \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -(2 - \epsilon) \gamma^\nu \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4g^{\nu\rho} - \epsilon \gamma^\nu \gamma^\rho \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu + \epsilon \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu\end{aligned}$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι σε d διαστάσεις είναι

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \delta_\mu^\mu = d$$

Βιβλιογραφία

- [1] Michael E. Peskin & Daniel V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Avalon Publishing, 1995.
- [2] Stefan Pokorski. *Gauge Field Theories*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Volume I: Foundations*. Cambridge University Press, 1995.
- [4] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields, Volume II: Modern Applications*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] Anthony Zee. *Quantum Field Theory in a Nutshell*. Princeton University Press, 2010.
- [6] Howard Georgi. *Lie Algebras In Particle Physics: from Isospin To Unified Theories*. Westview Press; 2 edition, 1999
- [7] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972). doi:10.1016/0550-3213(72)90279-9
- [8] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **61**, 455 (1973). doi:10.1016/0550-3213(73)90376-3
- [9] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, NATO Sci. Ser. B **4**, 177 (1974).
- [10] J. C. Collins and A. J. Macfarlane, Phys. Rev. D **10**, 1201 (1974). doi:10.1103/PhysRevD.10.1201
- [11] J. Berges, N. Tetradis and C. Wetterich, Phys. Rept. **363**, 223 (2002) doi:10.1016/S0370-1573(01)00098-9 [hep-ph/0005122].