Τάτσης Γεώργιος

λ-Δακτύλιοι και $\mathbb{F}_1$
Μεταπτυχιακή Εργασία

19 Ιουνίου 2017

Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών

Τριμελής επιτροπή:

κ. Αριστείδης Κοντογεώργης (επιβλέπων)

κ. Ιωάννης Εμμανουήλ

κ. Μιχάλης Μαλιάκας

Στους γονείς μου για την
καθημερινή υποστήριξη
που μου έχουν δείξει και
συνεχίζουν να δείχνουν
όλα αυτά τα χρόνια...

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Οι ομοιότητες μεταξύ σωμάτων αριθμών και σωμάτων συναρτήσεων λείων προβολικών καμπυλών επί πεπερασμένων σωμάτων λειτουργούσαν ως ένα δυνατό εργαλείο για την αντιμετώπιση προβλημάτων στην αρθμητική και την γεωμετρία. Μια μεγάλη επιτυχία αυτής της προσεγγισής ήταν η απόδειξη της υπόθεσης του Riemann από τον André Weil το 1942 για την περίπτωση των σωμάτων συναρτήσεων.

Στην απόδειξη του ο Weil χρησιμοποίησε την θεωρία τομών των divisors επί της επιφάνεις $C \times C$, όπου C να είναι μια λεία προβολική καμπύλη επί ενός σώματως $\overline{\mathbb{F}_q}$. Η προσέγγιση του Weil για μια απόδειξη της υπόθεσης Riemann επί του $\mathbb{Z}$ κατέστει ανέφικτη λόγω του ότι το γεωμετρικό αντικείμενο $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) \times \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ ήταν μονοδιάστατο.

Με αυτά τα ερίσματα οι μαθηματικοί θέλοντας να αντιγράψουν την απόδειξη του Weil προσπάθησαν να επινοήσουν ένα περιβάλλον στο οποίο θα μπορούσε κάποιός να δει το ακεραίο φάσμα $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ ως μια καμπύλη επι ενός μυθικού αντικειμένου, το απόλυτο σημείο, δηλαδή επι τους φάσματος $\operatorname{Spec}(\mathbb{F}_1)$, του σώματος με ένα στοιχείο $\mathbb{F}_1$ και κατα συνέπεια να μελετήσουν θεωρία τομών στην επιφάνεια $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) \times_{\mathbb{F}_1} \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

Μια τέτοια πρόταση ήρθε από τον Alexander Smirnov. Ο Smirnov έδωσε έναν ορισμό για τις επεκτάσεις το $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_{1^n}$ τις οποίες όρισε να είναι τα μονοειδή $\{0\} \cup \mu_n$, όπου μ_n να είναι οι n-οστές ρίζες τις μονάδας. Με βάση λοιπόν τις παραπάνω επεκτάσεις παρατήρησε ότι μπορούσε να δουλέψει και με άλλα γεωμετρικά αντικείμενα επί του $\mathbb{F}_1$ όπως τους προβολικούς χώρους $\mathbb{P}^n_{\mathbb{F}_1}$ επί του $\mathbb{F}_1$. Συγκεκριμένα, όρισε την προβολική ευθεία επί του $\mathbb{F}_1$ να έχει ως σχηματικά σημεία:

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1} = \{[0], [\infty]\} \cup \{[n] \mid n \in \{1, 2, \ldots\}\}$$

με τον βαθμό ένος σημείου $[n]$ να είναι το φυσικός $\phi(n)$ όπου ϕ η συνάρτηση του Euler, όπου κάθε τέτοιο σημείο θα έπρεπε να θεωρήται ώς το σύνολο όλων των γεωμετρικών σημείων του που να είναι οι n-οστές ρίζες τις μονάδας. Έχοντας, λοιπόν, μια εικόνα για το $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1}$ προσπάθησε να δει το $\overline{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})}$, προτείνοντας να έχει την μορφή $\{[2], [3], [5], [7], [11], [13], [17], \ldots\} \cup \{[\infty]\}$, ώς μια καμπύλη επί του $\mathbb{F}_1$.

Συγκεκριμένα, κατ΄αναλογία με την κλασική αλγεβρική γεωμετρία θα θέλαμε να μπορούμε να δούμε το $\mathbb{Q}$ ως δακτύλιο συναρτήσεων του $\overline{\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})}$ και επομένως έδωσε έναν ορισμό για ένα οποιοδήποτε στοιχείο $q = \frac{a}{b}$, με $(a,b) = 1$:

$$[p] \longmapsto \begin{cases} [0], & \text{αν } p|a \\ [\infty], & \text{αν } p|b \\ [n], & \text{αν } p \nmid a,\ p \nmid b \text{ και } \overline{a}\overline{b}^{-1} \text{ έχει τάξη } n \text{ στο } \mathbb{F}_p^* \end{cases}$$

και

$$[\infty] \longmapsto \begin{cases} [0], & \text{αν } a < b \\ [\infty], & \text{αν } b < a \end{cases}$$

θεωρώντας ώς σταθερές συναρτήσεις να είναι οι $\{1, -1\} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{F}_{1^2}$.
Κίνητρο του παραπάνω ορίσμου ήταν ώστε οι μη σταθερές συναρτήσεις να ορίζουν επιμορφισμούς «καμπυλών»

$$\overline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})} \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1}$$

και εν κατακλείδι να μελετήσει θεωρία τομών στην επιφάνεια

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1} \times_{\mathbb{F}_1} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$$

αντι της επιφάνειας $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \times_{\mathbb{F}_1} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$.
Μια προσέγγιση σχετικά με το $\mathbb{F}_1$ που να μπορεί να συμπεριλάβει πτυχές των παραπάνω προτάσεων έχει δοθεί από τον James Borger χρησιμοποιώντας την θεωρία των λ-δακτυλίων. Ο Borger μέσω τις πρότασης του τίνει να βλέπει την λ-δομή ως πληροφορίες καθόδο από το $\mathbb{Z}$ στο $\mathbb{F}_1$ και τον forgetful συναρτητή, οποίος ξεχνα την λ-δομη, ως επέκταση βάσης $\_ \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$. Με αυτόν τον τρόπο ο Borger καταφέρνει να δώσει έννοια στον περιορισμό του Weil και να δώσει μια εικόνα του τι θα είναι ένα $\mathbb{Z}$-scheme επί του $\mathbb{F}_1$.
Η παρούσα διπλωματική αποτελείται απο τρία κεφάλαια:
Στο πρώτο κεφάλαιο θα δώσουμε την θεωρία που θα χρειαστούμε για τα επόμενα δύο κεφάλαια. Συγκεκριμένα θα δούμε κάποια στοιχεία αλγεβρικής θεωρίας αριθμών, στοιχεία τα οποία θα μας βοηθήσουν να αποδείξουμε το κύριο θεώρημα του κεφάλαιο 2.
Στη συνέχεια θα μιλήσουμε για λ-δακτύλίους που θα είναι και το κύριο αντικείμενο στο οποίο θα βασιστούμε σε όλη την πορεία αυτής της πτυχιακής.
Στο κεφάλαιο δύο θα δώσουμε έναν ορισμό για τις $\mathbb{F}_1$-άλγεβρες, ως επόμενο του ορισμού θα πάρουμε έναν ορισμό για το $\mathbb{F}_1$. Στη συνέχεια θα δούμε τι μορφή έχει η θεωρία Galois για étale άλγεβρες στις étale $\mathbb{F}_1$-άλγεβρες.
Στο τρίτο κεφάλαιο θα ορίσουμε τα λ-φάσματα λ-δακτυλίων. Συγκεκριμένα

θα ορίσουμε μια συγκεκριμένη κλάση δακτυλίων, τους δακτυλίους Witt και θα δούμε πως μπορούμε να κατασκεύασουμε απο τον έναν μεταθετικό δακτύλιο R τον δακτύλιο Witt του R, $W(R)$.
Με αυτό τον τρόπο θα μπορούμε να δούμε τον φάσμα ενός δακτυλίου ως υποσύνολο κάποιου λ-φάσματος ενός λ-δακτυλίου. Ως επίλογο θα δούμε πως τα παραπάνω μας επιτρέπουν να δούμε τις προτάσεις του Smirnov ως κομμάτι της συγκεκριμένης $\mathbb{F}_1$-θεωρίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα και την υποστήριξη του για την ολοκλήρωση αυτής της διπλωματικής.

1 Βασικές γνώσεις

1.1 Εισαγωγικά

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας μια σύντομη περιγραφή των προπεπερασμένων ακεραίων καθώς ο συγκεκριμένος δακτύλιος θα εμφανιστεί αρκετές φορές στην συνέχεια.

Ορισμος 1.1.1. Ένα **προβολικό σύστημα** ομάδων (G_a, ϕ_{ab}) αποτελείται από τα εξής:

1. ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(\Lambda, \leq)$ το οποίο να είναι κατευθυνόμενο δηλαδή αν $a, b \in \Lambda$ τότε υπάρχει $c \in \Lambda$ έτσι ώστε $a \leq c$ και $b \leq c$.
2. για κάθε $a \in \Lambda$ να έχουμε μία ομάδα G_a
3. για κάθε $a \leq b$ να υπάρχει ένας μορφισμός ομάδων $\phi_{ab} : G_b \longrightarrow G_a$ έτσι ώστε για $a \leq b \leq c$ να ισχύει $\phi_{ac} = \phi_{ab} \circ \phi_{bc}$.

Ορισμος 1.1.2. Το **προβολικό όριο** ενός συστήματος ορίζεται να είναι η υποομάδα της $\prod_{a\in\Lambda} G_a$ που να αποτελείται από ακολουθίες (g_a) που αν ικανοποιούν το εξής $\phi_{ab}(g_b) = g_a$ για κάθε $a \leq b$. Την συγκεκριμένη υποομάδα θα την συμβολίζουμε με $\varprojlim G_a$

Ορισμος 1.1.3. Μια **προπεπερασμένη ομάδα** ορίζεται να είναι το προβολικό όριο ένος προβολικού συστήματος πεπερασμένων ομάδων.

Παράδειγμα 1.1.1. Αν Λ είναι το σύνολο των μη μηδενικών φυσικών με την διάταξη να ορίζεται από την διαιρετότητα δηλαδή

$$m \leq n \;\Leftrightarrow\; m|n$$

και παίρνουμε ως απεικονίσεις τους επιμορφισμούς

$$\phi_{nm} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

τότε έχουμε ένα προβολικό σύστημα $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \phi_{nm})$ και το προβολικό όριο το συμβολίζουμε με $\widehat{\mathbb{Z}}$ και καλείται **προπεπερασμένοι ακέραιοι**.

Παρατήρηση. Είναι γνωστό ότι η κατηγορία των δακτυλίων είναι κλείστη ως προς προβολικά όρια και άρα μπορούμε να δώσουμε δομη δακτυλίου στην $\widehat{\mathbb{Z}}$ που να επάγεται από τις δομές δακτυλίων των $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποια στοιχεία θεωρίας αλγεβρικής θεωρίας αριθμών που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.

Όρισμος 1.1.4. Ένα **σώμα αριθμών** θα είναι μια πεπερασμένη επέκταση του σώματος $\mathbb{Q}$.
Ένας μιγαδικός a θα καλείται **αλγεβρικός αριθμός** αν είναι ρίζα πολυωνύμου με συντελεστες στο $\mathbb{Q}$.
Έστω a ένας αλγεβρικός αριθμός. Ο a καλείται **αλγεβρικός ακέραιος** αν το ελάχιστο πολυώνυμο του επί του $\mathbb{Q}$ έχει συντελεστές στο $\mathbb{Z}$.

Παρατήρηση. Είναι γνωστό αποτέλεσμα της αλγεβρικής θεωρίας ότι το σύνολο όλων των αλγεβρικών αριθμών καθώς και το σύνολο όλων των αλγεβρικών ακεραίων μπορεί να εφοδιαστεί με μια δομή δακτυλίου.

Όρισμος 1.1.5. Έστω K ένα σώμα αριθμών. Θα συμβολίζουμε το σύνολο των αλγεβρικών ακεραίων στο K με

$$\mathcal{O}_K = \{a \in K \ \in \ a \text{ αλγεβρικός ακέραιος}\}$$

Το σύνολο $\mathcal{O}_K$ καλείται **δακτύλιος ακεραίων** του K.

Πρόταση 1.1.1. *Έστω K ένα σώμα αριθμών. Τότε $\mathcal{O}_K$ είναι δακτύλιος.*

Όρισμος 1.1.6. Έστω K σώμα αριθμών με δακτύλιο ακεραίων $\mathcal{O}_K$. Ένα σύνολο $\{w_1, ..., w_n\} \subset K$ καλείται **ακέραια βάση** του $\mathcal{O}_K$, αν κάθε στοιχείο του $\mathcal{O}_K$ μπορεί να γραφεί ως $\mathbb{Z}$-γραμμικός συνδιασμός στοιχείων του συνόλου.

Έστω K ένα σώμα αριθμών. Τότε θα είναι της μορφής $K = \mathbb{Q}(a)$ για κάποιο $a \in K$. Έτσω $a_1, ..., a_n$ τα συζηγή του a, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν n το πλήθος μονορφισμοί $K \longrightarrow \overleftarrow{\mathbb{Q}}$ τις οποίες θα συμβολίζουμε $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$.

Όρισμος 1.1.7. Έστω $\{w_1, \cdots, w_n\} \subset K$. Ορίζουμε την **διακρίνουσα του** $\{w_1, \cdots, w_n\}$

$$\Delta(w_1, \cdots, w_n) = (det(\sigma_i(w_j))^2$$

όπου οι σ όπως παραπάνω.

Όρισμος 1.1.8. Έστω K ένα σώμα αριθμών. Τότε καλούμε **διακρίνουσα** $\mathcal{D}_K$ του K την διακρίνουσα της ακέραιας βάσης του K. Επίσης, αν $\{w_1, \cdots, w_n\}$ μια ακέραια βάση τότε $\mathcal{D}_K = \Delta(w_1, \cdots, w_n) \in \mathbb{Z}$.

Όρισμος 1.1.9. Μια **περιοχή Dedekind** είναι μια ακεραία περιοχή όπου:

1. Να είναι δακτύλιος της Noether
2. Κάθε με μηδενικό πρώτο ιδεώδες της είναι μέγιστο
3. Να είναι ακέραια κλειστή, δηλαδή να περιέχει όλους τους αλγεβρικούς ακεραίους που περιέχονται στο σώμα κλασμάτων της

Πρόταση 1.1.2. *Αν R μια περιοχή Dedekind. Τότε κάθε μη μηδενικό ιδεώδες a του μπορεί να γραφεί στη παρακάτω μορφή*

$$a = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$$

όπου τα p_i να είναι διαφορετικά ανα δύο πρώτα ιδεώδη του R και $r_i > 0$. Η γραφή αυτή είναι μοναδική.

Πρόταση 1.1.3. *Έστω A μια περιοχή Dedekind με σώμα κλασμάτων K. Έστω B να είναι η ακέραια θήκη του A σε μια διαχωρίσημη επέκταση L του K. Τότε B είναι περιοχή Dedekind.*

Παρατήρηση. Κάθε δακτύλιος ακεραίων είναι μια περιοχή Dedekind.

Όρισμος 1.1.10. Έστω A μια περιοχή Dedekind με σώμα κλασμάτων K και B να είναι η ακέραια θήκη του σε μια πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση L του K. Αν p ένα πρώτο ιδεώδες του A η επέκταση του στο B θα έχει μια μοναδική ανάλυση σε πρώτα ιδεώδη του B

$$pB = \beta_1^{e_1} \cdots \beta_g^{e_g}$$

με $e_i \geq 1$.
Αν υπάρχει $e_i > 1$ τότε λέμε ότι το p **διακλαδίζεται** στο B και ο αριθμός e_i καλείται **δείκτης διακλάδωσης**.
Λέμε ότι το β **διαιρεί** το p και γράφουμε $\beta | p$ αν το β εμφανίζεται στην παραπάνω ανάλυση του pB.
Θα συμβολίζουμε με $e(\beta/p) = e_i$ και $f(\beta/p) = [B/\beta : A/p]$.
Ο p λέμε ότι **διασπάται** στο B (ή L) αν $e_i = f_i = 1$.
Ο p λέμε ότι **αδρανεί** στο B (ή L) αν $e = g = 1$.

Παρατήρηση. Βλέπουμε λοιπόν ότι ένας πρώτος p του A δεν διακλαδίζεται στον B αν ο B/pB δεν έχει μηδενοδύναμα στοιχεία.

Πρόταση 1.1.4. *Έστω m ο βαθμός της επέκτασεις του L επί του K και $\beta_1, \cdots, \beta_g$ να είναι οι πρώτοι που διαιρούν το p, τότε*

$$\sum_{i=1}^{g} e_i f_i = m.$$

Αν επιπλέον L είναι Galois επί του K τότε όλοι δείκτες διακλάδωσης είναι ίσοι καθώς και τα f_i και άρα

$$gef = m.$$

Παρατήρηση. Σε ένα σώμα αριθμών μπορεί να δειχθεί ότι μόνο πεπερασμένο πλήθος πρώτων διασπάται και μάλιστα ένα πρώτο ιδεώδες διασπάται αν διαιρεί την διακρίνουσα.

Όρισμος 1.1.11. Έτσω $L|K$ μια Galois επέκταση σωμάτων αριθμών, με ομάδα Galois G και $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_L$ οι αντίστοιχοι δακτύλιοι ακεραίων. Έστω p πρώτο στον $\mathcal{O}_K$ και β ένα πρώτο που εμφανίζεται στην ανάλυση του $p\mathcal{O}_L$, ορίζουμε

$$G(\beta) = \{\sigma \in G \mid \sigma(\beta) = \beta\}$$

Η $G(\beta)$ καλείται **ομάδα διάσπασης** του β. Στη συνέχει θεωρούμε τον μορφισμό

$$G(\beta) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_L/\beta)$$

με

$$\sigma \longmapsto \overline{\sigma}$$

όπου $\overline{\sigma}(x+\beta) = \sigma(x) + \beta$.
Ο πυρήνας του παραπάνω μορφισμού καλείται **ομάδα αδράνειας** $T(\beta)$ **του** β και ισχύει $|T(\beta)| = e(\beta/p)$.

Όρισμος 1.1.12. Έτσω $L|K$ μια Galois επέκταση σωμάτων αριθμών, με ομάδα Galois G και $\mathcal{O}_K$, $\mathcal{O}_L$ οι αντίστοιχοι δακτύλιοι ακεραίων. Έστω,πάλι, ότι p πρώτο στον $\mathcal{O}_K$ και β ένα πρώτο που εμφανίζεται στην ανάλυση του $p\mathcal{O}_L$. Τότε $\mathcal{O}_K/p$ είναι ένα πεπερασμένο σώμα έστω $\mathbb{F}_q$ και επομένως $\mathcal{O}_L/\beta$ θα είναι μια επέκταση του δηλαδή, $\mathcal{O}_L/\beta = \mathbb{F}_{q^f}$. Τότε η ομάδα Galois της $\mathrm{Gal}(\mathcal{O}_L/\beta \mid \mathcal{O}_K/p)$ θα παράγεται από ένα στοιχείο, έστω σ, τον Frobenius αυτομορφισμό $x \longmapsto x^q$.
Θα καλούμε κάθε στοιχείο του συμπλόκου $\sigma T(\beta)$ **Frobenius αυτμορφισμό που αντιστοιχεί στο** β.

Παρατήρηση. Αν το p δεν διακλαδίζεται τότε $e(\beta/p) = 1 \Longrightarrow |T(\beta)| = 1$ και επομένως ο αυτομορφισμός Frobenius είναι μονοσήμαντα καθορισμένος από ένα στοιχείο του $G(\beta)$.

Τέλος παραθέτουμε το θεώρημα Kronecker-Weber, το θεώρημα πυκνότητας του Tcheboarev καθώς και την επόμενη πρόταση που θα μας χρειαστουν στο κεφάλαιο 2. Οι αποδείξεις παραλείπονται καθώς δεν ανταποκρίνονται στο περιεχόμενο αυτής της εργασίας. Ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στις αναφορές [15] και [18] για το θεώρημα Kronecker-Weber και στην αναφορά [15] για τα υπόλοιπα για περισσότερες πληροφορίες.

Θεώρημα 1.1.5 (Kronecker-Weber). *Έστω $K|\mathbb{Q}$ μια αβελιανή Galois επέκταση. Τότε υπάρχει φυσικός n που να διαιρείται μόνο από τους πρώτους που διακλαδίζονται στο K έτσι ώστε $K \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$.*

Θεώρημα 1.1.6 (πυκνότητας Tcheboarev). *Έστω $L|K$ μια Galois επέκταση με ομάδα Galois G. Τότε για οποιοδήποτε $\sigma \in G$ θεωρούμε το σύνολο*

$$M_{L\,/\,K}(\sigma) = \left\{ p \text{ πρώτο στο } \mathcal{O}_K \;\middle|\; \begin{array}{c} p \text{ μη διακλ. και } \beta|p \text{ πρώτο} \\ \text{στο } \mathcal{O}_L \text{με } \sigma = x^{|\mathcal{O}_K/p|} mod \beta \end{array} \right\}$$

Τότε

$$d(M_{L/K}(\sigma)) = \frac{|<\sigma>|}{|G|}$$

Πρόταση 1.1.7. *Αν ένα σύνολο πρώτων S έχει πυκνότητα $d(S) \neq 0$, τότε το S είναι άπειρο.*

1.2 λ-Δακτύλιοι

Σε αυτή την ενότητα θα εισάγουμε την έννοια του λ-δακτύλιου, η οποία ξεκίνησε από τον Grothendieck [16], [17]. Στην περιγραφή μας θα ακολουθήσουμε τα βιβλία των Knutson [1] και Yau [6]. Διαισθητικά η έννοια του λ-δακτυλίου εισαγάγει μία σειρά από τελεστές $\lambda^n : R \to R$, σε ένα αντιμεταθετικό δακτύλιο R, οι οποίες είναι κατασκευασμένες να συμπεριφέρονται ως exterior powers διανυσματικών χώρων.

Όρισμος 1.2.1. Ένας **προ- λ-δακτύλιος** είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος R με μονάδα μαζί με μία οικογένεια απεικονίσεων $(\lambda^i : R \to R)_{i\in\mathbb{N}}$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

1. $\lambda^0(x) = 1, \forall x \in R$
2. $\lambda^1(x) = x, \forall x \in R$
3. $\lambda^n(x+y) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(x)\lambda^{n-i}(y)$

Σχόλιο. Ένας ισοδύναμος ορισμός με τον παραπάνω είναι ο εξής:
Σε κάθε $x \in R$ να αντιστοιχίσουμε την δυναμοσειρά

$$\lambda_t(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i(x)t^i$$

και να απαιτήσουμε η απεικόνιση

$$\lambda_t : R \to 1 + tR[[t]]$$

να είναι ένας μορφισμός μεταξύ της προσθετικής ομάδας του R με την πολλαπλασιαστική ομάδα του δακτυλίου $1 + tR[[t]]$ των τυπικών δυναμοσειρών με συντελεστες στο R και με σταθερό όρο ίσο με την μονάδα, και επιπλέον να απαιτήσουμε $\lambda^1(x) = x$.

Παρατήρηση. Από τα (2) και (3) του ορισμού έπεται ότι $\lambda^n(0) = 0$, $\forall n \geq 1$, οπότε $\lambda_t(0) = 1$.

Παραδείγματα 1.2.1. :

1. Ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ με την απεικόνιση $\lambda_t : \mathbb{Z} \to 1 + t\mathbb{Z}[[t]]$, όπου $n \mapsto (1+t)^n$ αποκτά δομή προ- λ-δακτυλίου.
2. Το σώμα $\mathbb{R}$ με την απεικόνιση $\lambda_t : \mathbb{R} \to 1 + t\mathbb{R}[[t]]$, όπου $r \mapsto (1+t)^r$ αποκτά δομή προ- λ-δακτυλίου.
3. Το σώμα $\mathbb{R}$ με την απεικόνιση $\lambda_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, όπου $r \mapsto e^{rt}$ αποκτά δομή προ- λ-δακτυλίου.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τους λ-δακτύλιους. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε αρχικά την έννοια του καθολικού πολυωνύμου.

Ορισμός καθολικών πολυωνύμων: Έστω $\xi_1, \ldots, \xi_q, \eta_1, \ldots, \eta_r$ απροσδιόριστες. Θέτουμε s_i, σ_j, με $i \in \{1, \ldots, q\}$ και $j \in \{1, \ldots, r\}$, να είναι τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα των $\xi_1, \ldots, \xi_q$ και $\eta_1, \ldots, \eta_r$ αντίστοιχα. Δηλαδή:

$$\prod_{i=1}^{q}(1+\xi_i t) = 1 + \sum_{i=1}^{q} s_i t^i$$

και

$$\prod_{i=1}^{r}(1+\eta_i t) = 1 + \sum_{i=1}^{r} \sigma_i t^i$$

Έστω $P_n(s_1, \ldots, s_q, \sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ να είναι ο συντελεστής του n-οστού όρου t^n του πολυωνύμου $\prod_{i,j}(1+\xi_i\eta_j t)$ και $P_{nd}(s_1, \ldots, s_{nd})$ να είναι ο συντελεστής του n-οστού όρου t_n του πολυωνύμου $\prod_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant q}(1 + \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_d} t)$
Από τον ορισμό τους τα P_n, P_{nd} είναι συμμετρικά πολυώνυμα και επομένως από θεμελιώδες θεώρημα συμμετρικών πολυωνύμων έχουμε ότι τα P_n, P_{nd} θα είναι πολυώνυμα ως προς τα στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα s_i, σ_j, με $i \in \{1, \ldots, q\}$ και $j \in \{1, \ldots, r\}$, με ακεραίους συντελεστες και άρα μπορούν να οριστούν σε οποιοδήποτε δακτύλιο με μονάδα και καλούνται *καθολικά πολυώνυμα*.

Σχόλιο. Τα P_n, P_{nd} είναι ανεξάρτητα των q και r αν $q, r \geqslant n$ για το P_n και $q \geqslant nd$ για το P_{nd}.

Όρισμος 1.2.2. Ένας **λ-δακτύλιος** είναι ένας προ- λ-δακτύλιος R στον οποίον ισχύουν επιπλέον τα εξής:

1. $\lambda_t(1) = 1 + t$
2. $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^n(x), \lambda^1(y), \ldots, \lambda^n(y)), \forall x, y \in R$
3. $\lambda^m(\lambda^n(x)) = P_{nm}(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^{nm}(x)), \forall x \in R$

Παράδειγμα 1.2.1. Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό έχουμε ότι:

- $\lambda^1(xy) = P_1(\lambda^1(x), \lambda^1(y)) = \lambda^1(x)\lambda^1(y)$
- $\lambda^2(xy) = P_2(\lambda^1(x), \lambda^2(x), \lambda^1(y), \lambda^2(y)) = (\lambda^1(x))^2\lambda^2(y) + (\lambda^1(y))^2\lambda^2(x) - 2\lambda^2(x)\lambda^2(x) = x^2\lambda^2(y) + y^2\lambda^2(x) - 2\lambda^2(x)\lambda^2(x)$

Παρατήρηση. Την ομάδα $1 + tR[[t]]$ μπορούμε να την εφοδιάσουμε και με έναν «πολλαπλασιασμό» που να ορίζεται ως εξής αν $a = 1 + a_1 t + a_2 t + \cdots$ και $b = 1 + b_1 t + b_2 t + \cdots$ στοιχεία του $1 + tR[[t]]$ τότε

$$a \odot b = c = 1 + c_1 t + c_2 t + \cdots$$

όπου $c_n = P_n(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n)$.
Οπότε μπορούμε να δούμε τον $1 + tR[[t]]$ ως έναν δακτύλιο καθως και την απεικόνιση

$$\lambda_t : R \longrightarrow 1 + tR[[t]]$$

ως έναν μορφισμό δακτυλίων.

Όρισμος 1.2.3. :

- Έστω R ένας προ- λ-δακτύλιος. Ένα στοιχείο $x \in R$ λέμε ότι είναι **πεπερασμένου βαθμού** n και συμβολικά γράφουμε $\dim(x) = n$, αν $\deg(\lambda_t(x)) = n$. Ο R καλείται **finitary** αν κάθε στοιχείο του είναι πεπερασμένου βαθμού

- Έστω R ένας προ- λ-δακτύλιος. Ένα στοιχείο $x \in R$ λέμε ότι είναι **διωνυμικού τύπου** αν ισχύει, $n\lambda^n(x) = x\lambda^{n-1}(x-1)$. Ο R καλείται **διωνυμικός** αν κάθε στοιχείο του είναι διωνυμικού τύπου.

Παρατήρηση. Είναι εύκολο να δειχθει ότι σε ένα λ-δακτύλιο, αν έχουμε δύο μονοδιάστατα στοιχεία τότε και το γινόμενο τους θα είναι μονοδιάστατο

Όρισμος 1.2.4. Έστω R και S δύο (προ-) λ-δακτύλιοι, με λ-δράσεις λ^i_R και λ^i_S αντίστοιχα. Τότε:

1. Ένας **μορφισμός** μεταξύ (προ-)λ-δακτυλίων (ή **λ-μορφισμός**) $f : R \longrightarrow S$ είναι ένας μορφισμός δακτυλίων με $f \circ \lambda^i_R = \lambda^i_S \circ f$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

2. Ένα **(προ-) λ-ιδεώδες** I του R είναι ένα ιδεώδες του R έτσι ώστε $\lambda^i_R(x) \in I$, $\forall x \in I$ και $\forall i \geq 1$.

3. Ένας **(προ-) λ-υποδακτύλιος** του R είναι ένας υποδακτύλιος R' του R έτσι ώστε $\lambda^i_R(x) \in R'$, $\forall x \in R'$ και $\forall i \geq 0$.

Παρατήρηση. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η σύνθεση δυο λ-μορφισμών είναι επίσης ένας λ-μορφισμός, επομένως βλέπουμε ότι οι λ-δακτύλιοι αποτελούν μια κατηγορία.

Πρόταση 1.2.1. *Έστω R και S δύο (προ-) λ-δακτύλιοι και $f : R \longrightarrow S$ ένας λ-μορφισμός. Τότε:*

1. *Ο πυρήνας της f είναι ένα λ-ιδεώδες του R.*
2. *Η εικόνα της f είναι ένας λ-υποδακτύλιος του S.*
3. *Αν I είναι ένα λ-ιδεώδες του R τότε το πηλίκο R/I είναι ένας λ-δακτύλιος με τις λ-συναρτήσεις $\lambda^n_{R/I}$ να ορίζονται από την ισότητα*

$$\lambda^n_{R/I}(r + I) = \lambda^n_R(r) + I$$

και η προβολή $R \longrightarrow R/I$ είναι ένας λ-μορφισμός.

Πρόταση 1.2.2. *Ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Ο $\mathbb{Z}$ έχει μια μοναδική δομή λ-δακτυλίου με $\lambda_t(m) = (1 + t)^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.*
2. *Κάθε λ-δακτύλιος έχει χαρακτηριστική 0.*
3. *Κάθε λ-δακτύλιος περιέχει λ-υποδακτύλιο ισόμορφο του $\mathbb{Z}$.*

Απόδειξη. Σε κάθε λ-δακτύλιο έχουμε $\lambda_t(1) = 1+t$, επομένως $\lambda_t(m) = \lambda_t(1+1+\ldots+1) = \lambda_t(1)^m = (1+t)^m$.
Επιπλέον έχουμε ότι $\lambda_t(-m) = \lambda_t(m)^{-1} = (1+t)^{-m}$, το οποίο μας αποδεικνύει ότι υπάρχει μόνο ένας τρόπος να ορίσουμε λ-δομή στο $\mathbb{Z}$. Επίσης για κάθε λ-δακτύλιο R έχουμε ότι $\lambda_t(m\cdot 1) = (1+t)^m \neq 1$, οπότε $m \neq 0$ στο R. Επομένως έχει χαρακτηριστική 0 και θα περιέχει λ-υποδακτύλιο ισόμορφο του $\mathbb{Z}$. $\square$

Σχόλιο. Από (3) της παραπάνω πρότασης έχουμε ότι ο λ-δακτύλιος $\mathbb{Z}$ είναι αρχικό αντικείμενο στην κατηγορία των λ-δακτυλίων.

Πρόταση 1.2.3. *Έστω R ένας λ-δακτύλιος. Τότε υπάρχει μοναδική λ-δομή του $R[x]$ που να ικανοποιεί τις παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:*

1. *x έχιε βαθμό 1*
2. *x^n έχει βαθμό 1, $\forall n \geqslant 1$*
3. *$\lambda^q(rx^n) = \lambda^q(r)x^{nq}$, $\forall n, q \in \mathbb{N}$ και $r \in R$*

Απόδειξη. Έστω $f(x) = \sum a_i x^i \in R[x]$. Για να είναι ο $R[x]$ ένας λ-δακτύλιος θα πρέπει να ισχύει το εξής:
$\lambda_t(f(x)) = \lambda_t(\sum a_i x^i) = \prod \lambda_t(a_i x^i) = \prod \lambda_{x^i t}(a_i)$.
Παίρνοντας λοιπόν ως ορισμό του λ_t το παραπάνω έχουμε ότι:
$\lambda_t(f(x) + g(x)) = \lambda_t(f(x))\lambda_t(g(x)) = \lambda_t(f(x)) \oplus \lambda_t(g(x))$.
Για τον πολλαπλασιασμό αρκεί να ελέγξουμε τις ακόλουθες ισότητες:

1. $\lambda_t(rs) = \lambda_t(r) \odot \lambda_t(s)$, $\forall r, s \in R$
2. $\lambda_t(x^m x^n) = \lambda_t(x^m) \odot \lambda_t(x^n)$ $\forall m, n \geqslant 0$
3. $\lambda_t(rx^n) = \lambda_t(r) \odot \lambda_t(x^n)$, $\forall r \in R$, $\forall n \geqslant 0$.

Το (1) είναι άμεσο από την υπόθεση διότι R είναι ένας λ-δακτύλιος. Τα (2), (3) έπονται από τον ορισμό του λ_t. □

Όρισμος 1.2.5. Έστω R, S δύο λ-δακτύλιοι. Ορίζουμε το γινόμενο τους $R \times S$ να είναι ως σύνολο το καρτεσιανό γινόμενο των R και S.
Η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός στο $R \times S$ να ορίζονται κατα συνεταγμένες δίνοντας έτσι δομή δακτυλίου στο $R \times S$.
Ορίζουμε τις λ-δράσεις στο $R \times S$ ως εξής:

$$\lambda_t(r, s) = \lambda_t(r, 0)\lambda_t(0, s)$$

με $\lambda_t(r, 0) = (1, 1) + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^n(r), 0)t^n$, όμοια για το $\lambda_t(0, s)$.

Όρισμος 1.2.6. Έστω R, S δύο λ-δακτύλιοι. Ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο $R \otimes S$ των R και S να είναι ως δακτύλιος το συνήθες τανυστικό γινόμενο των R, S και οι λ-δάσεις να ορίζονται ως εξής:
$\lambda^n(a \otimes 1) = \lambda^n(a) \otimes 1$, $\lambda^n(1 \otimes b) = 1 \otimes \lambda^n(b)$ και $\lambda^n(a \otimes b) = \lambda^n(a \otimes 1 \cdot 1 \otimes b)$.

Παρατήρηση. Με βάση του παραπάνω ορισμούς η κατηγορία των λ-δακτυλίων είναι κλειστή ως προς πεπερασμένα γινόμενα και συγγινόμενα. Κατ΄ επέκταση μπορεί να αποδειθχεί επιπλέον ότι είναι κλειστή ως προς ευθύ και προβολικά όρια.

1.3 Δράσεις Adams

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε μια σημαντική οικογένια δράσεων ενός λ-δακτυλίου, τις δράσεις Adams. Θα δείξουμε ότι αντίθετα με τις λ-δράσεις, οι δράσεις Adams είναι ενδομορφισμοί λ-δακτυλίων καθως και ότι εξαρτώνται από τις λ^i απεικονίσεις.

Όρισμος 1.3.1. Ένας λ-δακτύλιος της μορφής $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$ με $\lambda^n(a_1) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, καλείται **ελεύθερος λ-δακτύλιος ενός γεννήτορα**.

► Θα δείξουμε την ύπαρξη ενός τέτοιου δακτυλίου:
Έστω $\Omega_0 = \mathbb{Z}$. Κατασκευάζουμε το Ω_n από το Ω_{n-1} προσθέτοντας απλά μια απροσδιόριστη ξ_n. Έπομένως από τα παραπάνω έχουμε $\Omega_n = \mathbb{Z}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ και επεκτείνοντας την $\lambda_t : \mathbb{Z} \to 1 + t\mathbb{Z}[[t]]$ σε όλο το Ω_n ως εξής $\lambda_t(\xi_i) = 1 + \xi_i t$ το Ω_n αποκτά λ-δομή. Επίσης για $r > n$, υπάρχει μορφισμός λ-δακτυλίων $\phi_{rn} : \Omega_r \to \Omega_n$, με:

$$\phi_{rn}(\xi_i) = \begin{cases} \xi_i & \text{αν } i \leqslant n \\ 0 & \text{αν } i > n \end{cases}$$

Θέτουμε $\Omega = \varprojlim \Omega_r$ και αφού η κατηγορία των λ-δακτυλίων είναι κλειστή ως προς αντίστροφα όρια τότε Ω θα είναι ένας λ-δακτύλιος. Έστω $a_n = a_n(\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \Omega_r$ το n-οστό στοιχειώδες συμμετρικό πολυώνυμο των ξ_i, με a_n να ισούται με μηδέν αν $n > r$ και έστω a_n η εικόνα του στο Ω. Τότε $\lambda^n(a_1) = a_n$, $\forall n > 1$ και τα a_n είναι αλγεβρικά ανεξάρτητα καθώς από θεώρημα συμμετρικών συναρτήσεων είναι αλγεβρκά ανεξάρτητα σε καθε Ω_r.

Έστω $\Lambda \subset \Omega$ ο λ-υποδακτύλιος που παράγεται από το a_1. Ο Λ ,ως δακτύλιος, είναι ένας πολυωνυμικός δακτύλιος με άπειρο πλήθος απροσδιόριστων, δηλαδή $\Lambda = \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$.

Πράγματι, κάθε λ-υποδακτύλιος του Ω που περιέχει το a_1 θα πρέπει να περιέχει και τα a_i, για $i > 1$, διότι $\lambda^i(a_1) = a_i, i > 1$. άρα θα περιέχει και τον λ-δακτύλιο $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$. Επίσης μέσω καθολικών πολυωνύμων μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε έκφραση της μορφής $\lambda^n(f(a_1, a_2, \ldots))$, όπου $f(a_1, a_2, \ldots) \in \mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$, σε μια πολυωνυμική έκφραση των a_i με συντελεστές ακεραίους. Επομένως, $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \ldots]$ είναι λ-υποδακτύλιος του Ω.

► Έστω τώρα Λ ένας ελεύθερος λ-δακτύλιος ενός γεννήτορα θεωρούμε τα εξής στοιχεία του τανυστικού τανυστικού γινομένου $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = a_1 \\
s_2 &= (\xi_1)^2 + (\xi_2)^2 + \ldots = (a_1)^2 - 2a_2 \\
s_3 &= (\xi_1)^3 + (\xi_2)^3 + \ldots = (a_1)^3 - 3a_1a_2 + 3a_3 \vdots
\end{aligned}$$

τότε τα s_i, $i \geqslant 1$ αποτελούν μια βάση του $\mathbb{Q}$-διανυσματικού χώρου $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$
Έστω $\lambda_t = \sum a_n t^n = \prod(1 + \xi_i t)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_t'}{\lambda_t} &= \frac{d}{dt}\ln(\lambda_t) \\
&= \frac{d}{dt}\sum_i \ln(1 + \xi_i t) \\
&= \sum_i \frac{\xi_i}{1 + \xi_i t} \\
&= \sum_i \xi_i [\sum_{j=0}^{\infty}(-\xi_i t)^j] \\
&= \sum_i \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\xi_i)^{j+1}t^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_i(-1)^j(\xi_i)^{j+1}t^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}[\sum_i(\xi_i)^{j+1}](-1)^j t^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j s_{j+1} t^j.
\end{aligned}$$

Όρισμος 1.3.2. Έστω R ένας λ-δακτύλιος. Ορίζουμε την **n-οστή δράση Adams** να είναι η απεικόνιση $\psi^n : R \to R$, με $\psi^n(v) = s_n(v)$, $\forall v \in R$.

Παρατήρηση. Από τα παραπάνω, οι δράσεις Adams ικανοποιούν την παρακάτω ισότητα:

$$\frac{d}{dt}\log(\lambda_t) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\psi^{j+1}t^j \tag{1}$$

Παρατήρηση. Έστω a ένα μονοδιάστατο στοιχείο ενός λ-δακτυλίου R, τότε

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\log(\lambda_t(a)) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\psi^{j+1}(a)t^j \\
&\Longrightarrow \frac{d}{dt}\log(1+at) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\psi^{j+1}(a)t^j \\
&\Longrightarrow \frac{a}{1+at} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\psi^{j+1}(a)t^j \\
&\Longrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j a^{j+1}t^j = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\psi^{j+1}(a)t^j
\end{aligned}$$

επομένως έχουμε ότι $\psi^j(a) = a^j$.

Πρόταση 1.3.1. ***(Τύπος του Newton)*** *Σε κάθε λ-δακτύλιο R, ο τύπος*

$$\psi^k(x) - \lambda^1(x)\psi^{k-1}(x) + \ldots + (-1)^{k-1}\lambda^{k-1}(x)\psi^1(x) = (-1)^{k+1}k\lambda^k(x)$$

ισχύει για κάθε $x \in R$ και $k \geq 1$.

Απόδειξη. Απο την παραπάνω παρατήρηση έχουμε ότι

$$\frac{d}{dt}\lambda_t = \lambda_t(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\psi^{j+1}t^j) \Leftrightarrow\ t\frac{d}{dt}\lambda_t = \lambda_t t(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\psi^{j+1}t^j)$$

$$\Leftrightarrow\ (-t)\frac{d}{dt}\lambda_t = \lambda_t(\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\psi^j t^j) \Leftrightarrow\ \lambda_t(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\psi^{j+1}t^j) + t\frac{d}{dt}\lambda_t = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(x)t^n)(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\psi^{j+1}t^j) + t(\sum_{k=1}^{\infty}k\lambda^k(x)t^{k-1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ (\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(x)t^n)(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\psi^{j+1}t^j) + \sum_{k=1}^{\infty}k\lambda^k(x)t^k = 0$$

Μαζεύουμε τους συντελεστές του t^k

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\lambda^i(x)\psi^{k-i}(x) + k\lambda^k(x))t^k = 0$$

Επομένως,

$$\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-i}\lambda^i(x)\psi^{k-i}(x) = -k\lambda^k(x))t^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^k(-1)^{-i}\lambda^i(x)\psi^{k-i}(x) = -k\lambda^k(x))t^k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i\lambda^i(x)\psi^{k-i}(x) = (-1)^{1+k}k\lambda^k(x))t^k$$

□

Επίσης αναφέρουμε μια σημαντική ιδιότητα των λ-δακτυλίων

Όρισμος 1.3.3. Έστω Ring_λ η κατηγορία των λ-δακτυλίων. Ένας κανόνας μ που αντιστοιχεί σε κάθε $A \in \mathrm{Ring}_\lambda$ μια συνολο-θεωρητική απεικόνιση $\mu_A : A \longrightarrow A$ καλείται **φυσική δράση** της Ring_λ, αν για οποιονδήποτε μορφισμό λ-δακτυλίων $\phi : A \longrightarrow B$ ισχύει $\phi \circ \mu_A = \mu_B \circ \phi$.

Αρχή της επαλήθευσης: Αν μ μια φυσική δράση. Τότε μ είναι κατα μοναδικό τρόπο ένα πολυώνυμο ως προς τις λ-δράσεις και $\mu = f(\lambda^1, \lambda^2, \ldots)$ αν και μόνο αν ισχύει η ισότητα αν δράσουν σε αθροίσματα $\xi^1 + \ldots + \xi^r$ στοιχείων βαθμού 1, $\forall r \in \mathbb{N}^*$

Απόδειξη. Για την απόδειξη παροτρύνουμε να ανατρέξετε στο [6] □

Πρόταση 1.3.2. *Κάθε δράση Adams είναι μια φυσική δράση στους λ-δακτυλίους. Επιπλέον, έστω R ένας λ-δακτύλιος τότε κάθε δράση Adams του R είναι ένας μορφισμός λ-δακτυλίων.*

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι μία ψ^n είναι μια φυσική δράση στους λ-δακτυλίους αρκεί να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε μορφισμό λ-δακτυλίων $\phi : R \longrightarrow S$ το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi^n"'] & S \arrow[d, "\psi^n"] \\ R \arrow[r, "\phi"] & S \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, δηλαδή να έχουμε $\psi^n \circ \phi = \phi \circ \psi^n$, ή ισοδύναμα ότι $\forall x \in R$ έχουμε $\psi_{-t}(\phi(x)) = \phi(\psi_{-t}(x))$.
Αρχικά έχουμε ότι ϕ είναι ένας μορφισμός λ-δακτυλίων, επομένως έχουμε $\lambda_t(\phi(x)) = \phi(\lambda_t(x))$.
Οπότε

$$\begin{aligned} \psi_{-t}(\phi(x)) &= (-t)\frac{d}{dt}(\log\lambda_t(\phi(x))) \\ &= (-t)\frac{d}{dt}(\log\phi(\lambda_t(x))) \\ &= \frac{-t\phi(\lambda_t(x))'}{\phi(\lambda_t(x))} \\ &= \phi(\frac{-t\lambda_t(x)'}{\lambda_t(x)}) \end{aligned}$$

$$= \phi(\psi_{-t}(x))$$

Θα δείξουμε ότι κάθε ψ^n είναι ένας μορφισμός λ-δακτυλίων.
Πρώτα θα δείξουμε ότι ψ^n είναι μορφισμός δακτυλίων. Έχουμε δει ότι κάθε ψ^n είναι προσθετική απεικόνιση, μένει να δείξουμε ότι είναι και πολλαπλασιαστική. Από αρχή επαλήθευσης αρκεί να το δείξουμε για αθροίσματα μονοδιάστατων στοιχείων.
Οπότε έστω $\sum_i a_i,\ \sum_j bj \ \in R$, όπου $a_i,\ b_j$ είναι μονοδιάστατά στοιχεία του R.
Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\psi^n(\sum_i a_i \times \sum_j bj) = psi^n(\sum_i a_i)\psi^n(\sum_j bj)$$

Επειδή ψ^n είναι προσθετική αρκεί να δείξουμε ότι

$$\psi^n(ab) = \psi^n(a)\psi^n(b)$$

με a, b να είναι και τα δύο μονοδιάστατα στοιείία του R. Έχουμε δει ότι το γινόμενο δύο μονοδιάστατων στοιχείων ενός λ-δακτυλίου είναι μονοδιάστατο στοιχείο οπότε:

$$\psi^n(ab) = (ab)^n = a^n b^n = \psi^n(a)\psi^n(b)$$

Επιπλέον, η ψ^n διατηρεί την μονάδα καθώς απο τον τυπο (2) έχουμε ότι

$$\psi_{-t}(1) = -t\frac{d}{dt}(\log(\lambda_t(1)))$$
$$= -t\frac{d}{dt}(\log(1+t)$$
$$= \frac{-t}{1+t}$$

Οπότε

$$\psi_t(1) = \frac{t}{1-t}$$
$$= t + t^2 + t^3 + \cdots$$

απο το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\psi^n(1) = 1$.
Τέλος, θα δείξουμε ότι $\psi^n \circ \lambda^m = \lambda^m \circ \psi^n$. Όμοια με παραπάνω λόγω αρχής επαλήθευσης αρκεί να ελέγξουμε την αλήθεια της παραπάνω ισότητας για την περίπτωση στοιχείων που να είναι πεπερσμενα αθροίσματα μονοδιάστατων στοιχείων του R.
Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
\psi^n(\lambda^m(a_1+\cdots+a_r)) = \psi^n\Big(\sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_m\le r} a_{i_1}\cdots a_{i_m}\Big) \\
= \psi^n\Big(\sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_m\le r} \psi^n(a_{i_1})\cdots\psi^n(a_{i_m})\Big) \\
= \sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_m\le r} a_{i_1}^n\cdots a_{i_m}^n \\
= \lambda^m(a_1^n+\cdots+a_r^n) \\
= \lambda^m(\psi^n(a_1+\cdots+a_r)).
\end{aligned}
$$

□

Σχόλιο. Από την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι οι απεικονίσεις Ψ^n είναι ενδομορφισμοί του λ-δακτυλίου R και η απεικόνιση $\phi : \mathbb{N}^* \to EndR$, με $n \mapsto \psi^n$ είναι ένας μορφισμός μεταξύ μονοειδών.

Πρόταση 1.3.3. *Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα σε έναν λ-δακτύλιο R.*

1. *Για ακεραίους $n, m \geq 1$ έχουμε*

$$\psi^m \circ \psi^n = \psi^{mn} = \psi^n \circ \psi^m$$

2. *Αν n έχει μια πρώτη ανάλυση $n = p_1^{e_1}\cdots p_k^{e_k}$ τότε*

$$\psi^n = (\psi^{p_1})^{e_1}\cdots(\psi^{p_k})^{e_k}$$

3. *Αν p πρώτος και $a \in R$ τότε*

$$\psi^{p^n}(a) \equiv a^{p^n} \pmod{pR}$$

για κάθε $n \geq 1$. Ιδιαιτέρως, έχουμε

$$\psi^p(a) \equiv a^p \pmod{pR}$$

όταν $n = 1$.

Απόδειξη. Για τα (1) και (2) αρκεί να δούμε την προταση 1.3.2.
Για το (3), μεσω της αρχής επαλήθευσης, αρκεί να εξετάσουμε την εικόνα ενός στοιχείου που να είναι που να είναι άθροισμα μονοδιάστατων στοιχείων, έστω $a = a_1 + \cdots + a_r$. Τότε έχουμε

$$\psi^{p^n}(a_1 + \cdots + a_r) = a_1^{p^n} + \cdots + a_r^{p^n} \equiv (a_1 + \cdots + a_r)^{p^n} \pmod{pR}.$$

$\square$

Πρόταση 1.3.4. *Έστω R ένας λ-δακτύλιος και ενα στοιχείο του $a \in R$. Τότε a είναι διωνυμικό αν και μόνο αν $\psi^n(a) = a$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.*

Απόδειξη. Έχουμε: $\dfrac{d}{dt} log \lambda_t(a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi^{n+1}(a) t^n$.
Τότε $\lambda_t(a) = (1+t)^a$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi^{n+1}(a) t^n = \frac{a}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} a(-t)^n$$
$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi^{n+1}(a) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a t^n$$
$$\Rightarrow \psi^{n+1}(a) = a.$$

$\square$

Πόρισμα. *Αν $\psi^n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, με $n \in \mathbb{N}^*$, οι δράσεις Adams του λ-δακτυλίου $\mathbb{Z}$ τότε $\psi^n = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$*

Θεώρημα 1.3.5. *Έστω R ένας προ-λ-δακτύλιος που να είναι ελεύθερος στρέψης ως $\mathbb{Z}$-module. Έστω δράσεις στον R που ορίζονται από την παρακάτω ισότητα:*

$$\frac{d}{dt} \log \lambda_t(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \psi^{n+1}(a) t^n$$

Έστω επίσης ότι $\psi^1(a) = 1$, $\psi^n(ab) = \psi^n(a)\psi^n(b)$, $\psi^n(\psi^m(a)) = \psi^{nm}(a)$, $\forall a, b \in R$ *και* $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$. *Τότε ο* R *είναι* λ*-δακτύλιος.*

Πρόταση 1.3.6. *Έστω* R *ένας* λ*-δακτύλιος. Τότε όλα τα στοιχεία στρέψης του* R *είναι μηδενοδύναμα.*

Απόδειξη. Έστω $r \in R$ είναι p-στρέψης στοιχείο, δηλαδή υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε $p^n r = 0$. Τότε $\lambda_t(0) = \lambda_t(p^n r) = \lambda_t(r)^{p^n} = (\sum_i \lambda^i(r))^{p^n} \equiv \sum_i (\lambda^i(r))^{p^n}\ (modp)$.
Επομένως, $a^{p^n} = \lambda^1(a)^{p^n} = pb$ όπου $b \in R$ και έχουμε:

$$a^{(p^n+1)n} = (apb)^n = (p^n a)(a^{n-1}b^n) = 0$$

$\square$

2 Το σώμα $\mathbb{F}_1$

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε τις $\mathbb{F}_1$-άλγεβρες και θα αποκτήσουμε μια εικόνα για το $\mathbb{F}_1$ και τις επεκτάσεις του. Επίσης, θα ορίσουμε μια εκδοχή της θεωρίας Galois étale αλγεβρών για τις $\mathbb{F}_1$-άλγεβρες.

2.1 $\mathbb{F}_1$-άλγεβρες

Το θεώρημα που θα μας απασχολήσει σε αυτή την ενότητα είναι το θεώρημα του Wilkerson, το οποίο μας περιγράφει την εξάρτηση που υπαρχεί μεταξύ της λ-δομής ενός λ-δακτυλίου που να είναι ελευθερος στρέψης ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο και των δράσεων Adams του λ-δακτύλιου.

Αρχικά θα δώσουμε μια διαισθητική οπτική σχετικά με αυτή την εξάρτηση:
Έστω R ένας λ-δακτύλιος που να είναι ελεύθερος στρέψης ως $\mathbb{Z}-$πρότυπο.
Τότε ο τύπος του Newton μπορεί να χρησιμοποιηθεί επαγωγικά ώστε να μας δίνει τις απεικονίσεις λ_i συναρτήσει των $\psi^1, \cdots, \psi^i$.
Για παράδειγμα έχουμε:

$$\lambda^1(x) = \psi^1(x) = x$$

$$\lambda^2(x) = \frac{x^2 - \psi^2(x)}{2}$$

$$\lambda^3(x) = \frac{1}{3}\big(\psi^3(x) - x\psi^2(x) + \frac{x}{2}(x^2 - \psi^2(x))\big) = \frac{x^3}{6} - \frac{x\psi^2}{2} + \frac{\psi^3(x)}{3}$$

με τον ίδιο τρόπο αντικαθιστώντας τα λ^1, λ^2, λ^3 στον τύπο του Newton παίρνουμε έναν τύπο για το λ^4 και επαγωγικά βρίσκουμε και τις υπόλοιπες λ^i.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι μέσω αυτής της αντιστροφής του τυπου του Newton παίρνουμε την λ-δομή του R συναρτήσει των δράσεων Adams του λ-δακτυλίου δυνάμεων του εκάστοτε στοιχείου x με τους συντελεστές τους να είναι ρητοί.
Βλέπουμε λοιπόν ότι η αντιστροφή του τύπου του Newton μας δίνει τις λ-δράσεις στην $\mathbb{Q}$-άλγεβρα $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.
Ο λόγος, λοιπόν, που συμπεριλαμβάνεται στις υποθέσεις μας να είναι ο R ελεύθερος στρέψης ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο, είναι ώστε να μπορούμε χωρίς αφμιβολία να

διαιρούμε με τους ακεραίους συντελεστές.

Θεώρημα 2.1.1 (Wilkerson). *Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα που να είναι ελεύθερος στρέψης ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο. Αν $\{\psi^k | k \in \mathbb{N}^*\}$ είναι ένα σύνολο από ενδομορφισμούς του R που ικανοποιούν τα εξής:*

1. $\psi^1 = \mathrm{Id}_R$
2. $\psi^k \psi^r = \psi^{kr}, \forall r, k \in \mathbb{N}_*$
3. $\psi^p(x) \equiv x^p \ mod \ pR, \forall x \in R$ *και για κάθε πρώτο* p

τότε οι λ-δράσεις στον $R \otimes \mathbb{Q}$ που δίνονται από την αντιστροφή του τύπου του Newton απεικονίζουν τον R στον R και ο R αποκτά δομή λ-δακτυλίου ως προς αυτές τις λ-δράσεις.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 2.1.2. *Για κάθε λ-δακτύλιο R ισχύουν τα εξής:*

1. $x^p - \psi^p(x) = p[(-1)^p \lambda^p(x) + \text{γινόμενα}]$
2. $\lambda^k \circ \lambda^q(x) = (-1)^{(k+1)(q+1)} \lambda^{kq}(x) + \text{γινόμενα}$

όπου με τον όρο γινόμενα εννοούμε γινόμενα από $\{\lambda^i(x) | i < p\}$ και $\{\lambda^i(x) | i < kq\}$, αντίστοιχα.

Απόδειξη. αναφορά [7] □

Απόδειξη. (**Πρότασης** 2.1.1) Αφού $R \longrightarrow R \otimes \mathbb{Q}$ μονομορφισμός και για κάθε i έχουμε ότι $\lambda^i(R \otimes \mathbb{Q}) \subseteq R \otimes \mathbb{Q}$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda^i(R) \subseteq R$. Συγκεκριμένα, εφόσον $R = \cap_p (R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \subset R \otimes \mathbb{Q}$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι $\lambda^i(R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \subseteq R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, όπου $\mathbb{Z}_{(p)}$ η τοπικοποιήση του δακτυλίου των ακεραίων στο (p).

Για $p > i$, έπεται επαγωγικά από τον τύπο του Newton. Για $i = p$, έχουμε από λήμμα ότι:

$$\psi^p(x) = x^p + p\theta_p(x).$$

Εφόσον το p διαιρεί το $\psi^p(x) - x^p$ και οι υπόλοιποι όροι του $\theta_p(x)$ ανήκουν στον $R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, τότε $\lambda^p(x) \in R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.
Για $i > p$ και σχετικά πρώτο με το p, μέσω του τύπου του Newton επαγωγικά μπορούμε να δείξουμε ότι $\lambda^i(x) \in R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.
Για $i = jp$, τότε από λήμμα έχουμε:

$$\lambda^{jp}(x) = (-1)^{(p+1)(j+1)}\lambda^p \circ \lambda^j(x) + \text{γινόμενα}.$$

Αλλα τα γίνομενα στον τύπο περιλαμβάνουν μόνο $\lambda^i(x)$ με $i \in \{1, \ldots, jp-1\}$ και επομένως από επαγωγή έχουμε $\lambda^{jp}(x) \in R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. $\square$

Οπότε απο την παραπάνω πρόταση έχουμε ότι αν R μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα που να είναι ελεύθερος στρέψης ως $\mathbb{Z}-$πρότυπο, ο οποίος έχει μια οικογένεια ενδομορφισμών δακτυλίων $\{\psi^p : R \to R\}_{p \text{ πρώτος}}$ που να είναι lifts των αυτομορφισμών Frobenius(απο (3) της πρότασης) του $R \otimes \mathbb{F}_p$, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\psi^p"] \arrow[d, "\pi"'] & R \arrow[d, "\pi"] \\
R \otimes \mathbb{F}_p \arrow[r, "\mathrm{Frob}_p"'] & R \otimes \mathbb{F}_p
\end{tikzcd}$$

όπου π η κανονική απεικόνιση προβολής,τότε ο R επιδέχεται δομή λ-δακτυλίου με τις λ-δράσεις να προσδιορίζονται από τις ψ^p.

Πρόταση 2.1.3. *Έστω R, S δύο λ-δακτύλιοι, όπου S είναι ελεύθερος στρέψης ως $\mathbb{Z}-$πρότυπο και $f : R \longrightarrow S$ ένας μορφισμός δακτυλίων. Τότε αν $f \circ \psi^n = \psi^n \circ f$, $\forall n \geq 1$, τότε η f είναι μορφισμός λ-δακτυλίων.*

Απόδειξη. Προφανώς η f μετατίθεται με την λ^1, αφού λ^1 είναι η ταυτοτική. Έστω ότι για $k < n$ ισχύει $f \circ \lambda^k = \lambda^k \circ f$. Θα δείξουμε ότι ισχύει για n. Έστω $x \in R$. Τότε:

$$(-1)^{n+1} n f(\lambda^n(x)) = f((-1)^{n+1} n \lambda^n(x))$$

και από τον τύπο του Newton έχουμε:

$$f((-1)^{n+1} n \lambda^n(x)) = f(\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \lambda^i(x) \psi^{n-i}(x)) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f(\lambda^i(x)) f(\psi^{n-i}(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \lambda^i(f(x)) \psi^{n-i}(f(x)) =$$

$$= (-1)^{n+1} n \lambda^n(f(x))$$

Οπότε

$$(-1)^{n+1} n f(\lambda^n(x)) = (-1)^{n+1} n \lambda^n(f(x))$$
$$\Leftrightarrow f(\lambda^n(x)) = \lambda^n(f(x))$$

□

Παρατήρηση. Επομένως βλέπουμε ότι οι λ-δακτύλιοι που να είναι ελεύθεροι στρέψης ως $\mathbb{Z}$-πρότυπα αποτελούν μια κατηγορία με μορφιμούς που αν μετατίθενται με τα Frobenius lifts.

Για τους συγκεκριμένους δακτύλιους μπορούμε να ορίσουμε μια τοπικοποιήση με ανάλογο τρόπο με την περίπτωση των μεταθετικών δακτυλίων.

Πρόταση 2.1.4. *Έστω R ένας λ-δακτύλιος όπως παραπάνω και S ένα πολλαπλασιαστικό υποσύνολο του R τέτοιο ώστε $\psi^n(S) \subseteq S, \forall n$, τότε το $S^{-1}R$ αποκτά δομή λ-δακτυλίου.*

Απόδειξη. Το $S^{-1}R$ είναι το σύνολο $B \times S$ το οποίο είναι εφοδιασμένο με την εξής σχέση ισοδυναμίας

$$(x, s) \sim (x', s') \iff \exists u \in S \text{ με } (x's - xs')u = 0$$

Η τυχαία κλάση ισοδυναμίας του $S^{-1}R$ με αντιπρόσωπό το στοιχείο (x, s) θα συμβολίζεται με x/s.
Επεκτείνουμε την ψ^n στο $S^{-1}R$ ως εξής:

$$\psi^n(x/s) = \psi^n(x)/\psi^n(s)$$

Είναι καλά ορισμένη καθώς για $(x, s) \sim (x', s')$ τότε $\exists u \in S$ με $(x's - xs')u = 0$.
Οπότε για οποιοδήποτε n έχουμε $\psi^n(u) \in S$ και επομένως

$$(\psi^n(x')\psi^n(s) - \psi^n(x)\psi^n(s'))\psi^n(u) = \psi^n((x's - xs')u) = \psi^n(0) = 0$$

Δηλαδή τα $\psi^n(x)/\psi^n(s)$ και $\psi^n(x')/\psi^n(s')$ είναι η ίδια κλάση ισοδυναμίας.
Επίσης για τυχαίο πρώτο p έχουμε ότι

$$\psi^p(x/s) - (x/s)^p = \psi^p(x)/\psi^p(s) - x^p/s^p = [s^p(\psi^p(x) - x^p) + (s^p - \psi^p(s))x^p]/s^p\psi^p(s)$$

Τότε από τις ιδιότητες τέτοιων δακτυλίων έχουμε ότι

$$p \mid \psi^p(x) - x^p \ \text{ και } \ p \mid \psi^p(s) - s^p$$

Επομένως, $\psi^p(x/s) - (x/s)^p \in pS^{-1}B$. $\square$

Όρισμος 2.1.1 (Borger). Ορίζουμε τις $\mathbb{F}_1$**-άλγεβρες** να είναι οι λ-δακτύλιοι που να είναι ελευθέρας στρέψης ως $\mathbb{Z}$-modules.
Οι **μορφισμοί**, επομένως, μεταξύ $\mathbb{F}_1$-αλγεβρών θα είναι οι μορφισμοί δακτυλίων που μετατίθενται με τους αυτομορφισμούς Frobenius.

Σκοπός του παραπάνω ορισμού είναι να δώσει νόημα στην έκφραση $\_\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{Z}$ την οποία θέλουμε να δούμε ως ένα συναρτητή που να ξεχνα την λ-δομή.
Ο $\mathbb{Z}$ είναι λ-δακτύλιος ελεύθερος στρέψης, οπότε σύμφωνα με τον ορισμό του Borger είναι μια $\mathbb{F}_1$-άλγεβρα και άρα για κάθε $\mathbb{F}_1$-άλγεβρα K έχουμε ότι $K \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z}$ είναι μια $\mathbb{Z}$-άλγεβρα δηλαδή δακτύλιος, οπότε χάνουμε την λ-δομή.

Με βάση λοιπόν τις ιδιότητες τανυστικού γιμομένου θα είχαμε $\mathbb{F}_1 \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ οπότε έχουμε έναν ορισμό για το $\mathbb{F}_1$, να είναι ο $\mathbb{Z}$ με την μοναδική λ-δομη του.

2.2 Επεκτάσεις του $\mathbb{F}_1$

Έχοντας έναν ορισμό για το $\mathbb{F}_1$ μπορούμε δώσουμε έναν ορισμό για τον πολυωνυμικό δακτύλιο του $\mathbb{F}_1[x]$.Σε αυτή την ενότητα λοιπόν θα μιλήσουμε γα τον πολυωνυμικό δακτύλιο $\mathbb{F}_1[x]$.
Έχοντας ορίσει τον $\mathbb{F}_1[x]$ θα αναπτύξουμε μια θεωρία για τις επεκτάσεις του με βάση την την κλασική περίτπωση των πεπερασμένων σωμάτων.
Για το σκοπό αυτό θα μελετήσουμε τα ιδεώδη του και συγκεκριμένα θα ορίσουμε τα μη-διασπόμενα ιδεώδη του τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να περιγράψουμε τις επεκτάσεις του $\mathbb{F}_1$ ως πηλίκα του $\mathbb{F}_1[x]$ ως προς αυτά τα ιδεώδη.

Ο πολυωνυμικός δακτύλιος $\mathbb{F}_1[x]$ μπορεί να ορισθεί να είναι ο $\mathbb{Z}[x]$ με την λ-δομή να ορίζεται από την πρόταση 1.1.4. Από τον τύπο της παρατήρησης μετά τον ορισμό 1.1.8 μπορούμε να βρούμε ποιες είναι οι δράσεις Adams στον λ-δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\ln(\lambda_t(x)) &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\psi^{i+1}(x)t^i \\ \Leftrightarrow \frac{x}{1+xt} &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\psi^{i+1}(x)t^i \\ \Leftrightarrow x(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i t^i) &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\psi^{i+1}(x)t^i \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^{i+1} t^i &= \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i\psi^{i+1}(x)t^i \\ \Leftrightarrow x^{i+1} &= \psi^{i+1}(x) \end{aligned}$$

δηλαδή $\psi^n(x) = x^n$,$\forall n \geq 1$. Όμοια μπορούμε να δούμε ότι $\psi^n|_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.
Οπότε οι δράσεις Adams του $\mathbb{Z}[x]$ ορίζονται από τους τύπους $\psi^n(x) = x^n$ και $\psi^n|_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ και παρατηρούμε ότι παράγονται από τις ψ^p οι οποίες είναι Frobenius lifts καθώς $\psi^p(x) = x^p$ και $\psi^p|_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.

Έχοντας, τώρα, μια εικόνα για τον πολυωνυμικό δακτύλιο επι του $\mathbb{F}_1$ θα δούμε ποιες είναι οι επεκτάσεις του $\mathbb{F}_1$ σε αντιστοιχία με την περίπτωση των κλασικών σωμάτων, δηλαδή εκφράζοντας αυτές ως πηλίκα του πολυωνυμικού δακτυλίου του.

Πρόταση 2.2.1. *Έστω $f \in \mathbb{F}_1[x]$ ένα μονικό πολυώνυμο το οποίο να παράγει ένα κύριο λ-ιδέωδες στον $\mathbb{F}_1[x]$. Τότε το f έχει για ρίζες είτε το 0 είτε ρίζες της μονάδας στο $\mathbb{C}$. Αν $f(\zeta_n) = 0$, όπου ζ_n n-οστή πρωταρχική ρίζα της μονάδας, τότε $x^n - 1 | f$ και επομένως $n \leq \deg f$.*

Απόδειξη. Επειδή το πολυώνυμο f είναι μονικό τότε το πηλίκο $\mathbb{F}_1[x]/(f)$ είναι ελεύθερο στρέψης, επίσης η απεικόνιση προβολή $pr : \mathbb{F}_1[x] \longrightarrow \mathbb{F}_1[x]/(f)$ είναι μορφισμός λ-δακτυλίων και άρα με βάση την πρόταση 2.1.3 έχουμε ότι $\psi^n \circ pr = pr \circ \psi^n$ και επομένως το (f) διατηρείται από τις δράσεις Adams, καθώς για οποιοδήποτε $g \in (f)$ ισχύει $pr(\psi^n(g)) = \psi^n(pr(g)) = \psi^n(0) = 0$, $\forall n \geq 1$ και άρα $\psi^n(g) \in (f)$, $\forall n \geq 1$, δηλαδή $\psi^n((f)) \subseteq (f)$, $\forall n \geq 1$.
Έστω $f = x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{F}_1[x]$,. Τότε $\psi^k(h) = \psi^k(x^n + \ldots + a_1 x + a_0) = x^{kn} + \ldots + a_1 x^k + a_0$, έστω επίσης ότι a είναι μια ρίζα του f τότε:

αν θεωρήσουμε την απεικόνιση

$$e_a : \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \mathbb{C}$$

με τύπο

$$g(x) \longmapsto g(r)$$

τότε η e_a είναι μορφισμός δακτυλίων. Έστω $I = \ker(e_a)$, αφου
a είναι ρίζα του f έχουμε $f \in I$ και επομένως $(f) \subset I$.
Αλλά $\psi^k((f)) \subseteq (f)$, οπότε $\psi^k((f)) \subseteq I \Rightarrow \psi^k(f) \in I$ άρα
$a^{kn} + \ldots + a_1 a^k + a_0 = \psi^k(a^n + \ldots + a_1 a + a_0) = \psi^k(f(a)) = \psi^k(0) = 0$,
οπότε a^k είναι ρίζα του (f).

και αυτό ισχύει για κάθε φυσικό $k \geq 1$ όποτε a είναι ρίζα της μοναδας ή 0.

Όμοια, λοιπόν, αν a είναι μια ρίζα του f τότε a^k θα είναι επίσης μια ρίζα του f διότι:

Αντίστροφα, αν a είναι μια n-οστή ρίζα της μονάδας τότε με το ίδιο επιχείρημα για τις δράσεις Adams έχουμε ότι το f θα πρέπει να έχει ως ρίζες όλες τις n-οστές ρίζες της μονάδας και προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Θέλοντας να έχουμε μια παρόμοια κατάσταση με την κλασική θωρία σωμάτων δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Όρισμος 2.2.1. Έστω K ένας λ-δακτύλιος. Θα λέμε ότι ένα $f \in K[x]$ είναι **μη-διασπώμενο** αν το κύριο ιδεώδες που παράγεται από το f είναι λ-ιδεώδες και δεν υπάρχει διάσπαση $f = f_1 f_2$ έτσι ώστε $\deg f_1 > 0$, $\deg f_2 > 0$ και τα κύρια ιδεώδη (f_1), (f_2) να είναι λ-ιδεώδη.

Όρισμος 2.2.2. Έστω K ένας λ-δακτύλιος χωρίς μηδενοδύναμα στοιχεία. Τότε:

1. $K \subset F$ **απλή αλγεβρική επέκταση** του K αν F είναι ισόμορφος με $K[x]/(f)$ όπου f ένα μη διασπόμενο πολυώνυμο του $K[x]$ και F να μην έχει μη-τετριμμένα λ-πηλίκα πέρα του εαυτού του.

2. F είναι μια **αλγεβρική επέκταση του K πεπερασμένου βαθμού** αν υπάρχει άυξουσα ακολουθία απλών επεκτάσεων
$$K \subset F_1 \subset ... \subset F_s \subset F$$

3. F είναι μια **αλγεβρική επέκταση** του K αν κάθε $k \in F$ περιέχεται σε μια πεπερασμένου βαθμού επέκταση K_k του K με $K_k \subset F$.

Παρατήρηση. Απο την πρόταση 2.2.1, λοιπόν, έχουμε οτι τα μη-διασπώμενα μονικά πολυώνυμα του $\mathbb{F}_1[x]$ είναι τα πολυώνυμα της μορφής $x^n - 1$ σε αντιστοιχία με την κλασική θεωρία σωμάτων μπορούμε να ορίσουμε τις επεκτάσεις του $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_{1^n}$, να είναι οι λ-δακτύλιοι $\mathbb{Z}[\mu_n] = \mathbb{F}_1[x]/(x^n - 1)$, όπου μ_n η ομάδα των n-οστών ριζών της μονάδας.

Σχόλιο. Με την πρόταση 2.2.1 και τον ορισμό 2.2.1 παρατηρούμε ότι η συμπεριφορά του $\mathbb{F}_1$ πλησιάζει σε αυτή ενός πεπερασμένου σώματος καθώς βλέπουμε ότι οι επεκτάσεις του είναι μοναδικές εφόσον τα μόνα μονικά μη διασπώμενα πολυώνυμα που να ορίζουν λ-ιδεώδη είναι της μορφής $x^n - 1$, για $n \in \{1, 2, \ldots\}$.

Τέλος με βάση την έννοια που έχουμε δώσει στην επέκταση βάσης $\_\otimes_{\mathbb{F}_1}\mathbb{Z}$ έχουμε τις ακόλουθες ισότητες:

1. $\mathbb{F}_1 \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

2. $\mathbb{F}_1[x] \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[x]$

3. $\mathbb{F}_{1^n} \otimes_{\mathbb{F}_1} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}[\mu_n]$

όπου στο δεξιό μερός να παραλείπουμε την λ-δομή.

Πρόταση 2.2.2. $\overline{\mathbb{F}}_1 = \mathbb{Z}[\mathbb{Q}/\mathbb{Z}]$ *με την αντίστοιχη λ-δομή.*

Απόδειξη. Κάθε απλή αλγεβρική επέκταση του $\mathbb{F}_1$ θα είναι της μορφής $\mathbb{F}_1[x]/(x^p-1)$, για κάποιον πρώτο p. Διότι, αν η επέκταση μας είναι θετικού βαθμού τότε θα έχει την εξής μορφή $\mathbb{F}_1[x]/(f)$, όμως από πρόταση 2.2.1 έχουμε ότι υπάρχει k τέτοιος ώστε $x^k-1|f$. Οπότε είτε η επέκταση μας περιέχει το πηλίκο της μορφής $\mathbb{F}_1[x]/(x^k-1)$ είτε $\mathbb{F}_1[x]/(x^p-1)$. Οπότε κάθε απλή αλγεβρική επέκταση του $\mathbb{F}_1$ θα είναι της μορφής $\mathbb{Z}[C_p]$.
Έστω K μια απλή αλγεβρική επέκταση του $\mathbb{F}_1[\mu_n]$. Γνωρίζουμε ότι η K θα έχει την εξής μορφή $\mathbb{F}_1[\mu_n][x]/(f)$, με f να είναι μη διασπόμενο. Παρατηρούμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{F}_1[\mu_n]$ έχουμε $\psi^n(a) \in \mathbb{Z}$, καθώς και ότι για κάθε $g \in \mathbb{F}_1[\mu_n][x]$, $\psi^n(g) \in \mathbb{F}_1[x]$.
Επόμενως, $\psi^n(f) \in \mathbb{F}_1$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικάσια για το $\psi^n(f)$ όπους και στην πρόταση 2.2.1καταλήγουμε στο ότι αν a είναι μια ρίζα του $\psi^n(f)$ τότε όλες οι δυνάμεις της θα είναι επίσης ρίζες του $\psi^n(f)$. Επίσης κάθε ρίζα του $\psi^n(f)$ είναι είτε 0 είτε ρίζα της μονάδας. Αφού $f|\psi^n(f)$ τότε όλες οι ρίζες του f είναι ρίζες της μονάδας με τον βαθμό τους να μην ξεπερνά το $n\, def(f)$ και κάποιες θα είναι 0.
Αν το f είχε μια ρίζα βαθμού n τότε το πολυώνυμο x^n-1 θα διασπόταν πλήρως στον $\mathbb{F}_1[\mu_n][x]/(f)$ και άρα το f θα έιχε έναν παράγοντα της μορφής x^k-1 και επομένως η επέκταση $\mathbb{F}_1[\mu_n][x]/(f)$ θα περιείχε την επέκταση $\mathbb{F}_1[\mu_n][x]/(x^k-1)$.
Έστω ότι f έχει μια ρίζα βαθμού p , όποου p πρώτος με $(n,p)=1$. Τότε το $\psi^n(f)$ έχει μια ρίζα βαθμού p και επομένως $x^p-1|\psi^n(f)$. Το x^p-1 έχει μοναδική ρίζα το 1 στο $\mathbb{F}_1[\mu_n]$ και έχει και κοινή ρίζα με το f επομένως $x^p-1|f$ και επομένως θα πρέπει $f = x^p-1$.
Έστω, τώρα ΄a μια ρίζα του f. Είδαμε παραπάνω ότι $a^{nk}=1$ και $a^n \neq 1$. Άρα ο βαθμός της a θα είναι ns με $s|k$. Αλλά $a^{ns}=(a^s)^n=1$ δηλαδή a^s είναι μια ρίζα της μονάδας βαθμού n, έστω $a^s=\mu_n^i$, επομένως θα είναι ρίζα του $x^s-\mu_n^i \in \mathbb{F}_1[\mu_n][x]$. Επομένως $x^s-\mu_n^i|f$ και όμοια με παραπάνω έχουμε ότι

$p = s$ και $f = x^p - \mu_n^i$.
Επομένως έχουμε ότι

$$\mathbb{F}_1[\mu_n][x]/(x^p - \mu_n^i) = \mathbb{Z}[C_n][C_p] = \mathbb{Z}[C_n \times C_p] = \mathbb{Z}[C_{np}] = \mathbb{F}_1[\mu_{np}]$$

Συνεχίζοντας την διαδικασία επ᾽ άπειρον καταλήγουμε στο επιθυμητό συμπέρασμα. □

2.3 Θεωρία Galois étale $\mathbb{F}_1$-αλγεβρών

Στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τον κύριο στόχο αυτής της πτυχιακής που είναι είναι αποδείξουμε ότι υπάρχει μια αντι-ισοδυναμία κατηγοριών μεταξύ κάποιων συγκεκριμένων λ-δακτύλίων, συγκεκριμένα των λ-δακτυλίων R για τους οποίους τα γινόμενα $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ να είναι μια πεπερασμένες étale $\mathbb{Q}$-άλγεβρες, και της κατηγορίας των πεπερασμένων συνόλων στα οποία να δρα το μονοειδές $\widehat{\mathbb{Z}}^{\circ}$ με συνεχή τρόπο.
Για μια διαισθητική κατανόηση της σημασίας αυτής της ισοδυναμίας είναι η ομοίοτητας της με την περίπτωση της κλασικής θεωρίας Galois πεπερασμένων étale $\mathbb{Q}$-αλγεβρών.
Με βάση λοιπόν αυτή την αναλογία θα δούμε στο τέλος τι θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως απόλυτη ομάδα Galois για το σώμα $\mathbb{F}_1$.

► Καθ᾽ όλη την διάρκεια της ενότητας, αν R ένας δακτύλιος, με R° θα συμβολίζομαι τον R θεωρώντας τον ως μονοειδές ως προς τον πολλαπλασιασμό. Επομένως, η ομάδα R^* είναι απλά η ομάδα των αντιστρέψιμων στοιχείων του μονοειδούς R°.

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω K μια πεπερασμένη étale $\mathbb{Q}$-άλγεβρα που να είναι λ-δακτύλιος. Ο K περιέχει έναν λ-υποδακτύλιο A που να είναι πεπερασμένος ως $\mathbb{Z}$-πρότυπο και $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = K$ αν και μόνο αν η δράση του μονοειδούς $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}'$ στο $S = \mathrm{alg}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}})$ παραγοντοποιείται μοναδικά μέσω του $\widehat{\mathbb{Z}}^{\circ}$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει μοναδική συνεχής απεικόνιση μονοειδών $\widehat{\mathbb{Z}}^{\circ} \longrightarrow Map(S, S)$*

έτσι ώστε να είναι μεταθετικό το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}' \arrow[r] \arrow[dr] & \widehat{\mathbb{Z}}^{\circ} \arrow[d] \\ & Map(S,S) \end{tikzcd}$$

όπου με $\mathbb{N}'$ συμβολίζουμε το μονοειδές $\{1, 2, \ldots\}$ ως προς τον πολλαπλασιασμό με την διακριτή τοπολογία.

Την απόδειξη του θεωρήματος θα την δούμε μέσω τριών προτάσεων από τις οποίες έπεται το ζητούμενο.

Αρχικά θα αντιστοιχίσουμε σε κάθε λ-δακτύλιο A όπως στο θεώρημα ένα πεπερασμένο σύνολο S.
Έστω K μια πεπερασμένη étale $\mathbb{Q}\lambda-$δακτύλιος και A ένα λ-μοντέλο της, δηλαδή $K = A \otimes \mathbb{Q}$, θέτουμε $S = \mathrm{alg}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}})$.
Γνωρίζουμε ότι η απόλυτη ομάδα Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ του $\mathbb{Q}$ δρά με συνεχή τρόπο στο S ως εξής $\sigma \cdot s = \sigma \circ s$.
Αλλά η K έχει και λ-δομή, επομένως υπάρχουν $\mathbb{Q}$-ενδομορφισμοί ψ^n, για $n \geq 1$, και αρα μπορούμε να ορίσουμε μια δράση του μονοειδούς $\mathbb{N}'$ στο S ως εξής $n \cdot s = s \circ \psi^n$.
Εφοδιάζοντας το $\mathbb{N}'$ με την διακριτή τοπολογία παίρνουμε μια συνεχή δράση του μονοειδούς $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}'$ στο S.
Επίσης η δράση της $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ στο S μας δίνει έναν μορφισμό ομάδων

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow perm(S) \subseteq Map(S, S)$$

όπου $perm(S)$ η ομάδα των μεταθέσεων του S. Έστω N ο πυρήνας αυτού του μορφισμού. Τότε N είναι κανονική υποομάδα πεπερασμένου δείκτη και άρα αντιστοιχεί σε μια πεπερασμένη Galois επέκταση $L = \overline{\mathbb{Q}}^N$ του $\mathbb{Q}$ με $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) = Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}))/N$.
Επίσης, αφού $K = A \otimes \mathbb{Q}$ είναι étale $\mathbb{Q}-$άλγεβρα τότε θα είναι πεπερασμένο γινόμενο επεκτάσεων του $\mathbb{Q}$, έστω $A \otimes \mathbb{Q} = L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_k$.
Αλλά η προβολή της i συνιστώσας $pr_i : L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_k \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}}$ είναι μορφισμός $\mathbb{Q}-$αλγεβρών και επομένως μέσω της δράσης της $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ βλέπουμε ότι το υπόσωμα $L_i \equiv pr_i(A \otimes \mathbb{Q}) \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ θα πρέπει να διατηρείται από τον πυρήνα N,

δηλαδή η υποομάδα της $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ που αντιστοιχεί στην L_i θα περιέχει την N, επομένως το L_i είναι ένα υπόσωμα του L.
Έστω $\mathcal{O}_L$ η ακεραία θήκη του $\mathbb{Z}$ στο L έχουμε ότι

$$S = \mathrm{alg}_{\mathbb{Q}}(K, \overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{alg}_{\mathbb{Q}}(K, L) = \mathrm{alg}_{\mathbb{Z}}(A, \mathcal{O}_L)$$

καθώς τα ακέραια στοιχεία δαιτηρούνται.
Ετσι έχουμε μια δράση του $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}'$ στο S ως εξής:

$$(\sigma, n) \cdot s = \sigma \circ s \circ n, \qquad (\sigma, n) \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}'$$

μεσω του διαγράμματος

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"] \arrow[dr, dashed] & \mathcal{O}_L \arrow[d, "\sigma"] \\
A \arrow[u, "\psi^p"] \arrow[ur, dashed] & \mathcal{O}_L
\end{tikzcd}$$

δηλαδή να ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.

Πρόταση 2.3.2. *Ο ενδομορφισμός ψ^p του A είναι ένας αυτομορφισμός αν και μόνο αν p δεν διακλαδίζεται στον A. Σε αυτή την περίπτωση, ψ^p είναι ένα μοναδικό lift του Frobenius ενδομορφισμού στον A/pA.*

Απόδειξη. Αναφορά [5] □

Πρόταση 2.3.3. *Υπάρχει ένας θετικός ακέραιος c, που διαιρείται μόνο από πρώτους που διακλαδίζονται στον A, τέτοιος ώστε η δράση της $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ στο S να παραγοντοποιείται μέσω ενός επιμορφισμού $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^*$. Αν p δεν διακλαδίζεται στον A, τότε $p \in \mathbb{N}'$ και $(p\ modc) \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^*$ δρα με τον ίδιο τρόπο στο S.*

Απόδειξη. Έστω N το σώμα αριθμών που αντιστοιχεί στον πυρήνα του μορφισμού ομάδων $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow Map(S,S)$. Θέτουμε $\overline{G} = Gal(N/\mathbb{Q})$ και έστω $\mathcal{O}_N$ ο δακτύλιος των ακεραίων του N.
Έστω $g \in \overline{G}$. Τότε από θεώρημα πυκνότητας του Chebotarev υπάρχει μη διακλαδιζόμενος πρώτος $\mathfrak{p}$ του N που να βρίσκεται πάνω από έναν πρώτο p τέτοιο ώστε $g(x) \equiv x^p \; mod\mathfrak{p}$, $\forall x \in \mathcal{O}_N$, ιδιαιτέρως g είναι το Frobenius στοιχείο του $\mathfrak{p}$ στην επέκταση $\mathbb{Q} \subset N$.
Ισχυριζόμαστε ότι $s \circ \psi^p = g \circ s$, $\forall s \in S = \mathrm{alg}_{\mathbb{Z}}(A, \mathcal{O}_N)$. Πράγματι, αφού p δεν διακλαδίζεται στο A, μπορεί να δειχθεί ότι η απεικόνιση $\mathrm{alg}_{\mathbb{Z}}(A, \mathcal{O}_N) \longrightarrow \mathrm{alg}_{\mathbb{Z}}(A, \mathcal{O}_N/\mathfrak{p})$ είναι '$1-1$' και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι η συνθέσεις τους με την απεικόνιση $\mathcal{O}_N \longrightarrow \mathcal{O}_N/\mathfrak{p}$ είναι ίσες, το οποίο είναι άμεσο από την προηγούμενη πρόταση και από την επιλογή του $\mathfrak{p}$. Επομένως, τα $g \in \overline{G}$ και $p \in \mathbb{N}'$ δρουν με τον ίδιο τρόπο στο S. Άλλα τότε η εικόνα της $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ στο $Map(S,S)$ θα περιέχεται στην εικόνα της $\mathbb{N}'$, δηλαδή $\overline{G}$ είναι αβελιανή.
Οπότε N είναι μια πεπερασμένη Galois αβελιανή επέκταση του $\mathbb{Q}$, μπορούμε, λοιπόν, να επικαλεστούμε το θεώρημα των Kronecker-Weber και άρα N θα περιέχεται σε κάποια κυκλοτομική επέκταση $\mathbb{Q}(\mu_c)$, όπου το c να διαιρείται μόνο από τους πρώτους που διακλαδίζονται στην N. Άλλα αφού N είναι η Gal*ois* θήκη των παραγόντων του $A \otimes \mathbb{Q}$, τότε τέτοιοι πρώτοι θα διακλαδίζονται και στο A.
Τέλος, για κάθε πρώτο αριθμό $p \nmid c$ το στοιχείο $(p \; modc) \in (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^*$ αντιστοιχεί στο Frobenius στοιχείο οποιουδήποτε πρώτου που βρίσκεται πάνω από τον p στην επέκταση $\mathbb{Q}(\mu_c)|\mathbb{Q}$, δηλαδή:
αν

$$p\mathbb{Q}(\mu_c) = \beta_1 \cdots \beta_n$$

τότε το $p \pmod c$ αντιστοιχεί σε κάθε σ τέτοιο ώστε $\sigma(x) \equiv x^p \pmod{\beta_i}$ για $i \in \{1, \cdots, n\}$. □

Επομένως για τυχαίο λ-δακτύλιο όπως παραπάνω A υπάρχει θετικός c έτσι ώστε να έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[dr] & (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^* \arrow[d] \\
& Maps(S,S)
\end{tikzcd}$$

και επομένως καταλείγουμε

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}' \arrow[r] \arrow[dr] & (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^* \times \mathbb{N}' \arrow[d] \\
& Maps(S,S)
\end{tikzcd}$$

η απεικόνιση μεταξύ τοπολογικών μονοειδών $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}' \longrightarrow Map(S,S)$ παραγοντοποιείται μέσω του $\widehat{\mathbb{Z}}^* \times \mathbb{N}'$.

Πρόταση 2.3.4. *Μια συνεχής δράση του $\widehat{\mathbb{Z}}^* \times \mathbb{N}'$ σε ένα πεπερασμένο σύνολο T παραγοντοποιείται μέσω μια συνεχής δράσης του $\widehat{\mathbb{Z}}^\circ$ αν και μόνο αν:*

1. *όλοι έκτος από πεπερασμένο πλήθος πρώτων $p \in \mathbb{N}'$ δρούν σαν αυτομορφισμοί στο T*
2. *$\forall d \in \mathbb{N}'$ υπάρχει ακέραιος c_d τέτοιος ώστε η δράση του $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ στο dT να παραγοντοποιείται μέσω της $(\mathbb{Z}/c_d\mathbb{Z})^*$ και $\forall n \in \mathbb{N}'$ με $ndT = dT$ έχουμε:*
   - *n είναι σχετικά πρώτος με τον c_d*
   - *τα στοιχεία $(n \; mod c_d) \in (\mathbb{Z}/c_d\mathbb{Z})^*$ και $n \in \mathbb{N}'$ δρουν με τον ίδιο τρόπο στο dT.*

Απόδειξη. Έστω ότι η δράση του $\widehat{\mathbb{Z}}^* \times \mathbb{N}'$ παραγοντοποιήται μέσω του $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ$, για κάποιον θετικό ακέραιο r. Θα δείξουμε τις (1) και (2).
Όλοι οι ακέραιοι που δεν διαιρούν τον r, ως στοιχεία του $\mathbb{N}'$, δρουν ως αυτομορφισμοί του T καθώς έχουν αντίστροφο στο $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ$. Επομένως όλοι οι πρώτοι εκτός από πεπερασμένο πλήθος δρουν σαν αυτομορφιμοί στο T και άρα έχουμε το (1).
Έστω τώρα $d \in \mathbb{N}'$ και έστω c_d ο μικρότερος θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε η $\widehat{\mathbb{Z}}^*$-δράση στο dT παραγοντοποιείται μέσω της $(\mathbb{Z}/c_d\mathbb{Z})^*$, ένας τέτοιος φυσικός

υπάρχει καθώς $|T| < \infty$ και επομένως $|dT| < \infty$ οπότε $|\mathrm{perm}(dT)| < \infty$.
Η δράση $\widehat{\mathbb{Z}}^*$ στο dTμας δίνει έναν μορφισμό ομάδων

$$\widehat{\mathbb{Z}}^* \longrightarrow \mathrm{perm}(dT)$$

και αφού $|\mathrm{perm}(dT)| < \infty$ τότε θα υπάρχει φυσικός c τέτοιος ώστε να έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{Z}}^* \arrow[r, two heads] \arrow[dr] & (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})^* \arrow[d] \\
& \mathrm{perm}(dT)
\end{tikzcd}$$

Το c_d θα διαιρεί όλα τα c που πληρούν την παραπάνω ιδιότητα.
Έστω πρώτος p τέτοιος ώστε $pdT = dT$. Γράφουμε $r = p^n e$ με $p \nmid e$. Τότε για οποιαδήποτε $x, y \in (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ$ με $x \equiv y \ mod \ e$ και για κάθε $s \in dT$ έχουμε

$$p^n(xs) = (p^n x)s = (p^n y)s = p^n(ys).$$

Αφού η δράση του p δίνει μια $1-1$ και επί απεικόνιση στο dT, τότε έπεται ότι

$$p^n(xs) = p^n(ys) \Longrightarrow xs = ys$$

δηλαδή τα x, y θα δρουν με τον ίδιο τρόπο στον dT, άρα αν δύο στοιχεία έχουν την ίδια εικόνα στο $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\circ$ τότε θα δρούν με τον ίδιο τρόπο στό dT.
Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια απεικόνιση

$$\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}^\circ \longrightarrow \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}^\circ$$

τέτοια ώστε το παρακάτω διάγραμμα να είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{Z}}^\circ \arrow[r, two heads] \arrow[drr] & \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}^\circ \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}^\circ \arrow[d] \\
& & \mathrm{perm}(dT)
\end{tikzcd}$$

δηλαδή η δράση της $\widehat{\mathbb{Z}}^\circ$ στο dT παραγοντοποιείται μέσω του $(\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^\circ$.
Αρα θα πρέπει $c_d|e$, και από τον ορισμό του p έχουμε ότι $p \nmid c_d$, και επομένως

τα στοιχεία $p \in \mathbb{N}'$, $(p\ mod\ e) \in (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^*$ και $(p\ mod\ c_d) \in (\mathbb{Z}/c_d\mathbb{Z})^*$ δρουν όλα με τον ίδιο τρόπο στο dT, και αφού το $\mathbb{N}'$ παράγεται από του πρώτους έχουμε το (2).

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύουν οι (1) και (2). Για κάθε πρώτο p, έστω ότι a_p είναι ο μικρότερος ακέραιος $a \geq 0$ τέτοιος ώστε $p^a T = p^{a+1} T$. Από (1) έχουμε ότι $a_p = 0$ για όλους εκτός από πεπερασμένο πλήθος πρώτων και άρα ο $r_0 = \prod_{a_p > 0} p^{a_p}$ είναι ένας ακέραιος και για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}'$ έχουμε $nT = gcd(n, r_0)T$.
Έστω τώρα ακέραιος r που να διαιρείται από τον dc_d για κάθε $d|r_0$. Θα δείξουμε ότι η δράση του $\widehat{\mathbb{Z}}^* \times \mathbb{N}'$ παραγοντοποιήται μεσω του $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ$, δηλαδή ότι υπάρχει επιμορφισμός

$$\widehat{\mathbb{Z}}^* \times \mathbb{N}' \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ$$

έτσι ωστε να έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \mathbb{N}' \arrow[rr, two heads] \arrow[drr] & & (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ \arrow[d] \\ & & \mathrm{perm}(dT) \end{tikzcd}$$

Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι για δύο στοιχεία $(a_1, d_1), (a_2, d_2) \in \widehat{\mathbb{Z}}^* \times \mathbb{N}'$, με $a_1 d_1 \equiv a_2 d_2\ mod\ r$, δρουν με τον ίδιο τρόπο στο T, δηλαδή $(a_1, d_1)s = (a_2, d_2)s,\ \forall s \in T$.
Αφού $r_0|r$ τότε d_1, d_2 έχουν τον ίδιο μεγιστο κοινό διαιρέτη d με το r_0 και άρα $d_1 T = dT = d_2 T$. Για $i = 1, 2$ ορίζουμε τον $d_i' \in \mathbb{N}'$ από την ισότητα $d_i = dd_i'$ και άρα καταλήγουμε ότι $d_i'(dT) = dT$. Μέσω της (2) έπεται ότι d_i' είναι σχετικά πρώτος με τον c_d και άρα ότι η δράση του d_i' στο dT είναι ίδια με αυτή του $(d_i'\ mod\ c_d) \in (\mathbb{Z}/c_d\mathbb{Z})^* \subset (\mathbb{Z}/c_d\mathbb{Z})^\circ$.
Από τον τρόπο ορισμού του r έχουμε ότι $dc_d|r$, επομένως $a_1 d_1' d \equiv a_2 d_2' d \pmod{c_d d}$

διότι αν $a \equiv b \pmod r$ και $d|r$ τότε

$$a = b + cr \implies a = b + c\frac{r}{d}d$$

οπότε

$$a \equiv b \pmod d$$

$a_1 d_1' d \equiv a_2 d_2' d \pmod{c_d d}$ και επομένως $a_1 d_1' \equiv a_2 d_2' \pmod{c_d}$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι (a_1, d_1') και (a_2, d_2') απεικονίζονται στο ίδιο στοιχείο του $(\mathbb{Z}/c_d\mathbb{Z})^{\circ}$, το οποίο βρίσκεται στην $(\mathbb{Z}/c_d\mathbb{Z})^*$. Οπότε (a_1, d_1') και (a_2, d_2') δρουν με τον ίδιο τρόπο στο dT και συνθέτοντας με το $(1, d)$ βλέπουμε ότι (a_1, d_1) και (a_2, d_2) δρουν με τον ίδιο τρόπο στο T. □

Απόδειξη. (Θεωρήματος 2.3) Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να ελέγξουμε τις συνθήκες της Πρότασης 2.3.7 για $T = S = \mathrm{alg}_{\mathbb{Z}}(A, \mathcal{O}_L)$. Συγκεκριμένα, το (1) έπεται από το γεγονός ότι στο A διακλαδίζεται σε πεπερασμένο πλήθος πρώτον. Οπότε ο δεικτής διακλάδωσης ισούται με 1 για όλους εκτός από πεπερασμένο πλήθος πρώτων και για κάθε μη διακλαδιζόμενο πρώτο αντιστοιχεί, σύμφωνα με την πρόταση 2.3.5, μοναδικό lift ενδομορφιμού Frobenius του A/pA.
Για το (2), έστω $d \in \mathbb{N}'$, θεωρούμε τον λ-υποδακτύλιο του A, $\Psi^d(A)$, που αντιστοιχεί στο $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \times \mathbb{N}'$-σύνολο dS του S. Από πρόταση 2.3.6 για το $\Psi^d(A)$ έχουμε έναν ακέραιο c_d τέτοιο ώστε η $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-δράση στο dS να παραγοντοποιείται μέσω του $(\mathbb{Z}/c_d\mathbb{Z})^*$. Επίσης από πρόταση 2.3.5 έχουμε ότι κάθε $n \in \mathbb{N}'$, με $ndS = dS$, είναι γινόμενο πρώτων που δεν διακλαδίζονται στον $\Psi^d(A)$ και άρα από πρόταση 2.3.6 $(n \ mod \ c_d) \in (\mathbb{Z}/c_d\mathbb{Z})^*$ και ότι το συγκεκριμένο στοιχείο δρα με τον ίδιο τρόπο στο dS όπως και το n. □

Τέλος, για το αντίστροφο έχουμε χρησιμοποιούμε το εξης αποτέλεσμα από την αναφορα [5] σύμφωνα με το οποίο

$$\mathbb{Q}(\mu_r) = \mathbb{Q} \otimes \mathbb{Z}[\mu_r].$$

Αρχικα θα δώσουμε δύο ορισμούς ώστε να ακολουθήσουμε την ορολογία του

[5]

Όρισμος 2.3.1. Έστω R ένας λ-δακτύλιος. Ένας λ-δακτύλιος K μαζί με έναν μορφισμό λ-δακτυλίων $R \to K$ θα καλείται R**λ-δακτύλιος**.

Όρισμος 2.3.2. Καλούμε έναν λ-υποδακτύλιο ενός $\mathbb{Q}$λ-δακτυλίου **λ-τάξη (λ-order)** αν είναι πεπερασμένος επί του $\mathbb{Z}$.

Έστω K ένας $\mathbb{Q}\lambda$-δακτύλιος. Ένας λ-υποδακτύλιος A του K που είναι πεπερασμένος επί του $\mathbb{Z}$ και ισχύει $\mathbb{Q} \otimes A = K$, καλείται **ακέραιο λ-μοντέλο του** K.

Πρόταση 2.3.5. *Έστω K ένας πεπερασμένος ètale $\mathbb{Q}\lambda$-δακτύλιος. Τότε ο K έχει μία λ-τάξη που περιέχει όλες τι άλλες.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε δύο λ-τάξεις A, B του K υπάρχει μία τρίτη λ-τάξει του K που τις περιέχει. Άλλα $A \otimes B$ είναι ένας λ-δακτύλιος και είναι και πεπερασμένος επί του $\mathbb{Z}$, διότι οι A, B είναι πεπερασμένοι επί του $\mathbb{Z}$ από υπόθεση. Αφού το $A \otimes B$ είναι το συγγινόμενο στην κατηγορία των λ-δακτυλίων, η απεικόνιση $A \otimes B \to K$ που έπεται από την καθολική ιδιότητα του συγγινομένου είναι μια απεικόνιση λ-δακτυλίων. Επομένως η εικόνα της είναι ένας λ-δακτύλιος που είναι πεπερασμένος επί του $\mathbb{Z}$, περιέχεται στον K και περιέχει τους A και B. $\square$

Σχόλιο. Θα καλούμε την συγκεγκριμένη λ-τάξη **μέγιστη**.

Πρόταση 2.3.6. *Έστω $K \subseteq L$ πεπερασμένοι ètale $\mathbb{Q}\lambda$-δακτύλιοι. Έστω $A \subseteq K$ και $B \subseteq L$ οι αντίστοιχες μέγιστες λ-τάξεις τους. Τότε $A = K \cap B$.*

Απόδειξη. Η τομή $K \cap B$ είναι ένας λ-υποδακτύλιος του K αλλα και πεπερασμένος επί του $\mathbb{Z}$ και είναι μέγιστος στο σύνολο των λ-υποδακτύλιων του K που να είναι πεπερασμένοι επί του $\mathbb{Z}$ λόγω του B. $\square$

Πρόταση 2.3.7. *Έστω r θετικός ακέραιος, έστω S, όπως παραπάνω ένα πεπερασμένο $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ$-σύνολο και έστω K ο αντίστοιχος πεπερασμένος étale $\mathbb{Q}\lambda$-δακτύλιος. Τότε K έχει ένα ακέραιο λ-μοντέλο.*

Απόδειξη. Έστω σύνολο T, όπως το S και θεωρούμε έναν επιμορφισμό $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ$-συνόλων $\coprod_T (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ \longrightarrow S$, όπου $\coprod_T (\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ$ είναι το ελεύθερο $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z})^\circ$-

σύνολο που παράγεται από το T. Έστω L ο αντίστοιχος πεπεραμένος étale $\mathbb{Q}\lambda$-δακτύλιος. Τότε K είναι ένας υποδακτύλιος του L. Αλλά $L = \mathbb{Q}[\mu_r]^T$ και άρα έχει ένα λ-μοντέλο $\mathbb{Z}[\mu_r]^T$. Η τομή με το K με τον L θα είναι ο ζητούμενος λ-υποδακτύλιος του K. □

Παρατήρηση. Σύμφωνα, λοιπόν, με τα παραπάνω έχουμε μια αντι-ισοδυναμία μεταξύ της κατηγορίας των λ-δακτυλίων R που είναι πεπερασμένοι επί του $\mathbb{Z}$ και περιέχονται στους λ-δακτυλίους $R \otimes \mathbb{Q} = K$ και της κατηγορίας των πεπερασμένων συνόλων στα οποία η $\widehat{\mathbb{Z}}^{\circ}$ δρα κατά συνεχή τρόπο. Επίσης μπορούμε να αντισοιχίσουμε σε κάθε τέτοιο λ-δακτύλιο ένα σύνολο με τον παρακάτω τρόπο:

Παρατήρηση. Στην εργασία του *Bruyn*, αναφορά [4], παρακινούμενος από την κλασική θεωρία étale αλγεβρών ονομάζει τους λ-δακτυλίους R που αν είναι πεπερασμένοι επί του $\mathbb{Z}$ και ελεύθεροι στρέψης ώστε $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ να είναι πεπερασμένες étale $\mathbb{Q}$-άλγεβρες, ως **étale $\mathbb{F}_1$-άλγεβρες**, έναν όρο που θα χρησιμοποιήσουμε και εμείς στην πορεία για λόγους οικονομίας.
Επομενως με βάση την κλασική θεωρία πεπερασμένων étale $\mathbb{Q}$-αλγεβρών παίρνουμε την εξής ισότητα:

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_1/\mathbb{F}_1) = \widehat{\mathbb{Z}}^{\circ}$$

το *απόλυτο Galois μονοειδές του* $\mathbb{F}_1$.

3 λ-φάσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε το λ-φάσμα μιας $\mathbb{F}_1$-άλγεβρας. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το λ-φάσμα μιας συγκεκριμένης κλάσης λ-δακτυλίων, των δακτυλίων Witt. Θα δούμε ότι για ένα οποιοδήποτε μεταθετικό δακτύλιο R το φάσμα του $Spec(R)$ επιζεί μέσα στο λ-φάσμα $Spec_{\lambda}(W(R))$ του δακτυλίου Witt $W(R)$ του R.
Ως μια εφαρμογή αυτού του φαινομένου θα δούμε πως το φάσμα των ακεραίων επιζεί στο $Spec_{\lambda}(W(\mathbb{Z}))$, στη συνέχεια θα δούμε πως μεταβάλλεται το $\mathbb{Q}$ από συνήθες σωμα συναρτήσεων του ακεραίου scheme ως ένα σώμα συναρτήσεων πια ενός σώματος συναρτήσεων ενός υποσυνόλου του λ-φάσματος $Spec_{\lambda}(W(\mathbb{Z}))$.

3.1 Witt διανύσματα

Θα ξεκινήσουμε το συγκεκριμένο κεφάλαιο με τον ορισμό των δακτυλίων Witt οι οποίοι αποτελούν μια ιδιαίτερη κλάση λ-δακτυλίων. Θα δούμε πως μπορούμε από έναν οποιοδήποτε μεταθετικό δακτύλιο R να κατασκευάσουμε τον δακτύλιο Witt του R, $W(R)$.
Αυτό θα μας βοηθήσει στην πορεία ώστε να μπορέσουμε να δούμε ένα οποιοδήποτε φάσμα ενός λ-δακτυλίου ως υποσύνολο ενός λ-φάσματος.

Θα κατασκευάσουμε τον $W(A)$. Αρχικά ξεκινάμε με έναν μεταθετικό δακτύλιο με μονάδα, έστω A, και θεωρούμε τον δακτύλιο των δυναμοσειρών μιας μεταβλητής επι του A, $A[[t]]$.
Έστω $\Phi : A[[t]] \longrightarrow A$ ο μορφισμός μεταξύ A-αλγεβρών που στέλνει το t στο 0, και επομένως στέλνει κάθε δυναμοσειρά στο σταθερό της όρο.
Ο Φ επάγει έναν μορφισμό $\Phi^* : A[[t]]^* \longrightarrow A^*$ μεταξύ των ομάδων των αντιστρέψιμών στοιχείων των αντίχτοιχων A-αλγεβρών.
Οριζούμε:

$$\Lambda(A) = \ker(\Phi^*) = 1 + tA[[t]].$$

Θεώρημα 3.1.1. *Υπάρχει ένα μοναδικό σύστημα απεικονίσεων*

$$* = *_A : \Lambda(A) \times \Lambda(A) \longrightarrow \Lambda(A),$$

για κάθε έναν μεταθετικό δακτύλιο A, τέτοιο ώστε:

1. $*$ *είναι αριστερά και δεξία επιμεριστικό ως προς τον πολλαπλασιασμό δυναμοσειρών*

2. *για κάθε μεταθετικό δακτύλιο* A *και για κάθε* $a, b \in A$ *να έχουμε:*

$$(1-at)^{-1} * (1-bt)^{-1} = (1-abt)^{-1}$$

3. *για κάθε μορφισμό* $f : A \longrightarrow B$, *μεταξύ μεταθετικών δακτύλιων με μονάδα, το διάγραμμα:*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(A) \times \Lambda(A) & \xrightarrow{\quad *_A \quad} & \Lambda(A) \\ {\scriptstyle (\Lambda(f), \Lambda(f))} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \Lambda(f)} \\ \Lambda(B) \times \Lambda(B) & \xrightarrow{\quad *_B \quad} & \Lambda(B) \end{array}$$

   να είναι μεταθετικό.

Η $*_A$ *δίνει στο* $\Lambda(A)$ *δομή μεταθετικού δακτυλίου με πρόσθεση τον συνήθη πολλαπλασιασμό δυναμοσειρών, πολλαπλασιασμό την* $*$ *και με μοναδιαίο στοιχείο το* $(1-t)^{-1}$.
Ο Λ *είναι ένας συναρτητής από την κατηγορία των μεταθετικών δακτυλίων στον εαυτό της.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του θεωρήματος ο αναγνώστης μπορεί να κοιτάξει στην αναφορά [3]. □

Σχόλιο. Από αναφορά [3], αν θεωρήσουμε τα σύνολα

$$\Lambda_n(A) = \ker((A[t]/(t^{n+1}))^* \longrightarrow A^*)$$

τότε έπεται ότι

$$\Lambda(A) = \varprojlim \Lambda_n(A).$$

Πρόταση 3.1.2. *Έστω* A *μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Τότε κάθε στοιχείο του* $\Lambda(A)$ $f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n$ *μπορεί να γραφεί στην μορφή* $f = \prod_{n=1}^{\infty}(1-\psi_n t^n)$, *για μοναδικά* $\psi_n \in A$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε με επαγωγή στο n ότι υπάρχουν μοναδικά $\psi_1, \ldots, \psi_n$ τέτοια ώστε

$$f(t)/\prod_{i=1}^{n}(1-\psi_i t^i) = 1 + O(t^{n+1})$$

Για $n = 1$ είναι προφανές καθώς:

$$f(t)/(1-\psi_1 t) = (1+\sum_{n=1}^{\infty} x_n t^n)(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i(\psi_1)^i t^i) = 1 + (x_1 - \psi_1)t + \ldots$$

και επομένως το ψ_1 ορίζεται μονοσήμαντα να είναι το x_1.
Έστω ότι ισχύει για $n-1$ τότε έχουμε

$$f(t)/\prod_{i=1}^{n-1}(1-\psi_i t^i) = 1 + zt^n + O(t^{n+1})$$

και παρατηρούμε ότι

$$(1+zt^n)^{-1}(1+zt^n+O(t^{n+1})) = (\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i z^i t^{ni})(1+zt^n+O(t^{n+1})) = 1+O(t^{n+1})$$

Επομένως, για $\psi_n = -z$ έχουμε

$$f(t)/\prod_{i=1}^{n}(1-\psi_i t^i) = 1 + O(t^{n+1})$$

και από τα παραπάνω προκύπτει ότι είναι και μοναδικό. □

Όρισμος 3.1.1. Ο **Witt δακτύλιος** $W(A)$ είναι το σύνολο $\Lambda(A)$ με τις εξής πράξεις:

- $u(t) \oplus w(t) = u(t)w(t)$ το συνήθες γινόμενο δυναμοσειρών
- $u(t) \otimes w(t)$ να είναι το γινόμενο Hadamard δηλαδή αν $u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ και $w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ τότε

$$u(t) \otimes w(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_i t^i$$

με το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης να είναι το $0(t) = 1+0t+0t^2+\cdots$. και το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού να είναι το $1(t) = 1+t+t^2+\cdots$.

Σχόλιο. Από το λήμμα 3.1.1. έπεται ότι μπορούμε να δούμε την κατασκευή των Witt δακτυλίων ως ένα συναρτητή $\mathbf{alg}_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbf{alg}_{\mathbb{Z}}$ από την κατηγορία των $\mathbb{Z}$-αλγεβρών στον εαυτό της.

Παρατήρηση. Έστω A ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $W(A)$ ο αντιστοιχός δακτύλιος των Witt διανυσμάτων. Έστω $u(t) \in W(A)$ τότε έχουμε ότι

$$u(t) = \prod_{i\geq 1}(1-a_i t^i)^{-1}$$

για κάποια μοναδικά $a_i \in A$.
Για κάθε n έστω $b_n = \sqrt[n]{a_n}$ και ζ_n να είναι μια πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας έστι ώστε για κάθε n να έχουμε $1 - a_n t^n = \prod_{i=0}^{n}(1-\zeta_n^i b_n t)$.
Επομένως επί του δακτυλίου $A[\mu_\infty][b_1, b_2, \ldots]$ μπορούμε να γράψουμε το $u(t)$ ως εξής:

$$u(t) = C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \oplus \ldots,\ \text{με } C_n = \frac{1}{1-b_n t} \oplus \frac{1}{1-\zeta_n b_n t} \oplus \ldots \oplus \frac{1}{1-\zeta_n^{n-1} b_n t}$$

Ο $W(A)$ αποκτά δομή λ-δακτυλίου με τα lifts των αυτομορφισμών Frobenius να επάγονται από την εξής ισότητα:

$$\psi^p\left(\frac{1}{1-at}\right) = \frac{1}{1-a^p t}$$

και να επεκτείνονται έτσι ώστε

$$\psi^p(u(t)) = \ \psi^p(C_1) \ \oplus \ \psi^p(C_2) \ \oplus \ \psi^p(C_3) \ \oplus \ \ldots$$

Επίσης, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι οι συγκεκριμένοι αυτομορφισμοί Frobenius διατηρούν τα γινόμενα καθώς

$$\psi^p(\frac{1}{1-at} \otimes \frac{1}{1-bt}) = \psi^p(\frac{1}{1-abt}) = \frac{1}{1-(ab)^p t} = \frac{1}{1-a^p b^p t} =$$
$$= \frac{1}{1-a^p t} \otimes \frac{1}{1-b^p t} = \psi^p(\frac{1}{1-at}) \otimes \psi^p(\frac{1}{1-bt})$$

καθώς και ότι $\psi^p \circ \psi^q = \psi^q \circ \psi^p$.
Επομένως μπορούμε να ορίσουμε, $\psi^n = (\psi^{p_1})^{\circ a_1} \circ \ldots \circ (\psi^{p_k})^{\circ a_k}$, όπου $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ η ανάλυση του φυσικού n σε γινόμενο πρώτων.

Επιπλέον, έστω $\phi : A \longrightarrow B$ έανς μορφισμός δακτυλίων. Τότε ο ϕ επάγει ένας μορφισμό λ-δακτυλίων $\Phi : W(A) \longrightarrow W(B)$, που να ορίζεται από την ισότητα

$$\Phi\left(\frac{1}{1-at}\right) = \frac{1}{1-\phi(a)t}$$

Ο Φ είναι συμβατός με τα Frobenius lifts.
Εφόσον οι Witt είναι ελεύθεροι στρέψης τότε με βάση το θεώρημα του Wilkerson θα επιδέχονατι μια λ-δομή που ορίζεται τα Frobenius lifts που ορίστηκαν ακριβώς παραπάνω.
Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι οι δακτύλιοι Witt είναι και αυτοί αντικείμενα της κατηγορίας των $\mathbb{F}_1$-άλγεβρων.

Σχόλιο. Επομένως έχουμε έναν συναρτητή W : rings $\longrightarrow$ rings$_\lambda$, τον οποίο θα καλούμε **συναρτητή Witt**, από την κατηγορία των μεταθετικών δακτυλίων στην κατηγορία των λ-δακτυλίων.

Όρισμος 3.1.2. Έστω A ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και $W(A)$ ο αντίστοιχος Witt δακτύλιος με την λ-δομη που ορίσαμε παραπάνω. Έστω $u(t) \in W(A)$, ορίζουμε τις απεικονίσεις $\gamma_n : W(A) \longrightarrow A$ μέσω τις παρακάτω ισότητας:

$$\frac{Tu'(t)}{u(t)} = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n t^n$$

Παράδειγμα 3.1.1. Έστω $u(t) = \frac{1}{1-at}$, τότε $u'(t) = \frac{a}{(1-at)^2}$ και επομένως έχουμε ότι:

$$\frac{tu'(t)}{u(t)} = \frac{\frac{ta}{(1-at)^2}}{\frac{1}{1-at}} = \frac{at}{1-at} = ta\frac{1}{1-at} = ta(\sum_{i=0}^{\infty}(at)^i) = \sum_{i=1}^{\infty}(at)^i$$

δηλαδή, $\gamma_n(u(t)) = a^n$.

► Έχουμε, επίσης , δύο ακόμα οικογένειες ενδομορφισμών στο $W(A)$ οι όποιοι μετατίθενται:

- $V_n : W(A) \longrightarrow W(A)$ με $\quad W(A) \ni s(t) \longmapsto V_n(s(t)) = s(t^n)$
- $[n] : W(A) \longrightarrow W(A)$ με $\quad W(A) \ni s(t) \longmapsto [n]s(t) = s(t) \oplus \ldots \oplus s(t)$

Οι απεικονίσεις V_n καλούνται **δράσεις Verschiebungs**.

Πρόταση 3.1.3. *Οι απεικονίσεις V_n, $[n]$ και ψ^n όπως ορίστηκαν παραπάνω πληρούν τις παρακάτω ισότητες:*

1. $V_n \circ V_m = V_{nm} = V_m \circ V_n$
2. $\psi^n \circ V_n = [n]$
3. $\psi^n \circ V_m = V_m \circ \psi^n$, *αν* $(n, m) = 1$

Απόδειξη. :

1. έστω $s(t) \in W(A)$ και όπως είδαμε σε παραπάνω παρατήρηση υπάρχουν μοναδικά $a_i \in A$ με $i \geq 1$ έτσι ώστε $s(t) = \prod_{i\geq 1}(1 - a_i t^i)^{-1}$ και έχουμε

$$V_n \circ V_m(s(t)) = V_n(s(t^m)) = s(t^{mn}) = V_m(s(t^n)) = V_m \circ V_n(s(t))$$

2.

$$\gamma_r(V_n(a(t))) = \gamma_r(a(t^n)) = \begin{cases} n\gamma_{r/n}(a(t)) & \text{αν } n|r \\ 0 & \text{αν } n \nmid r \end{cases}$$

διότι αν

$$\frac{d}{dt}log(a(t)) = p_1 + p_2 t + p_3 t^2 + \ldots$$

τότε

$$t(\frac{d}{dt}\log(a(t^n))) = t(nt^{n-1}(p_1 + p_2 t^n + p_3 t^{2n} + \ldots)) = np_1 t^n + np_2 t^{2n} + np_3 t^{3n} + \ldots$$

Επίσης,

$$t(\frac{d}{dt}\log(\psi^n(a(t)))) = t(p_n + p_{2n} t + p_{3n} t^2 + \ldots)) = p_{1n} t + p_{2n} t^2 + p_{3n} t^3 + \ldots))$$

επομένως

$$\gamma_r(\psi^n(a(t))) = p_{rn} = \gamma_{rn}(a(t))$$

Τέλος,

$$t(\frac{d}{dt}log([n](a(t)))) = t(\frac{d}{dt}\log(a(t)^n)) = t(\frac{d}{dt}n\log(a(t))) = nt(\frac{d}{dt}\log(a(t)))$$

και άρα

$$\gamma_r([n](a(t))) = n\gamma_r(a(t))$$

Έτσι από τα παραπάνω έχουμε

$$\gamma_r(\psi^n \circ V_n(a(t))) = \gamma_{rn}(V_n(a(t))) = n\gamma_{nr/n}(a(t)) = n\gamma_r(a(t)) = \gamma_r([n]a(t))$$

και επέται η ζητούμενη ισότητα.

3. Με βάση τις ισότητες από το (2) έχουμε ότι

$$\gamma_r(\psi^m \circ V_n(a(t))) = \gamma_{rm}(V_n(a(t))) = \begin{cases} n\gamma_{rm/n}(a(t)), & \text{αν } n|rm, \\ 0 & \text{αν } n \nmid rm \end{cases}$$

αλλά από υπόθεση έχουμε ότι $(m, n) = 1$ επομένως

$$\gamma_r(\psi^m \circ V_n(a(t))) = \gamma_{rm}(V_n(a(t))) = \begin{cases} n\gamma_{r/n}(a(t)) & \text{αν } n|r \\ 0 & \text{αν } n \nmid r \end{cases}$$

Όμοια έχουμε

$$\gamma_r(V_n \circ \psi^m(a(t))) = \begin{cases} n\gamma_{r/n}(\psi^m(a(t))) & \text{αν } n|r \\ 0 & \text{αν } n \nmid r \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n\gamma_{mr/n}(a(t)) & \text{αν } n|r \\ 0 & \text{αν } n \nmid r \end{cases}$$

δηλαδή, αν $n \nmid r$ τότε

$$\gamma_r(V_n \circ \psi^m(a(t))) = \gamma_r(\psi^m \circ V_n(a(t))) = 0$$

και αν $n|r$ τότε

$$\gamma_r(\psi^m \circ V_n(a(t))) = n\gamma_{rm/n}(a(t)) = \gamma_r(V_n \circ \psi^m(a(t)))$$

και επομένως εχουμε την ζητούμενη ισότητα.

$\square$

3.2 Ορισμός λ-φάσματος

Έχουμε λοιπόν έναν ορισμό για το F_1 και γενικότερα για τις F_1-άλγεβρες. Θα ορίσουμε τώρα το λ-φάσμα μιας $\mathbb{F}_1$-άλγβερας.

Ορισμος 3.2.1. Έστω R μια $\mathbb{F}_1$-άλγβερα ορίζουμε το **λ-φάσμα** της να είναι:

$$\mathrm{Spec}_\lambda(R) = \{ker(\phi : R \longrightarrow A) \mid A \text{ } reduced \text{ λ-δακτύλιος και } \phi \in \mathbf{alg}_\lambda(R, A)\}$$

Παρατήρηση. Με βάση την πρόταση 1.1.9 όλα τα στοιχεία στρέψης ενός λ-δακτύλίου είναι μηδενοδύναμα οπότε κάθε reduced δακτύλιος είναι ελεύθερος στρέψης και επομενώς παραμένουμε στην κλάση δακτυλίων που ορίσαμε ως $\mathbb{F}_1$-άλγεβρες.

Στην συνέχεια θα ορίσουμε δύο υποσύνολα του λ-φάσματος με τα οποία θα μπορέσουμε να μελετήσουμε το λ-φάσμα των δακτυλίων Witt.

Ορισμος 3.2.2. Με βάση λοιπόν τα παραπάνω ορίζουμε το **μέγιστο λ-φάσμα** του R να είναι:

$$max_\lambda(R) = \{ker(\phi : R \twoheadrightarrow A) \mid A \text{ étale επι του } \mathbb{F}_1 \text{ και } \phi \in \mathbf{alg}_\lambda(R, A)\}$$

Επίσης, θεωρούμε το υποσύνολο του $max_\lambda(R)$, που να αποτελείται απο τα σημεία που να αντιστοιχούν σε πυρήνες απεικονήσεων $\phi : R \longrightarrow \mathbb{Z}[\mu_n]$. Κάθε τέτοιο σημείο καλούμε **κυκλοτομικό**. Το σύνολο όλων των κυκλοτομικών σημείων του $max_\lambda(R)$ συμβολίζουμε με

$$max_{cycl}(R) = \{ker(\phi : R \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\mu_n]) \mid n \in \mathbb{N} \ \phi \in \mathbf{alg}_\lambda(R, \mathbb{Z}[\mu_n])\}$$

Παράδειγμα 3.2.1. Για τον λ-δακτύλιο $\mathbb{Z}[x]$ έχουμε:

$$\mathrm{Spec}_\lambda(\mathbb{Z}[x]) = \{0\} \cup max_\lambda(\mathbb{Z}[x])$$

και

$$max_{cycl}(\mathbb{Z}[x]) = \{(x^n - 1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι για την πρόταση του Smirnov για το $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1}$ έχουμε πια ένα φορμαλιστικό ορισμό, δηλαδή είναι το σύνολο των κυκλοτομικών σημείων του $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$, όπου το $[n]$ να αντιστοιχεί στο ιδεώδες $(x^n - 1)$, το $[0]$ να αντιστοιχεί στο (x), και τέλος $[\infty]$ να αντιστοιχεί στο (x^{-1}).

Παράδειγμα 3.2.2. Βλέπουμε ότι το $\mathbb{F}_1$, με βάση τον ορισμό για το λ-φάσμα, έχει μια συμπεριφορά που πλησιάζει σε αυτή ενός σώματος καθώς έχουμε ότι:

$$\mathrm{Spec}_\lambda(\mathbb{F}_1) = \{(0)\}$$

αυτό αποδεικνύεται εύκολα καθώς από τον ορισμό του Borger έχουμε ότι το $\mathbb{F}_1$ είναι ο δακτύλιος $\mathbb{Z}$ με την μοναδική λ-δομή του. Έστω τώρα, I ένα λ-ιδεώδες του, τότε αν $I \neq (0)$ θα υπάρχει φυσικός $m \geq 1$ που να ανήκει στο I. Όμως από την λ-δομή του $\mathbb{Z}$ έχουμε ότι $\lambda^m(m) = 1$ και επομένως $1 \in I$, δηλαδή $I = \mathbb{Z}$. απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα στοιχεία του λ-φάσματος ενός Witt δακτυλίου και συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι το λ-φάσμα του δεν περιέχει λ-ιδεώδη I για τα οποία το πηλίκο $W(R)/I$ να είναι μια étale $\mathbb{F}_1$-άλγεβρα.

Πρόταση 3.2.1. *Αν $I \in \mathrm{Spec}_\lambda(W(R))$ τότε για τις δράσεις Verschiebungs έχουμε ότι:*

$$V_n(I) \subset I.$$

Απόδειξη. Έστω $I \in max_\lambda(W(R))$, τότε $W(R)/I$ θα είναι ελεύθερης στρέψης ως ομάδα ως προς την πρόσθεση και επομένως έχουμε οτι η οικογένεια $\{\psi^p \mid p \text{ πρώτος}\}$ θα είναι lifts αυτομορφισμών Frobenius. Θεωρούμε τις συνθέσεις:

$$u_n : W(R) \xrightarrow{V_n} W(R) \twoheadrightarrow W(R)/I \qquad (*)$$

Εφόσον οι ψ^p είναι Frobenius lifts τότε το στοιχείο

$$(s(t))^p - \psi^p(s(t))$$

θα διαιρείται από το p, δηλαδή ο πρώτος p θα διαιρεί κάθε συντελεστή του παραπάνω στοιχείου και επομένως θα υπάρχει ένα στοιχείο $d(s(t))$ του $W(R)$ που να ικανοποιεί την παρακάτω ισότητα:

$$(s(t))^p + [p]d(s(t)) = \psi^p(s(t))$$

Στην πρόταση 2.2.1 είδαμε ότι επομένως ότι αφού το πηλίκο είναι ελεύθερο στρέψης τότε $\psi^p(I) \subset I$.
Αν, λοιπόν, $s(t) \in I$ τότε $(s(t))^p,\ \psi^p(s(t)) \in I$ και επομένως $[p]d(s(t)) \in I$ και εφόσον το πηλίκο είναι ελεύθερο στρέψης τότε $d(s(t)) \in I$, δηλαδή $d(I) \subset I$.
Έστω, τώρα, $s(t) \in ker(u_{np})$, δηλαδή από $(*)$ $V_{np}(s(t)) \in I$, τότε από την παραπάνω ισότητα έχουμε ότι

$$(V_{np}(s(t)))^p + [p]d(V_{np}(s(t))) = \psi^p(V_{np}(s(t))) = \psi^p \circ V_p(V_n(s(t))) = [p]V_n(s(t))$$

και αφού το αριστερό μέρος ανήκει στο I τότε θα ανήκει και το δεξιό και επειδή ο $W(R)/I$ δεν έχει στρέψη τότε $V_n(s(t)) \in I$, δηλαδή $V_n(I) \subset I$. □

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα ότι οι δράσεις Verschiebungs διατηρούν λ-ιδεώδη Witt δακτυλίων των οποίων τα πηλικά είναι ελεύθερα στρέψης μπορεί να δειχθεί ότι:

Πρόταση 3.2.2. *Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα. Τότε*

$$max_\lambda(W(R)) = \emptyset.$$

Απόδειξη. Αναφορά [4] □

Παρατήρηση. Με βάση λοιπόν την παραπάνω πρόταση βλέπουμε ότι οι Witt δακτύλιοι δεν έχουν λ-ιδεώδη έτσι ώστε το πηλίκο τους να μας δίνει μια étale $\mathbb{F}_1$-άλγεβρα.

Παρατήρηση. Για έναν οποιοδήποτε δακτύλιο R μπορούμε να δούμε το $\mathrm{Spec}(R)$ ως υποσύνολο του $\mathrm{Spec}_\lambda(W(R))$ ταυτίζοντας το με:

$$\mathrm{Spec}(R) \equiv \mathrm{Spec}_\omega(W(R)) = \{ker(W(R) \longrightarrow W(Frac(R/p))) \mid p \in \mathrm{Spec}(R)\}.$$

όπου κάθέ απεικόνιση $W(R) \longrightarrow W(Frac(R/p))$ να είναι η απεικόνιση που επάγεται από την

$$R \twoheadrightarrow R/p \longrightarrow Frac(R/p).$$

3.3 Το $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ επί του $\mathbb{F}_1$

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι αν R είναι ένας μεταθετικός δακτύλιος τότε το φάσμα τους $Spec(R)$ μπορούμε να το δούμε ως υποσύνολο του λ-φάσματος ενός λ-δακτυλίου που να είναι ελεύθερος στρέψης, συγκεκριμένα του $\mathrm{Spec}_\lambda(W(R))$.

Έχουμε λοιπόν

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \equiv \mathrm{Spec}_\omega(W(\mathbb{Z})) = \{ker(W(\mathbb{Z}) \longrightarrow W(\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}/p)) \mid p \in \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})\}$$

όπου κάθέ απεικόνιση $W(\mathbb{Z}) \longrightarrow W(\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}/p))$ να είναι η απεικόνιση που επάγεται από την

$$\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}/p).$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να δούμε τους ρητούς ως απεικόνισεις

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1}.$$

Γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Q}$ είναι το σώμα συναρτήσεων για το ακέραιο scheme $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Έστω λοιπόν $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ τότε τότε ξέρουμε από την κλασική αλγεβρική γεωμετρία ότι το στοιχείο $\frac{a}{b}$ αποτελεί μια συνάρτηση

$$\frac{a}{b} : \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$$

με,

$$\frac{a}{b}((p)) = \begin{cases} [a((p))b((p))^{-1}\ mod p\ :\ 1] & ,\text{αν } p \nmid b \\ [1:0] & ,\text{αν } p | b \end{cases}$$

επομένως, ο προβολικός χώρος $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}$ μπορεί να καλυφθεί από δύο λ-φάσματα

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_a[x^{-1}]) \cup \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_b[x])$$

όπου $\mathbb{Z}_a$ η τοπικοποιήση στο a.
Επομένως

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1} = \max_{cycl}(\mathbb{Z}_a[x^{-1}]) \cup \max_{cycl}(\mathbb{Z}_b[x])$$

Όμοια μπορούμε να δούμε και το $\mathrm{Spec}_\lambda(W(\mathbb{Z}))$:

$$\mathrm{Spec}_\lambda(W(\mathbb{Z})) = \mathrm{Spec}_\lambda(W(\mathbb{Z}_a)) \cup \mathrm{Spec}_\lambda(W(\mathbb{Z}_b))$$

Θεωρούμε τώρα τους λ-μορφισμούς

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_b[x] \longrightarrow W(\mathbb{Z}_b) & x \longmapsto \frac{1}{1-\frac{a}{b}t} \\ \mathbb{Z}_a[x^{-1}] \longrightarrow W(\mathbb{Z}_a) & x^{-1} \longmapsto \frac{1}{1-\frac{b}{a}t} \end{cases}$$

οι οποίοι μπορεί να δειχθεί ότι συμφωνούν στην τομή $\mathbb{Z}_{ab}[x, x^{-1}] \longrightarrow W(\mathbb{Z}_{ab})$ που καθορίζεται από $x \longmapsto \frac{1}{1-\frac{a}{b}t}$.
Επομένως, έχουμε δύο απεικονίσεις Έτσι αν έχουμε μια απεικόνιση

$$\mathrm{Spec}_\lambda(W(\mathbb{Z}_b)) \longrightarrow \max_{cycl}(\mathbb{Z}_b[x])$$

η οποία επάγει μια απεικόνιση

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_b) \equiv \mathrm{Spec}_\omega(W(\mathbb{Z}_b)) \longrightarrow \mathrm{Spec}_{cycl}(\mathbb{Z}_b[x])$$

Οπότε για να μελετησουμε την παραπάνω απεικόνιση αρκει να μελετήσουμε τον αντίστοιχο λ-μορφισμό

$$\mathbb{Z}_b[x] \longrightarrow W(\mathbb{Z}_b)$$

και συγκεκριμένα για να επικεντρωθούμε στα σημεία $\mathrm{Spec}_\omega(W(\mathbb{Z}_b))$ αρκεί να μελετήσουμε τους πυρήνες των συνθέσεων λ-μορφισμών

$$\mathbb{Z}_b[x] \longrightarrow W(\mathbb{Z}_b) \longrightarrow W(\mathbb{F}_p)$$

με (1)

$$x \longmapsto \frac{1}{1-\frac{\overline{a}}{\overline{b}}t}$$

για p που δεν διαιρούν το b:

διότι για $(p) \in \mathbb{Z}_b$ έχουμε ότι $p \nmid b$ διαφορετικά θα είχαμε $(p) = \mathbb{Z}_b$.
Επίσης το σημείο (p) το έχουμε αντιστοιχίσει στον πυρήνα

$$W(\mathbb{Z}_b) \longrightarrow W(Frac(\mathbb{Z}_b/p\mathbb{Z}_b)) \simeq W(\mathbb{F}_p)$$

που επάγεται από τον

$$\mathbb{Z}_b \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_b/p\mathbb{Z}_b \simeq \mathbb{F}_p$$

Οπότε αν το $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$ έχει τάξη n τότε η εικόνα του $x^n \longmapsto \frac{1}{1-t} = 1(t)$.
Επιπλέον $p|a$ τότε $x \longmapsto \frac{1}{1-0t} = 1 = 0(t)$ στο $W(\mathbb{F}_p)$.
Όμοια, αν $p|b$ τότε έχουμε την σύνθεση

$$\mathbb{Z}_a[x^{-1}] \longrightarrow W(\mathbb{Z}_a) \longrightarrow W(\mathbb{F}_p)$$

με (2)

$$x \longmapsto \frac{1}{1-\frac{\overline{b}}{\overline{a}}t}$$

και άρα $x^{-1} \longmapsto \frac{1}{1-0t} = 1 = 0(t)$.
Επομένως, συμβολίζοντας με $[p]$ τον πυρήνα της $W(\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow W(\mathbb{F}_p)$ που επάγεται από τον φυσικό επιμορφισμό έχουμε

$$[p] \longmapsto \begin{cases} [0] & \text{,αν } p|a \\ [\infty] & \text{,αν } p|b \\ [n] & \text{,αν } n = min\{m \in \mathbb{N} \mid a^m - b^m \equiv 0 \; mod \; p\} \end{cases}$$

Διότι, αν $p|a$ στο (1) έχουμε τον πυρήνα του λ-μορφισμού να είναι ίσος με το λ-ιδεώδες

$$(x)$$

το οποίο αντιστοιχεί με την σύμβαση που έχουμε κάνει στο στοιχείο του $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1}$ το συμβολίζουμε με $[0]$.
Αν $p|b$ τότε από το (2) έχουμε τον πυρήνα του λ-μορφισμού να είναι ίσος με λ-ιδεώδες

$$(x^{-1})$$

το οποίο αντιστοιχεί στο στοιχείο $[\infty]$ του $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1}$.
Όμοια, αν $ord(\frac{\overline{a}}{\overline{b}}) = n$ τότε στο (1) έχουμε τον πυρήνα του λ-μορφισμού να είναι ίσος με λ-ιδεώδες

$$(x^n - 1)$$

και το οποίο αντιστοιχεί στο στοιχείο $[n]$ του $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1}$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι οι $1, -1 \in \mathbb{Q}$ είναι οι μόνες σταθερές απεικονίσεις και ως αποτέλεσμα μπορούμε να δούμε, με αυτο τον τρόπο, κάθε ρητό αριθμό ως μια απεικόνιση

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_1}$$

Για τις παραπάνω απεικονίσεις έχουμε τα εξής:

1. αν $q = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ και $[n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{F}_1^1}$ τότε

   $$q^{-1}([n]) = \{p \text{ πρώτος} \mid p|a^n - b^n \text{ και } p \nmid a^m - b^m,\ \forall m < n\}$$

   διότι αν $p([p]) = [n]$, τότε απο τα παραπάνω περιμένουμε $ord(\frac{\overline{a}}{\overline{b}}) = n$ στο $\mathbb{F}_p^*$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το $p|a^n - b^n$ και $p \nmid a^m - b^m,\ \forall m < n$. Επομένως έχουμε ότι $|q^{-1}([n])| < \infty$.

2. Επικαλούμενοι το θεώρημα του Zsigmondy:

   Έστω $a > b > 0$ σχετικά πρώτοι ακέραιοι, τότε $\forall n \in \mathbb{N}^*$, υπάρχει πρώτος p τέτοιος ώστε $p|a^n - b^n$ και $p \nmid a^m - b^m$ για κάθε $m < n$ εκτός αν:

   - $n = 6,\ a = 2$ και $b = 1$
   - $n = 2$ και $a + b = 2^k$

   οπότε από το παραπάνω θεώρημα γνωρίζουμε ποιες από τις απεικονίσεις $q \in \mathbb{Q}$ δεν είναι επί.

Τέλος με βάση τα παραπάνω βλέπουμε πως ορίζονται τα στοιχεία του $\mathbb{Q}$, του δακτυλίου συναρτησεων του $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ στο περιβάλλον των λ-φασμάτων.
Ο ορισμός του είναι ίδιος με τον ορισμό που είχε δώσει ο Smirnov, έτσι βλέπουμε πως εμφανίζεται η πρόταση του στο περιβάλλον την λ-αλγεβρικής γεωμετρίας.

Αναφορές

[1] Donald Knutson, *λ-rings and the representation theory of the symmetric group*, Springer Lecture Notes in Mathematics 308 (1973).

[2] David Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Springer Lecture Notes in Mathematics 1358 (1988).

[3] Hendrik Lenstra, *Construction of the ring of Witt vectors*, UC Berkeley (2002) Notes by John Voigt.

[4] Lieven Le Bruyn, *Absolute geometry and the Habiro topology*, arXiv:1304.6532v1 (2009)

[5] James Borger, Bart De Smit, *Galois Theory and Integral Models of λ-rings*, arXiv:0801.2352v1 (2008)

[6] Donald Yau, *Lambda-rings*, World Scientific (2010)

[7] Clarence Wilkerson, *Lambda-rings, binomial domains and vector bundles over $CP(\infty)$*, Comm. Algebra 10(3) (1982) 311-328

[8] David Eisenbud and Joe Harris, *The Geometry of Schemes*, Springer Graduate Texts in Mathematics 197 (2000)

[9] Gerald J. Janusz , *Algebraic Number Fields* , American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics Volume 7 (2005)

[10] M. Hazewinkel, *Handbook of algebra*, North Holland, Volume 6 (2009)

[11] Andreas Dress, *Induction and Structure Theorems for Orthogonal Representations of Finite Groups*, Annals of Mathematics, September 1975

[12] Stanislaw Betley, *An approach to $\mathbb{F}_1$ via the theory of Λ-rings*, arXiv:1408.2987v1 (2014)

[13] Joseph Rabinoff, *The Theory of Witt Vectors*, arXiv:1409.7445v1 (2014)

[14] James Borger, *$\Lambda-$rings and the field with one element*, arXiv:0906.3146v1 (2009)

[15] Jürgen Neukrich, *Class Field Theory*, Springer-Verlag (1986)

[16] Grothendieck, Alexander (1957), "Special λ-rings", Unpublished

[17] Grothendieck, Alexander (1958), "La théorie des classes de Chern", Bull. Soc. Math. France, 86: 137–154,

[18] Nizameddin H. Ordulu, *A simple proof of Kronecker-Weber theorem*, http://wstein.org/129-05/final_papers/Nizameddin_Ordulu.pdf