Το Πρόβλημα του Συμπληρωματικού Υποχώρου

Διπλωματική Εργασία

Γεώργιος Κοτσυφός

Επιβλέπων: Σοφοκλής Μερκουράκης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2017

Περιεχόμενα

1 Προκαταρκτικά 5

1.1 Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης 5

1.1.1 Γραμμικοί Τελεστές 7

1.1.2 Βάσεις και Auerbach βάσεις 8

1.1.3 Κλασσικοί χώροι ακολουθιών 12

1.1.4 Περι σύγκλισης σειρών 14

1.1.5 Unconditional βάσεις 16

1.1.6 Φίλτρα-Υπερφίλτρα 17

1.1.7 Πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα 18

1.2 Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου 20

1.2.1 Μέτρο Haar και σφαιρικά μέτρα 20

1.3 Το θεώρημα του Dvoretzky 22

2 Το Πρόβλημα του Συμπληρωματικού Υποχώρου για χώρους με unconditional βάση. **25**

2.1 Το Πρόβλημα του Συμπληρωματικού Υποχώρου στην ειδική περίπτωση που ο χώρος έχει uncondotional Βάση 25

3 Το Πρόβλημα του Συμπληρωματικού Υποχώρου **45**

3.1 Η απόδειξη των Lindenstrauss και Tzafriri 46

3.2 Το ισχυροποιημένο Θεώρημα Dvoretzky 51

3.2.1 Υπεργινόμενα και Συγκέντρωση Μέτρου 52

3.2.2 Το Ισχυροποιημένο Θεώρημα του Dvoretzky 57

3.3 Δεύτερη απόδειξη στο πρόβλημα του συμπληρωματικού υπόχωρου 60

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια απόκτησης του μεταπτυχιακού τίτλου ειδίκευσης και το περιεχόμενο της βασίζεται στη μελέτη των χώρων Banach, χώροι που συναντώνται τόσο στη Συναρτησιακή και Πραγματική Ανάλυση όσο και γενικότερα στη Θεωρία Τελεστών. Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η συμβολή του Επιβλέποντος κ. Σοφοκλή Μερκουράκη, Καθηγητή στο Τμήμα Μαθηματικών της Σχολής Θετικών Επιστημών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Η καθοδήγησή του συνέβαλε καθοριστικά στην αρτιότερη παρουσίαση και επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας αυτής και για αυτόν τον λόγο τον ευχαριστώ θερμά.

Εκφράζω τις ευχαριστίες μου και προς τους Καθηγητές του τμήματος Μαθηματικών της σχολής Θετικών Επιστημών, κ. Γεώργιο Κουμουλλή και κ. Απόστολο Γιαννόπουλο, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλέυτική επιτροπή.

Εισαγωγή

Ένα από τα πιο γνωστά και σημαντικά αποτελέσματα για την δομή των χώρων Hilbert είναι ότι κάθε κλειστός υπόχωρος χώρου Hilbert είναι συμπληρωματικός σε αυτόν (μέσω μίας φραγμένης ορθογώνιας προβολής).

Το αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι το αποκαλούμενο στην βιβλιογραφία, "πρόβλημα του συμπληρωματικού υποχώρου", το οποίο θέτει το αντίστροφο ερώτημα. Δηλαδή, αν ένας (απειροδιάστατος) χώρος Banach κάθε κλειστός υπόχωρος του οποίου είναι συμπληρωματικός στον X είναι ισομορφικός με ένα χώρο Hilbert.

Το πρόβλημα του συμπληρωματικού υποχώρου τέθηκε από διάφορους ερευνητές μεταξύ των οποίων οι Banach (ο οποίος μάλλον το έθεσε πρώτος στο [1] και Grothendieck (ο οποίος στο [3] είκασε θετική απάντηση). Βέβαια θα πρέπει να πούμε ότι η απάντηση στο πρόβλημα αυτό ήταν γνωστή ήδη από τις δεκαετίες 30 και 40, για συγκεκριμένους (κλασικούς) χώρους Banach όπως οι L_p, ℓ_p, $(1 \leq p < \infty,\ p \neq 2)$, c_0 και ℓ_∞ (πρβλ τα άρθρα [7], [8]), [2], αφού όλοι οι παραπάνω χώροι αποδείχθηκε ότι έχουν κλειστούς μη συμπληρωματικούς υποχώρους. (Επίσης οι χώροι Banach της μορφής $C(K)$, όπου K άπειρος συμπαγής Hausdorff, περιέχουν μη συμπληρωματικό υπόχωρο, αφού περιέχουν ισομορφικά τον c_0.)

Τελικά στο πρόβλημα του συμπληρωματικού υποχώρου δόθηκε θετική απάντηση από τους Lindenstrauss και Tzafriri το 1971 στο [4]. Στην παρούσα εργασία πρόκειται να παρουσιάσουμε αποδείξεις αυτού του αποτελέσματος.

Η διάρθρωση της εργασίας έχει ως εξής: Το πρώτο κεφάλαιο περιέχει κάποια (προκαταρκτικά) αποτελέσματα και ορισμούς εννοιών, τα οποία είναι απαραίτητα για την ανάπτυξη του θέματος μας. Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην απόδειξη μίας ειδικής περίπτωσης του προβλήματος του συμπληρωματικού υποχώρου, όπου υποθέτουμε ότι ο χώρος Banach X για τον οποίο τίθεται το ερώτημα έχει unconditional βάση. Η απόδειξη αυτής της ειδικής περίπτωσης παρουσιάζει αρκετό ενδιαφέρον, καθώς χρησιμοποιεί σημαντικά αποτελέσματα όπως του Zippin (για την ομογένεια των βάσεων των ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ και c_0) και των Lindenstrauss-Tzafriri (χαρα-

κτηρισμός των ℓ_p, $1 \leq p < +\infty$ και c_0 μέσω συμπληρωματικών υποχώρων παραγόμενων από block βασικές ακολουθίες μίας unconditional βάσης).
Το τρίτο κεφάλαιο περιέχει την απόδειξη της γενικής περίπτωσης του προβλήματος του συμπληρωματικού υποχώρου. Ουσιαστικά δίνονται δύο αποδείξεις στο πρόβλημα, η πρώτη από τις οποίες είναι η αυθεντική απόδειξη των Lindenstrauss και Tzafriri από το άρθρο τους [L-T] του 1971. Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι δύο αποδείξεις χρησιμοποιούν ένα πεπερασμένων διαστάσεων αποτέλεσμα, δηλαδή το Θεώρημα του Dvoretzky για χώρους Banach. Η διαφορά των δύο αποδείξεων έγκειται στον βαθμό και την έκταση εμπλοκής του θεωρήματος Dvoretzky στην απόδειξη.

Κεφάλαιο 1

Προκαταρκτικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες απο την συναρτησιακή ανάλυση, την θεωρία μέτρου όπως και κάποια βασικά εργαλεία που είναι χρήσιμα στην ανάπτυξη της θεωρίας που απαιτείται για να καταλήξουμε στα βασικά αποτελέσματα.

1.1 Στοιχεία Συναρτησιακής Ανάλυσης

Στην εργασία αυτή όταν αναφερόμαστε σε ένα χώρο Banach X θα εννοούμε ότι είναι απειροδιάστατος χώρος Banach επί του σώματος των πραγματικών αριθμών (ανάλογα αποτελέσματα προκύπτουν και στην περίπτωση που τον θεωρήσουμε πάνω απο το σώμα τον μιγαδικών αριθμών). Θα συμβολίζουμε με B_X=(η μοναδιαία μπάλα) και S_X=(η μοναδιαία σφαίρα) τα σύνολα $\{x : \|x\| \leq 1\}$ και $\{x : \|x\| = 1\}$ αντίστοιχα. Αν $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία στον X θα συμβολίζουμε με $\langle x_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ την γραμμική θήκη και με $[x_n]_{n=1}^{\infty}$ την κλειστή γραμμική θήκη (για την περίπτωση πεπερασμένης ακολουθίας θα γράφουμε $[x_n]_{n=1}^{k}$). Με τον όρο υπόχωρος ενός χώρου με νόρμα θα εννοούμε κλειστό διανυσματικό υπόχωρο.
Ιδιαίτερη σημασία θα δώσουμε στους κλασσικούς χώρους

- $\ell_p = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right\}, \quad 1 \leq p < \infty$, με την νόρμα $\|\cdot\|_p$ όπου $\left\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ γίνονται διαχωρίσιμοι χώροι Banach.

- $c_0 = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \lim_{n\to\infty} a_n = 0\right\}$, με την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ όπου $\left\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_\infty = \sup_n \{|a_n|\}$ γίνεται διαχωρίσιμος χώρος Banach.

- $\ell_\infty = \left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } \sup_n |a_n| < \infty\right\}$, με την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ όπου $\left\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\right\|_\infty = \sup_n \{|a_n|\}$ γίνεται χώρος Banach.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με e_n την δίτιμη ακολούθια πραγματικών αριθμών που ορίζεται ως εξής

$$e_n(k) = \begin{cases} 1 & ,k = n \\ 0 & ,k \neq n \end{cases}$$

Μερικοί σημαντικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης οι οποίοι θα μας απασχολήσουν στην παρούσα εργασία είναι οι εξής:
Αν $m \in \mathbb{N}$ και $1 \leq p \leq \infty$. Ο χώρος Banach ℓ_p^m ορίζεται ως ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^m$ με νόρμα

$$\|(a_1, a_2, \cdots, a_m)\|_p = \left(\sum_{n=1}^{m} |a_n|^p\right).$$

Αντίστοιχα ορίζεται και ο ℓ_∞^m. Εύκολα ελέγχεται ότι οι $\ell_p^m, 1 \leq p < \infty$ και ℓ_∞^m ταυτίζονται με κλειστούς υποχώρους των ℓ_p και ℓ_∞.

Γενικότερα θεωρούμε τους χώρους:

$$\ell_p\big(X\big) = \big\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset X : \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty\big\}, \quad 1 \leq p < \infty, \tag{1.1}$$

$$\ell_\infty\big(X\big) = \big\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset X : \sup_n \|x_n\| < \infty\big\}, \tag{1.2}$$

$$c_0\big(X\big) = \big\{(x_n)_{n=1}^\infty \subset X : \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0\big\}. \tag{1.3}$$

Όπου X χώρος Banach, με τις προφανείς νόρμες.
Επίσης, αν $(X_n)_{n=1}^\infty$ είναι μία ακολουθία χώρων Banach, θεωρούμε τον χώρο $\ell_p\left(X_n\right)$ που αποτελείτε από όλες τις ακολουθίες $\{(x_n)_{n=1}^\infty : \ x_n \in X_n, \ \forall n \in \mathbb{N}\}$ έτσι ώστε $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty \in \ell_p$, τον οποίο εφοδιάζουμε με την νόρμα

$$\|x\| = \|(\|x_n\|)_{n=1}^\infty\|_p.$$

Ανάλογα ορίζεται και ο χώρος $c_0\left(X_n\right)$. Ιδιαιτέρως, θα μας απασχολήσουν οι χώροι $\ell_p\big(\ell_2^n\big)$ και $c_0\big(\ell_2^n\big)$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$.
Εν συνεχεία, αν X είναι ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach, τότε θα υπάρχει πάντα ακολουθία (μάλιστα γραμμικών ανεξάρτητων) διανυσμάτων $(x_n)_{n=1}^\infty$ στον X τέτοια ώστε $X = [x_n]_{n=1}^\infty$ και αντίστροφα αν υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n=1}^\infty$ στον X τέτοια ώστε $X = [x_n]_{n=1}^\infty$ τότε ο X θα είναι διαχωρίσιμος και το σύνολο $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ θα λεγεται <u>ολικό</u>.

Τέλος, δίνουμε τον όρισμό του $\varepsilon-$ δικτύου και κάνουμε μία αναφορά σε μερικά στοιχειώδη αποτελέσματα που θα αποδειχθούν σημαντικά εργαλεία για την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας.

Ορισμός 1.1.1. Έστω X ένας χώρος με νόρμα και A ένα υποσύνολο του X. Μία πεπερασμένη ακολουθία $(x_k)_{n=1}^m \subset A$ λέγεται $\varepsilon -$ δίκτυο στο A, όπου $\varepsilon > 0$ αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει k με $1 \leq k \leq m$ έτσι ώστε $\|x - x_k\| < \varepsilon$.

Πρόταση 1.1.1. *Εστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\varepsilon -$ δίκτυο στην $\mathcal{S}_X$ όπως και στην B_X.*

Λήμμα 1.1.1. *Έστω X χώρος Banach. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα.*
(i) Ένα φραγμένο δίκτυο $(x_a)_{a\in A} \subset X$ συγκλίνει ασθενώς στο $x \in X$ αν και μόνο αν ισχυεί $x^*(x_a) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in D$, όπου D είναι ένα ολικό υποσύνολο του X^*.
(ii) Ένα φραγμένο δίκτυο $(x_a^*)_{a\in A} \subset X^*$ συγκλίνει ασθενώς* στο $x^* \in X^*$ αν και μόνο αν ισχυεί $x_a^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in D$, όπου D είναι ένα ολικό υποσύνολο του X.

1.1.1 Γραμμικοί Τελεστές

Όσον αναφορά γραμμικούς τελεστές μεταξύ δύο χώρων Banach X και Y, αν $T : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός τελεστής οι έννοιες φραγμένος και συνεχής γραμμικός τελεστής θα είναι ταυτόσημες και στην περίπτωση που $Y = \mathbb{R}$ ($T : X \to \mathbb{R}$) ο T θα λέγεται γραμμικό συναρτησοειδές. Αν τώρα $T : X \to Y$ ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής τότε μπορούμε να ορίσουμε τον συζυγή τελεστή $T^* : Y^* \to X^*$ από την σχέση $y^* \to y^* \circ T$, ο οποίος εύκολα έπεται ότι είναι φραγμένος με νόρμα $\|T^*\| = \|T\|$. Αν ο T είναι γραμμικός, φραγμένος, $1-1$ και επί του Y τότε και ο αντιστροφος του T^{-1} είναι επίσης φραγμένος (Θεώρημα ανοικτής απεικόνισης). Τότε θα λέμε ότι ο T είναι ισομορφισμός και οι X και Y θα λέγονται ισομορφικοί και θα γράφουμε $X \simeq Y$. Αν ο T είναι γραμμική ισομετρία ($\|T(x)\| = \|x\|$) του X επί του Y τότε θα λέμε ότι οι X και Y είναι ισομετρικοί χώροι. Στην περίπτωση που για έναν γραμμικό τελεστή $P : X \to X$ με εικόνα έναν υπόχωρο Z του X (όπου X χώρος Banach) ισχυεί $P(Px) = P(x), \forall x \in X$ τότε θα λέμε ότι ο P είναι προβολή επί του Z. αν επιπλέον η προβολή P είναι φραγμένη τότε ο υπόχωρος Z θα λέγεται συμπληρωματικός. Στη συνέχεια αναφέρουμε την έννοια της βέλτισης προβολής.

Ορισμός 1.1.2. Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας υπόχωρος του. Μία προβολή $P : X \to X$ επί του Y λέγεται βέλτιστη ή ελαχιστική προβολή αν για κάθε άλλη προβολή $\tilde{P} : X \to X$ επί του Y ισχυεί

$$\|P\| \leq \|\tilde{P}\|.$$

Το επόμενο θεώρημα έπεται από γεγονός ότι σε χώρους πεπερασμένης διάστασης η μοναδιαία σφαίρα είναι συμπαγής.

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω X ένας χώρος Banach και Y ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του. Τότε υπάρχει βέλτιστη προβολή $P : X \to X$ επί του Y.*

Το επόμενο απλό Λήμμα είναι χρήσιμο σε αυτή την εργασία.

Λήμμα 1.1.2. *Έστω X και Y δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ ένας ισομορφισμός επί του Y. Αν X_1 είναι ένας συμπληρωματικός υπόχωρος του X τότε και ο $T(X_1)$ θα είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του Y.*

1.1.2 Βάσεις και Auerbach βάσεις

Είμαστε έτοιμοι να δώσουμε τον ορισμό της βάσης.

Ορισμός 1.1.3.

(i) Έστω X ένας χώρος Banach. Μία ακολουθία $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ θα λέγεται βάση (ή βάση Schauder) του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Τα a_n θα τα λέμε συντεταγμένες του x.

(ii) Αν $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι μία βάση του X, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο γραμμικός τελεστής $P_n : X \to X$ με $P_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ θα λέγεται κανονική προβολή.

Σχόλιο 1.1.1. Δεν πρέπει να γίνεται σύγχυση της βάσης συμφωνα με τον ορίσμό που δώσαμε με την έννοια της βάσης Hamel ή οποιαδήποτε άλλης βάσης. Έιναι διαφορετικά αντικείμενα και όταν χρειαζόμαστε την έννοια της Hamel βάσης θα το λέμε ρητά.

Παρατήρηση 1.1.1. Εύκολα από την μοναδικότητα γραφής του $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ έπεται ότι η $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Ορισμός 1.1.4. Μία βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ σε ένα χώρο Banach X θα λέγεται:

(i) Κανονικοποιημένη, αν $\|e_n\| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Ημικανονικοποιημένη, αν υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε $c_1 \leq \|e_n\| \leq c_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.1.1. Θεωρούμε την ακολουθία $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ όπου e_n είναι η δίτιμη ακολουθία πραγματικών όπως ορίστηκε παραπάνω, τότε είναι άμεσο ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία κανονικοποιημένη βάση για τους χώρους ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ και c_0, και θα την λέμε κανονική βάση.

Πρόταση 1.1.2. *Έστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βάση σε ένα χώρο με νόρμα X. Οι κανονικές προβολές της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιούν τα εξής:*

(i) $dim\big(P_n(X)\big) = n$,

(ii) $P_nP_m = P_mP_n = P_{\min\{n,m\}}$,

(iii) $\lim_n P_n(x) \overset{\|\cdot\|}{=} x, \quad \forall x \in X.$

Πρόταση 1.1.3. *Έστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βάση σε ένα χώρο με Banach X. Οι κανονικές προβολές της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες.*

Ορισμός 1.1.5. Έστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βάση σε ένα χώρο Banach X. Θα λέμε ότι η ποσότητα $\sup_n \|P_n\|$ είναι η σταθερά της βάσης $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ και θα την συμβολίζουμε με $bc\{e_i\}$.
Επιπλέον θα λέμε ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μονότονη αν $bc\{e_i\} \leq 1$.

Παρατήρηση 1.1.2. Επειδή οι P_n είναι προβολές θα έχουμε ότι $\|P_n\| \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κατά συνέπεια θα έχουμε πάντα $bc\{e_i\} \geq 1$.

Ορισμός 1.1.6. Έστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βάση σε ένα χώρο με Banach X και μία ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών στον X. Τα f_n, $n \in \mathbb{N}$, λέγονται διορθογώνια συναρτησοειδή ως προς την $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ αν ισχυεί

$$f_i(e_j) = \delta_{ij} \text{ για κάθε } i.j \in \mathbb{N}.$$

Εν συνεχεία βλέπουμε ότι αν $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία βάση σε έναν χώρο Banach τότε (επειδή $\forall x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ με την ιδιότητα $x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$), μπορούμε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ορίσουμε απεικονισεις $e_n^* : X \to \mathbb{R}$ με $e_n^*\bigg(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\bigg) = a_n$ όπου εύκολα βλέπουμε ότι ορίζονται καλά και είναι γραμμικές. Επιπλέον ισχυεί

$$|e_n^*(x)|\|e_n\| = \big\|e_n^*(x)e_n\big\| = \big\|P_n(x) - P_{n-1}(x)\big\| \leq \big\|P_n(x)\big\| + \big\|P_{n-1}(x)\big\| \leq 2\sup_k\{\|P_k\|\}\,\|x\|.$$

και άρα

$$\big|e_n^*(x)\big| \leq \frac{2\sup_k\|P_k\|}{\|e_n\|}\|x\|, \quad x \in X.$$

Συνεπώς

$$\|e_n^*\| \leq \frac{2bc\{(e_i)_{i=1}^{\infty}\}}{\|e_n\|}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.1.4. *Έστω X χώρος Banach με βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Η μοναδική ακολουθία $(e_n^*)_{n=1}^{\infty}$ που ορίσθηκε παραπάνω είναι ακολουθία διορθογώνιων συναρτησοειδών ως προς την βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Ορισμός 1.1.7. Μία ακολουθία $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Banach θα λέγεται βασική, αν είναι βάση για τον υπόχωρο $[e_k]_{k=1}^{\infty}$ του X.

Σχόλιο 1.1.2. Σε αυτή την εργασία βασική ακολουθία θα είναι πάντα μία ακολουθία που θα ικανοποιεί τον παραπάνω ορισμό, αν θέλουμε να αναφερθούμε σε μία ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ σε έναν μετρικό χώρο X η οποία είναι "βασική" με την έννοια ότι είναι Cauchy θα το αναφέρουμε ρητά.

Πρόταση 1.1.5. *Μία ακολουθία $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μη-μηδενικών στοιχείων σε έναν χώρο Banach X είναι βασική αν και μόνο αν υπάρχει μία θετική σταθερά C τέτοια ώστε*

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|$$

για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ και κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \leq n$.

Παρατήρηση 1.1.3. Έστω $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ βασική ακολουθία σε ένα χώρο με Banach X. Παρατηρούμε ότι

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \right\| \leq bc\{e_i\} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|$$

και άρα η σταθερά της βάσης ικανοποιεί αυτήν την ανισότητα. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η $bc\{e_i\}$ είναι η ελάχιστη σταθερά η οποία ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα.

Ορισμός 1.1.8. Δύο βάσεις $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ σε χώρους Banach X και Y αντίστοιχα, λέγονται ισοδύναμες και γράφουμε $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty}$, αν για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών ικανοποιείται η εξής ιδιότητα: η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ συγκλίνει.

Η έννοια της ισοδυναμίας δύο βασικών ακολουθίων είναι αρκετά ισχυρή ώστε να μας δώσει ισομορφισμό για τους αντίστοιχους χώρους που παράγουν. Συγκεκριμένα με μία απλή εφαρμογή του θεωρήματος του κλειστού γραφήματος παίρνουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.2. *Έστω δύο βασικές ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ σε χώρους Banach X και Y αντίστοιχα, τότε αυτές είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν υπάρχει ισομορφισμός $T : [x_n]_{n=1}^{\infty} \to [y_n]_{n=1}^{\infty}$ τέτοιος ώστε $Tx_n = y_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Το προηγούμενο θεώρημα ισοδυναμεί με το επόμενο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 1.1.1. *Έστω δύο βασικές ακολουθίες $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ σε χώρους Banach X και Y αντίστοιχα, τότε αυτές είναι ισοδύναμες αν και* *μόνο αν υπάρχει σταθερά* $C > 0$ *τέτοια ώστε για όλες τις ακολουθίες* $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ *να ισχύει*

$$C^{-1}\Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k \Big\| \leq \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \Big\| \leq C \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k \Big\|.$$

Σχόλιο 1.1.3. Αν $C = 1$ (όπου C η σταθερά στο παραπάνω πόρισμα) τότε λέμε ότι οι $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισομετρικά ισοδύναμες.

Ορισμός 1.1.9. Έστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία βάση σε ένα χώρο με Banach X. θεωρούμε $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών και θέτουμε $p_0 = 0$. Αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε μία ακολουθία από μή-μηδενικά διανύσματα $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ στον X της μορφής

$$u_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j$$

λέγεται <u>block βασική ακολουθία</u> της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Εν συνεχεία θα δείξουμε ότι μία block βασική ακολουθία είναι όντως βασική.

Λήμμα 1.1.3. *Έστω* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *μία βάση σε ένα χώρο με Banach* X *με σταθερά βάσης* K. *Αν* $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ *είναι μία block βασική ακολουθία της* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, *τότε η* $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ *είναι βασική ακολουθία με σταθερά βάσης* $\leq K$.

Απόδειξη. Έστω $u_n = \sum_{j=p_{n-1}+1}^{p_n} a_j e_j$, $n \in \mathbb{N}$ μία block βασική ακολουθία της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, Τότε, αν $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ και $m, n \in \mathbb{N}$ τέτοιοι ώστε $m \leq n$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{k=1}^{m} b_k u_k \Big\| &= \Big\| \sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} a_j e_j \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=p_{k-1}+1}^{p_k} b_k a_j e_j \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{j=1}^{p_m} c_j e_j \Big\|, \ \textit{οπου}, \ c_j = a_j b_k, \ \ p_{k-1} \leq j \leq p_k \\
&\leq K \Big\| \sum_{j=1}^{p_n} c_j e_j \Big\| \\
&\leq K \Big\| \sum_{k=1}^{n} b_k u_k \Big\|.
\end{aligned}$$

□

Ορισμός 1.1.10. Μία βασική ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ σε ένα χώρο Banach X λέγεται <u>συμπληρωματική</u> αν ο υπόχωρος $[x_n]_{n=1}^{\infty}$ του X είναι συμπληρωματικός στον X.

Παρατήρηση 1.1.4. Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία συμπληρωματική βασική ακολουθία σε ένα χώρο Banach X. Θέτουμε $Y = [x_n]_{n=1}^{\infty}$ και θεωρούμε $P : X \to Y \subseteq X$ μία προβολή. Αν $(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \subset Y^*$ είναι τα διορθογώνια συναρτησοειδή ως προς την βάση $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, τότε αφενός μπορούμε να τα επεκτείνουμε από το Hahn Banach στον X^* έτσι ώστε να διατηρούν την νόρμα τους, αφετέρου μπορούμε να τα επεκτείνουμε μέσω της προβολής P θέτοντας $u_n^* = x_n^* \circ P$ και τότε για κάθε $x \in X$ θα έχουμε

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^*(x) x_n.$$

(πρβλ [5], σελ. 12)

Τέλος αναφερόμαστε στην έννοια της Auerbach βάσης.

Ορισμός 1.1.11. Έστω X χώρος Banach πεπερασμένης διάστασης ίσης με n. Μία κανονικοποιημένη βάση Hamel $(e_i)_{i=1}^{n}$ του X λέγεται βάση Auerbach, αν υπάρχουν διορθογώνια γραμμικά συναρτησοειδή $(f_i)_{i=1}^{n}$ ως προς την βάση $(e_i)_{i=1}^{n}$ τέτοια ώστε

$$\|f_i\| = 1, \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Θεώρημα 1.1.3 (Auerbach). *Κάθε πεπερασμένης διάστασης χώρος Banach έχει Auerbach βάση.*

Από το θεώρημα του Auerbach έπεται μάλλον εύκολα το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.1.6. *Έστω X χώρος Banach και Y ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. Υποθέτουμε ότι $dimY = n$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει προβολή $P : X \to X$ στον X επί του Y με $\|P\| \leq n$.*

1.1.3 Κλασσικοί χώροι ακολουθιών

Παρατήρηση 1.1.5. Θεωρούμε το χώρο $\ell_p(\ell_2^n)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ την κανονική βάση $\overline{e_{i,n}}$, $i = \{1, 2, \cdots, n\}$ του ℓ_2^n. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$ το στοιχείο $\overline{e_{i,n}}$ έχει φυσιολογικό αντίγραφο στον $\ell_p(\ell_2^n)$ $e_{i,n} = \left(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-1}, \overline{e_{i,n}}, 0, \cdots\right)$ δηλαδή έχουμε

$$e_{1,n} = \left(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-1}, \overline{e_{1,n}}, 0, \cdots\right) = \left(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-1}, (\underbrace{1, 0, \cdots, 0}_{n}), 0, \cdots\right)$$

$$e_{2,n} = \left(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-1}, \overline{e_{2,n}}, 0, \cdots\right) = \left(\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{n-1}, (\underbrace{0, 1, \cdots, 0}_{n}), 0, \cdots\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$e_{k,n} = \left(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1}, \overline{e_{k,n}}, 0, \cdots \right) = \left(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n-1}, \underbrace{(0,0,\cdots,\underbrace{1}_{k},0,\cdots,0)}_{n}, 0, \cdots \right), \quad k \le n$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Η ακολουθια $\{e_{k,n} : n \in \mathbb{N}, \ 1 \le k \le n\}$ συγκροτεί την κανονική βάση του $\ell_p\left(\ell_2^n\right)$.

Η επόμενη πρόταση θα φανεί χρήσιμη για την ολοκλήρωση βασικού αποτελέσματος του επόμενου κεφαλαίου. Για την απόδειξη παραπέμπτουμε στα [9], (σελ. 73) και [5], (σελ. 217).

Πρόταση 1.1.7. *Έστω $1 < p < \infty$, τότε ο ℓ_p είναι ισόμορφος με τον χώρο $\ell_p\left(\ell_2^n\right)$. (πρβλ. την απόδειξη της prop. 8.3.7 του [5])*

Πρόταση 1.1.8. *Έστω X_n και Y_n ακολουθία χώρων Banach ώστε $Y_n \subseteq X_n$, $n \ge 1$. Τότε ο χώρος $c_0\left(Y_n\right)$ εμφυτέυεται στον $c_0\left(X_n\right)$.*

Πρόταση 1.1.9. *Ο c_0 είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $c_0\left(\ell_\infty^{2^n}\right)$.*

Στη συνέχεια χρειαζόμαστε ένα ωραίο θεώρημα του Pelczynski του οποίου η απόδειξη στηρίζεται στα επόμενα δύο αποτελέσματα (τα οποία και αυτά οφείλονται στον Pelczynski.) (πρβλ [5] σελ 33-35)

Πρόταση 1.1.10. *Κάθε απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος Y του ℓ_p, $1 \le p < \infty$ περιέχει κλειστό υπόχωρο Z έτσι ώστε ο Z να είναι ισομορφικός με τον ℓ_p και συμπληρωματικός στον ℓ_p. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για τον c_0.*

Θεώρημα 1.1.4. *Έστω X και Y χώροι Banach τέτοιοι ώστε ο X να ειναι ισομορφικός με συμπληρωματικό υπόχωρο του Y και ο Y να είναι ισομορφικός με συμπληρωματικό υπόχωρο του X. Αν υποθέσουμε ότι $X \approx c_0\left(X\right)$ ή $X \approx \ell_p\left(X\right)$, για κάποιο $1 \le p < \infty$ τότε ο X είναι ισομορφικός με τον Y.*

Από τα δύο αυτά αποτελέσματα παίρνουμε το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.5 (Pelczynski-1960). *Κάθε απειροδιάστος συμπληρωματικός υπόχωρος Y του ℓ_p, $1 \le p < \infty$, είναι ισομορφικός με τον ℓ_p. Το ίδιο ισχύει και για τον c_0.*

Ο χώρος ℓ_1 έχει μία καθολική ιδιότητα σε σχέση με τους διαχωρίσιμους χώρους Banach, όπως φαίνεται από το επόμενο Θεώρημα. Από το Θεώρημα αυτό έπεται (μάλλον) εύκολα ότι ο X περιέχει μη συμπληρωματικό υποχώρο. (πρβλ [5] σελ 36-37)

Θεώρημα 1.1.6. *Έστω X ένα διαχωρίσιμος χώρος Banach. Τότε υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $S : \ell_1 \to X$ επί του X. Μάλιστα ο X είναι ισομετρικός με τον χώρο $\ell_1/\ker S$.*

1.1.4 Περι σύγκλισης σειρών

Ορισμός 1.1.12. Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Μία ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ στον X θα λέγεται ασθενώς Cauchy αν για κάθε $x^* \in X^*$ η ακολουθία $(x^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.1.13. Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία σε ένα χώρο Banach . Η τυπική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ στον X λέγεται unconditional συγκλίνουσα, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi_{(n)}}$ συγκλίνει για κάθε μετάθεση π του $\mathbb{N}$.

Λήμμα 1.1.4. *Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία σε ένα χώρο Banach X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(a) Η $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ συγκλίνει unconditionally.

(b) Για κάθε γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ συγκλίνει.

(c) Για κάθε ακολουθία προσήμων $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ (δηλαδή $\varepsilon_n = 1$ ή $\varepsilon_n = -1$, $\forall n \geq 1$). Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ συγκλίνει

(d) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε αν F είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\{n+1, n+2, \cdots,\}$ τότε

$$\left\| \sum_{i \in F} x_i \right\| < \varepsilon.$$

Ορισμός 1.1.14. Μία σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ σε ένα χώρο Banach X λέγεται ασθενώς unconditional Cauchy ή ασθενώς unconditional συγκλίνουσα αν για κάθε $x^* \in X^*$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |x^*(x_k)|$ συγκλίνει.

Πρόταση 1.1.11. *Έστω μία σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ σε ένα χώρο Banach X η οποία συγκλίνει unconditionally σε κάποιο $x \in X$, Τότε*

i $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi_{(n)}} = x$ για κάθε μετάθεση π του $\mathbb{N}$.

ii Η σειρά $\sum_{n\in A} x_n$ *συγκλίνει unconditionally για κάθε άπειρο υποσύνολο* A *του* $\mathbb{N}$. *(Εδώ εννοούμε ότι αν* $A = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ *τότε η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ *είναι συγκλίνουσα.)*

iii Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *είναι ασθενώς unconditional Cauchy.*

Λήμμα 1.1.5. *Έστω μία σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *σε ένα χώρο Banach . Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *είναι ασθενώς unconditional Cauchy.*

(ii) Υπάρχει θετική σταθερά $C > 0$ *έτσι ώστε για κάθε* $(\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in c_{00}$ *να ισχυεί*

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n\right\| \leq C \max_n |\xi_n|.$$

(iii) Υπάρχει θετική σταθερά $C' > 0$ *έτσι ώστε*

$$\left\|\sum_{n\in F} \epsilon_n x_n\right\| \leq C'$$

για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο F *του* $\mathbb{N}$ *και για κάθε ακολουθία προσήμων* $(\epsilon_n)_{n=1}^{\infty}$.

Παρατήρηση 1.1.6. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ είναι ασθενώς unconditional Cauchy στον c_0, όπου $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι η κανονική βάση του c_0. Από την άλλη μεριά δεν υπάρχει στοιχείο $x \in c_0$ τέτοιο ώστε να ισχυεί

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^*(e_n) = x^*(x), \quad \forall x^* \in \ell_1.$$

Επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ δεν είναι ασθενώς συγκλίνουσα, κατά συνέπεια δεν μπορεί να συγκλίνει unconditionally.

Πρόταση 1.1.12. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *μία σειρά σε ένα χώρο Banach* X. *Τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *είναι ασθενώς unconditional Cauchy αν και μόνο αν υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής* $T : c_0 \to X$ *τέτοιος ώστε* $Te_n = x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι ασθενώς unconditional Cauchy τότε από το προηγούμενο Λήμμα ο τελεστής $T : c_{00} \to X$ που ορίζεται απο την σχέση $T((\xi_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n$ είναι c_0-norm φραγμένος. Τώρα επειδή ο $(c_{00}, \|\cdot\|_{\infty})$ είναι είναι πυκνός στον c_0, ο T επεκτείνεται σε φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : c_0 \to X$ διατηρώντας την νόρμα.
Για το αντίστροφο, έστω ότι ο $T : c_0 \to X$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $Te_n = x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε $x^* \in X^*$ θα έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |x^*(Te_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |(T^*(x^*)(e_n)|.$$

Τώρα από την Παρατήρηση (1.1.6) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ είναι ασθενώς unconditional Cauchy στον c_0, κατά συνέπεια η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |(T^*(x^*)(e_n)|$ συγκλίνει, και έτσι έπεται το ζητούμενο. $\square$

1.1.5 Unconditional βάσεις

Στη συνέχεια θα δούμε ένα είδος βάσης που θα φανεί χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις.

Ορισμός 1.1.15. Μία βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ σε ένα χώρο Banach λέγεται unconditional αν για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x)e_n$ είναι unconditional συγκλίνουσα.

Προφανώς η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι unconditional βάση του X αν και μόνο αν η $(e_{\pi(n)})_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση του X για κάθε μετάθεση $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Σχόλιο 1.1.4. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι οι κανονικές βάσεις των $c_0,\ \ell_p, \quad 1 \leq p < \infty$ είναι unconditional βάσεις.

Παρατήρηση 1.1.7. Αν $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία unconditional βάση σε ένα χώρο Banach τότε για κάθε $A \subset \mathbb{N}$ ορίζεται γραμμική προβολή $P_A : X \to [e_k \ : k \in A]$ από την σχέση

$$P_A(x) = \sum_{k \in A} e_k^*(x)e_k.$$

Τώρα με μία απλή εφαρμογή του θεωρήματος Banach-Steinhaus μπορούμε να πάρουμε ότι για κάθε $A \subset \mathbb{N}$ η P_A είναι φραγμένη. Κατά συνέπεια από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος θα έχουμε ότι η ποσότητα $\sup_{A \subset \mathbb{N}} \|P_A\|$ είναι πεπερασμένη.

Ορισμός 1.1.16. Έστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία unconditional βάση σε ένα χώρο Banach . Θεωρούμε το σύνολο των προβολών $\{P_A : A \subset \mathbb{N}\}$, τότε η σταθέρα $K_s = \sup_{A \subset \mathbb{N}} \|P_A\|$ λέγεται suppression σταθερά της βάσης. Σημειώνουμε ότι για να οριστεί αυτή η σταθερά θα πρέπει η βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ να είναι unconditional.

Πρόταση 1.1.13. *Μία βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι unconditional αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a_1, a_2, \cdots, a_N \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\left\| \sum_{i \in A} a_i e_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{N} a_i e_i \right\|$$

για κάθε A με $A \subseteq \{1, 2, \cdots, N\}$.

Σχόλιο 1.1.5. Εύκολα προκύπτει ότι η ελάχιστη σταθερά που ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα είναι η suppression σταθερά K_s.

Πρόταση 1.1.14. *Μία βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι unconditional αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a_1, a_2, \cdots, a_N,\ b_1, b_2, \cdots, b_N \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την $|a_n| \leq |b_n|,\ n = 1, 2, \cdots, n$ ισχύει η ανισότητα*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \right\|.$$

Σχόλιο 1.1.6. Η ελάχιστη σταθερά για την οποία ικανοποιείται η παραπάνω ανισότητα λέγεται unconditional σταθερά της βάσης και την συμβολίζουμε με K_u.

Παρατήρηση 1.1.8. Αν $bc\{e_i\}$ είναι η σταθερά της βάσης τότε είναι άμεσο ότι $1 \leq bc\{e_i\} \leq K_s \leq K_u \leq 2K_s$. Παρατηρούμε λοιπόν ότι όλες οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν για την σταθερά K_u επομένως στα επόμενα αν δεν χρειαζόμαστε βέλτιστη σταθερά θα χρησιμοποιούμε την σταθερά $K = K_u$. Αποδεικνύεται ακόμη ότι η K_u ταυτίζεται με την ελάχιστη σταθερά K ώστε να ισχύει η ανισότητα

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k a_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\|$$

για κάθε $a_1, a_2, \cdots, a_N \in \mathbb{R}$ και πρόσημα $\varepsilon_k = \pm 1$.

1.1.6 Φίλτρα-Υπερφίλτρα

Στη συνέχεια προχωράμε στη μελέτη κάποιων αντικειμένων που θα αποδειχθούν στοιχειώδης στην ανάπτυξη της θεωρία μας.

Ορισμός 1.1.17. Έστω $\mathcal{I}$ ένα μη κενό σύνολο, ένα φίλτρο επί του $\mathcal{I}$ είναι ένα μη κενό υποσύνολο $\mathcal{F}$ του $\mathcal{PI}$ το οποίο ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες :

- Το $\emptyset$ δεν ανήκει στο $\mathcal{F}$
- Αν $A \subset B \subset \mathcal{I}$ και $A \in \mathcal{F}$ τότε $B \in \mathcal{F}$
- Αν $A, B \in \mathcal{F}$ τότε $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Παρατήρηση 1.1.9. Κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ επί του $\mathcal{I}$ περιέχει αναγκαία το $\mathcal{I}$.

Ορισμός 1.1.18. Μία συνάρτηση $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ θα λέμε ότι συγκλίνει στο ξ μέσω του $\mathcal{F}$ αν $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$ για κάθε ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$ που περιέχει το ξ. Στην περίπτωση αυτή θα γράφουμε

$$\lim_{\mathcal{F}} f(x) = \xi$$

.

Θεωρούμε το σύνολο $\{\mathcal{F} \subset \mathcal{P}\mathcal{I} : \text{το } \mathcal{F} \text{ είναι φίλτρο}\}$ τότε αυτό είναι ένα είναι μερικά διατεταγμένο σύνολο μέσω της σχέσης "$\subseteq$" και είναι άμεσο ότι από το Λήμμα του Zorn μπορούμε να βρούμε μεγιστικά στοιχεία.

Ορισμός 1.1.19. Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ επί του συνόλου $\mathcal{I}$, είναι ένα φίλτρο το οποίο είναι μεγιστικό ως προς την σχέση "$\subseteq$" του περιέχεσθαι. Δηλαδή, αν $\mathcal{F}$ φίλτρο επί του $\mathcal{I}$ και $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ τότε $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Από το Λήμμα του Zorn (δηλαδή το αξίωμα της επιλογής) έπεται εύκολα ότι κάθε φίλτρο περιέχεται σε ένα υπερφίλτρο.

Παρατήρηση 1.1.10. Τα υπερφίλτρα χαραχτηρίζονται απο την παρακάτω ιδιότητα :

$$\text{Αν } A \in \mathcal{P}\mathcal{I} \text{ τότε είτε } A \in \mathcal{U} \text{ ή } \tilde{A} = \mathcal{I} - A \in \mathcal{U}.$$

Λήμμα 1.1.6. *Έστω $\mathcal{U}$ ένα υπερφίλτρο τότε κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ συγκλίνει μέσω του $\mathcal{U}$.*

Σχόλιο 1.1.7. Σε αυτήν την εργασία θα μας απασχολήσουν τα υπερφίλτρα πάνω από το $\mathbb{N}$. Συγκεκριμένα, θεωρούμε :

(i) Τα φίλτρα $\mathcal{F}_n = \{A : \ n \in A\}, \ \ n \in \mathbb{N}$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι τα $\mathcal{F}_n$ είναι υπερφίλτρα τα οποία ονομάζουμε κύρια υπερφίλτρα,

(ii) Το φίλτρο $\mathcal{F}_\infty = \{A \ : \exists n \in \mathbb{N} : \ [n, \infty) \subset A\}$ των συμπεπερασμένων υποσυνόλων το οποίο ονομάζεται φίλτρο Frechet. Όσον αναφορά την σύγκλιση μίας ακολουθίας $(x_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$ σε ένα $x \in \mathbb{R}$ μέσω του $\mathcal{F}_\infty$, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ \Leftrightarrow \ \lim_{\mathcal{F}_\infty} x_n = x.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι κάθε υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$ που δεν είναι κύριο περιέχει το φίλτρο Frechet. Η ύπαρξη μη κύριων υπερφίλτρων στο $\mathbb{N}$ έπεται εφαρμόζοντας το Λήμμα του Zorn στο φίλτρο Frechet.

1.1.7 Πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα

Ορισμός 1.1.20 (Απόσταση Banach-Mazur).

Έστω X και Y δύο χώροι Banach οι οποίοι είναι μεταξύ τους ισόμορφοι. Η ποσότητα

$$d(X,Y) = \inf\left\{\|T\|\|T^{-1}\| : \text{ ο } T : X \to Y \text{ είναι ισομορφισμός}\right\}$$

λέγεται απόσταση Banach-Mazur.

Σχόλιο 1.1.8. Έστω X και Y και Z χώροι Banach οι οποίοι είναι μεταξύ τους ισόμορφοι. Τότε

$$d(X,Y) \leq d(X,Z)d(Y,Z).$$

Λήμμα 1.1.7. *Έστω $n \in \mathbb{N}$*

(i) Αν $p > 2$, τότε $d\left(\ell_2^n, \ell_p^n\right) = n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$.

(ii) Αν $p < 2$, τότε $d\left(\ell_2^n, \ell_p^n\right) = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$.

Πρόταση 1.1.15. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, τότε οι κανονικές βάσεις των ℓ_p και $\ell_p(\ell_2^n)$ <u>δεν</u> είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι οι χώροι ℓ_p και $\ell_p\left(\ell_2^n\right)$ είναι ισόμορφοι. (προτ. 1.1.7). Υποθέτουμε για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι οι κανονικές βάσεις τους είναι ισοδύναμες. Τότε οι βάσεις αυτές συνδέονται με μία διπλή ανισότητα όπως στο Πόρισμα (1.1.1) για κάποια σταθερά $C > 0$. Επειδή ο ℓ_2^N περιέχεται ισομετρικά στον $\ell_p(\ell_2^N)$ $\forall N \geq 1$ ($\ell_2^N = \langle e_{1,1}, e_{1,2}, \cdots, e_{1,N}\rangle$, δηλαδή ο ℓ_2^N "εμφανίζεται" πάνω στην κανονική βάση του $\ell_p(\ell_2^N)$) έπεται ότι $\forall N \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε στοιχεία $e_{n_1}, e_{n_2}, \cdots, e_{n_N}$ της κανονικής βάσης του ℓ_p ώστε

$$\frac{1}{C}\left\|\sum_{i=1}^{N} a_i e_i\right\|_2 \leq \left\|\sum_{i=1}^{N} a_i e_{n_i}\right\|_p \leq C\left\|\sum_{i=1}^{N} a_i e_i\right\|_2.$$

Από την ανισότητα αυτή έπεται για την απόσταση Banach-Mazur των ℓ_2^N και ℓ_p^N ότι

$$d(\ell_2^N, \ell_p^N) \leq C^2, \quad N \geq 1.$$

Είναι τώρα σαφές ότι η τελευταία ανισότητα αντιφάσκει με τον υπολογισμό της ποσότητας $d(\ell_2^N, \ell_p^N)$ που δίνεται από το Λήμμα (1.1.7). □

Ορισμός 1.1.21. Έστω X και Y δύο απειροδιάστατοι χώροι Banach. Θα λέμε ότι ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y αν για κάθε υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης E του X και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος F του Y με $dimF = dimE$, και ισομορφισμός $T : E \to F$ που ικανοποιεί την σχέση $\|T\|\|T^{-1}\| < 1+\epsilon$, δηλαδή $d(E, F) < 1+\epsilon$.

Παρατήρηση 1.1.11. Στον ορισμό (1.1.21) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|T\| = 1$ και $\|T^{-1}\| < 1+\epsilon$ αντικαθιστώντας αν χρειαστεί τον T με κατάλληλο πολλαπλάσιο του.

Πρόταση 1.1.16. *Έστω X, Y και Z απειροδιάστατοι χώροι Banach. Αν ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y και ο Y, είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Z τότε ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Z.*

Ορισμός 1.1.22. Έστω X και Y δύο απειροδιάστατοι χώροι Banach. Θα λέμε ότι ο X είναι crudely πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y αν υπάρχει σταθερά $\lambda > 1$ έτσι ώστε να ισχυεί η εξής ιδιότητα: Για κάθε υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης E του X υπάρχει πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος F του X με $dimF = dimE$ και ισομορφισμός $T : E \to F$ για τον οποίο ισχυεί $\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda$.

Παρατήρηση 1.1.12. Όπως και στην Παρατήρηση (1.1.11) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|T\| = 1$ και $\|T^{-1}\| < \lambda$.

Λήμμα 1.1.8. *Έστω X ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach και $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ μία αύξουσα ακολουθία πεπερασμένης διάστασης υποχώρων του X τέτοια ώστε ο $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ να είναι πυκνός στον X, τότε:*

(i) Ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε ένα χώρο Banach Y αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος F του Y με $dimF = dimE_n$ και ισομορφισμός $T : E_n \to F$ που ικανοποιεί την σχέση $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \epsilon$.

(ii) Έστω $\lambda > 1$, υποθέτουμε ότι ο X έχει την ιδιότητα: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος F του Y και ισομορφισμός $T_n : E_n \to F$ τέτοιος ώστε να ικανοποιεί την $\|T\|\|T^{-1}\| \leq \lambda$. Τότε, για λάθε $\epsilon > 0$ ο X είναι crudely πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y με σταθερά $\lambda + \epsilon$.

1.2 Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

1.2.1 Μέτρο Haar και σφαιρικά μέτρα

Έστω $X = \mathcal{L}(\ell_2^n, \ell_2^n)$ ο διανυσματικός χώρος των γραμμικών τελεστών $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ (ισοδύναμα ο χώρος των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων). Ο X ως γνωστόν είναι χώρος Banach με νόρμα την "νόρμα του τελεστή".
Με GL_n συμβολίζουμε εκείνο το υποσύνολο του X το οποίο αποτελείτε από τους $1-1$ γραμμικούς τελεστές. (Ισοδύναμα το σύνολο των $n \times n$ πινάκων με $\det A \neq 0$.) Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το GL_n είναι με την σύνθεση απεικονίσεων (ισοδύναμα με το γινόμενο πινάκων) μία ομάδα. Η GL_n ονομάζεται γενική γραμμική ομάδα. Περαιτέρω η GL_n είναι τοπικά συμπαγής (μετρικοποιήσιμη και διαχωρίσιμη) τοπολογική ομάδα, αφού οι πράξεις της ομάδας είναι συνεχείς και η GL_n ανοικτό υποσύνολο του X. Μία ενδιαφέρουσα για εμάς συμπαγής υποομάδα της GL_n είναι η υποομάδα $\mathcal{O}_n$ των ορθογώνιων τελεστών $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$, δηλαδή αυτών οι οποίοι διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο. (Ισοδύναμα των $n \times n$ πινάκων ώστε $A^{\tau} = A^{-1}$.)
Η ορθογώνια ομάδα $\mathcal{O}_n$ ως συμπαγής (μετρικοποιήσιμη) τοπολογική ομάδα φέρει ένα μοναδικό κανονικοποιημένο μέτρο Haar.
Ακολούθως περιγράφουμε σύντομα τις ιδιότητες του μέτρου Haar σε μία τοπικά συμπαγή (μετρικοποιήσιμη και διαχωρίσιμη) τοπολογική ομάδα.

Έστω G μία τοπικά συμπαγής Hausdorff τοπολογική ομάδα και $\mathcal{B}(G)$ η Borel σ-άλγεβρα της. Αν g είναι ένα στοιχείο της G και S ένα υποσύνολο της G, ορίζουμε

- Αριστερή μεταφορά
$$gS = \{gs : \ s \in S\}$$

- Δεξιά μεταφορά
$$Sg = \{sg : \ s \in S\}$$

Οι δεξιές και αριστερές μεταφορές στελνουν τα Borel σε Borel.
Ένα μέτρο μ στην Borel σ-άλγεβρα της G θα λέγεται αριστερά αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές, αν για κάθε $g \in G$ και S Borel υποσύνολο της G ισχυεί
$$\mu(gS) = \mu(S)$$
ενώ ενα μέτρο μ στην Borel σ-άλγεβρα της G θα λέγεται δεξιά αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές, αν για κάθε $g \in G$ και S Borel υποσύνολο της G ισχυεί
$$\mu(Sg) = \mu(S)$$

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω G τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμη και διαχωρίσιμη τοπολογική ομάδα, τότε υπάρχει ένα θετικά ορισμένο, μη τετριμμένο μέτρο ($\mu \neq 0$), στην Borel σ-άλγεβρα της G το οποίο ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.*

- *Το μέτρο μ είναι αριστερά αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές.*

- *$\mu(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές K υποσύνολο της G.*

- *Για κάθε Borel υποσύνολο E της G ισχυεί*
$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : \ E \subset U, \ U \textit{ανοιχτό}\}$$
και
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : \ K \subset E, \ K \textit{συμπαγές}\}$$

Το μ ονομάζεται μέτρο Haar επί της G. Το μ είναι ουσιαστικά μοναδικό, με την έννοια ότι κάθε άλλο μέτρο ν επί της G που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες είναι της μορφής $\nu = c\mu$, όπου c θετική σταθερά. (Φυσικά υπάρχει και ένα μέτρο Haar επί της G το οποίο είναι δεξιά αναλλοίωτο.)

Στη συνέχεια θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} του ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$ όπου με τη γεωδαισιακή μετρική (ή την μετρική της ευκλείδιας νόρμας) γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος. Η $\mathcal{S}^{n-1}$ γίνεται επίσης χώρος μέτρου πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς του ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο Borel σ, όπου το σ ορίζεται από την σχέση

$$\sigma\left(A\right) = \frac{vol(\{sx:\ x\in A,\ 0\leq s\leq 1\})}{vol\left(B_2^n\right)},\ \text{για κάθε}\ Borel\ A\subset \mathcal{S}^{n-1}.$$

Το σ ονομάζεται σφαιρικό μέτρο. Το σφαιρικό μέτρο σ έχει μία πολύ καλή σχέση με το μέτρο Haar πάνω από την ορθογώνια ομάδα $\mathcal{O}_n$. Συγκεκριμένα ισχυεί το επόμενο θεώρημα

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω $\mathcal{O}_n$ η ορθογώνια ομάδα του ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^n$ και μ το κανονικοποιημένο μέτρο Haar επί της $\mathcal{O}_n$. Τότε για κάθε $x\in\mathcal{S}^{n-1}$ και κάθε Borel $A\subset\mathcal{S}^{n-1}$ έχουμε*

$$\mu\left(\{U\in\mathcal{O}_n:\ U(x)\in A\}\right) = \sigma\left(A\right).$$

1.3 Το θεώρημα του Dvoretzky

Ορισμός του ελλειψοειδούς. Έστω X n-διάστατος χώρος Banach. Ένα ελλειψοειδές στον X είναι η εικόνα (ή η μεταφορά της εικόνας) της μοναδιαίας μπάλας $B_{\ell_2^n}$ μέσω ενός γραμμικού και $1-1$ τελεστή $T:\ell_2^n\to X$. Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{E}=T\left(B_{\ell_2^n}\right)\subseteq B_X$. Ταυτίζουμε αλγεβρικά τον X με τον $\mathbb{R}^n$ χρησιμοποιώντας μία βάση Hamel του X και τότε ο όγκος του $\mathcal{E}$ ορίζεται με την βοήθεια της ορίζουσας του (πίνακα που αντιστοιχεί στον) τελεστή $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ως εξής.

$$\frac{vol\mathcal{E}}{volB_{\ell_2^n}} = |detS|.$$

Από την συμπάγεια της μοναδιαίας σφαίρας σε χώρους πεπερασμένης διάστασης αποδεικνείεται ότι υπάρχει μοναδικός ισομορφιμός $T:\mathbb{R}^n\to X$ τέτοιος ώστε

$$vol\left(T\left(B_{\ell_2^n}\right)\right) = \sup\left\{vol\left(S\left(B_{\ell_2^n}\right)\right): S:\ell_2^n\to X,\ \text{ισομορφισμός}, \|S\|\leq 1\right\}.$$

Το ελλειψοειδές $\left(T\left(B_{\ell_2^n}\right)\right)$ που επάγεται από τον T λέγεται ελλειψοειδές του John και είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που περιέχεται στην B_X. Έστω τώρα $\mathcal{E}$ ένα ελλειψοειδές στον X και $S:\ell_2^n\to X$ ο ισομορφιμός από τον οποίο επάγεται το $\mathcal{E}$. Μπορούμε, μέσω του S, να δώσουμε στον X μία δομή εσωτερικού γινομένου από την σχέση $\langle x,y\rangle = \langle S^{-1}x, S^{-1}y\rangle$, $x,y\in X$. Συνεπώς, σε κάθε ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ στον X αντιστοιχεί ένα εσωτερικό γινόμενο και κατ΄ επέκταση μία νόρμα.

Πρόταση 1.3.1 (John). *Έστω X n-διάστατος χώρος με Banach, τότε $d\left(X,\ell_2^n\right)\leq\sqrt{n}$.*

Πρόταση 1.3.2 (Dvoretzky-Rogers). *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και $\|\cdot\|_E$ η επαγόμενη από το ελλειψοειδές του John νόρμα στον X. Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $(e_j)_{j=1}^n$ του χώρου $(X, \|\cdot\|_E)$ τέτοια ώστε*

$$\|e_j\|_X \geq \frac{1}{4}, \quad j \leq \frac{n}{2} + 1.$$

Αν $\|\cdot\|_X$ είναι μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε την μέση τιμή της συνάρτησης $g(x) = \|x\|$ στην $\mathcal{S}^{n-1}$

$$M = \int_{\mathcal{S}^{n-1}} \|x\|_X d\sigma(x).$$

Σχόλιο 1.3.1. Αποδεικνύεται ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι πεπερασμένο, συνεπώς η μέση τιμή είναι καλά ορισμένη.

Με την βοήθεια της πρότασης (1.3.2) παίρνουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.3.3. *Έστω $\|\cdot\|_X$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\|\cdot\|_X \leq \|x\|, \ x \in \mathbb{R}^n$ τότε*

$$M = \int_{\mathcal{S}^{n-1}} \|x\|_X d\sigma(x) \geq c_1 \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

όπου c_1 ειναι μία απόλυτη σταθερά.

Θα χρειασθούμε στην συνέχεια το παρακάτω Λήμμα.

Λήμμα 1.3.1. *Έστω F ένας m-διάστατος χώρος με νόρμα. Θεωρούμε $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει ϵ-δίκτυο $(x_i)_{i=1}^N$ στην $\mathcal{S}_F$ έτσι ώστε*

$$N \leq \left(1 + \frac{2}{\epsilon}\right)^m.$$

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω $\|\cdot\|_X$ μία νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ με $\|x\|_X \leq \|x\|$. Θεωρούμε $0 < \epsilon < \frac{1}{3}$ και M την μέση τιμή της $\|\cdot\|_X$. Αν $k \in \mathbb{N}$ με $k \leq cM^2 n \frac{\epsilon^2}{|\log \epsilon|}$ (όπου c κατάλληλη σταθερά), τότε υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε*

$$(1 - \epsilon)M\|x\| \leq \|x\|_X \leq (1 + \epsilon)M\|x\|, \quad x \in F.$$

Θεώρημα 1.3.2 (Dvoretzky). *Υπάρχει μία θετική σταθερά c τέτοια ώστε να ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα: Αν $n \in \mathbb{N}, \ 0 < \epsilon < \frac{1}{3}$ και X είναι ένας n-διάστατος χώρος Banach, τότε για κάθε k με*

$$k \leq c \log n \frac{\epsilon^2}{|\log \epsilon|},$$

ο X περιέχει υπόχωρο F με $dim F = k$ και $d(\ell_2^k, F) < 1 + \epsilon$

Παρατήρηση 1.3.1. Έστω X είναι ένας απειροδιάστατος χώρος Banach και έστω $0 < \epsilon < \frac{1}{3}$ και $k \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $k \leq c \log n \frac{\epsilon^2}{|\log \epsilon|}$ και θεωρούμε n-διάστατο υπόχωρο Y του X,τότε το θεώρημα του Dvoretzky μας δίνει έναν k-διάστατο υπόχωρο F του Y (και άρα του X) τέτοιο ώστε $d(\ell_2^k, F) < 1+\epsilon$. Δηλαδή, αν X είναι απειροδιάστατος χώρος Banach τότε για N επαρκώς μεγάλο και $\forall\ \epsilon > 0$ ο X περιέχει υπόχωρο Y με $dim Y = N$ και $d(Y, \ell_2^N) \leq 1 + \epsilon$.

Για τις αποδείξεις των αποτελεσμάτων αυτής της παραγράφου παραπέμπτουμε στα [5], σελ 292-301 και [10].

Κεφάλαιο 2

Το Πρόβλημα του Συμπληρωματικού Υποχώρου για χώρους με unconditional βάση.

2.1 Το Πρόβλημα του Συμπληρωματικού Υποχώρου στην ειδική περίπτωση που ο χώρος έχει uncondotional Βάση

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε μία ειδική περίπτωση του προβλήματος του συμπληρωματικού υποχώρου. Δηλαδή αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα έχει θετική απάντηση αν ο χώρος Banach X (κάθε κλειστός υπόχωρος του οποίου είναι συμπληρωματικός σε αυτόν) έχει unconditional βάση. Βασικά εργαλεία για αυτή την απόδειξη, τις αποδείξεις των οποίων θα παρουσιάσουμε, είναι τα ακόλουθα αποτελέσματα.

1) Το πολύ σημαντικό θεώρημα του Zippin το οποιο χαρακτηρίζει τις βάσεις των c_0 και ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ ως τέλεια ομογενείς. θεώρημα (2.1.1)

2) Ένα αποτέλεσμα των Lindenstrauss και Tzafriri το οποίο χαρακτηρίζει τους c_0 και ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, με την χρήση συμπληρωματικών υποχώρων οι οποίοι παράγονται από block βασικές ακολουθίες μίας unconditional βάσης του χώρου X. (Θεώρημα 2.1.2). Σημειώνουμε ότι στην απόδειξη αυτού του αποτελέσματος χρησιμοποιείται το θεώρημα του Zippin.

Τέλος χρησιμοποιείται και το γεγονός ότι οι χώροι c_0 και ℓ_1 έχουν <u>μη</u> κλειστούς συμπληρωματικούς υποχώρους

Ορισμός 2.1.1. Μία block βασική ακολουθία $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ μίας βάσης $(e_n)_{n=1}^{\infty}$,

$$u_n = \sum_{i=p_{n-1}+1}^{p_n} a_i e_i.$$

λέγεται block βασική ακολουθια σταθερών συντελεστών (constant coefficient block basic sequence), αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μία σταθερά c_n έτσι ώστε για κάθε i με $p_{n-1} < i \leq p_n$ να ισχυεί $a_i = c_n$ ή $a_i = 0$. Δηλαδή

$$u_n = c_n \sum_{i \in A_n} e_i,$$

όπου A_n είναι υποσύνολο ακεραίων του $\big(p_{n-1}, p_n\big]$.

Σχόλιο 2.1.1. Θα συμβολίζουμε εν' συντομία την block βασική ακολουθία σταθερών συντελεστών (constant coefficient block basic sequence) με c.c.b.b.s
.

Ορισμός 2.1.2. Μία κανονικοποιημένη βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται τέλεια ομογενής (perfectly homogeneous), αν κάθε κανονικοποιημένη c.c.b.b.s $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με την $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.

Παρατήρηση 2.1.1. (i) Από τον ορισμό (2.1.2) έπεται ότι κάθε κανονικοποιημένη τέλεια ομογενής βάση είναι unconditional. Πράγματι, έστω ε_n τυχούσα ακολουθία προσήμων. Τότε η $(\varepsilon_n e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι c.c.b.b.s και επομένως ισοδύναμη με την $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, από όπου έπεται το συμπέρασμα.

(ii) Επίσης παρατηρούμε ότι κάθε υπακολουθία $(e_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι c.c.b.b.s.

Ορισμός 2.1.3. Εστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία τέλεια ομογενής βάση σε έναν χώρο Banach X. Θα λέμε ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ισοδύναμη με όλες τις κανονικοποιημένες block βασικές ακολουθίες σταθερών συντελεστών της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, αν υπάρχει σταθερά $M \geq 1$ τέτοια ώστε για κάθε δύο κανονικοποιημένες block βασικές ακολουθίες σταθερών συντελεστών $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ να ισχύει,

$$M^{-1} \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \Big\| \leq \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k v_k \Big\| \leq M \Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k u_k \Big\|$$

για κάθε πεπερασμένη ακολουθία πραγματικών $(a_i)_{i=1}^{n}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Λήμμα 2.1.1. *Εστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία κανονικοποιημένη τέλεια ομογενής βάση σε έναν χώρο Banach X. Τότε η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ισοδύναμη με όλες τις κανονικοποιημένες c.c.b.b.s της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το Λήμμα για την βασική ακολουθία $(e_n)_{n=n_0+1}^{\infty}$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Εστω ότι δεν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να ισχύει το Λήμμα για την $(e_n)_{n=n_0+1}^{\infty}$. Πρός απαγωγή σε άτοπο, θα κατασκευάσουμε επαγωγικά κανονικοποιημένες block βασικές ακολουθίες σταθερών συντελεστών $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ οι οποίες να μην είναι μεταξύ τους ισοδύναμες. Για το σκοπό αυτό θέτουμε $n_1 = 1$ και τότε από την άρνηση της πρότασης για την $(e_n)_{n=n_1}^{\infty}$ και για $M = 2^1$, θα υπάρχουν $N_1 \in \mathbb{N}$, πραγματικοί αριθμοί $a_1^1, a_2^1, \cdots, a_{N_1}^1$ και κανονικοποιημένες block βασικές ακολουθιές σταθερών συντελεστών $(u_n^1)_{n=1}^{\infty}$ και $(v_n^1)_{n=1}^{\infty}$ της $(e_n)_{n=n_1}^{\infty}$ έτσι ώστε να ισχυεί

$$\text{είτε,} \quad \left\| \sum_{k=1}^{N_1} a_k^1 v_k^1 \right\| > 2 \left\| \sum_{k=1}^{N_1} a_k^1 u_k^1 \right\|$$

$$\text{ή,} \quad \left\| \sum_{k=1}^{N_1} a_k^1 u_k^1 \right\| > 2 \left\| \sum_{k=1}^{N_1} a_k^1 v_k^1 \right\|.$$

Συνεχίζοντας, παίρνουμε $n_2 \in \mathbb{N}$ με $n_2 \geq \max\left\{\cup_{k=1}^{N_1}(suppu_k^1) \cup \cup_{k=1}^{N_1}(suppv_k^1)\right\}$ και $M = 2^2$, τότε από την άρνηση της πρότασης για την $(e_n)_{n=n_2}^{\infty}$ και για $M = 2^2$, θα υπάρχουν $N_2 \in \mathbb{N}$, πραγματικοί αριθμοί $a_1^2, a_2^2, \cdots, a_{N_2}^2$ και κανονικοποιημένες block βασικές ακολουθιές σταθερών συντελεστών $(u_n^2)_{n=1}^{\infty}$ και $(v_n^2)_{n=1}^{\infty}$ της $(e_n)_{n=n_2}^{\infty}$ έτσι ώστε να ισχυεί

$$\text{είτε,} \quad \left\| \sum_{k=1}^{N_2} a_k^2 v_k^2 \right\| > 2^2 \left\| \sum_{k=1}^{N_2} a_k^2 u_k^2 \right\|$$

$$\text{ή,} \quad \left\| \sum_{k=1}^{N_2} a_k^2 u_k^2 \right\| > 2^2 \left\| \sum_{k=1}^{N_2} a_k^2 v_k^2 \right\|.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε $n_1 < n_2 < \cdots < n_\lambda < \cdots$ και $N_1 < N_2 < \cdots < N_\lambda < \cdots$ έτσι ώστε για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$, βρίσκουμε πραγματικούς $a_1^\lambda, a_2^\lambda, \cdots, a_{N_\lambda}^\lambda$ και κανονικοποιημένες block βασικές ακολουθιές σταθερών συντελεστών $(u_n^\lambda)_{n=1}^{\infty}$ και $(v_n^\lambda)_{n=1}^{\infty}$ της $(e_n)_{n=n_\lambda}^{\infty}$ που να ικανοποιούν τις

$$\text{είτε,} \quad \left\| \sum_{k=1}^{N_\lambda} a_k^\lambda v_k^\lambda \right\| > 2^\lambda \left\| \sum_{k=1}^{N_\lambda} a_k^\lambda u_k^\lambda \right\|$$

$$\text{ή,} \quad \left\| \sum_{k=1}^{N_\lambda} a_k^\lambda u_k^\lambda \right\| > 2^\lambda \left\| \sum_{k=1}^{N_\lambda} a_k^\lambda v_k^\lambda \right\|.$$

Από την κατασκευή μας μπορούμε να επιλέξουμε blocks από κάθε u_n^λ, v_n^λ τα οποία να συγκροτούν ένα ζεύγος από κανονικοποιοιμένες block βασικές ακολουθίες σταθερών συντελεστών της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ οι οποίες να μην είναι μεταξύ τους ισοδύναμες. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Σχόλιο 2.1.2. Εστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μια κανονικοποιημένη βάση σε έναν χώρο Banach X. Για κάθε n στο $\mathbb{N}$ Θα συμβολίζουμε με $\lambda(n)$ την ποσότητα $\left\| \sum_{k=1}^{n} e_k \right\|$.

Παρατήρηση 2.1.2. Αν $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια κανονικοποιημένη βάση σε έναν χώρο Banach X και K είναι η σταθερά της βάσης $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε

$$\|e_1\| \leq K\lambda(n), \qquad \lambda(n) \leq \sum_{k=1}^{n} \|e_k\| = n$$

και έτσι παίρνουμε την σχέση

$$K^{-1} \leq \lambda(n) \leq n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι αν η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι unconditional και $K = 1$ τότε η $\big(\lambda(n)\big)_{n=1}^{\infty}$ δεν μπορεί να είναι φθίνουσα.

Λήμμα 2.1.2. *Εστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μία κανονικοποιημένη, unconditional βάση σε έναν χώρο Banach X. Αν $\sup_n \lambda(n) = C_1 < +\infty$ τότε η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0.*

Απόδειξη. Έστω K μία unconditional σταθερά της βάσης $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ του X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επιλογή προσήμων $(\epsilon_i)_{i=1}^{n}$ θα ισχύει

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i e_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| = K\lambda(n) = KC_1 = C(K, C_1) = C$$

Οπότε από το Λήμμα (1.1.5) η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ θα είναι ασθενώς unconditional Cauchy σειρά και άρα από την Πρόταση (1.1.12) υπάρχει φραγμένος φραμμικός τελεστής $T : c_0 \to X$ με $Te_n = x_n$ (όπου σε αυτήν την περίπτωση συμβολίζουμε με $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ την κανονική βάση του c_0). Παρατηρούμε τώρα ότι ο T είναι επί του $[x_n]_{n=1}^{\infty} = X$ και ότι αν $Ty_1 = Ty_2,\ y_1, y_2 \in c_0$ με $y_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n,\ y_2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n$ τότε από την γραμμικότητα και την συνέχεια του T θα έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k Te_k = Ty_2 = Ty_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k Te_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

οπότε $a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Επομένως $y_1 = y_2$ και ο T είναι $1-1$ το οποίο από το (Θεώρημα Ανοικτής Απεικόνισης) συνεπάγεται ότι ο T είναι ισομορφίσμός, και αφού $Te_n = x_n,\ n \in \mathbb{N}$ οι $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμες. □

Λήμμα 2.1.3. *Εστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία κανονικοποιημένη, τέλεια ομογενής βάση σε έναν χώρο Banach X. Αν M ειναι η σταθερά του Ορισμού (2.1.3), ισχύει,*

$$\frac{1}{KM^2}\lambda(n)\lambda(m) \leq \lambda(nm) \leq KM^2\lambda(n)\lambda(m)$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ όπου εδώ με K συμβολίζουμε μία unconditional σταθερά της βάσης K_u.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι η M είναι μία unconditional σταθερά της βάσης $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ και συνεπώς $K_u \leq M$ (Πρβλ την παρατήρηση 1.1.8.)

Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ και την οικογένεια

$$f_j = \sum_{i=(j-1)n+1}^{jn} e_i, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

η οποία αποτελείται από ξένα μεταξύ τους block της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μήκους n. Εστω $c_j = \|f_j\|$ με $j = 1, 2, \ldots$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα (2.1.1) για τις κανονικοποιημένες c.c.b.b.s $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ όπου $u_k = e_{(j-1)n+k}$, $k = 1, 2, \ldots$, (η $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι για δεδομένο $j \in \mathbb{N}$ υπακολουθία της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$) έχουμε

$$M^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} u_k\right\| \leq M\left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\|$$

Επομένως

$$\begin{aligned} M^{-1}\lambda(n) &= M^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\| \\ &\leq \left\|\sum_{k=1}^{n} e_{(j-1)n+k}\right\| \\ &= \left\|\sum_{k=(j-1)n+1}^{jn} e_k\right\| \\ &= c_j \\ &\leq M\left\|\sum_{k=1}^{n} e_k\right\| \\ &= M\lambda(n) \end{aligned}$$

άρα

$$\frac{1}{M\lambda(n)} \leq c_j^{-1} \leq \frac{M}{\lambda(n)}, \tag{2.1}$$

Έστω τώρα $m \in \mathbb{N}$ και K μία unconditional σταθερά της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ (π.χ. $K = K_u$

ή $K = M$). Από την Πρόταση (1.1.14) και την ανισότητα (2.1) θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{KM\lambda(n)}\Big\|\sum_{j=1}^{m} f_j\Big\| &= \frac{1}{K}\Big\|\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{M\lambda(n)}f_j\Big\| \\
&= \frac{1}{K}\Big\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=(j-1)n+1}^{jn}\frac{1}{M\lambda(n)}e_i\Big\| \\
&\leq \Big\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=(j-1)n+1}^{jn} c_j^{-1}e_i\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{j=1}^{m} c_j^{-1}f_j\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=(j-1)n+1}^{jn} c_j^{-1}e_i\Big\| \\
&\leq K\Big\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=(j-1)n+1}^{jn}\frac{M}{\lambda(n)}e_i\Big\| \\
&= K\Big\|\sum_{j=1}^{m}\frac{M}{\lambda(n)}f_j\Big\| \\
&= \frac{KM}{\lambda(n)}\Big\|\sum_{j=1}^{n} f_j\Big\|
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας ακόμη μία φορά το Λήμμα (2.1.1) για τις κανονικοποιημένες c.c.b.b.s $(c_j^{-1}f_j)_{j=1}^{\infty}$ και $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ και το m θα πάρουμε την

$$M^{-1}\lambda(m) = M^{-1}\Big\|\sum_{j=1}^{m} e_j\Big\| \leq \Big\|\sum_{j=1}^{m} c_j^{-1}f_j\Big\| \leq M\Big\|\sum_{j=1}^{m} e_j\Big\| \leq M\lambda(m).$$

άρα (χρησιμοποιώντας και την (2.1))

$$\frac{1}{KM\lambda(n)}\Big\|\sum_{j=1}^{m} f_j\Big\| \leq \Big\|\sum_{j=1}^{m} c_j^{-1}f_j\| \leq M\lambda(m)$$

και

$$M^{-1}\lambda(m) \leq \Big\|\sum_{j=1}^{m} c_j^{-1}f_j\| \leq \frac{KM}{\lambda(n)}\Big\|\sum_{j=1}^{n} f_j\Big\|.$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{KM^2\lambda(n)}\Big\|\sum_{j=1}^{m} f_j\Big\| \leq \lambda(m) \leq \frac{KM^2}{\lambda(n)}\Big\|\sum_{j=1}^{n} f_j\Big\|$$

και αφού $\big\|\sum_{j=1}^{m} f_j\big\| = \lambda(nm)$ θα έχουμε

$$\frac{\lambda(nm)}{KM^2\lambda(n)} \leq \lambda(m) \leq \frac{KM^2\lambda(nm)}{\lambda(n)}.$$

Από την οποία έπεται το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 2.1.3. Θέτοντας όπως μπορούμε $K = M$ στην διπλή ανισότητα του Λήμματος (2.1.3) παίρνουμε την ανισότητα

$$\frac{1}{M^3}\lambda(n)\lambda(m) \leq \lambda(nm) \leq M^3\lambda(n)\lambda(m)$$

την οποία και θα χρησιμοποιούμε στην συνέχεια.

Πριν προχωρήσουμε θα χρειαστούμε το επόμενο Λήμμα το οποίο είναι γενικού ενδιαφέροντος.

Λήμμα 2.1.4. *(i) Εστω $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε*

$$s_{n+m} \leq s_n + s_m,\ m, n \in \mathbb{N}.$$

Τότε το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n}$ υπάρχει (πιθανώς να είναι $-\infty$) και

$$\lim_{\to\infty} \frac{s_n}{n} = \inf_n \frac{s_n}{n}.$$

(ii) Εστω $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθια πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε

$$|s_{n+m} - s_n - s_m| \leq 1$$

για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει πραγματική σταθερά c έτσι ώστε

$$|s_n - cn| \leq 1, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Απόδειξη.

(i) Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $m = ln + r$ για κάποιο $0 \geq l$ και $0 \geq r \geq n$. Εφαρμόζοντας επαγωγικά την υπόθεση παίρνουμε

$$s_{ln} \leq ls_n, \qquad s_{ln+r} \leq ls_n + s_r.$$

Έτσι

$$\frac{s_m}{m} = \frac{s_{ln+r}}{ln+r} \leq \frac{l}{ln+r}s_n + \frac{s_r}{ln+r} \leq \frac{s_n}{n} + \frac{\max_{0\leq r<n}(s_r)}{m}\ \forall m \in \mathbb{N}$$

και άρα

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{s_m}{m} \leq \frac{s_n}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Οπότε

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{s_m}{m} \leq \inf_n \frac{s_n}{n}.$$

Επομένως

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n}.$$

(ii) Θέτουμε $t_n = s_n + 1$ και $u_n = s_n - 1,\ n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$t_{n+m} = s_{n+m} + 1 \leq s_n + s_m + 1 + 1 = (s_n + 1) + (s_m + 1)$$

Επίσης από την υπόθεση θα έχουμε $1 - s_{n+m} \leq 1 - s_n + 1 - s_m$ οπότε

$$-u_{n+m} = 1 - s_{n+m} \leq 1 - s_n + 1 - s_m = (-u_n) + (-u_m).$$

Άρα από το (i) τα όρια

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \inf\limits_n \frac{t_n}{n}$ και $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{u_n}{n} = \inf\limits_n -\frac{u_n}{n}$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένα . Συνεπώς

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{n}$$

και έτσι

$$c = \inf_n \frac{t_n}{n} = \sup_n \frac{t_n}{n}$$

το οποίο με την σειρά του συνεπάγεται ότι

$$\frac{u_n}{n} \leq c \leq \frac{t_n}{n}$$

το οποίο άμεσα μας δίνει το ζητούμενο.

□

Παρατήρηση 2.1.4. Αν η $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ικονοποιεί την $|s_{n+n} - s_n - s_m| \leq M$ όπου $M > 0$ τότε είναι άμεσο ότι

$$|s_n - cn| \leq M, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Λήμμα 2.1.5. *Εστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία κανονικοποιημένη τέλεια ομογενής βάση σε έναν χώρο Banach X. Τότε είτε η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0 ή υπάρχει σταθερά $C > 0$ και $1 \leq p < \infty$ έτσι ώστε*

$$C^{-1}|A|^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \sum_{k\in A} e_k \right\| \leq C|A|^{\frac{1}{p}}.$$

$\forall$ πεπερασμένο $A \subset \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα (2.1.4) και την Παρατήρηση (2.1.4) υπάρχει σταθερά $M \geq 1$ ώστε για κάθε $k = 0, 1, 2 \ldots$ παίρνοντας $m = 2^k, n = 2^j$ να ισχυεί

$$\frac{1}{M^3}\lambda(2^k)\lambda(2^j) \leq \lambda(2^{k+j}) \leq M^3\lambda(2^k)\lambda(2^j).$$

Έστω $h(k) = \log_2 \lambda(2^k)$. Από την προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$\log_2\left(\frac{1}{M^3}\lambda(2^k)\lambda(2^j)\right) \leq \log_2 \lambda(2^{k+j}) \leq \log_2\left(M^3\lambda(2^k)\lambda(2^j)\right)$$

άρα

$$-3\log_2 M + h(k) + h(j) \leq h(k+j) \leq 3\log_2 M + h(k) + h(j)$$

επομένως

$$\big|h(j) + h(k) - h(k+j)\big| \leq 3\log_2 M.$$

Από το Λήμμα (2.1.4 (ii)) υπάρχει πραγματική σταθερά c έτσι ώστε $\big|h(k) - ck\big| \leq 3\log_2 M$, $k = 1, 2, \ldots$ και άρα $c = \lim_{k\to\infty} \frac{h(k)}{k}$. Από την Παρατήρηση (2.1.2) έχουμε ότι $K^{-1} \leq \lambda(2^k) \leq 2^k \ \forall\ k = 0, 1, 2\ldots$ και άρα

$$\log_2 K^{-1} \leq \log_2 \lambda(2^k) = h(k) \leq \log_2 2^k = k\log_2 2 = k$$

όπου K η σταθερά της βάσης $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Συνεπώς

$$0 = \lim_{k\to\infty} \frac{\log_2 K^{-1}}{k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{h(k)}{k} = c \leq 1.$$

Αν $c = 0$ θα έχουμε $h(k) \leq 3\log_2 M$ άρα $\lambda(2^k) \leq M^3$ $\forall k \in \mathbb{N}$. επειδή, όπως έχουμε δει, η σταθερά M είναι μία unconditional σταθερά της βάσης $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ (η βάση είναι τέλεια ομογενής), αν $n \in \mathbb{N}$ τότε

$$\lambda(n) = \Big\|\sum_{k=1}^{n} e_k\Big\| \leq M \Big\|\sum_{k=1}^{2^n} e_k\Big\| = M\lambda(2^k) \leq M^4,$$

επομένως, σε αυτή την περίπτωση η $\big(\lambda(n)\big)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη και άρα από το Λήμμα (2.1.2) είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0.
Στην περίπτωση που $0 < c \leq 1$, υπάρχει $p \in [1, \infty]$ τέτοιο ώστε $c = \frac{1}{p}$ και τότε

$$-3\log_2 M \leq h(k) - ck \leq 3\log_2 M$$

οπότε

$$M^{-3} \leq \lambda(2^k)2^{-ck} \leq M^3$$

και άρα

$$M^{-3}2^{\frac{k}{p}} \leq \lambda(2^k) \leq M^3 2^{\frac{k}{p}}, k \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Τώρα για κάθε n με $2^{j-1} \leq n \leq 2^j$ θα έχουμε

$$\lambda(2^{j-1}) = \Big\|\sum_{k=1}^{2^{j-1}} e_k\Big\| \leq M \Big\|\sum_{k=1}^{n} e_k\Big\| = M\lambda(n)$$

και

$$\lambda(n) = \Big\|\sum_{k=1}^{n} e_k\Big\| \leq M \Big\|\sum_{k=1}^{2^j} e_k\Big\| = M\lambda(2^j)$$

επομένως

$$M^{-1}\lambda(2^{j-1}) \leq \lambda(n) \leq M\lambda(2^j). \tag{2.3}$$

Από αυτό και την (2.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} M^{-4} n^{\frac{1}{p}} 2^{-\frac{1}{p}} &\leq M^{-4} 2^{\frac{j}{p}} 2^{-\frac{1}{p}} \\ &= M^{-1} M^{-3} 2^{\frac{j-1}{p}} \\ &\leq M^{-1} \lambda(2^{j-1}) \\ &\leq \lambda(n) \\ &\leq M \lambda(2^j) \\ &\leq M^4 2^{\frac{j}{p}} \\ &= M^4 2^{\frac{j-1}{p}} 2^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M^4 2^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

δηλαδή

$$M^{-4} n^{\frac{1}{p}} 2^{-\frac{1}{p}} \leq \lambda(n) \leq M^4 2^{\frac{1}{p}} n^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

Τέλος, έστω A ένα τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$, θεωρούμε μία αρίθμηση $\{q_1 < q_2 < \cdots < q_{|A|}\}$ του A και θέτουμε

$$c_n = \begin{cases} 1 & ,\text{αν } n = q_k \\ 0 & ,\text{αν } n \neq q_k, \end{cases}$$

θέτοντας $u_n = c_n e_n$, $n \in \mathbb{N}$ θα έχουμε

$$\left\| \sum_{k=1}^{q_{|A|}} u_k \right\| = \left\| \sum_{k \in A} e_k \right\|$$

άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα (2.1.1) για τις κανονικοποιημένες c.c.b.b.s $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ όπου το οποίο θα μας δώσει

$$M^{-1} \lambda\big(|A|\big) \leq \left\| \sum_{k \in A} e_k \right\| \leq M \lambda\big(|A|\big) \tag{2.5}$$

και άρα

$$\begin{aligned} M^{-5} |A|^{\frac{1}{p}} 2^{-\frac{1}{p}} &\leq M^{-1} \lambda\big(|A|\big) \\ &\leq \left\| \sum_{k \in A} e_k \right\| \\ &\leq M \lambda\big(|A|\big) \\ &\leq M^5 2^{\frac{1}{p}} |A|^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Επομένως για $C = C(p) = M^4 2^{\frac{1}{p}}$ θα έχουμε το ζητούμενο. □

Θεώρημα 2.1.1 (Zippin). *Εστω X ένας χώρος Banach και $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία κανονικοποιημένη τέλεια ομογενής βάση του X. Τότε η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη* *είτε με την κανονική βάση του c_0 ή την κανονική βάση του ℓ_p για κάποιο $1 \leq p < +\infty$.*

Απόδειξη. Αν η $\big(\lambda(n)\big)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη ως προς την $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, τότε η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0 Λήμμα (2.1.2). Αν η $\big(\lambda(n)\big)_{n=1}^{\infty}$ είναι μη-φραγμένη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο Λήμμα (2.1.5) για να συμπεράνουμε την την ύπαρξη ενός $1 \leq p < \infty$ έτσι ώστε

$$C^{-1}\big|A\big|^{\frac{1}{p}} \leq \Big\|\sum_{k \in A} e_k\Big\| \leq C\big|A\big|^{\frac{1}{p}}$$

για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο A του $\mathbb{N}$.
Υποθέτουμε ότι $(a_i)_{i=1}^{n}$ είναι μία πεπεραμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p = 1$ και $|a_i|^p \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \ldots, n$. Οπότε κάθε a_i^p μπορεί να γραφτεί στην μορφή $|a_i|^p = \frac{m_i}{m}$ όπου $m_i \in \mathbb{N}$ και m ο κοινός παρανομαστής των a_i και $\sum_{i=1}^{n} m_i = m$.
Εστω E_1 το σύνολο των φυσικών αριθμών που ανήκουν στο διάστημα $[1, m_1]$ και για $i = 1, 2 \ldots, n$, έστω E_i το σύνολο των φυσικών αριθμών που ανήκουν στο διάστημα $[m_1 + m_2 + \ldots + m_{i-1} + 1, m_1 + m_2 + \ldots + m_i]$, τα $E_1, E_2 \ldots, E_n$ είναι ξένα μεταξύ τους διαστήματα του $\mathbb{N}$ έτσι ώστε $\big|E_i\big| = m_i$ για κάθε $i = 1, 2 \ldots, n$. θεωρούμε τώρα την κανονικοποιημένη c.c.b.b.s που ορίζεται από την σχέση

$$u_i = c_i^{-1} \sum_{k \in E_i} e_i, i = 1, 2 \ldots, n$$

όπου $c_i = \big\| \sum_{k \in E_i} e_k \big\|$. Παρατηρούμε ότι $\sum_{k=1}^{i} c_k u_k = \sum_{k=1}^{m_i} e_k$.
Εστω $i \geq 1$, θεωρούμε την ακολουθία πραγματικών αριθμών $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ με

$$b_j = \begin{cases} 1 & , \ j \geq m_{i-1} \\ 0 & , \ 0 < j < m_{i-1} \end{cases}$$

και θεωρούμε $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ με $v_k = b_k e_k$ τότε αυτή είναι μία κανονικοποιημένη c.c.b.b.s. και ισχύει $\|\sum_{k=1}^{m_i} v_k\| = \big\|\sum_{k=1}^{m_i} e_{m_{i-1}+k}\big\|$. Δεδομένου ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι τέλεια ομογενής, από το Λήμμα (2.1.1) υπάρχει σταθερά M με $M \geq 1$ ώστε για τις κανονικοποιημένες c.c.b.b.s $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ και $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ να ισχυεί

$$M^{-1}\Big\|\sum_{k=1}^{m_i} e_k\Big\| \leq \Big\|\sum_{k=1}^{m_i} v_k\Big\| \leq M\Big\|\sum_{k=1}^{m_i} e_k\Big\|$$

και άρα για κάθε $1 \leq i \leq n$

$$M^{-1}\lambda(m_i) \leq c_i \leq M\lambda(m_i).$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα (2.1.5) για $A = [1, m_i]$ όπου $|A| = |[1, m_i]| = m_i$, υπάρχουν σταθέρα $C > 0$ και $1 \le p < \infty$ έτσι ώστε

$$C^{-1}\big|[1, m_i]\big|^{\frac{1}{p}} \le \lambda(m_i) \le C\big|[1, m_i]\big|^{\frac{1}{p}}$$

συνεπώς

$$C^{-1}M^{-1}m_i^{\frac{1}{p}} \le c_i \le CMm_i^{\frac{1}{p}}. \tag{2.6}$$

Δεδομένου ότι η σταθερά M είναι unconditional σταθερά της βάσης $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, θα είναι και unconditional σταθερά της block βασικής ακολουθίας $(c_i u_i)_{i=1}^{\infty}$, μπορούμε χρησιμοποιώντας την (2.6) να εφαρμόσουμε την Πρόταση (1.1.14) για την $(c_i u_i)_{i=1}^{\infty}$ και να πάρουμε

$$\frac{1}{CM^2 m^{\frac{1}{p}}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j\in E_i} e_j\Big)\right\| \le \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right\| \le CM^2\frac{1}{m^{\frac{1}{p}}}\left\|\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j\in E_i} e_j\Big)\right\| \tag{2.7}$$

και επειδή

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j\in E_i} e_j\Big)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{m_1+\ldots+m_n} e_i\right\| = \lambda(m)$$

θα έχουμε

$$\frac{\lambda(m)}{CM^2 m^{\frac{1}{p}}} \le \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right\| \le \frac{CM^2\lambda(m)}{m^{\frac{1}{p}}}$$

και εφαρμόζοντας ακόμη μία φορα το Λήμμα (2.1.5), αυτή τη φορά για το $A = [1, m]$ προκύπτει $C^{-1}m^{\frac{1}{p}} \le \lambda(m) \le Cm^{\frac{1}{p}}$, άρα $C^{-1} \le \frac{\lambda(m)}{m^{\frac{1}{p}}} \le C$, συνεπώς

$$\frac{1}{C^2M^2} \le \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right\| \le C^2M^2. \tag{2.8}$$

Εφαρμόζοντας πάλι το Λήμμα (2.1.1) για τις κανονικοποιημένες c.c.b.b.s $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ και $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ θα έχουμε

$$M^{-1}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right\| \le \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| \le M\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right\|.$$

Επομένως καταλήγουμε στην σχέση

$$\frac{1}{C^2M^3} \le \frac{1}{M}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right\| \le \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| \le M\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right\| \le C^2M^3. \tag{2.9}$$

Αρκεί τώρα να παρατηρήσουμε ότι αν $(a_i)_{i=1}^{n}$ είναι μία τυχούσα πεπερασμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p = 1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $q_i \in \big(a_i - \frac{\varepsilon}{n}, a_i + \frac{\varepsilon}{n}\big)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ έτσι ώστε

$\sum_{i=1}^{n} q_i^p = 1$ και $q_i \in \mathbb{Q}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ που να ικανοποιούν την $\frac{1}{C^2M^3} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} q_i e_i \right\| \leq C^2M^3$, Από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{C^2M^3} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| \leq C^2M^3.$$

Τέλος αφού ο $\left(c_{00}, \|\cdot\|_p\right)$ είναι πυκνός στον ℓ_p, το ζητούμενο θα ισχυεί $\forall (a_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$ με $\left\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p = 1$. Το οποίο μας δίνει το ζητούμενο.

□

Σχόλιο 2.1.3. Πριν προχωρήσουμε στο παρακάτω Λήμμα θα χρειαστούμε έναν ορισμό ο οποίος θα φανεί χρήσιμος στην απόδειξη του Λήμματος (2.1.6).

Ορισμός 2.1.4. Έστω X χώρος Banach, $(x_i)_{i=1}^{n} \subset X, n \in \mathbb{N}$ και το σύνολο

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \in X : (\epsilon_i)_{i=1}^{n} \in \{-1, 1\}^n \Big\}$$

τότε θα λέμε ότι το στοιχείο

$$\underset{\substack{\epsilon_j \in \{-1,1\} \\ 1 \leq j \leq n}}{\text{Average}} \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_j x_i \right) := 2^{-n} \sum_{\substack{\epsilon_j \in \{-1,1\} \\ 1 \leq j \leq n}} \left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_j x_i \right)$$

είναι ο μέσος όρος του συνόλου $\Big\{ \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \in X : (\epsilon_i)_{i=1}^{n} \in \{-1, 1\}^n \Big\}$.

Λήμμα 2.1.6. *Έστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μία unconditional βάση σε έναν χώρο Banach X. Υποθέτουμε ότι $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι μία κανονικοποιημένη block βασική ακολουθία της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε ο υπόχωρος $[u_k]_{k=1}^{\infty}$ να είναι συμπληρωματικός στον X. Τότε υπάρχει προβολή $Q : X \to X$ επί του $[u_k]_{k=1}^{\infty}$ η οποία δίνεται από την σχέση*

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^*(x) u_k,$$

όπου $supp(u_k^*) \subset supp(u_k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$u_k = \sum_{j \in A_k} a_j e_j,$$

όπου $supp(u_k) = A_k$. Από την υπόθεση έχουμε φραγμένη προβολή $P : X \to X$ επί του $[u_k]_{k=1}^{\infty}$. Θεωρούμε επίσης τις προβολές $Q_k : X \to X$, $k \in \mathbb{N}$ επί του $[e_j]_{j \in A_k}$ που δίνονται από την σχέση

$$Q_k x = \sum_{j \in A_k} e_j^*(x) e_j$$

και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τους γραμμικούς τελεστές $Q_kPQ_k : X \to X,\ \ k \in \mathbb{N}$. θα δείξουμε ότι ο Q_kPQ_k είναι φραγμένη προβολή επί του $[u_k]_{k=1}^{\infty}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

- Για να δείξουμε ότι είναι φραγμένος αρκεί να δείξουμε ότι ο $Q_k, k \in \mathbb{N}$ είναι φραγμένος. Αυτό έπεται άμεσως από το γεγονός ότι η βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι unconditional με unconditional σταθερά K και την πρόταση (1.1.13). Συνεπώς θα έχουμε

$$\|Q_kx\| \leq K\Bigg\|\sum_{j=1}^{\infty} e_j^*(x)e_j\Bigg\| = K\|x\|$$

  και άρα

$$\|Q_kPQ_k\| \leq \|Q_k\|\|P\|\|Q_k\| \leq K^2\|P\|.$$

- Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} Q_kPQ_kx &= Q_kP(\sum_{j\in A_k} e_j^*(x)e_j) \\ &= Q_k(\sum_{j\in A_k} e_j^*(x)P(e_j)) \\ &= \sum_{i\in A_k} e_i^*(x)Q_k(P(e_i)) \end{aligned}$$

  άρα αρκεί να δείξουμε ότι $Q_k\left(P(e_i)\right) \in [u_k]_{k=1}^{\infty},\ i \in \mathbb{N}$. Αφού $P(e_i) \in [u_k]_{k=1}^{\infty},\ i \in \mathbb{N}$ θα υπάρχουν $b_j^i \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $P(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} b_j^i u_j,\ \ i \in \mathbb{N}$. Όπου κάνοντας υπολογισμούς εύκολα βλέπουμε ότι

$$Q_k\left(P(e_i)\right) = b_k^i u_k,\ \ \forall i \in \mathbb{N} \tag{2.10}$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι ο τελεστής $Qx = \sum_{k=1}^{\infty} Q_kPQ_kx, x \in X$ είναι φραγμένη προβολή επί του $[u_k]_{k=1}^{\infty}$.
Εστω $m \in \mathbb{N}$ και $x = \sum_{n=1}^{m} e_j^*(x)e_j$. Επιλέγουμε κατάλληλο N έτσι ώστε

$$supp(x) \subset A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_N$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} Qx &= \sum_{k=1}^{N} Q_kPQ_kx \\ &= \underset{\epsilon_k=\pm1}{Average} \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \epsilon_j\epsilon_k Q_jPQ_kx \\ &= \underset{\epsilon_k=\pm1}{Average}\Bigg(\sum_{j=1}^{N} \epsilon_jQ_j\Bigg)P\Bigg(\sum_{k=1}^{N} \epsilon_kQ_k\Bigg)x. \end{aligned}$$

Εν συνεχεία παίρνουμε $n_0 = max\{\bigcup_{i=1}^{N} A_k\} + 1$ και μια τυχούσα ακολουθία προσήμων $(\epsilon_k)_{k=1}^N \in \{-1.1\}^N$ και παρατηρούμε ότι $m \geq n_0$. Από το γεγονός ότι η βάση $(e_n)_{n=1}^\infty$ είναι unconditional θα έχουμε

$$\Big\|\sum_{k=1}^N \epsilon_k Q_k x\Big\| = \Big\|\sum_{k=1}^N \sum_{j\in A_k} \epsilon_k e_j^*(x) e_j\Big\| \leq K\Big\|\sum_{k=1}^m e_k^*(x) e_k\Big\| = K\|x\|.$$

Συνεπώς

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^N \epsilon_j Q_j\Big) P \Big(\sum_{k=1}^N \epsilon_k Q_k\Big)\Big\| \leq \Big\|\Big(\sum_{j=1}^N \epsilon_j Q_j\Big)\Big\| \|P\| \Big\|\Big(\sum_{k=1}^N \epsilon_k Q_k\Big)\Big\| \leq K^2 P.$$

Οπου εύκολα βλέπουμε ότι το πλήθος των στοιχείων του μέσου ορου θα είναι 2^N οπότε

$$\begin{aligned}
\|Qx\| &= \Big\|\underset{\epsilon_k \pm 1}{Average}\Big(\sum_{j=1}^N \epsilon_j Q_j\Big) P \Big(\sum_{k=1}^N \epsilon_k Q_k\Big) x\Big\| \\
&= 2^{-N}\Big\|\sum_{(\epsilon_k)_{k=1}^N \in\{-1,1\}^N} \Big(\sum_{j=1}^N \epsilon_j Q_j\Big) P \Big(\sum_{k=1}^N \epsilon_k Q_k\Big) x\Big\| \\
&\leq 2^{-N} \sum_{(\epsilon_k)_{k=1}^N \in\{-1,1\}^N} \Big\|\Big(\sum_{j=1}^N \epsilon_j Q_j\Big) P \Big(\sum_{k=1}^N \epsilon_k Q_k\Big) x\Big\| \\
&\leq 2^{-N} \sum_{(\epsilon_k)_{k=1}^N \in\{-1,1\}^N} K^2 P\|x\| \\
&= 2^{-N} 2^N K^2 P \|x\| \\
&= K^2 P\|x\|.
\end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι ο Q είναι ένας καλά ορισμένος γραμμικός και φραγμένος τελεστής από τον $\langle (e_i)_{i=1}^\infty\rangle$ επί του $[u_k]_{k=1}^\infty$. Επειδή ο X είναι πλήρωση του $\langle (e_i)_{i=1}^\infty\rangle$, ο Q επεκτείνεται στον X διατηρώντας την νόρμα του.
Τέλος, εφαρμόζοντας την σχέση (2.10) εύκολα παίρνουμε

$$Q_k P Q_k x = \sum_{i\in A_k} e_i^*(x) Q_k(P(e_i)) = \sum_{i\in A_k} e_i^*(x) b_k^i u_k = \Big(\sum_{i\in A_k} e_i^*(x) b_k^i\Big) u_k. \quad (2.11)$$

Οπότε θέτουμε $u_k^*(x) = \sum_{i\in A_k} e_i^*(x) b_k^i$ και το ζητούμενο έπεται άμεσα.

□

Παρατήρηση 2.1.5. Από την σχέση (2.11) του προηγούμενου Λήμματος μπορούμε επίσης να πάρουμε

$$|u_k^*(x)| = \Big|\sum_{i\in A_k} e_i^*(x) b_k^i\Big| = \Big\|\Big(\sum_{i\in A_k} e_i^*(x) b_k^i\Big) u_k\Big\| = \|Q_k P Q_k x\| \leq K^2 \|P\| \|x\|$$

άρα $\|u_k^*\| \leq K^2 \|P\|$.

Θεώρημα 2.1.2. *Εστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μια unconditional βασική ακολουθία σε έναν χώρο Banach X.Υποθέτουμε ότι για κάθε block βασική ακολουθία $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ οποιασδήποτε μετάθεσης της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, ο υπόχωρος $[u_n]_{n=1}^{\infty}$ είναι συμπληρωματικός στον X. Τότε η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση είτε του c_0 ή του ℓ_p για κάποιο $1 \leq p < \infty$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος (2.1.2) θα χρειασθούμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.1.7. *Εστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μια unconditional βάση σε έναν χώρο Banach X. Υποθέτουμε ότι για κάθε block βασική ακολουθία $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ οποιασδήποτε μετάθεσης της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, ο υπόχωρος $[u_n]_{n=1}^{\infty}$ είναι συμπληρωματικός στον X. Αν*

$$u_n = \sum_{k \in A_n} a_k e_k, \qquad v_n = \sum_{k \in B_n} b_k e_k$$

δύο κανονικοποιημένες block βασικές ακολουθίες της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ έτσι ώστε $A_n \cap B_m = \emptyset$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$, τότε

$$(u_n)_{n=1}^{\infty} \sim (v_n)_{n=1}^{\infty}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι η unconditional σταθερά της βάσης ισούται με 1. Πρώτα θα δείξουμε ότι αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών για την οποίο η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ συγκλίνει, τοτε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} s_n a_n v_n$ συγκλίνει επίσης, για κάθε μηδενική $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών.
Για τον σκοπό αυτό παίρνουμε μία μηδενική ακολουθία πραγματικών αριθμών $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ και υποθέτουμε ότι $|s_n| < \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N}$. Τώρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε $w_n = u_n + s_n v_n$ και είναι προφανές ότι η $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι block βασική ακολουθία κάποιας μετάθεσης της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ αρα είναι και η ίδια βασική ακολουθία και ισχύει

$$|\|w_n\| - 1| \leq \|w_n - u_n\| = \|s_n v_n\| = |s_n| < \frac{1}{2}.$$

Οπότε

$$\frac{1}{2} \leq \|w_n\| \leq \frac{3}{2}$$

και άρα είναι seminormalized και παρατηρούμε ότι $supp(w_n) = A_n \cup B_n$. Από την υπόθεση ο $[w_n]_{n=1}^{\infty}$ (σαν block βασική ακολουθία κάποιας μετάθεσης της $(e_n)_{n=1}^{\infty}$) είναι συμληρωματικός στον X, οπότε από το προηγούμενο Λήμμα υπάρχει προβολή $Q : X \to X$ επί του $[w_n]_{n=1}^{\infty}$ που δίνεται απο την σχέση

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n^*(x) w_n, \quad supp(w_n^*) \subseteq A_n \cup B_n.$$

Από την Παρατήρηση (2.1.5) έχουμε ότι $\|w_n^*\| \leq \frac{3}{2}\|P\|, \forall n \in \mathbb{N}$.
Παρατηρούμε ότι

$$Q(\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Q(u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n^*(u_n) w_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n^*(u_n)(u_n + s_n v_n).$$

Όμως η βασική ακολουθία $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι unconditional, συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n^*(u_n) u_n \leq \frac{3}{2}\|P\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n,$$

άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n^*(u_n) s_n v_n$ συγκλίνει. Από αυτό συνεπάγεται η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n v_n$ παρατηρώντας ότι $w_n^*(u_n) \to 1$ αφού

$$w_n^*(u_n) = 1 - s_n w_n^*(v_n)$$

και

$$0 \leq |s_n w_n^*(v_n)| \leq |s_n| \|w_n^*\| \leq \|P\| |s_n| \to 0$$

.

Τώρα, αν $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών για την οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ συγκλίνει, μπορούμε να βρούμε μια βαθμωτή ακολουθία $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ που να πηγαίνει στο ∞ τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_n u_n$ να συγκλίνει. Επιλέγοντας $s_n = \frac{1}{t_n}, n \in \mathbb{N}$ η $(\frac{1}{t_n})_{n=1}^{\infty}$ τείνει στο 0 οπότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n t_n a_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$$

συγκλίνει. Τώρα αντιστρέφοντας τους ρόλους των $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ παίρνουμε ότι αυτές οι δύο είναι ισοδύναμες. □

Συνεχίζουμε με την απόδειξη του Θεωρήματος(2.1.2).

Απόδειξη. Εστω $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ και $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ δύο κανονικοποιημένες block βασικές ακολουθίες σταθερών συντελεστών των $(e_{2n})_{n=1}^{\infty}$ και$(e_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ αντίστοιχα.
Τότε θέτοντας $A_n = supp(u_n)$ και $B_n = supp(v_n)$ είναι προφανές ότι $A_n \cap B_m = \emptyset \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα παίρνουμε ότι

$$(u_n)_{n=1}^{\infty} \sim (e_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$$

και

$$(v_n)_{n=1}^{\infty} \sim (e_{2n})_{n=1}^{\infty}$$

Όμως οι $(e_{2n})_{n=1}^{\infty}, \quad (e_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του προηγούμενου Λήμματος, οπότε,

$$(e_{2n})_{n=1}^{\infty} \sim (e_{2n-1})_{n=1}^{\infty}.$$

Κατά συνέπεια θα έχουμε

$$(u_n)_{n=1}^{\infty} \sim (e_{2n})_{n=1}^{\infty}$$

και

$$(v_n)_{n=1}^{\infty} \sim (e_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$$

και έτσι οι $(e_{2n})_{n=1}^{\infty}$ και $(e_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$ είναι τέλειες ομογενείς βάσεις και ισοδύναμες μεταξύ τους. Η απόδειξη ολοκληρώνεται εφαρμόζοντας το θεώρημα του Zippin, Θεώρημα (2.1.1). Πράγματι, είτε η $(e_{2n})_{n=1}^{\infty}$ (και άρα και η $(e_{2n-1})_{n=1}^{\infty}$) θα είναι ισοδύναμη με την βάση του c_0 ή θα είναι ισοδύναμη με την βάση του ℓ_p για κάποιο $1 \leq p < \infty$. Κατά συνέπεια και (ολόκληρη) η βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ θα έχει την ίδια ιδιότητα. □

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω X ένας χώρος Banach με unconditional βάση. Αν κάθε κλειστός υπόχωρος του είναι συμπληρωματικός τότε είναι ισομορφικός με τον ℓ_2.*

Απόδειξη. Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μια unconditional βάση του X. Υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι είναι κανονικοποιημένη. Αν $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μία block βάσική ακολουθία μίας μετάθεσης της $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, τότε, από την υπόθεση ο υπόχωρος $[v_n]_{n=1}^{\infty}$ θα είναι συμπληρωματικός. Συνεπώς, από το θεώρημα (2.1.2) η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ θα είναι ισοδύναμη είτε με την κανονική βάση του c_0 ή με την κανονική βάση του $\ell_p, 1 \leq p < \infty$.

(i) Υποθέτουμε πρώτα ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_p για $1 < p < \infty$, $p \neq 2$, τότε ο X είναι ισόμορφος με τον ℓ_p. Από Πρόταση (1.1.7) ο ℓ_p είναι ισόμορφος με τον $\ell_p(\ell_2^n)$, επομένως ο X θα είναι ισόμορφος με τον $\ell_p(\ell_2^n)$. Επομένως ο X θα περιέχει μία (αναγκαία) unconditional βάση $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ ισοδύναμη με την κανονική βάση του $\ell_p(\ell_2^n)$. Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα στην αρχή της απόδειξης αυτη τη φορά για την $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ προκύπτει ότι η $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ θα είναι ισοδύναμη είτε με την κανονική βάση του c_0 ή με την κανονική βάση του $\ell_q, 1 \leq q < \infty$. Όμως ο $\ell_p(\ell_2^n)$ μπορεί να είναι ισόμορφος μόνο με τον ℓ_p. Συνεπώς, η κανονική βάση του ℓ_p είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του $\ell_p(\ell_2^n)$ το οποίο είναι άτοπο από την Πρόταση (1.1.15).

Ετσι μας μένουν 3 εκδοχές, η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισοδύναμη είτε με την κανονική βάση του ℓ_1 ή του c_0 ή του ℓ_2. Αρκεί λοιπόν να απορρίψουμε τις πρώτες δύο. Αυτό θα το κάνουμε δείχνοντας ότι οι c_0 και ℓ_1 έχουν μη-συμπληρωματικούς κλειστούς υπόχωρους (είναι σαφές οτι απο το Λήμμα (1.1.2) οι ισομορφισμοί στέλνουν τους συμπληρωματικού σε συμπληρωματικούς και αντιστροφα).

(ii) Για την περίπτωση του ℓ_1, θεωρούμε διαχωρίσιμο χώρο Banach X ο οποίος δεν είναι ισομορφικός με τον ℓ_1. Τότε απο την Πρόταση (1.1.10) υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $S : \ell_1 \to X$ επί του X, άρα ο υπόχωρος $\ker S$ του ℓ_1 είναι κλειστός. Προς απαγωγή σε άτοπο, υποθέτουμε ότι ο υπόχωρος $\ker S$ του ℓ_1 είναι συμπληρωματικός στον ℓ_1. Αφού ο $\ker S$ είναι συμπληρωματικός στον ℓ_1 υπάρχει κλειστός υπόχωρος M του ℓ_1 έτσι ώστε $\ell_1 = \ker S \oplus M$, συνεπώς ο M είναι συμπληρωματικός στον ℓ_1 και

$$X = \ell_1/\ker S \approx M.$$

Από το θεώρημα (1.1.5) ο X είναι ισομορφικός με τον ℓ_1 το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

(iii) Θεωρούμε τώρα την περίπτωση του c_0. Ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο ℓ_1^n εμφυτεύεται ισομετρικά στον $\ell_\infty^{2^n}$.

Απόδειξη ισχυρισμού. θεωρούμε $(a_i)_{i=1}^n$ στον ℓ_1^n και την ποσότητα $max|\sum_{k=1}^n e_k a_k|$ όπου το μέγιστον παίρνεται πάνω απο τις 2^n πιθανές προσήμων $(\varepsilon)_{k=1}^n$. Τότε για $\varepsilon_k^0 = sign(a_k)$, $k = 1, 2, ..., n$ έχουμε ότι

$$\|(a_i)_{i=1}^n\| = \sum_{k=1}^n |a_k| = |\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^0 a_k| \leq max|\sum_{k=1}^n e_k a_k|$$

και για κάθε $k = 1, 2, .., n$ έχουμε $\varepsilon_k a_k \leq |a_k|$ αρα

$$|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| = \|(a_i)_{i=1}^n\|$$

αρα έχουμε

$$\|(a_i)_{i=1}^n\| = \max_{\varepsilon=\pm 1} |\sum_{k=1}^n e_k a_k|. \tag{2.12}$$

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $T : \ell_1^n \to \ell_\infty^{2^n}$ με $(a_i)_{i=1}^n \to (\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i)_{(\varepsilon_i)_{i=1}^n \in \{-1,1\}^n}$ είναι ευκολο να δει κανείς ότι ο T είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής, επίσης απο την σχέση (2.12) έχουμε

$$\|T((a_i)_{i=1}^n)\|_{\ell_\infty} = \max_{\varepsilon_k=\pm 1} |\sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k| = \|(a_i)_{i=1}^n\|$$

αρα ο T είναι ισομετρία και έτσι ο ℓ_1^n εμφυτεύεται στον $\ell_\infty^{2^n}$.
Έπεται από την Πρόταση (1.1.8) ότι ο $c_0(\ell_1^n)$ εμφυτεύεται στον $c_0\left(\ell_\infty^{2^n}\right)$ ο οποίος από την Πρόταση (1.1.9) είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον c_0. Ο υπόχωρος $c_0(\ell_1^n)$ του c_0 δεν μπορεί να είναι συμπληρωματικός στον c_0, διότι τότε θα ήταν ισόμορφος με τον c_0. Αυτό όμως <u>δεν</u> ισχύει διότι

η κανονική βάση του $c_0(\ell_1^n)$ δεν είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση του c_0. [Ως γνωστόν οι χώροι c_0 και ℓ_1 (αλλά και ο ℓ_2) έχουν ουσιαστικά μοναδική unconditional βάση, από ένα αποτέλεσμα των Lindenstrauss και Pelczynski, (θεωρ. 8.3.3 και θεωρ 8.3.5 του [A-K])]

$\square$

Κεφάλαιο 3

Το Πρόβλημα του Συμπληρωματικού Υποχώρου

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε την γενική περίπτωση του προβλήματος του συμπληρωματικού υποχώρου.
"Ενας χώρος Banach είναι ισομορφικός με ένα χώρος Hilbert αν και μόνο αν κάθε κλειστός υπόχωρός του είναι συμπληρωματικός σε αυτόν."
Το αποτέλεσμα αυτό ήταν εικασία πολλών ερευνητών μεταξύ των οποίων και ο Grothendieck και απαντήθηκε από τους Lindenstrauss και Tzafriri το 1971 sto [L-T].
Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος βασίζεται στα ακόλουθα τρία αποτελέσματα.

Θεώρημα *A* Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n-διάστατος υπόχωρος E του X ώστε η Banach-Mazur απόσταση $d(E, \ell_2^n) \leq 1 + \epsilon$.
Το αποτέλεσμα αυτό (συνέπεια του θεωρήματος Dvoretzky, πρβ. Θεώρημα (1.3.2) του Κεφαλαίου I) σε συγχρονη γλώσσα μας λέει ότι ένας χώρος *Hilbert* είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach.

Θεώρημα *B* Έστω X ένας χώρος Banach ώστε κάθε κλειστός υπόχωρος του να είναι συμπληρωματικός στον X. Τότε υπάρχει $\lambda \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του E υπάρχει προβολή $P : X \to E$ με $\|P\| \leq \lambda$. Δηλαδή ο E είναι λ-συμπληρωματικός στον X.

Θεώρημα *Γ* Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach με την ιδιότητα ότι υπάρχει $\lambda \geq 1$ ώστε για κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο E του X υπάρχει προβολή $P : X \to E$ με $\|P\| \leq \lambda$. Τότε ο X είναι crudely πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σ΄έναν χώρο Hilbert.

Υπενθυμίζουμε ότι ο (απειροδιάστατος χώρος Banach) X είναι crudely πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε έναν απειροδιάστατο χώρο Banach Y αν υπάρχει σταθερά $\lambda > 1$ έτσι ώστε να ισχυεί η εξής ιδιότητα: Για κάθε υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης E του X υπάρχει πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος F του X με $dimF = dimE$ και ισομορφισμός $T : E \to F$ για τον οποίο ισχυεί $\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda$.

Διατυπώνουμε τώρα το αποτέλεσμα των Lindenstrauss και Tzafriri.

Θεώρημα *Δ* Έστω X χώρος Banach. Αν κάθε κλειστός υπόχωρος του X είναι συμπληρωματικός στον X, τότε ο X είναι ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert.

Σε αυτή την εργασία θα δώσουμε δύο αποδείξεις του Θεωρήματος Δ (και οι δύο κάνουν χρήση στον ένα ή στον άλλο βαθμό του θεωρήματος Dvoretzky). Η πρώτη απόδειξη είναι ουσιαστικά η απόξειξη των Lindenstrauss και Tzafriri και προέρχεται από το άρθρο τους [L-T]. Η δεύτερη ανήκει σους Kadets και Mitjagin όπως περιγράφεται στο βιβλίο [A-K] και κάνει χρήση μίας ισχυροποίησης του Θεωρήματος Dvoretzky και της αποκαλούμενης ''συγκέντρωσης μέτρου''.
Ξεκινούμε με την απόδειξη των Lindenstrauss και Tzafriri.

3.1 Η απόδειξη των Lindenstrauss και Tzafriri

Για το Θεώρημα Β είναι απαράιτητο το επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 3.1.1. *Έστω X ένας χώρος Banach. Αν E είναι ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X και $\epsilon > 0$ τότε υπάρχει πεπερασμένης συνδιάστασης υπόχωρος K του X έτσι ώστε να ισχυεί*

$$\|e\|(1-\epsilon) \leq \|e + x\|, \quad \forall e \in E,\ x \in K.$$

Απόδειξη. Έστω $\epsilon \in (0, 1)$. θεωρούμε $(y_i)_{i=1}^m$ ένα $\frac{\epsilon}{2}$-δίκτυο στην $\mathcal{S}_E$ και για κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ διαλέγουμε $y_i^* \in \mathcal{S}_{X^*}$ έτσι ώστε $y_i^*(y_i) = 1$. Αφού ο X είναι απειροδιάστατος ο υπόχωρος $K = \cap_{i=1}^m \ker y_i^*$ είναι μη κενός. Παρατηρούμε επίσης ότι ο K είναι πεπερασμένης συνδιάστασης και ότι $y_i^*(x) = 0,\ \forall x \in K,\ i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Έστω τώρα $e \in \mathcal{S}_E$ και $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ τέτοιο ώστε $\|e - y_i\| \leq \frac{\epsilon}{2}$, τότε αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in K$ θα έχουμε

$$\|e+\lambda x\| = \|(e-y_i)+(y_i+\lambda x)\| \geq \|y_i+\lambda x\| - \frac{\epsilon}{2} \geq y_i^*\left(y_i + \lambda x\right) - \frac{\epsilon}{2} = 1 - -\frac{\epsilon}{2} \geq 1-\epsilon.$$

Για κάθε $e \in \mathcal{S}_E,\ x \in K,\ \lambda \in \mathbb{R}$. Στην περίπτωση που $e \in E$ θέτουμε $\lambda = \frac{1}{\|e\|}$ και τότε

$$\|e + x\| = \|e + \|e\|\lambda x\| = \|e\|\|\frac{e}{\|e\|} + \lambda x\| \geq \|e\|(1-\epsilon),\ \forall x \in K,\ e \in E.$$

$\square$

Θεώρημα 3.1.1 (B). *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach τέτοιος ώστε κάθε κλειστός υπόχωρος του να είναι συμπληρωματικός. Τότε υπάρχει $\lambda \geq 1$ έτσι ώστε κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X να είναι λ-συμπληρωματικός στον X.*

Απόδειξη. Έστω E ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του X. Θεωρούμε το σύνολο $A_E = \{\|P\| : \; P : X \to E$ προβολή$\}$ τότε ως γνωστόν το A_E είναι μη κενό και μάλιστα από την συμπάγεια της B_E εύκολα παίρνουμε ότι υπάρχει προβολή $P : X \to X$ επί του E. τέτοια ώστε $\|P_E\| = \inf A_E$. Θέτουμε $\lambda(E) = \|P_E\|$ και υποθέτουμε ότι $\sup\{\lambda(E) : \; dimE < \infty\} = \infty$. Αρχικά ισχυριζόμαστε ότι για κάθε πεπερασμένης συνδιάστασης υπόχωρο X_0 του X ισχυεί

$$\sup\{\lambda(E) : \; dimE < \infty, \; E \subset X_0\} = \infty.$$

Πράγματι, έστω ότι $\sup\{\lambda(E) : \; dimE < \infty, \; E \subset X_0\} = M < \infty$ και έστω k η συνδιάσταση του X_0. Τότε αν E είναι ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X θεωρούμε τον υπόχωρο $E_0 = E \cap X_0$ και την προβολή $P_0 : X \to X$ επί του E_0 με $\|P_0\| \leq M$. Στη συνέχεια θεωρούμε τον υπόχωρο $F = \{x \in E : P_0 x = 0\}$ του E και παρατηρούμε ότι $dimF \leq k$. Από το Πρόταση (1.1.6) υπάρχει προβολή $P_1 : X \to F$ με $\|P_1\| \leq k$. Τώρα θεωρούμε το φραγμένο γραμμικό τελεστή $P = P_0 + P_1 - P_1 P_0$ και παρατητούμε ότι είναι προβολή του X επί του E. Συνεπώς θα έχουμε

$$\lambda(E) \leq \|P\| \leq M + k + kM \leq (M+1)(k+1).$$

Όμως έχουμε υποθέσει ότι $\sup\{\lambda(E) : \; dimE < \infty\} = \infty$, επομένως έχουμε άτοπο.

Εν συνεχεία κατασκευάζουμε με επαγωγή μία ακολουθία από πεπερασμένους διάστασης υπόχωρους $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ και μία ακολουθία από πεπερασμένης συνδιάστασης υπόχωρους $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ ως εξής.

Αρχικά θέτουμε $X = X_0$ και επιλέγουμε πεπερασμένη διάστασης E_1 υπόχωρο του X έτσι ώστε $\lambda(E_1) \geq 1$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα (3.1.1) για $\epsilon = \frac{1}{2}$ παίρνουμε πεπερασμένης συνδιάστασης υπόχωρο X_1 του X έτσι ώστε

$$\|e_1\| \frac{1}{2} \leq \|e_1 + x_1\|, \quad \forall e_1 \in E_1, \; x_1 \in X_1.$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο E_2 του X_1 τέτοιο ώστε $\lambda(E_2) \geq 2$ και εφαρμόζοντας το Λήμμα (3.1.1) για τον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο $E_1 \oplus E_2$ του X παίρνουμε πεπερασμένης συνδιάστασης υπόχωρο Y_1 του X έτσι ώστε

$$\|e_1 + e_2\| \frac{1}{2} \leq \|e_1 + e_2 + y_1\|, \quad \forall e_1 \in E_1, \; e_2 \in E_2, \; y_1 \in Y_1.$$

Θέτοντας $X_2 = Y_1 \cap X_1$ βλέπουμε ότι ο X_2 είναι απειροδιάστατος και πεπερασμένης συνδιάστασης υπόχωρος του X τέτοιος ώστε $X_2 \subset X_1$ και τέτοιος ώστε να ισχυεί

$$\|e_1 + e_2\|\frac{1}{2} \leq \|e_1 + e_2 + x_2\|, \quad \forall e_1 \in E_1,\ e_2 \in E_2,\ x_2 \in X_2.$$

Συνεχίζοντας έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κατασκέυαζουμε E_n και X_n με τις ακόλουθες ιδιότητες

- $\lambda\,(E_n) > n, \ \ n \in \mathbb{N}.$
- $\|e_1 + e_2 + \cdots e_n + x_n\| \geq \frac{1}{2}\|e_1 + e_2 + \cdots e_n\|, \quad e_1 \in E_1,\ e_2 \in E_2, \cdots, e_n \in E_n,\ x_n \in X_n.$
- $E_{n+1} \subset X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$
- $X_{n+1} \subset X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$

Εν συνεχεία θεωρούμε $m, N \in \mathbb{N}$ με $1 \leq m \leq N$ και θέτουμε $Y = [\cup_{n=1}^{\infty} E_n]$. Αν $e_j \in E_j$ για κάθε $j = 1, 2, \cdots, N$, θα έχουμε ότι

$$\|e_1 + \cdots + e_m\| \leq 2\|e_1 + e_2 + \cdots + e_N\|$$

και άρα

$$\|e_m\| \leq 4\|e_1 + e_2 + \cdots + e_N\|,$$

Από το οποίο συμπεραίνουμε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ο E_m είναι 4-συμπληρωματικός στον Y. Από την υπόθεση έχουμε ότι ο Y είναι συμπληρωματικός στον X, άρα υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε κάθε $m \in \mathbb{N}$ ο E_m είναι $4C$-συμπληρωματικός στον X, και έτσι $\sup\{\lambda\,(E) :\ dimE < \infty\} < \infty$ το οποίο είναι άτοπο.

□

Θεώρημα 3.1.2 (Γ). *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach με την ιδιότητα ότι υπάρχει $\lambda \geq 1$ ώστε για κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο E του X υπάρχει προβολή $P : X \to E$ με $\|P\| \leq \lambda$. Τότε ο X είναι crudely πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σ΄έναν χώρο Hilbert.*

Απόδειξη. Έστω E n-διάστατος υπόχωρος του X, θέτουμε $d = d\,(E, \ell_2^n)$. Από την υπόθεση υπάρχει προβολή $P : X \to X$ επί του E με $\|P\| \leq \lambda$. Το συμπλήρωμα $(I-P)X$ του E θα είναι απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του X και άρα απειροδιάστατος χώρος Banach. Συνεπώς, για κάθε $\epsilon > 0$, από το θεώρημα του Dvoretzky (Θεώρημα Α) υπάρχει n-διάστατος υπόχωρος F_ϵ του $(I-P)X$ τέτοιος ώστε $d\,(F_\epsilon, \ell_2^n) < 1 + \epsilon$. Επιλέγουμε $\epsilon = 1$ και παίρνουμε $F = F_1$ με $d\,(F, \ell_2^n) < 2$ (η τελική σταθερά βελτιώνεται αν πάρουμε μικρότερο ϵ αλλά εδώ δεν μας ενδιαφέρει). Από την ιδιότητες της απόστασης Banach-Mazur παίρνουμε ότι

$$d(F,E) \leq d(F,\ell_2^n)\, d(E,\ell_2^n) = d \cdot d(F,\ell_2^n) \leq 2d.$$

Με ένα επιχείρημα συμπάγειας αποδεικνύεται ότι υπάρχει ισομορφισμός $T : E \to F$ τέτοιος ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| = d(F,E)$, δηλαδή $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 2d$. Από την παρατήρηση (1.1.12) μπορούμε να πάρουμε κατάλληλο πολλαπλάσιο του T έτσι ώστε $\|T\| \leq 1$ και $\|T^{-1}\| \leq 2d$, επομένως έχουμε την σχέση

$$\|x\|/2d \leq \|Tx\| \leq \|x\|.$$

Εν συνεχεία θεωρούμε τον υπόχωρο $G := \{x + \mu Tx : x \in E\}$ του X όπου $\mu = 2^6\lambda^2$. Παρατηρούμε ότι ο G είναι πεπερασμένης διάστασης. Από την υπόθεση παίρνουμε προβολή $S : X \to X$ επί του G τέτοια ώστε $\|S\| \leq \lambda$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του $g \in G$ μπορεί να γραφτεί κατά μοναδικό τρόπο ως $g = x + \mu Tx, \ \ x \in E$ και ορίζουμε γραμμικό τελεστή $V : E \to E$ από την σχέση

$$STx = Vx + \mu TVx. \quad x \in E.$$

Από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$Vx = PSTx, \quad x \in E.$$

Συνεπώς

$$\|Vx\| \leq \lambda^2 \|Tx\|.$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$Sx = S(x + \mu Tx) - \mu STx = x + \mu Tx - \mu(Vx + \mu TVx)$$

όπου

$$(x - \mu Vx) \in E \ \text{ και } \ (Tx - \mu TVx) \in F \subset (I-P)\,X.$$

Συνεπώς

$$(I-P)\,Sx = \mu(Vx + \mu TVx), \ \ x \in E.$$

Συνδιάζοντας τα παραπάνω, για κάθε $x \in E$ παίρνουμε

$$\|\,(I-P)\,Sx\| = \mu\|T\,(x - \mu Vx)\,\| \geq \frac{\mu}{2d}\|x - \mu Vx\| \geq \frac{\mu}{2d}(\|x\| - \mu\|Vx\|) \geq \frac{\mu}{2d}(\|x\| - \mu\lambda^2\|Tx\|).$$

Στη συνέχεια πάλι με ένα επιχείρημα συμπάγειας παίρνουμε ισομορφισμό $U : F \to \ell_2^n$ με $\|U\|\|U^{-1}\| = d(F,\ell_2^n) < 2$ και θεωρούμε από την παρατήρηση (1.1.12) ότι $\|U^{-1}\| < 2$ και $\|U\| \leq 1$. Οπότε

$$\frac{\|y\|}{2} \leq \|Uy\| \leq \|y\|, \quad y \in F.$$

Έστω τώρα $\tilde{T}$ ο τελεστής από τον τον E στον $2n$-διάστατο χώρο Hilbert $\ell_2^n \oplus \ell_2^n$ που ορίζεται από την σχέση

$$\tilde{T}x = \left(\frac{1}{2}UTx, \frac{1}{4\lambda^2}U(I-P)Sx\right).$$

Τότε για κάθε $x \in E$ θα έχουμε

$$\|\tilde{T}x\| \leq \|U\|\|T\|\|x\|\frac{1}{2} + \|I-P\|\|S\|\|x\|\frac{1}{4\lambda^2} \leq \|x\|\frac{1}{2} + (\lambda+1)\lambda\|x\|\frac{1}{4\lambda^2} \leq \|x\|.$$

Από την άλλη, για κάθε $x \in E$, έχουμε

$$\begin{aligned}\|\tilde{T}x\| &\geq \max\left\{\frac{1}{2}\|UTx\|, \frac{1}{4\lambda^2}\|U(I-P)Sx\|\right\}\\ &\geq \max\left\{\frac{1}{4}\|Tx\|, \frac{1}{8\lambda^2}\|(I-P)Sx\|\right\}\\ &\geq \max\left\{\frac{1}{4}\|Tx\|, \frac{\mu}{16d\lambda^2}(\|x\| - \mu\lambda^2\|Tx\|)\right\}.\end{aligned}$$

Τώρα διακρίνουμε 2 περιπτώσεις

(a) Αν $\lambda^4 2^7\|Tx\| \geq \|x\|$, τότε

$$\|\tilde{T}x\| \geq \frac{1}{4}\|Tx\| \geq \frac{1}{\lambda^4 2^7}\|x\|.$$

(b) Αν $\lambda^4 2^7\|Tx\| \leq \|x\|$, τότε αφού $\mu = 2^6\lambda^2$ θα έχουμε

$$\|\tilde{T}x\| \geq \frac{\mu}{16d\lambda^2}(\|x\| - 2^6\lambda^4\|Tx\|) \geq \frac{\mu}{32d\lambda^2}\|x\| = \frac{2}{d}\|x\|.$$

Έτσι σε κάθε περίπτωση

$$\|\tilde{T}x\| \geq \|x\| \min\left\{\frac{2}{d}, \frac{1}{\lambda^4 2^7}\right\}.$$

Τώρα εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι ο $\tilde{T}$ είναι ισομορφισμός επί του ℓ_2^n και κατά συνέπεια θα έχουμε

$$d = d(E, \ell_2^n) \leq \|\tilde{T}\|\|\tilde{T}^{-1}\| = 1/\min\left\{\frac{2}{d}, \frac{1}{\lambda^4 2^7}\right\}.$$

Επομένως $d(E, \ell_2^n) \leq \lambda^4 2^7$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

$\square$

Θεώρημα 3.1.3 (Δ). *[Lindenstrauss και Tzafriri] Έστω X χώρος Banach. Αν κάθε κλειστός υπόχωρος του X είναι συμπληρωματικός στον X, τότε ο X είναι ισόμορφος με ένα χώρο Hilbert.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα (3.1.1) υπάρχει $\lambda \geq 1$ ώστε κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X είναι λ-συμπληρωματικός στον X και από το Θεώρημα (3.1.2) ο X είναι crudely πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σ΄ένα χώρο Hilbert. Έτσι αρκεί να αποδείξουμε ότι αν ένας (απειροδιάστατος) χώρος Banach X είναι crudely πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σ΄ένα χώρο Hilbert, τότε είναι ισόμορφος μέ ένα χώρο Hilbert. Υποθέτουμε για απλότητα ότι ο X είναι διαχωρίσιμος. Έστω $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ μία αύξουσα ακολουθία πεπερασμένης διάστασης υποχώρων του Y τέτοια ώστε $dimE_n = n$ και ο $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ να είναι πυκνός στον X, από την υπόθεση και την παρατήρηση (1.1.12) υπάρχουν $\lambda > 0$ και τελεστές $T_n : E_n \to \ell_2^n$ τέτοιοι ώστε $\|T_n\| \leq 1$ και $\|T_n^{-1}\| \leq \lambda$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τις απεικονίσεις $S_n : E_n \times E_n \to \mathbb{R}$ που ορίζονται από την σχέση

$$S_n(x, y) = \langle T_n x, T_n y \rangle .$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση S_n ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον αντίσοιχο χώρο E_n τέτοιο ώστε

$$S_n(x, x) = \langle T_n x, T_n x \rangle = \|T_n x\|^2 \leq \|x\|^2 = \lambda^2 \frac{\|x\|^2}{\lambda^2} \leq \lambda^2 \|T_n\|^2 = \lambda^2 S_n(x, x)$$

δηλαδή

$$S_n(x, x) \leq \|x\|^2 \leq \lambda^2 S_n(x, x), \quad x \in E_n.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι υπάρχει υπακολουθία $k_n : \ n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $S_{k_n}(x, y)$ να συγκλίνει για κάθε $x, y \in E$ και ορίζουμε

$$S(x, y) := \lim_{k_n \to \infty} S_{k_n}(x, y).$$

Έιναι άμεσο να ελεγξουμε ότι η απεικόνιση $S : E \times E \to \mathbb{R}$ είναι εσωτερικό γινόμενο και ότι ικανοποιεί την

$$S(x, x) \leq \|x\|^2 \leq \lambda^2 S_(x, x).$$

Εν συνεχεία επεκτείνουμε το S σε εσωτερικό γινόμενο $\tilde{S} : X \times X \to \mathbb{R}$ και επάληθεύουμε ότι

$$\tilde{S}(x, x) \leq \|x\|^2 \leq \lambda^2 \tilde{S}(x, x).$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο. $\square$

3.2 Το ισχυροποιημένο Θεώρημα Dvoretzky

Όπως φαίνεται από την απόδειξη του θεωρήματος (Δ) μας είναι αρκετό να δώσουμε μία εναλλακτική απόδειξη του ακόλουθου Θεωρήματος.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach και έστω ότι υπάρχει $\lambda \geq 1$ έτσι ώστε για κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του X υπάρχει προβολή $P : X \to E$ με $\|P\| \leq \lambda$. Τότε ο X είναι crudely πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε χώρο Hilbert και άρα ισόμορφος με ένα χώρο Hilbert.*

Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε την ακόλουθη ισχυροποίηση του Θεωρήματος Dvoretzky.

Θεώρημα E. Εστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Αν E είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του X. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|_Y$ στον $Y = E \oplus \ell_2^m$ έτσι ώστε ο Y να είναι ισομέτρικός με κάποιο υπόχωρο ενός υπεργινομένου του X και:

$$\|(x,0)\|_Y = \|x\|, \qquad x \in E \tag{3.1}$$

$$\|(0,\xi)\|_Y = \|\xi\|, \qquad \xi \in \ell_2^m \tag{3.2}$$

$$\|(x,\xi)\|_Y = \|(x,-\xi)\|_Y, \qquad x \in E,\ \xi \in \ell_2^m. \tag{3.3}$$

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος θα χρειαστεί να αναπτύξουμε κάποια θεωρία γύρω από τα λεγόμενα υπεργινόμενα και το φαινόμενο της συγκέντρωσης μέτρου.

3.2.1 Υπεργινόμενα και Συγκέντρωση Μέτρου

Έστω X ένας χώρος Banach και $\mathcal{U}$ ένα μη-κύριο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$. Θεωρούμε τον χώρο $\ell_\infty(X)$ και παρατηρούμε ότι για κάθε $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(X)$ η ποσότητα $\lim_{\mathcal{U}} \|x_n\|$ είναι καλά ορισμένη διότι η ακολουθία $(\|x_n\|)_{n=1}^\infty$ είναι φραγμένη και άρα συγκλίνει μέσω του $\mathcal{U}$. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε σε αυτόν μία ημινόρμα από την σχέση

$$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\|.$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{\mathcal{U}} = 0$ αν και μόνο αν η $(x_n)_{n=1}^\infty$ ανήκει στον υπόχωρο

$$c_{0\mathcal{U}}(X) = \left\{(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(X) : \lim_{\mathcal{U}} \|x_n\| = 0\right\}$$

του $\ell_\infty(X)$. Τέλος εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ επάγει νόρμα πηλίκο στον χώρο πηλίκο

$$X_{\mathcal{U}} = \frac{\ell_\infty(X)}{c_{0\mathcal{U}}(X)}.$$

Ο χώρος αυτός λέγεται Υπεργινόμενο του X.

Λήμμα 3.2.1. *Έστω X ένας χώρος Banach και E ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος με νόρμα. Παίρνουμε $(x_i)_{i=1}^N$ ένα ϵ-δίκτυο στην $\mathcal{S}_E$, όπου*

$0 < \epsilon < 1$. Αν $T : E \to X$ είναι μία γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $1-\epsilon \leq \|Tx_i\| \leq 1+\epsilon$ $\forall i$ με $1 \leq i \leq N$. Τότε για κάθε $x \in E$ θα ισχύει

$$\frac{1-3\epsilon}{1-\epsilon}\|x\| \leq \|Tx\| \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\|x\|.$$

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\|x\| = 1$ και διαλέγουμε $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ τέτοιο ώστε $\|x - x_i\| \leq \epsilon$, τότε

$$\|Tx\| = \|Tx - Tx_i + Tx_i\| \leq \|Tx - Tx_i\| + 1 + \epsilon \leq \|T\|\|x - x_i\| + 1 + \epsilon \leq \|T\|\epsilon + 1 + \epsilon.$$

Επομένως

$$\|T\| \leq \|T\|\epsilon + 1 + \epsilon,$$

και άρα

$$\|T\| \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}.$$

Από την άλλη έχουμε

$$\|Tx\| = \|Tx - Tx_i + Tx_i\| \geq |\|Tx - Tx_i\| - \|Tx_i\|| \geq \|Tx_i\| - \|x - x_i\|\|T\| \geq 1 - \epsilon - \epsilon\|T\| \geq \frac{1-3\epsilon}{1-\epsilon}.$$

□

Με την βοηθεία του παραπάνω Λήμματος μπορούμε να αποδείξουμε την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 3.2.1. *Έστω X και Y δύο απειροδιάστατοι χώροι Banach.*

(i) Το υπεργινόμενο $X_{\mathcal{U}}$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμο στον X.

(ii) Αν ο Y είναι διαχωρίσιμος τότε ο Y είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X αν και μόνο αν είναι ισομετρικός με υπόχωρο του $X_{\mathcal{U}}$.

Απόδειξη.

(i) Έστω $\epsilon > 0$ και E ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του $X_{\mathcal{U}}$. Επιλέγοντας αντιπροσώπους για κάποια βάση του E μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E \subset \ell_\infty(X)$ και ότι η $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ είναι νόρμα στον E. Εν συνεχεία επιλέγουμε $t > 0$ αρκετά μικρό ώστε $\frac{1+t}{1-3t} < 1+\epsilon$ και ένα t-δίκτυο $(x_i)_{i=1}^N$ στην B_E και παρατηρούμε ότι

$$B_E \subset \{x_1, x_2, \cdots, x_N\} + tB_E.$$

Για κάθε $i \in \{1, 2, \cdots, N\}$ θέτουμε $A_i = \{k \in \mathbb{N} : \ |\|x_i(k)\| - 1| < t\}$, επειδή $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i(n)\| = \|(x_i(n))_{n=1}^{\infty}\|_{\mathcal{U}} = 1$ θα έχουμε ότι $A_i \in \mathcal{U}$ $\forall i \in \{1, 2, \cdots, N\}$. Θέτοντας $A = \cap_{i=1}^N A_i$ θα έχουμε $A \in \mathcal{U}$ και

$$1 - t < \|x_i(k)\| < 1 + t, \quad \forall k \in A,\ 1 \leq i \leq N.$$

Σταθεροποιούμε $k \in A$ και ορίζουμε γραμμικό τελεστή $T : E \to X$ από την σχέση $Tx = x(k)$. Έστω $T(E) = F$ τότε από το προηγούμενο Λήμμα θα έχουμε ότι

$$\|T\|\|T^{-1}\| \leq \left(\frac{1+t}{1-t}\right)\left(\frac{1-3t}{1-t}\right)^{-1} = \frac{1+t}{1-3t} < 1+\epsilon.$$

(ii) Έστω $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ μία αύξουσα ακολουθία πεπερασμένης διάστασης υποχώρων του Y τέτοια ώστε ο $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ να είναι πυκνός στον Y, από την υπόθεση και την παρατήρηση (1.1.11) υπάρχουν γραμμικοί τελεστές $T_n : E_n \to X, n \in \mathbb{N}$ για τους οποίους ισχυεί

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\|x\| \leq \|Tx\| \leq \|x\|, \quad x \in E_n,$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Ορίζουμε απεικόνιση $S : E \to \ell_\infty(X)$ από την σχέση $S(e) = x \in \ell_\infty(X)$, όπου

$$x(k) = \begin{cases} 0 & e \in E_k^c \\ T_k(e) & e \in E_k \end{cases}.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η S είναι καλά ορισμένη αλλά δεν είναι γραμμική. Παρατηρούμε όμως ότι $S(x+y)-s(x)-s(y) \in c_{00}(X) \subset c_{0\mathcal{U}}(X)$, συνεπώς η S είναι γραμμική σαν απεικόνιση στον $X_{\mathcal{U}}$. Τώρα αν $e \in E$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $e \in E_{k_0}$ και από το γεγονός ότι η $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα θα έχουμε ότι $e \in E_k \ \forall k \geq k_0$, συνεπώς,

$$Se = \left(0, 0, \cdots, \underbrace{0}_{k_0-1}, T_{k_0}(e), \cdots, T_k(e), \cdots\right)$$

και έτσι $\lim_k \|x(k)\| = \lim_k \|T_k e\| = \|e\|$. Τέλος, επειδή ο E είναι πυκνός στον Y εύκολα μπορούμε να επεκτείνουμε τον S σε ισομετρία από τον Y στον $S(Y) \subset X_{\mathcal{U}}$.

$\square$

Ορισμός 3.2.1. Έστω (X, d, μ) μετρικός χώρος πιθανότητας. Η <u>συνάρτηση συγκέντρωσης</u> του (X, d, μ) ορίζεται στο $(0, +\infty)$ από την

$$\alpha_\mu(t) = \sup\left\{1-\mu(A_t) : \mu(A) \geq \frac{1}{2}\right\}.$$

και παρατηρούμε ότι η ημινόρμα αυτή είναι καλά ορισμένη διότι η ακολουθία $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη και άρα συγκλίνει μέσω του $\mathcal{U}$.

Πρόταση 3.2.2. *Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) \geq \frac{1}{2}$ και έστω $t > 0$. Τότε,*

$$\sigma(A_t) \geq 1 - \sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left(\frac{-t^2 n}{2}\right).$$

Απόδειξη. Λόγω της σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας, αρκεί να φράξουμε από κάτω το $\sigma\left(B\left(x, \frac{\pi}{2} + t\right)\right)$. Παρατηρούμε ότι

$$\sigma\left(B\left(x, \frac{\pi}{2} + t\right)\right) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}+t} \sin^n y dy}{\int_0^{\pi} \sin^n y dy}.$$

Θέτοντας $g(t,n) = 1 - \sigma\left(B\left(x, \frac{\pi}{2} + t\right)\right)$ αρκεί να βρούμε άνω φράγμα για την

$$g(t,n) = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}+t}^{\pi} \sin^n y dy}{\int_0^{\pi} \sin^n y dy} = \frac{\int_t^{\frac{\pi}{2}} \cos^n z dz}{2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n z dz}.$$

Θέτουμε

$$2I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n z dz, \quad n \in \mathbb{N},$$

κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = z\sqrt{n}$ παίρνουμε

$$g(t,n) = \frac{1}{2\sqrt{n} I_n} \int_{t\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} cos^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) ds.$$

Από τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $\cos s$ και $e^{\frac{-s^2}{2}}$ βλέπουμε ότι

$$\cos s \leq e^{\frac{-s^2}{2}}, \quad s \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
g(t,n) &\leq \frac{1}{2\sqrt{n} I_n} \int_{t\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{\frac{-s^2}{2}} ds \\
&\leq \frac{1}{2\sqrt{n} I_n} \int_0^{(\frac{\pi}{2}-t)\sqrt{n}} e^{\frac{-(s+t\sqrt{n})^2}{2}} ds \\
&\leq \frac{e^{\frac{-t^2 n}{2}}}{2\sqrt{n} I_n} \int_0^{\infty} e^{\frac{-s^2}{2}} ds \\
&= \frac{\sqrt{\frac{\pi}{8}}}{\sqrt{n} I_n} e^{\frac{-t^2 n}{2}}.
\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\sqrt{n} I_n \geq 1, \text{ για κάθε } n \geq 1.$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι ισχυεί η σχέση $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n, \quad n \geq 1$ και έτσι παίρνουμε

$$\sqrt{n+2} I_{n+2} = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}} I_n \geq \sqrt{n} I_n, \quad n \geq 1,$$

Συνεπώς

- Αν το n είναι περιττός, τότε

$$\sqrt{n}I_n \geq I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy = 1 \geq 1.$$

- Αν το n είναι άρτιος τότε

$$\sqrt{n}I_n \geq \sqrt{2}I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 y dy = \sqrt{2}\frac{\pi}{4} \geq 1,$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πρόταση 3.2.3. *Έστω $\big(X, d, \mu\big)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $\|f\|_{Lip} = 1$, τότε*

$$\mu\big(\{x : \big|f(x) - m(f)\big| \geq t\}\big) \leq 2\alpha_\mu(t)$$

για κάθε $t > 0$ όπου $m(f)$ είναι ένας μέσος Levy της f.

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \{x : f(x) \geq m(f)\}$ και $B = \{x : f(x) \leq m(f)\}$. Αν $y \in A_t$ τότε υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $d(x, y) < t$, από το γεγονός ότι η f είναι $1 - Lipschitz$ θα έχουμε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \geq -d(x, y) + m(f) \geq m(f) - t.$$

Ομοίως αν $y \in B_t$ υπάρχει $x \in B$ τέτοιο ώστε $d(x, y) < t$ και άρα

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \leq d(x, y) + m(f) \leq m(f) + t.$$

Συνεπώς

$$A_t \cap B_t \subseteq \{x : |f(x) - m(f)| < t\}$$

και άρα

$$\{x : |f(x) - m(f)| \geq t\} \subseteq A_t^c \cup B_t^c.$$

Επομένως

$$\mu\big(\{x : \big|f(x) - m(f)\big| \geq t\}\big) \leq \mu\big(A_t^c \cup B_t^c\big) \leq \mu\big(A_t^c\big) + \mu\big(B_t^c\big) = 1 - \mu\big(A_t\big) + 1 - \mu\big(B_t\big) \leq 2\alpha_\mu(t).$$

□

Σχόλιο 3.2.1. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μία μετρήσιμη συνάρτηση, μέσος *Levy* $med(f)$ ή $m(f)$ της f είναι ένας αριθμός για τον οποίο ισχύει,

$$\mu\big(\{x : f(x) \geq m(f)\}\big) \geq \frac{1}{2}$$

και

$$\mu\big(\{x : f(x) \leq m(f)\}\big) \geq \frac{1}{2}$$

κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ έχει τουλάχιστον ένα μέσο Levy ο οποίος μπορεί να μην είναι μονοσήμαντα ορισμένος.

Πόρισμα 3.2.1. *Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση Lipschitz με σταθερά $\|f\|_{Lip} = 1$, τότε*

$$\sigma_n\big(\{x : \big|f(x) - m(f)\big| \geq t\}\big) \leq 2\sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left(\frac{-t^2 n}{2}\right),$$

για κάθε $t > 0$ όπου $m(f)$ είναι ένας μέσος Levy της f.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma_n(A) \geq \frac{1}{2}$, από την πρόταση (3.2.2) θα έχουμε ότι

$$1 - \sigma_n(A_t) \leq \sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left(\frac{-t^2 n}{2}\right),$$

και άρα από την Πρόταση (3.2.3)

$$\sigma_n\big(\{x : \big|f(x) - m(f)\big| \geq t\}\big) \leq 2\alpha_\sigma(t) \leq 2\sqrt{\frac{\pi}{8}} \exp\left(\frac{-t^2 n}{2}\right).$$

□

3.2.2 Το Ισχυροποιημένο Θεώρημα του Dvoretzky

Αποδεικνύουμε τώρα το Θεώρημα E το οποίο επαναδιατυπώνουμε.

Θεώρημα 3.2.2. *Εστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Αν E είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του X. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|_Y$ στον $Y = E \oplus \ell_2^m$ έτσι ώστε ο Y να είναι ισομετρικός με κάποιο υπόχωρο ενός υπεργινομένου του X και:*

$$\begin{aligned}
&\|(x, 0)\|_Y = \|x\|, \qquad x \in E\\
&\|(0, \xi)\|_Y = \|\xi\|, \qquad \xi \in \ell_2^m\\
&\|(x, \xi)\|_Y = \|(x, -\xi)\|_Y, \qquad x \in E,\ \xi \in \ell_2^m.
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Έστω $\nu > 0$ και $(x_j)_{j=1}^N$ ένα ν-δίκτυο στην B_E. Παίρνουμε επίσης ένα ν-δίκτυο $(\xi_j)_{j=1}^M$ στην S^{m-1}.
Εστω $n \in \mathbb{N}$, $\ n > m$, θεωρούμε τον ℓ_2^m σαν υπόχωρο του ℓ_2^n. Από την παρατήρηση μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Dvoretzky ώστε να πάρουμε γραμμικό τελεστή $S : \ell_2^n \to X$ που να ικανοποιεί την

$$(1 - \nu)\|\xi\| \leq \|S\xi\| \leq \|\xi\|, \qquad \xi \in \ell_2^n.$$

Για $1 \leq j \leq N$ και $1 \leq k \leq [\nu^{-1}]$, θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_{j,k} : S^{m-1} \to X$ με

$$f_{j,k}(\xi) = \|k\nu S\xi + x_j\|.$$

Παρατηρούμε ότι οι $f_{j,k}$ είναι Lipschitz με σταθερά $\|f_{k,j}\|_{Lip} \leq 1$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$|f_{j,k}(\xi_1) - f_{j,k}(\xi_2)| \leq \|k\nu S(\xi_1 - \xi_2)\| \leq |k||\nu|\|S(\xi_1 - \xi_2)\| \leq \|\xi_1 - \xi_2\| \leq d(\xi_1, \xi_2).$$

θέτουμε $a_{j,k} = med(f_{j,k})$ από την πρόταση θα έχουμε

$$\sigma_n\big(x : |f_{j,k}(x) - a_{j,k}| > \nu\big) \leq 2\sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{\frac{-\nu^2 n}{2}}$$

Επομένως

$$\sigma_n\left(x : \max_{1\leq j\leq N}\max_{1\leq k\leq[\nu^{-1}]}|f_{j,k}(x) - a_{j,k}| > \nu\right) \leq \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{[\nu^{-1}]}\sigma_n\big(x : |f_{j,k}(x) - a_{j,k}| > \nu\big) \leq 2N[\nu^{-1}]\sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{\frac{-\nu^2 n}{2}}$$

Τώρα θεωρούμε το σύνολα

$$A = \left\{U \in O_n : \max_{1\leq i\leq M}\max_{1\leq j\leq N}\max_{1\leq k\leq[\nu^{-1}]}|f_{j,k}(U\xi_i) - a_{j,k}| > \nu\right\},$$

και

$$A_i = \{U \in O_n : \max_{1\leq j\leq N}\max_{1\leq k\leq[\nu^{-1}]}|f_{j,k}(U\xi_i) - a_{j,k}| > \nu\}, \qquad 1 \leq i \leq M$$

Όπου O_n είναι η ορθογώνια ομάδα και μ το κανονικοποιημένο μέτρο Haar πάνω σ' αυτήν και έχουμε ότι

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{M} A_i$$

επομένως

$$\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{M}\mu(A_i) = \sum_{i=1}^{M}\sigma_n\left(x : \max_{1\leq j\leq N}\max_{1\leq k\leq[\nu^{-1}]}|f_{j,k}(x) - a_{j,k}| > \nu\right) \leq 2NM[\nu^{-1}]\sqrt{\frac{\pi}{8}}e^{\frac{-\nu^2 n}{2}}.$$

Κατά συνέπεια αν διαλέξουμε το n αρκετά μεγάλο μπορούμε να πάρουμε $\mu(A) < 1$, άρα το A θα είναι γνήσιο υποσύνολο του O_n, που σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε $U \in O_n$ που να μην ανήκει στο A. Παίρνουμε έναν τέτοιο U και θέτουμε $T_1 = SU$ και $T = T_1|_{\ell_2^m} : \ell_2^m \to X$ να είναι ο περιορισμός του T_1 στον ℓ_2^m. και παρατητούμε ότι $\|T\| = \|S\|$ (ο U είναι ισομετρία), τότε,

$$\Big|\|x_j + k\nu T\xi_i\| - a_{j,k}\Big| \leq \nu, \qquad 1 \leq i \leq M,\ 1 \leq j \leq N,\ 1 \leq k \leq [\nu^{-1}].$$

Όμως το $(\xi_i)_{i=1}^M$ είναι ένα ν-δίκτυο $(\xi_i)_{i=1}^M$ στην S^{m-1}. Συνεπώς, αν $\xi \in S^{m-1}$ τότε υπάρχει i με $1 \leq i \leq M$ τέτοιο ώστε $\|\xi - \xi_i\| \leq \nu$ και κατά συνέπεια,

$$\Big|\|x_j + k\nu T\xi\| - a_{j,k}\Big| \leq 2\nu, \qquad 1 \leq j \leq N,\ 1 \leq k \leq [\nu^{-1}],\ \xi \in S^{m-1},$$

και έτσι θα έχουμε

$$\Big|\|x_j+k\nu T\xi\|-\|x_j-k\nu T\xi\|\Big| = \Big|\big(\|x_j+k\nu T\xi\|-a_{j,k}\big)+\big(a_{j,k}-\|x_j-k\nu T\xi\|\big)\Big| \le 2\nu+2\nu = 4\nu$$

με $1 \le j \le N,\ 1 \le k \le [\nu^{-1}],\ \xi \in S^{m-1}$. Εν συνεχεία παρατηρούμε ότι $\nu \le k\nu \le 1$ οπότε αν πάρουμε ξ με $\|\xi\| \le 1$ τότε υπάρχει k με $(k-1)\nu \le \|\xi\| \le k\nu$ και άρα $\big|\|\xi\| - k\nu\big| \le \nu$. Επομένως για κάθε ξ με $\|\xi\| \le 1$ θα έχουμε

$$\begin{aligned}
|\ \|x_j + T\xi\| - \|x_j - T\xi\|| &= \left|\left\|x_j + \|\xi\| T\Big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\Big)\right\| - \left\|x_j - \|\xi\| T\Big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\Big)\right\|\ \right| \\
&\le \left|\left\|x_j + \|\xi\| T\Big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\Big)\right\| - \left\|x_j + k\nu T\Big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\Big)\right\|\ \right| \\
&+ \left|\left\|x_j + k\nu T\Big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\Big)\right\| - \left\|x_j - k\nu T\Big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\Big)\right\|\ \right| \\
&+ \left|\left\|x_j - k\nu T\Big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\Big)\right\| - \left\|x_j - \|\xi\| T\Big(\frac{\xi}{\|\xi\|}\Big)\right\|\ \right| \\
&\le \big|\|\xi\| - k\nu\big| + 4\nu + \le \big|\|\xi\| - k\nu\big| \\
&\le 6\nu.
\end{aligned}$$

Και επειδή το $(x_j)_{j=1}^N$ είναι ένα ν-δίκτυο στην B_E, χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα με πριν παίρνουμε ότι

$$\Big|\ \|x + T\xi\| - \|x - T\xi\|\Big| \le 8\nu, \qquad \|x\| \le 1,\ \|\xi\| \le 1.$$

Θέτοντας τώρα $F = T(\ell_2^m)$, χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανισότητα παίρνουμε

$$\left|\ \left\|\frac{x}{max(\|x\|,\|\xi\|)}+T\Big(\frac{\xi}{max(\|x\|,\|\xi\|)}\Big)\right\|-\left\|\frac{x}{max(\|x\|,\|\xi\|)}-T\Big(\frac{\xi}{max(\|x\|,\|\xi\|)}\Big)\right\|\right| \le 8\nu$$

επομένως,

$$\Big|\ \|x + T\xi\| - \|x - T\xi\|\Big| \le 8\nu max(\|x\|,\|\xi\|), \qquad x \in E,\ \xi \in \ell_2^m.$$

Συνεπώς, για κάθε $y \in F$ θα έχουμε

$$\Big|\ \|x+y\|-\|x-y\|\Big| = \Big|\ \|x+T\xi\|-\|x-T\xi\|\Big| \le 8\nu max(\|x\|,\|\xi\|) = 8\nu max(\|x\|,\|T^{-1}(y)\|)$$

άρα

$$\Big|\ \|x+y\|-\|x-y\|\Big| = \Big| \le 8(1+\nu)\nu max(\|x\|,\|y\|) \le 8\frac{5}{4}\nu max(\|x\|,\|y\|) = 10\nu max(\|x\|,\|y\|).$$

Από την άλλη χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα θα έχουμε,

$$2\|x\| \le \|x+y\| + \|x-y\|, \qquad 2\|y\| \le \|x+y\| + \|x-y\|$$

επομένως

$$2max(\|x\|,\|y\|) \leq \|x+y\| + \|x-y\|$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισώσεις παίρνουμε την

$$\Big| \|x+y\| - \|x-y\| \Big| \leq 10\nu max(\|x\|,\|y\|) \leq 5\nu\|x+y\| + \|x-y\|$$

η οποία μας δίνει την

$$\|x-y\| \leq \frac{1+5\nu}{1-5\nu}\|x+y\|, \qquad x\in E,\ y\in F.$$

Τέλος θέτοντας $\|(x,\xi)\|_Y = \max(\|x\|,\|\xi\|_{\ell_2^m})$ και θεωρώντας τον γραμμικό τελεστή $T_1 : Y \to X$ με $T_1(x,\xi) = x + T\xi$ εύκολα παίρνουμε ότι

$$(1-5\nu))\|(x,\xi)\|_Y \leq \big\|T_1(x,\xi)\big\| \leq (1-5\nu))(\nu+1)\|(x,\xi)\|_Y.$$

Από όπου παίρνουμε ότι $d\big(Y, E\oplus F\big) \leq 1+\nu$, και άρα ο Y είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X και κατά συνέπεια απο την Πρόταση (3.2.1) θα είναι ισόμετρικός με υπόχωρο υπεργινομένου του X.

□

3.3 Δεύτερη απόδειξη στο πρόβλημα του συμπληρωματικού υπόχωρου

Λήμμα 3.3.1. *Έστω X χώρος Banach και Y χώρος Banach έτσι ώστε ο Y να είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Έστω $\lambda \geq 1$ τέτοιο ώστε κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X να είναι λ-συμπληρωματικός στον X, τότε κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του Y είναι λ-συμπληρωματικός στον Y.*

Απόδειξη. Έστω Z πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του Y. Από την υπόθεση, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $T_n : Y \to X$ με $\|T_n\|\|T_n^{-1}\| < 1+\frac{1}{n}$. Ο υπόχωρος $T(Z)$ του X είναι πεπερασμένης διάστασης και άρα από την υπόθεση υπάρχει προβολή $P : X \to X$ επί του (Z) έτσι ώστε $\|P\| \leq \lambda$. Έυκολα βλέπουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οι απεικονίσεις $P_n : Y \to Y$ με $P_n' := T_n^{-1}PT_n$ είναι προβολές επί του Z με $\|P_n\| < (1+\frac{1}{n})\lambda$. Από το θεώρημα (1.1.1) υπάρχει προβολή $\tilde{P} : Y \to Y$ επί του Z με $\|\tilde{P}\| \leq \lambda$. □

Αποδεικνύουμε τώρα το Θεώρημα (3.2.1).

Απόδειξη. Έστω E ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του X. θέτουμε $dimE = n \in \mathbb{N}$ και $d = d(\ell_2^n, E)$. Από το θεώρημα (3.2.2) μπορούμε να βρούμε χώρο $Y = E \oplus \ell_2^n$ ισομετρικό με υπόχωρο του $X_{\mathcal{U}}$ (για κάποιο $\mathcal{U}$) έτσι ώστε η νόρμα $\|\cdot\|_Y$ στον $Y = E \oplus \ell_2^n$ να ικανοποιεί την σχέση

$$\|(x,\xi)\|_Y = \|(x,-\xi)\|_Y.$$

Για την ακρίβεια θα έχουμε ότι

$$\max\left(\|x\|, \|\xi\|\right) \le \|(x,\xi)\|_Y.$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο $X_{\mathcal{U}}$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Από το Λήμμα (3.3.1) θα έχουμε επίσης ότι κάθε υπόχωρος του Y είναι λ-συμπληρωματικός (στον $X_{\mathcal{U}}$ και άρα) στον Y.
Έστω $\theta^2 = d$, επιλέγουμε ισομορφισμό $S : E \to \ell_2^n$ τέτοιο ώστε $\|S\|\|S^{-1}\| = d = \theta^2$, τότε

$$\theta^{-1}\|x\| \le \|Sx\| \le \theta\|x\|, \quad x \in E.$$

Τώρα θεωρούμε τον υπόχωρο $Z = \{(x, Sx) : x \in E\}$ του Y και παίρνουμε προβολή $R : Y \to Z$ με $\|R\| \le \lambda$. Εν συνεχεία ορίζουμε ένα νέο γραμμικό τελεστή $T : E \to \ell_2^n$ από την σχέση

$$R(x,0) = \left(S^{-1}Tx, Tx\right), \quad x \in E$$

και παρατηρούμε ότι

$$\max\left(\theta^{-1}\|Tx\|, \|Tx\|\right) \le \max\left(\|S^{-1}Tx\|, \|Tx\|\right) \le \|R(x,0)\|_Y \le \lambda\|x\|,$$

επομένως $\|T\| \le \lambda$. Στη συνέχεια ορίζουμε τον γραμμικό τελεστή $V : E \to \ell_2^{2n}$ από την σχέση $Vx = (\lambda Sx, \theta Tx)$ και παρατηρούμε ότι

$$\|Vx\|_2^2 = \|\lambda Sx\|^2 + \|\theta Tx\|^2 = \lambda^2\|Sx\|^2 + \theta^2\|Tx\|^2 \le 2\lambda^2\theta^2\|x\|,$$

επομένως $\|V\| \le \sqrt{2}\lambda\theta$. Από την άλλη, αφού ο R είναι προβολή επί του Z θα έχουμε

$$R\left(0, Sx\right) = R\left(x, Sx\right) - R\left(x, 0\right) = (x, Sx) - \left(S^{-1}Tx, Tx\right) = R\left(x - S^{-1}Tx, Sx - Tx\right)$$

και άρα

$$\|x - S^{-1}Tx\| \le \max\left(\|x - S^{-1}Tx\|, \|Sx - Tx\|\right) \le \|\left(x - S^{-1}Tx, Sx - Tx\right)\|_Y = \|R(0,Sx)\|_Y \le \lambda\|$$

Για κάθε $x \in E$. Σύνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|x\| &\le \|x - S^{-1}Tx\| + \|S^{-1}Tx\| \\
&\le \lambda\|Sx\| + \theta\|Tx\| \\
&\le \sqrt{2}\left(\lambda^2\|Sx\|^2 + \theta^2\|Tx\|^2\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2}\|Vx\|.
\end{aligned}$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι ο V είναι ισομορφισμός επί της εικόνας του με $\|V^{-1}\| \leq \sqrt{2}$ και $\|V\| \leq \sqrt{2}\lambda\theta$. Από το γεγονός ότι ο ℓ_2^{2n} θεωρείται υπόχωρος του ℓ_2 έχουμε ότι ο $V(E)$ είναι υπόχωρος του ℓ_2 με διάσταση $dim\left(V(E)\right) = n$, επιπλέον έχουμε

$$\theta^2 = d\left(E, V(E)\right) \leq \|V\|\|V^{-1}\| \leq \sqrt{2}\sqrt{2}\lambda\theta = 2\lambda\theta$$

και άρα $\theta \leq 2\lambda$, από όπου παίρνουμε $d\left(E, V(E)\right) = \theta^2 \leq 4\lambda^2$. Επομένως ο X είναι crudely πεπερασένα αναπαραστάσιμος στον ℓ_2 με σταθερά $4\lambda^2$. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] S. Banach, *Théorie des Operations Lineaires*, 1932

[2] N. Dunford, and J. Sschwartz, *Linear Operators* (part 1), New York, 1957

[3] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1955)

[4] J.Lindenstrauss and L.Tzafriri, *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math. (1971), 263-269.

[5] F. Albiac and N.J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Graduate Text in Mathematics, Springer, 2006

[6] M. Fabian, P Habala, P. Hájek, J. Pelant, V. Montesinos, and V. Zizler, *Banach space theory: the basis for linear and nonlinear analysis*, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics, Springer, New York, 2011

[7] F.J. Murray, *On complementary manifolds and projections in spaces L_p and ℓ_p*, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937) 138-152.

[8] A. Sobczyk, *Projections in Minkowski and Banach spaces*, Duke Math. J. 8 (1941) 78-106.

[9] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*. **I**, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Sequence spaces.

[10] A. Dvoretzky, *Some results on convex bobies and Banach spaces*, Proc. Int. Symp. Linear Spaces (Jerusalem, 1960), Jerusalem Academic Press, Jerusalem, 1961, pp. 123-160.