Type-Cotype και το θεώρημα Maurey-Pisier

Διπλωματική Εργασία

Βασίλης Στέριος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2017

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Για έναν χώρο Banach X και $1 \leqslant p \leqslant \infty$ λέμε ότι ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε φυσικό αριθμό n, ο ℓ_p^n εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον X. Δηλαδή, υπάρχει γραμμική ισομορφική εμφύτευση $T : \ell_p^n \to X$ τέτοια ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| < 1+\varepsilon$. Για την περίπτωση $p = \infty$ εννοούμε τον χώρο c_0. Σε γενικές γραμμές, το πρόβλημα που θα μελετηθεί στην παρούσα εργασία είναι το εξής :

Για έναν απειροδιάστατο χώρο Banach X, για ποια p με $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ισχύει ότι ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X;

Ένα από τα πρώτα θεωρήματα τέτοιου τύπου είναι το θεώρημα του Dvoretzky [8] σύμφωνα με το οποίο ο ℓ_2 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach. Μάλιστα, ο Dvoretzky έδειξε μια ποσοτική μορφή αυτού του θεωρήματος. Πιο συγκεκριμένα, απέδειξε ότι για κάθε χώρο Banach X διάστασης n και κάθε $\varepsilon > 0$, ο ℓ_2^k εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον X για $k = c(n, \varepsilon)$, όπου ο $k = c(n, \varepsilon) > 0$ εξαρτάται μόνο από n και το ε και τείνει στο άπειρο καθώς το $n \to \infty$. Αργότερα, ο Milman [27] έδωσε μια άλλη απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος σύμφωνα με την οποία $k = c(\varepsilon)\log n$ για μια σταθερά $c(\varepsilon) > 0$ που εξαρτάται μόνο από το ε. Ωστόσο στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε μόνο την απειροδιάστατη μορφή του θεωρήματος του Dvoretzky και θα προκύψει ως συνέπεια του θεωρήματος του Krivine.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Krivine, για κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach X υπάρχει $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ώστε ο ℓ_p να είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Αξίζει να επισημανθεί ότι η έννοια της πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας αναφέρεται σε χώρους πεπερασμένης διάστασης. Σε αντιδιαστολή, το 1972 ο Tsirelson [41] κατασκεύασε έναν απειροδιάστατο χώρο Banach ο οποίος δεν περιέχει υπόχωρο που να είναι ισόμορφος με τον ℓ_p για κάποιο $1 \leqslant p \leqslant \infty$, καταρίπτοντας έτσι μια εικασία που ήθελε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach να περιέχει ένα αντίτυπο του ℓ_p για κάποιο p με $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Ωστόσο από το θεώρημα του Krivine έχουμε ότι πάντα θα υπάρχει κάποιο p ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο ℓ_p^n να είναι σχεδόν ισομετρικά ισόμορφος με κάποιον υπόχωρο του X.

Πέραν από μία ακόμα απόδειξη του θεωρήματος του Dvoretzky, μέσω της απόδειξης του θεωρήματος του Krivine μπορούμε να βρούμε συνθήκες οι οποίες μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη και άλλων p εκτός του $p = 2$, για τα οποία ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε έναν χώρο Banach. Η απόδειξη του θεωρήματος Maurey-Pisier βασίζεται σε μια τέτοια συνθήκη. Το θεώρημα Maurey-Pisier, που είναι και το βασικό θεώρημα αυτής της εργασίας, μας λέει ότι για έναν χώρο Banach X ο ℓ_{p_X} και ο ℓ_{q_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμοι X για κάποια p_X και q_X που σχετίζονται με τη δομή του χώρου X. Πιο συγκεκριμένα, σχετίζονται με το type και το cotype του X αντίστοιχα.

Για $1 \leqslant p \leqslant 2$ λέμε ότι ένας χώρος Banach X έχει (Rademacher) type p αν υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n και κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ να ικανοποιείται η

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

Επίσης για $q \geqslant 2$ λέμε ότι ο X έχει (Rademacher) cotype q αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε φυσικό αριθμό n και κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ να ικανοποιείται η

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^q\right)^{1/q} \leqslant C\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2}.$$

Στα παραπάνω, οι $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ είναι συμμετρικές και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli.

Σύμφωνα με το θεώρημα Maurey-Pisier για κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach X ο ℓ_{p_X} και ο ℓ_{q_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμοι στον X, όπου

$$p_X = \sup\{1 \leqslant p \leqslant 2 : \text{ ο } X \text{ έχει Rademacher type } p\},$$

και

$$q_X = \inf\{q \geqslant 2 : \text{ ο } X \text{ έχει Rademacher cotype } q\}.$$

Το παραπάνω θεώρημα αποδείχτηκε το 1976 από τους Maurey και Pisier [25] και η απόδειξη βασίζεται κατά ουσιαστικό τρόπο στην απόδειξη του θεωρήματος του Krivine [20]. Ακριβέστερα, όπως αναφέρει ο Maurey στο [24], το αρχικό αποτέλεσμα στο οποίο είχαν καταλήξει οι Maurey και Pisier ήταν ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in X$ νόρμας ένα τέτοια ώστε

$$\frac{1}{1+\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^{p_X}\right)^{1/p_X} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_i|$$

για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ωστόσο την περίοδο που προετοίμαζαν τον συγκεκριμένο άρθρο δημοσιεύτηκε το [20], χάρη στο οποίο κατάφεραν να τροποποιήσουν το συγκεκριμένο θεώρημα στο [25] και να το παρουσιάσουν στην τελική του μορφή, όπως διατυπώθηκε παραπάνω. Μάλιστα, ήταν μια καθυστέρηση εκ μέρους του περιοδικού που τους επέτρεψε να έχουν στο [25] αυτή την τελική μορφή του θεωρήματος. Σε αυτή την εργασία ωστόσο, θα βασιστούμε σε μια νέα απόδειξη του θεωρήματος Maurey-Pisier από τους Milman και Sharir [29], που τροποποιεί λίγο την αρχική, αλλά παρ' όλα αυτά βασίζεται και πάλι στην απόδειξη του θεωρήματος του Krivine.

Επιπλέον, η type περίπτωση του θεωρήματος Maurey-Pisier, προκύπτει ως απλή συνέπεια ενός θεωρήματος σχετικά με τις stable type p σταθερές ενός χώρου Banach, το οποίο αποδείχθηκε από τον Pisier [31] το 1983. Η stable type p σταθερά ενός χώρου Banach X, για κάποιο $1 < p < 2$, είναι η ελάχιστη σταθερά $C > 0$ για την οποία για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ισχύει

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\vartheta_i x_i\right\| \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{1/p},$$

όπου $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ είναι ανεξάρτητες standard p-stable τυχαίες μεταβλητές. Σύμφωνα με το θεώρημα του Pisier, αν X είναι χώρος Banach και $ST_p(X) = \infty$, όπου $ST_p(X)$ είναι η stable type p σταθερά του X, τότε ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Η type περίπτωση του θεωρήματος Maurey-Pisier προκύπτει άμεσα, αφού εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\sup\{1 \leqslant p \leqslant 2 : \text{ ο } X \text{ έχει type } p\} = \sup\{1 \leqslant p < 2 : ST_p(X) < \infty\}.$$

Μάλιστα, το θεώρημα του Pisier είναι ποσοτικής μορφής. Ακριβέστερα, ισχυρίζεται ότι για κάθε $1 < p < 2$, κάθε χώρος Banach X περιέχει υπόχωρο $(1+\varepsilon)$-ισομορφικό με τον ℓ_p^n για κάποιο $n \geqslant \delta(\varepsilon,p)(ST_p(X))^q$, όπου $\delta(\varepsilon,p) > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p και από το ε, και $q > 1$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Το τελικό συμπέρασμα στο οποίο θα καταλήξουμε διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.0.1. *Έστω X χώρος Banach και*

$$K(X) = \{p \in [1,\infty] : \text{ ο } \ell_p \text{ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον } X\}.$$

Τότε το $K(X)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $[p_X, q_X]$ και περιέχει το $[p_X, 2] \cup \{q_X\}$.

Στη συνέχεια, ακολουθεί μια αναλυτική περιγραφή των περιεχομένων αυτής της εργασίας. Αρχικά, στο Κεφάλαιο 2 διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε κάποια αποτελέσματα από τη θεωρία πιθανοτήτων τα οποία χρησιμοποιούνται καθ' όλη την έκταση της εργασίας. Ξεκινάμε από τα βασικά, όπως είναι ο ορισμός των πραγματικών τυχαίων μεταβλητών, η ισονομία και η ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών. Έπειτα, δείχνουμε το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου για τον διακριτό κύβο.

Θεώρημα 1.0.2. *Έστω $A \subseteq E_2^n = \{1,-1\}^n$ με $\mu_n(A) = \frac{1}{2}$ όπου μ_n είναι το ομοιόμορφο μέτρο στο E_2^n. Τότε για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(A_t) \geqslant 1 - 2\exp(-t^2 n/2),$$

όπου $A_t = \{x \in E_2^n : d_n(x,A) < t\}$ και $d_n(x,A) = \min\left\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| : y \in A\right\}$.

Επιπλέον, ορίζουμε τις συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli και αποδεικνύουμε την ανισότητα Khintchine.

Θεώρημα 1.0.3 (Ανισότητα Khintchine)**.** *Έστω $\{\epsilon_i\}_{i=1}^\infty$ ακολουθία ανεξάρτητων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών Bernoulli. Για κάθε $p > 0$ υπάρχουν σταθερές $A_p, B_p > 0$ που εξαρτώνται μόνο από το p ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$*

$$A_p\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i\right|^p\right)^{1/p} \leqslant B_p\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}.$$

Δείχνουμε επίσης την ανισότητα Kahane-Khintchine η οποία γενικεύει την ανισότητα Khintcine.

Θεώρημα 1.0.4 (Ανισότητα Kahane-Khintchine)**.** *Έστω $\{\epsilon_i\}_{i=1}^\infty$ ακολουθία ανεξάρτητων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών Bernoulli. Για κάθε $p \geqslant 1$ υπάρχει μια σταθερά $K_p > 0$ που εξαρτάται μόνο από το p, ώστε για κάθε χώρο με νόρμα X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$*

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^p\right)^{1/p} \leqslant K_p\,\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|.$$

Η απόδειξη της ανισότητας Kahane-Khintchine θα βασιστεί στο Θεώρημα 1.0.2. Τέλος, κλείνουμε το πρώτο κεφάλαιο με κάποιους ορισμούς και προτάσεις σχετικά με τυχαίες μεταβλητές με τιμές σε χώρους Banach ή γενικότερα σε μετρήσιμους χώρους, οι οποίες θα μας χρειαστούν στο Κεφάλαιο 7 και τις p-stable τυχαίες μεταβλητές.

Στο Κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με την πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα, τα υπεργινόμενα χώρων Banach και την μεταξύ τους σχέση. Αρχικά, δίνουμε τον ορισμό της πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας.

Ορισμός 1.0.5. Έστω X και Y χώροι Banach. Λέμε ότι ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε υπόχωρο E του X πεπερασμένης διάστασης, υπάρχει υπόχωρος F του Y με $\dim F = \dim E$ και φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : E \to F$ τέτοιος ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$.

Επίσης αποδεικνύουμε ότι για να είναι ο ℓ_p πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε έναν χώρο Banach X αρκεί για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε φυσικό αριθμό n, ο ℓ_p^n να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον X. Δείχνουμε επίσης μερικές ιδιότητες για την πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα, όπως το γεγονός ότι κάθε χώρος Banach είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον c_0 και ότι ο L_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον ℓ_p. Στη συνέχεια ορίζουμε το υπεργινόμενο μιας οικογένειας χώρων Banach, μια έννοια η οποία πέραν από τη σύνδεση που έχει με την πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα θα μας χρειαστεί και για την απόδειξη μιας πρότασης στο Κεφάλαιο 5. Τέλος, αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα που δείχνει την σχέση που υπάρχει μεταξύ της πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας και των υπεργινομένων.

Θεώρημα 1.0.6. *Έστω X και Y χώροι Banach. Ο Y είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X αν και μόνο αν υπάρχει μη τετριμένο υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ σε κάποιο σύνολο δεικτών I τέτοιο ώστε ο Y να εμφυτεύεται ισομετρικά στην υπερδύναμη $X_{\mathcal{U}}$.*

Στο Κεφάλαιο 4 ορίζουμε το type και cotype ενός χώρου χώρου Banach και αποδεικνύουμε διάφορες σχετικές ιδιότητες. Επιπλέον αποδεικνύουμε την ακόλουθη πρόταση σχετικά με το type και το cotype των χώρων ℓ_p.

Πρόταση 1.0.7.

(i) *Αν $1 \leqslant p \leqslant 2$ τότε ο ℓ_p έχει type p και cotype 2.*

(ii) *Αν $2 \leqslant q < \infty$ τότε ο ℓ_q έχει type 2 και cotype q.*

Το βασικό θεώρημα του Κεφαλαίου 5 είναι το θεώρημα του Krivine. Ξεκινάμε με τον ορισμό της βάσης Schauder και αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητες για τις Schauder βασικές ακολουθίες οι οποίες είναι απαραίτητες για την απόδειξη του θεωρήματος του Krivine. Θα χρειαστεί, επίσης, και το θεώρημα στρέβλωσης του James.

Θεώρημα 1.0.8 (στρέβλωσης του James για τον c_0)**.** *Έστω X χώρος Banach. Αν ο c_0 εμφυτεύεται a-ισομορφικά στον X για κάποιον $a > 1$ τότε εμφυτεύεται και $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά για κάθε $\varepsilon > 0$.*

Ορίζουμε επίσης τις C-unconditional και 1-spreading ακολουθίες και αποδεικνύουμε ορισμένες ιδιότητες που ικανοποιούν. Έπειτα, δείχνουμε κάποια αποτελέσματα από την θεωρία τελεστών τα οποία είναι χρήσιμα για τη συνέχεια. Η βασική πρόταση που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η ακόλουθη:

Πρόταση 1.0.9. *Έστω X χώρος Banach και $T, S : X \to X$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές οι οποίοι μετατίθενται, δηλαδή $TS = ST$. Για κάθε προσεγγιστική ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ του T υπάρχει προσεγγιστική ιδιοτιμή $\mu \in \mathbb{C}$ του S και $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον X η οποία είναι κοινή ακολουθία προσεγγιστικών ιδιοδιανυσμάτων για τις ιδιοτιμές λ και μ των τελεστών T και S αντίστοιχα. Δηλαδή, $\|u_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|Tu_n - \lambda u_n\| \longrightarrow 0 \ \textit{ και } \ \|Su_n - \mu u_n\| \longrightarrow 0.$$

Προχωράμε με την απόδειξη του θεωρήματος του Krivine. Αρχικά ορίζουμε την block πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα.

Ορισμός 1.0.10. Έστω $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ ακολουθία σε έναν χώρο Banach X και $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ ακολουθία σε έναν χώρο Banach Y. Η ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^\infty$ λέγεται block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει block ακολουθία $\{u_j\}_{j=1}^n$ της $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, τέτοια ώστε

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\left\|\sum_{j=1}^n t_j u_j\right\| \leqslant \left\|\sum_{j=1}^n t_j y_j\right\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\left\|\sum_{j=1}^n t_j u_j\right\|,$$

για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

Επίσης, για $1 \leqslant p < \infty$ λέμε ότι ο ℓ_p ή ο c_0 είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ αν η συνήθης βάση $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$.

Θεώρημα 1.0.11 (Krivine). *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ μια μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία στον X. Τότε, υπάρχει $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ώστε ο ℓ_p να είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, όπου για την περίπτωση $p = \infty$ εννοούμε τον χώρο c_0.*

Η απόδειξη του θεωρήματος του Krivine θα γίνει σε βήματα. Για το πρώτο από αυτά τα βήματα θα χρειαστούμε μια πρόταση που οφείλεται στους Brunel και Sucheston [4] η οποία αποδεικνύεται με τη βοήθεια του συνδυαστικού θεωρήματος του Ramsey.

Πρόταση 1.0.12 (Brunel-Sucheston). *Έστω $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ ακολουθία σε έναν χώρο Banach X τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν σταθερές $c = c(n), C = C(n) > 0$ τέτοιες ώστε*

$$c \leqslant \left\|\sum_{k=1}^n a_k x_{i_k}\right\| \leqslant C$$

για κάθε n-άδα φυσικών αριθμών $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{k=1}^n |a_k| = 1$. Τότε, για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ τέτοια ώστε $\varepsilon_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο $L = \{m_n\}_{n=1}^\infty$ του $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_1 < \ldots < i_n$ και $j_1 < \ldots < j_n$ στο L τέτοια ώστε $i_i \geqslant m_n$ και $j_1 \geqslant m_n$,

$$\left\|\sum_{k=1}^n a_k x_{i_k}\right\| \leqslant (1+\varepsilon_n)\left\|\sum_{k=1}^n a_k x_{j_k}\right\|$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Στη συνέχεια, σαν πόρισμα του θεωρήματος του Krivine αποδεικνύουμε το θεώρημα του Dvoretzky

Θεώρημα 1.0.13 (Dvoretzky). *Ο ℓ_2 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach.*

Ολοκληρώνουμε το Κεφάλαιο 5 με μια πρόταση που θα μας χρειαστει στη απόδειξη της cotype περίπτωσης του θεωρήματος Maurey-Pisier.

Πρόταση 1.0.14. *Έστω X χώρος Banach ο οποίος έχει cotype q_0 για κάποιο $q_0 \geqslant 2$. Έστω επίσης ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $x_1^m, x_2^m, \ldots, x_m^m \in X$ τέτοια ώστε $\|x_i^m\| \leqslant 1$ και η $\{x_i^m\}_{i=1}^m$ είναι 1-unconditional και $(1+\varepsilon_m)$-spreading για κάποια ακολουθία θετικών αριθμών $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ με $\varepsilon_m \to 0$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$ υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $q > p$*

$$c\frac{1}{C_q(X)}n^{1/q} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n x_i^m\right\| \leqslant Cn^{1/p} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } m \geqslant n.$$

Τότε ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Το Κεφάλαιο 6 είναι αφιερωμένο στην απόδειξη της cotype περίπτωσης του θεωρήματος Maurey-Pisier:

Θεώρημα 1.0.15. *Έστω X χώρος Banach και $q_X = \inf\{q \geqslant 2 :$ ο X έχει cotype $2\}$. Τότε, ο ℓ_{q_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος ακολουθούμε την προσέγγιση των Milman και Sharir [29]. Η βασική πρόταση, από την οποία η cotype περίπτωση προκύπτει χάρη στην Πρόταση 1.0.14, είναι η εξής :

Πρόταση 1.0.16. *Υπάρχουν γ, $C > 0$ και $0 < \delta < 1$ τέτοια ώστε, αν X χώρος Banach και $q_X > 2$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n_1 \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $y_1, y_2, \ldots, y_{n_1} \in X$ τέτοια ώστε*

(i) $1 - \delta \leqslant \|y_i\| \leqslant 1$, *για κάθε* $1 \leqslant i \leqslant n_1$.

(ii) *Η ακολουθία $(y_1, \ldots, y_{n_1})$ είναι $(1+\varepsilon)$-spreading και C-uncoditional.*

(iii) *Για κάθε $A \subseteq [n_1] = \{1, 2, \ldots, n_1\}$ ισχύει*

$$\left\| \sum_{i \in A} y_i \right\| \leqslant \gamma \, |A|^{1/q_X}.$$

Βασικά εργαλεία για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης είναι οι επόμενες δύο προτάσεις. Η πρώτη απότελει μια πεπερασμένη εκδοχή του θεωρήματος Brunel-Sucheston.

Πρόταση 1.0.17. *Έστω $0 < \delta < 1$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N = N(k, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ που εξαρτάται μόνο από το ε και το k, τέτοιος ώστε αν X χώρος με νόρμα, $n \geqslant N$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$ με $1 - \delta \leqslant \|x_i\| \leqslant 1$, τότε υπάρχει υπακολουθία $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ που ικανοποιεί τουλάχιστον μία από τις παρακάτω ιδιότητες:*

(α) *η $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ είναι $(1+\varepsilon)$-spreading ή*

(β) $\mathbb{E}\left\| \sum_{j=1}^{k} \epsilon_j x_{i_j} \right\| \geqslant c_\delta \sqrt{k}$, *για κάποια σταθερά $c_\delta > 0$ που εξαρτάται μόνο από το δ.*

Πρόταση 1.0.18. *Έστω $\varepsilon, \delta > 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $N_1 = N_1(k, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, που εξαρτάται μόνο από τα ε, δ και k, τέτοιος ώστε αν X χώρος με νόρμα, $n \geqslant N$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$ με $\|x_i\| \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ και $\|x_i - x_j\| \geqslant \delta$ για κάθε $i \neq j$, τότε υπάρχει υπακολουθία $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{2k}}$ τέτοια ώστε η ακολουθία $v_j = x_{i_{2j}} - x_{i_{2j-1}}$, $1, \ldots, n$ να είναι $(2+\varepsilon)$-unconditional.*

Παρότι μια απόδειξη της type περίπτωσης θα μπορούσε να γίνει με επιχειρήματα παρόμοια με αυτά που χρησιμοποιούνται για την cotype περίπτωσης, στο Κεφάλαιο 7 θα παρουσιάσουμε μια απόδειξη η οποία ακολουθεί τελείως διαφορετική προσέγγιση και βασίζεται στο θεώρημα του Pisier και τις p-stable τυχαίες μεταβλητές. Μια συμμετρική τυχαία μεταβλητή ϑ λέγεται standard p-stable για κάποιο $1 \leqslant p \leqslant 2$, αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση έχει την εξής μορφή :

$$\mathbb{E}(e^{it\vartheta}) = e^{-|t|^p/2} \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Για έναν χώρο Banach X και $1 < p < 2$ συμβολίζουμε με $ST_p(X)$ την ελάχιστη σταθερά $C > 0$ για την οποία για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ισχύει

$$\mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i x_i \right\| \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p \right)^{1/p},$$

όπου $\vartheta_1, \vartheta_2 \ldots, \vartheta_n$ ανεξάρτητες standard p-stable τυχαίες μεταβλητές. Αν $ST_p(X) < \infty$ λέμε ότι ο X έχει stable type p. Το βασικό θεώρημα του έβδομου κεφαλαίου είναι το ακόλουθο :

Θεώρημα 1.0.19 (Pisier, 1983). *Έστω $1 < p < 2$ και q ο συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ τέτοιος ώστε, αν X είναι ένας χώρος Banach και $n \in \mathbb{N}$ με $n + 1 \leqslant \delta(\varepsilon, p)\,(ST_p(X))^q$, τότε υπάρχει υπόχωρος του X διάστασης n, ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$- ισομορφικός με τον ℓ_p^n. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $n + 1 \leqslant \delta(\varepsilon, p)\,(ST_p(X))^q$,*

$$\ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X$$

Αν $ST_p(X) = \infty$ τότε

$$\ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X, \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος ακολουθούμε μια πιθανοθεωρητική μέθοδο. Αναλυτικότερα, η διαδικασία είναι η εξής: Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ και σε κάθε $\omega \in \Omega$ αντιστοιχούμε έναν τελεστή $T_\omega : \ell_p^n \to X$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Έπειτα, δείχνουμε ότι για κάποιο $M > 0$ και κάθε $a \in S_{\ell_p^n}$ ισχύει

$$\mathbb{P}\left(\left|\,\|T(a)\| - M\right| \geqslant \delta_1 M\right) \leqslant 2\exp\left(-C(\varepsilon,p)(ST_p(X))^q\right)$$

για κάποιο κατάλληλο $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ και $C(\varepsilon, p) > 0$. Εφόσον η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε σταθεροποιημένο $a \in S_{\ell_p^n}$, για ένα δ_1-δίκτυο $\mathcal{N}$ της $S_{\ell_p^n}$ με $|\mathcal{N}| \leqslant e^{2n/\delta}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\exists a \in \mathcal{N} : \left|\,\|T(a)\| - M\right| \geqslant \delta_1 M\right) &\leqslant |\mathcal{N}| 2\exp\left(-C(\varepsilon,p)(ST_p(X))^q\right) \\ &\leqslant 2\exp\left(\frac{2n}{\delta} - C(\varepsilon,p)(ST_p(X))^q\right).\end{aligned}$$

Επομένως, αν $1 - 2\exp\left(\frac{2n}{\delta} - C(\varepsilon,p)(ST_p(X))^q\right) > 0$ τότε με θετική πιθανότητα έχουμε ότι

$$(1-\delta_1)M \leqslant \|T(a)\| \leqslant (1+\delta_1)M \text{ για κάθε } a \text{ στο } \mathcal{N}.$$

Αποδεικνύουμε ότι για κάποιο κατάλληλο $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ αν ισχύει ότι $n + 1 \leqslant \delta(ST_p(X))^q$ τότε η παραπάνω ποσότητα είναι θετική και επομένως υπάρχει $\omega \in \Omega$ τέτοιο ώστε

$$(1-\delta_1)M \leqslant \|T_\omega(a)\| \leqslant (1+\delta_1)M \text{ για κάθε } a \text{ στο } \mathcal{N}.$$

Συμπεραίνουμε τότε, λόγω κατάλληλης επιλογής του δ_1, ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} M \leqslant \|T_\omega(a)\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon} M \text{ για κάθε } a \text{ στην } S_{\ell_p^n}.$$

Συνεπώς, για τον τελεστή $T = \frac{1}{M} T_\omega : \ell_p^n \to X$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \|T(a)\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p},$$

για κάθε $a_1, a_2 \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν ότι $\ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X$.

Κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.0.19 παίζει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.0.20. *Έστω $1 < p < 2$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Έστω επίσης $\{Y_k\}_{k=1}^\infty$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές σε έναν χώρο Banach, με $\|Y_k\|_\infty \leqslant 1$, και $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $|b_k| \leqslant k^{-1/p}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν επιπλέον $\left\|\sum_{k=1}^\infty b_k Y_k\right\| \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, τότε για κάθε $t > 0$*

$$\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^\infty b_k Y_k\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^\infty b_k Y_k\right\|\right| > t\right) \leqslant 2e^{-D_p t^q},$$

όπου $D_p > 0$ κατάλληλη σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

Η απόδειξη της παραπάνω πρότασης θα γίνει με την βοήθεια της ανισότητας Azuma.

Πρόταση 1.0.21 (Ανισότητα Azuma)**.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και f τυχαία μεταβλητή στον $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Έστω επιπλέον $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών με $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\{\varnothing, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots$ και $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}_n)$ η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Για $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $d_k = \mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{F}_{k-1})$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|d_k\|_\infty^2 < \infty$, όπου $\|d_k\|_\infty = \sup\{|d_i(\omega)| : \omega \in \Omega\}$. Τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}) - \mathbb{E}f| > t\right) \leqslant 2e^{-t^2 \Big/ 4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|d_k\|_\infty^2}.$$

Αν επιπλέον η f είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη, τότε για κάθε $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(|f - \mathbb{E}f| > t\right) \leqslant 2e^{-t^2 \Big/ 4\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|d_k\|_\infty^2}.$$

Αποδεικνύουμε τις παραπάνω δυο προτάσεις στην αρχή του έβδομου κεφαλαίου.

Επιπλέον, σαν πόρισμα του θεωρήματος του Pisier έχουμε την ακόλουθη πρόταση, η οποία είχε αποδειχθεί ένα χρόνο νωρίτερα (1982) από τους Johnson και Schechtman [18].

Πρόταση 1.0.22 (Johnson-Schechtman)**.** *Για κάθε $1 < p < 2$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k \geqslant \delta n$ τέτοιο ώστε ο ℓ_p^k να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον ℓ_1^n. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$*

$$\ell_p^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_1^n \text{ για κάποιο } k \geqslant \delta n.$$

Ειδικότερα, ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον ℓ_1.

Στο τέλος του έβδομου κεφαλαίου δείχνουμε την type περίπτωση του θεωρήματος Maurey-Pisier η οποία προκύπτει από το θεώρημα του Pisier και το γεγονός ότι

$$\sup\{1 \leqslant p \leqslant 2 : \text{ ο } X \text{ έχει type } p\} = \sup\{1 \leqslant p < 2 : \text{ ο } X \text{ έχει stable type } p\}.$$

Θεώρημα 1.0.23 (Maurey-Pisier: type περίπτωση)**.** *Έστω X χώρος Banach και*

$$p_X = \sup\{1 \leqslant p \leqslant 2 : \text{ ο } X \text{ έχει type } 2\}.$$

Τότε ο ℓ_{p_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Τέλος, ολοκληρώνουμε την εργασία με δύο παραρτήματα. Στο Παράρτημα Α′ παρουσιάζουμε ένα θεώρημα σχετικά με τη προβολή Rademacher το οποίο μας είναι χρήσιμο στο Κεφάλαιο 4. Αρχικά ορίζουμε τις συναρτήσεις Walsh.

Ορισμός 1.0.24. Για κάθε $\varnothing \neq A \subseteq [n] \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\}$ ορίζουμε μια συνάρτηση $w_A : E_2^n \to \{-1, 1\}$ θέτοντας

$$w_A(\epsilon) = \prod_{i \in A} \epsilon_i.$$

Επίσης, θέτουμε $w_\varnothing(\epsilon) = 1$ για κάθε $\epsilon \in E_2^n$.

Οι συναρτήσεις w_A, $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ λέγονται συναρτήσεις Walsh.

Αν X χώρος Banach και $n \in \mathbb{N}$ κάθε συνάρτηση $f : E_2^n \to X$ αναπαρίσταται μονοσήμαντα στη μορφή

$$f = \sum_{A \subseteq [n]} w_A x_A,$$

για κάποια $x_A \in X$. Η προβολή Rademacher ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 1.0.25. Η προβολή Rademacher της $f : E_2^n \to X$ είναι η συνάρτηση $Rad_n f : E_2^n \to X$ με

$$Rad_n f(\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_{\{i\}},$$

όπου $f = \sum_{A \subseteq [n]} w_A x_A$.

Ο γραμμικός τελεστής $Rad_n : L_2(E_2^n; X) \to L_2(E_2^n; X)$ με $f \mapsto Rad_n f$ είναι πάντα φραγμένος και μάλιστα $\|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X) \to L_2(E_2^n;X)} \leqslant \sqrt{n}$. Το κύριο θεώρημα του παραρτήματος Α′ είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.0.26 (Pisier)**.** *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε χώρο Banach X που είναι ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert ισχύει*

$$\|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X) \to L_2(E_2^n;X)} \leqslant C \log\left(d(X, H) + 1\right),$$

όπου $d(X, H)$ η απόσταση Banach-Mazur των X και H.

Στο Παράρτημα Β′ δείχνουμε την αρχή τοπικής αυτοπάθειας.

Θεώρημα 1.0.27 (Αρχή τοπικής αυτοπάθειας)**.** *Έστω X χώρος Banach, $E \subseteq X^{**}$ και $F \subseteq X^*$ με $\dim E < \infty$ και $\dim F < \infty$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φραγμένος γραμικός τελεστής $T : E \to X$ τέτοιος ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$, $T(x) = x$ για κάθε $x \in E \cap X$ και $x^*(T(x^{**})) = x^{**}(x^*)$ για κάθε $x^* \in F$ και $x^{**} \in E$.*

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι ο X^{**} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X για κάθε χώρο Banach X.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον καθηγητή κ. Α. Γιαννόπουλο για την τιμή που μου έκανε να αναλάβει την επίβλεψη της διπλωματικής μου εργασίας και για τον χρόνο που αφιέρωσε για την ολοκλήρωσή της. Θα ήθελα επίσης να τον ευχαριστήσω για τις συμβουλές που μου έδωσε καθώς και τα μαθηματικά που μου δίδαξε καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής αυτής της εργασίας. Η συμβολή του ήταν θεμελιώδης. Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τους κ. Δ. Γατζούρα και κ. Α. Κατάβολο για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στο Κοινωφελές Ίδρυμα Αλέξανδρος Σ. Ωνάσης για τη χορήγηση υποτροφίας για το δεύτερο έτος των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Κεφάλαιο 2

Στοιχεία από την θεωρία πιθανοτήτων

2.1 Πραγματικές τυχαίες μεταβλητές

Ένας χώρος πιθανότητας είναι μια τριάδα $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ όπου $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα στο σύνολο Ω και το $\mathbb{P}$ μέτρο που ορίζεται στο μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Ορισμός 2.1.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται πραγματική **τυχαία μεταβλητή**.

Ορισμός 2.1.2. Το ολοκλήρωμα μιας ολοκληρώσιμης τυχαίας μεταβλητής X, λέγεται **μέση τιμή** της X, και συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}X = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Ορισμός 2.1.3. Η **κατανομή** μιας τυχαίας μεταβλητής $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ είναι το μέτρο μ που ορίζεται στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με

$$\mu(A) = \mathbb{P}(X \in A), \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Δύο τυχαίες μεταβλητές λέγονται **ισόνομες** αν έχουν την ίδια κατανομή.

Παρατήρηση 2.1.4. (i) Έστω $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$ και $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$ δύο χώροι πιθανότητας και $X : \Omega_1 \to \mathbb{R}$, $Y : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές. Θεωρούμε το χώρο γινόμενο $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)$ και ορίζουμε $X', Y' : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ με $X'(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1)$ και $Y'(\omega_1, \omega_2) = Y(\omega_2)$. Παρατηρούμε ότι η X' είναι ισόνομη με την X. Πράγματι, για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)(X' \in A) &= (\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)\left(\{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2 : X(\omega_1) \in A\}\right) \\ &= (\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2)\left(\{X \in A\} \times \Omega_2\right) = \mathbb{P}_1(X \in A).\end{aligned}$$

Όμοιως, η Y' είναι ισόνομη με την Y. Συμπεραίνουμε ότι για κάθε δύο τυχαίες μεταβλητές μπορούμε πάντα να θεωρούμε ότι έχουν κοινό πεδίο ορισμού. Ανάλογα, για μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_i\}_{i \in I}$, μπορούμε πάντα να θεωρούμε ότι ορίζονται σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας. Στο εξής όταν ανφερόμαστε σε τυχαίες μεταβλητές θα θεωρούμε πάντα ότι ορίζονται σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χωρίς να αναφερόμαστε σε αυτόν.

(ii) Αν επιπλέον το μέτρο $\mathbb{P}$ είναι μη ατομικό, τότε μπορούμε να θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή ορίζεται στον χώρο $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$.

Ορισμός 2.1.5. Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με κατανομή μ. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** της X αν για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mu(A) = \int_A f(x)d\lambda(x),$$

όπου λ το μέτρο Lebesgue.

Πρόταση 2.1.6. *Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή με κατανομή μ. Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*

$$\int F d\mu = \int F \circ X d\mathbb{P}.$$

Συνεπώς, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της X, τότε

$$\int_\Omega F \circ X d\mathbb{P} = \int_\mathbb{R} F(x)f(x)d\lambda(x).$$

Επίσης, έπεται ότι αν δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ισόνομες, τότε $\mathbb{E}\, F(X) = \mathbb{E}\, F(Y)$ για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Πρόταση 2.1.7. *Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος μέτρου και $T : X \to X$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το μέτρο*

$$\mu_T(B) = \mu(T^{-1}(B)), \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{B}.$$

Τότε, για κάθε $f : X \to \mathbb{R}$

$$\int f d\mu_T = \int f \circ T\, d\mu.$$

Ορισμός 2.1.8. Δύο τυχαίες μεταβλητές $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}(X \in A \text{ και } Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B).$$

Γενικότερα, μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X_i\}_{i\in I}$ λέγεται ανεξάρτητη, αν για κάθε πεπερασμένο $J \subseteq I$, και $\{A_j\}_{j\in J}$ Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X_j \in A_j \text{ για κάθε } j \in J) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(X_j \in A_j).$$

Ορισμός 2.1.9. Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Η **χαρακτηριστική συνάρτηση** $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ της X ορίζεται ως εξής:

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_\Omega e^{itX(\omega)} d\mathbb{P}(\omega) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Η βασική ιδιότητα των χαρακτηριστικών συναρτήσεων φαίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.1.10. *Αν δύο τυχαίες μεταβλητές $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ έχουν ίσες χαρακτηριστικές συναρτήσεις, τότε είναι ισόνομες. Δηλαδή, η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής καθορίζει πλήρως την κατανομή της.*

2.2 Συγκέντρωση του μέτρου στο διακριτό κύβο

Θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1,1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1,1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στο E_2^n ορίζουμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_n που δίνει μάζα 2^{-n} σε κάθε σημείο. Για κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ θέτουμε

$$\phi_A(x) = \inf\{\|x-y\|_2 : y \in \mathrm{conv}(A)\} \text{ για κάθε } x \in E_2^n. \tag{2.2.1}$$

Το βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου είναι το εξής.

Θεώρημα 2.2.1 (Talagrand). *Για κάθε $A \subseteq E_2^n$,*

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}. \tag{2.2.2}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς το πλήθος των σημείων του A. Αν $\mathrm{card}(A) = 1$ δηλαδή $A = \{y\}$, τότε

$$\phi_A(x) = \inf\{\|x-z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A) = \{y\}\} = \|x-y\|_2. \tag{2.2.3}$$

Άρα,

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) = \mathbb{E}\left(e^{\|x-y\|_2^2/8}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{x\in E_2^n} e^{\|x-y\|_2^2/8}. \tag{2.2.4}$$

Κάθε $x \in E_2^n$ διαφέρει από το y σε i θέσεις, $i = 0,1,\ldots,n$. Το πλήθος των $x \in E_2^n$ που διαφέρουν σε ακριβώς i θέσεις από το y είναι $\binom{n}{i}$. Παρατηρούμε ότι $\|x-y\|_2^2 = 4i$ όταν το x διαφέρει απο το y σε i θέσεις. Άρα,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\|x-y\|_2^2/8} &= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} e^{i/2} = \frac{1}{2^n}\left(1+e^{1/2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1+e^{1/2}}{2}\right)^n \leqslant 2^n = \frac{1}{\mu_n(A)}, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

αφού $e^{1/2} \leqslant e \leqslant 3$.

Έστω τώρα ότι $\mathrm{card}(A) \geqslant 2$. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $n = 1$. Αναγκαστικά έχουμε $A = E_1$, επομένως $\phi_A(x) = 0$ για κάθε $x \in E_1$. Άρα,

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) = \mathbb{E}(e^0) = 1 = 1/\mu_1(A). \tag{2.2.6}$$

Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε $A \subseteq E_{n+1}$ με $\mathrm{card}(A) \geqslant 2$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$A = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_{-1} \times \{-1\}) \tag{2.2.7}$$

όπου $A_1, A_{-1} \neq \varnothing$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\mathrm{card}(A_{-1}) \leqslant \mathrm{card}(A_1)$.

Λήμμα 2.2.2. *Για κάθε $x \in E_2^n$,*

$$\phi_A((x,1)) \leqslant \phi_{A_1}(x). \tag{2.2.8}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\|x-y\|_2 : y \in \mathrm{conv}(A_1)\} \subseteq \{\|(x,1)-z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A)\}. \tag{2.2.9}$$

Έστω $y \in \mathrm{conv}(A_1)$. Τότε, $y = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ όπου $t_i \geqslant 0$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ και $x_i \in A_1$. Τότε όμως $(x_i, 1) \in A$ και

$$\sum_{i=1}^m t_i(x_i, 1) = \Big(\sum_{i=1}^m t_i x_i, \sum_{i=1}^m t_i\Big) = (y, 1), \tag{2.2.10}$$

δηλαδή $(y,1) \in \mathrm{conv}(A)$. Αφού $\|x-y\|_2 = \|(x,1)-(y,1)\|_2$ και

$$\|(x,1)-(y,1)\|_2 \in \{\|(x,1)-z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A)\}, \tag{2.2.11}$$

έχουμε το ζητούμενο. ∎

Λήμμα 2.2.3. *Για κάθε $x \in E_2^n$ και για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$,*

$$\phi_A^2((x,-1)) \leqslant 4a^2 + a\phi_{A_1}^2(x) + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x). \tag{2.2.12}$$

Απόδειξη. Έστω $z_i \in \mathrm{conv}(A_i)$ $(i = 1, -1)$. Τότε, όπως προηγουμένως, $(z_i, i) \in \mathrm{conv}(A)$. Το $\mathrm{conv}(A)$ είναι κυρτό, άρα

$$z := a(z_1, 1) + (1-a)(z_{-1}, -1) = (az_1 + (1-a)z_{-1}, 2a-1) \in \mathrm{conv}(A). \tag{2.2.13}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \|(x,-1)-z\|_2^2 &= \|(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, -2a)\|_2^2 \\ &= \|(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, 0)\|_2^2 + \|(0,-2a)\|_2^2 \\ &\leqslant (a\|x-z_1\|_2 + (1-a)\|x-z_{-1}\|_2)^2 + 4a^2 \\ &\leqslant a\|x-z_1\|_2^2 + (1-a)\|x-z_{-1}\|_2^2 + 4a^2. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Αφού τα $z_i \in \mathrm{conv}(A_i)$ ήταν τυχόντα, έπεται ότι

$$\phi_A^2(x,-1) \leqslant a\phi_{A_1}^2(x) + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x) + 4a^2. \tag{2.2.15}$$

∎

Χρησιμοποιώντας τα δύο λήμματα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\phi_A^2/8} &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_{n+1}} e^{\phi_A^2(x)/8} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_A^2((x,1))/8} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_A^2((x,-1))/8} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} + \frac{1}{2^{n+1}} e^{a^2/2} \sum_{x \in E_n} e^{a\phi_{A_1}^2(x)/8 + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x)/8} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} \\ &\quad + \frac{1}{2^{n+1}} e^{a^2/2} \left(\sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} \right)^a \left(\sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_{-1}}^2(x)/8} \right)^{1-a} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(e^{\phi_{A_1}^2/8}) + \frac{1}{2} e^{a^2/2} \left(\mathbb{E}(e^{\phi_{A_1}^2/8})\right)^a \left(\mathbb{E}(e^{\phi_{A_{-1}}^2/8})\right)^{1-a}. \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Θέτουμε

$$u_1 = \mathbb{E}\left(e^{\phi_{A_1}^2/8}\right) \quad , \quad v_1 = \frac{1}{\mu_n(A_1)} \tag{2.2.17}$$

και

$$u_{-1} = \mathbb{E}\left(e^{\phi_{A_{-1}}^2/8}\right) \quad , \quad v_{-1} = \frac{1}{\mu_n(A_{-1})}. \tag{2.2.18}$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $u_1 \leqslant v_1$ και $u_{-1} \leqslant v_{-1}$ (επίσης, η $\mathrm{card}(A_{-1}) \leqslant \mathrm{card}(A_1)$ γράφεται $v_1 \leqslant v_{-1}$). Άρα η προηγούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\phi_A^2/8} &\leqslant \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}e^{a^2/2}(u_1)^a(u_{-1})^{1-a} \\ &\leqslant \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}e^{a^2/2}(v_1)^a(v_{-1})^{1-a} \\ &\leqslant \frac{v_1}{2}[1 + e^{a^2/2}(v_1/v_{-1})^{a-1}]. \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Η τελευταία ποσότητα γίνεται ελάχιστη για $a = -\ln(v_1/v_{-1})$. Η τιμή $-\ln(v_1/v_{-1})$ είναι περίπου ίση με $1 - v_1/v_{-1}$. Επιλέγουμε $a_0 = 1 - v_1/v_{-1}$. Αφού $v_1 \leqslant v_{-1}$ έχουμε $0 \leqslant a_0 \leqslant 1$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) \leqslant \frac{v_1}{2}[1 + e^{a_0^2/2}(1 - a_0)^{a_0-1}]. \tag{2.2.20}$$

Λήμμα 2.2.4. *Για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$ έχουμε*

$$1 + e^{a^2/2}(1-a)^{a-1} \leqslant \frac{4}{2-a}. \tag{2.2.21}$$

Απόδειξη. Απλές πράξεις δείχνουν ότι η ανισότητα που ζητάμε είναι ισοδύναμη με την

$$g(a) = \ln(2+a) - \ln(2-a) - a^2/2 - (a-1)\ln(1-a) \geqslant 0. \tag{2.2.22}$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $g'' \geqslant 0$ και $g'(0) = 0$. Άρα η g είναι αύξουσα στο $[0,1]$. Αφού $g(0) = 0$, έπεται το ζητούμενο. ■

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2.4 έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) &\leqslant \frac{v_1}{2}\frac{4}{2-a_0} = \frac{2v_1}{1 + v_1/v_{-1}} \\ &= \frac{2}{1/v_1 + 1/v_{-1}} = \frac{2}{\mu_n(A_1) + \mu_n(A_{-1})} \\ &= \frac{1}{\mu_{n+1}(A)}. \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

Η τελευταία ισότητα είναι φανερή αφού $\mu_{n+1}(A_i \times \{i\}) = \mu_n(A_i)/2$, $i = \pm 1$. Έτσι ολοκληρώνονται το επαγωγικό βήμα και η απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1. ■

Πόρισμα 2.2.5. *Για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(\phi_A \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}e^{-t^2/8}. \tag{2.2.24}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε $\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}$. Άρα,

$$e^{t^2/8}\mu_n(\phi_A \geqslant t) \leqslant \int_{\{\phi_A \geqslant t\}} e^{t^2/8} \leqslant \int_{\{\phi_A \geqslant t\}} e^{\phi_A^2/8} \tag{2.2.25}$$
$$\leqslant \mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}.$$

■

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του E_2^n. Η συνάρτηση ϕ_A του Θεωρήματος 2.2.1 και η συνάρτηση απόστασης από το A

$$d_n(x,A) = \min\left\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| : y \in A\right\} \tag{2.2.26}$$

συγκρίνονται σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 2.2.6. *Για κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ έχουμε*

$$2\sqrt{n}d_n(x,A) \leqslant \phi_A(x) \quad , \quad x \in E_2^n. \tag{2.2.27}$$

Απόδειξη. Έστω $x \in E_2^n$. Για κάθε $y \in A$ ισχύει

$$\langle x-y, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i(x_i - y_i) = 2nd_n(x,y) \geqslant 2nd_n(x,A). \tag{2.2.28}$$

Από την (2.2.28) έπεται ότι γιά κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$

$$\sqrt{n}\|x-y\|_2 \geqslant \langle x-y, x\rangle \geqslant 2nd_n(x,A). \tag{2.2.29}$$

Αυτό αποδεικνύει την (2.2.27). ■

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω λήμματα δείχνουμε την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα για τον E_2^n:

Θεώρημα 2.2.7. *Έστω $A \subseteq E_2^n$ με $\mu_n(A) = 1/2$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(A_t) \geqslant 1 - 2\exp(-t^2 n/2), \tag{2.2.30}$$

όπου $A_t = \{x \in E_2^n : d_n(x,A) < t\}$.

Απόδειξη. Αν $x \notin A_t$, τότε $d_n(x,A) \geqslant t$ και το Λήμμα 2.2.6 δείχνει ότι $\phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}$.

Ομως, από το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε

$$e^{t^2 n/2}\mu_n(x : \phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}) \leqslant \int_{E_2^n} \exp(\phi_A^2(x)/8)d\mu_n(x) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)} = 2, \tag{2.2.31}$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\mu_n(A_t^c) \leqslant \mu_n(x : \phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}) \leqslant 2\exp(-t^2 n/2). \tag{2.2.32}$$

■

Το Θεώρημα 2.2.7 έχει σαν συνέπεια την συγκέντρωση των κυρτών Lipschitz συναρτήσεων γύρω από τον μέσο Lévy τους. Υπενθυμίζουμε ότι ένα $M > 0$ είναι ένας μέσος Lévy για μια συνάρτηση f ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ αν $\mathbb{P}(\{f \geqslant M\}) \geqslant \frac{1}{2}$ και $\mathbb{P}(\{f \leqslant M\}) \geqslant \frac{1}{2}$.

Θεώρημα 2.2.8. *Θεωρούμε μια κυρτή Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με σταθερά Lipschitz σ. Έστω M ένας μέσος Lévy της f στον E_2^n. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(\{|f - M| \geqslant t\}) \leqslant 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{2.2.33}$$

Απόδειξη. Για τον M ισχύουν οι $\mu_n(\{f \geqslant M\}) \geqslant 1/2$ και $\mu_n(\{f \leqslant M\}) \geqslant 1/2$.

Θέτουμε $A = \{f \leqslant M\}$. Αφού η f είναι κυρτή, για κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$ έχουμε $f(y) \leqslant M$. Αν λοιπόν $f(x) \geqslant M + t$ για κάποιο $x \in E_2^n$, τότε

$$f(x) \geqslant M + t \geqslant f(y) + t \tag{2.2.34}$$

για κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$. Άρα, $\sigma\|x - y\|_2 \geqslant |f(x) - f(y)| \geqslant t$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\phi_A(x) \geqslant t/\sigma. \tag{2.2.35}$$

Από το Πόρισμα 2.2.5 και από την $\mu_n(A) \geqslant 1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f \geqslant M + t\}) &\leqslant \mu_n(\{\phi_A \geqslant t/\sigma\}) \\ &\leqslant \frac{1}{\mu_n(A)} e^{-t^2/8\sigma^2} \leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned} \tag{2.2.36}$$

Έστω $t > 0$ και $B = \{f \leqslant M - t\}$. Όπως πριν ελέγχουμε ότι

$$f(x) \geqslant M \implies \phi_B(x) \geqslant t/\sigma$$

και με χρήση του Πορίσματος 2.2.5 έχουμε

$$\mu_n(\{f(x) \geqslant M\}) \leqslant \mu_n(\{\phi_B t/\sigma\}) \leqslant \frac{1}{\mu_n(B)} e^{-t^2/8\sigma^2}.$$

Όμως $1/2 \leqslant \mu_n(\{f(x) \geqslant M\})$, άρα

$$\mu_n(B) \leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_n(\{|f - M| \geqslant t\}) &= \mu_n(\{f \geqslant M + t\}) + \mu_n(\{f \leqslant M - t\}) \\ &\leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2} + 2e^{-t^2/8\sigma^2} = 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned}$$

■

2.3 Ανισότητα Kahane-Khintchine

Ορισμός 2.3.1. Μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται **συμμετρική** αν για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X \in -A),$$

δηλαδή αν η X είναι ισόνομη με την $-X$. Επιπλέον, τότε ισχύει ότι $\mathbb{E}X = 0$.

Ορισμός 2.3.2. Μια τυχαία μεταβλητή $\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται **συμμετρική Bernoulli** αν

$$\mathbb{P}(\{\epsilon = 1\}) = \mathbb{P}(\{\epsilon = -1\}) = \frac{1}{2}.$$

Πρόταση 2.3.3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Ειδικότερα,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\right)^2 = n.$$

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η $\epsilon_i \epsilon_j$ είναι ισόνομη με την ϵ_i για $i \neq j$ και άρα

$$\mathbb{E}\epsilon_i\epsilon_j = \begin{cases} 0 & , \quad \text{αν } i \neq j \\ 1 & , \quad \text{αν } i = j \end{cases}.$$

■

Πρόταση 2.3.4. *Αν $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι συμμετρική τυχαία μεταβλητή και $\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι συμμετρική τυχαία μεταβλητή Bernoulli ανεξάρτητη από την X, τότε η $\epsilon|X|$ είναι ισόνομη με την X.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για $t > 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\epsilon|X| > t\right) &= \mathbb{P}\left(\epsilon|X| > t \text{ και } \epsilon = 1\right) + \mathbb{P}\left(\epsilon|X| > t \text{ και } \epsilon = -1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|X| > t \text{ και } \epsilon = 1\right) + \mathbb{P}\left(-|X| > t \text{ και } \epsilon = -1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(|X| > t\right)\mathbb{P}\left(\epsilon = 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X > t\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X < -t\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X > t\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X > t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X > t\right).
\end{aligned}$$

Ομοίως, αν $t \leqslant 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\epsilon|X| > t\right) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(|X| > t\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(-|X| > t\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(t < X < -t\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(X = 0\right) + \mathbb{P}\left(t < X < 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X > t\right),
\end{aligned}$$

λόγω της συμμετρίας της X.

Από τα παραπάνω έπεται ότι οι X και $\epsilon|X|$ έχουν την ίδια κατανομή και άρα είναι ισόνομες. ■

Θεώρημα 2.3.5 (Αρχή συστολής)**.** *Έστω $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών Bernoulli και έστω $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ κυρτή και αύξουσα. Αν $x_1, \ldots, x_n$ είναι διανύσματα σε ένα χώρο με νόρμα X και α_i πραγματικοί συντελεστές με $|\alpha_i| \leqslant 1$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε ισχύει*

$$\mathbb{E}F\Big(\Big\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \alpha_i x_i\Big\|\Big) \leqslant \mathbb{E}F\Big(\Big\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i\Big\|\Big).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbb{E}F\left(\Big\| \sum_i \epsilon_i \alpha_i x_i \Big\|\right).$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι κυρτή εφόσον η F και η $\|\cdot\|$ είναι κυρτές συναρτήσεις και η F είναι αύξουσα. Τότε η ϕ περιορισμένη στο κυρτό συμπαγές $[-1,1]^n$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε ένα ακραίο σημείο $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ όπου $\alpha_i = \pm 1$. Λόγω συμμετρίας των $(\epsilon_i)_{i \leqslant n}$ έχουμε το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 2.3.6. *Έστω $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών Bernoulli και $r \geqslant 1$. Τότε, για κάθε χώρο με νόρμα X, για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$,*

$$\mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i x_i \right\|^r \leqslant \mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|^r .$$

Θεώρημα 2.3.7 (Ανισότητα Khintchine). *Έστω $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών Bernoulli. Για κάθε $p > 0$ υπάρχουν σταθερές $A_p, B_p > 0$ που εξαρτώνται μόνο από το p ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$*

$$A_p \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\mathbb{E}\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_i \right|^p \right)^{1/p} \leqslant B_p \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} .$$

Επιπλέον, αν $p \geqslant 2$ τότε $A_p = 1$, δηλαδή,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\mathbb{E}\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_i \right|^p \right)^{1/p} ,$$

ενώ αν $p \leqslant 2$ τότε $B_p = 1$, δηλαδή,

$$\left(\mathbb{E}\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_i \right|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} .$$

Μια απόδειξη της ανισότητας Khntchine μπορεί να δοθεί με βάση το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω $(\epsilon_i)_{i \leqslant n}$ μια πεπερασμένη ακολουθία ανεξάρτητων, συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών Bernoulli. Αν $(\alpha_i)_{i \leqslant n}$ πεπερασμένη ακολουθία πραγματικών συντελεστών, για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \epsilon_i \right| > t \right) \leqslant 2 \exp\left(-t^2 / 2\|\alpha\|_2^2 \right) ,$$

όπου $\|\alpha\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$.

Απόδειξη. Για κάθε $\lambda > 0$ από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_i \alpha_i \epsilon_i > t \right) &\leqslant e^{-\lambda t} \mathbb{E} \exp\left(\lambda \sum_i \alpha_i \epsilon_i \right) \\ &= e^{-\lambda t} \prod_i \mathbb{E} e^{\lambda \alpha_i \epsilon_i} \\ &= e^{-\lambda t} \prod_i \cosh(\lambda \alpha_i). \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τα αναπτύγματα Taylor βρίσκουμε ότι $\cosh x \leqslant e^{x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα, έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\sum_i \alpha_i \epsilon_i > t\right) \leqslant \exp\left(-\lambda t + \frac{1}{2}\lambda^2 \sum_i \alpha_i^2\right)$$

Βελτιστοποιώντας ως προς λ το δεξιό μέλος βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\sum_i \alpha_i \epsilon_i > t\right) \leqslant \exp\left(-t^2/2\|\alpha\|_2^2\right).$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για τα $-\alpha_i$ στη θέση των α_i έχουμε το ζητούμενο. ∎

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το εξής λήμμα.

Λήμμα 2.3.9. *Έστω (Ω, μ) χώρος πιθανότητας και $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμη. Τότε,*

$$\int_\Omega f^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{\omega : f(\omega) \geqslant t\})dt.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(\{\omega : f(\omega) \geqslant t\})dt &= \int_0^\infty pt^{p-1}\left(\int_\Omega \mathbf{1}_{\{f(\omega)\geqslant t\}}(\omega)d\mu(\omega)\right)dt \\ &= \int_\Omega \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbf{1}_{\{f(\omega)\geqslant t\}}(t)dtd\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \left(\int_0^{f(\omega)} pt^{p-1}dt\right)d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega f(\omega)^p d\mu(\omega). \end{aligned}$$

∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.7. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i\Big\|_{L_p(E_2^n)}^p &= \int_0^\infty pt^{p-1}\mathbb{P}\left(\Big|\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i\Big| \geqslant t\right)dt \\ &\leqslant \int_0^\infty pt^{p-1}2\exp\left(-\frac{ct^2}{\|a\|_2^2}\right)dt \\ &\leqslant (c_2\sqrt{p}\|a\|_2)^p, \end{aligned}$$

απ᾽ όπου έπεται η δεξιά ανισότητα του θεωρήματος. Για την αριστερή ανισότητα στην περίπτωση που $0 < p < 2$, χρησιμοποιούμε το εξής τέχνασμα. Για δοθέν $0 < p < 2$, ο 2 είναι κυρτός συνδυασμός των p και 4. Μπορούμε δηλαδή να βρούμε $\theta \in (0,1)$ τέτοιον ώστε $2 = p\theta + 4(1-\theta)$: η τιμή του θ είναι $2/(4-p)$. Αν $Y = \sum_{i=1}^n a_k\epsilon_i$ τότε, από την ανισότητα Hölder,

$$\mathbb{E}|Y|^2 = \mathbb{E}(|Y|^{p\theta}|Y|^{4(1-\theta)}) \leqslant (\mathbb{E}|Y|^p)^\theta \left(\mathbb{E}|Y|^4\right)^{1-\theta}. \tag{2.3.1}$$

Έχουμε δείξει ότι $\|Y\|_{L_4} \leqslant c_0\|Y\|_{L_2}$. Άρα, η (2.3.1) μας δίνει

$$\mathbb{E}|Y|^2 \leqslant c_0^{4(1-\theta)}\left(\mathbb{E}|Y|^p\right)^\theta \left(\mathbb{E}|Y|^2\right)^{2(1-\theta)}.$$

Παρατηρήστε ότι $1 - 2(1-\theta) = p\theta/2$. Έπεται ότι

$$(\mathbb{E}|Y|^2)^{\frac{p\theta}{2}} \leqslant c_0^{4(1-\theta)} \left(\mathbb{E}|Y|^p\right)^{\theta},$$

απ᾽ όπου έπεται η

$$\|Y\|_{L_2} \leqslant c_p \|Y\|_{L_p}$$

για κάποια σταθερά $c_p > 0$ που εξαρτάται μόνο από το p. ∎

Παρατήρηση 2.3.10. Το επιχείρημα δείχνει ότι $B_p = O(\sqrt{p})$ καθώς $p \to +\infty$ και η A_p είναι φραγμένη μακριά από το μηδέν: δηλαδή, υπάρχει μια σταθερά $m > 0$ ώστε $|A_p| \geqslant m$ για κάθε $p \geqslant 1$.

Η ανισότητα Kahane-Khintchine γενικεύει την ανισότητα του Khintchine.

Θεώρημα 2.3.11 (Ανισότητα Kahane-Khintchine)**.** *Έστω $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών Bernoulli. Για κάθε $p \geqslant 1$ υπάρχει μια σταθερά $K_p > 0$ που εξαρτάται μόνο από το p, ώστε για κάθε χώρο με νόρμα X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$*

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^p\right)^{1/p} \leqslant K_p\, \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.11 βασίζεται στο εξής πόρισμα του Θεωρήματος 2.2.8.

Πόρισμα 2.3.12. *Έστω X χώρος με νόρμα και $(x_i)_{i\leqslant n}$ ακολουθία διανυσμάτων στον X. Αν M είναι ένας μέσος Lévy της $\|\sum_{i\leqslant n}\epsilon_i x_i\|$ στον E_2^n τότε, για κάθε $t \geqslant 0$,*

$$\mu_n\left(\{|\,\|\sum_{i\leqslant n}\epsilon_i x_i\| - M\,| \geqslant t\}\right) \leqslant 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{2.3.2}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $f(u) = \|\sum_{i\leqslant n} u_i x_i\|$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της νόρμας ελέγχουμε εύκολα ότι η f είναι κυρτή συνάρτηση. Έστω $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| \leqslant 1$ και $u, v \in \mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\left|x^*\left(\sum_{i\leqslant n} u_i x_i - \sum_{i\leqslant n} v_i x_i\right)\right| &= \left|\sum_{i\leqslant n} u_i x^*(x_i) - \sum_{i\leqslant n} v_i x^*(x_i)\right| \\ &= \left|\sum_{i\leqslant n}(u_i - v_i)x^*(x_i)\right| \\ &\leqslant \left(\sum_{i\leqslant n}|x^*(x_i)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\leqslant n}(u_i - v_i)^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant \sigma\|u - v\|_2.\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach συμπεραίνουμε ότι

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \left\|\sum_{i\leqslant n} u_i x_i - \sum_{i\leqslant n} v_i x_i\right\| \leqslant \sigma\|u - v\|_2, \tag{2.3.4}$$

επομένως η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά σ. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.2.8 για την f έχουμε το ζητούμενο. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.11. Θεωρούμε την $f : E_2^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \Big| \, \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \| - M \, \Big|. \tag{2.3.5}$$

Από το Πόρισμα 2.3.12, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = t^2/8\sigma^2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{E_2^n} \Big| \, \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \| - M \, \Big|^p d\mu_n(\epsilon) &= p \int_0^\infty t^{p-1} \mu_n(\{\epsilon : |\| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \| - M| \geqslant t\}) dt \\ &\leqslant 4 \int_0^\infty p t^{p-1} e^{-t^2/8\sigma^2} dt \\ &= 2^{p+1} p (\sqrt{2}\sigma)^p \int_0^\infty e^{-x} x^{p/2-1} dx \leqslant (K\sigma\sqrt{p})^p.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\left(\int_{E_2^n} | \, \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \| - M |^p d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/p} \leqslant K\sigma\sqrt{p}. \tag{2.3.6}$$

Από την τριγωνική ανισότητα,

$$\left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \|^p d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/p} \leqslant M + K_1 \sigma p^{1/2} \tag{2.3.7}$$

για κάθε $p \geqslant 1$. Τέλος, παρατηρούμε ότι $M \leqslant 2\mathbb{E} \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \|$ από την ανισότητα του Markov. □

Πόρισμα 2.3.13. *Από την ανισότητα Kahane, εκμεταλλευόμενοι και την ανισότητα Hölder, συνάγουμε ότι αν $1 \leqslant q < p$, τότε για κάθε χώρο με νόρμα X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$*

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q} \leqslant \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^p \right)^{1/p} \leqslant K_p \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q},$$

όπου K_p η σταθερά στην ανισότητα Kahane.

2.4 Τυχαίες μεταβλητές με τιμές σε μετρήσιμους χώρους

Ορισμός 2.4.1. Έστω $(E, \mathcal{B})$ μετρήσιμος χώρος και $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Μια $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ μετρήσιμη συνάρτηση $S : \Omega \to E$ λέγεται **τυχαία μεταβλητή** με τιμές στον E.

Ειδικότερα, αν X είναι χώρος Banach, μια συνάρτηση $S : \Omega \to X$ λέγεται τυχαία μεταβλητή με τιμές στον X αν είναι $\mathcal{A} - \mathcal{B}(X)$ μετρήσιμη, όπου $\mathcal{B}(X)$ η Borel σ-άλγεβρα του X.

Ορισμός 2.4.2. Έστω $(E, \mathcal{B})$ μετρήσιμος χώρος και $S : \Omega \to E$ τυχαία μεταβλητή με τιμές στον E. Η **κατανομή** της S είναι το μέτρο μ που ορίζεται στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ με

$$\mu(A) = \mathbb{P}(S \in A), \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{B}.$$

Δύο τυχαίες μεταβλητές $S, T : \Omega \to E$, με τιμές σε έναν χώρο Banach E, λέγονται **ισόνομες**, αν έχουν την ίδια κατανομή.

Η επόμενη πρόταση θα φανεί χρήσιμη στο Κεφάλαιο 7

Πρόταση 2.4.3. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Δύο τυχαίες μεταβλητές $S, T : \Omega \to X$ με τιμές στον X, είναι ισόνομες αν και μόνο αν η $x^* \circ S$ είναι ισόνομη με την $x^* \circ T$ για κάθε $x^* \in X^*$.*

Ειδικότερα, αν $\mathbb{E}(e^{ix^* \circ S}) = \mathbb{E}(e^{ix^* \circ T})$ για κάθε $x^* \in X^*$ τότε η S είναι ισόνομη με την T.

Ορισμός 2.4.4. Μια τυχαία μεταβλητή $S : \Omega \to E$ με τιμές σε ένα μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{B})$, λέγεται **συμμετρική** αν

$$\mathbb{P}(S \in A) = \mathbb{P}(S \in -A), \quad \text{για κάθε } A \in \mathbb{B},$$

δηλαδή αν η S είναι ισόνομη με την $-S$.

Ορισμός 2.4.5. Έστω $\{S_i\}_{i \in I}$ μια οικογένεια από τυχαίες μεταβλητές με τιμές σε ένα μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{B})$. Η $\{S_i\}_{i \in I}$ λέγεται **ανεξάρτητη**, αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $J \subseteq I$

$$\mathbb{P}\left(S_j \in A_j \ \text{για κάθε } j \in J\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}\left(S_j \in A_j\right),$$

για οποιαδήποτε $\{A_j\}_{j \in J}$ στην $\mathcal{B}$.

Πρόταση 2.4.6. *Έστω $(E_1, \mathcal{A}_1), (E_2, \mathcal{A}_2)$ μετρήσιμοι χώροι και $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Αν $F : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$, μετρήσιμη και $X : \Omega \to E_1$, $Y : \Omega \to E_2$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον E_1 και E_2 αντίστοιχα, τότε*

$$\int \int F\left(X(\omega), Y(\omega')\right) d\mathbb{P}(\omega) d\mathbb{P}(\omega') = \int F\left(X(\omega), Y(\omega)\right) d\mathbb{P}(\omega),$$

εφόσον τα ολοκληρώματα υπάρχουν (το $\int\int F\left(X(\omega), Y(\omega')\right) d\mathbb{P}(\omega) d\mathbb{P}(\omega')$ υπάρχει αν και μόνο αν το $\int F\left(X(\omega), Y(\omega)\right) d\mathbb{P}(\omega)$ υπάρχει και όταν υπάρχουν είναι ίσα).

Ειδικότερα, αν $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε

$$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X \, \mathbb{E}Y.$$

Κεφάλαιο 3

Πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα και υπεργινόμενα(**ultraproducts**)

3.1 Πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα

Ορισμός 3.1.1. Έστω X και Y ισόμορφοι χώροι Banach. Η **απόσταση Banach-Mazur** των X και Y συμβολίζεται με $d(X,Y)$ και ορίζεται ως εξής:

$$d(X,Y) = \inf\left\{\|T\|\left\|T^{-1}\right\| : T : X \to Y \text{ισομορφισμός}\right\}.$$

Επιπλέον, αν $d(X,Y) \leqslant a$ για κάποιο $a > 1$ τότε λέμε ότι οι X και Y είναι a-**ισομορφικοί**.

Παρατηρούμε ότι για X και Y ισόμορφους χώρους Banach ισχύει πάντα ότι $d(X,Y) \geqslant 1$. Επιπλέον, αν $d(X,Y) < a$ για κάποιον $a > 1$, τότε υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε $\|T\| = 1$ και $\left\|T^{-1}\right\| \leqslant a$, δηλαδή

$$\frac{1}{a}\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant \|x\| \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Επίσης, αν X, Y, Z είναι ισόμορφοι χώροι Banach τότε $d(X,Z) \leqslant d(X,Y)d(Y,Z)$. Πράγματι, υπάρχουν $T : X \to Y$ και $S : Y \to Z$ με $\left\|T^{-1}\right\|, \left\|S^{-1}\right\| \leqslant 1$, $\|T\| \leqslant d(X,Y)$ και $\|S\| \leqslant d(Y,Z)$. Επομένως, για τον τελεστή $T \circ S : X \to Z$ έχουμε $\|T \circ S\| \leqslant \|T\|\|S\| \leqslant d(X,Y)d(Y,Z)$ και $\left\|(T \circ S)^{-1}\right\| = \left\|S^{-1} \circ T^{-1}\right\| \leqslant \left\|S^{-1}\right\|\left\|T^{-1}\right\| \leqslant 1$.

Ορισμός 3.1.2. Έστω X και Y δύο χώροι Banach και $a \geqslant 1$. Αν υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $T : X \to T(X) \subseteq Y$ τέτοια ώστε

$$\|T\|\left\|T^{-1}\right\| \leqslant a,$$

τότε λέμε ότι ο X **εμφυτεύεται** a-**ισομορφικά** στον Y και γράφουμε

$$X \overset{a}{\hookrightarrow} Y.$$

Ορισμός 3.1.3. Έστω X και Y χώροι Banach. Λέμε ότι ο X είναι **πεπερασμένα αναπαραστάσιμος** στον Y αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε υπόχωρο E του X πεπερασμένης διάστασης, υπάρχει υπόχωρος F του Y με $\dim F = \dim E$ και $d(E,F) < 1 + \varepsilon$. Δηλαδή, $E \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} Y$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε E υπόχωρο του X πεπερασμένης διάστασης.

Επίσης, για $a > 1$, λέμε ότι ο X είναι a-**πεπερασμένα αναπαραστάσιμος** στον Y, αν για κάθε E πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο του X υπάρχει υπόχωρος F του Y με $\dim F = \dim E$ και $d(E,F) < a$. Επομένως, ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y αν και μόνο αν είναι a-αναπαραστάσιμος για κάθε $a > 1$.

Πρόταση 3.1.4. *Έστω X,Y και Z χώροι Banach. Αν ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y και ο Y είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Z τότε ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Z. Δηλαδή, η πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα ικανοποιεί την μεταβατική ιδιότητα.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και E υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Εφόσον ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y υπάρχει F υπόχωρος του Y με $\dim F = \dim E$ και $d(E,F) < \sqrt{1+\varepsilon}$. Επίσης, εφόσον ο Y είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Z υπάρχει H υπόχωρος του Z πεπερασμένης διάστασης με $\dim H = \dim F = \dim E$ και $d(F,H) < \sqrt{1+\varepsilon}$. Επομένως, $d(E,H) \leqslant d(E,F)d(F,H) < (\sqrt{1+\varepsilon})^2 = 1+\varepsilon$. Έπεται ότι ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Z. ■

Έστω X χώρος Banach και $1 \leqslant p < \infty$. Παρατηρούμε ότι αν ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X$. Από το παρακάτω λήμμα φαίνεται ότι αυτή η συνθήκη είναι επίσης και ικανή ώστε να είναι ο ℓ_p πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Λήμμα 3.1.5. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα ακολουθία υποχώρων του X πεπερασμένης διάστασης, τέτοια ώστε ο υπόχωρος $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ να είναι πυκνός στον X. Έστω Y χώρος Banach. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y.*

(ii) *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχουν υπόχωρος E του Y με $\dim E = \dim X_n$ και $T_n : X_n \to E$ γραμμικός ισομορφισμός τέτοιος ώστε $\|T_n\|\|T_n^{-1}\| < 1+\varepsilon$.*

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii): Άμεσο.

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Έστω $\varepsilon > 0$ και F υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Έστω $\dim F = N$ και $F = \operatorname{span}\{x_1^0, \dots, x_N^0\}$. Η συνάρτηση $S_{\ell_1^N} \ni a \mapsto \left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\|$ είναι συνεχής και εφόσον η σφαίρα $S_{\ell_1^N}$ είναι συμπαγής συμπεραίνουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{C} \leqslant \left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\| \leqslant C, \text{ για κάθε } a \in S_{\ell_1^N}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{C}\sum_{j=1}^N |a_j| \leqslant \left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\| \leqslant C\sum_{j=1}^N |a_j|$$

για κάθε $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$.

Έστω $\delta > 0$. Επειδή ο $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι πυκνός υπόχωρος του X και η $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $x_j \in X_n$ τέτοια ώστε $\|x_j - x_j^0\| < \delta$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$. Από την υπόθεση (ii) υπάρχουν υπόχωρος E του Y με $\dim E = \dim X_n$ και $T_n : X_n \to E$ τέτοιοι ώστε

$$\|x\| \leqslant \|T_n(x)\| \leqslant (1+\varepsilon/2)\|x\|, \text{ για κάθε } x \in X_n.$$

Ορίζουμε $S : F \to Y$ με $S(x_j^0) = T_n(x_j)$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Τότε για κάθε $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left\| S\left(\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right)\right\| &= \left\| T_n\left(\sum_{j=1}^N a_j x_j\right)\right\| \leqslant (1+\varepsilon/2)\left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j\right\| \\ &\leqslant (1+\varepsilon/2)\left\|\sum_{j=1}^N a_j(x_j - x_j^0)\right\| + (1+\varepsilon/2)\left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\| \\ &\leqslant (1+\varepsilon/2)\sum_{j=1}^N |a_j|\delta + (1+\varepsilon/2)\left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\| \\ &\leqslant (1+\varepsilon/2)\delta C\left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\| + (1+\varepsilon/2)\left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\| \\ &= (1+\varepsilon/2)(1+\delta C)\left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\|.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\left\| S\left(\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right)\right\| &= \left\| T_n\left(\sum_{j=1}^N a_j x_j\right)\right\| \geqslant \left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j\right\| \\ &\geqslant \left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\| - \left\|\sum_{j=1}^N a_j(x_j^0 - x_j)\right\| \\ &\geqslant \left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\| - \delta C\left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\| \\ &= (1-\delta C)\left\|\sum_{j=1}^N a_j x_j^0\right\|.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε $0 < \frac{(1+\varepsilon/2)(1+\delta C)}{(1-\delta C)} < 1+\varepsilon$. Τότε, ο $S : F \to S(F) \leqslant Y$ ικανοποιεί την

$$\|S\|\|S^{-1}\| < 1+\varepsilon.$$

Ο F ήταν τυχών υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης, συνεπώς ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y. ■

Πρόταση 3.1.6. *Κάθε χώρος Banach είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον c_0.*

Απόδειξη. Έστω E υπόχωρος του X με $\dim E = n < \infty$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\dim E^* = n$, όπου E^* ο δυϊκός του E. Θεωρούμε ένα πεπερασμένο δ-δίκτυο $\mathcal{N} = \{x_1^*, \dots, x_N^*\}$ της μοναδιαίας σφαίρας του E^*, όπου $\delta > 0$ τέτοιος ώστε $\frac{1}{1-\delta} < 1+\varepsilon$. Δηλαδή το $\mathcal{N}$ είναι τέτοιο ώστε για κάθε x^* στην μοναδιαία σφαίρα του E^* υπάρχει $x_i^* \in \mathcal{N}$ ώστε $\|x^* - x_i^*\| \leqslant \delta$. Ορίζουμε $T : E \to \ell_\infty^N$ με

$$T(x) = \{x_i^*(x)\}_{i=1}^\infty \quad \text{για κάθε } x \in E.$$

Τότε, ο T είναι γραμμικός και

$$\|T(x)\| = \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x_i^*(x)| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant N} \|x_i^*\|\,\|x\| = \|x\|,$$

διότι $\|x_i^*\| = 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant N$.

Επίσης, για $x \in E$, από το θεώρημα Hahn-Banach έχουμε ότι υπάρχει $x^* \in E^*$ ώστε $\|x\| = x^*(x)$ και $\|x^*\| = 1$. Υπάρχει $1 \leqslant i_0 \leqslant N$ τέτοιος ώστε $\left\|x^* - x^*_{i_0}\right\| \leqslant \delta$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \|x\| = |x^*(x)| &\leqslant |x^*(x) - x^*_{i_0}(x)| + |x^*_{i_0}(x)| \\ &\leqslant \left\|x^* - x^*_{i_0}\right\| \|x\| + \max_{1\leqslant i\leqslant N} |x^*_i(x)| \\ &\leqslant \delta \|x\| + \|T(x)\| . \end{aligned}$$

Άρα,

$$(1-\delta)\|x\| \leqslant \|T(x)\| \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Τελικά,

$$(1-\delta)\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant \|x\| \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Δηλαδή, για τον γραμμικό τελεστή $T : E \to T(E) \subseteq c_0$ ισχύει $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| \leqslant \frac{1}{1-\delta} < 1+\varepsilon$, άρα $d(E, T(E)) < 1+\varepsilon$. Έπεται ότι ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον c_0. ■

Πρόταση 3.1.7. *Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ ο $L_p = L_p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον ℓ_p, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_k = \chi_{\left(\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right)}$. Τότε $f_k \in L_p$. Θέτουμε

$$E_n = \operatorname{span}\{f_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\right\|_{L_p} &= \left(\int_{[0,1]} \left|\sum_{k=1}^n a_k f_k(x)\right|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} = \left(\int_{[0,1]} \sum_{k=1}^n |a_k|^p |f_k(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \int_{[0,1]} |f_k(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \frac{1}{n}\right)^{1/p} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Επομένως, η απεικόνιση $T_n : E_n \to \ell_p^n$ με $T_n(f_k) = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p} e_k$ είναι ισομετρία. Επειδή το σύνολο $\bigcup_{n=1}^\infty E_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του L_p, το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα 3.1.5. ■

Με παρόμοιο τρόπο, θεωρώντας $T_n : \ell_p^n \to E_n$ με $T(e_k) = f_k$, μπορούμε να δείξουμε ότι ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον L_p, ωστόσο αυτό προκύπτει άμεσα από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.1.8. *Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ ο ℓ_p εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L_p = L_p([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ στον L_p τέτοια ώστε οι f_n έχουν ξένους φορείς και $\|f_n\|_p = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. ■

Σύμφωνα με την αρχή τοπικής αυτοπάθειας, την οποία αποδεικνύουμε στο Παράρτημα Β′, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.9. *Ο X^{**} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X για κάθε χώρο Banach X.*

Θεώρημα 3.1.10 (Αρχή τοπικής αυτοπάθειας)**.** *Έστω X χώρος Banach, $E \subseteq X^{**}$ και $F \subseteq X^*$ με $\dim E < \infty$ και $\dim F < \infty$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : E \to X$ τέτοιος ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| < 1+\varepsilon$, $T(x) = x$ για κάθε $x \in E \cap X$ και $x^*(T(x^{**})) = x^{**}(x^*)$ για κάθε $x^* \in F$ και $x^{**} \in E$.*

3.2 Υπεργινόμενα (Ultraproducts)

Σε αυτή την παράγραφο ορίζουμε τα υπεργινόμενα χώρων Banach τα οποία θα χρειαστούν στην επόμενη παράγραφο όπου θα φανεί η σχέση τους με την πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα αλλά και στο Κεφάλαιο 5 ως εργαλείο για την απόδειξη μιας πρότασης από την θεωρία τελεστών. Στα παρακάτω θεωρούμε I τυχόν άπειρο σύνολο.

Ορισμός 3.2.1. Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του I λέγεται **φίλτρο** αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) $\varnothing \notin \mathcal{F}$

(ii) Αν $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ τότε $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

(iii) Αν $A \subseteq I$, $F \in \mathcal{F}$ και $F \subseteq A$ τότε $A \in \mathcal{F}$.

Ορισμοί 3.2.2. (i) Έστω $\mathcal{F}$ φίλτρο στο $\mathbb{N}$. Λέμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$ ως προς το φίλτρο $\mathcal{F}$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ για κάθε $n \in F$.
Συμβολίζουμε

$$\lim_{n,\mathcal{F}} a_n = a.$$

(ii) Λέμε ότι μια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Banach X συγκλίνει σε ένα $x \in X$ ως προς το φίλτρο $\mathcal{F}$ αν

$$\lim_{n,\mathcal{F}} \|x_n - x\| = 0.$$

Συμβολίζουμε

$$\lim_{n,\mathcal{F}} x_n = x.$$

(iii) Γενικότερα, αν X χώρος Banach, I σύνολο δεικτών, $\mathcal{F}$ φίλτρο στο I και $\{x_i\}_{i\in I}$ με $x_i \in X$ για κάθε $i \in I$ γράφουμε

$$\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$$

για κάποιο $x \in X$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\|x_i - x\| < \varepsilon$ για κάθε $i \in F$.

Σε κάθε περίπτωση, αν υπάρχει το όριο ως προς το $\mathcal{F}$ τότε είναι μοναδικό.

Παράδειγμα 3.2.3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_n = \{m \in \mathbb{N} : m \geqslant n\}$. Τότε η οικογένεια $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : B_n \subseteq A$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}\}$ είναι φίλτρο στο $\mathbb{N}$. Αν $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία σε έναν χώρο Banach τότε $\lim_{n,\mathcal{U}} x_n = x$ αν και μόνο αν $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Τα όρια ως προς φίλτρα ικανοποιούν ιδιότητες ανάλογες με τις γνωστές ιδιότητες των ορίων.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω $\mathcal{F}$ φίλτρο στο I και $\{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I}$ με x_i, y_i σε έναν χώρο Banach X έτσι ώστε $\lim_{\mathcal{U}} x_i = x$ και $\lim_{\mathcal{U}} y_i = y$ για κάποια $x, y \in X$. Τότε*

(i) $\lim_{\mathcal{F}}(x_i + \lambda y_i) = x + \lambda y$ *για κάθε* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) *Αν* $K \subseteq X$ *και* $\{i \in I : x_i \in K\} \in \mathcal{F}$ *τότε* $x \in \overline{K}$.

Ορισμός 3.2.5. Ένα φίλτρο $\mathcal{U}$ στο I λέγεται **υπερφίλτρο** αν είναι μεγιστικό ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι. Δηλαδή, αν $\mathcal{F}$ φίλτρο στο I και $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}$ τότε $\mathcal{U} = \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 3.2.6. Έστω $i_0 \in I$. Ορίζουμε $\mathcal{U}_{i_0} = \{U \subseteq I : i_0 \in U\}$. Εύκολα δείχνουμε ότι το $\mathcal{U}_{i_0}$ είναι υπερφίλτρο στο I. Για $\{x_i\}_{i\in I}$ με $x_i \in X$ για κάθε $i \in I$ ισχύει

$$\lim_{\mathcal{U}_{i_0}} x_i = x_{i_0}.$$

Ορισμός 3.2.7. Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο I λέγεται μη τετριμμένο αν δεν είναι της μορφής $\mathcal{U}_{i_0}$ για κάποιο $i_0 \in I$.

Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο I δεν περιέχει πεπερασμένα σύνολα.

Από την επόμενη πρόταση, η απόδειξη της οποίας είναι μια απλή εφαρμογή του λήμματος του Zorn, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν μη τετριμμένα υπερφίλτρα στο I.

Πρόταση 3.2.8. *Για κάθε φίλτρο $\mathcal{F}$ στο I υπάρχει υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ ώστε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.*

Η οικογένεια $\mathcal{F} = \{I \setminus A : A \text{ πεπερασμένο }\}$ των συμπεπερασμένων υποσυνόλων του I, είναι φίλτρο. Αν $\mathcal{U}$ είναι υπερφίλτρο τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ τότε το $\mathcal{U}$ είναι μη τετριμμένο.

Πρόταση 3.2.9. *Έστω $\mathcal{F}$ φίλτρο σε ένα μη κενό σύνολο I. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

(i) *Το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο.*

(ii) *Για κάθε $A \subseteq I$ είτε $A \in \mathcal{F}$ είτε $I \setminus A \in \mathcal{F}$.*

(iii) *Αν $A \subseteq I$ και $A \cap F \neq \varnothing$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$ τότε $A \in \mathcal{F}$.*

(iv) *Αν $A, B \subseteq I$ και $A \cup B \in \mathcal{F}$ τότε είτε $A \in \mathcal{F}$ είτε $B \in \mathcal{F}$.*

Απόδειξη.

(i) ⇒ (iv) : Έστω $A, B \subseteq I$ με $A \cup B \in \mathcal{F}$. Υποθέτουμε ότι $A \notin \mathcal{F}$ και θα δείξουμε ότι $B \in \mathcal{F}$. Ορίζουμε

$$\mathcal{F}' = \{C \subseteq I : A \cup C \in \mathcal{F}\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\mathcal{F}'$ ειναι φίλτρο. Επίσης είναι σαφές ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Επομένως, εφόσον το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο έπεται ότι $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $A \cup B \in \mathcal{F}$, δηλαδή $B \in \mathcal{F}'$. Άρα $B \in \mathcal{F}$.

(iv) ⇒ (ii) : Εφόσον η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι μη κενή έχουμε ότι $I \in \mathcal{F}$. Συνεπώς, για κάθε $A \subseteq I$ ισχύει $A \cup (I \setminus A) \in \mathcal{F}$. Από το (iv) έπεται ότι $A \in \mathcal{F}$ ή $I \setminus A \in \mathcal{F}$.

(ii) ⇒ (iii) : Έστω $A \subseteq I$ τέτοιο ώστε $A \cap F \neq \varnothing$ για κάθε $F \in \mathcal{F}$. Αν $F \notin \mathcal{F}$ τότε $I \setminus A \in \mathcal{F}$ και άρα $A \cap (I \setminus A) \neq \varnothing$. Άτοπο. Άρα $A \in \mathcal{F}$.

(iii) ⇒ (i) : Έστω $\mathcal{U}$ φίλτρο στο I τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Έστω $U \in \mathcal{U}$. Τότε για κάθε $F \in \mathcal{F}$ ισχύει ότι $U \cap F \neq \varnothing$ διότι $U, F \in \mathcal{U}$. Από το (iii) έχουμε ότι $U \in \mathcal{F}$. Δηλαδή $\mathcal{U} = \mathcal{F}$. Συμπεραίνουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο.

■

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.2.10. *Έστω $\mathcal{U}$ μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο I. Έστω επίσης X χώρος Banach , K συμπαγές υποσύνολο του X και $\{x_i\}_{i\in I}$ με $x_i \in K$ για κάθε $i \in I$. Τότε η $\{x_i\}_{i\in I}$ είναι συγλίνουσα ως προς το υπερφίλτρο $\mathcal{U}$. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό $x \in X$ ώστε*

$$\lim_{\mathcal{U}} x_i = x.$$

Απόδειξη. Για κάθε $U \in \mathcal{U}$ ορίζουμε

$$F_U = \overline{\{x_i : i \in U\}}.$$

Τότε η οικογένεια $\{F_U : U \in \mathcal{U}\}$ ικανοποιεί την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών και κατά συνέπεια

$$\bigcap_{U \in \mathcal{U}} F_U \neq \varnothing,$$

λόγω συμπάγειας.
Έστω λοιπόν $x_0 \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}} F_U$ και $\varepsilon > 0$. Για κάθε $U \in \mathcal{U}$ ισχύει ότι $x_0 \in F_U$ και άρα υπάρχει $i \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε $\|x_0 - x_i\| < \varepsilon$. Δηλαδή,

$$\{i \in I : \|x_0 - x_i\| < \varepsilon\} \cap U \neq \varnothing \text{ για κάθε } U \in \mathcal{U}.$$

Από την Πρόταση 3.2.9 έπεται ότι

$$\{i \in I : \|x_0 - x_i\| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Εφόσον το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\mathcal{U}} x_i = x_0.$$

■

Ορισμός 3.2.11. Έστω X χώρος Banach και $\mathcal{U}$ μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο I. Για κάθε οικογένεια $\{x_i\}_{i \in I}$ στον X τέτοια ώστε $\sup\limits_{i \in I} \|x_i\| < \infty$ ορίζουμε

$$\|\{x_i\}_{i \in I}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|.$$

Το όριο υπάρχει πάντα από την Πρόταση 3.2.10.
Εύκολα δείχνουμε ότι η $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ είναι ημινόρμα στον χώρο $\ell_\infty(I, X) = \left\{\{x_i\}_{i \in I} : \sup\limits_{i \in I} \|x_i\| < \infty\right\}$ των φραγμένων οικογενειών στον X.

Έστω

$$N_{\mathcal{U}} = \left\{\{x_i\}_{i \in I} \in \ell_\infty(I, X) : \|\{x_i\}_{i \in I}\|_{\mathcal{U}} = 0\right\}.$$

Ο $N_{\mathcal{U}}$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\ell_\infty(I, X)$. Η **υπερδύναμη** (ultrapower) του X ως προς το υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ είναι ο χώρος πηλίκο $\ell_\infty(I, X)/N_{\mathcal{U}}$ τον οποίο συμβολίζουμε με $X_{\mathcal{U}}$. Ο $X_{\mathcal{U}}$ είναι χώρος Banach.

Γενικότερα, για μια οικογένεια χώρων Banach $\{X_i\}_{i \in I}$, το **υπεργινόμενο** (ultraproduct) $(\{X_i\}_{i \in})_{\mathcal{U}}$ της $\{X_i\}_{i \in I}$ ως προς το $\mathcal{U}$ είναι ο χώρος πηλίκο

$$(\{X_i\}_{i \in})_{\mathcal{U}} = \ell_\infty(I, \{X_i\}_{i \in I})/N_{\mathcal{U}},$$

όπου $\ell_\infty(I, \{X_i\}_{i \in I} = \left\{\{x_i\}_{i \in I} : x_i \in X_i \text{ για κάθε } i \in I \text{ και } \sup\limits_{i \in I} \|x_i\| < \infty\right\}$ και
$N_{\mathcal{U}} = \left\{\{x_i\}_{i \in I} \in \ell_\infty(I, \{X_i\}_{i \in I}) : \lim\limits_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0\right\}$. Ο $(\{X_i\}_{i \in})_{\mathcal{U}}$ είναι χώρος Banach.

Για $\bar{x} = \{x_i\}_{i \in I} \in \ell_\infty(I, \{X_i\}_{i \in I})$ συμβολίζουμε με $\bar{x}_{\mathcal{U}}$ το στοιχείο του $(\{X_i\}_{i \in})_{\mathcal{U}}$ που αντιστοιχεί στο $\bar{x}$, δηλαδή

$$\bar{x}_{\mathcal{U}} = \bar{x} + N_{\mathcal{U}}.$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον η $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ είναι ημινόρμα έχουμε ότι

$$\|\bar{x}_{\mathcal{U}}\| = \|\bar{x}\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|.$$

Ορίζουμε επίσης και την υπερδύναμη ενός γραμμικού τελεστή.

Ορισμός 3.2.12. Έστω $\mathcal{U}$ μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο I, X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε την υπερδύναμη του τελεστή T ως προς το υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ ως το τελεστή $T_{\mathcal{U}} : X_{\mathcal{U}} \to Y_{\mathcal{U}}$ με

$$T_{\mathcal{U}}\left((\{x_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}\right) = (\{Tx_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}\,.$$

Ο τελεστής $T_{\mathcal{U}}$ είναι καλά ορισμένος διότι αν $\lim\limits_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0$ τότε $\lim\limits_{\mathcal{U}} \|Tx_i\| = 0$.
Επιπλέον, ισχύει ότι $\|T_{\mathcal{U}}\| = \|T\|$.

Γενικότερα, $\{X_i\}_{i\in I}, \{Y_i\}_{i\in I}$ οικογένειες χώρων Banach και $T_i : X_i \to Y_i$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, το υπεργινόμενο της οικογένειας $\{T_i\}_{i\in I}$ ως προς το υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ είναι ο τελεστής $(\{T_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}} : (\{X_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}} \to (\{Y_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$ με

$$(\{T_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}\,((\{x_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}) = (\{T_i x_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}\,.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\left\|(\{T_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}\right\| = \lim\limits_{i\in I} \|T_i\|$.

3.3 Πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα και υπεργινόμενα

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των υπεργινομένων και της πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας. Το βασικό θεώρημα είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω X και Y χώροι Banach. Ο Y είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X αν και μόνο αν υπάρχει μη τετριμμένο υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ σε κάποιο σύνολο δεικτών I τέτοιο ώστε ο Y να εμφυτεύεται ισομετρικά στην υπερδύναμη $X_{\mathcal{U}}$.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 προκύπτει από τις Προτάσεις 3.3.4 και 3.3.5. Αποδεικνύουμε πρώτα ένα λήμμα για δίκτυα. Υπενθυμίζουμε ότι για X χώρο Banach, $F \subseteq X$ και $\delta > 0$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\mathcal{N}$ του F λέγεται δ-δίκτυο για το F αν για κάθε $x \in F$ υπάρχει $y \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε $\|x - y\| \leqslant \delta$.

Λήμμα 3.3.2. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$, αν $\mathcal{N}$ είναι ένα δ-δίκτυο της μοναδιαίας σφαίρας του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και $x_1, \ldots, x_n$ στοιχεία ενός χώρου Banach τέτοια ώστε*

$$1 - \delta \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant 1 + \delta \quad \text{για κάθε } a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{N},$$

τότε

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\|a\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\|a\|, \quad \text{για κάθε } a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$, $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < 1$ και $\mathcal{N}$ ένα δ-δίκτυο της μοναδιαίας σφαίρας του $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ όπως στην υπόθεση. Έστω $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\|a\| = 1$. Εφόσον το $\mathcal{N}$ είναι δ-δίκτυο, υπάρχει $b^0 \in \mathcal{N}$ ώστε $\|a - b^0\| \leqslant \delta$. Συνεπώς, $a = b^0 + \lambda_1 a^1$ όπου $\lambda_1 \coloneqq \|a - b^0\| \leqslant \delta$ και $a^1 = \frac{a-b^0}{\|a-b^0\|}$. Ομοίως, εφόσον $\|a^1\| = 1$, υπάρχει $b^1 \in \mathcal{N}$ ώστε $a^1 = b^1 + \mu a^2$ για κάποια $0 \leqslant \mu \leqslant \delta$ και $a^2 \in \mathbb{R}^n$ με $\|a^2\| = 1$. Επομένως, αν θέσουμε $\lambda_2 \coloneqq \lambda_1 \mu$, τότε

$$\begin{aligned} a = b^0 + \lambda_1 a^1 &= b^0 + \lambda_1(b^1 + \mu a^2) \\ &= b^0 + \lambda_1 b^1 + \lambda_1 \mu a^2 \\ &= b^0 + \lambda_1 b^1 + \lambda_2 a^2 \end{aligned}$$

όπου $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \delta$ και $0 \leqslant \lambda_2 = \lambda_1 \mu \leqslant \delta^2$.

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε ακολουθία $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ με $0 \leqslant \lambda_j \leqslant \delta^j$ και $(b^j)_{j=0}^{\infty}$ στο $\mathcal{N}$ τέτοια ώστε

$$a = b^0 + \lambda_1 b^1 + \ldots + \lambda_{N-1} b^{N-1} + \lambda_N a^N, \text{ για κάθε } N \in \mathbb{N},$$

για κάποιο $a^N \in \mathbb{R}^n$ με $\|a^N\| = 1$. Θέτουμε $\lambda_0 = 1$. Τότε,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j b^j = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j b^j = \lim_{N\to\infty} (a - \lambda_N a^N) = a - \lim_{N\to\infty} \lambda_N a^N = a,$$

διότι

$$\lim_{N\to\infty} \|\lambda_N a^N\| = \lim_{N\to\infty} \lambda_N \leqslant \lim_{N\to\infty} \delta^N = 0.$$

Άρα, $a = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j b^j$. Επίσης, εφόσον $b^j \in \mathcal{N}$, από την υπόθεση έχουμε ότι $1 - \delta \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} b_i^j x_i\right\| \leqslant 1 + \delta$ για κάθε $j \geqslant 0$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j b_i^j x_i\right\| = \left\|\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} b_i^j x_i\right\| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \left\|\sum_{i=1}^{n} b_i^j x_i\right\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j (1+\delta) \\ &= (1+\delta)\frac{1}{1-\delta}.\end{aligned}$$

Επιπλέον, ομοίως έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| &= \left\|\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} b_i^j x_i\right\| \geqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} b_i^0 x_i\right\| - \left\|\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} b_i^j x_i\right\| \\ &\geqslant 1 - \delta - \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left\|\sum_{i=1}^{n} b_i^j x_i\right\| \geqslant 1 - \delta - \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j (1+\delta) \quad = 1 - \delta - (1+\delta)\frac{\delta}{1-\delta} = \frac{1-3\delta}{1-\delta}.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < 1$ αρκετά μικρό ώστε

$$\frac{1+\delta}{1-\delta} < \sqrt{1+\varepsilon} \;\text{ και }\; \frac{1-3\delta}{1-\delta} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}.$$

Τότε, για κάθε $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\|a\| = 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}.$$

■

Παρατήρηση 3.3.3. Από την απόδειξη του Λήμματος 3.3.2 προκύπτει ότι κάθε $a \in \mathbb{R}^n$ με $\|a\| = 1$ μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$a = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j b_j$$

με $|\lambda_j| \leqslant \delta^j$ και $b_j \in \mathcal{N}$.

Πρόταση 3.3.4. *Έστω I σύνολο δεικτών και $\mathcal{U}$ μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο I. Έστω επίσης $\{X_i\}_{i\in I}$ οικογένεια χώρων Banach και $\tilde{X} = (\{X_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$ το υπεργινόμενο ως προς το $\mathcal{U}$. Τότε, για κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο $\tilde{Y}$ του $\tilde{X}$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i \in U$ υπάρχει υπόχωρος Y_i του X_i ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$-ισομορφικός με τον $\tilde{Y}$. Δηλαδή $d(\tilde{Y}, Y_i) < 1+\varepsilon$ για κάθε $i \in U$.*

Ειδικότερα, αν $X_i = X$ για κάθε $i \in I$, ο $X_{\mathcal{U}}$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$, $\tilde{Y}$ υπόχωρος του $\tilde{X}$ με $\dim \tilde{Y} = n$ και $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n \in \tilde{Y}$ τέτοια ώστε $\tilde{Y} = \{\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n\}$. Για κάθε $k = 1, 2, \ldots, n$ έστω $\{x_i^k\}_{i\in I} \in \ell_\infty(\{X_i\}_{i\in I})$ τέτοια ώστε $\tilde{y}_k = (\{x_i^k\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$. Για κάθε $i \in I$ ορίζουμε $Y_i = \operatorname{span}\{x_i^1, \ldots, x_i^n\} \leqslant X_i$ και τον τελεστή $T_i : \tilde{Y} \to \tilde{Y}_i$ με

$$T_i(\tilde{y}_k) = x_i^k \text{ για κάθε } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Τότε, για κάθε $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, αν $\tilde{y} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{y}_k$, έχουμε

$$\lim_{\mathcal{U}} \|T_i \tilde{y}\| = \lim_{\mathcal{U}} \left\| T_i\Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{y}_k\Big) \right\| = \lim_{\mathcal{U}} \left\| \sum_{k=1}^n \lambda_k x_i^k \right\| = \left\| \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k y_k^i \right\}_{i\in I} \right\|_{\mathcal{U}} = \|\tilde{y}\|$$

Συνεπώς, για κάθε $y \in \tilde{Y}$ με $\|\tilde{y}\| = 1$ και κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $U_{\tilde{y}} \in \mathcal{U}$ ώστε

$$1 - \delta \leqslant \|T_i \tilde{y}\| \leqslant 1 + \delta \text{ για κάθε } i \in U_{\tilde{y}}.$$

Έστω $\mathcal{N}$ ένα δ-δίκτυο της μοναδιαίας σφαίρας του $\tilde{Y}$, όπου $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ όπως στο Λήμμα 3.3.2 Θέτουμε $U = \bigcap_{\tilde{y}\in\mathcal{N}} U_{\tilde{y}}$. Τότε $U \in \mathcal{U}$. Για κάθε $i \in U$ έχουμε

$$1 - \delta \leqslant \|T_i \tilde{y}\| \leqslant 1 + \delta \text{ για κάθε } \tilde{y} \in \mathcal{N}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.2 έχουμε ότι για κάθε $i \in U$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \|\tilde{y}\| \leqslant \|T_i \tilde{y}\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\, \|\tilde{y}\| \text{ για κάθε } \tilde{y} \in \tilde{Y}.$$

Δήλαδή, $d(\tilde{Y}, Y_i) \leqslant 1 + \varepsilon$ για κάθε $i \in U$. ∎

Πρόταση 3.3.5. *Έστω Y χώρος Banach και $\mathcal{B}$ οικογένεια από χώρους Banach. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο F του Y υπάρχει $X \in \mathcal{B}$ τέτοιος ώστε ο F να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον X. Τότε, υπάρχουν σύνολο I και υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο I τέτοια ώστε ο Y να εμφυτεύεται ισομετρικά στο υπεργινόμενο $(\{X_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$, όπου $X_i \in \mathcal{B}$ για κάθε $i \in I$.*

Ειδικότερα, αν $\mathcal{B} = \{X\}$ έχουμε ότι αν ο Y είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμομς στον X τότε ο Y εμφυτεύεται ισομετρικά στην υπερδύναμη $X_{\mathcal{U}}$ για κάποιο υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ σε ένα σύνολο δεικτών I.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$I = \{(F, \varepsilon) : F \text{ υπόχωρος του } Y \text{ με } \dim F < \infty \text{ και } \varepsilon > 0\}.$$

Ορίζουμε επίσης διάταξη στο I με

$$(F_1, \varepsilon_1) \prec (F_2, \varepsilon_2) \text{ αν και μόνο αν } F_1 \subseteq F_2 \text{ και } \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1.$$

Για $(F_0, \varepsilon_0) \in I$ θέτουμε

$$A_{F_0,\varepsilon_0} = \{(F, \varepsilon) \in I : (F_0, \varepsilon_0) \prec (F, \varepsilon)\}.$$

Τότε το
$$\mathcal{F} = \{A_{F,\varepsilon} : (F,\varepsilon) \in I\}$$
είναι φίλτρο στο I. Θεωρούμε ένα υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στο I τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$.

Από την υπόθεση, για κάθε $(F,\varepsilon) \in I$ υπάρχει $X_{F,\varepsilon} \in \mathcal{B}$ και γραμμικός τελεστής $T_{F,\varepsilon} : F \to X_{F,\varepsilon}$ με
$$\|T_{F,\varepsilon}\| = 1 \text{ και } \left\|T_{F,\varepsilon}^{-1}\right\| < 1+\varepsilon.$$
Ορίζουμε $J : Y \to (\{X_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$ με $J(y) = (\{y_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$, όπου
$$y_i = y_{F,\varepsilon} = \begin{cases} T_{F,\varepsilon}(y) & , \text{ αν } \ y \in F \\ 0 & , \text{ αν } \ y \notin F \end{cases}$$
Παρατηρούμε ότι $\sup\limits_{i\in I} \|y_i\| \leqslant \sup\limits_{(F,\varepsilon)\in I} \|T_{F,\varepsilon}\| \, \|y\| = \|y\|$, και άρα η απεικόνιση J είναι καλά ορισμένη.

Επίσης, η J είναι γραμμική. Πράγματι, έστω $x, y \in Y$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Είναι άμεσο ότι $J(\lambda x) = \lambda J(x)$. Έστω $J(x) = (\{x_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$, $J(y) = (\{y_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$ και $J(x+y) = (\{(x+y)_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$. Θέτουμε $F_0 = \operatorname{span}\{x,y\}$ και θεωρούμε $A_{F_0,\varepsilon_0} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ για κάποιο ε_0. Τότε, για κάθε $(F,\varepsilon) \in A_{F_0,\varepsilon_0}$ έχουμε $(F_0,\varepsilon_0) \prec (F,\varepsilon)$ και άρα $F_0 \subseteq F$. Δηλαδή $x,y \in F$ και άρα $x+y \in F$. Επομένως,
$$\begin{aligned} x_{F,\varepsilon} &= T_{F,\varepsilon}(x), \\ y_{F,\varepsilon} &= T_{F,\varepsilon}(y) \ \text{ και} \\ (x+y)_{F,\varepsilon} &= T_{F,\varepsilon}(x+y) = T_{F,\varepsilon}(x) + T_{F,\varepsilon}(y), \end{aligned}$$
για κάθε $(F,\varepsilon) \in A_{F_0,\varepsilon_0}$. Άρα, $x_i + y_i = (x+y)_i$ για κάθε $i \in A_{F_0,\varepsilon_0} \in \mathcal{U}$ και κατά συνέπεια
$$(\{x_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}} + (\{y_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}} = (\{(x+y)_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}.$$
Δηλαδή $J(x) + J(y) = J(x+y)$. Επομένως πράγματι η J είναι γραμμική.

Θα δείξουμε ότι η J είναι και ισομετρία. Έστω $y \in Y$. Αρκεί να δείξουμε ότι
$$\frac{1}{1+\varepsilon}\|y\| \leqslant \|J(y)\| \leqslant \|y\| \text{ για κάθε } \varepsilon > 0.$$
Έστω $\varepsilon > 0$ και $J(y) = (\{y_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$. Θέτουμε $F_1 = \operatorname{span}\{y\}$ και θεωρούμε το $A_{F,\varepsilon} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. Για κάθε $(F,\varepsilon') \in A_{F,\varepsilon}$ έχουμε
$$(F_1,\varepsilon) \prec (F,\varepsilon'),$$
δηλαδή $F_1 \subseteq F$ και $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$. Άρα $y \in F$ και επομένως
$$y_{F,\varepsilon} = T_{F,\varepsilon}(y) \text{ για κάθε } (F,\varepsilon) \in A_{F,\varepsilon}.$$
Συνεπώς,
$$\frac{\|y\|}{1+\varepsilon} \leqslant \frac{1}{\left\|T_{F,\varepsilon}^{-1}\right\|}\|y\| \leqslant \|y_{F,\varepsilon}\| \leqslant \|T_{F,\varepsilon}\| \, \|y\| = \|y\|$$
για κάθε $(F,\varepsilon) \in A_{F,\varepsilon}$. Έπεται ότι
$$\frac{\|y\|}{1+\varepsilon} \leqslant \lim_{\mathcal{U}} \|y_i\| \leqslant \|y\|.$$
Δηλαδή,
$$\frac{\|y\|}{1+\varepsilon} \leqslant \|J(y)\| \leqslant \|y\|.$$
Εφόσον το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε ότι $J(y) = \|y\|$ για κάθε $y \in Y$. Δηλαδή η $J : Y \to (\{X_i\}_{i\in I})_{\mathcal{U}}$ είναι ισομετρία.

■

Ορισμός 3.3.6. Ένας χώρος Banach λέγεται **υπεραυτοπαθής** (super-reflexive) αν κάθε χώρος Banach ο οποίος είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X είναι αυτοπαθής.

Σαν πόρισμα του Θεωρήματος 3.3.1 έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.7. *Ένας χώρος Banach X είναι υπεραυτοπαθής αν και μόνο αν κάθε υπερδύναμη $X_{\mathcal{U}}$ του X είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει από το Θεώρημα 3.3.1 και από το γεγονός ότι αν ένας χώρος Banach είναι αυτοπαθής τότε κάθε κλειστός υπόχωρος του είναι επίσης αυτοπαθής. ∎

Ως μια εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3.1 αποδεικνύουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.8. *Έστω X χώρος Banach και Y κλειστός υπόχωρος του X. Αν ο Y και ο X/Y είναι υπεραυτοπαθής τότε και ο X είναι υπεραυτοπαθής.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{U}$ μη τετριμμένο υπερφίλτρο σε κάποιο σύνολο δεικτών I. Εύκολα βλέπουμε ότι ο $(X/Y)_{\mathcal{U}}$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $X_{\mathcal{U}}/Y_{\mathcal{U}}$. Από το Θεώρημα 3.3.1 έχουμε λοιπόν ότι ο $X_{\mathcal{U}}/Y_{\mathcal{U}}$ και ο $Y_{\mathcal{U}}$ είναι αυτοπαθείς. Η απόδειξη ολοκληρώνεται από το γεγονός ότι αν Y είναι κλειστός υπόχωρος ενός χώρου Banach X, οι Y και X/Y είναι αυτοπαθείς τότε ο X είναι αυτοπαθής. ∎

Κεφάλαιο 4

Type και Cotype

4.1 Type και Cotype

Ορισμοί 4.1.1. *Έστω X χώρος Banach. Λέμε ότι ο X έχει* ***(Rademacher) type*** *p για κάποιο $1 \leqslant p \leqslant 2$, αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ισχύει*

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p}. \tag{4.1.1}$$

Η μικρότερη σταθερά $C > 0$ για την οποία ισχύει η (4.1.1) λέγεται ***type*** *p* ***σταθερά*** *του X και συμβολίζεται με $T_p(X)$. Αν ο X δεν έχει type p τότε γράφουμε $T_p(X) = \infty$.*

Επίσης, λέμε ότι ο X έχει ***(Rademacher) cotype*** *q για κάποιο $2 \leqslant q \leqslant \infty$, αν υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ ισχύει*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leqslant C\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2}. \tag{4.1.2}$$

Για την περίπτωση $q = \infty$ εννοούμε

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\| \leqslant C\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2}. \tag{4.1.3}$$

Η μικρότερη σταθερά $C > 0$ για την οποία ισχύει η (4.1.2) (ή η (4.1.3)) λέγεται ***cotype*** *q* ***σταθερά*** *του X και συμβολίζεται με $C_q(X)$. Αν ο X δεν έχει cotype q τότε γράφουμε $C_q(X) = \infty$.*

Παρατηρούμε ότι ένας μη τετριμμένος χώρος Banach δεν μπορεί να έχει type p για $p > 2$. Πράγματι, αν $x \in X$ με $\|x\| = 1, n \in \mathbb{N}$ και $x_1 = \ldots = x_n = x$ τότε

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p} = n^{1/p}$$

και

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} = \left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i\right|^2\right)^{1/2} = n^{1/2}.$$

Επομένως δεν υπάρχει $C > 0$ ώστε να ικανοποιείται η (4.1.1) για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Όμοια, ένας μη τετριμμένος χώρος Banach X δεν μπορεί να έχει cotype q για $q < 2$.

Επίσης, εφαρμόζοντας τις (4.1.1) και (4.1.2) για $n = 1$ συμπεραίνουμε ότι $T_p(X) \geqslant 1$ και $C_q(X) \geqslant 1$.

Σημειώνουμε επίσης ότι κάθε χώρος Hilbert H έχει type 2 και cotype 2 και επιπλέον $T_2(H) = C_2(H) = 1$. Αυτό προκύπτει άμεσα από τον γενικευμένο κανόνα του παραλληλογράμμου που αποδεικνύουμε παρακάτω. Μάλιστα, ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν ένας χώρος Banach έχει type 2 και cotype 2 τότε είναι ισόμορφος με έναν χώρο Hilbert [21].

Πρόταση 4.1.2 (Γενικευμένος κανόνας του παραλληλογράμμου)**.** *Έστω H χώρος Hilbert. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ ισχύει*

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2 &= \mathbb{E}\langle\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i, \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j\rangle = \mathbb{E}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \epsilon_i\epsilon_j\langle x_i, x_j\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j\rangle \mathbb{E}\epsilon_i\epsilon_j = \sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i\rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2,\end{aligned}$$

διότι

$$\mathbb{E}\epsilon_i\epsilon_j = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}.$$

■

Για $n = 2$ η Πρόταση 4.1.2 αντιστοιχεί στον γνωστό κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Πρόταση 4.1.3. *Για κάθε $0 < p < q, n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}.$$

Ειδικότερα, για $0 < r \leqslant 1$,

$$\sum_{i=1}^n |a_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^r\right)^{1/r},$$

ενώ για $r \geqslant 1$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^r\right)^{1/r} \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε αρχικα με επαγωγή στο n ότι για $b_1, b_2, \ldots, b_n$ θετικούς αριθμούς και $r \geqslant 1$

$$\left(\sum_{i=1}^n b_i^r\right)^{1/r} \leqslant \sum_{i=1}^n b_i. \tag{4.1.4}$$

Μετά, εφαρμόζουμε την (4.1.4) για $b_i = |a_i|^p$ και $r = \frac{q}{p}$. ■

Παρατήρηση 4.1.4. Από την ανισότητα Hölder έχουμε επιπλέον ότι

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q} n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Επομένως, για κάθε $0 < p < q$, $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\right)^{1/q}.$$

Συνεπώς, αν $1 \leqslant p < q$ τότε για την απόσταση Banach-Mazur των ℓ_p^n και ℓ_q^n έχουμε

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Από την Πρόταση 4.1.3 προκύπτει άμεσα ότι για κάθε χώρο Banach X αν $1 \leqslant p_1 < p_2 \leqslant 2$ τότε $T_{p_1}(X) \leqslant T_{p_2}(X)$, ενώ αν $2 \leqslant q_1 < q_2 < \infty$ τότε $C_{q_2}(X) \leqslant C_{q_1}(X)$. Επόμένως αν ο X έχει type 2 τότε έχει type p για κάθε $1 \leqslant p \leqslant 2$. Ανάλογα αν ο X έχει cotype 2 τότε έχει cotype q για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \infty$. Συνεπώς, το να έχει ένας χώρος Banach type 2 ή αντίστοιχα cotype 2 είναι η καλύτερη δυνατή περίπτωση.

Επίσης, πάντα ισχύει ότι $T_1(X) = 1$ και $C_\infty(X) = 1$. Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|\right)^2\right)^{1/2} = \sum_{i=1}^n \|x_i\|.$$

Αυτό δείχνει ότι $T_1(X) \leqslant 1$ και άρα $T_1(X) = 1$.

Η $C_\infty(X) = 1$ προκύπτει από την αρχή συστολής για τυχαίες μεταβλητές Bernoulli (Θεώρημα 2.3.5). Ακριβέστερα,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2 \geqslant \|x_j\|^2 \text{ για κάθε } 1 \leqslant j \leqslant n$$

και άρα

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2 \geqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|^2.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\| \leqslant \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2}.$$

Δηλαδή, $C_\infty(X) \leqslant 1$ και συνεπώς $C_\infty(X) = 1$.

Παρατήρηση 4.1.5. Έστω X χώρος Banach, $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με την ανισότητα Kahane και την ανισότητα Hölder για κάθε $r \geqslant 1$

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^r\right)^{1/r} \leqslant K_r \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\| \leqslant K_r \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2}.$$

Επομένως, αν ο X έχει type p για κάποιο $1 \leqslant p \leqslant 2$ τότε

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^r\right)^{1/r} \leqslant K_r T_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{1/p}. \tag{4.1.5}$$

Ωστόσο, η σταθερά $K_r T_p(X)$ στην (4.1.5) δεν είναι η βέλτιστη εν γένει. Ανάλογη παρατήρηση ισχύει και αν ο X έχει cotype q για κάποιο $2 \leqslant q \leqslant \infty$.

Πρόταση 4.1.6. *Έστω X, Y χώροι Banach, $1 \leqslant p \leqslant 2$ και $2 \leqslant q \leqslant \infty$. Αν ο X είναι α-πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y για κάποιο $\alpha > 1$ τότε*

$$T_p(X) \leqslant \alpha\, T_p(Y) \text{ και } C_q(X) \leqslant \alpha\, C_q(Y).$$

Ειδικότερα, αν ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y τότε

$$T_p(X) \leqslant T_p(Y) \text{ και } C_q(X) \leqslant C_q(Y).$$

Επίσης, αν ο X είναι a-ισομορφικός με τον Y τότε

$$T_p(X) \leqslant aT_p(Y) \text{ και } C_q(X) \leqslant aC_q(Y).$$

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι α-πεπερασμένα αναπραστάσιμος στον Y για κάποιο $\alpha > 1$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Αν $E = \operatorname{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ τότε υπάρχει υπόχωρος F του Y και $T : E \to F$ γραμμικός ισομορφισμός ώστε $\|T\|\,\|T^{-1}\| < \alpha$. Επομένως, για $1 \leqslant p \leqslant 2$

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} &\leqslant \|T^{-1}\| \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i T(x_i)\right\|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant \|T^{-1}\|\, T_p(Y) \left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant \|T^{-1}\|\,\|T\|\, T_p(Y) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant \alpha\, T_p(Y) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $T_p(X) \leqslant \alpha\, T_p(Y)$.

Όμοια $C_q(X) \leqslant \alpha\, C_q(Y)$ για $q \geqslant 2$. ∎

Πόρισμα 4.1.7. *Για κάθε χώρο Banach X, $1 \leqslant p \leqslant 2$ και $2 \leqslant q \leqslant \infty$ ισχύει*

$$T_p(X) = T_p(X^{**}) \text{ και } C_q(X) = C_q(X^{**}),$$

όπου X^{**} ο δεύτερος δυϊκός του X.

Απόδειξη. Ο X εμφυτεύεται ισομετρικά στον X^{**} μέσω της φυσιολογικής εμφύτευσης. Επίσης, από την αρχή τοπικής αυτοπάθειας ο X^{**} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X (Πρόταση 3.1.9). Συνεπώς από την Πρόταση 4.1.6 συμπεραίνουμε το ζητούμενο. ∎

Πρόταση 4.1.8. *Έστω $1 < p \leqslant 2$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

(i) *Αν ένας χώρος Banach X έχει type p, τότε ο δυϊκός του έχει cotype q και επιπλέον*

$$C_q(X^*) \leqslant T_p(X).$$

(ii) *Αν ο δυϊκός ενός χώρου Banach X έχει type p τότε ο X έχει cotype q και επίπλεον*

$$C_q(X) \leqslant T_p(X^*).$$

Απόδειξη. (i) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^* \in X^*$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ τέτοια ώστε $\|x_i\| = 1$ και $|x_i^*(x_i)| \geqslant (1-\varepsilon)\|x_i^*\|$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$. Επομένως,

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^q\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)|^q\right)^{1/q}. \tag{4.1.6}$$

Επίσης, εφόσον ο ℓ_p είναι ο δυϊκός του ℓ_q, έχουμε ότι

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)|^q\right)^{1/q} = \sup\left\{\left|\sum_{i=1}^n a_i x_i^*(x_i)\right| : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ με } \sum_{i=1}^n |a_i|^p \leqslant 1\right\}. \tag{4.1.7}$$

Όμως, αν $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ με $(\sum_{i=1}^n |a_i|^p)^{1/p} \leqslant 1$ τότε

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^n a_i x_i^*(x_i)\right| &= \left|\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i x_i\right)\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left|\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i x_i\right)\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\right\|\left\|\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i x_i\right\| \\
&\leqslant \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\right\|^2\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n a_i\epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} \qquad (4.1.8) \\
&\leqslant \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\right\|^2\right)^{1/2} T_p(X)\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\|x_i\|^p\right)^{1/p} \\
&\leqslant T_p(X)\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\right\|^2\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

διότι $\|x_i\| = 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$.

Από τις (4.1.6),(4.1.7) και (4.1.8) έπεται ότι

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^q\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\right\|^2\right)^{1/2}.$$

Δηλαδή,

$$C_q(X^*) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} T_p(X).$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν έχουμε ότι

$$C_q(X^*) \leqslant T_p(X).$$

(ii) Από το Πόρισμα 4.1.7 έχουμε ότι $C_q(X) = C_q(X^{**})$. Επομένως, εφαρμόζοντας το (i) για X^* στη θέση του X έχουμε ότι

$$C_q(X) = C_q(X^{**}) \leqslant T_p(X^*).$$

■

Σημειώνουμε ότι δεν ισχύει εν γένει ότι $T_p(X^*) \leqslant C_q(X)$ (ή $T_p(X) \leqslant C_q(X^*)$) και ότι υπάρχει παράδειγμα χώρου Banach ο οποίος έχει cotype q αλλά ο δυϊκός του δεν έχει type p για $p, q > 1$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Για την περίπτωση όμως όπου ένας χώρος Banach X είναι ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert H ισχύει η ακόλουθη πρόταση. [Σημειώνουμε, ωστόσο, ότι σε αυτήν την περίπτωση, εφόσον ο X είναι ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert, θα έχει type 2 και cotype 2 και άρα type p για κάθε $1 \leqslant p \leqslant 2$ και cotype q για κάθε $q \geqslant 2$ και το ίδιο θα ισχύει για τον δυϊκό του.]

Πρόταση 4.1.9. *Έστω X χώρος Banach ο οποίος είναι ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert H. Τότε υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε αν $1 < p \leqslant 2$ και $q \geqslant 2$ ο συζυγής εκθέτης του p, τότε*

$$C_q(X) \leqslant T_p(X^*) \leqslant C \ln\left(d(X,H)+1\right) C_q(X) \tag{4.1.9}$$

και

$$C_q(X^*) \leqslant T_p(X) \leqslant C \ln\left(d(X,H)+1\right) C_q(X^*), \tag{4.1.10}$$

όπου $d(X,H)$ η απόσταση Banach-Mazur των X και H.

Για την απόδειξη της Πρότασης 4.1.9 θα επικαλεστούμε το Θεώρημα 4.1.14 που οφείλεται στον Pisier.

Ορισμός 4.1.10. Για κάθε $\varnothing \neq A \subseteq [n] \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\}$ ορίζουμε μια συνάρτηση $w_A : E_2^n \to \{-1, 1\}$ θέτοντας

$$w_A(\epsilon) = \prod_{i \in A} \epsilon_i.$$

Επίσης, θέτουμε $w_\varnothing(\epsilon) = 1$ για κάθε $\epsilon \in E_2^n$.

Οι συναρτήσεις w_A, $A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ λέγονται **συναρτήσεις Walsh**.

Πρόταση 4.1.11. *Έστω X χώρος Banach και $n \in \mathbb{N}$. Κάθε συνάρτηση $f : E_2^n \to X$ αναπαρίσταται μονοσήμαντα στη μορφή*

$$f = \sum_{A \subseteq [n]} w_A x_A,$$

για κάποια $x_A \in X$.

Σημειώνουμε ότι ο χώρος των συναρτήσεων $f : E_2^n \to X$ γίνεται χώρος Banach με οποιαδήποτε από τις ισοδύναμες νόρμες

$$\|f\|_{L_p(E_2^n;X)} = \left(\mathbb{E}\,\|f(\epsilon)\|_X^p\right)^{1/p},$$

για $p \geqslant 1$.

Πρόταση 4.1.12. *Έστω X χώρος Banach και X^* ο δυϊκός του. Για κάθε $f : E_2^n \to X$ υπάρχει $\psi : E_2^n \to X^*$ τέτοια ώστε $\|\psi\|_{L_2(E_2^n;X)} = 1$ και*

$$\|f\|_{L_2^n;X)} = \langle \psi, f \rangle \coloneqq \mathbb{E}\psi(\epsilon)(f(\epsilon)).$$

Ορισμός 4.1.13. Η **προβολή Rademacher** της $f : E_2^n \to X$ είναι η συνάρτηση $Rad_n f : E_2^n \to X$ με

$$Rad_n f(\epsilon) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_{\{i\}},$$

όπου $f = \sum_{A \subseteq [n]} w_A x_A$.

Ο γραμμικός τελεστής $Rad_n : L_2(E_2^n; X) \to L_2(E_2^n; X)$ με $f \mapsto Rad_n f$ είναι πάντα φραγμένος και μάλιστα $\|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)} \leqslant \sqrt{n}$.

Θεώρημα 4.1.14 (Pisier). *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε χώρο Banach X που είναι ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert ισχύει*

$$\|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)} \leqslant C \ln\left(d(X,H)+1\right),$$

όπου $d(X,H)$ η απόσταση Banach-Mazur των X και H.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος καθώς και των προηγούμενων δύο προτάσεων υπάρχουν στο Παράρτημα Α′. Προχωράμε τώρα στην απόδειξη της Πρότασης 4.1.9.

Απόδειξη της Πρότασης 4.1.9. Αρκεί να δείξουμε την (4.1.9), διότι τότε η (4.1.10) προκύπτει από το Πόρισμα 4.1.7 και το γεγονός ότι αν ο X είναι ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert H τότε ο X^* είναι ισομορφικός με τον H^*. Επίσης, η ανισότητα $C_q(X) \leqslant T_p(X^*)$ έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 4.1.8. Θέλουμε, επομένως να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $T_p(X^*) \leqslant C\ln\left(d(X,H)+1\right)C_q(X)$.

Από το Θεώρημα 4.1.14 υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)} \leqslant C \ln\left(d(X,H)+1\right) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_n \in X$ έχουμε ότι για κάθε $f : E_2^n \to X$ με $f = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i + \sum_{\substack{|A|\neq 1\\ A\subseteq[n]}} w_A x_A$,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leqslant C_q(X)\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} &= C_q(X)\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|_{L_2(E_2^n;X)} \\
&= C_q(X)\,\|Rad_n f\|_{L_2(E_2^n;X)} \qquad (4.1.11)\\
&\leqslant C\ln\left(d(X,H)+1\right)C_q(X)\,\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}.
\end{aligned}$$

Έστω $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$. Τότε $\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^* : E_2^n \to X^*$. Εφόσον ο X είναι ισομορφικός με έναν χώρο Hilbert H συμπεραίνουμε ότι ο X είναι αυτοπαθής. Μπορούμε δηλαδή να ταυτίσουμε τον X με τον X^{**} μέσω της φυσιολογικής εμφύτευσης. Επομένως, εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.1.12 για τον X^* συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $f : E_2^n \to X$ ώστε $\|f\|_{L_2(E_2^n;X)} = 1$ και

$$\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\right\|_{L_2(E_2^n;X^*)} = \langle f, \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\rangle = \mathbb{E}\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*(f(\epsilon)) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\epsilon_i x_i^*(f(\epsilon)).$$

Όμως $f(\epsilon) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i + \sum_{\substack{|A|\neq 1\\ A\subseteq[n]}} w_A x_A$ και $\mathbb{E}\epsilon_i w_A = 0$ για κάθε $A \neq \{i\}$. Άρα,

$$\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\right\|_{L_2(E_2^n;X^*)} = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\epsilon_i x_i^*(f(\epsilon)) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i). \qquad (4.1.12)$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\sum_{i=1}^n x_i^*(x_i) \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i^*(x_i)| \leqslant \sum_{i=1}^n \|x_i^*\|\,\|x_i\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{1/q}. \qquad (4.1.13)$$

Από τις (;;), (4.1.12) και (4.1.13) έχουμε

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i x_i^*\right\|^2\right)^{1/2} = \left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i x_i^*\right\|_{L_2(E_2^n;X^*)} \leqslant C\ln\left(d(X,H)+1\right)C_q(X)\left\|f\right\|_{L_2(E_2^n;X)}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\|^p\right)^{1/p}$$

$$= C\ln\left(d(X,H)+1\right)C_q(X)\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\|^p\right)^{1/p}.$$

Δηλαδή ο X^* έχει type p και $T_p(X^*) \leqslant C\ln\left(d(X,H)+1\right)C_q(X)$.

■

Στην επόμενη πρόταση φαίνεται μια πρώτη σχέση μεταξύ του type και του cotype ενός χώρου Banach X και της πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας των χώρων ℓ_p στον X.

Πρόταση 4.1.15. *Έστω X χώρος Banach.*

(i) *Έστω $1 \leqslant p < 2$. Αν ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X τότε ο X δεν έχει type r για κάθε $p < r \leqslant 2$.*

(ii) *Έστω $q > 2$. Αν ο ℓ_q είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X τότε ο X δεν έχει cotype r για κάθε $2 \leqslant r < q$.*

Απόδειξη.

(i) Έστω $1 \leqslant p < 2$. Υποθέτουμε ότι ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $T : \ell_p^n \to X$ ισομορφική εμφύτευση τέτοια ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| < 1+\varepsilon$. Θέτουμε $x_i = T(e_i)$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n}a_i x_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}.$$

Ειδικότερα $\|x_i\| \leqslant 1+\varepsilon$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Επίσης συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i x_i\right\| \geqslant (1-\varepsilon)n^{1/p}$$

και άρα

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} \geqslant (1-\varepsilon)n^{1/p}.$$

Αν ο X έχει type r για κάποιο $r > p$ τότε

$$\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^r\right)^{1/r} \leqslant C(1+\varepsilon)n^{1/r},$$

για κάποια σταθερά $C > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$(1-\varepsilon)n^{1/p} \leqslant C(1+\varepsilon)n^{1/r} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Εφόσον $r > p$ οδηγούμαστε σε άτοπο. Επομένως ο X δεν έχει type r για $r > p$.

(ii) Αποδεικνύεται όπως το (i).

■

Παρατήρηση 4.1.16. Παρατηρούμε ότι στην προηγούμενη πρόταση αρκεί να υποθέσουμε ότι ο ℓ_p (ή ο ℓ_q αντίστοιχα) είναι a-πεπερασμένα αναπαραστάσιμος για κάποιο $a > 1$.

Πόρισμα 4.1.17. *Έστω X χώρος Banach, $p_X = \sup\{1 \leqslant p \leqslant 2 : \text{ o } X \text{ έχει type } p\}$ και $q_X = \inf\{q \geqslant 2 : \text{ o } X \text{ έχει cotype } p\}$. Τότε το σύνολο των p για τα οποία ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X είναι υποσύνολο του $[p_X, q_X]$.*

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 4.1.15 και το γεγονός ότι ο X έχει type p για κάθε $p < p_X$ και cotype q για κάθε $q > q_X$. ■

Το θεώρημα Maurey-Pisier, το βασικό θεώρημα αυτής της εργασίας, μας λέει ότι για κάθε χώρο Banach X, ο ℓ_{p_X} και ο ℓ_{q_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμοι στον X.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα p και q για τα οποία ένας χώρος $L_{p_0}(\mu)$ έχει type p και cotype q. Ακριβέστερα, θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1.18. *Έστω (Ω, μ) χώρος μέτρου.*

(i) *Αν $1 \leqslant p \leqslant 2$ τότε ο $L_p(\mu)$ έχει type p και cotype 2.*

(ii) *Αν $2 \leqslant q < \infty$ τότε ο $L_q(\mu)$ έχει type 2 και cotype q.*

Αποδεικνύουμε πρώτα την εξής πρόταση.

Πρόταση 4.1.19. *Έστω (Ω, μ) χώρος μέτρου και $1 \leqslant p < \infty$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f_1, \dots, f_n \in L_p(\mu)$*

$$A_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right\|_p^p \right)^{1/p} \leqslant B_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p ,$$

όπου A_p και B_p είναι οι σταθερές στην ανισότητα του Khintchine.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι από το θεώρημα του Fubini

$$\left\| \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right|^p \right)^{1/p} \right\|_p^p = \int_\Omega \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i(\omega) \right|^p \right) d\mu(\omega) \tag{4.1.14}$$

$$= \mathbb{E} \left(\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i(\omega) \right|^p d\mu(\omega) \right)$$

$$= \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right\|_p^p .$$

Επίσης, από την ανισότητα του Khinitchine

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i(\omega) \right|^p \right)^{1/p} \leqslant B_p \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{1/2} ,$$

για κάθε $\omega \in \Omega$.
Επομένως,

$$A_p^p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \leqslant \left\| \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right|^p \right)^{1/p} \right\|_p^p \leqslant B_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p .$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (4.1.14) έχουμε

$$A_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right\|_p^p \right)^{1/p} \leqslant B_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p .$$

■

Θα χρειαστούμε επίσης το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.1.20. *Έστω (Ω, μ) χώρος μέτρου και $0 < r \leqslant 1$. Τότε για κάθε $f, g \in L_r(\mu)$ με $f, g \geqslant 0$ ισχύει*

$$\|f+g\|_r \geqslant \|f\|_r + \|g\|_r .$$

Απόδειξη. Αρκεί να το δείξουμε για την περίπτωση $\|f+g\|_r = 1$. Τότε το μέτρο ν με

$$\nu(A) = \int_A (f+g)^r d\mu$$

για κάθε $A \subseteq \Omega$ μετρήσιμο, είναι μέτρο πιθανότητας στο Ω.
Έχουμε,

$$\|f\|_r = \left(\int_\Omega |f|^r d\mu \right)^{1/r} = \left(\int_{\{f+g>0\}} \frac{f^r}{(f+g)^r} (f+g)^r d\mu \right)^{1/r} = \left(\int_{f+g>0} \left(\frac{f}{f+g} \right)^r d\nu \right)^{1/r} .$$

Από την ανισότητα Hölder, εφόσον $r \leqslant 1$ έχουμε

$$\left(\int_{\{f+g>0\}} \left(\frac{f}{f+g} \right)^r d\nu \right)^{1/r} \leqslant \int_{\{f+g>0\}} \left(\frac{f}{f+g} \right) d\nu = \int_{\{f+g>0\}} \frac{f}{f+g} (f+g)^r d\mu.$$

Συνεπώς,

$$\|f\|_r \leqslant \int_{\{f+g>0\}} \frac{f}{f+g} (f+g)^r d\mu.$$

Ομοίως, έχουμε ότι

$$\|g\|_r \leqslant \int_{\{f+g>0\}} \frac{g}{f+g} (f+g)^r d\mu.$$

Συνεπώς,

$$\|f\|_r + \|g\|_r \leqslant 1 = \|f+g\|_r .$$

■

Απόδειξη της Πρότασης 4.1.18.

(i) Έστω $1 \leqslant p \leqslant 2$. Έστω επίσης $n \in \mathbb{N}$ και $f_1, f_2, \dots, f_n \in L_p(\mu)$. Δείχνουμε αρχικά ότι ο $L_p(\mu)$ έχει cotype 2. Από το Λήμμα 4.1.20, εφόσον $\frac{p}{2} \leqslant 1$, έχουμε ότι

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p = \left\| \sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \right\|_{\frac{p}{2}}^{1/2} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \, |f_i|^2 \, \right\|_{\frac{p}{2}} \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p^2 \right)^{1/2} . \tag{4.1.15}$$

Επίσης, από την Πρόταση 4.1.19 έχουμε ότι

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \frac{1}{A_p} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i f_i \right\|_p^p \right)^{1/p} . \tag{4.1.16}$$

Από τις (4.1.15), (4.1.16) και την ανισότητα Hölder έχουμε ότι

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p^2 \right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{A_p} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i f_i \right\|_p^p \right)^{1/p} \leqslant \frac{1}{A_p} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i f_i \right\|_p^2 \right)^{1/2} .$$

Συνεπώς, ο $L_p(\mu)$ έχει cotype 2.

Για να δείξουμε ότι ο $L_p(\mu)$ έχει type p, παρατηρούμε ότι από την Πρόταση 4.1.19 και την ανισότητα Kahane έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i f_i \right\|_p^2 \right)^{1/2} &\leqslant K_2 \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i f_i \right\|_p \leqslant K_2 \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i f_i \right\|_p^p \right)^{1/p} \\ &\leqslant K_2 B_p \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p . \end{aligned} \tag{4.1.17}$$

Επίσης, εφόσον $p \leqslant 2$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(\omega)|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(\omega)|^p \right)^{1/p} \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega.$$

Συνεπώς,

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p \right)^{1/p} \right\|_p . \tag{4.1.18}$$

Όμως,

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p \right)^{1/p} \right\|_p = \left(\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^p \right) d\mu(\omega) \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p^p \right)^{1/p} . \tag{4.1.19}$$

Από τις (4.1.17),(4.1.18) και (4.1.19) συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i f_i \right\|_p^2 \right)^{1/2} \leqslant K_2 B_p \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_p^p \right)^{1/p} .$$

Δηλαδή ο $L_p(\mu)$ έχει type p.

(ii) Έστω $2 \leqslant q < \infty$. Δείχνουμε πρώτα ότι ο $L_q(\mu)$ έχει type 2. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $f_1, \ldots, f_n \in L_q(\mu)$. Από την Πρόταση 4.1.19 και την ανισότητα Kahane έχουμε

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i\right\|_q^2\right)^{1/2} \leqslant K_2 \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i\right\|_q \leqslant K_2\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i\right\|_q^q\right)^{1/q}$$
$$\leqslant K_2 B_q \left\|\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{1/2}\right\|_q .$$

Επίσης, εφόσον $\frac{q}{2} \geqslant 1$, από την τριγωνική ανισότητα της $\|\cdot\|_{\frac{q}{2}}$, έχουμε ότι

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{1/2}\right\|_q = \left\|\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right\|_{\frac{q}{2}}^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|\,|f_i|^2\,\|_{\frac{q}{2}}\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_q^2\right)^{1/2} .$$

Τελικά,

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i\right\|_q^2\right)^{1/2} \leqslant K_2 B_q \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|\,|f_i|^2\,\|_{\frac{q}{2}}\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_q^2\right)^{1/2} .$$

Συνεπώς ο $L_q(\mu)$ έχει type 2.

Το γεγονός ότι ο $L_q(\mu)$ έχει cotype q προκύπτει από το (i) και την Πρόταση 4.1.8. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι ο δυϊκός του $L_p(\mu)$ είναι ο $L_q(\mu)$. Συνεπώς, από την Πρόταση 4.1.8 έχουμε ότι

$$C_q(L_q(\mu)) = C_q((L_p(\mu))^*) \leqslant T_p(L_p(\mu)).$$

Όμως, από το (i) έχουμε ότι $T_p(L_p(\mu)) < \infty$. Έπεται ότι ο $L_q(\mu)$ έχει cotype q.

■

Πόρισμα 4.1.21.

(i) *Αν $1 \leqslant p \leqslant 2$ τότε ο ℓ_p έχει type p και cotype 2.*

(ii) *Αν $2 \leqslant q < \infty$ τότε ο ℓ_q έχει type 2 και cotype q.*

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 4.1.18, αφού από τις Προτάσεις 3.1.7 και 3.1.8 έπεται ότι για κάθε $1 \leqslant r < \infty$ ισχύει ότι $T_p(\ell_r) = T_p(L_r)$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant 2$ και $C_q(\ell_r) = C_q(L_r)$ για κάθε $q \geqslant 2$. ■

Κεφάλαιο 5

Το Θεώρημα του Krivine

5.1 Βάσεις Schauder

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε ορισμένες ιδιότητες για τις Schauder βασικές ακολουθίες οι οποίες θα φανούν χρήσιμες στη συνέχεια. Επιπλέον, ορίζουμε τις C-unconditional και 1-spreading ακολουθίες και αποδεικνύουμε κάποιες σχετικές ιδιότητες.

Ορισμός 5.1.1. Έστω X χώρος Banach. Μια ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ στον X λέγεται **Schauder βασική** αν για κάθε $x \in \overline{\text{span}}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ υπάρχει μοναδική ακολουθία $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών ώστε

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i,$$

δηλαδή

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - x \right\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Αν επιπλέον $\overline{\text{span}}\{x_i : i \in \mathbb{N}\} = X$, τότε η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ λέγεται **βάση Schauder** του X.

Επίσης, αν $\|x_i\| = 1$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ τότε η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ λέγεται **μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία**.

Κλασσικό παράδειγμα χώρων Banach με βάση Schauder είναι ο c_0 και οι ℓ_p για $1 \leqslant p < \infty$, για τους οποίους η συνήθης βάση $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder.

Είναι σαφές ότι κάθε Schauder βασική ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Ειδικότερα, $x_i \neq 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, αν η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder για τον χώρο Banach X, τότε το σύνολο $D = \{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n : n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του X. Επομένως, κάθε χώρος Banach με βάση Schauder είναι διαχωρίσιμος. Δεν αληθεύει όμως ότι κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει βάση Schauder. Ισχύει ωστόσο η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.1.2. *Κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία.*

Αποδεικνύουμε πρώτα την ακόλουθη πρόταση η οποία μας παρέχει ένα βασικό κριτήριο για να ελέγχουμε αν μια ακολουθία είναι Schauder βασική.

Πρόταση 5.1.3. *Μια ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ μη μηδενικών διανυσμάτων σε έναν χώρο Banach X είναι Schauder βασική αν και μόνο αν υπάρχει $K > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n < m$ στο $\mathbb{N}$ και*

$a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|. \tag{5.1.1}$$

Την ελάχιστη σταθερά $K > 0$ για την οποία ισχύει η (5.1.1) θα την λέμε σταθερά της Schauder βασικής ακολουθίας.

Απόδειξη. Θέτουμε $Y = \overline{\text{span}}\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την φυσιολογική προβολή $P_n : Y \to Y$ με

$$P_n(x) = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i. \tag{5.1.2}$$

Εφόσον η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder για τον Y, αποδεικνύεται ότι κάθε P_n είναι φραγμένος τελεστής και $K := \sup_n \|P_n\| < +\infty$. Έστω $n < m$ στο $\mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$. Τότε, $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ και το συμπέρασμα προκύπτει από την $\|P_n(x)\| \leqslant \|P_n\| \cdot \|x\| \leqslant K\|x\|$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ικανοποιεί την (5.1.1). Παρατηρούμε πρώτα ότι τα διανύσματα x_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$, τότε για κάθε $2 \leqslant j \leqslant m$ έχουμε

$$|a_j|\, \|x_j\| \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^{j} a_i x_i\Big\| + \Big\|\sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i\Big\| \leqslant 2K \Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\Big\| = 0.$$

Η ίδια ανισότητα ισχύει (με σταθερά K αντί για $2K$) όταν $j = 1$. Έπεται ότι $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Θεωρούμε τον $F = \text{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ο F είναι πυκνός υπόχωρος του Y. Για κάθε n ορίζουμε $P_n : F \to F$ με

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} a_i x_i.$$

Ο P_n είναι καλά ορισμένος, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των x_i, και από την (5.1.1) συμπεραίνουμε ότι $\|P_n\| \leqslant K$ για κάθε n. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα του F στον Y μπορούμε να επεκτείνουμε τον P_n σε ολόκληρο τον Y, με διατήρηση της $\|P_n\| \leqslant K$.

Έστω $x \in Y$. Από τον τρόπο ορισμού των P_n βλέπουμε ότι υπάρχει (μοναδική) ακολουθία $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ στο $\mathbb{R}$ ώστε

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας την $P_n \circ P_m = P_n$, $n < m$. Μένει να δείξουμε ότι $P_n(x) \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $z = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \in F$ ώστε $\|x - z\| < \varepsilon$. Για κάθε $m > n$ έχουμε $P_m(z) = z$, άρα

$$\begin{aligned} \|x - P_m(x)\| &\leqslant \|x - z\| + \|z - P_m(z)\| + \|P_m(z) - P_m(x)\| \\ &\leqslant (1 + \|P_m\|)\, \|x - z\| < (1 + K)\, \varepsilon, \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. ■

Η απόδειξη της Πρότασης 5.1.2 βασίζεται στο ακόλουθο *λήμμα του Mazur*:

Λήμμα 5.1.4. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και F υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την*

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$$

για κάθε $y \in F$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$. Αφού $\dim(F) < \infty$, η μοναδιαία σφαίρα S_F του F είναι συμπαγής. Άρα, μπορούμε να βρούμε $y_1, \ldots, y_k \in S_F$ τα οποία να σχηματίζουν $\varepsilon/2$-δίκτυο: για κάθε $y \in S_F$ υπάρχει $j \leqslant k$ ώστε $\|y - y_j\| \leqslant \varepsilon/2$.

Από το θεώρημα Hahn-Banach, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ μπορούμε να βρούμε $y_j^* \in X^*$ με $\|y_j^*\| = 1$ και $y_j^*(y_j) = 1$. Ο υπόχωρος $\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(y_j^*)$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση, συνεπώς, αφού $\dim(X) = \infty$, υπάρχει $x \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(y_j^*)$ με $\|x\| = 1$. Δηλαδή,

$$y_1^*(x) = \cdots = y_k^*(x) = 0.$$

Έστω $y \in S_F$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Υπάρχει $j \leqslant k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}\|y + \lambda x\| &\geqslant \|y_j + \lambda x\| - \|y - y_j\| \geqslant \|y_j + \lambda x\| - \frac{\varepsilon}{2}\\ &\geqslant y_j^*(y_j + \lambda x) - \frac{\varepsilon}{2} = y_j^*(y_j) - \frac{\varepsilon}{2}\\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon},\end{aligned}$$

δηλαδή $\|y\| = 1 \leqslant (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$ για κάθε $y \in S_F$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Έπεται το συμπέρασμα για κάθε $y \in F$: Αν $y = 0$, τότε είναι προφανές. Αν $0 \neq y \in F$, τότε $\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ έχουμε

$$\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|\frac{y}{\|y\|} + \lambda \frac{x}{\|y\|}\right\|,$$

δηλαδή $\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y + \lambda x\|$. ■

Απόδειξη της Πρότασης 5.1.2. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει βασική ακολουθία (x_i) στον X με σταθερά $M \leqslant 1 + \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε ακολουθία (ε_i) θετικών αριθμών, με $\prod_{i=1}^{\infty}(1+\varepsilon_i) \leqslant 1 + \varepsilon$.

Θεωρούμε τυχόν $x_1 \in X$ με $\|x_1\| = 1$ και θέτουμε $F_1 = \mathrm{span}\{x_1\}$. Από το Λήμμα 5.1.4 υπάρχει $x_2 \in X$ με $\|x_2\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon_2)\|y + a_2 x_2\|$$

για κάθε $y \in F_1$ και κάθε $a_2 \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $F_2 = \mathrm{span}\{x_1, x_2\}$ και επιλέγουμε $x_3 \in X$ με $\|x_3\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon_3)\|y + a_3 x_3\|$$

για κάθε $y \in F_2$ και κάθε $a_3 \in \mathbb{R}$.

Στο n-οστό βήμα, θέτουμε $F_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ και επιλέγουμε $x_{n+1} \in X$ με $\|x_{n+1}\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leqslant (1+\varepsilon_{n+1})\|y + a_{n+1} x_{n+1}\|$$

για κάθε $y \in F_n$ και για κάθε $a_{n+1} \in \mathbb{R}$. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ακολουθία (x_i) στον X. Θα δείξουμε ότι: αν $n < m$ και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, τότε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|. \tag{5.1.3}$$

Για την απόδειξη της (5.1.3) χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για κάθε $n \leqslant k < m$ έχουμε $y_k = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \in F_k$, και την επιλογή των x_i: έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \|y_n\| \leqslant (1+\varepsilon_{n+1})\|y_n + a_{n+1}x_{n+1}\| = (1+\varepsilon_{n+1})\|y_{n+1}\|,$$

και, επαγωγικά,

$$\|y_n\| \leqslant (1+\varepsilon_{n+1})\|y_{n+1}\| \leqslant \prod_{j=n+1}^{n+2} (1+\varepsilon_j)\|y_{n+2}\| \leqslant \cdots \leqslant \prod_{j=n+1}^{m} (1+\varepsilon_j)\|y_m\|,$$

δηλαδή,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant \prod_{j=n+1}^{m} (1+\varepsilon_j) \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leqslant (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η (x_i) είναι Schauder βασική, με σταθερά $M \leqslant 1+\varepsilon$. ■

Ορισμός 5.1.5. Έστω X χώρος Banach και $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Μια ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ στον X λέγεται **block ακολουθία** της $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ αν υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots$ τέτοια ώστε, για κάθε $j \in \mathbb{N}$,

$$y_j = \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} a_i x_i$$

για κάποια $a_i \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 5.1.6 (στρέβλωσης του James για τον c_0)**.** *Έστω X χώρος Banach. Αν ο c_0 εμφυτεύεται a-ισομορφικά στον X για κάποιον $a > 1$ τότε εμφυτεύεται και $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά για κάθε $\varepsilon > 0$.*

Ακριβέστερα, αν ο $T : c_0 \to X$ είναι ισομορφική εμφύτευση με $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| \leqslant a$ για κάποιον $a > 1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $S : c_0 \to X$ τέτοια ώστε $\|S\| \left\|S^{-1}\right\| \leqslant 1+\varepsilon$ και επιπλέον υπάρχει $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ block ακολουθία της συνήθους βάσης $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ του c_0 ώστε $S(e_i) = T(y_i)$ για κάθε $1 \leqslant i < \infty$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\|x\|_\infty \leqslant \|Tx\| \leqslant a\,\|x\|_\infty \quad \text{για κάθε } x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in c_0 \tag{5.1.4}$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\beta_n = \inf\left\{\|x\|_\infty : x \in c_{00}, \|Tx\| = 1 \text{ και } x_i = 0 \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant n\right\},$$

όπου $c_{00} = \{x \in c_0 : x_i \neq 0 \text{ για πεπερασμένα το πλήθος } i \in \mathbb{N}\}$. Από την (5.1.4) έπεται ότι $\frac{1}{a} \leqslant \beta_n \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, η $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Επομένως υπάρχει $\frac{1}{a} \leqslant \beta \leqslant 1$ τέτοιος ώστε $\beta_n \to \beta$.

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$ και $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιοι ώστε $\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} < 1 + \varepsilon$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\beta_{n_0} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}}\beta.$$

Κατασκευάζουμε ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ από στοιχεία του c_0 που είναι block ακολουθία της συνήθους βάσης $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ως εξής:

Επιλέγουμε $y_1 = \left\{y_1^i\right\}_{i=1}^{\infty} \in c_{00}$ τέτοιο ώστε

$$\|T(y_1)\| = 1,\ y_1^i = 0 \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant n_0 \text{ και } \|y_1\|_\infty \leqslant \beta_1\sqrt{1+\varepsilon_1} \leqslant \beta\sqrt{1+\varepsilon_1}.$$

Τότε, $y_1 \in \operatorname{span}\{e_i : 1 \leqslant i \leqslant m_1\}$ για κάποιον φυσικό $m_1 < n_0$.

Από τον ορισμό του β_{m_1}, υπάρχει $y_2 \in c_{00}$ τέτοιο ώστε

$$\|T(y_2)\| = 1,\ y_2^i = 0 \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant m_1 \text{ και } \|y_2\|_\infty \leqslant \beta_{m_1}\sqrt{1+\varepsilon_1} \leqslant \beta\sqrt{1+\varepsilon_1}.$$

Τότε $y_2 \in \operatorname{span}\{e_i : 1 \leqslant i \leqslant m_2\}$ για κάποιον φυσικό $m_2 > m_1$.

Συνεχίζοντας επαγωγικά, κατασκευάζουμε ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ από στοιχεία του c_0 τέτοια ώστε για κάθε $1 \leqslant j < \infty$

$$\|T(y_j)\| = 1,\ y_j \in \operatorname{span}\{e_i : m_{j-1} < i \leqslant m_j\} \text{ και } \|y_j\|_\infty \leqslant \beta\sqrt{1+\varepsilon_1},$$

όπου $n_0 = m_0 < m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών.

Άρα, η $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι block ακολουθία της $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Επιπλέον, εφόσον οι ακολουθίες $y_j = \{y_j^i\}_{i=1}^{\infty} \in c_0$ έχουν ξένους φορείς συμπεραίνουμε ότι

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right\|_\infty = \max_{1\leqslant j\leqslant n} |a_j|\,\|y_j\|_\infty \leqslant \beta\sqrt{1+\varepsilon_1}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j|,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Από τον ορισμό του β_{n_0},

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right\|_\infty \geqslant \beta_{n_0}\left\|T\left(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right)\right\|.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\left\|T\left(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right)\right\| \leqslant \frac{1}{\beta_{n_0}}\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{\beta_{n_0}}\beta\sqrt{1+\varepsilon_1}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j| \leqslant (1+\varepsilon_1)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j|$$

Επιπλέον, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\left\|T\left(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j T(y_j)\right\| &\geqslant \|2a_k T(y_k)\| - \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j T(y_j) - 2a_k T(y_k)\right\| \\ &\geqslant |a_k|\,\|T(y_k)\| - (1+\varepsilon_1)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j| \\ &= 2|a_k| - (1+\varepsilon_1)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j|.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\left\|T\left(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right)\right\| \geqslant (1-\varepsilon_1)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j|.$$

Τελικά,

$$(1-\varepsilon_1)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j| \leqslant \left\| T\left(\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right)\right\| \leqslant (1+\varepsilon_1)\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j|, \tag{5.1.5}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς, αν $\{a_j\}_{j=1}^{\infty} \in c_0$ τότε, εφόσον $\|y_j\|_\infty \leqslant \beta\sqrt{1+\varepsilon_1}$, έχουμε ότι $\sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j \in c_0$ και από την (5.1.5) έπεται ότι

$$(1-\varepsilon_1)\sup_{1\leqslant j<\infty}|a_j| \leqslant \left\| T\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j\right)\right\| \leqslant (1+\varepsilon_1)\sup_{1\leqslant j<\infty}|a_j|.$$

Επομένως, για τον γραμμικό τελεστή $S : c_0 \to X$ με

$$S\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j\right) = T\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j y_j\right)$$

ισχύει ότι

$$\|S\|\left\|S^{-1}\right\| \leqslant \frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} < 1+\varepsilon$$

και $S(e_i) = T(y_i)$ για κάθε $1 \leqslant i < \infty$.

Συνεπώς, ο c_0 εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον X. ∎

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το θεώρημα στρέβλωσης του James για τον ℓ_1.

Θεώρημα 5.1.7 (στρέβλωσης του James για τον ℓ_1)**.** *Έστω X χώρος Banach. Αν ο ℓ_1 εμφυτεύεται a-ισομορφικά στον X για κάποιον $a > 1$ τότε εμφυτεύεται και $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά για κάθε $\varepsilon > 0$.*

Ακριβέστερα, αν ο $T : \ell_1 \to X$ είναι ισομορφική εμφύτευση με $\|T\|\left\|T^{-1}\right\| \leqslant a$ για κάποιον $a > 1$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $S : \ell_1 \to X$ τέτοια ώστε $\|S\|\left\|S^{-1}\right\| \leqslant 1+\varepsilon$ και επιπλέον υπάρχει $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ block ακολουθία της συνήθους βάσης $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ του ℓ_1 ώστε $S(e_i) = T(y_i)$ για κάθε $1 \leqslant i < \infty$.

Ορισμός 5.1.8. Δύο ακολουθίες $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ στον X και $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ στον Y λέγονται a-**ισοδύναμες** αν υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε $cC \leqslant a$ και

$$\frac{1}{c}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=}^{n} a_i x_i\right\| \leqslant C\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i y_i\right\|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$).

Επίσης, λέμε ότι δύο ακολουθίες είναι **ισοδύναμες** αν είναι a-ισοδύναμες για κάποιον $a \geqslant 1$.

Παρατηρούμε ότι αν οι $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ και $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι a-ισοδύναμες και $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία πραγματικών (ή μιγαδικών) αριθμών, τότε η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$, και όταν συγκλίνουν έχουμε

$$\frac{1}{c}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\| \leqslant C\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|,$$

για κάποιες σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε $cC \leqslant a$.

Ορισμός 5.1.9. Μια ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ σε έναν πραγματικό χώρο Banach λέγεται **C-unconditional** για κάποιον $C \geqslant 1$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και κάθε επιλογή προσήμων $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{n}$ με $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i x_i \right\|. \tag{5.1.6}$$

Παρατηρούμε ότι αν εφαρμόσουμε την (5.1.6) με $b_i = \epsilon_i a_i$ στη θέση των a_i τότε έχουμε ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i b_i x_i \right\|,$$

δηλαδή,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|.$$

Επομένως αν η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι C-unconditional τότε

$$\frac{1}{C} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i x_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i x_i \right\|,$$

δηλαδή η ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι C^2-ισοδύναμη με την $\{\epsilon_i x_i\}_{i=1}^{\infty}$ για κάθε επιλογή προσήμων $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ με $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Ειδικότερα η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional αν

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i x_i \right\|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$.

Ανάλογος είναι ο ορισμός και στην περίπτωση που έχουμε μιγαδικό χώρο Banach.

Ορισμός 5.1.10. Στην περίπτωση που ο χώρος Banach X είναι μιγαδικός, μια ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ στον X λέγεται **C-unconditional** για κάποιον $C \geqslant 1$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ και κάθε $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{n}$ με $\epsilon_i \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_i x_i \right\|.$$

Τότε, η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι C^2-ισοδύναμη με την $\{\epsilon_i x_i\}_{i=1}^{\infty}$ για κάθε $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ με $\epsilon_i \in \mathbb{T}$.

Ειδικότερα, η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional αν

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| x_i \right\|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Ορισμός 5.1.11. Μια ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται **1-spreading** αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ και κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_{k_i} \right\|.$$

Παρατηρούμε ότι αν η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι 1-spreading τότε $\|x_i\| = \|x_1\|$ για κάθε $1 \leqslant i < \infty$.

Κλασσικό παράδειγμα ακολουθιών οι οποίες είναι 1-unconditional και 1-spreading είναι οι συνήθεις βάσεις $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ των πραγματικών ή μιγαδικών ακολουθιών στον c_0 ή τον ℓ_p για $1 \leqslant p < \infty$.

Πρόταση 5.1.12. *Έστω X χώρος Banach και $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι C-unconditional για κάποιο $C \geqslant 1$ αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) τέτοια ώστε $|a_i| \leqslant |b_i|$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$, ισχύει*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right\|.$$

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι μια ακολουθία που ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα είναι C-unconditional. Για το αντίστροφο, έστω ότι η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι C-unconditional ακολουθία. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ τέτοια ώστε $|a_i| \leqslant |b_i|$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$. Θεωρούμε το σύνολο $K = \{(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n (\text{ή } \mathbb{C}^n) : |t_i| \leqslant |b_i| \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant n\}$, το οποίο είναι κυρτό και συμπαγές, και τη συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}$ με

$$f(t_1, \dots, t_n) = \|t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n\|.$$

Η f είναι κυρτή, επομένως λαμβάνει μέγιστο σε κάποιο ακραίο σημείο του K, δηλαδή σε κάποιο $(s_1, s_2, \dots, s_n) \in K$ τέτοιο ώστε $|s_i| = |b_i|$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$. Δηλαδή, $s_i = \epsilon_i b_i$ για κάποια $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ ($\epsilon_i \in \mathbb{T}$ για την μιγαδική περίπτωση). Έπεται ότι, για κάθε $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in K$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} s_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right\|.$$

Ειδικότερα, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in K$, άρα

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right\|.$$

■

Πόρισμα 5.1.13. *Αν μια ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ σε κάποιον χώρο Banach είναι C-unconditional για κάποιον $C \geqslant 1$, τότε για κάθε πεπερασμένο σύνολο $B \subseteq \mathbb{N}$, $\{a_i\}_{i \in B}$ στον $\mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$) και $A \subseteq B$,*

$$\left\| \sum_{i \in A} a_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i \in B} a_i x_i \right\|.$$

Ειδικότερα, $\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \geqslant \frac{1}{C} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \, \|x_i\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (ή $\mathbb{C}$).

Από το Πόρισμα 5.1.13 και την Πρόταση 5.1.3 έπεται ότι κάθε C-unconditional ακολουθία που αποτελείται από μη μηδενικά διανύσματα είναι Schauder βασική.

Πρόταση 5.1.14. *Έστω X πραγματικός χώρος Banach και $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο $B \subseteq \mathbb{N}$, $\{a_i\}_{i \in B}$ στο $\mathbb{R}$ και $A \subseteq B$ ισχύει*

$$\left\| \sum_{i \in A} a_i x_i \right\| \leqslant C \left\| \sum_{i \in B} a_i x_i \right\|,$$

για κάποιον $C \geqslant 1$, τότε η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι $2C$-unconditional.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ με $\epsilon_i \in \{-1,1\}$,

$$\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i a_i x_i\right\| = \left\|\sum_{\{i:\epsilon_i=1\}} \epsilon_i a_i x_i + \sum_{\{i:\epsilon_i=-1\}} \epsilon_i a_i x_i\right\| = \left\|\sum_{\{i:\epsilon_i=1\}} a_i x_i - \sum_{\{i:\epsilon_i=-1\}} a_i x_i\right\|$$
$$\leqslant \left\|\sum_{\{i:\epsilon_i=1\}} a_i x_i\right\| + \left\|\sum_{\{i:\epsilon_i=-1\}} a_i x_i\right\| \leqslant 2C\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\|.$$

■

5.2 Στοιχεία από τη Θεωρία Τελεστών

Για την απόδειξη του θεωρήματος του Krivine θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα από τη θεωρία τελεστών.

Ορισμοί 5.2.1. Έστω X μιγαδικός χώρος Banach και $T : X \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής.

(i) Το $\lambda \in \mathbb{C}$ λέγεται **ιδιοτιμή** του T αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x \neq 0$ και $Tx = \lambda x$. Τότε, το $x \in X$ λέγεται **ιδιοδιάνυσμα** που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

(ii) Το $\lambda \in \mathbb{C}$ λέγεται **προσεγγιστική ιδιοτιμή** του T αν υπάρχει ακολουθία $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ στον X, με $\|u_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$\|Tu_n - \lambda u_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Τότε, η $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ λέγεται **ακολουθία προσεγγιστικών ιδιοδιανυσμάτων** που αντιστοιχεί στην προσεγγιστική ιδιοτιμή λ.

(iii) Το **φάσμα** $\sigma(T)$ του τελεστή T είναι το σύνολο των $\lambda \in \mathbb{C}$ για τα οποία ο τελεστής $T - \lambda I$ δεν έχει φραγμένο αντίστροφο (όπου $I : X \to X$ ο ταυτοτικός τελεστής). Δηλαδή,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ μη αντιστρέψιμος}\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν υπάρχει ο γραμμικός τελεστής $(T - \lambda I)^{-1}$ (δηλαδή αν ο $T - \lambda I$ είναι 1-1 και επί) τότε θα είναι και φραγμένος από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης.

Είναι σαφές ότι κάθε ιδιοτιμή του T είναι και προσεγγιστική ιδιοτιμή. Επίσης κάθε ιδιοτιμή ανήκει στο φάσμα του τελεστή T αφού αν ο λ είναι ιδιοτιμή του T τότε $Tx - \lambda x = 0$ για κάποιο $x \neq 0$ και επομένως ο τελεστής $T - \lambda I$ δεν είναι 1-1 και άρα ούτε αντιστρέψιμος. Αληθεύει, επίσης, ότι κάθε προσεγγιστική ιδιοτιμή ανήκει στο φάσμα του τελεστή.

Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω X μιγαδικός χώρος Banach και $T : X \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε, το φάσμα $\sigma(T)$ του T είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.*

Δεν ισχύει όμως εν γένει ότι το σύνολο των ιδιοτιμών ενός φραγμένου τελεστή σε έναν χώρο Banach είναι μη κενό. Ωστόσο, όπως προκύπτει από την επόμενη πρόταση σε συνδυασμό με το Θεώρημα 5.2.2, κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής έχει προσεγγιστική ιδιοτιμή.

Πρόταση 5.2.3. *Έστω X χώρος Banach και $T : X \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Κάθε $\lambda \in \partial\sigma(T)$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του τελεστή T, όπου $\partial\sigma(T)$ είναι το σύνορο του φάσματος $\sigma(T)$.*

Για την απόδειξη της Πρότασης 5.2.3 αποδεικνύουμε πρώτα το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 5.2.4. *Έστω X χώρος Banach και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $\|I - T\| < 1$. Τότε ο T είναι αντιστρέψιμος φραγμένος γραμμικός τελεστής.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$,

$$(1 - \|I - T\|)\,\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant (\|I - T\| + 1)\,\|x\|\,,$$

άρα ο T είναι ισομορφική εμφύτευση. Θα δείξουμε ότι είναι και αντιστρέψιμος, με αντίστροφο

$$T^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(I - T)^k.$$

Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\|(I - T)^k\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\|I - T\|^k < \infty,$$

διότι $\|I - T\| < 1$. Επομένως, η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}(I - T)^k$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνει σε κάποιον φραγμένο γραμμικό τελεστή (ο χώρος $\mathcal{B}(X) = \{T : X \to X : T$ φραγμένος γραμμικός τελεστής$\}$ είναι χώρος Banach).

Θέτουμε $S_n = \sum_{k=0}^{n}(I - T)^k$ και $S = \sum_{k=0}^{\infty}(I - T)^k$. Τότε,

$$S_nT = -S_n(I - T) + S_n = I - (I - T)^{n+1}.$$

Εφόσον $\|I - T\| < 1$, έχουμε

$$\left\|(I - T)^{n+1}\right\| \leqslant \|I - T\|^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Επομένως, $ST = \lim\limits_{n} S_nT = I$. Ομοίως, $TS = I$. ■

Απόδειξη της Πρότασης 5.2.3. Έστω $\lambda \in \partial\sigma(T)$ και ακολουθία $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lambda_n \to \lambda$. Παρατηρούμε ότι εφόσον $\lambda_n \notin \sigma(T)$ ο τελεστής $T - \lambda_nI$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός: $\left\|(T - \lambda_nI)^{-1}\right\| \longrightarrow \infty$.

Απόδειξη του ισχυρισμού: Υποθέτουμε (προς άτοπο) ότι $\left\|(T - \lambda_nI)^{-1}\right\| \not\longrightarrow \infty$. Τότε υπάρχουν $M > 0$ και υπακολουθία $\{\lambda_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$\left\|(T - \lambda_{k_n})^{-1}\right\| \leqslant M \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Εφόσον $\lambda_n \to \lambda$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\left|\lambda_{k_{n_0}} - \lambda\right| < \frac{1}{M}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\left\|I - (T - \lambda I)(T - \lambda_{k_{n_0}}I)^{-1}\right\| &= \left\|(T - \lambda_{k_{n_0}}I)^{-1}\right\|\left\|(T - \lambda_{k_{n_0}}I) - (T - \lambda I)\right\| \\ &= \left\|(T - \lambda_{k_{n_0}}I)^{-1}\right\|\left\|(\lambda - \lambda_{k_{n_0}})I\right\| \\ &\leqslant M\left|\lambda - \lambda_{k_{n_0}}\right| < 1.\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 5.2.4 έπεται ότι ο τελεστής $(T - \lambda I)(T - \lambda_{k_{n_0}}I)$ είναι αντιστρέψιμος και κατά συνέπεια ο $T - \lambda I$ είναι αντιστρέψιμος. Άτοπο, διότι $\lambda \in \partial\sigma(T) \subseteq \sigma(T)$. Άρα αληθεύει ο ισχυρισμός. □

Από τον ορισμό της νόρμας τελεστή έπεται ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ με $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left\|(T-\lambda_n I)^{-1}x_n\right\| \geqslant \left\|(T-\lambda_n I)^{-1}\right\| - \varepsilon.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $a_n = \left\|(T-\lambda_n I)^{-1}x_n\right\|$ και

$$u_n = \frac{1}{a_n}(T-\lambda_n I)^{-1}x_n.$$

Τότε $\|u_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από τον ισχυρισμό έχουμε ότι $a_n \longrightarrow \infty$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\|Tu_n - \lambda u_n\| \leqslant \|Tu_n - \lambda_n u_n\| + \|\lambda_n u_n - \lambda u_n\| &= \left\|\frac{1}{a_n}(T-\lambda_n I)(T-\lambda_n I)^{-1}x_n\right\| + |\lambda_n - \lambda| \\ &= \frac{\|x_n\|}{a_n} + |\lambda_n - \lambda| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Επομένως, το λ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του T με αντίστοιχη ακολουθία προσεγγιστικών ιδιοδιανυσμάτων την $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Πόρισμα 5.2.5. *Κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ σε έναν μιγαδικό χώρο Banach X έχει τουλάχιστον μια προσεγγιστική ιδιοτιμή.*

Η βασική πρόταση από τη θεωρία τελεστών που θα χρειαστεί για την απόδειξη του θεωρήματος του Krivine είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 5.2.6. *Έστω X μιγαδικός χώρος Banach και $T, S : X \to X$ φραγμένοι γραμμικοί τελεστές οι οποίοι μετατίθενται, δηλαδή $TS = ST$. Για κάθε προσεγγιστική ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$ του T υπάρχει προσεγγιστική ιδιοτιμή $\mu \in \mathbb{C}$ του S και $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον X η οποία είναι κοινή ακολουθία προσεγγιστικών ιδιοδιανυσμάτων για τις ιδιοτιμές λ και μ των τελεστών T και S αντίστοιχα. Δηλαδή, $\|u_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|Tu_n - \lambda u_n\| \longrightarrow 0 \ \textit{ και } \ \|Su_n - \mu u_n\| \longrightarrow 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά επιπλέον ότι το λ είναι ιδιοτιμή του T. Δηλαδή $Tx = \lambda x$ για κάποιο $x \in X$ με $x \neq 0$. Θέτουμε $U_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$, δηλαδή U_λ είναι ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Τότε, $S(U_\lambda) \subseteq U_\lambda$. Πράγματι, αν $x \in U_\lambda$ τότε $Tx = \lambda x$. Επομένως, εφόσον $ST = TS$, το Sx είναι ιδιοδιάνυσμα του T με ιδιοτιμή λ διότι $TSx = STx = S\lambda x = \lambda Sx$. Επομένως, πράγματι $S(U_\lambda) \subseteq U_\lambda$. Ορίζεται τότε ο τελεστής $S_1 = S|_{U_\lambda} : U_\lambda \to U_\lambda$. Ο U_λ είναι κλειστός υπόχωρος και άρα χώρος Banach. Επομένως, σύμφωνα με το Πόρισμα 5.2.5, υπάρχει προσεγγιστική ιδιοτιμή $\mu \in \mathbb{C}$ του S_1. Δηλαδή, υπάρχει ακολουθία $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ στο U_λ τέτοια ώστε $\|u_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\|S_1 u_n - \mu u_n\| \longrightarrow 0$. Έπεται ότι $\|Su_n - \mu u_n\| \longrightarrow 0$ και εφόσον $u_n \in U_\lambda$ έχουμε ότι $Tu_n = \lambda u_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως έχουμε δείξει το ζητούμενο με την επιπλέον υπόθεση ότι το λ είναι ιδιοτιμή του T.

Για τη γενική περίπτωση όπου το λ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή, θα χρησιμοποιήσουμε θεωρία υπεργινομένων χώρων Banach. Έστω $\mathcal{U}$ μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$, $\tilde{X}$ η υπερδύναμη του X και $\tilde{T}, \tilde{S} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ οι υπερδυνάμεις των T και S αντίστοιχα. Είναι σαφές ότι εφόσον οι T και S μετατίθενται, το ίδιο ισχύει και για τους $\tilde{T}$ και $\tilde{S}$, δηλαδή $\tilde{T}\tilde{S} = \tilde{S}\tilde{T}$. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ προσεγγιστική ιδιοτιμή του T. Τότε το λ είναι ιδιοτιμή του $\tilde{T}$. Πράγματι, αν $\bar{u} = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία προσεγγιστικών ιδιοδιανυσμάτων για την ιδιοτιμή λ, τότε $\bar{u}_{\mathcal{U}} \in \tilde{X}$ και $\|\bar{u}_{\mathcal{U}}\|_{\tilde{X}} = \lim_{\mathcal{U}} \|u_n\| = 1$. Επιπλέον,

$$\left\|(\tilde{T}\bar{u})_{\mathcal{U}} - \lambda \bar{u}_{\mathcal{U}}\right\| = \lim_{\mathcal{U}} \|Tu_n - \lambda u_n\| = 0,$$

δηλαδή
$$\tilde{T}\bar{u}_{\mathcal{U}} = \lambda \bar{u}_{\mathcal{U}}.$$
Συνεπώς, έχουμε ότι $\tilde{T}\tilde{S} = \tilde{S}\tilde{T}$ και το λ είναι ιδιοτιμή του $\tilde{T}$. Έπεται ότι υπάρχει προσεγγιστική ιδιοτιμή $\mu \in \mathbb{C}$ του $\tilde{S}$ και ακολουθία $\{\bar{u}_m\}_{m=1}^{\infty}$ στον $\tilde{X}$ με $\|\bar{u}_m\|_{\tilde{X}} = 1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε
$$\left\|\tilde{S}\bar{u}_m - \mu\bar{u}_m\right\|_{\tilde{X}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ και } \tilde{T}\bar{u}_m = \lambda\bar{u}_m \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}.$$
Θεωρούμε την υπερδύναμη του $\tilde{X}$ ως προς το $\mathcal{U}$, έστω $\tilde{\tilde{X}}$, και έστω $\tilde{\tilde{S}}, \tilde{\tilde{T}} : \tilde{\tilde{X}} \to \tilde{\tilde{X}}$ οι αντίστοιχες υπερδυνάμεις των $\tilde{S}$ και $\tilde{T}$. Τότε, όπως και προηγουμένως, έπεται ότι υπάρχει $\tilde{u} \in \tilde{\tilde{X}}$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{u}\|_{\tilde{\tilde{X}}} = 1$, $\tilde{\tilde{T}}\tilde{u} = \lambda\tilde{u}$ και $\tilde{\tilde{S}}\tilde{u} = \mu\tilde{u}$, δηλαδή το $\tilde{u}$ είναι κοινό ιδιοδιάνυσμα για τους $\tilde{\tilde{T}}$ και $\tilde{\tilde{S}}$ για τις ιδιοτιμές λ και μ αντίστοιχα. Εφόσον $\|\tilde{u}\|_{\tilde{\tilde{X}}} = 1$, υπάρχει $\bar{z} = \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον $\tilde{X}$ ώστε $\|z_n\|_{\tilde{X}} = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\bar{z}_{\mathcal{U}} = \tilde{u}$. Τότε,
$$\lim_{\mathcal{U}} \left\|\tilde{T}z_n - \lambda z_n\right\| = 0$$
και
$$\lim_{\mathcal{U}} \left\|\tilde{S}z_n - \mu z_n\right\| = 0.$$
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, εφόσον $\|z_n\|_{\tilde{X}} = 1$ υπάρχει ακολουθία $\bar{y} = \{y_m^n\}_{m=1}^{\infty}$ στον X ώστε $\|y_m^n\| = 1$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $\bar{y}_{\mathcal{U}} = z_n$.

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $U \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε
$$\left\|\tilde{S}z_n - \mu z_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
και
$$\left\|\tilde{T}z_n - \lambda z_n\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
για κάθε $n \in U$. Δηλαδή
$$\lim_{m,\mathcal{U}} \|Sy_m^n - \mu y_m^n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
και
$$\lim_{m,\mathcal{U}} \|Ty_m^n - \lambda y_m^n\| < \frac{\varepsilon}{2}$$
για κάθε $n \in U$.

Έπεται ότι για κάθε $n \in U$ υπάρχει $U_n \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε
$$\|Sy_m^n - \mu y_m^n\| < \varepsilon$$
και
$$\|Ty_m^n - \lambda y_m^n\| < \varepsilon$$
για κάθε $m \in U_n$. Δηλαδη, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $u \in X$ τέτοιο ώστε $\|u\| = 1$,
$$\|Su - \mu u\| < \varepsilon \;\text{ και }\; \|Tu - \lambda u\| < \varepsilon.$$
(Επιλέγουμε $u = y_m^n$ για κάποιο $n \in U$ και $m \in U_n$).

Επομένως, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον X με $\|u_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε
$$\|Tu_n - \lambda u_n\| < \frac{1}{n} \longrightarrow 0 \;\text{ και }\; \|Su_n - \mu u_n\| < \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$
Δηλαδή, η $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι κοινή ακολουθία προσεγγιστικών ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές λ και μ για τους τελεστές T και S αντίστοιχα. ■

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το Θεώρημα 5.2.2 ισχύει μόνο για μιγαδικούς χώρους Banach ενώ για πραγματικούς δεν αληθεύει εν γένει. Κατά συνέπεια το ίδιο ισχύει και για το Πόρισμα 5.2.5 και την Πρόταση 5.2.6.

5.3 Block πεπερασμένη αναπαραστασιμότητα

Ορισμός 5.3.1. Έστω X χώρος Banach και $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία στον X. Μια πεπερασμένη ακολουθία $\{u_j\}_{j=1}^{n}$ στον X λέγεται **block ακολουθία** της $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ αν υπάρχουν φυσικοί $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_n$ τέτοιοι ώστε για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n$

$$u_j = \sum_{i=m_{j-1}+1}^{m_j} a_i x_i,$$

για κάποιους $a_i \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 5.3.2. Έστω $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία σε έναν χώρο Banach X και $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία σε έναν χώρο Banach Y. Η ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ λέγεται **block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη** στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει block ακολουθία $\{u_j\}_{j=1}^{n}$ της $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, τέτοια ώστε

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\left\|\sum_{j=1}^{n} t_j u_j\right\| \leqslant \left\|\sum_{j=1}^{n} t_j y_j\right\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\left\|\sum_{j=1}^{n} t_j u_j\right\|,$$

για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$.

Επίσης, για $1 \leqslant p < \infty$ λέμε ότι ο ℓ_p ή ο c_0 είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ αν η συνήθης βάση $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Η ιδιότητα της block πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας είναι μεταβατική. Συγκεκριμένα, ισχύει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.3.3. *Έστω X, Y, Z χώροι Banach και $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ και $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθίες στον X, Y και Z αντίστοιχα, τέτοιες ώστε η $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ να είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ και η $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ να είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Τότε, η $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και $N \in \mathbb{N}$. Εφόσον η $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στη $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$, για κάθε $\varepsilon_1 > 0$ υπάρχει block ακολουθία $\{u_k\}_{k=1}^{N}$ της $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ ώστε

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}}\left\|\sum_{k=1}^{N} t_k u_k\right\| \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{N} t_k z_k\right\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon_1}\left\|\sum_{k=1}^{N} t_k u_k\right\| \tag{5.3.1}$$

για κάθε $t_1, t_2, \ldots, t_N \in \mathbb{R}$.

Έστω $0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_N =: M$ και $\{a_j\}_{j=1}^{m_N}$ τέτοιοι ώστε $u_k = \sum\limits_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j y_j$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant N$.

Από την άλλη, εφόσον η $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, υπάρχει block ακολουθία $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ της $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ώστε

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}}\left\|\sum_{j=1}^{M} \lambda_j v_j\right\| \leqslant \left\|\sum_{j=1}^{M} \lambda_j y_j\right\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon_1}\left\|\sum_{j=1}^{M} \lambda_j v_j\right\| \tag{5.3.2}$$

για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \mathbb{R}$.

Έστω $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_M$ και $\{b_i\}_{i=1}^{n_M}$ ώστε $v_j = \sum\limits_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} b_i x_i$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant M$.

Από τις (5.3.1) και (5.3.2) έπεται ότι

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} t_k z_k\right\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon_1}\left\|\sum_{k=1}^{N} t_k \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j y_j\right\| = \sqrt{1+\varepsilon_1}\left\|\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} t_k a_j y_j\right\|$$
$$\leqslant \sqrt{1+\varepsilon_1}\sqrt{1+\varepsilon_1}\left\|\sum_{k=1}^{N} \sum_{j=m_{k=1}+1}^{m_k} t_k a_j v_j\right\| = (1+\varepsilon_1)\left\|\sum_{k=1}^{N} t_k \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j v_j\right\|,$$

και ομοίως

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} t_k z_k\right\| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon_1}\left\|\sum_{k=1}^{N} t_k \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j v_j\right\|.$$

Για $1 \leqslant k \leqslant N$ θέτουμε

$$w_k = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} a_j v_j = \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} a_j b_i x_i.$$

Η $\{w_k\}_{k=1}^N$ είναι block ακολουθία της $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ και από τα παραπάνω, επιλέγοντας $\varepsilon_1 > 0$ αρκετά μικρό ώστε $1+\varepsilon_1 < \sqrt{1+\varepsilon}$, έπεται ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\left\|\sum_{k=1}^{N} t_k w_k\right\| \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{N} t_k z_k\right\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\left\|\sum_{k=1}^{N} t_k w_k\right\|.$$

Επομένως, πράγματι, η $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$. ■

5.4 Το θεώρημα του Krivine

Διατυπώνουμε τώρα το βασικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου, το θεώρημα του Krivine.

Θεώρημα 5.4.1 (Krivine). *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία στον X. Τότε, υπάρχει $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ώστε ο ℓ_p να είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, όπου για την περίπτωση $p=\infty$ εννοούμε τον χώρο c_0.*

Αξίζει να συγκρίνει κανείς το θεώρημα του Krivine με το παράδειγμα του Tsirelson. Ο χώρος του Tsirelson είναι ένας απειροδιάστατος χώρος Banach στον οποίο δεν εμφυτεύεται ισομορφικά ούτε ο c_0 ούτε ο ℓ_p για κάποιον $1 \leqslant p < \infty$. Ωστόσο, από το θεώρημα του Krivine προκύπτει ότι για κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach υπάρχει $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ ο ℓ_p^n να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον X. Δηλαδή, εμφυτεύονται στον X σχεδόν ισομετρικά όλοι οι πεπερασμένης διάστασης υπόχωροι του ℓ_p. Μάλιστα, όπως θα δούμε παρακάτω, σαν συνέπεια του θεωρήματος του Krivine έχουμε το θεώρημα του Dvoretzky σύμφωνα με το οποίο ο ℓ_2^n εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον X για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\varepsilon > 0$.

Η απόδειξη του θεωρήματος του Krivine θα γίνει σε βήματα με μια σειρά από προτάσεις που εκμεταλλεύονται τη μεταβατικότητα της block πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας (Πρόταση 5.3.3). Πιο συγκεκριμένα, παρατηρούμε ότι εφόσον η συνήθης βάση του ℓ_p ή του c_0 είναι 1-spreading και 1-unconditional θα ήταν ευκολότερο να δείξουμε το θεώρημα του Krivine με την επιπλέον υπόθεση ότι η ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ είναι 1-spreading και 1-unconditional. Αν δείξουμε αυτή την ειδική περίπτωση τότε από την Πρόταση 5.3.3 έχουμε το συμπέρασμα για κάθε ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ η οποία είναι Schauder βασική. Τα ακριβή βήματα είναι τα εξής :

Βήμα 1: Για κάθε μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Banach X υπάρχει χώρος Banach Y και ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ στον Y η οποία είναι 1-spreading και block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Βήμα 2: Έστω X χώρος Banach και ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ στον X με $x_1 \neq x_2$ η οποία είναι 1-spreading. Τότε υπάρχει χώρος Banach Y και μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ στον Y η οποία είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ και επιπλέον είναι 1-spreading και, για κάθε ζεύγος A, B πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τέτοιων ώστε $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ και $\{a_j\}_{j\in B}$ πραγματικούς αριθμούς,

$$\left\| \sum_{j\in A} a_j y_j \right\| \leqslant \left\| \sum_{j\in B} a_j y_j \right\|. \tag{5.4.1}$$

Βήμα 3: Για κάθε μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Banach X η οποία είναι 1-spreading και ικανοποιεί την (5.4.1) υπάρχει χώρος Banach Y και μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ στον Y η οποία είναι 1-spreading, 1-unconditional και block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Βήμα 4: Έστω X χώρος Banach και $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία στον X η οποία είναι 1-spreading και 1-unconditional. Τότε, είτε υπάρχει $1 \leqslant p < \infty$ ώστε η συνήθης βάση του ℓ_p να είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είτε η συνήθης βάση του c_0 είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Ξεκινάμε με την απόδειξη του πρώτου βήματος. Γι' αυτό θα χρειαστούμε το συνδυαστικό θεώρημα του Ramsey.

Παρακάτω, για κάθε άπειρο υποσύνολο N του $\mathbb{N}$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $N^{[n]} = \{A \subseteq N : \mathrm{card}A = n\}$.

Θεώρημα 5.4.2 (Ramsey).

(i) *Έστω A πεπερασμένο σύνολο, $n \in \mathbb{N}$ και $\psi : \mathbb{N}^{[n]} \to A$. Τότε υπάρχει άπειρο $N \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η ψ να είναι σταθερή στο $N^{[n]}$.*

(ii) *Έστω A πεπερασμένο σύνολο, $n \in \mathbb{N}$ και $\psi_1, \dots, \psi_m : \mathbb{N}^{[n]} \to A$. Τότε υπάρχει $N \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$ η ψ_i να είναι σταθερή στο $N^{[n]}$.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός αποδεινύεται με επαγωγή ως προς n. Το βήμα $n = 1$ είναι φανερό, εξηγούμε λοιπόν το επαγωγικό βήμα. Έστω $\psi : \mathbb{N}^{[n]} \to A$. Σταθεροποιούμε $j \in \mathbb{N}$ και περιορίζουμε την ψ στα n-σύνολα φυσικών που περιέχουν το j. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει άπειρο υποσύνολο M_1 του $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η ψ να είναι σταθερή σε όλα τα n-σύνολα που αποτελούνται από το j και $n-1$ στοιχεία του M_1.

Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, βρίσκουμε μια φθίνουσα ακολουθία άπειρων συνόλων $\mathbb{N} \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$, και φυσικούς $j_i \in M_i \setminus M_{i+1}$ έτσι ώστε ο περιορισμός της ψ σε κάθε n-σύνολο που αποτελείται από το j_i και $n-1$ στοιχεία του M_{i+1} να έχει σταθερή τιμή από το A. Περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η σταθερή αυτή τιμή δεν εξαρτάται από το i. Θέτοντας $M = \{j_i : i \geqslant 1\}$ έχουμε το ζητούμενο.

Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα m φορές, διαδοχικά για τις $\psi_1, \dots, \psi_m$, παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων $M = M^{(1))} \supset M^{(2)} \supset \cdots \supset N = M^{(m)}$ ώστε: για κάθε $1 \leqslant k \leqslant m$ οι $\psi_1, \dots, \psi_k$ είναι σταθερές στο $(M^{(k)})^{[n]}$. Το σύνολο $N = M^{(n)}$ ικανοποιεί τον δεύτερο ισχυρισμό. ∎

Πρόταση 5.4.3 (Brunel-Sucheston). *Έστω $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία σε έναν χώρο Banach X τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν σταθερές $c = c(n), C = C(n) > 0$ τέτοιες ώστε*

$$c \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| \leqslant C$$

για κάθε n-άδα φυσικών αριθμών $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{k=1}^{n} |a_k| = 1$. Τότε, για κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\varepsilon_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένα άπειρο υποσύνολο $L = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_1 < \ldots < i_n$ και $j_1 < \ldots < j_n$ στο L τέτοια ώστε $i_i \geqslant m_n$ και $j_1 \geqslant m_n$,

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| \leqslant (1 + \varepsilon_n) \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{j_k} \right\|$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε αρχικά $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ότι υπάρχει $N_n \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο ώστε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| \leqslant (1 + \varepsilon_n) \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{j_k} \right\| \tag{5.4.2}$$

για κάθε $i_1 < \ldots < i_n$ και $j_1 < \ldots < j_n$ στον N_n.

Σταθεροποιούμε μια n-άδα $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ και βρίσκουμε άπειρο $N \subseteq \mathbb{N}$ ώστε να ισχύει η (5.4.2) γι' αυτή τη n-άδα. Από την υπόθεση υπάρχουν $c, C > 0$ ώστε

$$c \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| < C$$

για κάθε $i_1 < \ldots < i_n$ στο $\mathbb{N}$.

Χωρίζουμε το διάστημα $[c, C)$ σε διαδοχικά ξένα υποδιαστήματα $[c_m, c_{m+1})$, $m = 1, 2, \ldots n_0$ τέτοια ώστε

$$C_m := c_{m+1} \leqslant (1 + \varepsilon_n) c_m.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\psi : \mathbb{N}^{[n]} \to \{1, 2, \ldots, n_0\}$ με

$$\psi(\{i_1, \ldots, i_n\}) = m, \text{ αν } \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| \in [c_m, C_m).$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Ramsey υπάρχουν $N \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $m \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$ ώστε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| \in [c_m, C_m)$$

για κάθε $i_1 < \ldots < i_n$ στο N.

Επομένως, εφόσον $C_m \leqslant (1 + \varepsilon_n) c_m$, έχουμε ότι

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| \leqslant (1 + \varepsilon_n) \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{j_k} \right\|$$

για κάθε $i_1 < \ldots < i_n$ και $j_1 < \ldots < j_n$ στο N.

Θεωρούμε τώρα ένα πεπερασμένο δ-δίκτυο της μοναδιαίας σφαίρας του ℓ_1^n, για $\delta > 0$ που θα επιλεγεί κατάλληλα. Εργαζόμενοι αναλόγως με πριν, με $\frac{\varepsilon_n}{2}$ αντί για ε_n, και εκμεταλλευόμενοι το θεώρημα του Ramsey (Θεώρημα 5.4.2 (ii)) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $N_n \subseteq \mathbb{N}$, άπειρο, τέτοιο ώστε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2}\right) \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{j_k} \right\|$$

για κάθε $i_1 < i_2 < \ldots < i_n, j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ στο N_n και κάθε $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{N}$.

Έχουμε επομένως το ζητούμενο για κάθε στοιχείο του δ-δικτύου $\mathcal{N}$ και από αυτό συνάγουμε ότι θα ισχύει για κάθε στοιχείο στης μοναδιαίας σφαίρας του ℓ_1^n.

Πράγματι, έστω b στη μοναδιαία σφαίρα του ℓ_1^n. Αρχικά παρατηρούμε ότι από την υπόθεση προκύπτει ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιος ώστε $\|x_i\| \leqslant C$ για κάθε $1 \leqslant i < \infty$ και $c = c(n) > 0$ τέτοιος ώστε $\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| \geqslant c$ για κάθε $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ στο $\mathbb{N}$ και κάθε $a = (a_1, \ldots, a_n)$ στη μοναδιαία σφαίρα του ℓ_1^n. Έστω $a \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε $\|a - b\|_1 \leqslant \delta$. Τότε για $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ και $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ στο N_n,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{n} b_k x_{i_k} \right\| &\leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) x_{i_k} \right\| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| + \delta C \\
&\leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2}\right) \left(\left\| \sum_{k=1}^{n} b_k x_{j_k} \right\| + \delta C \right) + \delta C \\
&= \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2}\right) \left\| \sum_{k=1}^{n} b_k x_{j_k} \right\| + \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2}\right) \delta C + \delta C.
\end{aligned}$$

Επομένως αρκεί να ισχύει η

$$\left(2 + \frac{\varepsilon_n}{2}\right) \delta C \leqslant \frac{\varepsilon_n}{2} \left\| \sum_{k=1}^{n} b_k x_{j_k} \right\|.$$

Παρατηρούμε ότι $c \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{j_k} \right\| \leqslant \delta C + \left\| \sum_{k=1}^{n} b_k x_{j_k} \right\|$ για κάθε $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ στο $\mathbb{N}$ και άρα

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} b_k x_{j_k} \right\| \geqslant c - \delta C \text{ για κάθε } j_1 < j_2 < \ldots < j_n \text{ στο } \mathbb{N}.$$

Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε $c - \delta C > 0$ και $\left(2 + \frac{\varepsilon_n}{2}\right) \delta C \leqslant \frac{\varepsilon_n}{2}(c - \delta C)$, δηλαδή $\delta \leqslant \frac{\varepsilon_n c}{2(2+\varepsilon_n)C}$. Παίρνουμε $\delta = \min\{\frac{\varepsilon_n c}{2(2+\varepsilon_n)C}, \frac{c}{2C}\}$. Γι' αυτή την επιλογή του δ ισχύει

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} b_k x_{i_k} \right\| \leqslant (1 + \varepsilon_n) \left\| \sum_{k=1}^{n} b_k x_{j_k} \right\|$$

για κάθε $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ στο N_n και κάθε $b = (b_1, \ldots, b_n)$ στη μοναδιαία σφαίρα του ℓ_1^n και συνεπώς για κάθε $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία διαδοχικά για $n = 1, 2, \ldots$ κατασκευάζουμε μια φθίνουσα ακολουθία άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, $N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k} \right\| \leqslant (1 + \varepsilon_n) \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k x_{j_k} \right\|$$

για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και κάθε $i_1 < \ldots < i_n$, $j_1 < \ldots < j_n$ στο N_n.

Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέξουμε $m_n \in N_n$ έτσι ώστε η ακολουθία $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι αύξουσα, τότε το σύνολο $L = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. ∎

Παρατήρηση 5.4.4. Παρατηρούμε ότι κάθε Schauder βασική ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $c \leqslant \|x_i\| \leqslant C$ για κάποια $c, C > 0$, ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Brunel-Sucheston. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $i_1 < \ldots < i_n$ στον $\mathbb{N}$ και $a = (a_1, \ldots, a_n)$ στη μοναδιαία σφαίρα του ℓ_1 έχουμε

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k}\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \, \|x_{i_k}\| \leqslant C$$

και

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{i_k}\right\| \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k| \, \|x_{i_k}\| \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |a_k| \, c \geqslant c\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k| = \frac{c}{n}.$$

Αποδεικνύουμε τώρα την ακόλουθη πρόταση, δηλαδή το πρώτο βήμα για την απόδειξη του θεωρήματος του Krivine.

Πρόταση 5.4.5. *Για κάθε μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ σε έναν χώρο Banach X υπάρχει χώρος Banach Y και ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ στον Y η οποία είναι 1-spreading και block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.*

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 5.4.4 έχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Brunel-Sucheston. Έστω λοιπόν $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ στον X και $L = \{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ όπως στην Πρόταση 5.4.3 και έστω $\varepsilon_n > 0$ φθίνουσα με $\varepsilon_n \to 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|_1 = \lim_{j \to \infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{m_{k+j}}\right\|, \tag{5.4.3}$$

όπου $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ η συνήθης βάση του c_{00}.

Το όριο στην (5.4.3) πράγματι υπάρχει αφού, από την Πρόταση 5.4.3, για $i < j$ στο $\mathbb{N}$

$$\left|\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{m_{k+j}}\right\| - \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{m_{k+i}}\right\|\right| \leqslant \varepsilon_i \sum_{k=1}^{n} |a_k| \sup_{1 \leqslant j < \infty} \|x_j\| \xrightarrow[i \to \infty]{} 0,$$

διότι η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Επομένως η $\left\{\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{m_{k+j}}\right\|\right\}_{j=1}^{\infty}$ είναι Cauchy ακολουθία πραγματικών αριθμών και άρα συγκλίνουσα.

Είναι σαφές ότι η $\|\cdot\|_1$ είναι νόρμα στον χώρο c_{00} των τελικά μηδενικών ακολουθιών. Θεωρούμε την πλήρωση του $(c_{00}, \|\cdot\|_1)$, έστω $(Y, \|\cdot\|_1)$. Τότε ο $(Y, \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος Banach. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ στον $(Y, \|\cdot\|_1)$ είναι 1-spreading αφού

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|_1 = \lim_{j \to \infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{m_{k+j}}\right\|,$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k e_{i_k}\right\| = \lim_{j \to \infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{m_{i_k+j}}\right\|$$

και

$$\left|\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{m_{k+j}}\right\| - \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k x_{m_{i_k+j}}\right\|\right| \leqslant \varepsilon_j \sum_{k=1}^{n} |a_k| \sup_{1 \leqslant i < \infty} \|x_i\| \xrightarrow[j \to \infty]{} 0.$$

<u>Ισχυρισμός:</u> Η $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ στον $(Y, \|\cdot\|_1)$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

<u>Απόδειξή του ισχυρισμού:</u> Έστω $\varepsilon > 0$ και $N \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιος ώστε $\frac{1-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} > \sqrt{1-\varepsilon}$ και $(1+\varepsilon_0)^2 < \sqrt{1+\varepsilon}$. Από την υπόθεση, για $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$, όχι όλα ίσα με μηδέν,

υπάρχει $c>0$ ώστε $\left\|\sum\limits_{k=1}^{N} a_k x_{i_k}\right\| \geqslant c$ για κάθε $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_N$ στο $\mathbb{N}$. Επιπλέον, εφόσον $\left\|\sum\limits_{k=1}^{N} a_k e_k\right\|_1 = \lim\limits_{j\to\infty}\left\|\sum\limits_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\|$, υπάρχει $j_1 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left|\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k e_k\right\|_1 - \left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\|\right| < \varepsilon_0\, c \text{ για κάθε } j \geqslant j_1.$$

Άρα, για κάθε $j \geqslant j_1$,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k e_k\right\|_1 &\leqslant \left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\| + \varepsilon_0 c\\ &\leqslant \left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\| + \varepsilon_0\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\|\\ &= (1+\varepsilon_0)\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\|.\end{aligned}$$

Ομοίως,

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k e_k\right\|_1 \geqslant (1-\varepsilon_0)\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\|$$

και άρα

$$(5.4.4)\qquad (1-\varepsilon_0)\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\| \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{N} a_k e_k\right\|_1 \leqslant (1+\varepsilon_0)\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\| \text{ για κάθε } j \geqslant j_1.$$

Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_0$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Επιλέγουμε $j_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $j_2 \geqslant j_1$ και $m_{1+j_2} \geqslant m_{n_0}$ (δηλαδή $j_2 \geqslant n_0 - 1$ και $j_2 \geqslant j_1$). Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα Brunel-Sucheston και την (5.4.4), για κάθε $j \geqslant n_0$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k e_k\right\|_1 &\leqslant (1+\varepsilon_0)\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j_2}}\right\| \leqslant (1+\varepsilon_0)(1+\varepsilon_{n_0})\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\|\\ &\leqslant (1+\varepsilon_0)^2\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\| < \sqrt{1+\varepsilon}\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\|.\end{aligned}$$

Ομοίως, για κάθε $j \geqslant n_0$

$$\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k e_k\right\|_1 \geqslant \frac{(1-\varepsilon_0)}{(1+\varepsilon_{n_0})}\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\| \geqslant \frac{1-\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0}\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\| > \sqrt{1-\varepsilon}\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\|.$$

Επομένως, για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει $j \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sqrt{1-\varepsilon}\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\| \leqslant \left\|\sum_{k=1}^{N} a_k e_k\right\|_1 \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_{m_{k+j}}\right\|.$$

Η $\{x_{m_{k+j}}\}_{k=1}^N$ είναι block ακολουθία της $(x_k)_{k=1}^\infty$ και το j δεν εξαρτάται από τα a_k (απαιτείται μόνο $j \geqslant n_0$), άρα πράγματι η $(e_k)_{k=1}^\infty$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $(x_k)_{k=1}^\infty$. $\square$

Η απόδειξη της Πρότασης 5.4.5 είναι πλήρης. $\blacksquare$

Για το δεύτερο βήμα αρκεί η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.4.6. *Έστω X χώρος Banach και $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 1-spreading ακολουθία στον X. Ορίζουμε $u_k = x_{k+1} - x_k$. Τότε, για κάθε ζεύγος A, B πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ και $\{a_k\}_{k\in B}$ πραγματικούς αριθμούς, ισχύει*

$$\Big\|\sum_{k\in A} a_k u_{2k}\Big\| \leqslant \Big\|\sum_{k\in B} a_k u_{2k}\Big\|.$$

Έπεται ότι η $\{u_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ είναι 2-unconditional και Schauder βασική.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq B$ πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{N}$ και $\{a_k\}_{k\in B}$ πραγματικοί αριθμοί. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε οικογένεια $\{\sigma_k\}_{k\in B}$ υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες :

(i) Αν $k \in A$ τότε $\sigma_k = \{i_{k,1}, i_{k,2}\}$ με $i_{k,1} < i_{k,2}$.

(ii) Αν $k \in B \setminus A$ τότε $\sigma_k = \{i_{k,1}, \dots, i_{k,n+1}\}$ με $i_{k,1} < \dots < i_{k,n+1}$.

(iii) Αν $k_1 < k_2$ τότε $\max \sigma_{k_1} < \min \sigma_{k_2}$.

Από την ιδιότητα (iii) και τον τρόπο που διατάσσονται τα $i_{k,s}$ και εφόσον η ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι 1-spreading έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant m \leqslant n$

$$\Big\|\sum_{k\in B} a_k u_{2k}\Big\| = \Big\|\sum_{k\in B} a_k(x_{2k+1} - x_{2k})\Big\| = \Big\|\sum_{k\in B\setminus A} a_k(x_{i_{k,m+1}} - x_{i_{k,m}}) + \sum_{k\in A} a_k(x_{i_{k,2}} - x_{i_{k,1}})\Big\|.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k\in B} a_k u_{2k}\Big\| = \sum_{m=1}^{n}\Big\|\sum_{k\in B} a_k u_{2k}\Big\| &= \sum_{m=1}^{n}\Big\|\sum_{k\in B\setminus A} a_k(x_{i_{k,m+1}} - x_{i_{k,m}}) + \sum_{k\in A} a_k(x_{i_{k,2}} - x_{i_{k,1}})\Big\| \\
&\geqslant \Big\|\sum_{m=1}^{n}\Big(\sum_{k\in B\setminus A} a_k(x_{i_{k,m+1}} - x_{i_{k,m}}) + \sum_{k\in A} a_k(x_{i_{k,2}} - x_{i_{k,1}})\Big)\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{k\in B\setminus A} a_k \sum_{m=1}^{n}(x_{i_{k,m+1}} - x_{i_{k,m}}) + n\sum_{k\in A} a_k(x_{i_{k,2}} - x_{i_{k,1}})\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{k\in B\setminus A} a_k(x_{i_{k,n+1}} - x_{i_{k,1}}) + n\sum_{k\in A} a_k(x_{i_{k,1}} - x_{i_{k,1}})\Big\| \\
&\geqslant n\Big\|\sum_{k\in A} a_k(x_{i_{k,2}} - x_{i_{k,1}})\Big\| - \Big\|\sum_{k\in B\setminus A} a_k(x_{i_{k,n+1}} - x_{i_{k,1}})\Big\|.
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\|\sum_{k\in A} a_k(x_{i_{k,2}} - x_{i_{k,1}})\| = \|\sum_{k\in A} a_k u_{2k}\|$ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{k\in B} a_k u_{2k}\Big\| &\geqslant \Big\|\sum_{k\in A} a_k(x_{i_{k,2}} - x_{i_{k,1}})\Big\| - \frac{1}{n}\Big\|\sum_{k\in B\setminus A} a_k(x_{i_{k,n+1}} - x_{i_{k,1}})\Big\| \\
&= \Big\|\sum_{k\in A} a_k u_{2k}\Big\| - \frac{1}{n}\Big\|\sum_{k\in B\setminus A} a_k(x_{i_{k,n+1}} - x_{i_{k,1}})\Big\| \\
&\geqslant \Big\|\sum_{k\in A} a_k u_{2k}\Big\| - \frac{1}{n}\sum_{k\in B\setminus A} |a_k|\left(\|x_{i_{k,n+1}}\| + \|x_{i_{k,n}}\|\right) \\
&= \Big\|\sum_{k\in A} a_k u_{2k}\Big\| - \frac{1}{n}\sum_{k\in B\setminus A} |a_k| 2\,\|x_1\|.
\end{aligned}$$

Για $n \to \infty$ έχουμε ότι

$$\left\| \sum_{k\in B} a_k u_{2k} \right\| \geqslant \left\| \sum_{k\in A} a_k u_{2k} \right\| .$$

Επιπλέον, από την Πρόταση 5.1.14 η $\{u_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ είναι 2-unconditional και άρα Schauder βασική. ■

Το δεύτερο βήμα προκύπτει από την Πρόταση 5.4.6 διότι αν η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι 1-spreading με $x_1 \neq x_2$ έχουμε ότι $\|u_{2k}\| = \|x_{2k+1} - x_{2k}\| = \|x_2 - x_1\| = \|u_1\|$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και άρα η $\{\frac{u_{2k}}{\|u_1\|}\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία η οποία είναι 1-spreading και $\left\|\sum_{k\in A} a_k \frac{u_{2k}}{\|u_1\|}\right\| \leqslant \left\|\sum_{k\in B} a_k \frac{u_{2k}}{\|u_1\|}\right\|$ για πεπερασμένα $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$. Επιπλέον, είναι σαφές ότι είναι block πεπερασμένα ανπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη του τρίτου βήματος, το οποίο διατυπώνουμε στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.4.7. *Έστω X χώρος Banach και $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία στον X η οποία είναι 1-spreading και, για κάθε ζεύγος πεπερασμένων υποσυνόλων $A \subseteq B$ του $\mathbb{N}$ και $\{a_k\}_{k\in B}$ πραγματικούς αριθμούς, ισχύει*

$$\left\| \sum_{k\in A} a_k x_k \right\| \leqslant \left\| \sum_{k\in B} a_k x_k \right\| . \tag{5.4.5}$$

Τότε υπάρχει χώρος Banach Y και $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία στον Y η οποία είναι 1-spreading, 1-unconditional και block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Απόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\gamma_m = \|x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{2m-1} - x_{2m}\| .$$

Από την (5.4.5) προκύπτει ότι η $\{\gamma_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Διακρίνουμε επομένως δύο περιπτώσεις:

(i) $\gamma_m \to \infty$:

Ορίζουμε

$$v_1^m = \frac{x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{2m-1} - x_{2m}}{\gamma_m}$$

και για $j \geqslant 2$ ορίζουμε v_j^m το διάνυσμα που προκύπτει αν μεταθέσουμε τις συντεταγμένες του v_1^m κατά $2m(j-1)$ θέσεις. Δηλαδή,

$$v_j^m = \frac{x_{2m(j-1)+1} - x_{2m(j-1)+2} + \ldots + x_{2mj-1} - x_{2mj}}{\gamma_m}.$$

Τότε $\left\|v_j^m\right\| = 1$ για κάθε $1 \leqslant j < \infty$ και κάθε $1 \leqslant m < \infty$. Επιπλέον, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $\{v_j^m\}_{j=1}^{\infty}$ είναι 1-spreading διότι η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι 1-spreading. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
&\left\| v_1^m - v_2^m + \frac{1}{\gamma_m}(x_{2m+1} - x_{4m+1}) \right\| = \\
&= \frac{1}{\gamma_m} \|x_1 - x_2 + \ldots + x_{2m-1} - x_{2m} + x_{2m+2} - x_{2m+3} + \ldots + x_{4m} - x_{4m+1}\| \\
&= \frac{1}{\gamma_m} \|(x_1 - x_2 + \ldots + x_{2m-1} - x_{2m}) + (x_{2m+1} - x_{2m+2} + \ldots + x_{4m-1} - x_{4m})\| \\
&= \|v_1^m + v_2^m\| .
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\left|\, \|v_1^m + v_2^m\| - \|v_1^m - v_2^m\| \,\right| &= \left| \left\| v_1^m - v_2^m + \frac{1}{\gamma_m}(x_{2m+1} - x_{4m+1}) \right\| - \|v_1^m - v_2^m\| \right| \\
&\leqslant \left\| \frac{1}{\gamma_m}(x_{2m+1} - x_{4m+1}) \right\| \leqslant \frac{1}{\gamma_m}(\|x_{2m+1}\| + \|x_{4m+1}\|) \\
&= \frac{2}{\gamma_m}.
\end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$,

$$\left| \left\| \sum_{j=1}^n a_j v_j^m \right\| - \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j a_j v_j^m \right\| \right| \leqslant 2 \sum_{j=1}^n |a_j| \frac{1}{\gamma_m}. \tag{5.4.6}$$

Θεωρούμε ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο $\mathcal{U}$ στον $\mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\|_2 = \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{j=1}^n a_j v_j^m \right\|,$$

όπου $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ η συνήθης βάση του c_{00}. Το όριο υπάρχει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, διότι

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j v_j^m \right\| \leqslant \sum_{j=1}^n |a_j| < \infty.$$

Η $\|\cdot\|_2$ είναι νόρμα στο χώρο c_{00} των τελικά μηδενικών ακολουθιών. Πράγματι, παρατηρούμε πως από την (5.4.5) προκύπτει ότι

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j v_j^m \right\| \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$$

και άρα

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\|_2 \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|.$$

Συνεπώς,

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\|_2 = 0 \text{ αν και μόνο αν } a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Οι άλλες ιδιότητες της νόρμας προκύπτουν εύκολα.

Θεωρούμε την πλήρωση του $(c_{00}, \|\cdot\|_2)$, έστω $(Y, \|\cdot\|_2)$. Τότε ο $(Y, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος Banach.

Παρατηρούμε ότι εφόσον η $\{v_j^m\}_{j=1}^\infty$ είναι 1-spreading, η $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ στον $(Y, \|\cdot\|_2)$ είναι 1-spreading. Δηλαδή, για κάθε $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$,

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j e_{i_j} \right\|_2 = \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{j=1}^n a_j v_{i_j}^m \right\| = \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{j=1}^n a_j v_j^m \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j e_j \right\|_2.$$

Επιπλέον, από την (5.4.6), εφόσον $\gamma_m \to \infty$ έπεται ότι η $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ είναι 1-unconditional. Συνεπώς, είναι και Schauder βασική. Επίσης, για κάθε $1 \leqslant j < \infty$, $\|e_j\|_2 = \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| v_j^m \right\| = 1$.

Τέλος, η $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\sum_{j=1}^n |a_j| = 1$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j v_j^m \right\| \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j| \geqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |a_j| = \frac{1}{n}. \tag{5.4.7}$$

Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_2$ υπάρχει $U_a \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $m \in U_a$,

$$\Big\|\sum_{j=1}^n a_j v_j^m\Big\| - \frac{\varepsilon}{2n} \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\Big\|_2 \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^n a_j v_j^m\Big\| + \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Σε συνδυασμό με την (5.4.7) έχουμε

$$(1-\frac{\varepsilon}{2})\Big\|\sum_{j=1}^n a_j v_j^m\Big\| \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\Big\|_2 \leqslant (1+\frac{\varepsilon}{2})\Big\|\sum_{j=1}^n a_j v_j^m\Big\|, \tag{5.4.8}$$

για κάθε $m \in U_a$.

Θεωρούμε $\mathcal{N}$, ένα δ-δίκτυο της μοναδιαίας σφαίρας του ℓ_1^n για $\delta > 0$ που θα επιλεγεί κατάλληλα. Εφόσον το $\mathcal{N}$ είναι πεπερασμένο, έχουμε $\bigcap_{a\in\mathcal{N}} U_a \in \mathcal{U}$ και συνεπώς $\bigcap_{a\in\mathcal{N}} U_a \neq \varnothing$. Έστω λοιπόν $m \in \bigcap_{a\in\mathcal{N}} U_a$. Γι' αυτόν τον m ικανοποιείται η (5.4.8) για κάθε $a \in \mathcal{N}$.

Για κάθε $b = (b_1,\dots,b_n)$ στη μοναδιαία σφαίρα του ℓ_1^n υπάρχει $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathcal{N}$ ώστε $\sum_{j=1}^n |a_j - b_j| \leqslant \delta$. Τότε,

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=1}^n b_j e_j\Big\|_2 &\leqslant \Big\|\sum_{j=1}^n (b_j-a_j)e_j\Big\|_2 + \Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\Big\|_2 \leqslant \sum_{j=1}^n |b_j-a_j| + \Big\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\Big\|_2\\ &\leqslant \delta + \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big\|\sum_{j=1}^n a_j v_j^m\Big\| \leqslant \delta + \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\left(\Big\|\sum_{j=1}^n (a_j-b_j)v_j^m\Big\| + \Big\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\Big\|\right)\\ &\leqslant \delta + \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\left(\delta + \Big\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\Big\|\right) = \delta\Big(2+\frac{\varepsilon}{2}\Big) + \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\Big\|.\end{aligned}$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{n} \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^n a_j v_j^m\Big\| \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\Big\| + \delta,$$

και άρα

$$\Big\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\Big\| \geqslant \frac{1}{n} - \delta.$$

Επομένως, αν επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{n} - \delta > 0 \quad \text{και} \quad \delta\Big(2+\frac{\varepsilon}{2}\Big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big(\frac{1}{n}-\delta\Big),$$

τότε

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=1}^n b_j e_j\Big\|_2 &\leqslant \delta\Big(2+\frac{\varepsilon}{2}\Big) + \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big(\frac{1}{n}-\delta\Big) + \Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\Big\|\\ &\leqslant (1+\varepsilon)\Big\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\Big\|.\end{aligned}$$

Παίρνουμε, επομένως, $\delta = \min\left\{\frac{1}{2n}, \frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)n}\right\}$. Επιπλέον, γι' αυτή την τιμή του δ,

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^n b_j e_j\right\|_2 &\geqslant \left\|\sum_{j=1}^n a_j e_j\right\|_2 - \left\|\sum_{j=1}^n (a_j - b_j)e_j\right\|_2 \geqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left\|\sum_{j=1}^n a_j v_j^m\right\| - \delta \\
&\geqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\left\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\right\| - \delta\right) - \delta = \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\right\| - \left(2-\frac{\varepsilon}{2}\right)\delta \\
&\geqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\right\| - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{n} - \delta\right) \\
&\geqslant \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\left\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\right\| - \frac{\varepsilon}{2}\left\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\right\| \\
&= (1-\varepsilon)\left\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\right\|.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$(1-\varepsilon)\left\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\right\| \leqslant \left\|\sum_{j=1}^n b_j e_j\right\|_2 \leqslant (1+\varepsilon)\left\|\sum_{j=1}^n b_j v_j^m\right\|,$$

για κάθε $b = (b_1, \dots, b_n)$ στη μοναδιαία σφαίρα του ℓ_1^n και άρα για κάθε $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

Επειδή η $\{v_j^m\}_{j=1}^n$ είναι block ακολουθία της $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, συμπεραίνουμε ότι πράγματι η $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$.

<u>(ii) $\gamma_m \to \gamma < \infty$:</u>

Θα δείξουμε ότι η συνήθης βάση $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ του c_0 είναι block πεπερασμένα αναπραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$. Αρχικά παρατηρούμε ότι από την (5.4.5) προκύπτει ότι η $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ είναι 2-unconditional (Πρόταση 5.1.14). Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| \leqslant 2\left\|\sum_{i=1}^n \max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i| x_i\right\| = 2\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|.$$

Επιπλέον, πάλι από την (5.4.5) και το γεγονός ότι η $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ είναι 2-unconditional, έχουμε

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{2n} x_i\right\| \leqslant \|x_1 - x_2 + \ldots + x_{2n-1} - x_{2n}\| = 2\gamma_n \leqslant 2\sup_{n\in\mathbb{N}}\gamma_n = 2\gamma < \infty.$$

Επομένως,

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| \leqslant 4\gamma \max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|.$$

Επίσης, από την (5.4.5) έπεται ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|.$$

Τελικά,

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n a_i x_i\right\| \leqslant 4\gamma \max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i| \tag{5.4.9}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε το χώρο $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0. Έστω $a = \{a_i\}_{i=1}^\infty \in c_0$. Τότε, από την (5.4.9) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n > m$ στο $\mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i \right\| \leqslant 4\gamma \max_{m<i\leqslant n} |a_i| \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Επομένως η σειρά $\sum_{i=1}^\infty a_i x_i$ έχει Cauchy ακολουθία μερικών αθροισμάτων και άρα είναι συγκλίνουσα, εφόσον ο X είναι χώρος Banach. Επιπλέον, από την (5.4.9) έπεται ότι για κάθε $a \in c_0$

$$\|a\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \right\| \leqslant 4\gamma \|a\|_\infty .$$

Δηλαδή, ο c_0 εμφυτεύεται 4γ-ισομορφικά στον X μέσω της ισομορφικής εμφύτευσης $T : c_0 \to X$ με $T(a) = \sum_{i=1}^\infty a_i x_i$ για κάθε $a \in c_0$. Από το θεώρημα στρέβλωσης του James (Θεώρημα 5.1.6) για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $S : c_0 \to X$ τέτοια ώστε $\|S\| \leqslant 1$, $\left\|S^{-1}\right\| \leqslant (1+\varepsilon)$ και $S(a) = S(\sum_{j=1}^\infty a_j e_j) = \sum_{j=1}^\infty a_j T(u_j)$ όπου η $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ είναι block ακολουθία της $\{e_i\}_{i=1}^\infty$. Έπεται ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j T(u_j) \right\| = \left\| S\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right) \right\| \leqslant \|S\| \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_\infty \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_\infty$$

και

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j T(u_j) \right\| = \left\| S\left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right) \right\| \geqslant \frac{1}{\|S^{-1}\|} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_\infty \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_\infty .$$

Επομένως,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j T(u_j) \right\| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_\infty \leqslant (1+\varepsilon) \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j T(u_j) \right\|$$

και άρα

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j T_1(u_j) \right\| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_\infty \leqslant \sqrt{1+\varepsilon} \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j T_1(u_j) \right\|,$$

όπου $T_1 : c_0 \to X$ με $T_1(a) = \sqrt{1+\varepsilon}T(a)$ για κάθε $a \in c_0$.

Επίσης, είναι σαφές ότι εφόσον η $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ είναι block ακολουθία της $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ και $T_1(e_i) = \sqrt{1+\varepsilon}x_i$ για κάθε $1 \leqslant i < \infty$, έπεται ότι η $\{T_1(u_j)\}_{j=1}^n$ είναι block ακολουθία της $\{x_i\}_{i=1}^\infty$.

Συμπεραίνουμε ότι η $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$. ∎

Συνεχίζουμε με την απόδειξη του τέταρτου βήματος. Το ξαναδιατυπώνουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.4.8. *Έστω X χώρος Banach και $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία στον X η οποία είναι 1-spreading και 1-unconditional. Τότε είτε υπάρχει $1 \leqslant p < \infty$ ώστε ο ℓ_p είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ είτε ο c_0 είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$.*

Απόδειξη. Θα ακολουθήσουμε την απόδειξη του Lemberg [23]. Έστω χώρος Banach X και ακολουθία $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ όπως στην υπόθεση. Επειδή θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 5.2.6, η οποία όπως παρατηρήσαμε δεν ισχύει εν γένει σε πραγματικούς χώρους Banach, θα χρειαστεί να περάσουμε σε κάποιον μιγαδικό χώρο Banach. Επιπλέον θα μας διευκολύνει να θεωρήσουμε σαν σύνολο δεικτών το σύνολο των θετικών ρητών αριθμών $\mathbb{Q}^+$. Ορίζουμε, λοιπόν, Y_0 να είναι το σύνολο των ακολουθιών $\{a_q\}_{q\in\mathbb{Q}^+}$ με τιμές στο $\mathbb{C}$ οι οποίες έχουν πεπερασμένο φορέα, δηλαδή το σύνολο $\{q \in \mathbb{Q}^+ : a_q \neq 0\}$ είναι πεπερασμένο. Για κάθε $q \in \mathbb{Q}^+$ ορίζουμε $v_q : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{C}$ με

$$v_q(r) = \begin{cases} 1 & , \quad r = q \\ 0 & , \quad r \neq q, r \in \mathbb{Q}^+ \end{cases}$$

Τότε $Y_0 = \mathrm{span}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+\}$. Για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{q_i} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| x_i \right\|.$$

Η συνάρτηση $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον Y_0. Αρχικά ελέγχουμε ότι είναι καλά ορισμένη και ότι η τιμή της δεν εξαρτάται από τη μορφή στην οποία αναπαρίσταται το κάθε στοιχείο. Για παράδειγμα, $v_1 + v_2 = v_1 + 0 \cdot v_{\frac{3}{2}} + v_2$ και από τον ορισμό της νόρμας έχουμε

$$\|v_1 + v_2\| = \|x_1 + x_2\|$$

ενώ

$$\left\| v_1 + 0 \cdot v_{\frac{3}{2}} + v_2 \right\| = \|x_1 + x_3\|.$$

Ωστόσο, επειδή η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι 1-spreading οι δύο ποσότητες ταυτίζονται. Ανάλογα δείχνουμε και τη γενική περίπτωση, οπότε πράγματι η συνάρτηση $\|\cdot\|$ είναι καλά ορισμένη.

Επιπλέον, επειδή η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional, για κάθε $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right\| \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |b_i|.$$

Επομένως, για $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ και $0 < q_1 < \ldots < q_n$ στον $\mathbb{Q}^+$ έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{q_i} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| x_i \right\| \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|.$$

Έπεται ότι $\|\sum_{i=1}^{n} a_i v_{q_i}\| = 0$ αν και μόνο αν $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$.

Για την τριγωνική ανισότητα, αν $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$ και $0 < q_1 < \ldots < q_n$ στο $\mathbb{Q}^+$ τότε πάλι από το γεγονός ότι η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional και την Πρόταση 5.1.12 έχουμε

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{q_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i v_{q_i} \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) v_{q_i} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i| x_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|) v_{q_i} \right\| \\ &\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} |b_i| x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{q_i} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i v_{q_i} \right\|. \end{aligned}$$

Θεωρούμε την πλήρωση $(Y, \|\cdot\|)$ του $(Y_0, \|\cdot\|)$. Τότε ο $(Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach. Από τον ορισμό της $\|\cdot\|$ στον Y προκύπτει άμεσα ότι η $\{v_q\}_{q\in\mathbb{Q}^+}$ είναι 1-spreading και 1-unconditional. Δηλαδή, για κάθε $0 < q_1 < \ldots < q_n, 0 < r_1 < \ldots < r_n$ στον $\mathbb{Q}^+$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{q_i} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| v_{r_i} \right\|.$$

Θέτουμε $Y_1 = \overline{\mathrm{span}}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)\}$. Τότε ο Y_1 είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του Y και άρα χώρος Banach. Για κάθε $q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)$ ορίζουμε

$$T(v_q) = v_{\frac{q}{2}} + v_{\frac{q+1}{2}}$$

και επεκτείνουμε γραμμικά στον $\operatorname{span}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)\}$. Δηλαδή, αν $x = \sum_{i=1}^n a_i v_{q_i}$ για κάποιους $0 < q_1 < \ldots < q_n < 1$ στον $\mathbb{Q}^+$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, τότε

$$T(x) = \sum_{i=1}^n a_i v_{\frac{q_i}{2}} + \sum_{i=1}^n a_i v_{\frac{q_i+1}{2}}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)$ ισχύει $\frac{q}{2} \in (0, \frac{1}{2})$ και $\frac{q+1}{2} \in (\frac{1}{2}, 1)$. Επομένως, ο τελεστής T αντιστοιχεί κάθε $x \in \operatorname{span}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)\}$ σε ένα άθροισμα δύο διανυσμάτων καθένα από τα οποία έχει συντεταγμένες που έχουν την ίδια κατανομή με αυτήν του x. Οι συντεταγμένες του πρώτου διανύσματος ανήκουν στο $(0, \frac{1}{2}) \cap \mathbb{Q}^+$ ενώ του δεύτερου στο $(\frac{1}{2}, 1) \cap \mathbb{Q}^+$. Επιπλέον, για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ και $0 < q_1 < \ldots < q_n < 1$ στο $\mathbb{Q}^+ \cap (0,1)$, αν $x = \sum_{i=1}^n a_i v_{q_i}$ τότε

$$\begin{aligned}\|Tx\| = \left\|\sum_{i=1}^n a_i v_{\frac{q_i}{2}} + \sum_{i=1}^n a_i v_{\frac{q_i+1}{2}}\right\| &\leqslant \left\|\sum_{i=1}^n a_i v_{\frac{q_i}{2}}\right\| + \left\|\sum_{i=1}^n a_i v_{\frac{q_i+1}{2}}\right\| \\ &= 2\left\|\sum_{i=1}^n a_i v_{q_i}\right\| = 2\|x\|,\end{aligned}$$

διότι η $\{v_q\}_{q\in\mathbb{Q}^+}$ είναι 1-spreading.

Επίσης, εφόσον η $\{v_q\}_{q\in\mathbb{Q}^+}$ είναι 1-unconditional,

$$\|Tx\| = \left\|\sum_{i=1}^n a_i v_{\frac{q_i}{2}} + \sum_{i=1}^n a_i v_{\frac{q_i+1}{2}}\right\| \geqslant \left\|\sum_{i=1}^n a_i v_{\frac{q_i}{2}}\right\| = \left\|\sum_{i=1}^n a_i v_{q_i}\right\| = \|x\|.$$

Δηλαδή, για κάθε $x \in \operatorname{span}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)\}$

$$\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant 2\|x\|.$$

Τότε, υπάρχει συνεχής γραμμική επέκταση του T στον $Y_1 = \overline{\operatorname{span}}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)\}$, $T : Y_1 \to Y_1$ τέτοια ώστε

$$\|x\| \leqslant \|Tx\| \leqslant 2\|x\| \quad \text{για κάθε } x \in Y_1.$$

Συνεπώς, $1 \leqslant \|T\| \leqslant 2$.

Ανάλογα ορίζουμε γραμμικό τελεστή $S : Y_1 \to Y_1$ τέτοιον ώστε, για κάθε $q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)$,

$$S(v_q) = v_{\frac{q}{3}} + v_{\frac{q+1}{3}} + v_{\frac{q+2}{3}}.$$

Δηλαδή ο S αντιστοιχεί κάθε στοιχείο του $\operatorname{span}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)\}$ σε ένα άθροισμα τριών διανυσμάτων τα οποία έχουν την ίδια κατανομή συντεταγμένων με το αρχικό διάνυσμα αλλά ξένους φορείς. Οι συντεταγμένες του πρώτου διανύσματος ανήκουν στο $(0, \frac{1}{3}) \cap \mathbb{Q}^+$, του δεύτερου στο $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \cap \mathbb{Q}^+$ και του τρίτου στο $(\frac{2}{3}, 1) \cap \mathbb{Q}^+$. Ομοίως με πριν,

$$\|x\| \leqslant \|Sx\| \leqslant 3\|x\| \quad \text{για κάθε } x \in Y_1$$

και άρα $1 \leqslant \|S\| \leqslant 3$. Επίσης, εύκολα συμπεραίνουμε ότι $TS = ST$.

Από την Πρόταση 5.2.6 υπάρχουν λ και μ στο $\mathbb{C}$ και ακολουθία $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ στον Y_1 με $\|u_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$\|Tu_n - \lambda u_n\| \longrightarrow 0 \ \text{ και } \ \|Su_n - \mu u_n\| \longrightarrow 0. \tag{5.4.10}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u_n \in \operatorname{span}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω ότι

$$u_n = \sum_{i=1}^{m_n} a_i^n v_{q_i^n}.$$

Τότε αν $v_n = \sum_{i=1}^{m_n} |a_i^n| v_{q_i^n}$, εφόσον η $\{v_q\}_{q\in\mathbb{Q}^+}$ είναι 1-unconditional, από την Πρόταση 5.1.12 έχουμε

$$\begin{aligned} \|Tv_n - |\lambda| v_n\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m_n} |a_i^n| T v_{q_i^n} - \sum_{i=1}^{m_n} |\lambda a_i^n| v_{q_i^n} \right\| \\ &\leqslant \left\| \sum_{i=1}^{m_n} a_i^n T v_{q_i^n} - \lambda \sum_{i=1}^{m_n} a_i^n v_{q_i^n} \right\| \\ &= \|Tu_n - \lambda u_n\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Ομοίως, $\|Sv_n - |\mu| v_n\| \longrightarrow 0$. Επομένως, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι προσεγγιστικές ιδιοτιμές λ, μ και τα a_i^n είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Επιπλέον, από τις $1 \leqslant \|T\| \leqslant 2$ και $1 \leqslant \|S\| \leqslant 3$ έπεται ότι $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$ και $1 \leqslant \mu \leqslant 3$.

Για κάθε ζεύγος n και j συμβολίζουμε με $u_{n,j}$ το διάνυσμα που προκύπτει από το u_n αν το μετατοπίσουμε κατά j μονάδες προς τα δεξιά. Δηλαδή, το $u_{n,j}$ έχει την ίδια κατανομή με το u_n και ο φορέας του περιέχεται στο $[j, j+1)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $\{u_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional και 1-spreading, διότι τα διανύσματα $\{u_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ έχουν ξένους φορείς. Ορίζουμε μια νέα νόρμα στο χώρο c_{00} των ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ με πεπερασμένο φορέα, θέτοντας για κάθε $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\|_0 = \lim_{n,\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i u_{n,i} \right\|,$$

όπου $\mathcal{U}$ είναι μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i u_{n,i} \right\| \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} |a_i| \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και άρα

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \right\|_0 \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} |a_i|.$$

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι η $\|\cdot\|_0$ είναι πράγματι νόρμα στον c_{00}. Θεωρούμε την πλήρωση $(Z, \|\cdot\|_0)$ του c_{00} ως προς την νόρμα αυτή. Τότε ο $(Z, \|\cdot\|_0)$ είναι χώρος Banach.

Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_0$ και το γεγονός ότι η $\{u_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional και 1-spreading συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ στον $(Z, \|\cdot\|_0)$ είναι 1-unconditional και 1-spreading. Επίσης $\|e_j\| = 1$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Επιπλέον, η $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμη στην $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Αυτό προκύπτει όπως και στην Πρόταση 5.4.7 όπου δείξαμε ανάλογο ισχυρισμό.

Θα δείξουμε ότι η $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με τη συνήθη βάση είτε του ℓ_p για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$ είτε του c_0.

Σταθεροποιούμε δύο διανύσματα $v_1 \prec v_4$ στον $\text{span}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)\}$ (γενικά, γράφουμε $w \prec v$ αν $\max(\text{supp}(w)) < \min(\text{supp}(v))$, $j \prec v$ αν $j < \min(\text{supp}(v))$, κλπ. όπου $\text{supp}(v)$ είναι ο φορέας του v). Για κάθε n μπορούμε να βρούμε δύο διανύσματα u_n^2 και u_n^3 που έχουν την ίδια κατανομή με το u_n και ικανοποιούν την $v_1 \prec u_n^2 \prec u_n^3 \prec v_4$. Χρησιμοποιώντας την (5.4.10) και το γεγονός ότι η $\{v_q\}_{q\in\mathbb{Q}^+}$ είναι 1-spreading, ελέγχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\|u_1 + u_n^2 + u_n^3 + u_4\| - \|u_1 + \lambda u_n^2 + u_4\| \Big) = 0. \tag{5.4.11}$$

Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε v_1' και v_4' στον $\text{span}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)\}$ ώστε

$$\|v_1 + u_n^2 + u_n^3 + v_4\| = \|v_1' + Tu_n + v_4'\|$$

και

$$\|v_1 + \lambda u_n^2 + v_4\| = \|v_1' + \lambda u_n + v_4'\| .$$

Άρα

$$\begin{aligned} \big| \|v_1 + u_n^2 + u_n^3 + v_4\| - \|v_1 + \lambda u_n^2 + v_4\| \big| &= \big| \|v_1' + Tu_n + v_4'\| - \|v_1' + \lambda u_n + v_4'\| \big| \\ &\leqslant \|(v_1' + Tu_n + v_4') - (v_1' + \lambda u_n + v_4')\| \\ &= \|Tu_n - \lambda u_n\| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι αν τα $y_1, y_2 \in c_{00}$ ικανοποιούν τις $y_1 < j$ και $j+1 < y_2$ τότε

$$\|y_1 + e_j + e_{j+1} + y_2\|_0 = \|y_1 + \lambda e_j + y_2\|_0 , \tag{5.4.12}$$

διότι μπορούμε να βρούμε $v_1 < v_4$ στον $\operatorname{span}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+\}$ και u_n^2, u_n^3 που έχουν την ίδια κατανομή με το u_n ώστε

$$\|y_1 + e_j + e_{j+1} + y_2\|_0 = \lim_{n,\mathcal{U}} \|v_1 + u_n^2 + u_n^3 + v_4\|$$

και

$$\|y_1 + \lambda e_j + y_2\|_0 = \lim_{n,\mathcal{U}} \|v_1 + \lambda u_n^2 + v_4\|$$

και από την (5.4.11) έπεται ότι

$$\lim_{n,\mathcal{U}} \|v_1 + u_n^2 + u_n^3 + v_4\| = \lim_{n,\mathcal{U}} \|v_1 + \lambda u_n^2 + v_4\| .$$

Το ίδιο ισχύει και αν $y_1, y_2 \in Z$.

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι αν τα $y_1, y_2 \in Z$ ικανοποιούν τις $y_1 < j$ και $j+2 < y_2$ τότε

$$\|y_1 + e_j + e_{j+1} + e_{j+2} + y_2\|_0 = \|y_1 + \mu e_j + y_2\|_0 . \tag{5.4.13}$$

Επίσης, ανάλογα δείχνουμε ότι

$$\|y_1 + e_j + e_{j+1}\|_0 = \|y_1 + \lambda e_j\|_0 \quad \text{και} \quad \|y_1 + e_j + e_{j+1} + e_{j+2}\|_0 = \|y_1 + \mu e_j\|_0$$

για κάθε $y_1 \in Z$ και $y_1 < j$. Επομένως,

$$\|e_1 + e_2\|_0 = \lambda \quad \text{και} \quad \|e_1 + e_2 + e_3\|_0 = \mu.$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας διαδοχικά την (5.4.12) έχουμε ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^{2^n} e_j\Big\|_0 = \Big\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} (e_{2k-1} + e_{2k})\Big\|_0 = \Big\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \lambda e_{2k-1}\Big\|_0 = \lambda \Big\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} e_{2k-1}\Big\|_0 = \lambda \Big\|\sum_{k=1}^{2^{n-1}} e_k\Big\|_0 .$$

Επαγωγικά προκύπτει ότι

$$\Big\|\sum_{j=1}^{2^n} e_j\Big\|_0 = \lambda^n.$$

Ομοίως,

$$\Big\|\sum_{j=1}^{3^n} e_j\Big\|_0 = \mu^n.$$

Επίσης, ανάλογα δείχνουμε ότι για κάθε ζεύγος μη αρνητικών ακεραίων s, k

$$\Big\|\sum_{j=1}^{2^k 3^s} e_j\Big\|_0 = \Big\|\sum_{i=1}^{3^s} \sum_{j=1}^{2^k} e_{(i-1)2^k + j}\Big\|_0 = \Big\|\sum_{i=1}^{3^s} \lambda^k e_{(i-1)2^k}\Big\|_0 = \lambda^k \Big\|\sum_{i=1}^{3^s} e_i\Big\|_0 = \lambda^k \mu^s.$$

Δηλαδή

$$\left\| \sum_{j=1}^{2^k 3^s} e_j \right\|_0 = \lambda^k \mu^s. \tag{5.4.14}$$

Θα δείξουμε ότι η (5.4.14) αρκεί για να συμπεράνουμε το ζητούμενο.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\lambda = 1$. Τότε

$$\left\| \sum_{j=1}^{2^k} e_j \right\|_0 = 1$$

για κάθε μη αρνητικό ακέραιο k. Εφόσον η $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional έπεται ότι

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} e_j \right\|_0 = 1 \ \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\lambda = 1$ αν και μόνο αν $\mu = 1$.

Επιπλέον, επειδή η $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional, έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_0 \geqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$$

και

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_0 \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j| e_j \right\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j| \left\| \sum_{j=1}^{n} e_j \right\| = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|.$$

Επομένως,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j e_j \right\|_0 = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|.$$

Δηλαδή, η $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του c_0.

Έστω τώρα ότι $\lambda > 1$. Τότε ισχύει επίσης ότι $\mu > 1$. Αποδεικνύουμε αρχικά τον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός: Υπάρχει $1 \leqslant p < \infty$ τέτοιος ώστε $\lambda = 2^{1/p}$ και $\mu = 3^{1/p}$.

Απόδειξη του ισχυρισμού:

Για μη αρνητικούς ακεραίους k, s ορίζουμε

$$a\left(\frac{2^k}{3^s}\right) = \frac{\lambda^k}{\mu^s}.$$

Παρατηρούμε ότι η a είναι αύξουσα. Πράγματι, αν $\frac{2^{k_1}}{3^{s_1}} \leqslant \frac{2^{k_2}}{3^{s_2}}$ τότε $2^{k_1}3^{s_2} \leqslant 2^{k_2}3^{s_1}$, άρα

$$\left\| \sum_{j=1}^{2^{k_1}3^{s_2}} e_j \right\|_0 \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{2^{k_2}3^{s_1}} e_j \right\|_0 .$$

Δηλαδή $\lambda^{k_1}\mu^{s_2} \leqslant \lambda^{k_2}\mu^{s_1}$. Συνεπώς,

$$a\left(\frac{2^{k_1}}{3^{s_1}}\right) = \frac{\lambda^{k_1}}{\mu^{s_1}} \leqslant \frac{\lambda^{k_2}}{\mu^{s_2}} = a\left(\frac{2^{k_2}}{3^{s_2}}\right).$$

Επιπλέον, είναι σαφές ότι η a είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή

$$a(ts) = a(t)a(s) \text{ για κάθε } t, s \in \left\{\frac{2^k}{3^s} : k, s \text{ μη αρνητικοί ακέραιαοι}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο $\left\{\frac{2^k}{3^s} : k, s \text{ μη αρνητικοί ακέραιοι}\right\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}^+$. Πράγματι, επειδή ο $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ είναι άρρητος, από το θεώρημα του Kronecker συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\left\{n\frac{\ln 2}{\ln 3} \bmod 1 : n \in \mathbb{N}\right\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$. Από αυτό, εύκολα συμπεραίνουμε ότι το $\left\{\frac{2^k}{3^s} : k, s \text{ μη αρνητικοί ακέραιαοι}\right\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1]$ και άρα στο $\mathbb{R}^+$. Επομένως, μπορούμε να επεκτείνουμε την a στον $\mathbb{R}^+$ με τέτοιο τρόπο ώστε να συνεχίσει να είναι αύξουσα και πολλαπλασιαστική, δηλαδή $a(ts) = a(t)a(s)$ για κάθε $t, s \in \mathbb{R}^+$. Επειδή η a δεν είναι σταθερή συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $0 < p < \infty$ ώστε

$$a(t) = t^{1/p} \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}^+.$$

Έπεται ότι

$$\lambda = a(2) = 2^{1/p} \text{ και } \mu = a(3) = 3^{1/p}.$$

Επιπλέον, εφόσον $2^{1/p} = \lambda \leqslant 2$, έχουμε ότι $p \geqslant 1$. □

Θα δείξουμε ότι γι' αυτή την τιμή του p, η $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p. Για κάθε $d \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\beta(d) = \left\|\sum_{j=1}^{d} e_j\right\|_0.$$

Παρατηρούμε ότι αν $\{e'_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι η συνήθης βάσης του ℓ_p τότε

$$\left\|\sum_{j=1}^{d} e'_j\right\|_p = \left(\sum_{j=1}^{d} 1^p\right)^{1/p} = d^{1/p}.$$

Επομένως, αν η $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p τότε πρέπει

$$\beta(d) = d^{1/p} \text{ για κάθε } d \in \mathbb{N}. \tag{5.4.15}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει η (5.4.15) και ότι αρκεί για να συμπεράνουμε ότι οι δύο ακολουθίες είναι ισομετρικά ισοδύναμες. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $d = \sum_{i=1}^{m} 2^{k_i}3^{s_i}$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$ και κάποιους μη αρνητικούς ακεραίους k_i, s_i τότε εφαρμόζοντας διαδοχικά τις (5.4.12) και (5.4.13), όπως στην απόδειξη της (5.4.14), έχουμε

$$\left\|\sum_{j=1}^{d} e_j\right\|_0 = \left\|\sum_{i=1}^{m} \lambda^{k_i}\mu^{s_i}e_i\right\|_0. \tag{5.4.16}$$

Εφαρμόζοντας την (5.4.16) για $k_i = k$ και $s_i = s$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$ συμπεραίνουμε ότι

$$\beta(m2^k3^s) = \lambda^k\mu^s\beta(m) = (2^k3^s)^{1/p}\beta(m).$$

Έστω τώρα $d \in \mathbb{N}$. Εφόσον το σύνολο $\left\{\frac{2^k}{3^s} : k, s \text{ μη αρνητικοί ακέραιοι}\right\}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}^+$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $s > n$ τέτοιος ώστε

$$\frac{2^k}{3^s} \leqslant d \leqslant \frac{2^k}{3^s} + \frac{1}{3^n}. \tag{5.4.17}$$

Τότε,

$$2^k \leqslant 3^s d \leqslant 2^k + 3^{s-n}. \tag{5.4.18}$$

Παρατηρούμε ότι η β είναι αύξουσα διότι η $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional και επιπλέον για κάθε $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\beta(d_1 + d_2) \leqslant \beta(d_1) + \beta(d_2)$$

λόγω της τριγωνικής ανισότητας για την $\|\cdot\|_0$. Επομένως, από την (5.4.18) έπεται ότι

$$(2^k)^{1/p} = \beta(2^k) \leqslant (3^s)^{1/p}\beta(d) \leqslant \beta(2^k) + \beta(3^{s-n}) = (2^k)^{1/p} + (3^{s-n})^{1/p}.$$

Συνεπώς,

$$\left(\frac{2^k}{3^s}\right)^{1/p} \leqslant \beta(d) \leqslant \left(\frac{2^k}{3^s}\right)^{1/p} + \left(\frac{1}{3^n}\right)^{1/p}.$$

Επίσης, από την (5.4.17) έχουμε

$$\left(\frac{2^k}{3^s}\right)^{1/p} \leqslant d^{1/p} \leqslant \left(\frac{2^k}{3^s} + \frac{1}{3^n}\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{2^k}{3^s}\right)^{1/p} + \left(\frac{1}{3^n}\right)^{1/p}.$$

Δηλαδή,

$$\beta(d), d^{1/p} \in \left[\left(\frac{2^k}{3^s}\right)^{1/p}, \left(\frac{2^k}{3^s}\right)^{1/p} + \left(\frac{1}{3^n}\right)^{1/p}\right],$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\left|\beta(d) - d^{1/p}\right| \leqslant \left(\frac{1}{3^n}\right)^{1/p}.$$

Για $n \to \infty$ έχουμε ότι $\beta(d) = d^{1/p}$. Επομένως, πράγματι

$$\beta(d) = d^{1/p} \text{ για κάθε } d \in \mathbb{N}.$$

Έστω τώρα $m \in \mathbb{N}$, πραγματικοί αριθμοί $a_1, \dots, a_m$ τέτοιοι ώστε $a_i = \frac{\lambda^{k_i}}{\mu^{s_i}} = \left(\frac{2^{k_i}}{3^{s_i}}\right)^{1/p}$ και $d = \sum_{i=1}^m 2^{k_i} 3^{M-s_i}$, όπου $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} s_i$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\mu^M \left\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\right\|_0 &= \mu^M \left\|\sum_{i=1}^m \lambda^{k_i}\mu^{-s_i} e_i\right\|_0 = \left\|\sum_{i=1}^m \lambda^{k_i}\mu^{M-s_i} e_i\right\|_0 \\
&= \left\|\sum_{j=1}^d e_j\right\|_0 = \beta(d) = d^{1/p} = \left(3^M \sum_{i=1}^m \frac{2^{k_i}}{3^{s_i}}\right)^{1/p} \\
&= \mu^M \left(\sum_{i=1}^m a_i^p\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\left\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\right\|_0 = \left(\sum_{i=1}^m a_i^p\right)^{1/p}.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι $\frac{\ln \lambda}{\ln \mu} = \frac{\ln 2^{1/p}}{\ln 3^{1/p}} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Επομένως, το σύνολο $\left\{\frac{\lambda^k}{\mu^k} : k, s \text{ μη αρνητικοί ακέραιοι}\right\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}^+$. Άρα το $D = \left\{\pm\frac{\lambda^k}{\mu^s} : k, s \text{ μη αρνητικοί ακέραιοι}\right\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Έχουμε επομένως ότι, για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_m \in D$,

$$\left\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\right\|_0 = \left\|\sum_{i=1}^m |a_i| e_i\right\|_0 = \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^p\right)^{1/p}.$$

Επειδή για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το D^m είναι πυκνό υποσύνολο του ℓ_p^m, συμπεραίνουμε ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^m a_i e_i\right\|_0 = \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^p\right)^{1/p}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι η $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_p. ■

Από τις Προτάσεις 5.4.5, 5.4.6, 5.4.7 και 5.4.8, καθώς και την Πρόταση 5.3.3, έπεται το θεώρημα του Krivine (Θεώρημα 5.4.1). Μάλιστα, αρκεί, αντί για μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία, να υποθέσουμε ότι η $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Brunel-Sucheston, δηλαδή ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν σταθερές $c_n, C_n > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{k=1}^n |a_k| = 1$,

$$c_n \leqslant \left\|\sum_{k=1}^n a_k x_{i_k}\right\| \leqslant C_n$$

για κάθε $i_1 < \ldots < i_n$ στο $\mathbb{N}$.

Σαν πόρισμα του θεωρήματος του Krivine έχουμε το θεώρημα του Dvoretzky.

Θεώρημα 5.4.9 (Dvoretzky). *Ο ℓ_2 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach.*

Απόδειξη. Έστω απειροδιάστατος χώρος Banach X. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν ο ℓ_p για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$ ή ο c_0 είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε κάποια Schauder βασική ακολουθία του X τότε είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Επομένως, από το Θεώρημα του Krivine, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach έχει Schauder βασική ακολουθία, συμπεραίνουμε ότι είτε ο c_0 είτε ο ℓ_p για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Υποθέτουμε πρώτα ότι είναι ο c_0. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.6 κάθε χώρος Banach είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον c_0. Επομένως ο ℓ_2 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον c_0 και άρα από μεταβατικότητα ο ℓ_2 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Για την άλλη περίπτωση, αν δηλαδή υπάρχει $1 \leqslant p < \infty$ ώστε ο ℓ_p να είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.7 ο $L_p = L_p([0,1], \mathcal{B}(0,1), \lambda)$ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον ℓ_p. Επομένως για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι ο ℓ_2 εμφυτεύεται ισομετρικά στον L_p. Αυτό είναι ένα γνωστό αποτέλεσμα το οποίο και αποδεικνύουμε στην παρακάτω πρόταση. ■

Πρόταση 5.4.10. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ υπάρχει ισομετρική εμφύτευση του ℓ_2 στον $L_p = L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

Απόδειξη. Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν $g : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή, δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση της g είναι η $t \mapsto e^{-t^2/2}$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε $g \in L_p$. Πράγματι, η g έχει σαν συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ για $x \in \mathbb{R}$, οπότε με έναν απλό υπολογισμό σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.6 έχουμε

$$\int_\Omega |g(\omega)|^p d\mathbb{P} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^p e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{2^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) < \infty,$$

όπου Γ είναι η συνάρτηση γάμμα. Θεωρούμε λοιπόν, $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την κανονική κατανομή με $g_i \in L_p$ για κάθε $1 \leqslant i < \infty$. Θα δείξουμε ότι η $\{g_i\}_{i=1}^\infty$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_2.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 1$. Θέτουμε $h = \sum_{i=1}^n a_i g_i$ και παρατηρούμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της h είναι

$$\begin{aligned}\phi_h(t) &= \mathbb{E}\left(e^{-t\sum_{i=1}^n a_i g_i}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{-ta_i g_i} = \prod_{i=1}^n \phi_{g_i}(ta_i) = \prod_{i=1}^n e^{-\frac{a_i^2 t^2}{2}} \\ &= e^{-\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)t^2/2} = e^{-t^2/2}\end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή $\phi_h(t) = \phi_{g_1}(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι η h είναι ισόνομη με την g_1 και επομένως

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i g_i\right\|_{L_p} = \|h\|_{L_p} = \left(\int_\Omega |h(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega)\right)^{1/p} = \left(\int_\Omega |g_1(\omega)|^p d\mathbb{P}(\omega)\right)^{1/p} = \|g_1\|_{L_p}.$$

Συνεπώς,

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i g_i\right\|_{L_p} = \|g_1\|_{L_p} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{για κάθε } a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Άρα, πράγματι, η $\{g_i\}_{i=1}^\infty \subseteq L_p$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με τη συνήθη βάση του ℓ_2. ∎

Σύμφωνα με το Θεώρημα του Krivine για κάθε χώρο Banach X υπάρχει κάποιο $1 \leqslant p \leqslant \infty$ τέτοιο ώστε ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Από το Θεώρημα του Dvoretzky αυτό σίγουρα ισχύει για $p = 2$. Η επόμενη πρόταση μας παρέχει μια συνθήκη για το p, η οποία μας εξασφαλίζει ότι ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Πρόταση 5.4.11. *Έστω X χώρος Banach τέτοιος ώστε $C_q = C_q(X) < \infty$ για κάποιο $2 \leqslant q < \infty$, όπου $C_q(X)$ η cotype q σταθερά του X. Έστω επίσης $1 \leqslant p < \infty$, $C > 0$ και $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\varepsilon_m \to 0$. Υποθέτουμε ότι η $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ είναι 1-unconditional και 1-spreading μοναδιαία Schauder βασική ακολουθία στον X η οποία ικανοποιεί την*

$$m^{\frac{1}{p+\varepsilon_m}} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^m x_i\right\| \leqslant C m^{\frac{1}{p}} \tag{5.4.19}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Τότε ο ℓ_p είναι block πεπερασμένα αναπραστάσιμος στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα βασιστεί κατά ουσιαστικό τρόπο στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.8. Θεωρούμε τον χώρο Banach Y_1 και τους γραμμικούς τελεστές $T, S : Y_1 \to Y_1$ όπως ορίστηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.8. Θα δείξουμε ότι το $2^{1/p}$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του T. Τότε, από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.8 συμπεραίνουμε ότι ο ℓ_p είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στην $\{x_i\}_{i=1}^\infty$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $y_n \in \operatorname{span}\{v_q : q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)\} \subseteq Y_1$, δηλαδή $y_n : \mathbb{Q}^+ \cap (0,1) \to \mathbb{C}$ με πεπερασμένο φορέα, ως εξής :

Απεικονίζει το	$\frac{1}{2}$	στο	$1.$
$-\shortparallel-$ τα	$\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$	στο	$2^{-\frac{1}{p}}.$
$-\shortparallel-$ τα	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ και $\frac{7}{8}$	στο	$2^{-\frac{2}{p}}.$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-\shortparallel-$ τα	$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \frac{5}{2^n}, \ldots$ και $\frac{2^n-1}{2^n}$	στο	$2^{-\frac{n-1}{p}}.$

Υπενθυμίζουμε ότι $T(v_q) = v_{\frac{q}{2}} + v_{\frac{q+1}{2}}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}^+ \cap (0,1)$. Επομένως το $T(y_n)$ περιγράφεται ως εξής :

Απεικονίζει τα	$\frac{1}{4}$ και $\frac{3}{4}$	στο	$1.$
$-\shortparallel-$ τα	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$ και $\frac{7}{8}$	στο	$2^{-\frac{1}{p}}.$
$-\shortparallel-$ τα	$\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16},$ και $\frac{15}{16}$	στο	$2^{-\frac{2}{p}}.$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-\shortparallel-$ τα	$\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{3}{2^{n+1}}, \frac{5}{2^{n+1}}, \ldots,$ και $\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$	στο	$2^{-\frac{n-1}{p}}.$

Συνεπώς,

$$T(y_n) - 2^{\frac{1}{p}} y_n = 2^{-\frac{n-1}{p}} \sum_{i=1}^{2^n} v_{\frac{2i-1}{2^{n+1}}} - 2^{\frac{1}{p}} v_{\frac{1}{2}}$$

και άρα

$$\left\| T(y_n) - 2^{\frac{1}{p}} y_n \right\| \leqslant 2^{-\frac{n-1}{p}} \left\| \sum_{i=1}^{2^n} v_{\frac{2i-1}{2^{n+1}}} \right\| + 2^{\frac{1}{p}} \left\| v_{\frac{1}{2}} \right\| = 2^{-\frac{n-1}{p}} \left\| \sum_{i=1}^{2^n} x_i \right\| + 2^{\frac{1}{p}} \|x_1\|.$$

Συνεπώς, από την (5.4.19) έχουμε ότι

$$\left\| T(y_n) - 2^{\frac{1}{p}} y_n \right\| \leqslant C 2^{-\frac{n-1}{p}} (2^n)^{1/p} + 2^{1/p} = C 2^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}} = (C+1) 2^{\frac{1}{p}}.$$

Για κάθε $j = 0, 1, 2, \ldots$ ορίζουμε $w_j \in Y_1$ με

$$w_j = 2^{-\frac{j}{p}} \sum_{i=1}^{2^j} v_{\frac{2i-1}{2^{j+1}}}.$$

Τότε $y_n = \sum_{j=o}^{n-1} w_j$. Για $j = 0, 1, 2, \ldots$ θέτουμε, επίσης, $z_j = 2^{-\frac{j}{p}} \sum_{i=1}^{2^j} x_{k_i}$, όπου τα $k_1 < k_2 < \ldots < k_{2^j}$ είναι τέτοια ώστε $\left\| \sum_{j=0}^{n-1} z_j \right\| = \left\| \sum_{j=0}^{n-1} w_j \right\|$. Τότε,

$$\|w_j\| = \|z_j\| = 2^{-\frac{j}{p}} \left\| \sum_{i=1}^{2^j} x_i \right\|.$$

Επίσης, από τον ορισμό του C_q και το γεγονός ότι η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \|w_j\|^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \|z_j\|^q \right)^{1/q} &\leqslant C_q \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_j z_j \right\|^2 \right)^{1/2} \\ &= C_q \left\| \sum_{j=0}^{n-1} z_j \right\| = C_q \left\| \sum_{j=0}^{n-1} w_j \right\| = C_q \|y_n\|. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν και την (5.4.19) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\|y_n\| \geqslant \frac{1}{C_q}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\|w_j\|^q\right)^{1/q} = \frac{1}{C_q}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(2^{-\frac{j}{p}}\left\|\sum_{i=1}^{2^j}x_i\right\|\right)^q\right)^{1/q} \geqslant \frac{1}{C_q}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(2^{-\frac{j}{p}}2^{\frac{j}{p+\varepsilon_{2^j}}}\right)^q\right)^{1/q}. \tag{5.4.20}$$

Για κάθε $j = 0, 1, 2, \ldots$ θέτουμε $\delta_j = \frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^{p+\varepsilon_{2^j}}}$. Τότε $\delta_j \to 0$ και

$$\|y_n\| \geqslant \frac{1}{C_q}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(2^{-\delta_j q}\right)^j\right)^{1/q}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι αν για μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύει ότι $a_n \to 1$ τότε $\sum_{j=0}^{n-1} a_j^j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Εφαρμόζοντας αυτήν την παρατήρηση για $a_n = 2^{-\delta_n q}$ έχουμε ότι

$$\|y_n\| \longrightarrow \infty.$$

Θέτουμε $u_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Τότε $\|u_n\| = 1$ και

$$\left\|T(u_n) - 2^{\frac{1}{p}}u_n\right\| = \frac{1}{\|y_n\|}\left\|T(y_n) - 2^{\frac{1}{p}}y_n\right\| \leqslant \frac{1}{\|y_n\|}(C+1)2^{\frac{1}{p}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Δηλαδή το $2^{\frac{1}{p}}$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του T.

■

Η επόμενη πρόταση θα μας χρειαστεί για την απόδειξη της cotype περίπτωσης του θεωρήματος Maurey-Pisier. Δίνουμε αρχικά έναν ορισμό.

Ορισμός 5.4.12. Έστω X χώρος Banach, $x_1, \ldots, x_n \in X$ και $\varepsilon > 0$. Η n-άδα $\{x_i\}_{i=1}^n$ λέγεται $(1+\varepsilon)$-**spreading** αν για κάθε $1 \leqslant s \leqslant n$, $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_s$ και $0 < m_1 < \ldots < m_s$ ισχύει

$$\left\|\sum_{i=1}^{s} a_i x_{k_i}\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{s} a_i x_{m_i}\right\|$$

για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 5.4.13. *Έστω X χώρος Banach ο οποίος έχει cotype q_0 για κάποιο $q_0 \geqslant 2$. Έστω επίσης ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $x_1^m, x_2^m, \ldots, x_m^m \in X$ τέτοια ώστε $\|x_i^m\| \leqslant 1$ και η $\{x_i^m\}_{i=1}^m$ είναι 1-unconditional και $(1+\varepsilon_m)$-spreading για κάποια ακολουθία θετικών αριθμών $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ με $\varepsilon_m \to 0$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$ υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $q > p$*

$$c\frac{1}{C_q(X)}n^{1/q} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right\| \leqslant Cn^{1/p} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } m \geqslant n. \tag{5.4.21}$$

Τότε ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ουσιαστικά επανάληψη των αποδείξεων του Θεωρήματος 5.4.8 και της Πρότασης 5.4.11 με κατάλληλες τροποποιήσεις. Θεωρούμε πάλι τον χώρο Y_0 των ακολουθιών $\{a_q\}_{q\in\mathbb{Q}^+}$ με τιμές στο $\mathbb{C}$ οι οποίες έχουν πεπερασμένο φορέα. Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $m \geqslant n$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| x_i^m \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Επομένως για κάθε $q_1 < q_2 < \ldots < q_n$ μπορούμε να ορίσουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{q_i} \right\| = \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| x_i^m \right\| < \infty.$$

Η $\|\cdot\|$ ορίζεται καλά, δηλαδή η τιμή της δεν εξαρτάται από την μορφή στην οποία αναπαρίσταται το κάθε στοιχείο. Αν $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ και $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n_1}}$ τα μη μηδενικά από τα a_i τότε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| x_i^m \right\| \leqslant (1+\varepsilon_m) \left\| \sum_{j=1}^{n_1} |a_{i_j}| x_{i_j}^m \right\|.$$

Επομένως,

$$\lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| x_i^m \right\| \leqslant \lim_{m,\mathcal{U}} (1+\varepsilon_m) \left\| \sum_{j=1}^{n_1} |a_{i_j}| x_{i_j}^m \right\| = \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{j=1}^{n_1} |a_{i_j}| x_{i_j}^m \right\|,$$

διότι $\lim_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$. Ομοίως,

$$\lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{j=1}^{n_1} |a_{i_j}| x_{i_j}^m \right\| \leqslant \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| x_i^m \right\|$$

και άρα τελικά έχουμε ισότητα. Επομένως πράγματι η $\|\cdot\|$ είναι καλά ορισμένη. Με όμοιο τρόπο επαληθεύουμε και το γεγονός ότι η $\{v_q\}_{q\in\mathbb{Q}^+}$ είναι 1-spreading. Για την τριγωνική ανισότητα λόγω των ιδιοτήτων των 1-unconditional ακολουθιών έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) v_{q_i} \right\| &= \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i| x_i^m \right\| \\
&\leqslant \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{n} (|a_i| + |b_i|) x_i^m \right\| \\
&\leqslant \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| x_i^m \right\| + \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{n} |b_i| x_i^m \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{q_i} \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n} b_i v_{q_i} \right\|.
\end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{q_i} \right\| \geqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |a_i|.$$

Επομένως η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον Y_0 και από τον τρόπο που ορίστηκε προκύπτει ότι η $\{v_q\}_{q\in\mathbb{Q}^+}$ είναι 1-unconditional. Δηλαδή, τελικά έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i v_{q_i} \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} |a_i| v_{r_i} \right\|$$

για κάθε $q_1 < \ldots < q_n$ και $r_1 < \ldots < r_n$ στο $\mathbb{Q}^+$.

Θεωρούμε τον χώρο Banach Y_1 και τους γραμμικούς τελεστές $T, S : Y_1 \to Y_1$ όπως ορίστηκαν στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.8 αλλά θεωρούμενοι ως προς αυτή τη νέα νόρμα. Ορίζουμε τα $y_n \in Y_1$ και $w_j \in Y_1$ όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 5.4.11. Ορίζουμε

$$z_j^m = 2^{-\frac{j}{p}} \sum_{i=1}^{2^j} x^m_{\sigma_j(i)}$$

για κατάλληλη αύξουσα απεικόνιση $\sigma_j : [2^j] \to \mathbb{N}$ ώστε

$$\left\| \sum_{j=0}^{n-1} w_j \right\| = \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} z_j^m \right\|.$$

Επίσης,

$$\|w_j\| = \lim_{m,\mathcal{U}} \|z_j^m\| = 2^{-\frac{j}{p}} \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{2^j} x_i^m \right\|.$$

Τότε,

$$\left\| T(y_n) - 2^{1/p} y_n \right\| \leqslant (C+1) 2^{1/p}$$

όπως και προηγουμένως. Εφόσον $C_{q_0}(X) < \infty$ και η $\{z_i^m\}_{j=1}^{\infty}$ είναι 1-unconditional έχουμε ότι

$$\left(\sum_{j=0}^{n-1} \|z_j^m\|^{q_0} \right)^{1/q_0} \leqslant C_{q_0}(X) \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \epsilon_j z_j^m \right\|^2 \right)^{1/2} = C_{q_0}(X) \left\| \sum_{j=0}^{n-1} z_j^m \right\|$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας $\lim_{\mathcal{U}}$ ως προς m συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(\lim_{m,\mathcal{U}} \|z_j^m\| \right)^{q_0} \right)^{1/q_0} &\leqslant \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} z_j^m \right\| \\ &= C_{q_0}(X) \left\| \sum_{j=0}^{n-1} w_j \right\| \\ &= C_{q_0}(X) \|y_n\|. \end{aligned}$$

Τώρα, θεωρούμε ακολουθία $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $q_n > p$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $q_n \to p$ και

(5.4.22) $$\lim_{n \to \infty} \frac{n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q_n}}}{C_{q_n}(X)} = \infty.$$

Εφαρμόζοντας την (5.4.21) για τα q_n έχουμε

(5.4.23) $$\frac{c}{C_{q_n}} n^{\frac{1}{q_n}} \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i^m \right\| \leqslant C n^{\frac{1}{p}} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } m \geqslant n.$$

Επομένως, από την (5.4.23) έχουμε ότι

$$\lim_{m,\mathcal{U}} \|z_j^m\| = 2^{-\frac{j}{p}} \lim_{m,\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{2^j} x_i^m \right\| \geqslant 2^{-\frac{j}{p}} \frac{c}{C_{q_{2^j}}} (2^j)^{1/q_{2^j}}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\|y_n\| &\geqslant \frac{1}{C_{q_0}(X)}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\left(\lim_{m,\mathcal{U}}\|z_j^m\|\right)^{q_0}\right)^{1/q_0}\\ &\geqslant \frac{1}{C_{q_0}(X)}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{c^{q_0}}{C_{q_{2^j}}^{q_0}}2^{j\left(\frac{1}{q_{2^j}}-\frac{1}{p}\right)q_0}\right)^{1/q_0}.\end{aligned}$$

Θέτουμε $\delta_j = \frac{1}{p}-\frac{1}{q^j}$. Τότε $\delta_j > 0$ και $\delta_j \to 0$. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$\|y_n\|^{q_0} \geqslant \frac{1}{C_{q_0}(X)^{q_0}}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\left(2^{-\delta_{2^j}q_0}\right)^j}{C_{q^{2^j}}^{q_0}}.$$

Επιπλέον, από την (5.4.22) έχουμε ότι

$$\frac{(2^{\delta_{2^j}})^j}{C_{q_{2^j}}} \geqslant 1$$

για κάθε $j \geqslant j_0$ για κάπιο $j_0 \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι,

$$\begin{aligned}\|y_n\|^{q_0} &\geqslant \frac{1}{C_{q_0}(X)^{q_0}}\sum_{j=j_0}^{n-1}\frac{\left(2^{-\delta_{2^j}q_0}\right)^j}{C_{q^{2^j}}^{q_0}}\\ &\geqslant \frac{1}{C_{q_0}(X)^{q_0}}\sum_{j=j_0}^{n-1}\left(2^{-\delta_{2^j}q_0}\right)^j(2^{-\delta_{2^j}})^{jq_0}\\ &= \frac{1}{C_{q_0}(X)^{q_0}}\sum_{j=j_0}^{n-1}(2^{-2\delta_{2^j}q_0})^j.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $a_j = 2^{-2\delta_{2^j}q_0}$ τότε $a_j \to 1$ και άρα $\sum_{j=0}^{n-1}a_j^j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Επομένως συμπεραίνουμε ότι

$$\|y_n\| \to \infty.$$

Θέτουμε $u_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$. Τότε $\|u_n\| = 1$ και

$$\left\|T(u_n) - 2^{\frac{1}{p}}u_n\right\| = \frac{1}{\|y_n\|}\left\|T(y_n) - 2^{\frac{1}{p}}y_n\right\| \leqslant \frac{1}{\|y_n\|}(C+1)2^{\frac{1}{p}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Δηλαδή ο $2^{\frac{1}{p}}$ είναι προσεγγιστική ιδιοτιμή του T. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.8 έπεται ότι ο ℓ_p είναι block πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στην $\{v_q\}_{q\in\mathbb{Q}^+}$. Με ένα επιχείρημα δ-δικτύου ανάλογο με αυτό της απόδειξης της Πρότασης 5.4.7 όπου δείξαμε παρόμοιο ισχυρισμό, προκύπτει ότι ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στην $\{X_m\}_{m=1}^{\infty}$.

$\blacksquare$

Παρατήρηση 5.4.14. Παρατηρούμε πως η υπόθεση ότι η ακολουθία $\{x_i^m\}_{i=1}^m$ είναι 1-unconditional χρειάστηκε μόνο για να δείξουμε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|$ που ορίσαμε στον χώρο Y_0 ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα. Αν είχαμε C-unconditional ακολουθίες για κάποιον $C > 0$, τότε η $\|\cdot\|$ δεν θα ικανοποιούσε την τριγωνική ανισότητα αλλά για κάθε $x, y \in Y_0$ θα είχαμε ότι $\|x+y\| \leqslant C\|x\|+C\|y\|$. Μάλιστα θα ίσχυε ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\| \leqslant C\sum_{i=1}^n\|x_i\| \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Τότε ο χώρος Y_0 είναι τοπολογικός γραμμικός χώρος και μπορούμε πάλι να θεωρήσουμε την πλήρωσή του, $(Y, \|\cdot\|)$ και τον χώρο $(Y_1, \|\cdot\|)$ και να συνεχίσουμε την απόδειξη όπως και προηγουμένως. Βλέπουμε επίσης ότι η έννοια της block πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας μπορεί να οριστεί και για τέτοιες συναρτήσεις χωρίς να παύει να ισχύει κάποια από τις ιδιότητες που έχουμε δείξει. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι στην Πρόταση 5.4.13 μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση 1-unconditional με την γενικότερη υπόθεση ότι οι $\{x_i^m\}_{i=1}^m$ είναι C-unconditional για κάποια σταθερά $C > 0$.

Μάλιστα, με ένα ανάλογο επιχείρημα θα μπορούσαμε να είχαμε αποφύγει το τρίτο βήμα στην απόδειξη του θεωρήματος του Krivine. Ωστόσο η Πρόταση 5.4.7 παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Παρατήρηση 5.4.15. Παρατηρούμε ότι για να ισχύει ότι $C_q(X) < \infty$ πρέπει $p \geqslant q_X$. Επίσης από την δεξιά ανισότητα της (5.4.21) έπεται ότι $p \leqslant q_X$. Επομένως το μόνο υποψήφιο p για να εφαρμοστεί η Πρόταση 5.4.13 είναι το q_X. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δείξουμε ότι για το q_X πράγματι ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Πρότασης 5.4.13 και άρα ο ℓ_{q_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X, δηλαδή την cotype περίπτωση του θεωρήματος Maurey-Pisier.

Κεφάλαιο 6

Το Θεώρημα Maurey-Pisier

Το θεώρημα Maurey-Pisier θα μπορούσαμε να το δούμε και ως μια πιο ισχυρή μορφή του θεωρήματος του Krivine. Ενώ το θεώρημα του Krivine μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός p ώστε ο ℓ_p να είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε έναν χώρο Banach, το θεώρημα Maurey-Pisier μας συγκεκριμενοποιεί δύο από αυτά τα p.

Θεώρημα 6.0.1 (Maurey-Pisier)**.** *Έστω X χώρος Banach X. Ορίζουμε*

$$p_X = \sup\{1 \leqslant p \leqslant 2 : \text{ ο } X \text{ έχει } type\, p\}$$

και

$$q_X = \inf\{q \geqslant 2 : \text{ ο } X \text{ έχει } cotype\, p\}.$$

Τότε ο ℓ_{p_X} και ο ℓ_{q_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμοι στον X.

Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε την cotype περίπτωση του θεωρήματος Maurey-Pisier: για κάθε χώρο Banach X ο ℓ_{q_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Θα παρουσιάσουμε την απόδειξη των Milman και Sharir [29]. Όπως και η αρχική απόδειξη, έτσι και η προσέγγιση των Miman και Sharir βασίζεται στην απόδειξη του θεωρήματος του Krivine. Ακριβέστερα θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 5.4.13.

6.1 Πεπερασμένη έκδοση του θεωρήματος Brunel-Sucheston

Υπενθυμίζουμε ότι μια n-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ σε έναν χώρο Banach X λέγεται $(1+\varepsilon)$-spreading, για κάποιον $\varepsilon > 0$, αν για κάθε $1 \leqslant s \leqslant n$, $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_s$ και $0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_s$, ισχύει

$$\left\| \sum_{i=1}^{s} a_i x_{k_i} \right\| \leqslant (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{s} a_i x_{m_i} \right\|$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 6.1.1. *Έστω $0 < \delta < 1$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $N = N(k, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ που εξαρτάται μόνο από το ε και το k, τέτοιος ώστε αν X χώρος με νόρμα, $n \geqslant N$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$ με $1 - \delta \leqslant \|x_i\| \leqslant 1$, τότε υπάρχει υπακολουθία $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ που ικανοποιεί τουλάχιστον μία από τις παρακάτω ιδιότητες:*

(α) *η $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ είναι $(1+\varepsilon)$-spreading ή*

(β) $\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^{k} \epsilon_j x_{i_j} \right\| \geqslant c_\delta \sqrt{k}$, *για κάποια σταθερά $c_\delta > 0$ που εξαρτάται μόνο από το δ.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο υπάρχουν $x_1^n, \ldots, x_n^n$ σε κάποιον χώρο με νόρμα, τέτοια ώστε $1 - \delta \leqslant \|x_i\| \leqslant 1$ και καμία υπακολουθία $x_{i_1}^n, \ldots, x_{i_k}^n$ δεν ικανοποιεί ούτε το (α) ούτε το (β).

Έστω $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ η συνήθης βάση του c_{00} και $\mathcal{U}$ υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$. Για κάθε $s \in \mathbb{N}$ και $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την ημινόρμα

$$\left\| \sum_{i=1}^{s} a_i e_i \right\| = \lim_{\mathcal{U}} \left\| \sum_{i=1}^{s} a_i x_i^n \right\|.$$

Για $M \subseteq \mathbb{N}$ και $r \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\lim_{M} \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\| = r$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $s_1, \ldots, s_k \in M$ με $n_0 < s_1 < \ldots < s_k$ ισχύει

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\| \in (r - \varepsilon, r + \varepsilon).$$

Ισχυρισμός: Υπάρχει $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ ώστε το όριο

$$\lim_{M_1} \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\|$$

να υπάρχει για κάθε $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη του ισχυρισμού: Έστω $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ σταθεροποιημένο. Ορίζουμε $\phi : \mathbb{N}^{[k]} \to [0, \infty)$ με

$$\psi(s_1, \ldots, s_k) = \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\|.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\psi(s_1, \ldots, s_k) = \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_i| \|e_{s_i}\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_i| = \|a\|_1.$$

Ορίζουμε

$$A_1 = \Big\{ (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k : 0 \leqslant \psi(s_1, \ldots, s_k) \leqslant \|a\|_1/2 \Big\}$$

και

$$B_1 = \Big\{ (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k : \|a\|_1/2 \leqslant \psi(s_1, \ldots, s_k) \leqslant \|a\|_1 \Big\}.$$

Από το θεώρημα του Ramsey (Θεώρημα 5.4.2) υπάρχει άπειρο σύνολο $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ ώστε

$$\psi(s_1, \ldots, s_k) \in A_1 \quad \text{για κάθε } (s_1, \ldots, s_k) \in N_1^k \tag{6.1.1}$$

ή

$$\psi(s_1, \ldots, s_k) \in B_1 \quad \text{για κάθε } (s_1, \ldots, s_k) \in N_1^k. \tag{6.1.2}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ισχύει η (6.1.1). Ορίζουμε

$$A_2 = \Big\{ (s_1, \ldots, s_k) \in N_1^k : 0 \leqslant \psi(s_1, \ldots, s_k) \leqslant \|a\|_1/4 \Big\}$$

και

$$B_2 = \Big\{ (s_1, \ldots, s_k) \in N_1^k : \|a\|_1/4 \leqslant \psi(s_1, \ldots, s_k) \leqslant \|a\|_1/2 \Big\}.$$

Και πάλι από το θεώρημα του Ramsey, υπάρχει άπειρο σύνολο $N_2 \subseteq N_1$ ώστε

$$\psi(s_1,\ldots,s_k) \in A_2 \quad \text{για κάθε } (s_1,\ldots,s_k) \in N_2^k$$

ή

$$\psi(s_1,\ldots,s_k) \in B_2 \quad \text{για κάθε } (s_1,\ldots,s_k) \in N_2^k.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, κατασκευάζουμε φθίνουσα ακολουθία $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\psi(s_1,\ldots,s_k) \in C_i \quad \text{για κάθε } (s_1,\ldots,s_k) \in N_i^k,$$

όπου $(C_i)_{i=1}^{\infty}$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών διαστημάτων στο $[0,\infty)$ τέτοια ώστε για κάθε $i \in \mathbb{N}$, το μήκος του διαστήματος C_i είναι ίσο με $\|a\|_1/2^i$.

Από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων έχουμε ότι

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \{L(a)\}$$

για κάποιο $L(a) \in [0,\infty)$.

Συνεπώς, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $C_{n_0} \subseteq (L(a)-\varepsilon, L(a)+\varepsilon)$ και άρα για κάθε $(s_1,\ldots,s_k) \in N_{n_0}^k$ ισχύει

$$\psi(s_1,\ldots,s_k) \in C_{n_0} \subseteq (L(a)-\varepsilon, L(a)+\varepsilon),$$

δηλαδή

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i}\right\| \in (L(a)-\varepsilon, L(a)+\varepsilon)\,.$$

Ορίζουμε $M_a = \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ με $n_i \in N_i$ για κάθε $i = 1,2,\ldots$. Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i}\right\| \in (L(a)-\varepsilon, L(a)+\varepsilon)$$

για κάθε $n_0 < s_1 < \ldots < s_k$ στο M_a.

Δείξαμε επομένως ότι

$$\lim_{M_a}\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i}\right\| = L(a).$$

Δηλαδή έχουμε το ζητούμενο για σταθεροποιημένο $a \in \mathbb{R}^k$.

Για να βρούμε $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ ώστε να υπάρχει το όριο για κάθε $a \in \mathbb{R}^k$ θεωρούμε $\{a^j\}_{j=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}^k$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $(M^j)_{j=1}^{\infty}$ άπειρων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε για κάθε $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_{M^j}\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i^j e_{s_i}\right\| = L(a^j).$$

Ορίζουμε $M_1 = \{m_j\}_{j=1}^{\infty}$ με $m_j \in M^j$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\lim_{M_1}\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i}\right\| = L(a) \quad \text{για κάθε } a \in \mathbb{Q}^k.$$

Έστω τώρα τυχόν $b \in \mathbb{R}^k$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a^n \in \mathbb{Q}^k$ ώστε

$$\|b - a^n\|_1 \leqslant \frac{1}{4n}.$$

Τότε,

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} b_i e_{s_i} - \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |b_i - a_i^n| = \|b - a^n\| \leqslant \frac{1}{4n}$$

Εφόσον, $\lim\limits_{M_1} \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\| = L(a^n)$ έπεται ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} b_i e_{s_i} \right\| \in \left(L(a^n) - \frac{1}{2n}, L(a^n) + \frac{1}{2n} \right)$$

για κάθε $n_0 \leqslant s_1 < s_2 < \ldots < s_k$ στο M_1. Από την αρχή των κιβωτισμένων διαστημάτων συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $L(b) \in [0, \infty)$ ώστε

$$\lim_{M_1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_{s_i} \right\| = L(b).$$

Επομένως το σύνολο M_1 έχει την ζητούμενη ιδιότητα. □

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Υπάρχει σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^{k} |a_i| = 1$ να ισχύει

$$\lim_{M_1} \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\| \geqslant c_1.$$

(ii) Για κάθε $\varepsilon_1 > 0$ υπάρχει $a \in S_{\ell_1^k}$ τέτοιο ωστε

$$\lim_{M_1} \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\| \leqslant \varepsilon_1.$$

Έστω ότι ισχύει το (i) και έστω $a \in S_{\ell_1^k}$. Για κάθε $\varepsilon_1 > 0$ υπάρχει $n_a \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\| \in \left(r_a - \frac{\varepsilon_1 c_1}{8}, r_a + \frac{\varepsilon_1 c_1}{8} \right)$$

για κάθε $s_1 < \ldots < s_k$ στο M_1 με $s_1 > n_a$, όπου $r_a = \lim\limits_{M_1} \left\| \sum_{k=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\|$. Συνεπώς,

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{t_i} \right\| \right| \leqslant \frac{\varepsilon_1 c_1}{4}$$

για κάθε $s_1 < \ldots < s_k$, και $t_1 < \ldots < t_k$ στο M_1 με $s_1, t_1 > n_a$.

Από την υπόθεση (i) έχουμε ότι $r_a \geqslant c_1$. Επίσης, για κάθε $\varepsilon_1 \leqslant 1$ ισχύει $r_a - \frac{\varepsilon_1 c_1}{8} \geqslant \frac{c_1}{2} > 0$. Συνεπώς, για κάθε $s_1 < \ldots < s_k$ στο M_1 με $s_1 > n_a$ ισχύει

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i} \right\| \geqslant \frac{c_1}{2}.$$

Επομένως, αν $s_1 < \ldots < s_k$ και $t_1 < \ldots < t_k$ στο M_1 με $s_1, t_1 > n_a$, τότε

$$\frac{\left\|\sum_{i=1}^k a_i e_{s_i}\right\|}{\left\|\sum_{i=1}^k a_i e_{t_i}\right\|} \leqslant \frac{\frac{c_1\varepsilon_1}{4} + \left\|\sum_{i=1}^k a_i e_{t_i}\right\|}{\left\|\sum_{i=1}^k a_i e_{t_i}\right\|} = 1 + \frac{c_1\varepsilon_1/4}{\left\|\sum_{i=1}^k a_i e_{t_i}\right\|}$$
$$\leqslant 1 + \frac{c_1\varepsilon_1/4}{c_1/2} = 1 + \varepsilon_1/2 \leqslant 1 + \varepsilon_1.$$

Δηλαδή,

$$\frac{c_1}{2} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^k a_i e_{s_i}\right\| \leqslant (1+\varepsilon_1)\left\|\sum_{i=1}^k a_i e_{t_i}\right\|.$$

Έστω $s_1 < \ldots < s_k$ στο M_1 με $s_1 > n_a$. Τότε,

$$\frac{c_1}{2} \leqslant \left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j e_{s_{n_j}}\right\| \leqslant (1+\varepsilon_1)\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j e_{s_{m_j}}\right\|$$

για κάθε $1 \leqslant \ell \leqslant k$, $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_\ell \leqslant k$ και $1 \leqslant m_1 < \ldots < m_\ell \leqslant k$.

Επειδή οι επιλογές των ℓ και n_j με $1 \leqslant \ell \leqslant k$ και $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_\ell \leqslant k$ είναι πεπερασμένες το πλήθος, για κάθε $\varepsilon_2 > 0$ υπάρχει $U_a \in \mathcal{U}$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \in U_a$ να ισχύει

$$\left|\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j e_{s_{n_j}}\right\| - \left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{n_j}}\right\|\right| \leqslant \frac{c_1\varepsilon_2}{2}$$

και

$$\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{n_j}}\right\| \geqslant \frac{c_1}{4}$$

για κάθε $1 \leqslant \ell \leqslant k$ και $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_\ell \leqslant k$.

Συνεπώς,

$$\frac{\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{n_j}}\right\|}{\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{m_j}}\right\|} \leqslant \frac{\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j e_{s_{n_j}}\right\| + c_1\varepsilon_2/2}{\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j e_{s_{m_j}}\right\| - c_1\varepsilon_2/2} \leqslant \frac{(1+\varepsilon_2)\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j e_{s_{n_j}}\right\|}{(1-\varepsilon_2)\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j e_{s_{n_j}}\right\|}$$
$$\leqslant \frac{(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_1)}{(1-\varepsilon_2)}.$$

Άρα, για κάθε $\varepsilon_3 > 0$ υπάρχει $U_a \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in U_a$ να ισχύει

$$\frac{c_1}{4} \leqslant \left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{n_j}}\right\| \leqslant (1+\varepsilon_3)\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{m_j}}\right\| \tag{6.1.3}$$

για κάθε $1 \leqslant \ell \leqslant k$, $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_\ell \leqslant k$ και $1 \leqslant m_1 < \ldots < m_\ell \leqslant k$.

Έστω $\varepsilon_3 > 0$ και $\mathcal{N}$ ένα δ_1-δίκτυο της $S_{\ell_1^k}$ για κάποιο $\delta_1 \leqslant \varepsilon_3 c_1/2$. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, για κάθε $a \in \mathcal{N}$ υπάρχει $U_a \in \mathcal{U}$ τέτοιο ώστε να ισχύει η (6.1.3) για κάθε $n \in U_a$. Συνεπώς, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $a \in \mathcal{N}$ να ισχύει η (6.1.3).

Έστω $b \in S_{\ell_1^k}$. Τότε υπάρχει $a \in \mathcal{N}$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{i=1}^k |b_i - a_i| \leqslant \delta_1.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{\left\|\sum_{j=}^{\ell} b_j x^n_{s_{n_j}}\right\|}{\left\|\sum_{j=}^{\ell} b_j x^n_{s_{m_j}}\right\|} &\leqslant \frac{\delta_1 + \left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{n_j}}\right\|}{\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{m_j}}\right\| - \delta_1} \leqslant \frac{\varepsilon_3 c_1/2 + (1+\varepsilon_3)\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{m_j}}\right\|}{\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{m_j}}\right\| - \varepsilon_3 c_1/2} \\ &\leqslant \frac{(1+2\varepsilon_3)\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{m_j}}\right\|}{(1-\varepsilon_3)\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{m_j}}\right\|} = \frac{1+2\varepsilon_3}{1-\varepsilon_3}.\end{aligned}$$

Παίρνουμε $\varepsilon_3 > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{1+2\varepsilon_3}{1-\varepsilon_3} < 1+\varepsilon$. Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{n_j}}\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|\sum_{j=1}^{\ell} a_j x^n_{s_{m_j}}\right\|$$

για κάθε $1 \leqslant \ell \leqslant$, $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_\ell \leqslant k$ και $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_\ell \leqslant k$, για κάθε $a \in S_{\ell_1^k}$ και συνεπώς για κάθε $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή, η $(x^n_1, \ldots, x^n_n)$ έχει $(1+\varepsilon)$-spreading υπακολουθία, την $\{x^n_{s_i}\}_{i=1}^k$. Άτοπο, από την επιλογή των $x^n_1, \ldots, x^n_n$.

Έστω τώρα ότι ισχύει το (ii). Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon_1 > 0$ υπάρχει $a \in S_{\ell_1^k}$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{M_1}\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i}\right\| \leqslant \varepsilon_1.$$

Επομένως, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\left\|\sum_{i=1}^{k} a_i e_{s_i}\right\| \leqslant 2\varepsilon_1$$

για κάθε $s_1 < \ldots < s_k$ στο M_1 με $s_1 > n_0$.

Έστω $|a_{i_0}| = \max_{1\leqslant i\leqslant k} |a_i|$. Υπάρχουν $u_1, u_2, \ldots, u_k$ στο M_1 τέτοια ώστε

$$n_0 < u_1 < \ldots < u_{i_0-1} < u_{i_0} < u_{i_0+1} < \ldots < u_k.$$

Τότε, αν $s_t, s_\ell > u_{i_0}$ θεωρώντας s_i στο M_1 τέτοια ώστε

$$n_0 < u_1 < \ldots < u_{i_0-1} < s_t < s_{i_0+1} < \ldots < s_k$$

και

$$n_0 < u_1 < \ldots < u_{i_0-1} < s_\ell < s_{i_0+1} < \ldots < s_k,$$

παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|a_{i_0} e_{s_t} - a_{i_0} e_{s_\ell}\| &= \left\|\left(\sum_{j=1}^{i_0} a_i e_{u_i} + a_{i_0} e_{s_t} + \sum_{j=i_0+1}^{k} a_i e_{s_i}\right) - \left(\sum_{j=1}^{i_0} a_i e_{u_i} + a_{i_0} e_{s_\ell} + \sum_{j=i_0+1}^{k} a_i e_{s_i}\right)\right\| \\ &\leqslant \left\|\left(\sum_{j=1}^{i_0} a_i e_{u_i} + a_{i_0} e_{s_t} + \sum_{j=i_0+1}^{k} a_i e_{s_i}\right)\right\| + \left\|\left(\sum_{j=1}^{i_0} a_i e_{u_i} + a_{i_0} e_{s_\ell} + \sum_{j=i_0+1}^{k} a_i e_{s_i}\right)\right\| \\ &\leqslant 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1 = 4\varepsilon_1.\end{aligned}$$

Επίσης, $|a_{i_0}| = \max_{1\leqslant i\leqslant k} |a_i| \geqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k |a_i| = \frac{1}{k}$. Συνεπώς,

$$\|e_{s_t} - e_{s_\ell}\| \leqslant 4k\varepsilon_1 \quad \text{για κάθε } s_t, s_\ell \in M_1 \text{ με } s_t, s_\ell > u_{i_0}.$$

Άρα, υπάρχουν $s_1 < \ldots < s_k$ στο M_1, με $s_1 > u_{i_0}$, τέτοιοι ώστε

$$\|e_{s_i} - e_{s_j}\| < 4k\varepsilon_1 \quad \text{για κάθε } i \neq j.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι, για κάθε $\epsilon \in E_2^k$,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i e_{s_i}\right\| &\geqslant \left\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i e_{s_1}\right\| - (k-1)4k\varepsilon_1 = \|e_{s_1}\| \left|\sum_{i=1}^k \epsilon_i\right| - 4k^2\varepsilon_1 \\ &\geqslant (1-\delta)\left|\sum_{i=1}^k \epsilon_i\right| - 4k^2\varepsilon_1.\end{aligned}$$

Συνεπώς, από την ανισότητα Khintchine,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i e_{s_i}\right\| \geqslant (1-\delta)\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^k \epsilon_i\right| - 4k^2\varepsilon_1 &\geqslant \frac{1-\delta}{K_2}\left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^k \epsilon_i\right|^2\right)^{1/2} - 4k^2\varepsilon_1 \\ &= \frac{(1-\delta)\sqrt{k}}{K_2} - 4k^2\varepsilon_1,\end{aligned}$$

όπου $K_2 = \sqrt{2}$. Επιλέγουμε $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε $4k^2\varepsilon_1 < \frac{1-\delta}{2}\sqrt{k}$. Τότε,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i e_{s_i}\right\| \geqslant \frac{1-\delta}{2K_2}\sqrt{k}.$$

Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\left|\left\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i x_{s_i}^n\right\| - \left\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i e_{s_i}\right\|\right| < \frac{(1-\delta)}{4K_2}\sqrt{k}$$

για κάθε $\epsilon \in E_2^n$. Άρα,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i x_{s_i}^n\right\| \geqslant \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i e_{s_i}\right\| - \frac{1-\delta}{4K_2}\sqrt{k} \geqslant \frac{1-\delta}{2K_2}\sqrt{k} - \frac{1-\delta}{4K_2}\sqrt{k} = \frac{1-\delta}{4K_2}\sqrt{k}.$$

Για $c_\delta = \frac{1-\delta}{4K_2}$ ικανοποιείται η (β), άρα έχουμε άτοπο.

Επομένως και οι δύο περιπτώσεις, (i) και (ii), απορρίπτονται, άρα από απαγωγή σε άτοπο έχουμε το συμπέρασμα. ■

Παρατηρούμε ότι αν στην Πρόταση 6.1.1 υποθέσουμε επιπλέον ότι $\|x_i - x_j\| \geqslant \delta_1$ για κάποιο $\delta_1 > 0$, τότε η περίπτωση (β) απορρίπτεται. Πράγματι, ξεκινώντας όπως πριν, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $\delta_1, \varepsilon > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχουν $x_1^n, \ldots, x_n^n$ με $\|x_i\| \leqslant 1$ σε κάποιον χώρο με νόρμα που δεν ικανοποιεί το (α) και επιπλέον $\|x_i^n - x_j^n\| \geqslant \delta_1$ για κάθε $i \neq j$. Τότε στην περίπτωση (ii) είχαμε καταλήξει στο συμπέρασμα ότι για κάθε $\varepsilon_1 > 0$ υπάρχουν $s_i, s_j \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|e_{s_i} - e_{s_j}\| < \varepsilon_1$, και επομένως τότε

$$\delta_1 \leqslant \|x_{s_i}^n - x_{s_j}^n\| < 2\varepsilon_1 \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}$$

Για $\varepsilon_1 < \delta_1/2$ οδηγούμαστε σε άτοπο. Άρα, δεν μπορεί να ισχύει η περίπτωση (ii). Στην περίπτωση (i) οδηγούμαστε σε άτοπο όπως και προηγουμένως. Επομένως, έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.1.2. *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon, \delta > 0$ υπάρχει $N = N(k, \delta, \varepsilon)$ τέτοιος ώστε αν $n \geqslant N$ τότε, για κάθε χώρο με νόρμα X και $x_1, \ldots, x_n \in X$ με $\|x_i\| \leqslant 1$ και $\|x_i - x_j\| \geqslant \delta$, υπάρχει υπακολουθία $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ που είναι $(1+\varepsilon)$-spreading.*

Τα επόμενα δύο λήμματα θα χρειαστούν για την απόδειξη της Πρότασης 6.1.5.

Λήμμα 6.1.3. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $\delta \in (0,1)$. Υπάρχει $N = N(k, \delta) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε αν $n \geqslant N$, X είναι ένας χώρος με νόρμα και $x_1, \ldots, x_n \in X$ με $\|x_i\| \leqslant 1$ και $\|x_i - x_j\| \geqslant \delta$ για κάθε $i \neq j$, τότε υπάρχουν $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ τέτοια ώστε*

$$d\left(x_{i_{j_0}}, \operatorname{span}\{x_{i_j} : j \neq j_0\}\right) \geqslant 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^k$$

για κάθε $1 \leqslant j_0 \leqslant k$.

Απόδειξη. Έστω X χώρος με νόρμα και $x_1, \ldots, x_n$ όπως στην εκφώνηση. Αρχικά παρατηρούμε πως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x_i\| \geqslant \delta/2$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$, διότι αν $\|x_{i_0}\| < \delta/2$ για κάποιο $1 \leqslant i_0 \leqslant n$ τότε για κάθε $i \neq i_0$ ισχύει

$$\|x_i\| \geqslant \|x_i - x_{i_0}\| - \|x_{i_0}\| > \delta - \delta/2 = \delta/2.$$

Επίσης, αφού $x_i \in B_X$ έχουμε $0 < \delta \leqslant 2$.

Επιλέγουμε τα $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ επαγωγικά. Θέτουμε $x_{i_1} = x_1$.

Ισχυρισμός: Υπάρχει x_{i_2} τέτοιο ώστε $d\left(x_{i_2}, \operatorname{span}\{x_{i_1}\}\right) \geqslant \delta/4$.

Απόδειξη του ισχυρισμού: Έστω (προς άτοπο) ότι για κάθε $i > i_1$ υπάρχει $\lambda_i \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\|x_i - \lambda_i x_{i_1}\| < \delta/4$. Τότε, για κάθε $i > i_1$,

$$\frac{\delta}{4} > \|x_i - \lambda_i x_{i_1}\| \geqslant |\lambda_i|\|x_{i_1}\| - \|x_i\| \geqslant |\lambda_i|\frac{\delta}{2} - 1.$$

Άρα,

$$|\lambda_i| \leqslant \frac{1 + \frac{\delta}{4}}{\delta/2} = \frac{2}{\delta} + \frac{1}{2}, \quad \text{για κάθε } i > i_1.$$

Επίσης, για κάθε $i, j > i_1$, $i \neq j$, ισχύει

$$\begin{aligned}\delta \leqslant \|x_i - x_j\| &\leqslant \|x_i - \lambda_i x_{i_1}\| + \|\lambda_i x_{i_1} - \lambda_j x_{i_1}\| + \|\lambda_j x_{i_1} - x_j\| \\ &\leqslant \delta/4 + |\lambda_i - \lambda_j|\|x_{i_1}\| + \delta/4 \leqslant \delta/2 + |\lambda_i - \lambda_j|.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$|\lambda_i - \lambda_j| \geqslant \delta/2, \quad \text{για κάθε } i, j > i_1, i \neq j. \tag{6.1.4}$$

Εφόσον $|\lambda_i| \leqslant \frac{2}{\delta} + \frac{1}{2}$, έχουμε ότι

$$\left(\lambda_i - \frac{\delta}{4}, \lambda_i + \frac{\delta}{4}\right) \subseteq \left(-\left(\frac{2}{\delta} + \frac{1}{2} + \frac{\delta}{4}\right), \left(\frac{2}{\delta} + \frac{1}{2} + \frac{\delta}{4}\right)\right)$$

για κάθε $i > i_1$. Επομένως,

$$\bigcup_{i=i_1+1}^{n} \left(\lambda_i - \frac{\delta}{4}, \lambda_i + \frac{\delta}{4}\right) \subseteq \left(-\left(\frac{2}{\delta} + \frac{1}{2} + \frac{\delta}{4}\right), \left(\frac{2}{\delta} + \frac{1}{2} + \frac{\delta}{4}\right)\right).$$

Όμως από την (6.1.4) έχουμε ότι

$$\left(\lambda_i - \frac{\delta}{4}, \lambda_i + \frac{\delta}{4}\right) \bigcap \left(\lambda_j - \frac{\delta}{4}, \lambda_j + \frac{\delta}{4}\right) = \varnothing$$

για κάθε $i \neq j$. Συνεπώς,

$$(n-1)\frac{\delta}{2} \leqslant 2\left(\frac{2}{\delta} + \frac{1}{2} + \frac{\delta}{4}\right) = \frac{4}{\delta} + 1 + \frac{\delta}{2}.$$

Άρα,

$$n \leqslant \frac{8}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} + 2.$$

Για $n > \frac{8}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} + 2$ οδηγούμαστε σε άτοπο. □

Από την απόδειξη του ισχυρισμού προκύπτει ότι υπάρχει $i_2 \leqslant \frac{8}{\delta^2} + \frac{2}{\delta} + 2$ τέτοιος ώστε

$$d\left(x_{i_2}, \operatorname{span}\{x_{i_1}\}\right) \geqslant \delta/4.$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$d\left(x_{i_1}, \operatorname{span}\{x_{i_2}\}\right) \geqslant \left(\frac{\delta}{4}\right)^2.$$

Πράγματι, έστω $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν $|\lambda| \leqslant \frac{\delta}{4}$ τότε

$$\|x_{i_1} - \lambda x_{i_2}\| \geqslant \|x_{i_1}\| - |\lambda|\|x_{i_2}\| \geqslant \frac{\delta}{2} - |\lambda| \geqslant \frac{\delta}{4} \geqslant \left(\frac{\delta}{4}\right)^2,$$

ενώ αν $|\lambda| \geqslant \frac{\delta}{4}$ τότε, από την επιλογή του x_{i_2} έπεται ότι

$$\|x_{i_1} - \lambda x_{i_2}\| = |\lambda| \left\|\frac{x_{i_1}}{\lambda} - x_{i_2}\right\| \geqslant |\lambda|\frac{\delta}{4} \geqslant \left(\frac{\delta}{4}\right)^2.$$

Επομένως για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε $\|x_{i_1} - \lambda x_{i_2}\| \geqslant \left(\frac{\delta}{4}\right)^2$. Δηλαδή $d\left(x_{i_1}, \operatorname{span}\{x_{i_2}\}\right) \geqslant \left(\frac{\delta}{4}\right)^2$. Έχουμε, επομένως, δείξει το ζητούμενο για $k = 2$.

Συνεχίζουμε την επιλογή των x_{i_j} επαγωγικά. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m} \in X$ τέτοια ώστε

$$d\left(x_{i_{j_0}}, \operatorname{span}\{x_{i_j} : j \neq j_0, 1 \leqslant j \leqslant m\}\right) \geqslant 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^m, \quad \text{για κάθε } 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{6.1.5}$$

Θα δείξουμε ότι αν το n είναι αρκετά μεγάλο τότε υπάρχει $x_{i_{m+1}}$ ώστε

$$d\left(x_{i_{j_0}}, \operatorname{span}\{x_{i_j} : j \neq j_0, 1 \leqslant j \leqslant m+1\}\right) \geqslant 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{m+1}, \quad \text{για κάθε } 1 \leqslant j_0 \leqslant m+1.$$

Ισχυρισμός: Υπάρχει $i_{m+1} > i_m$ ώστε

$$d\left(x_{i_{m+1}}, \operatorname{span}\{x_{i_j} : 1 \leqslant j \leqslant m\}\right) \geqslant \delta/4.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Έστω (προς άτοπο) ότι για κάθε $i > i_m$ υπάρχουν $\lambda_1^i, \ldots, \lambda_m^i \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\left\|x_i - \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^i x_{i_j}\right)\right\| < \delta/4.$$

Για κάθε $i > i_m$ και $1 \leqslant s \leqslant m$ με $\lambda_s^i \neq 0$ έχουμε

$$\left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j^i x_{i_j} \right\| = |\lambda_s^i| \left\| \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j^i}{\lambda_s^i} x_{i_j} \right\| = |\lambda_s^i| \left\| x_{i_s} + \sum_{j\neq s} \frac{\lambda_s^i}{\lambda_{s^i}} x_{i_j} \right\|.$$

Συνεπώς, από την (6.1.5) συμπεραίνουμε ότι

$$\left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j^i x_{i_j} \right\| \geqslant |\lambda_s^i| 4 \left(\frac{\delta}{8}\right)^m.$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει φυσικά και όταν $\lambda_s^i = 0$. Επίσης,

$$\left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j^i x_{i_j} \right\| \leqslant \left\| x_i - \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j^i x_{i_j} \right) \right\| + \|x_i\| < \delta/4 + 1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m} |\lambda_j^i| \leqslant \left(\frac{\delta}{4}+1\right)\left(\frac{8}{\delta}\right)^m \frac{1}{4},$$

άρα

$$\sum_{j=1}^m |\lambda_j^i| \leqslant m \left(\frac{\delta}{4}+1\right)\left(\frac{8}{\delta}\right)^m \frac{1}{4}. \tag{6.1.6}$$

Επιπλέον, αν $\lambda^i = (\lambda_1^i, \dots, \lambda_m^i)$ και $\lambda^s = (\lambda_1^s, \dots, \lambda_m^s)$ για $i, s > i_m$, $i \neq s$, τότε

$$\begin{aligned} \delta \leqslant \|x_i - x_s\| &\leqslant \left\| x_i - \sum_{j=1}^m \lambda_j^i x_{i_j} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^m (\lambda_j^i - \lambda_j^s) x_{i_j} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^m \lambda_j^s x_{i_j} - x_s \right\| \\ &\leqslant \frac{\delta}{4} + \sum_{j=1}^m |\lambda_j^i - \lambda_j^s| \|x_{i_j}\| + \frac{\delta}{4} \leqslant \frac{\delta}{2} + \sum_{j=1}^m |\lambda_j^i - \lambda_j^s| = \frac{\delta}{2} + \|\lambda^i - \lambda^s\|_1. \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|\lambda^i - \lambda^s\|_1 \geqslant \delta/2, \quad \text{για κάθε } i, s > i_m \text{ με } i \neq s,$$

άρα οι μπάλες $B_{\|\cdot\|_1}\left(\lambda^i, \frac{\delta}{4}\right)$, για $i > i_m$, είναι ξένες.

Από την (6.1.6) έχουμε ότι

$$B_{\|\cdot\|_1}\left(\lambda^i, \frac{\delta}{4}\right) \subseteq \left(\frac{m}{4}\left(1+\frac{\delta}{4}\right)\left(\frac{8}{\delta}\right)^m + \frac{\delta}{4} \right) B_{\|\cdot\|_1}(0,1).$$

Άρα, αν Vol_m είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} (n-i_m)\left(\frac{\delta}{4}\right)^m \mathrm{Vol}_m\left(B_{\|\cdot\|_1}(0,1)\right) &= (n-i_m)\mathrm{Vol}_m\left(B_{\|\cdot\|_1}\left(0, \frac{\delta}{4}\right)\right) \\ &= \mathrm{Vol}_m\left(\bigcup_{i=i_m+1}^n B_{\|\cdot\|_1}\left(\lambda^i, \frac{\delta}{4}\right) \right) \\ &\leqslant \mathrm{Vol}_m\left(\left(\frac{m}{4}\left(1+\frac{\delta}{4}\right)\left(\frac{8}{\delta}\right)^m + \frac{\delta}{4} \right) B_{\|\cdot\|_1}(0,1) \right) \\ &= \left(\frac{m}{4}\left(1+\frac{\delta}{4}\right)\left(\frac{8}{\delta}\right)^m + \frac{\delta}{4} \right)^m \mathrm{Vol}_m\left(B_{\|\cdot\|_1}(0,1)\right). \end{aligned}$$

Δηλαδή,
$$n \leqslant \left(\frac{4}{\delta}\right)^m \left(\frac{m}{4}\left(1+\frac{\delta}{4}\right)\left(\frac{8}{\delta}\right)^m + \frac{\delta}{4}\right)^m + i_m.$$
Για $n > \left(\frac{4}{\delta}\right)^m \left(\frac{m}{4}\left(1+\frac{\delta}{4}\right)\left(\frac{8}{\delta}\right)^m + \frac{\delta}{4}\right)^m + 2 + i_m$ οδηγούμαστε σε άτοπο.

Άρα, πράγματι υπάρχει $x_{i_{m+1}}$ τέτοιο ώστε
$$d\left(x_{i_{m+1}}, \mathrm{span}\{x_{i_j} : 1 \leqslant j \leqslant m\}\right) \geqslant \frac{\delta}{4} \geqslant 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{m+1}.$$
□

Μένει να δείξουμε ότι
$$d\Big(x_{i_{j_0}}, \mathrm{span}\{x_{i_j} : j \neq j_0, 1 \leqslant j \leqslant m+1\}\Big) \geqslant 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{m+1}$$
για κάθε $1 \leqslant j_0 \leqslant m$. Πράγματι, έστω $1 \leqslant j_0 \leqslant m$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j_0-1}, \lambda_{j_0+1}, \ldots, \lambda_m, \mu \in \mathbb{R}$.

Αν $|\mu| \leqslant 2\left(\frac{\delta}{8}\right)^m$, τότε από την (6.1.5) έχουμε ότι
$$\begin{aligned}\Bigg\|x_{i_{j_0}} - \Bigg(\mu x_{i_{m+1}} + \sum_{j\neq j_0}\lambda_j x_{i_j}\Bigg)\Bigg\| &\geqslant \Bigg\|x_{i_{j_0}} - \sum_{j\neq j_0}\lambda_j x_{i_j}\Bigg\| - |\mu|\|x_{i_{m+1}}\| \\ &\geqslant 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^m - 2\left(\frac{\delta}{8}\right)^m = 2\left(\frac{\delta}{8}\right)^m \geqslant 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{m+1}.\end{aligned}$$
Αν $|\mu| \geqslant 2\left(\frac{\delta}{8}\right)^m$, τότε από την επιλογή του $x_{i_{m+1}}$ προκύπτει ότι
$$\begin{aligned}\Bigg\|x_{i_{j_0}} - \Bigg(\mu x_{i_{m+1}} + \sum_{j\neq j_0}\lambda_j x_{i_j}\Bigg)\Bigg\| &\geqslant |\mu|\Bigg\|x_{i_{m+1}} - \Bigg(\frac{x_{i_{j_0}}}{\mu} - \sum_{j\neq j_0}\frac{\lambda_j}{\mu}x_{i_j}\Bigg)\Bigg\| \\ &\geqslant |\mu|\frac{\delta}{4} \geqslant 2\left(\frac{\delta}{8}\right)^m\frac{\delta}{4} = 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{m+1}.\end{aligned}$$
Έπεται ότι
$$d\Big(x_{i_{j_0}}, \mathrm{span}\{x_{i_j} : j \neq j_0, 1 \leqslant j \leqslant m+1\}\Big) \geqslant 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{m+1}.$$
Επαγωγικά συμπεραίνουμε ότι αν το n είναι αρκετά μεγάλο τότε υπάρχουν $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ τέτοια ώστε
$$d\Big(x_{i_{j_0}}, \mathrm{span}\{x_{i_j} : j \neq j_0, 1 \leqslant j \leqslant k\}\Big) \geqslant 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{k}$$
για κάθε $1 \leqslant j_0 \leqslant k$. ■

Λήμμα 6.1.4. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $0 < \varepsilon < 1$. Έστω $n \in \mathbb{N}$, X χώρος με νόρμα και $x_1, \ldots, x_n \in X$ τέτοια ώστε $\|x_i\| \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ και η $(x_1, \ldots, x_n)$ να είναι $(1+\varepsilon)$-spreading. Έστω επίσης υπακολουθία $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{2k}})$. Θέτουμε $v_j = x_{i_j} - x_{i_{j-1}}$. Τότε η $(v_{2j})_{j=1}^k$ ικανοποιεί το εξής:*

Αν $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ και $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in B$, με $\sum_{j\in B}|a_j| = 1$, τότε
$$\Bigg\|\sum_{j\in A}a_j v_{2j}\Bigg\| \leqslant (1+\varepsilon)^2\Bigg\|\sum_{j\in B}a_j v_{2j}\Bigg\| + \delta_n,$$
όπου το δ_n εξαρτάται μόνο από το n και $\delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης της Πρότασης 5.4.6 με κατάλληλες τροποποιήσεις. Έστω $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, k\}$ και $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in B$, με $\sum_{j \in B} |a_j| = 1$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε οικογένεια $\{\sigma_j\}_{j=1}^k$ υποσυνόλων του $\{1, 2, \dots, n\}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Αν $j_1 < j_2$ τότε $\max \sigma_{j_1} < \min \sigma_{j_2}$

(ii) Αν $j \in A$ τότε $|\sigma_j| = 2$, έστω $\sigma_j = \{r_{j,1}, r_{j,2}\}$.

(iii) Αν $j \in B \setminus A$ τότε $|\sigma_j| = m + 1$, έστω $\sigma_j = \{r_{j,1}, \dots, r_{j,m+1}\}$.

Εφόσον η $\{x_i\}_{j=1}^n$ είναι $(1 + \varepsilon)$-spreading έχουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant s \leqslant m$,

$$\left\| \sum_{j \in A} a_j (x_{r_{j,2}} - x_{r_{j,1}}) + \sum_{j \in B \setminus A} a_j (x_{r_{j,s+1}} - x_{r_{j,s}}) \right\| \leqslant (1 + \varepsilon) \left\| \sum_{j \in B} a_j v_{2j} \right\|.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} m(1 + \varepsilon) \left\| \sum_{j \in B} a_j v_{2j} \right\| &\geqslant \sum_{s=1}^m \left\| \sum_{j \in A} a_j (x_{r_{j,2}} - x_{r_{j,1}}) + \sum_{j \in B \setminus A} a_j (x_{r_{j,s+1}} - x_{r_{j,s}}) \right\| \\ &\geqslant \left\| m \sum_{j \in A} a_j (x_{r_{j,2}} - x_{r_{j,1}}) + \sum_{s=1}^m \sum_{j \in B \setminus A} a_j (x_{r_{j,s+1}} - x_{r_{j,s}}) \right\| \\ &= \left\| m \sum_{j \in A} a_j (x_{r_{j,2}} - x_{r_{j,1}}) + \sum_{j \in B \setminus A} a_j (x_{r_{j,m+1}} - x_{r_{j,1}}) \right\| \\ &\geqslant m \left\| \sum_{j \in A} a_j (x_{r_{j,2}} - x_{r_{j,1}}) \right\| - \left\| \sum_{j \in B \setminus A} a_j (x_{r_{j,m+1}} - x_{r_{j,1}}) \right\| \\ &\geqslant m \frac{1}{1 + \varepsilon} \left\| \sum_{j \in A} a_j v_{2j} \right\| - \sum_{j \in B \setminus A} |a_j| \| x_{r_{j,m+1}} - x_{r_{j,1}} \| \\ &\geqslant m \frac{1}{1 + \varepsilon} \left\| \sum_{j \in A} a_j v_{2j} \right\| - 2, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\left\| \sum_{j \in A} a_j v_{2j} \right\| \leqslant (1 + \varepsilon)^2 \left\| \sum_{j \in B} a_j v_{2j} \right\| + \frac{2}{m} (1 + \varepsilon) \leqslant \frac{4}{m}.$$

Το πόσο μεγάλο m μπορούμε να πάρουμε εξαρτάται από το πόσο μεγάλο είναι το n. Επομένως, έχουμε το ζητούμενο. ■

Πρόταση 6.1.5. *Έστω $\varepsilon, \delta > 0$ και $k \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $N_1 = N_1(k, \delta, \varepsilon) \in \mathbb{N}$, που εξαρτάται μόνο από τα ε, δ και k, τέτοιος ώστε αν X χώρος με νόρμα, $n \geqslant N$ και $x_1, \dots, x_n \in X$ με $\|x_i\| \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ και $\|x_i - x_j\| \geqslant \delta$ για κάθε $i \neq j$, τότε υπάρχει υπακολουθία $x_{i_1}, \dots, x_{i_{2k}}$ τέτοια ώστε η ακολουθία $v_j = x_{i_{2j}} - x_{i_{2j-1}}, 1, \dots, n$ να είναι $(2 + \varepsilon)$-unconditional.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon, \delta \in (0, 1)$ και $k \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης $\varepsilon_1 > 0$ που θα επιλεγεί κατάλληλα.

Θεωρούμε $N_2 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $\delta_n \leqslant \varepsilon_1 \frac{1}{k} 4 \left(\frac{\delta}{8}\right)^{2k}$ για κάθε $n \geqslant N_2$. Θεωρούμε επίσης $N_3 = N_3(2k, \delta)$ όπως στο Λήμμα 6.1.3, δηλαδή για κάθε $n \geqslant N_3$ και $y_1, \dots, y_n$ σε κάποιον χώρο με νόρμα X υπάρχει υπακολουθία $y_{i_1}, \dots, y_{i_{2k}}$ τέτοια ώστε

$$d\left(y_{i_{j_0}}, \operatorname{span}\{y_{i_j} : j \neq j_0\}\right) \geqslant 4 \left(\frac{\delta}{8}\right)^{2k}$$

για κάθε $1 \leqslant j_0 \leqslant 2k$. Θέτουμε $N_4 = \max\{N_2, N_3\}$. Τότε ο $N_1 \coloneqq N(N_4, \delta, \varepsilon_1)$ όπως ορίστηκε στην Πρόταση 6.1.2, έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Πράγματι, έστω $n \geqslant N_1$, X χώρος με νόρμα, $x_1, \ldots, x_n \in X$ τέτοια ώστε $\|x_i\| \leqslant 1$ και $\|x_i - x_j\| \geqslant \delta$ για κάθε $i \neq j$. Τότε σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.2 υπάρχει υπακολουθία $y_1, \ldots, y_{N_4}$ της $\{x_i\}_{i=1}^n$, η οποία είναι $(1+\varepsilon_1)$-spreading. Άρα, η $(y_1, \ldots, y_{N_4})$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|y_i\| \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant N_4$.

(β) Η $(y_1, \ldots, y_{N_4})$ είναι $(1+\varepsilon_1)$-spreading.

(γ) $\|y_i - y_j\| \geqslant \delta$ για κάθε $i \neq j$.

Εφόσον $N_4 \geqslant N_3$ υπάρχει υπακολουθία $(y_{i_1}, \ldots, y_{i_{2k}})$ ώστε

$$d\left(y_{i_{j_0}}, \operatorname{span}\{y_{i_j} : j \neq j_0\}\right) \geqslant 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{2k}$$

για κάθε $1 \leqslant j_0 \leqslant 2k$. Επιπλέον, από το Λήμμα 6.1.4 έχουμε ότι για κάθε $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ και $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in B$, με $\sum_{j \in B} |a_j| = 1$ ισχύει

$$\left\|\sum_{j \in A} a_j v_{2j}\right\| \leqslant (1+\varepsilon_1)^2 \left\|\sum_{j \in B} a_j v_{2j}\right\| + \delta_{N_4}, \tag{6.1.7}$$

όπου $v_j = y_{i_j} - y_{i_{j-1}}$.

Εφόσον $N_4 \geqslant N_2$ έχουμε ότι

$$\delta_{N_4} \leqslant \varepsilon_1 \frac{1}{k} 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{2k}. \tag{6.1.8}$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι για κάθε $a \in S_{\ell_1^{2k}}$, αν $|a_{j_0}| = \max_{1 \leqslant j \leqslant 2k} |a_j|$, τότε

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{j=1}^{2k} a_j y_{i_j}\right\| &= \left\|a_{j_0} y_{i_{j_0}} + \sum_{j \neq j_0} a_j y_{i_j}\right\| = |a_{j_0}| \left\|y_{i_{j_0}} + \sum_{j \neq j_0} \frac{a_j}{a_{j_0}} y_{i_j}\right\| \\ &\geqslant |a_{j_0}| 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{2k} = \max_{1 \leqslant j \leqslant 2k} |a_j| |4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{2k} \geqslant \frac{1}{2k} 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{2k}. \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

Από την (6.1.9) έπεται ότι για κάθε $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in B$, με $\sum_{j \in B} |a_j| = 1$, ισχύει

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{j \in B} a_j v_{2j}\right\| &= \left\|\sum_{j \in B} a_j (y_{i_{2j}} - y_{i_{2j-1}})\right\| \\ &= 2\left\|\sum_{j \in B} \frac{a_j}{2} (y_{i_{2j}} - y_{i_{2j-1}})\right\| \geqslant 2\frac{1}{2k} 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{2k} = \frac{1}{k} 4\left(\frac{\delta}{8}\right)^{2k}. \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

Από τις (6.1.7), (6.1.8) και (6.1.10) έπεται ότι για $A \subseteq B \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ και $a_j \in \mathbb{R}$, $j \in B$, με $\sum_{j \in B} |a_j| = 1$ ισχύει

$$\left\|\sum_{j \in A} a_j v_{2j}\right\| \leqslant (1+\varepsilon_1)^2 \left\|\sum_{j \in B} a_j v_{2j}\right\| + \varepsilon_1 \left\|\sum_{j \in B} a_j v_{2j}\right\|,$$

άρα

$$\left\|\sum_{j \in A} a_j v_{2j}\right\| \leqslant \left((1+\varepsilon_1)^2 + \varepsilon_1\right) \left\|\sum_{j \in B} a_j v_{2j}\right\|.$$

Έπεται ότι για κάθε $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ και $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, k\}$ ισχύει

$$\left\| \sum_{j \in A} a_j v_{2j} \right\| \leqslant \left((1 + \varepsilon_1)^2 + \varepsilon_1 \right) \left\| \sum_{j \in B} a_j v_{2j} \right\|.$$

Συνεπώς, η $\{v_{2j}\}_{j=1}^k$ είναι $2\left((1+\varepsilon_1)^2 + \varepsilon_1\right)$-unconditional. Αν επιλέξουμε $\varepsilon_1 > 0$ αρκετά μικρό ώστε $2\left((1+\varepsilon_1)^2 + \varepsilon_1\right) < 2 + \varepsilon$, τότε η $\{v_{2j}\}_{j=1}^k$ είναι $(2+\varepsilon)$-unconditional. ■

6.2 Βοηθητικά αποτελέσματα

Ορισμός 6.2.1. Έστω X χώρος με νόρμα και $q \geqslant 2$. Συμβολίζουμε με $\phi_q(n)$, τη μικρότερη σταθερά $C > 0$ με την ιδιότητα

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leqslant C \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q}$$

για κάθε $x_1, \dots, x_n \in X$.

Πρόταση 6.2.2. *Έστω $2 \leqslant q < q_X < \infty$ και $0 < a < q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}\right)$. Τότε,*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^a}{\phi_q^q(n)} = 0$$

Επιπλέον, αν $q_X = \infty$ τότε για κάθε $q \geqslant 2$ και κάθε $0 < a < 1$ ισχύει

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^a}{\phi_q^q(n)} = 0.$$

Η απόδειξη της πρότασης θα βασιστεί στα παρακάτω δύο λήμματα.

Λήμμα 6.2.3. *Έστω X χώρος με νόρμα και $q \geqslant 2$. Τότε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\phi_q(nm) \leqslant \phi_q(n)\phi_q(m).$$

Δηλαδή, η ϕ_q είναι υποπολλαπλασιαστική.

Απόδειξη. Έστω X χώρος με νόρμα, $\{x_i\}_{i=1}^{nm}$ στον X και $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{nm}$ συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\left(\sum_{i=1}^{nm} \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leqslant \phi_q(n)\phi_q(m) \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{nm} \epsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q}.$$

Για $1 \leqslant j \leqslant n$ θέτουμε

$$y_j = \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \epsilon_i x_i.$$

Τότε, το $y_i = y_j(\epsilon)$ είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στον X. Έστω $\{\epsilon'_j\}_{j=1}^n$ συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli στον $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά και από τις $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{nm}$. Τότε, η $\epsilon'_j \epsilon_i$ είναι ισόνομη με την ϵ_i. Από τον ορισμό της σταθεράς $\phi_q(m)$ έχουμε

$$\left(\sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leqslant \phi_q(m) \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \epsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q} = \phi_q(m) \left(\mathbb{E} \|y_i(\epsilon)\|^q \right)^{1/q},$$

άρα
$$\sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \|x_i\|^q \leqslant \phi_q^q(m)\mathbb{E}\|y_i(\epsilon)\|^q.$$
Επομένως,
$$\sum_{i=1}^{nm} \|x_i\|^q \leqslant \phi_q^q(m) \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\|y_i\|^q. \tag{6.2.1}$$
Ενώ από τον ορισμό της σταθεράς $\phi_q(n)$ έχουμε
$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|y_i\|^q\right)^{1/q} \leqslant \phi_q(n) \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon'_j y_j\right\|^q\right)^{1/q},$$
άρα
$$\sum_{j=1}^{n} \|y_j\|^q \leqslant \phi_q^q(n)\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon'_j y_j\right\|^q = \phi_q^q(n)\int_\Omega \left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon'_j y_j(\omega)\right\|^q d\mathbb{P}(\omega).$$
Έπεται ότι
$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\|y_j\|^q = \mathbb{E}\sum_{j=1}^{n} \|y_j(\epsilon)\|^q &= \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \|y_j(\omega)\|^q d\mathbb{P}(\omega) \\
&\leqslant \phi_q^q(n) \int_\Omega \int_\Omega \left\|\sum_{j=1}^{n} \epsilon'_j(\omega')y_j(\omega)\right\|^q d\mathbb{P}(\omega')d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \phi_q^q(n) \int_\Omega \int_\Omega \left\|\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \epsilon'_j(\omega')\epsilon_i(\omega)x_i\right\|^q d\mathbb{P}(\omega')d\mathbb{P}(\omega) \\
&= \phi_q^q(n) \int_\Omega \left\|\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \epsilon'_j(\omega)\epsilon_i(\omega)x_i\right\|^q d\mathbb{P}(\omega),
\end{aligned}$$
διότι οι ϵ'_j και ϵ_i είναι ανεξάρτητες. Εφόσον η $\epsilon'_j\epsilon_i$ είναι ισόνομη με την ϵ_i, η παραπάνω ποσότητα ισούται με
$$\phi_q^q(n) \int_\Omega \left\|\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=(j-1)m+1}^{jm} \epsilon_i(\omega)x_i\right\| d\mathbb{P}(\omega) = \phi_q^q(n)\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{nm} \epsilon_i x_i\right\|^q.$$
Συνεπώς,
$$\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\|y_i\|^q \leqslant \phi_q^q(n)\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{nm} \epsilon_i x_i\right\|^q. \tag{6.2.2}$$
Από τις (6.2.1) και (6.2.2) έπεται ότι
$$\sum_{i=1}^{nm} \|x_i\|^q \leqslant \phi_q^q(m) \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\|y_i\|^q \leqslant \phi_q^q(m)\phi_q^q(n)\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{nm} \epsilon_i x_i\right\|^q,$$
άρα
$$\left(\sum_{i=1}^{nm} \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leqslant \phi_q(m)\phi_q(n) \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{nm} \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q}$$
Επομένως, πράγματι, $\phi_q(nm) \leqslant \phi_q(m)\phi_q(n)$. ∎

Λήμμα 6.2.4. *Έστω $2 \leqslant q \leqslant r$. Αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$, με $m > 1$, τέτοιος ώστε $\phi_q(m) \leqslant m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$, τότε $q_X \leqslant r$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι $C_s(X) < \infty$ για κάθε $s > r$. Δείχνουμε αρχικά τον ακόλουθο ισχυρισμό.

<u>Ισχυρισμός:</u> Υπάρχει $C = C(m) > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\phi_q(n) \leqslant Cn^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}},$$

άρα

$$\frac{\phi_q(n)}{n^{1/q}} \leqslant \frac{C}{n^{1/r}}.$$

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού:</u> Αρχικά παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της η $\phi_q(n)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του n. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον $m > 1$, υπάρχει ακέραιος $k \geqslant 0$ τέτοιος ώστε

$$m^k \leqslant n < m^{k+1}.$$

Άρα, από το Λήμμα 6.2.3 έχουμε

$$\begin{aligned}\phi_q(n) &\leqslant \phi_q(m^{k+1}) \leqslant (\phi_q(m))^{k+1} \leqslant \left(m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\right)^{k+1} = \left(m^{k+1}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\\ &= m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\left(m^k\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \leqslant m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \leqslant mn^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}.\end{aligned}$$

Άρα, ο ισχυρισμός αληθεύει για $C = m$. □

Έστω τώρα $s > r$ και $x_1, \dots, x_n \in X$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x_1\| \geqslant \dots \geqslant \|x_n\|$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\|x_k\| = \min_{1\leqslant i\leqslant k} \|x_i\| \leqslant \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{k^{1/q}}\phi_q(k)\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant \frac{C}{k^{1/r}}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q},$$

λόγω του ισχυρισμού.

Επιπλέον, από την αρχή της συστολής για τις ϵ_i συμπεραίνουμε ότι

$$\|x_k\| \leqslant \frac{C}{k^{1/r}}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q}.$$

Συνεπώς,

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^s\right)^{1/s} \leqslant C\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{s/r}}\right)^{1/s}.$$

Εφόσον $s > r$, έχουμε ότι $\left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{s/r}}\right)^{1/s} = c_1 < \infty$. Επίσης, από την ανισότητα Kahane έχουμε ότι

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant K_q\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\| \leqslant K_q\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2}.$$

Τελικά,

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^s\right)^{1/s} \leqslant c_0\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2},$$

όπου $c_0 = cc_1K_q$ σταθερά που δεν εξαρτάται από το n. Άρα, $C_s(X) \leqslant c_0 < \infty$ και συνεπώς ο X έχει cotype s. ■

Απόδειξη της Πρότασης 6.2.2. Έστω $2 \leqslant q < q_X < \infty$ και $0 < a < q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}\right)$. Αν υποθέσουμε (προς άτοπο) ότι $\phi_q(n) < n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}}$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $2 \leqslant q < q_X - \varepsilon$ και

$$\phi_q(n) < n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_X - \varepsilon}}$$

για το ίδιο n. Από το Λήμμα 6.2.4 συμπεραίνουμε ότι $q_X \leqslant q_X - \varepsilon$. Άτοπο. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\phi_q(n) \geqslant n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}}.$$

Επομένως,

$$\frac{n^a}{\phi_q^q(n)} \leqslant \frac{n^a}{n^{q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}\right)}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\left(q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}\right) - a\right)} \longrightarrow 0$$

διότι $a < q\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}\right)$.

Αν $q_X = \infty$ τότε για κάθε $2 \leqslant q < \infty$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\phi_q(n) \geqslant n^{1/q}.$$

Πράγματι, αν $\phi_q(n) < n^{1/q}$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ τότε υπάρχει $q < r < \infty$ αρκετά μεγάλο ώστε

$$\phi_q(n) < n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}.$$

Επομένως, από το Λήμμα 6.2.4 θα ίσχυε $q_X \leqslant r < \infty$. Άτοπο. Άρα πράγματι

$$\phi_q(n) \geqslant n^{1/q}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $2 \leqslant q < \infty$. Από την άλλη, πάντα ισχύει $\phi_q(n) \leqslant n^{1/q}$, διότι για $x_1, x_2, \ldots, x_n$ έχουμε

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leqslant n^{1/q} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\| \leqslant n^{1/q} \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q}$$

από την αρχή της συστολής για τις ϵ_i. Συνεπώς, τελικά σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\phi_q(n) = n^{1/q}$$

για κάθε $2 \leqslant q < \infty$.

Τότε,

$$\frac{n^a}{\phi_q^q(n)} = \frac{n^a}{n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1-a} \longrightarrow 0$$

για κάθε $0 < a < 1$. ■

Παρατήρηση 6.2.5. Μάλιστα, μπορεί να δείξει κανείς ότι για $2 \leqslant q < q_X < \infty$ ισχύει

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln \phi_q(n)}{\ln n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}.$$

Πράγματι, από την ανισότητα $\phi_q(n) \geqslant n^{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}}$ έπεται ότι

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\ln \phi_q(n)}{\ln n} \geqslant \frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}.$$

Από την άλλη, αν $r > q_X$ τότε ο X έχει cotypte r και από τον ορισμό του $\phi_q(n)$ υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in X$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\phi_q(n)\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q} &\leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{1/q}\\ &\leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^r\right)^{1/r}\\ &\leqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} C_r\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^r\right)^{1/r}.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Kahane, η προηγούμενη ποσότητα είναι μικρότερη ή ίση από

$$C_r K_r\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q}.$$

Επομένως

$$\phi_q(n) \leqslant 2C_r K_r n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}},$$

άρα

$$\frac{\ln \phi_q(n)}{\ln n} \leqslant \frac{1}{q} - \frac{1}{r} + \frac{2C_r K_r}{\ln n},$$

δηλαδή

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \phi_q(n)}{\ln n} \leqslant \frac{1}{q} - \frac{1}{r}.$$

Το $r > q_X$ ήταν τυχόν, συνεπώς

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \phi_q(n)}{\ln n} \leqslant \frac{1}{q} - \frac{1}{q_X},$$

και τελικά

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \phi_q(n)}{\ln n} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}.$$

Για $q_X = \infty$ έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \phi_q(n)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n^{1/q}}{\ln n} = \frac{1}{q}$$

για κάθε $2 \leqslant q < \infty$.

6.3 Απόδειξη του θεωρήματος

Η απόδειξη της cotype περίπτωσης του θεωρήματος Maurey-Pisier θα βασιστεί στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 6.3.1. *Υπάρχουν γ, $C > 0$ και $0 < \delta < 1$ τέτοια ώστε, αν X χώρος με νόρμα και $q_X > 2$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n_1 \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $y_1, y_2, \ldots, y_{n_1} \in X$ τέτοια ώστε*

(i) $1 - \delta \leqslant \|y_i\| \leqslant 1$, *για κάθε* $1 \leqslant i \leqslant n_1$.

(ii) *Η ακολουθία $(y_1, \ldots, y_{n_1})$ είναι $(1+\varepsilon)$-spreading και C-unconditional.*

(iii) *Για κάθε* $A \subseteq [n_1] = \{1, 2, \dots, n_1\}$ *ισχύει*

$$\Big\| \sum_{i\in A} y_i \Big\| \leqslant \gamma\, |A|^{1/q_X}.$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι αν η $(x_1, \dots, x_n)$ είναι C-unconditional, τότε για $A \subseteq [n]$,

$$\Big\| \sum_{i\in A} x_i \Big\| \leqslant C \Big\| \sum_{i\in A} \epsilon_i x_i \Big\|$$

για κάθε $\epsilon \in E_2^n$. Συνεπώς,

$$\Big\| \sum_{i\in A} x_i \Big\| \leqslant C\, \mathbb{E} \Big\| \sum_{i\in A} \epsilon_i x_i \Big\| \leqslant C \left(\mathbb{E} \Big\| \sum_{i\in A} \epsilon_i x_i \Big\|^q \right)^{1/q} \quad \text{για κάθε } q \geqslant 1.$$

Επομένως, για την απόδειξη της Πρότασης 6.3.1, βρίσκουμε αρχικά $x_1, \dots, x_n \in X$ με $1 - \delta \leqslant \|x_i\| \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$, τέτοια ώστε για κάθε $A \subseteq [n]$ να ισχύει

$$\left(\mathbb{E} \Big\| \sum_{i\in A} \epsilon_i x_i \Big\|^q \right)^{1/q} \leqslant c_1 |A|^{1/q_X} \tag{6.3.1}$$

για κάποια σταθερά $c_1 > 0$. Έπειτα, εκμεταλλευόμενοι την Πρόταση 6.1.1 και την Πρόταση 6.1.5 οδηγούμαστε σε ακολουθία $(y_1, \dots, y_m)$ η οποία είναι C-unconditional για κάποια σταθερά $C > 0$ και $(1+\varepsilon)$-spreading, και ικανοποιεί την (6.3.1). Τότε, σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση θα έχουμε

$$\Big\| \sum_{i\in A} y_i \Big\| \leqslant \gamma\, |A|^{1/q_X} \quad \text{για κάθε } A \subseteq [m].$$

Προχωράμε στην απόδειξη της Πρότασης.

Έστω X χώρος με νόρμα. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $q_X < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω επίσης $k_0 \in \mathbb{N}$ και $2 \leqslant q < q_X$ τα οποία θα επιλεγούν κατάλληλα, και $N = N(k_0, \varepsilon)$ όπως στην Πρόταση 6.1.1. Θέτουμε $a = \frac{q}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_X}\right)$.

Αν $n \in \mathbb{N}$, από τον ορισμό του $\phi_q(n)$, για κάθε $\varepsilon_1 > 0$ υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$ τέτοια ώστε

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q} > (1 - \varepsilon_1)\phi_q(n) \left(\mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \Big\|^q \right)^{1/q}. \tag{6.3.2}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \|x_i\| = 1$, διότι σε διαφορετική περίπτωση μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα x_i με τα $\frac{x_i}{M}$, όπου $M = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \|x_i\|$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n^a > N = N(k_0, \varepsilon)$. Στη συνέχεια, διαμερίζουμε τη μοναδιαία μπάλα B_X του X σε «δακτυλίους»:

$$B_j = \{x \in B_X : (1-\delta)^j \leqslant \|x\| \leqslant (1-\delta)^{j-1}\}, \quad \text{για } j = 1, 2, \dots$$

όπου το $0 < \delta < 1$ θα επιλεγεί κατάλληλα.

Επίσης, για $j = 1, 2, \dots$, ορίζουμε

$$A_j = \{i \in \mathbb{N} : x_i \in B_j\},$$

και για κάθε $i \in A_j$ θέτουμε

$$\hat{x}_i = \frac{x_i}{(1-\delta)^{j-1}}.$$

Τότε, $1-\delta \leqslant \|\hat{x}_i\| \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$.

Στόχος μας είναι να βρούμε κάποιο $j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το A_j να περιέχει υποσύνολο A με τουλάχιστον N στοιχεία και με την ιδιότητα για κάθε $T \subseteq A$ τέτοιο ώστε $|T| \leqslant k_0$ να ισχύει

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in T}\epsilon_i\hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant c_0|T|^{1/q_X},$$

δηλαδή,

$$\frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in T}\epsilon_i\hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|T|^{1/q_X}} \leqslant c_0$$

για κάποια σταθερά $c_0>0$. Βεβαίως, είναι σημαντικό να μπορούμε να το πετύχουμε για κάποια απόλυτη σταθερά $c_0>0$ που δεν εξαρτάται ούτε από το q ούτε από την επιλογή του k_0.

Για κάθε $j \in \mathbb{N}$ διαμερίζουμε το A_j ως εξής:

- Αν $|A_j| \leqslant n^a$ τότε θέτουμε $A_{j,0} = A_j$.

  Αν $|A_j| > n^a$ τότε θεωρούμε $A_{j,1} \subseteq A_j$ με $|A_{j,1}| \leqslant k_0$ τέτοιο ώστε

  $$\max_{\substack{T\subseteq A_j\\ |T|\leqslant k_0}} \frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in T}\epsilon_i\hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|T|^{1/q_X}} = \frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in A_{j,1}}\epsilon_i\hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|A_{j,1}|^{1/q_X}}$$

  και ορίζουμε $C_{j,1} = A_j \setminus A_{j,1}$.

- Αν $|C_{j,1}| \leqslant n^a$ τότε θέτουμε $A_{j,0} = C_{j,1}$.

  Αν $|C_{j,1}| > n^a$ τότε θεωρούμε $A_{j,2} \subseteq C_{j,1}$ με $|A_{j,2}| \leqslant k_0$ τέτοιο ώστε

  $$\max_{\substack{T\subseteq C_{j,1}\\ |T|\leqslant k_0}} \frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in T}\epsilon_i\hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|T|^{1/q_X}} = \frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in A_{j,2}}\epsilon_i\hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|A_{j,2}|^{1/q_X}}$$

  και ορίζουμε $C_{j,2} = C_{j,1} \setminus A_{j,2} = A_j \setminus (A_{j,1} \cup A_{j,2})$.

- Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι για κάποιο $m_j \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|C_{j,m_j}| \leqslant n^a$. Τότε θέτουμε $C_{j,m_j} = A_{j,0}$.

Επίσης συμβολίζουμε με $C_{j,0}$ το A_j.

Συνεπώς, έχουμε διαμέριση $\{A_{j,t}\}_{t=0}^{m_j}$ του A_j τέτοια ώστε

$$A_j = A_{j,0} \cup \bigcup_{t=1}^{m_j} A_{j,t},$$

και για κάθε $t \geqslant 1$ το $A_{j,t}$ είναι τέτοιο ώστε $A_{j,t} \subseteq C_{j,t-1} = A_j \setminus \bigcup_{i=1}^{t-1} A_{j,i}$, με $|C_{j,t-1}| > n^a$, $|A_{j,t}| \leqslant k_0$ και

$$\max_{\substack{T\subseteq C_{j,t-1}\\ |T|\leqslant k_0}} \frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in T}\epsilon_i\hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|T|^{1/q_X}} = \frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in A_{j,t}}\epsilon_i\hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|A_{j,t}|^{1/q_X}}.$$

Έχουμε τελικά την εξής διαμέριση του $\{1,2,\ldots,n\}$,

$$\{1,2,\ldots,n\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{j,0} \cup \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{t=1}^{m_j} A_{j,t}.$$

Από την ανισότητα (6.3.2) μπορούμε εύκολα να συνάγουμε ότι για κάποιο $A_{j,t}$ για $j \geqslant 1$ και $t \geqslant 0$ ισχύει

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in A_{j,t}} \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant c_0 \left(\sum_{i\in A_{j,t}} \|x_i\|^q\right)^{1/q},$$

και συνεπώς

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in A_{j,t}} \epsilon_i \hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant c_0 |A_{j,t}|^{1/q}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$.

Ωστόσο, πριν δείξουμε αυτό, θα θέλαμε να αποφύγουμε την περίπτωση το t να είναι 0. Δηλαδή, θα δείξουμε ότι

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in A_{j,t}} \epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant c_0 \left(\sum_{i\in A_{j,t}} \|x_i\|^q\right)^{1/q}$$

για κάποια $j \geqslant 1$ και $t \geqslant 1$. Αν δείξουμε αυτό, τότε για κάθε $T \subseteq C_{j,t-1}$ με $|T| \leqslant k_0$ ισχύει

$$\frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in T} \epsilon_i \hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|T|^{1/q_X}} \leqslant \frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in A_{j,t}} \epsilon_i \hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|A_{j,t}|^{1/q_X}} \leqslant c_0.$$

Για να το πετύχουμε αυτό, εκμεταλλευόμαστε την Πρόταση 6.2.2 και αποδεικνύουμε μια ανισότητα ανάλογη της (6.3.2) στην οποία δεν υπάρχει το «κακό μέρος» $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{j,0}$.

Θέτουμε $D = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{t=1}^{m_j} A_{j,t} = \{1,2,\ldots,n\} \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{j,0}$.

<u>Ισχυρισμός 1:</u> Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\sum_{i\in D} \|x_i\|^q > (1-\varepsilon_1)^{q+1}\phi_q^q(n)\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in D} \epsilon_i x_i\right\|^q,$$

όπου τα x_i είναι όπως στην (6.3.2). Επιπλέον, $D \neq \varnothing$.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού:</u> Έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q = \sum_{i\in D} \|x_i\|^q + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in A_{j,0}} \|x_i\|^q.$$

Όμως, αν $i \in A_{j,0} \subseteq A_j$ τότε $\|x_i\| \leqslant (1-\delta)^{j-1}$ και άρα

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i\in A_{j,0}} \|x_i\|^q \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |A_{j,0}| \left((1-\delta)^{j-1}\right)^q \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} n^a (1-\delta)^{q(j-1)} = n^a \frac{1}{1-(1-\delta)^q}. \tag{6.3.3}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.2 έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^a}{\phi_q^q(n)}=0.$$

Επομένως, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n\geqslant n_0$,

$$\frac{n^a}{\phi_q^q(n)}\frac{1}{1-(1-\delta)^q}<\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)^q. \tag{6.3.4}$$

Επιπλέον, από την αρχή της συστολής έχουμε ότι για κάθε $1\leqslant i\leqslant n$ ισχύει

$$\|x_i\|^q\leqslant\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\right\|^q.$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\right\|^q\geqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i\|^q=1. \tag{6.3.5}$$

Από τις (6.3.3), (6.3.4) και (6.3.5) έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^n\|x_i\|^q\leqslant\sum_{i\in D}\|x_i\|^q+\phi_q^q(n)\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)^q\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\right\|^q.$$

Επομένως, από την (6.3.2) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i\in D}\|x_i\|^q&\geqslant(1-\varepsilon_1)^q\phi_q^q(n)\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\right\|^q-\phi_q^q(n)\varepsilon_1(1-\varepsilon_1)^q\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\right\|^q\\&=(1-\varepsilon_1)^{q+1}\phi_q^q(n)\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\right\|^q.\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

Από την αρχή της συστολής για τυχαίες μεταβλητές Bernoulli, εφόσον $D\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\right\|^q\geqslant\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in D}\epsilon_ix_i\right\|^q.$$

Επομένως, τελικά ισχύει ότι

$$\sum_{i\in D}\|x_i\|^q\geqslant(1-\varepsilon_1)^{q+1}\phi_q^q(n)\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in D}\epsilon_ix_i\right\|^q,$$

δηλαδή αληθεύει ο ισχύρισμός.

Επίσης, από τις (6.3.5) και (6.3.6) έπεται άμεσα ότι $D\neq\varnothing$. □

Μετονομάζουμε σε $\{D_s\}_{s=1}^{m_0}$ την οικογένεια των συνόλων $\{A_{j,i}\}_{j\geqslant1}$, $1\leqslant i\leqslant m_j$. Τότε, $D=\bigcup_{s=1}^{m_0}D_s$. Προχωράμε με την απόδειξη του ακόλουθου ισχυρισμού.

Ισχυρισμός 2: Εάν επιλέξουμε $\varepsilon_1>0$ αρκετά μικρό, τότε για κάποιο $1\leqslant s\leqslant m_0$, ισχύει

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in D_s}\epsilon_ix_i\right\|^q\right)^{1/q}\leqslant2\left(\sum_{i\in D_s}\|x_i\|^q\right)^{1/q}.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Για $1 \leqslant s \leqslant m_0$, ορίζουμε

$$u_s = u_s(\epsilon) = \sum_{i \in D_s} \epsilon_i x_i.$$

Το u_s είναι τυχαία μεταβλητή με τιμές στον X. Έστω $\{\epsilon'_s\}_{s=1}^{m_0}$ συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli οι οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά και από τις $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{n}$. Συνεπώς, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ και $1 \leqslant s \leqslant m_0$, η $\epsilon_i \epsilon'_s$ είναι συμμετρική τυχαία μεταβλητή Bernoulli και άρα ισόνομη με την ϵ_i.

Από τον ορισμό του $\phi_q(m_0)$ έχουμε ότι

$$\left(\sum_{s=1}^{m_0} \|u_s\|^q \right)^{1/q} \leqslant \phi_q(m_0) \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{s=1}^{m_0} \epsilon'_s u_s \right\|^q \right)^{1/q},$$

άρα

$$\sum_{s=1}^{m_0} \|u_s\|^q \leqslant \phi_q^q(m_0) \mathbb{E} \left\| \sum_{s=1}^{m_0} \epsilon'_s u_s \right\|^q = \phi_q^q(m_0) \int_\Omega \left\| \sum_{s=1}^{m_0} \epsilon'_s(\omega') u_s \right\|^q d\mathbb{P}(\omega').$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{s=1}^{m_0} \|u_s\|^q &= \int_\Omega \sum_{s=1}^{m_0} \|u_s(\omega)\|^q d\mathbb{P}(\omega) \leqslant \phi_q^q(m_0) \int_\Omega \int_\Omega \left\| \sum_{s=1}^{m_0} \epsilon'_s(\omega') u_s(\omega) \right\|^q d\mathbb{P}(\omega') d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \phi_q^q(m_0) \int_\Omega \int_\Omega \left\| \sum_{s=1}^{m_0} \sum_{i \in D_s} \epsilon'_s(\omega') \epsilon_i(\omega) x_i \right\|^q d\mathbb{P}(\omega') d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \phi_q^q(m_0) \int_\Omega \left\| \sum_{s=1}^{m_0} \sum_{i \in D_s} \epsilon'_s(\omega) \epsilon_i(\omega) x_i \right\|^q d\mathbb{P}(\omega), \end{aligned}$$

διότι οι $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{n}$ και $\{\epsilon'_s\}_{s=1}^{m_0}$ είναι ανεξάρτητες. Τώρα, εφόσον $\bigcup_{s=1}^{m_0} D_s = D$ και η $\epsilon'_s \epsilon_i$ είναι ισόνομη με την ϵ_i, η παραπάνω ποσότητα ισούται με

$$\phi_q^q(m_0) \int_\Omega \left\| \sum_{i \in D} \epsilon_i(\omega) x_i \right\|^q d\mathbb{P}(\omega) = \phi_q^q(m_0) \mathbb{E} \left\| \sum_{i \in D} \epsilon_i x_i \right\|^q.$$

Από τα παραπάνω και τον Ισχυρισμό 1 προκύπτει ότι

$$\mathbb{E} \sum_{s=1}^{m_0} \|u_s\|^q \leqslant \phi_q^q(m_0) \frac{1}{(1-\varepsilon_1)^{q+1} \phi_q^q(n)} \sum_{i \in D} \|x_i\|^q.$$

Από τη μονοτονία της ϕ_q και εφόσον $m_0 \leqslant n$ έχουμε ότι $\frac{\phi_q(m_0)}{\phi_q(n)} \leqslant 1$. Επομένως, αν επιλέξουμε $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{(1-\varepsilon_1)^2} < 2$, τότε $\frac{1}{(1-\varepsilon_1)^{q+1}} < 2^q$ οπότε, σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$\sum_{s=1}^{m_0} \mathbb{E} \|u_s\|^q = \mathbb{E} \sum_{s=1}^{m_0} \|u_s\|^q \leqslant 2^q \sum_{i \in D} \|x_i\|^q = 2^q \sum_{s=1}^{m_0} \sum_{i \in D_s} \|x_i\|^q.$$

Άρα, υπάρχει $1 \leqslant s \leqslant m_0$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{E} \|u_s\|^q \leqslant 2^q \sum_{i \in D_s} \|x_i\|^q,$$

δηλαδή

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i \in D_s} \epsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q} \leqslant 2 \left(\sum_{i \in D_s} \|x_i\|^q \right)^{1/q},$$

επομένως, πράγματι, ισχύει ο ισχυρισμός. □

Έστω λοιπόν $1 \leqslant s \leqslant m_0$ τέτοιος ώστε

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in D_s}\epsilon_i x_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant 2\left(\sum_{i\in D_s}\|x_i\|^q\right)^{1/q}.$$

Τότε,

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in D_s}\epsilon_i \hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant 2\left(\sum_{i\in D_s}\|\hat{x}_i\|^q\right)^{1/q} \leqslant 2|D_s|^{1/q}.$$

Επιλέγουμε $q < q_X$, τέτοιο ώστε $k_0^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_X}} \leqslant 2$. Τότε εφόσον $|D_s| \leqslant k_0$, έπεται ότι $|D_s|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_X}} \leqslant k_0^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q_X}} \leqslant 2$ και επομένως $|D_s|^{1/q} \leqslant 2|D_s|^{1/q_X}$. Άρα,

$$\frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in D_s}\epsilon_i \hat{x}_i\right\|\right)^{1/q}}{|D_s|^{1/q_X}} \leqslant 4.$$

Το D_s ταυτίζεται με κάποιο $A_{j,t}$, για κάποιο $j \geqslant 1$ και $1 \leqslant t \leqslant m_j$. Συνεπώς,

$$\frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in D_s}\epsilon_i \hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|D_s|^{1/q_X}} = \max_{\substack{T\subseteq C_{j,t-1}\\ |T|\leqslant k_0}} \frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in T}\epsilon_i \hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|T|^{1/q_X}}.$$

Δηλαδή, αν θέσουμε $A_0 = C_{j,t-1}$, τότε $|A_0| > n^a > N$ και για κάθε $T \subseteq A_0$ με $|T| \leqslant k_0$ ισχύει

$$\frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in T}\epsilon_i \hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|T|^{1/q_X}} \leqslant \frac{\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in D_s}\epsilon_i \hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q}}{|D_s|^{1/q_X}} \leqslant 4.$$

Επομένως, για κάθε $T \subseteq A_0$ με $|T| \leqslant k_0$ ισχύει

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in T}\epsilon_i \hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant 4|T|^{1/q_X}. \tag{6.3.7}$$

Από την Πρόταση 6.1.1, εφόσον $|A_0| > n^a > N$, υπάρχουν $\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_{k_0}}$ με $i_1, \ldots, i_{k_0} \in A_0$ τέτοια ώστε είτε

(α) η $(\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_{k_0}})$ είναι $(1+\varepsilon)$-spreading

είτε

(β) $c_\delta\sqrt{k_0} \leqslant \mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{k_0}\epsilon_j \hat{x}_{i_j}\right\|.$

Όμως, από την (6.3.7),

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{k_0}\epsilon_j \hat{x}_{i_j}\right\| \leqslant 4k_0^{1/q_X}.$$

Συνεπώς, αν ισχύει το (β), τότε

$$c_\delta \sqrt{k_0} \leqslant \mathbb{E}\left\| \sum_{j=1}^{k_0} \epsilon_j \hat{x}_{i_j} \right\| \leqslant 4 k_0^{1/q_X},$$

δηλαδή

$$k_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_X}} \leqslant \frac{4}{c_\delta}.$$

Όμως, $\frac{1}{2}-\frac{1}{q_X} > 0$ και επομένως αν επιλέξουμε k_0 αρκετά μεγάλο τότε η περίπτωση (β) απορρίπτεται.

Τελικά, υπάρχουν $\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_{k_0}}$ με $i_1, \ldots, i_{k_0} \in A_0$, τέτοια ώστε η ακολουθία $(\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_{k_0}})$ να είναι $(1+\varepsilon)$-spreading. Θέτουμε $B_0 = \{\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_{k_0}}\}$. Στη συνέχεια, εκμεταλλευόμενοι την Πρόταση 6.1.5 θα οδηγηθούμε σε ακολουθία που θα έχει επιπλέον την ιδιότητα να είναι C-unconditional.

Ισχυρισμός 3: Έστω B τυχούσα μπάλα ακτίνας δ. Υπάρχουν το πολύ $\left(\frac{4}{1-3\delta}\right)^{\frac{2q_X}{q_X-2}}$ στοιχεία της ακολουθίας $\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_{k_0}}$ μέσα στην μπάλα B.

Απόδειξη του ισχυρισμού: Θεωρούμε μια μπάλα B ακτίνας δ, $m \in \mathbb{N}$ και διανύσματα $z_1, z_2, \ldots, z_m \in B_0 = \{\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_{k_0}}\}$ τέτοια ώστε $z_i \in B$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|x^*\| = 1$ και $x^*(z_1) = \|z_1\|$. Εφόσον $z_i \in B$, έπεται ότι $\|z_i - z_1\| \leqslant 2\delta$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$. Επιπλέον, $\|z_i\| \geqslant 1-\delta$ από την κατασκευή των $\hat{x}_{i_j}$. Συνεπώς,

$$|x^*(z_i)| = |x^*(z_1) - x^*(z_1 - z_i)| \geqslant |x^*(z_1)| - |x^*(z_1 - z_i)| \geqslant \|z_1\| - \|x^*\| 2\delta \geqslant 1-\delta-2\delta = 1-3\delta.$$

Από την ανισότητα Hölder ,για κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$ και $q \geqslant 2$ ισχύει

$$\left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^m a_i \epsilon_i\right|^q\right)^{1/q} \geqslant \left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^m a_i \epsilon_i\right|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^m |a_i|^2\right)^{1/2}.$$

Επομένως,

$$\left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^m \epsilon_i x^*(z_i)\right|^q\right)^{1/q} \geqslant \left(\sum_{i=1}^m |x^*(z_i)|^2\right)^{1/2} \geqslant \left(\sum_{i=1}^m (1-3\delta)^2\right)^{1/2} = (1-3\delta)\sqrt{m}.$$

Από την (6.3.7), εφόσον $m \leqslant k_0$ και $\{z_1, \ldots, z_m\} \subseteq \{\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_{k_0}}\} \subseteq A_0$ προκύπτει ότι

$$\left(\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^m \epsilon_i x^*(z_i)\right|^q\right)^{1/q} = \left(\mathbb{E}\left|x^*\left(\sum_{i=1}^m \epsilon_i z_i\right)\right|^q\right)^{1/q} \leqslant \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^m \epsilon_i z_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant 4m^{1/q_X}.$$

Άρα,

$$(1-3\delta)\sqrt{m} \leqslant 4m^{1/q_X},$$

και συνεπώς

$$m^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_X}} \leqslant \frac{4}{1-3\delta},$$

δηλαδή

$$m \leqslant \left(\frac{4}{1-3\delta}\right)^{\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_X}}} = \left(\frac{4}{1-3\delta}\right)^{\frac{2q_X}{q_X-2}}$$

Άρα αληθεύει ο ισχυρισμός. □

Επιλέγουμε $\delta = \frac{1}{6}$ και θέτουμε $M = 8^{\frac{2q_X}{q_X - 2}}$. Τότε, σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 3, υπάρχουν το πολύ M στοιχεία της $\{x_{i_j}\}_{j=1}^{k_0}$ σε μια μπάλα ακτίνας $\frac{1}{6}$.

Ισχυρισμός 4: Υπάρχει $C \subseteq B_0 = \{\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_{k_0}}\}$ με $|C| = \lfloor \frac{k_0}{M} \rfloor$ τέτοιο ώστε $\|x - y\| \geqslant 1/6$, για κάθε $x, y \in C$ με $x \neq y$.

Απόδειξη του ισχυρισμού: Πράγματι, θα βρούμε $C = \{z_1, \ldots, z_{m_1}\} \subseteq B_0$ με $m_1 = \lfloor \frac{k_0}{M} \rfloor$ που έχει τις ζητούμενες ιδιότητες. Κατασκευάζουμε το C ως εξής: Επιλέγουμε $z_1 = \hat{x}_{i_1}$. Σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 3 υπάρχουν το πολύ M στοιχεία του συνόλου $B_0 = \{\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_{k_0}}\}$ στη μπάλα $B_{z_1}(1/6) = \{x \in X : \|x - z_1\| < 1/6\}$. Συνεπώς,

$$|B_0 \setminus B_{z_1}(1/6)| \geqslant k_0 - M.$$

Επιλέγουμε $z_2 \in B_0 \setminus B_{z_1}(1/6)$. Τότε, $\|z_2 - z_1\| \geqslant 1/6$. Συνεχίζουμε ομοίως.

Στο τελευταίο βήμα έχουμε

$$\left|B_0 \setminus \big(B_{z_1}(1/6) \cup \ldots \cup B_{z_{m_1-1}}(1/6)\big)\right| \geqslant k_0 - (m_1 - 1)M > k_0 - \frac{k_0}{M}M = 0.$$

Επιλέγουμε $z_{m_1} \in B_0 \setminus \big(B_{z_1}(1/6) \cup \ldots \cup B_{z_{m_1-1}}(1/6)\big)$.

Τότε, $\|z_i - z_j\| \geqslant 1/6$ για κάθε $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant m_1$. $\square$

Εκμεταλλευόμενοι τον Ισχυρισμό 4 μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 6.1.5. Επιλέγουμε k_0 αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{k_0}{M} \geqslant N_1 = N_1(n_1, \frac{1}{6}, 1)$, όπου το N_1 είναι όπως ορίστηκε στην Πρόταση 6.1.5. Τότε από τον Ισχυρισμό 4, υπάρχουν $z_1, \ldots, z_{m_1} \in B_0$ τέτοια ώστε $\|z_i - z_j\| \geqslant 1/6$ για κάθε $i \neq j$, όπου $m_1 = \lfloor \frac{k_0}{M} \rfloor \geqslant N_1$. Συνεπώς, σύμφωνα με την Πρόταση 6.1.5 υπάρχουν $z_{i_1}, \ldots, z_{i_{2n_1}}$ τέτοια ώστε η ακολουθία

$$v_j = z_{i_{2j}} - z_{i_{2j-1}}$$

να είναι 3-unconditional. Επιπλέον η $\{v_j\}_{j=1}^{n_1}$ είναι $(1+\varepsilon)$-spreading, διότι η $\{z_i\}_{i=1}^{m_1}$ είναι $(1+\varepsilon)$-spreading, και για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n_1$ ισχύει $\|v_j\| \geqslant 1/6$. Ορίζουμε

$$y_j = \frac{v_j}{2}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n_1.$$

Τότε,

$$\|y_j\| = \frac{\|v_j\|}{2} = \frac{\|z_{i_{2j}} - z_{i_{2j-1}}\|}{2} \leqslant \frac{\|z_{i_{2j}}\| + \|z_{i_{2j-1}}\|}{2} \leqslant 1$$

και

$$\|y_j\| = \frac{\|v_j\|}{2} \geqslant \frac{1/6}{2} = \frac{1}{12}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{1}{12} \leqslant \|y_j\| \leqslant 1 \quad \text{για κάθε } 1 \leqslant j \leqslant n_1.$$

Η $\{y_j\}_{j=1}^{n_1}$ είναι $(1+\varepsilon)$-spreading και 3-unconditional. Επιπλέον, για κάθε $A \subseteq [n_1]$ και για κάθε $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$

$$\left\|\sum_{j\in A} y_j\right\| \leqslant 3 \left\|\sum_{j\in A} \epsilon_j y_j\right\|,$$

και συνεπώς

$$\left\|\sum_{j\in A} y_j\right\| \leqslant 3\mathbb{E} \left\|\sum_{j\in A} \epsilon_j y_j\right\|.$$

Επειδή $q > 1$, από την ανισότητα Hölder προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j\in A} y_j\right\| \leqslant 3\mathbb{E}\left\|\sum_{j\in A}\epsilon_j y_j\right\| &\leqslant 3\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j\in A}\epsilon_j y_j\right\|^q\right)^{1/q}\\ &= \frac{3}{2}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j\in A}\epsilon_j z_{i_{2j}} - \sum_{j\in A}\epsilon_j z_{i_{2j-1}}\right\|^q\right)^{1/q}\\ &\leqslant \frac{3}{2}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j\in A}\epsilon_j z_{i_{2j}}\right\|^q\right)^{1/q} + \frac{3}{2}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j\in A}\epsilon_j z_{i_{2j-1}}\right\|^q\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Από την (6.3.7), εφόσον $n_1 \leqslant k_0$, προκύπτει ότι η παραπάνω ποσότητα είναι μικρότερη ή ίση από

$$\frac{3}{2}4|A|^{1/q_X} + \frac{3}{2}4|A|^{1/q_X} = 12|A|^{1/q_X}.$$

Επομένως, η ακολουθία $\{y_j\}_{j=1}^{n_1}$ ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες με $\delta = \frac{11}{12}, \gamma = 12$ και $C = 3$.

Για την περίπτωση $q_X = \infty$, επιλέγουμε $a = 1/2$ και q αρκετά μεγάλο ώστε $k_0^{1/q} \leqslant 2$. Όπως στην περίπτωση $q_X < \infty$, βρίσκουμε σύνολο A_0 τέτοιο ώστε $|A_0| > N$ και για κάθε $T \subseteq A_0$ με $|T| \leqslant k_0$ να ισχύει

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i\in T}\epsilon_i \hat{x}_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant 4.$$

Ακριβώς όπως πριν, βρίσκουμε ακολουθία $(y_1, \ldots, y_{n_1})$ η οποία είναι $(1+\varepsilon)$-spreading και 3-unconditional, τέτοια ώστε $\frac{1}{12} \leqslant \|y_i\| \leqslant 1$ και για κάθε $A \subseteq [n_1]$ να ισχύει

$$\left\|\sum_{j\in A} y_j\right\| \leqslant 12.$$

■

Η επόμενη πρόταση είναι μια πεπερασμένη εκδοχή του θεωρήματος στρέβλωσης του James.

Πρόταση 6.3.2. *Έστω X χώρος με νόρμα και $x_1, \ldots, x_{n^2} \in X$ τέτοια ώστε $\|x_i\| \geqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n^2$. Έστω επιπλέον ότι υπάρχει σταθερά $L > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $a_1, \ldots, a_{n^2} \in \mathbb{R}$,*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n^2} a_i x_i\right\| \leqslant L \max_{1\leqslant i\leqslant n^2}|a_i|.$$

Τότε υπάρχουν $y_1, \ldots, y_n \in X$ με $\|y_i\| \geqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$, τέτοια ώστε για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\right\| \leqslant \sqrt{L}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j|$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη διαμέριση $\{\sigma_j\}_{j=1}^n$ του $\{1, \ldots, n^2\}$ όπου

$$\sigma_j = \{i : (j-1)n + 1 \leqslant i \leqslant jn\}.$$

Τότε $|\sigma_j| = n$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις :

- Υπάρχει $1 \leqslant j \leqslant n$ τέτοιο ώστε

$$\left\| \sum_{i \in \sigma_j} a_i x_i \right\| \leqslant \sqrt{L} \max_{i \in \sigma_j} |a_i|$$

για κάθε $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε το ζητούμενο για $\{y_i\}_{i=1}^n = \{x_i\}_{i \in \sigma_j}$.

- Για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n$ υπάρχουν $b_1^j, \dots, b_n^j \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\left\| \sum_{i \in \sigma_j} b_i^j x_i \right\| > \sqrt{L} \max_{i \in \sigma_j} |b_i^j|.$$

Θέτουμε

$$y_j = \frac{\sum_{i \in \sigma_j} b_i^j x_i}{\left\| \sum_{i \in \sigma_j} b_i^j x_i \right\|}.$$

Τότε $\|y_j\| = 1 > \sqrt{L} \max_{i \in \sigma_j} \frac{|b_i^j|}{\left\| \sum_{i \in \sigma_j} b_i^j x_i \right\|}$ και άρα

$$\frac{|b_i^j|}{\left\| \sum_{i \in \sigma_j} b_i^j x_i \right\|} < \frac{1}{\sqrt{L}}, \text{ για κάθε } i \in \sigma_j.$$

Τότε, για κάθε $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^n a_j y_j \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^n \sum_{i \in \sigma_j} a_j \frac{b_i^j x_i}{\left\| \sum_{i \in \sigma_j} b_i^j x_i \right\|} \right\| \\ &\leqslant L \max_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ i \in \sigma_j}} \frac{|a_j||b_i^j|}{\left\| \sum_{i \in \sigma_j} b_i^j x_i \right\|} \\ &\leqslant L \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j| \frac{1}{\sqrt{L}} = \sqrt{L} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|. \end{aligned}$$

Επομένως η $\{y_j\}_{j=1}^n$ ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες.

■

Υπενθυμίζουμε την εξής πρόταση από το Κεφάλαιο 5.

Πρόταση 5.4.13. *Έστω X χώρος Banach ο οποίος έχει cotype q_0 για κάποιο $q_0 \geqslant 2$. Έστω επίσης ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $x_1^m, x_2^m, \dots, x_m^m \in X$ τέτοια ώστε $\|x_i^m\| \leqslant 1$ και η $\{x_i^m\}_{i=1}^m$ είναι 1-unconditional και $(1+\varepsilon_m)$-spreading για κάποια ακολουθία θετικών αριθμών $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ με $\varepsilon_m \to 0$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$ υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $q > p$*

$$c \frac{1}{C_q(X)} n^{1/q} \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n x_i^m \right\| \leqslant C n^{1/p} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } m \geqslant n. \tag{6.3.8}$$

Τότε ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Θεώρημα 6.3.3 (Maurey-Pisier : cotype περίπτωση).
Έστω X χώρος Banach και $q_X = \inf\{q \geqslant 2 : C_q(X) < \infty\}$. Τότε, ο ℓ_{q_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Απόδειξη. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση $q_X = 2$: Προκύπτει άμεσα από το θεώρημα του Dvoretzky.

Περίπτωση $2 < q_X < \infty$: Από την Πρόταση 6.3.1, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $x_1^n, \dots, x_n^n \in X$ τέτοια ώστε

(i) $1 - \delta \leqslant \|x_i^n\| \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$.

(ii) Η ακολουθία $(x_1^n, \dots, x_n^n)$ είναι $(1 + \frac{1}{n})$-spreading και C-unconditional.

(iii) Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ισχύει,
$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i^n \right\| \leqslant \gamma\, k^{1/q_X}$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $\gamma, C > 0$ και $0 < \delta < 1$.

Θα εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.4.13 για τις ακολουθίες $\{x_i^n\}_{i=1}^n$.

Από την ιδιότητα (iii) έχουμε την δεξιά ανισότητα της (6.3.8). Από την άλλη, για κάθε $q > q_X$, εφόσον $\|x_i^n\| \geqslant 1 - \delta$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(1-\delta)k^{1/q} &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \|x_i^n\|^q \right)^{1/q} \\ &\leqslant C_q(X) \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{k} \epsilon_i x_i^n \right\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant C_q(X) C \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i^n \right\|.\end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $q > q_X$ έχουμε

$$\frac{1-\delta}{C} \frac{1}{C_q(X)} k^{1/q} \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k} x_i^n \right\| \leqslant \gamma k^{1/q_X} \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N} \text{ και } n \geqslant k. \tag{6.3.9}$$

Από την Πρόταση 5.4.13 και την Παρατήρηση 5.4.14 έχουμε το ζητούμενο.

Περίπτωση $q_X = \infty$: Έστω $\varepsilon > 0$ και $m \in \mathbb{N}$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.3.1, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $x_1^n, \dots, x_n^n \in X$ τέτοια ώστε

(i) $1 - \delta \leqslant \|x_i^n\| \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$.

(ii) Η ακολουθία $(x_1^n, \dots, x_n^n)$ είναι C-unconditional.

(iii) Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ισχύει,
$$\left\| \sum_{i=1}^{k} x_i^n \right\| \leqslant \gamma$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $\gamma, C > 0$ και $0 < \delta < 1$.

Θέτουμε $y_i^n = \frac{x_i^n}{1-\delta}$. Τότε $\|y_i^n\| \geqslant 1$.

Έστω $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Εφόσον η $\{x_i^n\}_{i=1}^n$ είναι C-unconditional έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^n a_i y_i^n\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^n a_i \frac{x_i^n}{1-\delta}\right\| \leqslant \frac{C}{1-\delta}\left\|\sum_{i=1}^n \max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i| x_i^n\right\| \\ &= \frac{C}{1-\delta}\left\|\sum_{i=1}^n x_i^n\right\| \max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i| \leqslant \frac{C}{1-\delta}\gamma \max_{1\leqslant i\leqslant n}|a_i|.\end{aligned}$$

Θεωρώντας $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο και εφαρμόζοντας κατ' επανάληψη την Πρόταση 6.3.2 (δεδομένου ότι $\left(\frac{C\gamma}{1-\delta}\right)^{1/2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$) συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $z_1, \dots, z_m \in X$ με $\|z_i\| \geqslant 1$ τέτοια ώστε

$$\left\|\sum_{i=1}^m a_i z_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|a_i|, \quad \text{για κάθε } a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}.$$

Επιπλέον, για κάθε $1 \leqslant j \leqslant m$ ισχύει

$$\left\|\sum_{i=1}^m a_i z_i\right\| \geqslant 2\|a_j z_j\| - \left\|\sum_{i=1}^m a_i z_i - 2a_j z_j\right\| \geqslant 2|a_j| - (1+\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|a_i|.$$

Συνεπώς,

$$\left\|\sum_{i=1}^m a_i z_i\right\| \geqslant 2\max_{1\leqslant i\leqslant m}|a_i| - (1+\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|a_i| = (1-\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|a_i|$$

για κάθε $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(1-\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|a_i| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^m a_i z_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\max_{1\leqslant i\leqslant m}|a_i|.$$

Δηλαδή,

$$\ell_\infty^m \overset{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\hookrightarrow} X.$$

Από το Λήμμα 3.1.5 έπεται ότι ο c_0 είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. ■

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε και την type περίπτωση του θεωρήματος Maurey-Pisier, δηλαδή ότι για κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach X, αν $p_X = \sup\{1 \leqslant p \leqslant 2 : \text{ ο } X \text{ έχει type } p\}$ τότε ο ℓ_{p_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε $\psi_p(n)$ να είναι η μικρότερη σταθερά C για την οποία για κάθε $x_1, \dots, x_n \in X$ ισχύει

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^p\right)^{1/p} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{1/p}$$

και αποδεικνύουμε ότι

$$\lim \frac{n^\beta}{\psi_p^p(n)} \longrightarrow 0$$

για κάθε $0 < \beta < p\left(\frac{1}{p_X} - \frac{1}{p}\right)$. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε πρόταση ανάλογη της Πρότασης 6.3.1 και συνεχίζουμε όπως και προηγουμένως. Με την βοήθεια της απόδειξης του θεωρήματος του Krivine προκύπτει το ζητούμενο. Ωστόσο δεν θα παρουσιάσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες αυτήν την απόδειξη διότι η type περίπτωση προκύπτει από το θεώρημα του Pisier που αποδεικνύουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 7

Η περίπτωση του type

7.1 Martingales και η ανισότητα του Azuma

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε πρώτα τους βασικούς ορισμούς της δεσμευμένης μέσης τιμής και του martingale σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ανισότητα του Azuma καθώς και μια ανισότητα η οποία θα μας φανεί χρήσιμη στη συνέχεια.

Ορισμός 7.1.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας. Αν $\mathcal{G}$ είναι μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{A}$ και αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, τότε η συνολοσυνάρτηση

$$\mu(A) = \int_A f d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{G}$$

ορίζει ένα μέτρο στην $\mathcal{G}$, το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το $\mathbb{P}|_{\mathcal{G}}$. Από το θεώρημα Radon–Nikodym, υπάρχει μοναδική $h \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ με την ιδιότητα

$$\int_A h d\mathbb{P} = \int_A f d\mathbb{P}$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Η h ονομάζεται **δεσμευμένη μέση τιμή** της f ως προς την $\mathcal{G}$ και συμβολίζεται με $h = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.

Διαισθητικά, για $\omega \in \Omega$, η τιμή $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})(\omega)$ εκφράζει την καλύτερη εκτίμηση της τιμής $f(\omega)$ όταν γνωρίζουμε την συμπεριφορά της στη σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$, δηλαδή όταν για κάθε $A \in \mathcal{G}$ γνωρίζουμε αν $f(\omega) \in A$.

Παράδειγμα 7.1.2. Τυπικό παράδειγμα είναι αυτό όπου $\mathcal{G}$ είναι η άλγεβρα που παράγεται από μια διαμέριση $\{A_1, \ldots, A_m\}$ του Ω, με τα $A_i \in \mathcal{A}$ να έχουν θετικό μέτρο $\mathbb{P}(A_i) > 0$. Τότε, εύκολα ελέγχουμε ότι αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ η δεσμευμένη τιμή της f είναι η συνάρτηση h που είναι σταθερή σε κάθε A_i, με τιμή

$$h|_{A_i} = \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \int_{A_i} f \, d\mathbb{P}.$$

Βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι οι εξής:

Λήμμα 7.1.3. (α) *Ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός, γραμμικός και έχει νόρμα 1 σε κάθε L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

(β) *Αν $\mathcal{G}_1$ είναι μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{G}$, τότε $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}_1)$.*

(γ) *Αν $g \in L_\infty(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ τότε $\mathbb{E}(f \cdot g|\mathcal{G}) = g \cdot \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.*

(δ) *Αν $\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega\}$ είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα, τότε η $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι σταθερή και ισούται με τη μέση τιμή της f:*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = \mathbb{E}f = \int f d\mathbb{P}.$$

Απόδειξη. (α) Η γραμμικότητα έπεται άμεσα από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Δείχνουμε ότι ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός: Αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ και $f \geqslant 0$, τότε υπάρχει $h \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ ώστε

$$\int_A h\, d\mathbb{P} = \int_A f\, d\mathbb{P} \geqslant 0$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Αν θεωρήσουμε το $E_n = \{\omega : h(\omega) \leqslant -\frac{1}{n}\}$ έχουμε ότι $E_n \in \mathcal{G}$ και

$$0 \leqslant \int_{E_n} f\, d\mathbb{P} = \int_{E_n} h\, d\mathbb{P} \leqslant -\frac{1}{n}\mathbb{P}(E_n),$$

απ' όπου έπεται ότι $\mathbb{P}(E_n) = 0$. Άρα,

$$\mathbb{P}(\omega : h(\omega) < 0) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

Από το γεγονός ότι ο τελεστής $T(f) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός και γραμμικός έπεται ότι είναι μονότονος: αν $f, g \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ με $f \leqslant g$, τότε $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \leqslant \mathbb{E}(g|\mathcal{G})$. Ειδικότερα, έπεται ότι

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})| \leqslant \mathbb{E}(|f|\,|\mathcal{G})$$

για κάθε $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Τότε, η δεσμευμένη μέση τιμή $T : L_1 \to L_1$ είναι φραγμένος τελεστής νόρμας 1. Πράγματι·

$$\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_1 = \int |\mathbb{E}(F|\mathcal{G})|\, d\mathbb{P} \leqslant \int \mathbb{E}(|f|\,|\mathcal{G})\, d\mathbb{P} = \int |f|\, d\mathbb{P} = \|f\|_1,$$

όπου στην προτελευταία ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Επίσης, είναι $\mathbb{E}(\mathbf{1}|\mathcal{G}) = \mathbf{1}$. Από την ανισότητα Hölder έπεται ότι $L_p \subseteq L_1$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Επομένως, αν $f \in L_\infty$, τότε

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})| \leqslant \mathbb{E}(|f||\mathcal{G}) \leqslant \mathbb{E}(\|f\|_\infty|\mathcal{G}) = \|f\|_\infty.$$

Συνεπώς, για κάθε $f \in L_\infty$ έπεται ότι $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \in L_\infty$ και μάλιστα $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Με άλλα λόγια, η δεσμευμένη μέση τιμή $T : L_\infty \to L_\infty$ είναι καλά ορισμένος τελεστής νόρμας 1. Τέλος, αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι ο $T : L_p \to L_p$ είναι επίσης καλά ορισμένος. Αυτό έπεται από τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός : *Έστω $f \in L_1$ και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή ώστε $\mathbb{E}|\varphi(f)| < \infty$. Τότε ισχύει*

$$\varphi(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G}).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Είναι γνωστό ότι υπάρχουν ακολουθίες πραγματικών αριθμών (a_n), (b_n) ώστε $\varphi(x) = \sup_n(a_n x + b_n)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$a_n f(x) + b_n \leqslant \varphi(f(x))$$

σχεδόν παντού. Έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $E_n \in \mathcal{G}$ με $\mathbb{P}(E_n) = 0$ και

$$a_n \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) + b_n \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G})$$

για κάθε $x \in \Omega \setminus E_n$. Αν θέσουμε $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε $\mathbb{P}(E) = 0$ και αν $x \in \Omega \setminus E$ είναι

$$a_n \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) + b_n \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G})$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, παίρνοντας supremum ως προς n έχουμε ότι

$$\varphi(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G})$$

σχεδόν για κάθε $x \in \Omega$. □

Εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα για την $\varphi(t) = |t|^p$ έχουμε ότι

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|^p \leqslant \mathbb{E}(|f|^p|\mathcal{G})$$

και ολοκληρώνοντας βλέπουμε ότι $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_p \leqslant \|f\|_p$ για κάθε $f \in L_p$.

(β) Έστω $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{G}$ ισχύει $\int_A f\,d\mathbb{P} = \int_A g\,d\mathbb{P}$. Αν $B \in \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}$ τότε έχουμε $\int_B g\,d\mathbb{P} = \int_B f\,d\mathbb{P}$. Από τον ορισμό έπεται ότι $\mathbb{E}(g|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}_1)$.

(γ) Αρκεί να το δείξουμε για χαρακτηριστικές συναρτήσεις που είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμες. Για $g = \chi_A$ και $A, B \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$\int_B \mathbb{E}(fg|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_B fg\,d\mathbb{P} = \int_{A\cap B} f\,d\mathbb{P} = \int_{A\cap B} \mathbb{E}(f|\mathcal{G})\,d\mathbb{P} = \int_B g\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\,d\mathbb{P}.$$

Έτσι, $\mathbb{E}(fg|\mathcal{G}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$, διότι $\chi_A\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$.

(δ) Άμεσο από τον ορισμό και το παράδειγμα μετά από τον ορισμό. ■

Ορισμός 7.1.4. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Αν $\{X_i\}_{i\in I}$ είναι οικογένεια τυχαίων μεταβλητώς $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, τότε με $\sigma\left(\{X_i\}_{i\in I}\right)$ συμβολίζουμε την ελάχιστη σ-άλγεβρα ως προς την οποία η X_i είναι μετρήσιμη για κάθε $i \in I$.

Έστω επιπλέον f τυχαία μεταβλητή στον $L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Συμβολίζουμε με

$$\mathbb{E}(f|\,\{X_i\}_{i\in I})$$

την δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(f|\sigma\left(\{X_i\}_{i\in I}\right))$.

Διαισθητικά, για $\omega \in \Omega$, η τιμή $\mathbb{E}((f|\,\{X_i\}_{i\in I})\,(\omega)$ εκφράζει την καλύτερη εκτίμηση της τιμής $f(\omega)$, όταν είναι γνωστές οι τιμές $X_i(\omega)$ για κάθε $i \in I$.

Πρόταση 7.1.5. *Έστω f τυχαία μεταβλητή στον $L_1(\Omega, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ και $\{X_i\}_{i\in I}$ οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$. Αν $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από την f, τότε*

$$\mathbb{E}(f|\,\{X_i\}_{i\in I}) = \mathbb{E}(f|X, \{X_i\}_{i\in I}).$$

Πρόταση 7.1.6. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών. Έστω $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n\right)$ η ελάχιστη σ-άλγεβρα που την περιέχει.*

Αν $f : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $f \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ για κάποιο $p \geqslant 1$ τότε,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(f \mid \mathcal{F}_n\right) \overset{\mathbb{P}\text{-}\sigma.\pi.}{=} \mathbb{E}\left(f \mid \mathcal{F}\right).$$

Ορισμός 7.1.7 (Martingale)**.** Έστω $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$ μια ακολουθία σ-αλγεβρών. Μια ακολουθία $f_0, f_1, \ldots$ συναρτήσεων $f_i \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_i, \mathbb{P})$ λέγεται martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_i\}$ αν $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{F}_{i-1}) = f_{i-1}$ για κάθε $i \geqslant 1$.

Η ανισότητα του Azuma δίνει εκτίμηση της πιθανότητας απόκλισης μιας φραγμένης συνάρτησης από τη μέση τιμή της.

Πρόταση 7.1.8 (Ανισότητα Azuma). *Έστω f τυχαία μεταβλητή στον $L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Έστω επιπλέον $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^\infty$ αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών με $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\{\varnothing, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \ldots$ και $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{F}_n)$ η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

Για $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $d_k = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_k) - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_{k-1})$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\sum\limits_{k=1}^\infty \|d_k\|_\infty^2 < \infty$, όπου $\|d_k\|_\infty = \sup\{|d_i(\omega)| : \omega \in \Omega\}$. Τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}) - \mathbb{E}f| > t\right) \leqslant 2e^{-t^2 \Big/ 4 \sum\limits_{k=1}^\infty \|d_k\|_\infty^2}.$$

Αν επιπλέον η f είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη, τότε για κάθε $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(|f - \mathbb{E}f| > t\right) \leqslant 2e^{-t^2 \Big/ 4 \sum\limits_{k=1}^\infty \|d_k\|_\infty^2}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι η ακολουθία $\{\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)\}_{i=0}^\infty$ είναι martingale ως προς $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^\infty$. Πράγματι, έχουμε

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$$

και $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_i, \mathbb{P})$ από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Επιπλέον, έχουμε $\mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) = 0$ για κάθε $i \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}\big) \\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}\big) \\ &= \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) = 0. \end{aligned} \tag{7.1.1}$$

Συγκρίνοντας τις δυναμοσειρές των e^x και $e^{x^2/2}$ βλέπουμε ότι $e^x \leqslant x + e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ είναι θετικός, συμπεραίνουμε οτι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_k}|\mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \mathbb{E}(\lambda d_k|\mathcal{F}_{k-1}) + \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_k^2} \mid \mathcal{F}_{k-1}).$$

Από τη γραμμικότητα της $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{k-1})$ έχουμε $\mathbb{E}(\lambda d_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \lambda\mathbb{E}(d_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$. Επίσης, έχουμε υποθέσει ότι $f \in L_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, άρα κάθε $d_k \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P})$. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_k}|\mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_k^2} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \mathbb{E}(e^{\lambda^2\|d_k\|_\infty^2}|\mathcal{F}_{k-1}) = e^{\lambda^2\|d_k\|_\infty^2}.$$

<u>Ισχυρισμός:</u> *Ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^n \lambda d_i}\right) \leqslant e^{\lambda^2 \sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}.$$

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού:</u> Με επαγωγή δείχνουμε ότι $\mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum_{j=1}^k d_j}\right) \leqslant e^{\sum_{j=1}^k \lambda^2 \|d_j\|_\infty^2}$ για κάθε $k \leqslant n$: Για $k = 1$ έχουμε $\mathbb{E}\left(e^{\lambda d_1}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{\lambda d_1}|F_0\right)\right] \leqslant e^{\lambda^2\|d_1\|_\infty^2}$. Υποθέτουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum_{j=1}^k d_j}\right) \leqslant e^{\sum_{j=1}^k \lambda^2\|d_j\|_\infty^2}$$

για κάποιον $k < n$. Αφού $e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_k, \mathbb{P})$, από το Λήμμα 7.1.3 (γ) παίρνουμε

$$\mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} e^{\lambda d_{k+1}}|\mathcal{F}_k) = e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j}\mathbb{E}(e^{\lambda d_{k+1}}|\mathcal{F}_k).$$

Χρησιμοποιώντας και την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$\begin{aligned}(7.1.2)\qquad \mathbb{E}\,(e^{\lambda\sum_{j=1}^{k+1}d_j}) &= \mathbb{E}\,\left[\mathbb{E}\,(e^{\sum_{j=1}^{k}\lambda d_j}e^{\lambda d_{k+1}}\mid \mathcal{F}_k)\right]\\ &= \mathbb{E}\,\left[e^{\sum_{j=1}^{k}\lambda d_j}\mathbb{E}\,(e^{\lambda d_{k+1}}\mid \mathcal{F}_k)\right]\\ &\leqslant \mathbb{E}\,\left[e^{\sum_{j=1}^{k}\lambda d_j}e^{\lambda^2\|d_{k+1}\|_\infty^2}\right]\\ &= e^{\lambda^2\|d_{k+1}\|_\infty^2}\mathbb{E}\,(e^{\sum_{j=1}^{k}\lambda d_j})\\ &\leqslant e^{\lambda^2\|d_{k+1}\|_\infty^2}e^{\lambda^2\sum_{j=1}^{k}\|d_i\|_\infty^2}\\ &= e^{\lambda^2\sum_{j=1}^{k+1}\|d_j\|_\infty^2}.\end{aligned}$$

□

Για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε

$$(7.1.3)\quad \mathbb{P}\,(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)-\mathbb{E}f\geqslant t)=\mathbb{P}\,(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)-\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_0)\geqslant t)=\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n}d_j\geqslant t\right)\leqslant \mathbb{E}\,e^{\lambda\sum_{j=1}^{n}d_j-\lambda t}$$
$$\leqslant e^{\lambda^2\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_\infty^2-\lambda t}\leqslant e^{\lambda^2\sum_{j=1}^{\infty}\|d_j\|_\infty^2-\lambda t}.$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς λ βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)-\mathbb{E}f\geqslant t)\leqslant \exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{\infty}\|d_j\|_\infty^2\right).$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για την $-f$, παίρνουμε

$$\mathbb{P}(-\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)+\mathbb{E}f\geqslant t)\leqslant \exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{\infty}\|d_j\|_\infty^2\right).$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}\,(|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)-\mathbb{E}f|\geqslant t)\leqslant 2\exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{\infty}\|d_j\|_\infty^2\right).$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.1.6,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(f|\mathcal{F}),\ \mathbb{P}\text{-σχεδόν παντού.}$$

Επομένως,

$$\lim_{n\to\infty}|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)-\mathbb{E}f|=|\mathbb{E}(f|\mathcal{F})-\mathbb{E}f|\,,\ \mathbb{P}\text{-σχεδόν παντού.}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\,(|\mathbb{E}(f|\mathcal{F})-\mathbb{E}f|>t) &\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geqslant n}\{|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)-\mathbb{E}f|>t\}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\geqslant n}\{|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)-\mathbb{E}f|>t\}\right)\\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\mathbb{P}\,(|\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)-\mathbb{E}f|>t)\\ &\leqslant 2\exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{\infty}\|d_j\|_\infty^2\right).\end{aligned}$$

Αν επιπλέον η f είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη, τότε $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}) = f$ και άρα

$$\mathbb{P}\left(|f - \mathbb{E}f| > t\right) \leqslant 2\exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{\infty}\|d_j\|_\infty^2\right).$$

■

Εκμεταλλευόμενοι την Πρόταση 7.1.8 μπορούμε να δείξουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7.1.9. *Έστω $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές σε έναν χώρο Banach X πεπερασμένης διάστασης, τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} S_i$ να συγκλίνει σχεδόν παντού και $\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\sum_{i=1}^{\infty}\|S_i\|_\infty^2 < \infty$, όπου $\|S_i\|_\infty = \sup\{\|S_i(\omega)\| : \omega \in \Omega\}$. Τότε, για κάθε $t > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\|\right| > t\right) \leqslant 2e^{-t^2\Big/16\sum\limits_{i=1}^{\infty}\|S_i\|_\infty^2}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n)$. Τότε η $(\mathcal{F}_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών και επομένως, από την Πρόταση 7.1.8, αν $d_k = \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| \,\Big|\, \mathcal{F}_k\right) - \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}\right)$ τότε, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\|\right| > t\right) \leqslant 2e^{-t^2/4\sum_{k=1}^{\infty}\|d_k\|_\infty^2}, \tag{7.1.4}$$

διότι η $\omega \mapsto \left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i(\omega)\right\|$ είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη.

Για τον υπολογισμό της $\|d_k\|_\infty$, ορίζουμε $Z_k = \sum_{i=1}^{\infty} S_i - S_k$ και παρατηρούμε ότι εφόσον οι $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες, η $Z_k = \sum_{i\neq k} S_i$ είναι ανεξάρτητη από την S_k. Επομένως, δεδομένου ότι $\mathcal{F}_k = \sigma(S_1, \ldots, S_k)$ και $\mathcal{F}_{k-1} = \sigma(S_1, \ldots, S_{k-1})$, λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 7.1.5 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(\|Z_k\| \mid \mathcal{F}_k\right) = \mathbb{E}\left(\|Z_k\| \mid \mathcal{F}_{k-1}\right).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
|d_k(\omega)| &= \left|\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| \,\Big|\, \mathcal{F}_k\right) - \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}\right)\right| = \\
&= \left|\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| \,\Big|\, \mathcal{F}_k\right) - \mathbb{E}\left(\|Z_k\| \mid \mathcal{F}_k\right) + \mathbb{E}\left(\|Z_k\| \mid \mathcal{F}_{k-1}\right) - \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}\right)\right| \\
&= \left|\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| - \|Z_k\| \,\Big|\, \mathcal{F}_k\right) - \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| - \|Z_k\| \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}\right)\right| \\
&\leqslant \left|\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| - \|Z_k\| \,\Big|\, \mathcal{F}_k\right)\right| + \left|\mathbb{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| - \|Z_k\| \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}\right)\right| \\
&\leqslant \mathbb{E}\left(\left|\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| - \|Z_k\|\right| \,\Big|\, \mathcal{F}_k\right) + \mathbb{E}\left(\left|\left\|\sum_{i=1}^{\infty} S_i\right\| - \|Z_k\|\right| \,\Big|\, \mathcal{F}_{k-1}\right) \\
&\leqslant \|S_k\|_\infty + \|S_k\|_\infty = 2\|S_k\|_\infty,
\end{aligned}$$

διότι από τη τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\left| \left\| \sum_{i=1}^{\infty} S_i \right\| - \|Z_k\| \right| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{\infty} S_i - Z_k \right\| = \|S_k\|\,.$$

Επομένως,

$$\|d_k\|_\infty \leqslant 2\|S_k\|_\infty. \tag{7.1.5}$$

Από τις (7.1.4) και (7.1.5) έπεται ότι

$$\mathbb{P}\left(\left| \left\| \sum_{i=1}^{\infty} S_i \right\| - \mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{\infty} S_i \right\| \right| > t \right) \leqslant 2e^{-t^2 \Big/ 16 \sum_{i=1}^{\infty} \|S_i\|_\infty^2}$$

■

Πρόταση 7.1.10. *Έστω $1 < p < 2$ και $q > 0$ τέτοιοι ώστε $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω $(S_k)_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές σε έναν χώρο Banach X, τέτοια ώστε $\left\| \sum_{k=1}^{\infty} S_k \right\| \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Τότε, για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\left| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} S_k \right\| - \mathbb{E}\left\| \sum_{k=1}^{\infty} S_k \right\| \right| > t \right) \leqslant 2\exp\left(-D_p \left(\frac{t}{\sup_{k\in\mathbb{N}} k^{1/p}\|S_k\|_\infty} \right)^q \right),$$

όπου $D_p > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

Απόδειξη. Αρκεί να το δείξουμε με την πρόσθετη υπόθεση ότι $\sup_{k\in\mathbb{N}} k^{1/p}\|S_k\|_\infty = 1$. Έστω $t_m = \sum_{k=1}^{m} k^{-1/p}$. Παρατηρούμε ότι $t_m = \sum_{k=1}^{m} k^{-1/p} \leqslant qm^{1/q}$ και επιπλέον υπάρχει σταθερά $M = M(q) > 0$, που εξαρτάται μόνο από το q, τέτοια ώστε $m^{1/q} \leqslant Mt_m$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} k^{-1/p} &= \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^{1/p}} dx \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x^{1/p}} dx \\
&= \int_0^m \frac{1}{x^{1/p}} dx = \left. \frac{x^{-1/p+1}}{-\frac{1}{p}+1} \right|_{x=0}^{m} \\
&= qm^{1-1/p},
\end{aligned}$$

διότι $-1/p + 1 > 0$.

Για $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{\infty} S_k \right\| - \mathbb{E}\left\| \sum_{k=1}^{\infty} S_k \right\| &\leqslant \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} S_k \right\| - \mathbb{E}\left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} S_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{m} S_k \right\| + \mathbb{E}\left\| \sum_{k=1}^{m} S_k \right\| \\
&\leqslant \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} S_k \right\| - \mathbb{E}\left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} S_k \right\| + 2\sum_{k=1}^{m} \|S_k\|_\infty \\
&\leqslant \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} S_k \right\| - \mathbb{E}\left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} S_k \right\| + 2\sum_{k=1}^{m} k^{-1/p} \\
&\leqslant \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} S_k \right\| - \mathbb{E}\left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} S_k \right\| + 2qm^{1/q},
\end{aligned}$$

και ομοίως,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\| - \left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\| \leqslant \mathbb{E}\left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} S_k\right\| - \left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} S_k\right\| + 2qm^{1/q}.$$

Άρα,

$$\left|\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\|\right| \leqslant \left|\left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} S_k\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} S_k\right\|\right| + 2qm^{1/q}.$$

Υποθέτουμε αρχικά ότι $t > 4q$. Παρατηρούμε ότι, $\sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{\infty}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2/p}} < \infty$, διότι $2/p > 1$. Επομένως, λαμβάνοντας υπ' όψιν την Πρόταση 7.1.9, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t > 4qm^{1/q}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\|\right| > t\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} S_k\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} S_k\right\|\right| > 2qm^{1/q}\right)\\ &\leqslant 2\exp\left(-4q^2m^{2/q}\Big/ 16\sum_{k=m+1}^{\infty}\|S_k\|_{\infty}^2\right)\\ &\leqslant 2\exp\left(-4q^2m^{2/q}\Big/ 16\sum_{k=m+1}^{\infty}k^{-2/p}\right).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\sum_{k=m+1}^{\infty} k^{-2/p} \leqslant \frac{q}{q-2}m^{1-2/p}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{\infty} k^{-2/p} &\leqslant \sum_{k=m}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^{2/p}}dx \leqslant \sum_{k=m}^{\infty}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^{2/p}}dx\\ &= \int_m^{\infty}\frac{1}{x^{2/p}}dx = \left.\frac{x^{-2/p+1}}{-\frac{2}{p}+1}\right|_{x=m}^{\infty}\\ &= \frac{1}{\frac{2}{p}-1}m^{1-2/p} = \frac{q}{q-2}m^{1-2/p},\end{aligned}$$

διότι $-2/p+1 < 0$.

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\|\right| > t\right) &\leqslant 2\exp\left(-4q(q-2)m^{\frac{2}{q}-1+\frac{2}{p}}\Big/16\right)\\ &= 2\exp\left(-4q(q-2)m/16\right)\end{aligned}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t > 4m^{1/q}$.

Εφόσον $t > 4q$, υπάρχει ένας $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $4qm^{1/q} < t \leqslant 4q(m+1)^q$. Τότε,

$$m \geqslant \frac{m+1}{2} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{t}{4q}\right)^q = \frac{t^q}{2(4q)^q}.$$

Επομένως, γι' αυτόν τον m,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\|\right| > t\right) &\leqslant 2\exp\left(-4q(q-2)m/16\right)\\ &\leqslant 2\exp\left(-4q(q-2)t^q/32(4q)^q\right)\\ &= 2e^{-D_p' t^q},\end{aligned}$$

όπου $D'_p = \frac{q(q-2)}{8(4q)^q}$. Δείξαμε επομένως τη ζητούμενη ανισότητα για $t > 4q$.

Για $t \leqslant 4q$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} S_k\right\|\right| > t\right) \leqslant 1 \leqslant 2e^{-D''_p(4q)^q}$$
$$\leqslant e^{-D''_p t^q},$$

όπου το $D''_p > 0$ είναι τέτοιο ώστε $e^{-D''_p(4q)^q} \geqslant 1/2$.

Για $D_p = \max\left\{D'_p, D''_p\right\}$ έχουμε το ζητούμενο. ∎

Θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 7.1.10 στην ακόλουθη μορφή:

Πόρισμα 7.1.11. *Έστω $1 < p < 2$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Έστω επίσης $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές σε έναν χώρο Banach, με $\|Y_k\|_{\infty} \leqslant 1$, και $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $|b_k| \leqslant k^{-1/p}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αν επιπλέον $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} b_k Y_k\right\| \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, τότε για κάθε $t > 0$*

$$\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^{\infty} b_k Y_k\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} b_k Y_k\right\|\right| > t\right) \leqslant 2e^{-D_p t^q},$$

όπου η σταθερά D_p είναι όπως στην Πρόταση 7.1.10.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 7.1.10. ∎

7.2 p-stable τυχαίες μεταβλητές

Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Υπενθυμίζουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι η συνάρτηση $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left(e^{itX}\right) = \int_{\Omega} e^{itX(\omega)} d\mathbb{P}(\omega)$. Η βασική ιδιότητα των χαρακτηριστικών συναρτήσεων είναι ότι καθορίζουν πλήρως την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής. Δηλαδή, αν δύο τυχαίες μεταβλητές έχουν ίσες χαρακτηριστικές συναρτήσεις τότε είναι ισόνομες.

Ορισμός 7.2.1. Έστω $0 < p \leqslant 2$ και $\sigma \geqslant 0$. Μια συμμετρική τυχαία μεταβλητή $\vartheta : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται **p-stable με παράμετρο σ** αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση είναι η εξής:

$$\mathbb{E}(e^{it\vartheta}) = \int_{\Omega} e^{it\vartheta(\omega)} d\mathbb{P}(\omega) = e^{-\sigma^p |t|^p/2} \quad \text{για κάθε } \ t \in \mathbb{R}. \tag{7.2.1}$$

Αν $\sigma = 1$ τότε η ϑ λέγεται **standard** p-stable τυχαία μεταβλητή.

Για $p = 2$ πρόκειται για τις κανονικές τυχαίες μεταβλητές, ενώ για $p > 2$ αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές που να ικανοποιούν την (7.2.1). Όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 5.4.10 αν g είναι κανονική τυχαία μεταβλητή σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ τότε $g \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$. Δεν ισχύει το ίδιο για p-stable τυχαίες μεταβλητές για $1 \leqslant p < 2$. Ισχύει ωστόσο η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.2.2. *Έστω ϑ p-stable τυχαία μεταβλητή για κάποιο $0 < p < 2$ σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Τότε $\vartheta \in L_r$ για κάθε $0 < r < p$. Επιπλέον, $\vartheta \notin L_p$.*

Χάρη στην Πρόταση 7.2.2 μπορούμε να δείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.2.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Για κάθε $1 \leqslant r < p < 2$ ο ℓ_p εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L_r(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει όπως στην απόδειξη της Πρότασης 5.4.10 αφού από την Πρόταση 7.2.2 έχουμε ότι $\vartheta \in L_r$ για κάθε $r < p$ και ϑ p-stable τυχαία μεταβλητή. ■

Παρατήρηση 7.2.4. Οι p-stable τυχαίες μεταβλητές ικανοποιούν τις εξής ιδιότητες:

(i) Αν η ϑ είναι p-stable τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\sigma \geqslant 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε η $\lambda\vartheta$ είναι p-stable τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $|\lambda|\sigma$. Πράγματι, για τη χαρακτηριστική συνάρτηση της $\lambda\vartheta$ ισχύει
$$\mathbb{E}\left(e^{it\lambda\vartheta}\right) = e^{-\sigma^p|t\lambda|^p/2} = e^{-(\sigma|\lambda|)^p|t|^p/2}.$$

(ii) Γενικότερα, αν $\{\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n\}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες p-stable τυχαίες μεταβλητές και $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, τότε η
$$\sum_{j=1}^n a_j\vartheta_j$$
είναι p-stable.

Αν επιπλέον οι $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ είναι standard, τότε η $\sum_{j=1}^n a_j\vartheta_j$ έχει παράμετρο $\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p}$.

Πράγματι, έστω $\{\vartheta_j\}_{j=1}^n$, όπου κάθε ϑ_j είναι p-stable με παράμετρο σ_j. Τότε,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\exp\left(it\sum_{j=1}^n a_j\vartheta_j\right)\right\} &= \mathbb{E}\left\{\exp\left(\sum_{j=1}^n ita_j\vartheta_j\right)\right\} = \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n e^{ita_j\vartheta_j}\right) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left(e^{ita_j\vartheta_j}\right)\\ &= \prod_{j=1}^n e^{-\sigma_j^p|a_jt|^p/2} = \exp\left(-\left(\sum_{j=1}^n \sigma_j^p|a_j|^p\right)|t|^p/2\right)\end{aligned}$$

Αν επιπλέον οι $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ είναι standard τότε $\sigma_j = 1$ για κάθε $j = 1, 2, \ldots, n$, άρα
$$\mathbb{E}\left\{\exp\left(it\sum_{j=1}^n a_j\vartheta_j\right)\right\} = \exp\left(-\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)|t|^p/2\right).$$

(iii) Από τα (i) και (ii) προκύπτει ότι αν οι $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες p-stable τυχαίες μεταβλητές τότε η $\sum_{j=1}^n a_j\vartheta_j$ και η $\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p}\vartheta_1$ είναι ισόνομες.

Συνεπώς, για κάθε $r > 0$,
$$\left\|\sum_{j=1}^n a_j\vartheta_j\right\|_r = \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n a_j\vartheta_j\right|^r\right)^{1/r} = c_{p,r}\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p},$$
όπου $c_{p,r} = (\mathbb{E}|\vartheta_1|^r)^{1/r} = \|\vartheta_1\|_r$. Παρατηρούμε ότι από την Πρόταση 7.2.2 έχουμε ότι $\mathbb{E}|\vartheta_1|^r < \infty$ για κάθε $r < p$.

(iv) Η ιδιότητα (iii) χαρακτηρίζει τις p-stable τυχαίες μεταβλητές: αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή, οι $(X_j)_{j=1}^n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με την X και για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι η $\sum_{j=1}^n a_jX_j$ έχει την ίδια κατανομή με την $\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} X$, τότε η X είναι p-stable.

(v) Υπάρχει μια σταθερά $c_p > 0$ που εξαρτάται μόνο από το p ώστε

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}\left(\{|\vartheta| > t\}\right) = c_p \sigma^p$$

για κάθε p-stable τυχαία μεταβλητή ϑ με παράμετρο σ.

Ορισμός 7.2.5. Έστω X χώρος Banach πεπερασμένης διάστασης και έστω $0 < p \leqslant 2$. Μια συμμετρική τυχαία μεταβλητή $S : \Omega \to X$ με τιμές στον X λέγεται p-stable αν για κάθε $x^* \in X^*$, η $x^* \circ S$ είναι p-stable τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 7.2.6. Για τις p-stable τυχαίες μεταβλητές με τιμές σε έναν χώρο Banach X ισχύουν ανάλογες ιδιότητες με αυτές στην Παρατήρηση 7.2.4:

(i) Αν η $S : \Omega \to X$ είναι p-stable και $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε η λS είναι p-stable.

(ii) Γενικότερα, αν $S_1, \ldots, S_n$ είναι ανεξάρτητες p-stable τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον X και $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, τότε η

$$\sum_{j=1}^{n} a_j S_j$$

είναι p-stable.

(iii) Αν $S_1, \ldots, S_n$ είναι ανεξάρτητες p-stable τυχαίες μεταβλητές με τιμές στον X, οι οποίες είναι ισόνομες με την S, τότε η $\sum_{j=1}^{n} a_j S_j$ είναι ισόνομη με την $\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p} S$ για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Συνεπώς για κάθε $r > 0$,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j S_j\right\|_r = \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j S_j\right\|^r\right)^{1/r} = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p\right)^{1/p} (\mathbb{E}\|S\|^r)^{1/r}.$$

Μάλιστα, ισχύει ότι $\mathbb{E}\,\|S\|^r < \infty$ για κάθε $r < p$.

(iv) Αν $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες p-stable τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$ τότε η

$$S = \sum_{j=1}^{n} \vartheta_j x_j$$

είναι p-stable τυχαία μεταβλητή με τιμές στον X.

Οι αποδείξεις των παραπάνω προκύπτουν από την Παρατήρηση 7.2.4 και το γεγονός ότι δύο τυχαίες μεταβλητές $S, T : \Omega \to X$ είναι ισόνομες αν και μόνο αν η $x^* \circ S$ είναι ισόνομη με την $x^* \circ T$ για κάθε $x^* \in X^*$.

Έστω $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών τέτοια ώστε $A_i \sim \mathrm{Exp}(1)$ για κάθε $1 \leqslant i < \infty$, δηλαδή η A_i ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Επομένως, $\mathbb{P}(A_i > t) = e^{-t}$, για κάθε $t > 0$. Για $j \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\Gamma_j = \sum_{i=1}^{j} A_i$$

Τότε, $\Gamma_j \sim \mathrm{Gamma}(j,1)$ και άρα

$$\mathbb{P}(\Gamma_j \leqslant t) = \int_0^t \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} e^{-s} ds, \text{ για κάθε } t > 0.$$

Στο εξής με Γ_j θα συμβολίζουμε τυχαίες μεταβλητές που προκύπτουν όπως παραπάνω.

Ιδιαίτερα χρήσιμο είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.2.7. *Έστω $\{\Gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$ όπως παραπάνω και $Y : \Omega \to X$ συμμετρική τυχαία μεταβλητή με τιμές σε έναν χώρο Banach X πεπερασμένης διάστασης, τέτοια ώστε $\int_\Omega \|Y(\omega)\|^p \, d\mathbb{P}(\omega) < \infty$. Έστω επίσης $(Y_j)_{j=1}^{\infty}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών οι οποίες είναι ισόνομες με την Y, ανεξάρτητες μεταξύ τους αλλά και από τις $\{\Gamma_j\}_{j=1}^{\infty}$. Τότε η*

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-1/p} Y_j$$

συγκλίνει σχεδόν παντού και είναι p-stable τυχαία μεταβλητή με τιμές στον X.

Επιπλέον, για κάθε $x^* \in X^*$,

$$\int_X |x^*(x)|^p d\mu(x) = \mathbb{E}\, |x^* \circ Y|^p = \lim_{t\to\infty} t^p \, \mathbb{P}\left(|x^* \circ S| > t\right) = c_p \sigma^p,$$

όπου σ είναι η παράμετρος της $x^* \circ S$, η c_p είναι όπως στην Παρατήρηση 7.2.4 (v) *και μ είναι η κατανομή της Y.*

Λήμμα 7.2.8. *Έστω $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N$ ανεξάρτητες και ισόνομες p-stable τυχαιές μεταβλητές. Έστω X χώρος με νόρμα και $x_1, \ldots, x_N \in X$. Θέτουμε $Z = \sum_{i=1}^N \vartheta_i x_i$. Έστω μ μέτρο Borel στον X με*

$$\mu\left(\left\{\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\}\right) = \mu\left(\left\{-\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\}\right) = \frac{\|x_i\|^p}{2}, \quad \text{για κάθε } i = 1, \ldots, N.$$

Αν $\sum_{i=1}^N \|x_i\|^p = 1$, τότε το μ είναι συμμετρικό μέτρο πιθανότητας και για κάθε $x^* \in X^*$ η χαρακτηριστική συνάρτηση της $x^* \circ Z$ είναι η εξής:

$$\mathbb{E}\left(e^{itx^*(Z)}\right) = \exp\left(-\left(\int_X |x^*(x)|^p d\mu(x)\right)|t|^p/2\right), \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Έστω $x^* \in X^*$. Θέτουμε $a_i = x^*(x_i)$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, N$. Τότε, $x^*(Z) = \sum_{i=1}^N a_i \vartheta_i$. Η $\sum_{i=1}^N a_i \vartheta_i$ είναι p-stable τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\left(\sum_{i=1}^N |a_i|^p\right)^{1/p}$. Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left(e^{itx^*(Z)}\right) = \mathbb{E}\exp\left(it\sum_{i=1}^N a_i\vartheta_i\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^N |a_i|^p |t|^p/2\right).$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned}\int_X |x^*(x)|^p d\mu(x) &= \sum_{i=1}^N \left|x^*\left(\frac{x_i}{\|x_i\|}\right)\right|^p \mu\left(\left\{\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\}\right) + \sum_{i=1}^N \left|x^*\left(-\frac{x_i}{\|x_i\|}\right)\right|^p \mu\left(\left\{-\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\}\right)\\ &= 2\sum_{i=1}^N \frac{|x^*(x_i)|^p}{\|x_i\|^p}\frac{\|x_i\|^p}{2} = \sum_{i=1}^N |a_i|^p\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\exp\left(-\left(\int_X |x^*(x)|^p d\mu(x)\right)|t|^p/2\right) = \exp\left(-\sum_{i=1}^N |a_i|^p |t|^p/2\right).$$

∎

Από το Θεώρημα 7.2.7 και το Λήμμα 7.2.8 έπεται η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.2.9. *Έστω $Z = \sum_{i=1}^N \vartheta_i x_i$ και μ μέτρο Borel στον X όπως στο Λήμμα 7.2.8. Έστω επίσης τυχαία μεταβλητή $Y : \Omega \to X$ με κατανομή μ και $\{Y_j\}_{j=1}^\infty$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών οι οποίες είναι ισόνομες με την Y. Τότε, η*

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-1/p} Y_j$$

είναι p-stable και είναι ισόνομη με την

$$\frac{1}{c_p^{1/p}} Z = \frac{1}{c_p^{1/p}} \sum_{i=1}^{N} \vartheta_i x_i$$

όπου c_p η σταθερά στην Παρατήρηση 7.2.4 (v).

Απόδειξη. Έστω $x^* \in X^*$ και $\sigma > 0$ η παράμετρος της p-stable τυχαίας μεταβλητής $x^* \circ S$. Δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση της $x^* \circ S$ είναι η $e^{-\sigma^p |t|^p/2}$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.2.7,

$$\int_X |x^*(x)|^p d\mu(x) = c_p \sigma^p.$$

Από το Λήμμα 7.2.8, για κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\left(itx^*\left(\frac{1}{c_p^{1/p}} Z\right)\right) &= \mathbb{E} \exp\left(it\frac{1}{c_p^{1/p}} x^*(Z)\right) = \exp\left(-\left(\int_X |x^*(x)|^p d\mu(x)\right) \frac{1}{c_p} \frac{|t|^p}{2}\right) \\ &= \exp\left(-c_p \sigma^p \frac{1}{c_p} \frac{|t|^p}{2}\right) = e^{-\sigma^p |t|^p/2}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι $x^* \circ \frac{1}{c_p^{1/p}} Z$ και $x^* \circ S$ έχουν την ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση και άρα είναι ισόνομες. Εφόσον το $x^* \in X^*$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε οτι η S είναι ισόνομη με την $\frac{1}{c_p^{1/p}} Z$. ∎

Λήμμα 7.2.10. *Έστω $1 < p < 2$ και $\{\Gamma_j\}_{j=1}^\infty$ με $\Gamma_j \sim \mathrm{Gamma}(j, 1)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τότε,*

$$B_p := \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E} \left| \Gamma_j^{-1/p} - j^{-1/p} \right| < \infty.$$

Απόδειξη. Εφόσον για κάθε $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}(\Gamma_j \leqslant t) = \int_0^t \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} e^{-s} ds$, δηλαδή η $\frac{s^{j-1}}{(j-1)!} e^{-s} \mathbb{1}_{[0,\infty)}$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Γ_j, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \Gamma_j^{-1/p} - j^{-1/p} \right| = \int_0^\infty \left| s^{-1/p} - j^{-1/p} \right| \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} e^{-s} ds &\overset{t=\frac{s}{j}}{=} \int_0^\infty \left| (tj)^{-1/p} - j^{-1/p} \right| \frac{(tj)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-tj} j dt \\ &= \int_0^\infty \left| t^{-1/p} - 1 \right| j^{-1/p} t^{j-1} \frac{j^j}{j!} e^{-tj} j dt. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Stirling,

$$\lim_{j \to \infty} \frac{1}{j!} j^{j+1/2} e^{-j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Επομένως υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε

$$\frac{j^j}{j!} \leqslant M \frac{e^j}{j^{1/2}}, \quad \text{για κάθε } j \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}\left|\Gamma_j^{-1/p} - j^{-1/p}\right| \leqslant M \int_0^\infty \left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{t} j^{-1/p} t^j e^{(1-t)j} j^{1/2} dt.$$

Από το θεώρημα Beppo Levi έχουμε ότι

$$\begin{aligned} B_p = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{E}\left|\Gamma_j^{-1/p} - j^{-1/p}\right| &\leqslant M \sum_{j=1}^\infty \int_0^\infty \left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{t} \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j j^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} dt \\ &= M \int_0^\infty \left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{t} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j j^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} dt. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $0 \leqslant \frac{t}{e^{t-1}} \leqslant 1$ για κάθε $t \geqslant 0$ και $\frac{t}{e^{t-1}} < 1$ για $t \neq 1$. Επίσης, εφόσον $p < 2$ έχουμε ότι $\frac{1}{2} - \frac{1}{p} < 0$. Επομένως, για $t \neq 1$

$$\sum_{j=1}^\infty \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j j^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j = \frac{\frac{t}{e^{t-1}}}{1 - \frac{t}{e^{t-1}}} = \frac{t}{e^{t-1} - t}.$$

Συνεπώς,

$$\int_2^\infty \left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{t} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j j^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} dt \leqslant \int_2^\infty \frac{1}{e^{t-1} - t} dt < \infty.$$

Ομοίως,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{t} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j j^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} dt < \infty.$$

Μένει να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα της $\left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{t} \sum_{j=1}^\infty \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j j^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ είναι πεπερασμένο σε μια περιοχή του 1, σημείο όπου η σειρά $\sum_{j=1}^\infty \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j \frac{1}{j^{1/p-1/2}} = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^{1/p-1/2}}$ απειρίζεται, διότι $1/p - 1/2 < 1$.

<u>Ισχυρισμός:</u> Έστω $0 \leqslant a < 1$ και $0 < r < 1$. Τότε,

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{a^j}{j^r} \leqslant \int_0^\infty a^x \frac{1}{x^r} dx = \Gamma(1-r) \left(\frac{1}{\ln \frac{1}{a}}\right)^{1-r},$$

όπου Γ είναι η συνάρτηση γάμμα.

<u>Απόδειξη του ισχυρισμού:</u>

$$\int_0^\infty a^x \frac{1}{x^r} dx = \sum_{j=1}^\infty \int_{j-1}^j a^x \frac{1}{x^r} dx \geqslant \sum_{j=1}^\infty \int_{j-1}^j a^j \frac{1}{j^r} dx = \sum_{j=1}^\infty a^j \frac{1}{j^r}.$$

Επιπλέον, αν $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{a^x}{x^r} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-\left(\ln \frac{1}{a}\right)x}}{x^r} dx &\overset{y = x \ln \frac{1}{a}}{=} \left(\frac{1}{\ln \frac{1}{a}}\right)^{1-r} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y^r} dy \\ &= \left(\frac{1}{\ln \frac{1}{a}}\right)^{1-r} \int_0^\infty e^{-y} y^{(1-r)-1} dy \\ &= \Gamma(1-r) \left(\frac{1}{\ln \frac{1}{a}}\right)^{1-r}. \end{aligned}$$

□

Εφόσον $\frac{1}{p} - \frac{1}{2} < 1$, από τον ισχυρισμό έπεται ότι για κάθε $t \neq 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j \frac{1}{j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}} \leqslant C_p \left(\frac{1}{\ln\left(\frac{e^{t-1}}{t}\right)}\right)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}} = C_p \left(\frac{1}{t-1-\ln t}\right)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}},$$

όπου $C_p = \Gamma(\frac{3}{2} - \frac{1}{p}$.

Από το ανάπτυγμα Taylor της $\ln t$ με κέντρο το 1, έχουμε ότι για t κοντά στο 1

$$\ln t \sim t - 1 - \frac{(t-1)^2}{2}.$$

Επομένως,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j \frac{1}{j^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}} \leqslant C_p \left(\frac{1}{t-1-\ln t}\right)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}} \sim C_p' \left(\frac{1}{(t-1)^2}\right)^{\frac{3}{2}-\frac{1}{p}} = C_p' \left(\frac{1}{|t-1|}\right)^{3-\frac{2}{p}}.$$

Έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $1 - \frac{2}{p} + \delta < 0$. Τότε, με χρήση του κανόνα του L'Hospital, υπολογίζουμε

$$\lim_{t\to 1^-} \left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{|t-1|^{2-\frac{2}{p}+\delta}} = \lim_{t\to 1^-} \frac{t^{-1/p}-1}{(1-t)^{2-\frac{2}{p}+\delta}} = \lim_{t\to 1^-} \frac{\frac{1}{p}\frac{1}{t^{\frac{1}{p}+1}}}{(2-\frac{2}{p}+\delta)(1-t)^{1-\frac{2}{p}+\delta}} = 0.$$

Επομένως,

$$\left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{|t-1|^{2-\frac{2}{p}+\delta}} < 1$$

για $t < 1$ κοντά στο 1, και άρα,

$$\left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{|t-1|^{3-\frac{2}{p}}} \leqslant \frac{1}{(t-1)^{1-\delta}}.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}
\int_{1-\varepsilon}^{1} \left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j j^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} dt &\leqslant C \int_{1-\varepsilon}^{1} \left|t^{-1/p} - 1\right| \left(\frac{1}{|t-1|}\right)^{3-\frac{2}{p}} dt \\
&\leqslant C \int_{1-\varepsilon}^{1} \frac{1}{(1-t)^{1-\delta}} = -C \left.\frac{(1-t)^{\delta}}{\delta}\right|_{t=1-\varepsilon}^{1} \\
&= C\frac{\varepsilon^{\delta}}{\delta} < \infty
\end{aligned}$$

Ομοίως εργαζόμαστε και για $t > 1$.

Τελικά,

$$\int_0^{\infty} \left|t^{-1/p} - 1\right| \frac{1}{t} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{t}{e^{t-1}}\right)^j j^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} dt < \infty.$$

Συνεπώς,

$$B_p = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}\left|\Gamma_j^{-1/p} - j^{-1/p}\right| < \infty.$$

■

7.3 Το θεώρημα του Pisier

Το βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου είναι το Θεώρημα 7.3.3 που αποδείχθηκε από τον Pisier [31] το 1983 με πιθανοθεωρητικές μεθόδους. Με τη βοήθεια αυτού του θεωρήματος θα αποδείξουμε την type περίπτωση του θεωρήματος Maurey-Pisier.

Ορισμός 7.3.1. Έστω $1 \leqslant p < 2$ και $\{\vartheta_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία από ανεξάρτητες standard p-stable τυχαίες μεταβλητές. Ένας χώρος Banach X είναι **stable type** p, αν για κάθε $0 < r < p$ υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in X$

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \vartheta_i x_i\right\|^r\right)^{1/r} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p} \tag{7.3.1}$$

Αν $p > 1$, συμβολίζουμε με $ST_p(X)$ την ελάχιστη σταθερά $C > 0$ για την οποία ικανοποιείται η (7.3.1) για $r = 1$. Αν $p = 1$, με $ST_1(X)$ συμβολίζουμε την ελάχιστη σταθερά $C > 0$ για την οποία ισχύει η (7.3.1) για $r = 1/2$. Η $ST_p(X)$ είναι η p-stable σταθερά του X. Αν ο X δεν είναι stable type p τότε θέτουμε $ST_p(X) = \infty$.

Παρατήρηση 7.3.2. Ισχύει ότι, αν για κάποιον $0 < r_0 < p$ υπάρχει σταθερά ώστε να ικανοποιείται η (7.3.1), τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε $0 < r < p$.

Θεώρημα 7.3.3 (Pisier, 1983). *Έστω $1 < p < 2$ και q ο συζυγής εκθέτης του p, δηλαδή $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ τέτοιος ώστε, αν X είναι ένας χώρος Banach και $n \in \mathbb{N}$ με $n + 1 \leqslant \delta(\varepsilon, p)\,(ST_p(X))^q$, τότε υπάρχει υπόχωρος του X διάστασης n, ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$- ισομορφικός με τον ℓ_p^n. Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $n + 1 \leqslant \delta(\varepsilon, p)\,(ST_p(X))^q$,*

$$\ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X$$

Αν $ST_p(X) = \infty$ τότε

$$\ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X, \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι πιθανοθεωρητική και ακολουθεί τη μέθοδο των τυχαίων εμφυτεύσεων. Σε γενικές γραμμές η διαδικασία είναι η εξής :

Θεωρούμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ και σε κάθε $\omega \in \Omega$ αντιστοιχούμε έναν τελεστή $T_\omega : \ell_p^n \to X$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Έπειτα, δείχνουμε ότι για κάποιο $M > 0$ και κάθε $a \in S_{\ell_p^n}$ ισχύει

$$\mathbb{P}\left(\left|\,\|T(a)\| - M\right| \geqslant \delta_1 M\right) \leqslant 2\exp\left(-C(\varepsilon, p)(ST_p(X))^q\right)$$

για κάποιο κατάλληλο $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ και $C(\varepsilon, p) > 0$. Εφόσον η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε σταθεροποιημένο $a \in S_{\ell_p^n}$, για ένα δ_1-δίκτυο $\mathcal{N}$ της $S_{\ell_p^n}$ με $|\mathcal{N}| \leqslant e^{2n/\delta}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\exists a \in \mathcal{N} : \left|\,\|T(a)\| - M\right| \geqslant \delta_1 M\right) &\leqslant |\mathcal{N}| 2\exp\left(-C(\varepsilon, p)(ST_p(X))^q\right)\\ &\leqslant 2\exp\left(\frac{2n}{\delta} - C(\varepsilon, p)(ST_p(X))^q\right).\end{aligned}$$

Επομένως, αν $1 - 2\exp\left(\frac{2n}{\delta} - C(\varepsilon, p)(ST_p(X))^q\right) > 0$ τότε με θετική πιθανότητα έχουμε ότι

$$(1 - \delta_1)M \leqslant \|T(a)\| \leqslant (1 + \delta_1)M \text{ για κάθε } a \text{ στο } \mathcal{N}.$$

Αποδεικνύουμε ότι για κάποιο κατάλληλο $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ αν ισχύει ότι $n+1 \leqslant \delta(ST_p(X))^q$ τότε η παραπάνω ποσότητα είναι θετική και επομένως υπάρχει $\omega \in \Omega$ τέτοιο ώστε

$$(1-\delta_1)M \leqslant \|T_\omega(a)\| \leqslant (1+\delta_1)M \text{ για κάθε } a \text{ στο } \mathcal{N}.$$

Συμπεραίνουμε τότε, λόγω κατάλληλης επιλογής του δ_1, ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}M \leqslant \|T_\omega(a)\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}M \text{ για κάθε } a \text{ στην } S_{\ell_p^n}.$$

Συνεπώς, για τον τελεστή $T = \frac{1}{M}T_\omega : \ell_p^n \to X$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \|T(a)\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p},$$

για κάθε $a_1, a_2 \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Έχουμε λοιπόν ότι $\ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X$.

Η Πρόταση 7.2.9 και το Λήμμα 7.2.10 θα μας βοηθήσουν για την επιλογή των τελεστών $T_\omega : \ell_p \to X$ και το Λήμμα 3.3.2 για την κατάλληλη επιλογή του δ_1. Αποδεικνύουμε επίσης, το ακόλουθο λήμμα για δ-δίκτυα.

Λήμμα 7.3.4. *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $\delta > 0$ και κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$, υπάρχει ένα δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της μοναδιαίας σφαίρας του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, τέτοιο ώστε*

$$|\mathcal{N}| \leqslant (1+2/\delta)^n \leqslant e^{2n/\delta},$$

όπου $|\mathcal{N}|$ ο πληθάριθμος του $\mathcal{N}$.

Απόδειξη. Επειδή η μοναδιαία σφαίρα του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι συμπαγής, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_N \in X$ με $\|x\| = 1$, τέτοια ώστε $\|x_i - x_j\| > \delta$ για κάθε $i \neq j$ και το σύνολο $\mathcal{N} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ να είναι μεγιστικό με αυτή την ιδιότητα. Δηλαδή, αν $\mathcal{N}'$ είναι υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας τέτοιο ώστε $\|y - x\| > \delta$ για κάθε $x, y \in \mathcal{N}'$ με $x \neq y$ και $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}'$, τότε $\mathcal{N} = \mathcal{N}'$.

Το $\mathcal{N}$ είναι δ-δίκτυο της μοναδιαίας σφαίρας του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Πράγματι, αν $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| = 1$ και $\|x - x_i\| > \delta$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, N$, τότε για το $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \cup \{x\}$ έχουμε $\|y - z\| > \delta$ για κάθε $y, z \in \mathcal{N}$ με $y \neq z$ και $\mathcal{N} \subsetneq \mathcal{N}'$. Από τη μεγιστικότητα του $\mathcal{N}$ οδηγούμαστε σε άτοπο. Άρα, υπάρχει $1 \leqslant i \leqslant N$ τέτοιο ώστε $\|x_i - x\| \leqslant \delta$ και συνεπώς το $\mathcal{N}$ είναι πράγματι δ-δίκτυο της μοναδιαίας σφαίρας.

Επιπλέον οι μπάλες $B(x_i, \frac{\delta}{2}), i = 1, \ldots, N$ είναι ξένες ανά δύο και $B(x_i, \frac{\delta}{2}) \subseteq (1 + \frac{\delta}{2})B(0,1)$. Άρα,

$$\bigcup_{i=1}^N B\left(x_i, \frac{\delta}{2}\right) \subseteq \left(1 + \frac{\delta}{2}\right) B(0,1).$$

Συνεπώς, αν Vol_n είναι το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned} N\left(\frac{\delta}{2}\right)^n \mathrm{Vol}_n(B(0,1)) &= \sum_{i=1}^N \mathrm{Vol}_n\left(B(x_i, \frac{\delta}{2})\right) \\ &= \mathrm{Vol}_n\left(\bigcup_{i=1}^N B(x_i, \frac{\delta}{2})\right) \\ &\leqslant \mathrm{Vol}_n\left((1+\frac{\delta}{2})B(0,1)\right) \\ &= \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^n \mathrm{Vol}_n(B(0,1)). \end{aligned}$$

Έπεται ότι $N\left(\frac{\delta}{2}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{\delta}{2}\right)^n$. Επομένως,

$$|\mathcal{N}| = N \leqslant \left(1+\frac{2}{\delta}\right)^n \leqslant \left(e^{\frac{2}{\delta}}\right)^n = e^{2n/\delta}.$$

■

Προχωράμε με την απόδειξη του θεωρήματος του Pisier.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.3. Έστω X χώρος Banach ο οποίος είναι stable type p και $\{\vartheta_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία ανεξάρτητων standard p-stable τυχαίων μεταβλητών. Από τον ορισμό του $ST_p(X)$ υπάρχουν $x_1,\dots,x_N \in X$ ώστε

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^N \vartheta_i x_i\right\| > \frac{1}{2}ST_p(X)\left(\sum_{i=1}^N \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

Αντικαθιστώντας τα x_i με τα $\frac{x_i}{\left(\sum_{i=1}^N \|x_i\|^p\right)^{1/p}}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^N \|x_i\|^p = 1$. Τότε,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^N \vartheta_i x_i\right\| > \frac{1}{2}ST_p(X). \tag{7.3.2}$$

Σύμφωνα με την Παρατήρηση 7.2.6 (iv) η $\sum_{i=1}^N \vartheta_i x_i$ είναι p-stable τυχαία μεταβλητή με τιμές στον X.

Έστω μ μέτρο Borel στον X με

$$\mu\left(\left\{\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\}\right) = \mu\left(\left\{-\frac{x_i}{\|x_i\|}\right\}\right) = \frac{\|x_i\|^p}{2}, \qquad \text{για κάθε } i=1,2,\dots,N.$$

Εφόσον $\sum_{i=1}^N \|x_i\|^p = 1$, το μ είναι συμμετρικό μέτρο πιθανότητας. Θεωρούμε τυχαία μεταβλητή $Y:\Omega\to X$ με κατανομή μ και ακολουθία $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών οι οποίες είναι ισόνομες με την Y. Παρατηρούμε ότι $\|Y\|=1$ σχεδόν παντού. Ορίζουμε $S=\sum_{j=1}^{\infty}\Gamma_j^{-1/p}Y_j$. Τότε, σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.9, η S είναι ισόνομη με την $\frac{1}{c_p^{1/p}}\sum_{i=1}^N \vartheta_i x_i$. Επομένως, από την (7.3.2) έχουμε

$$\mathbb{E}\|S\| = \frac{1}{c_p^{1/p}}\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^N \vartheta_i x_i\right\| \geqslant \frac{1}{c_p^{1/p}}\frac{1}{2}ST_p(X). \tag{7.3.3}$$

Επίσης

$$\mathbb{E}\|S\| = \frac{1}{c_p^{1/p}}\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^N \vartheta_i x_i\right\| \leqslant \frac{1}{c_p^{1/p}}\mathbb{E}\sum_{i=1}^N |\vartheta_i| = \frac{N}{c_p^{1/p}}\mathbb{E}|\vartheta_1|.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.2, εφόσον $1<p$, έχουμε $\mathbb{E}|\vartheta_1|<\infty$. Άρα, $\mathbb{E}\|S\|<\infty$.

Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$\tilde{S} = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p}Y_j.$$

Παρατηρούμε ότι η $\tilde{S}$ συγκλίνει σχεδόν παντού. Πράγματι, ορίζουμε $\tilde{S}_n = \sum_{j=1}^n j^{-1/p}Y_j$ και θα δείξουμε ότι η $\left(\tilde{S}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy σχεδόν παντού. Για $m<n$ έχουμε,

$$\begin{aligned}\left\|\tilde{S}_n-\tilde{S}_m\right\| &= \left\|\sum_{j=m+1}^n j^{-1/p}Y_j\right\| \leqslant \sum_{j=m+1}^n \left|j^{-1/p}-\Gamma^{-1/p}\right|\|Y_j\| + \left\|\sum_{j=m+1}^n \Gamma^{-1/p}Y_j\right\| \\ &\overset{\sigma.\pi}{=} \sum_{j=m+1}^n \left|j^{-1/p}-\Gamma^{-1/p}\right| + \left\|\sum_{j=m+1}^n \Gamma^{-1/p}Y_j\right\|\end{aligned}$$

Εφόσον $\sum_{j=1}^{\infty}\left|j^{-1/p}-\Gamma^{-1/p}\right| = B_p < \infty$ και η $\sum_{j=1}^{\infty}\Gamma^{-1/p}Y_j$ συγκλίνει σχεδόν παντού, συμπεραίνουμε ότι η $\tilde{S}_n(\omega)$ είναι Cauchy σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$. Επομένως, η $\tilde{S}$ συγκλίνει σχεδόν παντού.

Επίσης, παρατηρούμε ότι, σε αντίθεση με την S, η $\tilde{S}$ δεν είναι p-stable τυχαία μεταβλητή. Ωστόσο, η $\tilde{S}$ έχει πιο απλή μορφή και χάρη στο Λήμμα 7.2.10 μπορούμε να τη συγκρίνουμε με την S.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $S_1, \dots, S_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ισόνομες με την S καθώς και $\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ισόνομες με την $\tilde{S}$. Έστω λοιπόν,

$$\tilde{S}_i = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p}Y_{ij}, \quad \text{για } i = 1, \dots, n$$

όπου $\{Y_{ij}\}$ ανεξάρτητες και ισόνομες με την Y. Έστω $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p = 1$. Τότε,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{S}_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p}Y_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} a_i\frac{1}{j^{1/p}}Y_{ij}.$$

Εφόσον για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ $\lim\limits_{j\to\infty}|a_i|\frac{1}{j^{1/p}} = 0$ και $|a_i|\frac{1}{j^{1/p}} \geqslant 0$ για κάθε $j \geqslant 1$, μπορούμε να πάρουμε την φθίνουσα αναδιάταξη του συνόλου $\left\{|a_i|\frac{1}{j^{1/p}} : j \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$, έστω $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Επειδή οι Y_{ij} είναι συμμετρικές, ανεξάρτητες και ισόνομες, συμπεραίνουμε ότι η

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{S}_i \quad \text{είναι ισόνομη με την} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_kY_k,$$

όπου η $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ισόνομων με την Y.

Ισχυρισμός: *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$,*

$$\operatorname{card}\left\{(i,j) : |a_i|j^{-1/p} > k^{-1/p}\right\} < k.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Θεωρούμε το σύνολο

$$C = \left\{(i,j) : |a_i|j^{-1/p} > k^{-1/p}\right\}.$$

Θέλουμε επομένως να δείξουμε ότι $\operatorname{card}(C) < k$. Ορίζουμε

$$B_i = \{j \geqslant 1 : (i,j) \in C\} \;\text{ για } i = 1, \dots, n.$$

Έστω $b_i = \max B_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$. Τότε,

$$(i, b_i) \in C \Rightarrow |a_i|b_i^{-1/p} > k^{-1/p} \Rightarrow |a_i|^pk > b_i.$$

Άρα,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i < \sum_{i=1}^{n}|a_i|^pk = k,$$

διότι $\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p = 1$.

Επιπλέον $B_i \subseteq [b_i]$, όπου για $m \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$. Έπεται ότι $\operatorname{card}(B_i) \leqslant b_i$. Συνεπώς,

$$\operatorname{card}(C) = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{card}(B_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i < k.$$

□

Από τον ισχυρισμό έπεται ότι $0 \leqslant b_k \leqslant k^{-1/p}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Από το Λήμμα 7.2.10 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\tilde{S}-S\right\| &= \mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p}Y_j - \sum_{j=1}^{\infty}\Gamma^{-1/p}Y_j\right\| \\ &\leqslant \mathbb{E}\sum_{j=1}^{\infty}\left|j^{-1/p}-\Gamma^{-1/p}\right|\|Y_j\| \\ &= \mathbb{E}\sum_{j=1}^{\infty}\left|j^{-1/p}-\Gamma^{-1/p}\right| \\ &= B_p < \infty\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathbb{E}\left\|\tilde{S}\right\| \leqslant \mathbb{E}\left(\left\|\tilde{S}-S\right\| + \|S\|\right) = \mathbb{E}\left\|\tilde{S}-S\right\| + \mathbb{E}\|S\| < \infty.$$

Άρα,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{S}_i\right\| \leqslant \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}|a_i|\left\|\tilde{S}_i\right\| = \sum_{i=1}^{n}|a_i|\mathbb{E}\left\|\tilde{S}\right\| < \infty.$$

Δηλαδή, $\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{S}_i\right\| \in L_1(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Εφόσον η $\sum_{k=1}^{\infty} b_kY_k$ είναι ισόνομη με την $\sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{S}_i$, συμπεραίνουμε ότι $\left\|\sum_{k=1}^{\infty} b_kY_k\right\| \in L_1(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Από το Πόρισμα 7.1.11, εφόσον $0 \leqslant b_k \leqslant k^{-1/p}$, έπεται ότι

$$\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{k=1}^{\infty} b_kY_k\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} b_kY_k\right\|\right| > t\right) \leqslant 2e^{-D_pt^q}$$

για κάθε $t > 0$. Δηλαδή,

$$\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{S}_i\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{S}_i\right\|\right| > t\right) \leqslant 2e^{-D_pt^q} \tag{7.3.4}$$

για κάθε $t > 0$.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{S}_i\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_iS_i\right\|\right| &\leqslant \mathbb{E}\left|\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i\tilde{S}_i\right\| - \left\|\sum_{i=1}^{n} a_iS_i\right\|\right| \\ &\leqslant \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i(\tilde{S}_i - S_i)\right\| \\ &\leqslant \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}|a_i|\left\|\tilde{S}_i - S_i\right\| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_i|B_p \\ &\leqslant n^{1/q}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{1/p}B_p \\ &= n^{1/q}B_p.\end{aligned}$$

Εφόσον οι $S_1, \ldots, S_n$ είναι p-stable τυχαίες μεταβλητές, έχουμε ότι η $\sum_{i=1}^n a_i S_i$ είναι ισόνομη με την $\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} S = S$. Άρα,

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n a_i S_i\right\| = \mathbb{E}\left\|S\right\|.$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\left|\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i\right\| - \mathbb{E}\left\|S\right\|\right| \leqslant n^{1/q} B_p.$$

Αν

$$n \leqslant \delta_1 \left(ST_p(X)\right)^q \tag{7.3.5}$$

όπου η σταθερά $0 < \delta_1 = \delta_1(p, \varepsilon) < 1$ θα επιλεγεί κατάλληλα, τότε

$$\left|\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i\right\| - \mathbb{E}\left\|S\right\|\right| \leqslant \delta_1^{1/q} ST_p(X) B_p \tag{7.3.6}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left\{\left|\left\|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i\right\| - \mathbb{E}\left\|S\right\|\right| > 2\delta_1^{1/q} ST_p(X) B_p\right\} \subseteq \left\{\left|\left\|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i\right\|\right| > \delta_1^{1/q} ST_p(X) B_p\right\}$$

και εφαρμόζοντας την (7.3.4) για $t = \delta_1^{1/q} ST_p(X) B_p$ συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i\right\| - \mathbb{E}\left\|S\right\|\right| > 2\delta_1^{1/q} ST_q(X) B_p\right) \\ \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i\right\| - \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i\right\|\right| > \delta_1^{1/q} ST_p(X) B_p\right) \\ \leqslant 2\exp\left(-D_p \delta_1 \left(ST_p(X)\right)^q B_p^q\right).\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την (7.3.3) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left\|S\right\| \geqslant \frac{1}{c_p^{1/p}} \frac{1}{2} ST_p(X),$$

επομένως,

$$\mathbb{P}\left(\left|\left\|\sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i\right\| - \mathbb{E}\left\|S\right\|\right| \geqslant 4\delta_1^{1/q} c_p^{1/q} B_p \mathbb{E}\left\|S\right\|\right) \leqslant 2\exp\left(-D_p \delta_1 \left(ST_p(X)\right)^q B_p^q\right). \tag{7.3.7}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.2 υπάρχει $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε αν $\mathcal{N}$ είναι δ_2-δίκτυο της $S_{\ell_p^n}$ και για κάποια $y_1, \ldots, y_n \in X$ ισχύει

$$1 - \delta_2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n a_i y_i\right\| \leqslant 1 + \delta_2, \text{ για κάθε } a \in \mathcal{N},$$

τότε

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n a_i y_i\right\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p\right)^{1/p}$$

για κάθε $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Επιλέγουμε $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, p) < \delta_2$ αρκετά μικρό ώστε $4\delta_1^{1/q} c_p^{1/q} B_p \leqslant \delta_2$. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (7.3.7) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\left| \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| - \mathbb{E}\|S\| \right| \geqslant \delta_2 \mathbb{E}\|S\|\right) \leqslant 2\exp\left(-D_p\delta_1 \left(ST_p(X)\right)^q B_p^q\right).$$

Δηλαδή, για κάθε $a \in S_{\ell_p^n}$, το οποίο θεωρούμε σταθεροποιημένο, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2\exp\left(-D_p\delta_1 (ST_p(X))^q B_p^q\right)$ ισχύει ότι

$$(1-\delta_2)\mathbb{E}\|S\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| \leqslant (1+\delta_2)\mathbb{E}\|S\|.$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 7.3.4, υπάρχει δ_2-δίκτυο $\mathcal{N}$ της $S_{\ell_p^n}$ με $|\mathcal{N}| \leqslant e^{2n/\delta_2}$. Τότε σύμφωνα με τα παραπάνω, για κάθε $a \in \mathcal{N}$,

$$\mathbb{P}\left(\left| \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| - \mathbb{E}\|S\| \right| \geqslant \delta_2 \mathbb{E}\|S\|\right) \leqslant 2\exp\left(-D_p\delta_1 \left(ST_p(X)\right)^q B_p^q\right).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\exists a \in \mathcal{N} : \left| \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| - \mathbb{E}\|S\| \right| > \delta_2 \mathbb{E}\|S\|\right) &\leqslant |\mathcal{N}| 2\exp\left(-D_p\delta_1 (ST_p(X))^q B_p^q\right) \\
&\leqslant e^{2n/\delta_2} 2\exp\left(-D_p\delta_1 (ST_p(X))^q B_p^q\right) \\
&= 2\exp\left(\frac{2n}{\delta_2} - D_p\delta_1 (ST_p(X))^q B_p^q\right) \\
&\leqslant 2\exp\left(\frac{2n}{\delta_1} - D_p\delta_1 (ST_p(X))^q B_p^q\right).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2\exp\left(\frac{2n}{\delta_1} - D_p\delta_1 (ST_p(X))^q B_p^q\right)$ ισχύει

$$(1-\delta_2)\mathbb{E}\|S\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| \leqslant (1+\delta_2)\mathbb{E}\|S\|$$

για κάθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{N}$.

Έχουμε,

$$\begin{aligned}
1 - 2\exp\left(\frac{2n}{\delta_1} - D_p\delta_1 (ST_p(X))^q B_p^q\right) > 0 &\Leftrightarrow \frac{2n}{\delta_1} < \ln\frac{1}{2} + D_p\delta_1 B_p^q (ST_p(X))^q \\
&\Leftrightarrow n < -\frac{\delta_1}{2}\ln 2 + D_p \frac{\delta_1^2}{2} B_p^q (ST_p(X))^q.
\end{aligned}$$

Επομένως, αν $n + 1 < D_p \frac{\delta_1^2}{2} B_p^q (ST_p(X))^q$ τότε $1 - 2\exp\left(\frac{2n}{\delta_1} - D_p\delta_1 (ST_p(X))^q B_p^q\right) > 0$.

Παίρνουμε $\delta = \min\left\{D_p \frac{\delta_1^2}{2} B_p^q, \delta_1\right\}$ και θεωρούμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε $n + 1 \leqslant \delta (ST_p(X))^q$. Τότε ικανοποιείται η (7.3.5) και με θετική πιθανότητα

$$(1-\delta_2)\mathbb{E}\|S\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| \leqslant (1+\delta_2)\mathbb{E}\|S\|$$

για κάθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{N}$.

Δηλαδή, υπάρχει $\omega \in \Omega$ τέτοιο ώστε

$$(1-\delta_2)\mathbb{E}\,\|S\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i(\omega) \right\| \leqslant (1+\delta_2)\mathbb{E}\,\|S\|$$

για κάθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{N}$.

Θέτουμε

$$y_i = \frac{\tilde{S}_i(\omega)}{\mathbb{E}\,\|S\|}.$$

Τότε,

$$1-\delta_2 \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| \leqslant 1+\delta_2, \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{N}.$$

Από το Λήμμα 3.3.2 έπεται ότι

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p}$$

για κάθε $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή ο n-διάστατος υπόχωρος $\mathrm{span}\,\{y_1, \dots, y_n\} \leqslant X$, είναι $(1+\varepsilon)$-ισομορφικός με τον ℓ_p^n.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $ST_p(X) = \infty$. Για κάθε $L > 0$ υπάρχουν $x_1, \dots, x_N \in X$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^N \|x_i\|^p = 1$ και

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^N \vartheta_i x_i \right\| > L c_p^{1/p}.$$

Ομοίως με την περίπτωση $ST_p(X) < \infty$, μπορούμε να βρούμε p-stable τυχαία μεταβλητή $S : \Omega \to X$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}\,\|S\| = \frac{1}{c_p^{1/p}} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^N \vartheta_i x_i \right\| \geqslant L.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n |a_i|^p = 1$. Τότε, σύμφωνα με τα παραπάνω, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $S : \Omega \to X$ με

$$\mathbb{E}\,\|S\| \geqslant 2M^{1/q} B_p \frac{1}{\delta_2}. \tag{7.3.8}$$

Ομοίως με πριν, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $M > n$, τότε

$$\left| \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| - \mathbb{E}\,\|S\| \right| \leqslant n^{1/q} B_p \leqslant M^{1/q} B_p$$

και

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\left| \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| - \mathbb{E}\,\|S\| \right| > 2M^{1/q} B_p \right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\left| \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| - \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| \right| > M^{1/q} B_p \right) \\ &\leqslant 2\exp\left(-D_p M B_p^q\right). \end{aligned}$$

Από την (7.3.8) έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\left| \left\| \sum_{i=1}^n a_i \tilde{S}_i \right\| - \mathbb{E}\,\|S\| \right| > \delta_2 \mathbb{E}\,\|S\| \right) \leqslant 2\exp\left(-D_p M B_p^q\right).$$

Θεωρούμε δ_2-δίκτυο $\mathcal{N}$ της $S_{\ell_p^n}$. Τότε,

$$\mathbb{P}\left((1-\delta_2)\mathbb{E}\,\|S\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n a_i\tilde{S}_i\right\| \leqslant (1+\delta_2)\mathbb{E}\,\|S\|\,,\ \forall a \in \mathcal{N}\right) \geqslant 1-2\exp\left(\frac{2n}{\delta_2}-D_pMB_p^q\right).$$

Έχουμε

$$1-2\exp\left(\frac{2n}{\delta_2}-D_pMB_p^q\right) > 0 \Leftrightarrow D_pMB_p^q > \ln 2+\frac{2n}{\delta_2}.$$

Επιλέγουμε το $M > n$ αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει η παραπάνω ανισότητα. Από το Λήμμα 3.3.2 συμπεραίνουμε ότι $\ell_p^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X$. ∎

Παρατήρηση 7.3.5. Για $p=1$ το Θεώρημα 7.3.3 διαμορφώνεται ως εξής:

Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, τέτοιος ώστε, αν X είναι ένας χώρος Banach και $n \in \mathbb{N}$ με $\ln n \leqslant \delta ST_1(X)$, τότε υπάρχει υπόχωρος του X διάστασης n, ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$-ισομορφικός με τον ℓ_1^n [31].

Μια άμεση συνέπεια του θεωρήματος 7.3.3 είναι η ακόλουθη πρόταση η οποία οφείλεται στους Johnson και Schechtman [18].

Πόρισμα 7.3.6 (Johnson-Schechtman). *Για κάθε $1 < p < 2$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ με $k \geqslant \delta n$ τέτοιο ώστε ο ℓ_p^k εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον ℓ_1^n. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$*

$$\ell_p^k \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} \ell_1^n \text{ για κάποιο } k \geqslant \delta n.$$

Ειδικότερα, ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον ℓ_1.

Απόδειξη. Έστω $1 < p < 2$, $q > 2$ τέτοια ώστε $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ και $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \vartheta_i e_i\right\|_1 = \mathbb{E}\sum_{i=1}^n |\vartheta_i| = n\mathbb{E}|\vartheta_1|,$$

όπου $\{e_i\}_{i=1}^n$ η συνήθης βάση του ℓ_1^n και $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ ανεξάρτητες standard p-stable τυχαίες μεταβλητές. Από τον ορισμό του $ST_p(\ell_1^n)$ έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} n\mathbb{E}|\vartheta_1| = \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \vartheta_i e_i\right\|_1 &\leqslant ST_p(\ell_1^n)\left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_1^p\right)^{1/p} \\ &= ST_p(\ell_1^n) n^{1/p}. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$ST_p(\ell_1^n) \geqslant \mathbb{E}|\vartheta_1| n^{1-\frac{1}{p}} = \mathbb{E}|\vartheta_1| n^{1/q}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.3.3 για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, p) > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος του ℓ_1^n ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$-ισομορφικός με τον ℓ_p^k, όπου $k = [\delta_1(ST_p(\ell_1^n))^q] - 1$. Όμως,

$$\begin{aligned} k &= [\delta_1(ST_p(\ell_1^n))^q] - 1 \\ &\geqslant [\delta_1(\mathbb{E}|\vartheta_1|)^q n] - 1 \\ &\geqslant \delta_1(\mathbb{E}|\vartheta_1|)^q n - 2 \\ &\geqslant \frac{\delta_1}{2}(\mathbb{E}|\vartheta_1|)^q n, \end{aligned}$$

για n αρκετά μεγάλο. Για $\delta = \frac{\delta_1}{2}(\mathbb{E}|\vartheta_1|)^q$ έχουμε το ζητούμενο.

∎

7.4 Θεώρημα Maurey-Pisier : type περίπτωση

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος 7.3.3 μπορούμε να δείξουμε την type περίπτωση του Θεωρήματος Maurey-Pisier. Αποδεικνύουμε πρώτα ένα λήμμα.

Λήμμα 7.4.1.

(i) *Για κάθε $1 < p \leqslant 2$ υπάρχει σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από το p ώστε*

$$T_p(X) \leqslant C ST_p(X)$$

για κάθε χώρο Banach X.

(ii) *Για κάθε r, p τέτοια ώστε $1 \leqslant r < p \leqslant 2$ υπάρχει σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από το p και το r ώστε*

$$ST_r(X) \leqslant C T_p(X)$$

για κάθε χώρο Banach X.

Απόδειξη.

(i) Έστω $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ και $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$ ανεξάρτητες standard p-stable τυχαίες μεταβλητές. Έστω επίσης $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli οι οποίες είναι ανεξάρτητες και από τις $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$. Θεωρούμε τις $\{\vartheta_i\}_{i=1}^n$ και $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ ορισμένες σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Εφόσον η ϑ_i είναι συμμετρική συμπεραίνουμε ότι θα είναι ισόνομη με την $\epsilon_i|\vartheta_i|$ (Πρόταση 2.3.4). Επίσης, από την Πρόταση 2.4.6 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_\Omega \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i(\omega)|\vartheta_i(\omega')|x_i \right\| d\mathbb{P}(\omega) d\mathbb{P}(\omega') &= \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i(\omega)|\vartheta_i(\omega)|x_i \right\| d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i|\vartheta_i|x_i \right\|.\end{aligned}$$

Συνεπώς, εκμεταλευόμενοι την ανισότητα Kahane και το γεγονός ότι η $\epsilon_i|\vartheta_i|$ είναι ισόνομη με την ϑ_i συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 \right)^{1/2} &\leqslant K_2 \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\| \\ &= \frac{K_2}{\mathbb{E}|\vartheta_1|} \mathbb{E}_\epsilon \left\| \mathbb{E}_\vartheta \sum_{i=1}^n \epsilon_i |\vartheta_i| x_i \right\| \\ &\leqslant \frac{K_2}{\mathbb{E}|\vartheta_1|} \mathbb{E}_\epsilon \mathbb{E}_\vartheta \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i |\vartheta_i| x_i \right\| \\ &= \frac{K_2}{\mathbb{E}|\vartheta_1|} \int_\Omega \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i(\omega)|\vartheta_i(\omega')|x_i \right\| d\mathbb{P}(\omega) d\mathbb{P}(\omega') \\ &= \frac{K_2}{\mathbb{E}|\vartheta_1|} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i |\vartheta_i| x_i \right\| \\ &= \frac{K_2}{\mathbb{E}|\vartheta_1|} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \vartheta_i x_i \right\| \\ &\leqslant \frac{K_2}{\mathbb{E}|\vartheta_1|} ST_p(X) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$T_p(X) \leqslant \frac{K_2}{\mathbb{E}|\vartheta_1|} ST_p(X).$$

(ii) Έστω $1 \leqslant r < p \leqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Θεωρούμε $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli, $\{\vartheta_i\}_{i=1}^n$ ανεξάρτητες standard p-stable τυχαίες μεταβλητές και $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ ανεξάρτητες standard r-stable τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι επίσης και ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επιπλέον, θεωρούμε τις $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n, \{\vartheta_i\}_{i=1}^n$ και $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ ορισμένες σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Από την Πρόταση 2.4.6 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n \phi_i \vartheta_i \|x_i\|\right| &= \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n \phi_i(\omega)\vartheta_i(\omega)\|x_i\|\right| d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_\Omega \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n \phi_i(\omega)\vartheta_i(\omega')\|x_i\|\right| d\mathbb{P}(\omega) d\mathbb{P}(\omega').\end{aligned}$$

Όμως, εφόσον οι $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ είναι r-stable έχουμε ότι η τυχαία μεταβλητή

$$\sum_{i=1}^n \vartheta_i(\omega')\|x_i\|\phi_i$$

είναι ισόνομη με την

$$\left(\sum_{i=1}^n |\vartheta_i(\omega')|^r \|x_i\|^r\right)^{1/r} \phi_1$$

για κάθε $\omega' \in \Omega$.
Επομένως,

$$\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n \phi_i(\omega)\vartheta_i(\omega')\|x_i\|\right| d\mathbb{P}(\omega) = \left(\sum_{i=1}^n |\vartheta_i(\omega')|^r \|x_i\|^r\right)^{1/r} \mathbb{E}|\phi_1| \text{ για κάθε } \omega' \in \Omega.$$

Ομοίως, εφόσον οι $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ είναι p-stable, έχουμε ότι

$$\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n \phi_i(\omega)\vartheta_i(\omega')\|x_i\|\right| d\mathbb{P}(\omega') = \left(\sum_{i=1}^n |\phi_i(\omega)|^p \|x_i\|^p\right)^{1/p} \mathbb{E}|\vartheta_1| \text{ για κάθε } \omega \in \Omega.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n |\phi_i|^p \|x_i\|^p\right)^{1/p} \mathbb{E}|\vartheta_1| = \mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n \phi_i\vartheta_i\|x_i\|\right| = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n |\vartheta_i|^r \|x_i\|^r\right)^{1/r} \mathbb{E}|\phi_i|.$$

Συνεπώς, λαμβάνοντας υπ' όψιν και το γεγονός ότι η ϕ_i είναι ισόνομη με την $|\phi_i|\epsilon_i$ καθώς και την Πρόταση 2.4.6 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \phi_i x_i\right\| &= \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n |\phi_i|\epsilon_i x_i\right\| = \mathbb{E}_\phi\mathbb{E}_\epsilon\left\|\sum_{i=1}^n |\phi_i|\epsilon_i x_i\right\| \\
&\leqslant \mathbb{E}_\phi\left(\mathbb{E}_\epsilon\left\|\sum_{i=1}^n |\phi_i|\epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} \\
&\leqslant T_p(X)\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n |\phi_i|^p\|x_i\|^p\right)^{1/p} \qquad (7.4.1)\\
&= \frac{T_p(X)}{\mathbb{E}|\vartheta_1|}\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n \phi_i\vartheta_i\|x_i\|\right| \\
&= \frac{T_(X)}{\mathbb{E}|\vartheta_1|}\mathbb{E}|\phi_1|\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n |\vartheta_i|^r\|x_i\|^r\right)^{1/r}.
\end{aligned}$$

Εφόσον $\frac{1}{r} \leqslant 1$, από την ανισότητα Hölder έχουμε ότι

$$\left(\mathbb{E}|X|^{1/r}\right)^r \leqslant \mathbb{E}|X|$$

για κάθε τυχαία μεταβλητή X. Για $X = \sum_{i=1}^n |\vartheta_i|^r\|x_i\|^r$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n |\vartheta_i|^r\|x_i\|^r\right)^{1/r} &\leqslant \left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n |\vartheta_i|^r\|x_i\|^r\right)\right)^{1/r} \\
&= (\mathbb{E}|\vartheta_1|^r)^{1/r}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^r\right)^{1/r}. \qquad (7.4.2)
\end{aligned}$$

Από τις (7.4.1) και (7.4.2) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \phi_i x_i\right\| \leqslant T_p(X)\frac{\mathbb{E}|\phi_1|}{\mathbb{E}|\vartheta_1|}(\mathbb{E}|\vartheta_1|^r)^{1/r}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^r\right)^{1/r}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$ST_r(X) \leqslant \frac{\mathbb{E}|\phi_1|}{\mathbb{E}|\vartheta_1|}(\mathbb{E}|\vartheta_1|^r)^{1/r}\,T_p(X).$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.2, εφόσον $r < p$, ισχύει ότι $(\mathbb{E}|\vartheta_1|^r)^{1/r} < \infty$. Για $C = \frac{\mathbb{E}|\phi_1|}{\mathbb{E}|\vartheta_1|}(\mathbb{E}|\vartheta_1|^r)^{1/r}$ έχουμε το ζητούμενο.

■

Παρατήρηση 7.4.2. Από το Λήμμα 7.4.1 προκύπτει άμεσα ότι

$$\sup\{1 \leqslant p \leqslant 2 : T_p(X) < \infty\} = \sup\{1 \leqslant p < 2 : ST_p(X) < \infty\}.$$

Θεώρημα 7.4.3 (Maurey-Pisier: type περίπτωση).
Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach και $p_X = \sup\{1 \leqslant p \leqslant 2 : T_p(X) < \infty\}$. Τότε ο ℓ_{p_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Απόδειξη. Αν $p_X = 2$ τότε το ζητούμενο προκύπτει από το θεώρημα του Dvoretzky. Αν $p_X < 2$ τότε για κάθε $p_X < p \leqslant 2$ έχουμε ότι $T_p(X) = \infty$ και άρα από το Λήμμα 7.4.1 (i) συμπεραίνουμε ότι $ST_p(X) = \infty$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 7.3.3 ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X για κάθε p τέτοιο ώστε $p_X < p \leqslant 2$. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο ℓ_{p_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $p_X < p \leqslant 2$ τέτοιο ώστε

$$n^{\frac{1}{p_X}-\frac{1}{p}}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) < (1+\varepsilon).$$

Εφόσον ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X έχουμε ότι $\ell_p^n \overset{1+\frac{\varepsilon}{2}}{\hookrightarrow} X$, δηλαδή υπάρχει $T : \ell_p^n \to X$ ισομορφική εμφύτευση τέτοια ώστε $\|T\| \left\|T^{-1}\right\| < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$. Επιπλέον, σύμφωνα με την Παρατήρηση 4.1.4 έχουμε ότι $d\left(\ell_p^n, \ell_{p_X}^n\right) \leqslant n^{\frac{1}{p_X}-\frac{1}{p}}$. Δηλαδή υπάρχει $S : \ell_{p_X}^n \to \ell_p^n$ γραμμικός ισομορφισμός ώστε $\|S\| \left\|S^{-1}\right\| \leqslant n^{\frac{1}{p_X}-\frac{1}{p}}$. Συνεπώς, για τον τελεστή $T \circ S : \ell_{p_X}^n \to X$ έχουμε ότι είναι ισομορφική εμφύτευση με

$$\begin{aligned}\|T\circ S\| \left\|(T\circ S)^{-1}\right\| = \|T\circ S\| \left\|T^{-1}\circ S^{-1}\right\| &\leqslant \|T\| \|S\| \left\|S^{-1}\right\| \left\|T^{-1}\right\| \\ &< n^{\frac{1}{p_X}-\frac{1}{p}}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) < 1+\varepsilon.\end{aligned}$$

Δείξαμε δηλαδή ότι $\ell_{p_X}^n \overset{1+\varepsilon}{\hookrightarrow} X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$. Από το Λήμμα 3.1.5 συμπεραίνουμε ότι ο ℓ_{p_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

■

Από την παραπάνω απόδειξη μπορούμε να συμπεράνουμε το εξής:

Πρόταση 7.4.4. *Έστω X χώρος Banach. Το σύνολο των $p \in [1,\infty]$ για τα οποία ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$.*

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήαμτος 7.4.3 είναι το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 7.4.5. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Για κάθε $p_X \leqslant p \leqslant 2$ ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.*

Απόδειξη. Έστω $p_X < p < 2$. Από το Λήμμα 7.4.1 (i) έχουμε ότι $ST_p(X) = \infty$. Συνεπώς από το Θεώρημα 7.3.3 συμπεραίνουμε ότι ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Μια δεύτερη απόδειξη θα μπορούσε να δοθεί ως εξής: Από την Πρόταση 7.2.3 έχουμε ότι ο ℓ_p εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L_{p_X} = L_{p_X}([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, ενώ από την Πρόταση 3.1.7 γνωρίζουμε ότι ο L_{p_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον ℓ_{p_X}. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον ℓ_{p_X}. Από την μεταβατικότητα της πεπερασμένης αναπαραστασιμότητας και το γεγονός ότι ο ℓ_{p_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X, συνάγουμε ότι ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X. ■

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο των p για τα οποία ο ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος σε έναν χώρο Banach X είναι υποσύνολο του $[p_X, q_X]$ (Πόρισμα 4.1.17). Συνοψίζουμε τα παραπάνω στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.4.6. *Έστω X χώρος Banach και*

$$K(X) = \{p \in [1,\infty] : \text{ ο } \ell_p \text{ είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον } X\}.$$

Τότε το $K(X)$ είναι κλείστο υποσύνολο του $[p_X, q_X]$ και περιέχει το $[p_X, 2] \cup \{q_X\}$.

Παράρτημα Α′

Η προβολή Rademacher

Α′.1 Η προβολή Rademacher

Ορισμός Α′.1.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το διακριτό κύβο $E_2^n = \{-1,1\}^n$ και τις συναρτήσεις Rademacher $r_i : E_2^n \to \{-1,1\}$ που ορίζονται ως εξής:

$$r_i(\epsilon) = r_i(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \ldots, \epsilon_n) = \epsilon_i.$$

Για κάθε $\varnothing \neq A \subseteq [n] := \{1, \ldots, n\}$, ορίζουμε μια συνάρτηση $w_A : E_2^n \to \{-1,1\}$ θέτοντας

$$w_A(\epsilon) = \prod_{i \in A} r_i(\epsilon).$$

Συμφωνούμε επίσης ότι $w_\varnothing \equiv 1$. Οι συναρτήσεις w_A, $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$, είναι οι συναρτήσεις Walsh. Παρατηρήστε ότι $r_i = w_{\{i\}}$ και ότι $w_A w_B = w_{A \triangle B}$ όπου $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Βλέπουμε τον E_2^n σαν χώρο πιθανότητας με το ομοιόμορφο μέτρο μ_n. Αν $f : E_2^n \to \mathbb{R}$, τότε

$$\int_{E_2^n} f(\epsilon) d\mu_n(\epsilon) = \frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon \in E_2^n} f(\epsilon).$$

Γενικότερα, αν X είναι ένας χώρος Banach τότε για κάθε $f : E_2^n \to X$ ορίζουμε

$$\int_{E_2^n} f(\epsilon) d\mu_n(\epsilon) = \frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon \in E_2^n} f(\epsilon) \in X.$$

Ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f : E_2^n \to X$ γίνεται χώρος Banach με οποιαδήποτε από τις ισοδύναμες νόρμες

$$\|f\|_{L_q(E_2^n;X)} := \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|_X^q d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/q},$$

όπου $q \in [1, +\infty)$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι οι συναρτήσεις Walsh σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του $L_2(E_2^n; \mathbb{R})$, άρα κάθε συνάρτηση $f : E_2^n \to X$ γράφεται σαν άθροισμα στοιχείων του συνόλου $\{w_A \mid A \subseteq [n]\} \otimes X$.

Πρόταση Α′.1.2. *Οι συναρτήσεις Walsh ικανοποιούν τις σχέσεις ορθογωνιότητας*

$$\sum_{\epsilon} w_A(\epsilon) w_B(\epsilon) = 2^n \delta_{AB} \tag{Α′.1.1}$$

και

$$\sum_{A} w_A(\epsilon) w_A(\zeta) = 2^n \delta_{\epsilon\zeta}, \tag{Α′.1.2}$$

όπου $\delta_{xy} = 1$ *αν* $x = y$ *και* $\delta_{xy} = 0$ *αν* $x \neq y$. *Επιπλέον, κάθε* $f : E_2^n \to X$ *αναπαρίσταται μονοσήμαντα στη μορφή*

$$f(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon) x_A,$$

για κάποια $x_A \in X$.

Απόδειξη. Οι συνθήκες ορθογωνιότητας ελέγχονται εύκολα - η πρώτη προκύπτει από την παρατήρηση ότι $w_A w_B = w_{A\triangle B}$ και το γεγονός ότι $\sum_\epsilon w_{A\triangle B}(\epsilon) = 0$ εκτός αν $A\triangle B = \varnothing$. Για τη δεύτερη, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν σταθεροποιήσουμε κάποιον δείκτη j τέτοιον ώστε $\epsilon_j \neq \zeta_j$, τότε για κάθε $A \subset \{1, \ldots, n\}$ με $j \notin A$ έχουμε $w_A(\epsilon)w_A(\zeta) = -w_{\tilde{A}}(\epsilon)w_{\tilde{A}}(\zeta)$, όπου $\tilde{A} = A \cup \{j\}$. Για να δείξουμε ότι κάθε $f : E_2^n \to X$ έχει μοναδική αναπαράσταση, θεωρούμε μια τέτοια f και για κάθε $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ θέτουμε

$$x_A = \int_{E_2^n} w_A(\epsilon) f(\epsilon) d\mu_n(\epsilon).$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την (Α΄.1.2), βλέπουμε ότι για κάθε $\epsilon \in E_2^n$

$$\begin{aligned}\sum_A w_A(\epsilon)x_A &= \sum_A w_A(\epsilon)\left(\int_{E_2^n} w_A(\zeta)f(\zeta)d\mu_n(\zeta)\right)\\ &= \int_{E_2^n} f(\zeta)\left(\sum_A w_A(\epsilon)w_A(\zeta)\right)d\mu_n(\zeta) = f(\epsilon).\end{aligned}$$

Για να δείξουμε τη μοναδικότητα, υποθέτουμε ότι $f(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon)y_A$ για κάποια διανύσματα $y_A \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned}x_A &= \int_{E_2^n} w_A(\zeta)f(\zeta)d\mu_n(\zeta) = \int_{E_2^n}\left(\sum_B w_B(\zeta)y_B\right)w_A(\zeta)d\mu_n(\zeta)\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_B y_B\left(\sum_{\zeta\in E_2^n} w_B(\zeta)w_A(\zeta)\right) = y_A,\end{aligned}$$

αν λάβουμε υπόψη την (Α΄.1.1). ∎

Ορισμός Α΄.1.3. Η προβολή Rademacher της $f : E_2^n \to X$ είναι η συνάρτηση $Rad_n f : E_2^n \to X$ που ορίζεται από την

$$Rad_n f(\epsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)x_{\{i\}},$$

όπου $f = \sum w_A x_A$. Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $f \mapsto Rad_n(f)$ ον $L_2(E_2^n; X)$, και αν αυτός ο τελεστής είναι φραγμένος, τότε θέτουμε

$$K_r(X) := \|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)}. \tag{Α΄.1.3}$$

Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι μπορούμε να γράψουμε την $Rad_n f$ σαν συνέλιξη της f με το άθροισμα των συναρτήσεων Rademacher, όπου η συνέλιξη μιας συνάρτησης $f : E_2^n \to X$ με μια συνάρτηση $g : E_2^n \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:

$$(f * g)(\epsilon) = \int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta)g(\zeta)d\mu_n(\zeta). \tag{Α΄.1.4}$$

Γράφοντας $\epsilon\zeta$ στην προηγούμενη σχέση, εννοούμε το κατά σημείο γινόμενο.

Λήμμα Α′.1.4. *Ορίζουμε* $g_r : E_2^n \to \mathbb{R}$ *θέτοντας* $g_r(\epsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)$. *Τότε, για κάθε* $f : E_2^n \to X$ *έχουμε*

$$Rad_n f = f * g_r.$$

Απόδειξη. Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$\begin{aligned}(f * g_r)(\epsilon) &= \int_{E_2^n} \left(\sum_A w_A(\epsilon\zeta)x_A \right) \left(\sum_{i=1}^n r_i(\zeta) \right) d\mu_n(\zeta) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_A x_A w_A(\epsilon) \left(\int_{E_2^n} w_A(\zeta) r_i(\zeta) d\mu_n(\zeta) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) x_{\{i\}} = Rad_n f(\epsilon),\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. ■

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι ο $L_2(E_2^n; X^*)$ είναι ο δυϊκός χώρος του $L_2(E_2^n; X)$.

Πρόταση Α′.1.5. *Έστω* X *χωρος Banach,* X^* *ο δυϊκός του, και* H *ένας χώρος Hilbert. Για κάθε* $f : E_2^n \to X$, $\phi : E_2^n \to X^*$ *και* $h : E_2^n \to H$, *ισχύουν τα παρακάτω:*

(α) *Υπάρχει* $\psi : E_2^n \to X^*$ *τέτοια ώστε* $\|\psi\|_{L_2(E_2^n;X^*)} = 1$ *και*

$$\|f\|_{L_2(E_2^n;X)} = \langle \psi, f \rangle = \int_{E_2^n} [\psi(\epsilon)](f(\epsilon)) d\mu_n(\epsilon).$$

(β) *Το γραμμικό συναρτησοειδές που αντιστοιχεί στην* ϕ *και ορίζεται στον* $L_2(E_2^n; X)$ *μέσω της*

$$\langle \phi, f \rangle := \int_{E_2^n} [\phi(\epsilon)](f(\epsilon)) d\mu_n(\epsilon) \tag{Α′.1.5}$$

είναι φραγμένο και έχει νόρμα ίση με $\|\phi\|_{L_2(E_2^n;X^*)}$.

(γ) *Αν* $h = \sum_A w_A x_A$ *είναι η αναπαράσταση της* h, *τότε*

$$\|h\|^2_{L_2(E_2^n;H)} = \sum_A \|x_A\|_H^2.$$

Απόδειξη. (α) Για την L_2 νόρμα της f, ισχύει ότι

$$\|f\|_{L_2(E_2^n;X)} = \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|^2 \, d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2^n} \sum_\epsilon \|f(\epsilon)\|^2 \right)^{1/2} = \frac{\sum_\epsilon \|f(\epsilon)\| a_\epsilon}{2^{n/2}},$$

για κάποια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_ϵ) με $\sum_\epsilon a_\epsilon^2 = 1$ (μπορούμε να πάρουμε $a_\epsilon = \frac{\|f(\epsilon)\|}{(\sum_\epsilon \|f(\epsilon)\|^2)^{1/2}}$). Από το θεώρημα Hahn-Banach, μπορούμε για κάθε $\epsilon \in E_2^n$ να βρούμε $\tilde{\psi}(\epsilon) \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{\psi}(\epsilon)\|_* = 1$ και $[\tilde{\psi}(\epsilon)](f(\epsilon)) = \|f(\epsilon)\|$. Θέτουμε $\psi(\epsilon) = 2^{n/2} a_\epsilon \tilde{\psi}(\epsilon)$. Ισχύει τότε ότι

$$\|\psi\|^2_{L_2(E_n^2;X^*)} = \frac{\sum_\epsilon 2^n a_\epsilon^2 \|\tilde{\psi}(\epsilon)\|_*^2}{2^n} = \sum_\epsilon a_\epsilon^2 = 1,$$

ενώ επιπλέον,

$$\begin{aligned}\langle \psi, f\rangle &= \frac{1}{2^n}\sum_{\epsilon}[\psi(\epsilon)](f(\epsilon)) = \frac{1}{2^{n/2}}\sum_{\epsilon}[\tilde{\psi}(\epsilon)](f(\epsilon))a_\epsilon \\ &= \frac{1}{2^{n/2}}\sum_{\epsilon}\|f(\epsilon)\|a_\epsilon = \|f\|_{L_2(E_2^n;X)}.\end{aligned}$$

(β) Από τον ορισμό της νόρμας στον X^* και κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}|\langle \phi, f\rangle| &\leqslant \int_{E_2^n} |[\phi(\epsilon)](f(\epsilon))|\, d\mu_n(\epsilon) \leqslant \int_{E_2^n} \|\phi(\epsilon)\|_{X^*}\|f(\epsilon)\|_X\, d\mu_n(\epsilon) \\ &\leqslant \left(\int_{E_2^n}\|\phi(\epsilon)\|_{X^*}^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2}\left(\int_{E_2^n}\|f(\epsilon)\|_X^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2} \\ &= \|\phi\|_{L_2(E_2^n;X^*)}\|f\|_{L_2(E_2^n;X)},\end{aligned}$$

οπότε $\|\langle\phi,\cdot\rangle\|_{(L_2(E_2^n;X))^*} \leqslant \|\phi\|_{L_2(E_2^n;X^*)}$. Για την ισότητα, δουλεύοντας όπως στο (α) μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $f_\delta : E_2^n \to X$ τέτοια ώστε $\|f_\delta\|_{L_2(E_2^n;X)} = 1$ και

$$\|\phi\|_{L_2(E_2^n;X^*)} = \langle \phi, f_\delta\rangle + \delta \leqslant \|\langle\phi,\cdot\rangle\|_{(L_2(E_2^n;X))^*} + \delta.$$

(γ) Παρατηρούμε ότι, από την (A′.1.1),

$$\begin{aligned}\int_{E_2^n}\|h(\epsilon)\|_H^2 d\mu_n(\epsilon) &= \int_{E_2^n}\Big\|\sum_A w_A(\epsilon)x_A\Big\|_H^2 d\mu_n(\epsilon) \\ &= \int_{E_2^n}\Big\langle\sum_A w_A(\epsilon)x_A, \sum_B w_B(\epsilon)x_B\Big\rangle_H d\mu_n(\epsilon) \\ &= \sum_A\sum_B\langle x_A, x_B\rangle_H\int_{E_2^n} w_A(\epsilon)w_B(\epsilon)d\mu_n(\epsilon) \\ &= \sum_A\langle x_A, x_A\rangle_H = \sum_A\|x_A\|_H^2,\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έχει δειχθεί. ■

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο για την Rad_n που μας δίνει το Λήμμα A′.1.4, βλέπουμε ότι η Rademacher προβολή $Rad_n : L^2(E_2^n;X) \to L^2(E_2^n;X)$ είναι πάντα φραγμένη, με νόρμα $\leqslant \sqrt{n}$.

Πρόταση A′.1.6. *Έστω X χώρος Banach, $f : E_2^n \to X$, $g : E_2^n \to \mathbb{R}$, και έστω $g(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon)c_A$ η αναπαράσταση της g. Τότε,*

(α) $\|f * g\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)}\|g\|_{L_1(E_2^n;\mathbb{R})}$.

(β) *Αν ο $X = H$ είναι χώρος Hilbert, τότε*

$$\|f * g\|_{L_2(E_2^n;H)} \leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;H)}\max_A |c_A|.$$

(γ) *Αν $d(X,H)$ ειναι η απόσταση Banach-Mazur του X από ένα χώρο Hilbert H, τότε*

$$\|f * g\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant \max_A |c_A| d(X,H)\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}.$$

Απόδειξη. (α) Εφόσον $f * g : E_2^n \to X$, από την Πρόταση Α′.1.5 (α) μπορούμε να βρούμε $\phi : E_2^n \to X^*$ τέτοια ώστε $\|\phi\|_{L_2(E_2^n;X^*)} = 1$ και

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{L_2(E_2^n;X)} &= \int_{E_2^n} [\phi(\epsilon)]\big((f * g)(\epsilon)\big) d\mu_n(\epsilon) \\ &= \int_{E_2^n} g(\zeta) \int_{E_2^n} [\phi(\epsilon)]\big(f(\epsilon\zeta)\big) d\mu_n(\epsilon) d\mu_n(\zeta)\end{aligned}$$

ενώ η παραπάνω έκφραση ειναι προφανώς

$$\begin{aligned}&\leqslant \int_{E_2^n} |g(\zeta)| \int_{E_2^n} \|\phi(\epsilon)\|_{X^*} \|f(\epsilon\zeta)\|_X d\mu_n(\epsilon) d\mu_n(\zeta) \\ &\leqslant \int_{E_2^n} |g(\zeta)| \left(\int_{E_2^n} \|\phi(\epsilon)\|_{X^*}^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon\zeta)\|_X^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} d\mu_n(\zeta) \\ &= \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \|g\|_{L_1(E_2^n;\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι αν $f = \sum_A w_A x_A$ και $g = \sum_A c_A w_A$ είναι οι αναπαραστάσεις των f και g αντίστοιχα, τότε $f * g = \sum_A c_A x_A w_A$. Αυτό γίνεται σαφές με έναν απ' ευθείας υπολογισμό:

$$\begin{aligned}(f * g)(\epsilon) &= \int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta) \Big(\sum_A w_A(\zeta) c_A\Big) d\mu_n(\zeta) = \sum_A \Big(\int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta) w_A(\zeta) d\mu_n(\zeta)\Big) c_A \\ &= \sum_A \Big(\int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta) w_A(\epsilon\zeta) d\mu_n(\zeta)\Big) c_A w_A(\epsilon) = \sum_A x_A c_A w_A(\epsilon).\end{aligned}$$

Από την Πρόταση Α′.1.5 (γ) έχουμε

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{L_2(E_2^n;H)} &= \Big(\sum_A \|c_A x_A\|_H^2\Big)^{1/2} \\ &\leqslant \max_A |c_A| \Big(\sum_A \|x_A\|_H^2\Big)^{1/2} = \Big(\max_A |c_A|\Big) \|f\|_{L_2(E_2^n;H)}.\end{aligned}$$

(γ) Δοθέντος $\varepsilon > 0$, από τον ορισμό της απόστασης Banach-Mazur υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to H$ τέτοιος ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| \leqslant (1+\varepsilon) d(X,H)$. Αφού $f * g = \sum_A c_A x_A w_A$, ισχύει λόγω γραμμικότητας ότι

$$T[(f * g)(\epsilon)] = \sum_A w_A(\epsilon) c_A T(x_A).$$

Από τον ορισμό των νορμών και την Πρόταση Α′.1.5 (γ) ισχύει τότε ότι,

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{L_2(E_2^n;X)} &= \|(T^{-1} \circ T)(f * g)\|_{L_2(E_2^n;X)} \\ &\leqslant \|T^{-1}\| \|T(f * g)\|_{L^2(E_2^n;H)} \\ &= \|T^{-1}\| \Big(\sum_A \|c_A T(x_A)\|_H^2\Big)^{1/2} \\ &\leqslant \max_A |c_A| \, \|T^{-1}\| \|Tf\|_{L^2(E_2^n;H)} \\ &\leqslant \max_A |c_A| \, \|T^{-1}\| \|T\| \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \\ &= \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \max_A |c_A| (1+\varepsilon) d(X,H),\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. ∎

Παρατήρηση Α΄.1.7. Το Λήμμα Α΄.1.4 δείχνει ότι $Rad_n f = f * g_r$, όπου $g_r = \sum_{i=1}^n r_i$. Λόγω της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Rademacher ισχύει ότι

$$\|g\|_{L^1(E_2^n;\mathbb{R})} \leqslant \|g\|_{L^2(E_2^n;\mathbb{R})} = \sqrt{n},$$

οπότε η Πρόταση Α΄.1.6 (α) δίνει

$$\|Rad_n f\|_{L^2(E_2^n;X)} \leqslant \sqrt{n}\|f\|_{L^2(E_2^n;X)}.$$

Το (γ) της ίδιας πρότασης δίνει μία τουλάχιστον το ίδιο καλή εκτίμηση στην περίπτωση που ο X είναι ισομορφικός με ένα χώρο Hilbert H και $d(X,H) \leqslant \sqrt{n}$ (κάτι που ισχύει για τους n-διάστατους χώρους με νόρμα, από το Θεώρημα του John): αφού $\max_A |c_A(g_r)| = 1$, έχουμε

$$\|Rad_n f\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant d(X,H)\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}. \tag{Α΄.1.6}$$

Τέλος, αν ο $X = H$ είναι χώρος Hilbert, το (β) της πρότασης δείχνει ότι

$$\|Rad_n\|_{L_2(H)\to L_2(H)} = 1.$$

Το παρακάτω θεώρημα ωστόσο, μας δίνει ένα πολύ καλύτερο φράγμα για την $\|Rad_n\|$.

Θεώρημα Α΄.1.8 (Pisier). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά C τέτοια ώστε, για κάθε χώρο με νόρμα X που είναι ισομορφικός με ένα χώρο Hilbert H, έχουμε*

$$\|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)} \leqslant C\log[d(X,H)+1]. \tag{Α΄.1.7}$$

Συγκεκριμένα, για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X,

$$\|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)} \leqslant C\log(n+1).$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος, θα επικαλεστούμε μια κλασική ανισότητα του Bernstein για τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα:

Λήμμα Α΄.1.9 (ανισότητα Bernstein). *Αν Q είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n, τότε*

$$\|Q'\|_\infty \leqslant 2n\|Q\|_\infty. \tag{Α΄.1.8}$$

Έστω $P(t) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} z_k t^k$ ένα πολυώνυμο βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$Q(t) := P\big(\tfrac{1}{2}\sin t\big) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{z_k}{2^k}\sin^k t$$

Το $Q(t)$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n (κάθε k-οστή δύναμη του $\sin t$ μπορεί να γραφεί σαν τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού k), οπότε εφαρμόζοντας το Λήμμα Α΄.1.9 έχουμε

$$\left|\frac{1}{2}P'(0)\right| = |Q'(0)| \leqslant 2n\|Q\|_\infty = 2n\sup_{|t|\leqslant\frac{1}{2}}|P(t)|.$$

Για κάθε πολυώνυμο $P(t) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} z_k t^k$ με μιγαδικούς συντελεστές, ισχύει δηλαδή ότι

$$|P'(0)| \leqslant 4n\max_{|t|\leqslant 1/2}|P(t)|. \tag{Α΄.1.9}$$

Κάνοντας χρήση της παραπάνω ανισότητας, έχουμε την ακόλουθη πρόταση που είναι το κρίσιμο βήμα για την απόδειξη της εκτίμησης του Pisier για τη Rademacher προβολή.

Πρόταση Α′.1.10. *Έστω $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$. Υπάρχει ένα προσημασμένο μέτρο μ στο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ με κύμανση $\|\mu\| \leqslant 4l$, το οποίο ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

$$\int_{-1/2}^{1/2} t d\mu(t) = 1 \quad , \quad \int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) = 0 \quad , \quad k = 0, 2, \dots, l. \tag{Α′.1.10}$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_l$ τον χώρο όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ ίσου με l, και ορίζουμε το συναρτησιακό $F : \mathcal{P}_l \to \mathbb{R}$ με

$$F(p) = p'(0).$$

Από την ανισότητα (Α′.1.9) παίρνουμε τότε ότι

$$|F(p)| = |p'(0)| \leqslant 4l \max_{t \in [-1/2, 1/2]} |p(t)| \quad , \quad p \in \mathcal{P}_l.$$

Από το θεώρημα Hahn-Banach, η F επεκτείνεται σε μια $\tilde{F} \in \big(C[-1/2, 1/2]\big)^*$ με $\|\tilde{F}\| \leqslant 4l$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει προσημασμένο μέτρο μ στο $[-1/2, 1/2]$ με $\|\mu\| \leqslant 4l$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) = \tilde{F}(t^k) = (t^k)'|_{t=0} \quad , \quad k = 0, 1, \dots, l,$$

με άλλα λόγια τις (Α′.1.10). ■

Απόδειξη του Θεωρήματος Α′.1.8. Θεωρούμε το μέτρο μ της προηγούμενης Πρότασης, και ορίζουμε

$$g(\epsilon) = \int_{-1/2}^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + t r_i(\epsilon)\big) d\mu(t).$$

Επειδή $\prod_{i=1}^{n} \big(1 + t r_i(\epsilon)\big) = \sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon)$, έχουμε

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon) d\mu(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\left(\int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) \right) \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_i(\epsilon) + \sum_{k=l+1}^{n} \left(\left(\int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) \right) \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon) \right), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες του μ.

Θέτουμε $g_1 = g_r = \sum_{i=1}^{n} r_i$, $g_2 = \sum_{k=l+1}^{n} \big[\big(\int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t)\big) \sum_{|A|=k} w_A\big]$, και βλέπουμε ότι $g = g_1 + g_2$. Έχουμε επιπλέον

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_1(E_2^n;\mathbb{R})} &= \int_{E_2^n} \left| \int_{-1/2}^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + t r_i(\epsilon)\big) d\mu(t) \right| d\mu_n(\epsilon) \\ &\leqslant \int_{E_2^n} \left(\int_{-1/2}^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + t r_i(\epsilon)\big) d\mu^+(t) + \int_{-1/2}^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + t r_i(\epsilon)\big) d\mu^-(t) \right) d\mu_n(\epsilon) \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{E_2^n} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + t r_i(\epsilon)\big) d\mu_n(\epsilon) \right) d|\mu|(t). \end{aligned}$$

Από την Πρόταση Α′.1.2 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{E_2^n}\prod_{i=1}^n\big(1+tr_i(\epsilon)\big)d\mu_n(\epsilon) &= \sum_{k=0}^n t^k\left(\sum_{|A|=k}\int_{E_2^n} w_A(\epsilon)d\mu_n(\epsilon)\right)\\ &= \sum_{k=0}^n t^k\left(\sum_{|A|=k}\int_{E_2^n} w_A(\epsilon)w_{\varnothing}(\epsilon)d\mu_n(\epsilon)\right) = 1.\end{aligned}$$

Έπεται έτσι ότι

$$\|g\|_{L_1(E_2^n;\mathbb{R})} \leqslant \|\mu\| \leqslant 4l$$

και άρα

$$\|f * g\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)}\|g\|_{L_1(E_2^n;\mathbb{R})} \leqslant 4l\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}. \tag{Α′.1.11}$$

Παρατηρούμε εν συνεχεία ότι αν $g_2 = \sum_A w_A c_A^{g_2} = \sum_{k=l+1}^n \sum_{|A|=k} w_A c_A^{g_2}$, τότε

$$c_A^{g_2} = \int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) \quad \text{όπου } k = |A|,$$

οπότε από την Πρόταση Α′.1.6 (γ) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\|f * g_2\|_{L_2(E_2^n;X)} &\leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \max_A |c_A^{g_2}|\, d(X,H)\\ &= \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \max_{l<k\leqslant n}\left|\int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t)\right| d(X,H)\\ &\leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \frac{1}{2^{l+1}}\|\mu\|\, d(X,H)\\ &\leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \frac{4l}{2^{l+1}}\, d(X,H).\end{aligned} \tag{Α′.1.12}$$

Από τις (Α′.1.11) και (Α′.1.12), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\|Rad_n f\|_{L_2(E_2^n;X)} &= \|f * (g - g_2)\|_{L_2(E_2^n;X)}\\ &= \|(f * g) - (f * g_2)\|_{L_2(E_2^n;X)}\\ &\leqslant \|(f * g)\|_{L_2(E_2^n;X)} + \|(f * g_2)\|_{L_2(E_2^n;X)}\\ &\leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)}\left(4l + 4l\frac{d(X,H)}{2^{l+1}}\right).\end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$. Για να δείξουμε το ζητούμενο εργαζόμαστε ως εξής: Έστω s ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι

$$2^s \leqslant d(X,H) < 2^{s+1}.$$

Θέτουμε $l = s+2$, οπότε $l \geqslant 2$ και

$$2^l \leqslant 4\cdot d(X,H) < 2^{l+1}.$$

Ισχύει τότε ότι

$$\left(4l + 4l\frac{d(X,H)}{2^{l+1}}\right) < 5l$$

ενώ ταυτόχρονα,

$$l = s + 2 \leqslant \log_2(d(X, H)) + 2 \leqslant c_0 \log[d(X, H) + 1]$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$. Έπεται ότι

$$\|Rad_n f\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant 5l\|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant c \log[d(X, H) + 1]\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}$$

όπου $c = 5c_0$. ■

Παράρτημα Β′

Η αρχή της τοπικής αυτοπάθειας

Β′.1 Αρχή της τοπικής αυτοπάθειας

Η αρχή της τοπικής αυτοπάθειας αποδείχθηκε από τους Lindenstrauss και Rosenthal. Ισχυρίζεται ότι, κατά κάποιον τρόπο, κάθε χώρος Banach είναι τοπικά αυτοπαθής, με την έννοια ότι για κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach X ο X^{**} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.

Θεώρημα Β′.1.1 (αρχή τοπικής αυτοπάθειας)**.** *Έστω X χώρος Banach, $E \subseteq X^{**}$ και $F \subseteq X^*$ με $\dim E < \infty$ και $\dim F < \infty$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : E \to X$ τέτοιος ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$, $T(x) = x$ για κάθε $x \in E \cap X$ και $x^*(T(x^{**})) = x^{**}(x^*)$ για κάθε $x^* \in F$ και $x^{**} \in E$.*

Η απόδειξη που θα περιγράψουμε οφείλεται στον Stegall [38]. Θα χρειαστούμε κάποια βοηθητικά αποτελέσματα.

Πρόταση Β′.1.2. *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με κλειστή εικόνα. Έστω $y \in Y$ τέτοιο ώστε η εξίσωση $T^{**}(x^{**}) = y$ να έχει λύση $x^{**} \in X^{**}$ με $\|x^{**}\| < 1$. Τότε η εξίσωση $T(x) = y$ έχει λύση $x \in X$ με $\|x\| < 1$.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι $y \in T(D_X)$, όπου D_X είναι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα του X.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $y \notin T(X)$. Τότε υπάρχει $y^* \in Y^*$ με $T^*(y^*) = 0$ και $y^*(y) = 1$. Όμως αυτό είναι άτοπο, διότι

$$[T^{**}(x^{**})](y^*) = y^*(y) = 1.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $y \in T(X) \setminus T(D_X)$. Από το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης το $T(D_X)$ είναι σχετικά ανοικτό στην $T(X)$, και από το διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach μπορούμε να βρούμε $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε $y^*(y) \geqslant 1$ αλλά $y^*(Tx) < 1$ για κάθε $x \in D_X$. Επεται ότι $\|T^*(y^*)\| \leqslant 1$, άρα $|x^{**}(T^*y^*)| < 1$, δηλαδή $|y^*(y)| < 1$, το οποίο είναι άτοπο. ■

Πρόταση Β′.1.3. *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με κλειστή εικόνα και έστω $K : X \to Y$ τελεστής πεπερασμένης τάξης. Τότε ο $T + K$ έχει επίσης κλειστή εικόνα.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο $T + K$ δεν έχει κλειστή εικόνα. Τότε υπάρχει φραγμένη ακολουθία (x_n) τέτοια ώστε $(T + K)(x_n) \to 0$ αλλά $d(x_n, \mathrm{Ker}(T + K)) \geqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Περνώντας σε υπακολουθία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Kx_n \to y \in Y$, άρα $Tx_n \to -y$. Τότε μπορούμε να βρούμε $x \in X$ με $Tx = -y$, άρα $Tx_n \to -y$. Έπεται ότι $\|Tx_n - Tx\| \to 0$, άρα $d(x_n - x, \mathrm{Ker}(T)) \to 0$. Συνεπώς, $y - Kx \in K(\mathrm{Ker}(T))$.

Έστω ότι $y - Kx = Ku$ για κάποιο $u \in \mathrm{Ker}(T)$. Τότε

$$d(x_n - x - u, \mathrm{Ker}(T)) \to 0,$$

και
$$\|Kx_n - Kx - u\| \to 0.$$
Αφού ο $K|_{\mathrm{Ker}(T)}$ έχει κλειστή εικόνα, αυτό σημαίνει ότι
$$d(x_n - x - u, \mathrm{Ker}(T) \cap \mathrm{Ker}(K)) \to 0.$$
Όμως $T(x+u) = -y = -K(x+u)$, άρα $x + u \in \mathrm{Ker}(T+K)$ και αυτό δείχνει ότι
$$d(x_n, \mathrm{Ker}(T+K)) \to 0,$$
σε αντίθεση με την υπόθεσή μας. ■

Πρόταση Β′.1.4. *Έστω X χώρος Banach, $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{m,n}$ ένας $m \times n$ πραγματικός πίνακας, και $B = (b_{jk})_{j,k=1}^{p.n}$ ένας $p \times n$ πραγματικός πίνακας. Έστω $y_1, \dots, y_m \in X$, $y_1^*, \dots, y_p^* \in X^*$, και $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1^{**}, \dots, x_n^{**} \in X^{**}$ με $\max_k \|x_k^{**}\| < 1$, τα οποία ικανοποιούν τις*
$$\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k^{**} = y_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m$$
και
$$y_j^*\left(\sum_{k=1}^n b_{jk} x_k^{**}\right) = t_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p.$$
Τότε υπαρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$ με $\max_k \|x_k\| < 1$, τέτοια ώστε
$$\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = y_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m$$
και
$$y_j^*\left(\sum_{k=1}^n b_{jk} x_k\right) = t_j, \qquad 1 \leqslant j \leqslant p.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τελεστή $T_0 : \ell_\infty^n(X) \to \ell_\infty^m(X)$ με
$$T_0(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k\right)_{j=1}^m.$$
Θα δείξουμε ότι ο T_0 έχει κλειστή εικόνα. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι ο πίνακας A γράφεται στη μορφή $A = PDQ$, όπου οι P και Q είναι αντιστρέψιμοι, και ο D είναι της μορφής
$$D = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
όπου r είναι η τάξη του A. Έπεται ότι ο T_0 παραγοντοποιείται στη μορφή $T_0 = USV$, όπου οι U, V είναι αντιστρέψιμοι και ο S δίνεται από τον πίνακα D, οπότε έχει κλειστή εικονα.

Ορίζουμε τώρα $T : \ell_\infty^n(X) \to \ell_\infty^m(X) \oplus \ell_\infty^p$ με
$$T(x_1, \dots, x_n) = \left(T_0(x_1, \dots, x_n), \left(x_j\left(\sum_{k=1}^n b_{jk} x_k\right)\right)_{j=1}^p\right).$$
Από την Πρόταση Β′.1.3 συμπεραίνουμε ότι ο T έχει κλειστή εικόνα. Τώρα, το ζητούμενο είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης Β′.1.3. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος Β′.1.1. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(1+\delta)(1-3\delta)^{-1} < 1+\varepsilon$ και ένα δ-δίκτυο $\{x_j^{**} : 1 \leqslant j \leqslant N\}$ της $\{x^{**} \in E : \|x^{**}\| = 1\}$. Θεωρούμε τον τελεστή $S : \mathbb{R}^N \to E$ με

$$S(t_1, \dots, t_N) = \sum_{j=1}^{N} t_j x_j^{**}.$$

Ορίζουμε $H = s^{-1}(E \cap X)$ και θεωρούμε μια βάση $(a^{(j)})_{j=1}^{m}$ του H. Έστω $S(a^{(j)}) = y_j \in E \cap X$. Θεωρούμε τον πίνακα $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{m,N}$, όπου $a^{(j)} = (a_{j1}, \dots, a_{jN})$.

Επιλέγουμε τώρα $x_1^*, \dots, x_N^* \in X^*$ ώστε $\|x_j^*\| = 1$ και $x_j^{**}(x_j^*) > 1-\delta$, και τέλος θεωρούμε μια βάση $\{z_1^*, \dots, z_l^*\}$ του F.

Θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων, ως προς $(x_1, \dots, x_N)$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} a_{jk} x_k &= y_j, \qquad && j = 1, 2, \dots, N \\ x_j^*(x_j) &= x_j^{**}(x_j^*), \qquad && j = 1, 2, \dots, N \\ z_j^*(x_j) &= x_j^{**}(z_j^*), \qquad && j = 1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

Το σύστημα αυτό έχει μια λύση στον X^{**}, την $(x_1^{**}, \dots, x_N^{**})$, και $\max_j \|x_j^{**}\| = 1$. Από την Πρόταση Β′.1.4 έπεται ότι έχει λύση $(x_1, \dots, x_N)$ στον X, με $\max_j \|x_j\| < 1+\delta$.

Αν ορίσουμε $S_1 : \mathbb{R}^N \to X$ με

$$S_1(t_1, \dots, t_N) = \sum_{j=1}^{N} t_j x_j,$$

από την κατασκευή βλέπουμε ότι αν $S(\mathbf{t}) = 0$ τότε $S_1(\mathbf{t}) = 0$, άρα $S_1 = TS$ για κάποιον τελεστή $T : E \to X$. Θέτουμε $V = T(E)$. Για κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$ χουμε

$$1 - \delta < \|x_j\| < 1 + \delta,$$

διότι $\|x_j\| \geqslant x_j^*(x_j) > 1-\delta$. Ένα απλό επιχείρημα διαδοχικής προσέγγισης δείχνει ότι $\|T\|\,\|T^{-1}\| < 1+\varepsilon$. Οι υπόλοιποι ισχυρισμοί του θεωρήματος προκύπτουν από την κατασκευή. ∎

Βιβλιογραφία

[1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Grad. Texts in Math. vol. 233, Springer, New York, 2006.

[2] D. Amir and V. D. Milman, *A quantitative finite-dimensional Krivine theorem*, Israel J. Math. **50** (1985), 1-12.

[3] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2000).

[4] A. Brunel and L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, Mathematical Systems Theory, **7** (1973), 294-299.

[5] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer (2007).

[6] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[7] R. Durrett, *Probability: theory and examples*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge university press (2010).

[8] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960), Jerusalem Academic Press, Jerusalem; Pergamon, Oxford (1961), 123-160.

[9] P. Enflo , J. Lindenstrauss and G. Pisier, *On the "three space problem"*, Mathematica Scandinavica, **36** (1975), 199-210.

[10] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications: volume II*, John Wiley & Sons, New York (1971).

[11] T. Figiel, J. Lindenstrauss and V. D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), 53-94.

[12] O. Friedland and O. Guédon, *Random embedding of ℓ_p^n into ℓ_r^N*, Mathematische Annalen, **350** (2011), 953-972.

[13] S. Guerre-Delabriere, *Classical Sequences in Banach Spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 166, Marcel Dekker, New York (1992).

[14] P. Habala, P. Hájek and V. Zizler, *Introduction to Banach Spaces, Volumes I and II*, Matfyzpress, Univerzity Karlovy, Prague (1996).

[15] S. Heinrich, *Ultraproducts in Banach space theory*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **313** (1980), 72-104.

[16] J. Hoffmann-Jørgensen, *Sums of independent Banach space valued random variables*, Studia Mathematica, **52** (1974), 159-186.

[17] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal and M. Zippin, *On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces*, Israel Journal of Mathematics, **9** (1971), 488-506.

[18] W. B. Johnson and G. Schechtman, *Embedding ℓ_p^m into ℓ_1^n*, Acta Math. **149** (1982), 71-85.

[19] J. P. Kahane, *Some random series of functions*, Cambridge studies in advanced mathematics, vol. 5, Cambridge University Press (1993).

[20] J. L. Krivine, *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés*, Annals of Mathematics, **104** (1976), 1-29.

[21] S. Kwapień, *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients* , Studia Mathematica, **44** (1972), 583-595.

[22] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, vol. 23 Springer, Berlin (1991).

[23] H. Lemberg, *Nouvelle démonstration d'un théorème de J.L. Krivine sur la finie représentation de l_p dans un espace de Banach*, Israel Journal of Mathematics, **39** (1981), 341-348.

[24] B. Maurey, *Type, cotype and K-convexity*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, vol. 2, North-Holland, Amsterdam (2003), 1299-1332.

[25] B. Maurey and G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. **58** (1976), no. 1, 45-90.

[26] R.E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag (1998).

[27] V. D. Milman, *New proof of the theorem of A. Dvoretzky on intersections of convex bodies*, Functional Analysis and Its Applications, **5** (1971), no. 4, 288-295.

[28] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite-Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1200 (1986).

[29] V.D. Milman and M. Sharir, *A new proof of the Maurey-Pisier theorem*, Israel Journal of Mathematics, **33** (1979), no. 1, 73-87.

[30] J.van Neerven, *Stochastic Evolution Equations* (2016), TU Delft OpenCourseWare, `https://ocw.tudelft.nl/courses/stochastic-evolution-equations/`

[31] G. Pisier, *On the dimension of the ℓ_p^n-subspaces of Banach spaces, for $1 \leqslant p < 2$*, Transactions of the American Mathematical Society, **276** (1983), 201-211.

[32] G. Pisier, *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1206 (1986), 167-241.

[33] G. Pisier, *Factorization of Linear Operators and the Geometry of Banach Spaces*, CBMS, vol. 60 (1986).

[34] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Math., Vol. 94 (1989).

[35] F.P. Ramsey, *On a problem of formal logic*, Proceedings of the London Mathematical Society, **30** (1930), 264-286.

[36] H. P. Rosenthal, *On a theorem of J.L. Krivine concerning block finite representability of l^p in general Banach spaces*, Journal of Functional Analysis, **28** (1978), 197-225.

[37] S. Ross, *Βασικές Αρχές Θεωρίας Πιθανοτήτων*, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, (2011).

[38] C. Stegall, *A proof of the principle of local reflexivity*, Proceedings of the American Mathematical Society, **78** (1980), 154-156.

[39] J. Stern, *Ultrapowers and local properties of Banach spaces*, Transactions of the American Mathematical Society, **240** (1978) 231-252.

[40] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach–Mazur Distances and Finite-Dimensional Operator Ideals*, Pitman Monographs, vol. 38 (1989).

[41] Tsirel'son, B. S., *Not every Banach space contains an imbedding of l_p or c_0*, Functional Analysis and Its Applications, **8** (1974), no. 2, 138-141.

[42] S. R. S. Varadhan, *Probability theory*, volume 7 of Courant Lecture Notes in Mathematics, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York (2001).

[43] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 25, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[44] Γ. Κουμουλλής και Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα (2005).

[45] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας και Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα (1997).

[46] Δ. Χελιώτης, *Εισαγωγή στον Στοχαστικό Λογισμό*, Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα, `www.kallipos.gr`