Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστρονομίας, Αστροφυσικής και Μηχανικής

Διπλωματική Εργασία

Φαινόμενο σήραγγος του πεδίου Higgs στο υπόβαθρο μελανής οπής

Ιωάννης Δ. Γιαλαμάς

Επιβλέπων καθηγητής:Νικόλαος Τετράδης

Αθήνα 2017

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστρονομίας, Αστροφυσικής και Μηχανικής

Διπλωματική Εργασία

Φαινόμενο σήραγγος του πεδίου **Higgs** στο υπόβαθρο μελανής οπής

Ιωάννης Δ. Γιαλαμάς

Τριμελής επιτροπή :

Καθηγητής Νικόλαος Τετράδης

Αναπ. Καθηγητής Θεοδόσιος Χριστοδουλάκης

Αναπ. Καθηγητής Θεοχάρης Αποστολάτος

Abstract

The subject of this diploma thesis is related to vacuum decay, namely the transition from false vacuum to true. Initially, there is an introduction in quantum tunneling of particles through the method of path integrals in Euclidean spacetime, as well as an analysis of the same phenomenon for scalar fields in flat and curved spacetime. Then, the effective potential of the Higgs field is calculated in the context of Quantum Field Theory through the contributions of the Standard Model particles. In the following section, there is an introduction to black hole thermodynamics. The Gibbons-Hawking surface term is analyzed, the Hawking temperature in Schwarzschild background is extracted and the relation between Euclidean action and free energy is proven. In the last chapter, the decay of the Higgs field in the presence of a black hole is analyzed and its probability is calculated as a function of the energy of the bounce contribution and the number of primordial black holes during the radiation-dominated era of the early Universe.

Subject Area: Quantum Mechanics, Quantum Field Theory, General Relativity, Cosmology.

Key Words : Instantons, Vacuum Decay, Higgs Field , Black holes.

Περίληψη

Το αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας σχετίζεται με τη διάσπαση του κενού, δηλαδή με τη μετάβαση από το ψευδές κενό στο αληθές. Αρχικά γίνεται μία εισαγωγή στο κβαντικό φαινόμενο σήραγγας σωματιδίου μέσω της χρήσης ολοκληρωμάτων διαδρομών σε Ευκλείδειο χωρόχρονο, αλλά και ανάλυση του ίδιου φαινομένου για βαθμωτά πεδία σε επίπεδο και καμπύλο χωρόχρονο. Στη συνέχεια υπολογίζεται το ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs στα πλαίσια της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου μέσα από τις συνεισφορές των διαφόρων σωματιδίων του Καθιερωμένου Προτύπου. Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στη θερμοδυναμική των μελανών οπών. Αναλύεται ο επιφανειακός όρος Gibbons-Hawking, εξάγεται η θερμοκρασία Hawking σε υπόβαθρο Schwarzschild και αποδεικνύεται η σχέση μεταξύ Ευκλείδειας δράσης και ελεύθερης ενέργειας. Στο τελευταίο κεφάλαιο αναλύεται η διάσπαση του πεδίου Higgs παρουσία μελανής οπής και υπολογίζεται η πιθανότητα αυτής, σαν συνάρτηση της ενέργειας του σχηματισμού και του αριθμού των αρχέγονων μελανών οπών κατά την περίοδο της ακτινοβολίας στο πρώιμο Σύμπαν.

Θεματική περιοχή: Κβαντική Μηχανική, Κβαντική Θεωρία Πεδίου, Γενική Σχετικότητα, Κοσμολογία.

Λέξεις κλειδιά : Instantons, Διάσπαση κενού, Πεδίο Higgs , Μελανές οπές.

Ευχαριστίες

Πρώτον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα μου κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας Καθηγητή και Πρόεδρο του τμήματος Φυσικής Νικόλαο Τετράδη για την αμέριστη βοήθεια και υπομονή που υπέδειξε καθ' όλη τη διάρκεια προετοιμασίας της παρούσας εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή Θεοδόσιο Χριστοδουλάκη ως μέλος της τριμελούς επιτροπής και ως επιβλέποντα της πτυχιακής μου εργασίας για την πολύτιμη βοήθεια και τις χρήσιμες παρατηρήσεις του τα τελευταία έτη. Ακόμη, ευχαριστώ τον καθηγητή Απόστολο Μαστιχιάδη για τη βοήθειά του σε διάφορα θέματα σχετικά με τις σπουδές μου. Επίσης, τον Αναπληρωτή Καθηγητή Θεοχάρη Αποστολάτο ως μέλος της τριμελούς επιτροπής. Επιπρόσθετα, τον συμφοιτητή μου Διμίτερ Τσάνκο για τη συνεργασία μας κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Επίσης, ευχαριστώ την Ξένια Λαζάρου για τη φιλολογική επιμέλεια της παρούσας εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου που με στήριξε και συνεχίζει να με στηρίζει όλα αυτά τα χρόνια.

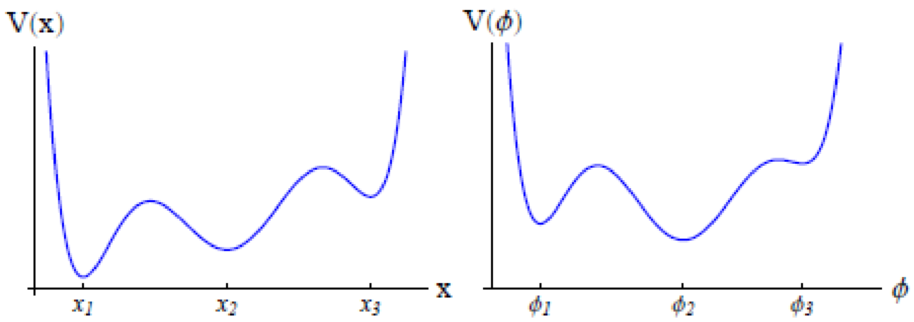
Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Μία πτυχή της Κλασικής Κβαντικής Μηχανικής που δεν έχει ακόμη κατανοηθεί πλήρως στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου είναι το φαινόμενο σήραγγας (tunneling). Στο κεφάλαιο 2 θα ασχοληθούμε με τα αντικείμενα που ονομάζονται instantons , τα οποία για ένα δεδομένο κβαντικό σύστημα αποτελούν τις λύσεις των εξισώσεων κίνησης στα στάσιμα σημεία. Το πεδιακό ανάλογο τους θα μας επιτρέψει να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του φαινομένου σήραγγας στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου.

Ας ξεκινήσουμε όμως από την απλή περίπτωση ενός σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση κάτω από την επίδραση ενός δυναμικού V(x) , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.1 . Αν το σωματίδιο βρίσκεται σε ηρεμία σε κάποιο από τα ελάχιστα του δυναμικού η Κλασική Μηχανική προβλέπει ότι θα παραμείνει εκεί για πάντα. Ομοίως το κενό ενός πεδίου $\phi(\vec{x})$ είναι το τοπικό ελάχιστο του δυναμικού του $V(\phi)$. Εάν το $V(\phi)$ έχει ελάχιστα ϕ_1, ϕ_2 και ϕ_3 (βλ. Σχήμα 1.1) οι σχηματισμοί ελάχιστης ενέργειας είναι οι καταστάσεις όπου το πεδίο παίρνει



Σχήμα 1.1: Αριστερό γράφημα: Δυναμικό σωματιδίου με ελάχιστα στις θέσεις x_1, x_2 και x_3. Δεξί γράφημα: Δυναμικό βαθμωτού πεδίου ϕ με ελάχιστα για τιμές του πεδίου ϕ_1, ϕ_2 και ϕ_3.

τις τιμές ϕ_1, ϕ_2 ή ϕ_3. Ομοίως, εάν το πεδίο ξεκινήσει από την ηρεμία σε κάποιο από τα κενά, σε αναλογία με την Κλασική Μηχανική, θα παραμείνει για πάντα εκεί. Τα πράγματα φαίνεται να αλλάζουν αν συμπεριλάβουμε και την Κβαντική Μηχανική, καθώς το κβαντικό φαινόμενο σήραγγας, όπως αναφέραμε, θα επιτρέψει στο σωματίδιο ή στο πεδίο αντίστοιχα να ξεπεράσει το φράγμα του δυναμικού και να προχωρήσει σε κάποιο μετασταθές ελάχιστο (κενό).

Το ίδιο μπορεί να συμβεί κι αν φέρουμε το σύστημα σε επαφή με ένα λουτρό θερμότητας. Το σύστημα μπορεί να απορροφήσει ενέργεια και ξεπερνώντας το φράγμα του δυναμικού να βρεθεί σε ένα πιο ευσταθές ελάχιστο. Στην πραγματικότητα υπάρχει και η δυνατότητα να πάει από ένα πιο ευσταθές σε ένα λιγότερο ευσταθές κενό.

Όταν προσθέσουμε και τη βαρύτητα στην εικόνα, η κατάσταση γίνεται πιο παράξενη αλλά και πιο ενδιαφέρουσα καθώς η ύπαρξη ορίζοντα δημιουργεί μη μηδενική θερμοκρασία Hawking που κάνει το θερμικό φαινόμενο σήραγγας πιο εφικτό.

Τι σημαίνουν όμως όλα αυτά;

Αν το Σύμπαν μας βρίσκεται σε μία κατάσταση ψευδοκενού (false vacuum), δηλαδή κενού μη - ελάχιστης ενέργειας, τότε υπάρχει η πιθανότητα να μεταπέσει στο αληθινό κενό (true vacuum), γεγονός που θα επιφέρει καταστροφικές συνέπειες!

Κεφάλαιο 2

Κβαντικό φαινόμενο σήραγγας

2.1 Κβαντικό φαινόμενο σήραγγας σωματιδίου (Instantons)

Η ενότητα αυτή είναι βασισμένη στο βιβλίο του Sidney Coleman Aspects of Symmetry (Selected Erice Lectures)[1].
Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση ενός σωματιδίου σε μία διάσταση σε κάποιο δυναμικό με απώτερο σκοπό να μεταφέρουμε τα αποτελέσματα στην περίπτωση ενός βαθμωτού πεδίου.
Επίσης, σημαντικό είναι να αναφέρουμε τη σύμβαση που θα ακολουθήσουμε όσον αφορά τη μετρική του χωροχρόνου. Θα δουλέψουμε ταυτόχρονα σε Minkowski και Ευκλείδειο τετραδιάστατο χωρόχρονο. Η σύμβαση που χρησιμοποιούμε στο χώρο Minkowski είναι η $(-,+,+,+)$ με $x^0 = t\,, x^1 = x\,, x^2 = y\,, x^3 = z$. Στον Ευκλείδειο χώρο κάνουμε μία αναλυτική επέκταση στη χρονική συντεταγμένη, όπου την ορίζουμε ως $\tau = it$.
Αν

$$S_M = \int dt \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right)$$

είναι η δράση στο Minkowski χωρόχρονο, κάνοντας την εναλλαγή $\tau \to it$ έχουμε

$$S_M = \int d(-i\tau) \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d(-i\tau)} \right)^2 - V(x) \right) = i \int d\tau \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2 + V(x) \right) = iS_E, \tag{2.1}$$

όπου S_E είναι η δράση στον Ευκλείδειο χώρο την οποία για λόγους συντομίας θα τη συμβολίζουμε με S.

Παρατηρούμε ότι η Lagrangian $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x)$ εμφανίζεται στη δράση με ανεστραμμένο το δυναμικό $V(x)$.

2.1.1 Δράση σε Ευκλείδειο χωρόχρονο

Έστω τώρα ότι ένα σωματίδιο βρίσκεται αρχικά στη θέση x_i τη χρονική στιγμή $-T/2$ και μεταβαίνει στη θέση x_f τη χρονική στιγμή $+T/2$. Το πλάτος αυτής της μετάβασης υπολογίζεται με τη μέθοδο των ολοκληρωμάτων διαδρομών (βλ. κεφάλαιο 4). Το πλάτος που αναφέραμε είναι

$$\langle x_f, T/2 \mid x_i, -T/2 \rangle = N \int \mathcal{D}x \, e^{iS_M/\hbar}. \tag{2.2}$$

Όμως

$$\langle x_f, T/2 \mid x_i, -T/2 \rangle = \langle x_f | \, e^{-iH_M t/\hbar} \, | x_i \rangle \xlongequal{\tau = it} \langle x_f | \, e^{-HT/\hbar} \, | x_i \rangle$$

και

$$N \int \mathcal{D}x \, e^{iS_M/\hbar} \xlongequal{\tau = it} N \int \mathcal{D}x \, e^{-S/\hbar}.$$

Άρα

$$\langle x_f | \, e^{-HT/\hbar} \, | x_i \rangle = N \int \mathcal{D}x \, e^{-S/\hbar}, \tag{2.3}$$

όπου το $[\mathcal{D}x]$ συμβολίζει την ολοκλήρωση σε όλες τις διαδρομές που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες και το N είναι σταθερά κανονικοποίησης.

Το αριστερό μέλος της σχέσης (2.3) μπορεί να εκφραστεί σαν ανάπτυγμα των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας $H\,|n\rangle = E_n\,|n\rangle$, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\langle x_f | \, e^{-HT/\hbar} \, | x_i \rangle &= \sum_n e^{-E_n T/\hbar} \langle x_f \mid n \rangle \langle n \mid x_i \rangle \\
&= e^{-E_0 T/\hbar} \underbrace{\langle x_f \mid 0 \rangle \langle 0 \mid x_i \rangle}_{\Psi_0(x_f)\Psi_0^*(x_i)} + e^{-E_1 T/\hbar} \underbrace{\langle x_f \mid 1 \rangle \langle 1 \mid x_i \rangle}_{\Psi_1(x_f)\Psi_1^*(x_i)} + \ldots \\
&= e^{-E_0 T/\hbar} \left(\Psi_0(x_f)\Psi_0^*(x_i) + e^{-(E_1 - E_0)T/\hbar} \Psi_1(x_f)\Psi_1^*(x_i) + \ldots \right) \\
&\xlongequal{T \to \infty} e^{-E_0 T/\hbar} \Psi_0(x_f)\Psi_0^*(x_i),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

όπου $\Psi_0(x)$ είναι η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης στη θέση x.

Ας δούμε τώρα τι γίνεται με τη δράση. Παίρνοντας την 1ης τάξης μεταβολή της Ευκλείδειας δράσης και θεωρώντας ότι αυτή ελαχιστοποιείται κατά τη διαδρομή $\bar{x}(\tau)$ έχουμε[1]

$$\delta S = S[\bar{x}(\tau) + \delta x(\tau)] - S[\bar{x}(\tau)] = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \left(-\frac{d^2\bar{x}(\tau)}{d\tau^2} + V'(\bar{x}) \right). \tag{2.5}$$

Άρα η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{d^2\bar{x}(\tau)}{d\tau^2} = V'(\bar{x}). \tag{2.6}$$

[1] Από αυτό το σημείο και έπειτα θα θεωρήσουμε για ευκολία ότι $m = 1$.

Η παραπάνω εξίσωση είναι στην ουσία ο 2ος νόμος του Νεύτωνα σε ένα αρνητικό δυναμικό $-V(x)$. Η διαδρομή που δίνει τη μεγαλύτερη συνεισφορά στον εκθέτη της σχέσης (2.3) είναι η κλασική τροχιά σε αντίθετο δυναμικό.

Χρησιμοποιώντας τη διαίσθησή μας στην Κλασική Μηχανική κατανοούμε ότι είναι προφανές πως η λύση θα πρέπει να ικανοποιεί τη διατήρηση της ενέργειας, δηλαδή

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)^2 - V(\bar{x}) = \sigma\tau\alpha\vartheta. \tag{2.7}$$

Ας φανταστούμε τώρα μία αυθαίρετη συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + \sum_n c_n x_n(\tau), \tag{2.8}$$

όπου οι x_n είναι ορθοκανονικές συναρτήσεις που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες, δηλαδή

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau x_n(\tau) x_m(\tau) = \delta_{nm} \qquad \text{και} \qquad x_n(-T/2) = x_n(T/2) = 0. \tag{2.9}$$

Για το μέτρο του ολοκληρώματος διαδρομών θα ακολουθήσουμε την κανονικοποίηση του Coleman [1] , όπου

$$\mathcal{D}x = \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}}.$$

Η 2ης τάξης μεταβολή της δράσης (βλ. Παράρτημα A′) χρησιμοποιώντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση και αγνοώντας τους όρους τάξης $\mathcal{O}(\delta x)$ λόγω της σχέσης (2.6) είναι

$$S[\bar{x}(\tau) + \delta x(\tau)] = S[\bar{x}(\tau)] + \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \delta x \hat{W} \delta x + \mathcal{O}(\delta x^3), \tag{2.10}$$

όπου

- $$\delta x = \sum_n c_n x_n(\tau) \tag{2.11}$$

- $$\hat{W} = -\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}). \tag{2.12}$$

Έχουμε την ελευθερία να διαλέξουμε τις συναρτήσεις της βάσης μας $x_n(\tau)$ με τέτοιον τρόπο ώστε να είναι ιδιοσυναρτήσεις του Ερμιτιανού τελεστή $\hat{W}$.
Η εξίσωση ιδιοτιμών θα είναι

$$\begin{aligned} &\hat{W} x_n(\tau) = \lambda_n x_n \Rightarrow \\ &-\frac{d^2 x_n}{d\tau^2} + V''(\bar{x}) x_n = \lambda_n x_n. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.13) στη 2ης τάξης μεταβολή της δράσης (σχέση 2.10), έχουμε

$$\begin{aligned} S[\bar{x}+\delta x] &= S[\bar{x}] + \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \left(\sum_m c_m x_m(\tau) \sum_n \lambda_n c_n x_n(\tau)\right) \overset{(2.9)}{=\!=} \\ &= S[\bar{x}] + \frac{1}{2}\sum_m \sum_n c_m c_n \lambda_n \delta_{nm} = S[\bar{x}] + \frac{1}{2}\sum_n c_n^2 \lambda_n . \end{aligned} \tag{2.14}$$

Το πλάτος μετάβασης της σχέσης (2.3) θα είναι

$$\langle x_f | \, e^{-HT/\hbar} \, | x_i \rangle = N e^{-S[\bar{x}]/\hbar} \int \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2\hbar}\sum_n c_n^2 \lambda_n} . \tag{2.15}$$

Υπό την προϋπόθεση ότι $\lambda_n > 0$ μπορούμε να υπολογίσουμε το παραπάνω Γκαουσιανό[2] ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2}c_n^2 \frac{\lambda_n}{\hbar}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\lambda_n}} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_n}} .$$

Άρα

$$\langle x_f | \, e^{-HT/\hbar} \, | x_i \rangle = N e^{-S[\bar{x}]/\hbar} \prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \mathcal{O}(\hbar)\right]^{3} . \tag{2.16}$$

Για έναν τελεστή και τις ιδιοτιμές του ισχύει η σχέση

$$\prod_n \lambda_n = det \hat{W} , \tag{2.17}$$

άρα στη δική μας περίπτωση έχουμε

$$\prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} = \left[det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))\right]^{-1/2} . \tag{2.18}$$

Επομένως η σχέση (2.16) γίνεται

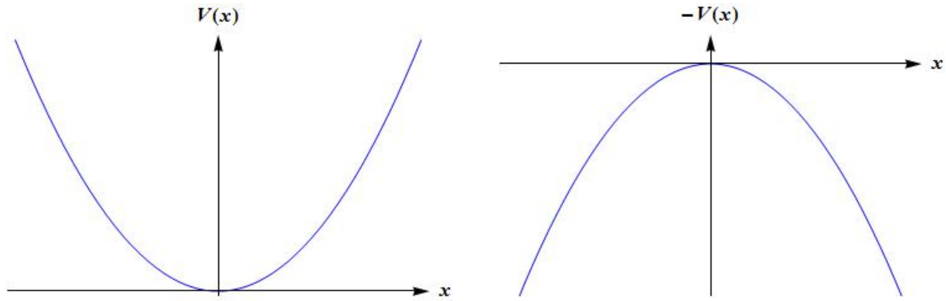
$$\langle x_f | \, e^{-HT/\hbar} \, | x_i \rangle = N e^{-S[\bar{x}]/\hbar} \left[det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))\right]^{-1/2} . \tag{2.19}$$

[2] $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

[3] Οι όροι τάξης $\mathcal{O}(\hbar)$ και πάνω προκύπτουν από μεταβολές της δράσης τις οποίες θα αγνοούμε από εδώ και στο εξής.

2.1.2 Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής

Ως το απλούστερο παράδειγμα σκεφτείτε τον απλό αρμονικό ταλαντωτή με δυναμικό $V(x) = \frac{1}{2}\omega^2 x^2$.



Σχήμα 2.1: Αριστερό γράφημα: Το δυναμικό του απλού αρμονικού ταλαντωτή. Δεξί γράφημα: Το ανεστραμμένο δυναμικό του απλού αρμονικού ταλαντωτή.

Λόγω της μορφής του δυναμικού, διαισθητικά από μία κλασική οπτική αναμένουμε ότι η λύση θα είναι περιοδική και έτσι επιλέγουμε τις συνοριακές συνθήκες $x_i = x_f = 0$. Παρατηρώντας το ανεστραμμένο δυναμικό του σχήματος 2.1 είναι προφανές ότι υπάρχει μόνο μία λύση που μπορεί να ικανοποιήσει τις συνοριακές συνθήκες, η οποία είναι

$$\bar{x}(\tau) = 0 \qquad \forall \tau. \tag{2.20}$$

Σε αυτήν την περίπτωση οι υπολογισμοί μπορούν να πραγματοποιηθούν με ακρίβεια.

Η δεύτερη παράγωγος του δυναμικού είναι $V''(\bar{x} = 0) = \omega^2$, άρα ο τελεστής $\hat{W}$ που ορίσαμε προηγουμένως θα είναι

$$\hat{W} = -\partial_\tau^2 + \omega^2. \tag{2.21}$$

Ενώ αντίστοιχα η δράση για αυτή τη μηδενική λύση θα είναι $S = 0$.

Άρα, σύμφωνα με τα παραπάνω το στοιχείο πίνακα (2.19) παίρνει τη μορφή

$$\langle 0| e^{-HT/\hbar} |0\rangle = N \left[det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)\right]^{-1/2}. \tag{2.22}$$

Σύμφωνα με τη σχέση (2.17) για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του τελεστή αρκεί να βρούμε τις ιδιοτιμές του. Επομένως πρέπει να λύσουμε την εξίσωση ιδιοτιμών του προβλήματός μας.

Έχουμε

$$\begin{aligned} &\hat{W} x_n(\tau) = \lambda_n x_n \Rightarrow \\ &\ddot{x_n} + (\lambda_n - \omega^2) x_n = 0 \qquad \text{με} \quad x_n(\pm T/2) = 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Η λύση που ικανοποιεί τη συνθήκη $x_n(-T/2) = 0$ είναι

$$x_n(\tau) = Asin\left[\sqrt{\lambda_n - \omega^2}\,(\tau + T/2)\right]. \tag{2.24}$$

Για να ικανοποιείται και η 2η συνθήκη $x_n(T/2) = 0$ πρέπει

$$sin\left(\sqrt{\lambda_n - \omega^2}\cdot T\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_n - \omega^2}\cdot T = n\pi \Rightarrow$$

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 + \omega^2, \qquad n = 1, 2, \cdots [4]. \tag{2.25}$$

Έτσι παίρνουμε

$$N\prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} = \underbrace{N\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2\pi^2}{T^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{f_1}\underbrace{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\omega^2T^2}{\pi^2n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}}_{f_2}. \tag{2.26}$$

Ο πρώτος όρος δεν έχει εξάρτηση από το ω και συμπίπτει με την κλασική συμβολή ενός ελεύθερου σωματιδίου. Αυτό σημαίνει ότι[5] [6]

$$\begin{aligned} f_1 &= \langle 0|\, e^{-p^2T/2\hbar}\, |0\rangle \\ &= \int dp\, \langle 0|\, e^{-p^2T/2\hbar}\, |p\rangle \, \langle p \mid 0\rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-p^2T/2\hbar} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar T}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Για το 2ο όρο θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = \frac{sin\pi z}{\pi z}. \tag{2.28}$$

Στην περίπτωσή μας $z = i\frac{\omega T}{\pi}$, άρα[7]

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\omega^2T^2}{\pi^2n^2}\right) = \frac{sinh(\omega T)}{\omega T}. \tag{2.29}$$

[4] Για $n = 0$ το x_0 μηδενίζεται ταυτοτικά.
[5] Ισχύει ότι $\int dp\, |p\rangle \langle p| = 1$.
[6] Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\langle 0 \mid p\rangle = \langle p \mid 0\rangle = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar}}$.
[7] Ισχύει η σχέση $sin(ix) = isinh(x)$.

Επομένως

$$f_2 = \sqrt{\omega T}(sinh(\omega T))^{-1/2}. \tag{2.30}$$

Η σχέση (2.22) γίνεται

$$\begin{aligned} \langle 0| e^{-HT/\hbar} |0\rangle &= N\prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\hbar T}}\sqrt{\omega T}(sinh(\omega T))^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}e^{\frac{-\omega T}{2}}(1-e^{-2\omega T})^{-1/2} = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}e^{\frac{-\omega T}{2}}(1+\frac{1}{2}e^{-2\omega T}+...). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Για $T \to \infty$

$$\langle 0| e^{-HT/\hbar} |0\rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}e^{\frac{-\omega T}{2}}. \tag{2.32}$$

Συγκρίνοντας τη (2.31) με τη (2.4) βλέπουμε ότι η ενέργεια της βασικής στάθμης είναι

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{2.33}$$

και για τις κυματοσυναρτήσεις της βασικής στάθμης ισχύει

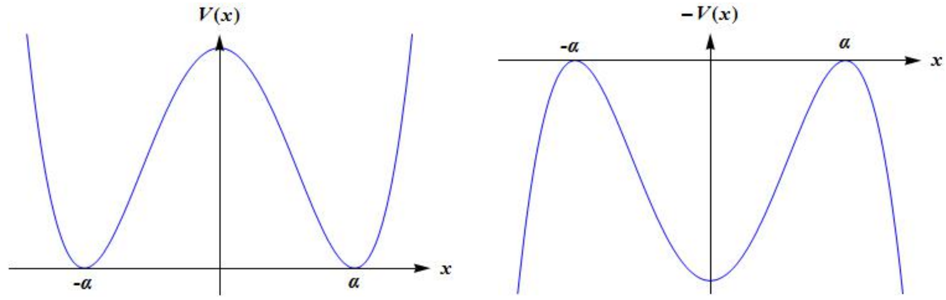
$$|\Psi_0(0)|^2 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}. \tag{2.34}$$

Το παραπάνω είναι το ακριβές αποτέλεσμα για τον αρμονικό ταλαντωτή και μία προσέγγιση για όλα τα άλλα δυναμικά με ένα πηγάδι.

2.1.3 Διπλά πηγάδια δυναμικού

Έστω ένα δυναμικό με διπλό πηγάδι της μορφής $V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2$. Για το οποίο ισχύει

$$V''(\pm a) = \omega^2 = 8\lambda a^2. \tag{2.35}$$



Σχήμα 2.2: Αριστερό γράφημα: Το δυναμικό $V(x) = \lambda(x^2 - a^2)^2$. Δεξί γράφημα: Το ανεστραμμένο δυναμικό $-V(x)$.

Στην κλασική περίπτωση αν ένα σωματίδιο είναι παγιδευμένο σε κάποιο ελάχιστο, τότε αν δεν υπάρχουν εξωτερικές επιδράσεις (όπως θερμικές διεγέρσεις) θα παραμείνει για πάντα εκεί. Στην κβαντική περίπτωση όμως, το φαινόμενο σήραγγας μπορεί να επιτρέψει στο σωματίδιο να δραπετεύσει από το ελάχιστο.

Από τη διατήρηση της ενέργειας (2.7) για $E = 0$[8] έχουμε ότι

$$\frac{1}{2}\dot{\bar{x}}^2 = V(\bar{x}) \Rightarrow \dot{\bar{x}} = \sqrt{2V(\bar{x})}. \tag{2.36}$$

Αν αναπτύξουμε κατά Taylor το $\sqrt{2V(\bar{x})}$ γύρω από το $\bar{x} = a$ έχουμε

$$\sqrt{2V(\bar{x})} \simeq \omega(a - \bar{x}). \tag{2.37}$$

Άρα από (2.36) και (2.37) $\Rightarrow$

$$(a - \bar{x}) \propto e^{-\omega T}, \tag{2.38}$$

το οποίο μας λέει ότι το instanton έχει χαρακτηριστικό μέγεθος $1/\omega$.

Η δράση για ένα instanton δίνεται από την

$$S(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)^2 + V\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \dot{\bar{x}}^2 = \int_{-a}^{+a} d\bar{x}\sqrt{2V(\bar{x})}. \tag{2.39}$$

Στην περίπτωση του δυναμικού που έχουμε υποθέσει η σχέση (2.36) μπορεί να επιλυθεί ακριβώς ως εξής

$$\dot{\bar{x}} = \pm\sqrt{2\lambda}(a^2 - \bar{x}^2) \Rightarrow \frac{d\bar{x}}{a^2 - \bar{x}^2} = \pm\sqrt{2\lambda} d\tau \Rightarrow$$

$$\bar{x} = \pm a\, tanh(\sqrt{2\lambda} a(\tau - \tau_c)), \tag{2.40}$$

[8] Προκύπτει επειδή η δράση πρέπει να είναι πεπερασμένη για μεγάλα T και τα σωματίδια ακίνητα στις κορυφές του δυναμικού.

ή αφού $\omega^2 = 8\lambda a^2$ η (2.40) γράφεται

$$\bar{x} = \pm a\, tanh\left(\frac{\omega}{2}(\tau - \tau_c)\right) \xrightarrow{\tau\to\infty} \pm a. \tag{2.41}$$

Η $+a$ αντιστοιχεί σε instanton και η $-a$ σε anti-instanton . Πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε και τη δράση για τη λύση instanton .
Έχουμε

$$S(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \dot{\bar{x}}^2 = \frac{a^2\omega^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \frac{1}{cosh^4[\frac{\omega}{2}(\tau-\tau_c)]} = \frac{\omega^3}{16\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{1}{cosh^4\xi}.$$

Αν θέσουμε $u = tanh\xi$ το ολοκλήρωμα δίνει $\frac{4}{3}$, άρα

$$S(\bar{x}) = \frac{\omega^3}{12\lambda}. \tag{2.42}$$

Ας ασχοληθούμε τώρα με τον υπολογισμό του πλάτους για την περίπτωση που έχουμε tunneling . Η σχέση που είχαμε αποδείξει νωρίτερα για μετάβαση από το $-a$ στο $+a$ γίνεται

$$\langle a|\, e^{-HT/\hbar}\, |{-a}\rangle = Ne^{-S[\bar{x}]/\hbar}\left[det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))\right]^{-1/2}. \tag{2.43}$$

Νωρίτερα στην παράγραφο 2.1.2 υπολογίσαμε την παραπάνω ορίζουσα για την περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή (σχέση 2.32). Δεδομένου τώρα ότι τα δύο ελάχιστα του διπλού πηγαδιού συμπεριφέρονται σε τοπικό επίπεδο, όπως το μονό πηγάδι και δεδομένου ότι η κβαντική κατάσταση περνάει τον περισσότερο χρόνο της πολύ κοντά σε κάποιο από τα ελάχιστα, η φυσική μας διαίσθηση λέει ότι η ορίζουσα του διπλού πηγαδιού θα είναι σαν αυτή του αρμονικού ταλαντωτή με κάποιες μικρές διορθώσεις. Αν παραμετροποιήσουμε τη διόρθωση με έναν συντελεστή K έχουμε ότι

$$N\left[det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))\right]^{-1/2} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2}K. \tag{2.44}$$

Έτσι διαπιστώνουμε ότι για ένα instanton το πλάτος μετάβασης είναι

$$\langle a|\, e^{-HT/\hbar}\, |{-a}\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2}Ke^{-S[\bar{x}]/\hbar}. \tag{2.45}$$

Όμως η ιστορία δεν τελειώνει εδώ. Για μεγάλους χρόνους (π.χ. για $T \gg \frac{1}{\omega}$) θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και την επίδραση των instantons που "συμβαίνουν" σε κάθε ενδιάμεσο χρόνο. Πριν υπολογίσουμε το K θα πρέπει να διευκρινιστούν ορισμένα σημεία σχετικά με την εξίσωση ιδιοτιμών (2.13). Για να υπολογίσουμε τα Γκαουσιανά ολοκληρώματα που είχαν προκύψει από το ολοκλήρωμα διαδρομών (2.15) χρειάστηκε να υποθέσουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές. Όμως εξαιτίας της αναλλοιώτητας του χρόνου των εξισώσεων κίνησης θα υπάρχει και μία ιδιοσυνάρτηση $x_1(\tau)$ με ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0$.

Έχουμε ότι

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau + d\tau) = \bar{x}(\tau) + \bar{x}(\tau + d\tau) - \bar{x}(\tau) = \bar{x}(\tau) + \frac{d\bar{x}}{d\tau}d\tau + \cdots \tag{2.46}$$

Επίσης από την (2.8) για $n = 1$ ($\lambda_1 = 0$) έχουμε

$$x(\tau) = \bar{x}(\tau) + c_1 x_1(\tau). \tag{2.47}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.46) και (2.47) παίρνουμε

$$x_1 c_1 = \frac{d\bar{x}}{d\tau}d\tau \Rightarrow \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{1}{c_1}\frac{d\bar{x}}{d\tau}. \tag{2.48}$$

Στη συνέχεια κανονικοποιούμε θεωρώντας ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\frac{dx_1}{d\tau}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{c_1}\right)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\frac{d\bar{x}}{d\tau}\right)^2}_{S(\bar{x})} = 1 \Rightarrow c_1 = S(\bar{x})^{1/2}.$$

Άρα

$$x_1 = S(\bar{x})^{-1/2}\frac{d\bar{x}}{d\tau}. \tag{2.49}$$

Όπως είπαμε έχουμε μία μηδενική ιδιοτιμή που δημιουργεί απειρισμό στο Γκαουσιανό ολοκλήρωμα και υπάρχει φόβος ότι η κατάστασή μας δε θα κανονικοποιείται.
Ευτυχώς δεν έχουμε τίποτα να φοβόμαστε, διότι αυτή η φαινομενική απόκλιση στο ολοκλήρωμα αντιστοιχεί σε ολοκλήρωση πάνω στους χρόνους του instanton που θα δώσουν όπως περιμένουμε κάποια εξάρτηση από το χρόνο T.
Για να δείξουμε το παραπάνω θα χρειαστεί να μετατρέψουμε την ολοκλήρωση στο dc_1 σε ολοκλήρωση στο $d\tau_c$, όπου τ_c είναι το κέντρο του instanton .

Σύμφωνα με τη σχέση (2.8) για μία μικρή αλλαγή στο $d\tau_c$ έχουμε

$$dx = \frac{d\bar{x}}{d\tau}d\tau_c, \tag{2.50}$$

ενώ για μία μικρή αλλαγή στο c_1 έχουμε

$$dx = x_1 dc_1. \tag{2.51}$$

Τελικά συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο ότι

$$dc_1 = S(\bar{x})^{1/2}d\tau_c. \tag{2.52}$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω με $1/\sqrt{2\pi\hbar}$ καταλήγουμε στην

$$\frac{dc_1}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \sqrt{\frac{S(\bar{x})}{2\pi\hbar}} d\tau_c, \tag{2.53}$$

η οποία θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του πλάτους μετάβασης.

Αν σκεφτούμε λίγο περισσότερο θα δούμε ότι η λύση του ενός instanton δεν είναι η μοναδική. Στην πραγματικότητα έχουμε μία αλυσίδα από instantons και anti-instantons που πηγαίνουν από το ένα κενό στο άλλο. Για να πάμε από το $-a$ στο $+a$ χρειαζόμαστε ένα instanton , ενώ για να πάμε από το $+a$ στο $-a$ ένα anti-instanton . Στην περίπτωση που έχουμε n τέτοιες λύσεις η (2.44) γενικεύεται στην

$$N\left[det(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))\right]^{-1/2} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} e^{-\omega T/2} K^n. \tag{2.54}$$

Για να υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης πρέπει όπως είχαμε αναφέρει να ολοκληρώσουμε και στο συντελεστή c_1 που αντιστοιχούσε σε μηδενική ιδιοτιμή. Σύμφωνα όμως με τη σχέση (2.53) η ολοκλήρωση αυτή μετατράπηκε σε ολοκλήρωση στα κέντρα t_c των λύσεων.
Άρα το ολοκλήρωμα για n λύσεις είναι

$$\int_{-T/2}^{T/2} d\tau_1 \int_{-T/2}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{-T/2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n = \frac{T^n}{n!}. \tag{2.55}$$

Τελικά αν αθροίσουμε σε όλα τα n το πλάτος είναι

$$\langle a|\, e^{-HT/\hbar} \,|{-a}\rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\omega T/2} \sum_{n \to odd} \frac{\left(K e^{-S[\bar{x}]/\hbar} T\right)^n}{n!} \tag{2.56}$$

και για επιστροφή στο $-a$

$$\langle -a|\, e^{-HT/\hbar} \,|{-a}\rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\omega T/2} \sum_{n \to even} \frac{\left(K e^{-S[\bar{x}]/\hbar} T\right)^n}{n!}. \tag{2.57}$$

Οι παραπάνω μπορούν να γραφούν ως εξής[9]:

$$\langle \pm a|\, e^{-HT/\hbar} \,|{-a}\rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\omega T/2} \frac{1}{2} \left[e^{K e^{-S[\bar{x}]/\hbar} T} \mp e^{-K e^{-S[\bar{x}]/\hbar} T} \right]. \tag{2.58}$$

Αν $|+\rangle$ και $|-\rangle$ είναι οι ιδιοκαταστάσεις ελάχιστης ενέργειας, έχουμε σύμφωνα με τη σχέση (2.4)

$$\langle a|\, e^{-HT/\hbar} \,|{-a}\rangle = e^{-E_- T/\hbar} \underbrace{\langle a \mid -\rangle \langle - \mid -a\rangle}_{\Psi_-(+a)\Psi_-^*(-a)} + e^{-E_+ T/\hbar} \underbrace{\langle a \mid +\rangle \langle + \mid -a\rangle}_{\Psi_+(+a)\Psi_+^*(-a)}. \tag{2.59}$$

[9] Έχουμε $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, άρα $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x^n}{n!} + \frac{(-x)^n}{n!}) = \sum_{n \to even} \frac{x^n}{n!}$ και $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x^n}{n!} - \frac{(-x)^n}{n!}) = \sum_{n \to odd} \frac{x^n}{n!}$.

Αναλύοντας την (2.58) έχουμε

$$\langle \pm a| \, e^{-HT/\hbar} \, |-a\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\omega T/2} e^{K e^{-S[\bar{x}]/\hbar} T} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\omega T/2} e^{-K e^{-S[\bar{x}]/\hbar} T}. \tag{2.60}$$

Συγκρίνοντας τις (2.59) και (2.60) βρίσκουμε ότι οι ενέργειες είναι

$$E_{\pm} = \frac{\hbar\omega}{2} \pm \hbar K e^{-S[\bar{x}]/\hbar}, \tag{2.61}$$

ενώ υπολογίζοντας και τα άλλα πλάτη και συγκρίνοντας πάλι τις σχέσεις βρίσκουμε ότι για τις κυματοσυναρτήσεις ισχύει

$$\begin{aligned} \Psi_+(+a)\Psi_+^*(+a) &= \Psi_+(-a)\Psi_+^*(-a) = \Psi_-(+a)\Psi_-^*(-a) \\ &= -\Psi_+(+a)\Psi_+^*(-a) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Πλέον όσα έχουμε αναφέρει μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε τον παράγοντα K, δηλαδή τον παράγοντα διόρθωσης στον αρμονικό ταλαντωτή. Από τη σχέση (2.56) για ένα instanton έχουμε

$$\begin{aligned} \langle a| \, e^{-HT/\hbar} \, |-a\rangle &= \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\omega T/2} K e^{-S[\bar{x}]/\hbar} T \\ &= N \left[det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)\right]^{-1/2} K T e^{-S[\bar{x}]/\hbar}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Ενώ από τις (2.43) και (2.53) έχουμε

$$\langle a| \, e^{-HT/\hbar} \, |-a\rangle = NT\sqrt{\frac{S[\bar{x}]}{2\pi\hbar}} \left[det'(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))\right]^{-1/2} e^{-S[\bar{x}]/\hbar}. \tag{2.64}$$

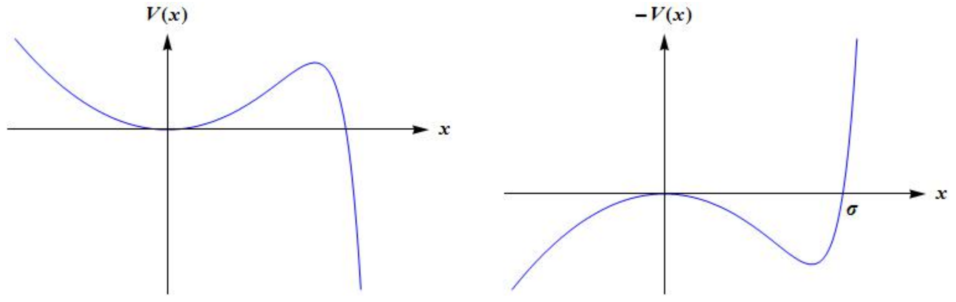
Από σύγκριση των (2.63) και (2.64) παίρνουμε ότι[10]

$$K = \sqrt{\frac{S[\bar{x}]}{2\pi\hbar}} \left| \frac{det(-\partial_\tau^2 + \omega^2)}{det'(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}))} \right|^{1/2}. \tag{2.65}$$

[10] Ο τόνος στην ορίζουσα δηλώνει ότι η μηδενική ιδιοτιμή πρέπει να παραληφθεί όταν υπολογιστεί η ορίζουσα.

2.1.4 Ασταθείς καταστάσεις και αναπηδήσεις (bounces)

Σε αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε τη διείσδυση μέσω ενός φράγματος όπως αυτό του σχήματος 2.3.



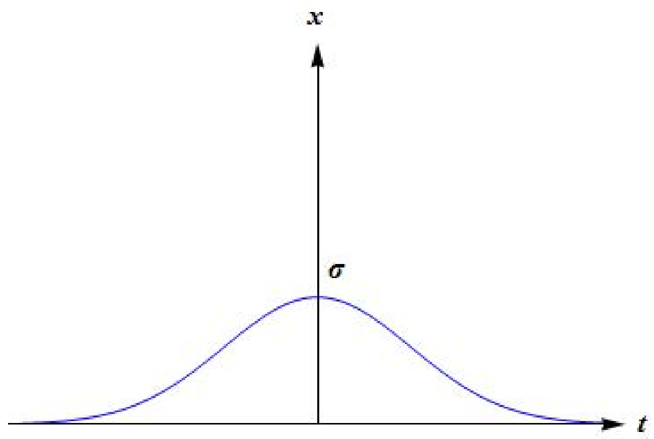
Σχήμα 2.3: Αριστερό γράφημα: Δυναμικό με μία ασταθή κατάσταση στο $x = 0$. Δεξί γράφημα: Ανεστραμμένο δυναμικό.

Αν παρατηρήσουμε το ανεστραμμένο δυναμικό του σχήματος 2.3 θα δούμε ότι η κλασική εξίσωση κίνησης έχει μία λύση στην οποία το σωματίδιο ξεκινάει από την κορυφή του λόφου στο $x = 0$, αναπηδά στο σημείο $x = \sigma$ και επιστρέφει πάλι στην κορυφή του λόφου (σχήμα 2.4). Αυτή την κίνηση θα την ονομάσουμε bounce . Θα υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης ανάμεσα στα σημεία $x = 0$ και $x = 0$ αθροίζοντας όλα τα bounces όπως κάναμε και στο διπλό πηγάδι χωρίς αυτή τη φορά να ενδιαφερόμαστε για άρτιο ή περιττό αριθμό από bounces . Αν $V''(0) = \omega^2$, το πλάτος θα δίνεται από τη σχέση

$$\langle 0| e^{-HT/\hbar} |0\rangle = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} e^{-\omega T/2} e^{KTe^{-S[\bar{x}]/\hbar}}. \tag{2.66}$$

Η ιδιοτιμή της ενέργειας επιστρέφοντας σε χώρο Mikowski (αναστρέφοντας δηλαδή το δυναμικό) θα είναι

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar K e^{-S[\bar{x}]/\hbar}. \tag{2.67}$$



Σχήμα 2.4: Τροχιά του σωματιδίου μεταξύ των θέσεων $x = 0$ και $x = 0$.

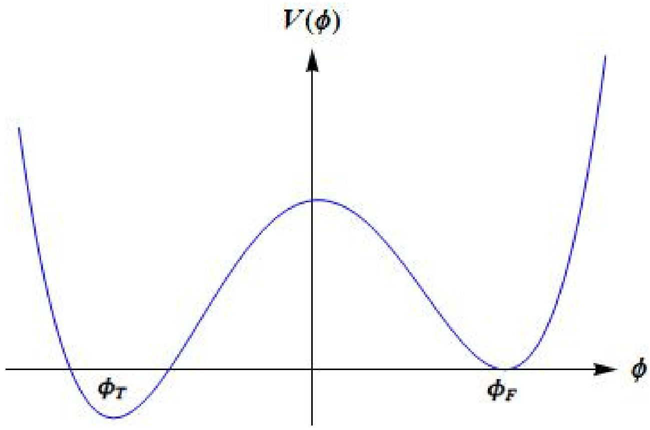
Όπως βλέπουμε το bounce έχει μέγιστο, κάτι που σημαίνει πως η x_1 δεν είναι η ιδιοσυνάρτηση με τη χαμηλότερη ιδιοτιμή[11], άρα υπάρχει και αρνητική ιδιοτιμή. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το K είναι φανταστικό. Ο βαθμός διάσπασης (Γ) δίνεται από τη σχέση

$$ImE_0 = \frac{\Gamma}{2} = \frac{\hbar}{2}|K|e^{-S[\bar{x}]/\hbar}. \tag{2.68}$$

2.2 Κβαντικό φαινόμενο σήραγγας βαθμωτού πεδίου

Στο κεφάλαιο αυτό θα στραφούμε στην περίπτωση των βαθμωτών πεδίων. Στόχος μας είναι να περιγράψουμε τι συμβαίνει όταν το σύστημά μας έχει επιλέξει ένα κενό (false vacuum) το οποίο δεν είναι αυτό με την ελάχιστη ενέργεια (true vacuum).

[11]Σύμφωνα με το θεώρημα ταλάντωσης της Κβαντικής Μηχανικής, αν στο διακριτό φάσμα έχουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $\Psi_0, \Psi_1, \cdots \Psi_N$, τότε η Ψ_0 δε μηδενίζεται πουθενά, η Ψ_1 μηδενίζεται σε ένα σημείο και η Ψ_N σε N σημεία. Η ιδιοσυνάρτηση x_1 που είναι ανάλογη της χρονικής παραγώγου του bounce θα μηδενίζεται, αφού το bounce έχει μέγιστο, άρα δε θα αντιστοιχεί στην ιδιοσυνάρτηση με τη χαμηλότερη ενέργεια.



Σχήμα 2.5: Το δυναμικό $V(\phi)$ με ελάχιστα στα ϕ_F και ϕ_T.

Στην κλασική περίπτωση, έχουμε δύο σταθερές ομογενείς λύσεις ισορροπίας. Αντιθέτως, στην κβαντική εκδοχή μόνο το ένα ελάχιστο αντιστοιχεί στ' αλήθεια σε σταθερή κατάσταση, διότι αυτό με την υψηλότερη ενέργεια μπορεί να διεισδύσει μέσω του φράγματος στο άλλο.
Η διάσπαση του κενού παραλληλίζεται με φαινόμενα της στατιστικής φυσικής, για παράδειγμα με το βρασμό ενός υπέρθερμου υγρού. Φανταστείτε το σχήμα 2.5 σαν να είναι ένα διάγραμμα της ελεύθερης ενέργειας του υγρού σε συνάρτηση με την πυκνότητά του. Το ψευδές κενό αντιστοιχεί στην υπέρθερμη φάση του υγρού και το αληθές κενό στην αέρια φάση. Οι θερμοδυναμικές διακυμάνσεις προκαλούν συνεχώς αέριες φυσαλίδες στο υγρό. Αν η φυσαλίδα είναι πολύ μικρή το κέρδος στην ενέργεια όγκου που προκαλείται από τη δημιουργία της φυσαλίδας, είναι περισσότερο από το έλλειμμα της επιφανειακής ενέργειας κι έτσι συρρικνώνεται μέχρι να εξαφανιστεί. Ωστόσο, κάποια στιγμή η φυσαλίδα που σχηματίζεται είναι αρκετά μεγάλη και αυτό που τη συμφέρει ενεργειακά είναι να μεγαλώσει κι άλλο. Έτσι, η φυσαλίδα διαστέλλεται μετατρέποντας το υγρό σε αέριο (ή συγχωνεύεται με μία άλλη φυσαλίδα).
Σε απόλυτη αντιστοιχία με τα παραπάνω και αντικαθιστώντας τις θερμικές διακυμάνσεις με κβαντικές μπορούμε να περιγράψουμε τη διάσπαση του ψευδούς κενού. Δηλαδή, μία αρκετά μεγάλη φυσαλίδα μέσα στην οποία το πεδίο βρίσκεται στο αληθές κενό εξαπλώνεται στον υπόλοιπο χωρόχρονο.
Είναι κατανοητό πως ένα σύμπαν άπειρης ηλικίας θα βρίσκεται στο αληθές κενό ανεξαρτήτως του πόσο γρήγορα διασπάται το ψευδές κενό. Ωστόσο, το σύμπαν μας δεν είναι άπειρης ηλικίας και τη στιγμή της μεγάλης έκρηξης θα μπορούσε κάλλιστα να βρισκόταν στο ψευδές κενό.

Ας υποθέσουμε λοιπόν για απλότητα ότι έχουμε ένα βαθμωτό πεδίο ϕ σε κάποιο δυναμικό $V(\phi)$. Η αντίστοιχη δράση σε Ευκλείδειο $4-D$ χώρο είναι

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + V(\phi)\right] . \tag{2.69}$$

Το ψευδές κενό του δυναμικού είναι το ϕ_F όπου[12] $V(\phi_F) = 0$, ενώ το αληθές κενό είναι το ϕ_T όπου $V(\phi_T) < 0$.

Αυτό που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι ο ρυθμός διάσπασης ανά χρόνο και όγκο Γ/V.

[12]Έχει κανονικοποιηθεί κατάλληλα.

Αρχικά θα βρούμε τη λύση $\bar{\phi}$ (για bounce) των εξισώσεων κίνησης[13]

$$\partial_\mu \partial_\mu \phi = V'(\phi), \tag{2.70}$$

όπου το πεδίο σε χρόνο $-\infty$ βρίσκεται στο ψευδές κενό και σε χρόνο $+\infty$ βρίσκεται πάλι στο ψευδές κενό.

Οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν είναι

$$\begin{aligned} &\bullet \quad \lim_{\tau \to \pm\infty} \phi(x) = \phi_F \\ &\bullet \quad \lim_{|\vec{x}| \to +\infty} \phi(x) = \phi_F . \end{aligned} \tag{2.71}$$

Μόλις βρούμε τη λύση για το bounce θα μπορούμε να υπολογίσουμε και το

$$\frac{\Gamma}{V} = K e^{-B/\hbar}, \tag{2.72}$$

όπου $B = S(\phi) - S(\phi_F)$.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε ότι ο όγκος V στην παραπάνω έκφραση προέρχεται από ολοκλήρωση στις θέσεις του bounce σε απόλυτη αναλογία με την ανάδυση του χρόνου κατά την ολοκλήρωση στους χρόνους του instanton στην ενότητα 2.1.3.

Ας θεωρήσουμε την ανακλιμάκωση του πεδίου με μία παράμετρο λ, έτσι ώστε

$$\phi_\lambda(x) = \phi(\frac{x}{\lambda}). \tag{2.73}$$

Τότε

$$S(\phi_\lambda) = \frac{\lambda^2}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi)^2 + \lambda^4 \int d^4x V(\phi). \tag{2.74}$$

Επειδή η ϕ είναι λύση των εξισώσεων κίνησης θα πρέπει να είναι στάσιμη στο $\lambda = 1$, άρα

$$\begin{aligned} \left.\frac{dS(\phi_\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=1} = 0 \Rightarrow & \int d^4x (\partial_\mu \phi)^2 + 4 \int d^4x V(\phi) = 0 \Rightarrow \\ & \int d^4x (\partial_\mu \phi)^2 = -4 \int d^4x V(\phi). \end{aligned} \tag{2.75}$$

Άρα

$$S(\phi) = \frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu \phi)^2 > 0. \tag{2.76}$$

Επίσης

[13] Από 'δώ και στο εξής η λύση θα συμβολίζεται με ϕ αντί για $\bar{\phi}$ για λόγους συντομίας.

$$\begin{aligned}\frac{d^2S(\phi_\lambda)}{d\lambda^2} &= \int d^4x(\partial_\mu\phi)^2 + 12\lambda^2\int d^4xV(\phi)\\ &= \int d^4x(\partial_\mu\phi)^2 - 3\lambda^2\int d^4x(\partial_\mu\phi)^2,\end{aligned} \tag{2.77}$$

επομένως

$$\left.\frac{d^2S(\phi_\lambda)}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=1} = -2\lambda^2\int d^4x(\partial_\mu\phi)^2 < 0, \tag{2.78}$$

κάτι που σημαίνει ότι το $\frac{\delta^2 S}{\delta\phi^2}$ έχει τουλάχιστον μία αρνητική ιδιοτιμή στο ϕ .

Αποδεικνύεται ότι το bounce με την ελάχιστη δράση είναι O(4) συμμετρικό [3] , επομένως η λύση ϕ θα εξαρτάται μόνο από την τετραδιάστατη απόσταση $r = \sqrt{\tau^2 + |\vec{x}|^2}$.

Η δράση (2.69) για τρισδιάστατη σφαίρα μπορεί να πάρει τη μορφή

$$S = 2\pi^2\int_0^\infty r^3dr\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 + V(\phi)\right]. \tag{2.79}$$

Οι εξισώσεις κίνησης εξάγονται από τη μεταβολή της δράσης.

Αν $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 + V(\phi)$, έχουμε ότι[14]

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi'}\delta\phi'\\ &= V'(\phi)\delta\phi + \phi'\delta\phi'.\end{aligned} \tag{2.80}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\delta S &= 2\pi^2\int_0^\infty r^3dr[V'(\phi)\delta\phi + \phi'\delta\phi']\\ &= 2\pi^2\int_0^\infty dr[r^3V'(\phi)\delta\phi - r^3\phi''\delta\phi - 3r^2\phi'\delta\phi] + \underbrace{\int_0^\infty dr(r^3\phi'\delta\phi)'}_{\text{Επιφανειακός όρος}}\\ &= 2\pi^2\int_0^\infty r^3dr\left[V'(\phi) - \phi'' - \frac{3}{r}\phi'\right]\delta\phi.\end{aligned} \tag{2.81}$$

Όμως $\delta S = 0 \quad \forall \quad \delta\phi \Rightarrow$

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\phi}{dr} = \frac{dV(\phi)}{dr}, \tag{2.82}$$

που είναι οι εξισώσεις κίνησης (2.70) εκπεφρασμένες ως προς τη μεταβλητή r .

Οι συνοριακές συνθήκες (2.71) γίνονται

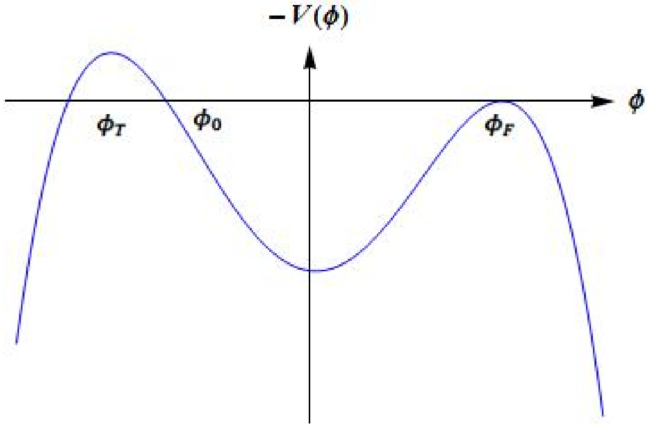
[14] Ο τόνος συμβολίζει την παράγωγο ως προς r .

$$\lim_{r\to\infty} \phi(r) = \phi_F \tag{2.83}$$

και επίσης για να μην υπάρχει απειρισμός στο $r = 0$ θα πρέπει

$$\left.\frac{d\phi}{dr}\right|_{r=0} = 0. \tag{2.84}$$

Αν τώρα ερμηνεύσουμε το ϕ σαν τη θέση ενός σωματιδίου και το r σαν τον αντίστοιχο χρόνο, τότε η εξίσωση (2.82) μοιάζει να περιγράφει ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας που κινείται σε δυναμικό $-V(\phi)$ υπό την επίδραση μίας δύναμης απόσβεσης αντιστρόφως ανάλογης του χρόνου. Αν κοιτάξουμε και τις συνοριακές συνθήκες φαίνεται ότι το σωματίδιο θα ξεκινά από την ηρεμία και σε άπειρο χρόνο θα βρίσκεται στη θέση ϕ_F .



Σχήμα 2.6: Το ανεστραμμένο δυναμικό που περιγράφει και την κίνηση του αντίστοιχου σωματιδίου.

Από το σχήμα 2.6 παρατηρούμε ότι, εάν το σωματίδιο ξεκινήσει από τα δεξιά του ϕ_T και αριστερά του ϕ_0 , σε πεπερασμένο χρόνο θα φτάσει στο ϕ_F , ενώ εάν βρίσκεται και δεξιά του ϕ_0 δε θα έχει αρκετή ενέργεια για να "σκαρφαλώσει" το λόφο και να φτάσει στο ϕ_F. Η αποσβετική δύναμη δεν επηρεάζει το παραπάνω επιχείρημα καθώς πάντα ελαττώνει την ενέργεια.

2.2.1 Προσέγγιση λεπτού τείχους

Είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε μία προσέγγιση για το ϕ στο όριο της χαμηλής διαφοράς ενεργειακών πυκνοτήτων μεταξύ των δύο κενών, γι΄ αυτό ας ορίσουμε μία παράμετρο ε τέτοια ώστε

$$V(\phi_F) - V(\phi_T) = \varepsilon. \tag{2.85}$$

Το $V(\phi)$ μπορεί να γραφεί ως

$$V(\phi) = V_+(\phi) + \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{2.86}$$

όπου

$$V_+(\phi_T) = V_+(\phi_F) \quad \text{και} \quad \left.\frac{dV_+}{d\phi}\right|_{\phi=\phi_F,\phi_T} = 0.$$

Όπως αναφέραμε πριν, στο μηχανικό ανάλογο το σωματίδιο θα ξεκινήσει από μία αρχική θέση ϕ_0 πολύ κοντά στο ϕ_T. Θα παραμείνει κοντά στο ϕ_T μέχρι κάποιο μεγάλο χρόνο $r = R$ και στη συνέχεια θα κινηθεί προς το ϕ_F φτάνοντας εκεί σε άπειρο χρόνο.
Γυρίζοντας πίσω στα πεδία το bounce μοιάζει με μία μεγάλη τετραδιάστατη φυσαλίδα ακτίνας R, που έχει ένα λεπτό τείχος να χωρίζει το αληθές κενό του εσωτερικού της από το ψευδές κενό του εξωτερικού της χώρου.
Όταν το r είναι κοντά στο R μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο απόσβεσης της (2.82) και επίσης τον όρο που είναι ανάλογος του ε στο $V(\phi)$, άρα η (2.82) γίνεται

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} = \frac{dV_+(\phi)}{d\phi}. \tag{2.87}$$

Η παραπάνω είναι η κλασική εξίσωση κίνησης για ένα σωματίδιο σε συμμετρικό δυναμικό διπλού πηγαδιού, όπως αυτή που μελετήσαμε στην ενότητα 2.1.3 και η οποία έχει για λύση μονοδιάστατα instantons . Πράγματι μία λύση μονοδιάστατου instanton καθώς το r αυξάνεται μέχρι το R είναι αυτό που θέλουμε.

Για τον υπολογισμό του R θα χρειαστεί να υπολογίσουμε το B της σχέσης (2.72). Η περιοχή ολοκλήρωσης θα διαιρεθεί σε τρία μέρη: ένα μέσα στη φυσαλίδα, ένα έξω από τη φυσαλίδα και ένα πάνω στο λεπτό τείχος.

Έξω από το τείχος $\phi = \phi_F \Rightarrow$

$$B_{out} = S(\phi_F) - S(\phi_F) = 0. \tag{2.88}$$

Μέσα από το τείχος $\phi = \phi_T \Rightarrow$

$$\begin{aligned} B_{out} = S(\phi_T) - S(\phi_F) &= 2\pi^2 \int_0^R dr\, r^3 (V(\phi_F) - V(\phi_T)) \\ &= 2\pi^2 \int_0^R dr\, r^3 (-\varepsilon) \\ &= -\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Πριν δούμε τι γίνεται πάνω στο τείχος ολοκληρώνουμε[15] τη σχέση (2.87) και παίρνουμε ότι

[15] Την πολλαπλασιάζουμε με ϕ' και ολοκληρώνουμε ως προς r.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 - V_+(\phi) = \text{σταθ.} \tag{2.90}$$

Όμως ξέρουμε ότι $\phi(\infty) = \phi_F \Rightarrow \left.\frac{d\phi}{dr}\right|_{r=\infty} = 0$, άρα

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 - V_+(\phi) = -V_+(\phi_F). \tag{2.91}$$

Έτσι πάνω στο τείχος έχουμε

$$\begin{aligned} B_{wall} = S(\phi) - S(\phi_F) &= 2\pi^2 \int_0^R dr\, r^3 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 + V(\phi) - V(\phi_F)\right] \\ &= 2\pi^2 R^3 \int_0^R dr \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 + V_+(\phi) - V_+(\phi_F)\right] \\ &= 2\pi^2 R^3 S_1. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Χρησιμοποιώντας τη (2.91) έχουμε

$$S_1 = 2\int_0^R dr[V_+(\phi) - V_+(\phi_F)] = \int_{\phi_T}^{\phi_F} d\phi[2(V_+(\phi) - V_+(\phi_F))]^{1/2}, \tag{2.93}$$

που είναι η δράση για μονοδιάστατο instanton .

Συνοψίζοντας έχουμε

$$B = B_{out} + B_{in} + B_{wall} = -\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \varepsilon + 2\pi^2 R^3 S_1, \tag{2.94}$$

το οποίο είναι ελάχιστο όταν

$$\frac{dB}{dR} = 0 \Rightarrow -2\pi^2 R^3 \varepsilon + 6\pi^2 R^2 S_1 = 0 \Rightarrow$$

$$R = \frac{3S_1}{\varepsilon}. \tag{2.95}$$

Αντικαθιστώντας τη (2.95) στη (2.94) έχουμε τελικά ότι

$$B = \frac{27\pi^2 {S_1}^4}{2\varepsilon^3}. \tag{2.96}$$

2.2.2 Η ανάπτυξη της φυσαλίδας

Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε το bounce για να υπολογίσουμε το συντελεστή που εμφανίζεται στην πιθανότητα υλοποίησης μίας φυσαλίδας αληθούς κενού μέσα στο ψευδές κενό.
Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε το bounce για να περιγράψουμε την ανάπτυξη της φυσαλίδας. Η επιφάνεια $t = 0$ είναι το σημείο τομής του Ευκλείδειου χώρου με το χώρο Minkowski. Έτσι ισχύουν οι αρχικές συνθήκες

$$\bullet \quad \phi(t=0,\vec{x}) = \phi(\tau=0,\vec{x}) \qquad \bullet \quad \left.\frac{\partial\phi(t,\vec{x})}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \tag{2.97}$$

Έπειτα η φυσαλίδα εξελίσσεται σύμφωνα με την κλασική εξίσωση πεδίου σε χώρο Minkowski

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\phi = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} \tag{2.98}$$

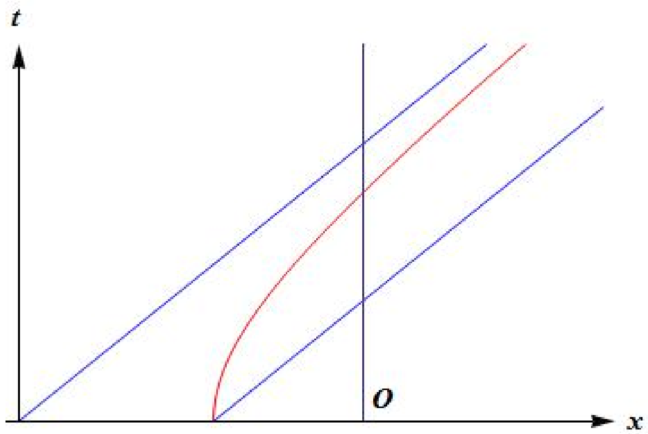
η οποία είναι η αναλυτική επέκταση της (2.70) κάνοντας την εναλλαγή $\tau \to it$.

Επομένως

$$\phi(t,\vec{x}) = \phi(r) = \phi(|\vec{x}|^2 - t^2). \tag{2.99}$$

Ένα επακόλουθο της (2.99) είναι ότι η O(4) συμμετρία του bounce έγινε O(3,1) συμμετρία για τη λύση των κλασικών εξισώσεων πεδίου ή με άλλα λόγια η ανάπτυξη της φυσαλίδας φαίνεται ίδια για κάθε Lorentz παρατηρητή.
Στην περίπτωση του λεπτού τείχους που μελετήσαμε , το τείχος είναι στη θέση $r = R$ και ακολουθεί την υπερβολή

$$|\vec{x}|^2 - t^2 = R^2. \tag{2.100}$$



Σχήμα 2.7: Χωροχρονικό διάγραμμα που δείχνει την ανάπτυξη της φυσαλίδας. Ένας παρατηρητής στο O αντιλαμβάνεται τη φυσαλίδα μόνο όταν ο κώνος φωτός της τμήσει την κοσμική γραμμή του παρατηρητή. Μετά από χρόνο R το τείχος της φυσαλίδας θα τέμνει την κοσμική γραμμή του παρατηρητή.

Τυπικά περιμένουμε η φυσαλίδα να επεκτείνεται σχεδόν με την ταχύτητα του φωτός. Ως αποτέλεσμα αυτής της ταχείας επέκτασης, αν μία φυσαλίδα επεκτείνεται προς το μέρος μας αυτή τη στιγμή δε θα είχαμε καμία προειδοποίηση για την άφιξή της.
Ένας ακίνητος παρατηρητής στο O δε θα μπορεί να δει το σχηματισμό μίας φυσαλίδας μέχρι η κοσμική του γραμμή να τμηθεί από τον κώνο φωτός που προβάλλεται από το τείχος κατά τη στιγμή του σχηματισμού του. Μετά από χρόνο R ο παρατηρητής θα βρίσκεται μέσα στη φυσαλίδα και θα είναι "νεκρός" , καθώς στο αληθές κενό όλες οι σταθερές της φύσης, οι μάζες και οι σταθερές σύζευξης των στοιχειωδών σωματιδίων θα είναι διαφορετικές.

Τέλος, θα σχολιάσουμε την ενέργεια του τείχους. Ένα τμήμα λοιπόν του τείχους της φυσαλίδας σε ηρεμία φέρει ενέργεια/επιφάνεια S_1. Ενώ, ένα οποιοδήποτε τμήμα που αναπτύσσεται με ταχύτητα u "κουβαλάει" ενέργεια γS_1, όπου $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ ο παράγοντας Lorentz.
Έτσι λοιπόν σε κάποιο χρόνο που η ακτίνα της φυσαλίδας είναι$|\vec{x}|$ η ενέργεια του τείχους είναι:

$$E_{wall} = 4\pi|\vec{x}|^2\gamma S_1. \tag{2.101}$$

Η ταχύτητα δίνεται από τη σχέση

$$u = \frac{d|\vec{x}|}{dt} = \frac{\sqrt{|\vec{x}|^2 - R^2}}{|\vec{x}|} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{|\vec{x}|^2}}, \tag{2.102}$$

άρα

$$E_{wall} = 4\pi|\vec{x}|^3\frac{S_1}{R} \overset{(2.95)}{=\!=\!=} \frac{4\pi\varepsilon|\vec{x}|^3}{3}. \tag{2.103}$$

Ως εκ τούτου στην προσέγγιση λεπτού τείχους όλη η ενέργεια που απελευθερώνεται από τη μετατροπή του ψευδούς κενού σε αληθές πηγαίνει στο τείχος της φυσαλίδας προς επιτάχυνσή του.

2.3 Κβαντικό φαινόμενο σήραγγας βαθμωτού πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο

Όπως προηγουμένως, θα ξεκινήσουμε με την κατασκευή ενός bounce. Δηλαδή μίας λύσης των Ευκλείδειων εξισώσεων κίνησης που υπακούει στις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Η Ευκλείδεια δράση του προβλήματός μας με την εισαγωγή βαρύτητας μετατρέπεται στην[16]

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi + V(\phi)\right] \tag{2.104}$$

με

[16] Οι συνήθεις παράγωγοι αντικαθίστανται από συναλλοίωτες.

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla^\mu\phi + V(\phi). \tag{2.105}$$

Σε επίπεδο χωρόχρονο είχαμε αναφέρει ότι το bounce είναι O(4) συμμετρικό. Η παρουσία βαρύτητας δε μας δίνει κάποιον προφανή λόγο για σπάσιμο αυτής της συμμετρίας[17].

Η πιο γενική μετρική που σέβεται τη συμμετρία είναι της μορφής

$$ds^2 = d\xi^2 + \rho^2(\xi)d{\Omega_3}^2, \tag{2.106}$$

όπου

$$d{\Omega_3}^2 = dr^2 + sin^2r(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \tag{2.107}$$

είναι το στοιχείο μήκους μίας μοναδιαίας τρία-σφαίρας.

Η θεώρηση O(4) συμμετρίας απλοποίησε ιδιαιτέρως τα πράγματα, καθώς οι 10 συνιστώσες του μετρικού τανυστή μειώνονται σε μία άγνωστη συνάρτηση $\rho(\xi)$ μίας μεταβλητής ξ.

2.3.1 Εξισώσεις κίνησης

Για να εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης για το πεδίο ϕ θα κάνουμε μία μεταβολή της δράσης ως προς $\delta\phi$ κι έτσι θα πάρουμε τις εξισώσεις Euler - Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\phi} - \nabla_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Big) = 0 \Rightarrow \nabla_\mu\nabla^\mu\phi = \frac{dV}{d\phi}. \tag{2.108}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
&\nabla_\mu\nabla^\mu\phi = \frac{dV}{d\phi} \Rightarrow \\
&\partial_\mu\partial^\mu\phi + \Gamma^\mu_{\ \mu\kappa}\partial^\kappa\phi = \frac{dV}{d\phi} \Rightarrow \\
&\partial_\xi\partial^\xi\phi + \Gamma^\mu_{\ \mu\xi}\partial^\xi\phi = \frac{dV}{d\phi}.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\Gamma^r_{\ r\xi} = \Gamma^\theta_{\ \theta\xi} = \Gamma^\varphi_{\ \varphi\xi} = \frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)} \quad \text{και} \quad \Gamma^\xi_{\ \xi\xi} = 0, \tag{2.109}$$

άρα[18]

[17] Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφέρουμε πως αν και εμείς χειριζόμαστε O(4) συμμετρικές λύσεις, θα πρέπει να αφήσουμε ανοιχτό το ενδεχόμενο ύπαρξης μίας λύσης με χαμηλότερη δράση που δεν υπακούει σε αυτή τη συμμετρία.

[18] Ο τόνος συμβολίζει την παραγώγιση ως προς r.

$$\phi'' + 3\frac{\rho'(\xi)}{\rho(\xi)}\phi' = \frac{dV}{d\phi}. \tag{2.110}$$

Αν πάρουμε τώρα μεταβολή της δράσης ως προς δg θα εξάγουμε τις εξισώσεις Einstein

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu} \quad \text{με} \quad k = 8\pi G, \tag{2.111}$$

όπου

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \Rightarrow$$

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{3(\rho'^2(\xi)-1)}{\rho^2(\xi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2(\xi) + 2\rho(\xi)\rho''(\xi) - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sin^2 r\, G_{rr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sin^2\theta\, sin^2 r\, G_{rr} \end{pmatrix} \tag{2.112}$$

και

$$T_{\mu\nu} = 2\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial g^{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_M = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\phi + V(\phi)\right) \Rightarrow$$

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\phi'^2(\xi) - V(\phi(\xi)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho^2(\xi)T_{\xi\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -sin^2 r\, \rho^2(\xi)T_{\xi\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sin^2\theta\, sin^2 r\, \rho^2(\xi)T_{\xi\xi} \end{pmatrix}. \tag{2.113}$$

Ενώ το βαθμωτό του Ricci είναι

$$R = \frac{6}{\rho^2(\xi)}\left(1 - \rho(\xi)\rho''(\xi) - \rho'^2(\xi)\right). \tag{2.114}$$

Η μόνη συνιστώσα της (2.111) με την οποία θα ασχοληθούμε είναι η $G_{\xi\xi} = 8\pi G T_{\xi\xi}$, καθώς οι υπόλοιπες είναι ισοδύναμές της (ή ταυτότητες). Έτσι οι εξισώσεις Einstein γίνονται

$$G_{\xi\xi} = 8\pi G T_{\xi\xi} \Rightarrow$$

$$\rho'^2(\xi) = 1 + \frac{8\pi G}{3}\rho^2(\xi)\left(\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi)\right). \tag{2.115}$$

Η δράση (2.104) αντικαθιστώντας το βαθμωτό του Ricci γίνεται

$$\begin{aligned} S &= 2\pi^2 \int d\xi \rho^3 \left[-\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2}\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + V(\phi) \right] \\ &= 2\pi^2 \int d\xi \left[\frac{3}{8\pi G} \left(\rho^2(\xi)\rho''(\xi) + \rho(\xi)\rho'^2(\xi) - \rho(\xi) \right) + \rho^3(\xi) \Big(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \Big) \right], \end{aligned} \tag{2.116}$$

όπου για την ολοκλήρωση σε όλο το χώρο χρησιμοποιήσαμε ότι

$$\int dx \sqrt{|g|} = \int d\xi\, \rho^3(\xi) \underbrace{\int_0^\pi dr sin^2 r}_{\pi/2} \underbrace{\int_0^\pi d\theta sin\theta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = 2\pi^2 \int d\xi\, \rho^3(\xi). \tag{2.117}$$

2.3.2 Προσέγγιση λεπτού τείχους

Στην προσέγγιση λεπτού τείχους η κατασκευή του bounce είναι σχετικά απλή. Κατ' αρχάς η εξίσωση (2.110) διαφέρει από την (2.82), που είναι η αντίστοιχη σε επίπεδο χωρόχρονο, μόνο στο ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ξ αντί για r και στο ότι ο συντελεστής του ϕ' είναι $\rho'(\xi)/\rho(\xi)$ αντί για $1/r$. Αυτή είναι μία ασήμαντη διαφορά,αφού στην προσέγγιση λεπτού τείχους αγνοούμε αυτόν τον όρο. Βέβαια η διαφορά στη μορφή των δύο συντελεστών θα μας οδηγήσει και σε διαφορετικής μορφής προσέγγιση, αυτό όμως θα το συζητήσουμε αργότερα.

Πλέον έχουμε ότι χρειαζόμαστε για να προχωρήσουμε σε υπολογισμούς. Όπως στον επίπεδο χώρο θεωρήσαμε την ακτίνα R της φυσαλίδας, έτσι και στον καμπυλωμένο θεωρούμε την ακτίνα $\tilde{\rho} = \rho(\tilde{\xi})$ που είναι στην ουσία η ακτίνα καμπυλότητας του τείχους που χωρίζει το ψευδές από το αληθές κενό. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε το $\tilde{\rho}$. Αρχικά θα υπολογίσουμε το B που είναι η διαφορά της δράσης του bounce από αυτής του ψευδούς κενού.

Κάνοντας κατά παράγοντες ολοκλήρωση[19] στον όρο $\rho^2(\xi)\rho''(\xi)$ της (2.116) και πετώντας τους επιφανειακούς όρους (αφού ενδιαφερόμαστε για τη διαφορά των δύο δράσεων), παίρνουμε ότι

$$S = 2\pi^2 \int d\xi \left[-\frac{3}{8\pi G} \left(\rho(\xi)\rho'^2(\xi) + \rho(\xi) \right) + \rho^3(\xi) \Big(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \Big) \right]. \tag{2.118}$$

Αν αντικαταστήσουμε την (2.115) στην (2.118) έχουμε

$$\begin{aligned} S &= 2\pi^2 \int d\xi \left[-\frac{3}{8\pi G} \left(\rho(\xi) \Big(1 + \frac{8\pi G}{3}\rho(\xi) \left(\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi) \right) \Big) + \rho(\xi) \right) + \rho^3(\xi) \Big(\frac{1}{2}\phi'^2 + V(\phi) \Big) \right] \\ &= 4\pi^2 \int d\xi \left(\rho^3(\xi) V(\phi) - \frac{3\rho(\xi)}{8\pi G} \right). \end{aligned} \tag{2.119}$$

[19] Ισχύει ότι $\int d\xi \rho^2(\xi)\rho''(\xi) = \rho^2(\xi)\rho'(\xi)\big| - 2\int d\xi \rho'^2(\xi)\rho(\xi)$.

Μέχρι στιγμής δεν έχουμε κάνει καμία προσέγγιση. Θα υπολογίσουμε το B από τη (2.119) για την προσέγγιση λεπτού τείχους ακολουθώντας τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε στην ενότητα 2.2.1 , δηλαδή θα χωρίσουμε την ολοκλήρωση σε τρεις περιοχές. Αφού το κάνουμε αυτό, θα προσθέσουμε τις τρεις συνεισφορές και θα έχουμε το τελικό αποτέλεσμα για το B.

Έξω από το τείχος

$$B_{out} = S(\phi_F) - S(\phi_F) = 0. \tag{2.120}$$

Μέσα από το τείχος $\phi = \phi_T =$ σταθερό, άρα από την (2.115) έχουμε[20]

$$\begin{aligned} \rho'^2(\xi) &= 1 - \frac{8\pi G}{3}\rho^2(\xi)V(\phi_T) \Rightarrow \\ d\xi &= d\rho\left(1 - \frac{8\pi G}{3}\rho^2(\xi)V(\phi_T)\right)^{-1/2}. \end{aligned} \tag{2.121}$$

Άρα

$$\begin{aligned} S(\phi_T) &= 4\pi^2\int_0^{\tilde{\rho}} d\rho\left(1 - \frac{8\pi G}{3}\rho^2(\xi)V(\phi_T)\right)^{-1/2}\left(\rho^3(\xi)V(\phi) - \frac{3\rho(\xi)}{8\pi G}\right) \\ &= -\frac{3\pi}{2G}\int_0^{\tilde{\rho}} \rho d\rho\left(1 - \frac{8\pi G}{3}\rho^2(\xi)V(\phi_T)\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.122}$$

Έτσι

$$\begin{aligned} B_{in} &= S(\phi_T) - S(\phi_F) \\ &= -\frac{3\pi}{2G}\int_0^{\tilde{\rho}} \rho d\rho\left[\left(1 - \frac{8\pi G}{3}\rho^2(\xi)V(\phi_T)\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{8\pi G}{3}\rho^2(\xi)V(\phi_F)\right)^{1/2}\right] \\ &= \frac{3}{16G^2}\left[\frac{1}{V(\phi_T)}\left[\left(1 - \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho}^2V(\phi_T)\right)^{3/2} - 1\right] - \frac{1}{V(\phi_F)}\left[\left(1 - \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho}^2V(\phi_F)\right)^{3/2} - 1\right]\right]. \end{aligned} \tag{2.123}$$

Πάνω στο τείχος μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\rho = \tilde{\rho}$ και $V(\phi) = V_+(\phi)$, όπου το $V_+(\phi)$ είχε οριστεί στη σχέση (2.86).

Άρα

$$\begin{aligned} B_{wall} &= 4\pi^2\tilde{\rho}^3\int d\xi\left[V_+(\phi) - V_+(\phi_F)\right] \\ &= 2\pi^2\tilde{\rho}^3 S_1. \end{aligned} \tag{2.124}$$

[20]Η σχέση (2.121) ισχύει και έξω από το τείχος αν κάνουμε την εναλλαγή $\phi_T \to \phi_F$.

Συνοψίζοντας, έχουμε ότι $B = B_{out} + B_{in} + B_{wall}$.

Επειδή η έκφραση για το B είναι αρκετά σύνθετη θα ασχοληθούμε με δύο ειδικές περιπτώσεις. Η πρώτη περίπτωση είναι η διάσπαση από χώρο με θετική ενεργειακή πυκνότητα $V(\phi_F) = \varepsilon$ σε χώρο με μηδενική ενεργειακή πυκνότητα $V(\phi_T) = 0$.

Ανικαθιστώντας τα παραπάνω στη σχέση για το B έχουμε

$$B = 2\pi^2 \tilde{\rho}^3 S_1 - \frac{3\pi}{4G}\tilde{\rho}^2 - \frac{3}{16\varepsilon G^2}\left[\left(1 - \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho}^2\varepsilon\right)^{3/2} - 1\right]. \tag{2.125}$$

Στο σημείο στασιμότητας ισχύει ότι $\frac{\partial B}{\partial \tilde{\rho}} = 0 \Rightarrow$

$$6\pi^2\tilde{\rho}^2 S_1 - \frac{3\pi\tilde{\rho}}{2G} + \frac{3\pi\tilde{\rho}\sqrt{1 - \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho}^2\varepsilon}}{2G} = 0 \Rightarrow$$

$$\tilde{\rho} = \frac{3S_1}{\varepsilon + 6\pi G {S_1}^2}, \tag{2.126}$$

ή αν θέσουμε $\tilde{\rho}_0 = \frac{3S_1}{\varepsilon}$ και $\Lambda = \left(\frac{8\pi G}{3}\varepsilon\right)^{-1/2}$ παίρνουμε

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\rho}_0}{1 + (\tilde{\rho}_0/2\Lambda)^2}. \tag{2.127}$$

Αντικαθιστώντας τώρα το $\tilde{\rho}$ στην (2.125) βρίσκουμε ότι[21]

$$B = \frac{B_0}{[1 + (\tilde{\rho}_0/2\Lambda)^2]^2}, \tag{2.128}$$

με $B_0 = \frac{27\pi^2 {S_1}^4}{2\varepsilon^3}$.

Η δεύτερη αξιοσημείωτη περίπτωση είναι αυτή της διάσπασης από χώρο με μηδενική ενεργειακή πυκνότητα $V(\phi_F) = 0$ σε χώρο με αρνητική ενεργειακή πυκνότητα $V(\phi_T) = -\varepsilon$.

Τα αποτελέσματα έχουν παρόμοια μορφή με την πρώτη περίπτωση

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{\rho}_0}{1 - (\tilde{\rho}_0/2\Lambda)^2} \tag{2.129}$$

και

$$B = \frac{B_0}{[1 - (\tilde{\rho}_0/2\Lambda)^2]^2}. \tag{2.130}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν προέλθει από την προσέγγιση λεπτού τείχους. Εν απουσία βαρύτητας η προσέγγιση λεπτού τείχους ήταν έγκυρη όταν το $1/r$ είναι μικρό σε σχέση με το

[21] Το B_0 είναι ο παράγοντας διάσπασης που υπολογίσαμε εν απουσία βαρύτητας.

χαρακτηριστικό μέγεθος της μεταβολής του ϕ. Με την παρουσία βαρύτητας η ποσότητα που πρέπει να είναι μικρή είναι η ρ'/ρ. Η εξίσωση (2.115) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{\rho'^2(\xi)}{\rho^2(\xi)} = \frac{1}{\rho^2(\xi)} + \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi)\right). \tag{2.131}$$

Το αριστερό μέλος της (2.131) είναι μικρό εάν οι δύο όροι στο δεξί μέλος είναι εξίσου μικροί. Ο όρος $1/\rho^2(\xi)$ είναι μικρός όπως πριν. Όσον αφορά τον δεύτερο όρο, το κομμάτι που βρίσκεται στην παρένθεση είναι σχεδόν σταθερό πάνω στο τείχος, μηδενικό στη μία πλευρά και τάξης ε στην άλλη, άρα γενικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ε παντού.
Έτσι $\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\phi'^2 - V(\phi)\right) = \frac{8\pi G}{3}\varepsilon = (1/\Lambda)^2$. Άρα, για να ισχύει η προσέγγιση λεπτού τείχους πρέπει οι ποσότητες $1/\rho^2(\xi)$ και $(1/\Lambda)^2$ να είναι αρκούντως μικρές.

Ας δούμε όμως τι γίνεται με τις δύο ειδικές περιπτώσεις που εξετάσαμε. Στην πρώτη περίπτωση η παρουσία βαρύτητας αυξάνει την πιθανότητα δημιουργίας φυσαλίδας (σε σχέση με την απουσία βαρύτητας) καθώς το B μικραίνει, όπως και το $\tilde{\rho}_0$. Ενώ στη δεύτερη περίπτωση συμβαίνει το ανάποδο. Για μεγαλύτερες τιμές του $\tilde{\rho}_0$ οι εξισώσεις μας δεν παραδέχονται κάποια λογική λύση. Για να καταλάβουμε τι ακριβώς συμβαίνει θα υπολογίσουμε την ενέργεια της φυσαλίδας αγνοώντας τη βαρύτητα αρχικά και στη συνέχεια θα κάνουμε τις απαραίτητες βαρυτικές διορθώσεις.

Εν απουσία βαρύτητας λοιπόν, η ενέργεια της φυσαλίδας περιλαμβάνει έναν αρνητικό όρο όγκου κι έναν επιφανειακό όρο, δηλαδή[22]

$$E = -\varepsilon\frac{4}{3}\pi\tilde{\rho}^3 + S_1 4\pi\tilde{\rho}^2 = \frac{4}{3}\pi\varepsilon\tilde{\rho}^2(\tilde{\rho}_0 - \tilde{\rho}). \tag{2.132}$$

Βλέπουμε ότι για $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_0$, η ενέργεια μηδενίζεται όπως και θα έπρεπε. Ακόμη φαίνεται ότι εάν η βαρυτική διόρθωση είναι θετική, η ακτίνα της φυσαλίδας θα μεγαλώσει για να αντισταθμίσει αυτό το κέρδος ενέργειας, έτσι ώστε η ενέργεια να γίνει και πάλι μηδενική. Αν όμως είναι αρνητική, η φυσαλίδα θα συρρικνωθεί.

Υπάρχουν δύο βαρυτικοί όροι που συνεισφέρουν στην ενέργεια. Ο πρώτος είναι ο συνήθης Νευτώνιος όρος που προκύπτει από το βαρυτικό δυναμικό της φυσαλίδας και έχει τιμή

$$E_{Newton} = -\frac{\varepsilon\pi\tilde{\rho}_0{}^5}{15\Lambda^2}. \tag{2.133}$$

Ο δεύτερος όρος προέρχεται από το γεγονός ότι η φυσαλίδα στρεβλώνει τη γεωμετρία, λόγω της μη μηδενικής ενεργειακής πυκνότητας στο εσωτερικό της.
Από την εξίσωση (2.121) βλέπουμε ότι το στοιχείο όγκου είναι

[22] Θεωρούμε αντί για r και R τις μεταβλητές $\tilde{\rho}$ και $\tilde{\rho}_0$ ώστε να είμαστε πιο συμβατοί με την περίπτωση της βαρύτητας.

$$\begin{aligned}4\pi\xi^2 &= 4\pi\rho^2 d\rho\left(1+\frac{8\pi G}{3}\rho^2\varepsilon\right)^{-1/2}\\ &\simeq 4\pi\rho^2 d\rho\left(1-\frac{1}{2}\frac{8\pi G}{3}\rho^2\varepsilon\right)+\mathcal{O}(G^2)\\ &= 4\pi\rho^2 d\rho\left(1-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\Lambda^2}\right)+\mathcal{O}(G^2).\end{aligned} \tag{2.134}$$

Άρα η πρόσθετη διόρθωση λόγω καμπύλωσης του χώρου είναι

$$E_{geom} = -\int_0^{\tilde{\rho_0}} 4\pi\rho^2 d\rho\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{\Lambda^2}(-\varepsilon) = \frac{2\pi\varepsilon\tilde{\rho_0}^5}{5\Lambda^2}. \tag{2.135}$$

Επομένως η συνολική διόρθωση είναι

$$E_{grav} = E_{Newton} + E_{geom} = \frac{\pi\varepsilon\tilde{\rho_0}^5}{3\Lambda^2}. \tag{2.136}$$

Δηλαδή η συνολική συνεισφορά είναι θετική (για $V(\phi_T) = -\varepsilon$), επομένως η φυσαλίδα είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση που συμπεριλάβουμε και την βαρύτητα.

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε ότι ο εκθέτης(B) για το φαινόμενο σήραγγας της πρώτης ειδικής περίπτωσης (σχέση 2.128) αντιστοιχεί σε μετάβαση από χώρο de Sitter σε Minkowski, ενώ αυτός της δεύτερης περίπτωσης (σχέση 2.130) αντιστοιχεί σε μετάβαση από χώρο Minkowski σε Anti-de Sitter.

Κεφάλαιο 3

Ενεργό δυναμικό του μποζονίου Higgs σε επίπεδο δένδρου και διορθώσεις ενός βρόγχου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως υπολογίζεται το ενεργό δυναμικό του μποζονίου Higgs σε επίπεδο δένδρου. Επίσης θα αναφέρουμε διορθώσεις του παραπάνω δυναμικού σε επίπεδο ενός βρόγχου μέσω των αλληλεπιδράσεων του καθιερωμένου προτύπου.

Τι είναι όμως το ενεργό δυναμικό;

Στην κβαντική θεωρία πεδίου, οι φυσικές παράμετροι προσδιορίζονται από τις κβαντομηχανικές διορθώσεις, με αποτέλεσμα σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών το κενό να μεταβάλλεται. Η συνάρτηση της οποίας το ελάχιστο προσδιορίζει το ακριβές κενό της θεωρίας ονομάζεται ενεργό δυναμικό και στην χαμηλότερη τάξη της θεωρίας διαταραχών συμπίπτει με το κλασικό δυναμικό.

3.1 Συναρτησιακοί γεννήτορες (Generating functionals)

Στην κβαντική θεωρία πεδίου, ένα πολύ χρήσιμο αντικείμενο είναι ο συναρτησιακός γεννήτορας. Είναι το ανάλογο της συνάρτησης επιμερισμού στη στατιστική φυσική και "γεννάει" τις συναρτήσεις συσχετισμού(correlation functions). Αν θεωρήσουμε ότι $\hbar = c = 1$, ο συναρτησιακός γεννήτορας θα δίνεται από τη σχέση[1]

$$Z[J] = \frac{1}{Z_0}\int \mathcal{D}\phi \exp\left\{iS[\phi] + i\int d^4x\phi(x)J(x)\right\} \quad \text{με} \quad Z[0] = 1, \tag{3.1}$$

όπου $S[\phi]$ είναι η δράση, $J(x)$ η πηγή και το ολοκλήρωμα διαδρομών $\int \mathcal{D}\phi$ υπολογίζεται πάνω σε όλες τις συναρτήσεις ϕ που ικανοποιούν κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.
Οι συναρτησιακές παράγωγοι του $Z[J]$ υπολογισμένες στο $J = 0$, δίνουν

$$\left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0} = i^n \int \mathcal{D}\phi\, \phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\exp^{iS[\phi]}\,. \tag{3.2}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτουν και οι συναρτήσεις συσχέτισης

[1] Η συνθήκη $Z[0] = 1$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $Z_0 = \int \mathcal{D}\phi \exp(iS[\phi])$.

$$\langle\Omega| T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)) |\Omega\rangle = (-i)^n \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0}, \tag{3.3}$$

όπου $|\Omega\rangle$ είναι η αληθής κατάσταση κενού της θεωρίας, η οποία δεν είναι αναγκαστικά ίδια με αυτήν της ελεύθερης θεωρίας $|0\rangle$.

Ο συναρτησιακός γεννήτορας $Z[J]$ παράγει,τόσο συνδεδεμένα διαγράμματα όσο και μη συνδεδεμένα διαγράμματα Feynman. Αυτά που εμφανίζονται στις σκεδάσεις είναι τα συνδεδεμένα και ο νέος συναρτησιακός γεννήτορας που τα παράγει αποδεικνύεται ότι είναι ο

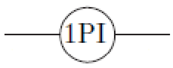
$$W[J] = -i\ln(Z[J]). \tag{3.4}$$

Δηλαδή, σύμφωνα με τα παραπάνω

$$\langle\Omega| T(\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)) |\Omega\rangle_{con} = (-i)^{n-1} \left.\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)\cdots\delta J(x_n)}\right|_{J=0}. \tag{3.5}$$

Για τη μελέτη των σκεδάσεων απαιτείται ο υπολογισμός των πλήρων συναρτήσεων συσχετισμού, δηλαδή η άθροιση όλων των συνδεδεμένων διαγραμμάτων κάθε τάξης της θεωρίας διαταραχών. Για το σκοπό αυτό θα ασχοληθούμε με τα one particle irreducible (1PI) διαγράμματα τα οποία δε "σπάνε" σε δύο διαγράμματα αν "κόψουμε" μία εσωτερική τους γραμμή.

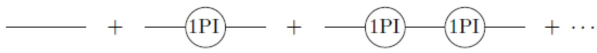
Για παράδειγμα, στον υπολογισμό της συνάρτησης συσχετισμού 2-σημείων χρειαζόμαστε τα διαγράμματα (που περιλαμβάνουν συνεισφορές από κάθε τάξη της σταθεράς σύζευξης)



$$= -i(2\pi)^4\Sigma(p^2). \tag{3.6}$$

Θεωρώντας ότι $D = \frac{\tilde{\Delta}(p^2)}{(2\pi)^4}$ και $\Sigma(p^2) = \frac{S}{(2\pi)^4}$, όπου $\tilde{\Delta}(p^2) = \frac{1}{p^2-m_0^2}$ ο διαδότης Feynman, ο πλήρης διαδότης γίνεται[2]

$\Pi(p^2) =$



$$\begin{aligned}
&= iD + iD(-iS)iD + iD(-iS)iD(-iS)iD + \cdots \\
&= iD(1 + DS + D^2S^2 + D^3S^3 + \cdots) \\
&= \frac{iD}{1-DS} = \frac{i}{\frac{1}{D} - S} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Pi(p^2) = \frac{i}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2)}. \tag{3.7}$$

Πλέον ο πόλος του διαδότη δεν είναι στο $p^2 = m_0^2$, αλλά στο $p^2 = m_0^2 + \Sigma(p^2)$. Η φυσική μάζα θα είναι $m^2 = m_0^2 + \Sigma(p^2)$.

[2] Ισχύει ότι $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Όπως και με τα συνδεδεμένα διαγράμματα, θέλουμε να υπολογίσουμε το συναρτησιακό γεννήτορα των 1PI διαγραμμάτων.

Ορίζουμε τη συνάρτηση κορυφής 2 σημείων

$$\Gamma^{(2)}(p^2) = p^2 - m_0^2 - \Sigma(p^2). \tag{3.8}$$

Ο συναρτησιακός γεννήτορας των συναρτήσεων κορυφής δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma[\phi] = W[J] - \int d^4y J(y)\phi(y) \tag{3.9}$$

και ονομάζεται ενεργός δράση.

Η συναρτησιακή παράγωγος του συναρτησιακού γεννήτορα $W[J]$ είναι

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = -i\frac{\delta(\ln Z[J])}{\delta J(x)} = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\phi] + i\int d^4x\phi(x)J(x)\right)\phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi \exp\left(iS[\phi] + i\int d^4x\phi(x)J(x)\right)}, \tag{3.10}$$

όπου το δεξί μέλος της σχέσης (3.10) είναι η αναμενόμενη τιμή του πεδίου στο κενό παρουσία της πηγής $J(x)$.

Έτσι

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle\Omega|\,\phi(x)\,|\Omega\rangle_J\,. \tag{3.11}$$

Την παραπάνω ποσότητα θα την ονομάσουμε κλασικό πεδίο

$$\phi_{cl}(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \langle\Omega|\,\phi(x)\,|\Omega\rangle_J\,. \tag{3.12}$$

Παίρνοντας την παράγωγο της $\Gamma[\phi_{cl}]$ ως προς $\phi_{cl}(x)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta\phi_{cl}(x)} - \int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\phi_{cl}(y) - \int d^4x J(y)\frac{\delta\phi_{cl}(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\\ &= \int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} - \int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\phi_{cl}(y) - \int d^4x J(y)\delta^{(4)}(x-y)\\ &\overset{(3.12)}{=\!=} \int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\phi_{cl}(y) - \int d^4y\frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\phi_{cl}(y) - J(x)\\ &= -J(x).\end{aligned} \tag{3.13}$$

Η εξίσωση (3.13) συνεπάγεται το ότι εάν η εξωτερική πηγή είναι μηδέν, η ενεργός δράση θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)} = 0. \tag{3.14}$$

Υποθέτοντας ότι οι καταστάσεις κενού είναι αναλλοίωτες κάτω από χωροχρονικές μεταφορές και μετασχηματισμούς Lorentz, οι αντίστοιχες λύσεις ϕ_{cl} θα είναι σταθερές ανεξάρτητες του x (βλ. [4]).

Έτσι έχουμε[3]

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -VTV_{eff}(\phi_{cl}). \tag{3.15}$$

3.2 Επανακανονικοποίηση

Η κβαντική ενεργός δράση περιλαμβάνει ποσότητες οι οποίες απειρίζονται. Αυτό μπορεί να διορθωθεί επιβάλλοντας κάποια σταθερά αποκοπής (cutoff) στα ολοκληρώματα που αποκλίνουν. Ύστερα μπορούμε να επανακανονικοποιήσουμε τη θεωρία μας "ταιριάζοντας" τις παραμέτρους της δράσης με αυτές που μετράμε πειραματικά. Οι παράμετροι αυτοί θα εξαρτώνται εν γένει κι από το cutoff.
Στην εργασία αυτή θα χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της διαστατικής ομαλοποίησης (dimensional regularization), στην οποία μετατρέπουμε τα ολοκληρώματα τεσσάρων διαστάσεων σε ολοκληρώματα d διαστάσεων[4], όπου $d = 4 - 2\varepsilon$. Οι απειρίες εμφανίζονται τώρα ως πόλοι της μορφής $1/\varepsilon$ και τα αποτελέσματα θα εξαρτώνται γενικά από μία αυθαίρετη ενεργειακή κλίμακα μ.

Ας σκεφτούμε μία γενική δράση που εξαρτάται από τα πεδία $\phi_i = Z_i^{1/2}\phi_i^r$ (ϕ_i^r είναι τα επανακανονικοποιημένα πεδία), τα οποία έχουν μάζες m_a^2 και σταθερές σύζευξης λ_b. Η εξίσωση Callan - Symanzik που περιγράφει πως η $1PI$ συνάρτηση συσχετισμού n - σημείων εξελίσσεται με το μ είναι [4]

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \sum_a \mu\frac{\partial m_a^2}{\partial\mu} + \sum_b \mu\frac{\partial\lambda_b}{\partial\mu} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1}\frac{\mu}{z_i}\frac{\partial z_i}{\partial\mu}\right)\Gamma^{(n)}(x_1, \cdots; \mu, m_a^2, \lambda_b) = 0. \tag{3.16}$$

Η παραπάνω εξίσωση θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό του ενεργού δυναμικού του πεδίου Higgs.

[3] Το VT είναι το στοιχείο όγκου και προέκυψε από ολοκλήρωση σε όλο το χωρόχρονο.
[4] Γιατί το κάνουμε όμως αυτό; Σκεφτείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{k^2+m^2}d^nk$. Το ολοκλήρωμα αυτό για $n = 2$ δεν απειρίζεται, ενώ για $n = 4$ εμφανίζει λογαριθμική απειρία. Επομένως ο απειρισμός εξαρτάται όχι μόνο από την ολοκληρωτέα συνάρτηση, αλλά κι από τον αριθμό των διαστάσεων.

3.3 Εξάρτιση του ενεργού δυναμικού από την επιλογή βαθμίδας

Καθώς το καθιερωμένο πρότυπο περιλαμβάνει πεδία βαθμίδας, είναι απαραίτητο να προσθέσουμε στην ενεργό δράση κάποιους gauge fixing όρους για να μπορέσουμε να κβαντώσουμε τη θεωρία. Οι ταυτότητες του Nielsen [20] λένε, ότι η εξάρτιση από την επιλογή βαθμίδας μπορεί να αντισταθμιστεί από έναν επαναπροσδιορισμό του πεδίου. Για την περίπτωση του πεδίου Higgs έχουμε ότι

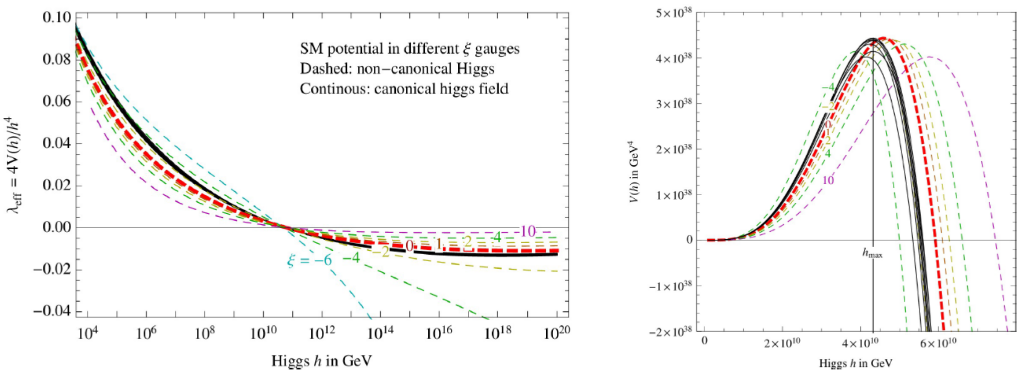
$$\xi \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} = - \int d^4x\, K[h(x)] \frac{\delta \Gamma}{\delta h(x)}, \tag{3.17}$$

όπου το $K[h(x)]$ είναι ένα συναρτησοειδές του πεδίου h (βλ. [10]).

Για το ενεργό δυναμικό αποδεικνύεται ότι ισχύει η σχέση [10]

$$\xi \frac{\partial V}{\partial \xi} + C(h) \frac{\partial V}{\partial h} = 0. \tag{3.18}$$

Από τη σχέση (3.17) φαίνεται ότι στις ακραίες τιμές, όπου $\frac{\partial V}{\partial h} = 0$, το δυναμικό θα είναι ανεξάρτητο από την επιλογή βαθμίδας, δηλαδή $\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0$. Στο παρακάτω γράφημα[5] φαίνεται η εξάρτηση της σταθεράς σύζευξης και του δυναμικού από την επιλογή βαθμίδας στο Καθιερωμένο Πρότυπο.



Σχήμα 3.1: Οι διακεκομμένες καμπύλες δείχνουν τη σταθερά σύζευξης(αριστερά) και το ενεργό δυναμικό(δεξιά) σε συνάρτηση με το πεδίο, για διάφορες τιμές της παραμέτρου ξ. Η παχιά κόκκινη διακεκομμένη καμπύλη αντιστοιχεί στη βαθμίδα Landau, όπου $\xi = 0$. Οι μαύρες συνεχείς καμπύλες δείχνουν το ίδιο δυναμικό, εκπεφρασμένο όμως ως προς ένα κανονικοποημένο πεδίο. Στην τελευταία περίπτωση, η εξάρτιση από την επιλογή βαθμίδας εξισορροπείται από την εξάρτιση στην επιλογή βαθμίδας που έχει ο κινητικός όρος, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα την επικάλυψη των συνεχών καμπυλών.

[5] Το σχήμα βρίσκεται στο [10].

3.4 Υπολογισμός της ενεργού δράσης

Πλέον είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε την ενεργό δράση.
Αρχικά διαχωρίζουμε τη Lagrangian πυκνότητα σε έναν επανακανονικοποιημένο όρο $\mathcal{L}_r$ που περιέχει τις φυσικές παραμέτρους του συστήματος και σε έναν δεύτερο όρο $\Delta\mathcal{L}$ που περιέχει τους απειρισμούς (counter terms)

$$\mathcal{L}[\phi_r] = \mathcal{L}_r[\phi_r] + \Delta\mathcal{L}[\phi_r] \Rightarrow S[\phi_r] = S_r[\phi_r] + \Delta S\phi_r \tag{3.19}$$

όπου το ϕ_r είναι το επανακανονικοποιημένο πεδίο και δίνεται από τη σχέση

$$\phi = Z^{1/2}\phi_r. \tag{3.20}$$

Η πηγή μπορεί να γραφεί επίσης ως

$$J(x) = J_r(x) + \Delta J(x). \tag{3.21}$$

Στη χαμηλότερη τάξη της θεωρίας διαταραχών ισχύει η κλασική εξίσωση πεδίου

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\right|_{\phi=\phi_{cl}} + J(x) = 0. \tag{3.22}$$

Το $J_r(x)$ ορίζεται ως η συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$\left.\frac{\delta\mathcal{L}_r}{\delta\phi}\right|_{\phi=\phi_{cl}} + J_r(x) = 0. \tag{3.23}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.19) και (3.21) παίρνουμε ότι

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left(i\int d^4x(\mathcal{L}_r[\phi_r] + J_r\phi_r)\right) \exp\left(i\int d^4x(\Delta\mathcal{L}[\phi_r] + \Delta J\phi_r)\right), \tag{3.24}$$

όπου το δεύτερο εκθετικό περιλαμβάνει τα (counter terms).

Για το πρώτο εκθετικό θεωρούμε ότι

$$\phi_r(x) = \phi_{cl}(x) + \eta(x), \tag{3.25}$$

όπου το πεδίο $\eta(x)$ περιγράφει τις διακυμάνσεις γύρω από το $\phi_{cl}(x)$.

Αντικαθιστώντας την (3.25) στο ολοκλήρωμα του πρώτου εκθετικού της (3.24) και αναπτύσσοντας το $\mathcal{L}_r[\phi_r]$ γύρω από το $\phi_{cl}(x)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int d^4x(\mathcal{L}_r[\phi_r] + J_r\phi_r) = &\int d^4x(\mathcal{L}_r[\phi_{cl}] + J_r(x)\phi_{cl}(x)) + \int d^4x\, \eta(x)\Big(\left.\frac{\delta\mathcal{L}_r}{\delta\phi_r}\right|_{\phi=\phi_{cl}} + J_r(x)\Big)\\ &+ \frac{1}{2!}\int d^4x\int d^4y\, \eta(x)\,\eta(y)\, \left.\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_r]}{\delta\phi_r(x)\delta\phi_r(y)}\right|_{\phi=\phi_{cl}} + \mathcal{O}(\mathcal{L}_r^{(2)}).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.23) το προηγούμενο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned}\int d^4x(\mathcal{L}_r[\phi_r] + J_r\phi_r) = &\int d^4x(\mathcal{L}_r[\phi_{cl}] + J_r(x)\phi_{cl}(x)) \\ &+ \frac{1}{2!}\int d^4x \int d^4y\, \eta(x)\, \eta(y)\ \frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_r]}{\delta\phi_r(x)\delta\phi_r(y)}\Big|_{\phi=\phi_{cl}} + \cdots .\end{aligned} \tag{3.26}$$

Κάνοντας την ίδια διαδικασία για το δεύτερο ολκλήρωμα της (3.24) και χρησιμοποιώντας τις (3.22) και (3.23) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int d^4x(\Delta\mathcal{L}[\phi_r] + \Delta J\phi_r) = &\int d^4x(\Delta\mathcal{L}[\phi_{cl}] + \Delta J(x)\phi_{cl}(x)) \\ &+ \frac{1}{2!}\int d^4x \int d^4y\, \eta(x)\, \eta(y)\ \frac{\delta^2\Delta\mathcal{L}[\phi_r]}{\delta\phi_r(x)\delta\phi_r(y)}\Big|_{\phi=\phi_{cl}} + \cdots .\end{aligned} \tag{3.27}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω ο συναρτησιακός γεννήτορας $Z[J]$ γίνεται

$$Z[J] = e^{iW[J]} = e^{i\int d^4x(\mathcal{L}_r[\phi_{cl}]+J_r\phi_{cl})}\, e^{\int d^4x(\Delta\mathcal{L}[\phi_{cl}]+\Delta J\phi_{cl})}\int \mathcal{D}\eta\, e^{i(\tilde{S}[\eta]+\Delta\tilde{S}[\eta])}, \tag{3.28}$$

όπου

$$\tilde{S}[\eta] = \frac{1}{2!}\int d^4x \int d^4y\, \eta(x) \left(\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_r]}{\delta\phi_r(x)\delta\phi_r(y)}\Big|_{\phi=\phi_{cl}} \right) \eta(y) + \cdots \tag{3.29}$$

και

$$\Delta\tilde{S}[\eta] = \frac{1}{2!}\int d^4x \int d^4y\, \eta(x) \left(\frac{\delta^2\Delta\mathcal{L}[\phi_r]}{\delta\phi_r(x)\delta\phi_r(y)}\Big|_{\phi=\phi_{cl}} \right) \eta(y) + \cdots . \tag{3.30}$$

Αγνοώντας τους όρους τρίτης τάξης και άνω καθώς και τα counter terms $\Delta\tilde{S}[\eta]$, το ολοκλήρωμα πάνω στα πεδία η είναι ένα γκαουσιανό συναρτησιακό ολοκλήρωμα το οποίο υπολογίζεται ως εξής[6]

$$\begin{aligned}&\int \mathcal{D}\eta\, exp\left[\frac{i}{2}\int d^4x \int d^4y\, \eta(x) \left(\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_r]}{\delta\phi_r(x)\delta\phi_r(y)}\Big|_{\phi=\phi_{cl}} \right) \eta(y)\right] \\ &\qquad = \left[det\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_{cl}]}{\delta\phi_r^2}\right)\right]^{-1/2} = exp\left[-\frac{1}{2}tr\ \ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_{cl}]}{\delta\phi_r^2}\right)\right].\end{aligned} \tag{3.31}$$

Άρα

[6] Ισχύει η σχέση $\ln det(A) = tr\ \ln(A)$.

$$\int \mathcal{D}\eta\, e^{i(\tilde{S}[\eta]+\Delta\tilde{S}[\eta])} = exp\left[-\frac{1}{2}tr\ \ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_{cl}]}{\delta\phi_r^2}\right) + \Big(\text{όροι μεγ. τάξης}\Big)\right]. \tag{3.32}$$

Παίρνοντας το λογάριθμο της (3.28) και αντικαθιστώντας την (3.32) παίρνουμε ότι

$$W[J] = \int d^4x(\mathcal{L}_r[\phi_{cl}]+J_r\phi_{cl}+\Delta\mathcal{L}[\phi_{cl}]+\Delta J\phi_{cl})+\frac{i}{2}tr\ \ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_{cl}]}{\delta\phi_r^2}\right)-i\Big(\text{όροι μεγ. τάξης}\Big). \tag{3.33}$$

Πλέον μπορούμε να υπολογίσουμε την ενεργό δράση αντικαθιστώντας την (3.33) στην (3.9)

$$\begin{aligned}\Gamma[\phi_{cl}] &= W[J] - \int d^4y\, J(y)\phi_{cl}(y)\\ &= \int d^4x(\mathcal{L}_r[\phi_{cl}] + \Delta\mathcal{L}[\phi_{cl}]) + \frac{i}{2}tr\ \ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_{cl}]}{\delta\phi_r^2}\right) - i\Big(\text{όροι μεγ. τάξης}\Big)\\ &= S_r[\phi_{cl}] + \Delta S[\phi_{cl}] + \frac{i}{2}tr\ \ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_{cl}]}{\delta\phi_r^2}\right) - i\Big(\text{όροι μεγ. τάξης}\Big).\end{aligned} \tag{3.34}$$

Είχαμε αναφέρει επίσης ότι το κλασικό πεδίο ϕ_{cl} είναι σταθερό, επομένως

$$S_r[\phi_{cl}] = \int d^4x\, \mathcal{L}_r[\phi_{cl}] = -VT\, V_r(\phi_{cl}) \tag{3.35}$$

και

$$\Delta S[\phi_{cl}] = \int d^4x\, \Delta\mathcal{L}[\phi_{cl}] = -VT\, V_{ct}(\phi_{cl})^7 \tag{3.36}$$

Συνεπώς,

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -VT\, V_r(\phi_{cl}) - VT\, V_{ct}(\phi_{cl}) + \frac{i}{2}tr\ \ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_{cl}]}{\delta\phi_r^2}\right) - i\Big(\text{όροι μεγ. τάξης}\Big). \tag{3.37}$$

Τέλος, το ενεργό δυναμικό υπολογίζεται εύκολα από την (3.15)

$$V_{eff}[\phi_{cl}] = V_r(\phi_{cl}) + V_{ct}(\phi_{cl}) - \frac{i}{2VT}tr\ \ln\left(-\frac{\delta^2\mathcal{L}_r[\phi_{cl}]}{\delta\phi_r^2}\right) + \frac{i}{VT}\Big(\text{όροι μεγ. τάξης}\Big). \tag{3.38}$$

Οι κβαντομηχανικές διορθώσεις της πρώτης καθώς και των ανωτέρων τάξεων δίνονται από τον τρίτο και τον τέταρτο όρο (της 3.38) αντίστοιχα, ενώ ο δεύτερος όρος περιέχει τα counter

[7] Το ct στο $V_{ct}(\phi_{cl})$ συμβολίζει το counter terms.

terms που θα απορροφήσουν τους απειρισμούς.

Σε γενικές γραμμές το ενεργό δυναμικό θα έχει συνεισφορές από πολλά πεδία και σε επίπεδο ενός βρόγχου θα χρειαστούμε τις συνεισφορές από βαθμωτά πεδία, φερμιονικά πεδία και πεδία βαθμίδας.

3.5 Συνεισφορά βαθμωτών πεδίων στο ενεργό δυναμικό

Σε επίπεδο δένδρου θα πάρουμε τη Lagrangian πυκνότητα για N βαθμωτά πεδία

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - \frac{1}{2}m^2\phi_i^2 - \frac{\lambda}{4}\phi_i^4. \tag{3.39}$$

Αν αναπτύξουμε πάλι γύρω από το ϕ_{cl}, δηλαδή $\phi^i = \phi^i_{cl} + \eta^i$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{2}m^2(\phi^i_{cl})^2 - \frac{\lambda}{4}(\phi^i_{cl})^4 - (m^2 + \lambda(\phi^i_{cl})^2)\phi^i_{cl}\eta^i + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta^i)^2 \\ &-\frac{1}{2}m^2(\eta^i)^2 - \frac{\lambda}{2}\left[(\phi^i_{cl})^2(\eta^i)^2 + 2(\phi^i_{cl}\eta^i)^2\right] + \cdots .\end{aligned} \tag{3.40}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}-\frac{\delta^2\mathcal{L}[\phi_{cl}]}{\delta\phi^i\,\delta\phi^j} &= \delta^{ij}\Box + m^2\delta^{ij} + \lambda(\phi^2_{cl}\,\delta^{ij} + 2\phi^i_{cl}\phi^j_{cl}) \\ &= \delta^{ij}(\Box + m^2 + \lambda\phi^2_{cl}) + 2\lambda\phi^i_{cl}\phi^j_{cl}.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Το παραπάνω αντικείμενο έχει τη γενική μορφή ενός τελεστή Klein Gordon. Έχουμε την ελευθερία να διαλέξουμε το ϕ_{cl}, έτσι ώστε $\phi^i_{cl} = (0, 0, \cdots, \phi^2_{cl})$. Τότε ο παραπάνω τελεστής είναι ακριβώς ίδιος με τον τελεστή Klein Gordon $\Box + m_i^2$, όπου

$$m_i^2(\phi_{cl}) = \begin{cases} \lambda\phi^2_{cl} + m^2 & N-1 \text{ πεδία} \\ 3\lambda\phi^2_{cl} + m^2 & 1 \text{ πεδίο} \end{cases} . \tag{3.42}$$

Η ποσότητα που θέλουμε να υπολογίσουμε για να βρούμε εν τέλει το ενεργό δυναμικό είναι το $tr\ \ln(\Box + m^2(\phi_{cl}))$. Θα το υπολογίσουμε για τυχαία μάζα $m^2(\phi_{cl})$ και στη συνέχεια θα αντικαταστήσουμε τα δύο είδη μαζών της (3.42).

Έχουμε[8]

[8] Χρησιμοποιούμε Wick rotation.

$$\begin{aligned} tr\ \ln(\Box + m_i^2(\phi_{cl})) &= \sum_k \ln(-k^2 + m_i^2) \\ &= VT \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \ln(-k^2 + m_i^2) \\ &= iVT \int \frac{d^dk_E}{(2\pi)^d} \ln(k_E^2 + m_i^2) \\ &= -iVT \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{d^dk_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + m_i^2)^a}\Big|_{a=0} \\ &= -iVT \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(a - d/2)}{\Gamma(a)} \frac{1}{(m_i^2)^{a-d/2}} \right)\Big|_{a=0} \\ &= -iVT \frac{\Gamma(-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} (m_i^2)^{d/2}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Σύμφωνα με την (3.38) το ενεργό δυναμικό θα είναι

$$\begin{aligned} V_{eff}[\phi_{cl}] = &\frac{1}{2} m^2 \phi_{cl}^2 + \frac{\lambda}{4} \phi_{cl}^4 + \frac{1}{2} \delta m \phi_{cl}^2 + \frac{1}{4} \delta\lambda \phi_{cl}^4 \\ &- \frac{1}{2} \frac{\Gamma(-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left[(N-1)(\lambda\phi_{cl}^2 + m^2)^{d/2} + (3\lambda\phi_{cl}^2 + m^2)^{d/2} \right], \end{aligned} \tag{3.44}$$

όπου οι όροι $\frac{1}{2}\delta m \phi_{cl}^2 + \frac{1}{4}\delta\lambda\phi_{cl}^4$ αντιστοιχούν στα counter terms.

Για $d = 4$ το $\Gamma(-d/2)$ απειρίζεται. Για να άρουμε αυτούς τους απειρισμούς θέτουμε [4]

$$\begin{aligned} \delta m &= -\lambda\mu^2(N+2) \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^2} \\ \delta\lambda &= \lambda^2(N+8) \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^2}. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Στη μέθοδο επανακανονικοποίησης γνωστή κι ως modified minimal subtraction ($\bar{M}S$), μπορούμε να αντικαταστήσουμε[9]

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}(m_i^2)^{2-d/2}} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln(m_i^2) \right) \\ &\to \frac{1}{(4\pi)^2} \left(-\ln\left(\frac{m_i^2}{\mu^2} \right) \right), \end{aligned} \tag{3.46}$$

όπου μ μία αυθαίρετη παράμετρος με διαστάσεις μάζας την οποία εισάγαμε για να έχει σωστές διαστάσεις η παραπάνω εξίσωση. Οι όροι που απειρίζονται καθώς και κάποιες σταθερές, έχουν απορροφηθεί από τα counter terms.

Επίσης έχουμε

[9] Όπου $\gamma_E = 0,57721$ η σταθερά Euler-Macheroni.

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(-d/2)}{(4\pi)^{d/2}}(m_i^2)^{d/2} &= \frac{1}{\frac{d}{2}(\frac{d}{2}-1)}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}}(m_i^2)^{d/2} \\ &= \frac{m_i^4}{2(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\gamma_E+\ln(4\pi)-\ln(m_i^2)+\frac{3}{2}\right) \\ &\to \frac{m_i^4}{2(4\pi)^2}\left(-\ln\left(\frac{m_i^2}{\mu^2}\right)+\frac{3}{2}\right).\end{aligned} \tag{3.47}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.42) και (3.47) στην (3.44) παίρνουμε

$$\begin{aligned}V_{eff}[\phi_{cl}] = \frac{1}{2}m^2\phi_{cl}^2+\frac{\lambda}{4}\phi_{cl}^4+\frac{1}{4}\frac{1}{(4\pi)^2}\Bigg[&(N-1)(\lambda\phi_{cl}^2+m^2)^2\left(\ln[(\lambda\phi_{cl}^2+m^2)/\mu^2]-\frac{3}{2}\right) \\ &+(3\lambda\phi_{cl}^2+m^2)^2\left(\ln[(3\lambda\phi_{cl}^2+m^2)/\mu^2]-\frac{3}{2}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{3.48}$$

Η συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό από το βαθμωτό πεδίο είναι

$$\begin{aligned}V_s[\phi_{cl}] = &-\frac{1}{64\pi^2}(3\lambda\phi_{cl}^2+m^2)^2\left(\frac{3}{2}+\ln\left(\frac{\mu^2}{3\lambda\phi_{cl}^2+m^2}\right)\right) \\ &-\frac{N-1}{64\pi^2}(\lambda\phi_{cl}^2+m^2)^2\left(\frac{3}{2}+\ln\left(\frac{\mu^2}{\lambda\phi_{cl}^2+m^2}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.49}$$

3.6 Συνεισφορά φερμιονικών πεδίων στο ενεργό δυναμικό

Ας σκεφτούμε μία θεωρία φερμιονικών πεδίων που περιγράφεται από τη Lagrangian

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_a\partial\!\!\!/\psi^a - \bar{\psi}_a(M_f)^a_b\psi^b, \tag{3.50}$$

όπου ο πίνακας μαζών $(M_f)^a_b$ είναι συνάρτηση των βαθμωτών πεδίων και οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες αθροίζονται.

Αν n είναι ο αριθμός των ανεξάρτητων συνιστωσών των φερμιονικών πεδίων[10], αποδεικνύεται ότι το ενεργό δυναμικό είναι της μορφής

$$V_f[\phi_{cl}] = -\frac{n}{2}tr\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ln[k^2+(M_f)^2]. \tag{3.51}$$

[10] Είναι $n=2$ για σπίνορα Weyl και $n=4$ για σπίνορα Dirac.

Κάνοντας την κατάλληλη επανακανονικοποίηση και εκτελώντας μερικές πράξεις όπως στην περίπτωση του βαθμωτού πεδίου, αποδεικνύεται ότι η διόρθωση στο ενεργό δυναμικό που προέρχεται από τα φερμιονικά πεδία είναι

$$V_f[\phi_{cl}] = -\frac{n}{64\pi^2}(M_f)^4\left(\ln\left(\frac{(M_f)^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right). \tag{3.52}$$

3.7 Συνεισφορά πεδίων βαθμίδας στο ενεργό δυναμικό

Για τα πεδία βαθμίδας (gauge fields)θεωρούμε τη Lagrangian

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}tr\,(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}tr\,(D_\mu\phi_a)^\dagger D^\mu\phi^a. \tag{3.53}$$

Τα πεδία βαθμίδας είναι το $A^\mu = A^\mu_a T^a$, όπου T^a είναι ο γεννήτορας της ομάδας. Ο τανυστής $F_{\mu\nu}$ δίνεται από τη σχέση

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \tag{3.54}$$

όπου g η σταθερά σύζευξης.

Τέλος η συναλλοίωτη παράγωγος ορίζεται μέσω της σχέσης

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu. \tag{3.55}$$

Η μόνη συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό έρχεται από τον όρο της Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M_{boson})^2_{ab}A^{a\,\mu}A^b_\mu, \tag{3.56}$$

όπου

$$(M_{boson})^2_{ab} = g^2 tr\,\left[\left(T^i_{ac}\phi_i\right)^\dagger T^c_{bj}\phi^j\right]. \tag{3.57}$$

Έτσι όμοια με την περίπτωση του βαθμωτού και του φερμιονικού πεδίου έχουμε

$$V_b[\phi_{cl}] = \frac{\Delta}{2}tr\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ln[k^2 + (M_{boson})^2], \tag{3.58}$$

όπου $\Delta = d - 1 = 3 - 2\varepsilon$ είναι οι μποζονικοί βαθμοί ελευθερίας στις d διαστάσεις.

Ύστερα από μερικές πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$V_b[\phi_{cl}] = \frac{3}{64\pi^2}(M_{boson})^4 \left(\ln\left(\frac{(M_{boson})^2}{\mu^2} \right) - \frac{5}{6} \right), \tag{3.59}$$

που δίνει τη συνεισφορά στο δυναμικό από το πεδίο βαθμίδας.

3.8 Δυναμικό του πεδίου Higgs σε μηδενική θερμοκρασία

Θα χρησιμοποιήσουμε όλα τα παραπάνω για τον υπολογισμό του δυναμικού του Higgs. Τα πεδία με μηδενικό spin περιγράφονται από την SU(2) διπλέτα [5]

$$\phi = \begin{pmatrix} \chi_1 + i\chi_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{cl} + h + i\chi_3) \end{pmatrix}, \tag{3.60}$$

όπου h είναι το πεδίο Higgs και χ_a $(a = 1, 2, 3)$ είναι τα τρία Goldstone μποζόνια.

Το tree level δυναμικό είναι

$$V_0(\phi_{cl}) = \frac{m^2}{2}\phi_{cl}^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_{cl}^4 \tag{3.61}$$

με $\lambda > 0$ και $m^2 < 0$.

Το ελάχιστο του δυναμικού (3.61) είναι στην τιμή του πεδίου

$$u^2 = \frac{-m^2}{\lambda}. \tag{3.62}$$

Έτσι από τη σχέση (3.42) για τις μάζες του Higgs και των τριών Goldstones έχουμε

$$\begin{aligned} m_{\chi_a}^2(\phi_{cl}) = \lambda\phi_{cl}^2 + m^2 \Rightarrow m_{\chi_a}^2(u) &= \lambda u^2 + m^2 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.63}$$

και

$$\begin{aligned} m_h^2(\phi_{cl}) = 3\lambda\phi_{cl}^2 + m^2 \Rightarrow m_h^2(u) &= 3\lambda u^2 + m^2 \\ &= 3\lambda\left(\frac{-m^2}{\lambda}\right) + m^2 \\ &= -2m^2. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Δηλαδή τα τρία μποζόνια Goldstone έχουν μηδενική μάζα στο ελάχιστο του δυναμικού, ενώ το Higgs έχει μάζα $-2m^2$ $(m^2 < 0)$.

Τα πεδία βαθμίδας που συμβάλλουν στο one loop ενεργό δυναμικό είναι τα $W^{\pm}$ και Z με μάζες που εξαρτώνται από τις σταθερές σύζευξης και είναι

$$\begin{aligned} m^2_{W^{\pm}}(\phi_{cl}) &= \frac{g^2}{4}\phi^2_{cl} \\ m^2_Z(\phi_{cl}) &= \frac{g^2+g'^2}{4}\phi^2_{cl}. \end{aligned} \tag{3.65}$$

Τέλος, το μόνο φερμιόνιο που συνεισφέρει σημαντικά στο ενεργό δυναμικό είναι το top quark με μάζα

$$m^2_t(\phi_{cl}) = \frac{h^2_t}{2}\phi^2_{cl}, \tag{3.66}$$

όπου h_t είναι η σταθερά σύζευξης Yukawa για το top quark.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι όλες οι παραπάνω μάζες υπολογίζονται στην αναμενόμενη τιμή του κενού $\phi_{cl} = u \simeq 246\,GeV$, όπου όπως προείπαμε τα Goldstones γίνονται άμαζα.

Από τις σχέσεις (3.49), (3.52), (3.59) και (3.61) βλέπουμε ότι το ενεργό δυναμικό μπορεί να γραφεί στην τυποποιημένη μορφή

$$V(\phi_{cl}) = \frac{m^2}{2}\phi^2_{cl} + \frac{\lambda}{4}\phi^4_{cl} + \frac{1}{64\pi^2}\sum_{i=W,Z,h,\chi,t} n_i M^4_i(\phi_{cl})\left(\ln\left(\frac{M^2_i(\phi_{cl})}{\mu^2}\right) - C_i\right), \tag{3.67}$$

όπου τα C_i είναι σταθερές με τιμές

$$\begin{aligned} C_h = C_\chi = C_t &= \frac{3}{2} \\ C_W = C_Z &= \frac{5}{6} \end{aligned} \tag{3.68}$$

και τα n_i οι βαθμοί ελευθερίας[11]

$$n_h = 1, \quad n_\chi = 3, \quad n_t = -12, \quad n_W = 6, \quad n_Z = 3. \tag{3.69}$$

Άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V(\phi_{cl}) = \frac{m^2}{2}\phi^2_{cl} + \frac{\lambda}{4}\phi^4_{cl} + \frac{1}{64\pi^2}\Bigg[& m^4_h(\phi_{cl})\left(\ln\left(\frac{m^2_h(\phi_{cl})}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right) \\ & - 12 m^4_t(\phi_{cl})\left(\ln\left(\frac{m^2_t(\phi_{cl})}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right) \\ & + 6 m^4_W(\phi_{cl})\left(\ln\left(\frac{m^2_W(\phi_{cl})}{\mu^2}\right) - \frac{5}{6}\right) \\ & + 3 m^4_Z(\phi_{cl})\left(\ln\left(\frac{m^2_Z(\phi_{cl})}{\mu^2}\right) - \frac{5}{6}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.70}$$

[11] Για παράδειγμα στο top quark έχουμε $n_t = -12$, αφού από (3.52) ο συντελεστής είναι $-4\cdot 3(\text{χρώματα}) = -12$.

Το ενεργό δυναμικό είναι ανεξάρτητο από την κλίμακα μ^2, κάτι που σημαίνει ότι

$$\frac{dV}{dt} = 0 \qquad \text{με} \quad t = \ln \mu^2. \tag{3.71}$$

Ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες

$$\begin{aligned} \beta_\lambda &= \frac{d\lambda}{dt} \\ \gamma_m &= \frac{1}{m^2}\frac{dm^2}{dt} \\ \gamma &= \frac{1}{2\phi^2}\frac{d\phi^2}{dt}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο του ενεργού δυναμικού και αντικαθιστώντας την (3.72) έχουμε[12]

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{1}{4}\phi^4\left[\beta_\lambda + 4\lambda\gamma - \frac{1}{16\pi^2}\left(12\lambda^2 + \frac{3}{8}g^4 + \frac{3}{16}(g^2+g'^2)^4 - 3h_t^4\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}m^2\phi^2\left[\gamma_m + 2\gamma - \frac{12\lambda}{32\pi^2}\right] = 0, \end{aligned} \tag{3.73}$$

όπου προφανώς οι συντελεστές του ϕ^4 και του ϕ^2 πρέπει να μηδενίζονται, άρα

$$\begin{aligned} \beta_\lambda + 4\lambda\gamma &= \frac{1}{16\pi^2}\left(12\lambda^2 + \frac{3}{8}g^4 + \frac{3}{16}(g^2+g'^2)^4 - 3h_t^4\right) \\ \gamma_m + 2\gamma &= \frac{12\lambda}{32\pi^2}. \end{aligned} \tag{3.74}$$

Στην περίπτωση που το ϕ_{cl} παίρνει μεγάλες τιμές ($\phi_{cl} = \Lambda \gg m$), πρέπει να συμπεριλάβουμε στο δυναμικό και τα μποζόνια Goldstone.
Το δυναμικό θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} V(\phi_{cl}) = \frac{m^2}{2}\phi_{cl}^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_{cl}^4 + \frac{1}{64\pi^2}\Bigg[&(m^2+3\lambda^2\phi_{cl}^2)^2\left(\ln\left(\frac{m^2+3\lambda^2\phi_{cl}^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right) \\ &+ 3(m^2+\lambda^2\phi_{cl}^2)^2\left(\ln\left(\frac{m^2+\lambda^2\phi_{cl}^2}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right) - 12\frac{h_t^4\phi_{cl}^4}{4}\left(\ln\left(\frac{h_t^2\phi_{cl}^2}{2\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right) \\ &+ 6\frac{g^4\phi_{cl}^4}{16}\left(\ln\left(\frac{g^2\phi_{cl}^2}{4\mu^2}\right) - \frac{5}{6}\right) + 3\frac{(g^2+g'^2)^2\phi_{cl}^4}{16}\left(\ln\left(\frac{(g^2+g'^2)\phi_{cl}^2}{4\mu^2}\right) - \frac{5}{6}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Στο όριο που $\phi_{cl} = \Lambda \gg m$ η (3.75) γίνεται

[12] Έχουμε θεωρήσει σταθερά τα g, g' και h_t.

$$\begin{aligned} V(\Lambda) \simeq \frac{1}{2} m^2 \Lambda^2 \left[1 + \frac{12\lambda}{32\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)\right] &+ \frac{1}{4}\Lambda^4 \Big[\lambda + \frac{1}{16\pi^2}(12\lambda^2 + \frac{3}{8} g^2 + \\ &+ \frac{3}{16}(g^2 + g'^2)^2 - 3h_t^4) \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) \Big], \end{aligned} \tag{3.76}$$

ή σύμφωνα με την (3.74)

$$V(\Lambda) \simeq \frac{1}{4}\Lambda^4 \left[\lambda + (\beta_\lambda + 4\lambda\gamma) \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)\right] + \frac{1}{2} m^2 \Lambda^2 \left[1 + (\gamma_m + 2\gamma) \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right)\right]. \tag{3.77}$$

Όμως, αφού το V δεν εξαρτάται από το μ μπορούμε να επιλέξουμε ένα αυθαίρετο μ τέτοιο ώστε $\mu = \Lambda$. Στην περίπτωση αυτή η λογαριθμική εξάρτηση εξαφανίζεται

$$V(\Lambda) \simeq \frac{1}{2} m^2 \Lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda\Lambda^4 \qquad \text{με} \quad \lambda < 0. \tag{3.78}$$

Για να ασχοληθούμε με την ευστάθεια του δυναμικού πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις που δίνουν τις σταθερές σύζευξης του καθιερωμένου προτύπου. Οι εξισώσεις αυτές σε επίπεδο one loop δίνονται από τις σχέσεις [6]

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{1}{16\pi^2}\left[12\lambda^2 + \frac{3}{8} g^4 + \frac{3}{16}(g^2 + g'^2)^2 - 3h_t^4 - 3\lambda g^2 - \frac{3}{2}\lambda(g^2 + g'^2) + 6\lambda h_t^2 \right] \\ \frac{dg}{dt} &= \frac{1}{32\pi^2}\left(-\frac{19}{6} g^3 \right) \\ \frac{dg'}{dt} &= \frac{1}{32\pi^2}\frac{41}{6} g'^3 \\ \frac{dg_s}{dt} &= \frac{1}{32\pi^2}\left(-7 g_s^3 \right) \\ \frac{dh_t}{dt} &= \frac{1}{32\pi^2}\left[\frac{9}{2} h_t^3 - \left(8 g_s^2 + \frac{9}{4} g^2 + \frac{17}{12} g'^2 \right) h_t \right], \end{aligned} \tag{3.79}$$

όπου g_s είναι η σταθερά σύζευξης της ισχυρής αλληλεπίδρασης.

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να λυθούν αριθμητικά. Αν γίνει αυτό, βλέπουμε ότι το δυναμικό του Higgs είναι ασταθές για τιμές του $\Lambda \simeq 10^8\, GeV$, ενώ αν συμπεριλάβουμε και διορθώσεις από περισσότερα loops η αστάθεια εμφανίζεται στα $10^{11}\, GeV$.

3.9 Δυναμικό του πεδίου Higgs σε υψηλή θερμοκρασία

Στην περίπτωση που το πεδίο Higgs βρίσκεται σε θερμικό περιβάλλον το δυναμικό του θα έχει κάποιες νέες διορθώσεις. Η μη μηδενική θερμοκρασία αλλάζει το μέγιστο του δυναμικού σε

μία τιμή ανάλογή της. Οι διορθώσεις αυτές μελετώνται στο [7].
Το συνολικό δυναμικό[13] που προκύπτει είναι

$$V(\phi, T) \simeq \frac{1}{2} k^2 T^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \tag{3.80}$$

με

$$\begin{aligned} k^2 = & \frac{1}{12}\left(\frac{3}{4}g'^2 + \frac{9}{4}g^2 + 3h_t^2 + 6\lambda\right) - \frac{1}{32\pi^2}\sqrt{\frac{11}{6}}\left(g'^3 + 3g^3\right) \\ & - \frac{3}{16\pi}\lambda\sqrt{g'^2 + 3g^2 + 8\lambda + 4h_t^2}. \end{aligned} \tag{3.81}$$

[13] Σε αυτήν την περίπτωση αντιστοιχεί στην Ελεύθερη ενέργεια.

Κεφάλαιο 4

Θερμοδυναμική μελανών οπών

4.1 Επιφανειακός όρος Gibbons - Hawking

Στη Γενική Σχετικότητα ο επιφανειακός όρος Gibbons - Hawking πρέπει να προστίθεται στη δράση Einstein - Hilbert, όταν η μελετούμενη χωροχρονική πολλαπλότητα έχει κάποιο σύνορο.
Η δράση Einstein - Hilbert είναι η βάση για την πιο στοιχειώδη αρχή μεταβολής, από την οποία εξάγονται οι εξισώσεις πεδίου της Γενικής Σχετικότητας. Ωστόσο, η χρήση της δράσης Einstein - Hilbert είναι κατάλληλη μόνο όταν η αντίστοιχη πολλαπλότητα $\mathcal{M}$ είναι κλειστή, δηλαδή συμπαγής και χωρίς σύνορο. Στην περίπτωση που η πολλαπλότητα έχει κάποιο σύνορο, η δράση πρέπει να συμπληρωθεί από έναν επιφανειακό όρο, έτσι ώστε η αρχή μεταβολής να είναι σωστά καθορισμένη.
Η αναγκαιότητα ενός τέτοιου όρου πρωτοεισήχθη από τον York και αργότερα από τους Gibbons και Hawking, γι' αυτό συχνά αναφέρεται κι ως επιφανειακός όρος Gibbons - Hawking - York.
Ας δούμε λοιπόν πως υπολογίζεται αυτός ο όρος.

Η δράση Einstein - Hilbert είναι της μορφής

$$S = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\, R, \tag{4.1}$$

όπου R το βαθμωτό του Ricci και g η ορίζουσα του μετρικού τανυστή.

Η μεταβολή της δράσης ως προς δg είναι[1]

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G}\left(\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} + \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\nabla_\mu V^\mu\right), \tag{4.2}$$

όπου

$$V^\mu = g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\mu_{\ \alpha\beta} - g^{\alpha\mu}\delta\Gamma^\nu_{\ \alpha\nu}. \tag{4.3}$$

[1] Βλέπε παράρτημα Β′.

Στην (4.2) εμφανίζεται η συναλλοίωτη παράγωγος του ανύσματος V^μ, η οποία είναι

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\lambda} V^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu). \tag{4.4}$$

Άρα,

$$\int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu V^\mu = \int_{\mathcal{M}} d^4x \partial_\mu (\sqrt{-g} V^\mu) = \int_{\partial\mathcal{M}} dA \sqrt{-g} \eta_\mu V^\mu \tag{4.5}$$

όπου κάναμε χρήση του θεωρήματος Gauss και θεωρήσαμε πως το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια είναι το η_μ.

Η μεταβολή των συμβόλων Christoffel είναι[2]

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} &= \delta \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (g_{\rho\gamma,\beta} + g_{\beta\rho,\gamma} - g_{\beta\gamma,\rho}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \delta g^{\alpha\rho} (g_{\rho\gamma,\beta} + g_{\beta\rho,\gamma} - g_{\beta\gamma,\rho}) + \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left[(\delta g_{\rho\gamma})_{,\beta} + (\delta g_{\beta\rho})_{,\gamma} - (\delta g_{\beta\gamma})_{,\rho} \right], \end{aligned}$$

όμως $\delta g^{\alpha\rho}|_{\partial\mathcal{M}} = 0 \Rightarrow$

$$\delta\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}|_{\partial\mathcal{M}} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} \left[(\delta g_{\rho\gamma})_{,\beta} + (\delta g_{\beta\rho})_{,\gamma} - (\delta g_{\beta\gamma})_{,\rho} \right]. \tag{4.6}$$

Επομένως στο σύνορο το άνυσμα V^μ είναι

$$\begin{aligned} V^\mu|_{\partial\mathcal{M}} &= g^{\alpha\beta} \delta\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu} \delta\Gamma^\nu{}_{\alpha\nu} \\ &= g^{\mu\rho} g^{\alpha\beta} \left[(\delta g_{\alpha\rho})_{,\beta} - (\delta g_{\alpha\beta})_{,\rho} \right] \end{aligned} \tag{4.7}$$

και ομοίως για το συναλλοίωτο άνυσμα

$$V_\kappa|_{\partial\mathcal{M}} = g_{\kappa\mu} V^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = g^{\alpha\beta} \left[(\delta g_{\alpha\kappa})_{,\beta} - (\delta g_{\alpha\beta})_{,\kappa} \right]. \tag{4.8}$$

Στη σχέση (4.5) εμφανίζεται η προβολή του κάθετου ανύσματος πάνω στο V^μ, άρα θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\eta_\mu V^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = \eta^\mu V_\mu|_{\partial\mathcal{M}} = \eta^\mu g^{\alpha\beta} \left[(\delta g_{\alpha\mu})_{,\beta} - (\delta g_{\alpha\beta})_{,\mu} \right]. \tag{4.9}$$

Για να το κάνουμε αυτό ορίζουμε τον προβολικό τανυστή (projective tensor)

$$h^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \frac{1}{\eta^2} \eta^\alpha \eta^\beta, \tag{4.10}$$

όπου $\eta^2 = \pm 1$ (που εξαρτάται από το αν η επιφάνεια $\partial\mathcal{M}$ είναι φωτοειδής ή χωροειδής).

Ο προβολικός τανυστής έχει τις εξής ιδιότητες

[2] Χρησιμοποιείτε ο συμβολισμός $\partial_\mu A = A_{,\mu}$.

- $h^{\alpha\beta} = h^{\beta\alpha}$
- $h_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = n-1$
- $h^{\alpha\beta}\eta_\beta = 0,$ δηλαδή προβάλλει κάθετα στο η_β.

Άρα

$$\begin{aligned} \eta_\mu V^\mu|_{\partial\mathcal{M}} &= \eta^\mu(h^{\alpha\beta} - \eta^\alpha\eta^\beta)\left[(\delta g_{\alpha\mu})_{,\beta} - (\delta g_{\alpha\beta})_{,\mu}\right] \\ &= \eta^\mu h^{\alpha\beta}\left[(\delta g_{\alpha\mu})_{,\beta} - (\delta g_{\alpha\beta})_{,\mu}\right] - \eta^\mu\eta^\alpha\eta^\beta\left[(\delta g_{\alpha\mu})_{,\beta} - (\delta g_{\alpha\beta})_{,\mu}\right]. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Ο τελευταίος όρος είναι κάτι συμμετρικό επί κάτι αντισυμμετρικό άρα είναι ταυτοτικά μηδέν. Ο όρος $\eta^\mu h^{\alpha\beta}(\delta g_{\alpha\mu})_{,\beta}$ μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\mathcal{M}$, διότι το $h^{\alpha\beta}\partial_\beta(\delta g_{\alpha\mu})$ είναι η εφαπτομενική παράγωγος του $\delta g_{\alpha\mu}$ κατά μήκος ενός ανύσματος κάθετου στο η^μ, έτσι θα πρέπει να είναι κι αυτός ταυτοτικά μηδέν αφού στο σύνορο $\delta g_{\alpha\beta}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$.

Άρα η (4.11) γίνεται

$$\eta_\mu V^\mu|_{\partial\mathcal{M}} = -\eta^\mu h^{\alpha\beta}(\delta g_{\alpha\beta})_{,\mu}. \tag{4.12}$$

Τελικά, η (4.2) γίνεται

$$\delta S = -\frac{1}{16\pi G}\left(\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}G_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} - \int_{\partial\mathcal{M}} dA\sqrt{-g_{ind}}\eta^\mu h^{\alpha\beta}(\delta g_{\alpha\beta})_{,\mu}\right). \tag{4.13}$$

Για να μηδενιστεί ο επιφανειακός όρος πρέπει να πάρουμε την πρόσθετη συνθήκη $(\delta g_{\alpha\beta})_{,\mu} = 0$. Για να αποφευχθεί αυτό εισάγουμε τον επιφανειακό όρο Gibbons - Hawking . Ο όρος αυτός είναι

$$S_{GH} = -\frac{1}{16\pi G}\left(2\int_{\partial\mathcal{M}} dA\sqrt{-g_{ind}}\,K\right) \tag{4.14}$$

με

$$\begin{aligned} K = \nabla_\alpha\eta^\alpha &= g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\eta_\beta = g^{\alpha\beta}\nabla_\beta\eta_\alpha \\ &= g^{\alpha\beta}(\eta_{\alpha,\beta} - \eta_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}) \\ &= (h^{\alpha\beta} + \eta^\alpha\eta^\beta)(\eta_{\alpha,\beta} - \eta_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}) \\ &= h^{\alpha\beta}(\eta_{\alpha,\beta} - \eta_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}) + \eta^\alpha\eta^\beta\nabla_\beta\eta_\alpha, \end{aligned} \tag{4.15}$$

όπου K είναι το ίχνος της εξωτερικής καμπυλότητας και g_{ind} η μετρική της επιφάνειας.

Όμως

$$\nabla_\beta(\eta^\alpha\eta_\alpha) = 0 \Rightarrow \nabla_\beta\eta^\alpha\eta_\alpha + \eta^\alpha\nabla_\beta\eta_\alpha = 0 \Rightarrow \eta^\alpha\nabla_\beta\eta_\alpha = 0.$$

Άρα

$$K = h^{\alpha\beta}(\eta_{\alpha,\beta} - \eta_\mu \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}). \tag{4.16}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
&\delta(\eta_\alpha \eta^\alpha) = 0 \Rightarrow \eta^\alpha \delta\eta_\alpha + \delta\eta_\alpha \eta^\alpha = 0 \Rightarrow \\
&\eta^\alpha \delta\eta_\alpha + \delta g^{\alpha\beta}\eta_\beta\eta_\alpha + g^{\alpha\beta}\delta\eta_\beta\eta_\alpha = 0.
\end{aligned}$$

Στο σύνορο $(\delta g^{\alpha\beta})|_{\partial\mathcal{M}} = 0$, άρα $(\eta^\alpha\delta\eta_\alpha)|_{\partial\mathcal{M}} = 0$. Θεωρούμε επίσης ότι $(\delta\eta^\alpha)|_{\partial\mathcal{M}} = 0$, άρα $\delta h^{\alpha\beta}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$.

Η μεταβολή του K είναι [3]

$$\begin{aligned}
\delta K|_{\partial\mathcal{M}} &= \delta h^{\alpha\beta}(\eta_{\alpha,\beta} - \eta_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}) + h^{\alpha\beta}\delta(\eta_{\alpha,\beta} - \eta_\mu\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}) \\
&= h^{\alpha\beta}(\delta\eta_\alpha)_{,\beta} - h^{\alpha\beta}\eta_\mu\delta\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \\
&= -h^{\alpha\beta}\eta_\mu\delta\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \\
&= -h^{\alpha\beta}\eta_\mu\frac{1}{2}g^{\mu\rho}\left[(\delta g_{\rho\beta})_{,\alpha} + (\delta g_{\alpha\rho})_{,\beta} - (\delta g_{\alpha\beta})_{,\rho}\right] \\
&= \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(\delta g_{\alpha\beta})_{,\rho}\eta^\rho.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Άρα η μεταβολή της δράσης (4.14) είναι

$$\begin{aligned}
\delta S_{GH} &= -\frac{1}{16\pi G}\left(2\int_{\partial\mathcal{M}} dA(\delta\sqrt{-g_{ind}})\,K + \int_{\partial\mathcal{M}} dA\sqrt{-g_{ind}}\,h^{\alpha\beta}(\delta g_{\alpha\beta})_{,\rho}\eta^\rho\right) \\
&= -\frac{1}{16\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} dA\sqrt{-g_{ind}}\,h^{\alpha\beta}(\delta g_{\alpha\beta})_{,\rho}\eta^\rho.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Τελικά

$$\delta S + \delta S_{GH} = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\,G_{\alpha\beta}\,\delta g^{\alpha\beta} = 0. \tag{4.19}$$

Δηλαδή η προσθήκη του επιφανειακού όρου Gibbons - Hawking, έδιωξε φυσικά το δεύτερο όρο της (4.2). Σε χώρους με σύνορο, ο όρος αυτός είναι χρήσιμος και δεν πρέπει να παραλείπεται, όπως θα δούμε παρακάτω.

[3] Ο όρος $h^{\alpha\beta}(\delta\eta_\alpha)_{,\beta}$ είναι η εφαπτομενική παράγωγος του $\delta\eta_\alpha$ στην επιφάνεια. Ομοίως και τα $h^{\alpha\beta}\eta^\rho(\delta g_{\rho\beta})_{,\alpha}$ και $h^{\alpha\beta}\eta^\rho(\delta g_{\alpha\rho})_{,\beta}$.

4.2 Ισοδυναμία φανταστικού χρόνου και θερμοκρασίας

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε πως η αλλαγή του χρόνου από πραγματικό σε φανταστικό θα οδηγήσει στην εμφάνιση της θερμοκρασίας. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σύμβαση $\hbar = c = k_B = 1$.

Θυμόμαστε ότι στην κβαντική φυσική η προβολή της ιδιοκατάστασης $\langle x|$ του τελεστή θέσης $\hat{x}$ πάνω στην ιδιοκατάσταση $|p\rangle$ του τελεστή ορμής $\hat{p}$ είναι ένα επίπεδο κύμα

$$\langle x \mid p\rangle = e^{i\vec{x}\cdot\vec{p}}. \tag{4.20}$$

Στην κβαντική θεωρία πεδίου η παραπάνω σχέση γενικεύεται στην

$$\langle \phi \mid \pi\rangle = exp\left(i\int d^3x\, \pi(\vec{x})\, \phi(\vec{x})\right), \tag{4.21}$$

όπου $\phi(\vec{x})$ και $\pi(\vec{x})$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή του πεδίου $\hat{\phi}(\vec{x},0)$ και του τελεστή της συζυγούς ορμής $\hat{\pi}(\vec{x},0)$.

Θα υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης από την κατάσταση ϕ_a στο χρόνο $t = 0$, πάλι στην κατάσταση ϕ_a μετά από χρόνο $t = t_f$. Η αρχική κατάσταση εξελίσσεται κάτω από την επίδραση του μοναδιακού τελεστή χρονικής εξέλιξης $e^{-i\hat{H}t}$. Αν χωρίσουμε το χρονικό διάστημα $[0, t_f]$ σε N μέρη μήκους Δt έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle\phi_a|\, e^{-i\hat{H}t_f}\,|\phi_a\rangle \;&=\; \lim_{N\to\infty} \langle\phi_a|\, e^{-i\hat{H}\Delta t}\, e^{-i\hat{H}\Delta t}\cdots e^{-i\hat{H}\Delta t}\,|\phi_a\rangle \\ &= \lim_{N\to\infty}\int\prod_{i=1}^{N}\frac{d\pi_i(\vec{x})}{2\pi}d\phi_i(\vec{x})\,\langle\phi_a \mid \pi_N\rangle\,\langle\pi_N|\, e^{-i\hat{H}\Delta t}\,|\phi_N\rangle\,\langle\phi_N \mid \pi_{N-1}\rangle\,\cdot \\ &\langle\pi_{N-1}|\, e^{-i\hat{H}\Delta t}\,|\phi_{N-1}\rangle\cdots\langle\phi_2 \mid \pi_1\rangle\,\langle\pi_1|\, e^{-i\hat{H}\Delta t}\,|\phi_1\rangle\,\langle\phi_1 \mid \phi_a\rangle\,,\end{aligned} \tag{4.22}$$

όπου έχουμε κάνει χρήση των σχέσεων πληρότητας

$$\begin{aligned}\int d\phi(\vec{x})\,|\phi\rangle\,\langle\phi| = 1 \\ \int\frac{d\pi(\vec{x})}{2\pi}\,|\pi\rangle\,\langle\pi| = 1.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Για τους όρους που εμφανίζονται στη (4.22) κάνοντας την προσέγγιση $e^{-i\hat{H}\Delta t} \simeq 1 - i\hat{H}\Delta t$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle\pi_i|\, e^{-i\hat{H}\Delta t}\,|\phi_i\rangle \;&\simeq exp\left(-i\Delta t\int d^3x\,\mathcal{H}(\phi_i,\pi_i)\right)\langle\pi_i \mid \phi_i\rangle \\ &= exp\left(-i\Delta t\int d^3x\,\mathcal{H}(\phi_i,\pi_i)\right)\cdot exp\left(-i\int d^3\pi\,\pi_i\,\phi_i\right).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Έτσι η (4.22) γίνεται[4]

$$\begin{aligned}
\langle\phi_a| e^{-i\hat{H}t_f} |\phi_a\rangle &= \lim_{N\to\infty}\int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}\phi\, \delta\left[\phi_a(\vec{x})-\phi_1(\vec{x})\right]\cdot exp\left(i\int d^3x[\pi_N+\pi_{N-1}+\cdots\pi_1]\right)\cdot \\
& exp\left(-i\Delta t\int d^3x\left[\mathcal{H}(\phi_N,\pi_N)+\cdots\mathcal{H}(\phi_1,\pi_1)\right]\right) \\
&= \lim_{N\to\infty}\int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}\phi\, \delta\left[\phi_a(\vec{x})-\phi_1(\vec{x})\right] exp\left[i\sum_{i=1}^{N}\Delta t\int d^3x\left(\pi_i\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{\Delta t}-\mathcal{H}(\phi_i,\pi_i)\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.25}$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι $\phi_{N+1}=\phi_a$ και τα συναρτησιακά ολοκληρώματα γράφτηκαν ως

$$\int\prod_{i=1}^{N}\frac{d\pi_i(\vec{x})}{2\pi}\to\int\mathcal{D}\pi \quad \text{και} \quad \int\prod_{i=1}^{N}d\phi_i(\vec{x})\to\int\mathcal{D}\phi.$$

Τέλος παίρνοντας το όριο όπου $N\to\infty$ έχουμε ότι

$$\langle\phi_a| e^{-i\hat{H}t_f} |\phi_a\rangle = \int\mathcal{D}\pi\int\mathcal{D}\phi\, exp\left[i\int_0^{t_f}dt\int d^3x\left(\pi(\vec{x},t)\frac{\partial\phi(\vec{x},t)}{\partial t}-\mathcal{H}(\phi,\pi)\right)\right]. \tag{4.26}$$

Από τη στατική φυσική γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση επιμερισμού δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned}
Z &= tr\, e^{-\beta(H-\mu N)} \\
&= \int d\phi\, \langle\phi| e^{-\beta(H-\mu N)} |\phi\rangle \\
&= \int\mathcal{D}\pi\int\mathcal{D}\phi\, exp\left[\int_0^{\beta}d\tau\int d^3x\left(i\pi\frac{\partial\phi}{\partial\tau}-\mathcal{H}+\mu N\right)\right],
\end{aligned} \tag{4.27}$$

όπου μ είναι το χημικό δυναμικό και $\beta=\frac{1}{T}$.

Συγκρίνοντας τις (4.26) και (4.27) βλέπουμε ότι η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη εάν θέσουμε $\tau=it$ και θεωρήσουμε ότι η ολοκλήρωση στο φανταστικό χρόνο τ γίνεται μεταξύ των ορίων 0 και $\beta=\frac{1}{T}$.

Άρα, όντως η εναλλαγή του χρόνου μας οδηγεί στην εμφάνιση της θερμοκρασίας μέσω περιοδικής συνθήκης στο ολοκλήρωμα του χρόνου.

Μία τελευταία παρατήρηση είναι ότι εάν πραγματοποιήσουμε την ολοκλήρωση πάνω στις ορμές στη σχέση (4.26) καταλήγουμε στο ότι

$$\langle\phi_a| e^{-i\hat{H}t_f} |\phi_a\rangle = \mathcal{N}\int\mathcal{D}\phi\, e^{iS} \tag{4.28}$$

και ομοίως για τη συνάρτηση επιμερισμού

[4] Χρησιμοποιήσαμε ότι $\langle\phi_a \mid \phi_b\rangle=\delta(\phi_a(\vec{x})-\phi_b(\vec{x}))$ και $\langle\pi_a \mid \pi_b\rangle=\delta(\pi_a(\vec{x})-\pi_b(\vec{x}))$.

$$Z = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, exp\left(\int_0^\beta d\tau \int d^3x \, \mathcal{L} \right) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \, e^{-S_E}. \tag{4.29}$$

4.3 Εξαγωγή της θερμοκρασίας Hawking και της εντροπίας από την Ευκλείδεια μετρική

Θεωρούμε τη μετρική Schwarzschild, η οποία είναι η σφαιρικά συμμετρική και στατική λύση των εξισώσεων Einstein στο κενό. Το στοιχείο μήκους δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta \, d\phi^2). \tag{4.30}$$

Θα επικεντρωθούμε στη γεωμετρία κοντά κι έξω από τον ορίζοντα $R_h = 2GM$. Θεωρούμε τη μεταβλητή $\xi = r - 2GM$ με $\xi \ll 2GM$.

Η μετρική (4.30) γίνεται

$$ds^2 = -\frac{\xi}{2GM} dt^2 + \frac{2GM}{\xi} d\xi^2 + (2GM)^2 d\Omega^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{2GM}\right). \tag{4.31}$$

Εισάγουμε τη νέα συντεταγμένη ρ, τέτοια ώστε

$$\rho = \sqrt{8GM\xi} \Rightarrow d\rho^2 = \frac{2GM}{\xi} d\xi^2. \tag{4.32}$$

Άρα η (4.31) $\Rightarrow$

$$ds^2 = -\frac{\rho^2}{16G^2M^2} dt^2 + d\rho^2 + (2GM)^2 d\Omega^2. \tag{4.33}$$

Η παραπάνω μετρική απαρτίζεται από ένα παράγοντα που είναι η μετρική μίας 2-σφαίρας ακτίνας $2GM$ και από το χώρο (ρ, t)

$$ds_2^2 = -\rho^2 k^2 dt^2 + d\rho^2, \tag{4.34}$$

όπου η παράμετρος $k = \frac{1}{4GM}$ ονομάζεται επιφανειακή βαρύτητα της μελανής οπής.

Βλέπουμε ότι η παραπάνω μετρική δύο διαστάσεων είναι απλά ένας επίπεδος χώρος Minkowski γραμμένος σε "περίεργες" συντεταγμένες, που ονομάζονται συντεταγμένες Rindler.

Αν κάνουμε την εναλλαγή $\tau = it$ μεταβαίνουμε σε Ευκλείδειο χώρο κι η (4.34) γίνεται

$$ds_2^2 = \rho^2 k^2 d\tau^2 + d\rho^2. \tag{4.35}$$

Θεωρούμε τη νέα συντεταγμένη θ με $\theta = k\tau$. Σε αυτήν την περίπτωση η μετρική (4.35) είναι ακριβώς η επίπεδη Ευκλείδεια μετρική δύο διαστάσεων γραμμένη σε πολικές συντεταγμένες υπό την προϋπόθεση ότι η μεταβλητή θ έχει τη σωστή περιοδικότητα $0 < \theta < 2\pi$.
Αν η περιοδικότητα είναι διαφορετική, η γεωμετρία θα εμφανίζει μία κωνική ανωμαλία (conical singularity) στο $\rho = 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο Ευκλείδειος χρόνος τ έχει περιοδικότητα $\tau = \frac{2\pi}{k}$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ Ευκλείδειας περιοδικότητας και θερμοκρασίας που είδαμε στην παράγραφο 4.2 έχουμε

$$\left.\begin{array}{r} \tau = \frac{2\pi}{k} \\ \tau = \beta = \frac{1}{T} \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{k}{2\pi} \Rightarrow$$

$$T = \frac{1}{8\pi GM}, \tag{4.36}$$

που είναι η σωστή σχέση για τη θερμοκρασία Hawking [5].

Για να βρούμε την εντροπία[6] θα χρησιμοποιήσουμε τη θερμοδυναμική σχέση $dU = TdS_{ent}$, όπου U είναι η συνολική ενέργεια (σε αυτήν την περίπτωση $U = M$).

Άρα,

$$dS_{ent} = 8\pi GM\, dM \Rightarrow S_{ent} = \int 8\pi GM\, dM \Rightarrow$$

$$S_{ent} = 4\pi GM^2 = \frac{4\pi R_h^2}{4G} = \frac{A_h}{4G} \tag{4.37}$$

όπου A_h η επιφάνεια του ορίζοντα.

4.4 Ευκλείδεια δράση σε χωρόχρονο Schwarzschild

Είδαμε ότι η συνάρτηση επιμερισμού δίνεται από τη σχέση (4.29). Στην περίπτωσή μας η σχέση αυτή γίνεται

$$Z[\beta] = \int \mathcal{D}g\, \mathcal{D}\phi\, e^{-S_E[g,\phi]}, \tag{4.38}$$

όπου S_E η Ευκλείδεια δράση και ϕ τα πεδία ύλης.

[5] Σε μονάδες SI είναι $T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk_B} \left(\simeq 6 \cdot 10^{-8} K \cdot \frac{M_\odot}{M}\right)$.

[6] Ο συμβολισμός S_{ent} γίνεται για να μην υπάρχει σύγχυση με το συμβολισμό της δράσης.

Το ολοκλήρωμα διαδρομών (4.38) δε μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά. Το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να το προσεγγίσουμε γύρω από ένα κλασικό σαγματικό σημείο, δηλαδή μία λύση των κλασικών εξισώσεων κίνησης

$$Z[\beta] \simeq exp\left(-S_E[g_{cl}, \phi_{cl}] + S^{(1)} + \cdots\right), \tag{4.39}$$

όπου ο όρος $S^{(1)}$ αντιστοιχεί σε διόρθωση 1-loop.

Στην περίπτωση της μαύρης τρύπας g_{cl} είναι η μετρική Schwarzschild και δεν υπάρχουν πεδία ύλης, άρα σε πρώτη προσέγγιση

$$Z[\beta] \simeq exp\left(-S_E[g_{cl}]\right). \tag{4.40}$$

Η συνάρτηση επιμερισμού ικανοποιεί τις θερμοδυναμικές σχέσεις

$$S_{ent} = (1 - \beta\, \partial_\beta)\, ln\,(Z[\beta]) \tag{4.41}$$

και

$$U = -\frac{\partial ln\,(Z[\beta])}{\partial_\beta}, \tag{4.42}$$

τις οποίες και θα επιβεβαιώσουμε υπολογίζοντας την συνάρτηση επιμερισμού μέσω της σχέσης (4.40).

Η Ευκλείδεια δράση σε χωρόχρονο Schwarzschild θα μπορούσε κάποιος να πει ότι είναι μηδενική, αφού το βαθμωτό του Ricci μηδενίζεται. Όμως, όταν ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες δε μπορούμε να αγνοήσουμε τους επιφανειακούς όρους. Πρέπει να προσθέσουμε και τον επιφανειακό όρο Gibbons - Hawking.

Η δράση μας θα είναι

$$S_E = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{g}\,R - \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} dA\,\sqrt{g_{ind}}\,K, \tag{4.43}$$

ενώ η Ευκλείδεια μετρική Schwarzschild θα είναι

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) d\tau^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\phi^2). \tag{4.44}$$

Τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του Ευκλείδειου μετρικού τανυστή είναι

- $g_{\tau\tau} = 1 - \frac{2GM}{r}$
- $g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$
- $g_{\theta\theta} = r^2$
- $g_{\phi\phi} = r^2 sin^2\theta$.

Η δράση (4.43) θα υπολογιστεί σε κάποια ακτίνα R_0 και στη συνέχεια θα πάρουμε το όριο $R_0 \to \infty$.
Για $r = R_0$ η επιφάνεια της 2-σφαίρας ορίζεται στις τρεις χωρικές διαστάσεις (στο χρόνο θα πάρουμε τη συνθήκη περιοδικότητας) από τη συνθήκη

$$f(x^\alpha) = C \Rightarrow r = R_0. \tag{4.45}$$

Το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια της σφαίρας σε χωρόχρονο Schwarzchild θα δίνεται σύμφωνα με τον ορισμό του από τη σχέση

$$\eta_\alpha = \frac{f_{,\alpha}}{\sqrt{g^{\alpha\beta} f_{,\alpha} f_{,\beta}}} \xlongequal{f_{,\alpha}=(0,1,0,0)} \frac{(0,1,0,0)}{\sqrt{g^{rr}}} \Rightarrow \eta_\alpha = \frac{(0,1,0,0)}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r}}}. \tag{4.46}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι το ανταλλοίωτο μοναδιαίο κάθετο έχει τη μορφή

$$\eta^\alpha = \eta_\alpha\, g^{\alpha\alpha} = (0,1,0,0)\sqrt{1-\frac{2GM}{r}}. \tag{4.47}$$

Γνωρίζοντας τώρα το η^α μπορούμε να υπολογίσουμε την εξωτερική καμπυλότητα της 2-σφαίρας στο χωρόχρονο Schwarzchild . Για τον υπολογισμό αυτό χρειαζόμαστε τα εξής σύμβολα Christoffel :

- $\Gamma^{\tau}{}_{\tau r} = \frac{GM}{r(r-2GM)}$
- $\Gamma^{r}{}_{rr} = \frac{-GM}{r(r-2GM)}$
- $\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = \frac{1}{r}$.

Έτσι από τον ορισμό της εξωτερικής καμπυλότητας έχουμε

$$\begin{aligned} K &= \nabla_\alpha \eta^\alpha = \partial_\alpha \eta^\alpha + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\beta}\eta^\beta = \partial_r \eta^r + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha r}\eta^r \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{1-\frac{2GM}{r}}\right) + \Gamma^{\tau}{}_{\tau r}\eta^r + \Gamma^{r}{}_{rr}\eta^r + 2\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}\eta^r \\ &= \frac{GM}{r^2\sqrt{1-2GM/r}} + \frac{2\sqrt{1-2GM/r}}{r} \\ &= \frac{GM + 2r - 4GM}{r^2\sqrt{1-2GM/r}} \\ & \frac{2-3GM/r}{r\sqrt{1-2GM/r}}. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Αφού υπολογίσαμε το K μπορούμε να υπολογίσουμε και τον επιφανειακό όρο Gibbons - Hawking της σχέσης (4.43). Για να το κάνουμε αυτό χρειαζόμαστε την ορίζουσα της induced μετρικής $(g_{ind})_{ij}$. Αυτή στην περίπτωση που $r = R_0 =$ σταθερό είναι ίση με το g_{ij} άρα ισχύει ότι

- $(g_{ind})_{11} = 1 - \frac{2GM}{R_0}$
- $(g_{ind})_{22} = R_0^2$
- $(g_{ind})_{33} = R_0^2 sin^2\theta$

και

$$\sqrt{g_{ind}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{R_0}} R_0^2\, sin\theta. \tag{4.49}$$

Επομένως, για τον όρο Gibbons - Hawking προκύπτει

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{M}} dA\,\sqrt{g_{ind}}\,K &= \int_0^{1/T} d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, R_0^2\, sin\theta \sqrt{1 - \frac{2GM}{R_0}} \left(\frac{2 - 3GM/R_0}{R_0\sqrt{1 - 2GM/R_0}} \right) \\ &= \frac{1}{T} 4\pi R_0^2 \left(\frac{2 - 3GM/R_0}{R_0} \right) \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} dA\,\sqrt{g_{ind}}\,K &= -\frac{1}{8\pi G}\frac{1}{T}(8\pi R_0 - 12\pi GM) \\ &= -\frac{1}{8\pi G}\frac{1}{T}(8\pi R_0 - 6\pi R_h).\end{aligned} \tag{4.50}$$

Η παραπάνω ποσότητα αποκλίνει καθώς $R_0 \to \infty$. Για να ρυθμίσουμε αυτήν την απόκλιση προσθέτουμε ένα counterterm στη δράση, δηλαδή

$$S_E = -\frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{g}\,R - \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} dA\,\sqrt{g_{ind}}\,K + \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} dA\,\sqrt{g_{ind}}\,K_0 \tag{4.51}$$

όπου K_0 η εξωτερική καμπυλότητα του ίδιου συνόρου της πολλαπλότητας $\partial\mathcal{M}$, εμβαπτισμένης σε επίπεδο χωρόχρονο. Αυτή η προσέγγιση είναι αρκετά όμοια με αυτό που κάνουμε στην κβαντική θεωρία πεδίου, με τη διαφορά ότι αυτός ο υπολογισμός είναι κλασικός.

Η μετρική του συνόρου είναι

$$ds^2_{bdry} = \left(1 - \frac{2GM}{R_0}\right) d\tau^2 + R_0^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\phi^2). \tag{4.52}$$

Επομένως αν την εμβαπτίσουμε σε επίπεδο χώρο, η μετρική του επίπεδου χώρου θα είναι

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{R_0}\right) d\tau^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\phi^2). \tag{4.53}$$

Πρέπει να επαναλάβουμε τον υπολογισμό που κάναμε προηγουμένως.

Το μοναδιαίο είναι απλά το

$$\eta^\alpha = (0, 1, 0, 0), \tag{4.54}$$

ενώ τα σύμβολα Christoffel που χρειαζόμαστε είναι τα

- $\Gamma^{\tau}{}_{\tau r} = \Gamma^{r}{}_{rr} = 0$
- $\Gamma^{\theta}{}_{r\theta} = \Gamma^{\phi}{}_{r\phi} = \frac{1}{r}$.

Έτσι, για τον υπολογισμό του K_0 έχουμε[7]

$$\begin{aligned} K_0 &= \nabla_\alpha \eta^\alpha = \partial_\alpha \eta^\alpha + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha\beta}\eta^\beta = \partial_r \eta^r + \Gamma^{\alpha}{}_{\alpha r}\eta^r \\ &= 2\Gamma^{\theta}{}_{\theta r}\eta^r \\ &= \frac{2}{r}. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Ο counterterm της σχέσης (4.51) θα είναι

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{M}} dA\,\sqrt{g_{ind}}\,K_0 &= \int_0^{1/T} d\tau \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, R_0^2\, sin\theta \sqrt{1-\frac{2GM}{R_0}}\,\frac{2}{R_0} \\ &= \frac{1}{T} 8\pi R_0 \sqrt{1-\frac{2GM}{R_0}} \simeq \frac{1}{T} 8\pi R_0 \left(1 - \frac{2GM}{2R_0} + \mathcal{O}\left(1/R_0^2\right)\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi G}\int_{\partial\mathcal{M}} dA\,\sqrt{g_{ind}}\,K_0 &= \frac{1}{8\pi G}\frac{1}{T}\left(8\pi R_0 - 8\pi GM + \mathcal{O}\left(1/R_0^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{8\pi G}\frac{1}{T}\left(8\pi R_0 - 4\pi R_h + \mathcal{O}\left(1/R_0^2\right)\right). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Τελικά από τις (4.50), (4.51) και (4.56) έχουμε

$$S_E = \frac{R_h}{4GT} = \frac{M}{2T}. \tag{4.57}$$

Η συνάρτηση επιμερισμού είναι

$$Z[\beta] = e^{-\frac{M}{2T}} = e^{-\frac{\beta^2}{16\pi G}}, \tag{4.58}$$

άρα

$$\begin{aligned} S_{ent} &= \left(1 - \beta\,\partial_\beta\right) ln\left(Z[\beta]\right) \\ &= -\frac{\beta^2}{16\pi G} - \beta\left(-\frac{2\beta}{16\pi G}\right) \\ &= \frac{\beta^2}{16\pi G} = 4\pi G M^2, \end{aligned} \tag{4.59}$$

σε συμφωνία με τη σχέση (4.37).

Επίσης

[7] Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε κατευθείαν το K_0 του επίπεδου χωρόχρονου, αφού πολύ απλά θα μπορούσαμε να πάρουμε το όριο όπου $M \to 0$ στη σχέση (4.48). Αν το κάναμε αυτό θα βλέπαμε ότι $K_0 = \frac{2}{r}$.

$$\begin{aligned} U &= -\frac{\partial ln\left(Z[\beta]\right)}{\partial_\beta} \\ &= \frac{\beta}{8\pi G} \\ &= M, \end{aligned} \tag{4.60}$$

όπως αναμέναμε.

Τέλος η ελεύθερη ενέργεια δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} F &= U - T\, S_{ent} \\ &= M - \frac{1}{8\pi G M} 4\pi G M^2 \\ &= M - \frac{M}{2} \\ &= \frac{M}{2}. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Επομένως συνδυάζοντας τις σχέσεις (4.57) και(4.61) παίρνουμε ότι

$$S_E = \frac{F}{T}. \tag{4.62}$$

Κεφάλαιο 5

Θερμική διάσπαση του μποζονίου Higgs παρουσία μελανής οπής

Το βαρυτικό υπόβαθρο, όπως είδαμε και στην ενότητα 2.3, μπορεί να έχει σημαντική επίδραση στο ρυθμό διάσπασης του κενού, οδηγώντας σε αύξηση ή μείωση της πιθανότητας. Αυτή η διαπίστωση είναι σημαντική για τη διάσπαση του ηλεκτρασθενούς κενού, λόγω της ευαισθησίας του δυναμικού του Higgs στη μάζα του Higgs και στη μάζα του top quark. Τα έντονα βαρυτικά φαινόμενα κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού οδηγούν στην εκτενή έρευνα της σταθερότητας του ηλεκτρασθενούς κενού στην εποχή αυτή.
Τα βαρυτικά αυτά πεδία μπορεί να προέρχονται από μελανές οπές. Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε τη διάσπαση του κενού που οφείλεται στην παρουσία του Higgs σε μη μηδενική θερμοκρασία (σχέση 3.78) και θα προσθέσουμε στη δράση έναν όρο μη ελάχιστης σύζευξης (nonminimal coupling) του πεδίου Higgs με το βαρυτικό πεδίο.

5.1 Εξισώσεις κίνησης βαθμωτού πεδίου σε καμπυλωμένο χωρόχρονο

Η δράση, όχι η Ευκλείδεια, για το πεδίο Higgs μέσα σε βαρυτικό πεδίο έχει τη μορφή[1]

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{16\pi G} + \frac{\xi}{2}h^2R - \frac{1}{2}(\nabla_\mu h)^2 - V(h)\right). \tag{5.1}$$

Οι εξισώσεις κίνησης για το βαρυτικό πεδίο και το πεδίο Higgs είναι (βλ. Παράρτημα Β΄)

$$\left(\frac{1}{8\pi G} + \xi h^2\right)G_{\mu\nu} = \nabla_\mu h\nabla_\nu h - g_{\mu\nu}\Big(\frac{(\nabla_\mu h)^2}{2} + V(h)\Big) + 2\xi[\nabla_\mu(h\nabla_\nu h) - g_{\mu\nu}\nabla_\lambda(h\nabla^\lambda h)] \tag{5.2}$$

[1]Στη δράση πρέπει να προστεθεί κι ο επιφανειακός όρος Gibbons-Hawking. Στην περίπτωσή μας η μορφή του είναι

$$S_{GH} = 2\int_{\partial\mathcal{M}} dA\sqrt{g_{ind}}\left(\frac{1}{16\pi G} + \frac{1}{2}\xi h^2\right)K - 2\int_{\partial\mathcal{M}} dA\sqrt{g_{ind}}\left(\frac{1}{16\pi G} + \frac{1}{2}\xi h^2\right)K_0.$$

και[2]

$$\Box h + \xi h R = \frac{dV(h)}{dh}. \tag{5.3}$$

Παίρνοντας το ίχνος της εξίσωσης (5.2) μπορούμε να εκφράσουμε το βαθμωτό του Ricci σε συνάρτηση με το h, δηλαδή

$$(R-2R)\left(\frac{1+8\pi G\xi h^2}{8\pi G}\right) = (\nabla_\mu h)^2 - 2(\nabla_\mu h)^2 - 4V(h) + 2\xi\left((\nabla_\mu h)^2 + h\Box h - 4(\nabla_\mu h)^2 - 4h\Box h\right) \Rightarrow$$

$$R\left(\frac{1+8\pi G\xi h^2}{8\pi G}\right) = (1+6\xi)(\nabla_\mu h)^2 + 4V(h) + 6\xi h\Box h. \tag{5.4}$$

Αντικαθιστώντας την (5.4) στην (5.1) παίρνουμε

$$\begin{aligned} S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\Big[&-\frac{1}{2}(\nabla_\mu h)^2 - V(h) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+8\pi G\xi^2}\left((1+6\xi)(\nabla_\mu h)^2 + 4V(h) + 6\xi h\Box h\right) \\ &+ \frac{1}{2}\xi h^2\frac{8\pi G}{1+8\pi G\xi h^2}\left((1+6\xi)(\nabla_\mu h)^2 + 4V(h) + 6\xi h\Box h\right)\Big]. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Παίρνοντας το όριο όπου $G \to 0$ έχουμε ότι

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(V(h) + 3\xi\left(h\Box h + (\nabla_\mu h)^2\right)\right) \Rightarrow$$

$$S = \int_{\mathcal{M}} \sqrt{-g}d^4x\left(V(h) + 3\xi\nabla_\mu(h\nabla^\mu h)\right). \tag{5.6}$$

Το πεδίο Higgs με την παρουσία μελανής οπής μπορεί να προκαλέσει τη διάσπαση του ηλεκτρασθενούς κενού. Η διάσπαση αυτή φαίνεται με το σχηματισμό φυσαλίδων του νέου κενού γύρω από τη μελανή οπή. Η φυσαλίδα είναι ένας στατικός σχηματισμός, τα χαρακτηριστικά του οποίου θα φανούν όταν λύσουμε τις εξισώσεις κίνησης για το πεδίο Higgs. Η μάζα της φυσαλίδας είναι ένα μέτρο του ενεργειακού φράγματος που πρέπει να ξεπεραστεί, ώστε το πεδίο να κυμανθεί πέρα από το μέγιστο του δυναμικού.
Σε θερμικό περιβάλλον, ο λόγος της μάζας προς τη θερμοκρασία αναμένεται να καθορίσει το βαθμό διάσπασης του κενού.

Η μετρική που θα θεωρήσουμε έχει τη μορφή

$$ds^2 = -N(r)\,e^{2\delta(r)}dt^2 + N^{-1}(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\, d\varphi^2) \tag{5.7}$$

με $N(r) = 1 - 2GM(r)/r$.

[2] Όπου $\Box h = \nabla_\mu \nabla^\mu h$.

Στον ορίζοντα $r = R_h$ το $N(r)$ μηδενίζεται. Επομένως, ισχύει ότι $2GM(R_h) = R_h$, όπου η ποσότητα $R_h/2G$ είναι η μάζα της μελανής οπής.
Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η $\delta M(r) = M(r) - R_h/2G$, όπου η ασυμπτωτική της τιμή $\delta M_{tot} = \delta M(\infty)$ δίνει μία εκτίμηση του φράγματος που σχετίζεται με τη δημιουργία φυσαλίδας γύρω από μία μελανή οπή ακτίνας R_h. Επίσης, σύμφωνα με τον ορισμό του $\delta M(r)$, θα είναι $\delta M(R_h) = 0$.
Η χαρακτηριστική κλίμακα των λύσεων ορίζεται από τη μεγαλύτερη τιμή μεταξύ του h_{max} και της θερμοκρασίας T, η οποία αναμένεται να είναι πολύ μικρότερη από τη μάζα Planck. Έτσι, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $\delta M(r) \ll R_h/2G$. Άρα, στην ανάλυσή μας μπορούμε να κρατήσουμε τις κύριες συνεισφορές από το G, ή με άλλα λόγια να πάρουμε το όριο όπου $G \to 0$. Στο όριο λοιπόν όπου $G \to 0$ οι εξισώσεις κίνησης για το πεδίο και τη μάζα γίνονται

$$h'' + \left(\frac{2}{r} + \frac{R_h}{r(r - R_h)}\right) h' = \frac{r}{r - R_h}\frac{dV(h)}{dh} \tag{5.8}$$

και

$$\begin{aligned} \delta M' = 4\pi r^2 \left(\frac{1}{2}\frac{r - R_h}{r} h'^2 + V(h)\right) \\ + 4\pi r^2 \xi \left(2\frac{r - R_h}{r} h'^2 + 2h\frac{dV(h)}{dh} - \frac{R_h}{r^2} h h'\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Η εξίσωση για το $\delta(r)$ είναι $\delta'(r) = 0$, επομένως μπορούμε να επιλέξουμε $\delta(r) = 1$.

Για να αποφύγουμε τον απειρισμό της εξίσωσης (5.8) στο $r = R_h$ απαιτείται να επιβάλλουμε τη συνθήκη

$$h'(R_h) = R_h \frac{dV(h(R_h))}{dh}. \tag{5.10}$$

Προφανώς αν δεν υπάρχει μελανή οπή, $R_h = 0$, άρα $h'(0) = 0$. Επίσης, η τιμή του πεδίου στον ορίζοντα, $h(R_h)$ πρέπει να ρυθμιστεί κατάλληλα, έτσι ώστε $h(r) \to 0$ για $r \to \infty$. Παρατηρούμε από τη σχέση (5.8) ότι το πεδίο Higgs δεν έχει τροποποιηθεί λόγω της ύπαρξης του όρου σύζευξης με τη βαρύτητα, δηλαδή είναι ανεξάρτητο του ξ. Αντιθέτως, η μάζα της φυσαλίδας έχει κάποια διόρθωση που είναι ανάλογη του ξ. Αν ολοκληρώσουμε την (5.9) από τον ορίζοντα και πέρα παίρνουμε ότι

$$\delta M_{tot} = F_1(R_h) + \xi F_2(R_h), \tag{5.11}$$

όπου

$$F_1(R_h) = 4\pi \int_{R_h}^{\infty} dr\, r^2 \left(\frac{1}{2}\frac{r - R_h}{r} h'^2 + V(h)\right) \tag{5.12}$$

και

$$F_2(R_h) = 4\pi \int_{R_h}^{\infty} dr\, r^2 \left(2\frac{r - R_h}{r} h'^2 + 2h\frac{dV(h)}{dh} - \frac{R_h}{r^2} h h'\right). \tag{5.13}$$

Η εξίσωση κίνησης (5.8) μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$r(r-R_h)h'' + 2(r-R_h)h' + R_h h' = r^2 \frac{dV(h)}{dh} \Rightarrow$$

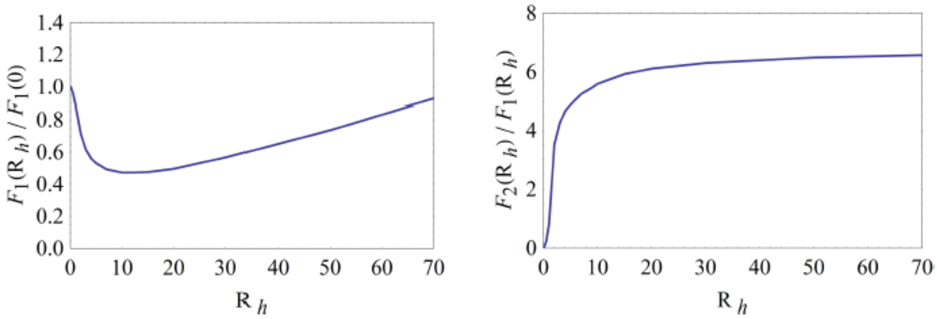
$$\left(r(r-R_h)h'\right)' = r^2 \frac{dV(h)}{dh}. \tag{5.14}$$

Αντικαθιστώντας την (5.14) στην (5.12) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_1(R_h) &= 4\pi \int_{R_h}^{\infty} dr \left[\frac{1}{2}\left(r(r-R_h)hh'\right)' - \frac{1}{2} r^2 h \frac{dV(h)}{dh} + r^2 V(h)\right] \\ &= 4\pi \int_{R_h}^{\infty} dr\, r^2 \left(-\frac{1}{2} h \frac{dV(h)}{dh} + V(h)\right). \end{aligned} \tag{5.15}$$

Ομοίως για την (5.13) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} F_2(R_h) &= 4\pi \int_{R_h}^{\infty} dr \left[2r(r-R_h)h'^2 + 2h\left(r(r-R_h)h'\right)' - R_h h h'\right] \\ &= 4\pi \int_{R_h}^{\infty} dr \left(2r(r-R_h)hh' - \frac{1}{2} R_h h^2\right)' \\ &= 2\pi R_h h^2(R_h). \end{aligned} \tag{5.16}$$



Σχήμα 5.1: Οι ποσότητες F_1 και F_2 που καθορίζουν τη μάζα δM_{tot}, σαν συνάρτηση της ακτίνας του ορίζοντα της μελανής οπής. Όλες οι ποσότητες είναι σε μονάδες h_{max}, όπου $h_{max} \simeq 5 \cdot 10^{10}\, GeV$ το πεδίο Higgs στο μέγιστο του δυναμικού.

Στο [8] χρησιμοποιείται το δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας (με $\xi = 0$) για τον υπολογισμό της μάζας της φυσαλίδας. Κοντά στο μέγιστο ($h_{max} \simeq 5 \cdot 10^{10}\, GeV$) το δυναμικό μπορεί να γραφεί ως [10]

$$V(h) \simeq -b \ln\left(\frac{h^2}{h_{max}^2 \sqrt{e}}\right) \frac{h^4}{4} \tag{5.17}$$

με $b \simeq 0.16/(4\pi)^2$.

Στο σχήμα 5.1 φαίνονται οι συναρτήσεις F_1 και F_2, που ορίσαμε στη σχέση (5.11). Το $F_1(R_h)$ έχει κανονικοποιηθεί με το $F_1(0)$ και το $F_2(R_h)$ με το $F_1(R_h)$. Η μάζα της φυσαλίδας μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\delta M_{tot} = (\delta M_{tot})_0 \, \frac{F_1(R_h)}{F_1(0)} \left(1 + \xi \, \frac{F_2(R_h)}{F_1(R_h)}\right), \tag{5.18}$$

όπου $(\delta M_{tot})_0$ η μάζα στην περίπτωση που $R_h = 0$, δηλαδή αν δεν υπάρχει μελανή οπή.

Από το αριστερό γράφημα του σχήματος 5.1 και τη σχέση (5.18), είναι εύκολο να δούμε ότι για $R_h \simeq 10$ η μάζα της φυσαλίδας μειώνεται περίπου κατά έναν παράγοντα 2, εάν $\xi = 0$. Στο δεξί γράφημα, βλέπουμε ότι ο λόγος $F_2(R_h)/F_1(R_h)$ μηδενίζεται για $R_h \to 0$ και είναι σχεδόν σταθερός στην τιμή 6,6 για $R_h \gtrsim 20$.

5.2 Διάσπαση του πεδίου Higgs σε μη μηδενική θερμοκρασία

Πλέον μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύστημα μελανή οπή-Higgs βρίσκεται σε θερμικό περιβάλλον στο πρώιμο Σύμπαν[3]. Σε ένα θερμικό περιβάλλον, η ποσότητα που σχετίζεται με μεταβάσεις μεταξύ διαφορετικών καταστάσεων είναι η ελεύθερη ενέργεια. Από την άποψη αυτή, είναι φυσικό να χρησιμοποιείται το εξαρτώμενο από τη θερμοκρασία ενεργό δυναμικό, το οποίο μπορεί να ταυτιστεί με την πυκνότητα ελεύθερης ενέργειας. Από την άλλη πλευρά, το πεδίο βαρύτητας προέρχεται από τον τανυστή ενέργειας-ορμής, ο οποίος περιλαμβάνει την ενεργειακή πυκνότητα που τώρα ταυτίζεται με το δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας. Όπως έχουμε δει, το υπόβαθρο μπορεί να περιγραφεί με αρκετά καλή προσέγγιση με αυτό της μετρικής Schwarzschild, αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι συνεισφορές του θερμικού περιβάλλοντος στις εξισώσεις του Einstein να μη χρειάζεται να ληφθούν υπόψη. Θα αντικαταστήσουμε λοιπόν το δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας με το δυναμικό του Higgs που μελετήθηκε στην ενότητα 3.9, το οποίο έχει τη μορφή

$$V(h,T) \simeq \frac{1}{2} k^2 \, T^2 \, h^2 + \frac{1}{4} \lambda \, h^4, \tag{5.19}$$

όπου η σταθερά k εξαρτάται από τις σταθερές σύζευξης και δίνεται από τη σχέση (3.79).

Για τιμές της θερμοκρασίας μεταξύ των 10^{14} και $10^{18}\, GeV$ ισχύει ότι $k \simeq 0.3$ και $\lambda \simeq -0.015$ [8].

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανακλιμάκωση[4] (rescaling)

$$h = \frac{kT}{\sqrt{|\lambda|}} \tilde{h} \quad \text{και} \quad r = \frac{1}{kT} \tilde{r}. \tag{5.20}$$

Για να δούμε πως ανακλιμακώνεται το δυναμικό θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση που δίνει την ενέργεια [11].

Έχουμε

[3] Για $T \gg h_{max}$ δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το δυναμικό μηδενικής θερμοκρασίας. Η θερμοκρασία μετατοπίζει το μέγιστο του δυναμικού σε τιμή ανάλογη του T.

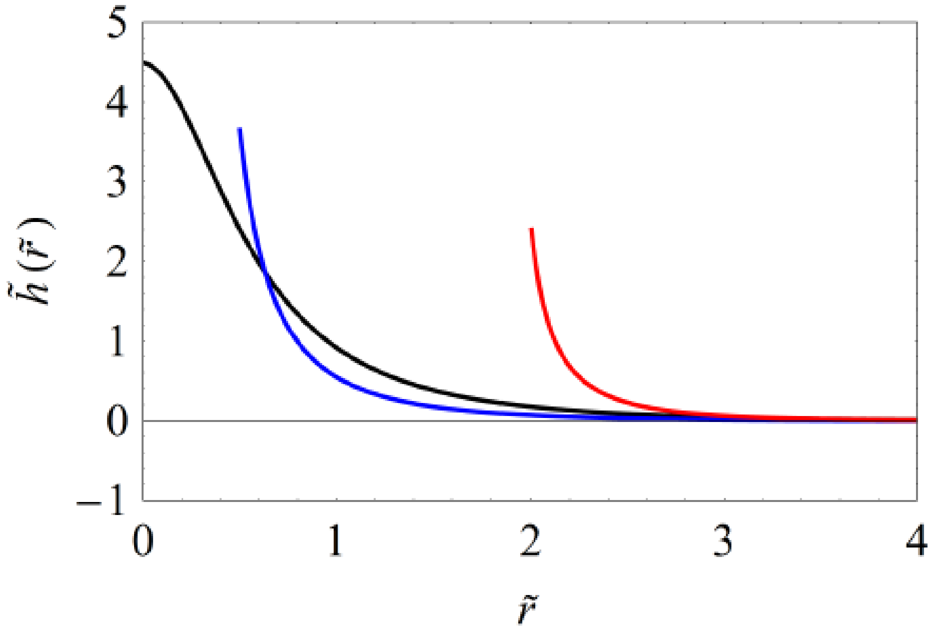
[4] Προφανώς $R_h = \frac{1}{kT} \tilde{R}_h$.

$$\begin{aligned} E &= \int d^3r \left(\frac{1}{2}(\nabla_\mu h)^2 + V(h,T)\right) \\ &= \int \frac{d^3\tilde{r}}{(kT)^3}\left(\frac{(kT)^4}{|\lambda|}(\tilde{\nabla}_\mu \tilde{h})^2 + \frac{1}{2}k^2T^2\frac{k^2T^2}{|\lambda|}\tilde{h}^2 + \frac{1}{4}\frac{\lambda k^4T^4}{\lambda^2}\tilde{h}^4\right) \\ &= \frac{kT}{|\lambda|}\int d^3\tilde{r}\left(\frac{1}{2}(\tilde{\nabla}_\mu\tilde{h})^2 + \frac{1}{2}\tilde{h}^2 - \frac{1}{4}\tilde{h}^4\right). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Άρα, βλέπουμε ότι $V(h,T) = \frac{k^4T^4}{|\lambda|}\tilde{V}(\tilde{h})$, όπου

$$\tilde{V}(\tilde{h}) = \frac{\tilde{h}^2}{2} - \frac{\tilde{h}^4}{4}. \tag{5.22}$$

Αντικαθιστώντας την (5.22) στην (5.8) και χρησιμοποιώντας όλα τα rescaled μεγέθη μπορούμε να πάρουμε μία αριθμητική λύση για το πεδίο Higgs για διάφορες ακτίνες $\tilde{R}_h$, η οποία φαίνεται στο σχήμα 5.2



Σχήμα 5.2: Το rescaled πεδίο Higgs έξω από μελανή οπή, ακτίνας $\tilde{R}_h = 0.01$, $\tilde{R}_h = 0.5$ και $\tilde{R}_h = 2$ αντίστοιχα.

Από το σχήμα 5.2 βλέπουμε ότι η χαρακτηριστική κλίμακα του πεδίου Higgs είναι συγκρίσιμη με την ακτίνα του ορίζοντα για $\tilde{R}_h = \mathcal{O}(1)$. Για τέτοιες μελανές οπές ισχύει ότι $T_H/T = k/4\pi\tilde{R}_h \simeq \mathcal{O}(10^{-2})$, δηλαδή η θερμοκρασία Hawking είναι αρκετά μικρότερη από τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος. Επομένως, δεν υπάρχει θερμική ισορροπία μεταξύ μελανής οπής και περιβάλλοντος.

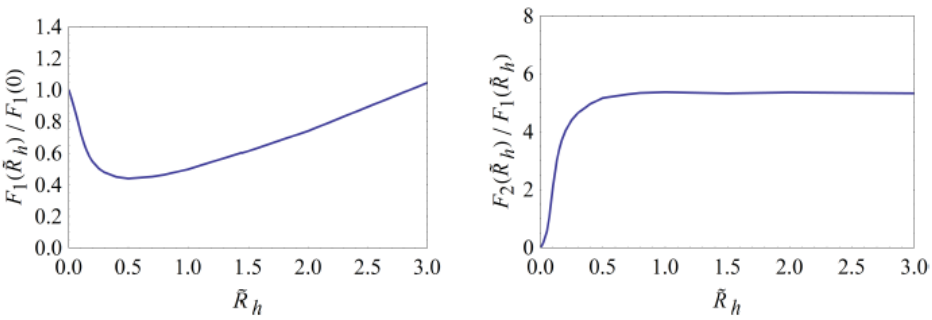
Η ενέργεια[5] της φυσαλίδας μπορεί πλέον να γραφεί στη μορφή

$$\frac{\delta M_{tot}}{T} = \frac{k}{|\lambda|}\left(F_1(\tilde{R}_h) + \xi F_2(\tilde{R}_h)\right), \tag{5.23}$$

όπου $k/|\lambda| \simeq 20$ και

$$F_1(\tilde{R}_h) = 4\pi \int_{\tilde{R}_h}^{\infty} d\tilde{r}\, \tilde{r}^2 \left(-\frac{1}{2}\tilde{h}\frac{d\tilde{V}(\tilde{h})}{d\tilde{h}} + \tilde{V}(\tilde{h})\right) = 4\pi \int_{\tilde{R}_h}^{\infty} d\tilde{r}\, \tilde{r}^2 \frac{1}{4}\tilde{h}^4, \tag{5.24}$$

$$F_2(\tilde{R}_h) = 2\pi \tilde{R}_h \tilde{h}^2(\tilde{R}_h). \tag{5.25}$$



Σχήμα 5.3: Οι ποσότητες F_1 και F_2 που καθορίζουν το λόγο $\delta M_{tot}/T$, ως συνάρτηση της ακτίνας $\tilde{R}_h$.

Ισχύει ότι $F_1(0) \simeq 18.9$ και $F_2(0) = 0$. Άρα, εν απουσία μελανής οπής

$$\left(\frac{\delta M_{tot}}{T}\right)_0 = \frac{k}{|\lambda|} F_1(0) \simeq 380. \tag{5.26}$$

Όμοια με την περίπτωση της μηδενικής θερμοκρασίας, από το σχήμα 5.3 παρατηρούμε ότι για $\tilde{R}_h \simeq 0,5$ η ενέργεια του σχηματισμού μειώνεται στο μισό εάν $\xi = 0$. Επίσης, παρατηρούμε ότι ο λόγος $F_2(\tilde{R}_h)/F_1(\tilde{R}_h)$ μηδενίζεται για $\tilde{R}_h \to 0$ όπως και πριν, ενώ για $\tilde{R}_h \gtrsim 0.5$ παραμένει σταθερός στην τιμή 5.3.
Μία τελευταία παρατήρηση είναι ότι η μάζα της φυσαλίδας εξαρτάται από το ξ, όπως φαίνεται από τη σχέση (5.23). Επομένως, αν το ξ είναι θετικό η μάζα μεγαλώνει και ο ρυθμός διάσπασης μικραίνει, ενώ για αρνητικό ξ συμβαίνει το ανάποδο. Για $\xi = -F_1(\tilde{R}_h)/F_2(\tilde{R}_h)$ η μάζα μηδενίζεται.

5.3 Πιθανότητα διάσπασης και αρχέγονες μελανές οπές

Η πιθανότητα διάσπασης του κενού στο πρώιμο Σύμπαν πρέπει επίσης να εξαρτάται από τον αριθμό των αρχέγονων μελανών οπών που δημιουργούνται.

[5] Τώρα πρόκειται για την ελεύθερη ενέργεια του συστήματος η οποία ανακύπτει λόγω της επίδρασης της εντροπίας.

Σε υπόβαθρο μίας μελανής οπής η πιθανότητα ανά μονάδα χρόνου για διάσπαση, κατά την εποχή που κυριαρχούσε η ακτινοβολία στο Σύμπαν, δίνεται από τη σχέση [8] $dP/dt \simeq T\, exp(-\delta M_{tot}/T)$. Το χαρακτηριστικό χρονικό διάστημα που μπορεί να συσχετιστεί με την κλίμακα της θερμοκρασίας είναι ο χρόνος Hubble $1/H \simeq M_{Pl}/T^2$, άρα $P \simeq \frac{M_{Pl}}{T} exp(-\delta M_{tot}/T)$. Όπως αναφέρεται στο [8], ο αριθμός των ανεξάρτητων περιοχών σε κάποιο χρόνο που βρίσκονται εντός του ορίζοντα γεγονότων μας, την εποχή που κυριαρχούσε η ακτινοβολία, είναι $N \simeq 10^{34}(T/GeV)^3$. Αν p είναι η πιθανότητα να υπάρχει μία μελανή οπή μέσα σε αυτές τις περιοχές, τότε ο λογάριθμος της πιθανότητας διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού παρουσία μελανών οπών ακτίνας R_h είναι

$$\ln(NpP) \simeq 205 + 2\ln\left(\frac{T}{M_{Pl}}\right) + \ln p - \left(\frac{\delta M_{tot}}{T}\right)_0 \frac{F_1(\tilde{R}_h)}{F_1(0)} \left(1 + \xi\, \frac{F_2(\tilde{R}_h)}{F_1(\tilde{R}_h)}\right), \tag{5.27}$$

όπου $M_{Pl} = 1/\sqrt{8\pi G} \simeq 2.43 \cdot 10^{18} GeV$.

Αυτό που είναι δύσκολο να εκτιμήσουμε είναι η πιθανότητα (p) σχηματισμού μελανής οπής. Μία αρχέγονη μελανή οπή σχηματίζεται όταν οι διακυμάνσεις πυκνότητας είναι αρκούντως μεγάλες, έτσι ώστε να καταρρεύσει μία περιοχή κατά την περίοδο της υλοκρατίας. Ως εφαρμογή θα εξετάσουμε το σενάριο που αναφέρεται στο [12].
Θεωρείται ότι η πληθωριστική εποχή ακολουθείται από μία περίοδο κατά την οποία το inflaton ταλαντώνεται και διασπάται σε σωματίδια. Είναι δυνατόν διαταραχές που δημιουργήθηκαν κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, να επανέλθουν στον ορίζοντα, να αναπτυχθούν βαρυτικά και να καταρρεύσουν σε μελανές οπές. Όταν τα προϊόντα της αποσύνθεσης θερμαίνονται η καταστατική εξίσωση αλλάζει και η ανάπτυξη των διαταραχών καταστέλλεται. Σε ένα τέτοιο σενάριο οι μελανές οπές που μας ενδιαφέρουν είναι αυτές που παράγονται λίγο πριν τη θερμοποίηση, γιατί είναι οι πιο μαζικές. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το σενάριο της κβαντικής διάσπασης του κενού, στο οποίο οι σημαντικές μελανές οπές είναι οι πιο ελαφριές λόγω της μεγάλης θερμοκρασίας Hawking ($T_H = 1/8\pi GM$).
Οι σχηματισμοί που οδηγούν στη δημιουργία μελανής οπής ξεκινούν από μία αρχική τιμή $\delta\rho/\rho = \delta_i \simeq 10^{-4}$ στον ορίζοντα, η οποία μεγαλώνει μέχρις ότου $\delta\rho/\rho \simeq 1$, όπου αποσυνδέονται από τη ροή Hubble και καταρρέουν. Η πιθανότητα να σχηματίσουν μελανή οπή είναι [12]

$$P_{BH} = 2 \cdot 10^{-2} \left(\frac{R_h}{R}\right)^{13/2}, \tag{5.28}$$

όπου R_h η ακτίνα του ορίζοντα και R η ακτίνα αναστροφής (turnaround radius).

Η μάζα της μελανής οπής είναι ίση με εκείνη που περιέχεται μέσα στην ακτίνα αναστροφής, δηλαδή $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$. Από την εξίσωση Friedmann έχουμε,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{8\pi G}{3}\frac{3R_h}{8\pi G R^3} = \frac{R_h}{R^3} \Rightarrow$$

$$H^2 R^2 \simeq \frac{R_h}{R} \simeq \delta_i. \tag{5.29}$$

Επίσης

$$R_h \simeq H^2 R^3 = \frac{\delta_i^{3/2}}{H}. \tag{5.30}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και θεωρώντας ότι υπάρχουν $(HR)^{-3} \simeq \delta_i^{-3/2}$ περιοχές ακτίνας R μέσα σε όγκο $\simeq 1/H^3$, η πιθανότητα να βρούμε μία μελανή οπή είναι [12]

$$p \simeq 2 \cdot 10^{-22} \left(\frac{\delta_i}{10^{-4}} \right)^5 . \tag{5.31}$$

Ο ρυθμός σχηματισμού της φυσαλίδας ενισχύεται εάν κατά την έναρξη της εποχής ακτινοβολίας υπάρχουν μελανές οπές με $\tilde{R}_h = kTR_h \gtrsim 0,5$. Εκείνη την περίοδο [8]

$$\rho = \left(\frac{g_\star \pi^2}{30} \right) T^4, \tag{5.32}$$

όπου $g_\star = 106.75$ είναι ο ενεργός αριθμός καταστάσεων σπιν που απαρτίζει την ακτινοβολία για το Καθιερωμένο Πρότυπο.

Έχουμε

$$\tilde{R}_h = kTR_h = kT\frac{\delta_i^{3/2}}{H} = kT\delta_i^{3/2} \left(\frac{3}{8\pi G} \frac{1}{\rho} \right)^{1/2} = kT\delta_i^{3/2} \sqrt{3} M_{Pl} \frac{1}{T^2} \sqrt{\frac{30}{g_\star \pi^2}} \Rightarrow$$

$$\tilde{R}_h \simeq k \sqrt{\frac{90}{g_\star \pi^2}} \delta_i^{3/2} \frac{M_{Pl}}{T} \simeq 0.1 \delta_i^{3/2} \frac{M_{Pl}}{T}. \tag{5.33}$$

Αν η θερμοκρασία αναθέρμανσης (reheating) είναι μεγαλύτερη από $10^{-7} M_{Pl,}$ το $\tilde{R}_h$ είναι πολύ μικρό για να έχει σημαντική επίδραση στο βαθμό σχηματισμού της φυσαλίδας. Η μάζα της μελανής οπής είναι $M \lesssim 10^{27} GeV$. Πιο ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση όπου $T < 10^{-7} M_{Pl}$. Για παράδειγμα, εάν $T \simeq 5 \cdot 10^{11}\, GeV \Rightarrow$

$$\tilde{R}_h \simeq 0.1 \cdot (10^{-4})^{3/2} \frac{2,43 \cdot 10^{18}}{5 \cdot 10^{11}} \simeq 0.5, \tag{5.34}$$

άρα $\frac{F_1(\tilde{R}_h)}{F_1(0)} \simeq 0.5$ και $\frac{F_2(\tilde{R}_h)}{F_1(\tilde{R}_h)} \simeq 5.5$.

Επομένως

$$\ln(NpP) \simeq 124 - 0.5 \left(\frac{\delta M_{tot}}{T} \right)_0 (1 + 5.3\, \xi). \tag{5.35}$$

Όμως πρέπει $NpP \lesssim 1 \Rightarrow \ln(NpP) \lesssim 0 \Rightarrow$

$$\xi \gtrsim -0.19 + 47/(\delta M_{tot}/T)_0. \tag{5.36}$$

Δηλαδή, η ευστάθεια του ηλεκτρασθενούς κενού παρουσία αρχέγονων μελανών οπών επιβάλλει έναν ισχυρό περιορισμό στη μη μηδενική σύζευξη του πεδίου Higgs με τη βαρύτητα.

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύσαμε το πως η παρουσία μελανών οπών μπορεί να προκαλέσει τη διάσπαση του κενού στο πρώιμο Σύμπαν σε πεπερασμένη θερμοκρασία. Συγκεκριμένα, τα ευρήματά μας υποδεικνύουν ότι μια μη μηδενική σύζευξη μεταξύ του πεδίου Higgs και της βαρύτητας μπορεί να μεταβάλει σημαντικά το ρυθμό μετάβασης. Βέβαια, όλες οι προβλέψεις εξαρτώνται από το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε για την ακριβή δυναμική του πρώιμου Σύμπαντος.

Παράρτημα Α΄

Αρχή ελάχιστης δράσης

Η δράση μας είναι

$$S = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{dx}{d\tau}\Big)^2 + V(x)\Big]. \tag{Α΄.1}$$

Έστω $\bar{x}$ σημείο στασιμοποίησης της δράσης.

Η μεταβολή της δράσης είναι

$$\delta S = S(\bar{x} + \delta x) - S(\bar{x}), \quad \text{με} \quad \delta x = \sum_n c_n x_n(\tau). \tag{Α΄.2}$$

Άρα

$$\delta S = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \Big[\frac{1}{2}(\dot{\bar{x}} + \dot{\delta x})^2 + V(\bar{x} + \delta x)\Big] - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \Big[\frac{1}{2}(\dot{\bar{x}})^2 + V(\bar{x})\Big]. \tag{Α΄.3}$$

Αναπτύσσουμε το δυναμικό κατά Taylor και κρατάμε μέχρι όρους 2ης τάξης καθώς θέλουμε να υπολογίσουμε τη δεύτερης τάξης μεταβολή της δράσης.

Έτσι

$$V(\bar{x} + \delta x) = V(\bar{x}) + \delta x V'(\bar{x}) + \frac{(\delta x)^2}{2} V''(\bar{x}) + O(\delta x^3). \tag{Α΄.4}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\delta S = & \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \Big[\frac{1}{2}(\dot{\bar{x}})^2 + \dot{\bar{x}}\dot{\delta x} + \frac{1}{2}(\dot{\delta x})^2 + V(\bar{x}) + \delta x V'(\bar{x}) + \frac{(\delta x)^2}{2} V''(\bar{x}) - \frac{1}{2}(\dot{\bar{x}})^2 \\
& - V(\bar{x})\Big] + O(\delta x^3) \\
= & \underbrace{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \Big[\dot{\bar{x}}\dot{\delta x} + V'(\bar{x})\delta x\Big]}_{\delta S_1 = \text{1ης τάξης μεταβολή της δράσης}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \Big[(\dot{\delta x})^2 + (\delta x)^2 V''(\bar{x})\Big]}_{\delta S_2 = \text{2ης τάξης μεταβολή της δράσης}} + O(\delta x^3).
\end{aligned} \tag{Α΄.5}$$

Για να είναι η δράση στάσιμη πρέπει $\delta S_1 = 0$. Άρα

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \Big[\dot{\bar{x}}\dot{\delta x} + V'(\bar{x})\delta x\Big] = 0 \xRightarrow{\text{παραγ. ολοκλήρωση}}$$

$$\cancelto{0}{\Big[\dot{\bar{x}}\delta x\Big]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}} - \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \ddot{\bar{x}}\delta x + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau V'(\bar{x})\delta x = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau [V'(\bar{x}) - \ddot{\bar{x}}]\delta x = 0, \tag{A′.6}$$

το οποίο πρέπει να ισχύει για κάθε δx, άρα η ποσότητα στις παρενθέσεις πρέπει να μηδενίζεται, δηλαδή

$$\ddot{\bar{x}} = V'(\bar{x}). \tag{A′.7}$$

Για τη 2ης τάξης μεταβολή της δράσης έχουμε

$$\begin{aligned}
\delta S_2 &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \Big[(\dot{\delta x})^2 + (\delta x)^2 V''(\bar{x})\Big] \\
&= \frac{1}{2}\cancelto{0}{\Big[\delta x \dot{\delta x}\Big]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \delta x \ddot{\delta x} + \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau (\delta x)^2 V''(\bar{x}) \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \delta x \left(-\partial_\tau^2 + V''(\bar{x})\right)\delta x \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \delta x \hat{W} \delta x \quad \text{με} \quad \hat{W} = -\partial_\tau^2 + V''(\bar{x}).
\end{aligned} \tag{A′.8}$$

Τελικά η δράση είναι

$$S(\bar{x} + \delta x) = S(\bar{x}) + \frac{1}{2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} d\tau \delta x \hat{W} \delta x + O(\delta x^3). \tag{A′.9}$$

Παράρτημα Β′

Εξισώσεις κίνησης για το βαρυτικό πεδίο και ένα συζευγμένο με τη βαρύτητα βαθμωτό πεδίο

Θεωρούμε τη δράση

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left[\underbrace{\frac{R}{16\pi G}}_{S_1}+\underbrace{\frac{\xi}{2}\phi^2 R}_{S_2}+\underbrace{-\frac{1}{2}(\nabla_\mu\phi)^2}_{S_3}+\underbrace{-V(\phi)}_{S_4}\right]. \tag{Β′.1}$$

Θα πάρουμε τη μεταβολή της δράσης ως προς τον αντίστροφο μετρικό τανυστή $g^{\mu\nu}$. Θα α-σχοληθούμε με κάθε όρο ξεχωριστά.
Η μεταβολή του πρώτου όρου δίνει τον τανυστή Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$, άρα παραθέτουμε χωρίς απόδειξη ότι

$$\delta S_1 = \frac{1}{16\pi G}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\left(R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right)\delta g^{\mu\nu}. \tag{Β′.2}$$

Για το δεύτερο όρο έχουμε[1]

$$\begin{aligned}\delta S_2 &= \frac{\xi}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\,\phi^2\left(R\,\delta\sqrt{-g}+\sqrt{-g}\,\delta R\right)\\ &= \frac{\xi}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{-g}\,\phi^2 G_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+\frac{\xi}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\,\sqrt{-g}\,\phi^2 g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{Β′.3}$$

Ο πρώτος όρος της (Β′.3) υπολογίζεται εύκολα καθώς είναι όμοιος με τη (Β′.2). Ο δεύτερος όρος της θα χρειαστεί περαιτέρω ανάλυση.

Έχουμε

[1] Ισχύει ότι $\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu}$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \, \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\nu \, \delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}, \tag{B′.4}$$

άρα

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\alpha \, g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \nabla_\nu \, g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\alpha} \\ &= \nabla_\alpha \left[g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu} \right] \\ &= \nabla_\alpha \, \delta V_\alpha \end{aligned} \tag{B′.5}$$

όπου

$$V^\alpha = g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}. \tag{B′.6}$$

Αντικαθιστώντας την (B′.6) στην (B′.3), ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες και "πετώντας" τον επιφανειακό όρο, ο δεύτερος όρος της (B′.3) γίνεται

$$\delta S_{2,b} = -\frac{\xi}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\nabla_\alpha(\phi^2)\, V^\alpha. \tag{B′.7}$$

Από τη διαφορική γεωμετρία γνωρίζουμε για τη μεταβολή των συμβόλων Christoffel ισχύει

$$\delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}\left(\nabla_\nu \, \delta g_{\mu\rho} + \nabla_\mu \, \delta g_{\nu\rho} - \nabla_\rho \, \delta g_{\mu\nu}\right). \tag{B′.8}$$

Έτσι έχουμε ότι[2]

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha(\phi^2)V^\alpha &= \frac{\nabla_\alpha(\phi^2)}{2}\big[g^{\mu\nu}g^{\alpha\rho}(\nabla_\nu\delta g_{\mu\rho} + \nabla_\mu\delta g_{\nu\rho} - \nabla_\rho\delta g_{\mu\nu}) \\ &\quad - g^{\mu\alpha}g^{\nu\kappa}(\nabla_\nu\delta g_{\mu\kappa} + \nabla_\mu\delta g_{\nu\kappa} - \nabla_\kappa\delta g_{\mu\nu})\big] \\ &= \phi\nabla_\alpha\phi\big[-\nabla_\nu\delta g^{\nu\alpha} - \nabla_\mu\delta g^{\mu\alpha} - \nabla^\alpha(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \\ &\quad + \nabla_\nu\delta g^{\alpha\nu} - \nabla^\alpha(g^{\nu\kappa}\delta g_{\nu\kappa}) - \nabla_\kappa\delta g^{\alpha\kappa}\big] \\ &= -\phi\nabla_\alpha\phi\big[2\nabla_\kappa\delta g^{\alpha\kappa} + 2\nabla^\alpha(g^{\nu\kappa}\delta g_{\nu\kappa})\big]. \end{aligned} \tag{B′.9}$$

Ολοκληρώνοντας πάλι κατά παράγοντες και χρησιμοποιώντας τη συνοριακή συνθήκη $\delta g^{\mu\nu}|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha(\phi^2)V^\alpha &= -2\nabla_\kappa(\phi\nabla_\alpha\phi)\delta g^{\alpha\kappa} + 2g_{\nu\kappa}\nabla_\alpha(\phi\nabla^\alpha\phi)\delta g^{\nu\kappa} \\ &= 2\nabla_\mu(\phi\nabla_\nu\phi)\delta g^{\mu\nu} - 2g_{\mu\nu}\nabla_\lambda(\phi\nabla^\lambda\phi)\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{B′.10}$$

Τελικά ο δεύτερος όρος της δράσης γράφεται ως

$$\delta S_2 = \frac{\xi}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\,G_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu\nu} - \frac{\xi}{2}\int_{\mathcal{M}} d^4x\sqrt{-g}\big[2\nabla_\mu(\phi\nabla_\nu\phi) - 2g_{\mu\nu}\nabla_\lambda(\phi\nabla^\lambda\phi)\big]\delta g^{\mu\nu}. \tag{B′.11}$$

[2] Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $\delta g^{\lambda\alpha} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\lambda}\delta g_{\mu\nu}$ και $g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$.

Από τις μεταβολές του τρίτου και του τέταρτου όρου έχουμε

$$\begin{aligned}\delta S_3 &= -\int d^4x\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}\frac{\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{2} - \int d^4x\frac{(\nabla_\mu\phi)^2}{2}\delta\sqrt{-g} \\ &= -\int d^4x\sqrt{-g}\frac{\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi}{2}\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\frac{(\nabla_\mu\phi)^2}{2}\delta g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{B$'$.12}$$

$$\delta S_4 = -\int d^4x V(\phi)\delta\sqrt{-g} = +\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}V(\phi)g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \tag{B$'$.13}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, η μεταβολή της δράσης είναι

$$\begin{aligned}\delta S = 0 \Rightarrow \int d^4x\sqrt{-g}\Big[\frac{G_{\mu\nu}}{16\pi G} + \xi\phi^2 G_{\mu\nu} - \xi[\nabla_\mu(\phi\nabla_\nu\phi) - g_{\mu\nu}\nabla_\lambda(\phi\nabla^\lambda\phi)] \\ -\frac{1}{2}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi + \frac{g_{\mu\nu}}{2}\Big(\frac{(\nabla_\mu\phi)^2}{2} + V(\phi)\Big)\Big]\delta g^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow\end{aligned} \tag{B$'$.14}$$

$$G_{\mu\nu}\left(\frac{1}{8\pi G} + \xi\phi^2\right) = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Big(\frac{(\nabla_\mu\phi)^2}{2} + V(\phi)\Big) + 2\xi[\nabla_\mu(\phi\nabla_\nu\phi) - g_{\mu\nu}\nabla_\lambda(\phi\nabla^\lambda\phi)], \tag{B$'$.15}$$

ή

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{B$'$.16}$$

με τον τανυστή ενέργειας ορμής να ορίζεται από τη σχέση

$$T_{\mu\nu} = G_{eff}\Big[\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - g_{\mu\nu}\Big(\frac{(\nabla_\mu\phi)^2}{2} + V(\phi)\Big) + 2\xi[\nabla_\mu(\phi\nabla_\nu\phi) - g_{\mu\nu}\nabla_\lambda(\phi\nabla^\lambda\phi)]\Big], \tag{B$'$.17}$$

όπου

$$G_{eff} = \frac{1}{1 + 8\pi G\xi\phi^2}.$$

Τέλος θα εξάγουμε τις εξισώσεις κίνησης για το πεδίο. Οι εξισώσεις E-L σε καμπυλωμένο χώρο γίνονται

$$\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial\phi} - \nabla_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Big) = 0, \tag{B$'$.18}$$

όπου

$$\mathcal{L}_m = \frac{\xi}{2}\phi^2 R - \frac{1}{2}(\partial_\rho\phi)^2 - V(\phi). \tag{B$'$.19}$$

Ισχύει ότι

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \phi} = \xi \phi R - \frac{\partial V}{\partial \phi}. \tag{B′.20}$$

και

$$\frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -\frac{1}{2}\frac{\partial(\partial_\rho \phi)^2}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -\partial^\mu \phi = -\nabla^\mu \phi. \tag{B′.21}$$

Άρα από (B′.18) $\Rightarrow$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \phi + \xi \phi R = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \tag{B′.22}$$

Βιβλιογραφία

[1] S. Coleman, Aspects of Symmetry (Selected Erice Lectures), Cambridge University Press, (1985).

[2] S. Coleman, F. De Luccia, Gravitational effects on and of vacuum decay, Phys. Rev. D 21,3305, (1980) [pdf].

[3] S. Coleman, V. Glaser, A. Action Minima among Solutions to a Class of Euclidean Scalar Field Equations, Comm. Math. Phys. 58, 211 (1978) [pdf].

[4] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, An introduction to quantum field theory, Addison-Wesley, (1995).

[5] M. Quiros, Finite Temperature Field Theory and Phase Transitions, (1999). [arXiv:hep-ph/9901312].

[6] G. Ridolfi, An Introduction to the Standard Model of Electroweak Interactions, Lecture notes, CERN.

[7] L. Delle Rose, C. Marzo and A. Urbano, On the fate of the Standard Model at finite temperature, JHEP 1605 050,(2016). [arXiv:1507.06912 hep-ph].

[8] N. Tetradis, Black holes and Higgs stability,(2016)[arXiv:1606.04018 hep-ph].

[9] D. Canko, I. Gialamas, G. Jelic-Cizmek, A. Riotto, N. Tetradis, On the Catalysis of the Electroweak Vacuum Decay by Black Holes at High Temperature,(2017)[arXiv:1706.01364 hep-th].

[10] J. R. Espinosa, G. F. Giudice, E. Morgante, A. Riotto, L. Senatore, A. Strumia, N. Tetradis, The cosmological Higgstory of the vacuum instability,(2015)[arXiv:1505.04825 hep-ph].

[11] P. Arnold, S. Vokos, Instability of hot electroweak theory: Bounds on m_H and m_t, Phys. Rev. D 44,3620, (1991).

[12] D. Gorbunov, D. Levkov, A, Panin, Fatal youth of the Universe: black hole threat for the electroweak vacuum during preheating,(2017)[arXiv:1704.05399 astro-ph.CO].

[13] A. Salvio, A. Strumia, N. Tetradis, A. Urbano , On gravitational and thermal corrections to vacuum decay, JHEP 1609, 054 (2016) [arXiv:1608.02555 hep-ph].

[14] U. Nucamendi, M. Salgado, Scalar hairy black holes and solitons in asymptotically flat spacetimes, Phys.Rev. D68, 044026 (2003) [arXiv:gr-qc/0301062].

[15] J.I. Kapusta and C. Gale, Finite-Temperature Field Theory Principles and Applications, 2nd ed., Cambridge University Press, (2006).

[16] T. Lancaster, S.J. Blundell, Quantum Field Theory for the Gifted Amateur, Oxford University Press, (2014).

[17] A. Lahanas, Quantum Field Theory I, Lecture notes, UOA, (2016).

[18] A. Guarnizo, L. Castaneda, J. M. Tejeiro, Boundary Term in Metric f(R) Gravity: Field Equations in the Metric Formalism,Gen. Rel. Grav. 42, 11, 2713-2728,(2010)[arXiv:1002.0617 gr-qc].

[19] E. Poisson, A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics. Cambridge University Press, (2004).

[20] N.K. Nielsen, On the gauge dependence of spontaneous symmetry breaking in gauge theories, Nuclear Physics B 101.1, (1975).