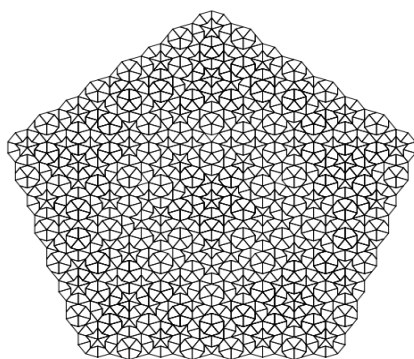


ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ Κ-ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ C^* -ΑΛΓΕΒΡΩΝ
ΚΑΙ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ ΤΟΥ
ELLIOTT



ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΠΑΝΑΓΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ ΚΑΤΑΒΟΛΟΣ

ΑΘΗΝΑ 2017

Abstract

In this thesis we first give a brief introduction to K-theory for C^* -algebras, which has its roots in (topological) K-theory. K-theory was developed by Atiyah and Hirzebruch in the 1960s based on work of Grothendieck in algebraic geometry. It was introduced as a tool in C^* -algebra theory in the early 1970s when George Elliott proved that AF-algebras (the so-called “*approximately finite dimensional*” C^* -algebras) are classified by their ordered K_0 -groups. This proof takes place in the second part of this thesis.

In chapter 1, we give some necessary definitions and some basic results of C^* -algebra theory. Next, we classify finite dimensional C^* -algebras (via representation theory of C^* -algebras) and study some equivalence relations on the set of projections of a C^* -algebra, such as Murray-von Neumann, unitary and homotopy equivalence.

In chapter 2, we define the K_0 -group of a C^* -algebra (unital or not), we present its standard picture and we prove some basic properties of it, such as homotopy invariance, half exactness and split exactness.

In chapter 3, we present a sufficient condition on a C^* -algebra which makes K_0 -group into an ordered abelian group. Next, we give the definition of inductive limit in a category and we prove its existence in the category of C^* -algebras and in the category of ordered abelian groups. Also we prove that the K_0 -group is “*continuous*”, a property which is necessary for the proof of Elliott’s theorem.

In chapter 4, we give the definition of AF-algebras and some basic properties of them, such as the fact that AF-algebras are spanned by their projections and that their ideals and quotients are also AF-algebras. Moreover we prove some equivalent characterisations of AF-algebras and we analyze the way in which they can be represented by Bratteli diagrams. We also quote some indicative examples.

In chapter 5, we present the proof of Elliott’s theorem, according to which two unital AF-algebras A and B are isomorphic if and only if the ordered abelian groups $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$ and $(K_0(B), K_0(B)^+, [1_B]_0)$ are isomorphic. ($K_0(A)^+$ is the cone of $K_0(A)$.) In addition to “*continuity*” of K_0 , another necessary notion for this proof is the notion of system of matrix units in a C^* -algebra and cancellation property which are studied extensively in first two paragraphs. Next, we describe how this theorem can be generalized for non unital AF-algebras and that the new algebraic invariant we obtain, restricted on unital AF-algebras is the previous one. (K_0 -group with its cone.) Finally we calculate K_0 -groups of some AF-algebras and we prove that the K_0 -groups of AF-algebras are exactly the dimension groups.

Περιεχόμενα

0 Πρόλογος

1	Μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των C^*-άλγεβρων	1
1.1	Ορισμοί-Βασικά αποτελέσματα	1
1.2	Οι C^* -άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης	8
1.3	Προβολές και ομοτοπία	14
2	Η Ομάδα K_0	20
2.1	Η ομάδα K_0 για C^* -άλγεβρες με μονάδα	20
2.2	Παραδείγματα υπολογισμού	26
2.3	Η ομάδα K_0 για C^* -άλγεβρες χωρίς απαραίτητα μονάδα	30
2.4	Ιδιότητες της K_0	34
3	Επαγωγικά Όρια και K_0	42
3.1	Διατεταγμένες αβελιανές ομάδες	42
3.2	Επαγωγικά όρια	47
3.3	Συνέχεια του συναρτητή K_0	58
4	AF-άλγεβρες	62
4.1	Βασικές ιδιότητες των AF-άλγεβρων	62
4.2	Κανονικοί *-ομομορφισμοί και διαγράμματα Bratteli	65
4.3	Παραδείγματα AF-άλγεβρων	70
4.4	Ο τοπικός χαρακτηρισμός των AF-άλγεβρων	76
4.5	Τα ιδεώδη των AF-άλγεβρων	78
5	Το Θεώρημα ταξινόμησης του Elliott	80
5.1	Η ομάδα K_0 μιας C^* -άλγεβρας πεπερασμένης διάστασης	80
5.2	Το θεώρημα για AF-άλγεβρες με μονάδα	82
5.3	Το θεώρημα για AF-άλγεβρες χωρίς απαραίτητα μονάδα	89
5.4	Η ομάδα K_0 μιας AF-άλγεβρας-Παραδείγματα	90
	Βιβλιογραφία	94

Κεφάλαιο 0

Πρόλογος

Η θεωρία των C^* -άλγεβρών ξεκίνησε το 1943 με την δημοσίευση των Gel'fand και Naimark [13] όπου έδωσαν δύο θεμελιώδους σημασίας αποτελέσματα για την συγκεκριμένη θεωρία. Το ένα είναι πως οι C^* -άλγεβρες (οι οποίες είναι αυτοσυζυγείς και κλειστές στην τοπολογία της νόρμας άλγεβρες τελεστών σε ένα χώρο Hilbert) μπορούν να χαρακτηριστούν αφηρημένα ως ενελικτικές άλγεβρες Banach οι οποίες ικανοποιούν μια αλγεβρική σχέση που συνδέει την νόρμα με την ενέλιξη και το άλλο είναι πως κάθε μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα είναι ισόμορφη με την άλγεβρα $C(X)$ των συνεχών συναρτήσεων επί ενός συμπαγούς χώρου Hausdorff X (το φάσμα της A) με τιμές στο $\mathbb{C}$. Λόγω του δεύτερου αποτελέσματος προέκυψε ο δεισμός Gel'fand-Naimark, δηλαδή μια ισοδυναμία μεταξύ της κατηγορίας των μεταθετικών C^* -άλγεβρών με μονάδα και των συμπαγών Hausdorff τοπολογικών χώρων, γεγονός που όπως θα δούμε παρακάτω έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της K -θεωρίας των C^* -άλγεβρών.

Η τοπολογική K -θεωρία είναι ένας κλάδος της αλγεβρικής τοπολογίας ο οποίος αναπτύχθηκε από τους Atiyah και Hirzebruch κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1960 και βασίστηκε στην δουλειά του Grothendieck για την απόδειξη του θεωρήματος Grothendieck-Riemann-Roch. Ειδικότερα μέσω της τοπολογικής K -θεωρίας μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε συμπαγή τοπολογικό χώρο X μια ακολουθία αβελιανών ομάδων $K^n(X)$, $n \in \mathbb{N}$, με αποτέλεσμα να έχουμε αρκετές φορές την δυνατότητα να ανάγουμε προβλήματα τοπολογικής φύσης σε αλγεβρικά. Μάλιστα συχνά μπορούμε να αποφανθούμε για το αν δύο τοπολογικοί χώροι είναι ομοιομορφικοί απλά μελετώντας τις K -ομάδες τους.

Η K -θεωρία των C^* -άλγεβρών αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια των δεκαετιών που ακολουθήσαν και ο τρόπος ορισμού της είναι ανάλογος με αυτόν της τοπολογικής K -θεωρίας. Δηλαδή βασίζεται στην κατασκευή της ομάδας Grothendieck, σύμφωνα με την οποία σε κάθε αβελιανή ημιομάδα με μονάδα (μονοειδές) M αντιστοιχεί μια αβελιανή ομάδα $G(M)$, έτσι ώστε κάθε αβελιανή ομάδα που περιέχει μια ομομορφική εικόνα της M να περιέχει αναγκαστικά και μια ομομορφική εικόνα της $G(M)$. Συγκεκριμένα αν A είναι μια C^* -άλγεβρα, τότε οι αβελιανές ομάδες $K_n(A)$, $n \in \mathbb{N}$ που αντιστοιχούν στην A ορίζονται ως εξής:

- Η $K_0(A)$ είναι η ομάδα Grothendieck της αβελιανής ημιομάδας $\mathcal{D}(A)$, η οποία αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας προβολών που ανήκουν στις άλγεβρες πινάκων, $M_k(A)$, με στοιχεία στην A .
- Αν $n \geq 1$, τότε η ομάδα $K_n(A) := K_0(S^n A)$, όπου $S^n A = S \cdots S(S(A))$ (n -φορές) και SA είναι το suspension της A , δηλαδή $SA = \{f : [0, 1] \rightarrow A : f \text{ συνεχής και } f(0) = 0 = f(1)\}$.

Γενικά ο υπολογισμός των ομάδων αυτών δεν είναι εύκολος για αυτό και χρειάζονται ισχυρά υπολογιστικά εργαλεία όπως το θεώρημα περιοδικότητας του Bott, η απόδειξη του οποίου οφείλεται

στους Atiyah και Bott.[21, Θεώρημα 11.1.2] Άμεση συνέπεια του θεωρήματος αυτού είναι πως η K -θεωρία των C^* -αλγεβρών αποτελείται τελικά από ένα ζεύγος ομάδων, την K_0 και την K_1 .

Το πιο εντυπωσιακό ίσως όσον αφορά την K -θεωρία των C^* -αλγεβρών, είναι πως για κάθε συμπαγή Hausdorff χώρο X , ισχύει ότι $K^0(X) \simeq K_0(C(X))$. Δηλαδή στην περίπτωση που η A είναι μια μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα, η K -θεωρία της A συμπίπτει με την τοπολογική K -θεωρία του φάσματός της. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το δυϊσμό Gel'fand-Naimark και με το ότι η K -θεωρία των C^* -αλγεβρών είναι ομοτοπικά αναλλοίωτη ήταν θεμελιώδους σημασίας για την ανάπτυξη του κλάδου της “μη μεταθετικής τοπολογίας”. Βλέπε [3], [6], [20]

Σκοπός μας σε αυτή την εργασία είναι να δώσουμε μια σύντομη εισαγωγή της K -θεωρίας των C^* -αλγεβρών καθώς και να παρουσιάσουμε την πρώτη σημαντική εφαρμογή της στην θεωρία των C^* -αλγεβρών, που είναι το θεώρημα ταξινόμησης του Elliott. Συγκεκριμένα στις αρχές της δεκαετίας του 1970 ο George Elliott απέδειξε πως οι AF -άλγεβρες (οι λεγόμενες “approximately finite dimensional” C^* -άλγεβρες) ταξινομούνται μέσω των K_0 ομάδων τους όταν αυτές εφοδιαστούν με μια κατάλληλη σχέση διάταξης. (Η ομάδα K_1 μιας AF -άλγεβρας είναι πάντα μηδέν.)

Στο Κεφάλαιο 1, δίνουμε κάποιους απαραίτητους για την συνέχεια ορισμούς, καθώς και κάποια βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των C^* -αλγεβρών. Στη συνέχεια μέσω της θεωρίας αναπαραστάσεων των C^* -αλγεβρών ταξινομούμε τις C^* -άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης και μελετάμε κάποιες σχέσεις ισοδυναμίας επί του συνόλου των προβολών μιας C^* -άλγεβρας, όπως είναι η Murray-von Neumann, η unitary και η ομοτοπική ισοδυναμία.

Στο Κεφάλαιο 2, ορίζουμε την ομάδα K_0 μιας C^* -άλγεβρας (με ή χωρίς μονάδα), παρουσιάζουμε την standard εικόνα της και αποδεικνύουμε κάποιες βασικές ιδιότητές της, όπως το ότι είναι ομοτοπικά αναλλοίωτη και πως διατηρεί τα πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα.

Στο Κεφάλαιο 3, παρουσιάζουμε μια ικανή συνθήκη ώστε η ομάδα K_0 μιας C^* -άλγεβρας να καθίσταται διατεταγμένη αβελιανή ομάδα. Στη συνέχεια δίνουμε το ορισμό του επαγωγικού ορίου σε μια κατηγορία και αποδεικνύουμε την ύπαρξη επαγωγικών ορίων στην κατηγορία των C^* -αλγεβρών και των διατεταγμένων αβελιανών ομάδων. Επίσης αποδεικνύουμε πως η ομάδα K_0 είναι “συνεχής”, μια ιδιότητα που είναι απαραίτητη για την απόδειξη του θεωρήματος του Elliott.

Στο Κεφάλαιο 4, δίνουμε τον ορισμό των AF -αλγεβρών και κάποιες βασικές ιδιότητες αυτών, όπως το ότι παράγονται από τις προβολές τους και πως τα ιδεώδη και τα πηλίκα τους είναι επίσης AF -άλγεβρες. Επιπλέον αποδεικνύουμε κάποιους ισοδύναμους χαρακτηρισμούς και αναλύουμε τον τρόπο με τον οποίο οι AF -άλγεβρες μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω των διαγραμμάτων Bratteli, παραθέτοντας επίσης κάποια ενδεικτικά παραδείγματα.

Στο Κεφάλαιο 5, παρουσιάζουμε την απόδειξη του θεωρήματος του Elliott, σύμφωνα με το οποίο δύο AF -άλγεβρες με μονάδα A και B είναι ισόμορφες αν και μόνο αν είναι ισόμορφες οι διατεταγμένες αβελιανές ομάδες $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$ και $(K_0(B), K_0(B)^+, [1_B]_0)$. ($K_0(A)^+$ είναι ο κώνος της $K_0(A)$.) Απαραίτητα για την συγκεκριμένη απόδειξη, εκτός της συνέχειας της K_0 , είναι η έννοια του system of matrix units σε μια C^* -άλγεβρα και η ιδιότητα απαλοιφής τα οποία μελετώνται εκτενώς στις δύο πρώτες παραγράφους. Στη συνέχεια περιγράφουμε πως το θεώρημα αυτό γενικεύεται και για AF -άλγεβρες χωρίς μονάδα και υπολογίζουμε τις K_0 ομάδες κάποιων AF -αλγεβρών. Τέλος αποδεικνύουμε πως οι ομάδες K_0 των AF -αλγεβρών είναι ακριβώς οι dimension groups.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Αριστείδη Κατάβολο για την πολύτιμη βοήθειά του κατά την εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς επίσης και τους κ.κ Μιχάλη Ανούση και Γιώργο Ελευθεράκη για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Finally I would like to thank P. K. Nyland for his generous help in the Latex presentation of Bratteli diagrams, and especially for his detailed presentation of the thesis of AF -algebras,

which saved me a lot of trouble.

Νίκος Παναγόπουλος

Κεφάλαιο 1

Μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των C^* -αλγεβρών

Στην παράγραφο αυτή προσπαθούμε να δώσουμε μια όσον το δυνατόν καλύτερη εισαγωγή στην θεωρία των C^* -αλγεβρών καθώς και ένα τρόπο ταξινόμησης των C^* -αλγεβρών πεπερασμένης διάστασης βασιζόμενοι στην θεωρία αναπαραστάσεων των C^* -αλγεβρών. Αν και η προσέγγιση αυτή είναι λιγότερο στοιχειώδης από άλλες, την επιλέγουμε για λόγους που θα φανούν στην συνέχεια. Στην τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου δίνουμε κάποια αποτελέσματα που αφορούν το σύνολο προβολών μιας C^* -άλγεβρας εφοδιάζοντάς το με κάποιες κατάλληλες σχέσεις ισοδυναμίας.

1.1 Ορισμοί-Βασικά αποτελέσματα

Οι ορισμοί και τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου παρατίθενται χωρίς απόδειξη και είναι τα απολύτως απαραίτητα προκειμένου να αναπτύξουμε την K -θεωρία των C^* -αλγεβρών. Για περισσότερες λεπτομέρειες-αποδείξεις μπορεί κάποιος να ανατρέξει στην Βιβλιογραφία που δίνουμε στο τέλος. [2], [10], [16]

Ορισμός 1.1.1. Ένα ζεύγος $(A, \|\cdot\|)$ όπου A είναι μια $\mathbb{C}$ -άλγεβρα, $\|\cdot\| : A \rightarrow \mathbb{R}$, λέγεται άλγεβρα με νόρμα, αν η απεικόνιση (νόρμα) $\|\cdot\|$ έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) $\|a\| \geq 0, \quad \forall a \in A.$
- (ii) $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0.$
- (iii) $\|\lambda a\| = |\lambda| \|a\| \quad \forall a \in A, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$
- (iv) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| \quad \forall a, b \in A.$
- (v) $\|ab\| \leq \|a\| \|b\| \quad \forall a, b \in A.$

Ορισμός 1.1.2. Αν $(A, \|\cdot\|)$ είναι μια άλγεβρα με νόρμα, τότε η απεικόνιση $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ με $d(a, b) := \|a - b\|$ για κάθε $a, b \in A$ είναι μετρική επί της A και η τοπολογία που επάγει επί της A θα λέγεται τοπολογία της νόρμας.

Παρατήρηση 1.1.3. Οι πράξεις $+: A \times A \rightarrow A, \cdot: A \times A \rightarrow A, \times: \mathbb{C} \times A \rightarrow A$ είναι συνεχείς ως προς την τοπολογία της νόρμας.

Ορισμός 1.1.4. Μια άλγεβρα με νόρμα $(A, \|\cdot\|)$ λέγεται άλγεβρα Banach αν η (A, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Ορισμός 1.1.5. Έστω A μια $\mathbb{C}$ -άλγεβρα και $*$: $A \rightarrow A$ μια απεικόνιση με τις εξής ιδιότητες:

- (i) $(a + b)^* = a^* + b^* \quad \forall a, b \in A,$
- (ii) $(ab)^* = b^*a^* \quad \forall a, b \in A,$
- (iii) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda}a^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall a \in A,$
- (iv) $(a^*)^* = a \quad \forall a \in A.$

Μια τέτοια απεικόνιση θα λέγεται ενέλιξη επί της A .

Ορισμός 1.1.6. Έστω $(A, \|\cdot\|)$ μια άλγεβρα Banach και $*$: $A \rightarrow A$ μια ενέλιξη επί της A . Τότε η A θα είναι C^* -άλγεβρα, αν επιπλέον ισχύει πως $\|a^*a\| = \|a\|^2$ για κάθε $a \in A$.

Παρατήρηση 1.1.7. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα, τότε η ενέλιξη είναι συνεχής και μάλιστα ισομετρία.

Παραδείγματα 1.1.8. 1. $(\mathbb{C}, |\cdot|, \bar{\cdot})$, είναι μια μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα.

2. $(C(X), \|\cdot\|_\infty, \bar{\cdot})$, όπου ο X είναι συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος, $C(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ συνεχής}\}$, $\bar{\cdot} : C(X) \rightarrow C(X)$, $f \mapsto \bar{f}$, $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$, είναι μια μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα την $1_{C(X)} : X \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto 1$.

3. Έστω $C_0(X) = \{f \in C(X) : f \text{ μηδενίζεται στο άπειρο}\}$, όπου X είναι ένας τοπικά συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος και η νόρμα και η ενέλιξη ορίζονται όπως στο 2. Τότε η $(C_0(X), \|\cdot\|_\infty, \bar{\cdot})$ είναι μια μεταθετική C^* -άλγεβρα χωρίς μονάδα.

4. Αν ο X είναι ένας τοπικά συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος, $C_b(X) = \{f \in C(X) : f \text{ φραγμένη}\} \subseteq C_0(X)$ τότε η $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty, \bar{\cdot})$ είναι μια μεταθετική C^* -άλγεβρα με μονάδα, την $1_{C(X)} : X \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto 1$.

5. Έστω $(B(H), \|\cdot\|)$ το σύνολο όλων των γραμμικών και φραγμένων τελεστών σε ένα χώρο Hilbert H εφοδιασμένο με την νόρμα τελεστή. Αν $*$: $B(H) \rightarrow B(H)$, $T \mapsto T^*$, με T^* να είναι ο συζυγής τελεστής του T , τότε η $(B(H), \|\cdot\|, *)$ είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα την $I : H \rightarrow H, x \mapsto x$.

Υπενθυμίζουμε πως συζυγής τελεστής του T είναι ο μοναδικός τελεστής για τον οποίο ισχύει ότι $\langle T^*(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$ για κάθε $x, y \in H$ και πως η $B(H)$ είναι μη μεταθετική αν και μόνο αν $\dim_{\mathbb{C}}(H) \geq 2$.

6. Έστω H ένας χώρος Hilbert και $\mathcal{K}(H)$ το σύνολο των συμπαγών τελεστών επί του H . Υπενθυμίζουμε πως ένας γραμμικός τελεστής $T \in B(H)$ είναι συμπαγής αν και μόνο αν το $\overline{T(B_H)}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του H . ($B_H := \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$).

Αν η νόρμα και η ενέλιξη ορίζονται όπως στο προηγούμενο Παράδειγμα, τότε προκύπτει πως η $(\mathcal{K}(H), \|\cdot\|, *)$ είναι μια C^* -άλγεβρα. Η $\mathcal{K}(H)$ έχει μονάδα αν και μόνο αν $\dim_{\mathbb{C}}(H) < +\infty$. Επίσης η $\mathcal{K}(H)$ είναι ένα κλειστό αμφίπλευρο ιδεώδες της $B(H)$.

7. Από την θεωρία των χώρων Banach ξέρουμε πως $B(\mathbb{C}^n) \simeq M_n(\mathbb{C})$ ως $\mathbb{C}$ -άλγεβρες. Επομένως αν $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η νόρμα τελεστή επί του $B(\mathbb{C}^n)$ και $*$: $M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ με $(z_{ij})_{i,j}^* := (\bar{z}_{ji})_{i,j}$ (ο συζυγής ανάστροφος πίνακας), τότε η $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|, *)$ είναι μια μη μεταθετική C^* -άλγεβρα.

Οι πράξεις στα παραδείγματα 2,3 και 4 ορίζονται κατά σημείο, ενώ στα παραδείγματα 5 και 6 ο πολλαπλασιασμός είναι η σύνθεση τελεστών. Στα υπόλοιπα παραδείγματα οι πράξεις είναι οι προφανείς.

Ορισμός 1.1.9. Έστω A, B δύο C^* -άλγεβρες και $A \oplus B$ το ευθύ άθροισμα των A και B ως $\mathbb{C}$ -άλγεβρες. Αν

$$\|(a, b)\| := \max\{\|a\|, \|b\|\} \text{ και } (a, b)^* := (a^*, b^*), \forall (a, b) \in A \oplus B$$

τότε η $(A \oplus B, \|\cdot\|, *)$ είναι μια C^* -άλγεβρα και θα λέγεται ευθύ άθροισμα ή γινόμενο των A και B .

Έστω A μια C^* -άλγεβρα και X ένας τοπικά συμπαγής χώρος Hausdorff. Θεωρούμε το σύνολο

$$C_0(X, A) = \{f : X \rightarrow A : f \text{ συνεχής και μηδενίζεται στο άπειρο}\}.$$

Εδώ μια $f : X \rightarrow A$ μηδενίζεται στο άπειρο, αν για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $\{x \in X : \|f(x)\| \geq \epsilon\}$ είναι συμπαγές. Αν $\|f\| := \sup\{\|f(x)\|_A : x \in X\}$ και $f^*(x) := f(x)^*$ για κάθε $f \in C_0(X, A)$, τότε η $(C_0(X, A), \|\cdot\|, *)$, είναι μια C^* -άλγεβρα.

Ορισμός 1.1.10. Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Τότε

1. ένα στοιχείο $a \in A$ λέγεται αυτοσυζυγές (self adjoint), αν $a^* = a$.
2. ένα στοιχείο $a \in A$ λέγεται κανονικό (normal), αν $a^*a = aa^*$.
3. ένα στοιχείο $p \in A$ λέγεται προβολή (projection), αν $p^* = p^2 = p$.
4. Αν η A έχει μονάδα, ένα στοιχείο $a \in A$ λέγεται ισομετρία (isometry), αν $a^*a = 1_A$.
5. Αν η A έχει μονάδα, ένα στοιχείο $u \in A$ λέγεται μοναδιαίο (unitary), αν $u^*u = uu^* = 1_A$.
6. Αν η A έχει μονάδα, ένα στοιχείο $a \in A$ είναι αντιστρέψιμο αν υπάρχει $b \in A$ ώστε $ab = 1_A = ba$.

Συμβολίζουμε με A_{sa} , A_{nor} , $\mathcal{P}(A)$, A_{is} , $\mathcal{U}(A)$, $\mathcal{G}(A)$ το σύνολο όλων των αυτοσυζυγών στοιχείων, των φυσιολογικών, των προβολών, των ισομετριών, των μοναδιαίων και των αντιστρέψιμων στοιχείων της A αντίστοιχα.

Ορισμός 1.1.11. Έστω A, B C^* -άλγεβρες και μια απεικόνιση $f : A \rightarrow B$. Η f θα λέγεται $*$ -ομομορφισμός αν,

- (i) είναι ομομορφισμός $\mathbb{C}$ -αλγεβρών, και
- (ii) διατηρεί την ενέλιξη, δηλαδή $f(a^*) = f(a)^*$ για κάθε $a \in A$.

Επίσης η f θα λέγεται $*$ -μονομορφισμός/ $*$ -επιμορφισμός/ $*$ -ισομορφισμός, αν επιπλέον είναι μονομορφισμός/επιμορφισμός/ισομορφισμός $\mathbb{C}$ -αλγεβρών. Στην περίπτωση που υπάρχει $*$ -ισομορφισμός μεταξύ δύο C^* -αλγεβρών A και B , οι A, B θα λέγονται ισόμορφες και θα γράφουμε $A \simeq B$.

Ορισμός 1.1.12. Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Μια C^* -υποάλγεβρα της A είναι ένα μη κενό υποσύνολο B της A , το οποίο είναι κλειστό στην τοπολογία της νόρμας, αυτοσυζυγές, (δηλαδή για κάθε $a \in B$ συνεπάγεται ότι $a^* \in B$) και είναι κλειστό ως προς τις πράξεις.

Ένα ιδεώδες I της A είναι ένα αμφίπλευρο ιδεώδες το οποίο είναι επιπλέον κλειστό στην τοπολογία της νόρμας. Σε μια τέτοια περίπτωση θα γράφουμε $I \triangleleft A$.

Η A θα λέγεται απλή, αν τα μόνα ιδεώδη της είναι τα σύνολα $\{0\}$ και A .

Σχόλιο 1.1.13. Αποδεικνύεται πως κάθε ιδεώδες της A είναι αυτοσυζυγές και άρα C^* -υποάλγεβρα.

Ορισμός 1.1.14. Έστω I ιδεώδες μιας C^* -άλγεβρας A . Αν

$$A/I = \{a + I : a \in A\}, \quad \|a + I\| := d(a, I) = \inf\{\|a + x\| : x \in I\}, \quad \text{και} \quad (a + I)^* := a^* + I$$

τότε η $(A/I, \|\cdot\|, *)$ είναι μια C^* -άλγεβρα. Επιπλέον η απεικόνιση $\pi : A \rightarrow A/I$ είναι $*$ -επιμορφισμός και θα λέγεται απεικόνιση πηλίκου της A .

Πρόταση 1.1.15. Έστω $f : A \rightarrow B$ ένας μη μηδενικός $*$ -ομομορφισμός μεταξύ δύο C^* -αλγεβρών. Τότε $\|f\| = 1$ και η $f(A)$ είναι μια C^* -υπόάλγεβρα της B . Αν επιπλέον η f είναι $*$ -μονομορφισμός, θα είναι ισομετρία. Συγκεκριμένα η f είναι ίση με την $\tilde{f} \circ \pi$, όπου π είναι η απεικόνιση πηλίκου της A επί της $A/\ker f$ και $\tilde{f}$ είναι ο επαγόμενος ισομετρικός $*$ -ισομορφισμός από το πηλίκου $A/\ker f$ στην $f(A)$.

Ορισμός 1.1.16. (Μοναδοποίηση)

Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $A \oplus \mathbb{C}$ και ορίζουμε μια επιπλέον πράξη επί αυτού ως εξής: $(a, \lambda)(b, \mu) := (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu)$, $\forall a, b \in A$ και $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Τότε η $\tilde{A} := A \oplus \mathbb{C}$ είναι μια $\mathbb{C}$ -άλγεβρα και ορίζοντας $\|\cdot\| : \tilde{A} \rightarrow \mathbb{R}$ και $*$: $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ με $\|(a, \lambda)\| = \sup\{\|ab + \lambda b\| : \|b\| \leq 1, b \in A\}$ και $(a, \lambda)^* = (a^*, \bar{\lambda})$, για κάθε $(a, \lambda) \in \tilde{A}$, προκύπτει πως η $(\tilde{A}, \|\cdot\|, *)$, είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα το $(0_A, 1)$.

Επιπλέον η A εμφυτεύεται ισομετρικά στην $\tilde{A}$ μέσω της απεικόνισης $\iota : A \rightarrow \tilde{A}, a \mapsto (a, 0)$.

Ορισμός 1.1.17. Κάθε $*$ -ομομορφισμός φ μεταξύ δύο C^* -αλγεβρών A και B επάγει ένα $*$ -ομομορφισμό μεταξύ των μοναδοποιήσεών τους. Συγκεκριμένα αν $\varphi : A \rightarrow B$ $*$ -ομομορφισμός ορίζουμε $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$, με $\tilde{\varphi}(a, \lambda) := (\varphi(a), \lambda)$, για κάθε $(a, \lambda) \in \tilde{A}$.

Ορισμός 1.1.18. Μια ακολουθία (πεπερασμένη ή άπειρη) από C^* -αλγεβρες και $*$ -ομομορφισμούς

$$\cdots \longrightarrow A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} A_{n+2} \longrightarrow \cdots$$

λέγεται ακριβής (exact), αν $\ker(\varphi_{n+1}) = \text{Im}(\varphi_n)$ για κάθε n .

Μια ακριβής ακολουθία όπως η ακολουθία (1.1) θα λέγεται βραχεία ακριβής (short exact).

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

Μια βραχεία ακριβής ακολουθία όπως η (1.1) θα λέμε ότι είναι split exact (διασπάται) αν υπάρχει $*$ -ομομορφισμός $\lambda : B \rightarrow A$ ώστε $\psi \circ \lambda = \text{Id}_B$ και θα γράφουμε

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow[\lambda]{\psi} B \longrightarrow 0$$

Παρατήρηση 1.1.19. (i) Έστω I ένα ιδεώδες μιας C^* -άλγεβρας A . Τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

είναι βραχεία ακριβής. Αντίστροφα αν η ακολουθία

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

είναι βραχεία ακριβής, τότε προφανώς ο φ είναι $*$ -μονομορφισμός και ο ψ είναι $*$ -επιμορφισμός. Επομένως το $\varphi(I)$ ιδεώδες της A , $I \simeq \varphi(I)$ και $A/\varphi(I) \simeq B$.

(ii) Έστω A, B δύο C^* -άλγεβρες. Θεωρώντας τις απεικονίσεις $\iota_A : A \rightarrow A \oplus B, a \mapsto (a, 0), \pi_A : A \oplus B \rightarrow A, (a, b) \mapsto a$ και $\iota_B : B \rightarrow A \oplus B, b \mapsto (0, b), \pi_B : A \oplus B \rightarrow B, (a, b) \mapsto b$ έχουμε πως η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B \xrightleftharpoons[\iota_B]{\pi_B} B \longrightarrow 0$$

είναι *split exact*.

(iii) Γενικά αν μια ακολουθία

$$0 \longrightarrow C \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

είναι *split exact* δεν συνεπάγεται πάντα πως η A θα είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα των B και C . Για παράδειγμα αν A είναι μια C^* -άλγεβρα χωρίς μονάδα, τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightleftharpoons[\lambda]{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0,$$

με $\pi(a, \mu) := \mu$ και $\lambda(\mu) := (0, \mu)$, για κάθε $\mu \in \mathbb{C}$ είναι *split exact* αλλά η $\tilde{A}$ δεν είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα των A και $\mathbb{C}$ ως C^* -άλγεβρες.

Ορισμός 1.1.20. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα, και $a \in A$. Το σύνολο

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1_A - a \notin \mathcal{G}(A)\}$$

θα λέγεται φάσμα του στοιχείου a . Στην περίπτωση που η A δεν έχει μονάδα, ορίζουμε $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda(0_A, 1) - (a, 0) \notin \mathcal{G}(\tilde{A})\}$.

Σχόλιο 1.1.21. Έστω A μια C^* -άλγεβρα και $a \in A$. Τότε το σύνολο $\sigma(a)$ είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Ορισμός 1.1.22. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα και $a \in A$, τότε το a θα λέγεται θετικό (*positive*) αν $a^* = a$ και $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty]$. Το σύνολο των θετικών στοιχείων της A θα συμβολίζεται με A_+ .

Ορισμός 1.1.23. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα, τότε ορίζουμε μια σχέση επί του A_{sa} ως εξής:

$$a \leq b, \quad a, b \in A_{sa} \Leftrightarrow b - a \in A_+.$$

Προφανώς η $\leq$ είναι σχέση διάταξης, $a \geq 0$ για κάθε $a \in A_+$ και αποδεικνύεται πως ισχύουν τα εξής:

- Αν $a \leq b$ για κάποια $a, b \in A$, τότε $\|a\| \leq \|b\|$.
- Αν $a, b \in A_{sa}$ ώστε $a \leq b$, τότε για κάθε $x \in A$ ισχύει ότι $x^*ax \leq x^*bx$.
- Αν $p, q \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $q \leq p$, τότε ισχύει πως $pq = qp = q$.
- Για κάθε $a, b \geq 0$ και $\lambda \geq 0$ έπεται πως $\lambda a + b \geq 0$.
- Αν $a \in A_+$, τότε υπάρχει μοναδικό $c \in A_+$ ώστε $a = c^2$.

Σε αυτήν την περίπτωση το c θα λέγεται ρίζα του a και θα συμβολίζεται με $a^{1/2}$.

Πρόταση 1.1.24. Έστω a ένα αυτοσυζυγές στοιχείο μιας C^* -άλγεβρας A . Τότε το a είναι θετικό αν και μόνο αν υπάρχει $b \in A$ ώστε $a = b^*b$.

Ορισμός 1.1.25. Έστω A μια C^* -άλγεβρα και $a \in A$. Ο αριθμός

$$r_A(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

θα λέγεται φασματική ακτίνα του a και μάλιστα ισχύει ότι $r_A(a) \leq \|a\|$.

Πρόταση 1.1.26. Έστω a ένα στοιχείο μιας C^* -άλγεβρας A .

- (i) Αν $a \in A_{nor}$, τότε $r(a) = \|a\|$.
- (ii) Αν $a \in A_{sa}$, τότε $\sigma(a) \subseteq [-\|a\|, \|a\|]$.
- (iii) Αν $a \in \mathcal{U}(A)$, τότε $\|a\| = 1$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
- (iv) Αν $a \in \mathcal{P}(A)$, τότε $\sigma(a) \subseteq \{0, 1\}$.

Πρόταση 1.1.27. (Θεώρημα Φασματικής Απεικόνισης) Έστω a ένα φυσιολογικό στοιχείο μιας C^* -άλγεβρας A και $f : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε ισχύει πως $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

Υπενθυμίζουμε πως το φάσμα μιας μεταθετικής C^* -άλγεβρας A είναι το σύνολο

$$\mathfrak{M}(A) = \{f : A \rightarrow \mathbb{C} : f \neq 0 \text{ *-ομομορφισμός}\}$$

Θεώρημα 1.1.28. (Gel'fand – Naimark) Έστω A μια μεταθετική C^* -άλγεβρα. Τότε ισχύει πως $A \simeq C_0(X)$, όπου X είναι ένας Hausdorff τοπικά συμπαγής χώρος. Αν η A έχει μονάδα, τότε $A \simeq C(X)$, με τον X να είναι Hausdorff συμπαγής. Σε κάθε περίπτωση ο X είναι το φάσμα $\mathfrak{M}(A)$ της A εφοδιασμένο με την ασθενή *-τοπολογία (weak *-topology).

Θεώρημα 1.1.29. Έστω X, Y δύο συμπαγείς Hausdorff χώροι. Τότε οι X και Y είναι ομοιομορφικοί αν και μόνο αν οι C^* -άλγεβρες $C(X)$ και $C(Y)$ είναι ισόμορφες.

Ορισμός 1.1.30. Έστω F ένα υποσύνολο μιας C^* -άλγεβρας A . Η C^* -υποάλγεβρα της A η οποία παράγεται από το F , συμβολίζεται με $C^*(F)$ και ορίζεται να είναι η μικρότερη C^* -υποάλγεβρα της A που περιέχει το F .

Η $C^*(F)$ μπορεί να περιγραφεί και με τον ακόλουθο τρόπο. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$W_n = \{x_1 x_2 \cdots x_n : x_j \in F \cup F^*\},$$

όπου $F^* = \{x^* : x \in F\}$. Έστω $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$. Τότε έχουμε πως $W^* = W$, το W είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό και πως η γραμμική θήκη του είναι μια $*$ -υποάλγεβρα της A . Συνεπώς προκύπτει πως

$$C^*(F) = \overline{\text{span} W}.$$

Θα γράφουμε $C^*(a_1, a_2, \dots, a_n)$ αντί για $C^*(\{a_1, a_2, \dots, a_n\})$, όταν τα $a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι στοιχεία της A .

Θεώρημα 1.1.31. (*Continuous functional calculus*) Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα και $a \in A$ ένα φυσιολογικό στοιχείο της A . Τότε ισχύει πως $C^*(\sigma(a)) \simeq C^*(a, 1_A)$.

Θεώρημα 1.1.32. (**Gelfand – Naimark**) Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα, τότε η A εμφυτεύεται ισομετρικά σε ένα χώρο Hilbert H , δηλαδή υπάρχει ένας $*$ -μονομορφισμός $\pi : A \rightarrow B(H)$.

Μάλιστα αν η A είναι διαχωρίσιμη, τότε ο H μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να είναι και αυτός διαχωρίσιμος. Επίσης στην περίπτωση που η A είναι μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης, ο H μπορεί να επιλεγεί να είναι ένας πεπερασμένης διάστασης χώρος Hilbert.

Σχόλιο 1.1.33. Υπενθυμίζουμε πως στη Θεωρία Τελεστών υπάρχει η έννοια του θετικού τελεστή. Συγκεκριμένα ένας φραγμένος τελεστής T σε ένα χώρο Hilbert H , ($T \in B(H)$) λέγεται θετικός αν για κάθε $x \in H$ ισχύει πως $\langle Tx, x \rangle \geq 0$.

Αποδεικνύεται πως στην περίπτωση της $B(H)$ ο προηγούμενος Ορισμός είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό 1.1.22. Προφανώς το ίδιο θα ισχύει και για την σχέση διάταξης του Ορισμού 1.1.23, δηλαδή αν $T, S \in B(H)_{sa}$, τότε $T \leq S$ αν και μόνο αν ο $S - T$ είναι θετικός τελεστής.

Επιπλέον αν P, Q είναι προβολές της $B(H)$ ισχύει η παρακάτω ισοδυναμία

$$P \leq Q \Leftrightarrow \text{Im} P \leq \text{Im} Q \Leftrightarrow PQ = QP = P.$$

Παρατήρηση 1.1.34. Έστω A μια C^* -άλγεβρα και $n \in \mathbb{N}$, τότε η άλγεβρα $M_n(A)$ επιδέχεται δομή C^* -άλγεβρας μέσω της εμφύτευσης του Θεωρήματος 1.1.32. Πράγματι αν η $\varphi : A \rightarrow B(H)$ είναι ένας $*$ -μονομορφισμός, τότε θεωρούμε την απεικόνιση $\varphi_n : M_n(A) \rightarrow B(H^n)$ με

$$\varphi_n \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi(a_{11})x_1 + \varphi(a_{12})x_2 + \cdots + \varphi(a_{1n})x_n \\ \varphi(a_{21})x_1 + \varphi(a_{22})x_2 + \cdots + \varphi(a_{2n})x_n \\ \vdots \\ \varphi(a_{n1})x_1 + \varphi(a_{n2})x_2 + \cdots + \varphi(a_{nn})x_n \end{pmatrix}$$

για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in H^n$. Η φ_n είναι προφανώς ομομορφισμός $\mathbb{C}$ -αλγεβρών. Επιπλέον αν ορίσουμε $*$: $M_n(A) \rightarrow M_n(A)$ και $\|\cdot\| : M_n(A) \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{n1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{n2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{nn}^* \end{pmatrix} \text{ και } \|z\| := \|\varphi_n(z)\|_{B(H^n)}, \quad \forall z \in M_n(A)$$

προκύπτει ότι η $(M_n(A), *, \|\cdot\|)$ είναι μια C^* -άλγεβρα και ο φ_n είναι $*$ -μονομορφισμός. Για την νόρμα της $M_n(A)$ ισχύει η παρακάτω ανισότητα.

$$\max_{i,j} \{\|a_{ij}\|\} \leq \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \right\| \leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|$$

1.2 Οι C^* -άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης

Με H θα εννοούμε πάντα ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert. Επίσης με $\mathcal{F}(H)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των φραγμένων τελεστών πεπερασμένης τάξης στον H . Συγκεκριμένα

$$\mathcal{F}(H) = \{T \in B(H) : \dim_{\mathbb{C}} T(H) < +\infty\}.$$

Ορισμός 1.2.1. Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Μια αναπαράσταση της A σε ένα χώρο Hilbert H είναι ένας $*$ -ομομορφισμός $\pi : A \rightarrow B(H)$. Στην περίπτωση που είναι εμφανές το ποιος είναι ο H , η π θα λέγεται απλά αναπαράσταση της A .

Ορισμός 1.2.2. Έστω $\pi : A \rightarrow B(H)$ μια αναπαράσταση μιας C^* -άλγεβρας A σε ένα χώρο Hilbert H . Η π θα λέγεται ανάγωγη (irreducible) αν δεν υπάρχει γνήσιος, μη τετριμμένος κλειστός διανυσματικός υπόχωρος K του H , ώστε $\pi(A)(K) \subseteq K$.

Ορισμός 1.2.3. Έστω $\pi_1 : A \rightarrow B(H_1)$ και $\pi_2 : A \rightarrow B(H_2)$ δύο αναπαραστάσεις μιας C^* -άλγεβρας A στους χώρους Hilbert H_1 και H_2 . Οι αναπαραστάσεις π_1, π_2 θα λέγονται unitarily ισοδύναμες αν υπάρχει μοναδιαίος (unitary) τελεστής $U : H_1 \rightarrow H_2$ ώστε $\pi_2(a) \circ U = U \circ \pi_1(a)$ για κάθε $a \in A$.

Ορισμός 1.2.4. Μια αναπαράσταση $\pi : A \rightarrow B(H)$ μιας C^* -άλγεβρας A είναι μη εκφυλισμένη (non-degenerate), αν το σύνολο $ns(\pi(A)) := \{x \in H : \pi(a)(x) = 0, \forall a \in A\}$ είναι τετριμμένο.

Παρατήρηση 1.2.5. Κάθε ανάγωγη αναπαράσταση είναι μη εκφυλισμένη.

Λήμμα 1.2.6. Αν π είναι μια αναπαράσταση μιας C^* -άλγεβρας A σε ένα χώρο Hilbert H , τότε η π είναι ανάγωγη αν και μόνο αν $\pi(A)' = \mathbb{C} \cdot I$. ($\pi(A)' = \{s \in B(H) : s\pi(a) = \pi(a)s, \forall a \in A\}$)

Απόδειξη. [10, Λήμμα I.9.1] □

Ορισμός 1.2.7. Έστω H ένας χώρος Hilbert και A μια C^* -υποάλγεβρα της $\mathcal{K}(H)$. Αν e είναι μια μη μηδενική προβολή της A , τότε η e θα λέγεται ελαχιστική (minimal) αν για κάθε $p \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $0 \neq p \leq e$ έχουμε $p = e$.

Λήμμα 1.2.8. Έστω e μια μη μηδενική προβολή μιας C^* -υποάλγεβρας A της $\mathcal{K}(H)$. Τότε η e είναι ελαχιστική αν και μόνο αν $eAe = \mathbb{C} \cdot e$. Επιπλέον κάθε μη μηδενική προβολή είναι ένας τελεστής πεπερασμένης τάξης και μπορεί να γραφτεί ως (πεπερασμένο) άθροισμα κάθετων ανά δύο ελαχιστικών προβολών της A .

Απόδειξη. [2, Λήμμα 1.4.1]. □

Λήμμα 1.2.9. Αν A είναι μια C^* -υποάλγεβρα της $\mathcal{K}(H)$, τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) Η A θα περιέχει μια ελαχιστική προβολή.
- (ii) Αν $\pi : A \rightarrow B(H)$ είναι μια μη μηδενική αναπαράσταση της A , τότε υπάρχει μια ελαχιστική προβολή e της A ώστε $\pi(e) \neq 0$. Αν επιπλέον η π είναι ανάγωγη, τότε η $\pi(e)$ είναι ένας τελεστής πρώτης τάξης.

Απόδειξη. [10, Λήμμα I.10.1] □

Ορισμός 1.2.10. Μια μη μηδενική C^* -υποάλγεβρα της $B(H)$ λέγεται ανάγωγη αν η ταυτοτική (identity) αναπαράσταση $id : A \rightarrow B(H), a \mapsto a$ είναι ανάγωγη.

Λήμμα 1.2.11. Αν A είναι μια ανάγωγη C^* -υποάλγεβρα της $\mathcal{K}(H)$, τότε $A = \mathcal{K}(H)$.

Απόδειξη. [10, Λήμμα I.10.2] □

Πόρισμα 1.2.12. Η C^* -άλγεβρα $\mathcal{K}(H)$ είναι απλή. Επιπλέον αν η B είναι μια ανάγωγη C^* -υποάλγεβρα της $B(H)$ η οποία περιέχει ένα μη μηδενικό συμπαγή τελεστή, τότε θα περιέχει όλους του συμπαγείς τελεστές.

Απόδειξη. Το ότι η $\mathcal{K}(H)$ είναι απλή έπεται άμεσα από το Λήμμα 1.2.11, διότι κάθε ιδεώδες μιας C^* -άλγεβρας είναι αυτοσυζυγές. Για τον δεύτερο ισχυρισμό [10, Πόρισμα I.10.4]. □

Ορισμός 1.2.13. Έστω $\pi : A \rightarrow B(H)$ μια αναπαράσταση μιας C^* -άλγεβρας A και K ένας κλειστός διανυσματικός υπόχωρος του H . Ο K θα λέγεται αναλλοίωτος για την π ή π -αναλλοίωτος αν $\pi(A)(K) \subseteq K$.

Παρατήρηση 1.2.14. Αν K είναι αναλλοίωτος υπόχωρος για μια αναπαράσταση $\pi : A \rightarrow B(H)$, τότε επειδή η $\pi(A)$ είναι αυτοσυζυγής το ίδιο θα ισχύει και για τον $K^\perp$, όπου $K^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in K\}$.

Ορισμός 1.2.15. Έστω $\pi : A \rightarrow B(H)$ μια μη εκφυλισμένη αναπαράσταση μιας C^* -άλγεβρας A . Αν υπάρχει ένας κλειστός διανυσματικός υπόχωρος K του H ώστε $\pi(A)(K) \subseteq K$, τότε η απεικόνιση $\pi_K : A \rightarrow B(K)$ με $\pi_K(a) := \pi(a)|_K$ είναι μια μη εκφυλισμένη αναπαράσταση της A στον K . Η π_K θα λέγεται υποαναπαράσταση της π επί του K ή περιορισμός της π στον K και θα γράφουμε $\pi_K \leq \pi$.

Λήμμα 1.2.16. Έστω A μια C^* -υποάλγεβρα των συμπαγών τελεστών επί ενός χώρου Hilbert H_1 . Αν $\sigma : A \rightarrow B(H)$ είναι μια μη εκφυλισμένη αναπαράσταση της A , τότε υπάρχει μια ανάγωγη υποαναπαράσταση της σ η οποία είναι unitarily ισοδύναμη με τον περιορισμό της $\text{id} : A \rightarrow B(H_1)$ σε ένα reducing υπόχωρο της.

Απόδειξη. Επειδή η σ είναι μη εκφυλισμένη έχουμε πως $\sigma \neq 0$ και άρα από το (ii) του Λήμματος 1.2.9 έπεται πως υπάρχει e ελαχιστική προβολή της A ώστε $\sigma(e) \neq 0$. Αν $p := \sigma(e)$ τότε θεωρούμε $x \in p(H)$ και $y \in e(H_1)$ νόρμας ένα. Θέτουμε $H_x^\sigma = \overline{\sigma(A)x}$ και $H_y = \overline{Ay}$. Προφανώς $\sigma(A)(H_x^\sigma) \subseteq H_x^\sigma$ και $A(H_y) \subseteq H_y$.

Ισχυρισμός 1. Η απεικόνιση $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ με $\varphi(a) = \langle a(y), y \rangle$ για κάθε $a \in A$ είναι ένα (θετικό) φραγμένο συναρτησοειδές νόρμας ένα και για κάθε $a \in A$ ισχύει πως $eae = \varphi(a)e$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Προφανώς η φ είναι (θετικό) φραγμένο συναρτησοειδές. Επιπλέον επειδή το $y \in e(H_1)$ έχουμε $\varphi(e) = \langle e(y), y \rangle = \langle y, y \rangle = 1$ και άρα $\|\varphi\| = 1$. Επίσης εφ' όσον η e είναι ελαχιστική προβολή, από το 1.2.8 έχουμε πως $eae = \lambda e$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{C}$. Επομένως $\langle eae(y), y \rangle = \langle a(y), e(y) \rangle = \lambda \langle y, y \rangle$ και άρα $\varphi(a) = \lambda$. □

Ορίζουμε $U_1 : Ay \rightarrow H_x^\sigma$, με $U_1(a(y)) := \sigma(a)x = \sigma(ae)x$ για κάθε $a \in A$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Τότε η U_1 είναι ισομετρία καθώς

$$\begin{aligned} \|U_1(a(y))\|^2 &= \langle \sigma(ae)(x), \sigma(ae)(x) \rangle = \langle \sigma(e^* a^* a e)x, x \rangle \\ &= \langle \varphi(a^* a) \sigma(e)x, x \rangle = \varphi(a^* a) \langle x, x \rangle = \langle a^* a(y), y \rangle \\ &= \|a(y)\|^2 \end{aligned}$$

Αφού η U_1 έχει εικόνα πυκνή στον H_x^σ , επεκτείνεται σε μια ισομετρία επί $U : H_y \rightarrow H_x^\sigma$ για την οποία ισχύει πως

$$\sigma(a)|_{H_x^\sigma} U = Ua|_{H_y}, \quad \forall a \in A. \quad (1)$$

Θεωρούμε τις αναπαραστάσεις $\pi_y : A \rightarrow B(H_y), a \mapsto a|_{H_y}$ και $\sigma_1 : A \rightarrow B(H_x^\sigma), a \mapsto \sigma(a)|_{H_x^\sigma}$. Τότε από την σχέση (1) προκύπτει πως η π_y και η σ_1 είναι unitarily ισοδύναμες. Προφανώς οι σ_1, π_y είναι υποαναπαραστάσεις της σ και της id αντίστοιχα. Επομένως μένει να αποδείξουμε πως η σ_1 είναι ανάγωγη και πως ο H_y είναι reducing υπόχωρος της id .

Ισχυρισμός 2. Η π_y είναι ανάγωγη αναπαράσταση της A .

Απόδειξη Ισχυρισμού. Σύμφωνα με το Λήμμα 1.2.6 αρκεί να αποδείξουμε ότι $\pi_y(A)' = \mathbb{C} \cdot I$. Λόγω του θεωρήματος 1.8.3 στο [10] αρκεί να αποδείξω πως το $\pi_y(A)'$ δεν περιέχει προβολές πέραν των 0 και $1_{B(H)}$. Έστω λοιπόν q μια προβολή της $B(H_y)$ έτσι ώστε $q\pi_y(a) = \pi_y(a)q$ για κάθε $a \in A$. Αρχικά παρατηρούμε πως $\pi_y(e) \in \mathcal{F}(H_y)$ και μάλιστα για κάθε $s \in A$ ισχύει πως

$$\begin{aligned} \pi_y(e)(s(y)) &= e|_{H_y}(s(y)) = es(y) = ese(y) \\ &= \varphi(s)e(y) = \langle s(y), y \rangle y \in \mathbb{C} \cdot y. \end{aligned}$$

Επομένως

$$q(y) = q(\langle y, y \rangle y) = q(\pi_y(e)(y)) = \pi_y(e)(q(y)) = \langle q(y), y \rangle y.$$

Όμως επειδή το q είναι προβολή έπεται πως $\langle q(y), y \rangle = 0$ ή 1 και άρα $q(y) = 0$ ή y . Αν το $q(y) = 0$, τότε για κάθε $a \in A$ έχουμε πως

$$q(a(y)) = q(\pi_y(a)(y)) = \pi_y(a)(q(y)) = 0,$$

δηλαδή $q|_{A_y} = 0$ και άρα $q = 0$. Αν $q(y) = y$, τότε θεωρούμε την προβολή $r = 1 - q$ για την οποία όμοια προκύπτει πως $0 = r = 1_{B(H)} - q$. Συνεπώς $q = 0$ ή $1_{B(H)}$, δηλαδή έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Αφού λοιπόν οι σ_1, π_y είναι unitarily ισοδύναμες έπεται πως και η σ_1 είναι ανάγωγη. Τέλος εύκολα προκύπτει πως ο H_y είναι reducing υπόχωρος για τη π_y και μάλιστα ελαχιστικός reducing υπόχωρος ως προς την σχέση του περιέχεσθαι, διότι η π_y είναι ανάγωγη. $\square$

Πόρισμα 1.2.17. Αν $A = M_n(\mathbb{C})$ ή $\mathcal{K}(H)$, τότε κάθε ανάγωγη αναπαράσταση της A είναι unitarily ισοδύναμη με την αναπαράσταση $id : A \rightarrow B(H)$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τα Λήμματα 1.2.16 και 1.2.11. $\square$

Ορισμός 1.2.18. Έστω $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μια οικογένεια αναπαραστάσεων μιας C^* -άλγεβρας A .

Αν $\pi_n : A \rightarrow B(H_n)$ τότε θεωρούμε τον χώρο Hilbert $(H, \langle, \rangle)$ όπου

$$H := \sum \oplus_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in H_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < +\infty\}$$

$$\text{και } \langle (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n \rangle \text{ για κάθε } (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H.$$

Η απεικόνιση $\pi : A \rightarrow B(H)$ με $\pi(a)((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (\pi_n(a)(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ορίζεται καλά και είναι αναπαράσταση της A . Η αναπαράσταση αυτή θα λέγεται ευθύ άθροισμα των αναπαραστάσεων $\pi_n, n \in \mathbb{N}$ και θα την συμβολίζουμε με $\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n$ ή $\sum \oplus_{n=1}^{\infty} \pi_n$.

Πρόταση 1.2.19. Έστω A μια C^* -υποάλγεβρα των συμπαγών τελεστών επί ενός χώρου Hilbert H και $\sigma : A \rightarrow B(H_\sigma)$ μια μη εκφυλισμένη αναπαράσταση της A . Τότε η σ είναι ίση με ένα εύθυ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων, όπου κάθε μία από αυτές είναι unitarily ισοδύναμη με μια υποαναπαράσταση της αναπαράστασης $id : A \rightarrow B(H)$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 1.2.16 υπάρχει ένας κλειστός διανυσματικός υπόχωρος H_x^σ του H_σ ώστε η αναπαράσταση $\sigma_x : A \rightarrow B(H_x^\sigma), a \mapsto \sigma(a)|_{H_x^\sigma}$ (ο περιορισμός της σ στον H_x^σ) να είναι unitarily ισοδύναμη με μια ανάγωγη υποαναπαράσταση της $id : A \rightarrow B(H)$, η οποία είναι ο περιορισμός της id σε ένα reducing υπόχωρό της.

Κάνοντας χρήση του Λήμματος του Zorn προκύπτει μια μεγιστική οικογένεια $\{H_n^\sigma\}_{n \in \mathbb{N}}$ από κάθετους ανά δύο reducing υπόχωρους για την σ_x , έτσι ώστε ο περιορισμός της σ_x στον H_n^σ να είναι unitarily ισοδύναμος με μια ανάγωγη υποαναπαράσταση της ταυτοτικής αναπαράστασης της A . Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $H_1 = \sum \oplus_{n \in \mathbb{N}} H_n^\sigma$.

Ισχυρισμός. Ο H_1 είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον H_σ .

Απόδειξη Ισχυρισμού. Έστω $U : H_1 \rightarrow H_\sigma, (x_n)_n \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ και $H_2 := U(H_1)$. Τότε ισχύει πως $H_2 = H_\sigma$. Πράγματι αν υποθέσουμε πως ο H_2 είναι γνήσιος υπόχωρος του H_σ , τότε έχουμε την διάσπαση $H_\sigma = H_2 \oplus H_2^\perp$. Επιπλέον επειδή ο H_2 είναι reducing υπόχωρος για την σ θεωρούμε τον περιορισμό της αναπαράστασης, $\sigma' : A \rightarrow B(H_2^\perp), a \mapsto a|_{H_2^\perp}$. Η σ' είναι μη εκφυλισμένη, διότι η σ είναι μη εκφυλισμένη και άρα από το Λήμμα 1.2.16 έπεται πως υπάρχει $H_3 \subseteq H_2^\perp$ ένας reducing υπόχωρος της σ' (άρα και της σ) έτσι ώστε ο περιορισμός της σ' στον H_3 να είναι unitarily ισοδύναμος με μια υποαναπαράσταση της id . Τότε $H_3 \perp H_n^\sigma$ για κάθε n , το οποίο σε συνδυασμό με τα προηγούμενα αντίκειται στην μεγιστικότητα της οικογένειας $\{H_n^\sigma\}$. Συνεπώς $H_2 = H_\sigma$ και επειδή η U είναι ισομετρία έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Από τον Ισχυρισμό προκύπτει πως $B(H_1) \simeq B(H_\sigma)$ (ως C^* -άλγεβρες) μέσω της απεικόνισης $B(H_1) \rightarrow B(H_\sigma), T \mapsto UTU^{-1}$. Επομένως αν $\sigma_n : A \rightarrow B(H_n^\sigma)$ είναι ο περιορισμός της σ στον H_n^σ , τότε ταυτίζοντας αυτές τις δύο C^* -άλγεβρες έχουμε πως $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n = \sigma$. Πράγματι αν $a \in A$ και $x \in H_\sigma$, τότε $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ με $x_n \in H_n^\sigma$ και άρα λόγω της ταύτισης έχουμε

$$\sigma(a)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma(a)(x_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n(a)(x_n) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n(a) \right)(x).$$

$\square$

Ορισμός 1.2.20. Έστω $\{A_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ μια οικογένεια C^* -αλγεβρών.

1. Το σύνολο

$$\prod_{i \in \mathbb{I}} A_i = \{a : \mathbb{I} \rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i : a(i) \in A_i \ \forall i \in \mathbb{I} \text{ και } \sup_i \|a(i)\|_{A_i} < +\infty\}$$

επιδέχεται δομή C^* -άλγεβρας. Συγκεκριμένα οι πράξεις και η ενέλιξη ορίζονται κατά σημείο και η νόρμα ως εξής:

$$\|a\| = \sup_i \|a(i)\|_{A_i}, \ \forall a \in \prod_{i \in \mathbb{I}} A_i.$$

2. Αν

$$\mathcal{I} = \{a \in \prod_{i \in \mathbb{I}} A_i : a(i) \neq 0, \text{ για πεπερασμένα μόνο το πλήθος } i \in \mathbb{I}\},$$

τότε το $\overline{\mathcal{I}}$ είναι κλειστό αμφίπλευρο ιδεώδες της $\prod_{i \in \mathbb{I}} A_i$ και άρα είναι μια C^* -άλγεβρα. Η C^* -άλγεβρα αυτή θα συμβολίζεται με $\sum_{i \in \mathbb{I}} A_i$.

Στο εξής θα ταυτίζουμε κάθε $a \in \prod_{i \in \mathbb{I}} A_i$ με την εικόνα της, δηλαδή $a \equiv (a(i))_i$.

Θεώρημα 1.2.21. Έστω $A \neq \{0\}$ μια C^* -υποάλγεβρα των συμπαγών τελεστών επί ενός χώρου Hilbert H . Τότε υπάρχει μια οικογένεια από χώρους Hilbert $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και ένα σύνολο $\{\kappa_n\}_n \in \mathbb{N}$ από μη μηδενικούς φυσικούς ώστε

$$H \simeq H_0 \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus H_n^{(\kappa_n)}, \text{ και } A \simeq \{0\} \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathcal{K}(H_n)^{(\kappa_n)}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $H_0 := \bigcap_{a \in A} \text{Ker}(a)$. Τότε ο H_0 είναι γνήσιος υπόχωρος του H και άρα έχουμε πως $H = H_0 \oplus H_0^\perp$. Επιπλέον ο H_0 είναι reducing υπόχωρος της αναπαράστασης $id : A \rightarrow B(H)$ και άρα η $\sigma : A \rightarrow B(H_0^\perp), a \mapsto a|_{H_0^\perp}$ είναι αναπαράσταση της A η οποία είναι μάλιστα μη εκφυλισμένη λόγω του τρόπου ορισμού του H_0 .

Από την Πρόταση 1.2.19 έπεται πως υπάρχει μια οικογένεια από χώρους Hilbert, $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ώστε $H_0^\perp \simeq \sum \oplus_{n \in \mathbb{N}} K_n$, οι K_n κάθετοι ανά δύο reducing υπόχωροι της σ με την επιπλέον ιδιότητα ο περιορισμός της σ σε κάθε K_n να είναι ανάγωγη αναπαράσταση και unitarily ισοδύναμη με μια υποαναπαράσταση της id . Αν $\sigma_n : A \rightarrow B(K_n)$ είναι ο περιορισμός της σ στον K_n , τότε επειδή η A είναι εξ' υποθέσεως C^* -υποάλγεβρα της $\mathcal{K}(H)$ ισχύει ότι $\sigma_n(A) \subseteq \mathcal{K}(K_n)$. Όμως η σ_n είναι ανάγωγη και άρα από το Λήμμα 1.2.11 έπεται πως $\sigma_n(A) = \mathcal{K}(K_n)$.

Από την unitary ισοδυναμία προκύπτει μια διαμέριση $\{S_i\}_{i \in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ των αναπαραστάσεων σ_n σε κλάσεις ισοδυναμίας, όπου $S_i = \{\sigma_n : \sigma_n \sim \sigma_i\}$. Έστω H_i ο (μοναδικός ως προς ισομορφισμό) χώρος Hilbert που αντιστοιχεί στο σύνολο S_i , $\kappa_i := \#S_i$ και π_i η ταυτοτική αναπαράσταση της $\mathcal{K}(H_i)$. Τότε προφανώς ισχύει πως

$$H \simeq H_0 \oplus \sum \oplus_{i \in I} H_i^{(\kappa_i)}$$

και πως η σ είναι unitarily ισοδύναμη με την $\sum \oplus_{i \in I} \pi_i^{(\kappa_i)}$. Μάλιστα επειδή όπως είδαμε παραπάνω ο H_0 είναι reducing υπόχωρος της $id : A \rightarrow B(H)$ έπεται πως η id είναι unitarily ισοδύναμη με το ευθύ άθροισμα των αναπαραστάσεων σ και $\sigma^\perp$, όπου $\sigma^\perp : A \rightarrow B(H_0^\perp), a \mapsto a|_{H_0^\perp}$. Επομένως έχουμε πως

$$id \sim 0 \oplus \sum \oplus_{i \in I} \pi_i^{(\kappa_i)} \text{ (unitarily ισοδύναμες)}.$$

Ισχυρισμός. Η εικόνα της αναπαράστασης $\sum \oplus_{i \in I} \pi_i^{(\kappa_i)}$ είναι η C^* -άλγεβρα $\sum_{i \in I} \oplus \mathcal{K}(H_i)^{(\kappa_i)}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Έστω $a \in A$ και πως $\sum \oplus_{i \in I} \pi_i^{(\kappa_i)}(a) \notin \sum_{i \in I} \oplus \mathcal{K}(H_i)^{(\kappa_i)}$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως $a^* = a$. Τότε $\lim_i \|\pi_i^{(\kappa_i)}(a)\| \neq 0$ και άρα περνώντας σε μια υποακολουθία της μπορούμε να υποθέσουμε πως υπάρχει $d > 0$ ώστε $\|\pi_i^{(\kappa_i)}(a)\| > d$ για κάθε i . Επομένως από την Πρόταση 2.13 στο [7] έπεται πως για κάθε i υπάρχει $x_i \in H_i^{(\kappa_i)}$ νόρμας ένα ώστε

$$\left| \langle \pi_i^{(\kappa_i)}(a)(x_i), x_i \rangle \right| > d.$$

Θεωρούμε την ακολουθία $\{y_i\}_i \subseteq H$ με $y_i = (0, \dots, x_i, 0, \dots)$. Προφανώς η ακολουθία αυτή είναι ορθοκανονική και άρα συγχλίνει ασθενώς στο μηδέν. Τότε επειδή ο τελεστής $T = \sum \oplus_{i \in I} \pi_i^{(\kappa_i)}(a)$ είναι συμπαγής (στον H) έπεται πως $\lim_i \|T(y_i)\| = 0$, ([19, Θεώρημα 3.2.10]) και άρα

$$\lim_i |\langle T(y_i), y_i \rangle| = 0.$$

Άτοπο, διότι $|\langle T(y_i), y_i \rangle| = \left| \langle \pi_i^{(\kappa_i)}(a)(x_i), x_i \rangle \right| > d$ για κάθε i . □

Από τον Ισχυρισμό και όσα προηγήθηκαν αυτού προκύπτει πως

$$A \simeq \{0\} \oplus \sum_{i \in I} \oplus \mathcal{K}(H_i)^{(\kappa_i)}.$$

Μένει μόνο να αποδείξουμε πως $\kappa_i \in \mathbb{N}$ για κάθε $i \in I$. Πράγματι αν e είναι μια προβολή πρώτης τάξης, τότε $\pi_i^{(\kappa_i)}(e)$ είναι συμπαγής τελεστής (στον $H_i^{(\kappa_i)}$) ο οποίος είναι προβολή τάξης κ_i . Όμως ένας απειροδιάστατος χώρος Hilbert δεν περιέχει προβολές άπειρης τάξης ([19, Πρόρισμα 3.3.5]) και άρα το κ_i είναι φυσικός αριθμός. $\square$

Θεώρημα 1.2.22. *Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης, τότε η A θα είναι ισόμορφη με ένα ευθύ άθροισμα από άλγεβρες πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{C}$. Συγκεκριμένα υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $n_1, n_2, \dots, n_r$ ώστε*

$$A \simeq M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C}).$$

Συγκεκριμένα κάθε C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης έχει μονάδα.

Απόδειξη. Αν A είναι όπως στην εκφώνηση, τότε από το Θεώρημα 1.1.32 έπεται πως υπάρχει ένας $*$ -μονομορφισμός $\pi : A \rightarrow B(H)$ με τον H να είναι ένας χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης. Αφού $\dim_{\mathbb{C}} H < +\infty$ έχουμε πως $B(H) = \mathcal{K}(H)$ και άρα το ζητούμενο έπεται άμεσα ως πόρισμα του Θεωρήματος 1.2.21. $\square$

Παρατήρηση 1.2.23. *Κάθε στοιχείο μιας C^* -άλγεβρας πεπερασμένης διάστασης A έχει πεπερασμένο φάσμα και γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός προβολών της, δηλαδή $A = \text{span } \mathcal{P}(A)$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πως το φάσμα κάθε στοιχείου της C^* -άλγεβρας $M_n(\mathbb{C})$ είναι ακριβώς το σύνολο των ιδιοτιμών της και άρα είναι πεπερασμένο. Συνεπώς από το προηγούμενο Θεώρημα το ίδιο θα ισχύει και για τα στοιχεία της A . Επίσης επειδή κάθε στοιχείο μιας C^* -άλγεβρας γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός φυσιολογικών στοιχείων της, αρκεί να έχουμε το ζητούμενο για τα φυσιολογικά στοιχεία της A . Πράγματι αν a είναι ένα φυσιολογικό στοιχείο της A και $\lambda \in \sigma(a)$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{\{\lambda\}} : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής και άρα από το Θεώρημα 1.1.31 έπεται πως το $\chi_{\{\lambda\}}(a)$ είναι προβολή της A . Προφανώς για κάθε $z \in \sigma(a)$ ισχύει πως

$$\sum_{\lambda \in \sigma(a)} \lambda \chi_{\{\lambda\}}(z) = z.$$

Επομένως επειδή για την σταθερή συνάρτηση $f : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z$ ισχύει πως $f(a) = a$ (μέσω του Θεωρήματος 1.1.31), πάλι λόγω του Θεωρήματος 1.1.31 έπεται πως

$$\sum_{\lambda \in \sigma(a)} \lambda \chi_{\{\lambda\}}(a) = a.$$

$\square$

Πόρισμα 1.2.24. *Έστω $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$ μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και $\pi : A \rightarrow B(H)$ μια μη εκφυλισμένη αναπαράσταση της A . Τότε υπάρχουν πληθάρημοι $a_1, a_2, \dots, a_r$ έτσι ώστε η π να είναι unitarily ισοδύναμη με την αναπαράσταση $\sum_{j=1}^r \oplus id_j^{(a_j)}$, όπου η id_j είναι η ταυτοτική αναπαράσταση της $M_{n_j}(\mathbb{C})$.*

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 1.2.19. $\square$

Πόρισμα 1.2.25. Έστω $A_1 = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$ και $A_2 = M_{m_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{m_s}(\mathbb{C})$ δύο C^* -άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης και $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ ένας $*$ -ομομορφισμός. Τότε η φ καθορίζεται ως προς unitary ισοδυναμία (στην A_2) από έναν $s \times r$ πίνακα $[\kappa_{ij}]$ με στοιχεία στο $\mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\sum_{j=1}^r \kappa_{ij} n_j \leq m_i \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq s.$$

Απόδειξη. Έστω $\pi_i : A_2 \rightarrow M_{m_i}(\mathbb{C})$, $1 \leq i \leq s$, ο κανονικός επιμορφισμός στην i συνιστώσα της A_2 . Θεωρούμε τον $*$ -ομομορφισμό $\varphi_i := \pi_i \circ \varphi : A_1 \rightarrow M_{m_i}(\mathbb{C})$. Τότε από το Πόρισμα 1.2.24 έπεται πως υπάρχουν θετικοί αχέραιοι $\kappa_{i1}, \dots, \kappa_{ir}$ ώστε η φ_i να είναι unitarily ισοδύναμη με την αναπαράσταση

$$id_{n_1}^{(\kappa_{i1})} \oplus \cdots \oplus id_{n_r}^{(\kappa_{ir})}.$$

Εφ' όσον οι διαστάσεις των εικόνων των δύο αναπαράστασεων είναι ίσες προκύπτει πως

$$\sum_{j=1}^r \kappa_{ij} n_j \leq m_i.$$

Τέλος επειδή η φ είναι unitarily ισοδύναμη με την $\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_s$, έχουμε πως η φ καθορίζεται ως προς unitary ισοδυναμία από τον $s \times r$ πίνακα $[\kappa_{ij}]$. $\square$

Σχόλιο 1.2.26. Από το Πόρισμα που προηγήθηκε έπεται πως κάθε $*$ -ομομορφισμός μεταξύ C^* -αλγεβρών πεπερασμένης διάστασης είναι unitarily ισοδύναμος με έναν “κανονικό” $*$ -ομομορφισμό. Περισσότερα για κανονικούς $*$ -ομομορφισμούς θα δούμε στην Παράγραφο 3.2. . Αξίζει επίσης να αναφέρουμε πως η απόδειξη αυτού αποτελέσματος θα μπορούσε να δοθεί χωρίς τη χρήση αποτελεσμάτων της θεωρίας αναπαραστάσεων C^* -αλγεβρών. [18, Θεώρημα 2.3.5]

1.3 Προβολές και ομοτοπία

Λήμμα 1.3.1. Έστω K ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$, και $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα, και $\Omega_K = \{a \in A_{sa} : \sigma(a) \subseteq K\}$ τότε η απεικόνιση $\Omega_K \rightarrow A$, $a \mapsto f(a)$, όπου $f(a)$ προκύπτει από τον continuous functional calculus είναι συνεχής.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$ και $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής και $a \in \Omega_K$. Τότε από το θεώρημα Stone-Weierstrass υπάρχει ένα πολυώνυμο g με μιγαδικούς συντελεστές ώστε $|f(z) - g(z)| < \epsilon/3$ για κάθε $z \in K$. Προφανώς κάθε πολυώνυμο h με μιγαδικούς συντελεστές επάγει μια συνεχή απεικόνιση $\phi(h) : A \rightarrow A$, $x \mapsto h(x)$ και άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $b \in A$ με $\|a - b\| < \delta$ να ισχύει πως $|g(a) - g(b)| < \epsilon/3$. Επίσης από το Θεώρημα 1.1.31 για κάθε $c \in \Omega_K$ έχουμε πως

$$\|(f - g)(c)\| = \sup\{|(f - g)(z)| : z \in \sigma(c)\} < \epsilon/3.$$

Συνεπώς για κάθε $b \in \Omega_K$ με $\|a - b\| < \delta$ ισχύει πως $\|f(a) - f(b)\| < \epsilon$, δηλαδή η απεικόνιση $\Omega_K \rightarrow A$, $a \mapsto f(a)$ είναι συνεχής. $\square$

Ορισμός 1.3.2. Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Λέμε ότι δύο στοιχεία $a, b \in X$ είναι ομοτοπικά στο X και γράφουμε $a \sim_h b$, αν υπάρχει συνεχής απεικόνιση (μονοπάτι) $f : [0, 1] \rightarrow X$ ώστε $f(0) = a$ και $f(1) = b$. Προφανώς η σχέση $\sim_h$ είναι μια σχέση ισοδυναμίας επί του X .

Ορισμός 1.3.3. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα. Θεωρούμε την $\sim_h$ επί του συνόλου των unitary στοιχείων της A . Ορίζουμε $\mathcal{U}_0(A) := \{u \in \mathcal{U}(A) : u \sim_h 1_A\}$

Λήμμα 1.3.4. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα.

- (i) Αν a είναι ένα αυτοσυζυγές στοιχείο της A , τότε $\exp(ia) \in \mathcal{U}_0(A)$.
- (ii) Αν u είναι ένα unitary στοιχείο της A ώστε $\sigma(u) \neq \mathbb{T}$, τότε $u \in \mathcal{U}_0(A)$.
- (iii) Αν u, v είναι δύο unitary στοιχεία της A με $\|u - v\| < 2$, τότε $u \sim_h v$.

Απόδειξη. [21, Λήμμα 2.1.3] □

Λήμμα 1.3.5. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα και $u, v \in \mathcal{U}(A)$. Τότε

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \text{ στην } \mathcal{U}(M_2(A)).$$

Απόδειξη. Από το (ii) του προηγούμενου Λήμματος έχουμε πως

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Συνεπώς

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ομοίως για τα υπόλοιπα. □

Ορισμός 1.3.6. Έστω A μια C^* -άλγεβρα και $a \in A$. Ορίζουμε $|a| := (a^*a)^{1/2}$. Το $|a|$ θα λέγεται απόλυτη τιμή του a .

Πρόταση 1.3.7. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα.

- (i) Η απεικόνιση $\omega : \mathcal{G}(A) \rightarrow \mathcal{U}(A), z \mapsto z|z|^{-1}$ είναι συνεχής, $\omega(u) = u$ για κάθε $u \in \mathcal{U}(A)$ και $\omega(z) \sim_h z$ στο $\mathcal{G}(A)$ για κάθε $z \in \mathcal{G}(A)$.
- (ii) Αν $u, v \in \mathcal{U}(A)$ και $u \sim_h v$ στο $\mathcal{G}(A)$, τότε $u \sim_h v$ στο $\mathcal{U}(A)$.

Απόδειξη. (i) Αν το z είναι αντιστρέψιμο, τότε το ίδιο θα ισχύει για τα z^* και z^*z . Επομένως το $|z| = (z^*z)^{1/2}$ είναι αντιστρέψιμο. Θέτουμε $u = z|z|^{-1}$. Τότε το u είναι αντιστρέψιμο ως γινόμενο τέτοιων και μάλιστα $u^{-1} = u^*$ διότι για παράδειγμα $u^*u = |z|^{-1}z^*z|z|^{-1} = 1$.

Έστω $\omega : \mathcal{G}(A) \rightarrow \mathcal{U}(A)$ όπως στην εκφώνηση. Επειδή οι πράξεις, η ενέλιξη και η απεικόνιση $\mathcal{G}(A) \rightarrow A, x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχείς, αρκεί να αποδείξουμε πως η απεικόνιση $A_+ \rightarrow A, h \mapsto h^{1/2}$ είναι συνεχής. Πράγματι επειδή κάθε φραγμένο υποσύνολο Ω του A^+ περιέχεται σε κάποιο Ω_K , όπου K είναι το κλειστό διάστημα $[0, R]$, $R = \sup\{\|h\| : h \in \Omega\}$, από το Λήμμα 1.3.1 έπεται πως η παραπάνω απεικόνιση είναι συνεχής.

Αν $u \in \mathcal{U}(A)$, τότε $|u| = 1$ και άρα $\omega(u) = u$.

Έστω $z \in \mathcal{G}(A)$. Για κάθε $t \in [0, 1]$ ορίζουμε $z_t = \omega(z)(t|z| + (1-t)1_A)$. Τότε $\omega(z) = z_0$ και $z = z_1$. Αφού το z είναι θετικό και αντιστρέψιμο, υπάρχει $\lambda \in (0, 1]$ ώστε $|z| \geq \lambda 1_A$. Επομένως για κάθε $t \in [0, 1]$ έχουμε πως $t|z| + (1-t)1_A \geq \lambda 1_A$. Τότε

$$1 > 1 - \lambda > \|1_A - \lambda 1_A\| \geq \|1_A - (t|z| + (1-t)1_A)\|$$

και άρα $t|z| + (1-t)1_A$ αντιστρέψιμο. Συνεπώς για την συνεχή απεικόνιση $f : [0, 1] \rightarrow A, t \mapsto z_t$ έχουμε πως $f([0, 1]) \subseteq \mathcal{G}(A)$ και $f(0) = \omega(z), f(1) = z$, δηλαδή $\omega(z) \sim_h z$ στο $\mathcal{G}(A)$.

(ii) Έστω $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{G}(A)$ μια συνεχής απεικόνιση ώστε $g(0) = u$ και $g(1) = v$. Τότε η απεικόνιση $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}(A), t \mapsto \omega(g(t))$ είναι συνεχής και $f(0) = u, f(1) = v$, δηλαδή $u \sim_h v$ στο $\mathcal{U}(A)$. $\square$

Ορισμός 1.3.8. Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Ένα $v \in A$ λέγεται μερική ισομετρία αν $v = vv^*$. Επίσης το στοιχείο v^*v θα λέγεται αρχική προβολή και το vv^* τελική προβολή.

Παρατήρηση 1.3.9. Εύκολα παρατηρεί κανείς πως η αρχική και η τελική προβολή μιας μερικής ισομετρίας είναι προβολές. Επιπλέον ισχύει πως αν v^*v είναι προβολή μιας C^* -άλγεβρας A , τότε το v θα είναι μερική ισομετρία, το vv^* προβολή της A και επιπλέον ισχύει πως

$$(1_A - vv^*)v = 0 = v(1_A - v^*v).$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε πως η A έχει μονάδα. Πράγματι αν vv^* είναι προβολή της A , θέτουμε $z = (1_A - vv^*)v$. Τότε $z^*z = v^*v - 2(v^*v)^2 + (v^*v)^3 = 0$ και άρα $z = 0$, δηλαδή $v = vv^*v$. $\square$

Σχόλιο 1.3.10. Στην περίπτωση που η $A = B(H)$ ο Ορισμός 1.3.8 είναι ισοδύναμος με τον εξής Ορισμό:

- Ένας τελεστής $V \in B(H)$ λέγεται μερική ισομετρία αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $(\text{Ker} V)^\perp$ είναι ισομετρία.

Επιπλέον ισχύει πως $(\text{Ker} V)^\perp = V^*V(H)$ και $\text{Im} V = VV^*(H)$. Επομένως $V(I - VV^*) = 0$

Ορισμός 1.3.11. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα, τότε ορίζουμε τις παρακάτω σχέσεις επί του συνόλου των προβολών της. Συγκεκριμένα αν $p, q \in \mathcal{P}(A)$ τότε:

- $p \sim q$ αν υπάρχει $v \in A$ ώστε $p = v^*v$ και $q = vv^*$.
- $p \sim_u q$ αν υπάρχει $u \in \mathcal{U}(\tilde{A})$ ώστε $q = upu^*$. (ταυτίζοντας τα p, q με τα $(p, 0), (q, 0)$)

Οι $\sim$ και $\sim_u$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας επί του συνόλου $\mathcal{P}(A)$. Αν για δύο προβολές p και q της A ισχύει ότι $p \sim q$, τότε οι προβολές αυτές θα λέγονται Murray-voň Neumann ισοδύναμες, ενώ αν $p \sim_u q$, θα λέγονται unitary ισοδύναμες.

Πρόταση 1.3.12. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα και $p, q \in \mathcal{P}(A)$. Τότε τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (i) $p \sim_u q$,
- (ii) $q = upu^*$ για κάποιο $u \in \mathcal{U}(A)$,
- (iii) $p \sim q$ και $1_A - p \sim 1_A - q$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το στοιχείο $f = (-1_A, 1) \in \tilde{A}$. Ταυτίζοντας κάθε $a \in A$ με το $(a, 0)$ στην $\tilde{A}$ έχουμε πως $fa = af = 0$. Η f είναι προβολή και μάλιστα $\tilde{A} = \iota(A) \oplus \mathbb{C}f$ ως διανυσματικοί χώροι. Συγκεκριμένα $\iota(A) \cap \mathbb{C}f = \{0\}$ και αν $z = (a, \mu) \in \tilde{A}$ τότε $(a, \mu) = (a + \mu 1_A, 0) + \mu f$.

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Έστω ότι $q = zpz^*$ για κάποιο $z \in \mathcal{U}(\tilde{A})$. Τότε $z = (u, 0) + \mu f$ για κάποιο $u \in A$ και $\mu \in \mathbb{C}$. Από το γεγονός ότι το $z \in \mathcal{U}(\tilde{A})$, έπεται πως u είναι unitary στοιχείο της A . Προφανώς $q = upu^*$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω ότι $q = upu^*$ για κάποιο $u \in \mathcal{U}(A)$. Θέτουμε $v = up$ και $w = u(1_A - p)$. Τότε

$$p = v^*v \sim vv^* = q \text{ και } 1_A - p = w^*w \sim ww^* = 1_A - q$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $p \sim q$ και $1_A - p \sim 1_A - q$. Επομένως υπάρχουν v και w στην A ώστε $p = v^*v, vv^* = q, 1_A - p = w^*w$ και $ww^* = 1_A - q$. Θέτουμε $z = v + w + f$. Τότε $z \in \mathcal{U}(\tilde{A})$ και $zpz^* = q$, δηλαδή $p \sim_u q$.

□

Λήμμα 1.3.13. Έστω A μια C^* -άλγεβρα, $p \in \mathcal{P}(A)$ και $a \in A_{sa}$. Αν $\delta = \|p - a\|$ τότε

$$\sigma(a) \subseteq [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta].$$

Απόδειξη. [21, Λήμμα 2.2.3]

□

Πρόταση 1.3.14. Αν A μια C^* -άλγεβρα και $p, q \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $\|p - q\| < 1$ τότε $p \sim_h q$.

Απόδειξη. Για κάθε $t \in [0, 1]$ ορίζουμε $a_t = (1 - t)p + tq$. Τότε $a_t \in A_{sa}$ και

$$\min\{\|a_t - p\|, \|a_t - q\|\} \leq \frac{\|p - q\|}{2} < \frac{1}{2}.$$

Από το προηγούμενο Λήμμα έπεται πως για κάθε t , $\sigma(a_t) \subseteq [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta]$, όπου $\delta = \frac{\|p - q\|}{2}$. Επομένως αν $K = [-\delta, \delta] \cup [1 - \delta, 1 + \delta]$ έχουμε πως $a_t \in \Omega_K$. Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, όπου $f|_{[-\delta, \delta]} = 0$ και $f|_{[1 - \delta, 1 + \delta]} = 1$. Τότε επειδή $f = f^2 = \bar{f}$ από το Θεώρημα 1.1.31 το στοιχείο $f(a_t)$ θα είναι προβολή για κάθε t . Από το Λήμμα 1.3.1 έχουμε πως η απεικόνιση $f : \Omega_K \rightarrow A, a_t \mapsto f(a_t)$ είναι συνεχής. Επομένως και η απεικόνιση $[0, 1] \rightarrow A, t \mapsto f(a_t)$ είναι συνεχής και άρα

$$p = f(p) = f(a_0) \sim_h f(a_1) = f(q) = q, \text{ στο } \mathcal{P}(A).$$

□

Πρόταση 1.3.15. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα και $a, b \in A_{sa}$ ώστε $b = zaz^{-1}$ για κάποιο $z \in \mathcal{G}(A)$. Αν $u = z|z|^{-1}$, τότε $b = uau^*$.

Απόδειξη. Αν $b = zaz^{-1}$ για κάποιο $z \in \mathcal{G}(A)$, τότε $|z|^2 a = (z^*z)a = z^*bz = a(z^*z) = a|z|^2$. Επομένως το a μετατίθεται με κάθε στοιχείο της $C^*(1, |z|^2)$ και άρα με το $|z|^{-1}$.

Άρα $uau^* = z|z|^{-1}au^* = bz|z|^{-1}u^* = buu^*$. Όμως επειδή το z αντιστρέφεται το u θα είναι unitary, και άρα $uau^* = b$. □

Πρόταση 1.3.16. Έστω A μια C^* -άλγεβρα και $p, q \in \mathcal{P}(A)$. Τότε $p \sim_h q$ στην $\mathcal{P}(A)$ αν και μόνο αν υπάρχει $u \in \mathcal{U}_0(\tilde{A})$ ώστε $q = upu^*$.

Απόδειξη. Έστω ότι $q = upu^*$ για κάποιο $u \in \mathcal{U}_0(\tilde{A})$. Αφού $u \in \mathcal{U}_0(\tilde{A})$ υπάρχει συνεχής απεικόνιση $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}(\tilde{A})$ ώστε $g(0) = 1_{\tilde{A}}$ και $g(1) = u$. Τότε η $f : [0, 1] \rightarrow \tilde{A}$ με $f(t) = g(t)pg(t)^*$ είναι συνεχής, $f([0, 1]) \subseteq \mathcal{P}(A)$ και $f(0) = p, f(1) = q$. Επομένως $p \sim_h q$.

Αντίστροφα αν υπάρχει $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ώστε $f(0) = p$ και $f(1) = q$, τότε χρησιμοποιώντας την συνέχεια της f υπάρχουν $p = p_0, p_1, p_2, \dots, p_n = p_1$ προβολές της A ώστε $\|p_{j+1} - p_j\| < \frac{1}{2}$ για κάθε j . Χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν μπορούμε να υποθέσουμε πως $\|p - q\| < \frac{1}{2}$.

Θέτουμε $z = pq + (1_{\tilde{A}} - p)(1_{\tilde{A}} - q)$. Τότε $z \in \tilde{A}$, $pz = pq = zq$ και

$$\|z - 1\| = \|p(q - p) + (1_{\tilde{A}} - p)((1_{\tilde{A}} - q) - (1_{\tilde{A}} - p))\| \leq 2\|p - q\| < 1.$$

Επομένως το z είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της $\tilde{A}$ και άρα από [21, Πρόταση 2.1.11] έπεται πως $z \sim_h 1$ στο $\mathcal{G}(A)$. Έστω $z = u|z|$ η πολική αναπαράσταση του z , τότε $u \in \mathcal{U}(\tilde{A})$ και επειδή $p = zqz^{-1}$ από την προηγούμενη Πρόταση έπεται πως $p = uqu^*$. Μένει να αποδείξουμε πως $u \in \mathcal{U}_0(\tilde{A})$. Από το (ii) της Πρότασης 1.3.7, έπεται πως $u \sim_h z$ στο $\mathcal{G}(\tilde{A})$ και άρα $u \sim_h 1$ στο $\mathcal{G}(\tilde{A})$. Τέλος από το (iii) της ίδιας Πρότασης προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 1.3.17. Έστω A μια C^* -άλγεβρα και $p, q \in \mathcal{P}(A)$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $p \sim_h q$, τότε $p \sim_u q$.

(ii) Αν $p \sim_u q$, τότε $p \sim q$.

Απόδειξη. Το (i) προκύπτει από την προηγούμενη Πρόταση.

Έστω ότι $upu^* = q$ για κάποιο $u \in \mathcal{U}(\tilde{A})$. Θέτουμε $v = up$, τότε $v \in A$ διότι η A ιδεώδες της $\tilde{A}$ και άρα $p = v^*v \sim vv^* = q$. $\square$

Σχόλιο 1.3.18. Παρακάτω θα δούμε πως οι παραπάνω σχέσεις ισοδυναμίας συμπίπτουν αν θεωρηθούν επί του συνόλου των προβολών μιας C^* -άλγεβρας πεπερασμένης διάστασης. Γενικότερα όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει.

Για παράδειγμα αν A είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα και s ένα στοιχείο της το οποίο είναι ισομετρία αλλά όχι μοναδιαίο, τότε $1_A = s^*s \sim ss^*$. Οι s^*s, ss^* δεν είναι unitary ισοδύναμες διότι αν ήταν, λόγω της Πρότασης 1.3.12 θα είχαμε πως $0 = 1_A - s^*s \sim 1_A - ss^*$, δηλαδή $1_A = ss^*$. (Υπάρχουν C^* -άλγεβρες που περιέχουν ισομετρικές οι οποίες δεν είναι μοναδιαία, π.χ η $B(\ell^2(\mathbb{N}))$.)

Πρόταση 1.3.19. Έστω p, q δύο προβολές μιας C^* -άλγεβρας A .

(i) Αν $p \sim q$, τότε $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_u \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ στην $M_2(A)$.

(ii) Αν $p \sim_u q$, τότε $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim_h \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ στην $M_2(A)$.

Απόδειξη. (i) Έστω ότι $p = v^*v$ και $q = vv^*$ για κάποιο $v \in A$. Θέτουμε

$$u = \begin{pmatrix} v & 1_{\tilde{A}} - q \\ 1_{\tilde{A}} - p & v^* \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} q & 1_{\tilde{A}} - q \\ 1_{\tilde{A}} - q & q \end{pmatrix}$$

Τότε $u, v \in \mathcal{U}(M_2(\tilde{A}))$ και

$$wu \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (wu)^* = w \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή μάλιστα

$$wu = \begin{pmatrix} v + (1_{\tilde{A}} - q)(1_{\tilde{A}} - p) & (1_{\tilde{A}} - q)v^* \\ q(1_{\tilde{A}} - p) & (1_{\tilde{A}} - q) + qv^* \end{pmatrix}$$

ανήκει στην $\widetilde{M_2(A)}$, έχουμε το ζητούμενο.

(ii) Έστω ότι $q = upu^*$ για κάποιο $u \in \mathcal{U}(\tilde{A})$. Τότε από το Λήμμα 1.3.5 τα unitary στοιχεία της $M_2(\tilde{A})$

$$w_0 = \begin{pmatrix} 1_{\tilde{A}} & 0 \\ 0 & 1_{\tilde{A}} \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}$$

είναι ομοτοπικά και άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $w : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}(M_2(\tilde{A}))$ ώστε $w(0) = w_0$ και $w(1) = w_1$. Ορίζουμε $f : [0, 1] \rightarrow M_2(\tilde{A})$ με $f(t) := w(t)(p \oplus 0)w(t)^*$, $\forall t \in [0, 1]$. Τότε η f συνεχής, $f([0, 1]) \subseteq \mathcal{P}(M_2(A))$, και

$$f(0) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f(1) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

Κεφάλαιο 2

Η Ομάδα K_0

Σε αυτό το Κεφάλαιο ορίζουμε την ομάδα K_0 μιας C^* -άλγεβρας. Παρουσιάζουμε επίσης την standard εικόνα της και αποδεικνύουμε πως μπορούμε να δούμε την ομάδα αυτή και σαν συναρτητή από την κατηγορία των C^* -άλγεβρών στην κατηγορία των ομάδων. Υπολογίζουμε επίσης τις ομάδες K_0 κάποιων γνωστών C^* -άλγεβρών και μελετάμε κάποιες ιδιότητες της ομάδας K_0 οι οποίες θα μας φανούν χρήσιμες και στη συνέχεια. (π.χ για να υπολογίσουμε την ομάδα K_0 των συμπαγών τελεστών.)

2.1 Η ομάδα K_0 για C^* -άλγεβρες με μονάδα

Όπως είπαμε στον πρόλογο η K -θεωρία των C^* -άλγεβρών βασίζεται στην κατασκευή Grothendieck η οποία αναλύεται εκτενώς σε αυτή την παράγραφο. Ειδικότερα η ημιομάδα από την οποία προκύπτει η ομάδα K_0 μιας C^* -άλγεβρας είναι ένας χώρος πηλίκου ως προς μια σχέση ισοδυναμίας που κατά κάποιο τρόπο γενικεύει την ισοδυναμία Murray-von Neumann.

Υπενθυμίζουμε πως ένα ζεύγος $(S, +)$, όπου S σύνολο και $+: S \times S \rightarrow S$, είναι ημιομάδα αν για κάθε $a, b, c \in S$ ισχύει ότι $(a + b) + c = a + (b + c)$. Αν επιπλέον ισχύει ότι $a + b = b + a$ για κάθε $a, b \in S$, τότε η ημιομάδα $(S, +)$ θα λέγεται αβελιανή.

Ορισμός 2.1.1. Έστω $(S, +)$ μια αβελιανή ημιομάδα.

Ορίζουμε μια σχέση $\sim$ επί του συνόλου $S \times S$ ως εξής: Αν $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$ τότε

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \exists z \in S \text{ ώστε } x_1 + y_2 + z = x_2 + y_1 + z.$$

Προφανώς η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας επί του $S \times S$. Στο εξής το σύνολο πηλίκου $S \times S / \sim$ θα συμβολίζεται με $G(S)$, και η κλάση ενός στοιχείου $(x, y) \in S \times S$ με $\langle x, y \rangle$.

Ορίζουμε επίσης την απεικόνιση

$$+: G(S) \times G(S) \rightarrow G(S), (\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) \mapsto \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$$

Εύκολα κανείς παρατηρεί πως η απεικόνιση $+$ είναι καλά ορισμένη και μάλιστα η $(G(S), +)$ είναι αβελιανή ομάδα. Συγκεκριμένα $\langle x, x \rangle = 0_{G(S)} \quad \forall x \in S$, και $\langle y, x \rangle = -\langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in S$. Το ζεύγος λοιπόν $(G(S), +)$ θα λέγεται ομάδα Grothendieck της S .

Έστω $y \in S$, ορίζουμε απεικόνιση

$$\gamma_S^y : S \rightarrow G(S), \text{ όπου } \gamma_S^y(x) = \langle x + y, y \rangle \quad \forall x \in S.$$

Τότε η γ_S^y είναι προσθετική και μάλιστα ανεξάρτητη από την επιλογή του y , δηλαδή $\gamma_S^y = \gamma_S^x$ για κάθε $x \in S$. Επομένως χάριν απλοποίησης του συμβολισμού ορίζουμε $\gamma_S := \gamma_S^y$ για κάθε $y \in S$ και η γ_S θα λέγεται απεικόνιση Grothendieck της S .

Επίσης θα λέμε ότι η S έχει την ιδιότητα απαλοιφής (cancellation property), αν οποτεδήποτε $x + z = y + z$, για κάποια $x, y, z \in S$ ισχύει ότι $x = y$.

Πρόταση 2.1.2. Έστω $(S, +)$ αβελιανή ημιομάδα. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) $G(S) = \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x, y \in S\}$
- (ii) $\gamma_S(x) = \gamma_S(y) \Leftrightarrow \exists z \in S$ ώστε $x + z = y + z$
- (iii) Η γ_S είναι ένα προς ένα αν και μόνο αν η S έχει την ιδιότητα απαλοιφής.
- (iv) (Καθολική Ιδιότητα της $G(S)$) Έστω H αβελιανή ομάδα και $\varphi : S \rightarrow H$ προσθετική. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi : G(S) \rightarrow H$ ώστε $\psi \circ \gamma_S = \varphi$.
- (v) (Functoriality) Έστω $(T, +)$ αβελιανή ημιομάδα και $\varphi : S \rightarrow T$ προσθετική. Τότε υπάρχει $G(\varphi) : G(S) \rightarrow G(T)$ ώστε $G(\varphi) \circ \gamma_S = \gamma_T \circ \varphi$.
- (vi) Έστω $(H, +)$ αβελιανή ομάδα και $\emptyset \neq S \subseteq H$ τέτοιο ώστε $a + b \in S$ για κάθε $a, b \in S$. Τότε η $(S, +)$ είναι αβελιανή ημιομάδα με την ιδιότητα απαλοιφής, και για την $G(S)$ ισχύει πως $G(S) \simeq H_0 = \{x - y : x, y \in S\}$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\langle x, y \rangle$ στοιχείο της $G(S)$. Επειδή $\langle x + y, y \rangle = \langle y + z, z \rangle + \langle x, y \rangle$ έπεται πως $\langle x, y \rangle = \gamma_S(x) - \gamma_S(y)$ και άρα $G(S) = \{\gamma_S(x) - \gamma_S(y) : x, y \in S\}$.

(ii) Προκύπτει άμεσα.

(iii) Προκύπτει από το (ii) και τον Ορισμό.

(iv) Αν φ όπως στην υπόθεση ορίζουμε $\psi : G(S) \rightarrow H$, $\psi(\langle x, y \rangle) := \varphi(x) - \varphi(y)$. Η ψ είναι καλά ορισμένη, διότι η φ προσθετική και μάλιστα ομομορφισμός ομάδων για τον ίδιο λόγο. Επίσης $\psi \circ \gamma_S(x) = \varphi(x + y) - \varphi(y) = \varphi(x)$ για κάθε $x \in S$.

(v) Η $\gamma_T \circ \varphi$ είναι προσθετική, και άρα από το (iv) προκύπτει το ζητούμενο.

(vi) Η απεικόνιση $\iota : S \rightarrow H, x \mapsto x$ είναι προσθετική και άρα από την Καθολική Ιδιότητα της $G(S)$ υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\psi : G(S) \rightarrow H$ ώστε $\psi \circ \gamma_S = \iota$. Η ψ λόγω του (i) θα είναι 1-1 και μάλιστα $\psi(G(S)) = H_0$. Δηλαδή έχουμε το ζητούμενο. □

Παραδείγματα 2.1.3. 1. Η $(\mathbb{N}, +)$ ικανοποιεί τις συνθήκη (vi) της προηγούμενης Πρότασης και άρα $G(\mathbb{N}) \simeq \mathbb{Z}$.

2. Έστω $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +)$, όπου η πρόσθεση στο $\mathbb{N}$ είναι η συνήθης με την επιπλέον συνθήκη ότι $\infty = \infty + \infty$ και $n + \infty = \infty + n = \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε η $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +)$ είναι αβελιανή ημιομάδα χωρίς την ιδιότητα απαλοιφής και μάλιστα $G(\mathbb{N} \cup \{\infty\}) = \{0\}$.

Ορισμός 2.1.4. (Το σύνολο $\mathcal{P}_\infty(A)$)

Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Ορίζουμε

$$\mathcal{P}_n(A) = \mathcal{P}(M_n(A)), \forall n \geq 1 \quad \text{και} \quad \mathcal{P}_\infty(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n(A)$$

Θεωρούμε μια σχέση $\sim_0$ επί του $\mathcal{P}_\infty(A)$ που ορίζεται ως εξής: Αν $p \in \mathcal{P}_n(A), q \in \mathcal{P}_m(A)$, τότε

$$p \sim_0 q \Leftrightarrow \exists v \in M_{m,n}(A) \text{ ώστε } p = v^*v \text{ και } q = vv^*.$$

Εδώ το v^* είναι ο συζυγής ανάστροφος του $m \times n$ πίνακα v και v^*v, vv^* είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός πινάκων.

Θεωρούμε επίσης μια απεικόνιση $\oplus : \mathcal{P}_\infty(A) \times \mathcal{P}_\infty(A) \rightarrow \mathcal{P}_\infty(A)$ ως εξής: Αν $p \in \mathcal{P}_n(A)$ και $q \in \mathcal{P}_m(A)$ για κάποια $n, m \in \mathbb{N}$, τότε

$$p \oplus q := \text{diag}(p, q) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

Η $\sim_0$ είναι σχέση ισοδυναμίας και μάλιστα αν $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ για κάποιο n , έχουμε πως $p \sim_0 q$ αν και μόνο αν $p \sim q$, δηλαδή αν p και q είναι Murray-von Neumann ισοδύναμες (Ορισμός 1.3.11). Επίσης την κλάση ισοδυναμίας (ως προς την $\sim_0$) ενός $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ θα την συμβολίζουμε με $[p]_{\mathcal{D}}$.

Πρόταση 2.1.5. Έστω $p, q, r, p', q', r' \in \mathcal{P}_\infty(A)$, όπου A μια C^* -άλγεβρα. Τότε

- (i) $p \sim_0 p \oplus 0_n$ για κάθε $n \geq 1$, όπου 0_n είναι το $0_{M_n(A)}$,
- (ii) αν $p \sim_0 p'$ και $q \sim_0 q'$, τότε $p \oplus q \sim_0 p' \oplus q'$,
- (iii) $p \oplus q \sim_0 q \oplus p$,
- (iv) αν $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ και $pq = 0$, τότε $p + q \sim_0 p \oplus q$,
- (v) $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$.

Απόδειξη. (i) Έστω m, n θετικοί ακέραιοι και $p \in \mathcal{P}_m(A)$, τότε θέτοντας

$$u = \begin{pmatrix} p \\ 0_m \end{pmatrix} \in M_{m+n,m}(A)$$

έχουμε $p = u^*u$ και $p \oplus 0_n = uu^*$, δηλαδή $p \sim_0 p \oplus 0_n$.

(ii) Αν $p \sim_0 p'$ και $q \sim_0 q'$, τότε υπάρχουν v, w ώστε $p = v^*v, p' = vv^*, q = w^*w, q' = ww^*$. Θέτουμε $u = v \oplus w$. Τότε $p \oplus q = u^*u \sim_0 uu^* = p' \oplus q'$.

(iii) Αν $p \in \mathcal{P}_n(A)$ και $q \in \mathcal{P}_m(A)$ θέτουμε

$$u = \begin{pmatrix} 0_{n,m} & q \\ p & 0_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{n+m}(A)$$

και τότε $p \oplus q = u^*u \sim_0 uu^* = q \oplus p$.

(iv) Αν $pq = 0$ τότε $p + q$ προβολή και άρα θέτοντας

$$u = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in M_{2n,n}(A)$$

$p + q = u^*u \sim_0 uu^* = p \oplus q$.

(v) Προφανές. □

Ορισμός 2.1.6. Έστω A C^* -άλγεβρα. Ορίζουμε $\mathcal{D}(A) = \mathcal{P}_\infty(A)/\sim_0$, καθώς και την απεικόνιση $+$: $\mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(A) \rightarrow \mathcal{D}(A)$, όπου $[p]_{\mathcal{D}} + [q]_{\mathcal{D}} = [p \oplus q]_{\mathcal{D}}$ για κάθε $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

Από την Πρόταση 2.1.5 έπεται πως η παραπάνω απεικόνιση είναι καλά ορισμένη και πως η $(\mathcal{D}(A), +)$ είναι αβελιανή ημιομάδα. Μάλιστα η $\mathcal{D}(A)$ έχει και ουδέτερο στοιχείο, το $[0_A]_{\mathcal{D}}$, δηλαδή η $\mathcal{D}(A)$ είναι ένα μονοειδές.

Ορισμός 2.1.7. (Η ομάδα K_0)

Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα και $(\mathcal{D}(A), +)$ η αβελιανή ημιομάδα που προκύπτει από τον ορισμό 2.1.6. Ορίζουμε

$$K_0(A) = G(\mathcal{D}(A))$$

και την απεικόνιση

$$[\cdot]_0 : \mathcal{P}_\infty(A) \rightarrow K_0(A), \mu \in [p]_0 = \gamma([p]_{\mathcal{D}}), \quad \forall p \in \mathcal{P}_\infty(A)$$

όπου $\gamma : \mathcal{D}(A) \rightarrow K_0(A)$ είναι η απεικόνιση *Grothendieck* της $\mathcal{D}(A)$.

Ορισμός 2.1.8. Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας επί του $\mathcal{P}_\infty(A)$ ως εξής : Αν $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$ τότε

$$p \sim_s q \Leftrightarrow p \oplus r \sim_0 q \oplus r \text{ για κάποιο } r \in \mathcal{P}_\infty(A).$$

Η $\sim_s$ θα λέγεται *stable* ισοδυναμία.

Παρατήρηση 2.1.9. Αν A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα, (1_A) , και $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$, τότε $p \sim_s q$ αν και μόνο αν υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $p \oplus 1_n \sim_0 q \oplus 1_n$, όπου $1_n = \text{diag}(1_A, \dots, 1_A) \in \mathcal{P}_n(A)$

Απόδειξη. Έστω $p \sim_s q$, δηλαδή $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$ για κάποιο $r \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Αν $r \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ για κάποιο κ , τότε $r(1_\kappa - r) = 0$ και άρα από Πρόταση 2.1.5 (iv) έπεται πως

$$1_\kappa = r + 1_\kappa - r \sim_0 r \oplus (1_\kappa - r).$$

Άρα $p \oplus 1_\kappa \sim_0 p \oplus (r \oplus (1_\kappa - r)) = (p \oplus r) \oplus (1_\kappa - r) \sim_0 (q \oplus r) \oplus (1_\kappa - r) = q \oplus 1_\kappa$. □

Πρόταση 2.1.10. (Η *standard picture* της K_0)

Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα. Τότε

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)\} = \{[p]_0 - [q]_0 : p, q \in \mathcal{P}_n(A), n \in \mathbb{N}\}$$

και ισχύουν τα παρακάτω.

- (i) $[p \oplus q]_0 = [p]_0 + [q]_0$ για κάθε $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$.
- (ii) $[0_A]_0 = 0_{K_0(A)}$, όπου $0_{K_0(A)}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της $(K_0(A), +)$.
- (iii) Αν $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ και $p \sim_h q$ στο $\mathcal{P}_n(A)$, τότε $[p]_0 = [q]_0$.
- (iv) Αν $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ και $pq = 0$, τότε $[p + q]_0 = [p]_0 + [q]_0$.
- (v) Αν $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$, τότε $[p]_0 = [q]_0$ αν και μόνο αν $p \sim_s q$.

Απόδειξη. Η πρώτη ισότητα προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό 2.1.7 και το (i) της Πρότασης 2.1.2. Αν $g \in K_0(A)$, τότε $g = [p']_0 - [q']_0$ όπου $p \in \mathcal{P}_k(A), q \in \mathcal{P}_l(A)$ για κάποια $k, l \in \mathbb{N}$. Επιλέγουμε ένα φυσικό αριθμό n μεγαλύτερο των k, l και θεωρούμε τα στοιχεία $p = p' \oplus 0_{n-k}$ και $q = q' \oplus 0_{n-l}$. Τότε $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ και από το (i) της Πρότασης 2.1.5 $p \sim_0 p'$ και $q \sim_0 q'$, άρα $g = [p]_0 - [q]_0$. Επομένως έχουμε και την δεύτερη ισότητα.

$$(i) [p \oplus q]_0 = \gamma([p \oplus q]_{\mathcal{D}}) = \gamma([p]_{\mathcal{D}} + [q]_{\mathcal{D}}) = [p]_0 + [q]_0.$$

- (ii) Από το (iv) της Πρότασης 2.1.5, έχουμε ότι $0_A \oplus 0_A \sim_0 0_A$ και άρα από το (i) έπεται πως $[0_A]_0 = 0_{K_0(A)}$.
- (iii) Από την Πρόταση 1.3.17 έπεται πως $p \sim q$ και άρα $p \sim_0 q$. Επομένως $[p]_{\mathcal{D}} = [q]_{\mathcal{D}}$ και άρα $[p]_0 = [q]_0$.
- (iv) Από Πρόταση 2.1.5 (iv) έχουμε $p + q \sim_0 p \oplus q$. Επομένως από το (i) έπεται το ζητούμενο.
- (v) Αν $[p]_0 = [q]_0$, τότε $\gamma([p]_{\mathcal{D}}) = \gamma([q]_{\mathcal{D}})$ και άρα από Πρόταση 2.1.2 (ii) υπάρχει $r \in \mathcal{P}_{\infty}(A)$ ώστε $[p]_{\mathcal{D}} + [r]_{\mathcal{D}} = [q]_{\mathcal{D}} + [r]_{\mathcal{D}}$. Επομένως $p \oplus r \sim_0 q \oplus r$ και άρα $p \sim_s q$. Αντίστροφα αν $p \sim_s q$ τότε $[p \oplus r]_0 = [q \oplus r]_0$ για κάποιο $r \in \mathcal{P}_{\infty}(A)$, δηλαδή $[p]_0 + [r]_0 = [q]_0 + [r]_0$. Όμως επειδή η $K_0(A)$ είναι ομάδα, έχουμε $[p]_0 = [q]_0$.

□

Πρόταση 2.1.11. (Καθολική Ιδιότητα της K_0)

Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα, G μια αβελιανή ομάδα και $\nu : \mathcal{P}_{\infty}(A) \rightarrow G$ ώστε

- (i) $\nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q)$ για κάθε $p, q \in \mathcal{P}_{\infty}(A)$.
- (ii) $\nu(0_A) = 0$.
- (iii) Αν $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ για κάποιο n και $p \sim_h q$ στο $\mathcal{P}_n(A)$, τότε $\nu(p) = \nu(q)$.

Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\alpha : K_0(A) \rightarrow G$ ο οποίος κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{\infty}(A) & \xrightarrow{\nu} & G \\ \downarrow [\cdot]_0 & \nearrow \alpha & \\ K_0(A) & & \end{array}$$

δηλαδή $\alpha \circ [\cdot]_0 = \nu$.

Απόδειξη. Αν $\nu : \mathcal{P}_{\infty}(A) \rightarrow G$ είναι όπως στην εκφώνηση, ορίζουμε

$$\beta : \mathcal{D}(A) \rightarrow G, \beta([p]_{\mathcal{D}}) := \nu(p) \text{ για κάθε } p \in \mathcal{P}_{\infty}(A)$$

Η β είναι καλά ορισμένη. Πράγματι αν $p \in \mathcal{P}_k(A), q \in \mathcal{P}_l(A)$ για κάποια $k, l \in \mathbb{N}$ με $p \sim_0 q$, τότε όπως στην απόδειξη της προηγούμενης Πρότασης υπάρχουν $n > k, l$ και $p', q' \in \mathcal{P}_n(A)$ με $p' = p \oplus 0_{n-k}, q' = q \oplus 0_{n-l}$ και $p' \sim_0 q'$. Επομένως $p' \sim q'$ και άρα από Πρόταση 1.3.19 (i) έπεται πως $p' \oplus 0_n \sim_u q' \oplus 0_n$. Επομένως $p' \oplus 0_{3n} \sim_h q' \oplus 0_{3n}$ (Πρόταση 1.3.19 (ii)). Τότε χρησιμοποιώντας τα (i), (ii) και (iii) της υπόθεσης προκύπτει πως

$$\begin{aligned} \nu(p) &= \nu(p) + (4n - k)\nu(0_A) = \nu(p) + (n - k)\nu(0_A) + 3n\nu(0_A) = \nu(p) + \nu(0_{n-k}) + 3n\nu(0_A) \\ &= \nu(p') + \nu(0_{3n}) = \nu(p' \oplus 0_{3n}) = \nu(q' \oplus 0_{3n}) \\ &= \dots = \nu(q). \end{aligned}$$

Επιπλέον η β είναι προσθετική, καθώς $\beta([p \oplus q]_{\mathcal{D}}) = \nu(p \oplus q) = \nu(p) + \nu(q) = \beta([p]_{\mathcal{D}}) + \beta([q]_{\mathcal{D}})$. Άρα από την Καθολική Ιδιότητα της $\mathcal{D}(A)$ (Πρόταση 2.1.2 (iv)) υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\alpha : K_0(A) \rightarrow G$ ώστε $\alpha \circ \gamma = \beta$. Η α είναι η ζητούμενη απεικόνιση, καθώς αν υπήρχε ένας ομομορφισμός $\lambda : K_0(A) \rightarrow G$ ώστε $\lambda \circ [\cdot]_0 = \nu$, τότε

$$\beta([p]_{\mathcal{D}}) = \nu(p) = \lambda([p]_0) = \lambda \circ \gamma([p]_{\mathcal{D}}), \forall p \in \mathcal{P}_{\infty}(A).$$

□

Ορισμός 2.1.12. Έστω $\varphi : A \rightarrow B$ ένας $*$ -ομομορφισμός. Τότε όμοια με την Παρατήρηση 1.1.34, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, επάγεται ένας $*$ -ομομορφισμός

$$\varphi_n : M_n(A) \rightarrow M_n(B) \text{ με } \varphi_n((a_{ij})_{i,j}) = (\varphi(a_{ij}))_{i,j} \text{ για κάθε } (a_{ij})_{i,j} \in M_n(A).$$

Προφανώς $\varphi_n(\mathcal{P}_n(A)) \subseteq \mathcal{P}_n(B)$ και άρα η φ επάγει μια απεικόνιση στο $\mathcal{P}_\infty(A)$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$: \mathcal{P}_\infty(A) \rightarrow \mathcal{P}_\infty(B), \text{ με } p \mapsto \varphi_n(p), \text{ αν } p \in \mathcal{P}_n(A) \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N}.$$

Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, την απεικόνιση αυτή θα την συμβολίζουμε με φ .

Πρόταση 2.1.13. Αν $\varphi : A \rightarrow B$ είναι ένας $*$ -ομομορφισμός μεταξύ δύο C^* -άλγεβρων με μονάδα, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $K_0(\varphi) : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ ώστε $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση $\nu : \mathcal{P}_\infty(A) \rightarrow K_0(B)$ με $\nu := [\cdot]_0 \circ \varphi$, όπου φ είναι η απεικόνιση που προκύπτει από τον προηγούμενο Ορισμό. Τότε

$$(i) \quad [\varphi(p \oplus q)]_{\mathcal{D}} = [\varphi(p)]_{\mathcal{D}} + [\varphi(q)]_{\mathcal{D}}, \text{ διότι } \varphi_{m+n}(p \oplus q) = \varphi_n(p) \oplus \varphi_m(q), \text{ όταν } p \in \mathcal{P}_n(A), q \in \mathcal{P}_m(A).$$

$$(ii) \quad \nu(p \oplus q) = [\varphi(p \oplus q)]_0 \stackrel{(i)}{=} [\varphi(p)]_0 + [\varphi(q)]_0 = \nu(p) + \nu(q).$$

$$(iii) \quad \nu(0_A) = [\varphi(0_A)]_0 = [0_B]_0 = 0_{K_0(B)}.$$

$$(iv) \quad \text{Αν } p, q \in \mathcal{P}_n(A) \text{ για κάποιο } n \text{ και } p \sim_h q \text{ στο } \mathcal{P}_n(A), \text{ τότε } \nu(p) = \nu(q). \text{ Πράγματι αν } p \sim_h q \text{ στο } \mathcal{P}_n(A), \text{ τότε από την Πρόταση 1.3.17 έχουμε πως } p \sim q \text{ και άρα υπάρχει } u \in M_n(A) \text{ ώστε } p = u^*u \text{ και } q = uu^*. \text{ Επομένως } \varphi(p) \sim_0 \varphi(q), \text{ και άρα } \nu(p) = \nu(q).$$

Αφού λοιπόν η ν ικανοποιεί τις (ii), (iii), (iv), από την Καθολική Ιδιότητα της $K_0(B)$ (Πρόταση 2.1.11), έπεται πως υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός, έστω $K_0(\varphi) : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$, ώστε $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_\infty(A) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{P}_\infty(B) \\ \downarrow [\cdot]_0 & & \downarrow [\cdot]_0 \\ K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\varphi)} & K_0(B) \end{array}$$

□

Ορισμός 2.1.14. Έστω A, B δύο C^* -άλγεβρες με μονάδα και $\varphi : A \rightarrow B$ ένας $*$ -ομομορφισμός. Ο ομομορφισμός που προέκυψε από την προηγούμενη Πρόταση θα λέγεται επαγόμενος ομομορφισμός της φ στις ομάδες K_0 και θα συμβολίζεται με $K_0(\varphi)$.

Πρόταση 2.1.15. (Functoriality της K_0 για C^* -άλγεβρες με μονάδα)

$$(i) \quad K_0(Id_A) = Id_{K_0(A)}, \text{ όπου } A \text{ είναι μια } C^* \text{-άλγεβρα με μονάδα, η } Id_A : A \rightarrow A, x \mapsto x \text{ και η } Id_{K_0(A)} : K_0(A) \rightarrow K_0(A), y \mapsto y.$$

$$(ii) \quad \text{Αν } A, B, C \text{ } C^* \text{-άλγεβρες με μονάδα και } \varphi : A \rightarrow B, \psi : B \rightarrow C \text{ } * \text{-ομομορφισμοί, τότε } K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi).$$

(iii) Αν $A = \{1\}$ είναι η τετριμμένη C^* -άλγεβρα η οποία έχει μονάδα, τότε $K_0(A) = \{0\}$ όπου $\{0\}$ είναι η τετριμμένη αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη. (i) Αν $g \in K_0(A)$, τότε από την standard picture της K_0 το $g = [p]_0 - [q]_0$ για κάποια $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$. Επομένως από την Παρατήρηση 2.1.13

$$K_0(Id_A)(z) = [Id_n(p)]_0 - [Id_n(p)]_0 = [p]_0 - [q]_0 = z = Id_{K_0(A)}(z)$$

(ii) Ομοίως με το (i).

(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n(\{1\}) = \{0_n\}$, όπου $0_n = 0_{M_n(\{1\})}$ και επειδή $0_n \sim_0 0_m$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ συνεπάγεται πως $\mathcal{D}(\{1\}) = \{[0]_{\mathcal{D}}\}$. □

Αν κάτι ανάλογο ισχύει για “όλες” τις C^* -άλγεβρες (με ή χωρίς μονάδα), τότε μπορούμε να δούμε την K_0 σαν ένα συναλλοίωτο συναρτητή (covariant functor) από την κατηγορία των C^* -άλγεβρών στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων ο οποίος διατηρεί τα μηδενικά αντικείμενα. Αυτό θα προκύψει από την Πρόταση 2.3.10 της Παραγράφου 2.3. Περισσότερα για κατηγορίες και συναρτητές θα δούμε στο Κεφάλαιο 3.

2.2 Παραδείγματα υπολογισμού

Στην παράγραφο αυτή θα υπολογίσουμε τις ομάδες K_0 κάποιων C^* -άλγεβρών οι οποίες θα μας φανούν χρήσιμες και στην συνέχεια.

Ορισμός 2.2.1. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα και $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές με την ιδιότητα $\tau(ab) = \tau(ba)$ για κάθε $a, b \in A$, τότε η τ θα λέγεται ίχνος (trace) επί της A . Αν επιπλέον ισχύει πως $\tau(a) \geq 0$ για κάθε $a \geq 0$, τότε το τ θα λέγεται θετικό (positive).

Λήμμα 2.2.2. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα και $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ ένα trace επί της A . Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικό trace τ_n επί της $M_n(A)$ ώστε $\tau_n(\text{diag}(a, 0, \dots, 0)) = \tau(a)$ για κάθε $a \in A$. Επιπλέον ισχύει πως $\tau_n((a_{ij})_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \tau(a_{ii})$ για κάθε $z = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$.

(ii) Θεωρούμε την απεικόνιση $\bar{\tau} : \mathcal{P}_\infty(A) \rightarrow \mathbb{C}$ με $\bar{\tau}(p) := \tau_n(p)$, αν $p \in \mathcal{P}_n(A)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $f : K_0(A) \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $f([p]_0) = \bar{\tau}(p)$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Επίσης αν το $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι θετικό, τότε ισχύει πως $f([p]_0) \in \mathbb{R}^+$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ και άρα $f(K_0(A)) \subseteq \mathbb{R}$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ ένα trace επί της A και $n \geq 1$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\tau_n : M_n(A) \rightarrow \mathbb{C}$, όπου $\tau_n((a_{ij})_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \tau(a_{ii})$ για κάθε $z = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$. Εύκολα προκύπτει πως η τ_n είναι trace επί της $M_n(A)$ και προφανώς $\tau_n(\text{diag}(a, 0, \dots, 0)) = \tau(a)$ για κάθε $a \in A$. Αυτό μάλιστα είναι και το μοναδικό με αυτή την ιδιότητα. Πράγματι αν υπήρχε ρ trace επί της $M_n(A)$ με αυτήν την ιδιότητα, τότε αν $a = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$ και e_{ij} είναι ο

πίνακας ο οποίος έχει το 1_A στην θέση (i, j) και 0 αλλού,

$$\begin{aligned}\rho(a) &= \rho\left(\sum_{i,j} (e_{ii} a e_{jj})\right) = \sum_{i,j} \rho(e_{ii} a e_{jj}) = \sum_{i,j} \rho(e_{jj} e_{ii} a) = \sum_{i=1}^n \rho(e_{ii}^2 a) \\ &= \sum_{i=1}^n \rho(a e_{ii}) = \sum_{i=1}^n \rho(a e_{i1} e_{1i}) = \sum_{i=1}^n \rho(e_{1i} a e_{i1}) = \sum_{i=1}^n \rho(\text{diag}(a_{ii}, 0, \dots, 0)) \\ &= \sum_{i=1}^n \tau(a_{ii}) = \tau_n(a)\end{aligned}$$

(ii) Για την $\bar{\tau} : \mathcal{P}_\infty(A) \rightarrow \mathbb{C}$ ισχύουν τα εξής:

- $\bar{\tau}(p \oplus q) = \bar{\tau}(p) + \bar{\tau}(q)$ για κάθε $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Πράγματι αν $p \in \mathcal{P}_n(A), q \in \mathcal{P}_m(A)$ για κάποια n, m , τότε $\bar{\tau}(p \oplus q) = \tau_{n+m}(p \oplus q) \stackrel{(i)}{=} \tau_n(p) + \tau_m(q) = \bar{\tau}(p) + \bar{\tau}(q)$.
- $\bar{\tau}(0_A) = 0$.
- Αν $p \sim_h q$ στο $\mathcal{P}_n(A)$ για κάποιο n , τότε $\bar{\tau}(p) = \bar{\tau}(q)$. Αυτό γιατί αν $p \sim_h q$ έπεται πως $p \sim q$ στο $\mathcal{P}_n(A)$ και από τον ορισμό του trace έπεται πως $\tau_n(p) = \tau_n(q)$.

Επομένως από την Πρόταση 2.1.11, έπεται πως υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $f : K_0(A) \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $f([p]_0) = \bar{\tau}(p)$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

Αν υποθέσουμε επιπλέον πως το $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι θετικό, τότε

$$f([p]_0) = \bar{\tau}(p) = \tau_n(p) = \tau_n(p^* p) \geq 0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_\infty(A).$$

Παρατηρούμε πως αν $p \in \mathcal{P}_n(A)$ για κάποιο n , τότε τα στοιχεία της διαγωνίου του πίνακα $p^* p$ είναι αθροίσματα θετικών στοιχείων της A . Επίσης εφ' όσον το τ έχει υποτεθεί θετικό, τότε και το trace τ_n επί της $M_n(A)$ θα είναι θετικό για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $f([p]_0) \in \mathbb{R}^+$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ και άρα από την Πρόταση 2.1.10 έπεται πως $f(K_0(A)) \subseteq \mathbb{R}$. □

Ορισμός 2.2.3. Αν $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ένα trace επί μιας C^* -αλγεβρας A με μονάδα, τότε τον ομομορφισμό που προκύπτει από το (ii) του προηγούμενου Λήμματος θα τον συμβολίζουμε με $K_0(\tau)$.

Σχόλιο 2.2.4. Θεωρούμε το σύννηδες ίχνος επί της $M_n(\mathbb{C})$,

$$\text{Tr} : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \text{ όπου } \text{Tr}\left(\left(a_{ij}\right)_{i,j}\right) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad \forall \left(a_{ij}\right)_{i,j} \in M_n(\mathbb{C}).$$

Ισχυρισμός. Αν $p, q \in \mathcal{P}(M_n(\mathbb{C}))$, τότε ισχύει η εξής ισοδυναμία:

$$p \sim q \Leftrightarrow \text{Tr}(p) = \text{Tr}(q) \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}}(p(\mathbb{C}^n)) = \dim_{\mathbb{C}}(q(\mathbb{C}^n)).$$

Απόδειξη Ισχυρισμού. Πράγματι αν $p, q \in \mathcal{P}(M_n(\mathbb{C}))$ με $p \sim q$, τότε προφανώς $\text{Tr}(p) = \text{Tr}(q)$. Επίσης από την Γραμμική Άλγεβρα ξέρουμε πως για κάθε προβολή p της $M_n(\mathbb{C})$ ισχύει πως $\text{Tr}(p) = \dim_{\mathbb{C}}(p(\mathbb{C}^n)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i$, με $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα p . Τέλος αν $\dim_{\mathbb{C}}(p(\mathbb{C}^n)) = \dim_{\mathbb{C}}(q(\mathbb{C}^n))$, θεωρώ δύο ορθοκανονικές βάσεις $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ και $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ των $p(\mathbb{C}^n)$ και $q(\mathbb{C}^n)$ αντίστοιχα, και τις επεκτείνω σε ορθοκανονικές βάσεις του $\mathbb{C}^n$. Τότε υπάρχει $u \in \mathcal{U}(M_n(\mathbb{C}))$ ώστε $p = uqu^*$, δηλαδή $p \sim_u q$ και άρα από την Πρόταση 1.3.17 συνεπάγεται ότι $p \sim q$. □

Παρατηρούμε πως αν θεωρήσουμε τις σχέσεις ισοδυναμίας $\sim, \sim_u, \sim_h$ επί του συνόλου των προβολών της $M_n(\mathbb{C})$, τότε αυτές θα συμπίπτουν, δηλαδή $p \sim q \Leftrightarrow p \sim_u q \Leftrightarrow p \sim_h q$.

Πράγματι από την Πρόταση 1.3.17 έχουμε πως $p \sim_h q \Rightarrow p \sim_u q \Rightarrow p \sim q$. Επίσης όπως είδαμε στην απόδειξη του Ισχυρισμού, οποτεδήποτε ισχύει πως $p \sim q$ έπεται $p \sim_u q$, δηλαδή υπάρχει $u \in \mathcal{U}(M_n(\mathbb{C}))$ ώστε $p = uqu^*$. Το φάσμα του u είναι πεπερασμένο και άρα από το (ii) του Λήμματος 1.3.4 έπεται πως $u \sim_h 1_n$ στο $\mathcal{U}(M_n(\mathbb{C}))$, δηλαδή υπάρχει $f : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U}(M_n(\mathbb{C}))$ ώστε $f(0) = 1_n$ και $f(1) = u$. Ορίζουμε $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}(M_n(\mathbb{C}))$, με $g(t) := f(t)qf(t)^*$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Τότε η g είναι συνεχής, $g(0) = q$ και $g(1) = p$ και άρα $p \sim_h q$ στο $\mathcal{P}(M_n(\mathbb{C}))$.

Παράδειγμα 2.2.5. $K_0(M_n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{Z}$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύννηθες trace Tr επί της $M_n(\mathbb{C})$. Προφανώς το Tr είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές, και άρα είναι trace επί της $M_n(\mathbb{C})$. Επομένως από το Λήμμα 2.2.2 έχουμε

$$K_0(Tr) : K_0(M_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C} \text{ με } K_0(Tr)([p]_0) = \overline{Tr}(p) \quad \forall p \in \mathcal{P}_\infty(M_n(\mathbb{C})).$$

Τώρα αν $p \in \mathcal{P}_\kappa(M_n(\mathbb{C}))$, έχουμε πως $\overline{Tr}(p) = Tr_\kappa(p) = \dim_{\mathbb{C}} p(\mathbb{C}^{\kappa n}) \in \mathbb{N}$. Από την Πρόταση 2.1.10 έπεται πως $Im K_0(Tr) \subseteq \mathbb{Z}$. Συγκεκριμένα $Im K_0(Tr) = \mathbb{Z}$, διότι το $1 \in Im K_0(Tr)$. (π.χ $1 = Tr(p)$, όπου $p = (p_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$ με $p_{11} = 1$ και $p_{ij} = 0$ αν $(i, j) \neq (1, 1)$).

Επίσης $K_0(Tr)$ είναι μονομορφισμός. Πράγματι αν $x \in K_0(M_n(\mathbb{C}))$ ώστε $K_0(Tr)(x) = 0$, τότε από την Πρόταση 2.1.10 υπάρχουν $p, q \in \mathcal{P}_\kappa(M_n(\mathbb{C}))$ για κάποιο κ ώστε $x = [p]_0 - [q]_0$. Επομένως $K_0(Tr)([p]_0) = K_0(Tr)([q]_0)$, δηλαδή $Tr_\kappa(p) = Tr_\kappa(q)$ και άρα από το Σχόλιο 2.2.4 έπεται πως $p \sim q$. Δηλαδή $x = 0$ και άρα η $K_0(Tr)$ είναι ισομορφισμός επί του $\mathbb{Z}$. $\square$

Παράδειγμα 2.2.6. Αν H είναι ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert τότε η ομάδα $K_0(B(H))$ είναι τετριμμένη, δηλαδή $K_0(B(H)) = \{0\}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $H^n = H \oplus H \oplus \dots \oplus H$. Ξέρουμε πως οι C^* -άλγεβρες $M_n(B(H))$ και $B(H^n)$ είναι ισόμορφες για κάθε n μέσω του $*$ -ομομορφισμού που προκύπτει από την Παρατήρηση 1.1.34. Επομένως για κάθε n μπορούμε να ταυτίσουμε τα σύνολα $\mathcal{P}_n(B(H))$ και $\mathcal{P}(B(H^n))$. Θεωρούμε επίσης την ημιομάδα $\{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ του Παραδείγματος 2.1.3-2 και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\dim : \mathcal{P}_\infty(B(H)) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \infty\}, \text{ όπου}$$

$$\dim(p) = \begin{cases} \dim_{\mathbb{C}}(p(H^n)), & \text{αν } p \in \mathcal{P}_n(B(H)) \text{ για κάποιο } n \text{ και } \dim_{\mathbb{C}}(p(H^n)) < +\infty \\ \infty, & \text{αν } p \in \mathcal{P}_\infty(B(H)) \text{ για κάποιο } n \text{ και } \dim_{\mathbb{C}}(p(H^n)) = +\infty \end{cases}$$

Παρατηρούμε πως η $\dim$ είναι προσθετική, δηλαδή $\dim(p \oplus q) = \dim(p) + \dim(q)$ για κάθε $p, q \in \mathcal{P}_\infty(B(H))$. Πράγματι έστω ότι $p \in \mathcal{P}_n(B(H))$ και $q \in \mathcal{P}_m(B(H))$ για κάποια n, m ώστε $p(H^n)$ και $q(H^m)$ να είναι πεπερασμένης διάστασης. Επειδή το $p \oplus q$ θα είναι ένας block διαγώνιος πίνακας του $\mathcal{P}_{n+m}(B(H))$, τότε λόγω του τρόπου ορισμού του ισομορφισμού μεταξύ των $M_n(B(H))$ και $B(H^n)$, θα αντιστοιχεί σε έναν τελεστή του $\mathcal{P}(B(H^{n+m}))$ για τον οποίο ισχύει πως

$$\dim_{\mathbb{C}}(p \oplus q)(H^{n+m}) = \dim_{\mathbb{C}}(p(H^n)) + \dim_{\mathbb{C}}(q(H^m)).$$

Στην περίπτωση που για κάποιο από τα $r \in \mathcal{P}_\infty(A)$ ισχύει πως $\dim_{\mathbb{C}}(r(H^\kappa)) = +\infty$ για κάποιο κ , επειδή $\infty + x = \infty$ για κάθε $x \in \{0, 1, \dots, \infty\}$, έπεται πως $\dim(r \oplus s) = \dim(r) + \dim(s)$ για κάθε $s \in \mathcal{P}(M_n(\tilde{A}))$.

Ορίζουμε $d : \mathcal{D}(B(H)) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \infty\}$, $[p]_{\mathcal{D}} \mapsto \dim(p)$, για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(B(H))$.

Ισχυρισμός. Έστω H ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και p, q δύο προβολές της $B(H)$. Τότε ισχύει πως

$$p \sim q \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}}(p(H)) = \dim_{\mathbb{C}}(q(H))$$

Απόδειξη Ισχυρισμού. Αν $\dim_{\mathbb{C}}(p(H)) = \dim_{\mathbb{C}}(q(H))$, τότε υπάρχουν ορθοκανονικές βάσεις $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ και $\Gamma = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ των χώρων Hilbert $p(H)$ και $q(H)$ αντίστοιχα, καθώς και μια γραμμική απεικόνιση $v : p(H) \rightarrow q(H)$ η οποία απεικονίζει την B στην Γ . Οι B και Γ επεκτείνονται σε ορθοκανονικές βάσεις του H και άρα υπάρχει ένας unitary τελεστής u στην $B(H)$ ώστε $u|_{p(H)} = v$. Τότε $upu^* = q$, δηλαδή $p \sim_u q$ στο $\mathcal{P}(B(H))$ και άρα από την Πρόταση 1.3.17 έπεται πως $p \sim q$.

Αντίστροφα αν $p \sim q$ τότε υπάρχει μια μερική ισομετρία $v \in B(H)$ ώστε $p = v^*v$ και $q = vv^*$. Προφανώς από το Σχόλιο 1.3.10 έπεται πως $\dim_{\mathbb{C}}(p(H)) = \dim_{\mathbb{C}}(q(H))$. $\square$

Από τον Ισχυρισμό έπεται πως η d είναι καλά ορισμένη και 1-1. Προφανώς η d θα είναι προσθετική και μάλιστα επί. Πράγματι αν $n \in \mathbb{N}$, τότε θεωρούμε ένα διανυσματικό υπόχωρο K του H διάστασης n . Θεωρούμε την προβολή επί του K , έστω p αυτή. Τότε $d([p]_{\mathcal{D}}) = \dim_{\mathbb{C}}(p(H)) = n$. Για την περίπτωση του ∞ θεωρώ την προβολή $I : H \rightarrow H, x \mapsto x$. Προφανώς $d([I]_{\mathcal{D}}) = \infty$.

Αφού λοιπόν η d είναι ισομορφισμός αβελιανών ημιομάδων, το ίδιο θα ισχύει για τις ομάδες $K_0(B(H))$ και $G(\{0, 1, 2, \dots, \infty\})$. Επομένως από το Παράδειγμα 2.1.3-2 έχουμε πως $K_0(B(H)) = \{0\}$. $\square$

Λήμμα 2.2.7. Αν X ένας συμπαγής χώρος Hausdorff, τότε οι C^* -άλγεβρες $C(X, M_n(\mathbb{C}))$ και $M_n(C(X))$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Όπως είδαμε στον Ορισμό 1.1.9 και την Παρατήρηση 1.1.34 οι άλγεβρες $C(X, M_n(\mathbb{C}))$ και $M_n(C(X))$ έχουν δομή C^* -άλγεβρας. Παρατηρούμε πως μια απεικόνιση $f : X \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε $1 \leq i, j \leq n$ η απεικόνιση $f_{ij} : X \rightarrow \mathbb{C}$ με $f_{ij}(x) := \pi_{ij}(f(x))$ είναι συνεχής. Η απεικόνιση $\Omega : C(X, M_n(\mathbb{C})) \rightarrow M_n(C(X))$ όπου $\Omega(f) := (f_{ij})_{i,j}$ για κάθε $f \in C(X, M_n(\mathbb{C}))$ είναι $*$ -ισομορφισμός. $\square$

Πρόταση 2.2.8. Έστω X ένας συμπαγής χώρος Hausdorff. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει επιμορφισμός $\phi_x : K_0(C(X)) \rightarrow \mathbb{Z}$ ώστε αν $p \in \mathcal{P}_n(C(X))$ για κάποιο n να ισχύει πως $\phi_x([p]_0) = \overline{Tr}(p(x))$.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε πως $C(X, M_n(\mathbb{C}))$ και $M_n(C(X))$ είναι ισόμορφες για κάθε n . Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε $\tau_x : C(X) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(x)$. Τότε το τ_x είναι trace επί της $C(X)$ και άρα από την Λήμμα 2.2.2 (i) για κάθε n υπάρχει trace $\tau_{x,n}$ επί της $M_n(C(X))$ ώστε

$$\tau_{x,n}((f_{ij})_{i,j}) = \sum_{i=1}^n \tau_x(f_{ii}) = \sum_{i=1}^n f_{ii}(x), \quad \forall (f_{ij})_{i,j} \in M_n(C(X)).$$

Επομένως αν $p \in \mathcal{P}_n(C(X)) \equiv \mathcal{P}(C(X, M_n(\mathbb{C})))$, τότε $\tau_{x,n}(p) = \overline{Tr}(p(x))$. Θεωρούμε τον ομομορφισμό $K_0(\tau_x) : K_0(C(X)) \rightarrow \mathbb{C}$. Τότε έχουμε

$$K_0(\tau_x)([p]_0) = \overline{Tr}(p(x)), \quad \forall p \in \mathcal{P}_{\infty}(C(X))$$

Παρατηρούμε πως αν $p \in \mathcal{P}(C(X, M_n(\mathbb{C})))$ τότε το $p(x) \in \mathcal{P}(M_n(\mathbb{C}))$ και άρα $K_0(\tau_x)([p]_0) \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $Im K_0(\tau_x) \subseteq \mathbb{Z}$ και επειδή $K_0(\tau_x)([1_{C(X)}]_0) = 1_{C(X)}(x) = 1$ έχουμε ισότητα. $\square$

Παρατήρηση 2.2.9. Αν επιπλέον υποθέσουμε πως ο X είναι συνεκτικός, τότε ο επιμορφισμός $K_0(\tau_x)$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής του x . Πράγματι αν $n \in \mathbb{N}$ και $p \in \mathcal{P}_n(C(X))$, τότε θεωρούμε την απεικόνιση $\theta_p : X \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \text{Tr}(p(x))$. Προφανώς η θ_p είναι συνεχής ως σύνθεση τέτοιων και επειδή από την υπόθεση ο X είναι συνεκτικός, έπεται πως η θ_p θα είναι σταθερή. Συνεπώς επιλέγουμε τυχαία ένα $x \in X$ και θέτουμε $\phi := K_0(\tau_x)$.

2.3 Η ομάδα K_0 για C^* -άλγεβρες χωρίς απαραίτητα μονάδα

Προκειμένου να επεκτείνουμε τον ορισμό της ομάδας K_0 για C^* -άλγεβρες χωρίς μονάδα είναι απαραίτητο να αποδείξουμε μια βασική ιδιότητά της. (Λήμμα 2.3.5)

Ορισμός 2.3.1. Δύο $*$ -ομομορφισμοί $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ θα λέγονται ορθογώνιοι μεταξύ τους αν $\varphi(x)\psi(y) = 0$ για κάθε $x, y \in A$.

Παρατήρηση 2.3.2. Έστω A, B C^* -άλγεβρες με μονάδα και $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ δύο $*$ -ομομορφισμοί ορθογώνιοι μεταξύ τους. Τότε η $\varphi + \psi : A \rightarrow B$ είναι $*$ -ομομορφισμός και μάλιστα ισχύει πως $K_0(\varphi + \psi) = K_0(\varphi) + K_0(\psi)$.

Απόδειξη. Προφανώς για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζονται οι $(\varphi + \psi)_n, \varphi_n, \psi_n : M_n(A) \rightarrow M_n(B)$ όπως στην Παρατήρηση 2.1.13. Τότε $(\varphi + \psi)_n = \varphi_n + \psi_n$ και άρα αν $p \in \mathcal{P}_n(A)$ για κάποιο n , έχουμε

$$K_0(\varphi + \psi)([p]_0) = [\varphi_n(p) + \psi_n(p)]_0 = [\varphi_n(p)]_0 + [\psi_n(p)]_0 = K_0(\varphi) + K_0(\psi)([p]_0).$$

Επομένως από την standard picture της K_0 (Πρόταση 2.1.10) έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Ορισμός 2.3.3. Κατά αναλογία του Ορισμού 1.1.18 έχουμε ακριβείς, βραχείες ακριβείς και *split exact* ακολουθίες και στην περίπτωση των ομάδων. Απλά τώρα αντί για C^* -άλγεβρες και $*$ -ομομορφισμούς έχουμε ομάδες και ομομορφισμούς ομάδων.

Σχόλιο 2.3.4. Αν η ακολουθία

$$0 \longrightarrow H \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} K \longrightarrow 0$$

είναι μια *split exact* ακολουθία αβελιανών ομάδων, τότε η G θα είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα των H και K .

Λήμμα 2.3.5. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα, τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightarrow[\frac{\pi}{\lambda}]{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

είναι *split exact* και μάλιστα επάγει μια *split exact* ακολουθία

$$0 \longrightarrow K_0(A) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(\tilde{A}) \xrightarrow[\frac{K_0(\lambda)}{K_0(\pi)}]{K_0(\pi)} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Απόδειξη. Εφ' όσον A έχει μονάδα θεωρούμε το $f = (-1_A, 1) \in \tilde{A}$. Υπενθυμίζουμε πως η f είναι προβολή και μάλιστα $\tilde{A} = \iota(A) \oplus \mathbb{C}f$ ως διανυσματικοί χώροι. Συγκεκριμένα $\iota(A) \cap \mathbb{C}f = \{0\}$ και αν $z = (a, \mu) \in \tilde{A}$ τότε $(a, \mu) = (a + \mu 1_A, 0) + \mu f$. Ορίζουμε $\lambda' : \mathbb{C} \rightarrow \tilde{A}, \kappa \mapsto \kappa f$ και $\mu : \tilde{A} \rightarrow A, (a, \kappa) \mapsto a$. Οι λ', μ είναι *-ομομορφισμοί, επομένως έχουμε τα εξής:

$$1. \pi \circ \iota = 0, \quad 2. \pi \circ \lambda = Id_{\mathbb{C}} \quad 3. \mu \circ \iota = Id_A \quad 4. \iota \circ \mu + \lambda' \circ \pi = Id_{\tilde{A}}$$

Από τις 1,2 έπεται πως η ακολουθία είναι split exact. Τώρα παρατηρούμε πως $\iota \circ \mu$ και $\lambda' \circ \pi$ είναι ορθογώνιοι μεταξύ τους και άρα από το προηγούμενο Λήμμα, τις 1,2,3,4 και Functoriality της K_0 προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις.

1. $K_0(\pi) \circ K_0(\iota) = 0$
2. $K_0(\pi) \circ K_0(\lambda) = Id_{K_0(\mathbb{C})}$
3. $K_0(\mu) \circ K_0(\iota) = Id_{K_0(A)}$
4. $K_0(\iota) \circ K_0(\mu) + K_0(\lambda') \circ K_0(\pi) = Id_{K_0(\tilde{A})}$

Από τις 1.,2.,3.,4. έχουμε πως και η δεύτερη ακολουθία είναι split exact. □

Όπως θα δούμε στην παράγραφο 2.4, το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και για C^* -άλγεβρες χωρίς μονάδα. Μάλιστα ισχύει πως η επαγόμενη ακολουθία (μέσω της K_0) μιας βραχείας ακριβούς ακολουθίας C^* -αλγεβρών (με ή χωρίς μονάδα) είναι και αυτή βραχεία ακριβής.

Ορισμός 2.3.6. Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Θεωρούμε την split exact ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightleftharpoons[\lambda]{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

και ορίζουμε $K_0(A) := Ker(K_0(\pi))$, όπου $K_0(\pi) : K_0(\tilde{A}) \rightarrow K_0(\mathbb{C})$ και $K_0(\tilde{A})$ είναι η ομάδα που προκύπτει από τον Ορισμό 2.1.7.

Παρατήρηση 2.3.7. (i) Προφανώς η $K_0(A)$ είναι αβελιανή ομάδα ως υποομάδα της $K_0(\tilde{A})$. Επίσης αν $p \in \mathcal{P}_{\infty}(A)$ τότε (ταυτίζοντας το p με το $(p, 0)$ στην $\tilde{A}$), ορίζεται καλώς η εξής απεικόνιση : $\mathcal{P}_{\infty}(A) \rightarrow K_0(\tilde{A}), p \mapsto [p]_0$.

(ii) Ανεξάρτητα από το αν η A έχει μονάδα, υπάρχει μια βραχεία ακριβής ακολουθία της μορφής

$$0 \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{K_0(\pi)} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

(iii) Αν η A έχει μονάδα, τότε $K_0(A) = Ker(K_0(\pi))$.

Απόδειξη. (i) Πράγματι αν $p \in \mathcal{P}_{\infty}(A)$, τότε $K_0(\pi)([p]_0) = [\pi(p)]_0 = 0$.

(ii) Αν η A έχει μονάδα, η απεικόνιση : $K_0(A) \rightarrow K_0(\tilde{A})$ λόγω του Λήμματος 2.3.5 θα είναι η $K_0(\iota)$, όπου $\iota : A \rightarrow \tilde{A}, a \mapsto (a, 0)$. Διαφορετικά θα είναι ο εγκλεισμός : $K_0(A) \rightarrow K_0(\tilde{A}), z \mapsto z$.

(iii) Από το (ii) έπεται πως $K_0(A) \simeq Im(K_0(\iota)) = Ker(K_0(\pi))$. □

Ορισμός 2.3.8. Έστω A, B C^* -άλγεβρες και $\varphi : A \rightarrow B$ ένας $*$ -ομομορφισμός. Θεωρούμε την $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$, $(a, 0) \mapsto (\varphi(a), 0)$ και το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\iota_A} & \tilde{A} & \xrightarrow{\pi_A} & \mathbb{C} \\ \varphi \downarrow & & \tilde{\varphi} \downarrow & & \parallel \\ B & \xrightarrow{\iota_B} & \tilde{B} & \xrightarrow{\pi_B} & \mathbb{C} \end{array}.$$

Τότε από *Functoriality* της K_0 για C^* -άλγεβρες με μονάδα, έπεται πως στο διάγραμμα που ακολουθεί το δεξιά τετράγωνο είναι μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A) & \longrightarrow & K_0(\tilde{A}) & \xrightarrow{K_0(\pi_A)} & K_0(\mathbb{C}) \\ K_0(\varphi) \downarrow & & \downarrow K_0(\tilde{\varphi}) & & \parallel \\ K_0(B) & \longrightarrow & K_0(\tilde{B}) & \xrightarrow{K_0(\pi_B)} & K_0(\mathbb{C}) \end{array}$$

Επιπλέον υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $K_0(\varphi) : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ έτσι ώστε ο $K_0(\varphi)$ να κάνει ολόκληρο το διάγραμμα μεταθετικό και ταυτόχρονα να είναι ο περιορισμός του $K_0(\tilde{\varphi})$ στην $K_0(A)$. Πράγματι ανεξάρτητα από το αν η A έχει μονάδα, ορίζουμε $K_0(\varphi) := K_0(\tilde{\varphi})|_{K_0(A)}$. Τότε αν $z \in K_0(A)$ έχουμε

$$0 = K_0(\pi_A)(z) = K_0(\pi_B) \circ K_0(\tilde{\varphi})(z) = K_0(\pi_B) \circ K_0(\varphi)(z)$$

και άρα $K_0(\varphi)(z) \in K_0(B)$. Επομένως η $K_0(\varphi)$ είναι καλά ορισμένη και είναι η μοναδική που κάνει μεταθετικό ολόκληρο το διάγραμμα. Κατ' αναλογία του Ορισμού 2.1.14 η απεικόνιση αυτή θα λέγεται επαγόμενος ομομορφισμός της φ στις ομάδες K_0 .

Παρατήρηση 2.3.9. Ο παραπάνω Ορισμός επεκτείνει τον Ορισμό 2.1.14 και μάλιστα και στην περίπτωση που η A δεν έχει μονάδα, ισχύει ότι

$$K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0, \quad \forall p \in \mathcal{P}_\infty(A).$$

Απόδειξη. Πράγματι αν οι A, B έχουν μονάδα, από το (ii) της Παρατήρησης 2.3.7 και την Πρόταση 2.1.15 έπεται πως ο $K_0(\varphi)$ που προκύπτει από τον Ορισμό 2.1.14 είναι ο επαγόμενος ομομορφισμός της φ σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3.8. Τώρα ανεξάρτητα από το αν η A έχει μονάδα, ταυτίζοντας κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ με το $(p, 0)$ στην $\mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$, έχουμε πως $K_0(\varphi)([p]_0) = [\tilde{\varphi}(p)]_0 = [\varphi(p)]_0$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$. $\square$

Πρόταση 2.3.10. (*Functoriality* της K_0) Έστω A, B, C C^* -άλγεβρες και $Id_A, Id_{K_0(A)}$ όπως στην Πρόταση 2.1.15. Τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) $K_0(Id_A) = Id_{K_0(A)}$.
- (ii) Αν $\varphi : A \rightarrow B$, $\psi : B \rightarrow C$ $*$ -ομομορφισμοί, τότε $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$.
- (iii) Αν η $A = \{0\}$ είναι η τετριμμένη C^* -άλγεβρα χωρίς μονάδα, τότε $K_0(A) = \{0\}$, όπου $\{0\}$ είναι η τετριμμένη αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη. (i) Επειδή $\widetilde{Id_A} = Id_{\tilde{A}}$ έπεται πως $K_0(\widetilde{Id_A}) = Id_{K_0(\tilde{A})}$ και άρα $K_0(Id_A) = Id_{K_0(A)}$.

(ii) Πάλι επειδή $\widetilde{\psi \circ \varphi} = \widetilde{\psi} \circ \widetilde{\varphi}$ έπεται πως $K_0(\widetilde{\psi \circ \varphi}) = K_0(\widetilde{\psi}) \circ K_0(\widetilde{\varphi})$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(iii) Προφανώς $\widetilde{\{0\}} = \mathbb{C}$ και άρα η $\pi : \widetilde{\{0\}} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι η $Id_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Συνεπώς $K_0(\{0\}) = Ker(K_0(Id_{\mathbb{C}})) = \{0\}$.

□

Ορισμός 2.3.11. Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Θεωρούμε την *split exact ακολουθία*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightarrow[\lambda]{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Θεωρούμε τον $*$ -ομομορφισμό $s := \lambda \circ \pi : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$. Τότε

(i) $\pi \circ s(x) = \pi(x)$ και $x - s(x) \in \iota(A) \simeq A, \forall x \in \tilde{A}$.

(ii) $s(A) = \{\mu 1_{\tilde{A}} : \mu \in \mathbb{C}\}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζεται η $s_n : M_n(\tilde{A}) \rightarrow M_n(\tilde{A})$, με $s_n((a_{ij})_{i,j}) = (s(a_{ij}))_{i,j}, \forall (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\tilde{A})$. Ο s_n είναι $*$ -ομομορφισμός και μάλιστα

(i) $s_n(A) = M_n(\{\mu 1_{\tilde{A}} : \mu \in \mathbb{C}\}) \simeq M_n(\mathbb{C})$ και

(ii) $z - s_n(z) \in M_n(\iota(A)) \simeq M_n(A)$.

Χάρην απλοποίησης του συμβολισμού θα συμβολίζουμε τις παραπάνω απεικονίσεις με s αντί για s_n . Επιπλέον παρατηρούμε πως αν $\varphi : A \rightarrow B$ είναι ένας $*$ -ομομορφισμός και $\tilde{\varphi}_n : M_n(\tilde{A}) \rightarrow M_n(\tilde{B})$ η απεικόνιση που προκύπτει από τον Ορισμό 1.1.17 και την απόδειξη της Πρότασης 2.1.13, τότε ισχύει πως $\tilde{\varphi}_n \circ s = s \circ \tilde{\varphi}_n$ για κάθε n .

Ορισμός 2.3.12. Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Ένα $x \in M_n(\tilde{A})$ θα λέγεται βαθμωτό αν $s(x) = x$.

Πρόταση 2.3.13. (*H standard picture της K_0*)

Έστω A μια C^* -άλγεβρα τότε

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in \mathcal{P}_{\infty}(\tilde{A})\}.$$

Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

(i) Για κάθε $p, q \in \mathcal{P}_{\infty}(\tilde{A})$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) $[p]_0 - [s(p)]_0 = [q]_0 - [s(q)]_0$,

(b) υπάρχουν $k, l \in \mathbb{N}$ ώστε $p \oplus 1_k \sim_0 q \oplus 1_l$ στο $\mathcal{P}_{\infty}(\tilde{A})$,

(c) υπάρχουν βαθμωτά $r_1, r_2 \in \mathcal{P}(M_n(\tilde{A}))$ ώστε $p \oplus r_1 \sim_0 q \oplus r_2$.

(ii) Αν $p \in \mathcal{P}_{\infty}(\tilde{A})$ με $[p]_0 - [s(p)]_0 = 0$, τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $p \oplus 1_m \sim_0 s(p) \oplus 1_m$.

(iii) Αν $\varphi : A \rightarrow B$ είναι $*$ -ομομορφισμός, τότε για κάθε $p \in \mathcal{P}_{\infty}(\tilde{A})$

$$K_0(\varphi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\tilde{\varphi}(p)]_0 - [s(\tilde{\varphi}(p))]_0.$$

Απόδειξη. Αν $p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$, τότε

$$K_0(\pi)([p]_0 - [s(p)]_0) = [\pi(p)]_0 - [\pi \circ s(p)]_0 = [\pi(p)]_0 - [\pi(p)]_0 = 0.$$

Επομένως $[p]_0 - [s(p)]_0 \in K_0(A)$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$.

Αντίθετα αν $g \in K_0(A) \subseteq K_0(\tilde{A})$, τότε υπάρχουν $e, f \in \mathcal{P}_n(\tilde{A})$ ώστε $g = [e]_0 - [f]_0$. Θέτουμε

$$p = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 1_n - f \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$$

Τότε τα $p, q \in \mathcal{P}_{2n}(\tilde{A})$ και

$$[p]_0 - [q]_0 = [e]_0 + [1_n - f]_0 - [1_n]_0 = [g]_0 - [f]_0 = g$$

Επειδή $s(q) = q$ και $g \in K_0(A)$, έπεται πως

$$[s(p)]_0 - [q]_0 = [s(p)]_0 - [s(q)]_0 = K_0(s)(g) = (K_0(\lambda) \circ K_0(\pi))(g) = 0$$

δηλαδή $[s(p)]_0 = [q]_0$ και άρα $g = [p]_0 - [s(p)]_0$. Επομένως

$$K_0(A) = \{[p]_0 - [s(p)]_0 : p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})\}.$$

Για τα (i), (ii) και (iii) βλέπε [21, Πρόταση 4.2.2]. □

2.4 Ιδιότητες της K_0

Πρόταση 2.4.1. *Αν A είναι μια διαχωρίσιμη C^* -άλγεβρα, τότε η $K_0(A)$ είναι αριθμήσιμη αβελιανή ομάδα.*

Απόδειξη. Επειδή $K_0(A)$ είναι υποομάδα της $K_0(\tilde{A})$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η A έχει μονάδα. Τότε για να αποδείξουμε πως η $K_0(A)$ είναι αριθμήσιμη, αρκεί να αποδείξουμε ότι η ημιομάδα $\mathcal{D}(A)$ είναι αριθμήσιμη. Ισοδύναμα αρκεί να αποδείξουμε πως το σύνολο $\mathcal{P}_n(A)/\sim_0$ είναι αριθμήσιμο για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Πράγματι αν $n \geq 1$, επειδή από την υπόθεση έχουμε πως η A είναι διαχωρίσιμη, έπεται πως η $M_n(A)$ είναι διαχωρίσιμη και άρα ο $\mathcal{P}_n(A)$ είναι διαχωρίσιμος. Έστω λοιπόν, $\{p_m : m \in \mathbb{N}\}$, μια αριθμήσιμη οικογένεια στοιχείων της $\mathcal{P}_n(A)$ με $\overline{\{p_m : m \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{P}_n(A)$. Επομένως αν $q \in \mathcal{P}_n(A)$, τότε υπάρχει m ώστε $\|q - p_m\| < 1$. Όμως τότε από την Πρόταση 1.3.14 έπεται πως $q \sim_h p_m$ στην $M_n(A)$ και άρα $q \sim_0 p_m$. Συνεπώς $\mathcal{P}_n(A)/\sim_0 = \{[p_m]_{\mathcal{D}} : m \in \mathbb{N}\}$ και αφού το n τυχόν έχουμε το ζητούμενο. □

Μια επιπλέον σημαντική ιδιότητα της ομάδας K_0 είναι πως είναι ομοτοπικά αναλλοίωτη. Συγκεκριμένα δύο ομοτοπικά ισοδύναμες C^* -άλγεβρες θα έχουν ισόμορφες K_0 -ομάδες. (Πρόταση 2.4.5) Η ομοτοπική ισοδυναμία μεταξύ C^* -αλγεβρών ορίζεται ανάλογα με την ομοτοπική ισοδυναμία μεταξύ τοπολογικών χώρων.

Ορισμός 2.4.2. Έστω A, B C^* -άλγεβρες και $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ $*$ -ομομορφισμοί. Οι φ, ψ θα λέγονται ομοτοπικοί και θα γράφουμε $\varphi \sim_h \psi$ αν υπάρχει $F : [0, 1] \times A \rightarrow B$ ώστε

(i) $F(t, \cdot) : A \rightarrow B$ είναι $*$ -ομομορφισμός, $\forall t \in [0, 1]$.

(ii) $F(\cdot, a) : [0, 1] \rightarrow B$ είναι συνεχής, $\forall a \in A$.

(iii) $F(0, t) = \varphi(t)$ και $F(1, t) = \psi(t)$, $\forall t \in [0, 1]$.

Ορισμός 2.4.3. Αν A, B C^* -άλγεβρες, τότε οι A, B θα λέγονται ομοτοπικά ισοδύναμες αν υπάρχουν $\psi : A \rightarrow B$ και $\varphi : B \rightarrow A$ *-ομομορφισμοί ώστε $\varphi \circ \psi \sim_h Id_A$ και $\psi \circ \varphi \sim_h Id_B$. Σε αυτήν την περίπτωση θα λέμε ότι $A \xrightarrow{\psi} B \xrightarrow{\varphi} A$ είναι ομοτοπία μεταξύ των A, B .

Προφανώς αν δύο C^* -άλγεβρες είναι ισόμορφες, τότε θα είναι και ομοτοπικά ισοδύναμες. Πράγματι αν $\varphi : A \rightarrow B$ είναι ένας *-ισομορφισμός, τότε οι φ και φ^{-1} δίνουν μια ομοτοπία μεταξύ των A, B . Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Το Πρόσχημα 2.4.8 και τα παραδείγματα που ακολουθούν επιβεβαιώνουν αυτόν τον ισχυρισμό.

Παραδείγματα 2.4.4. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα.

1. Ο κώνος της A , $CA := \{f \in C([0, 1], A) : f(0) = 0_A\}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμος με την $\{\mathcal{O}\}$, όπου $\mathcal{O} : [0, 1] \rightarrow A, t \mapsto 0_A$.

Ορίζουμε $G : [0, 1] \times CA \rightarrow CA$ με $G(t, f)(s) := f(st)$ για κάθε $f \in CA$ και $s, t \in [0, 1]$. Η G ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii) και (iii) του Ορισμού 2.4.2 και άρα $Id_{CA} \sim_h c_{\mathcal{O}}$ όπου $c_{\mathcal{O}} : CA \rightarrow CA, f \mapsto \mathcal{O}$. Τότε $CA \xrightarrow{c_{\mathcal{O}}} \{\mathcal{O}\} \xrightarrow{\iota} CA$ είναι μια ομοτοπία μεταξύ των $\{\mathcal{O}\}$ και CA .

2. Αν η A είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με το $\{0_A\}$, τότε το *suspension* της A , $SA := \{f \in CA : f(1) = 0\}$ θα είναι ομοτοπικά ισοδύναμη με την $\{\mathcal{O}\}$.

Από την υπόθεση έπεται πως υπάρχει $G : [0, 1] \times A \rightarrow A$ ώστε $G(\cdot, a)$ είναι συνεχής για κάθε $a \in A$, η $G(t, \cdot)$ είναι *-ομομορφισμός για κάθε $t \in [0, 1]$, $G(0, \cdot) = c_{0_A}$ όπου $c_{0_A} : A \rightarrow A, a \mapsto 0_A$ και $G(1, \cdot) = Id_A$. Ορίζουμε

$$H : [0, 1] \times SA \rightarrow SA, H(t, f)(s) := G(t, f(s)), \text{ για κάθε } f \in SA \text{ και } s, t \in [0, 1].$$

Η H είναι καλά ορισμένη. Πράγματι αν $t \in [0, 1]$, τότε επειδή ο $G(t, \cdot)$ είναι *-ομομορφισμός έχουμε πως $G(t, f)(0) = G(t, f)(1) = G(t, 0_A) = 0_A$ για κάθε $f \in SA$. Επίσης η $G(t, f)$ είναι συνεχής για κάθε $(t, f) \in [0, 1] \times SA$ ως σύνθεση συνεχών. Εύκολα προκύπτει πως $Id_{SA} \sim_h c_{\mathcal{O}}$ μέσω της H και άρα οι SA και $\{\mathcal{O}\}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμες.

Πρόταση 2.4.5. Για κάθε δύο C^* -άλγεβρες A, B ισχύουν τα εξής:

- (i) Αν $\psi, \varphi : A \rightarrow B$ είναι δύο ομοτοπικοί *-ομομορφισμοί, τότε $K_0(\psi) = K_0(\varphi)$.
- (ii) Αν οι A, B είναι ομοτοπικά ισοδύναμες τότε $K_0(A) \simeq K_0(B)$. Συγκεκριμένα αν οι φ, ψ είναι *-ομομορφισμοί έτσι ώστε $\eta A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$ να είναι ομοτοπία μεταξύ των A, B , τότε οι $K_0(\varphi) : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ και $K_0(\psi) : K_0(B) \rightarrow K_0(A)$ είναι ισομορφισμοί και μάλιστα $K_0(\varphi)^{-1} = K_0(\psi)$.

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε πως οι A, B έχουν μονάδα.

- (i) Έστω $\psi, \varphi : A \rightarrow B$ ομοτοπικοί *-ομομορφισμοί, δηλαδή υπάρχει $F : [0, 1] \times A \rightarrow B$ όπως στον Ορισμό 2.4.2. Για κάθε $t \in [0, 1]$ και $n \in \mathbb{N}$, η $F(t, \cdot)$ επάγει με τον συνήθη τρόπο ένα *-ομομορφισμό $F_n(t, \cdot) : M_n(A) \rightarrow M_n(B)$. Ορίζοντας λοιπόν την απεικόνιση

$$F_n : [0, 1] \times M_n(A) \rightarrow M_n(B), \text{ με } (t, (a_{ij})_{i,j}) \mapsto F_n(t, (a_{ij})_{i,j})$$

προκύπτει πως $\varphi_n \sim_h \psi_n$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αρκεί μόνο να αποδείξουμε πως η $F_n(\cdot, (a_{ij})_{i,j})$ είναι συνεχής. Πράγματι αν $(a_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$ και $t_m \xrightarrow{|\cdot|} t \in [0, 1]$, τότε

$$\begin{aligned} \|F_n(t_m, (a_{ij})_{i,j}) - F_n(t, (a_{ij})_{i,j})\| &= \|(F(t_m, a_{i,j}))_{i,j} - (F(t, a_{i,j}))_{i,j}\| \\ &\leq \sum_{i,j} \|F(t_m, a_{i,j}) - F(t, a_{i,j})\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Επίσης παρατηρούμε πως $F_n(\cdot, \mathcal{P}_n(A)) \subseteq \mathcal{P}_n(B)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς αν $p \in \mathcal{P}_n(A)$ έχουμε πως $F_n(0, p) \sim_h F_n(1, p)$ στο $\mathcal{P}_n(B)$. Δηλαδή $\varphi_n(p) \sim_h \psi_n(p)$ και άρα $\varphi_n(p) \sim \psi_n(p)$. Τελικά για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$ ισχύει πως $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi_n(p)]_0 = [\psi_n(p)]_0 = K_0(\psi)([p]_0)$ και άρα $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$.

(ii) Αν οι A, B είναι ομοτοπικά ισοδύναμες και $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} A$ η ομοτοπία μεταξύ των A, B , τότε από το (i) έπεται πως $K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(Id_A)$ και $K_0(\varphi \circ \psi) = K_0(Id_B)$. Επομένως από Functoriality της K_0 για C^* -άλγεβρες με μονάδα έπεται το ζητούμενο.

Τώρα στην περίπτωση που δεν έχουν και οι δύο μονάδα και $\varphi \sim_h \psi$, τότε $\tilde{\varphi} \sim_h \tilde{\psi}$ και άρα $K_0(\tilde{\varphi}) = K_0(\tilde{\psi})$. Επομένως λόγω του τρόπου ορισμού των $K_0(\varphi)$ και $K_0(\psi)$ (Ορισμός 2.3.8) ισχύει το (i). Το (ii) προκύπτει όπως στην περίπτωση που οι A, B έχουν μονάδα. $\square$

Πόρισμα 2.4.6. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα, τότε οι ομάδες $K_0(CA)$ και $\{0\}$ είναι ισόμορφες.

Ορισμός 2.4.7. Ένας χώρος Hausdorff X θα λέγεται συσταλτός (contractible), αν υπάρχει $x_0 \in X$ και $\alpha : [0, 1] \times X \rightarrow X$ συνεχής ώστε $\alpha(1, \cdot) = Id_X$ και $\alpha(0, \cdot) = c_{x_0}$, όπου $c_{x_0} : X \rightarrow X, x \mapsto x_0$. Δύο κλασσικά παραδείγματα συσταλών τοπολογικών χώρων είναι το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Περισσότερα για συσταλτούς τοπολογικούς χώρους βλέπε στο [14, σελ 4].

Πόρισμα 2.4.8. Έστω X ένας συμπαγής και συνεκτικός χώρος Hausdorff. Αν ο X είναι συσταλτός, τότε $K_0(C(X)) = \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Αν ο X είναι συσταλτός, τότε υπάρχει $x_0 \in X$ και $\alpha : [0, 1] \times X \rightarrow X$ συνεχής ώστε $\alpha(1, \cdot) = Id_X$ και $\alpha(0, \cdot) = c_{x_0}$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] \times C(X) &\rightarrow C(X) \\ (t, f) &\mapsto \varphi(t, f) : X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ όπου } \varphi(t, f)(x) := f(\alpha(t, x)), \forall x \in X. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε πως η $\varphi(\cdot, f)$ είναι συνεχής για κάθε $f \in C(X)$ και ο $\varphi(t, \cdot)$ είναι $*$ -ομομορφισμός για κάθε $t \in [0, 1]$. Επομένως $Id_{C(X)} = \varphi(1, \cdot) \sim_h \varphi(0, \cdot)$, όπου $\varphi(0, f)(x) = f(x_0)$, για καθε $f \in C(X)$ και $x \in X$.

Ορίζουμε επίσης $\psi : \mathbb{C} \rightarrow C(X)$ και $\omega : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ με $\lambda \xrightarrow{\psi} \lambda 1_{C(X)}$ και $f \xrightarrow{\omega} f(x_0)$. Τότε $\omega \circ \psi = Id_{\mathbb{C}}$ και $\psi \circ \omega = \varphi(0, \cdot)$. Επομένως

$$C(X) \xrightarrow{\omega} \mathbb{C} \xrightarrow{\psi} C(X)$$

είναι μια ομοτοπία μεταξύ των $C(X)$ και $\mathbb{C}$. Τότε από Functoriality της K_0 και από την Πρόταση 2.4.5 έπεται πως ο $K_0(\omega)$ είναι ισομορφισμός και μάλιστα $K_0(\omega) = K_0(\psi)^{-1}$. Υπενθυμίζουμε

πως $K_0(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$ μέσω της $K_0(Tr)$ και πως από την Πρόταση 2.2.8 υπάρχει ένας επιμορφισμός $\phi : K_0(C(X)) \rightarrow \mathbb{Z}$ ώστε $\phi([p]_0) = \overline{Tr}(p(x))$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Επομένως το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} K_0(C(X)) & & \\ K_0(\omega) \downarrow & \searrow \phi & \\ K_0(\mathbb{C}) & \xrightarrow{K_0(Tr)} & \mathbb{Z} \end{array}$$

είναι μεταθετικό και άρα η απεικόνιση ϕ είναι ισομορφισμός. $\square$

Λήμμα 2.4.9. Έστω A, B δύο C^* -άλγεβρες και $\varphi : A \rightarrow B$ ένας $*$ -ομομορφισμός.

- (i) Αν $g \in \text{Ker}(K_0(\varphi))$, τότε υπάρχει $p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$ για κάποιο n και $u \in \mathcal{U}(M_n(\tilde{B}))$ ώστε $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ και $u\tilde{\varphi}(p)u^* = s(\tilde{\varphi}(p))$.
- (ii) Αν επιπλέον η φ είναι επί, τότε υπάρχει $p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$ ώστε $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ και $\tilde{\varphi}(p) = s(\tilde{\varphi}(p))$.

Απόδειξη. (i) Από την standard picture της K_0 (Πρόταση 2.3.13) υπάρχει $p_1 \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ για κάποιο κ ώστε $g = [p_1]_0 - [s(p_1)]_0$ και $[\tilde{\varphi}(p_1)]_0 = [s(\tilde{\varphi}(p_1))]_0$. Τότε από το (ii) της Πρότασης 2.3.13 υπάρχει m ώστε $\tilde{\varphi}(p_1) \oplus 1_m \sim s(\tilde{\varphi}(p_1)) \oplus 1_m$. Θέτουμε $p_2 = p_1 \oplus 1_m$. Τότε το $p_2 \in \mathcal{P}_{\kappa+m}(\tilde{A})$, $g = [p_2]_0 - [s(p_2)]_0$ και

$$\tilde{\varphi}(p_2) = \tilde{\varphi}(p_1) \oplus 1_m \sim s(\tilde{\varphi}(p_1)) \oplus 1_m = s(\tilde{\varphi}(p_2))$$

Αν πάλι θέσουμε $p = p_2 \oplus 0_{\kappa+m}$, τότε $p \in \mathcal{P}_{2(\kappa+m)}(\tilde{A})$ και $g = [p]_0 - [s(p)]_0$. Επίσης από την Πρόταση 1.3.19 έπεται πως υπάρχει $u \in \mathcal{U}_{2(\kappa+m)}(M_n(\tilde{B}))$ ώστε $u\tilde{\varphi}(p)u^* = s(\tilde{\varphi}(p))$.

- (ii) Βλέπε [21, Λήμμα 4.2.3]. $\square$

Λήμμα 2.4.10. Έστω

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

για βραχεία ακριβής ακολουθία από C^* -άλγεβρες και $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Η απεικόνιση $\tilde{\varphi}_n : M_n(\tilde{I}) \rightarrow M_n(\tilde{A})$ είναι $*$ -μονομορφισμός.
- (ii) Αν $a \in M_n(\tilde{A})$, τότε $a \in \text{Im}\tilde{\varphi}_n$ αν και μόνο αν $\tilde{\psi}_n(a) = s_n(\tilde{\psi}_n(a))$.

Απόδειξη. (i) Αφού η παραπάνω ακολουθία είναι ακριβής, έχουμε πως η φ είναι $*$ -μονομορφισμός. Προφανώς λόγω του τρόπου ορισμού της θα είναι και η $\tilde{\varphi}$ $*$ -μονομορφισμός, άρα και η $\tilde{\varphi}_n$ για κάθε n .

- (ii) Εύκολα προκύπτει πως $\text{Ker}\tilde{\psi} = \text{Im}\tilde{\varphi}$ και άρα $\text{Ker}\tilde{\psi}_n = \text{Im}\tilde{\varphi}_n$ για κάθε n . Επομένως αν $a \in M_n(\tilde{A})$, τότε $\tilde{\psi}_n(a) = 0 = s_n(\tilde{\psi}_n(a))$. Αντίθετα αν για κάποιο $a \in M_n(\tilde{A})$ έχουμε πως $\tilde{\psi}_n(a) = s_n(\tilde{\psi}_n(a))$, τότε $a - s_n(a) \in \text{Ker}\tilde{\psi}_n$ και άρα $a - s_n(a) \in \text{Im}\tilde{\varphi}_n$. Επειδή $s_n(\tilde{A}) = M_n(\{\mu 1_{\tilde{A}} : \mu \in \mathbb{C}\})$ έπεται πως και το $s(a) \in \text{Im}\tilde{\varphi}_n$. Τελικά το $a = a - s(a) + s(a) \in \text{Im}\tilde{\varphi}_n$. $\square$

Πρόταση 2.4.11. (*Half exactness της K_0*)

Έστω

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\psi} B \longrightarrow 0$$

για βραχεία ακριβής ακολουθία από C^* -άλγεβρες. Τότε η ακολουθία

$$K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(B)$$

είναι ακριβής, δηλαδή $Im(K_0(\varphi)) = Ker(K_0(\psi))$.

Απόδειξη. Από Functoriality της K_0 έχουμε πως $K_0(\psi) \circ K_0(\varphi) = K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(0_{A,B}) = 0_{K_0(A), K_0(B)}$ και άρα $Im(K_0(\varphi)) \subseteq Ker(K_0(\psi))$. Αν τώρα $g \in Ker(K_0(\psi))$ τότε από Λήμμα 2.4.9 (ii) υπάρχει $p \in \mathcal{P}_n(\tilde{A})$ ώστε $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ καθώς και $\tilde{\psi}(p) = s(\tilde{\psi}(p))$. Από το Λήμμα 2.4.10 (ii) το $p \in Im(\tilde{\varphi})$ και άρα υπάρχει $e \in M_n(\tilde{I})$ ώστε $\tilde{\varphi}(e) = p$. Από το (i) ίδιου του Λήμματος, έπεται πως η $\tilde{\varphi}$ θα είναι 1-1 και άρα το e είναι προβολή του $M_n(\tilde{I})$. Συνεπώς

$$g = [\tilde{\varphi}(e)] - [s(\tilde{\varphi}(e))]_0 = [\tilde{\varphi}(e)]_0 - [\tilde{\varphi}(s(e))]_0 = K_0(\varphi)([e]_0) \in Im(K_0(\varphi))$$

Επομένως $Im(K_0(\varphi)) = Ker(K_0(\psi))$. □

Πρόταση 2.4.12. (*Split exactness της K_0*)

Έστω

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\varphi} A \xrightleftharpoons[\lambda]{\psi} B \longrightarrow 0$$

για ακολουθία C^* -αλγεβρών η οποία είναι *split exact*, τότε η ακολουθία

$$0 \longrightarrow K_0(I) \xrightarrow{K_0(\varphi)} K_0(A) \xrightleftharpoons[K_0(\lambda)]{K_0(\psi)} K_0(B) \longrightarrow 0$$

είναι *split exact*.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.4.11 έχουμε πως $Im(K_0(\varphi)) = Ker(K_0(\psi))$. Επίσης από Functoriality της K_0 έχουμε πως $Id_{K_0(B)} = K_0(\psi) \circ K_0(\lambda)$ και άρα η $K_0(\psi)$ είναι επί. Μένει λοιπόν να αποδείξουμε ότι ο $K_0(\varphi)$ είναι 1-1.

Πράγματι αν $g \in Ker(K_0(\varphi))$, τότε από το Λήμμα 2.4.9 (i) έπεται πως υπάρχει $p \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{I})$, για κάποιο n και $u \in \mathcal{U}(M_n(\tilde{A}))$ ώστε $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ και $u\tilde{\varphi}(p)u^* = s(\tilde{\varphi}(p))$. Θέτουμε $v = \tilde{\lambda} \circ \tilde{\psi}(u^*)u$. Τότε το $v \in \mathcal{U}(M_n(\tilde{A}))$ και $\tilde{\psi}(v) = 1$. Από το Λήμμα 2.4.10 (ii) υπάρχει $w \in M_n(\tilde{I})$ ώστε $\tilde{\varphi}(w) = v$ και άρα από το (i) του ίδιου Λήμματος το $w \in \mathcal{U}(\tilde{I})$. Πάλι επειδή $\tilde{\varphi}$ 1-1 και

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(wpw^*) &= v\tilde{\varphi}(p)v^* = \tilde{\lambda} \circ \tilde{\psi}(u^*)s(\tilde{\varphi}(p))\tilde{\lambda} \circ \tilde{\psi}(u) \\ &= \tilde{\lambda} \circ \tilde{\psi}(u^*s(\tilde{\varphi}(p))u) = \tilde{\lambda} \circ \tilde{\psi}(\tilde{\varphi}(p)) \\ &= s(\tilde{\varphi}(p)) = \tilde{\varphi}(s(p)) \end{aligned}$$

συνεπάγεται πως $wpw^* = s(p)$, δηλαδή $p \sim_u s(p)$ στο $M_n(\tilde{I})$ και άρα $p \sim s(p)$. Συνεπώς $g = 0$. □

Πόρισμα 2.4.13. Έστω A μια C^* -άλγεβρα, τότε $K_0(\tilde{A}) \simeq K_0(A) \oplus \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Όπως έχουμε δει η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota} \tilde{A} \xrightarrow[\lambda]{\pi} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

είναι split exact επομένως από την προηγούμενη Πρόταση, το Παράδειγμα 2.2.5 και το Σχόλιο 2.3.4 έπεται το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 2.4.14. Έστω A, B C^* -άλγεβρες, τότε η K_0 διατηρεί τα πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα, δηλαδή

$$K_0(A \oplus B) \simeq K_0(A) \oplus K_0(B).$$

Συγκεκριμένα αν $\iota_A : A \rightarrow A \oplus B, a \mapsto (a, 0)$ και $\iota_B : B \rightarrow A \oplus B, b \mapsto (0, b)$, τότε η απεικόνιση $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B) : K_0(A) \oplus K_0(B) \rightarrow K_0(A \oplus B), (g, h) \mapsto K_0(\iota_A)(g) + K_0(\iota_B)(h)$ είναι ένας $*$ -ισομορφισμός.

Απόδειξη. Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_0(A) & \xrightarrow{\alpha} & K_0(A) \oplus K_0(B) & \xrightarrow{\beta} & K_0(B) \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B) & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\iota_A)} & K_0(A \oplus B) & \xrightarrow{K_0(\pi_B)} & K_0(B) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.1)$$

όπου $\alpha : K_0(A) \rightarrow K_0(A) \oplus K_0(B), g \mapsto (g, 0)$, $\beta : K_0(A) \oplus K_0(B) \rightarrow K_0(B), (g, h) \mapsto h$ και $\iota_A : A \rightarrow A \oplus B, a \mapsto (a, 0)$, $\pi_B : A \oplus B \rightarrow B, (a, b) \mapsto b$. Επειδή

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\iota_A} A \oplus B \xrightarrow[\iota_B]{\pi_B} B \longrightarrow 0$$

είναι split exact, από την Πρόταση 2.4.12 έπεται πως η κάτω σειρά του διαγράμματος (2.1) είναι ακριβής. Το ίδιο ισχύει και για την επάνω σειρά λόγω του τρόπου ορισμού των α, β .

Ο $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)$ είναι $*$ -ισομορφισμός. Πράγματι αν $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)(g, h) = (0, 0)$, τότε $K_0(\pi_B) \circ K_0(\iota_A)(g) = -K_0(\pi_B) \circ K_0(\iota_B)(h)$. Από Functoriality λοιπόν της K_0 , έπεται πως $h = 0$. Με όμοιο τρόπο έπεται πως $g = 0$, δηλαδή $(g, h) = (0, 0)$ και άρα $\text{Ker}(K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)) = \{0\}$.

Επίσης αν $z \in K_0(A \oplus B)$ τότε $K_0(\pi_B)(z) \in K_0(B)$. Η β είναι επί, άρα υπάρχει $(g, h) \in K_0(A) \oplus K_0(B)$ ώστε $h = \beta(g, h) = K_0(\pi_B)(z)$. Τότε

$$\begin{aligned} K_0(\pi_B)(z - K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)(g, h)) &= K_0(\pi_B)(z) - K_0(\pi_B \circ \iota_A)(g) - K_0(\pi_B \circ \iota_B)(h) \\ &= K_0(\pi_B) - h = 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή $x = z - K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)(g, h) \in \text{Ker}(K_0(\pi_B)) = \text{Im}(K_0(\iota_A))$. Επομένως υπάρχει $y \in K_0(A)$ ώστε $K_0(\iota_A)(y) = x$, δηλαδή το $z = K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)(g + y, h)$ και άρα η απεικόνιση $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)$ είναι επί. $\square$

Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε πως ο συναρτητής K_0 δεν είναι ακριβής. Το παράδειγμα που ακολουθεί επιβεβαιώνει τον ισχυρισμό αυτό.

Παράδειγμα 2.4.15. Θεωρούμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow C_0((0, 1)) \xrightarrow{\iota} C([0, 1]) \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

όπου $f \xrightarrow{\iota} \tilde{f}, g \xrightarrow{\psi} (g(0), g(1))$ και την επαγόμενη αυτής μέσω του συναρτητή K_0 .

$$0 \longrightarrow K_0(C_0(0, 1))) \xrightarrow{K_0(\iota)} K_0(C([0, 1])) \xrightarrow{K_0(\psi)} K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \longrightarrow 0$$

Η ακολουθία αυτή δεν είναι ακριβής. Πράγματι από το Πρόρισμα 2.4.8 έπεται πως $K_0(C([0, 1])) = \mathbb{Z}$ και από Πρόταση 2.4.14 και το Παράδειγμα 2.2.5 πως $K_0(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Αν η παραπάνω ακολουθία ήταν ακριβής, τότε η $K_0(\psi)$ θα ήταν επί. Κάτι τέτοιο είναι φυσικά αδύνατο.

Πρόταση 2.4.16. (*Stability της K_0*)

Έστω A μια C^* -άλγεβρα και $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, τότε $K_0(A) \simeq K_0(M_n(A))$. Συγκεκριμένα αν θεωρήσουμε τον $*$ -ομομορφισμό

$$\lambda_{n,A} : A \rightarrow M_n(A), \quad a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

έπεται πως επαγόμενος ομομορφισμός $K_0(\lambda_{n,A}) : K_0(A) \rightarrow K_0(M_n(A))$ είναι ισομορφισμός ο-μάδων.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$, τότε θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & \tilde{A} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C} \longrightarrow 0 \\ & & \lambda_{n,A} \downarrow & & \downarrow \lambda_{n,\tilde{A}} & & \downarrow \lambda_{n,\mathbb{C}} \\ 0 & \longrightarrow & M_n(A) & \xrightarrow{\iota_n} & M_n(\tilde{A}) & \xrightarrow{\pi_n} & M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.2)$$

όπου $\lambda_{n,\tilde{A}}, \lambda_{n,\mathbb{C}}$ ορίζονται όπως ο $\lambda_{n,A}$ και $\iota_n((a_{ij})_{i,j}) = (\iota(a_{i,j}))_{i,j}, \pi_n((a_{ij}, \mu_{ij}))_{i,j} = (\mu_{ij})_{i,j}$. Τότε το παραπάνω διάγραμμα θα είναι μεταθετικό. Επίσης και οι δύο βραχείες ακριβείς ακολουθίες του διαγράμματος (2.2) θα είναι split exact. Επομένως από Functoriality της K_0 και την Πρόταση 2.4.12 έπεται πως το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\iota)} & K_0(\tilde{A}) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(\mathbb{C}) \longrightarrow 0 \\ & & K_0(\lambda_{n,A}) \downarrow & & \downarrow K_0(\lambda_{n,\tilde{A}}) & & \downarrow K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}}) \\ 0 & \longrightarrow & K_0(M_n(A)) & \xrightarrow{K_0(\iota_n)} & K_0(M_n(\tilde{A})) & \xrightarrow{K_0(\pi_n)} & K_0(M_n(\mathbb{C})) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (2.3)$$

θα είναι μεταθετικό και οι επαγόμενες (μέσω της K_0) ακολουθίες των δύο παραπάνω ακολουθιών στο διάγραμμα (2.3), θα είναι και αυτές split exact. Όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.4.14 προκύπτει πως αν οι ομομορφισμοί $K_0(\lambda_{n,\tilde{A}}), K_0(\lambda_{n,\mathbb{C}})$ είναι ισομορφισμοί, τότε το ίδιο θα ισχύει και για τον $K_0(\lambda_{n,A})$. Συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε πως ο $K_0(\lambda_{n,A})$ είναι ισομορφισμός όταν η A έχει μονάδα.

Υποθέτουμε λοιπόν πως η A έχει μονάδα. Τότε για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον προφανή $*$ -ισομορφισμό $\gamma_{n,\kappa} : M_\kappa(M_n(A)) \rightarrow M_{\kappa n}(A)$. Ορίζουμε τώρα την εξής απεικόνιση

$$\gamma_n : \mathcal{P}_\infty(M_n(A)) \rightarrow K_0(A), \quad \gamma_n(p) := [\gamma_{n,\kappa}(p)]_0, \quad \text{αν } p \in \mathcal{P}_\kappa(M_n(A))$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $p \in \mathcal{P}_{\kappa_1}(M_n(A)), q \in \mathcal{P}_{\kappa_2}(M_n(A))$, τότε

$$\begin{aligned} \gamma_n(p \oplus q) &= [\gamma_{n,\kappa_1+\kappa_2}(p \oplus q)]_0 = [\gamma_{n,\kappa_1}(p) \oplus \gamma_{n,\kappa_2}(q)]_0 \\ &= [\gamma_{n,\kappa_1}(p)]_0 + [\gamma_{n,\kappa_2}(q)]_0 = \gamma_n(p) + \gamma_n(q). \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \gamma_n(0_{M_n(A)}) = [\gamma_{n,1}(0_{M_n(A)})]_0 = [0_{M_n(A)}]_0 = [0_A] = 0_{K_0(A)}.$$

(iii) Αν $p, q \in \mathcal{P}_\kappa(M_n(A))$ ώστε $p \sim_h q$, τότε $p \sim q$ και άρα $\gamma_{n,\kappa}(p) \sim \gamma_{n,\kappa}(q)$. Επομένως $\gamma_n(p) = \gamma_n(q)$.

Συνεπώς από την Καθολική Ιδιότητα της K_0 για την $M_n(A)$, έπεται πως υπάρχει ένας ομομορφισμός $\alpha : K_0(M_n(A)) \rightarrow K_0(A)$ ώστε $\alpha([p]_0) = \gamma_n(p)$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(M_n(A))$. Τότε επαληθεύεται πως $\alpha \circ K_0(\lambda_{n,A}) = Id_{K_0(A)}$ και $K_0(\lambda_{n,A}) \circ \alpha = Id_{K_0(M_n(A))}$, δηλαδή ο $K_0(\lambda_{n,A})$ είναι ισομορφισμός. $\square$

Κεφάλαιο 3

Επαγωγικά Όρια και K_0

Η ομάδα $K_0(A)$ μιας C^* -άλγεβρας A μπορεί να εφοδιαστεί με μια επιπλέον δομή, τον θετικό κώνο της $K_0(A)^+$, ο οποίος αποτελείται από όλα τα στοιχεία της $K_0(A)$ της μορφής $[p]_0$ με $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Όπως θα δούμε παρακάτω το σύνολο $K_0(A)^+$ ορίζει μια σχέση διάταξης επί της $K_0(A)$ και το ζεύγος $(K_0(A), K_0(A)^+)$ είναι διατεταγμένη αβελιανή ομάδα όταν η A έχει μονάδα και είναι stably finite.

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να αποδείξουμε την ύπαρξη του επαγωγικού ορίου (μιας επαγωγικής ακολουθίας) στην κατηγορία των C^* -αλγεβρών και στην κατηγορία των (διατεταγμένων) αβελιανών ομάδων καθώς επίσης και να αποδείξουμε πως η ομάδα K_0 είναι συνεχής, δηλαδή πως η ομάδα K_0 του επαγωγικού ορίου μια ακολουθίας C^* -αλγεβρών $\{A_n\}_n$ είναι ισόμορφη με το επαγωγικό όριο της ακολουθίας $\{K_0(A_n)\}_n$ στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα για κάθε AF -άλγεβρα A το ζεύγος $(K_0(A), K_0(A)^+)$ να είναι μια διατεταγμένη αβελιανή ομάδα, διότι εξ' ορισμού οι AF -άλγεβρες προκύπτουν ως επαγωγικά όρια C^* -αλγεβρών πεπερασμένης διάστασης οι οποίες είναι stably finite.

3.1 Διατεταγμένες αβελιανές ομάδες

Ορισμός 3.1.1. Έστω A μια C^* -άλγεβρα.

Μια προβολή $p \in \mathcal{P}(A)$ θα λέγεται *infinite* αν υπάρχει προβολή $q \in \mathcal{P}(A)$ τέτοια ώστε $p \sim q < p$. Διαφορετικά η προβολή αυτή θα λέγεται *finite*.

Αν επιπλέον η A έχει μονάδα, 1_A , τότε η A θα λέγεται *finite* αν η 1_A είναι *finite* προβολή. Διαφορετικά η A θα λέγεται *infinite*. Επίσης αν η $M_n(A)$ είναι *finite* για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η A θα λέγεται *stably finite*.

Τώρα αν η A δεν έχει μονάδα, η A θα λέγεται *finite/stably finite/infinite* αν η $\tilde{A}$ είναι *finite/stably finite/infinite*.

Προφανώς κάθε stably finite C^* -άλγεβρα είναι finite. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η άλγεβρα $C(\mathbb{T}^3)$ των συνεχών συναρτήσεων στον 3-τόρο. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε στην συγκεκριμένη εργασία δεν επαρκούν για να πούμε περισσότερα για αυτήν.

Μια κλάση infinite C^* -αλγεβρών είναι οι άλγεβρες Cuntz [8]. Συγκεκριμένα αν H είναι ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 2$ ορίζεται η C^* -άλγεβρα $\mathcal{O}_n = C^*(s_1, s_2, \dots, s_n)$, όπου τα στοιχεία s_n είναι ισομετρίες της $B(H)$ και ικανοποιούν την εξής σχέση:

$$1_{B(H)} = s_1 s_1^* + s_2 s_2^* + \dots + s_n s_n^*.$$

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός πως οι άλγεβρες αυτές ταξινομούνται μέσω των ομάδων K_0 και μάλιστα ισχύει πως $K_0(\mathcal{O}_n) = \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ για κάθε $n \geq 2$. Αναλυτικότερα βλέπε [9].

Αξίζει στο σημείο αυτό να επισημάνουμε πως στην παρούσα διπλωματική εργασία, μας απασχολούν κυρίως οι ιδιότητες των stably finite C^* -άλγεβρων, καθώς όπως θα δούμε παρακάτω οι AF -άλγεβρες είναι τέτοιες.

Παρατήρηση 3.1.2. Οι C^* -άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης είναι finite και stably finite.

Απόδειξη. Έστω $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$ και $q \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $1_A \sim q < 1_A$. Από το Θεώρημα 1.1.32, έπεται πως υπάρχει ένας $*$ -μονομορφισμός $\pi : A \rightarrow B(H)$, όπου H είναι ένας χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης. Προφανώς $\pi(1_A) \sim \pi(q) \leq \pi(1_A)$ και $B(H) \simeq M_n(\mathbb{C})$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Άρα από το Σχόλιο 2.2.4, έπεται πως

$$\dim(\pi(1_A)(\mathbb{C}^n)) = \dim(\pi(q)(\mathbb{C}^n)) < +\infty.$$

Επιπλέον επειδή $\pi(q) \leq \pi(1_A)$ έχουμε $\pi(q)(\mathbb{C}^n) \subseteq \pi(1_A)(\mathbb{C}^n)$ και άρα $\pi(q) = \pi(1_A)$. Συνεπώς $q = 1_A$, δηλαδή η A είναι finite.

Η A είναι επίσης stably finite. Πράγματι αν $m \in \mathbb{N}$, τότε επειδή

$$M_m(A) \simeq M_{mn_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{mn_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{mn_r}(\mathbb{C})$$

έπεται πως η $M_m(A)$ είναι μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης, και άρα θα είναι finite. $\square$

Σχόλιο 3.1.3. Το γεγονός πως C^* -άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης είναι finite και stably finite, θα μπορούσε να προκύψει και από το (ii) του Λήμματος που ακολουθεί, το οποίο είναι αρκετά διαφωτιστικό ως προς τη δομή των finite C^* -άλγεβρων.

Λήμμα 3.1.4. Έστω A μια C^* -άλγεβρα με μονάδα, τότε οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες.

- (i) Η A είναι finite.
- (ii) Κάθε ισομετρία της A είναι μοναδιαίο στοιχείο της A .
- (iii) Κάθε προβολή της A είναι finite.
- (iv) Κάθε αριστερά αντιστρέψιμο στοιχείο της A είναι δεξιά αντιστρέψιμο.
- (v) Κάθε δεξιά αντιστρέψιμο στοιχείο της A είναι αριστερά αντιστρέψιμο.

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii) Αν $s \in A$ είναι μια ισομετρία, τότε το ss^* είναι προβολή και άρα $ss^* \leq 1_A$. Επομένως έχουμε πως $1_A = s^*s \sim ss^* \leq 1_A$ και αφού η A είναι finite, έπεται πως $ss^* = 1_A$, δηλαδή το s είναι μοναδιαίο.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Αν υπάρχει $p \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $1_A \sim p < 1_A$, τότε υπάρχει $v \in A$ ώστε $1_A = v^*v$ και $p = vv^*$. Επομένως το v είναι ισομετρία και άρα λόγω της υπόθεσης θα είναι μοναδιαίο, δηλαδή $p = vv^* = 1_A$. Άρα το 1_A είναι finite προβολή.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $p, q \in \mathcal{P}(A)$ με $p \sim q \leq p$. Τότε υπάρχει $v \in A$ ώστε $p = v^*v$ και $q = vv^*$. Θέτουμε $s = v + (1_A - p)$. Επειδή $pq = qp = q$ και $v = vv^*v$ έπεται πως $s^*s = 1_A$ και $ss^* = 1_A - (p - q)$. Συνεπώς από το (ii), συνεπάγεται πως $p = q$, δηλαδή η p είναι finite προβολή.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Αν ισχύει το (iii), τότε η προβολή 1_A θα είναι finite προβολή και άρα η A είναι finite.

(iv) $\Leftrightarrow$ (v) και (iv) $\Rightarrow$ (ii) προκύπτουν άμεσα.

(ii) $\Rightarrow$ (iv) Έστω $a, b \in A$ ώστε $ba = 1_A$. Τότε προκύπτει πως

$$1_A = (ba)^*(ba) \leq a^* \|b^* b\|^2 a = \|b\|^2 a^* a,$$

δηλαδή $a^* a - \|b\|^{-2} \geq 0$ και άρα από την Πρόταση 1.1.26 και την Πρόταση 1.1.27 έπεται πως $\sigma(a^* a) \subseteq [\|b\|^{-2}, +\infty)$. Συνεπώς το $a^* a$ αντιστρέφεται και άρα θέτωντας $s = a(a^* a)^{-\frac{1}{2}}$ έχουμε

$$s^* s = (a^* a)^{-\frac{1}{2}} a^* a (a^* a)^{-\frac{1}{2}} = 1_A.$$

Αφού το s είναι ισομετρία λόγω της υπόθεσης θα είναι μοναδιαίο και άρα το $a = s(a^* a)^{\frac{1}{2}}$ θα είναι αντιστρέψιμο. □

Ορισμός 3.1.5. Έστω G αβελιανή ομάδα και $G^+ \subseteq G$. Το ζεύγος (G, G^+) θα λέγεται διατεταγμένη αβελιανή ομάδα (ordered abelian group), αν

- (i) $G^+ + G^+ \subseteq G^+$,
- (ii) $G^+ \cap (-G^+) = \{0\}$,
- (iii) $G^+ - G^+ = G$.

Σχόλιο 3.1.6. Αν (G, G^+) είναι μια διατεταγμένη αβελιανή ομάδα, τότε ορίζεται μια σχέση διάταξης $\leq$ επί της G ως εξής: $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in G^+$. Δηλαδή $(G, \leq)$ είναι ένα (μερικά) διατεταγμένο σύνολο.

Αντίστροφα υποθέτουμε πως $\leq$ είναι μια (μερική) σχέση διάταξης επί μιας αβελιανής ομάδας G και πως επιπλέον $\eta \leq$ ικανοποιεί την εξής συνθήκη :

$$\text{Αν } x + z \leq y + z \text{ για κάποια } x, y, z \in G \Rightarrow x \leq y.$$

Θεωρώντας το σύνολο $G^+ = \{x \in G : x \geq 0\}$ έχουμε ότι το ζεύγος (G, G^+) είναι μια προδιατεταγμένη αβελιανή ομάδα, δηλαδή ικανοποιεί τα (i) και (ii) του Ορισμού 3.1.5

Ορισμός 3.1.7. Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Ο θετικός κώνος της A είναι το σύνολο

$$K_0(A)^+ = \{[p]_0 : p \in \mathcal{P}_\infty(A)\} \subseteq K_0(A).$$

Πρόταση 3.1.8. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα, τότε ισχύουν τα παρακάτω.

- (i) $K_0(A)^+ + K_0(A)^+ \subseteq K_0(A)^+$.
- (ii) Αν ηA έχει μονάδα, τότε $K_0(A)^+ - K_0(A)^+ = K_0(A)$.
- (iii) Αν ηA είναι stably finite, τότε $K_0(A)^+ \cap (-K_0(A)^+) = \{0\}$.
- (iv) Αν ηA έχει μονάδα και είναι stably finite, τότε το ζεύγος $(K_0(A), K_0(A)^+)$ είναι μια διατεταγμένη αβελιανή ομάδα.

Απόδειξη. (i) Αν $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$, τότε $[p]_0 + [q]_0 = [p \oplus q]_0 \in K_0(A)^+$.

(ii) Προκύπτει άμεσα από την standard picture της K_0 (Πρόταση 2.1.10).

(iii) Αν $g \in K_0(A)^+ \cap (-K_0(A)^+)$, τότε $g = [p]_0 = -[q]_0$ για κάποια $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Επομένως $[p \oplus q]_0 = [0_A]_0 = [0_{\tilde{A}}]_0$ και άρα από standard picture της K_0 για C^* -άλγεβρες με μονάδα έχουμε πως $p \oplus q \sim_s 0_{\tilde{A}}$. Δηλαδή υπάρχει $r \in \mathcal{P}_\infty(\tilde{A})$ ώστε

$$p \oplus q \oplus r \sim_0 0_{\tilde{A}} \oplus r \sim_0 r.$$

Έστω ότι $p \in \mathcal{P}_{m_1}(\tilde{A}), q \in \mathcal{P}_{m_2}(\tilde{A}), r \in \mathcal{P}_{m_3}(\tilde{A})$ και $n = m_1 + m_2 + m_3$. Ορίζουμε $p' = p \oplus 0_{m_2} \oplus 0_{m_3}, q' = 0_{m_1} \oplus q \oplus 0_{m_3}, r' = 0_{m_1} \oplus 0_{m_2} \oplus r$. Προφανώς $p', q', r' \in \mathcal{P}_n(\tilde{A})$ και $p' \sim_0 p, q' \sim_0 q, r' \sim_0 r$. Επίσης οι p', q', r' είναι κάθετες ανά δύο και άρα

$$[p' + q' + r']_0 = [p']_0 + [q']_0 + [r']_0 = [p \oplus q \oplus r]_0 = [r]_0 = [r']_0.$$

Επομένως $p' + q' + r' \sim r'$ και επειδή $p' + q' \geq 0$ ως προβολή, έχουμε ότι $r' \leq p' + q' + r'$. Εφ' όσον η A είναι stably finite, από το Λήμμα 3.1.4 έπεται πως η $p' + q' + r'$ είναι finite προβολή. Συνεπώς αν $r' \neq 0$, τότε $r' = p' + q' + r'$, δηλαδή $p' = -q'$ και άρα $p' = 0_n$ και $q' = 0_n$. Αν $r' = 0_n$, τότε $p' + q' \sim 0_n$ και άρα $p' + q' = 0_n$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση $p' = 0_n$ και $q' = 0_n$ και άρα $g = 0$.

(iv) Προκύπτει από τα (i), (ii) και (iii). □

Ορισμός 3.1.9. Έστω (G, G^+) διατεταγμένη αβελιανή ομάδα.

Ένα στοιχείο $h \in G^+$ λέγεται μονάδα διάταξης (order unit) της (G, G^+) αν για κάθε $g \in G$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $-nh \leq g \leq nh$. Σε αυτή την περίπτωση η τριάδα (G, G^+, h) θα λέγεται διατεταγμένη αβελιανή ομάδα με διακεκριμένη μονάδα διάταξης.

Επίσης μια διατεταγμένη αβελιανή ομάδα (G, G^+) θα λέγεται απλή, αν κάθε μη μηδενικό στοιχείο της G^+ είναι μονάδα διάταξης της (G, G^+) .

Πρόταση 3.1.10. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα και η $(K_0(A), K_0(A)^+)$ μια διατεταγμένη αβελιανή ομάδα, τότε το $[1_A]_0$ είναι μονάδα διάταξης της $(K_0(A), K_0(A)^+)$.

Απόδειξη. Έστω $g \in K_0(A)$, τότε από Πρόταση 2.1.10 έπεται πως υπάρχουν $p, q \in \mathcal{P}_n(A)$ για κάποιο n ώστε $g = [p]_0 - [q]_0$. Τότε επειδή $[1_n]_0 = n[1_A]_0$ και $1_n - p, 1_n - q \in \mathcal{P}_n(A)$, έπεται πως

$$\begin{aligned} -n[1_A]_0 &= -[1_n]_0 = -[q]_0 - [1_n - q]_0 \leq -[q]_0 \leq [p]_0 - [q]_0 \\ &= g \leq [p]_0 \leq [p]_0 + [1_n - p]_0 = [1_n]_0 = n[1_A]_0. \end{aligned}$$

□

Ορισμός 3.1.11. (Θετικοί ομομορφισμοί ομάδων) Έστω $(G, G^+), (H, H^+)$ διατεταγμένες αβελιανές ομάδες. Ένας ομομορφισμός ομάδων $\alpha : G \rightarrow H$ θα λέγεται θετικός (positive) αν $\alpha(G^+) \subseteq H^+$, ενώ αν $\alpha(G^+) = H^+$ θα λέγεται ισομορφισμός διάταξης (order isomorphism).

Αν οι $(G, G^+, u), (H, H^+, v)$ είναι διατεταγμένες αβελιανές ομάδες οι οποίες έχουν μονάδα διάταξης και $\alpha : G \rightarrow H$ είναι ένας θετικός ομομορφισμός, τότε θα λέμε ότι ο α διατηρεί την μονάδα αν $\alpha(u) = v$. Επίσης οι τριάδες $(G, G^+, u), (H, H^+, v)$ θα λέγονται ισόμορφες αν υπάρχει ισομορφισμός διάταξης από την G στην H ο οποίος διατηρεί την μονάδα και θα γράφουμε $(G, G^+, u) \simeq (H, H^+, v)$.

Σχόλιο 3.1.12. Έστω A, B C^* -άλγεβρες ώστε οι $(K_0(A), K_0(A)^+)$ και $(K_0(B), K_0(B)^+)$ να είναι διατεταγμένες αβελιανές ομάδες. Αν $\varphi : A \rightarrow B$ είναι ένας $*$ -ομομορφισμός, τότε ο επαγόμενος ομομορφισμός της φ στις ομάδες K_0 , είναι ένας θετικός ομομορφισμός ομάδων. Πράγματι από την Πρόταση 2.1.13 ξέρουμε πως $K_0(\varphi)([p]_0) = [\varphi(p)]_0$ για κάθε $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$. Επομένως $K_0(\varphi)(K_0(A)^+) \subseteq K_0(B)^+$. Το ίδιο επίσης θα ίσχυε ακόμα και αν οι $(K_0(A), K_0(A)^+)$ και $(K_0(B), K_0(B)^+)$ δεν ήταν διατεταγμένες αβελιανές ομάδες.

Αν ο $\varphi : A \rightarrow B$ ήταν $*$ -ισομορφισμός, τότε από functoriality της K_0 έπεται πως ο $K_0(\varphi)$ είναι ισομορφισμός ομάδων και πως $K_0(\varphi)(K_0(A)^+) = K_0(B)^+$. Δηλαδή ο $K_0(\varphi)$ είναι ισομορφισμός διάταξης. Αν επιπλέον η A είχε μονάδα, τότε οι $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$, $(K_0(B), K_0(B)^+, [1_B]_0)$ θα ήταν διατεταγμένες αβελιανές ομάδες με μονάδες διάταξης $[1_A]_0$ και $[1_B]_0$ αντίστοιχα (Πρόταση 3.1.10). Επίσης επειδή ο $K_0(\varphi)$ είναι ισομορφισμός ομάδων έπεται πως $K_0(\varphi)([1_A]_0) = [1_B]_0$ και άρα οι $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$, $(K_0(B), K_0(B)^+, [1_B]_0)$ είναι ισόμορφες.

Παράδειγμα 3.1.13. Για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, η απλή διατεταγμένη αβελιανή ομάδα $(\mathbb{Z}, \mathbb{N}, n)$ είναι ισόμορφη με την διατεταγμένη αβελιανή ομάδα $(K_0(M_n(\mathbb{C})), K_0(M_n(\mathbb{C}))^+, [1_n]_0)$.

Απόδειξη. Προφανώς το ζεύγος $(\mathbb{Z}, \mathbb{N})$ είναι μια απλή διατεταγμένη αβελιανή ομάδα. Λόγω της Παρατήρησης 3.1.2 και της Πρότασης 3.1.8, η $(K_0(M_n(\mathbb{C})), K_0(M_n(\mathbb{C}))^+)$ είναι επίσης διατεταγμένη αβελιανή ομάδα. Επίσης λόγω της Πρότασης 3.1.10, το $[1_n]_0$ αποτελεί μονάδα διάταξης για αυτήν.

Στην Παράγραφο 2.2 είδαμε πως η $K_0(M_n(\mathbb{C}))$ είναι ισόμορφη με την $\mathbb{Z}$ μέσω της $K_0(Tr)$. Συγκεκριμένα είδαμε πως αν $p \in \mathcal{P}_\kappa(M_n(\mathbb{C}))$ για κάποιο κ , τότε

$$K_0(Tr)([p]_0) = \overline{Tr}(p) = \dim_{\mathbb{C}}(p(\mathbb{C}^{\kappa n})) \in \mathbb{N}.$$

Άμεσα λοιπόν προκύπτει πως $K_0(Tr)(K_0(M_n(\mathbb{C}))^+) = \mathbb{N}$. Επίσης $K_0(Tr)([1_n]_0) = n$, και άρα ο $K_0(Tr)$ είναι ισομορφισμός διάταξης που διατηρεί την μονάδα. $\square$

Σημαντικό επίσης είναι να παρατηρήσουμε πως ο συναρτητής K_0 δεν διατρήει απλώς τα πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα C^* -αλγεβρών αλλά και τους κώνους τους.

Πρόταση 3.1.14. Ο θετικός κώνος της $K_0(A \oplus B)$ είναι το "εύθυ άθροισμα" των $K_0(A)^+$ και $K_0(B)^+$, δηλαδή $K_0(A \oplus B)^+ = K_0(A)^+ \oplus K_0(B)^+ = \{(g, h) : g \in K_0(A)^+, h \in K_0(B)^+\}$. Συγκεκριμένα το $K_0(A \oplus B)^+$ ταυτίζεται με το $K_0(A)^+ \oplus K_0(B)^+$ μέσω του ισομορφισμού της Πρότασης 2.4.14.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)(K_0(A)^+ \oplus K_0(B)^+) = K_0(A \oplus B)^+$. Προφανώς $K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)(K_0(A)^+ \oplus K_0(B)^+) \subseteq K_0(A \oplus B)^+$, διότι οι $K_0(\iota_A), K_0(\iota_B)$ είναι θετικοί ομομορφισμοί.

Αν $x = [p]_0 \in K_0(A \oplus B)^+$, τότε επειδή $K_0(\pi_A)$ και $K_0(\pi_B)$ είναι θετικοί ομομορφισμοί έπεται πως $K_0(\pi_A)([p]_0) \in K_0(A)^+$ και $K_0(\pi_B)([p]_0) \in K_0(B)^+$. Επίσης επειδή οι $\iota_A \circ \pi_A, \iota_B \circ \pi_B$ είναι κάθετοι μεταξύ τους έχουμε πως

$$\begin{aligned} K_0(\iota_A) \oplus K_0(\iota_B)(K_0(\pi_A)(x), K_0(\pi_B)(x)) &= K_0(\iota_A \circ \pi_A)([p]_0) + K_0(\iota_B \circ \pi_B)([p]_0) \\ &= [\iota_A \circ \pi_A(p)]_0 + [\iota_B \circ \pi_B(p)]_0 \\ &= [\iota_A \circ \pi_A(p) + \iota_B \circ \pi_B(p)]_0 = [p]_0 = x. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ισότητα. $\square$

Πόρισμα 3.1.15. Αν $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$ τότε οι διατεταγμένες αβελιανές ομάδες $(K_0(A), K_0(A)^+)$ και $(\mathbb{Z}^r, \mathbb{N}^r)$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Προφανώς η $(\mathbb{Z}^r, \mathbb{N}^r)$ είναι διατεταγμένη αβελιανή ομάδα. Όπως στο Παράδειγμα 3.1.13 προκύπτει πως το ζεύγος $(K_0(A), K_0(A)^+)$ είναι διατεταγμένη αβελιανή ομάδα. Ο ισομορφισμός ομάδων που προκύπτει από την την Πρόταση 2.4.14 θα είναι ισομορφισμός διαταξης, λόγω του Παραδείγματος 3.1.13 και της Πρότασης 3.1.14. $\square$

3.2 Επαγωγικά όρια

Ξεκινάμε δίνοντας τον Ορισμό μιας κατηγορίας προκειμένου να δώσουμε τον ορισμό του επαγωγικού ορίου σε μια κατηγορία C . Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την ύπαρξη των επαγωγικών ορίων στις κατηγορίες που μας αφορούν άμεσα και μελετάμε κάποιες επιπλέον ιδιότητες του επαγωγικού ορίου στην κατηγορία των C^* -αλγεβρών.

Ορισμός 3.2.1. Μια κατηγορία C αποτελείται από:

- από μια κλάση $\mathcal{O}(C)$ από αντικείμενα της κατηγορίας και
- για κάθε δύο αντικείμενα A και B της C , από ένα σύνολο $\text{Hom}_C(A, B)$ από μορφισμούς που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες.

(a) Αν A, B και C είναι μια τριάδα αντικειμένων της C , τότε για κάθε μορφισμό $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ και $g \in \text{Hom}_C(B, C)$ υπάρχει ένας μορφισμός $h \in \text{Hom}_C(A, C)$ ο οποίος θα λέγεται σύνθεση των f και g και θα συμβολίζεται με $g \circ f$.

(b) Η σύνθεση μορφισμών $\circ : \text{Hom}_C(A, B) \times \text{Hom}_C(B, C) \rightarrow \text{Hom}_C(A, C)$ πληρεί την προσεταιριστική ιδιότητα, δηλαδή αν $f \in \text{Hom}_C(A, B), g \in \text{Hom}_C(B, C)$ και $k \in \text{Hom}_C(C, D)$, τότε

$$(k \circ g) \circ f = k \circ (g \circ f).$$

(c) Για κάθε αντικείμενο A της C υπάρχει ένας μορφισμός $1_A \in \text{Hom}_C(A, A)$, ο ταυτοτικός μορφισμός του A . Επιπλέον αν D είναι ένα αντικείμενο της C και $f \in \text{Hom}_C(A, D)$, τότε

$$f \circ 1_A = f \text{ και } 1_D \circ f = f.$$

Αν A είναι ένα αντικείμενο της C θα γράφουμε $A \in \mathcal{O}(C)$, και αν $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ θα γράφουμε $f : A \rightarrow B$.

Στην συγκεκριμένη εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με τα Παραδείγματα κατηγοριών που ακολουθούν.

Παραδείγματα 3.2.2. 1. Η κατηγορία Ab των αβελιανών ομάδων. Η κλάση αντικειμένων της Ab αποτελείται από όλες τις αβελιανές ομάδες και για κάθε δύο $G, H \in \mathcal{O}(\text{Ab})$ το σύνολο $\text{Hom}_{\text{Ab}}(G, H)$ είναι το σύνολο όλων των ομομορφισμών από την G στην H .

2. Η κατηγορία C^* των C^* -αλγεβρών. Η κλάση αντικειμένων της C^* αποτελείται από όλες τις C^* -αλγεβρες και για κάθε δύο $A, B \in \mathcal{O}(C^*)$ το σύνολο $\text{Hom}_{C^*}(G, H)$ είναι το σύνολο όλων των $*$ -ομομορφισμών από την A στην B .

3. Η κατηγορία OAb των διατεταγμένων αβελιανών ομάδων. Η κλάση αντικειμένων της OAb αποτελείται από όλες τις διατεταγμένες αβελιανές ομάδες και για κάθε δύο $(G, G^+), (H, H^+) \in \mathcal{O}(\text{OAb})$ το σύνολο $\text{Hom}_{\text{OAb}}((G, G^+), (H, H^+))$ είναι το σύνολο όλων των θετικών ομομορφισμών από την (G, G^+) στην (H, H^+) .

Ορισμός 3.2.3. Ένα αντικείμενο D μιας κατηγορίας C θα λέγεται μηδενικό αντικείμενο, αν για κάθε $E \in \mathcal{O}(C)$ τα σύνολα $\text{Hom}_C(D, E)$ και $\text{Hom}_C(E, D)$ είναι μονοσύνολα.

Η τετριμμένη C^* -άλγεβρα $\{0\}$ είναι ένα μηδενικό αντικείμενο της κατηγορίας C^* . Το ίδιο συμβαίνει και με τις $\{0\}$ και $(\{0\}, \{0\})$ στις κατηγορίες Ab και OAb αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί πως μια κατηγορία δεν έχει απαραίτητα μηδενικό αντικείμενο, όπως για παράδειγμα η κατηγορία Set των συνόλων.

Ορισμός 3.2.4. Έστω C μια κατηγορία. Δύο αντικείμενα A και B της C θα λέγονται ισόμορφα και θα γράφουμε $A \simeq B$, αν υπάρχουν μορφισμοί $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ και $g \in \text{Hom}_C(B, A)$ ώστε $f \circ g = 1_B$ και $g \circ f = 1_A$.

Παρατήρηση 3.2.5. 1. Έστω C μια κατηγορία η οποία έχει ένα μηδενικό αντικείμενο A . Τότε το A είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό, δηλαδή αν B είναι ένα άλλο μηδενικό αντικείμενο της C , θα έχουμε πως $A \simeq B$.

2. Αν η κατηγορία C είναι μία από τις C^*, Ab και OAb , τότε ο Ορισμός του ισομορφισμού μεταξύ δύο αντικειμένων που δόθηκε προηγουμένως, είναι ισοδύναμος με τον Ορισμό του $*$ -ισομορφισμού, του ισομορφισμού αβελιανών ομάδων και του ισομορφισμού διάταξης αντίστοιχα.

Ορισμός 3.2.6. Έστω C και D δύο κατηγορίες.

Ένας συναλλοίωτος συναρτητής (covariant functor) F από την C στην D , αντιστοιχεί

- σε κάθε αντικείμενο A στην C , ένα αντικείμενο $F(A)$ στην D ,
- και σε κάθε μορφισμό $f : A \rightarrow B$ της C , ένα μορφισμό $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$ της D έτσι ώστε να ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(a) $F(\text{Id}_A) = \text{Id}_{F(A)}$ για κάθε αντικείμενο A της C .

(b) Αν A, B, C αντικείμενα της C και $f \in \text{Hom}_C(A, B), g \in \text{Hom}_C(B, C)$, τότε

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Ένας ανταλλοίωτος συναρτητής (contravariant functor) ορίζεται όπως ένας συναλλοίωτος συναρτητής με την μόνη διαφορά, πως αν $f \in \text{Hom}_C(A, B)$ και $g \in \text{Hom}_C(B, C)$ για κάποια αντικείμενα A, B, C της C , τότε θα ισχύει πως $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Τέλος θα γράφουμε $F : C \rightarrow D$ ανεξάρτητα από το αν ο F είναι συναλλοίωτος ή ανταλλοίωτος.

Ο Ορισμός του συναρτητή παρατίθεται μόνο για λόγους πληρότητας καθώς η έννοια αυτή δεν θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω. Το μόνο που χρειάζεται να λάβουμε υπ' όψην, είναι πως επαληθεύεται ο Ισχυρισμός που διατυπώθηκε στο τέλος της Παραγράφου 2.1, δηλαδή πως μπορούμε να δούμε την ομάδα K_0 ως έναν συναλλοίωτο συναρτητή από την κατηγορία των C^* -αλγεβρών στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων ο οποίος διατηρεί τα μηδενικά αντικείμενα.

Ορισμός 3.2.7. Μια επαγωγική ακολουθία (ή ακολουθία για συντομία) σε μια κατηγορία C είναι μια ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ αντικειμένων στην C μαζί με μια ακολουθία $\varphi_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ μορφισμών στην C , η οποία θα γραφεται ως εξής

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

Για $m > n$ ορίζουμε $\varphi_{m,n} = \varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-2} \circ \cdots \circ \varphi_n : A_n \rightarrow A_m$, οι οποίοι θα λέγονται *συνδετικοί μορφισμοί* ή *συνδετικές απεικονίσεις*. Αν η κατηγορία έχει μηδενικό αντικείμενο ορίζονται και οι συνδετικοί μορφισμοί $\varphi_{n,n} := 1_{A_n}$ και $\varphi_{m,n} := 0$ όταν $m < n$. Οι κατηγορίες με τις οποίες θα ασχοληθούμε (C^* , Ab , OAb) έχουν μηδενικό αντικείμενο, οπότε οι συνδετικοί μορφισμοί ορίζονται για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 3.2.8. (Επαγωγικό όριο) Επαγωγικό όριο μιας επαγωγικής ακολουθίας

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots$$

σε μια κατηγορία C είναι ένα σύστημα $(A, \{\mu_n\}_{n=1}^\infty)$, όπου A είναι ένα αντικείμενο της C , $\mu_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ είναι ένας μορφισμός της C για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες.

(i) $\mu_{n+1} \circ \varphi_n = \mu_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) (Καθολική Ιδιότητα) Αν $(B, \{\lambda_n\})$ είναι ένα σύστημα, όπου B είναι ένα αντικείμενο της C , $\lambda_n : A_n \rightarrow B$ είναι μορφισμός στην C για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ώστε $\lambda_n = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\lambda : A \rightarrow B$ ώστε $\lambda \circ \mu_n = \lambda_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. (Δηλαδή υπάρχει μοναδικός μορφισμός $\lambda : A \rightarrow B$ ο οποίος κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό για κάθε $n \in \mathbb{N}$.)

$$\begin{array}{ccccc} A_n & & & & \\ & \searrow \mu_n & & \searrow \lambda_n & \\ & & A & \xrightarrow{\lambda} & B \\ & \nearrow \mu_{n+1} & & \nearrow \lambda_{n+1} & \\ A_{n+1} & & & & \end{array}$$

Παρατήρηση 3.2.9. Μπορεί κανείς εύκολα να αποδείξει πως το επαγωγικό όριο μιας ακολουθίας, αν υπάρχει, θα είναι μοναδικό ως προς ισομορφισμό. Παρακάτω θα δούμε πως το επαγωγικό όριο υπάρχει πάντοτε στην κατηγορία των C^* -αλγεβρών, των αβελιανών ομάδων καθώς και των διατεταγμένων αβελιανών ομάδων. Επίσης το επαγωγικό όριο μιας ακολουθίας θα το συμβολίζουμε με $\varinjlim (A_n, \varphi_n)$ ή $\varinjlim A_n$ και θα γράφουμε

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \longrightarrow A$$

για να δείξουμε ότι το A είναι το επαγωγικό όριο της συγκεκριμένης ακολουθίας.

Παραδείγματα 3.2.10. 1. Θεωρούμε την παρακάτω επαγωγική ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \cdots$$

όπου $2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, 1 \mapsto 2$. Το $(G = \{\frac{\kappa}{2^m} : \kappa \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}, \{a_n\})$, όπου $a_n : \mathbb{Z} \rightarrow G, 1 \mapsto \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}$, είναι το επαγωγικό όριο της παραπάνω ακολουθίας.

2. Έστω D μια C^* -άλγεβρα και $\{A_n\}$ μία αύξουσα υπακολουθία C^* -υπαλγεβρών της D . Αν θεωρήσουμε την επαγωγική ακολουθία

$$A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \longrightarrow \cdots$$

τότε εύκολα προκύπτει πως το επαγωγικό όριο της παραπάνω ακολουθίας είναι το $(A, \{\iota_n\})$, όπου

$$A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}, \quad \iota_n : A_n \rightarrow A, x \mapsto x, \quad n \in \mathbb{N}$$

3. Θεωρούμε την παρακάτω επαγωγική ακολουθία C^* -αλγεβρών,

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} M_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} M_3(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} \dots$$

$$\text{όπου } \varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n+1}(\mathbb{C}), \varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall a \in M_n(\mathbb{C}).$$

Τότε

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} M_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} M_3(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} \dots \longrightarrow \mathcal{K}(H)$$

για κάποιον απειροδιάστατο διαχωρίσιμο χώρο Hilbert H . Η απόδειξη θα δοθεί παρακάτω.

4. Θεωρούμε την επαγωγική ακολουθία διατεταγμένων αβελιανών ομάδων

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} \dots \quad (3.1)$$

όπου $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^+ = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ και $\varphi(x, y) = (x + y, x)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Τότε το επαγωγικό όριο της παραπάνω ακολουθίας είναι η διατεταγμένη αβελιανή ομάδα $(\mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}, (\mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}) \cap \mathbb{R}^+)$, όπου το $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι η χρυσή τομή.

Απόδειξη. Όπως θα δούμε παρακάτω, στην Πρόταση 3.2.19, κάθε επαγωγική ακολουθία στην κατηγορία των διατεταγμένων αβελιανών ομάδων έχει επαγωγικό όριο. Έστω λοιπόν $((G, G^+), \{\alpha_n\})$ το επαγωγικό όριο της παραπάνω ακολουθίας. Για κάθε n θεωρούμε τον ομομορφισμό

$$\beta_n : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}, \quad \beta_n(x, y) := \gamma^{2-n}x + \gamma^{1-n}y, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $(x, y) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\beta_{n+1} \circ \varphi(x, y) = \gamma^{1-n}(x + y) + \gamma^{-n}x = \gamma^{-n}(\gamma + 1)x + \gamma^{1-n}y = \beta_n(x, y).$$

Επομένως από την Καθολική Ιδιότητα του επαγωγικού ορίου, έπεται πως υπάρχει ένας ομομορφισμός $\beta : G \rightarrow \mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}$ ώστε $\beta \circ \alpha_n = \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ο β είναι ισομορφισμός. Πράγματι αν υπάρχουν $g_1, g_2 \in G$ ώστε $\beta(g_1) = \beta(g_2)$, τότε από το (i) της Πρότασης 3.2.18 έπεται πως υπάρχουν n_1, n_2 και $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ώστε $g_1 = \alpha_{n_1}(x_1, y_1)$ και $g_2 = \alpha_{n_2}(x_2, y_2)$. Άρα $\beta_{n_1}(x_1, y_1) = \beta_{n_2}(x_2, y_2)$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας πως $n_1 \leq n_2$ και άρα $\beta_{n_1}(\varphi_{n_2, n_1}(x_1, y_1)) = \beta_{n_2}(x_2, y_2)$. Επειδή οι β_n είναι μονομορφισμοί έπεται πως $g_1 = g_2$. Συνεπώς η β είναι μονομορφισμός. Το επί προκύπτει άμεσα καθώς η β_1 είναι επί.

Επομένως το $(\mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}, \{\beta_n\})$ είναι το επαγωγικό όριο στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων. Μένει να δείξουμε πως η β είναι ισομορφισμός διάταξης. Έστω $t \in (\mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}) \cap \mathbb{R}^+$. Οι β_n είναι επί, επομένως για κάθε n υπάρχει $g_n \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ώστε $\beta_n(g_n) = t$.

Θεωρούμε τα στοιχεία $u = (\gamma, 1), v = (-\frac{1}{\gamma}, 1)$ του $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Τότε ισχύει πως $\beta_1(u) > 0, \beta_1(v) = 0$ και

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u = \gamma u, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v = -\gamma^{-1}v.$$

Το $g_1 = au + bv$ για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$. Μάλιστα το a θα είναι θετικός, καθώς $0 < t = \beta_1(g_1) = \gamma(a\gamma - b\frac{1}{\gamma}) + a + b = a(\gamma^2 + 1)$. Επίσης επειδή για κάθε n ισχύει ότι

$$\beta_n\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} g_1\right) = \beta_n(\varphi_{n,1}(g_1)) = \beta_1(g_1) = t = \beta_n(g_n),$$

έπεται πως

$$g_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} g_1.$$

Επομένως έχουμε

$$g_n = a\gamma^{n-1}u - b\gamma^{1-n}v = \dots = (a\gamma^n + b\gamma^{-n}, a\gamma^{n-1} - b\gamma^{1-n}),$$

και άρα για κάποιο μεγάλο n το $g_n \in (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})^+$. Επειδή $\beta(\alpha_n(g_n)) = t$ για κάθε n έπεται πως $\beta(G^+) = (\mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}) \cap \mathbb{R}^+$, δηλαδή έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 3.2.11. Έστω $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ μια ακολουθία από C^* -άλγεβρες, $\pi : \prod_n A_n \rightarrow \prod_n A_n / \sum_n A_n$ η απεικόνιση πηλίκο, και $a = (a_n)_n \in \prod_n A_n$. Τότε

$$(i) \quad \|\pi(a)\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|.$$

$$(ii) \quad a \in \sum_n A_n \text{ αν και μόνον αν } \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = 0.$$

Απόδειξη. (i) Επειδή το ιδεώδες $\mathcal{I}$ είναι πυκνό στην $\sum_n A_n$ έχουμε πως

$$\|\pi(a)\| = \inf\{\|a - b\| : b \in \sum_n A_n\} = \inf\{\|a - b\| : b \in \mathcal{I}\}.$$

Προφανώς λόγω του τρόπου ορισμού της νόρμας επί του $\prod_n A_n$, για κάθε $b = (b_n)_n \in \mathcal{I}$ ισχύει ότι

$$\|a - b\| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n - b_n\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|$$

και άρα $\|\pi(a)\| \geq \limsup_n \|a_n\|$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την ακολουθία $b^{(k)} = (b_n^{(k)})_{n=1}^\infty$, όπου

$$b_n^{(k)} = \begin{cases} a_n, & \text{αν } n \leq k \\ 0, & \text{αν } n > k \end{cases}.$$

Τότε $b^{(k)} \in \mathcal{I}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και

$$\|\pi(a)\| \leq \inf_k \|a - b^{(k)}\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|.$$

Το (ii) προκύπτει άμεσα από το (i). $\square$

Πρόταση 3.2.12. (Επαγωγικά όρια C^* -αλγεβρών) Έστω

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

επαγωγική ακολουθία C^* -αλγεβρών. Τότε η ακολουθία αυτή έχει επαγωγικό όριο, έστω $(A, \{\mu_n\})$. Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

$$(i) \ A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)}.$$

$$(ii) \ \|\mu_n(a)\| = \lim_m \|\varphi_{m,n}(a)\| \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in A_n.$$

$$(iii) \ \text{Ker}(\mu_n) = \{a \in A_n : \lim_m \|\varphi_{m,n}(a)\| = 0\}.$$

(iv) $A_n(B, \{\lambda_n\})$ και $\lambda : A \rightarrow B$ όπως στον ορισμό 3.2.8 τότε:

$$(a) \ \text{Ker}(\mu_n) \subseteq \text{Ker}(\lambda_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$(b) \ \text{H } \lambda \text{ είναι } *- \text{μονομορφισμός αν και μόνο αν } \text{Ker}(\lambda_n) = \text{Ker}(\mu_n) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

$$(c) \ \text{H } \lambda \text{ είναι } *- \text{επιμορφισμός αν και μόνο αν } B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(A_n)}.$$

Απόδειξη. Έστω $\pi : \prod_{n=1}^{\infty} A_n \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} A_n / \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ η απεικόνιση πηλίκο. Για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε τον $*$ -ομομορφισμό

$$\nu_n : A_n \rightarrow \prod_{m=1}^{\infty} A_m, a \mapsto (\varphi_{m,n}(a))_{m=1}^{\infty}$$

και τον

$$\mu_n : A_n \rightarrow \prod_{m=1}^{\infty} A_m / \sum_{m=1}^{\infty} A_m,$$

όπου $\mu_n = \pi \circ \nu_n$. Τότε $\mu_{n+1} \circ \varphi_n = \mu_n$. Πράγματι αν $a \in A_n$ έχουμε

$$\nu_n(a) - (\nu_{n+1} \circ \varphi_n)(a) = (\varphi_{m,n}(a))_{m=1}^{\infty} - (\varphi_{m,n}(\varphi_n(a)))_{m=1}^{\infty} = (c_m)_{m=1}^{\infty}$$

όπου

$$c_m = \begin{cases} a, & \text{αν } m = n \\ 0, & \text{αν } m \neq n \end{cases}$$

Τότε $\mu_n(a) - (\mu_{n+1} \circ \varphi_n(a)) = \pi(\nu_n(a) - (\nu_{n+1} \circ \varphi_n)(a)) = \pi((c_m)_{m=1}^{\infty}) = 0$. Επομένως η $\{\mu_n(A_n)\}$ είναι αύξουσα και άρα η

$$A := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)} \quad (3.2)$$

είναι μια C^* -υπάλγεβρα της $\prod_{m=1}^{\infty} A_m / \sum_{m=1}^{\infty} A_m$. Επίσης το ζεύγος $(A, \{\mu_n\})$ ικανοποιεί το (i) του Ορισμού 3.2.8. Μένει λοιπόν η Καθολική Ιδιότητα.

(ii) Έστω $a \in A_n$. Από το Λήμμα 3.2.11 έχουμε πως

$$\|\mu_n(a)\| = \|\pi \circ \nu_n(a)\| = \|\pi((\varphi_{m,n}(a))_{m=1}^{\infty})\| = \limsup_m \|\varphi_{m,n}(a)\|$$

Η $(\|\varphi_{m,n}(a)\|)_{m=n}^{\infty}$ είναι φθίνουσα επειδή $\|\varphi_{m,n}(a)\| = \|\varphi_{m-1} \circ \varphi_{m-1,n}(a)\| \leq \|\varphi_{m-1,n}(a)\|$, και άρα $\|\mu_n(a)\| = \limsup_m \|\varphi_{m,n}(a)\| = \lim_m \|\varphi_{m,n}(a)\|$.

(iii) Πάλι από το Λήμμα 3.2.11 έχουμε πως

$$a \in \text{Ker} \mu_n \Leftrightarrow (\varphi_{m,n}(a))_{m=1}^{\infty} \in \sum_{m=1}^{\infty} A_m \Leftrightarrow \lim_m \|\varphi_{m,n}(a)\| = 0$$

(iv) Έστω $(B, \{\lambda_n\})$ όπως στην εκφώνηση.

(a) Τότε για κάθε $m > n$ έχουμε πως $\lambda_m \circ \varphi_{m,n} = \lambda_n$, και άρα

$$\|\lambda_n(a)\| \leq \|\lambda_m\| \|\varphi_{m,n}(a)\| \leq \limsup_m \|\varphi_{m,n}(a)\| \stackrel{(ii)}{=} \|\mu_n(a)\|.$$

Συνεπώς $\text{Ker} \mu_n \subseteq \text{Ker} \lambda_n$ για κάθε n και άρα υπάρχει μοναδικός $*$ -ομομορφισμός $\lambda'_n : \mu_n(A_n) \rightarrow B$ ώστε $\lambda'_n \circ \mu_n = \lambda_n$. Επίσης για κάθε n , η λ'_{n+1} επεκτείνει την λ'_n . Πράγματι αν $a \in A_n$ τότε

$$\lambda'_{n+1} \circ \mu_n(a) = \lambda'_{n+1} \circ (\mu_{n+1} \circ \varphi_n(a)) = \lambda_{n+1} \circ \varphi_n(a) = \lambda_n(a) = \lambda'_n \circ \mu_n(a)$$

Συνεπώς επάγεται $*$ -ομομορφισμός

$$\lambda' : \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n) \rightarrow B, \mu_n(a) \mapsto \lambda'_n(a) \text{ αν } a \in A_n$$

ο οποίος επεκτείνει κάθε λ'_n . Η λ' είναι καλά ορισμένη από το (ii) και μάλιστα $\|\lambda'\| \leq 1$ διότι $\|\lambda'_n\| \leq 1$ για κάθε n . Τώρα επειδή οι πράξεις και η ενέλιξη είναι συνεχείς, και ο B είναι χώρος Banach, υπάρχει (μοναδικός) $*$ -ομομορφισμός $\lambda : A \rightarrow B$ ώστε $\lambda \circ \mu_n = \lambda' \circ \mu_n = \lambda_n$ για κάθε n . Επομένως το ζεύγος $(A, \{\mu_n\})$ είναι το επαγωγικό όριο της παραπάνω ακολουθίας.

(b) Από την Πρόταση 1.1.15 έχουμε πως ένας $*$ -ομομορφισμός f είναι 1-1 αν και μόνο αν η f είναι ισομετρία. Λόγω του τρόπου ορισμού της λ έχουμε ότι η λ είναι ισομετρία αν και μόνο αν η λ' ισομετρία, δηλαδή αν και μόνον αν η λ'_n ισομετρία για κάθε n . Επίσης η λ'_n είναι 1-1 αν και μόνο αν $\text{Ker} \lambda_n = \text{Ker} \mu_n$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

(c) Προκύπτει άμεσα λόγω του τρόπου ορισμού της λ .

□

Λήμμα 3.2.13. Έστω

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

για ακολουθία C^* -αλγεβρών με επαγωγικό όριο $(A, \{\mu_n\})$.

(i) Αν $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ τότε το $(A, \{\mu_{n_j}\})$ είναι το επαγωγικό όριο της ακολουθίας

$$A_{n_1} \xrightarrow{\psi_1} A_{n_2} \xrightarrow{\psi_2} A_{n_3} \xrightarrow{\psi_3} \dots \quad (3.3)$$

όπου $\psi_j = \varphi_{n_{j+1}, n_j}$ για κάθε j .

(ii) Αν $B_n = A_n / \text{Ker}(\mu_n)$ και $\pi_n : A_n \rightarrow B_n$ η απεικόνιση πηλίκου, τότε υπάρχουν $*$ -μονομορφισμοί $\psi_n : B_n \rightarrow B_{n+1}$ και ένας $*$ -ομομορφισμός $\pi : A \rightarrow \varinjlim B_n = B$ που κάνουν το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό. Μάλιστα ο π είναι $*$ -ισομορφισμός.

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & \dots \longrightarrow A \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 & & \downarrow \pi \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & \dots \longrightarrow B \end{array}$$

(iii) Αν υποθέσουμε πως ο $\varphi_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ είναι *-μονομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε ο $\mu_n : A_n \rightarrow A$ είναι *-μονομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν επιπλέον υποθέσουμε πως η A έχει μονάδα, τότε υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ η A_n να έχει μονάδα, και οι *-ομομορφισμοί φ_n, μ_n να διατηρούν την μονάδα.

Απόδειξη. (i) Αν $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ και $\psi_j = \varphi_{n_{j+1}, n_j}$, τότε προφανώς $\mu_{n_{j+1}} \circ \psi_j = \mu_{n_j}$ για κάθε j . Έστω επίσης $(B, \{\lambda_j\})$ ώστε $\lambda_j \circ \psi_j = \lambda_j$ για κάθε j . Από την Πρόταση 3.2.18 έπεται πως η $\{\mu_n(A_n)\}$ είναι αύξουσα και πως $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)}$. Επομένως το ίδιο θα ισχύει και για την $\{\mu_{n_j}(A_{n_j})\}$. Όπως στην απόδειξη του (iv)(a) της Πρότασης 3.2.12 προκύπτει πως υπάρχει μοναδικός *-ομομορφισμός $f : A = \overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} \mu_{n_j}(A_{n_j})} \rightarrow B$ ώστε $f \circ \lambda_j = \mu_{n_j}$ για κάθε j . Συνεπώς το $(A, \{\mu_{n_j}\})$ είναι το επαγωγικό όριο της ακολουθίας (3.3).

(ii) Έστω B_n και π_n όπως στην εκφώνηση. Για κάθε n ορίζουμε

$$\psi_n : B_n \rightarrow B_{n+1}, \text{ όπου } \psi_n(a + \text{Ker} \mu_n) := \varphi_n(a) + \text{Ker} \mu_{n+1}, \forall a \in A_n$$

Η ψ_n είναι καλά ορισμένη, καθώς αν $a + \text{Ker} \mu_n = b + \text{Ker} \mu_n$ τότε $\mu_n(a - b) = 0$ και άρα $\mu_{n+1} \circ \varphi_n(a - b) = 0$. Επιπλέον ο ψ_n είναι *-μονομορφισμός.

Παρατηρούμε πως για κάθε n έχουμε ότι $\pi_{n+1} \circ \varphi_n = \psi_n \circ \pi_n$. Αν το $(B, \{\lambda_n\})$ το επαγωγικό όριο της $(B_n, \{\psi_n\})$, τότε για κάθε n έχουμε πως

$$(\lambda_{n+1} \circ \pi_{n+1}) \circ \varphi_n = \lambda_{n+1} \circ (\pi_{n+1} \circ \varphi_n) = \lambda_{n+1} \circ (\psi_n \circ \pi_n) = (\lambda_{n+1} \circ \psi_n) \circ \pi_n = \lambda_n \circ \pi_n$$

Επομένως από την Καθολική Ιδιότητα του επαγωγικού ορίου, υπάρχει *-ομομορφισμός $\pi : A \rightarrow B$ ώστε $\pi \circ \mu_n = \lambda_n \circ \pi_n$ για κάθε n .

Ο π είναι *-ισομορφισμός. Λόγω του (iv)(b) της Πρότασης 3.2.12, έχουμε πως η π είναι *-μονομορφισμός αν και μόνο αν $\text{Ker} \mu_n = \text{Ker} \lambda_n \circ \pi_n$ για κάθε n . Προφανώς ισχύει πως $\text{Ker} \mu_n \subseteq \text{Ker} \lambda_n \circ \pi_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αντίθετα αν $x \in \text{Ker} \lambda_n \circ \pi_n$, τότε $\pi_n(x) \in \text{Ker} \lambda_n$ και άρα από το (iii) της Πρότασης 3.2.12 συνεπάγεται πως

$$\|\varphi_{m,n}(\pi_n(x))\| \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Επειδή για κάθε $m \geq n$ η $\psi_{m,n}$ είναι 1-1 και άρα ισομετρία, έχουμε $\pi_n(x) = 0$. Συνεπώς η π είναι *-μονομορφισμός. Επιπλέον ξέρουμε πως $B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n(B_n)}$ και αφού η π_n είναι επί για κάθε n , έχουμε $B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \lambda_n \circ \pi_n(A_n)}$. Άρα από το (iv)(c) της Πρότασης 3.2.12, έπεται πως η π είναι επί. Συνεπώς η π είναι ο ζητούμενος *-ισομορφισμός και άρα

$$\varinjlim A_n = A \simeq B = \varinjlim A_n / \text{Ker} \mu_n.$$

(iii) Αν για κάθε n ο φ_n είναι *-μονομορφισμός, τότε από το (iii) της Πρότασης 3.2.12 έπεται πως και η μ_n είναι *-μονομορφισμός. Επιπλέον ξέρουμε πως η $\{\mu_n(A_n)\}$ αύξουσα και πως $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)}$.

Ισχυρισμός. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα, 1_A , και B είναι μια πυκνή *-υποάλγεβρα της A , τότε το $1_A \in B$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Έστω ότι $1_A \notin B$. Θεωρούμε την *-υποάλγεβρα $B_1 = \{b + \lambda 1_A : b \in B, \lambda \in \mathbb{C}\}$. Η B είναι γνήσιο ιδεώδες της B_1 και άρα κανένα στοιχείο της B δεν

αντιστρέφεται στην B_1 . Επίσης ξέρουμε πως σε κάθε άλγεβρα Banach A με μονάδα ισχύει το εξής: Αν $\|1_A - x\| < 1$ για κάποιο $x \in A$ τότε το x είναι αντιστρέψιμο στοιχείο της A .

Επομένως αν $U := \{x \in B_1 : \|1_A - x\| < 1\}$, έπεται πως $U \cap B = \emptyset$ και άρα η B δεν είναι πυκνή στην B_1 . Άτοπο. $\square$

Επομένως αν υποθέσουμε πως η A έχει μονάδα, 1_A , τότε $1_A \in \bigcup_n \mu_n(A_n)$ και άρα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ το $1_A \in \mu_n(A_n)$.

Αφού λοιπόν για κάθε $n \geq n_0$ το $1_A \in \mu_n(A_n)$ και $A_n \simeq \mu_n(A_n)$, έπεται πως και οι A_n θα έχουν μονάδα για κάθε $n \geq n_0$. Επιπλέον για κάθε $n \geq n_0$ ο $*$ -μονομορφισμός μ_n διατηρεί την μονάδα. Πράγματι αν $1_A = \mu_n(a)$ για κάποιο $a \in A_n$, τότε για κάθε $b \in A_n$ ισχύει ότι $\mu_n(b) = \mu_n(a)\mu_n(b) = \mu_n(ab)$ και άρα $ab = b$. Όμοια προκύπτει πως $ba = b$ και άρα $a = 1_{A_n}$. Τέλος οι $*$ -μονομορφισμοί φ_n θα διατηρούν την μονάδα για $n \geq n_0$, διότι ισχύει πως $\mu_{n+1} \circ \varphi_n(1_{A_n}) = \mu_n(1_{A_n}) = 1_A = \mu_{n+1}(1_{A_{n+1}})$. $\square$

Πόρισμα 3.2.14. Αν μια C^* -άλγεβρα με μονάδα A είναι το όριο μιας ακολουθίας C^* -αλγεβρών, τότε η A προκύπτει και ως όριο μιας ακολουθίας C^* -υποάλγεβρών της (οι οποίες έχουν μονάδα). Επιπλέον οι συνδετικοί μορφισμοί της συγκεκριμένης ακολουθίας θα είναι $*$ -μονομορφισμοί που διατηρούν την μονάδα.

Απόδειξη. Πράγματι αν A είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα και $(A, \{\mu_n\}) = \varinjlim (A_n, \varphi_n)$ για κάποια επαγωγική ακολουθία

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

τότε από την Πρόταση 3.2.12 έχουμε πως $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n(A_n)}$. Όπως στο Παράδειγμα 3.2.10-2 έπεται πως

$$\mu_1(A_1) \longrightarrow \mu_2(A_2) \longrightarrow \mu_3(A_3) \longrightarrow \dots \longrightarrow A$$

Επομένως από το προηγούμενο Λήμμα, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Σχόλιο 3.2.15. Προφανώς ισχύει πως αν $A = \varinjlim (A_n, \varphi_n)$, με

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

να είναι μια ακολουθία από C^* -άλγεβρες με μονάδα και $*$ -ομομορφισμούς οι οποίοι διατηρούν την μονάδα τελικά για κάθε n , τότε και η A θα είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα.

Αν υποθέσουμε πως όλοι οι όροι της παραπάνω ακολουθίας έχουν μονάδα αλλά οι συνδετικοί μορφισμοί δεν διατηρούν την μονάδα για άπειρα n , τότε δεν ισχύει απαραίτητα πως η A θα έχει μονάδα. Το Παράδειγμα 3.2.10-3 επαληθεύει αυτόν τον Ισχυρισμό.

Λήμμα 3.2.16. Έστω

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots, \quad B_1 \xrightarrow{\psi_1} B_2 \xrightarrow{\psi_2} B_3 \xrightarrow{\psi_3} \dots$$

δύο επαγωγικές ακολουθίες C^* -αλγεβρών και $(A, \{\mu_n\}), (B, \{\lambda_n\})$ τα επαγωγικά τους όρια. Αν για κάθε $n \geq 1$ υπάρχουν $*$ -ομομορφισμοί $\alpha_n : A_n \rightarrow B_n$ και $\beta_n : B_n \rightarrow A_{n+1}$ ώστε $\beta_n \circ \alpha_n = \varphi_n$ και

$\alpha_{n+1} \circ \beta_n = \psi_n$ τότε υπάρχουν $*$ -ομομορφισμοί $\alpha : A \rightarrow B$ και $\beta : B \rightarrow A$ οι οποίοι κάνουν το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό,

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & \cdots \longrightarrow A \\ \alpha_1 \downarrow & \nearrow \beta_1 & \alpha_2 \downarrow & \nearrow \beta_2 & \alpha_3 \downarrow & & \nearrow \beta \\ B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & \cdots \longrightarrow B \end{array}$$

δηλαδή οι C^* -άλγεβρες A και B είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Αν για κάθε n υπάρχουν $\alpha_n : A_n \rightarrow B_n, \beta_n : B_n \rightarrow A_{n+1}$ όπως στην εκφώνηση, τότε παρατηρούμε πως για κάθε n

$$(\lambda_{n+1} \circ \alpha_{n+1}) \circ \varphi_n = \lambda_{n+1} \circ (\alpha_{n+1} \circ \varphi_n) = \lambda_{n+1} \circ (\psi_n \circ \alpha_n) = (\lambda_{n+1} \circ \psi_n) \circ \alpha_n = \lambda_n \circ \alpha_n.$$

Επομένως από την Καθολική Ιδιότητα του επαγωγικού ορίου για την A , έπεται πως υπάρχει μοναδικός $*$ -ομομορφισμός $\alpha : A \rightarrow B$ ώστε $\alpha \circ \mu_n = \lambda_n \circ \alpha_n$ για κάθε n . Ομοίως με πριν υπάρχει μοναδικός $*$ -ομομορφισμός $\beta : B \rightarrow A$ ώστε $\beta \circ \lambda_n = \mu_{n+1} \circ \beta_n$ για κάθε n . Τότε έχουμε πως η $\beta \circ \alpha$ κάνει μεταθετικό το παρακάτω διάγραμμα,

$$\begin{array}{ccc} A_n & & A \\ \downarrow \varphi_n & \searrow \mu_n & \xrightarrow{\beta \circ \alpha} \\ A_{n+1} & \nearrow \mu_{n+1} & A \end{array}$$

και επειδή το ίδιο προφανώς συμβαίνει αν στη θέση της $\beta \circ \alpha$ ήταν η Id_A , από την Καθολική Ιδιότητα του επαγωγικού ορίου έπεται πως $\beta \circ \alpha = Id_A$. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει πως $\alpha \circ \beta = Id_B$. Συνεπώς $\alpha = \beta^{-1}$ και άρα $A \simeq B$. $\square$

Παράδειγμα 3.2.17. Θεωρούμε την παρακάτω επαγωγική ακολουθία C^* -αλγεβρών,

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi} M_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} M_3(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} \cdots \quad (3.4)$$

$$\text{όπου } \varphi : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_{n+1}(\mathbb{C}), \varphi(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \forall a \in M_n(\mathbb{C}).$$

Απόδειξη. Έστω $(\mathcal{K}\mathbb{C}, \{\kappa_n\})$ το επαγωγικό όριο της παραπάνω ακολουθίας και H ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του H , τότε για κάθε n θεωρούμε τον υπόχωρο H_n του H ο οποίος παράγεται από το $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ καθώς και τον $*$ -ισομορφισμό $\beta_n : B(H_n) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, με $\beta_n(T)$ να είναι ο πίνακας του T ως προς την βάση $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Αν F_n είναι η προβολή επί του H_n , τότε οι C^* -άλγεβρες $F_n B(H) F_n$ και $B(H_n)$ είναι ισόμορφες για κάθε n . Επομένως για κάθε n προκύπτει ένας $*$ -ισομορφισμός $\alpha_n : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow F_n B(H) F_n$. Από το Θεώρημα 4.4 στο [7] έπεται πως $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n B(H) F_n} = \mathcal{K}(H)$ και άρα $\mathcal{K}(H) = \varinjlim F_n B(H) F_n$. Συνεπώς προκύπτει το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\varphi_1} & M_2(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi_2} & M_3(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi_3} & \cdots \longrightarrow \mathcal{K}\mathbb{C} \\ \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_3 & & \\ F_1 B(H) F_1 & \longrightarrow & F_2 B(H) F_2 & \longrightarrow & F_3 B(H) F_3 & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow \mathcal{K}(H) \end{array}$$

Ομοίως με την απόδειξη του Λήμματος 3.2.16 προκύπτει πως υπάρχει ένας *-ισομορφισμός $\alpha : \mathcal{K}\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{K}(H)$ και άρα $\varinjlim M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathcal{K}(H)$. $\square$

Πρόταση 3.2.18. (Επαγωγικά όρια αβελιανών ομάδων) Κάθε ακολουθία

$$G_1 \xrightarrow{a_1} G_2 \xrightarrow{a_2} G_3 \xrightarrow{a_3} \dots$$

αβελιανών ομάδων έχει ένα επαγωγικό όριο $(G, \{\beta_n\})$. Επιπλέον ισχύουν τα εξής:

- (i) $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(G_n)$.
- (ii) $\text{Ker}(\beta_n) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \text{Ker}(a_{m,n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- (iii) Αν $(H, \{\gamma_n\})$ και $\gamma : G \rightarrow H$ ώστε $\gamma_{n+1} \circ a_n = \gamma_n$, τότε
 - (a) η γ είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν $\text{Ker}(\gamma_n) = \text{Ker}(\beta_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και
 - (b) η γ είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma_n(G_n)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν της Πρότασης 3.2.12. Δηλαδή θεωρούμε την αβελιανή ομάδα $\prod_{n=1}^{\infty} G_n = \{(g_n)_n : g_n \in G_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$ με την πράξη να ορίζεται κατά σημείο, καθώς και την κανονική υποομάδα $\sum_{n=1}^{\infty} G_n = \{(g_n)_n \in \prod_{n=1}^{\infty} G_n : g_n \neq 0_n \text{ μόνο για πεπερασμένο πλήθος } n\}$. Στη συνέχεια θεωρούμε τους ομομορφισμούς ομάδων $\pi : \prod_{n=1}^{\infty} G_n \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} G_n / \oplus_{n=1}^{\infty} G_n$ και $\beta_n : G_n \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} G_n / \oplus_{n=1}^{\infty} G_n$, $g \mapsto \pi((a_{m,n}(g))_{m=1}^{\infty})$ κ.ο.κ $\square$

Πρόταση 3.2.19. (Επαγωγικά όρια διατεταγμένων αβελιανών ομάδων)

Έστω

$$G_1 \xrightarrow{a_1} G_2 \xrightarrow{a_2} G_3 \xrightarrow{a_3} \dots$$

μια επαγωγική ακολουθία διατεταγμένων αβελιανών ομάδων, όπου οι συνδετικές απεικονίσεις είναι θετικοί ομομορφισμοί ομάδων. Αν $(G, \{\beta_n\})$ είναι το επαγωγικό όριο αυτής της ακολουθίας στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων και

$$G^+ := \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(G_n^+),$$

τότε το ζεύγος (G, G^+) είναι μια διατεταγμένη αβελιανή ομάδα, η β_n είναι θετικός ομομορφισμός ομάδων για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και το σύστημα $((G, G^+), \{\beta_n\})$ είναι το επαγωγικό όριο της παραπάνω ακολουθίας στην κατηγορία των διατεταγμένων αβελιανών ομάδων.

Απόδειξη. Επειδή ο συνδετικός ομομορφισμός a_n είναι θετικός για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε πως

$$\beta_n(G_n^+) = \beta_{n+1}(a_n(G_n^+)) \subseteq \beta_{n+1}(G_{n+1}^+)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα η $\{\beta_n(G_n^+)\}_n$ είναι μια αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων της G^+ . Αν $x, y \in G^+$, τότε και τα δύο ανήκουν σε κάποιο $\beta_n(G_n^+)$, και άρα $x + y \in \beta_n(G_n^+) \subseteq G^+$.

Αν $x \in G^+ \cap -G^+$, τότε $x \in \beta_n(G_n^+) \cap -\beta_n(G_n^+)$ για κάποιο n , και άρα $x = \beta_n(y_1) = -\beta_n(y_2)$ για κάποια $y_1, y_2 \in G_n^+$. Αφού $\beta_n(y_1 + y_2) = 0$ υπάρχει ένα $m \geq n$ ώστε $a_{m,n}(y_1 + y_2) = 0$. Έστω $z_j = a_{m,n}(y_j)$. Τότε $z_1, z_2 \in G_m^+$ και $z_1 + z_2 = 0$. Επειδή $G_m^+ \cap -G_m^+ = \{0\}$ έπεται πως $z_1 = z_2 = 0$, και άρα $x = \beta_m(z_1) = 0$.

Αν $x \in G$, τότε από την Πρόταση 6.2.5 (i) το $x \in \beta_n(G_n)$ για κάποιο n . Επειδή $G = G_n^+ - G_n^+$ το $x \in \beta_n(G_n^+) - \beta_n(G_n^+) \subseteq G^+ - G^+$. Επομένως $G = G^+ - G^+$.

Από τα παραπάνω λοιπόν έπεται πως το ζεύγος (G, G^+) είναι διατεταγμένη αβελιανή ομάδα. Επίσης εξ' ορισμού της G^+ έχουμε πως $\beta_n(G_n^+) \subseteq G^+$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα οι ομομορφισμοί β_n είναι θετικοί. Επιπλέον το $((G, G^+), \{\beta_n\})$ είναι το επαγωγικό όριο της αρχικής ακολουθίας στην κατηγορία των διατεταγμένων αβελιανών ομάδων. Πράγματι επειδή το $(G, \{\beta_n\})$ είναι το επαγωγικό όριο της ακολουθίας στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων, ισχύει πως $\beta_{n+1} \circ a_n = \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για τον ίδιο λόγο αν υπάρχει $(H, \{\gamma_n\})$ ώστε $\gamma_{n+1} \circ a_n = \gamma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\gamma : G \rightarrow H$ ώστε $\gamma \circ \beta_n = \gamma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μάλιστα ο γ είναι θετικός, διότι

$$\gamma(G^+) = \gamma\left(\bigcup_n \beta_n(G_n^+)\right) = \bigcup_n (\gamma \circ \beta_n)(G_n^+) = \bigcup_n \gamma_n(G_n^+) \subseteq H^+.$$

□

3.3 Συνέχεια του συναρτητή K_0

Λήμμα 3.3.1. Έστω A μια C^* -άλγεβρα.

- (i) Αν a είναι ένα αυτοσυζυγές στοιχείο της A , με $\delta = \|a - a^2\| \leq 1/4$, τότε υπάρχει προβολή p της A ώστε $\|a - p\| \leq 2\delta$.
- (ii) Αν $p, q \in \mathcal{P}(A)$, και $x \in A$ ώστε $\|x^*x - p\| < 1/2$ και $\|xx^* - q\| < 1/2$, τότε $p \sim q$.

Απόδειξη. (i) Αν $t \in \sigma(a)$, τότε από το θεώρημα φασματικής απεικόνισης $t - t^2 \in \sigma(a - a^2)$. Επομένως αν $t \in \mathbb{R}$ με $|t - t^2| \leq \delta < 1/4$, τότε το $t \in [-2\delta, 2\delta] \cup [1 - 2\delta, 1 + 2\delta]$, και άρα ορίζεται καλώς και είναι συνεχής η συνάρτηση $f : \sigma(a) \rightarrow \mathbb{R}$, με

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν } t \geq 1 - 2\delta \\ 0, & \text{αν } t \leq 2\delta \end{cases}.$$

Αν $p := f(a)$, τότε το $p \in \mathcal{P}(A)$ διότι $f = \bar{f} = f^2$, και επειδή $|t - f(t)| \leq 2\delta$ για κάθε $t \in \sigma(a)$, έπεται πως $\|a - p\| \leq 2\delta$.

(ii) Έστω

$$\delta = \max\{\|x^*x - p\|, \|xx^* - q\|\} < 1/4 \quad \text{και} \quad \Gamma = \sigma(x^*x) \cup \sigma(xx^*)$$

Τότε από το Λήμμα 1.3.13 έπεται πως $\Gamma \subseteq [-2\delta, 2\delta] \cup [1 - 2\delta, 1 + 2\delta]$.

Έστω μια $f \in C(\Gamma)$ όπως στο (i). Τότε οι $p_0 := f(x^*x)$ και $q_0 := f(xx^*)$ είναι προβολές της A , για τις οποίες χρησιμοποιώντας το (i) προκύπτει ότι $\|p - p_0\| \leq 4\delta < 1$ και $\|q - q_0\| \leq 4\delta < 1$. Επομένως από την Πρόταση 1.3.17 έχουμε πως $p \sim p_0$ και $q \sim q_0$.

Παρατηρούμε πως $xh(x^*x)x^* = h(xx^*)xx^*$ για κάθε πολυώνυμο $h \in C(\Gamma)$, άρα και για κάθε $h \in C(\Gamma)$ αφού το Γ είναι συμπαγές. Θεωρούμε μια θετική συνεχή συνάρτηση $g \in C(\Gamma)$ για την οποία ισχύει ότι $tg(t)^2 = f(t)$ για κάθε $t \in \Gamma$. Τότε για το $v := xg(x^*x)$ ισχύουν τα εξής:

$$v^*v = g(x^*x)x^*xg(x^*x) = f(x^*x) = p_0, \quad vv^* = xg(x^*x)x^* = g(xx^*)^2xx^* = f(xx^*) = q_0.$$

Δηλαδή $p_0 \sim q_0$ και άρα $p \sim q$.

□

Θεώρημα 3.3.2. (Συνέχεια της K_0)

Για κάθε επαγωγική ακολουθία C^* -αλγεβρών

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

ισχύει ότι $K_0(\varinjlim A_n) \simeq \varinjlim K_0(A_n)$ στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων. Αν επιπλέον ισχύει πως η $(K_0(A_n), K_0(A_n)^+)$ είναι διατεταγμένη αβελιανή ομάδα για κάθε n , τότε έχουμε πως $K_0(\varinjlim A_n) \simeq \varinjlim K_0(A_n)$ και στην κατηγορία των διατεταγμένων αβελιανών ομάδων.

Συγκεκριμένα, αν $(A, \{\mu_n\})$ είναι το επαγωγικό όριο της παραπάνω ακολουθίας και $(G_0, \{\beta_n\})$ το επαγωγικό όριο της ακολουθίας

$$K_0(A_1) \xrightarrow{K_0(\varphi_1)} K_0(A_2) \xrightarrow{K_0(\varphi_2)} K_0(A_3) \xrightarrow{K_0(\varphi_3)} \dots \quad (3.5)$$

τότε υπάρχει μοναδικός ισομορφισμός ομάδων $\gamma : G_0 \rightarrow K_0(A)$ που κάνει το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & K_0(A_n) & \\ \beta_n \swarrow & & \searrow K_0(\mu_n) \\ G_0 & \xrightarrow{\gamma} & K_0(A) \end{array}$$

μεταθετικό για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $\gamma \circ \beta_n = K_0(\mu_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον,

$$(i) \quad K_0(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_0(\mu_n)(K_0(A_n)).$$

$$(ii) \quad K_0(A)^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_0(\mu_n)(K_0(A_n)^+).$$

$$(iii) \quad \text{Ker } K_0(\mu_n) = \bigcup_{m=n+1}^{\infty} \text{Ker}(K_0(\varphi_{m,n})) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε τα (i), (ii) και (iii). Χάριν απλοποίησης του συμβολισμού, θα συνεχίσω να συμβολίζω με φ_n τον επαγόμενο *-ομομορφισμό $M_\kappa(A_n) \rightarrow M_\kappa(A_{n+1})$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, με μ_n τον επαγόμενο *-ομομορφισμό $M_\kappa(A_n) \rightarrow M_\kappa(A)$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, και με $\tilde{\mu}_n$ τον επαγόμενο *-ομομορφισμό $M_\kappa(\tilde{A}_n) \rightarrow M_\kappa(\tilde{A})$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

Ισχυρισμός. Για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$, $(M_\kappa(A), \{\mu_n\}), (M_\kappa(\tilde{A}), \{\tilde{\mu}_n\})$ είναι τα επαγωγικά όρια των δύο παρακάτω επαγωγικών ακολουθιών

$$M_\kappa(A_1) \xrightarrow{\varphi_1} M_\kappa(A_2) \xrightarrow{\varphi_2} M_\kappa(A_3) \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

$$M_\kappa(\tilde{A}_1) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_1} M_\kappa(\tilde{A}_2) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_2} M_\kappa(\tilde{A}_3) \xrightarrow{\tilde{\varphi}_3} \dots$$

Αποδείξη Ισχυρισμού. Αρκεί να το αποδείξουμε για την πρώτη ακολουθία. Λόγω της Πρότασης 3.2.12 το επαγωγικό όριο της ακολουθίας θα είναι το $(B, \{\rho_n\})$, όπου

$$B = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \rho_n(M_\kappa(A_n))}, \rho_n : M_\kappa(A_n) \longrightarrow \prod_{m=1}^{\infty} M_\kappa(A_m) / \sum_{m=1}^{\infty} M_\kappa(A_m), z \mapsto \pi((\varphi_{m,n}(z))_{m=1}^{\infty}).$$

Προφανώς επειδή $\mu_{n+1} \circ \varphi_n = \rho_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το ίδιο θα ισχύει και για τους επαγόμενους *-ομομορφισμούς, και άρα από την Καθολική Ιδιότητα του $\varinjlim M_\kappa(A_n)$, έπεται πως υπάρχει μοναδικός *-ομομορφισμός $f : B \rightarrow M_\kappa(A)$ ώστε $f \circ \rho_n = \mu_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι η f είναι *-ισομορφισμός. Λόγω του (iv) της Πρότασης 3.2.12 αρ-
κεί να αποδείξουμε ότι $Ker(\mu_n) = Ker(\rho_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και πως $M_\kappa(A) = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(M_\kappa(A_n))}$.

Προφανώς $Ker(\rho_n) \subseteq Ker(\mu_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν τώρα $z = (z_{ij})_{i,j} \in M_\kappa(A_n)$ και $z \in Ker(\mu_n)$, τότε $z_{ij} \in Ker(\mu_n)$ για κάθε i, j , με $\mu_n : A_n \rightarrow A$. Από το (iii) της Πρότασης 3.2.12 έπεται πως $\lim_m \|\varphi_{m,n}(z_{ij})\| = 0$ για κάθε (i, j) , και άρα

$$\lim_m \sum_{i,j} \|\varphi_{m,n}(z_{ij})\| = \sum_{i,j} \lim_m \|\varphi_{m,n}(z_{ij})\| = 0.$$

Τότε από την Παρατήρηση 1.1.34 έπεται πως $\lim_m \|\varphi_{m,n}(z)\| = 0$. Επομένως από το Λήμμα 3.2.11 έχουμε πως $(\varphi_{m,n}(z))_{m=1}^\infty \in \sum_{m=1}^\infty M_\kappa(A_m)$. Συνεπώς το $z \in Ker \rho_n$ και άρα $Ker \mu_n = Ker \rho_n$.

Επίσης παρατηρούμε πως

$$\overline{\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(M_\kappa(A_n))} = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty M_\kappa(\mu_n(A_n))} = M_\kappa(\overline{\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n)}),$$

διότι η $\{\mu_n(A_n)\}$ είναι αύξουσα. Επειδή $M_\kappa(\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n)) \subseteq M_\kappa(\overline{\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n)})$, έπεται πως $\overline{M_\kappa(\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n))} \subseteq M_\kappa(\overline{\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n)})$. Δηλαδή $M_\kappa(A) \subseteq M_\kappa(\overline{\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n)})$.

Έστω τώρα $z = (z_{ij})_{i,j} \in M_\kappa(A)$. Τότε για κάθε (i, j) , υπάρχει ακολουθία $\{\kappa_m^{ij}\}_m$ στο $\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n)$ ώστε

$$z_{ij} = \lim_m \kappa_m^{ij}.$$

Για κάθε $l \in \mathbb{N}$, ορίζω $z_l = (\kappa_l^{ij})_{i,j} \in M_\kappa(\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n))$.

Τότε

$$\|z - z_l\| = \|(z_{ij} - \kappa_l^{ij})_{i,j}\| \leq \sum_{i,j} \|z_{ij} - \kappa_l^{ij}\| \rightarrow 0.$$

Επομένως $z \in \overline{M_\kappa(\bigcup_{n=1}^\infty \mu_n(A_n))}$, και άρα έχουμε ισότητα. $\square$

(i) Προφανώς $\bigcup_{n=1}^\infty K_0(\mu_n)(K_0(A_n)) \subseteq K_0(A)$. Έστω τώρα $g \in K_0(A)$, τότε από standard picture της $K_0(A)$, έπεται πως υπάρχει $p \in \mathcal{P}_\kappa(\tilde{A})$ για κάποιο $\kappa \in \mathbb{N}$, ώστε $g = [p]_0 - [s(p)]_0$.

Από τον ισχυρισμό που προηγήθηκε, έπεται πως $M_\kappa(\tilde{A}) = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty \tilde{\mu}_n(M_\kappa(\tilde{A}_n))}$, και άρα υπάρχει $b_n \in M_\kappa(\tilde{A}_n)$ για κάποιο n ώστε $\|\tilde{\mu}_n(b_n) - p\| < 1/5$. Ορίζουμε $a_n = \frac{b_n + b_n^*}{2} \in M_\kappa(\tilde{A}_n)$ και $a_m = \tilde{\varphi}_{m,n}(a_n)$ για κάθε $m > n$. Τότε το a_m είναι αυτοσυζυγές για κάθε $m > n$ και αν $m \geq n$ έχουμε

$$\|\tilde{\mu}_m(a_m) - p\| = \|\tilde{\mu}_n(a_n) - p\| \leq \frac{1}{2}(\|\tilde{\mu}_n(b_n) - p\| + \|(\tilde{\mu}_n(b_n) - p)^*\|) < 1/5.$$

Επομένως από το Λήμμα 1.3.13, έπεται πως $\sigma(\tilde{\mu}_n(a_n)) \subseteq [-1/5, 1/5] \cup [4/5, 6/5]$, και άρα

$$\|\tilde{\mu}_n(a_n^2 - a_n)\| = \max \{|t^2 - t| : t \in \sigma(\tilde{\mu}_n(a_n))\} < 1/4.$$

Επειδή $\|\tilde{\mu}_n(a_n^2 - a_n)\| = \lim_m \|\tilde{\varphi}_{m,n}(a_n^2 - a_n)\|$, υπάρχει $m \geq n$ έτσι ώστε $\|\tilde{\varphi}_{m,n}(a_n^2 - a_n)\| < 1/4$, και άρα $\|a_m^2 - a_m\| < 1/4$. Τότε από το (i) του Λήμματος 3.3.1 έπεται πως υπάρχει $q \in \mathcal{P}_\kappa(\tilde{A}_m)$ ώστε $\|a_m - q\| < 1/2$. Επομένως

$$\|\tilde{\mu}_m(q) - p\| \leq \|\tilde{\mu}_m(q - a_m)\| + \|\tilde{\mu}(a_m) - p\| \leq \|q - a_m\| + \|\tilde{\mu}(a_m) - p\| < 1.$$

Εφόσον λοιπόν $\tilde{\mu}_m(q), p$ είναι προβολές της $M_\kappa(\tilde{A})$, από το την Πρόταση 1.3.14 έπεται πως $\tilde{\mu}_m(q) \sim_h p$. Τελικά

$$g = [p]_0 - [s(p)]_0 = [\tilde{\mu}_m(q)]_0 - [s(\tilde{\mu}_m(q))]_0 = K_0(\mu_m)([q]_0 - [s(q)]_0) \in K_0(\mu_m)(K_0(A_m)).$$

(ii) $K_0(\mu_n)(K_0(A_n)^+) \subseteq K_0(A)^+$, διότι όπως έχουμε δει ο $K_0(\mu_n)$ είναι θετικός για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_0(\mu_n)(K_0(A_n)^+) \subseteq K_0(A)^+$. Αντίθετα αν $g \in K_0(A)^+$, τότε $g = [p]_0$, όπου $p \in \mathcal{P}_\kappa(A)$ για κάποιο κ . Όπως στο (i) υπάρχει $q \in \mathcal{P}_\kappa(A_m)$ για κάποιο m , ώστε $\|\mu_m(q) - p\| < 1$. Συνεπώς $p \sim_h \mu_m(q)$ στην $M_\kappa(A)$, και άρα

$$g = [p]_0 = [\mu_m(q)]_0 = K_0(\mu_m)([q]_0) \in K_0(A_m)^+.$$

Επομένως $K_0(A)^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_0(\mu_n)(K_0(A_n)^+)$.

(iii) Προφανώς για κάθε $m > n$ ισχύει ότι $\text{Ker} K_0(\varphi_{m,n}) \subseteq \text{Ker} K_0(\mu_n)$. Αντίθετα αν $g \in \text{Ker} K_0(\mu_n)$ τότε από το (i) του Λήμματος 2.4.9 υπάρχει $p \in \mathcal{P}_k(\tilde{A}_n)$ ώστε $g = [p]_0 - [s(p)]_0$ και $\tilde{\mu}_n(p) \sim \tilde{\mu}_n(s(p))$. Δηλαδή υπάρχει $v \in M_k(\tilde{A})$ ώστε $\tilde{\mu}_n(p) = v^*v$ και $\tilde{\mu}_n(s(p)) = vv^*$. Από τον Ισχυρισμό που προηγήθηκε και από την Πρόταση 3.2.12, έπεται πως υπάρχει $l \geq n$ και $x_l \in M_k(\tilde{A}_l)$ ώστε $\|\tilde{\mu}_l(x_l) - v\| < \frac{1}{8}$. Θέτουμε $u = \tilde{\mu}_l(x_l)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mu}_l(x_l^*x_l) - v^*v\| &= \|u^*u - v^*v\| \leq \|u^*\|\|u - v\| + \|(u - v)^*\|\|v\| \\ &= \|u - v\|(\|u\| + \|v\|) \leq \|u - v\|(\|u - v\| + 2\|v\|) < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Όμοια προκύπτει πως $\|\tilde{\mu}_l(x_l x_l^*) - vv^*\| < \frac{1}{2}$. Από το (ii) της Πρότασης 3.2.12 έπεται πως υπάρχει $m \geq l$ ώστε

$$\|x_m^*x_m - \tilde{\varphi}_{m,n}(p)\| < \frac{1}{2} \text{ και } \|x_m x_m^* - \tilde{\varphi}_{m,n}(s(p))\| < \frac{1}{2}$$

με $x_m = \tilde{\varphi}_{m,l}(x_l)$. Συνεπώς από το (ii) του Λήμματος 3.3.1 έπεται πως $\tilde{\varphi}_{m,n}(p) \sim \tilde{\varphi}_{m,n}(s(p))$ στην $M_k(\tilde{A}_m)$. Τελικά έχουμε ότι $K_0(\varphi_{m,n})(g) = [\tilde{\varphi}_{m,n}(p)]_0 - [s(\tilde{\varphi}_{m,n}(p))]_0 = 0$ και άρα $g \in \text{Ker}(K_0(\varphi_{m,n}))$.

Αν $(G_0, \{\beta_n\})$ είναι το επαγωγικό όριο της ακολουθίας $(K_0(A_n), K_0(\varphi_n))$, τότε επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\mu_{n+1} \circ \varphi_n = \mu_n$, από Functoriality της K_0 , προκύπτει πως $K_0(\mu_{n+1}) \circ K_0(\varphi_n) = K_0(\mu_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως από την Καθολική Ιδιότητα του ορίου υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $\gamma : G_0 \rightarrow K_0(A)$, ώστε $\gamma \circ \beta_n = K_0(\mu_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Η γ είναι ισομορφισμός ομάδων. Αρχικά η γ είναι επί λόγω του (i) και της Πρότασης 3.2.18. Επίσης αν $g \in \text{Ker}(\gamma)$, τότε $g = \beta_n(h)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και $h \in K_0(A_n)$. Τότε $h \in \text{Ker} K_0(\mu_n)$, και άρα από το (iii) υπάρχει $m > n$ τέτοιο ώστε $K_0(\varphi_{m,n})(h) = 0$. Άρα $\beta_m \circ K_0(\varphi_{m,n})(h) = 0$, δηλαδή $g = \beta_n(h) = 0$. Επομένως $K_0(\varinjlim A_n) \simeq \varinjlim K_0(A_n)$ στην κατηγορία των αβελιανών ομάδων.

Αν υποθέσουμε πως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το ζεύγος $(K_0(A_n), K_0(A_n)^+)$ είναι διατεταγμένη αβελιανή ομάδα, από την Πρόταση 3.2.19 έχουμε πως το όριο της ακολουθίας (3.4) στην κατηγορία των διατεταγμενων αβελιανών ομάδων είναι το $((G_0, G_0^+), \{\beta_n\})$, όπου $G_0^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \beta_n(K_0(A_n)^+)$. Πριν είδαμε ότι η $\gamma : G_0 \rightarrow K_0(A)$ είναι ισομορφισμός ομάδων και μάλιστα θετικός, επειδή $\gamma \circ \beta_n = K_0(\mu_n)$ και ο $K_0(\mu_n)$ είναι θετικός για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Μάλιστα ο γ είναι ισομορφισμός στην κατηγορία των διατεταγμενων αβελιανών ομάδων, καθώς από το (ii) έχω ότι

$$K_0(A)^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_0(\mu_n)(K_0(A_n)^+) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \gamma \circ \beta_n(K_0(A_n)^+) = \gamma(G_0^+).$$

Επομένως ισχύει πως $K_0(\varinjlim A_n) \simeq \varinjlim K_0(A_n)$ και στην κατηγορία των διατεταγμενων αβελιανών ομάδων. □

Κεφάλαιο 4

AF-άλγεβρες

Στο Κεφάλαιο αυτό κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στην θεωρία των AF -άλγεβρων. Αρχικά δίνουμε το ορισμό μιας AF -άλγεβρας και αποδεικνύουμε κάποιες βασικές ιδιότητες αυτής της κλάσης C^* -άλγεβρων. Στη συνέχεια περιγράφουμε την αντιστοιχία μεταξύ των AF -άλγεβρων και των διαγραμμάτων Bratteli. Η αντιστοιχία αυτή είναι θεμελιώδους σημασίας διότι μας δίνει μια καλύτερη εποπτεία της δομής των AF -άλγεβρων καθώς και έναν επιπλέον τρόπο (συνδυαστικό) ταξινόμησης αυτών (Θεώρημα 4.2.14). Έπειτα παραθέτουμε κάποια παραδείγματα AF -άλγεβρων και των διαγραμμάτων Bratteli που αντιστοιχούν σε αυτές καθώς και κάποιες επιπλέον ιδιότητες της κλάσης των AF -άλγεβρων.

4.1 Βασικές ιδιότητες των AF -άλγεβρων

Ορισμός 4.1.1. Μια C^* -άλγεβρα λέγεται AF (*approximately finite*) αν είναι το επαγωγικό όριο μιας ακολουθίας $\{A_n\}_n$ από C^* -άλγεβρες, όπου κάθε μία από αυτές είναι πεπερασμένης διάστασης.

Παρατήρηση 4.1.2. Μια C^* -άλγεβρα A είναι AF αν και μόνο αν υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_n$ από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της A , ώστε $A = \overline{\bigcup_n A_n}$.

Απόδειξη. Πράγματι αν A είναι AF τότε A είναι το $\varinjlim (A_n, \varphi_n)$, όπου

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

επαγωγική ακολουθία C^* -άλγεβρων πεπερασμένης διάστασης. Τότε από την Πρόταση 3.2.12 έχουμε το ζητούμενο. Αντίστροφα αν υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_n$ από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της A , ώστε $A = \overline{\bigcup_n A_n}$, τότε από το Παράδειγμα 3.2.10-(2) έπεται πως η A είναι AF . $\square$

Συνεπώς η παρατήρηση αυτή σε συνδυασμό με το Λήμμα 3.2.11 μας λέει πως ο Ορισμός 4.1.1 είναι ισοδύναμος με το εξής:

Χαρακτηρισμός. Μια C^* -άλγεβρα A είναι AF (*approximately finite*) αν $A = \varinjlim (A_n, \iota_n)$, όπου $\{A_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της A και $\iota_n : A_n \rightarrow A, x \mapsto x$.

Πρόταση 4.1.3. Κάθε AF -άλγεβρα είναι διαχωρίσιμη.

Απόδειξη. Έστω A μια AF -άλγεβρα. Τότε από Παρατήρηση 4.1.2 έπεται πως $A = \overline{\bigcup A_n}$, όπου $\{A_n\}_n$ είναι μια αύξουσα ακολουθία από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της A . Επίσης επειδή κάθε A_n είναι πεπερασμένης διάστασης, έπεται πως για κάθε n υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο D_n ώστε $A_n = \overline{D_n}$. Επομένως $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n} = A$, δηλαδή η A είναι διαχωρίσιμη. $\square$

Πρόταση 4.1.4. Η μοναδοποίηση μιας AF -άλγεβρας είναι AF -άλγεβρα.

Απόδειξη. Αν A είναι AF , τότε $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ για κάποια αύξουσα ακολουθία από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της A . Τότε $\widetilde{A_1} \subseteq \widetilde{A_2} \subseteq \dots$ είναι μια ακολουθία από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της $\widetilde{A}$, και προφανώς $\widetilde{A} = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{A_n}}$. Δηλαδή η $\widetilde{A}$ είναι AF . $\square$

Πρόταση 4.1.5. Κάθε AF -άλγεβρα A παράγεται από τις προβολές της, δηλαδή $A = \overline{\text{span} \mathcal{P}(A)}$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο έπεται από την Παρατήρηση 4.1.2 και την Παρατήρηση 1.2.23. $\square$

Θεώρημα 4.1.6. Μια διαχωρίσιμη μεταθετική C^* -άλγεβρα είναι AF αν και μόνο αν παράγεται από τις προβολές της.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πως η A είναι μια διαχωρίσιμη μεταθετική C^* -άλγεβρα για την οποία ισχύει πως $A = \overline{\text{span} \mathcal{P}(A)}$. Λόγω διαχωρισιμότητας υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ από προβολές της A , ώστε $A = \overline{\text{span}\{p_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Έστω A_n η γραμμική θήκη όλων των πεπερασμένων γινομένων που προκύπτουν από τα στοιχεία $p_1, p_2, \dots, p_n$, δηλαδή

$$A_n := \text{span}\{p_1, \dots, p_n, p_1 p_2, \dots, p_1 p_n, p_2 p_3, \dots, p_2 p_n, \dots, \\ p_{n-1} p_n, \dots, p_1 p_2 \cdots p_{n-1}, \dots, p_2 p_3 \cdots p_n, p_1 p_2 \cdots p_n\}.$$

Προφανώς $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε n . Επειδή η A είναι μεταθετική και τα p_n προβολές, έπεται πως κάθε A_n είναι μια πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρα της A . Επίσης επειδή $\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, έπεται πως $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = A$, δηλαδή η A είναι μια AF -άλγεβρα.

Η άλλη κατεύθυνση έπεται άμεσα από την προηγούμενη Πρόταση. $\square$

Πόρισμα 4.1.7. Έστω X ένας συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Τότε η $C(X)$ είναι AF αν και μόνο αν ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος και ολικά μη συνεκτικός μετρικός χώρος.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε πως η $C(X)$ είναι AF -άλγεβρα αν και μόνο αν είναι διαχωρίσιμη και παράγεται από τις προβολές της.

Υπενθυμίζουμε πως αν ο Y είναι ένας συμπαγής Hausdorff χώρος, τότε ισχύει πως η C^* -άλγεβρα $C(Y)$ είναι διαχωρίσιμη αν και μόνο αν ο Y είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (δεύτερος αριθμήσιμος). Επιπλέον παρατηρούμε πως οι προβολές της $C(X)$ είναι ακριβώς οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις χ_Z με Z να είναι ένα ανοικτό και ταυτοχρόνως κλειστό, υποσύνολο του X . Θα αποδείξουμε πως η $C(X)$ παράγεται από τις προβολές της αν και μόνο αν ο X είναι ολικά μη συνεκτικός.

Ισχυρισμός. Αν Y είναι ένας συμπαγής Hausdorff χώρος, τότε ο Y είναι ολικά μη συνεκτικός αν και μόνο αν έχει βάση από ανοικτά και ταυτοχρόνως κλειστά υποσύνολα.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Υπενθυμίζουμε πως ένας τοπολογικός χώρος είναι ολικά μη συνεκτικός αν κάθε συνεκτική συνιστώσα του είναι μονοσύνολο. Επίσης αν σε ένα χώρο Hausdorff Z υπάρχει ένα ζεύγος (U, V) ανοικτών μη κενών υποσυνόλων του Z ώστε $U \cap V = \emptyset$ και $U \cup V = Z$, τότε το ζεύγος αυτό θα λέγεται αποσύνδεση του Z . Αποδεικνύεται πως ο Z είναι ολικά μη συνεκτικός

αν και μόνο αν κάθε ζεύγος στοιχείων στοιχείων του, (x, y) , μπορεί να διαχωριστεί μέσω μιας αποσύνδεσης του Z , δηλαδή αν υπάρχουν U, V ανοικτά υποσύνολα του Z ώστε $x \in U, y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

Αν υποθέσουμε λοιπόν πως ο Y έχει μια βάση $\mathcal{B}$ από ανοικτά και ταυτοχρόνως κλειστά υποσύνολά του, τότε για κάθε $x, y \in Y$ με $x \neq y$ υπάρχει $U \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in U$ και $y \notin U$. Επομένως το ζεύγος $(U, Y \setminus U)$ είναι μια αποσύνδεση που διαχωρίζει τα x και y και άρα ο Y είναι ολικά μη συνεκτικός.

Αντίστροφα αν ο Y είναι ολικά μη συνεκτικός, τότε για κάθε $y \in Y$ και U ανοικτό που περιέχει το Y υπάρχει V ανοικτό και ταυτοχρόνως κλειστό ώστε $y \in V \subseteq U$. Πράγματι αν το $U = Y$ τότε θέτουμε $V = U$. Διαφορετικά έχουμε πως το $Y \setminus U$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y . Για κάθε $x \in Y \setminus U$ υπάρχει αποσύνδεση (U_x, V_x) του Y ώστε $x \in U_x, y \in V_x$. Επειδή το $\{U_x\}_x$ είναι ανοικτό κάλυμμα του $Y \setminus U$, έπεται πως έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Αν $W := \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$, τότε το W θα είναι ανοικτό και ταυτοχρόνως κλειστό υποσύνολο του Y και $y \in Y \setminus W \subseteq U$, δηλαδή έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Αν λοιπόν ο X είναι ολικά μη συνεκτικός, τότε από τον Ισχυρισμό που προηγήθηκε προκύπτει πως έχει μια βάση $\mathcal{B}$ από ανοικτά και ταυτοχρόνως κλειστά υποσύνολά του. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο

$$A = \text{span}\{\chi_U : U \subseteq X \text{ ανοικτό και κλειστό}\}.$$

Τότε επειδή $\chi_U \chi_V = \chi_{U \cap V}$ για κάθε $U, V \subseteq X$ έπεται πως η A είναι υποάλγεβρα της $C(X)$. Επίσης η A είναι αυτοσυζυγής και διαχωρίζει τα σημεία του X . Πράγματι αν $x, y \in X$ με $x \neq y$, τότε υπάρχει $U \in \mathcal{B}$ ώστε $x \in U$ και $y \notin U$. Επομένως από το Θεώρημα Stone-Weierstrass έπεται πως $C(X) = \overline{A}$, δηλαδή η A παράγεται από τις προβολές της.

Αντίστροφα αν η A παράγεται από τις προβολές της και $x \neq y$, τότε υπάρχει $p \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $p(x) \neq p(y)$. Επομένως υπάρχει $U \subseteq X$ ανοικτό και ταυτοχρόνως κλειστό ώστε $x \in U$ και $y \notin U$. Τότε υπάρχει μια αποσύνδεση του X , (V_1, V_2) , ώστε $x \in V_1$ και $y \in V_2$. Τα x, y επιλέχθηκαν τυχαία και άρα ο X είναι ολικά μη συνεκτικός. $\square$

Σχόλιο 4.1.8. Το Πόρισμα που προηγήθηκε ισχύει και για μεταθετικές C^* -άλγεβρες χωρίς μονάδα. Συγκεκριμένα αν ο X είναι ένας τοπικά συμπαγής Hausdorff χώρος, τότε η $C_0(X)$ είναι μεταθετική αν και μόνο αν ο X είναι δεύτερος αριθμήσιμος και ολικά μη συνεκτικός μετρικός χώρος.

Αρχικά αν $X^\dagger$ είναι η συμπαγοποίηση του X κατά ένα σημείο, τότε ισχύει πως ο $X^\dagger$ είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο X είναι διαχωρίσιμος και πως η $C(X^\dagger)$ είναι ισόμορφη με την μοναδοποίηση της $C_0(X)$, δηλαδή $C(X^\dagger) \simeq \widetilde{C_0(X)}$. Επίσης επειδή η μοναδοποίηση μιας C^* -άλγεβρας $\widetilde{A}$ είναι διαχωρίσιμη αν και μόνο αν η A είναι διαχωρίσιμη, έχουμε πως η $C_0(X)$ είναι διαχωρίσιμη αν και μόνο αν ο X είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Για κάθε C^* -άλγεβρα A ισχύει πως $\mathcal{P}(\widetilde{A}) = \{(p, 0) : p \in \mathcal{P}(A)\} \cup \{(0, 1)\}$. Επομένως η $C_0(X)$ παράγεται από τις προβολές της αν και μόνο αν η $C(X^\dagger)$ παράγεται από τις προβολές της. Επίσης αν X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, τότε ισχύει πως ο X είναι ολικά μη συνεκτικός αν και μόνο αν ο $X^\dagger$ είναι ολικά μη συνεκτικός.

Ένα σημαντικό συμπέρασμα που προκύπτει από τα όσα προηγήθηκαν είναι πως αν περιοριστούμε στις μεταθετικές AF -άλγεβρες έχουμε έναν επιπλέον τρόπο ταξινόμησής τους. Συγκεκριμένα λαμβάνοντας υπόψιν τα Θεωρήματα 1.1.28 και 1.1.29 προκύπτει το εξής Θεώρημα:

Θεώρημα 4.1.9. Δύο μεταθετικές AF -άλγεβρες A και B είναι $*$ -ισόμορφες αν και μόνο αν οι συμπαγείς, μετρικοί και ολικά μη συνεκτικοί χώροι $\mathfrak{M}(A)$ και $\mathfrak{M}(B)$ είναι ομοιομορφικοί, δηλαδή αν το φάσμα τη A είναι ομοιομορφικό με το φάσμα της B .

4.2 Κανονικοί *-ομομορφισμοί και διαγράμματα Bratteli

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αντιστοιχίσουμε σε κάθε AF -άλγεβρα ένα διάγραμμα Bratteli και αντίστροφα σε κάθε διάγραμμα Bratteli μια AF -άλγεβρα.

Στο εξής για συντομία θα γράφουμε M_n αντί για $M_n(\mathbb{C})$ και $M(\vec{p})$ αντί για $M_{p_1} \oplus M_{p_2} \oplus \cdots \oplus M_{p_r}$, όπου $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_r)$.

Αν $p, q \in \mathbb{N}$ και $\kappa \in \mathbb{Z}^+$ έτσι ώστε $\kappa q \leq p$, τότε μέσω της τριάδας (q, p, κ) ορίζεται ένας *-ομομορφισμός $\rho : M_q \rightarrow M_p$ ως εξής: αν $A \in M_q$ τότε

$$\rho(A) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_h \end{bmatrix}$$

είναι ο block διαγώνιος πίνακας που έχει κ αντίτυπα του A στην διαγώνιο και $h = p - \kappa q$. Χάριν συντομίας αν (q, p, κ) όπως παραπάνω, τότε ο *-ομομορφισμός $\rho : M_q \rightarrow M_p$ θα γράφεται ως

$$A \rightarrow \overbrace{A \oplus A \oplus \cdots \oplus A}^{\kappa} \oplus 0_h$$

Αξίζει στο σημείο αυτό να σημειωθεί, πως από τη θεωρία των ημιαπλών δακτυλίων προκύπτει το εξής: Μια απεικόνιση $\psi : M_q \rightarrow M_p$ είναι ομομορφισμός $\mathbb{C}$ -αλγεβρών που διατηρεί την μονάδα αν και μόνο αν το q διαιρεί το p .

Γενικότερα αν $\vec{q} \in \mathbb{N}^s$, $\vec{p} \in \mathbb{N}^r$ και $\kappa = [\kappa_{ij}]$ ένας πίνακας $r \times s$ με $\kappa_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ ώστε $\sum_{j=1}^s \kappa_{ij} q_j \leq p_i$ για κάθε i (θα γράφουμε $\kappa \vec{q} \leq \vec{p}$), τότε ορίζεται ένας *-ομομορφισμός $M(\vec{q}) \rightarrow M(\vec{p})$ ως εξής:

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \rho\left(A_1 \oplus \cdots \oplus A_s\right) \\ &= \left(\overbrace{A_1 \oplus \cdots \oplus A_1}^{\kappa_{11}} \oplus \overbrace{A_2 \oplus \cdots \oplus A_2}^{\kappa_{12}} \oplus \cdots \oplus \overbrace{A_s \oplus \cdots \oplus A_s}^{\kappa_{1s}} \oplus 0_{h_1} \right) \\ &\quad \oplus \cdots \oplus \\ &\quad \left(\overbrace{A_1 \oplus \cdots \oplus A_1}^{\kappa_{r1}} \oplus \overbrace{A_2 \oplus \cdots \oplus A_2}^{\kappa_{r2}} \oplus \cdots \oplus \overbrace{A_s \oplus \cdots \oplus A_s}^{\kappa_{rs}} \oplus 0_{h_r} \right) \\ &\text{για } A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_s \in M(\vec{q}) = M_{q_1} \oplus \cdots \oplus M_{q_s}, \end{aligned}$$

όπου $\kappa \vec{q} + \vec{h} = \vec{p}$ και $\vec{h} = (h_1, \dots, h_r)$. Τα $\oplus$ ξεχωρίζουν τους προσθετέους στην $M(\vec{q})$ και τα $\oplus$ ξεχωρίζουν τους block πίνακες που τοποθετούνται στην διαγώνιο του εκάστοτε προσθετέου. Δηλαδή ο i -οστός προσθετέος του $\rho(A)$ είναι ένας $p_i \times p_i$ πίνακας ο οποίος θα έχει κ_{i1} αντίτυπα του A_1 , κ_{i2} αντίτυπα του A_2 , ... και κ_{is} αντίτυπα του A_s , στη σειρά, κατά μήκος της διαγωνίου και 0 αλλού. Επίσης 0_{h_1} είναι ένας $h_1 \times h_1$ block πίνακας, όπου $h_i = p_i - \sum_{j=1}^s \kappa_{ij} q_j$. Επιπλέον κάθε μη αρνητικός ακέραιος κ_{ij} μας δείχνει πόσα αντίτυπα του πίνακα A_j τοποθετούνται κατά μήκος της διαγωνίου στην M_{p_i} . Τέλος επειδή $\sum_{j=1}^s \kappa_{ij} q_j \leq p_i$ για κάθε i , έχουμε πως η απεικόνιση ρ είναι πράγματι *-ομομορφισμός.

Ορισμός 4.2.1. Ένας $*$ -ομομορφισμός $\rho : M(\vec{q}) \rightarrow M(\vec{p})$ λέγεται κανονικός αν ο ρ ορίζεται μέσω ενός πίνακα $[\kappa_{ij}]$ όπως προηγουμένως.

Παραδείγματα 4.2.2. 1. Έστω $\vec{q} = (1, 2, 3), \vec{p} = 12$ και $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ τότε ο αντίστοιχος $*$ -ομομορφισμός $\rho : \mathbb{C} \oplus M_2 \oplus M_3 \rightarrow M_{12}$ δίνεται ως εξής:

$$\lambda \oplus A \oplus B \mapsto \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_2 \end{bmatrix}$$

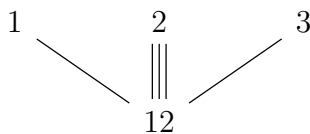
2. Έστω $\vec{q} = (2, 3, 7), \vec{p} = (5, 11)$ και $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ τότε ο αντίστοιχος $*$ -ομομορφισμός $\rho : M_2 \oplus M_3 \oplus M_7 \rightarrow M_5 \oplus M_{11}$ δίνεται ως εξής:

$$A \oplus B \oplus C \mapsto \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

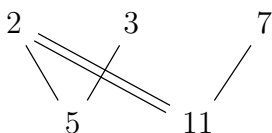
Το γράφημα ενός κανονικού $*$ -ομομορφισμού

Έστω $\rho : M(\vec{q}) \rightarrow M(\vec{p})$ ένας κανονικός $*$ -ομομορφισμός. Στον ρ αντιστοιχούμε ένα (κατευθυνόμενο) γράφημα ως εξής. Οι “άρχιες” κορυφές του γραφήματος θα είναι οι $\{q_1, q_2, \dots, q_s\}$ και οι “τελικές” οι $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$. Τώρα επειδή ο ρ είναι κανονικός θα ορίζεται μέσω ενός πίνακα $\kappa = [\kappa_{ij}]$ για τον οποίο ισχύει ότι $\kappa \vec{q} \leq \vec{p}$ και άρα για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ και $j \in \{1, 2, \dots, s\}$ θα υπάρχουν κ_{ij} ακμές μεταξύ των κορυφών q_j και p_i . Οι ακμές θα έχουν κατεύθυνση από τα q_j στα p_i . Επομένως όταν θα ζωγραφίζουμε το γράφημα οι κορυφές θα τοποθετούνται κατα μήκος δύο παράλληλων οριζόντιων γραμμών και όσον αφορά τις ακμές δεν θα σημειώνουμε την κατεύθυνσή τους καθώς θα κατευθύνονται πάντα προς τα κάτω. Το γράφημα αυτό θα λέγεται γράφημα της ρ .

Παράδειγμα 4.2.3. Τα παρακάτω γραφήματα είναι τα γραφήματα των κανονικών $*$ -ομομορφισμών του προηγούμενου Παραδείγματος. Συγκεκριμένα το γράφημα



αντιστοιχεί στο Παράδειγμα 4.2.2 -1 και το γράφημα

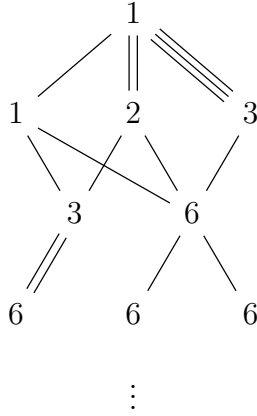


στο Παράδειγμα 4.2.2 -2.

Δοθείσης μιας επαγωγικής ακολουθίας $(M(\vec{p}(n)), \rho_n)$, με ρ_n να είναι κανονικός $*$ -ομομορφισμός για κάθε n , αποκτάμε ένα άπειρο γράφημα. Απλά ενώνουμε μεταξύ τους τα γραφήματα των ρ_n . Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι ενδεικτικό.

Παράδειγμα 4.2.4. Αν θεωρήσουμε την επαγωγική ακολουθία (4.1), τότε προκύπτει το γράφημα του Σχήματος 4.1.

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}} M(1, 2, 3) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} M(3, 6) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} M(6, 6, 6) \longrightarrow \dots \quad (4.1)$$



Σχήμα 4.1:

Ορισμός 4.2.5. Ένα διάγραμμα Bratteli είναι μια πεντάδα (V, E, r, s, d) για την οποία ισχύουν τα εξής:

- (i) $V = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} V_n, E = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n$ όπου οι $\{V_n\}_n$ και $\{E_n\}_n$ είναι οικογένειες από ξένα ανά δύο μη κενά πεπερασμένα σύνολα.
- (ii) Οι r, s είναι απεικονίσεις, $r : E \rightarrow V$ και $s : E \rightarrow V$, για τις οποίες ισχύει πως $r(E_n) \subseteq V_n$ και $s(E_n) \subseteq V_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον $s^{-1}(v) \neq \emptyset$ για κάθε $v \in V$.
- (iii) Η $d : V \rightarrow \mathbb{N}$ είναι μια απεικόνιση ώστε $d(v) \geq \sum_{r(e)=v} d(s(e))$ για κάθε $v \in V \setminus V_0$.

Το V , θα λέγεται σύνολο κορυφών και το E σύνολο ακμών του γραφήματος. Επίσης η s θα λέγεται απεικόνιση αρχής, η r απεικόνιση τέλους και η d απεικόνιση ετικέτας. Τέλος χάριν συντομίας, ένα διάγραμμα Bratteli (V, E, r, s, d) θα συμβολίζεται με (V, E) .

Σχόλιο 4.2.6. Αν η $(M(\vec{p}(n)), \rho_n)$, είναι μια επαγωγική ακολουθία (στην C^*) με την επιπλέον υπόθεση οι ρ_n να είναι κανονικοί *-μονομορφισμοί, τότε προκύπτει με μοναδικό τρόπο ένα διάγραμμα Bratteli. Αρκεί κάποιος να λάβει υπ' όψιν του το γράφημα που προκύπτει αν ενώσουμε τα γραφήματα των κανονικών *-μονομορφισμών. Επίσης όπως θα δούμε παρακάτω ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή μέσω ενός διαγράμματος Bratteli προκύπτει μια επαγωγική ακολουθία από κανονικούς *-μονομορφισμούς.

Το Γράφημα ενός διαγράμματος Bratteli

Ένα γράφημα ενός διαγράμματος Bratteli κατασκευάζεται ως εξής. V_n είναι οι κορυφές βαθμού n και τοποθετούνται κατά μήκος της ίδιας οριζόντιας γραμμής. E_n είναι οι ακμές μεταξύ των κορυφών βαθμού $n-1$ και n . Οι ακμές θα γράφονται χωρίς προσανατολισμό, αφού η κατεύθυνση τους θα είναι πάντα προς τα κάτω, δηλαδή από το V_{n-1} στο V_n . Επίσης στη θέση μιας κορυφής

$v \in V$ θα τοποθετείται ο μη αρνητικός ακέραιος $d(v)$. Τώρα το πλήθος των ακμών που θα ζωγραφίζονται μεταξύ κορυφών διαδοχικών βαθμών καθορίζεται πλήρως από τις απεικονίσεις r και s .

Σχόλιο 4.2.7. Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε πως ο τρόπος κατασκευής του παραπάνω γραφήματος δεν είναι μοναδικός. Συγκεκριμένα αν απλά αλλάξω τη σειρά που γράφω τις κορυφές κάποιου βαθμού, τότε το γράφημα που θα πάρω θα είναι διαφορετικό από το αρχικό. Προκειμένου λοιπόν να μπορούμε να ταυτίζουμε ένα διάγραμμα Bratteli με το γράφημα που προκύπτει από αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη έννοια ισομορφισμού διαγραμμμάτων.

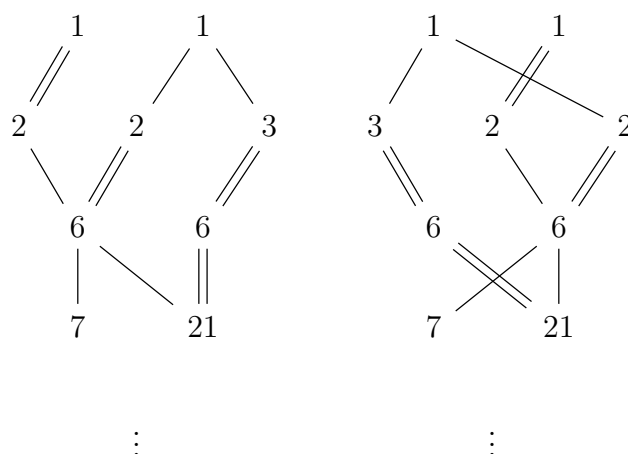
Ορισμός 4.2.8. Δύο διαγράμματα Bratteli $(V, E, r, s, d), (V', E', r', s', d')$ λέγονται ισόμορφα αν υπάρχει ένα ζεύγος απεικονίσεων (f, g) , όπου $f : V \rightarrow V', g : E \rightarrow E'$ για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- (i) $f = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} f_n$ και $g = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} g_n$, όπου $f_n : V_n \rightarrow V'_n, g_n : E_n \rightarrow E'_n$ και f_n, g_n ένα προς ένα και επί για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $d'(f(v)) = d(v)$ για κάθε $v \in V$.
- (iii) $r'(g(e)) = f(r(e))$ και $s'(g(e)) = f(s(e))$ για κάθε $e \in E$.

Η εικόνα λοιπόν που θα έχουμε σε γραφήματα που αντιστοιχούν σε δύο ισόμορφα διαγράμματα Bratteli θα είναι η ακόλουθη. Αρχικά θα έχουμε μετάθεση των κορυφών κάθε βαθμού και ταυτόχρονα διατήρηση της ετικέτας κάθε κορυφής. Επίσης το πλήθος των ακμών μεταξύ κορυφών διαδοχικών βαθμών θα παραμένει ίδιο. Επιπλέον το ίδιο θα ισχύει και για το πλήθος των ακμών που ενώνουν δύο κορυφές διαδοχικών βαθμών. Συγκεκριμένα αν (f, g) είναι ένας ισομορφισμός όπως στον Ορισμό 4.2.8 και $a \in V_n, b \in V_{n+1}$ για κάποιο n , τότε

$$\#\{e \in E_{n+1} : r(e) = b \text{ και } s(e) = a\} = \#\{e' \in E'_{n+1} : r'(e') = f(b) \text{ και } s'(e') = f(a)\}.$$

Ουσιαστικά το ένα γράφημα προκύπτει από το άλλο απλά πλέκοντας τις ακμές μεταξύ κορυφών διαδοχικών βαθμών. Για παράδειγμα



Συμπεραίνουμε λοιπόν πως για κάθε διάγραμμα Bratteli (V, E) ισχύει πως η κλάση του (V, E) (ως προς ισομορφισμό) συμπίπτει με την κλάση ενός γραφήματος που αντιστοιχεί σε αυτό (ως προς "πλέξιμο ακμών" μεταξύ κορυφών διαδοχικών βαθμών).

Σχόλιο 4.2.9. Έστω (V, E) ένα διάγραμμα Bratteli, $n \in \mathbb{N}$ και $V_n = \{v_1^{(n)}, \dots, v_s^{(n)}\}$, $V_{n+1} = \{v_1^{(n+1)}, \dots, v_r^{(n+1)}\}$ τα σύνολα κορυφών βαθμού n και $n+1$ αντίστοιχα. Τότε ορίζουμε τις C^* -άλγεβρες

$$A_n = M_{d(v_1^{(n)})} \oplus \dots \oplus M_{d(v_s^{(n)})} \text{ και } A_{n+1} = M_{d(v_1^{(n+1)})} \oplus \dots \oplus M_{d(v_r^{(n+1)})},$$

καθώς και τον $*$ -ομομορφισμό $\rho_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ που δίνεται από τον πίνακα $[\kappa_{ij}]_{r \times s}$ όπου

$$\kappa_{ij} := \#\{e \in E_n : r(v_j^{(n)}) = v_i^{(n+1)}\} \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s.$$

Από το (iii) του Ορισμού 4.2.5 έπεται πως ο ρ_n είναι κανονικός $*$ -ομομορφισμός. Επίσης από το (ii) του ίδιου Ορισμού, έπεται πως ο ρ_n είναι $*$ -μονομορφισμός. Επομένως η ακολουθία $(A_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια επαγωγική ακολουθία από κανονικούς $*$ -μονομορφισμούς που αντιστοιχεί στο διάγραμμα Bratteli (V, E) .

Η παραπάνω ακολουθία κανονικών $*$ -μονομορφισμών δεν είναι η μοναδική που αντιστοιχεί στο διάγραμμα Bratteli (V, E) . Συγκεκριμένα οι διαφορετικές επαγωγικές ακολουθίες κανονικών $*$ -μονομορφισμών που αντιστοιχούν στο (V, E) είναι τόσες όσα είναι και τα διαγράμματα Bratteli που είναι ισόμορφα με το (V, E) .

Προφανώς το επαγωγικό όριο κάθε ακολουθίας από κανονικούς $*$ -ομομορφισμούς είναι μια AF -άλγεβρα και άρα όπως είδαμε στο Σχόλιο 4.2.9 (μέσω των διαγραμμάτων Bratteli) προκύπτει μια (αριθμήσιμα) άπειρη οικογένεια AF -αλγεβρών. Από το Λήμμα που ακολουθεί προκύπτει πως όλες αυτές οι AF -άλγεβρες θα είναι ισόμορφες.

Λήμμα 4.2.10. Έστω $(M(\vec{q}(n)), \kappa_n)$ και $(M(\vec{p}(n)), \rho_n)$ δύο επαγωγικές ακολουθίες από κανονικούς $*$ -μονομορφισμούς, τέτοιες ώστε τα διαγράμματα Bratteli που προκύπτουν από αυτές να είναι ισόμορφα. Τότε ισχύει πως $\varinjlim (M(\vec{q}(n)), \kappa_n) \simeq \varinjlim (M(\vec{p}(n)), \rho_n)$.

Απόδειξη. [10, Πρόταση III.2.7] □

Ορισμός 4.2.11. Έστω (V, E) ένα διάγραμμα Bratteli και A η μοναδική ως προς ισομορφισμό AF -άλγεβρα που προκύπτει από αυτό. Τότε η A θα συμβολίζεται με $AF(V, E)$.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, μπορούμε να έχουμε και την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή σε κάθε AF -άλγεβρα αντιστοιχεί ένα διάγραμμα Bratteli.

Πρόταση 4.2.12. Αν A είναι μια AF -άλγεβρα, τότε υπάρχει μια ακολουθία (A_n, ρ_n) έτσι ώστε $A = \varinjlim (A_n, \rho_n)$, οι A_n να είναι πεπερασμένης διάστασης και οι ρ_n κανονικοί $*$ -μονομορφισμοί.

Απόδειξη. Πράγματι αν A είναι μια AF -άλγεβρα, τότε από την Παρατήρηση 4.1.2 υπάρχει μια επαγωγική ακολουθία (A_n, φ_n) έτσι ώστε $A = \varinjlim (A_n, \varphi_n)$, οι A_n να είναι πεπερασμένης διάστασης και οι φ_n $*$ -μονομορφισμοί. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένας $*$ -ισομορφισμός $\psi_n : A_n \rightarrow M(\vec{p}(n))$ και άρα αν $\theta_n := \psi_{n+1} \circ \varphi_n \circ \psi_n^{-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προκύπτει πως $A \simeq \varinjlim (M(\vec{p}(n)), \theta_n)$. Επιπλέον από το Πρόσχημα 1.2.25 έπεται πως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει κανονικός $*$ -μονομορφισμός $\rho_n : M(\vec{p}(n)) \rightarrow M(\vec{p}(n+1))$ ο οποίος είναι unitarily ισοδύναμος με τον θ_n . Επομένως το διάγραμμα (4.2) είναι μεταθετικό και άρα $A = \varinjlim (A_n, \rho_n)$.

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & \dots \\ \simeq \downarrow \psi_1 & & \simeq \downarrow \psi_2 & & \simeq \downarrow \psi_3 & & \\ M(\vec{p}(1)) & \xrightarrow{\theta_1} & M(\vec{p}(2)) & \xrightarrow{\theta_2} & M(\vec{p}(3)) & \xrightarrow{\theta_3} & \dots \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \\ M(\vec{p}(1)) & \xrightarrow{\rho_1} & M(\vec{p}(2)) & \xrightarrow{\rho_2} & M(\vec{p}(3)) & \xrightarrow{\rho_3} & \dots \end{array} \quad (4.2)$$

□

Παρατήρηση 4.2.13. Από την Πρόταση 4.2.12 και το Σχόλιο 4.2.6 προκύπτει πως σε κάθε AF -άλγεβρα αντιστοιχεί ένα διάγραμμα Bratteli. Το συγκεκριμένο διάγραμμα δεν είναι απαραίτητα μοναδικό καθώς υπάρχει περίπτωση δύο επαγωγικές ακολουθίες κανονικών $*$ -ομομορφισμών να έχουν το ίδιο επαγωγικό όριο. (Βλέπε Παράδειγμα 4.3.3 και Παρατήρηση 4.3.4)

Η αντιστοιχία μεταξύ των AF -αλγεβρών και των διαγραμμάτων Bratteli που περιγράψαμε παραπάνω έδωσε και έναν επιπλέον τρόπο ταξινόμησης των AF -αλγεβρών μέσω των διαγραμμάτων Bratteli που αντιστοιχούν σε αυτές. Η έννοια που παίζει κεντρικό ρόλο στην ταξινόμηση αυτή είναι η τηλεσκοπική ισοδυναμία διαγραμμάτων. Αναλυτικότερα βλέπε [18].

Θεώρημα 4.2.14. Έστω A και B δύο AF -άλγεβρες και $(V, E), (W, F)$ δύο διαγράμματα Bratteli που αντιστοιχούν σε αυτές. Τότε οι A, B είναι ισόμορφες αν και μόνο αν τα (V, E) και (W, F) είναι τηλεσκοπικά ισοδύναμα (*telescope equivalent*).

Απόδειξη. [18, Θεώρημα 3.4.5]

□

4.3 Παραδείγματα AF -αλγεβρών

Παράδειγμα 4.3.1. Θεωρούμε την παρακάτω ακολουθία κανονικών $*$ -ομομορφισμών

$$\mathbb{C} \xrightarrow{[1]} M_2 \xrightarrow{[1]} M_3 \xrightarrow{[1]} M_4 \longrightarrow \dots \quad (4.3)$$

Εδώ οι κανονικοί ομομορφισμοί $\rho_n : M_n \rightarrow M_{n+1}$ δίνονται ως εξής:

$$\rho(A) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.17 το επαγωγικό όριο της ακολουθίας (4.3) είναι η $\mathcal{K}(H)$, όπου H είναι απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert (π.χ $H = \ell^2(\mathbb{N})$). Άρα η $\mathcal{K}(H)$ είναι AF -άλγεβρα. Επιπλέον ένα διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί στην $\mathcal{K}(H)$ είναι το διάγραμμα του Σχήματος 4.2.



Σχήμα 4.2: Το διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί στην ακολουθία (4.3)

Παράδειγμα 4.3.2. Θεωρούμε την ακολουθία κανονικών $*$ -ομομορφισμών

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} M(1, 1) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} M(1, 2) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} M(1, 3) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \dots \quad (4.4)$$

Το διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί στην ακολουθία 4.4 είναι το διάγραμμα του Σχήματος 4.3. Επιπλέον το επαγωγικό όριο της παραπάνω ακολουθίας είναι η C^* -άλγεβρα $A = \mathbb{C}I + \mathcal{K}(H)$, όπου H είναι ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $I : H \rightarrow H, x \mapsto x$.

Απόδειξη. Έστω H ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert και $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια ορθοκανονική του βάση. Επίσης για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε την προβολή P_n επί του υπόχωρου που παράγεται από το $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, καθώς και την προβολή $P_n^\perp := I - P_n$. Προφανώς ο $P_n^\perp$ είναι προβολή και μάλιστα προβολή επί του υπόχωρου $\text{span}\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}$. Υπενθυμίζουμε πως η $\{P_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία προβολών από συμπαγείς τελεστές (ως προς την σχέση διάταξης του Ορισμού 1.1.23) και πως $P_n \xrightarrow{SOT} I$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n := \mathbb{C}P_n^\perp + P_n\mathcal{K}(H)P_n$. (Για $n = 0$ ορίζουμε P_0 να είναι ο μηδενικός τελεστής και άρα $A_0 = \mathbb{C}I$.) Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει πως $A_n \subseteq A$. Πράγματι αν $\lambda \in \mathbb{C}$ και $K \in \mathcal{K}(H)$, τότε επειδή το $\mathcal{K}(H)$ είναι ιδεώδες της $B(H)$ έχουμε

$$\lambda P_n^\perp + P_n K P_n = \lambda I + (P_n K P_n - \lambda P_n) \in \mathbb{C}I + \mathcal{K}(H).$$

Επιπλέον ισχύει πως $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αρχικά παρατηρούμε πως για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$P_n\mathcal{K}(H)P_n = P_{n+1}(P_n\mathcal{K}(H)P_n)P_{n+1} \subseteq P_{n+1}\mathcal{K}(H)P_{n+1}.$$

Έστω επίσης E_{n+1} η προβολή επί του υπόχωρου που παράγεται από το x_{n+1} . Τότε ισχύει πως $E_{n+1} \leq P_{n+1}$ και πως $P_n^\perp = P_{n+1}^\perp + E_{n+1}$. Επομένως αν $\lambda \in \mathbb{C}$ και $K \in \mathcal{K}(H)$ έπεται πως

$$\lambda P_n^\perp + P_n K P_n = \lambda P_{n+1}^\perp + (P_n K P_n + \lambda E_{n+1}) \in \mathbb{C}P_{n+1}^\perp + P_{n+1}\mathcal{K}(H)P_{n+1}.$$

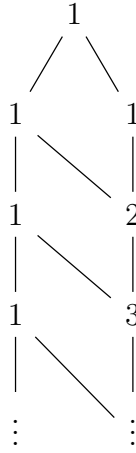
Η ακολουθία $\{A_n\}$ είναι μια ακολουθία C^* -υποαλγεβρών πεπερασμένης διάστασης της $\mathbb{C}I + \mathcal{K}(H)$ καθώς για κάθε $n \geq 1$ ισχύει πως

$$\begin{aligned} P_n\mathcal{K}(H)P_n &= \{K \in \mathcal{K}(H) : \text{Im}(K) \subseteq \text{Im}(P_n) \text{ και } \text{Ker}(P_n) \subseteq \text{Ker}(K)\} \\ &\simeq B(\text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}) \simeq M_n \end{aligned}$$

και άρα $A_n \simeq \mathbb{C} + M_n$. Τέλος παρατηρούμε πως $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} = \mathbb{C}I + \mathcal{K}(H)$ και άρα η $\mathbb{C}I + \mathcal{K}(H)$ είναι το επαγωγικό όριο της ακολουθίας (4.4). Πράγματι αν $K \in \mathcal{K}(H)$, τότε επειδή $P_n \xrightarrow{SOT} I$ έπεται πως $P_n K P_n \rightarrow K$ ως προς την νόρμα τελεστή. Επομένως

$$\lambda P_n^\perp + P_n(K + \lambda P_n)P_n = \lambda I + P_n K P_n \rightarrow \lambda I + K$$

ως προς την νόρμα τελεστή. Επομένως το διάγραμμα του Σχήματος 4.3 είναι ένα διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί στην $\mathbb{C}I + \mathcal{K}(H)$. □



Σχήμα 4.3: Το διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί στην ακολουθία (4.4).

Παράδειγμα 4.3.3. (Η άλγεβρα *CAR*)

Θεωρούμε την παρακάτω ακολουθία κανονικών ομομορφισμών

$$\mathbb{C} \xrightarrow{[2]} M_2 \xrightarrow{[2]} M_4 \xrightarrow{[2]} M_8 \xrightarrow{[2]} M_{16} \xrightarrow{[2]} \cdots . \quad (4.5)$$

Εδώ οι κανονικοί ομομορφισμοί $\rho_n : M_{2^n} \rightarrow M_{2^{n+1}}$ δίνονται ως εξής:

$$\rho_n(A) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

Το επαγωγικό όριο της ακολουθίας (4.5) λέγεται *CAR* άλγεβρα (*Canonical Anticommutation Relations*) και θα συμβολίζεται με $\mathfrak{C}$. Το διάγραμμα του Σχήματος 4.4 είναι ένα διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί σε αυτήν την *AF*-άλγεβρα.



Σχήμα 4.4: Ένα διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί στην άλγεβρα *CAR*.

Παρατήρηση 4.3.4. Η CAR άλγεβρα είναι επίσης η AF -άλγεβρα που αντιστοιχεί στο διάγραμμα $Bratteli$ του Σχήματος 4.5.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την C^* -άλγεβρα B_n όπου

$$B_n := \left\{ \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} : A_1, A_2 \in M_{2^n} \right\} \simeq M_{2^n} \oplus M_{2^n}.$$

Αρχικά παρατηρούμε πως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\rho_n(M_{2^n}) \subseteq B_n \subseteq M_{2^{n+1}}$. Αν $(\mathfrak{C}, \{\mu_n\})$, όπου $\mu_n : M_{2^n} \rightarrow \mathfrak{C}$ είναι το επαγωγικό όριο της ακολουθίας (4.5), έπεται πως

$$\mu_n(M_{2^n}) \subseteq \mu_{n+1}(B_n) \subseteq \mu_{n+1}(M_{2^{n+1}}).$$

Άρα από την Πρόταση 3.2.12 προκύπτει πως

$$\mathfrak{C} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \mu_n(M_{2^n})} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \mu_{n+1}(B_n)}.$$

Επομένως έχουμε πως $(\mathfrak{C}, \{\mu_{n+1}\}) = \varinjlim (B_n, \lambda_{n+1})$ με $\lambda_{n+1} : B_n \rightarrow B_{n+1}$ να είναι ο περιορισμός της ρ_{n+1} στην B_n . Παρατηρούμε πως η λ_{n+1} είναι ένας εγκλεισμός ο οποίος δίνεται ως εξής:

$$\lambda_{n+1} \left(\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \right) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_2 \end{array} \right]$$

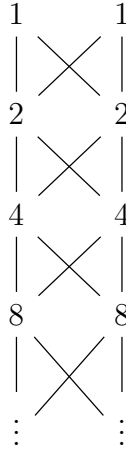
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον κανονικό $*$ -ομομορφισμό $\alpha_{n+1} : M_{2^n} \oplus M_{2^n} \rightarrow M_{2^{n+1}} \oplus M_{2^{n+1}}$ ο οποίος δίνεται από τον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και άρα προκύπτει η εξής ακολουθία κανονικών $*$ -ομομορφισμών.

$$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} M_2 \oplus M_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} M_4 \oplus M_4 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} M_8 \oplus M_8 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \dots \quad (4.6)$$

Παρατηρούμε πως το διάγραμμα που ακολουθεί είναι μεταθετικό και άρα η AF -άλγεβρα που προκύπτει από το διάγραμμα $Bratteli$ του Σχήματος 4.5 είναι η CAR άλγεβρα $\mathfrak{C}$.

$$\begin{array}{ccccccc} B_0 & \xrightarrow{\lambda_1} & B_1 & \xrightarrow{\lambda_2} & B_2 & \xrightarrow{\lambda_3} & \dots \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 \oplus M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_4 \oplus M_4 & \xrightarrow{\alpha_3} & \dots \end{array}$$

□



Σχήμα 4.5: Το διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί στην ακολουθία (4.6).

Παράδειγμα 4.3.5. (Μια μεταθετική AF -άλγεβρα)

Θεωρούμε το σύνολο Cantor X . Υπενθυμίζουμε πως $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$, όπου X_n είναι η ξένη ένωση 2^n κλειστών υποδιαστημάτων του διαστήματος $[0, 1]$, μήκους 3^{-n} . Συγκεκριμένα

$$X_0 = [0, 1], \quad X_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1], \quad X_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1] \text{ κοκ.}$$

Ο X είναι ένας συμπαγής, διαχωρίσιμος και ολικά μη συνεκτικός τοπολογικός χώρος, επομένως από το Πόρισμα 4.1.7 έπεται πως η $C(X)$ είναι μια μεταθετική AF -άλγεβρα.

Για κάθε $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ θεωρούμε την C^* -υποάλγεβρα A_n της $C(X)$, η οποία αποτελείται από όλες τις συνεχείς συναρτήσεις που είναι σταθερές σε κάθε διάστημα του συνόλου X_n . Αν $I_n^{(k)}$ είναι το k -οστό κλειστό διάστημα του συνόλου X_n , τότε επειδή για κάθε n τα $X \cap I_n^{(1)}, X \cap I_n^{(2)}, \dots, X \cap I_n^{(2^n)}$ είναι ανοικτά και ταυτοχρόνως κλειστά υποσύνολα του X έπεται πως

$$A_n = \text{span}\{\chi_{X \cap I_n^{(1)}}, \chi_{X \cap I_n^{(2)}}, \dots, \chi_{X \cap I_n^{(2^n)}}\} \simeq \mathbb{C}^{2^n}$$

ως C^* -άλγεβρες. Επίσης επειδή κάθε κλειστό διάστημα $I_n^{(k)}$ του X_n περιέχει ακριβώς δύο διαδοχικά κλειστά διαστήματα $I_{n+1}^{(j_k)}, I_{n+1}^{(j_k+1)}$ του X_{n+1} , έπεται πως $A_n \subseteq A_{n+1}$. Πράγματι αν $z \in A_n$, τότε

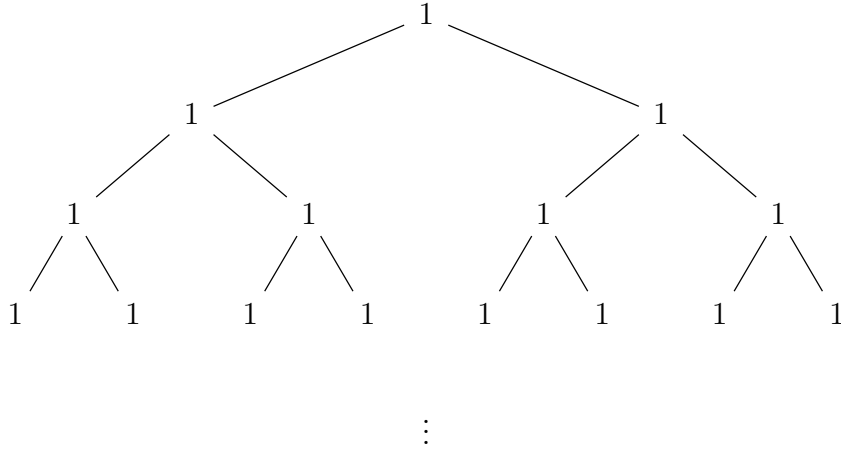
$$\begin{aligned} z &= \lambda_1 \chi_{X \cap I_n^{(1)}} + \dots + \lambda_{2^n} \chi_{X \cap I_n^{(2^n)}} = \lambda_1 \left(\chi_{X \cap I_{n+1}^{(1)}} + \chi_{X \cap I_{n+1}^{(2)}} \right) + \dots \\ &\quad + \lambda_{2^n} \left(\chi_{X \cap I_{n+1}^{(2^{n+1}-1)}} + \chi_{X \cap I_{n+1}^{(2^{n+1})}} \right) \in A_{n+1} \end{aligned}$$

Επιπλέον παρατηρούμε πως η $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ είναι μια $*$ -υποάλγεβρα της $C(X)$ η οποία έχει μονάδα και διαχωρίζει τα σημεία του X . Επομένως από το Θεώρημα Stone-Weierstrass έπεται πως είναι πυκνή στην $C(X)$.

Για κάθε $n \geq 1$ θεωρούμε τον $*$ -ομομορφισμό $\rho_n : \mathbb{C}^{2^n} \rightarrow \mathbb{C}^{2^n} \oplus \mathbb{C}^{2^n}$ με $\rho_n(x) := (x, x)$. Εύκολα επαληθεύεται πως οι ρ_n είναι κανονικοί ομομορφισμοί και επειδή το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\rho_1} & \mathbb{C}^4 & \xrightarrow{\rho_2} & \mathbb{C}^8 & \xrightarrow{\rho_3} & \dots \end{array}$$

είναι μεταθετικό, προκύπτει πως το διάγραμμα του Σχήματος 4.6 είναι ένα διάγραμμα Bratteli της $C(X)$.



Σχήμα 4.6: Ένα διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί στην $C(X)$.

Παράδειγμα 4.3.6. Θεωρούμε την ακολουθία *Fibonacci*, $\{a_n\}$ όπου $a_0 = a_1 = 1$ και $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ όταν $n \geq 2$. Για κάθε $n \geq 2$ ορίζουμε $A_n = M_{a_n} \oplus M_{a_{n-1}}$ και $\varphi_n : A_n \rightarrow A_{n+1}$ με

$$(x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, x \right)$$

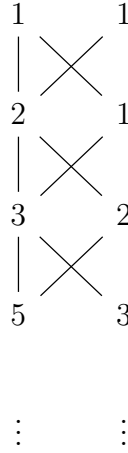
Παρατηρούμε πως η ακολουθία $\{\varphi_n\}$ αποτελείται από κανονικούς $*$ -ομομορφισμούς. Συγκεκριμένα για κάθε $n \geq 2$ η φ_n αναπαρίσταιται από τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

και άρα προκύπτει η εξής ακολουθία κανονικών ομομορφισμών.

$$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} M_2 \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} M_3 \oplus M_2 \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} M_5 \oplus M_3 \longrightarrow \cdots \quad (4.7)$$

Επομένως το διάγραμμα του Σχήματος 4.7 είναι το διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί σε αυτήν.



Σχήμα 4.7: Το διάγραμμα Bratteli που αντιστοιχεί στην ακολουθία (4.7)

Το επαγωγικό όριο της ακολουθίας (4.7) θα λέγεται *άλγεβρα Fibonacci* και θα συμβολίζεται με $\mathfrak{F}$.

4.4 Ο τοπικός χαρακτηρισμός των AF-αλγεβρών

Σκοπός μας εδώ είναι να παραθέσουμε έναν επιπλέον χαρακτηρισμό των AF-αλγεβρών ο οποίος δόθηκε από τον O.Bratteli [4]. Απαραίτητο για την απόδειξη της ισοδυναμίας αυτού του χαρακτηρισμού με τον Ορισμό 4.1.1 είναι ένα αρκετά τεχνικό λήμμα το οποίο οφείλεται στον J.Glimm.

Λήμμα 4.4.1. (Glimm)

Έστω D μια C^* -άλγεβρα με μονάδα και B μια C^* -υποάλγεβρά της. Δοθέντος ενός $\epsilon > 0$ και ενός $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon, n) > 0$ ώστε οποτεδήποτε η A είναι μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης με $\dim_{\mathbb{C}} A \leq n$ και έχει ένα *system of matrix units* (Ορισμός 5.1.1), $\{e_{i,j}^{(\kappa)}\}$ με $d(e_{i,j}^{(\kappa)}, B) < \delta$, τότε υπάρχει *unitary* στοιχείο της $C^*(A, B) \subseteq D$ έτσι ώστε $\|u - 1_D\| < \epsilon$ και $uAu^* \subseteq B$.

Επιπλέον το u μπορεί να επιλεγεί ώστε να μετατίθεται με τα στοιχεία της $A \cap B$.

Απόδειξη. Βλέπε [10, Παράγραφος III.3]. □

Θεώρημα 4.4.2. Έστω A μια C^* -άλγεβρα. Τότε η A είναι AF αν και μόνο αν είναι διαχωρίσιμη και ικανοποιεί την εξής συνθήκη:

- Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$ και $\epsilon > 0$, υπάρχει μία πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρα B της A ώστε $d(a_i, B) < \epsilon$, για κάθε $1 \leq i \leq n$.

Επιπλέον αν A_0 είναι μια πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρα της A , τότε η B μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $A_0 \subseteq B$.

Απόδειξη. Έστω A μια AF-άλγεβρα, τότε υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία, $\{A_m\}$, από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της A ώστε $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m} = A$. Έστω επίσης $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$ και $\epsilon > 0$, τότε για κάθε $1 \leq i \leq n$ υπάρχει $m_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ και $b_i \in A_{m_i}$ ώστε $\|a_i - b_i\| < \epsilon$. Τότε για κάθε i , $d(a_i, A_{m_i}) < \epsilon$. Επομένως αν $M = \max\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ και $B = A_M$ έπεται πως $d(a_i, B) < \epsilon$, $\forall i$ και άρα η A ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη. Επίσης όπως έχουμε δει στην Πρόταση 4.1.3 η A θα είναι διαχωρίσιμη.

Έστω $A_0 \subseteq A$ μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης. Από την Πρόταση 4.1.4 η $\tilde{A}$ θα είναι AF . Προφανώς υπάρχει ένα $\delta = \delta(\epsilon, \dim_{\mathbb{C}} A_0)$ όπως στο Λήμμα 4.4.1. Θεωρούμε ένα system of matrix units της A_0 , $\{e_{ij}^{(\kappa)}\}$. Τότε υπάρχει $N \geq 1$ ώστε $d(e_{ij}^{(\kappa)}, A_N) < \delta$ και αν $B_1 := A_{\max\{M, N\}}$, προκύπτει πως $d(e_{ij}^{(\kappa)}, B_1) < \delta$ για κάθε $e_{ij}^{(\kappa)}$. Επομένως από το προηγούμενο Λήμμα έπεται πως υπάρχει $u \in \mathcal{U}(\tilde{A})$ ώστε $\|u - 1\| < \epsilon$ και $uA_0u^* \subseteq B_1$.

Θέτουμε $B = u^*B_1u$. Η B θα είναι μια πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρα της A , καθώς η A είναι ιδεώδες της $\tilde{A}$ και προφανώς $A_0 \subseteq B$. Επίσης παρατηρούμε πως αν $b \in B$, τότε $b = u^*cu$ για κάποιο $c \in B_1$ και άρα για κάθε i

$$\|a_i - b\| \leq \|(1 - u^*)a_i\| + \|u^*a_i(1 - u)\| + \|u^*(a_i - c)u\| < \epsilon(2\|a_i\| + 1) \leq \epsilon(2K + 1)$$

όπου $K = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Επομένως η B είναι $\epsilon(2K + 1)$ -κοντά στα a_i και άρα η ζητούμενη.

Αντίστροφα υποθέτουμε πως η A είναι διαχωρίσιμη και πως ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη. Έστω $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ ώστε $\overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}} = \{x \in A : \|x\| \leq 1\}$ και $\{\epsilon_n\}$ μια φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών έτσι ώστε $\epsilon_n < 1$ για κάθε n και $\epsilon_n \rightarrow 0$.

Ισχυρισμός. Υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία, $\{A_n\}$, από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της A ώστε $d(a_i, A_n) < \epsilon_n$, για κάθε $1 \leq i \leq n$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. (Επαγωγή)

Προφανώς λόγω της υπόθεσης υπάρχει μια πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρα, A_1 , της A ώστε $d(a_1, A_1) < \epsilon_1$. Έστω ότι υπάρχουν πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της A , $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_k$ με $d(a_i, A_n) < \epsilon_n$, για κάθε $1 \leq i \leq n$ και $n \leq k$. Τότε υπάρχει $\delta = \delta(\frac{\epsilon_{k+1}}{4}, \dim_{\mathbb{C}} A_k)$ το οποίο ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος 4.4.1. Έστω $\{e_{ij}^{(l)}\}$ ένα system of matrix units της A_k . Αν $\epsilon = \min\{\delta, \frac{\epsilon_{k+1}}{4}\}$ τότε υπάρχει B πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρα της A ώστε $d(e_{ij}^{(l)}, B) < \epsilon$ για κάθε $e_{ij}^{(l)}$ και $d(a_i, B) < \epsilon$ για κάθε $1 \leq i \leq k + 1$. Επομένως από το Λήμμα 4.4.1 έπεται πως υπάρχει $u \in \mathcal{U}(\tilde{A})$ ώστε $\|u - 1\| < \frac{\epsilon_{k+1}}{4}$ και $uA_ku^* \subseteq B$. Θέτουμε $A_k = u^*Bu$, τότε η A_{k+1} είναι πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρα της A και περιέχει την A_k . Επιπλέον αν $b \in B$ τότε για κάθε i έχουμε

$$\begin{aligned} \|ua_iu^* - b\| &= \|((u - 1) + 1)a_i((u^* - 1) + 1) - b\| \\ &\leq \|(u - 1)a_i\| + \|a_i(u^* - 1)\| + \|(u - 1)a_i(u^* - 1)\| + \|a_i - b\| \\ &< \frac{\epsilon_{k+1}}{4} + \frac{\epsilon_{k+1}}{4} + (\frac{\epsilon_{k+1}}{4})^2 + \epsilon \leq \epsilon_{k+1}. \end{aligned}$$

Συνεπώς $d(ua_iu^*, B) < \epsilon_{k+1}$ για κάθε $1 \leq i \leq k + 1$. Όμως $d(a_i, A_{k+1}) = d(a_i, u^*Bu) \leq d(ua_iu^*, B)$ και άρα έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Αρκεί να αποδείξουμε πως η $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι πυκνή στην A . Πράγματι αν $x \in A$ και $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει i ώστε $\|a_i - \frac{x}{\|x\|}\| < \frac{\epsilon}{2\|x\|}$. Παίρνοντας $N \in \mathbb{N}$ ώστε $\epsilon_N < \epsilon$, επιλέγουμε ένα $a \in A_N$ ώστε $\|a - a_i\| < \frac{\epsilon}{2\|x\|}$. Επομένως $\|x - \|x\|a\| < \epsilon$ και άρα η A είναι AF . $\square$

Πόρισμα 4.4.3. (Glimm – Bratteli)

Αν A είναι μια διαχωρίσιμη C^* -άλγεβρα, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

- (i) Η A είναι AF -άλγεβρα.
- (ii) Υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_n$ από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της A , ώστε $A = \bigcup_n \overline{A_n}$.

(iii) Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq A$ και $\epsilon > 0$, υπάρχει μία πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρα B της A ώστε $d(a_i, B) < \epsilon$, για κάθε $1 \leq i \leq n$.

Απόδειξη. Η ισοδυναμία έπεται από το προηγούμενο Θεώρημα και από την Παρατήρηση 4.1.2. $\square$

4.5 Τα ιδεώδη των AF -άλγεβρων

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη προκειμένου μια AF -άλγεβρα να είναι απλή και αποδεικνύουμε την κλειστότητα της κλάσης των AF -άλγεβρων ως προς τα ιδεώδη και τα πηλίκά τους.

Λήμμα 4.5.1. Έστω $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ μια AF -άλγεβρα. Αν $I \triangleleft A$, τότε $I = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} I \cap A_n}$.

Απόδειξη. Προφανώς επειδή $I \triangleleft A$ και η A_n είναι C^* -υποάλγεβρα της A , συνεπάγεται πως $I \cap A_n \triangleleft A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επιπλέον παρατηρούμε πως ισχύει το δεύτερο θεώρημα ισομορφισμού για C^* -άλγεβρες. ([10, Πρόσμμα I.5.6]) Συγκεκριμένα

$$\frac{A_n}{I \cap A_n} \simeq \frac{A_n + I}{I}$$

μέσω της απεικόνισης $a + I \cap A_n \mapsto a + I$, $\forall a \in A_n$. Αφού η απεικόνιση είναι ισομετρία, έπεται πως

$$d(a, I \cap A_n) = \|a\|_{\frac{A_n}{I \cap A_n}} = \|a\|_{\frac{A_n + I}{I}} = d(a, I).$$

Αν $x \in I$ και $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $a \in A_n$ για κάποιο n ώστε $\|a - x\| < \frac{\epsilon}{2}$. Τότε $d(a, I) < \frac{\epsilon}{2}$ και άρα από την παραπάνω ισότητα έπεται πως υπάρχει $a' \in I \cap A_n$ ώστε $\|a - a'\| < \frac{\epsilon}{2}$. Συνεπώς $\|a' - x\| < \epsilon$ και άρα $I = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} I \cap A_n}$. $\square$

Από το Λήμμα που προηγήθηκε προκύπτει πως κάθε ιδεώδες I μιας AF -άλγεβρας $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ μπορούμε να το δούμε και σαν το επαγωγικό όριο της ακολουθίας

$$I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow I_3 \longrightarrow \dots$$

όπου $I_n = I \cap A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή αν $\{I_n\}$ ακολουθία ώστε $I_n \triangleleft A_n$ και $I_n \subset I_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε το $\varinjlim I_n$ είναι ιδεώδες της A .

Πρόσμμα 4.5.2. Έστω $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ μια AF -άλγεβρα. Τότε η A είναι απλή αν κάθε A_n είναι απλή.

Σχόλιο 4.5.3. Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα η ακολουθία

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \xrightarrow{\varphi_2} M_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_3} M_2(\mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi_4} \dots$$

όπου $\varphi_1(x) = (x, x)$, $\varphi_2(y, z) = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ και $\varphi_n = Id_{M_2(\mathbb{C})}$ για κάθε $n \geq 3$, έχει ως επαγωγικό όριο την απλή C^* -άλγεβρα $\mathbb{C}$.

Παρατήρηση 4.5.4. Το Πρόσμμα 4.5.2 σε συνδυασμό με το γεγονός πως η άλγεβρα των συμπαγών τελεστών σε έναν απειροδιάστατο χώρο Hilbert H είναι το επαγωγικό όριο της ακολουθίας (3.4) μας δίνει έναν επιπλέον τρόπο να αποδείξουμε πως η συγκεκριμένη C^* -άλγεβρα είναι απλή (Πρόσμμα 1.2.12).

Πρόταση 4.5.5. Έστω A μια AF -άλγεβρα. Αν $I \triangleleft A$ είναι ένα ιδεώδες της A , τότε οι I και $\frac{A}{I}$ είναι AF -άλγεβρες.

Απόδειξη. Έστω $A = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$. Τότε από το Λήμμα 4.5.1 έχουμε πως $I = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} I \cap A_n}$. Επειδή η $\{I \cap A_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της I , έπεται πως η I είναι AF .

Για το πηλίκο έχουμε πως $\frac{A}{I} = \frac{A+I}{I}$. Επομένως

$$\frac{A_1 + I}{I} \subseteq \frac{A_2 + I}{I} \subseteq \frac{A_3 + I}{I} \dots \subseteq \frac{A}{I}.$$

Όπως είδαμε στην απόδειξη του Λήμματος 4.5.1, ισχύει πως

$$\frac{A_n}{I \cap A_n} \simeq \frac{A_n + I}{I},$$

και άρα η $\frac{A_n + I}{I}$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Αρκεί να αποδείξουμε πως η $\bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{A_n + I}{I}$ είναι πυκνή στην $\frac{A}{I}$. Πράγματι αν $a + I \in \frac{A}{I}$ και $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $a_n \in A_n$ ώστε $\|a - a_n\| < \epsilon$. Επομένως

$$\|(a + I) - (a_n + I)\|_{\frac{A}{I}} = \|(a - a_n) + I\|_{\frac{A}{I}} \leq \|a - a_n\| < \epsilon.$$

□

Μπορεί να αποδειχτεί (όχι το ίδιο εύκολα) πως ισχύει και το αντίστροφο της προηγούμενης Πρότασης. Συγκεκριμένα αν A είναι μια C^* -άλγεβρα η οποία έχει ένα ιδεώδες I έτσι ώστε οι I και A/I να είναι AF -άλγεβρες, τότε και η A θα είναι AF . Μια πρώτη απόδειξη δόθηκε από τον L.G.Brown [5] ο οποίος χρησιμοποίησε την K -θεωρία των C^* -αλγεβρών και μια δεύτερη από τον M.D.Choi[10, Θεώρημα III.6.3] ο οποίος χρησιμοποίησε την έννοια του system of matrix units.

Παρατηρούμε πως η κλάση των AF -αλγεβρών είναι κλειστή και ως προς άλλες εσωτερικές κατασκευές όπως για παράδειγμα το επαγωγικό όριο μιας ακολουθίας AF -αλγεβρών ή το ευθύ άθροισμα δύο AF -αλγεβρών. Περισσότερα για την κλειστότητα της συγκεκριμένης κλάσης C^* -αλγεβρών βλέπε [22, Πρόταση 1.2.5].

Τέλος αξίζει να σημειώσουμε πως μια C^* -υποάλγεβρα μιας AF -άλγεβρας δεν είναι απαραίτητα AF . Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η μεταθετική AF -άλγεβρα $C(X)$ όπου X είναι το σύνολο του Cantor. Συγκεκριμένα επειδή το κλειστό διάστημα $[0, 1]$ με την συνήθη τοπολογία είναι συμπαγής μετρικός χώρος, υπάρχει συνεχής και επί απεικόνιση $f : X \rightarrow [0, 1]$ (Θεώρημα 5.28 στο [17]). Επομένως η $C([0, 1])$ εμφυτεύεται ισομετρικά στην $C(X)$ μέσω της απεικόνισης $\phi : C([0, 1]) \rightarrow C(X)$, όπου $\phi(g) := g \circ f$ για κάθε $g \in C([0, 1])$. Προφανώς επειδή το $[0, 1]$ είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος, η $C([0, 1])$ δεν είναι AF -άλγεβρα. Γενικότερα κάθε διαχωρίσιμη μεταθετική C^* -άλγεβρα εμφυτεύεται ισομετρικά στην $C(X)$. [18, Θεώρημα 3.5.4].

Κεφάλαιο 5

Το Θεώρημα ταξινόμησης του Elliott

Σκοπός μας σε αυτό το Κεφάλαιο είναι να παρουσιάσουμε την απόδειξη του θεωρήματος του Elliott. Αρχικά υπολογίζουμε την ομάδα K_0 μιας C^* -άλγεβρας πεπερασμένης διάστασης και στη συνέχεια αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που οι AF -άλγεβρες έχουν μονάδα. Έπειτα δίνουμε μια περιγραφή της απόδειξης όταν οι AF -άλγεβρες δεν έχουν μονάδα και τέλος υπολογίζουμε τις ομάδες K_0 κάποιων AF -άλγεβρών.

5.1 Η ομάδα K_0 μιας C^* -άλγεβρας πεπερασμένης διάστασης

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε τον Ορισμό του system of matrix units μιας C^* -άλγεβρας A . Στις δύο προηγούμενες παραγράφους είδαμε πως η έννοια αυτή είναι μείζονος σημασίας προκειμένου να μπορέσουμε να κατανοήσουμε τη δομή των AF -άλγεβρών και όπως θα φανεί παρακάτω (Πρόταση 5.1.4) είναι εξίσου σημαντική και για τον υπολογισμό της ομάδας K_0 μιας C^* -άλγεβρας πεπερασμένης διάστασης.

Ορισμός 5.1.1. Έστω A μια C^* -άλγεβρα και $\{f_{ij}^{(k)} : 1 \leq k \leq r, 1 \leq i, j \leq n_k\}$ ένα υποσύνολο της A για το οποίο ισχύουν τα εξής:

- (i) $f_{ij}^{(k)} f_{jl}^{(k)} = f_{il}^{(k)}$.
- (ii) $f_{ij}^{(k)} f_{mn}^{(l)} = 0$ αν $k \neq l$ ή $j \neq m$.
- (iii) $(f_{ij}^{(k)})^* = f_{ji}^{(k)}$.

Το σύνολο αυτό θα είναι ένα system of matrix units στην A .

Ορισμός 5.1.2. Έστω $A = M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$, r και $n_1, n_2, \dots, n_r$ θετικοί ακέραιοι. Έστω επίσης $e(n, i, j) \in M_n(\mathbb{C})$ ο οποίος έχει το 1 στην (i, j) θέση και 0 αλλού. Τώρα για κάθε $1 \leq k \leq r$ και $1 \leq i, j \leq n_k$ ορίζουμε

$$e_{ij}^{(k)} := (0, \dots, 0, e(n_k, i, j), 0, \dots, 0) \in A.$$

Για τα στοιχεία αυτά ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) $e_{ij}^{(k)} e_{jl}^{(k)} = e_{il}^{(k)}$.

(ii) $e_{ij}^{(k)} e_{mn}^{(l)} = 0$ αν $k \neq l$ ή $j \neq m$.

(iii) $(e_{ij}^{(k)})^* = e_{ji}^{(k)}$.

(iv) $A = \text{span}\{e_{ij}^{(k)} : 1 \leq k \leq r, 1 \leq i, j \leq n_k\}$.

Επομένως το σύνολο $\{e_{ij}^{(k)} : 1 \leq k \leq r, 1 \leq i, j \leq n_k\}$ είναι προφανώς ένα *system of matrix units* στην A και θα λέγεται *standard system of matrix units* της A .

Παρατήρηση 5.1.3. Έστω A, B C^* -άλγεβρες με την A να είναι μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης. Έστω επίσης $\{e_{ij}^{(k)} : 1 \leq k \leq r, 1 \leq i, j \leq n_k\}$ το *standard system of matrix units* της A . Αν η B έχει ένα *system of matrix units*, $\{f_{ij}^{(k)} : 1 \leq k \leq r, 1 \leq i, j \leq n_k\}$, τότε υπάρχει μοναδικός $*$ -ομομορφισμός $\varphi : A \rightarrow B$ ώστε $\varphi(e_{ij}^{(k)}) = f_{ij}^{(k)}$ για κάθε i, j, k .

Απόδειξη. Αφού $A = \text{span}\{e_{ij}^{(k)} : 1 \leq k \leq r, 1 \leq i, j \leq n_k\}$ και τα $e_{ij}^{(k)}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi : A \rightarrow B$ ώστε $\varphi(e_{ij}^{(k)}) = f_{ij}^{(k)}$ για κάθε i, j, k . Επίσης επειδή τα σύνολα $\{e_{ij}^{(k)}\}$ και $\{f_{ij}^{(k)}\}$ είναι *system of matrix units* για την A και την B αντίστοιχα, έπεται πως η φ είναι $*$ -ομομορφισμός. $\square$

Από την Πρόταση που ακολουθεί προκύπτει πως για κάθε C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης, A , το σύνολο $\{[e_{11}^{(k)}]_0 : k\}$ (όπου $\{e_{ij}^{(k)} : i, j, k\}$ είναι *standard system of matrix units* της A) αποτελεί ένα σύνολο γεννητόρων για αυτήν.

Πρόταση 5.1.4. Έστω A μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης. Τότε από Θεώρημα 1.2.22 έχουμε πως $A \simeq M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus M_{n_2}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$ για κάποια $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$. Αν $\{e_{ij}^{(k)}\}$ είναι το *standard system of matrix units* της A , τότε οι διατεταγμένες αβελιανές ομάδες $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$ και $(\mathbb{Z}^r, \mathbb{N}^r, \sum_{k=1}^r n_k)$ είναι ισόμορφες και μάλιστα ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} K_0(A) &= \mathbb{Z}[e_{11}^{(1)}]_0 \oplus \mathbb{Z}[e_{11}^{(2)}]_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[e_{11}^{(r)}]_0 \simeq \mathbb{Z}^r. \\ K_0(A)^+ &= \mathbb{N}[e_{11}^{(1)}]_0 + \mathbb{N}[e_{11}^{(2)}]_0 + \dots + \mathbb{N}[e_{11}^{(r)}]_0 \simeq (\mathbb{N})^r. \\ [1_A]_0 &= n_1[e_{11}^{(1)}]_0 + n_2[e_{11}^{(2)}]_0 + \dots + n_r[e_{11}^{(r)}]_0. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Όπως είδαμε στο Πόρισμα 3.1.15 η $(K_0(A), K_0(A)^+)$ και η $(\mathbb{Z}^r, \mathbb{N}^r)$ θα είναι ισόμορφες ως διατεγμένες αβελιανές ομάδες, μέσω της $\sum_{k=1}^r K_0(\iota_k)$. Από την Πρόταση 3.1.10 ξέρουμε πως το $[1_A]_0$ είναι μονάδα διάταξης της $(K_0(A), K_0(A)^+)$. Επιπλέον παρατηρούμε πως ο ισομορφισμός αυτός λόγω του τρόπου ορισμού του θα διατηρεί την μονάδα. Επομένως $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0) \simeq (\mathbb{Z}^r, \mathbb{N}^r, \sum_{k=1}^r n_k)$. (Προσοχή γράφοντας $\sum_{k=1}^r n_k$ εννοούμε το στοιχείο $(n_1, \dots, n_k)$.)

Έστω $\{e_{ij}^{(k)}\}$, το *standard system of matrix units* της A . Επειδή για κάθε $k \geq 1$ και $1 \leq i \leq n_k$, ισχύει πως $\text{Tr}(e(n_k, i, i)) = \text{Tr}(e(n_k, 1, 1)) = 1$ έχουμε πως $e_{ii}^{(k)} \sim e_{11}^{(k)}$ και άρα

$$[1_A]_0 = \left[\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} e_{ii}^{(k)} \right]_0 = n_1[e_{11}^{(1)}]_0 + n_2[e_{11}^{(2)}]_0 + \dots + n_r[e_{11}^{(r)}]_0 = n_1[e_{11}^{(1)}]_0 + n_2[e_{11}^{(2)}]_0 + \dots + n_r[e_{11}^{(r)}]_0.$$

Επίσης επειδή για κάθε $1 \leq k \leq r$, η $K_0(M_{n_k}(\mathbb{C}))$ είναι άπειρη κυκλική ομάδα, και $\text{Tr}(e(n_k, 1, 1)) = 1$, έχουμε πως το $[e(n_k, 1, 1)]_0$ είναι γεννήτορας της $K_0(M_{n_k}(\mathbb{C}))$. Προφανώς για κάθε $1 \leq k \leq r$ ισχύει πως $K_0(\iota_k)([e(n_k, 1, 1)]_0) = [e_{11}^{(k)}]_0$ και άρα $K_0(A) = \mathbb{Z}[e_{11}^{(1)}]_0 \oplus \mathbb{Z}[e_{11}^{(2)}]_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[e_{11}^{(r)}]_0$.

Για τον ίδιο λόγο έχουμε πως $K_0(A)^+ = \mathbb{N}[e_{11}^{(1)}]_0 + \mathbb{N}[e_{11}^{(2)}]_0 + \dots + \mathbb{N}[e_{11}^{(r)}]_0$. $\square$

Λήμμα 5.1.5. Έστω B μια C^* -άλγεβρα και $\{f_{ii}^{(k)} : 1 \leq k \leq r, 1 \leq i \leq n_k\}$ ένα σύνολο κάθετων ανά δύο προβολών της B έτσι ώστε να ισχύει ότι $f_{11}^{(k)} \sim f_{22}^{(k)} \sim \dots \sim f_{n_k n_k}^{(k)}$ για κάθε $1 \leq k \leq r$. Τότε υπάρχει ένα *system of matrix units*, $\{f_{ij}^{(k)}\}$, της B το οποίο επεκτείνει το σύστημα $\{f_{ii}^{(k)}\}$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση για κάθε $1 \leq k \leq r$ και $1 \leq i \leq n_k$ υπάρχει μερική ισομετρία $f_{1i}^{(k)}$ στην B ώστε $f_{1i}^{(k)}(f_{1i}^{(k)})^* = f_{11}^{(k)}$ και $(f_{1i}^{(k)})^* f_{1i}^{(k)} = f_{ii}^{(k)}$. Τότε το σύστημα $\{f_{ij}^{(k)}\}$, με $f_{ij}^{(k)} := (f_{1i}^{(k)})^* f_{1j}^{(k)}$ είναι το ζητούμενο. $\square$

5.2 Το θεώρημα για AF -άλγεβρες με μονάδα

Όπως θα φανεί παρακάτω, προκειμένου να αποδείξουμε το θεώρημα του Elliott είναι απαραίτητο να αποδείξουμε πως οι AF -άλγεβρες έχουν την ιδιότητα απαλοιφής. (Πρόταση 5.2.4)

Ορισμός 5.2.1. Μια C^* -άλγεβρα A θα λέμε ότι έχει την ιδιότητα απαλοιφής (*cancellation property*) αν η ημιομάδα $\mathcal{D}(A)$ έχει την ιδιότητα απαλοιφής σύμφωνα με τον ορισμό 2.1.1.

Σχόλιο 5.2.2. Από το (iii) της Πρότασης 2.1.2 έπεται πως μια C^* -άλγεβρα A έχει την ιδιότητα απαλοιφής αν για κάθε $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$ έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία:

$$[p]_0 = [q]_0 \Leftrightarrow p \sim_0 q.$$

Λήμμα 5.2.3. (i) Αν A και B είναι C^* -άλγεβρες, τότε η $A \oplus B$ έχει την ιδιότητα απαλοιφής αν και μόνον αν οι A και B έχουν την ιδιότητα απαλοιφής.

(ii) Έστω D μια C^* -άλγεβρα και $\{A_n\}$ μια αύξουσα υπακολουθία C^* -υποαλγεβρών της. Τότε αν θεωρήσουμε την επαγωγική ακολουθία

$$A_1 \hookrightarrow A_2 \hookrightarrow A_3 \hookrightarrow \dots$$

ισχύει ότι η $\varinjlim A_n$ έχει την ιδιότητα απαλοιφής αν και μόνον αν η A_n έχει την ιδιότητα απαλοιφής για κάθε n .

Απόδειξη. (i) Έστω ότι οι A, B έχουν την ιδιότητα απαλοιφής. Έστω επίσης $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A \oplus B)$ με $[p]_0 = [q]_0$. Επειδή για κάθε n ισχύει ότι $M_n(A \oplus B) \simeq M_n(A) \oplus M_n(B)$ έπεται πως $\mathcal{P}_\infty(A \oplus B) \equiv \mathcal{P}_\infty(A) \times \mathcal{P}_\infty(B)$. Επομένως $p = (p_A, p_B)$ και $q = (q_A, q_B)$, για κάποια $p_A, q_A \in \mathcal{P}_\infty(A)$ και $p_B, q_B \in \mathcal{P}_\infty(B)$.

Τότε ισχύει πως $[p]_0 = K_0(\iota_A)([p_A]_0) + K_0(\iota_B)([p_B]_0)$ και $[q]_0 = K_0(\iota_A)([q_A]_0) + K_0(\iota_B)([q_B]_0)$ και άρα $K_0(\iota_A)([p_A]_0 - [q_A]_0) = K_0(\iota_B)([q_B]_0 - [p_B]_0)$. Επειδή $\pi_A \circ \iota_A = Id_A, \pi_A \circ \iota_B = 0$ και $\pi_B \circ \iota_B = Id_B, \pi_B \circ \iota_A = 0$, τότε από την functoriality της K_0 προκύπτει πως $[p_A]_0 = [q_A]_0$ στην $K_0(A)$ και $[q_B]_0 = [p_B]_0$ στην $K_0(B)$. Λόγω λοιπόν της υπόθεσης έπεται $p_A \sim_0 q_A$ και $p_B \sim_0 q_B$ και άρα $p = (p_A, p_B) \sim_0 (q_A, q_B) = q$.

Υποθέτουμε τώρα πως η $A \oplus B$ έχει την ιδιότητα απαλοιφής και θεωρούμε $p, q \in \mathcal{P}_\infty(A)$ ώστε $[p]_0 = [q]_0$ στην $K_0(A)$. Τότε $[(p, 0)]_0 = K_0(\iota_A)([p]_0) = K_0(\iota_A)([q]_0) = [(q, 0)]_0$ στην $K_0(A \oplus B)$ και άρα από την υπόθεση έχουμε πως $(p, 0) \sim_0 (q, 0)$. Τότε $p \sim_0 q$ και άρα η A έχει την ιδιότητα απαλοιφής. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει πως και η B θα έχει την ιδιότητα απαλοιφής.

(ii) Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.10 το επαγωγικό όριο της παραπάνω ακολουθίας είναι το $(A, \{\iota_n\})$ όπου $A = \overline{\bigcup_n A_n}$ και $\iota_n : A_n \rightarrow A, x \mapsto x$. Έστω ότι για κάθε n η A_n έχει την ιδιότητα απαλοιφής και πως για κάποια $p, q \in \mathcal{P}_\infty(B)$ ισχύει πως $[p]_0 = [q]_0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας

υποθέτουμε πως $p, q \in \mathcal{P}_m(A)$. Τότε προφανώς υπάρχει $r \in \mathcal{P}_l(A)$ για κάποιο l ώστε $p \oplus r \sim q \oplus r$. Από το (i) του Λήμματος 3.3.1 έπεται πως υπάρχουν ακολουθίες προβολών $\{p_n\}, \{q_n\}, \{r_n\}$ έτσι ώστε $p_n, q_n \in \mathcal{P}_m(A_n), r_n \in \mathcal{P}_l(A_n)$ και

$$p_n \xrightarrow{\|\cdot\|} p, q_n \xrightarrow{\|\cdot\|} q, r_n \xrightarrow{\|\cdot\|} r.$$

Τότε έχουμε πως $p_n \oplus r_n \xrightarrow{\|\cdot\|} p \oplus r$ και $q_n \oplus r_n \xrightarrow{\|\cdot\|} q \oplus r$. Επίσης επειδή $p \oplus r \sim q \oplus r$, εξ'ορισμού υπάρχει $v \in M_{m+l}(A)$ ώστε $v^*v = p \oplus r$ και $vv^* = q \oplus r$ και άρα υπάρχει n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει πως

$$\|v^*v - p_n \oplus r_n\| < \frac{1}{2} \text{ και } \|vv^* - q_n \oplus r_n\| < \frac{1}{2}.$$

Επομένως από το (ii) του Λήμματος 3.3.1 έπεται πως $p \oplus r_n \sim q_n \oplus r_n$ στην $M_{k+l}(A_n)$ για κάθε $n \geq n_0$. Όμως από την υπόθεση έχουμε πως οι A_n έχουν την ιδιότητα απαλοιφής και άρα $p_n \sim q_n$ στην $M_m(A_n)$ για κάθε $n \geq n_0$.

Επειδή τα p_n, q_n είναι και στοιχεία της A έχουμε πως $p_n \sim q_n$ και στην $M_m(A)$. Αφού $p_n \rightarrow p$ και $q_n \rightarrow q$ υπάρχουν p_k και q_k για κάποιο k ώστε $\|p - p_k\| < 1$ και $\|q - q_k\| < 1$. Επομένως από την Πρόταση 1.3.14 έπεται πως $p \sim_h p_k$ και $q \sim_h q_k$ στην $M_m(A)$. Τέλος από την Πρόταση 1.3.17 έχουμε πως $p \sim p_k$ και $q \sim q_k$ και άρα $p \sim q$.

Υποθέτουμε τώρα πως η A έχει την ιδιότητα απαλοιφής. Τότε από το (iii) της Πρότασης 2.1.2 έπεται πως η απεικόνιση Grothendieck της $\mathcal{D}(A)$, $\gamma_{\mathcal{D}(A)}$ είναι ένα προς ένα. Επειδή $\mathcal{D}(A_n) \subseteq \mathcal{D}(A)$ για κάθε n έχουμε πως η απεικόνιση Grothendieck της $\mathcal{D}(A_n)$ είναι ο περιορισμός της $\gamma_{\mathcal{D}(A)}$ στην $\mathcal{D}(A_n)$. Επομένως όλες οι A_n έχουν την ιδιότητα απαλοιφής. □

Πρόταση 5.2.4. Οι παρακάτω C^* -άλγεβρες έχουν την ιδιότητα απαλοιφής.

(i) Οι πεπερασμένης διάστασης C^* -άλγεβρες.

(ii) Οι AF -άλγεβρες.

Απόδειξη. (i) Λόγω του (i) του Λήμματος που προηγήθηκε αρκεί να αποδείξουμε πως η C^* -άλγεβρα $M_n(\mathbb{C})$ έχει την ιδιότητα απαλοιφής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε λοιπόν την απεικόνιση $\overline{Tr} : \mathcal{P}_\infty(M_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}$ η οποία επάγεται από το σύνηθες trace Tr επί της $M_n(\mathbb{C})$. Τότε ορίζουμε την $\gamma : \mathcal{D}(M_n(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{C}, [p]_{\mathcal{D}(M_n(\mathbb{C}))} \mapsto \overline{Tr}(p)$. Από το Σχόλιο 2.2.4 έπεται πως είναι καλά ορισμένη και ένα προς ένα. Προφανώς θα είναι προσθετική και επί του $\mathbb{N}$, δηλαδή $\mathcal{D}(M_n(\mathbb{C})) \simeq \mathbb{N}$ ως αβελιανές ημιομάδες. Συνεπώς η $\mathcal{D}(M_n(\mathbb{C}))$ έχει την ιδιότητα απαλοιφής.

(ii) Έπεται από το (ii) της Πρότασης και το (ii) του Λήμματος 5.2.3. □

Πρόταση 5.2.5. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα με μονάδα, η οποία έχει την ιδιότητα απαλοιφής, τότε η A είναι *stably finite*.

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $p \in \mathcal{P}_n(A)$ ώστε $1_n \sim p \leq 1_n$. Τότε

$$[0_n]_{\mathcal{D}} + [1_n]_{\mathcal{D}} = [1_n]_{\mathcal{D}} = [(1_n - p) + p]_{\mathcal{D}} = [1_n - p]_{\mathcal{D}} + [p]_{\mathcal{D}} = [1_n - p]_{\mathcal{D}} + [1_n]_{\mathcal{D}}.$$

Επομένως από την υπόθεση έπεται πως $[0_n]_{\mathcal{D}} = [1_n - p]_{\mathcal{D}}$ και άρα υπάρχει $v \in M_n(A)$ ώστε $0_n = v^*v$ και $1_n - p = vv^*$. Όμως τότε $\|v\| = 0$ και άρα $1_n = p$. Συνεπώς η $M_n(A)$ είναι *finite* και αφού το n τυχόν, έπεται πως η A θα είναι *stably finite*. □

Πόρισμα 5.2.6. Κάθε AF -άλγεβρα είναι *stably finite*.

Λήμμα 5.2.7. Έστω A μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και B μια C^* -άλγεβρα με μονάδα η οποία έχει την ιδιότητα απαλοιφής.

(i) Για κάθε θετικό ομομορφισμό ομάδων $\alpha : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ ο οποίος ικανοποιεί την ανισότητα $\alpha([1_A]_0) \leq [1_B]_0$, υπάρχει ένας $*$ -ομομορφισμός $\varphi : A \rightarrow B$ ώστε $K_0(\varphi) = \alpha$.

Αν επιπλέον ισχύει πως $\alpha([1_A]_0) = [1_B]_0$, τότε ο φ θα διατηρεί την μονάδα.

(ii) Έστω $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ $*$ -ομομορφισμοί. Τότε $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$ αν και μόνον αν $\psi = Adu \circ \varphi$ για κάποιο unitary στοιχείο u της B .

Απόδειξη. (i) Έστω A, B και $\alpha : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ όπως στην εκφώνηση. Έστω επίσης $\{e_{ij}^{(k)}\}, 1 \leq k \leq r, 1 \leq i, j \leq n_k$ το σύνθητες system of matrix units της A . Επειδή $1_A = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} e_{ii}^{(k)}$ και $\alpha([1_A]_0) \leq [1_B]_0$ έχουμε πως $\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \alpha([e_{ii}^{(k)}]_0) \leq [1_B]_0$.

Ισχυρισμός. Αν $g_1, g_2, \dots, g_N$ στοιχεία της $K_0(B)^+$ ώστε $\sum g_j \leq [1_B]_0$, τότε υπάρχουν προβολές της B , $p_1, p_2, \dots, p_N$, κάθετες ανά δύο με $[p_j]_0 = g_j$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, N$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. (Επαγωγή στο πλήθος των g_j)

Έστω λοιπόν ότι ο Ισχυρισμός ισχύει για κάθε $m < N$ και $g_1, g_2, \dots, g_N \in K_0(B)^+$ ώστε $\sum g_j \leq [1_B]_0$. Τότε επειδή η B έχει την ιδιότητα απαλοιφής θα είναι stably finite και άρα από την Πρόταση 3.1.8 έπεται πως η $(K_0(B), K_0(B)^+)$ θα είναι διατεταγμένη αβελιανή ομάδα. Επομένως έχουμε πως $\sum_{j=1}^{N-1} g_j \leq \sum_{j=1}^N g_j \leq [1_B]_0$. Τότε από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν $p_1, p_2, \dots, p_{N-1} \in \mathcal{P}(B)$, κάθετες ανά δύο, με $[p_j]_0 = g_j$, για κάθε $1 \leq j \leq N-1$. Ισοδύναμα $g_N \leq [1_B]_0 - [q]_0$ με $q = \sum_{j=1}^{N-1} p_j \in \mathcal{P}(B)$. Επειδή $[1_B]_0 - [q]_0 - g_N \geq 0$, υπάρχει $f \in \mathcal{P}_m(B)$ για κάποιο m έτσι ώστε $[f]_0 = [1_B]_0 - [q]_0 - g_N$. Επίσης υπάρχει n και $e \in \mathcal{P}_n(B)$ ώστε $g_N = [e]_0$ και άρα $[e \oplus f]_0 = [1_B - q]_0$.

Από το Σχόλιο 5.2.2 συνεπάγεται πως $e \oplus f \sim_0 1_B - q$, δηλαδή υπάρχει $v \in M_{1,n+m}(A)$ ώστε $e \oplus f = v^*v$ και $1_B - q = vv^*$. Θέτουμε $p_N = v(e \oplus 0_m)v^*$. Τότε $p_N \in \mathcal{P}(B)$, $p_N \leq 1_B - q$ και $p_N \sim_0 e$. Πράγματι $1_B - q - p_N = v((1_n - e) \oplus 1_m)(v((1_n - e) \oplus 1_m))^*$ και $p_N \sim_0 e \oplus 0_m$ μέσω του $v(e \oplus 0_m) \in M_{1,n+m}(A)$. Επομένως $[p_N]_0 = [e]_0 = g_N$ και επειδή ισχύει η ισοδυναμία

$$p_N \leq 1_B - q \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N p_j \leq 1_B \Leftrightarrow p_1, p_2, \dots, p_N \text{ κάθετες ανά δύο,}$$

προκύπτει πως το p_N είναι το ζητούμενο. □

Επομένως αφού ο α είναι θετικός, λόγω του Ισχυρισμού έπεται πως υπάρχει μια οικογένεια προβολών $\{f_{ii}^{(k)}, 1 \leq k \leq r, 1 \leq i \leq n_k\}$ της B με τις $f_{ii}^{(k)}$ να είναι κάθετες ανά δύο και $\alpha([e_{ii}^{(k)}]_0) = [f_{ii}^{(k)}]_0$ για κάθε k και i . Επιπλέον επειδή $e_{ii}^{(k)} = e_{ij}^{(k)}(e_{ij}^{(k)})^*$ και $e_{jj}^{(k)} = (e_{ij}^{(k)})^*e_{ij}^{(k)}$, έχουμε πως $[e_{ii}^{(k)}]_0 = [e_{jj}^{(k)}]_0$ και άρα $[f_{ii}^{(k)}]_0 = [f_{jj}^{(k)}]_0$ για κάθε $1 \leq i, j \leq n_k$. Τότε από το Σχόλιο 5.2.2 έπεται πως $f_{ii}^{(k)} \sim_0 f_{jj}^{(k)}$ και αφού $\{f_{ii}^{(k)} : k, i\} \subseteq \mathcal{P}(B)$ έχουμε ότι $f_{ii}^{(k)} \sim f_{jj}^{(k)}$. Λόγω του Λήμματος 5.1.5 το σύνολο $\{f_{ii}^{(k)} : 1 \leq i \leq n_k, 1 \leq k \leq r\}$ επεκτείνεται σε ένα system of matrix units, $\{f_{ij}^{(k)}\}$, της B και όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο επάγεται ένας $*$ -ομομορφισμός $\varphi : A \rightarrow B$ τέτοιος ώστε $\varphi(e_{ij}^{(k)}) = f_{ij}^{(k)}$. Τότε επειδή τα στοιχεία $[e_{11}^{(1)}]_0, [e_{11}^{(2)}]_0, \dots, [e_{11}^{(r)}]_0$ παράγουν την $K_0(A)$ (Σχόλιο 5.1.4) και για κάθε $1 \leq k \leq r$ ισχύει πως

$$K_0(\varphi)([e_{11}^{(k)}]_0) = [\varphi(e_{11}^{(k)})]_0 = [f_{11}^{(k)}]_0 = \alpha([e_{11}^{(k)}]_0),$$

έπεται πως $K_0(\varphi) = \alpha$.

Υποθέτουμε τώρα πως $\alpha([1_A]_0) = [1_B]_0$. Θέτουμε $p = \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} f_{ii}^{(k)}$. Τότε προφανώς $p \in \mathcal{P}(B)$ και $\varphi([1_A]_0) = [p]_0$. Συνεπώς

$$[1_B - p]_0 = [1_B]_0 - [p]_0 = \alpha([1_A]_0) - K_0(\varphi)([1_A]_0) = 0_{K_0(B)} = [0_B]_0,$$

και αφού η B έχει την ιδιότητα απαλοιφής έπεται πως $1_B - p \sim 0_B$. Επομένως $1_B - p = 0$ και άρα $\varphi([1_A]_0) = p = 1_B$, δηλαδή ο φ διατηρεί την μονάδα.

(ii) Έστω $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ *-ομομορφισμοί με $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$. Έστω επίσης $\{e_{ij}^{(k)}\}$ το standard system of matrix units της A . Τότε

$$\begin{aligned} [\varphi(e_{11}^{(k)})]_0 &= K_0(\varphi)([e_{11}^{(k)}]_0) = K_0(\psi)([e_{11}^{(k)}]_0) = [\psi(e_{11}^{(k)})]_0 \text{ για κάθε } k, \text{ και} \\ [1_B - \varphi(1_A)]_0 &= [1_B]_0 - K_0(\varphi)([1_A]_0) = [1_B]_0 - K_0(\psi)([1_A]_0) = [1_B - \psi(1_A)]_0. \end{aligned}$$

Επειδή λοιπόν η B έχει την ιδιότητα απαλοιφής, υπάρχουν μερικές ισομετρίες $v_1, v_2, \dots, v_r$ και w της B έτσι ώστε

$$\begin{aligned} v_k^* v_k &= \varphi(e_{11}^{(k)}), \quad v_k v_k^* = \psi(e_{11}^{(k)}), \quad \forall 1 \leq k \leq r \\ w^* w &= 1_B - \varphi(1_A), \quad w w^* = 1_B - \psi(1_A) \end{aligned}$$

Τότε για κάθε i και k , το στοιχείο $\psi(e_{i1}^{(k)}) v_k \varphi(e_{1i}^{(k)})$ είναι μερική ισομετρία, με $\psi(e_{ii}^{(k)})$ να είναι η αρχική προβολή και $\varphi(e_{ii}^{(k)})$ η τελική προβολή της συγκεκριμένης ισομετρίας (Ορισμός 1.3.8). Ορίζουμε

$$u = w + \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \psi(e_{i1}^{(k)}) v_k \varphi(e_{1i}^{(k)}).$$

Τότε $u \in \mathcal{U}(A)$, διότι για παράδειγμα

$$\begin{aligned} uu^* &= \left(w + \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \psi(e_{i1}^{(k)}) v_k \varphi(e_{1i}^{(k)}) \right) \left(w^* + \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \varphi(e_{i1}^{(k)}) v_k^* \psi(e_{1i}^{(k)}) \right) \\ &= ww^* + w \left(\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \varphi(e_{1i}^{(k)}) v_k^* \psi(e_{1i}^{(k)}) \right) + \left(\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \psi(e_{i1}^{(k)}) v_k \varphi(e_{1i}^{(k)}) \right) w^* + \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \psi(e_{ii}^{(k)}) \\ &= 1_B - \psi(1_A) + w \left(\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \varphi(e_{1i}^{(k)}) v_k^* \psi(e_{1i}^{(k)}) \right) + \left(\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \psi(e_{i1}^{(k)}) v_k \varphi(e_{1i}^{(k)}) \right) w^* + \psi(1_A), \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \left\| w \left(\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \varphi(e_{1i}^{(k)}) v_k^* \psi(e_{1i}^{(k)}) \right) \right\|^2 &= \left\| \left(\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \psi(e_{i1}^{(k)}) v_k \varphi(e_{1i}^{(k)}) \right) w^* w \left(\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \varphi(e_{1i}^{(k)}) v_k^* \psi(e_{1i}^{(k)}) \right) \right\| \\ &= \left\| \left(\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \psi(e_{i1}^{(k)}) v_k \varphi(e_{1i}^{(k)}) \right) (1_B - \psi(1_A)) \left(\sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{n_k} \varphi(e_{1i}^{(k)}) v_k^* \psi(e_{1i}^{(k)}) \right) \right\| \\ &\stackrel{(*)}{=} 0. \end{aligned}$$

Το (*) έπεται από το ότι για κάθε i το $\psi(e_{i1}^{(k)}) v_k \varphi(e_{1i}^{(k)})$ είναι μερική ισομετρία με αρχική προβολή το $\psi(e_{ii}^{(k)}) \leq \psi(1_A)$ και από την Παρατήρηση 1.3.9.

Επιπλέον επειδή $\|w\varphi(e_{ij}^{(k)})\| = 0$ και $\|\psi(e_{ij}^{(k)})w\| = 0$, έπεται πως

$$u\varphi(e_{ij}^{(k)}) = \psi(e_{i1}^{(k)})v_k\varphi(e_{1j}^{(k)}) = \psi(e_{ij}^{(k)})u,$$

και άρα $u\varphi(e_{ij}^{(k)})u^* = \psi(e_{ij}^{(k)})$ για κάθε i, j, k . Επομένως $Adu \circ \varphi = \psi$.

Αντίστροφα αν $\psi = Adu \circ \varphi$, τότε $K_0(\psi) = K_0(Adu \circ \varphi) = K_0(Adu) \circ K_0(\varphi)$. Συνεπώς αν $p \in \mathcal{P}_\infty(A)$, τότε από το (ii) της Πρότασης 1.3.17 έπεται πως

$$K_0(Adu) \circ K_0(\varphi)([p]_0) = [u\varphi(p)u^*]_0 = [\varphi(p)]_0$$

και άρα $K_0(\psi) = K_0(\varphi)$. □

Λήμμα 5.2.8. Έστω

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

μια ακολουθία από C^* -άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης και $(A, \{\mu_n\})$ το επαγωγικό της όριο. Έστω B μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και $\alpha : K_0(A_1) \rightarrow K_0(B), \gamma : K_0(B) \rightarrow K_0(A)$ θετικοί ομομορφισμοί τέτοιου ώστε $\gamma \circ \alpha = K_0(\mu_1)$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, και ένας θετικός ομομορφισμός ομάδων $\beta : K_0(B) \rightarrow K_0(A_n)$ ο οποίος κάνει το διάγραμμα (5.1) μεταθετικό, δηλαδή $K_0(\mu_n) \circ \beta = \gamma$ και $\beta \circ \alpha = K_0(\varphi_{n,1})$.

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A_1) & \xrightarrow{K_0(\varphi_{n,1})} & K_0(A_n) & \xrightarrow{K_0(\mu_n)} & K_0(A) \\ & \searrow \alpha & \uparrow \beta & \nearrow \gamma & \\ & & K_0(B) & & \end{array} \quad (5.1)$$

Αν όλες οι συνδετικές απεικονίσεις διατηρούν την μονάδα και $\alpha([1_{A_1}]_0) = [1_B]_0$, τότε $\beta([1_B]_0) = [1_{A_n}]_0$.

Απόδειξη. Έστω $\{e_{ij}^{(k)}\}, 1 \leq k \leq r, 1 \leq i, j \leq n_k$, ένα system of matrix units της B . Ορίζουμε για κάθε $k \geq 1$, $x_k = \gamma([e_{11}^{(k)}]_0) \in K_0(A)^+$. Από την συνέχεια της K_0 (Θεώρημα 3.3.2) έχουμε

$$K_0(A)^+ = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_0(\mu_m)(K_0(A_m)^+)$$

και άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ και $y_1, y_2, \dots, y_r \in K_0(A_m)^+$ τέτοια ώστε $x_k = K_0(\mu_m)(\psi_k)$ για κάθε k . Από το Σχόλιο 5.1.4 προκύπτει πως η $K_0(B)$ είναι μια ελεύθερη αβελιανή ομάδα η οποία παράγεται από τα $[e_{11}^{(1)}]_0, [e_{11}^{(2)}]_0, \dots, [e_{11}^{(r)}]_0$ και άρα υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός ομάδων $\beta' : K_0(B) \rightarrow K_0(A_m)$ με $\beta'([e_{11}^{(1)}]_0) = y_1, \beta'([e_{11}^{(2)}]_0) = y_2, \dots, \beta'([e_{11}^{(r)}]_0) = y_r$.

Τώρα αν $g \in K_0(B)^+$, τότε $g = m_1[e_{11}^{(1)}]_0 + m_2[e_{11}^{(2)}]_0 + \dots + m_r[e_{11}^{(r)}]_0$ για κάποια $m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ και άρα $\beta'(g) = m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_ry_r$. Έχουμε δηλαδή πως ο β' είναι θετικός ομομορφισμός. Επιπλέον παρατηρούμε πως για κάθε k ισχύει

$$(K_0(\mu_m) \circ \beta')([e_{11}^{(k)}]_0) = K_0(\mu_m)(y_k) = x_k = \gamma([e_{11}^{(k)}]_0)$$

και άρα $K_0(\mu_m) \circ \beta' = \gamma$. Τότε $K_0(\mu_m) \circ (\beta' \circ \alpha - K_0(\varphi_{m,1})) = \gamma \circ \alpha - K_0(\mu_1) = 0$. Επειδή και η $K_0(A_1)$ είναι πεπερασμένα παραγόμενη αβελιανή ομάδα, αν θεωρήσουμε ένα σύνολο γεννητόρων της $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$, τότε από την συνέχεια πάλι της K_0 έχουμε πως

$$Ker(K_0(\mu_m)) = \bigcup_{n=m+1}^{\infty} Ker(K_0(\varphi_{n,m}))$$

και άρα υπάρχει $n > m$ ώστε $(\beta' \circ \alpha - K_0(\varphi_{m,1}))(g_i) \in \text{Ker } K_0(\varphi_{n,m})$ για κάθε $1 \leq i \leq s$. Θέτουμε $\beta = K_0(\varphi_{n,m}) \circ \beta'$. Τότε $(\beta \circ \alpha - K_0(\varphi_{n,1}))(g_i) = 0$ για κάθε i , και άρα $\beta \circ \alpha = K_0(\varphi_{n,1})$. Επίσης

$$\gamma = K_0(\mu_m) \circ \beta' = K_0(\mu_n) \circ K_0(\varphi_{n,m}) \circ \beta' = K_0(\mu_n) \circ \beta.$$

Αν υποθέσουμε πως όλες οι συνδετικές απεικονίσεις διατηρούν την μονάδα και $\alpha([1_{A_1}]_0) = [1_B]_0$, τότε προφανώς και η $K_0(\varphi_{n,1})$ διατηρεί την μονάδα, και άρα από την μεταθετικότητα του αριστερού τριγώνου του διαγράμματος (5.1) προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 5.2.9. (Elliott) Δύο AF -άλγεβρες με μονάδα είναι ισόμορφες αν και μόνον αν οι τριάδες $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$ και $(K_0(B), K_0(B)^+, [1_B]_0)$ είναι ισόμορφες, δηλαδή αν υπάρχει ομομορφισμός ομάδων $\alpha : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ ώστε $\alpha(K_0(A)^+) = K_0(B)^+$ και $\alpha([1_A]_0) = [1_B]_0$.

Επιπλέον, για κάθε τέτοιο ισομορφισμό υπάρχει ένας $*$ -ισομορφισμός $\varphi : A \rightarrow B$ έτσι ώστε $K_0(\varphi) = \alpha$.

Απόδειξη. Όπως είδαμε στη παράγραφο 3.1, ο επαγόμενος ομομορφισμός (στις ομάδες K_0) κάθε $*$ -ισομορφισμού $\varphi : A \rightarrow B$ είναι ισομορφισμός διάταξης μεταξύ των $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$ και $(K_0(B), K_0(B)^+, [1_B]_0)$.

Για την αντίθετη κατεύθυνση αρκεί να αποδείξω ότι για τον ισομορφισμό α της εκφώνησης ισχύει ότι $\alpha = K_0(\varphi)$ για κάποιον $*$ -ισομορφισμό $\varphi : A \rightarrow B$.

Αφού οι A, B είναι AF -άλγεβρες με μονάδα, από το Λήμμα 3.2.11 έπεται πως υπάρχουν ακολουθίες από C^* -άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης

$$A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \xrightarrow{f_2} A_3 \longrightarrow \dots \quad B_1 \xrightarrow{g_1} B_2 \xrightarrow{g_2} B_3 \longrightarrow \dots$$

και συνδετικές απεικονίσεις $f_i, g_i, i \geq 1$ που διατηρούν την μονάδα, καθώς και $*$ -ομομορφισμοί $\mu_n : A_n \rightarrow A$ και $\lambda_n : B_n \rightarrow B$ έτσι ώστε τα $(A, \{\mu_n\})$ και $(B, \{\lambda_n\})$ να είναι τα επαγωγικά όρια των δύο παραπάνω ακολουθιών. Θέτουμε $B_0 = \mathbb{C}$ και $g_0 : B_0 \rightarrow B_1, \psi_0 : B_0 \rightarrow A_1$ τους (μοναδικούς) $*$ -ομομορφισμούς που διατηρούν την μονάδα. Επίσης θέτουμε $\beta_0 = K_0(\psi_0)$.

Ισχυρισμός. Υπάρχουν δύο αύξουσες ακολουθίες φυσικών αριθμών $1 = n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ και $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots$, καθώς και $\alpha_j : K_0(A_{n_j}) \rightarrow K_0(B_{m_j}), \beta_j : K_0(B_{m_j}) \rightarrow K_0(A_{n_{j+1}})$ θετικοί ομομορφισμοί που διατηρούν την μονάδα έτσι ώστε το διάγραμμα (5.2) να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγικά το Λήμμα 5.2.8.

$$\begin{array}{ccccccc} & & K_0(A_1) & \longrightarrow & K_0(A_{n_2}) & \longrightarrow & K_0(A_{n_3}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & K_0(A) \\ & \nearrow \beta_0 & \downarrow \alpha_1 & \nearrow \beta_1 & \downarrow \alpha_2 & \nearrow \beta_2 & & & & \nearrow \alpha & \nwarrow \alpha^{-1} \\ K_0(B_0) & \longrightarrow & K_0(B_{m_1}) & \longrightarrow & K_0(B_{m_2}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & K_0(B) \end{array} \quad (5.2)$$

Αρχικά παρατηρούμε πως $(\alpha \circ K_0(\mu_1)) \circ \beta_0 = K_0(\lambda_0)$. Πράγματι επειδή $B_0 = \mathbb{C}$, το $[1_{\mathbb{C}}]_0$ είναι γεννήτορας της $K_0(B_0)$ και επειδή οι μ_1, λ_0 διατηρούν την μονάδα (αφού την διατηρούν οι f_i, g_i για κάθε i) έχουμε

$$\begin{aligned} (\alpha \circ K_0(\mu_1)) \circ \beta_0([1_{\mathbb{C}}]_0) &= \alpha([\mu_1(\psi_0(1_{\mathbb{C}}))]_0) = \alpha([1_A]_0) \\ &= [1_B]_0 = K_0(\lambda_0)([1_{\mathbb{C}}]_0). \end{aligned}$$

Συνεπώς υπάρχει $m_1 > 0$ και $\alpha_1 : K_0(A_1) \rightarrow K_0(B_{m_1})$ θετικός ομομορφισμός ο οποίος κάνει το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccccc} & & K_0(A_1) & & \\ & \nearrow \beta_0 & \downarrow \alpha_1 & \searrow \alpha \circ K_0(\mu_1) & \\ K_0(B_0) & \xrightarrow{K_0(g_{m_1,0})} & K_0(B_{m_1}) & \xrightarrow{K_0(\lambda_{m_1})} & K_0(B) \end{array}$$

Τότε έχουμε $\alpha^{-1} \circ K_0(\lambda_{m_1}) \circ \alpha_1 = K_0(\mu_1)$ και άρα υπάρχει $n_2 > 1$ και $\beta_1 : K_0(B_{m_1}) \rightarrow K_0(A_{n_2})$ έτσι ώστε $\beta_1 \circ \alpha_1 = K_0(f_{n_2,1})$ και $K_0(\mu_{n_2}) \circ \beta_1 = \alpha^{-1} \circ K_0(\lambda_{m_1})$, κοκ. $\square$

Από το (i) του Λήμματος 3.2.11, τα επαγωγικά όρια των ακολουθιών

$$A_{n_1} \xrightarrow{f_{n_1,n_2}} A_{n_2} \xrightarrow{f_{n_3,n_2}} A_{n_3} \longrightarrow \dots, \quad B_{m_1} \xrightarrow{g_{m_1,m_2}} B_{m_2} \xrightarrow{g_{m_3,m_2}} B_{m_3} \longrightarrow \dots$$

είναι τα A και B αντίστοιχα. Χάριν απλοποίησης του συμβολισμού υποθέτουμε πως $n_j = m_j = j$, έτσι ώστε $f_{n_{j+1},n_j} = f_j$ και $g_{n_{j+1},n_j} = g_j$.

Λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος (5.2) έχουμε πως οι α_j, β_j θα διατηρούν την μονάδα. Τότε από το (i) του Λήμματος 5.2.7, έπεται πως για κάθε $j \geq 1$ υπάρχουν *-ομομορφισμοί $\varphi'_j : A_j \rightarrow B_j$ και $\psi'_j : B_j \rightarrow A_{j+1}$ που διατηρούν την μονάδα, ώστε $K_0(\varphi'_j) = \alpha_j$ και $K_0(\psi'_j) = \beta_j$. Επομένως

$$\begin{aligned} K_0(f_j) &= \beta_j \circ \alpha_j = K_0(\psi'_j \circ \varphi'_j), \\ K_0(g_j) &= \alpha_{j+1} \circ \beta_j = K_0(\varphi'_{j+1} \circ \psi'_j) \end{aligned}$$

και άρα από το (ii) του Λήμματος 5.2.7, προκύπτει πως για κάθε $j \geq 1$ υπάρχουν (μέσω επαγωγής) $u_j \in \mathcal{U}(A_{j+1})$ και $v_j \in \mathcal{U}(B_j)$ με $v_1 = 1_B$ ώστε

$$\begin{aligned} f_j &= Adu_j \circ \psi'_j \circ \varphi_j = \psi_j \circ \varphi_j, \\ g_j &= Adv_{j+1} \circ \varphi'_{j+1} \circ \psi_j = \varphi_{j+1} \circ \psi_j, \end{aligned}$$

όπου $\varphi_j = Adv_j \circ \varphi'_j$ και $\psi_j = Adu_j \circ \psi'_j$. Πάλι λόγω του (ii) του Λήμματος 5.2.7 έχουμε $K_0(\varphi_j) = K_0(\varphi'_j)$ και $K_0(\psi_j) = K_0(\psi'_j)$. Επομένως έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} & & A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 \longrightarrow \dots \longrightarrow A \\ & \nearrow \psi_0 & \downarrow \varphi_1 & \nearrow \psi_1 & \downarrow \varphi_2 & \nearrow \psi_2 & \searrow \varphi \\ B_0 & \xrightarrow{g_0} & B_1 & \xrightarrow{g_1} & B_2 & \longrightarrow \dots \longrightarrow B & \xleftarrow{\psi} \end{array} \quad (5.3)$$

και άρα από Λήμμα 3.2.16 υπάρχουν *-ισομομορφισμοί $\varphi : A \rightarrow B$ και $\psi : B \rightarrow A$ ώστε $\psi = \varphi^{-1}$. Μένει να αποδείξουμε ότι $K_0(\varphi) = \alpha$. Πράγματι λόγω της μεταθετικότητας των διαγραμμάτων (5.2) και (5.3) τα παρακάτω διαγράμματα

$$\begin{array}{ccc} K_0(A_j) & \xrightarrow{K_0(\mu_j)} & K_0(A) \\ K_0(\varphi_j)=\alpha_j \downarrow & & \downarrow K_0(\varphi) \\ K_0(B_j) & \xrightarrow{K_0(\lambda_j)} & K_0(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K_0(A_j) & \xrightarrow{K_0(\mu_j)} & K_0(A) \\ \alpha_j \downarrow & & \downarrow \alpha \\ K_0(B_j) & \xrightarrow{K_0(\lambda_j)} & K_0(B) \end{array}$$

είναι μεταθετικά για κάθε j . Συνεπώς οι $K_0(\varphi)$ και α είναι ίσες περιορισμένες στην εικόνα της $K_0(\mu_j)$ για κάθε j , και άρα από την συνέχεια της K_0 (Θεώρημα 3.3.2) έπεται πως $K_0(\varphi) = \alpha$. $\square$

Συμπέρασμα: Για κάθε AF -άλγεβρα A με μονάδα, η τριάδα $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$ αποτελεί μια αναλλοίωτη (ως προς $*$ -ισομορφισμό) για αυτήν. Ένα ερώτημα που προκύπτει άμεσα είναι αν μπορούμε να βρούμε μια αναλλοίωτη για κάθε AF -άλγεβρα ανεξάρτητα από το αν αυτή έχει ή όχι μονάδα. Η απάντηση είναι θετική και μάλιστα όπως θα δούμε στη επόμενη παράγραφο η αναλλοίωτη αυτή στην περίπτωση των AF -αλγεβρών με μονάδα, είναι ακριβώς η τριάδα $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$.

5.3 Το θεώρημα για AF -άλγεβρες χωρίς απαραίτητα μονάδα

Ορισμός 5.3.1. Αν A είναι μια C^* -άλγεβρα, τότε $scale$ της A θα λέγεται το σύνολο

$$\mathcal{D}_0(A) = \{[p]_0 : p \in \mathcal{P}(A)\} \subseteq K_0(A)^+.$$

Κάνοντας χρήση των ίδιων επιχειρημάτων που είδαμε στη απόδειξη των Λημμάτων 5.2.7, 5.2.8 ποκύπτουν τα εξής δύο Λήμματα.

Λήμμα 5.3.2. Έστω A μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και B μια C^* -άλγεβρα με μονάδα η οποία έχει την ιδιότητα απαλοιφής.

(i) Για κάθε θετικό ομομορφισμό ομάδων $\alpha : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ για τον οποίο ισχύει ότι $\alpha(\mathcal{D}_0(A)) \subseteq \mathcal{D}_0(B)$, υπάρχει ένας $*$ -ομομορφισμός $\varphi : A \rightarrow B$ ώστε $K_0(\varphi) = \alpha$.

Αν επιπλέον ισχύει πως $\alpha([1_A]_0) = [1_B]_0$, τότε ο φ θα διατηρεί την μονάδα.

(ii) Έστω $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ $*$ -ομομορφισμοί. Τότε $K_0(\varphi) = K_0(\psi)$ αν και μόνον αν $\psi = Adu \circ \varphi$ για κάποιο $unitary$ στοιχείο u της B .

Λήμμα 5.3.3. Έστω

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \dots$$

μια ακολουθία από C^* -άλγεβρες πεπερασμένης διάστασης και $(A, \{\mu_n\})$ το επαγωγικό της όριο. Έστω B μια C^* -άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης και $\alpha : K_0(A_1) \rightarrow K_0(B)$, $\gamma : K_0(B) \rightarrow K_0(A)$ δύο ομομορφισμοί ώστε $\alpha(\mathcal{D}_0(A_1)) \subseteq \mathcal{D}_0(B)$ και $\gamma(\mathcal{D}_0(B)) \subseteq \mathcal{D}_0(A)$. Τότε υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, και ένας ομομορφισμός ομάδων $\beta : K_0(B) \rightarrow K_0(A_n)$ με $\beta(\mathcal{D}_0(B)) \subseteq \mathcal{D}_0(A_n)$ ο οποίος κάνει το διάγραμμα (5.4) μεταθετικό, δηλαδή $K_0(\mu_n) \circ \beta = \gamma$ και $\beta \circ \alpha = K_0(\varphi_{n,1})$.

$$\begin{array}{ccccc} K_0(A_1) & \xrightarrow{K_0(\varphi_{n,1})} & K_0(A_n) & \xrightarrow{K_0(\mu_n)} & K_0(A) \\ & \searrow \alpha & \uparrow \beta & \nearrow \gamma & \\ & & K_0(B) & & \end{array} \quad (5.4)$$

Θεώρημα 5.3.4. (Elliott) Έστω A και B δύο AF -άλγεβρες. Αν $\alpha : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ είναι ένας ισομορφισμός έτσι ώστε $\alpha(\mathcal{D}_0(A)) = \mathcal{D}_0(B)$, τότε υπάρχει ένας $*$ -ισομορφισμός $\varphi : A \rightarrow B$ ώστε $K_0(\varphi) = \alpha$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι όμοια με αυτήν του Θεωρήματος 5.2.9. □

Σχόλιο 5.3.5. Έχουμε λοιπόν πως δύο AF -άλγεβρες A και B είναι $*$ -ισόμορφες αν και μόνο αν τα ζεύγη $(K_0(A), \mathcal{D}_0(A))$ και $(K_0(B), \mathcal{D}_0(B))$ είναι ισόμορφα. Επομένως για κάθε AF -άλγεβρα A το ζεύγος $(K_0(A), \mathcal{D}_0(A))$ αποτελεί αναλλοίωτη για αυτήν.

Στην περίπτωση που η A έχει μονάδα προκύπτει πως $\mathcal{D}_0(A) = \{g \in K_0(A) : 0 \leq g \leq [1_A]_0\}$. Πράγματι αν $0 \leq g \leq [1_A]_0$, τότε $g = [p]_0$ με $p \in \mathcal{P}_n(A)$ για κάποιο n και άρα $[1_A]_0 = [p \oplus q]_0$ για κάποιο $q \in \mathcal{P}_m(A)$. Επειδή οι AF -άλγεβρες έχουν την ιδιότητα απαλοιφής έπεται πως

$$p \oplus q \sim 1_A \oplus 0_{m+n-1} \text{ στην } M_{n+m}(A)$$

και άρα το p είναι τελικά προβολή της A . Άρα $\{g \in K_0(A) : 0 \leq g \leq [1_A]_0\} \subseteq \mathcal{D}_0(A)$. Η ισότητα των δύο συνόλων προκύπτει άμεσα και άρα το $\mathcal{D}_0(A)$ καθορίζεται πλήρως από την τριάδα $(K_0(A), K_0(A)^+, [1_A]_0)$.

5.4 Η ομάδα K_0 μιας AF -άλγεβρας-Παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή υπολογίζουμε τις ομάδες K_0 κάποιων AF -άλγεβρων που εμφανίστηκαν προηγουμένως στην εργασία και αποδεικνύουμε πως οι ομάδες K_0 των AF -άλγεβρων είναι ακριβώς οι dimension groups.

Παράδειγμα 5.4.1. Αν H είναι ένας απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert, τότε οι διατεταγμένες αβελιανές ομάδες $(K_0(\mathcal{K}(H)), K_0(\mathcal{K}(H))^+)$ και $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^+)$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 3.2.17, η $\mathcal{K}(H)$ είναι το επαγωγικό όριο της ακολουθίας (3.3). Θεωρούμε την απεικόνιση $\kappa_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{K}\mathbb{C}$ του Παραδείγματος 3.2.17.

Ισχυρισμός. Ο επαγόμενος ομομορφισμός $K_0(\kappa_1) : K_0(\mathbb{C}) \rightarrow K_0(\mathcal{K}\mathbb{C})$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Αρχικά παρατηρούμε πως ο συνδετικός μορφισμός $\varphi_{n,1} : \mathbb{C} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ είναι ακριβώς ο $*$ -ομομορφισμός $\lambda_{n,\mathbb{C}}$ που είδαμε στην Πρόταση 2.4.16, και άρα ο επαγόμενος ομομορφισμός $K_0(\varphi_{n,1}) : K_0(\mathbb{C}) \rightarrow K_0(M_n(\mathbb{C}))$ είναι ισομορφισμός για κάθε n .

Έστω $g \in K_0(\mathcal{K}\mathbb{C})$. Τότε από το (i) του Θεωρήματος 3.3.2 έπεται πως $g = K_0(\kappa_n)(g')$ για κάποιο $g' \in K_0(M_n(\mathbb{C}))$. Το $g' = K_0(\varphi_{n,1})(h)$ για κάποιο $h \in K_0(\mathbb{C})$ και άρα

$$K_0(\kappa_1)(h) = K_0(\kappa_n \circ \varphi_{n,1})(h) = K_0(g') = g.$$

Επομένως η $K_0(\kappa_1)$ είναι επί. Το ζητούμενο έπεται από το (iii) του Θεωρήματος 3.3.2. Πράγματι αν υπάρχει $h \in K_0(\mathbb{C})$ ώστε $K_0(\kappa_1)(h) = 0$, τότε $K_0(\varphi_{n,1})(h) = 0$ για κάποιο $n \geq 2$ και άρα λόγω όσων προηγήθηκαν του Ισχυρισμού έχουμε πως $h = 0$. $\square$

Συνεπώς έχουμε πως οι ομάδες $K_0(\mathcal{K}(H))$ και $\mathbb{Z}$ είναι ισόμορφες. Από το Παράδειγμα 2.2.5 έχουμε έναν ισομορφισμό διάταξης $\alpha_1 : K_0(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{Z}$ για τον οποίο ισχύει πως $\alpha_1([1]_0) = 1$. Θεωρούμε τον ισομορφισμό $\beta := \alpha_1 \circ K_0(\kappa_1)^{-1} \circ K_0(\alpha)^{-1} : K_0(\mathcal{K}(H)) \rightarrow \mathbb{Z}$, όπου $\alpha : \mathcal{K}\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{K}(H)$ είναι ο ισομορφισμός που προέκυψε στο Παράδειγμα 3.2.17. Ο β είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός διάταξης. $\square$

Παράδειγμα 5.4.2. Έστω $\mathfrak{C}$ η άλγεβρα CAR. Τότε $(K_0(\mathfrak{C}), K_0(\mathfrak{C})^+) \simeq (\mathbb{Z}[\frac{1}{2}], \mathbb{N}[\frac{1}{2}])$, όπου $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \{\frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ είναι η ομάδα των δυαδικών ρητών (diadic rationals).

Απόδειξη. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.3.3 $A = \varinjlim (M_{2^n}, \{\rho_n\})$ όπου $\rho_n : M_{2^n} \rightarrow M_{2^{n+1}}$ ορίζονται μέσω του πίνακα [2]. Τότε η επαγόμενη ακολουθία της $(M_{2^n}, \{\rho_n\})$ στις ομάδες K_0 είναι η ακολουθία

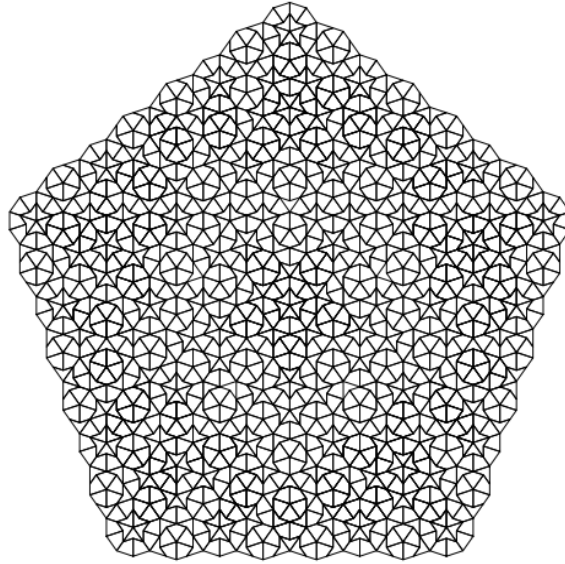
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \dots \quad (5.5)$$

όπου $2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, m \mapsto 2m$. Το επαγωγικό όριο αυτής της ακολουθίας είναι το $((\mathbb{Z}[\frac{1}{2}], \mathbb{N}[\frac{1}{2}]), \{\zeta_n\})$, όπου $\zeta_n : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}], m \mapsto \frac{m}{2^n}$. Πράγματι αν $((G, G^+), \{\theta_n\})$ είναι το επαγωγικό όριο της ακολουθίας (5.5), τότε επειδή $\zeta_{n+1} \circ 2 = \zeta_n$ για κάθε n έπεται πως υπάρχει ένας θετικός ομομορφισμός $\alpha : G \rightarrow \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ ώστε $\alpha \circ \theta_n = \zeta_n$ για κάθε n . Ο α είναι ισομορφισμός διάταξης και άρα από το Θεώρημα 3.3.2 έπεται πως οι διατεταγμένες αβελιανές ομάδες $(K_0(\mathfrak{F}), K_0(\mathfrak{F})^+)$ και $(\mathbb{Z}[\frac{1}{2}], \mathbb{N}[\frac{1}{2}])$ είναι ισόμορφες. $\square$

Παράδειγμα 5.4.3. Θεωρούμε την άλγεβρα Fibonacci $\mathfrak{F}$. Τότε οι διατεταγμένες αβελιανές ομάδες $(K_0(\mathfrak{F}), K_0(\mathfrak{F})^+)$ και $(\mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}, (\mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}) \cap \mathbb{R}^+)$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 4.3.6 η $\mathfrak{F}$ είναι το επαγωγικό όριο της ακολουθίας (4.7). Παρατηρούμε πως η επαγόμενη (μέσω της ομάδας K_0) ακολουθία αυτής είναι η επαγωγική ακολουθία (3.1) και άρα λόγω της Συνέχειας της K_0 (Θεώρημα 3.3.2) έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Η άλγεβρα Fibonacci $\mathfrak{F}$ παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και από γεωμετρική σκοπιά. Συγκεκριμένα στο [6, Παράγραφος 2.3] ο A. Connes αναφέρει πως η $\mathfrak{F}$ είναι η C^* -άλγεβρα που αντιστοιχεί στον “μη μεταθετικό” χώρο X των Penrose tilings (Σχήμα 5.1) και πως μια τοπολογική αναλλοίωτη για αυτόν είναι η ομάδα $K_0(\mathfrak{F}) = \mathbb{Z} + \gamma\mathbb{Z}$.



Σχήμα 5.1: Ο χώρος X των Penrose tilings

Είναι σημαντικό στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε πως υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ των διατεταγμένων αβελιανών ομάδων που προκύπτουν ως K_0 ομάδες AF -άλγεβρων και των dimension groups.

Ορισμός 5.4.4. Έστω (G, G^+) διατεταγμένη αβελιανή ομάδα. Η G θα είναι *dimension groups* αν είναι (ισόμορφη) με το επαγωγικό όριο μιας ακολουθίας διατεταγμενων αβελιανών ομάδων της μορφής

$$(\mathbb{Z}^{n_1}, (\mathbb{Z}^{n_1})^+) \xrightarrow{\alpha_1} (\mathbb{Z}^{n_2}, (\mathbb{Z}^{n_2})^+) \xrightarrow{\alpha_2} (\mathbb{Z}^{n_3}, (\mathbb{Z}^{n_3})^+) \longrightarrow \dots,$$

όπου για κάθε j $n_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, ο α_j είναι θετικός ομομορφισμός και $\mathbb{Z}^{n_j}$ έχει την συνήθη διάταξη, δηλαδή $(\mathbb{Z}^{n_j})^+ = \mathbb{N}^{n_j} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n_j}) \in \mathbb{Z}^{n_j} : x_k \geq 0, \forall 1 \leq k \leq n_j\}$.

Παρατήρηση 5.4.5. Αν A είναι μια AF -άλγεβρα, τότε $(K_0(A), K_0(A)^+)$ είναι *dimension group*.

Απόδειξη. Πράγματι αν A είναι μια AF -άλγεβρα, τότε $A = \varinjlim A_n$, όπου A_n είναι μια αύξουσα ακολουθία από πεπερασμένης διάστασης C^* -υποάλγεβρες της. Από Σχόλιο 5.1.4 έπεται πως για κάθε n $(K_0(A_n), K_0(A_n)^+) = (\mathbb{Z}^{r(n)}, (\mathbb{Z}^{r(n)})^+)$. Τότε από συνέχεια της K_0 και την Πρόταση 3.2.19 έχουμε ότι $(K_0(A), K_0(A)^+)$ είναι διατεταγμένη αβελιανή ομάδα και μάλιστα *dimension group*. $\square$

Πρόταση 5.4.6. Αν (G, G^+) είναι *dimension group*, τότε υπάρχει μια AF -άλγεβρα A ώστε $(K_0(A), K_0(A)^+) \simeq (G, G^+)$.

Απόδειξη. Έστω (G, G^+) μια *dimension group*, τότε $(G, G^+) = \varinjlim ((\mathbb{Z}^{n_j}, (\mathbb{Z}^{n_j})^+), \alpha_j)$, όπου $((\mathbb{Z}^{n_j}, (\mathbb{Z}^{n_j})^+), \alpha_j)$ όπως στον Ορισμό 5.4.4. Εύκολα παρατηρούμε πως η $((\mathbb{Z}^{n_j}, (\mathbb{Z}^{n_j})^+))$ είναι απλή και άρα μέσω επαγωγής, για κάθε j μπορούμε να επιλέξουμε μια μονάδα διάταξης $u_j = (\kappa_1^{(j)}, \kappa_2^{(j)}, \dots, \kappa_{n_j}^{(j)})$ της $\mathbb{N}^{n_j}$ έτσι ώστε $\alpha_j(u_j) \leq u_{j+1}$.

Για κάθε j θέτουμε

$$A_j = M_{\kappa_1^{(j)}}(\mathbb{C}) \oplus M_{\kappa_2^{(j)}}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{\kappa_{n_j}^{(j)}}(\mathbb{C}) \text{ και } \gamma_j : \mathbb{Z}^{n_j} \rightarrow K_0(A_j)$$

όπου γ_j είναι η αντίστροφη απεικόνιση του ισομορφισμού διάταξης που προκύπτει από το Σχόλιο 5.1.4. Τότε για κάθε j έχουμε $\gamma_j(u_j) = ([1_{\kappa_1^{(j)}}]_0, [1_{\kappa_2^{(j)}}]_0, \dots, [1_{\kappa_{n_j}^{(j)}}]_0) = [1_{A_j}]_0$.

Αν $\beta_j : K_0(A_j) \rightarrow K_0(A_{j+1})$, με $\beta_j := \gamma_{j+1} \circ \alpha_j \circ \gamma_j^{-1}$ τότε ισχύει πως

$$\beta_j([1_{A_j}]_0) = \gamma_{j+1}(\alpha([u_j]_0)) \leq \gamma_{j+1}([u_{j+1}]_0) = [1_{A_{j+1}}]_0$$

και άρα από το (i) του Λήμματος 5.2.7 έπεται πως υπάρχει ένας $*$ -ομομορφισμός $\varphi_j : A_j \rightarrow A_{j+1}$ ο οποίος διατηρεί την μονάδα και $\beta_j = K_0(\varphi_j)$. Συνεπώς το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}^{n_1} & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathbb{Z}^{n_2} & \xrightarrow{\alpha_2} & \mathbb{Z}^{n_3} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \gamma_1 & & \downarrow \gamma_2 & & \downarrow \gamma_3 & & \\ K_0(A_1) & \xrightarrow{K_0(\varphi_1)} & K_0(A_2) & \xrightarrow{K_0(\varphi_2)} & K_0(A_3) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

είναι μεταθετικό και επειδή ο γ_j είναι ισομορφισμός για κάθε j έπεται πως

$$\varinjlim (\mathbb{Z}^{n_j}, \alpha_j) \simeq \varinjlim (K_0(A_j), K_0(\varphi_j))$$

Προφανώς επειδή γ_j είναι ισομορφισμοί διάταξης το ίδιο θα ισχύει και για τα $\varinjlim ((\mathbb{Z}^{n_j}, \mathbb{N}^{n_j}), \alpha_j)$ και $\varinjlim ((K_0(A_j), K_0(A_j)^+), K_0(\varphi_j))$. Τώρα αν $A := \varinjlim (A_n, \varphi_n)$ λόγω συνέχειας του συναρτητή K_0 (Θεώρημα 3.3.2) έχουμε πως η A είναι η ζητούμενη AF -άλγεβρα. $\square$

Από την αντιστοιχία που είδαμε προηγουμένως και το Θεώρημα ταξινόμησης του Elliott προκύπτει πως η dimension group που αντιστοιχεί σε μια AF -άλγεβρα αποτελεί μια αναλλοίωτη για αυτήν. Επίσης όπως απέδειξαν οι E.G.Effros, D.E.Handelman και C-L.Shen [11] οι dimension groups έχουν έναν εγγενή χαρακτηρισμό ο οποίος δίνεται μέσω του Θεωρήματος 5.4.8.

Ορισμός 5.4.7. Έστω (G, G^+) μια διατεταγμένη αβελιανή ομάδα. Τότε η G θα λέγεται *unperforated* αν

$$\forall g \in G \ \forall n \in \mathbb{N} : ng \in G^+ \Rightarrow g \in G^+.$$

Η G θα λέμε ότι πληροί την *Riesz Interpolation Property* αν για κάθε $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$ με $g_1 \leq h_1$ και $g_2 \leq h_2$ υπάρχει $z \in G$ ώστε $g_i \leq z \leq h_i$ για κάθε $i = 1, 2$.

Θεώρημα 5.4.8. (Effros – Handelman – Shen)

Έστω (G, G^+) μια αριθμήσιμη διατεταγμένη αβελιανή ομάδα. Τότε η G είναι *dimension group* αν και μόνο αν είναι *unperforated* και πληροί την *Riesz Interpolation Property*.

Απόδειξη. Βλέπε [11], ή [10, Παράγραφος IV.7]. □

Βιβλιογραφία

- [1] P. Aluffi, Algebra chapter 0, vol. **104**, American Mathematical Society, 2009.
- [2] W. Arveson, An Invitation to C^* -algebras, Vol. **39**, Springer Science and Business Media, 2012.
- [3] B. Blackadar, K-theory for operator algebras, M. S. R. I. Monographs, vol **5**, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1986.
- [4] O. Bratteli, *Inductive limits of finite dimensional C^* -algebras*, In: *Transactions of the American Mathematical Society* **171** (1972), pp. 195-234.
- [5] L. G. Brown, R.G. Douglas, and P. A. Fillmore, *Extensions of C^* -algebras and K-homology.*, *Annals of Mathematics* **105**, (1977), pp. 265-324.
- [6] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, San Diego, CA, 1994.
- [7] J. B. Conway, A course in functional analysis, Graduate texts in mathematics, vol. **96**, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [8] J. Cuntz, *Simple C^* -algebras generated by isometries*, *Comm. Math. Phys.* **57**, (1977), pp. 173-185.
- [9] J. Cuntz, *K-theory for certain C^* -algebras*, *Ann. Math.* **113**, (1981), pp. 181-197.
- [10] K. R. Davidson, C^* -algebras by example, Fields Institute monographs **6**, Providence, R.I: American Mathematical Society, 1996.
- [11] E. G. Effros, D. E. Handelman, and C-L. Shen, *Dimension groups and their affine representations*, *American Journal of Mathematics* **102** (1980), pp 385-407.
- [12] G. A. Elliott, *On the classification of inductive limits of sequences of semisimple finite-dimensional algebras*, In: *Journal of Algebra* **38** (1976), pp. 29-44.
- [13] I. M. Gel'fand, M. A. Naimark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, *Math. Sb* **12** (1943), pp 197-213.
- [14] A. Hatcher, Algebraic topology, Cambridge University Press, 2002.
- [15] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, Fundamentals of the theory of operator algebras, Vol. I: Elementary theory, Pure and Applied Mathematics, vol. **100**, New York, Academic Press Inc., 1983.
- [16] G. J. Murphy, C^* -algebras and operator theory, Academic press, London, 1990.

- [17] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1997.
- [18] P. K. Nyland, *Bratteli diagrams*, Master thesis, Norwegian University of Science and Technology, 2016.
- [19] Α. Κατάβολος, Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2008.
- [20] J. Rosenberg, *The role of K-theory in non-commutative algebraic topology*, pp 155-182 in *Operator algebras and K-theory*, San Francisco (1981), *American Mathematical Society* (1982).
- [21] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen, An Introduction to K-theory for C*-algebras, vol. **49**, Cambridge University Press, 2000.
- [22] M. Rørdam, E. Størmer, Classification of nuclear C*-algebras, Entropy in operator algebras, vol. **126** Science and Business Media, 2013.
- [23] N. E. Wegge-Olsen, K-theory and C*-algebras, A friendly approach, Oxford Science Publications, New York, The Clarendon Press Oxford University Press, 1993.