ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Γενικευμένες Γεωμετρικές Συνοχές και Εφαρμογές στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σωτήριος Παπανικολάου
Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ
Κατεύθυνση Θεωρητικών Μαθηματικών

Επιβλέπων:
Παναγιώτης Σταυρινός
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, Ιούνιος 2017

Πρόλογος

Η γεωμετρία είναι ένας κλάδος των μαθηματικών από τον οποίο η φυσική αντλούσε ιδέες διαχρονικά. Μέχρι και τον 19ο αιώνα η Ευκλείδεια γεωμετρία αποτελούσε το βασικό μαθηματικό μοντέλο για την περιγραφή του σύμπαντος. Το 1854 ο Bernhard Riemann παρουσίασε την διατριβή του στο πανεπιστήμιο του Gottingen με θέμα ''Τα θεμέλια της γεωμετρίας''. Οι ιδέες που αναπτύχθηκαν τότε αποτέλεσαν τις βάσεις της σημερινής γεωμετρίας Riemann. Λίγο αργότερα, τον 20ο αιώνα ο Albert Einstein χρησιμοποίησε αυτές τις ιδέες και περιέγραψε την βαρύτητα σαν γεωμετρία του ενναιίου πλέον χωροχρόνου. Η θεωρία αυτή του Einstein ονομάτηκε από τον ίδιο ''Γενική θεωρία της σχετικότητας''. Στα χρόνια που ακολούθησαν σωρεία πειραμάτων ήρθαν να επιβεβαιώσουν αυτή την θεωρία.

Σήμερα για μια ακόμη φορά βρισκόμαστε μπροστά σ'ένα πρόβλημα αντίστοιχο με εκείνο της εποχής του Einstein όταν το τότε Ευκλείδειο γεωμετρικό μοντέλο ήταν ανίκανο πλέον να περιγράψει το σύμπαν. Πιο συγκεκριμένα, σήμερα διάφορες παρατηρήσεις έρχονται σε αναντιστοιχία με το υπάρχον ισοτροπικό κοσμολογικό μοντέλο καθώς όλο και περισσότερο ενισχύεται η άποψη ενός σύμπαντος με ανισοτροπίες. Πολλοί προσπαθούν να δούν τις ανισοτροπίες σαν διακυμάνσεις του κλασικού ισοτροπικού μοντέλου. Εμείς θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε την ανισοτροπία μέσα από μια νέα γεωμετρία, γενικότερη της Riemann.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας αναπτύσσεται η θεωρία της γεωμετρίας στην εφαπτόμενη δέσμη. Αρχικά κάνουμε μια εισαγωγή στην γενική έννοια των δεσμών και δίνουμε τον ορισμό και τις ιδιότητες της εφαπτόμενης δέσμης. Έπειτα εισάγουμε την έννοια της μη γραμμικής συνοχής στην εφαπτόμενη δέσμη . Μέσω αυτής παίρνουμε μια νέα βάση για την TTM που ο τανυστικός της χαρακτήρας είναι ζωτικός στην εξέλιξη της θεωρίας. Στην εφοδιασμένη με μια μη γραμμική συνοχή εφαπτόμενη δέσμη, ορίζουμε την έννοια της d-γραμμικής συνοχής από την οποία παίρνουμε την καμπυλότητα, την στρέψη και τις γεωδαισιακές καμπύλες. Τέλος μελετάμε τους χώρους Finsler, οι οποίοι αποτελούν γενίκευση των Riemann χώρων, και έχουν καθοριστική σημασία στο δεύτερο μέρος της εργασίας.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας είναι εφαρμογές του πρώτου μαθηματικού μέρους στην φυσική, πιο συγκεκριμένα στην βαρύτητα και την κοσμολογία. Αρχικά υπάρχει ένα εισαγωγικό κεφάλαιο γενικής σχετικότητας και κοσμολογίας. Έπειτα μελετάμε την γεωμετρική δομή ενός ανισοτροπικού βαρυτικού πεδίου. Τέλος αναπτύσσουμε ένα ανισοτροπικό κοσμολογικό μοντέλο, το επονομαζόμενο Finsler-Randers κοσμολογικό μοντέλο, όπου η ανισοτροπία είναι ενδογενές αποτέλεσμα της γεωμετρίας.

Στην εργασία χρησιμοποιείται η αθροιστική σύμβαση δεικτών του Einstein, σύμφωνα με την οποία δύο ίδιοι δείκτες από τους οποίους ο ένας είναι ανταλλοίωτος (πάνω δείκτης) και ο άλλος συναλλοίωτος (κάτω δείκτης) αθροίζονται σε όλο το εύρος των τιμών τους.

Ευχαριστίες: Ευχαριστώ όλους αυτούς που με βοήθησαν στην εκπόνηση της διπλωματικής μου θέσης. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τον κ. Σταυρινό Παναγιώτη, καθηγητή του τμήματος μαθηματικών του ΕΚΠΑ για την επίβλεψη της εργασίας, την σωστή καθοδήγηση και τις αμέτρητες πηγές που μου έδωσε για να γνωρίσω, εγώ ένας μαθηματικός, τον κόσμο της φυσικής. Επιπλέον ευχαριστώ και τα υπόλοιπα μέλη της επιτροπής, τους κυρίους Σ. Βασιλάκο και Ε. Σαριδάκη που είχαν την ευγενή καλοσύνη να ασχοληθούν με την μελέτη της διπλωματικής μου εργασίας.

Παπανικολάου Σωτήρης
Αθήνα, Ιούνιος 2017

Περιεχόμενα

Μέρος Ι

Γενικευμένες Γεωμετρικές Συνοχές

Κεφάλαιο 1

Δέσμες

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνουμε τον ορισμό της νηματικής δέσμης, μελετάμε ειδικές περιπτώσεις νηματικών δεσμών όπως οι διανυσματικές δέσμες και η εφαπτόμενη δέσμη. Ορίζουμε συντεταγμένες στις νηματικές δέσμες οι οποίες έτσι δέχονται δομή πολλαπλότητας. Τέλος εισάγουμε την έννοια του κατακόρυφου εφαπτόμενου χώρου.

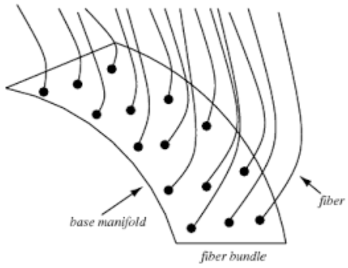
1.1 Νηματικές δέσμες

Ορισμός 1.1.1. *Μια* C^k ***νηματική δέσμη*** $\left(E \xrightarrow{\pi} M, G\right)$ *με τυπικό νήμα* F *αποτελείται από:*

1. *Μια διαφορική πολλαπλότητα* E *που καλείται* ***ολικός χώρος***
2. *Μια διαφορική πολλαπλότητα* M *που καλείται* ***βασικός χώρος***
3. *Μια διαφορική πολλαπλότητα* F *που καλείται* ***τυπικό νήμα***
4. *Μια επί απεικόνιση* $\pi : E \to M$ *που καλείται* ***προβολή*** *και είναι τέτοια ώστε* $\pi^{-1}(p) = F_p = F$
5. *Μια ομάδα Lie* G *αποτελούμενη από* C^k *διαφορίσιμες απεικονίσεις του* F *στον εαυτό του με πράξη την σύνθεση*
6. *Μια οικογένεια ανοικτών περιοχών* $\{U_j\}_{j\in J}$ *που καλύπτουν την* M

Επιπλέον απαιτούμε να ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1. *Η νηματική δέσμη είναι* ***τοπικά τετριμμενοποιήσιμη****:*
   Υπάρχουν αμφιδιαφορίσεις $\Psi_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times F$ *τέτοιες ώστε αν* $\pi(u) = p$ *τότε* $\Psi_j(u) = (p, \Phi_{j,p}(u))$ *όπου* $\Phi_{j,p} : F_p \to F$
2. *Οι απεικονίσεις* $g_{ij}(p) = \Phi_{j,p} \circ \Phi_{i,p}^{-1} : F \to F$ *είναι στοιχεία της* G
3. *Οι* ***απεικονίσεις μετάβασης*** $g_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ *είναι* C^k *αμφιδιαφορίσεις*



Σχήμα 1.1: Νηματική δέσμη

Ο βασικός χώρος M και το τυπικό νήμα F δείχνουν πως μοιάζει τοπικά η νηματική δέσμη E. Οι ανοικτές περιοχές της νηματικής δέσμης είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^{dimM} \times F$ και η ομάδα Lie G μας λέει πως κολάνε τα νήματα μεταξύ τους, για παράδειγμα αν η G είναι η τετριμμένη τότε υπάρχει $\Psi : E \to M \times F$ αμφιδιαφόριση.

1.2 Διανυσματικές δέσμες- Εφαπτόμενη δέσμη

Ορισμός 1.2.1. *Μια **διανυσματική δέσμη** είναι μια ειδική περίπτωση νηματικής δέσμης. Χαρακτηρίζεται από δύο επιπλέον περιορισμούς:*

1. *Το τυπικό νήμα F είναι διανυσματικός χώρος ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^k$*
2. *Η ομάδα G δρά γραμμικά στο τυπικό νήμα F. Δηλαδή οι απεικονίσεις μετάβασης αναπαριστώνται από τους $k \times k$ αντιστρέψιμους πραγματικούς πίνακες, επομένως $G = GL(k, \mathbb{R})$*

Ορισμός 1.2.2. *Έστω M διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Η **εφαπτόμενη δέσμη** TM ορίζεται ως η συνολοθεωρητική ένωση όλων των εφαπτόμενων χώρων σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας*

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

Η εφαπτόμενη δέσμη έχει δομή διανυσματικής δέσμης με:

1. Προβολή $\pi : TM \to M, \quad (p, Xp) \to p$
2. Νήμα στο $p \in M$ τον $T_p M$
3. Τυπικό νήμα το $\mathbb{R}^n$
4. Τοπικές τετριμμενοποιήσεις:

$$\Psi_j : \pi^{-1}(U_j) \to U_j \times \mathbb{R}^n$$

$$(p, X_p) \to \left(p, \Phi_{j,p}(X_p) = \{X^a_{p,j}\}_a\right)$$

όπου $X^a_{p,j}$ είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος X_p στον χάρτη U_j.
Η απεικόνιση $g_{ij}(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια αλλαγή συντεταγμένων $\{X^a_{p,j}\}_a \to \{X^a_{p,i}\}_a$ και προκύπτει:

$$g_{ij}(p) = \frac{\partial x^a_i}{\partial x^b_j}(p)$$

Συνοψίζοντας, η εφαπτόμενη δέσμη έχει δομή διανυσματικής δέσμης $\left(TM \xrightarrow{\pi} M, GL(n, \mathbb{R})\right)$ με τυπικό νήμα τον $\mathbb{R}^n$.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η εφαπτόμενη δέσμη είναι μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης $2n$ και οι συντεταγμένες της έρχονται εξ'ολοκλήρου από την βασική πολλαπλότητα M μέσω των τοπικών τετριμμενοποιήσεων. (Η ίδια διαδικασία εφαρμόζεται γενικά στις νηματικές δέσμες όπως θα δούμε στην ενότητα 1.3). Μια αλλαγή συντεταγμένων της πολλαπλότητας M επάγει αλλαγή συντεταγμένων στην εφαπτόμενη δέσμη TM ως εξής:

Αν $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i\left(x^1, .., x^n\right)$ η αλλαγή συντεταγμένων στην πολλαπλότητα M τότε η αλλαγή συντεταγμένων στην εφαπτόμενη δέσμη TM δίνεται από

$$\tilde{x}^i = \tilde{x}^i\left(x^1, .., x^n\right) \qquad \tilde{y}^a = \tilde{y}^a\left(x^1, .., x^n, y^1, .., y^n\right) = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} y^b \tag{1.1}$$

Τα βασικά ανταλλοίωτα και συναλλοίωτα διανυσματικά πεδία της εφαπτόμενης δέσμης TM μετασχηματίζονται κάτω απο μια τέτοια αλλαγή συντεταγμένων ως εξής

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} &= \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k}\tilde{y}^k \frac{\partial}{\partial y^j} \qquad \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^a} = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a}\frac{\partial}{\partial y^b} \\ d\tilde{x}^i &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}dx^j \qquad d\tilde{y}^a = \frac{\partial^2 \tilde{x}^a}{\partial x^b \partial x^c}y^c dx^b + \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^j}dy^j \end{aligned} \tag{1.2}$$

Παρατηρούμε ότι τα $\frac{\partial}{\partial y^a}, dx^i$ μετασχηματίζονται σαν να ήταν τανυστικά πεδία στην πολλαπλότητα M, ενώ τα $\frac{\partial}{\partial x^i}, dy^a$ όχι. Στο επόμενο κεφάλαιο μέσω της θεωρίας των συνοχών θα βρούμε κινούμενα πλαίσια των TTM και T^*TM όπως τα παραπάνω που θα μετασχηματίζονται όλα σαν τανυστικά πεδία της πολλαπλότητας M αλλά δεν θα προέρχονται απο συντεταγμένες (βασικά). Τέτοια τανυστικά πεδία της εφαπτόμενης δέσμης, που δηλαδή μετασχηματίζονται κάτω από μια αλλαγή συντεταγμένων της TM σαν να ήταν τανυστικά πεδία της πολλαπλότητας M λέγονται **d-τανυστικά πεδία** και θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα αργότερα.

1.3 Συντεταγμένες στις νηματικές δέσμες

Οι πολλαπλότητες M και F δέχονται τοπικές συντεταγμένες. Αυτές επάγουν τοπικές συντεταγμένες στην νηματική δέσμη E μέσω των τοπικών τετριμμενοποιήσεων ως εξής:
Έστω ανοικτά σύνολα $U \subseteq M$, $V \subseteq F$ και χάρτες

$$\Xi : U \to \mathbb{R}^{dimM} \qquad \xi : V \to \mathbb{R}^{dimF}$$

$$\Xi = \left(x^1, .., x^{dimM}\right) \qquad \xi = \left(y^1, .., y^{dimF}\right)$$

Αν πάρω ένα $u \in E$ τότε υπάρχει $U \subseteq M$ ώστε $u \in \pi^{-1}(U)$ και

$$\Psi_U(u) = (\Psi_1(u), \Psi_2(u)) = (\pi(u), \Psi_2(u)) \in M \times F$$

Άρα ορίζεται ο χάρτης της νηματικής δέσμης E

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{dimM + dimF}$$

$$\Phi = (\Xi_U, \xi_V) \circ \Psi_U$$

Έτσι η νηματική δέσμη αποκτά δομή πολλαπλότητας διάστασης $dimM + dimF$ και αν $u \in E$, γράφω $\Phi(u) = \left(x^1, .., x^{dimM}, y^1, .., y^{dimF}\right)$. Μέσω αυτών των συντεταγμένων θα μελετήσουμε τανυστικά πεδία στην νηματική δέσμη (πιο συγκεκριμένα στην εφαπτόμενη δέσμη) για να πάρουμε αποτελέσματα στην βασική πολλαπλότητα M.

Βλέποντας την νηματική δέσμη E σαν πολλαπλότητα, ορίζεται η εφαπτόμενη δέσμη αυτής TE. Ένα διανυσματικό πεδίο της E μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδιασμός των βασικών διανυσματικών πεδίων ως εξής

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^a \frac{\partial}{\partial y^a}$$

όπου $X^i, Y^a : E \to \mathbb{R}$ και $1 \leq i \leq dimM, 1 \leq a \leq dimF$. Μια παρόμοια γραφή μπορεί να γίνει για οποιοδήποτε τανυστικό πεδίο στην νηματική δέσμη E.

Από τον ορισμό της προβολής $\pi : E \to M$ της νηματικής δέσμης παίρνοντας το διαφορικό έχουμε

$$d\pi|_u : T_u E \to T_{\pi(u)} M$$

$$X_u \to X^i(u) \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(u)}$$

Ο πυρήνας $ker\left(d\pi|_u\right)$ είναι ακριβώς ο υπόχωρος του $T_u E$ που παράγεται από τα $\{\frac{\partial}{\partial y^a}|_u\}$.

Ορισμός 1.3.1. *Έστω* $\left(E \xrightarrow{\pi} M, G\right)$ *μια νηματική δέσμη. Ο πυρήνας του διαφορικού της προβολής* π *σε ένα σημείο* $u \in E$ *είναι ο υπόχωρος του εφαπτόμενου χώρου της νηματικής δέσμης* T_uE *που παράγεται από τα* $\{\frac{\partial}{\partial y^a}|_u\}$ *και καλείται* ***κατακόρυφος εφαπτόμενος χώρος****. Έχει διάσταση ίση με* $dimF$ *και συμβολίζεται με* V_uE.

Κεφάλαιο 2

Μη γραμμικές συνοχές

Στην γεωμετρία των νηματικών δεσμών και κυρίως της εφαπτόμενης δέσμης που εμείς θα μελετήσουμε, σημαντικό ρόλο παίζει η έννοια της συνοχής. Παρόλο που μια μη γραμμική συνοχή ζει στον ολικό χώρο της εφαπτόμενης δέσμης μιας πολλαπλότητας, μπορεί να εισαχθεί σαν μία μη γραμμική συνοχή στην πολλαπλότητα που επάγεται από μία παράλληλη μετατόπιση.

Στο πρώτο κεφάλαιο είδαμε την έννοια του κατακόρυφου εφαπτόμενου χώρου. Μπορούμε επομένως να ορίσουμε την κατακόρυφη υποδέσμη VTM που σε κάθε σημείο έχει ως νήμα τον αντίστοιχο κατακόρυφο χώρο. Είναι φυσικό να αναζητήσουμε μια υποδέσμη συμπληρωματική με την κατακόρυφη υποδέσμη. Αυτή θα καλλείται οριζόντια υποδέσμη HTM και θα είναι τέτοια ώστε $TTM = VTM \oplus HTM$. Μας διευκολύνει αρκετά να εκφράσουμε τα υπό μελέτη γεωμετρικά αντικείμενα χρησιμοποιώντας την βάση που προκύπτει από αυτή την διάσπαση.

Επισης θα ασχοληθούμε με τις συνθήκες που κάνουν μια συνοχή στην εφαπτομενη δέσμη ολοκληρώσιμη. Τέλος θα ορίσουμε μια έννοια συναλλοίωτης παραγώγου στην εφαπτόμενη δέσμη και μέσω αυτή θα μιλήσουμε για αυτοπαράλληλες καμπύλες και πεδία Jacobi.

2.1 Μη γραμμικές συνοχές στην πολλαπλότητα M

Όταν κάποιος ορίζει μια μη γραμμική συνοχή σε μια πολλαπλότητα μέσω μιας συναλλοίωτης παραγώγισης, η οποία ορίζεται μέσω ενός ορίου που περιέχει μια δοσμένη παράλληλη μετατόπιση, υποθέτει ότι η συνοχή είναι γραμμική και ως προς την μεταβλητή της κατεύθυνσης. Αν αφαιρέσουμε αυτή την υπόθεση μιλάμε τότε για μη γραμμικές συνοχές στην πολλαπλότητα.

Έστω M μια διαφορική πολλαπλότητα διάστασης n. Όπως γνωρίζουμε δεν υπάρχει τρόπος (βασισμένος μόνο στην υπάρχουσα δομή) να συσχετίσουμε δυο διανύσματα από διαφορετικούς εφαπτόμενους χώρους διότι δεν υπάρχει η έννοια της παραλληλίας που μας επιτρέπει να το κάνουμε όπως στον $\mathbb{R}^n$.

Για να ορίσουμε την έννοια της παράλληλης μετατόπισης στην πολλαπλότητα M πρέπει να ταυτίσουμε με κάποιο τρόπο τους εφαπτόμενους χώρους. Η ταύτιση αυτή πρέπει να είναι γραμμική. Έτσι μια **παράλληλη μετατόπιση** στην πολλαπλότητα M είναι μια συλλογή ισομορφισμών $\gamma^c_{q,p} : T_pM \to T_qM$, όπου $p, q \in M$ και c μια λεία καμπύλη που τα ενώνει έτσι ώστε

$$\gamma^{c_1}_{r,q} \circ \gamma^{c_2}_{q,p} = \gamma^{c_1 \cup c_2}_{r,p}$$

Από την σχέση αυτή παίρνουμε:

$\gamma^c_{p,p} = id_{T_pM}$ για κάθε κλειστή καμπύλη c που περνάει από το $p \in M$.

$\left(\gamma^c_{p,q}\right)^{-1} = \gamma^{c^{-1}}_{p,q}$ όπου c^{-1} η αντίθετης πορείας καμπύλη της c.

Ένα διανυσματικό πεδίο X κατα μήκος της c λέγεται **παράλληλο** αν $X_{c(t)} = \gamma^c_{c(t),p_0} X_{p_0}$ για κάθε t, όπου X_{p_0} είναι το διάνυσμα στο σημείο $p_0 = c(t_0)$ πάνω στην καμπύλη c. Ο ορισμός αυτός δεν εξαρτάται από το X_{p_0} που διαλέγουμε. Επίσης η γραμμικότητα επιτυγχάνεται: αν X, Y παράλληλα διανυσματικά πεδία κατα μήκος μιας καμπύλης c και $a, b \in \mathbb{R}$ τότε $aX + bY$ είναι επίσης παράλληλο διανυσματικό πεδίο κατα μήκος της c.

Χρησιμοποιώντας την έννοια της παράλληλης μετατόπισης μπορούμε να ορίσουμε την **συναλλοίωτη παράγωγο** ενός διανυσματικού πεδίου X κατά μήκος μιας καμπύλης c:

$$\frac{DX}{dt} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\gamma^c_{c(t),c(t+\epsilon)} X(t+\epsilon) - X(t)}{\epsilon} \tag{2.1}$$

Από τον ορισμό παρατηρούμε ότι το X είναι παράλληλο κατα μήκος της καμπύλης c αν και μόνο αν $\frac{DX}{dt} = 0$. Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι γενικά, η παράλληλη μετατόπιση και η συναλλοίωτη παραγώγιση κατα μήκος μιας καμπύλης εξαρτώνται από την παραμέτρηση της καμπύλης. Γι΄αυτό συνήθως απαιτούμε εξ΄αρχής την ανεξαρτησία από τις αναπαραμετρήσεις. Με αυτήν την παραδοχή η συναλλοίωτη παραγώγιση ικανοποιεί την σχέση

$$\frac{DX}{dt} = \frac{DX}{ds}\frac{ds}{dt} \tag{2.2}$$

όπου s, t είναι δύο παράμετροι της καμπύλης c. Τότε λέμε ότι η συναλλοίωτη παραγώγιση είναι **ομογενής**.

Από τον ορισμό (2.1) προκύπτουν οι ιδιότητες

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt}(X_1 + X_2) &= \frac{DX_1}{dt} + \frac{DX_2}{dt} \\ \frac{D}{dt}(fX) &= f\frac{DX}{dt} + \frac{df}{dt}X \end{aligned} \tag{2.3}$$

όπου X_1, X_2 διανυσματικά πεδία και f συνάρτηση κατα μήκος της καμπύλης c.

Η συναλλοίωτη παράγωγος σ΄ένα σημείο ενός διανυσματικού πεδίου κατα μήκος μιας καμπύλης, πρέπει να εξαρτάται μόνο από την κατεύθυνση της καμπύλης στο σημείο αυτό. Κάνοντας αυτή την υπόθεση μπορούμε να ορίσουμε την συναλλοίωτη παραγώγιση ενός διανυσματικού πεδίου X στην πολλαπλότητα M, στην κατεύθυνση $Y_p \in T_pM$ ως

$$\nabla_{Y_p} X = \frac{DX}{dt}|_{t=0} \tag{2.4}$$

όπου η παραγώγιση γίνεται κατα μήκος μιας καμπύλης c με $c(0) = p$ και $\frac{dc}{dt}|_{t=0} = Y_p$. Έτσι για κάθε δύο διανυσματικά πεδία X, Y ορισμένα κοντά στο p, ορίζεται ενα άλλο διανυσματικό πεδίο $\nabla_Y X$ που η τιμή του στο p είναι $(\nabla_Y X)_p = \nabla_{Y_p} X$. Απαιτούμε επιπλέον η αντιστοιχία $(Y, X) \to \nabla_Y X$ να είναι διαφορίσιμη.

Η απεικόνιση $\nabla : (Y, X) \to \nabla_Y X$ καλείται **συνοχή** και έχει τις εξής ιδιότητες

$$\nabla_Y (X + Z) = \nabla_Y X + \nabla_Y Z \tag{2.5}$$

$$\nabla_Y (fX) = f\nabla_Y X + Y(f) X \tag{2.6}$$

Αν δεν απαιτήσουμε για την συνοχή συνθήκες γραμμικότητας (ως προς την κατεύθυνση) ή ομογένειας τότε καλείται **μη γραμμική συνοχή**.

Αν απαιτήσουμε η συναλλοίωτη παράγωγος να είναι ομογενής, δηλαδή να ισχύει η (2.2), τότε η επαγόμενη συνοχή καλείται **ομογενής συνοχή** και ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X \tag{2.7}$$

Αν η συνοχή ικανοποιεί τις τρεις παραπάνω ιδιότητες και την

$$\nabla_{Y+Z} X = \nabla_Y X + \nabla_Z X \tag{2.8}$$

τότε καλείται **γραμμική συνοχή**.

Μπορούμε να επεκτείνουμε μοναδικά την συνοχή σε τανυστικά πεδία

$$\nabla : CM \times C^{\kappa}_{\lambda}M \to C^{\kappa}_{\lambda}M$$

εαν απαιτήσουμε να ισχύουν οι σχέσεις

$$\nabla_X f = X(f) \tag{2.9}$$

$$C\nabla_X F = \nabla_X C(F) \tag{2.10}$$

$$\nabla_X (F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G) \tag{2.11}$$

όπου X ένα διανυσματικό πεδίο, f μια βαθμωτή συνάρτηση, θ μια 1-μορφή, F, G τανυστικά πεδία στην πολλαπλότητα M και C η πράξη της συστολής (contraction) τανυστικών πεδίων. Τότε αν $T \in C^{\kappa}_{\lambda}M$ έχουμε

$$\begin{gathered}\nabla_X T\left(\omega_1, .., \omega_\kappa, Y^1, .., Y^\lambda\right) = X\left(T\left(\omega_1, .., \omega_\kappa, Y^1, .., Y^\lambda\right)\right) - \\ \sum_{i=1}^{\kappa} T\left(\omega_1, .., \nabla_X \omega_i, .., \omega_\kappa, Y^1, .., Y^\lambda\right) - \sum_{j=1}^{\lambda} T\left(\omega_1, .., \omega_\kappa, Y^1, .., \nabla_X Y^j, .., Y^\lambda\right)\end{gathered} \tag{2.12}$$

και οι ιδιότητες (2.5)-(2.8) επεκτείνονται ανάλογα στην άλγεβρα των τανυστικών πεδίων.

2.2 Τοπική αναπαράσταση συνοχής

Θεωρούμε ένα χάρτη $\left(U, \varphi = \left(x^i\right)\right)$ στην πολλαπλότητα και X, Y δυο διανυσματικά πεδία στο U. Αν $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ τότε

$$\nabla_X Y = \nabla_X \left(Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X\left(Y^i\right) \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i \nabla_X \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.13}$$

Αν ορίσω $\nabla_X \frac{\partial}{\partial x^i} = N_i^j(x, X) \frac{\partial}{\partial x^j}$ τότε

$$\nabla_X Y = \left(X\left(Y^j\right) + N_i^j(x, X) Y^i\right) \frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j_{|X} \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{2.14}$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $N_i^j(x, X)$ εξαρτώνται από την θέση x και την κατεύθυνση X και ονομάζονται **τοπικές αναπαραστάσεις της συνοχής**. Αν θεωρήσουμε έναν άλλο χάρτη $\left(V, \left(\tilde{x}^i\right)\right)$, τότε στην τομή $U \cap V$, οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνοχής N^i_j και $\tilde{N}^i_j$ σχετίζονται ως εξής

$$\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} N_i^k = X\left(\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \tilde{N}_k^j \tag{2.15}$$

Παρατηρούμε ότι μια συνοχή είναι ομογενής αν και μόνο αν οι τοπικές αναπαραστάσεις $N_i^j(x, X)$ είναι ομογενείς συναρτήσεις βαθμού ένα ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή $N_i^j(x, fX) = f N_i^j(x, X)$, όπου f είναι μια βαθμωτή συνάρτηση τοπικά ορισμένη στο M.

Μια συνοχή είναι γραμμική αν και μόνο αν οι τοπικές αναπαραστάσεις $N_i^j(x, X)$ είναι γραμμικές ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή $N_i^j(x, X) = \gamma^j_{ik}(x) X^k$. Τα $\gamma^k_{ij}(x)$ είναι οι τοπικές αναπαραστάσεις της γραμμικής συνοχής, εξαρτώνται μόνο από την θέση x και ορίζονται από $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \gamma^k_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^k}$.

Αν θεωρήσουμε δύο συστήματα συντεταγμένων τότε σύμφωνα με την (2.15) οι αντίστοιχες αναπαραστάσεις της γραμμικής συνοχής σχετίζονται ως εξής

$$\tilde{\gamma}^k_{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^n} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \gamma^s_{nm} + \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^s} \frac{\partial^2 x^s}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^j} \tag{2.16}$$

Για μια 1-μορφή $\theta = \theta_i dx^i$ χρησιμοποιώντας την (2.10) παίρνουμε την εξής έκφραση

$$\nabla_X \theta = \left(X\left(\theta_i\right) - N_i^j\left(x, X\right)\theta_j \right) dx^i = \theta_{i|X} dx^i \tag{2.17}$$

Μια καμπύλη $c : t \in I \subset \mathbb{R} \to c(t) = \left(x^i\left(t\right)\right) \in M$ λέγεται **γεωδαισιακή** για μια συνοχή ∇ αν το πεδίο ταχυτήτων $\frac{dc}{dt} = \left(\frac{dx^i}{dt}\right)$ είναι παράλληλο κατά μήκος της καμπύλης c. Η εξίσωση των γεωδαισιακών δίνεται από

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{dc}{dt}\right) = \frac{d^2x^i}{dt^2} + N_j^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{2.18}$$

2.3 Μη γραμμικές συνοχές σε νηματικές δέσμες

Έστω $\left(E \overset{\pi}{\to} M, G\right)$ μια νηματική δέσμη. Στην ενότητα 1.3 είδαμε για πρώτη φορά την έννοια του κατακόρυφου εφαπτόμενου χώρου $V_uE \subset T_uE$ σε ένα σημείο $u \in E$ της δέσμης, ως τον υπόχωρο του εφαπτόμενου χώρου της νηματικής δέσμης T_uE που παράγεται από τα $\{\frac{\partial}{\partial y^a}|_u\}$. Έχει νόημα επομένως η **κατακόρυφη υποδέσμη** $VE \subset TE$ που σε κάθε σημείο $u \in E$ έχει ως νήμα τον χώρο V_uE.

Η κατακόρυφη υποδέσμη VE είναι μια υποπολλαπλότητα της TE. Ο εγκλεισμός $i : VE \to TE$ είναι ένας μορφισμός δεσμών (διατηρεί την γραμμική δομή των νημάτων). Υπάρχει ένας μορφισμός δεσμών $J : TE \to VE$ που κάνει την παρακάτω ακολουθία ακριβή

$$0 \to VE \overset{i}{\to} TE \overset{J}{\to} VE \to 0 \tag{2.19}$$

Δηλαδή ισχύει η σχέση $KerJ = Imi = VE$. Ο μορφισμός J ορίζεται ως εξης

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i} \qquad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = 0 \tag{2.20}$$

Ορισμός 2.3.1. *Μια **μη γραμμική συνοχή** σε μια νηματική δέσμη $\left(E \overset{\pi}{\to} M, G\right)$ είναι μια αριστερή διάσπαση της ακριβής ακολουθίας (2.19), δηλαδή ένας μορφισμός δεσμών $v : TE \to VE$ τέτοιος ώστε $v \circ i = id_{VE}$. Ο πυρήνας του μορφισμού v είναι μια υποδέσμη της TE που καλείται **οριζόντια υποδέσμη HE** και τα νήματά της H_uE είναι τέτοια ώστε για κάθε εφαπτόμενο χώρο $T_uE, u \in E$ να ισχύει*

$$T_uE = V_uE \oplus H_uE \tag{2.21}$$

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα ασχοληθούμε ειδικά με συνοχές στην εφαπτόμενη δέσμη TM. Αφού η απεικόνιση $\left(d\pi\right)_u : T_uTM \to T_{\pi(u)}M$ είναι επιμορφισμός, μετρώντας τις διαστάσεις έχουμε ότι ο περιορισμός της στο H_uTM είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων. Ορίζουμε $l_{h,u} : T_{\pi(u)}M \to H_uTM$ την αντίστροφη απεικόνιση του παραπάνω ισομορφισμού και την ονομάζουμε **οριζόντια ανύψωση**. Μπορούμε να δούμε την οριζόντια ανύψωση σαν μια $\mathcal{F}\left(M\right)$-γραμμική απεικόνιση $l_h : \chi\left(M\right) \to \chi\left(TM\right)$ που ορίξεται ως εξής: Αν $X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in \chi\left(M\right)$ τότε

$$l_h\left(X\right)\left(u\right) = l_{h,u}\left(X_{\pi(u)}\right) = X^i_{\pi(u)} l_{h,u}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(u)}\right) \tag{2.22}$$

Αν ορίσουμε $\frac{\delta}{\delta x^i}|_u = l_{h,u}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(u)}\right)$ τότε $\left(\frac{\delta}{\delta x^i}|_u\right)_{i=1,..,n}$ είναι μια βάση του $H_uTM, \forall u \in TM$ που σε μια αλλαγή συντεταγμένων (1.1) στην TM συμπεριφέρεται ως εξής

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\frac{\delta}{\delta x^j} \tag{2.23}$$

Αφού $d\pi_u \left(\frac{\delta}{\delta x^i}|_u \right) = \frac{\partial}{\partial x^i}|_{\pi(u)}, \forall u \in TM$ τότε το $\frac{\delta}{\delta x^i}|_u$ αναλύεται ως προς την φυσική βάση $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}|_u, \frac{\partial}{\partial y^j}|_u \right)$ του χώρου $T_u TM$ ως εξής

$$\frac{\delta}{\delta x^i}\Big|_u = \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_u - N_i^j(u) \frac{\partial}{\partial y^j}\Big|_u \tag{2.24}$$

Οι συναρτήσεις $N_i^j(u)$ ορίζονται στα πεδία ορισμού των χαρτών και καλούνται **τοπικές αναπαραστάσεις της μη γραμμικής συνοχής**.

Πρόταση 2.3.2. *Η επιλογή μιας μη γραμμικής συνοχής στην εφαπτόμενη δέσμη TM είναι ισοδύναμη με την επιλογή για κάθε πεδίο ορισμού ενός χάρτη της εφαπτόμενης δέσμης, μιας συνάρτησης $N_i^j(x,y)$ ορισμένης σε αυτό, με τρόπο ώστε στις τομές να σχετίζονται ως εξής*

$$\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^k} N_i^k = \tilde{N}_k^j \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i} \tag{2.25}$$

Απόδειξη. Το ευθύ κομμάτι της ισοδυναμίας προκύπτει από την σχέση (2.23) και τον τρόπο που μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες στην εφαπτόμενη δέσμη TM (1.1),(1.2).

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι σε κάθε χάρτη αντιστοιχεί μια συνάρτηση N_i^j και στις τομές αυτών οι αντίστοιχες συναρτήσεις $N_i^j, \tilde{N}_i^j$ σχετίζονται όπως στην (2.25). Τότε ορίζουμε τα $\frac{\delta}{\delta x^i}\big|_u$ όπως στην (2.24) και εύκολα παίρνουμε την σχέση (2.23), από την οποία προκύπτει ότι τα $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}\big|_u \right\}_{i=1,..,n}$ παράγουν έναν n-διάστατο υπόχωρο $H_u TM$ του $T_u TM$. Αφού τα $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}\big|_u, \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_u \right\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε οι υπόχωροι $H_u TM, V_u TM$ ικανοποιούν την σχέση (2.21) και άρα έχουμε μια μη γραμμική συνοχή. □

Η σχέση (2.25) είναι ίδια με την (2.15) όταν το διάνυσμα X είναι το $y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι είναι η ανύψωσή της στην εφαπτόμενη δέσμη. Άρα η μη γραμμική συνοχή στην δέσμη που εισήχθηκε στην ενότητα αυτή μέσω της οριζόντιας υποδέσμης HTM είναι η ανύψωση μιας συνοχής της πολλαπλότητας M που προκύπτει από παράλληλη μετατόπιση.

Συνοψίζοντας, δεδομένης μιας μη γραμμικής συνοχής N, έχουμε μια βάση $\left\{ \frac{\delta}{\delta x^i}\big|_u, \frac{\partial}{\partial y^a}|_u \right\}$ του χώρου $T_u TM$ συμβατή με την διάσπαση (2.21). Αυτή καλείται **προσαρμοσμένη βάση** της μη γραμμικής συνοχής. Η δυική βάση αυτής είναι η $\left\{ dx^i|_u, \delta y^a|_u = dy^a|_u + N_j^a(u)\, dx^j|_u \right\}$ που είναι συμβατή με την αντίστοιχη της (2.21) διάσπαση για τον χώρο $T_u^* TM$. Επομένως ο χώρος $H_u TM$ δίνεται και από

$$H_u TM = \{ X_u \in T_u TM, \delta y^a|_u (X_u) = 0 \} \tag{2.26}$$

2.4 d-τανυστικά πεδία

Ορισμός 2.4.1. *Ένα (r,s)-τανυστικό πεδίο στην TM καλείται **d-τανυστικό πεδίο** αν έπειτα από μια αλλαγή συντεταγμένων (1.1) της TM μετασχηματίζεται σαν να ήταν τανυστικό πεδίο στην πολλαπλότητα M.*

Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό για τα d-τανυστικά πεδία. Αν T είναι ένα (r,s)-τανυστικό πεδίο στην δέσμη TM, τότε το T είναι μία $\mathcal{F}(M)$-γραμμική απεικόνιση

$$T : \Lambda^1(TM) \times .. \times \Lambda^1(TM) \times \chi(TM) \times .. \times \chi(TM) \to \mathcal{F}(TM) \tag{2.27}$$

Κάθε 1-μορφή $\omega \in \Lambda^1(TM)$ και κάθε διανυσματικό πεδίο $X \in \chi(TM)$ μπορεί να διασπαστεί σε οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες $\omega = h\omega + v\omega$ και $X = hX + vX$. Τότε το $T(h\omega_1 + v\omega_1, .., h\omega_r + v\omega_r, hX_1 + vX_1, .., hX_s + vX_s)$ είναι άθροισμα 2^{r+s} όρων, καθένας από τους οποίους είναι ένα d-τανυστικό πεδίο στην εφαπτόμενη δέσμη TM. Τότε έχουμε ότι το T είναι ένα d-τανυστικό πεδίο αν και μόνο αν μειώνεται σε έναν από αυτούς τους όρους του αθροίσματος. Δηλαδή

$$T\left(\omega_1,..,\omega_r,X_1,..,X_s\right)=T\left(\epsilon_1\omega_1,..,\epsilon_r\omega_r,\epsilon^1X_1,..,\epsilon^sX_s\right) \tag{2.28}$$

για μια επιλογή των $\epsilon_1,..,\epsilon_r,\epsilon^1,..,\epsilon^s\in\{h,v\}$. Έτσι ένα (r,s) d-τανυστικό πεδίο είναι της μορφής

$$T=T^{i_1..i_r}_{j_1..j_s}\frac{\delta}{\delta x^{i_1}}\otimes..\otimes\frac{\partial}{\partial y^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes..\otimes\delta y^{j_s} \tag{2.29}$$

2.5 Καμπυλότητα και στρέψη μη γραμμικής συνοχής

Μια μη γραμμική συνοχή συνοχή N στην εφαπτόμενη δέσμη είναι ολοκληρώσιμη αν η οριζόντια υποδέσμη HTM είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή σύμφωνα με το θεώρημα Frobenius, αν και μόνο αν η αγκύλη Lie $\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]$ είναι οριζόντια. Έχουμε ότι

$$\left[\frac{\delta}{\delta x^i},\frac{\delta}{\delta x^j}\right]=R^a_{ij}\frac{\partial}{\partial y^a}\quad ,\text{όπου}\quad R^a_{ij}=\frac{\delta N^a_i}{\delta x^j}-\frac{\delta N^a_j}{\delta x^i} \tag{2.30}$$

Επομένως μια μη γραμμική συνοχή είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η καμπυλότητά της R^a_{ij} , που είναι ένα (1,2) τύπου d-τανυστικό πεδίο, μηδενίζεται. Δηλαδή η **τανυστική καμπυλότητα** της συνοχής ορίζεται ως

$$R=\frac{1}{2}R^a_{ij}dx^j\wedge dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial y^a} \tag{2.31}$$

Για μια μη γραμμική συνοχή N στην εφαπτόμενη δέσμη TM, ορίζουμε την **ασθενή στρέψη** να είναι το (1,2) τύπου d-τανυστικό πεδίο

$$t=\frac{1}{2}t^a_{ij}dx^j\wedge dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial y^a}\quad ,\text{όπου}\quad t^a_{ij}=\left(\frac{\partial N^a_i}{\partial y^j}-\frac{\partial N^a_j}{\partial y^i}\right) \tag{2.32}$$

και η συνοχή λέγεται **συμμετρική** αν έχει μηδενική στρέψη, δηλαδή $\frac{\partial N^a_i}{\partial y^j}=\frac{\partial N^a_j}{\partial y^i}$

2.6 Δυναμική συναλλοίωτη παράγωγος

Για να μιλήσουμε για αυτοπαράλληλες καμπύλες (όπως οι γεωδαισιακές στην περίπτωση μιας συνοχής στην πολλαπλότητα M) πρέπει πρώτα να ορίσουμε μια έννοια συναλλοίωτης παραγώγου για τανυστικά πεδία της εφαπτόμενης δέσμης TM.

Ορισμός 2.6.1. *Η **δυναμική συναλλοίωτη παράγωγος** ∇ που επάγεται από μια μη γραμμική συνοχή N στην εφαπτόμενη δέσμη TM ορίζεται να είναι μια απεικόνιση που παίρνει ένα (r,s) d-τανυστικό πεδίο T και δίνει ίδιου τύπου d-τανυστικό πεδίο με συνιστώσες*

$$\begin{gathered}T^{a_1,..,a_r}_{\beta_1,..,\beta_s|}=(\nabla T)^{a_1,..,a_r}_{\beta_1,..,\beta_s}=y^q\frac{\delta}{\delta x^q}\left(T^{a_1,..,a_r}_{\beta_1,..,\beta_s}\right)+\\ N^{a_1}_mT^{m,a_2,..,a_r}_{\beta_1,..,\beta_s}+..+N^{a_r}_mT^{a_1,..,m}_{\beta_1,..,\beta_s}-N^m_{\beta_1}T^{a_1,..,a_r}_{m,\beta_2,..,\beta_s}-..-N^m_{\beta_s}T^{a_1,..,a_r}_{\beta_1,..,m}\end{gathered} \tag{2.33}$$

Μια μη γραμμική συνοχή N στην εφαπτόμενη δέσμη TM μιας Riemann πολλαπλότητας M, λέμε ότι είναι **συμβατή με την μετρική** αν η δυναμική συναλλοίωτη παράγωγος του μετρικού τανυστή g είναι μηδέν, δηλαδή $\nabla g=0$. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $S\left(g_{ij}\right):=y^q\frac{\delta}{\delta x^q}\left(g_{ij}\right)=g_{mj}N^m_i+g_{im}N^m_j$. Αν ορίσουμε $N_{ij}=g_{im}N^m_j$ τότε έχουμε ότι η συνοχή είναι συμβατή με την μετρική αν και μόνο αν

$$N_{(ij)}:=\frac{1}{2}\left(N_{ij}+N_{ji}\right)=\frac{1}{2}S\left(g_{ij}\right) \tag{2.34}$$

2.7 Αυτοπαράλληλες καμπύλες

Έχοντας εισάγει την έννοια της δυναμικής συναλλοίωτης παραγώγισης ∇ που επάγεται από μια μη γραμμική συνοχή N μπορούμε να μιλήσουμε για παράλληλα διανυσματικά πεδία κατα μήκος καμπυλών πάνω στην εφαπτόμενη δέσμη TM. Τότε μια αυτοπαράλληλη καμπύλη είναι μια καμπύλη που το πεδίο ταχυτήτων της είναι παράλληλο κατά μήκος της ίδιας.

Ορισμός 2.7.1. *Μια λεία καμπύλη $c : t \in I \subset \mathbb{R} \to c(t) = \left(x^i(t)\right) \in M$ καλείται **αυτοπαράλληλη** αν η φυσική επέκτασή της στην εφαπτόμενη δέσμη TM, $\tilde{c} : t \in I \to \tilde{c}(t) = \left(x^i(t), \frac{dx^i}{dt}(t)\right) \in TM$, είναι οριζόντια καμπύλη.*

Ο παραπάνω ορισμός είναι ίδιος με τον ορισμό που δώσαμε στην εισαγωγή, ότι δηλαδή $\nabla\left(\frac{dx^i}{dt}\frac{\delta}{\delta x^i}\right)\left(x(t), \frac{dx}{dt}(t)\right) = 0, \forall t \in I$, αφού και από τους δύο προκύπτει η ίδια εξίσωση αυτοπαραλληλίας

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + N^i_j\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{2.35}$$

Πράγματι αν πάρουμε το πεδίο ταχυτήτων της $\tilde{c}$

$$\dot{\tilde{c}}(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{d^2x^a}{dt^2}\frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\delta}{\delta x^i} + N^a_i\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial y^a}\right) + \frac{d^2x^a}{dt^2}\frac{\partial}{\partial y^a}$$

για να είναι οριζόντια καμπύλη πρέπει ο συντελεστής του $\frac{\partial}{\partial y^a}$ να μηδενίζεται και προκύπτει η σχέση (2.35).

2.8 Μη γραμμικές συνοχές και Semisprays

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε την γεωμετρική θεωρία ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης, δηλαδή την γεωμετρική μελέτη ενός ειδικού διανυσματικού πεδίου ορισμένου στην εφαπτόμενη δέσμη (semispray), που έχει άμεση σχέση με το σύστημα.

Θεωρούμε μια πολλαπλότητα M, η οποία είναι ο χώρος πάνω στον οποίο ορίζεται το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \tag{2.36}$$

Ακριβέστερα η σχέση (2.37) είναι μια συλλογή συστημάτων που ορίζονται στους χάρτες της εφαπτόμενης δέσμης και είναι συμβατά μεταξύ τους (δηλαδή στις τομές των χαρτών οι εξισώσεις διαφορετικών συντεταγμένων είναι ισοδύναμες). Αυτό είναι ισοδύναμο με την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις $G(x, y)$ μετασχηματίζονται ως εξής

$$2\tilde{G}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}2G^j - \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial x^j}y^j \tag{2.37}$$

Πρόταση 2.8.1. *Το διανυσματικό πεδίο $S = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x, y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ ορίζεται ολικά στην TM αν και μόνο αν οι συναρτήσεις $G^i(x, y)$ που ορίζονται στους τοπικους χάρτες, ικανοποιούν την σχέση (2.38) κάτω από μια αλλαγή συντεταγμένων. Ένα τέτοιου τύπου διανυσματικό πεδίο λέγεται **semispray** με συνιστώσες τις συναρτήσεις G^i.*

Ορισμός 2.8.2. *Μια λεία καμπύλη λέγεται $c : t \in I \to c(t) = (x(t)) \in M$ λέγεται **μονοπάτι** ενός semispray S αν η ανύψωσή της $\tilde{c} : t \in I \to \tilde{c}(t) = \left(x^i(t), \frac{dx^i}{dt}\right) \in TM$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου S.*

Αν $S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ τότε μια καμπύλη $c(t) = \left(x^i(t)\right) \in M$ είναι μονοπάτι του S αν και μόνο αν ικανοποιεί την σχέση (2.37).

Τώρα θα δούμε πως σχετίζονται οι μη γραμμικές συνοχές με τα semisprays. Μια μη γραμμική συνοχή $N^i_j(x,y)$ επάγει ένα semispray που δίνεται από

$$S = y^i \frac{\delta}{\delta x^i} = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - N^i_j y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{2.38}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι συνιστώσες του επαγόμενου semispray δίνονται από $2G^i(x,y) = N^i_j(x,y)\,y^j$.

Από την άλλη από ένα semispray $S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ φτιάχνουμε μια μη γραμμική συμμετρική συνοχή με συνιστώσες $N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$. Ως προς αυτή την συνοχή έχουμε

$$S = y^i \frac{\delta}{\delta x^i} - \left(2G^i - N^i_j y^j\right)\frac{\partial}{\partial y^i} = y^i \frac{\delta}{\delta x^i} - \mathcal{E}^i \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{2.39}$$

Το d-διανυσματικό πεδίο $\mathcal{E}^i(x,y) = 2G^i(x,y) - N^i_j(x,y)\,y^j = 2G^i(x,y) - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(x,y)\,y^j$ καλείται **πρώτη αναλλοίωτη του semispray**.

Ορισμός 2.8.3. *Ένα semispray S καλείται **spray** αν η πρώτη αναλλοίωτη $\mathcal{E}^i$ μηδενίζεται.*

Παρατηρούμε ότι ένα semispray S είναι spray αν και μόνο αν οι συνιστώσες του, $G^i(x,y)$ είναι ομογενείς τάξης 2 ως προς y, που από το θεώρημα Euler αυτό σημαίνει ότι $2G^i(x,y) = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(x,y)\,y^j$.

Πρόταση 2.8.4. *Ισχύουν τα παρακάτω*

1. *Έστω S ένα semispray και N η επαγόμενη μη γραμμική συνοχή. Το S είναι spray αν και μόνο αν συμπίπτει με το semispray που επάγει η συνοχή N.*

2. *Έστω N είναι μια συμμετρική μη γραμμική συνοχή στην δέσμη TM και S το επαγόμενο semispray. Η συνοχή που επάγει το S συμπίπτει με την δοσμένη συνοχή N αν και μόνο αν η N είναι ομογενής βαθμού 1 ως προς y.*

Απόδειξη. 1. Έστω G^i οι συνιστώσες του S. Τότε $N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$. Το semispray S' που επάγεται από την N έχει συνιστώσες $2G'^i = N^i_j y^j = y^j \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$. Τα δύο semispray συμπίπτουν αν έχουν ίδιες συνιστώσες, δηλαδή $G'^i = G^i$ που είναι ισοδύναμο με το $2G^i = y^j \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$, το οποίο σημαίνει ότι το S είναι spray.

2. Η συμμετρία της συνοχής N σημαίνει ότι $\frac{\partial N^i_j}{\partial y^k} = \frac{\partial N^i_k}{\partial y^j}$. Το semispray S που επάγει η συνοχή έχει συνιστώσες $2G^i = N^i_j y^j$. Η συνοχή που επάγεται από το S έχει συνιστώσες $2N'^i_j = \frac{2\partial G^i}{\partial y^j} = N^i_j + y^k \frac{\partial N^i_k}{\partial y^j} = N^i_j + y^k \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}$. Οι δύο συνοχές συμπίπτουν αν $N'^i_j = N^i_j$ που είναι ισοδύναμο με $N^i_j = y^k \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}$ που σημαίνει ότι η συνοχή N είναι ομογενής βαθμού 1 ως προς y. □

Κεφάλαιο 3

d-γραμμικές συνοχές

Είναι γνωστό ότι για μια τυχαία πολλαπλότητα M δεν υπάρχει φυσικός ισομορφισμός μεταξύ δύο εφαπτόμενων χώρων T_pM και T_qM όπου $p, q \in M$. Η ύπαρξη τέτοιου ισομορφισμού, που καλείται παράλληλη μετατόπιση, είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μιας συνοχής, όχι απαραίτητα γραμμικής, στην πολλαπλότητα M. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι ανυψώνοντας μια τέτοια συνοχή στην εφαπτόμενη δέσμη TM παίρνουμε σε κάθε σημείο $u \in TM$ μια διάσπαση $T_uTM = H_uTM \oplus V_uTM$ στον οριζόντιο και κατακόρυφο χώρο. Στο παρόν κεφάλαιο θα ορίσουμε μια παράλληλη μετατόπιση μεταξύ των χώρων T_uTM και T_vTM όπου $u, v \in TM$ μέσω μιας γραμμικής συνοχής που διατηρεί μέσω παραλληλίας την παραπάνω διάσπαση και καλείται d-γραμμική συνοχή. Εδώ θα μελετήσουμε τέτοιες συνοχές, την καμπυλότητα και στρέψη τους καθώς και τις αυτοπαράλληλες καμπύλες τους (γεωδαισιακές).

3.1 d-γραμμικές συνοχές

Ορισμός 3.1.1. *Δεδομένης μιας μη γραμμικής συνοχής N στην εφαπτόμενη δέσμη TM, μία **d-γραμμική συνοχή D** στην TM, είναι μια γραμμική συνοχή στην TM που διατηρεί μέσω παραλληλίας την οριζόντια-κατακόρυφη διάσπαση που επάγει η μη γραμμική συνοχή N.*

Ως προς την προσαρμοσμένη βάση της μη γραμμικής συνοχής N, μια d-γραμμική συνοχή D χαρακτηρίζεται από τέσσερις συνιστώσες $D = \left(F^i_{jk}(x,y), F^a_{bk}(x,y), C^i_{jc}(x,y), C^a_{bc}(x,y)\right)$ ως εξής

$$\begin{aligned} D_{\frac{\delta}{\delta x^k}}\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) &= F^i_{jk}(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i} \qquad & D_{\frac{\partial}{\partial y^c}}\left(\frac{\delta}{\delta x^j}\right) &= C^i_{jc}(x,y)\frac{\delta}{\delta x^i} \\ D_{\frac{\delta}{\delta x^k}}\left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right) &= F^a_{bk}(x,y)\frac{\partial}{\partial y^a} \qquad & D_{\frac{\partial}{\partial y^c}}\left(\frac{\partial}{\partial y^b}\right) &= C^a_{bc}(x,y)\frac{\partial}{\partial y^a} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Γενικά, $F^i_{jk} \neq \delta^i_a \delta^b_j F^a_{bk}, C^c_{ij} \neq \delta^i_a \delta^b_j C^a_{bc}$. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις συνοχών όπου είναι ίσα, δηλαδή οι συνοχές χαρακτηρίζονται από δύο συνιστώσες (παραδείγματος χάρην οι Finsler συνοχές που αναπτύσσονται στην ενότητα 5.5).

Κάτω από μια αλλαγή συντεταγμένων στην εφαπτόμενη δέσμη TM, οι συνιστώσες μιας d-γραμμικής συνοχής μετασχηματίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} \tilde{F}^i_{jk} &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^h}\frac{\partial x^l}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial \tilde{x}^k}F^h_{lr} + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^r}\frac{\partial^2 x^r}{\partial \tilde{x}^j \partial \tilde{x}^k} \\ \tilde{C}^i_{ja} &= \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^h}\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^j}\frac{\partial x^c}{\partial \tilde{x}^a}C^h_{kc} \\ \tilde{F}^a_{bk} &= \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^c}\frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^b}\frac{\partial x^h}{\partial \tilde{x}^k}F^c_{dh} + \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^c}\frac{\partial^2 x^c}{\partial \tilde{x}^b \partial \tilde{x}^k} \\ \tilde{C}^a_{bc} &= \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^{a_1}}\frac{\partial x^{b_1}}{\partial \tilde{x}^b}\frac{\partial x^{c_1}}{\partial \tilde{x}^c}C^{a_1}_{b_1 c_1} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ενδεικτικά θα αποδείξουμε το πρώτο

$$\tilde{F}^i_{jk}\frac{\delta}{\delta\tilde{x}^i} = D_{\frac{\delta}{\delta\tilde{x}^k}}\frac{\delta}{\delta\tilde{x}^j} = D_{\frac{\partial x^s}{\partial\tilde{x}^k}\frac{\delta}{\delta x^s}}\left(\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}\frac{\delta}{\delta x^m}\right) = \frac{\partial x^s}{\partial\tilde{x}^k}\left[\frac{\delta}{\delta x^s}\left(\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}\right)\frac{\delta}{\delta x^m} + F^k_{ms}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}\frac{\delta}{\delta x^k}\right] =$$

$$= \frac{\partial x^s}{\partial\tilde{x}^k}\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^s\partial\tilde{x}^j}\frac{\delta}{\delta x^m} + \frac{\partial x^s}{\partial\tilde{x}^k}F^k_{ms}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}\frac{\delta}{\delta x^k} = \frac{\partial x^s}{\partial\tilde{x}^k}F^k_{ms}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^k}\frac{\delta}{\delta\tilde{x}^i} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial\tilde{x}^k\partial\tilde{x}^j}\frac{\partial\tilde{x}^i}{\partial x^m}\frac{\delta}{\delta\tilde{x}^i} \tag{3.3}$$

Παρατηρούμε ότι οι οριζόντιες συνιστώσες F μετασχηματίζονται όπως οι συνιστώσες μιας γραμμικής συνοχής στην πολλαπλότητα (2.16) ενώ οι κατακόρυφες συνιστώσες C μετασχηματίζονται σαν ένα (1,2) d-τανυστικό πεδίο.

3.2 Οριζόντιες και κατακόρυφες συναλλοίωτες παραγωγίσεις

Ένα διανυσματικό πεδίο στην εφαπτόμενη δέσμη TM μπορεί να διασπαστεί με μοναδικό τρόπο σε οριζόντιο και κατακόρυφο, $X = X^h + X^v$ όπου $X^h = X^i\frac{\delta}{\delta x^i}$ και $X^v = X^a\frac{\partial}{\partial y^a}$. Άρα μια d-γραμμική συνοχή D στην TM γράφεται ως εξης $D_X = D_{X^h} + D_{X^v} = D^h_X + D^v_X$. Ο τελεστής D^h καλείται **οριζόντια συναλλοίωτη παραγώγιση** και ο D^v **κατακόρυφη συναλλοίωτη παραγώγιση**.

Μπορούμε να επεκτείνουμε μοναδικά την δράση μιας d-γραμμικής συνοχής D, σε d-τανυστικά πεδία ως εξής

$$D : CTM \times C^k_l TM \to C^k_l TM \tag{3.4}$$

με τις επιπλέον απαιτήσεις

$$\begin{aligned} &2.D_X f = X(f) \\ &3.D_X(S\otimes T) = (D_X S)\otimes T + S\otimes(D_X T) \\ &4.CD_X S = D_X C(S) \end{aligned} \tag{3.5}$$

όπου X ένα διανυσματικό πεδίο, f μια βαθμωτή συνάρτηση, S, T τανυστικά πεδία στην πολλαπλότητα M και C η πράξη της συστολής (contraction) τανυστικών πεδίων.

Αν T είναι ένα d-τανυστικό πεδίο (r,s)-τύπου με συνιστώσες $T^{i_1,..,i_r}_{j_1,..,j_s}(x,y)$ τότε η h-συναλλοίωτη παραγώγιση D^hT είναι ένα (r,s+1) τύπου d-τανυστικό πεδίο

$$D^h_X T = X^k T^{i_1..i_r}_{j_1..j_s|k}\frac{\delta}{\delta x^{i_1}}\otimes..\otimes\frac{\partial}{\partial y^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes..\otimes\delta y^{j_s} \tag{3.6}$$

όπου

$$\begin{aligned} T^{i_1..i_r}_{j_1..j_s|k} =& \frac{\delta T^{i_1..i_r}_{j_1..j_s}}{\delta x^k} + F^{i_1}_{mk}T^{mi_2..i_r}_{j_1..j_s} + .. + F^{i_r}_{mk}T^{i_1..i_{r-1}m}_{j_1..j_s} \\ &- F^m_{j_1k}T^{i_1..i_r}_{mj_2..j_s} - .. - F^m_{j_sk}T^{i_1..i_r}_{j_1..j_{s-1}m} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Η v-συναλλοίωτη παραγώγιση D^vT ενός d-τανυστικού πεδίου T (r,s)-τύπου είναι ένα (r,s+1) τύπου d-τανυστικό πεδίο

$$D^v_X T = X^k T^{i_1..i_r}_{j_1..j_s}|_k\frac{\delta}{\delta x^{i_1}}\otimes..\otimes\frac{\partial}{\partial y^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes..\otimes\delta y^{j_s} \tag{3.8}$$

όπου

$$\begin{aligned} T^{i_1..i_r}_{j_1..j_s}|k =& \frac{\partial T^{i_1..i_r}_{j_1..j_s}}{\partial y^k} + C^{i_1}_{mk}T^{mi_2..i_r}_{j_1..j_s} + .. + C^{i_r}_{mk}T^{i_1..i_{r-1}m}_{j_1..j_s} \\ &- C^m_{j_1k}T^{i_1..i_r}_{mj_2..j_s} - .. - C^m_{j_sk}T^{i_1..i_r}_{j_1..j_{s-1}m} \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.3 Στρέψη d-γραμμικής συνοχής

Ορισμός 3.3.1. *Για μια d-γραμμική συνοχή D ορίζουμε την* ***στρέψη*** *T από την παρακάτω σχέση*

$$T\left(X,Y\right)=D_{X}Y-D_{Y}X-[X,Y],\quad\forall X,Y\in CTM \tag{3.10}$$

Πρόταση 3.3.2. *Η στρέψη μιας d-γραμμικής συνοχής D στην εφαπτόμενη δέσμη TM εξαρτάται πλήρως από τα παρακάτω d-τανυστικά πεδία*

$$\begin{aligned}
&hT\left(hX,hY\right)=D_{X}^{h}hY-D_{Y}^{h}hX-h[hX,hY], && (h)\,h-\sigma\tau\varrho\acute{\varepsilon}\psi\eta\\
&vT\left(hX,hY\right)=-v[hX,hY], && (v)\,h-\sigma\tau\varrho\acute{\varepsilon}\psi\eta\\
&hT\left(hX,vY\right)=-D_{Y}^{v}hX-h[hX,vY], && (h)\,hv-\sigma\tau\varrho\acute{\varepsilon}\psi\eta\\
&vT\left(hX,vY\right)=D_{X}^{h}vY-v[hX,vY], && (v)\,hv-\sigma\tau\varrho\acute{\varepsilon}\psi\eta\\
&vT\left(vX,vY\right)=D_{X}^{v}vY-D_{Y}^{v}vX-v[vX,vY], && (v)\,v-\sigma\tau\varrho\acute{\varepsilon}\psi\eta
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Απόδειξη. Κάθε διανυσματικό πεδίο στην TM έχει οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες. Επομένως παίρνουμε την παρακάτω διάσπαση $T\left(X,Y\right)=T\left(hX,hY\right)+T\left(hX,vY\right)+T\left(vX,hY\right)+T\left(vX,vY\right)$. Κάθε διανυσματικό πεδίο του δεξιού μέλους αυτής της ισότητας έχει οριζόντιες και κατακόρυφες συνιστώσες. Από τους οκτώ προσθετέους που εμφανίζονται, οι δύο μηδενίζονται από την αντισυμμετρικότητα της στρέψης και ο άλλος μηδενίζεται επειδή $h[vX,vY]=0$. Αφού η συνοχή D διατηρεί την οριζόντια-κατακόρυφη διάσπαση προκύπτουν τα πέντε τανυστικά πεδία της στρέψης που δίνονται από την σχέση (3.11). □

Ως προς την προσαρμοσμένη βάση της TTM οι συνιστώσες της στρέψης δίνονται από

$$\begin{aligned}
&hT\left(\frac{\delta}{\delta x^{i}},\frac{\delta}{\delta x^{j}}\right):=T_{ji}^{k}\frac{\delta}{\delta x^{k}}=\left(F_{ji}^{k}-F_{ij}^{k}\right)\frac{\delta}{\delta x^{k}}\\
&vT\left(\frac{\delta}{\delta x^{i}},\frac{\delta}{\delta x^{j}}\right)=R_{ji}^{a}\frac{\partial}{\partial y^{a}}=\left(\frac{\delta N_{j}^{a}}{\delta x^{i}}-\frac{\delta N_{i}^{a}}{\delta x^{j}}\right)\frac{\partial}{\partial y^{a}}\\
&hT\left(\frac{\partial}{\partial y^{a}},\frac{\delta}{\delta x^{j}}\right)=C_{ja}^{k}\frac{\delta}{\delta x^{k}}\\
&vT\left(\frac{\partial}{\partial y^{a}},\frac{\delta}{\delta x^{j}}\right):=P_{ja}^{b}\frac{\partial}{\partial y^{b}}=\left(\frac{\partial N_{j}^{b}}{\partial y^{a}}-F_{aj}^{b}\right)\frac{\partial}{\partial y^{b}}\\
&vT\left(\frac{\partial}{\partial y^{a}},\frac{\partial}{\partial y^{b}}\right):=S_{ba}^{c}\frac{\partial}{\partial y^{c}}=\left(C_{ba}^{c}-C_{ab}^{c}\right)\frac{\partial}{\partial y^{c}}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Μια d-συνοχή λέγεται **συμμετρική** αν η (h) h-στρέψη και η (v) v-στρέψη μηδενίζονται, δηλαδή αν $F_{ij}^{k}=F_{ji}^{k}$ και $C_{ab}^{c}=C_{ba}^{c}$.

3.4 Καμπυλότητα d-γραμμικής συνοχής

Για μια d-γραμμική συνοχή D ορίζουμε την **καμπυλότητα** της να είναι

$$R\left(X,Y\right)Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]}Z, \quad \forall X,Y,Z \in CTM \tag{3.13}$$

Επειδή η συνοχή D στέλνει οριζόντια σε οριζόντια και κατακόρυφα σε κατακόρυφα διανυσματικά πεδία, το ίδιο ισχύει και για τον τελεστή $R\left(X,Y\right)$. Επομένως παίρνουμε την εξής σχέση

$$R\left(X,Y\right)Z = hR\left(X,Y\right)hZ + vR\left(X,Y\right)vZ, \quad \forall X,Y,Z \in CTM \tag{3.14}$$

Αν πάρουμε υπ'όψηυ μας την αντισυμμετρικότητα του τελεστή $R\left(X,Y\right)$ έχουμε

Πρόταση 3.4.1. *Η καμπυλότητα μιας d-γραμμικής συνοχής D στην εφαπτόμενη δέσμη TM εξαρτάται πλήρως από τα παρακάτω έξι d-τανυστικά πεδία*

$$\begin{aligned}
R\left(hX,hY\right)hZ &= D^h_X D^h_Y hZ - D^h_Y D^h_X hZ - D_{[hX,hY]}hZ\\
R\left(hX,hY\right)vZ &= D^h_X D^h_Y vZ - D^h_Y D^h_X vZ - D_{[hX,hY]}vZ\\
R\left(vX,hY\right)hZ &= D^v_X D^h_Y hZ - D^h_Y D^v_X hZ - D_{[vX,hY]}hZ\\
R\left(vX,hY\right)vZ &= D^v_X D^h_Y vZ - D^h_Y D^v_X vZ - D_{[vX,hY]}vZ\\
R\left(vX,vY\right)hZ &= D^v_X D^v_Y hZ - D^v_Y D^v_X hZ - D_{[vX,vY]}hZ\\
R\left(vX,vY\right)vZ &= D^v_X D^v_Y vZ - D^v_Y D^v_X vZ - D_{[vX,vY]}vZ
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ως προς την προσαρμοσμένη βάση η τανυστική καμπυλότητα έχει έξι διαφορετικές συνιστώσες που δίνονται από

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\delta}{\delta x^k},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\frac{\delta}{\delta x^h} &:= R^i_{hjk}\frac{\delta}{\delta x^i}\\
R\left(\frac{\delta}{\delta x^k},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^b} &:= R^a_{bjk}\frac{\partial}{\partial y^a}\\
R\left(\frac{\partial}{\partial y^a},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\frac{\delta}{\delta x^h} &:= P^i_{hja}\frac{\delta}{\delta x^i}\\
R\left(\frac{\partial}{\partial y^c},\frac{\delta}{\delta x^j}\right)\frac{\partial}{\partial y^b} &:= P^a_{bjc}\frac{\partial}{\partial y^a}\\
R\left(\frac{\partial}{\partial y^c},\frac{\partial}{\partial y^b}\right)\frac{\delta}{\delta x^h} &:= S^i_{hbc}\frac{\delta}{\delta x^i}\\
R\left(\frac{\partial}{\partial y^d},\frac{\partial}{\partial y^c}\right)\frac{\partial}{\partial y^b} &:= S^a_{bcd}\frac{\partial}{\partial y^a}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

όπου

$$\begin{aligned}
R^i_{hjk} &= \frac{\delta F^i_{hj}}{\delta x^k} - \frac{\delta F^i_{hk}}{\delta x^j} + F^m_{hj}F^i_{mk} - F^m_{hk}F^i_{mj} + C^i_{hd}R^d_{jk}\\
R^a_{bjk} &= \frac{\delta F^a_{bj}}{\delta x^k} - \frac{\delta F^a_{bk}}{\delta x^j} + F^m_{bj}F^a_{mk} - F^m_{bk}F^a_{mj} + C^a_{bd}R^d_{jk}\\
P^i_{hja} &= \frac{\partial F^i_{hj}}{\partial y^a} - C^i_{ha|j} + C^i_{hd}P^d_{ja}\\
P^a_{bjc} &= \frac{\partial F^a_{bj}}{\partial y^c} - C^a_{bc|j} + C^a_{bd}P^d_{jc}\\
S^i_{hbc} &= \frac{\partial C^i_{hb}}{\partial y^c} - \frac{\partial C^i_{hc}}{\partial y^b} + C^m_{hb}C^i_{mc} - C^m_{hc}C^i_{mb}\\
S^a_{bcd} &= \frac{\partial C^a_{bc}}{\partial y^d} - \frac{\partial C^a_{bd}}{\partial y^c} + C^m_{bc}C^a_{md} - C^m_{bd}C^a_{mc}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Η τανυστική καμπυλότητα Ricci ορίζεται ως η συστολή

$$R_{AB} = R^{C}_{ABC} \tag{3.18}$$

και ως προς την προσαρμοσμένη βάση έχει συνιστώσες

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= R^{k}_{ijk} = \frac{\delta F^{k}_{ij}}{\delta x^{k}} - \frac{\delta F^{k}_{ik}}{\delta x^{j}} + F^{m}_{ij} F^{k}_{mk} - F^{m}_{ik} F^{k}_{mj} + C^{k}_{im} R^{m}_{jk} \\
P_{ib} &= -P^{k}_{ikb} = -\frac{\partial F^{k}_{ik}}{\partial y^{b}} + C^{k}_{ib|k} - C^{k}_{ic} P^{c}_{kb} \\
P_{bi} &= P^{a}_{bia} = \frac{\partial F^{a}_{bi}}{\partial y^{a}} - C^{a}_{ba|i} + C^{a}_{bd} P^{d}_{ia} \\
S_{ab} &= S^{c}_{abc} = \frac{\partial C^{c}_{ab}}{\partial x^{c}} - \frac{\partial C^{c}_{ac}}{\partial x^{b}} + C^{d}_{ab} C^{c}_{dc} - C^{d}_{ac} C^{c}_{db}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci ορίζεται ως

$$\mathcal{R} = \mathcal{G}^{AB} R_{AB} \tag{3.20}$$

όπου $\mathcal{G}$ είναι μια μετρική στην εφαπτόμενη δέσμη (Sasaki).

Αν $X^{i}(x, y)$ οι συνιστώσες ενός d-διανυσματικού πεδίου στην TM από την σχέση ορισμού της καμπυλότητας (3.13) παίρνουμε τις **ταυτότητες Ricci**.

$$\begin{aligned}
X^{i}_{|j|k} - X^{i}_{|k|j} &= X^{m} R^{i}_{mjk} - X^{i}_{|m} T^{m}_{jk} - X^{i}|_{m} R^{m}_{jk} \\
X^{i}_{|j}|_{k} - X^{i}|_{k|j} &= X^{m} P^{i}_{mjk} - X^{i}_{|m} C^{m}_{jk} - X^{i}|_{m} P^{m}_{jk} \\
X^{i}|_{j}|_{k} - X^{i}|_{k}|_{j} &= X^{m} S^{i}_{mjk} - X^{i}|_{m} S^{m}_{jk}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

3.5 Γεωδαισιακές μιας d-γραμμικής συνοχής

Σε αυτή την ενότητα σταθεροποιούμε μια μη γραμμική συνοχή N στην δέσμη TM και μια d-γραμμική συνοχή D και μελετάμε τις γεωδαισιακές της συνοχής D. Ύστερα μελετάμε συνθήκες κάτω από τις οποίες οι αυτοπαράλληλες καμπύλες της συνοχής N συμπίπτουν με τις γεωδαισιακές της D.

Αρχικά ορίζουμε μια έννοια συναλλοίωτης παραγώγου κατά μήκος καμπυλών της εφαπτόμενης δέσμης, με τον κλασικό τρόπο

Πρόταση 3.5.1. *Έστω D μια d-γραμμική συνοχή στην εφαπτόμενη δέσμη. Για μία καμπύλη $c : t \in I \to c(t) = \left(x^{i}(t), y^{i}(t)\right) \in TM$ υπάρχει μοναδικός τελεστής καλούμενος* ***συναλλοίωτη παράγωγος***

$$\frac{D}{dt} : C(c) \to C(c) \tag{3.22}$$

όπου $C(c)$ το σύνολο των διανυσματικών πεδίων κατα μήκος της καμπύλης c, που ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις ιδιότητες

$$\begin{aligned}
&1.\frac{D}{dt}(aV + bW) = a\frac{DV}{dt} + b\frac{DW}{dt} \\
&2.\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

3.*Αν υπάρχει $\tilde{V} \in CTM$ τέτοιο ώστε $\tilde{V}(c(t)) = V(t)$ τότε*

$$\frac{DV}{dt} = D_{\dot{c}} \tilde{V} \tag{3.24}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο V κατα μήκος της καμπύλης c.

$$V(t) = X^k(t)\frac{\delta}{\delta x^k} + Y^b(t)\frac{\partial}{\partial y^b}$$

και υπολογίζουμε την συναλλοίωτη παράγωγο χρησιμοποιώντας τις τρεις ιδιότητες και την παρακάτω σχέση (3.26)

$$\begin{aligned}\frac{DV}{dt} &= \frac{dX^k}{dt}\frac{\delta}{\delta x^k} + \frac{dY^b}{dt}\frac{\partial}{\partial y^b} + X^k D_{\dot c}\frac{\delta}{\delta x^k} + Y^b D_{\dot c}\frac{\partial}{\partial y^b} = \\ &= \frac{dX^k}{dt}\frac{\delta}{\delta x^k} + \frac{dY^b}{dt}\frac{\partial}{\partial y^b} + \\ &+ X^k D_{\frac{dx^i}{dt}\frac{\delta}{\delta x^i}+\frac{\delta y^a}{dt}\frac{\partial}{\partial y^a}}\frac{\delta}{\delta x^k} + Y^b D_{\frac{dx^i}{dt}\frac{\delta}{\delta x^i}+\frac{\delta y^a}{dt}\frac{\partial}{\partial y^a}}\frac{\partial}{\partial y^b} = \\ &= \frac{dX^k}{dt}\frac{\delta}{\delta x^k} + \frac{dY^b}{dt}\frac{\partial}{\partial y^b} + \\ &+ \frac{dx^i}{dt}F^s_{ki}\frac{\delta}{\delta x^s} + \frac{\delta y^a}{dt}C^s_{ka}\frac{\delta}{\delta x^s} + \frac{dx^i}{dt}F^c_{bi}\frac{\partial}{\partial y^c} + \frac{\delta y^a}{dt}C^c_{ba}\frac{\partial}{\partial y^c} = \\ &= \left(\frac{dX^k}{dt} + F^k_{si}X^s\frac{dx^i}{dt} + C^k_{sa}X^s\frac{\delta y^a}{dt}\right)\frac{\delta}{\delta x^k} + \\ &+ \left(\frac{dY^b}{dt} + F^b_{ci}Y^c\frac{dx^i}{dt} + C^b_{ca}Y^c\frac{\delta y^a}{dt}\right)\frac{\partial}{\partial y^b}\end{aligned} \tag{3.25}$$

□

Ορισμός 3.5.2. *Μια καμπύλη $c : t \in I \to c(t) = \left(x^i(t), y^i(t)\right) \in TM$ καλείται **γεωδαισιακή μιας d-γραμμικής συνοχής** D αν $\frac{D\dot c}{dt} = 0$*

Το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο $\dot c$ κατα μήκος της c δίνεται από

$$\dot c(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{dy^a}{dt}\frac{\partial}{\partial y^a} = \frac{dx^i}{dt}\frac{\delta}{\delta x^i} + \frac{\delta y^a}{dt}\frac{\partial}{\partial y^a} \tag{3.26}$$

όπου

$$\frac{\delta y^a}{dt} = \frac{dy^a}{dt} + N^a_j(x,y)\frac{dx^j}{dt} \tag{3.27}$$

Για μια d-γραμμική συνοχή D μια καμπύλη $c(t)$ είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x^i}{dt^2} + F^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + C^i_{ja}\frac{dx^j}{dt}\frac{\delta y^a}{dt} = 0\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta y^a}{dt}\right) + F^a_{bk}\frac{\delta y^b}{dt}\frac{dx^k}{dt} + C^a_{bc}\frac{\delta y^b}{dt}\frac{\delta y^c}{dt} = 0\end{aligned} \tag{3.28}$$

Από τις εξισώσεις αυτές παρατηρούμε ότι μια οριζόντια καμπύλη, δηλαδή μια καμπύλη που ικανοποιεί την $\frac{\delta y^a}{dt} = 0$, είναι γεωδαισιακή αν και μόνο αν

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + F^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{3.29}$$

Ώντας ενδιαφερόμενοι για την βασική πολλαπλότητα M, ονομάζουμε μια καμπύλη $c : t \in I \to c(t) \in M$ γεωδαισιακή ως προς την d-γραμμική συνοχή D αν η φυσική της επέκταση στην δέσμη TM, $\tilde c(t) = \left(x^i(t), \frac{dx^i}{dt}(t)\right)$ είναι γεωδαισιακή της D.

Επομένως έχουμε ότι οι αυτοπαράλληλες καμπύλες $c(t) = \left(x^i(t)\right)$ μιας μη γραμμικής συνοχής N είναι γεωδαισιακές της d-γραμμικής συνοχής D αν και μόνο αν ικανοποιείται η σχέση (3.29).

Κεφάλαιο 4

Χώροι Finsler

Οι χώροι Finsler παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην σύγχρονη διαφορική γεωμερία της εφαπτόμενης δέσμης. Τα αντικείμενα της Finsler γεωμετρίας διαφέρουν από τα αντίστοιχα της Riemann γεωμετρίας από το γεγονός ότι εξαρτώνται και από την κατεύθυνση (όχι μόνο από την θέση).

4.1 Finsler μετρικές

Μια Riemann μετρική σε μια πολλαπλότητα M δίνεται από μια οικογένεια εσωτερικών γινομένων $(g)_{x\in M}$ ώστε η απεικόνιση $g : x \in M \to g_x$, όπου g_x ένα εσωτερικό γινόμενο στον T_xM, είναι λεία. Μια Finsler μετρική στην πολλαπλότητα δίνεται από μια οικογένεια Minkowski νορμών F_x ώστε η απεικόνιση $F : x \in M \to F_x$, όπου F_x μια νόρμα Minkowski στον T_xM, είναι λεία. Άρα η διαφορά ενός Finsler με έναν Riemann χώρο είναι ότι εφοδιάζουμε τους εφαπτόμενους χώρους με νόρμες που δεν προκύπτουν απαραίτητα από εσωτερικό γινόμενο. Θα δούμε ότι μία Finsler μετρική είναι semi-Riemannian μετρική αν και μόνο αν η οικογένεια των Minkowski νορμών F_x ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου.

Ορισμός 4.1.1. *Μια **Finsler μετρική** στην πολλαπλότητα M δίνεται από μια μη αρνητική συνάρτηση $F : TM \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

F_1 *: F είναι λεία στην $\tilde{TM} = TM \setminus \{F = 0\}$ και συνεχής παντού.*

F_2 *: F είναι θετικά ομογενής βαθμού ένα ως προς τις συνιστώσες του νήματος, δηλαδή $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \forall \lambda > 0$*

F_3 *: Για κάθε $(x, y) \in \tilde{TM}$, η συμμετρική διγραμμική μορφή $g_{(x,y)}$ είναι μη εκφυλισμένη και έχει σταθερή υπογραφή, όπου*

$$g_{(x,y)}(v, w) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}[F^2(x, y + sw + tv)]_{s=t=0}, \quad y, w, v \in T_xM \tag{4.1}$$

Αν απαιτήσουμε μια ισχυρότερη συνθήκη της F_3, δηλαδή να είναι θετικά ορισμένη η μορφή $g_{(x,y)}$, τότε για κάθε $x \in M$ η $F_x = F(x, *)$ είναι μία νόρμα στον χώρο T_xM.

Ορισμός 4.1.2. *Αν F είναι μια Finsler μετρική στην πολλαπλότητα M, ο χώρος $F^n = (M, F)$ λέγεται **χώρος Finsler** και η μορφή $g_{(x,y)}$ λέγεται **μετρικός η θεμελιώδης τανυστής** του χώρου Finsler. Η F καλείται **θεμελιώδης συνάρτηση**.*

Από την ομογένεια της συνάρτησης F παίρνουμε ότι η F^2 είναι ομογενής βαθμού 2 ως προς τις συντεταγμένες του νήματος και από το θεώρημα του Euler έχουμε

$$g_{(x,y)}(v, w) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j}(x, y)\, v^i w^j \qquad g_{(x,y)}(y, y) = F^2(x, y) \tag{4.2}$$

Ένα πρώτο παράδειγμα ενός χώρου Finsler είναι ένας Riemann χώρος αφού αν a_x η Riemann μετρική, τότε η συνάρτηση $F(x,y) = \sqrt{a_x(y,y)}$ είναι μία θεμελιώδης συνάρτηση και ο αντίστοιχος θεμελιώδης τανυστής είναι ίσος με τον Riemann μετρικό τανυστή, δηλαδή $g_{(x,y)} = a_x$. Αν ο θεμελιώδης τανυστής ενός χώρου Finsler δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες του νήματος τότε λέμε ότι είναι **αναγώγιμος σε semi-Riemann χώρο** (Riemann αν g_x είναι θετικά ορισμένο).

Πρόταση 4.1.3. *Ενας χώρος Finsler είναι αναγώγιμος σε semi-Riemann χώρο αν και μόνο αν η θεμελιώδης συνάρτηση F του χώρου Finsler ικανοποιεί τον παρακάτω κανόνα του παραλληλογράμμου*

$$F^2(x,v+w) + F^2(x,v-w) = 2F^2(x,v) + 2F^2(x,w) \quad \forall v,w \in T_xM \tag{4.3}$$

Απόδειξη. Αν ο Finsler χώρος είναι αναγώγιμος σε semi-Riemann χώρο, τότε για την διγραμμική μορφή g_x ισχύει $g_x(v+w,v+w)+g_x(v-w,v-w) = 2g_x(v,v)+2g_x(w,w)$. Από την σχέση (4.2) έχουμε ότι $F^2(x,y) = g_x(y,y)$ και η ισότητα (4.3) ικανοποιείται.

Αν τώρα ισχύει η σχέση (4.3) τότε για κάθε $y,v,w \in T_xM$ και $s,t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$F^2(x,y+sv+tw) + F^2(x,y-sv-tw) = 2F^2(x,y) + 2F^2(x,sv+tw) \tag{4.4}$$

Αν παραγωγίσουμε αυτήν ως προς s,t και βάλουμε $s=t=0$, βλέπουπε ότι ο θεμελιώδης τανυστής δεν εξαρτάται από το y. □

Για κάθε $x \in M$ αν σταθεροποιήσουμε μια βάση $\{e^i\}$ του εφαπτόμενου χώρου T_xM (συνήθως αυτή που προέρχεται από έναν χάρτη), τότε ορίζουμε

$$g_{ij}(x,y) = g_{(x,y)}\left(e^i,e^j\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial y^j} \tag{4.5}$$

που είναι συνιστώσες ενός (0,2) συμμετρικού d-τανυστικού πεδίου.

4.2 Γεωδαισιακές ενός χώρου Finsler

Θεωρούμε μια παραμετρησμένη καμπύλη c στην πολλαπλότητα M, $c:[0,1] \to c(t) = \left(x^i(t)\right) \in M$. Η ανύψωση $\tilde{c}$ της c στην $\tilde{TM}$ ορίζεται από

$$x^i = x^i(t), y^i = \frac{dx^i}{dt}(t), t \in [0,1] \tag{4.6}$$

Αρα ο περιορισμός της θεμελιώδους συνάρτησης $F(x,y)$ στην $\tilde{c}$ είναι $F\left(x(t), \frac{dx}{dt}\right), t \in [0,1]$. Ορίζουμε το **μήκος της καμπύλης** c να είναι

$$\mathcal{L}(c) = \int_0^1 F\left(x(t), \frac{dx}{dt}(t)\right)dt \tag{4.7}$$

Ο ορισμός είναι ανεξάρτητος των αλλαγών συντεταγμένων στην TM και των αναπαραμετρήσεων της καμπύλης c, εξαρτάται δηλαδή μόνο από την ίδια την καμπύλη.

Το μήκος τόξου δίνεται από την συνάρτηση

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} F\left(x(\tau), \frac{dx}{d\tau}(\tau)\right)d\tau, \quad t,t_0 \in [0,1] \tag{4.8}$$

Αυτή είναι διαφορίσιμη και η παράγωγός της δίνεται από

$$\frac{ds}{dt} = F\left(x(t), \frac{dx}{dt}(t)\right) > 0, \quad t \in [0,1] \tag{4.9}$$

Επομένως η συνάρτηση $s(t)$ είναι αντιστρέψιμη. Αν $t = t(s)$ η αντίστροφη, τότε η νέα παράμετρος s καλείται **μήκος τόξου**. Για την νέα παράμετρο ισχύει η σχέση

$$F\left(x(s), \frac{dx}{ds}(s)\right) = 1 \tag{4.10}$$

Αν η θεμελώδης συνάρτηση F είναι σταθερή κατα μήκος μιας παραμετρησμένης καμπύλης $c(t)$, τότε η παράμετρος t και η παράμετρος του μήκους τόξου s σχετίζονται ως $t = as + b$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Τώρα θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα απόκλισης για το ολοκλήρωμα (4.7) με σταθερά άκρα. Θεωρούμε την οικογένεια καμπυλών

$$c_\epsilon : t \in [0,1] \to \left(x^i(t) + \epsilon V^i(t)\right) \in M \tag{4.11}$$

που έχουν τα ίδια άκρα $x^i(0), x^i(1)$ με την καμπύλη c, $V^i(t) = V^i(x(t))$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατα μήκος της καμπύλης c με την ιδιότητα $V^i(0) = V^i(1) = 0$ και ϵ ένας πραγματικός αριθμός αρκετά μικρός ώστε $Imc \subset U$.

Η επέκταση μιας καμπύλης c_ϵ στην δέσμη TM δίνεται από

$$\tilde{c_\epsilon} : t \in [0,1] \to \left(x^i(t) + \epsilon V^i(t), \frac{dx^i}{dt} + \epsilon \frac{dV^i}{dt}\right) \tag{4.12}$$

Το μήκος μιας καμπύλης c_ϵ δίνεται από

$$\mathcal{L}(c_\epsilon) = \int_0^1 F\left(x + \epsilon V, \frac{dx}{dt} + \epsilon \frac{dV}{dt}\right) dt \tag{4.13}$$

Για να είναι η τιμή $\mathcal{L}(c)$ κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $\mathcal{L}(c_\epsilon)$ πρέπει

$$\frac{d\mathcal{L}(c_\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} = 0 \tag{4.14}$$

Οι υποθέσεις της διαφορισιμότητας μας επιτρέπουν να περάσουμε την παράγωγο μέσα στο ολοκλήρωμα, έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}(c_\epsilon)}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} &= \int_0^1 \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} F\left(x + \epsilon V, \frac{dx}{dt} + \epsilon \frac{dV}{dt}\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} V^i + \frac{\partial F}{\partial y^i} \frac{dV^i}{dt}\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y^i}\right) V^i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y^i} V^i\right) dt
\end{aligned} \tag{4.15}$$

όπου $y^i = \frac{dx^i}{dt}$. Από την εξίσωση (4.15) και επειδή το V^i είναι τυχαίο παίρνουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.1. *Η καμπύλη $c = \left(x^i(t)\right)$ είναι κρίσιμο σημείο του συναρτησοειδούς του μήκους $\mathcal{L}(c_\epsilon)$ αν ικανοποιεί τις παρακάτω **εξισώσεις Euler-Lagrange** για την F*

$$E_i(F) = \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y^i} = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{4.16}$$

Ορισμός 4.2.2. *Οι καμπύλες $c = \left(x^i(t)\right), t \in [0,1]$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις Euler-Lagrange καλούνται **γεωδαισιακές του χώρου Finsler** F^n.*

Όπως δουλέψαμε με την συνάρτηση του μήκους $\mathcal{L}$ μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα απόκλισης για την συνάρτηση ενέργειας

$$\mathcal{E}(c) = \int_0^1 F^2\left(x(t), \frac{dx}{dt}(t)\right) dt \tag{4.17}$$

Για να είναι μια καμπύλη c κρίσιμο σημείο σημείο του συναρτησοειδούς της ενέργειας πρέπει να είναι λύση των παρακάτω Euler-Lagrange εξισώσεων για την F^2

$$E_i\left(F^2\right) = \frac{\partial F^2}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F^2}{\partial y^i} = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{4.18}$$

Πρόταση 4.2.3. *Για τον τελεστή Euler-Lagrange E_i ισχύουν τα παρακάτω*

1. *$E_i(f)$ είναι ενα συναλλοίωτο d-διανυσματικό πεδίο, $\forall f \in \mathcal{F}(TM)$*

2. *$E_i(f+f') = E_i(f) + E_i(f'), E_i(af) = aE_i(f), \quad a \in \mathbb{R}, f, f' \in \mathcal{F}(TM)$*

Πρόταση 4.2.4. *Έστω $F^n = (M, F)$ ένας χώρος Finsler. Για κάθε καμπύλη c στην πολλαπλότητα M ισχύουν οι σχέσεις*

$$\begin{aligned} E_i\left(F^2\right) &= 2FE_i(F) - 2\frac{dF}{dt}\frac{\partial F}{\partial y^i} \\ \frac{dF^2}{dt} &= -\frac{dx^i}{dt}E_i\left(F^2\right), \quad \frac{dx^i}{dt}E_i(F) = 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Θεώρημα 4.2.5.

1. *Για ένα χώρο Finsler $F^n = (M, F)$ η ενέργεια F^2 διατηρείται κατά μήκος των λύσεων των εξισώσεων Euler-Lagrange $E_i\left(F^2\right) = 0, y^i = \frac{dx^i}{dt}$.*

2. *Αν μια καμπύλη c έιναι λύση των εξισώσεων $E_i\left(F^2\right) = 0, y^i = \frac{dx^i}{dt}$ τότε είναι λύση και των εξισώσεων $E_i(F) = 0, y^i = \frac{dx^i}{dt}$.*

3. *Αν μια καμπύλη c είναι λύση των εξισώσεων $E_i(F) = 0, y^i = \frac{dx^i}{dt}$ και είναι παραμετρησμένη με το μήκος τόξου, τότε είναι και λύση των εξισώσεων $E_i\left(F^2\right) = 0, y^i = \frac{dx^i}{dt}$.*

Αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση (4.2) όπου $F^2(x,y) = g_{ij}(x,y)\, y^i y^j$ και την πρώτη σχέση της (4.19), μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση των γεωδαισιακών ενός χώρου Finsler ως εξής

$$g_{ij}\left(\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2G^i\left(x, \frac{dx}{dt}\right)\right) = \frac{dF}{dt}\frac{\partial F}{\partial y^j}, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{4.20}$$

όπου

$$G^i(x,y) = \frac{1}{2}\gamma^i_{jk}(x,y)\, y^j y^k \tag{4.21}$$

και οι συναρτήσεις $\gamma^i_{jk}(x,y)$ είναι τα σύμβολα Christoffel του μετρικού τανυστή g_{ij}, δηλαδή

$$\gamma^i_{jk}(x,y) = \frac{1}{2}g^{ir}(x,y)\left(\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^j}(x,y) + \frac{\partial g_{rj}}{\partial x^k}(x,y) - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^r}(x,y)\right) \tag{4.22}$$

Αν αλλάξουμε την παράμετρο t στο μήκος τόξου s τότε $F\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = 1$. Οι εξισώσεις (4.16) και (4.18) είναι ισοδύναμες με την εξίσωση των γεωδαισιακών ενός χώρου Finsler

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \gamma^i_{jk}\left(x, \frac{dx}{ds}\right)\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{4.23}$$

4.3 Spray γεωδαισιακών

Σε ένα χώρο Finsler F^n, είδαμε ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange (4.16) για μια καμπύλη παραμετρησμένη με το μήκος τόξου, ισοδυναμούν με ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης (4.23). Το σύστημα αυτό επάγει ένα semispray. Θα δούμε ότι αυτό είναι ομογενές, άρα είναι spray και τα μονοπάτια του είναι οι γεωδαισιακές. Γι΄αυτό λέγεται και **spray γεωδαισιακών**. Το semispray αυτό δίνεται από

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i} \tag{4.24}$$

όπου $2G^i(x,y) = \gamma^i_{jk}(x,y)\, y^j y^k$. Επειδή τα σύμβολα Christoffel είναι ομογενή τάξης μηδέν ως προς y, έχουμε ότι οι συνιστώσες G^i του semispray είναι ομογενείς τάξης 2 ως προς y. Επομένως το S είναι spray. Είναι προφανές από τον ορισμό αυτού του spray ότι τα μονοπάτια του είναι ακριβώς οι γεωδαισιακές παραμετρησμένες με το μήκος τόξου.

Πρόταση 4.3.1. *Οι συνιστώσες G^i του spray γεωδαισιακών δίνονται και από την παρακάτω σχέση*

$$2G^i(x,y) = \frac{1}{2} g^{ij}(x,y)\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^k \partial y^j}(x,y)\, y^k - \frac{\partial F^2}{\partial x^j}(x,y)\right) \tag{4.25}$$

Απόδειξη. Εύκολα βλέπουμε ότι οι εξισώσεις Euler-Lagrange για την F^2 (4.18) ισοδυναμούν με την εξίσωση

$$2g_{ij}\frac{dy^i}{dt} - \frac{\partial F^2}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial x^k} y^k = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{4.26}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε με g^{jk} παίρνουμε μια εξίσωση της μορφής (2.37) όπου οι συναρτήσεις G^i δίνονται από την σχέση (4.25). □

4.4 Μη γραμμική συνοχή Cartan

Χρησιμοποιώντας την θεωρία της ενότητας (2.8) μπορούμε να ορίσουμε μια μη γραμμική συνοχή που επάγεται από το spray των γεωδαισιακών. Αυτή ονομάζεται Cartan και είναι συμβατή με την Finsler μετρική g_{ij}. Όμως η συνθήκη της συμβατότητας δεν καθορίζει πλήρως την μετρική. Στην ενότητα αυτή θα καθορίσουμε την οικογένεια των συνοχών που είναι συμβατές με την μετρική και θα δούμε έναν χαρακτηρισμό της Cartan μη γραμμικής συνοχής.

Ορισμός 4.4.1. *Η μη γραμμική συνοχή που επάγεται από το spray των γεωδαισιακών ενός χώρου Finsler F^n καλείται **Cartan μη γραμμική συνοχή**.*

Θεώρημα 4.4.2. *Η μη γραμμική συνοχή Cartan N έχει συνιστώσες*

$$N^i_j(x,y) = \gamma^i_{jk}(x,y)\, y^k - C^i_{pj}(x,y)\, \gamma^p_{ks}(x,y)\, y^k y^s \tag{4.27}$$

όπου γ^i_{jk} είναι τα σύμβολα Christoffel του μετρικού τανυστή g_{ij} (4.22).

Απόδειξη. Οι συνιστώσες του spray των γεωδαισιακών δίνονται από την σχέση $2G^i = \gamma^i_{ks} y^k y^s$. Η μη γραμμική συνοχή που επάγεται αυτό το spray έχει συνιστώσες

$$N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\gamma^i_{ks} y^k y^s\right)}{\partial y^j} = \gamma^i_{jk} y^k + \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma^i_{ks}}{\partial y^j} y^k y^s$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.22) για τα σύμβολα Christoffel, την ομογένεια μηδενικού βαθμού ως προς y του μετρικού τανυστή g_{ij} και την απόλυτη συμμετρία του **τανυστή Cartan** $C_{ijk} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k}$ παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma^i_{ks}}{\partial y^j} y^k y^s = -\frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{mp}}{\partial y^j} \gamma^p_{ks} y^k y^s = -C^i_{pj} \gamma^p_{ks} y^k y^s$$

Άρα η Cartan μη γραμμική συνοχή έχει τις ζητούμενες συνιστώσες της σχέσης (4.27). □

Παρατηρούμε ότι η μη γραμμική συνοχή Cartan είναι ομογενής πρώτου βαθμού ως προς y διότι οι συνιστώσες του spray των γεωδαισιακών $2G^i = \gamma^i_{ks} y^k y^s$ είναι ομογενείς βαθμού 2 ως προς y. Επιπλέον ισχύει η σχέση

$$N^i_j y^j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j} y^j = 2G^i = \gamma^i_{ks} y^k y^s \tag{4.28}$$

που μας δίνει αμέσως το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.4.3. *Οι αυτοπαράλληλες καμπύλες της μη γραμμικής συνοχής Cartan ενός χώρου Finsler F^n συμπύπτουν με τις γεωδαισιακές του χώρου παραμετρησμένες με το μήκος τόξου και οι εξισώσεις τους είναι*

$$\frac{dy^i}{ds} + N^i_j\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right) \frac{dx^j}{ds} = 0, \quad y^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{4.29}$$

Θεωρούμε την δυναμική συναλλοίωτη παραγώγιση ∇ που επάγεται από την μη γραμμική συνοχή Cartan, όπως την μελετήσαμε στην ενότητα 2.6. Σε τοπικές συντεταγμένες η δυναμική συναλλοίωτη παράγωγος του μετρικού τανυστή g_{ij} δίνεται από

$$(\nabla g)_{ij} = g_{ij}| = S\left(g_{ij}\right) - g_{mj} N^m_i - g_{im} N^m_j \tag{4.30}$$

Θεώρημα 4.4.4. *Η Cartan μη γραμμική συνοχή ενός χώρου Finsler F^n είναι συμβατή με την μετρική g_{ij} του χώρου. Δηλαδή ισχύει η σχέση*

$$(\nabla g)_{ij} = g_{ij}| = 0 \tag{4.31}$$

Απόδειξη. Πρέπει να αποδείξουμε την παρακάτω σχέση για το spray των γεωδαισιακών S και την μη γραμμική συνοχή N.

$$S\left(g_{ij}\right) = g_{mj} N^m_i + g_{im} N^m_j \tag{4.32}$$

Θεωρούμε τις συνιστώσες G^i του spray των γεωδαισιακών S όπως δίνονται από την σχέση (4.25). Τότε οι συνιστώσες N^i_j της μη γραμμικής συνοχής Cartan δίνονται από

$$N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j} = \frac{1}{4}\frac{\partial g^{ip}}{\partial y^j}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^m \partial y^p} y^m - \frac{\partial F^2}{\partial x^p}\right) + \frac{1}{4} g^{ip}\left(\frac{\partial y_{jp}}{\partial x^m} y^m - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial x^p}\right) + \frac{1}{4}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^p \partial x^j}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε στην παραπάνω σχέση με g_{is} και χρησιμοποιήσουμε και την

$$\frac{\partial g_{ip}}{\partial y^j} g^{is} + \frac{\partial g_{is}}{\partial y^j} g^{ip} = 0$$

παίρνουμε την σχέση

$$N_{sj} = g_{is} N^i_j = -\frac{\partial g_{is}}{\partial y^j} G^i + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^m} y^m + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^s \partial x^j} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial x^s}\right)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$N_{ij} = \frac{1}{2} S\left(g_{ij}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial x^i}\right) \tag{4.33}$$

Από αυτήν βλέπουμε ότι

$$N_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(N_{ij} + N_{ji}\right) = \frac{1}{2} S\left(g_{ij}\right)$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Τώρα θα καθορίσουμε την οικογένεια όλων των μη γραμμικών συνοχών που είναι συμβατές με την Finsler μετρική g_{ij}. Πρώτα θα ορίσουμε τους **τελεστές Obata**

$$O_{kl}^{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_k^i \delta_l^j - g^{ij} g_{kl}\right) \qquad O_{kl}^{*ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_k^i \delta_l^j + g^{ij} g_{kl}\right) \tag{4.34}$$

Θεώρημα 4.4.5. *Η οικογένεια όλων των μη γραμμικών συνοχών που είναι συμβατές με την μετρική g_{ij} ενός χώρου Finsler δίνεται από*

$$N_j^i = N_j^{Ci} + O_{jm}^{ki} X_k^m \tag{4.35}$$

όπου X_k^m είναι ένα τυχαίο (1,1) τύπου d-τανυστικό πεδίο και N_j^{Ci} η μη γραμμική συνοχή Cartan.

Απόδειξη. Οι συνθήκες συμβατότητας των συνοχών N_j^i και N_j^{Ci} με την μετρική γράφονται $S\left(g_{ij}\right) = g_{mj} N_i^m + g_{im} N_j^m$ και $S\left(g_{ij}\right) = g_{mj} N_i^{Cm} + g_{im} N_j^{Cm}$. Αν τις αφαιρέσουμε παίρνουμε $O_{jm}^{*is}\left(N_i^m - N_i^{Cm}\right) = 0$. Η λύση αυτής της τανυστικής εξίσωσης, χρησιμοποιώντας την σχέση $O_{kl}^{ij} O_{pj}^{*km} = 0$, δίνεται από την σχέση (4.35). □

Για να βρούμε έναν χαρακτηρισμό της μη γραμμικής συνοχής Cartan θα εισάγουμε την **Cartan 2-μορφή** ενός χώρου Finsler

$$\omega = g_{ij} dy^j \wedge dx^i + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial x^i}\right) dx^j \wedge dx^i \tag{4.36}$$

Πρόταση 4.4.6. *Η Cartan 2-μορφή ενός χώρου Finsler F^n έχει ως προς την βάση $\left\{dx^i, \delta y^i\right\}$ της μη γραμμικής συνοχής Cartan, την εξής μορφή*

$$\omega = g_{ij} \delta y^j \wedge dx^i \tag{4.37}$$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας την σχέση $dy^j = \delta y^j - N_i^j dx^i$ στην (4.36) παίρνουμε

$$\omega = g_{ij} \delta y^j \wedge dx^i + \frac{1}{2}\left[-N_{ij} + N_{ji} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial x^i}\right)\right] dx^j \wedge dx^i$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.33) παίρνουμε

$$N_{[ij]} = \frac{1}{2}\left(N_{ij} - N_{ji}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial x^i}\right) \tag{4.38}$$

□

Θεώρημα 4.4.7. *Για έναν χώρο Finsler F^n η Cartan μη γραμμική συνοχή είναι η μοναδική μη γραμμική συνοχή που το επαγώμενο semispray της είναι το spray των γεωδαισιακών S και ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες*

1. $\nabla g = 0$
2. $\omega\left(hX, hY\right) = 0 \quad \forall X, Y \in \chi\left(TM\right)$

Απόδειξη. Από την συνθήκη συμβατότητας με την μετρική παίρνουμε την σχέση

$$N_{(ij)} = \frac{1}{2}\left(N_{ij} + N_{ji}\right) = \frac{1}{2} S\left(g_{ij}\right)$$

και από την δεύτερη συνθήκη παίρνουμε την σχέση (4.38). Επομένως οι συνιστώσες της μη γραμμικής συνοχής καθορίζονται από την μοναδική λύση του συστήματος και δίνονται από

$$N_j^i = \frac{1}{2} g^{im}\left[S\left(g_{im}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^m \partial x^j} - \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^j \partial x^m}\right)\right] \tag{4.39}$$

Από το θεώρημα 4.4.4 και την πρόταση 4.4.6, η Cartan μη γραμμική συνοχή ικανοποιεί τις δύο συνθήκες και από την μοναδικότητα παίρνουμε μία ακόμη έκφραση για τις συνιστώσες της Cartan μη γραμμικής συνοχής (4.39). □

4.5 Finsler γραμμικές συνοχές

Στην ενότητα αυτή μελετάμε κάποιες d-γραμμικές συνοχές που μπορούμε να εισάγουμε σε ένα χώρο Finsler. Υπάρχουν τέσσερις τέτοιες d-γραμμικές συνοχές, οι Cartan, Berwald, Chern-Rund και Hashiguchi και θα αναφέρονται ως Finsler συνοχές. Αυτές προκύπτουν από την μη γραμμική συνοχή Cartan και για κάθε μία υπάρχει ένα σύστημα αξιωμάτων που την καθορίζει μοναδικά.

Έστω μια d-γραμμική συνοχή $D = \left(N^i_j, F^i_{jk}, F^a_{bk}, C^i_{jk}, C^a_{bk}\right)$. Οι Finsler συνοχές που θα μελετήσουμε έχουν όλες την ιδιότητα $F^i_{jk} = F^a_{bk}$ και $C^i_{jk} = C^a_{bk}$. Θεωρούμε τις οριζόντιες και κατακόρυφες συναλλοίωτες παραγώγους D^h και D^v που ορίσαμε στην ενότητα 3.2. Σε τοπικές συντεταγμένες οι συναλλοίωτες παράγωγοι του μετρικού τανυστή g_{ij} δίνονται από

$$\begin{aligned} g_{ij|k} &= \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - g_{mj}F^m_{ik} - g_{im}F^m_{jk} = \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} - F_{(ij)k} \\ g_{ij}|_k &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - g_{mj}C^m_{ik} - g_{im}C^m_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} - C_{(ij)k} \end{aligned} \tag{4.40}$$

όπου $F_{(ij)k}$ είναι το συμμετρικό κομμάτι, ως προς τα i και j, του $F_{ijk} = g_{im}F^m_{jk}$.

Στην ενότητα 3.3 είδαμε ότι η στρέψη μιας d-γραμμικής συνοχής έχει πέντε συνιστώσες ως προς την προσαρμοσμένη βάση της TTM, που είναι (1,2) τύπου d-τανυστικά πεδία. Από αυτές ξεχωρίζουμε την $h\,(h)$-στρέψη $T^i_{jk} = F^i_{jk} - F^i_{kj} = 2F^i_{[jk]}$ και την $v\,(v)$-στρέψη $S^i_{jk} = C^i_{jk} - C^i_{kj} = 2C^i_{[jk]}$.

Θεώρημα 4.5.1. *Για ένα χώρο Finsler $F^n = (M, F(x,y))$ υπάρχει μια μοναδική d-γραμμική συνοχή $D = \left(N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk}\right)$ που ικανοποιεί να παρακάτω αξιώματα και ονομάζεται* ***Cartan γραμμική συνοχή****.*

C_1 : $D^i_j = y^i_{|j} = 0 \Leftrightarrow N^i_j = F^i_{kj}y^k$

C_2 : *D είναι h-metric:* $g_{ij|k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} = g_{mj}F^m_{ik} + g_{im}F^m_{jk} = 2F_{(ij)k}$

C_3 : *D είναι h-symmetric:* $T^i_{jk} = 0 \Leftrightarrow F^i_{jk} = F^i_{kj}$

C_4 : *D είναι v-metric:* $g_{ij}|_k = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = g_{mj}C^m_{ik} + g_{im}C^m_{jk} = 2C_{(ij)k}$

C_5 : *D είναι v-symmetric:* $S^i_{jk} = 0 \Leftrightarrow C^i_{jk} = C^i_{kj}$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει d-γραμμική συνοχή που ικανοποιεί τα πέντε παραπάνω αξιώματα $C_1 - C_5$. Από τα C_1 και C_2 προκύπτουν οι οριζόντιες συνιστώσες της συνοχής F^i_{jk}

$$F^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\delta g_{mk}}{\delta x^j} + \frac{\delta g_{mj}}{\delta x^k} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^m}\right) \tag{4.41}$$

Η σχέση (4.41) είναι ισοδύναμη με την παρακάτω έκφραση για τα $F_{ijk} = g_{im}F^m_{jk}$

$$F_{ijk} = \gamma_{ijk} - N^m_k C_{mij} - N^m_j C_{mik} - N^m_i C_{mkj} \tag{4.42}$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (4.42) με y^k και αθροίζουμε στο k. Από τα αξιώματα C_1 και C_3 έχουμε ότι $N_{ij} = F_{ikj}y^k = F_{ijk}y^k$. Χρησιμοποιώντας τις γνωστές σχέσεις $C_{mik}y^k = C_{mjk}y^k = 0$ παίρνουμε

$$N_{ij} = \gamma_{ij0} - N^m_k y^k C_{mij}, \quad \gamma_{ij0} = \gamma_{ijk}y^k \tag{4.43}$$

Πολλαπλασιάζοντας με g^{im} και y^k προκύπτει η σχέση

$$N^i_0 = N^i_k y^k = \gamma^i_{00} = \gamma^i_{jk}y^j y^k$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτήν στην (4.43) προκύπτει

$$N^i_j = \gamma_{ij0} - \gamma^m_{00} C^i_{mj} \tag{4.44}$$

που είναι ακριβώς οι συνιστώσες της μη γραμμικής συνοχής Cartan (4.27).

Μέχρι στιγμής δείξαμε ότι τα αξιώματα C_1, C_2 και C_3 καθορίζουν την μη γραμμική συνοχή (4.44) και τις οριζόντιες συνιστώσες της d-γραμμικής συνοχής F^i_{jk} (4.41). Το μόνο που απομένει να δείξουμε είναι ότι οι κατακόρυφες συνιστώσες C^i_{jk} καθορίζονται από τα αξιώματα C_4 και C_5. Πράγματι

$$C^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial y^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial y^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^m} \right) = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{mk}}{\partial y^j} = \frac{1}{4} g^{im} \frac{\partial^3 F^2}{\partial y^k \partial y^j \partial y^m} \tag{4.45}$$

που είναι οι συνιστώσες του τανυστή Cartan. □

Θεώρημα 4.5.2. *Για ένα χώρο Finsler $F^n = (M, F(x,y))$ υπάρχει μια μοναδική d-γραμμική συνοχή $D = \left(N^i_j, F^i_{jk}, C^i_{jk}\right)$ που ικανοποιεί να παρακάτω αξιώματα και ονομάζεται **Berwald γραμμική συνοχή**.*

$B_1 \;: D^i_j = y^i_{|j} = 0 \Leftrightarrow N^i_j = F^i_{kj} y^k$

$B_2 \;: F^2_{|i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta F^2}{\delta x^i} = 0$

$B_3 \;:$ *D είναι h-symmetric:* $T^i_{jk} = 0 \Leftrightarrow F^i_{jk} = F^i_{kj}$

$B_4 \;: C^i_{jk} = 0$

$B_5 \;: P^i_{jk} = 0 \Leftrightarrow F^i_{jk} = \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει d-γραμμική συνοχή που ικανοποιεί τα πέντε παραπάνω αξιώματα $B_1 - B_5$. Από τα B_4 και B_5 καθορίζεται η συνοχή αφού δίνονται οι συνιστώσες τις. Το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι τα άλλα τρία αξιώματα καθορίζουν μοναδικά την μη γραμμική συνοχή και αυτή είναι η Cartan μη γραμμική συνοχή.

Από τα αξιώματα B_1 και B_3 προκύπτει ότι η μη γραμμική συνοχή είναι συμμετρική και ομογενής, δηλαδή

$$\frac{\partial N^i_j}{\partial y^k} = \frac{\partial N^i_k}{\partial y^j} \quad \text{και} \quad \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k} y^k = N^i_j \tag{4.46}$$

Από το αξίωμα B_2 παίρνουμε

$$\frac{\delta F^2}{\delta x^i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F^2}{\partial x^i} - N^j_i \frac{\partial F^2}{\partial y^j} = 0$$

παραγωγίζοντας ως προς y^m παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^i \partial y^m} - \frac{\partial N^i_j}{\partial y^m} \frac{\partial F^2}{\partial y^j} - 2 N^j_i g_{jm} = 0$$

παραγωγίζοντας πάλι ως προς y^s παιρνουμε

$$\frac{\partial^3 F^2}{\partial x^i \partial y^m \partial y^s} - \frac{\partial^2 N^j_i}{\partial y^m \partial y^s} \frac{\partial F^2}{\partial y^j} - \frac{\partial N^j_i}{\partial y^m} \frac{\partial F^2}{\partial y^j \partial y^s} - 2 N^j_i \frac{\partial g_{jm}}{\partial y^s} - 2 \frac{\partial N^j_i}{\partial y^s} g_{jm} = 0$$

ισοδύναμα

$$2 \frac{\partial g_{ms}}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 N^j_i}{\partial y^m \partial y^s} \frac{\partial F^2}{\partial y^j} - 2 \frac{\partial N^j_i}{\partial y^m} g_{js} - 8 N^j_i C_{jms} - 2 \frac{\partial N^j_i}{\partial y^s} g_{jm} = 0 \tag{4.47}$$

Μεταθέτοντας κυκλικά τους δείκτες m, s, i της σχέσης (4.47) προκύπτουν άλλες δυο τέτοιες σχέσεις. Προσθέτοντας τις δυο πρώτες και αφαιρώντας την τρίτη σχηματίζεται η ποσότητα

$$\frac{\partial g_{ms}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^s} - \frac{\partial g_{is}}{\partial x^m}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\frac{1}{2}g^{km}$ και χρησιμοποιώντας την ομογένεια και την συμμετρικότητα παίρνουμε

$$\gamma_{is}^k y^i y^s = N_s^k y^s \Leftrightarrow 2G^k = N_s^k y^s \tag{4.48}$$

όπου G^k οι συνιστώσες του spray των γεωδαισιακών. Παραγωγίζοντας ως προς y^m παίρνουμε

$$2\frac{\partial G^k}{\partial y^m} = \frac{\partial N_s^k}{\partial y^m} y^s + N_m^k = \frac{\partial N_m^k}{\partial y^s} y^s + N_m^k = 2N_m^k$$

Άρα $N_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$ και επομένως η N είναι η μη γραμμική συνοχή Cartan. □

Θεώρημα 4.5.3. *Για ένα χώρο Finsler $F^n = (M, F(x,y))$ υπάρχει μια μοναδική d-γραμμική συνοχή $D = \left(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i\right)$ που ικανοποιεί να παρακάτω αξιώματα και ονομάζεται **Chern-Rund γραμμική συνοχή**.*

CR_1 : $D_j^i = y_{|j}^i = 0 \Leftrightarrow N_j^i = F_{kj}^i y^k$

CR_2 : *D είναι h-metric:* $g_{ij|k} = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta g_{ij}}{\delta x^k} = g_{mj}F_{ik}^m + g_{im}F_{jk}^m = 2F_{(ij)k}$

CR_3 : *D είναι h-symmetric:* $T_{jk}^i = 0 \Leftrightarrow F_{jk}^i = F_{kj}^i$

CR_4 : $C_{jk}^i = 0$

Απόδειξη. Όπως και στην απόδειξη του θεωρήματος 4.5.1 τα αξιώματα CR_1, CR_2, CR_3, που είναι ισοδύναμα με τα C_1, C_2, C_3 καθορίζουν πλήρως την Cartan μη γραμμική συνοχή με συνιστώσες N_j^i που δίνονται από την σχέση (4.44) και τις οριζόντιες συνιστώσες της d-γραμμικής συνοχής F_{kj}^i που δίνονται από την σχέση (4.41). Το αξίωμα CR_4 μας δίνει τις κατακόρυφες συνιστώσες $C_{jk}^i = 0$. □

Παρατηρούμε εδώ ότι η Chern-Rund συνοχή έχει ίδιες οριζόντιες συνιστώσες με την Cartan συνοχή, ενώ οι κατακόρυφες συνιστώσες είναι ίδιες με την Berwald συνοχή. Στην παρακάτω συνοχή Hashiguchi συμβαίνει το ανάποδο.

Θεώρημα 4.5.4. *Για ένα χώρο Finsler $F^n = (M, F(x,y))$ υπάρχει μια μοναδική d-γραμμική συνοχή $D = \left(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i\right)$ που ικανοποιεί να παρακάτω αξιώματα και ονομάζεται **Hashiguchi γραμμική συνοχή**.*

H_1 : $D_j^i = y_{|j}^i = 0 \Leftrightarrow N_j^i = F_{kj}^i y^k$

H_2 : $F_{|i}^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\delta F^2}{\delta x^i} = 0$

H_3 : *D είναι h-symmetric:* $T_{jk}^i = 0 \Leftrightarrow F_{jk}^i = F_{kj}^i$

H_4 : $P_{jk}^i = 0 \Leftrightarrow F_{jk}^i = \frac{\partial N_j^i}{\partial y^k}$

H_5 : *D είναι v-metric:* $g_{ij}|_k = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k} = g_{mj}C_{ik}^m + g_{im}C_{jk}^m = 2C_{(ij)k}$

H_6 : *D είναι v-symmetric:* $S_{jk}^i = 0 \Leftrightarrow C_{jk}^i = C_{kj}^i$

Απόδειξη. Τα αξιώματα $H_1 - H_4$ καθορίζουν την Cartan μη γραμμική συνοχή και τις οριζόντιες συνιστώσες της γραμμικής συνοχής όπως στην Berwald συνοχή. Τα αξιώματα H_5, H_6 καθορίζουν τις κατακόρυφες συνιστώσες της συνοχής όπως στην Cartan. □

Παρατητούμε ότι η μόνη συνοχή από τις παραπάνω που είναι πλήρως συμβατή με την μετρική, δηλαδή $g_{ij|k} = g_{ij}|_k = 0$, είναι η Cartan d-γραμμική συνοχή. Μόνο μέσω αυτής διατηρούνται κάτω από παράλληλη μετατόπιση τα μήκη και οι γωνίες διανυσμάτων. Για αυτό τον λόγο επιλέγουμε αυτήν την συνοχή στο δεύτερο μέρος της εργασίας για να αναπτύξουμε γενικευμένες θεωρίες βαρύτητας.

Τώρα, αναζητούμε ιδιότητες που είναι κοινές για τις τέσσερις παραπάνω d-γραμμικές συνοχές τις οποίες θα καλλούμε **Finsler συνοχές**. Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$D^i_j = y^i_{|j} = 0 \quad \text{και} \quad d^i_j = y^i_j = \delta^i_j \tag{4.49}$$

Πρόταση 4.5.5. *Οι παρακάτω ιδιότητες ισχύουν για καθεμία από τις τέσσερις Finsler συνοχές ενός χώρου Finsler $F^n = (M, F)$*

$$\begin{aligned} &1. \quad F_{|k} = 0 \qquad F|_k = \frac{1}{F} y_k \\ &2. \quad F^2_{|k} = 0 \qquad F^2|_k = 2y_k \\ &3. \quad y_{i|k} = 0 \qquad y_i|_k = g_{ik} \end{aligned} \tag{4.50}$$

Πρόταση 4.5.6. *Οι ταυτότητες Ricci μιας Finsler συνοχής δίνονται από*

$$\begin{aligned} &X^i_{|k|h} - X^i_{|h|k} = X^r R^i_{rkh} - X^i|_r R^r_{kh} \\ &X^i_{|k}|_h - X^i|_{h|k} = X^r P^i_{rkh} - X^i_{|r} C^r_{kh} - X^i|_r P^r_{kh} \\ &X^i|k|h - X^i|h|k = X^r S^i_{rkh} \end{aligned} \tag{4.51}$$

Θεωρούμε τους d-συναλλοίωτους τανυστές καμπυλότητας

$$R_{ijkh} = g_{js} R^s_{ikh} \quad P_{ijkh} = g_{js} P^s_{ikh} \quad S_{ijkh} = g_{js} S^s_{ikh}$$

Πρόταση 4.5.7. *Οι συναλλοίωτοι d-τανυστές καμπυλότητας ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις*

$$\begin{aligned} &R_{ijkh} + R_{jikh} = 0 \quad P_{ijkh} + P_{jikh} = 0 \quad S_{ijkh} + S_{jikh} = 0 \\ &R_{ijkh} + R_{ijhk} = 0 \quad S_{ijkh} + S_{ijhk} = 0 \end{aligned} \tag{4.52}$$

Πρόταση 4.5.8. *Μια Finsler συνοχή D έχει τις παρακάτω ιδιότητες*

$$\begin{aligned} &R^i_{0hk} = R^i_{hk} \quad P^i_{0hk} = P^i_{hk} \quad S^i_{0hk} = S^i_{hk} \\ &P_{ijk} = C_{ijk|0} \quad \Sigma_{(ijk)} R_{ijk} = 0 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Για όλες τις Finsler συνοχές που συναντήσαμε παραπάνω η μη γραμμική συνοχή τους είναι η Cartan μη γραμμική συνοχή, με συνιστώσες που δίνονται από την σχέση (4.27). Επίσης για όλες τις Finsler συνοχές ισχύει η σχέση $F^i_{jk}(x, y)\, y^k = N^i_j(x, y)$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση των αυτοπαράλληλων καμπύλων της μη γραμμικής συνοχής Cartan (2.35) στην μορφή

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + F^i_{jk}\left(x.\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0 \tag{4.54}$$

Θεώρημα 4.5.9. *Μια καμπύλη σε έναν χώρο Finsler $F^n = (M, F(x, y))$ είναι αυτοπαράλληλη καμπύλη για την μη γραμμική συνοχή Cartan αν και μόνο αν είναι γεωδαισιακή καμπύλη μιας Finsler συνοχής.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει στην ενότητα (3.5) μια καμπύλη στην πολλαπλότητα M είναι γεωδαισιακή για την d-γραμμική συνοχή αν η φυσική της επέκταση στην δέσμη είναι γεωδαισιακή, δηλαδή αν ικανοποιεί την σχέση

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x^i}{dt^2} + F^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} + C^i_{ja}\frac{dx^j}{dt}\frac{\delta y^a}{dt} = 0 \\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta y^a}{dt}\right) + F^a_{bk}\frac{\delta y^b}{dt}\frac{dx^k}{dt} + C^a_{bc}\frac{\delta y^b}{dt}\frac{\delta y^c}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{4.55}$$

όπου $(x, y) = \left(x, \frac{dx}{dt}\right)$. Για μια Finsler συνοχή ισχύει η σχέση $C^i_{jk}(x, y)\, y^j = 0$, άρα η πρώτη σχέση της (4.55) είναι ισοδύναμη με την (4.54) και έτσι η γεωδαισιακή είναι αυτοπαράλληλη. Το αντίστροφο είναι προφανές αφού για μια αυτοπαράλληλη καμπύλη ισχύει $\frac{\delta y^a}{dt} = 0$. □

Σύμφωνα με το θεώρημα (4.29) οι αυτοπαράλληλες καμπύλες της μη γραμμικής συνοχής Cartan παραμετρησμένες με το μήκος του τόξου συμπύπτουν με τις γεωδαισιακές του χώρου Finsler. Άρα σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα μια καμπύλη στην πολλαπλότητα παραμετρησμένη με το μήκος τόξου είναι γεωδαισιακή του χώρου αν και μόνο αν είναι γεωδαισιακή μιας Finsler συνοχής. Αυτό μας δίνει ελευθερία στην επιλογή μιας Finsler συνοχής αν θέλουμε να μελετήσουμε τις γεωδαισιακές του χώρου.

4.6 Εγγυτατοποιημένος Riemann χώρος

Έστω $F^n = (M, F(x, y))$ ένας χώρος Finsler και $\xi(x) : M \to TM$ ένα διανυσματικό πεδίο στην πολλαπλότητα M. Τότε ορίζεται μία Riemann μετρική στην πολλαπλότητα M που προκύπτει από τον Finsler μετρικό τανυστή g_{ij} και το διανυσματικό πεδίο $\xi(x)$.

$$\gamma_{ij}(x) = g_{ij}(x, \xi(x)) \tag{4.56}$$

Ο χώρος (M, γ_{ij}) καλείται **εγγυτατοποιημένος Riemann χώρος**, γιατί είναι ένας Riemann χώρος προερχόμενος από έναν Finsler μέσω εγγυτατοποίησης και η μετρική σε κάθε σημείο εξαρτάται και από μια κατεύθυνση.

Το πιο απλό παράδειγμα ενός τέτοιου χώρου είναι το εξής: Θεωρούμε μια καμπύλη $c : t \in I \subset \mathbb{R} \to \left(x^i(t)\right) \in M$ του χώρου Finsler F^n και παίρνουμε το πεδίο ταχυτήτων της $\xi(t) = \frac{dx^i}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}$. Επεκτείνουμε το πεδίο ταχυτήτων σε ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται σε μια περιοχή της M γύρω από την καμπύλη (αυτό δεν γίνεται πάντα αλλά η υλοποίησή του εξαρτάται από την καμπύλη). Τότε όπως δείξαμε παραπάνω προκύπτει ένας εγγυτατοποιημένος Riemann χώρος κατά μήκος της καμπύλης c.

Ο εγγυτατοποιημένος χώρος είναι τύπου Riemann άρα εφοδιάζεται με την Levi-Civita συνοχή που προκύπτει από την μετρική γ_{ij}. Αν V^i είναι ένα διανυσματικό πεδίο κατά μήκος μιας καμπύλης $c(t) = \left(x^i(t)\right)$ τότε η συναλλοίωτη παράγωγος δίνεται από

$$\frac{DV^i}{dt} = \frac{dV^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} V^k \frac{dx^j}{dt} \tag{4.57}$$

όπου Γ^i_{jk} είναι τα σύμβολα Christoffel δευτέρου είδους ως προς την μετρική γ_{ij}, δηλαδή

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{ih}\left(\frac{\partial \gamma_{hk}}{\partial x^j} + \frac{\partial \gamma_{hj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \gamma_{jk}}{\partial x^h}\right) \tag{4.58}$$

Αν αντικαταστήσουμε την σχέση (4.56) στην (4.58) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{jk}(x) = \gamma^i_{jk}(x, \xi(x)) + C^i_{kl}(x, \xi(x)) \frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} + C^i_{jl}(x, \xi(x)) \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} - \\ - g^{ih}(x, \xi(x))\, C_{kjl}(x, \xi(x)) \frac{\partial \xi^l}{\partial x^h}\end{aligned} \tag{4.59}$$

όπου τα σύμβολα γ^i_{jk} ορίζονται όπως στην σχέση (4.22).

Αν επικεντροθούμε στο παράδειγμα του εγγυτατοποιημένου Riemann χώρου κατά μήκος μιας καμπύλης c που είδαμε παραπάνω και παραγωγίσουμε κατα μήκος της καμπύλης αυτής, τότε $\frac{dx^j}{dt} = \xi^j(x)$ και από την σχέση $C_{ijk} y^j = 0$ η σχέση (4.57) παίρνει την μορφή

$$\frac{DV^i}{dt} = \frac{dV^i}{dt} + \gamma^i_{jk}(x, \xi)\, V^k \frac{dx^j}{dt} + C^i_{kl}(x, \xi) \frac{d^2 x^l}{dt^2} V^k \tag{4.60}$$

Η εξίσωση των γεωδαισιακών για τον εγγυτατοποιημένο Riemann χώρο είναι

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0 \tag{4.61}$$

Ένας χώρος Finsler είναι ουσιαστικά 8-διάστατος (η μετρική έχει εξάρτηση από 8 μεταβλητές). Αντίθετα αντιλαμβανόμαστε τον χωροχρόνο σαν μια 4-διάστατη οντότητα. Το πλεονέκτημα του να δουλεύεις με τον εγγυτατοποιημένο χώρο Riemann είναι ότι μειώνει την διάσταση, γεγονός που εξυπηρετεί στην φυσική γι΄αυτό και τον χρησιμοποιούμε στο κεφάλαιο 8 για να περιγράψουμε το Finsler-Randers κοσμολογικό μοντέλο.

Κεφάλαιο 5

Μετρικές δομές στην εφαπτόμενη δέσμη TM

5.1 Ζεύγη semisprays και μη γραμμικών συνοχών συμβατά με την μετρική

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε δεδομένη μια μη γραμμική συνοχή N στην εφαπτόμενη δέσμη TM. Αυτή επάγει την προσαρμοσμένη δυική βάση $\left(dx^i, \delta y^a\right)$

Ορισμός 5.1.1. *Μια* ***μετρική στην εφαπτόμενη δέσμη*** *TM είναι ένα (0,2)-τύπου d-τανυστικό πεδίο $g_{ij}\left(x,y\right)$ που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες*

1. *Είναι συμμετρικό, δηλαδή $g_{ij}\left(x,y\right) = g_{ji}\left(x,y\right)$*

2. *Είναι μη εκφυλισμένο, δηλαδή $det\left(g_{ij}\left(x,y\right)\right) \neq 0$*

3. *Η τετραγωνική μορφή $g_{ij}\left(x,y\right)\xi^i\xi^j$, $\left(\xi^i\right) \in \mathbb{R}^n$ έχει σταθερή υπογραφή.*

Προκύπτουν λοιπόν διάφορα παραδείγματα μετρικών δομών στην δέσμη. Μια οριζόντια μετρική θα έχει την μορφή $G^h = g_{ij}\left(x,y\right)dx^i \otimes dx^j$, ενώ μια κατακόρυφη μετρική θα είναι $G^v = h_{ab}\left(x,y\right)\delta y^a \otimes \delta y^b$. Τέλος προκύπτουν και μετρικές μικτού τύπου

$$G = g_{ij}\left(x,y\right)dx^i \otimes dx^j + h_{ab}\left(x,y\right)\delta y^a \otimes \delta y^b \tag{5.1}$$

Ορισμός 5.1.2. *Έστω N μια μη γραμμική συνοχή και S ένα semispray. Η δυναμική συναλλοίωτη παράγωγος ∇ που αντιστοιχεί στο ζεύγος (S,N) ορίζεται απο τις συντεταγμένες της*

$$\left(\nabla X\right)^i = S\left(X^i\right) + N^i_j X^j \tag{5.2}$$

και επεκτείνεται σε κάθε τύπου d-τανυστικό πεδίο με τον κλασικό τρόπο.

Είναι σημαντικό να προσέξουμε την εξής διαφορά. Άλλο είναι η δυναμική συναλλοίωτη παράγωγος που ορίσαμε εδώ και αντιστοιχεί στο ζεύγος (S,N) ενός semispray και μιας μη γραμμικής συνοχής που είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και άλλο η δυναμική συναλλοίωτη παράγωγος που ορίσαμε στην ενότητα 2.6 όπου το semispray επάγεται από την μη γραμμική συνοχή.

Ορισμός 5.1.3. *Έστω G μια μετρική στην εφαπτόμενη δέσμη TM, N μια μη γραμμική συνοχή, S ένα semispray και ∇ η δυναμική συναλλοίωτη παράγωγος που αντιστοιχεί στο ζεύγος (S,N). Το ζεύγος (S,N) είναι* ***συμβατό με την μετρική*** *G αν $\nabla G = 0$ που είναι ισοδύναμο με την σχέση*

$$S\left(G\left(X,Y\right)\right) = G\left(\nabla X, Y\right) + G\left(X, \nabla Y\right) \tag{5.3}$$

Στην ενότητα 4.4 ορίσαμε τους τελεστές Obata

$$O^{ij}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\delta^i_k\delta^j_l - g^{ij}g_{kl}\right) \qquad O^{*ij}_{kl} = \frac{1}{2}\left(\delta^i_k\delta^j_l + g^{ij}g_{kl}\right) \tag{5.4}$$

Θα τους χρησιμοποιήσουμε ξανά για το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 5.1.4. *Έστω S ένα semispray με συνιστώσες G^i και N η επαγώμενη μη γραμμική συνοχή με συνιστώσες $N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$. Τότε υπάρχει μια μη γραμμική συνοχή N^c ώστε το ζεύγος (S, N) να είναι συμβατό με την μετρική G και οι συνιστώσες της δίνονται από*

$$N^{ci}_j = \frac{1}{2}G^{ik}S\left(G_{kj}\right) + O^{ik}_{sj}N^s_k \tag{5.5}$$

Απόδειξη. Οι συνιστώσες της νέας μη γραμμικής συνοχής N^c που δίνονται από την σχέση (5.4) μπορούν να γραφούν ισοδύναμα ως εξής

$$N^{ci}_j = \frac{1}{2}G^{ik}G_{kj|} + N^i_j \tag{5.6}$$

όπου η δυναμική συναλλοίωτη παραγώγιση $G_{ij|}$ γίνεται σύμφωνα με το ζεύγος (S, N). Θεωρούμε τώρα την δυναμική συναλλοίωτη παράγωγο ∇ που αντιστοιχεί στο ζεύγος (S, N^c). Με έναν γρήγορο υπολογισμό εύκολα ελέγχουμε ότι ισχύει η σχέση

$$S\left(G_{ij}\right) - G_{im}N^{cm}_j - G_{mj}N^{cm}_i = 0 \tag{5.7}$$

που σημαίνει ότι το ζεύγος (S, N^c) είναι συμβατό με την μετρική G. □

Από την σχέση για τις συνιστώσες της νέας μη γραμμικής συνοχής (5.6), προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα

Πρόταση 5.1.5. *Έστω S ένα semispray με συνιστώσες G^i, N η επαγώμενη μη γραμμική συνοχή με συνιστώσες $N^i_j = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}$ και N^c η νέα μη γραμμική συνοχή που ορίσαμε παραπάνω. Το ζεύγος (S, N) είναι συμβατο με την μετρική G αν και μόνο αν $N = N^c$.*

Θεώρημα 5.1.6. *Έστω S ένα semispray και N^c η μη γραμμική συνοχή που ορίστηκε από την σχέση (5.5). Η οικογένεια όλων των μη γραμμικών συνοχών N που το αντίστοιχο ζεύγος (S, N) είναι συμβατό με την μετρική G δίνεται από την σχέση*

$$N^i_j = N^{ci}_j + O^{ki}_{jm}X^m_k \tag{5.8}$$

όπου X^m_k είναι ένα τυχαίο (1,1)-τύπου d-τανυστικό πεδίο.

Απόδειξη. Η συνθήκες της συμβατότητας με την μετρική G για τις δύο μη γραμμικές συνοχές γράφονται

$$\begin{aligned} S\left(G_{ij}\right) &= G_{im}N^m_j + G_{mj}N^m_i \\ S\left(G_{ij}\right) &= G_{im}N^{cm}_j + G_{mj}N^{cm}_i \end{aligned} \tag{5.9}$$

Συνδιάζοντας τα προκύπτει η τανυστική εξίσωση

$$O^{*is}_{jm}\left(N^m_i - N^{cm}_i\right) = 0 \tag{5.10}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $O^{ij}_{kl}O^{*km}_{pj} = 0$, η λύση της εξίσωσης (5.10) είναι η σχέση (5.8). □

5.2 d-γραμμικές συνοχές συμβατές με την μετρική

Έστω μια μη γραμμική συνοχή N χωρίς στρέψη, για παράδειγμα μια μη γραμμική συνοχή επαγώμενη από ένα semispray S. Σε μια τέτοια περίπτωση η συνοχή είναι συμμετρική.

Θεωρούμε επίσης μια d-γραμική συνοχή $D = \left(N^i_j, F^i_{jk}, F^a_{bk}, C^i_{jc}, C^a_{bc}\right)$ στην εφαπτόμενη δέσμη TM και μια μετρική G μικτού τύπου όπως στην σχέση (5.1).

Ορισμός 5.2.1. *Μια d-γραμμική συνοχή D στην δέσμη TM είναι συμβατή με την μετρική G αν $D_X G = 0, \quad \forall X \in CM$*

Πρόταση 5.2.2. *Μια d-γραμμική συνοχή D στην δέσμη TM είναι συμβατή με την μετρική $G = G^h + G^v$ αν και μόνο αν*

$$D^h_X G^h = 0, \quad D^h_X G^v = 0, \quad D^v_X G^h = 0, \quad D^v_X G^v = 0 \tag{5.11}$$

Απόδειξη. Η σχέση $D_X G = 0, \forall X \in CM$ είναι ισοδύναμη με τις $D^h_X G = 0$ και $D^v_X G = 0$. Επιπλέον παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις $G\left(X^h, Y^h\right) = G^h\left(X, Y\right), \quad G\left(X^v, Y^v\right) = G^v\left(X, Y\right)$ και $G\left(X^h, Y^v\right) = 0$. Επομένως έχουμε $\left(D^h_X G\right)\left(Y^h, Z^h\right) = \left(D^h_X G^h\right)(X, Z) = 0, \quad \left(D^h_X G\right)(Y^v, Z^v) = \left(D^h_X G^v\right)(Y, Z) = 0$ και όμοια για τα άλλα δύο. Επομένως παίρνουμε την επιθυμητή ισοδυναμία. □

Πρόταση 5.2.3. *Αν η d-γραμμική συνοχή D έχει συνιστώσες $D = \left(F^i_{jk}, F^a_{bk}, C^i_{jc}, C^a_{bc}\right)$, τότε είναι συμβατή με την μετρική G αν και μόνο αν*

$$g_{ij|k} = 0, \quad g_{ij}|_c = 0, \quad h_{ab|k} = 0, \quad h_{ab}|_c = 0 \tag{5.12}$$

Θεωρούμε μια τυχαία d-γραμμική συνοχή $D = \left(F^i_{jk}, F^a_{bk}, C^i_{jc}, C^a_{bc}\right)$ και τα σύμβολα

$$\tilde{F}^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ih} \left(\frac{\delta g_{hj}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{hk}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^h}\right) \qquad \tilde{C}^a_{bc} = \frac{1}{2} h^{ad} \left(\frac{\partial h_{bd}}{\partial y^c} + \frac{\partial h_{cd}}{\partial y^b} - \frac{\partial h_{bc}}{\partial y^d}\right) \tag{5.13}$$

Θεώρημα 5.2.4. *Η d-γραμμική συνοχή $\tilde{D}$ που οι συνιστώσες της δίνονται από την σχέση (5.13) και (5.14)*

$$\tilde{F}^a_{bk} = F^a_{bk} + \frac{1}{2} h^{ac} h_{bc|k}, \qquad \tilde{C}^i_{jc} = C^i_{jc} + \frac{1}{2} g^{ih} g_{hj}|_c \tag{5.14}$$

είναι συμβατή με την μετρική G. Οι παραπάνω παραγωγίσεις της σχέσης (5.14) αντιστοιχούν στην τυχαία συνοχή D.

Απόδειξη. Εύκολα μπορούμε να εξάγουμε τις σχέσεις (5.12) για την d-γραμμική συνοχή $\tilde{D}$ □

Επιλέγουμε τις δύο συνιστώσες της d-γραμμικής συνοχής D να είναι

$$F^a_{bk} = \frac{\partial N^a_k}{\partial y^b}, \qquad C^i_{jc} = 0 \tag{5.15}$$

κάτι που είναι επιτρεπτό αφού οι συναρτήσεις αυτές ικανοποιούν της απαιτούμενες σχέσεις μετασχηματισμού των συνιστωσών μιας d-γραμμικής συνοχής (3.2). Τότε οι συνιστώσες της d-γραμμικής συνοχής $\tilde{D}$ εξαρτώνται μόνο από τα N^a_k, g_{ij} και h_{ab} και δίνονται από τις σχέσεις (5.13) και (5.16).

$$\tilde{F}^a_{bk} = \frac{\partial N^a_k}{\partial y^b} + \frac{1}{2} h^{ac} \left(\frac{\delta h_{bc}}{\delta x^k} - \frac{\partial N^d_k}{\partial y^b} h_{dc} - \frac{\partial N^d_k}{\partial y^c} h_{bd}\right) \quad \tilde{C}^i_{jc} = \frac{1}{2} g^{ih} \frac{\partial g_{hj}}{\partial y^c} \tag{5.16}$$

Η d-γραμμική συνοχή $\tilde{D} = \left(\tilde{F}^i_{jk}, \tilde{F}^a_{bk}, \tilde{C}^i_{jc}, \tilde{C}^a_{bc}\right)$ με συνιστώσες που δίνονται από τις σχέσεις (5.13) και (5.16) είναι συμβατή με την μετρική G και ονομάζεται **N-κανονική d-συνοχή**.

Τώρα θα βρούμε το σύνολο όλων των d-γραμμικών συνοχών που είναι συμβατές με την μετρική G. Όπως και σε προηγούμενα ερωτήματα αντίστοιχου τύπου θα χρειαστούμε τους τελεστές Obata. Οι τελεστές Obata των μετρικών g_{ij} και h_{ab} ορίζονται ως εξής

$$\begin{aligned} \Omega^{ij}_{hk} &= \frac{1}{2}\left(\delta^i_h \delta^j_k - g_{hk} g^{ij}\right) & \Omega^{*ij}_{hk} &= \frac{1}{2}\left(\delta^i_h \delta^j_k + g_{hk} g^{ij}\right) \\ \theta^{ab}_{cd} &= \frac{1}{2}\left(\delta^a_c \delta^b_d - h_{cd} h^{ab}\right) & \theta^{*ab}_{cd} &= \frac{1}{2}\left(\delta^a_c \delta^b_d + h_{cd} h^{ab}\right) \end{aligned} \tag{5.17}$$

Θεώρημα 5.2.5. *Το σύνολο των d-γραμμικών συνοχών που είναι συμβατές με την μετρική G της εφαπτόμενης δέσμης δίνεται από*

$$\begin{aligned} F^i_{jk} &= \tilde{F}^i_{jk} + \Omega^{ih}_{rj} X^r_{hk} & F^a_{bk} &= \tilde{F}^a_{bk} + \theta^{af}_{db} X^d_{fk} \\ C^i_{jc} &= \tilde{C}^i_{jc} + \Omega^{ih}_{rj} Y^r_{hc} & C^a_{bc} &= \tilde{C}^a_{bc} + \theta^{af}_{db} Y^d_{fc} \end{aligned} \tag{5.18}$$

όπου $\tilde{D} = \left(\tilde{F}^i_{jk}, \tilde{F}^a_{bk}, \tilde{C}^i_{jc}, \tilde{C}^a_{bc}\right)$ είναι η N-κανονική d-συνοχή και $X^i_{jk}, X^a_{bk}, Y^i_{jb}, Y^a_{bc}$ είναι τυχαία d-τανυστικά πεδία.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι στην ίδια λογική με αυτήν του θεωρήματος (4.4.5). □

Ένα άμεσο πόρισμα του παραπάνω θεωρήματος είναι η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 5.2.6. *Υπάρχει μία d-γραμμική συνοχή $D = \left(F^i_{jk}, F^a_{bk}, C^i_{jc}, C^a_{bc}\right)$ που ικανοποιεί τα εξής*

1. *Είναι συμβατή με την μετρική G*
2. *$F^a_{bk} = \tilde{F}^a_{bk}$ και $C^i_{jc} = \tilde{C}^i_{jc}$ και δίνονται από την σχέση (5.16)*
3. *Οι συνιστώσες της στρέψης T^i_{jk} και S^a_{bc} δίνονται εκ των προτέρων.*

Οι άλλες δύο συνιστώσες αυτής της συνοχής δίνονται από

$$\begin{aligned} F^i_{jk} &= \tilde{F}^i_{jk} + \frac{1}{2} g^{ir}\left(g_{rh} T^h_{jk} - g_{jh} T^h_{rk} + g_{kh} T^h_{jr}\right) \\ C^a_{bc} &= \tilde{C}^a_{bc} + \frac{1}{2} h^{af}\left(h_{fd} S^d_{bc} - h_{bd} S^d_{fc} + h_{cd} S^d_{bf}\right) \end{aligned} \tag{5.19}$$

Πρόταση 5.2.7. *Υπάρχει μοναδική d-γραμμική συνοχή $D = \left(F^i_{jk}, F^a_{bk}, C^i_{jc}, C^a_{bc}\right)$ που ικανοποιεί τα εξής*

1. *Είναι συμβατή με την μετρική G*
2. *$F^i_{jk} = F^a_{bk}$ και $C^a_{bc} = C^i_{jc}$*
3. *$T^i_{jk} = 0$ και $S^a_{bc} = 0$*

και οι συνιστώσες της δίνονται από

$$F^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{ih}\left(\frac{\delta g_{hj}}{\delta x^k} + \frac{\delta g_{hk}}{\delta x^j} - \frac{\delta g_{jk}}{\delta x^h}\right) \qquad C^a_{bc} = \frac{1}{2} h^{ad}\left(\frac{\partial h_{bd}}{\partial y^c} + \frac{\partial h_{cd}}{\partial y^b} - \frac{\partial h_{bc}}{\partial y^d}\right) \tag{5.20}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση $g_{ij|k} = 0$ και την συμμετρικότητα $T^i_{jk} = 0$ εξάγουμε τον τύπο για το F^i_{ik}. Όμοια και για το C^a_{bc}. □

Οι τανυστικές συνιστώσες της καμπυλότητας μιας d-γραμμικής συνοχής συμβατής με την μετρική παρουσιάζουν ενδιαφέρον ιδιότητες. Αρχικά ας θυμηθούμε ότι

$$R_{ijkl} = g_{jh} R^h_{ikl} \tag{5.21}$$

και το ίδιο ισχύει και για τις άλλες συνιστώσες της καμπυλότητας. Τώρα μπορούμε να παρουσιάσουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.8. *Κάθε d-γραμμική συνοχή D στην δέσμη TM που είναι συμβατή με την μετρική G, ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες.*

$$\begin{aligned}
&R_{ijkl} + R_{jikl} = 0, \quad P_{ijkd} + P_{jikd} = 0, \quad S_{ijbc} + S_{jibc} = 0 \\
&R_{abjk} + R_{bajk} = 0, \quad P_{abkd} + P_{bakd} = 0, \quad S_{abcd} + S_{bacd} = 0 \\
&R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0, \quad R_{abjk} + R_{abkj} = 0 \\
&S_{ijbc} + S_{ijcb} = 0, \quad S_{abcd} + S_{abdc} = 0
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Μέρος ΙΙ

Εφαρμογές στην Βαρύτητα

Κεφάλαιο 6

Γενική Σχετικότητα και Κοσμολογία

Η γενική θεωρία της σχετικότητας είναι μια θεωρία βαρύτητας που ανέπτυξε ο Einstein εμπνευσμένος από την εξέλιξη της Ευκλείδειας γεωμετρίας που έγινε από τον Riemann. Η ιδέα της γενικής θεωρίας της σχετικότητας κρύβεται στην εξής φράση " Η ύλη δείχνει στον χωροχρόνο πως θα καμπυλωθεί και η καμπυλότητα δείχνει στην ύλη πως θα κινηθεί ". Στο κεφάλαιο αυτό αρχικά παρουσιάζουμε τις εξισώσεις πεδίου του Einstein και με την βοήθεια αυτών την μετρική FRW ενός ομογενούς και ισοτροπικού χωρικά σύμπαντος κοιτάζοντας το σε μεγάλη κλίμακα. Τέλος αναφέρουμε το καθιερωμένο μοντέλο της κοσμολογίας.

6.1 Η βαρύτητα ως γεωμετρία του χωροχρόνου

Μετά τον Einstein που έκανε την αρχή, πολλά είναι τα παραδείγματα που μας έδωσαν το κίνητρο να δούμε ότι υπό την παρουσία της βαρύτητας ο χωροχρόνος πρέπει να θεωρηθεί ως μια τετραδιάστατη πολλαπλότητα με καμπυλότητα. Οι νόμοι της φυσικής πρέπει να είναι σε τανυστική μορφή για να είναι αναλλοίωτοι από τις αλλαγές συντεταγμένων και σε μικρές περιοχές του χωροχρόνου (όπου η καμπυλότητα είναι αμελητέα) πρέπει να συμφωνούν με αυτούς της ειδικής σχετικότητας.

Με αυτή την μέθοδο γενίκευσης που υιοθετούμε προκύπτει ότι οι τροχιές σωματιδίων σε καμπυλωμένο χωρόχρονο απουσία άλλων δυνάμεων περιγράφονται από την εξίσωση των γεωδαισιακών. Άρα για την περιγραφή των τροχιών απαιτούνται οι συντελεστές της συνοχής. Εδώ έχουμε δύο επιλογές, είτε θα απαιτήσουμε την συμβατότητα της συνοχής με την μετρική, οπότε οι συντελεστές της συνοχής καθορίζονται πλήρως από την μετρική, είτε θα δουλέψουμε ανεξάρτητα από την μετρική (μέθοδος Palatini).

Σε κάθε περίπτωση το μοντέλο που μελετάμε περιγράφεται ως μια κλασική θεωρία πεδίου, οπότε οι εξισώσεις για τα δυναμικά πεδία θα καθορίζονται από τα κρίσιμα σημεία μιας δράσης S. Η δράση αυτή προτάθηκε για πρώτη φορά από τον Hilbert και είναι το ολοκλήρωμα πάνω στον χωροχρόνο μιας Lagrange μορφής

$$S = \int \sqrt{-g}\mathcal{L} d^4x \tag{6.1}$$

Η βαρύτητα περιγράφεται από τα γεωμετρικά δυναμικά πεδία $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ και τα πεδία ύλης που βρίσκονται στον χωροχρόνο. Γι'αυτό η δράση χωρίζεται σε δύο μέρη

$$S = \frac{1}{2k}S_G + S_M = \frac{1}{2k}\int \sqrt{-g}\mathcal{L}_G d^4x + \int \sqrt{-g}\mathcal{L}_M d^4x \tag{6.2}$$

όπου οι δείκτες G και M συμβολίζουν το γεωμετρικό και υλικό μέρος αντίστοιχα, ενώ η σταθερά k έχει να κάνει με το Νευτώνιο όριο της θεωρίας.

6.2 Εξισώσεις πεδίου του Einstein

6.2.1 Μετρική μέθοδος

Θεωρούμε τον χωροχρόνο σαν μία τετραδιάστατη pseudo-Riemann πολλαπλότητα εφοδιασμένη με την Levi-Civita συνοχή, οπότε το μοναδικό δυναμικό πεδίο είναι η μετρική $g_{\mu\nu}$. Η δράση $\mathcal{L}_G$ μπορεί να εξαρτάται από το δυναμικό πεδίο και τις διάφορες τάξεις παραγώγων του. Για να μην είναι η εξάρτηση της δράσης από την μετρική τετριμμένη θα πρέπει η συναρτησιακή της μορφή να περιέχει τουλάχιστον δευτέρας τάξης παραγώγους της μετρικής.

Η τανυστική καμπυλότητα Riemann είναι ένα τέτοιο μέγεθος και το πιο προφανές βαθμωτό που μπορούμε να πάρουμε από αυτήν είναι η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci R. Μάλιστα αποδεικνύεται ότι είναι το μοναδικό βαθμωτό που μπορεί να κατασκευαστεί με γινόμενα του μετρικού τανυστή και των πρώτων δύο παραγώγων του. Έτσι ορίζουμε την δράση Hilbert ως

$$S_G = \int \sqrt{-g} R d^4x \tag{6.3}$$

Τώρα θα υπολογίσουμε την μεταβολή της δράσης δS για μεταβολές της μετρικής $\delta g^{\mu\nu}$ χρησιμοποιώντας μόνο το γεωμετρικό μέρος της δράσης.

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \int \delta\left(\sqrt{-g}R\right) d^4x = \int \left(\delta\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\delta R\right) d^4x = \\ &= \int \left[\delta\sqrt{-g}R + \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\right] d^4x \end{aligned} \tag{6.4}$$

Από την γνωστή ταυτότητα για τετραγωνικούς πίνακες, $ln\left(detM\right) = tr\left(lnM\right)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{detM}\delta M = tr\left(M^{-1}\delta M\right) &\Rightarrow \frac{1}{g}\delta g = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &\Rightarrow \delta g = -g g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{6.5}$$

και από εδώ βρίσκουμε την μεταβολή της μετρικής

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\left(-\delta g\right) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{6.6}$$

Εν συνεχεία θα υπολογίσουμε την μεταβολή των συμβόλων Christoffel

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\delta\left[g^{k\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu k}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{k}}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{2}\delta g^{k\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu k}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu k}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{k}}\right) + \frac{1}{2}g^{k\lambda}\left(\frac{\partial \delta g_{\mu k}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \delta g_{\nu k}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \delta g_{\mu\nu}}{\partial x^{k}}\right) = \\ &= g_{k\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g^{k\lambda} + \frac{1}{2}g^{k\lambda}(\nabla_{\nu}\delta g_{\mu k} + \nabla_{\mu}\delta g_{\nu k} - \nabla_{k}\delta g_{\mu\nu} \\ &+ \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta g_{\rho k} + \Gamma^{\rho}_{k\nu}\delta g_{\mu\rho} + \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}\delta g_{\rho k} + \Gamma^{\rho}_{k\mu}\delta g_{\nu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\nu k}\delta g_{\mu\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu k}\delta g_{\rho\nu}) = \\ &= g_{k\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g^{k\lambda} + g^{k\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta g_{\rho k} + \frac{1}{2}g^{k\lambda}\left(\nabla_{\nu}\delta g_{\mu k} + \nabla_{\mu}\delta g_{\nu k} - \nabla_{k}\delta g_{\mu\nu}\right) = \\ &= g_{k\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\delta g^{k\lambda} - g_{k\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta g^{k\lambda} - \frac{1}{2}\left(g_{\mu k}\nabla_{\nu}\delta g^{k\lambda} + g_{\nu k}\nabla_{\mu}\delta g^{k\lambda} + \nabla^{\lambda}\delta g_{\mu\nu}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(g_{\mu k}\nabla_{\nu}\delta g^{k\lambda} + g_{\nu k}\nabla_{\mu}\delta g^{k\lambda} - g_{\mu k}g_{\nu\rho}\nabla^{\lambda}\delta g^{k\rho}\right) \end{aligned} \tag{6.7}$$

ενώ η μεταβολή του τανυστή Ricci δίνεται από

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu} &= \delta\left[\frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial\lambda} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\right] = \\ &= \frac{\partial\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial\lambda} - \frac{\partial\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}}{\partial\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\rho\nu} = \\ &= \nabla_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \nabla_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \end{aligned} \tag{6.8}$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (6.7) στην (6.8) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\left(g_{\mu k}\nabla_\lambda\nabla_\nu\delta g^{k\lambda} + g_{\nu k}\nabla_\lambda\nabla_\mu\delta g^{k\lambda} - g_{\mu k}g_{\nu\rho}\nabla_\lambda\nabla^\lambda\delta g^{k\rho}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(g_{\mu k}\nabla_\nu\nabla_\lambda\delta g^{k\lambda} + g_{\lambda k}\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g^{k\lambda} - g_{\mu k}g_{\lambda\rho}\nabla_\nu\nabla^\lambda\delta g^{k\rho}\right) =\\ &= -\frac{1}{2}\nabla_\lambda\left(g_{\nu k}\nabla_\mu\delta g^{k\lambda} - g_{\mu k}g_{\nu\rho}\nabla^\lambda\delta g^{k\rho}\right)\\ &+ \frac{1}{2}\left(g_{\lambda k}\nabla_\nu\nabla_\mu\delta g^{k\lambda} - g_{\mu k}\nabla_\nu\nabla_\rho\delta g^{k\rho}\right)\end{aligned} \tag{6.9}$$

Απ΄όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}\nabla_\lambda\left(\nabla_k\delta g^{k\lambda} - g_{k\rho}\nabla^\lambda\delta g^{k\rho}\right) + \frac{1}{2}\nabla_\nu\left(g_{\lambda k}\nabla^\nu\delta g^{k\lambda}\right) - \frac{1}{2}\nabla_k\nabla_\rho\delta g^{k\rho} =\\ &= \nabla_\lambda g_{\mu\nu}\nabla^\lambda\delta g^{\mu\nu} - \nabla_\lambda\nabla_k\delta g^{\lambda k} = \nabla_\lambda\left(g_{\mu\nu}\nabla^\lambda\delta g^{\mu\nu} - \nabla_k\delta g^{\lambda k}\right)\end{aligned} \tag{6.10}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε το δS. Από τις σχέσεις (6.4),(6.6) και (6.10) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\delta S_G &= \int\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\delta g^{\mu\nu}d^4x\\ &+ \int\sqrt{-g}\nabla_\lambda\left(g_{\mu\nu}\nabla^\lambda\delta g^{\mu\nu} - \nabla_k\delta g^{\lambda k}\right)d^4x\end{aligned} \tag{6.11}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε το θεώρημα Stokes

$$\int_V \nabla_\mu A^\mu\sqrt{|g|}d^nx = \oint_{\partial V} n_\mu A^\mu\sqrt{|\gamma|}d^{n-1}x \tag{6.12}$$

όπου n_μ είναι το κάθετο διάνυσμα στην συνοριακή υπερεπιφάνεια που περικλύει τον όγκο V και γ είναι η ορίζουσα της μετρικής της υπερεπιφάνειας. Στην σχέση (6.11) ολοκληρώνουμε σε όλο τον χωροχρόνο και θεωρούμε πως οι μεταβολές της μετρικής $\delta g^{\mu\nu}$ μηδενίζονται στο άπειρο. Χρησιμοποιώντας την (6.12) στην (6.11) παίρνουμε

$$\delta S_G = \int\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\delta g^{\mu\nu}d^4x + \oint\sqrt{|\gamma|}n_\lambda\nabla_\lambda\left(g_{\mu\nu}\nabla^\lambda\delta g^{\mu\nu} - \nabla_k\delta g^{\lambda k}\right)d^3x \tag{6.13}$$

Σύμφωνα με αυτά που αναφέραμε παραπάνω το δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται και τελικά παίρνουμε

$$\delta S_G = \int\sqrt{-g}\left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right]\delta g^{\mu\nu}d^4x \tag{6.14}$$

Για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία της δράσης θα μηδενίσουμε την μεταβολή της

$$\delta S = \frac{1}{2k}\delta S_G + \delta S_M = 0 \tag{6.15}$$

Έπεται ότι

$$\int\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2k}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu}d^4x = 0 \tag{6.16}$$

Αφού οι μεταβολές της μετρικής $\delta g^{\mu\nu}$ είναι αυθαίρετες, ο όρος μέσα στην αγκύλη πρέπει να μηδενίζεται, οπότε παίρνουμε

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = k\left[-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\delta g^{\mu\nu}}\right] \tag{6.17}$$

Ορίζουμε τον **τανυστή ενέργειας ορμής** ως

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{6.18}$$

και αντικαθιστώντας στην σχέση (6.17) παίρνουμε τις **εξισώσεις πεδίου του Einstein** για την γενική θεωρία της σχετικότητας.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \tag{6.19}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψην το Νευτώνειο όριο της θεωρίας διαλέγουμε το $k = \frac{8\pi G}{c^4}$

Παίρνοντας το ίχνος της σχέσης (6.19) ως προς την μετρική προκύπτει

$$R = -kT \tag{6.20}$$

Με την βοήθεια αυτού η σχέση (6.19) γράφεται

$$R_{\mu\nu} = k\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{6.21}$$

Το κενό ορίζεται ως ο χωροχρόνος απουσία πεδίων ύλης, οπότε $T = T_{\mu\nu} = 0$ και οι εξισώσεις πεδίου του Einstein στο κενό δίνονται από

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{6.22}$$

Εδώ φαίνεται καθαρά ότι προυπόθεση της καμπυλότητας του χωροχρόνου είναι η παρουσία ύλης.

6.2.2 Μεθοδος Palatini

Μια άλλη μέθοδος για την παραγωγή των εξισώσεων πεδίου του Einstein είναι να θεωρήσουμε ανεξάρτητα γεωμετρικά πεδία $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ και $g_{\mu\nu}$, δηλαδή παίρνουμε την συνοχή $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ με μηδενική στρέψη (συμμετρική) αλλά όχι απαραίτητα συμβατή με την μετρική $g_{\mu\nu}$. Με αυτές τις υποθέσεις δουλεύουμε παρόμοια με την προηγούμενη περίπτωση θεωρώντας $\mathcal{L}_G = Q$. Από την σχέση (6.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \int \delta\left(\sqrt{-g}Q\right) d^4x = \int \left(\delta\sqrt{-g}Q + \sqrt{-g}\delta Q\right) d^4x = \\ &= \int \left[\delta\sqrt{-g}Q + \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\delta Q_{\mu\nu} + Q_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right)\right] d^4x \end{aligned} \tag{6.23}$$

Σε αναλογία με την σχέση (6.8) παίρνουμε

$$\delta Q_{\mu\nu} = D_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - D_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} \tag{6.24}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta Q_{\mu\nu} &= \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(D_{\lambda}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - D_{\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right) = \\ &= D_{\lambda}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\right) - D_{\lambda}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \\ &- D_{\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda}\right) + D_{\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} = \\ &= D_{\lambda}\left[\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\left(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \delta^{\lambda}_{\nu}\delta\Gamma^{k}_{\mu k}\right)\right] \\ &+ \left[D_{\sigma}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\sigma}\delta^{\nu}_{\lambda}\right) - D_{\lambda}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\right]\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{6.25}$$

Χρησιμοποιώντας όπως και πριν το θεώρημα Stokes μηδενίζουμε τον συνοριακό όρο και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \delta S_G &= \int \left[Q_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}Q\right]\delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &+ \int \left[D_{\sigma}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\sigma}\delta^{\nu}_{\lambda}\right) - D_{\lambda}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\right]\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} d^4x \end{aligned} \tag{6.26}$$

Μηδενίζοντας την μεταβολή της δράσης έχουμε

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \frac{1}{2k}\delta S_G + \delta S_M = \\
&= \int \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2k}\left(Q_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}Q\right) + \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)}{\delta g^{\mu\nu}}\right]\delta g^{\mu\nu} d^4x \\
&+ \frac{1}{2k}\int \left[D_\sigma\left(\sqrt{-g}g^{\mu\sigma}\delta^\nu_\lambda\right) - D_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right)\right]\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} d^4x = 0
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

και από τον ορισμό (6.18) παίρνουμε τις εξισώσεις

$$
Q_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}Q = kT_{\mu\nu} \tag{6.28}
$$

και

$$
D_\sigma\left(\sqrt{-g}g^{\mu\sigma}\delta^\nu_\lambda\right) - D_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{6.29}
$$

Για $\lambda \neq \nu$ ο πρώτος όρος μηδενίζεται και προκύπτει

$$
D_\lambda\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\right) = 0 \Rightarrow D_\lambda g^{\mu\nu} = 0 \tag{6.30}
$$

Αυτή είναι η συνθήκη της μετρικής συμβατότητας της συνοχής, οπότε η D είναι η συνοχή Levi-Civita ∇ που επάγεται από την μετρική $g_{\mu\nu}$. Δηλαδή η μέθοδος Palatini δίνει τελικά τις ίδιες εξισώσεις πεδίου με την μετρική μέθοδο και είναι οι εξισώσεις που διέπουν την γενική θεωρία της σχετικότητας.

6.3 Μετρική Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker

Όλα τα κλασικά κοσμολογικά μοντέλα βασίζονται στην αρχή του Κοπέρνικου, ότι δηλαδή το σύμπαν είναι περίπου το ίδιο παντού. Κάποιος θα απορούσε με αυτήν την προσέγγιση σκεπτόμενος για παράδειγμα πόσο διαφορετικό είναι το σύμπαν δίπλα σε ένα αστέρι σε σχέση με το κρύο, έρημο διάστημα. Όμως δεχόμαστε την αρχή του Κοπέρνικου κοιτάζοντας το σύμπαν σε πολύ μεγάλη κλίμακα, όπου οι τοπικές ποικιλίες σε πυκνότητα μετριάζονται.

Σκεπτόμενοι μαθηματικά όπου το σύμπαν είναι μια πολλαπλότητα, η αρχή του Κοπέρνικου συνδέεται με δύο ιδιότητες που πρέπει να έχει η πολλαπλότητα, την ομογένεια και την ισοτροπία. Ομογένεια σημαίνει ότι το σύμπαν έχει την ίδια μετρική σε κάθε περιοχή του και ισοτροπία σημαίνει ότι στεκόμενος σε ένα σημείο, το σύμπαν φαίνεται ίδιο σε όποια κατεύθυνση κι αν κοιτάξω. Πιο αυστηρά μια πολλαπλότητα M είναι ομογενής αν για κάθε δύο σημεία $p, q \in M$ υπάρχει ισομετρία που πάει το p στο q και ισότροπη γύρω από ένα σημείο $p \in M$ αν για κάθε δύο διανύσματα $V, W \in T_pM$ υπάρχει ισομετρία του M τέτοια ώστε το pushforward του W κάτω από την ισομετρία αυτή είναι παράλληλο με το V (όχι pushed forward). Οι δύο αυτές ιδιότητες είναι γενικά ανεξάρτητες μεταξύ τους. Δεχόμενοι την ισοτροπία απο τις διάφορες παρατηρήσεις που κάνουμε και αφού η αρχή του Κοπέρνικου μας προτρέπει να πιστέψουμε ότι δεν είμαστε το κέντρο του σύμπαντος και άρα άλλοι παρατηρητές παρατηρούν επίσης ισοτροπία, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το σύμπαν είναι ομογενές και ισοτροπικό.

Όταν κοιτάζουμε απομακρυσμένους γαλαξίες φαίνονται να απομακρύνονται από εμάς, άρα το σύμπαν δεν είναι στατικό αλλά αλλάζει με τον χρόνο και οι μέχρι τώρα ενδείξεις λένε ότι επεκτείνεται. Άρα κατασκευάζουμε κοσμολογικά μοντέλα με την ιδέα ότι το σύμπαν είναι ομογενές και ισοτροπικό χωρικά αλλά όχι χρονικά (η χρονική ανομοιογένεια οφείλεται στην επέκταση του σύμπαντος). Δηλαδή μπορούμε να φανταστούμε το σύμπαν σαν ενωμένες χωρικές φλούδες που κάθε μία είναι ομογενής και ισότροπη. Επομένως θεωρούμε τον χωροχρόνο να έχει μορφή $R \times \Sigma$, όπου R είναι ο χρόνος και Σ μία ομογενής και ισοτροπική 3-πολλαπλότητα. Η ομογένεια και ισοτροπία απαιτεί για τον χώρο Σ να είναι μεγιστικά συμμετρικός (έχει μέγιστο αριθμό Killing διανυσμάτων).

Βλέπουμε το σύμπαν σαν ένα ιδανικό ρευστό. Οι γραμμές ροής του, που από μαθηματική σκοπιά είναι οι ολοκληρωτικές καμπύλες ενός προυπάρχοντος διανυσματικού πεδίου, περιγράφουν την κίνηση των ουράνιων σωμάτων υπό την επίδραση μόνο της επέκτασης του σύμπαντος και λέγονται γραμμές **ροής Hubble**. Μόνο για έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με την ροή Hubble, ένα ισοτροπικό σύμπαν φαίνεται ισοτροπικό. Οι συντεταγμένες ενός παρατηρητή που κινείται μαζί με την ροή Hubble λέγονται **συγκινούμενες συντεταγμένες (comoving coordinates)**. Η χρονική συντεταγμένη είναι ο χρόνος που δείχνει ένα ρολόι κινούμενο μαζί με τον παρατηρητή και καλείται **ιδιόχρονος (proper time)**. Σε ένα τέτοιο σύστημα συντεταγμένων τα ουράνια σώματα που κινούνται μόνο υπό την επίδραση της ροής Hubble (δηλαδή της επέκτασης του σύμπαντος) έχουν σταθερές χωρικές συντεταγμένες και η τετραταχύτητά τους είναι $(1,0,0,0)$. Όμως παρότι οι συντεταγμένες μένουν ίδιες, οι αποστάσεις (proper distance) μεγαλώνουν με τον χρόνο λόγω της επέκτασης και η πληροφορία αυτή θα πρέπει να περιέχεται στην μετρική που θα κατασκευάσουμε.

Έτσι θεωρούμε την μετρική σε comoving συντεταγμένες να έχει την μορφή

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\left(t\right)\gamma_{ij}\left(u\right)du^i du^j \tag{6.31}$$

όπου t είναι η χρονική συντεταγμένη και $\left(u^1,u^2,u^3\right)$ οι χωρικές συντεταγμένες στο Σ, γ_{ij} είναι η μεγιστικά συμμετρική μετρική στον Σ και $a\left(t\right)$ είναι ένας παράγοντας κλίμακας που μας δείχνει πόσο μεγάλος είναι ο χώρος Σ την χρονική στιγμή t.

Επικεντρονόμαστε τώρα στην μελέτη του μεγιστικά συμμετρικού χώρου Σ με μετρική

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}du^i du^j \tag{6.32}$$

Για μεγιστικά συμμετρικές μετρικές γ_{ij} ισχύει η σχέση

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k\left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}\right) \tag{6.33}$$

όπου k είναι η σταθερή καμπυλότητα διατομής και ο δείκτης $^{(3)}$ στην καμπυλότητα δείχνει ότι αυτή είναι η καμπυλότητα του χώρου Σ και όχι όλου του χωροχρόνου. Από την (6.33) παίρνουμε τον τανυστή Ricci

$${}^{(3)}R_{ij} = 2k\gamma_{ij} \tag{6.34}$$

και την βαθμωτή καμπυλότητα Ricci

$${}^{(3)}R = 6k \tag{6.35}$$

Αφού ο χώρος Σ είναι μεγιστικά συμμετρικός, τότε είναι και σφαιρικά συμμετρικός (η ομάδα ισομετριών του περιέχει υποομάδα ισόμορφη με την ομάδα των στροφών $SO\left(3\right)$). Η μετρική σε σφαιρικά συμμετρικούς χώρους μπορεί να πάρει την μορφή

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij}du^i du^j = e^{2\beta(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{6.36}$$

Υπολογίζουμε τον τανυστή Ricci

$$\begin{aligned}
{}^{(3)}R_{11} &= \frac{2}{r}\partial_1\beta \\
{}^{(3)}R_{22} &= e^{-2\beta}\left(r\partial_1\beta - 1\right) + 1 \\
{}^{(3)}R_{33} &= \left[e^{-2\beta}\left(r\partial_1\beta - 1\right) + 1\right]sin^2\theta
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Συνδιάζοντας τις σχέσεις (6.34) και (6.37) και λύνοντας ως προς $\beta\left(r\right)$ παίρνουμε

$$\beta = -\frac{1}{2}ln\left(1 - kr^2\right) \tag{6.38}$$

Αντικαθιστώντας στην (6.36) παίρνουμε την **Robertson-Walker μετρική** του χωροχρόνου

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\left(t\right)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right)\right] \tag{6.39}$$

Αν στην σχέση (6.39) κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$\begin{aligned} k &\to \frac{k}{|k|} \\ r &\to \sqrt{|k|}r \\ a &\to \frac{a}{\sqrt{|k|}} \end{aligned} \tag{6.40}$$

την αφήνουν αναλλοίωτη. Η μόνη παράμετρος στην νέα σχέση είναι η $\frac{k}{|k|}$ και υπάρχουν τρεις περιπτώσεις για αυτήν: $k = -1, k = 0, k = 1$. Η $k = -1$ περίπτωση αντιστοιχεί σε έναν χώρο Σ αρνητικής σταθερής καμπυλότητας διατομής, που καλείται **ανοικτός**. Η $k = 0$ περίπτωση αντιστοιχεί σε ένα χώρο Σ χωρίς καμπυλότητα που καλείται **επίπεδος**. Η $k = 1$ περίπτωση αντιστοιχεί σε έναν χώρο Σ θετικής καμπυλότητας που ονομάζεται **κλειστός**. Ας τις εξετάσουμε αναλυτικά.

Για την περίπτωση $k = 0$ η μετρική στον χώρο Σ είναι η Ευκλείδεια μετρική.

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{6.41}$$

Για την περίπτωση του κλειστού χώρου $k = +1$ θέτοντας $r = sin\chi$ προκύπτει η μετρική

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + sin^2\chi d\theta^2 + sin^2\chi sin^2\theta d\phi^2 \tag{6.42}$$

που είναι η μετρική της 3-σφαίρας. Τέλος στην περίπτωση $k = -1$ θέτουμε $r = sinh\psi$ και παίρνουμε

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + sinh^2\psi d\theta^2 + sin^2\psi sin^2\theta d\phi^2 \tag{6.43}$$

Αυτή είναι η μετρική για τον τρισδιάστατο χώρο σταθερής αρνητικής καμπυλότητας. Ολικά ένας τέτοιος χώρος μπορεί να εκτείνεται επ΄άπειρον (εξού και η έκφραση ανοικτός) αλλά μπορεί επίσης να περιγράφει και έναν όχι απλά συνεκτικό, συμπαγή χώρο.

6.3.1 Εξισώσεις Friedmann

Έχοντας βρεί μια μετρική για τον χωροχρόνο, θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις πεδίου του Einstein για να πάρουμε πληροφορίες για τον παράγοντα κλίμακας $a\left(t\right)$.

Τα σύμβολα Christoffel για την Robertson-Walker μετρική είναι

$$\Gamma^0_{\mu\nu} = a\dot{a}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6.44}$$

$$\Gamma^1_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{kr}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r\left(1-kr^2\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r\left(1-kr^2\right)sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6.45}$$

$$\Gamma^2_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -sin\theta cos\theta \end{pmatrix} \tag{6.46}$$

$$\Gamma^3_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{a}}{a} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 & cot\theta \\ \frac{\dot{a}}{a} & \frac{1}{r} & cot\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{6.47}$$

Τα μη μεδενικά στοιχεία του τανυστή Ricci είναι

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \\ R_{22} &= r^2 \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right) \\ R_{33} &= r^2 \left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k\right) sin^2\theta \end{aligned} \tag{6.48}$$

και η βαθμωτή καμπυλότητα Ricci

$$R = \frac{6}{a^2}\left(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k\right) \tag{6.49}$$

Το σύμπαν προφανώς δεν είναι κενό άρα δεν μας ενδιαφέρουν οι λύσεις των εξισώσεων Einstein στο κενό. Επομένως πρέπει να διαλέξουμε έναν τανυστή ενέργειας ορμής. Θεωρούμε λοιπόν πως η ύλη και η ενέργεια στο σύμπαν περιγράφονται σε μεγάλη κλίμακα από την εξίσωση ενός ιδανικού ρευστού

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \tag{6.50}$$

όπου ρ είναι η ενεργειακή πυκνότητα (ποσότητα ενέργειας που υπάρχει σε μια περιοχή του ρευστού ανα μονάδα όγκου ή μάζας) και p η πίεση μετρώμενες σε rest frame και U^μ είναι η τετραταχύτητα του ρευστού. Το rest frame συμπίπτει με το comoving frame. Η τετραταχύτητα στις συγκινούμενες συντεταγμένες είναι $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Επομένως ο τανυστής ενέργειας ορμής παίρνει την μορφή

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22}p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33}p \end{pmatrix} \tag{6.51}$$

και το ίχνος του δίνεται από

$$T = T^\mu_\mu = -\rho + 3p \tag{6.52}$$

Κάθε συστατικό του σύμπαντος θεωρούμενο ως ρευστό χαρακτηρίζεται από μια σχέση μεταξύ των p και ρ

$$p = w\rho \tag{6.53}$$

όπου w είναι σταθερό στον χρόνο. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται **καταστατική εξίσωση** του ρευστού.

Παίρνοντας την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

$$0 = \nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu_\lambda \tag{6.54}$$

Για $\nu = 0$ δίνει

$$0 = \partial_\mu T^\mu_0 + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda = -\partial_0 \rho - 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \tag{6.55}$$

Θέτοντας $H = \frac{\dot{a}}{a}$ την **παράμετρο Hubble** που εκφράζει τον ρυθμό διαστολής του σύμπαντος η σχέση (6.55) γίνεται

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \tag{6.56}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + w)\frac{\dot{a}}{a} \tag{6.57}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \tag{6.58}$$

Τα δύο πιο γνωστά κοσμολογικά ρευστά είναι η **σκόνη** και η **ακτινοβολία**. Η σκόνη είναι μια μορφή μη σχετικιστικής ύλης (ηλεκτρόνια, βαριόνια, σκοτεινή ύλη) όπου οι κρούσεις των σωματιδίων έχουν μηδαμινή σημασία και αντιπροσωπεύεται από την εξίσωση $w = 0$. Τα αστέρια και οι γαλαξίες για παράδειγμα, περιγράφονται από το κοσμολογικό μοντέλο της σκόνης αφού σε αυτά η πίεση είναι μηδαμινή σε σχέση με την ενεργειακή πυκνότητα. Η σκόνη είναι γνωστή ως ύλη και ένα σύμπαν που η ενεργειακή πυκνότητα οφείλεται κυρίως στην σκόνη καλείται υλικά κυρίαρχο σύμπαν (**matter-dominated**). Σε ένα σύμπαν ύλης η σχέση (6.58) παίρνει την μορφή

$$\rho \propto a^{-3} \tag{6.59}$$

Αυτό δείχνει ότι όσο το σύπμαν επεκτείνεται, τόσο μειώνεται η αριθμητική πυκνότητα των σωμάτων. (Σε ένα σύμπαν σκόνης η ενεργειακή πυκνότητα κυριαρχείται από την ενέργεια ηρεμίας που είναι ανάλογη με την αριθμητική πυκνότητα). Ας έρθουμε τώρα στην ακτινοβολία, αυτή χρησιμοποιείται για να περιγράψει μη σχετικιστικά σωματίδια, δηλαδή την γνωστή μας ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία ή τεράστεια σώματα κινούμενα με ταχύτητα κοντά σε αυτήν του φωτός (μη διακριτά από τα φωτόνια). Παρόλο που η ακτινοβολία είναι ένα ρευστό και ο τανυστής ενέργεια ορμής δίνεται από την σχέση (6.50), μπορούμε να τον εκφράσουμε και σε όρους δύναμης πεδίου ως εξής

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\lambda}F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}\right) \tag{6.60}$$

Το ίχνος του υπολογίζεται

$$T^{\mu}_{\mu} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4}4F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma}\right) = 0 \tag{6.61}$$

και σε συνδιασμό με την σχέση (6.52) παίρνουμε την καταστατική εξίσωση

$$p = \frac{1}{3}\rho \tag{6.62}$$

Ένα σύμπαν που η ενεργειακή πυκνότητα περιγράφεται από ακτινοβολία και αντιπροσωπεύεται από την εξίσωση $w = \frac{1}{3}$ καλείται **radiation-dominated**. Από την σχέση (6.58) η ενεργειακή πυκνότητα σε ένα σύμπαν ακτινοβολίας ικανοποιεί την σχέση

$$\rho \propto a^{-4} \tag{6.63}$$

Άρα η ενεργειακή πυκνότητα στην ακτινοβολία μειώνεται λίγο πιο γρήγορα απ΄οτι στην ύλη. Σήμερα πιστεύουμε ότι η ενεργειακή πυκνότητα του σύμπαντος κυριαρχείται από την ύλη με την προσέγγιση $\frac{\rho_{mat}}{\rho_{rad}} \sim 10^6$. Παλαιότερα όμως το σύμπαν ήταν πολύ μικρότερο και η ενεργειακή πυκνότητα υπό μορφή ακτινοβολίας θα κυριαρχούσε στα πρώιμα στάδια του σύμπαντος.

Επανερχόμαστε τώρα στις εξισώσεις πεδίου του Einstein που μπορούν να γραφούν στην μορφή (6.21)

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{6.64}$$

Για $\mu\nu = 00$ παίρνουμε

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G\left(\rho + 3p\right) \tag{6.65}$$

ενώ οι υπόλοιπες εξισώσεις δίνουν

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G\left(\rho - p\right) \tag{6.66}$$

Αντικαθιστώντας την (6.65) στην (6.66) παίρνουμε δύο ανεξάρτητες εξισώσεις για τον παράγοντα κλίμακας, τις **εξισώσεις Friedmann**

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \end{aligned} \tag{6.67}$$

Οι μετρικές του τύπου (6.39) που ικανοποιούν τις εξισώσεις Friedmann ορίζουν ένα **Friedmann-Robertson-Walker (FRW) σύμπαν**.

Υπάρχει αρκετή ορολογία που σχετίζεται με τις κοσμολογικές παραμέτρους και θα αναφέρουμε κάποια βασικά κομμάτια της εδώ. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει ο ρυθμός διαστολής του σύμπαντος χαρακτηρίζεται από την **παράμετρο Hubble**

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \tag{6.68}$$

Υπάρχει επίσης η **παράμετρος επιβράδυνσης**

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \tag{6.69}$$

που μετράει τον ρυθμό αλλαγής του ρυθμού διαστολής. Μια ακόμα χρήσιμη ποσότητα είναι η **παράμετρος πυκνότητας**

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{crit}} \tag{6.70}$$

όπου η **κρίσιμη πυκνότητα** ορίζεται από την προφανή σχέση

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{6.71}$$

Αυτή η ποσότητα (η οποία αλλάζει με τον χρόνο όπως και η παράμετρος Hubble) καλείται κρίσιμη γιατί η δεύτερη εξίσωση Friedmann (6.67) γράφεται

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \tag{6.72}$$

επομένως η σχέση της πυκνότητας με την κρίσιμη πυκνότητα καθορίζει την καμπυλότητα του χώρου και άρα την μορφολογία του σύμπαντος, ως εξής

$$\begin{aligned} \rho < \rho_{crit} \rightleftarrows \Omega < 1 \rightleftarrows k = -1 \rightleftarrows \text{ανοικτό σύμπαν} \\ \rho = \rho_{crit} \rightleftarrows \Omega = 1 \rightleftarrows k = 0 \rightleftarrows \text{επίπεδο σύμπαν} \\ \rho > \rho_{crit} \rightleftarrows \Omega > 1 \rightleftarrows k = +1 \rightleftarrows \text{κλειστό σύμπαν} \end{aligned} \tag{6.73}$$

Ας σημειώσουμε εδώ ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα για την κοσμολογική εξέλιξη που προκύπτει από την ταυτότητα Bianchi

$$\nabla_\mu G^\mu_\nu = 0 \Rightarrow \nabla \left(R^\mu_\nu - \frac{1}{2} R g^\mu_\nu \right) = 0 \Rightarrow \nabla_\mu R^\mu_\nu - \frac{1}{2} g^\mu_\nu \partial_\mu R = 0 \tag{6.74}$$

Για $\nu = 0$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
&\partial_0 R^0_0 + 3\Gamma_{01} R^0_0 - \Gamma^1_{01} R^1_1 - \Gamma^2_{02} R^2_2 - \Gamma^3_{03} R^3_3 - \frac{1}{2}\partial_0 R = 0 \\
\Rightarrow & 3\frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) + 9H\frac{\ddot{a}}{a} - 3H\left(2H^2 + 2\frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) - 3\frac{d}{dt}\left(H^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) = 0 \\
\Rightarrow & 6H\frac{\ddot{a}}{a} - 6H^3 - 6H\frac{k}{a^2} - 6H\dot{H} - 3\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{a^2}\right) = 0 \\
\Rightarrow & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{a^2}\right) = H\frac{\ddot{a}}{a} - H^3 - H\dot{H} - H\frac{k}{a^2} \\
\Rightarrow & \frac{d}{dt}\left(\frac{k}{a^2}\right) = -2H\frac{k}{a^2} \Rightarrow d\left(\frac{k}{a^2}\right) = -2\frac{kda}{a^2 a} \\
\Rightarrow & d\left[ln\left(\frac{k}{a^2}\right)\right] = -2dlna \\
\Rightarrow & \frac{ka_0^2}{k_0 a^2} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} \Rightarrow k = k_0
\end{aligned} \tag{6.75}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η χωρική καμπυλότητα k παραμένει σταθερή κατά την κοσμολογική εξέλιξη.

Κεφάλαιο 7

Finsler δομή ενός ανισοτροπικού βαρυτικού πεδίου

Τα τελευταία χρόνια όλο και περισσότερες παρατηρήσεις δείχνουν ότι το σύμπαν περιέχει ανισοτροπίες. Μια ισχυρή ένδειξη είναι οι παρατηρούμενες ανισοτροπίες της CMB ακτινοβολίας. Πολλοί μελετούν τις ανισοτροπίες αυτές θεωρώντας διακυμάνσεις του κλασικού ισοτροπικού μοντέλου. Στα πλαίσια αυτής της εργασίας θα δουλέψουμε διαφορετικά. Βλέπουμε τον χωροχρόνο σαν έναν Finsler χώρο (δηλαδή τον εφοδιάζουμε με μια θεμελιώδη συνάρτηση) και έτσι περιγράφουμε την παρατηρούμενη ανισοτροπία σαν μια ενδογενής ιδιότητα της γεωμετρίας του Finsler χωροχρόνου. Στην ουσία περιγράφουμε ένα ανισοτροπικό βαρυτικό πεδίο χρησιμοποιώντας την μαθηματική θεωρία των χώρων Finsler που είδαμε στο πρώτο μέρος της εργασίας.

7.1 Γεωμετρική δομή του ανισοτροπικού μοντέλου

Στην ενότητα 4.2 βρήκαμε την εξίσωση των γεωδαισιακών ενός χώρου Finsler χρησιμοποιώντας την θεμελιώδη συνάρτηση F, η οποία είναι μια Lagrangian. Η Lagrangian που δίνει την εξίσωση των γεωδαισιακών σε έναν pseudo-Riemann χωρόχρονο δίνεται από

$$L = \sqrt{a_{ij}y^i y^j} \qquad y^i = \frac{dx^i}{ds} \tag{7.1}$$

ή ισοδύναμα το στοιχείο μήκους δίνεται από

$$ds_R = \sqrt{a_{ij}dx^i dx^j} \tag{7.2}$$

όπου a_{ij} είναι μια pseudo-Riemann μετρική με υπογραφή (+,-,-,-), για παράδειγμα η FRW μετρική (κεφάλαιο 8). Η ανισοτροπία που θα εισάγουμε θα είναι διπολικού τύπου άρα προσθέτουμε έναν επιπλέον όρο στην Lagrangian που να ικανοποιεί τα εξής απαιτούμενα

1. Πρέπει να είναι ο μοναδικός υπεύθυνος για την κίνηση στην κατεύθυνση που είναι παράλληλη με τον άξονα της ανισοτροπίας.

2. Πρέπει να παίζει μηδενικό ρόλο στην κατεύθυνση της κίνησης που είναι κάθετη με τον άξονα της ανισοτροπίας.

Ο ζητούμενος όρος που ικανοποιεί τα παραπάνω είναι ο $k_a(x)\, y^a$, όπου η ποσότητα $k_a(x)$ εκφράζει τον άξονα της ανισοτροπίας. Μπορούμε να γράψουμε $k_a(x) = \phi(x)\, \hat{k}_a$, όπου $\hat{k}_a$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $k_a(x)$. Άρα ο όρος $\phi(x)$ παίζει τον ρόλο του μήκους του διανύσματος $k_a(x)\,, \phi(x) \in \mathbb{R}$. Έτσι έχουμε την Lagrangian

$$L = \sqrt{a_{ij}y^i y^j} + \phi(x)\, \hat{k}_a y^a \tag{7.3}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση L είναι μια Finsler θεμελιώδης συνάρτηση άρα μπορούμε να γράψουμε $F(x, y) = L$. Επομένως εφοδιάσαμε τον τετραδιάστατο χωροχρόνο με μια θεμελιώδη συνάρτηση F και πήρε δομή Finsler χώρου. Ένας χώρος Finsler με θεμελιώδη συνάρτηση αυτής της μορφής ονομάζεται **Finsler-Randers χώρος** και εν προκειμένω Finsler-Randers χωροχρόνος. Βάζοντας dx^a αντί για y^a παίρνουμε το Finsler στοιχείο μήκους

$$ds_F = \sqrt{a_{ij}dx^i dx^j} + \phi(x)\,\hat{k}_a dx^a \tag{7.4}$$

το οποίο είναι ίδιο με το Riemann με έναν επιπλέον όρο λόγω της ανισοτροπίας και δίνει το μήκος τόξου μιας καμπύλης σε έναν Finsler χωροχρόνο.

Τώρα, υπολογίζουμε

$$ds_F^2 = a_{ij}dx^i dx^j + 2\phi(x)\,\hat{k}_a dx^a \sqrt{a_{ij}dx^i dx^j} + \phi^2(x)\,\hat{k}_a dx^a \hat{k}_b dx^b \tag{7.5}$$

Για να είναι η Finsler μετρική σύμφωνη (σε επίπεδο φυσικής) με την γενική σχετικότητα, πρέπει να έχει την ίδια υπογραφή (+,-,-,-) με τις pseudo-Riemann μετρικές που χρησιμοποιούμε στην γενική σχετικότητα. Επιπλέον γνωρίζουμε ότι

$$ds_R = c d\tau = c\gamma dt = \gamma d(ct) = \gamma dx^0 \tag{7.6}$$

όπου $\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}$ και υ είναι η 3-ταχύτητα ενός αντικειμένου στον Riemann χωροχρόνο.Από τις εξισώσεις (7.5) και (7.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned} ds_F^2 = & \left(a_{00} + 2\gamma\phi(x)\,\hat{k}_0 + \phi^2(x)\,\hat{k}_0\hat{k}_0\right) dx^0 dx^0 + \\ & + \left(a_{ab} + \phi^2(x)\,\hat{k}_a\hat{k}_b\right) dx^a dx^b \\ & + 2\gamma\phi(x)\,\hat{k}_a dx^a dx^0 + 2a_{0a}dx^0 dx^a \\ & + 2\phi^2(x)\,\hat{k}_0\hat{k}_a dx^0 dx^a \end{aligned} \tag{7.7}$$

όπου $a, b = 1, 2, 3$. Από την εξίσωση (7.7) για να ικανοποιείται η συνθήκη της υπογραφής που αναφέραμε παραπάνω, πρέπει

$$\begin{aligned} & (k_0(x))^2 + 2\gamma k_0(x) + a_{00} > 0 \\ & a_{aa} + k_a(x)\,k_a(x) < 0 \end{aligned} \tag{7.8}$$

όπου $\phi(x)\,k_i = k_i(x)$. Η πρώτη σχέση της (7.8) παίρνει θετικές τιμές για

$$\begin{aligned} & k_0(x) < -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - a_{00}} \\ & -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - a_{00}} < k_0(x) \end{aligned} \tag{7.9}$$

ενώ η δεύτερη για

$$(k_a(x))^2 < -a_{aa} \tag{7.10}$$

Άρα οι σχέσεις (7.9) και (7.10) είναι οι **περιορισμοί της ανισοτροπίας του χωροχρόνου**.

Η εξίσωση των γεωδαισιακών του Finsler χωροχρόνου $(M, L = F)$ προκύπτει από τις εξισώσεις Euler-Lagrange όπως στην ενότητα 4.2

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^l_{ij}y^i y^j + \sigma a^{lm}\left(\partial_j\phi\hat{k}_m - \partial_m\phi\hat{k}_j\right) y^j = 0 \tag{7.11}$$

όπου τα σύμβολα Christoffel Γ είναι ως προς την Riemann μετρική a_{ij} και $\sigma = \sqrt{a_{ij}y^i y^j}$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει έναν παραπάνω όρο $\sigma a^{lm}\left(\partial_j\phi\hat{k}_m - \partial_m\phi\hat{k}_j\right) y^j$ που εκφράζει την εναλλαγή στον άξονα της ανισοτροπίας.

Αν κινηθούμε κάθετα στον άξονα της ανισοτροπίας, δηλαδή $y^i k_i = 0$ τότε η εξίσωση των γεωδαισιακών παίρνει την μορφή

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^l_{ij} y^i y^j + \sigma a^{lm} \partial_j \phi \hat{k}_m y^j = 0 \tag{7.12}$$

και παρατηρούμε ότι διαφέρει από την Riemann περίπτωση. Αν όμως υποθέσουμε ότι $\partial_i \phi\left(x\right) = c\hat{k}_i, \forall i$, δηλαδή η αύξηση της ανισοτροπίας γίνεται μόνο κατα μήκος του άξονα της ανισοτροπίας τότε η εξίσωση των γεωδαισιακών γίνεται

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^l_{ij} y^i y^j = 0 \tag{7.13}$$

όπως και στην Riemann περίπτωση.

Τώρα χρησιμοποιώντας τους συμβολισμούς $\beta = \hat{k}_a y^a$ και $\sigma = \sqrt{a_{ij} y^i y^j}$, υπολογίζουμε από την θεμελιώδη συνάρτηση F την **Finsler-Randers μετρική** του χωροχρόνου

$$g_{ij}\left(x,y\right) = \frac{F}{\sigma} a_{ij} + \frac{\phi\left(x\right)}{2\sigma} \underset{ij}{\mathcal{S}} \left(y_i \hat{k}_j\right) - \frac{\beta \phi\left(x\right)}{\sigma^3} y_i y_j + \phi^2\left(x\right) \hat{k}_i \hat{k}_j \tag{7.14}$$

όπου $\underset{ij}{\mathcal{S}}$ είναι ο τελεστής συμμετρίας

$$\underset{ij}{\mathcal{S}}\left(A_{ikjl}\right) = \frac{1}{2}\left(A_{ikjl} + A_{jkil}\right) \tag{7.15}$$

Όμοια ορίζουμε τον τελεστή αντισυμμετρίας

$$\underset{ij}{\mathcal{A}}\left(M_{ikjl}\right) = \frac{1}{2}\left(M_{ikjl} - M_{jkil}\right) \tag{7.16}$$

Η αντίστροφη μετρική δίνεται από

$$g^{ij}\left(x,y\right) = \frac{\sigma}{F} a^{ij} - \frac{\sigma\phi}{2F} \underset{ij}{\mathcal{S}}\left(y^i \hat{k}^j\right) + \frac{\phi\left(\beta + \hat{k}_a \hat{k}^a \sigma \phi\right)}{F^3} y^i y^j \tag{7.17}$$

όπου $m = \hat{k}_a \hat{k}^a = 0, -1, +1$ ανάλογα με το αν το $\hat{k}_a$ είναι null, spacelike ή timelike.

Παρατηρούμε για ακόμη μια φορά ότι η αιτία της ανισοτροπίας είναι η εξάρτηση της μετρικής από το ανισοτροπικό πεδίο $\phi\left(x\right)\hat{k}^i$. Αυτό φαίνεται από τις εξισώσεις (7.11) και (7.14) όπου αν $\phi\left(x\right)\hat{k}^i = 0$ προκύπτουν οι γνωστές Riemann εξισώσεις.

Η ορίζουσα της μετρικής δίνεται από

$$g = det\left(g_{ij}\right) = \left(\frac{F}{\sigma}\right)^5 det\left(a_{ij}\right) \tag{7.18}$$

7.2 Συνοχή και καμπυλότητα του ανισοτροπικού μοντέλου

Ο τανυστής στρέψης του Cartan παίρνει την μορφή

$$C_{ijl} = \frac{3\beta\phi}{2\sigma^5} y_i y_j y_l + \frac{3\phi}{\sigma} \underset{ijl}{\mathcal{S}}\left(a_{ij} \hat{k}_l\right) - \frac{3\phi}{\sigma^3} \underset{ijl}{\mathcal{S}}\left(y_i y_j y_l\right) - \frac{3\beta\phi}{\sigma^3} \underset{ijl}{\mathcal{S}}\left(a_{ij} y_l\right) \tag{7.19}$$

Τα Finsler σύμβολα Christoffel πρώτου είδους δίνονται από

$$\gamma_{ijl} = \frac{1}{2}\left(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right) = \frac{F}{\sigma} \Gamma_{ijl} + \Lambda_{ijl} + M_{ijl} \tag{7.20}$$

όπου Γ_{ijl} τα σύμβολα Christoffel ως προς την Riemann μετρική a_{ij} και

$$\begin{aligned} \Lambda_{ijl} &= \underset{ijl}{\mathcal{P}}\left[\left(\frac{3\beta\phi}{2\sigma^5} y_i y_j - \frac{\phi}{\sigma^3} \underset{ij}{\mathcal{S}} y_i \hat{k}_j - \frac{\phi\beta}{4\sigma^3} a_{ij}\right) \partial_l a_{ab} y^a y^b\right] \\ M_{ijl} &= \underset{ijl}{\mathcal{P}}\left[\left(\frac{\beta}{2\sigma} a_{ij} + \frac{1}{\sigma} \underset{ij}{\mathcal{S}} y_i \hat{k}_j - \frac{\beta}{\sigma^3} y_i y_j + 2\phi \hat{k}_i \hat{k}_j\right) \partial_l \phi\right] \end{aligned} \tag{7.21}$$

όπου ο τελεστής $\underset{ijl}{\mathcal{P}}$ δηλώνει την αλλαγή δεικτών όπως γίνεται στα σύμβολα Christoffel, δηλαδή

$$\begin{aligned} &\underset{ijl}{\mathcal{P}} A_{ijl} = A_{lji} + A_{ilj} - A_{ijl} \\ &\underset{ijl}{\mathcal{P}} \partial_l a_{ij} = 2\Gamma_{ijl} \end{aligned} \tag{7.22}$$

Τα σύμβολα Christoffel δευτέρου είδους δίνονται από

$$\begin{aligned} \gamma_{ij}^l = \Gamma_{ij}^l &+ \left[\frac{\phi\left(\beta + m\sigma\phi\right)}{\sigma F^2} y^a y^l - \frac{2\phi}{F} \underset{al}{\mathcal{S}} \left(y^a \hat{k}^l\right)\right] \Gamma_{ija} + \frac{\sigma}{F}\left(\Lambda_{ij}^l + M_{ij}^l\right) + \\ &+ \left(\Lambda_{ija} + M_{ija}\right)\left[\frac{\phi\left(\beta + m\sigma\phi\right)}{F^3} y^a y^l - \frac{2\sigma\phi}{F^2} \underset{al}{\mathcal{S}} \left(y^a \hat{k}^l\right)\right] \end{aligned} \tag{7.23}$$

όπου $\Lambda_{jl}^i = a^{ik}\Lambda_{jlk}$ και $M_{jl}^i = a^{ik} M_{jlk}$.

Στο σημείο αυτό επιλέγουμε την συνοχή $D = \left(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i\right)$ που θα χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό της καμπυλότητας σε αυτό το μοντέλο του Finsler-Randers χωροχρόνου. Αυτή θα είναι η Cartan d-γραμμική συνοχή που είδαμε στην ενότητα 4.5. Όπως αναφέραμε στην ενότητα 4.5 ο λόγος που επιλέγουμε την συνοχή Cartan είναι γιατί είναι συμβατή με την μετρική g_{ij}.

Οι συνιστώσες του spray των γεωδαισιακών δίνονται από την εξίσωση των γεωδαισιακών (7.11) που προέρχεται από τις εξισώσεις Euler-Lagrange. Άρα έχουμε

$$G^l = \frac{1}{2}\Gamma_{ij}^l y^i y^j + \sigma a^{ml} y^j \underset{jm}{\mathcal{A}} \left(\partial_j \phi\left(x\right) \hat{k}_m\right) \tag{7.24}$$

Η μη γραμμική συνοχή Cartan επάγεται από το spray των γεωδαισιακών και είναι ίση με

$$N_k^l = \Gamma_{ik}^l y^i + \sigma a^{ml} \underset{km}{\mathcal{A}} \left(\partial_k \phi\left(x\right) \hat{k}_m\right) + \frac{1}{\sigma} a^{ml} y^j \underset{jm}{\mathcal{A}} \left(\partial_j \phi\left(x\right) \hat{k}_m\right) y^k \tag{7.25}$$

Οι συνιστώσες της d-γραμμικής συνοχής Cartan $D = \left(N_j^i, F_{jk}^i, C_{jk}^i\right)$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} C_{ij}^l = &\frac{\phi}{2F} a_{ij}\hat{k}^l + \frac{\phi}{F}\underset{ij}{\mathcal{S}}\left(\hat{k}^i \delta_j^l\right) - \frac{\beta\phi}{S\sigma^2}\underset{ij}{\mathcal{S}}\left(\delta_i^l y_j\right) - \\ &- \frac{\phi\left(\beta + m\sigma\phi\right)}{2F^2\sigma} a_{ij} y^l - \frac{\phi}{2F\sigma^2} y_i y_j \hat{k}^l - \frac{\phi\left(\sigma - \beta\phi\right)}{F^2\sigma^2} y^l \underset{ij}{\mathcal{S}}\left(\hat{k}_i y_j\right) - \\ &- \left(\frac{\phi}{F}\right)^2 \hat{k}_i \hat{k}_j y^l + \frac{\phi\left(3\beta + m\sigma\phi\right)}{2F^2\sigma^3} y_i y_j y^l \end{aligned} \tag{7.26}$$

και

$$\begin{aligned} F_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i &+ \left[\frac{\phi\left(\beta + m\sigma\phi\right)}{\sigma F^2} y^a y^i - \frac{2\phi}{F}\underset{ai}{\mathcal{S}}\left(y^a \hat{k}^i\right)\right]\Gamma_{jka} + \frac{\sigma}{F}\left(\Lambda_{jk}^i + M_{jk}^i\right) + \\ &+ \left(\Lambda_{jka} + M_{jka}\right)\left[\frac{\phi\left(\beta + m\sigma\phi\right)}{F^3} y^a y^i - \frac{2\sigma\phi}{F^2}\underset{ai}{\mathcal{S}}\left(y^a \hat{k}^i\right)\right] - \\ &- \left(N_j^l C_{kl}^i + N_k^l C_{jl}^i - g^{ir} N_r^l C_{jkl}\right) \end{aligned} \tag{7.27}$$

Οι συνιστώσες της καμπυλότητας και της στρέψης υπολογίζονται, όπως είδαμε στο κεφάλαιο 3, από τους παρακάτω τύπους

$$\begin{aligned}
&T^i_{kj} = 0 \qquad S^i_{kj} = 0\\
&R^i_{jk} = \delta_k N^i_j - \delta_j N^i_k \qquad P^i_{jk} = \dot{\partial}_k N^i_j - F^i_{kj}\\
&P^i_{jk} = g^{im} P_{mjk} \qquad P_{ijk} = C_{ijk|l} y^l\\
&R^i_{jkl} = \delta_l F^i_{jk} + \delta_k F^i_{jl} + F^h_{jk} F^i_{hl} - F^h_{jl} F^i_{hk} + C^i_{jc} R^c_{kl}\\
&S_{jikh} = C_{iks} C^s_{jh} - C_{ihs} C^s_{jk}\\
&P_{ihkj} = C_{ijk|h} - C_{hjk|i} + C^r_{hj} C_{rik|l} y^l - C^r_{ij} C_{rkh|l} y^l\\
&S^l_{ikh} = g^{lj} S_{jikh}\\
&P^l_{ikh} = g^{lj} P_{jikh}
\end{aligned} \tag{7.28}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την καμπυλότητα της μη γραμμικής συνοχής N από την σχέση (7.28). Η τελική της μορφή είναι

$$\begin{aligned}
R^i_{jk} = {} & R^i_{ajk} y^a + \frac{1}{2\sigma}\left(\partial_k a_{mn} \underset{jb}{\mathcal{A}}\left(\partial_j \phi \hat{k}^b\right) - \partial_j a_{mn} \underset{kb}{\mathcal{A}}\left(\partial_k \phi \hat{k}_b\right)\right) y^m y^n a^{bi} +\\
& + \sigma\left(\partial_k a^{bi} \underset{jb}{\mathcal{A}} \partial_j \phi \hat{k}_b - \partial_j a^{bi} \underset{kb}{\mathcal{A}}\left(\partial_k \phi \hat{k}_b\right)\right) - \sigma a^{bi} \underset{jk}{\mathcal{A}}\left(\partial_{bj} \phi \hat{k}_k\right) +\\
& + \frac{1}{\sigma} a^{bi} y^c \left(\underset{cd}{\mathcal{A}}\left(\partial^2_{kc} \phi \hat{k}_b\right) y_j - \underset{cd}{\mathcal{A}}\left(\partial^2_{jc} \phi \hat{k}_b\right) y_k\right) +\\
& + \left(\frac{2}{\sigma} a^{bi} \underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\partial_k y_j\right) - \frac{1}{\sigma^3} a^{bi} y^m y^n \underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\partial_k a_{mn} y_j\right)\right) \underset{ab}{\mathcal{A}}\left(\partial_a \phi \hat{k}_b\right) y^a -\\
& - \sigma\left(\Gamma^i_{kb} a^{bc} \underset{cj}{\mathcal{A}}\left(\partial_c \phi \hat{k}_j\right) + \Gamma^i_{jb} a^{bc} \underset{kc}{\mathcal{A}}\left(\partial_k \phi \hat{k}_c\right)\right) - \beta \partial^i \phi \underset{jk}{\mathcal{A}}\left(\partial_j \phi \hat{k}_k\right) -\\
& - \frac{\beta^2 + m\sigma^2}{2\sigma^2} \partial^i \phi \underset{jk}{\mathcal{A}}\left(\partial_j \phi y_k\right) - \frac{\beta}{\sigma} \partial^a \phi \underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\Gamma^i_{ak} y_j\right) -\\
& - \frac{1}{\sigma} \underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\Gamma_{kaj}\right)\left(\beta \partial^i \phi y^a - \left(\partial_b \phi y^b\right) y^a \hat{k}^i\right) -\\
& - \frac{1}{2}\left(\partial_b \phi y^b\right)\left[\partial^i \phi \underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\hat{k}_k y_j\right) + \hat{k}^i \underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\partial_k \phi y_j\right)\right] - \frac{1}{2}\left(\partial_a \phi \partial^a \phi\right) \hat{k}^i \underset{jk}{\mathcal{A}}\left(\hat{k}_j y_k\right) -\\
& - \left(\partial_a \phi y^a\right) \hat{k}^i \underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\partial_k \phi \hat{k}_j\right) - \frac{\beta}{2\sigma^2}\left(\partial_a \phi y^a\right)\left[\partial^i \phi \underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\hat{k}^k y_j\right) + \hat{k}^i \underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\partial_k \phi y_j\right)\right] -\\
& - \frac{1}{\sigma}\left(\partial_a \phi y^a\right) \hat{k}^b \underset{jk}{\mathcal{A}}\left(\Gamma^i_{bj} y_k\right) - \frac{1}{\sigma} \hat{k}_a y^b \partial^i \phi \underset{jk}{\mathcal{A}}\left(\Gamma^a_{bj} y_k\right) -\\
& - \frac{1}{\sigma} \partial_a \phi y^b \hat{k}^i \underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\Gamma^a_{bk} y_j\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\partial_a \phi y^a\right)^2 \hat{k}^i \underset{jk}{\mathcal{A}}\left(y_j \hat{k}_k\right)
\end{aligned} \tag{7.29}$$

όπου R^i_{ajk} είναι η Riemann καμπυλότητα και Γ^k_{ij} τα Riemann σύμβολα Christoffel που αντιστοιχούν στην μετρική a_{ij}.

Η στρέψη P^i_{jk} υπολογίζεται επίσης από την σχέση (7.28) και δίνει

$$P^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{\sigma} a^{mi}\left[\underset{km}{\mathcal{A}}\left(\partial_k \phi \hat{k}_m\right) y_j + a_{jk} \underset{rm}{\mathcal{A}}\left(\partial_r \phi \hat{k}_m\right) y^r\right] - L^i_{kj} \tag{7.30}$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι έχουμε όλα τα απαραίτητα δεδομένα για να υπολογίσουμε την P_{ijkl} καμπυλότητα από την σχέση (7.28). Ο υπολογισμός δεν γίνεται εδώ καθώς είναι εξαιρετικά επίπονος και όχι μεγάλης σημασίας.

Τώρα με οδηγό την σχέση (7.28) θα υπολογίσουμε όλα τα απαιτούμενα για την εύρεση της R-καμπυλότητας.

$$\begin{aligned}\delta F^i_{jk} &= \delta_l g^{ir}\left(\gamma_{jkr} - \underset{jkr}{\mathcal{P}}\left(C_{jkh}N^h_r\right)\right) + g^{ir}(\delta_l\gamma_{jkr} - [\left(\delta_l N^h_j\right)C_{rkh} + \\ &+ N^h_j\left(\delta_l C_{rkh}\right) + \left(\delta_l N^h_k\right)C_{jrh} + N^h_k\left(\delta_l C_{jrh}\right) - \left(\delta_l N^h_r\right)C_{jkh} - N^h_r\left(\delta_l C_{jkh}\right)])\end{aligned} \tag{7.31}$$

$$\delta_l\gamma_{jkr} = \left(\frac{1}{\sigma}\delta_l F - \frac{F}{\sigma^2}\delta_l\sigma\right)\Gamma_{jkr} + \frac{F}{\sigma}\delta_l\Gamma_{jkr} + \delta_l\Lambda_{jkr} + \delta_l M_{jkr} \tag{7.32}$$

$$\begin{aligned}\delta_k N^i_j &= \frac{\partial\Gamma^i_{jr}}{\partial x^k}y^r + \left(\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial a_{mn}}{\partial x^k}y^m y^n a^{hi} + \sigma\frac{\partial a^{hi}}{\partial x^k}\right)\underset{jh}{\mathcal{A}}\left(\partial_j\phi\hat{k}_h\right) + \sigma a^{mi}\left[\underset{jm}{\mathcal{A}}\left(\hat{k}_m\partial^2_{kj}\phi\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{\sigma}a^{mi}\left[\underset{rm}{\mathcal{A}}\left(\hat{k}_m\partial^2_{kr}\phi\right)\right]y^r y_j + \left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial a^{mi}}{\partial x^k} - \frac{1}{2\sigma^3}\frac{\partial a_{pn}}{\partial x^k}y^p y^n a^{mi}\right)\times \\ &\times\underset{rm}{\mathcal{A}}\left(\partial_r\phi\hat{k}_m\right)y^r y_j - \frac{\beta}{2}\partial^i\phi\underset{jk}{\mathcal{A}}\left(\partial_j\phi\hat{k}_k\right) - \sigma a^{hl}\Gamma^i_{jh}\underset{kl}{\mathcal{A}}\left(\partial_k\phi\hat{k}_l\right) + \frac{m}{4}\partial^i\phi\partial_k\phi y_j - \\ &- \frac{1}{4}\left(\partial_a\phi\hat{k}^a\right)\partial^i\phi\hat{k}_k y_j - \frac{1}{2}\partial_h\phi\hat{k}^i\left[a^{hl}\underset{kl}{\mathcal{A}}\left(\partial_k\phi\hat{k}_l\right) + y^h\underset{kj}{\mathcal{A}}\left(\partial_k\phi\hat{k}_j\right)\right] - \\ &- \left(\frac{\beta}{2\sigma}\right)^2\partial^i\phi\partial_j\phi y_k - \frac{\beta}{2\sigma}\left[a_{mj}\Gamma^m_{ka}y^a\partial^i\phi - \partial^a\phi\Gamma^i_{ja}y_k\right] - \frac{\beta}{2\sigma^2}\partial_a\phi\underset{ia}{\mathcal{A}}\left(\partial^i\phi\hat{k}^a\right)y_j y_k + \\ &+ \frac{\beta}{4\sigma^2}\left(\partial_a\phi y^a\right)\partial^i\phi\hat{k}_j y_k - \frac{1}{\sigma}y^b\Gamma_{kba}y_j\underset{ai}{\mathcal{A}}\left(\partial^a\phi\hat{k}^i\right) - \\ &- \frac{1}{2\sigma}y^a\left(\partial_a\phi\hat{k}^b\Gamma^i_{jb}y_k + \left(\partial_b\phi y^b\right)a_{jl}\Gamma^l_{ka}y^a\hat{k}^i\right) + \frac{\beta}{4\sigma^2}\left(\partial_b\phi y^b\right)\hat{k}^i\partial_j\phi y_k + \\ &+ \frac{m}{4\sigma^2}\left(\partial_b\phi y^b\right)\partial^i\phi y_j y_k - \Gamma^l_{kb}\Gamma^i_{jl}y^b - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\partial_b\phi y^b\right)\partial_a\phi a^{al}\hat{k}^i y_k\underset{lj}{\mathcal{S}}\left(\hat{k}_l y_j\right)\end{aligned} \tag{7.33}$$

$$\delta_l\beta = -\hat{k}_h N^h_l \tag{7.34}$$

$$\delta_l\sigma = \frac{1}{2\sigma}\partial_l a_{ij}y^i y^j - N^h_L\left(\frac{1}{\sigma}a_{ih}y^i\right) \tag{7.35}$$

$$\delta_l F = \frac{1}{2\sigma}\partial_l a_{ij}y^i y^j + \partial_l\phi\beta - N^h_l\left(\frac{1}{\sigma}a_{ih}y^i + \phi\hat{k}_h\right) \tag{7.36}$$

$$\delta_l y_i = -a_{ih}N^h_l \tag{7.37}$$

$$\begin{aligned}\delta_l C_{ijk} &= \frac{3}{2}\left(\frac{\phi}{\sigma^5}\delta_l\beta + \frac{\beta}{\sigma^5}\partial_l\phi - 5\frac{\beta\phi}{\sigma^6}\delta_l\sigma\right)y_i y_j y_k - \\ &- \frac{3\beta\phi}{2\sigma^5}\left(a_{ih}N^h_l y_j y_k + a_{jh}N^h_l y_i y_k + a_{kh}N^h_l y_i y_j\right) + 3\left(\frac{1}{\sigma}\partial_l\phi - \frac{\phi}{\sigma^2}\delta_l\sigma\right)\underset{ijk}{\mathcal{S}}\left(a_{ij}\hat{k}_k\right) + \\ &+ 3\frac{\phi}{\sigma}\partial_l\left[\underset{ijk}{\mathcal{S}}\left(a_{ij}\hat{k}_k\right)\right] - 3\left(\frac{1}{\sigma^3}\partial_l\phi - 3\frac{\phi}{\sigma^4}\delta_l\sigma\right)\underset{ijk}{\mathcal{S}}\left(y_i y_j\hat{k}_k\right) + 3\frac{\phi}{\sigma^3}\delta_l\left(\underset{ijk}{\mathcal{S}}\left(y_i y_j\hat{k}_k\right)\right) - \\ &- 3\left(\frac{\phi}{\sigma^3}\delta_l\beta + \frac{\beta}{\sigma^3}\partial_l\phi - 3\frac{\beta\phi}{\sigma^4}\delta_l\sigma\right)\underset{ijk}{\mathcal{S}}\left(a_{ij}y_k\right) - \frac{3\beta\phi}{\sigma^3}\delta_l\left(\underset{ijk}{\mathcal{S}}\left(a_{ij}y_k\right)\right)\end{aligned} \tag{7.38}$$

$$\begin{aligned}\delta_l\Lambda_{ijk} = &\frac{3}{2}\left(\frac{\phi}{\sigma^5}\delta_l\beta + \frac{\beta}{\sigma^5}\partial_l\phi - 5\frac{\beta\phi}{\sigma^6}\delta_l\sigma\right)\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(y_iy_ja_{ab}\right)y^ay^b + \\ &+ \frac{3\beta\phi}{2\sigma^5}\delta_l\left[\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(y_iy_j\partial_ka_{ab}\right)y^ay^b\right] - \left(\frac{1}{\sigma^3}\partial_l\phi - 3\frac{\phi}{\sigma^4}\delta_l\sigma\right)\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(\left(y_i\hat{k}_j + y_j\hat{k}_i\right)\partial_ka_{ab}\right)y^ay^b - \\ &- \frac{\phi}{\sigma^3}\delta_l\left[\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(\left(y_i\hat{k}_j + y_j\hat{k}_i\right)\partial_ka_{ab}\right)y^ay^b\right] - \\ &- \left(\frac{\phi}{4\sigma^3}\delta_l\beta + \frac{\beta}{4\sigma^3}\partial_l\phi - 3\frac{\beta\phi}{4\sigma^4}\delta_l\sigma\right)\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(a_{ij}\partial_ka_{ab}\right)y^ay^b - \frac{\phi\beta}{4\sigma^3}\delta_l\left[\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(a_{ij}\partial_ka_{ab}\right)y^ay^b\right]\end{aligned} \tag{7.39}$$

$$\begin{aligned}\delta_lM_{ijk} = &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}\delta_l\beta - \frac{\beta}{\sigma^2}\delta_l\sigma\right)\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(a_{ij}\partial_k\phi\right) + \frac{\beta}{2\sigma}\delta_l\left[\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(a_{ij}\partial_k\phi\right)\right] - \\ &- \frac{1}{\sigma^2}\delta_l\sigma\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(\left(y_i\hat{k}_j + y_j\hat{k}_i\right)\partial_k\phi\right) + \frac{1}{\sigma}\delta_l\left[\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(\left(y_i\hat{k}_j + y_j\hat{k}_i\right)\partial_k\phi\right)\right] - \\ &- \left(\frac{1}{\sigma^3}\delta_l\beta - 3\frac{\beta}{\sigma^4}\delta_l\sigma\right)\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(y_iy_j\partial_k\phi\right) - \frac{\beta}{\sigma^3}\delta_l\left[\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(y_iy_j\partial_k\phi\right)\right] + \\ &+ 2\partial_l\phi\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(\hat{k}_i\hat{k}_j\partial_k\phi\right) + 2\phi\partial_l\left[\underset{ijk}{\mathcal{P}}\left(\hat{k}_i\hat{k}_j\partial_k\phi\right)\right]\end{aligned} \tag{7.40}$$

Από τις σχέσεις (7.25), (7.26), (7.27), (7.28) και τις παραπάνω σχέσεις υπολογισμού των παραγώγων τους, μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά την R^i_{jkl} καμπυλότητα. Ο υπολογισμός παραλείπεται γιατι είναι εξαιρετικά επώδυνος.

Τώρα υπολογίζοντας την S-καμπυλότητα από την σχέση (7.28) παίρνουμε

$$\begin{aligned}S_{jikh} = &\frac{\phi^2\left(m\sigma^2 - \beta^2\right)}{2F\sigma^3}\underset{ji}{\mathcal{A}}\left(a_{hj}a_{ik}\right) + \frac{\phi^2}{2F\sigma}\left[\underset{ij}{\mathcal{A}}\left(a_{ki}\hat{k}_j\right)\hat{k}_h + \underset{ji}{\mathcal{A}}\left(a_{hj}\hat{k}_i\right)\hat{k}_k\right] + \\ &+ \frac{\beta\phi^2}{2F\sigma^3}\left[\underset{ji}{\mathcal{A}}\left(a_{kj}\hat{k}_i\right)y_h + \underset{kh}{\mathcal{A}}\left(a_{jk}\hat{k}_h\right)y_i\right] + \\ &+ \frac{\phi^2}{2F\sigma^3}\left[\hat{k}_hy_k\underset{ij}{\mathcal{A}}\left(\hat{k}_iy_j\right) + \hat{k}_ky_h\underset{ji}{\mathcal{A}}\left(\hat{k}_jy_i\right)\right] + \\ &+ \frac{\beta\phi^2}{2F\sigma^3}\left[\underset{hk}{\mathcal{A}}\left(a_{ih}\hat{k}_k\right)y_j + \underset{ij}{\mathcal{A}}\left(a_{hi}\hat{k}_j\right)y_k\right] + \\ &+ \frac{\phi^2\left(m\sigma^2 - 2\beta^2\right)}{4F\sigma^5}\left[\underset{hk}{\mathcal{A}}\left(a_{ih}y_k\right)y_j + \underset{kh}{\mathcal{A}}\left(a_{jk}y_h\right)y_i\right]\end{aligned} \tag{7.41}$$

$$\begin{aligned}S^r_{ikh} = &\frac{m\sigma^2 - \beta^2}{2F^2\sigma^2}\underset{hk}{\mathcal{A}}\left(\delta^r_ha_{ki}\right) + \frac{\phi^2}{2F^2}\left[\hat{k}_i\underset{hk}{\mathcal{A}}\left(\delta^r_h\hat{k}_k\right) + \hat{k}^r\underset{kh}{\mathcal{A}}\left(a_{ki}\hat{k}_h\right)\right] + \\ &+ \frac{\beta\phi^2}{2F^2\sigma^2}\left[\delta^r_k\underset{ih}{\mathcal{S}}\left(\hat{k}_iy_h\right) - \delta^r_h\underset{ik}{\mathcal{S}}\left(\hat{k}_iy_k\right)\right] + \frac{\beta\phi^2}{2F^2\sigma^2}\hat{k}^r\underset{hk}{\mathcal{A}}\left(a_{ih}y_k\right) + \\ &+ \frac{\left(m\sigma^2 - 2\beta^2\right)\phi^2}{2F^2\sigma^4}y_i\underset{kh}{\mathcal{A}}\left(\delta^r_ky_h\right) + \frac{\phi^2}{2F^2\sigma^2}\left[\hat{k}^ry_i\underset{kh}{\mathcal{A}}\left(\hat{k}_ky_h\right) + y^r\hat{k}_i\underset{hk}{\mathcal{A}}\left(\hat{k}_hy_k\right)\right] + \\ &+ \frac{\phi^2\left(\beta\sigma - \beta^2\phi + 2m\sigma^2\phi\right)}{2F^3\sigma^2}y^r\underset{hk}{\mathcal{A}}\left(a_{ih}\hat{k}_k\right) + \frac{\left(m\sigma^2 - \beta^2\right)\phi^3}{F^3\sigma^4}y^ry_i\underset{kh}{\mathcal{A}}\left(\hat{k}_ky_h\right) + \\ &+ \frac{2\beta^2\phi^2 - m\sigma^2\phi^2 + \beta m\sigma\phi^3}{2F^3\sigma^3}y^ry_i\underset{kh}{\mathcal{A}}\left(a_{ik}y_h\right)\end{aligned} \tag{7.42}$$

Η S-καμπυλότητα Ricci δίνεται από

$$\begin{aligned}S_{ih} = &-\frac{3\left(m\sigma\phi^2 - \beta^2\phi^2\right)}{4F^2\sigma^2}a_{ih} - \frac{\phi^2}{4F^2}\hat{k}_i\hat{k}_h + \\ &+ \frac{\beta\phi^2}{2F^2\sigma^2}\underset{ih}{\mathcal{S}}\left(\hat{k}_iy_h\right) + \frac{3m\sigma^2\phi^2 - 4\beta^2\phi^2}{4F^2\sigma^4}y_iy_h\end{aligned} \tag{7.43}$$

και η βαθμωτή Ricci S-καμπυλότητα από

$$S = \frac{5\left(\beta^2 - m\sigma^2\right)\phi^2}{2\sigma F^3} \tag{7.44}$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι απουσία ανισοτροπίας, δηλαδή αν $\phi = 0$, η S-καμπυλότητα μηδενίζεται. Άρα η S-καμπυλότητα μπορεί να θεωρηθεί ως η συνιστώσα της καμπυλότητας που εκφράζει την ανισοτροπία.

7.3 Finsler εξισώσεις πεδίου

Στην προηγούμενη ενότητα υπολογίσαμε τις συνιστώσες της καμπυλότητας του Finsler-Randers χωροχρόνου. Τώρα εφοδιάζουμε τον χωροχρόνο με μια γενικευμένη μετρική (δηλαδή μια μετρική στην εφαπτόμενη δέσμη του χωροχρόνου) που έχει μορφή

$$G = g_{ij}(x,y)\, dx^i \otimes dx^j + h_{ab}(x,y)\, \delta y^a \otimes \delta y^b \tag{7.45}$$

όπου g_{ij} είναι η Finsler-Randers μετρική του χωροχρόνου που υπολογίσαμε στην ενότητα 7.1.

Στην διπλωματική εργασία του Α.Τριανταφυλλόπουλου [19] έχει γίνει αναλυτικός υπολογισμός των εξισώσεων πεδίου στην εφαπτόμενη δέσμη εφοδιασμένη με μια μετρική της μορφής (7.45) και την N-κανονική d-συνοχή που είδαμε στην ενότητα 5.2. **Οι γενικευμένες εξισώσεις πεδίου του Einstein** δίνονται από

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{2}(R+S)\, g_{ij} + R^a_{ki} C^k_{ja} &= k\overset{1}{T}_{ij} \\ S_{ab} - \frac{1}{2}(R+S)\, h_{ab} &= k\overset{2}{T}_{ab} \end{aligned} \tag{7.46}$$

Η Cartan συνοχή που εφοδιάσαμε τον Finsler-Randers χωροχρόνο είναι συμβατή με την μετρική g όπως η N-κανονική d-συνοχή είναι συμβατή με την G. Άρα οι εξισώσεις πεδίου για έναν χώρο Finsler εφοδιασμένο με την Cartan συνοχή είναι ίδιες με τις εξισώσεις (7.46) με την διαφορά ότι $h_{ab} = g_{ij}$ (και ότι αυτή συνεπάγεται για τους υπόλοιπους όρους της καμπυλότητας), δηλαδή

$$\begin{aligned} R_{ij} - \frac{1}{2}(R+S)\, g_{ij} + R^a_{ki} C^k_{ja} &= k\overset{1}{T}_{ij} \\ S_{ij} - \frac{1}{2}(R+S)\, g_{ij} &= k\overset{2}{T}_{ij} \end{aligned} \tag{7.47}$$

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες της καμπυλότητας του Finsler-Randers χωροχρόνου, που υπολογίσαμε στην προηγούμενη ενότητα, στις εξισώσεις πεδίου (7.47) μπορούμε να πάρουμε εξισώσεις τύπου Friedmann για τον Finsler-Randers χωροχρόνο. Όπως καταλαβαίνετε μένουμε απλώς στην ιδέα γιατί οι πράξεις είναι εξαιρετικά δύσκολες.

Κεφάλαιο 8

Finsler-Randers Κοσμολογικό μοντέλο

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή του προηγούμενου κεφαλαίου κεφαλαίου όλο και περισσότερες παρατηρήσεις δείχνουν ότι το σύμπαν είναι ανισοτροπικό. Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρουσιάσαμε την γεωμετρική δομή ενός ανισοτροπικού βαρυτικού πεδίου. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την περιγραφή και σε συνδιασμό με την FRW μετρική και μια εγγυτατοποίηση θα αναπτύξουμε ένα ανισοτροπικό κοσμολογικό μοντέλο.

8.1 Finsler-Randers μετρική

Ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε φυσικά φαινόμενα είναι να ενσωματώσουμε την δυναμική τους στο γεωμετρικό υπόβαθρο, όπως έκανε κι ο Einstein για να περιγράψει την βαρύτητα. Έτσι για να περιγράψουμε την παρατηρούμενη ανισοτροπία εισάγουμε μια μετρική του χωροχρόνου που περιγράφει ένα ανισοτροπικό σύμπαν, δηλαδή η ανισοτροπία είναι χαρακτηριστικό της γεωμετρίας του χωροχρόνου.

Ο χωροχρόνος είναι μια τετραδιάστατη πολλαπλότητα M. Τον εφοδιάζουμε με μια **Finsler-Randers θεμελιώδη συνάρτηση**

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \sigma(x,y) + \phi(x)\,\hat{k}_a y^a \\ \sigma(x,y) &= \sqrt{a_{\kappa\lambda}(x)\, y^\kappa y^\lambda} \end{aligned} \tag{8.1}$$

όπου $a_{\kappa\lambda}$ είναι μια οποιαδήποτε pseudo-Riemann μετρική. Στα πλαίσια της εφαρμογής στην φυσική και ειδικότερα στην κοσμολογία θα χρησιμοποιήσουμε την Robertson-Walker μετρική που όπως έχουμε δεί στο 6ο κεφάλαιο, ορίζεται από την σχέση

$$a_{\kappa\lambda}(x = (\tau, r, \theta, \phi)) = diag\left(1, -\frac{a^2}{1-kr^2}, -a^2r^2, -a^2r^2sin^2\theta\right) \tag{8.2}$$

Ο αριθμός k είναι η καμπυλότητα διατομής του χώρου και παίρνει τιμές $0, +1, -1$ για ένα επίπεδο, κλειστό και ανοιχτό σύμπαν αντίστοιχα. Οι χωρικές συντεταγμένες είναι συγκινούμενες με το κοσμολογικό ρευστό (comoving coordinates) και η συντεταγμένη του χρόνου αναπαριστά τον χρόνο που μετρά ένα ρολόι κινούμενο πάνω στην κοσμική γραμμή μαζί με τον συγκινούμενο παρατηρητή (proper time). Το διάνυσμα $y^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ αναπαριστά την τετραταχύτητα του συγκινούμενου παρατηρητή κατά μήκος των γραμμών ροής του κοσμολογικού ρευστού. Ο proper time τ είναι η παράμετρος του μήκους τόξου s για μία timelike καμπύλη. Χρησιμοποιούμε μονάδες ώστε $c = 1$. Το διανυσματικό πεδίο

$$k_a(x) = \phi(x)\,\hat{k}_a \tag{8.3}$$

είναι ένα ασθενές, πρωτεύον διανυσματικό πεδίο $|k_a| \ll 1$ που εκφράζει την παρατηρούμενη ανισοτροπία του χωροχρόνου και είναι ενσωματωμένο στην γεωμετρία σαν ενδογενές χαρακτηριστικό. Η ανισοτροπία προέρχεται από την κοσμολογική εξέλιξη άρα είναι φυσικό να περιμένουμε ότι το πεδίο k_a δείχνει στην ίδια κατεύθυνση με τα εφαπτόμενα διανύσματα των γραμμών ροής του σύμπαντος (fluid flow lines). Άρα θα έχει μόνο χρονική συνιστώσα που θα περιγράφεται σαν συνάρτηση του proper time, δηλαδή $k_a = (k_0(\tau), 0, 0, 0)$. Για τους παρακάτω υπολογισμούς θα χρησιμοποιήσουμε μια γραμμική προσσέγγιση της ανισοτροπίας, δηλαδή για μικρά x έχουμε

$$\phi(x) \approx \phi(0) + \partial_\mu \phi(0)\, x^\mu \tag{8.4}$$

Ο μετρικός τανυστής του χωρόχρονου $g_{\mu\nu}$ υπολογίζεται από την μετρική συνάρτηση F. Από την σχέση

$$g_{\mu\nu}(x, y(x)) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial y^\mu \partial y^\nu}(x, y(x)) \tag{8.5}$$

και την (8.1) υπολογίζουμε

$$g_{\mu\nu}(x, y(x)) = \frac{F}{\sigma} a_{\mu\nu} + \frac{1}{4\sigma}(k_\mu y_\nu + k_\nu y_\mu) - \frac{\beta}{\sigma^3} y_\mu y_\nu + k_\mu k_\nu \tag{8.6}$$

όπου

$$\beta(x, y(x)) = \phi(x)\, \hat{k}_a y^a = k_a(x)\, y^a \tag{8.7}$$

Η παραπάνω Finsler μετρική

$$r_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x, y(x)) \tag{8.8}$$

είναι ουσιαστικά η εγγυτατοποιημένη Riemann μετρική (ενότητα 4.6) κατα μήκος των κοσμικών γραμμών, της $g_{ij}(x, y)$ Finsler μετρικής, όπου $y(x)^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$. Η εγγυτατοποίηση αυτή είναι υψύστης σημασίας αφού μας επιτρέπει να μελετήσουμε τον χωροχρόνο στην φυσική του 4-διάσταση.

8.2 Συνοχή και καμπυλότητα

Τα σύμβολα Christoffel της Levi-Civita συνοχής που επάγεται από την εγγυτατοποιημένη Riemann μετρική (8.8) δίνονται από την σχέση (4.59)

$$\begin{aligned} r^\kappa_{\lambda\mu}(x) = \gamma^\kappa_{\lambda\mu}(x, y(x)) + C^\kappa_{\mu\rho}(x, y(x))\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\lambda}(x) + \\ + C^\kappa_{\lambda\rho}(x, y(x))\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\mu}(x) - g^{\kappa\sigma}(x, y(x))\, C_{\lambda\mu\rho}(x, y(x))\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\sigma}(x) \end{aligned} \tag{8.9}$$

όπου ο τανυστής Cartan $C_{\mu\nu\lambda}$ υπολογίζεται από την μετρική ως εξής

$$C_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma} S_{(\mu\nu\lambda)}(a_{\mu\nu}k_\lambda) - \frac{1}{\sigma^3} S_{(\mu\nu\lambda)}(y_\mu y_\nu k_\lambda) - \frac{\beta}{\sigma^3} S_{(\mu\nu\lambda)}(a_{\mu\nu} y_\lambda)\right) \tag{8.10}$$

όπου $S_{(\mu\nu\lambda)}$ είναι το κυκλικό άθροισμα διαιρούμενο με το πλήθος των δεικτών. Κάθε όρος της σχέσης (8.10) είναι ανάλογος με τις συνιστώσες του πεδίου k_a, επομένως αν λάβουμε υπ΄όψην μας την συνθήκη $|k_a| \ll 1$, τότε παίρνουμε $C_{\mu\nu\lambda} \approx 0$ και τα σύμβολα Christoffel παίρνουν την μορφή

$$A^\kappa_{\lambda\nu}(x) \approx \gamma^\kappa_{\lambda\nu}(x, y(x)) \tag{8.11}$$

Η εξίσωση των γεωδαισιακών στον εγγυτατοποιημένο Riemann χώρο δίνεται από την σχέση (4.61)

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + r^\mu_{\rho\sigma}(x)\, y^\rho y^\sigma = 0 \tag{8.12}$$

η οποία από την γνωστή σχέση $C_{\mu\nu\sigma} y^\mu = 0$ γίνεται ίδια με την εξίσωση των γεωδαισιακών σε έναν χώρο Finsler (4.23).

Ο Riemann τανυστής καμπυλότητας $L^\kappa_{\lambda\mu\nu}$ δίνεται από την σχέση

$$L^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial A^\kappa_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\kappa_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + A^\rho_{\lambda\nu} A^\kappa_{\rho\mu} - A^\rho_{\lambda\mu} A^\kappa_{\rho\nu} \tag{8.13}$$

Ο υπολογισμός των συνιστωσών της καμπλότητας Ricci $L_{\mu\nu} = L^{a}_{\mu a\nu}$ απλοποιείται εξ΄αιτίας των σχέσεων $\dot{k_0}^2 \approx 0$ και $\ddot{k}_0 \approx 0$ οι οποίες προκύπτουν από την προσέγγιση (8.4) και το γεγονός ότι η ποσότητα $\dot{k}_0$ είναι πολύ μικρή στα πρώτα στάδια του επιταχυνόμενα επεκτεινόμενου σύμπαντος. Έτσι παίρνουμε τις μη μηδενικές συνιστώσες

$$\begin{aligned} L_{00} &= 3\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{4}\frac{\dot{a}}{a}z_\tau\right) \\ L_{11} &= -\frac{\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k + \frac{11}{4}a\dot{a}z_\tau\right)}{1-kr^2} \\ L_{22} &= -\frac{\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k + \frac{11}{4}a\dot{a}z_\tau\right)}{r^2} \\ L_{33} &= -\frac{\left(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k + \frac{11}{4}a\dot{a}z_\tau\right)}{r^2 sin^2\theta} \end{aligned} \tag{8.14}$$

όπου η ποσότητα z_τ ορίζεται από την σχέση

$$z_\tau = \dot{k}_0 \tag{8.15}$$

και είναι μια σταθερά λόγω της σχέσης (8.4).

8.3 Εξισώσεις πεδίου για ένα ανισοτροπικό σύμπαν

Ο τανυστής ενέργειας ορμής ενός Finsler ιδανικού ρευστού για έναν συγκινούνενο παρατηρητή ορίζεται ως εξής

$$T_{\mu\nu}\left(x, y\left(x\right)\right) = \left(p+\rho\right) y_\mu\left(x\right) y_\nu\left(x\right) - p g_{\mu\nu}\left(x, y\left(x\right)\right) \tag{8.16}$$

όπου $p = p\left(x\right), \rho = \rho\left(x\right)$ είναι η πίεση και η ενεργειακή πυκνότητα του κοσμολογικού ρευστού αντίστοιχα. Το διάνυσμα $y^a = \frac{dx^a}{d\tau}$ είναι η τετραταχύτητα του ρευστού και στις συγκινούμενες συντεταγμένες έχει την μορφή $y = (1, 0, 0, 0)$. Άρα οι συνιστώσες του τανυστή ενέργειας ορμής δίνονται από

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -pg_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -pg_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -pg_{33} \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

Αν αντικαταστήσουμε τώρα τις σχέσεις (8.14) και (8.17) στις παρακάτω εξισώσεις πεδίου του Einstein

$$L_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T g_{\mu\nu}\right) \tag{8.18}$$

και λάβουμε υπ΄όψην μας την συνθήκη $|k_a| \ll 1$ παίρνουμε τις παρακάτω διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{4}\frac{\dot{a}}{a}z_\tau &= -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3p\right) \\ \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2} + \frac{11}{4}\frac{\dot{a}}{a}z_\tau &= 4\pi G\left(\rho - p\right) \end{aligned} \tag{8.19}$$

και συνδιάζοντας αυτές εξάγουμε τις παρακάτω εξισώσεις τύπου Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\dot{a}}{a}z_\tau = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \tag{8.20}$$

που είναι ίδιες με αυτές που προκύπτουν από την Robertson-Walker μετρική στην Riemann περίπτωση (6.67), εκτός από τον επιπλέον όρο $\frac{\dot{a}}{a}z_\tau$, ο οποίος σχετίζεται με την παρουσία της ανισοτροπίας.

Η ποσότητα z_τ δίνει την εξέλιξη της ανισοτροπίας στο χρόνο. Είναι μια σταθερά γεγονός που προκύπτει από την γραμμική προσσέγγιση της συνάρτησης ϕ. Μετριέται σε μονάδες Hubble όπως φαίνεται από την εξίσωση (8.20) και εξαρτάται μόνο από την γεωμετρία του Finsler χωροχρόνου. Από την σχέση (8.10) υπολογίζουμε

$$C_{000} = \frac{k_0}{2} \tag{8.21}$$

και διαφορίζοντας ως προς τον proper time βλέπουμε την άμεση εξάρτηση του z_τ από τον τανυστή στρέψης του Cartan C_{000}

$$z_\tau = 2\frac{\partial C_{000}}{\partial \tau} \tag{8.22}$$

8.4 Κοσμολογικές ανισοτροπικές παράμετροι

Εδώ παραθέτουμε τις βασικές ανισοτροπικές παραμέτρους του Finsler-Randers κοσμολογικού μοντέλου που περιγράψαμε παραπάνω.

Στην κλασσική σχετικότητα η πληροφορία της εξέλιξης του ομογενούς και ισοτροπικού σύμπαντος περιέχεται στον παράγοντα κλίμακας $a\,(t)$ της FRW μετρικής. Σε αναλογία με αυτό το μοντέλο, σε ένα ανισοτροπικό σύμπαν, ο **ανισοτροπικός παράγοντας κλίμακας** $\tilde{a}\,(v\,(s))$ ορίζεται κατά μήκος κάθε κοσμικής γραμμής όπου το διανυσματικό πεδίο $v\,(s)$ είναι το εφαπτόμενο κατα μήκος της κοσμικής γραμμής.

Το **μήκος κλίμακας** μιας κοσμικής γραμμής ορίζεται ως εξής

$$S\,(s) = \tilde{a}\,(u\,(s)) \tag{8.23}$$

όπου $u\,(s)$ είναι το πεδίο ταχυτήτων της κοσμικής γραμμής.

Η **ανισοτροπική παράμετρος Hubble** $\tilde{H}$ δίνεται από ($\dot{S} = \frac{\partial \tilde{a}}{\partial y^\mu}\dot{u}^\mu\,(s)$)

$$\tilde{H} = \frac{\dot{S}}{S} = \frac{1}{3}\tilde{\Theta} \tag{8.24}$$

όπου ο όρος $\tilde{\Theta}$ είναι η επέκταση του Finsler χωροχρόνου και υπολογίζεται

$$\tilde{\Theta} = \nabla_\mu y^\mu - C^\lambda_{\mu\lambda}\dot{y}^\mu \tag{8.25}$$

Η συναλλοίωτη παραγώγιση ∇ στην παραπάνω σχέση, είναι η επαγώμενη από την εγγυτατοποιημένη Riemann μετρική $r_{\mu\nu}\,(x)$. Η ανισοτροπική παράμετρος Hubble μπορεί να υπολογιστεί από την σχέση (8.20)

$$\tilde{H}^2 = H^2 + Hz_\tau \tag{8.26}$$

Η **ανισοτροπική παράμετρος πυκνότητας** ορίζεται από την σχέση

$$\tilde{\Omega} = \frac{8\pi G}{3\tilde{H}^2}\rho = \frac{\rho}{\tilde{\rho}_{crit}} \tag{8.27}$$

όπου

$$\tilde{\rho}_{crit} = \frac{3\tilde{H}^2}{8\pi G} \tag{8.28}$$

Η **ανισοτροπική παράμετρος επιβράδυνσης** δίνεται από

$$\tilde{q} = -\frac{S\ddot{S}}{\dot{S}^2} \tag{8.29}$$

Επομένως η εξίσωση Friedmann (8.22) γράφεται

$$\tilde{\Omega} - 1 = \frac{k}{\tilde{H}^2 a^2} \tag{8.30}$$

Βιβλιογραφία

[1] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, Second Edition. Springer, 2003.

[2] John M. Lee. *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature*. Springer, 1997.

[3] Manfredo Pedrigão do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Bosoton, 1992.

[4] D. Bao, S.-S. Chern and Z. Shen. *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Springer, 2000.

[5] H. Rund. *The Differential Geometry of Finsler Spaces*. Springer, Berlin, 1959.

[6] G. S. Asanov. *Finsler Geometry, Relativity and Gauge theories*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1985.

[7] I. Bucataru and R. Miron. Finsler-Lagrange Geometry, Applications to dynamical systems. Editura Academiei Romane, 2007.

[8] R. Miron, S. Watanabe and S. Ikeda. *Some connections on tangent bundle and their applications to general relativity*. Tensor, N. S. 46, 1987.

[9] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. University of California, 1997.

[10] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.

[11] Shigeo Sasaki. *On The Differential Geometry of Tangent Bundles of Riemannian Manifolds*. Mathematical Institute, Tohoku University, 1958.

[12] Ayako Kandatu. *Tangent Bundle of a Manifold with a Non-linear Connection*. Kitasato University, 1966.

[13] Makoto Matsumoto. *On Finsler spaces with Randers' metric and special forms of important tensors*. J. Math, Kyoto University, 1974.

[14] P. C. Stavrinos, A. P. Kouretsis, M. Stathakopoulos. *Friedman-like Robertson-Walker model in generalized metric space-time with weak anisotropy*. https://arxiv.org/abs/gr-qc/0612157v4, 2007.

[15] S. Vacaru, P. Stavrinos, E. Gaburov and D. Gonta. *Clifford and Riemann-Finsler structures in geometric mechanics and gravity*. Geometry Balkan Press, Bucharest, Romania, https://arxiv.org/abs/gr-qc/0508023v2, 2006.

[16] P. C. Stavrinos, F. I. Diakogiannis. *A geometrical anisotropic model of space-time based on Finslerian metric* https://arxiv.org/abs/gr-qc/0203083, Thessaloniki, Greece, 2002.

[17] P. C. Stavrinos *On the generalized metric structure of space-time: Finslerian anisotropic gravitational field* http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/8/1/007/meta, Journal of Physics, 2006.

[18] Christian Pfeifer. *The Finsler spacetime framework: backgrounds for physics beyond metric geometry*. Phd thesis, Hamburg, 2013.

[19] Αλκιβιάδης-Ιωάννης Τριανταφυλλόπουλος. *Γενικευμένες Εξισώσεις Πεδίου στην Πολλαπλότητα και την Εφαπτόμενη Δέσμη της. Εφαρμογές τους στην Κοσμολογία*. Διπλωματική εργασία, Τμήμα Φυσικής ΕΚΠΑ, Αθήνα, 2016.

[20] Manuel Hohmann. *Observer dependent geometries*. https://arxiv.org/abs/1403.4005, Estonia, 2014.

[21] Π. Σταυρινός. *Διαφορική Γεωμετρία και Εφαρμογές Ι*. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα, 2000.

[22] Π. Σταυρινός. *Διαφορική Γεωμετρία και Εφαρμογές ΙΙ*. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα, 1995.