



Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και Φυσικής Στοιχειωδών
Σωματιδίων

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

**Bounces και Hawking-Moss instantons
του πεδίου Higgs κατά την διάρκεια του
κοσμολογικού πληθωρισμού**

Δημήτρης Λούπας
Α.Μ:201516

Επιβλέπων: Νικόλαος Τετράδης

Αθήνα 2017



Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης

Βασική Φυσική με Ειδίκευση στην Πυρηνική Φυσική και
Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων

Bounces και Hawking-Moss instantons του πεδίου Higgs κατά την διάρκεια του κοσμολογικού πληθωρισμού

Δημήτρης Λούπας
A.M:201516

Τριμελής εξεταστική επιτροπή:

1. Νικόλαος Τετράδης, Καθηγητής (Επιβλέπων)
2. Φώτιος Διάκονος, Αναπληρωτής Καθηγητής
3. Ξάνθος Μαϊντάς, Επίκουρος Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σε μια Θεωρία Πεδίου αν το δυναμικό έχει ένα ή περισσότερα ελάχιστα (κενά), τα οποία κλασσικά αντιστοιχούν σε ευσταθείς καταστάσεις ισορροπίας, μπορούμε να έχουμε μεταβάσεις από το ένα ελάχιστο στο άλλο (διάσπαση κενού), είτε μέσω του χβαντικού φαινομένου σήραγγος είτε μέσω θερμικής διέγερσης. Η μετάβαση αυτή πραγματοποιείται μέσω μιας αλλαγής φάσης πρώτης τάξης με την δημιουργία μιας φυσαλίδας, στην οποία η τιμή του πεδίου είναι αυτή που αντιστοιχεί στο ελάχιστο του “νέου” κενού (μετά την μετάβαση), στο υπόβαθρο όπου το πεδίο έχει την τιμή του “παλαιού” κενού (πριν την μετάβαση). Μέτα την δημιουργία της φυσαλίδας, αυτή διαστέλλεται, σχεδόν με την ταχύτητα του φωτός, μετατρέποντας το ψευδές κενό σε αληθές. Η βαρύτητα παίζει καθοριστικό ρόλο στην διάσπαση. Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε την πιθανότητα διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού, στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου, κατά την περίοδο του πληθωρισμού. Η πιθανότητα αυτή μπορεί να μας δώσει κάποια όρια τιμών για την παράμετρο Hubble H την εποχή εκείνη.

ABSTRACT

If a Field Theory has one or more vacua (minima of the potential), which classically correspond to stable states, we can have transitions between them (vacuum decay), either due to quantum tunneling or due to thermal excitations. The transition takes place through a first-order phase transition with the materialization in the false vacuum background of a bubble, within which the field takes the value of the true vacuum. After the creation of the bubble, this expands, almost with the speed of light, converting false vacuum to true. Gravity plays a crucial role in the decay. In this thesis we study the decay probability of the electroweak vacuum in the Standard Model during inflation. From this probability we can obtain bounds on the Hubble parameter H for that period.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία είναι το αποτέλεσμα μιας διετούς πορείας στο Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών του Τομέα Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων του τμήματος Φυσικής του ΕΚΠΑ. Στα δυο αυτά χρόνια είχα την χαρά και την τιμή να γνωρίσω αξιόλογους ανθρώπους που συνέβαλαν στην πρόοδό μου, στους οποίους θα ήθελα να αναφερθώ προσωπικά.

Αρχικά ένα μεγάλο ευχαριστώ στον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής εργασίας μου εργασίας κύριο Νικόλαο Τετράδη, Καθηγητή και Πρόεδρο του Τμήματος Φυσικής του ΕΚΠΑ. Το θέμα που μου ανέθεσε κίνησε ιδιαίτερος το ενδιαφέρον μου και με ώθησε στο να δουλέψω με όρεξη. Με τις συζητήσεις μας κατανόησα ορισμένα έννοιες που ως τότε ήταν ασαφείς στο μυαλό μου και μου έδωσαν τροφή για περαιτέρω έρευνα και μελέτη στον τομέα της θεωρητικής φυσικής.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους συμφοιτητές μου Άρη Γιώτη, Διμίτη Τσάνκο, Ιωάννη Γιαλαμά και τον διδακτορικό φοιτητή Άρη Κάτση. Οι πολύωρες συνομιλίες και διαφωνίες μας με βοήθησαν στο να βελτιώσω ορισμένες πτυχές της εργασίας μου.

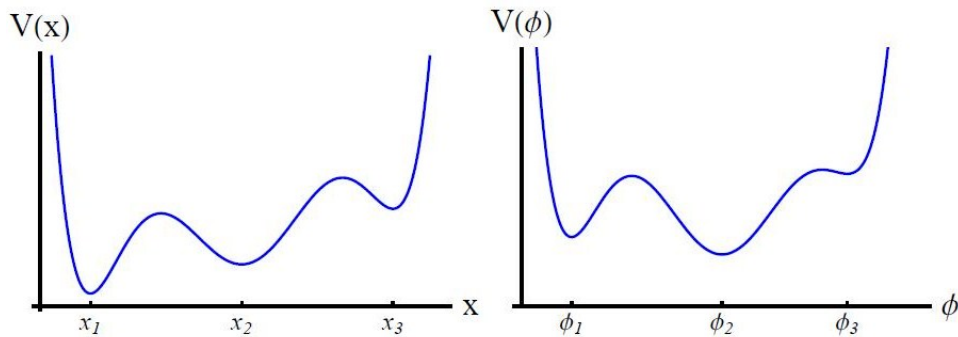
Τέλος, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την στήριξη που μου προσφέρει όλα αυτά τα χρόνια όντας δίπλα μου σε κάθε δύσκολη στιγμή.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Instantons και bounces στην Κβαντική Μηχανική	3
2.1	Φαινόμενο σήραγγος	3
2.2	Ευκλείδεια συναρτησιακά ολοκληρώματα Feynmann	4
2.3	Εφαρμογές σε πηγάδια δυναμικού	8
2.3.1	Απλό πηγάδι δυναμικού	8
2.3.2	Διπλό πηγάδι δυναμικού και instantons	11
2.3.3	Ασταθής καταστάσεις και bounces	18
3	Διάσπαση κενού στην Θεωρία Πεδίου	26
3.1	Ρυθμός διάσπασης στη Θεωρία Πεδίου	26
3.2	Η λύση bounce	30
3.3	Προσέγγιση λεπτού τοιχώματος	33
3.4	Εξέλιξη της φυσαλίδας	36
4	Διάσπαση κενού συμπεριλαμβάνοντας την βαρύτητα	39
4.1	Ρυθμός διάσπασης συμπεριλαμβάνοντας την βαρύτητα	39
4.2	Η λύση bounce στην προσέγγιση λεπτού τοιχώματος	40
4.3	Ανακεφαλαίωση	46
5	Διάσπαση ηλεκτρασθενούς κενού κατά την περίοδο του Πληθωρισμού	48
5.1	Εισαγωγή	48
5.2	Εξισώσεις κίνησης	49
5.3	Προσεγγιστικές λύσεις	50
5.4	Αριθμητική ανάλυση ενός μοντέλου δυναμικού	52
5.5	Εφαρμογή στο Καθιερωμένο Πρότυπο	64
A'	Διορθώσεις ενός βρόγχου στο ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs	67
A'.1	Generating functional	67
A'.2	Επανακανονικοποίηση και το Standard Model	68
A'.3	Εξάρτηση απο βαθμίδα της ενεργού δράσης	69
A'.4	Υπολογισμός της δράσης	69
A'.5	Βαθμωτά πεδία	71
A'.6	Φερμιονικά πεδία	73
A'.7	Πεδία βαθμίδας	74
A'.8	Higgs	74
	Αναφορές	77

1 Εισαγωγή

Η έλευση της Κβαντικής θεωρίας και της Ειδικής θεωρίας της σχετικότητας τον 20^ο αιώνα μπορεί να θεωρηθεί σαν μια επανάσταση στον τομέα της φυσικής. Ο συνδυασμός της Κβαντικής θεωρίας με την Ειδική σχετικότητα, στα μέσα του 20^ο αιώνα, δημιούργησε την Κβαντική θεωρία πεδίων, μια θεωρία η οποία δίνει τις καλύτερες προβλέψεις για τα μετρούμενα πειραματικά μεγέθη. Η εισαγωγή αυτών των θεωριών στον κλάδο της φυσικής έδωσε απαντήσεις σε πολλά ανεξήγητα, μέχρι τότε, φαινόμενα όπως επίσης συνέβαλε στη δημιουργία νέων φαινομένων. Ένα σωματίδιο σε μία διάσταση το οποίο κινείται κάτω από την επίδραση ενός δυναμικού, αν βρίσκεται σε ηρεμία σε ένα οποιοδήποτε από τα ελάχιστα του η κλασική μηχανική προβλέπει ότι θα μείνει εκεί για κάθε χρονική στιγμή. Αντίστοιχα οι καταστάσεις με την χαμηλότερη ενέργεια (τις ονομάζουμε κενά) του πεδίου $\phi(x)$ είναι τα τοπικά ελάχιστα του δυναμικού $V(\phi)$.



Σχήμα 1: Αριστερά: Δυναμικό για σωματίδιο σε μια διάσταση Δεξιά: Δυναμικό για ένα βαθμωτό πεδίο ϕ

Αν το $V(\phi)$ έχει τοπικά ελάχιστα στα ϕ_1 , ϕ_2 και ϕ_3 , οι σχηματισμοί πεδίου με ελάχιστη ενέργεια στο χώρο είναι εκείνοι όπου το πεδίο είναι ομογενές και παίρνει τιμές ϕ_1 , ϕ_2 ή ϕ_3 . Σε περίπτωση που το πεδίο ξεκινήσει σε ηρεμία σε μια από αυτές τις τιμές σύμφωνα με την κλασική μηχανική μένει εκεί για πάντα. Αν λάβουμε υπόψη την κβαντική μηχανική ότι είπαμε πιο πάνω παύει να ισχύει. Το κβαντικό φαινόμενο σήραγγος επιτρέπει στο σωματίδιο ή στο πεδίο να διεισδύσει πέρα από το φράγμα δυναμικού και να κινηθεί πέρα από το μετασταθές ελάχιστο. Το ίδιο συμβαίνει αν βάλουμε το σύστημα σε θερμική επαφή με μία δεξαμενή θερμότητας διότι το σύστημα μπορεί να απορροφήσει ενέργεια αρκετή ώστε να περάσει το φράγμα δυναμικού και να κινηθεί προς ευσταθές ελάχιστο. Για ένα σωματίδιο έχουμε μη μηδενική πιθανότητα αυτά τα φαινόμενα να συμβούν. Αντίθετα το πεδίο δεν μπορεί ταυτόχρονα σε όλο τον άπειρο χώρο να διασπαστεί, λόγω του ότι ο χώρος είναι άπειρος και κάτι τέτοιο θα απαιτούσε άπειρη ενέργεια. Αυτό που συμβαίνει είναι η δημιουργία μίας φυσαλίδας στο χώρο, που είναι σε χαμηλότερη ενεργειακή κατάσταση από τον εξωτερικό χώρο, η οποία έπειτα διαστέλλεται. Όταν λάβουμε υπόψη την βαρύτητα η κατάσταση γίνεται πιο ενδιαφέρουσα. Λόγω της ύπαρξης ενός ορίζοντα υπάρχει μη μηδενική θερμοκρασία Hawking και η διάσπαση λόγω θερμικών διακυμάνσεων είναι πιο εφικτή.

Άλλη μια σημαντική επίτευξη στον κλάδο της φυσικής είναι η περιγραφή των αλληλεπιδράσεων μεταξύ στοιχειωδών σωματιδίων, οι οποίες περιγράφονται από το Καθιερωμένο Πρότυπο. Η περιγραφή της ηλεκτρομαγνητικής και ασθενούς αλληλεπίδρασης με μια ενιαία θεωρία είναι ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα του 20^{ου} αιώνα. Το μοντέλο που προτάθηκε από τους Glashow, Salam και Weinberg

στα μέσα του 60 έχει δοκιμαστεί εκτενώς τα τελευταία 30 χρόνια. Η ανακάλυψη των ουδέτερων ασθενών αλληλεπιδράσεων και η παραγωγή ενδιάμεσων διανυσματικών μποζονίων ($W^\pm$ και Z) με τις αναμενόμενες ιδιότητες αύξησε την αξιοπιστία του μοντέλου. Η περιγραφή της ηλεκτρασθενούς αλληλεπίδρασης περιγράφεται από μια θεωρία βαθμίδας που βασίζεται στην συμμετρία της $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ ομάδας, η οποία διασπάται αυθόρμητα από τον μηχανισμό Higgs. Τα πεδία με μάζα, λεπτόνια και κουάρκς, κατανέμονται σε οικογένειες, με τα αριστερόστροφα φερμιόνια να ανήκουν σε ασθενείς isodoublets ενώ τα δεξιόστροφα να μετασχηματίζονται σαν ασθενείς isosinglets. Τα διανυσματικά μποζόνια, W , Z και γ τα οποία μεταδίδουν τις αλληλεπιδράσεις είναι συζευγμένα (minimal coupling) με τα πεδία μάζας. Ένα ουσιώδες στοιχείο του μοντέλου είναι το βαθμωτό δυναμικό που προστίθεται στη Λαγκραντζιανή για να παράγει τις μάζες των διανυσματικών μποζονίων και φερμιονίων μέσω του μηχανισμού Higgs.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχολούμαστε με την πιθανότητα διάσπασης του πεδίου Higgs κατά την διάρκεια του κοσμολογικού πληθωρισμού. Στο κεφάλαιο 2 αναπτύσσουμε τον φορμαλισμό για την εύρεση του ρυθμού διάσπασης στην κβαντική μηχανική. Στο κεφάλαιο 3 γενικεύουμε τον φορμαλισμό που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 2 για την εύρεση του ρυθμού διάσπασης στην θεωρία πεδίου. Βρίσκουμε μια έκφραση για τον συντελεστή B που υπεισέρχεται στον ρυθμό διάσπασης στην προσέγγιση του λεπτού τοιχώματος. Στο κεφάλαιο 4 λαμβάνουμε υπόψη την βαρύτητα και βλέπουμε τον ρόλο που παίζει στην διάσπαση του κενού. Στο κεφάλαιο 5 υπολογίζουμε κβαντικές διορθώσεις ενός βρόγχου στο ενεργό δυναμικό του Higgs το οποίο θα το χρησιμοποιήσουμε σαν ένα μοντέλο δυναμικού στο κεφάλαιο 6 για την μελέτη της διάσπασης του πεδίου Higgs κατά την διάρκεια του κοσμικού πληθωρισμού.

2 Instantons και bounces στην Κβαντική Μηχανική

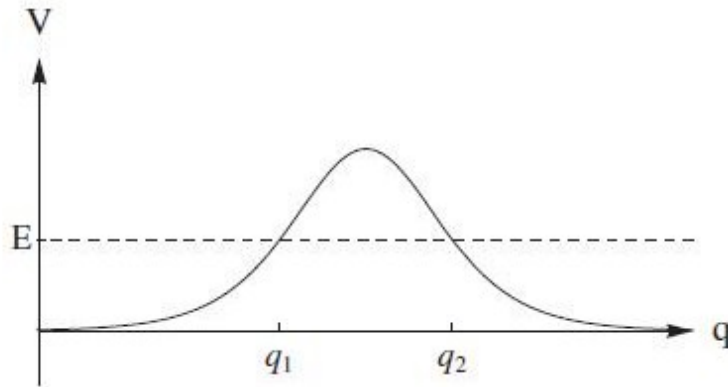
Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με Ευκλείδεια συναρτησιακά ολοκληρώματα, συγκεκριμένα με συναρτησιακά ολοκληρώματα διαδρομών Feynmann, καθώς και με Ευκλείδειες λύσεις εξισώσεων. Όταν λέμε Ευκλείδειες λύσεις εννοούμε λύσεις σε χωροχρόνους με μιγαδικό χρόνο ($t \rightarrow -i\tau$), δηλαδή με Ευκλείδεια μετρική. Ο Ευκλείδειος χώρος προκύπτει από τον χωρόχρονο Minkowski κάνοντας αναλυτική συνέχιση της χρονικής συνιστώσας του τελευταίου, $x^0 = -ix^4$ με αποτέλεσμα τα πρόσημα της μετρικής να είναι $(- - - -)$ σε αντίθεση με τον χωρόχρονο Minkowski που είναι $(+ - - -)$. Το εσωτερικό γινόμενο $x \cdot y$ στον χωρόχρονο Minkowski γίνεται αντίστοιχα $-x \cdot y$ του Ευκλείδειου χώρου. Δεν είναι τόσο προφανές γιατί οι Ευκλείδειες λύσεις έχουν φυσική σημασία. Η σημαντικότητα τους προκύπτει από το γεγονός ότι συνδέονται με ένα καθαρά κβαντομηχανικό φαινόμενο, το φαινόμενο σήραγγος. Η συνέχεια αυτού του κεφαλαίου είναι αφιερωμένη στην ανάπτυξη του Ευκλείδειου φορμαλισμού σε συστήματα με πεπερασμένους βαθμούς ελευθερίας. Τα αποτελέσματα που θα προκύψουν γενικεύονται και για συστήματα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας (Θεωρίες Πεδίων) με τα οποία θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

2.1 Φαινόμενο σήραγγος

Θεωρούμε κβαντικό σωματίδιο σε μία διάσταση με Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \quad (2.1)$$

όπου V είναι το φράγμα δυναμικού όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.



Αν έχουμε ένα κύμα που προσπίπτει από τα αριστερά με ενέργεια E , η οποία είναι μικρότερη από την τιμή του δυναμικού V στην κορυφή του φράγματος, το μεγαλύτερο ποσοστό του κύματος ανακλάται, όμως υπάρχει επίσης ένα μικρό ποσοστό διερχόμενου κύματος. Κλασικά το σωματίδιο δεν μπορεί να περάσει το φράγμα δυναμικού, φτάνει μέχρι το q_1 και επιστρέφει πίσω. Κβαντομηχανικά υπάρχει πιθανότητα να ανιχνεύσουμε το σωματίδιο στην δεξιά περιοχή του φράγματος με την πιθανότητα διέλευσης να δίνεται από την προσέγγιση WKB από τη σχέση

$$|T(E)| = e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{q_1}^{q_2} dq \sqrt{2m[V(q) - E]}} \quad (2.2)$$

Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται φαινόμενο σήραγγος και θα παίζει σημαντικό ρόλο παρακάτω.

2.2 Ευκλείδεια συναρτησιακά ολοκληρώματα Feynmann

Αρχικά, για απλότητα, θα ασχοληθούμε με σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας. Συγκεκριμένα με σωματίδιο, χωρίς σπίν και μοναδιαίας μάζας ($m = 1$), το οποίο κινείται σε μια διάσταση υπό την παρουσία δυναμικού. Η Χαμιλτονιανή του συστήματος δίνεται από την σχέση:

$$H = \frac{p^2}{2} + V(q) \quad (2.3)$$

Θα εξάγουμε γνωστά αποτελέσματα, αυτού του συστήματος με την μέθοδο των ολοκληρωμάτων διαδρομών Feynmann σε μιγαδικό χρόνο. Όπως είναι γνωστό η πιθανότητα για ένα σωματίδιο που βρίσκεται στη θέση q_i την χρονική στιγμή $-t_0/2$ να βρεθεί στη θέση q_f την χρονική στιγμή $t_0/2$ δίνεται από τη σχέση:

$$\langle q_f | e^{-iHt_0/\hbar} | q_i \rangle = N \int [dq(t)] e^{iS[q(t)]/\hbar} \quad (2.4)$$

Όπου στο αριστερό μέλος $|q_i\rangle$ και $|q_f\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της θέσης, H είναι ο Χαμιλτονιανός τελεστής και $e^{-iH\Delta t/\hbar}$ είναι ο τελεστής χρονικής εξέλιξης. Στο δεξί μέλος N είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης, το $[dq(t)]$ δηλώνει ολοκλήρωση σε όλες της συναρτήσεις $q(t)$ που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $q(-t_0/2) = q_i$ και $q(t_0/2) = q_f$. Τέλος $S[q(t)]$ είναι η δράση η οποία δίνεται από την σχέση:

$$S[q(t)] = \int_{-t_0/2}^{t_0/2} dt L(q, \dot{q}) = \int_{-t_0/2}^{t_0/2} dt \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - V[q(t)] \right] \quad (2.5)$$

Πηγαίνοντας το $t \rightarrow -i\tau$ (Wick rotation) έχουμε:

$$dt = -i d\tau$$

$$\left(\frac{dq}{dt} \right)^2 = - \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2$$

Επομένως θα έχουμε την αντικατάσταση:

$$S[q(t)] \rightarrow S[q(\tau)] = i \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V[q(\tau)] \right]$$

και

$$S_E[q(\tau)] = \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 + V[q(\tau)] \right] \quad (2.6)$$

την Ευκλείδεια δράση.

Στη σχέση 2.3 θα έχουμε την αντικατάσταση $iS[q(t)] \rightarrow -S_E[q(\tau)]$, με αποτέλεσμα να πάρει την μορφή:

$$\langle q_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | q_i \rangle = N \int [dq(\tau)] e^{-S_E[q(\tau)]/\hbar} \quad (2.7)$$

Στο αριστερό μέλος $|q_i\rangle$ και $|q_f\rangle$ είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της θέσης και H είναι ο Χαμιλτονιανός τελεστής όπως και προηγουμένως, τ_0 είναι ένας θετικός αριθμός.

Το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης μπορεί να αναπτυχθεί σε ένα πλήρες ορθοκανονικό σύνολο ενεργειακών ιδιοκαταστάσεων,

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle$$

εισάγοντας την σχέση πληρότητας,

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = I$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \langle q_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | q_i \rangle &= \langle q_f | e^{-H\tau_0/\hbar} I | q_i \rangle = \sum_n \langle q_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | n \rangle \langle n | q_i \rangle = \sum_n e^{-E_n\tau_0/\hbar} \langle q_f | n \rangle \langle n | q_i \rangle \\ &= e^{-E_0\tau_0/\hbar} \langle q_f | 0 \rangle \langle 0 | q_i \rangle + e^{-E_1\tau_0/\hbar} \langle q_f | 1 \rangle \langle 1 | q_i \rangle + \dots \\ &= e^{-E_0\tau_0/\hbar} (\langle q_f | 0 \rangle \langle 0 | q_i \rangle + e^{(E_0-E_1)\tau_0/\hbar} \langle q_f | 1 \rangle \langle 1 | q_i \rangle + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

με $\Delta E_1 = E_0 - E_1 < 0$ και αντίστοιχα για τους υπόλοιπους όρους (Έχουμε θεωρήσει ότι η θεμελιώδης κατάσταση είναι μη εκφυλισμένη).

Στο όριο $\tau_0 \rightarrow \infty$ όλοι οι όροι για καταστάσεις με ενέργεια μεγαλύτερη από E_0 , μέσα στην παρένθεση, αποσβένονται εκθετικά και δεν συνεισφέρουν, σε σχέση με τον όρο που περιέχει την κατάσταση $|0\rangle$, με αποτέλεσμα η κύρια συνεισφορά να προέρχεται από αυτόν τον όρο. Επομένως:

$$\langle q_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | q_i \rangle = e^{-E_0\tau_0/\hbar} \langle q_f | 0 \rangle \langle 0 | q_i \rangle = e^{-E_0\tau_0/\hbar} \psi_0(q_f) \psi_0^*(q_i) \quad (2.9)$$

με $\psi_0(q)$ την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους ενεργειακής κατάστασης.

Έτσι για μεγάλα τ_0 από την παραπάνω έκφραση μπορούμε να βρούμε την ενέργεια και την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους ενεργειακής ιδιοκατάστασης.

Στο δεξί μέλος N είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης, S_E είναι η Ευκλείδεια δράση και το $[dq(\tau)]$ δηλώνει ολοκλήρωση ξανά σε όλες της συναρτήσεις $q(\tau)$ που ικανοποιούν τις αρχικές συνθήκες $q(-\tau_0/2) = q_i$ και $q(\tau_0/2) = q_f$ αλλά αυτή τη φορά σε Ευκλείδειο χρόνο. Αν $\bar{q}(\tau)$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες, τότε μια οποιαδήποτε συνάρτηση η οποία ικανοποιεί της ίδιες συνοριακές συνθήκες μπορεί να γραφεί ως

$$q(\tau) = \bar{q}(\tau) + \sum_n c_n x_n(\tau) \quad (2.10)$$

Όπου οι συναρτήσεις x_n αποτελούν ένα πλήρες σύνολο πραγματικών ορθοκανονικών συναρτήσεων οι οποίες μηδενίζονται στα σύνορα

$$\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau x_n(\tau) x_m(\tau) = \delta_{nm} \quad (2.11)$$

$$x_n(\pm\tau_0/2) = 0 \quad (2.12)$$

Αυτό έχει ως συνέπεια να αλλάζουμε τις μεταβλητές της ολοκλήρωσης, αντί να έχουμε ολοκλήρωση ως προς όλες τις συναρτήσεις $q(\tau)$ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες έχουμε ολοκλήρωση ως προς όλες τις τιμές των συντελεστών c_n και γράφουμε

$$[dq(\tau)] = \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (2.13)$$

Το δεξί μέλος της 2.7 μπορεί άμεσα να υπολογιστεί στην ημικλασσική προσέγγιση ($\hbar \rightarrow 0$). Σε αυτή την περίπτωση η κύρια συνεισφορά στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα προέρχεται από συναρτήσεις (τροχιές) κοντά στην συνάρτηση η οποία αποτελεί ακρότατο για την Ευκλείδεια δράση. Για απλότητα θα υποθέσουμε ότι υπάρχει μόνο μια συνάρτηση, την οποία θα την συμβολίσουμε με $\bar{q}(\tau)$, η οποία αποτελεί ακρότατο της δράσης (αν υπάρχουν περισσότερα ακρότατα θα πρέπει να αθροίσουμε πάνω σε όλα)

$$\begin{aligned} \delta S_E = 0 &\Rightarrow S_E[\bar{q}(\tau) + \delta q(\tau)] - S_E[\bar{q}(\tau)] = 0 \Rightarrow \\ &\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau} + \frac{d(\delta q)}{d\tau} \right)^2 + V(\bar{q} + \delta q) \right] - \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau} \right)^2 + V(\bar{q}) \right] = 0 \Rightarrow \\ &\left[\frac{d\bar{q}}{d\tau} \delta q \right]_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} + \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \left(-\frac{d^2\bar{q}}{d\tau^2} + V'(\bar{q}) \right) \delta q = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left. \frac{\delta S}{\delta q} \right|_{q=\bar{q}} = -\frac{d^2\bar{q}}{d\tau^2} + V'(\bar{q}) = 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις κρατήσαμε μέχρι όρους πρώτης τάξης ως προς δq . Οι επιφανειακοί όροι από την παραγοντική ολοκλήρωση δεν συνεισφέρουν διότι στα όρια οι μεταβολές των συναρτήσεων $\delta q(\pm\tau_0/2)$ είναι μηδέν και ο τόνος δηλώνει παραγωγή ως προς q .

Η εξίσωση 2.14 αποτελεί την εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου μοναδιαίας μάζας το οποίο κινείται σε δυναμικό $-V(x)$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η τροχιά που δίνει την κύρια συνεισφορά στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα είναι η εξίσωση κίνησης ενός κλασσικού σωματιδίου σε ανεστραμμένο δυναμικό. Η ποσότητα

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau} \right)^2 - V(\bar{q}) \quad (2.15)$$

αποτελεί σταθερά της κίνησης, μια έκφραση η οποία θυμίζει την διατήρηση της ενέργειας με την διαφορά ενός $-$ σημείου.

Λόγω του ότι η κύρια συνεισφορά στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα προέρχεται από τροχιές γύρω από την κλασσική τροχιά, μπορούμε να αναπτύξουμε τη δράση γύρω από αυτή (κρατώντας μέχρι όρους

δεύτερης τάξης)

$$\begin{aligned}
S_E[\bar{q}(\tau) + \delta q(\tau)] &= \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau} + \frac{d(\delta q)}{d\tau} \right)^2 + V(\bar{q} + \delta q) \right] \\
&= S_E[\bar{q}] + \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \left. \frac{\delta S}{\delta q} \right|_{q=\bar{q}} \delta q + \frac{1}{2} \left[\frac{d(\delta q)}{d\tau} \delta q \right]_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} + \frac{1}{2} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \delta q \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right] \delta q \\
&= S_E[\bar{q}] + \frac{1}{2} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \delta q [\bar{A}] \delta q
\end{aligned} \tag{2.16}$$

με

$$\bar{A} = -\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \tag{2.17}$$

Επιλέγοντας τις συναρτήσεις x_n να είναι ιδιοσυναρτήσεις του παραπάνω τελεστή ώστε να ισχύει

$$-\frac{d^2 x_n(\tau)}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) x_n(\tau) = \lambda_n x_n(\tau) \tag{2.18}$$

η σχέση 2.16 γράφοντας $\delta q(\tau) = \sum_n c_n x_n(\tau)$ γίνεται

$$\begin{aligned}
S_E[\bar{q}(\tau) + \delta q(\tau)] &= S_E[\bar{q}] + \frac{1}{2} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \sum_m c_m x_m(\tau) \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right] \sum_n c_n x_n(\tau) \\
&= S_E[\bar{q}] + \frac{1}{2} \sum_{mn} c_m \lambda_n c_n \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau x_m(\tau) x_n(\tau) = S_E[\bar{q}] + \frac{1}{2} \sum_{mn} c_m \lambda_n c_n \delta_{mn} \\
&= S_E[\bar{q}] + \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Βάζοντας στο δεξί μέλος της 2.7 τις 2.13, 2.19

$$\langle q_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | q_i \rangle = N \int \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-[S_E[\bar{q}] + \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2 + \dots]/\hbar} \tag{2.20}$$

Όπου οι τελείες δηλώνουν όρους μεγαλύτερης της δεύτερης τάξης τους οποίους δεν λαμβάνουμε υπόψη (διότι πήραμε μικρές μεταβολές γύρω από την κλασσική τροχιά). Η σχέση 2.20 απλοποιείται περαιτέρω χρησιμοποιώντας το γνωστό αποτέλεσμα ενός Γκαουσιανού ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{\alpha x^2}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \tag{2.21}$$

Όστε

$$\begin{aligned}\langle q_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | q_i \rangle &= N e^{-S_E[\bar{q}]/\hbar} \frac{1}{(\sqrt{2\pi\hbar})^n} \int dc_1 e^{-\frac{\lambda_1 c_1^2}{2\hbar} + \dots} \int dc_2 e^{-\frac{\lambda_2 c_2^2}{2\hbar} + \dots} \dots \int dc_n e^{-\frac{\lambda_n c_n^2}{2\hbar} + \dots} \\ &= N e^{-S_E[\bar{q}]/\hbar} \prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)]\end{aligned}\quad (2.22)$$

Όπου οι αγκύλες δηλώνουν και πάλι διορθώσεις μεγαλύτερης της δεύτερης τάξης. Στην παραπάνω σχέση υποθέσαμε ότι όλες οι ιδιοτιμές λ είναι θετικές. Παρακάτω θα δούμε τι κάνουμε στην περίπτωση που δεν είναι όλες θετικές. Το γινόμενο των ιδιοτιμών μπορεί να γραφεί ως η ορίζουσα του τελεστή

$$\prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} = \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.23)$$

Με την σχέση 2.22 να παίρνει την μορφή

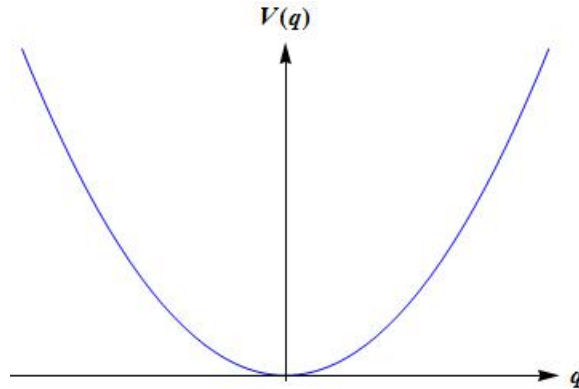
$$\langle q_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | q_i \rangle = N e^{-S_E[\bar{q}]/\hbar} \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (2.24)$$

2.3 Εφαρμογές σε πηγάδια δυναμικού

Σε αυτή την παράγραφο θα κάνουμε εφαρμογή της σχέσης 2.24 αρχικά για ένα απλό πηγάδι δυναμικού και στη συνέχεια για διπλό πηγάδι δυναμικού. Σκοπός αυτών των εφαρμογών είναι να δούμε ότι με την μέθοδο που έχουμε αναπτύξει έως τώρα εξάγουμε γνωστά αποτελέσματα της Κβαντικής Μηχανικής (θα περιοριστούμε σε μια διάσταση). Ο στόχος αυτής της παραγράφου είναι να βρούμε τον ρυθμό διάσπασης μιας ασταθούς κατάστασης.

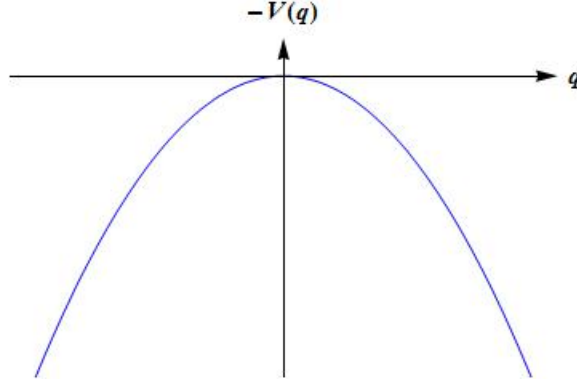
2.3.1 Απλό πηγάδι δυναμικού

Θεωρούμε το δυναμικό $V(q)$ που φαίνεται στην εικόνα 2 το οποίο έχει μόνο ένα ελάχιστο (στους παρακάτω υπολογισμούς θα παραλείψουμε την αγκύλη στην σχέση 2.24 που δηλώνει όρους μεγαλύτερης της δεύτερης τάξης για εξοικονόμηση χρόνου). Επιλέγουμε $q_i = q_f = 0$.



Σχήμα 2: Απλό πηγάδι δυναμικού.

Στην εικόνα 3 φαίνεται το ανεστραμμένο δυναμικό $-V(q)$.



Σχήμα 3: Ανεστραμμένο πηγάδι δυναμικού.

Από αυτή την εικόνα φαίνεται ότι η μόνη λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η

$$\bar{q}(\tau) = 0 \quad \forall \tau$$

διότι αν το $\bar{q}$ πάρει οποιαδήποτε άλλη τιμή τα μόνα πιθανά τελικά σημεία της τροχιάς είναι το $\pm\infty$. Για αυτή την λύση $S_E[\bar{q}] = 0$ και η σχέση 2.24 παίρνει την μορφή

$$\langle 0 | e^{-H\tau_0/\hbar} | 0 \rangle = N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

με $\omega^2 = V''(0)$.

Οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του $-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2$ είναι ημίτονα και συνημίτονα οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $x_n(\pm\tau_0/2) = 0$. Αυτή η συνθήκη μας προσδιορίζει τις ιδιοτιμές οι οποίες είναι

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} + \omega^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} &= N \prod_n \left[\frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} + \omega^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= N \prod_n \left[\frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \prod_n \left[1 + \frac{\tau_0^2 \omega^2}{\pi^2 n^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ο πρώτος όρος δεν εξαρτάται από το ω^2 με αποτέλεσμα να μπορεί να υπολογιστεί διότι πρόκειται για ελεύθερο σωματίδιο

$$N \prod_n \left[\frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \langle 0 | e^{-\hat{p}^2 \tau_0 / 2\hbar} | 0 \rangle \quad (2.27)$$

Εισάγοντας το πλήρες σύστημα ιδιοκαταστάσεων ορμών

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp |p\rangle \langle p| = I$$

στο δεξί μέλος και παίρνοντας τα ελεύθερα επίπεδα κύματα να έχουν τον νορμαλισμό

$$\langle q|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

προκύπτει

$$\begin{aligned} N \prod_n \left[\frac{\pi^2 n^2}{\tau_0^2} \right]^{-\frac{1}{2}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dp e^{-p^2 \tau_0 / 2\hbar} \langle 0|p\rangle \langle p|0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-p^2 \tau_0 / 2\hbar} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\tau_0}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Επίσης χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\sinh(\pi y) = \pi y \prod_n \left[1 + \frac{y^2}{n^2} \right] \quad (2.29)$$

Η σχέση 2.26 γίνεται

$$N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sinh(\omega\tau_0)}{\omega\tau_0} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\tau_0}} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} (2 \sinh(\omega\tau_0))^{-\frac{1}{2}} \quad (2.30)$$

Χρησιμοποιώντας την γνωστή σχέση

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

η παραπάνω σχέση γίνεται

$$N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} (e^{\omega\tau_0} - e^{-\omega\tau_0})^{-\frac{1}{2}} \quad (2.31)$$

Έτσι η σχέση 2.25 παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} \langle 0| e^{-H\tau_0/\hbar} |0\rangle &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} (e^{\omega\tau_0} - e^{-\omega\tau_0})^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} (1 - e^{-2\omega\tau_0})^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} \left(1 + \frac{1}{2} e^{-2\omega\tau_0} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.32)$$

και ανακαλώντας ότι στο όριο $\tau_0 \rightarrow \infty$ μπορούμε να απομονώσουμε, στο αριστερό μέλος, τον όρο που περιέχει την θεμελιώδη ενεργειακή κατάσταση προκύπτει

$$e^{-E_0\tau_0/\hbar} \psi_0(0) \psi_0^*(0) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} \quad (2.33)$$

Έτσι προκύπτει ότι η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης ισούται με

$$E_0 = \frac{1}{2} \omega \hbar \quad (2.34)$$

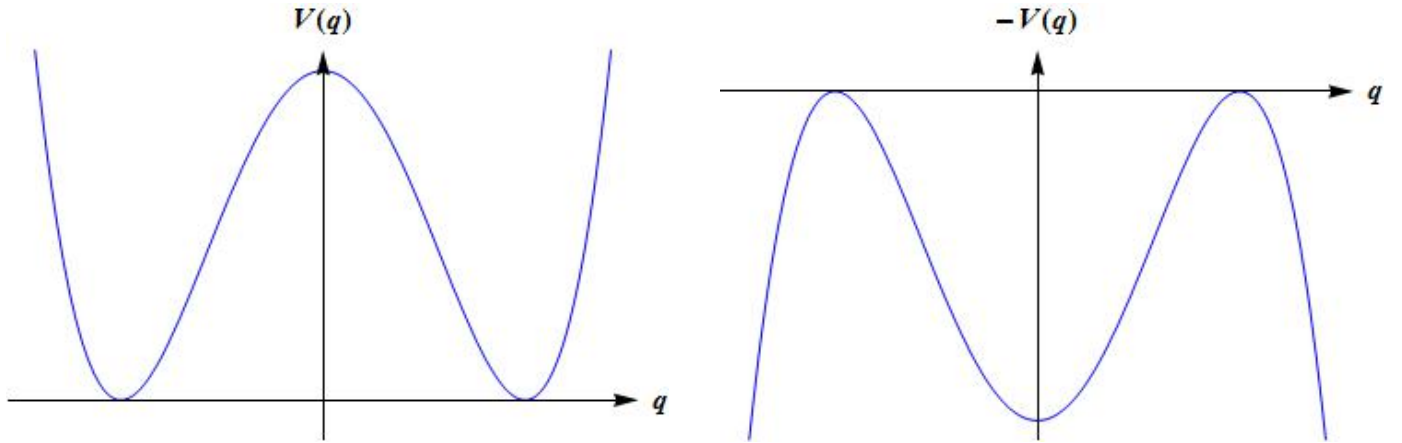
και η πυκνότητα πιθανότητας το σωματίδιο να βρεθεί στην θέση $q = 0$ όταν είναι στη θεμελιώδη ενεργειακή κατάσταση με

$$|\psi_0(0)|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.35)$$

Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε συμπίπτει με αυτό που προκύπτει από την Κβαντική μηχανική. Στην ημικλασσική προσέγγιση ($\hbar \rightarrow 0$) το σωματίδιο βρίσκεται στην θεμελιώδη ενεργειακή κατάσταση αρμονικού ταλαντωτή επικεντρωμένο γύρω από τη θέση ισορροπίας $q = 0$ και η ενέργεια του είναι αυτή της θεμελιώδους κατάστασης του αρμονικού ταλαντωτή. Επομένως συμπεραίνουμε ότι η ημικλασσική προσέγγιση που ακολουθήσαμε αναπαράγει σωστά το αποτέλεσμα για αυτό το απλό πηγάδι δυναμικού.

2.3.2 Διπλό πηγάδι δυναμικού και instantons

Εφαρμόζουμε την παραπάνω μέθοδο για σωματίδιο σε διπλό πηγάδι δυναμικό $V(q)$ που φαίνεται στην εικόνα ;;. Αυτό το σύστημα θα μας δώσει λύσεις οι οποίες ονομάζονται Instantons .



Σχήμα 4: Διπλό πηγάδι δυναμικού

Υποθέτουμε ότι το δυναμικό είναι άρτιο, $V(q) = V(-q)$, και ότι στα σημεία $\pm\alpha$ βρίσκονται τα ελάχιστα του. Θέλουμε να υπολογίσουμε τα πλάτη

$$\langle -\alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | -\alpha \rangle = \langle \alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | \alpha \rangle \quad (2.36)$$

και

$$\langle \alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | -\alpha \rangle = \langle -\alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | \alpha \rangle \quad (2.37)$$

με την βοήθεια της σχέσης 2.24 που ισχύει στο όριο ($\hbar \rightarrow 0$). Όπως και προηγουμένως το πρώτο βήμα είναι να βρούμε λύσεις της κλασσικής Ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης 2.14 η οποία είναι συμβατή με της συνοριακές συνθήκες. Από την εικόνα μπορούμε να δούμε ότι δύο λύσεις οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες είναι αυτές οι οποίες το σωματίδιο μένει στις θέσεις

$$q(\tau) = \pm\alpha \quad \forall \tau$$

Όμως υπάρχει και άλλη λύση η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, αυτή για την οποία το σωματίδιο ξεκινάει από την μία κορυφή του δυναμικού (π.χ στη θέση $-\alpha$) την χρονική στιγμή $-\tau_0/2$

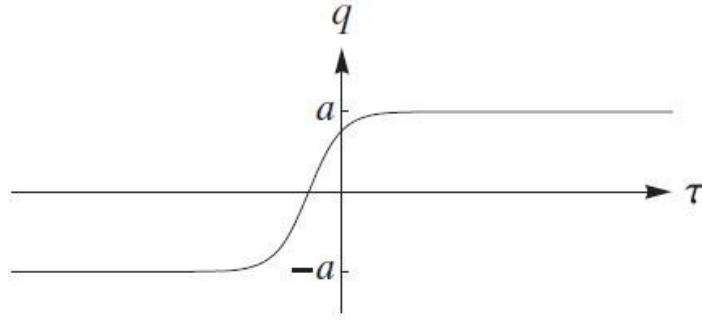
και καταλήγει στην άλλη (π.χ στη θέση α) την χρονική στιγμή $\tau_0/2$. Λόγω του ότι στο τέλος θα πάρουμε το $\tau_0 \rightarrow \infty$ θα επικεντρωθούμε στην μορφή της λύσης σε αυτό το όριο όπου το σωματίδιο ξεκινάει από την μία κορυφή του δυναμικού την $\tau_0 \rightarrow -\infty$ και καταλήγει στην άλλη την $\tau_0 \rightarrow \infty$. Σε αυτή την περίπτωση η λύση της εξίσωσης κίνησης έχει $E=0$, οπότε

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau} \right)^2 - V(\bar{q}) = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{q}}{d\tau} = (2V(\bar{q}))^{\frac{1}{2}} \quad (2.38)$$

και ολοκληρώνοντας

$$d\tau = d\bar{q} (2V(\bar{q}))^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \int_{\tau_c}^{\tau} d\tau = \int_0^{\bar{q}} dq (2V(q))^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \tau = \tau_c + \int_0^{\bar{q}} dq (2V(q))^{-\frac{1}{2}} \quad (2.39)$$

Όπου τ_c είναι μια σταθερά ολοκλήρωσης, ο χρόνος για τον οποίο $q = 0$. Η λύση φαίνεται στην παρακάτω εικόνα και ονομάζεται instanton με κέντρο στο τ_c . Όπως φαίνεται από τη σχέση 2.39 η λύση instanton θα είναι συνάρτηση της διαφοράς $\tau - \tau_c$, δηλαδή $\bar{q}(\tau, \tau_c) = f(\tau - \tau_c)$.



Σχήμα 5: instanton μεταξύ $-\alpha$ και α .

Μπορούμε να κατασκευάσουμε λύσεις που πάνε από το α στο $-\alpha$ βάζοντας όπου $\tau \rightarrow -\tau$ στην 2.39 οι οποίες ονομάζονται anti-instantons. Με την βοήθεια της σχέσης 2.38 μπορούμε να βρούμε την έκφραση για την δράση με λύση αυτή του instanton, με κέντρο το τ_c , την οποία θα την συμβολίσουμε με S_0

$$S_0 = S[\bar{q}(\tau)]_{inst} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau} \right)^2 + V(\bar{q}) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau} \right)^2 = \int_{-\alpha}^{\alpha} d\bar{q} (2V(\bar{q}))^{\frac{1}{2}} \quad (2.40)$$

Από τη σχέση 2.38 μπορούμε να εξάγουμε άλλη μια ιδιότητα του instanton, για μεγάλα τ , $\bar{q} \rightarrow \alpha$ επομένως μπορούμε να προσεγγίσουμε το $V(\bar{q})$ γύρω από το α ως

$$V(\bar{q}) = V(\alpha) + V'(\alpha)(\bar{q} - \alpha) + \frac{1}{2}V''(\alpha)(\bar{q} - \alpha)^2 = \frac{1}{2}\omega^2(\bar{q} - \alpha)^2 \quad (2.41)$$

με $\omega^2 = V''(\alpha)$. Η 2.38 γίνεται

$$\frac{d\bar{q}}{d\tau} \approx \sqrt{\omega^2(\alpha - \bar{q})^2} \approx \omega(\alpha - \bar{q}) \Rightarrow (\alpha - \bar{q}) \propto e^{-\omega\tau} \quad (2.42)$$

Με αποτέλεσμα το instanton να είναι ένα χρονικά εντοπισμένο αντικείμενο με μέγεθος της τάξης του $1/\omega$ (λόγω αυτής της ιδιότητας προέκυψε το όνομα instanton).

Χρησιμοποιώντας στην σχέση 2.24 την λύση instanton για τον υπολογισμό του πλάτους από $q = -\alpha$ σε $q = \alpha$ έχουμε

$$\langle \alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | -\alpha \rangle_{one\ inst} = N e^{-S_0/\hbar} \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.43)$$

Την ορίζουσα, χρησιμοποιώντας την ορίζουσα που βρήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο ως νορμαλισμό, μπορούμε να την γράψουμε

$$N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \times \left[\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.44)$$

από τη σχέση 2.31 στο όριο $\tau_0 \rightarrow \infty$

$$N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} \quad (2.45)$$

η 2.44 γίνεται

$$N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} \left[\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.46)$$

Επομένως το πλάτος γίνεται

$$\langle \alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | -\alpha \rangle_{one\ inst} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} e^{-S_0/\hbar} \left[\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.47)$$

Η δράση δεν εξαρτάται από το τ_c και αυτό αντανακλά την αναλλοιωτότητα της θεωρίας σε μεταθέσεις

$$S[\bar{q}(\tau, \tau_c + \delta\tau_c)] - S[\bar{q}(\tau, \tau_c)] = 0 \quad (2.48)$$

και αναπτύσσοντας ως προς $\delta\tau_c$ κρατώντας μέχρι όρους δεύτερης τάξης

$$S[\bar{q}(\tau, \tau_c)] + \int d\tau \frac{\delta S}{\delta \bar{q}(\tau)} \frac{\partial \bar{q}(\tau, \tau_c)}{\partial \tau_c} \delta\tau_c + \frac{1}{2} \int d\tau d\tau' \frac{\partial^2 \bar{q}(\tau', \tau_c)}{\partial \tau_c^2} \delta\tau_c \frac{\delta^2 S}{\delta \bar{q}(\tau) \delta \bar{q}(\tau')} \frac{\partial \bar{q}(\tau, \tau_c)}{\partial \tau_c} \delta\tau_c - S[\bar{q}(\tau, \tau_c)] = 0 \quad (2.49)$$

Όπου ο πρώτος όρος είναι ίσος με μηδέν από την εξίσωση κίνησης και

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \bar{q}(\tau) \delta \bar{q}(\tau')} = \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}(\tau)) \right] \delta(\tau - \tau') \quad (2.50)$$

έτσι η 2.49

$$\frac{1}{2} \int d\tau \delta\tau_c \frac{d\bar{q}(\tau, \tau_c)}{d\tau_c} \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}(\tau)) \right] \frac{d\bar{q}(\tau, \tau_c)}{d\tau_c} \delta\tau_c = 0 \Rightarrow \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}(\tau)) \right] \frac{d\bar{q}(\tau, \tau_c)}{d\tau_c} = 0 \quad (2.51)$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε η $\frac{d\bar{q}(\tau, \tau_c)}{d\tau_c}$ αποτελεί ιδιοσυνάρτηση μηδενικής ιδιοτιμής του τελεστή

$$\bar{A} = \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}(\tau)) \right] \quad (2.52)$$

Την μηδενική νορμαλισμένη ιδιοσυνάρτηση μπορούμε να την βρούμε χρησιμοποιώντας ότι

$$\frac{d\bar{q}(\tau, \tau_c)}{d\tau_c} = -\frac{d\bar{q}(\tau, \tau_c)}{d\tau}$$

και γράφοντας

$$x_1(\tau) = -C \frac{d\bar{q}}{d\tau} \quad (2.53)$$

μπορούμε να υπολογίσουμε την σταθερά C από την σχέση ορθοκανονικότητας 2.11

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau (x_1(\tau))^2 = 1 \Rightarrow C^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau} \right)^2 = 1 \Rightarrow C^2 S_0 = 1 \Rightarrow C = S_0^{-\frac{1}{2}} \quad (2.54)$$

Όπου κρατήσαμε το θετικό πρόσημο για το C για λόγους που θα φανούν παρακάτω. Άρα η ιδιοσυνάρτηση μηδενικής ιδιοτιμής του τελεστή $\bar{A}$ είναι η

$$x_1(\tau) = -S_0^{-\frac{1}{2}} \frac{d\bar{q}}{d\tau} \quad (2.55)$$

Από την παραπάνω ανάλυση συμπεραίνουμε ότι λόγω του ότι ο τελεστής $\bar{A}$ έχει μηδενική ιδιοτιμή, στη σχέση 2.22, όπου είχαμε υποθέσει ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές και είχαμε υπολογίσει τα Γκαουσιανά ολοκληρώματα, έχουμε

$$dc_1 e^{-\lambda_1 c_1^2} = dc_1$$

το οποίο οδηγεί σε απειρισμό. Χρησιμοποιώντας τη σχέση μεταξύ του συντελεστή c_1 και της θέσης του κέντρου τ_c του instanton μπορούμε να απαλείψουμε τον απειρισμό. Η μεταβολή του $q(\tau)$ αν μεταβάλλουμε το c_1 στην 2.10 είναι

$$dq(\tau) = x_1(\tau) dc_1 \quad (2.56)$$

Η μεταβολή του $q(\tau)$ μεταβάλλοντας το κέντρο τ_c του instanton και χρησιμοποιώντας τη σχέση 2.56 είναι

$$dq(\tau) = d\bar{q}(\tau, \tau_c) = \frac{d\bar{q}(\tau, \tau_c)}{d\tau_c} d\tau_c = -\frac{d\bar{q}(\tau, \tau_c)}{d\tau} d\tau_c = \sqrt{S_0} x_1(\tau) d\tau_c \quad (2.57)$$

Έτσι προκύπτει

$$x_1 dc_1 = \sqrt{S_0} x_1(\tau) d\tau_c \Rightarrow dc_1 = \sqrt{S_0} d\tau_c \quad (2.58)$$

Το θετικό πρόσημο του C που πήραμε προηγουμένως είναι για να μην έχουμε αντιστροφή των ορίων κατά την ολοκλήρωση του $d\tau_c$ στον υπολογισμό της ορίζουσας.

Υπολογίζοντας την ορίζουσα 2.23 για την λύση instanton λαμβάνοντας υπόψη την μηδενική ιδιοτιμή ($\lambda_1 = 0$) και χρησιμοποιώντας την σχέση 2.58 προκύπτει

$$\begin{aligned} \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} &= \prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} = \int \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2\hbar} \sum_n \lambda_n c_n^2} = \int \frac{dc_1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \prod_{n \neq 1} \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{1}{2\hbar} \sum_n \lambda_n c_n^2} \\ &= \sqrt{S_0} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \frac{d\tau_c}{\sqrt{2\pi\hbar}} \prod_{n \neq 1} \lambda_n^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \tau_0 \left[\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.59)$$

με

$$\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \quad (2.60)$$

η ορίζουσα χωρίς μηδενικές ιδιοτιμές. Με τους παραπάνω υπολογισμούς η σχέση 2.43 γίνεται

$$\langle \alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | -\alpha \rangle_{one\ inst} = N\tau_0 \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-S_0/\hbar} \left[\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.61)$$

και η 2.47

$$\langle \alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | -\alpha \rangle_{one\ inst} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} e^{-S_0/\hbar} \tau_0 \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.62)$$

Με

$$K = \left(\frac{S_0}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)}{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.63)$$

η σχέση 2.62 για το πλάτος παίρνει την μορφή

$$\langle \alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | -\alpha \rangle_{one\ inst} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} e^{-S_0/\hbar} \tau_0 K \quad (2.64)$$

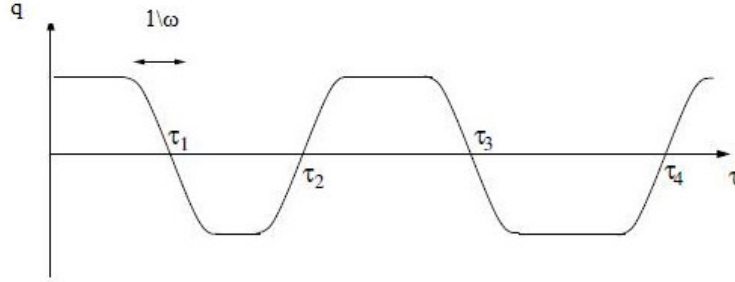
Έχουμε υποθέσει ότι όλες οι ιδιοτιμές της 2.18 είναι θετικές, εκτός από την μηδενική ιδιοτιμή που σχετίζεται με την ιδιοσυνάρτηση x_1 . Γνωρίζουμε ότι η ιδιοσυνάρτηση μιας μονοδιάστατης εξίσωσης Schrodinger με την χαμηλότερη ιδιοτιμή δεν έχει κόμβους, η επόμενη έχει ένα κόμβο κτλ. Λόγω του ότι το instanton είναι μία γνησίως αύξουσα συνάρτηση του τ , η x_1 , η οποία είναι ανάλογη της χρονικής παραγωγού του instanton, δεν έχει κόμβους. Έτσι το μηδέν είναι η χαμηλότερη ιδιοτιμή και όλες οι άλλες ιδιοτιμές είναι θετικές.

Προηγουμένως είδαμε ότι το instanton είναι ένα χρονικά εντοπισμένο αντικείμενο με μέγεθος της τάξης του $1/\omega$. Αυτό το γεγονός είναι αρκετά σημαντικό διότι, για μεγάλα τ_0 , τα instanton και anti-instanton δεν είναι οι μόνες προσεγγιστικές λύσης των εξισώσεων κίνησης, υπάρχουν επίσης προσεγγιστικές λύσεις όπου το σωματίδιο εκτελεί ταλαντώσεις μεταξύ των δύο κορυφών του δυναμικού οι οποίες αποτελούνται από μια αλυσίδα ευρέως διαχωρισμένων (χρονικά) instantons και

anti-instantons. Ας υποθέσουμε οτι έχουμε n instantons ή anti-instantons με κέντρα στα $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$. Τα κέντρα τ_i ικανοποιούν την συνθήκη

$$-\frac{\tau_0}{2} < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \frac{\tau_0}{2} \quad (2.65)$$

Στην εικόνα 6 φαίνεται ένας τέτοιος σχηματισμός.



Σχήμα 6: Αλυσίδα από n ευρέως διαχωρισμένα instantons/anti-instantons.

Αν η χρονική διαφορά των κέντρων είναι πολύ μεγαλύτερη απο το μέγεθος του instanton (ή anti-instanton) , $|\tau_i - \tau_j| \gg \omega^{-1}$, τότε η δράση που αντιστοιχεί σε ένα τέτοιο σχηματισμό από n instantons/anti-instantons είναι nS_0 , όπου S_0 είναι η δράση ενός instanton. Για τον υπολογισμό της ορίζουσας παρατηρούμε ότι αν δεν είχαμε τις n περιοχές μετάβασης (γύρω απο τα $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$) θα πρέπει να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό του αρμονικού ταλαντωτή. Σύμφωνα με τον προηγούμενο υπολογισμό που κάναμε για την ορίζουσα ενός instanton, ο οποίος μας οδήγησε στον παράγοντα K στην έκφραση του πλάτους μετάβασης, συμπεραίνουμε ότι για τον σχηματισμό με n instantons/anti-instantons η ορίζουσα θα πρέπει να έχει την ίδια μορφή αλλά με την αντικατάσταση $K \rightarrow K^n$

$$N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} K^n \quad (2.66)$$

Λόγω της αναλλοιώτητας της θεωρίας σε μεταθέσεις είχαμε βρεί ότι για την συνεισφορά του ενός instanton είχε προκύψει μηδενική ιδιοτιμή του τελεστή $\hat{A}$ η οποία οδηγούσε σε απειρισμό κατα τον υπολογισμό της ορίζουσας. Αυτόν τον απειρισμό τον είχαμε απαλείψει ολοκληρώνοντας ως προς το κέντρο του instanton. Αντίστοιχα για τον σχηματισμό n instantons/anti-instantons έχουμε n μηδενικές ιδιοτιμές οπότε θα πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς τα κέντρα τους, τα οποία ικανοποιούν τον περιορισμό $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$ ώστε

$$\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau_1 \int_{-\tau_0/2}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{-\tau_0/2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n = \frac{\tau_0^n}{n!} \quad (2.67)$$

Επομένως για την ορίζουσα έχουμε

$$N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} K^n \frac{\tau_0^n}{n!} \quad (2.68)$$

Βάζοντας όλα τα παραπάνω μαζί βρίσκουμε ότι η συνεισφορά του σχηματισμού με n instantons/anti-instantons στο πλάτος μετάβασης είναι

$$\langle \alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | -\alpha \rangle_{n \text{ in/anti-in}} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} K^n e^{-nS_0/\hbar} \frac{\tau_0^n}{n!} \quad (2.69)$$

Θα υπολογίσουμε τα πλάτη μετάβασης των σχέσεων 2.36, 2.37 αθροίζοντας τις συνεισφορές από κάθε δυνατό σχηματισμό instantons/anti-instantons, δηλαδή θα αθροίσουμε ως προς n . Δεν μπορούμε να κατανέμουμε instantons και anti-instantons αυθαίρετα. Για παράδειγμα αν ξεκινήσουμε από το $-\alpha$ το πρώτο αντικείμενο πρέπει να είναι ένα instanton, το δεύτερο πρέπει να είναι anti-instanton κτλ. Αν θέλουμε να καταλήξουμε πάλι στο $-\alpha$ ο αριθμός n των instantons/anti-instantons πρέπει να είναι άρτιος. Αντίστοιχα άμα θέλουμε να καταλήξουμε στο α το n πρέπει να είναι περιττός. Επομένως έχουμε

$$\langle \pm\alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | -\alpha \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} \sum_{n \text{ odd/even}} \frac{(Ke^{-S_0/\hbar}\tau_0)^n}{n!} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} \frac{1}{2} [e^{Ke^{-S_0/\hbar}\tau_0} \mp e^{-Ke^{-S_0/\hbar}\tau_0}] \quad (2.70)$$

Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος ως προς το πλήρες ορθοκανονικό σύστημα ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας, συμβολίζοντας της χαμηλότερες ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις με $|+\rangle$ και $|-\rangle$, και παίρνοντας το όριο $\tau_0 \rightarrow \infty$ όπου οι συνεισφορές από υψηλότερες ενεργειακές καταστάσεις μπορούν να αγνοηθούν έχουμε για το αριστερό μέλος

$$\langle \pm\alpha | e^{-H\tau_0/\hbar} | -\alpha \rangle = e^{-E_-\tau_0/\hbar} \langle \pm\alpha | - \rangle \langle - | -\alpha \rangle + e^{-E_+\tau_0/\hbar} \langle \pm\alpha | + \rangle \langle + | -\alpha \rangle \quad (2.71)$$

και η 2.69 γίνεται

$$\begin{aligned} e^{-E_-\tau_0/\hbar} \langle \pm\alpha | - \rangle \langle - | -\alpha \rangle + e^{-E_+\tau_0/\hbar} \langle \pm\alpha | + \rangle \langle + | -\alpha \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} e^{Ke^{-S_0/\hbar}\tau_0} \\ &\mp \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} e^{-Ke^{-S_0/\hbar}\tau_0} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Από την παραπάνω έκφραση προκύπτει ότι έχουμε δύο χαμηλής ενέργειας ενεργειακές καταστάσεις με ενέργειες

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}\hbar\omega \pm \hbar K e^{-S_0/\hbar} \quad (2.73)$$

και ότι

$$|\langle + | \pm\alpha \rangle|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.74)$$

όπου $|\langle + | \pm\alpha \rangle|^2$ η πυκνότητα πιθανότητας το σωματίδιο να βρεθεί στην θέση $\pm\alpha$ όταν βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση ενέργειας $|+\rangle$ και $|\langle - | \pm\alpha \rangle|^2$ η πυκνότητα πιθανότητας το σωματίδιο να βρεθεί στην θέση $\pm\alpha$ όταν βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση ενέργειας $|-\rangle$.

Η διαφορά των δύο ενεργειών είναι

$$E_+ - E_- = 2\hbar K e^{-S_0/\hbar} \quad (2.75)$$

Τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε είναι αυτά που περιμέναμε για άλλη μια φορά από την Κβαντική Μηχανική. Οι ενεργειακές ιδιοκαταστάσεις είναι οι συμμετρικοί και αντισυμμετρικοί γραμμικοί

συνδυασμοί των ιδιοκαταστάσεων αρμονικού ταλαντωτή με κέντρο στα δύο ελάχιστα του δυναμικού, ο εκφυλισμός των δύο ενεργειακών ιδιοτιμών έχει αρθεί λόγω του φαινομένου σήραγγος, για αυτό και η διαφορά μεταξύ των ενεργειών είναι ανάλογη του παράγοντα, που συνδέεται με το φαινόμενο σήραγγος, $e^{-S_0/\hbar}$. Η κατάσταση με την χαμηλότερη ενέργεια, που την συμβολίσαμε με $|-\rangle$, είναι ο συμμετρικός γραμμικός συνδυασμός. Την σχέση 2.73 την υπολογίσαμε αγνοώντας τις διορθώσεις από τους όρους $\mathcal{O}(\hbar)$

$$E_{\pm} = \frac{1}{2}\hbar\omega \pm \hbar K e^{-S_0/\hbar} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (2.76)$$

Λόγω του ότι ο δεύτερος όρος στη σχέση 2.76 είναι εκθετικά μικρός σε σχέση με τον πρώτο όρο αλλά και εκθετικά μικρός σε σχέση με τις διορθώσεις, $\mathcal{O}(\hbar^2)$, του πρώτου όρου (που δεν τις έχουμε υπολογίσει) δεν θα έπρεπε να τον κρατήσουμε. Όμως είναι η κύρια συνεισφορά στην διαφορά των ενεργειών $E_+ - E_-$ και για αυτό τον κρατάμε στην έκφραση των ενεργειακών ιδιοτιμών.

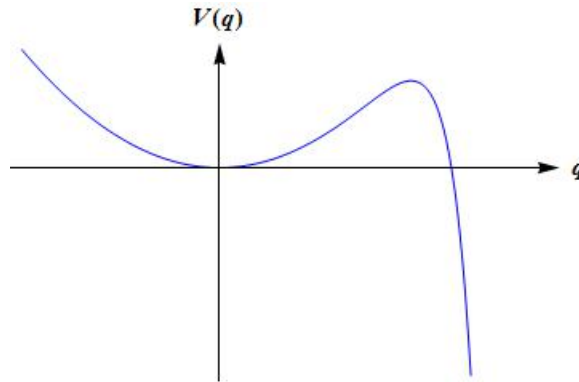
Η προσέγγισή μας βασίστηκε στην παραδοχή ότι τα instantons και anti-instantons είναι όλα ευρέως χρονικά διαχωρισμένα. Αυτή είναι γνωστή ως dilute-gas approximation. Για να επαληθεύσουμε την εγκυρότητα της πρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι η κύρια συνεισφορά στα άθροισμα είναι από όρους όπου η πυκνότητα των instantons/anti-instantons n/T είναι μικρή ώστε η υπόθεσή μας να είναι βάσιμη. Σε ένα εκθετικό άθροισμα $\sum_n x^n/n!$ η κύρια συνεισφορά είναι από τους όρους με $n \approx x$ επομένως η κύρια συνεισφορά στο άθροισμα 2.70 είναι από τους όρους με

$$n \approx K e^{-S_0/\hbar} \tau_0 \Rightarrow \frac{n}{\tau_0} \approx K e^{-S_0/\hbar} \quad (2.77)$$

δηλαδή από όρους όπου η πυκνότητα των instantons/anti-instantons είναι εκθετικά μικρή και επομένως η μέση χρονική τους απόσταση τεράστια.

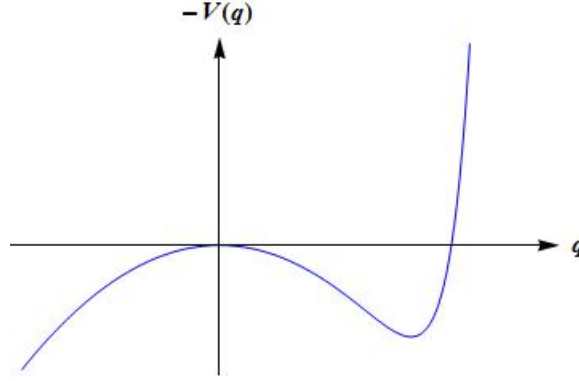
2.3.3 Ασταθής καταστάσεις και bounces

Ως μια τελευταία εφαρμογή θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο που έχουμε αναπτύξει έως τώρα για σωματίδιο σε δυναμικό $V(q)$, που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα, το οποίο μηδενίζεται στα σημεία 0, σ .



Σχήμα 7: Δυναμικό $V(q)$.

Στην εικόνα 8 φαίνεται το ανεσταμένο δυναμικό $-V(q)$



Σχήμα 8: Δυναμικό $-V(q)$.

Η μελέτη αυτού του προβλήματος έχει αρκετά κοινά με την εφαρμογή της προηγούμενης παραγράφου των instantons με αποτέλεσμα να χρησιμοποιήσουμε κάποια ήδη γνωστά αποτελέσματα τα οποία θα μας οδηγήσουν στο να βρούμε τον ρυθμό διάσπασης (Γ) μιας ασταθούς ενεργειακής κατάστασης. Θέλουμε να υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης με $q_i = q_f = 0$

$$\langle 0 | e^{-H\tau_0/\hbar} | 0 \rangle \quad (2.78)$$

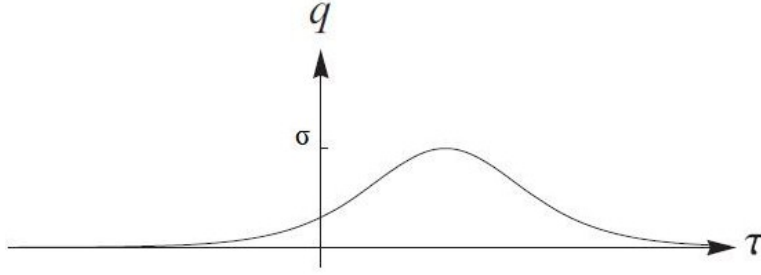
με την βοήθεια της σχέσης 2.24. Όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές βρίσκουμε αρχικά τις λύσεις της κλασσικής Ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης 2.14 οι οποίες είναι συνεπείς με τις συνοριακές συνθήκες του δεδομένου προβλήματος. Από την εικόνα μπορούμε να δούμε ότι μία λύση η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες είναι η τετριμμένη

$$q(\tau) = 0 \quad \forall \tau$$

Επίσης υπάρχει και η μη τετριμμένη λύση, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, όπου το σωματίδιο ξεκινάει από την κορυφή του δυναμικού στη θέση $q = 0$ την χρονική στιγμή $-\tau_0/2$ φτάνει ως το σημείο $q = \sigma$ μια χρονική στιγμή τ_c , όπου μηδενίζεται η ταχύτητα του $\left. \frac{d\bar{q}_b}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_c}$, και επιστρέφει στη θέση $q = 0$ την χρονική στιγμή $\tau_0/2$. Λόγω του ότι στο τέλος θα ενδιαφερθούμε για την μορφή του συναρτησιακού ολοκληρώματος στο όριο ($\tau_0 \rightarrow \infty$) θα επικεντρωθούμε στην μορφή της λύσης σε αυτό το όριο. Αυτή την λύση των εξισώσεων κίνησης θα την ονομάσουμε bounce. Η bounce έχει $E = 0$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{q}_b}{d\tau} \right)^2 - V(\bar{q}_b) = 0 \quad (2.79)$$

Από την οποία με ολοκλήρωση μπορούμε να βρούμε την μορφή της λύσης. Ορίζουμε το κέντρο της bounce να είναι το χρονικό σημείο για το οποίο $d\bar{q}_b/d\tau = 0$. Η λύση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 9: Η λύση bounce .Το σημείο επιστροφής είναι το $q = \sigma$.

Με την βοήθεια της σχέσης 2.79 μπορούμε να βρούμε την δράση για την λύση bounce , που θα την συμβολίσουμε με B

$$B = S[\bar{q}(\tau)_b] = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left(\frac{d\bar{q}_b}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} = 2 \int_0^{\sigma} d\bar{q}_b (2V(\bar{q}_b))^{\frac{1}{2}} \quad (2.80)$$

Επομένως, όπως στην περίπτωση για την λύση instanton, έχουμε για το πλάτος

$$\langle 0 | e^{-H\tau_0/\hbar} | 0 \rangle_{one\ bounce} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} e^{-B/\hbar} \left[\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}_b) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.81)$$

Για την λύση instanton είχε προκύψει, λόγω της αναλλοιώτητας της θεωρίας σε μεταθέσεις , μηδενική ιδιοτιμή του τελεστή $\bar{A}$ η οποία οδηγούσε σε απειρισμό κατά τον υπολογισμό της ορίζουσας. Αυτόν τον απειρισμό τον είχαμε απαλείψει ολοκληρώνοντας ως προς το κέντρο του instanton. Αντίστοιχα και εδώ έχουμε αναλλοιώτητα της θεωρίας σε μεταθέσεις , το κέντρο της bounce μπορεί να είναι σε οποιοδήποτε σημείο του τ άξονα , με αποτέλεσμα για την λύση bounce να έχουμε μηδενική ιδιοτιμή, του αντίστοιχου τελεστή, με μηδενική ιδιοσυνάρτηση ανάλογη της παραγώγου της bounce

$$x_1(\tau) = -B^{-\frac{1}{2}} \frac{d\bar{q}_b}{d\tau} \quad (2.82)$$

Επομένως ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για την απόληψη του απειρισμού για το πλάτος έχουμε

$$\langle 0 | e^{-H\tau_0/\hbar} | 0 \rangle_{one\ bounce} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} e^{-B/\hbar} \tau_0 K \quad (2.83)$$

με

$$K = \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)}{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.84)$$

Για πολύ μεγάλα τ μπορούμε να έχουμε προσεγγιστικές λύσεις των εξισώσεων κίνησης η οποίες αποτελούνται απο n ευρέως διαχωρισμένες bounces με κέντρα στα $\tau_1, \tau_2 \dots \tau_n$ που ικανοποιούν την συνθήκη

$$\frac{-\tau_0}{2} < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n < \frac{\tau_0}{2} \quad (2.85)$$

Για να βρούμε την συνεισφορά των n bounces στο πλάτος μετάβασης ακολουθούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο και έχουμε

1. Η δράση για n bounces είναι nB , με B την δράση μίας bounce
2. Η ορίζουσα είναι το γινόμενο των οριζουσών n bounces η οποίες είναι διαχωρισμένες από μεγάλα χρονικά διαστήματα

$$N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \sim \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} K^n \quad (2.86)$$

3. Ολοκληρώνουμε ως προς τα κέντρα των bounces που ικανοποιούν $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n$

$$\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau_1 \int_{-\tau_0/2}^{\tau_1} d\tau_2 \dots \int_{-\tau_0/2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n = \frac{\tau_0^n}{n!} \quad (2.87)$$

Άρα η ορίζουσα παίρνει την μορφή

$$N \left[\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} K^n \frac{\tau_0^n}{n!} \quad (2.88)$$

Βάζοντας τα παραπάνω όλα μαζί έχουμε ότι η συνεισφορά των n bounces στο πλάτος μετάβασης είναι

$$\langle 0 | e^{-H\tau_0/\hbar} | 0 \rangle_{n \text{ bounces}} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} K^n e^{-nB/\hbar} \frac{\tau_0^n}{n!} \quad (2.89)$$

Θα υπολογίσουμε το πλάτος μετάβασης αθροίζοντας τις συνεισφορές από κάθε δυνατό σχηματισμό που αποτελείται από ευρέως διαχωρισμένες bounces , όπως είχαμε αθροίσει τις συνεισφορές των instantons/antinstantons για την περίπτωση του διπλού πηγαδιού δυναμικού. Το άθροισμα είναι ίδιο με το διπλό πηγάδι δυναμικού με την διαφορά ότι τώρα δεν έχουμε περιορισμό σε άρτιο ή περιττό αριθμό bounces . Επομένως έχουμε

$$\langle 0 | e^{-H\tau_0/\hbar} | 0 \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(K e^{-B/\hbar} \tau_0)^n}{n!} = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2} e^{K e^{-B/\hbar} \tau_0} \quad (2.90)$$

Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος ως προς το πλήρες ορθοκανονικό σύστημα ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας και παίρνοντας το όριο $\tau \rightarrow \infty$ όπου οι συνεισφορές από υψηλότερες ενεργειακές καταστάσεις μπορούν να αγνοηθούν έχουμε για την παραπάνω έκφραση

$$e^{-E_0\tau_0/\hbar} |\langle q=0|0 \rangle|^2 = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\omega\tau_0/2 + K e^{-B/\hbar} \tau_0} \quad (2.91)$$

Επειδή χρησιμοποιούμε το 0 και για την θεμελιώδη στάθμη της ενέργειας βάλουμε στο bra το $q=0$ για να την διαχωρίσουμε από τη θέση. Η ιδιοτιμή της ενέργειας της θεμελιώδους ενεργειακής κατάστασης είναι

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega - \hbar K e^{-B/\hbar} + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (2.92)$$

Ο δεύτερος όρος είναι εκθετικά μικρός σε σχέση με τον πρώτο όρο καθώς και με τις διορθώσεις $\mathcal{O}(\hbar^2)$ του πρώτου όρου επομένως δεν έχει νόημα να τον κρατήσουμε. Όμως, όπως θα δούμε παρακάτω, το

K είναι φανταστικός αριθμός με αποτέλεσμα αυτός ο όρος είναι η πρώτη μη μηδενική συνεισφορά στο φανταστικό μέρος της ενέργειας.

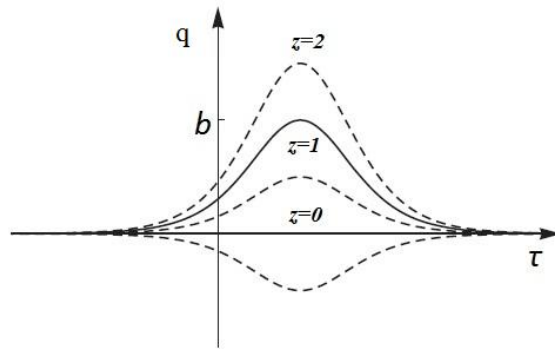
Παραπάνω ορίσαμε το K ως

$$K = \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)}{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}_b) \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.93)$$

Όπου $\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}) \right)$ είναι η ορίζουσα χωρίς μηδενικές ιδιοτιμές και ο παράγοντας $\left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}$ είχε προκύψει λόγω της μηδενικής ιδιοτιμής που σχετίζεται με αναλλοιωτότητα της θεωρίας σε μεταθέσεις. Παρατηρούμε ότι το $d\bar{q}_b/d\tau$ μηδενίζεται στο $q = \sigma$ (όπως φαίνεται στην εικόνα) ώστε η $x_1(\tau)$ να έχει ένα κόμβο με αποτέλεσμα να μην είναι η ιδιοσυνάρτηση με την χαμηλότερη ιδιοτιμή. Η ιδιοσυνάρτηση χωρίς κόμβους, x_0 , πρέπει να έχει χαμηλότερη ιδιοτιμή, δηλαδή αρνητική. Έτσι η bounce δεν είναι ελάχιστο της δράσης αλλά σαγματικό σημείο και το Γκαουσιανό ολοκλήρωμα ως προς τον συντελεστή c_0 , για τον υπολογισμό της ορίζουσας, αποκλίνει. Αυτό αποτελεί πρόβλημα και είναι λογικό διότι θέλουμε να υπολογίσουμε μια ιδιοτιμή της ενέργειας που δεν είναι στο φάσμα της Χαμιλτονιανής (λόγω του ότι ο Χαμιλτονιανός τελεστής H είναι ερμιτιανός έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές), την ενέργεια μιας ασταθούς κατάστασης η οποία είναι ένας μιγαδικός αριθμός και το φανταστικό μέρος της μας δίνει τον ρυθμό διάσπασης της. Ο μόνος τρόπος για να οριστεί μια ασταθής κατάσταση είναι μέσω αναλυτικής συνέχισης (analytic continuation) την οποία θα πραγματοποιήσουμε παρακάτω. Για απλότητα δεν θα θεωρήσουμε ένα ολοκλήρωμα πάνω σε όλες τις πιθανές τροχιές αλλά πάνω σε ένα υποσύνολο από τροχιές παραμετροποιημένες από την πραγματική μεταβλητή z

$$J = \int dz (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} e^{-S(z)/\hbar} \quad (2.94)$$

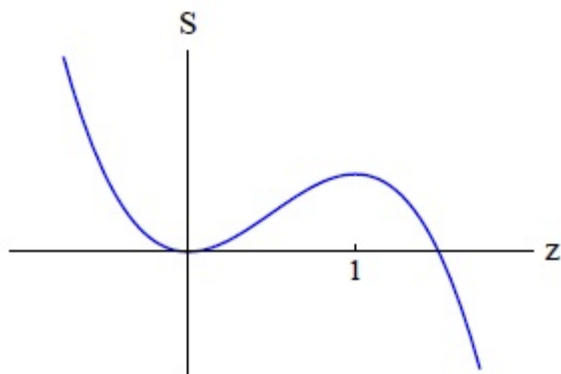
με $S(z)$ την δράση για κάθε τροχιά. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε τις τροχιές που φαίνονται στην παρακάτω εικόνα.



Σχήμα 10: Τροχιές παραμετροποιημένες από την μεταβλητή z .

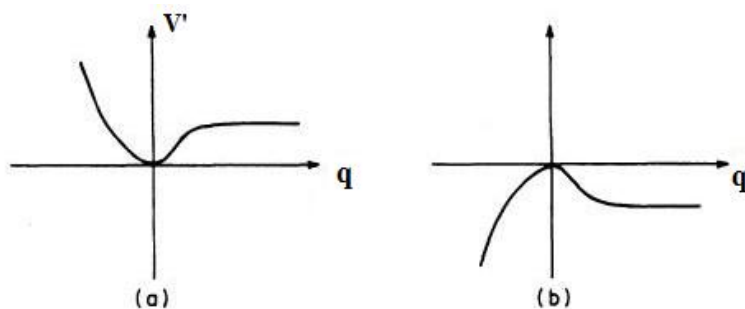
Σε αυτό το μοτίβο τροχιών συμπεριλαμβάνονται οι δύο σημαντικές τροχιές που εμφανίζονται στο πρόβλημα μας: $q(\tau) = 0$ για $z = 0$ όπου το σωματίο μένει ακίνητο στην κορυφή του δυναμικού και η τιμή της δράσης είναι μηδενική ($S(0) = 0$) και η λύση bounce $q(\tau)_b$ στο $z = 1$. Επιπλέον επιλέξαμε τις τροχιές με τέτοιο τρόπο ώστε το εφαπτόμενο διάνυσμα στην τροχιά $z = 1$ να είναι η x_0 . Η bounce

είναι μέγιστο της $S(z)$ όπως φαίνεται παρακάτω, η δράση πηγαίνει στο $-\infty$ καθώς το z πηγαίνει στο $+\infty$ διότι οι τροχιές περνάνε όλο και περισσότερο χρόνο πέρα από το σημείο επιστροφής σ όπου η δυναμική ενέργεια είναι αρνητική ώστε το ολοκλήρωμα 2.94 να αποκλίνει.

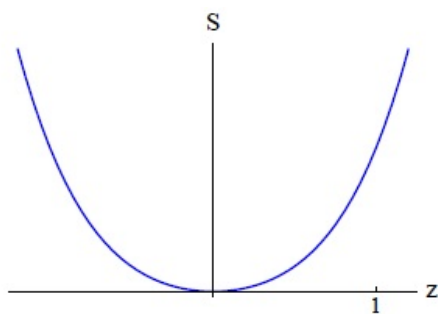


Σχήμα 11: Η δράση ως συνάρτηση της παραμέτρου z για τις τροχιές που φαίνονται στο σχήμα 10 και για το δυναμικό της εικόνας 7.

Αν το σημείο $x = 0$ ήταν το μόνο ελάχιστο του δυναμικού, όπως στο δυναμικό V' που φαίνεται παρακάτω στο Σχήμα 12 (Εικόνα από [1]), θα είχαμε για τις ίδιες τροχιές τη δράση να είναι θετικά ορισμένη και το ολοκλήρωμα να συγκλίνει (Σχήμα 13)

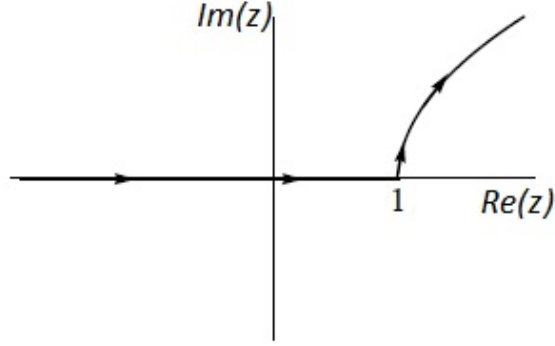


Σχήμα 12: Δυναμικό V' με ελάχιστο στο σημείο $q = 0$.



Σχήμα 13: Η δράση ως συνάρτηση της παραμέτρου z για τις τροχιές που φαίνονται στο σχήμα 10 και για το δυναμικό της εικόνας 12.

Θα υποθέσουμε ότι κάνουμε μια αναλυτική συνέχιση του δυναμικού V' με κάποιο τρόπο πηγαίνοντας από αυτή την περίπτωση σε αυτή που μας ενδιαφέρει (Σχήμα 7). Για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα, παραμορφώνουμε την δεξιά περιοχή της διαδρομής ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο. Το πώς παραμορφώνουμε την διαδρομή εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της αναλυτικής συνέχισης για να πάμε από το ένα δυναμικό στο άλλο. Εμείς επιλέξαμε ότι παραμορφώνεται στο πάνω ημιεπίπεδο (Εικόνα 14 από [1]). Ακολουθώντας την καθιερωμένη διαδικασία της (steepest descends) επιλέξαμε την διαδρομή να είναι κατά μήκος του πραγματικού άξονα μέχρι το σημείο $z = 1$, το σαγματικό σημείο της δράσης, και μετά οδηγούμε την διαδρομή κατά μήκος μιας γραμμής με σταθερό φανταστικό μέρος της $S(z)$.



Σχήμα 14: Παραμόρφωση της διαδρομής ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο.

Το ολοκλήρωμα έτσι αποκτά ένα φανταστικό μέρος, και στην προσέγγιση steepest descend έχουμε

$$ImJ = Im \int_1^{1+i\infty} (2\pi\hbar)^{-\frac{1}{2}} e^{-S(1)/\hbar} e^{-\frac{1}{2}S''(1)(z-1)^2/\hbar} = \frac{1}{2} e^{-S(1)/\hbar} |S''(1)|^{-\frac{1}{2}} \quad (2.95)$$

Ο παράγοντας $\frac{1}{2}$ προκύπτει από το γεγονός ότι ολοκληρώνουμε μόνο μισή από την Γκαουσιανή κορυφή.

Γενικεύοντας την παραπάνω ανάλυση από ένα μονοδιάστατο ολοκλήρωμα σε ένα ολοκλήρωμα διαδρομών πάνω σε όλο τον χώρο των συναρτήσεων, βρίσκουμε ότι η συνεισφορά για μια bounce στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα είναι

$$Im \left(N \int [dq(\tau)] e^{-S_E[q(\tau)]/\hbar} \right)_{one\ bounce} = \frac{1}{2} N e^{-B/\hbar} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \tau_0 \left| det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}_b) \right) \right|^{-\frac{1}{2}} \quad (2.96)$$

Συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με την 2.83 βρίσκουμε ότι το K είναι φανταστικό και ίσο με

$$ImK = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \left| \frac{det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}_b) \right)}{det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right|^{-\frac{1}{2}} \quad (2.97)$$

Όντας το K φανταστικό η ενέργεια 2.92 είναι μιγαδική και το φανταστικό της μέρος είναι ανάλογο του ρυθμού διάσπασης Γ της ασταθούς κατάστασης

$$\frac{\Gamma}{2} = -ImE_0/\hbar \Rightarrow \Gamma = -2ImE_0/\hbar \quad (2.98)$$

Επομένως ο ρυθμός διάσπασης της ασταθούς κατάστασης αντικαθιστώντας το φανταστικό μέρος της ενέργειας ισούται με

$$\Gamma = \left(\frac{B}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-B/\hbar} \left| \frac{\det' \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + V''(\bar{q}_b) \right)}{\det \left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right)} \right|^{-\frac{1}{2}} \quad (2.99)$$

3 Διάσπαση κενού στην Θεωρία Πεδίου

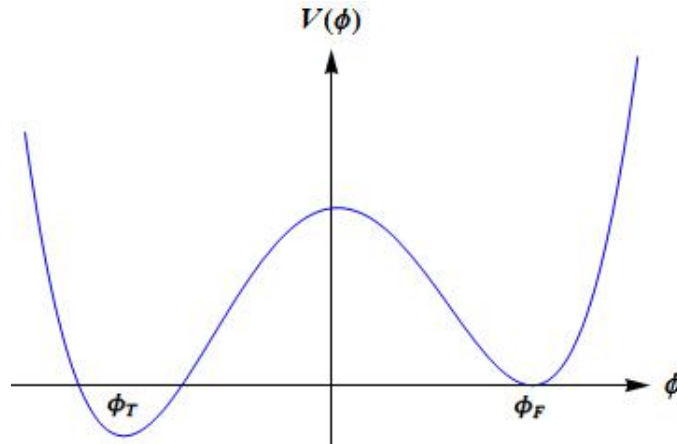
Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε πως να χρησιμοποιούμε τα Ευκλείδεια συναρτησιακά ολοκληρώματα για να μελετήσουμε διάφορα συστήματα καταλήγοντας στα γνωστά αποτελέσματα της Κβαντικής Μηχανικής. Συγκεκριμένα μελετήσαμε το πρόβλημα ενός σωματιδίου το οποίο βρίσκεται σε ασταθή κατάσταση και υπολογίσαμε τον ρυθμό διάσπασης της Γ . Σε αυτό το κεφάλαιο θα γενικεύσουμε την ανάλυση της παραγράφου 2.3 στη Θεωρία Πεδίου (σύστημα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας) το οποίο βρίσκεται σε ασταθή θεμελιώδη ενεργειακή κατάσταση, δηλαδή σε ασταθές κενό (false vacuum).

3.1 Ρυθμός διάσπασης στη Θεωρία Πεδίου

Για απλότητα θα περιοριστούμε στη θεωρία ενός βαθμωτού πεδίου στον επίπεδο τετραδιάστατο χωρόχρονο Minkowskίου ορίζεται από τη δράση

$$S[\phi(\mathbf{x}, t)] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - U(\phi) \right] \quad (3.1)$$

όπου το δυναμικό U φαίνεται στην παρακάτω εικόνα 15



Σχήμα 15: Το δυναμικό $U(\phi)$ για θεωρία με ψευδές κενό.

Το U έχει δύο τοπικά ελάχιστα για τις τιμές του πεδίου $\phi_{\pm}$ από τα οποία μόνο το ϕ_- είναι ολικό ελάχιστο. Η κλασική θεωρία πεδίου που ορίζεται από την σχέση 3.1 έχει δύο ευσταθής ομογενής καταστάσεις ισορροπίας, $\phi = \phi_+$ και $\phi = \phi_-$. Όμως στην κβαντική εκδοχή της θεωρίας, όπου το πεδίο γίνεται τελεστής, μόνο η ϕ_- αντιστοιχεί σε ευσταθή κατάσταση και η θεμελιώδης ιδιοκατάσταση της ενέργειας είναι αληθές κενό (true vacuum). Η ϕ_+ διασπάται λόγω του φαινομένου σήραγγας είναι ψευδές κενό (false vacuum). Η διάσπαση του ψευδές κενού είναι σαν τις διαδικασίες μετασχηματισμού που σχετίζονται με πρώτης τάξεως αλλαγών φάσεων στην στατιστική μηχανική. Η διάσπαση ξεκινάει με την υλοποίηση μιας φυσαλίδας (bubble) με αληθές κενό στο υπόβαθρο του ψευδούς κενού. Αυτό είναι ένα κβαντικό φαινόμενο σήραγγας και έχει συγκεκριμένη πιθανότητα να εμφανιστεί ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου ($\frac{\Gamma}{V}$). Μόλις υλοποιηθεί η φυσαλίδα διαστέλλεται με ταχύτητα που πλησιάζει ασυμπτωτικά αυτή του φωτός μετατρέποντας το ψευδές κενό σε αληθινό.

Για την εύρεση του ρυθμού διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου γενικεύουμε την διαδικασία που ακολουθήσαμε στην παράγραφο 2.3. Η σχέση 2.4 για την Θεωρία Πεδίου γίνεται

$$\langle \phi_f | e^{-iHt_0/\hbar} | \phi_i \rangle = N \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi(\mathbf{x},t)]/\hbar} \quad (3.2)$$

όπου στο αριστερό μέλος οι θέσεις έχουν αντικατασταθεί με σχηματισμούς πεδίων. H είναι ο Χαμιλτονιανός τελεστής που δίνεται από την

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + U(\phi) \right] \quad (3.3)$$

Στο δεξί μέλος N είναι ένας παράγοντας κανονικοποίησης, το $\mathcal{D}\phi$ δηλώνει ολοκλήρωση σε όλους τους σχηματισμούς πεδίων που είναι συνεπής με τις αρχικές συνθήκες $\phi(\mathbf{x}, -t_0/2) = \phi_i$ και $\phi(\mathbf{x}, t_0/2) = \phi_f$. Τέλος $S[\phi(\mathbf{x}, t)]$ είναι η δράση 3.1.

Πηγαίνοντας το $t \rightarrow -i\tau$ η 3.1 γίνεται

$$\langle \phi_f | e^{-H\tau_0/\hbar} | \phi_i \rangle = N \int \mathcal{D}\phi e^{-S_E[\phi(\mathbf{x},\tau)]/\hbar} \quad (3.4)$$

με

$$S_E[\phi(\mathbf{x}, \tau)] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + U(\phi) \right] \quad (3.5)$$

την Ευκλείδεια δράση και η μετρική $\eta_{\mu\nu}$ είναι θετικά ορισμένη.

Αναπτύσσοντας το αριστερό μέλος σε ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα ενεργειακών καταστάσεων και παίρνοντας το όριο $\tau \rightarrow \infty$ απομονώνουμε την θεμελιώδη ενεργειακή ιδιοκατάσταση. Το δεξί μέλος μπορούμε να το υπολογίσουμε στην ημικλαστική προσέγγιση ($\hbar \rightarrow 0$) με την κύρια συνεισφορά στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα να προέρχεται από πεδία κοντά στα πεδία τα οποία αποτελούν ακρότατο για την Ευκλείδεια δράση. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο πεδίο το οποίο ικανοποιεί της αρχικές συνθήκες, είναι ακρότατο της δράσης και ικανοποιεί την Ευκλείδεια εξίσωση κίνησης

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \bar{\phi} = U'(\bar{\phi}) \quad (3.6)$$

όπου ο τόνος δηλώνει παραγωγή ως προς ϕ .

Έναν αυθαίρετο σχηματισμό πεδίου μπορούμε να τον γράψουμε

$$\phi = \bar{\phi} + \sum_n c_n \Phi_n \quad (3.7)$$

όπου οι Φ_n αποτελούν ένα πλήρες σύνολο ορθοκανονικών συναρτήσεων οι οποίες μηδενίζονται τις χρονικές στιγμές $\pm\tau_0/2$ και στα σύνορα του χώρου,

$$\int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} d\tau \int d^3x \Phi_n \Phi_m = \delta_{nm} \quad (3.8)$$

$$\Phi_n(\mathbf{x}, \pm\tau_0/2) = 0, \quad \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}, \tau) = 0 \quad (3.9)$$

Το μέτρο της ολοκλήρωσης στην 3.4 γίνεται

$$\mathcal{D}\phi = \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi\hbar}} \quad (3.10)$$

αναπτύσσοντας την δράση γύρω από το κλασσικό πεδίο επιλέγοντας της Φ_n να είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\bar{M} = -\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi})$ της δεύτερης συναρτησιακής παραγώγου της δράσης στο $\phi = \bar{\phi}$ ώστε

$$\bar{M}\Phi_n = \lambda_n\Phi_n \quad (3.11)$$

έχουμε

$$S_E[\phi] = S_E[\bar{\phi}] + \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n c_n^2 \quad (3.12)$$

Επομένως κάνοντας τις Γκαουσιανές ολοκληρώσεις (υποθέτοντας θετικές ιδιοτιμές) όπως κάναμε στην παράγραφο 2.2.1 βρίσκουμε για την 3.4

$$\langle\phi_f|e^{-H\tau_0/\hbar}|\phi_i\rangle = Ne^{-S_E[\bar{\phi}]/\hbar} \left[\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} [1 + O(\hbar)] \quad (3.13)$$

με

$$\left[\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = \prod_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}} \quad (3.14)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε την έκφραση 3.13 για το δυναμικό του σχήματος 15 στο όριο $\tau_0 \rightarrow \infty$ με συνοριακές συνθήκες $\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi_+$ ώστε

$$\langle\phi_+|e^{-H\tau_0/\hbar}|\phi_+\rangle = Ne^{-S_E[\bar{\phi}]/\hbar} \left[\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (3.15)$$

με ϕ_+ το ψευδές κενό.

Μια τετριμμένη λύση των εξισώσεων κίνησης που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες είναι το πεδίο να έχει την τιμή του ϕ_+ σε όλο το χώρο για κάθε χρονική στιγμή, $\phi(\mathbf{x}, \tau) = \phi_+$ και η 3.15 γίνεται

$$\langle\phi_+|e^{-H\tau_0/\hbar}|\phi_+\rangle = Ne^{-S_E[\phi_+]/\hbar} \left[\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2 + U(\phi_+) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = I_0 \quad (3.16)$$

όπου παραλείψαμε την αγκύλη με τις διορθώσεις $\mathcal{O}(\hbar)$, και συμβολίσαμε τη συνεισφορά για τον σταθερό σχηματισμό πεδίου με I_0 . Επίσης μπορούμε να έχουμε μη τετριμμένη λύση των εξισώσεων κίνησης, η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες, που θα την ονομάσουμε bounce και θα την μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο ώστε

$$\langle\phi_+|e^{-H\tau_0/\hbar}|\phi_+\rangle = Ne^{-S_E[\bar{\phi}_b]/\hbar} \left[\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}_b) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} = I_1 \quad (3.17)$$

Η λύση bounce σχετίζεται με την υλοποίηση μιας φουσαλίδας στο υπόβαθρο του ψευδούς κενού. Ο Ευκλείδειος χωροχρόνος είναι άπειρος και η φουσαλίδα μπορεί να υλοποιηθεί οπουδήποτε. Μία φουσαλίδα είναι τελείως ισοδύναμη με άλλες φουσαλίδες που υλοποιούνται σε άλλες θέσεις και Ευκλείδειους

χρόνους με τις ίδιες συνοριακές συνθήκες. Αυτό προϋποθέτει αναλλοiotητα της θεωρίας σε μεταθέσεις, με αποτέλεσμα ο τελεστής $\bar{M} = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}_b)$ να έχει τέσσερις μηδενικές ιδιοτιμές, λόγω του ότι είμαστε σε τέσσερις διαστάσεις και έχουμε τέσσερις μεταθέσεις (χώρος, χρόνος). Σαν αποτέλεσμα έχουμε απειρισμό στον υπολογισμό της ορίζουσας λόγω του ότι τα Γκαουσιανά ολοκληρώματα αποκλίνουν. Οι μηδενικές ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\bar{M}$ είναι ανάλογες των παραγώγων της bounce ως προς την κάθε διάσταση, $\Phi_\mu \sim \partial_\mu \bar{\phi}_b$. Ο νορμαλισμός των ιδιοσυναρτήσεων είναι αντίστοιχος με τον νορμαλισμό που είχαμε για τα instantons, μια αναλυτική περιγραφή μπορεί να βρεθεί στο [8], άρα

$$\Phi_\mu = B^{-\frac{1}{2}} \partial_\mu \bar{\phi}_b \quad (3.18)$$

με $\mu = 0, 1, 2, 3$ και B την δράση για το bounce. Αντίστοιχα, για τους συντελεστές των μηδενικών ιδιοσυναρτήσεων στο Γκαουσιανό ολοκλήρωμα έχουμε τη σχέση

$$dc_\mu = B^{-\frac{1}{2}} dx_\mu \quad (3.19)$$

Επομένως μπορούμε να απαλείψουμε τον απειρισμό με την παραπάνω αντικατάσταση στα Γκαουσιανά ολοκληρώματα παίρνοντας τον παρακάτω παράγοντα

$$\int \prod_\mu \frac{dc_\mu}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \left(\frac{B^2}{2\pi\hbar} \right) V \tau_0 \quad (3.20)$$

όπου το V είναι ο όγκος όλου του χώρου (ο ρυθμός διάσπασης, παρακάτω θα βγει ανάλογος του όγκου με αποτέλεσμα να είναι άπειρος, η φυσική πεπερασμένη ποσότητα που μετράμε είναι ο ρυθμός διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου), και η σχέση 3.17 παίρνει την μορφή

$$I_1 = N e^{-S_E[\bar{\phi}_b]/\hbar} \left(\frac{B^2}{2\pi\hbar} \right) V \tau_0 \left[\det' \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}_b) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

όπου $\det' \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}_b) \right)$ η ορίζουσα χωρίς μηδενικές ιδιοτιμές. Επίσης ο τελεστής $\bar{M}$ έχει μια ιδιοσυνάρτηση με αρνητική ιδιοτιμή [5] ώστε το Γκαουσιανό ολοκλήρωμα ως προς το συντελεστή της ιδιοσυνάρτησης με αρνητική ιδιοτιμή να αποκλίνει. Όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο πραγματοποιούμε μια αναλυτική συνέχιση για την απαλοιφή του απειρισμού με αποτέλεσμα να εμφανιστεί ένας παράγοντας $\frac{1}{2}$ και το I_1 να είναι φανταστικό

$$I_1 = \frac{i}{2} N e^{-S_E[\bar{\phi}_b]/\hbar} \left(\frac{B^2}{2\pi\hbar} \right) V \tau_0 \left| \det' \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}_b) \right) \right|^{-\frac{1}{2}} \quad (3.22)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση 3.16 ως νορμαλισμό έχουμε

$$I_1 = \frac{i}{2} e^{(-S_E[\bar{\phi}_b] + S_E[\phi_+])/\hbar} \left(\frac{B^2}{2\pi\hbar} \right) V \tau_0 \left| \frac{\det' \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}_b) \right)}{\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U(\phi_+) \right)} \right|^{-\frac{1}{2}} I_0 \quad (3.23)$$

με

$$K = \frac{i}{2} \left(\frac{B^2}{2\pi\hbar} \right) \left| \frac{\det' \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}_b) \right)}{\det \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U(\phi_+) \right)} \right|^{-\frac{1}{2}} \quad (3.24)$$

το οποίο είναι φανταστικό και

$$B = S_E[\bar{\phi}_b] - S_E[\phi_+] \quad (3.25)$$

ώστε

$$I_1 = V\tau_0 K e^{-B/\hbar} I_0 \quad (3.26)$$

Για n bounces θα έχουμε n ευρέως διαχωρισμένες φούσκες και η συνεισφορά στη σχέση 3.15 είναι

$$I_n = \frac{(V\tau_0 K e^{-B/\hbar})^n}{n!} I_0 \quad (3.27)$$

Αθροίζοντας όλες της συνεισφορές για το πλάτος 3.15 προκύπτει

$$\langle \phi_+ | e^{-H\tau_0/\hbar} | \phi_+ \rangle = \sum_n I_n = \sum_n \frac{(V\tau_0 K e^{-B/\hbar})^n}{n!} I_0 = I_0 e^{V\tau_0 K e^{-B/\hbar}} \quad (3.28)$$

Στο όριο $\tau_0 \rightarrow \infty$ στο αριστερό μέλος απομονώνεται η θεμελιώδεις ενεργειακή ιδιοκατάσταση, $\langle \phi_+ | e^{-H\tau_0/\hbar} | \phi_+ \rangle \sim e^{-E_0\tau_0/\hbar}$, λόγω του ότι το K είναι φανταστικό η ενεργειακή ιδιοτιμή θα είναι μιγαδική με το φανταστικό μέρος της να είναι ανάλογο του

$$Im E_0 \sim -Im K \hbar V e^{-B/\hbar} \quad (3.29)$$

και να μας δίνει τον ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου σε αναλογία με την παράγραφο 2.3

$$\Gamma = -2Im E_0/\hbar = V 2Im K e^{-B/\hbar} \Rightarrow \frac{\Gamma}{V} = 2Im K e^{-B/\hbar} \quad (3.30)$$

και κάνοντας αντικατάσταση το K από τη σχέση 3.24 βρίσκουμε την έκφραση για τον ρυθμό διάσπαση ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου της ενέργειας κενού

$$\frac{\Gamma}{V} = A e^{-B/\hbar} [1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (3.31)$$

με

$$A = \left(\frac{B^2}{2\pi\hbar} \right) \left| \frac{det' \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U(\bar{\phi}_b) \right)}{det \left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + U(\phi_+) \right)} \right|^{-\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

3.2 Η λύση bounce

Θα μελετήσουμε την λύση bounce, $\bar{\phi}_b(\mathbf{x}, \tau)$, που αποτελεί λύση της Ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}_b}{\partial \tau^2} + \nabla^2 \bar{\phi}_b = U'(\bar{\phi}_b) \quad (3.33)$$

και ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \bar{\phi}_b(\mathbf{x}, \tau) = \phi_+, \quad \frac{\partial \bar{\phi}_b(\mathbf{x}, 0)}{\partial \tau} = 0 \quad (3.34)$$

Επίσης για να έχουμε πεπερασμένη τιμή της δράσης για την λύση bounce πρέπει να έχουμε την τιμή του ψευδούς κενού σε μεγάλες αποστάσεις

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \bar{\phi}_b(\mathbf{x}, \tau) = \phi_+ \quad (3.35)$$

Αυτή η συνθήκη είναι συμβατή με την περιγραφή που κάναμε για την διάσπαση κενού στην προηγούμενη παράγραφο σχετικά με την υλοποίηση της φυσαιλίδας. Μπορεί να υπάρχουν πολλές λύσεις των εξισώσεων 3.33-3.35. Μας ενδιαφέρουν λύσεις οι οποίες αποτελούν ελάχιστο της δράσης διότι αυτές έχουν την κύρια συνεισφορά στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα. Επίσης δεν μας ενδιαφέρει η τετριμμένη λύση $\bar{\phi} = \phi_+$ διότι για αυτή τη λύση ο τελεστής της δεύτερης συναρτησιακής παραγώγου της δράσης στο $\phi = \phi_+$ δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές με αποτέλεσμα να μην συνεισφέρει στην πιθανότητα διάσπασης του κενού.

Αν θεωρήσουμε την $\bar{\phi}_b$ ως μία μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων ώστε

$$\phi(x)_\lambda = \bar{\phi}_b(x/\lambda) \quad (3.36)$$

όπου συμβολίσαμε με $x \rightarrow (\mathbf{x}, \tau)$ τότε η δράση για αυτή την οικογένεια συναρτήσεων είναι

$$S_E(\phi_\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 \int d^4x (\partial_\mu \bar{\phi}_b)^2 + \lambda^4 \int d^4x U(\bar{\phi}_b) \quad (3.37)$$

Λόγω του ότι η $\bar{\phi}_b$ είναι λύση των εξισώσεων κίνησης η παραπάνω έκφραση θα έχει ακρότατο στο $\lambda = 1$. Έτσι

$$\left. \frac{dS}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = 0 \Rightarrow \int d^4x (\partial_\mu \bar{\phi}_b)^2 = -4 \int d^4x U(\bar{\phi}_b) \quad (3.38)$$

ώστε η δράση για την λύση bounce να πάρει την μορφή

$$S_E[\bar{\phi}_b] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\phi}_b)^2 + U(\bar{\phi}_b) \right] = \frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu \bar{\phi}_b)^2 > 0 \quad (3.39)$$

Παρατηρούμε ότι η δράση για την λύση bounce είναι θετική επομένως συνεισφέρει στο ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου.

Επίσης παρατηρούμε ότι για την δεύτερη παράγωγο της δράσης ως προς λ ισχύει

$$\left. \frac{d^2S}{d\lambda^2} \right|_{\lambda=1} = -2 \int d^4x (\partial_\mu \bar{\phi}_b)^2 < 0 \quad (3.40)$$

με αποτέλεσμα η λύση bounce να αποτελεί μέγιστο της δράσης και ο τελεστής της δεύτερης συναρτησιακής παραγώγου της δράσης ($\bar{M}$) στο $\phi = \bar{\phi}_b$ να έχει τουλάχιστον μια αρνητική ιδιοτιμή ώστε η λύση αυτή να συνεισφέρει στην πιθανότητα διάσπασης.

Παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις 3.33-3.35 είναι αναλλοίωτες κάτω από $O(4)$ μετασχηματισμούς επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι και η bounce μπορεί να είναι αναλλοίωτη κάτω από $O(4)$ μετασχηματισμούς με αποτέλεσμα να εξαρτάται μόνο από την Ευκλείδεια απόσταση, $\bar{\phi}_b(\rho)$ με $\rho = \sqrt{\tau^2 + \mathbf{x}^2}$, από ένα κατάλληλα επιλεγμένο κέντρο συντεταγμένων. Επομένως η δράση απλοποιείται, γράφοντας το στοιχείο όγκου σε σφαιρικές συντεταγμένες, και παίρνει την παρακάτω μορφή

$$d^4x = \rho^3 \sin^2 \psi \sin \theta d\rho d\psi d\theta d\phi \quad (3.41)$$

όπου ρ η ακτίνα με εύρος $0 < \rho < \infty$ και ψ, θ, ϕ οι γωνίες με εύρος $0 \leq \psi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$

$$S_E = \int_0^\pi \sin^2 \psi d\psi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2} \phi' + U(\phi) \right] = 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2} \phi' + U(\phi) \right] \quad (3.42)$$

και η εξίσωση κίνησης για την εύρεση της bounce γίνεται

$$\bar{\phi}''_b + \frac{3}{\rho} \bar{\phi}'_b = \frac{dU(\bar{\phi}_b)}{d\phi} \quad (3.43)$$

όπου ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς ρ . Οι συνοριακές συνθήκες 3.33-3.34 γίνονται

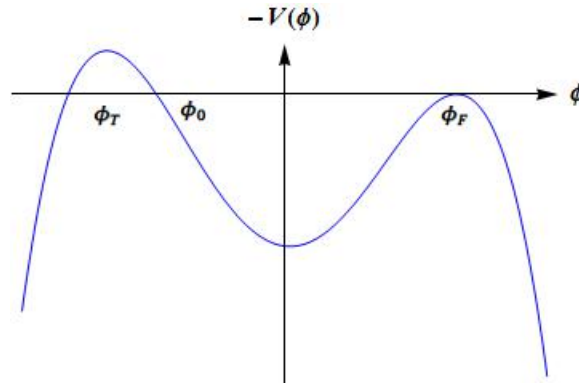
$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \bar{\phi}_b(\rho) = \phi_+ \quad (3.44)$$

Επίσης

$$\left. \frac{d\bar{\phi}_b}{d\rho} \right|_{\rho=0} = 0 \quad (3.45)$$

για να έχουμε κανονικότητα στην αρχή των αξόνων.

Στο [9] δείχνεται ότι αυτή η υπόθεση είναι σωστή. Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις για την μορφή του δυναμικού U υπάρχει πάντα μια $O(4)$ αναλλοίωτη bounce η οποία έχει χαμηλότερη δράση από οποιαδήποτε άλλη $O(4)$ μη αναλλοίωτη bounce. Θα δώσουμε ένα επιχειρήμα σχετικά με την ύπαρξη μιας τέτοιας λύσης. Η ιδέα είναι να ερμηνεύσουμε το $\bar{\phi}_b$ ως την θέση του σωματιδίου και το ρ ως χρόνο. Τότε η εξίσωση 3.43 είναι η εξίσωση για ένα σωματίδιο το οποίο κινείται υπό την επίδραση ενός δυναμικού $-U(\phi)$, σχήμα 16, στο οποίο ασκείται μια δύναμη απόσβεσης, όρος $\bar{\phi}'_b$, με συντελεστή αντιστρόφως ανάλογο του χρόνου, δηλαδή η δύναμη μειώνεται με τον χρόνο.



Σχήμα 16: Δυναμικό στο οποίο κινείται το σωματίδιο.

Οι συνοριακές συνθήκες απαιτούν ότι το σωματίδιο ξεκινάει από την ηρεμία από μια αρχική θέση ϕ_1 κοντά στην περιοχή του αληθούς κενού ϕ_- και για $\rho \rightarrow \infty$ ηρεμεί στο σημείο ϕ_+ , το ψευδές κενό. Εμείς θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο κατάλληλο σημείο ϕ_1 .

Αρχικά θα υποθέσουμε το ϕ_1 να είναι στη μεριά του αληθούς κενού και τέτοιο ώστε $-U(\phi_1) \leq -U(\phi_-)$. Η ενέργεια του σωματιδίου μειώνεται με τον χρόνο λόγω του όρου απόσβεσης με αποτέλεσμα το σωματίδιο να μην έχει αρκετή ενέργεια ώστε να φτάσει στο ϕ_+ . Ας υποθέσουμε ότι το

ϕ_1 απέχει απειροστά από το ϕ_- . Το σωματίδιο θα αρχίσει να κινείται πολύ αργά και για το χρονικό διάστημα στο οποίο έχει μετατοπιστεί αισθητά από την αρχική του θέση η δύναμη απόσβεσης δεν συνεισφέρει, λόγω του ότι είναι αντιστρόφως ανάλογη του χρόνου, με αποτέλεσμα η ενέργεια να διατηρείται. Τότε όταν φτάσει στο σημείο ϕ_+ θα έχει μη μηδενική κινητική ενέργεια με αποτέλεσμα να το προσπεράσει. Έτσι λόγω συνέχειας θα πρέπει να υπάρχει ένα ενδιάμεσο σημείο από το οποίο αν ξεκινήσει το σωματίδιο θα φτάσει σε ηρεμία στο σημείο ϕ_+ .

Είδαμε ότι περιορίσαμε την μερική διαφορική εξίσωση 3.33 για την εύρεση της bounce σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση 3.43. Μπορούμε να προχωρήσουμε παραπέρα και να βρούμε μια αναλυτική έκφραση της λύσης bounce και της δράσης $S_E[\bar{\phi}_b]$ στο όριο όπου η πυκνότητα ενέργειας μεταξύ του αληθούς και του ψευδούς κενού είναι μικρή. Αυτή η προσέγγιση ονομάζεται προσέγγιση λεπτού τοιχώματος (thin wall approximation) και θα την μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

3.3 Προσέγγιση λεπτού τοιχώματος

Θα υπολογίσουμε τον συντελεστή B για τον ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και όγκου, σχέση 3.31, στην προσέγγιση του λεπτού τοιχώματος. Σε αυτή την προσέγγιση μπορούμε να βρούμε αναλυτική προσεγγιστική λύση της bounce, $\bar{\phi}_b$, καθώς και της δράσης $S_E[\bar{\phi}_b]$. Αρχικά θεωρούμε ένα συμμετρικό δυναμικό του ϕ , $U_0(\phi)$

$$U_0(\phi) = U_0(-\phi) \quad (3.46)$$

με ελάχιστα στα σημεία ϕ_+ και ϕ_-

$$\left. \frac{dU_0}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_{\pm}} = 0 \quad (3.47)$$

Επίσης ορίζουμε

$$\mu^2 = \left. \frac{d^2 U_0}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_{\pm}} \quad (3.48)$$

Τώρα θα προσθέσουμε στο U_0 έναν μικρό όρο ο οποίος σπάει την συμμετρία,

$$U(\phi) = U_0(\phi) + \varepsilon \left(\frac{\phi_- - \phi}{\phi_- - \phi_+} \right) \rightarrow U(\phi) = U_0(\phi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (3.49)$$

όπου ε ένας θετικός αριθμός. Αυτό το δυναμικό ορίζει την θεωρία που συζητάμε μέχρι τώρα, σχήμα 15, και το ε είναι η διαφορά ενεργειακής πυκνότητας μεταξύ αληθούς και ψευδούς κενού

$$\varepsilon = U(\phi_+) - U(\phi_-) \quad (3.50)$$

Θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση 3.43 με συνοριακές συνθήκες τις 3.44-3.45. Αν αναλύσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα όπως στην προηγούμενη παράγραφο, όπου ερμηνεύσαμε το ϕ ως θέση και το ρ ως χρόνο, έχουμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται υπό την επίδραση του δυναμικού $-U(\phi)$ στο οποίο ασκείται μια δύναμη απόσβεσης. Για να μην χάσουμε πολύ ενέργεια, λόγω της δύναμης απόσβεσης, πρέπει να επιλέξουμε την αρχική θέση του σωματιδίου, $\bar{\phi}_b(0)$, πολύ κοντά στο ϕ_- . Το σωματίδιο τότε μένει κοντά στο ϕ_- για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα $\rho \approx \bar{\rho}$ και η δύναμη απόσβεσης γίνεται αμελητέα. Κοντά στην χρονική στιγμή $\bar{\rho}$ το σωματίδιο κινείται γρήγορα στην 'κοιλιάδα' του δυναμικού και φτάνει σε ηρεμία στο ϕ_+ όταν $\rho \rightarrow \infty$.

Για ρ κοντά στο $\bar{\rho}$ μπορούμε να αγνοήσουμε την δύναμη απόσβεσης καθώς επίσης και τον όρο που εξαρτάται από το ε στο δυναμικό U . Τότε η 3.43 γίνεται

$$\bar{\phi}''_b = \frac{dU_0}{d\phi} \quad (3.51)$$

Από εδώ και μέχρι το τέλος της παραγράφου θα συμβολίσουμε την λύση bounce $\bar{\phi}_b$ με ϕ για εξοικονόμηση χρόνου. Από την εξίσωση 3.51 προκύπτει

$$\phi'' - \frac{dU_0}{d\phi} = 0 \Rightarrow \frac{d\phi}{d\rho} \phi'' - \frac{dU_0}{d\phi} \frac{d\phi}{d\rho} = 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{2} (\phi')^2 - U_0 \right]' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (\phi')^2 - U_0 = C \quad (3.52)$$

Η 3.52 αποτελεί σταθερά της κίνησης και η τιμή της καθορίζεται από την συνθήκη $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi(\rho) = \phi_+$ με αποτέλεσμα

$$C = -U_0(\phi_+) \quad (3.53)$$

Άρα

$$\frac{1}{2} (\phi')^2 - U_0(\phi) = -U_0(\phi_+) \quad (3.54)$$

Έτσι καθώς το ρ αυξάνεται η ϕ πηγαίνει μονοτονικά από το ϕ_- στο ϕ_+ . Από την εξίσωση 3.54 ολοκληρώνοντας μπορούμε να προσδιορίσουμε την ϕ συνάρτηση μιας σταθεράς ολοκλήρωσης. Θα επιλέξουμε την σταθερά ολοκλήρωσης να είναι το $\bar{\rho}$, που είναι το σημείο στο οποίο το ϕ έχει την μέση τιμή των δύο μέγιστων τιμών, οπότε

$$\int_{(\phi_+ + \phi_-)/2}^{\phi} d\phi [2(U_0(\phi) - U_0(\phi_+))]^{-\frac{1}{2}} = \rho - \bar{\rho} \quad (3.55)$$

Για παράδειγμα αν είχαμε το δυναμικό

$$U_0(\phi) = \frac{1}{8} \lambda (\phi^2 - \mu^2/\lambda)^2 \quad (3.56)$$

τότε με αντικατάσταση στην 3.55 προκύπτει

$$\phi = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{1}{2} \mu (\rho - \bar{\rho}) \right] \quad (3.57)$$

Το μόνο που μένει είναι να προσδιορίσουμε το $\bar{\rho}$. Θα το κάνουμε αυτό με την υπόθεση ότι το $\bar{\rho}$ είναι μεγάλο σε σχέση την κλίμακα μήκους όπου το ϕ μεταβάλλεται αισθητά. Για παράδειγμα στην σχέση 3.58, αυτό σημαίνει ότι το $\bar{\rho}\mu$ είναι πολύ μεγαλύτερο της μονάδας. Αυτή η υπόθεση θα αιτιολογηθεί (για μικρά ε) στο τέλος του υπολογισμού.

Αν το $\bar{\rho}$ είναι μεγάλο, η bounce μοιάζει με μία τετραδιάστατη σφαίρα με αληθές κενό, $\phi = \phi_-$, στο υπόβαθρο του ψευδούς κενού, $\phi = \phi_+$, με μία μεταβατική περιοχή (τοίχωμα) να τα χωρίζει. Το τοίχωμα είναι μικρό σε πάχος σε σύγκριση με την ακτίνα της σφαίρας, στο παράδειγμα που δώσαμε έχει πάχος $O(\mu^{-1})$. Για αυτό τον λόγο η προσέγγιση ονομάζεται προσέγγιση λεπτού τοιχώματος.

Θα προσδιορίσουμε το $\bar{\rho}$ υπολογίζοντας το συντελεστή B , σχέση 3.24 και απαιτώντας να είναι σταθερός κάτω από μεταβολές του $\bar{\rho}$. Η σχέση 3.25, χρησιμοποιώντας την έκφραση της δράσης 3.41 γίνεται

$$\begin{aligned} B &= S_E[\phi] - S_E[\phi_+] = 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi) \right] - 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho U(\phi_+) \\ &= 2\pi^2 \int_0^\infty \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi) - U(\phi_+) \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Η περιοχή της ολοκλήρωσης για το $S_E[\phi]$ μπορεί να χωριστεί σε τρία μέρη: έξω από το τοίχωμα, μέσα από το τοίχωμα και πάνω στο τοίχωμα. Χωρίζουμε το B αντίστοιχα και θα έχουμε

$$B = B_{out} + B_{in} + B_{wall} \quad (3.59)$$

Έξω από το τοίχωμα έχουμε $\phi = \phi_+$ ώστε

$$B_{out} = 2\pi^2 \int_{\bar{\rho}}^\infty \rho^3 d\rho [U(\phi_+) - U(\phi_+)] = 0 \quad (3.60)$$

Μέσα από το τοίχωμα έχουμε $\phi = \phi_-$ ώστε

$$B_{in} = 2\pi^2 \int_0^{\bar{\rho}} \rho^3 d\rho [U(\phi_-) - U(\phi_+)] = 2\pi^2 \int_0^{\bar{\rho}} \rho^3 d\rho [-\varepsilon] = -\frac{\pi^2}{2} \bar{\rho}^4 \varepsilon \quad (3.61)$$

Πάνω στο τοίχωμα $\rho \approx \bar{\rho}$, και σε αυτή την περιοχή ο όρος $\mathcal{O}(\varepsilon)$ του δυναμικού είναι αμελητέος επομένως έχουμε

$$B_{wall} = 2\pi^2 \int_{\bar{\rho}-k}^{\bar{\rho}+k} \rho^3 d\rho \left[\frac{1}{2}(\phi')^2 + U(\phi) - U(\phi_+) \right] = 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \int_{\bar{\rho}-k}^{\bar{\rho}+k} d\rho \left[\frac{1}{2}(\phi')^2 + U_0(\phi) - U_0(\phi_+) \right] \quad (3.62)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση 3.54 η παραπάνω σχέση γίνεται

$$B_{wall} = 2\pi^2 \bar{\rho}^3 \int_{\bar{\rho}-k}^{\bar{\rho}+k} d\rho 2 [U_0(\phi) - U_0(\phi_+)] = 2\pi^2 \bar{\rho}^3 S_1 \quad (3.63)$$

με

$$S_1 = \int_{\bar{\rho}-k}^{\bar{\rho}+k} d\rho 2 [U_0(\phi) - U_0(\phi_+)] \quad (3.64)$$

Το S_1 μπορούμε να το φέρουμε και σε μια άλλη μορφή κάνοντας μια αλλαγή μεταβλητών με την βοήθεια της σχέσης 3.54

$$\frac{d\phi}{d\rho} = \sqrt{2[U_0(\phi) - U_0(\phi_+)]} \Rightarrow d\rho = d\phi [2(U_0(\phi) - U_0(\phi_+))]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.65)$$

με όρια ολοκλήρωσης $\phi_- \rightarrow \phi_+$ και η 3.64 γίνεται

$$S_1 = \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi [2(U_0(\phi) - U_0(\phi_+))]^{\frac{1}{2}} \quad (3.66)$$

Το S_1 είναι η δράση ενός μονοδιάστατου instanton σε αντιστοιχία με την παράγραφο 2.3.2. Το B βάζοντας τα παραπάνω στη σχέση 3.61 γίνεται

$$B = -\frac{\pi^2}{2}\bar{\rho}^4\varepsilon + 2\pi^2\bar{\rho}^3S_1 \quad (3.67)$$

Μεταβάλλοντας την παραπάνω έκφραση ως προς $\bar{\rho}$ και απαιτώντας να είναι στάσιμη έχουμε

$$\frac{dB}{d\bar{\rho}} = 0 \Rightarrow \bar{\rho} = \frac{3S_1}{\varepsilon} \quad (3.68)$$

Αυτό ολοκληρώνει την προσεγγιστική περιγραφή της bounce και αιτιολογεί την προσέγγισή μας: το $\bar{\rho}$ γίνεται όντως μεγάλο όταν το ε γίνεται μικρό. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 3.68 για να δώσουμε μια πιο ακριβή προϋπόθεση για την εγκυρότητα της προσέγγισής μας, πρέπει το $\bar{\rho}\mu$ να είναι πολύ μεγαλύτερο της μονάδας

$$\bar{\rho}\mu \gg 1 \Rightarrow 3S_1\mu \gg \varepsilon \quad (3.69)$$

Ο συντελεστής B είναι

$$B = \frac{27\pi^2 S_1^4}{3\varepsilon^3} \quad (3.70)$$

Αυτή είναι η αναλυτική έκφραση για τον συντελεστή B στο όριο των μικρών ε . Χρησιμοποιήσαμε την bounce για να υπολογίσουμε τον συντελεστή B που υπεισέρχεται στον ρυθμό διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου για την κβαντική υλοποίηση μιας φουσαλίδας με αληθές κενό στο μοτίβο του ψευδούς κενού. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την bounce για να περιγράψουμε την εξέλιξη της φουσαλίδας μετά την υλοποίηση της. Αυτό θα το μελετήσουμε στην επόμενη παράγραφο.

3.4 Εξέλιξη της φουσαλίδας

Στην παράγραφο 2.3 δώσαμε μια ημικλασσική περιγραφή για την διάσπαση μίας ασταθούς κατάστασης στην κβαντική μηχανική. Το σωματίδιο πραγματοποιεί μια κβαντική μετάβαση από το τοπικό ελάχιστο του δυναμικού στο σημείο διαφυγής σ , $q(\tau = 0)$. Όταν βρίσκεται στο σημείο διαφυγής η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου είναι η ίδια με αυτή που είχε πριν και η ταχύτητα του είναι ίση με μηδέν. Αυτές είναι οι αρχικές συνθήκες για την μετέπειτα εξέλιξη του σωματιδίου η οποία καθορίζεται από την κλασσική μηχανική. Αυτή η περιγραφή μπορεί να γενικευθεί και για την Θεωρία Πεδίου. Το κλασσικό πεδίο πραγματοποιεί μια κβαντική μετάβαση (την χρονική στιγμή μηδέν) στην κατάσταση που ορίζεται από

$$\phi(t = 0, \mathbf{x}) = \bar{\phi}_b(\tau = 0, \mathbf{x}) \quad (3.71)$$

με

$$\frac{\partial \phi(t = 0, \mathbf{x})}{\partial t} = 0 \quad (3.72)$$

Από εκεί και πέρα εξελίσσεται σύμφωνα με την κλασσική εξίσωση κίνησης για το πεδίο

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = U'(\phi) \quad (3.73)$$

Η πρώτη από αυτές της συνθήκες μας λέει ότι η ίδια συνάρτηση, $\bar{\phi}_b(\rho)$, που δίνει την μορφή της bounce στον τετραδιάστατο Ευκλείδειο χώρο μας δίνει την μορφή της φυσαλίδας την στιγμή της υλοποίησης της στον συνήθη τρισδιάστατο χώρο. Λόγω του ότι η Minkowskian εξίσωση κίνησης είναι απλά η αναλυτική συνέχιση της Ευκλείδειας εξίσωσης κίνησης, πίσω στον πραγματικό χρόνο, η λύση της 3.73 είναι η αναλυτική συνέχιση της bounce

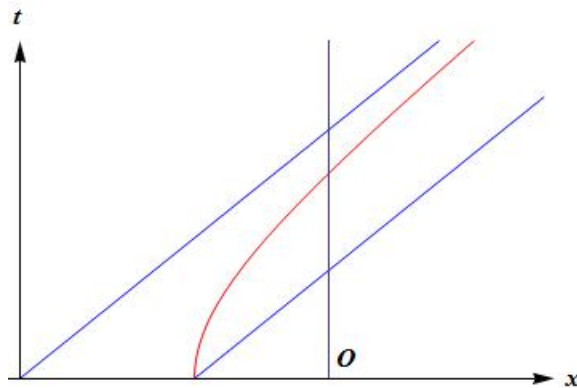
$$\phi(t, \mathbf{x}) = \bar{\phi}_b(\rho = [|\mathbf{x}|^2 - t^2]^{1/2}) \quad (3.74)$$

Μπορούμε να βγάλουμε ορισμένα συμπεράσματα από την εξίσωση 3.74:

1. Η $O(4)$ αναλλοίωτη λύση bounce γίνεται $O(3,1)$ αναλλοίωτη λύση της κλασσικής εξίσωσης κίνησης. Η εξέλιξη της φυσαλίδας, μετά την υλοποίηση της, είναι η ίδια για κάθε παρατηρητή Lorentz.
2. Στην προσέγγιση του λεπτού τοιχώματος που μελετήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είχαμε ένα λεπτό τοίχωμα, στο $\rho = \bar{\rho}$, το οποίο χώριζε το ψευδές από το αληθές κενό. Καθώς η φυσαλίδα διαστέλλεται το τοίχωμα διαγράφει την υπερβολή

$$|\mathbf{x}|^2 - t^2 = \bar{\rho}^2 \quad (3.75)$$

που φαίνεται στην εικόνα 17. Το $\bar{\rho}$ είναι πολύ μικρό και η τιμή του εξαρτάται από την διαφορά ενεργειακής πυκνότητας μεταξύ αληθούς και ψευδούς κενού. Αυτό σημαίνει ότι μόλις υλοποιηθεί η φυσαλίδα ξεκινά να διαστέλλεται σχεδόν με την ταχύτητα του φωτός. Ως συνέπεια αυτής της ταχείας διαστολής, αν μια φυσαλίδα διαστελλόταν προς το μέρος μας δεν θα είχαμε καμία ειδοποίηση ότι μας προσεγγίζει μέχρις ότου βρεθούμε μέσα σε αυτή. Αυτό φαίνεται επίσης στην εικόνα 17. Ο στάσιμος παρατηρητής O θα λάβει την πληροφορία για την δημιουργία της φυσαλίδας όταν διασχίσει τον κώνο φωτός W . Μετά από χρόνο $\bar{\rho}$, που είναι της τάξης των 10^{-21} sec , βρίσκεται μέσα στην φυσαλίδα.



Σχήμα 17: Χωροχρονικό διάγραμμα της εξέλιξης της φυσαλίδας μετά την υλοποίηση της. Η υπερβολή είναι η διαδρομή που διαγράφει το τοίχωμα. Ένας παρατηρητής O θα λάβει την πληροφορία για την δημιουργία της φυσαλίδας όταν διασχίσει τον κώνο φωτός W .

3. Η ταχεία διαστολή του τοιχώματος της φυσαλίδας προφανώς έχει αρκετή ενέργεια. Θα προσδιορίσουμε πόση είναι αυτή. Ένα τμήμα του τοιχώματος σε ηρεμία έχει ενέργεια S_1 ανά μονάδα επιφάνειας. Πραγματοποιώντας έναν μετασχηματισμό Lorentz ένα τμήμα του τοιχώματος που διαστέλλεται με ταχύτητα v έχει ενέργεια $S_1(1 - v)^{-\frac{1}{2}}$ ανά μονάδα επιφάνειας. Επομένως για τον χρόνο όπου η ακτίνα της φυσαλίδας είναι $|\mathbf{x}|$ η ενέργεια του τοιχώματος είναι

$$E_{wall} = 4\pi|\mathbf{x}|^2 S_1(1 - v)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.76)$$

Από την εξίσωση 3.75 έχουμε

$$v = \frac{d|\mathbf{x}|}{dt} = \frac{(|\mathbf{x}|^2 - \bar{\rho}^2)^{\frac{1}{2}}}{|\mathbf{x}|} \quad (3.77)$$

οπότε

$$E_{wall} = \frac{4\pi|\mathbf{x}|^3 S_1}{\bar{\rho}} = \frac{4\pi\varepsilon|\mathbf{x}|^3}{3} \quad (3.78)$$

Επομένως, στην προσέγγιση λεπτού τοιχώματος, όλη η ενέργεια που ελευθερώθηκε από την μετατροπή του ψευδούς κενού σε αληθές πηγαίνει για την διαστολή του τοιχώματος της φυσαλίδας.

Σε αυτό το κεφάλαιο είδαμε την γενίκευση του ρυθμού διάσπασης στην Θεωρία Πεδίου. Μελετήσαμε την λύση bounce, η οποία συνεισφέρει στον ρυθμό διάσπασης ανα μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου, και είδαμε ότι μπορούμε να βρούμε μια αναλυτική μορφή της στην προσέγγιση του λεπτού τοιχώματος. Όλα αυτά τα πραγματοποιήσαμε για ένα βαθμωτό πεδίο στον τετραδιάστατο επίπεδο χωροχρόνο Minkowski. Στο επόμενο κεφάλαιο θα επεκτείνουμε την θεωρία για την διάσπαση κενού συμπεριλαμβάνοντας την βαρύτητα.

4 Διάσπαση κενού συμπεριλαμβάνοντας την βαρύτητα

Σε αυτό το κεφάλαιο επεκτείνουμε την θεωρία της διάσπασης κενού, που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, συμπεριλαμβάνοντας τις επιδράσεις της βαρύτητας. Θα ακολουθήσουμε την [2]. Σε κάθε νοητή εφαρμογή, η διάσπαση κενού συμβαίνει σε κλίμακες στις οποίες οι βαρυτικές επιδράσεις είναι εντελώς αμελητέες. Αυτό είναι ένα έγκυρο επιχείρημα αν μιλάμε για την υλοποίηση της φυσικής αλλά όχι αν μιλάμε για την μετέπειτα εξέλιξη της. Η ενέργεια που απελευθερώνεται λόγω της μετατροπής του ψευδούς κενού σε αληθές είναι ανάλογη του όγκου της φυσαλίδας, όπως επίσης και η ακτίνα Schwarzschild που σχετίζεται με αυτή την ενέργεια. Επομένως καθώς η φυσαλίδα μεγαλώνει η ακτίνα Schwarzschild γίνεται συγκρίσιμη με την ακτίνα της φούσκας. Μια σφαίρα ακτίνας Λ και ενεργειακής πυκνότητας ϵ έχει ακτίνα Schwarzschild $r_s = 2G \left(\frac{4\pi}{3} \Lambda^3 \epsilon \right)$, όπου G η σταθερά του Νεύτωνα. Αυτή θα γίνει ίση με Λ όταν

$$\Lambda = 2G \left(\frac{4\pi}{3} \Lambda^3 \epsilon \right) \Rightarrow \Lambda = \left(\frac{3}{8\pi G \epsilon} \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

Για $\epsilon = 1 \text{ (GeV)}^4$ το Λ είναι 0.8 km . Είμαστε αντιμέτωποι με φαινόμενα τα οποία συμβαίνουν σε κλίμακες οι οποίες δεν είναι ούτε υποατομικές ούτε αστρονομικές αλλά σε κλίμακες τις οποίες δεν μπορούμε να αγνοήσουμε αν ενδιαφερόμαστε για τις κοσμολογικές συνέπειες της διάσπασης κενού. Επομένως για μία ορθή περιγραφή της διάσπασης κενού δεν μπορούμε να αγνοήσουμε την βαρύτητα.

4.1 Ρυθμός διάσπασης συμπεριλαμβάνοντας την βαρύτητα

Στην εξίσωση 3.1 δεν υπάρχει απόλυτο μηδέν της ενεργειακής πυκνότητας. Προσθέτοντας μια σταθερά στο δυναμικό U μπορούμε να ορίσουμε άλλη τιμή ως μηδέν χωρίς να αλλάξει η φυσική. Λαμβάνοντας υπόψη την βαρύτητα αυτό δεν είναι δυνατό. Για την θεωρία ενός βαθμωτού πεδίου το οποίο αλληλεπιδρά με την βαρύτητα η δράση είναι

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) - \frac{\mathcal{R}}{16\pi G} \right] \quad (4.2)$$

όπου R είναι το βαθμωτό Ricci. Σε αυτή τη θεωρία η προσθήκη μιας σταθεράς στο U ισοδυναμεί με την προσθήκη κοσμολογικής σταθεράς στο βαρυτικό κομμάτι της Λαγκραντζιανής. Επομένως μόλις γίνει η διάσπαση κενού αλλάζει η θεωρία της βαρύτητας, η κοσμολογική σταθερά μέσα στη φυσαλίδα είναι διαφορετική από την κοσμολογική σταθερά έξω από αυτή. Οπότε πρέπει να προσδιορίσουμε την αρχική τιμή της κοσμολογικής σταθεράς για την πραγματοποίηση των υπολογισμών, κάτι που δεν χρειαζόταν κατά την απουσία της βαρύτητας. Θα μελετήσουμε δύο περιπτώσεις:

1.

$$U(\phi_+) = \epsilon, \quad U(\phi_-) = 0 \quad (4.3)$$

2.

$$U(\phi_+) = 0, \quad U(\phi_-) = -\epsilon \quad (4.4)$$

Η πρώτη περίπτωση είναι η διάσπαση κενού από ένα χώρο με θετική ενεργειακή πυκνότητα που ονομάζεται de Sitter χωροχρόνος, σε ένα χώρο με μηδενική ενεργειακή πυκνότητα, Minkowski χωροχρόνο. Η δεύτερη είναι η διάσπαση από ένα χώρο με μηδενική ενεργειακή πυκνότητα σε ένα χώρο

με αρνητική ενεργειακή πυκνότητα, Anti de Sitter χωροχρόνο. Με την συμπερίληψη της βαρύτητας ο ρυθμός διάσπασης ανά μονάδα όγκου και ανά μονάδα χρόνου θα εξαρτάται από μία λύση bounce, όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, αλλά με την Ευκλείδεια δράση να περιέχει τον Ευκλείδειο Einstein-Hilbert όρο. Άρα

$$\frac{\Gamma}{V} = Ae^{-B/\hbar}[1 + \mathcal{O}(\hbar)] \quad (4.5)$$

με $B = S_E[\phi_b] - S_E[\phi_+]$ και ϕ_b την λύση bounce των εξισώσεων Euler-Lagrange που προκύπτουν από την Ευκλείδεια δράση

$$S_E = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + U(\phi) - \frac{\mathcal{R}}{16\pi G} \right] \quad (4.6)$$

όπου η μετρική $g_{\mu\nu}$ είναι θετικά ορισμένη και g η ορίζουσα του μετρικού ταυυστή.

4.2 Η λύση bounce στην προσέγγιση λεπτού τοιχώματος

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε κατασκευάζοντας την λύση bounce η οποία ικανοποιεί κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Στον επίπεδο χώρο η λύση bounce που είχε την ελάχιστη δράση ήταν $O(4)$ αναλλοίωτη. Θα υποθέσουμε ότι η βαρύτητα δεν σπάει αυτή τη συμμετρία ώστε η λύση bounce να είναι και σε αυτή την περίπτωση αναλλοίωτη κάτω από τετραδιάστατες στροφές. Η πιο γενική μορφή $O(4)$ αναλλοίωτης Ευκλείδειας μετρικής έχει την μορφή

$$ds^2 = d\xi^2 + \rho(\xi)^2 d\Omega_3^2 \quad (4.7)$$

όπου το $d\Omega_3^2$ είναι η μετρική μοναδιαίας τρισφαίρας

$$d\Omega_3^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.8)$$

με $0 \leq \psi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq \pi$ και $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Το ξ είναι ακτινική συντεταγμένη η οποία είναι κάθετη σε όλες της γωνιακές συντεταγμένες. Το ρ δίνει την ακτίνα καμπυλότητας κάθε σφαίρας. Η bounce εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο $\phi_b(\xi)$. Παρατηρούμε ότι η υπόθεση για αναλλοιότητα σε στροφές απλοποίησε αρκετά το πρόβλημα. Οι δέκα άγνωστες συναρτήσεις τεσσάρων μεταβλητών της μετρικής, που θα είχαμε, μειώθηκαν σε μία άγνωστη συνάρτηση μιας μεταβλητής. Με την βοήθεια των σχέσεων 4.7, 4.8 μπορούμε να διαβάσουμε την μετρική $g_{\mu\nu}$ ώστε να υπολογίσουμε τα σύμβολα Christoffel και από αυτά να βρούμε το βαθμωτό Ricci το οποίο είναι

$$\mathcal{R} = -\frac{6}{\rho^2} (\rho\rho'' + \rho' - 1) \quad (4.9)$$

Η σχέση 4.6 σύμφωνα με τα παραπάνω γίνεται

$$\begin{aligned} S_E &= \int_0^\pi \sin \psi^2 d\psi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \int \rho^3 d\xi \left[\frac{1}{2} \phi' + U(\phi) + \frac{3}{8\pi G \rho^2} (\rho\rho'' + \rho' - 1) \right] \Rightarrow \\ S_E &= 2\pi^2 \int d\xi \left(\rho^3 \left[\frac{1}{2} \phi' + U(\phi) \right] + \frac{3}{\kappa} (\rho^2 \rho'' + \rho\rho'^2 - \rho) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

με $\kappa = 8\pi G$. ο τόνος δηλώνει παραγωγή ως προς ξ . Η εξίσωση κίνησης για την εύρεση της λύσης bounce είναι

$$\phi_b'' + \frac{3\rho'}{\rho}\phi_b' = \frac{dU}{d\phi} \quad (4.11)$$

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε την λύση bounce ϕ_b με ϕ για οικονομία. Οι συνοριακές συνθήκες για την εύρεση της bounce εξαρτώνται από τα μηδενικά που έχει το $\rho(\xi)$. Το $\rho(\xi)$ μπορεί να έχει μέχρι δύο μηδενικά, αυτό μπορεί να το δει κανείς με την βοήθεια της σχέσης 4.14 και της παραγώγου της. Η μετρική είναι αναλλοίωτη κάτω από έναν επανορισμό του ξ με την προσθήκη μιας σταθεράς, επομένως μπορούμε να επιλέξουμε ένα μηδέν του $\rho(\xi)$ να είναι για $\xi = 0$ έτσι ώστε $\rho(0) = 0$. Αν το ρ έχει ένα μηδενισμό τότε το ξ παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, \infty)$ και έχουμε ανοιχτή πολλαπλότητα ενώ άμα έχει και ένα δεύτερο μηδενισμό σε κάποιο ξ_{max} το ξ παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, \xi_{max})$. Ανάλογα με την πολλαπλότητα, έχουμε και διαφορετικές συνοριακές συνθήκες. Οι συνθήκες για το $\rho(\xi)$ και οι συνοριακές συνθήκες για το ϕ ανάλογα με την πολλαπλότητα που έχουμε θα είναι:

1. Ανοιχτή:

$$\rho(0) = 0, \rho'(0) = 1, \phi'(0) = 0, \lim_{\xi \rightarrow \infty} \phi(\xi) = \phi_+ \quad (4.12)$$

2. Κλειστή

$$\rho(0) = 0, \rho(\xi_{max}) = 0, \rho'(0) = 1, \rho'(\xi_{max}) = -1, \phi'(0) = 0, \phi'(\xi_{max}) = 0 \quad (4.13)$$

Παίρνοντας μεταβολές της δράσης ως προς $g_{\mu\nu}$ βρίσκουμε της Ευκλείδειες εξισώσεις Einstein. Η $\xi\xi$ συνιστώσα $G_{\xi\xi} = -\kappa T_{\xi\xi}$ μας δίνει

$$\rho'^2 = 1 + \frac{\kappa}{3}\rho^2 \left(\frac{1}{2}\phi'^2 - U \right) \quad (4.14)$$

Οι υπόλοιπες εξισώσεις Einstein δεν μας δίνουν νέες εξισώσεις. Στην προσέγγιση του λεπτού τοιχώματος η εύρεση της bounce από τις παραπάνω εξισώσεις είναι αρκετά απλή. Η εξίσωση 4.11 διαφέρει από αυτή που είχαμε βρει αγνοώντας την βαρύτητα, 3.43, στο ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι το ξ αντί για το ρ και ότι ο συντελεστής του ϕ' έχει ένα παράγοντα $\frac{\rho'}{\rho}$ αντί για $\frac{1}{\rho}$. Στην προσέγγιση λεπτού τοιχώματος αυτόν τον όρο τον αγνοούμε όπως και να έχει. Επομένως μπορούμε να ακολουθήσουμε τα βήματα του προηγούμενου κεφαλαίου με την αλλαγή $\rho \rightarrow \xi$. Για τον προσδιορισμό του ϕ , σε αναλογία με την 3.55, έχουμε

$$\int_{(\phi_+ + \phi_-)/2}^{\phi} d\phi [2(U_0(\phi) - U_0(\phi_+))]^{-\frac{1}{2}} = \xi - \bar{\xi} \quad (4.15)$$

με $\bar{\xi}$ μια σταθερά ολοκλήρωσης, το σημείο στο οποίο το ϕ έχει την μέση τιμή των δύο μέγιστων τιμών. Βρίσκοντας το ϕ από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να λύσουμε την 4.14 για να βρούμε το ρ . Για την εύρεση της λύσης χρειάζεται να προσδιορίσουμε την σταθερά ολοκλήρωσης την οποία επιλέγουμε να είναι η

$$\bar{\rho} \equiv \rho(\bar{\xi}) \quad (4.16)$$

που είναι η ακτίνα καμπυλότητας του τοιχώματος το οποίο χωρίζει το ψευδές από το αληθές κενό. Θέλουμε να προσδιορίσουμε το $\bar{\rho}$. Ο υπολογισμός είναι αντίστοιχος με αυτόν του προηγούμενου

κεφαλαίου. Αρχικά υπολογίζουμε το B , την διαφορά των δράσεων μεταξύ της λύσης bounce και του ψευδούς κενού, έπειτα βρίσκουμε το $\bar{\rho}$, και απαιτούμε το B να είναι στάσιμο σε μεταβολές του ρ . Θα απαλείψουμε τον όρο δεύτερης παραγώγου ως προς ξ από τη σχέση 4.10 με παραγοντική ολοκλήρωση. Ο επιφανειακός όρος δεν συνεισφέρει διότι παίρνουμε διαφορά δράσεων μεταξύ λύσεων που συμφωνούν στο άπειρο. Άρα η 4.10 γίνεται

$$S_E = 4\pi^2 \int d\xi \left(\rho^3 \left[\frac{1}{2} \phi' + U(\phi) \right] - \frac{3}{\kappa} (\rho \rho'^2 + \rho) \right) \quad (4.17)$$

Με την βοήθεια της σχέσης 4.14 απαλείφουμε το ρ' και η παραπάνω σχέση γίνεται

$$S_E = 4\pi^2 \int d\xi \left(\rho^3 U(\phi) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) \quad (4.18)$$

Το B με την βοήθεια της παραπάνω σχέσης γίνεται

$$B = S_E[\phi] - S_E[\phi_+] = 4\pi^2 \int d\xi \left(\rho^3 U(\phi) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) - 4\pi^2 \int d\xi \left(\rho^3 U(\phi_+) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) \quad (4.19)$$

Όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο χωρίζουμε την περιοχή ολοκλήρωσης για το $S_E[\phi]$ σε τρία μέρη και το B είναι

$$B = B_{out} + B_{in} + B_{wall} \quad (4.20)$$

Έξω από το τοίχωμα έχουμε $\phi = \phi_+$ ώστε

$$B_{out} = 4\pi^2 \int_{\bar{\xi}}^{\infty} d\xi \left(\rho^3 U(\phi_+) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) - 4\pi^2 \int_{\bar{\xi}}^{\infty} d\xi \left(\rho^3 U(\phi_+) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) = 0 \quad (4.21)$$

Πάνω στο τοίχωμα μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ρ με $\bar{\rho}$ και το $U(\phi)$ με $U_0(\phi)$ ώστε

$$B_{wall} = 4\pi^2 \int_{\bar{\xi}-\epsilon}^{\bar{\xi}+\epsilon} d\xi \left(\rho^3 U(\phi) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) - 4\pi^2 \int_{\bar{\xi}-\epsilon}^{\bar{\xi}+\epsilon} d\xi \left(\rho^3 U(\phi_+) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) = 4\pi^2 \bar{\rho}^3 \int_{\bar{\xi}-\epsilon}^{\bar{\xi}+\epsilon} d\xi [U_0(\phi) - U_0(\phi_+)] = 2\pi^2 \bar{\rho}^3 S_1 \quad (4.22)$$

από την 3.64. Μέσα από το τοίχωμα έχουμε $\phi = \phi_-$ ώστε

$$B_{in} = 4\pi^2 \int_0^{\bar{\xi}} d\xi \left(\rho^3 U(\phi_-) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) - 4\pi^2 \int_0^{\bar{\xi}} d\xi \left(\rho^3 U(\phi_+) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) \quad (4.23)$$

Με την βοήθεια της σχέσης 4.14 μπορούμε να πραγματοποιήσουμε μια αλλαγή μεταβλητών. Λόγω του ότι το ϕ είναι σταθερό έχουμε

$$d\xi = \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}\kappa\rho^2 U(\phi_-)}} \quad (4.24)$$

για το πρώτο ολοκλήρωμα και

$$d\xi = \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}\kappa\rho^2U(\phi_+)}} \quad (4.25)$$

για το δεύτερο. Η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} B_{in} &= 4\pi^2 \int_0^{\bar{\rho}} \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}\kappa\rho^2U(\phi_-)}} \left(\rho^3 U(\phi_-) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) - 4\pi^2 \int_0^{\bar{\rho}} \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}\kappa\rho^2U(\phi_+)}} \left(\rho^3 U(\phi_+) - \frac{3\rho}{\kappa} \right) \\ &= \frac{12\pi^2}{\kappa^2 U(\phi_-)} \left(\left[1 - \frac{1}{3}\kappa\bar{\rho}^2 U(\phi_-) \right]^{3/2} - 1 \right) - \frac{12\pi^2}{\kappa^2 U(\phi_+)} \left(\left[1 - \frac{1}{3}\kappa\bar{\rho}^2 U(\phi_+) \right]^{3/2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Το B βάζοντας τα παραπάνω στη σχέση 4.20 γίνεται

$$B = \frac{12\pi^2}{\kappa^2 U(\phi_-)} \left(\left[1 - \frac{1}{3}\kappa\bar{\rho}^2 U(\phi_-) \right]^{3/2} - 1 \right) - \frac{12\pi^2}{\kappa^2 U(\phi_+)} \left(\left[1 - \frac{1}{3}\kappa\bar{\rho}^2 U(\phi_+) \right]^{3/2} - 1 \right) + 2\pi^2 \bar{\rho}^3 S_1 \quad (4.27)$$

Θα εξετάσουμε τις δύο περιπτώσεις που αναφέραμε στην παράγραφο 4.1. Η πρώτη περίπτωση είναι η διάσπαση από ένα χώρο με θετική ενεργειακή πυκνότητα σε ένα χώρο με μηδενική ενεργειακή πυκνότητα, από de Sitter σε Minkowski χωροχρόνο. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$U(\phi_+) = \epsilon, \quad U(\phi_-) = 0 \quad (4.28)$$

Η σχέση 4.27 γίνεται

$$B = -\frac{6\pi^2}{k} \bar{\rho}^2 - \frac{12\pi^2}{\kappa^2 \epsilon} \left(\left[1 - \frac{1}{3}\kappa\bar{\rho}^2 \epsilon \right]^{3/2} - 1 \right) + 2\pi^2 \bar{\rho}^3 S_1 \quad (4.29)$$

Μεταβάλλοντας την παραπάνω έκφραση ως προς $\bar{\rho}$ και απαιτώντας να είναι στάσιμη έχουμε

$$\frac{dB}{d\bar{\rho}} = 0 \Rightarrow -\frac{12\pi^2}{\kappa} \bar{\rho} + \frac{12\pi^2}{\kappa} \bar{\rho} \left[1 - \frac{1}{3}\kappa\bar{\rho}^2 \epsilon \right]^{1/2} + 6\pi^2 \bar{\rho}^2 S_1 = 0 \Rightarrow \bar{\rho} = \frac{12S_1}{4\epsilon + 3\kappa S_1^2} \Rightarrow \bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_0}{1 + (\bar{\rho}_0/2\Lambda)^2} \quad (4.30)$$

όπου $\bar{\rho}_0 = 3S_1/\epsilon$, είναι η ακτίνα της φυσαλίδας που είχαμε βρει στο προηγούμενο κεφάλαιο απουσία βαρύτητας και $\Lambda = (3/k\epsilon)^{1/2}$ όπως στην σχέση 4.1. Βάζοντας την 4.30 στην 4.29 για την εύρεση του συντελεστή B προκύπτει

$$B = \frac{B_0}{[1 + (\bar{\rho}_0/2\Lambda)^2]^2} \quad (4.31)$$

όπου $B_0 = 27\pi^2 S_1^4/2\epsilon^3$ ο συντελεστής που υπεισέρχεται στο ρυθμό διάσπασης απουσία βαρύτητας. Η δεύτερη περίπτωση είναι η διάσπαση από ένα χώρο με μηδενική ενεργειακή πυκνότητα σε ένα χώρο με αρνητική ενεργειακή πυκνότητα, από Minkowski σε Anti-de Sitter χωροχρόνο. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$U(\phi_+) = 0, \quad U(\phi_-) = -\epsilon \quad (4.32)$$

Η σχέση 4.27 γίνεται

$$B = -\frac{12\pi^2}{\kappa^2\epsilon} \left(\left[1 + \frac{1}{3}\kappa\bar{\rho}^2\epsilon \right]^{3/2} - 1 \right) + \frac{6\pi^2}{k}\bar{\rho}^2 + 2\pi^2\bar{\rho}^3S_1 \quad (4.33)$$

Μεταβάλλοντας την παραπάνω έκφραση ως προς $\bar{\rho}$ και απαιτώντας να είναι στάσιμη έχουμε

$$\frac{dB}{d\bar{\rho}} = 0 \Rightarrow -\frac{12\pi^2}{\kappa}\bar{\rho} \left[1 + \frac{1}{3}\kappa\bar{\rho}^2\epsilon \right]^{1/2} + \frac{12\pi^2}{\kappa}\bar{\rho} + 6\pi^2\bar{\rho}^2S_1 = 0 \Rightarrow \bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_0}{1 - (\bar{\rho}_0/2\Lambda)^2} \quad (4.34)$$

Βάζοντας την 4.34 στην 4.33 για την εύρεση του συντελεστή B προκύπτει

$$B = \frac{B_0}{[1 - (\bar{\rho}_0/2\Lambda)^2]^2} \quad (4.35)$$

όπου οι ποσότητες $\bar{\rho}_0, B_0$ και Λ είναι οι ίδιες με πριν. Οι παραπάνω εξισώσεις προέκυψαν στην προσέγγιση λεπτού τοιχώματος. Απουσία βαρύτητας, η προσέγγιση λεπτού τοιχώματος ήταν βásiμη αν το $\bar{\rho}$, η ακτίνα του τοιχώματος, είναι μεγάλο σε σχέση με το χαρακτηριστικό εύρος μεταβολής του ϕ . Ο λόγος είναι ότι ο παράγοντας $1/\rho$ πολλαπλασιασμένος με ϕ' στην 3.43 κάνει αυτόν τον όρο αμελητέο. Παρουσία βαρύτητας ο παράγοντας $1/\rho$ αντικαθίσταται με ρ'/ρ , επομένως για την ισχύ της προσέγγισης αυτός ο όρος πρέπει να είναι μικρός στο τοίχωμα. Από την 4.14 έχουμε

$$\frac{\rho'^2}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\kappa}{3} \left(\frac{1}{2}\phi'^2 - U \right) \quad (4.36)$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης θα είναι μικρό αν και οι δύο όροι στο δεξί μέλος είναι μικροί. Ο πρώτος όρος είναι $(1/\rho)^2$ όπως και προηγουμένως. Όσο αφορά τον δεύτερο όρο παρατηρούμε ότι η ποσότητα στην παρένθεση είναι σταθερή πάνω στο τοίχωμα, μηδενίζεται στην μία μεριά του τοιχώματος και έχει μέτρο ϵ στην άλλη. Επομένως αντικαθιστώντας τον όρο αυτό με ϵ γίνεται

$$\frac{\rho'^2}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{\kappa\epsilon}{3} = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\Lambda^2} \quad (4.37)$$

Επομένως η προσέγγιση λεπτού τοιχώματος δικαιολογείται αν το $\bar{\rho}$ και το Λ είναι μεγάλα σε σχέση με το χαρακτηριστικό εύρος μεταβολής του ϕ . Αυτή η συνθήκη δεν θέτει κάποιο περιορισμό στο λόγο $\bar{\rho}_0/\Lambda$, ο οποίος μετράει τη σημαντικότητα της βαρύτητας. Για την περίπτωση διάσπασης από ένα χώρο με θετική ενεργειακή πυκνότητα σε ένα χώρο με μηδενική ενεργειακή πυκνότητα παρατηρούμε από τη σχέση 4.31 ότι παρουσία βαρύτητας η υλοποίηση της φυσαλίδας είναι πιο πιθανή, διότι ο παράγοντας B μειώνεται. Η ακτίνα της την στιγμή της υλοποίησης είναι μικρότερη, διότι μειώνεται το $\bar{\rho}$ από τη σχέση 4.30. Για την περίπτωση διάσπασης από ένα χώρο με μηδενική ενεργειακή πυκνότητα σε ένα χώρο με αρνητική ενεργειακή πυκνότητα τα πράγματα είναι αντίστροφα. Από τη σχέση 4.35 προκύπτει ότι παρουσία βαρύτητας η υλοποίηση της φυσαλίδας είναι λιγότερο πιθανή, διότι ο παράγοντας B αυξάνεται, και η ακτίνα της την στιγμή της υλοποίησης είναι μεγαλύτερη, διότι αυξάνεται το $\bar{\rho}$ από τη σχέση 4.34. Για την ακρίβεια η βαρύτητα μπορεί να εξαλείψει την διάσπαση κενού. Για $\bar{\rho}_0 = 2\Lambda$ δηλαδή

$$\frac{3S_1}{\epsilon} = 2\sqrt{\frac{3}{\kappa\epsilon}} \Rightarrow \epsilon = \frac{3}{4}\kappa S_1^2 \quad (4.38)$$

η ακτίνα της φυσαλίδας γίνεται άπειρη και η πιθανότητα διάσπασης μηδενίζεται. Η βαρύτητα σταθεροποιήσει το ψευδές κενό. Αυτό το φαινόμενο μπορούμε να το εξηγήσουμε αρχικά υπολογίζοντας την ενέργεια μιας φυσαλίδας με λεπτό τοίχωμα, απουσία βαρύτητας, την στιγμή της υλοποίησης της. Έστω ότι αυτή η φυσαλίδα έχει μια ακτίνα $\bar{\rho}$. Η ενέργεια είναι το άθροισμα ενός αρνητικού όρου όγκου και ενός θετικού επιφανειακού όρου

$$E = -\frac{4\pi}{3}\epsilon\bar{\rho}^3 + 4\pi S_1\bar{\rho}^2 = \frac{4\pi}{3}\epsilon\bar{\rho}^2(\bar{\rho}_0 - \bar{\rho}) \quad (4.39)$$

Από την παραπάνω έκφραση παρατηρούμε ότι η ενέργεια μηδενίζεται για $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0$. Όπως περιμέναμε έχουμε διατήρηση της ενέργειας πριν και μετά την υλοποίηση της φυσαλίδας. Θα υπολογίσουμε τις επιδράσεις της βαρύτητας στην ακτίνα της φυσαλίδας στο όριο όπου αυτές είναι μικρές. Αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τις επιδράσεις της βαρύτητας στην συνολική ενέργεια της αδιατάρακτης φυσαλίδας. Αν η βαρυτική συνεισφορά είναι θετική, η ακτίνα της θα πρέπει να μεγαλώσει, η σχέση 4.39 θα αποκτήσει μια μικρή αρνητική συνεισφορά και η συνολική ενέργεια θα παραμείνει μηδενική. Αν η βαρυτική συνεισφορά είναι αρνητική η φυσαλίδα θα πρέπει να μικρύνει. Για την περίπτωση που εξετάζουμε ισχύει ότι η βαρυτική συνεισφορά είναι θετική. Υπάρχουν δύο όροι στην βαρυτική συνεισφορά στην ενέργεια της αδιατάρακτης φυσαλίδας. Ο πρώτος είναι η Νευτώνεια δυναμική ενέργεια της φυσαλίδας. Τον οποίο υπολογίζουμε λαμβάνοντας την συνεισφορά από τρεις όρους

$$U_M = -G \int_0^{\bar{\rho}_0} \frac{M dm}{r} = -G \int_0^{\bar{\rho}_0} dr \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\epsilon r^3\right) (4\pi r^2 \epsilon)}{r} = -\frac{2\epsilon\pi\bar{\rho}_0^5}{5\Lambda^2} \quad (4.40)$$

$$U_m = -G \frac{m^2}{\bar{\rho}_0} = -G \frac{(4\pi\bar{\rho}_0^2 S_1)^2}{\bar{\rho}_0} = -G \frac{\left(\frac{4\pi}{3}\bar{\rho}_0^3 \epsilon\right)}{\bar{\rho}_0} = -\frac{2\epsilon\pi\bar{\rho}_0^5}{3\Lambda^2} \quad (4.41)$$

$$U_{Mm} = -Gm \int_0^{\bar{\rho}_0} \frac{dm}{r} = G(4\pi\bar{\rho}_0^2 S_1) \int_0^{\bar{\rho}_0} dr \frac{4\pi r^2 \epsilon}{r} = \frac{\epsilon\pi\bar{\rho}_0^5}{\Lambda^2} \quad (4.42)$$

Χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\bar{\rho}_0 = 3S_1/\epsilon$ και οι όροι U_M , U_m και U_{Mm} οι όροι αλληλεπίδρασης της σφαίρας με τον εαυτό της, της επιφάνειας με τον εαυτό της και σφαίρας με την επιφάνεια αντίστοιχα. Προσθέτοντας και τις τρεις σχέσεις προκύπτει

$$E_{Newton} = -\epsilon\pi \frac{\bar{\rho}_0^5}{15\Lambda^2} \quad (4.43)$$

Παρατηρούμε ότι αυτή είναι αρνητική, όπως αναμέναμε λόγω του ότι είναι βαρυτική δυναμική ενέργεια. Ο δεύτερος όρος προκύπτει από το γεγονός ότι η μη μηδενική ενεργειακή πυκνότητα μέσα στη φυσαλίδα παραμορφώνει την γεωμετρία. Επομένως υπάρχει μια διόρθωση στον όγκο της σφαίρας που συνεπάγεται διόρθωση στον όρο όγκου της ενέργειας. Ο απειροστός όγκος ενός σφαιρικού φλοιού δίνεται από τη σχέση

$$dV = 4\pi\rho^2 d\xi \quad (4.44)$$

και με την βοήθεια της σχέσης 4.14 (δεδομένου ότι το ϕ είναι σταθερό μέσα στη φυσαλίδα), μπορούμε να υπολογίσουμε την διόρθωση του όγκου

$$\begin{aligned} dV &= 4\pi\rho^2 \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \frac{1}{3}\kappa\rho^2 U(\phi_-)}} = 4\pi\rho^2 \frac{d\rho}{\sqrt{1 + \frac{1}{3}\kappa\rho^2 \epsilon}} = 4\pi\rho^2 d\rho \left(1 - \frac{1}{6}\kappa\rho^2 \epsilon\right) + O(G^2) \\ &= 4\pi\rho^2 d\rho \left(1 - \frac{\rho^2}{2\Lambda^2}\right) + O(G^2) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Παρατηρούμε ότι ο όγκος είναι μικρότερος από τον Ευκλείδειο, επομένως η γεωμετρική διόρθωση ελαχιστοποιεί το μέτρο του αρνητικού όρου όγκου ενέργειας και έτσι έχει θετική συνεισφορά στην συνολική ενέργεια. Ολοκληρώνοντας προκύπτει

$$E_{vol} = -\epsilon 4\pi\rho^2 d\rho \left(1 - \frac{\rho^2}{2\Lambda^2}\right) = -\frac{4\pi}{3}\bar{\rho}_0^3 \epsilon + 2\pi\epsilon \frac{\bar{\rho}_0^5}{5\Lambda^2} \quad (4.46)$$

με

$$E_{geom} = 2\pi\epsilon \frac{\bar{\rho}_0^5}{5\Lambda^2} \quad (4.47)$$

Η συνολική βαρυτική διόρθωση στην ενέργεια είναι το άθροισμα των σχέσεων 4.43, 4.47

$$E_{grav} = \pi\epsilon \frac{\bar{\rho}_0^5}{3\Lambda^2} \quad (4.48)$$

η οποία είναι θετική, επομένως η φυσαλίδα είναι μεγαλύτερη παρουσία βαρύτητας. Συνοψίζοντας η διάσπαση κενού πραγματοποιείται με την υλοποίηση μιας φυσαλίδας. Λόγω διατήρησης της ενέργειας αυτή έχει πάντα μηδενική ενέργεια, το άθροισμα ενός αρνητικού όρου όγκου και ενός θετικού επιφανειακού όρου. Απουσία βαρύτητας μπορούμε πάντα να δημιουργήσουμε μία φυσαλίδα μηδενικής ενέργειας ανεξάρτητα από πόσο μικρό είναι το ϵ . Η φυσαλίδα θα έχει μια μεγάλη ακτίνα και οι όροι όγκου και επιφάνειας θα αναιρεθούν. Παρουσία βαρύτητας η αρνητική ενεργειακή πυκνότητα μέσα στη φυσαλίδα παραμορφώνει την γεωμετρία του χώρου με τέτοιο τρόπο ώστε ο όρος όγκου να αποκτήσει μία θετική συνεισφορά και να είναι λιγότερο αρνητικός. Επομένως υπάρχει πιθανότητα, για μικρό ϵ , να μην μπορεί να υλοποιηθεί φυσαλίδα, οσοδήποτε μεγάλη, η οποία να έχει μηδενική ενέργεια σε συμφωνία με την σχέση 4.34.

4.3 Ανακεφαλαίωση

Κάποια από τα αποτελέσματα που βρήκαμε ισχύουν για γενικότερες περιπτώσεις. Εμείς επικεντρώθηκαν στην προσέγγιση λεπτού τοιχώματος, η οποία είναι βάσιμη για μικρές διαφορές ενεργειακής πυκνότητας μεταξύ ψευδούς και αληθούς κενού, και μελετήσαμε τις δύο περιπτώσεις που αναφέραμε στην παράγραφο 4.1. Απουσία βαρύτητας η διάσπαση κενού πραγματοποιείται με την κβαντική υλοποίηση μιας φυσαλίδας με αληθές κενό η οποία χωρίζεται από το υπόβαθρο του ψευδούς κενού με ένα λεπτό τοίχωμα. Η φυσαλίδα είναι σε ηρεμία την στιγμή της υλοποίησης της, έπειτα διαστέλλεται ταχέως με ταχύτητα η οποία ασυμπτωτικά προσεγγίζει αυτή του φωτός. Το τοίχωμα διαγράφει μια υπερβολή στον χώρο Minkowski με ασύμπτωτη τον κώνο φωτός. Για την περίπτωση της διάσπασης κενού από ένα χώρο με θετική ενεργειακή πυκνότητα σε ένα χώρο με μηδενική ενεργειακή πυκνότητα θα περιμέναμε ότι η βαρύτητα θα έχει κάποια επίδραση στην εξέλιξη της φυσαλίδας. Όμως αυτό δεν συμβαίνει δεν έχει και μπορούμε να το καταλάβουμε με δύο τρόπους:

1. Η εξέλιξη της φυσαλίδας απουσία βαρύτητας είναι $O(3, 1)$ αναλλοίωτη και με την συμπερίληψη της βαρύτητας αυτή η συμμετρία δεν αλλάζει. Οι μόνες $O(3, 1)$ αναλλοίωτες είναι υπερβολές που έχουν ασύμπτωτες τον κώνο φωτός
2. Η διάσπαση κενού διατηρεί την ενέργεια, έτσι που η συνολική ενέργεια της διασταλλόμενης φυσαλίδας είναι μηδέν. Η αρνητική συνεισφορά ενέργειας του εσωτερικού της ακυρώνεται από την θετική συνεισφορά του τοιχώματος. Λόγω του ότι η φυσαλίδα είναι σφαιρικά συμμετρική το βαρυτικό πεδίο στο εξωτερικό μέρος του τοιχώματος καθορίζεται από την συνολική ενέργεια της φούσκας η οποία είναι μηδέν. Επομένως ούτε επιταχύνει ούτε επιβραδύνει την εξέλιξη του εξωτερικού μέρους του τοιχώματος.

Η βαρύτητα επηρεάζει την διάσπαση κενού κάνοντας την πιθανότητα για διάσπαση μικρότερη, στο όριο πολύ μικρών διαφορών ενεργειακής πυκνότητας μπορεί να σταθεροποιήσει το ψευδές κενό, αποτρέποντας εντελώς την διάσπαση. Μέσα στη φυσαλίδα η γεωμετρία του χωροχρόνου είναι Anti-de Sitter ενώ έξω από αυτή Minkowski .

Για την περίπτωση διάσπασης κενού από ένα χώρο με θετική ενεργειακή πυκνότητα σε ένα χώρο με μηδενική ενεργειακή πυκνότητα στο εσωτερικό της έχουμε χωροχρόνο Minkowski και το εσωτερικό μέρος του τοιχώματος συνεχίζει να διαγράφει υπερβολή. Αυτό μπορούμε να το περιγράψουμε με δύο τρόπους όπως και προηγουμένως. Ο πρώτος είναι ίδιος με πριν. Ο δεύτερος είναι ότι μέσα σε ένα σφαιρικά συμμετρικό φλοιό ενέργειας δεν υπάρχει βαρυτικό πεδίο. Με την συμπερίληψη της βαρύτητας η πιθανότητα για διάσπαση κενού αυξάνεται. Η γεωμετρία του χωροχρόνου έξω από την φυσαλίδα είναι de Sitter .

5 Διάσπαση ηλεκτρασθενούς κενού κατά την περίοδο του Πληθωρισμού

Κατά τον πληθωρισμό το πεδίο Higgs μπορεί να διαχυμανθεί προς τιμές μερικές τάξης μεγέθους κάτω από την κλίμακα Planck, για τις οποίες το δυναμικό του γίνεται βαθύτερο από το ηλεκτρασθενές κενό. Ο ρυθμός διάσπασης αποσβένεται εκθετικά από την δράση της bounce. Η λύση Hawking-Moss instanton, ένας σταθερός σχηματισμός πεδίου με πεπερασμένη δράση, όπου το πεδίο παίρνει την τιμή στο μέγιστο του φράγματος δυναμικού, μπορεί επίσης να οδηγήσει σε διάσπαση κενού. Επεκτείνουμε τα αποτελέσματα προηγούμενων μελετών υπολογίζοντας την επίδραση της βαρύτητας στη δράση της bounce. Βρίσκουμε μια αναλυτική έκφραση για τους κύριους βαρυτικούς όρους για ένα γενικό δυναμικό και με nonminimal σύζευξη του πεδίου Higgs με την βαρύτητα. Υπολογίζουμε την δράση της bounce για το Καθιερωμένο Πρότυπο, συμπεριλαμβάνοντας τις κύριες διορθώσεις ανάλογες του H^2 και $1/\bar{M}_{PL}^2$. Επίσης υπολογίζουμε την δράση του Hawking-Moss instanton και συζητάμε τον πιθανό ρόλο που μπορεί να έχει στη διάσπαση κενού. Τέλος, βρίσκουμε όρια για την κλίμακα του πληθωρισμού H υπολογίζοντας τον ρυθμό διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού μέσω της δράσης του Hawking-Moss instanton.

5.1 Εισαγωγή

Η διάσπαση του ψευδούς κενού πραγματοποιείται με την υλοποίηση περιοχών με αληθές κενό μέσω κβαντικών ή θερμικών διαταραχών. Ο ρυθμός διάσπασης αποσβένεται εκθετικά από την δράση της bounce. Τα βαρυτικά φαινόμενα ενισχύουν τον ρυθμό διάσπασης για ένα ψευδές κενό με θετική ενεργειακή πυκνότητα [2]. Η ερμηνεία είναι ότι η μετάβαση πέρα από το φράγμα δυναμικού στην κατεύθυνση του αληθές κενού διευκολύνεται λόγω της ενεργής Gibbons-Hawking θερμοκρασίας $T = \frac{H}{2\pi}$ του de Sitter χώρου [24]. Τα πεδία χωρίς μάζα διαχυμαίνονται με χαρακτηριστική κλίμακα που καθορίζεται από την παράμετρο Hubble H με αποτέλεσμα να μπορεί να προκληθεί διάσπαση. Ένα ακόμα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό είναι η ύπαρξη ενός σχηματισμού πεδίου με πεπερασμένη δράση που χαρακτηρίζεται ως Hawking-Moss instanton, με το πεδίο να παίρνει την τιμή στο μέγιστο του φράγματος δυναμικού [25]. Η δημιουργία ενός τέτοιου σχηματισμού μπορεί επίσης να οδηγήσει σε διάσπαση κενού μέσω της μετέπειτα “κύλισης” του πεδίου πέρα από το μέγιστο του φράγματος δυναμικού προς το αληθές κενό.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά σχετίζονται με την πιθανή αποσταθεροποίηση του ηλεκτρασθενούς κενού κατά την περίοδο του πληθωρισμού. Το πεδίο Higgs του Καθιερωμένου Προτύπου μπορεί να διαχυμανθεί προς τιμές μερικές τάξης μεγέθους κάτω από την κλίμακα Planck, για τις οποίες το δυναμικό του γίνεται βαθύτερο από το ηλεκτρασθενές κενό [37], [26], [27], [28], [29], [30], [31], [32]. Μια παρόμοια μετάβαση μπορεί να συμβεί μετά το τέλος του πληθωρισμού, κατά τη διάρκεια του reheating, ή σε οποιαδήποτε περίοδο κατά τη διάρκεια της οποίας οι διακυμάνσεις γίνονται ισχυρές. Non-minimal συζεύξεις του πεδίου Higgs με την βαρύτητα ή το inflaton μπορεί να έχουν ισχυρή επίδραση στο ρυθμό διάσπασης. Γενικά οι περιοχές με αληθές κενό διαστέλλονται και κατακλύζουν όλο τον εξωτερικό χώρο. Για φυσαλίδες οι οποίες δημιουργούνται κατά την περίοδο του πληθωρισμού αυτό το καταστροφικό σενάριο μπορεί να αποφευχθεί αν το H είναι αρκούντως μικρό, ώστε διακυμάνσεις πέρα από το φράγμα δυναμικού να είναι εξαιρετικά απίθανες [29].

Η εύρεση ενός ακριβούς ορίου για την κλίμακα του πληθωρισμού έχει βασιστεί κυρίως σε μια στοχαστική προσέγγιση μέσω της αριθμητικής λύσης της Fokker-Planck εξίσωσης η οποία περιγράφει την

πιθανότητα το πεδίο Higgs να έχει μια δεδομένη τιμή σε ένα δεδομένο χρόνο. Ωστόσο η εναλλακτική προσέγγιση που βασίζεται στον καθορισμό των ιδιοτήτων της bounce, η οποία οδηγεί την μετάβαση, παρέχει μια πιο διαισθητική κατανόηση για τον βασικό φυσικό μηχανισμό. Στην εργασία μας επεκτείνουμε τα αποτελέσματα από προηγούμενες αριθμητικές μελέτες υπολογίζοντας την επίδραση της βαρύτητας στην δράση της bounce. Βρίσκουμε μια αναλυτική έκφραση για τους κύριους βαρυτικούς όρους για ένα γενικό δυναμικό και με nonminimal σύζευξη του πεδίου Higgs με την βαρύτητα. Έπειτα επικεντρωνόμαστε σε ένα μοντέλο δυναμικού το οποίο μιμείται τα κύρια χαρακτηριστικά του δυναμικού Higgs στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Υπολογίζουμε αριθμητικά την bounce και τη δράση της και εξετάζουμε την εγκυρότητα της αναλυτικής έκφρασης. Επίσης υπολογίζουμε τη δράση του Hawking-Moss instanton και συζητάμε τον πιθανό ρόλο που μπορεί να έχει στην διάσπαση του κενού. Καταλήγουμε δίνοντας μια αναλυτική έκφραση για τη δράση της bounce για το Καθιερωμένο Πρότυπο που περιέχει τις κύριες διορθώσεις ανάλογες του H^2 και $1/M_{PL}^2$. Επίσης βρίσκουμε όρια για την κλίμακα του πληθωρισμού H υπολογίζοντας τον ρυθμό διάσπασης του ηλεκτρασθενούς κενού μέσω της δράσης του Hawking-Moss instanton.

5.2 Εξισώσεις κίνησης

Θεωρούμε την Ευκλείδεια δράση που έχει την μορφή

$$S = \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} \left(\frac{1}{2} (\nabla h)^2 + U(h) - \frac{1}{16\pi G} \mathcal{R} - \frac{1}{2} f(h) \mathcal{R} \right) \quad (5.1)$$

Παίρνοντας μεταβολές της δράσης ως προς $g_{\mu\nu}$ και h ώστε $\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = 0$ και $\frac{\delta S}{\delta h} = 0$ προκύπτουν οι εξισώσεις κίνησης [34]

$$\left(\frac{1}{8\pi G} + f(h) \right) \left(\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{R} \right) = \nabla_\mu h \nabla_\nu h - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} (\nabla h)^2 + U(h) \right) + \nabla_\mu \nabla_\nu f(h) - g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \nabla^\lambda f(h) \quad (5.2)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu h + \frac{1}{2} \frac{df(h)}{dh} \mathcal{R} = \frac{dU(h)}{dh} \quad (5.3)$$

όπου η μετρική $g_{\mu\nu}$ είναι θετικά ορισμένη, $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής Ricci, $\mathcal{R}$ το βαθμωτό Ricci και ∇_μ η συναλλοίωτη παράγωγος. Στην περίπτωση μας που έχουμε βαθμωτό πεδίο ισχύει $\nabla_\mu h = \partial_\mu h$. Παίρνοντας το ίχνος της σχέσης 5.2 χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4, \quad g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu} = \mathcal{R}, \quad g^{\mu\nu} \nabla_\mu h \nabla_\nu h = (\nabla h)^2, \quad g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu f(h) = \nabla_\mu \nabla^\mu f(h) \quad (5.4)$$

προκύπτει

$$\left(\frac{1}{8\pi G} + f(h) \right) \mathcal{R} = (\nabla h)^2 + 4U(h) + 3\nabla_\mu \nabla^\mu f(h) \quad (5.5)$$

Με την βοήθεια αυτής της σχέσης η δράση απλοποιείται και παίρνει την μορφή

$$S = - \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{g} \left[U(h) + \frac{3}{2} \nabla_\mu \left(\nabla^\mu f(h) \right) \right] \quad (5.6)$$

Ο δεύτερος όρος της παραπάνω έκφρασης γίνεται ένας επιφανειακός όρος, ο οποίος για το πρόβλημα μας μηδενίζεται. Ενδιαφερόμαστε για την πιθανή διάσπαση του ηλεκτρασθενούς κενού κατά την

διάρκεια μίας περιόδου κατά την οποία η ενέργεια κενού κυριαρχείται από μια κοσμολογική σταθερά. Υποθέτουμε ότι το δυναμικό έχει την μορφή $U(h) = V_0 + V(h) = 3H^2/\kappa + V(h)$, όπου $\kappa = 1/\bar{M}_{PL}^2 = 8\pi G$ με $\bar{M}_{PL} \approx 2.43 \times 10^{18}$ GeV. Η κύρια συνεισφορά V_0 δημιουργεί ένα υπόβαθρο de Sitter με καμπυλότητα $\mathcal{R} = 12H^2$. Το δυναμικό Higgs $V(h)$ οδηγεί σε παραμόρφωση αυτού του υποβάθρου, το οποίο το περιγράφουμε διαταρακτικά, χρησιμοποιώντας αναπτύγματα σε δυνάμεις του κ . Χρησιμοποιούμε μια $O(4)$ συμμετρική Ευκλείδεια μετρική για την bounce $h(r)$ και την γεωμετρία της

$$ds^2 = dr^2 + \rho(r)^2 d\Omega_3^2 \quad (5.7)$$

όπου $d\Omega_3$ είναι η μετρική μοναδιαίας τρισφαίρας. Σε αυτό το υπόβαθρο η δράση γίνεται

$$S = 2\pi^2 \int dr \rho^3 \left[\left(\frac{3H^2}{\kappa} + \frac{h'^2}{2} + V(h) \right) - \frac{\mathcal{R}}{2\kappa} - \frac{\mathcal{R}}{2} f(h) \right] \quad (5.8)$$

με

$$\mathcal{R} = -\frac{6}{\rho^3} \left(\rho^2 \rho'' + \rho \rho'^2 - \rho \right) \quad (5.9)$$

όπου ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς r . Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$h'' + 3\frac{\rho'}{\rho}h' = \frac{dV(h)}{dh} - \frac{1}{2} \frac{df(h)}{dh} \mathcal{R} \quad (5.10)$$

$$\rho'^2 = 1 + \frac{\kappa \rho^2}{3(1 + \kappa f(h))} \left(-\frac{3H^2}{\kappa} + \frac{1}{2} h'^2 - V(h) - 3\frac{\rho'}{\rho} \frac{df(h)}{dh} h' \right) \quad (5.11)$$

Σε κύρια τάξη του κ , έχουμε $\rho(r) = \sin(Hr)/H$, που συμπίπτει με την περιγραφή του Ευκλείδειου de Sitter χώρου ως τετρασφαίρα. Η παρουσία του πεδίου Higgs προκαλεί παραμόρφωση αυτής της γεωμετρίας, χωρίς να αλλάζει τις καθολικές ιδιότητες της. Για το υπόβαθρο της bounce, το πεδίο Higgs h κυμαίνεται μεταξύ μίας αρχικής μεγάλης τιμής h_i στο $r = 0$, και μιας τελικής τιμής $h_f \simeq 0$ κοντά στο ηλεκτρασθενές κενό, όπου το δυναμικό μηδενίζεται. Την τιμή h_f την προσεγγίζει μέσα σε μία πεπερασμένη ακτινική απόσταση $r_f \sim 1/H$. Η απαίτηση για ομαλή κλειστή γεωμετρία επιβάλλει τις συνθήκες $h'(0) = h'(r_f) = 0$ και $\rho'(0) = 1$ οι οποίες οδηγούν σε καλά ορισμένες λύσεις των εξισώσεων 5.8, 5.9. Ολόκληρος ο χώρος καλύπτεται από το διάστημα συντεταγμένων $[0, r_f]$, με $\rho(0) = \rho(r_f) = 0$. Λόγω του ότι η γεωμετρία είναι κλειστή γίνεται να έχουμε λύση η οποία έχει πεπερασμένη δράση, με το πεδίο να παίρνει μια σταθερή τιμή σε όλο το χώρο. Αυτή αντιστοιχεί στην τιμή του πεδίου για την οποία έχουμε μέγιστο στο φράγμα δυναμικού. Αυτή η λύση ονομάζεται Hawking-Moss instanton [25], και μπορεί να συνεισφέρει στο ρυθμό διάσπασης για μεγάλες τιμές του H . Θα εξετάσουμε τον ρόλο της στην διάσπαση κενού παρακάτω.

5.3 Προσεγγιστικές λύσεις

Ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση που το δυναμικό $V(h)$ υποστηρίζει μια λύση bounce με τυπικό μέγεθος $R \ll 1/H$. Το μέγεθος του R καθορίζεται από το $V(h)$, ενώ το H μπορεί να θεωρηθεί αρκετά μικρό ώστε να ισχύει η ανισότητα. Για μία τέτοια περίπτωση, η επίδραση του ημι-de Sitter υποβάθρου στην bounce μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά με μια ανάπτυξη σε δυνάμεις του κ . Λόγω του ότι έχουμε ορίσει το $V_0 = 3H^2/\kappa$, συνεπάγεται ότι $V_0 \gg V(h)$ όταν το $\kappa \rightarrow 0$ με το H σταθερό,

με αποτέλεσμα η ενέργεια κενού να κυριαρχείται από το V_0 και το βαρυτικό υπόβαθρο διαταράσσεται ελάχιστα από την bounce. Αναπτύσσουμε το πεδίο $h(r)$ και την ακτίνα καμπυλότητας $\rho(r)$ σε δυνάμεις του κ

$$h(r) = h_0(r) + \kappa h_1(r) + \mathcal{O}(\kappa^2) \quad (5.12)$$

$$\rho(r) = \frac{1}{H} \sin(Hr) + \kappa \rho_1(r) + \mathcal{O}(\kappa^2) \quad (5.13)$$

Βάζοντας τις παραπάνω σχέσεις στην 5.11 και κρατώντας όρους πρώτης τάξης ως προς κ , $\mathcal{O}(\kappa)$, προκύπτει

$$\left(\frac{\rho_1}{\cos(Hr)} \right)' = \frac{1}{2} \tan^2(Hr) \left(f(h_0) - \frac{1}{H \tan(Hr)} \frac{df(h_0)}{dh} h_0' + \frac{1}{6H^2} h_0'^2 - \frac{1}{3H^2} V(h_0) \right) \quad (5.14)$$

Η συνάρτηση $h_0(r)$ μηδενίζεται για $r \gg R$ που σημαίνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε $\tan(Hr) \simeq Hr$ στο δεξί μέλος της 5.14. Επίσης όρους που περιέχουν H^2 τους αγνοούμε διότι η συνεισφορά τους είναι μικρή σε σχέση με αυτούς που είναι ανεξάρτητοι από το H . Έτσι προκύπτει

$$\rho_1(r) \simeq \cos(Hr) \int_0^r dr \frac{r^2}{6} \left(\frac{1}{2} h_0'^2 - V(h_0) - \frac{3}{r} \frac{df(h_0)}{dh} h_0' \right) \quad (5.15)$$

Με ανάλογο τρόπο βάζοντας τις 5.12, 5.13 στην 5.10 προκύπτει ότι ο κύριος σχηματισμός του πεδίου Higgs $h_0(r)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$h'' + \frac{3}{r} h' = \frac{dV(h)}{dh} \quad (5.16)$$

Η παραπάνω ανάλυση μπορεί να επαναληφθεί για την Ευκλείδεια δράση, με την εισαγωγή των σχέσεων 5.12, 5.13 στην 5.8. Η κύρια συνεισφορά, $\mathcal{O}(\kappa^{-1})$, αναπαράγει την δράση που σχετίζεται με τον χώρο de Sitter : $S_{ds} = -8\pi^2/(\kappa H^2)$. Η Ευκλείδεια δράση της λύσης bounce ,τάξης $\mathcal{O}(\kappa^0)$, περιέχει έναν όρο $2H \sin(Hr) \cos(Hr) \rho_1' + \sin^2(Hr) \rho_1'' = (\sin^2(Hr) \rho_1')'$ ο οποίος δεν συνεισφέρει διότι μηδενίζεται στα σύνορα λόγω συνοριακών συνθηκών. Οι όροι που απομένουν στη δράση καθορίζονται μόνο από το $h_0(r)$. Η δράση της bounce δίνεται από

$$S_0 = \frac{2\pi^2}{H^3} \int_0^\infty dr \sin^3(Hr) \left(\frac{1}{2} h_0'^2 + V(h_0) - 6H^2 f(h_0) \right) \quad (5.17)$$

σε τάξη $\mathcal{O}(\kappa^0)$. Δεν αναπτύξαμε το $\sin(Hr)$ γύρω από το $r = 0$, λόγω του ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει αργά. Διορθώσεις τάξεις $\mathcal{O}(\kappa^1)$ έχουν υπολογιστεί στα [36], [29], για επίπεδο υπόβαθρο. Περιμένουμε να δίνουν την κύρια διόρθωση για αρκετά μικρό H .

Θα εφαρμόσουμε τις παραπάνω γενικές εκφράσεις για μοντέλα που μας ενδιαφέρουν. Για την σταθερότητα του ηλεκτρασθενούς κενού, ενδιαφερόμαστε για δυναμικά που έχουν την μορφή $V(h) = \lambda h^4/4$ με $\lambda < 0$. Η κύρια συνεισφορά της bounce εξαρτάται από μια αυθαίρετη κλίμακα R

$$h_0(r) = \sqrt{\frac{2}{|\lambda|}} \frac{2R}{r^2 + R^2} \quad (5.18)$$

Η αντίστοιχη δράση είναι $S_0 = 8\pi^2/(3|\lambda|)$ [36]. Η πιο απλή υπόθεση για την nonminimal σύζευξη

του πεδίου Higgs με την βαρύτητα είναι μέσω μιας συνάρτησης της μορφής $f(h) = \xi h^2$. Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος 5.15 μας δίνει

$$\rho_1(r) = \frac{1 + 6\xi}{3|\lambda|R} \left(\frac{rR(r^2 - R^2)}{(r^2 + R^2)^2} + \arctan(r/R) \right) \cos(Hr) \quad (5.19)$$

Τέλος η δράση της bounce μπορεί να υπολογιστεί μέσω της σχέσης 5.17, δίνοντας το αποτέλεσμα [28]

$$S_0 = \frac{8\pi^2}{3|\lambda|} (1 + 6(1 + 6\xi)H^2 R^2 \log(HR)) \quad (5.20)$$

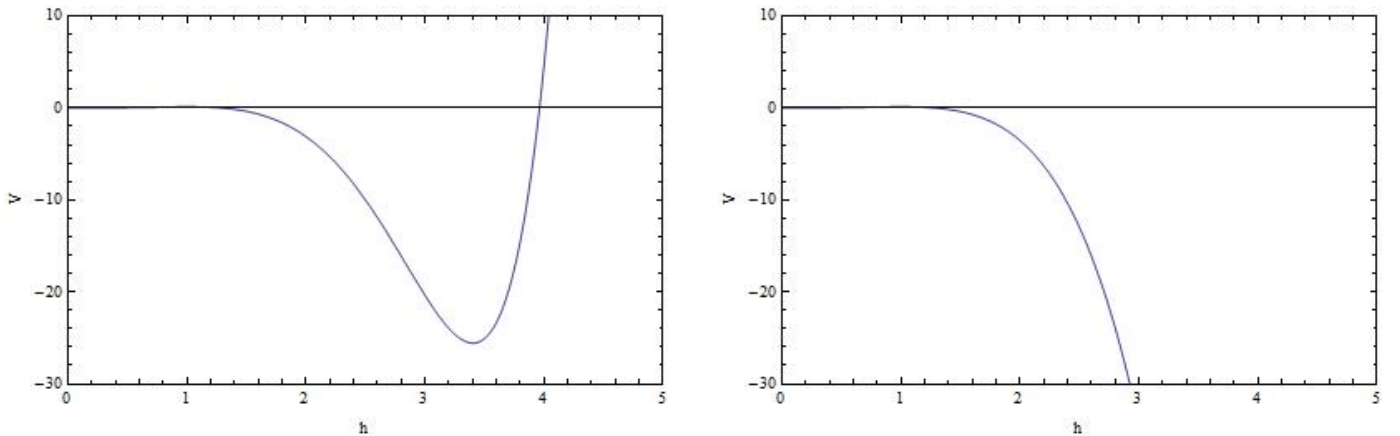
όπου κρατήσαμε την κύρια λογαριθμική διόρθωση, που επάγεται από το υπόβαθρο de Sitter .

5.4 Αριθμητική ανάλυση ενός μοντέλου δυναμικού

Για να κατανοήσουμε την επιρροή του de Sitter υποβάθρου στη μορφή της bounce πέρα από την θεωρία διαταραχών πραγματοποιούμε μια αριθμητική μελέτη του προβλήματος για ένα μοντέλο δυναμικού το οποίο μιμείται τις βασικές ιδιότητες του δυναμικού στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Δίνεται από [29]

$$V(h) \approx -b \ln \left(\frac{h^2}{h_{max}^2 \sqrt{\epsilon}} \right) \frac{h^4}{4} + c \left(-\frac{h^6}{6} + \frac{h^8}{8} \right) \quad (5.21)$$

Ο πρώτος όρος, με $b \simeq 0.16/(4\pi)^2$, παρέχει μία καλή προσέγγιση του δυναμικού Higgs κοντά στο μέγιστο με τιμή $h_{max} \sim 5 \times 10^{10}$ GeV. Ωστόσο η επέκταση του για μεγαλύτερες τιμές του πεδίου Higgs αυτό απειρίζεται ώστε να αποτυγχάνει στο να μας δώσει λύση bounce. Για αυτό τον λόγο προσθέσαμε τον δεύτερο όρο στο δυναμικό, ο οποίος μας παρέχει μια δομή με παρόμοιες ιδιότητες με το δυναμικό του Higgs , ώστε να υπάρχει λύση bounce, σχήμα 22. Καθώς ενδιαφερόμαστε μόνο για τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του δυναμικού επιλέγουμε τιμές για τις παραμέτρους με τέτοιο τρόπο ώστε να κάνουμε την αριθμητική ανάλυση εφικτή. Κανονικοποιούμε όλες τις παραμέτρους σε μονάδες του h_{max} και θέτουμε $b = 1$, $c = 0.02$, $\kappa = 0.01$.



Σχήμα 18: Αριστερά: Το δυναμικό 5.21 για το οποίο πραγματοποιήσαμε την αριθμητική ανάλυση με τιμές των παραμέτρων $b = 1$, $c = 0.02$, $\kappa = 0.01$ Δεξιά: Μορφή του πρώτου όρου του δυναμικού 5.21

Υποθέτουμε μία nonminimal σύζευξη της μορφής $f(h) = \xi h^2$ και εξετάζουμε τις ιδιότητες της bounce ως συνάρτηση των H και ξ . Θέλουμε να λύσουμε αριθμητικά τις εξισώσεις κίνησης για το h και το ρ . Η εξίσωση κίνησης για το h είναι

$$h'' + 3\frac{\rho'}{\rho}h' = \frac{dU(h)}{dh} - \xi h\mathcal{R} \quad (5.22)$$

με $U(h) = V_0 + V(h)$. Θα την φέρουμε στη μορφή για την οποία πραγματοποιήσαμε την αριθμητική ανάλυση. Οι εξισώσεις Einstein μας δίνουν τις σχέσεις για τα ρ'^2 , ρ''

$$\rho'' = \frac{\kappa\rho}{3(1 + \kappa\xi h^2)} \left(-h'^2 - U(h) - 3\xi \left(h'^2 + h'' + h'h\frac{\rho'}{\rho} \right) \right) \quad (5.23)$$

$$\rho'^2 = 1 + \frac{\kappa\rho^2}{3(1 + \kappa f(h))} \left(\frac{1}{2}h'^2 - U(h) - 6\xi h h' \frac{\rho'}{\rho} \right) \quad (5.24)$$

με την αντικατάσταση τους στην 5.9 και με την βοήθεια της εξίσωσης κίνησης για το h , 5.22, προκύπτει η παρακάτω έκφραση για το $\mathcal{R}$ συναρτήσει του πεδίου h

$$\mathcal{R} = \frac{\kappa}{(1 + \kappa\xi h^2(1 + 6\xi))} \left(h'^2(6\xi + 1) + 4V + \frac{dU}{dh}6\xi h \right) \quad (5.25)$$

Με αντικατάσταση της 5.25 στην 5.22 παίρνουμε την εξίσωση κίνησης για το πεδίο

$$h'' + 3\frac{\rho'}{\rho}h' = \frac{dV(h)}{dh} - \frac{\xi\kappa h}{(1 + \kappa\xi h^2(1 + 6\xi))} \left(h'^2(6\xi + 1) + 4V + \frac{dU}{dh}6\xi h \right) \quad (5.26)$$

Επίσης λύνοντας την σχέση 5.9 ως προς ρ'' και αντικαθιστώντας το $\mathcal{R}$ από τη σχέση 5.25 βρίσκουμε μια έκφραση για το ρ''

$$\rho'' = \frac{1 - \rho'}{\rho} - \frac{\rho\mathcal{R}}{-6} \Rightarrow \rho'' = \frac{1 - \rho'}{\rho} - \frac{\rho\kappa}{6(1 + \kappa\xi h^2(1 + 6\xi))} \left(h'^2(6\xi + 1) + 4V + \frac{dU}{dh}6\xi h \right) \quad (5.27)$$

Η δράση 5.8 γράφεται

$$\begin{aligned} S &= 2\pi^2 \int dr \rho^3 \left(\frac{h'^2}{2} + U(h) - \frac{\mathcal{R}}{2\kappa} - \frac{\mathcal{R}}{2}\xi h^2 \right) \Rightarrow \\ S &= 2\pi^2 \int dr \rho^3 \left(\frac{h'^2}{2} + U(h) - \frac{\kappa}{2\kappa(1 + \kappa\xi h^2(1 + 6\xi))} \left(h'^2(6\xi + 1) + 4V + \frac{dU}{dh}6\xi h \right) \right. \\ &\quad \left. - \xi h^2 \frac{\kappa}{2(1 + \kappa\xi h^2(1 + 6\xi))} \left(h'^2(6\xi + 1) + 4V + \frac{dU}{dh}6\xi h \right) \right) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Επιπλέον μπορούμε να απλοποιήσουμε την έκφραση για την δράση 5.8 για να βρούμε μια έκφραση

της δράσης για ένα σταθερό σχηματισμό πεδίου

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi^2 \int dr \rho^3 \left[\left(\frac{h'^2}{2} + U(h) \right) - \frac{\mathcal{R}}{2\kappa} (1 + \kappa \xi h^2) \right] \\
&= 2\pi^2 \int dr \left[\rho^3 \left(\frac{h'^2}{2} + V(h) \right) + \frac{3}{\kappa} (\rho'' \rho^2 + \rho'^2 \rho - \rho) (1 + \kappa \xi h^2) \right] \\
&= 2\pi^2 \int dr \left[\rho^3 \left(\frac{h'^2}{2} + U(h) \right) - \frac{3}{\kappa} (1 + \kappa \xi h^2) \rho (\rho'^2 + 1) - 6\xi h' h \rho' \rho^2 \right] + \frac{6\pi^2}{\kappa} (1 + \kappa \xi h^2) \rho^2 \rho' \Big|_0^{r_f}
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Όπου πραγματοποιήσαμε παραγοντική ολοκλήρωση για να απαλείψουμε τον όρο ρ'' . Επίσης ο επιφανειακός όρος στην περίπτωση μας μηδενίζεται λόγω των συνοριακών συνθηκών που αναφέραμε στο τέλος της παραγράφου 6.2. Εισάγοντας την σχέση 5.24 μπορούμε να απλοποιήσουμε περαιτέρω την παραπάνω έκφραση για την δράση

$$S = 4\pi^2 \int dr \left[\rho^3 U(h) - \frac{3\rho}{\kappa} (1 + \xi \kappa h^2) \right] \tag{5.30}$$

Για να υπολογίσουμε τη δράση του υποβάθρου θεωρούμε ένα σταθερό σχηματισμό πεδίου h_c , με αποτέλεσμα η εξίσωση 5.24 να απλοποιείται

$$\frac{d\rho}{dr} = \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho^2 U(h_c)}{3(1 + \kappa \xi h_c^2)}} \tag{5.31}$$

και η δράση με την αλλαγή μεταβλητών γίνεται

$$S[h_c] = -\frac{24\pi^2 (1 - \kappa \xi h_c^2)^2}{\kappa^2 U(h_c)} \tag{5.32}$$

Στο μοντέλο του δυναμικού μας η τιμή του h_f είναι πάντα ίση με το μηδέν επομένως η δράση του ψευδές κενού είναι

$$S[h_f] = -\frac{24\pi^2}{\kappa^2 V_0} = -\frac{8\pi^2}{\kappa H^2} \tag{5.33}$$

Για τον υπολογισμό του Hawking-Moss instanton έχουμε

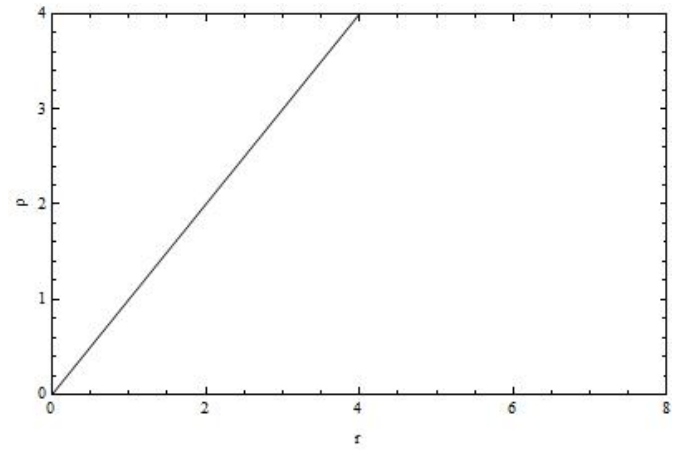
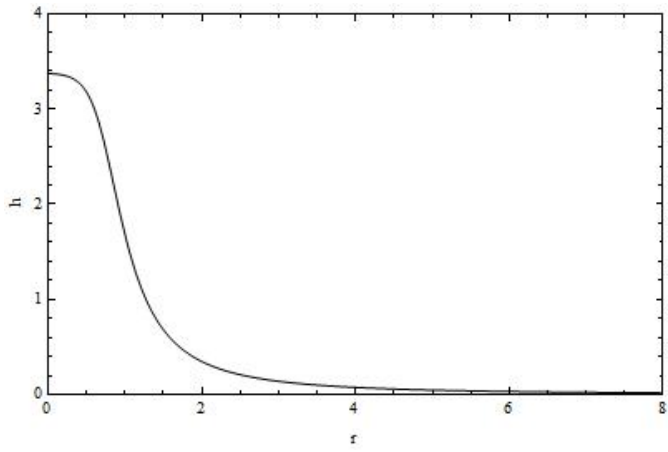
$$S_{HM} = S[h_{max}] - S[h_f] = -\frac{24\pi^2 (1 - \kappa \xi h_{max}^2)^2}{\kappa^2 U(h_{max})} + \frac{24\pi^2}{\kappa V_0} \tag{5.34}$$

Στο μοντέλο μας η τιμή του h_{max} είναι στην τιμή 1 άρα

$$S_{HM} = S[h_{max}] - S[h_f] = -\frac{24\pi^2 (1 - \kappa \xi)^2}{\kappa^2 (V_0 + V(1))} + \frac{24\pi^2}{\kappa V_0} \tag{5.35}$$

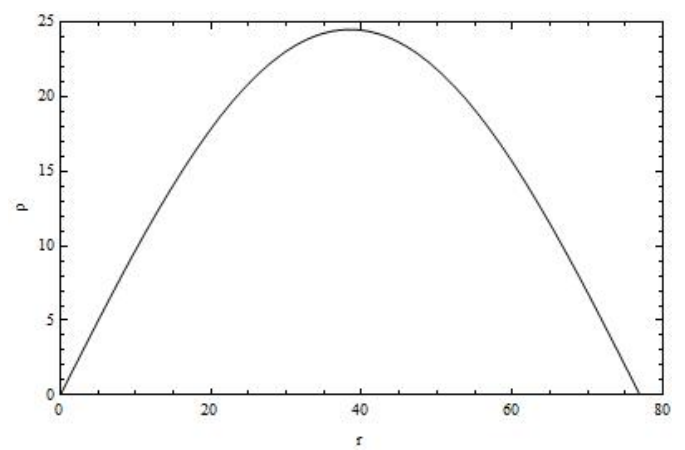
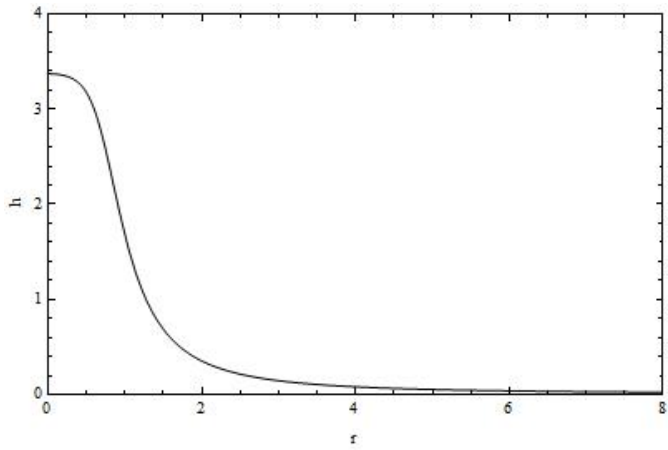
Λύνουμε αρχικά τις 5.27, 5.28 αριθμητικά για διάφορες τιμές του V_0 που αντιστοιχεί σε διαφορετικές τιμές του H με $\xi = 0$ (minimal coupling). Έπειτα τις λύνουμε για την περίπτωση που το ξ παίρνει θετικές και αρνητικές τιμές (nonminimal coupling). Σε κάθε περίπτωση υπολογίζουμε την δράση, S , 5.28 και την συγκρίνουμε με την έκφραση S_0 , σχέση 5.17, που βρήκαμε διαταραχτικά στην παράγραφο 6.3. Επιπλέον σε κάθε περίπτωση υπολογίζουμε τη δράση Hawking-Moss, S_{HM} , που δίνεται από την 5.35. Παραθέτουμε παρακάτω τα διαγράμματα των h και ρ για ορισμένες τιμές των μεταβλητών μας καθώς και τις τιμές των αντίστοιχων δράσεων για την κάθε περίπτωση.

- Απουσία βαρύτητας $\xi = 0$, $\kappa = 0$, $H = 0$



$$S = 41.4$$

- Παρουσία βαρύτητας με minimal σύζευξη
 - $\xi = 0$, $\kappa = 0.01$, $V_0 = 0.5$
 $H = 0.0408$

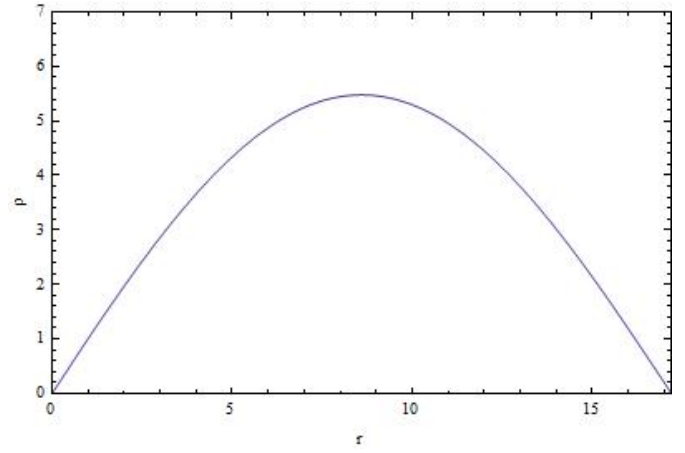
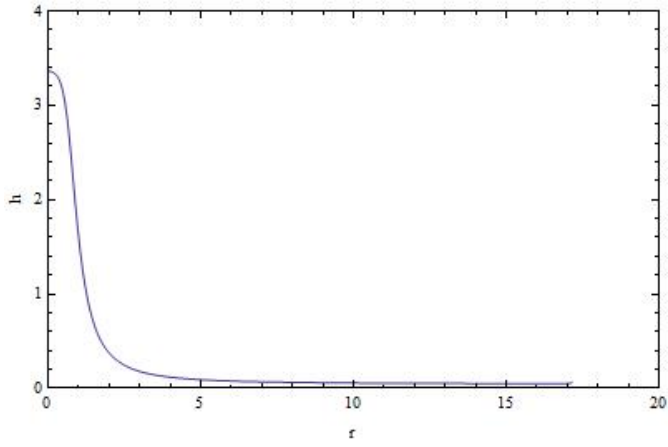


$$S = 41.4$$

$$S_0 = 41.4$$

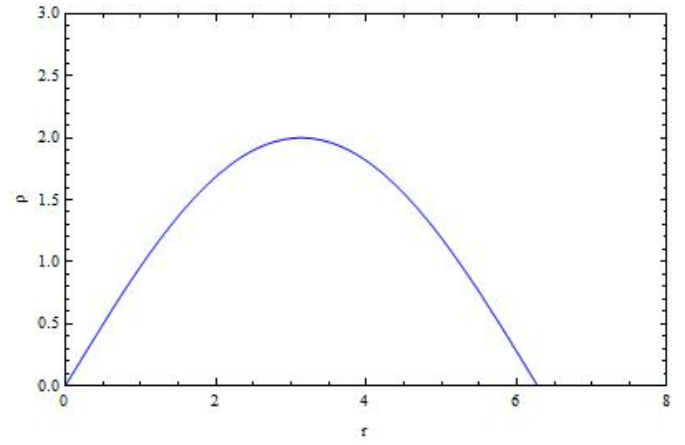
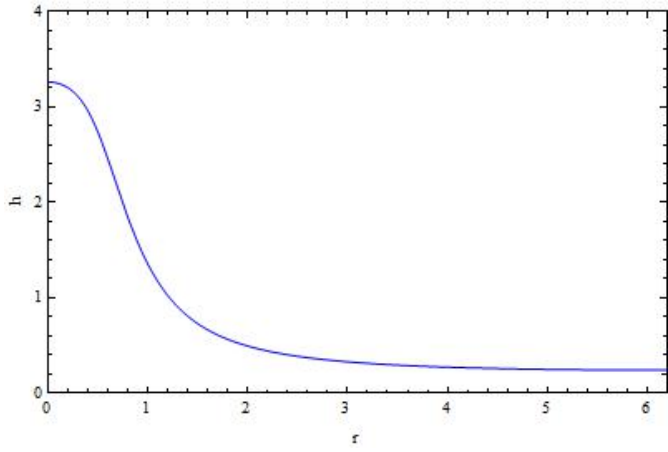
$$S_{HM} = 942422$$

– $\xi = 0$, $\kappa = 0.01$, $V_0 = 10$
 $H = 0.183$



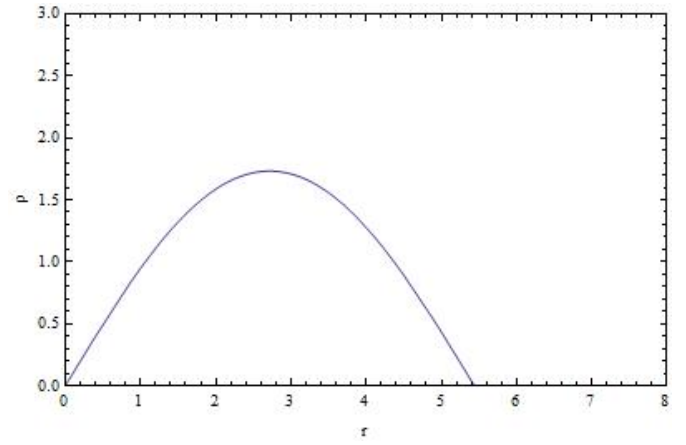
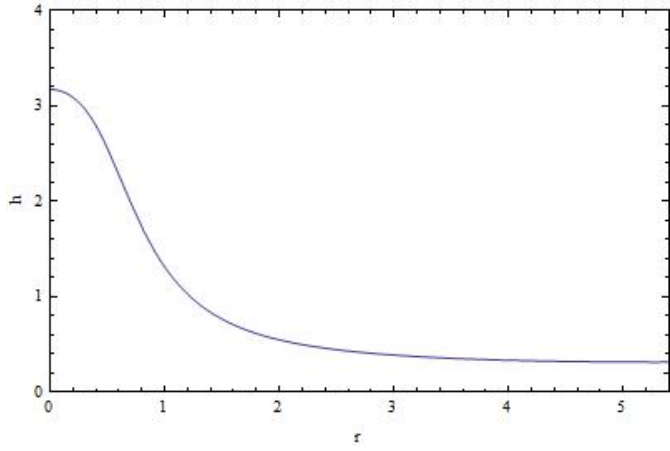
$S = 37.6$
 $S_0 = 38.1$
 $S_{HM} = 2910$

– $\xi = 0$, $\kappa = 0.01$, $V_0 = 75$
 $H = 0.5$

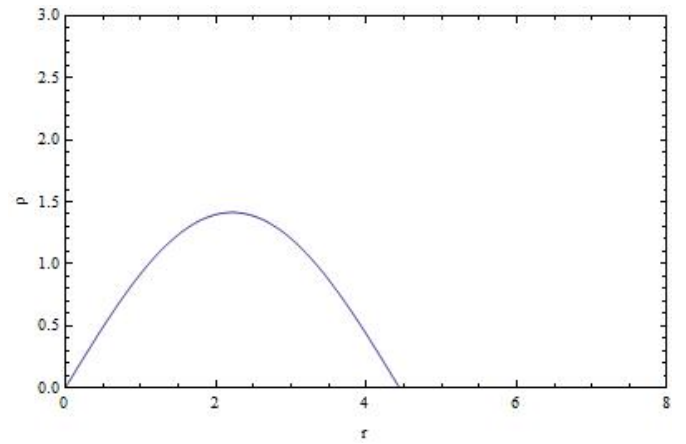
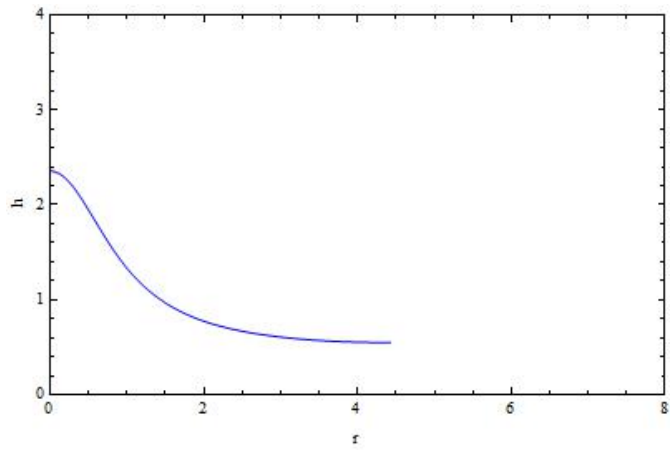


$S = 22.5$
 $S_0 = 24.6$
 $S_{HM} = 52.2$

– $\xi = 0$, $\kappa = 0.01$, $V_0 = 100$
 $H = 0.577$



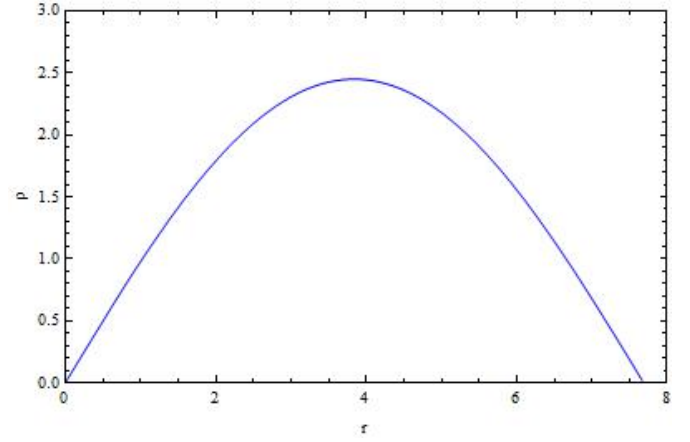
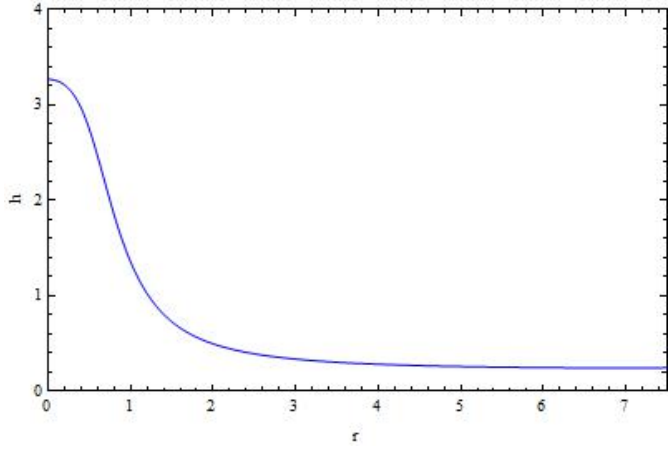
$S = 18.9$
 $S_0 = 20.9$
 $S_{HM} = 29.4$
– $\xi = 0$, $\kappa = 0.01$, $V_0 = 150$
 $H = 0.707$



$S = 13.1$
 $S_0 = 14.7$
 $S_{HM} = 13.1$

- Παρουσία βαρύτητας με nonminimal σύζευξη , $\xi > 0$, και $V_0 = 50$

– $\xi = 0.05$, $\kappa = 0.01$, $H = 0.408$

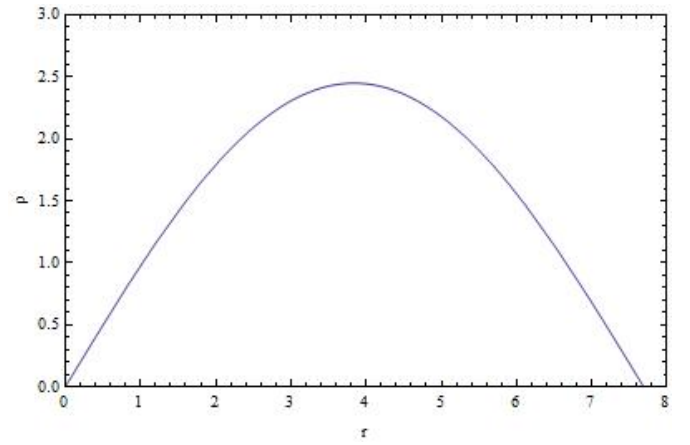
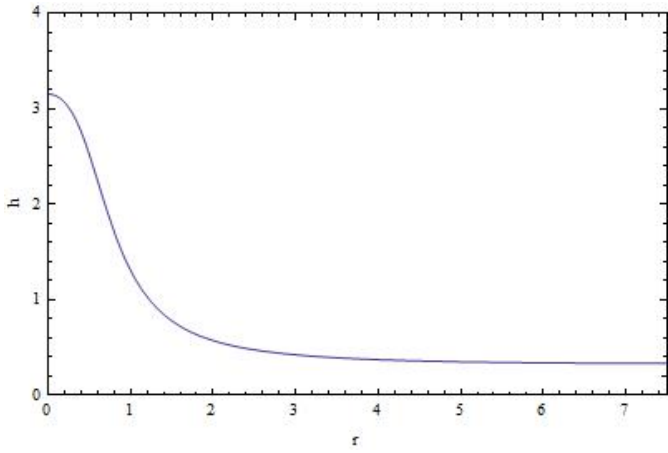


$$S = 21.3$$

$$S_0 = 25.6$$

$$S_{HM} = 70.1$$

– $\xi = 0.1$, $\kappa = 0.01$, $H = 0.408$

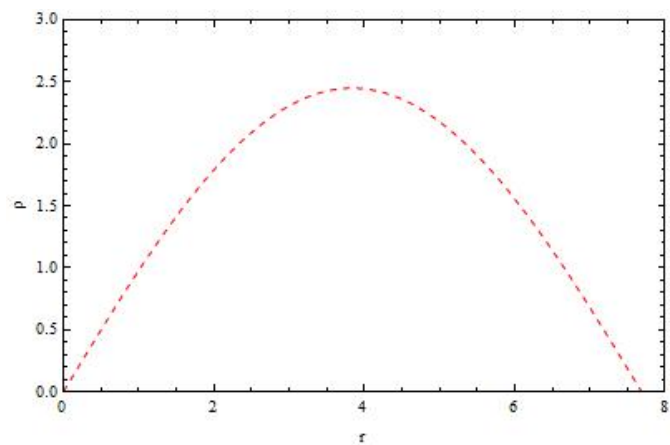
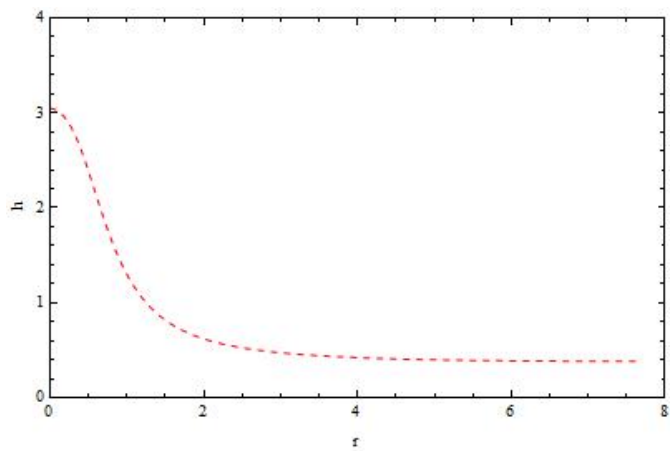


$$S = 13.5$$

$$S_0 = 22.3$$

$$S_{HM} = 22.8$$

– $\xi = 0.12$, $\kappa = 0.01$, $H = 0.408$

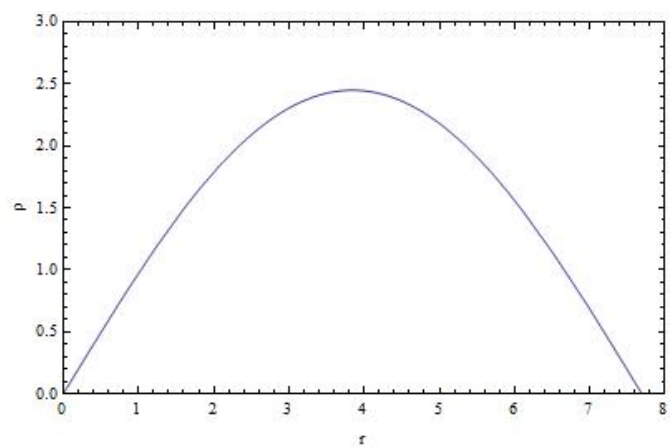
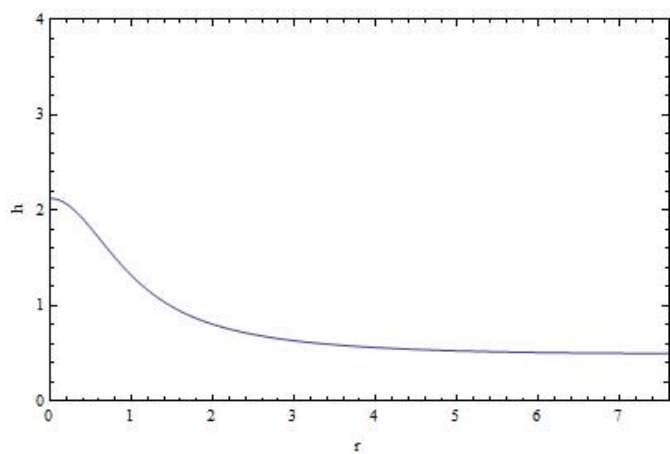


$$S = 9.48$$

$$S_0 = 21$$

$$S_{HM} = 3.87$$

– $\xi = 0.148$, $\kappa = 0.01$, $H = 0.408$



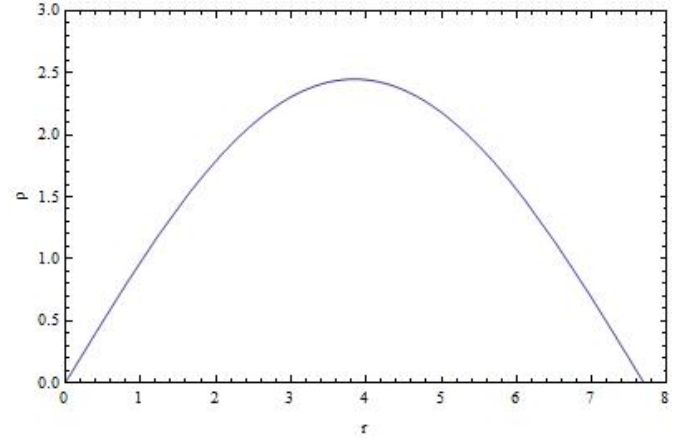
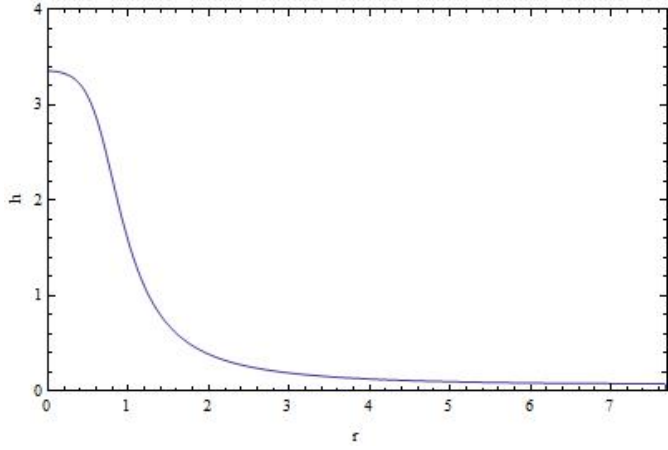
$$S = 1.91$$

$$S_0 = 19$$

$$S_{HM} = -22.6$$

- Παρουσία βαρύτητας με nonminimal σύζευξη , $\xi < 0$, και $V_0 = 50$

– $\xi = -0.1$, $\kappa = 0.01$, $H = 0.408$

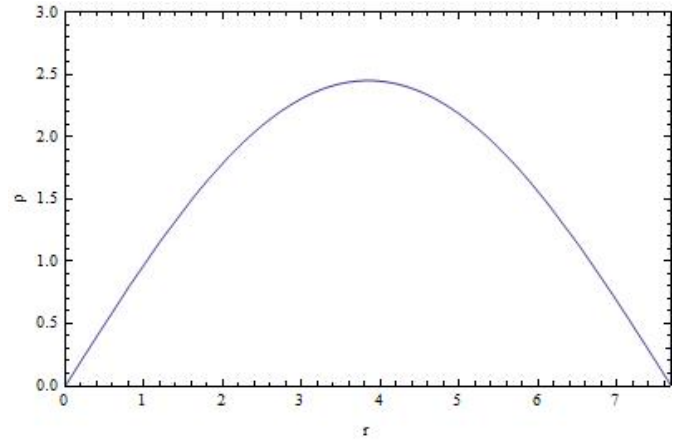
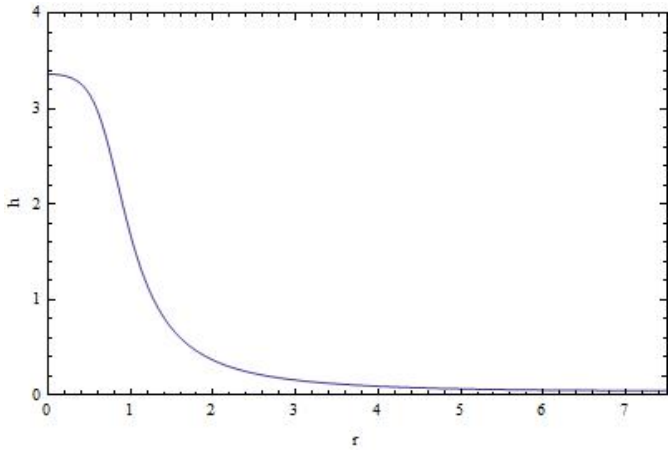


$$S = 35.3$$

$$S_0 = 35.7$$

$$S_{HM} = 211$$

– $\xi = -0.1666$, $\kappa = 0.01$, $H = 0.408$

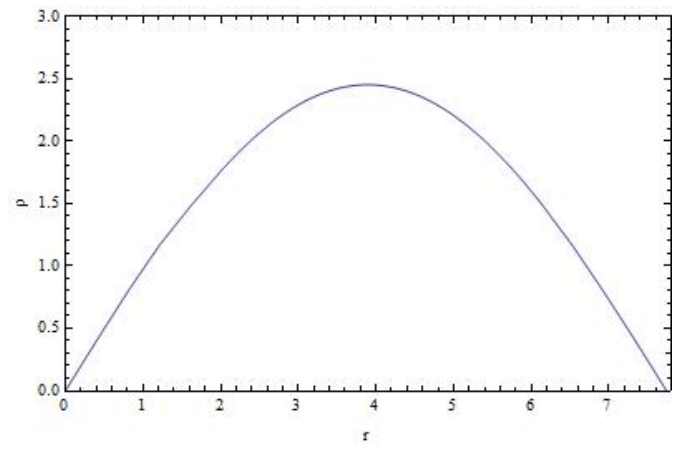
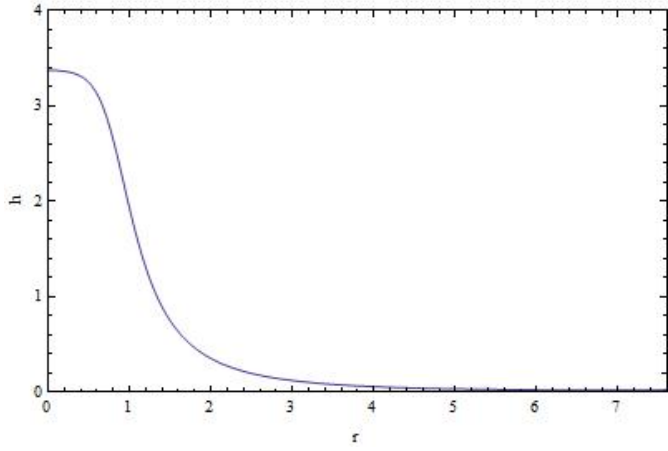


$$S = 40.1$$

$$S_0 = 40.1$$

$$S_{HM} = 275$$

– $\xi = -0.3$, $\kappa = 0.01$, $H = 0.408$

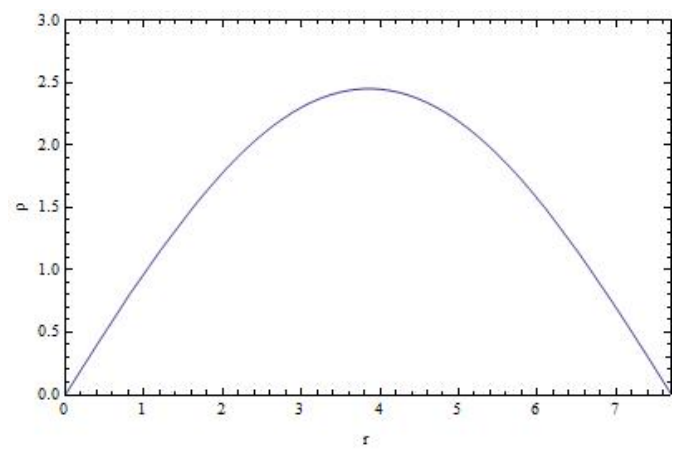
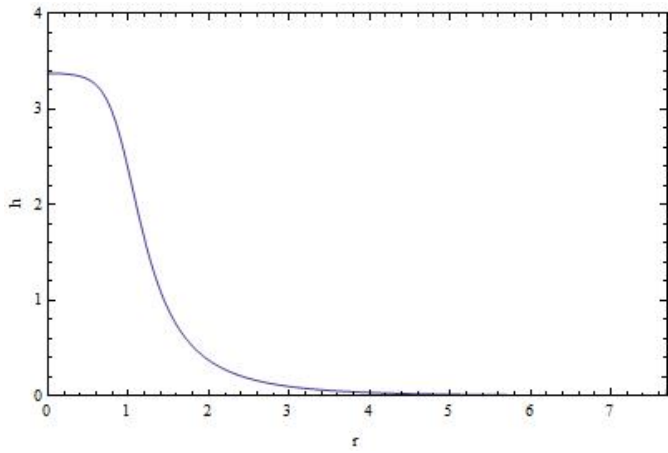


$$S = 50$$

$$S_0 = 49.1$$

$$S_{HM} = 400$$

– $\xi = -0.5$, $\kappa = 0.01$, $H = 0.408$

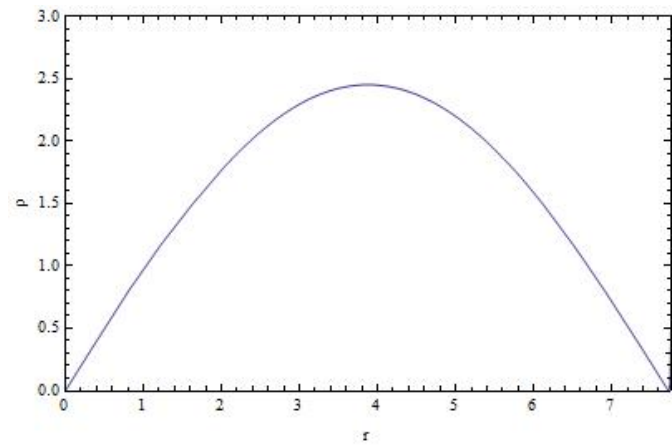
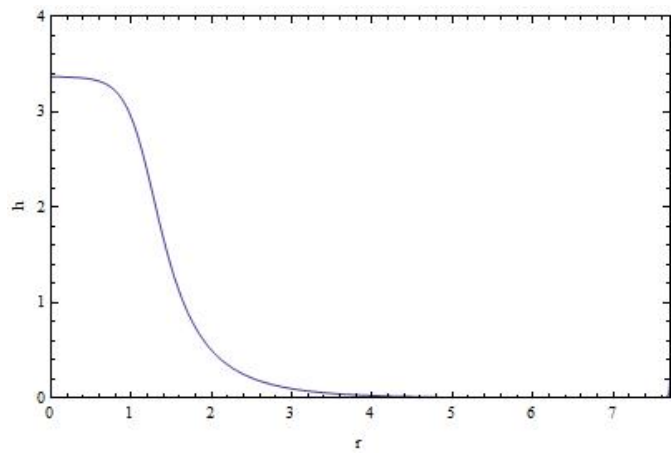


$$S = 67$$

$$S_0 = 62.5$$

$$S_{HM} = 588$$

– $\xi = -0.8$, $\kappa = 0.01$, $H = 0.408$

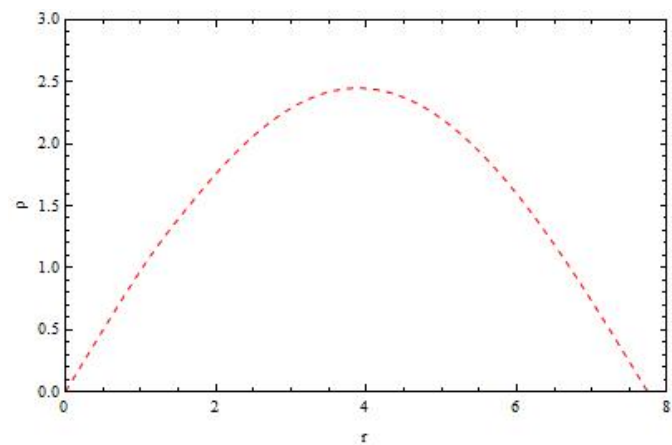
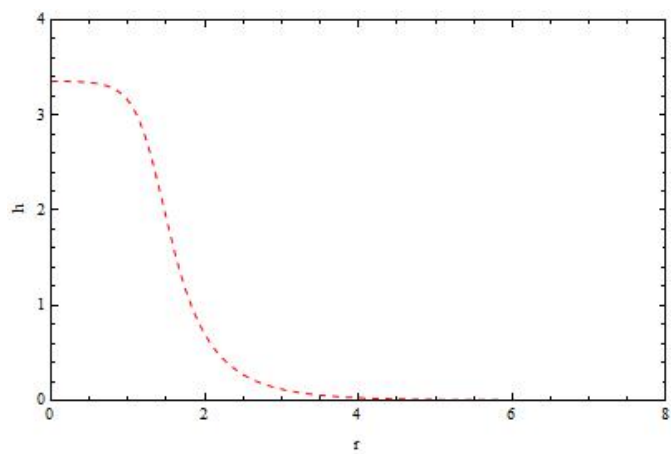


$$S = 110$$

$$S_0 = 82.7$$

$$S_{HM} = 870$$

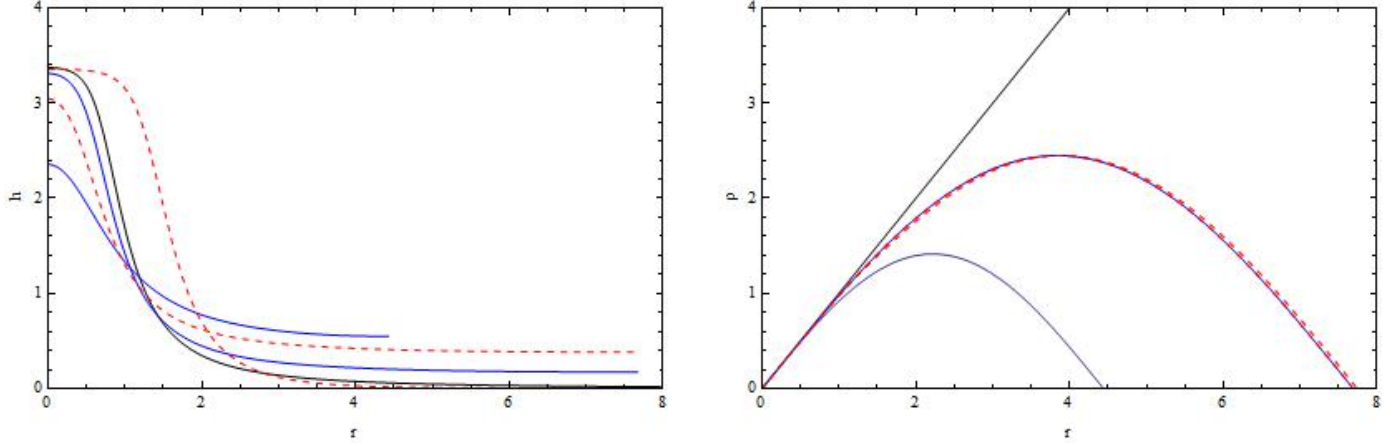
– $\xi = -1$, $\kappa = 0.01$, $H = 0.408$



$$S = 156$$

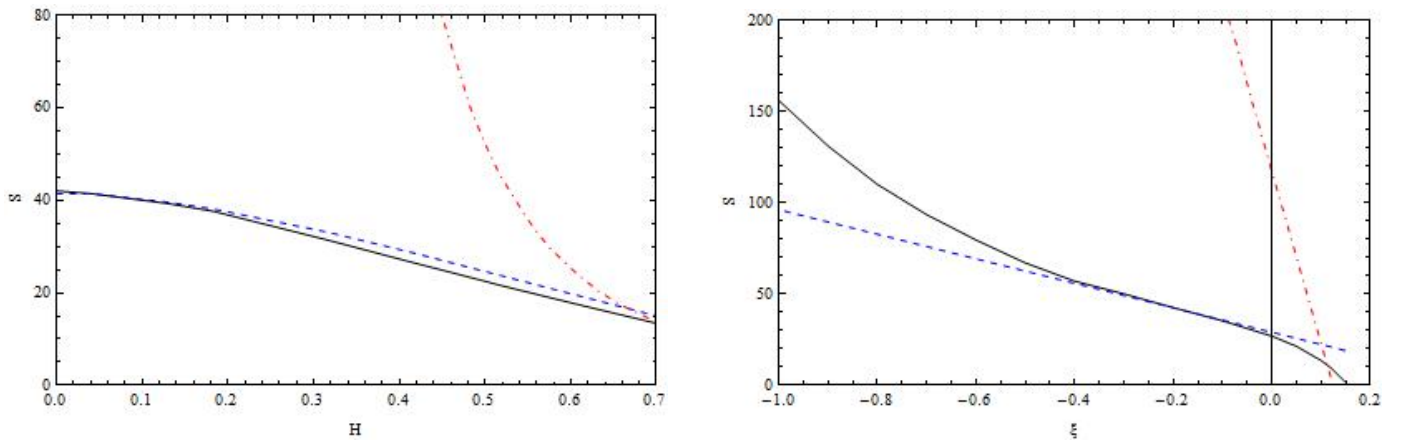
$$S_0 = 96.1$$

$$S_{HM} = 1060$$



Σχήμα 19: Το πεδίο Higgs $h(r)$ (δεξιά) και η ακτίνα καμπυλότητας $\rho(r)$ (αριστερά) για διαφορετικές τιμές του H (συνεχείς καμπύλες) και ξ (διακεκομμένες καμπύλες), σε μονάδες του h_{max}

Στο σχήμα 23 παραθέτουμε ένα συνολικό διάγραμμα των συναρτήσεων $h(r)$ και $\rho(r)$ για διαφορετικές τιμές του H και του ξ . Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί σε $\xi = 0$ και $H = 0.0408$ και 0.707 από πάνω προς τα κάτω. Παρατηρούμε ότι καθώς το H αυξάνεται, ο χώρος γίνεται όλο και πιο κλειστός (το διάστημα του r μικραίνει), με αυξημένη καμπυλότητα. Το πεδίο κυμαίνεται μεταξύ δύο τιμών. Η τιμή που προσεγγίζει για μεγάλες τιμές του r είναι μηδέν για $H = 0$, αλλά αυξάνεται καθώς αυξάνεται το H , με την συνάρτηση $h(r)$ να γίνεται πιο επίπεδη. Η λύση Hawking-Moss instanton αντιστοιχεί στη λύση $h(r) = 1$ των εξισώσεων κίνησης. Φαίνεται ότι η λύση bounce και η λύση Hawking-Moss instanton γίνονται παραπλήσιες καθώς αυξάνεται το H . Ωστόσο παραμένουν διαφορετικές διότι η bounce πάυει να υπάρχει για $H \gtrsim 0.7$. Η συνάρτηση $\rho(r)$ διατηρεί μια μορφή κοντά στην $\sin(Hr)/H$ με αποκλίσεις που έχουν εξάρτηση από το r συμβατή με την σχέση 5.19. Μη μηδενικές τιμές του ξ έχουν ελάχιστη επίπτωση στην $\rho(r)$ αλλά την $h(r)$ την επηρεάζουν σημαντικά. Η εξωτερική διακεκομμένη καμπύλη στο αριστερό διάγραμμα αντιστοιχεί σε $H = 0.408$ και $\xi = 0.12$ και η εσωτερική σε $H = 0.408$ και $\xi = -1$.



Σχήμα 20: Η δράση σαν συνάρτηση του H (αριστερά) και του ξ (δεξιά), σε μονάδες του h_{max}

Στο σχήμα 24 απεικονίζονται οι τιμές των δράσεων S , S_0 , και S_{HM} σαν συνάρτηση του H και του ξ . Στο αριστερό διάγραμμα απεικονίζεται η δράση σαν συνάρτηση του H για $\xi = 0$. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στην ακριβή λύση S , ενώ η διακεκομμένη στην προσεγγιστική λύση S_0 , σχέση 5.17, που ισχύει για $\mathcal{O}(\kappa^0)$. Παρατηρούμε καλή συμφωνία για όλες τις τιμές του H . Η διακεκομμένη με τελείες καμπύλη αντιστοιχεί στην δράση του Hawking-Moss instanton η οποία είναι πολύ μεγαλύτερη από τη δράση της bounce για μικρές τιμές του H . Οι δύο δράσεις γίνονται συγκρίσιμες για $H \simeq 0.7$. Αναμένεται ότι, όταν η παράμετρος Hubble H γίνεται συγκρίσιμη με την κλίμακα μάζας του δυναμικού, οι διακυμάνσεις γίνονται πιο ισχυρές και ο ρυθμός διάσπασης πρέπει να αυξάνεται. Αυτό αντικατοπτρίζεται στην μείωση της τιμής της δράσης bounce. Επίσης το γεγονός ότι η bounce και το Hawking-Moss instanton έχουν παρόμοιες δράσεις υποδηλώνει ότι η μετάβαση πέρα από το φράγμα δυναμικού δεν κυριαρχείται από μόνο ένα σαγματικό σημείο. Ο τύπος για τον ρυθμό διάσπασης δίνεται από τη σχέση $\Gamma/V = A \exp(-S)$ όπου A ένας παράγοντας που περιέχει ορίζουσες. Η ορίζουσα στον ρυθμό διάσπασης αναμένεται να δίνει της ίδιας τάξης συνεισφορά με τον εκθετικό όρο. Ο υπολογισμός του συνολικού ρυθμού διάσπασης μόνο από την εκθετική συνεισφορά δεν είναι ακριβής και μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο για ποιοτικά αποτελέσματα. Στο δεξί διάγραμμα του σχήματος 24 απεικονίζεται η δράση σαν συνάρτηση του ξ για $H = 0.408$. Η συνεχής καμπύλη αντιστοιχεί στη ακριβή λύση, η διακεκομμένη στην προσεγγιστική λύση 5.17, και η διακεκομμένη με τις τελείες στη δράση Hawking-Moss. Παρατηρούμε καλή συμφωνία μεταξύ της ακριβούς λύσης και της προσεγγιστικής έκφρασης για $\xi + 1/6 \simeq 0$. Αποκλίσεις από την γραμμική εξάρτηση, της δράσης από το ξ , παρατηρούνται για μεγαλύτερες τιμές του $|\xi + 1/6|$, με μια εξάρτηση της μορφής $\sim (\xi + 1/6)^3$. Ωστόσο δεν καταφέραμε να επαληθεύσουμε αυτή την συμπεριφορά αναλυτικά. Πολύ αρνητικές τιμές του ξ έχουν σαν αποτέλεσμα την γρήγορη αύξηση της δράσης της bounce, υποδεικνύοντας μείωση του ρυθμού διάσπασης. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί λόγω της αύξησης της ενεργού μάζας του Higgs $\sim |\xi| h^2$, η οποία μειώνει της διακυμάνσεις ισχυρά. Για $\xi \simeq 0.15$ η δράση της bounce τείνει στο μηδέν, ενώ είναι συγκρίσιμη με αυτή του Hawking-Moss instanton. Αυτό είναι μια φανερή ένδειξη της αύξησης των διακυμάνσεων και της εμφάνισης της αστάθειας, με το ασταθές κενό να διασπάται πολύ γρήγορα.

5.5 Εφαρμογή στο Καθιερωμένο Πρότυπο

Αν και η ανάλυση μας βασίστηκε σε ένα απλοϊκό μοντέλο δυναμικού, μας επιτρέπει να βγάλουμε συμπεράσματα για την διάσπαση του ηλεκτρασθενούς κενού στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου. Η δράση bounce μπορεί να υπολογιστεί, [35], υποθέτοντας ένα δυναμικό Higgs της μορφής $V(h) = \lambda(\bar{\mu})h^4/4$, με την running coupling $\lambda(\bar{\mu})$ υπολογισμένη σε μια ενεργειακή κλίμακα $\bar{\mu} = 1/R$, με R την ακτίνα της bounce. Για το υπόβαθρο de Sitter η κύρια διόρθωση $\sim H^2$ δίνεται από την έκφραση 5.21 σε τάξη $\mathcal{O}(\bar{M}_{PL}^0)$. Η βαρυτική διόρθωση τάξης $\mathcal{O}(\bar{M}_{PL}^2)$ για $H = 0$ υπολογίστηκε στα [35], [36]. Αθροίζοντας τις συνεισφορές βρίσκουμε

$$S = \left[\frac{8\pi^2}{3|\lambda(1/R)|} (1 + 6(1 + 6\xi)(HR)^2 \log(HR)) + \frac{32\pi^2(1 + 6\xi)^2}{45(R\bar{M}_{PL}\lambda(1/R))^2} \right] \quad (5.36)$$

Η ελαχιστοποίηση ως προς την ακτίνα τροποποιεί την εξάρτηση του όρου $(1 + 6\xi)$ από την τετραγωνική [35].

Στην παραπάνω έκφραση δεν λάβαμε υπόψη διορθώσεις σε μεγαλύτερη τάξη του H , οι οποίοι αναμένουμε να δίνουν όρους με μεγαλύτερες δυνάμεις του $1 + 6\xi$. Ο λόγος είναι ότι ο τελευταίος όρος $\sim \bar{M}_{PL}^2$ δίνει την κύρια διόρθωση για το πεδίο Higgs του Καθιερωμένου Προτύπου. Αυ-

τό μπορούμε να το δούμε παρατηρώντας ότι ο λόγος των δύο τελευταίων όρων είναι της τάξης $(HR)^2/(1/R\bar{M}_{PL}^2) = (H^2/\bar{M}_{PL}^2)(R\bar{M}_{PL})^4$. Για ρεαλιστικές τιμές της μάζας του Higgs, η bounce έχει μέγεθος που υπερβαίνει την κλίμακα Planck περίπου κατά μια τάξη μεγέθους [35]. Από την άλλη, φαινομενολογικά βάσιμα μοντέλα πληθωρισμού έχουν τιμή της παραμέτρου Hubble H πολύ κάτω από το $\bar{M}_{PL}$. Με αποτέλεσμα, στην περιοχή όπου ισχύει η θεωρία διαταραχών, ο τελευταίος όρος στην 5.36 να είναι αυτός που δίνει την κύρια διόρθωση στη δράση της bounce, με τον όρο $\sim H^2$ να έχει μικρότερη επίδραση. Παρόλα αυτά αναμένουμε την πλήρη αστάθεια του ψευδούς κενού να συμβαίνει για επαρκώς μεγάλες τιμές του ξ σε υπόβαθρο de Sitter. Ωστόσο μια ρεαλιστική ανάλυση αυτού του φαινομένου για πεδίο Higgs του Καθιερωμένου Προτύπου μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο αριθμητικά.

Θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα όριο για την παράμετρο Hubble H απαιτώντας την ευστάθεια του πεδίου Higgs κατά τη διάρκεια του πληθωρισμού, χρησιμοποιώντας τη δράση του Hawking-Moss instanton S_{HM} ως δράση της bounce. Για $\xi = 0$ έχουμε από την σχέση 5.34

$$S_{HM} = -\frac{24\pi^2}{\kappa^2 U(h_{max})} + \frac{24\pi^2}{\kappa^2 V_0} = 24\pi^2 \bar{M}_{PL}^4 \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_0 + \delta V} \right) \simeq \frac{8\pi^2}{3} \frac{\delta V}{H^4} \quad (5.37)$$

με $H^2 = V_0/(3\bar{M}_{PL}^2)$ και δV τη διαφορά ενεργειακής πυκνότητας μεταξύ ψευδούς κενού και μέγιστου του φράγματος δυναμικού. Η πιθανότητα διάσπασης ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα όγκου του ηλεκτρασθενούς κενού κατά την περίοδο του πληθωρισμού μπορεί να εκτιμηθεί από τη σχέση $P \sim H^4 \exp(-S_{HM})$. Επομένως η συνολική πιθανότητα είναι $P \sim TL^3 H^4 \exp(-S_{HM})$, για ένα συνολικό χρόνο $T \sim N/H$ και όγκο $L^3 \sim H^{-3} \exp(3N)$, με $N \sim 60 - 70$ τον αριθμό των e-foldings. Απαιτώντας $P \lesssim 1$ συνεπάγεται $S_{HM} \gtrsim 3N$, όπου αγνοήσαμε την συνεισφορά του $\ln N$, ώστε

$$\frac{H}{h_{max}} \lesssim \left(\frac{8\pi^2}{9N} \frac{\delta V}{h_{max}^4} \right)^{1/4} \lesssim 0.06 \quad (5.38)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε $\delta V \simeq 4.5 \times 10^{38} \text{ GeV}^4$ για την τιμή στο μέγιστο του δυναμικού Higgs, $h_{max} \simeq 4.5 \times 10^{10} \text{ GeV}$ [29]. Συγκρίνοντας αυτό το όριο με αυτό που προκύπτει στο [29] μέσω μιας λύσης της Fokker-Planck εξίσωσης: $H/h_{max} \lesssim 0.04$, παρατηρούμε ότι υπάρχει αριθμητική συμφωνία, αν και η παραμετρική εξάρτηση στην 5.38 δεν ταιριάζει με αυτήν στο [29].

Για μη μηδενικό ξ , η δράση του Hawking-Moss instanton είναι

$$S_{HM} = -\frac{24\pi^2(1 - \kappa\xi h_{max}^2)^2}{\kappa^2 U(h_{max})} + \frac{24\pi^2}{\kappa^2 V_0} = 24\pi^2 \bar{M}_{PL}^4 \left(\frac{1}{V_0} - \frac{\left(1 + \frac{\xi h_{max}^2}{\bar{M}_{PL}^2}\right)^2}{V_0 + \delta V} \right) \simeq \frac{8\pi^2}{3} \left(\frac{\delta V}{H^4} - \frac{6\xi h_{max}^2}{H^2} \right) \quad (5.39)$$

Για $\xi < 0$ με μεγάλο $|\xi|$, βρίσκουμε το όριο

$$\frac{H}{h_{max}} \lesssim 4\pi \left(\frac{|\xi|}{3N} \right)^{1/2} \lesssim 0.9 |\xi|^{1/2} \quad (5.40)$$

σε συμφωνία με το [29]. Η ενεργός μάζα του Higgs οδηγεί σε απόσβεση των διακυμάνσεων και χαλάρωση του ορίου για το H . Για $\xi > 0$, το όριο το προσδιορίζουμε απαιτώντας η δράση S_{HM} να παραμένει θετική ώστε

$$\frac{H}{h_{max}} \lesssim \left(\frac{1}{6\xi} \frac{\delta V}{h_{max}^4} \right)^{1/2} \lesssim 0.004 \xi^{-1/2} \quad (5.41)$$

Οι παραπάνω εκτιμήσεις για το μέγιστο όριο της παραμέτρου Hubble H που προκύπτουν απο την ευστάθεια του κενού κατα την περίοδο του πληθωρισμού αναμένονται να είναι ακριβείς ακόμα και αν βασίζονται στη δράση του Hawking-Moss instanton. Ο λόγος είναι ότι το όριο αντιστοιχεί σε ένα εύρος τιμών της παραμέτρου για τις οποίες οι διακυμάνσεις που προκαλούνται από το βαρυτικό υπόβαθρο γίνονται ισχυρές. Η δράση της bounce σε ένα ασυμπτωτικά επίπεδο υπόβαθρο, στα πλαίσια του Καθιερωμένου Προτύπου, είναι $S \sim 1800$ [35]. Από την άλλη, το όριο για την κλίμακα του πληθωρισμού, H , προκύπτει από διάστημα τιμών της παραμέτρου στο οποίο $S \sim 3N \simeq 200$. Είναι φανερό ότι, για την μέγιστη τιμή του H , η επίδραση του de Sitter υποβάθρου έχει ως αποτέλεσμα στη μείωση της δράσης για διακυμάνσεις προς το αληθές κενό. Για το μοντέλο δυναμικού που μελετήσαμε στην παράγραφο 3, αυτή η περιοχή είναι κοντά στο $H \simeq 0.7h_{max}$ στο αριστερό διάγραμμα του σχήματος 24 και κοντά στο $\xi = 0.1$ στο δεξιό διάγραμμα, όπου η δράση της bounce και του Hawking-Moss instanton είναι περίπου ίσες.

A' Διορθώσεις ενός βρόγχου στο ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs

Ο στόχος αυτού του κεφαλαίου θα είναι να περιγράψουμε λεπτομερώς πώς να βρούμε τις διορθώσεις ενός βρόγχου στο ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs από τις αλληλεπιδράσεις του Standard Model. Θα χρησιμοποιήσουμε το φυσικό σύστημα μονάδων όπου $\hbar = c = 1$ και την υπογραφή της μετρικής $(+ - - -)$.

A'.1 Generating functional

Στην κλασσική Θεωρία Πεδίου, το θεμελιώδες αντικείμενο που περιγράφει την θεωρία είναι το συναρτησοειδές της δράσης, $S[\phi]$, με ϕ ένα κλασσικό πεδίο. Αντίθετα στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου η δράση δεν περιέχει όλες τις πληροφορίες για την δυναμική του συστήματος. Για την περιγραφή της κβαντικής δυναμικής χρησιμοποιούμε τον συναρτησιακό φορμαλισμό και ορίζουμε το generating functional :

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ iS[\phi] + i \int d^4x \phi(x) J(x) \right\} \quad (A'.1)$$

όπου $S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(x)$, όπως και κλασσικά, και το συναρτησιακό ολοκλήρωμα είναι πάνω σε όλες τις πιθανές συναρτήσεις ϕ οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $\phi(x_i) = \phi_i$ και $\phi(x_f) = \phi_f$. Οι συναρτησιακές παράγωγοι του $Z[J]$, υπολογισμένες για $J = 0$, είναι

$$\left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = i^n \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \exp \{ iS[\phi] \} \quad (A'.2)$$

Από το φορμαλισμό της Κβαντικής Θεωρίας Πεδίου με συναρτησιακά ολοκληρώματα, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\phi(x_i) \equiv \phi_i$, γνωρίζουμε ότι

$$\langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi_1 \cdots \phi_n \exp \{ iS[\phi] \}}{\int \mathcal{D}\phi \exp \{ iS[\phi] \}} \quad (A'.3)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει

$$\langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle = \frac{(-i)^n}{Z[J]} \left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} \quad (A'.4)$$

Για εξοικονόμηση χρόνου θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό

$$\langle \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \rangle_J \equiv \frac{\int \mathcal{D}\phi \mathcal{O}(x_1, \dots, x_n) \exp [iS[\phi] + i \int d^4x \phi(x) J(x)]}{\int \mathcal{D}\phi \exp [iS[\phi] + i \int d^4x \phi(x) J(x)]} \quad (A'.5)$$

Επομένως το generating functional παράγει τις συναρτήσεις συσχετισμού των πεδίων. Μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο συναρτησοειδές $W[J]$ μέσω της σχέσης

$$Z[J] \equiv \exp \{ iW[J] \} \Rightarrow W[J] = -i \log Z[J] \quad (A'.6)$$

Αυτό το συναρτησοειδές παράγει τις συνδεδεμένες (connected) συναρτήσεις συσχετισμού

$$\langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle_{conn.} = (-i)^{n+1} \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \cdots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} \quad (A'.7)$$

Μπορούμε να ορίσουμε ένα νέο πεδίο $\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$ και να κάνουμε ένα μετασχηματισμό Legendre του $W[J]$ για να αποκτήσουμε την ενεργή δράση

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x) \quad (\text{A'.8})$$

Η ενεργή δράση περιέχει όλες τις πληροφορίες για την χβαντική δυναμική της θεωρίας. Για να το δούμε αυτό βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο, και έπειτα την υπολογίζουμε για $J = 0$. Ορίζουμε $\phi_c(x)|_{J=0} = \langle \phi(x) \rangle$ και

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} &= \frac{\delta W[J]}{\delta \phi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y) - \int d^4y J(y) \frac{\delta \phi_c(y)}{\delta \phi_c(x)} \\ &= \int d^4y \frac{\delta W[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y) - J(x) \\ &= \int d^4y \phi_c(y) \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_c(x)} \phi_c(y) - J(x) \\ &= -J(x) \Rightarrow \left. \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} \right|_{\phi_c=\langle \phi \rangle} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A'.9})$$

Επομένως το ϕ_c ικανοποιεί της εξισώσεις Euler-Lagrange, δηλαδή είναι ίσο με $\langle \phi(x) \rangle$, αν και μόνο αν η ενεργή δράση έχει ακρότατο. Όλες τις ανώτερες παραγώγους της ενεργής δράσης τις ονομάζουμε 1-particle irreducible (1PI) συναρτήσεις συσχετισμού.

$$\langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle_{1PI} = \left. \frac{\delta^n \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \cdots \delta \phi_c(x_n)} \right|_{\phi_c=\langle \phi \rangle} \quad (\text{A'.10})$$

Ορίζουμε το ενεργό δυναμικό της θεωρίας ως

$$V_{eff}(\phi_c) = - \left. \frac{\Gamma[\phi_c]}{VT} \right|_{\phi_c=const} \quad (\text{A'.11})$$

όπου VT είναι ο άπειρος τετραδιάστατος όγκος.

A'.2 Επανακανονικοποίηση και το Standard Model

Η χβαντική ενεργή δράση περιέχει ποσότητες οι οποίες είναι άπειρες όταν της υπολογίζουμε. Αυτό μπορεί να διορθωθεί θέτοντας ένα πεπερασμένο κατώφλι στα ολοκληρώματα τα οποία αποκλίνουν. Τότε μπορούμε να επανακανονικοποιήσουμε την θεωρία θέτοντας τις παραμέτρους στην δράση ίσες με αυτές που έχουμε βρει από τα πειραματικά αποτελέσματα. Οι παράμετροι θα εξαρτώνται γενικά από το κατώφλι που έχουμε επιλέξει. Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι αντιμετώπισης αυτών των αποκλίσεων που ονομάζονται σχέδια επανακανονικοποίησης (renormalization schemes).

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε ένα από τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα schemes στην σωματιδιακή φυσική, το οποίο ονομάζεται modified minimal subtraction, $\bar{MS}$. Σε αυτό το scheme μετατρέπουμε οποιοδήποτε τετραδιάστατο ολοκλήρωμα σε ολοκλήρωμα d διαστάσεων, όπου $d = 4 - 2\epsilon$, και πραγματοποιούμε τους υπολογισμούς σε d διαστάσεις. Μετά τον υπολογισμό απλά αφαιρούμε το μέρος

του αποτελέσματος που είναι ανάλογο του $\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi)$, όπου $\gamma_E = 0.57721 \dots$ είναι η σταθερά Euler-Macheroni. Το αποτέλεσμα θα εξαρτάται γενικά από μία αυθαίρετη ενεργειακή κλίμακα μ (Renormalization Group scale), η οποία δεν έχει καμία επιρροή στα φυσικά παρατηρούμενα μεγέθη, τα οποία είναι οι 1PI συναρτήσεις συσχετισμού. Θεωρούμε μία γενική δράση η οποία εξαρτάται από διάφορα πεδία $\phi_i = Z_i^{\frac{1}{2}} \phi_i^r$, έχει μάζες m_a^2 και σταθερές σύζευξης λ_b . Τότε η εξίσωση Callan-Symanzik, η οποία περιγράφει πώς η επανακανονικοποιημένη n σημείων 1PI συνάρτηση συσχετισμού εξελίσσεται με την RG κλίμακα μ , είναι

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_a \mu \frac{\partial m_a^2}{\partial \mu} + \sum_b \mu \frac{\partial \lambda_b}{\partial \mu} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \frac{\mu}{Z_i} \frac{\partial Z_i}{\partial \mu} \right) \Gamma^{i_1 \dots i_n}(x_1, \dots, x_n; \mu, m_a^2, \lambda_b) = 0 \quad (\text{A'.12})$$

Αυτή η εξίσωση θα φανεί χρήσιμη για τον υπολογισμό του ενεργού δυναμικού του πεδίου Higgs. Το Standard Model είναι μια μη αβελιανή Yang-Mills θεωρία βαθμίδας, η οποία είναι διαταραχτικά επανακανονικοποιήσιμη, ώστε τα μαθηματικά εργαλεία που αναπτύξαμε ως τώρα μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο πλήρες δυναμικό τους.

A'.3 Εξάρτηση απο βαθμίδα της ενεργού δράσης

Λόγω του ότι το Standard Model περιέχει πεδία βαθμίδας, είναι απαραίτητο να προσθέσουμε όρους που καθορίζουν την βαθμίδα στην κλασσική δράση για να χβαντώσουμε την θεωρία. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Fadeev-Popov για ghost πεδία, πρέπει να προσθέσουμε επιπλέον συνεισφορές ώστε να έχουμε μια αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας και Lorentz-covariant χβαντική θεωρία η οποία παρέχει ξεκάθαρα αποτελέσματα. Αυτό σημαίνει ότι η ενεργή δράση θα εξαρτάται ρητά απο την παράμετρο βαθμίδας, ώστε $\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi} \neq 0$. Οι ταυτότητες Nielsen μας δίνουν την ακριβή συναρτησιακή εξάρτηση της ενεργής δράσης από την παράμετρο βαθμίδας, και συνεπώς του ενεργού δυναμικού που δίνεται από

$$\left[\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + C(\phi, \xi) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] V(\xi, \phi) = 0 \quad (\text{A'.13})$$

όπου $C(\phi, \xi)$ είναι μια συνάρτηση που υπολογίζεται στη θεωρία διαταραχών. Παρατηρούμε ότι στα σημεία όπου το δυναμικό έχει ακρότατα $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$, έχουμε $\frac{\partial V}{\partial \xi} = 0$, που σημαίνει ότι είναι αναλλοίωτα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας.

A'.4 Υπολογισμός της δράσης

Τώρα είμαστε έτοιμοι να υπολογίσουμε την ενεργή δράση. Για να το κάνουμε αυτό ξαναγράφουμε την Langrangian συναρτήσε του επανακανονικοποιημένου πεδίου $\phi = Z^{\frac{1}{2}} \phi_r$ ώστε

$$\mathcal{L}[\phi_r] = \mathcal{L}_r[\phi_r] + \Delta \mathcal{L}[\phi_r] \Rightarrow S[\phi_r] = S_r[\phi_r] + \Delta S[\phi_r] \quad (\text{A'.14})$$

όπου η $\Delta \mathcal{L}$ περιέχει όλους τους counterterms. Το ρεύμα μπορούμε επίσης να το γράψουμε με παρόμοιο τρόπο

$$J(x) = J_r(x) + \Delta J(x) \quad (\text{A'.15})$$

Ορίζουμε το J_r έτσι ώστε να ικανοποιεί

$$\left. \frac{\delta S_r[\phi_r]}{\delta \phi_r(x)} \right|_{\phi_r = \phi_c} = -J_r(x) \quad (\text{A'.16})$$

Καθορίζουμε τους counterterms ΔJ χρησιμοποιώντας

$$\phi_c(x) = \langle \phi(x) \rangle_{J_r + \Delta J} \quad (\text{A'.17})$$

Επομένως το generating functional μπορεί να γραφεί ως

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi_r \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_r[\phi_r] + J_r \phi_r + \Delta \mathcal{L}[\phi_r] + \Delta J \phi_r) \right\} \quad (\text{A'.18})$$

Ο τρόπος για να υπολογίσουμε το παραπάνω συναρτησιακό ολοκλήρωμα είναι υποθέτοντας ότι η μεγαλύτερη συνεισφορά σε αυτό προέρχεται από το σχηματισμό του κλασσικού πεδίου, οπότε μπορούμε να γράψουμε $\phi_r = \phi_c + \eta$, όπου το ϕ_c ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Langrange . Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση σαγματικού σημείου (saddle point approximation) μπορούμε να γράψουμε τους δύο πρώτους όρους

$$\begin{aligned} S_r[\phi_r] + \int d^4x J_r \phi_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \eta(x_1) \cdots \eta(x_n) \left. \frac{\delta^n S_r[\phi_r]}{\delta \phi_r(x_1) \cdots \delta \phi_r(x_n)} \right|_{\phi_r=\phi_c} + \int d^4x (J_r \phi_c + J_r \eta) \\ &= S_r[\phi_c] + \int d^4x J_r \phi_c + \int d^4x \eta(x) \left(\left. \frac{\delta S_r[\phi_r]}{\delta \phi_r(x)} \right|_{\phi_r=\phi_c} + J_r \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \left. \frac{\delta^2 S_r[\phi_r]}{\delta \phi_r(x) \delta \phi_r(y)} \right|_{\phi_r=\phi_c} \eta(x) \eta(y) + \mathcal{O}(S_r^{(3)}) \end{aligned} \quad (\text{A'.19})$$

Ο όρος στην παρένθεση είναι μηδέν λόγω της σχέσης A'.16, επομένως έχουμε την κλασσική δράση με ένα Γκαουσιανό όρο και ανώτερης τάξης self interaction vertices . Για τους δύο τελευταίους όρους έχουμε

$$\begin{aligned} \int d^4x (\Delta \mathcal{L}[\phi_r] + \Delta J \phi_r) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \eta(x_1) \cdots \eta(x_n) \left. \frac{\delta^n \Delta S_r[\phi_r]}{\delta \phi_r(x_1) \cdots \delta \phi_r(x_n)} \right|_{\phi_r=\phi_c} \\ &\quad + \int d^4x (\Delta J \phi_c + \Delta J \eta) \\ &= \Delta S[\phi_c] + \int d^4x \Delta J \phi_c + \int d^4x \eta(x) \left(\left. \frac{\delta \Delta S[\phi_r]}{\delta \phi_r} \right|_{\phi_r=\phi_c} + \Delta J \right) + \mathcal{O}(\Delta S_r^{(2)}) \end{aligned} \quad (\text{A'.20})$$

Ο όρος που είναι γραμμικός στο η πρέπει να ρυθμιστεί ώστε να εξαφανίζεται, δηλαδή $\langle \eta(x) \rangle_J = 0$, ώστε να ξαναπάρουμε $\langle \phi_r(x) \rangle_J = \phi_c$. Το πλήρες generating functional μπορεί να γραφεί ως

$$Z[J] = \exp \left\{ i \int d^4x (\mathcal{L}_r[\phi_c] + J_r \phi_c + \Delta \mathcal{L}[\phi_c] + \Delta J \phi_c) \right\} \times \int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ i \tilde{S}[\eta] + i \Delta \tilde{S}[\eta] \right\} \quad (\text{A'.21})$$

όπου

$$\tilde{S}[\eta] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \eta(x_1) \cdots \eta(x_n) \left. \frac{\delta^n S_r[\phi_r]}{\delta \phi_r(x_1) \cdots \delta \phi_r(x_n)} \right|_{\phi_r=\phi_c} \quad (\text{A'.22})$$

$$\tilde{\Delta S}[\eta] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \eta(x_1) \cdots \eta(x_n) \left. \frac{\delta^n \Delta S_r[\phi_r]}{\delta \phi_r(x_1) \cdots \delta \phi_r(x_n)} \right|_{\phi_r=\phi_c} \quad (\text{A'.23})$$

Το παραπάνω συναρτησιακό ολοκλήρωμα είναι δύσκολο να το υπολογίσουμε αν κρατήσουμε όρους από όλες τις τάξεις. Στην περίπτωση μας θα υποθέσουμε ότι οι αλληλεπιδράσεις μπορούν να υπολογιστούν διαταραχτικά, εννοώντας ότι η μεγαλύτερη συνεισφορά στο συναρτησιακό ολοκλήρωμα προέρχεται από τον τετραγωνικό όρο. Αυτό είναι μια απλή γενίκευση του Γκαουσιανού ολοκληρώματος σε πεπερασμένες διαστάσεις

$$\int d^4 x_1 \cdots d^4 x_n \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i A_{ij} x_j \right) = \mathcal{N} (\det A)^{-\frac{1}{2}, +1} \quad (\text{A'.24})$$

Εδώ το $\mathcal{N}$ είναι μια σταθερά και το πρόσημο $- (+)$ είναι για μποζόνια (φερμιόνια) αντίστοιχα. Άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d^4 x d^4 y \eta(x) A(x, y) \eta(y) \right\} = \mathcal{N} (\det[-A])^{-\frac{1}{2}, +1} \quad (\text{A'.25})$$

Εδώ η $\mathcal{N}$ είναι εν γένει μια άπειρη σταθερά, η οποία θα αναιρεθεί όταν υπολογίσουμε τις συναρτήσεις συσχετισμού και το πρόσημο μείον οφείλεται στην υπογραφή της μετρικής. Χρησιμοποιώντας την σχέση $\det A = \exp(\log(\det A)) = \exp(\text{Tr} \log A)$, και θεωρώντας τους υπόλοιπους όρους ως διαταραχές, γράφουμε

$$\int \mathcal{D}\eta \exp \left\{ i\tilde{S}[\eta] + i\Delta\tilde{S}[\eta] \right\} = \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (+1) \text{Tr} \log \left(-\frac{\delta^2 S[\phi_c]}{\delta \phi_r^2} \right) + (\text{higher order}) \right\} \quad (\text{A'.26})$$

Παρατηρούμε ότι την σταθερά $\mathcal{N}$, η οποία είναι άπειρη, μπορούμε να την παραλείψουμε, διότι οι συναρτήσεις συσχετισμού διαιρούνται με $Z[0]$ οπότε απαλείφεται. Το $W[J]$ γίνεται

$$W[J] = -i \log Z[J] = S_r[\phi_c] + \Delta S[\phi_c] + \int d^4 x J \phi_c + \frac{i}{2} (-i) \text{Tr} \log \left(-\frac{\delta^2 S[\phi_c]}{\delta \phi_r^2} \right) - i(\text{higher order}) \quad (\text{A'.27})$$

Πραγματοποιώντας έναν μετασχηματισμό Legendre βρίσκουμε την ενεργή δράση

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4 x J \phi_c = S_r[\phi_c] + \Delta S[\phi_c] + \frac{i}{2} (-i) \text{Tr} \log \left(-\frac{\delta^2 S[\phi_c]}{\delta \phi_r^2} \right) - i(\text{higher order}) \quad (\text{A'.28})$$

Γενικά η ενεργή δράση θα έχει συνεισφορές από πολλαπλά πεδία. Για τις διορθώσεις ενός βρόγχου πρέπει να βρούμε τις συνεισφορές από βαθμωτά, φερμιονικά, ghost και πεδία βαθμίδας.

A'.5 Βαθμωτά πεδία

Ξεκινάμε υπολογίζοντας την συνεισφορά του βαθμωτού πεδίου στο δυναμικό. Στην προσέγγιση δένδρου (tree level), θα πάρουμε την Λαγκραντζιανή να είναι, για N βαθμωτά πεδία:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^2 \quad (\text{A'.29})$$

Παρατηρούμε ότι η Λαγκραντζιανή έχει $O(N)$ συμμετρία. Ανεξάρτητα απο τα πρόσημα του m^2 και του λ , δηλαδή, ανεξάρτητα απο το αν έχουμε αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας ή όχι, μπορούμε να υπολογίσουμε τον διαδότη για το πεδίο $\phi^i(x) = \phi_c^i + \eta^i(x)$ ως

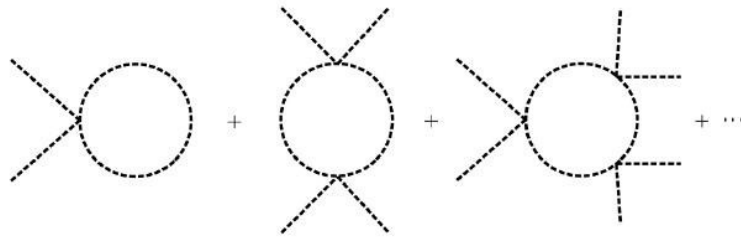
$$-\frac{\delta^2 S}{\delta \phi_i \delta \phi_j}[\phi_c] = \delta^{ij} \square + m^2 \delta^{ij} + \lambda (\phi_c^2 \delta^{ij} + 2\phi_c^i \phi_c^j) = \delta^{ij} (\square + m^2 + \lambda \phi_c^2) + 2\lambda \phi_c^i \phi_c^j \quad (\text{A'.30})$$

Όπου παραλείψαμε μια συνάρτηση δέλτα στον υπολογισμό της συναρτησιακής παραγώγου, $\phi_c^2 \equiv \sum_i (\phi_c^i)^2$ και την υπολογίσαμε για ένα σταθερό υπόβανθο ϕ_c . Μπορούμε να επιλέξουμε το πεδίο ϕ_c ώστε $\phi_c^i = (0, \dots, \phi_c)$, με αποτέλεσμα οι μάζες που εξαρτώνται από το πεδίο είναι

$$m_i^2(\phi_c) \begin{cases} \lambda \phi_c^2 + m^2 \text{ (N-1 fields)} \\ 3\lambda \phi_c^2 + m^2 \text{ (1 field)} \end{cases} \quad (\text{A'.31})$$

Η συνολική συνεισφορά στο δυναμικό απο το βαθμωτό κομμάτι είναι το άθροισμα όλων των συνεισφορών από κάθε mode. Για κάθε ένα mode μπορούμε να υπολογίσουμε το ίχνος ως

$$\begin{aligned} \text{Tr} \log(\square + m^2(\phi_c)) &= \sum_k \log(-k^2 + m^2(\phi_c)) = VT \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \log(-k^2 + m^2(\phi_c)) \\ &= (\text{Wick rotation}) = iVT \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \log(k_E^2 + m^2(\phi_c)) \\ &= -iVT \frac{\partial}{\partial \alpha} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + m^2)^\alpha} \Big|_{\alpha=0} \\ &= -iVT \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\alpha - d/2)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(m^2)^{\alpha - d/2}} \right) \Big|_{\alpha=0} \\ &= -iVT \frac{\Gamma(-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} (m^2)^{d/2} \end{aligned} \quad (\text{A'.32})$$



Σχήμα 21: Γραφική αναπαράσταση των διορθώσεων ενός βρόγχου για βαθμωτό πεδίο που συνεισφέρουν στο ενεργό δυναμικό.

Παρατηρούμε ότι για $d \rightarrow 4$ η γάμμα συνάρτηση απειρίζεται. Για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, ορίζουμε $d = 4 - 2\epsilon$ και αναπτύσσουμε κάθε όρο σε σειρά Laurent. Για να έχουμε σωστές διαστάσεις στο δυναμικό χρειάζεται να πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με μ^{4-d} , όπου το μ έχει διαστάσεις ενέργειας. Το τελικό αποτέλεσμα για το $V_S(\phi)$ για ένα πεδίο είναι

$$V_S(\phi_c) = -\frac{1}{64\pi^2} (m^2(\phi_c))^2 \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \frac{3}{2} + \log \frac{4\pi\mu^2}{m^2(\phi_c)} + \mathcal{O}(\epsilon) \right) + \Delta V(\phi_c) \quad (\text{A'.33})$$

Όπως αναφέραμε στην παράγραφο 1.2, στο $\bar{M}S$ scheme, θέτουμε τους counterterms έτσι ώστε να απαλείφουν το κομμάτι του δυναμικού που είναι ανάλογο του $\frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \log(4\pi)$ και το τελικό αποτέλεσμα είναι, αφού πάρουμε το όριο $\epsilon \rightarrow 0$

$$V_S(\phi_c) = \frac{1}{64\pi^2} (m^2(\phi_c))^2 \left(\log \frac{m^2(\phi_c)}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \quad (\text{A'.34})$$

Η συνολική βαθμωτή συνεισφορά από την Λαγκραντζιανή A'.29 είναι ίση με

$$V_S(\phi_c) = -\frac{1}{64\pi^2} (3\lambda\phi_c^2 + m^2)^2 \left(\frac{3}{2} + \log \frac{\mu^2}{3\lambda\phi_c^2 + m^2} \right) - \frac{N-1}{64\pi^2} (\lambda\phi_c^2 + m^2)^2 \left(\frac{3}{2} + \log \frac{\mu^2}{\lambda\phi_c^2 + m^2} \right) \quad (\text{A'.35})$$

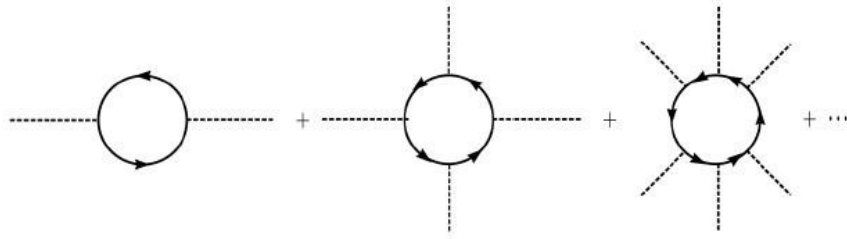
A'.6 Φερμιονικά πεδία

Θεωρούμε μια θεωρία φερμιονικών πεδίων που περιγράφονται από την Λαγκραντζιανή

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_\alpha \not{\partial} \psi^\alpha - \bar{\psi}_\alpha (M_f)_\beta^\alpha \psi^\beta \quad (\text{A'.36})$$

όπου ο πίνακας μάζας $M_f^\alpha_\beta$ είναι συνάρτηση των βαθμωτών πεδίων γραμμική στο ϕ , και αθροίζουμε σε όλους του επαναλαμβανόμενους δείκτες. Ο υπολογισμός είναι παρόμοιος με αυτόν της προηγούμενης παραγράφου με τη διαφορά ότι πρέπει να συμπεριλάβουμε τους βαθμούς ελευθερίας των φερμιονίων, ένα πρόσημο μείον λόγω του βρόγχου, και άθροισμα (ίχνος) σε όλα τα φερμιονικά πεδία. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα σε μια διόρθωση του ενεργού δυναμικού της μορφής

$$V_f(\phi_c) = -\frac{n}{2} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \log(k_E^2 + (M_f)^2) \quad (\text{A'.37})$$



Σχήμα 22: Γραφική αναπαράσταση των διορθώσεων ενός βρόγχου για φερμιονικό πεδίο που συνεισφέρουν στο ενεργό δυναμικό.

Όπου n είναι ο αριθμός ανεξάρτητων συνιστωσών των φερμιονικών πεδίων, που είναι δύο για έναν Weyl και τέσσερις για έναν Dirac σπίνορα. Κάνοντας τον υπολογισμό απαιτείται να ορίσουμε έναν τελεστή ίχνους για φερμιόνια σε d διαστάσεις, τον οποίο μπορούμε να επιλέξουμε ως $\text{Tr } \mathbf{I} = n$ για κάθε διάσταση. Έπειτα κάνοντας την $\bar{M}S$ απαλοιφή παίρνουμε

$$V_f(\phi_c) = \frac{n}{64\pi^2} (M_f)^4 \left(\log \frac{M_f^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \quad (\text{A'.38})$$

A'.7 Πεδία βαθμίδας

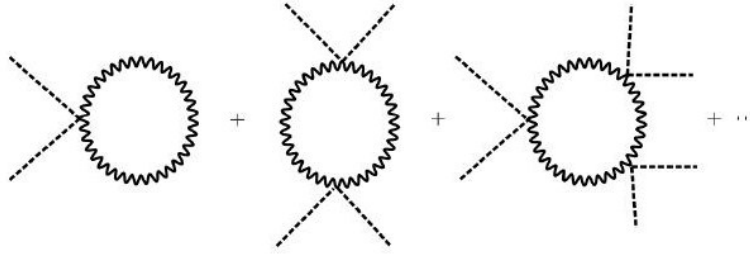
Για πεδία βαθμίδας, θεωρούμε Λαγκραντζιανή της μορφής

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \text{Tr}(D_\mu \phi_\alpha)^\dagger D^\mu \phi^\alpha \quad (\text{A'.39})$$

Όπου $A^\mu = A^\mu_\alpha T^\alpha$ είναι ένα πεδίο βαθμίδας από την ομάδα $SU(n)$, όπου T^α είναι οι γεννήτορες της ομάδας, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]$, και g είναι η σταθερά σύζευξης των πεδίων βαθμίδας. Η μόνη συνεισφορά στο ενεργό δυναμικό είναι από scalar-scalar vector-vector αλληλεπιδράσεις

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (M_{boson})^2_{\alpha\beta} A^{\alpha,\mu} A^\beta_\mu \quad (\text{A'.40})$$

όπου $(M_{boson})^2_{ab}(\phi) = g^2 \text{Tr}[(T^i_{ac} \phi_i)^\dagger T^c_{bj} \phi^j]$



Σχήμα 23: Γραφική αναπαράσταση των διορθώσεων ενός βρόγχου για μποζονικό πεδίο βαθμίδας που συνεισφέρουν στο ενεργό δυναμικό.

Όμοια με τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, το τελικό αποτέλεσμα για το ενεργό δυναμικό είναι

$$V_b(\phi_c) = \frac{\Delta}{2} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \log(k_E^2 + (M_{boson})^2) \quad (\text{A'.41})$$

Με $\Delta = d-1 = 3-2\epsilon$ τον αριθμό των μποζονικών βαθμών ελευθερίας σε d διαστάσεις. Υπολογισμός στο $\bar{MS}$ scheme δίνει

$$V_b(\phi_c) = \frac{3}{64\pi^2} (M_b)^4 \left(\log \frac{M_b^2}{\mu^2} - \frac{5}{6} \right) \quad (\text{A'.42})$$

Ο παράγοντας $\frac{5}{6}$ προέρχεται από το γεγονός ότι υπάρχει άλλο ένα πεπερασμένο κομμάτι που προκύπτει από τον όρο $\frac{3-2\epsilon}{\epsilon}$ και για την ακρίβεια είναι ανεξάρτητο από το scheme .

A'.8 Higgs

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στο πεδίο Higgs στο Καθιερωμένο Πρότυπο, το οποίο μπορεί να γραφεί συναρτήσει τεσσάρων πραγματικών βαθμωτών πεδίων

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A'.43})$$

Το ενεργό δυναμικό του πεδίου Higgs στην προσέγγιση ενός βρογχου δέχεται διορθώσεις απο το βαθμωτό, φερμιονικό, βαθμίδας και ghost τμήμα

$$V_1(\phi) = V_S(\phi) + V_f(\phi) + V_b(\phi) + V_g(\phi) \quad (A'.44)$$

Ακολουθώντας τις διαδικασίες των παρατηρημάτων, χρειάζεται απλά να εξάγουμε τις παραμέτρους μάζας από την Λαγκραντζιανή του Καθιερωμένου Προτύπου. Για το βαθμωτό τμήμα οι μάζες είναι

$$m_i^2(\phi_c) \begin{cases} \lambda\phi_c^2 + m^2 & (3 \text{ fields}) \\ 3\lambda\phi_c^2 + m^2 & (1 \text{ field}) \end{cases} \quad (A'.45)$$

Για τα φερμιονία το κομμάτι αλληλεπίδρασης της Λαγκραντζιανής είναι της μορφής $\mathcal{L} = \frac{h_f}{\sqrt{2}}\phi_c\bar{\psi}\psi$, οπότε ο όρος μάζας είναι της μορφής

$$M_f^2(\phi_c) = \frac{1}{2}h_f^2\phi_c^2 \quad (A'.46)$$

με h_f την σταθερά σύζευξης Yukawa για το φερμιόνιο. Για τα μποζόνια βαθμίδας με μάζα έχουμε $M_W = \frac{1}{2}g\phi_c$ και $M_Z = \frac{1}{2}\phi_c\sqrt{g^2 + g'^2}$ ώστε

$$M_W^2(\phi_c) = \frac{1}{2}g^2\phi_c^2 \quad (A'.47)$$

$$M_Z^2(\phi_c) = \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)\phi_c^2 \quad (A'.48)$$

Παρατηρούμε ότι όλες οι εξαρτημένες από το πεδίο μάζες είναι τέτοιες ώστε μόλις τις υπολογίζουμε στην αναμενόμενη τιμή του κενού (VEV) ($\phi_c = v \approx 246 \text{ GeV}$), παίρνουμε τις φυσικές μάζες των σωματιδίων. Επίσης στην περίπτωση του Higgs, με την σύμβαση μας, $m^2 < 0$ ώστε τα μποζόνια Goldstone δεν έχουν μάζα όταν υπολογίζονται στην αναμενόμενη τιμή του κενού. Η συνολική συνεισφορά ενός βρογχου μπορεί να γραφεί σχηματικά

$$V_1(\phi_c) = \sum_{i=S,f,B} \frac{\sigma(i)}{64\pi^2} (M_i^2)^2 \left(\log \frac{M_i^2(\phi_c)}{\mu^2} - C(i) \right) \quad (A'.49)$$

Το σ είναι 1 για μποζόνια και -1 για φερμιόνια, $C = \frac{3}{2}$ για βαθμωτά και φερμιόνια, και $C = \frac{5}{6}$ για μποζόνια. Ως συνήθως, πρέπει να λάβουμε υπόψη τους βαθμούς ελευθερίας για κάθε πεδίο στο άθροισμα. Θα λάβουμε υπόψη μόνο συνεισφορές από το ίδιο πεδίο Higgs (1 B.E), από τα μποζόνια Goldstone (3 B.E), τα Z (3 B.E), $W^\pm$ (6 B.E) μποζόνια, καθώς επίσης και το τοπ κουάρκ (4×3 (χρώματα) B.E) και θα αγνοήσουμε τα υπόλοιπα κουάρκ καθώς οι σταθερές σύζευξης τους είναι αμελητέες. Τότε έχουμε, χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $M_i(\phi_c)^2 = i$

$$V(\phi_c) = \frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4}\phi_c^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left[H^2 \left(\log \frac{H}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) + 3G^2 \left(\log \frac{G}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) + 6W^2 \left(\log \frac{W}{\mu^2} - \frac{5}{6} \right) + 3Z^2 \left(\log \frac{Z}{\mu^2} - \frac{5}{6} \right) - 12T^2 \left(\log \frac{T}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \right] \quad (A'.50)$$

Ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το δυναμικό για μεγάλες τιμές του ϕ_c . Μπορούμε να ορίσουμε μια κλίμακα $\phi_c \gg m$ τέτοια ώστε για παράδειγμα $(m^2 + 3\lambda\phi^2)^2 \approx 9\lambda^2\phi^4 \left(1 + \frac{2m^2}{3\lambda\phi^2}\right)$ και έτσι

$$V(\phi_c) \approx \frac{1}{2}m^2\phi_c^2 \left[1 + \frac{12\lambda}{32\pi^2} \log \frac{\phi_c^2}{\mu^2} \right] + \frac{1}{4}\phi_c^4 \left[\lambda + \frac{1}{16\pi^2} \left(12\lambda^2 + \frac{3}{8}g^2 + \frac{3}{16}(g^2 + g'^2)^2 - 3h_t^4 \right) \log \frac{\phi_c^2}{\mu^2} \right] \quad (\text{A'.51})$$

Καθώς το V δεν εξαρτάται από το μ , μπορούμε να επιλέξουμε το μ αυθαίρετα. Μία επωφελής επιλογή είναι η $\mu \sim \phi_c$, η οποία αφαιρεί τους λογαρίθμους από το δυναμικό, με αποτέλεσμα

$$V(\phi_c) = \frac{1}{2}m^2(\mu = \phi_c)\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda(\mu = \phi_c)\phi_c^4, \quad \phi_c \gg m^2 \quad (\text{A'.52})$$

Για τις πειραματικά μετρούμενες τιμές των σταθερών σύζευξης στο Καθιερωμένο Πρότυπο, το ενεργό δυναμικό Higgs γίνεται ασταθές για τιμές του πεδίου $\sim 10^8$ GeV, υποδεικνύοντας ότι το τωρινό κενό είναι μετασταθές. Τα αποτελέσματα μας είναι ακριβή μόνο σε προσέγγιση ενός βρόγχου, αν πάρουμε τις διορθώσεις από βρόγχους υψηλότερης τάξης προκύπτει μεγαλύτερη τιμή ($\sim 10^{11}$ GeV) για την αστάθεια. Το αποτέλεσμα είναι επίσης ευαίσθητο στις αρχικές συνθήκες, κυρίως στην μάζα του τόνου.

Αναφορές

- [1] S. Coleman: *Aspects of Symmetry (Selected Erice Lectures)*, Cambridge University Press, 1985.
- [2] S. Coleman, F. De Luccia: *Gravitational effects on and of vacuum decay*, Phys. Rev. D 21, 3305, 1980.
- [3] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. I. Zakharov: *ABC of Instantons*, Usp. Phys. Nauk 136 (1982) 553.
- [4] E. J. Weinberg: *Classical Solutions In Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 2012.
- [5] C. G. Callan, S. Coleman: *Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections*, Phys. Rev. D 16, 1762, 1977.
- [6] D. S. Gorbunov, V. A. Rubakov: *Introduction to the Theory of the Early Universe (Hot Big Bang Theory)*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2011.
- [7] V. Mukhanov: *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, 2005.
- [8] H. J. Lee: *Negative modes in vacuum decay*.
- [9] S. Coleman, V. Glaser, A. Martin, Commun. Math. Phys. 58, 211 (1978).
- [10] A. Strumia, N. Tetradis, A. Urbano, A. Salvio: *On gravitational and thermal corrections to vacuum decay*, JHEP 1609 (2016) 054.
- [11] C. Scrucca: *Advanced Quantum Field Theory*, Lecture notes, EPFL, 2013.
- [12] M. Maggiore: *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*, Oxford University Press, 2005.
- [13] G. t'Hooft: *Renormalization of massless Yang-Mills fields*, Nuclear Physics. B 33 (1 1971).
- [14] G. t'Hooft: *Renormalizable Lagrangians of massive Yang-Mills fields*, Nuclear Physics B 35 (1 1971).
- [15] S. Weinberg: *Quantum Theory of Fields. Modern Applications*, 1st ed. Vol. 2, Cambridge University Press 1996.
- [16] N. K. Nielsen: *On the gauge dependence of spontaneous symmetry breaking in gauge theories*, Nuclear Physics B 101.1 (1975), pp. 173-188.
- [17] M. E. Peskin, D. V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Pub. Co, 1995.
- [18] M. Quiros: *Finite temperature field theory and phase transitions*, hep-ph/9901312, 1999.
- [19] A. Das: *Finite Temperature Field Theory*, World Scientific Pub. Co, 1997.

- [20] C. Wetterich: *Quantum Field Theory I*, Lecture notes, University of Heidelberg, 2006.
- [21] J. Cline: *Quantum Field Theory*, Lecture notes, McGill University, 2011.
- [22] S. Carroll: *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley Pub. Co, 2004.
- [23] A. Masoumi: *Topics in vacuum decay*, arXiv: 1505.06397 [hep-th].
- [24] J. W. Gibbons and S. W. Hawking, Phys. Rev. D **15** (1977) 2738.
- [25] S. W. Hawking and I. Moss, Phys. Lett. B **110** (1982) 35.
- [26] A. Kobakhidze and A. Spencer-Smith, Phys. Lett. B **722** (2013) 130 [arXiv:1301.2846 [hep-ph]]; arXiv:1404.4709 [hep-ph]; K. Enqvist, T. Meriniemi and S. Nurmi, JCAP **1310** (2013) 057 [arXiv:1306.4511 [hep-ph]]; M. Fairbairn and R. Hogan, Phys. Rev. Lett. **112** (2014) 201801 [arXiv:1403.6786 [hep-ph]]; K. Enqvist, T. Meriniemi and S. Nurmi, JCAP **1407** (2017) 025 [arXiv:1404.3699 [hep-ph]]; K. Kamada, Phys. Lett. B **742** (2015) 126 [arXiv:1409.5078 [hep-ph]].
- [27] A. Hook, J. Kearney, B. Shakya and K. M. Zurek, JHEP **1501** (2015) 061 [arXiv:1404.5953 [hep-ph]]; M. Herranen, T. Markkanen, S. Nurmi and A. Rajantie, Phys. Rev. Lett. **113** (2014) no.21, 211102 [arXiv:1407.3141 [hep-ph]]; Phys. Rev. Lett. **115** (2015) 241301 [arXiv:1506.04065 [hep-ph]]; J. Kearney, H. Yoo and K. M. Zurek, Phys. Rev. D **91** (2015) 12, 123537 [arXiv:1503.05193 [hep-ph]]; W. E. East, J. Kearney, B. Shakya, H. Yoo and K. M. Zurek, Phys. Rev. D **95** (2017) no.2, 023526 [Phys. Rev. D **95** (2017) 023526] doi:10.1103/PhysRevD.95.023526 [arXiv:1607.00381 [hep-ph]].
- [28] A. Shkerin and S. Sibiryakov, Phys. Lett. B **746** (2015) 257 doi:10.1016/j.physletb.2015.05.012 [arXiv:1503.02586 [hep-ph]].
- [29] J. R. Espinosa, G. F. Giudice, E. Morgante, A. Riotto, L. Senatore, A. Strumia and N. Tetradis, JHEP **1509** (2015) 174 [arXiv:1505.04825 [hep-ph]].
- [30] A. Rajantie and S. Stopyra, Phys. Rev. D **95** (2017) no.2, 025008 doi:10.1103/PhysRevD.95.025008 [arXiv:1606.00849 [hep-ph]].
- [31] K. Enqvist, M. Karciauskas, O. Lebedev, S. Rusak and M. Zatta, JCAP **1611** (2016) 025 doi:10.1088/1475-7516/2016/11/025 [arXiv:1608.08848 [hep-ph]]. Y. Ema, M. Karciauskas, O. Lebedev and M. Zatta, arXiv:1703.04681 [hep-ph].
- [32] O. Czerwinska, Z. Lalak, M. Lewicki and P. Olszewski, JHEP **1610** (2016) 004 doi:10.1007/JHEP10(2016)004 [arXiv:1606.07809 [hep-ph]].
- [33] S. K. Blau, E. I. Guendelman and A. H. Guth, Phys. Rev. D **35** (1987) 1747.
- [34] U. Nucamendi, and M. Salgado, Phys. Rev. D **68** (2003) 044026 doi:10.1103/PhysRevD.68.044026 [gr-qc/0301062].

- [35] A. Salvio, A. Strumia, N. Tetradis, A. Urbano, JHEP 1609 (2016) 054 [arXiv:1608.02555 [hep-ph]].
- [36] G. Isidori, V. S. Rychkov, A. Strumia and N. Tetradis, Phys. Rev. D **77** (2008) 025034 [arXiv:0712.0242 [hep-ph]].
- [37] J. R. Espinosa, G. F. Giudice and A. Riotto, JCAP **0805** (2008) 002 [arXiv:0710.2484 [hep-ph]].