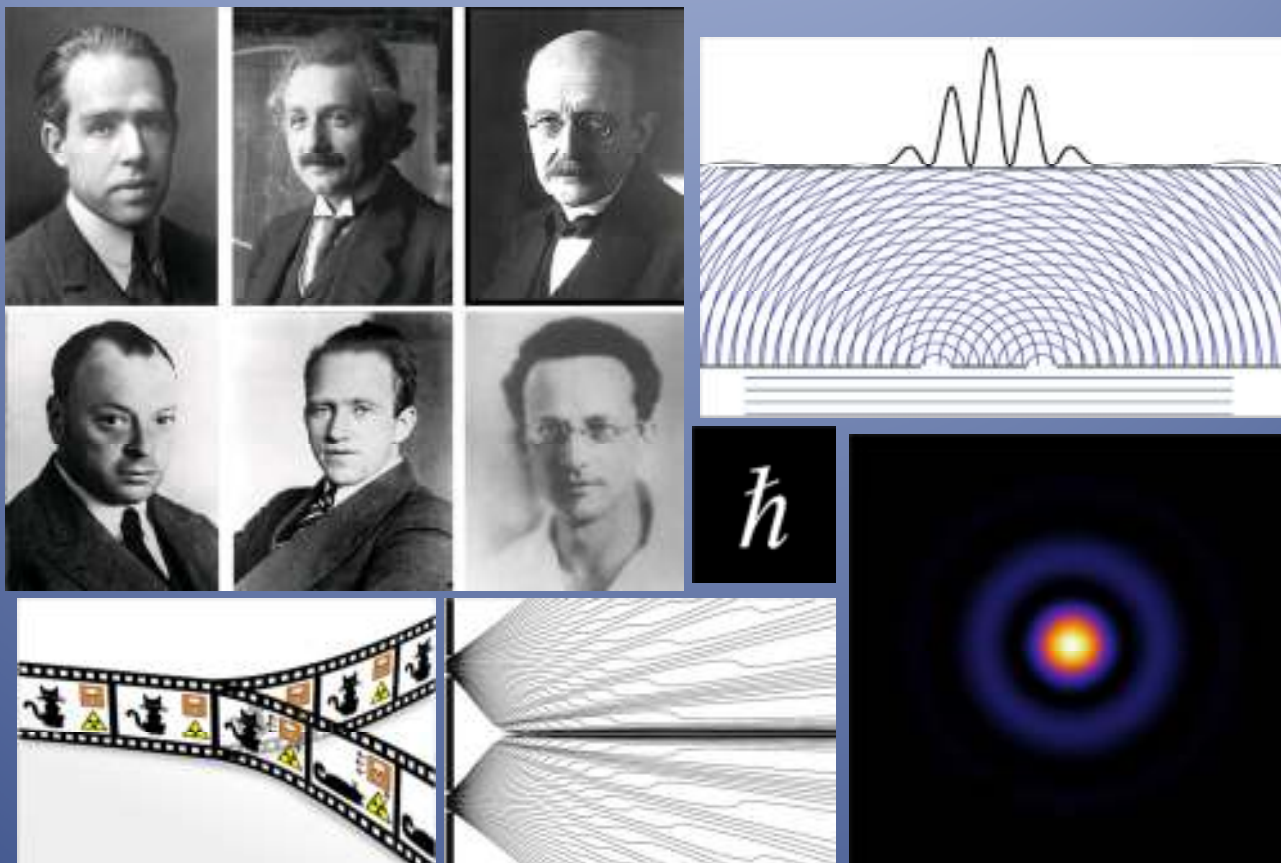


ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

Π.Μ.Σ. ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ



ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΣΤΗΝ ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ:
ΕΡΜΗΝΕΥΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

ΦΟΙΤΗΤΗΣ: ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ, Α.Μ.: 001/15

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΚΑΡΑΚΩΣΤΑΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ, ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΦΥΣΙΚΗΣ,
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ, Ε.Κ.Π.Α.

ΑΘΗΝΑ 2017

Το Πρόβλημα της Μέτρησης στην Κβαντική Μηχανική:
Ερμηνευτικές Προσεγγίσεις και Προοπτικές

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
ΜΕΡΟΣ 1 ^ο : Η ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ Ο ΚΟΣΜΟΣ	
2. Ο ΚΟΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ.....	7
2.1. Από τον Newton στον Hamilton.....	7
2.2. Φιλοσοφικές Αρχές και Δομή της Κλασικής Μηχανικής	12
3. ΠΡΩΤΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΤΟΝ ΚΒΑΝΤΙΚΟ ΚΟΣΜΟ	17
3.1. Πειράματα Stern-Gerlach.....	17
3.2. Πείραμα Διπλής Σχισμής	20
3.3. Κάποια Συμπεράσματα	23
4. Ο ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ	25
4.1. Θεμέλια και Βασικές Αρχές της Κβαντικής Μηχανικής	25
4.1.1. Χώροι Hilbert και Καταστάσεις	25
4.1.2. Τελεστές και Παρατηρήσιμα Μεγέθη	29
4.1.3. Δυναμική Εξέλιξη.....	32
4.1.4. Σύνοψη – Τα Αξιώματα	33
4.2. Συμπληρώματα στον Φορμαλισμό	34
4.2.1. Υπόχωροι και Τελεστές Κατάστασης.....	34
4.2.2. Μικτές Καταστάσεις	36
4.2.3. Σύνθετα Συστήματα	37
4.3. Κβαντική Παραδοξότητα.....	40
4.3.1. Υπέρθεση	40
4.3.2. Ασύμβατα Μεγέθη	41
4.3.3. Σύζευξη	42
4.4. Η Λογική Δομή της Θεωρίας	43
ΜΕΡΟΣ 2 ^ο : Η ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ Η ΟΡΘΟΔΟΞΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ	
5. Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ	49
5.1. Η Μέτρηση στην Κλασική Μηχανική	49
5.2. Ένα Εποπτικό Διάγραμμα.....	50
5.3. Η Διαδικασία της Μέτρησης μέσω του Κβαντικού Φορμαλισμού.....	51
5.4. Κάποιες Ελάχιστες Απαιτήσεις.....	54
5.5. Το Πρόβλημα της Αντικειμενικοποίησης.....	54

5.6. Διάγνωση.....	57
6.Η ΟΡΘΟΔΟΞΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ	61
6.1. von Neumann και Συνείδηση του Παρατηρητή.....	61
6.2. Bohr και Συμπληρωματικότητα	63
6.2.1. Κανόνες Υπερ-επιλογής.....	66
ΜΕΡΟΣ 3 ^ο : ΤΡΙΣ ΔΡΟΜΟΙ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	
7. ΜΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ	71
7.1. Η ιδέα των Κρυμμένων Μεταβλητών	71
7.2. Θεωρήματα No-Go.....	72
7.2.1. Ανισότητες Bell	73
7.2.2. Θεώρημα Kochen - Specker	78
7.3. Η Θεωρία του D. Bohm	81
7.3.1. Αντιμετώπιση του Προβλήματος της Μέτρησης	83
8. ΤΡΟΠΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ.....	87
8.1. Η Προσέγγιση των GRW	87
8.1.1. Αντιμετώπιση του Προβλήματος της Μέτρησης	90
8.2. Τεχνικές Δυσκολίες	91
8.3. Απροσδιοριστία και Τροποποιήσεις της GRW.....	93
8.4. Η Τοπικότητα και πάλι	96
9. ΑΛΛΑΖΟΝΤΑΣ ΤΙΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΜΑΣ.....	99
9.1. Σχετικές Καταστάσεις	99
9.2. Πολλοί Κόσμοι;.....	102
9.2.1. Αντιμετώπιση του Προβλήματος της Μέτρησης	103
9.3. Κάποιες Δυσκολίες της Ερμηνείας.....	104
10. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	107
11. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	111

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Κβαντική Μηχανική αποτελεί αδιαμφισβήτητα μια από τις πλέον επιτυχημένες θεωρίες στην ιστορία ολόκληρης της επιστήμης. Μεγάλο μέρος των τεχνολογικών επιτευγμάτων του περασμένου και αυτού του αιώνα, όπως η τεχνολογία των laser, η επιστήμη των υπεραγώγιμων υλικών ή καινοτομίες στον τομέα της ηλεκτρονικής οφείλονται άμεσα σε αυτή. Πλήθος φαινομένων κατέστη ερμηνεύσιμο εντός του εννοιολογικού της πλαισίου από την σταθερότητα των ατόμων, μέχρι τα φάσματα διαφόρων ατόμων και την δομή του περιοδικού πίνακα των στοιχείων. Σε κάθε έκθεσή της απέναντι στην εμπειρία, οι προβλέψεις της κβαντικής μηχανικής επιβεβαιώθηκαν, ώστε μέχρι και σήμερα παραμένει μια από τις πλέον ακριβείς κι επικυρωμένες θεωρίες.

Έχει, όμως, ένα πολύ μεγάλο «πρόβλημα». Σύμφωνα με τον R. Penrose, αλλά και πολλούς άλλους διακεκριμένους επιστήμονες «δεν βγάζει κανένα απολύτως νόημα». Ο κβαντικός κόσμος παραβιάζει κατά τρόπο πρωτόγνωρο σχεδόν κάθε βασική πεποίθηση που είχαμε –και έχουμε– για την φυσική πραγματικότητα. Ανατρέπει τον παραδοσιακό μεταφυσικό ρεαλισμό, αναθεωρεί τον τρόπο που αντιλαμβανόμαστε την αιτιότητα και μας ωθεί να δεχτούμε την ύπαρξη φαινομένων που παλαιότερα θα θεωρούνταν μέρος της επιστημονικής φαντασίας όπως την «επικοινωνία» συστημάτων που βρίσκονται χωροχρονικά χωρισμένα. Ο μικρόκοσμος αποδεικνύεται ένα εντελώς διαφορετικό πεδίο από τον κόσμο της καθημερινής μας εμπειρίας. Τα αντικείμενά του μπορούν να μένουν ακαθόριστα ως προς τις ιδιότητές τους και να εξελίσσονται με στοχαστικό τρόπο. Δεν είναι καθόλου σαφές πώς η αυτή εικόνα μπορεί να συμβιβαστεί με αυτή των μακροσκοπικών συστημάτων.

Αυτό το πρόβλημα ασυμβατότητας μεταξύ μακρόκοσμου και μικρόκοσμου αποτυπώνεται με τον πιο δραματικό τρόπο στο περίφημο «πρόβλημα της κβαντικής μέτρησης». Η διαδικασία της μέτρησης αποτελεί ουσιαστικά τη γέφυρα που συνδέει τους δύο αυτούς «κόσμους» καθιστώντας τα «απόκρυφα» κβαντικά φαινόμενα εν μέρει προσιτά στην κατανόησή μας. Το πρόβλημα εγείρεται όταν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τους κανόνες της κβαντομηχανικής για να περιγράψουμε την ίδια την διαδικασία της μέτρησης. Αν το μετρούμενο σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση υπέρθεσης, δηλαδή μια κατάσταση στην οποία δεν μπορούμε να του αποδώσουμε μια συγκεκριμένη τιμή για ένα μέγεθος, η αλληλεπίδρασή του με την συσκευή μέτρησης θα έχει σαν αποτέλεσμα και η ίδια η συσκευή να βρεθεί σε μια τέτοια κατάσταση. Αυτό οφείλεται στο γραμμικό χαρακτήρα της δυναμικής εξίσωσης της θεωρίας, ο οποίος διατηρεί με τη σειρά του την γραμμικότητα των υπερθέσεων. Εξαιτίας αυτού η πρόβλεψη της θεωρίας είναι πως ούτε στη συσκευή θα μπορεί να αποδοθεί μια καθορισμένη τιμή μεγέθους μετά την περάτωση της διαδικασίας της μέτρησης. Το συμπέρασμα αυτό είναι φυσικά σε πλήρη ρήξη με την εμπειρία μας, από όπου γνωρίζουμε πως η συσκευή δίνει ένα αυστηρά καθορισμένο αποτέλεσμα.

Το πρόβλημα αυτό είχε ήδη επισημανθεί από τους J. von Neumann και τον P. Dirac κατά την αξιωματική συστηματοποίησης της θεωρίας. Για την επίλυσή του στράφηκαν στην υιοθέτηση ενός επιπλέον αξιώματος, το οποίο όριζε πως η ομαλή εξέλιξη που περιγράφεται από τον δυναμικό νόμο, διακόπτεται στο πλαίσιο των μετρήσεων. Κατά τη διεξαγωγή μιας τέτοια διαδικασίας, το σύστημα περιέρχεται με κάποια πιθανότητα σε μια νέα κατάσταση

που αντιστοιχεί σε ένα καθορισμένο αποτέλεσμα. Αυτός ο «δυϊσμός» διαδικασιών κρίθηκε από πολύ νωρίς ως προβληματικός και αποτέλεσε βασική πρόκληση της έρευνας σε σχέση με τα θεμέλια της θεωρίας να βρεθεί ένας τρόπος να συμβιβαστούν η γραμμικότητα της δυναμικής εξέλιξης που περιγράφεται από τον δυναμικό νόμο της θεωρίας και της μακροσκοπικής πραγματικότητας μετά τη διεξαγωγή μιας μέτρησης.

Στην εργασία αυτή θα εξετάσουμε αυτό το πρόβλημα και ορισμένες από τις βασικότερες προσπάθειες απάντησής του. Στο πρώτο μέρος της εργασίας, θα δώσουμε μια εκτενή περιγραφή της φυσικής θεωρίας που εμπλέκεται. Θα παρουσιάσουμε, αρχικά, το πλαίσιο της κλασικής μηχανικής, το οποίο θα λειτουργήσει ως ένα μέτρο σύγκρισης με το αντίστοιχο της κβαντικής. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ορισμένα γνωστά πειράματα που αναδεικνύουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της κβαντικής θεωρίας με σκοπό να κάνουμε πιο διαισθητικά κατανοητή την τυπική ανάπτυξή του φορμαλισμού, που θα ακολουθήσει. Έχοντας αποκτήσει αυτό το σημαντικό οπλοστάσιο, στο δεύτερο μέρος, θα είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε με περισσότερες λεπτομέρειες καθώς και να διατυπώσουμε με ακρίβεια το πρόβλημα της μέτρησης. Θα μπορέσουμε να το παρουσιάσουμε σε μια πιο τυπική μορφή και θα δούμε τον τρόπο που αντιμετωπίστηκε στα πρώτα χρόνια της ανάπτυξης της θεωρίας. Στο τρίτο μέρος, θα στραφούμε σε διάφορες ερμηνευτικές γραμμές της κβαντικής θεωρίας επικεντρώνοντας την προσοχή μας στο πώς προσπαθούν να αντιμετωπίσουν αυτό το πρόβλημα. Θα εξετάσουμε το τι συνεπάγεται η αποδοχή της κάθε μίας από αυτές για τον κόσμο και αν το εξηγητικό όφελός τους ισοσταθμίζει τις τροποποιήσεις στη θεωρία ή τις αντιλήψεις μας.

ΜΕΡΟΣ 1^ο

Η ΦΥΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ Ο ΚΟΣΜΟΣ

2. Ο ΚΟΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΛΑΣΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

*Nature and Nature's laws lay hid in night:
God said, Let Newton be! and all was light*
Alexander Pope

2.1. Από τον Newton στον Hamilton

Πριν καταπιαστούμε με τον φορμαλισμό και τα εννοιολογικά ζητήματα της κβαντικής θεωρίας είναι απαραίτητο να αναπτύξουμε τα εργαλεία της κλασικής μηχανικής. Αυτό θα μας βοηθήσει με δύο τρόπους. Πρώτον, θα μας επιτρέψει να δούμε πώς το μαθηματικό πλαίσιο της κλασικής μηχανικής γέννησε το αντίστοιχο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας και με ποιο τρόπο παλιές έννοιες μεταφέρονται σε νέες. Με αυτόν τον τρόπο φιλοδοξούμε να καταστήσουμε την ίδια την κβαντική μηχανική πιο προσιτή στην εποπτεία μας. Δεύτερον, παρουσιάζοντας τις μεθοδολογικές και άλλες υπόρρητες αρχές της κλασικής μηχανικής, μπορούμε να δούμε πιο εύκολα την ρήξη που επέρχεται με τις αντίστοιχες αρχές που υιοθετούνται στο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής.

Ιστορικά, η βάση της κλασικής μηχανικής δόθηκε από τον Newton μέσω των τριών νόμων που έθεσε κατά τρόπο αξιωματικό στην αρχή των Principia. Στην μηχανική του Newton, η ύλη χωρίζεται σε σωματίδια, τα οποία κινούνται υπό την επίδραση δυνάμεων και αλληλεπιδρούν μεταξύ τους μέσω δυνάμεων. Τα σωματίδια αυτά βρίσκονται σε συγκεκριμένες θέσεις στο χώρο και διαθέτουν συγκεκριμένες ταχύτητες. Μπορούμε να θεωρήσουμε το κάθε σωματίδιο μεμονωμένα ή πολλά σωματίδια μαζί ως ένα σύστημα Σ . Το σύστημα αυτό θα έχει μια τροχιά στο χώρο που θα περιγράφεται από συνάρτηση $\vec{x}(t)$, μια ταχύτητα $\vec{u}(t)$ και θα δέχεται εξωτερικές δυνάμεις των οποίων το άθροισμα θα είναι μια συνισταμένη δύναμη $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$. Χάρη στο δεύτερο νόμο του Newton:

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{u}}{dt}$$

μπορούμε να προβλέψουμε κάθε μελλοντική θέση και ταχύτητα του συστήματος, αν γνωρίζουμε την θέση και την ταχύτητά του σε μια κάποια χρονική στιγμή t_0 , δηλαδή το παρακάτω σύστημα εξισώσεων δίνει μια μοναδική λύση:

$$\begin{cases} \vec{x}_0 = \vec{x}(t_0) \\ \vec{u}_0 = \vec{u}(t_0) \\ \vec{F} = m \frac{d\vec{u}}{dt} \end{cases}$$

Έτσι, η εξέλιξη του συστήματος στο χρόνο καθορίζεται πλήρως δεδομένης της κατάστασης στην οποία βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Οποιοσδήποτε αποκλίσεις από την θεωρητική πρόβλεψη αποδίδονται στον ελλιπή προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών (βλ. Cushing 1998, σελ. 219-22).

Η Νευτώνεια Μηχανική υπήρξε επιτυχημένη για πολλά χρόνια. Ανεξαρτήτως αυτού όμως, ήδη από τον 18^ο αιώνα έγιναν προσπάθειες συστηματοποίησης της στο πλαίσιο

διαφορετικών αρχών, οι οποίες θα παρείχαν ένα ευρύτερο πλαίσιο από αυτό του Newton. Το αποτέλεσμα αυτών ήταν η ανάπτυξη της λεγόμενης Αναλυτικής Μηχανικής. Είναι βάσει αυτού του φορμαλισμού της μηχανικής που γίνεται το πέρασμα στην κβαντική θεωρία.

Ας θεωρήσουμε ένα σύστημα Σ που αποτελείται από αλληλεπιδρώντα σωματίδια. Το Σ έχει κάποια θέση και ορμή στο χώρο ενώ μπορεί να υπόκειται σε εξωτερικές δυνάμεις (στην πραγματικότητα κανένα σώμα δεν θα μπορεί να είναι πλήρως απομονωμένο, αλλά θα δέχεται οσοδήποτε μικρές επιδράσεις από άλλα συστήματα). Επεξεργαζόμενοι τον νόμο του Newton και ολοκληρώνοντας ως προς την ταχύτητα, μπορούμε να ορίσουμε το μέγεθος της κινητικής ενέργειας, το οποίο εκφράζει το έργο που απαιτείται για να μεταβάλλουμε την ταχύτητα του συστήματος από την ακινησία σε αυτήν που έχει. Στις τρεις διαστάσεις η κινητική ενέργεια είναι ίση με:

$$T = \frac{1}{2} m |\vec{u}|^2 = \frac{1}{2} m (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)$$

όπου m η μάζα του συστήματος (Kibble et al 2004, σελ. 43-5). Αντίστοιχα, όταν η δύναμη στην οποία υποβάλλεται το σώμα είναι διατηρητική, δηλαδή το έργο που παράγει για να μετακινήσει το σύστημα από ένα σημείο στο άλλο δεν εξαρτάται από το είδος της διαδρομής¹, τότε συσχετίζουμε με αυτήν το μέγεθος της δυναμικής ενέργειας:

$$U = \int_{\gamma} \vec{F} d\vec{r} = U(\vec{x}_A) - U(\vec{x}_B)$$

με $\gamma(t)$ την τροχιά που ακολουθεί το σύστημα, για να διέλθει από το σημείο A στο B . Αντίστοιχα, η δύναμη θα δίνεται από την σχέση

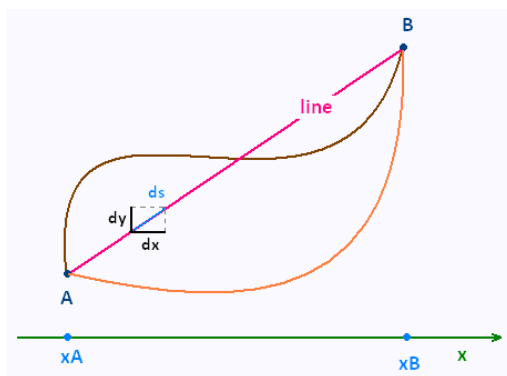
$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right)$$

Έχοντας ορίσει τα μεγέθη T και V , προχωρούμε και ορίζουμε την λαγκρανζιανή συνάρτηση ως την ποσότητα $L = T - V$. Η λαγκρανζιανή εξαρτάται γενικά από την θέση, την ταχύτητα του συστήματος και τον χρόνο, δηλαδή $L := L(x_i(t), \dot{x}_i(t), t)$. Συνήθως, όμως, δεν λαμβάνουμε υπόψη την χρονική εξάρτηση παρά σε περιπτώσεις που το σύστημα βρίσκεται σε ένα εξωτερικό πεδίο (το οποίο δεν έχει ενταχθεί στην λαγκρανζιανή του συστήματος) που εξελίσσεται με το χρόνο (Shankar 1980, σελ. 76). Μέσω της λαγκρανζιανής, ορίζουμε τώρα την δράση:

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i(t), \dot{x}_i(t)) dt$$

η οποία εξαρτάται από τη συνολική διαδρομή $x(t)$ που διανύει το σύστημα στο χώρο. Μεταξύ των διαφόρων δυνατών διαδρομών $x(t)$, υπάρχει μία, έστω $x_0(t)$, η οποία καθιστά τη δράση στάσιμη. Η διαδρομή που ακολουθεί το σύστημα στο χώρο είναι ακριβώς η $x_0(t)$.

¹ Περιπτώσεις τέτοιων δυνάμεων αποτελούν, για παράδειγμα, οι ηλεκτρομαγνητικές και οι βαρυτικές δυνάμεις.



Αποδεικνύεται ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε να ελαχιστοποιείται η δράση είναι να ικανοποιούνται οι λεγόμενες εξισώσεις Euler-Lagrange, οι οποίες είναι ισοδύναμες με τον δυναμικό νόμο του Newton (βλ. Ιωάννου κ.α. 2007, σελ. 36):

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = 0$$

όπου $x_i(t)$ διάφορες συναρτήσεις θέσης από τις οποίες εξαρτάται η λαγκρανζιανή συνάρτηση και $\dot{x}_i(t)$ οι ρυθμοί μεταβολής τους στο χρόνο. Από εδώ ορίζονται δύο γενικευμένες έννοιες ορμής και δύναμης:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \text{ και } F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

όπου $q_i(t)$ αναφέρεται σε συνεταγμένες θέσεις ως προς οποιοδήποτε σύστημα συνεταγμένων.

Αυτός ο φορμαλισμός έχει μεγάλη πρακτική ισχύ σε συγκεκριμένου είδους προβλήματα ενώ αποτελεί ένα γενικό πλαίσιο που μπορεί να εντάξει και την περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων στις οποίες το δυναμικό εξαρτάται και από την ταχύτητα του συστήματος (Shankar 1980, σελ. 79)².

Εδώ, όμως, δεν γίνεται να μας απασχολήσει περισσότερο αυτός ο φορμαλισμός. Εμείς ενδιαφερόμαστε για τον λεγόμενο χαμιλτονιανό φορμαλισμό, καθώς σε αυτόν ουσιαστικά θα βασίσουμε το πέρασμα στην κβαντική θεωρία. Η χαμιλτονιανή προσέγγιση στηρίζεται στην έννοια της χαμιλτονιανής συνάρτησης, η οποία προκύπτει μέσω ενός μετασχηματισμού Legendre επί των p και q της λαγκρανζιανής θεώρησης (ό.π., σελ. 87). Χάρη σε αυτόν, προκύπτει ένα νέο μέγεθος, η χαμιλτονιανή συνάρτηση, που δίνεται από τον τύπο:

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q})$$

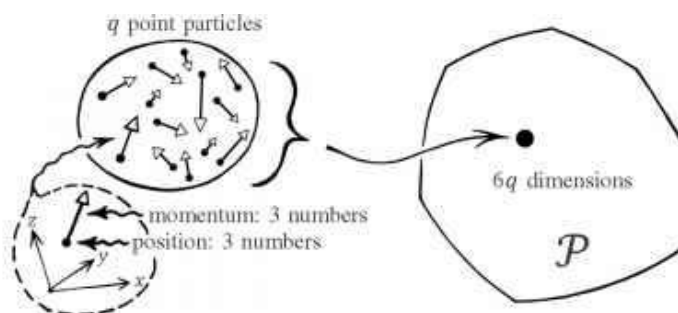
² Η ορμή στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών φαινομένων δεν ταυτίζεται με αυτή της κλασικής μηχανικής $p = mu$, αλλά δίνεται από την σχέση $p = mu + y \times a$. Η λαγκρανζιανή θεώρηση επιτρέπει να αντιμετωπίσουμε και τις δύο περιπτώσεις με έναν ενιαίο τρόπο.

Όπου τα q, p χωρίς δείκτη απλά λειτουργούν σαν συντομεύσεις: η εξάρτηση είναι από τις ορμές και τις θέσεις σε κάθε διάσταση, δηλαδή $p = p(p_1, p_2, \dots, p_N)$. Αποδεικνύεται, ακόμη, ότι $H = T + V$, που ταυτίζεται με την ολική ενέργεια του συστήματος στην περίπτωση που το πεδίο της δύναμης είναι διατηρητικό και το σύστημα είναι αυτόνομο, δηλαδή όταν η κινητική του ενέργεια δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο. (Kibble et al, 2004, σελ. 243)

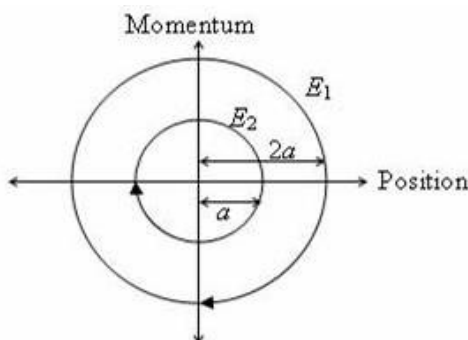
Έχοντας ορίσει την χαμιλτονιανή συνάρτηση H για το σύστημα, μπορούμε να περιγράψουμε την εξέλιξή του χάρη στις εξισώσεις του Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Για τη μελέτη της εξέλιξης του συστήματος χρησιμοποιούμε μια αφηρημένη μαθηματική οντότητα, τον χώρο φάσης, ο οποίος έχει ως βάση τα p και q . Στην περίπτωση ενός σωματιδίου, ο χώρος θα έχει διάσταση ίση με 6 (3 αριθμοί που θα αντιστοιχούν στις συντεταγμένες της θέσης του εκάστοτε σωματιδίου στο χώρο συν 3 αριθμοί που θα αντιστοιχούν στις συντεταγμένες της ορμής του). Για σωματίδια πλήθους N ο χώρος θα έχει διάσταση $6N$.

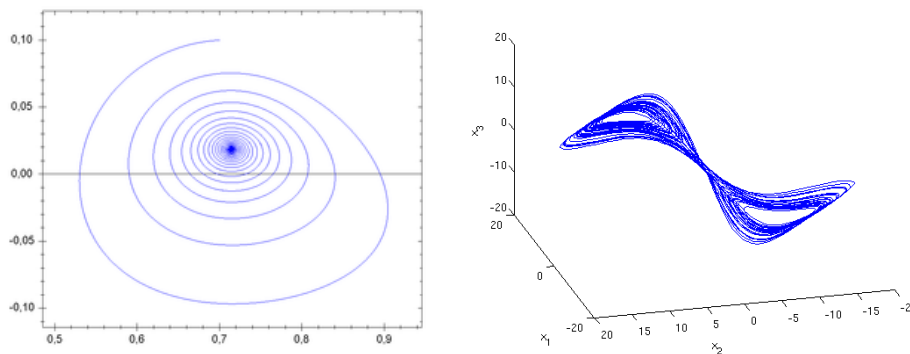


Η κατάσταση του συστήματος s θα αντιστοιχεί σε ένα σημείο του χώρου φάσης, δηλαδή $s := s(q, p)$, ενώ η εξέλιξή του θα περιγράφεται μέσω μιας κατευθυνόμενης καμπύλης. Μια από τις λίγες εύκολα αναπαραστάσιμες περιπτώσεις είναι αυτή του αρμονικού ταλαντωτή, η οποία δίνεται στο παρακάτω διάγραμμα (παίρνουμε μια ειδική περίπτωση όπου οι καμπύλες είναι κυκλικές – εν γένει είναι ελλείψεις)



Οι καμπύλες που δημιουργούνται αποτελούνται από σημεία με το καθένα να αντιστοιχεί σε μια μοναδική κατάσταση του συστήματος. Η κάθε καμπύλη αντιστοιχεί σε μια διαφορετική ολική ενέργεια. Από κάθε σημείο στο χώρο φάσης, μπορούμε να πάρουμε πληροφορίες για την κατάσταση του συστήματος στον φυσικό χώρο. Για παράδειγμα, βλέπουμε πως πάνω στην εξωτερική καμπύλη (τον μεγάλο κύκλο) αρχικά η θέση είναι μέγιστη και η ορμή μηδενική (ο ταλαντωτής είναι σε θέση μέγιστης απομάκρυνσης). Αυτό, όμως, αλλάζει καθώς προχωρούμε κατά τη φορά του βέλους και φθάνουμε σε μια θέση μέγιστης ορμής και μηδενικής θέσης (ο ταλαντωτής είναι στη θέση ισορροπίας).

Και μερικές πιο περίπλοκες περιπτώσεις χώρων φάσης. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει το πλήθος των σωματιδίων τόσο αυξάνουν και οι απαιτούμενες διαστάσεις (εικόνα δεξιά):



Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του χώρου φάσης είναι πως οι καμπύλες φάσης δεν τέμνονται μεταξύ τους. Κάτι τέτοιο θα σήμαινε πως από δεδομένο σημείο του χώρου, δηλαδή από μια δεδομένη κατάσταση, θα μπορούσαν να ακολουθήσουν δύο διαφορετικές μεταξύ τους καταστάσεις. Αυτού του είδους η «απροσδιοριστία» στην εξέλιξη απαγορεύεται στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής. Από δεδομένη κατάσταση s του συστήματος μπορούμε να μεταβούμε σε μια μοναδική νέα κατάσταση s' .

Οποιοδήποτε παρατηρήσιμο μέγεθος A που μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε για το υπό μελέτη σύστημα όπως η κινητική ενέργεια, η στροφορμή κτλ αναπαρίσταται από μια συνάρτηση που παίρνει ορίσματα κατάστάσεις s του χώρου φάσης S και τις αντιστοιχεί σε αριθμούς που ανήκουν στον R^k (με $k = 1$, αν πρόκειται για βαθμωτό μέγεθος) δηλαδή $f_A: S \rightarrow R^k$. Έτσι, για παράδειγμα, η κινητική ενέργεια T ενός συστήματος N σωματιδίων θα δίνεται από την συνάρτηση:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{|\vec{p}_i|^2}{m_i}$$

Η κατάσταση του συστήματος θα καθορίζει πλήρως τις τιμές των αντίστοιχων παρατηρήσιμων μεγεθών. Γνωρίζοντας, με άλλα λόγια, την κατάσταση $s = (q, p)$ στην οποία βρίσκεται το σύστημα, μπορούμε να υπολογίσουμε τι ενέργεια θα έχει, την στροφορμή του και οποιαδήποτε τιμή ενός μεγέθους που μας ενδιαφέρει χωρίς περιορισμό. Εξίσου σημαντικό είναι πως γνωρίζοντας τις καταστάσεις $s_i = (q_i, p_i)$ των υποσυστημάτων που το αποτελούν, λ.χ. των επιμέρους σωματιδίων, μπορούμε να έχουμε μέγιστη πληρότητα για

ολόκληρο το σύστημα. Αν, δηλαδή, γνωρίζουμε τις τιμές των μεγεθών των διαφόρων τμημάτων του συστήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε στη συνέχεια και την τιμή του μεγέθους για ολόκληρο το σύστημα.

2.2. Φιλοσοφικές Αρχές και Δομή της Κλασικής Μηχανικής

Στην ανάλυσή που προηγήθηκε αναφέραμε τις έννοιες «κατάσταση», «σύστημα» και «παρατηρήσιμο μέγεθος» με κάποια ελευθερία. Παρόλο που ένας σαφής ορισμός των εννοιών αυτών είναι δύσκολος και μπορούν να θεωρηθούν πρωταρχικές έννοιες στην συστηματοποίηση της θεωρίας, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια στοιχειώδη επεξήγηση των όρων αυτών ως εξής (βλ. Isham 1995, σελ. 67-9):

Ως **σύστημα** εννοούμε την οντότητα εκείνη (σωματίδιο, σύνολο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν κτλ) που υπόκειται σε συγκεκριμένες μεταβολές φυσικών συμβάντων που παρατηρούμε και στην οποία αποδίδουμε ιδιότητες βάσει συγκεκριμένων τιμών των φυσικών μεγεθών που χαρακτηρίζον το σύστημα.

Ως (παρατηρήσιμο) **μέγεθος** αντιλαμβανόμαστε μια κλάση από ιδιότητες, δηλαδή από αριθμητικές τιμές, τις οποίες το σύστημα μπορεί να φέρει κάθε δεδομένη χρονική στιγμή. Οι τιμές αυτές αντιστοιχίζονται με πραγματικούς αριθμούς ή διανύσματα στον τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$, όταν πρόκειται για διανυσματικά μεγέθη.

Ως **κατάσταση** του συστήματος αντιλαμβανόμαστε το στοιχείο που κωδικοποιεί τις πληροφορίες σχετικά με τις πιθανές τιμές του. Είδαμε πως α) η κατάσταση αντιστοιχίζεται στα σημεία του χώρου φάσης και πως τα διάφορα μεγέθη του συστήματος καθορίζονται βάσει της κατάστασής του. Ακόμη, είδαμε πως β) μέσω των εξισώσεων του Hamilton μπορούμε από την κατάσταση s_1 την χρονική στιγμή t_1 να υπολογίσουμε την κατάστασή του s_2 την χρονική στιγμή t_2 . Αυτές οι δύο διαπιστώσεις αποτελούν τον πυρήνα αυτού που αποκαλούμε **ντετερμινισμό (αιτιοκρατία)** στην κλασική μηχανική (Hughes 1989, σελ. 58).

Ας υποθέσουμε τώρα πως θέλουμε να εξετάσουμε το ενδεχόμενο το μέγεθος A να έχει την τιμή α ή, γενικότερα, μια τιμή που να ανήκει σε ένα σύνολο Δ , υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n, n = 1, 2 \dots^3$, όταν το σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση s του χώρου φάσης S . Θα συμβολίζουμε αυτό το **ερώτημα** ως $(A, \{\alpha\})$ ή, αντίστοιχα, (A, Δ) . Τότε, κάθε κατάσταση ορίζει ένα μέτρο⁴ πιθανότητας, $P_s: Q(S) \times B(R^n) \rightarrow [0,1]$, όπου $Q(S)$ το σύνολο των μεγεθών που αφορούν το σύστημα S . Το μέτρο, λοιπόν, παίρνει στοιχεία της μορφής (A, Δ) και τους αποδίδει τιμές $P_s(A, \Delta)$ εντός του διαστήματος $[0,1]$.

Υπάρχει μια σημαντική διάκριση που μπορούμε να κάνουμε στην έννοια της κατάστασης. Αυτή είναι μεταξύ **καθαρής** και **μικτής** κατάστασης. Ως καθαρές καταστάσεις, θεωρούνται αυτές στις οποίες έχουμε την μέγιστη δυνατή πληροφορία για το σύστημα. Όταν γνωρίζουμε

³ Για την ακρίβεια, των Borel υποσυνόλων του $R^n, B(R^n)$, τα οποία αποτελούν μια οικογένεια υποσυνόλων του R^n με κάποια επιθυμητά χαρακτηριστικά που επιτρέπουν να ορίζουμε μέτρα πιθανότητας.

⁴ Ουσιαστικά μια συνάρτηση που παίρνει ορίσματα από το το σύνολο των Borel υποσυνόλων του R^n και δίνει σαν αποτέλεσμα μια τιμή στο διάστημα $[0,1]$. Μια συνάρτηση $\mu: B(R^n) \rightarrow [0,1]$ είναι μέτρο πιθανότητας όταν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες: i) $\mu(\emptyset) = 0$ και ii) $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$

την καθαρή κατάσταση s του συστήματος, τότε εφόσον μπορούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές όλων των μεγεθών του, μπορούμε να προσδιορίσουμε και την αληθοτιμή όλων των προτάσεων (A, Δ) . Ως μικτές καταστάσεις θεωρούμε εκείνες τις καταστάσεις s που γράφονται ως άθροισμα (προφανώς μη τετριμμένο) άλλων καταστάσεων $\{s_i\}_i$:

$$s = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i$$

με τέτοιο τρόπο ώστε η συνάρτηση πιθανότητάς τους να δίνεται από

$$P_s = \sum_{i=1}^n w_i P_{s_i}$$

και τους συντελεστές w_i να αθροίζουν στην μονάδα: $\sum_{i=1}^n w_i = 1$.

Οι μικτές καταστάσεις, δηλαδή, μας ενημερώνουν για την πιθανότητα w_k να βρούμε το σύστημα σε μια συγκεκριμένη καθαρή κατάσταση – π.χ. την s_k . Αντιπροσωπεύουν, δηλαδή, την άγνοιά μας σχετικά με την καθαρή κατάσταση στην οποία όντως βρίσκεται το σύστημα. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να έχουμε την ρίψη 5 ζαριών (τα 3 εκ των οποίων έχουν 6 πλευρές και τα 2 έχουν 12 πλευρές). Τότε θα γράφαμε για την πιθανότητα να λάβουμε το αποτέλεσμα a επιλέγοντας στην τύχη ένα από τα πέντε ζάρια:

$$P(a) = \frac{3}{5} P_{s_6}(a) + \frac{2}{5} P_{s_{12}}(a)$$

δηλαδή θα αθροίζαμε τις αντίστοιχες πιθανότητες για τα διαφορετικά είδη ζαριού με συγκεκριμένους συντελεστές. Αυτοί θα εξέφραζαν την πιθανότητα να επιλέχθηκε το τάδε ή το δείνα είδος ζαριού. Κάπως ανάλογα, λοιπόν, στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής, οι μικτές καταστάσεις ερμηνεύονται σύμφωνα με την παραδεδομένη αντίληψη περί πιθανότητας ως το μέτρο της άγνοιας μας για το αποτέλεσμα μιας διαδικασίας.

Επειδή, τώρα, υπάρχουν πολλές καθαρές καταστάσεις του συστήματος που θα καθιστούν αληθή μια πρόταση (A, Δ) , μπορούμε να ορίσουμε υποσύνολα του φασικού χώρου S , τα οποία θα περιλαμβάνουν όλες εκείνες τις καταστάσεις που καθιστούν την εκάστοτε πρόταση αληθή, δηλαδή:

$$S_{A \in \Delta} = f_A^{-1}(\Delta) = \{s \in S : f_A(s) \in \Delta\}$$

Σε τυπικό λογικό πλαίσιο, για όλες αυτές τις καταστάσεις αληθεύει η πρόταση Π : «η τιμή του συστήματος για το μέγεθος A ανήκει στο διάστημα Δ ». Ορίζεται, λοιπόν, η αντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση⁵ $\chi_{A \in \Delta} : S \rightarrow \{0,1\}$ στα στοιχεία του χώρου των φάσεων:

⁵ Η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_A ενός συνόλου A , υποσυνόλου ενός ευρύτερου συνόλου Ω είναι η συνάρτηση που αντιστοιχεί τα στοιχεία του Ω στις τιμές 1 ή 0 ανάλογα με το αν ανήκουν στο A ή όχι. Ουσιαστικά λειτουργεί ως ένας δείκτης που μας λέει ποια στοιχεία ανήκουν σε ένα σύνολο και ποια όχι.

$$\chi_{A \in \Delta} = \begin{cases} 1 & \text{αν } A(s) \in \Delta \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

κι εντελώς ισοδύναμα ορίζεται μια χαρακτηριστική συνάρτηση για προτάσεις σαν την Π , η οποία λαμβάνει τιμή 1 όταν η Π είναι αληθής και 0 όταν είναι ψευδής:

$$\chi_{\Pi} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \Pi \text{ αληθής} \\ 0 & \text{αν } \Pi \text{ ψευδής} \end{cases}$$

Είναι εμφανές πως πολλές διαφορετικές τέτοιες προτάσεις μπορούν να αντιστοιχούν σε ένα υποσύνολο καταστάσεων του χώρου φάσης. Για παράδειγμα, η πρόταση «το σωματίδιο μάζας 1 kg έχει ορμή $2 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ » αντιστοιχεί στο ίδιο υποσύνολο με την πρόταση «το σωματίδιο έχει κινητική ενέργεια ίση με $4J$ ».

Πολλές διαφορετικές προτάσεις, λοιπόν, Π, P, Σ κτλ μπορούν να αντιστοιχούν σε κάποιο υποσύνολο του χώρου φάσης. Οι προτάσεις αυτές θα λέγονται φυσικώς ισοδύναμες. Κάθε υποσύνολο του χώρου φάσης θα αντιστοιχίζεται και σε μια κλάση από προτάσεις τύπου (A, Δ) . Υφίσταται, λοιπόν, μια αντιστοιχία μεταξύ προτάσεων και υποσυνόλων του χώρου φάσης, το οποίο κάνει τη δομή του πρώτου συνόλου ισομορφική με αυτή του δεύτερου. Έτσι, το σύνολο των προτάσεων της κλασικής μηχανικής έχει την δομή ενός πεδίου συνόλων (δηλαδή ενός συνόλου συνόλων εφοδιασμένο με τις σχέσεις τομής, ένωσης κτλ). Εξαιτίας αυτού το σύνολο προτάσεων της κλασικής μηχανικής αποκτά τη δομή μιας άλγεβρας Boole (Isham 1995, σελ. 75-7).

Οι λογικοί σύνδεσμοι των προτάσεων αντιπροσωπεύονται από τις συνολοθεωρητικές πράξεις μεταξύ των υποσυνόλων του χώρου φάσης. Έτσι, έχουμε:

- 1) Ο λογικός σύνδεσμος $\wedge$ (ΚΑΙ) αντιστοιχεί στην πράξη της τομής δύο συνόλων, δηλαδή αν έχουμε τις κλάσεις προτάσεων Π και P , η κλάση $\Pi \wedge P$ αντιστοιχεί στο σύνολο $S_{\Pi} \cap S_P$.
- 2) Ο λογικός σύνδεσμος $\vee$ (Η) αντιστοιχεί στην πράξη της ένωσης, οπότε για τις Π και P έχουμε πως η $\Pi \vee P$ αντιστοιχεί στο $S_{\Pi} \cup S_P$.
- 3) Ο λογικός σύνδεσμος $\neg$ (ΟΧΙ) αντιστοιχεί στο συμπλήρωμα του αντίστοιχου συνόλου, δηλαδή για την Π , το αντίστοιχο σύνολο είναι το $S_{\Pi}^c = S - S_{\Pi}$.
- 4) Η λογική σχέση της συνεπαγωγής $\Rightarrow$ έχει το ανάλογο της στη σχέση του «περιέχεται», δηλαδή η πρόταση Π συνεπάγεται την P , $\Pi \Rightarrow P$, όταν το σύνολο S_P είναι ένα υποσύνολο του S_{Π} .

Οι σχέσεις των προτάσεων έχουν την ίδια δομή με τις σχέσεις των αντίστοιχων συνόλων, οπότε για δύο προτάσεις ισχύουν ιδιότητες όπως η επιμεριστικότητα:

$$\Pi \wedge (P \vee \Sigma) = (\Pi \wedge P) \vee (\Pi \wedge \Sigma)$$

δηλαδή η απόδοση μιας συγκεκριμένης τιμής για ένα μέγεθος όπως η θέση είναι πλήρως συμβατή με την απόδοση μιας συγκεκριμένης τιμής και για οποιαδήποτε άλλο μέγεθος.

Συνοπτικά, λοιπόν, ο κόσμος της κλασικής μηχανικής είναι ένας κόσμος καθορισμένων ιδιοτήτων, τις οποίες μπορούμε να γνωρίσουμε επί της αρχής χωρίς κανέναν περιορισμό. Το κάθε σύστημα είναι ένα πλήρως ανεξάρτητο, τουλάχιστον κατ'αρχήν, αντικείμενο μελέτης που βρίσκεται σε αυστηρά καθορισμένες καταστάσεις, οι οποίες καθορίζουν πλήρως τις τιμές όλων των μεγεθών του. Οποιαδήποτε μέτρηση διαταράσσει το σύστημα κατά τρόπο που είναι κατ'αρχήν απαλείψιμος και σαν αποτέλεσμα, η διαδικασία απλώς φανερώνει την ιδιότητα που αυτό φέρει. Η εξέλιξη της κατάστασης του συστήματος είναι μια διαδικασία που οδηγεί σε συγκεκριμένη κατάσταση δεδομένης της υπάρχουσας. Η γνώση όλων των ιδιοτήτων όλων των συστημάτων – πραγμάτων του κόσμου είναι εφικτή με μόνο περιορισμό τις ανθρώπινες δυνατότητες.

Μπορούμε να ισχυριστούμε πως στην κλασική μηχανική ισχύουν οι εξής παραδοχές (βλ. και Καρακώστας 2012, σελ. 48-50):

α) Αρχής των Καθορισμένων Τιμών: κάθε σύστημα ανά πάσα στιγμή έχει πλήρως καθορισμένες τιμές για όλα τα μεγέθη του.

β) Μη Πλαισιακότητα: Η τιμή ενός μεγέθους του συστήματος είναι πλήρως ανεξάρτητη από τον τρόπο που αυτή μετράται.

γ) Διαχωρισσιμότητα: Η κατάσταση ενός σύνθετου συστήματος Σ , το οποίο αποτελείται από χωροχρονικά διαχωρισμένα υποσυστήματα $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ καθορίζεται πλήρως από τις (μεμονωμένα καλώς ορισμένες) καταστάσεις των υποσυστημάτων και των μεταξύ τους σχέσεων.

Θα δούμε λίγο αργότερα την ιδιαίτερη σημασία που έχουν όλα αυτά στη διαδικασία της μέτρησης και στο πώς οδηγούν σε μια πλήρη διάκριση μεταξύ της κλασικής και της κβαντικής περίπτωσης.

3. ΠΡΩΤΗ ΕΠΑΦΗ ΜΕ ΤΟΝ ΚΒΑΝΤΙΚΟ ΚΟΣΜΟ

*I think I can safely say that
nobody understands Quantum Mechanics*

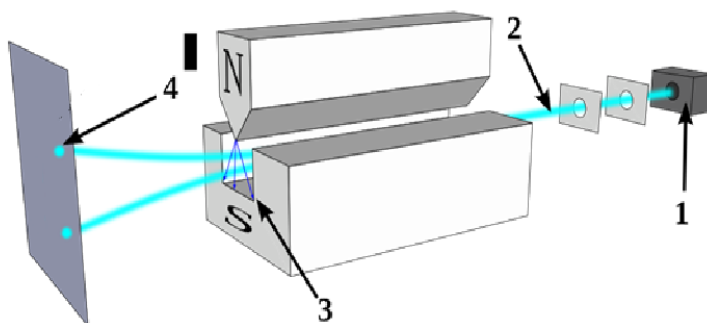
R. Feynman

Προτού καταπιαστούμε με μια πιο τυπική ανάπτυξη της κβαντικής θεωρίας στη βάση του μαθηματικού της φορμαλισμού, θα προσπαθήσουμε να εξοικειωθούμε με τον καινοτόμο χαρακτήρα της μέσω της ανάλυσης ορισμένων πειραμάτων. Τα πειράματα αυτά θα μας βοηθήσουν να αντιληφθούμε πολύ πιο εύκολα έννοιες που θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο (και ιδιαίτερα την §4.3) ενώ θα αποκαλύψουν και τον ιδιαίτερο ρόλο που διαδραματίζει η μέτρηση στο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής. Αυτό θα προετοιμάσει το δρόμο για την αντίστοιχη συζήτηση που θα αναπτύξουμε στο κεφάλαιο 5.

3.1. Πειράματα Stern – Gerlach

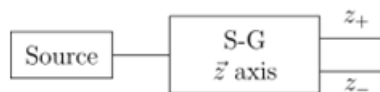
Στα πειράματα τύπου Stern – Gerlach [SG] μια δέσμη σωματιδίων (συνήθως ουδέτερα φορτισμένων) κατευθύνεται σε ένα προσανατολισμένο μαγνητικό πεδίο εξαιτίας του οποίου τα σωματίδια χωρίζονται σε δύο διακριτές δέσμες βάσει της τιμής του σπιν. Το σπιν S είναι αμιγώς κβαντικό μέγεθος και αντιστοιχεί στην εσωτερική στροφορμή των σωματιδίων (Shankar 1980, σελ. 373-4). Το σπιν μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές, αλλά πάντοτε διακριτές (π.χ. $-1/2, +1/2$ ή $-1, 0, 1$), οι οποίες εξαρτώνται από το είδος του σωματιδίου. Η τιμή του σπιν δεν αυξομειώνεται. Από την άλλη, το σπιν μπορεί να έχει διαφορετικές κατευθύνσεις, δηλαδή να είναι προσανατολισμένο παράλληλα ή αντιπαράλληλα προς κάποιον εκάστοτε άξονα. Για τους άξονες του τρισδιάστατου χώρου, γράφουμε το σπιν ως S_x, S_y, S_z . Το σπιν καμιά φορά παραλληλίζεται με την ιδιοπεριστροφή του σωματιδίου. Όμως, η εικόνα αυτή είναι εν πολλοίς παραπλανητική στο βαθμό που ξεφεύγει από το τυπικό μαθηματικό σκέλος.

Για τα πειράματα που θα μελετήσουμε στη συνέχεια, θα θεωρήσουμε πως για τα σωματίδια που εμπλέκονται το σπιν τους μπορεί να πάρει την τιμή $-1/2$ ή $+1/2$ κατά μήκος των τριών αξόνων του χώρου x, y, z . Μπορούμε πολύ απλά να σκεφτούμε το σπιν ως ένα αφηρημένο μέγεθος και να αποδώσουμε (όπως κάνει π.χ. ο Albert 1992, σελ.1-16) σε κάθε διαφορετική διεύθυνση του σπιν μια ονομασία όπως σκληρότητα ή χρώμα. Ας προχωρήσουμε τώρα σε μια περιγραφή μιας συσκευής τύπου SG με τη βοήθεια του παρακάτω σχήματος:

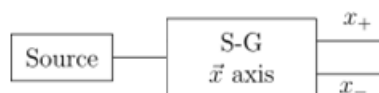


Στη μία άκρη (1) βρίσκεται η πηγή που εκπέμπει τα σωματίδια ενώ στην άλλη (4) υπάρχει μια πλάκα καταγραφής. Τα διαδοχικά σωματίδια δημιουργούν μια δέσμη (2) που κατευθύνεται προς το μη ομογενές μαγνητικό πεδίο (3). Εκεί το κάθε σωματίδιο εκτρέπεται προς μια διαφορετική κατεύθυνση ανάλογα με το σπιν του και καταλήγει τελικά σε μια συγκεκριμένη περιοχή της πλάκας (4).

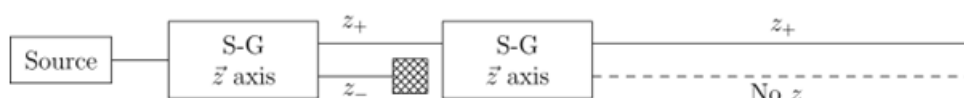
Με όλα αυτά κατά νου, ας εξετάσουμε τώρα ορισμένες περιπτώσεις μετρήσεων με χρήση συσκευών SG. Έστω λοιπόν πως έχουμε μια δέσμη σωματιδίων. Ας υποθέσουμε τώρα πως στέλνουμε το κάθε σωματίδιο μεμονωμένα σε μια συσκευή SG που μετρά το σπιν στον άξονα z . Τότε, βάσει της κατεύθυνσης του σπιν του θα εξέρχεται από τη συσκευή είτε από την μία είτε από την άλλη πύλη. Αυτό απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα:



Μια αντίστοιχη εικόνα θα είχαμε, αν η συσκευή SG μετρούσε το σπιν του ηλεκτρονίου στην διεύθυνση ενός άλλου άξονα όπως π.χ. του x :

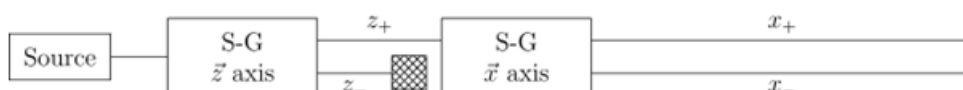


Ας υποθέσουμε τώρα πως μετά τη συσκευή SG που μετράει το σπιν στη διεύθυνση του άξονα z τοποθετούμε μια ακόμη πανομοιότυπη συσκευή SG που δέχεται την μια από τις δύο δέσμες σωματιδίων που προκύπτουν – π.χ. αυτή που βγαίνει από την πύλη με θετικό σπιν. Τότε, το αποτέλεσμα θα είναι:



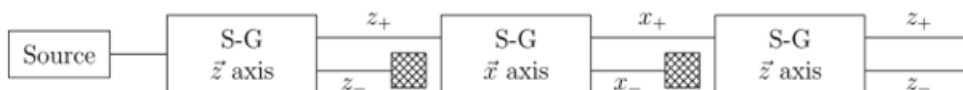
Δηλαδή, όλα τα σωματίδια θα εξέρχονται και πάλι από την πύλη που αντιστοιχεί στο σπιν που μετρήθηκε αρχικά ενώ ούτε ένα δεν θα εμφανίζεται να περνά από την άλλη πύλη. Η διεξαγωγή μιας μέτρησης παρόμοιας προς την αρχική επιβεβαίωσε το αποτέλεσμα που λάβαμε εξ αρχής.

Ας υποθέσουμε τώρα πως αντί για μια πανομοιότυπη συσκευή, θέτουμε μια συσκευή που μετράει το σπιν κατά μήκος ενός άλλου άξονα, του x . Τότε, τα αποτελέσματα αυτής της μέτρησης θα είναι:



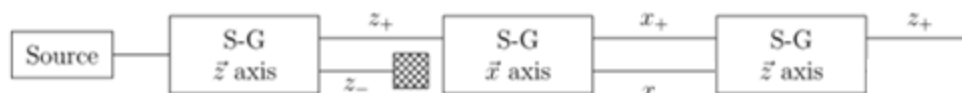
Δηλαδή τα σωματίδια θα εξέρχονται είτε από την μια είτε από την άλλη πύλη με ίση συχνότητα εμφανίσεων. Αυτό είναι διαισθητικά εύλογο: το ότι ξέρουμε πως μπορούμε να αποδώσουμε μια συγκεκριμένη τιμή μεγέθους σε ένα σύστημα δεν σημαίνει πως θα γνωρίζουμε κάτι για την τιμή ενός διαφορετικού μεγέθους.

Τώρα, ας κάνουμε μια τελευταία προσθήκη σε αυτή τη διαδικασία. Ας πάρουμε τη μια δέσμη σωματιδίων και ας την αναγκάσουμε να διέλθει από μια πρόσθετη συσκευή SG παρόμοια με την πρώτη συσκευή μέτρησης. Προτού πληροφορηθούμε τα αποτελέσματα, ας σκεφτούμε τι θα έπρεπε να αναμένουμε. Αν προηγουμένως είχαμε μετρήσει το σπιν μόνο στον άξονα των x , δε θα μπορούσαμε να πούμε κάτι για το σπιν στον άξονα των z . Όμως, η πρώτη συσκευή που πέρασαν τα σωματίδια μετρούσε το σπιν ακριβώς στον ίδιο άξονα με την τελευταία και μάλιστα ξέρουμε πως όλα τα σωματίδια που πέρασαν από την δεύτερη ανήκαν στην ακτίνα που αντιστοιχούσε στην τιμή z_+ . Αναμένουμε, λοιπόν, πως εφόσον η δεύτερη μέτρηση δεν προκαλεί κάποιου είδους διαταραχή στο κάθε σωματίδιο, το σπιν που θα μετρηθεί και στην τελευταία συσκευή θα είναι z_+ . Όμως, εκτελώντας το πείραμα παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:



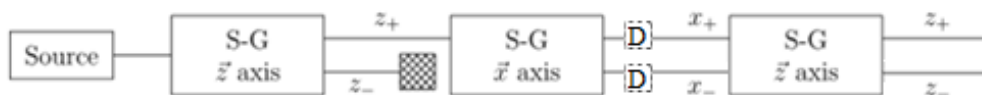
Τα σωματίδια εξέρχονται είτε από την μια είτε από την άλλη πύλη ως εάν να μην έχουν όλα την ίδια τιμή σπιν! Σε πλήρη ρήξη με όσα πιστεύαμε, τα ηλεκτρόνια φαίνεται να μην έχουν την τιμή σπιν που μας έδειξε η πρώτη μέτρηση. Τι μπορεί να ευθύνεται για αυτήν την αλλαγή; Είναι δυνατόν η μέτρηση του σπιν στον άξονα των x να επηρέασε το αποτέλεσμα της τελικής μας μέτρησης;

Ας εκτελέσουμε τώρα δύο παραλλαγές αυτών των πειραμάτων. Ας υποθέσουμε πως μετά την εκτέλεση της μέτρησης του σπιν κατά τον άξονα x ενώνουμε τις δέσμες των σωματιδίων που εξέρχονται από την συσκευή SG πριν τις στείλουμε στην τρίτη συσκευή. Τότε παίρνουμε:



Δηλαδή όλα τα σωματίδια εξέρχονται τώρα από την πύλη που αντιστοιχεί στην τιμή που είχαμε διαπιστώσει πως έχουν από την πρώτη μέτρηση! Πώς μπορεί να συνέβη κάτι τέτοιο; Είναι δυνατό η επανένωση των δύο δεσμών να είχε σαν αποτέλεσμα την απαλοιφή της διαταραχής που προκάλεσε η δεύτερη μέτρηση;

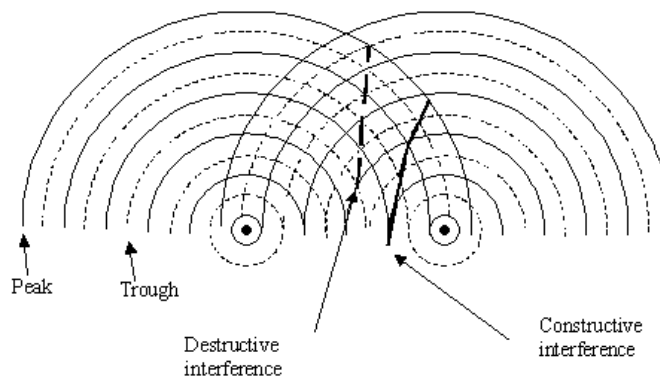
Ας προσπαθήσουμε να μάθουμε τι ακριβώς συμβαίνει τοποθετώντας δύο ανιχνευτές μετά τις πύλες του δεύτερου μετρητή, οι οποίοι μετρούν τον αριθμό των σωματιδίων που περνούν από την κάθε πύλη. Σε αυτήν την περίπτωση, κάτι πολύ παράδοξο συμβαίνει:



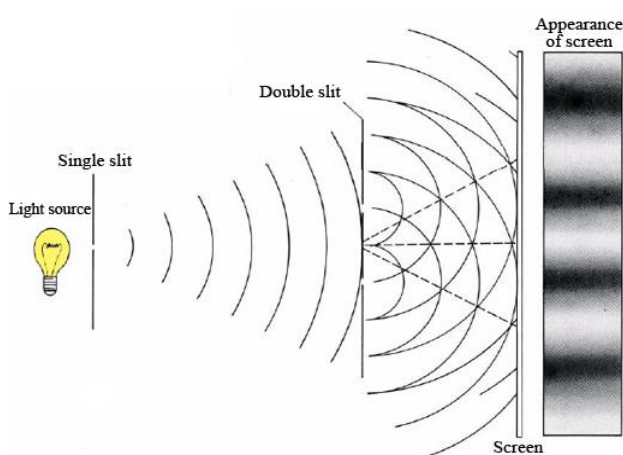
Τα σωματίδια εξέρχονται και πάλι από τις δύο πύλες με ίση συχνότητα. Η ανίχνευση των ηλεκτρονίων μετά τη δεύτερη μέτρηση φαίνεται να επανέφερε τη διαταραχή που είχαμε διαπιστώσει νωρίτερα!

3.2. Πείραμα της Διπλής Σχισμής

Ας υποθέσουμε πως ρίχνουμε δύο βότσαλα σε σχετικά κοντινή απόσταση στο νερό μιας λίμνης που ηρεμεί. Το κάθε βότσαλο δημιουργεί μικρά κύματα πάνω στο νερό, τα οποία μεταδίδονται ως ολοένα και μεγαλύτεροι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το σημείο της πτώσης. Τα κύματα που δημιουργούνται από κάθε πηγή συμβάλλουν, δηλαδή



συναντώνται σε διάφορα σημεία της επιφάνειας. Σε κάποια από αυτά η συμβολή τους έχει σαν αποτέλεσμα το πλάτος του ταλαντούμενου σημείου να μεγαλώνει και σε κάποια να μικραίνει ενώ υπάρχουν σημεία που η συμβολή γίνεται μέγιστη και σημεία που γίνεται ελάχιστη. Αυτό έχει να κάνει με τον συντονισμό της συχνότητας των δύο κυμάτων. Αν σε ένα σημείο και τα δύο κύματα βρίσκονται σε θέση μέγιστου πλάτους προς την ίδια κατεύθυνση, έχουμε μέγιστη συμβολή. Στην περίπτωση που βρίσκονται σε αντίθετες κατευθύνσεις, έχουμε καταστροφική συμβολή: το σημείο ακινητοποιείται.



Γνωρίζουμε από την οπτική του 18^{ου} αιώνα ότι το φως παρουσιάζει κυματικό χαρακτήρα. Πειράματα που διεξήγαγε ο Young έδειξαν πως φαινόμενα όπως η συμβολή και συναντώνται και στην περίπτωση του φωτός. Ένα από αυτά τα πειράματα ήταν το λεγόμενο πείραμα της διπλής σχισμής, που φαίνεται στην διπλανή εικόνα:

Σε αυτό, φως από μια πηγή κατευθύνεται σε ένα παραπέτασμα που φέρει δύο

σχισμές επαρκώς⁶ μικρού μεγέθους. Όταν συναντήσει το παραπέτασμα, το κύμα περνά και από τις δύο σχισμές δημιουργώντας φαινόμενα συμβολής κατά τον τρόπο που είδαμε στη μελέτη των κυμάτων στην επιφάνεια του νερού. Έτσι, κάποιες περιοχές της οθόνης θα είναι

⁶ Για να είναι δυνατό να ανιχνευθεί το φαινόμενο θα πρέπει το πλάτος της σχισμής να είναι συγκρίσιμο με το μήκος κύματος του κύματος.

περισσότερο φωτισμένες από άλλες, με ορισμένες, μάλιστα, να εμφανίζουν μέγιστη (και αντίστοιχα άλλες ελάχιστη) φωτεινότητα.

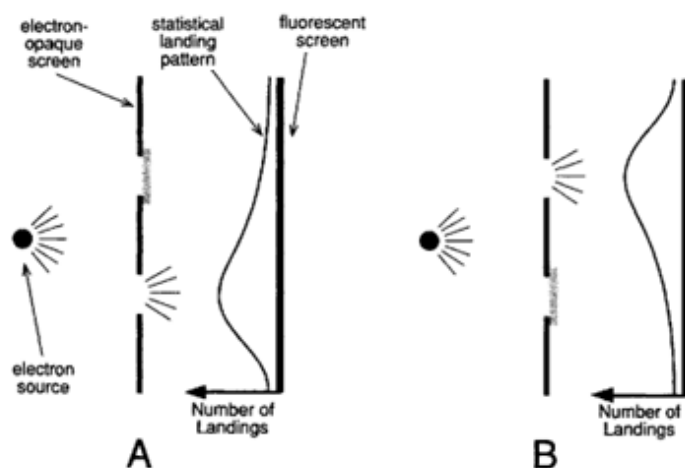
Μετά την εργασία του de Broglie ο κυματικός χαρακτήρας επεκτάθηκε σε ολόκληρη την φύση. Σύμφωνα με την υπόθεση του, δεν είναι μόνο το φως, τα φωτόνια που συμπεριφέρονται κυματικά, αλλά ακόμη και τα υλικά σωματίδια όπως τα ηλεκτρόνια. Το πείραμα της διπλής σχισμής αποτέλεσε ένα από τα πρώτα νοητικά πειράματα που ανέδειξαν τον παράδοξο χαρακτήρα της νέας θεωρίας. Από την δεκαετία του 1970 κατέστη εφικτό να εκτελεστούν τα πειράματα και στην πράξη.

Υποθέτουμε πως έχουμε μια πηγή που διαδοχικά εκπέμπει μεμονωμένα σωματίδια λ.χ. ηλεκτρόνια. Τα ηλεκτρόνια κατευθύνονται, όπως και στην περίπτωση του αντίστοιχου πειράματος με το φως, σε ένα παραπέτασμα που διαθέτει δύο σχισμές από τις οποίες αυτά μπορούν να διέλθουν, ώστε να φτάσουν σε μια οθόνη. Η περιοχή της οθόνης στην οποία φτάνει το ηλεκτρόνιο φωτίζεται αποκαλύπτοντας του πού κατέληξε το ηλεκτρόνιο στο τέλος της διαδρομής του.

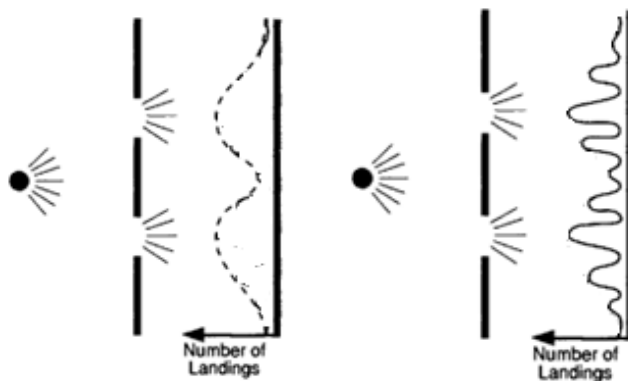
Ακολουθώντας την εικόνα που έχουμε για τον κόσμο από την κλασική μηχανική θεωρούμε πως για κάθε ηλεκτρόνιο που αποστέλλει η πηγή στο παραπέτασμα ένα από τα τρία ενδεχόμενα θα λάβει χώρα:

- α) Το ηλεκτρόνιο θα συγκρουστεί με τα τοιχώματα του παραπετάσματος και θα σταματήσει την πορεία του. Σε αυτήν την περίπτωση, τίποτα δεν θα εντοπιστεί στην οθόνη.
- β) Το ηλεκτρόνιο θα περάσει από την μία σχισμή, ας την ονομάσουμε Α, και θα εντοπιστεί στην περιοχή της οθόνης που βρίσκεται πίσω από αυτήν.
- γ) Το ηλεκτρόνιο θα περάσει από την άλλη σχισμή, ας την ονομάσουμε Β, και θα εντοπιστεί στην περιοχή της οθόνης που αντίστοιχα βρίσκεται πίσω από αυτήν.

Σύμφωνα με αυτήν την εικόνα, αν αφήσουμε ανοικτή μόνο μια από τις δύο σχισμές, δηλαδή είτε την σχισμή Α, είτε την σχισμή Β, τότε τα ηλεκτρόνια θα συσσωρεύονται κυρίως στις περιοχές της οθόνης που βρίσκονται πίσω από αυτές. Έτσι, θα έχουμε την εξής εικόνα (αντίστοιχα για κάθε περίπτωση):

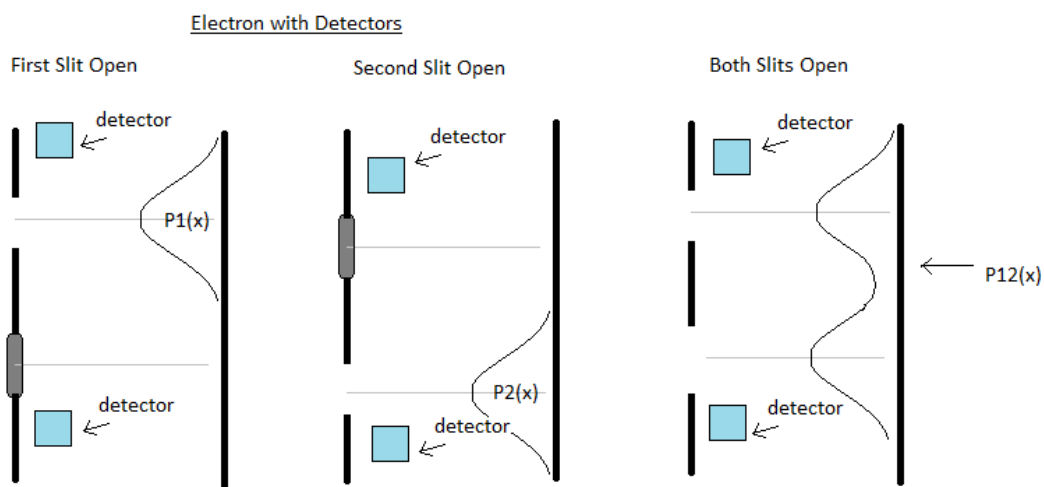


Δεν είναι δύσκολο να προβλέψουμε την εικόνα στην περίπτωση που είναι ανοικτές και οι δύο σχισμές του παραπετάσματος. Θεωρούμε πως το αποτέλεσμα θα είναι ένα «άθροισμα» των επιμέρους πειραμάτων (αριστερή εικόνα) δηλαδή τα ηλεκτρόνια θα συγκεντρώνονται κυρίως στις περιοχές της οθόνης που βρίσκονται πίσω από τις δύο σχισμές.



Όμως, εδώ ακριβώς έρχεται η μεγάλη ρήξη με την εικόνα που είχαμε από την κλασική μηχανική. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων που προκύπτουν είναι τελείως διαφορετικά (δεξιά εικόνα). Τα σωματίδια δεν συγκεντρώνονται κυρίως σε δύο περιοχές της οθόνης, αλλά παρουσιάζουν μια πολύ πιο περίπλοκη κατανομή. Υπάρχουν περιοχές στις οποίες ο αριθμός σωματιδίων που καταφτάνουν είναι μέγιστος και περιοχές στις οποίες ο αριθμός αυτός είναι ελάχιστος. Υπάρχουν φυσικά κι ενδιάμεσες περιοχές όπου ο αριθμός σωματιδίων είναι μεταξύ των δύο αυτών ακραίων τιμών. Η εντυπωσιακή παρατήρηση είναι πως το μοτίβο των πυκνωμάτων και αραιωμάτων πάνω στην οθόνη θυμίζει αυτό του φωτός στην περίπτωση των πειραμάτων του Young. Τα ηλεκτρόνια συμβάλλουν ως κύματα!

Το άκρως εντυπωσιακό στοιχείο και σε αυτά τα πειράματα είναι πως αν θέσουμε ανιχνευτές ηλεκτρονίων πίσω από τις σχισμές του παραπετάσματος η εικόνα συμβολής χάνεται. Κι εδώ η μέτρηση του συστήματος αλλοιώνει το αποτέλεσμα:



3.3. Κάποια Συμπεράσματα

Τι διδάγματα πρέπει να πάρουμε από την ανάλυση των παραπάνω πειραμάτων προτού στραφούμε στην ανάπτυξη του φορμαλισμού; Συνολικά μπορούμε να πούμε πως διαπιστώσαμε τα εξής:

α) Στην κβαντική μηχανική φαίνεται να υπάρχουν μετρήσεις που αποκλείουν η μια την άλλη. Η μέτρηση ενός μεγέθους B μετά τη μέτρηση ενός μεγέθους A αναιρεί το αποτέλεσμα της προηγηθείσας διαδικασίας. Δηλαδή, η απόδοση μιας τιμής για το A στο σωματίδιο παύει να ισχύει μετά από μια μέτρηση για το B .

β) Φαίνεται να υπάρχουν καταστάσεις οι οποίες ενώ δεν αντιστοιχούν σε μια καθορισμένη τιμή ενός μεγέθους A , αντιστοιχούν σε μια καθορισμένη τιμή του μεγέθους B . Η διεξαγωγή μιας μέτρησης σε ένα σωματίδιο που είναι σε μια τέτοια κατάσταση, όμως, είναι ικανή να απαλείψει αυτό το χαρακτηριστικό.

γ) Υπάρχουν περιπτώσεις που η μέτρηση δεν φαίνεται να επηρεάζει το αποτέλεσμα κι επαναλαμβανόμενες εκτελέσεις της συμφωνούν πάντα στην αποδιδόμενη τιμή.

Με οδηγό αυτές τις διαπιστώσεις θα προσπαθήσουμε τώρα να παρουσιάσουμε τυπικά την κβαντική θεωρία και να δούμε πώς ακριβώς μεταφράζονται αυτές οι παρατηρήσεις σε μαθηματική γλώσσα.

4. Ο ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΒΑΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

*Repetition is reality,
and it is the seriousness of life*
Søren Kierkegaard

4.1 Θεμέλια και Βασικές Αρχές της Θεωρίας

Η αξιωματική παρουσίαση της κβαντικής θεωρίας βασίζεται σε μια σειρά από μαθηματικές θεωρίες όπως η συναρτησιακή ανάλυση, η θεωρία τελεστών, η θεωρία μέτρου κ.ά. Στη βάση της βρίσκεται η έννοια του χώρου Hilbert. Ένα πρόβλημα του φορμαλισμού είναι η πολύ αφηρημένη μορφή του, η οποία δεν επιτρέπει μια πιο διαισθητική κατανόηση των εννοιών που εμπλέκονται. Έτσι, όπου είναι δυνατό θα προσπαθούμε να δώσουμε μια πιο οικεία εικόνα για το ζήτημα που αναπτύσσεται προτάσσοντας το ανάλογο στοιχείο που βρίσκουμε στην κλασική μηχανική. Η ανάλυση των κλασικών πειραμάτων στην προηγούμενη ενότητα προσπάθησε να καλύψει κάπως αυτή τη μετάβαση και να παράσχει μια υποτυπώδη κατανόηση των κινήτρων πίσω από τις έννοιες που θα οριστούν.

4.1.1. Χώρος Hilbert και Καταστάσεις

Αν στην κλασική μηχανική θεωρήσαμε σαν χώρο μελέτης του συστήματος τον χώρο φάσης, στην κβαντική μηχανική ο χώρος αυτός είναι ένας μιγαδικός χώρος Hilbert. Στην ουσία αποτελεί μια γενικεύση του τρισδιάστατου χώρου $\mathbb{R}^3$ που γνωρίζουμε από την εμπειρία μας σε διάσταση n αυθαίρετα μεγάλη – ακόμη και άπειρη! Ο χώρος Hilbert, λοιπόν, είναι ένα σύνολο στοιχείων που έχουμε εφοδιάσει με μια συνάρτηση εσωτερικού γινομένου $\langle \cdot, \cdot \rangle$, η οποία με τη σειρά της ορίζει μια νόρμα, δηλαδή μια συνάρτηση που μετρά αποστάσεις στοιχείων του χώρου (όπως η απόλυτη τιμή για τους πραγματικούς αριθμούς). Ορίζοντας αποστάσεις, μπορούμε να καθορίσουμε πότε συγκλίνουν οι ακολουθίες από στοιχεία του χώρου, συναρτήσεις που ορίζονται σε αυτόν κτλ. Ο χώρος Hilbert θεωρείται πλήρης, δηλαδή οποιαδήποτε ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει, θα συγκλίνει εντός του χώρου.

Ως σύστημα θα θεωρούμε πολύ αφηρημένα την οντότητα, η οποία αποτελεί αντικείμενο μελέτης μας και της οποίας τις ιδιότητες ενδιαφερόμαστε να μάθουμε εκτελώντας μετρήσεις. Στον φορμαλισμό της θεωρίας το σύστημα περιγράφεται πλήρως από ένα κανονικοποιημένο διάνυσμα, δηλαδή ένα διάνυσμα του οποίου το μέτρο – μήκος είναι ίσο με 1. Το διάνυσμα αυτό ονομάζεται καταστατικό διάνυσμα [state vector] και θεωρείται πως περιλαμβάνει όλες τις πληροφορίες που μπορεί να αφορούν το σύστημα υπό μελέτη. Αποτελεί στοιχείο ενός χώρου Hilbert, ο οποίος θεωρείται αρκετά «πλούσιος», ώστε να συμπεριλαμβάνει οτιδήποτε χρειάζεται για την αναπαράσταση του συστήματος.

Το ανάλογο του καταστατικού διανύσματος στην κλασική εικόνα είναι το διάνυσμα που περιγράφει το σύστημα στο χώρο φάσης. Όμως, ενώ στην κλασική περίπτωση το σημείο στον χώρο φάσης έχει μια άμεσα εποπτική ερμηνεία, στην κβαντική περίπτωση το καταστατικό διάνυσμα είναι ένα αφηρημένο μαθηματικό κατασκεύασμα, του οποίου η σχέση με την φυσική πραγματικότητα αναδεικνύεται μέσω περαιτέρω ανάπτυξης της θεωρίας.

Ακολουθούμε τον συμβολισμό του Dirac (Shankar 1980, σελ. 11) και γράφουμε το εκάστοτε καταστατικό διάνυσμα ως $|\psi\rangle$ ⁷. Το σύμβολο αυτό ονομάζεται και ket. Αντίστοιχα, το συζυγές διάνυσμα ή bra θα γράφεται ως: $\langle\psi|$. Τυπικά, το συζυγές διάνυσμα θεωρείται πως ανήκει στον δυϊκό χώρο του H . Αν φύγουμε από την αφηρημένη δομή και τα αντιληφθούμε ως διανύσματα του $\mathbb{C}^3$, τα bra και ket θα έχουν την εξής μορφή ως προς κάποια βάση:

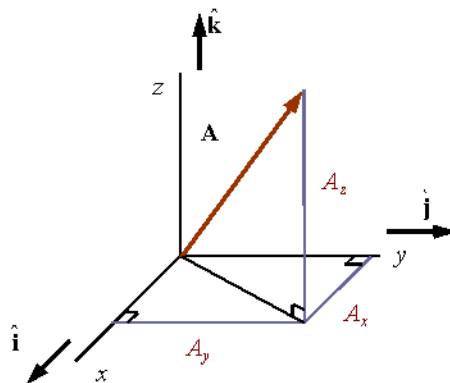
$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ και } \langle\psi| = (\alpha^* \quad \beta^* \quad \gamma^*)$$

Το στοιχείο α^* συμβολίζει τον λεγόμενο συζυγή του μιγαδικού αριθμού α , δηλαδή αν $\alpha = x + iy$, τότε $\alpha^* = x - iy$.

Κάθε τέτοιο διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί ως άθροισμα των στοιχείων της βάσης του εκάστοτε χώρου Hilbert. Η διαδικασία αυτή είναι εντελώς ανάλογη με το να αναλύσουμε ένα n -διάστατο διάνυσμα στις n συνιστώσες του. Όταν ο χώρος έχει βάση το πολύ αριθμήσιμη (οπότε και στο έχουμε $n = \infty$), τότε η ανάλυση είναι αρκετά εμφανής:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \langle\varphi_i|\psi\rangle |\varphi_i\rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i |\varphi_i\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}_{\{\varphi_i\}}$$

όπου $|\varphi_i\rangle$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι τα στοιχεία της βάσης του χώρου H . Κάθε ένα από αυτά τα στοιχεία ορίζει μια ακτίνα εντός του χώρου προς την οποία προβάλλεται το διάνυσμα $|\psi\rangle$. Η προβολή του δίνεται από το εσωτερικό γινόμενο $\langle\varphi_i|\psi\rangle$. Το ανάλογο αυτής της διαδικασίας στον χώρο $\mathbb{R}^3$ δίνεται στην παρακάτω εικόνα. $|\varphi_2\rangle$



Τα bras και kets είναι ορισμένα με τέτοιο τρόπο, ώστε για οποιαδήποτε δύο τέτοια στοιχεία να ορίζεται ομαλά το εσωτερικό τους γινόμενο, bra[c]ket (μια γενίκευση της αντίστοιχης σχέσης που ξέρουμε από τον $\mathbb{R}^3$):

$$\langle\varphi|\psi\rangle = (\delta^* \quad \varepsilon^* \quad \zeta^*) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \delta^* \alpha + \varepsilon^* \beta + \zeta^* \gamma$$

⁷ Το καταστατικό διάνυσμα θα εξαρτάται από τον χρόνο, οπότε εντελώς τυπικά η σωστή γραφή του είναι $|\psi(t)\rangle$. Όμως, γενικά θα εννοούμε αυτόν τον συμβολισμό, ακόμη και όταν δεν το γράφουμε.

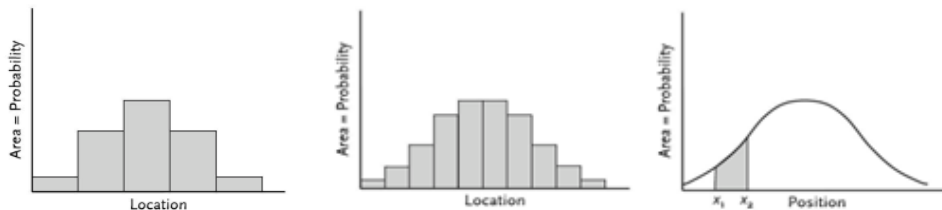
με τα παραπάνω να γενικεύονται για διανύσματα που έχουν περισσότερα ή ακόμη και άπειρα στοιχεία, δηλαδή αν $|a\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |\varphi_i\rangle$ και $|\beta\rangle = \sum_{i=1}^n \beta_i |\varphi_i\rangle$, τότε:

$$\langle a|\beta\rangle = \sum_{i=1}^n a_i^* \beta_i$$

Υπάρχουν, όμως, και περιπτώσεις που ο χώρος έχει υπεραριθμήσιμη βάση (όπως όταν μελετούμε την θέση ενός συστήματος, η οποία παίρνει τιμές σε ένα συνεχές διάστημα των πραγματικών αριθμών), οπότε παίρνουμε μια ομαλή επέκταση των παραπάνω μετατρέποντας το άθροισμα σε ολοκλήρωμα.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, πως η βάση του χώρου μας δεν είναι της μορφής $\{|a_1\rangle, \dots |a_k\rangle, \dots\}$, αλλά ένα συνεχές διάστημα τιμών $[\alpha, \beta]$. Πολύ σχηματικά, κάνουμε τα εξής:

Αρχικά χωρίζουμε το συνεχές σε διακριτά τμήματα $\left\{\alpha + \frac{L}{n}\right\}$ με $L = \beta - \alpha$ το μήκος του τμήματος τα οποία διαρκώς εκλεπτύνουμε. Καθώς το n γίνεται πολύ μεγάλο (τείνει στο άπειρο) τα τμήματα που παίρνουμε κάθε φορά γίνονται απειροστά μικρά και το άθροισμα της γίνεται ολοκλήρωμα, όπως στην εικόνα:



$$|\psi\rangle = \int_{\beta}^{\alpha} \langle \varphi_i | \psi \rangle |\varphi_i\rangle d\varphi_i = \int_{\beta}^{\alpha} \psi(\varphi_i) |\varphi_i\rangle d\varphi_i$$

με τους συντελεστές $\langle \varphi_i | \psi \rangle$ να διαφέρουν κάθε φορά ανάλογα με την βάση. Εποπτικά θα είναι σαν να βλέπουμε το καταστατικό διάνυσμα να μακραίνει όλο και περισσότερο μέχρι να έχει άπειρο μήκος:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \varepsilon \\ \alpha + 2\varepsilon \\ \vdots \\ \beta - 2\varepsilon \\ \beta - \varepsilon \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \varepsilon' \\ \alpha + 2\varepsilon' \\ \vdots \\ \beta - 2\varepsilon \\ \beta - \varepsilon \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha + \delta\varepsilon \\ \alpha + \delta\varepsilon \\ \vdots \\ \infty \\ \vdots \\ \beta - 2\delta\varepsilon \\ \beta - \delta\varepsilon \\ \beta \end{pmatrix}$$

με τα ε να είναι τα «άλματα» που κάνουμε από το α στο β , τα οποία διαρκώς γίνονται μικρότερα: $\delta\varepsilon \ll \varepsilon' < \varepsilon$.

Το εσωτερικό γινόμενο σε αυτήν την περίπτωση ορίζεται μέσω ολοκληρώματος (υποθέτοντας πως έχουμε αναπτύξει τις $|\psi\rangle$ και $|\varphi\rangle$ στη βάση της θέσης):

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int_a^\beta \varphi(x)\psi(x)dx$$

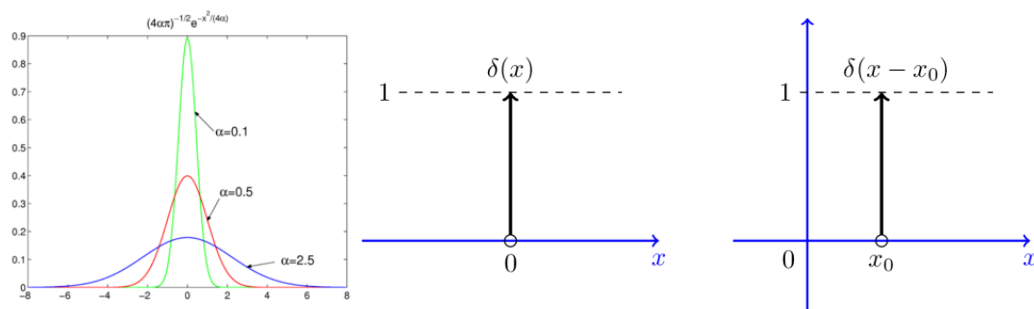
Ποια είναι, όμως, τα στοιχεία της βάσης της θέσης ως προς τα οποία θα αναπτύξουμε το καταστατικό διάνυσμα; Η δυσκολία σε αυτήν την περίπτωση είναι εμφανής καθώς εδώ δεν έχουμε ένα «βολικό» σύνολο όπως των ιδιοκαταστάσεων της ενέργειας $\{E1, E2, \dots\}$ που αριθμείται. Για να καλύψει αυτήν την περίπτωση, ο Dirac χρησιμοποίησε μια μαθηματικά «απαράδεκτη» συνάρτηση, την συνάρτηση δέλτα. Η συνάρτηση δέλτα $\delta(x - x_0)$ ορίζεται έτσι ώστε να παίρνει την τιμή 0 για όλα τα $x \neq x_0$ και το ολοκλήρωμά της, το «εμδαδόν» που περικλείει, να είναι ίσο με $\int_a^\beta \delta(x - x_0) dx = 1$. Έτσι, όταν η συνάρτηση δέλτα $\delta(x - x_0)$ δρα σε μια συνάρτηση υπό ολοκλήρωση, ουσιαστικά «συνθλίβει» την συνάρτηση αυτή στην τιμή x_0 που «στοχεύει»:

$$\int_a^\beta f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Βλέπουμε, λοιπόν, πως σε αναλογία με την διακριτή περίπτωση η συνάρτηση, η βάση για την περίπτωση της θέσης θα αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις δέλτα που θα έχουν ως κέντρο τους ένα σημείο του χώρου (Cohen-Tannoudji et al 1977, σελ. 103 και 107). Η κατάσταση θα αναπτύσσεται, λοιπόν, ως προς τις συναρτήσεις δέλτα ως εξής:

$$|\psi\rangle = \int_a^\beta \langle x|\psi\rangle |x\rangle dx$$

όπου $\langle x|\psi\rangle = \psi(x) = \int_a^\beta \psi(y) \delta(y - x) dy$ το ανάλογο των συντελεστών στην διακριτική περίπτωση με τα αθροίσματα. Η συνάρτηση $\psi(x)$ ονομάζεται κυματοσυνάρτηση και όπως θα δούμε σχετίζεται με την πιθανότητα να εντοπίσουμε ένα σύστημα σε δεδομένη θέση x .



Παρόλο που η επιλογή της θέσης ως βάσης αποτελεί την εποπτικά πιο προσιτή επιλογή, καθώς μπορούμε να φανταστούμε την $\psi(x)$ σαν μια συνάρτηση που απλώνεται στον χώρο, δεν συνιστά τη μοναδική μας επιλογή. Μπορούμε να αναπτύξουμε το $|\psi\rangle$ ως προς οποιαδήποτε βάση, όπως λ.χ. την ορμή, της οποίας τα διανύσματα βάσης θα συνδέονται με αυτά της θέσης μέσω της σχέσης:

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ipx}$$

και το $|\psi\rangle$ θα αναπτύσσεται (το αναφέρουμε για λόγους πληρότητας) ως:

$$|\psi\rangle = \int_a^b \langle p|\psi\rangle |p\rangle dp$$

$$\text{όπου τώρα } \langle p|\psi\rangle = \psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \varphi(x) dx .$$

Αρχικά, ο Dirac παρουσίασε την επέκταση στην συνεχή περίπτωση με τρόπο ευρετικό, δηλαδή χωρίς επαρκή μαθηματική αυστηρότητα. Θεώρησε πως η επέκταση επιτυγχάνεται προσθέτοντας τις συναρτήσεις δέλτα σαν το κατάλληλο εργαλείο για αυτή την δουλειά, παρόλο που τυπικά δεν ανήκουν στον χώρο των συναρτήσεων. Αργότερα, όμως, αποδείχτηκε πως και οι συναρτήσεις δέλτα μπορούν να θεωρηθούν στοιχεία ενός ευρύτερου χώρου Hilbert, που αποτελεί την πλήρωσή του⁸. Σημειώνουμε πως ο von Neumann είχε ακολουθήσει έναν διαφορετικό δρόμο που μπορούσε να επεκτείνει με μαθηματικά αυστηρό τρόπο την θεωρία από την διακριτή στην συνεχή περίπτωση (Isham 1995, σελ. 112-3).

4.1.2. Τελεστές και Παρατηρήσιμα Μεγέθη

Τα συστήματα, όμως, χαρακτηρίζονται από κάποιες ιδιότητες. Στο πλαίσιο του φορμαλισμού, λοιπόν, προστίθεται άλλη μια κατηγορία αντικειμένων που ονομάζονται «παρατηρήσιμα μεγέθη» [observables]. Σε αυτά εντάσσονται τα διάφορα φυσικά μεγέθη που μας ενδιαφέρουν όταν μελετάμε ένα σύστημα όπως η θέση, η ορμή, η ενέργεια, η στροφορμή του κτλ. Τα μεγέθη αυτά αναπαρίστανται μέσω μιας ιδιαίτερης κατηγορίας μαθηματικών αντικειμένων, τους ερμιτιανούς τελεστές επί του εκάστοτε χώρου Hilbert. Οποιαδήποτε μέτρηση μεγέθους που αναπαρίσταται από τον τελεστή $\hat{A}$ λάβει χώρα σε ένα σύστημα που βρίσκεται σε δεδομένη κατάσταση $|\psi\rangle$ θα δώσει ως τιμή μια από τις ιδιοτιμές του τελεστή με μια ορισμένη πιθανότητα.

Ένας τελεστής είναι μια συνάρτηση $\hat{A}: H \rightarrow H$ που μετασχηματίζει ένα διάνυσμα $|\psi\rangle$ που ανήκει στον χώρο Hilbert H σε ένα άλλο διάνυσμα $|\psi'\rangle$, δηλαδή $\hat{A}|\psi\rangle = |\psi'\rangle$. Οι τελεστές που χρησιμοποιούνται στο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής είναι γραμμικές συναρτήσεις, δηλαδή ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

$$\hat{A}|\psi + \varphi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle + \hat{A}|\varphi\rangle$$

$$\hat{A}|\lambda\psi\rangle = \lambda\hat{A}|\psi\rangle$$

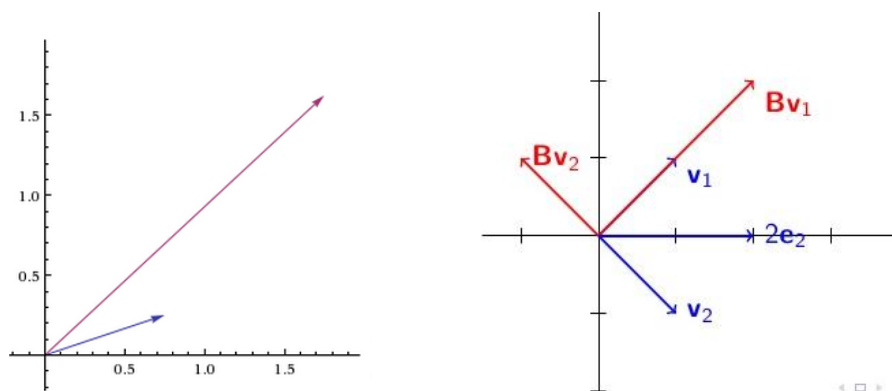
Γενικά, η δράση ενός τελεστή πάνω σε ένα διάνυσμα έχει σαν αποτέλεσμα την μετατροπή του σε ένα άλλο διάνυσμα. Υπάρχουν, όμως, και διανύσματα, στα οποία η δράση κάποιου τελεστή έχει σαν αποτέλεσμα να διατηρούνται αναλλοίωτα:

⁸ Δηλαδή αποτελεί τον χώρο που ήδη έχουμε μαζί με τα όρια των ακολουθιών που δεν συγκλίνουν εντός του. Μπορούμε να δούμε μια συνάρτηση δέλτα ως το όριο μιας ακολουθίας γκαουσιανών κατανομών, το πλάτος της οποίας στενεύει σταδιακά γύρω από μια περιοχή του x_0 ενώ το ύψος της εκεί τείνει στο άπειρο.

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$$

δηλαδή η δράση του τελεστή δίνει πάλι το ίδιο το διάνυσμα πολλαπλασιασμένο με έναν αριθμό a . Όταν ισχύει αυτή η σχέση, το διάνυσμα $|\psi\rangle$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα (και κατ'επέκταση η κατάσταση ιδιοκατάσταση) του τελεστή $\hat{A}$ ενώ ο αριθμός a με την σειρά του ονομάζεται ιδιοτιμή του τελεστή.

Ένας εποπτικός τρόπος να καταλάβουμε αυτή τη σχέση είναι να σκεφτούμε έναν πίνακα A (οι τελεστές μπορούν, άλλωστε, να αντιστοιχιστούν με πίνακες) που δρα πάνω σε (δηλαδή πολλαπλασιάζεται με) ένα διάνυσμα $\vec{v}$. Εν γένει, το διάνυσμα $\vec{w}$ που λαμβάνουμε ως αποτέλεσμα έχει διαφορετικό μήκος και κατεύθυνση από (δηλαδή είναι στραμμένο σε σχέση με) το $\vec{v}$ (εικόνα 1). Αν, όμως, το $\vec{v}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A , τότε το $\vec{w}$ θα έχει την ίδια διεύθυνση με το $\vec{v}$. Θα μοιάζει, δηλαδή, με μια σμίκρυνση ή επιμήκυνση του (εικόνα 2).



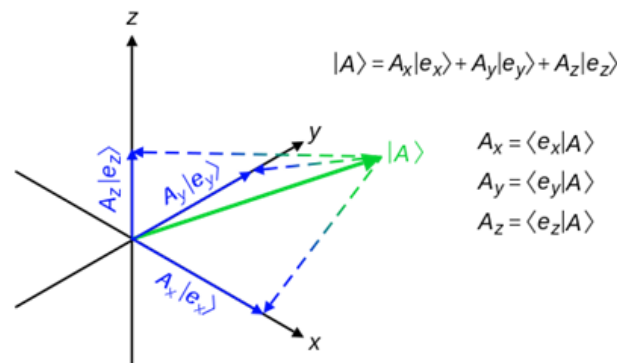
Οι ερμιτιανοί τελεστές είναι μια ειδική κατηγορία τελεστών, η οποία έχει κάποιες «επιθυμητές» ιδιότητες όπως ότι (Bowman 2008, σελ. 58):

1. Οι ιδιοτιμές τους είναι πραγματικοί αριθμοί
2. Οι ιδιοκαταστάσεις τους είναι ορθογώνιες μεταξύ τους, δηλαδή $\langle\psi_i|\psi_j\rangle = 0$, όταν $i \neq j$, κάτι που γεωμετρικά δείχνει πως ανήκουν σε κάθετους μεταξύ τους άξονες (όπως είναι π.χ. οι άξονες των x και y συντεταγμένων στο καρτεσιανό επίπεδο).
3. Οι ιδιοκαταστάσεις τους, τουλάχιστον για πεπερασμένους χώρους Hilbert αποτελούν ένα πλήρες σύνολο.

Η σημασία αυτών των ιδιοτήτων δεν γίνεται να υποτιμηθεί. Η πρώτη είναι κρίσιμη καθώς οι ερμιτιανοί τελεστές αποτελούν τα απαραίτητα εργαλεία για τον υπολογισμό των τιμών των μεγεθών. Όπως είναι εμφανές αυτά δεν μπορούν να παίρνουν μιγαδικές τιμές και η πρώτη συνθήκη μας εξασφαλίζει ακριβώς αυτό.

Η δεύτερη και η τρίτη ιδιότητα σχετίζονται άμεσα με ότι οι ιδιοτιμές των τελεστών είναι τα πιθανά αποτελέσματα των μετρήσεων. Εφόσον τα ιδιοδιανύσματα των ερμιτιανών τελεστών είναι ένα πλήρες σύνολο κάθετων μεταξύ τους στοιχείων μπορούν να λειτουργήσουν ως μια βάση του χώρου. Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται φασματικό θεώρημα. Στη βάση των ιδιοκαταστάσεων του τελεστή μπορούν να αναλυθούν όλα τα υπόλοιπα (άρα και τα καταστατικά) διανύσματα. Οι προβολές στους επιμέρους άξονες σχετίζονται άμεσα με την πιθανότητα η μέτρηση του συστήματος Σ στην κατάσταση ψ ως προς το μέγεθος A να δώσει

την αντίστοιχη ιδιοτιμή. Η παρακάτω εικόνα δείχνει την αναλογία μεταξύ της ανάλυσης ενός διανύσματος στην βάση $\{x, y, z\}$ του τρισδιάστατου χώρου και της προβολής ενός καταστατικού διανύσματος στη βάση των ιδιοκαταστάσεων ενός τελεστή.



Ο ερμιτιανός τελεστής $\hat{A}$, λοιπόν, αντιπροσωπεύει ένα παρατηρήσιμο μέγεθος. Το σύνολο των ιδιοτιμών $S_A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$, που ονομάζεται και φάσμα του τελεστή, αντιστοιχεί στο σύνολο των δυνατών τιμών που μπορεί να πάρει το μέγεθος A . Σε κάθε ιδιοτιμή αντιστοιχεί και μια ιδιοκατάσταση⁹, η οποία μπορεί να συμβολιστεί και ως $|\alpha_1\rangle, |\alpha_2\rangle, \dots$. Επειδή, το σύνολο των ιδιοκαταστάσεων δημιουργεί μια βάση χώρου, μπορούμε να προβάλουμε τα καταστατικά διανύσματα στους άξονες των ιδιοκαταστάσεων, ώστε να έχουμε:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i | \psi \rangle |\alpha_i\rangle$$

Η Μέτρηση των Μεγεθών: Τώρα, σύμφωνα με τους κανόνες της κβαντικής μηχανικής, το μόνο που μπορούμε να γνωρίζουμε, όταν εκτελέσουμε μια μέτρηση του μεγέθους A στο σύστημα που βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi\rangle$, είναι η πιθανότητα να βρούμε την τιμή α_i . Έχουμε δύο περιπτώσεις:

- Όταν η κατάσταση $|\psi\rangle$ είναι μια ιδιοκατάσταση του τελεστή $\hat{A}$, η πιθανότητα να πάρουμε την τιμή α_i είναι ίση με 1, δηλαδή $P_{|\psi\rangle}(\alpha_i) = 1$.
- Όταν, όμως, η κατάσταση $|\psi\rangle$ είναι μια τυχαία κατάσταση, τότε αυτή αναλύεται στις ιδιοκαταστάσεις του τελεστή σύμφωνα με την παραπάνω σχέση και η πιθανότητα να βρούμε οποιαδήποτε τιμή α_i σαν αποτέλεσμα της μέτρησης είναι:

$$P_{|\psi\rangle}(\alpha_i) = |\langle \alpha_i | \psi \rangle|^2$$

Στην περίπτωση που υφίσταται εκφυλισμός (δηλαδή κάθε ιδιοτιμή δεν αντιστοιχίζεται σε μια μόνο ιδιοκατάσταση), ο τύπος αυτός μετατρέπεται στον ακόλουθο:

⁹ Αυτό δεν είναι ακριβές, καθώς είναι δυνατό σε ορισμένες ιδιοτιμές να αντιστοιχούν περισσότερες από μια ιδιοκαταστάσεις. Σε αυτήν την περίπτωση μιλούμε για εκφυλισμένες ιδιοκαταστάσεις και πρέπει να μεταβάλλουμε ελαφρώς τις εκφράσεις, που θα παρουσιαστούν στη συνέχεια, ώστε να ληφθεί υπόψη και αυτή η παράμετρος.

$$P_{|\psi\rangle}(a_i) = \sum_{j=1}^r \left| \langle a_{i_j} | \psi \rangle \right|^2$$

δηλαδή αθροίζουμε πάνω στις r ιδιοκαταστάσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή a_i (Torretti 1999, σελ. 409 – 10). Για διευκόλυνσή μας, θα παραλείψουμε να αναφερόμαστε στην περίπτωση εκφυλισμού όπου αυτός δεν διαδραματίζει ουσιαστικό ρόλο στο θέμα υπό συζήτηση.

Η αναμενόμενη ή μέση τιμή ενός παρατηρήσιμου μεγέθους A για ένα σύστημα που βρίσκεται στην κατάσταση ψ θα δίνεται από την σχέση:

$$\langle \hat{A} \rangle_{|\psi\rangle} = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

ενώ στην περίπτωση που θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα η τιμή του μεγέθους A να ανήκει σε ένα σύνολο τιμών $\Delta = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ υπολογίζουμε το άθροισμα:

$$P_{|\psi\rangle}(A, \Delta) = \sum_{i=1}^N \chi_{\Delta}(a_i) P_{|\psi\rangle}(a_i) = \sum_{j=1}^m \chi_{\Delta}(a_i) |\langle a_i | \psi \rangle|^2$$

όπου $\chi_{\Delta}(a_i)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου Δ . Ουσιαστικά, δηλαδή, αθροίζουμε τις πιθανότητες για όλα τα μέλη του συνόλου.

Όλα όσα είπαμε για τους τελεστές ισχύουν στην περίπτωση μεγεθών όπως η ενέργεια ή το σπιν που παίρνουν και διακριτές τιμές ή, αλλιώς, που οι τελεστές που τα αναπαριστούν έχουν διακριτό φάσμα. Στην περίπτωση μεγεθών όπως η ορμή ή η θέση που το φάσμα δεν είναι καν αριθμήσιμο, αλλά συνεχές, δηλαδή παίρνει τιμές σε ένα ολόκληρο διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών, η αντίστοιχη πιθανότητα είναι:

$$P_{|\psi\rangle}(A, \Delta) = \int_{\beta}^{\gamma} |\langle \alpha | \psi \rangle|^2 d\alpha$$

όπου $\Delta = [\beta, \gamma]$ και $|\alpha\rangle$ τα στοιχεία (ιδιοδιανύσματα) του συνεχούς φάσματος του τελεστή (Isham 1995, σελ. 114). Εδώ υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει εκφυλισμός.

4.1.3. Δυναμική Εξέλιξη

Όπως και τα κλασικά συστήματα, τα κβαντικά συστήματα εξελίσσονται στο χρόνο. Όπως είδαμε, στην κλασική μηχανική την εξέλιξη αυτή περιγράφει η εξίσωση κίνησης του Newton (και ισοδύναμα οι εξισώσεις του Hamilton στον χαμιλτονιανό φορμαλισμό) ενώ η συνολική διαδικασία αποτυπώνεται στον χώρο φάσης. Στην κβαντική μηχανική, η περιγραφή της εξέλιξης του συστήματος ισοδυναμεί με την περιγραφή της εξέλιξης του καταστατικού διανύσματος. Αυτή δίνεται από την περίφημη εξίσωση τους Schrödinger, η οποία ορίζει ότι:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

όπου $\hat{H}$ είναι ο χαμιλτονιανός τελεστής, ο οποίος αποτελεί μια «μεταφορά» της χαμιλτονιανής συνάρτησης στο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής και είναι συνδυασμένος με την ολική ενέργεια του συστήματος (Shankar 1980, σελ. 145-6).

Ευρετικά παίρνουμε τη γνωστή συνάρτηση ολικής ενέργειας, που εδώ ταυτίζεται με την χαμιλτονιανή συνάρτηση του συστήματος:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

και αντικαθιστούμε τα X και P με τους αντίστοιχους τελεστές της θέσης $\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$ και της ορμής $\hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{d\psi}{dx}(x)$, ώστε να πάρουμε τελικά τον λεγόμενο χαμιλτονιανό τελεστή

$$\begin{aligned}\hat{H}\psi(x) &= \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right) \psi(x) = \frac{\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi}{2m} + V(x)\psi(x) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x)\end{aligned}$$

Η εξίσωση Schrödinger είναι, λοιπόν, μια ντετερμινιστική εξίσωση που περιγράφει τον τρόπο εξέλιξης της κατάστασης του εκάστοτε συστήματος. Γνωρίζοντας τον χαμιλτονιανό τελεστή για την εκάστοτε περίπτωση που μελετούμε και την αρχική κατάσταση $|\psi(t)\rangle$ σε δεδομένη χρονική στιγμή t , μπορούμε να εκτιμήσουμε την κατάσταση, $|\psi(t')\rangle$, που θα έχει περιέλθει το σύστημα σε μια μελλοντική χρονική στιγμή t' .

Αυτό γίνεται πιο σαφές αν γράψουμε την εξίσωση σε μια εναλλακτική μορφή με το διάνυσμα $|\psi_i\rangle$ να αντιπροσωπεύει την κατάσταση του συστήματος την χρονική στιγμή t_i και $t_2 > t_1$.

$$|\psi_2\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)\hat{H}} |\psi_1\rangle := \hat{U}(t_2, t_1) |\psi_1\rangle$$

και την ποσότητα $U(t_2, t_1) = e^{-\frac{i}{\hbar}(t_2-t_1)\hat{H}}$ να συνιστά έναν μοναδιαίο τελεστή, δηλαδή έναν τελεστή που έχει την ιδιότητα να στρέφει το οποιοδήποτε διάνυσμα χωρίς να αλλοιώνει το μήκος του.

4.1.4. Σύνοψη – Τα Αξιώματα

Με βάση τα όσα αναπτύξαμε μέχρι τώρα τα διάφορα εγχειρίδια κβαντικής μηχανικής δίνουν συνήθως συμπυκνωμένα τους βασικούς κανόνες που διέπουν την θεωρία (π.χ. Shankar 1980, σελ. 115-6 ή Cohen-Tannoudji et al 1977, σελ. 214-22):

1. Η κατάσταση ενός συστήματος Σ αναπαρίσταται από ένα καταστατικό διάνυσμα σε ένα χώρο Hilbert
2. Κάθε μετρήσιμη ποσότητα A περιγράφεται μέσω ενός τελεστή A που δρα στα διανύσματα του χώρου H . Η ποσότητα A ονομάζεται παρατηρήσιμο μέγεθος.

3. Η θεωρία είναι πιθανοκρατική. Το μόνο που μπορούμε να πούμε όταν μετράμε ένα μέγεθος A είναι η πιθανότητα με την οποία θα λάβουμε μια από τις ιδιοτιμές του και να υπολογίσουμε την αναμενόμενη – μέση τιμή του.

Μετά την μέτρηση η κατάσταση του συστήματος θεωρείται πως είναι η αντίστοιχη ιδιοκατάσταση του. – Το αξίωμα προβολής του von Neumann. Θα πούμε περισσότερα για αυτό στις δύο επόμενες ενότητες.

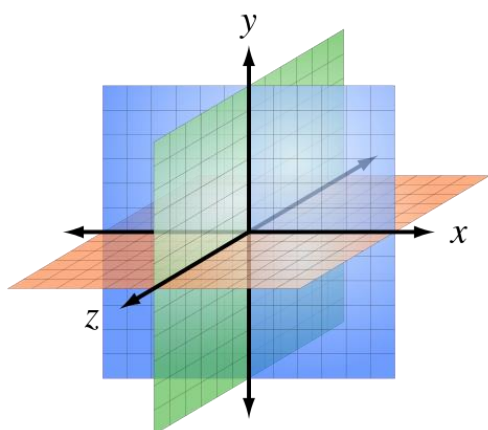
4. Χωρίς εξωτερικές επιδράσεις (μετρήσεις) η κατάσταση εξελίσσεται σύμφωνα με την εξίσωση του Schrödinger.

Το σχήμα αυτό είναι πολύ γενικό και απομένουν διάφορες εκκρεμότητες που πρέπει να αντιμετωπιστούν. Ωστόσο, απομένει και μια πολύ βασική απορία: πώς ακριβώς θα οριστούν τα διάφορα μεγέθη στην κβαντική θεωρία; Μια βασική στρατηγική είναι να αξιοποιήσουμε τα μεγέθη που ήδη γνωρίζουμε από την κλασική μηχανική και αντικαθιστώντας τα μεγέθη αυτής με τελεστές, όπως κάναμε και στην περίπτωση της χαμιλτονιανής συνάρτησης και του τελεστή ενέργειας. Ειδικότερα, εφόσον τα μεγέθη της κλασικής μηχανικής μπορούν να γραφούν βάσει της θέσης X και της ορμής P , αντικαθιστούμε τα δύο αυτά μεγέθη με τους αντίστοιχους τελεστές $\hat{x}$ και $\hat{p}$. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **κβάντωση**. Δυστυχώς, η στρατηγική αυτή έχει προβλήματα καθώς ορισμένες φορές οδηγεί σε αντιφάσεις ενώ υπάρχουν και περιπτώσεις μεγεθών (όπως το σπιν) που δεν μπορούν να οριστούν μέσω της προσφυγής στην κλασική περίπτωση. Για αυτό η μέθοδος θεωρείται ευρετική και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν καθολικά εφαρμόσιμος κανόνας.

4.2. Συμπληρώματα στον Φορμαλισμό

4.2.1. Υπόχωροι και Τελεστές Προβολής

Είδαμε πως ο χώρος Hilbert είναι μια γενίκευση του γνωστού μας τρισδιάστατου χώρου. Όπως και αυτός, λοιπόν, ο χώρος Hilbert H έχει υποσύνολα $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$, τα οποία είναι κλειστά ως προς τους γραμμικούς συνδυασμούς στοιχείων τους. Με άλλα λόγια, αν πάρουμε $|\psi\rangle$ και $|\varphi\rangle$ στο K_1 τότε και το $\alpha|\psi\rangle + \beta|\varphi\rangle$ θα ανήκει σε αυτό. Αν σκεφτούμε την αναλογία με τον R^3 υπόχωροι θα είναι τα διάφορα επίπεδα που περιέχει (καθώς διανύσματα πάνω στο επίπεδο xy θα ανήκουν πάλι σε αυτό), αλλά και γραμμές. Οι υπόχωροι αυτοί έχουν τις δικές τους βάσεις (π.χ. το xy επίπεδο έχει τα διανύσματα $(1\ 0\ 0)$ και $(0\ 1\ 0)$ ή ο άξονας x το διάνυσμα $(1\ 0\ 0)$).



Χώρος: ο τρισδιάστατος χώρος που περιέχει όλα τα σημεία του διαγράμματος

Υπόχωροι:

Γραμμές: οι άξονες x, y, z αλλά και κάθε ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων

Επίπεδα: τα xy, yz, xz αλλά και κάθε επίπεδο που περιλαμβάνει την αρχή των αξόνων

Τώρα, κάθε καταστατικό διάνυσμα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ο γεννήτορας, η βάση, μιας γραμμής – υποχώρου του χώρου Hilbert. Ορίζουμε μια συνάρτηση, τον τελεστή προβολής, ο οποίος θα παίρνει ένα τυχαίο διάνυσμα του χώρου και θα το προβάλλει πάνω σε αυτήν την γραμμή:

$$P_{a_i} = |\alpha_i\rangle\langle a_i|$$

Παρατηρούμε ότι $P_{|\alpha_i\rangle}|\psi\rangle = |\alpha_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle = \langle a_i|\psi\rangle|\alpha_i\rangle = \psi_i|\alpha_i\rangle$, οπότε η συνιστώσα του $|\psi\rangle$ που προβάλλεται στην υπόχωρο – ευθεία του $|\alpha_i\rangle$ είναι ψ_i .

Έτσι, λοιπόν, δρώντας πάνω στο οποιοδήποτε καταστατικό διάνυσμα $|\psi\rangle$ με τους τελεστές προβολής, παίρνουμε τις συντεταγμένες αυτού στους διάφορους υποχώρους του χώρου. Μάλιστα ισχύει, αν πάρουμε τους τελεστές που αντιστοιχούν σε όλους τους μονοδιάστατους υποχώρους και τους αθροίσουμε τότε παίρνουμε τον ταυτοτικό τελεστή, δηλαδή: $\sum_{i=1}^N P_{a_i} = I$, όπως εύκολα μπορούμε να δείξουμε:

$$\sum_{i=1}^N P_{a_i}|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N |\alpha_i\rangle\langle a_i|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \psi_i|\alpha_i\rangle = |\psi\rangle$$

κι επομένως η δράση όλων των τελεστών προβολής μας δίνει και πάλι το ίδιο το διάνυσμα – ένα μάλλον αναμενόμενο αποτέλεσμα, αν λάβουμε υπόψη πως απλώς ο τελεστής αυτός δρα σαν μια ανάλυση του διανύσματος.

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται διαμερισμός της μονάδας κι έχει σημαντικές συνέπειες. Χαρακτηριστικά, σε αυτήν μπορούμε να γράψουμε έναν οποιοδήποτε τελεστή T ως ένα γραμμικό συνδυασμό τελεστών (a_i ιδιοτιμές του T):

$$T = T \cdot I = T \cdot \sum_i P_{a_i} = T \cdot \sum_i |\alpha_i\rangle\langle a_i| = \sum_i T \cdot |\alpha_i\rangle\langle a_i| = \sum_i a_i |\alpha_i\rangle\langle a_i| = \sum_i a_i P_{a_i}$$

Ο von Neumann επεξεργάστηκε το φασματικό θεώρημα με τρόπο μαθηματικά αυστηρό και στην περίπτωση τελεστών με συνεχές φάσμα.

Τώρα, η προσέγγιση των τελεστών προβολής μπορεί να χρησιμεύσει σε μια εναλλακτική διατύπωση των τύπων για τις πιθανότητες και την μέση τιμή, η οποία θα φανεί πολύ χρήσιμη στη συνέχεια. Πρώτα ορίζουμε την έννοια του ίχνους ενός τελεστή. Στην άλγεβρα πινάκων, ίχνος ονομάζουμε το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων των πινάκων. Αντίστοιχα, για τους τελεστές γράφουμε:

$$tr(\hat{A}) = \sum_{i=1}^N \langle e_i | \hat{A} | e_i \rangle$$

με τα $\{|e_i\rangle\}_i$ να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του χώρου και φυσικά να έχουμε μια αντίστοιχη επέκταση στην περίπτωση συνεχούς φάσματος με την χρήση ολοκληρωμάτων (βλ. Cohen-Tannoudji 1977, σελ. 162). Χρησιμοποιώντας το ίχνος, λοιπόν, γράφουμε:

$$Pr_{|\psi\rangle}(A, \Delta) = tr(\hat{P}_{|\psi\rangle} \hat{P}_{(A, \Delta)}) = tr(\hat{P}_{|\psi\rangle} \chi_\Delta)$$

$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \text{tr}(\hat{P}_{|\psi\rangle} \hat{A})$$

όπου $\hat{P}_{(\Delta, A)} = \sum_{\alpha \in \Delta} \hat{P}_{|\alpha\rangle} = \sum_{\alpha \in \Delta} |\alpha\rangle \langle \alpha|$ ο τελεστής που προβάλλει στους υποχώρους των αντίστοιχων ιδιοτιμών που περιλαμβάνονται στο Δ . Για αναλυτικές αποδείξεις των σχέσεων βλ. Isham (1995, σελ. 106-7).

4.2.2. Μικτές Καταστάσεις

Πρέπει τώρα να περιγράψουμε τον τρόπο που ο φορμαλισμός της κβαντικής θεωρίας αντιμετωπίζει τις μικτές καταστάσεις, δηλαδή αυτές που δεν μας δίνουν πλήρη πληροφόρηση για το σύστημα. Αυτό μας επιτρέπει να εξετάζουμε περιπτώσεις πολλών συστημάτων που δεν έχουν απαραίτητα την ίδια κατάσταση ή την περίπτωση ενός συστήματος για το οποίο γνωρίζουμε μόνο την πιθανότητα να είναι σε διαφορετικές μεταξύ τους καταστάσεις $\{|\psi_i\rangle\}_i$. Για να αναπαραστήσουμε τις μικτές καταστάσεις χρησιμοποιούμε την έννοια του τελεστή πυκνότητας (Shankar 1980, σελ. 133), ο οποίος γράφεται ως:

$$\hat{\rho} = \sum_{i=1}^N w_i \hat{P}_{|\psi_i\rangle} = \sum_{i=1}^N w_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

με τους τελεστές $\hat{P}_{|\psi_i\rangle}$ να αντιστοιχούν στις επιμέρους καθαρές καταστάσεις και τα w_i να αποτελούν κατάλληλα βάρη, ώστε $\sum_{i=1}^N w_i = 1$.

Χρησιμοποιώντας την έννοια του ίχνους, που αναπτύξαμε παραπάνω, μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε τον φορμαλισμό και στην περίπτωση των μικτών καταστάσεων και να λάβουμε αντίστοιχες σχέσεις για την πιθανότητα να λάβουμε την τάδε ή την δείνα τιμή ενός παρατηρήσιμου μεγέθους. Πράγματι, αν θεωρήσουμε την πρόταση (A, Δ) , τότε για την πιθανότητα αυτής στην μικτή κατάσταση ρ έχουμε:

$$\begin{aligned} Pr_{\rho}(A, \Delta) &= \sum_{i=1}^N w_i Pr_{|\psi_i\rangle}(A, \Delta) = \sum_{i=1}^N w_i \text{tr}(\hat{P}_{|\psi_i\rangle} \hat{P}_{(A, \Delta)}) = \text{tr} \left(\sum_{i=1}^N w_i \hat{P}_{|\psi_i\rangle} \hat{P}_{(A, \Delta)} \right) \\ &= \text{tr} \left(\left(\sum_{i=1}^N w_i \hat{P}_{|\psi_i\rangle} \right) \hat{P}_{(A, \Delta)} \right) = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{P}_{(A, \Delta)}) \end{aligned}$$

που φυσικά έχει την απλούστερη μορφή $Pr_{\rho}(A, \alpha_i) = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{P}_{|\alpha_i\rangle})$, όταν θέλουμε να βρούμε την πιθανότητα το μέγεθος να έχει τη συγκεκριμένη τιμή α_i .

Παρατηρούμε ακόμη πως ο τελεστής πυκνότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την περίπτωση μιας καθαρής κατάστασης θεωρώντας πως για κάποια κατάσταση $|\psi_{\kappa}\rangle$ το $\kappa \neq 0$ ενώ $i = 0$, για $i \neq \kappa$.

Ο τελεστής πυκνότητας έχει διάφορες επιθυμητές ιδιότητες:

i) Είναι θετικός, δηλαδή $\langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle \geq 0$, για κάθε κατάσταση $|\psi\rangle$

ii) Είναι αυτοσυζυγής¹⁰, δηλαδή ισούται με τον συζυγή του $\hat{\rho} = \hat{\rho}^+$

iii) Έχει ίχνος ίσο με την μονάδα, δηλαδή $tr(\hat{\rho}) = 1$.

Εν γένει ισχύει πως $\hat{\rho}^2 \leq \hat{\rho}$, οπότε ο τελεστής πυκνότητας μας παρέχει μόνο μια μερική περιγραφή του συστήματος. Στην περίπτωση που μας παρέχει μέγιστη, θα έχουμε ότι $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ οπότε και θα είναι ένα τελεστής προβολής και κατά συνέπεια θα περιγράφει μια καθαρή κατάσταση του συστήματος.

Κανονικά, θα θέλαμε να ερμηνεύσουμε τις μικτές καταστάσεις ως καταστάσεις που προκύπτουν λόγω άγνοιας, δηλαδή θα θέλαμε να πούμε ότι το σύστημα είναι σε κάποια κατάσταση από αυτές που εμφανίζονται στην μικτή κατάσταση κι επειδή εμείς δεν γνωρίζουμε το ποια είναι αυτή ακριβώς, αναφερόμαστε μόνο την πιθανότητα να είναι σε αυτή. Αυτή η ερμηνεία, όμως, δεν είναι πάντοτε δυνατή στην κβαντική μηχανική. Υπάρχουν δύο ενστάσεις που μπορούν να διατυπωθούν. Πρώτον, επειδή ο ίδιος ένας τελεστής πυκνότητας είναι αυτοσυζυγής τελεστής, επιδέχεται και αυτός φασματική ανάλυση. Όμως, αυτή δεν είναι κάθε φορά μοναδική.

Ας θεωρήσουμε, ως παράδειγμα (Isham 1995, σελ. 108) τον εξής πίνακα πυκνότητας:

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αυτός μπορεί να αναλυθεί ως το άθροισμα δύο τελεστών διαφορετικών κατευθύνσεων του σπιν $\hat{P}_{S_x}$ και $\hat{P}_{S_z}$.

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{P}_{S_z+} + \frac{1}{2} \hat{P}_{S_z-}$$

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \hat{P}_{S_x+} + \frac{1}{2} \hat{P}_{S_x-}$$

Έτσι, αν ο τελεστής πυκνότητας ρ αναπαριστά την άγνοια μας σχετικά με το σε ποια καθαρή κατάσταση βρίσκεται το σύστημα, αυτή η άγνοια θα έχει να κάνει με τις καθαρές καταστάσεις του πρώτου ή του δεύτερου μεγέθους; Για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε κάποιο μέγεθος ως θεμελιώδες (και άρα ως προς το οποίο θα αναπτύσσουμε κάθε φορά). Όμως, πώς ακριβώς θα επιλεγεί αυτό;

Υπάρχει ακόμη μια ένσταση στην ιδέα πως ο ρ σχετίζεται με την άγνοια μας για την κατάσταση του συστήματος, την οποία, όμως, θα μπορούμε να αναπτύξουμε αφού μιλήσουμε για τα σύνθετα συστήματα.

4.2.3. Σύνθετα Συστήματα

Μέχρι τώρα εξετάσαμε την περίπτωση ενός μεμονωμένου συστήματος. Μια τέτοια εικόνα, όμως, είναι πολύ περιοριστική καθώς στην φύση τα διάφορα συστήματα δεν εμφανίζονται

¹⁰ Μια έννοια που μπορούμε να ταυτίσουμε με το να είναι ερμιτιανός για τις περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν εδώ.

μόνα τους, αλλά βρίσκονται σε διαρκή αλληλεπίδραση και συμμεταβολή. Ο φορμαλισμός της κβαντικής μηχανικής μας επιτρέπει να μελετήσουμε αυτές τις περιπτώσεις μέσω ενός ειδικού μαθηματικού εργαλείου, του τανυστικού γινομένου.

Έστω, λοιπόν, πως έχουμε δύο φυσικά συστήματα, των οποίων οι καταστάσεις τους ορίζονται εντός δύο χώρων Hilbert H_1 και H_2 . Αν για κάθε ζεύγος στοιχείων $\varphi_1 \in H_1$, $\varphi_2 \in H_2$, ορίζεται το στοιχείο $|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$, ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο των δύο χώρων και γράφουμε $H_1 \otimes H_2$ το σύνολο, $H_1 \otimes H_2 = \{\eta := |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle \mid \varphi_1 \in H_1, \varphi_2 \in H_2\}$.

Τανυστικό γινόμενο μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε συνάρτηση $\otimes$ ικανοποιεί τις εξής συνθήκες για $\varphi_1, \psi_1 \in H_1, \varphi_2, \psi_2 \in H_2$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ – εδώ τις αναφέρουμε για λόγους πληρότητας, αλλά βλ. Cohen-Tannoudji et al 1977, σελ. 154-5:

α) $[\lambda|\varphi_1\rangle] \otimes |\varphi_2\rangle = \lambda[|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle]$ και

$$[|\varphi_1\rangle] \otimes \mu|\varphi_2\rangle = \mu[|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle]$$

β) $|\varphi_1\rangle \otimes [|\varphi_2\rangle + |\psi_2\rangle] = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle + |\varphi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ και

$$[|\varphi_1\rangle + |\psi_1\rangle] \otimes |\varphi_2\rangle = |\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle + |\psi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$$

γ) Αν τα $\{|e_i^1\rangle\}$ είναι βάση του H_1 και τα $\{|e_j^2\rangle\}$ βάση του H_2 , τότε τα $|e_i\rangle \otimes |e_j\rangle$ είναι βάση του $H_1 \otimes H_2$ και η διάσταση του (αν οι βάσεις είναι πεπερασμένες) είναι $\dim(H_1 \otimes H_2) = \dim H_1 \dim H_2$.

Χάρη στην τελευταία συνθήκη μπορούμε να ορίσουμε και το τανυστικό γινόμενο τελεστών. Συγκεκριμένα, αν έχουμε $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$ τους τελεστές που αναπαριστούν δύο παρατηρήσιμα μεγέθη των συστημάτων Σ_1 και Σ_2 αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε τον $\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2$ ως:

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2)(|e_i\rangle \otimes |e_j\rangle) = \hat{A}_1|e_i\rangle \otimes \hat{A}_2|e_j\rangle$$

ο οποίος θα αναπαριστά ένα παρατηρήσιμο μέγεθος του σύνθετου συστήματος $\Sigma_1 + \Sigma_2$.

Μια κατάσταση $|\psi\rangle$ του χώρου $H = H_1 \otimes H_2$ θα αναλύεται στη βάση του ως εξής:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \psi_{ij} |e_i\rangle \otimes |e_j\rangle$$

Και η δράση ενός τελεστή του H σε αυτήν θα δίνεται ως:

$$(\hat{A}_1 \otimes \hat{A}_2)|\psi\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \psi_{ji} [\hat{A}_1|e_i\rangle] \otimes [\hat{A}_2|e_j\rangle]$$

Ένα παρατηρήσιμο μέγεθος A_1 του Σ_1 μπορεί να αναπαρασταθεί ως μέγεθος του σύνθετου συστήματος $\Sigma_1 + \Sigma_2$ από τον τελεστή $\hat{A}_1 \otimes I$ και αντίστοιχα ένα μέγεθος A_2 του Σ_2 από τον $I \otimes \hat{A}_2$, με τον I να είναι ο ταυτοτικός τελεστής: $I|\psi\rangle = |\psi\rangle$.

Οπότε μπορούμε τώρα να ορίσουμε την πιθανότητα μια μέτρηση του μεγέθους A_1 στο Σ_1 και του A_2 στο Σ_2 να δώσουν τιμές a_1 και a_2 , όταν το $\Sigma_1 + \Sigma_2$ βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ ως εξής:

$$P(A_1, a_1; A_2, a_2) = |\langle a_1 | \psi_1 \rangle|^2 |\langle a_2 | \psi_2 \rangle|^2 = P(A_1, a_1) P(A_2, a_2)$$

Ας θεωρήσουμε την κατάσταση ενός σύνθετου συστήματος $A + B$ που αναπαρίσταται από έναν τελεστή πυκνότητας ρ (η πιο γενική περίπτωση). Από αυτήν την κατάσταση του ενιαίου συστήματος θέλουμε να βρούμε αντίστοιχους τελεστές ρ_A και ρ_B για τα υποσυστήματα $A + B$. Οι καταστάσεις που αντιπροσωπεύουν ονομάζονται **ανηγμένες καταστάσεις**. Αυτό μπορεί να γίνεται πάντα (ακόμη και όταν το σύστημα $A + B$ δεν είναι σε μια κατάσταση που να μπορεί να γραφεί ως τανυστικό γινόμενο $\rho_A \otimes \rho_B$) μέσω του μερικού ίχνους (Cohen-Tannoudji et al 1977, σελ. 305-7). Για την περίπτωση του συστήματος A αυτός είναι:

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho$$

τα στοιχεία του οποίου (σε μορφή πίνακα) δίνονται από τις σχέσεις:

$$\rho_A(n, m) = \langle e_n^1 | \rho | e_m^1 \rangle = \sum_j \langle e_n^1 | \langle e_j^2 | \rho | e_m^1 \rangle | e_j^2 \rangle$$

και αντίστοιχα (με τις κατάλληλες αλλαγές στα σύμβολα για τον $\rho_B = \text{tr}_A \rho$). Με την διαδικασία αυτή είναι σαν να αποκόβουμε ένα τμήμα του ενιαίου συστήματος αγνοώντας τις επιδράσεις του υπολοίπου. Ακόμη και αν η κατάσταση ρ του σύνθετου συστήματος είναι καθαρή, αυτό δεν συνεπάγεται ότι και οι ανηγμένες καταστάσεις που παίρνουμε θα είναι επίσης καθαρές καταστάσεις, καθώς δεν ισχύει εν γένει πως $\text{tr}(\rho_A^2) = \text{tr}(\rho_B^2) = 1$.

Το εντυπωσιακό είναι πως ακόμη και στην περίπτωση που οι καταστάσεις αυτές είναι μικτές, δεν μπορούμε να τις ερμηνεύσουμε ως αποτέλεσμα άγνοιας. Ας δούμε τώρα το για ποιο λόγο αυτό δεν είναι δυνατό (Hughes 1989, σελ. 150). Έστω πως το $A + B$ είναι στην καθαρή κατάσταση ρ . Ας υποθέσουμε πως γράφουμε την κατάσταση του κάθε υποσυστήματος σαν άθροισμα καθαρών καταστάσεων:

$$\rho_A = a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle$$

$$\rho_B = \beta_1 |\varphi_1\rangle + \beta_2 |\varphi_2\rangle$$

με τα a_i, β_i να είναι οι πιθανότητες το σύστημα να είναι στην τάδε ή δείνα κατάσταση. Με την ερμηνεία άγνοιας, το A είναι στην $|\psi_1\rangle$ ή $|\psi_2\rangle$ και το B στην $|\varphi_1\rangle$ ή $|\varphi_2\rangle$. Όμως, τότε και το σύνθετο σύστημα θα είναι στην κατάσταση

$$\rho = c_1 |\psi_1\rangle \otimes |\varphi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \otimes |\varphi_1\rangle + c_3 |\psi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle + c_4 |\psi_2\rangle \otimes |\varphi_2\rangle$$

με c_i την αντίστοιχη πιθανότητα. Δηλαδή, το σύνθετο σύστημα είναι σε μια μικτή κατάσταση – αντίθετα από την υπόθεσή μας! Επομένως, στην περίπτωση που το ενιαίο σύστημα είναι σε μια καθαρή κατάσταση, οι μικτές ανηγμένες καταστάσεις των υποσυστημάτων, δεν μπορούν να ερμηνευθούν ως αποτέλεσμα άγνοιας.

Επιστρέφοντας τώρα σε όσα λέγαμε λίγο νωρίτερα για τις μικτές καταστάσεις, μπορούμε να τις διακρίνουμε μεταξύ **σωστών** μικτών καταστάσεων και **ψευδομικτών** καταστάσεων. Οι πρώτες είναι οι μικτές καταστάσεις στις οποίες το σύστημα μπορεί πράγματι να θεωρηθεί πως βρίσκεται σε μια κατάσταση, την οποία εμείς απλώς αγνοούμε. Η δεύτερη κατηγορία, όμως, περιλαμβάνει μικτές καταστάσεις σαν αυτές που μόλις εξετάσαμε στις οποίες δεν μπορούμε να δώσουμε μια τέτοια ερμηνεία χωρίς να οδηγηθούμε σε αντίφαση. Ο προσδιορισμός του κάθε υποσυστήματος –χωρίς διεξαγωγή κάποιας μέτρησης– ανεξάρτητα από το ολικό σύστημα είναι αδύνατος εξαιτίας του μη διαχωρίσιμου χαρακτήρα συσχετισμένων κβαντικών συστημάτων. Για περισσότερα βλ. παρακάτω §4.3.3 και για περισσότερες τεχνικές λεπτομέρειες (D’Espagnat 1995, σελ. 101-6).

4.3. Κβαντική Παραδοξότητα

4.3.1. Υπέρθεση

Ένα εξαιρετικά παράδοξο χαρακτηριστικό της, αυτό που κατά τον Dirac αποτελεί το ουσιώδες γνώρισμα που την διακρίνει από την κλασική μηχανική (Hughes 1989, σελ 96) είναι η υπέρθεση. Σύμφωνα με την περίφημη αρχή της υπέρθεσης, ένα κβαντικό σύστημα μπορεί να βρίσκεται σε μια καθαρή κατάσταση, η οποία αποτελεί γραμμικό συνδυασμό άλλων καθαρών καταστάσεων. Αν, δηλαδή, τα διάνυσματα $|\psi_1\rangle$ και $|\psi_2\rangle$ αναπαριστούν καθарές καταστάσεις του συστήματος Σ , τότε και κάθε διάνυσμα της μορφής:

$$|\psi\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$$

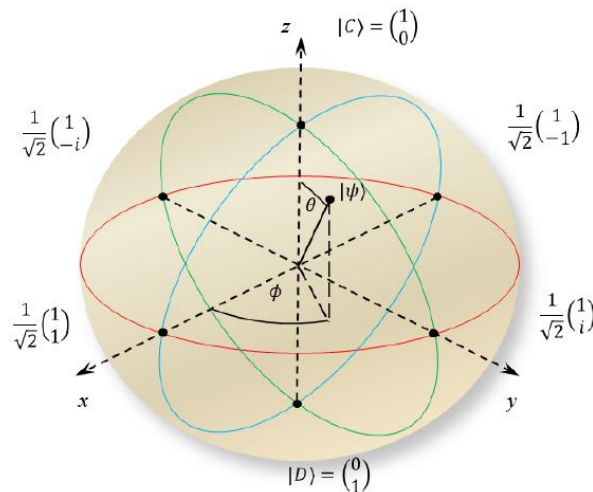
όπου $c_1^2 + c_2^2 = 1$, και $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ αντιπροσωπεύει μια δυνατή καθαρή κατάσταση του συστήματος Σ .

Παρόλο που η υπέρθεση ίσως μοιάζει με μια «αθώα» μεταφορά μιας κυματικής ιδιότητας στο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας, οι επιπτώσεις αυτής είναι δραματικές καθώς γρήγορα μοιάζει να έρχεται σε κατάφωρη ρήξη με όλη την εποπτική μας κατανόηση για τον φυσικό κόσμο. Αυτό διότι στην κλασική φυσική, οι μόνες καθарές καταστάσεις είναι αυτές που, στο πλαίσιο του χώρου Hilbert, θα λέγαμε πως αντιστοιχούν στους μονοδιάστατους υποχώρους, δηλαδή τις γραμμές.

Αντίθετα, η κβαντική μηχανική δέχεται ως καθαρή κατάσταση και οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό καθαρών καταστάσεων ως μια νέα καθαρή κατάσταση. Επειδή, όμως, στις υπερτιθέμενες καταστάσεις, το σύστημα δεν βρίσκεται σε μια ιδιοκατάσταση του τελεστή που αντιπροσωπεύει το μετρούμενο μέγεθος, δεν είναι δυνατό να αποδώσουμε στο σύστημα κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα. Έτσι, τα κβαντικά συστήματα είναι δυνατό να αιωρούνται σε μια κατάσταση απροσδιοριστίας. Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την περίπτωση ενός ηλεκτρονίου που βρίσκεται στην κατάσταση:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z = +\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|z = -\rangle$$

Γενικά οι ιδιοκαταστάσεις των τριών τελεστών του σπιν S_x, S_y, S_z μπορούν να αναπαρασταθούν με τη βοήθεια της σφαίρας του Bloch:



Η $|\psi\rangle$ δεν είναι ιδιοκατάσταση του τελεστή του σπιν S_z κι σύμφωνα με την παραδοσιακή ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής τίποτα από τα παρακάτω δεν ισχύει:

- Το σπιν είναι 1
- Το σπιν είναι -1
- Το σπιν είναι 1 και -1
- Το σπιν δεν είναι 1 ούτε -1

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η υπέρθεση φαίνεται να αποτελεί έναν εντελώς νέο τρόπο ύπαρξης!

4.3.2. Ασύμβατα Μεγέθη

Ένα άλλο παράδοξο χαρακτηριστικό της θεωρίας είναι πως κάποια μεγέθη δεν είναι συμβατά μεταξύ τους, δηλαδή δεν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα ή δεν μπορούμε να αποδώσουμε ταυτόχρονα τιμές και των δύο σε ένα σύστημα. Δεν μπορούμε, για παράδειγμα, να μετρήσουμε την ορμή και την θέση ενός σωματιδίου. Αυτό εκφράζεται από τον φορμαλισμό της θεωρίας μέσω της μη μεταθετικότητας των τελεστών. Γενικά, όταν πολλαπλασιάζουμε δύο τελεστές μεταξύ τους, δεν ισχύει απαραίτητα ότι $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$. Ορίζουμε τον μεταθέτη $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$, ο οποίος μηδενίζεται ακριβώς όταν το γινόμενο των δύο τελεστών είναι το ίδιο ανεξαρτήτως σειράς.

Πώς ακριβώς συνδέονται αυτά τα δύο; Θέλουμε να ξεκαθαρίσουμε τι εννοούμε όταν λέμε πως μετράμε δύο μεγέθη «ταυτόχρονα». Πόσο μικρό θα πρέπει να είναι το χρονικό διάστημα μεταξύ των μετρήσεων ώστε να μην έχει αλλάξει δραματικά η κατάσταση του συστήματος; Ή θα πρέπει να μας απασχολήσει κυρίως το ότι η σειρά εκτέλεσης των μετρήσεων δεν πρέπει να οδηγεί σε διαφορετικά κάθε φορά αποτελέσματα; Προτιμούμε, λοιπόν, να λέμε ότι δύο μεγέθη A και B είναι συμβατά, αν υπάρχει ένα άλλο παρατηρήσιμο μέγεθος Γ και συναρτήσεις $f, g: R \rightarrow R$, ώστε $A = f(\Gamma)$ και $B = g(\Gamma)$. Η μέτρηση, λοιπόν, του Γ αρκεί για να αποδώσουμε τιμές που σχετίζονται με τα A και B .

Αποδεικνύεται πως ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι συμβατά δύο μεγέθη κατά τον τρόπο που ορίσαμε είναι οι τελεστές που αντιστοιχούν σε αυτά να έχουν μεταθέτη ίσο με 0

(Isham 1995, σελ. 114-117). Η βασική ιδέα είναι πως ο μηδενισμός του μεταθέτη μας επιτρέπει να βρούμε κοινές ιδιοκαταστάσεις για τα δύο μεγέθη και τελικά να ορίσουμε την επιθυμητή συνάρτηση.

Τα ασύμβατα μεγέθη σχετίζονται με τις περίφημες σχέσεις απροσδιοριστίας του Heisenberg. Για οποιαδήποτε δύο μεγέθη A και B , αν θεωρήσουμε την αβεβαιότητα $\Delta A_{|\psi\rangle}$, δηλαδή την διασπορά των τιμών του όταν το σύστημα είναι στην κατάσταση $|\psi\rangle$, έχουμε πως:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|$$

η οποία στην περίπτωση των μεγεθών της θέσης και της ορμής, που έχουν μεταθέτη ίσο με $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, δίνει την περίφημη σχέση:

$$\Delta \hat{p} \Delta \hat{x} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Η ύπαρξη ασύμβατων μεγεθών αποτελεί μια τεράστια τομή που διακρίνει την κβαντική από την κλασική θεωρία του κόσμου. Είδαμε πως στην περίπτωση των κλασικών μεγεθών η απόδοση τιμών ήταν μια «τετριμμένη» τρόπον τινά διαδικασία, καθώς από την κατάσταση του συστήματος $s = (q, p)$ μπορούσαμε να πάρουμε τιμές για όλα τα μεγέθη χωρίς κάποιον περιορισμό. Έτσι, δυο μεγέθη A και B , θα είχαν απλώς τιμές $f_A(s)$ και $f_B(s)$ βάσει των συναρτήσεων που αναπαριστούν το καθένα.

Μια εντυπωσιακή και άκρως παράδοξη απόρροια της ασυμβατότητας μεγεθών είναι πως η μέτρηση ενός μεγέθους A είναι ικανή να διαταράξει την τιμή που θα λάβουμε για το μέγεθος B ακόμη και αν έχουμε μετρήσει αρχικά αυτό. Έτσι αν μετρήσαμε πρώτα το B και πήραμε ως τιμή β και στη συνέχεια μετρήσαμε το ασύμβατο μέγεθος A και πήραμε την τιμή α , μια νέα μέτρηση του B δεν δίνει απαραίτητα την β , αλλά οποιαδήποτε από τις πιθανές τιμές βάσει των πιθανοτήτων που αναλύσαμε. Αυτό το είδαμε και με τα παραδείγματα μετρητών του σπιν που εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

4.3.3. Σύζευξη

Υπάρχει, όμως, ένα ακόμη πολύ περίεργο κβαντικό φαινόμενο, το οποίο σχετίζεται με την αλληλεπίδραση συστημάτων. Έστω πως έχουμε το καταστατικό διάνυσμα $|\psi\rangle$ του χώρου $H_1 \otimes H_2$ που περιγράφει την κατάσταση του σύνθετου συστήματος $S_1 + S_2$. Είναι δυνατό να αποδοθούν σε αυτό το σύνθετο σύστημα ιδιότητες, οι οποίες μένουν απροσδιόριστες για τα επιμέρους συστήματα S_1 και S_2 . Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ένα σύστημα από δύο ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην εξής κατάσταση:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|S_z = +\frac{\hbar}{2}\rangle_1 \otimes |S_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle_2] - \frac{1}{\sqrt{2}} [|S_z = -\frac{\hbar}{2}\rangle_1 \otimes |S_z = +\frac{\hbar}{2}\rangle_2]$$

όπου S_z το σπιν κάθε ηλεκτρονίου στον άξονα z . Στο κάθε τανυστικό γινόμενο, η πρώτη κατάσταση αντιστοιχεί στο ένα ηλεκτρόνιο και η δεύτερη στο άλλο. Τα δύο ηλεκτρόνια έχουν πάντα αντίθετα σπιν κι έτσι, όταν μετρώντας το σπιν του πρώτου βρούμε, με

πιθανότητα $\frac{1}{2}$, λ.χ. την τιμή $+\frac{h}{2}$, τότε γνωρίζουμε πως με πιθανότητα 1, το δεύτερο ηλεκτρόνιο θα έχει τιμή ίση με $-\frac{h}{2}$. Το συνολικό σπιν του συστήματος είναι 0. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί από το γεγονός πως η $|\psi\rangle$ αποτελεί μια καθαρή κατάσταση του συστήματος Σ και, ιδιαίτερα, ιδιοκατάσταση του τελεστή του ολικού σπιν $\hat{S}^2 = (\hat{S}_1 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{S}_2)^2$. Όμως, όπως είναι εμφανές, αυτή η κατάσταση δεν είναι ιδιοκατάσταση του μεγέθους του σπιν για κανένα από τα δύο υποσυστήματα – επιμέρους ηλεκτρόνια – που συναποτελούν το σύστημα. Έτσι, με βάση τους κανόνες της κβαντικής θεωρίας, το σπιν των δύο ηλεκτρονίων (θεωρημένων ως διακριτά συστήματα) δεν είναι καθορισμένο (Καρακώστας 2005, σελ. 11-2) και κατ'επέκταση, δεν μπορεί να είναι αυτό που καθορίζει και το σπιν του ενιαίου συστήματος. Η κατάσταση $|\psi\rangle$ είναι μια συζευγμένη κατάσταση και δεν μπορεί να αναλυθεί σε κάποιες καθαρές καταστάσεις των επιμέρους υποσυστημάτων.

Χάρη στο φαινόμενο της κβαντικής σύζευξης είναι δυνατό η κατάσταση ενός σύνθετου συστήματος να είναι πιο πλούσια σε πληροφοριακό περιεχόμενο απ'ό,τι οι καταστάσεις των επιμέρους συστημάτων που το αποτελούν. Γνώση της κατάστασης των συστημάτων που απαρτίζουν το σύνθετο δεν είναι δυνατό να καθορίσει την κατάσταση αυτού. Αυτό το παράδοξο χαρακτηριστικό δεν περιορίζεται στην περίπτωση του σπιν που εξετάσαμε παραπάνω, αλλά εξαπλώνεται σε όλα τα αλληλεπιδρώντα συστήματα. Η ύπαρξη της σύζευξης καθιστά εξαιρετικά δύσκολη την διατήρηση της κλασικής αντίληψης περί διαχωρισμού και μελέτης ενός συστήματος στη βάση των μερών του. Το ενιαίο σύστημα μπορεί να φέρει ιδιότητες που δεν επιγίνονται στις ιδιότητες των συστατικών του¹¹. Κατά συνέπεια, στην κβαντική μηχανική, το όλο αποδεικνύεται πράγματι κάτι περισσότερο από το άθροισμα των μερών του.

4.4. Η Λογική Δομή της Θεωρίας

Ας προσπαθήσουμε τώρα να διερευνήσουμε τη λογική δομή της κβαντικής θεωρίας κατά τον τρόπο που εξετάσαμε και στην κλασική μηχανική. Οι καταστάσεις στην κλασική μηχανική δρουν ως δίτιμοι ομομορφισμοί Boole, δηλαδή συναρτήσεις $s: B \rightarrow \{0,1\}$, όπου B η Boolean άλγεβρα των προτάσεων της κλασικής μηχανικής. Οι καταστάσεις, λοιπόν, είναι μέτρα που παίρνουν οποιαδήποτε πρόταση (A, Δ) , η οποία σημαίνει ότι το μέγεθος A έχει τιμή που ανήκει στο διάστημα Δ , και το αντιστοιχίζουν στην τιμή 0 ή 1. Με άλλα λόγια, για μια οποιαδήποτε πρόταση μας δίνουν μια ξεκάθαρη απάντηση: αν είναι ψευδής, δηλαδή $P_s(A, \Delta) = 0$ ή αληθής, δηλαδή $P_s(A, \Delta) = 1$ (Bub 1997, σελ. 20-2).

Αν ένα μέγεθος μπορεί να πάρει ένα σύνολο από τιμές $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$, τότε μπορούμε να το αναπτύξουμε ως εξής:

$$A = \sum_{i=1}^N a_i P_{a_i}$$

¹¹¹¹ Μια σημαντική διαφορά με την κλασική μηχανική είναι πως η κβαντική μηχανική φαίνεται να έρχεται σε σύγκρουση με ένα μοντέλο χιουμιανής επιγένεσης όπως του Lewis. Δεν είναι τόσο εύκολο να αποδώσουμε κάποιες θεμελιώδεις καθορισμένες ιδιότητες και στη βάση αυτών να καθορίσουμε ολόκληρο τον κόσμο. Για περισσότερα βλ. Karakostas (2009).

με το P_{a_i} να αποδίδει την τιμή 0 ή 1 σε κάθε στοιχείο των Borel υποσυνόλων του χώρου φάσης – που ουσιαστικά έχει να κάνει με το αν το σύστημα στην δεδομένη κατάσταση s έχει την ιδιότητα a_i . Γίνεται φανερό, λοιπόν, πως αν έχουμε ένα σύστημα σε μια κατάσταση s , τότε παίρνουμε για το μέγεθος A σε αυτήν

$$f_A(s) = \sum_{i=1}^N a_i P_{a_i}(s) = a_j$$

όταν η κατάσταση ανήκει στα στοιχεία εκείνα που η P_{a_j} αποδίδει την τιμή 1. Με άλλα λόγια, με προσδιορισμένη την κατάσταση του συστήματος προσδιορίζονται οι τιμές που αυτό φέρνει για τα διάφορα μεγέθη¹².

Η άλγεβρα των μεγεθών στην κλασική μηχανική είναι μεταθετική. Αυτό, όπως είδαμε, δεν ισχύει στην περίπτωση των κβαντικών μεγεθών καθώς υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι ταυτόχρονα προσδιορίσιμα. Αυτό περιπλέκει τα πράγματα σε σχέση με την λογική δομή της θεωρίας. Κι εδώ έχουμε προτάσεις που δηλώνουν πως το σύστημα έχει την τιμή a_i , που αντιστοιχίζονται στους τελεστές προβολής P_{a_i} , οι οποίοι βρίσκονται με την σειρά τους σε αντιστοιχία με τους μονοδιάστατους υποχώρους του χώρου Hilbert. Επειδή, όπως δείξαμε, κάθε μέγεθος μπορεί να αναλυθεί σε μια βάση των υποχώρων του χώρου Hilbert, έπεται πως η λογική δομή της θεωρίας δεν είναι ισόμορφη με αυτή ενός πεδίου συνόλων, αλλά με τη δομή που έχουν οι υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Όμως, η άλγεβρα που δημιουργεί το σύνολο των υποχώρων δεν είναι Boolean καθώς παραβιάζεται η επιμεριστικότητα.

Αυτό μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτό με το εξής παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε τις εξής προτάσεις

K: το ηλεκτρόνιο έχει σπιν = $\frac{1}{2}$ στον άξονα x την χρονική στιγμή t ,

Λ: το σωματίδιο έχει σπιν = $\frac{1}{2}$ στον άξονα των y την χρονική στιγμή t και

M: το σωματίδιο έχει σπιν = $-\frac{1}{2}$ στον άξονα των y την χρονική στιγμή t .

Τότε, στην κλασική περίπτωση ισχύει ότι: $K \wedge (\Lambda \vee M) \Leftrightarrow (K \wedge \Lambda) \vee (K \wedge M)$, καθώς επιτρέπεται πάντοτε η ταυτόχρονη μέτρηση διαφορετικών μεγεθών κι έτσι όταν αληθεύει η πρώτη πρόταση θα αληθεύει και η δεύτερη¹³. Στην κβαντική περίπτωση, όμως, η παραπάνω ισοδυναμία δεν ισχύει καθώς η πρώτη πρόταση είναι δυνατόν να είναι αληθής ενώ η δεύτερη ψευδής. Γνωρίζουμε πως τα μεγέθη S_x και S_y δεν είναι συμβατά οπότε ο ταυτόχρονος προσδιορισμός των τιμών τους είναι αδύνατος. Κατά συνέπεια, δεν είναι δυνατό να αποδώσουμε ταυτόχρονα τιμές και στα δύο μεγέθη κατά τον τρόπο που απαιτεί η πρόταση

¹² Αυτό μεταφέρεται και στην περίπτωση μεγεθών με συνεχές πεδίου τιμών, μέσω της σχέσης $A = \int_{-\infty}^{+\infty} a dP(a)$ όπου $dP(a)$ μια χαρακτηριστική συνάρτηση στο χώρο φάσης.

¹³ Φυσικά, επειδή το σπιν θεωρείται αμιγώς κβαντική έννοια, το παράδειγμα θα χρειαζόταν μια ελαφρά τροποποίηση για την κλασική περίπτωση, αλλά αυτό δεν επηρεάζει τον ισχυρισμό μας. Θα μπορούσαμε λ.χ. να μιλήσουμε για την θέση και την ορμή του συστήματος σε κάποια χρονική στιγμή.

στο δεύτερο μέρος της ισοδυναμίας. Όμως, γνωρίζουμε πως οι τιμές του σπιν είναι πάντοτε είτε $\frac{1}{2}$ είτε $-\frac{1}{2}$ οπότε η πρώτη πρόταση είναι αληθής.

Συνέπεια αυτών είναι πως οι κβαντικές καταστάσεις δεν μπορούν να οριστούν ως δίτιμα μέτρα κατά τα πρότυπα των κλασικών αναλόγων τους. Αν γινόταν αυτό, θα αντιμετωπίζαμε την εξής αντίφαση. Έστω πως έχουμε ένα χώρο Hilbert 2 διαστάσεων, τότε έχουμε ζεύγη ορθογώνιων γραμμών (π.χ. δύο για τις τιμές του S_x , δύο για το S_y και δύο για το S_z – βλ. τη σφαίρα του Bloch στην παράγραφο 4.3.1). Η κατάσταση θα αποδίδει 0 στο ένα και 1 στο άλλο. Αν πάρουμε τώρα δύο από τους άξονες που έχουν την τιμή 1, η τομή τους θα πρέπει να πάρει επίσης την τιμή 1. Όμως, αυτό δεν γίνεται γιατί η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

Οι καταστάσεις στην κβαντική μηχανική, λοιπόν, δρουν σαν μέτρα πιθανότητας καθώς παίρνουν ορίσματα από το σύνολο των προτάσεων που αντιπροσωπεύονται από υποχώρους του χώρου Hilbert και τα αντιστοιχίζουν σε ένα πραγματικό αριθμό στο διάστημα $[0,1]$, $P_{|\psi\rangle}: S(H) \rightarrow [0,1]$. Όταν η πρόταση αντιστοιχεί στον υπόχωρο της κατάστασης¹⁴, τότε λαμβάνει την τιμή 1, αν αντιστοιχεί σε έναν υπόχωρο κάθετο ως προς αυτόν, λαμβάνει την τιμή 0 και σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση λαμβάνει μια τιμή μεταξύ 0 και 1 (Bub 1997, σελ. 31). Έτσι, η ανάλυση ενός μεγέθους A στις ιδιοκαταστάσεις μπορεί να μας δώσει την πιθανότητα να λάβει την τάδε ή δείνα τιμή.

Μήπως, όμως, μπορούμε να απαλλαγούμε από αυτές τις δυσκολίες ορίζοντας διαφορετικά τα μέτρα πιθανότητας; Αυτό αποκλείεται από το θεώρημα του Gleason, σύμφωνα με το οποίο η μόνη δυνατή μορφή που μπορεί να έχουν τα μέτρα πιθανότητας σε έναν χώρο Hilbert¹⁵ διάστασης μεγαλύτερης του 2 είναι η εξής:

$$\mu(P_L) = \text{tr}(\rho P_L)$$

όπου ρ είναι ένα τελεστής πυκνότητας. Με άλλα λόγια, οποιαδήποτε μέτρο πιθανότητας και να ορίσουμε στον χώρο Hilbert πρέπει να προέλθει από κάποια κβαντική κατάσταση. Το σύνολο των κβαντικών καταστάσεων είναι πλήρες: μια κατάσταση αποδίδει πιθανότητες σε όλα τα μεγέθη μιας «οικογένειας» όπως το σπιν (Hughes 1989, σελ. 148). Το αποτέλεσμα αυτό περιορίζει τις επιλογές μας ως προς πιθανές τροποποιήσεις της θεωρίας, αν και είναι γεγονός πως αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο να ορίζονται και άλλου είδους μέτρα σε χώρους με διάσταση 2 (Redhead 1987, σελ. 28).

¹⁴ Αν, για παράδειγμα, έχουμε σωματίδια με σπιν 1 τότε οι πιθανές τιμές (και οι αντίστοιχες καταστάσεις τους) είναι τρεις: $-1, 0, 1$. Μπορούμε να φανταστούμε τους αντίστοιχους υποχώρους σαν τρεις γραμμές του τρισδιάστατου χώρου – βλ. τη σφαίρα Bloch πιο πάνω. Η κατάσταση που αντιστοιχεί στην 0, θα δίνει την τιμή 1 σε προτάσεις που σχετίζονται με το να έχει το σύστημα αυτήν τιμή και 0 για τις άλλες δύο. Αν πάρουμε οποιαδήποτε γραμμή που δεν ταυτίζεται με κάποια από αυτές θα παίρνει μια τιμή στο $(0,1)$.

¹⁵ Δεν είμαστε αρκετά αυστηροί εδώ. Απαιτείται ο χώρος να είναι και διαχωρίσιμος. Όμως, για το θεώρημα σε αυστηρή μορφή με τις τεχνικές του λεπτομέρειες και την απόδειξη βρίσκονται στο Gleason (1957).

ΜΕΡΟΣ 2^ο

Η ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΙ Η
ΟΡΘΟΔΟΞΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

5. Η ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΑΙ Η ΠΡΟΚΛΗΣΗ

*Blessed is the man who expects nothing,
for he shall never be disappointed*
Jonathan Swift

5.1. Η Μέτρηση στην Κλασική Μηχανική

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι το περιβόητο πρόβλημα της μέτρησης στην κβαντική μηχανική. Για πολλούς θεωρείται το κεντρικό ζήτημα της Φιλοσοφίας της Κβαντικής Μηχανικής κι έχει ταλαιπωρήσει γενιές φυσικών και φιλοσόφων που έχουν καταπιαστεί μαζί του. Το πρόβλημα είναι ουσιαστικά μια διάψευση προσδοκιών: ενώ περιμένουμε ο φορμαλισμός να μας δώσει ένα αποτέλεσμα που θα είναι συμβατό με την εμπειρία της μέτρησής μας, η κβαντική παραδοξότητα έρχεται να καταλύσει κάθε εupoτεία μας και να καταστήσει τη μέτρηση μια απόκρυφη διαδικασία.

Ας προσπασθήσουμε, όμως, να αντιμετωπίσουμε το ζήτημα ξεκινώντας από την εικόνα της μέτρησης που έχουμε στην κλασική μηχανική. Ας πάρουμε το παράδειγμα ενός κινούμενου αυτοκινήτου σε ένα δρόμο ταχείας κυκλοφορίας με σταθερή ταχύτητα. Κάποια στιγμή, ο οδηγός πατά το γκάζι και το σώμα αποκτά μια αρχική επιτάχυνση, η οποία υποθέτουμε πως είναι σταθερή. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Newton, γνωρίζοντας την αρχική θέση και ταχύτητα του αυτοκινήτου μπορούμε να ξέρουμε τόσο την θέση όσο και την ταχύτητά του μετά από κάποιο χρονικό διάστημα t .

Αντίστοιχα, θα μπορούσαμε να είχαμε περιγράψει το πρόβλημα στο πλαίσιο του χαμιλτονιανού φορμαλισμού. Τότε, το σύστημα Σ που περιλαμβάνει το αυτοκίνητο θα βρισκόταν αρχικά σε μια κατάσταση (x_0, p_0) , η οποία θα εξελισσόταν βάσει των εξισώσεων του Hamilton –και δεδομένης της χαμιλτονιανής συνάρτησης που θα αντιστοιχούσε στο σύστημα– σε μια κατάσταση (x, p) . Όμως, επειδή η νευτώνεια είναι ισοδύναμη κι εποπτικά πιο εύληπτη μένουμε στο πλαίσιο αυτής.

Ας υποθέσουμε ότι οι εξισώσεις δίνουν ως αποτέλεσμα πως το αυτοκίνητο σε χρόνο t θα έχει μετακινηθεί κατά s και θα έχει αποκτήσει ταχύτητα v . Τώρα αν προσπαθήσουμε να μετρήσουμε την ταχύτητα του αυτοκινήτου την χρονική στιγμή t (π.χ. με την βοήθεια ενός εξελιγμένου συστήματος ραντάρ), τότε θα πάρουμε μια τιμή πολύ κοντά σε αυτήν την ταχύτητα v . Μάλιστα, σε μεγάλο αριθμό μετρήσεων περιμένουμε το αποτέλεσμα να είναι κατά μέσο όρο ίσο με αυτό που παίρνουμε ως λύση των εξισώσεών μας.

Οποιοδήποτε σφάλμα ή περιορισμός στις μετρήσεις θεωρείται αποτέλεσμα ανακρίβειας των οργάνων, παραγόντων στρογγυλοποίησης και γενικότερα παρεμβολών, οι οποίες μπορούν είτε να εξαλειφθούν (τουλάχιστον κατ'αρχήν) είτε να γίνουν απειροστά μικρές. Όπως, είδαμε λόγω της Boolean δομής που έχει το σύνολο των προτάσεων της κλασικής μηχανικής, ο καθορισμός της κατάστασης του συστήματος καθορίζει και την αληθοτιμή όλων των προτάσεων. «Οι ιδιότητες είναι εμμενώς συνδεδεμένες με ένα αντικείμενο όπως υπάρχει στον κόσμο και η μέτρηση δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια ιδιαίτερου τύπου διαδικασία σχεδιασμένη να αποκαλύπτει την τιμή ενός συγκεκριμένου μεγέθους» (Isham

1995, σελ 69). Οι δύο δρόμοι να προσεγγίσουμε τον κόσμο, μέτρηση και υπολογισμός, φτάνουν στο ίδιο τέρμα.

Ποια είναι, λοιπόν, η εικόνα που έχουμε για τη διαδικασία της μέτρησης όπως λαμβάνει χώρα στο πλαίσιο της κλασικής;

α) Το σύστημα Σ που μελετούμε βρίσκεται σε μια κατάσταση s και η μετρητική συσκευή $M \in S_\Sigma$ σε μια κατάσταση $r \in S_M$ – όπου S_M, S_Σ οι αντίστοιχοι χώροι φάσης. Τόσο το Σ όσο και η M έχουν καθορισμένες τιμές για όλα τα μεγέθη τους. Για παράδειγμα, το Σ έχει ταχύτητα $f_v(s)$ και η M έχει τιμή του δείκτη $f_G(r)$.

β) Η μετρητική συσκευή και το σύστημα είναι πλήρως ανεξάρτητα και διαχωρίσιμα μεταξύ τους. Κατά την διαδικασία της μέτρησης το σύνθετο σύστημα $\Sigma + M$ περνά από την κατάσταση $(s, r) \in S_\Sigma \times S_M$ στην κατάσταση $(s, r') \in S_\Sigma \times S_M$. Οι τιμές συσκευής είναι βαθμονομημένες ώστε να αντιστοιχούν στις ιδιότητες του συστήματος. Λόγω της διαχωρισιμότητας, μόλις η συσκευή μου δώσει τιμή r_1 ξέρω και την τιμή a_1 του συστήματος.

γ) Η μέτρηση αποκαλύπτει την προϋπάρχουσα κατάσταση και τιμή του συστήματος s χωρίς οποιαδήποτε παρεμβολή, η οποία μπορεί τουλάχιστον κατ'αρχήν να εξαλειφθεί. Η πραγματικότητα είναι ένα πλήρως προσδιορισμένο πεδίο ιδιοτήτων. Όλες οι αποκλίσεις και σφάλματα είναι αποτέλεσμα περιορισμών των οργάνων και των δικών μας δυνατοτήτων πιστής αναπαραγωγής πειραμάτων, παρατηρήσεων κτλ.

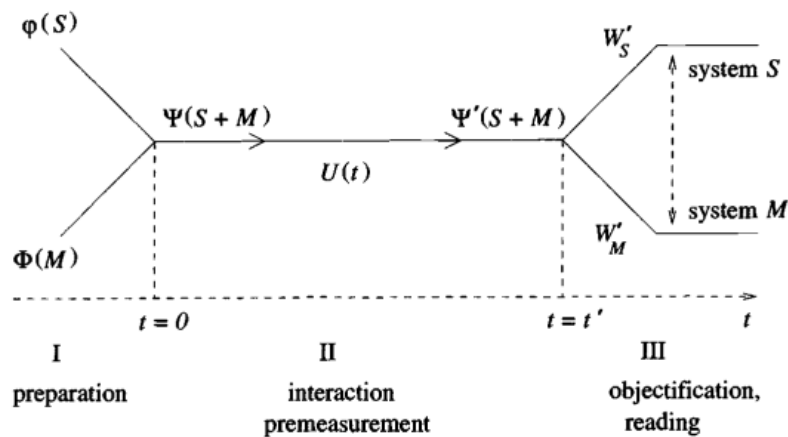
5.2. Ένα Εποπτικό Διάγραμμα

Δυστυχώς, η εικόνα αυτή παύει να ισχύει στο πλαίσιο της κβαντικής μηχανικής. Οι δύο δρόμοι μπορεί να ξεκινούν από την ίδια αφετηρία, αλλά καταλήγουν σε διαφορετικά σημεία. Ας δούμε τώρα τι σημαίνει αυτό και πώς αναδεικνύεται στο πλαίσιο του φορμαλισμού που έχουμε αναπτύξει. Πρώτα, ας σκεφτούμε ποια είναι η εποπτική εικόνα που έχουμε σχετικά με την διεξαγωγή μιας μέτρησης.

1. Αρχικά διαθέτουμε ένα σύστημα Σ προς μελέτη (π.χ. ένα ηλεκτρόνιο) και μια συσκευή μέτρησης M (η περίφημη Stern-Gerlach) που έχουν ετοιμαστεί κατάλληλα (είναι σε κάποια γνωστή κατάσταση και ρυθμισμένη ώστε να μεταβάλλεται ανάλογα με τις καταστάσεις του ηλεκτρονίου). Ενδιαφερόμαστε να μάθουμε την τιμή που έχει ένα μέγεθος του συστήματος (π.χ. το spin του ηλεκτρονίου στον άξονα z) και η συσκευή έχει έναν δείκτη, ο οποίος μετακινείται σε θέσεις που βρίσκονται σε αντιστοιχία με τις δυνατές τιμές του μεγέθους A .

2. Στη συνέχεια, φέρνουμε σε επαφή το σύστημα Σ και την συσκευή M , ώστε αυτά να αλληλεπιδράσουν. Η αλληλεπίδραση των δύο έχει σαν αποτέλεσμα την μετακίνηση της θέσης του δείκτη της συσκευής σε κάποια θέση. Όπως είπαμε, η θέση αυτή δεν είναι αυθαίρετη.

3. Στο τέλος της αλληλεπίδρασης, γνωρίζουμε πως ο δείκτης είναι σε κάποια συγκεκριμένη θέση. Απομακρύνουμε το πέπλο της άγνοιάς μας μαθαίνοντας την τιμή του δείκτη της συσκευής μέσω απλής παρατήρησης.



Με αυτό το σχεδιάγραμμα κατά νου, θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε την διαδικασία της μέτρησης χρησιμοποιώντας τον φορμαλισμό της κβαντικής μηχανικής. Υποθέτουμε, λοιπόν, πως τόσο το σύστημα όσο και η μετρητική συσκευή αποτελούν κβαντικά συστήματα και μπορούν να περιγραφούν με τα εργαλεία της θεωρίας (βλ. Mittelstaedt 1998, σελ. 22-4). Θα δούμε πως τελικά η περιγραφή της εξέλιξης του συστήματος κατά την αλληλεπίδραση συστήματος και συσκευής δεν είναι συμβατή με την εμπειρία που έχουμε για τις μετρήσεις.

Πριν ξεκινήσουμε, ας ξεκαθαρίσουμε κάποια πράγματα για τις μετρήσεις. Οποιαδήποτε μέτρηση αποτελεί μια πρόκληση από την σκοπιά των πρακτικών δυσκολιών που πρέπει να ξεπεραστούν προκειμένου να καταστεί δυνατή. Στην μελέτη μας θα αναφερθούμε μονάχα σε μετρήσεις που δεν διαταράσσουν την κατάσταση του συστήματος κατά τρόπο «καταστρεπτικό»: δεν καταστρέφουν το σύστημα (π.χ. δεν οδηγούν σε απορρόφηση σωματιδίων) ή δεν αλλάζουν την κατάσταση στην οποία βρίσκεται (τουλάχιστον όχι περισσότερο από όσο περιμένουμε από την μέτρηση (σύμφωνα με το αξίωμα 3 που θέσαμε). Τι σημαίνει ακριβώς αυτό; Φυσικά, η μέτρηση δεν μπορεί να είναι ιδανική με τον τρόπο που γνωρίζουμε στην κλασική μηχανική καθώς δεχόμαστε πως με τον ένα ή τον άλλο τρόπο διαδραματίζει κεντρικό ρόλο στο τι κατάσταση θα έχει το σύστημα. Όμως, πέρα από αυτήν την αλλαγή, δεν θα επιφέρει κάποια άλλη τροποποίηση του συστήματος σε σχέση π.χ. με άλλες ιδιότητές του. Αυτό εκφράζεται ως εξής (Mittelstaedt 1998, σελ. 34): αν έχω ένα μέγεθος B συμβατό με το A και το σύστημα στην κατάσταση $|\psi_S\rangle$ έχει τιμή β για αυτό το μέγεθος με πιθανότητα 1, η πιθανότητα αυτή δε θα μεταβληθεί μετά από μέτρηση του A .

Επίσης, οι μετρήσεις που θα μας απασχολήσουν θα είναι κι επαναλήψιμες, δηλαδή σε περίπτωση που επαναληφθούν θα δίνουν σαν αποτέλεσμα την ίδια τιμή του μεγέθους. Πιο τυπικά (για να καλύψουμε και περιπτώσεις που το σύστημα δεν είναι σε ιδιοκατάσταση του μεγέθους), η μέτρηση θα είναι επαναλήψιμη, αν έχοντας δώσει μια τιμή α σαν αποτέλεσμα την επαναλάβουμε, η πιθανότητα να δώσει και πάλι α είναι ίση με 1.

5.3. Η Διαδικασία της Μέτρησης μέσω του Κβαντικού Φορμαλισμού

I. Προετοιμασία

Το αρχικό μας στάδιο, αυτό της προετοιμασίας, λαμβάνει χώρα πριν το «συμβάν» της μέτρησης, δηλαδή πριν η συσκευή και το σύστημα αρχίσουν να αλληλεπιδρούν.

Το σύστημα Σ βρίσκεται σε μια κατάσταση $|\psi_\Sigma\rangle$ και η συσκευή μέτρησης M βρίσκεται αντίστοιχα σε μια κατάσταση $|r_0\rangle$, η οποία αποτελεί την ιδιοκατάσταση ενός μεγέθους $\hat{R}$ που είναι χαρακτηριστικό για την M όπως π.χ. ο τελεστής του οποίου οι ιδιοκαταστάσεις δίνουν τις τιμές του δείκτη.

Θεωρούμε τώρα το Σ και το M μαζί ως ένα ενιαίο σύστημα $\Sigma + M$, του οποίου η κατάσταση δίνεται από το τανυστικό γινόμενο των δύο αρχικών καταστάσεων που περιγράψαμε:

$$|\psi_{\Sigma+M}\rangle = |\psi_\Sigma\rangle \otimes |r_0\rangle \quad (5.1)$$

II. Αλληλεπίδραση – Προμέτρηση

Το επόμενο στάδιο είναι αυτό κατά το οποίο τα δύο συστήματα βρίσκονται σε αλληλεπίδραση. Λόγω αυτής το ενιαίο σύστημα $\Sigma + M$ που θεωρήσαμε προηγουμένως μεταβάλλει την κατάσταση του, σύμφωνα με τον γνωστό νόμο εξέλιξης που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα:

$$|\psi_{\Sigma+M}'\rangle = U(t) (|\psi_\Sigma\rangle \otimes |r_0\rangle) \quad (5.2)$$

όπου $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{int}t}$ και H_{int} ο τελεστής που σχετίζεται με την αλληλεπίδραση των δύο συστημάτων¹⁶. Έχουμε θεωρήσει πως η χρονική στιγμή εκκίνησης ($t = 0$) είναι ακριβώς όταν ξεκινάει η αλληλεπίδραση των δύο συστημάτων ενώ t είναι η χρονική στιγμή που αυτά θεωρούνται πια διαχωρισμένα το ένα από το άλλο.

Τώρα έχουμε δύο δυνατές περιπτώσεις:

I) Το σύστημα Σ αρχικά να είναι σε μια ιδιοκατάσταση του μετρούμενου μεγέθους A , δηλαδή $|\psi_\Sigma\rangle = |a_i\rangle$ για κάποιο $i = 1, 2 \dots$. Τότε, η μέτρηση εφόσον είναι ιδανική δεν θα διαταράσσει την κατάσταση του συστήματος και θα έχουμε τελικά ότι

$$|\psi'_{\Sigma+M}\rangle = |\psi_\Sigma\rangle \otimes |r_1\rangle \quad (5.3)$$

με το r_1 να είναι μια νέα ιδιοκατάσταση του μεγέθους R της μηχανής – να δείχνει π.χ. την τιμή « $+\frac{1}{2}$ » για την περίπτωση που μετράμε το spin στο σύστημα Σ .

II) Το σύστημα να βρίσκεται σε μια οποιαδήποτε άλλη κατάσταση $|\psi_\Sigma\rangle$, η οποία δεν ταυτίζεται με κάποια ιδιοκατατάσταση του A . Τότε, μπορούμε να αναλύσουμε αυτήν την κατάσταση στη βάση που δημιουργούν οι ιδιοκαταστάσεις του A , δηλαδή στα $\{|a_i\rangle\}_{i=1,2,\dots,n}$ (βάσει του φασματικού θεωρήματος) και να πάρουμε

$$|\psi_\Sigma\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |a_i\rangle \quad (5.4)$$

¹⁶ Φυσικά αντίστοιχοι τελεστές που αναπαριστούν την ενέργεια των εμπλεκόμενων συστημάτων υπάρχουν. Όμως, κατά την διάρκεια της μέτρησης θεωρούμε πως ο H_{int} (η ενέργεια της αλληλεπίδρασης των συστημάτων κυριαρχεί (Omnes 1994, σελ. 73-5).

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη την αλληλεπίδραση, εφαρμόζουμε την (5.2) και παίρνουμε χάρη στο ότι ο τελεστής $U(t)$ διατηρεί τη γραμμικότητα των αθροισμάτων:

$$|\psi'_{\Sigma+M}\rangle = U(t) \sum_{i=1}^n a_i |a_i\rangle \otimes |r_0\rangle = \sum_{i=1}^n U(t)(a_i |a_i\rangle \otimes |r_0\rangle) = \sum_{i=1}^n a_i |a_i\rangle \otimes |r_i\rangle \quad (5.5)$$

Η κατάσταση του ενιαίου συστήματος $\Sigma + M$ είναι πλέον μια υπέρθεση. Το εντυπωσιακό στοιχείο είναι πως αυτή η κατάσταση αποτελεί μια καθαρή κατάσταση του συστήματος όπως διαπιστώνουμε εξετάζοντας τον τελεστή προβολής της: $P_{|\psi'_{\Sigma+M}\rangle}^2 = P_{|\psi'_{\Sigma+M}\rangle}$.

Σημείωση: Εδώ εξετάσαμε μια τυπική περίπτωση μέτρησης, όπου η αλληλεπίδραση μεταξύ συσκευής και συστήματος (που περιγράφεται μέσω της δράσης του μοναδιαίου τελεστή U), αφορά παρατηρήσιμα μεγέθη με διακριτό φάσμα χωρίς εκφυλισμό. Παρόμοιες διαδικασίες μπορούν να περιγραφούν, ώστε να συμπεριλάβουν περιπτώσεις με εκφυλισμένες καταστάσεις ή μεγέθη με συνεχές φάσμα (βλ. σχετικά Mittelstaedt 1998, σελ. 30-3 καθώς και Busch et al 1991, σελ. 63-4)

III. Αντικειμενικοποίηση και Ανάγνωση

Το τελευταίο στάδιο είναι αυτό της διαπίστωσης της τιμής που δίνει σαν αποτέλεσμα η μηχανή μέτρησης με ευθεία παρατήρηση. Θεωρούμε πως η συσκευή είναι δυνατό να παρατηρηθεί άμεσα (δηλαδή δεν χρειάζεται μια πρόσθετη μηχανή για αυτό) από αυτούς που διεξάγουν την μέτρηση.

Στην περίπτωση A, ο δείκτης της μηχανής M έχει λάβει μια τιμή r_k , η οποία αντιστοιχίζεται στην τιμή a_k του συστήματος Σ μέσω μιας συνάρτησης $f: R \rightarrow A$, όπου R το πεδίο τιμών του δείκτη και A το πεδίο τιμών του μεγέθους που εξετάζουμε, ώστε $f(r_k) = a_k$. Θα μπορούσαμε, μάλιστα, για ευκολία να πάρουμε την f ως την ταυτοτική συνάρτηση I , όποτε και θα θεωρούσαμε πως οι τιμές που δίνει η μηχανή είναι ουσιαστικά οι τιμές του μεγέθους

Στην περίπτωση B τα πράγματα είναι κάπως διαφορετικά καθώς το $\Sigma + M$ βρίσκεται σε μια κατάσταση σύζευξης. Τα Σ και M αποτελούν υποσυστήματα του συστήματος $\Sigma + M$. Έτσι, από την συζευγμένη κατάσταση του ενιαίου συστήματος, παίρνουμε τις αντίστοιχες ανηγμένες καταστάσεις $|\psi_\Sigma'\rangle$ και $|\psi_M'\rangle$ του συστήματος και της μηχανής¹⁷:

$$|\psi_\Sigma'\rangle = \sum_i |a_i|^2 P_{|a_i\rangle} \text{ και } |\psi_M'\rangle = \sum_i |a_i|^2 P_{|r_i\rangle} \quad (5.6)$$

Με βάση την εμπειρία μας αυτές (και σίγουρα η $|\psi_M'\rangle$ που αφορά τη συσκευή μέτρησης) θα πρέπει να ερμηνευθούν ως εάν να εκφράζουν την άγνοια του παρατηρητή. Δηλαδή, τα $|a_i|^2$ θα πρέπει τώρα να είναι οι πιθανότητες το μέγεθος του δείκτη ή του συστήματος να είναι όντως στην κατάσταση $|r_i\rangle$ (αντίστοιχα $|a_i\rangle$) κι εμείς απλά να το αγνοούμε μέχρι να κοιτάξουμε τον ίδιο τον δείκτη (Mittelstaedt 1998, σελ. 36). Η ανάγνωση, λοιπόν, κλείνει την διαδικασία της μέτρησης απαλείφοντας την άγνοια.

¹⁷ Για τον ακριβή υπολογισμό του πώς προκύπτουν αυτά τα αθροίσματα βλ. Bub (1997, σελ. 264-5) και Καρακώστας (2000).

5.4. Κάποιες Ελάχιστες Απαιτήσεις

Ας κάνουμε μια μικρή ανασκόπηση. Είδαμε πως η θεωρία μας, η κβαντική μηχανική, είναι μια πιθανοκρατική θεωρία. Όταν ένα σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση που αποτελεί ιδιοκατάσταση ενός μεγέθους A , τότε περιμένουμε η μέτρηση να μας δώσει την αντίστοιχη ιδιοτιμή και το σύστημα να βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση αυτή πριν και μετά τη διαδικασία (υποθέτοντας πως η μέτρηση είναι ιδανική).

Αν το σύστημά μας βρίσκεται σε μια οποιαδήποτε άλλη κατάσταση, τότε η θεωρία, στην περίπτωση που διεξάγουμε μια μέτρηση, δεν μπορεί να μας πει με βεβαιότητα ούτε την κατάσταση του συστήματος ούτε την τιμή που θα λάβουμε. Το μόνο που μπορούμε να γνωρίζουμε είναι η πιθανότητα να λάβουμε την τάδε ή την δείνα τιμή.

Στην μινιμαλιστική ή στατιστική ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής, η πιθανότητα αυτή, P_i , θεωρείται ως μια σχετική συχνότητα. Δηλαδή, μας λέει πως αν ετοιμάσουμε N συστήματα (ή εκτελέσουμε N μετρήσεις στο σύστημα) στην κατάσταση $|\psi\rangle$, μετά την μέτρηση N_1 από αυτά θα είναι στην κατάσταση $|\psi_1\rangle$, N_2 στην $|\psi_2\rangle$ και γενικά N_k στην $|\psi_k\rangle$, ώστε κάθε φορά $P_k = \frac{N_k}{N}$ και $\sum P_k = 1$, καθώς το N τείνει στο ∞ (γίνεται πολύ μεγάλο).

Σε αυτήν την **μινιμαλιστική ερμηνεία** τα μόνα πράγματα που απαιτούμε από την διαδικασία της μέτρησης είναι (Mittelstaedt 1998, σελ. 43):

α) Αίτημα Βαθμονόμησης (B): Όταν διεξάγουμε μια μέτρηση σε ένα σύστημα που βρίσκεται σε μια ιδιοκατάσταση $|a_k\rangle$ του μεγέθους A , ο δείκτης φέρει μια συγκεκριμένη τιμή r_k , για την οποία έχουμε $f(r_k) = a_k$. Το σύστημα θεωρείται πως ήταν στην κατάσταση $|a_k\rangle$ πριν την μέτρηση και είχε την τιμή a_k .

β) Αίτημα Αντικειμενικοποίησης του Δείκτη (ΑΔ): Όταν το σύστημα δεν είναι σε ιδιοκατάσταση του μεγέθους που μετράμε, ο δείκτης και πάλι πρέπει να είναι σε μια συγκεκριμένη τιμή, ακόμη και αν δεν γνωρίζουμε ποια ακριβώς. Η μηχανή είναι στην μικτή κατάσταση $|\psi_M'\rangle = \sum_i |a_i|^2 P_{|r_i\rangle}$ και τα $|a_i|^2$ εκφράζουν την πιθανότητα ο δείκτης να είναι στην κατάσταση $|r_i\rangle$.

γ) Συνθήκη Αναπαραγωγής της Πιθανότητας (ΑΠ): Οι πιθανότητες που υπολογίζουμε για το σύστημα S στην κατάσταση $|\psi\rangle$ σχετικά με τα πιθανά αποτελέσματα της μέτρησης του μεγέθους A , πρέπει να αναπαράγονται και στις συχνότητες που παίρνουμε για τις τιμές του δείκτη όταν εκτελούμε N τέτοιες μετρήσεις. Αν, δηλαδή, έχουμε πιθανότητα $|a_i|^2$ για την κατάσταση $|a_i\rangle \otimes |r_i\rangle$, τότε στα N συστήματα που μετρούμε τα $N_i = |a_i|^2 N$ δείχνουν τιμή r_i για τον δείκτη.

5.5. Το πρόβλημα της αντικειμενικοποίησης

Αν τώρα προσπαθήσουμε να αποδώσουμε μια ιδιότητα ή μια ιδιοκατάσταση $|a_i\rangle$ στο σύστημα, εγείρεται το πρόβλημα της **αντικειμενικοποίησης**, δηλαδή το ζήτημα του κατά πόσον το τέλος της διαδικασίας της μέτρησης είναι δυνατό να μας δώσει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα (Busch et al 1991, σελ. 73-4). Αυτό είναι ισοδύναμο με το να μπορέσουμε να

ερμηνεύσουμε τις καταστάσεις (5.6) ως σωστά μείγματα καταστάσεων, δηλαδή να δώσουμε μια ερμηνεία άγνοιας. Γίνεται, όμως, έτσι φανερό πως το πρόβλημα δεν μπορεί να επιλυθεί. Αυτό διότι, όπως είδαμε και στην §4.2.3., η ερμηνεία των ανηγμένων καταστάσεων (5.6) ως σωστών μειγμάτων καταστάσεων είναι μη συμβατή με την κβαντική μηχανική¹⁸ καθώς τα υποσυστήματα που συνθέτουν το ενιαίο σύνολο της διαδικασίας μέτρησης δεν μπορούν να θεωρηθούν προσδιορισμένα ανεξάρτητα! Το εξαιρετικά εντυπωσιακό αποτέλεσμα της κβαντικής μηχανικής είναι πως ούτε καν η μικτή κατάσταση στην οποία περιέρχεται η μετρητική συσκευή δεν μπορεί να ερμηνευθεί ως αντιπροσωπευτική της άγνοιάς μας για την κατάσταση στην οποία βρίσκεται. Αυτό, όμως, είναι εντελώς ξένο προς την εμπειρία μας! Οι συσκευές μέτρησης, όπως πολύ καλά γνωρίζουμε, μας δίνουν πάντοτε συγκεκριμένα αποτελέσματα ό,τι μέγεθος και να επιλέξουμε να μετρήσουμε! Αυτό ήταν το κίνητρό μας να συμπεριλφθεί το αίτημα αντικειμενικοποίησης του δείκτη ακόμη και στην μινιμαλιστική μας ερμηνεία. Το πρόβλημα της αντικειμενικοποίησης είναι η καρδιά του προβλήματος της μέτρησης.

Πώς θα μπορούσαμε να αντιδράσουμε σε αυτό το πρόβλημα; Ίσως πρέπει να δεχθούμε ότι στην κβαντική διαδικασία έχουμε δύο διαφορετικούς τρόπους εξέλιξης για τα συστήματα. Από τη μια, την «ομαλή» εξέλιξη που μας δίνει η εξίσωση του Schrödinger και από την άλλη, την «απότομη» διακοπή αυτής της διαδικασίας στην περίπτωση που εκτελούμε μια μέτρηση. Μιλάμε τότε για την κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης: η κατάσταση του συστήματος μεταπηδά (εντελώς αυθόρμητα) σε μια νέα κατάσταση, ιδιοκατάσταση του μεγέθους που μετράμε, σε πλήρη ρήξη με την προηγούμενη. Η ιδιοκατάσταση «επιλέγεται» βάσει του κανόνα του Born. Αυτή ήταν ουσιαστικά η «λύση» του von Neumann, ο οποίος εισήγαγε ένα επιπλέον αξίωμα, το αξίωμα προβολής, για να εκφράσει αυτή τη διαδικασία. Σύμφωνα με αυτό, κατά την διεξαγωγή της μέτρησης που δίνει σαν αποτέλεσμα την τιμή a_i για το μέγεθος A το σύστημα περνά από την κατάσταση $\hat{\rho}$ σε μια νέα κατάσταση $\hat{\rho}'$:

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' = \frac{P_{|a_i\rangle}}{\text{tr}(P_{|a_i\rangle})}$$

Έχει αποδειχθεί ότι το αξίωμα του von Neumann δεν δίνει τα επιθυμητά αποτελέσματα στην περίπτωση που υπάρχει εκφυλισμός στις τιμές του μεγέθους που μετράμε (όταν αντιστοιχούν παραπάνω ιδιοκαταστάσεις σε μια τιμή). Κρίνεται, λοιπόν, καλύτερο να χρησιμοποιείται ο λεγόμενος κανόνας του Lüders για να περιγράψει αυτή τη μετάβαση:

¹⁸ Υπάρχουν μάλιστα δύο διαφορετικές εκδοχές της αντικειμενικοποίησης: α) η λεγόμενη «ισχυρή» αντικειμενικοποίηση, σύμφωνα με την οποία μπορούμε να αποδώσουμε μια καθορισμένη κατάσταση (και κατ'επέκταση ιδιότητα στο σύστημα) και β) η «ασθενής» εκδοχή, σύμφωνα με την οποία μπορούμε να αποδώσουμε (κατ'ελάχιστο) μια δεδομένη τιμή του μεγέθους (ιδιότητα) στο σύστημα – ακόμη και αν δεν προβαίνουμε σε κάποιον ισχυρισμό για την κατάστασή του. Αποδεικνύεται πως με οποιοδήποτε τρόπο και αν επιχειρήσουμε την αντικειμενικοποίηση, δηλαδή είτε μέσω της ασθενούς είτε της ισχυρής εκδοχής, το αποτέλεσμα που λαμβάνουμε είναι τελικά το ίδιο καθώς και οι δύο απαιτούν τελικά να ισχύει μια συνθήκη, η οποία εν γένει δεν είναι συμβατή με την κβαντική θεωρία. Για περισσότερες τεχνικά «φορτωμένες» λεπτομέρειες, ο αναγνώστης καλείται να συμβουλευθεί το Mittelstaedt (1998, σελ. 82-7) καθώς και μια πιο συνοπτική παρουσίαση των ίδιων θεμάτων στο Mittelstaedt (1993). Ακόμη, στο Mittelstaedt (1998) υπάρχουν αναλυτικές αποδείξεις της ασυμβατότητας μιας ερμηνείας άγνοιας τόσο για τις καθαρές καταστάσεις, δηλαδή υπερθέσεις ιδιοκαταστάσεων (ό.π. σελ. 69-70) όσο και για τις μικτές καταστάσεις του συστήματος, όπως οι ανηγμένες καταστάσεις των επιμέρους συστημάτων μετά τη μέτρηση (ό.π., σελ. 79-82).

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}' = \frac{\hat{P}_{|a_i\rangle} \hat{\rho} \hat{P}_{|a_i\rangle}}{\text{tr}(\hat{P}_{|a_i\rangle} \hat{\rho} \hat{P}_{|a_i\rangle})}$$

Ο κανόνας του Lüders αντιστοιχεί σε μια μικρότερου τύπου διαταραχή του συστήματος, η οποία καλύπτει περισσότερες περιπτώσεις από την αντίστοιχη πρόταση του von Neumann και απαλείφει το πρόβλημα το αποτέλεσμα της μέτρησης να μην εξαρτάται από την αρχική κατάσταση του συστήματος (βλ. Bub 1977 και ιδιαίτερα Hughes 1989, σελ. 271-5 για περισσότερες λεπτομέρειες).

Ακόμη, όμως, και στην περίπτωση που αποδεχτούμε την ιδέα του von Neumann περί κατάρρευσης, εξακολουθεί να υφίσταται ένα ενοχλητικό αποτέλεσμα (βλ. Omnès 1994, σελ. 72-7 αλλά και Torretti 1998, σελ. 437). Έστω πως έχουμε ένα μέγεθος B που είναι ασύμβατο με το μέγεθος A που μετράμε, δηλαδή θεωρούμε πως ισχύει η σχέση: $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$. Τότε, αν θεωρήσουμε το μέγεθος αυτό ως ένα μέγεθος του ενιαίου συστήματος, $\hat{B} \otimes \hat{I}$, κι επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή του, τότε αντί για:

$$\langle \hat{B} \otimes \hat{I} \rangle = \langle \psi'_{\Sigma+M} | \hat{B} \otimes \hat{I} | \psi'_{\Sigma+M} \rangle = \sum_{i=1}^N |a_i|^2 \langle \hat{B} \otimes \hat{I} \rangle_{|a_i\rangle \otimes |r_i\rangle} \quad (5.8\alpha)$$

το αποτέλεσμα που θα πάρουμε είναι εν γένει ίσο με:

$$\begin{aligned} \langle \hat{B} \otimes \hat{I} \rangle &= \langle \psi'_{\Sigma+M} | \hat{B} \otimes \hat{I} | \psi'_{\Sigma+M} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^N |a_i|^2 \langle \hat{B} \otimes \hat{I} \rangle_{|a_i\rangle \otimes |r_i\rangle} + \sum_{j \neq i} \sum_i a_i a_i^* \langle a_j | \langle r_j | \hat{B} \otimes \hat{I} | r_i \rangle | a_i \rangle \end{aligned} \quad (5.8\beta)$$

Παρατηρώντας, δηλαδή τον (5.8β) καθίσταται σαφές πως στο απλό άθροισμα της (5.8α) πρέπει να προστεθούν κάποιοι ακόμη όροι, όροι συμβολής, οι οποίοι αντιστοιχούν στο δεύτερο άθροισμα. Αυτοί δεν είναι είναι γενικά απαλείψιμοι (βλ. και Omnès 77-9), καθώς γενικά τα $|a_i\rangle \otimes |r_i\rangle$ δεν είναι ιδιοκαταστάσεις του B εφόσον τα A και B δεν μετατίθενται. Όπως είχαμε αναφέρει όταν εξετάζαμε την περίπτωση των ασύμβατων μεγεθών, η συνθήκη $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ είναι απαραίτητη, ώστε τα δύο μεγέθη να έχουν κοινά ιδιοδιανύσματα πέρα από πολύ ειδικές ή τετριμμένες περιπτώσεις. Μάλιστα, η παραπάνω διαδικασία μπορεί πολύ εύκολα να εφαρμοστεί και στην μετρητική συσκευή για ένα μέγεθος θεωρώντας ένα μέγεθός της C ασύμβατο με αυτό της θέσης του δείκτη (π.χ. η ταχύτητα που έχει ο δείκτης). Στην περίπτωση αυτή θα μπορούσαμε να ακολουθήσουμε την ίδια επιχειρηματολογία με πριν μόνο που αντί για $\hat{B} \otimes \hat{I}$, θα θέταμε το μέγεθος $\hat{I} \otimes \hat{C}$. Έτσι, θα συμπεραίναμε πως η θεωρία αφήνει ανοικτό το ενδεχόμενο ύπαρξης φαινομένων συμβολής ακόμη και για μακροσκοπικά αντικείμενα (Omnès 1994, σελ. 77-9). Ακόμη και αν κανείς αποδεχτεί πως τα μικροσκοπικά συστήματα έχουν τόσο αλλόκοτα χαρακτηριστικά, η ίδια η εμπειρία μας διαψεύδει το αποτέλεσμα μας στην περίπτωση των μακροσκοπικών συστημάτων.

Το περίφημο πρόβλημα της μέτρησης, λοιπόν, δεν είναι τίποτα περισσότερο από αυτήν την ασυμβατότητα που προκύπτει μεταξύ της εμπειρίας μας και των συμπερασμάτων που παίρνουμε εφαρμόζοντας το αξιωματικό πλαίσιο της θεωρίας στη μέτρηση. Ο ίδιος ο

μακρόκοσμος μοιάζει να «μολύνεται» από την παραδοξότητα του μικρόκοσμου εξαιτίας της δράσης τριών παραγόντων:

1. Της υπέρθεσης που δημιουργεί μη κλασικές καταστάσεις
2. Της γραμμικότητας της εξίσωσης Schrödinger που μεταφέρει την υπέρθεση στις τελικές καταστάσεις
3. Της σύζευξης που μεταφέρει την υπέρθεση στη συσκευή.

Ακόμη και χωρίς την τελευταία δυσκολία που εξετάσαμε, το αξίωμα του von Neumann δεν φαίνεται ικανοποιητικό. Η προσθήκη μιας επιπλέον ριζικά διαφορετικής διαδικασίας εξέλιξης μοιάζει έντονα *ad hoc*. Το βασικό πρόβλημα είναι η απογοητευτική διαπίστωση ότι η θεμελιώδης δυναμική μας εξίσωση αποτυγχάνει να περιγράψει όλες τις διαδικασίες στη φύση, και η μέτρηση σίγουρα είναι μια από αυτές, σε συμφωνία με τις εμπειρικές μας διαπιστώσεις. Έτσι, κάτι περισσότερο πρέπει να ειπωθεί.

5.6. Διάγνωση

Ας εξετάσουμε, λοιπόν, σε ποιες υποθέσεις βασίστηκε η παραπάνω ανάλυση, για να διαπιστώσουμε τι μπορούμε να τροποποιήσουμε προς επίλυση του προβλήματος (Busch et al 1991, σελ. 91-5). Στα όσα αναπτύξαμε παραπάνω υποθέσαμε τα εξής:

[ΑΠ]: Ισχύει η συνθήκη αναπαραγωγής της πιθανότητας που είδαμε πιο πάνω

[ΚΣ]: Το σύστημα S είναι ένα κβαντικό σύστημα, δηλαδή περιγράφεται μέσω του κβαντικού φορμαλισμού

[ΚΜ]: Η συσκευή M είναι ένα κβαντικό σύστημα, δηλαδή περιγράφεται και αυτή μέσω του κβαντικού φορμαλισμού

[ΔΝ]: Η αλληλεπίδραση των συστημάτων περιγράφεται μέσω της εξίσωσης Schrödinger, δηλαδή μέσω ενός μοναδιαίου μετασχηματισμού

[ΑΔ]: Ο δείκτης αντικειμενικοποιείται: έχουμε καθορισμένες τιμές – θέσεις του δείκτη πάνω σε μια κλίμακα – για κάθε μέτρηση

Οι υποθέσεις αυτές δεν είναι συμβατές μεταξύ τους, καθώς, όπως είδαμε, δεχόμενοι τις ΑΠ, ΚΣ και ΚΜ έπεται πως δεν γίνεται να ισχύει η ΑΔ. Η επίλυση του προβλήματος, λοιπόν, απαιτεί κάποια τροποποίηση σε αυτές τις υποθέσεις.

Είναι μάλλον δύσκολο να απορρίψουμε τις ΑΠ και ΚΣ. Η πρώτη συνδέει την διαδικασία της μέτρησης με τον φορμαλισμό της θεωρίας ενώ η ΚΣ δηλώνει απλώς πως το σύστημα που εξετάζουμε περιγράφεται μέσω της κβαντικής θεωρίας. Απομένει, λοιπόν, να τροποποιήσουμε κάποια άλλη από τις υποθέσεις μας:

Την ΚΜ: να αρνηθούμε πως η συσκευή περιγράφεται πλήρως από τον κβαντικό φορμαλισμό, η επίκληση κλασικών εννοιών είναι αναπόφευκτη – η επιλογή του Bohr

Την ΔΝ: να αρνηθούμε πως ο δυναμικός νόμος κατά Schrödinger επαρκεί, αλλά χρειαζόμαστε κάποια τροποποίησή του – να εισαγάγουμε κάποιους πρόσθετους παράγοντες που καθορίζουν την εξέλιξη των συστημάτων

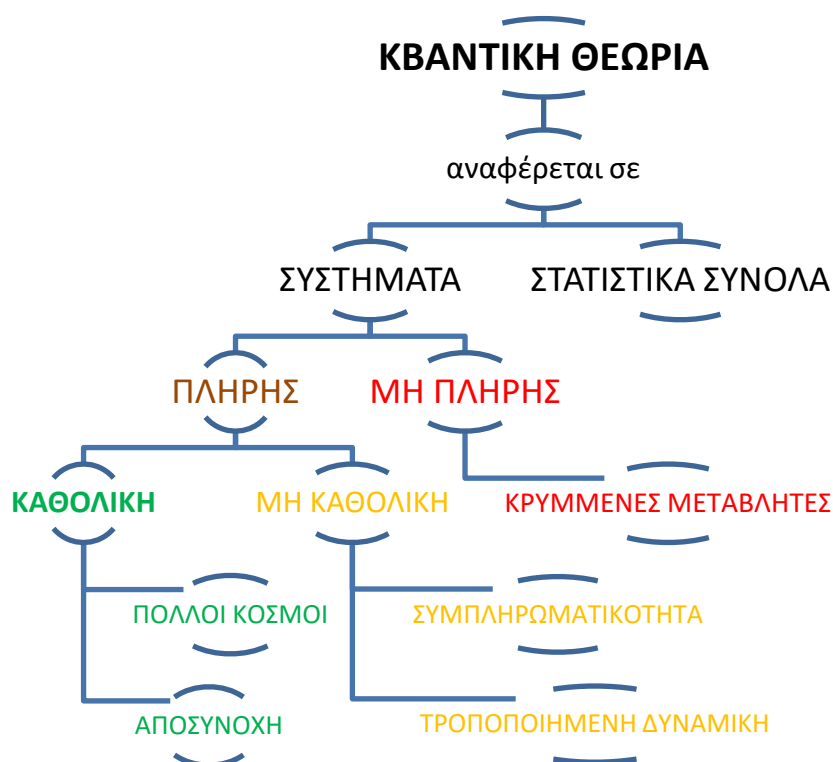
Την ΑΔ: να αρνηθούμε την ίδια την αντικειμενικοποίηση και να θεωρήσουμε πως τα πράγματα δεν έχουν την φύση που πιστεύαμε – η περίπτωση των πολλών κόσμων

Ας δούμε τώρα, πώς μπορούμε να κατατάξουμε όλες τις επιλογές μας. Στην βάση έχουμε την κβαντική μηχανική ως έναν εξαιρετικά επιτυχή φορμαλισμό που μας δίνει πολύ σωστές προβλέψεις σχετικά με διάφορα φαινόμενα του μικρόκοσμου. Μπορούμε να θεωρήσουμε πως οι πιθανότητες είναι ουσιαστικά σχετικές συχνότητες επί συνόλων όμοια προετοιμασμένων συστημάτων. Αν μείνουμε σε αυτή την κατανόηση της θεωρίας, βρισκόμαστε εντός του πλαισίου μιας μινιμαλιστικής ερμηνείας. Σύμφωνα με αυτήν, η κβαντική θεωρία αναφέρεται σε στατιστικά σύνολα συστημάτων, αλλά δεν δεσμευόμαστε σχετικά με το αν οι προβλέψεις της αφορούν και τα μεμονωμένα συστήματα. Αξίζει να διευκρινίσουμε εδώ μια λεπτή διαφορά μεταξύ μινιμαλιστικής και στατιστικής ερμηνείας. Η πρώτη ουσιαστικά αντιμετωπίζει την κβαντική μηχανική με τρόπο εργαλειοκρατικό δίνοντας έμφαση στην επιτυχία των προβλέψεων της και αποφεύγοντας να δεσμευθεί σε σχέση με το πού αναφέρεται, τι ακριβώς σημαίνει για τον κόσμο. Από την άλλη, η στατιστική ερμηνεία προβαίνει στον ισχυρότερο ισχυρισμό ότι η κβαντική μηχανική αναφέρεται ουσιαστικά μόνο σε σύνολα συστημάτων και όχι σε μεμονωμένα αντικείμενα (Gibbins 1987, σελ. 75-9). Θα επανέλθουμε σε αυτήν την προσέγγιση προς το τέλος της εργασίας αυτής.

Αν, όμως, κάνουμε το πρώτο βήμα προς το ρεαλισμό και ισχυριστούμε πως η θεωρία περιγράφει και μεμονωμένα συστήματα, δηλαδή αναφέρεται κατά κάποιο τρόπο στις ιδιότητες που φέρουν τα διάφορα αντικείμενα του μικρόκοσμου, αντιμετωπίζουμε το πρώτο πρόβλημα. Πώς μπορούν να συμβιβαστούν τα όσα μας λέει η κβαντική μηχανική για τις ιδιότητες με την εικόνα που έχουμε για τα συστήματα; Πώς γίνεται π.χ. κάποιες ιδιότητες να μην μπορούν να αποδοθούν μαζί, η μέτρηση και το πλαίσιο της να τις μεταβάλλει, ο ίδιος ο κόσμος να μοιάζει απροσδιόριστος; Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα, κάποιοι υποστηρίζουν πως η θεωρία δεν μπορεί να είναι πλήρης, δηλαδή υπάρχουν στοιχεία της πραγματικότητας, τα οποία αποτυγχάνει να περιγράψει. Αυτά τα στοιχεία, οι λεγόμενες κρυμμένες μεταβλητές, δίνουν την δυνατότητα να διατηρηθεί μια κλασική εικόνα για τον κόσμο. Αυτός έχει μια καθορισμένη δομή, την οποία η κβαντική θεωρία αποκαλύπτει μονάχα εν μέρει. Στη μέτρηση, λοιπόν, δεν συμβαίνει τίποτα περίεργο. Απλά λόγω της πολυπλοκότητας των παραμέτρων που επηρεάζουν το αποτέλεσμα, δεν μπορούμε να αποφύγουμε την αναφορά σε πιθανότητες ως μέτρο της άγνοιάς μας.

Ωστόσο, η θέση της μη πληρότητας υπήρξε μάλλον περιθωριακή στην επιστημονική κοινότητα. Οι περισσότεροι επιστήμονες αλλά και φιλόσοφοι θεώρησαν πως η προσθήκη κρυμμένων μεταβλητών δεν προσφέρει κάποιο πολύ σαφές πλεονέκτημα, αλλά αντιθέτως περιπλέκει την κατάσταση. Έτσι, δεχόμενοι την πληρότητα της θεωρίας, έπρεπε να αντιμετωπίσουν το ζήτημα του κατά πόσον μπορεί να θεωρηθεί και μια καθολική θεωρία ή υφίστανται περιορισμοί στην εμβέλειά της. Ο Ν. Bohr, ο πνευματικός τρόπον τινά «ποιμένας» της κβαντικής επανάστασης, για παράδειγμα, θεώρησε πως η κβαντική θεωρία

αναδεικνύει τους περιορισμούς μας για την κατανόηση του μικρόκοσμου και πως η κλασική εικόνα ήταν αναγκαία για μια συνεπή χρήση της (D'Espagnat 1974, σελ. 251). Σε κάθε περίπτωση, αν η κβαντική μηχανική θεωρηθεί μια καθολικά εφαρμόσιμη θεωρία, τότε πρέπει κάπως να εξηγηθεί το πρόβλημα της μέτρησης και γενικότερα η απουσία των κβαντικών χαρακτηριστικών στον μακρόκοσμο. Από την άλλη, άρνηση της καθολικότητας υπόσχεται να λύσει αυτά τα προβλήματα τροποιώντας κατάλληλα την θεωρία. Έχουμε, δηλαδή, το ακόλουθο διάγραμμα «επιλογών» για την αντιμετώπιση του προβλήματος (βασισμένο στο αντίστοιχο των Busch et al 1991, σελ. 13):



Αυτό θα είναι και το αντίστοιχο πλάνο απαντήσεων που θα εξετάσουμε σε σχέση με το πρόβλημα της μέτρησης. Αμέσως μετά, στην ενότητα 6, θα εξετάσουμε τη λεγόμενη ορθόδοξη ερμηνεία προσπαθώντας να απομυλέξουμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις που συχνά συγχέονται. Από τη μια την προσέγγιση που, εμπνεόμενη από μια ιδέα του von Neumann, στράφηκε στον ιδιαίτερο ρόλο που διαδραματίζει η συνείδηση του παρατηρητή στη μέτρηση και από την άλλη, τις φιλοσοφικές θέσεις του Bohr με επίκεντρο την έννοια της συμπληρωματικότητας. Έπειτα, στην ενότητα 7, θα επιχειρήσουμε να οριοθετήσουμε την δυνατότητα να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα μέσω της υπόθεσης κρυμμένων μεταβλητών και θα εξετάσουμε συνοπτικά την θεωρία του Bohm. Στην ενότητα 8, δεχόμενοι την πληρότητα, θα δούμε πώς μπορούμε να μεταβάλλουμε τον δυναμικό νόμο, ώστε να απαλείψουμε τις μακροσκοπικές υπερθέσεις και να λάβουμε καθορισμένες τιμές μέσω μιας διαδικασίας «αυθόρμητης» κατάρρευσης (θεωρία GRW). Τέλος, στην ενότητα 9, δεχόμενοι την καθολικότητα θα προσπαθήσουμε να δούμε αν ο ίδιος ο φορμαλισμός επαρκεί, για να εξαλείψει το πρόβλημα με «κόστος» μια μάλλον ριζική τροποποίηση των αντιλήψεών μας για την φύση του κόσμου και της πραγματικότητας μέσω της αγαπημένης (για τη λογοτεχνία της επιστημονικής φαντασίας) θεωρίας των πολλαπλών κόσμων.

6. Η ΟΡΘΟΔΟΞΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ

*If quantum mechanics hasn't profoundly shocked you,
you haven't understood it yet*

Niels Bohr

Κάποιες φορές το όνομα «ορθοδοξία» έρχεται να καλύψει ένα μεγάλο φάσμα αντιλήψεων με στόχο να εξαφανίσει τις διάφορες υποβόσκουσες αιρετικές αντιλήψεις όχι ρίχνοντας φως στο δόγμα, αλλά συσκοτίζοντας επαρκώς τα πράγματα, ώστε να επέλθει ομοιομορφία. Αυτή η εικόνα περιγράφει εν ολίγοις την κατάσταση με αυτό που έχει επικρατήσει να ονομάζουμε ορθόδοξη ερμηνεία ή ερμηνεία της Κοπεγχάγης, όπως αυτή υποτίθεται πως διαμορφώθηκε ως ένα ενιαίο σύνολο θέσεων για την ερμηνεία της κβαντικής θεωρίας από τους ίδιους τους πρωτεργάτες της. Με την ερμηνεία αυτή είναι συνδυασμένα τα ονόματα (κυρίως) των Niels Bohr, Werner Heisenberg, Wolfgang Pauli ή και του Paul Dirac, αλλά πολλές φορές παρεισφρέουν στοιχεία και απόψεις από το έργο του John von Neumann και μετέπειτα στοχαστών ή επιστημόνων.

6.1. Von Neumann και Συνείδηση του Παρατηρητή

Η παραδεδομένη αντίληψη που έχουμε για την κβαντική μέτρηση είναι αυτή του von Neumann. Όπως είδαμε, ο von Neumann θεώρησε πως η κβαντική θεωρία θέτει δύο ριζικά διαφορετικούς τρόπους εξέλιξης για τις καταστάσεις των συστημάτων. Από τη μια πλευρά βρίσκεται η γραμμική και ντετερμινιστική εξέλιξη της εξίσωσης Schrödinger. Από την άλλη, η «βίαιη» και αναπόδραστα στοχαστική διαδικασία κατάρρευσης της κυματοσυνάρτησης, όταν διενεργείται κάποιου είδους μέτρηση ενός κβαντικού συστήματος που δεν βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση του μετρούμενου μεγέθους. Η διαδικασία αυτή επηρεάζει κατά τρόπο καταλυτικό το σύστημα διαμορφώνοντας την κατάσταση και τις ιδιότητές του.

Εδώ, όμως, εγείρεται το ερώτημα: πότε ακριβώς λαμβάνει χώρα μια μέτρηση; Ας σκεφτούμε το εξής σενάριο. Έχουμε το σύστημα S και την μετρητική συσκευή M . Φέρνουμε τα δύο σε κατάσταση αλληλεπίδρασης και λαμβάνουμε τη γνωστή κατάσταση υπέρθεσης:

$$|\psi_{S+M}\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |a_i\rangle \otimes |r_1\rangle$$

Χάρη στο αξίωμα προβολής, γνωρίζουμε πως το σύστημα θα μετέλθει αυθόρμητα σε κάποια δεδομένη ιδιοκατάσταση $|a_i\rangle$ του μετρούμενου μεγέθους με πιθανότητα $|a_i|^2$ όπως μας πληροφορεί και η μικτή κατάσταση που αναπαριστά ένα γνήσιο μείγμα καταστάσεων:

$$|\psi_S\rangle = \sum_i |a_i|^2 P_{|a_i\rangle}$$

Όμως, πότε ακριβώς έλαβε χώρα αυτό το άλμα; Πώς ακριβώς έλαβε χώρα για την συσκευή, η οποία επίσης αντιμετωπίζεται ως κβαντικό σύστημα; Είναι φανερό πως η μετάβαση σε μια καθορισμένη κατάσταση θα απαιτούσε τώρα μια νέα μετρητική συσκευή M' και μια πρόσθετη διαδικασία μέτρησης για να την φέρει σε μια καθορισμένη κατάσταση. Και το

επιχείρημα θα μπορούσε να εφαρμοστεί εκ νέου για τη μέτρηση της συσκευής M' , η οποία θα απαιτούσε μια νέα μετρητική συσκευή M'' , ώστε να μεταβεί σε μια καθορισμένη κατάσταση κ.ο.κ. Δημιουργείται μια άπειρη αλυσίδα μετρήσεων που έχει ονομαστεί «η αλυσίδα του von Neumann». Σε κάθε στάδιο μέτρησης (είτε είμαστε στην συσκευή M είτε M' είτε στην M'') το αποτέλεσμα για το σύστημα θα είναι το ίδιο. Αυτό δείχνει πως το σημείο που χωρίζουμε σύστημα και συσκευή είναι ουσιαστικά αυθαίρετο (Καρακώστας 2000, σελ. 9). Τι είναι, λοιπόν, αυτό που κάνει την διαφορά στην περίπτωση των μετρήσεων, αν αυτό δεν είναι η παρουσία μιας μετρητικής συσκευής;

Προκειμένου να σταματήσει αυτή η άπειρη διαδικασία μετρήσεων και να βρεθεί το τελικό σημείο κατά το οποίο διαπιστώνουμε ότι το σύστημα έχει περιέλθει στην τάδε κατάσταση, ο von Neumann τόνισε την σημασία που έχει η συνείδηση του παρατηρητή. Η αλυσίδα που περιγράψαμε σταματά όταν ο παρατηρητής ανακοινώσει πως διαπίστωσε την τιμή του δείκτη της μετρητικής συσκευής. Η συνείδηση είναι αυτή που έρχεται ως τελικός κριτής, ως το στοιχείο εκείνο που καθιστά πραγματικά την μέτρηση μια περατωμένη διαδικασία. Για αυτό, η συνείδηση θα πρέπει να εκληφθεί ως εκτός εμβέλειας του φορμαλισμού της κβαντικής μηχανικής – αλλιώς θα είχαμε και πάλι το ίδιο πρόβλημα με τη μετρητική συσκευή και την επ'άπειρον αναδρομή. Εισάγεται, λοιπόν, ένα δυϊσμός: από τη μια, η φυσική πραγματικότητα όπως μας περιγράφεται μέσα από την κβαντική θεωρία με τις καταστάσεις συστημάτων, τα σωματίδια που εντοπίζονται στο χώρο κτλ. Από την άλλη, η συνείδηση ως ένα μη αναγώγιμο και διακριτό υπερφυσικό στοιχείο της πραγματικότητας που συμβάλλει καθοριστικά –μη εξαλείψιμα– στη διαμόρφωση αυτής. Η θεώρηση αυτή αναπτύχθηκε κυρίως από τους Bauer και London ενώ οι ιδεαλιστικές συνυποδηλώσεις έγιναν δεκτές από διακεκριμένους φυσικούς όπως ο Wigner. Ο τελευταίος, μάλιστα, πρότεινε κι ένα επιχείρημα, που ονομάζεται «ο φίλος του Wigner» με σκοπό να αναδείξει την διαφορά μεταξύ ενός ενσυνείδητου παρατηρητή και μιας μετρητικής συσκευής (Hughes 1989, σελ. 294-5). Το κατά πόσον επιτυγχάνει να ενισχύσει την ανάγκη ύπαρξης ενός ενσυνείδητου παρατηρητή για την μέτρηση είναι τουλάχιστον αμφισβητήσιμο.

Ο προβληματικός χαρακτήρας αυτής της δυϊστικής – ιδεαλιστικής ερμηνείας της θεωρίας, υπογραμμίζεται πολύ έντονα από το πασίγνωστο παράδοξο με την γάτα που πρότεινε ο E. Schrödinger. Το πρόβλημα έχει ως εξής. Ας υποθέσουμε πως παγιδεύουμε μια γάτα G σε ένα κουτί και το συνδέουμε με μια παροχή δηλητηριώδους αερίου. Αν η παροχή είναι ανοικτή, τότε το δηλητηριώδες αέριο θα απλωθεί στο κουτί που βρίσκεται παγιδευμένη η γάτα και το άτυχο ζώο θα πεθάνει. Αν παραμείνει κλειστή, τότε η γάτα θα παραμείνει ζωντανή.

Ο Schrödinger τώρα εισάγει τον εξής όρο: το αν η παροχή θα απελευθερώσει ή όχι το αέριο εξαρτάται από την έκβαση μιας κβαντικής διαδικασίας, συγκεκριμένα την διάσπαση ενός ραδιενεργού ατόμου P , που περιγράφεται από την κατάσταση¹⁹:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_{\mu}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_{\delta}\rangle$$

¹⁹ Η όλη περιγραφή δεν είναι πολύ ακριβής για λόγους συντομίας.

όπου $|\varphi_\delta\rangle$ η κατάσταση που αντιστοιχεί στην διάσπαση του ατόμου και $|\varphi_\mu\rangle$ στην μη διάσπασή του – έχει δηλαδή 50% πιθανότητα είτε να διασπαστεί είτε να μην διασπαστεί μέσα σε κάποιο χρονικό διάστημα. Αντίστοιχα συμβολίζουμε τις δύο καταστάσεις για την γάτα ως $|\psi_z\rangle$ αν αυτή είναι ζωντανή και ως $|\psi_v\rangle$ αν αυτή είναι νεκρή και αντίστοιχα. Το σύνθετο σύστημα μας $P + \Gamma$ είναι στην αρχή στην κατάσταση σύζευξης $|\Phi(0)\rangle = |\varphi_\mu\rangle \otimes |\psi_z\rangle$, δηλαδή το άτομο δεν έχει διασπαστεί και η γάτα είναι ζωντανή. Αφήνουμε το σύστημα να εξελιχθεί στο χρόνο $|\Phi(t)\rangle = U(t)|\Phi(0)\rangle$ και τότε έχουμε:

$$|\Phi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_\mu\rangle \otimes |\psi_z\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_\delta\rangle \otimes |\psi_v\rangle$$

η οποία είναι μια κατάσταση υπέρθεσης. Πώς θα πρέπει να ερμηνεύσουμε αυτή την μαθηματική κατάσταση για την «φυσική» κατάσταση της γάτας στον κόσμο; Αν δεχτούμε την άποψη πως η συνείδηση του παρατηρητή είναι αυτή που ουσιαστικά φέρνει ένα τέλος στην μετρητική διαδικασία και οδηγεί το σύστημα σε μια καθορισμένη κατάσταση, θα πρέπει να πούμε πως η γάτα παραμένει σε μια «ενδιάμεση» απροσδιόριστη κατάσταση, στην οποία δεν είναι ούτε ζωντανή ούτε νεκρή. Λόγω των πολλαπλών τρόπων με τους οποίους μπορεί να αναλυθεί ως στατιστικό μείγμα (ο.π., σελ. 14), η παραπάνω κατάσταση δεν μπορεί να ερμηνευθεί ως μια μικτή κατάσταση

$$\rho = \frac{1}{2} P_{|\varphi_\mu\rangle} \otimes P_{|\psi_z\rangle} + \frac{1}{2} P_{|\varphi_\delta\rangle} \otimes P_{|\psi_v\rangle}$$

που εκφράζει την άγνοιά μας για την κατάσταση του συστήματος. Αν, όμως, ο καθορισμός των καταστάσεων του κόσμου πρέπει να αναμένει την εμφάνιση ενσυνείδητων παρατηρητών, τότε ανοίγει ο ασκός του αϊόλου. Τί είναι αυτό που δίνει στην συνείδηση αυτήν την δυνατότητα; Πώς μπορεί αυτή η δυνατότητα να υποστηριχθεί ανεξάρτητα από την νευρολογική, κι επομένως φυσική, βάση της νόησης (γνωρίζουμε άλλωστε πως υπάρχει μια ισχυρή αλληλεξάρτηση); Και τελικά, τι είδους οντότητες μετράνε ως συνειδήσεις; Η γάτα θα μπορούσε η ίδια να προκαλέσει την κατάρρευση της κυματοσυνάρτησής της;

Αν θέλαμε να εντάξουμε σε κάποια από τις «κατηγορίες» που δώσαμε στο διάγραμμα της §5.6 με τις διάφορες δυνατές λύσεις του προβλήματος της μέτρησης, θα λέγαμε πως ανήκει στις θεωρίες που ενώ δέχονται την πληρότητα της θεωρίας, θεωρούν πως αυτή δεν περιγράφει καθολικά τον κόσμο. Το στοιχείο της συνείδησης δεν υπάγεται στην δικαιοδοσία του φορμαλισμού. Η εισαγωγή του αποτελεί μια τροποποίηση της θεωρίας, καθώς συγκεντρώνει ένα σύνολο διαδικασιών, των καταρρεύσεων που προκαλεί η συνείδηση, οι οποίες δεν περιγράφονται μέσω της θεμελιώδους δυναμικής εξίσωσης της θεωρίας.

6.2. Bohr και Συμπληρωματικότητα

Παραδόξως, η μοίρα και η δύσκολη γλώσσα του, έκαναν τις απόψεις ενός από τους πρωτοπόρους της κβαντικής θεωρίας να είναι από τις πλέον δύσκολες να ερμηνευθούν. Η φιλοσοφική θεώρηση του Bohr σε σχέση με την κβαντική μηχανική είναι το λιγότερο αμφιλεγόμενη. Ακόμη και η παραδοσιακή ερμηνεία που σχετίζεται με το όνομα του, αυτής της Κοπεγχάγης, περιλαμβάνει στοιχεία, τα οποία ο ίδιος θα έβλεπε ως εντελώς ξένα προς τις

αντιλήψεις του. Ενδεικτικά, η Ερμηνεία της Κοπεγχάγης συνδέεται πολύ συχνά με την ιδέα της κατάρρευσης της κυματοσυνάρτησης, της σημασίας του παρατηρητή για την διαδικασία κατά τα πρότυπα των παραπάνω αντιλήψεων, ενώ πολλές φορές θεωρείται ιδεαλιστική, αντιρεαλιστική, θετικιστική κτλ. Για τον Bohr, όπως δείχνουν και οι αντιπαραθέσεις του με τον Einstein, κύριο μέλημα ήταν η συνεπής χρήση των αρχών της κβαντικής θεωρίας με σκοπό την αποφυγή αντιφάσεων. Άλλωστε, η πρώτη διαμάχη, «τιτανομαχία», μεταξύ των δύο μεγάλων αυτών ανδρών αφορούσε την ίδια την συνέπεια της κβαντικής θεωρίας ενώ στη συνέχεια το πεδίο μάχης μεταφέρθηκε στα εδάφη της πληρότητας.

Εμείς δεν θα ασχοληθούμε με το σύνολο των απόψεων του Bohr και τις ιδιαίτερες δυσκολίες στην κατανόησή / ερμηνεία του, αλλά θα εστιάσουμε σε αυτές που μπορούν να συσχετιστούν στενότερα με το πρόβλημα της μέτρησης. Η ερμηνευτική γραμμή του Bohr βασίζεται στη σύλληψη του σε τρία στοιχεία: την διαπίστωση μιας ελάχιστης τιμής αλληλεπίδρασης – δράσης στη φύση (το κβάντο δράσης), την σημασία του κλασικού λεξιλογίου, και την συμπληρωματικότητα των μεγεθών.

Η σκέψη του Bohr έχει στον πυρήνα της μια καντιανού τύπου αντίληψη για την φύση της γνώσης και του μικρόκοσμου. Κατά τον ίδιο, ο ανθρώπινος νους διαθέτει ένα εποπτικό πεδίο εντός του οποίου μπορεί να αντιλαμβάνεται τα διάφορα φυσικά φαινόμενα. Αυτό το πεδίο εκφράζεται καλύτερα μέσα στο πολύ οικείο εννοιολογικό πλαίσιο της κλασικής μηχανικής. Ο Kant είχε προσπαθήσει να παράσχει το επιστημολογικό υπόβαθρο που καθιστά τις αρχές της κλασικής μηχανικής δυνατές μέσω της ανάλυσης των θεμελιωδών αρχών που διέπουν την ανθρώπινη νόηση. Μεταξύ αυτών συναντάμε π.χ. την σταθερότητα της ουσίας (να θεωρούμε κάτι αμετάβλητο σε κάθε μεταβολή) και την αιτιότητα (να αποδίδουμε ένα αίτιο σε κάθε συμβάν)²⁰. Ο Bohr συμμερίζεται την καντιανή αυτή αντίληψη πως η κατανόηση των φυσικών φαινομένων μπορεί να γίνει μόνο μέσα σε αυτό το πλαίσιο που λειτουργεί ο κοινός νους. Ωστόσο, είναι επίσης αληθές, για τον ίδιο, πως η κβαντική θεωρία εισάγει έναν πολύ σημαντικό περιορισμό στην εφαρμοσιμότητα κλασικών εννοιών στον μικρόκοσμο (Bohr 1927, σελ. 53).

Η ιδέα που εισήγαγε κατά τρόπο δραματικό η νέα φυσική θεωρία είναι πως η αλληλεπίδραση ύλης και ενέργειας δεν γίνεται κατά συνεχή τρόπο, αλλά κατά διακριτό προκαλώντας πάντα μια ελάχιστη διαταραχή που εκφράζεται με το κβάντο δράσης του Planck. Για τον Bohr, αυτό σημαίνει πως η διαδικασία της παρατήρησης ενός οποιουδήποτε φαινομένου στον μικρόκοσμο θα πρέπει να λαμβάνει υπόψη της την επίδραση που ασκεί ο παρατηρητής ή, καλύτερα, η μετρητική συσκευή στο σύστημα. Πλήρης διάκριση των δύο δεν είναι εφικτή. Κάθε συμβάν μέτρησης ή παρατήρησης ενέχει μια μη απαλείψιμη διαταραχή στο μετρούμενο σύστημα. Αυτή ήταν, για τον Bohr, η πηγή των σχέσεων απροσδιοριστίας του Heisenberg: κάθε απόδοση θέσης ή ορμής στο σύστημα θα πρέπει αναγκαστικά να λάβει υπόψη αυτό το ελάχιστο όριο αλληλεπίδρασης που ορίζει η σταθερά του Planck, $\hbar$. Επειδή στον μικρόκοσμο, σε αντίθεση με τον μακρόκοσμο, αυτή η πόσοτητα δεν είναι αμελητέα, έπεται πως το πλαίσιο περιγραφής των φαινομένων που είχαμε μέχρι τώρα δεν μπορεί να ισχύει στη μελέτη των ατομικών φαινομένων.

²⁰ Για περισσότερες λεπτομέρειες σε σχέση με την Καντιανή ανάλυση, βλ. Kant (1787)

Βάσει αυτών των συλλογισμών, ο Bohr (1927, σελ. 60) εισάγει τώρα την έννοια της συμπληρωματικότητας των αιτιακών και χωροχρονικών περιγραφών. Το ότι ο λογικός χαρακτήρας της κβαντικής θεωρίας στηρίζεται στην αρχή της συμπληρωματικότητας σημαίνει ότι η πλήρης κατανόηση ενός φαινομένου απαιτεί την περιγραφή του με βάση δύο τουλάχιστον αμοιβαία αποκλειόμενους τύπους περιγραφών (Omnes 1999, σελ. 49). Έτσι, στην περίπτωση ενός σωματιδίου θα έχουμε την περιγραφή του βάσει της θέσης που καταλαμβάνει στο χώρο, ως ένα εντοπισμένο, δηλαδή, σωματίδιο, έναντι της περιγραφής της εξέλιξής του, βάσει της κυματοσυνάρτησής του. Οι έννοιες του χώρου, του χρόνου και της αιτιότητας, τόσο θεμελιώδεις στο καντιανό οικοδόμημα, χάνουν το άμεσο νόημά τους στην κβαντική θεωρία. Παρόλα αυτά, δεν γίνεται να απορρίψουμε το κλασικό εννοιολογικό σύστημα, καθώς αυτό είναι που βρίσκεται σε αντιστοιχία με την εποπτεία μας και πρέπει να «φιλτράρει» τις δηλώσεις μας για τον μικρόκοσμο. Οι πειραματικές διατάξεις, ακόμη και αν θεωρηθούν ως κβαντικά συστήματα, θα εμπλέκουν στην περιγραφή τους στοιχεία από την γλώσσα του μακρόκοσμου. Κατά τον Bohr, η απόδοση ιδιοτήτων γίνεται κατά τρόπο «καταχρηστικό» εντός ενός πλαισίου μέτρησης. Ο D'Espagnat (1995, σελ. 223) αποδίδει πολύ καλά αυτή τη θέση, την οποία ονομάζει αξίωμα του Bohr:

«Ένα κβαντικό σύστημα δεν έχει δυναμικές ιδιότητες από μόνο του (είναι, λοιπόν, α-νόητο να σκεφτόμαστε πως φέρει κάποιες άγνωστες). Όταν συσχετιστεί με μια πειραματική διάταξη, μπορεί να ειπωθεί ότι έχει την δυναμική ιδιότητα, την οποία η συσκευή είναι φτιαγμένη να μετράει. Το [...] συμβάν μέτρησης (η πραγματική αλληλεπίδραση με το όργανο) αποκαλύπτει, τότε, την τιμή αυτής της δυναμικής μεταβλητής στο σύστημα»

Γίνεται φανερό πως η διαδικασία της μέτρησης διαδραματίζει έναν ουσιώδη ρόλο στην προσπάθειά μας να μιλήσουμε για τα κβαντικά φαινόμενα. Είναι η μετρητική συσκευή αυτή που μας δίνει το απαραίτητο πλαίσιο, για να μπορέσει να αποδοθεί μια κατάσταση σε ένα σύστημα (Faye 2014, §5). Το σύστημα και η μετρητική βρίσκονται σε μια κατάσταση σύζευξης, αλλά είναι απαραίτητος ο επιστημολογικός διαχωρισμός τους, ώστε να έχει νόημα να μιλήσουμε για τις ιδιότητες και την κατάσταση του ίδιου του συστήματος. Εξαιτίας αυτού θα πρέπει σε κάθε μέτρηση να υπάρχει ένα τμήμα της μετρητικής συσκευής, το οποίο θα περιγράφεται μέσω κλασικών όρων, το οποίο μπορεί να επιλεγθεί με πραγματιστικό τρόπο (ό.π., §7 και Bohr 1935, σελ. 701). Η κβαντική μηχανική αναδεικνύει τους περιορισμούς μας στην περιγραφή του κόσμου. Αυτό που έχει σημασία είναι να εφαρμόζουμε με συνέπεια τους κανόνες στις περιγραφές των συστημάτων, ώστε να μην αλλοιώνουμε «τις ίδιες τις συνθήκες οι οποίες καθορίζουν τις δυνατές προβλέψεις σε σχέση με την μελλοντική συμπεριφορά [ενός] συστήματος»²¹ (ό.π., σελ. 700).

Τελικά, για τον Bohr η διαδικασία της μέτρησης προϋποθέτει χονδρικά τα παρακάτω στοιχεία. α) Να έχουμε ένα σύστημα, το οποίο περιγράφουμε βάσει των κανόνων της κβαντικής μηχανικής, β) να έχουμε μια συσκευή μέτρησης, η οποία καθορίζει ένα πλαίσιο, δηλαδή το ποιο μέγεθος του συστήματος θα μετρήσουμε, γ) να δώσουμε μια περιγραφή ορισμένων τμημάτων της συσκευής με κλασικό λεξιλόγιο και δ) να αποφύγουμε να

²¹ Κάτι για το οποίο ο Bohr κατηγορεί τους EPR σε σχέση με το διάσημο επιχείρημά τους: δεν αρκεί μόνο η μηχανική επίδραση, για να μεταβάλει τις πιθανές προβλέψεις αλλά αρκεί και μια επιστημολογικού τύπου διαταραχή, η οποία αλλάζει το πλαίσιο της μέτρησης.

μιλήσουμε για το τι συμβαίνει στον μικρόκοσμο μεταφέροντας την μεταφυσική εικόνα που έχουμε για το μακρόκοσμο. Είναι σαν η φύση να έχει κάτι να μας πει, αλλά αυτό να προϋποθέτει πως θα τη ρωτήσουμε κατάλληλα και χωρίς την προσδοκία πως η απάντηση που θα πάρουμε θα είναι συμβατή με την εποπτεία μας (βλ. και D'Espagnat 1995, σελ. 354-8 για την ιδέα μιας «κεκαλυμμένης πραγματικότητας»).

6.2.1. Κανόνες Υπερεπιλογής

Έχοντας συζητήσει την ιδέα πως η συσκευή μέτρησης πρέπει (τουλάχιστον) κατά ένα μέρος να περιγραφεί σαν ένα κλασικό σύστημα και κατ'επέκταση με όρους που υπερβαίνουν τον κβαντικό φορμαλισμό, βρισκόμαστε σε ένα καλό σημείο, για να ασχοληθούμε με την ιδέα των κανόνων υπερεπιλογής. Οι κανόνες υπερεπιλογής αποτελούν κανόνες που μας απαγορεύουν να σχηματίσουμε καθαρές καταστάσεις από την υπέρθεση καθαρών καταστάσεων. Οι καθαρές καταστάσεις, λοιπόν, περιορίζονται στους μονοδιάστατους υποχώρους του χώρου Hilbert. Με αυτόν τον τρόπο, απαλείφονται τα φαινόμενα συμβολής που συναντήσαμε στην εξίσωση 5.9β

$$\sum_{j \neq i} \sum_i a_i a_i^* \langle \alpha_j | \langle r_j | \hat{B} \otimes \hat{I} | r_i \rangle | a_i \rangle = 0$$

και μπορούμε να λάβουμε μια μικτή κατάσταση ως αποτέλεσμα. Τί ακριβώς κάνει, λοιπόν, ένας κανόνας υπερεπιλογής κι επιτυγχάνει αυτή τη λύση; Ουσιαστικά, αποδίδει στο σύστημα ένα μέγεθος A το οποίο μετατίθεται με όλα τα άλλα μεγέθη του συστήματος. Στην περίπτωση της συσκευής μέτρησης, το μέγεθος αυτό θα μπορούσε π.χ. να είναι το μέγεθος R που αναπαριστά τη θέση του δείκτη της. Εφόσον αυτό το μέγεθος μετατίθεται με όλα τα μεγέθη του συστήματος, δηλαδή για κάθε μέγεθος B ισχύει $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, θα έχει και κοινές ιδιοκαταστάσεις με όλα αυτά τα μεγέθη. Με αυτόν τον τρόπο, θα είναι αδύνατο να βρούμε ένα μέγεθος που να σχηματίζει όρους συμβολής για την περίπτωση του R απαλείφοντας την ένσταση στην §5.5.

Αν και η ιδέα των κανόνων υπερεπιλογής μοιάζει υποσχόμενη, αντιμετωπίζει δύο προβλήματα. Από τη μια, πρέπει να δικαιολογηθεί κάπως το γιατί κάποια συστήματα είναι επιδεκτά τέτοιων κανόνων. Αυτό είναι ένα συναφές πρόβλημα με το πού ακριβώς τίθεται το όριο κλασικού και κβαντικού, το οποίο πολλές φορές χρησιμοποιείται ως πρόβλημα για την ερμηνευτική γραμμή του ίδιου του Bohr (π.χ. Torretti 1999, σελ. 440). Από την άλλη, η αποδοχή τους φαίνεται να μας οδηγεί σε ένα παράξενο συμπέρασμα: ότι ο χαμιλτονιανός τελεστής που αντιστοιχεί στην αλληλεπίδραση συστήματος και συσκευής δεν είναι παρατηρήσιμο μέγεθος. Ας δούμε αναλυτικότερα γιατί. Έστω πως H_{int} είναι ο χαμιλτονιανός τελεστής που αντιστοιχεί στο μέγεθος της ενέργειας αλληλεπίδρασης συστήματος και συσκευής κατά την διαδικασία της μέτρησης. Έστω τώρα πως R είναι το μέγεθος της θέσης του δείκτη της συσκευής, το οποίο μετατίθεται με όλα τα μεγέθη του συστήματος, οπότε θα ισχύει επίσης ότι:

$$[R, H_{int}] = 0 \quad (6.1)$$

Όμως, είναι γνωστό²² από την θεωρία πως ο μεταθέτης ενός μεγέθους με την χαμιλτονιανή συνάρτηση δίνει την μεταβολή της μέσης τιμής αυτού του μεγέθους ως προς το χρόνο, όταν αυτό δεν έχει άμεση χρονική εξάρτηση $\langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle = 0$

$$\frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle \quad (6.2)$$

Έτσι, βάσει των σχέσεων (6.1), (6.2) έχουμε τελικά για την θέση του δείκτη:

$$\frac{d\langle R \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [R, H_{int}] \rangle = 0$$

το οποίο συνεπάγεται τελικά πως το μέγεθος R παραμένει αμετάβλητο κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασης. Όμως, τότε, ο δείκτης της συσκευής δεν θα μπορεί να έχει μετακινηθεί! Αυτό το συμπέρασμα είναι εμφανέστατα προβληματικό: ο ακίνητος δείκτης της συσκευής δεν μπορεί να μας πει τίποτα για τα αποτελέσματα της μέτρησης. Η εναλλακτική μας είναι ο τελεστής H_{int} να μην αφορά κάποιο παρατηρήσιμο μέγεθος, δηλαδή να μην αντιστοιχεί στην ενέργεια του συστήματος κατά την αλληλεπίδραση. Αυτός ο δρόμος, όμως, συνεπάγεται ριζικές μεταβολές στη βάση της θεωρίας. Ίσως είναι καιρός να εξετάσουμε διαφορετικού τύπου απαντήσεις στο πρόβλημά μας.

²² Αποδεικνύεται μάλιστα πολύ εύκολα – βλ. Cohen-Tannoudji (1977, σελ. 241)



ΜΕΡΟΣ 3^ο

ΤΡΕΙΣ ΔΡΟΜΟΙ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗΣ ΤΟΥ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

7. ΜΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑ

Φύσις κρύπτεσθαι φιλεί
Ηράκλειτος

7.1. Η Ιδέα των Κρυμμένων Μεταβλητών

Μια άμεσα διαθέσιμη επιλογή για την επίλυση του προβλήματος της μέτρησης είναι, ακολουθώντας τις ενστάσεις που ήγειραν ακόμη και πρωτοπόροι της θεωρίας όπως ο Einstein ή ο Schrödinger, να υποθέσουμε πως η κβαντική μηχανική δεν περιγράφει πλήρως την πραγματικότητα. Υπάρχει, δηλαδή, πληροφορία που δεν περιλαμβάνεται στο καταστατικό διάνυσμα του εκάστοτε συστήματος. Μια τέτοια προσέγγιση είναι γνωστή και ως ερμηνεία των κρυμμένων μεταβλητών, καθώς υποθέτει πως τα διάφορα συστήματα - πράγματα του κόσμου έχουν καθορισμένες ιδιότητες, όπως συμβαίνει στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής, αλλά η κβαντική μηχανική αποτυγχάνει να τα προσδιορίσει, να μας παράσχει κάτι περισσότερο από την πιθανοκρατική περιγραφή. Συμπληρώνοντας κατά αυτόν τον τρόπο την πληροφορία που μας παρέχει το καταστατικό διάνυσμα με κάποιες κρυμμένες μεταβλητές, μπορούμε να ανακτήσουμε την κλασική κοσμοεικόνα.

Τι σημαίνει, όμως, αυτή η ιδέα πιο τυπικά και πώς ακριβώς επιλύει το πρόβλημα της μέτρησης; Η ύπαρξη παραμέτρων που καθορίζουν τις ιδιότητες των συστημάτων και οι οποίες δεν περιγράφονται από την θεωρία συνεπάγεται πως η κβαντική μηχανική είναι μια μη πλήρης θεωρία (Redhead 1987, σελ. 47). Αναφέρεται βέβαια σε επιμέρους συστήματα του κόσμου και όχι μόνο σε στατιστικά σύνολα, όπως θα όριζε μια μινιμαλιστική - στατιστική ερμηνεία, όμως δεν τα περιγράφει επαρκώς. Η περιγραφή των συστημάτων στο πλαίσιο της ενέχει αναγκαστικά ένα πιθανοκρατικό χαρακτήρα και κατ'ουσίαν, μπορεί να επιτευχθεί μόνο θεωρώντας τα ως μέλη στατιστικών συνόλων (Busch et al 1997, σελ. 103).

Το κίνητρο πίσω από την ιδέα των κρυμμένων μεταβλητών και της μη πληρότητας είναι η αποδοχή της θέσης πως τα μικροσκοπικά συστήματα, όπως και τα μακροσκοπικά, είναι πλήρως καθορισμένα, δηλαδή, φέρουν καθορισμένες ιδιότητες και ταιριάζουν σε μια μεταφυσική εικόνα όπως αυτή που είχαμε στο πλαίσιο της κλασικής μηχανικής. Έτσι, είναι δυνατό να ορίσουμε καταστάσεις μηδενικής διασποράς, δηλαδή καταστάσεις $|\psi\rangle$ για τις οποίες ισχύει ότι δεδομένης μιας πρότασης (A, Δ) , το μέτρο πιθανότητας μπορεί να πάρει μόνο δυο τιμές: $P_{|\psi\rangle}(A, \Delta) = 1$ ή 0 (αλήθεια και ψεύδος αντίστοιχα). Όπως και στην κλασική μηχανική, λοιπόν, δεχόμαστε ότι υπάρχουν τέτοιες εξιδανικευμένες καταστάσεις $P_\lambda(A, \Delta)$ και πως κάθε κατάσταση των συστημάτων που υπάρχει στον φυσικό κόσμο είναι ένα μείγμα ορισμένων εξ αυτών (Jauch 1968, σελ. 114-6):

$$P_{|\psi\rangle}(A, \Delta) = \int_{\Lambda} d\rho(\lambda) P_\lambda(A, \Delta) \quad (7.1)$$

Τώρα πρέπει να δειχθεί πώς ακριβώς μπορούμε να πάρουμε αυτά τα μείγματα καταστάσεων μηδενικής διασποράς. Προς τούτο, εισάγουμε έναν χώρο Λ , το χώρο των κρυμμένων μεταβλητών με στοιχεία $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ και μια κατανομή πιθανότητας $\rho_{|\psi\rangle}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ για τις κρυμμένες μεταβλητές σε κάθε κατάσταση $|\psi\rangle$ του συστήματος. Έτσι, οποιοδήποτε μέγεθος

A θα έχει μια καθορισμένη τιμή $A(|\psi\rangle, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$ όταν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi\rangle$. Παίρνουμε τώρα την εξής αναμενόμενη τιμή για το μέγεθος A :

$$\langle A \rangle_{|\psi\rangle} = \int_A d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \rho_{|\psi\rangle}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) A(|\psi\rangle, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \quad (7.2)$$

ενώ θα πρέπει να ισχύει πως

$$\int_A d\lambda_1 d\lambda_2 \dots d\lambda_n \rho_{|\psi\rangle}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 1 \quad (7.3)$$

Το στοίχημα για κάθε ερμηνεία κρυμμένων μεταβλητών είναι να ευθυγραμμίσει τις προβλέψεις που κάνει βάσει των σχέσεων (7.1) και (7.2) με τα αποτελέσματα που μας δίνει η κβαντική θεωρία. Σε περίπτωση που η αναμενόμενη τιμή του μεγέθους A π.χ. δεν είναι ίση με αυτή που μας δίνει η κβαντική μηχανική, δεδομένης της συμφωνίας της τελευταίας με τις παρατηρήσεις, η υπόθεση των κρυμμένων μεταβλητών θα οδηγηθεί σε απαξίωση.

Αν, όμως, βρεθεί μια αποδεκτή θεώρηση κρυμμένων μεταβλητών, τότε ίσως είναι δυνατό να δοθεί μια λύση και στο πρόβλημα της μέτρησης. Οι κρυμμένες αυτές μεταβλητές θα πρέπει να αποτελούν αντικειμενικά υφιστάμενα στοιχεία της πραγματικότητας που δεν μπορούν να επηρεαστούν από τις μετρήσεις ή παρεμβάσεις μας, αλλά αντιθέτως καθορίζουν τα αποτελέσματα αυτών (Redhead 1987, σελ. 47). Η μέτρηση γίνεται, όπως και στην κλασική περίπτωση, μια διαδικασία ανακάλυψης της εξωτερικής πραγματικότητας με πλήρη διαχωρισμό του μελετούμενου συστήματος και του πλαισίου της μέτρησης. Ο πιθανοκρατικός χαρακτήρας των αποτελεσμάτων δεν είναι παρά αποτέλεσμα της άγνοιας των εμπλεκόμενων παραγόντων που καθορίζουν τις τιμές του συστήματος. Στην πραγματικότητα, το αποτέλεσμα είναι πλήρως καθορισμένο και δεν «αναμένει» κατά κάποιο τρόπο την διαδικασία της μέτρησης, για να πραγματωθεί.

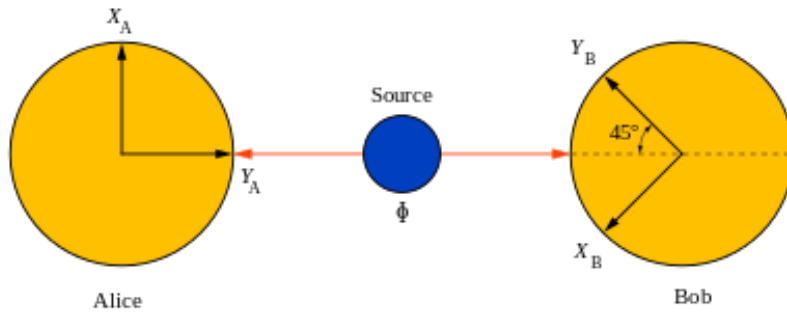
Σημείωση: Εδώ ίσως δημιουργηθεί η παρεξήγηση πως η όλη σύζητηση για τις κρυμμένες μεταβλητές είναι άσκοπη, βάσει των ενστάσεων που δώσαμε στις ενότητες 4 και 5 σε σχέση με την απόδοση μιας τιμής μεγέθους ή μιας ιδιοκατάστασης στο σύστημα. Ο λόγος που η ερμηνεία τύπου άγνοιας δεν απορρίπτει τις κρυμμένες μεταβλητές είναι πως σε όσα συζητάμε εδώ η άγνοια δεν αφορά την κατάσταση του συστήματος αλλά αυτό το πλεονάζον και άγνωστο στοιχείο που ονομάζουμε «κρυμμένες μεταβλητές». Είναι, λοιπόν, σαν να αφήνουμε την θεωρία να εκτελεί την παράστασή της γνωρίζοντας πως κάθε πράξη είναι προσχεδιασμένη βάσει του σεναρίου, το οποίο εμείς απλώς δεν έχουμε στη διάθεσή μας.

7.2. Περιορισμοί: Θεωρήματα No-go

Η υπόθεση των κρυμμένων μεταβλητών προσέλκυσε τα πυρά θεμελιωτών αλλά και μελετητών της κβαντικής θεωρίας από πολύ νωρίς. Ήδη ο von Neumann είχε προσπαθήσει να δώσει μια απόδειξη απόρριψης της ύπαρξής τους, η οποία κρίθηκε ανεπαρκής. Στην πορεία του 20^{ου} αιώνα, ωστόσο, προέκυψαν κάποια πολύ σημαντικά αποτελέσματα, τα οποία περιορίζουν σαφώς το εύρος του πεδίου εντός του οποίου μπορούν να κινηθούν οι διάφορες επίδοξες ερμηνείες κρυμμένων μεταβλητών.

7.2.1. Ανισότητες Bell

Το πρώτο από αυτά τα αποτελέσματα είναι η παραβίαση των περίφημων ανισοτήτων Bell. Αυτές είναι κάποιες ανισότητες που προκύπτουν ως αποτέλεσμα ορισμένων πολύ εύλογων παραδοχών (συμπεριλαμβανομένης της υπόθεσης κρυμμένων μεταβλητών). Παρά την ευλογοφάνεια των υποθέσεων, η κβαντική θεωρία προβλέπει την παραβίασή τους, γεγονός που επιβεβαιώνεται και μέσω εμπειρικών μεθόδων. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι η ασυμβατότητα της ιδέας των κρυμμένων μεταβλητών με την αρχή της τοπικότητας. Για να κατανοήσουμε βαθύτερα αυτό, ωστόσο, θα προχωρήσουμε σε μια τυπικότερη παρουσίαση. Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, την ακόλουθη πειραματική διάταξη:



Στο κέντρο της διάταξης βρίσκεται μια πηγή Π που στέλνει ηλεκτρόνια e_1, e_2 προς δύο ανιχνευτές A και B εκατέρωθέν της. Τα δύο ηλεκτρόνια είναι συσχετισμένα και βρίσκονται στη συζευγμένη κατάσταση:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z = 1\rangle_1 \otimes |S_z = -1\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z = -1\rangle_1 \otimes |S_z = 1\rangle_2$$

όπου S_z το μέγεθος του σπιν κατά μήκος του άξονα z . Είναι εμφανές πως το ολικό σπιν των δύο ηλεκτρονίων είναι 0. Κάθε ανιχνευτής μετρά το σπιν του ηλεκτρονίου που λαμβάνει κατά μήκος δύο αξόνων α και α' για τον A και β και β' για τον B . Θεωρούμε πως το πείραμα επαναλαμβάνεται N φορές και ονομάζουμε α_n (αντίστοιχα $\alpha'_n, \beta_n, \beta'_n$) την προβολή της τιμής του σπιν στον άξονα α (αντίστοιχα α', β, β'), όταν εκτελούμε την n -οστή μέτρηση. Ως προς κάθε άξονα, το ηλεκτρόνιο μπορεί να έχει δύο τιμές: είτε πάνω είτε κάτω, οπότε η τιμή αυτή μπορεί να είναι 1 ή -1 (με μονάδες που δεν μας απασχολούν εδώ).

Υπάρχουν τέσσερις δυνατοί συνδυασμοί μετρήσεων βάσει του άξονα που επιλέγεται για τον κάθε ανιχνευτή:

e_1	α	α	α'	α'
e_2	β	β'	β	β'

Τώρα θέλουμε να ορίσουμε ποσότητες που να εκφράζουν την συσχέτιση μεταξύ των τιμών που προκύπτουν από τα τέσσερα ζεύγη μετρήσεων. Αν για κάθε ζεύγος πάρουμε το γινόμενο τους, τότε αυτό θα είναι ίσο με 1 όταν αυτά είναι ίσα και -1 όταν είναι αντίθετα. Ορίζουμε

τις παρακάτω ποσότητες που αποτελούν το μέσο όρο αυτών των γινομένων καθώς εκτελούμε ολοένα και περισσότερα πειράματα:

$$c(a, b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n b_n$$

$$c(a', b) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a'_n b_n$$

$$c(a, b') = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n b'_n$$

$$c(a', b') = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a'_n b'_n$$

Θεωρούμε πως κάθε ηλεκτρόνιο έχει μια καθορισμένη τιμή σπιν, την οποία μαθαίνουμε όταν αυτό έρθει σε επαφή με τον ανιχνευτή. Όταν ο άξονας που μετράμε το σπιν του ηλεκτρονίου 1 είναι παράλληλος με τον άξονα που μετράμε το σπιν του ηλεκτρονίου 2, τότε έχουμε αντίθετα αποτελέσματα (το ένα ηλεκτρόνιο δείχνει «πάνω» και το άλλο «κάτω» εφόσον έχουν συνολικό σπιν 0) και ο αντίστοιχος συντελεστής είναι ίσος με -1.

	1	2	3	4	5	...	N-1	N
a_n	+1	+1	-1	+1	-1	...	+1	-1
b_n	-1	-1	+1	-1	+1	...	-1	+1
$a_n b_n$	-1	-1	-1	-1	-1	...	-1	-1

Όταν οι δυο άξονες είναι αντιπαράλληλοι (έχουν αντίθετες φορές στο χώρο) τότε έχουμε την ίδια τιμή για τις τιμές του σπιν και ο αντίστοιχος συντελεστής είναι ίσος με 1.

	1	2	3	4	5	...	N-1	N
a_n	+1	-1	-1	+1	-1	...	-1	+1
b_n	+1	-1	-1	+1	-1	...	-1	+1
$a_n b_n$	1	1	1	1	1	...	1	1

Όταν οι άξονες βρίσκονται υπό κάποια άλλη τυχαία γωνία, τότε το ένα ηλεκτρόνιο θα έχει την μία τιμή τότε την άλλη (και αντίστοιχα για το άλλο ηλεκτρόνιο) κι εν γένει περιμένουμε όσο τα πειράματα συνεχίζονται η μέση τιμή και, άρα ο συντελεστής, να είναι 0 (εφόσον δεν υπάρχει κάποιος τρόπος να συσχετιστούν).

	1	2	3	4	5	...	N-1	N
a_n	+1	-1	+1	+1	-1	...	-1	-1
b_n	-1	-1	+1	-1	-1	...	+1	+1
$a_n b_n$	-1	1	1	-1	1	...	-1	-1

Αν θεωρήσουμε τώρα την ποσότητα

$$\gamma_n = a_n b_n + a_n b'_n + a'_n b_n - a'_n b'_n$$

βλέπουμε πως οι δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει το γ_n είναι ± 2 εφόσον κάθε όρος της θα έχει την τιμή ± 1 . Αυτό φαίνεται ακόμη πιο εύκολα, αν γράψουμε:

$$\gamma_n = a_n(b_n + b'_n) + a'_n(b_n - b'_n)$$

Επομένως και η παρακάτω ποσότητα (εφόσον ο πρώτος όρος είναι η μέση τιμή του γ_n), θα πρέπει να έχει τιμή το πολύ μέχρι 2:

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \gamma_n \right| = \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n b_n + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a'_n b_n + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a_n b'_n - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a'_n b'_n \right|$$

δηλαδή ισοδύναμα θα πρέπει να ισχύει η παρακάτω ανισότητα

$$|c(a, b) + c(a', b) + c(a, b') - c(a', b')| \leq 2 \quad (7.4)$$

η οποία αποτελεί μια από τις περίφημες ανισότητες του Bell.

Το «κακά» νέα είναι πως παρά την ευλογοφάνεια των παραπάνω βημάτων, η κβαντική μηχανική παραβιάζει την ανισότητα (7.4). Αυτό αποδεικνύεται πολύ εύκολα, αν λάβουμε υπόψη τους τύπους που δίνουν τη συσχέτιση των τιμών σπιν συναρτήσει της γωνίας μεταξύ των εκάστοτε αξόνων, εδώ α και β ²³:

$$c(a, b) = -\cos \theta_{\alpha\beta}$$

Αν αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα που μας δίνει η QM στην (7.3) βλέπουμε πως θα πρέπει να ισχύει η ανισότητα:

$$|-\cos \theta_{\alpha\beta} - \cos \theta_{\alpha'\beta} - \cos \theta_{\alpha\beta'} + \cos \theta_{\alpha'\beta'}| \leq 2$$

την οποία πολύ εύκολα μπορούμε να δείξουμε πως παραβιάζεται αν επιλέξουμε κατάλληλες γωνίες για τους άξονες. Συγκεκριμένα, αν πάρουμε όλους τους άξονες στο ίδιο επίπεδο και τους α και β παράλληλους, δηλαδή $\theta_{\alpha\beta} = 0$, και τις γωνίες $\theta_{\alpha'\beta} = \theta_{\alpha\beta'} = 45^\circ$, τότε $\theta_{\alpha'\beta'} = 90^\circ$, έχουμε:

$$|-\cos \theta_{\alpha\beta} - \cos \theta_{\alpha'\beta} - \cos \theta_{\alpha\beta'} + \cos \theta_{\alpha'\beta'}| = \left| -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \right| = 1 + \sqrt{2} > 2$$

Τι συνέβη, λοιπόν; Πρέπει να ελέγξουμε, για άλλη μια φορά, τις υποθέσεις που εμπλέξαμε στην ανάλυσή μας. Πρώτον, κάναμε δεκτή την θέση πως το σπιν κάθε ηλεκτρονίου έχει κάποια καθορισμένη τιμή σπιν την οποία διατηρεί καθόλη την διάρκεια του πειράματος και την οποία διαπιστώνουμε εμείς οι παρατηρητές κατά τη στιγμή της μέτρησης του από τον αντίστοιχο ανιχνευτή. Θεωρούμε ακόμη εύλογο πως τα αποτελέσματα που βρίσκονται σε κάποιου είδους αντιστοιχία με την τιμή που έχει το μέγεθος που μετράμε (βάσει των συνθηκών που απαιτήσαμε για τη μέτρηση – βλ. ενότητα 5.4). Σε κάθε περίπτωση, θεωρούμε πως η τιμή αυτή είναι καθορισμένη για το κάθε ηλεκτρόνιο κι έχει ήδη καθοριστεί από τη στιγμή που αυτό εγκαταλείπει την πηγή (βλ. Redhead 1987, σελ. 89-90).

Από την άλλη, δεχτήκαμε πως η τιμή που παίρνουμε μετρώντας το σπιν του σωματίδιου που φτάνει στον ανιχνευτή Α κατά την κατεύθυνση α ή α' , δεν επηρεάζεται από το πώς, δηλαδή προς ποια κατεύθυνση β ή β' , μετράμε το σπιν του σωματιδίου που φτάνει στον ανιχνευτή Β.

²³ Για δικαιολόγηση –απόδειξη αυτών των τύπων βλ. Redhead (1987, σελ. 40-2)

Πουθενά δεν λάβαμε υπόψη την τυχούσα επίδραση που μπορεί να έχει η τιμή που θα πάρουμε για την τιμή του σπιν του ηλεκτρονίου 1, φερ'επείν, από το πώς θα στήσουμε τους άξονες για το ηλεκτρόνιο 2. Εφόσον τα ηλεκτρόνια έχουν μια καθορισμένη τιμή σπιν, η μέτρηση σε κάθε περίπτωση απλώς αναδεικνύει την τιμή όπως αυτή προβάλλεται στον εκάστοτε άξονα στον οποίο ρυθμίζει ο παρατηρητής τον ανιχνευτή του. Υποθέτουμε πως ισχύει η ακόλουθη **αρχή τοπικότητας**: η μεταβολή σε ένα σύστημα Σ_1 που είναι χωρικά απομακρυσμένο από το Σ_2 δεν μπορεί να επιφέρει κάποια μεταβολή στις τιμές των μεγεθών αυτού του συστήματος. Αυτή η υπόθεση είναι μάλιστα εύλογη: τα δύο συστήματα μπορούν να θεωρηθούν οσοδήποτε απομακρυσμένα, ώστε η επίδραση του ενός πάνω στο άλλο να έρχεται σε ρήξη ακόμη και με την ειδική θεωρία της σχετικότητας.

Η περίπτωση της παραβίασης των ανισοτήτων Bell που δώσαμε αφορά τις λεγόμενες «ντετερμινιστικές κρυμμένες μεταβλητές», δηλαδή την εκδοχή της θεωρίας στην οποία οι κρυμμένες μεταβλητές καθορίζουν τις τιμές των μεγεθών. Μια εντελώς ανάλογη απόδειξη μπορεί να δοθεί και για την περίπτωση των λεγόμενων «στοχαστικών κρυμμένων μεταβλητών», οι οποίες καθορίζουν μόνο τις πιθανότητες των αποτελεσμάτων μέτρησης (Bub 1997, σελ. 52)²⁴. Η παραβίαση των ανισοτήτων και σε αυτήν την περίπτωση δείχνει πως δεν είναι η υπόθεση του ντετερμινισμού το πρόβλημα.

Το πείραμα είναι ακριβώς το ίδιο με την περίπτωση που εξετάσαμε προηγουμένως. Όμως εδώ γράφουμε (λεπτομέρειες στους Readhead 1987, σελ. 98-101, Bub 1997, σελ. 56-8, Shimony 2009, §2):

$P_1(a_n|\lambda, \alpha, b)$: η πιθανότητα να λάβουμε αποτέλεσμα a_n για το σωματίδιο 1 δεδομένων των παραμέτρων α, b και της κρυμμένης μεταβλητής λ

$P_2(b_n|\lambda, \alpha, b)$: η πιθανότητα να λάβουμε αποτέλεσμα b_n για το σωματίδιο 2 δεδομένων των παραμέτρων α, b και της κρυμμένης μεταβλητής λ

$P(a_n \& b_n|\lambda, \alpha, b)$: η πιθανότητα να λάβουμε αποτέλεσμα a_n για το σωματίδιο 1 και b_n για το σωματίδιο 2 δεδομένων των παραμέτρων α, b και της κρυμμένης μεταβλητής λ

$P_1(a_n|b_n, \lambda, \alpha, b)$: η πιθανότητα να λάβουμε αποτέλεσμα a_n για το σωματίδιο 1 δεδομένου του αποτελέσματος b_n για το σωματίδιο 2, των παραμέτρων α, b και της κρυμμένης μεταβλητής λ

$P_2(b_n|a_n, \lambda, \alpha, b)$: η πιθανότητα να λάβουμε αποτέλεσμα b_n για το σωματίδιο 2 δεδομένου του αποτελέσματος a_n για το σωματίδιο 1, των παραμέτρων α, b και της κρυμμένης μεταβλητής λ

Στη συνέχεια, προχωρούμε και ορίζουμε τις αναμενόμενες τιμές αυτών των μεγεθών:

$E_1(\lambda, \alpha) = \sum_n P_1(a_n|\lambda, \alpha, b) a_n$: η αναμενόμενη τιμή για το σπιν του σωματιδίου 1

$E_2(\lambda, b) = \sum_n P_2(b_n|\lambda, \alpha, b) b_n$: η αναμενόμενη τιμή για το σπιν του σωματιδίου 2

²⁴ Μια προσπάθεια να «παντρέψουμε» τις κρυμμένες μεταβλητές με τον μη ντετερμινισμό.

$E(\lambda, \alpha, b) = \sum_m \sum_n P(a_n \& b_n | \lambda, \alpha, \beta) a_n b_m$: η αναμενόμενη τιμή για το γινόμενο των σπιν των δύο σωματιδίων

Από αυτές τις τιμές περνάμε σε μια ανισότητα Bell μέσω της υπόθεσης:

$$P(a_n \& b_n | \lambda, \alpha, b) = P_1(a_n | \lambda, \alpha) P_2(b_n | \lambda, b)$$

η οποία έπεται από τις εξής δύο συνθήκες:

1. Την Ανεξαρτησία από το Αποτέλεσμα:

$$P_1(a_n | b_n, \lambda, \alpha, b) = P_1(a_n | \lambda, \alpha, \beta) \text{ και } P_2(b_n | a_n, \lambda, \alpha, b) = P_2(b_n | \lambda, \alpha, b)$$

η οποία μας λέει ουσιαστικά πως το αποτέλεσμα της μέτρησης για το ένα σωματίδιο δεν επηρεάζει την πιθανότητα να λάβουμε ένα αποτέλεσμα μέτρησης για το άλλο. Αυτή η συνθήκη λειτουργεί σαν μια αρχή διαχωρισιμότητας καθώς επιτρέπει να θεωρήσουμε πως τα αποτελέσματα της μέτρησης στο ένα είναι πλήρως ανεξάρτητα από τα αντίστοιχα αποτελέσματα στο άλλο. Ουσιαστικά είναι ως εάν τα δύο σωματίδια να έχουν τις δικές τους (πλήρως) καθορισμένες καταστάσεις. Τότε, τα αποτελέσματα των μετρήσεων στο καθένα, με τη σειρά τους, θα καθορίζονται πλήρως από την κατάσταση στην οποία βρίσκεται. Κατά συνέπεια, δεν μπορεί να υπάρχει κάποιου είδους συσχετισμός των τιμών που παίρνουμε από την μια μέτρηση και από την άλλη.

2. Την Ανεξαρτησία από Παράμετρο:

$$P_1(a_n | \lambda, \alpha, \beta) = P_1(a_n | \lambda, \alpha) \text{ και } P_2(b_n | \lambda, \alpha, b) = P_2(b_n | \lambda, b)$$

η οποία δηλώνει πως η πιθανότητα να λάβουμε ένα αποτέλεσμα μέτρησης για το ένα σωματίδιο εξαρτάται μόνο από τι είναι αυτό που επιλέγεται να μετρηθεί στο ίδιο (εδώ: τον άξονα προς του οποίου την διεύθυνση θα μετρηθεί το σπιν). Δεν επηρεάζεται, δηλαδή, από το τι επιλέγουμε να μετρήσουμε στο άλλο σύστημα. Η συνθήκη αυτή είναι που εξασφαλίζει ένα είδος τοπικότητας, αφού δεν επιτρέπει στο πώς θα ρυθμίσουμε την μετρητική συσκευή για το ένα σωματίδιο να επηρεάζει τα αποτελέσματα που θα λάβουμε στο άλλο.

Η παραβίαση των ανισοτήτων Bell φαίνεται ως ένας νέος κίνδυνος για την κβαντική θεωρία καθώς έρχεται να τη φέρει σε ρήξη με την θεωρία της ειδικής σχετικότητας. Μια σειρά από πειράματα, όμως, που διεξήχθησαν μεταξύ του 1972 και 1985 κατά γενική ομολογία υποστηρίζουν τα πορίσματα της κβαντικής μηχανικής (βλ. λ.χ. Redhead 1987, σελ. 107-113. Shimony 2009, §3). Συχνά υποστηρίζεται πως η κβαντική θεωρία μπορεί να αποφύγει αυτή την ανεπιθύμητη ρήξη παρατηρώντας πως παραβιάζει μονάχα τη συνθήκη ανεξαρτησίας από το αποτέλεσμα (κι έτσι εμποδίζει το πέρασμα στις ανισότητες Bell). Θεωρείται, δηλαδή, πως η σύζευξη μεταξύ δύο συστημάτων που είναι ακόμη και χωροχρονικά απομακρυσμένα έχει σαν αποτέλεσμα να μην μπορούμε να αποδώσουμε καθορισμένες τιμές στα επιμέρους υποσυστήματά του (εδώ το κάθε μεμονωμένο ηλεκτρόνιο) χωρίς μέτρηση του καθενός. Το βασικό ζήτημα γίνεται η μη διαχωρισιμότητα και όχι η μη τοπικότητα. Δεν υφίσταται κάποιους είδους δράση από απόσταση, αλλά κάποιου είδους «πάθος» από απόσταση (Maudlin 2011, σελ. 98).

Είναι σαφές πως οι θεωρίες κρυμμένων μεταβλητών δεν μπορούν να απορρίψουν την ανεξαρτησία των αποτελεσμάτων, εφόσον η όλη σύλληψη πίσω από αυτές είναι ουσιαστικά η επαναφορά μιας -έστω «κρυφής»- κλασικής εικόνας για τον κόσμο όπου τα συστήματα είναι, μεταξύ άλλων, διαχωρίσιμα. Οι κρυμμένες μεταβλητές θα καθορίζουν πλήρως τα πιθανά αποτελέσματα των επιμέρους σωματιδίων και κανενός είδους εξάρτηση μεταξύ των δύο δεν αναμένεται. Η μόνη επιλογή του υποστηρικτή των κρυμμένων μεταβλητών είναι να αποδεχτεί την παραβίαση της ανεξαρτησίας των παραμέτρων. Θα πρέπει, δηλαδή, να υποστηρίξει πως το συμβάν μέτρησης που λαμβάνει χώρα στο ένα σωματίδιο έχει επιπτώσεις στα αποτελέσματα που θα λάβουμε για το άλλο. Τα συμβάντα στον κόσμο έχουν κάποιο μυστηριώδη ολιστικό χαρακτήρα (Dickson 2004, σελ. 129 – 133) και κάποιου είδους επικοινωνία μεταξύ των δύο συστημάτων θα πρέπει να είναι εφικτή (Bell 1964, σελ. 6)²⁵.

7.2.2. Θεώρημα Kochen – Specker

Μια εξίσου μεγάλη, αν όχι μεγαλύτερη, πρόκληση για μια ερμηνεία κρυμμένων μεταβλητών έρχεται από ένα σημαντικό θεώρημα που αποδείχτηκε από τους Kochen και Specker το 1967. Είδαμε στην ενότητα 4.4 πως το θεώρημα του Gleason δείχνει πως οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας και να θέλουμε να κατασκευάσουμε σε χώρους Hilbert με διάσταση τουλάχιστον ίση με 3, θα παράγεται μέσω ενός τελεστή πυκνότητας καθαρής ή μικτής κατάστασης. Το θεώρημα αποτελεί τη βάση για ένα ισχυρό πλήγμα προς οποιαδήποτε θεώρηση κρυμμένων μεταβλητών που δεν έχει πλαισιακό χαρακτήρα (Peres 1993, σελ. 196). Ας δούμε πώς ακριβώς το επιτυγχάνει και τι ακριβώς σημαίνει.

Αυτό που μας ενδιαφέρει στην περίπτωση των κρυμμένων μεταβλητών είναι να αποδώσουμε καθορισμένες τιμές σε όλα τα μεγέθη ενός συστήματος σε οποιαδήποτε κατάσταση και αν βρίσκεται αυτό. Ουσιαστικά ζητούμε να βρούμε ένα ανάλογο των συναρτήσεων $f_A: S \rightarrow R$ που είχαμε στην κλασική εικόνα, οι οποίες για κάθε δεδομένη κατάσταση s του συστήματος S απέδιδαν συγκεκριμένες τιμές $f_A(s)$ του μέγεθος A σε αυτό.

Στην κβαντική εικόνα, τουλάχιστον με βάση τα αξιώματά που θέσαμε, οι μόνες περιπτώσεις που μπορεί να ειπωθεί με ασφάλεια κάτι τέτοιο είναι όταν το σύστημα βρίσκεται στην ιδιοκατάσταση $|a_i\rangle$ κάποιου μεγέθους, οπότε και λέμε πως το σύστημα έχει την καθορισμένη τιμή a_i . Όμως, δεν είναι σαφές τι ανάλογο μπορεί να λεχθεί στις περιπτώσεις καταστάσεων υπέρθεσης. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να υποθέσουμε πως υπάρχει μια αντίστοιχου τύπου συνάρτηση απόδοσης τιμών, η οποία θα έχει την εξής ιδιότητα για το παρατηρήσιμο μέγεθος $Q(\hat{A})$ του συστήματος S στην κατάσταση $|\psi\rangle$,

$$V_{|\psi\rangle}[Q(\hat{A})] = Q(V_{|\psi\rangle}[\hat{A}]) \quad (7.4)$$

²⁵ Είναι αξιοσημείωτο, πάντως, πως αυτό δεν συνεπάγεται απαραίτητα ότι οι θεωρίες κρυμμένων μεταβλητών δέχονται τη δυνατότητα αποστολής σημάτων με ταχύτητα μεγαλύτερη του φωτός, καθώς όντας «κρυμμένες» οι μεταβλητές αυτές δεν μπορούν να υποστούν τροποποίηση από τους παρατηρητές.

όπου Q μια συνάρτηση του τελεστή $\hat{A}^{26}$ (π.χ $Q(\hat{A}) = \hat{A}^3 + \hat{A}^2 + e^{\hat{A}}$). Η συνάρτηση $V_{|\psi\rangle}$, δηλαδή, θεωρείται πως κατά την απόδοση τιμών διατηρεί την δομή των αντίστοιχων μεγεθών. Αυτή είναι μια εύλογη υπόθεση: όταν γνωρίζουμε πως το μέγεθος «ορμή» $\hat{p}$ του συστήματος στην κατάσταση $|\psi\rangle$ έχει την τιμή p_1 αναμένουμε και το μέγεθος $\hat{p}^2$ να έχει την τιμή p_1^2 .

Η συνθήκη (7.4) έχει μια πολύ ενδιαφέρουσα σύνδεση με την λογική δομή της θεωρίας, αν την εφαρμόσουμε στην περίπτωση ενός προβολικού τελεστή $\hat{P}_{|a_i\rangle}$ και με συνάρτηση $Q(x) = x^2$ παίρνουμε ότι²⁷:

$$V_{|\psi\rangle}[(\hat{P}_{|a_i\rangle})] = 0 \text{ ή } V_{|\psi\rangle}[(\hat{P}_{|a_i\rangle})] = 1$$

δηλαδή οι τιμές που μπορεί να λάβει ο τελεστής είναι είτε 0 ή 1. Εφόσον, όμως, αυτός αντιστοιχεί σε μια πρόταση $(A, \{a_i\})$ έπεται πως η $V_{|\psi\rangle}$ θα αποτελεί ένα μέτρο μηδενικής διασποράς, δηλαδή θα αποδίδει σε κάθε πρόταση την τιμή 0 ή 1 (Bub 1997, σελ. 72). Βάσει αυτού του μέτρου είναι δυνατό να αποδοθούν καθορισμένες ιδιότητες σε όλα τα μεγέθη ενός συστήματος δεδομένης της κατάστασής του. Αυτή η διαδικασία είναι συνυφασμένη με την δυνατότητα εμφύτευσης της μη Boolean άλγεβρας των προβολικών τελεστών της κβαντικής θεωρίας σε μια Boolean άλγεβρα (ό.π., σελ. 78).

Το θεώρημα των Kochen-Specker ουσιαστικά αποτελεί μια κατηγορηματική απόρριψη της δυνατότητας ύπαρξης μιας τέτοιας συνάρτησης στην περίπτωση χώρων Hilbert με διάσταση τουλάχιστον ίση με 3. Πιο συγκεκριμένα, αν έχουμε ένα σύνολο από τελεστές προβολής $\{P_{a_i}\}_i$ με δυνατές τιμές $V(P_{a_i}) = 0$ ή 1 , τότε είναι αδύνατο να αποδώσουμε καθορισμένες τιμές σε όλους, ώστε για κάθε σύνολο από συμβατούς μεταξύ τους τελεστές προβολής P_{a_j} , οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση $\sum_j P_{a_j} = I$, να ικανοποιείται και η σχέση $\sum_i V(P_{a_i}) = 1$ (Peres 1993, σελ. 196). Δεν είναι δυνατό να αποδώσουμε αληθοτιμές ώστε κάποιος από αυτούς τους τελεστές προβολής να αντιστοιχεί σε μια αληθή πρόταση ενώ οι υπόλοιποι σε ψευδείς. Κάποιες προτάσεις θα πρέπει αναγκαστικά να μείνουν απροσδιόριστες.

Έχουν δοθεί πολλές παραλλαγές της απόδειξης του θεωρήματος Kochen – Specker. Εδώ θα παραθέσουμε ένα σύντομο σχεδιάγραμμα της απόδειξης για την περίπτωση ενός χώρου με διάσταση 4 βασισμένο στο άρθρο των Cabello et al (1996). Η περίπτωση της διάστασης ίσης με 3 καλύπτεται με ανάλογο τρόπο και αξιοποιεί 117 προβολικούς τελεστές (όμως βλ. και

²⁶ Ο Held (2016) ισχυρίζεται πως η κβαντική θεωρία υποστηρίζει μόνο μια στατιστική εκδοχή αυτής της αρχής και πως η γενικότερη αυτή θέση στηρίζεται σε τρεις πρόσθετες υποθέσεις: α) τον ρεαλισμό των τιμών (ότι ουσιαστικά υπάρχουν μεγέθη που αντιστοιχούν στις τιμές που αποδίδουμε στα συστήματα), β) την καθορισμότητα των τιμών και γ) την μη πλαισιακότητα.

²⁷ Αναλυτικά η απόδειξη έχει ως εξής:

$$\begin{aligned} V_{|\psi\rangle}[(\hat{P}_{|a_i\rangle})^2] &= (V_{|\psi\rangle}[\hat{P}_{|a_i\rangle}])^2 \Rightarrow V_{|\psi\rangle}[(\hat{P}_{|a_i\rangle})] = (V_{|\psi\rangle}[\hat{P}_{|a_i\rangle}])^2 \Rightarrow \\ (V_{|\psi\rangle}[\hat{P}_{|a_i\rangle}])^2 - V_{|\psi\rangle}[(\hat{P}_{|a_i\rangle})] &= V_{|\psi\rangle}[(\hat{P}_{|a_i\rangle})] (V_{|\psi\rangle}[(\hat{P}_{|a_i\rangle})] - 0) = 0 \Rightarrow \\ V_{|\psi\rangle}[(\hat{P}_{|a_i\rangle})] &= 0 \text{ ή } V_{|\psi\rangle}[(\hat{P}_{|a_i\rangle})] = 1 \end{aligned}$$

Bub 1997, για μια πιο απλή εκδοχή). Ας υποθέσουμε, λοιπόν, πως έχουμε τα v_1, v_2, v_3, v_4 διανύσματα της βάσης του χώρου και τους αντίστοιχους προβολείς $P_{v_1}, P_{v_2}, P_{v_3}, P_{v_4}$. Οι προβολείς αυτοί είναι συμβατοί μεταξύ τους, δηλαδή ανά δύο ισχύει $[P_{v_i}, P_{v_j}] = 0$. Τώρα, σε συμφωνία με τα παραπάνω, οι δυνατές τιμές για αυτούς τους τελεστές είναι 0 ή 1. Ισχύει ότι: $P_{v_1} + P_{v_2} + P_{v_3} + P_{v_4} = I$ και κατά συνέπεια

$$V(P_{v_1} + P_{v_2} + P_{v_3} + P_{v_4}) = V(I) = 1$$

Όμως, ισχύει ακόμη (βάσει τις 7.4) ότι:

$$V(P_{v_1} + P_{v_2} + P_{v_3} + P_{v_4}) = V(P_{v_1}) + V(P_{v_2}) + V(P_{v_3}) + V(P_{v_4})$$

κι εφόσον οι μόνες δυνατές τιμές για τους προβολείς είναι 0 ή 1, θα πρέπει κάποιος από αυτούς να έχει τιμή ίση με 1 και οι υπόλοιποι 0. Θεωρώντας διάφορες δυνατές βάσεις του χώρου Hilbert διάστασης 4 (κάθε στήλη) έχουμε τον εξής πίνακα (όπου κάθε διάνυσμα - τετράδα αριθμών- αντιστοιχεί σε έναν τελεστή προβολής κι εμφανίζεται δύο φορές)²⁸:

u_1	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, 0, 1)	(1, -1, 1, -1)	(1, -1, 1, -1)	(0, 0, 1, 0)	(1, -1, -1, 1)	(1, 1, -1, 1)	(1, 1, -1, 1)	(1, 1, 1, -1)
u_2	(0, 0, 1, 0)	(0, 1, 0, 0)	(1, -1, -1, 1)	(1, 1, 1, 1)	(0, 1, 0, 0)	(1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, -1)	(-1, 1, 1, 1)	(-1, 1, 1, 1)
u_3	(1, 1, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)	(1, 1, 0, 0)	(1, 0, -1, 0)	(1, 0, 0, 1)	(1, 0, 0, -1)	(1, -1, 0, 0)	(1, 0, 1, 0)	(1, 0, 0, 1)
u_4	(1, -1, 0, 0)	(1, 0, -1, 0)	(0, 0, 1, 1)	(0, 1, 0, -1)	(1, 0, 0, -1)	(0, 1, -1, 0)	(0, 0, 1, 1)	(0, 1, 0, -1)	(0, 1, -1, 0)

Σε κάθε στήλη αποδίδουμε την τιμή 1 σε ένα διάνυσμα και την τιμή 0 στα υπόλοιπα. Από τον πίνακα καθίσταται φανερό πως δεν είναι δυνατό αυτό να γίνει συνεπώς. Δηλαδή, δεν είναι δυνατό όλα τα διανύσματα βάσης (και άρα οι αντίστοιχοι τελεστές) να λάβουν την ίδια τιμή (0 ή 1) σε όλες τις διαφορετικές στήλες που εμφανίζονται. Δίνεται ένα παράδειγμα για διευκόλυνση της κατανόησης. Ξεκινώντας την απόδοση τιμών από την πρώτη στήλη και φροντίζοντας ίδια χρώματα να έχουν την ίδια τιμή, προκύπτει το «σφάλμα» της τελευταίας στήλης (έχουμε δύο προβολείς με την τιμή 1):

u_1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
u_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	0	0	0	0	1	0	0	0	1
u_4	0	0	0	0	0	1	0	0	1

Το θεώρημα μοιάζει να επιφέρει ένα καίριο πλήγμα στην δυνατότητα ύπαρξης κρυμμένων μεταβλητών ήδη για την περίπτωση χώρων που έχουν διάσταση μεγαλύτερη του 2. Από τη στιγμή, μάλιστα, που αποδεικνύεται για έναν χώρο διάσταση n το αποτέλεσμα άμεσα

²⁸ Ο πίνακας που παρατίθεται και στο Held (2016) επιλέχθηκε για λόγους ευκολίας στην έγχρωμη εκδοχή του όπως δίνεται στο λήμμα της Wikipedia για το θεώρημα Kochen – Specker.

πλήττει και όλες τις περιπτώσεις με μεγαλύτερη διάσταση ($dim > n$) (βλ. Redhead 1987, σελ. 126 για περισσότερες λεπτομέρειες). Εφόσον, η απόδοση τιμών 0, 1 στους τελεστές προβολής οδηγεί σε ασυνέπεια, καθίσταται φανερό πως δεν μπορούμε να ελπίζουμε πως θα βρούμε έναν τρόπο να αποδώσουμε τιμές στα διάφορα μεγέθη με έναν τρόπο που να θυμίζει την εικόνα που είχαμε στην κλασική φυσική θεωρία. Η προσπάθεια μοιάζει καταδικασμένη εξ αρχής.

Όμως, ίσως υπάρχει μια διέξοδος για τον υπέρμαχο των κρυμμένων μεταβλητών. Μπορεί να εκμεταλλευτεί μια (υπόρρητη) υπόθεση που κάναμε κατά την παραπάνω απόδειξη²⁹. Αυτή είναι πως οι διάφοροι τελεστές προβολής που εξετάσαμε έχουν την ίδια τιμή σε κάθε πλαίσιο, δηλαδή ανεξάρτητα του με ποιους άλλους τελεστές τους ομαδοποιούμε. Κάθε στήλη διανυσμάτων μπορεί να θεωρηθεί και ως ένα διαφορετικό μετρητικό πλαίσιο, ένα διαφορετικό σύνολο από δυνατές μετρήσεις. Η υπόθεση πως η απόδοση τιμών εξαρτάται κατά κάποιο τρόπο από το πλαίσιο μέτρησης, από το πώς – δηλαδή μαζί με ποια άλλα μεγέθη – μετράται το μέγεθος, ονομάζεται πλαισιακότητα. Ίσως, λοιπόν, δεν είναι αληθές πως η αποδιδόμενη τιμή είναι η ίδια είτε ο τελεστής $P_{(0,0,0,1)}$ θεωρείται ως μέλος του πλαισίου που δημιουργούν οι τελεστές της πρώτης στήλης είτε του πλαισίου των τελεστών της δεύτερης. Γενικότερα, αν έχουμε τα μεγέθη $\hat{P}, \hat{Q}, \hat{R}$ ώστε να ικανοποιούν τις σχέσεις $[\hat{P}, \hat{Q}] = [\hat{Q}, \hat{R}] = 0$ αλλά $[\hat{P}, \hat{R}] \neq 0$, τότε το αποτέλεσμα της μέτρησης του $\hat{Q}$ δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητο του αν αυτό θα μετράται μαζί με το $\hat{P}$ ή το $\hat{R}$. Έτσι, ένας υπέρμαχος της ερμηνείας των κρυμμένων μεταβλητών μπορεί να εξασφαλίσει πως τα διάφορα μεγέθη έχουν καθορισμένες τιμές και να αποφύγει την ασυνέπεια θεωρώντας πως αυτές εξαρτώνται κάθε φορά από το ποιο είναι το μετρητικό πλαίσιο.

7.3. Η Θεωρία του Bohm

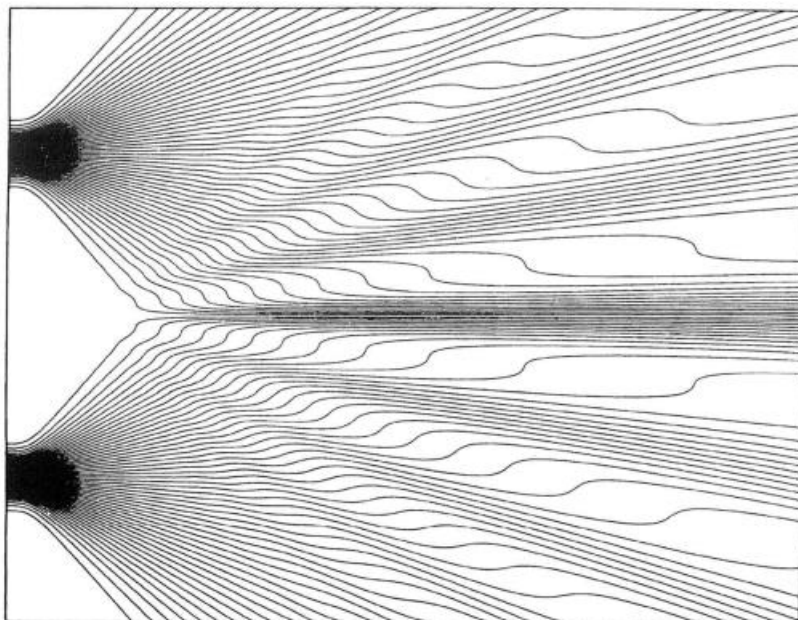
Με βάση όλα αυτά οι ερμηνείες κρυμμένων μεταβλητών που μπορούμε να υποστηρίξουμε θα πρέπει να έχουν με τον έναν ή τον άλλο τρόπο δύο πολύ παράδοξα χαρακτηριστικά:

- α) Θα πρέπει να παραβιάζουν την αρχή της τοπικότητας επιτρέποντας σε συστήματα που είναι απομακρυσμένα χωρικά να ασκούν επιδράσεις το ένα το άλλο.
- β) Θα πρέπει να έχουν πλαισιακό χαρακτήρα κάνοντας τα αποτελέσματα των μετρήσεων διαφορετικά ανάλογα με τα μεγέθη που μετρούνται ταυτοχρόνως.

Μια θεωρία κρυμμένων μεταβλητών που σέβεται και τις δύο αυτές απαιτήσεις είναι αυτή του D. Bohm (1952), η οποία βασίστηκε σε μια ιδέα που πρωτοπαρουσίασε ο de Broglie το 1927 σχετικά με την ύπαρξη κυμάτων – οδηγών για την κίνηση των σωματιδίων στο χώρο. Η κεντρική ιδέα εδώ είναι πως τα σωματίδια είναι εντοπισμένα στο χώρο σε συγκεκριμένες θέσεις (οι οποίες δεν δίνονται από την θεωρία μας παρά μόνο πιθανοκρατικά) ενώ η κυματοσυνάρτηση θεωρείται ένα πεδίο που υπάρχει στον φυσικό κόσμο και παρουσιάζει περιοχές που είναι περισσότερο ή λιγότερο πυκνές. Τα σωματίδια κινούνται στις διάφορες

²⁹ Συγκεκριμένα, τις προκείμενες που μας οδηγούν στην σχέση (7.4). Βλ. και σημείωση 5. Ο Held αποδεικνύει πως το διακύβευμα είναι η πλαισιακότητα. Απόρριψη της (β) ισοδυναμεί με απόρριψη της ιδέας των κρυμμένων μεταβλητών ενώ απόρριψη της (α) οδηγεί σε μη πλαισιακότητα.

θέσεις του χώρου υπό την επίδραση αυτού του πεδίου όπως τα διάφορα φορτισμένα σωματίδια κινούνται υπό την επίδραση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. «Όταν ξέρουμε τις συναρτήσεις πεδίου, μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη σε ένα σωματίδιο, έτσι ώστε γνωρίζοντας την αρχική θέση και ορμή του σωματιδίου, να μπορούμε να υπολογίσουμε ολόκληρη την τροχιά του» (ό.π., σελ. 170). Η εικόνα του πεδίου αυτού στην περίπτωση των πειραμάτων διπλής, για παράδειγμα, θα είναι εξής:



Αξίζει, όμως, να αναπτύξουμε και λίγο πιο τυπικά τη σύλληψη του Bohm. Σημείο εκκίνησης αποτελεί η εξίσωση Schrödinger για ένα σωματίδιο μάζας m που βρίσκεται σε ένα κλασικό δυναμικό $V(\vec{x})$

$$i\hbar \frac{d\psi}{dt} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{x}) \quad (7.5)$$

Η κυματοσυνάρτηση ψ παίρνει εν γένει μιγαδικές τιμές και μπορεί να γραφεί ως

$$\psi = R e^{iS/\hbar} \quad (7.6)$$

όπου $R, S \in \mathbb{R}$. Την αντικαθιστούμε τώρα στην εξίσωση (7.5) και χωρίζουμε το φανταστικό από το πραγματικό της μέρος κι εκτελούμε έναν «αθώο» μετασχηματισμό (θέτουμε $P = R^2$) ώστε να έχουμε τελικά:

$$\frac{dP}{dt} + \nabla \left(P \frac{\nabla S}{m} \right) = 0 \quad (7.7)$$

$$\frac{dS}{dt} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\vec{x}) - \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla P)^2}{P^2} \right) = 0 \quad (7.8)$$

Αν τώρα $\hbar = 0$, η (7.8) ανάγεται στην εξίσωση Hamilton – Jacobi, η οποία αποτελεί τον πυρήνα μιας εναλλακτικής ισοδύναμης παρουσίασης της κλασικής μηχανικής όπως αυτές που στηρίζονται στην λαγκρανζιανή και στη χαμιλτονιανή θεώρηση.

Η ποσότητα $\frac{\nabla S}{m}$ ισούται με το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{u}(\vec{x})$ οποιουδήποτε σωματιδίου διέρχεται από το σημείο $\vec{x}$. Αν γράψουμε, την (7.7) στη μορφή:

$$\frac{dP}{dt} + \nabla(P\vec{u}) = 0 \quad (7.9)$$

το $P\vec{u}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η μέση ροή σωματιδίων και το $P(\vec{x})$ ως η πυκνότητα πιθανότητας στο θεσεογραφικό χώρο (δηλαδή στο χώρο που απεικονίζει την τροχιά του σωματιδίου). Η (7.9), λοιπόν, μας λέει ότι η πιθανότητα διατηρείται .

Ο Bohm, όμως, θεώρησε πως ακόμη και στην περίπτωση $\hbar \neq 0$ η εξίσωση (7.8) εκφράζει μια εξίσωση Hamilton – Jacobi, στην οποία το κλασικό δυναμικό συμπληρώνεται από, δηλαδή δρα μαζί με ένα επιλέον κβαντικό δυναμικό $U(\vec{x})$ στο οποίο αντιστοιχεί ο όρος:

$$U(\vec{x}) = \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{1}{2} \frac{(\nabla P)^2}{P} \right) = -\frac{\hbar^2}{4m} \frac{\nabla^2 R}{R}$$

Χάρη σε αυτήν την κίνηση, ο Bohm ισχυρίζεται πως η τροποποιημένη εξίσωση Hamilton – Jacobi μπορεί ακόμη να δώσει τροχιές σωματιδίων στο χώρο μέσω ολοκλήρωσης της ταχύτητας $\vec{u}(\vec{x}) = \frac{\nabla S(\vec{x})}{m}$. Όμως, τώρα το σωματίδιο δεν θα δέχεται μόνο τη δύναμη που σχετίζεται με το κλασικό δυναμικό $V(\vec{x})$, αλλά θα πρέπει να ληφθεί υπόψη και η επίδραση που θα ασκείται από το κβαντικό πεδίο $U(\vec{x})$.

Η πυκνότητα πιθανότητας που δίνει η τροποποιημένη θεωρία ταυτίζεται με την πυκνότητα πιθανότητας που παίρνουμε στην «κανονική» κβαντική θεωρία βάσει του κανόνα του Born. Όμως, εδώ, ισχυρίζεται ο Bohm (ο.π., σελ. 171) η πιθανότητα αναπαριστά την αδυναμία μας να λάβουμε υπόψη όλες τις διαταραχές που προκαλεί η συσκευή μέτρησης στο σύστημα και όχι κάποιο χαρακτηριστικό της ίδιας της πραγματικότητας. Είναι κατ'αρχήν δυνατό, λοιπόν, να παραβιάσουμε τις εξισώσεις απροσδιοριστίας και να προσδιορίσουμε επακριβώς τις θέσεις και τις ορμές των σωματιδίων.

Αποδίδοντας τα παραπάνω συνοπτικά: «η κβαντική εξίσωση κίνησης μπορεί, λοιπόν, να θεωρηθεί ότι καθορίζει ένα σύνολο από δυνατές τροχιές για τα σωματίδια με αρχική ορμή $p = \nabla S(\vec{x})$ κινούμενα υπό την επίδραση του συνολικού δυναμικού $V + U$. Το πεδίο «οδηγός» ψ καθορίζει (μέσω του R) την πιθανότητα πυκνότητας P και το κβαντικό πεδίο U και (μέσω του S) τις ορμές των σωματιδίων» (Karakostas et al 1995, σελ. 70).

7.3.1. Αντιμετώπιση του Προβλήματος της Μέτρησης

Η θεωρία του Bohm επαναφέρει κατά το μέτρο του δυνατού μια κλασική μεταφυσική εικόνα για τον κόσμο. Αυτό της επιτρέπει να αποβάλλει και τις ιδέες που έχουν να κάνουν με την κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης, την σημασία της μέτρησης για τον προσδιορισμό των

ιδιοτήτων ενός συστήματος, το ρόλο που έχει ο παρατηρητής και γενικότερα τα παράδοξα χαρακτηριστικά που σχετίζονται με την μετρητική διαδικασία. Η μέτρηση δεν διαφέρει επί της αρχής με καμία άλλη διαδικασία που λαμβάνει χώρα στη φύση. Η «κατάρρευση» δεν έχει να κάνει με κάποια απόκρυφη διαδικασία, που ενεργοποιείται κάθε φορά που επιχειρείται ο καθορισμός των ιδιοτήτων ενός συστήματος. Δεν έχει οντολογικό αλλά επιστημολογικό χαρακτήρα (ο.π., σελ. 74). Αυτό που αλλάζει απότομα την στιγμή της μέτρησης είναι η γνώση μας γύρω από τις ιδιότητες του συστήματος. Λόγω του ότι το μέγεθος της θέσης είναι πάντα καθορισμένο, μπορεί να αποδειχθεί (Busch et al 1991, σελ. 101) ότι και όλα τα μέγεθη σε περίπτωση μέτρησης θα είναι καθορισμένα. Έτσι, το πρόβλημα της αντικειμενικοποίησης δεν εγείρεται καν. Η πιθανότητα αντιπροσωπεύει την άγνοια μας για την ακριβή θέση του σωματιδίου και οφείλεται στην περιπλοκότητα των παραμέτρων που πρέπει να ληφθούν υπόψη.

Στις περιπτώσεις μετρήσεων που στην κβαντική θεωρία εμφανίζονται φαινόμενα συμβολής, όπως στην περίπτωση του πειράματος της διπλής σχισμής, αυτά εμπλέκουν μονάχα τα πεδία που αντιστοιχούν στις κυματοσυναρτήσεις. Το εκάστοτε σωματίδιο είναι εντοπισμένο στο χώρο και ακολουθεί μια καθορισμένη τροχιά (περνά είτε από την μια είτε την άλλη σχισμή). Αντίθετα, το πεδίο απλώνεται ως ένα κύμα (και περνά τόσο από την μια όσο και από την άλλη σχισμή) δημιουργώντας περιοχές του χώρου από τις οποίες είναι πιο πιθανό να διέλθει το σωματίδιο (βλ. την εικόνα παραπάνω). Η μόνη ιδιότητα που έχουν τα σωματίδια είναι η θέση, η οποία αντιστοιχίζεται σε ένα καθορισμένο σημείο του χώρου. Το πεδίο της κυματοσυνάρτησης, από την άλλη, απλώνεται σε ολόκληρο το χώρο και μπορεί να οδηγήσει σε συσχετίσεις σαν αυτές που είδαμε παραπάνω στην παραβίαση των ανισοτήτων Bell. Μέσω του πεδίου αυτού το ένα σωματίδιο μπορεί να επιδράσει στο άλλο ακαριαία. Η θεωρία του Bohm είναι ισχυρά μη τοπική.

Ακόμη, σύμφωνα με την θεωρία δεν είναι δυνατό να αποδώσουμε τιμές μεγεθών συστημάτων χωρίς να γνωρίζουμε την πειραματική διάταξη που χρησιμοποιείται. Στην περίπτωση του σπιν, για παράδειγμα, δεν υπάρχει μια εμμενής ιδιότητα του συγκεκριμένου μεγέθους που αποδίδεται στο εκάστοτε σωματίδιο. Αντίθετα, η απόδοση αυτή εξαρτάται από το πλαίσιο μέτρησης: η συσκευή που χρησιμοποιείται έχει μια ορισμένη κατεύθυνση σε σχέση με το πεδίο της κυματοσυνάρτησης και το κάνει να χωριστεί σε διαφορετικές κατευθύνσεις στο χώρο (για σωματίδια με σπιν $\frac{1}{2}$ αυτές θα π.χ. είναι 2). Τροποποιώντας τη διάταξη της συσκευής, παίρνουμε διαφορετικά αποτελέσματα για την μέτρηση του σπιν ανάλογα με την αρχική θέση του σωματιδίου ενώ το σωματίδιο ακολουθεί την ίδια τροχιά στο χώρο (Albert 1992, σελ. 152-4). Κατά συνέπεια, στην θεωρία του Bohm, τα μεγέθη έχουν όντως πλαισιακό χαρακτήρα. ■

Δεδομένων όλων αυτών πώς μπορούμε να αξιολογήσουμε τελικά την εκδοχή της μη πληρότητας ως μιας πιθανής απάντησης στο πρόβλημα της μέτρησης; Είναι σαφές πως η υιοθέτηση μιας θεωρίας κρυμμένων μεταβλητών όπως του Bohm επιτυγχάνει να μας απαλλάξει από την κατάρρευση και να άρει το μυστικιστικό πέπλο που είχαν ρίξει στη διαδικασία οι προηγούμενες ερμηνείες. Ακόμη, η υπόθεση ύπαρξης παραγόντων που δεν λαμβάνει υπόψη η θεωρία μοιάζει εν πολλοίς εύλογη. Πρώτον, γιατί ταιριάζει στην

μεταφυσική εικόνα³⁰ που θεωρούσαμε αιώνες ως (έστω προσεγγιστικά) αληθή για τον κόσμο: ένα σύνολο πραγμάτων που υφίστανται ανεξάρτητα από το νου μας με τις ιδιότητες τους πλήρως καθορισμένες. Δεύτερον, γιατί όταν έχουμε μια στατιστική θεωρία (και η κβαντική μηχανική είναι μια τέτοια θεωρία) τείνουμε να θεωρούμε πως ο πιθανοκρατικός χαρακτήρας των αποτελεσμάτων οφείλεται στην άγνοια μας γύρω από τον ακριβή χαρακτήρα των εμπλεκόμενων παραμέτρων.

Όπως είδαμε, ωστόσο, η υιοθέτηση αυτής της εικόνας έρχεται με ένα κόστος. Κάθε θεωρία κρυμμένων μεταβλητών πρέπει να δεχτεί τον πλαισιακό χαρακτήρα των μετρήσεων αλλά και μια δράση εξ αποστάσεως κατά παράβαση της αρχής τοπικότητας – και πιθανώς σε ένταση με την ειδική σχετικότητα. Ακόμη και αν η πλαισιακότητα δεν αποτελεί τόσο προβληματικό σημείο στην θεωρία του Bohm καθώς θέτει σαν καθορισμένο μόνο το μέγεθος της θέσης (βλ. και Goldstein 2017, §12), η αποδοχή αυτής μαζί με την μη τοπικότητα δημιουργούν μια φανερή δυσκαμψία σε αυτή την ερμηνεία. Το γεγονός πως το πεδίο της κυματοσυνάρτησης μεταδίδει επιδράσεις ακαριαία μεταξύ συστημάτων και το ποιες ιδιότητες έχουν αυτά καθορίζεται από το πλαίσιο μέτρησης μας δημιουργεί απορία σχετικά με το τι ακριβώς εξυπηρέτησε η εισαγωγή των παραμέτρων πέρα από το να περιπλέξει το μαθηματικό κομμάτι της θεωρίας. Ο ολισμός και η πλαισιακότητα εμφανίζονται και στην περίπτωση αυτή με την επιπλέον δυσκολία πως πρέπει να ταιριάζουν με μια ασύμβατη ή έστω δύσκολα συμβιβάσιμη μεταφυσική θεώρηση.

Ένα τελευταίο σημείο που ενδιαφέρει την ίδια την επιστημονική έρευνα είναι το κατά πόσον είναι δυνατό να δοθεί μια επέκταση της λεγόμενης μηχανικής του Bohm στην κβαντική θεωρία πεδίου (ό.π., §15). Μέχρι τώρα δεν έχει καταστεί δυνατό κάτι τέτοιο. Αυτό, φυσικά, δεν αποκλείει την ίδια τη δυνατότητα να επιτευχθεί μια τέτοια επέκταση. Όμως, μέχρι τότε – και αναλόγως της περιπλοκότητας των αλλαγών που θα χρειαστούν για αυτό–, μπορούμε να συμμεριστούμε τη διστακτικότητα των φυσικών να υιοθετήσουν αυτήν την ερμηνευτική προσέγγιση στην κβαντική μηχανική. Αν, μάλιστα, η «μοίρα» των θεωριών τύπου κρυμμένων μεταβλητών είναι να τρέχουν πίσω από τις εξελίξεις της φυσικής θεωρίας με διαρκείς τροποήσεις ώστε απλώς να είναι συμβατές με αυτή ενώ οι ίδιες παραμένουν άγονες από γνωσιολογική σκοπιά, μειώνεται σημαντικά και το κίνητρο μας να τις αποδεχτούμε. Όπως γράφει ο Torretti (1996, σελ. 455) σχολιάζοντας την θεωρία του Bohm: «μου θυμίζει τους καρτεσιανούς αντιπάλους του Νεύτωνα, οι οποίοι, για να αποφύγουν τη μαγική δράση από απόσταση της βαρύτητας, προσπάθησαν να εξηγήσουν τις πλανητικές κινήσεις μέσω φανταστικών υποθέσεων».

³⁰ Τουλάχιστον στο πνεύμα της φυσικής επιστήμης και χωρίς αναφορά σε ιδεαλιστικές παραδόσεις.

8, ΤΡΟΠΟΠΟΙΩΝΤΑΣ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ

*What's old collapses, times change,
And new life blossoms in the ruins*
F. Schiller

Η μη πληρότητα δεν μπόρεσε να μας δώσει μια απλή λύση για το πρόβλημα. Αντιθέτως, φάνηκε να περιπλέκει τα πράγματα προσθέτοντας περισσότερο «τεχνικό» (κι ενδεχομένως «τεχνητό») βάρος στην θεωρία. Είναι, λοιπόν, καιρός να στραφούμε σε κάποια νέα προσέγγιση. Θα θεωρήσουμε τώρα ως δεδομένο ότι η κβαντική μηχανική είναι μια πλήρης θεωρία, δηλαδή θα δεχτούμε τόσο ότι το καταστατικό διάνυσμα αναφέρεται σε μεμονωμένα συστήματα όσο και το ότι δεν υπάρχει κάποια πληροφορία για το σύστημα που αυτό αποτυγχάνει να συμπεριλάβει (Karakostas 1994, σελ. 1654). Ο πιθανοκρατικός χαρακτήρας της θεωρίας αντιπροσωπεύει ένα βαθύτερο χαρακτηριστικό της πραγματικότητας και αυτό που πρέπει να εξηγήσουμε είναι πώς από την παράδοξη φύση του μικροκόσμου, μπορούμε να ανακτήσουμε την συνηθισμένη μας εικόνα για τον μακρόκοσμο.

Ποια θα είναι η κατευθυντήρια ιδέα μας εδώ; Ότι η κβαντική μηχανική είναι μεν πλήρης, αλλά δεν εφαρμόζεται καθολικά στα φαινόμενα. Ο φορμαλισμός της έχει κάποιους περιορισμούς, οι οποίοι πρέπει να καλυφθούν μέσω της προσθήκης πρόσθετων μηχανισμών π.χ. στην δυναμική εξέλιξη των καταστάσεων, ώστε να μπορούμε να διαρρήξουμε την υπέρθεση στην περίπτωση μακροσκοπικών συστημάτων. Κατά αυτόν τον τρόπο, για αντικείμενα μεγάλου μεγέθους όπως είναι ο δείκτης της συσκευής δεν θα έχουμε το «ενοχλητικό» αποτέλεσμα να παραμένουν μετέωρα σε μια κατάσταση υπέρθεσης – απροσδιοριστίας των τιμών τους. Με αυτόν τον τρόπο, θα απαντήσουμε ουσιαστικά και στο ίδιο το πρόβλημα της μέτρησης.

8.1. Η Προσέγγιση των GRW

Μια πρόταση προς αυτήν την κατεύθυνση αποτελούν οι λεγόμενες θεωρίες κατάρρευσης [collapse theories] και η, ιδιαίτερα γνωστή ανάμεσα σε αυτές, θεωρία GRW – από τα ονόματα των εισηγητών της Ghirardi, Rimini και Weber (1986). Σε αυτή την θεωρία η βασική ιδέα είναι να μεταβληθεί ο γραμμικός χαρακτήρας της εξίσωσης Schrödinger, ώστε να προκύψουν κανόνες υπερ-επιλογής [superselection rules] και να λάβουμε την κλασική συμπεριφορά σε μακροσκοπικό επίπεδο. Με άλλα λόγια, η μεταβολή μιας κατάστασης του συστήματος θα περιγράφεται μέσω μιας τροποποιημένης εξίσωσης Schrödinger:

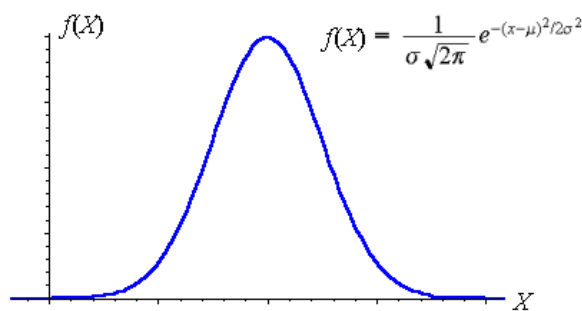
$$i\hbar \frac{\partial |\rho(t)\rangle}{\partial t} = [H, \rho] + (-i\lambda\hbar)(\rho - T(\rho))$$

όπου οι παράγοντες λ και $T(\rho)$ λαμβάνονται έτσι ώστε να μετατρέπουν την καθαρή κατάσταση σε ένα μείγμα καταστάσεων (D'Espagnat 1995, σελ. 292). Οι παράγοντες αυτές συνδέονται με την εισαγωγή κάποιων στοχαστικών, δηλαδή τυχαίων, και αυθόρμητων διαδικασιών εντοπισμού. Κάθε στοιχείο – μέρος ενός συστήματος έχει ορισμένη πιθανότητα να υποστεί μια τέτοια διαδικασία εντοπισμού (την οποία αποκαλούν «χτύπημα» [hit]) γύρω από μια θέση σε αντιδιαστολή με την εξέλιξη που περιγράφεται από την εξίσωση του

Schrödinger. Αυτή η αυθόρμητη διαδικασία εντοπισμού σημαίνει πως η κυματοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στο σωματίδιο έχει μια αυθόρμητη «τάση» να καταρρεύσει, να μετατραπεί, σε μια νέα κυματοσυνάρτηση συγκεντρωμένη στενότερα γύρω από μια συγκεκριμένη θέση του χώρου. Η διαδικασία μπορεί να περιγραφεί πιο τεχνικά ως εξής:

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα Σ αποτελούμενο από N διακριτά μεταξύ τους σωματίδια όπου $\psi_{\Sigma} := \psi_{\Sigma}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N)$ η κυματοσυνάρτηση που το περιγράφει (με $\vec{x}_j$ να αντιστοιχεί στην θέση του j -οστού σωματιδίου). Ας υποθέσουμε πως για ένα από τα σωματίδια, έστω το k -οστο, στην θέση $\vec{y}$, λαμβάνει χώρα μια διαδικασία εντοπισμού, δηλαδή η κυματοσυνάρτηση αυτού καταρρέει – εντοπίζεται γύρω από την θέση $\vec{y}$. Μαθηματικά, αυτό αναπαρίσταται από το ότι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος πολλαπλασιάζεται με μια γκαουσιανή κατανομή, δηλαδή την γνωστή κατανομή με σχήμα καμπάνας:

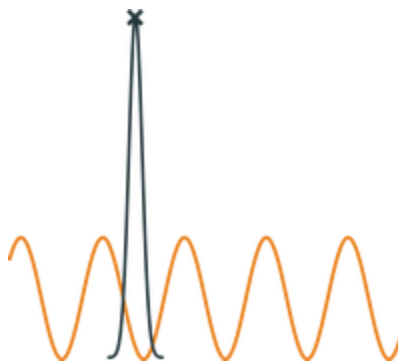
$$G(\vec{x}_k, \vec{y}) = K e^{-\frac{1}{2d^2}(\vec{x}_k - \vec{y})^2}$$



όπου κέντρο θα είναι το σημείο y , η K σταθερά κανονικοποίησης και η σταθερά d σχετίζεται με την ακρίβεια της διαδικασίας εντοπισμού (όσο πιο μεγάλο αυτό, τόσο πιο μικρή και η περιοχή γύρω από το σημείο), ώστε να πάρουμε μια νέα κυματοσυνάρτηση:

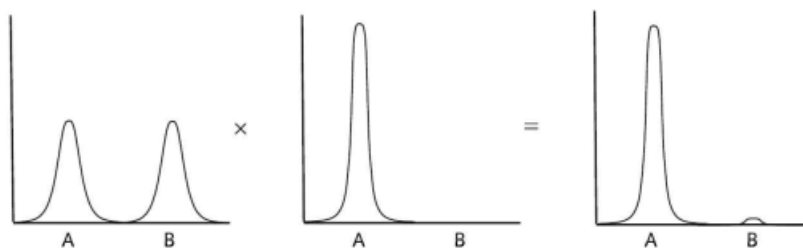
$$\psi_{\Sigma}^k(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N; \vec{y}) = \psi_{\Sigma}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N) G(\vec{x}_k, \vec{y})$$

Εποπτικά, η δράση της κατανομής είναι να συγκεντρώσει την κατανομή της κυματοσυνάρτησης σε μια περιοχή γύρω από το $\vec{y}$. Στην περίπτωση που είχαμε ένα σωματίδιο (και με μια χωρική διάσταση), η πυκνότητα της κυματοσυνάρτησης θα ήταν πολύ μεγάλη σε μια d περιοχή γύρω από το y και ουσιαστικά 0 εκτός αυτής, δηλαδή η εικόνα που θα είχαμε θα ήταν περίπου η ακόλουθη:



Κάτι ανάλογο, ωστόσο, θα πρέπει να φανταστούμε εποπτικά και για την δράση της γκαουσιανής συνάρτησης όταν μιλάμε για την κυματοσυνάρτηση σε περισσότερες διαστάσεις και με περισσότερα εμπλεκόμενα σωματίδια.

Είναι εμφανές ότι, αν η κυματοσυνάρτηση ήταν συγκεντρωμένη κυρίως σε δύο διαφορετικά σημεία του χώρου A και B που απέχουν αρκετή απόσταση, δηλαδή μεγαλύτερη από την d -περιοχή, η αυθόρμητη διαδικασία εντοπισμού θα είχε ως αποτέλεσμα η κυματοσυνάρτηση να συγκεντρωθεί κυρίως γύρω από τη μια εκ των δυο περιοχών.



Τα σημεία του χώρου $\vec{y}$ γύρω από τα οποία μπορεί να καταρρεύσει η κυματοσυνάρτηση σε αυτήν την διαδικασία αυθόρμητου εντοπισμού δεν είναι αυθαίρετα, αλλά η «επιλογή» των πιο πιθανών ακολουθεί την κατανομή των πιθανοτήτων που μας δίνει η κβαντική θεωρία για την εύρεση του σωματιδίου στην τάδε ή την δείνα περιοχή. Έτσι, η πιθανότητα να λάβει χώρα μια συρρίκνωση στο σημείο $\vec{y}$ είναι ίση με $P_{|\psi\rangle}(\vec{X}, \vec{y}) = |\langle \vec{y} | \psi \rangle|^2 = |\psi(y)|^2$. Κατά συνέπεια τα πιο πιθανά σημεία να λάβει χώρα η διαδικασία είναι αυτή στα οποία η κβαντική μηχανική μας λέει πως είναι πιο πιθανό να βρεθεί το σωματίδιο μετά από μια μέτρηση. Η πιθανότητα τώρα να λάβουν χώρα k αυθόρμητες διαδικασίες εντοπισμού σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα ακολουθεί κατανομή Poisson με μέση συχνότητα ίση με f :

$$P(k) = e^{-f} \frac{f^k}{k!}$$

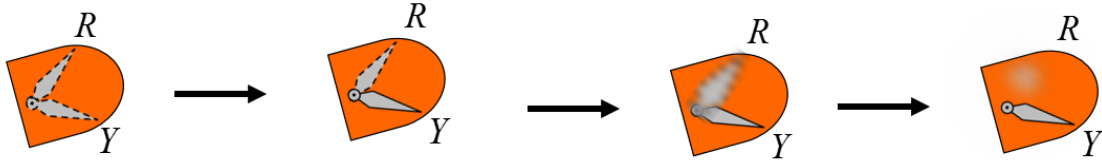
Η διαδικασία που περιγράψαμε μπορεί να εφαρμοστεί σε μακροσκοπικά συστήματα ώστε να ανακτήσουμε την οικεία εικόνα που έχουμε για αυτά μέσω του μηχανισμού «πυροδότησης». Ας υποθέσουμε πως έχουμε έναν (μακροσκοπικό) δείκτη τμήμα μιας μετρητικής συσκευής για το σπιν, ο οποίος έχει δύο πιθανές καταστάσεις $|\psi_A\rangle$ και $|\psi_B\rangle$ που σχετίζονται με τις δύο τιμές που μπορεί να πάρει το σπιν σε έναν άξονα. Ο δείκτης βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi_A\rangle$, όταν είναι στην θέση A , και αντίστοιχα στην $|\psi_B\rangle$, όταν είναι στην θέση B . Καθώς ο δείκτης αποτελείται από έναν τεράστιο αριθμό σωματιδίων, τον οποίο θεωρούμε ίσο με N , μπορούμε να γράψουμε την κατάσταση του δείκτη ως:

$$|\psi\rangle = |a_1\rangle_1 \otimes \dots \otimes |a_N\rangle_N + |b_1\rangle_1 \otimes \dots \otimes |b_N\rangle_N$$

όπου τα a_i και b_i δηλώνουν πως η θέση του i ηλεκτρονίου είναι σε μια περιοχή του χώρου κοντά στην θέση A ή B του δείκτη αντίστοιχα. Αν, τώρα, για τη κυματοσυνάρτηση κάποιου από αυτά τα σωματίδια που αποτελούν το δείκτη λάβει χώρα μια διαδικασία εντοπισμού είτε γύρω από την θέση A είτε γύρω από την B , τότε, λόγω της απόστασης αυτών μεταξύ τους, η κατάσταση του ολικού συστήματος θα πολλαπλασιαστεί με μια γκαουσιανή κατανομή και θα έχουμε (εδώ θεωρούμε εντοπισμό κοντά στην θέση a_k για το σωματίδιο k):

$$|\psi\rangle = G(x_k, \alpha_k) |a_1\rangle_1 \otimes \dots \otimes |a_N\rangle_N + G(x_k, \alpha_k) |b_1\rangle_1 \otimes \dots \otimes |b_N\rangle$$

Οπότε ο άλλος όρος (εδώ αυτός που αφορά τα σωματίδια να είναι κοντά στην B θέση) θα γίνει πρακτικά ίσος με 0 εφόσον η γκαουσιανή συνάρτηση που χρησιμοποιούμε είναι συγκεντρωμένη κοντά στο A . Όμως, αυτό αφήνει ολόκληρο το δείκτη κοντά στη θέση A . Ο εντοπισμός της κυματοσυνάρτησης ενός μόνο μικρού τμήματος του μακροσκοπικού συστήματος είχε σαν αποτέλεσμα την κατάρρευση των κυματοσυναρτήσεων των σωματιδίων σε μια καθορισμένη θέση, χάρη στο ότι βρίσκονται σε μια συζευγμένη κατάσταση.



8.1.1. Αντιμετώπιση του Προβλήματος της Μέτρησης

Με βάση αυτά γίνεται εύκολα αντιληπτό το πώς η θεωρία GRW φιλοδοξεί να επιλύσει το πρόβλημα της μέτρησης. Όταν το σύστημα Σ που μετράμε αλληλεπιδράσει με την συσκευή M και περιέλθει στην κατάσταση

$$|\psi'_{\Sigma+M}\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |a_i\rangle \otimes |r_1\rangle$$

η πιθανότητα κάποια από τις κυματοσυναρτήσεις να καταρρεύσει αυθόρμητα είναι πολύ μεγάλη λόγω του μεγάλου αριθμού των σωματιδίων που εμπλέκονται. Αναλύουμε την κατάσταση της συσκευής στα m σωματίδια που την απαρτίζουν κι έχουμε:

$$|\psi'_{\Sigma+M}\rangle = \sum_{i=1}^n a_i |a_i\rangle \otimes [|r_i\rangle_1 \otimes |r_i\rangle_2 \otimes \dots \otimes |r_i\rangle_m]$$

όπου $|r_i\rangle_k$ είναι η θέση του σωματιδίου όταν αυτό είναι κοντά στη θέση του r_i του δείκτη. Εξαιτίας του μεγάλου πλήθους των εμπλεκόμενων σωματιδίων, λοιπόν, κάποια από όλες τις κυματοσυναρτήσεις θα πολλαπλασιαστεί με την γκαουσιανή κατανομή – θα εντοπιστεί γύρω από μια θέση, έστω την r_k . Αυτό θα έχει σαν αποτέλεσμα οι καταστάσεις που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες θέσεις πρακτικά να μηδενιστούν και το σύστημα $\Sigma + M$ να βρεθεί σε μια καθορισμένη κατάσταση:

$$|\psi'_{\Sigma+M}\rangle = |a_k\rangle \otimes [|r_k\rangle_1 \otimes |r_k\rangle_2 \otimes \dots \otimes |r_k\rangle_m]$$

που φυσικά αυτό θα πρέπει να είναι και το αποτέλεσμα που παίρνουμε. ■

Για να μπορούν, όμως, όλα τα παραπάνω να έχουν εμπειρικό περιεχόμενο, είναι απαραίτητο να προσδιοριστούν κατάλληλα οι σταθερές d και f , ώστε να καλύπτονται όλες οι εμπειρικά διαπιστώσιμες περιπτώσεις κατάρρευσης και να μην προτείνονται περισσότερες από όσες πρέπει. Με άλλα λόγια, αν η συχνότητα είναι πολύ υψηλή, τότε η θεωρία θα προβλέπει την ύπαρξη εντοπισμένων κυματοσυναρτήσεων στον μικρόκοσμο ακόμη και όταν αυτές δεν

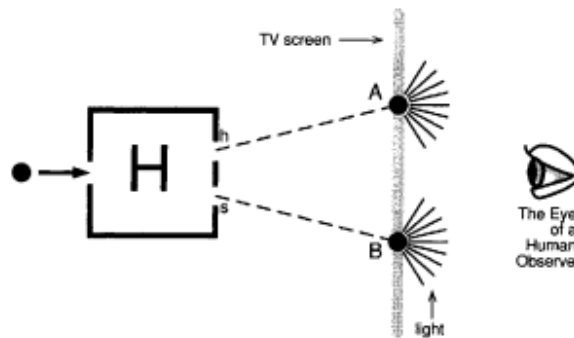
λαμβάνουν χώρα – όπως π.χ. ενός σωματιδίου που βρίσκεται σχετικά απομονωμένο στο χώρο. Από την άλλη, αν η συχνότητα είναι πολύ μικρή, τότε θα έχουμε πρόβλημα με τον καθορισμό ακόμη και στην περίπτωση μακροσκοπικών συστημάτων: το σύστημα δεν θα βρεθεί έγκαιρα σε καθορισμένη κατάσταση (βλ. Karakostas 1994, σελ. 1655).

Γενικά, ο προσδιορισμός των σταθερών αυτών είναι μια πρόκληση για την θεωρία καθώς την εκθέτει στο δικαστήριο της εμπειρίας. Αν, για παράδειγμα, διαπιστωθεί ότι υφίστανται καταστάσεις υπέρθεσης για περισσότερο χρόνο από αυτόν που προβλέπει η θεωρία ή αν διαπιστωθούν κβαντικά φαινόμενα στον μακρόκοσμο (όπως π.χ. δείχνουν πειράματα που διεξάγονται από την ομάδα Zeilinger με φαινόμενα συμβολής σε ολοένα και μεγαλύτερα σωματίδια), τα οποία η θεωρία απαλείφει με τον μηχανισμό της κατάρρευσης (κατά αναλογία προς την περίπτωση που εξετάσαμε με τον δείκτη της μετρητικής συσκευής), τότε εμφανώς δεν θα βρίσκεται σε συμφωνία με τα εμπειρικά μας δεδομένα. Μελλοντικά, λοιπόν, πειράματα μπορεί να οδηγήσουν τόσο στην απόρριψη όσο και στην ενίσχυση της θεωρίας.

Πρέπει να αναφέρουμε πως υπάρχουν διάφορες τεχνικές δυσκολίες που απαιτούν κάποιες «διορθώσεις» στην θεωρία όπως την αναπτύξαμε. Για παράδειγμα, δεν λαμβάνει υπόψη τις περιπτώσεις κατά τις οποίες τα σωματίδια είναι μη διακρίσιμα μεταξύ τους και παρουσιάζουν διάφορες συσχετίσεις. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί να εισαχθεί μια έννοια κατάρρευσης για την κυματοσυνάρτηση όχι με αναφορά σε μεμονωμένα σωματίδια, αλλά σε μια πυκνότητα σωματιδίων σε δεδομένο όγκο. Δεν θα επεκταθούμε σε αυτά τα ζητήματα εδώ (βλ. Ghirardi 2016, §6-7 για περισσότερες παραπομπές), καθώς η γενική ιδέα που αποκτήσαμε μας επιτρέπει να συνεχίσουμε την συνέχιση της συζήτησης σε ένα πιο απλό πλαίσιο. Θα προσπαθήσουμε, αντιθέτως να στρέψουμε τη συζήτηση σε κάποια πιο φιλοσοφικά ενδιαφέροντα ζητήματα που σχετίζονται με την θεωρία GRW.

8.2. Τεχνικές Δυσκολίες

Πρώτα, όμως, ακόμη ένα τεχνικού τύπου πρόβλημα. Ίσως η θεωρία είναι καλή για την περίπτωση που υπάρχουν πολλά σωματίδια, αλλά αποτυγχάνει να καλύψει περιπτώσεις με λιγότερα σωματίδια στα οποία θα λέγαμε πως έχει λάβει χώρα ένα συμβάν τύπου μέτρησης. Εδώ έχουμε δύο δυσκολίες για την θεωρία. Από την μια, είναι δυνατό οι καταστάσεις που εμπλέκονται στην μέτρηση να είναι τέτοιες που να μην μπορούν να διαχωριστούν μέσω της θέσης οποιουδήποτε πράγματος (η μεταβολή σε αυτήν να είναι ουσιαστικά πολύ μικρή – κάτω από το όριο d). Όμως, σημαντική μεταβολή στην θέση είναι ένα απαραίτητο στοιχείο για την θεωρία GRW εφόσον η κυματοσυνάρτηση αποτελεί μια κατανομή ως προς τη θέση και η ίδια η διαδικασία του εντοπισμού της συμβαίνει με αναφορά σε κάποιο σημείο του χώρου. Από την άλλη, είναι δυνατό τα εμπλεκόμενα σωματίδια να είναι τόσο λίγα σε αριθμό που η πιθανότητα να λάβει χώρα μια αυθόρμητη κατάρρευση να είναι πολύ μικρή, ενώ γνωρίζουμε πως είναι δυνατό να γίνουν (και πράγματι γίνονται) αντιληπτά από τις ανθρώπινες αισθήσεις.



Για να καταλάβουμε ακριβέστερα αυτές τις δυσκολίες, ας στραφούμε σε ένα παράδειγμα που παρουσιάζει ο Albert (1992, σελ. 100-4). Ας υποθέσουμε πως έχουμε την παραπάνω διάταξη. Τοποθετούμε μια συσκευή που διαχωρίζει σωματίδια ανάλογα με το σπιν τους στον άξονα z και τα στέλνει σε δύο διαφορετικά σημεία πάνω σε μια φωσφορίζουσα οθόνη: αυτά που έχουν σπιν $+1/2$ στο σημείο A και αυτά που έχουν $-1/2$ στο B . Όταν ένα σωματίδιο φτάσει στη μια ή την άλλη θέση διεγείρει τα ηλεκτρόνια ορισμένων ατόμων. Αυτά αποδιεγείρονται μετά από κάποιο χρονικό διάστημα (όπως προβλέπεται από την κβαντική θεωρία) κι εκπέμπουν φωτόνια. Η περιοχή αυτή μοιάζει με μια φωτεινή κουκκίδα. Η κατάσταση πριν την οποιαδήποτε παρατήρηση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z = +1, x = A\rangle_1 \otimes |ex\rangle_1 \otimes \dots \otimes |ex\rangle_N \otimes |nex\rangle_{N+1} \otimes \dots \otimes |nex\rangle_{2N} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} |S_z = -1, x = B\rangle_1 \otimes |nex\rangle_1 \otimes \dots \otimes |nex\rangle_N \otimes |ex\rangle_{N+1} \otimes \dots \otimes |ex\rangle_{2N}$$

Στον πρώτο όρο το σπιν είναι $+1/2$ οπότε η θέση του σωματιδίου είναι η A και είναι διεγερμένα τα σωματίδια της οθόνης 1 έως N , τα οποία βρίσκονται περί το σημείο A . Αντίστοιχα, στο δεύτερο το σπιν είναι $-1/2$ οπότε η θέση είναι η B και τα σωματίδια $N + 1$ έως $2N$ γύρω από το σημείο B είναι διεγερμένα.

Σύμφωνα με τον Albert, οι καταστάσεις που εξετάζουμε για τα $2N$ σωματίδια της οθόνης δεν είναι συσχετισμένες με μετατοπίσεις στην θέση που μπορούν να γίνουν «αντιληπτές» από τον φορμαλισμό, καθώς οποιαδήποτε μεταβολή θέσης των διεγερμένων ηλεκτρονίων βρίσκεται πολύ πιο χαμηλά από την σταθερά d που τίθεται στο πλαίσιο της GRW. Επιπλέον, η κατάρρευση δεν εφαρμόζεται στα φωτόνια που προκύπτουν ως αποτέλεσμα της αποδιέγερσης γιατί αυτά απαιτούν ένα σχετικιστικό πλαίσιο. Ακόμη, όμως, και αν δεχτούμε πως αυτά περιγράφονται από την GRW, συνεχίζει ο Albert, οι κυματοσυναρτήσεις των φωτονίων πολύ γρήγορα συμπλέκονται και εντοπισμός τους μέσω κατάρρευσης δεν είναι δυνατός. Αυτό, όμως, είναι τώρα πολύ προβληματικό καθώς το ανθρώπινο μάτι είναι απολύτως ικανό να αντιληφθεί ακόμη κι έναν εξαιρετικά μικρό αριθμό φωτονίων και κατά συνέπεια υπάρχει ένα ξεκάθαρο αποτέλεσμα (π.χ. φωτίζεται η θέση A της οθόνης), το οποίο η θεωρία αποτυγχάνει να μας δώσει. Η υπερθεση διαρκεί περισσότερο από όσο θα έπρεπε!

Οι υποστηρικτές της GRW απαντούν (Aicardi et al 1991) σε αυτό το σενάριο υποστηρίζοντας πως δεν είναι σαφές ότι η διαδικασία που λαμβάνει χώρα μέχρι την άφιξη των φωτονίων στο μάτι ενός παρατηρητή είναι μέτρηση. Η βάση της αντίρρησής τους είναι

πως λόγω του μικρού αριθμού των εμπλεκόμενων σωματιδίων δεν είναι απαραίτητο ότι θα προκύψει μακροσκοπικά σημαντική αλλαγή μέχρι την «άφιξη» του παρατηρητή. Το σύστημα μπορεί να είναι σε μια κατάσταση υπέρθεσης μέχρι την αλληλεπίδραση με έναν μεγαλύτερο αριθμό σωματιδίων που θα οδηγήσουν με μεγάλη πιθανότητα σε κατάρρευση. Μέχρι να εμπλακεί ο παρατηρητής το σύστημα δεν καταφέρνει να «ξεφύγει» από την κατάσταση υπέρθεσης. Και αυτό γιατί δεν έχει σημασία αν εποπτικά θεωρούμε πως έγινε ή δεν έγινε μέτρηση σε κάποια χρονική στιγμή, καθώς ο ακριβής χαρακτήρας των πραγμάτων καθορίζεται μέσα από την θεωρία. Και η θεωρία μας λέει πως για να ξεφύγουμε από την υπέρθεση πρέπει να εμπλέκεται μεταβολή θέσης μιας τάξης τουλάχιστον ίσης με d . Το ζητούμενο, λοιπόν, τώρα είναι κατά πόσον η θεωρία δύναται να εναρμονιστεί με το γεγονός πως τα φωτόνια γίνονται αντιληπτά από τον παρατηρητή. Με άλλα λόγια, το ζητούμενο είναι αν η διαδικασία που λαμβάνει χώρα στον εγκέφαλο του παρατηρητή περιλαμβάνει επαρκή αριθμό σωματιδίων ώστε να υπάρξει κάποια αυθόρμητη κατάρρευση εντός της προθεσμίας που μας δίνει ο χρόνος παρατήρησης³¹. Αυτό είναι κρίσιμο καθώς γνωρίζουμε πως ο παρατηρητής καταφέρνει να αντιληφθεί το φωτόνιο κι έτσι, δεν τίθεται θέμα διατήρησης της υπέρθεσης σε αυτήν την περίπτωση. Οι Aicardi κ.α. (1991, σελ. 116) παρουσιάζουν μια ανάλυση του νευρικού συστήματος χάρη στην οποία θεωρούν πως αποδεικνύεται η ύπαρξη καθορισμένου αποτελέσματος εντός του χρόνου αντίληψης. Όμως, τονίζουν πως με αυτήν την ανάλυση δεν δίνεται κάποια ιδιαίτερη σημασία στον παρατηρητή ως φορέα συνείδησης ή κάτι παρόμοιο (ο.π. σελ. 120). Το ζητούμενο είναι το σύστημα να βρεθεί σε σύζευξη με κάποιο σύστημα το οποίο θα περιέχει έναν ικανοποιητικό αριθμό συστατικών στοιχείων και θα οδηγείται σε εντοπισμό της θέσης. Το αν αυτό θα είναι το νευρικό σύστημα ενός βιολογικού οργανισμού ή οποιοδήποτε μακροσκοπικό αντικείμενο όπως μιας συσκευής μέτρησης δεν έχει καμία σημασία για το επιχείρημα.

8.3. Απροσδιοριστία και Τροποποίηση της GRW

Όπως ήδη υποσχθήκαμε, πέρα από αυτά τα τεχνικής φύσεως ζητήματα, υπάρχουν και άλλα πιο φιλοσοφικά ενδιαφέροντα που οδηγούν σε προβληματισμό γύρω από εννοιολογικά ζητήματα της ίδιας της κβαντικής μηχανικής. Μια τέτοια δυσκολία για τη θεωρία GRW είναι πως η αυθόρμητη κατάρρευση δεν οδηγεί σε πλήρη συγκέντρωση της κυματοσυνάρτησης σε ένα σημείο. Η γκαουσιανή «καμπάνα» με την οποία πολλαπλασιάζεται η κυματοσυνάρτηση δεν μηδενίζεται παρά μόνο στο άπειρο. Έτσι, ακόμη και όταν λέμε πως το σωματίδιο/σωματίδια εντοπίζονται σε ένα σημείο στο χώρο, αυτό δεν είναι πλήρως ακριβές καθώς η κυματοσυνάρτηση έχει «ουρά» που καλύπτει ολόκληρο το χώρο. Παρόλο, λοιπόν, που οι GRW επιδιώκουν να μας απαλλάξουν από τα προβλήματα των υπερτιθέμενων καταστάσεων στον μακρόκοσμο, δεν φαίνεται να μπορούν να απαλείψουν πλήρως την απροσδιοριστία. Αυτό ουσιαστικά αφήνει ουσιαστικά άλυτο και το πρόβλημα της μέτρησης, που μας ενδιαφέρει εδώ, (Lewis 2006, σελ. 230): το σύστημα για ακόμη μια φορά δεν βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη ιδιοκατάσταση.

³¹ Εδώ φαίνεται και η σημασία της συχνότητας αυτών των διαδικασιών εντοπισμού: αν είναι πολύ μικρός, βλέπουμε πως σε αυτήν την περίπτωση η θεωρία θα αδυνατούσε να προβλέψει ότι υφίσταται αντίληψη ενός καθορισμένου αποτελέσματος.

Ένας πιθανός τρόπος να αντιμετωπιστεί το πρόβλημα της ουράς της κυματοσυνάρτησης είναι να χαλαρώσουμε κάπως το σύνδεσμο ιδιοκατάστασης – ιδιοτιμής (Lewis 2016, σελ. 87). Μπορούμε, δηλαδή, ισχυριστούμε πως κατά κάποιο τρόπο ένα σύστημα μπορεί να διαθέτει μια καθορισμένη ιδιότητα, ακόμη και αν δεν βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη ιδιοκατάσταση ενός μεγέθους. Σε αυτήν την περίπτωση, απαιτούμε μόνο η προβολή της κατάστασης του συστήματος στον υπόχωρο που αντιστοιχεί σε μια ιδιοκατάσταση του μεγέθους να είναι μεγαλύτερη από τον αριθμό $1 - \varepsilon$, με $\varepsilon > 0$ μικρή θετική σταθερά. Για παράδειγμα, στην κατάσταση υπέρθεσης:

$$|\psi\rangle = a|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle$$

το σύστημα έχει τιμή την α_1 που αντιστοιχεί στην κατάσταση $|\varphi_1\rangle$ όταν ισχύει πως $\alpha^2 > 1 - \varepsilon$. Έτσι, θα μπορούσαμε να θέσουμε μια περιοχή (με απόσταση d ώστε να ταιριάζει στην θεωρία GRW), εντός της οποίας το εκάστοτε σύστημα φέρει καθορισμένες τιμές ασχέτως του ότι η κυματοσυνάρτηση δεν εντοπίζεται πλήρως σε ένα σημείο.

Εκτός από την άμεση δυσκολία του πόσο μικρό θα πρέπει να είναι το ε και του πώς ακριβώς θα κριθεί αυτό, υφίσταται μια πρόσθετη δυσκολία με αυτή την λύση (ο.π., σελ. 92). Ας υποθέσουμε πως εξετάζουμε την περίπτωση ένα σωματίδιο να είναι μέσα ή έξω από ένα κουτί. Γράφουμε την κατάσταση που το περιγράφει ως την υπέρθεση:

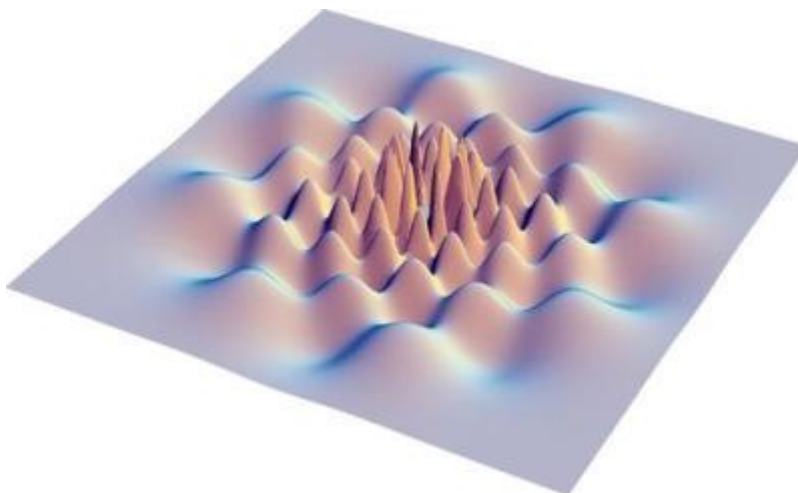
$$|\psi\rangle = a|in\rangle + \beta|out\rangle$$

με την πρώτη κατάσταση να δηλώνει πως το σωματίδιο βρίσκεται μέσα ενώ η δεύτερη πως βρίσκεται εκτός του κιβωτίου. Ας θεωρήσουμε πως αποδίδουμε την θέση «μέσα» στο σωματίδιο όταν ικανοποιείται (με $\varepsilon = 0.05$) η σχέση: $\alpha^2 > 0.95$. Τώρα θεωρούμε την περίπτωση N σωματίδια να είναι μέσα ή έξω. Περιγράφουμε με την κατάσταση:

$$|\psi\rangle = (a|in\rangle + \beta|out\rangle)_1(a|in\rangle + \beta|out\rangle)_2 \dots (a|in\rangle + \beta|out\rangle)_N$$

Κάθε ένα από τα σωματίδια είναι μες στο κουτί αφού ικανοποιεί την ανισότητα. Όμως, το να είναι όλα μαζί στο κουτί δεν ισχύει, καθώς για αρκετά μεγάλο N , έχουμε ότι $\alpha^{2N} > 0.95^N$, το οποίο δεν είναι μεγαλύτερο από 0.95 κι έτσι δεν ικανοποιείται το κριτήριο που θέσαμε. Αυτό το αποτέλεσμα, ωστόσο, είναι εξαιρετικά προβληματικό. Δεν μπορεί το κάθε σωματίδιο μεμονωμένα να είναι μες στο κουτί (και γενικότερα κοντά σε μια θέση) και όλα μαζί να είναι εκτός!

Ο Ghirardi (2014, §12) ισχυρίζεται πως αυτό το πρόβλημα ανακύπτει επειδή εστιάζουμε σε μια πιθανοκρατική ερμηνεία της κυματοσυνάρτησης. Ο ίδιος προτείνει να δούμε την κυματοσυνάρτηση υπό μια πιο «φυσική και ρεαλιστική ερμηνεία», δηλαδή, σα να σχετίζεται με μια κατανομή πυκνότητας μάζας σε ολόκληρο το χώρο. Η κυματοσυνάρτηση δεν θα εκφράζει πια κάποια πιθανότητα το σωματίδιο να είναι εδώ ή εκεί όταν μετρηθεί, αλλά το πώς αυτό κατανέμεται ως μάζα στο χώρο.



Συγκεκριμένα, η παραλλαγή αυτή της θεωρίας δέχεται πως υπάρχει κάτι σαν πεδίο μάζας, το οποίο απλώνεται στις θέσεις $\vec{x}$ του χώρου βάσει μιας συνάρτησης κατανομής $M(\vec{x})$. Με δεδομένη τη συνάρτηση αυτή και την κατάσταση $|\psi(t)\rangle$ στην οποία βρίσκεται ένα σύστημα, μπορούμε να δούμε τον τρόπο που μεταβάλλεται η κατανομή του πεδίου αυτού στο χρόνο βάσει της σχέσης:

$$m(\vec{x}, t) = \langle \psi(t) | M(\vec{x}) | \psi(t) \rangle$$

Η κατανομή της μάζας αφορά τον τρισδιάστατο χώρο της εμπειρίας ενώ η κυματοσυνάρτηση είναι ορισμένη στον αφηρημένο θεσεογραφικό χώρο³². Η κβαντική κατάσταση, λοιπόν, καθορίζει τον τρόπο που κατανέμεται η μάζα στο χώρο κάνοντάς την περισσότερο πυκνή σε ορισμένα σημεία. Η κατανομή αυτή των πυκνωμάτων, τα σημεία, δηλαδή που «επιλέγονται» ακολουθούν την κατανομή πιθανότητας που γνωρίζουμε από την κβαντική θεωρία με τον κανόνα του Born και το τετράγωνο της κυματοσυνάρτησης (Lewis 2016, σελ. 94). Ας δούμε, όμως, το εξής παράδειγμα (Lewis 2006, σελ. 231), για να κάνουμε πιο κατανοητό αυτό το σημείο. Έστω πως έχουμε ένα σωματίδιο μάζας m το οποίο βρίσκεται στην παρακάτω κατάσταση (όπου $|\psi_\alpha\rangle$ η κατάσταση κατά την οποία το σωματίδιο είναι σε μια περιοχή α του χώρου – αντίστοιχα για την $|\psi_\beta\rangle$):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_\alpha\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_\beta\rangle$$

Ο πρώτος όρος της κατάστασης κατανέμει (μας λέει πως) μάζα ίση με m (θα βρίσκεται) στην περιοχή α και 0 στην περιοχή β ενώ ο δεύτερος όρος κατανέμει (μας λέει πως) 0 (θα βρίσκεται) στην περιοχή α και m στην περιοχή β , δηλαδή $\frac{m+0}{2} = \frac{m}{2}$ συνολικά λαμβάνοντας υπόψη τα «βάρη» των καταστάσεων στην υπέρθεση. Συνεπώς, η κατανομή της μάζας στην περιοχή α είναι $\frac{m}{2}$ και το ίδιο συμπεραίνουμε για την περιοχή β εφαρμόζοντας έναν παρόμοιο συλλογισμό. Όταν, όμως, λάβει μια αυθόρμητη κατάρρευση ολόκληρη ή ακριβέστερα το μεγαλύτερο μέρος της μάζας συγκεντρώνεται σε μια περιοχή (π.χ. στην α) κι έτσι θεωρούμε

³² Επαναλαμβάνουμε κι εδώ πως πρόκειται για τον χώρο εντός του οποίου ορίζεται η τροχιά ενός συστήματος. Για παράδειγμα, για ένα σωματίδιο που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο, ο θεσεογραφικός χώρος είναι $\mathbb{R}^3$ ενώ για N τέτοια σωματίδια ο θεσεογραφικός χώρος είναι ο $\mathbb{R}^{3N}$.

πως το «σωματίδιο» εντοπίζεται εκεί. Χάρη σε αυτή την εικόνα είναι δυνατό να αποφευχθεί το παραπάνω πρόβλημα σε σχέση με την απροσδιοριστία στον εντοπισμό πολλαπλών σωματιδίων. Όταν τα μεμονωμένα σωματίδια βρίσκονται κοντά σε μια περιοχή, τότε το καθένα θα έχει το μεγαλύτερο μέρος της μάζας του σε αυτήν κι έτσι, συνολικά η μάζα θα συγκεντρώνεται κατά συντριπτικό ποσοστό σε αυτήν.

8. 4. Η Τοπικότητα και πάλι

Ένα πολύ σημαντικό πρόβλημα που παρουσιάζεται για αυτή την τροποποιημένη εκδοχή της GRW –αλλά και γενικότερα για τέτοιου είδους θεωρίες– είναι αυτό της μη διαχωρισιμότητας και του τρόπου που εμπλέκεται στην παραβίαση της τοπικότητας. Μπορούμε να σκεφτούμε ένα δυνατό πείραμα, το οποίο εύκολα δείχνει πως η θεωρία των GRW εφοδιασμένη με την κατανομή μάζας οδηγεί σε σύγκρουση με την ειδική θεωρία της σχετικότητας. Η ιδέα είναι πολύ απλή (Maudlin 2011, σελ. 240). Ας πάρουμε μια διάταξη σαν αυτήν που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα με τις ανισότητες Bell.



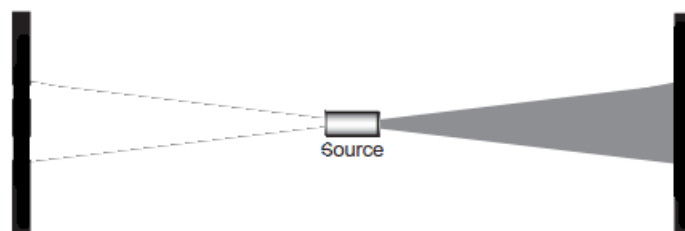
Στο κέντρο της παραπάνω διάταξης βρίσκεται μια πηγή P κι εκατέρωθέν της σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις δύο ανιχνευτές A_1, A_2 . Ετοιμάζουμε ένα σωματίδιο σε μια κατάσταση υπέρθεσης του να κινηθεί είτε προς τη μια είτε προς την άλλη κατεύθυνση:

$$|\psi\rangle = a|\varphi_{left}\rangle + \beta|\varphi_{right}\rangle$$

Όσο δεν υφίσταται κατάρρευση, η κυματοσυνάρτηση θα αποτελείται από δύο σκέλη με το ένα να σχετίζεται με την κίνηση προς την μια κατεύθυνση και το άλλο προς την άλλη. Το σωματίδιο θα εντοπίζεται κάθε φορά είτε από τον έναν είτε από τον άλλον ανιχνευτή, αλλά ποτέ και από τους δύο. Το πρόβλημα ξεκινά, όταν λάβουμε υπόψη το τι σημαίνει αυτό στο πλαίσιο της θεωρίας GRW. Καθώς λοιπόν η κυματοσυνάρτηση εκτείνεται και προς τις δύο διαφορετικές κατευθύνσεις, η πυκνότητα μάζας στον τρισδιάστατο χώρο μεταβάλλεται και αυτή αναλόγως. Όπως μας έδειξε και το παραπάνω απλό παράδειγμα, η μάζα θα κατανέμεται εξίσου και προς την μια και η άλλη προς την αντίθετη κατεύθυνση.

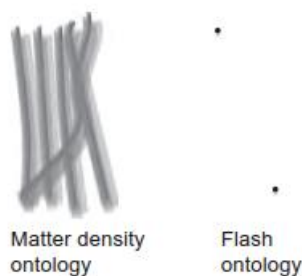
Την στιγμή, τώρα, που έχουμε εντοπισμό σε κάποια από τις συσκευές ανίχνευσης, θα συμβεί ένα από τα δύο ενδεχόμενα: είτε η κατανομή μάζας θα γίνει διπλά πυκνή στη μια πλευρά είτε θα εξαφανισθεί (σχεδόν) πλήρως. Αν, για παράδειγμα, έχουμε αυθόρμητη κατάρρευση κοντά στον ανιχνευτή A_2 , εκείνη την χρονική στιγμή το αριστερό σκέλος της κατανομής μάζας

τρόπον τινά θα «σβήσει», ώστε να έχουμε συγκέντρωση της μάζας κυρίως κοντά σε αυτόν, σύμφωνα, με την παρακάτω εικόνα:



Είναι εμφανές πως η διαδικασία αυτή απαιτεί ένα απόλυτο χρονικό πλαίσιο ως προς το οποίο ορίζεται η ταυτοχρονία των δύο συμβάντων. Κι αυτό διότι έχει σημασία το ποιος από τους δύο ανιχνευτές θα εντοπίσει το σωματίδιο πρώτα, ώστε να μπορεί να οριστεί το γεγονός αναφορικά με το τι ακριβώς έχει λάβει χώρα σε σχέση με την κατανομή της μάζας: έχει συγκεντρωθεί προς τη μία ή την άλλη πλευρά; Αυτή, όμως, η απαίτηση είναι κάπως δύσκολο να συμβιβαστεί με την ειδική σχετικότητα, η οποία απορρίπτει την δυνατότητα εύρεσης ενός πλαισίου καθολικού προσδιορισμού της ταυτοχρονίας.

Το ζήτημα της συμβατότητας με την ειδική σχετικότητα υπήρξε ανέκαθεν ένα λεπτό σημείο για τις θεωρίες τύπου GRW. Τα τελευταία χρόνια προτάθηκε μια ακόμη παραλλαγή της θεωρίας, η οποία βασίζεται σε μια ιδέα που διατύπωσε ο Bell. Αυτή είναι η λεγόμενη «οντολογία λάμψης» [flash ontology], η οποία ουσιαστικά θεωρεί πως η μόνη στιγμή που πραγματικά υπάρχει κάτι στον χώρο είναι όταν έχουμε εντοπισμό της κυματοσυνάρτησης μετά από μια αυθόρμητη κατάρρευση. Έτσι, οντολογικά η εικόνα του κόσμου με βάση τις δύο θεωρήσεις GRW θα είναι μια από τις δύο:



Η οντολογία λάμψης μοιάζει κάπως παράδοξη αρχικά, αλλά λόγω της μεγάλης συχνότητας των αυθόρμητων καταρρεύσεων στην περίπτωση πολλών σωματιδίων πολύ γρήγορα ανακτά την εικόνα που έχουμε για το τι υπάρχει στον κόσμο: τα μακροσκοπικά αντικείμενα εμφανίζονται «πυκνά» από ύλη, δηλαδή διαρκώς εντοπισμένα σωματίδια, ενώ ο χώρος που αντιστοιχεί στις κυματοσυναρτήσεις ελάχιστων σωματιδίων εμφανίζεται ουσιαστικά κενός. Το μεγάλο πλεονέκτημα αυτής της εκδοχής της GRW είναι πως μπορεί να καταστεί συμβατή με την ειδική σχετικότητα (Tumulka 2006). Οι τεχνικές λεπτομέρειες είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες και δεν μπορούν να αναπαραχθούν εδώ, αλλά μπορούμε να αρκεστούμε σε μια εποπτική εξήγηση του γιατί το πρόβλημα δεν ανακύπτει όπως στην προηγούμενη περίπτωση (Maudlin 2011, σελ. 241-3). Επειδή το μόνο που λαμβάνει χώρα είναι αυτές οι λάμπες και

δεν υφίσταται κάποιο πεδίο στο χώρο, όταν λάβει χώρα μια λάμψη κοντά στον ανιχνευτή δεν έχουμε κάποια πληροφόρηση για το τι συνέβη στον άλλο. Και αυτό γιατί ξαφνικά στον έναν ανιχνευτή θα εμφανιστεί ένα σωματίδιο και θα καταγραφεί με μια τιμή σπιν, αλλά τίποτα δεν πρόκειται να εμφανιστεί στον άλλο ανιχνευτή – δεν υπάρχει εδώ κάποια απότομη πύκνωση της μάζας όπως προηγουμένως.

Ωστόσο, το πρόβλημα δεν επιλύεται τόσο ομαλά όταν έχουμε δύο σωματίδια σε κατάσταση σύζευξης (Lewis 2016, σελ. 125-6). Σε αυτήν την περίπτωση, το μοντέλο μας δίνει το συμπέρασμα πως για τέτοιου είδους συμβάντα δεν υπάρχει κατεύθυνση αιτιότητας (Tumulka 2006, σελ. 350) και το ποιο συμβάν μπορεί να θεωρηθεί αίτιο και ποιο αποτέλεσμα καθίσταται ζήτημα σύμβασης. Υπάρχουν και κάπως πιο παράδοξες συνέπειες (Maudlin 2011, σελ. 257). Η υιοθέτηση μιας οντολογίας λάμψης, ανατρέπει την εικόνα που είχαμε σχηματίσει για αντικείμενα του μικρόκοσμου όπως το DNA. Θα πρέπει και αυτά ως πρωτεϊνικά μόρια να έχουν μια περιέργη «αστραπιαία» ύπαρξη κάτι που δεν συμβαδίζει ούτε με την εποπτική μας εικόνα πως το DNA είναι συνέχεια εκεί επιτελώντας τις λειτουργίες του ούτε με το μοντέλο της διπλής έλικας. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της συχνότητας των καταρρεύσεων για τον αριθμό σωματιδίων του DNA που υπολογίζεται σε μόλις μία την ημέρα. Αυτό δημιουργεί επιλοκές και στην έννοια με την οποία μια οντολογία λάμψης θα απαντήσει στο πρόβλημα της μέτρησης. Τί είναι αυτό που αλληλεπιδρά και συμπλέκεται με την μηχανή κατά την διαδικασία της μέτρησης; Η οντολογία λάμψης μοιάζει πολύ «σποραδική» για να καλύψει τις περιπτώσεις των αλληλεπιδράσεων (Esfeld 2013, σελ. 262). Αν αυτό ισχύει, και η οντολογία λάμψης δεν μπορεί να επιτελέσει το έργο της GRW σε σχέση με την μέτρηση, κατά τον τρόπο που αναπτύξαμε στην §8.1.1, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε πως λάβαμε κάποια ικανοποιητική απάντηση στο πρόβλημα της.

Τέλος, ο ίδιος ο μηχανισμός προστίθεται ως ένα πλεονάζον χαρακτηριστικό της θεωρίας. Όμως, δεν είναι πλήρως κατανοητό γιατί ακριβώς πρέπει να λαμβάνουν χώρα τέτοιου είδους αυθόρμητες καταρρεύσεις. Ποια θα μπορούσε να είναι μια θεωρητική εξήγηση αυτού του φαινομένου; Η θεωρία των GRW το λαμβάνει ως δεδομένο και θεωρεί πως ο μηχανισμός της αυθόρμητης κατάστασης και η δυναμική εξέλιξη κατά Schrödinger συνυπάρχουν κατά τρόπο *ad hoc* (Karakostas 1994, σελ. 1657). Έτσι, ίσως σε θεωρητικό επίπεδο, δεν έχει μεγαλύτερη υποστήριξη από την ιδέα πως η κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης «απλώς συμβαίνει» και όλα τα παράδοξα χαρακτηριστικά ισχύουν. Ακόμη, παρόλο που η θεωρία των GRW έχει τη δυνατότητα να επιλύσει ζητήματα με τη μέτρηση, δεν είναι σαφές ότι μπορεί να το κατορθώσει διατηρώντας μια ισορροπία μεταξύ άλλων παραγόντων όπως ο σεβασμός της τοπικότητας ή χωρίς τα ζητήματα απροσδιοριστίας που εξετάσαμε νωρίτερα. Ακόμη, ένα ανησυχητικό στοιχείο είναι πως μετά τις τροποποιήσεις της παύει να αποτελεί μια ερμηνεία της κβαντικής θεωρίας, αλλά μετατρέπεται τελικά σε μια ανταγωνιστική προς αυτή θεωρία, καθώς, όπως αναγνωρίζουν και οι εμπνευστές της (Ghirardi 2016, §13), προβαίνει σε διαφορετικές προβλέψεις στην προσπάθεια να καταστεί συμβατή με την σχετικότητα. Βέβαια αυτό θα μπορούσε να αποτελεί ένα πλεονέκτημα στο βαθμό που μας επιτρέπει να ελέγξουμε την ισχύ της εμπειρικά. Όμως, εδώ πια υφίστανται πρακτικά προβλήματα: δεν είναι καθόλου βέβαιο ότι μπορούν να δημιουργηθούν οι κατάλληλες εμπειρικές συνθήκες που μπορούν να οδηγήσουν σε έλεγχο των συγκεκριμένων διαφορών.

9. ΑΛΛΑΖΟΝΤΑΣ ΑΝΤΙΛΗΨΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΟΣΜΟ

*There are more things in Heaven and Earth, Horatio,
Than are dreamt of your philosophy*
W. Shakespeare

Υπάρχει, όμως, και μια ερμηνεία της κβαντικής μηχανικής, η οποία φιλοδοξεί να επιλύσει το πρόβλημα της μέτρησης χωρίς να επικαλεστεί κάποιου είδους αξίωμα προβολής ή να τροποποιήσει κατά οποιονδήποτε τρόπο την δυναμική εικόνα. Υποτίθεται, μάλιστα, πως πηγάζει από τον ίδιο τον φορμαλισμό της θεωρίας, όπως αυτός αναπτύχθηκε από τις βασικές αρχές που είδαμε. Η ερμηνεία αυτή είναι γνωστή ως ερμηνεία της σχετικής κατάστασης ή, ευρύτερα γνωστή (βάσει της παραλλαγής του DeWitt), ερμηνεία των πολλών κόσμων. Και αυτή η ερμηνεία υποστηρίζει την πληρότητα της κβαντικής μηχανικής και δεν εισάγει κάποιου είδους κρυμμένες μεταβλητές ή παραμέτρους που επηρεάζουν τα αποτελέσματα των μετρήσεων. Επιπλέον, όμως, υποστηρίζει πως η κβαντική μηχανική είναι μια καθολική θεωρία και κατ'επέκταση αρκεί για να περιγράψει τα πάντα: συστήματα, μετρητικές συσκευές, μακροσκοπικά και μικροσκοπικά αντικείμενα.

9.1. Σχετικές Καταστάσεις

Ο εμπνευστής αυτής της ερμηνευτικής γραμμής ήταν ο H. Everett III. Η πρόταση του ήταν να απαλειφθεί οποιαδήποτε αναφορά σε αξίωμα προβολής, κατάρρευση κυματοσυνάρτησης, άλματα Dirac ή οποιουδήποτε τύπου ρήξη της συνεχούς εξέλιξης της κατάστασης όπως αυτή δίνεται από την εξίσωση Schrödinger. Η ίδια η κυματοσυνάρτηση θεωρείται η βασική φυσική οντότητα που υπάρχει στον κόσμο «χωρίς a priori ερμηνεία» (Everett 1957, σελ. 142). Υποστήριζε πως ακόμη και χωρίς αυτές τις τροποποιήσεις το αποτέλεσμα είναι μια πλήρης θεωρία (Lewis 2016, σελ. 59). Η δυσκολία βρίσκεται, φυσικά, στην περίπτωση των καταστάσεων υπέρθεσης. Αν έχουμε, για παράδειγμα, το σύστημα Σ σε μια κατάσταση

$$|\psi\rangle = \alpha|\psi_1\rangle + \beta|\psi_2\rangle \quad (9.1)$$

γνωρίζουμε, βάσει των κανόνων του φορμαλισμού πως μετά από μια μέτρηση το σύστημα θα βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi_1\rangle$ με πιθανότητα α^2 είτε στην κατάσταση $|\psi_2\rangle$ με πιθανότητα β^2 . Αν απαλείψουμε αυτή τη δυνατότητα μετάβασης – κατάρρευσης, πώς ακριβώς θα καταφέρουμε να εξηγήσουμε την εμπειρία μας; Πώς θα μπορούμε να μιλήσουμε για τις ιδιότητες που έχει το σύστημα;

Η κεντρική ιδέα του Everett είναι να θεωρήσουμε την κβαντική ως μια πλήρως κυματική θεωρία και να προσπαθήσουμε να ανακτήσουμε τον πιθανοκρατικό χαρακτήρα των αποτελεσμάτων της μέσω της υποκειμενικής εμπειρίας των παρατηρητών (Barrett 2014, §3) Έστω, λοιπόν, πως έχουμε έναν παρατηρητή στην κατάσταση $|\varphi_0\rangle$, η οποία αντιστοιχεί στο ότι δεν έχει καταγράψει κάποιο αποτέλεσμα για το σύστημα που παρατηρεί. Αν το σύστημα βρίσκεται είτε στην $|\psi_1\rangle$ είτε στην $|\psi_2\rangle$ κι εκτελέσουμε μια μέτρηση θα έχουμε την εξής, στην αντίστοιχη περίπτωση, μετάβαση:

$$|\varphi_0\rangle_o \otimes |\psi_1\rangle_\Sigma \rightarrow |\varphi_1\rangle_o \otimes |\psi_1\rangle_\Sigma \quad (9.2a)$$

$$|\varphi_0\rangle_O \otimes |\psi_2\rangle_\Sigma \rightarrow |\varphi_2\rangle_O \otimes |\psi_2\rangle_\Sigma \quad (9.2\beta)$$

όπου $|\varphi_i\rangle_O, i = 1, 2$ δηλώνει πως ο παρατηρητής αναγνωρίζει ως κατάσταση του συστήματος την $|\psi_i\rangle_O, i = 1, 2$. Αν, όμως, κάνουμε το ίδιο για την κατάσταση υπέρθεσης $|\psi\rangle$ της (9.1), η μέτρηση θα μας δώσει τη μετάβαση:

$$|\varphi_0\rangle_O \otimes |\psi\rangle_\Sigma \rightarrow |\varphi_1\rangle_O \otimes |\psi_1\rangle_\Sigma + |\varphi_2\rangle_O \otimes |\psi_2\rangle_\Sigma := |\Psi\rangle$$

οπότε καταλήγουμε σε μια νέα υπέρθεση συζευγμένων καταστάσεων παρατηρητή και συστήματος, στην οποία δεν μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα φέρει κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα δεδομένου ότι δεν βρισκόμαστε στην ιδιοκατάσταση του αντίστοιχου μεγέθους. Εμείς, όμως, γνωρίζουμε πως ο παρατηρητής μετά τη μέτρηση είναι σε θέση να αποδώσει μια καθορισμένη τιμή στο σύστημα: το ηλεκτρόνιο είτε έχει π.χ. σπιν $\frac{1}{2}$ ή $-\frac{1}{2}$.

Η ιδέα των σχετικών καταστάσεων εισέρχεται σε αυτό το σημείο, για να υπερβεί ακριβώς αυτόν τον σκόπελο. Ο Everett διακρίνει μεταξύ απόλυτων καταστάσεων όπως η $|\Psi\rangle$ που αφορούν το σύνθετο σύστημα και σχετικών καταστάσεων που αφορούν τα υποσυστήματα του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε πως έχουμε το «ολικό» σύστημα $O + \Sigma$ (παρατηρητής και μετρούμενο σύστημα) στην κατάσταση $|\Psi\rangle$. Σε αυτήν ούτε το παρατηρήσιμο μέγεθος που μετράμε στο Σ έχει συγκεκριμένη τιμή ούτε ο παρατηρητής O έχει «σημειώσει» κάποια καταγεγραμμένη τιμή ως αποτέλεσμα. Όμως, μπορούμε ακόμα να αποδώσουμε ένα είδος σχετικών καταστάσεων στο κάθε υποσύστημα χωριστά. Από τον ίδιο τον Everett (1957, σελ. 143):

«Δεν υπάρχει γενικά μια μοναδική κατάσταση για ένα υποσύστημα ενός σύνθετου συστήματος. Τα υποσυστήματα δεν βρίσκονται σε καταστάσεις ανεξάρτητες από αυτές του υπόλοιπου συστήματος, έτσι ώστε, γενικά, οι καταστάσεις των υποσυστημάτων είναι μεταξύ τους συσχετισμένες. Μπορεί κανείς να επιλέξει αυθαίρετα μια κατάσταση για ένα υποσύστημα και να οδηγηθεί [αντίστοιχα] στην σχετική κατάσταση του υπολοίπου [συστήματος]. Έτσι, βρισκόμαστε αντιμέτωποι με μια θεμελιώδη *σχετικότητα των καταστάσεων*, η οποία υπονοείται από τον φορμαλισμό των σύνθετων συστημάτων. Είναι δίχως νόημα να ζητάμε την απόλυτη κατάσταση ενός υποσυστήματος – το μόνο που μπορεί να ζητήσει κανείς είναι η σχετική κατάσταση ως προς μια δεδομένη κατάσταση του υπολοίπου του υποσυστήματος»

Πώς μπορούμε, λοιπόν, να καταλάβουμε την «σχετικότητα των καταστάσεων» και πώς θα μας βοηθήσει στην περίπτωση της υπέρθεσης; Σύμφωνα, με τον Everett όταν έχουμε την κατάσταση $|\Psi\rangle$, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύστημα και τον παρατηρητή σαν δύο υποσυστήματα του σύνθετου συστήματος $O + \Sigma$. Μπορούμε τώρα να πάρουμε την κατάσταση του ενός, π.χ. του Σ , σε σχέση με την κατάσταση του υπολοίπου, δηλαδή του O . Έτσι, λέμε πως σε *σχέση* με την κατάσταση $|\psi_1\rangle_\Sigma$ του συστήματος, ο παρατηρητής είναι στην κατάσταση $|\varphi_1\rangle_O$ και καταγράφει την τιμή α_1 ενώ σε *σχέση* με την κατάσταση $|\psi_2\rangle_\Sigma$ η κατάσταση του είναι $|\varphi_2\rangle_O$ και η τιμή που καταγράφει α_2 . Η πρόταση του Everett είναι να θεωρήσουμε πως οι ιδιότητες των υποσυστημάτων του σύνθετου συστήματος μάς δίνονται από τις σχετικές καταστάσεις τους. Οι απόλυτες καταστάσεις δίνουν τις ιδιότητες του σύνθετου συστήματος. Ο κβαντικός φορμαλισμός μας δείχνει πώς οι διάφορες σχετικές καταστάσεις σχετίζονται μεταξύ τους – π.χ. εδώ η καταγραφή της τιμής α_i από τον

παρατηρητή θα αντιστοιχεί στην σχετική κατάσταση $|\psi_i\rangle_S$ του συστήματος που μετράμε. Ο παρατηρητής, ως υποσύστημα, βρίσκει μια σχετική κατάσταση για το σύστημα που μελετάει.

Όμως, εδώ ανακύπτει μια άμεση απορία. Η παραπάνω ανάλυση δεν φαίνεται να επιτρέπει περισσότερη... πραγματικότητα από όση χρειαζόμαστε; Συγκεκριμένα, εφόσον αυτό που υπάρχει θεμελιωδώς είναι η κυματοσυνάρτηση του κόσμου, θα πρέπει να δεχτούμε πως όλες οι σχετικές καταστάσεις υπάρχουν. Όμως, αυτό δεν μοιάζει ιδιαίτερα εύλογο: αυτό που παρατηρούμε είναι μια ενιαία πραγματικότητα. Ο Everett προσπαθεί να αποφύγει αυτού του τύπου την δυσκολία ισχυριζόμενος πως η εμπειρία που διαπιστώνει ο παρατηρητής δεν είναι παρά διαδοχικές σχετικές καταστάσεις του ίδιου του παρατηρητή που δημιουργούν ένα ιστορικό από «καταγραφές» τιμών. (Barrett 2014, §5.1). Προς επεξήγηση αυτού, ας θεωρήσουμε πως ο παρατηρητής περνά από διαδοχικές υπερθέσεις με συστήματα Σ_i :

$$|\Psi_1\rangle = |\varphi_{11}\rangle_O \otimes |\psi_{11}\rangle_{\Sigma_1} + |\varphi_{12}\rangle_O \otimes |\psi_{12}\rangle_{\Sigma_1}$$

$$|\Psi_2\rangle = |\varphi_{21}\rangle_O \otimes |\psi_{21}\rangle_{\Sigma_2} + |\varphi_{22}\rangle_O \otimes |\psi_{22}\rangle_{\Sigma_2}$$

⋮

Αν στην πρώτη θεωρήσουμε πως βρίσκεται στη σχετική κατάσταση $|\varphi_{11}\rangle_O$, τότε θα καταγράψει μια τιμή α_1 για το Σ_1 . Στη συνέχεια, θα είναι λ.χ. στην $|\varphi_{22}\rangle_O$ και θα καταγράψει β_2 για το Σ_2 κ.ο.κ. Σε σχέση με κάθε μέτρηση, ο παρατηρητής διατηρεί τη μνήμη των παρελθόντων αποτελεσμάτων και θεωρεί πως λαμβάνουν χώρα διαδοχικά άλματα που θέτουν το σύστημα σε μια ιδιοκατάσταση (Everett 1957, σελ. 146). Όμως, τώρα τα πράγματα μοιάζουν κάπως συγκεχυμένα ιδιαίτερα όταν ο Everett προσθέτει σε μια υποσημείωση ότι «από την σκοπιά της θεωρίας όλα τα στοιχεία της υπέρθεσης (όλοι οι «κλάδοι») είναι ενεργεία, όλα είναι εξίσου πιθανά». Για ποιο λόγο οι παρατηρητές δεν αντιλαμβάνονται όλες αυτές τις εναλλακτικές καταστάσεις;

Εδώ πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι η ερμηνεία δεν ενδιαφέρεται να διασώσει πραγματικά την εμπειρική πραγματικότητα όπως (νομίζουμε ότι) είναι, αλλά μόνο κατά τα φαινόμενα, δηλαδή να εξηγήσει μονάχα γιατί οι παρατηρητές νομίζουν πως έχει αυτό το χαρακτήρα. Στο πλαίσιο αυτό, μπορεί να αποδειχθεί πως ένας παρατηρητής δεν θα μπορούσε να αντιληφθεί ότι δεν βρίσκεται σε μια καθορισμένη κατάσταση (Albert 1992, σελ. 116-18). Ας προσπαθήσουμε να καταλάβουμε τι θα σήμαινε για έναν παρατηρητή να είναι στην κατάσταση υπέρθεσης (αντίστοιχα καταστάσης παρατηρητή– συστήματος):

$$|\Psi\rangle = |\varphi_1\rangle_O \otimes |\psi_1\rangle_S + |\varphi_2\rangle_O \otimes |\psi_2\rangle_S$$

Ας υποθέσουμε πως ρωτάμε τον παρατηρητή που βρίσκεται στην κατάσταση αυτή αν θεωρεί πως ξέρει ένα καθορισμένο αποτέλεσμα (αντίστοιχη κατάσταση $|d_1\rangle_O$) ή όχι (αντίστοιχη κατάσταση $|d_2\rangle_O$). Στο φορμαλισμό μας, δηλαδή, γράφουμε ότι:

$$|\Phi\rangle = |d_1\rangle_O \otimes |\varphi_1\rangle_O \otimes |\psi_1\rangle_S + |d_1\rangle_O \otimes |\varphi_2\rangle_O \otimes |\psi_2\rangle_S$$

καθώς ο παρατηρητής πιστεύει πως γνωρίζει ένα καθορισμένο αποτέλεσμα και στις δύο επιμέρους καταστάσεις. Όμως, τώρα γράφουμε:

$$|\Phi\rangle = |d_1\rangle_o \otimes [|\varphi_1\rangle_o \otimes |\psi_1\rangle_s + |\varphi_2\rangle_o \otimes |\psi_2\rangle_s]$$

οπότε ο παρατηρητής θεωρεί πως γνωρίζει ένα καθορισμένο αποτέλεσμα, ακόμη και όταν δεν γνωρίζει ποιο είναι αυτό το αποτέλεσμα!

9.2 Πολλοί κόσμοι;

Όπως είπαμε, η προσέγγιση του Everett αντιμετωπίζει όλες τις δυνατές σχετικές καταστάσεις ως εξίσου πραγματικές. Όμως, έτσι διατυπωμένη ίσως μοιάζει κάπως «ασχνή». Θα θέλαμε να εξηγήσουμε κάπως καλύτερα τι σημαίνει ο όρος σχετική κατάσταση και πώς μπορούμε να καταλάβουμε το ότι «όλα τα στοιχεία μιας υπέρθεσης είναι ενεργεία πραγματικά». Πώς, λοιπόν, μπορούν να κατανοήσουμε αυτά σε σχέση με την πραγματικότητα; Έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι κατανόησης του έργου του Everett, όμως σίγουρα η πιο διάσημη γραμμή είναι αυτή των πολλών κόσμων, η οποία παρουσιάστηκε αρχικά από τον DeWitt (1970). Σύμφωνα με αυτήν την ερμηνεία, οι σχετικές καταστάσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικές εκδοχές της πραγματικότητας που συνυπάρχουν. Κάθε τέτοια «εκδοχή» αποτελεί ουσιαστικά έναν ολόκληρο διαφορετικό κόσμο. Γράφει ο DeWitt (1971, σελ. 178-9):

«Το σύμπαν μας [κόσμος για μας] πρέπει να θεωρηθεί ότι συνεχώς διαχωρίζεται σε έναν τεράστιο αριθμό κλάδων, που όλοι προκύπτουν από αλληλεπιδράσεις τύπου μέτρησης μεταξύ των μυριάδων συνιστωσών του. [...] όλοι οι κλάδοι πρέπει να θεωρηθούν ως εξίσου πραγματικοί. [...] έπεται ότι κάθε κβαντική μετάβαση που λαμβάνει χώρα σε κάθε αστέρι, σε κάθε γαλαξία, σε κάθε γωνιά του σύμπαντος διαχωρίζει τον τοπικό μας κόσμο στη Γη σε μυριάδες αντίγραφα του εαυτού του»

Ας δούμε λίγο πώς μπορούμε να γράψουμε λίγο πιο τυπικά αυτά με βάση τον φορμαλισμό (βλ. Vaidman 2014, §3.1-3.3). Όπως όλοι γνωρίζουμε από την εμπειρία μας, ο κόσμος που παρατηρούμε, ο κόσμος των μακροσκοπικών φαινομένων, περιλαμβάνει πράγματα (όπως βιβλία, τραπέζια, φύλλα δέντρων κτλ) τα οποία έχουν καθορισμένες ιδιότητες. Ας υποθέσουμε πως σε κάθε τέτοιο αντικείμενο στον κόσμο αντιστοιχούμε μια κβαντική κατάσταση $|\psi_{ob/k}\rangle$, η οποία περιγράφει ακριβώς αυτήν την καθορισμένη και σταθερή μακροσκοπική δομή. Η κβαντική κατάσταση θα αντιστοιχεί σε μια καθορισμένη κατάσταση εντός του φυσικού κόσμου: π.χ. η άτυχη γάτα θα είναι είτε νεκρή είτε ζωντανή.

Παίρνοντας τώρα όλες τις καταστάσεις των αντικειμένων $|\psi_{ob1}\rangle, |\psi_{ob2}\rangle \dots$ και την κατάσταση για τα υπόλοιπα σωματίδια $|\psi_{rest}\rangle$, δηλαδή όσα δεν συνιστούν αντικείμενα, γράφουμε την κατάσταση για τον κόσμο

$$|\Psi_w\rangle = |\psi_{ob1}\rangle \otimes |\psi_{ob2}\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_{obN}\rangle \otimes |\psi_{rest}\rangle$$

η οποία αντιστοιχεί ακριβώς μια ολόκληρη «εκδοχή» από αυτές που αναφέρει ο DeWitt. Με βάση αυτές τις καταστάσεις των επιμέρους κόσμων, μπορούμε τώρα να γράψουμε την κατάσταση για ολόκληρο το σύμπαν σαν ένα γραμμικό συνδυασμό – μια υπέρθεση πάνω σε όλους αυτούς τους κόσμους

$$|\Psi_{un}\rangle = \sum_{w=1}^{\infty} c_w |\Psi_w\rangle$$

Οι καταστάσεις $|\Psi_w\rangle$ είναι μεταξύ τους ορθογώνιες, καθώς οι κόσμοι διαφέρουν μεταξύ τους τουλάχιστον ως προς ένα αντικείμενο.

9.2.1 Αντιμετώπιση του Προβλήματος της Μέτρησης

Η ερμηνεία έρχεται να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της μέτρησης με τον πλέον ριζοσπαστικό τρόπο: αρνείται την ίδια την συνθήκη αντικειμενικοποίησης (§5.4)! Στο πλαίσιο της, οι απαιτήσεις που θέτουμε στη διαδικασία της μέτρησης είναι μόλις δύο (Mittelstaedt 1998, σελ. 45-6):

1) Αίτημα Βαθμονόμησης (AB): Αν το σύστημα Σ έχει προετοιμαστεί σε κάποια ιδιοκατάσταση $|a_k\rangle$ του μεγέθους A κι έχει την τιμή a_k , τότε μέτρηση του A οδηγεί με βεβαιότητα σε μια τιμή r_k του δείκτη της συσκευής, που μας δείχνει ότι το σύστημα έχει την τιμή a_k (μέσω της αντιστοιχίας $f(r_k) = a_k$).

2) Συνθήκη Αναπαραγωγής της Πιθανότητας (ΑΠ): Για κάθε δεδομένο παρατηρητή που αναπαρίσταται από τη συσκευή μέτρησης M , ο πραγματικός αριθμός $P_{a_k} = |a_k|^2$ είναι η πιθανότητα που αντιστοιχεί στην τιμή a_k . Αυτή εκδηλώνεται ως η σχετική συχνότητα $f^N(k, l)$ της τιμής a_k σε σχεδόν κάθε σειρά ιστορικού l της M , καθώς $N \rightarrow \infty$

Βάσει της (ΑΠ), οι πιθανότητες $P_{a_k} = |a_k|^2$ ερμηνεύονται, κατά τον Everett, με τον εξής τρόπο. Έστω πως ετοιμάζουμε N συστήματα στην ίδια κατάσταση $|\psi\rangle$. Τα θεωρούμε ως ένα σύνθετο σύστημα $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \otimes \dots \otimes \Sigma_N$ και διεξάγουμε μια μέτρηση του μεγέθους A σε καθένα από αυτά. Η συσκευή θα πάρει μια ακολουθία $l = (l_1, l_2, \dots, l_N)$ αποτελεσμάτων και τα αποθηκεύει στη μνήμη της. Η πιθανότητα P_{a_k} για κάθε τιμή a_k θα είναι η σχετική συχνότητα αυτής της τιμής στο πλήθος των καταγεγραμμένων αποτελεσμάτων καθώς το N γίνεται πολύ μεγάλο (Barrett 2014, §5.4).

Η απαλοιφή του αιτήματος αντικειμενικοποίησης σημαίνει πως όταν φτάσουμε στο τέλος της αλληλεπίδρασης και πάρουμε την σύζευξη μετρητικής συσκευής και συστήματος, δεν χρειάζεται πλέον να ερμηνεύσουμε τα μείγματα καταστάσεων στην (5.6) ως αποτέλεσμα άγνοιας. Το μόνο δεδομένο μας είναι ότι η κατάσταση του συστήματος $|a_i\rangle$ βρίσκεται σε συσχέτιση με την (σχετική της) κατάσταση $|r_i\rangle$ της M . Εφόσον, δεν θέτουμε την επιπλέον υπόθεση πως παίρνουμε κάποιο καθορισμένο αποτέλεσμα, οδηγούμαστε σε μια πραγματικότητα με πολλαπλές συνυπάρχουσες εκδοχές ή κόσμους (ό.π., σελ. 114). Απομακρύνουμε το προβληματικό στοιχείο της θεωρίας μας αλλάζοντας ριζικά τις αντιλήψεις μας για τον κόσμο.■

Ένα πλεονέκτημα της ερμηνείας των πολλών κόσμων που προβάλλεται είναι πως, σε αντίθεση με την θεωρία του Bohm ή την ίδια την κβαντική θεωρία, σέβεται την τοπικότητα (Vaidman 2014, §7). Εφόσον δεν υπάρχει κάποιος μηχανισμός κατάρρευσης δεν είναι υπάρχει και κάποιου είδους δράση εξ αποστάσεως. Η ιδέα είναι πως εφόσον λαμβάνουν χώρα όλα τα διαφορετικά ενδεχόμενα εξέλιξης εντός διαφορετικών κόσμων δεν υπάρχει ένα

προκαθορισμένο αποτέλεσμα, ώστε να προκύψει και η αντίστοιχη συσχέτιση μεταξύ αποτελεσμάτων³³. Υπάρχουν, όμως, και αντιρρήσεις (βλ. Whitaker 1984, σελ. 257-8).

9.3. Κάποιες Δυσκολίες της Ερμηνείας

Θα στραφούμε τώρα σε μερικά ζητήματα που παραδοσιακά έχουν θεωρηθεί προβληματικά για την ερμηνεία των πολλών κόσμων. Τα παρακάτω παρουσιάζονται σε μια εντελώς «σχηματική» μορφή (βλ. Ben-Dov 1989), με σκοπό να αναδείξουν τις διάφορες περιοχές που υφίσταται διαμάχη σε σχέση με την ερμηνεία των πολλών κόσμων. Σε όλα τα προβλήματα που θα δούμε έχουν κατά καιρούς παρουσιαστεί διάφορες απαντήσεις με την πειστικότητά τους, φυσικά, να διαφέρει. Εδώ δεν θα αναφερθούμε σε αυτές τις προσπάθειες απάντησης των προβλημάτων, καθώς η αντίστοιχη βιβλιογραφία είναι κάτι παραπάνω από εκτενής.

α) Διακλάδωση και Προτιμητέα Βάση

Είδαμε πως για την ερμηνεία των πολλών κόσμων οι καταστάσεις που εμφανίζονται σε μια υπέρθεση αντιστοιχούν σε ταυτόχρονα υφιστάμενους κόσμους. Εδώ προκύπτει άμεσα μια ένταση της ερμηνείας με τον μαθηματικό φορμαλισμό. Γνωρίζουμε ότι στο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας μπορούμε να αναπτύξουμε ένα καταστατικό διάνυσμα ως προς οποιαδήποτε βάση του χώρου Hilbert εντός του οποίου «κατοικεί». Σε κάθε διαδικασία μέτρησης, λοιπόν, δεν είναι μοναδικός ο τρόπος που ο κόσμος διακλαδώνεται: μπορούμε να θεωρήσουμε πως σε έναν κόσμο το σύστημα είναι στην κατάσταση $|s_1\rangle$ ή $|s_2\rangle$ κ.ο.κ. αλλά εξίσου «νόμιμο» είναι να θεωρήσουμε το σύστημα στην κατάσταση $|s'_1\rangle$ ή $|s'_2\rangle$ κ.ο.κ. Αυτό, όμως, συνεπάγεται πως δεν είναι δεδομένο ποιες ιδιότητες θα είναι καθορισμένες στον εκάστοτε κόσμο. Έτσι, πώς ακριβώς απαλείφουμε την κβαντική παραδοξότητα των υπερθέσεων για τον μακρόκοσμο μέσω αυτής της ανάλυσης;

Επειδή, μάλιστα, η ιδιοκατάσταση ενός μεγέθους μπορεί να είναι υπέρθεση καταστάσεων για ένα άλλο μέγεθος, καθίσταται ασαφές ακόμη και το πότε λαμβάνει χώρα μια διακλάδωση. Το να ισχυριστεί κανείς πως αυτό γίνεται τη στιγμή της μέτρησης είναι ουσιαστικά μια παραδοχή ήττας για τη θεωρία, καθώς το ζητούμενο είναι ακριβώς να απαλείψουμε αναφορά σε μετρήσεις και διαδικασίες εξέλιξης πέρα από αυτές που περιγράφει η δυναμική μας εξίσωση. Η θεωρία αυτή πρέπει να μας πει ότι (και κατά προτίμηση γιατί) κάποια βάση του χώρου Hilbert θα έχει προνομιούχο χαρακτήρα.

β) Ο ρόλος των Πιθανοτήτων

Καθώς στην ερμηνεία αυτή δεν λαμβάνει χώρα κάποια κατάρρευση της κυματοσυνάρτησης και όλη η εξέλιξη του συστήματος περιγράφεται με την γραμμική εξίσωση Schrödinger ανακύπτει ένα ερώτημα σχετικά με τη σημασία του κανόνα του Born. Είδαμε πως στην περίπτωση που ένα σύστημα βρίσκεται σε μια κατάσταση υπέρθεσης

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha_i | \psi \rangle |\alpha_i\rangle$$

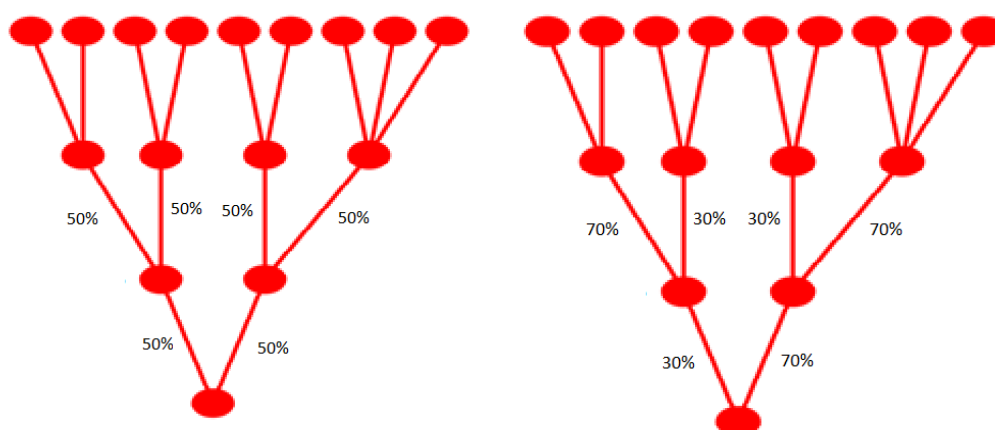
³³ Κάπως, ωστόσο, πρέπει να ερμηνευθεί και το γιατί παρατηρούμε μη τοπικές επιδράσεις στον κόσμο.

διεξαγωγή μέτρησης ενός μεγέθους A έχει πιθανότητα $P_{|\psi\rangle}(a_i) = |\langle a_i|\psi\rangle|^2$ να μας δώσει σαν αποτέλεσμα την τιμή a_i . Όμως, στην ερμηνεία των πολλών κόσμων, δεν έχουμε μια ασυνεχή εξέλιξη. Αυτό που συμβαίνει είναι να διαχωρίζεται ο κόσμος στις διαφορετικές εκδοχές του, οι οποίες θεωρούνται όλες ως ενεργεία υπάρχουσες. Όμως, τότε ποια είναι η διαφορά μεταξύ των δύο παρακάτω καταστάσεων;

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_2\rangle$$

$$|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|\psi_1\rangle + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle$$

Τόσο στην πρώτη όσο και στην δεύτερη κατάσταση, ο κόσμος θα χωριστεί σε δύο εκδοχές με την μία να περιλαμβάνει το σύστημα στην $|\psi_1\rangle$ και την άλλη στην $|\psi_2\rangle$. Ποια είναι η σημασία των αριθμητικών συντελεστών μπροστά από τις καταστάσεις; Οπτικοποιώντας το πρόβλημα, ποια είναι η διαφορά μεταξύ των παρακάτω εικόνων, αν οι κουκκίδες αναπαριστούν κόσμους;



Πώς μπορεί ο φορμαλισμός να ανακτήσει τον κεντρικό ρόλο των πιθανοτήτων στην κβαντική μηχανική εντός του ντετερμινιστικού του πλαισίου; Πώς γίνεται ένας κόσμος να είναι πιο πιθανό να εμφανιστεί από τον άλλο; Είδαμε στην §9.2.1 την πρόταση του Everett για την σχετική συχνότητα στο ιστορικό των μετρήσεων. Όμως, αυτή η ιδέα δεν ανακτά όλα τα αποτελέσματα σωστά χωρίς την προσθήκη κάποιας επιπλέον παραδοχής κι έτσι, έχουν γίνει πρόσθετες προτάσεις (Vaidman 2014, §6.4).

γ) Οντολογική Παραδοξότητα

Φυσικά, ακόμη και χωρίς τις παραπάνω δυσκολίες, η πλέον ισχυρή ένσταση στην θεωρία των πολλών κόσμων είναι η κατάφωρη ρήξη της με οποιαδήποτε έννοια «οικονομίας» ως προς την οντολογία. Δεδομένων των ασύλληπτα πολλών δυνατών υπερθέσεων που υφίστανται στον κόσμο, το σύνολο των κόσμων θα είναι μεγαλύτερο από όσο μπορεί να υποθέσει οποιαδήποτε φαντασία. Όπως τόνισε ο DeWitt στο απόσπασμα που παραθέσαμε ακόμη και η παραμικρή και πιο απομακρυσμένη κατάλληλη διεργασία (δηλαδή που εμπλέκει

υπερθέσεις) θα αποτελεί έναν γεννήτορα συμπάντων. Η υπόθεση αυτή είναι τόσο αντιδιαλεκτική που κάνει κάποιον να αναρωτιέται πόσο κόστος είμαστε διατεθειμένοι να καταβάλουμε προκειμένου να αποφύγουμε τον *ad hoc* χαρακτήρα της κατάρρευσης. Είναι μάλλον περιττό να θέσουμε ακόμη και τα πολύ εύλογα ερωτήματα του πού μπορεί να βρίσκονται αυτοί οι κόσμοι, για ποιο λόγο δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και κατά πόσο κάτι τέτοιο μπορεί να επικυρωθεί ή όχι εμπειρικά.

Η λύση του προβλήματος της μέτρησης στο πνεύμα της πρότασης του Everett σίγουρα έχει θετικές προοπτικές. Εμείς εξετάσαμε ως «δείγμα» την περίπτωση της ερμηνείας των πολλών κόσμων. Είναι γεγονός πως παρά τις δυσκολίες που αντιμετωπίζει η συγκεκριμένη γραμμή, βελτιωμένες προτάσεις έχουν γίνει από την εποχή του DeWitt τόσο στο πλαίσιο αυτής όσο και με την υιοθέτηση διαφορετικού τύπου οντολογικών πλαισίων – όπως π.χ. αυτό των πολλών νόων. Ωστόσο, αυτό το στοιχείο, της ιδιαίτερης «ευκαμψίας» που έχει η προσέγγιση του Everett ως προς τις συμβατές οντολογικές γραμμές εξηγητικά είναι κάπως απογοητευτικό. Αυτό, διότι, αν μπορούμε να διατηρούμε έναν φορμαλιστικό κορμό κοινό που μπορεί να κατανοηθεί – ερμηνευθεί πολλαπλώς, τότε δεν έχουμε λάβει κάποια οριστική απάντηση σε σχέση με το τι συνέπειες έχει αυτή η θεώρηση της κβαντικής μηχανικής για την εικόνα που έχουμε για τον κόσμο. Φυσικά, δεν ισχυριζόμαστε πως αυτό ήταν η επιδίωξη του Everett (Barrett 2014, §6)– και κατά συνέπεια δεν μπορεί να θεωρηθεί ένσταση εναντίον του. Όμως, δεν παύει να είναι απολύτως θεμιτό να είναι επιδίωξη δική μας.

10. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Αναπτύξαμε σύντομα το μαθηματικό κι εννοιολογικό υπόβαθρο της κλασικής μηχανικής και διαπιστώσαμε πως εντός του η μέτρηση είναι εν πολλοίς μια μη προβληματική διαδικασία. Τα συστήματα στην κλασική μηχανική φέρουν πάντοτε καθορισμένες ιδιότητες, οι οποίες μπορούν να γίνουν γνωστές μέσω της κατάστασής τους. Προετοιμάζοντας κατάλληλα τη μετρητική μας συσκευή, είμαστε σε θέση να εξακριβώσουμε την τιμή του μεγέθους που μας ενδιαφέρει. Λόγω της διαχωρισιμότητας των κλασικών φυσικών συστημάτων, μπορούμε να διαχωρίσουμε χωρίς δυσκολίες την κατάσταση του συστήματος και της συσκευής, ώστε να λάβουμε ένα εντελώς καθορισμένο αποτέλεσμα. Η ιδιότητα που αποδίδουμε στο σύστημα μετά από τη διαδικασία το χαρακτηρίζει και σε οποιοδήποτε άλλο πλαίσιο μέτρησης, το οποίο δεν διαταράσσει την κατάσταση του συστήματος. Έτσι, μπορούμε να μετράμε πολλαπλά μεγέθη για το ίδιο σύστημα χωρίς *a priori* περιορισμούς.

Η εικόνα αυτή ανατρέπεται πλήρως στην περίπτωση της κβαντικής μηχανικής. Ο τρόπος που δομείται η θεωρία οδηγεί πολύ γρήγορα σε μια παράδοξη κατάσταση. Τα κβαντικά συστήματα μπορούν να βρίσκονται σε καταστάσεις υπέρθεσης των ιδιοκαταστάσεων του τελεστή που αντιστοιχεί σε κάποιο μέγεθος. Σε αυτές δεν μπορούμε να αποδώσουμε μια καθορισμένη ιδιότητα στο σύστημα. Όταν, όμως, το σύστημα αλληλεπιδράσει με μια συσκευή μέτρησης, λόγω του γραμμικού χαρακτήρα της εξίσωσης Schrödinger, το ενιαίο σύστημα που προκύπτει βρίσκεται επίσης σε μια κατάσταση υπέρθεσης. Διαπιστώσαμε πως σε αυτήν την κατάσταση δεν μπορούμε να αποδώσουμε μια καθορισμένη τιμή ούτε στο μετρούμενο σύστημα ούτε στην συσκευή. Αυτό το αποτέλεσμα έρχεται σε ρήξη με την εμπειρική μας πραγματικότητα: οι συσκευές μέτρησης βρίσκονται πάντοτε σε καθορισμένες καταστάσεις και μας πληροφορούν αντίστοιχα για τα συστήματα που μετράνε.

Αναλύοντας τη διαδικασία της μέτρησης, οδηγηθήκαμε στο συμπέρασμα πως για την επίλυση της ασυμβατότητας που προέκυψαν κάποια από τις υποθέσεις μας έπρεπε να εγκαταλειφθεί ή τροποποιηθεί:

- α) Η συσκευή μέτρησης αποτελεί ένα κβαντικό σύστημα
- β) Η κβαντική θεωρία περιγράφει πλήρως τα συστήματα
- γ) Η δυναμική εξίσωση Schrödinger περιγράφει την διαδικασία αλληλεπίδρασης
- δ) Ισχύει το αίτημα αντικειμενικοποίησης

Είδαμε πως οι απαντήσεις που έδωσαν οι πρωτοπόροι της θεωρίας δεν μπορούν να θεωρηθούν πλήρως ικανοποιητικές. Η προσθήκη του αξιώματος προβολής από τον von Neumann δεν βελτιώνει ουσιαστικά την κατάσταση, αλλά, αντιθέτως, υπογραμμίζει την οξύτητα του προβλήματος. Μεταγενέστερες επεκτάσεις αυτής της άποψης, που θέτει στο επίκεντρο της μέτρησης τη συνείδηση του παρατηρητή, περιπλέκουν περισσότερο τα πράγματα ενώ συνοδεύονται από δυσάρεστες ιδεαλιστικές συνυποδηλώσεις. Οι απόψεις του Bohr, επίσης, δεν βοηθούν σε μεγάλο βαθμό. Παρότι ο ίδιος είχε εντοπίσει την ανάγκη επίκλησης του κλασικού λεξιλογίου στην περιγραφή της διαδικασίας της μέτρησης, δεν κατάφερε να δώσει κάποια ισχυρά επιχειρήματα υπέρ της οριοθέτησης κλασικού και

κβαντικού κόσμου. Η θέση του μοιάζει συχνά να ρέπει σε μια αντιρεαλιστική και εξηγητικά πεσιμιστική θεώρηση, η οποία βοήθησε εν μέρει την ανάπτυξη της θεωρίας τα πρώτα χρόνια, αλλά πλέον χρήζει περαιτέρω αποσαφήνισης, φιλοσοφικής εκπλέπτυνσης, μεθοδολογικής ανασυγκρότησης κι ενσωμάτωσής της σε μια διευρυμένη δομή της θεωρίας.

Διαπιστώσαμε πως η άρνηση κάθε μιας από τις επόμενες τρεις υποθέσεις αποτελεί κι ένα πέρασμα προς μια ολόκληρη ερμηνευτική προσέγγιση για την κβαντική θεωρία.

Η άρνηση της πληρότητας της κβαντικής μηχανικής προσπαθεί να διατηρήσει ως ένα βαθμό τη μεταφυσική εικόνα της κλασικής μηχανικής. Εφόσον η θεωρία αποτυγχάνει να περιγράψει όλα τα στοιχεία της πραγματικότητας, παραμένει ανοικτό ενδεχόμενο ο κόσμος να έχει μια πλήρως καθορισμένη δομή, την οποία θα μπορούσαμε να ανιχνεύσουμε με μια καλύτερη θεωρία. Φυσικά, αυτή η επιλογή καθιστά άμεση τη λύση του προβλήματος της μέτρησης αλλά κι ευρύτερα της σύνδεσης του μικρόκοσμου με τον μακρόκοσμο. Δεν υπάρχει κάποια θεμελιώδης ρήξη μεταξύ των δύο. Ο ντετερμινισμός που ισχύει στο ένα πεδίο ισχύει και στο άλλο. Είναι η ανεπάρκεια της θεωρίας που κάνει τον μικρόκοσμο να δείχνει απροσδιόριστος και να παρουσιάζει όλα τα παράδοξα γνωρίσματά του. Αυτή η προσέγγιση, όσο εύλογη και να φαίνεται, κληρονομεί αναγκαστικά κάποια χαρακτηριστικά της κβαντικής θεωρίας όπως η πλασιακότητα και η μη τοπικότητα – ίσως σε ισχυρότερο βαθμό. Συνεπώς, δεν είναι σαφές ότι μπορεί να αποτελέσει ευσταθή λύση των προβλημάτων ερμηνεύοντας την πολυσήμαντη έννοια της κβαντικής πιθανότητας ως μίας κατάστασης άγνοιας από μέρους μας.

Η αποδοχή της πληρότητας μπορεί ίσως να συμπληρωθεί με μια απόρριψη της καθολικής ισχύος του δυναμικού νόμου. Ίσως αν παράλληλα με την εξέλιξη των καταστάσεων σύμφωνα με την εξίσωση Schrödinger θέσουμε και κάποιες αυθόρμητες στοχαστικές διαδικασίες που οδηγούν σε εντοπισμό της κυματοσυνάρτησης, μπορούμε να ανακτήσουμε την εικόνα μας για τον μακρόκοσμο. Και πράγματι αυτό είναι δυνατό. Η θεωρία των GRW μάς δίνει έναν τρόπο να συμβιβάσουμε την ιδέα της κατάρρευσης με την εμπειρία μας. Όμως, και αυτή η θεωρία αντιμετωπίζει ζητήματα σε σχέση με την τοπικότητα ενώ δεν είναι σαφές αν καταφέρνει να ξεφύγει από την ύπαρξη απροσδιοριστίας στον μακρόκοσμο. Η βασικότερη, όμως, ένσταση που εγείραμε ήταν πως ουσιαστικά αντικαθιστά έναν προβληματικό μηχανισμό με έναν νέο, ο οποίος ρυθμίζεται κατάλληλα, ώστε να δώσει τα επιθυμητά αποτελέσματα. Δεν δίνεται κάποια φυσική εξήγηση για τις σταθερές που εμπλέκει ούτε για τον ίδιο τον μηχανισμό αυθόρμητης κατάρρευσης.

Τέλος, είδαμε και την πλέον «γενναιόδωρη» ερμηνευτική γραμμή, αυτή της σχετικής κατάστασης, η οποία φιλοδοξεί να δώσει μια λύση στο πρόβλημα της μέτρησης χωρίς οποιαδήποτε τροποποίηση της θεωρίας. Κεντρική ιδέα εδώ είναι πως όλες οι δυνατές καταστάσεις μιας υπέρθεσης υπάρχουν ενεργεία και τα καθορισμένα αποτελέσματα δεν είναι παρά το ιστορικό των παρατηρητών που περιγράφονται από τις σχετικές καταστάσεις κάθε ζεύγους συστήματος και παρατηρητή στην υπέρθεση. Υποστηρίξαμε πως, για να μπορεί να μας παράσχει μια σαφή εξηγητική εικόνα, η ερμηνεία αυτή πρέπει να παρουσιάσει και κάποια οντολογική εικόνα. Συνήθως το οντολογικό πλαίσιο είναι αυτό των πολλών κόσμων, όπου η σχετική κατάσταση του παρατηρητή αντιστοιχεί σε μια ολόκληρη εναλλακτική εκδοχή τού ενεργεία κόσμου. Προβλήματα υπάρχουν και σε αυτήν την περίπτωση με

βασικότερο από όλα την εκπληκτική οντολογική παραδοξότητα, η οποία μάλιστα υπερβαίνει και την παραδοξότητα της ίδιας της παραδεδομένης μορφής της κβαντικής θεωρίας.

Ύστερα από όλες αυτές τις αποτυχημένες ή τουλάχιστον μη ικανοποιητικές απόπειρες απάντησης του προβλήματος μας, μήπως πρέπει να στραφούμε σε μια λιγότερο «φιλόδοξη» θέση για την θεωρία μας; Μήπως πρέπει να αποδεχτούμε πως η κβαντική μηχανική, όπως είχε ισχυριστεί από πολύ νωρίς ο Bohr, αναδεικνύει τα όρια της γνώσης μας για τον κόσμο; Θα μπορούσε αυτή η διαπίστωση να μας ωθήσει να δούμε την κβαντική θεωρία ως αναφερόμενη μονάχα σε συστήματα ως μέλη στατιστικών συνόλων και ποτέ ως μεμονωμένα; Σε αυτή την ερμηνεία το μόνο που μπορεί να μας δώσει η κβαντική θεωρία στην περίπτωση που διεξάγουμε μια μέτρηση σε ένα σύνολο όμοια προετοιμασμένων συστημάτων είναι οι συχνότητες εμφάνισης συστημάτων σε διαφορετικές καταστάσεις. Όμως και σε αυτή την περίπτωση έχουμε μια πολύ μεγάλη δυσκολία να ερμηνεύσουμε το λεγόμενο κβαντικό φαινόμενο του Zήνωνα, σύμφωνα με το οποίο, η διεξαγωγή διαδοχικών μετρήσεων σε ένα μεμονωμένο σύστημα το «καθλώνει» στην ίδια κατάσταση.

Τελικά, η διαδικασία της μέτρησης στην κβαντική μηχανική μάς παγιδεύει σε μια πολύ ευαίσθητη ισορροπία μεταξύ διαφόρων επιθυμητών στοιχείων. Δεν μπορούμε να προχωρήσουμε πολύ προς μια πλευρά χωρίς να απωλέσουμε στοιχεία από την άλλη. Αν κρατήσουμε πολλά στοιχεία από την παραδοσιακή μεταφυσική εικόνα, αναγκάζομαστε να την διαβρώσουμε με πολλά κβαντικά χαρακτηριστικά, τα οποία καθίστανται ακόμη πιο παράδοξα στο υβρίδιο που γεννάται. Αν πάλι δεχτούμε μονάχα τον κβαντικό φορμαλισμό, η ίδια η θεωρία παύει πλέον να αναφέρεται μονάχα στον κόσμο μας. Η δυνατότητα απόδοσης της ίδιας της μέτρησης με τους όρους του κβαντικού φορμαλισμού ενέχει ένα χαρακτήρα αυτοαναφορικότητας. Όμως, ο φορμαλισμός δεν επαρκεί, για να αποδείξει και τα επιθυμητά χαρακτηριστικά αυτής της διαδικασίας. Μήπως αυτό και πάλι μας ωθεί να αναστοχαστούμε πάνω στη θέση του Bohr σχετικά με την ανάγκη διάκρισης των επιπέδων περιγραφής της μετρητικής συσκευής και μετρούμενου συστήματος; Θα πρέπει ίσως να αναπτύξουμε μια ερμηνεία που να διατηρεί την οντολογική ανεξαρτησία του μετρούμενου συστήματος – αντικειμένου, αλλά να λαμβάνει παράλληλα υπόψη και τη συμβολή του μετρητικού πλαισίου στη διαμόρφωσή του ως τέτοιου.

11. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Aicardi F, Borsellino, A., Ghirardi G., C., Grassi, R. (1991), “Dynamical Models for State Reduction: Do they Ensure that Measurements have Outcomes?”, *Foundations of Physics Letters*, Vol. 4, No. 2
2. Albert, D. (1992), *Quantum Mechanics and Experience*, Harvard University Press
3. Barrett, J., "Everett's Relative-State Formulation of Quantum Mechanics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/qm-everett/>
4. Bell, J., S. (1964), “On the Einstein Podolsky Rosen Paradox”, *Physics I*, 195-200
5. Ben-Dov, Y. (1989), “Everett’s Theory and the Many-Worlds Interpretation”, *Am. J. Phys.* 58, 829 (1990); doi: 10.1119/1.16375
6. Bohm, D. (1952), “A Suggested Interpretation of Quantum Mechanics in Terms of Hidden Variables”, *Physical Review* Vol. 85, No. 2
7. Bohr, N. (1927), “The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory”, Bohr, N. (1934) *Atomic Theory and the Description of Nature*, Cambridge University Press 1961
8. Bohr, N. (1935), “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete”, *Physical Review* Vol. 48, pp. 696-702
9. Bowman, G., E. (2008), *Essential Quantum Mechanics*, Oxford University Press
10. Bub, J. (1977), “von Neumann’s Projection Postulate as a Probability Conditionalization Rule in Quantum Mechanics”, *Journal of Philosophical Logic* 6 (1977), 381-390
11. Bub, J. (1997), *Interpreting Quantum Theories*, Cambridge University Press
12. Busch, P., Lahti, P., J., Mittelstaedt, P. (1991), *The Quantum Theory of Measurement*, Springer
13. Cabello, A., Estebaranz, J., M., Alcaine, G., G. (1997), *Bell-Kochen-Specker Theorem: A Proof with 18 vectors*, arXiv:quant-ph/9706009
14. Cohen-Tannoudji, C., Diu, B, Laloë, F. (1977) *Quantum Mechanics*, Vol. 1, μτφρ. S. R. Hemley, D. Ostrowsky, N. Ostrowsky, Wiley-VCH
15. Cushing, J., T. (1998), *Φιλοσοφικές Έννοιες στη Φυσική*, μτφρ. Μ. Ορφανού, Σ. Γιαννέλης, Leader Books
16. D’Espagnat, B. (1976), *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, Perseus Books 1999
17. D’Espagnat, B. (1995), *Veiled Reality*, Addison-Wesley Publishing Company
18. DeWitt, B., S. (1970), “Quantum Mechanics and Reality”, *Physics Today*, Vol. 23, No. 9
19. Esfeld, M., Gisin, N. (2013), “The GRW Flash Ontology: A Relativistic Quantum Ontology of Matter in Space-Time?”, *Philosophy of Science*, 81 (April 2014) pp. 248–264. 0031-8248/2014/8102-0007\$10.00
20. Everett, Hugh III (1957), “Relative State Formulation of Quantum Mechanics”, *Reviews of Modern Physics*, Vol. 29, No. 3, 454-462
21. Dickson, M. (2007), *Non-relativistic Quantum Mechanics*, <http://philsci-archive.pitt.edu/id/eprint/3321>

22. Faye, J., "Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/qm-copenhagen/>
23. Ghirardi, G., C., "Collapse Theories", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/qm-collapse/>
24. Gibbins, P. (1987), *Particles and Paradoxes*, Cambridge University Press
25. Gleason, A., M. (1957), "Measures on the Closed Subspaces of Hilbert Space", *Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. 6, No. 6
26. Goldstein, S., "Bohmian Mechanics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = <https://plato.stanford.edu/archives/sum2017/entries/qm-bohm/>
27. Held, C., "The Kochen-Specker Theorem", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2016/entries/kochen-specker/>
28. Hughes, R., I., G. (1989), *The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics*, Harvard University Press
29. Isham, C., I. (1995), *Lectures on Quantum Theory: Mathematical and Structural Foundations*, Imperial College Press
30. Ιωάννου, Π., Αποστολάτος, Θ. (2007), *Θεωρητική Μηχανική*, Πανεπιστήμιο Αθηνών
31. Jauch, J., M. (1968), *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Compnay
32. Kant, I. (1781/87), *Critique of Pure Reason*, μτφρ. M. Weigelt, Penguin Classics
33. Karakostas, V. (1994), "Limitations on Stochastic Localization Models of State Vector Reduction", στο *International Journal of Theoretical Physics*, Vol 33, No. 8
34. Karakostas, V., Dickson, M. (1995), "Decoherence in Unorthodox Formulations of Quantum Mechanics", *Synthese* 102: 61-97
35. Καρακώστας, Β. (2000), "Επί του Προβλήματος της Κβαντικής Μέτρησης: Πραγματικότητα, Αντικειμενικότητα και Πιθανοκρατία στη Σύγχρονη Φυσική", *Νεύσις* 9, 95-115
36. Καρακώστας, Β. (2005), "Περί της Φύσεως της Κβαντικής Πραγματικότητας: Το Πρότυπο του Ενεργού Επιστημονικού Ρεαλισμού", *Νεύσις* 14, 48-77
37. Karakostas, V. (2009), "Humean Supervenience in the Light of Contemporary Science", *Int Ontology Metaphysics* 10: 1-26, DOI 10.1007/s12133-008-0037-8
38. Karakostas V. (2012), "Realism and Objectivism in Quantum Mechanics", *J. Gen. Philos. Sci.* 43: 45-65
39. Kibble, T., W., B., Berkshire, F., H. (2004), *Κλασική Μηχανική*, μτφρ. Π. Δήτσας, Δ. Σαρδελής, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
40. Lewis, P., J. (2006), "GRW: A Case Study in Quantum Ontology", *Philosophy Compass* 1/2 (2006): 224–244, 10.1111/j.1747-9991.2006.00009.x, Blackwell Publishing
41. Lewis, P., J. (2016), *Quantum Ontology: A Guide to the Metaphysics of Quantum Mechanics*, Oxford University Press
42. Maudlin, T. (2011), *Quantum Non-locality and Relativity*, Wiley-Blackwell

43. Mittelstaedt, P. (1993), "Quantum Measurement I. The Measuring Process and the Interpretation of Quantum Mechanics", *International Journal of Theoretical Physics*, Vol. 32 No. 10, pp. 1763-1775
44. Mittelstaedt, P., (1998), *The Interpretation of Quantum Mechanics and the Measurement Process*, Cambridge University Press
45. Omnès, R. (1994), *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press
46. Omnès, R. (1999), *Understanding Quantum Mechanics*, Princeton University Press
47. Peres, A. (2002), *Quantum Theory: Concepts and Methods*, Kluwer Academic Press
48. Redhead, M., (1987), *Incompleteness, Nonlocality and Realism: A Prolegomenon to the Philosophy of Quantum Mechanics*, Oxford University Press
49. Shankar, R. (1980), *Principles of Quantum Mechanics*, Springer
50. Torretti, R., (1999), *Η Φιλοσοφία της Φυσικής*, μτφρ. Α. Σπανού, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2012
51. Tumulka, R. (2006), "Collapse and Relativity", στο arXiv:quant-ph/0602208
52. Vaidman, L., "Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/fall2016/entries/qm-manyworlds/>
53. Whitaker, M., A., B. (1984), "The Relative States and Many-worlds Interpretations of Quantum Mechanics and the EPR problem", *J. Phys. A: Math. Gen.* 18, 253-264

