

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
Τομέας Πυρηνικής Φυσικής
και Στοιχειωδών Σωματιδίων

Πτυχιακη Εργασια

Το Καθιερωμένο Πρότυπο και εισαγωγή στην Υπερσυμμετρία

Αλεξόπουλος Ευάγγελος

Επιβλέπων:
Σπανός Βασίλειος
Αν.Καθηγητής

Αθήνα 2017

Αλεξόπουλος Ευάγγελος AM: 201000240

NATIONAL AND KAPODISTRIAN
UNIVERSITY OF ATHENS
DEPARTMENT OF PHYSICS
Section of Nuclear and Particle Physics

The Standard Model and an introduction to Supersymmetry

BSc Thesis

EVANGELOS ALEXOPOULOS

SUPERVISED BY

VASSILIS SPANOS
Associate Professor

Περίληψη

Η πτυχιακή αυτή εργασία πραγματεύεται το Καθιερωμένο Πρότυπο και την Υπερσυμμετρία. Αρχικά αναφερόμαστε τις αβελιανές και μη αβελιανές θεωρίες βαθμίδας όπου ξεκινώντας από μια ελεύθερη Lagrangian ενός πεδίου και απαιτώντας συμμετρία κάτω από τοπικούς μετασχηματισμούς μιας αβελιανής και μη αβελιανής ομάδας καταλήγουμε σε μια θεωρία αλληλεπίδρασης. Επίσης εισάγουμε την έννοια του αυθόρμητου σπάσιμου συμμετρίας και του μηχανισμού Higgs τοσό στην αβελιανή όσο και στην μη αβελιανή περίπτωση και τις συνέπειες του στο σωματιδιακό φάσμα. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας αυτά βρίσκουμε την ομάδα συμμετρίας, κατασκευάζουμε την Lagrangian για το Καθιερωμένο Πρότυπο και βρίσκουμε τις αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων καθώς και τις μάζες τους.
Το δεύτερο μέρος αφορά την Υπερσυμμετρία, όπου βρίσκουμε την υπερσυμμετρική άλγεβρα ως μια επεκτάση της ομάδας Poincaré και τις αναπαραστάσεις της. Έπειτα εισάγουμε την έννοια του Υπερπεδίου το οποίο χρησιμοποιούμε με συστηματικό τρόπο για να κατασκευάζουμε υπερσυμμετρικά μοντέλα. Τέλος, αναλύουμε ένα απλό μοντέλο για το αυθόρμητο σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας.

Abstract

The purpose of this thesis is to demonstrate the Standard Model and Supersymmetry. We begin with the abelian and non-abelian gauge theories where if one demands symmetry of a free Lagrangian under local transformations one ends up with an interacting theory. We, then, introduce the concept of spontaneous symmetry breaking and Higgs mechanism in both abelian and non-abelian case and its effects on the particle spectrum. Using these, we construct the symmetry group and the Lagrangian for the Standard Model and we explore its particles' interactions. The second part is about Supersymmetry, where we find the supersymmetric algebra as an extension of the Poincaré group and its representations. In addition we introduce the concept of Superfields which we use to construct sypersymmetric models in a systematic way. Finally we illustrate a simple model of spontaneous Supersymmetry breaking.

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στον τομέα Πυρηνικής Φυσικής και Στοιχειωδών Σωματιδίων του Φυσικού τμήματος του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Κύριος στόχος της εργασίας είναι να εκθέσει το γενικό πλαίσιο καθώς και τις βασικές πτυχές του Καθιερωμένου Προτύπου των Ηλεκτρασθενών Αλληλεπιδράσεων χωρίς να μπει σε μια λεπτομερέστατη ανάλυση της θεωρίας. Έτσι η έκθεση αυτή δεν είναι σε καμία περίπτωση πλήρης.
Ένα επίσης βασικό μέλημα του γράφοντα, είναι η ανάδειξη των επιτυχιών του μοντέλου αυτού αλλά και των αδυναμιών του ώστε να καταστεί όσο το δυνατόν σαφές στον αναγνώστη η ανάγκη επέκτασής του. Από τους πλέον βασικούς υποψηφίους για αυτήν την επέκταση, είναι μοντέλα τα οποία περιέχουν την Υπερσυμμετρία, για μια εισαγωγή της οποίας είναι αφιερωμένο το δεύτερο μέρος της εργασίας.
Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αν. Καθηγητή κ. Β.Σπανό για την υπόδειξη αυτού του τόσο ενδιαφέροντος θέματος αλλά κυρίως για την βοήθεια και την υποστήριξη που μου παρείχε κατά την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας.

Αλεξόπουλος Ευάγγελος

Αθήνα, Ιούλιος 2017

“Experiment is the only means of knowledge at our disposal.
Everything else is poetry, imagination.”

–M. Planck

Περιεχόμενα

I Θεωρίες Βαθμίδας Και Το Καθιερωμένο Πρότυπο **1**

1 Αβελιανές Θεωρίες Βαθμίδας **5**
1.1 Καθολική συμμετρία 5
1.2 Τοπική συμμετρία και QED 8

2 Μη Αβελιανές Θεωρίες βαθμίδας **11**
2.1 Η ομάδα $SU(N)$ 11
2.2 Καθολική $SU(2)$ συμμετρία 12
2.3 Θεωρία Yang-Mills 14

3 Αυθόρμητο Σπάσιμο Συμμετρίας **19**
3.1 Εισαγωγή 19
3.2 Σπάσιμο συμμετρίας στην καθολική $U(1)$ 21
3.3 Σπάσιμο συμμετρίας στην τοπική $U(1)$ 24
3.4 Σπάσιμο συμμετρίας στην τοπική $SU(2)$ 26

4 Το Καθιερωμένο Πρότυπο **29**
4.1 Εισαγωγή 29
4.2 Κατασκευή της ομάδας βαθμίδας 32
4.3 Το τμήμα του Higgs 35
4.4 Το τμήμα των λεπτονίων 40
4.5 Το τμήμα των Quarks 45
4.6 Το τμήμα των μποζονίων βαθμίδας 51
4.7 Πειραματικές τιμές και προβλέψεις του SM 54
4.8 Συμπεράσματα 56

II Υπερσυμμετρία **58**

5 Ομάδα Poincaré **62**

5.1 Άλγεβρα της ομάδας 62
5.2 Αναπαραστάσεις της ομάδας 64

6 Υπερσυμμετρική Άλγεβρα και Αναπαραστάσεις 67
6.1 Σπίνορες 67
6.2 Υπερσυμμετρική άλγεβρα 70
6.3 Υπεσυμμετρικές πολλαπλέτες 71
6.4 Ένα απλό υπερσυμμετρικό μοντέλο 75

7 Υπερπεδία 77
7.1 Εισαγωγή 77
7.2 Αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας στα υπερπεδία . 77

8 Χειραλικά Υπερπεδία 81
8.1 Εισαγωγή 81
8.2 Ανάπτυξη του χειραλικού υπερπεδίου στα συνιστώντα πεδία . . . 81
8.3 Γινόμενα χειραλικών υπερπεδίων 84
8.4 Υπερσυμμετρική Lagrangian 86

9 Αυθόρμητο Σπάσιμο Υπερσυμμετρίας 88
9.1 Εισαγωγή 88
9.2 Το μοντελο O'Raifeartaigh 90
9.3 Υπερίχνος 92

Α΄ Λογισμός μεταβλητών Grassmann 95

Β΄ Χρήσιμες ταυτότητες 96

Μέρος Ι

Θεωρίες Βαθμίδας
Και Το Καθιερωμένο Πρότυπο

Εισαγωγή

Ένα από τα μεγαλύτερα επιτεύγματα της Φυσικής είναι η συνειδητοποίηση ότι η συμμετρία είναι στενά συνδεδεμένη με την δυναμική μια θεωρίας. Πράγματι, αν απαιτήσουμε συμμετρία κάτω από μετασχηματισμούς οι οποίοι είναι συναρτήσεις των χωροχρονικών συντεταγμένων, καταλήγουμε με αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων της θεωρίας με πεδία τα οποία εισάγονται προκειμένου να επανακτηθεί αυτή η τοπική συμμετρία.Θεωρίες που βασίζονται σε τέτοιες συμμετρίες καλούνται *Θεωρίες Βαθμίδας (Gauge Theories)*.
Στα παρακάτω κεφάλαια θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το πανίσχυρο εργαλείο προκειμένου να διερευνήσουμε τις ηλεκτρομαγνητικές και ασθενείς αλληλεπιδράσεις των λεπτονίων και των Quarks.

Κεφάλαιο 1

Αβελιανές Θεωρίες Βαθμίδας

1.1 Καθολική συμμετρία

Έστω η Lagrangian ενός ελεύθερου φερμιονικού πεδίου μάζας m:

$$\mathscr{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/ - m)\psi(x) \tag{1.1}$$

όπου $\partial\!\!\!/ = \gamma^\mu \partial_\mu$, γ^μ οι πίνακες-γ του Dirac και $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.
Οι εξισώσεις που ικανοποιούν αυτα τα πεδία προκύπτουν από τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \Big(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_\alpha)} \Big) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \Phi_\alpha} = 0 \tag{1.2}$$

και είναι:

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0 \tag{1.3}$$

$$i\gamma^\mu \bar{\psi} \partial_\mu + m\bar{\psi} = 0 \tag{1.4}$$

δηλαδή η εξίσωση Dirac και η συζυγή της αντίστοιχα.
Παρατηρούμε ότι η Lagrangian της [1.1] είναι αναλλοίωτη κάτω από τον μετασχηματισμό

$$\psi(x) \to \psi(x)' = e^{-iQ\alpha}\psi(x) \tag{1.5}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)' = e^{iQ\alpha}\bar{\psi}(x) \tag{1.6}$$

με $\alpha \in \mathbb{R}$, η οποία παραμετροποιεί τον μετασχηματισμό.
Ο τελεστής Q ονομάζεται *τελεστής φορτίου (charge operator)* και έχει ιδιοτιμή το φορτίο του πεδίου ψ. Αν είχαμε περισσότερα πεδία τότε ο Q θα ήταν ένας

διαγώνιος πίνακας της μορφής:

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

με q_i τα φορτία των πεδίων (σε μονάδες e). Οι μετασχηματισμοί της [1.5] είναι μοναδιακοί (unitary)

$$U(\alpha)U(\alpha)^\dagger = e^{i\alpha Q}e^{-i\alpha Q} = U(\alpha)^\dagger U(\alpha) = 1 \tag{1.8}$$

Για δυο διαδοχικούς μετασχηματισμούς ισχύει

$$U(\alpha)U(\beta) = e^{-i\alpha Q}e^{-i\beta Q} = e^{-i(\alpha+\beta)Q} = U(\beta)U(\alpha) \tag{1.9}$$

άρα οι U μετατίθενται. Αυτοί οι μετασχηματισμοί συγκροτούν την αβελιανή ομάδα $U(1)$ και ο τελεστής Q ονομάζεται *γεννήτορας (generator)* της ομάδας καθώς είναι αυτός ο οποίος παράγει τους μετασχηματισμούς. Έτσι η $U(1)$ αποτελεί καθολική συμμετρία (αφού η παράμετρος α είναι σταθερή) της Lagrangian [1.1].
Από το θεώρημα της Noether γνωρίζουμε ότι για κάθε συνεχή συμμετρία υπάρχει και ένα διατηρούμενο ρεύμα. Για να βρούμε το ρεύμα που αντιστοιχεί στην $U(1)$ έχουμε:
για έναν απειροστό μετασχηματισμό είναι

$$\psi \to \psi' = e^{-iQ\alpha}\psi \simeq 1 - iQ\alpha\psi \tag{1.10}$$

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = e^{iQ\alpha}\bar{\psi} \simeq 1 + iQ\alpha\bar{\psi} \tag{1.11}$$

οπότε οι μεταβολές των πεδίων είναι

$$\delta\psi = -iQ\alpha \tag{1.12}$$

$$\delta\bar{\psi} = iQ\alpha \tag{1.13}$$

επειδή η Lagrangian είναι αναλλοίωτη έχουμε

$$\delta\mathscr{L} = 0 \tag{1.14}$$

Κατά συνέπεια παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}=0 \Rightarrow & \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}\delta\psi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\psi}}\delta\bar{\psi}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\delta(\partial_\mu\bar{\psi})=0\\
\Rightarrow & \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}(-iQ\alpha\psi)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(-iQ\alpha\partial_\mu\psi)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\psi}}(iQ\alpha\bar{\psi})+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}(iQ\alpha\partial_\mu\bar{\psi})=0\\
\Rightarrow & -iQ\alpha\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}\psi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\mu\psi\Big)+iQ\alpha\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\bar{\psi}}\bar{\psi}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\partial_\mu\bar{\psi}\Big)=0\\
\Rightarrow & -iQ\alpha\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}\psi+\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi\Big)-\partial_\mu(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Big)\psi\Big]+\\
& +iQ\alpha\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\psi}}\bar{\psi}+\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\bar{\psi}\Big)-\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\Big)\bar{\psi}\Big]=0\\
\Rightarrow & -iQ\alpha\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi}-\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Big)\Big]\psi-iQ\alpha\partial_\mu\Big(\psi\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Big)+\\
& +iQ\alpha\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\bar{\psi}}-\partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\Big)\Big]\bar{\psi}+iQ\alpha\partial_\mu\Big(\bar{\psi}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\Big)=0 \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

Λόγω των εξισώσεων Euler-Lagrange [1.2] καταλήγουμε στην σχέση:

$$\partial_\mu J^\mu=0 \qquad (1.16)$$

$$\text{όπου } J^\mu=-iQ\Big[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\psi-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\bar{\psi}\Big]. \qquad (1.17)$$

Αντικαθιστώντας την Lagrangian της σχέσης [1.1] βρίσκουμε:

$$J^\mu=\bar{\psi}\gamma^\mu Q\psi \qquad (1.18)$$

Μπορούμε να γράψουμε τον τελεστή Q ως

$$Q=\int d^3x J^0(x) \qquad (1.19)$$

και να δείξουμε ότι διατηρείται,
είναι:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q=\int d^3x\frac{\partial}{\partial t}J^0=-\int d^3x\nabla\mathbf{J}=0 \qquad (1.20)$$

εφ'όσον τα πεδία $\psi,\bar{\psi}$ 'σβήνουν' γρήγορα στο άπειρο.
Βλέπουμε, δηλαδή, ότι η καθολική $U(1)_{em}$[1] συμμετρία οδηγεί στην διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου .

[1] ο δείκτης em είναι για να ξεχωρίζει την $U(1)$ την σχετιζόμενη με το φορτίο από κάποια άλλη που μπορεί να περιέχει η θεωρία

1.2 Τοπική συμμετρία και QED

Την περίπτωση της καθολικής συμμετρίας, η παράμετρος α μπορούσε να επιλεγεί αυθαίρετα, όμως απο την στιγμή που θα επιλεχθεί θα πρέπει να είναι η ίδια σε όλα τα χωροχρονικά σημεία. Είναι πιο φυσικό να θέλουμε να επιλέξουμε την παράμετρο με αυθαίρετρο τρόπο σε κάθε χωροχρονικό σημείο.
Θέλουμε, δηλαδή, να πραγματοποιήσουμε τον μετασχηματισμό:

$$\psi \to \psi' = e^{-iQ\alpha(x)}\psi \tag{1.21}$$

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = e^{iQ\alpha(x)}\bar{\psi} \tag{1.22}$$

Οι μετασχηματισμοί αυτής της μορφής είναι τοπικοί μετασχηματισμοί ή *μετασχηματισμοί βαθμίδας (gauge transformations)* καθώς πλέον η παράμετρος α δεν είναι σταθερή αλλά συνάρτηση των χωροχρονικών συντεταγμένων.
Με την αλλαγή αυτή παρατηρούμε:

$$\partial_\mu\psi' = \partial_\mu e^{-iQ\alpha(x)}\psi = e^{-iQ\alpha(x)}\partial_\mu\psi - iQe^{-iQ\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x) \tag{1.23}$$

οπότε η παράγωγος δεν μετασχηματίζεται σαν το πεδίο κατά συνέπεια η Lagrangian [1.1] δεν παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς [1.21].Εφ'όσον το πρόβλημα προέρχεται από την παράγωγο πρέπει να εισάγουμε μια καινούρια παράγωγο (D_μ), η οποία είναι πάλι ένας διαφορικός τελεστής πρώτης τάξης, αλλά με την ιδιότητα να μετασχηματίζεται σαν το πεδίο:

$$[D_\mu\psi] \to [D_\mu\psi]' = e^{-iQ\alpha(x)}D_\mu\psi \tag{1.24}$$

Η παράγωγος αυτή ονομάζεται *συναλλοίωτη παράγωγος (covariant derivative)* και για να την κατασκευάσουμε πρέπει να επεκτείνουμε το περιεχόμενο των πεδίων της θεωρίας, εισάγοντας ένα διανυσματικό πεδίο A_μ το οποίο ονομάζεται *πεδίο βαθμίδας (gauge field)*, με τον ακόλουθο τρόπο:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu \tag{1.25}$$

Ο νόμος μετασχηματισμού του πεδίου βαθμίδας υπαγορεύεται από την σχέση [1.24]:

$$\begin{aligned}
&[D_\mu\psi]' = e^{-iQ\alpha(x)}D_\mu\psi \\
\Rightarrow&[(\partial_\mu + ieQA_\mu)\psi]' = e^{-iQ\alpha(x)}(\partial_\mu + ieQA_\mu)\psi \\
\Rightarrow&\partial_\mu\psi' + ieQA'_\mu\psi' = e^{-iQ\alpha(x)}\partial_\mu\psi + e^{-iQ\alpha(x)}ieQA_\mu\psi \\
\Rightarrow&\partial_\mu e^{-iQ\alpha(x)}\psi + ieQA'_\mu e^{-iQ\alpha(x)}\psi = e^{-iQ\alpha(x)}\partial_\mu\psi + e^{-iQ\alpha(x)}ieQA_\mu\psi \\
\Rightarrow&e^{-iQ\alpha(x)}\partial_\mu\psi - iQe^{-iQ\alpha(x)}\psi\partial_\mu\alpha(x) + ieQA'_\mu e^{-iQ\alpha(x)}\psi = \\
&\qquad = e^{-iQ\alpha(x)}\partial_\mu + e^{-iQ\alpha(x)}ieQA_\mu\psi \\
\Rightarrow&-iQ\psi\partial_\mu\alpha(x) + ieQA'_\mu\psi = ieQA_\mu\psi \\
\Rightarrow&A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x)
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Έτσι η αναλλοιώτητα κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας επανακτάται όταν στην Lagrangian [1.1] κάνουμε την αντικατάσταση

$$\partial_\mu \to D_\mu \tag{1.27}$$

οπότε

$$\mathscr{L}_0 \to \mathscr{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = \mathscr{L}_0 - e\bar{\psi}\gamma^\mu Q\psi A_\mu \tag{1.28}$$

Αν θέλουμε να ερμηνεύσουμε το A_μ με πεδίο που αναπαριστά το φωτόνιο (ηλεκτρομαγνητικό πεδίο) πρέπει στην σχέση [1.28] να προσθέσουμε όρους που αφορούν την κινητική του ενέργεια. Ο όρος αυτός θα πρέπει να είναι αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς βαθμίδας.
Η σχέση [1.24] υποδεικνύει ότι η συναλλοίωτη παράγωγος μετασχηματίζεται ως

$$D_\mu \to D'_\mu = e^{iQ\alpha(x)}D_\mu e^{-iQ\alpha(x)} \tag{1.29}$$

για τον μεταθέτη των συναλλοίωτων παραγώγων έχουμε

$$\begin{aligned}
[D_\mu, D_\nu] &= [\partial_\mu + ieQA_\mu, \partial_\nu + ieQA_\nu] \\
&= \cancelto{0}{[\partial_\mu, \partial_\nu]} + ieQ[\partial_\mu, A_\nu] + ieQ[A_\mu, \partial_\nu] + \cancelto{0}{ieQ[A_\mu, A_\nu]} \\
&= ieQF_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{1.30}$$

με

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.31}$$

ο οποίος είναι ο *τανυστής του πεδίου (field strength tensor)* και μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο:

$$F_{\mu\nu} \to F'_{\mu\nu} = e^{iQ\alpha(x)}F_{\mu\nu}e^{-iQ\alpha(x)} = F_{\mu\nu} \tag{1.32}$$

Έτσι καταλήγουμε στην τελική Lagrangian

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eJ^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{1.33}$$

όπου

$$J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu Q\psi \tag{1.34}$$

Η Lagrangian της [1.33] δεν είναι άλλη από αυτήν της Κβαντικής Ηλεκτροδυναμικής. Ένας όρος μάζας για το πεδίο βαθμίδας θα είχε την μορφή:

$$mA_\mu A^\mu \tag{1.35}$$

όμως, αυτός ο όρος δεν είναι αναλλοίωτος στους μετασχηματισμούς [1.26] κατά συνέπεια η αναλλοιώτητα βαθμίδας απαιτεί το φωτόνιο να είναι άμαζο. Άρα βλέπομε οτι η απαίτηση για αναλλοιώτητα σε μετασχηματισμούς βαθμίδας της $U(1)_{em}$ πάραξε την σύζευξη του φερμιονίου και του φωτονίου το οποίο ονομάζεται *μποζόνιο βαθμίδας (gauge boson)* μέσω του φορτίου e.
Έτσι η Κβαντική Ηλεκτροδυναμική είναι μια αβελιανη θεωρία βαθμίδας με ομάδα συμμετρίας την $U(1)_{em}$.

Κεφάλαιο 2

Μη Αβελιανές Θεωρίες βαθμίδας

2.1 Η ομάδα $SU(N)$

Η ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου μπορεί να γενικευτεί και στις μη αβελιανές ομάδες.
Θεωρούμε την Lagrangian N φερμιονικών πεδίων εκφυλισμένα στην μάζα:

$$\mathscr{L}_0 = \sum_{\alpha=1}^{N} \bar{\psi}_\alpha (i\partial\!\!\!/ - m)\psi_\alpha \tag{2.1}$$

Η Lagrangian αυτή γράφεται σε μια πιο συνεπτυγμένη μορφή

$$\mathscr{L}_0 = \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi \tag{2.2}$$

όπου

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \cdots \\ \psi_n \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\Psi} = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_2 & \cdots & \bar{\psi}_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

και είναι αναλλοίωτη κάτω από καθολικούς μετασχηματισμούς της μορφής

$$\Psi \to \Psi' = U\Psi \tag{2.4}$$

όπου U ένας μοναδιακός $N \times N$ πίνακας με $\det U = 1$. Τέτοιοι πίνακες συγκροτούν την ομάδα Lie $SU(N)$ και παραμετροποιούνται από κάποιες σταθαρές α_α , $\alpha = 1, 2, \cdots N$ με $U(\alpha)|_{\alpha=0} = 1$
Ένας απειροστός μετασχηματισμός γάφεται

$$U(d\alpha) = 1 + id\alpha_\alpha T^\alpha \tag{2.5}$$

όπου T^α οι γεννήτορες της $SU(N)$ οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις

$$[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c \tag{2.6}$$

για τις σταθερές f_{abc} ισχύει

$$f_{abc} = -f_{bac} \tag{2.7}$$

ονομάζονται *σταθερές δομής (structure constants)* και επί της ουσίας συνοψίζουν τον νόμο πολλαπλασιασμού των στοιχείων της ομάδας. Οι σχέσεις μετάθεσης [2.6] ονομάζονται άλγεβρα Lie της ομάδας.
Ένας πεπερασμένος μετασχηματισμός είναι

$$U(\alpha) = \lim_{n\to\infty} (1 + i\alpha_\alpha T^\alpha/n)^n = e^{i\alpha_\alpha T^\alpha} \tag{2.8}$$

και για δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς ισχύει

$$e^{i\alpha_\alpha T^\alpha} e^{i\beta_\alpha T^\alpha} \neq e^{i\beta_\alpha T^\alpha} e^{i\alpha_\alpha T^\alpha} \tag{2.9}$$

και έτσι η $SU(N)$ είναι μια μη αβελιανή ομάδα.
Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι ο αριθμός των γεννητόρων της $SU(N)$ είναι $N^2 - 1$.

2.2 Καθολική $SU(2)$ συμμετρία

Για την περίπτωση της $SU(2)$ οι γεννήτορες είναι

$$T^\alpha = \frac{\tau^\alpha}{2} \qquad \alpha = 1, 2, 3 \tag{2.10}$$

όπου τ^α:

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

οι πίνακες Pauli.
Η άλγεβρα της ομάδας είναι

$$[T^i, T^j] = i\epsilon_{ijk} T^k \tag{2.12}$$

και η Lagrangian

$$\mathscr{L}_0 = \bar{\Psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\Psi \tag{2.13}$$

μένει αναλλοίωτη στους καθολικούς μετασχηματισμούς

$$\Psi \to \Psi' = e^{i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{T}}\Psi \tag{2.14}$$

$$\bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = e^{-i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{T}}\bar{\Psi} \tag{2.15}$$

με

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

και

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \tag{2.17}$$

οι παράμετροι του μετασχηματισμού.
Ένας απειροστός μετασχηματισμός είναι

$$\Psi' = (1 + i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{T})\Psi \Rightarrow \delta\Psi = i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{T}\Psi \tag{2.18}$$

και

$$\bar{\Psi}' = (1 - i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{T})\bar{\Psi} \Rightarrow \delta\bar{\Psi} = -i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{T}\bar{\Psi} \tag{2.19}$$

Το διατηρούμενο ρεύμα που προκύπτει από την συμμετρία είναι

$$J^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\Psi)}\delta\Psi + \cancelto{0}{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\Psi})}\delta\bar{\Psi}} = \boldsymbol{\alpha}\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathbf{T}\Psi \tag{2.20}$$

επειδή οι παράμετροι $\boldsymbol{\alpha}$ είναι αυθαίρετες μπορούμε να εξάγουμε τρία ρεύματα που αντιστοιχούν σε κάθε έναν γεννήτορα:

$$J^\alpha_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu T^\alpha\Psi \tag{2.21}$$

Τα φορτία που προκύπτουν είναι

$$Q^\alpha = \int d^3x J^\alpha_0 \tag{2.22}$$

για αυτά τα φορτία είναι

$$\begin{aligned}[Q^\alpha, Q^\beta] = \int d^3x d^3y [\bar{\Psi}(x)\gamma_0 T^\alpha\Psi(x), \bar{\Psi}(y)\gamma_0 T^\beta\Psi(y)] = \int d^3x\bar{\Psi}(x)\gamma_0[T^\alpha, T^\beta]\Psi(x) \\ = i\epsilon_{\alpha\beta c}Q^c\end{aligned} \tag{2.23}$$

Παρατηρούμε ότι τα φορτία ικανοποιούν την άλγεβρα της ομάδας και άρα είναι αυτά τα οποία παράγουν απειροστούς μετασχηματισμούς των πεδίων.

2.3 Θεωρία Yang-Mills

Το επόμενο βήμα είναι να 'αναβαθμίσουμε' τους μετασχηματισμούς [2.14] σε τοπικούς:

$$\Psi \to \Psi' = e^{i\boldsymbol{\alpha}(x)\mathbf{T}}\Psi \tag{2.24}$$

$$\bar{\Psi} \to \bar{\Psi}' = e^{-i\boldsymbol{\alpha}(x)\mathbf{T}}\bar{\Psi} \tag{2.25}$$

Προκειμένου η Lagrangian [2.13] να παραμείνει αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς αυτούς πρέπει να εισάγουμε μια συναλλοίωτη παράγωγο η οποία να μετασχηματίζεται σαν το πεδίο.
Η κατάλληλη επιλογή είναι

$$D^\mu = \partial^\mu + ig\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}^\mu(x) \tag{2.26}$$

όπου το $\mathbf{W}^\mu(x)$ είναι τρία ανεξάρτητα πεδία βαθμίδας:

$$\mathbf{W}^\mu = (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu) \tag{2.27}$$

είναι γενίκευση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $A^\mu(x)$, και ονομάζονται πεδία Yang-Mills και το g θα παίξει τον ρόλο της σταθεράς σύζευξης.Παρατηρούμε ότι ο αριθμός των πεδίων βαθμίδας ισούται με τον αριθμό των γεννητόρων της ομάδας. Για να βρούμε τον μετασχηματισμό των πεδίων βαθμίδας χρησιμοποιούμε τον νόμο μετασχηματισμού της συναλλοίωτης παραγώγου:

$$[D^\mu\Psi]' = e^{i\boldsymbol{\alpha}(x)\mathbf{T}}[D^\mu\Psi] \tag{2.28}$$

θεωρώντας έναν απειροστό μετασχηματισμό με τοπικές παραμέτρους $\boldsymbol{\eta}(x)$ έχουμε: το αριστερό μέλος της [2.28] γίνεται

$$[D^\mu\Psi]' = \big(\partial^\mu + ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^{\mu\prime}\big)\big[1 + ig\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)\big]\Psi \tag{2.29}$$

ενώ το δεξί

$$\big[1 + ig\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)\big]\big(\partial^\mu + ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\big)\Psi \tag{2.30}$$

Υποθέτουμε ότι το $\mathbf{W}^\mu$, μετασχηματίζεται ως:

$$\mathbf{W}^\mu \to \mathbf{W}^{\mu\prime} = \mathbf{W}^\mu + \delta\mathbf{W}^\mu \tag{2.31}$$

οπότε είναι

$$\begin{aligned}
&\big(\partial^\mu + ig\boldsymbol{T}\cdot(\mathbf{W}^\mu + \delta\mathbf{W}^\mu)\big)\big[1 + ig\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)\big]\Psi = \big[1 + ig\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)\big]\big(\partial^\mu + ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\big)\Psi \\
\Rightarrow&\Big(\partial^\mu + ig\boldsymbol{T}\cdot(\mathbf{W}^\mu + \delta\mathbf{W}^\mu)\Big)\Big[1 + ig\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)\Big]\Psi = \big[1 + ig\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)\big]\big(\partial^\mu + ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\big)\Psi \\
\Rightarrow&ig\boldsymbol{T}\cdot\partial^\mu(\boldsymbol{\eta}(x))\psi + +ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\Psi + ig\boldsymbol{T}\cdot\delta\mathbf{W}^\mu\Psi + (ig)^2\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)\Psi \\
&\quad = ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\Psi + +(ig)^2\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)\cdot\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}^\mu\Psi \\
\Rightarrow&\frac{ig\boldsymbol{\tau}\cdot\delta\mathbf{W}^\mu}{2} = \frac{-ig\boldsymbol{\tau}\cdot\partial^\mu\boldsymbol{\eta}(x)}{2} + (ig)^2\Big[\Big(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)}{2}\Big)\Big(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}^\mu}{2}\Big) - \Big(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{W}^\mu}{2}\Big)\Big(\frac{\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)}{2}\Big)\Big]
\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα για τους πίνακες Pauli:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{2.32}$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}\delta\mathbf{W}^{\mu}&=\boldsymbol{\tau}\cdot\partial^{\mu}\boldsymbol{\eta}(x)+(ig)^{2}\Big[\cancel{\boldsymbol{\eta}(x)\mathbf{W}^{\mu}}+\frac{i\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{W}^{\mu})}{2}-\cancel{\mathbf{W}^{\mu}\cdot\boldsymbol{\eta}(x)}-\frac{i\boldsymbol{\tau}(\mathbf{W}^{\mu}\times\boldsymbol{\eta}(x)}{2}\Big]\\&=\boldsymbol{\tau}\cdot\partial^{\mu}\boldsymbol{\eta}(x)-g\Big[\frac{i\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\eta}\times\mathbf{W}^{\mu})}{2}+\frac{i\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\eta}(x)\times\mathbf{W}^{\mu})}{2}\Big]\\&=\boldsymbol{\tau}\cdot\partial^{\mu}\boldsymbol{\eta}(x)-g\boldsymbol{\tau}\cdot(\boldsymbol{\eta}(x)\times\mathbf{W}^{\mu})\end{aligned} \tag{2.33}$$

οπότε καταλήγουμε:

$$\delta\mathbf{W}^{\mu}=-\partial^{\mu}\boldsymbol{\eta}(x)-g[\boldsymbol{\eta}(x)\times\mathbf{W}^{\mu}] \tag{2.34}$$

άρα τα πεδία βαθμίδας μετασχηματίζονται :

$$\mathbf{W}^{\mu}\to\mathbf{W}^{\mu\prime}=\mathbf{W}^{\mu}-\partial^{\mu}\boldsymbol{\eta}(x)-g[\boldsymbol{\eta}(x)\times\mathbf{W}^{\mu}] \tag{2.35}$$

Ο πρώτος όρος της παραπάω σχέσης είναι γενίκευση της σχέσης [1.26], του αντίστοιχου νόμου μετασχηματισμού του A^{μ} για τα ${W_i}^{\mu}$. Ο δεύτερος, όμως όρος, είναι αυτός που παρουσιάζει ενδιαφέρον.
Για να τον καταλάβουμε, πρέπει πρώτα να δούμε πως μετασχηματίζεται μια τριπλέτα κάτω από την $SU(2)$: έστω η τριπλέτα:

$$\Psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\\psi_2\\\psi_3\end{pmatrix} \tag{2.36}$$

τότε αυτή μετασχηματίζεται ως:

$$\Psi'=e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{T}}\Psi \tag{2.37}$$

όπου οι πίνακες $\mathbf{T}$ είναι 3×3 και ορίζονται:

$$(T_i)_{jk}=-i\epsilon_{ijk} \tag{2.38}$$

τότε κάτω από έναν απειροστό μετασχηματισμό $\boldsymbol{\eta}(x)$ η τριπλέτα γίνεται:

$$\Psi'=(1+ig\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\eta})\Psi \tag{2.39}$$

ή σε μορφή συνιστωσών:

$$\Psi'_i=(1+igT_k\eta_k)_{ij}\Psi_j \tag{2.40}$$

τότε η μεταβολή είναι:

$$\delta\Psi_i = \Psi_i' - \Psi_i = ig\eta_k(-\epsilon_{kij})\Psi_j \tag{2.41}$$
$$\Rightarrow \delta\Psi_i = -ig\epsilon_{ijk}\eta_k\Psi_j \tag{2.42}$$

δηλαδή:

$$\delta\Psi = -g(\boldsymbol{\eta}\times\boldsymbol{\Psi}) \tag{2.43}$$

Άρα, λοιπόν, η [2.35] μας λέει ότι τα πεδία βαθμίδας $\mathbf{W}(x)$ μετασχηματίζονται ως μια τριπλέτα κάτω από την $SU(2)$. Το γεγονός ότι μετασχηματίζονται σαν μια αναπαράσταση της ομάδας σημαίνει ότι διαθέτουν '$SU(2)$ φορτίο' και κατά συνέπεια θα υπάρχουν αλληλεπιδράσεις μεταξύ των.
Για έναν πεπερασμένο μετασχηματισμό είναι

$$\begin{aligned}
&[D^\mu\Psi]' = U[D^\mu\Psi]\\
\Rightarrow&(\partial^\mu + ig\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}^\mu)'U\Psi = (\partial^\mu U)\Psi + U\partial^\mu\Psi + ig\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\\
\Rightarrow&(\partial^\mu U)\Psi + ig\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}^{\mu\prime}U\Psi = igU\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\Psi
\end{aligned}$$

και επειδή η ισότητα αυτή πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε Ψ είναι

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}^{\mu\prime} = \frac{i}{g}(\partial^\mu U)U^{-1} + U\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}^\mu U^{-1} \quad , \quad U = e^{i\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\alpha}(x)} \tag{2.44}$$

Για να βρούμε τον τανυστή πεδίου υπολογίζουμε τον μεταθέτη

$$[D^\mu, D^\nu]\Psi = D^\mu D^\nu\Psi - D^\nu D^\mu\Psi \tag{2.45}$$

ο πρώτος όρος είναι

$$\begin{aligned}
D^\mu D^\nu\Psi &= (\partial^\mu + ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu)(\partial^\nu + ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\nu)\Psi\\
&= \partial^\mu\partial^\nu\Psi + ig\boldsymbol{T}\partial^\mu(\mathbf{W}^\nu\Psi) + ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\partial^\nu\Psi - g^2\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\nu\Psi\\
&= \partial^\mu\partial^\nu\Psi + ig\boldsymbol{T}\big[\Psi\partial^\mu\mathbf{W}^\nu - \mathbf{W}^\nu\partial^\mu\Psi\big] + ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu\partial^\nu\Psi\\
&\quad - g^2\big[\mathbf{W}^\mu\mathbf{W}^\nu + i\boldsymbol{T}\cdot(\mathbf{W}^\mu\times\mathbf{W}^\nu)\big]\Psi
\end{aligned} \tag{2.46}$$

ενώ ο δεύτερος

$$\begin{aligned}
D^\mu D^\nu\Psi = \partial^\nu\partial^\mu\Psi + ig\boldsymbol{T}\big[\Psi\partial^\nu\mathbf{W}^\mu - \mathbf{W}^\mu\partial^\nu\Psi\big] + ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\nu\partial^\mu\Psi\\
- g^2\big[\mathbf{W}^\nu\mathbf{W}^\mu + i\boldsymbol{T}(\mathbf{W}^\nu\times\mathbf{W}^\mu)\big]\Psi
\end{aligned} \tag{2.47}$$

όπου κάναμε χρήση της [2.32]. Οπότε

$$[D^\mu, D^\nu]\Psi = ig\boldsymbol{T}\cdot\big(\partial^\mu\mathbf{W}^\nu - \partial^\nu\mathbf{W}^\mu - g\mathbf{W}^\mu\times\mathbf{W}^\nu\big)\Psi \tag{2.48}$$

συγκρίνοντας με την [1.30] βρίσκουμε τον τανυστή του πεδίου

$$\mathbf{F}^{\mu\nu} = \partial^{\mu}\mathbf{W}^{\nu} - \partial^{\nu}\mathbf{W}^{\mu} - g\mathbf{W}^{\mu} \times \mathbf{W}^{\nu} \tag{2.49}$$

κάτω από έναν απειροστό μετασχηματισμό της $SU(2)$ ο τανυστής αυτός γίνεται

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{\mu\nu\prime} &= \partial^{\mu}(\mathbf{W}^{\nu} - \partial^{\nu}\boldsymbol{\eta}(x) - g\boldsymbol{\eta}(x) \times \mathbf{W}^{\nu}) - \partial^{\nu}(\mathbf{W}^{\mu} - \partial^{\mu}\boldsymbol{\eta}(x) - g\boldsymbol{\eta}(x) \times \mathbf{W}^{\mu} - \\ &\quad - g[\mathbf{W}^{\mu} - \partial^{\mu}\boldsymbol{\eta}(x) - g\boldsymbol{\eta}(x) \times \mathbf{W}^{\mu}] \times [\mathbf{W}^{\nu} - \partial^{\nu}\boldsymbol{\eta}(x) - g\boldsymbol{\eta}(x) \times \mathbf{W}^{\nu}] \\ &= \partial^{\mu}\mathbf{W}^{\nu} - \partial^{\mu}\mathbf{W}^{\nu} - g\mathbf{W}^{\mu} \times \mathbf{W}^{\nu} - g[\boldsymbol{\eta} \times (\partial^{\mu}\mathbf{W}^{\nu} - \partial^{\mu}\mathbf{W}^{\nu})] \\ &\quad - g^{2}[\mathbf{W}^{\mu}(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{W}^{\nu}) - \mathbf{W}^{\nu}(\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{W}^{\mu})] \\ &= \partial^{\mu}\mathbf{W}^{\nu} - \partial^{\mu}\mathbf{W}^{\nu} - g\mathbf{W}^{\mu} \times \mathbf{W}^{\nu} - g[\boldsymbol{\eta} \times (\partial^{\mu}\mathbf{W}^{\nu} - \partial^{\mu}\mathbf{W}^{\nu})] \\ &\quad - g\boldsymbol{\eta} \times (-g\mathbf{W}^{\mu} \times \mathbf{W}^{\nu})\end{aligned} \tag{2.50}$$

και τελικά

$$\mathbf{F}^{\mu\nu\prime} = \mathbf{F}^{\mu\nu} - g\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{F}^{\mu\nu} \tag{2.51}$$

Ο τανυστής αυτός μετασχηματίζεται σαν μια τριπλέτα κάτω από την $SU(2)$, εν αντιθέσει με τον τανυστή στην περίπτωση της $U(1)$ ο οποίος έμενε αναλλοίωτος σε μετασχηματισμούς της ομάδας. Επειδή περιέχει την σταθερά σύζευξης g , τα πεδία βαθμίδας λειτουργούν και ως πηγές για τον τανυστή πεδίου. Παρόλο που ο τανυστής μετασχηματίζεται μη τετριμμένα , το γινόμενο:

$$-\frac{1}{4}F^{i\mu\nu} \cdot F^{i}_{\mu\nu} \tag{2.52}$$

παραμένει αναλλοίωτο.
Οπότε έχουμε:

$$-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}_{i} \cdot F^{i}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial^{i\mu}W^{i\nu} - \partial^{i\nu}W^{\mu} - g\epsilon^{ijk}W^{j\mu}W^{k\nu})(\partial^{i}_{\mu}W^{i}_{\nu} - \partial^{i}_{\nu}W_{\mu} - g\epsilon^{ilm}W^{l}_{\mu}W^{m}_{\nu}) \tag{2.53}$$

όπου παρατηρούμε ότι υπάρχουν όροι τριγραμμικοί και τετραγραμμικοί ως προς τα πεδία W^{i}_{μ} της μορφής:

$$-g\epsilon^{ijk}\partial^{i\mu}W^{i\nu}W^{j}_{\mu}W^{k}_{\nu} - \frac{g^{2}}{4}\epsilon^{ijk}\epsilon^{ilm}W^{j\mu}W^{k\nu}W^{l}_{\mu}W^{m}_{\nu} \tag{2.54}$$

οι οποίοι υποδεικνύουν τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των ίδιων των πεδίων βαθμίδας. Ένας τετραγωνικός όρος ως προς τα πεδία ,δηλαδή της μορφής:

$$\frac{m^{2}}{2}W^{i\mu}W^{i}_{\mu} \tag{2.55}$$

θα παραβίαζε την συμμετρία βαθμίδας και έτσι τα πεδία βαθμίδας είναι άμαζα. Έτσι καταλήγουμε στην τελική Langrangian που περιγράφει την αλληλεπίδραση μεταξύ των πεδίων βαθμίδας $W^{i\mu}$ και της $SU(2)$ διπλέτας φερμιονικών πεδίων:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_i^{\mu\nu} \cdot F^i_{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi \tag{2.56}$$

όπου:

$$F^{i\mu\nu} = (\partial^{i\mu}W^{i\nu} - \partial^{i\nu}W^{\mu} - g\epsilon^{ijk}W^{j\mu}W^{k\nu}) \tag{2.57}$$

και

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_\mu \tag{2.58}$$

Κεφάλαιο 3

Αυθόρμητο Σπάσιμο Συμμετρίας

3.1 Εισαγωγή

Η φύση του κενού στην κβαντική θεωρία πεδίου είναι ανάλογη με την θεμελιώδη κατάσταση ενός συστήματος πολλών σωμάτων τα οποία αλληλεπιδρούν -είναι δηλαδή η κατάσταση με την μικρότερη ενέργεια (κατάσταση ισσοροπίας). Στην κατάσταση αυτή ελάχιστης ενέργειας, δεν είναι απαραίτητο να έχουν όλα τα κβαντικά πεδία μηδενική αναμενόμενη τιμή, έτσι εν γένει μια συμμετρία της Hamiltonian δεν χρειάζεται να είναι και συμμετρία της θεμελιώδους κατάστασης. Ένα τυπικό παράδειγμα είναι ο σηδηρομαγνήτης κάτω από την θερμοκρασία Curie T_c .
Εκεί η Hamiltonian αλληλεπίδρασης είναι της μορφής $\mathbf{H} = -J \sum \mathbf{S_i} \cdot \mathbf{S_j}$ και είναι αναλλοίωτη σε στροφές. Η βασική κατάσταση αλληλεπίδρασης είναι μια ιδιοκατάσταση της Hamiltonian και άρα ιδιοκατάσταση του $\mathbf{S}^2$ και του S_z με ολικό σπιν $S = N/2$ και $N+1$ εκφυλισμό. Έτσι η βασική κατάσταση μπορεί να είναι οποιαδήποτε από τις $(N/2, N/2-1, \cdots, -N/2)$ ιδιοκαταστάσεις του S_z.
Είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε οποιαδήποτε από τις καταστάσεις ως βασική.Όποια όμως κατάσταση επιλέξουμε δεν θα είναι αναλλοίωτη σε στροφές αφού όλα τα σπιν θα είναι ευθυγραμμισμένα προς μια συγκεκριμένη κατεύθυνση.
Θα εφαρμόσουμε τώρα αυτήν την λογική στα πεδία.

Έστω η Lagrangian για ένα πραγματικό βαθμωτό πεδίο:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \tag{3.1}$$

όπου $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad \lambda > 0$
Η Lagrangian είναι συμμετρική ως προς την αλλαγή $\phi \to -\phi$
Για $\mu^2 > 0$ η Lagrangian περιγράφει ένα πεδίο με μάζα μ το οποίο αλληλεπιδρά με τον εαυτό του.Η κατάσταση κενού αντιστοιχεί στο $\phi = 0$

Για $\mu^2 < 0$, όμως, ο όρος μάζας έχει λάθος πρόσημο και έτσι δεν μπορεί να ερμηνευτεί ως η μάζα του πεδίου.Σε αυτήν την περίπτωση το δυναμικό έχει δύο ελάχιστα, τα οποία βρίσκονται από την σχέση:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda^2\phi^2) = 0 \Rightarrow \phi = \pm v, \quad v = \sqrt{-\mu^2/\lambda} \tag{3.2}$$

Διαλέγοντας το $\phi = +v$ σαν ελάχιστο μπορούμε να αναπτύξουμε το πεδίο γύρω από αυτό.
Οπότε γράφουμε:

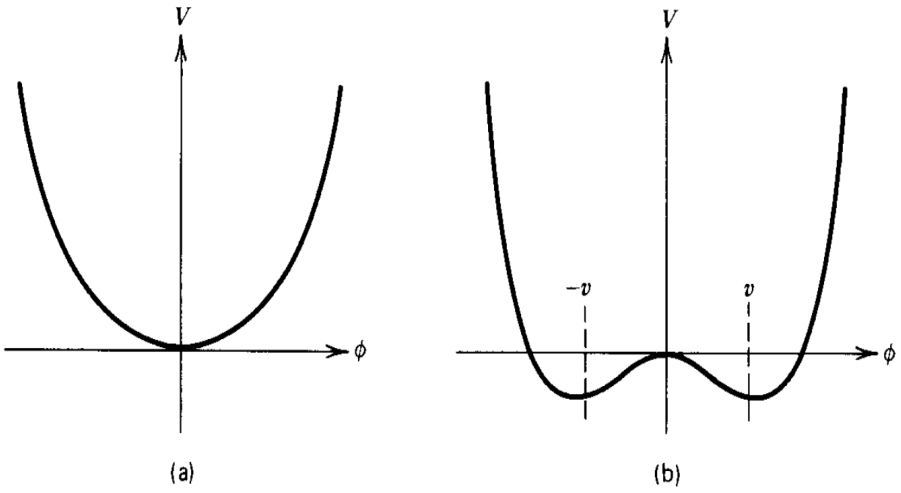
$$\phi(x) = v + \eta(x) \tag{3.3}$$

όπου το $\eta(x)$ αντιπροσωπεύει τις κβαντικές διαταραχές γύρω από το ελάχιστο.Η επιλογή μας $\phi = +v$ αντί του $\phi = -v$ για το ελάχιστο δεν χάνει την γενικότητά της.
Αντικαθιστώντας την [3.3] στην Lagrangian παίρνουμε:

$$\mathscr{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \lambda v^2\eta^2 - \lambda v\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 + const. \tag{3.4}$$

Ο τετραγωνικός όρος ως προς το πεδίο $\eta(x)$ έχει το σωστό πρόσημο και μπορεί να ερμηνευτεί ως η μάζα του πεδίου, δηλαδη:

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2} \tag{3.5}$$



Σχήμα 3.1: Το $V(\phi)$ για (a) $\mu^2 > 0$ και (b) $\mu^2 < 0$

Οι Lagrangians $\mathscr{L}$ και $\mathscr{L}'$ είναι τελείως ισοδύναμες. Αν χρησιμοποιούσαμε την $\mathscr{L}$, δεν θα μπορούσαμε να πάρουμε σωστά αποτελέσματα γιατί θα αναπτύσαμε γύρω απο το ασταθές σημείο $\phi = 0$. Ο σωστός τρόπος λοιπόν, είναι να χρησιμοποιήσουμε την $\mathscr{L}'$ και να αναπτύξουμε γύρω από το σταθερό σημείο $\phi = +v$. Οπότε η $\mathscr{L}'$ δίνει την σωστή εικόνα στην φυσική και άρα το πεδίο μας ϕ έχει μάζα. Στην $\mathscr{L}'$, η συμμετρία ανάκλασης που είχε η Lagrangian, χάθηκε λόγω της επιλογής μας να επιλέξουμε το $\phi = +v$ (αντί του $\phi = -v$) γύρω από το οποίο υπολογίζουμε τις διαταραχές.
Ο τρόπος με τον οποίο 'παράχθηκε' η μάζα αναφέρεται ως *αυθόρμητο σπάσιμο συμμετρίας (spontaneous symmetry breaking)*.

3.2 Σπάσιμο συμμετρίας στην καθολική $U(1)$

Θα εφαρμόσπουμε την παραπάνω διαδικασία στις συμμετρίες βαθμίδας για ενα μιγαδικό πεδίο.
Έστω λοιπόν η Lagrangian:

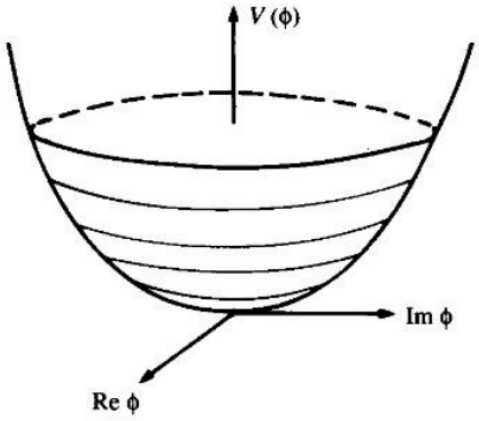
$$\mathscr{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \tag{3.6}$$

όπου $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$ και $\phi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)$

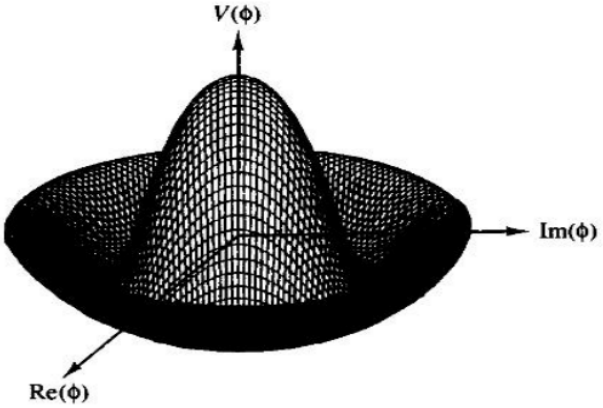
Στην περίπτωση που $\mu^2 > 0$, η κατάσταση κενού του πεδίου είναι:

$$\langle 0| \phi |0\rangle = 0 \tag{3.7}$$

και το δυναμικό αποτυπώνεται στο παρακάτω σχήμα :



Σχήμα 3.2: Το $V(\phi)$ για $\mu^2 > 0$



Σχήμα 3.3: Το $V(\phi)$ για $\mu^2 < 0$

Για την περίπτωση όπου $\mu^2 < 0$,όπως φαίνεται και στο σχήμα , το σημείο όπου $\phi_1 = \phi_2 = 0$, είναι (ασταθές) μέγιστο. Για το ελάχιστο έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \mu^2 \phi^\dagger + 2\lambda \phi^\dagger (\phi^\dagger \phi) = 0$$
$$\Rightarrow (\phi^\dagger \phi) = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2} \tag{3.8}$$

Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο έχει αναμενόμενη τιμή του κενού:

$$\langle 0| \phi |0\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{3.9}$$

η σχέση [3.8] συναρτήσει των πεδίων ϕ_1, ϕ_2 γράφεται:

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 \tag{3.10}$$

παρατηρούμε, δηλαδή, ότι υπάρχουν άπειρες καταστάσεις κενού οι οποίες βρίσκονται σε κύκλο ακίνας v (η βάση του 'καπέλου' στο σχήμα) και είναι όλες ισοδύναμες μεταξύ τους-οποιοδήποτε ζεύγος (ϕ_1, ϕ_2) που ικανοποιεί την [3.10] μας κάνει.
Για να έχουμε μια καλύτερη εικόνα μπορούμε να παραμετροποιήσουμε αυτές τις καταστάσεις χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες. Έτσι το κενό είναι μια οποιαδήποτε από τις καταστάσεις $|0\rangle_\theta$ τέτοια ώστε να ισχύει:

$${}_\theta \langle 0| \phi |0\rangle_\theta = \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \tag{3.11}$$

Το σύνολο αυτό των καταστάσεων διατηρεί την συμμετρία της $U(1)$, η επιλογή, όμως, μιας συγκεκριμένης κατάστασης (πχ.εκείνης ώστε $\theta = 0$) για το κενό, σπάει αυτήν την συμμετρία.

Για να βρούμε το σωματιδιακό φάσμα επιλέγουμε χωρίς, βλάβη γενικότητας, την αναμενόμενη κατάσταση του κενού των ϕ_i ώστε $\langle\phi_1\rangle = v$ και $\langle\phi_2\rangle = 0$ - επιλογή που πρέπει να κάνει και η Φύση!- και αναπτύσσουμε γύρω απο αύτη. Οπότε έχουμε:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x) + i\xi(x)] \tag{3.12}$$

αντικαθιστώντας στην Lagrangian της σχέσης [3.6] έχουμε:
οι παράγωγοι θα δώσουν τους όρους:

$$(\partial_\mu\phi^\dagger)(\partial^\mu\phi) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 \tag{3.13}$$

ο όρος $-\mu^2(\phi^\dagger\phi)$ θα δώσει:

$$-\frac{\mu^2}{2}\eta^2(x) + \cdots \tag{3.14}$$

και ο όρος $-\lambda(\phi^\dagger\phi)^2$ θα δώσει:

$$-\frac{6}{4}\lambda v^2\eta^2(x) + \cdots = \frac{6}{4}\mu^2\eta^2(x) + \cdots \tag{3.15}$$

Τελικά καταλήγουμε στην Lagrangian:

$$\mathscr{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)^2 + \mu^2\eta^2 + \mathcal{O}(\eta^3, \eta^4, \xi^3, \xi^4) + const. \tag{3.16}$$

Ο τρίτος όρος της Lagrangian μας δίνει την μάζα για το πεδίο $\eta(x)$ η οποία είναι:

$$-\frac{1}{2}m_\eta^2\eta^2(x) = \mu^2 \Rightarrow \quad m_\eta = \sqrt{-2\mu^2} \tag{3.17}$$

Ο δεύτερος όρος αντιπροσωπεύει την κινητική ενέργεια για το πεδίο $\xi(x)$, όμως παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει όρος ανάλογος του $\xi^2(x)$ που θα αντιστοιχεί στην μάζα του πεδίου.
Έτσι η θεωρία μας περιέχει και ένα άμαζο βαθμωτό πεδίο το οποίο ονομάζεται *μποζόνιο Goldstone (Goldstone boson)*.
Η ύπαρξη των μποζονίων Goldstone δεν εξαρτάται από την συμμετρία $U(1)$ αυτή καθ' εαυτή αλλά έχει γενική ισχύ (θεώρημα Goldstone):

Αν μια συνεχής καθολική συμμετρία είναι σπασμένη αυθόρμητα, τότε για κάθε σπασμένο γεννήτορα της ομάδας πρέπει να εμφανίζεται στην θεωρία και ένα άμαζο σωματίδιο.

3.3 Σπάσιμο συμμετρίας στην τοπική $U(1)$

Έστω η Lagrangian

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2, \quad \mu^2 < 0 \tag{3.18}$$

όπως έχουμε αναφέρει, για να την κάνουμε αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς της μορφής:

$$\phi \to e^{-i\alpha(x)}\phi \tag{3.19}$$
$$\phi^\dagger \to e^{i\alpha(x)}\phi^\dagger \tag{3.20}$$

πρέπει να αντικαταστήσουμε το ∂_μ με την συναλλοίωτη παράγωγο:

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \tag{3.21}$$

όπου το A_μ μετασχηματίζεται ως:

$$A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x) \tag{3.22}$$

οπότε έχουμε:

$$\mathscr{L} = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{3.23}$$

αν αναπτύξουμε ξανά το πεδίο γύρω από την κατάσταση κενού:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x) + i\xi(x)] \tag{3.24}$$

και αντικαταστήσουμε τότε οι παράγωγοι θα δώσουν τους όρους:

$$(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^\dagger(\partial^\mu + ieA^\mu)\phi = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \eta)^2 + (\partial_\mu \xi)^2 \tag{3.25}$$
$$+e^2 v^2 A_\mu A^\mu - 2evA_\mu \partial^\mu \xi + (\cdots) \tag{3.26}$$

οι όροι $\mu^2 \phi^\dagger \phi$ και $\lambda(\phi^\dagger \phi)^2$ θα δώσουν ακριβώς τους ίδιους όρους με την περίπτωση της καθολικής $U(1)$.
Έτσι καταλήγουμε στην Lagrangian:

$$\mathscr{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 - v^2 \lambda \eta^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu - evA_\mu \partial^\mu \xi$$
$$+ (interactions) \tag{3.27}$$

όπου βλέπουμε την εμφάνιση του μποζονίου Goldstone, το πεδίο $\eta(x)$ αποκτά μάζα

$$m_\eta = \sqrt{\lambda v^2} \tag{3.28}$$

αλλά το πιο σημαντικό είναι ότι έχουμε καταφέρει να προσδώσουμε μάζα στο πεδίο βαθμίδας A_μ :

$$m_A = ev \tag{3.29}$$

με ένα τρόπο ο οποίος δεν παραβιάζει την συμμετρία βαθμίδας της Lagrangian αφού οι $\mathscr{L}$ και $\mathscr{L}'$ είναι τελείως ισοδύναμες.
Για να ερμηνεύσουμε, όμως, σωστά το σωματιδιακό φάσμα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Μετρώντας τους βαθμούς ελευθερίας για τις δυο Lagrangians βρίσκουμε:
Η $\mathscr{L}$ περιγράφει την αλληλεπίδραση:

- ενός μιγαδικού πεδίου
- ενός άμαζου διανυσματικού πεδίου (2 ανεξάρτητες καταστάσεις πόλωσης)

άρα συνολικά τέσσερεις βαθμούς ελευθερίας.
Η $\mathscr{L}'$ περιγράφει την αλληλεπίδραση:

- δυο πραγματικών πεδίων
- ενός έμμαζου διανυσματικού πεδίου (3 ανεξάρτητες καταστάσεις πόλωσης)

άρα συνολικά πέντε βαθμούς ελευθερίας.
Επειδή, όμως, οι φυσικοί βαθμοί ελευθερίας δεν μπορούν να αλλάξουν από μια μετάθεση των πεδίων, συμπεραίνουμε ότι η $\mathscr{L}'$ πρέπει να περιέχει πεδία τα οποία δεν αντιστοιχούν σε φυσικά σωματίδια.
Και αυτή είναι όντως η κατάσταση: μπορούμε να γράψουμε το πεδίο ϕ σε μικρή τάξη ως προς το πεδίο $\xi(x)$ ως:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x) + i\xi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x))e^{i\xi(x)/v} \tag{3.30}$$

Αφού η Lagrangian της σχέσης [3.23] είναι αναλλοίωτη στους μετασχηματισμούς βαθμίδας , μπορούμε να εισάγουμε τα πεδία:

$$\phi \to \phi' = \phi e^{-i\alpha(x)} \tag{3.31}$$

και

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x) \tag{3.32}$$

χωρίς να αλλάξει η φυσική. Μπορούμε να επιλέξουμε το $\alpha(x)$ ώστε:

$$\alpha(x) = \xi(x)/v \tag{3.33}$$

και άρα

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta(x)) \tag{3.34}$$

η επιλογή αυτή ονομάζεται *μοναδιακή βαθμίδα (unitary gauge)*.
Αντικαθιστώντας στην [3.23] και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συναλλοίωτης παραγώγου:

$$D_\mu \phi = e^{i\xi(x)/v} D'_\mu \phi' \tag{3.35}$$

παίρνουμε:

$$(D'_\mu \phi')^\dagger (D'_\mu \phi') = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \eta)^2 - e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + 2e^2 v\eta A'_\mu A'^\mu + e^2 \eta^2 A'_\mu A'^\mu] \tag{3.36}$$

και έτσι καταλήγουμε στην Lagrangian:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}'' = &\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \lambda v^2 \eta^2 + \frac{1}{2} e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4}\lambda \eta^4 \\ &+ \frac{1}{2} e^2 A'_\mu A'^\mu \eta^2 + v e^2 A'_\mu A'^\mu \eta - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{3.37}$$

Η $\mathscr{L}''$ περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός βαθμωτού πεδίου η με μάζα:

$$m_\eta = \sqrt{2\lambda v^2} \tag{3.38}$$

και ενός διανυσματικού πεδίου A'_μ με μάζα:

$$m_{A'_\mu} = ev \tag{3.39}$$

Παρατηρούμε ότι, πλέον, δεν υπάρχουν άμαζα πεδία. Ο βαθμός ελευθερίας που αντιστοιχούσε στο μποζόνιο Goldstone απορροφήθηκε από το πεδίο βαθμίδας και μετατράπηκε στην διαμήκη πόλωση, προσδίδοντάς του μάζα.Η διαδικασία αυτή αποτελεί τον μηχανισμό Higgs και το έμμαζο πεδίο $\eta(x)$ το φυσικό πεδίο Higgs. Η Lagrangian [3.37] δεν είναι αναλλοίωτη σε μετασχηματισμούς βαθμίδας-αφού έχουμε επιλέξει βαθμίδα- αλλά περιγράφει το σωστό σωματιδιακό φάσμα.

3.4 Σπάσιμο συμμετρίας στην τοπική $SU(2)$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον μηχανισμό Higgs και στην μη αβελιανή περίπτωση.
Θεωρούμε την Lagrangian:

$$\mathscr{L} = (\partial_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2, \quad \mu^2 < 0 \tag{3.40}$$

όπου το ϕ είναι μια διπλέτα μιγαδικών πεδίων:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1(x) + i\phi_2(x) \\ \phi_3(x) + i\phi_4(x) \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

Για να κάνουμε την Lagrangian αναλλοίωτη κάτω από την $SU(2)$ αντικαθιστούμε:

$$\partial_\mu \to D^\mu = \partial^\mu + ig\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{W}^\mu(x) \tag{3.42}$$

όπου το $\mathbf{W}^\mu(x)$ μετασχηματίζεται ως:

$$\mathbf{W}^\mu(x) \to \mathbf{W}'^\mu(x) = \mathbf{W}^\mu(x) - \partial^\mu\boldsymbol{\eta}(x) - g[\boldsymbol{\eta}(x)\times\mathbf{W}^\mu(x)] \tag{3.43}$$

έτσι καταλήγουμε στην Lagrangian:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F^{i\mu\nu}\cdot F^i_{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 \tag{3.44}$$

Το ελάχιστο του δυναμικού βρίσκεται:

$$\frac{\partial V}{\partial(\phi^\dagger\phi)} = 0 \Rightarrow \phi^\dagger\phi \equiv |\phi|^2 = \frac{1}{2}(\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2+\phi_4^2) = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \tag{3.45}$$

Το σύνολο των σημείων που ελαχιστοποιούν το $V(\phi)$ διατηρεί την συμμετρία της $SU(2)$.Διαλέγοντας όμως ως κατάταστη κενού εκείνη για την οποία ισχύει:

$$\langle\phi_1\rangle = \langle\phi_2\rangle = \langle\phi_4\rangle = 0, \qquad \langle\phi_3\rangle = v \quad , \quad v \equiv \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{3.46}$$

σπάμε την συμμετρία. Αναπτύσσοντας το πεδίο γύρω από το ελάχιστο έχουμε:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0+\theta_2(x)+i\theta_1(x) \\ v+h(x)-i\theta_3(x)\end{pmatrix} \tag{3.47}$$

και το οποίο γράφεται (σε μικρή τάξη ως προς θ) :

$$\phi = e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}/2v}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{3.48}$$

Λόγω της συμμετρίας βαθμίδας που έχει η Lagrangian, μπορούμε να εισάγουμε τα καινούρια πεδία

$$\phi \to \phi' = e^{-i\boldsymbol{\alpha}(x)}\phi \tag{3.49}$$

και

$$\mathbf{W}^\mu(x) \to \mathbf{W}'^\mu(x) = \mathbf{W}^\mu(x) - \partial^\mu\boldsymbol{\alpha}(x) - g[\boldsymbol{\alpha}(x)\times\mathbf{W}^\mu(x)] \tag{3.50}$$

Επιλέγοντας την μοναδιακή βαθμίδα ($\alpha = \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}/2v$) έχουμε:

$$\phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h(x)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{3.51}$$

και αντικαθιστώντας στην Lagrangian θα πάρουμε τους όρους:

$$[1]|D_\mu\phi'|^2 = |\partial_\mu\phi'|^2 + \left|i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\mathbf{W}'_\mu\phi'\right|^2 + (interaction \quad terms) \tag{3.52}$$

ο πρώτος όρος δίνει την κινητική ενέργεια του πεδίου Higgs

$$\frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h \tag{3.53}$$

ο δεύτερος όρος είναι:

$$\begin{aligned}\left|i\frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\cdot\mathbf{W}'_\mu\phi'\right|^2 &= \frac{g^2}{8}\left|\begin{pmatrix} W_\mu^{3\prime} & W_\mu^{1\prime}-iW_\mu^{2\prime} \\ W_\mu^{1\prime}+iW_\mu^{2\prime} & W_\mu^{3\prime}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v\end{pmatrix}\right|^2 \\ &= \frac{g^2v^2}{8}(W_\mu^{1\prime}-iW_\mu^{2\prime} \qquad W_\mu^{3\prime})^\star\begin{pmatrix} W_\mu^{1\prime}-iW_\mu^{2\prime} \\ W_\mu^{3\prime}\end{pmatrix} \\ = \frac{g^2v^2}{8}[(W_\mu^{1\prime})^2 + (W_\mu^{2\prime})^2 + (W_\mu^{3\prime})^2] &+ (interaction \quad terms)\end{aligned} \tag{3.54}$$

ενώ η μάζα του πεδίου Higgs θα προκύψει από το δυναμικό $V(\phi^\dagger\phi)$ το οποίο θα δώσει τους όρους:

$$-\frac{1}{2}(-2\mu^2)h^2 + \frac{1}{4}\mu^2v^2\left(\frac{4}{v^3}h^3 + \frac{1}{v^4}h^4 - 1\right) \tag{3.55}$$

και άρα είναι

$$m_h = \sqrt{-2\mu^2} \tag{3.56}$$

Έτσι η Lagrangian [3.44] γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu h\partial^\mu h - m_h h + \frac{g^2v^2}{8}[W_\mu^{1\prime}W^{1\mu\prime} + W_\mu^{2\prime}W^{2\mu\prime} + W_\mu^{3\prime}W^{3\mu\prime}] \\ - \frac{1}{4}F^{i\mu\nu}\cdot F^i_{\mu\nu} + (interaction \quad terms)\end{aligned} \tag{3.57}$$

όπου βλέπουμε την εμφάνιση τριών έμμαζων πεδίων βαθμίδας μάζας:

$$m_W = \frac{gv}{2} \tag{3.58}$$

Έχοντας πλέον όλα όσα χρειαζόμαστε στην διάθεσή μας, είμαστε έτοιμοι να κατασκευάσουμε το Καθιερωμένο Πρότυπο.

[1] χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό $|D_\mu\phi|^2 = (D_\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi)$

Κεφάλαιο 4

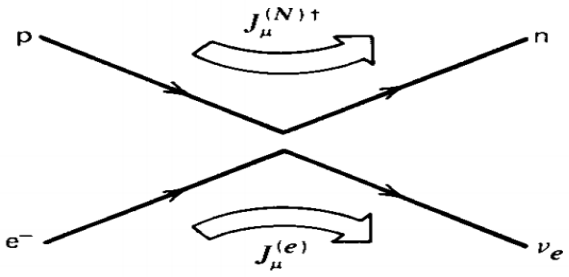
Το Καθιερωμένο Πρότυπο

4.1 Εισαγωγή

Η πρώτη προσπάθεια περιγραφής των ασθενών αλληλεπιδράσεων έγινε από τον Fermi, ο οποίος μιμούμενος την δομή της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης πρότεινε ότι το αναλλοίωτο πλάτος για την β-διάσπαση είναι της μορφής:

$$\mathcal{M}(pe^- \to n\nu_e) = G_F(\bar{u}_n\gamma^\mu u_p)(\bar{u}_{\nu_e}\gamma_\mu u_e) \tag{4.1}$$

όπου G_F η σταθερά σύζευξης των ασθενών αλληλεπιδράσεων και η οποία ονομάζεται σταθερά Fermi.Παρατηρούμε ότι η αλληλεπίδραση η οποία περιγράφεται από την [4.1] είναι σημειακή (point-like) καθώς δεν έχουμε ανταλλαγή ενδιάμεσου διανυσματικού μποζονίου,όπως φαίνεται στο σχήμα:



Σχήμα 4.1: Το δίαγραμμα για την β-δίασπαση $pe^- \to n\nu_e$

Πειραματικά δεδομένα έχουν δείξει ότι μόνο τα αριστερόστροφα νετρίνα (ν_L) και τα δεξιόστροφα αντινετρίνα ($\bar{\nu}_R$) λαμβάνουν μέρος στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις,γεγονός που σημαίνει ότι οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις παραβιάζουν την ομοτιμία (Parity violation).
Έτσι μια πρώτη διόρθωση στην θεωρία Fermi πρέπει να αντανακλά την παραβίαση αυτή.Έτσι το αναλλοίωτο πλάτος θα έχει την μορφή:

$$\mathcal{M} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} J^\mu {J_\mu}^\dagger \tag{4.2}$$

όπου

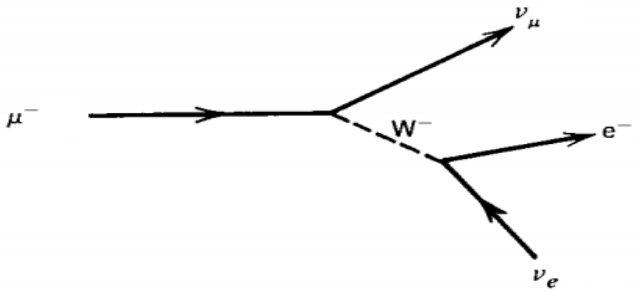
$$J^\mu = \bar{u}_\nu \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5) u_e \tag{4.3}$$

και

$${J_\mu}^\dagger = \bar{u}_e \gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5) u_\nu \tag{4.4}$$

Ο παράγοντας $\frac{1}{2}(1-\gamma^5)$ επιλέγει τα αριστερόστροφα λεπτόνια (ή τα δεξιόστροφα αντιλεπτόνια).Οπότε το ασθενές ρεύμα έχει *V-A* δομή (vector-axial vector) σε αντίθεση με το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα που έχει μια καθαρά διανυσματική δομή (vector).
Το επόμενο βήμα είναι η εισαγωγή ενδιάμεσων φορτισμένων διανυσματικών μποζονίων ($W^\pm$) τα οποία έχουν μάζα (σε αντίθεση με το φωτόνιο).Οπότε για μια διαδικασία όπως η διάσπαση του μιονίου, το πλάτος γίνεται:

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{2} \bar{u}_\mu \gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma^5) u_{\nu_\mu} \frac{(-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / {M_W}^2)}{q^2 - {M_W}^2} \bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\nu \frac{1}{2}(1-\gamma^5) u_e \tag{4.5}$$



Σχήμα 4.2: Το διάγραμμα για την διάσπαση του μιονίου με την εκπομπή ενός W^- μποζονίου

Σε χαμηλές ενέγειες είναι:

$$q^2 \ll {M_W}^2 \tag{4.6}$$

οπότε συγκρίνοντας τις [4.2] και [4.5], έχουμε:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8{M_W}^2} \tag{4.7}$$

Μετρώντας πειραματικά την σταθερά G_F και θεωρώντας $g \approx e$ μπορούμε να υπολογίσουμε την M_w:

$$M_W \approx e/\sqrt{G} \approx 90GeV \tag{4.8}$$

Πέρα από τις διαδικασίες φορτισμένου ρεύματος (charged current), δηλαδή αυτές κατά τις οποίες η αρχική και η τελική κατάσταση διαφέρουν κατά μία μονάδα φορτίου, παρατηρήθηκαν πειραματικά και διαδικασίες της μορφής: $\bar{\nu}_\mu e^- \to \bar{\nu}_\mu e^-$και $\nu q \to \nu q$.
Η τελευταία διαδικασία μπορεί να εξηγηθεί με αλληλεπιδράσεις ουδετέρου ρεύματος (neutral current), δηλαδή το φορτίο της αρχικής και τελικής κατάστασης είναι το ίδιο. Σε αυτές τις διαδικασίες έχουμε την ανταλλαγή ενός αφόρτιστου διανυσματικού μποζονίου (Z^0) και το αναλλοίωτο πλάτος είναι:

$$\mathcal{M} = \frac{g'^2}{2} J_\mu^{NC} \frac{(-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / {M_Z}^2)}{q^2 - {M_Z}^2} J_\nu^{NC} \tag{4.9}$$

όπου:

$$J_\mu^{NC} = \bar{u}_\nu \gamma^\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) u_\nu \tag{4.10}$$

και

$$J_\mu^{NC} = \bar{u}_q \gamma^\mu \frac{1}{2}(c_V^q - c_A^q \gamma^5) u_q \tag{4.11}$$

Παρατηρούμε ότι γενικά το ουδέτερο ασθενές ρεύμα δεν έχει την καθαρή *V-A* δομή αλλά περιέχει και δεξιόστροφες συνιστώσες ($c_V \neq c_A$).Τα νετρίνα, όμως είναι αριστερόστροφα ($c_V^\nu = c_A^\nu = \frac{1}{2}$).
Οι ασθενείς αλληλεπιδράσεις που πραγματοποιούνται μέσω φορτισμένων ρευμάτων επιτρέπουν μεταβάσεις των λεπτονίων και των quarks της μορφής:$e \leftrightarrow \nu_e,\ \mu \leftrightarrow \nu_\mu,\ u \leftrightarrow d$ με την ίδια σταθερά σύζευξης G .Έτσι αν συμπεριλάβουμε και βαρύτερα quarks (s, c) περιμένουμε μεταβάσεις μόνο της μορφής $c \leftrightarrow s$. Η διάσπαση, όμως, $K^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ δείχνει ότι υπάρχει ασθενές ρεύμα που συζεύγει το u με το $\bar{s}$.Για να σώσουμε την καθολικότητα των ασθενών αλληλεπιδράσεων κάνουμε μία 'στροφή' στις καταστάσεις των quarks $d' = d\cos\theta_c + s\sin\theta_c$ και

$s' = -d\sin\theta_c + s\cos\theta_c$.
Έτσι το ρεύμα θα έχει την μορφή:

$$J^\mu = \begin{pmatrix}\bar{u} & \bar{c}\end{pmatrix} \frac{\gamma^\mu(1-\gamma^5)}{2} U \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

με

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

όπου θ_c η γωνία Cabibbo.
Στις σελίδες που ακολουθούν θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε αυτά τα αποτελέσματα από την μοντέρνα θεωρία βαθμίδας των ασθενών αλληλεπιδράσεων η οποία είναι βασισμένη σε μια ομάδα συμμετρίας.

4.2 Κατασκευή της ομάδας βαθμίδας

Για να να επιλέξουμε την ομάδα βαθμίδας της θεωρίας αρκεί να δούμε την αλληλεπίδραση μεταξύ του ηλεκτρονίου και του αντίστοιχου νετρίνου.
Όπως είδαμε, τα φορτισμένα ρεύματα είναι της μορφής:

$$J_\mu \equiv J_\mu^+ = \bar{u}_\nu \gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma_5) u_e \equiv \bar{\nu}_L \gamma_\mu e_L \tag{4.14}$$

και

$$J_\mu^\dagger \equiv J_\mu^- = \bar{u}_e \gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma_5) u_\nu \equiv \bar{e}_L \gamma_\mu \nu_L \tag{4.15}$$

Μπορούμε να ορίσουμε τα ασθενή φορτία ως:

$$T_+ = \int d^3x J_0(x) = \frac{1}{2}\int d^3x \nu^\dagger (1-\gamma_5) e \tag{4.16}$$

και

$$T_- = {T_+}^\dagger = \frac{1}{2}\int d^3x e^\dagger (1-\gamma_5)\nu \tag{4.17}$$

ο μεταθέτης είναι:

$$\begin{aligned}[T_+, T_-] &= \frac{1}{4}\int d^3x d^3y [\nu^\dagger(x)(1-\gamma_5)e(x), e^\dagger(y)(1-\gamma_5)\nu(y)] \\ &= \frac{1}{4}\int d^3x d^3y [\nu^\dagger(x)(1-\gamma_5)\nu(x) - e^\dagger(x)(1-\gamma_5)e(x)]\delta^3(x-y) \\ &= 2T_3 \end{aligned} \tag{4.18}$$

με

$$T_3 = \frac{1}{4}\int d^3x[\nu^\dagger(x)(1-\gamma_5)\nu(x) - e^\dagger(x)(1-\gamma_5)e(x)] \tag{4.19}$$

και το αντίστοιχο ρεύμα:

$$J^3_\mu = \frac{1}{2}\bar{\nu}_L\gamma_\mu\nu_L - \frac{1}{2}\bar{e}_L\gamma_\mu e_L \tag{4.20}$$

όπου έχουμε κάνει χρήση του αντιμεταθέτη για τα φερμιόνια:

$$\{\Psi^\dagger_\alpha(x), \Psi_\beta(y)\} = \delta_{\alpha\beta}\delta^3(x-y) \tag{4.21}$$

Τα φορτία T_+, T_-, T_3 παράγουν την $SU(2)_L$ άλγεβρα. [1] Έτσι τα αριστερόστροφα λεπτόνια σχηματίζουν μια $SU(2)$ διπλέτα (doublet):

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \tag{4.22}$$

ενώ τα δεξιόστροφα e_R σχηματίζουν μια απλέτα (singlet).

Έτσι έχουμε κατασκευάσει μια τριπλέτα (triplet) ασθενών ρευμάτων:

$$J^i_\mu = \bar{L}\gamma_\mu\frac{\tau^i}{2}L \quad , \qquad i = 1,2,3 \tag{4.23}$$

όπου τ^i οι πίνακες Pauli και τα αντίστοιχα φορτία:

$$T^i = \int d^3x J^i_0(x) \tag{4.24}$$

που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$[T^i, T^j] = i\epsilon_{ijk}T^k \tag{4.25}$$

Παρατηρούμε, όμως, ότι δεν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το ρεύμα της [4.20] με το ουδέτερο ρεύμα των ασθενών αλληλεπιδράσεων καθώς το τελευταίο περιλαμβάνει και δεξιόστροφες συνιστώσες.
Παρόλα αυτά, το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα είναι ουδέτερο ρεύμα που περιέχει τόσο δεξιόστροφες όσο και αριστερόστροφες συνιστώσες. Έτσι προκειμένου να σώσουμε την $SU(2)$ συμμετρία αναγκαζόμαστε να προσθέσουμε και αυτό το ρεύμα. Για να το κάνουμε αυτό πρεπει να συμπεριλάβουμε και έναν παράγοντα $U(1)$.
Είναι προφανές όμως, ότι ο παράγοντας αυτός δεν μπορεί να είναι η $U(1)_{em}$ συμμετρία του ηλεκτρομαγνητισμού καθώς τα μέλη της διπλέτας έχουν διαφορετικά

[1] ο δείκτης L είναι για να μας θυμίζει ότι μόνο τα αριστερόστροφα φερμιόνια συμμετέχουν στις ασθενείς αλληλεπιδράσεις

φορτία. Η ιδέα είναι ότι το φορτίο είναι ένας γραμμικός συνδυασμός του γεννήτορα της $U(1)$ και του T_3 της $SU(2)_L$.
Πρατηρούμε ότι ο συνδυασμός:

$$\begin{aligned} Q - T_3 &= \int d^3x[-(e_R^\dagger e_R + e_L^\dagger e_L) + \frac{1}{2}\nu_l^\dagger \nu_L - \frac{1}{2}e_L^\dagger e_L] = \\ &= \int d^3x[-\frac{1}{2}(\nu_L^\dagger \nu_L + e_L^\dagger e_L) - (e_R^\dagger e_R)] \end{aligned} \tag{4.26}$$

δίνει τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς σε όλα τα μέλη της διπλέτας.
Επίσης ισχύει:

$$[Q - T_3, T_i] = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \tag{4.27}$$

Έτσι επιλέγουμε:

$$Y = 2(Q - T_3) \tag{4.28}$$

ως τον γεννήτορα της $U(1)$ ο οποίος ονομάζεται *ασθενές υπερφορτίο (weak hypercharge)*
Προκειμένου να πάρουμε τα σωστά φορτία πρεπει να δώσουμε τις τιμές:

$$Y(L) = -1, \qquad Y(e_R) = -2 \tag{4.29}$$

Συμπεριλαμβάνοντας και τον ηλεκτρομαγνητισμό έχουμε,υπό κάποια έννοια, ενοποιήσει την ασθενή και την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση στην *ηλεκτρασθενή αλληλεπίδραση (electroweak interaction)* με ομάδα συμμετρίας: $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.
Τα πεδία της ύλης (λεπτόνια, quarks) οργανώνονται σε διπλέτες (αριστερόστροφα) και απλέτες (δεξιόστροφα) και οι αντίστοιχοι κβαντικοί αριθμοί συνοψίζονται στον παρακατω πίνακα:

Λεπτόνια	Ισοσπίν (T)	Υπερφορτίο (Y)	T_3	Φορτίο (Q)
$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$	-1	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	0 -1
$e_R, \quad \mu_R, \quad \tau_R$	0	-2	0	-1

Quarks	Ισοσπίν (T)	Υπερφορτίο (Y)	T_3	Φορτίο (Q)
$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{3}$ $-\frac{1}{3}$
$u_R, \quad c_R, \quad t_R$	0	$+\frac{4}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$
$d'_R, \quad s'_R, \quad b'_R$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$

Και η Lagrangian συνοψίζεται ως:

$$\mathscr{L}_{SM} = \mathscr{L}_{leptons} + \mathscr{L}_{quarks} + \mathscr{L}_{higgs} + \mathscr{L}_{yukawa} + \mathscr{L}_{\substack{gauge \\ bosons}} \tag{4.30}$$

4.3 Το τμήμα του Higgs

Η ομάδα $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ έχει τέσσερεις γεννήτορες άρα τέσσερα πεδία βαθμίδας που αντιστοιχούν σε αυτούς:

$$SU(2) \to W_\mu^1, \quad W_\mu^2, \quad W_\mu^3 \tag{4.31}$$

και

$$U(1) \to B_\mu \tag{4.32}$$

Η συμμετρία βαθμίδας μας απαγορεύει οποιοδήποτε όρο μάζας για αυτά.
Επειδή ζούμε, όμως, σε ένα κόσμο όπου μόνο το φωτόνιο είναι άμαζο, πρέπει να εισάγουμε κατάλληλα βαθμωτά πεδία ώστε να παράξουμε την μάζα για τα υπόλοιπα μέσω αυθόρμητης παραβίασης της συμμετρίας, διατηρώντας όμως το φωτόνιο άμαζο.
Για να το κάνουμε αυτό είσαγουμε την διπλέτα:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

όπου

$$\phi^+ = \phi_1 + i\phi_2 \tag{4.34}$$

και

$$\phi^0 = \phi_3 + i\phi_4 \tag{4.35}$$

ένα φορτισμένο και ενα αφόρτιστο βαθμωτο μιγαδικό πεδίο αντίστοιχα.
Η Lagrangian είναι:

$$\mathscr{L}_{higgs} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) \tag{4.36}$$

με:

$$V(\Phi) = \mu^2(\Phi^\dagger \Phi) + \lambda(\Phi^\dagger \Phi)^2, \qquad \mu^2 < 0, \quad \lambda > 0 \tag{4.37}$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος D_μ που αντιστοιχεί στην ομάδα $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ είναι:

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig' Y B_\mu}{2} + ig\mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_\mu \tag{4.38}$$

με g', g οι σταθερές σύζευξης των $U(1), SU(2)$ αντίστοιχα και

$$\mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \tag{4.39}$$

Στην διπλέτα προσδίδουμε υπερφορτίο:

$$Y(\Phi) = +1 \tag{4.40}$$

ενώ έχει αναμενόμενη τιμή κενού:

$$\langle 0|\,\Phi\,|0\rangle \equiv \langle\Phi\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad , \quad v = \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{4.41}$$

Για να έχουμε αυθόρμητο σπάσιμο της συμμετρίας πρέπει ο γεννήτορας μιας ομάδας συμμετρίας να μην αφήσει τη κατάσταση του κενού αναλλοίωτη.
Η κατάσταση του κενού μένει αναλλοίωτη απο κάποιον γεννήτορα $\mathcal{G}$ αν ισχύει:

$$e^{i\alpha\mathcal{G}}\langle\Phi\rangle_0 = \langle\Phi\rangle_0 \tag{4.42}$$

για έναν απειροστό μετασχηματισμό έχουμε:

$$(1 + i\alpha\mathcal{G})\langle\Phi\rangle_0 = \langle\Phi\rangle_0 \Rightarrow \mathcal{G}\langle\Phi\rangle_0 = 0 \tag{4.43}$$

Αντί να χρησιμοποιήσουμε τους αρχικούς γεννήτορες (T_1, T_2, T_3, Y) προκειμένου να δούμε την δράση τους στην κατάσταση του κενού,είναι πιο βολικό να εισάγουμε ένα καινούριο σύνολο (T_1, T_2, K, Q) , με:

$$K \equiv T_3 - \frac{Y}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

και:

$$Q \equiv T_3 + \frac{Y}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.45}$$

οπότε έχουμε:

$$T_1\langle\Phi\rangle_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.46}$$

$$T_2\langle\Phi\rangle_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i\frac{u}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.47}$$

$$K\langle\Phi\rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{u}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{4.48}$$

$$Q\langle\Phi\rangle_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{u}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad !!! \tag{4.49}$$

Έτσι τρεις από τους γεννήτορες δίνουν μη μηδενική τιμή όταν δράσουν στο κενό, οπότε τρία μποζόνια βαθμίδας αποκτούν μάζα αυθόρμητα.
Όμως το φορτίο Q μηδενίζει το κενό, το οποίο σημαίνει ότι το κενό παραμένει

αναλλοίωτο κάτω από την δράση της τοπικής $U(1)_{em}$. Έτσι αυτό που έχουμε καταφέρει είναι να κατεβάσουμε την συμμετρία:

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_{em} \tag{4.50}$$

με αποτέλεσμα η τελευταία να επιβιώνει και το φωτόνιο να παραμένει άμαζο. Αναπτύσσοντας το πεδίο Φ γύρω από το κενό και πηγαίνοντας στην μοναδιακή βαθμίδα-όπως έχουμε δει-παίρνουμε:

$$\Phi = e^{i\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\theta}/2v}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{unitary gauge}} \Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

Όπου $H(x)$ είναι το φυσικό πεδίο Higgs.
Το δυναμικό $V(\Phi)$ θα δώσει την μάζα του H:

$$m_H = \sqrt{-2\mu^2} \tag{4.52}$$

οι κινητικοί όροι στην Lagrangian είναι:

$$\left(\partial_\mu\Phi + \frac{ig'B_\mu}{2}\Phi + \frac{ig\boldsymbol{\tau}\mathbf{W}_\mu}{2}\Phi\right)^\dagger \left(\partial_\mu\Phi + \frac{ig'B^\mu}{2}\Phi + \frac{ig\boldsymbol{\tau}\mathbf{W}^\mu}{2}\Phi\right) \tag{4.53}$$

και αυτοί θα μας δώσουν τόσο τον κινητικό όρο για το H όσο και τις μάζες των μποζονίων βαθμίδας.Αντικαθιστώντας το Φ από την [4.3] και υπολογίζοντας όρο προς όρο έχουμε:

- $$(\partial_\mu\Phi)^\dagger(\partial^\mu\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial_\mu H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^\mu H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\partial_\mu H\partial^\mu H \tag{4.54}$$

- $$\left(\frac{ig'B_\mu}{2}\Phi\right)^\dagger\left(\frac{ig'B^\mu}{2}\Phi\right) = \frac{g'}{4}\begin{pmatrix} 0 & \frac{B_\mu(v+H)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{B^\mu(v+H)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{g'^2}{8}[v^2B_\mu B^\mu + vB_\mu H + vB^\mu H + B_\mu B^\mu H^2] \tag{4.55}$$

- $$\left(\frac{ig'B_\mu}{2}\Phi\right)^\dagger\left(\frac{ig\boldsymbol{\tau}\mathbf{W}^\mu}{2}\Phi\right) =$$
$$= \frac{g'g}{4}\left[\begin{pmatrix} 0 & \frac{B_\mu(v+H)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{\mu 3} & W^{\mu 1} - iW^{\mu 2} \\ W^{\mu 1} + iW^{\mu 2} & -W^{\mu 3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(v+H)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right]$$
$$= -\frac{g'g}{8}[v^2B_\mu W^{3\mu} + 2vB_\mu W^{2\mu}H + B_\mu W^{3\mu}H] \tag{4.56}$$

- $$\left(\frac{ig\boldsymbol{\tau}\mathbf{W}_\mu}{2}\Phi\right)^\dagger\left(\frac{ig'B^\mu}{2}\Phi\right) =$$
$$= \frac{g'g}{4}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1+iW_\mu^2 \\ W_\mu^1-iW_\mu^2 & -W_\mu^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{(v+H)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ \frac{B^\mu(v+H)}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$
$$= -\frac{gg'}{8}[v^2{W_\mu}^3B^\mu + 2vW_\mu^3B^\mu H + W_\mu^3B^\mu H^2] \tag{4.57}$$

- $$\left(\frac{ig\boldsymbol{\tau}\mathbf{W}_\mu}{2}\Phi\right)^\dagger\left(\frac{ig\boldsymbol{\tau}\mathbf{W}^\mu}{2}\Phi\right) =$$
$$+\frac{g'g}{4}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1+iW_\mu^2 \\ W_\mu^1-iW_\mu^2 & -W_\mu^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \frac{v+H}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1-iW_\mu^2 \\ W_\mu^1+iW_\mu^2 & -W_\mu^3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$
$$= \frac{g^2}{8}[v^2{W_\mu}^1W^{\mu 1} + v^2{W_\mu}^2W^{\mu 2} + v^2{W_\mu}^3W^{\mu 3} + W_\mu^1W^{1\mu}H^2$$
$$+ 2vW_\mu^1W^{1\mu}H + W_\mu^2W^{2\mu}H^2 + 2vW_\mu^2W^{1\mu}H + W_\mu^3W^{3\mu}H^2 + 2vW_\mu^3W^{3\mu}H] \tag{4.58}$$

Άρα λοιπόν, το μέρος της Lagrangian που περιέχει τις μάζες των μποζονίων βαθμίδας είναι:

$$\mathscr{L}_{higgs} \supset \frac{g'^2v^2}{8}B_\mu B^\mu + \frac{g^2v^2}{8}({W_\mu}^1W^{1\mu} + {W_\mu}^2W^{2\mu}) + \frac{g^2v^2}{8}({W_\mu}^3W^{3\mu}) - 2g'g B^\mu {W_\mu}^3 \tag{4.59}$$

ορίζοντας τα πεδία:

$$W^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}({W_\mu}^1 - iW^{\mu 2}) \tag{4.60}$$

και

$$W^- = \frac{1}{\sqrt{2}}({W_\mu}^1 + iW^{\mu 2}) \tag{4.61}$$

τότε ο δεύτερος όρος της [4.60] γίνεται:

$$\frac{g^2v^2}{8}({W_\mu}^+W^{+\mu} + {W_\mu}^-W^{-\mu}) \equiv \frac{{M_W}^2}{2}({W_\mu}^+W^{+\mu} + {W_\mu}^-W^{-\mu}) \tag{4.62}$$

οπότε είναι:

$$M_W = \frac{gv}{2} \tag{4.63}$$

οι υπόλοιποι όροι αντιστοιχούν στις μάζες των ${W_\mu}^3$ και B_μ.
Ο πίνακας μάζας για τα ${W_\mu}^3$ και B_μ περιέχει μη-διαγώνια στοιχεία:

$$\frac{v^2}{8}\begin{pmatrix}{W_\mu}^3 & B_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^2 & -g'g \\ -g'g & g'^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu\end{pmatrix} \tag{4.64}$$

ο πίνακας αυτός έχει ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = g'^2 + g^2 \tag{4.65}$$

και τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα ιδιοανύσματα είναι:

$$A_\mu = \frac{g' {W_\mu}^3 + g B_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \tag{4.66}$$

και

$$Z_\mu = \frac{g' {W_\mu}^3 - g B_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \tag{4.67}$$

άρα λοιπόν στην βάση των A_μ, Z_μ ο πίνακας γίνεται διαγώνιος:

$$\frac{v^2}{8} \begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'^2 + g^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} \tag{4.68}$$

οπότε είναι:

$$\frac{v^2(g'^2 + g^2)}{8} Z_\mu Z^\mu + 0 \cdot A_\mu A^\mu \tag{4.69}$$

το φωτόνιο παραμένει άμαζο, όπως και περιμέναμε ενώ το Z^0 μποζόνιο έχει μάζα:

$$M_Z = \frac{v\sqrt{g'^2 + g^2}}{2} \tag{4.70}$$

μπορούμε να ορίσουμε:

$$\tan\theta_w = \frac{g'}{g} \tag{4.71}$$

όπου θ_w η *γωνία Weinberg (Weinberg angle)* και έτσι τα φυσικά πεδία A_μ και Z_μ δίνονται από τις εκφράσεις:

$$A_\mu = \cos\theta_w B_\mu + \sin\theta_w {W_\mu}^3 \tag{4.72}$$

και

$$Z_\mu = -\sin\theta_w B_\mu + \cos\theta_w {W_\mu}^3 \tag{4.73}$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & \sin\theta_w \\ -\sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ {W_\mu}^3 \end{pmatrix} \tag{4.74}$$

και αντίστροφα:

$$\begin{pmatrix} B_\mu \\ {W_\mu}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & -\sin\theta_w \\ \sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \tag{4.75}$$

ενώ για το λόγο των μαζών των $W^{\pm}$, Z^0 είναι:

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos\theta_w \tag{4.76}$$

Το μέρος της Lagrangian που αφορά της αλληλεπιδρασεις των μποζονίων βαθμίδας με το Higgs είναι (στην βάση των φυσικών πεδίων):

$$\mathscr{L}_{higgs} \supset M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}\left(\frac{2}{v}H + \frac{H^2}{v^2}\right) + \frac{M_Z^2}{2} Z_\mu Z^\mu \left(\frac{2}{v}H + \frac{H^2}{v^2}\right) \tag{4.77}$$

όπου παρατηρούμε ότι η σύζευξη είναι ανάλογη της μάζας των μποζονίων βαθμίδας.

4.4 Το τμήμα των λεπτονίων

Όπως είδαμε τα αριστερόστροφα λεπτόνια οργανώνονται σε διπλέτες ενώ τα δεξιόστροφα σε απλέτες:

$$L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \qquad R = e_R, \mu_R, \tau_R \tag{4.78}$$

και η Lagrangian είναι:

$$\mathscr{L}_{leptons} = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} i\bar{L}_\alpha \not{\partial} L_\alpha + i\bar{R}_\alpha \not{\partial} R_\alpha \tag{4.79}$$

Για το Καθιερωμένο Πρότυπο, το νετρίνο θεωρείται άμαζο, έτσι δεν υπάρχει κάποιος πίνακας ανάμιξης των γεύσεων, οπότε οι λεπτονικοί αριθμοί των τριών οικογενειών διατηρούνται ξεχωριστά , κατά συνέπεια στην ανάλυση που ακολουθεί μπορούμε να περιοριστούμε σε μία οικογένεια (πχ. e, ν_e). έτσι:

$$\mathscr{L} = i\bar{L}\not{\partial} L + i\bar{R}\not{\partial} R \tag{4.80}$$

τα πεδία κάτω από τους καθολικούς μετασχηματισμούς της $U(1)_Y$ γίνονται:

$$L \to L' = e^{\frac{i\alpha Y}{2}} L = e^{-\frac{i\alpha}{2}} L \tag{4.81}$$

και

$$R \to R' = e^{\frac{i\alpha Y}{2}} R = e^{-i\alpha} R \tag{4.82}$$

ενώ κάτω από τους μετασχηματισμούς της $SU(2)_L$:

$$L \to L' = e^{i\boldsymbol{\alpha}\mathbf{T}} L, \quad \mathbf{T} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \tag{4.83}$$

$$R \to R' = R \tag{4.84}$$

έτσι η Lagrangian της [4.80] είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς της $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.
Ένας όρος μάζας για το ηλεκτρόνιο θα είχε την μορφή:

$$m\bar{e}e = m(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \tag{4.85}$$

ένας τέτοιος όρος, όμως, παραβιάζει την συμμετρία βαθμίδας καθώς τα e_R και e_L έχουν διαφορετικούς νόμους μετασχηματισμού.Έτσι η μάζα του ηλεκτρονίου θα παραχθεί μέσω κατάλληλων αλληλεπιδράσεων με το Higgs.
Για να βρούμε τα ρεύματα των λεπτονίων απαιτούμε τοπική συμμετρία.

$$L \to L' = e^{\frac{i\alpha(x)Y}{2}} L = e^{-\frac{i\alpha(x)}{2}} L \tag{4.86}$$

$$R \to R' = e^{\frac{i\alpha(x)Y}{2}} R = e^{-i\alpha(x)} R \tag{4.87}$$

$$L \to L' = e^{i\boldsymbol{\alpha}(x)\mathbf{T}} L, \tag{4.88}$$

και αντικαθιστώντας την παράγωγο με την συναλλοίωτη παράγωγο:

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'YB_\mu}{2} + ig\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}_\mu \tag{4.89}$$

παίρνουμε:

$$\mathscr{L} = i\bar{L}\left(\not{\partial} + \frac{ig'Y\not{B}}{2} + ig\gamma^\mu \mathbf{T}\cdot\mathbf{W}_\mu\right) L + i\bar{R}\left(\not{\partial} + \frac{ig'Y\not{B}}{2}\right) R \tag{4.90}$$

Για να βρούμε τα φορτισμένα ρεύματα έχουμε:
ο όρος $\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}_\mu$ γράφεται:

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}_\mu = \frac{1}{2}(\tau^1 {W_\mu}^1 + \tau^2 {W_\mu}^2 + \tau^3 {W_\mu}^3) \tag{4.91}$$

ορίζοντας:

$$\tau^+ = \frac{\tau^1 + i\tau^2}{2} \tag{4.92}$$

και

$$\tau^- = \frac{\tau^1 - i\tau^2}{2} \tag{4.93}$$

και χρησιμοποιώντας τα πεδία $W^\pm$ από τις σχέσεις [4.60], [4.61] γίνεται:

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{W}_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau^+ {W_\mu}^+ + \tau^- {W_\mu}^-) + \frac{1}{2}(\tau^3 {W_\mu}^3) \tag{4.94}$$

οπότε έχουμε:

$$-\frac{g}{\sqrt{2}}\bar{L}(\gamma^\mu\tau^+{W_\mu}^+ + \gamma^\mu\tau^-{W_\mu}^-)L = -\frac{g}{\sqrt{2}}(J^{\mu+}{W_\mu}^+ + J^{\mu-}{W_\mu}^-) \tag{4.95}$$

όπου

$$J^{\mu+} = \bar{L}\gamma^\mu\tau^+L = \begin{pmatrix}\bar{\nu}_L & \bar{e}_L\end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix} = \bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L \tag{4.96}$$

και

$$J^{\mu-} = \bar{L}\gamma^\mu\tau^-L = \begin{pmatrix}\bar{\nu}_L & \bar{e}_L\end{pmatrix}\gamma^\mu\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix} = \bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L \tag{4.97}$$

Έτσι ανακτήσαμε τα φορτισμένα ρεύματα των λεπτονίων που προβλέπει η θεωρία Fermi [4.3] , [4.4].
Επίσης από την [4.23] είναι:

$${J_\mu}^+ = {J_\mu}^1 + i{J_\mu}^2 \tag{4.98}$$

και

$${J_\mu}^- = {J_\mu}^1 - i{J_\mu}^2 = {J_\mu}^{+\dagger} \tag{4.99}$$

Για τα ουδέτερα ρεύματα είναι:

$$\begin{aligned}
&-\frac{g'}{2}\left(\bar{L}Y\not{B}L + \bar{R}Y\not{B}R\right) - g\bar{L}\gamma^\mu T^3{W_\mu}^3 \overset{4.68}{=}\\
&= -\frac{g\tan\theta_w}{2}\left[\bar{L}\gamma^\mu YL + \bar{R}\gamma^\mu YR\right]B_\mu - g\bar{L}\gamma^\mu T^3L{W_\mu}^3 =\\
&= -\frac{g\tan\theta_w}{2}\left[\bar{L}\gamma^\mu(2Q-2T^3)L + 2\bar{R}\gamma^\mu QR\right]B_\mu - g\bar{L}\gamma^\mu T^3L{W_\mu}^3 =\\
&= -\frac{g\tan\theta_w}{2}\left[2(\bar{L}\gamma^\mu QL + \bar{R}\gamma^\mu QR) - \bar{L}\gamma^\mu 2T^3L\right]B_\mu - g\bar{L}\gamma^\mu T^3L{W_\mu}^3 =\\
&= -g\tan\theta_w(\bar{L}\gamma^\mu QL + \bar{R}\gamma^\mu QR)B_\mu + g\tan\theta_w\bar{L}\gamma^\mu T^3LB_\mu - g\bar{L}\gamma^\mu T^3L{W_\mu}^3 =\\
&\overset{4.75}{=} -g\tan\theta_w(\bar{L}\gamma^\mu QL + \bar{R}\gamma^\mu QR)(\cos\theta_w A_\mu - \sin\theta_w Z_\mu) +\\
&\quad + g\tan\theta_w\bar{L}\gamma^\mu T^3L(\cos\theta_w A_\mu - \sin\theta_w Z_\mu) - g\bar{L}\gamma^\mu T^3L(\sin\theta_w A_\mu + \cos\theta_w Z_\mu) =\\
&= -g\tan\theta_w\cos\theta_w(\bar{L}\gamma^\mu QL + \bar{R}\gamma^\mu QR)A_\mu + g\tan\theta_w\sin\theta_w(\bar{L}\gamma^\mu QL + \bar{R}\gamma^\mu QR)Z_\mu +\\
&\quad + \cancel{g\tan\theta_w\cos\theta_w\bar{L}\gamma^\mu T^3LA_\mu} - g\tan\theta_w\sin\theta_w\bar{L}\gamma^\mu T^3LZ_\mu +\\
&\quad - \cancel{g\sin\theta_w\bar{L}\gamma^\mu T^3A_\mu} - g\cos\theta_w\bar{L}\gamma^\mu T^3LZ_\mu
\end{aligned}$$

ο όρος που αφορά την σύζευξη με το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι:

$$-g\tan\theta_w\cos\theta_w(\bar{L}\gamma^\mu QL + \bar{R}\gamma^\mu QR)A_\mu = -g\sin\theta_w(\bar{e}_L\gamma^\mu Qe_L + \bar{e}_R\gamma^\mu Qe_R + \bar{\nu}_L\gamma^\mu Q\nu_L) \tag{4.100}$$

για το αφόρτιστο νετρίνο είναι $Q = 0$, οπότε έχουμε:

$$-g \sin\theta_w(\bar{e}_L\gamma^\mu Q e_L + \bar{e}_R\gamma^\mu Q e_R) = -g \sin\theta_w J^\mu_{em} \cdot A_\mu \tag{4.101}$$

με

$$J^\mu_{em} = \bar{e}\gamma^\mu Q e \tag{4.102}$$

το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα ενώ η ιδιοτιμή του Q για το ηλεκρτόνιο είναι $Q = -1$. συγκρίνοντας την [4.100] με την [1.33] βρίσκουμε ότι:

$$e = g \sin\theta_w \tag{4.103}$$

οι όροι που αφορούν την σύζευξη με το πεδίο Z_μ είναι:

$$\begin{aligned}
&+ g\tan\theta_w \sin\theta_w(\bar{L}\gamma^\mu Q L + \bar{R}\gamma^\mu Q R)Z_\mu - g\tan\theta_w \sin\theta_w \bar{L}\gamma^\mu T^3 L Z_\mu \\
&- g\cos\theta_w \bar{L}\gamma^\mu T^3 L Z_\mu \\
&= \left[\frac{g\sin^2\theta_w}{\cos\theta_w}(\bar{L}\gamma^\mu Q L + \bar{R}\gamma^\mu Q R) - \frac{g\sin^2\theta_w}{\cos\theta_w}\bar{L}\gamma^\mu T^3 L - g\cos\theta_w \bar{L}\gamma^\mu T^3 L\right] Z_\mu \\
&= \left[\frac{g\sin^2\theta_w}{\cos\theta_w}(\bar{L}\gamma^\mu Q L + \bar{R}\gamma^\mu Q R) - \frac{g}{\cos\theta_w}\bar{L}\gamma^\mu T^3 L\right] Z_\mu \\
&= -\frac{g}{\cos\theta_w} J^\mu_{NC} \cdot Z_\mu
\end{aligned} \tag{4.104}$$

με

$$J^\mu_{NC} = \left[\bar{L}\gamma^\mu T^3 L - \sin^2\theta_w(\bar{L}\gamma^\mu Q L + \bar{R}\gamma^\mu Q R)\right] \tag{4.105}$$

το ουδέτερο ασθενές ρεύμα.
Το ρεύμα αυτό γράφεται:

$$J^\mu_{NC} = \sum_l \bar{\Psi}_l\gamma^\mu \left[T^3_l\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) - \sin^2\theta_w Q_l\right]\Psi_l \tag{4.106}$$

με $l = e, \nu_e$ και Ψ_l το αντίστοιχο πεδίο.
Επίσης παρατηρούμε ότι:

$$J^\mu_{NC} = J^\mu_3 - \sin^2\theta_w J^\mu_{em} \tag{4.107}$$

Για το αφόριστο νετρίνο είναι $Q = 0$ και $T^3 = \frac{1}{2}$ οπότε το ρεύμα είναι:

$$J^\mu_{NC}(neutrino) = \frac{1}{2}\bar{\nu}\gamma^\mu\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)\nu \tag{4.108}$$

ενώ για το φορτισμένο ηλεκτρόνιο είναι $Q = -1$ και $T^3 = -\frac{1}{2}$, οπότε:

$$J^{\mu}_{NC}(electron) = \bar{e}\gamma^{\mu}\left[c_L\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) + c_R\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\right]e \tag{4.109}$$

όπου

$$c_L = T^3 - \sin^2\theta_w Q = -\frac{1}{2} + \sin^2\theta_w \tag{4.110}$$

και

$$c_R = -\sin^2\theta_w Q = \sin^2\theta_w \tag{4.111}$$

ενώ αντίστοιχη έκφραση έχει και για τα υπόλοιπα λεπτόνια. Παρατηρούμε ότι το ουδέτερο ασθενές ρεύμα για τα αφόρτιστα λεπτόνια έχει μια 'V-A' μορφή, ενώ για τα φροτισμένα λεπτόνια δεν είναι καθαρά 'V-A'.
Η μάζα του ηλεκτρονίου παράγεται μέσω όρων Yukawa με το Higgs:

$$\mathscr{L}_{yukawa} = -G_e\bar{L}\Phi R + h.c. \tag{4.112}$$

όπου

$$h.c. = -G_e\bar{R}\Phi^{\dagger}L \tag{4.113}$$

το ερμιτιανό συζηγές.
Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{yukawa} &= -G_e\begin{pmatrix}\bar{\nu_L} & \bar{e}_L\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{v+H}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}e_R - G_e\bar{e}_R\begin{pmatrix}0 & \frac{v+H}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu_L\\ e_L\end{pmatrix}\\ &= -\frac{G_e v}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) - \frac{G_e}{\sqrt{2}}(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)H\\ &= -m_e\bar{e}e - \frac{m_e}{v}\bar{e}eH\end{aligned} \tag{4.114}$$

όπου

$$m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}} \tag{4.115}$$

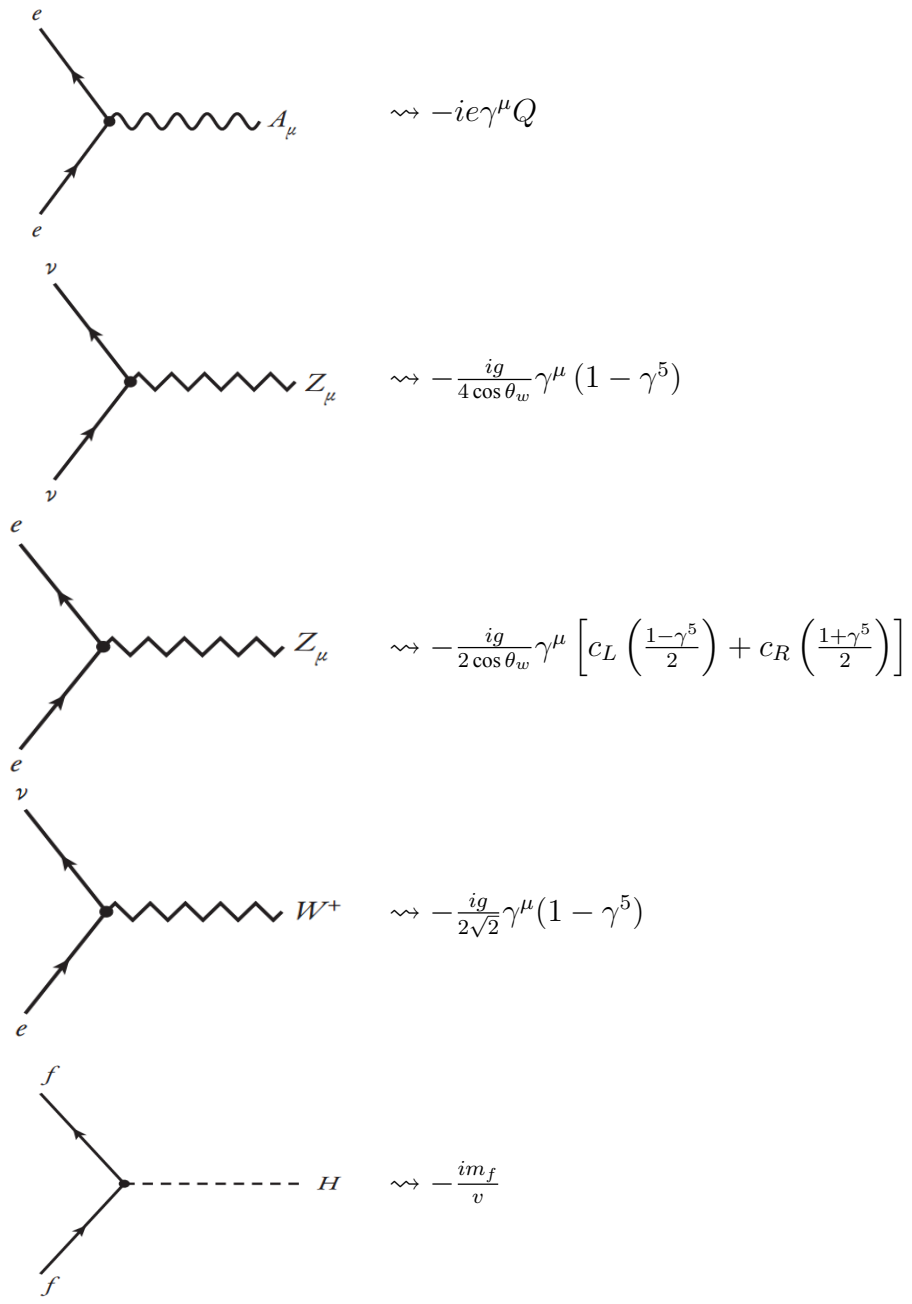
η μάζα του ηλεκτρονίου.
Και αντίστοιχα παίρνουμε και τις μάζες των υπόλοιπων λεπτονίων:

$$m_{\mu} = \frac{G_{\mu} v}{\sqrt{2}} \tag{4.116}$$

και

$$m_{\tau} = \frac{G_{\tau} v}{\sqrt{2}} \tag{4.117}$$

Τέλος μπορούμε να δώσουμε τους κανόνες Feynmann για τους κόμβους:



4.5 Το τμήμα των Quarks

Όσον αφορά τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις των quarks, η κατάσταση είναι λίγο διαφορετική από αυτή των λεπτονίων για δύο λόγους.
Πρώτον χρειαζόμαστε και μια ακόμα διπλέτα βαθμωτών πεδίων ούτως ώστε να

παράξουμε της μάζες για τα πάνω μέλη της διπλέτας.
Επίσης η παρουσία της γωνίας Cabibbo στην [4.12] μας υποδεικνύει ότι πρέπει να ξεχωρίσουμε μεταξύ δυο τύπων φερμιονικών καταστάσεων: *τις ιδιοκαταστάσεις αλληλεπίδρασης (gauge interaction eigenstates)* και τις *ιδιοκαταστάσεις μάζας (mass eigenstates)* με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να κάνουμε την προσσέγγιση μιας οικογένειας.
Έτσι έχουμε τις διπλέτες:

$$Q_{Li} = \begin{pmatrix} U'_{Li} \\ D'_{Li} \end{pmatrix} \tag{4.118}$$

και τις απλέτες:

$$U'_{Ri} \quad , \qquad D'_{Ri} \tag{4.119}$$

με

$$U'_i = u', c', t' \quad , \qquad D'_i = d', s', b' \quad , \qquad i = 1, 2, 3$$

για την διπλέτα των βαθμωτών πεδίων εισάγουμε την συζηγή φορτίου (charge conjugated) της Φ:

$$\tilde{\Phi} \equiv \Phi^c = i\tau_2 \Phi^\star = \begin{pmatrix} \bar{\Phi}^0 \\ -\Phi^- \end{pmatrix} \tag{4.120}$$

η οποία έχει το ίδιο νόμο μετασχηματισμού με την Φ κάτω απο την $SU(2)$ ενώ έχει υπερφορτίο

$$Y(\tilde{\Phi}) = -1 \tag{4.121}$$

και αναμενόμενη τιμή κενού:

$$\langle 0 | \tilde{\Phi} | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.122}$$

άρα αναπύσσοντας γύρω απο το κενό και πηγαίνοντας στην μοναδιακή βαθμίδα έχουμε:

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + H(x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.123}$$

η Lagrangian είναι:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{quarks} = \sum_i & i\bar{Q}_{Li} \left(\not{\partial} + \frac{ig'}{3} \not{B} + ig \mathbf{T} \cdot \mathbf{W}_\mu \right) Q_{Li} + i\bar{U'}_{Ri} \left(\not{\partial} + \frac{4ig'}{3} \not{B} \right) U'_{Ri} \\ & + i\bar{D'}_{Ri} \left(\not{\partial} - \frac{2ig'}{3} \right) D'_{Ri} \end{aligned} \tag{4.124}$$

Οι όροι Yukawa είναι:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{yukawa} &= \sum_{i,j} -G_{ij}^{(D)}\bar{Q}_{Li}\Phi D'_{Rj} - G_{ij}^{(U)}\bar{Q}_{Li}\tilde{\Phi}U'_{Rj} + h.c. \\ &= \sum_{i,j} -\frac{G_{ij}^{(D)}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\bar{U'}_{Li} & \bar{D'}_{Li}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v+H(x)\end{pmatrix}D'_{Rj} - \\ &- \frac{G_{ij}^{(U)}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\bar{U'}_{Li} & \bar{D'}_{Li}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v+H(x)\\ 0\end{pmatrix}U'_{Rj} + h.c. \\ &= \sum_{i,j} -\frac{G_{ij}^{(D)}v}{\sqrt{2}}\bar{D'}_{Li}D'_{Rj} - \frac{G_{ij}^{(U)}v}{\sqrt{2}}\bar{U'}_{Li}U'_{Rj} \\ &- \frac{G_{ij}^{(D)}}{\sqrt{2}}\bar{D'}_{Li}D'_{Rj}H - \frac{G_{ij}^{(U)}}{\sqrt{2}}\bar{U'}_{Li}U'_{Rj}H + h.c. \end{aligned} \tag{4.125}$$

ορίζουμε τους πίνακες μάζας (στην βάση των ιδιοκαταστάσεων αλληλεπίδρασης):

$$\Gamma_{ij}^{(D)} = \frac{G_{ij}^{(D)}v}{\sqrt{2}} \quad , \qquad \Gamma_{ij}^{(U)} = \frac{G_{ij}^{(U)}v}{\sqrt{2}} \tag{4.126}$$

Το σημαντικό, εδώ, είναι ότι δεν υπάρχει κανένας λόγος για τους πίνακες να είναι διαγώνιοι, και εν γένει δεν είναι ούτε καν ερμιτιανοί. Οι πίνακες αυτοί μπορούν να διαγωνοποιηθούν αφού κάθε πίνακας μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$A = HB \tag{4.127}$$

με H ερμιτιανό και B μοναδιακό και ο ερμιτιανός μπορεί να διαγωνοποιηθεί από κάποιον μοναδιακό πίνακα.Έτσι υπάρχουν πίνακες ώστε:

$$\mathcal{U}_D^\dagger \Gamma^{(D)} \mathcal{V}_D = M^{(D)} \tag{4.128}$$

και

$$\mathcal{U}_U^\dagger \Gamma^{(U)} \mathcal{V}_U = M^{(U)} \tag{4.129}$$

με $\mathcal{U}_{U,D}, \mathcal{V}_{U,D}$ μοναδιακούς και $M^{(U,D)}$ διαγώνιους.
Έτσι έχουμε μεταφερθεί στην βάση των ιδιοκαταστάσεων μάζας:

$$D_L = \mathcal{U}_D^\dagger D'_L \quad , \qquad D_R = \mathcal{V}_D^\dagger D'_R \tag{4.130}$$

και

$$U_L = \mathcal{U}_U^\dagger U'_L \quad , \qquad U_R = \mathcal{V}_U^\dagger U'_R \tag{4.131}$$

όπου χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό:

$$D_L = \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix} \qquad U_L = \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix} \quad U_R = \cdots \tag{4.132}$$

σε αυτήν την βάση τώρα οι όροι Yukawa γίνονται:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{yukawa} &= -\bar{D}_L M^{(D)} D_R - \bar{U}_L M^{(D)} U_R - \frac{H}{v}(\bar{D}_L M^{(D)} D_R + \bar{U}_L M^{(D)} U_R) + h.c \\ &= -\bar{D} M^{(D)} D - \bar{U} M^{(U)} U - \frac{H}{v}(\bar{D} M^{(D)} D + \bar{U} M^{(U)} U) \end{aligned}$$

με

$$M^{(U)} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} \tag{4.133}$$

και

$$M^{(D)} = \begin{pmatrix} m_d & 0 & 0 \\ 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & m_b \end{pmatrix} \tag{4.134}$$

για τα φορτισμένα ρεύματα των quarks είναι(παρόμοια με την περίπτωση των λεπτονίων):

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \bar{U'}_{Li} \gamma^\mu D'_{Li} W^+_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_i \bar{D'}_{Li} \gamma^\mu U'_{Li} W^-_\mu \tag{4.135}$$

πηγαίνοντας στην βάση των ιδιοκαταστάσεων μάζας:

$$-\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}_L \mathcal{U}_U^\dagger \gamma^\mu \mathcal{U}_D D_L W^+_\mu - \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{D}_L \mathcal{U}_D^\dagger \gamma^\mu \mathcal{U}_U U_L W^-_\mu \tag{4.136}$$

ορίζοντας τον πίνακα:

$$V \equiv \mathcal{U}_U^\dagger \mathcal{U}_D \tag{4.137}$$

ο οποίος αναμειγνύει τις γεύσεις των quarks παίρνουμε:

$$\begin{aligned} &-\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{U} \gamma^\mu (1-\gamma^5) V D W^+_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{D} V^\dagger \gamma^\mu (1-\gamma^5) U W^-_\mu \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{c} & \bar{t} \end{pmatrix} \gamma^\mu (1-\gamma^5) V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} W^+_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{s} & \bar{b} \end{pmatrix} V^\dagger \gamma^\mu (1-\gamma^5) \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix} W^-_\mu \end{aligned} \tag{4.138}$$

Ο πίνακας V είναι μοναδιακός και ονομάζεται πίνακας Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) και αναμειγνύει τα 'κάτω' quarks:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{4.139}$$

ο πίνακας αυτός μπορεί να παραμετροποιηθεί από τρεις γωνίες ανάμιξης και μία φάση η οποία είναι υπεύθυνη για την CP παραβίαση στις διαδικασίες αλλαγή γεύσης:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \tag{4.140}$$

όπου

$$s_{ij} = \sin\theta_{ij} \ , \ c_{ij} = \cos\theta_{ij} \tag{4.141}$$

και δ η φάση.
Για τα ουδέτερα ρεύματα έχουμε:
η σύζευξη με το A_μ είναι

$$-eJ^\mu_{em} \cdot A_\mu \tag{4.142}$$

με

$$J^\mu_{em} = \bar{U'}\gamma^\mu Q U' + \bar{D'}\gamma^\mu Q D' = \frac{2}{3}\bar{U'}\gamma^\mu U' - \frac{1}{3}\bar{D'}\gamma^\mu D' \tag{4.143}$$

ενώ η σύζευξη με το Z_μ είναι:

$$-\frac{g}{\cos\theta_w} J^\mu_{NC} \cdot Z_\mu \tag{4.144}$$

με

$$\begin{aligned} J^\mu_{NC} &= J^\mu_3 - \sin^2\theta_w J^\mu_{em} = \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(\bar{U'}_L\gamma^\mu U'_L - \bar{D'}_L\gamma^\mu D'_L\right) - \sin^2\theta_w\left(\frac{2}{3}\bar{U'}\gamma^\mu U' - \frac{1}{3}\bar{D'}\gamma^\mu D'\right)\right] \end{aligned} \tag{4.145}$$

αν αλλάξουμε βάση παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3}\bar{U'}\gamma^\mu U' - \frac{1}{3}\bar{D'}\gamma^\mu D' = \frac{2}{3}\left(\bar{U'}_L\gamma^\mu U'_L + \bar{U'}_R\gamma^\mu U'_R\right) - \frac{1}{3}\left(\bar{D'}_L\gamma^\mu D'_L + \bar{D'}_R\gamma^\mu D'_R\right) = \\ &= \frac{2}{3}\left(\bar{U}_L\mathcal{U}^\dagger_U\gamma^\mu\mathcal{U}_U U_L + \bar{U}_R\mathcal{V}^\dagger_U\gamma^\mu\mathcal{V}_U U_R\right) - \frac{1}{3}\left(\bar{D}_L\mathcal{U}^\dagger_D\gamma^\mu\mathcal{U}_D D_L + \bar{D}_R\mathcal{V}^\dagger_D\gamma^\mu\mathcal{V}_D D_R\right) = \\ &= \frac{2}{3}\left(\bar{U}_L\gamma^\mu U_L + \bar{U}_R\gamma^\mu U_R\right) - \frac{1}{3}\left(\bar{D}_L\gamma^\mu D_L + \bar{D}_R\gamma^\mu D_R\right) = \\ &= \frac{2}{3}\bar{U}\gamma^\mu U - \frac{1}{3}\bar{D}\gamma^\mu D \end{aligned} \tag{4.146}$$

και

$$\frac{1}{2}\left(\bar{U}_L\mathcal{U}_U^\dagger\gamma^\mu\mathcal{U}_U U_L - \bar{D}_L\mathcal{U}_D^\dagger\gamma^\mu\mathcal{U}_D D\right) = \frac{1}{2}\left(\bar{U}_L\gamma^\mu U_L - \bar{D}_L\gamma^\mu D_L\right) \tag{4.147}$$

οπότε τα ουδέτερα ρεύματα γράφονται:

$$J^\mu_{em} = \frac{2}{3}\bar{U}\gamma^\mu U - \frac{1}{3}\bar{D}\gamma^\mu D \tag{4.148}$$

και

$$J^\mu_{NC} = \left[\frac{1}{2}\left(\bar{U}_L\gamma^\mu U_L - \bar{D}_L\gamma^\mu D_L\right) - \sin^2\theta_w\left(\frac{2}{3}\bar{U}\gamma^\mu U - \frac{1}{3}\bar{D}\gamma^\mu D\right)\right] \tag{4.149}$$

η διαφορετικά:

$$J^\mu_{NC}(quarks) = \bar{q}\gamma^\mu\left[c_L\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right) + c_R\left(\frac{1+\gamma^5}{2}\right)\right]q \tag{4.150}$$

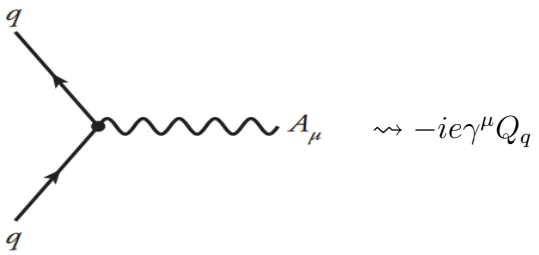
με

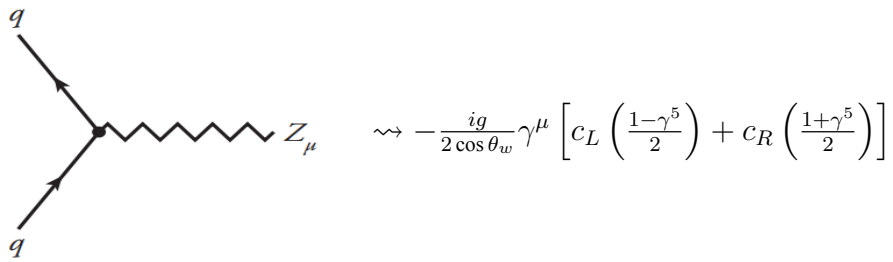
$$c_L = T^3 - \sin^2\theta_w Q_q \tag{4.151}$$

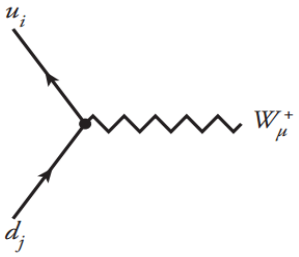
και

$$c_R = -\sin^2\theta_w Q_q \tag{4.152}$$

Παρατηρούμε, δηλαδη, ότι στα ουδέτερα ρεύματα δεν υπάρχουν διαδικασίες αλλαγής γεύσης.
Οι αντίστοιχοι κανόνες Feynmann για τους κόμβους είναι:







$$\rightsquigarrow -\frac{ig}{2\sqrt{2}} V_{ij} \gamma^\mu (1-\gamma^5)$$

Το γεγονός ότι η ανάμειξη των γεύσεων περιορίζεται μόνο στα κάτω quarks δικαιολογεί την οργάνωση των οικογενειών κατά τον παρακάτω τρόπο:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} \tag{4.153}$$

4.6 Το τμήμα των μποζονίων βαθμίδας

Τέλος, μπορούμε να βρούμε τις αλληλεπιδράσεις των διανυσματικών μποζωνίων.
Οι κινητικοί όροι για τα μποζόνια βαθμίδας είναι:

$$\mathscr{L}_{\substack{gauge \\ bosons}} = -\frac{1}{4} W^i_{\mu\nu} W^{i\mu\nu} - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \tag{4.154}$$

με

$$W^i_{\mu\nu} = \partial_\mu W^i_\mu - \partial_\nu W^i_\mu - g\epsilon_{ijk} W^j_\mu W^k_\nu \tag{4.155}$$

και

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{4.156}$$

οι συνιστώσες του $\mathbf{W}_{\mu\nu}$ είναι:

$$W^1_{\mu\nu} = \partial_\mu W^1_\nu - \partial_\nu W^1_\mu - g(W^2_\mu W^3_\nu - W^2_\nu W^3_\mu) \tag{4.157}$$

$$W^2_{\mu\nu} = \partial_\mu W^2_\nu - \partial_\nu W^2_\mu - g(W^3_\mu W^1_\nu - W^3_\nu W^1_\mu) \tag{4.158}$$

$$W^3_{\mu\nu} = \partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu - g(W^1_\mu W^2_\nu - W^1_\nu W^2_\mu) \tag{4.159}$$

μπορούμε να ορίσουμε τις ποσότητες:

$$W^+_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W^1_{\mu\nu} - i W^2_{\mu\nu} \right) \tag{4.160}$$

$$W^-_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W^1_{\mu\nu} + i W^2_{\mu\nu} \right) \tag{4.161}$$

με την εισαγωγή των πεδίων $W_\mu^\pm$ έχουμε:

$$W^+_{\mu\nu} = \partial_\mu W^+_\nu - \partial_\nu W^+_\mu + ig(W^3_\mu W^+_\nu - W^3_\nu W^+_\mu) \tag{4.162}$$

$$W^-_{\mu\nu} = \partial_\mu W^-_\nu - \partial_\nu W^-_\mu - ig(W^3_\mu W^-_\nu - W^3_\nu W^-_\mu) \tag{4.163}$$

$$W^3_{\mu\nu} = \partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu - ig(W^-_\mu W^+_\nu - W^-_\nu W^+_\mu) \tag{4.164}$$

οπότε ο όρος $-\frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W^{i\mu\nu}$ γράφεται:

$$-\frac{1}{4}W^i_{\mu\nu}W^{i\mu\nu} = -\frac{1}{4}W^3_{\mu\nu}W^{3\mu\nu} - \frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\mu\nu} \tag{4.165}$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}W^3_{\mu\nu}W_{3\mu\nu} - \frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\mu\nu} = \\
&= -\frac{1}{2}\left[\partial_\mu W^-_\nu - \partial_\nu W^-_\mu - ig(W^3_\mu W^-_\nu - W^3_\nu W^-_\mu)\right] \\
&\quad \times \left[\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^\nu W^{+\mu} + ig(W^{3\mu}W^{+\nu} - W^{3\nu}W^{+\mu})\right] \\
&\quad -\frac{1}{4}\left[\partial_\mu W^3_\nu - \partial_\nu W^3_\mu - ig(W^-_\mu W^+_\nu - W^-_\nu W^+_\mu)\right] \\
&\quad \times \left[\partial^\mu W^{3\nu} - \partial^\nu W^{3\mu} - ig(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{-\nu}W^{+\mu})\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\partial_\mu W^-_\nu - \partial_\nu W^-_\mu - ie(W^-_\mu A_\nu - W^-_\nu A_\mu) + ig(W^-_\mu Z_\nu - W^-_\nu Z_\mu)\right] \\
&\quad \times \left[\partial^\mu W^{+\nu} - \partial^\nu W^{+\mu} + ie(W^{+\mu}A^\nu - W^{+\nu}A^\mu) - ig(W^{+\mu}Z^\nu - W^{+\nu}Z^\mu)\right] \\
&\quad -\frac{1}{4}\left[\cos\theta_w(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) + \sin\theta_w(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - ig(W^-_\mu W^+_\nu - W^-_\nu W^+_\mu)\right] \\
&\quad \times \left[\cos\theta_w(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) + \sin\theta_w(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - ig(W^{-\mu}W^{+\nu} - W^{-\nu}W^{+\mu})\right]
\end{aligned} \tag{4.166}$$

ενώ από τον όρο $-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\right)\left(\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu\right) \\
&= -\frac{1}{4}[\cos^2\theta_w\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) + \sin^2\theta_w(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu) \\
&- 2\sin\theta_w\cos\theta_w(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu)]
\end{aligned} \tag{4.167}$$

προσθέτοντας τους δυο όρους παίρνουμε:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}W^3_{\mu\nu}W_{3\mu\nu}-\frac{1}{2}W^-_{\mu\nu}W^{+\mu\nu}-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}= \\
&=-\frac{1}{2}\left[\partial_\mu W^-_\nu-\partial_\nu W^-_\mu-ie(W^-_\mu A_\nu-W^-_\nu A_\mu)+ig(W^-_\mu Z_\nu-W^-_\nu Z_\mu)\right] \\
&\quad\times\left[\partial^\mu W^{+\nu}-\partial^\nu W^{+\mu}+ie(W^{+\mu}A^\nu-W^{+\nu}A^\mu)-ig(W^{+\mu}Z^\nu-W^{+\nu}Z^\mu)\right] \\
&\quad-\frac{1}{4}[(\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu)(\partial^\mu Z^\nu-\partial^\nu Z^\mu)+(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu) \\
&\quad-2ig\cos\theta_w(\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu)(W^{-\mu}W^{+\nu}-W^{-\nu}W^{+\mu}) \\
&\quad-2ig\sin\theta_w(\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu)(W^{-\mu}W^{+\nu}-W^{-\nu}W^{+\mu}) \\
&\quad-g^2(W^{-\mu}W^{+\nu}-W^{-\nu}W^{+\mu})(W^-_\mu W^+_\nu-W^-_\nu W^+_\mu)] \qquad (4.168)
\end{aligned}
$$

χρησιμοποιώντας την σχέση [4.103] βλέπουμε ότι υπάρχουν κόμβοι με τρία και τέσσερα μποζόνια:

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{WWZ}=ie\cot\theta_w[&\partial^\mu W^{-\nu}-\partial^\nu W^{-\mu})W^+_\mu Z_\nu-(\partial^\mu W^{+\nu}-\partial^\nu W^{+\mu})W^-_\mu Z_\nu \\
&+W^-_\mu W^+_\nu(\partial^\mu Z^\nu-\partial^\nu Z^\mu)] \qquad (4.169)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}_{WW\gamma}=ie\cot\theta_w[&\partial^\mu W^{-\nu}-\partial^\nu W^{-\mu})W^+_\mu A_\nu-(\partial^\mu W^{+\nu}-\partial^\nu W^{+\mu})W^-_\mu A_\nu \\
&+W^-_\mu W^+_\nu(\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu)] \qquad (4.170)
\end{aligned}
$$

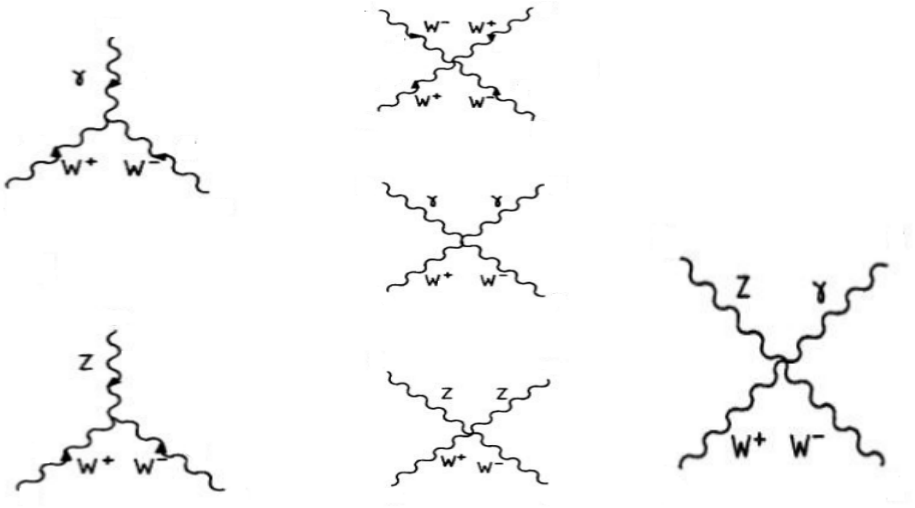
$$
\mathscr{L}_{WWWW}=-\frac{e^2}{2\sin\theta_w}[W^+_\mu W^{-\mu}W^+_\mu W^{-\mu}-W^+_\mu W^{+\mu}W^-_\nu W^{-\nu}] \qquad (4.171)
$$

$$
\mathscr{L}_{WWZZ}=-e^2\cot^2\theta_w[W^+_\mu W^{-\mu}Z_\nu Z^\nu-W^{+\mu}Z^\mu W^+_\nu Z^\nu] \qquad (4.172)
$$

$$
\mathscr{L}_{WWZ\gamma}=-e^2\cot\theta_w[2W^+_\mu W^{-\mu}Z_\nu A^\nu-W^+_\mu Z^\mu W^-_\nu A^\nu-W^+_\mu A^\mu W^-_\nu Z^\nu] \qquad (4.173)
$$

$$
\mathscr{L}_{WWZ\gamma}=-e^2[W^+_\mu W^{-\mu}A_\nu A^\nu-W^+_\mu A^\mu W^-_\nu A^\nu] \qquad (4.174)
$$

όπου παρατηρούμε ότι υπάρχει πάντα ένα ζευγάρι W-μποζονίων σε κάθε κόμβο, ενώ δεν υπάρχει ουδέτερος κόμβος που να συζεύγει μόνο φωτόνια και Z-μποζόνια.



Σχήμα 4.3: οι κόμβοι για τα μποζόνια βαθμίδας

4.7 Πειραματικές τιμές και προβλέψεις του SM

Η πλήρης Lagrangian για το Καθιερωμένο Πρότυπο είναι:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_{SM} = \sum_{i}^{3} &[\bar{L}_i i\not{D} L_i + \bar{R}_i i\not{D} R_i - G_i(\bar{L}_i R_l \Phi + h.c) \\ &+ \bar{Q}_{Li} i\not{D} Q_{Li} + \bar{U}'_{Ri} i\not{D} U'_{Ri} + \bar{D}'_{Ri} i\not{D} D'_{Ri}] \\ &- \sum_{i,j=1}^{3} [G^{(D)}_{ij} \bar{Q}_{Li} \Phi D'_{Rj} + G^{(U)}_{ij} \bar{Q}_{Li} \tilde{\Phi} U'_{Rj} + h.c.] \\ &- \frac{1}{4} W^i_{\mu\nu} W^{\mu\nu}_i - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + |D_\mu \Phi|^2 - V(\Phi) \end{aligned} \tag{4.175}$$

Η Lagrangian [4.175] περιέχει δεκαεφτά αυθαίρετες πραγματικές παραμέτρους:

- οι δύο σταθερές σύζευξης g, g'
- οι δύο παράμετροι του δυναμικού Higgs μ, $v = \sqrt{-\mu^2/\lambda}$
- οι τρεις σταθερές σύζευξης Yukawa για τις τρεις οικογένειες λεπτονίων $G_{e,\mu,\tau}$
- οι έξι σταθερές σύζευξης Yukawa για τις τρεις οικογένειες quarks $G^{(U)}_{u,c,t}$, $G^{(D)}_{d,s,b}$
- οι τέσσερεις παράμετροι του πίνακα CKM, οι τρεις γωνίες και η φάση δ

οι οποίες πρέπει να καθοριστούν από το πείραμα.
Από τις [4.7], [4.63] έχουμε

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2v^2} \Rightarrow v^2 = \frac{1}{\sqrt{2} G_F} \tag{4.176}$$

Η πειραματική τιμή της σταθεράς Fermi είναι:

$$G_F = 1.1663 \times 10^{-5} \ GeV^{-2} \tag{4.177}$$

οπότε βρίσκουμε την αναμενόμενη τιμή κενού του Higgs

$$v \simeq 246 \ GeV \tag{4.178}$$

η οποία καθορίζει την *ηλεκτρασθενή κλίμακα (electroweak scale)*.
Από τις [4.7], [4.103] βρίσκουμε

$$M_W = \left(\frac{e^2}{4\sqrt{2} G_F \sin^2 \theta_w} \right)^{1/2} \tag{4.179}$$

είναι $e^2 \simeq 4\pi\alpha$ και η πειραματική τιμή της σταθεράς της λεπτής υφής είναι:

$$\alpha = \frac{1}{137.035} \tag{4.180}$$

άρα

$$M_W = \frac{37.35}{\sin \theta_w} \quad GeV \tag{4.181}$$

χρησιμοποιώντας την πειραματική τιμη

$$\sin^2 \theta_w \simeq 0.223 \tag{4.182}$$

βρίσκουμε

$$M_W \simeq 79,13 \ GeV \tag{4.183}$$

και από την [4.76]

$$M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_w} \simeq 89.92 \ GeV \tag{4.184}$$

συγκρίνοντας με τις πειραματικές τιμές:

$$M_W = 80.399 \pm 0.0023 \ GeV \tag{4.185}$$

$$M_Z = 91.1876 \pm 0.0021 \ GeV \tag{4.186}$$

βλέπουμε μια εκπληκτική συμφωνία.
Ορίζοντας την παράμετρο

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_w} \tag{4.187}$$

από την [4.76] είναι

$$\rho = 1 \tag{4.188}$$

ενώ χρησιμοποιώντας τις πειραματικές τιμές είναι

$$\rho \simeq 1.2 \tag{4.189}$$

Από την [4.115] θεωρώντας $m_e = 0.511 MeV$ είναι

$$G_e \simeq 2.9 \times 10^{-6} \tag{4.190}$$

η οποία είναι αρκετά μικρή και τελείως αυθαίρετη.
Για τιμές του πίνακα CKM έχουμε:

$$|V_{ud}| = 0.97417 \pm 0.00021 \quad , \quad |V_{us}| = 0.2248 \pm 0.0006 \quad , \quad |V_{cd}| = 0.220 \pm 0.005$$
$$|V_{cs}| = 0.995 \pm 0.016 \quad , \quad |V_{cb}| = (40.5 \pm 0.15) \times 10^{-3} \quad , \quad |V_{ub}| = (4.09 \pm 0.39) \times 10^{-3}$$
$$|V_{td}| = (8.2 \pm 0.6) \times 10^{-3} \quad , \quad |V_{ts}| = (40.0 \pm 2.7) \times 10^{-3} \quad , |V_{ts}| = 1.009 \pm 0.031$$

Τέλος, για την μάζα του Higgs είναι

$$M_H = 125.09 \pm 0.24 \ GeV \tag{4.191}$$

[2]

4.8 Συμπεράσματα

Το Καθιερωμένο Πρότυπο είναι ένα όμορφο θεωρητικό πλαίσιο το οποίο περιλαμβάνει όλα τα γνωστά πειραματικά δεδομένα για τις ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων.
Οι πρόβλεψεις για την ύπαρξη και τις ιδιότητες των ασθενών ρευμάτων, οι σωστές προβλέψεις για τις μάζες των W, Z-μποζονίων, καθώς και η πρόβλεψη για την ύπαρξη του μποζονίου Higgs είναι κάποια από τα πιο σημαντικά κατορθώματά του. Σε καμία, όμως περίπτωση δεν είναι η τελική θεωρία.
Η αδυναμία του να εξηγήσει την προέλευση της μάζας των νετρίνων, την φύση του ηλεκτρασθενούς σπάσιμου της συμμετρίας το οποίο μπαίνει 'με το χέρι' στην θεωρία είναι κάποια απο τα αδύνατα σημεία του.
Τέλος φαινόμενα όπως οι ταλαντώσεις νετρίνων και η ύπαρξη της σκοτεινής ύλης υποδεικνύουν την ύπαρξη φυσικής πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου.

[2] Τα δεδομένα πάρθηκαν από το Particle Data Group

Μέρος ΙΙ

Υπερσυμμετρία

Εισαγωγή

Μέχρι στιγμής είδαμε ότι οι ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις είναι βασισμένες στην ομάδα $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Οι γεννήτορες της ομάδας αυτής μετατίθενται με αυτούς της ομάδας Poincaré , που καθορίζει τις συμμετρίες του χωροχρονού, έτσι αυτές οι συμμετρίες δεν αναμειγνύονται:

$$\mathscr{P} \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

τέτοιες συμμετρίες καλούνται εσωτερικές (internal symmetries).
Οι Coleman, Mandula απέδειξαν ότι κάτω από κάποιες γενικές προϋποθέσεις, ομάδες των οποίων οι γεννήτορες ικανοποιούν σχέσεις της μορφής [2.6] δεν αναμειγνύονται με την ομάδα Poincaré παρά με έναν τετριμμένο τρόπο.
Μια αρκετά ελκυστική ιδέα είναι η ύπαρξη μιας συμμετρίας (υπερσυμμετρίας) που να συνδέει τα μποζόνια με τα φερμιόνια, δηλαδή, να υπάρχει μετασχηματισμός όπου να αλλάζει το σπιν της κατάστασης.
Σχηματικά έχουμε

$$Q\,|Fermion\rangle = |Boson\rangle \quad , \quad Q\,|Boson\rangle = |Fermion\rangle$$

όπου Q ο γεννήτορας του μετασχηματισμού.
Έτσι μια τέτοια συμμετρία θα πρέπει να είναι χωροχρονική και όχι εσωτερική και ο γεννήτορας Q θα πρέπει να έχει σπιν $1/2$ οπότε να ικανοποιεί σχέσεις αντιμετάθεσης.
Στα παρακάτω θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε κάποιες πτυχές αυτής της ιδέας.

Κεφάλαιο 5

Ομάδα Poincaré

5.1 Άλγεβρα της ομάδας

Η ομάδα Poincaré ($\mathscr{P}$) αποτελείται από μετασχηματισμούς Lorentz και απο χωροχρονικές μεταθέσεις:

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + \alpha^\mu \tag{5.1}$$

όπου α^μ αυθαίρετες σταθερές και Λ^μ_ν ένας σταθερός πίνακας που ικανοποιεί την σχέση:

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \tag{5.2}$$

με $\eta_{\mu\nu} = diag(+---)$ η μετρική Minkowski. Ένας απειροστός μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί ως:

$$U(\Lambda,\epsilon) = \mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} + i\epsilon_\mu P^\mu \tag{5.3}$$

όπου $\omega_{\rho\sigma} = -\omega_{\sigma\rho}$, ϵ_μ απειροστές παράμετροι και $M^{\rho\sigma} = -M^{\sigma\rho}$, P^μ οι γεννήτορες των ομάδων Lorentz και μεταθέσεων αντίστοιχα.
Οι γεννήτορες $M^{\rho\sigma}$ σχηματίζουν το διάνυσμα της στροφορμής:

$$\mathbf{J} = \{M^{23}, M^{31}, M^{12}\} \tag{5.4}$$

και το διάνυσμα προώθησης (boost)

$$\mathbf{K} = \{M^{10}, M^{20}, M^{30}\} \tag{5.5}$$

Για δυο συνεχόμενους μετασχηματισμούς ισχύει:

$$U(\Lambda_2,\alpha_2)U(\Lambda_1,\alpha_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2\alpha_1 + \alpha_2) \tag{5.6}$$

και για τον αντίστροφο

$$U^{-1}(\Lambda,\alpha) = U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}\alpha) \tag{5.7}$$

Για να βρούμε τις σχέσεις μετάθεσης των γεννητόρων πρέπει να βρούμε πως αυτοί μετασχηματίζοντα κάτω από την ομάδα.Αρχικά θεωρούμε τον μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} U^{-1}(\Lambda,0)U(\Lambda',\alpha')U(\Lambda,0) &\overset{5.6}{=} U^{-1}(\Lambda,0)U(\Lambda'\Lambda,\alpha') \\ &\overset{5.7}{=} U(\Lambda^{-1},0)U(\Lambda'\Lambda,\alpha') \\ &\overset{5.6}{=} U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda,\Lambda^{-1}\alpha') \end{aligned} \tag{5.8}$$

οποτε για απειροστό μετασχηματισμό έχουμε:

$$\begin{aligned} &U^{-1}(\Lambda,0)[\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}M^{\mu\nu} + i\alpha'_\mu P^\mu]U(\Lambda,0) = \\ &= \mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda,0)M^{\mu\nu}U(\Lambda,0) + i\alpha'_\mu U^{-1}(\Lambda)P^\mu U(\Lambda,0) \end{aligned} \tag{5.9}$$

επίσης

$$\begin{aligned} U(\Lambda^{-1}\Lambda'\Lambda,\Lambda^{-1}\alpha') &= \mathbf{1} - \frac{i}{2}(\Lambda^{-1}\omega'\Lambda)_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} + i(\Lambda^{-1}\alpha'_\rho)P^\rho \\ &= \mathbf{1} - \frac{i}{2}(\Lambda^{-1})^\mu_\rho\omega'_{\mu\nu}(\Lambda)^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} + i(\Lambda^{-1})^\mu_\rho\alpha'_\rho P^\rho \\ &= \mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega'_{\mu\nu}\Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} + i\alpha'{}_\rho\Lambda^\rho_\mu P^\rho \end{aligned} \tag{5.10}$$

εξισώνοντας τις [5.8] και [5.9] βρίσκουμε:

$$U^{-1}(\Lambda,0)M^{\mu\nu}U(\Lambda,0) = \Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} \tag{5.11}$$

$$U^{-1}(\Lambda,0)P^\mu U(\Lambda,0) = \Lambda^\mu_\rho P^\rho \tag{5.12}$$

Αναπτύσσοντας το πρώτο μέλος της [5.10] για έναν απειροστό μετασχηματισμό έχουμε:

$$[\mathbf{1} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}]M^{\mu\nu}[\mathbf{1} - \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma}] = M^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\rho\sigma}[M^{\rho\sigma}, M^{\mu\nu}] \tag{5.13}$$

ενώ το δεξί μέλος:

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu_\rho\Lambda^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} &= (\delta^\mu_\rho + \omega^\mu_\rho)(\delta^{\nu\sigma} + \omega^\nu_\sigma)M^{\rho\sigma} \\ &= M^{\mu\nu} + \omega^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} + \delta^\mu_\rho\omega^\nu_\sigma M^{\rho\sigma} \\ &= M^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}M^{\rho\nu} + \eta^{\mu\rho}\omega_{\rho\sigma}M^{\sigma\nu} + \eta^{\nu\rho}\omega_{\rho\sigma}M^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}\omega_{\sigma\rho}M^{\mu\rho}\right) \\ &= M^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}\left(\eta^{\mu\rho}M^{\sigma\nu} - \eta^{\mu\sigma}M^{\rho\nu} - \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}\right) \end{aligned} \tag{5.14}$$

οπότε βρίσκουμε:

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -i(\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \tag{5.15}$$

με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε από την σχέση [5.11]:

$$[M^{\mu\nu}, P^{\rho}] = -i(\eta^{\mu\rho}P^{\nu} - \eta^{\nu\rho}P^{\mu}) \tag{5.16}$$

και τέλος:

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0 \tag{5.17}$$

5.2 Αναπαραστάσεις της ομάδας

Για να βρούμε τις αναπαραστάσεις, πρέπει πρώτα να βρούμε τους τελεστές Casimir.
Ο $P^2 = P^{\mu}P_{\mu}$ είναι τελεστής Casimir της ομάδας αφού:

$$[P_{\mu}, P^2] = 0 \tag{5.18}$$

και

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, P^2] &= [M_{\mu\nu}, P^{\rho}]P_{\rho} + P^{\rho}[M_{\mu\nu}, P_{\rho}] \\
&= -\eta^{\rho\sigma}i(\eta_{\mu\sigma}P_{\nu} - \eta_{\nu\sigma}P_{\mu})P_{\rho} - P^{\rho}i(\eta_{\mu\rho}P_{\nu} - \eta_{\nu\rho}P_{\mu}) \\
&= -i\delta^{\rho}_{\mu}P_{\nu}P_{\rho} + i\delta^{\rho}_{\nu}P_{\mu}P_{\rho} - iP_{\mu}P_{\nu} + iP_{\nu}P_{\mu} \\
&= -i[P_{\nu}, P_{\mu}] - i[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0
\end{aligned} \tag{5.19}$$

για τον δεύτερο τελεστή Casimir ορίζουμε την ποσότητα:

$$W_{\mu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^{\nu}M^{\rho\sigma} \tag{5.20}$$

που ονομάζεται *διάνυσμα Pauli-Lubanski*[1]. Το τετράγωνό του είναι:

$$W^2 = W_{\mu}W^{\mu} = -\frac{1}{2}M_{\mu\nu}M^{\mu\nu}P^2 + M^{\mu\rho}M_{\nu\rho}P_{\mu}P^{\nu} \tag{5.21}$$

οπότε:

$$\begin{aligned}
[M_{\mu\nu}, W^2] &= [M_{\mu\nu}, W^{\rho}]W_{\rho} + W^{\rho}[M_{\mu\nu}, W_{\rho}] \\
&= -i(\eta_{\mu\rho}W_{\nu} - \eta_{\nu\rho}W_{\mu})W^{\rho} - iW^{\rho}i(\eta_{\mu\rho}W_{\nu} - \eta_{\nu\rho}W_{\mu}) \\
&= -i(W_{\nu}W_{\mu} - W_{\mu}W_{\nu} + W_{\mu}W_{\nu} - W_{\nu}W_{\mu}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.22}$$

[1] Μετασχηματίζεται ως διάνυσμα κατω από Lorentz:$[M_{\mu\nu}, W_{\rho}] = -i(\eta_{\mu\rho}W_{\nu} - \eta_{\nu\rho}W_{\mu})$

και

$$\begin{aligned}[P_\mu, W_\nu] &= \frac{1}{2}[P_\mu, \epsilon_{\nu\rho\sigma\tau}P^\rho M^{\sigma\tau}] = \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau}\eta_{\mu\gamma}\left([P^\gamma, P^\rho]M^{\sigma\tau} + P^\rho[P^\gamma, M^{\sigma\tau}]\right) \\ &= \frac{i}{2}\epsilon_{\nu\rho\sigma\tau}\eta_{\mu\gamma}P^\rho\left(\eta^{\sigma\gamma}P^\tau - \eta^{\tau\gamma}P^\sigma\right) \\ &= \frac{i}{2}\left(\epsilon_{\nu\rho\mu\tau}P^\rho P^\tau - \epsilon_{\nu\rho\sigma\mu}P^\rho P^\sigma\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.23}$$

άρα:

$$[P_\mu, W^2] = [P_\mu, W_\rho]W^\rho + W_\rho[P_\mu, W^\rho] = 0 \tag{5.24}$$

επίσης ισχύει:

$$W^\mu P_\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}M_{\rho\sigma}P_\nu P_\mu = 0 \tag{5.25}$$

αφού το ϵ είναι πλήρως αντισυμμετρικός. Στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου ($P^\mu = (m, 0, 0, 0)$) είναι $W_0 = 0$.
Οι χωρικές συνιστώσες είναι:

$$W_i = \frac{1}{2}\epsilon_{i0jk}P^0M^{jk} = -\frac{1}{2}\epsilon_{0ijk}mM^{jk} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}mM^{jk} = mJ_i \tag{5.26}$$

όπου

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}M^{jk} \tag{5.27}$$

ο τελεστής της ολικής στροφορμής.Επειδή όμως είμαστε στο σύστημα ηρεμίας έχουμε μόνο το σπιν ($J_i = S_i$) .Οπότε είναι:

$$W^2 = -m^2S^2 = -m^2s(s+1) \tag{5.28}$$

με $s = 0, 1/2, 1, \cdots$
Έτσι οι αναπαραστάσεις της Poincaré χαρακτηρίζονται από την μάζα ηρεμίας και το σπιν.
Αν ισχύει $P^2 = 0$ τότε $W^2 = 0$ και δεν μπορούμε να ορίσουμε σύστημα ηρεμίας. Μπορούμε, όμως, να διαλέξουμε σύστημα ώστε $P^\mu = (E, 0, 0, E)$ και σε αυτην την περίπτωση ισχύει:

$$W_\mu = \lambda P_\mu \tag{5.29}$$

όπου λ η ελικότητα (helicity) και ισούται με $\pm s$. Το χρονικό κομμάτι του W_μ είναι

$$W^0 = \frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}P_iM_{jk} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{J} \tag{5.30}$$

άρα

$$\lambda = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{J}}{E} \tag{5.31}$$

οι μόνες μη μηδενικές χωρικες συνιστώσες είναι:

$$W_3 = \frac{P^3 J_3}{E} = J_3 = S_3 = \lambda \tag{5.32}$$

όπυ υποθέσαμε οτι δεν υπάρχει τροχιακή στροφορμή. Έτσι αν έχουμε μια κατάσταση με με ορμή p και ελικότητα λ τότε:

$$P^\mu \left|p, \lambda\right\rangle = p^\mu \left|p, \lambda\right\rangle \tag{5.33}$$

$$W_3 \left|p, \lambda\right\rangle = \lambda \left|p, \lambda\right\rangle \tag{5.34}$$

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο θεωρούμε τα σωματίδια άμαζα (η μάζα παράγεται από το μηχανισμό Higgs), έτσι μπορούμε να τα κατατάξουμε στις άμμαζες πολλαπλέτες (multiplets) της ομάδας Poincaré:

- $\lambda = 0 \rightarrow$ Higgs
- $\lambda = \pm 1/2 \rightarrow$ Quarks, Leptons
- $\lambda = \pm 1 \rightarrow$ gauge bosons

Κεφάλαιο 6

Υπερσυμμετρική Άλγεβρα και Αναπαραστάσεις

6.1 Σπίνορες

Έστω η άμαζη εξίσωση Dirac

$$\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = 0 \tag{6.1}$$

Είναι βολικό να δουλέψουμε στην αναπαράσταση Weyl, όπου

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

με

$$\sigma^\mu = (\mathbf{I}_2, \boldsymbol{\sigma}) \tag{6.3}$$

$$\bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{I}_2, -\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_\mu \tag{6.4}$$

όπου $\mathbf{I}_2$ είναι ο 2×2 μοναδιαίος πίνακας.Τότε

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

θεωρώντας

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

είναι

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} \Psi_L \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \Psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

και

$$\gamma^5 \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_R \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

Οι δυο πάνω συνιστώσες έχουν αριστερή χειραλικότητα (left chirality) και οι δυο κάτω έχουν δεξιά χειραλικότητα (right chirality).Έτσι συμβολίζουμε:

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = 1, 2 \tag{6.9}$$

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \alpha = 1, 2 \tag{6.10}$$

οι σπίνορες αυτοί ονομάζονται σπίνορες Weyl (Weyl spinors).
Μπορούμε να ορίσουμε τους πίνακες:

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \tag{6.11}$$

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu) \tag{6.12}$$

οι οποίοι καθορίζουν τον νόμο μετασχηματισμού των Weyl σπινόρων:

$$\psi' = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}}\psi \tag{6.13}$$

$$\bar{\chi}' = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\bar{\sigma}^{\mu\nu}}\chi \tag{6.14}$$

άρα βλεπουμε ότι έχουν διαφορετικούς νόμους μετασχηματισμού σε Lorentz.
Ορίζουμε τον συζυγή φορτίου:

$$\Psi^c \equiv C\bar{\Psi}^T \tag{6.15}$$

με

$$C = -i\gamma^0\gamma^2 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \tag{6.16}$$

έτσι είναι:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \tag{6.17}$$

οπότε

$$\Psi^c = \begin{pmatrix} i\sigma^2\bar{\chi}^\star \\ -i\sigma^2\psi^\star \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

παρατηρούμε ότι το $i\sigma^2\bar{\chi}^\star$ μετασχηματίζεται όπως το ψ , ενώ το $-i\sigma^2\psi^\star$ μετασχηματίζεται όπως το $\bar{\chi}$.Οπότε ορίζουμε:

$$\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \equiv (\psi_\alpha)^\star \tag{6.19}$$

$$\chi^\alpha \equiv (\bar{\chi}^{\dot{\alpha}})^\star \tag{6.20}$$

Ορίζουμε τον Majorana σπίνορα Ψ_M ώστε

$$\Psi_M = \Psi_M^c \tag{6.21}$$

οπότε είναι

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

Επίσης, μπορούμε να 'ανεβοκατεβάσουμε' τους δείκτες ως:

$$\chi_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta}\chi^\beta \tag{6.23}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} \tag{6.24}$$

με

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.25}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -i\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.26}$$

οι πίνακες $\sigma^{\mu\nu}$ και $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ έχουν και αυτοί δείκτες:

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta \quad , \quad (\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} \tag{6.27}$$

και

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \quad , \quad (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} \tag{6.28}$$

Ακόμα μπορούμε να φτιάξουμε Lorentz αναλλοίωτες ποσότητες:

$$\chi^\alpha\psi_\alpha = -\chi_\alpha\psi^\alpha \tag{6.29}$$

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \tag{6.30}$$

καθώς και τετραδιανύσματα:

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)^{\alpha\dot{\alpha}}\psi_\alpha = \bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\psi^\alpha \tag{6.31}$$

$$\chi^{\alpha}(\sigma^{\mu})_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \chi_{\alpha}(\sigma^{\mu})^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \tag{6.32}$$

Τέλος μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα συνεπτυγμένο συμβολισμό:

$$\chi\psi \equiv \chi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \psi\chi \tag{6.33}$$

$$\bar{\chi}\bar{\psi} \equiv \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\bar{\chi} \tag{6.34}$$

6.2 Υπερσυμμετρική άλγεβρα

Όπως έχουμε αναφέρει θέλουμε να επεκτείνουμε την ομάδα Poincaré εισάγοντας έναν φερμιονκό γεννήτορα ο οποίος θα ικανοποιεί πέρα από τις σχέσεις μετάθεσης και σχέσεις αντιμετάθεσης. Για να το κάνουμε αυτό εισάγουμε έναν Weyl σπίνορα γεννήτορα Q_a. Για να βρούμε τις σχέσεις μετάθεσης έχουμε:
Η ποσότητα $[P^{\mu}, Q_{\alpha}]$ πρέπει να ισούται με κάποια σπινοριακή ποσότητα αφού ο P^{μ} ικανοποιεί σχέσεις μετάθεσης και ο Q_{α} ως σπίνορας σχέσεις αντιμετάθεσης.
Η μόνη πιθανότητα είναι:

$$[P^{\mu}, Q_{\alpha}] = c\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}} \tag{6.35}$$

παίρνοντας το ερμιτιανό συζηγές αυτής έχουμε:

$$\begin{aligned}
&Q^{\dagger}_{\alpha}P^{\mu} - P^{\mu}Q^{\dagger}_{\alpha} = c^{\star}\bar{Q}^{\dot{\beta}\dagger}\sigma^{\mu}_{\dot{\alpha}\beta} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\left(\bar{Q}^{\dot{\gamma}}P^{\mu} - P^{\mu}\bar{Q}^{\dot{\gamma}}\right) = c^{\star}Q^{\beta}\sigma^{\mu}_{\dot{\alpha}\beta} \\
&\Rightarrow \left(\bar{Q}^{\dot{\gamma}}P^{\mu} - P^{\mu}\bar{Q}^{\dot{\gamma}}\right) = c^{\star}\epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon^{\beta\delta}Q_{\delta}\sigma^{\mu}_{\dot{\alpha}\beta} \\
&\Rightarrow [P^{\mu}, \bar{Q}^{\dot{\gamma}}] = -c^{\star}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}\epsilon^{\beta\delta}Q_{\delta}\sigma^{\mu}_{\dot{\alpha}\beta} \\
&\Rightarrow [P^{\mu}, \bar{Q}^{\dot{\gamma}}] = -c^{\star}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\gamma}\delta}Q_{\delta}
\end{aligned} \tag{6.36}$$

από την ταυτότητα Jacobi παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
&[P^{\mu}, [P^{\nu}, Q_{\alpha}]] + [P^{\nu}, [Q_{\alpha}, P^{\mu}]] + [Q_{\alpha}, [P^{\mu}, P^{\nu}]] = 0 \\
&\Rightarrow c\sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\beta}}[P^{\mu}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}] - c\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}[P^{\nu}, \bar{Q}^{\dot{\beta}}] = 0 \\
&\Rightarrow -|c|^2\sigma^{\nu}_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\beta}\delta}Q_{\delta} + |c|^2\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\nu})^{\dot{\beta}\delta}Q_{\delta} = 0 \\
&\Rightarrow |c|^2(\sigma^{\nu}\bar{\sigma}^{\mu} - \sigma^{\mu}\bar{\sigma}^{\nu})^{\delta}_{\alpha}Q_{\delta} = 0 \\
&\Rightarrow c = 0
\end{aligned} \tag{6.37}$$

άρα

$$[P^{\mu}, Q_{\alpha}] = 0 \tag{6.38}$$

Θέλουμε τωρα να βρουμε τον μεταθέτη του Q_α και $M^{\mu\nu}$. Αρχικά χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο Q είναι σπίνορας:

$$Q'_\alpha = (e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}})^\beta_\alpha Q_\beta \simeq (1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})^\beta_\alpha Q_\beta \tag{6.39}$$

επίσης είναι και τελεστής:

$$Q'_\alpha = U(\Lambda)^\dagger Q_\alpha U(\Lambda) \quad , \quad U(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}} \tag{6.40}$$

οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
&(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})^\beta_\alpha Q_\beta = (1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu})Q_\alpha(1 - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}) \\
&\Rightarrow Q_\alpha - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(\sigma^{\mu\nu})^\beta_\alpha Q_\beta = Q_\alpha - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}Q_\alpha M^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}Q_\alpha + \mathcal{O}(\omega^2) \\
&\Rightarrow [Q_\alpha, M^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})^\beta_\alpha Q_\beta
\end{aligned} \tag{6.41}$$

και αντίστοιχα

$$[\bar{Q}^{\dot\alpha}, M^{\mu\nu}] = (\bar\sigma^{\mu\nu})^{\dot\alpha}_{\dot\beta}\bar{Q}^{\dot\beta} \tag{6.42}$$

Τέλος θέλουμε να βρούμε τις σχέσεις αντιμετάθεσης $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ και $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\}$. Οι αντιματεθέτες αυτοι θα πρέπει να ισούνται με ποσότητες που ικανοποιούν σχέσεις μετάθεσης.Οι μόνες πιθανότητες είναι:

$$\{Q_\alpha, Q^\beta\} = s(\sigma^{\mu\nu})^\beta_\alpha M_{\mu\nu} \tag{6.43}$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = t\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}P_\mu \tag{6.44}$$

το αριστερό μέλος της [6.43] μετατίθεται με τον P^μ ενώ το δεξί μέλος όχι,οπότε είναι $s = 0$.Για το t είμαστε ελεύθεροι να το επιλέξουμε οτιδήποτε, έτσι απο σύμβαση επιλέγουμε $t = 2$. Οπότε

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{Q_{\dot\alpha}, Q_{\dot\beta}\} = 0 \tag{6.45}$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}P_\mu \tag{6.46}$$

6.3 Υπεσυμμετρικές πολλαπλέτες

Αρχικά θα δείξουμε ότι μια υπερσυμμετρική αναπαράσταση περιέχει ίσο αριθμό φερμιονίων και μποζονίων.

Έστω ο τελεστής αρίθμησης (number operator) N_F ο οποίος αριθμεί τα φερμιόνια σε μια κατάσταση. Στην συνέχεια ορίζουμε τον τελεστή

$$(-1)^{N_F} \tag{6.47}$$

οποίος έχει ιδιοτιμές $+1$ σε μποζονικές καταστάσεις και -1 σε φερμιονικές. Επειδή ο Q_α αλλάζει τον αριθμό των φερμιονίων κατα μία μονάδα ισχύει:

$$(-1)^{N_F} Q_\alpha = -Q_\alpha (-1)^{N_F} \tag{6.48}$$

τότε για μια πεπερασμένης διάστασης αναπαράσταση της υπεσυμμετρικής άλγεβρας έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left((-1)^{N_F}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\}\right) &= \text{Tr}\left((-1)^{N_F} Q_\alpha \bar{Q}_{\dot\beta} + (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot\beta} Q_\alpha\right) \\ &= \text{Tr}\left((-1)^{N_F} Q_\alpha \bar{Q}_{\dot\beta} + \bar{Q}_{\dot\beta} Q_\alpha (-1)^{N_F}\right) \\ &= \text{Tr}\left(-Q_\alpha (-1)^{N_F} \bar{Q}_{\dot\beta} + \bar{Q}_{\dot\beta} Q_\alpha (-1)^{N_F}\right) \\ &= \text{Tr}\left(-\bar{Q}_{\dot\beta} Q_\alpha (-1)^{N_F} + -\bar{Q}_{\dot\beta} Q_\alpha (-1)^{N_F}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{6.49}$$

και από την [6.46] βρίσκουμε

$$\text{Tr}\left((-1)^{N_F} 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu\right) = 0 \tag{6.50}$$

ταυτοτικά.
Άρα

$$\text{Tr}\big((-1)^{N_F}\big) = 0 \Rightarrow n_B - n_F = 0 \tag{6.51}$$

όπου n_B, n_F ο αριθμός των μποζονίων και φερμιονίων αντίστοιχα. Μια άμεση συνέπεια της υπερσυμμετρικής άλγεβρας είναι:

$$[P^2, Q_\alpha] = 0 \tag{6.52}$$

$$[W^2, Q_\alpha] \neq 0 \tag{6.53}$$

Έτσι οι έμμαζες καταστάσεις που ανήκουν στην ίδια αναπαράσταση τις άλγεβρας θα είναι εκφυλισμένες στην μάζα αλλά θα έχουν διαφορετικά σπιν.Παρακάτω θα περιοριστούμε στην περίπτωση μηδενικής μάζας.
Διαλέγουμε το σύστημα $P^\mu = (E, 0, 0, E)$,όποτε:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu = 2(\sigma^0 P_0 - \sigma^3 P_3)_{\alpha\dot\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4E \end{pmatrix} \tag{6.54}$$

έτσι οι μόνοι μη μηδενικοί όροι είναι:

$$\{Q_2, \bar{Q}_{\dot{2}}\} = 4E \tag{6.55}$$

ορίζουμε:

$$\alpha^\dagger = \frac{1}{\sqrt{4E}} Q_2 \quad , \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{4E}} \bar{Q}_{\dot{2}} \tag{6.56}$$

τότε είναι:

$$\{\alpha, \alpha^\dagger\} = 1 \quad , \qquad \{\alpha, \alpha\} = \{\alpha^\dagger, \alpha^\dagger\} = 0 \tag{6.57}$$

οι α , $\alpha^\dagger$ δρούνε ως τελεστές δημιουργίας και καταστροφής.
Για τον μεταθέτη των τελεστών δημιουργίας/καταστροφής με τον J_3 έχουμε:

$$\begin{aligned}
[\alpha^\dagger, J_3] &= \frac{1}{\sqrt{4E}} [Q_2, \frac{1}{2}(M^{12} - M^{21})] \\
&= \frac{1}{2\sqrt{4E}} \left([Q_2, M^{12}] - [Q_2, M^{21}] \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{4E}} \left((\sigma^{12})_2^\beta Q_\beta - (\sigma^{21})_2^\beta Q_\beta \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{4E}} \frac{i}{4} (\sigma^1\sigma^2 - \sigma^2\sigma^1)_2^\beta Q_\beta \\
&= \frac{1}{2\sqrt{4E}} (\sigma^3)_2^2 Q_2 \\
&= -\frac{1}{2} \alpha^\dagger
\end{aligned} \tag{6.58}$$

αντίστοιχα έχουμε:

$$[\alpha, J_3] = \frac{1}{2} \alpha \tag{6.59}$$

Θέλουμε να βρούμε την ελικότητα της κατάστασης $\alpha^\dagger |p, \lambda\rangle$ οπότε:

$$\begin{aligned}
J_3 \alpha^\dagger |p, \lambda\rangle &= \left(\frac{1}{2} \alpha^\dagger + \alpha^\dagger J_3 \right) |p, \lambda\rangle \\
&= \frac{1}{2} \alpha^\dagger |p, \lambda\rangle + \alpha^\dagger \lambda |p, \lambda\rangle \\
&= \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \alpha^\dagger |p, \lambda\rangle
\end{aligned} \tag{6.60}$$

άρα η $\alpha^\dagger |p,\lambda\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση του J_3 με ιδιοτιμή $\lambda + \frac{1}{2}$.
Επίσης είναι:

$$\begin{aligned} J_3\alpha |p,\lambda\rangle &= \left(-\frac{1}{2}\alpha + \alpha J_3\right)|p,\lambda\rangle \\ &= -\frac{1}{2}\alpha |p,\lambda\rangle + \alpha\lambda |p,\lambda\rangle \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\alpha |p,\lambda\rangle \end{aligned} \tag{6.61}$$

οπότε η $\alpha |p,\lambda\rangle$ είναι ιδιοκατάσταση του J_3 με ιδιοτιμή $\lambda - \frac{1}{2}$.
Έτσι μπορούμε να ορίσουμε μια βασική κατάσταση $|\Omega\rangle = |p,\lambda\rangle$ τέτοια ώστε:

$$\alpha |\Omega\rangle = 0 \tag{6.62}$$

και

$$\alpha^\dagger |\Omega\rangle = \left|p,\lambda + \frac{1}{2}\right\rangle \tag{6.63}$$

και λόγω των σχέσεων αντιμετάθεσης [6.45] είναι:

$$\alpha^\dagger\alpha^\dagger |\Omega\rangle = 0 \tag{6.64}$$

οπότε μια υπερσυμμετρική πολλαπλέτα περιλαμβάνει τι καταστάσεις:

$$|p,\lambda\rangle \quad , \qquad \left|p,\lambda + \frac{1}{2}\right\rangle \tag{6.65}$$

και λαμβάντοντας υπόψιν και τις CPT-συζυγές καταστάσεις:

$$|p,\pm\lambda\rangle \quad , \qquad \left|p,\pm\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\right\rangle \tag{6.66}$$

Έτσι, έστω $\lambda = 0$.Τότε έχουμε ένα βαθμώτο (scalar) με $\lambda = 0$ και ένα φερμιόνιο με $\lambda = \frac{1}{2}$.Αυτή ονομάζεται χειραλική πολλαπλέτα (Chiral Multiplet).
Για παράδειγμα:

$\lambda = 0$ scalar	$\lambda = \frac{1}{2}$ fermion
squark ($\tilde{q}$)	quark (q)
slepton ($\tilde{l}$)	lepton (l)
Higgs (H)	Higgsino ($\tilde{H}$)

επίσης μπορούμε να έχουμε την διανυσματική πολλαπλέτα (Vector Multiplet) με $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\lambda = 1$.
Για παράδειγμα:

$\lambda = \frac{1}{2}$ fermion (gaugino)	$\lambda = 1$ boson
photino ($\tilde{\gamma}$)	photon (γ)
Wino ($\tilde{W}$)	W
Zino ($\tilde{Z}$)	Z

6.4 Ένα απλό υπερσυμμετρικό μοντέλο

Ο μικρότερος αριθμός φερμιονίων που μπορεί να έχει μια θεωρία πεδίου είναι ένας αριστερόστροφος Weyl σπίνορας ψ.Αφού έχει δυο βαθμούς ελευθερίας μπορούμε να επιλέξουμε ένα μιγαδικό βαθμωτό πεδίο σαν το υπερσυμμετρικό του 'ζευγάρι' (superpartner).Η πιο απλή δράση που μπορεί να γράψει κανείς για αυτά τα πεδία είναι:

$$S = \int d^4x(\mathscr{L}_{scalar} + \mathscr{L}_{fermion}) \tag{6.67}$$

όπου

$$\mathscr{L}_{scalar} = \partial^\mu \phi^\star \partial_\mu \phi \tag{6.68}$$

$$\mathscr{L}_{fermion} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi \tag{6.69}$$

και ονομάζεται άμαζο, ελεύθερο μοντέλο Wess-Zumino και περιλαμβάνει μια χειραλική πολλαπλέτα.
Επειδή ένας υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός αλλάζει ένα μποζόνιο σε φερμιόνιο τότε η αλλαγή στο ϕ θα είναι:

$$\delta\phi = \epsilon^\alpha \psi_\alpha = \epsilon\psi \tag{6.70}$$

και

$$\delta\phi^\star = \epsilon^\dagger \psi^\dagger \tag{6.71}$$

όπου το ϵ^α είναι ένας Weyl σπίνορας, μια απειροστή ποσότητα που παραμετροποιεί τον μετασχηματισμό και υπακούει σχέσεις αντιμετάθεσης.Ενδιαφερόμαστε για καθολική υπερσυμμετρία οπότε $\partial_\mu \epsilon^\alpha = 0$.Αντίστοιχα η αλλαγή στο ψ θα είναι:

$$\delta\psi_\alpha = -i(\sigma^\mu \epsilon^\dagger)_\alpha \partial_\mu \phi \tag{6.72}$$

$$\delta\psi^\dagger_{\dot{\alpha}} = i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}} \partial_\mu \phi^\star \tag{6.73}$$

οπότε:

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{L}_{scalar} &= \partial^\mu\phi^\star\partial_\mu\delta\phi + \partial^\mu\delta\phi^\star\partial_\mu\phi \\ &= \epsilon\partial^\mu\phi^\star\partial_\mu\psi + \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger\partial_\mu\phi \end{aligned} \tag{6.74}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathscr{L}_{fermion} &= i\delta\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\delta\psi \\
&= -\epsilon\sigma^\nu\partial_\nu\phi^\star\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \psi^\dagger\epsilon^\dagger\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu\partial_\mu\partial_\nu\phi \\
&= -2\epsilon\partial_\mu\psi\partial^\mu\phi^\star + \epsilon\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\partial_\mu\psi\partial_\nu\phi^\star \\
&\quad + 2\psi^\dagger\epsilon^\dagger\partial^\mu\partial_\mu\phi - \phi^\dagger\epsilon^\dagger\bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu\partial_\mu\partial_\nu\phi \\
&= -\epsilon\partial^\mu\phi^\star\partial_\mu\psi - \epsilon^\dagger\partial^\mu\psi^\dagger\partial_\mu\phi \\
&\quad + \partial_\mu(\epsilon\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu\psi\partial_\nu\phi^\star - \epsilon\psi\partial^\mu\phi^\star + \epsilon^\dagger\psi^\dagger\partial^\mu\phi)
\end{aligned} \tag{6.75}$$

όπουμε χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες:

$$[\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu]^\alpha_\beta = 2\eta^{\mu\nu}\delta^\beta_\alpha \tag{6.76}$$

$$[\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu]^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} = 2\eta^{\mu\nu}\delta^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}} \tag{6.77}$$

βλέπουμε ότι η αλλαγή στην συνολική Lagrangian είναι μια τέλεια παράγωγος άρα είναι:

$$\delta S = 0 \tag{6.78}$$

Γενικά θα μπορούσαμε να προσθέσουμε και άλλους όρους οι οποίοι να αφορούν την διανυσματική πολλαπλέτα, όρους αλληλεπίδρασης, κοκ, και να βρίσκουμε κατάλληλους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς ώστε η δράση να παραμένη αναλλοίωτη.Η διαδικασία αυτή όμως, γίνεται αρκετά δύσκολη.Έτσι στα επόμενα θα αναπτύξουμε έναν πιο συστηματικό τρόπο ώστε να φτιάχνουμε υπερσυμμετρικές θεωρίες.

Κεφάλαιο 7

Υπερπεδία

7.1 Εισαγωγή

Ένα σύνηθες πεδίο είναι μια συνάρτηση μόνο των χωροχρονικών συντεταγμένων x^μ .Ένα *υπερπεδίο (Superfield)* $S(x, \theta, \bar{\theta})$ είναι συνάρτηση των χωροχρονικών συντεταγμένων καθώς και των μεταλβητών *Grassmann (Grassmann variables)* $\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ οι οποίες μετασχηματίζονται ως Weyl σπίνορες και ικανοποιούν τις σχέσεις αντιμετάθεσης

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{7.1}$$

Ο χώρος πλέον $(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ ονομάζεται *υπερχώρος (superspace)*.
Τα πεδία που βρίσκονατι στις υπερσυμμετρικές πολλαπλέτες εμφανίζονατι ως συντελεστές στο ανάπτυγμα του $S(x, \theta, \bar{\theta})$ σε δυνάμεις των $\theta, \bar{\theta}$. Ένα γενικό υπερπεδίο όμως περιλαμβάνει και την χειραλική και την διανυσματική πολλαπλέτα, ετσι επιβάλλοντας συγκεκριμένους περιορισμούς ανακτούμε μια εκ των δυο.

7.2 Αναπαραστάσεις της υπερσυμμετρικής άλγεβρας στα υπερπεδία

Είδαμε ότι η άλγεβρα παράγεται από τους γεννήτορες $P_\mu, Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$[P^\mu, Q_\alpha] = [P^\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = [P^\mu, P^\nu] = 0 \tag{7.2}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{7.3}$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \tag{7.4}$$

Ένα πεπερασμένο στοιχείο της ομάδας γράφεται:

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = \exp\{(i(\theta Q + \bar{\theta}\bar{Q} - x^\mu P_\mu)\} \tag{7.5}$$

η σύνθεση δυο στοιχείων της ομάδας είναι και αυτή στοιχείο της ομάδας οπότε:

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta})G(\alpha^\mu, \xi, \bar{\xi}) = G(x'^\mu, \theta', \bar{\theta}') \tag{7.6}$$

άρα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\exp\{(i(\theta Q + \bar{\theta}\bar{Q} - x^\mu P_\mu)\} \exp\{(i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q} - \alpha^\mu P_\mu)\} \\
&= \exp\{i(\theta Q + \bar{\theta}\bar{Q} - x^\mu P_\mu + \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q} - \alpha^\mu P_\mu + \frac{1}{2}([\theta Q, \bar{\xi}\bar{Q}] + \cancelto{0}{[\theta Q, -\alpha^\mu P_\nu]} \\
&+ [\bar{\theta}\bar{Q}, \xi Q] + \cancelto{0}{[\bar{\theta}\bar{Q}, \bar{\xi}\bar{Q}]} + \cancelto{0}{[\bar{\theta}\bar{Q}, -\alpha^\nu P_\nu]} + \cancelto{0}{[-x^\mu P_\mu, \xi Q]} + \cancelto{0}{[-x^\mu P_\mu, \bar{\xi}\bar{Q}]} \\
&\qquad + \cancelto{0}{[-x^\mu P_\mu, -\alpha^\nu P_\nu]} + \cancelto{0}{[\theta Q, \xi Q]}))\}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση Hausdorff

$$e^A e^B = \exp\left\{A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \cdots\right\} \tag{7.7}$$

οι μη μηδενικοί μεταθέτες δίνουν

$$\begin{aligned}
[\theta Q, \bar{\xi}\bar{Q}] &= \theta Q \bar{\xi}\bar{Q} - \bar{\xi}\bar{Q}\theta Q \\
&= -\theta\bar{\xi}Q\bar{Q} - \theta\bar{\xi}\bar{Q}Q \\
&= -\theta\bar{\xi}\{Q, \bar{Q}\} \\
&= -2\theta\sigma^\mu\bar{\xi}P_\mu
\end{aligned} \tag{7.8}$$

$$[\bar{\theta}\bar{Q}, \xi Q] = -[\xi Q, \bar{\theta}\bar{Q}] = 2\xi\sigma^\mu\bar{\theta}P_\mu \tag{7.9}$$

οι υπόλοιποι μηδενίζονται λόγω των σχέσεων [7.2] - [7.4]. Άρα

$$G(x'^\mu, \theta', \bar{\theta}') = \exp\{i(-(x^\mu + \alpha^\mu - \xi\sigma^\mu\bar{\theta} + \theta\sigma^\mu\bar{\xi})P_\mu + (\theta + \xi)Q + (\bar{\theta} + \bar{\xi})\bar{Q})\} \tag{7.10}$$

έτσι ένας υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός αλλάζει τις συντεταγμένες του υπερχώρου:

$$x'^\mu = x^\mu + \alpha^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi} \tag{7.11}$$

$$\theta' = \theta + \xi \tag{7.12}$$

$$\bar{\theta}' = \bar{\theta} + \bar{\xi} \tag{7.13}$$

οπότε ο μετασχηματισμός στο υπερπεδίο θα δώσει:

$$G(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) S(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = S(x^\mu + \delta x^\mu, \theta + \delta\theta, \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}) \tag{7.14}$$

αναπτύσοντας το δεξί μελος σε Taylor παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
&S(x^\mu + \delta x^\mu, \theta + \delta\theta, \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}) \\
&\simeq S(x^\mu + \delta x^\mu, \theta + \delta\theta, \bar{\theta} + \delta\bar{\theta}) + \delta x^\mu \partial_\mu S + \delta\theta \partial_\theta S + \delta\bar{\theta}\partial^{\bar{\theta}} S \\
&= (\alpha^\mu - i\xi\sigma^\mu\bar{\theta} + i\theta\sigma^\mu\bar{\xi})\partial_\mu S + \xi^\alpha \frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \frac{\partial S}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \\
&= \alpha^\mu \frac{\partial S}{\partial x^\mu} - i\xi^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} + \theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} + \xi^\alpha \frac{\partial S}{\partial\theta^\alpha} - \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \frac{\partial S}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}
\end{aligned} \tag{7.15}$$

για ένα απειροστό μετασχηματισμό έχουμε:

$$\exp\{i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q} - a^\mu P_\mu)\} \simeq i + i\xi^\alpha Q_\alpha + i\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} - i\alpha^\mu P^\mu \tag{7.16}$$

συγκρίνοντας τις [7.15] και [7.16] βρίσκουμε:

$$P_\mu = -i\partial_\mu \tag{7.17}$$

$$iQ_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \tag{7.18}$$

$$i\bar{Q}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \tag{7.19}$$

Επίσης μπορύμε να ορίσουμε φερμιονικές παραγώγους που αντιμετατίθενται με τους γεννήτορες:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu \tag{7.20}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \partial_\mu \tag{7.21}$$

είναι

$$\begin{aligned}
\{D_\alpha, Q_\alpha\} &= \{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu, i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu\} \\
&= \cancelto{0}{\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\}} + \cancelto{0}{\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu\}} \\
&\quad + \cancelto{0}{\{i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu, \sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu\}} + \cancelto{0}{\{\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} \partial_\mu, i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.22}$$

επίσης

$$\begin{aligned}\{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= \{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - \theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\} \\ &= \cancelto{0}{\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\}} + \{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, -\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\} \\ &\quad + \{i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\} + \cancelto{0}{\{i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\}} \\ &= -\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\left(\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\right) + \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\left(\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu\right) \\ &= -\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu + \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \\ &= 0\end{aligned} \tag{7.23}$$

και

$$\begin{aligned}\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} &= \{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\} \\ &= \cancelto{0}{\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\}} - i\{\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}, \theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\} \\ &\quad - i\{\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu, \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}\} + \cancelto{0}{\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \theta^\alpha\}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu} \\ &= -i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \\ &= -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu\end{aligned} \tag{7.24}$$

αφού ισχύει:

$$\{\partial_\alpha, \partial_\beta\} = \{\partial_\theta, \partial^{\bar{\theta}}\} = \{\partial_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{7.25}$$

με τι ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε και τις υπόλοιπες σχέσεις οπότε συνοψίζοντας είναι:

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{7.26}$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{D}_{\dot{\beta}}\} = 0 \tag{7.27}$$

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \tag{7.28}$$

Κεφάλαιο 8

Χειραλικά Υπερπεδία

8.1 Εισαγωγή

Επειδή οι φερμιονικές παράγωγοι αντιμετατίθενται με τους γεννήτορες μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε ώστε να επιβάλλουμε συναλλοίωτους περιορισμούς. Ένα υπερπεδίο Φ στο οποίο επιβάλουμε τον περιορισμό

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \tag{8.1}$$

το ονομάζουμε *χειραλικό υπερπεδίο (Chiral Superfield)*.

8.2 Ανάπτυξη του χειραλικού υπερπεδίου στα συνιστώντα πεδία

Ορίζουμε την μεταβλητή:

$$y^{\mu} = x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta} \tag{8.2}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\dot{\alpha}}y^{\mu} &= \left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right)\left(x^{\mu} + i\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\right) \\ &= i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} \\ &= 0\end{aligned} \tag{8.3}$$

και

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\theta = \left(-\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu}\right)\theta = 0 \tag{8.4}$$

άρα η πιο γενική λυση της [8.1] είναι η μια συνάρτηση της μορφής $\Phi(y^\mu, \theta)$. Η ανάπτυξη σε δυνάμεις του θ θα σταματήσει αναγκαστικά στον όρο $\theta\theta$ λόγω των σχέσων αντιμετάθεσης [7.1]. Οπότε έχουμε:

$$\Phi(y^\mu, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \tag{8.5}$$

όπου ϕ, F έιναι βαθμωτά μιγαδικά πεδία και ψ αριστερόστροφος Weyl σπίνορας.Λόγω της ύπαρξης του αριστερόστροφου ψ , το Φ ονομάζεται και αριστερό χειραλικό υπερπεδιο (Left Chiral Superfield)
Αναπτύσοντας κατά Taylor γύρω από το x^μ τα συνιστώντα πεδία βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\phi(y) &\simeq \phi(x) + (x + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta} - x)\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu\partial_\mu\phi \\ &= \phi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta}\partial_\nu\partial_\mu\phi \\ &= \phi(x) + i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu\phi \end{aligned} \tag{8.6}$$

όπου κάναμε χρήση της ταυτότητας:

$$\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \tag{8.7}$$

επίσης

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\theta\psi(y) &\simeq \sqrt{2}\theta\psi(x) + i\sqrt{2}\theta^\alpha\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\partial_\mu\psi_\alpha \\ &= \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} \end{aligned} \tag{8.8}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε:

$$\theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}(\theta\theta)\epsilon^{\alpha\beta} \tag{8.9}$$

και

$$\theta\theta F(y) = \theta\theta F(x) \tag{8.10}$$

όπου όροι μεγαλύτερης τάξης από $\theta\theta$ μηδενίζονται.
Και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}\Phi(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = \phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F + i\partial_\mu\phi\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \\ - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu\phi \end{aligned} \tag{8.11}$$

το συζυγές υπερπεδίο $\Phi^\dagger$ είναι:

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = \phi^\dagger + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \bar{\theta}\bar{\theta}F^\dagger + i\partial_\mu\phi^\dagger\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) \\ + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi^\dagger\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \end{aligned} \tag{8.12}$$

και ικανοποιεί τον περιορισμό

$$D_\alpha \Phi^\dagger = 0 \tag{8.13}$$

και αναφέρεται ως δεξιό χειραλικό υπερπεδίο (Right Chiral Superfield) λόγω της ύπαρξης του δεξιόστροφου Weyl σπίνορα $\bar{\psi}$. Κάτω από έναν απειροστό υπερσυμμετρικό μετασχηματισμό το Φ γίνεται

$$\Phi \to \Phi + \delta\Phi \tag{8.14}$$

όπου

$$\delta\Phi = i(\xi Q + \bar{\xi}\bar{Q})\Phi \tag{8.15}$$

οπότε είναι:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &= \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \right) \Phi + \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \right) \Phi \\
&= \xi^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \right) (\phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F + i\partial_\mu\phi\theta\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu\phi) \\
&+ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_\mu \right) (\phi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F + i\partial_\mu\phi\theta\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu\phi)
\end{aligned} \tag{8.16}$$

οι παράγωγοι ως προς τις μεταβλητές Grassmann είναι:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\phi) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\sqrt{2}\theta\psi) = \sqrt{2}\psi \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(\theta\theta F) = 2\theta_\alpha F \\
&\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(i\partial_\mu\phi\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) = i\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\phi \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(-\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta}) = -\frac{2i}{\sqrt{2}}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu\psi \\
&\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}(-\frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}) = -\frac{1}{2}\theta_\alpha\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu\phi \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}(-\frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta}) = \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\sigma}^\mu\theta\theta\partial_\mu\psi \\
&\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}(i\partial_\mu\phi\theta\sigma^\mu\bar{\theta}) = -i\bar{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu\phi \quad , \quad \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}}(-\frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}) = -\frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\theta\partial_\mu\partial^\mu\phi
\end{aligned}$$

εκτελώντας και τις υπόλοιπες πράξεις βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\delta\Phi &= i\left(\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} - \xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\xi\psi + i\sqrt{2}\left(\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} - \xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)\theta\partial_\mu\psi \\
&+ 2\xi\theta F - i\xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta\theta\partial_\mu F + i\left(\xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}\right)\partial_\mu\phi \\
&+ \left(\theta^\alpha\sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} - \xi^\alpha\sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right)\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\nu\partial_\mu\phi - \frac{2}{\sqrt{2}}\xi\theta\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} \\
&- \xi^\alpha\sigma^\nu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta\theta\partial_\nu\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\sigma^\mu\bar{\xi}\theta\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}\xi\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}\bar{\xi}\bar{\theta}\theta\theta\partial_\mu\partial^\mu\phi
\end{aligned} \tag{8.17}$$

εξισώνοντας τους συντελεστές των μεταβλητών Grassmann της παραπάνω έκφρασης με αυτούς της

$$\delta\Phi = \delta\phi + \sqrt{2}\theta\delta\psi + \theta\theta\delta F \tag{8.18}$$

βρίσκουμε των μετασχηματισμό των πεδίων:

$$\delta\phi = \sqrt{2}\xi\psi \tag{8.19}$$

$$\delta\psi = \sqrt{2}\xi F + i\sqrt{2}\partial_\mu\phi\sigma^\mu\bar{\xi} \tag{8.20}$$

$$\delta F = i\sqrt{2}\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\xi} \tag{8.21}$$

όπου παρατηρούμε ότι η αλλαγή στο πεδίο F είναι μια τέλεια παράγωγος.

8.3 Γινόμενα χειραλικών υπερπεδίων

Για την κατασκευή υπερσυμμετρικών Lagrangians είναι σημαντικό να μελετήσουμε γινόμενα των χειραλικών υπερπεδίων της μορφής $\Phi_i\Phi_j$, $\Phi_i\Phi_j\Phi_k$, $\Phi_i^\dagger\Phi_j$,όπου οι δείκτες ξεχωρίζουν τα διαφορετικά χειραλικά υπερπεδία στην θεωρία. Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\Phi_i(y,\theta)\Phi_j(y,\theta) &= (\phi_i + \sqrt{2}\theta\psi_i + \theta\theta F_i)(\phi_j + \sqrt{2}\theta\psi_j + \theta\theta F_j)\\ &= \phi_i\phi_j + \sqrt{2}\theta\phi_i\psi_j + \theta\theta\phi_i F_j + \sqrt{2}\theta\psi_i\phi_j\\ &\quad + 2\theta\psi_i\theta\psi_j + \theta\theta F_i\phi_j + \theta\theta F_i\phi_j\\ &= \phi_i\phi_j + \sqrt{2}\theta(\psi_i\phi_j + \phi_i\psi_j) + \theta\theta(\phi_i F_j + \phi_j F_i - \psi_i\psi_j)\end{aligned} \tag{8.22}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα

$$\theta\psi_i\theta\psi_j = -\frac{1}{2}\theta\theta\psi_i\psi_j \tag{8.23}$$

$$\begin{aligned}\Phi_i(y,\theta)\Phi_j(y,\theta)\Phi_k(y,\theta) &= \phi_i\phi_j\phi_k + \sqrt{2}\theta\phi_i\phi_j\psi_k + \theta\theta\phi_i\phi_j F_k\\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi_i\phi_j\phi_k + 2\theta\psi_i\phi_j\theta\psi_k + \sqrt{2}\theta\phi_i\psi_j\phi_k\\ &\quad + 2\theta\phi_i\psi_j\theta\psi_k + \theta\theta\phi_i F_j\phi_k + \theta\theta\phi_j F_i\phi_k - \theta\theta\psi_i\psi_j\phi_k\\ &= \phi_i\phi_j\phi_k + \sqrt{2}\theta(\phi_i\phi_j\psi_k + \psi_i\phi_j\phi_k + \phi_i\psi_j\phi_k)\\ &\quad + \theta\theta(\phi_i\phi_j F_k + \phi_i F_j\phi_k + \phi_j F_i\phi_k - \psi_i\psi_j\phi_k - \psi_i\psi_k\phi_j - \psi_j\psi_k\phi_i)\end{aligned} \tag{8.24}$$

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger(y,\theta)\Phi(y,\theta) =&\psi^\dagger\psi + \sqrt{2}\theta\phi^\dagger\psi + \theta\theta\phi^\dagger F + \sqrt{2}\bar{\theta}\psi^\dagger\phi + 2\bar{\theta}\theta\psi^\dagger\psi \\ &+ \sqrt{2}\bar{\theta}\theta\theta\psi^\dagger F + \bar{\theta}\bar{\theta}F^\dagger\phi + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta F^\dagger\psi + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta F^\dagger F \end{aligned} \tag{8.25}$$

Ειδικής σημασίας είναι ο συντελεστής του $\theta\theta$ στην ανάπτυξη των $\Phi_i(x,\theta,\bar{\theta})\Phi_j(x,\theta,\bar{\theta})$ και $\Phi_i(x,\theta,\bar{\theta})\Phi_j(x,\theta,\bar{\theta})\Phi_k(x,\theta,\bar{\theta})$, ο οποίος ονομάζεται όρος-F (F-term) και συμβολίζεται με $[\Phi_i\Phi_j]_F$.
Είναι:

$$\begin{aligned}[\Phi_i\Phi_j]_F &= [\Phi(x,\theta,\bar{\theta})_i\Phi_j(x,\theta,\bar{\theta})]_{\textit{coeff. of } \theta\theta} \\ &= \phi_i(x)F_j(x) + \phi_j(x)F_i(x) - \psi_i(x)\psi_j(x)\end{aligned} \tag{8.26}$$

$$\begin{aligned}[\Phi_i\Phi_j\Phi_k]_F &= [\Phi(x,\theta,\bar{\theta})_i\Phi_j(x,\theta,\bar{\theta})\Phi_k(x,\theta,\bar{\theta})]_{\textit{coeff. of } \theta\theta} \\ &= \phi_i\phi_jF_k + \phi_iF_j\phi_k + \phi_jF_i\phi_k - \psi_i\psi_j\phi_k - \psi_i\psi_k\phi_j - \psi_j\psi_k\phi_i\end{aligned} \tag{8.27}$$

Για να βρούμε τον όρο-F, απλά θέσαμε στα αναπτύγματα $[\Phi_i(y,\theta)\Phi_j(y,\theta)]_F$ και $[\Phi_i(y,\theta)\Phi_j(y,\theta)\Phi_k(y,\theta)]_F$ των σχέσεων [8.22] , [8.24] όπου $y = x$. Ο λόγος είναι ότι μόνο ο πρώτος όρος του αναπτύγματος $\Phi(x,\theta,\bar{\theta})$ συνεισφέρει στον όρο-F καθώς οι υπόλοιποι όροι θα δώσουν τουλάχιστον ένα $\bar{\theta}$.
Επίσης σημαντικός είναι ο συντελεστής του $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ στην ανάπτυξη του $\Phi^\dagger(x,\theta,\bar{\theta})\Phi(x,\theta,\bar{\theta})$ και ο οποίος ονομάζεται όρος-D (D-term). Είναι:

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger(x,\theta,\bar{\theta})_i\Phi(x,\theta,\bar{\theta})_j &= (\phi_i^\dagger + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}_i + \bar{\theta}\bar{\theta}F_i^\dagger + i\partial_\mu\phi_i^\dagger\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \\ &\quad + \frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi_i^\dagger\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}) \\ &\quad \times (\phi_j + \sqrt{2}\theta\psi_j + \theta\theta F_j + i\partial_\mu\phi_j\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\partial_\mu\psi_j\sigma^\mu\bar{\theta} - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial_\mu\partial^\mu\phi_j) \\ &= -\frac{1}{4}\phi_i^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\phi_j\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} - i\bar{\theta}\bar{\psi}_i\theta\theta\partial_\mu\psi_j\sigma^\mu\bar{\theta} \\ &\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\theta F_i^\dagger F_j + \partial_\mu\phi_i^\dagger\partial_\mu\phi_j\theta\sigma^\mu\theta\sigma^\nu\bar{\theta} \\ &\quad + i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}_i\theta\psi_j - \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi_i^\dagger\phi_j\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} + \cdots\end{aligned} \tag{8.28}$$

χρησιμοποιώντας τις σχέσεις

$$\theta^\alpha\theta_\beta = \frac{1}{2}\theta\theta\delta^\alpha_\beta \tag{8.29}$$

$$\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\theta\sigma^\nu\bar{\theta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta} \tag{8.30}$$

και

$$\chi\sigma^{\mu}\bar{\psi} = -\bar{\psi}\bar{\sigma}^{\mu}\chi \tag{8.31}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi^{\dagger}(x,\theta,\bar{\theta})\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(&F_i^{\dagger}F_j + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi_i^{\dagger}\partial^{\mu}\phi_j \\ &- \frac{1}{4}\phi_i^{\dagger}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi_j - \frac{1}{4}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi_i^{\dagger}\phi_j \\ &+ \frac{i}{2}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_j - \frac{1}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^{\mu}\psi_j) + \cdots\end{aligned} \tag{8.32}$$

άρα

$$\begin{aligned}[\Phi_i^{\dagger}\Phi_j]_D &= [\Phi^{\dagger}(x,\theta,\bar{\theta})\Phi(x,\theta,\bar{\theta})]_{\textit{coeff. of } \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &= F_i^{\dagger}F_j + \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi_i^{\dagger}\partial^{\mu}\phi_j - \frac{1}{4}\phi_i^{\dagger}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi_j - \frac{1}{4}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\phi_i^{\dagger}\phi_j \\ &\quad + \frac{i}{2}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi_j - \frac{i}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^{\mu}\psi_j\end{aligned} \tag{8.33}$$

8.4 Υπερσυμμετρική Lagrangian

Για να κατασκευάσαουμε υπερσυμμετρικές Lagrangians είναι σημαντικό να χρησιμοποιήσουμε όρους οι οποίοι είναι αναλλοίωτοι (ή μέχρι κάποια τέλεια παράγωγο) σε υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Όπως είδαμε, [8.21], η μεταβολή του όρου-F είναι μια τέλεια παράγωγος, όπως επίσης και η μεταβολή του όρου-D. Έτσι γενικά μια υπερσυμμετρική Lagrangian είναι της μορφής:

$$\mathscr{L} = \sum_i [\Phi_i^{\dagger}\Phi_i]_D + [W(\Phi)]_F + h.c. \tag{8.34}$$

όπου το $W(\Phi)$ λέγεται *υπερδυναμικό (superpotential)* και έχει την μορφή

$$W(\Phi) = \frac{1}{2}m_{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{3}\lambda_{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \tag{8.35}$$

με m_{ij}, λ_{ijk} πραγματικοί και συμμετρικοί στους δείκτες τους.
Εξαιρώντας τους επιφανειακούς όρους μπορούμε να γράψουμε την Lagrangian ως προς τα συνιστώντα πεδία:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} =&\partial_{\mu}\phi^{\dagger}\partial^{\mu}\phi + i\bar{\psi}_i\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi + F_iF_i^{\dagger} \\ &+ (m_{ij}\phi_iF_j - \frac{1}{2}m_{ij}\psi_i\psi_j + \lambda_{ijk}\phi_i\phi_jF_k - \lambda_{ijk}\psi_i\psi_j\phi_k + h.c)\end{aligned} \tag{8.36}$$

Οι εξισώσεις πεδίων για τα ϕ, ψ είναι:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi_i = m_{ij} F_j^\dagger + 2\lambda_{ijk} \phi_j^\dagger F_k^\dagger \tag{8.37}$$

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_j = -m_{ij} \bar{\psi}_j - 2\lambda_{ijk} \bar{\psi}_j \phi_k^\dagger \tag{8.38}$$

ενώ οι εξισώσεις των πεδίων που προκύπτουν για τα F είναι

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial F_i^\dagger} = 0 \Rightarrow F = -m_{ij}\phi_i^\dagger - \lambda_{ijk}\phi_j^\dagger \phi_k^\dagger \tag{8.39}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial F_i} = 0 \Rightarrow F^\dagger = -m_{ij}\phi_i - \lambda_{ijk}\phi_j \phi_k = -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \tag{8.40}$$

με $W(\phi)$ είναι το υπερδυναμικό όπου έχουμε αντικαταστήσει όπου Φ_i το ϕ_i. Η εξίσωση αυτή μας λέει ότι τα πεδία F_i είναι βοηθητικά πεδία (auxiliary fields) και μπορούν να απαλειφθούν.
Έτσι η Lagrangian μπορεί να γραφεί ως προς τα δυναμικά πεδία ϕ, ψ:

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi_i^\dagger \partial^\mu \phi_i + i\bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i - \left(\frac{1}{2} m_{ij} \psi_i \psi_j + \lambda_{ijk} \psi_i \psi_j \phi_k + h.c \right) - \mathscr{V} \tag{8.41}$$

όπου το δυναμικό $\mathscr{V}$ είναι:

$$\mathscr{V} = F_i^\dagger F_i \equiv |F_i|^2 \tag{8.42}$$

είναι $\mathscr{V} \geq 0$, οπότε για $F_i = 0$ το δυναμικό παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Επίσης είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι:

$$-\frac{1}{2} m_{ij} - \lambda_{ijk}\phi_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \tag{8.43}$$

οπότε οι μάζες των φερμιονίων καθορίζονται από το υπερδυναμικό.

Κεφάλαιο 9

Αυθόρμητο Σπάσιμο Υπερσυμμετρίας

9.1 Εισαγωγή

Στην Φύση δεν παρατηρούμε μποζόνια να συνοδεύονται από φερμιόνια και αντίστροφα, εκφυλισμένα στην μάζα.'Ετσι για για είναι η υπερσυμμετρία ρεαλιστική πρέπει να είναι σπασμένη.Για να έχουμε αυθόρμητο σπάσιμο θα πρέπει η κατάσταση του κενού να μην μηδενίζεται από τους γεννήτορες της υπερσυμμετρίας:

$$Q_\alpha |0\rangle \neq 0 \quad \text{ή} \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} |0\rangle \neq 0 \tag{9.1}$$

όμως, οι σχέσεις αυτές έχουν συνέπειες για την ενέργεια της βασικής κατάστασης οι οποίες προκύπτουν από την υπερσυμμετρική άλγεβρα.
Είναι

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \Rightarrow P^\nu = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}\alpha}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} \tag{9.2}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{9.3}$$

Έτσι η Hamiltonian είναι

$$H \equiv P^0 = \frac{1}{4}(Q_1\bar{Q}_{\dot{1}} + \bar{Q}_{\dot{1}}Q_1 + Q_2\bar{Q}_{\dot{2}} + \bar{Q}_{\dot{2}}Q_2) \tag{9.4}$$

οπότε ισχύει

$$\langle\Psi| H |\Psi\rangle \geq 0 \tag{9.5}$$

για κάθε κατάσταση $|\Psi\rangle$.
Η τελευταία σχέση μας λέει ότι οι καταστάσεις με μηδενική αναμενόμενη τιμή για

την ενέργεια είναι βασικές καταστάσεις, επίσης είναι και υπερσυμμετρικές:

$$\langle 0|\, H\, |0\rangle = 0 \overset{9.4}{\Rightarrow} Q_\alpha\, |0\rangle = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\, |0\rangle = 0 \tag{9.6}$$

Έτσι, βασικές καταστάσεις με μηδενική ενέργεια διατηρούν την υπερσυμμετρία, ενώ αυτές με θετική ενέργεια την σπάνε αυθόρμητα.
Για ένα υπερσυμμετρκό μοντέλο το οποίο περιέχει μόνο χειραλικά υπερπεδία το δυναμικό είναι $\mathscr{V} = F_i^\dagger F_i$ όπου το F_i δίνεται από

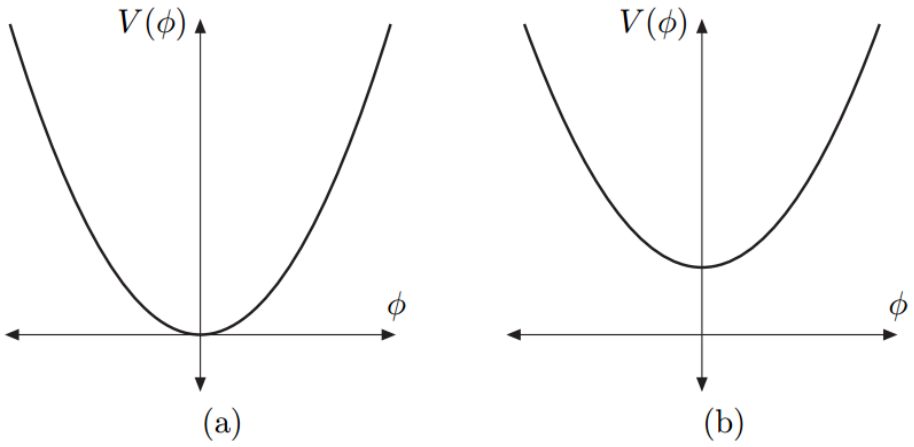
$$F_i^\dagger = -m_{ij}\phi_i - \lambda_{ijk}\phi_j\phi_k \tag{9.7}$$

και για να έχουμε αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας πρέπει

$$\langle 0|\, F_i\, |0\rangle \neq 0 \tag{9.8}$$

και ονομάζεται *σπάσιμο όρου-F (F-term breaking)*. Η κατάσταση αυτή περιγράφεται στο παρακάτω σχήμα.

Λόγω ότι οι γεννήτορες είναι φερμιονικοί, όταν το αυθόρμητο σπάσιμο της υπερσυμμετρίας συμβεί, περιμένουμε την εμφάνιση ενός άμαζου φερμιονίου Goldstone (*Goldstino*) κατ' αναλογία με την εμφάνιση του μποζονίου Goldstone όταν έχουμε αυθόρμητο σπάσιμο σε συνήθεις καθολικές συμμετρίες. Όταν το βοηθητικό πεδίο F_i αποκτήσει αναμενόμενη τιμή κενού το φερμιόνιο Goldstone θα είναι ο σπίνορας ψ_i στην υπερπολλαπλέτα του Φ_i στην οποία ανήκει το F_i.



Σχήμα 9.1: Η βασική κατάσταση στο (a) διατηρεί την υπερσυμμετρία ενώ στο (b) την σπάει αυθόρμητα

9.2 Το μοντελο O'Raifeartaigh

Το πιο απλό μοντέλο περιλαμβάνει τρία χειραλικά υπερπεδία Φ_1, Φ_2, Φ_3 και το υπερδυναμικό είναι της μορφής

$$W(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) = \lambda_1 \Phi_1 (\Phi_3^2 - M^2) + \mu \Phi_2 \Phi_3 \tag{9.9}$$

για τα πεδία F_i έχουμε

$$-F_1^\dagger = \frac{\partial W}{\partial \phi_1} = \lambda_1 (\phi_3^2 - M^2) \tag{9.10}$$

$$-F_2^\dagger = \frac{\partial W}{\partial \phi_2} = \mu \phi_3 \tag{9.11}$$

$$-F_3^\dagger = \frac{\partial W}{\partial \phi_3} = 2\lambda_1 \phi_1 \phi_3 + \mu \phi_2 \tag{9.12}$$

παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει λύση ώστε τα F_1, F_2, F_3 να είναι όλα μηδέν. Έτσι η υπερσυμμετρία σπάει αυθόρμητα.
Το δυναμικό $\mathscr{V}$ είναι

$$\mathscr{V} = \sum_{i=1}^{3} |F_i|^2 = \lambda_1^2 |\phi_3^2 - M^2|^2 + \mu^2 |\phi_3|^2 + |\mu \phi_2 + 2\lambda_1 \phi_1 \phi_3|^2 \tag{9.13}$$

για $M^2 < \mu^2 / 2\lambda_1^2$ ισχύει $\mathscr{V} > 0$ και το ελάχιστο του δυναμικού συμβαίνει για

$$\langle \phi_2 \rangle = \langle \phi_3 \rangle = 0 \tag{9.14}$$

ενώ το $\langle \phi_1 \rangle$ είναι αυθαίρετο. Το ϕ_1 ονομάζεται επίπεδη κατεύθυνση (flat direction) του δυναμικού καθώς μπορούμε να μεταβάλουμε την τιμή του βαθμωτού πεδίου και να παραμένουμε στο ελάχιστο του δυναμικού. Οι αναμενόμενες τιμές κενού για τα βοηθητικά πεδία είναι:

$$F_2^\dagger = F_3^\dagger = 0 \qquad F_1^\dagger = \lambda_1 M^2 \tag{9.15}$$

και το ελάχιστο του δυναμικού

$$\mathscr{V}_{min} = \lambda_1^2 M^4 > 0 \tag{9.16}$$

Η μάζα των φερμιονίων δίνεται από τον όρο της Lagrangian της σχέσης [8.41]

$$\mathscr{L}_m^F = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \psi_i \psi_j \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{9.17}$$

όπου

$$W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \lambda_1 \phi_1 (\phi_3^2 - M^2) + \mu \phi_2 \phi_3 \tag{9.18}$$

και υπολογίζεται στις αναμενόμενες τιμές κενού των ϕ_i

$$\left. \frac{\partial^2 W}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi_1 = \langle \phi_1 \rangle, \phi_2 = 0, \phi_3 = 0} \tag{9.19}$$

Υπολογίζοντας τις παραγώγους προκύπτει ότι οι μόνες μη μηδενικές τιμές των m_{ij} και λ_{ijk} είναι

$$m_{23} = m_{32} = \mu \tag{9.20}$$

$$\lambda_{133} = \lambda_{313} = \lambda_{331} = \lambda_1 \tag{9.21}$$

έτσι η $\mathscr{L}_m^F$ γράφεται:

$$\mathscr{L}_m^F = -\frac{1}{2}(2\mu \psi_2 \psi_3 + 2\lambda_1 \langle \phi_1 \rangle \psi_3^2 + h.c.) \tag{9.22}$$

Το ψ_1 είναι άμαζο-όπως και περιμέναμε-και αποτελεί το Goldstino , ενώ υπάρχουν και δυο έμμαζοι συνδυασμοί των ψ_2, ψ_3. Μπορούμε για απλότητα να θέσουμε

$$\langle \phi_1 \rangle = 0 \tag{9.23}$$

έτσι έχουμε δυο Weyl σπίνορες ψ_2, ψ_3 με μάζα μ. Ορίζοντας

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \bar{\psi}_3 \end{pmatrix} \tag{9.24}$$

είναι

$$\mathscr{L}_m^F = -\mu \bar{\Psi} \Psi \tag{9.25}$$

που αντιστοιχεί σε έναν Dirac σπίνορα με μάζα μ.
Οι μάζες των μποζονίων βρίσκονται στο δυναμικό $\mathscr{V}$ αφού μεταθέσουμε τα πεδία ως προς τις αναμενόμενες τιμές κενού τους:

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &= \lambda_1^2 |\phi_3^2 - M^2|^2 + \mu^2 |\phi_3|^2 + |\mu \phi_2 + 2\lambda_1 \phi_1 \phi_3|^2 \\ &= \lambda_1^2 (\phi_3 \phi_3^\dagger)^2 - M^2 \lambda_1^2 \phi_3^2 - M^2 \lambda_1^2 {\phi_3^\dagger}^2 + \lambda_1^2 M^4 + \mu^2 \phi_3 \phi_3^\dagger \\ &\quad + \mu^2 \phi_2 \phi_2^\dagger + 2\mu \lambda_1 \phi_1^\dagger \phi_3 \phi_2 + 2\mu \lambda_1 \phi_1 \phi_3^\dagger \phi_2^\dagger + 4\lambda_1^2 \phi_1 \phi_1^\dagger \phi_3 \phi_3^\dagger \end{aligned} \tag{9.26}$$

κάνοντας τις μεταθέσεις των πεδίων και χρησιμοποιώντας τις τιμές

$$\langle \phi_1 \rangle = \langle \phi_2 \rangle = \langle \phi_3 \rangle = 0 \tag{9.27}$$

βρίσκουμε ότι οι όροι μάζας των μποζονίων είναι:

$$\mathscr{L}_m^B = \lambda_1^2 M^2(\phi_3^2 + (\phi_3^\dagger)^2) - \mu^2(\phi_2^\dagger\phi_2 + \phi_3^\dagger\phi_3) \tag{9.28}$$

θεωρώντας

$$\phi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 + ib_3) \tag{9.29}$$

όπου a_3, b_3 πραγματικά βαθμωτά πεδία, η $\mathscr{L}_m^B$ γίνεται

$$\mathscr{L}_m^B = -\frac{1}{2}(\mu^2 - 2\lambda_1^2 M^2)a_3^2 - \frac{1}{2}(\mu^2 + 2\lambda_1^2 M^2)b_3^2 - \mu^2\phi_2^\dagger\phi_2 \tag{9.30}$$

Έτσι το βαθμωτό μιγαδικό πεδίο ϕ_1 είναι άμαζο, το ϕ_2 έχει μάζα μ και τα πραγματικά πεδία a_3 και b_3 έχουν μάζες

$$m_{a_3}^2 = \mu^2 - 2\lambda_1^2 M^2 \tag{9.31}$$

και

$$m_{b_3}^2 = \mu^2 + 2\lambda_1^2 M^2 \tag{9.32}$$

Οπότε τα ϕ_1, ϕ_2 είναι εκφυλισμένα στην μάζα με τα υπερσυμμετρικά ζευγάρια τους ψ_1 και ψ_2 ενώ το σπάσιμο της υπερσυμμετρίας φαίνεται στο γεγονός ότι οι μάζες των πεδίων a_3 και b_3 είναι διαφορετικές από την μάζα του υπερσυμμετρικού τους ζευγαριού ψ_3.

9.3 Υπερίχνος

Από τις [9.31], [9.32] παρατηρούμε ότι

$$m_{a_3}^2 + m_{b_3}^2 = 2\mu^2 = 2m_{\psi_3}^2 \tag{9.33}$$

όπως και στην περίπτωση όπου η υπερσυμμετρία δεν είναι σπασμένη.Αυτό είναι μια ειδίκη περίπτωση για θεωρίες που περιέχουν χειραλικά υπερπεδία.
Ορίζουμε το Υπερίχνος (Supertrace):

$$STr(M^2) = \sum_J (-1)^{2J}(2J+1)m_J^2 \tag{9.34}$$

όπου το άθροισμα γίνεται ως προς τα φυσικά πεδία και J το σπιν του πεδίου. Όταν υπάρχουν μόνο χειραλικά υπερπεδία, υπάρχουν μόνο βαθμωτά πεδία και σπίνορες και έτσι το άθροισμα γίνεται

$$STr(M^2) = \sum_{scalars} m^2 - 2\sum_{spinors} m^2 \tag{9.35}$$

Σε υπερσυμμετρικές θεωρίες το υπερίχνος μηδενίζεται καθώς για κάθε έναν Weyl σπίνορα μάζας m υπάρχουν δυο πραγματικά βαθμωτά (ένα μιγαδικό) με την ίδια μάζα.Το υπερίχνος, όμως, μηδενίζεται και σε θεωρίες με σπασμένη υπερσυμμετρία με σπάσιμο όρου-F.
Αυτό μπορούμε να το δούμε στο προηγούμενο μοντέλο όπου καταλήξαμε με έξι βαθμωτά πεδία (τρία μιγαδικά) με μάζες (τετράγωνα) :

$$0,\ \ 0,\ \ \mu^2,\ \ \mu^2,\ \ \mu^2 - 2\lambda_1^2 M^2,\ \ \mu^2 + 2\lambda_1^2 M^2$$

και τρία φερμιόνια με μάζες (τετράγωνα) :

$$0,\ \ 2,\ \ \mu^2 \tag{9.36}$$

οπότε

$$STr(M^2) = \sum_{scalars} m^2 - 2 \sum_{spinors} m^2 = 4\mu^4 - 4\mu^4 = 0 \tag{9.37}$$

Παράρτημα Α΄

Λογισμός μεταβλητών Grassmann

Εδώ θα δώσουμε κάποια βασικά στοιχεία παραγώγισης ως προς τις μεταβλητές Grassmann.
Θεωρούμε τι μεταβλητές

$$\theta_1, \quad \bar{\theta}_{\dot{1}}, \quad \theta_2, \quad \bar{\theta}_{\dot{2}}$$

ανεξάρτητες. Οπότε

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_1} = 1 \tag{Α΄.1}$$

και

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \theta_{\dot{2}}}{\partial \theta_1} = \frac{\partial \theta_{\dot{1}}}{\partial \theta_1} = 0 \tag{Α΄.2}$$

επίσης

$$\begin{aligned} \theta^1 &= \theta_2 \quad \theta^2 = -\theta_1 \\ \bar{\theta}^{\dot{1}} &= \bar{\theta}_{\dot{2}} \quad \bar{\theta}^{\dot{2}} = -\bar{\theta}_{\dot{1}} \end{aligned} \tag{Α΄.3}$$

κατά συνέπεια

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial \theta_1} = 0 \quad \frac{\partial \theta^2}{\partial \theta_1} = -1 \tag{Α΄.4}$$

ακόμη

$$\frac{\partial}{\partial \theta_1}(\theta_2 \theta_1) = -\theta_2 \tag{Α΄.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^\alpha}(\theta \cdot \theta) = 2\theta_\alpha \tag{Α΄.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}(\theta \cdot \theta) = -2\theta^\alpha \tag{Α΄.7}$$

Παράρτημα Β΄

Χρήσιμες ταυτότητες

Εδώ θα δώσουμε κάποιες χρήσιμες ταυτότητες που αφορούν τους Weyl σπίνορες. Για τις συνιστώσες ενός Weyl σπίνορα έχουμε

$$\chi^1 = \chi_2 \quad \chi^2 = -\chi_1 \tag{Β΄.1}$$

$$\bar{\chi}^{\dot{1}} = \bar{\chi}_{\dot{2}} \quad \bar{\chi}^{\dot{2}} = -\bar{\chi}_{\dot{1}} \tag{Β΄.2}$$

για γινόμενα δύο Weyl σπινόρων

$$\chi \cdot \psi = \chi^\alpha \psi_\alpha = \chi_2 \psi_1 - \chi_1 \psi_2 \tag{Β΄.3}$$

$$\bar{\chi} \cdot \bar{\psi} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\chi}_{\dot{2}} \bar{\psi}_{\dot{1}} + \bar{\chi}_{\dot{1}} \bar{\psi}_{\dot{2}} \tag{Β΄.4}$$

$$(\chi \cdot \psi)^\dagger = \bar{\chi} \cdot \bar{\psi} \tag{Β΄.5}$$

ενώ για γινόμενα συνιστωσών

$$\chi_\alpha \chi_\beta = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta} \chi \cdot \chi \tag{Β΄.6}$$

$$\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\beta}} = -\frac{1}{2} \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi} \cdot \bar{\chi} \tag{Β΄.7}$$

$$\chi^\alpha \chi^\beta = -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \chi \cdot \chi \tag{Β΄.8}$$

$$\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\beta}} = \frac{1}{2} \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\chi} \cdot \bar{\chi} \tag{Β΄.9}$$

κάποιες ιδιότητες που περιλαμβάνουν και τους πίνακες $\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\mu$:

$$\bar{\chi}\bar{\sigma}\psi = -\psi\sigma^\mu\bar{\chi} \tag{Β΄.10}$$

$$\chi\sigma^\mu\bar{\psi} = -\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\chi \tag{Β΄.11}$$

$$(\bar{\chi}\bar{\sigma}\psi)^\dagger = \bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\chi \tag{Β΄.12}$$

$$(\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^\dagger = \psi\sigma^\mu\bar{\chi} \tag{Β΄.13}$$

ιδιαίτερης σημασίας είναι οι ταυτότητες επαναδιάταξης Fierz για τέσσερις Weyl σπίνορες:

$$\chi\cdot\psi\,\chi\cdot\lambda = -\frac{1}{2}\chi\cdot\chi\,\psi\cdot\lambda \tag{Β΄.14}$$

$$\bar{\chi}\cdot\bar{\psi}\,\bar{\chi}\cdot\bar{\lambda} = -\frac{1}{2}\bar{\chi}\cdot\bar{\chi}\,\bar{\psi}\cdot\bar{\lambda} \tag{Β΄.15}$$

$$(\psi\sigma^\mu\bar{\chi})(\psi\sigma^\nu\bar{\chi}) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\psi\cdot\psi\,\bar{\chi}\cdot\bar{\chi} \tag{Β΄.16}$$

$$(\bar{\chi}\bar{\sigma}^\mu\psi)(\bar{\chi}\bar{\sigma}^\nu\psi) = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\psi\cdot\psi\,\bar{\chi}\cdot\bar{\chi} \tag{Β΄.17}$$

Βιβλιογραφία

[1] Ian J.R. Aitchison & Anthony J.G. Hey *Gauge Theories in Particle Physics Vol.I - From Relativistic Quantum Mechanics to QED* CRC Press, 4th ed., 2013

[2] Ian J.R. Aitchison & Anthony J.G. Hey *Gauge Theories in Particle Physics Vol.II - Non-Abelian Gauge Theories - QCD and Electroweak Theory* CRC Press, 4th, 2013

[3] Chris Quigg *Gauge Theories of Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*. Princeton University Press, 2nd ed., 2013

[4] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Clarendon Press, 1984

[5] Elliot Leader & Enrico Predazzi *An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics Vol.I - Electroweak Interactions, The 'New Particles' and The Parton Model.* Cambrige University Press, 1996

[6] Francis Halzen & Alan D. Martin *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics.* John Wiley & Sons, 1984

[7] Mike Guidry *Gauge Field Theories - An Introduction with Applications*. Wiley-VCH , 2004

[8] John Iliopoulos *An Introduction to Gauge Theories (lectures notes)*

[9] Howard Georgi *Lie Algebras in Particle Physics - From Isospin to Unified Theories* Westview Press, 2nd ed. , 1999

[10] David Bailin & Alexander Love *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory.* Institute Of Physics Publishing, 1994

[11] Julius Wess & Jonathan Bagger *Supersymmetry and Supergravity.* Princeton University Press, 1992

[12] Stephen P. Martin *A Supersymmetry Primer.* [arXiv:hep-ph/9709356]

[13] Adel Bilal *Introduction to Supersymmetry.* [arXiv:hep-th/0101055]