ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΥΡΗΝΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΩΝ ΣΩΜΑΤΙΔΙΩΝ

Εισαγωγή σε υπερσυμμετρικές θεωρίες πεδίου

Το μοντέλο Wess-Zumino

Διπλωματική Εργασία

Αλέξανδρος Γκιώνης
Α.Μ.: 1110 201100034

Επιβλέπων Καθηγητής: Βασίλης Σπανός

ΑΘΗΝΑ 2017

Περίληψη

Το μοντέλο Wess-Zumino που προτάθηκε το 1974 από τους Julius Wess και Bruno Zumino, είναι το απλούστερο παράδειγμα μίας κβαντικής θεωρίας πεδίου σε τέσσερις διαστάσεις, με υπερσυμμετρία. Ως εκ τούτου αποτελεί ιδανικό παράδειγμα για μία εισαγωγή στις υπερσυμμετρικές θεωρίες πεδίου. Στην εργασία αυτή, παρουσιάζεται αναλυτικά όλο το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτείται για να κατασκευαστεί μία υπερσυμμετρική δράση με ιδιαίτερη έμφαση στον ρόλο της θεωρίας ομάδων στην διαδικασία αυτή. Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται σε βάθος τα διαφορετικά είδη πεδίων που μπορουν να χρησιμοποιηθούν στην κατασκευή σχετικιστικά αναλλοίωτων Λαγκρανζιανών. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην σπινοριακή αναπαράσταση της ομάδας Lorentz και στον σχετικό φορμαλισμό. Στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται χρήση όλων των παραπάνω, για να κατασκευασθεί η υπερσυμμετρική δράση του μοντέλου Wess-Zumino.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Στοιχεία κλασσικής Θεωρίας Πεδίου . . . 1

1.1.1 Λαγκραντζιανός Φορμαλισμός . . . 1

1.1.2 Το θεώρημα Noether . . . 3

1.2 Στοιχεία Θεωρίας Ομάδων . . . 7

1.2.1 Η Ομάδα Lorentz . . . 7

1.2.2 Η Ομάδα Poincare . . . 11

1.2.3 Η Ομάδα των σύμμορφων απεικονίσεων (Conformal Group) . . . 15

2 Αναπαραστάσεις και σχετικιστικά αναλλοίωτα **17**

2.1 Βαθμωτά πεδία . . . 17

2.2 Διανυσματικά πεδία . . . 19

2.3 Τανυστικά Πεδία . . . 25

2.4 Σπινοριακά πεδία . . . 26

2.4.1 Οι θεμελιώδεις αναπαραστάσεις $(\frac{1}{2},0)_L$ και $(0,\frac{1}{2})_R$ . . . 27

2.4.2 Οι νόμοι μετασχηματισμού για left-handed και right-handed σπίνορες . . . 30

2.4.3 The 4-vector representation . . . 31

2.4.4 Οι σπίνορες Dirac . . . 34

2.4.5 Οι αναπαραστάσεις των γεννητόρων $S_{\rho\sigma}$ . . . 36

2.4.6 Το σπινοριακό πεδίο Dirac . . . 41

3 Spinor Algebra **43**

4 Υπερσυμμετρία **51**

5 Συμπεράσματα **59**

Βιβλιογραφία **61**

Παράρτημα A **63**

Παράρτημα B **69**

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Βασίλη Σπανό, για τη βοήθεια και την καθοδήγησή του όλο αυτό το διάστημα, αλλά και για το γεγονός ότι αποτέλεσε πηγή έμπνευσης για να ασχοληθώ με το θέμα αυτής της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον κύριο Διάκονο και τον κύριο Μουστάκα για το ενδιαφέρον, την βοήθεια και κυρίως την έμπνευση που μου παρείχαν καθόλη την διάρκεια των σπουδών μου. Η εμπειρία μου από τμήμα μας δεν θα ήταν η ίδια χωρίς αυτούς. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ την καλή μου φίλη και συμφοιτήτρια Ειρήνη για την βοήθεια και υποστήριξή της, και την Άλκηστης για όλα.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Στοιχεία κλασσικής Θεωρίας Πεδίου

1.1.1 Λαγκραντζιανός Φορμαλισμός

Θεμελιώδης ποσότητα στην κλασσική μηχανική είναι η δράση, S που ορίζεται σαν το χρονικό ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής L.

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L\, dt \tag{1.1}$$

Σε συνδυασμό με την αρχή της ελάχιστης δράσης μας δίνει τις εξισώσεις κίνησεις του συστήματος, ενώ η ανάλυση των συμμετριών που την χαρακτηρίζουν μας δίνει τις διατηρούμενες ποσότητες της κίνησης. Σε αυτή την περίπτωση, που μελετάμε την κίνηση διακριτών σωματιδίων με πεπερασμένο αριθμό βαθμών ελευθερίας, η Λαγκρανζιανή είναι μία συνάρτηση κάποιων άλλων συναρτήσεων $q_i(t)$, των πρώτων χρονικών παραγόντων τους $\dot{q}_i$ και του χρόνου t.

$$L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) \tag{1.2}$$

Οι συναρτήσεις $q_i(t)$ που καθιστούν τη δράση στάσιμη βρίσκονται από τις εξισώσεις Euler-Lagrange που έχουν τη μορφή:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{1.3}$$

Στις θεωρίες πεδίου, η Λαγκρανζιανή θεώρηση γενικεύεται για να περιγράψει πεδία, δηλαδή συστήματα με άπειρους βαθμούς ελευθερίας. Η ανεξάρτητη μεταβλητή δεν είναι πια ο χρόνος, αλλά ένα γεγονός στον χωρόχρονο x, και οι εξαρτημένες μεταβλητές q_i αντικαθίστανται από την τιμή ενός πεδίου $\phi(x)$ σε αυτό το σημείο του χωρόχρονου. Ορίζουμε έτσι τη *Λαγρανζιανή πυκνότητα* $\mathcal{L}$, η οποία για τοπικές θεωρίες πεδίου θα εξαρτάται μόνο από την τιμή του πεδίου $\phi(x)$ και των παραγώγων του $\partial_\mu \phi(x)$ στο ίδιο σημείο x:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \tag{1.4}$$

Προφανώς η Λαγκρανζιανή L θα είναι το χωρικό ολοκλήρωμα της Λαγκρανζιανής πυκνότητας $\mathcal{L}$ και δράση θα ορίζεται ως εξής:

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} d^4x \tag{1.5}$$

Όπως και στην περίπτωση της κλασσικής μηχανικής, η αρχή της ελάχιστης δράσης υπαγορεύει ότι το σύστημα θα εξελιχθεί μεταξύ των χρονικών στιγμών t_A, t_B επιλέγοντας τη 'διαδρομή' που θα καταστήσει

τη δράση στάσιμη. Εισάγοντας μία μικρή διαταραχή στο πεδίο $\phi \longrightarrow \phi + \delta\phi$, που να μηδενίζεται στα χρονικά σύνορα ($\delta\phi = 0$ για $t = t_A, t = t_B$), βρίσκουμε ότι η μεταβολή της δράσης θα είναι:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi) \\ &= \int d^4x \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi\end{aligned}$$

Ο δεύτερος όρος είναι απλά μία ολική παράγωγος και μηδενίζεται επειδή έχουμε απαιτήσει η διαταραχή $\delta\phi$ να μηδενίζεται στο σύνορο. Στη συνέχεια, απαιτούμε η δράση να είναι στάσιμη, δηλαδή $\delta S = 0$. Έτσι έχουμε:

$$\int d^4x \; \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\right]\delta\phi = 0$$

Για να συμβαίνει αυτό για κάθε διαταραχή $\delta\phi$, πρέπει η ποσότητα στις αγκύλες να μηδενίζεται. Η συνθήκη αυτή, που μας εξασφαλίζει την ελαχιστοποίηση της δράσης, μας δίνει τις εξισώσεις Euler-Lagrange για το πεδίο $\phi(x)$:

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \tag{1.6}$$

Παρατηρούμε ότι αν είχαμε ξεκινήσει από μία λαγκρανζιανή $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu$ θα είχαν προκύψει οι ίδιες εξισώσεις κίνησης:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \; \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi}\delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta(\partial_\mu \phi) \\ &= \int d^4x \; \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi}\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi \\ &= \int d^4x \; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\delta\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\delta\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right)\delta\phi \\ \text{και συνεπώς} \quad \delta S = 0 \; &\Rightarrow \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\end{aligned}$$

Αυτό ήταν αναμενόμενο, καθώς μία τέτοια μεταβολή στον ορισμό της $\mathcal{L}$ κατά μία ολική παράγωγο, αλλάζει τη δράση S κατά μία ολική σταθερά, και συνεπώς η ελαχιστοποίησή της θα συμβαίνει στο ίδιο σημείο. Προφανώς το ίδιο ισχύει και στην απλή περίπτωση στην οποία προσθέτουμε στη Λαγκρανζιανή μία σταθερά. Γενικώς λοιπόν η Λαγκρανζιανή προσδιορίζεται με απροσδιοριστία μίας ολικής παραγώγου.

Συνοψίζοντας, η δράση δεν είναι παρά ένα μαθηματικό κατασκεύασμα, που παίρνει φυσικό νόημα μόλις ορίσουμε μία Λαγκρανζιανή. Μας επιτρέπει να επιβάλλουμε εύκολα τις συμμετρίες ενός προβλήματος στους νόμους κίνησης, καθώς και να βρίσκουμε τις διατηρήσιμες ποσότητες που προκύπτουν σαν αποτέλεσμα αυτών των συμμετριών. Επιπλέον, μέσω του Feynman Path Integral, αποτελεί ιδανικό μαθηματικό εργαλείο για τη μετάβαση από την κλασική στην κβαντική φυσική. Το πρόβλημά μας λοιπόν είναι ακριβώς η κατασκευή δράσεων που να περιγράφουν σωστά τα συστήματα που μας ενδιαφέρουν. Ένα καλό σημείο εκκίνησης για την κατασκευή μιας δράσης είναι όπως θα δούμε, η απαίτηση να ικανοποιεί κάποιες συνθήκες συμμετρίας. Για παράδειγμα, για να πάρουμε μία θεωρία που να σέβεται τους νόμους της ειδικής σχετικότητας, είναι απαραίτητο η σχετική δράση να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς Poincare.

1.1.2 Το θεώρημα Noether

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε στη γενική του μορφή, το θεώρημα της Noether για θεωρίες πεδίου. Για να το κάνουμε αυτό, είναι χρήσιμο να εισάγουμε έναν πολύ συγκεκριμένο συμβολισμό, που να μας επιτρέπει να εκφράσουμε με σαφήνεια τις διάφορες μεταβολές που θα μελετήσουμε. Έχουμε λοιπόν τα εξής:

Έστω μία αυθαίρετη συνάρτηση του χωροχρονικού σημείου X. Σε ένα συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς το σημείο X βρίσκεται σε συντεταγμένες x^μ, και η συνάρτηση θα γράφεται $f(x^\mu)$. Σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το σημείο X θα βρίσκεται σε συντεταγμένες x'^μ και θα γράφεται $f'(x'^\mu)$ επειδή εν γένει η συνάρτηση θα αλλάζει. Για έναν απειροστό μετασχηματισμό στις συντεταγμένες $x \to x' = x + \delta x$, η μεταβολή της συνάρτησης γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\delta f &= f'(x') - f(x)\\ &= f'(x') - f(x - \delta x)\\ &= f'(x') - f(x) + \delta x^\mu \partial_\mu f(x) + \mathcal{O}(\delta x^2)\end{aligned} \tag{1.7}$$

Ορίζοντας τη συναρτησιακή μεταβολή (functional change) της f στο ίδιο σημείο

$$\delta_0 f = f'(x) - f(x) \tag{1.8}$$

η 1.7 γράφεται σαν ισότητα μεταξύ τελεστών:

$$\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu \tag{1.9}$$

ώστε για μία συνάρτηση f να ισχύει:

$$\delta f = \delta_0 f + \delta x^\mu \partial_\mu f \tag{1.10}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος.

Έστω μία Λαγκρανζιανή $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ και ένας μετασχηματισμός στις συντεταγμένες και στα πεδία δx^μ και $\delta\phi$ αντίστοιχα. Θα εξετάσουμε την 1ης τάξης μεταβολή της δράσης κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό. Αρχικά υπολογίζουμε τη μεταβολή του στοιχείου του όγκου, d^4x. Χρησιμοποιώντας την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού, έχουμε:

$$\begin{aligned}d'^4x = d^4x|J| &= d^4x\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial x'^0}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^1}{\partial x^\beta}\frac{\partial x'^2}{\partial x^\gamma}\frac{\partial x'^3}{\partial x^\delta}\\ &= d^4x\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(x^0 + \delta x^0)\frac{\partial x'^1}{\partial x^\beta}(x^1 + \delta x^1)\frac{\partial x'^2}{\partial x^\gamma}(x^2 + \delta x^2)\frac{\partial x'^3}{\partial x^\delta}(x^3 + \delta x^3)\\ &= d^4x\ \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(\delta^0_\alpha + \partial_\alpha \delta x^0)(\delta^1_\beta + \partial_\beta \delta x^1)(\delta^2_\gamma + \partial_\gamma \delta x^2)(\delta^3_\delta + \partial_\delta \delta x^3)\\ &= d^4x\ + d^4x \partial_\mu \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta x^2)\end{aligned}$$

Δηλαδή, σε πρώτη τάξη ως προς δx^μ έχουμε:

$$\delta(d^4x) = d^4x\, \partial_\mu \delta x^\mu \tag{1.11}$$

Άρα η μεταβολή στη δράση σε όρους πρώτης τάξης ως προς $\delta x^\mu, \delta\phi$, θα είναι:

$$\delta S = \int d^4x\, [\, \partial_\mu \delta x^\mu \mathcal{L} + \delta \mathcal{L}\,] \tag{1.12}$$

Στη συνέχεια πρέπει να προσδιορίσουμε τη μεταβολή $\delta\mathcal{L}$. Η μεταβολή αυτή θα προέρχεται από δύο συνεισφορές. Τη μεταβολή στις συντεταγμένες δx^μ, και τη μεταβολή στα πεδία $\delta\phi$. Λόγω της 1.10 έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \delta_0\mathcal{L} + \delta x^\rho \partial_\rho \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta_0\partial_\mu\phi + \delta x^\rho\partial_\rho\mathcal{L}\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το νόμο της αλυσίδας μετασχηματίζουμε την παραπάνω έκφραση:

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\rho\partial_\rho\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta_0\phi\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\right)\delta_0\phi$$

Όμως, λόγω των εξισώσεων Euler-Lagrange της εξίσωσης 1.6, ο δεύτερος και ο τελευταίος όρος εξουδετερώνονται. Άρα έχουμε καταλήξει στη μεταβολή:

$$\delta\mathcal{L} = \delta x^\rho\partial_\rho\mathcal{L} + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta_0\phi\right) \tag{1.13}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την ποσότητα στη σχέση 1.12, βρίσκουμε την μεταβολή της δράσης:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\ \left[\partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L} + \delta x^\rho\partial_\rho\mathcal{L} + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta_0\phi\right)\right] \\ &= \int d^4x\ \partial_\mu\left[\mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta_0\phi\right]\end{aligned} \tag{1.14}$$

Αν τώρα οι μετασχηματισμοί που ορίσαμε αποτελούν συμμετρία της δράσης, θα έχουμε $\delta S = 0$ και λόγω της 1.14 η ολοκληρωτέα ποσότητα θα πρέπει να μηδενίζεται. Συνεπώς, θα έχουμε:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{όπου} \quad j^\mu = \mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta_0\phi \tag{1.15}$$

Άρα βρήκαμε μία εξίσωση διατήρησης για την ποσότητα j^μ. Θα ήταν βολικό όμως να την ξαναγράψουμε συναρτήσει της ολικής μεταβολής δ_ϕ αντί για της $\delta_0\phi$, ώστε να μπορούμε να την υπολογίσουμε κατευθείαν, γνωρίζοντας το νόμο μετασχηματισμού του πεδίου (υπενθυμίζουμε ότι το ϕ μπορεί να είναι οποιοδήποτε πεδίο, μπορεί να είναι βαθμωτό, διάνυσμα, σπίνορας, κλπ). Χρησιμοποιώντας την 1.10 έχουμε:

$$\delta_0\phi = \delta\phi - \delta x^\rho\partial_\rho\phi \tag{1.16}$$

Η διατηρούμενη ποσότητα τότε μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned}j^\mu &= \mathcal{L}\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta x^\rho\partial_\rho\phi \\ &= \left(\mathcal{L}g^\mu_\rho - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\partial_\rho\phi\right)\delta x^\rho + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu\phi]}\delta\phi\end{aligned} \tag{1.17}$$

Τέλος μπορούμε να κάνουμε άλλη μία αλλαγή στην εξίσωση, ώστε να εμφανίσουμε τις απειροστές παραμέτρους από τις οποίες εξαρτάται ο μετασχηματισμός. Έστω, δηλαδή, ότι το δx των συντεταγμένων (και αντίστοιχα $\delta\phi$ των πεδίων) παραμετροποιείται με ένα σετ global απειροστών παραμέτρων $\delta\omega^\alpha$, όπου α απλά ένας δείκτης που αριθμεί τις παραμέτρους. Για παράδειγμα, σε μία κλασσική στροφή στον τρισδιάστατο ευκλείδιο χώρο, το δx παραμετροποιείται μέσω τριών παραμέτρων (ένα μοναδιαίο διάνυσμα

$\hat{n}$ που μας δίνει τον άξονα στροφής $\Rightarrow$ 2 παράμετροι, και μία παράμετρο θ που είναι η γωνία της στροφής). Προφανώς υπάρχουν πολλές διαφορετικές παραμετροποιήσεις του ίδιου μετασχηματισμού για παράδειγμα οι στροφές που αναφέραμε μπορούν εναλλακτικά να παραμετροποιηθούν με τρείς παραμέτρους n_x, n_y, n_z που αποτελούν ένα διάνυσμα $\vec{n}$ του οποίου η διεύθυνση μας δίνει τον άξονα στροφής, ενώ το μήκος του μας δίνει τη γωνία της στροφής. Σε κάθε περίπτωση, το πλήθος των ανεξάρτητων παραμέτρων του μετασχηματισμού είναι το ίδιο και έχει να κάνει με τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος που μετασχηματίζεται. Άρα μπορούμε γενικά να γράψουμε:

$$\delta x^\rho = \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^\alpha} \delta \omega^\alpha$$
$$\delta \phi = \frac{\delta \phi}{\delta \omega^\alpha} \delta \omega^\alpha$$

Τότε η διατηρούμενη ποσότητα (από εδώ και στο εξής διατηρούμενο ρεύμα) που ορίσαμε γράφεται:

$$j^\mu = \left\{ \left(\mathcal{L} g^\mu_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \partial_\rho \phi \right) \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \frac{\delta \phi}{\delta \omega^\alpha} \right\} \delta \omega^\alpha = j^\mu_\alpha \, \delta \omega^\alpha \tag{1.18}$$

όπου ορίσαμε την πυκνότητα ρεύματος που αντιστοιχεί στην παράμετρο α:

$$j^\mu_\alpha = \left(\mathcal{L} g^\mu_\rho - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \partial_\rho \phi \right) \frac{\delta x^\rho}{\delta \omega^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial[\partial_\mu \phi]} \frac{\delta \phi}{\delta \omega^\alpha} \tag{1.19}$$

η οποία, λόγω της 1.42, είναι διατηρήσιμη ποσότητα:

$$\partial_\mu \, j^\mu_\alpha = 0 \tag{1.20}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι μία εξίσωση συνέχειας. Αν ερμηνεύσουμε την 0-συνιστώσα του ρεύματος σαν πυκνότητα κάποιου 'φορτίου', μπορούμε να ολοκληρώσουμε την εξίσωση της συνέχειας για να πάρουμε ένα νόμο διατήρησης του ολικού φορτίου στο χρόνο. Υπενθυμίζουμε ότι κλασσικά είχαμε την εξίσωση συνέχειας:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu = 0 \;\Rightarrow\; \partial_t \, j^0 + \vec{\nabla} \vec{J} = 0 \;&\Rightarrow\; \partial_t \rho + \vec{\nabla} \vec{J} = 0 \\
&\Rightarrow \partial_t \int \rho dV + \int \vec{\nabla} \vec{J} = 0 \\
&\Rightarrow \partial_t Q + \oint \vec{J} d\vec{a} = 0 \\
&\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = 0
\end{aligned}$$

Στην τελευταία σχέση πήραμε το σύνορο να πηγαίνει στο άπειρο και θεωρήσαμε ότι το ρεύμα φθίνει με την απόσταση γρηγορότερα από $\sim \frac{1}{r^2}$. Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο εργαζόμαστε και στη δική μας περίπτωση:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \, j^\mu_\alpha = 0 \;&\Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} dx^0 \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \; \partial_\mu \, j^\mu_\alpha = 0 \\
&\Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} dx^0 \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \; \partial_\mu \, j^\mu_\alpha = 0 \\
&\Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} dx^0 \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \; \partial_0 \, j^0_\alpha + \int_{t_A}^{t_B} dx^0 \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \; \partial_i \, j^i_\alpha = 0 \\
&\Rightarrow \int_{t_A}^{t_B} dx^0 \; \partial_0 \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \;\; j^0_\alpha \;+\; \textit{επιφανειακός όρος} \;= 0
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Άρα αν ορίσουμε τα φορτία σύμφωνα με τη σχέση:

$$Q_a(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x \; j_a^0 \tag{1.22}$$

η εξίσωση 1.21 μας λέει ότι:

$$\int_{t_A}^{t_B} dx^0 \; \partial_0 Q_a(t) = 0 \;\Rightarrow\; Q_a(t_B) - Q_a(t_A) = 0 \quad \forall t_A, t_B \tag{1.23}$$

Άρα από την αναλλοιότητα της δράσης $\delta S = 0$ καταφέραμε να συμπεράνουμε την ύπαρξη διατηρήσιμων φορτίων. Σε αυτό το σημείο αξίζει να κάνουμε και ένα τελευταίο σύντομο σχόλιο. Το διατηρούμενο ρεύμα j_α^μ δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Μπορούμε πάντα να του προσθέσουμε την απόκλιση ενός αντισυμμετρικού τανυστή: $\partial_\rho T_\alpha^{\rho\mu}$ (ο τανυστής T είναι αντισυμμετρικός στους δείκτες ρ, μ). Βλέπουμε ότι αν ορίσουμε το ρεύμα:

$$j_\alpha'^\mu = j_\alpha^\mu + \partial_\rho T_\alpha^{\rho\mu}$$

μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση 1.44 για να δείξουμε ότι:

$$\partial_\mu j_\alpha'^\mu = \partial_\mu j_\alpha^\mu + \partial_\mu \partial_\rho T_\alpha^{\rho\mu} = 0 \tag{1.24}$$

Η τελευταία ισότητα οφείλεται στο ότι η $\partial_\mu \partial_\rho$ είναι συμμετρική ποσότητα ενώ ο $T_\alpha^{\rho\mu}$ είναι εξ ορισμού αντισυμμετρικός, με αποτέλεσμα το άθροισμα να μηδενίζεται. Τέλος, δεδομένου ότι η διατήρηση του ρεύματος ισχύει μόνο όταν ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης 1.6, μπορούμε πάντα να προσθέσουμε στο ρεύμα j_α^μ κάποια ποσότητα η οποία να μηδενίζεται εξαιτίας των εξισώσεων της κίνησης.
Εδώ ολολληρώνεται η συζήτηση για το θεώρημα της Noether. Αξίζει να σημειώσουμε ότι όταν μεταβούμε από το κλασσικό στο κβαντικό, η έννοια της διατήρησης του ρεύματος θα χάσει τη σημασία της, γιατί δεν θα μπορούμε πλέον να βασιστούμε στις εξισώσεις κίνησης. Παρ΄ όλα αυτά, η έννοια αυτή θα αντικατασταθεί από σχέσεις μεταξύ συναρτήσεων Green, γνωστές ως ταυτότητες Ward.

1.2 Στοιχεία Θεωρίας Ομάδων

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε την τεράστια σημασία που έχουν οι συμμετρίες στη μελέτη φυσικών συστημάτων και την κατασκευή κατάλληλων δράσεων για την περιγραφή τους. Συμμετρία στα μαθηματικά σημαίνει αναλλοιότητα κάτω από κάποιον μετασχηματισμό. Ένας μετασχηματισμός, δηλαδή, αποτελεί συμμετρία ενός μαθηματικού αντικειμένου, όταν αυτό το αντικείμενο δεν αλλάζει κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό. Η συζήτησή μας λοιπόν ανάγεται στη θεωρία ομάδων, γιατί αυτή είναι η μαθηματική γλώσσα για την περιγραφή τέτοιων μετασχηματισμών.

1.2.1 Η Ομάδα Lorentz

Η θεωρία της ειδικής σχετικότητας επιβάλλει η χωροχρονική απόσταση δύο σημείων να είναι ίδια σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

$$dS^2 = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = x'^\mu x'^\nu g_{\mu\nu} \tag{1.25}$$

όπου $g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$.
Αναζητούμε το σύνολο των γραμμικών μετασχηματισμών που διατηρούν το dS^2 αναλλοίωτο. Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.26}$$

Τότε η εξίσωση 1.25 γίνεται:

$$\begin{aligned} x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} &= \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma x^\rho x^\sigma g_{\mu\nu} \\ \Rightarrow \qquad g_{\rho\sigma} &= \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{1.27}$$

Η σχέση 1.3 σε συμβολισμό πινάκων είναι $g = \Lambda^T g \Lambda$ και εξασφαλίζει τη διατήρηση του μέτρου Minkowski κάτω από τους μετασχηματισμούς 1.26. Θυμόμαστε ότι η αντίστοιχη σχέση για ομάδα των στροφών SO(3) ήταν η $R^T R = I$ και εξασφάλιζε τη διατήρηση του μέτρου κάτω από την ευκλείδια μετρική στις τρεις διαστάσεις $\delta_{\mu\nu} = (1, 1, 1)$. Παίρνοντας την ορίζουσα της 1.27 έχουμε:

$$\det(g) = \det(\Lambda^T)\det(g)\det(\Lambda) \quad \Rightarrow \quad det\Lambda = \pm 1 \tag{1.28}$$

Οι μετασχηματισμοί με $\det\Lambda = +1$ ονομάζονται *ορθοί (proper)* και οι μετασχηματισμοί με $\det\Lambda = -1$ ονομάζονται *καταχρηστικοί (improper)*. Στη συνέχεια παίρνουμε την εξίσωση 1.27 για $\rho = \sigma = 0$:

$$\begin{aligned} g_{00} = \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 g_{\mu\nu} \quad &\Rightarrow 1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^i{}_0)^2 \\ &\Rightarrow |\Lambda^0{}_0| \geq 0 \end{aligned} \tag{1.29}$$

Οι μετασχηματισμοί με $\Lambda^0{}_0 \geq 0$ ονομάζονται *ορθόχρονοι* και οι μετασχηματισμοί με $\Lambda^0{}_0 \leq 0$ ονομάζονται *μη-ορθόχρονοι*. Αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα του μετασχηματισμού και το πρόσημο του στοιχείου $\Lambda^0{}_0$ είναι Lorentz αναλλοίωτα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατηγοριοποίηση των μετασχηματισμών Lorentz [βλ. Παράρτημα A]. Πράγματι προκύπτουν οι εξής κατηγορίες:

1. ορθοί ορθόχρονοι ($\Lambda_+^\uparrow$) με $\det\Lambda = +1$ και $\Lambda^0{}_0 \geq 1$
2. ορθοί μη-ορθόχρονοι ($\Lambda_+^\downarrow$) με $\det\Lambda = +1$ και $\Lambda^0{}_0 \leq -1$
3. καταχρηστικοί ορθόχρονοι ($\Lambda_-^\uparrow$) με $\det\Lambda = -1$ και $\Lambda^0{}_0 \geq 1$

4. καταχρηστικοί μη-ορθόχρονοι ($\Lambda^{\downarrow}_{-}$) με $\det\Lambda = -1$ και ${\Lambda^0}_0 \leq -1$

Τα τέσσερα αυτά τμήματα είναι μεταξύ τους **ασύνδετα** (disconnected components), είναι δηλαδή αδύνατον να μεταβούμε από το ένα στο άλλο με συνεχή τρόπο.
Προφανώς για να πάω από έναν ορθόχρονο (${\Lambda^0}_0 \geq 1$) σε ένα μη-ορθόχρονο(${\Lambda^0}_0 \leq -1$) μετασχηματισμό, θα πρέπει το ${\Lambda^0}_0$ στοιχείο να μειωθεί μέχρι να γίνει ίσο με 1 και μετά να κάνει ένα άλμα για να γίνει -1, αφού οι ενδιάμεσες τιμές απαγορεύονται από την 1.29. Επίσης, αφού η ορίζουσα είναι συνεχής συνάρτηση των παραμέτρων της, δεν μπορεί να μεταβεί συνεχώς από την τιμή $\det\Lambda = +1$ στην $\det\Lambda = -1$. Αυτό έχει ένα σημαντικό αποτέλεσμα: **Μόνο τα στοιχεία του $\Lambda^{\uparrow}_{+}$ είναι συνεχώς συνδεδεμένα με το ταυτοτικό**.
Το σύνολο των μετασχηματισμών Lorentz αποτελεί ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων:

1. **Προσεταιριστική ιδιότητα**: Άμεση συνέπεια του ορισμού της ομάδας. Ο πολλαπλασιασμός πινάκων είναι προσεταιριστικός: $(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$

2. **Ύπαρξη ταυτοτικού**: Παρατηρώ ότι ο $(\Lambda_0)^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$ ικανοποιεί τη σχέση ${\Lambda_0}^T g L_0 = g$, άρα ανήκει στην ομάδα (και συγκεκριμένα στο υποσύνολο $\Lambda^{\uparrow}_{+}$). Επιπλέον έχει την ιδιότητα: $\Lambda_0\Lambda = \Lambda, \quad \forall\Lambda \in G$, όπου G το σύνολο των Lorentz μετασχηματισμών. Άρα $\Lambda_0 = I$ το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας.

3. **Ύπαρξη αντιστρόφου**: Έστω $\Lambda \in G$, τότε $\Lambda^T g\Lambda = g$. Λόγω της 1.28: $\det\Lambda \neq 0$, άρα υπάρχει Λ^{-1} τέτοιος ώστε $\Lambda^{-1}\Lambda = I$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\Lambda^{-1} \in G$. Πράγματι, λόγω της 1.27 έχουμε: $g = \Lambda^T g\Lambda \Rightarrow g\Lambda^{-1} = \Lambda^T g \Rightarrow (\Lambda^{-1})^T g\Lambda^{-1} = g$. Άρα $\Lambda^{-1} \in G$.

4. **Κλειστότητα**: Έστω $\Lambda_1, \Lambda_2 \in G$. Τότε $\Lambda_1^T g\Lambda_1 = g$ και $\Lambda_2^T g\Lambda_2 = g$. Αν $U = \Lambda_1\Lambda_2$ έχουμε: $U^T gU = \Lambda_2^T\Lambda_1^T g\Lambda_1\Lambda_2 = \Lambda_2^T g\Lambda_2 = g \quad \Rightarrow \quad (\Lambda_1\Lambda_2) \in G$

Το υποσύνολο των ορθών, ορθόχρονων μετασχηματισμών $\Lambda^{\uparrow}_{+}$ με $\det\Lambda = +1$ και ${\Lambda^0}_0 \geq 1$ αποτελεί επίσης ομάδα, η οποία λέγεται Restricted Lorentz Group και συμβολίζεται με $SO^+(3,1)$.

1. **Προσεταιριστική ιδιότητα**: Αφού ισχύει για την G, ισχύει και για το υποσύνολο $\Lambda^{\uparrow}_{+}$.

2. **Ύπαρξη ταυτοτικού**: Όπως διαπιστώσαμε το υποσύνολο $\Lambda^{\uparrow}_{+}$ περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας $(I)^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$, αφού $\det I = +1$ και $I_{00} \geq 1$.

3. **Ύπαρξη αντιστρόφου**: Έστω $\Lambda \in \Lambda^{\uparrow}_{+}$, δηλαδή $\Lambda^T g\Lambda = g$, $\det\Lambda = 1$ και ${\Lambda^0}_0 \geqslant 1$. Αφού $\det\Lambda = 1 \neq 0$ υπάρχει Λ^{-1} τέτοιος ώστε $\Lambda^{-1}\Lambda = I$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\Lambda^{-1} \in \Lambda^{\uparrow}_{+}$. Πράγματι $\det(\Lambda^{-1}\Lambda) = \det(I) \Rightarrow det(\Lambda^{-1}) = 1$ και $\Lambda^T g\Lambda = g \Rightarrow \Lambda^T g = g\Lambda^{-1} \Rightarrow g\Lambda^T g = \Lambda^{-1} \Rightarrow (\Lambda^{-1})^0{}_0 = g^0{}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}g^{\beta}{}_0 = {\Lambda^0}_0 \geqslant 1$.

4. **Κλειστότητα**: Έστω $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \Lambda^{\uparrow}_{+}$. Έχουμε ήδη δείξει ότι $(\Lambda_1\Lambda_2) \in G$. Αρκεί να δείξουμε ότι $(\Lambda_1\Lambda_2) \in \Lambda^{\uparrow}_{+}$. Πράγματι ισχύει $\det(\Lambda_1\Lambda_2) = \det(\Lambda_1)\det(\Lambda_2) = 1$ και αποδεικνύεται [βλ. Παράρτημα A] $sgn\{(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0\} = sgn\{{\Lambda_1}^0{}_0\} \cdot sgn\{{\Lambda_2}^0{}_0\}$. Άρα $sgn\{(\Lambda_1\Lambda_2)^0{}_0\} \geqslant 1$

Στη συνέχεια ορίζουμε δύο διακριτούς μετασχηματισμούς που ανήκουν στην ομάδα Lorentz.

- Αντιστροφή χρόνου $T = (-1,\ 1,\ 1,\ 1)$ με $\det T = -1$ και $T^0_0 = -1$ δηλαδή $T \in \Lambda^{\downarrow}_{-}$
- Αντιστροφή χώρου $P = (1, -1, -1, -1)$ με $\det P = -1$ και $P^0_0 = +1$ δηλαδή $T \in \Lambda^{\uparrow}_{-}$

Παρατηρούμε ότι αν $\Lambda \in SO^+(3,1)$, τότε όλοι οι άλλοι μετασχηματισμοί μπορούν να κατασκευαστούν μέσω αυτού και των διακριτών μετασχηματισμών T και P που ορίσαμε:

- ορθοί ορθόχρονοι $\Lambda_+^\uparrow$
- ορθοί μη-ορθόχρονοι $\Lambda_+^\downarrow = L_+^\uparrow\ PT$ με $\det\Lambda = +1$ και ${\Lambda^0}_0 \leq -1$
- καταχρηστικοί ορθόχρονοι $\Lambda_-^\uparrow = L_+^\uparrow\ P$ με $\det\Lambda = -1$ και ${\Lambda^0}_0 \geq 1$
- καταχρηστικοί μη-ορθόχρονοι $\Lambda_-^\downarrow = L_+^\uparrow\ T$ με $\det\Lambda = -1$ και ${\Lambda^0}_0 \leq -1$

Άρα θα επικεντρωθούμε στους μετασχηματισμούς του Restricted Lorentz Group $SO^+(3,1)$ από εδώ και πέρα. Αποδεικνύεται ότι κάθε τέτοιος μετασχηματισμός μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο σαν γινόμενο ενός boost και μίας στροφής [βλ. Παράρτημα B]. Δηλαδή οι μετασχηματισμοί $SO^+(3,1)$ μπορούν να παραμετροποιηθούν με 6 συνολικά παραμέτρους. Τρεις για τις στροφές και τρεις για τα boosts.
Έστω ένας απειροστός μετασχηματισμός Lorentz ${\Lambda^\mu}_\nu = {\delta^\mu}_\nu + {\varepsilon^\mu}_\nu$, όπου ${\varepsilon^\mu}_\nu$ οι απειροστές παράμετροι του μετασχηματισμού. Από τη σχέση διατήρησης του μέτρου Minkowski 1.26 έχουμε:

$$\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} = 0 \tag{1.30}$$

Δηλαδή οι παράμετροι του μετασχηματισμού πρέπει να είναι αντισυμμετρικές. Αυτό εύκολα βλέπουμε ότι σημαίνει $\frac{16-3}{2} = 6$ ελεύθερες παράμετροι, όπως περιμέναμε.
Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε τους γεννήτορες του μετασχηματισμού:

$$\left.\begin{array}{ll} x'^\mu = x^\mu + {\varepsilon^\mu}_\nu\ x^\nu & \text{ορισμός μετασχηματισμού} \\ x'^\mu = x^\mu + \frac{i}{2}\ \varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ x^\mu & \text{έκφραση με γεννήτορες} \end{array}\right\} \Rightarrow {\varepsilon^\mu}_\nu\ x^\nu = \frac{i}{2}\ \varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ x^\mu$$

Παίρνοντας την αντισυμμετρική της τελευταίας εξίσωσης και προσθέτοντας έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon^{\mu\nu}\ x_\nu = \frac{i}{2}\ \varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ x^\mu \\ -\varepsilon^{\nu\mu}\ x_\nu = \frac{i}{2}\ \varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ x^\mu \end{array}\right\} \Rightarrow (\varepsilon^{\mu\nu} - \varepsilon^{\nu\mu})\ x_\nu = i\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ x^\mu$$

Αλλάζοντας λίγο το αριστερό μέλος έχουμε:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{\alpha\beta}(g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\nu_\alpha g^\mu_\beta)\ x_\nu = i\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ x^\mu \\ \Rightarrow \quad & i\varepsilon^{\alpha\beta}(x_\alpha g^\mu_\beta - x_\beta g^\mu_\alpha -) = \varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ x^\mu \end{aligned} \tag{1.31}$$

Άρα βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} & L_{\alpha\beta}\ x^\mu = i(x_\alpha g^\mu_\beta - x_\beta g^\mu_\alpha) \\ \Rightarrow \quad & L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha) \end{aligned} \tag{1.32}$$

Βρήκαμε τη διαφορική αναπαράσταση των γεννητόρων της ομάδας Lorentz πάνω στις συντεταγμένες. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, οι γεννήτορες παίρνουν διαφορετική μορφή όταν δρούν πάνω σε συντεταγμένες, βαθμωτά πεδία, διανυσματικά πεδία, σπίνορες, κλπ. Κάθε μία περίπτωση αποτελεί μία διαφορετική αναπαράσταση της ίδιας άλγεβρας Lie. Επίσης, το γεγονός ότι οι γεννήτορες εμφανίζονται μόνο στη μορφή $\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}$ σημαίνει ότι αν τους προσθέσουμε ένα συμμετρικό κομμάτι, αυτό δεν θα αλλάξει τίποτα. Αυτός είναι και ο λόγος που χωρίς βλάβη της γενικότητας οι γεννήτορες μπορούν να ληφθούν ως αντισυμμετρικοί.
Τώρα μπορούμε με απευθείας υπολογισμό να προσδιορίσουμε την Άλγεβρα Lie των γεννητόρων:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = ig_{\nu\rho} L_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} \tag{1.33}$$

Επιπλέον, από τον απειροστό μετασχηματισμό μπορούμε να πάρουμε έναν πεπερασμένο μετασχηματισμό με χρήση του εκθετικού:

$$U(\omega^{\rho\sigma}) = \lim_{N\to+\infty}\left(1+\frac{i}{2}\frac{\omega^{\rho\sigma}}{N}L_{\rho\sigma}\right)^N = \exp\{\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma}\} \tag{1.34}$$

Στη συνέχεια θέλω να ορίσω $\vec{J}$ και $\vec{K}$ rotation & boost generators, για να πάρω μια πιο χρήσιμη έκφραση για το μετασχηματισμό. Επειδή είμαστε σε 4-διάστατο χώρο, το επίπεδο της στροφής δεν μπορεί να καθοριστεί από τον κάθετο σε αυτό άξονα. Για παράδειγμα, ο άξονας z έχει τρία κάθετα σε αυτόν επίπεδα, το επίπεδο (12) ή αλλιώς xy, το επίπεδο (01) και το επίπεδο (02). Άρα για να προσδιοριστεί ένα επίπεδο θα χρησιμοποιούμε δύο δείκτες και όχι τον κάθετο άξονα. Για παράδειγμα, ο τελεστής J_z που γεννά στροφές στο επίπεδο (xy) αντιστοιχεί στον τελεστή J_{12}. Λαμβάνοντας αυτά υπόψη, ορίζουμε τους γεννήτορες $\vec{J}$ και $\vec{K}$ ως εξής:

$$\begin{array}{ll} J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}L_{jk} & \text{rotations} \\ K_i = \frac{1}{2}(L_{0i} - L_{i0}) & \text{boosts} \end{array} \qquad \text{i j k} = 1,2,3 \tag{1.35}$$

Άρα η σχέση 1.34 μπορεί να γραφεί συναρτήσει των νέων τελεστών που ορίσαμε ως εξής:

$$\begin{aligned} \omega^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma} = {} & \omega^{01}L_{01} + \omega^{02}L_{02} + \omega^{03}L_{03} \\ & + \omega^{10}L_{10} + \omega^{20}L_{20} + \omega^{30}L_{30} \\ & + \omega^{12}L_{12} + \omega^{13}L_{13} + \omega^{23}L_{23} \\ & + \omega^{21}L_{21} + \omega^{31}L_{31} + \omega^{32}l_{32} \end{aligned}$$

Όμως, από την 1.29, $\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} = 0$, άρα:

$$\begin{aligned} \omega^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma} &= \omega^{01}(L_{01} - L_{10)} + \omega^{02}(L_{02} - L_{20}) + \omega^{03}(L_{03} - L_{30}) \\ &\quad + \omega^{12}(L_{12} - L_{21}) + \omega^{13}(L_{13} - L_{31}) + \omega^{23}(L_{23} - L_{32}) \\ &= 2(\omega^{01}K_1 + \omega^{02}K_2 + \omega^{03}K_3 \\ &\quad + \omega^{12}J_3 + \omega^{13}J_2 + \omega^{23}J_1) \\ &= 2(\vec{v}\vec{K} + \vec{\omega}\vec{J}) \end{aligned}$$

όπου:

$$\begin{aligned} (\vec{\omega})_i &= \tfrac{1}{2}(\omega_{0i} - \omega_{i0}) \\ (\vec{v})_i &= \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\omega_{jk} \end{aligned}$$

Άρα ο μετασχηματισμός 1.34 γράφεται ισοδύναμα $U(\vec{\omega},\vec{v}) = e^{i(\vec{v}\vec{K}+\vec{\omega}\vec{J})}$. Οι νέοι γεννητορες ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

$$[K_i, K_j] = -i\,\varepsilon_{ijk}J_k \tag{1.36}$$

$$[J_i, J_j] = \quad i\,\varepsilon_{ijk}J_k \tag{1.37}$$

$$[J_i, K_j] = \quad i\,\varepsilon_{ijk}K_k \tag{1.38}$$

Μπορούμε να αποσυμπλέξουμε τις τελευταίες μεταθετικές σχέσεις ορίζοντας τους γραμμικούς συνδυασμούς:

$$\begin{array}{l} M_i = (J_i + iK_i)/2 \\ N_i = (J_i - iK_i)/2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} J_i = M_i + N_i \\ K_i = i(N_i - M_i) \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι οι νέοι τελεστές M και N δεν είναι ερμιτιανοί. Παρ' όλα αυτά είναι πολύ χρήσιμοι γιατί ικανοποιούν τις μεταθετικές σχέσεις:

$$[M_i, M_j] = i\,\varepsilon_{ijk} M_k \tag{1.39}$$

$$[N_i, N_j] = i\,\varepsilon_{ijk} N_k \tag{1.40}$$

$$[M_i, N_j] = 0 \tag{1.41}$$

Άρα, η άλγεβρα της ομάδας Lorentz είναι ισοδύναμη με την άλγεβρα $SU(2) \otimes SU(2)$, της οποίας οι αναπαραστάσεις είναι γνωστές. Συγκεκριμένα έχουμε δύο τελεστές Casimir, τους M^2 και N^2, που είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με τους M_3 και N_3. Η συζήτηση για τις αναπαραστάσεις θα γίνει στην επόμενη παράγραφο, γιατί μας οδηγεί στην εισαγωγή της έννοιας του σπίνορα.

1.2.2 Η Ομάδα Poincare

Η ομάδα Lorentz μπορεί να επεκταθεί αν συμπεριλάβουμε στην άλγεβρα Lie και ένα γεννήτορα χωρικών μεταθέσεων. Η ομάδα που προκύπτει ονομάζεται ομάδα Poincare και έχει 10 ελεύθερες παραμέτρους (6 για τα boosts και τις στροφές και 4 για τις μεταθέσεις).
Οι μεταθέσεις ορίζονται απλώς ως εξής:

$$x^\mu \;\longrightarrow\; x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.42}$$

Ένας γενικός μετασχηματισμός που περιλαμβάνει ένα μετασχηματισμό Lorentz και μία μετάθεση γράφεται ως εξής:

$$x^\mu \;\overset{g(\Lambda,a)}{\longrightarrow}\; x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu + a^\mu \tag{1.43}$$

Οι μεταθέσεις, όπως θα δούμε και στη συνέχεια, δεν μετατίθενται με τους μετασχηματισμούς Lorentz. Πράγματι, αν θεωρήσουμε δύο διαδοχικούς μετασχηματισμούς Poincare $g(\Lambda_1, a_1)$ και $g(\Lambda_2, a_2)$

$$\begin{aligned} x^\mu &\;\overset{g(\Lambda_1,a_1)}{\longrightarrow}\; x'^\mu = (\Lambda_1)^\mu{}_\nu\, x^\nu + {a_1}^\mu \\ x'^\mu &\;\overset{g(\Lambda_2,a_2)}{\longrightarrow}\; x''^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu\, x'^\nu + {a_2}^\mu = (\Lambda_2)^\mu{}_\nu (\Lambda_1)^\nu{}_\rho\, x^\rho + (\Lambda_2)^\mu{}_\nu {a_1}^\nu + {a_2}^\mu \end{aligned} \tag{1.44}$$

βλέπουμε ότι οι παράμετροι της μετάθεσης υφίστανται μετασχηματισμό. Δεν μετατίθενται με τους μετασχηματισμούς Lorentz. Επίσης από αυτή τη σχέση μπορούμε να εξάγουμε τον κανόνα πολλαπλασιασμού της ομάδας Poincare:

$$g(\Lambda_1, a_1) \cdot g(\Lambda_2, a_2) = g(\Lambda_1\Lambda_2\ ,\ \Lambda_1 a_2 + a_1) \tag{1.45}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι το σύνολο των μετασχηματισμών Poincare $G = \{g(\Lambda, a) : \Lambda \in \Lambda_+^\uparrow\}$ αποτελεί ομάδα, κάτω από την πράξη που ορίσαμε.

1. **Προσεταιριστική ιδιότητα**: Έστω $g(\Lambda_1, a_1), g(\Lambda_2, a_2), g(\Lambda_3, a_3) \in G$. Τότε έχουμε: $[g(\Lambda_1, a_1) \cdot g(\Lambda_2, a_2)] \cdot g(\Lambda_3, a_3) = g(\Lambda_1\Lambda_2\ ,\ \Lambda_1 a_2 + a_1) \cdot g(\Lambda_3, a_3) = g(\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3\ ,\ \Lambda_1\Lambda_2 a_3 + \Lambda_1 a_2 + a_1) = g(\Lambda_1, a_1) g(\Lambda_2\Lambda_3\ ,\ \Lambda_2 a_3 + a_2) = g(\Lambda_1, a_1) \cdot [g(\Lambda_2, a_2) \cdot g(\Lambda_3, a_3)]$

2. **Ύπαρξη ταυτοτικού**: Παρατηρούμε ότι για $\Lambda = I$ και $a^\mu = 0$ το στοιχείο $g(I, 0) \in G$ έχει την ιδιότητα: $g(I, 0) \cdot g(\Lambda, a) = g(I\Lambda\ ,\ Ia + 0) = g(\Lambda, a) \quad \forall\, g(\Lambda, a) \in G$

3. **Ύπαρξη αντιστρόφου**: Έστω $\Lambda \in \Lambda_+^\uparrow$. Έχουμε δείξει ότι $\exists\, \Lambda^{-1} \in \Lambda_+^\uparrow$. Άρα για κάθε στοιχείο $g(\Lambda, a) \in G$ υπάρχει ένα στοιχείο $g(\Lambda^{-1}{}^{1}, -\Lambda^{-1} a) \in G$ με την ιδιότητα: $g(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a) \cdot g(\Lambda, a) = g(\Lambda^{-1}\Lambda\ ,\ \Lambda a - \Lambda^{-1} a) = g(I, 0)$

4. **Κλειστότητα**: Έστω $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \Lambda_+^\uparrow$. Έχουμε ήδη δείξει ότι $(\Lambda_1\Lambda_2) \in \Lambda_+^\uparrow$. Άρα για κάθε $g(\Lambda_1, a_1), g(\Lambda_2, a_2) \in G$ έχουμε $g(\Lambda_1, a_1) \cdot g(\Lambda_2, a_2) = g(\Lambda_1\Lambda_2\ ,\ \Lambda_1 a_2 + a_1) \in G$

Άρα το σύνολο των μετασχηματισμών Poincare αποτελεί ομάδα. Στη συνέχεια θα βρούμε την άλγεβρα Lie της ομάδας αυτής, η οποία περιέχει, εκτός από τους γεννήτορες της ομάδας Lorentz της προηγούμενης παραγράφου, και τους γεννήτορες των χωροχρονικών μεταθέσεων.

Για να βρούμε τους γεννήτορες των μεταθέσεων εργαζόμαστε όπως και για την ομάδα Lorentz:

$$\left.\begin{array}{ll} x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu & \text{ορισμός μετασχηματισμού} \\ x'^\mu = x^\mu + i\ \varepsilon^\rho P_\rho\ x^\mu & \text{έκφραση με γεννήτορες} \end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon^\mu = i\ \varepsilon^\rho P_\rho\ x^\mu$$

Άρα βλέπουμε ότι πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} P_\rho\ x^\mu &= -ig^\mu_\rho \\ \Rightarrow P_\rho &= -i\partial_\rho \end{aligned} \tag{1.46}$$

Βρήκαμε τη διαφορική αναπαράσταση του γεννήτορα των χωρικών μεταθέσεων πάνω στις συντεταγμένες. Μπορούμε τώρα να βρούμε την άλγεβρα Lie της πλήρους ομάδας Poincare:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{1.47}$$

$$[L_{\mu\nu}, P_\rho] = -ig_{\mu\rho}P_\nu + ig_{\nu\rho}P_\mu \tag{1.48}$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = ig_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} \tag{1.49}$$

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τελεστές $\vec{K}$ και $\vec{J}$ που ορίσαμε:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{1.50}$$

$$[J_i, P_0] = 0 \tag{1.51}$$

$$[J_i, P_j] = \varepsilon_{ijk}P_k \tag{1.52}$$

$$[K_i, P_0] = -iP_i \tag{1.53}$$

$$[K_i, P_j] = ig_{ij}P_0 \tag{1.54}$$

$$[K_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk}J_k \tag{1.55}$$

$$[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk}J_k \tag{1.56}$$

$$[J_i, K_j] = \varepsilon_{ijk}K_k \tag{1.57}$$

Η ομάδα Poincare έχει δύο τελεστές Casimir. Το 'μήκος' $P^\mu P_\mu$ του τετρανύσματος P_μ είναι Lorentz αναλλοίωτο και επιπλέον μετατίθεται με τους P_μ, άρα είναι τελεστής Casimir. Για να βρούμε τον δεύτερο τελεστή Casimir αναζητούμε το μήκος ενός τετρανύσματος που να μετατίθεται με τους P_μ. Το τετράνυσμα Pauli-Lubanski W^μ ικανοποιεί τις απαιτήσεις αυτές:

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu L_{\rho\sigma}$$

Πολλά βιβλία ορίζουν το Pauli-Lubanski pseudovector ως $\tilde{W}^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}L_{\rho\sigma}P_\nu$ *που είναι ισοδύναμος ορισμός:*

$$\begin{aligned} \tilde{W}^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}L_{\rho\sigma}P_\nu &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(P_\nu L_{\rho\sigma} - [L_{\rho\sigma}, P_\nu]) = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\rho\sigma\nu}P_\nu L_{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}[L_{\rho\sigma}, P_\nu]) \\ &= W^\mu - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}i(g_{\nu\sigma}P_\rho - g_{\nu\rho}P_\sigma) = W^\mu \end{aligned}$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι το W^μ μετασχηματίζεται σαν τετράνυσμα. Για να το κάνουμε αυτό, πρώτα θα βρούμε τους νόμους μετασχηματισμού των γεννητόρων P_μ, $L_{\mu\nu}$ και του πλήρως αντισυμμετρικού τανυστή τέταρτης τάξης $\varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$. Έχουμε τους νόμους μετασχηματισμού:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Rightarrow \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \tag{1.58}$$

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\, x'^\nu \Rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu \tag{1.59}$$

- Το P'_μ μετασχηματίζεται σαν τετράνυσμα:

$$P'_\mu = -i\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = -i\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = -i\Lambda_\mu{}^\nu\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu P_\nu$$

- Οι γεννήτορες $L_{\mu\nu}$ μετασχηματίζονται σαν τανυστής δεύτερης τάξης:

$$L'_{\mu\nu} = i(x'_\mu\partial'_\nu - x'_\nu\partial'_\mu) = i(\Lambda_\mu{}^\rho x_\rho \Lambda_\nu{}^\sigma\partial_\sigma - \Lambda_\nu{}^\rho x_\rho\Lambda_\mu{}^\sigma\partial_\sigma) = i\Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma(x_\rho\partial_\sigma - x_\sigma\partial_\rho) = \Lambda_\mu{}^\rho\Lambda_\nu{}^\sigma L_{\rho\sigma}$$

- Ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τέταρτης τάξης μετασχηματίζεται σαν τανυστική πυκνότητα:

$$\varepsilon'^{\rho\sigma\eta\xi} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\kappa}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa}$$

  Η τελευταία ποσότητα είναι αντισυμμετρική στους δείκτες ρ, σ, η, ξ και άρα ανάλογη του $\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}$, δηλαδή ισχύει:

$$\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\kappa}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = C\ \varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}$$

  Για να προσδιορίσουμε τη σταθερά αναλογίας C, θέτουμε στην τελευταία σχέση $(\rho\eta\sigma\xi) = (0123)$ και έχουμε:

$$\frac{\partial x'^0}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^1}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^2}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x'^3}{\partial x^\kappa}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} = C\ \varepsilon^{0123}$$
$$\Rightarrow \det\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = C$$

  Δηλαδή ισχύει:

$$\varepsilon'^{\rho\sigma\eta\xi} = \det\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}$$

  Όμως, αφού για τη δική μας περίπτωση $\Lambda \in SO^+(1,3)$, είναι $C = \det|\Lambda| = 1$. Κι έτσι βλέπουμε ότι ο πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τέταρτης τάξης είναι αναλλοίωτος κατά Lorentz:

$$\varepsilon'^{\rho\sigma\eta\xi} = \varepsilon^{\rho\sigma\eta\xi}$$

- Το τετράνυσμα Pauli-Lubanski μετασχηματίζεται ως εξής:

$$W'^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P'_\nu L'_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}P_\kappa L_{\alpha\beta}$$

Όμως έχουμε δείξει ότι $\varepsilon'^{\lambda\kappa\alpha\beta} = \varepsilon^{\lambda\kappa\alpha\beta}$, άρα:

$$\begin{aligned}
\varepsilon'^{\lambda\kappa\alpha\beta} = \varepsilon^{\lambda\kappa\alpha\beta} &\Rightarrow \varepsilon'^{\lambda\kappa\alpha\beta} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}\varepsilon'^{\tau\nu\rho\sigma} \\
&\Rightarrow \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\varepsilon^{\lambda\kappa\alpha\beta} = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau}\right)\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}\varepsilon^{\tau\nu\rho\sigma} \\
&\Rightarrow \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\varepsilon^{\lambda\kappa\alpha\beta} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned}$$

Άρα ο νόμος μετασχηματισμού του τετρανύσματος Pauli-Lubanski είναι ο εξής:

$$W'^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P'_\nu L'_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\sigma}P_\kappa L_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}\varepsilon^{\lambda\kappa\alpha\beta}P_\kappa L_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda}W^\lambda$$

Δηλαδή μετασχηματίζεται σαν ανταλλοίωτο τετράνυσμα. Η συναλλοίωτη μορφή του προφανώς ακολουθεί τον νόμο μετασχηματισμού:

$$W'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}W_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu W_\nu$$

Το τετράνυσμα Pauli-Lubanski ικανοποιεί τις ακόλουθες μεταθετικές σχέσεις:

$$\begin{aligned}
[W_\mu, P_\nu] &= 0 \\
[W_\mu, L_{\alpha\beta}] &= i(g_{\mu\alpha}W_\beta - g_{\mu\beta}W_\beta) \\
[W_\mu, W_\nu] &= -i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^\rho P^\sigma
\end{aligned}$$

Άρα, πράγματι έχουμε βρεί έναν τελεστή που μετασχηματίζεται σαν τετράνυσμα και μετατίθεται με τους P_μ. Συνεπώς ο συνδυασμός $W^\mu W_\mu$ είναι ο δεύτερος τελεστής Casimir της ομάδας Poincare.
Μπορούμε να πάρουμε μια πιο οικεία μορφή του τετρανύσματος W^μ αν το εκφράσουμε συναρτήσει των τελεστών $\vec{J}$ και $\vec{K}$. Στη συνέχεια οι ελληνικοί δείκτες παίρνουν τιμές από 0 έως 4 και οι αγγλικοί παίρνουν τιμές από 1 έως 3.

$$W^\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}P_\nu L_{\rho\sigma}$$

Για την 0-συνιστώσα έχουμε:

$$W^0 = \frac{1}{2}\varepsilon^{0\nu\rho\sigma}P_\nu L_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\varepsilon^{0nrs}P_n L_{rs} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}P_i L_{jk} = P_i J_i = \vec{P}\vec{J}$$

Για τις χωρικές συνιστώσες έχουμε:

$$\begin{aligned}
W^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{i\nu\rho\sigma}P_\nu L_{\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{i0rs}P_0 L_{rs} + \frac{1}{2}\varepsilon^{in\rho\sigma}P_n L_{\rho\sigma} = \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{0irs}P_0 L_{rs} + \frac{1}{2}\varepsilon^{in0s}P_n L_{0s} + \frac{1}{2}\varepsilon^{inr0}P_n L_{r0} + \frac{1}{2}\varepsilon^{inrs}P_n L_{rs} = \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon^{irs}P_0 L_{rs} + \frac{1}{2}\varepsilon^{0ins}P_n K_s - \frac{1}{2}\varepsilon^{0inr}P_n(-K_r) = \\
&= -P_0 J^i + \varepsilon^{ins}P_n K_s = \\
\Rightarrow \vec{W} &= -E\vec{J} + \vec{P}\times\vec{K}
\end{aligned}$$

Άρα καταλήξαμε στην εναλλακτική έκφραση:

$$W^\mu = \begin{pmatrix} \vec{P}\vec{J} \\ -E\vec{J} + \vec{P} \times \vec{K} \end{pmatrix} \tag{1.60}$$

Το πρόσημο του $E\vec{J}$ έχει να κάνει με τη σύμβαση που χρησιμοποιείται για τα Θ. Για εμάς από την 1.35 είναι $J_1 = \frac{1}{2}(J_{23} - J_{32})$, κ.ο.κ. Θα μπορούσε να είναι όμως ανάποδα. Τότε το διάνυσμα $\vec{J}$ θα είχε αντίθετο πρόσημο και θα είχαμε $\vec{W} = E\vec{J} + \vec{P} \times \vec{K}$

1.2.3 Η Ομάδα των σύμμορφων απεικονίσεων (Conformal Group)

Η αναφορά μας στην ομάδα των σύμμορφων απεικονίσεων θα είναι πολύ σύντομη, γιατί βρίσκεται έξω από το ενδιαφέρον αυτής της εργασίας. Την αναφέρουμε για να αναδειχθεί η ευρεία εφαρμοσιμότητα της μεθοδολογίας που αναπτύξαμε ως τώρα στην μελέτη των ομάδων Lorentz και Poincare.

Η ομάδα Poincare μπορεί να επεκταθεί περαιτέρω, ώστε να συμπεριλάβουμε μετασχηματισμούς scaling και special conformal transformations. Οι μετασχηματισμοί *scaling* ορίζονται ως εξής:

$$\delta x^\mu = a x^\mu \tag{1.61}$$

Όπου a η απειροστή βαθμωτή παράμετρος του μετασχηματισμού. Αποδεικνύεται ότι οι μετασχηματισμοί scaling μαζί με τους μετασχηματισμούς Poincare αποτελούν μία ομάδα 11 παραμέτρων που ονομάζεται Weyl Group. Για να προσδιορίσουμε τους γεννήτορες αυτού του μετασχηματισμού, θα εργαστούμε με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως για τις ομάδες Lorentz και Poincare:

$$\left.\begin{array}{ll} x'^\mu = x^\mu + a x^\mu & \text{ορισμός μετασχηματισμού} \\ x'^\mu = x^\mu + iaD\, x^\mu & \text{εκφραση με γεννήτορες} \end{array}\right\} \Rightarrow \; Dx^\mu = -ix^\mu \;\Rightarrow\; D = -ix^\nu \partial_\nu$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την άλγεβρα Lie που προκύπτει από την προσθήκη του νέου γεννήτορα:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [L_{\mu\nu}, P_\rho] &= -ig_{\mu\rho}P_\nu + ig_{\nu\rho}P_\mu \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= ig_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} \\ [P_\mu, D] &= -iP_\mu \\ [L_{\mu\nu}, D] &= 0 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια μπορούμε να επεκτείνουμε το Weyl Group, ώστε να συμπεριλάβουμε και τους special conformal transformations, που ορίζονται ως εξής:

$$x'^\mu = x^\mu + (2x^\mu x^\rho - g^{\mu\rho} x_\lambda x^\lambda) c_\rho \tag{1.62}$$

όπου c_ρ οι απειροστές παράμετροι του μετασχηματισμού, που μετασχηματίζονται σαν τετράνυσμα. Αποδεικνύεται ότι οι μετασχηματισμοί του Weyl Group μαζί με τους special conformal transformations αποτελούν μία ομάδα 15 παραμέτρων (6 παράμετροι για τους μετασχηματισμούς Lorentz, 4 παράμετροι για τις χωρικές μεταθέσεις, 4 παράμετροι για τους special conformal transformations, και 1 παράμετρος για τους μετασχηματισμούς scaling) που ονομάζεται Conformal Group.

Για να προσδιορίσουμε τους γεννήτορες αυτών των μετασχηματισμών, εργαζόμαστε όπως και πριν:

$$\left.\begin{array}{ll} x'^{\mu} = x^{\mu} + (2x^{\mu}x^{\rho} - g^{\mu\rho}x_{\lambda}x^{\lambda})c_{\rho} & \text{ορισμός μετασχηματισμού} \\ x'^{\mu} = x^{\mu} + ic_{\rho}K^{\rho}\ x^{\mu} & \text{εκφραση με γεννήτορες} \end{array}\right\} \Rightarrow\ c_{\rho}(2x^{\mu}x^{\rho} - g^{\mu\rho}x_{\lambda}x^{\lambda}) = ic_{\rho}K^{\rho}\ x^{\mu}$$

Από την τελευταία σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} ic_{\rho}K^{\rho}\ x^{\mu} &= (2x^{\mu}x^{\rho} - g^{\mu\rho}x_{\lambda}x^{\lambda})c_{\rho} \\ \Rightarrow \quad K^{\rho}\ x^{\mu} &= -i(2x^{\mu}x^{\rho} - g^{\mu\rho}x_{\lambda}x^{\lambda}) \\ \Rightarrow \quad K^{\rho} &= -i(2x^{\rho}x^{\nu}\partial_{\nu} - x_{\lambda}x^{\lambda}\partial^{\rho}) \\ \Rightarrow \quad K^{\rho} &= i(x_{\lambda}x^{\lambda}\partial^{\rho} - 2x^{\rho}x^{\nu}\partial_{\nu}) \end{aligned} \tag{1.63}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε απευθείας την πλήρη άλγεβρα του Conformal Group:

$$\begin{aligned} [P_{\mu}, P_{\nu}] &= 0 \\ [L_{\mu\nu}, P_{\rho}] &= -ig_{\mu\rho}P_{\nu} + ig_{\nu\rho}P_{\mu} \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= ig_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} \\ [P_{\mu}, D] &= -iP_{\mu} \\ [L_{\mu\nu}, D] &= 0 \\ [K_{\mu}, P_{\nu}] &= 2i(g_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \\ [K_{\mu}, L_{\rho\sigma}] &= i(g_{\mu\rho}K_{\sigma} - g_{\mu\sigma}K_{\rho} \\ [K_{\mu}, D] &= iK_{\mu} \\ [K_{\mu}, K_{\nu}] &= 0 \end{aligned}$$

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας, δεν θα μας χρειαστεί να ασχοληθούμε με το conformal group σε βάθος, γιατί μας αρκεί η συμμετρία κάτω από μετασχηματισμούς Poincare. Παρόλα αυτά, πολλά από τα αναλλοίωτα και τις Λαγκρανζιανές που θα κατασκευάσουμε, θα έχουν την επιπλέον ιδιότητα να είναι conformal invariants. Σε αυτές τις περιπτώσεις απλά θα αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, το γεγονός αυτό.

Κεφάλαιο 2

Αναπαραστάσεις και σχετικιστικά αναλλοίωτα

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε κάποια πεδία με βάση το νόμο μετασχηματισμού τους κάτω από τις ομάδες της προηγούμενης παραγράφου. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε κάποια αναλλοίωτα από αυτά τα πεδία, τα οποία θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή σχετικιστικά αναλλοίωτων Λαγκρανζιανών. Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο είναι ακριβώς αυτός που εισαγάγαμε στην εισαγωγή, στη συζήτηση του θεωρήματος της Noether. Συνοπτικά, είχαμε δώσει τους εξής ορισμούς:
Η ολική μεταβολή μιας συνάρτησης γράφεται ως εξής:

$$\delta f = f'(x') - f(x) = f'(x') - f(x) + \delta x^\mu \partial_\mu f(x) + \mathcal{O}(\delta x^2) \tag{2.1}$$

Η συναρτησιακή μεταβολή (functional change) της f στο ίδιο σημείο, ορίζεται ως εξής:

$$\delta_0 f = f'(x) - f(x) \tag{2.2}$$

Η 1.7 γράφεται σαν ισότητα μεταξύ τελεστών:

$$\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu \tag{2.3}$$

Ώστε για μία συνάρτηση f να ισχύει:

$$\delta f = \delta_0 f + \delta x^\mu \partial_\mu f \tag{2.4}$$

2.1 Βαθμωτά πεδία

Ορίζουμε μία συνάρτηση του x^μ η οποία μετασχηματίζεται κάτω από μεταθέσεις και μετασχηματισμούς Lorentz με τον εξής τρόπο:

$$\phi'(x') = \phi(x) \qquad \text{ή} \qquad \delta\phi = 0 \tag{2.5}$$

Η σχέση αυτή ορίζει το βαθμωτό πεδίο (κάτω από την ομάδα Poincare). Στη συνέχεια θα βρούμε την αναπαράσταση της ομάδας Poincare όταν δρα στο βαθμωτό πεδίο. Κάτω από μία απειροστή μετάθεση:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \;\Rightarrow\; \delta x^\mu = \varepsilon^\mu \tag{2.6}$$

οι σχέσεις 1.10 και 2.5 μας δίνουν:

$$\begin{aligned}
\delta\phi = 0 \;&\Rightarrow\; \delta_0\phi + \delta x^\mu \partial_\mu \phi = 0 \\
&\Rightarrow\; \delta_0\phi = -\delta x^\mu \partial_\mu \phi \\
&\Rightarrow\; \delta_0\phi = -\varepsilon^\mu \partial_\mu \phi \\
&\Rightarrow\; \delta_0\phi = -i\varepsilon^\mu P_\mu \phi \qquad \text{όπου } P_\mu = -i\partial_\mu
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{array}{lll}
\text{Σε coordinates}: & x'^\mu = x^\mu + i\varepsilon^\rho P_\rho x^\mu & P_\rho = -i\partial_\rho \\
\text{Σε field} \quad : & \phi' \;\; = \phi - i\varepsilon^\rho P_\rho \phi & P_\rho = -i\partial_\rho
\end{array}$$

Αντίστοιχα, κάτω από έναν απειροστό μετασχηματισμό Lorentz

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \;\Rightarrow\; \delta x^\mu = \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.8}$$

οι σχέσεις 1.10 και 2.5 μας δίνουν:

$$\begin{aligned}
\delta\phi &= \delta_0\phi + \delta x^\mu \partial_\mu \phi \\
&\overset{\delta\phi=0}{\Rightarrow} \delta_0\phi = -\delta x^\mu \partial_\mu \phi \\
&\Rightarrow\; \delta_0\phi = -\varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \phi
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Θέλω να εκφράσω τη συναρτησιακή μεταβολή δ_0 μέσω γεννητόρων, οπότε γράφω στην κανονική μορφή:

$$\left.\begin{array}{ll}
\delta_0\phi = -\varepsilon^\mu{}_\nu \; x^\nu \partial_\mu \phi & \text{ορισμός μετασχηματισμού} \\
\delta_0\phi = -\frac{i}{2}\; \varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \; \phi & \text{εκφραση με γεννήτορες}
\end{array}\right\} \Rightarrow \varepsilon^\mu{}_\nu \; x^\nu \partial_\mu \phi = -\frac{i}{2}\; \varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \; \phi$$

Παίρνοντας την αντισυμμετρική της τελευταίας εξίσωσης και προσθέτοντας έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}
\varepsilon^{\mu\nu} \; x_\nu \partial_\mu \phi = -\frac{i}{2}\; \varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \; \phi \\
-\varepsilon^{\nu\mu} \; x_\nu \partial_\mu \phi = -\frac{i}{2}\; \varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \; \phi
\end{array}\right\} \Rightarrow (\varepsilon^{\mu\nu} - \varepsilon^{\nu\mu}) \; x_\nu \partial_\mu \phi = -i\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \; \phi$$

Αλλάζοντας λίγο το αριστερό μέλος (βγάζουμε το $\varepsilon^{\alpha\beta}$ κοινό παράγοντα) έχουμε:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^{\alpha\beta}(g^\mu_\alpha g^\nu_\beta - g^\nu_\alpha g^\mu_\beta) \; x_\nu \partial_\mu \phi = -i\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \; \phi \\
\Rightarrow \quad & i\varepsilon^{\alpha\beta}(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha) = \varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \; \phi \\
\Rightarrow \quad & L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{array}{lll}
\text{Σε coordinates}: & x'^\mu \;\; = \;\; x^\mu \; + \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \; x^\mu & L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha) \\
\text{Σε field} \quad : & \phi'(x) = \phi(x) - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \; \phi(x) & L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha \partial_\beta - x_\beta \partial_\alpha)
\end{array}$$

Βρήκαμε την αναπαράσταση της ομάδας Poincare για το βαθμωτό πεδίο. Παρατηρούμε ότι το πεδίο μετασχηματίζεται αντίστροφα από τις συντεταγμένες, ώστε να ισχύει η 2.5. Μπορούμε τώρα να κατασκευάσουμε αναλλοίωτες ποσότητες κάτω από μετασχηματισμούς Poincare. Κάθε βαθμωτή συνάρτηση του ϕ όπως $\phi^2, \phi^4, \phi^n, \cos\phi$ κλπ. είναι ένα τέτοιο αναλλοίωτο.

2.2 Διανυσματικά πεδία

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να ορίσει κανείς το διανυσματικό πεδίο. Ο πρώτος τρόπος είναι να δώσουμε έναν νόμο μετασχηματισμού, και να πούμε ότι από εδώ και στο εξής, όποια ποσότητα μετασχηματίζεται κατά αυτόν τον τρόπο θα ονομάζεται διανυσματικό πεδίο. Ένας άλλος τρόπος θα ήταν να σκεφτούμε την ποσότητα $\partial_\mu \phi$ που ο νόμος μετασχηματισμού της είναι απόλυτα καθορισμένος, εξαιτίας των όσων είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο για το βαθμωτό πεδίο. Αν κάποια ποσότητα έχει κάθε λόγο να ονομαστεί διάνυσμα, είναι αυτή, ως κλίση βαθμωτού. Άρα βρίσκουμε το νόμο μετασχηματισμού της ποσότητας $\partial_\mu \phi$ και στο εξής λέμε ότι όποια ποσότητα μετασχηματίζεται όπως το $\partial_\mu \phi$, είναι διανυσματικό πεδίο.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι να βρούμε τη μεταβολή του $\partial_\mu \phi$.

- Μία αλγεβρική προσέγγιση που κάνει πλήρη χρήση του συμβολισμού που εισαγάγαμε στην 1.9 είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
\delta(\partial_\mu \phi) &\overset{\delta\phi=0}{=} \delta(\partial_\mu \phi) - \partial_\mu \delta\phi \\
&= (\delta_0 + \delta x^\rho \partial_\rho)\partial_\mu \phi - \partial_\mu(\delta_0 \phi + \delta x^\rho \partial_\rho \phi) \\
&= \delta x^\rho \partial_\rho \partial_\mu \phi - \partial_\mu(\delta x^\rho \partial_\rho \phi) \\
&= -(\partial_\mu \delta x^\rho)\partial_\rho \phi
\end{aligned} \tag{2.11}$$

  Κάτω από μία απειροστή μετάθεση 2.6:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \;\Rightarrow\; \delta x^\mu = \varepsilon^\mu$$

  η σχέση 2.11 μας δίνει:

$$\delta(\partial_\mu \phi) = -(\partial_\mu \delta x^\rho)\partial_\rho \phi = -(\partial_\mu \varepsilon^\rho)\partial_\rho \phi = 0 \tag{2.12}$$

  Αντίστοιχα, κάτω από έναν απειροστό μετασχηματισμό Lorentz 2.8:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \;\Rightarrow\; \delta x^\mu = \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu$$

  η σχέση 2.11 μας δίνει:

$$\delta(\partial_\mu \phi) = -(\partial_\mu \delta x^\rho)\partial_\rho \phi = -\varepsilon^\rho{}_\sigma(\partial_\mu x^\sigma)\partial_\rho \phi = -\varepsilon^\rho{}_\sigma(\delta^\sigma_\mu)\partial_\rho \phi = -\varepsilon^\rho{}_\mu \partial_\rho \phi = \varepsilon_\mu{}^\rho \partial_\rho \phi \tag{2.13}$$

- Ένας άλλος τρόπος να φτάσουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, είναι απλά να μετασχηματίσουμε την μερική παράγωγο με κανόνα αλυσίδας. Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\partial_\mu \phi \longrightarrow \partial'_\mu \phi'(x')$$

  Όμως $\phi'(x') = \phi(x)$, άρα:

$$\partial'_\mu \phi'(x') = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\phi'(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\phi(x) = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right)\partial_\nu \phi(x) \tag{2.14}$$

  Άρα για μία απειροστή μετάθεση της μορφής:

$$x'^\nu = x^\nu + \varepsilon^\nu \quad \Rightarrow \quad x^\nu = x'^\nu - \varepsilon^\nu$$

έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} x^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} (x'^{\nu} - \varepsilon^{\nu}) = \delta^{\nu}_{\mu}$$

και η 2.14 μας δίνει:

$$\partial'_{\mu}\phi'(x') = \delta_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}\phi(x) = \partial_{\mu}\phi \quad \Rightarrow \quad \delta(\partial_{\mu}\phi) = 0$$

που είναι απλά το συμπέρασμα που βγάλαμε στη σχέση 2.12. Αντίστοιχα για έναν απειροστό μετασχηματισμό Lorentz:

$$x'^{\nu} = x^{\nu} + \varepsilon^{\nu}{}_{\rho} x^{\rho} \;\Rightarrow\; x^{\nu} = x'^{\nu} - \varepsilon^{\nu}{}_{\rho} x'^{\rho}$$

έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} x^{\nu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} (x'^{\nu} - \varepsilon^{\nu}{}_{\rho} x'^{\rho}) = \delta^{\nu}_{\mu} - \varepsilon^{\nu}{}_{\rho}\delta^{\rho}_{\mu} \;=\; \delta^{\nu}_{\mu} - \varepsilon^{\nu}{}_{\mu}$$

και η 2.14 μας δίνει:

$$\partial'_{\mu}\phi'(x') = (\delta^{\nu}_{\mu} - \varepsilon^{\nu}{}_{\mu})\partial_{\nu}\phi(x) = \partial_{\mu}\phi + \varepsilon_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}\phi(x) \quad \Rightarrow \quad \delta(\partial_{\mu}\phi) = \varepsilon_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}\phi(x)$$

που είναι και πάλι το συμπέρασμα που βγάλαμε στη σχέση 2.13.

Συνοψίζοντας, η ποσότητα $\partial_{\mu}\phi$ μετασχηματίζεται ως εξής:

κάτω από μεταθέσεις: $$\delta(\partial_{\mu}\phi) = 0 \tag{2.15}$$

κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz: $$\delta(\partial_{\mu}\phi) = \varepsilon_{\mu}{}^{\nu}\;\partial_{\nu}\phi(x) \tag{2.16}$$

Στη συνέχεια θα βρούμε την αναπαράσταση της ομάδας Poincare πάνω στο διανυσματικό πεδίο.

- Για τις απειροστές μεταθέσεις, βρήκαμε $\delta(\partial_{\mu}\phi) = 0$. Χρησιμοποιώντας την 1.9 έχουμε:

$$\delta_0(\partial_{\mu}\phi) + \delta x^{\rho}\partial_{\rho}(\partial_{\mu}\phi) = 0 \;\Rightarrow\; \delta_0(\partial_{\mu}\phi) = -\delta x^{\rho}\partial_{\rho}(\partial_{\mu}\phi)$$

Άρα κάτω από μία απειροστή μετάθεση της μορφής:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu} \;\Rightarrow\; \delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}$$

έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta_0(\partial_{\mu}\phi) &= -\delta x^{\rho}\partial_{\rho}(\partial_{\mu}\phi)\\ &= -\varepsilon^{\rho}\partial_{\rho}(\partial_{\mu}\phi)\\ &= -i\varepsilon^{\rho}P_{\rho}(\partial_{\mu}\phi) \qquad \text{όπου } P_{\rho} = -i\partial_{\rho}\end{aligned}$$

- Για τους μετασχηματισμούς Lorentz, βρήκαμε $\delta(\partial_{\mu}\phi) = \varepsilon_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}\phi(x)$. Χρησιμοποιώντας την 1.9 έχουμε:

$$\delta_0(\partial_{\mu}\phi) + \delta x^{\rho}\partial_{\rho}(\partial_{\mu}\phi) = \varepsilon_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}\phi(x) \;\Rightarrow\; \delta_0(\partial_{\mu}\phi) = \varepsilon_{\mu}{}^{\nu}\partial_{\nu}\phi(x) - \delta x^{\rho}\partial_{\rho}(\partial_{\mu}\phi)$$

Άρα, κάτω από έναν απειροστό μετασχηματισμό Lorentz της μορφής:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \;\Rightarrow\; \delta x^{\mu} = \varepsilon^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\delta_0(\partial_\mu\phi) &= \varepsilon_\mu{}^\nu \partial_\nu\phi(x) - \varepsilon^\rho{}_\nu x^\nu \partial_\rho(\partial_\mu\phi) \\
&= \frac{1}{2}(\varepsilon_\mu{}^\nu - \varepsilon^\nu{}_\mu)\,\partial_\nu\phi(x) + \frac{1}{2}(\varepsilon_\nu{}^\rho - \varepsilon^\rho{}_\nu)\,x^\nu\partial_\rho(\partial_\mu\phi) \\
&= -\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\, i(g_{\mu\alpha}\delta^\nu_\beta - g_{\beta\mu}\delta^\nu_\alpha)\partial_\nu\phi(x) - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} i(g_{\nu\alpha}\delta^\rho_\beta - g_{\nu\beta}\delta^\rho_\alpha)x^\nu\partial_\rho(\partial_\mu\phi) \\
&= -\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\, i(g_{\alpha\mu}\delta^\nu_\beta - g_{\beta\mu}\delta^\nu_\alpha)\partial_\nu\phi(x) - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} i(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha)(\partial_\mu\phi) \\
&= -\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\,(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu\ \partial_\nu\phi - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ \partial_\mu\phi
\end{aligned}$$

Άρα η μεταβολή του διανυσματικού πεδίου κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_0(\partial_\mu\phi) = -\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\,(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu\ \partial_\nu\phi - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ \partial_\mu\phi \tag{2.17}$$

όπου

$$(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu = i(g_{\alpha\mu}\delta^\nu_\beta - g_{\beta\mu}\delta^\nu_\alpha) \tag{2.18}$$

$$L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha) \tag{2.19}$$

Με απευθείας υπολογισμό βρίσκουμε ότι οι νέοι γεννήτορες $S_{\alpha\beta}$ που βρήκαμε (των οποίων ο ρόλος είναι να ανακατεύουν συνιστώσες) ικανοποιούν την ίδια Αλγεβρα Lie με τους $L_{\alpha\beta}$, όπως αναμέναμε:

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = ig_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}S_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} \tag{2.20}$$

Υπάρχει όμως και ένας πολύ πιο άμεσος και έξυπνος τρόπος να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας τη δουλειά που είχαμε κάνει για το βαθμωτό πεδίο. Τον παραθέτω εδώ σαν μία εναλλακτική απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών.

Έχουμε βρει ότι το βαθμωτό πεδίο μετασχηματίζεται κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz ως εξής:

$$\phi'(x) = \phi(x) - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ \phi(x), \qquad L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha) \tag{2.21}$$

Ξαναγράφουμε την εξίσωση για το τονούμενο σύστημα αναφοράς (αλλαγή συμβολισμού):

$$\phi'(x') = \phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} L'_{\alpha\beta}\ \phi(x'), \qquad L'_{\alpha\beta} = i(x'_\alpha\partial'_\beta - x'_\beta\partial'_\alpha) \tag{2.22}$$

Τώρα υπολογίζουμε τη μεταβολή του $\partial_\mu\phi$ απλά παραγωγίζοντας στο τονούμενο σύστημα αναφοράς

(προσέχοντας ότι οι γεννήτορες $L_{\alpha\beta}$ πρέπει να παραγωγιστούν):

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\phi(x) \longrightarrow \partial'_\mu\phi'(x') &= \partial'_\mu\left[\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}L'_{\alpha\beta}\ \phi(x')\right] \\
&= \partial'_\mu\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}L'_{\alpha\beta}\ \partial'_\mu\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(\partial'_\mu L'_{\alpha\beta})\ \phi(x') \\
&= \partial'_\mu\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}L'_{\alpha\beta}\ \partial'_\mu\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}i\partial'_\mu(x'_\alpha\partial'_\beta - x'_\beta\partial'_\alpha)\ \phi(x') \\
&= \partial'_\mu\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}L'_{\alpha\beta}\ \partial'_\mu\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}i(g_{\mu\alpha}\partial'_\beta - g_{\mu\beta}\partial'_\alpha)\ \phi(x') \\
&= \partial'_\mu\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}L'_{\alpha\beta}\ \partial'_\mu\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}i(g_{\alpha\mu}\delta^\nu_\beta - g_{\beta\mu}\delta^\nu_\alpha)\ \partial'_\nu\phi(x') \\
&= \partial'_\mu\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}L'_{\alpha\beta}\ \partial'_\mu\phi(x') - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu\ \partial'_\nu\phi(x')
\end{aligned}$$

Όμως η διαφορά $\partial'_\mu\phi'(x') - \partial'_\mu\phi(x')$ είναι απλά η συναρτησιακή μεταβολή, υπολογισμένη στο x'. Άρα έχουμε πάρει το γνωστό αποτέλεσμα της 2.17:

$$\delta_0(\partial_\mu\phi) = -\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}L_{\alpha\beta}\ \partial_\mu\phi - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu\ \partial_\nu\phi$$

Οι γεννήτορες $L_{\alpha\beta}$ αποτελούν μία διαφορική αναπαράσταση της ομάδας Lorentz. Οι $(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu$ αποτελούν μία αναπαράσταση της ίδιας ομάδας με πίνακες.

Μέχρι στιγμής έχουμε δείξει πώς μετασχηματίζεται το $\partial_\mu\phi$. Πρέπει να δείξουμε ότι ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο $A^\mu(x)$ με την κλασσική, γεωμετρική έννοια του όρου μετασχηματίζεται με τον ίδιο τρόπο. Στην πραγματικότητα, θα μπορούσαμε κάλλιστα να ξεκινήσουμε από εδώ τη μελέτη μας.

Έστω ένα σύστημα αναφοράς με μία ορθοκανονική βάση $\{\hat{e}_\mu\}$ (εδώ τα $\hat{e}_\mu$ δεν είναι συνιστώσες, είναι τα ίδια τα ανύσματα βάσης και μ είναι απλά ένας δείκτης που αριθμεί τα ανύσματα αυτά). Έστω ένας μετασχηματισμός των ανυσμάτων βάσης $\hat{e}_\mu \xrightarrow{U} \hat{e}'_\mu$. Καθώς τα ανύσματα $\hat{e}_\mu$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, κάθε άλλο άνυσμα γράφεται συναρτήσει αυτών, άρα αυτό ισχύει και για τα $\{\hat{e}'_\mu\}$:

$$\hat{e}'_\mu = U_\mu{}^\nu\ \hat{e}_\nu \tag{2.23}$$

Ένα τυχαίο άνυσμα $\vec{r}$ στις δύο αυτές βάσεις γράφεται $\vec{r} = x^\mu\hat{e}_\mu$ και $\vec{r} = x'^\mu\hat{e}'_\mu$, όπου x^μ, x'^μ οι συντεταγμένες του ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς. Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
x^\mu\hat{e}_\mu = x'^\mu\hat{e}'_\mu \ &\Rightarrow\ x^\mu\hat{e}_\mu = x'^\mu U_\mu{}^\nu\ \hat{e}_\nu \\
&\Rightarrow\ x^\mu\ (\hat{e}_\mu\cdot\hat{e}_\rho) = x'^\mu\ U_\mu{}^\nu\ (\hat{e}_\nu\cdot\hat{e}_\rho) \\
&\Rightarrow\ x^\mu\delta_{\mu\rho} = x'^\mu U_\mu{}^\nu\ \delta_{\nu\rho} \\
&\Rightarrow\ x^\rho(U^{-1})_\rho{}^\nu = x'^\mu U_\mu{}^\rho\ (U^{-1})_\rho{}^\nu \\
&\Rightarrow\ x'^\mu = (U^{-1})_\nu{}^\mu\ x^\nu
\end{aligned}$$

Άρα αν μετονομάσουμε το μετασχηματισμό των συντεταγμένων:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\ x^\nu \tag{2.24}$$

μπορούμε να κάνουμε την αντίστροφη διαδικασία, ώστε να εκφράσουμε τον U συναρτήσει του Λ:

$$\begin{aligned}
x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\rho\ x^\rho\ \Rightarrow\ x'^\nu(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\Lambda^\nu{}_\rho x^\rho\ \Rightarrow\ x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu\ &\Rightarrow\ x^\mu\hat{e}_\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu\hat{e}_\mu \\
&\Rightarrow\ x^\mu\hat{e}_\mu = x'^\nu[(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\hat{e}_\mu] \\
&\Rightarrow\ x^\mu\hat{e}_\mu = x'^\nu\hat{e}'_\nu
\end{aligned}$$

Η έκφραση στις αγκύλες είναι τα ανύσματα $\hat{e}'_\nu$. Συνεπώς τα ανύσματα βάσης μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\hat{e}'_\mu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \hat{e}_\nu \tag{2.25}$$

Συγκρίνοντας με την 2.23 συμπεραίνουμε ότι $U_\mu{}^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$. Συνοψίζοντας τις σχέχεις 2.24 και 2.25 καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu && \text{Coordinates transform contravariantly} \\ \hat{e}'_\mu &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \hat{e}_\nu && \text{Basis vectors transform covariantly} \end{aligned}$$

Πώς μετασχηματίζεται όμως ένα διανυσματικό πεδίο; Ένα τυχαίο διανυσματικό πεδίο γράφεται ως εξής:

$$\left.\begin{aligned} \vec{A}(x) &= A^\mu(x)\ \hat{e}_\mu \\ \vec{A}(x) &= A'^\mu(x')\hat{e}'_\mu \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ A^\mu(x)\ \hat{e}_\mu = A'^\mu(x')\hat{e}'_\mu$$

Χρησιμοποιώντας την 2.25 έχουμε:

$$\begin{aligned} &\overset{2.25}{\Rightarrow}\ A^\mu(x)\ \hat{e}_\mu = A'^\mu(x')(\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \hat{e}_\nu \\ &\Rightarrow\ A^\mu(x)\ = A'^\nu(x')(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \\ &\Rightarrow\ A'^\mu(x')\ = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \end{aligned} \tag{2.26}$$

Βλέπουμε ότι η αλλαγή σε ένα διανυσματικό πεδίο προέρχεται από δύο μέρη:

1. Λόγω της αλλαγής των ανυσμάτων βάσης, η x-συνιστώσα του πεδίου θα μοιραστεί πλέον στις νέες του συνιστώσες ανάλογα με τις προβολές του $\hat{x}$ ανύσματος στα νέα ανύσματα βάσης. Μπλέκονται δηλαδή οι συνιστώσες, το οποίο είναι απολύτως λογικό: Όπως ακριβώς για ένα ελεύθερο διάνυσμα στο χώρο θα αλλάξουν οι προβολές του στους άξονες (συνιστώσες) αν στρίψουμε το σύστημα αναφοράς, το ίδιο θα συμβεί και για ένα διανυσματικό πεδίο που αποτελείται από άπειρα τέτοια διανύσματα διαφορετικού μέτρου και διεύθυνσης σε κάθε σημείο του χώρου

2. Όμως κάθε συνιστώσα ενός διανυσματικού πεδίου είναι συνάρτηση των συντεταγμένων x^μ. Πρέπει να τις μετασχηματίσουμε στις καινούργιες συντεταγμένες, αν θέλουμε να έχουμε μεταβεί πλήρως στο νέο σύστημα αναφοράς.

Από το (1) θα πάρουμε ένα matrix representation του Lorentz Group ενώ από το (2) θα πάρουμε την συνηθισμένη differential representation του Lorentz Group. Έτσι καταλαβαίνουμε καλύτερα την εμφάνιση των γεννητόρων που βρήκαμε στις σχέσεις 2.18 και 2.19.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θεωρούμε τον απειροστό μετασχηματισμό Lorentz:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu \qquad \text{ώστε} \qquad x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \quad \text{και} \quad \hat{e}'^\mu = \hat{e}^\mu - \varepsilon^\nu{}_\mu \hat{e}_\nu \tag{2.27}$$

Από την 2.26 έχουμε:

$$\begin{aligned} A'^\mu(x') &= A^\mu(x) + \varepsilon^\mu{}_\nu A^\nu(x) = A^\mu(x' - \delta x) + \varepsilon^\mu{}_\nu A^\nu(x' - \delta x) \\ &= A^\mu(x' - \delta x) + \varepsilon^\mu{}_\nu A^\nu(x' - \delta x) \\ &= A^\mu(x') - \delta x^\rho \partial_\rho A^\mu(x') + \varepsilon^\mu{}_\nu A^\nu(x') + \mathcal{O}(\delta x^2) \\ &= A^\mu(x') + \varepsilon^\mu{}_\nu A^\nu(x') - \delta x^\rho \partial_\rho A^\mu(x') \end{aligned}$$

Άρα για τη συναρτησιακή μεταβολή του $A^\mu(x)$ έχουμε:

$$\delta_0 A^\mu = -\varepsilon^\rho{}_\nu x^\nu \partial_\rho A^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu A^\nu = -\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ A^\mu - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(S_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu\ A^\nu \tag{2.28}$$

όπου οι γεννήτορες είναι

$$(S_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = i(g_{\beta\nu}\delta^\mu_\alpha - g_{\alpha\nu}\delta^\mu_\beta) \tag{2.29}$$

$$L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha) \tag{2.30}$$

Προφανώς για τη συναρτησιακή μεταβολή ενός covariant τετρανύσματος $A_\mu(x)$ έχουμε:

$$\delta_0 A_\mu = -\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ A_\mu - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu\ A_\nu$$

όπου οι γεννήτορες είναι:

$$(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu = i(g_{\alpha\mu}\delta^\nu_\beta - g_{\beta\mu}\delta^\nu_\alpha) \tag{2.31}$$

$$L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha) \tag{2.32}$$

Αν θέλουμε να βρούμε την ολική μεταβολή, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις 1.9 και 2.28 και έχουμε:

$$\delta A^\mu = \delta_0 A^\mu + \delta x^\rho \partial_\rho A^\mu \overset{2.28}{=} -\varepsilon^\rho{}_\nu x^\nu \partial_\rho A^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu A^\nu + \varepsilon^\rho{}_\nu x^\nu \partial_\rho A^\mu = \varepsilon^\mu{}_\nu A^\nu \tag{2.33}$$

και προφανώς, αντίστοιχα, για covariant τετρανύσματα θα είναι:

$$\delta A_\mu = \varepsilon_\mu{}^\nu A_\nu \tag{2.34}$$

Άρα πράγματι το $A_\mu(x)$ μετασχηματίζεται ακριβώς όπως το $\partial_\mu\phi$. Βρήκαμε λοιπόν την αναπαράσταση της ομάδας Poincare πάνω σε τετρανύσματα. Στη συνέχεια μπορούμε να κατασκευάσουμε κάποια πολύ χρήσιμα αναλλοίωτα. Παρατηρούμε ότι:

1. Η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου είναι, όπως ξέρουμε ένα βαθμωτό πεδίο. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\delta\ [\partial_\mu A^\mu] &= \partial'_\mu A'^\mu(x') - \partial_\mu A^\mu(x) \overset{2.34}{=} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(A^\mu(x) + \varepsilon^\mu{}_\beta A^\beta(x)\right) - \partial_\mu A^\mu(x) \\
&= (\delta^\alpha_\mu - \varepsilon^\alpha{}_\mu)\partial_\alpha\left(A^\mu(x) + \varepsilon^\mu{}_\beta A^\beta(x)\right) - \partial_\mu A^\mu(x) \\
&= \partial_\mu A^\mu(x) + \partial_\mu\varepsilon^\mu{}_\beta A^\beta(x) - \partial_\alpha\varepsilon^\alpha{}_\mu A^\mu(x) - \partial_\mu A^\mu(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\
&= 0
\end{aligned}$$

   Μία υποπερίπτωση αυτής της κατηγορίας αναλλοίωτων είναι και η d'Alembertian βαθμωτού πεδίου $\partial_\mu\partial^\mu\phi$.

2. Το εσωτερικό γινόμενο (ως προς την μετρική Minkowski) δύο διανυσματικών πεδίων, σημείο προς σημείο:

$$\begin{aligned}
\delta\ [A_\mu B^\mu] &= A'_\mu(x')B'^\mu(x') - A_\mu B^\mu \\
&= (A_\mu + \varepsilon_\mu{}^\nu A_\nu)(B^\mu + \varepsilon^\mu{}_\rho B^\rho) - A_\mu B^\mu \\
&= A_\mu B^\mu + A_\mu\varepsilon^\mu{}_\rho B^\rho + \varepsilon_\mu{}^\nu A_\nu B^\mu - A_\mu B^\mu \\
&= A_\mu\varepsilon^\mu{}_\rho B^\rho - A_\nu\varepsilon^\nu{}_\mu B^\mu \\
&= 0
\end{aligned}$$

Μία υποπερίπτωση αυτής της κατηγορίας είναι και η έκφραση $(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)$ που εμφανίζεται στους κινητικούς όρους Klein-Gordon. Αξίζει να αναφέρουμε ότι οι συντεταγμένες x^μ μετασχηματίζονται σαν τετράνυσμα κάτω από Lorentz μετασχηματισμούς, οπότε η ποσότητα $x^\mu\partial_\mu\phi$ είναι Lorentz αναλλοίωτη, σύμφωνα με την κατηγορία (2), αλλά $\delta[x^\mu] \neq 0$ κάτω από μεταθέσεις, με αποτέλεσμα το $x^\mu\partial_\mu\phi$ να μην είναι Poincare αναλλοίωτο.

2.3 Τανυστικά Πεδία

Γενικεύοντας τα συμπεράσματα της προηγούμενης παραγράφου, ορίζουμε την ολική μεταβολή για τανυστικά πεδία. Κάθε δείκτης ενός τανυστικού πεδίου με πολλούς δείκτες Lorentz θα μετασχηματίζεται σύμφωνα με τις 2.33 και 2.34, ανάλογα με το αν είναι ανταλλοίωτος ή συναλλοίωτος. Η ολική μεταβολή του τανυστή θα δίνεται κάτω από ένα άθροισμα εκφράσεων όπως η 2.34. Για παράδειγμα ένας πλήρως συναλλοίωτος τανυστής δεύτερης τάξης θα μετασχηματίζεται κατά αντιστοιχία με την 2.26 ως εξής:

$$B'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu{}^\alpha \Lambda_\nu{}^\beta B_{\alpha\beta}(x) \tag{2.35}$$

Όμως παίρνοντας έναν απειροστό μετασχηματισμό και κρατώντας μέχρι όρους πρώτης τάξης ως προς ε, έχουμε:

$$B'_{\mu\nu}(x') = (\delta_\mu{}^\alpha + \varepsilon_\mu{}^\alpha)(\delta_\nu{}^\beta + \varepsilon_\nu{}^\beta)B_{\alpha\beta} = B_{\mu\nu} + \varepsilon_\nu{}^\beta B_{\mu\beta} + \varepsilon_\mu{}^\alpha B_{\alpha\nu} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{2.36}$$

Εργαζόμενοι όπως και στην προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να βρούμε τους γεννήτορες της μεταβολής:

$$\begin{aligned} B'_{\mu\nu}(x') &= B_{\mu\nu}(x) + \varepsilon_\nu{}^\beta B_{\mu\beta}(x) + \varepsilon_\mu{}^\alpha B_{\alpha\nu}(x) \\ &= B_{\mu\nu}(x' - \delta x) + \varepsilon_\nu{}^\beta B_{\mu\beta}(x' - \delta x) + \varepsilon_\mu{}^\alpha B_{\alpha\nu}(x' - \delta x) \\ &= B_{\mu\nu}(x') - \delta x^\kappa \partial'_\kappa B_{\mu\nu}(x') + \varepsilon_\nu{}^\beta B_{\mu\beta}(x') + \varepsilon_\mu{}^\alpha B_{\alpha\nu}(x') + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= B_{\mu\nu}(x') - \delta x^\kappa \partial'_\kappa B_{\mu\nu}(x') + \varepsilon_\nu{}^\beta B_{\mu\beta}(x') + \varepsilon_\mu{}^\alpha B_{\alpha\nu}(x') \end{aligned} \tag{2.37}$$

Άρα για τη συναρτησιακή μεταβολή έχουμε:

$$\begin{aligned} \delta_0 B_{\mu\nu} &= -\varepsilon^\kappa{}_\lambda x^\lambda \partial_\kappa B_{\mu\nu} + \varepsilon_\nu{}^\beta B_{\mu\beta} + \varepsilon_\mu{}^\alpha B_{\alpha\nu} \\ &= -\frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\ B_{\mu\nu} - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(S_{\alpha\beta})_\nu{}^\beta B_{\mu\beta} - \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\alpha B_{\alpha\nu} \end{aligned} \tag{2.38}$$

όπου οι γεννήτορες είναι:

$$(S_{\alpha\beta})_\mu{}^\nu = i(g_{\alpha\mu}\delta^\nu_\beta - g_{\beta\mu}\delta^\nu_\alpha) \tag{2.39}$$

$$L_{\alpha\beta} = i(x_\alpha\partial_\beta - x_\beta\partial_\alpha) \tag{2.40}$$

Όπως και με τα τετρανύσματα, έτσι και με τους τανυστές ανώτερης τάξης μπορούμε να κατασκευάσουμε τα αντίσοιχα Lorentz αναλλοίωτα, όπως τα $F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$, $\partial_\mu\partial_\nu A^{\mu\nu}$, κλπ.

2.4 Σπινοριακά πεδία

Στις προηγούμενες παραγράφους, ξεκινούσαμε ορίζοντας κάποιο πεδίο στο χώρο των θέσεων, και εξετάζαμε το πως μετασχηματίζεται όταν οι συντεταγμένες υφίστανται μετασχηματισμό Lorentz. Βρίσκαμε έτσι ότι η ομάδα Lorentz αναπαρίσταται από κάποιους τελεστές που δρουν στον χώρο αυτών των πεδίων (π.χ. στον χώρο των θέσεων). Σε αυτή την παράγραφο θα αναζητήσουμε τις αναπαραστάσεις της ομάδας Lorentz γενικά, σε θεωρητικό επίπεδο, ξεκινώντας μόνο από τη μεταθετική άλγεβρα των γεννητόρων της, που θα αντιμετωπίζονται ως αφηρημένοι τελεστές που δρουν σε κάποιον αφηρημένο χώρο Hilbert. Όταν βρούμε τα διάφορα είδη αναπαραστάσεων που υπάρχουν, θα δούμε ότι κάθε ένα από τα πεδία που εξετάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους μετασχηματίζεται σαν κάποια από αυτές τις γενικές, αφηρημένες αναπαραστάσεις (π.χ. θα αποδείξουμε ότι το διανυσματικό πεδίο μετασχηματίζεται όπως η $(\frac{1}{2}\frac{1}{2})$ αναπαράσταση του Lorentz Group).

Ξεκινάμε από την Άλγεβρα Lie των γεννητόρων, όπως δίνεται από τη σχέση 1.33:

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = ig_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} \tag{2.41}$$

Ένας Lorentz μετασχηματισμός ορίζεται από τη σχέση 1.34:

$$U(\omega^{\rho\sigma}) = \exp\{\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma}\} = e^{i(\vec{v}\vec{K}+\vec{\omega}\vec{J})} \tag{2.42}$$

όπου έχουμε ορίσει τους γεννήτορες των στροφών $\vec{J}$ και των boosts $\vec{K}$ και τις αντίστοιχες απειροστές παραμέτρους:

$$\begin{array}{ll} J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}L_{jk} & \\ K_i = \frac{1}{2}(L_{0i} - L_{i0}) & \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{ll} (\vec{\omega})_i = \frac{1}{2}(\omega_{0i} - \omega_{i0}) & \\ (\vec{v})_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\omega_{jk} & \end{array}$$

Οι νέοι τελεστές ικανοποιούν τις σχέσεις μετάθεσης:

$$\begin{aligned} [K_i, K_j] &= -i\,\varepsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, J_j] &= \quad i\,\varepsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, K_j] &= \quad i\,\varepsilon_{ijk}K_k \end{aligned}$$

Τέλος, αποσυμπλέκουμε τις τελευταίες μεταθετικές σχέσεις ορίζοντας τους νέους τελεστές:

$$\begin{array}{l} M_i = (J_i + iK_i)/2 \\ N_i = (J_i - iK_i)/2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} J_i \;=\; M_i + N_i \\ K_i = i(N_i - M_i) \end{array} \tag{2.43}$$

Οι νέοι τελεστές ικανοποιούν τις μεταθετικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} [M_i, M_j] &= i\,\varepsilon_{ijk}M_k \\ [N_i, N_j] &= i\,\varepsilon_{ijk}N_k \\ [M_i, N_j] &= 0 \end{aligned}$$

Άρα, φτάνουμε στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα ότι η άλγεβρα της ομάδας Lorentz είναι ισοδύναμη με την άλγεβρα $SU(2) \otimes SU(2)$, της οποίας οι αναπαραστάσεις είναι γνωστές. Πριν κατασκευάσουμε αυτές τις αναπαραστάσεις, πρέπει να κάνουμε δύο σημαντικά σχόλια:

1. *Η ομάδα Lorentz είναι non-compact. Οι non-compact ομάδες δεν έχουν unitary αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης. Αν αναζητήσουμε αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης, αυτές θα είναι non-unitary. Πράγματι παρατηρούμε από τη σχέση 2.43 ότι τα δύο σύνολα τελεστών J, K και M, N δεν μπορούν να είναι ταυτόχρονα ερμιτιανά. Συγκεκριμένα αν οι M, N παρθούν ως ερμιτιανοί βλέπουμε ότι $J^\dagger = M^\dagger + N^\dagger = M + N = J$ ενώ $K^\dagger = -i(N^\dagger - M^\dagger) = -i(N - M) = -K$. Καθότι όμως μόνο τα εκθετικά ερμιτιανών πινάκων είναι unitary, βλέπουμε ότι εν γένει τα στοιχεία $U(\vec{v}\vec{\omega}) = e^{i(\vec{v}\vec{K}+\vec{\omega}\vec{J})}$ της ομάδας Lorentz θα είναι non-unitary στις πεπερασμένης διάστασης αναπαραστάσεις τους! Αν κανείς αναζητήσει τις unitary αναπαραστάσεις της ομάδας, θα οδηγηθεί σε αναπαραστάσεις άπειρης διάστασης.*

2. *Παρατηρούμε ότι οι δύο άλγεβρες $SU(2)$ δεν είναι απολύτως ανεξάρτητες. Συνδέονται μέσω του τελεστή της ομοτιμίας (parity), P. Κάτω από την parity, έχουμε*

$$\left.\begin{array}{lcl} J_i & \longrightarrow & J_i \\ K_i & \longrightarrow & -K_i \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} M_i = (J_i + iK_i)/2 \longrightarrow N_i \\ N_i = (J_i - iK_i)/2 \longrightarrow M_i \end{array} \tag{2.44}$$

2.4.1 Οι θεμελιώδεις αναπαραστάσεις $(\frac{1}{2}, 0)_L$ και $(0, \frac{1}{2})_R$

Προς το παρόν θα ασχοληθούμε με τις αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης. Συγκεκριμένα έχουμε δύο τελεστές Casimir, τους M^2 και N^2, που είναι ταυτόχρονα διαγωνιοποιήσιμοι με τους M_3 και N_3. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τις εξισώσεις ιδιοτιμών:

$$\begin{array}{ll} M^2|u,k\rangle = u(u+1)|u,k\rangle & N^2|v,l\rangle = v(v+1)|v,l\rangle \\ M_3|u,k\rangle = k|u,k\rangle & N_3|v,l\rangle = l|v,l\rangle \end{array} \tag{2.45}$$

και τους τελεστές ανάβασης κατάστασης:

$$M_\pm = M_1 \pm iM_2 \qquad N_\pm = N_1 \pm iN_2 \tag{2.46}$$

που ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις μετάθεσης με τους M_3, N_3:

$$\begin{array}{rl} [M_3, M_\pm] = [M_3, M_1] \pm i[M_3, M_2] & [N_3, N_\pm] = [N_3, N_1] \pm i[N_3, N_2] \\ = iM_2 \pm M_1 = \pm M_\pm & = iN_2 \pm N_1 = \pm N_\pm \end{array} \tag{2.47}$$

ώστε να έχουν την ιδιότητα να ανεβοκατεβάζουν τις ιδιοτιμές των M_3, N_3:

$$\begin{array}{rl} M_3(M_\pm|u,k\rangle) = (M_\pm M_3 + [M_3, M_\pm])|u,k\rangle & N_3(M_\pm|v,l\rangle) = (N_\pm N_3 + [N_3, N_\pm])|v,l\rangle \\ = (k \pm 1)M_\pm|u,k\rangle & = (k \pm 1)N_\pm|v,l\rangle \end{array}$$

Επίσης ισχύουν οι χρήσιμες ταυτότητες:

$$M_+M_- = {M_1}^2 + {M_2}^2 + {M_3}^2 \qquad N_+N_- = {N_1}^2 + {N_2}^2 + {N_3}^2 \tag{2.48}$$

$$M_-M_+ = {M_1}^2 + {M_2}^2 - {M_3}^2 \qquad N_-N_+ = {N_1}^2 + {N_2}^2 - {N_3}^2 \tag{2.49}$$

Με χρήση των τελευταίων εξισώσεων προσδιορίζουμε τους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες της δράσης των τελεστών ανάβασης και κατάβασης:

$$M_\pm|u,k\rangle = \sqrt{u(u+1) - k(k \pm 1)}\,|u, k \pm 1\rangle \tag{2.50}$$

$$N_\pm|v,l\rangle = \sqrt{v(v+1) - l(l \pm 1)}\;\;|v, v \pm 1\rangle \tag{2.51}$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε όλους τους τελεστές που μας ενδιαφέρουν συναρτήσει των $M_3, M_\pm$ και $N_3, N_\pm$ που έχουν γνωστή δράση πάνω στις ιδιοκαταστάσεις $|u,k\rangle$ και $|v,l\rangle$ αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} M_1 &= (M_+ \ + M_-)/2 & N_1 &= (N_+ \ + N_-)/2 \\ M_2 &= (M_+ \ - M_-)/2i & N_2 &= (N_+ \ - N_-)/2i \\ M^2 &= {M_3}^2 + M_3 + M_- M_+ & N^2 &= {N_3}^2 + N_3 + N_- N_+ \end{aligned}$$

Είμαστε πλέον σε θέση να κατασκευάσουμε τις αναπαραστάσεις του Lorentz Group. Η βάση που θα χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε τις αναπαραστάσεις θα είναι τα ανύσματα $|u,v,k,l\rangle$ όπου u,v,k,l οι ιδιοτιμές των αμοιβαία μετατιθέμενων τελεστών M^2, N^2, M_3, N_3. Για κάθε συνδυασμό των αριθμών u και v, θα έχω μία διαφορετική αναπαράσταση. Δηλαδή οι ιδιοτιμές των δύο τελεστών Casimir ονομάζουν την αναπαράσταση, ενώ οι ελεύθεροι δείκτες k,l μας μετακινούν ανάμεσα στα διάφορα matrix elements της αναπαράστασης.

Αρχικά θα κατασκευάσουμε τις δύο θεμελιώδεις αναπαραστάσεις που είναι διδιάστατες και συμβολίζονται με $(\frac{1}{2},0)_L$ και $(0,\frac{1}{2})_R$:

1. **Αν $u = \frac{1}{2}$ και $v = 0$ παίρνουμε την left αναπαράσταση που συμβολίζεται με $(\frac{1}{2},0)_L$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:**

$$u = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad k = \pm\frac{1}{2} \tag{2.52}$$

$$v = 0 \quad \Rightarrow \quad l = \ 0 \tag{2.53}$$

Άρα για τους J_m έχουμε:

$$J_m \doteq \langle k', l'|J_m|k,l\rangle = \begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2},0|J_m|\frac{1}{2},0\rangle & \langle\frac{1}{2},0|J_m|-\frac{1}{2},0\rangle \\ \langle-\frac{1}{2},0|J_m|\frac{1}{2},0\rangle & \langle-\frac{1}{2},0|J_m|-\frac{1}{2},0\rangle \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

Επειδή $J_m = M_m + N_m$ έχουμε:

$$J_m \doteq \begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2},0|M_m|\frac{1}{2},0\rangle & \langle\frac{1}{2},0|M_m|-\frac{1}{2},0\rangle \\ \langle-\frac{1}{2},0|M_m|\frac{1}{2},0\rangle & \langle-\frac{1}{2},0|M_m|-\frac{1}{2},0\rangle \end{pmatrix} \tag{2.55}$$

Ενώ για τους K_m έχουμε:

$$K_m \doteq \langle k', l'|K_m|k,l\rangle = \begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2},0|K_m|\frac{1}{2},0\rangle & \langle\frac{1}{2},0|K_m|-\frac{1}{2},0\rangle \\ \langle-\frac{1}{2},0|K_m|\frac{1}{2},0\rangle & \langle-\frac{1}{2},0|K_m|-\frac{1}{2},0\rangle \end{pmatrix} \tag{2.56}$$

Επειδή όμως $K_m = i(N_m - M_m)$ έχουμε:

$$K_m \doteq -i\begin{pmatrix} \langle\frac{1}{2},0|M_m|\frac{1}{2},0\rangle & \langle\frac{1}{2},0|M_m|-\frac{1}{2},0\rangle \\ \langle-\frac{1}{2},0|M_m|\frac{1}{2},0\rangle & \langle-\frac{1}{2},0|M_m|-\frac{1}{2},0\rangle \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

Απο αυτή τη σχέση εξάγουμε τους πίνακες:

- $J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_x$
- $J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_y$
- $J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_z$
- $K_1 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\sigma_x$
- $K_2 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\sigma_y$
- $K_3 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2}\sigma_z$

2. **Αν $u = 0$ και $v = \frac{1}{2}$ παίρνουμε την right αναπαρασταση που συμβολίζεται με $(0, \frac{1}{2})_R$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:**

$$u = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \tag{2.58}$$

$$v = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad l = \pm\frac{1}{2} \tag{2.59}$$

Άρα για τους J_m έχουμε:

$$J_m \doteq \langle k', l'|J_m|k, l\rangle = \begin{pmatrix} \langle 0, \frac{1}{2}|J_m|0, \frac{1}{2}\rangle & \langle 0, \frac{1}{2}|J_m|0, -\frac{1}{2}\rangle \\ \langle 0, -\frac{1}{2}|J_m|0, \frac{1}{2}\rangle & \langle 0, -\frac{1}{2}|J_m|0, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

Επειδή $J_m = M_m + N_m$ έχουμε:

$$J_m \doteq \begin{pmatrix} \langle 0, \frac{1}{2}|N_m|0, \frac{1}{2}\rangle & \langle 0, \frac{1}{2}|N_m|0, -\frac{1}{2}\rangle \\ \langle 0, -\frac{1}{2}|N_m|0, \frac{1}{2}\rangle & \langle 0, -\frac{1}{2}|N_m|0, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

Ενώ για τους K_m έχουμε:

$$K_m \doteq \langle k', l'|K_m|k, l\rangle = \begin{pmatrix} \langle 0, \frac{1}{2}|K_m|0, \frac{1}{2}\rangle & \langle 0, \frac{1}{2}|K_m|0, -\frac{1}{2}\rangle \\ \langle 0, -\frac{1}{2}|K_m|0, \frac{1}{2}\rangle & \langle 0, -\frac{1}{2}|K_m|0, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \tag{2.62}$$

Επειδή όμως $K_m = i(N_m - M_m)$ έχουμε:

$$K_m \doteq i\begin{pmatrix} \langle 0, \frac{1}{2}|N_m|0, \frac{1}{2}\rangle & \langle 0, \frac{1}{2}|N_m|0, -\frac{1}{2}\rangle \\ \langle 0, -\frac{1}{2}|N_m|0, \frac{1}{2}\rangle & \langle 0, -\frac{1}{2}|N_m|0, -\frac{1}{2}\rangle \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

Από αυτή τη σχέση εξάγουμε τους πίνακες:

- $J_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_x$
- $J_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_y$
- $J_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sigma_z$
- $K_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\sigma_x$
- $K_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\sigma_y$
- $K_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{i}{2}\sigma_z$

Άρα βρήκαμε τις θεμελιώδεις αναπαραστάσεις πεπερασμένης διάστασης του Lorentz Group. Όλες οι αναπαραστάσεις ανώτερης διάστασης μπορούν να κατασκευαστούν μέσω αυτών. Οι δύο αναπαραστάσεις

είναι μεταξύ τους συζυγείς, όπως φαίνεται αμέσως από τα matrix elements:

$$\left.\begin{array}{l} J_m \doteq \langle k', l'=0| \ M_m + N_m \ |k, l=0\rangle \ = \langle k'|M_m|k\rangle \\ K_m \doteq \langle k', l'=0|i(N_m - M_m)|k, l=0\rangle = -i\langle k'|M_m|k\rangle \end{array}\right\} (\frac{1}{2},0)_L$$

$$\left.\begin{array}{l} J_m \doteq \langle k'=0, l'| \ M_m + N_m \ 1|k=0, l\rangle = \langle l'|N_m|l\rangle \\ K_m \doteq \langle k'=0, l'|i(N_m - M_m)|k=0, l\rangle = i\langle l'|N_m|l\rangle \end{array}\right\} (0,\frac{1}{2})_R$$

Επίσης παρατηρούμε ότι οι δύο αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες ως προς τις στροφές, αλλά μη ισοδύναμες ως προς το πλήρες Lorentz Group.

2.4.2 Οι νόμοι μετασχηματισμού για left-handed και right-handed σπίνορες

Τώρα είμαστε σε θέση να βρούμε τους νόμους μετασχηματισμού που προκύπτουν για κάθε αναπαράσταση, μέσω της σχέσης 2.42.

1. Για ανύσματα που ανήκουν στη left αναπαράσταση $(0,\frac{1}{2})_L$ (από εδώ και στο εξής θα λέγονται left handed σπίνορες, ψ_L) η σχέση 2.42 μας δίνει το νόμο μετασχηματισμού:

$$\left.\begin{array}{l} M_i = \frac{1}{2}\sigma_i \\ N_i = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} J_i = \frac{1}{2}\sigma_i \\ K_i = -\frac{i}{2}\sigma_i \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_L = e^{\frac{i}{2}(\vec{\omega}-i\vec{v})\vec{\sigma}}} \tag{2.64}$$

2. Για ανύσματα που ανήκουν στη right αναπαράσταση $(\frac{1}{2},0)_R$ (από εδώ και στο εξής θα λέγονται right handed σπίνορες, ψ_R) η σχέση 2.42 μας δίνει το νόμο μετασχηματισμού:

$$\left.\begin{array}{l} M_i = 0 \\ N_i = \frac{1}{2}\sigma_i \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} J_i = \frac{1}{2}\sigma_i \\ K_i = \frac{i}{2}\sigma_i \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Lambda_R = e^{\frac{i}{2}(\vec{\omega}+i\vec{v})\vec{\sigma}}} \tag{2.65}$$

Οι σπίνορες ψ_L και ψ_R, θα έχουν προφανώς 2 συνιστώσες και ονομάζονται σπίνορες Weyl. Οι νόμοι μετασχηματισμού τους Λ_L και Λ_R, έχουν κάποιες σημαντικές ιδιότητες. Αρχικά βλέπουμε ότι:

$$\Lambda_L{}^{-1} = \Lambda_R{}^{\dagger} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \Lambda_L\Lambda_R^{\dagger} = I \tag{2.66}$$

$$\Lambda_R{}^{-1} = \Lambda_L{}^{\dagger} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \Lambda_R\Lambda_L^{\dagger} = I \tag{2.67}$$

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι:

$$\sigma^2\Lambda_L\sigma^2 = e^{-\frac{i}{2}(\vec{\omega}-i\vec{v})\vec{\sigma}^*} = \Lambda_R^* \tag{2.68}$$

$$\sigma^2\Lambda_R\sigma^2 = e^{-\frac{i}{2}(\vec{\omega}+i\vec{v})\vec{\sigma}^*} = \Lambda_L^* \tag{2.69}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα των πινάκων Pauli:

$$\sigma^2\sigma^i\sigma^2 = -(\sigma^i)^* \tag{2.70}$$

Παίρνοντας τον ερμιτιανό συζυγή των σχέσεων 2.68, 2.69:

$$\sigma^2\Lambda_L^{\dagger}\sigma^2 = \Lambda_R^T \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^2\Lambda_R^{-1}\sigma^2 = \Lambda_R^T \tag{2.71}$$

$$\sigma^2\Lambda_R^{\dagger}\sigma^2 = \Lambda_L^T \qquad \Rightarrow \qquad \sigma^2\Lambda_L^{-1}\sigma^2 = \Lambda_L^T \tag{2.72}$$

οι τελευταίες εξισώσεις γράφονται σε πολλές ισοδύναμες μορφές:

$$\begin{array}{lll} \Lambda_L^T = \sigma^2\Lambda_L^{-1}\sigma^2 & \sigma^2\Lambda_L^T\sigma^2\Lambda_L = 1 & \Lambda_L^T\sigma^2\Lambda_L = \sigma^2 \\ \Lambda_R^T = \sigma^2\Lambda_R^{-1}\sigma^2 & \sigma^2\Lambda_R^T\sigma^2\Lambda_R = 1 & \Lambda_R^T\sigma^2\Lambda_R = \sigma^2 \end{array}$$

Σαν μία πρώτη εφαρμογή των σχέσεων αυτών, θεωρούμε έναν left handed σπίνορα ψ_L που μετασχηματίζεται ως $\psi_L \longrightarrow \Lambda_L \psi_L$, και παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \psi_L^* \longrightarrow \quad & \sigma^2 \Lambda_L^* \psi_L^* \\ & = \sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2 \sigma^2 \psi_L^* \\ & \overset{2.68}{=} \Lambda_R \sigma^2 \psi_L^* \end{aligned} \tag{2.73}$$

Αντίστοιχα για έναν right handed σπίνορα ψ_R που μετασχηματίζεται $\psi_R \longrightarrow \Lambda_R \psi_R$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sigma^2 \psi_R^* \longrightarrow \quad & \sigma^2 \Lambda_R^* \psi_R^* \\ & = \sigma^2 \Lambda_R^* \sigma^2 \sigma^2 \psi_R^* \\ & \overset{2.68}{=} \Lambda_L \sigma^2 \psi_R^* \end{aligned} \tag{2.74}$$

Άρα έχουμε καταλήξει στο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

1. Δεδομένου ενός σπίνορα ψ_L που μετασχηματίζεται σαν $(\frac{1}{2}, 0)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν σπίνορα $\sigma^2 \psi_L^*$ που μετασχηματίζεται σαν $(0, \frac{1}{2})$.

2. Δεδομένου ενός σπίνορα ψ_R που μετασχηματίζεται σαν $(0, \frac{1}{2})$ μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν σπίνορα $\sigma^2 \psi_R^*$ που μετασχηματίζεται σαν $(\frac{1}{2}, 0)$.

Αναλλοίωτες Ποσότητες

Στην συνέχεια μπορούμε να κατασκευάσουμε κάποια Lorentz αναλλοίωτα χρησιμοποιώντας two-component σπίνορες. Τα αναλλοίωτα αυτά θα μας είναι χρήσιμα στην κατασκευή σχετικιστικά αναλλοίωτων Λαγκρανζιανών.

Έστω οι σπίνορες χ_L και ψ_L που μετασχηματίζονται σαν $(\frac{1}{2}, 0)_L$. Κάτω από ένα μετασχηματισμό Lorentz έχουμε:

$$\chi_L^T \sigma^2 \psi_L \longrightarrow \chi_L^T \Lambda_L^T \sigma^2 \Lambda_L \psi_L = \chi_L^T \sigma^2 \psi_L^2 \tag{2.75}$$

Αντίστοιχα, παίρνοντας δύο right handed σπίνορες χ_R και ψ_R που μετασχηματίζονται σαν $(0, \frac{1}{2})_R$ μπορούμε να κατασκευάσουμε το αναλλοίωτο:

$$\chi_R^T \sigma^2 \psi_R \longrightarrow \chi_R^T \Lambda_R^T \sigma^2 \Lambda_R \psi_R = \chi_R^T \sigma^2 \psi_R^2 \tag{2.76}$$

Επίσης μπορούμε να πάρουμε $\chi_L = \sigma^2 \psi_R^*$ και $\chi_R = \sigma^2 \psi_L^*$, οπότε προκύπτουν τα μεικτά αναλλοίωτα:

$$i(\sigma^2 \psi_R^*)^T \sigma^2 \psi_L = -i \psi_R^\dagger \psi_L \tag{2.77}$$

$$i(\sigma^2 \psi_L^*)^T \sigma^2 \psi_R = -i \psi_L^\dagger \psi_R \tag{2.78}$$

2.4.3 The 4-vector representation

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μία αναπαράσταση που να μετασχηματίζεται σαν τετράνυσμα, ξεκινώντας από δύο σπίνορες.

Έστω ένας σπίνορας ψ_L που μετασχηματίζεται σαν $(\frac{1}{2}, 0)_L$. Ορίζουμε την ποσότητα:

$$A^\mu = \psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L \qquad \text{όπου } \sigma^\mu = (\sigma^0, \vec{\sigma}) \tag{2.79}$$

- Κάτω από στροφές έχουμε $\Lambda_L = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}}$ οπότε προκύπτουν οι μετασχηματισμοί:

$$\psi_L^\dagger \psi_L \longrightarrow \psi_L^\dagger e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}} e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}} \psi_L = \psi_L^\dagger \psi_L \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned}
\psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L &\longrightarrow \psi_L^\dagger e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}} \sigma^i e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}} \psi_L \\
&= \psi_L^\dagger (1 - \frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}) \sigma^i (1 + \frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}) \psi_L \\
&= \psi_L^\dagger (\sigma^i + \frac{i}{2}\omega^j [\sigma^i, \sigma^j]) \psi_L + \mathcal{O}(\omega^2) \\
&= \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L - \varepsilon_{ijk} \omega^j \psi_L^\dagger \sigma^k \psi_L
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Άρα η ποσότητα A^μ μετασχηματίζεται κάτω από στροφές σαν τετράνυσμα:

$$A^0 \longrightarrow A'^0 = A^0 \tag{2.82}$$

$$A^i \longrightarrow A'^i = A^i - \varepsilon_{ijk} \omega^j A^k \tag{2.83}$$

- Κάτω από προωθήσεις έχουμε $\Lambda_L = e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}}$ οπότε προκύπτουν οι μετασχηματισμοί

$$\psi_L^\dagger \psi_L \longrightarrow \psi_L^\dagger e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}} e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}} \psi_L = \psi_L^\dagger \psi_L + \vec{v} \psi_L^\dagger \vec{\sigma} \psi_L \tag{2.84}$$

$$\psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L \longrightarrow \psi_L^\dagger e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}} \sigma^i e^{\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}} \psi_L \tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_L^\dagger (1 + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}) \sigma^i (1 + \frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}) \psi_L \\
&= \psi_L^\dagger (\sigma^i + \frac{1}{2} v^j \{\sigma^i, \sigma^j\}) \psi_L + \mathcal{O}(v^2) \\
&= \psi_L^\dagger (\sigma^i + \frac{1}{2} v^j 2\delta^{ij}) \psi_L \\
&= \psi_L^\dagger \sigma^i \psi_L + v^i \psi_L^\dagger \psi_L
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Άρα η ποσότητα A^μ μετασχηματίζεται κάτω από προωθήσεις σαν τετράνυσμα:

$$A^0 \longrightarrow A'^0 = A^0 + v_i A^i \tag{2.87}$$

$$A^i \longrightarrow A'^i = A^i + v^i A^0 \tag{2.88}$$

Επειδή μπορεί να μην είναι προφανές ότι οι τελευταίες σχέσεις αντιστοιχούν σε boost, θα προσπαθήσουμε να το αποδείξουμε αυτό πολύ σύντομα, χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της ομάδας Lorentz πάνω σε διανύσματα με πίνακες που βρήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Αρχικά υπενθυμίζουμε ότι για ένα απειροστό μετασχηματισμό Lorentz έχουμε σε matrix representation:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \frac{i}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}(S_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \tag{2.89}$$

Όπου οι $(S_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu$ δίνονται από την 2.29 που βρήκαμε στην παράγραφο 2.2:

$$(S_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = i(g_{\beta\nu}\delta^\mu_\alpha - g_{\alpha\nu}\delta^\mu_\beta) \tag{2.90}$$

Όμως χρησιμοποιώντας τους ορισμούς 1.35, η σχέση 2.89 γράφεται σε boost και rotation συμβολισμό ως εξής:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \frac{i}{2} 2(\vec{v}\vec{K} + \vec{\omega}\vec{J})^\mu{}_\nu \tag{2.91}$$

όπου:

$$\begin{array}{lcl} J_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}L_{jk} & & (\vec{\omega})_i = \frac{1}{2}(\omega_{0i} - \omega_{i0}) \\ K_i = \frac{1}{2}(L_{0i} - L_{i0}) & \text{και} & (\vec{v})_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\ \omega_{jk} \end{array}$$

Άρα αν θέλουμε ένα καθαρό απειροστό boost, θέτουμε $\vec{\omega} = 0$ και έχουμε την έκφραση:

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + iv^i K_i &= \delta^\mu{}_\nu + iv^i \frac{1}{2}(S_{0i} - S_{i0})^\mu{}_\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu + \frac{i}{2}v^i i(g_{i\nu}\delta^\mu_0 - g_{0\nu}\delta^\mu_i - g_{0\nu}\delta^\mu_i + g_{i\nu}\delta^\mu_0) \\ &= \delta^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}(v_\nu\delta^\mu_0 - g_{0\nu}v^\mu - g_{0\nu}v^\mu + v_\nu\delta^\mu_0) \\ &= \delta^\mu{}_\nu - v_\nu\delta^\mu_0 + g_{0\nu}v^\mu \end{aligned} \tag{2.92}$$

Συνεπώς για ένα απειροστό boost ο πίνακας μετασχηματισμού Lorentz έχει τη μορφή:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & v^1 & v^2 & v^3 \\ v^1 & 1 & 0 & 0 \\ v^2 & 0 & 1 & 0 \\ v^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

όπου $v^\mu = (0, v^1, v^2, v^3)$ οι απειροστές παράμετροι του boost.
Άρα ένα τετράνυσμα A^μ μετασχηματίζεται κάτω από προωθήσεις ως εξής:

$$\begin{aligned} & A'^\mu = (\delta^\mu{}_\nu - v_\nu\delta^\mu_0 + g_{0\nu}v^\mu)A^\nu = A^\mu - \delta^\mu{}_0 v_\nu A^\nu + v^\mu A_0 \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} A'^0 = A^0 - \delta^0{}_0 v_\nu A^\nu + v^0 A_0 = A^0 - v_i A^i = A^0 + v^i A^i \\ A'^i = A^i - \delta^i{}_0 v_\nu A^\nu + v^i A_0 = A^i + v^i A_0 = A^i + v^i A^0 \end{cases} \end{aligned} \tag{2.93}$$

που βλέπουμε ότι είναι σε πλήρη συμφωνία με τις σχέσεις 2.87 και 2.88.

Αν προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα τετράνυσμα από ένα σπίνορα ψ_R που μετασχηματίζεται σαν $(0, \frac{1}{2})_R$, θα δούμε ότι θα υπάρξει μία διαφορά στο πρόσημο των χωρικών συνιστωσών. Πιο συγκεκριμένα, αυτή τη φορά πρέπει να ορίσουμε την ποσότητα:

$$A^\mu = \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_R \qquad \text{όπου } \bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\vec{\sigma}) \tag{2.94}$$

- Κάτω από στροφές έχουμε $\Lambda_R = \Lambda_L = e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}}$, οπότε προκύπτουν οι μετασχηματισμοί:

$$\psi_R^\dagger \psi_R \longrightarrow \psi_R^\dagger e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}} e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}} \psi_R = \psi_R^\dagger \psi_R \tag{2.95}$$

$$\begin{aligned} -\psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R &\longrightarrow -\psi_R^\dagger e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}} \sigma^i e^{\frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega}} \psi_R \\ &= -\psi_R^\dagger (1 - \frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega})\sigma^i(1 + \frac{i}{2}\vec{\sigma}\vec{\omega})\psi_R \\ &= \psi_R^\dagger(\sigma^i + \frac{i}{2}\omega^j[\sigma^i, \sigma^j])\psi_R + \mathcal{O}(\omega^2) \\ &= -\psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R + \varepsilon_{ijk}\omega^j \psi_R^\dagger \sigma^k \psi_R \end{aligned} \tag{2.96}$$

Άρα η ποσότητα A^μ μετασχηματίζεται κάτω από στροφές σαν τετράνυσμα:

$$A^0 \longrightarrow A'^0 = A^0 \tag{2.97}$$

$$A^i \longrightarrow A'^i = A^i - \varepsilon_{ijk}\omega^j A^k \tag{2.98}$$

- Κάτω από προωθήσεις έχουμε $\Lambda_R = e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}}$ οπότε προκύπτουν οι μετασχηματισμοί

$$\psi_R^\dagger \psi_R \longrightarrow \psi_R^\dagger e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}} e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}} \psi_R = \psi_R^\dagger \psi_R - \vec{v}\psi_R^\dagger \vec{\sigma}\psi_R \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned} -\psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R &\longrightarrow -\psi_R^\dagger e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}} \sigma^i e^{-\frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v}} \psi_R \qquad (2.100)\\ &= -\psi_R^\dagger (1 - \frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v})\sigma^i (1 - \frac{1}{2}\vec{\sigma}\vec{v})\psi_R \\ &= -\psi_R^\dagger (\sigma^i - \frac{1}{2} v^j \{\sigma^i, \sigma^j\})\psi_R + \mathcal{O}(v^2) \\ &= -\psi_R^\dagger (\sigma^i - \frac{1}{2} v^j 2\delta^{ij})\psi_R \\ &= -\psi_R^\dagger \sigma^i \psi_R + v^i \psi_R^\dagger \psi_R \qquad (2.101) \end{aligned}$$

Άρα η ποσότητα A^μ μετασχηματίζεται κάτω από προωθήσεις σαν τετράνυσμα:

$$\begin{aligned} A^0 &\longrightarrow A'^0 = A^0 + v_i A^i \\ A^i &\longrightarrow A'^i = A^i + v^i A^0 \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας έχουμε κατασκευάσει δύο αναπαραστάσεις που μετασχηματίζονται σαν τετρανύσματα:

$$\psi_L^\dagger \sigma^\mu \psi_L \qquad \text{όπου } \sigma^\mu = (\sigma^0, \vec{\sigma}) \tag{2.102}$$

$$\psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_R \qquad \text{όπου } \bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\vec{\sigma}) \tag{2.103}$$

Αναλλοίωτες Ποσότητες

Οι αναπαραστάσεις που βρήκαμε μετασχηματίζονται σαν τετρανύσματα. Από αυτές, μπορούμε να κατασκευάσουμε επιπλέον αναλλοίωτα όπως κάναμε με τα συνήθη διανυσματικά πεδία στην παράγραφο 2.2. Τα αναλλοίωτα αυτά θα περιέχουν μία, ή περισσότερες παραγώγους, και θα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τους κινητικούς όρους στην κατασκευή σχετικιστικά αναλλοίωτων Λαγκρανζιανών. Έχουμε λοιπόν τα εξής αναλλοίωτα:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \psi_L)^\dagger \sigma^\mu \psi_L \qquad & (\partial_\mu \psi_R)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_R \\ \psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L \qquad & \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_R \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αυτά τα αναλλοίωτα δεν είναι αναγκαστικά πραγματικά. Αν θέλουμε μπορούμε να κατασκευάσουμε τους εξής γραμμικούς συνδυασμούς που είναι πάντα πραγματικοί:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\psi_L^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L &= \psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L - (\partial_\mu \psi_L)^\dagger \sigma^\mu \psi_L \\ \frac{1}{2}\psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_R &= \psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_R - (\partial_\mu \psi_R)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_R \end{aligned}$$

2.4.4 Οι σπίνορες Dirac

Αν μας ενδιαφέρει η ομοτιμία, πρέπει να κατασκευάσουμε σπίνορες Dirac πάνω στους οποίους η parity είναι καλώς ορισμένη πράξη. Ο σπίνορας Dirac είναι ένας σπίνορας με 4 συνιστώσες, και έχει διπλάσιους βαθμούς ελευθερίας από τους two component Weyl spinors που μελετούσαμε έως τώρα. Ένας σπίνορας Dirac γράφεται στη μορφή:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{2.104}$$

Η πράξη της ομοτιμίας (parity) είναι καλώς ορισμένη πάνω στον σπίνορα Dirac:

$$\Psi \xrightarrow{P} \Psi^P = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \gamma_0 \Psi \tag{2.105}$$

Μπορούμε να προβάλουμε έναν σπίνορα Dirac πάνω στα left και right components του μέσω των προβολικών τελεστών:

$$p_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5) \tag{2.106}$$

$$p_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \tag{2.107}$$

όπου ορίσαμε τους 4×4 πίνακες γ_0 και γ_5 στην αναπαράσταση Weyl (Chiral Basis):

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.108}$$

ή σε πιο συνεπτυγμένη μορφή:

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \mu = 0,1,2,3 \tag{2.109}$$

οι οποίοι ικανοποιούν την αντιμεταθετική σχέση:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \tag{2.110}$$

Ενώ ο γ_5 συνδέεται με τους άλλους μέσω της σχέσης:

$$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \tag{2.111}$$

Είναι προφανές ότι ένας σπίνορας Dirac μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = \begin{pmatrix} \psi'_L \\ \psi'_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_L \psi_L \\ \Lambda_R \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{2.112}$$

Μπορούμε τώρα να εκφράσουμε όλα τα αναλλοίωτα που κατασκευάσαμε ως τώρα χρησιμοποιώντας σπίνορες Dirac. Συγκεκριμένα, έχουμε:

1. $\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R = \Psi^\dagger \gamma_0 \Psi \equiv \bar{\Psi}\Psi$ invariant
2. Ομοίως, $\frac{1}{2}\psi_L^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L + \frac{1}{2}\psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_R = \frac{1}{2}\Psi^\dagger \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi$ invariant

Επίσης, δοθέντος ενός σπίνορα Dirac Ψ μπορούμε (λόγω των σχέσεων 2.73 και 2.74) να κατασκευάσουμε έναν νέο συσχετισμένο σπίνορα Dirac ως εξής:

$$\Psi^C = \begin{pmatrix} \sigma^2 \psi_R^* \\ -\sigma^2 \psi_L^* \end{pmatrix} \tag{2.113}$$

Παρατηρούμε ότι λόγω των 2.73 και 2.74 η πάνω συνιστώσα μετασχηματίζεται σαν $(\frac{1}{2},0)_L$ και η κάτω σαν $(0,\frac{1}{2})_R$, οπότε πράγματι έχουμε κατασκευάσει έναν σωστό σπίνορα Dirac. Παρατηρούμε επίσης ότι:

$$(\Psi^C)^C = \Psi \tag{2.114}$$

Η πράξη C ονομάζεται συζυγία φορτίου, και ο Ψ^C είναι ο συζυγής σπίνορας του Ψ ως προς το φορτίο. Ο λόγος για αυτή την ονομασία έγκειται στο γεγονός ότι αν ένας σπίνορας Dirac Ψ έχει φορτίο q και ικανοποιεί την εξίσωση Dirac

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu)\Psi = 0$$

όπου A_μ το διανυσματικό δυναμικό ενός εξωτερικού ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, βρίσκουμε ότι ο συζυγής σπίνορας που ορίσαμε θα έχει φορτίο $-q$ και θα ικανοποιεί την εξίσωση:

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu)\Psi^C = 0$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να εισάγουμε μία ειδική περίπτωση σπίνορα Dirac, όπου η right συνιστώσα του προκύπτει από τη left μέσω της 2.73. Θα έχουμε δηλαδή:

$$\Psi^M = \begin{pmatrix} \psi_L \\ -\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix} \tag{2.115}$$

Ο σπίνορας αυτός έχει μισούς βαθμούς ελευθερίας από έναν σπίνορα Dirac. Λέγεται σπίνορας Majorana και στην ουσία είναι ένας σπίνορας Weyl σε four-component form. Για έναν τέτοιο σπίνορα ισχύει:

$$(\Psi^M)^C = \begin{pmatrix} \sigma^2[-\sigma^2\psi_L^*]^* \\ -\sigma^2[\psi_L]^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ -\sigma^2\psi_L^* \end{pmatrix} = \Psi^M \tag{2.116}$$

είναι, δηλαδή, αυτοσυζυγής κάτω από τη συζυγία φορτίου. Θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμος στην προσπάθεια κατασκευής ενός απλού υπερσυμμετρικού μοντέλου στο επόμενο κεφάλαιο, για λόγους που θα εξηγηθούν εκεί.

Θα μπορούσαμε να σταματήσουμε εδώ τη συζήτηση για τους σπίνορες στα πλαίσια αυτής της εργασίας. Παρόλα αυτά, είναι χρήσιμο να κάνουμε άλλο ένα βήμα ακριβώς όπως κάναμε στις προηγούμενες παραγράφους, για λόγους συνέχειας: Να βρούμε την αναπαράσταση των γεννητόρων της ομάδας Lorentz $S_{\rho\sigma}$ όταν δρουν πάνω σε σπίνορες (μέχρι τώρα έχουμε βρεί μόνο την αναπαράσταση των $\vec{J}$ και $\vec{K}$ που ορίζονται από την 1.35).

2.4.5 Οι αναπαραστάσεις των γεννητόρων $S_{\rho\sigma}$

Θα εργαστούμε ακριβώς όπως και στις προηγούμενες παραγράφους.

1. Για σπίνορες που μετασχηματίζονται σαν $(\frac{1}{2},0)_L$ έχουμε:

$$\Lambda_L = e^{\frac{i}{2}(\vec{\omega}-i\vec{v})\vec{\sigma}}$$

Άρα για έναν απειροστό μετασχηματισμό, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll} \psi_{La}' = \psi_{La} + \frac{i}{2}(\vec{\omega}_i - i\vec{v}_i)(\sigma_i)_{ab}\psi_{Lb} & \text{ορισμός μετασχηματισμού} \\ \psi_{La}' = \psi_{La} + \frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}(S_{\rho\sigma})_{ab}\psi_{Lb} & \text{έκφραση με γεννήτορες} \end{array}\right\} \Rightarrow (\vec{\omega}_i - i\vec{v}_i)(\sigma_i)_{ab} = \omega^{\rho\sigma}(S_{\rho\sigma})_{ab}$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_i(\sigma_i)_{ab} - i\vec{v}_i(\sigma_i)_{ab} &= \omega^{01}S_{01} + \omega^{02}S_{02} + \omega^{03}S_{03} \\ &\quad + \omega^{10}S_{10} + \omega^{20}S_{20} + \omega^{30}S_{30} \\ &\quad + \omega^{12}S_{12} + \omega^{13}S_{13} + \omega^{23}S_{23} \\ &\quad + \omega^{21}S_{21} + \omega^{31}S_{31} + \omega^{32}S_{32} \\ \Rightarrow\ \vec{\omega}_i(\sigma_i)_{ab} - i\vec{v}_i(\sigma_i)_{ab} &= (\omega^{01} - \omega^{10})S_{01} + (\omega^{02} - \omega^{20})S_{02} + (\omega^{03} - \omega^{30})S_{03} \\ &\quad + (\omega^{12} - \omega^{21})S_{12} + (\omega^{31} - \omega^{13})S_{31} + (\omega^{23} - \omega^{32})S_{23} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε στο δεξί μέλος τις σχέσεις:

$$(\vec{\omega})_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\omega_{jk}$$
$$(\vec{v})_i = \frac{1}{2}(\omega_{0i} - \omega_{i0})$$

και έχουμε:

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_i(\sigma_i)_{ab} - i\vec{v}_i(\sigma_i)_{ab} &= 2\vec{v}_i(S_{0i})_{ab} + 2\vec{\omega}_3 S_{12} + 2\vec{\omega}_2 S_{31} + 2\vec{\omega}_1 S_{23} \\
\Rightarrow \vec{\omega}_i(\sigma_i)_{ab} - i\vec{v}_i(\sigma_i)_{ab} &= 2\vec{v}_i(S_{0i})_{ab} + \vec{\omega}_i\varepsilon_{ijk}S_{jk} \\
\Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega}_i(\sigma_i)_{ab} & = \vec{\omega}_i\varepsilon_{ijk}S_{jk} \\ -i\vec{v}_i(\sigma_i)_{ab} & = 2\vec{v}_i(S_{0i})_{ab} \end{cases}
\end{aligned}$$

Από τις τελευταίες σχέσεις βρίσκουμε:

$$(S_{0i})_{ab} = -\frac{i}{2}(\sigma_i)_{ab}$$

καθώς και:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{imn}\varepsilon_{ijk}S_{jk} &= \varepsilon_{imn}(\sigma_i)_{ab} \\
\Rightarrow \ (\delta_{mj}\delta_{nk} - \delta_{mk}\delta_{nj})S_{jk} &= \varepsilon_{imn}(\sigma_i)_{ab} \\
\Rightarrow \ S_{mn} - S_{nm} &= \varepsilon_{mnk}(\sigma_k)_{ab} \\
\Rightarrow \ S_{mn} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{mnk}(\sigma_k)_{ab}
\end{aligned}$$

Άρα βρήκαμε την αναπαράσταση των γεννητόρων $S_{\rho\sigma}$ όταν δρουν πάνω σε σπίνορες $(\frac{1}{2}, 0)_L$. Συγκεκριμένα, βρήκαμε:

$$\begin{aligned}
S_{0i} &= -\frac{i}{2}\sigma_i \\
S_{i0} &= \frac{i}{2}\sigma_i \\
S_{mn} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{mnk}\sigma_k
\end{aligned}$$

και τα διαγώνια στοιχεία εννοείται ότι μηδενίζονται, λογω αντισυμμετρικότητας των γεννητόρων. Οι εκφράσεις αυτές όμως μπορούν να συγχωνευθούν σε μία. Αρχικά χρησιμοποιούμε την ταυτότητα των πινάκων Pauli:

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij}I_2 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{2.117}$$

Παίρνοντας την αντισυμμετρική της στους δείκτες i, j και αφαιρώντας έχουμε:

$$\begin{aligned}
\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i &= 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \\
\Rightarrow \qquad \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\sigma_k &= -\frac{i}{4}(\sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i)
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Χρησιμοποιώντας την 2.118, αλλάζουμε λίγο τη μορφή των εξισώσεων προσθέτοντας ταυτοτικούς πίνακες και αντισυμμετριποιώντας τις εκφράσεις:

$$\begin{aligned}
S_{00} &= 0 = \frac{i}{4}(\sigma_0\sigma_0 - \sigma_0\sigma_0) \\
S_{0i} &= -\frac{i}{2}\sigma_i = \frac{i}{2}\sigma_0(-\sigma_i) = \frac{i}{4}[\sigma_0(-\sigma_i) - \sigma_i\sigma_0] \\
S_{i0} &= \frac{i}{2}\sigma_i = \frac{i}{2}\sigma_i\sigma_0 = \frac{i}{4}[\sigma_i\sigma_0 - \sigma_0(-\sigma_i)] \\
S_{ij} &= \frac{i}{4}[\sigma_i(-\sigma_j) - \sigma_j(-\sigma_i)]
\end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι οι εξισώσεις αυτές γράφονται σε πιο συνεπτυγμένη μορφή ως εξής:

$$\boxed{(S_L)_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}(\sigma_\alpha\bar{\sigma}_\beta - \sigma_\alpha\bar{\sigma}_\beta)} \tag{2.119}$$

2. Αντίστοιχα, για σπίνορες που μετασχηματίζονται σαν $(0, \frac{1}{2})_R$ έχουμε:

$$\Lambda_R = e^{\frac{i}{2}(\vec{\omega}+i\vec{v})\vec{\sigma}}$$

Άρα για έναν απειροστό μετασχηματισμό, έχουμε:

$$\left.\begin{array}{ll}
\psi_{La}' = \psi_{La} + \frac{i}{2}(\vec{\omega}_i + i\vec{v}_i)(\sigma_i)_{ab}\psi_{Lb} & \text{ορισμός μετασχηματισμού} \\
\psi_{La}' = \psi_{La} + \frac{i}{2}\,\omega^{\rho\sigma}(S_{\rho\sigma})_{ab}\psi_{Lb} & \text{εκφραση με γεννήτορες}
\end{array}\right\} \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \vec{\omega}_i(\sigma_i)_{ab} + i\vec{v}_i(\sigma_i)_{ab} = 2\vec{v}_i(S_{0i})_{ab} + \vec{\omega}_i\varepsilon_{ijk}S_{jk} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \vec{\omega}_i(\sigma_i)_{ab} & = \vec{\omega}_i\varepsilon_{ijk}S_{jk} \\ i\vec{v}_i(\sigma_i)_{ab} & = 2\vec{v}_i(S_{0i})_{ab} \end{cases}
\end{aligned}$$

Από όπου τελικά βρίσκουμε τις εκφράσεις:

$$\begin{aligned}
S_{0i} &= \frac{i}{2}\sigma_i \\
S_{i0} &= -\frac{i}{2}\sigma_i \\
S_{mn} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{mnk}\sigma_k
\end{aligned}$$

το οποίο είναι το αποτέλεσμα που περιμέναμε, καθώς οι δύο αναπαραστάσεις πρέπει να είναι ισοδύναμες ως προς τις στροφές, αλλά η μία να είναι συζυγής της άλλης ως προς τις προωθήσεις. Χρησιμοποιώντας την 2.118, αλλάζουμε πάλι τη μορφή τους:

$$\begin{aligned}
S_{00} &= \frac{i}{4}[\sigma_0\sigma_0 - \sigma_0\sigma_0] \\
S_{0i} &= \frac{i}{4}[\sigma_0\sigma_i - (-\sigma_i)\sigma_0] \\
S_{i0} &= \frac{i}{4}[(-\sigma_i)\sigma_0 - \sigma_0\sigma_i] \\
S_{ij} &= \frac{i}{4}[(-\sigma_i)\sigma_j - (-\sigma_j)\sigma_i]
\end{aligned}$$

Οι εκφράσεις αυτές πάλι συγχωνεύονται σε μία ως εξής:

$$\boxed{(S_R)_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}_\alpha \sigma_\beta - \bar{\sigma}_\beta \sigma_\alpha)} \tag{2.120}$$

Οι $(S_R)_{\alpha\beta}$ και $(S_L)_{\alpha\beta}$ είναι 2×2 πίνακες που δρουν πάνω σε two-component Weyl spinors. Αν θέλουμε, μπορούμε να τους χρησιμοποιήσουμε για να κατασκευάσουμε την αναπαράσταση των γεννητόρων πάνω σε ένα four-component σπίνορα Dirac.

3. Για σπίνορες Dirac, σύμφωνα με την 2.112 έχουμε το νόμο μετασχηματισμού:

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Lambda_L \psi_L \\ \Lambda_R \psi_R \end{pmatrix} \tag{2.121}$$

Άρα για έναν απειροστό μετασχηματισμό, έχουμε:

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \psi'_{La} \\ \psi'_{R\dot{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{La} \\ \psi_{R\dot{a}} \end{pmatrix} + \tfrac{i}{2} \begin{pmatrix} (\vec{\omega}_i - i\vec{v}_i)(\sigma_i)_{ab}\psi_{Lb} \\ (\vec{\omega}_i + i\vec{v}_i)(\sigma_i)_{\dot{a}\dot{b}}\psi_{R\dot{b}} \end{pmatrix} \qquad \text{ορισμός μετασχηματισμού}$$

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \psi'_{La} \\ \psi'_{R\dot{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{La} \\ \psi_{R\dot{a}} \end{pmatrix} + \tfrac{i}{2}\,\omega^{\rho\sigma}\; S_{\rho\sigma} \begin{pmatrix} \psi_{La} \\ \psi_{R\dot{a}} \end{pmatrix} \qquad \text{εκφραση με γεννήτορες}$$

όπου εισαγάγαμε τους dotted δείκτες ($\dot{a} = 1, 2$) για να υποδηλώσουμε right-handed σπίνορες, ενώ οι κανονικοί δείκτες ($a = 1, 2$) υποδηλώνουν left-handed σπίνορες. Βλέπουμε ότι ο $S_{\rho\sigma}$ είναι ένας block-διαγώνιος πίνακας 4×4 της μορφής:

$$\begin{pmatrix} S_L & 0 \\ 0 & S_R \end{pmatrix} \tag{2.122}$$

ώστε να ικανοποιούνται οι σχέσεις:

$$\begin{pmatrix} (\vec{\omega}_i - i\vec{v}_i)(\sigma_i)_{ab}\psi_{Lb} \\ (\vec{\omega}_i + i\vec{v}_i)(\sigma_i)_{\dot{a}\dot{b}}\psi_{L\dot{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{\rho\sigma}\ (S^L_{\rho\sigma})_{ab}\ \psi_{Lb} \\ \omega^{\rho\sigma}\ (S^R_{\rho\sigma})_{\dot{a}\dot{b}}\ \psi_{L\dot{b}} \end{pmatrix}$$

Αυτό αντιστοιχεί σε δύο εξισώσεις, μία ως προς $S^L_{\rho\sigma}$ και μία ως προς $S^R_{\rho\sigma}$ τις οποίες όμως έχουμε ήδη λύσει:

$$\begin{aligned} (S_L)_{0i} &= -\frac{i}{2}\sigma_i & (S_R)_{0i} &= \frac{i}{2}\sigma_i \\ (S_L)_{i0} &= \frac{i}{2}\sigma_i & (S_R)_{i0} &= -\frac{i}{2}\sigma_i \\ (S_L)_{mn} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{mnk}\sigma_k & (S_R)_{mn} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{mnk}\sigma_k \end{aligned}$$

Μπορούμε όμως να γράψουμε την λύση με καλύτερο τρόπο. Αρχικά χρησιμοποιούμε την ταυτότητα των πινάκων Pauli:

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} I_2 + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \tag{2.123}$$

και αλλάζουμε λίγο την μορφή των εξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
(S_L)_{00} &= \frac{i}{2}\sigma_0\sigma_0 - \frac{i}{2}g_{00}\sigma_0 = 0 & (S_R)_{00} &= \frac{i}{2}\sigma_0\sigma_0 - \frac{i}{2}g_{00}\sigma_0 = 0 \\
(S_L)_{0i} &= \frac{i}{2}\sigma_0(-\sigma_i) & (S_R)_{0i} &= \frac{i}{2}\sigma_0\sigma_i \\
(S_L)_{i0} &= \frac{i}{2}\sigma_i\sigma_0 & (S_R)_{i0} &= \frac{i}{2}(-\sigma_i)\sigma_0 \\
(S_L)_{mn} &= \frac{i}{2}\sigma_i(-\sigma_j) - \frac{i}{2}g_{ij}\sigma_0 & (S_R)_{mn} &= \frac{i}{2}(-\sigma_i)\sigma_j - \frac{i}{2}g_{ij}\sigma_0
\end{aligned}
$$

Και τώρα παρατηρούμε ότι οι εξισώσεις αυτές γράφονται σε πιο συνεπτυγμένη μορφή ως εξής:

$$
(S_L)_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}(\sigma_\alpha\bar{\sigma}_\beta - g_{\alpha\beta}\sigma_0) \qquad (S_R)_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}(\bar{\sigma}_\alpha\sigma_\beta - g_{\alpha\beta}\sigma_0) \tag{2.124}
$$

Αντικαθιστώντας στην 2.122, βρίσκουμε ότι οι 4×4 block-διαγώνιοι γεννήτορες $S_{\alpha\beta}$ δίνονται από την έκφραση:

$$
S_{\alpha\beta} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_\alpha\bar{\sigma}_\beta - g_{\alpha\beta}\sigma_0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_\alpha\sigma_\beta - g_{\alpha\beta}\sigma_0 \end{pmatrix} \tag{2.125}
$$

Όμως διαδοχικά έχουμε:

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha\beta} &= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_\alpha\bar{\sigma}_\beta - g_{\alpha\beta}\sigma_0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_\alpha\sigma_\beta - g_{\alpha\beta}\sigma_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma_\alpha\bar{\sigma}_\beta & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_\alpha\sigma_\beta \end{pmatrix} - g_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{i}{2}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - g_{\alpha\beta}I_4)
\end{aligned} \tag{2.126}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι στην Weyl αναπαράσταση των πινάκων γ_μ (2.108) ισχύει:

$$
\gamma_\mu\gamma_\nu = \begin{pmatrix} \sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu \end{pmatrix} \tag{2.127}
$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τις αντιμεταθετικές σχέσεις των πινάκων γ_μ (2.110) και έχουμε:

$$
\begin{aligned}
S_{\alpha\beta} &= \frac{i}{2}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - g_{\alpha\beta}I_4) \\
&= \frac{i}{4}(2\gamma_\alpha\gamma_\beta - 2g_{\alpha\beta}I_4) \\
&= \frac{i}{4}(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)
\end{aligned} \tag{2.128}
$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσαμε να το πάρουμε και με απλή αντικατάσταση των 2.119 και 2.120 στην 2.122. Άρα καταλήξαμε στο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα ότι οι πίνακες:

$$
\frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \tag{2.129}
$$

αποτελούν αναπαράσταση των γεννητόρων της ομάδας Lorentz πάνω στον σπίνορα Dirac! Η γραφή αυτή έχει πολύ μεγάλη ισχύ, γιατί είναι representation independent.

Με άλλα λόγια, ξεκινώντας από την 2.129 για κάθε ισοδύναμη αναπαράσταση των πινάκων γ_μ που ικανοποιούν τις μεταθετικές σχέσεις 2.110 θα παίρνουμε ένα σετ πινάκων:

$$\boxed{S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]} \tag{2.130}$$

οι οποίοι θα ικανοποιούν την άλγεβρα της ομάδας Lorentz (2.41), δηλαδή μια διαφορετική αναπαράσταση της ομάδας. Σε αυτό το σημείο έχουμε βρεί την αναπαράσταση της ομάδας Lorentz όταν δρα πάνω σε left σπίνορες, σε right σπίνορες και τέλος πάνω σε σπίνορες Dirac. Θα μπορούσαμε να συνεχίσουμε τη διαδικασία αυτή και να βρούμε τις αναπαραστάσεις για σπίνορες ανώτερου σπιν, αλλα αυτό είναι πέρα από το ενδιαφέρον αυτής της εργασίας, καθότι δεν θα χρησιμοποιήσουμε τέτοια πεδία.

2.4.6 Το σπινοριακό πεδίο Dirac

Μέχρι αυτό το σημείο έχουμε αντιμετωπίσει τους σπίνορες ως μεμονωμένα αντικείμενα, ελεύθερα στο χώρο. Πρέπει τώρα να κάνουμε την μετάβαση από σπίνορες σε σπινοριακά πεδία, δηλαδή να ορίσουμε ένα πεδίο που να αποτελείται από ένα σπίνορα σε κάθε σημείο του χώρου, και να δουμε πως μετασχηματίζεται. Αυτή η δουλειά μπορεί να γίνει για κάθε είδος σπινοριακού πεδίου ξεχωριστά. Μπορούμε να ορίσουμε ένα σπινοριακό πεδίο που να μετασχηματίζεται σαν $(\frac{1}{2}, 0)_L$, σαν $(0, \frac{1}{2})_R$, κ.ο.κ. Εμείς θα το κάνουμε για το πεδίο *Dirac*, γιατί αυτό θα μας χρειαστεί στη συνέχεια. Η γενίκευση και στα υπόλοιπα πεδία είναι τετριμμένη.

Έστω ένα σπινοριακό πεδίο *Dirac*:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_R(x) \end{pmatrix} \tag{2.131}$$

Θα βρούμε πώς μετασχηματίζεται κάτω από μεταθέσεις και μετασχηματισμούς Lorentz.

- Θεωρούμε τον απειροστό μετασχηματισμό lorentz:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \varepsilon^\mu{}_\nu \qquad \text{ώστε} \qquad x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.132}$$

  Οι σπίνορες Dirac μετασχηματίζονται σύμφωνα με την 2.112:

$$\Psi' = \begin{pmatrix} \Lambda_L \psi_L \\ \Lambda_R \psi_R \end{pmatrix} \tag{2.133}$$

  Δείξαμε ότι για έναν απειροστό μετασχηματισμό, έχουμε:

$$\begin{aligned} \Psi' = \begin{pmatrix} \psi'_{La} \\ \psi'_{R\dot{a}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \psi_{La} \\ \psi_{R\dot{a}} \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} (\vec{\omega}_i - i\vec{v}_i)(\sigma_i)_{ab}\psi_{Lb} \\ (\vec{\omega}_i + i\vec{v}_i)(\sigma_i)_{\dot{a}\dot{b}}\psi_{R\dot{b}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_{La} \\ \psi_{R\dot{a}} \end{pmatrix} + \frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma} S_{\rho\sigma} \begin{pmatrix} \psi_{La} \\ \psi_{R\dot{a}} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad \delta\Psi &= \frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma} S_{\rho\sigma} \begin{pmatrix} \psi_{La} \\ \psi_{R\dot{a}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

όπου οι γεννήτορες $S_{\rho\sigma}$ δίνονται από την 2.130. Όμως για την ολική μεταβολή του σπινοριακού πεδίου έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta\Psi = \delta_0\Psi + \delta x^\mu \partial_\mu \Psi \quad \Rightarrow \quad \delta_0\Psi &= \delta\Psi - \delta x^\mu \partial_\mu \Psi \\
&= \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\rho\sigma}\; S_{\rho\sigma}\Psi - \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \Psi \\
&= \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\rho\sigma}\; S_{\rho\sigma}\Psi + \frac{1}{2}(\varepsilon_\nu{}^\mu - \varepsilon^\mu{}_\nu) x^\nu \partial_\mu \Psi \\
&= \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\rho\sigma}\; S_{\rho\sigma}\Psi + \frac{1}{2}\varepsilon^{\rho\sigma}(g_{\rho\nu}\delta^\mu_\sigma - g_{\sigma\nu}\delta^\mu_\rho) x^\nu \partial_\mu \Psi \\
&= \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\rho\sigma}\; S_{\rho\sigma}\Psi - \frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma} i(x_\rho \partial_\sigma - x_\sigma \partial\rho)\Psi \\
&= \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\rho\sigma}\; S_{\rho\sigma}\Psi - \frac{i}{2}\varepsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma}\Psi
\end{aligned}$$

- Θεωρούμε την απειροστή μετάθεση:

$$x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \Rightarrow \delta x^\mu = \varepsilon^\mu \tag{2.134}$$

Κάτω από μεταθέσεις, οι σπίνορες δεν μετασχηματίζονται (ακριβώς όπως το διανυσματικό και το βαθμωτό πεδίο). Άρα για την ολική μεταβολή του σπινοριακού πεδίου έχουμε:

$$\begin{aligned}
\delta\Psi = \delta_0\Psi + \delta x^\mu \partial_\mu \Psi \quad \Rightarrow \quad \delta_0\Psi &= \delta\Psi - \delta x^\mu \partial_\mu \Psi \\
&= -\delta x^\mu \partial_\mu \Psi \\
&= -\varepsilon^\mu \partial_\mu \Psi \\
&= -i\varepsilon^\mu P_\mu \Psi, \quad \text{όπου } P_\mu = -i\partial_\mu
\end{aligned}$$

Άρα η αναπαράσταση της ομάδας Poincare πάνω στον σπίνορα Dirac δίνεται από τις σχέσεις:

$$P_\mu = -i\partial_\mu \tag{2.135}$$

$$M_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu} \tag{2.136}$$

και συνολικά ο απειροστός μετασχηματισμός Poincare μας δίνει:

$$\delta_0\Psi = \frac{i}{2}\,\varepsilon^{\rho\sigma}\; M_{\rho\sigma}\Psi - i\alpha^\mu P_\mu \Psi \tag{2.137}$$

όπου $L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$ και $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ με τους πίνακες γ^μ στην αναπαράσταση Weyl (2.108).

Κεφάλαιο 3

Spinor Algebra

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε έναν καινούργιο συμβολισμό. Θα διευρύνουμε τη χρήση δεικτών και σε σπίνορες. Όπως τα τετρανύσματα συμβολίζονταν με ένα δείκτη $\mu = 0, 1, 2, 3$ και μετασχηματίζονταν με ένα συγκεκριμένο τρόπο, έτσι και για τους σπίνορες μπορούμε να εισάγουμε δύο είδη δεικτών dotted και undotted που να παίρνουν τις τιμές $\dot{a} = 1, 2$ και $a = 1, 2$ και να περιγράφουν right-handed και left-handed σπίνορες αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό αυτό για να ξαναδιατυπώσουμε εν συντομία όλα τα σημαντικά αποτελέσματα της του προηγούμενου κεφαλαίου.

Έστω ένας two-component σπίνορας ψ που μετασχηματίζεται σαν $(\frac{1}{2}, 0)_L$ και ένας two-component σπίνορας $\bar{\chi}$ που μετασχηματίζεται σαν $(0, \frac{1}{2})_R$. Αυτοί οι δύο σπίνορες ορίζουν ένα σπίνορα Dirac

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

και όπως είπαμε μπορούμε να κατασκευάσουμε και τον συζυγή του σπίνορα

$$\Psi^C = \begin{pmatrix} -\sigma^2 \bar{\chi}^* \\ \sigma^2 \psi^* \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Στα τετρανύσματα η διαφορά μεταξύ ενός συναλλοίωτου και ενός ανταλλοίωτου τετρανύσματος, είναι ότι μετασχηματίζονται με τον αντίστροφο νόμο μετασχηματισμού.

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} A^{\rho}$$
$$A'_{\mu} = \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} A_{\sigma}$$

ώστε η συναίρεση των δύο δεικτών να μας δίνει την αναλλοίωτη ποσότητα:

$$A'^{\mu} A'_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} A^{\rho} A_{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\rho} A^{\rho} A_{\sigma} = A^{\rho} A_{\rho}$$

Αν θέλουμε να φέρουμε τον ίδιο συμβολισμό (με άνω και κάτω δείκτες) στους σπίνορες, θα πρέπει να του δώσουμε το ίδιο περιεχόμενο. Δηλαδή για έναν left-handed σπίνορα θα πρέπει:

$$\psi'_a = (\Lambda_L)_a{}^r \psi_r \tag{3.3}$$
$$\psi^{a\prime} = (\Lambda_L^{-1})_s{}^a \psi^s \tag{3.4}$$

ώστε να έχουμε την αναλλοίωτη ποσότητα:

$$\psi^{a\prime}\psi'_a = (\Lambda_L^{-1})_s{}^a(\Lambda_L)_a{}^r\psi^s\psi_r = \delta_s^r\psi^s\psi_r = \psi^s\psi_s \tag{3.5}$$

Άρα εισάγουμε έναν πίνακα που ανεβοκατεβάζει δείκτες, αντίστοιχα με την μετρική στα τετρανύσματα.

$$\psi^a = \epsilon^{ab}\psi_b \qquad\qquad \psi_a = \epsilon_{ab}\psi^b \tag{3.6}$$

Προφανώς αυτοί οι δύο πίνακες (ο ϵ^{ab} και ο ϵ_{ab}) θα πρέπει να είναι μεταξύ τους αντίστροφοι:

$$\psi^a = \epsilon^{ab}\psi_b = \epsilon^{ab}\epsilon_{bc}\psi^c \;\Rightarrow\; \epsilon^{ab}\epsilon_{bc} = \delta_c^a \tag{3.7}$$

Εφαρμόζοντας αυτό τον ορισμό στην 3.5 έχουμε:

$$\begin{aligned}
\psi^{s\prime}\psi'_s = \psi^a\psi_a &\Rightarrow \epsilon^{sr}\psi_r{}'\psi'_s = \epsilon^{ab}\psi_b\psi_a \\
&\Rightarrow \epsilon^{sr}(\Lambda_L)_r{}^m(\Lambda_L)_s{}^n\psi_m\psi_n = \epsilon^{nm}\psi_m\psi_n \\
&\Rightarrow (\Lambda_L^T)^n{}_s\epsilon^{sr}(\Lambda_L)_r{}^m = \epsilon^{nm} \\
&\Rightarrow \sigma^2\Lambda_L^T\sigma^2\;\sigma^2\,\epsilon\,\Lambda_L = \sigma^2\epsilon \\
&\Rightarrow \Lambda_L^{-1}\;\sigma^2\epsilon\;\Lambda_L = \sigma^2\,\epsilon
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα πρέπει να ισχύει για κάθε μετασχηματισμό Λ_L. Άρα πρέπει ο $\sigma^2\epsilon$ να μετατίθεται με τον Λ_L. Αυτό συμβαίνει μόνο αν $\sigma^2\epsilon \sim I$, γιατί οι πίνακες Pauli αποτελούν ένα irreducible σύνολο πινάκων. Συμπεραίνουμε ότι:

$$\epsilon^{ab} = A(\sigma^2)^{ab}$$

όπου A μία σταθερά. Αντίστοιχα για τον ϵ_{ab} έχουμε $\epsilon_{ab} = B(\sigma^2)_{ab}$. Από την 3.7 έχουμε:

$$AB\sigma^2\sigma^2 = I \;\Rightarrow B = \frac{1}{A} \tag{3.8}$$

Σε αυτό το σημείο εξαντλούνται οι απαιτήσεις μας για τον πίνακα ϵ. Οποιαδήποτε επιλογή των σταθερών σέβεται την 3.8 μας κάνει. Επιλέγουμε $B = i$, ώστε οι πίνακες να είναι πραγματικοί. Άρα έχουμε καταλήξει:

$$\epsilon^{ab} = -i(\sigma^2)^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \psi^a = \epsilon^{ab}\,\psi_b \tag{3.9}$$

$$\epsilon_{ab} = i(\sigma^2)_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \psi_a = \epsilon_{ab}\,\psi^b \tag{3.10}$$

Αν πάμε τώρα να ορίσουμε έναν πίνακα $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}$ που να ανεβοκατεβάζει δείκτες σε right-handed σπίνορες, οι ίδιοι συλλογισμοί θα μας οδηγήσουν στο αποτέλεσμα:

$$\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = C(\sigma^2)^{\dot{a}\dot{b}}$$
$$\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = D(\sigma^2)_{\dot{a}\dot{b}}$$

όπου και πάλι, οι σταθερές συνδέονται από τη σχέση $C = \frac{1}{D}$ και μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα. Αν θέλουμε οι πίνακες να είναι πραγματικοί, πάλι πρέπει να θέσουμε $C = i$ ή $D = i$. Τι απο τα δύο όμως μας συμφέρει να επιλέξουμε;

Παρατηρούμε ότι όποια κι αν είναι η επιλογή μας, ο συμβολισμός που εισάγουμε θα είναι είναι συνεπής στα πλαίσια της right αναπαράστασης. Αυτό που θα αλλάζει είναι η σχέση με την left αναπαράσταση: Πρέπει να επιλέξουμε $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \epsilon^{ab}$ ή $\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \epsilon_{ab}$;

Έστω ένας left-handed σπίνορας ψ^a με νόμο μετασχηματισμού:

$$\psi^a \longrightarrow \psi'^a = (\Lambda_L)^a{}_b\, \psi^b \tag{3.11}$$

Τότε έχουμε τη συζυγή εξίσωση:

$$\begin{aligned}
(\psi'^a)^* = (\Lambda_L^*)^a{}_b\, (\psi^b)^* \quad &\overset{2.69}{\Rightarrow} \; (\psi'^a)^* = (\sigma_2)^{ar} (\Lambda_R)_r{}^s\, (\sigma^2)_{sb}\; \psi^{*b} \\
&\Rightarrow \; (\sigma_2)_{ba} (\psi'^a)^* = (\sigma_2)_{ba} (\sigma_2)^{ar} (\Lambda_R)_r{}^s\, (\sigma^2)_{sb}\; \psi^{*b} \\
&\Rightarrow \; i(\sigma_2)_{ba} (\psi'^a)^* = i(\Lambda_R)_b{}^s\, (\sigma^2)_{sb}\; \psi^{*b} \\
&\overset{3.9}{\Rightarrow} \; \epsilon_{ba} (\psi'^a)^* = (\Lambda_R)_b{}^s\, \epsilon_{sb} \psi^{*b} \\
&\Rightarrow \; (\psi'_b)^* = (\Lambda_R)_b{}^s\, \psi^*_s
\end{aligned}$$

Άρα η ποσότητα $(\psi_b)^*$ μετασχηματίζεται σαν $(0, \frac{1}{2})_R$ και ο b θα πρέπει να είναι ένας dotted δείκτης. Συνεπώς, **ορίζουμε**:

$$\bar{\psi}_{\dot{a}} \equiv (\psi_a)^* \tag{3.12}$$

Ομοίως, ξεκινώντας από έναν left σπίνορα με δείκτη κάτω ψ^a, βρίσκουμε ότι:

$$(\psi'^b)^* = (\Lambda_R)^b{}_s\, (\psi^s)^*$$

και αναγκαστικά, ορίζουμε:

$$\bar{\psi}^{\dot{a}} \equiv (\psi^a)^* \tag{3.13}$$

Όμως τώρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τον πίνακα $\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ που ανεβοκατεβάζει τους dotted δείκτες ως εξής:

$$\bar{\psi}_{\dot{a}} \overset{3.12}{=} (\psi_a)^* \overset{3.10}{=} (\epsilon_{ab}\psi^b)^* = (\epsilon_{ab})^* (\psi^b)^* \overset{3.13}{=} \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \bar{\psi}^{\dot{b}}$$

Άρα αναγκαστικά έχουμε τους ορισμούς:

$$\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} = \epsilon_{ab} = \; i\sigma^2 \tag{3.14}$$

$$\epsilon^{\dot{a}\dot{b}} = \epsilon^{ab} = -i\sigma^2 \tag{3.15}$$

και τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς:

$$\psi^a = \; \epsilon^{ab}\, \psi_b \qquad\qquad \psi^{\dot{a}} = \; \epsilon^{\dot{a}\dot{b}}\, \psi_{\dot{b}}$$

$$\psi_a = \; \epsilon_{ab}\, \psi^b \qquad\qquad \psi_{\dot{a}} = \; \epsilon_{\dot{a}\dot{b}}\, \psi^{\dot{b}}$$

Γενικά για να έχουμε μία εικόνα του τι ακριβώς νόημα έχουν οι δείκτες πάνω-κάτω και dotted-undotted αρκεί να θυμόμαστε συνοπτικά ότι αν ξεκινήσουμε από το νόμο μετασχηματισμού του left σπίνορα ψ, $\psi'^a = (\Lambda_L)^a{}_b\; \psi^b$, τότε οι διάφορες συσχετισμένες ποσότητες θα μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\psi'^a = (\Lambda_L)^a{}_b\; \psi^b \qquad\qquad \bar{\psi}'^{\dot{a}} = (\Lambda_R)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\; \psi^{\dot{b}} \tag{3.16}$$

$$\psi'_a = (\Lambda_L^{-1})^T{}_a{}^b\; \psi_b \qquad\qquad \bar{\psi}'_{\dot{a}} = (\Lambda_R^{-1})^T{}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\; \psi_{\dot{b}} \tag{3.17}$$

Οι τελευταίες εξισώσεις μπορούν να γραφούν με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, πιο ξεκάθαρους από αυτόν. Σε αυτή τη μορφή απλά βλεπουμε ότι το κατέβασμα ενός δείκτη μας δίνει ποσότητα που μετασχηματίζεται με το transpose του αντίστροφου μετασχηματισμού, ώστε να έχουμε τις αναλλοίωτες ποσότητες:

$$\chi^a\psi_a \longrightarrow (\Lambda_L)^a{}_r(\Lambda_L^{-1})^T{}_a^{\ s}\ \chi^r\psi_s = \chi^s\psi_s$$
$$\bar{\chi}^{\dot{a}}\bar{\psi}_{\dot{a}} \longrightarrow (\Lambda_R)^{\dot{a}}{}_{\dot{r}}(\Lambda_R^{-1})^T{}_{\dot{a}}^{\ \dot{s}}\ \chi^{\dot{r}}\psi_{\dot{s}} = \chi^{\dot{s}}\psi_{\dot{s}}$$

Και οι dotted δείκτες υποδηλώνουν ποσότητες που μετασχηματίζονται σαν $(0,\frac{1}{2})_R$. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ο σπίνορας Dirac και ο συζυγής του από τις σχέσεις 3.1 και 3.2 δίνονται από τις εκφράσεις:

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_a\\ \bar{\chi}^{\dot{a}}\end{pmatrix} \qquad \Psi^C = \begin{pmatrix}\chi_a\\ \bar{\psi}^{\dot{a}}\end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Για έναν σπίνορα Majorana που έχει την ιδιότητα $\Psi = \Psi^C$ έχουμε:

$$\Psi_M = \begin{pmatrix}\psi_a\\ \bar{\psi}^{\dot{a}}\end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ένας σπίνορας Dirac μπορεί πάντα να γραφεί συναρτήσει δύο σπινόρων Majorana ως εξής:

$$\Psi = \Psi_{M1} + i\Psi_{M2} \qquad \text{όπου} \qquad \begin{aligned}\Psi_{M1} &= \tfrac{1}{2}(\Psi + \Psi^C)\\ \Psi_{M2} &= \tfrac{1}{2i}(\Psi - \Psi^C)\end{aligned}$$

Έστω ένας μετασχηματισμός Lorentz πάνω στις συντεταγμένες:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{3.20}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός, όπως γνωρίζουμε από την 1.34, γράφεται συναρτήσει των γεννητόρων 1.32 ως εξής:

$$\Lambda = e^{\frac{i}{2}\omega^{\rho\sigma}L_{\rho\sigma}} \tag{3.21}$$

Τότε ένα σπινοριακό πεδίο Dirac θα μετασχηματίζεται σύμφωνα με την σχέση:

$$\Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x) \tag{3.22}$$

όπου $S(\Lambda)$ η αναπαράσταση του Λ πάνω στον σπίνορα Dirac. Αυτή την αναπαράσταση όμως, την έχουμε βρεί:

$$\Psi'(x') = e^{\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu}S_{\mu\nu}}\Psi(x)$$

Οι γεννήτορες ορίζονταν από την σχέση 2.130. Άρα έχουμε:

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\rho,\gamma_\sigma] = \begin{pmatrix} i\sigma_{\rho\sigma} & 0\\ 0 & i\bar{\sigma}_{\rho\sigma}\end{pmatrix} \tag{3.23}$$

όπου ορίσαμε τους συνδυασμούς:

$$\sigma_{\rho\sigma} = \frac{1}{4}(\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu - \sigma_\nu\bar{\sigma}_\mu) \tag{3.24}$$
$$\bar{\sigma}_{\rho\sigma} = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_\mu\sigma_\nu - \bar{\sigma}_\nu\sigma_\mu) \tag{3.25}$$

Οι πίνακες Pauli ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\sigma^2\sigma_\mu\sigma^2 = (\bar{\sigma}_\mu)^T \tag{3.26}$$
$$\sigma^2\bar{\sigma}_\mu\sigma^2 = (\sigma_\mu)^T \tag{3.27}$$

Οι πίνακες $\sigma_{\rho\sigma}$ και $\bar{\sigma}_{\rho\sigma}$ ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\sigma^2\sigma_{\mu\nu}\sigma^2 = -(\sigma_{\mu\nu})^T \tag{3.28}$$
$$\sigma^2\bar{\sigma}_{\mu\nu}\sigma^2 = -(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^T \tag{3.29}$$
$$\sigma^\dagger_{\mu\nu} = -\bar{\sigma}_{\mu\nu} \tag{3.30}$$

Με τον τελευταίο ορισμό οι σχέσεις 2.119 και 2.120 γράφονται:

$$(S_L)_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}(\sigma_\alpha\bar{\sigma}_\beta - \sigma_\alpha\bar{\sigma}_\beta) = i\sigma_{\alpha\beta} \tag{3.31}$$
$$(S_R)_{\alpha\beta} = \frac{i}{4}(\bar{\sigma}_\alpha\sigma_\beta - \bar{\sigma}_\beta\sigma_\alpha) = i\bar{\sigma}_{\alpha\beta} \tag{3.32}$$

Άρα οι νόμοι μετασχηματισμού για τους left και right σπίνορες είναι:

$$\psi'_a = S_1(\Lambda)_a{}^b\psi_b \tag{3.33}$$
$$\bar{\chi}'^{\dot{a}} = S_2(\Lambda)^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\chi^b \tag{3.34}$$

όπου:

$$S_1(\Lambda) = e^{-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}}$$
$$S_2(\Lambda) = e^{-\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\bar{\sigma}_{\mu\nu}}$$

Παρατηρούμε ότι λόγω της 3.30 έχουμε:

$$S_1(\Lambda)^\dagger = S_2(\Lambda)^{-1}$$
$$S_2(\Lambda)^\dagger = S_1(\Lambda)^{-1}$$

πού δεν είναι παρά οι σχέσεις 2.66 και 2.67. Το γεγονός ότι οι πίνακες $\sigma_{\rho\sigma}$ και $\bar{\sigma}_{\rho\sigma}$ μετασχηματίζουν τους dotted και undotted σπίνορες, σημαίνει ότι πρέπει οι ίδιοι να περιγράφονται από τους δείκτες:

$$(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b \qquad\qquad (\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \tag{3.35}$$

Οι νόμοι μετασχηματισμού των σπινόρων ψ^a και $\bar{\chi}_{\dot{a}}$ προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό τους:

$$\psi'^a = \epsilon^{ar}\psi'_r = \epsilon^{ar}S_1(\Lambda)_r{}^s\psi_s = \epsilon^{ar}S_1(\Lambda)_r{}^s\epsilon_{sb}\psi^b = S_3(\Lambda)^a{}_b\psi^b \tag{3.36}$$
$$\bar{\chi}_{\dot{a}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{r}}\chi'^{\dot{r}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{r}}S_2(\Lambda)^{\dot{r}}{}_{\dot{s}}\chi^{\dot{s}} = \epsilon_{\dot{a}\dot{r}}S_2(\Lambda)^{\dot{r}}{}_{\dot{s}}\epsilon^{\dot{s}\dot{b}}\chi_{\dot{b}} = S_4(\Lambda)_{\dot{a}}{}^{\dot{b}}\chi_{\dot{b}} \tag{3.37}$$

όπου οι πίνακες $S_3(\Lambda)$ και $S_4(\Lambda)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$S_3(\Lambda) = \sigma^2 S_1(\Lambda)\sigma^2 \overset{3.28}{=} S_1^T(\Lambda)^{-1} \tag{3.38}$$
$$S_4(\Lambda) = \sigma^2 S_2(\Lambda)\sigma^2 \overset{3.29}{=} S_2^T(\Lambda)^{-1} \tag{3.39}$$

οι οποίες δεν είναι παρά οι σχέσεις 3.16 και 3.17 που βρήκαμε πιο πάνω. Τώρα μπορούμε πολύ εύκολα να κατασκευάσουμε:

- **Βαθμωτές ποσότητες**

$$\chi^a\psi_a = -\chi_a\psi^a \tag{3.40}$$
$$\bar{\chi}_{\dot{a}}\bar{\psi}^{\dot{a}} = -\bar{\chi}^{\dot{a}}\bar{\psi}_{\dot{a}} \tag{3.41}$$

Οι ποσότητες αυτές είναι αυτές που βρήκαμε στις σχέσεις 2.75 και 2.76.

- **Τετρανύσματα**

$$\bar{\chi}_{\dot{a}}(\sigma_\mu)^{\dot{a}a}\psi_a = \bar{\chi}^{\dot{a}}(\bar{\sigma}_\mu)_{a\dot{a}}\psi^a \tag{3.42}$$
$$\chi^a(\sigma_\mu)_{a\dot{a}}\bar{\psi}^{\dot{a}} = \chi_a(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}\bar{\psi}_{\dot{a}} \tag{3.43}$$

Οι παραπάνω ποσότητες είναι δεν είναι άλλες από αυτές που ορίσαμες στις σχέσεις 2.102 και 2.103.

- **Τανυστές**

$$\chi^a(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b\psi_b = \chi_a(\sigma_{\mu\nu})_b{}^a\psi^b \tag{3.44}$$
$$\bar{\chi}_{\dot{a}}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\bar{\psi}^{\dot{b}} = \bar{\chi}^{\dot{a}}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}\bar{\psi}_{\dot{b}} \tag{3.45}$$

Μέχρι στιγμής δεν είχαμε κατασκευάσει τανυστές από two-component σπίνορες, αλλά μπορούμε πολύ εύκολα να επιβεβαιώσουμε ότι οι ποσότητες αυτές πράγματι μετασχηματίζονται σαν τανυστές. Αν θέλουμε να επαναφέρουμε τη φυσιολογική σειρά των δεικτών στις τελευταίες σχέσεις, μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τους δύο σπίνορες, αλλά θα πάρουμε ένα αρνητικό πρόσημο επειδή οι σπίνορες είναι Grassman numbers.

Όλοι οι σπίνορες είναι μεταβλητές Grassman και έχουν την ιδιότητα να αντιμετατίθενται:

$$\{\psi,\chi\} = \{\bar{\psi},\bar{\chi}\} = \{\psi,\bar{\chi}\} = 0 \tag{3.46}$$

Άρα αν 'διορθώσουμε' τη σειρά των δεικτών στις σχέσεις 3.40 έως 3.45, έχουμε:

$$\chi^a\psi_a = \psi^a\chi_a \tag{3.47}$$
$$\bar{\chi}_{\dot{a}}\bar{\psi}^{\dot{a}} = \bar{\psi}_{\dot{a}}\bar{\chi}^{\dot{a}} \tag{3.48}$$
$$\bar{\chi}_{\dot{a}}(\sigma_\mu)^{\dot{a}a}\psi_a = -\psi^a(\bar{\sigma}_\mu)_{a\dot{a}}\bar{\chi}^{\dot{a}} \tag{3.49}$$
$$\chi^a(\sigma_\mu)_{a\dot{a}}\bar{\psi}^{\dot{a}} = -\bar{\psi}_{\dot{a}}(\bar{\sigma}_\mu)^{\dot{a}a}\chi_a \tag{3.50}$$
$$\chi^a(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b\psi_b = -\psi^a(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b\chi_b \tag{3.51}$$
$$\bar{\chi}_{\dot{a}}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\bar{\psi}^{\dot{b}} = -\bar{\psi}_{\dot{a}}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\bar{\chi}^{\dot{b}} \tag{3.52}$$

Μπορούμε να παραλείψουμε τους δείκτες που αθροίζονται και να ορίσουμε, σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις, τα εξής:

$$\chi\psi = \psi\chi = \chi^a\psi_a \tag{3.53}$$
$$\bar{\chi}\bar{\psi} = \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}_{\dot{a}}\bar{\psi}^{\dot{a}} \tag{3.54}$$

Προσέχουμε ότι είχαμε δύο επιλογές στον ορισμό του $\chi\psi$. Εμείς επιλέξαμε ο πρώτος δείκτης να είναι πάντα επάνω και ο δεύτερος κάτω. Για τους dotted σπίνορες κάναμε την ακριβώς ανάποδη επιλογή. Ομοίως επιλέγουμε να ορίσουμε μέσω των εκφράσεων 3.50 και 3.51 τα εξής:

$$\chi\sigma_\mu\bar{\psi} = \chi^a(\sigma_\mu)_{a\dot{b}}\bar{\psi}^{\dot{b}} \tag{3.55}$$
$$\chi\sigma_{\mu\nu}\psi = \chi^a(\sigma_{\mu\nu})_a{}^b\psi_b \tag{3.56}$$

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς, επιτρέπεται τώρα να ορίσουμε τα εξής μιγαδικά συζυγή:

- Το μιγαδικό συζυγές ενός σπίνορα ορίζεται ως εξής:

$$(\psi_a)^\dagger = (\psi_a)^* = \bar{\psi}_{\dot{a}} \tag{3.57}$$

$$(\chi^a)^\dagger = (\chi^a)^* = \bar{\chi}^{\dot{a}} \tag{3.58}$$

- Το μιγαδικό συζυγές ενός βαθμωτού ορίζεται ως εξής:

$$(\chi^a\psi_a)^\dagger = (\chi\psi)^\dagger = \psi^\dagger\chi^\dagger = (\psi_a)^\dagger(\chi^a)^\dagger = \bar{\psi}_{\dot{a}}\bar{\chi}^{\dot{a}} = \bar{\psi}\bar{\chi} = \bar{\chi}\bar{\psi} \tag{3.59}$$

- Το μιγαδικό συζυγές ενός τετρανύσματος ορίζεται ως εξής:

$$(\chi\sigma_\mu\bar{\psi})^\dagger = \psi\sigma_\mu\bar{\chi} = -\bar{\chi}\sigma_\mu\psi = -(\bar{\psi}\bar{\sigma}_\mu\chi)^\dagger \tag{3.60}$$

- Το μιγαδικό συζυγές ενός τανυστή δεύτερης τάξης ορίζεται ως εξής:

$$(\chi\sigma_{\mu\nu}\psi)^\dagger = -(\bar{\psi}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\bar{\chi}) = \bar{\chi}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\bar{\psi} = -(\psi\sigma_{\mu\nu}\chi)^\dagger \tag{3.61}$$

Τώρα μπορούμε να εκφράσουμε όλα τα Bilinear Covariants που προκύπτουν απο σπίνορες Dirac συναρτήσει των σπινόρων Weyl που τους αποτελούν. Συγκεκριμένα, αν έχουμε δύο σπίνορες Dirac στην αναπαράσταση Weyl:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \bar{\chi}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \phi_a \\ \bar{\eta}^{\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{3.62}$$

τότε μπορούμε να αναπτύξουμε τις ποσότητες $\bar{\Psi}\Phi$, $\bar{\Psi}\gamma_5\Phi$, $\bar{\Psi}\gamma_\mu\Phi$ κλπ. χρησιμοποιώντας σπίνορες Weyl:

Scalar	$\bar{\Psi}\Phi = \bar{\psi}\bar{\eta} + \chi\phi = (\bar{\Phi}\Psi)^\dagger$	(3.63)
Pseudo-scalar	$\bar{\Psi}\gamma_5\Phi = \bar{\psi}\bar{\eta} - \chi\phi = -(\bar{\Phi}\gamma_5\Psi)^\dagger$	(3.64)
Vector	$\bar{\Psi}\gamma_\mu\Phi = \bar{\chi}\sigma_\mu\bar{\eta} + \psi\bar{\sigma}_\mu\phi = (\bar{\Phi}\gamma_\mu\Psi)^\dagger$	(3.65)
Pseudo-Vector	$\bar{\Psi}\gamma_\mu\gamma_5\Phi = \bar{\chi}\sigma_\mu\bar{\eta} - \psi\bar{\sigma}_\mu\phi = (\bar{\Phi}\gamma_\mu\gamma_5\Psi)^\dagger$	(3.66)
Tensor	$\bar{\Psi}\Sigma_{\mu\nu}\Phi = i\chi\sigma_{\mu\nu}\phi + i\bar{\psi}\bar{\sigma}_{\mu\nu}\bar{\eta} = (\bar{\Phi}\Sigma_{\mu\nu}\Psi)^\dagger$	(3.67)

Οι ποσότητες αυτές μετασχηματίζονται πράγματι σαν βαθμωτά, ψευδοβαθμωτά, κλπ. Το έχουμε ήδη δείξει αυτό για το βαθμωτό (3.63) και το τετράνυσμα (3.65). Ακολουθώντας μία αντίστοιχη διαδικασία μπορούμε να βρούμε και τους άλλους νόμους μετασχηματισμού για τις υπόλοιπες ποσότητες. Υπενθυμίζω ότι τα ψευδο-βαθμωτά και τα ψευδοανύσματα, διαφέρουν από τα βαθμωτά και τα ανύσματα μόνο στο ότι είναι άρτια κάτω από parity.

Η σημασία των ποσοτήτων αυτών είναι μεγάλη. Παρατηρούμε ότι όλες αποτελούνται από δύο σπίνορες Dirac (εξ ού και ο όρος bilinear) και κάποιον πίνακα 4×4 στη μέση. Παρατηρούμε ότι συνολικά έχουμε 16 διαφορετικούς τέτοιους πίνακες $\gamma_0, \gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5, \Sigma_{\mu\nu}$ (δηλ. 1+1+4+4+6) πίνακες. Ακριβώς όσο το πλήθος των ανυσμάτων βάσης στο χώρο των 4×4 τετραγωνικών πινάκων! Στην πραγματικότητα, αποδεικνύεται ότι οι πίνακες αυτοί είναι μεταξύ τους γραμμικά ανεξάρτητοι και αποτελούν βάση στον χώρο αυτό, κάτω από ένα κατάλληλο εσωτερικό γινόμενο [βλ. Παράρτημα Α εξίσωση (2)]. Άρα κάθε άλλος πίνακας 4×4 μπορεί να γραφεί συναρτήσει αυτών. Το συμπέρασμα που βγάζουμε είναι πολύ σημαντικό: Κάθε ποσότητα διγραμμική (bilinear) στους σπίνορες Dirac μπορεί να γραφεί συναρτήσει αυτών των 16 ποσοτήτων.
Αν θεωρήσουμε γινόμενα τέτοιων ποσοτήτων, δηλαδή νέες ποσότητες διγραμμικές σε αυτές που ήδη κατασκευάσαμε [π.χ. scalar⊗scalar: $(\phi\eta)(\psi\chi)$] μπορούμε να αναπτύξουμε τα γινόμενα αυτά πάνω στα γνωστά bilinear covariants που βρήκαμε παραπάνω. Οι ταυτότητες που κάνουν αυτή την δουλειά ονομάζονται ταυτότητες Fierz.

Κεφάλαιο 4

Υπερσυμμετρία

Στη συνέχεια θα γράψουμε μία δράση που θα περιέχει βαθμωτούς και σπινοριακούς κινητικούς όρους. Θα εξετάσουμε την πιθανότητα να υπάρχει κάποια συμμετρία πάνω στα πεδία, που να συνδέει τους βαθμωτούς και σπινοριακούς (φερμιονικούς) κινητικούς όρους, επιτρέποντας έτσι μη-τετριμμένες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των βαθμωτών και σπινοριακών πεδίων. Μια τέτοια συμμετρία ονομάζεται *υπερσυμμετρία*.
Για να το πετύχουμε αυτό, θα προσπαθήσουμε να κάνουμε τους κινητικούς όρους των βαθμωτών πεδίων να μοιάζουν όσο γίνεται με αυτούς των σπινοριακών. Θέλουμε να έχουν τους ίδιους βαθμούς ελευθερίας και τις ίδιες εσωτερικές αναλλοιότητες. Επομένως, θα πάρουμε έναν majorana spinor χ και δύο βαθμωτά πεδία S και P.
Για τους σπινοριακούς κινητικούς όρους έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}_L &= \tfrac{1}{2}\psi_L^\dagger \sigma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_L \\ \mathcal{L}_R &= \tfrac{1}{2}\psi_R^\dagger \bar{\sigma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_R\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{DIRAC}} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi \tag{4.1}$$

Ο κινητικός όρος που γράψαμε είναι conformally invariant, όπως και οι αντίστοιχοι κινητικοί όροι των βαθμωτών πεδίων, αλλά, όπως είδαμε, έχει δύο επιπλέον εσωτερικές αναλλοιότητες κάτω από τους μετασχηματισμούς φάσης:

$$\psi \to e^{i\beta}\psi$$
$$\psi \to e^{i\beta\gamma_5}\psi$$

Αν όμως πάρουμε το ψ ως majorana spinor $\chi = \begin{pmatrix}\psi_L \\ -\sigma^2\psi_L^*\end{pmatrix}$ υπάρχει μόνο η αναλλοιότητα

$$: \chi \to e^{i\beta\gamma_5}\chi \tag{4.2}$$

Επιπλέον, ένας majorana spinor έχει τους μισούς βαθμούς ελευθερίας από έναν σπίνορα Dirac.

Για τους βαθμωτούς κινητικούς όρους έχουμε:

$$\frac{1}{2}\partial_\mu S \partial^\mu S + \frac{1}{2}\partial_\mu P \partial^\mu P$$

Η τελευταία έκφραση έχει μία εσωτερική συμμετρία κάτω από τον μετασχηματισμό:

$$\begin{pmatrix}S' \\ P'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}cos\beta & -sin\beta \\ sin\beta & cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S \\ P\end{pmatrix}$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται:

$$(S + iP) \to e^{i\beta}(S + iP) \tag{4.3}$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε μία λαγκραντζιανή που να είναι αναλλοίωτη κάτω από τους μετασχηματισμούς 4.2 και 4.3 και επιπλέον να είναι conformally invariant.

$$\boxed{\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu S\partial^\mu S + \frac{1}{2}\partial_\mu P\partial^\mu P + \frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \chi} \tag{4.4}$$

Αν υπάρχουν επιπλέον συμμετρίες, αυτές θα προκύπτουν από αναλλοιότητα σε μετασχηματισμούς που μπλέκουν τα βαθμωτά πεδία S και P με το σπινοριακό πεδίο χ. Γενικά ένας τέτοιος μετασχηματισμός πρέπει να υπακούει σε κάποιους περιορισμούς. Ξεκινάμε από την μεταβολή των πεδίων S και P:

$$\delta S = \bar{\xi} M \chi$$
$$\delta P = \bar{\xi} N \chi$$

όπου ξ οι απειροστές παράμετροι του μετασχηματισμού, που πρέπει αναγκαστικά να είναι σπίνορας Majorana, και M, N 4×4 πίνακες που δρουν πάνω στον σπίνορα χ. Κάθε τέτοιος πίνακας μπορεί να αναπτυχθεί πάνω στη βάση που σχηματίζουν οι πίνακες γ του Dirac και τα γινόμενά τους (συνολικά 16 πίνακες) $1, \gamma_5, \gamma_5\gamma_\mu kai \Sigma_{\mu\nu}$, όπου $\frac{1}{2}\Sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Καθώς όμως δεν υπάρχουν δείκτες Lorentz στην έκφραση που ζητάμε, ο M μπορεί να περιέχει μόνο τον 1 και τον γ_5. Χρησιμοποιώντας την ελευθερία που μας δίνει η 4.3, ορίζουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας τις μεταβολές των πεδίων S και P ως εξής:

$$\delta S = ia\bar{\xi}\chi \tag{4.5}$$
$$\delta P = b\bar{\xi}\gamma_5\chi \tag{4.6}$$

όπου a και b άγνωστοι πραγματικοί συντελεστές. Έτσι, η μεταβολή των κινητικών όρων θα δίνεται από την:

$$\delta[\frac{1}{2}\partial_\mu S\partial^\mu S + \frac{1}{2}\partial_\mu P\partial^\mu P] = (ia\partial^\mu S\bar{\xi} + b\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5)\partial_\mu\chi \tag{4.7}$$

Πριν ορίσουμε τη μεταβολή του πεδίου χ, πρέπει να αναφέρουμε κάποιες χρήσιμες ιδιότητες μετάθεσης των Majorana spinor bilinears. Για δύο οποιουσδήποτε σπίνορες Majorana ζ και η ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{array}{ll} \bar{\zeta}\eta = \bar{\eta}\zeta & \bar{\zeta}\gamma_\mu\eta = -\bar{\eta}\gamma_\mu\zeta \\ \bar{\zeta}\gamma_5\eta = \bar{\eta}\gamma_5\zeta & \bar{\zeta}\Sigma_{\mu\nu}\eta = -\bar{\eta}\Sigma_{\mu\nu}\zeta \\ \bar{\zeta}\gamma_\mu\gamma_5\eta = \bar{\eta}\gamma_\mu\gamma_5\zeta & \end{array}$$

Τώρα θα ορίσουμε τη μεταβολή του πεδίου χ, ώστε να παραμένει η 4.1 αναλλοίωτη.

$$\begin{aligned} \delta[\frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi] &= \frac{1}{4}(\overline{\chi + \delta\chi})\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu(\chi + \delta\chi) - \frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi \\ &= \frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi + \frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\delta\chi + \frac{1}{4}\delta\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi - \frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi + \mathcal{O}(\delta\chi^2) \\ &= \frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\delta\chi + \frac{1}{4}\delta\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi + \mathcal{O}(\delta\chi^2) \\ &= \frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\delta\chi - \frac{1}{4}\partial_\mu\bar{\chi}\gamma^\mu\delta\chi + \frac{1}{4}\delta\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi - \frac{1}{4}\partial_\mu\delta\bar{\chi}\gamma^\mu\chi + \mathcal{O}(\delta\chi^2) \end{aligned}$$

Αλλάζοντας λίγο τον 1° και τον 2° όρο, βγάζοντας έξω κάποιες ολικές παραγώγους, έχουμε:

$$= \left[\frac{1}{4}\gamma^\mu\partial_\mu(\bar{\chi}\delta\chi) - \frac{1}{4}\partial_\mu\bar{\chi}\gamma^\mu\delta\chi\right] - \frac{1}{4}\partial_\mu\bar{\chi}\gamma^\mu\delta\chi + \frac{1}{4}\delta\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi + \left[-\frac{1}{4}\gamma^\mu\partial_\mu(\delta\bar{\chi}\chi) + \frac{1}{4}\delta\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi\right] + \mathcal{O}(\delta\chi^2)$$
$$= \frac{1}{4}\gamma^\mu\partial_\mu(\bar{\chi}\delta\chi - \delta\bar{\chi}\chi) - \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\chi}\gamma^\mu\delta\chi + \frac{1}{2}\delta\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi + \mathcal{O}(\delta\chi^2)$$

Αγνοώντας τον πρώτο όρο, που είναι απλά μία ολική παράγωγος, και τους όρους $\mathcal{O}(\delta\chi^2)$, και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $\bar{\zeta}\gamma_\mu\eta = -\bar{\eta}\gamma_\mu\zeta$, που αναφέραμε νωρίτερα στον δεύτερο όρο, έχουμε:

$$\delta[\frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi] = \delta\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi \tag{4.8}$$

Η συνολική μεταβολή της Λαγκραντζιανής είναι:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}_0 &= (\delta\bar{\chi}\gamma^\mu + ia\partial^\mu S\bar{\xi} + b\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5)\ \partial_\mu\chi + \frac{1}{4}\gamma^\mu\partial_\mu(\bar{\chi}\delta\chi - \delta\bar{\chi}\chi)\\ &= \partial_\mu(\delta\bar{\chi}\gamma^\mu\chi + ia\partial^\mu S\bar{\xi}\chi + b\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5\chi) - (\partial_\mu\delta\bar{\chi}\gamma^\mu + ia\partial_\mu\partial^\mu S\bar{\xi} + b\partial_\mu\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5)\ \chi + \frac{1}{4}\gamma^\mu\partial_\mu(\bar{\chi}\delta\chi - \delta\bar{\chi}\chi)\\ &= -(\partial_\mu\delta\bar{\chi}\gamma^\mu + ia\partial_\mu\partial^\mu S\bar{\xi} + b\partial_\mu\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5)\ \chi + \text{surface terms}\end{aligned} \tag{4.9}$$

Παρατηρούμε ότι αν ο όρος μέσα στην παρένθεση μηδενίζεται, η Λαγκραντζιανή αλλάζει μόνο κατά μία ολική παράγωγο. Άρα απαιτούμε:

$$\partial_\mu\delta\bar{\chi}\gamma^\mu + ia\partial_\mu\partial^\mu S\bar{\xi} + b\partial_\mu\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5 = 0$$

Μία λύση της τελευταίας εξίσωσης είναι η:

$$\delta\chi = ia\gamma_\rho\xi\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi\partial^\rho P \tag{4.10}$$

που συνεπάγεται:

$$\delta\bar{\chi} = -ia\partial^\rho S\bar{\xi}\gamma_\rho - b\bar{\xi}\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho P \tag{4.11}$$

Πράγματι, αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$\begin{aligned}\partial^\mu\delta\bar{\chi}\gamma_\mu + ia\partial_\mu\partial^\mu S\bar{\xi} + b\partial_\mu\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5 &= (-ia\partial^\mu\partial^\rho S\bar{\xi}\gamma_\rho\gamma_\mu - b\bar{\xi}\gamma_5\gamma_\rho\partial^\mu\partial^\rho P\gamma_\mu) + ia\partial_\mu\partial^\mu S\bar{\xi} + b\partial_\mu\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5\\ &= -ia\partial_\mu\partial^\mu S\bar{\xi} - b\partial_\mu\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5 + ia\partial_\mu\partial^\mu S\bar{\xi} + b\partial_\mu\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5\\ &= 0\end{aligned}$$

Στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\gamma_\mu\gamma_\rho\partial^\mu\partial^\rho = \partial_\mu\partial^\mu$. Άρα, βρήκαμε ένα σύνολο μετασχηματισμών μεταξύ βαθμωτών και σπινοριακών πεδίων που αφήνουν τη Λαγραντζιανή ;; αναλλοίωτη μέχρι μία ολική παράγωγο.

Στη συνέχεια εξετάζουμε αν αυτοί οι μετασχηματισμοί κλείνουν και αποτελούν ομάδα. Έστω ο απειροστός (υπερσυμμετρικός) μετασχηματισμός U:

$$S \to S' = US = S + \delta S \qquad \text{όπου} \qquad \delta S = ia\bar{\xi}\chi \tag{4.12}$$

Με αντίστοιχες σχέσεις να ισχύουν και για τα πεδία P και χ. Όπως ξέρουμε από τη θεωρία ομάδων, κάθε ομάδα Lie χαρακτηρίζεται από μία άλγεβρα Lie. Αντίστροφα, σε κάθε κλειστή άλγεβρα Lie πεπερασμένης διάστασης, αντιστοιχεί μία ομάδα Lie. Με άλλα λόγια, αν εξετάσουμε τους μεταθέτες του μετασχηματισμού U_1 που ορίσαμε, πρώτον με έναν άλλο τέτοιο μετασχηματισμό U_2, και δεύτερον με

μετασχηματισμούς Poincare και βρούμε ότι η άλγεβρα κλείνει, τότε οι μετασχηματισμοί Poincare, μαζί με τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς που ορίσαμε αποτελούν ομάδα!

Αρχικά θα μελετήσουμε τη δράση δύο διαδοχικών μετασχηματισμών U_1 και U_2 πάνω στα τρία διαφορετικά πεδία που εμφανίζονται στη Λαγκρανζιανή μας, τα S, P και χ. Ο μεταθέτης τους θα πρέπει να είναι ίδιος σε κάθε περίτωση, ανεξάρτητα από το σε πιο πεδίο δρα για να είναι καλά ορισμένος. Ας βρούμε λοιπόν τη δράση του μεταθέτη πάνω στα πεδία:

- Για το βαθμωτό πεδίο S έχουμε:

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]S &= U_1(S + \delta_2 S) - U_2(S + \delta_1 S) \\
&= S + \delta_1 S + \delta_2 S + \delta_1\delta_2 S - S - \delta_2 S - \delta_1 S - \delta_2\delta_1 S \\
&= \delta_1\delta_2 S - \delta_2\delta_1 S \\
&= \delta_1(ia\bar{\xi}_2\chi) - \delta_2(ia\bar{\xi}_1\chi) \\
&= ia\bar{\xi}_2[ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho P] - ia\bar{\xi}_1[ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho P] \\
&= a^2\partial^\rho S(-\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1 + \bar{\xi}_1\gamma_\rho\xi_2) - iab\partial^\rho P(\bar{\xi}_1\gamma_\rho\gamma_5\xi_2 - \bar{\xi}_2\gamma_\rho\gamma_5\xi_1) \\
&= -a^2\partial^\rho S(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1 + \bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1) - iab\partial^\rho P(\bar{\xi}_1\gamma_\rho\gamma_5\xi_2 - \bar{\xi}_1\gamma_\rho\gamma_5\xi_2) \\
&= -2a^2\partial^\rho S\ (\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

  Άρα βρήκαμε ότι η δράση δύο υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών πάνω στο S δίνει **μετάθεση** του S κατά μία ποσότητα $-i2a^2\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1$. Κατευθείαν βλέπουμε ότι οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί δεν αποτελούν ομάδα από μόνοι τους γιατί ο μεταθέτης τους δεν είναι υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός, αλλά μετάθεση. Πρέπει λοιπόν στην άλγεβρα Lie να συμπεριλάβουμε και τους γεννήτορες των χωρικών μεταθέσεων.

- Στη συνέχεια εξετάζουμε το ίδιο για το πεδίο P:

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]P &= \delta_1\delta_2 P - \delta_2\delta_1 P \\
&= \delta_1(b\bar{\xi}_2\gamma_5\chi) - \delta_2(b\bar{\xi}_1\gamma_5\chi) \\
&= b\bar{\xi}_2\gamma_5(ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho P) - b\bar{\xi}_1\gamma_5(ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho P) \\
&= iab\partial^\rho S(\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\xi_1 - \bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\xi_2) + b^2\partial^\rho P(\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\gamma_5\xi_1 - \bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\gamma_5\xi_2) \\
&= iab\partial^\rho S(\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\xi_1 - \bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\xi_1) - b^2\partial^\rho P(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1 - \bar{\xi}_1\gamma_\rho\xi_2) \\
&= -b^2\partial^\rho P(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1 + \bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1) \\
&= -2b^2(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1)\partial^\rho P
\end{aligned} \tag{4.14}$$

  Όπως είπαμε ο μεταθέτης δύο υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών $[U_1, U_2]$ πρέπει να είναι συγκεκριμένος, ανεξάρτητα απο το πάνω σε πιο πεδίο δρα. Άρα πρέπει να ισχύει:

$$b = \pm a \tag{4.15}$$

- Τέλος μελετάμε την μεταβολή του χ. Θέλουμε και εδώ, ο μεταθέτης των δύο μετασχηματισμών να μας δώσει μία μετάθεση, ακριβώς όπως και στα πεδία S και P.

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]\chi &= \delta_1\delta_2\chi - \delta_2\delta_1\chi \\
&= \delta_1(ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho P) - \delta_2(ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho P) \\
&= ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho(\delta_1 S) + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho(\delta_1 P) - ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho(\delta_2 S) - b\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho(\delta_2 P) \\
&= ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho(ia\bar{\xi}_1\chi) + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho(b\bar{\xi}_1\gamma_5\chi) - ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho(ia\bar{\xi}_2\chi) - b\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho(b\bar{\xi}_2\gamma_5\chi) \\
&= -a^2\gamma_\rho(\xi_2\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_2)\partial^\rho\chi + b^2\gamma_\rho\gamma_5(\xi_2\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_2)\gamma_5\partial^\rho\chi
\end{aligned}$$

Τώρα αλλάζουμε τις εκφράσεις στις παρενθέσεις, χτησιμοποιώντας την ακόλουθη ταυτότητα Fierz:

$$\xi_2\bar{\xi}_1 - \xi_1\bar{\xi}_2 = -\frac{1}{2}\bar{\xi}_1\gamma^\mu\xi_2\gamma_\mu - \frac{1}{4}\bar{\xi}_1\Sigma^{\alpha\beta}\xi_2\Sigma_{\alpha\beta} \tag{4.16}$$

Και επιπλέον, λόγω της 4.15, μπορούμε να απαλείψουμε τα b. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]\chi &= -a^2\gamma_\rho\left(-\frac{1}{2}\bar{\xi}_1\gamma^\mu\xi_2\gamma_\mu - \frac{1}{4}\bar{\xi}_1\Sigma^{\alpha\beta}\xi_2\Sigma_{\alpha\beta}\right)\partial^\rho\chi + a^2\gamma_\rho\gamma_5\left(-\frac{1}{2}\bar{\xi}_1\gamma^\mu\xi_2\gamma_\mu - \frac{1}{4}\bar{\xi}_1\Sigma^{\alpha\beta}\xi_2\Sigma_{\alpha\beta}\right)\gamma_5\partial^\rho\chi \\
&= a^2\frac{1}{2}\gamma_\rho\bar{\xi}_1\gamma^\mu\xi_2\gamma_\mu\partial^\rho\chi + \frac{1}{4}a^2\gamma_\rho\bar{\xi}_1\Sigma^{\alpha\beta}\xi_2\Sigma_{\alpha\beta}\partial^\rho\chi - a^2\frac{1}{2}\gamma_\rho\gamma_5\bar{\xi}_1\gamma^\mu\xi_2\gamma_\mu\gamma_5\partial^\rho\chi - \frac{1}{4}a^2\gamma_\rho\gamma_5\bar{\xi}_1\Sigma^{\alpha\beta}\xi_2\Sigma_{\alpha\beta}\gamma_5\partial
\end{aligned}$$

Όμως ισχύει $[\Sigma_{\alpha\beta}, \gamma_5] = 0$, $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$ και $(\gamma_5)^2 = 1$. Οπότε κρατώντας τους δύο πρώτους όρους όπως είναι και μετακινώντας τον γ_5 αριστερά στους υπόλοιπους, έχουμε:

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]\chi &= a^2\frac{1}{2}\gamma_\rho\bar{\xi}_1\gamma^\mu\xi_2\gamma_\mu\partial^\rho\chi + \frac{1}{4}a^2\gamma_\rho\bar{\xi}_1\Sigma^{\alpha\beta}\xi_2\Sigma_{\alpha\beta}\partial^\rho\chi + a^2\frac{1}{2}\gamma_\rho\bar{\xi}_1\gamma^\mu\xi_2\gamma_\mu\partial^\rho\chi - \frac{1}{4}a^2\gamma_\rho\bar{\xi}_1\Sigma^{\alpha\beta}\xi_2\Sigma_{\alpha\beta}\partial^\rho\chi \\
&= a^2\gamma_\rho\bar{\xi}_1\gamma^\mu\xi_2\gamma_\mu\partial^\rho\chi \\
&= -a^2\bar{\xi}_2\gamma^\mu\xi_1\gamma_\rho\gamma_\mu\partial^\rho\chi
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τον αντιμεταθέτη $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$, έχουμε $\gamma_\rho\gamma_\mu = -\gamma_\mu\gamma_\rho + 2g_{\mu\rho}$. Αντικαθιστώντας, έχουμε:

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]\chi &= a^2\bar{\xi}_2\gamma^\mu\xi_1\gamma_\mu\gamma_\rho\partial^\rho\chi - 2a^2\bar{\xi}_2\gamma^\mu\xi_1 g_{\mu\rho}\partial^\rho\chi \\
&= -2a^2\bar{\xi}_2\gamma_\mu\xi_1\partial^\mu\chi + a^2\bar{\xi}_2\gamma^\mu\xi_1\gamma_\mu\gamma_\rho\partial^\rho\chi
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Βλέπουμε ότι ο πρώτος όρος είναι αυτός που θέλαμε, προκειμένου ο μεταθέτης δύο υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών να είναι ο ίδιος, ανεξάρτητα από το σε ποιο πεδίο δρα. Υπάρχει όμως μία ανομοιογένεια, η οποία μηδενίζεται μόνο όταν ισχύουν οι κλασσικές εξισώσεις κίνησης.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\chi}} = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\chi})}\right] \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\gamma^\mu\partial_\mu\chi = \partial_\mu\left[-\frac{1}{4}\gamma^\mu\chi\right] \\
&\Rightarrow \quad \gamma^\mu\partial_\mu\chi = 0
\end{aligned}$$

Προκειμένου να εξαφανίσουμε αυτόν τον όρο θα πρέπει να αλλάξουμε τον ορισμό του $\delta\chi$ χωρίς να πάψουν να ισχύουν οι σχέσεις για τα πεδία S και P. Έστω ότι προσθέτουμε στον ορισμό έναν επιπλέον όρο $\delta\tilde{\chi} = (F + i\gamma_5 G)\xi$, όπου F και G βαθμωτά πεδία:

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]S &= U_1(S + \delta_2 S) - U_2(S + \delta_1 S) \\
&= S + \delta_1 S + \delta_2 S + \delta_1\delta_2 S - S - \delta_2 S - \delta_1 S - \delta_2\delta_1 S \\
&= \delta_1\delta_2 S - \delta_2\delta_1 S \\
&= \delta_1(ia\bar{\xi}_2\chi) - \delta_2(ia\bar{\xi}_1\chi) \\
&= ia\bar{\xi}_2[ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\xi_1] - ia\bar{\xi}_1[ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\xi_2] \\
&= a^2\partial^\rho S(-\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1 + \bar{\xi}_1\gamma_\rho\xi_2) - iab\partial^\rho P(\bar{\xi}_1\gamma_\rho\gamma_5\xi_2 - \bar{\xi}_2\gamma_\rho\gamma_5\xi_1) + ia\bar{\xi}_2(F + i\gamma_5 G)\xi_1 - ia\bar{\xi}_1(F + i\gamma_5 G)\xi_2 \\
&= -a^2\partial^\rho S(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1 + \bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1) - iab\partial^\rho P(\bar{\xi}_1\gamma_\rho\gamma_5\xi_2 - \bar{\xi}_1\gamma_\rho\gamma_5\xi_2) + 0 \\
&= -2a^2\left(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1\right)\partial^\rho S
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε το ίδιο για το πεδίο P:

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]P &= \delta_1\delta_2 P - \delta_2\delta_1 P \\
&= \delta_1(b\bar{\xi}_2\gamma_5\chi) - \delta_2(b\bar{\xi}_1\gamma_5\chi) \\
&= b\bar{\xi}_2\gamma_5[ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\xi_1] \\
&\quad - b\bar{\xi}_1\gamma_5[ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\xi_2] \\
&= -iab\partial^\rho S(-\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\xi_1 + \bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\xi_2) + b^2\partial^\rho P(\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\gamma_5\xi_1 - \bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\gamma_5\xi_2) \\
&\quad + b\bar{\xi}_2\gamma_5(F + i\gamma_5 G)\xi_1 - b\bar{\xi}_1\gamma_5(F + i\gamma_5 G)\xi_2 \\
&= -iab\partial^\rho S(-\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\xi_1 + \bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\xi_1) - b^2\partial^\rho P(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1 - \bar{\xi}_1\gamma_\rho\xi_2) \\
&= -b^2\partial^\rho P(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1 + \bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1) \\
&= -2a^2(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1)\partial^\rho P
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Βλέπουμε ότι εξαιτίας των ιδιοτήτων των Majorana spinors ισχύει: $ib\bar{\xi}_2\gamma_5(F + i\gamma_5 G)\xi_1 = ib\bar{\xi}_1\gamma_5(F + i\gamma_5 G)\xi_2$ και οι αντίστοιχοι όροι απαλείφονται. Άρα η επιπλέον μεταβολή που προσθέσαμε στο $\delta\chi$ δεν μας δημιουργεί πρόβλημα στα πεδία S και P. Ας δούμε τώρα τι συνεισφορά θα έχει στον μεταθέτη για το πεδίο χ και αν θα μπορέσουμε να το χρησιμοποιήσουμε για να απορροφήσουμε τον ανεπιθύμητο όρο.

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]\chi &= \delta_1\delta_2\chi - \delta_2\delta_1\chi \\
&= \delta_1[ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\xi_2] - \delta_2[ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho S + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\xi_1] \\
&= ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho(\delta_1 S) + b\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho(\delta_1 P) - ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho(\delta_2 S) - b\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho(\delta_2 P) \\
&+ (\delta_1 F + i\gamma_5\delta_1 G)\xi_2 - (\delta_2 F + i\gamma_5\delta_2 G)\xi_1 \\
&= -2a^2\bar{\xi}_2\gamma_\mu\xi_1\partial^\mu\chi + a^2\bar{\xi}_2\gamma^\mu\xi_1\gamma_\mu\gamma_\rho\partial^\rho\chi + (\delta_1 F + i\gamma_5\delta_1 G)\xi_2 - (\delta_2 F + i\gamma_5\delta_2 G)\xi_1
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Ο πρώτος όρος είναι ο επιθυμητός. Ο δεύτερος είναι η ανομοιογένεια που θέλουμε να απορροφήσουμε. Ο τρίτος και ο τέταρτος είναι η νέα συνεισφορά που εισαγάγαμε προκειμένου να απορροφηθεί ο δεύτερος όρος. Κάνουμε τα εξής βήματα:

- Αναδιατάσσουμε τους όρους της ανομοιογένειας χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες Fierz:

$$a^2(\bar{\xi}_2\gamma^\mu\xi_1\gamma_\mu)\gamma_\rho\partial^\rho\chi = -a^2(\xi_1\bar{\xi}_2 - \xi_2\bar{\xi}_1)\gamma_\rho\partial^\rho\chi + a^2\gamma_5(\xi_1\bar{\xi}_2 - \xi_2\bar{\xi}_1)\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho\chi \tag{4.21}$$

- Ορίζουμε τις μεταβολές των βοηθητικών πεδίων F και G ως εξής:

$$\delta_1 F = -a^2\bar{\xi}_1\gamma_\rho\partial^\rho\chi \tag{4.22}$$

$$\delta_1 G = -ia^2\bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho\chi \tag{4.23}$$

- Παρατηρούμε ότι η επιπλέον συνεισφορά $(\delta_1 F + i\gamma_5\delta_1 G)\xi_2 - (\delta_2 F + i\gamma_5\delta_2 G)\xi_1$ που εισαγάγαμε, χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς για τα $\delta_1 F$ και $\delta_1 G$ μας δίνει:

$$\begin{aligned}
(\delta_1 F + i\gamma_5\delta_1 G)\xi_2 - (\delta_2 F + i\gamma_5\delta_2 G)\xi_1 &= \delta_1 F\xi_2 + i\gamma_5\delta_1 G\xi_2 - \delta_2 F\xi_1 + i\gamma_5\delta_2 G\xi_1 \\
&= -a^2\xi_2\bar{\xi}_1\gamma_\rho\partial^\rho\chi + a^2\gamma_5\xi_2\bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho\chi \\
&\quad + a^2\xi_1\bar{\xi}_2\gamma_\rho\partial^\rho\chi - a^2\gamma_5\xi_1\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho\chi \\
&= +a^2(\xi_1\bar{\xi}_2 - \xi_2\bar{\xi}_1)\gamma_\rho\partial^\rho\chi - a^2\gamma_5(\xi_1\bar{\xi}_2 - \xi_2\bar{\xi}_1)\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho\chi
\end{aligned}$$

  Παρατηρούμε ότι αυτή είναι ακριβώς η αντίθετη από την έκφραση 4.21. Δηλαδή με την επιλογή των 4.22 και 4.23 για τις μεταβολές των βοηθητικών πεδίων F και G, η επιπλέον συνεισφορά που βρήκαμε εξουδετερώνει την ανομοιογένεια 4.21.

Συνεπώς η έκφραση 4.20 μας δίνει:

$$[U_1, U_2]\chi = -2a^2\bar{\xi}_2\gamma_\mu\xi_1\partial^\mu\chi \tag{4.24}$$

Που είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε. Συνοψίζοντας, έχουμε ορίσει τον μετασχηματισμό:

$$\delta\chi = ia\gamma_\rho\xi\partial^\rho S \pm a\gamma_\rho\gamma_5\xi\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\xi \tag{4.25}$$
$$\delta S = ia\bar{\xi}\chi \tag{4.26}$$
$$\delta P = \pm a\bar{\xi}\gamma_5\chi \tag{4.27}$$
$$\delta F = -a^2\bar{\xi}\gamma_\rho\partial^\rho\chi \tag{4.28}$$
$$\delta G = -ia^2\bar{\xi}\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho\chi \tag{4.29}$$

Ο μεταθέτης δύο υπερσυμμετρικών μετασχηματισμών πάνω στα πεδία δίνεται από τις σχέσεις 4.18, 4.19 και4.24:

$$[U_1, U_2]S = -2a^2\left(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1\right)\partial^\rho S \tag{4.30}$$
$$[U_1, U_2]P = -2a^2(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1)\partial^\rho P \tag{4.31}$$
$$[U_1, U_2]\chi = -2a^2(\bar{\xi}_2\gamma_\mu\xi_1)\partial^\mu\chi \tag{4.32}$$

Τώρα πρέπει όμως να κάνουμε άλλο ένα βήμα. Επειδή έχουμε εισαγάγει άλλα δύο βαθμωτά πεδία στο μοντέλο μας, πρέπει να εξετάσουμε και για αυτά τον νόμο μετασχηματισμού τους. Όπως έχουμε ήδη πει, ο μεταθέτης πρέπει να έχει την ίδια δράση πάνω σε όλα τα πεδία. Για το F έχουμε:

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]F &= \delta_1(\delta_2 F) - \delta_2(\delta_1 F) \\
&= \delta_1(-a^2\bar{\xi}_2\gamma_\mu\partial^\mu\chi) - \delta_2(-a^2\bar{\xi}_1\gamma_\mu\partial^\mu\chi) \\
&= -a^2\bar{\xi}_2\gamma_\mu\partial^\mu(\delta_1\chi) + a^2\bar{\xi}_1\gamma_\mu\partial^\mu(\delta_2\chi) \\
&= -a^2\bar{\xi}_2\gamma_\mu\partial^\mu\left(ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho S \pm a\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\,\xi_1\right) \\
&\quad + a^2\bar{\xi}_1\gamma_\mu\partial^\mu\left(ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho S \pm a\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\,\xi_2\right) \\
&= -a^2\bar{\xi}_2\gamma_\mu\xi_1\partial^\mu F - ia^2\bar{\xi}_2\gamma_\mu\gamma_5\xi_1\partial^\mu G \\
&\quad + a^2\bar{\xi}_1\gamma_\mu\xi_2\partial^\mu F + ia^2\bar{\xi}_1\gamma_\mu\gamma_5\xi_2\partial^\mu G \\
&= -2a^2(\bar{\xi}_2\gamma_\mu\xi_1)\partial^\mu F
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Αντίστοιχα για το πεδίο G, έχουμε:

$$\begin{aligned}
[U_1, U_2]G &= \delta_1(\delta_2 G) - \delta_2(\delta_1 G) \\
&= \delta_1(-ia^2\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho\chi) - \delta_2(-ia^2\bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho\chi) \\
&= -ia^2\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho(\delta_1\chi) + ia^2\bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho(\delta_2\chi) \\
&= -ia^2\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho(ia\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho S \pm a\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\xi_1) \\
&\quad + ia^2\bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\partial^\rho(ia\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho S \pm a\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho P + (F + i\gamma_5 G)\xi_2) \\
&= -ia^2\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\xi_1\partial^\rho F + a^2\bar{\xi}_2\gamma_5\gamma_\rho\gamma_5\xi_1\partial^\rho G \\
&\quad + ia^2\bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\xi_2\partial^\rho F - a^2\bar{\xi}_1\gamma_5\gamma_\rho\gamma_5\xi_2\partial^\rho G \\
&= -2a^2(\bar{\xi}_2\gamma_\rho\xi_1)\partial^\rho G
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Οπότε ο μεταθέτης είναι καλά ορισμένος. Το πρόβλημα είναι ότι ο νέος ορισμός της μεταβολής $\delta\chi$ δεν αφήνει την Λαγκρανζιανή 4.4 αναλλοίωτη.

Η μεταβολή των βαθμωτών κινητικών όρων παραμένει η ίδια και δίνεται από την 4.7:

$$\delta[\frac{1}{2}\partial_\mu S\partial^\mu S + \frac{1}{2}\partial_\mu P\partial^\mu P] = (ia\partial^\mu S\bar{\xi} + b\partial^\mu P\bar{\xi}\gamma_5)\partial_\mu\chi$$

Η μεταβολή του σπινοριακού κινητικού όρου όμως δεν παραμένει η ίδια. Ορίζοντας τον τελευταίο όρο της 4.25 ως $\delta\chi_{extra}$, αντικαθιστούμε την νέα μεταβολή $\delta\chi'$ στην 4.8 και έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta[\frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi] &= \delta\bar{\chi'}\gamma^\mu\partial_\mu\chi \\ &= \delta\bar{\chi}\gamma^\mu\partial_\mu\chi + \delta\bar{\chi}_{extra}\gamma^\mu\partial_\mu\chi\end{aligned}$$

Συνεπώς η ολική μεταβολή της Λαγκρανζιανής (4.9) θα αλλάζει κατά έναν όρο $\delta_{extra}\mathcal{L}_0$ που θα δίνεται από την σχέση:

$$\begin{aligned}\delta_{extra}\mathcal{L}_0 &= \delta\bar{\chi}_{extra}\gamma^\mu\partial_\mu\chi \\ &= F\bar{\xi}\gamma_\mu\partial^\mu\chi + iG\bar{\xi}\gamma_5\gamma_\mu\partial^\mu\chi \\ &= -\frac{1}{2a^2}\delta(F^2+G^2)\end{aligned} \tag{4.35}$$

Συνεπώς η Λαγκρανζιανή:

$$\boxed{\mathcal{L}^{WZ} = \frac{1}{2}\partial_\mu S\partial^\mu S + \frac{1}{2}\partial_\mu P\partial^\mu P + \frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi + \frac{1}{2a^2}(F^2+G^2)} \tag{4.36}$$

Αλλάζει μόνο κατά κάποιους επιφανειακούς όρους κάτω από τους μετασχηματισμούς 4.25 έως 4.29. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την ακόλουθη δράση:

$$\boxed{S^{WZ} = \int d^4x\ [\frac{1}{2}\partial_\mu S\partial^\mu S + \frac{1}{2}\partial_\mu P\partial^\mu P + \frac{1}{4}\bar{\chi}\gamma^\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu\chi + \frac{1}{2a^2}(F^2+G^2)]} \tag{4.37}$$

Η δράση αυτή είναι **αναλλοίωτη κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς** 4.25 έως 4.29 που δώσαμε. Αυτή είναι η βασική δράση του μοντέλου Wess-Zumino.

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Στόχος αυτής της εργασίας ήταν η παρουσίαση ενός απλού υπερσυμμετρικού μοντέλου. Για το σκοπό αυτό ακολουθήσαμε την εξής διαδικασία. Αρχικά παρουσιάσαμε τις βασικές έννοιες της θεωρίας πεδίου: την αρχή της ελάχιστης δράσης, τις εξισώσεις Euler-Lagrange και το θεώρημα Noether. Στη συνέχεια αναλύσαμε τον κεντρικό ρόλο που παίζουν οι συμμετρίες, στην κατασκευή μιας θεωρίας. Η απαίτηση μας η δράση που θα κατασκευάσουμε να είναι σχετικιστικά αναλλοίωτη, ώστε να σέβεται τις αρχές της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, μας οδήγησε στην μελέτη των ομάδων Lorentz και Poincare. Μελετώντας τις αναπαραστάσεις των ομάδων αυτών, κατασκευάσαμε βαθμωτά, διανυσματικά, τανυστικά και σπινοριακά πεδία και βρήκαμε τους νόμους μετασχηματισμού τους κάτω από την ομάδα Poincare. Στη συνέχεια βρήκαμε τις αναλλοίωτες ποσότητες που μπορούν να κατασκευασθούν από αυτά τα πεδία, οι οποίες χρησιμοποιούνται στην κατασκευή όρων μάζας και κινητικών όρων σε σχετικιστικά αναλλοίωτες Λαγκρανζιανές. Σε αυτό το σημείο, έχοντας εισαγάγει όλα τα απαραίτητα εργαλεία, κατασκευάσαμε μία δράση που να περιέχει τόσο βαθμωτά, όσο και σπινοριακά πεδία. Εξετάσαμε κάποιες απλές εσωτερικές συμμετρίες μίας τέτοιας δράσης, και στη συνέχεια προχωρήσαμε στο πιο σημαντικό βήμα: Αναζητήσαμε ένα μετασχηματισμό πάνω στα πεδία, που να μπλέκει πεδία χωρίς σπιν με πεδία με σπιν. Ξεκινώντας από μία πολύ γενική έκφραση για ένα τέτοιο μετασχηματισμό, επιβάλαμε μια σειρά από απαιτήσεις οι οποίες περιόρισαν την μορφή του. Στο τέλος δείξαμε ότι με κατάλληλη επιλογή των πεδίων, υπάρχει ένα τέτοιο σύνολο μετασχηματισμών πάνω στα πεδία, το οποίο μάλιστα κλείνει και αποτελεί ομάδα. Τέλος, προκειμένου να κατασκευάσουμε μία Λαγκρανζιανή η οποία να είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς εισαγάγαμε δύο βοηθητικά πεδία. Καταλήξαμε έτσι στην δράση του μοντέλου Wess-Zumino, η οποία είναι αναλλοίωτη κάτω από αυτούς τους μετασχηματισμούς, δηλαδή υπερσυμμετρική. Καταφέραμε λοιπόν να βρούμε μία Λαγκρανζιανή που εξαιτίας της υπερσυμμετρίας της, να επιτρέπει μη-τετριμμένες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των βαθμωτών και των σπινοριακών πεδίων.

Βιβλιογραφία

Bailin, D. and Love, A. (1994). Supersymmetric Gauge Field Theory And String Theory. Institute of Physics Publishing, Bristol, UK, 317 p.

Bjorken, J.D. and Drell, S.D. (1964). Relativistic Quantum Mechanics. McGraw-Hill, Inc., USA, 300 p.

Ramond, P. (1981). Field Theory: A Modern Primer. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA.

Tung, Wu-Ki, (1985). Group Theory In Physics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 344p.

Weinberg, S. (1995). The Quantum Theory of Fields. Volume I: Foundations. Cambridge University Press, New York, USA, 609 p.

Wess, J. and Zumino, B. (1974). Supergauge transformations in four dimensions. Nuclear Physics B. 70 (1): 39–50

Wess, J. and Zumino, B. (1974). Supergauge Invariant Extension Of Quantum Electrodynamics. Nuclear Physics B. 78 (1): 1-13

Παράρτημα Α

Θα δείξουμε ότι η ορίζουσα ενός μετασχηματισμού Lorentz $\det(\Lambda)$ και το πρόσημο του στοιχείου ${\Lambda^0}_0$ είναι Lorentz αναλλοίωτα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την κατηγοριοποίηση των μετασχηματισμών Lorentz.
Ένας μετασχηματισμός Lorentz μετασχηματίζεται ως εξής: $\Lambda' = \Lambda_A^{-1}\Lambda\ \Lambda_A$. Άρα για την ορίζουσα έχουμε:

$$\det(\Lambda') = \det(\Lambda_A^{-1}\Lambda\ \Lambda_A) = \det(\Lambda) \tag{1}$$

Για το πρόσημο του στοιχείου ${\Lambda^0}_0$ η διαδικασία είναι πιο δύσκολη. Πρέπει να κάνουμε μία συζήτηση η οποία θα μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz στην περίπτωσή μας. Θα πρέπει να γενικεύσουμε την έννοια του διανυσματικού χώρου και του εσωτερικού γινομένου, στη συνέχεια να αποδείξουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τους γενικευμένους αυτούς χώρους και τέλος να την χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε την αναλλοιότητα του προσήμου του στοιχείου ${\Lambda^0}_0$ που μας ενδιαφέρει.
Αρχικά θα δείξουμε ότι το σύνολο των $n \times n$ τετραγωνικών πινάκων αποτελεί διανυσματικό χώρο (έστω $\mathcal{V}$), αν εφοδιαστεί με τις πράξεις της πρόσθεσης πινάκων και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ενός πίνακα με έναν (πραγματικό) αριθμό. Πράγματι βλέπουμε ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα:

- Αντιμεταθετική ιδιότητα της διανυσματικής πρόσθεσης: $A + B = B + A$
- Προσεταιριστική ιδιότητα της διανυσματικής πρόσθεσης: $A + (B + \Gamma) = (A + B) + \Gamma$
- Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου ως προς τη διανυσματική πρόσθεση: Υπάρχει ένα στοιχείο $0 \in \mathcal{V}$ (εδώ ο μηδενικός $n \times n$ πίνακας) με την ιδιότητα: $A + 0 = A$, για κάθε $A \in \mathcal{V}$
- Ύπαρξη αντιστρόφου ως προς τη διανυσματική πρόσθεση: Για κάθε $A \in \mathcal{V}$ υπάρχει το αντίστροφο στοιχείο $-A \in \mathcal{V}$, τέτοιο ώστε $A + (-A) = 0$
- Συμβατότητα της διανυσματικής πρόσθεσης με τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό: $a(bA) = (ab)A$
- Ύπαρξη ουδέτερου στοιχείου ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό: Υπάρχει ένα στοιχείο $I \in \mathcal{V}$ (εδώ ο διαγώνιος μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας) με την ιδιότητα: $I \cdot A = A$ για κάθε $A \in \mathcal{V}$
- Επιμεριστική ιδιότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς τη διανυσματική πρόσθεση: $a(A+B) = aA + aB$
- Επιμεριστική ιδιότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση: $(a + b)A = aA + bA$
- Κλειστότητα ως προς τη διανυσματική πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό. $A, B \in \mathcal{V} \Rightarrow \Gamma = A + B \in \mathcal{V}$ και $A \in \mathcal{V} \Rightarrow B = \lambda \cdot A \in \mathcal{V}$

Επιπλέον, μπορούμε να εφοδιάσουμε το διανυσματικό χώρο με το εξής εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A, B\rangle = Tr(A^\dagger B) = \sum_{i,j,k} \delta_{ij} A^\dagger_{ik} B_{kj} \tag{2}$$

το οποίο ικανοποιεί τα τρία αξιώματα:

- Έχει συζυγή συμμετρία: $\langle A, B\rangle = \overline{\langle B, A\rangle}$

$$\overline{\langle B, A\rangle} = \left(Tr(B^\dagger A)\right)^* = \sum_{i,j,k} \delta_{ij} \left(B^\dagger_{ik} A_{kj}\right)^* = \sum_{i,j,k} \delta_{ij} \left(B^*_{ki} A^T_{jk}\right)^* = \sum_{i,j,k} \delta_{ij} A^\dagger_{ik} B_{kj} = Tr(A^\dagger B) = \langle A, B\rangle$$

- Είναι γραμμικό ως προς το δεύτερο όρο: $\langle A, \lambda B\rangle = \lambda\langle A, B\rangle$ και $\langle A, B+\Gamma\rangle = \langle A, B\rangle + \langle A, \Gamma\rangle$

$$\langle A, \lambda B\rangle = Tr(A^\dagger \lambda B) = \sum_{i,j,k} \delta_{ij} A^\dagger_{ik} \lambda B_{kj} = \lambda \sum_{i,j,k} \delta_{ij} A^\dagger_{ik} B_{kj} = \lambda Tr(A^\dagger B) = \lambda\langle A, B\rangle$$

$$\langle A, B+\Gamma\rangle = Tr\{A^\dagger(B+\Gamma)\} = Tr(A^\dagger B + A^\dagger \Gamma) = Tr(A^\dagger B) + Tr(A^\dagger \Gamma) = \langle A, B\rangle + \langle A, \Gamma\rangle$$

- Είναι θετικά ορισμένο: $\langle A, A\rangle \geq 0$ και $\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow A = 0$

$$\langle A, A\rangle = Tr(A^\dagger A) = \sum_{i,j,k} \delta_{ij} A^\dagger_{ik} A_{kj} = \sum_{i,k} A^*_{ki} A_{ki} = \sum_{i,k} |A_{ki}|^2 \geqslant 0$$

$$\langle A, A\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i,k} |A_{ki}|^2 = 0 \;\Rightarrow\; A_{ki} = 0 \;\forall (i,k) \;\Rightarrow\; A = 0$$

Για κάθε διανυσματικό χώρο εφοδιασμένο με εσωτερικό γινόμενο, ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz:

Αν u και v ανήκουν σε ένα διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle u, v\rangle$, τότε ισχύει:

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \qquad \Leftrightarrow \qquad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\| \tag{3}$$

Απόδειξη: Αν $v = 0$ τότε ισχύει προφανώς η ισότητα. Αν $v \neq 0$ ορίζουμε $\lambda = \frac{\langle v,u\rangle}{\|v\|^2}$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
0 \leq \|u - \lambda v\| = \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle &= \langle u - \lambda v, u\rangle - \langle u - \lambda v, \lambda v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - \langle \lambda v, u\rangle - \langle u, \lambda v\rangle + \langle \lambda v, \lambda v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - \lambda^*\langle v, u\rangle - \lambda\langle u, v\rangle + \lambda\lambda^*\langle v, v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle - \lambda^*\langle v, u\rangle - \lambda\overline{\langle v, u\rangle} + \lambda\lambda^*\|v\|^2 \\
&= \|u\|^2 - \frac{\overline{\langle v, u\rangle}}{\|v\|^2}\langle v, u\rangle - \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2}\overline{\langle v, u\rangle} + \frac{\overline{\langle v, u\rangle}\langle v, u\rangle}{\|v\|^2} \\
&= \|u\|^2 - \frac{|\langle v, u\rangle|^2}{\|v\|^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|\langle v, u\rangle|^2}{\|v\|^2} \leq \|u\|^2 \quad \Rightarrow \quad |\langle v, u\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Επιστρέφουμε τώρα στο πρόβλημα του προσήμου του στοιχείου ${\Lambda^0}_0$. Έστω δύο μετασχηματισμοί Lorentz Λ και Λ'. Τότε θα έχουμε:

$$(\Lambda\Lambda')^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda'^\alpha{}_\nu \quad \Rightarrow \quad (\Lambda\Lambda')^0{}_0 = {\Lambda^0}_0 {\Lambda'^0}_0 + {\Lambda^0}_k {\Lambda'^k}_0 \qquad k = 1, 2, 3 \tag{4}$$

Όμως σύμφωνα με τα όσα είπαμε, οι μετασχηματισμοί Lorentz Λ και Λ' ως τετραγωνικοί πίνακες 4×4 αποτελούν διανυσματικό χώρο. Αυτή τη φορά όμως, θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε ένα διαφορετικό εσωτερικό γινόμενο για αυτό το χώρο.
Έστω ότι ορίζουμε το εξής εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle \Lambda, \Lambda' \rangle = \sum_{k=1}^{3} {\Lambda^\dagger}_{k0} \Lambda'_{0k} \tag{5}$$

Παρατηρούμε ότι τότε ικανοποιούνται τα αξιώματα:

- Έχει συζυγή συμμετρία: $\langle \Lambda, \Lambda' \rangle = \overline{\langle \Lambda', \Lambda \rangle}$

$$\overline{\langle \Lambda', \Lambda \rangle} = \sum_{k=1}^{3} ({\Lambda'^\dagger}_{k0} \Lambda_{0k})^* = \sum_{k=1}^{3} {\Lambda'^T}_{k0} \Lambda^*_{0k} = \sum_{k=1}^{3} \Lambda'_{0k} {\Lambda^\dagger}_{k0} = \langle \Lambda, \Lambda' \rangle$$

- Είναι γραμμικό ως προς τον 2ο όρο: $\langle \Lambda, a\Lambda' \rangle = a\langle \Lambda, \Lambda' \rangle$ και $\langle \Lambda_A, \Lambda_B + \Lambda_\Gamma \rangle = \langle \Lambda_A, \Lambda_B \rangle + \langle \Lambda_A, \Lambda_\Gamma \rangle$

$$\langle \Lambda, a\Lambda' \rangle = \sum_{k=1}^{3} {\Lambda^\dagger}_{k0} a \Lambda'_{0k} = a \sum_{k=1}^{3} {\Lambda^\dagger}_{k0} \Lambda'_{0k} = a\langle \Lambda, \Lambda' \rangle$$

$$\langle \Lambda_A, \Lambda_B + \Lambda_\Gamma \rangle = \sum_{k=1}^{3} (\Lambda^\dagger_A)_{k0} [(\Lambda_B)_{0k} + (\Lambda_\Gamma)_{0k}] = \sum_{k=1}^{3} (\Lambda^\dagger_A)_{k0} (\Lambda_B)_{0k} + (\Lambda^\dagger_A)_{k0} (\Lambda_\Gamma)_{0k} = \langle \Lambda_A, \Lambda_B \rangle + \langle \Lambda_A, \Lambda_\Gamma \rangle$$

- Είναι θετικά ορισμένο: $\langle \Lambda, \Lambda \rangle \geq 0$ και $\langle \Lambda, \Lambda \rangle = 0 \Leftrightarrow \Lambda = 0$

$$\langle \Lambda, \Lambda \rangle = \sum_{k=1}^{3} {\Lambda^\dagger}_{k0} \Lambda_{0k} = \sum_{k=1}^{3} \Lambda^*_{0k} \Lambda_{0k} = \sum_{k=1}^{3} |\Lambda_{0k}|^2 \geq 0$$

$$\langle \Lambda, \Lambda \rangle = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{3} |\Lambda_{0k}|^2 = 0 \;\Rightarrow\; \Lambda_{0k} = 0 \;\; \forall k \quad \Rightarrow \quad \Lambda = 0$$

Άρα πράγματι, η σχέση 5 ορίζει ένα σωστό εσωτερικό γινόμενο για τον διανυσματικό χώρο των 4×4 πινάκων των μετασχηματισμών Lorentz. Συνεπώς, ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwarz για αυτό το διανυσματικό χώρο. Πιο συγκεκριμένα, αν εφαρμόσουμε την 3 ως προς το το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε στην 5, έχουμε:

$$|\langle \Lambda, \Lambda' \rangle|^2 \leq \langle \Lambda, \Lambda \rangle \langle \Lambda', \Lambda' \rangle \;\Rightarrow\; \left| \sum_{k=1}^{3} {\Lambda^\dagger}_{k0} \Lambda'_{0k} \right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{3} {\Lambda^\dagger}_{i0} \Lambda_{0i}) \right) \left(\sum_{j=1}^{3} {\Lambda'^\dagger}_{j0} \Lambda'_{0j} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \left| {\Lambda^0}_k {\Lambda'^k}_0 \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{3} \Lambda^2_{0i} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{3} \Lambda^2_{0j} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα 6 στο πρόβλημά μας. Από τη σχέση 4 έχουμε:

$$\begin{aligned}(\Lambda\Lambda')^0{}_0 = \Lambda^0{}_0\Lambda'^0_0 + \Lambda^0{}_k\Lambda'^k_0 \quad &\Rightarrow \quad (\Lambda\Lambda')^0{}_0 - \Lambda^0{}_0\Lambda'^0_0 = \Lambda^0{}_k\Lambda'^k_0 \\ &\Rightarrow \quad |(\Lambda\Lambda')^0{}_0 - \Lambda^0{}_0\Lambda'^0_0| = |\Lambda^0{}_k\Lambda'^k_0|\end{aligned}$$

όμως ο τελευταίος όρος είναι φραγμένος λόγω της ανισότητας 6:

$$\Rightarrow \quad |(\Lambda\Lambda')^0{}_0 - \Lambda^0{}_0\Lambda'^0_0| = |\Lambda^0{}_k\Lambda'^k_0| \leq \left(\sum_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{0j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad |(\Lambda\Lambda')^0{}_0 - \Lambda^0{}_0\Lambda'^0_0| \leq \left(\sum_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{0j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (\Lambda\Lambda')^0{}_0 - \Lambda^0{}_0\Lambda'^0_0 \leq \quad \left(\sum\limits_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}\Lambda_{0j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\Lambda\Lambda')^0{}_0 - \Lambda^0{}_0\Lambda'^0_0 \geq -\left(\sum\limits_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}\Lambda_{0j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (\Lambda\Lambda')^0{}_0 \leq \Lambda^0{}_0\Lambda'^0_0 \ + \ \left(\sum\limits_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}\Lambda_{0j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\Lambda\Lambda')^0{}_0 \geq \Lambda^0{}_0\Lambda'^0_0 \ - \ \left(\sum\limits_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}\Lambda_{0j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{7}$$

Τώρα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα των μετασχηματισμών Lorentz $g = \Lambda^T g\,\Lambda$ έχουμε:

$$\begin{aligned} g = \Lambda^T g\,\Lambda \ \Rightarrow \ g^{\rho\sigma} = \Lambda^\rho{}_\mu\Lambda^\sigma{}_\nu g^{\mu\nu} \underset{\rho,\sigma=0}{\Rightarrow} g^{00} = \Lambda^0{}_\mu\Lambda^0{}_\nu g^{\mu\nu} \quad &\Rightarrow 1 = (\Lambda^0{}_0)^2 - \sum_{i=1}^{3}\Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i \\ &\Rightarrow (\Lambda_{00})^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2 \\ &\Rightarrow (\Lambda_{00}) = \pm\left(1 + \sum_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{8}$$

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. **Αν τα Λ_{00} και Λ'_{00} έχουν το ίδιο πρόσημο**

   Αντικαθιστώντας την 8 στην 7 έχουμε:

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (\Lambda\Lambda')_{00} \leq \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{3}\Lambda'^2_{0i}\right)^{\frac{1}{2}} \ + \ \left(\sum\limits_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}\Lambda_{0j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\Lambda\Lambda')_{00} \geq \left(1 + \sum\limits_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{3}\Lambda'^2_{0i}\right)^{\frac{1}{2}} \ - \ \left(\sum\limits_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum\limits_{j=1}^{3}\Lambda_{0j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

   Από τη δεύτερη ανισότητα συμπεραίνουμε ότι:

$$(\Lambda\Lambda')_{00} \geq 0 \tag{9}$$

2. **Αν τα Λ_{00} και Λ'_{00} έχουν αντίθετο πρόσημο**

   Αντικαθιστώντας πάλι την 8 στην 7 έχουμε:

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (\Lambda\Lambda')_{00} \leq -\left(1+\sum_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{i=1}^{3}\Lambda'^2_{0i}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{0j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\Lambda\Lambda')_{00} \geq -\left(1+\sum_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\sum_{i=1}^{3}\Lambda'^2_{0i}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\sum_{i=1}^{3}\Lambda_{0i}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{3}\Lambda_{0j}^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

   Από την πρώτη ανισότητα συμπεραίνουμε ότι:

$$(\Lambda\Lambda')_{00} \leq 0 \tag{10}$$

Άρα, συνοψίζοντας τις 9 και 10 σε μία σχέση, έχουμε:

$$sgn\{(\Lambda\Lambda')_{00}\} = sgn\{\Lambda_{00}\}sgn\{\Lambda'_{00}\} \tag{11}$$

Όπως είπαμε όμως, ένας πίνακας μετασχηματισμού Lorentz μετασχηματίζεται ως εξής: $\Lambda' = \Lambda_A^{-1}\Lambda\,\Lambda_A$. Άρα για το $\Lambda^0{}_0$ στοιχείο έχουμε:

$$\begin{aligned} \Lambda'^0{}_0 = (\Lambda_A^{-1})^0{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\beta (\Lambda_A)^\beta{}_0 \quad &\Rightarrow \quad sgn\{\Lambda'_{00}\} = sgn\{(\Lambda_A^{-1}\Lambda)_{00}\}\cdot sgn\{\Lambda_{A00}\} \\ &\Rightarrow \quad sgn\{\Lambda'_{00}\} = sgn\{(\Lambda_A^{-1})_{00}\}\cdot sgn\{(\Lambda)_{00}\}\cdot sgn\{(\Lambda_A)_{00}\} \\ &\Rightarrow \quad sgn\{\Lambda'_{00}\} = sgn\{(\Lambda)_{00}\} \end{aligned} \tag{12}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα:

$$\begin{aligned} g = \Lambda^T g \Lambda \quad \Rightarrow \quad \Lambda^{-1} = g\,\Lambda^T g \quad &\Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^0{}_0 = g^{0\alpha}(\Lambda^T)_\alpha{}^\beta g_{\beta 0} \\ &\Rightarrow \quad (\Lambda^{-1})^0{}_0 = (\Lambda^T)^0{}_0 = (\Lambda)^0{}_0 \\ &\Rightarrow \quad sgn\{\Lambda_{00}^{-1}\} = sgn\{\Lambda_{00}\} \\ &\Rightarrow \quad sgn\{\Lambda_{00}^{-1}\}\cdot sgn\{\Lambda_{00}\} = 1 \end{aligned}$$

Άρα δείξαμε ότι η ορίζουσα ενός μετασχηματισμού Lorentz $\det(\Lambda)$ και το πρόσημο του στοιχείου $\Lambda^0{}_0$ είναι αναλλοίωτα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη διάκριση των μετασχηματισμών στις τέσσερις κατηγορίες που αναφέραμε.

Παράρτημα B

Θα δείξουμε ότι κάθε ορθός ($\det\Lambda = +1$) και ορθόχρονος ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$) μετασχηματισμός Lorentz $\Lambda_+^\uparrow \in SO(3,1)^+$, όπου $SO(3,1)^+$ το Restricted Lorentz Group, μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο ως γινόμενο ενός boost και μίας στροφής.Για να το κάνουμε αυτό, θα εισάγουμε ένα χρήσιμο εργαλείο στη μελέτη της ομάδας Lorentz, που είναι η σύνδεση του Restricted Lorentz Group $SO(3,1)^+$ με την ομάδα $SL(2,C)$.

Η απεικόνιση $\mathcal{R}^4 \longrightarrow \mathcal{H}_2$

Μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε σημείο του χωροχρόνου x^μ σε έναν 2×2 ερμιτιανό πίνακα X μέσω της σχέσης:

$$x^\mu \;\rightarrow\; X = \sum_{\mu=0}^{3} \sigma^\mu x^\mu \tag{1}$$

όπου $\sigma^i,\ i = 1,2,3$ οι πίνακες Pauli και σ^0 ο ταυτοτικός πίνακας. Έχουμε δηλαδή τον πίνακα:

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Τότε το μήκος του τετρανύσματος x^μ αντιστοιχεί στην ορίζουσα του πίνακα X:

$$\det X = |x^0|^2 - |\vec{x}|^2 = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} \tag{3}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας αυτός είναι ερμιτιανός:

$$X^\dagger = \sum_{\mu=0}^{3} (\sigma^\dagger)^\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} \sigma^\mu x^\mu = X \tag{4}$$

Το σύνολο των 2×2 ερμιτιανών πινάκων αποτελεί διανυσματικό χώρο, έστω $\mathcal{H}_2 = \{2\times 2$ πίνακες $A : A^\dagger = A\}$, γιατί ικανοποιούνται όλα τα αντίστοιχα αξιώματα [βλ. Παράρτημα A]. Το μόνο αξίωμα που χρειάζεται εξέταση είναι αυτό της κλειστότητας:

$$\begin{aligned} \text{Αν } A, B \in \mathcal{H}_2 \text{ και } \lambda \in \Re \text{ τότε } (A+B)^\dagger &= A + B \;\Rightarrow\; A + B \;\in \mathcal{H}_2 \\ \text{και} \qquad (\lambda A)^\dagger &= \lambda A \qquad \Rightarrow\; \lambda A \;\in \mathcal{H}_2 \end{aligned}$$

Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στο χώρο των 2×2 με τον συνήθη τρόπο [βλ. Παράρτημα A]:

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2} Tr(A^\dagger B) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \delta_{ij} A^\dagger_{ik} B_{kj} \tag{5}$$

Ο συντελεστής $\frac{1}{2}$ είναι μία σύμβαση κανονικοποίησης, ώστε να ισχύει $\langle I_2, I_2\rangle = 1$. Ξέρουμε ότι οι τρείς πίνακες Pauli και ο ταυτοτικός είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, και επιπλέον:

$$\langle \sigma_\mu, \sigma_\nu\rangle = \frac{1}{2}Tr(\sigma_\mu\sigma_\nu) = \delta_{\mu\nu} \tag{6}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$, $Tr(\sigma_i) = 0$ και $Tr(\sigma_0) = 2$ των πινάκων Pauli. Δηλαδή οι πίνακες $\{\sigma_\mu\}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση στο χώρο $\mathcal{H}_2$. Παρατηρούμε ότι για τον πίνακα X που ορίσαμε στην 2:

$$\langle \sigma_\mu, X\rangle = \sum_{\nu=0}^{3} x^\nu \langle \sigma_\mu\sigma_\nu\rangle = \sum_{\nu=0}^{3} x^\nu \delta_{\mu\nu} = x^\mu \tag{7}$$

Άρα έχουμε βρεί δύο αντίστροφους γραμμικούς και 1 προς 1 μετασχηματισμούς μεταξύ των χώρων $\Re^4$ και $\mathcal{H}_2$ που ορίζονται ως εξής:

$$x^\mu \;\rightarrow\; X = x^0\sigma^0 + x^1\sigma^1 + x^2\sigma^2 + x^3\sigma^3 = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$X \;\rightarrow\; x^\mu = \langle \sigma_\mu, X\rangle = \frac{1}{2}Tr(\sigma_\mu X) \tag{9}$$

Η γραμμικότητα των παραπάνω μετασχηματισμών είναι προφανής:

$$x^\mu + \lambda y^\mu \;\rightarrow\; M = \sum_{\mu=0}^{3} \sigma^\mu (x + \lambda y)^\mu = \sum_{\mu=0}^{1} \sigma^\mu x^\mu + \lambda \sum_{\mu=0}^{1} \sigma^\mu y^\mu = X + \lambda Y \tag{10}$$

$$X + \lambda Y \;\rightarrow\; (x + \lambda y)^\mu = \langle \sigma_\mu, X + \lambda Y\rangle = \langle \sigma_\mu, X\rangle + \lambda\langle \sigma_\mu, Y\rangle = x^\mu + \lambda y^\mu \tag{11}$$

Μετασχηματισμοί Lorentz στον $\mathcal{H}_2$

Αφού βρήκαμε μία ισοδύναμη γραφή του x^μ μέσω του πίνακα X θέλουμε να βρούμε πως γράφεται ένας μετασχηματισμός Lorentz χρησιμοποιώντας τον πίνακα X. Έστω λοιπόν ένας μετασχηματισμός Lorentz $\Lambda_+^\uparrow \in SO(3,1)^+$:

$$x^\mu \;\rightarrow\; x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό το μέτρο του x^μ διατηρείται, άρα διατηρείται και η ορίζουσα της αντίστοιχης απεικόνισής του σε πίνακα:

$$x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} = x'^\mu x'^\nu g_{\mu\nu} \quad \underset{3}{\Rightarrow} \quad \det X = \det X'$$

Θεωρούμε τωρα τον γραμμικό μετασχηματισμό που απεικονίζει τον 2×2 ερμιτιανό πίνακα X στον 2×2 ερμιτιανό πίνακα X' διατηρώντας την ορίζουσα. Στην γενικότερή του μορφή, ένας τέτοιος μετασχηματισμός, γράφεται:

$$X \quad \xrightarrow{\Lambda} \quad X' = AXB$$

Παίρνουμε τους πίνακες A και B να έχουν ορίζουσα $\det = 1$, δηλαδή να ανήκουν στην ομάδα $SL(2,C)$. Αυτό γιατί ένας 2×2 μιγαδικός πίνακας έχει 4 μιγαδικές ή 8 πραγματικές παραμέτρους. Η επιβολή της $\det = 1$ θα μας δώσει δύο εξισώσεις που μειώνουν τον αριθμό των ελεύθερων παραμέτρων σε 6, που είναι ο σωστός αριθμός ανεξάρτητων παραμέτρων για την περιγραφή του Lorentz Group.

Στη συνέχεια θα επιβάλλουμε τις απαιτήσεις μας: **ο μετασχηματισμός να διατηρεί την ορίζουσα και την ερμιτιανότητα του X**:

- Παρατηρούμε ότι η απαίτηση $A, B \in SL(2,C)$ έχει ως άμεσο αποτέλεσμα ο μετασχηματισμός να διατηρεί την ορίζουσα του X:

$$\det X' = \det A \det X \det B \;\Rightarrow\; \det X' = \det X$$

Άρα η πρώτη απαίτησή μας ικανοποιείται ταυτοτικά.

- Στη συνέχεια απαιτούμε ο X' να είναι ερμιτιανός:

$$\begin{aligned} X'^{\dagger} = X' \quad \Rightarrow \quad (AXB)^{\dagger} = AXB \quad &\Rightarrow \quad B^{\dagger}XA^{\dagger} = AXB \\ &\Rightarrow \quad XA^{\dagger}B^{-1} = (B^{\dagger})^{-1}AX \\ &\Rightarrow \quad XT^{\dagger} = TX \qquad \text{για κάθε } X \end{aligned}$$

όπου $T = (B^{\dagger})^{-1}A \;\Rightarrow\; T^{\dagger} = A^{\dagger}B^{-1}$. Αφού η σχέση ισχύει $\forall\, X$, ισχύει και για $X = I$. Έτσι βλέπουμε ότι αναγκαστικά ο T είναι ερμιτιανός $T^{\dagger} = T$. Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} XT = TX \quad \Rightarrow \quad [X,T] = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{\mu=0}^{3} x^{\mu}[\sigma^{\mu}, T] = 0 \quad \text{για κάθε } X \\ &\Rightarrow [\sigma^{\mu}, T] = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Τώρα εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι αν ένας πίνακας T μετατίθεται και με τους τρεις πίνακες Pauli, είναι πολλαπλάσιος του ταυτοτικού ή με άλλα λόγια ότι οι πίνακες Pauli είναι ένα irreducible σύνολο πινάκων. Πολύ πιο εύκολα όμως, μπορούμε να σκεφτούμε από τις πολύ γνωστές μας αναπαραστάσεις της ομάδας $SU(2)$ ότι εάν υπήρχε ένας τέτοιος πίνακας T που να μετατίθεται με τους $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, η ομάδα $SU(2)$ θα είχε και έναν δεύτερο τελεστή Casimir, το οποίο είναι φυσικά άτοπο. Ο μόνος τελεστής Casimir της ομάδας είναι ο S^2 που πράγματι στην $s = \frac{1}{2}$ αναπαράσταση είναι απλά ο πίνακας $S^2 \doteq \frac{3}{4}\, I = \frac{3}{4}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, δηλαδή πολλαπλάσιος του ταυτοτικού (όπως και σε κάθε άλλη αναπαράσταση, ανώτερου σπιν), ώστε όταν δρα πάνω στα αντίστοιχα ανύσματα, να δίνει τη σωστή ιδιοτιμή ολικού σπιν της αναπαράστασης $s(s+1) = \frac{3}{4}$. Συμπεραίνουμε ότι $T = \lambda I,\ \lambda \in \Re$. Όμως $T = (B^{\dagger})^{-1}A$, όπου $A, B \in SL(2,C)$. Άρα μέσω της ορίζουσας μπορούμε να βρούμε τις τιμές του λ:

$$\det T = \det[(B^{\dagger})^{-1}A] \;\Rightarrow\; \det(\lambda I) = \frac{\det A}{\det B^{\dagger}} \;\Rightarrow\; \lambda^2 = \frac{\det A}{(\det B)^*} \;\Rightarrow\; \lambda^2 = 1 \;\Rightarrow\; \lambda = \pm 1$$

Αυτό συνεπάγεται: $T = \pm I \;\Rightarrow\; (B^{\dagger})^{-1}A = \pm I \;\Rightarrow\; A = \pm B^{\dagger}$ και ο μετασχηματισμός γράφεται:

$$\boxed{X \quad \xrightarrow{\Lambda} \quad X' = \pm AXA^{\dagger}} \tag{13}$$

Άρα βρήκαμε το μετασχηματισμό που ικανοποιεί και τη δεύτερή μας απαίτηση, δηλαδή τη διατήρηση της ερμιτιανότητας του X. Στη συνέχεια πρέπει να επιλέξουμε πρόσημο. Και οι δύο επιλογές μας δίνουν ένα γραμμικό μετασχηματισμό που διατηρεί την ορίζουσα και την ερμιτιανότητα του X, οπότε εκ πρώτης όψεως δεν υπάρχει τρόπος να επιλέξουμε. Αν όμως εξετάσουμε όμως το θέμα πιο προσεκτικά, θα δούμε ότι το πρόσημο προσδιορίζει το αν ο μετασχηματισμός Lorentz θα είναι ορθόχρονος, ή μη-ορθόχρονος:

Έστω το τετράνυσμα $x^{\mu} = \begin{pmatrix} x^0 \\ 0 \end{pmatrix}$ το οποίο απεικονίζεται στον πίνακα $X = x^0\sigma^0$ σύμφωνα με το μετασχηματισμό 8 και ένας μετασχηματισμός Lorentz $\Lambda_+^{\uparrow} \in SO(3,1)^+ : \quad x^{\mu} \xrightarrow{\Lambda_+^{\uparrow}} x'^{\mu}$

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{0}x^0 \quad \Rightarrow \quad x'^0 = \Lambda^0{}_0\, x^0 \tag{14}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας την απεικόνιση του x'^{μ} σε πίνακα έχουμε:

$$\begin{aligned} x'_{\mu} = \langle \sigma_{\mu}, X' \rangle = \pm \langle \sigma_{\mu}, AXA^{\dagger} \rangle \quad &\Rightarrow \quad x'^{0} = \pm \langle \sigma_0, A(x^0 \sigma^0) A^{\dagger} \rangle \\ &\Rightarrow \quad x'^{0} = \pm\, x^0 \langle \sigma_0, A\sigma^0 A^{\dagger} \rangle \\ &\underset{14}{\Rightarrow} \quad \Lambda^0{}_0 = \pm\, \langle \sigma_0, A\sigma^0 A^{\dagger} \rangle \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ανάλογα με το πρόσημο που θα επιλέξουμε στη σχέση 13 αλλάζει το είδος του μετασχηματισμού Lorentz που παίρνουμε. Εμείς θέλουμε ο μετασχηματισμός Lorentz που προκύπτει να είναι ορθόχρονος $\Lambda^{\uparrow}_{+}$, δηλαδή να έχουμε $\Lambda^0{}_0 \geq 0$. Δεδομένου ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο, **πρέπει τελικά να επιλέξουμε το θετικό πρόσημο**, ώστε οι πίνακες A να αναπαριστούν *ορθόχρονους* μετασχηματισμούς.
Μεχρι στιγμής δεν έχουμε δείξει τίποτα αυστηρό. Απλά βρήκαμε ότι ένας μετασχηματισμός $X \to X' = AXA^{\dagger}$ με $A \in\ SL(2,C)$ διατηρεί την ορίζουσα και την ερμιτιανότητα του X, και αντιστοιχεί σε ορθόχρονο μετασχηματισμό:

$$\boxed{X \quad \xrightarrow{\Lambda} \quad X' = AXA^{\dagger}} \tag{15}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε μία σχέση ομοιομορφισμού μεταξύ των πινάκων $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \in \Lambda^{\uparrow}_{+}$ που δρουν στον $\mathcal{R}^4$ και των πινάκων $A \in SL(2,C)$ που δρούν στον $\mathcal{H}_2$.

Η ομάδα $SL(2,C)$ που δρα στον $\mathcal{H}_2$

Τώρα θα αποδείξουμε αυστηρά, ότι το σύνολο των 2×2 μιγαδικών πινάκων A με $\det A = 1$ αποτελεί ομάδα:
Έστω το σύνολο $M = \{2 \times 2\, \text{πίνακες}\ A : \det A = 1\}$. Κάθε τέτοιος πίνακας αποτελεί στοιχείο μίας ομάδας, έστω $G = \{g(A) : A \in\ M, " \cdot "\}$, όπου $" \cdot "$ η πράξη της ομάδας που ορίζεται ως εξής:

$$g(A) \cdot g(B) = g(AB), \text{όπου AB ο συνήθης πολλαπλασιασμός πινάκων} \tag{16}$$

Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται τα αξιώματα της ομάδας:

1. **Κλειστότητα**: Παρατηρούμε ότι για κάθε $g(A), g(B) \in G$ ισχύει $g(A) \cdot g(B) = g(AB)$, όπου $AB \in M$. Άρα $g(AB) \in G$

2. **Ύπαρξη μοναδιαίου**: Για $A = I$ έχουμε $g(I) \in G$ με την ιδιότητα $g(I) \cdot g(B) = g(IB) = g(B), \quad \forall g(B) \in G$

3. **Ύπαρξη αντιστρόφου**: Για κάθε $A \in M$ υπάρχει $A^{-1} \in M$, τέτοιο ώστε: $A^{-1}A = I$ (η ύπαρξη αντιστρόφου εξασφαλίζεται από τη μη μηδενική ορίζουσα των πινάκων του συνόλου M). Άρα για κάθε $g(A) \in G\, \exists\, g(A^{-1}) \in G$, τέτοιο ώστε: $g(A) \cdot g(A^{-1}) = g(AA^{-1}) = g(I)$

4. **Προσεταιριστική ιδιότητα**: Παρατηρούμε ότι $\forall\, g(A), g(B), g(C) \in G$ ισχύει $[g(A) \cdot g(B)] \cdot g(C) = g(AB) \cdot g(C) = g(ABC) = g(A) \cdot g(BC) = g(A) \cdot [g(B) \cdot g(C)]$

Άρα το σύνολο M των 2×2 τετραγωνικών πινάκων A με $\det A = 1$ αποτελεί ομάδα, η οποία ονομάζεται $SL(2,C)$.
Ορίζουμε επίσης τη δράση της ομάδας σε έναν εξωτερικό χώρο, το χώρο των 2×2 ερμιτιανών πινάκων $\mathcal{H}_2 = \{X :\ X = X^{\dagger}\}$ ως εξής:

$$g(A)X = AXA^{\dagger}, \qquad \text{όπου } A \in M \text{ και } X \in \mathcal{H}_2 \tag{17}$$

Έχουμε όμως δείξει ότι ένας τέτοιος μετασχηματισμός διατηρεί την ερμιτιανότητα του X. Άρα, αν $X \in \mathcal{H}_2$, τότε $g(A)X \in \mathcal{H}_2$ και επομένως, μπορούμε να δράσουμε σε αυτόν εκ νέου με έναν μετασχηματισμό $g(B)$. Πράγματι, δύο διαδοχικοί μετασχηματισμοί $g(A), g(B) \in G$ πάνω στον X δρουν ως εξής:

$$g(B) \cdot g(A)X = g(B)AXA^\dagger = BAXA^\dagger B^\dagger = BAX(BA)^\dagger = g(BA), \tag{18}$$

όπου $A \in M$ και $X \in \mathcal{H}_2$.

Ο ομοιομορφισμός $SL(2,C) \longleftrightarrow SO(3,1)^+$

Τώρα θα δείξουμε ότι μπορούμε να ορίσουμε μία απεικόνιση των στοιχείων της $SL(2,C)$ σε 4×4 πίνακες Λ που να είναι ομοιομορφισμός.

$$X' = AXA^{\dagger 7} \Rightarrow \; x'^\mu = \langle \sigma_\mu, X' \rangle = \langle \sigma_\mu, AXA^\dagger \rangle = x^\nu \langle \sigma_\mu, A\sigma_\nu A^\dagger \rangle = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{19}$$

Όπου ορίσαμε την απεικόνιση Φ ως εξής:

$$A \xrightarrow{\Phi} \boxed{\Lambda^\mu{}_\nu = \Phi(A) = \langle \sigma_\mu, A\sigma_\nu A^\dagger \rangle} \tag{20}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι ο πινακας $\Lambda^\mu{}_\nu$ έχει κάποιες ιδιότητες:

1. **Είναι πραγματικός** επειδή το εσωτερικό γινόμενο έχει συζυγή συμμετρία [βλ.παράρτημα A]

$$\begin{aligned}\Lambda^\mu{}_\nu{}^* &= \langle \sigma_\mu, A\sigma_\nu A^\dagger \rangle^* = \langle A\sigma_\nu A^\dagger, \sigma_\mu \rangle = \frac{1}{2} Tr\left[\left(A\sigma_\nu A^\dagger\right)^\dagger \sigma_\mu\right] \\ &= \frac{1}{2} Tr\left[A\sigma_\nu A^\dagger \sigma_\mu\right] = \frac{1}{2} Tr\left[\sigma_\mu A\sigma_\nu A^\dagger\right] = \langle \sigma_\mu, A\sigma_\nu A^\dagger \rangle = \Lambda^\mu{}_\nu\end{aligned}$$

2. **Διατηρεί το μέτρο Minkowski του x^μ:**
   Έχουμε δείξει ότι ο μετασχηματισμός της σχέσης 19 διατηρεί την ορίζουσα:

$$\det X' = \det AXA^\dagger = \det X$$

   Όμως λόγω της σχέσης 3 έχουμε:

$$\det X' = \det X \;\Rightarrow\; x'^\mu x'^\nu g_{\mu\nu} = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}$$

   Και προφανώς, λόγω της τελευταίας σχέσης ο Λ ικανοποιεί την γνωστή σχέση:

$$\boxed{g = \Lambda^T g \Lambda} \tag{21}$$

3. **Είναι ορθόχρονος:** $\Lambda^0{}_0 \geq 0$

$$\Lambda^0{}_0 = \langle \sigma_0, A\sigma^0 A^\dagger \rangle \geq 0$$

   Αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι θετικά ορισμένο.

4. **Έχει ορίζουσα** $\det\Lambda = +1$:
   Αρχικά, παίρνοντας την ορίζουσα της 1.7 έχουμε

$$\det g = \det \Lambda^T g \Lambda \Rightarrow \det \Lambda^2 = 1 \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$$

   Τώρα για να δείξουμε ότι η ορίζουσα είναι $\det = +1$ και όχι $\det = -1$, πρέπει να ακολουθήσουμε τα εξής βήματα:

   - Κάθε πίνακας $A \in SL(2,C)$ έχει μία μοναδική polar decomposition:

$$A = HU \qquad \text{όπου } H \text{ ερμιτιανός και U unitary}$$

   - Μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνεχή διαδρομή που να συνδέει ένα πίνακα $A \in SL(2,C)$ με το ταυτοτικό. Αυτό γίνεται ως εξής: Αρχικά ορίζουμε

$$\begin{aligned} A = HU \quad &\text{και} \quad A(\lambda) = H^\lambda U^\lambda \qquad \text{όπου } \lambda \text{ πραγματικός, με } \lambda \in [0,1] \\ \text{ώστε} \quad A(0) = I \quad &\text{και} \quad A(1) = A \end{aligned}$$

   - Τώρα αφού ο πίνακας Λ είναι κι αυτός συνεχής συναρτηση της παραμέτρου λ, και επειδή η ορίζουσά του μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές $\det\Lambda = \pm 1$, συμπεραίνουμε ότι όλα τα στοιχεία της διαδρομής που κατασκευάσαμε θα έχουν την ίδια ορίζουσα. Όμως για $\lambda = 0$ έχουμε:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(\lambda = 0) = \langle \sigma_\mu, A(0)\sigma_\nu A(0)^\dagger \rangle = \langle \sigma_\mu, \sigma_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu \;\Rightarrow\; \Lambda(0) = I$$

   Άρα αφού για ένα στοιχείο της διαδρομής $\det\Lambda = \det I = 1$, όλα τα στοιχεία της διαδρομής θα έχουν $\det\Lambda(\lambda) = 1$ άρα και $\det\Lambda = 1$.

Παρατηρούμε ότι ο Λ είναι ένας 4×4 πίνακας που έχει τις ιδιότητες:

$$\left.\begin{array}{c} g = \Lambda^T g \Lambda \\ \Lambda^0{}_0 \geq 0 \\ \det\Lambda = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad \Lambda \in \Lambda^\uparrow_+$$

Όμως έχουμε δείξει ότι οι πίνακες $\Lambda \in \Lambda^\uparrow_+$ αποτελούν ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων. **Άρα δοθέντος ενός πίνακα** $A \in SL(2,C)$ **κατασκευάζουμε έναν πίνακα** $\Lambda \in SO(3,1)^+$ μέσω της απεικόνισης 20.

Επιπλέον, για την απεικόνιση Φ που ορίσαμε, ισχύει ότι:

Αν $A, B \in SL(2,C)$ με $AB = \Gamma$, τότε $\Phi(A) = \Lambda(B), \Phi(B) = \Lambda(B) \in SO(3,1)^+$, ώστε:

$$\Phi(AB) = \langle \sigma_\mu, AB\sigma_\nu B^\dagger A^\dagger \rangle = \sum_k \langle \sigma_\mu, A\sigma_k A^\dagger \rangle \langle \sigma_k, B\sigma_\nu B^\dagger \rangle = \sum_k \Lambda(A)_{\mu k}\Lambda(B)_{k\nu} = \Phi(A)\Phi(B)$$

Άρα αυτή η απεικόνιση είναι **ομοιομορφισμός**! Μήπως όμως είναι και 1 προς 1;

Έστω δύο διαφορετικοί πίνακες A και $B \in SL(2,C)$ που δίνουν τον ίδιο μετασχηματισμό Lorentz. Τότε έχουμε $AXA^\dagger = BXB^\dagger \Rightarrow (B^{-1}A)\ X(B^{-1}A)^\dagger = X, \quad \forall\ X$. Άρα μπορούμε να κάνουμε τα εξής βήματα:

- Θέτω $X = I$. Τότε $(B^{-1}A)\ (B^{-1}A)^\dagger = I$, δηλαδή ο $T = B^{-1}A$ είναι unitary $TT^\dagger = I$.
- Έτσι έχουμε $TXT^\dagger = X\ \forall X$. Πολλαπλασιάζοντας όμως από δεξιά με T έχουμε $TX = XT\ \forall X$
- Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με πριν, αφού ο T μετατίθεται και με τους τρεις πίνακες Pauli, πρέπει να είναι ανάλογος του ταυτοτικού. Άρα έχουμε: $T = \lambda I \quad \Rightarrow \quad B^{-1}A = \lambda I \quad \Rightarrow A = \lambda B$
- Παίρνοντας την ορίζουσα της τελευταίας σχέσης, και δεδομένου ότι $A, B \in SL(2,C) \Rightarrow \det A = \det B = 1$, έχουμε $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

Άρα ο πίνακας A είναι μονοσήμαντα ορισμένος με αυθαιρεσία ενός προσήμου (οι πίνακες A και $-A$ δίνουν τον ίδιο μετασχηματισμό). Δηλαδή υπάρχει μία 2 προς 1 αντιστοιχία μεταξύ των πινάκων $A \in SL(2,C)$ και των restricted μετασχηματισμών Lorentz $\Lambda_+^\uparrow$. Η απεικόνιση Φ είναι ομοιομορφισμός, αλλά όχι ισομορφισμός.

Οι μετασχηματισμοί Lorentz γράφονται σαν γινόμενο μιας προώθησης και μίας στροφής

Μέσω της απεικόνισης 20, μπορούμε να διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- **Αν $A = U$ είναι μοναδιακός, έχουμε:**

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \langle \sigma_\mu, U\sigma_\nu U^\dagger \rangle = \frac{1}{2} Tr[\sigma_\mu U \sigma_\nu U^\dagger] = \frac{1}{2} Tr[\sigma_\mu \sigma_\nu]$$

  Άρα $\Lambda^0{}_0 = \frac{1}{2}Tr[\sigma_0\sigma_0] = 1$, $\Lambda^i{}_0 = \frac{1}{2}Tr[\sigma_i\sigma_0] = \frac{1}{2}Tr[\sigma_i] = 0$, $\Lambda^0{}_j = \frac{1}{2}Tr[\sigma_0\sigma_j] = 0$ και τέλος:

$$\Lambda^i{}_j(U) = \frac{1}{2}Tr[\sigma_i\sigma_j] = \frac{1}{2}Tr[\sigma_j U^{-1}\sigma_i (U^{-1})^\dagger] = \Lambda^j{}_i(U^{-1}) = (\Lambda^{-1}(U))^j{}_i$$

  Δηλαδή ο $\Lambda(U)$ είναι ορθογώνιος. Αντιστοιχεί σε πίνακα στροφής.

- **Αν $A = H$ είναι ερμιτιανός, έχουμε:**

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \langle \sigma_\mu, H\sigma_\nu H^\dagger \rangle = \frac{1}{2} Tr[\sigma_\mu H \sigma_\nu H^\dagger] = \frac{1}{2} Tr[\sigma_\nu H \sigma_\mu H^\dagger] = \Lambda_\nu{}^\mu$$

  Δηλαδή είναι συμμετρικός και αντιστοιχεί σε boost. Τώρα, δεδομένου ότι κάθε πίνακας $A \in SL(2,C)$ έχει μία μοναδική polar decomposition $A = HU$ έχουμε:

$$\Lambda^\mu{}_\nu(A) = \Lambda^\mu{}_\nu(HU) = \Lambda^\mu{}_\nu(H)\Lambda^\mu{}_\nu(U)$$

  Άρα πράγματι, ένας μετασχηματισμός Lorentz μπορεί να γραφεί σαν το γινόμενο ενός boost και μίας στροφής.