

Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης
γινομένου με συνάρτηση βάρους και
κόμβους Chebyshev

Δημήτρης Καρκαζής

Διπλωματική Εργασία στα Εφαρμοσμένα
Μαθηματικά

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΘΗΝΑ
Ιούνιος 2017

Αυτή η
Μεταπτυχιακή Διατριβή
εκπονήθηκε στα πλαίσια του
Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών
του Τμήματος Μαθηματικών
του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου
Αθηνών

Περιεχόμενα

Περίληψη	5
1 Πολυώνυμα Chebyshev	7
1.1 Εισαγωγικά σχόλια	7
1.2 Ορισμοί	7
1.2.1 Πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους T_n	8
1.2.2 Πολυώνυμα Chebyshev δευτέρου είδους U_n	9
1.2.3 Πολυώνυμα Chebyshev τρίτου και τετάρτου είδους V_n και W_n	10
1.3 Ρίζες και ακρότατα των πολυωνύμων του Chebyshev	12
1.4 Ορθογωνιότητα και πολυώνυμα του Chebyshev	15
1.4.1 Ορθογωνιότητα πολυωνύμων σε σχέση με συναρτήσεις βάρους	15
1.4.2 Τα πολυώνυμα Chebyshev ως ορθογώνια πολυώνυμα με συναρτήσεις βάρους	16
2 Γενικά στοιχεία αριθμητικής ολοκλήρωσης	22
2.1 Τύποι εκ παρεμβολής	22
2.2 Τύποι του Gauss	23
2.2.1 Τύποι των Gauss-Chebyshev	25
2.3 Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης γινομένου	28
2.3.1 Το σφάλμα των τύπων γινομένου μέσω του πυρήνα Peano .	29
2.3.2 Το σφάλμα των τύπων γινομένου σε χώρους Hilbert για αναλυτικές συναρτήσεις	30
2.3.3 Η σύγκλιση των τύπων γινομένου για συναρτήσεις με μονότονες ανωμαλίες	31
3 Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης γινομένου με συνάρτηση βάρους Chebyshev δευτέρου είδους και κόμβους πρώτου, τρίτου ή τετάρτου είδους	33
3.1 Προκαταρκτικές πληροφορίες	33
3.2 Υπολογισμός βασικών στοιχείων των τύπων	34
3.3 Φράγματα σφαλμάτων μέσω πυρήνα Peano	42
3.4 Φράγματα σφαλμάτων για αναλυτικές συναρτήσεις σε χώρους Hilbert	53
3.5 Σύγκλιση των τύπων για συναρτήσεις με ανωμαλίες	57
4 Αριθμητικά παραδείγματα	72
Βιβλιογραφία	87

Περίληψη

Στα δύο πρώτα κεφάλαια της διπλωματικής εργασίας παρουσιάζουμε κάποιες γενικές πληροφορίες για τα πολυώνυμα του Chebyshev καθώς και για τους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής, τους τύπους του Gauss και τους τύπους γινομένου. Στα δύο επόμενα κεφάλαια, εξετάζουμε τρεις νέους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης γινομένου. Ο πρώτος αναφέρεται στη συναρτήση βάρους του Chebyshev δευτέρου είδους με κόμβους τα σημεία του Chebyshev πρώτου είδους, ενώ οι δύο επόμενοι στη συνάρτηση βάρους του Chebyshev δευτέρου είδους με κόμβους τα σημεία του Chebyshev τρίτου ή τετάρτου είδους αντίστοιχα. Οι νέοι αυτοί τύποι αποδεικνύεται ότι έχουν θετικά βάρη, τα οποία δίνονται μέσω αναλυτικών τύπων. Ακόμα, υπολογίζεται ο βαθμός ακριβείας και η διακύμανση (variance) των τύπων, ενώ εξετάζεται αν οι τύποι αυτοί είναι ορισμένοι. Εν συνεχεία, μελετάμε το σφάλμα των τύπων μας είτε μέσω τεχνικών Peano ή για αναλυτικές συναρτήσεις με τη βοήθεια τεχνικών σε χώρους Hilbert. Τέλος, αποδεικνύουμε τη σύγκλιση των τύπων μας για συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο διάστημα $[-1, 1]$, αλλά και για συναρτήσεις που έχουν μια μονότονη ανωμαλία στο ένα ή και στα δύο άκρα του $[-1, 1]$.

1 Πολυώνυμα Chebyshev

1.1 Εισαγωγικά σχόλια

“Τα πολυώνυμα του Chebyshev βρίσκονται παντού πυκνά στην αριθμητική ανάλυση”

Η παραπάνω παρατήρηση έχει διατυπωθεί από πολλούς καταξιωμένους μαθηματικούς διαφόρων περιοχών και φυσικά από κάποιους στην περιοχή της αριθμητικής ανάλυσης. Μπορεί να οφείλεται στον Philip Davis, έχει σίγουρα διατυπωθεί από τον George Forsythe, και είναι ελκυστική και εύστοχη. Δεν υπάρχει σχεδόν καμία περιοχή της αριθμητικής ανάλυσης στην οποία να μην συναντάμε τα πολυώνυμα του Chebyshev και μάλιστα υπάρχουν πολλές περιοχές, όπως η θεωρία προσέγγισης, τα ορθογώνια πολυώνυμα, η αριθμητική ολοκλήρωση ή οι φασματικές μεθόδους επίλυσης μερικών διαφορικών εξισώσεων, όπου τα πολυώνυμα αυτά έχουν κυρίαρχο ρόλο στις σύγχρονες εφαρμογές.

Υπάρχουν τέσσερα είδη πολυωνύμων του Chebyshev. Αρχικά, θα παρουσιάσουμε τα ευρέως γνωστά πολυώνυμα πρώτου και δευτέρου είδους, που διεθνώς συμβολίζονται με T_n και U_n αντίστοιχα, και εν συνεχεία θα ορίσουμε τα πολυώνυμα του Chebyshev τρίτου και τετάρτου είδους, V_n και W_n αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα V_n και W_n ήταν αρχικά γνωστά σαν “airfoil polynomials” μέχρι οι Gautschi και Notárης να τους δώσουν, το 1989, το σημερινό τους όνομα.

Στα περισσότερα βιβλία και σε πολλά ερευνητικά άρθρα, η έκφραση ‘πολυώνυμα του Chebyshev’ αναφέρεται, στις περισσότερες περιπτώσεις, στα πολυώνυμα πρώτου είδους T_n . Πράγματι, τα T_n , για διάφορους λόγους, είναι ιδιαίτερα σημαντικά, αλλά και τα υπόλοιπα τρία είδη παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον σε πολλές εφαρμογές των υπολογιστικών μαθηματικών. Ειδικότερα, τα T_n έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες, μοναδικές ανάμεσα σε όλα τα πολυώνυμα του Chebyshev, που τα κάνουν ιδιαίτερα χρήσιμα στις εφαρμογές, χωρίς όμως αυτό να μειώνει την αξία των υπολοίπων τριών ειδών. Τα τελευταία παίζουν σημαντικό ρόλο στην αριθμητική ολοκλήρωση, τα μεν U_n στις συμμετρικές περιπτώσεις ενώ τα V_n και W_n στις μη συμμετρικές. Τα στοιχεία αυτού του κεφαλαίου βασίζονται στο βιβλίο των J.C. Mason και D.C Handscomb, Chebyshev Polynomials (βλέπε [1, Κεφάλαια 1,2,4]).

1.2 Ορισμοί

Ίσως η πιο σημαντική ιδιότητα των πολυωνύμων του Chebyshev είναι οι τριγωνομετρικές τους αναπαραστάσεις σε $\cos$ και $\sin$. Οι γνωστές σε όλους ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μας επιτρέπουν να συνάγουμε πολύ χρήσιμες ιδιότητες για τα πολυώνυμα του Chebyshev και αυτό είναι που προσδίδει στα πολυώνυμα αυτά την ιδιαίτερη αξία τους. Ως εκ τούτου, θα ξεκινήσουμε με την παρουσίαση των τριγωνομετρικών αυτών αναπαραστάσεων.

1.2.1 Πολυώνυμο Chebyshev πρώτου είδους T_n

Ορισμός 1.1. Το πολυώνυμο Chebyshev $T_n(t)$ πρώτου είδους είναι ένα πολυώνυμο ως προς t βαθμού n , το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$T_n(t) = \cos n\theta, \quad t = \cos \theta. \quad (1.1)$$

Αν $t \in [-1, 1]$ τότε η μεταβλητή $\theta \in [0, \pi]$. Τα προηγούμενα διαστήματα έχουν αντίθετες κατευθύνσεις μιας και για $t = -1$ έχουμε $\theta = \pi$ ενώ για $t = 1$ έχουμε $\theta = 0$.

Είναι γνωστό (σαν συνέπεια του θεωρήματος του de Moivre) ότι το $\cos n\theta$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς το $\cos \theta$ το οποίο βλέπουμε και παρακάτω με τη βοήθεια τριγωνομετρικών ταυτοτήτων αφού

$$\begin{aligned} \cos 0\theta &= 1, \\ \cos 1\theta &= \cos \theta, \\ \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1, \\ \cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta, \\ \cos 4\theta &= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1. \end{aligned}$$

Μέσω της (1.1) μπορούμε αμέσως να ορίσουμε τα πρώτα πέντε πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους ως προς τη μεταβλητή t

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, \\ T_1(t) &= t, \\ T_2(t) &= 2t^2 - 1, \\ T_3(t) &= 4t^3 - 3t, \\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Στην πράξη βέβαια, το να αναζητούμε ένα-ένα από την αρχή το κάθε πολυώνυμο αποτελεί αρκετά χρονοβόρα διαδικασία. Έτσι, θα εισάγουμε έναν αναδρομικό τύπο ο οποίος προκύπτει από την ακόλουθη τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta.$$

Έτσι από την (1.1) και την παραπάνω ταυτότητα προκύπτει η εξής αναδρομική σχέση

$$T_n(t) = 2tT_{n-1}(t) - T_{n-2}(t), \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

με αρχικές συνθήκες

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t.$$

Είναι εύκολο, από τη σχέση (1.2), να συμπεράνουμε ότι ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του πολυωνύμου $T_n(t)$ για $n > 1$ είναι ο διπλάσιος από το

συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου του $T_{n-1}(t)$ και έτσι με επαγωγή καταλήγουμε ότι ισούται με 2^{n-1} .

Επίσης, ένας πολύ ενδιαφέρον ορισμός έχει δοθεί από τον Nash το 1986, ο οποίος λέει το εξής: Το πολυώνυμο Chebyshev πρώτου είδους $T_n(t)$ ισούται με την παρακάτω ορίζουσα ενός $n \times n$ τριδιαγώνιου πίνακα

$$T_n(t) = \begin{vmatrix} t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2t & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2t \end{vmatrix}$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι για n περιττό, το $T_n(t)$ είναι περιττή συνάρτηση δηλαδή $T_n(-t) = -T_n(t)$, ενώ για n άρτιο το $T_n(t)$ είναι άρτια συνάρτηση δηλαδή $T_n(-t) = T_n(t)$.

1.2.2 Πολυώνυμο Chebyshev δευτέρου είδους U_n

Ορισμός 1.2. Το πολυώνυμο Chebyshev $U_n(t)$ δευτέρου είδους είναι ένα πολυώνυμο ως προς t βαθμού n , το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad t = \cos \theta. \quad (1.3)$$

Κινούμενοι στα ίδια πλαίσια με προηγουμένως, με τη βοήθεια τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \sin 1\theta &= \sin \theta, \\ \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta, \\ \sin 3\theta &= \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1), \\ \sin 4\theta &= \sin \theta (8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta). \end{aligned}$$

Έτσι, μέσω της (1.3), μπορούμε να ορίσουμε αμέσως μερικά πολυώνυμα Chebyshev δευτέρου είδους ως προς τη μεταβλητή t

$$\begin{aligned} U_0(t) &= 1, \\ U_1(t) &= 2t, \\ U_2(t) &= 4t^2 - 1, \\ U_3(t) &= 8t^3 - 4t, \\ &\dots \end{aligned}$$

Τώρα, συνδυάζοντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2 \sin n\theta \cos \theta.$$

με τη σχέση (1.3) συμπεραίνουμε ότι το $U_n(t)$ ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$U_n(t) = 2tU_{n-1}(t) - U_{n-2}(t), \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

με αρχικές συνθήκες

$$U_0(t) = 1, \quad U_1(t) = 2t.$$

Λόγω της σχέσης (1.4), καθώς και από τα πρώτα τέσσερα πολυώνυμα U_n που ορίσαμε προηγουμένως, καταλήγουμε (μέσω επαγωγής) ότι ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του $U_n(t)$ είναι 2^n .

Ακόμη, όπως και το πολυώνυμο πρώτου είδους, το πολυώνυμο δευτέρου είδους Chebyshev μπορεί να οριστεί με τη βοήθεια της ορίζουσας ενός $n \times n$ τριδιαγώνιου πίνακα

$$U_n(t) = \begin{vmatrix} 2t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2t & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2t \end{vmatrix}$$

Ομοίως, έχουμε ότι για n περιττό το U_n είναι περιττή συνάρτηση ενώ για n άρτιο το U_n είναι άρτια συνάρτηση.

1.2.3 Πολυώνυμο Chebyshev τρίτου και τετάρτου είδους V_n και W_n

Οι επόμενες δύο οικογένειες πολυωνύμων που θα εξετάσουμε είναι τα V_n και W_n , τα οποία σχετίζονται με τα T_n και U_n με βασική διαφορά ότι ορίζονται ως προς τη μισή γωνία σε σχέση με τα προηγούμενα δηλαδή ως προς $\theta/2$ (όπου $t = \cos \theta$ όπως πριν). Τα πολυώνυμα αυτά πρωτοεμφανίστηκαν στη βιβλιογραφία ως “airfoil polynomials” αλλά οι Gautschi και Νοτάρης το 1989 εύστοχα τα μετονόμασαν σε πολυώνυμα Chebyshev τρίτου και τετάρτου είδους. Αρχικά, θα ορίσουμε αυτά τα πολυώνυμα τριγωνομετρικά, με σχέσεις που θυμίζουν τις (1.1) και (1.3). Όσον αφορά τα διαστήματα όπου ανήκουν τα t και θ , ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις με τα αυτές για τα T_n και U_n .

Ορισμός 1.3. Τα πολυώνυμα Chebyshev $V_n(t)$ και $W_n(t)$ τρίτου και τετάρτου είδους αντίστοιχα είναι πολυώνυμα ως προς t βαθμού n , τα οποία ορίζονται από τις σχέσεις

$$V_n(t) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta}, \quad t = \cos \theta, \quad (1.5)$$

και

$$W_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}, \quad t = \cos \theta. \quad (1.6)$$

Για να εφαρμόσουμε τους παραπάνω τύπους ώστε να υπολογίσουμε τα πολυώνυμα $V_n(t)$ και $W_n(t)$ για μερικά n , αρχικά παρατηρούμε ότι το $\cos(n + \frac{1}{2})\theta$ είναι ένα περιττό πολυώνυμο βαθμού $2n + 1$ ως προς το $\cos \frac{1}{2}\theta$. Επομένως, το δεξί μέλος της σχέσης (1.5) είναι ένα άρτιο πολυώνυμο βαθμού $2n$ ως προς τη μεταβλητή $\cos \frac{1}{2}\theta$, το οποίο είναι ισοδύναμο με ένα πολυώνυμο βαθμού n αφού $\cos^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$, και μάλιστα ως προς το $\cos \theta$. Ως εκ τούτου, το $V_n(t)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n . Για παράδειγμα

$$V_1(t) = \frac{\cos(1 + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = \frac{4 \cos^3 \frac{1}{2}\theta - 3 \cos \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = 4 \cos^2 \frac{1}{2}\theta - 3 = 2 \cos \theta - 1 = 2t - 1.$$

Έτσι, για $n = 0, 1, 2, 3$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} V_0(t) &= 1, \\ V_1(t) &= 2t - 1, \\ V_2(t) &= 4t^2 - 2t - 1, \\ V_3(t) &= 8t^3 - 4t^2 - 4t + 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Ομοίως με παραπάνω, βλέπουμε ότι το $\sin(n + \frac{1}{2})\theta$ είναι ένα περιττό πολυώνυμο βαθμού $2n + 1$ ως προς το $\sin \frac{1}{2}\theta$. Επομένως, το δεξί μέλος της σχέσης (1.6) είναι ένα άρτιο πολυώνυμο βαθμού $2n$ ως προς τη μεταβλητή $\sin \frac{1}{2}\theta$, το οποίο είναι ισοδύναμο με ένα πολυώνυμο βαθμού n αφού $\sin^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ ως προς το $\cos \theta$. Άρα και σε αυτήν την περίπτωση, το $W_n(t)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n . Για παράδειγμα

$$W_1(t) = \frac{\sin(1 + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} = \frac{3 \sin \frac{1}{2}\theta - 4 \sin^3 \frac{1}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} = 3 - 4 \sin^2 \frac{1}{2}\theta = 2 \cos \theta + 1 = 2t + 1.$$

Έτσι για $n = 0, 1, 2, 3$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} W_0(t) &= 1, \\ W_1(t) &= 2t + 1, \\ W_2(t) &= 4t^2 + 2t - 1, \\ W_3(t) &= 8t^3 + 4t^2 - 4t - 1, \\ &\dots \end{aligned}$$

Τα πολυώνυμα $V_n(t)$ και $W_n(t)$ είναι, στην πραγματικότητα, δύο ειδικές περιπτώσεις των πολυωνύμων Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(t)$ με $\alpha = -1/2$ και $\beta = 1/2$ και αντιστρόφως. Δηλαδή, πιο ειδικά :

$$\binom{2n}{n} V_n(t) = 2^{2n} P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(t), \quad \binom{2n}{n} W_n(t) = 2^{2n} P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(t),$$

όπου

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-t)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t)^{\alpha+n} (1+t)^{\beta+n}].$$

Όπως συμβαίνει με τα πολυώνυμα πρώτου και δεύτερου είδους, έτσι και στα $V_n(t)$ και $W_n(t)$ ισχύουν αντίστοιχοι αναδρομικοί τύποι με τη βοήθεια των παρακάτω τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \cos\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\theta = 2 \cos \theta \cos\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta,$$

και

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \sin\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\theta = 2 \cos \theta \sin\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta,$$

οι οποίοι είναι οι εξής

$$V_n(t) = 2tV_{n-1}(t) - V_{n-2}(t), \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.7)$$

και

$$W_n(t) = 2tW_{n-1}(t) - W_{n-2}(t), \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

με αρχικές συνθήκες

$$V_0(t) = 1, \quad V_1(t) = 2t - 1,$$

και

$$W_0(t) = 1, \quad W_1(t) = 2t + 1.$$

Έτσι, παρατηρούμε ότι τα $V_n(t)$ και $W_n(t)$ μοιράζονται τις ίδιες αναδρομικές σχέσεις με τα $T_n(t)$ και $U_n(t)$ με μόνη διαφορά την αρχική συνθήκη για $n = 1$.

Από τις σχέσεις (1.7) και (1.8), καθώς και από τα πρώτα τέσσερα πολυώνυμα V_n και W_n που ορίσαμε προηγουμένως, βλέπουμε ότι τα $V_n(t)$ και $W_n(t)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n , με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου το 2^n .

1.3 Ρίζες και ακρότατα των πολυωνύμων του Chebyshev

Τα τέσσερα είδη των πολυωνύμων του Chebyshev βαθμού n έχουν ακριβώς n ρίζες και $n + 1$ τοπικά ακρότατα στο διάστημα $[-1, 1]$. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα $n - 1$ από αυτά βρίσκονται στο εσωτερικό του $[-1, 1]$ στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος των πολυωνύμων. Τα εναπομείναντα δύο τοπικά ακρότατα βρίσκονται στα άκρα του διαστήματος $[-1, 1]$ (όπου η παράγωγος δε μηδενίζεται).

- Από τον τύπο (1.1), βλέπουμε ότι οι ρίζες του $T_n(t)$ για t στο $[-1, 1]$ αντιστοιχούν στις ρίζες για θ στο $[0, \pi]$ του $\cos n\theta$, δηλαδή θα πρέπει

$$n\theta = \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Έτσι, οι ρίζες του $T_n(t)$ είναι οι

$$t = \tau_\nu^{(1)} = \cos \frac{(\nu - \frac{1}{2})\pi}{n} = \cos \frac{(2\nu - 1)\pi}{2n}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (1.9)$$

Παρατηρούμε επίσης, ότι η $t = 0$ είναι ρίζα του $T_n(t)$ για όλα τα περιττά n , και ότι οι ρίζες είναι συμμετρικά τοποθετημένες εκατέρωθεν του $t = 0$. Έτσι, λόγω της παραπάνω συμμετρίας προκύπτει η εξής σχέση:

$$\tau_\nu^{(1)} = -\tau_{n-\nu+1}^{(1)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (1.10)$$

- Οι ρίζες του $U_n(t)$ (μέσω της σχέσης (1.4)) είναι ορισμένες όπως οι ρίζες του $\sin(n+1)\theta$ δηλαδή

$$t = \tau_\nu^{(2)} = \cos \frac{\nu\pi}{n+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (1.11)$$

Αν θελήσουμε να επεκτείνουμε το σύνολο των σημείων του παραπάνω τύπου και να συμπεριλάβουμε τις τιμές $\tau_0^{(2)} = 1$ και $\tau_{n+1}^{(2)} = -1$, τότε θα έχουμε τις ρίζες που αναφέραμε στη σχέση (1.11) αλλά για $\nu = 0, 1, \dots, n+1$. Οι ρίζες αυτές δεν αναφέρονται στο πολυώνυμο $U_n(t)$ αλλά στο

$$(1 - t^2)U_n(t).$$

Παρόλα αυτά, οι εν λόγω ρίζες είναι δημοφιλείς για τη χρησιμότητα τους ως κόμβοι σε πολλές εφαρμογές της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Συμμετρία μεταξύ των ρίζων συναντάμε επίσης και για τα πολυώνυμα $U_n(t)$ για τους ίδιους λόγους με τις ρίζες του $T_n(t)$. Έτσι, ισχύει ότι

$$\tau_\nu^{(2)} = -\tau_{n-\nu+1}^{(2)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (1.12)$$

- Οι ρίζες των $V_n(t)$ και $W_n(t)$ (μέσω των σχέσεων (1.5) και (1.6)) αντιστοιχούν στις ρίζες του $\cos(n+\frac{1}{2})\theta$ και $\sin(n+\frac{1}{2})\theta$ αντίστοιχα. Επομένως, οι ρίζες του $V_n(t)$ είναι οι

$$t = \tau_\nu^{(3)} = \cos \frac{(2\nu-1)\pi}{2n+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (1.13)$$

και οι ρίζες του $W_n(t)$ είναι οι

$$t = \tau_\nu^{(4)} = \cos \frac{2\nu\pi}{2n+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (1.14)$$

Παρατηρούμε ότι, αν επεκτείνουμε τα παραπάνω σημεία ώστε να συμπεριλάβουμε τις τιμές για $\nu = n+1$ δηλαδή για $t = -1$ στην (1.13) και για $\nu = 0$ δηλαδή $t = 1$ στην (1.14) τότε θα ισχύει ότι τα πολυώνυμα

$$(1+t)V_n(t)$$

και

$$(1-t)W_n(t)$$

θα έχουν τις ρίζες της σχέσης (1.13) για $\nu = 1, 2, \dots, n+1$ και της (1.14) για $\nu = 0, 1, \dots, n$ αντίστοιχα.

Συνοψίζοντας, οι ρίζες των πολυώνυμων του Chebyshev $T_n(t)$, $U_n(t)$, $V_n(t)$, $W_n(t)$ είναι με την αντίστοιχη σειρά οι εξής

1.

$$\tau_\nu^{(1)} = \cos \frac{(2\nu - 1)\pi}{2n}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

2.

$$\tau_\nu^{(2)} = \cos \frac{\nu\pi}{n+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

3.

$$\tau_\nu^{(3)} = \cos \frac{(2\nu - 1)\pi}{2n+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

4.

$$\tau_\nu^{(4)} = \cos \frac{2\nu\pi}{2n+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Όσον αφορά τα ακρότατα των πολυωνύμων του Chebyshev $T_n(t)$, $U_n(t)$, $V_n(t)$, $W_n(t)$ θα δείξουμε ότι στην περίπτωση του $T_n(t)$ τα τοπικά ακρότατα μπορούν να υπολογιστούν πιο εύκολα σε σχέση με τα υπόλοιπα τρία πολυώνυμα.

Τα εσωτερικά ακρότατα του $T_n(t)$ αντιστοιχούν στα ακρότατα του $\cos n\theta$, δηλαδή στις ρίζες του $\sin n\theta$, αφού

$$\frac{d}{dt}T_n(t) = \frac{d}{dt}\cos n\theta = \frac{d}{d\theta}\cos n\theta \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{n \sin n\theta}{\sin \theta}.$$

Έτσι, συμπεριλαμβάνοντας και τα $t = 1$ και $t = -1$, τα ακρότατα του $T_n(t)$ για $t \in [-1, 1]$ είναι

$$t = y_\nu^{(1)} = \cos \frac{\nu\pi}{n}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n. \quad (1.15)$$

Ο υπολογισμός των ακροτάτων των πολυωνύμων $U_n(t)$, $V_n(t)$, $W_n(t)$ παρουσιάζει μεγαλύτερη δυσκολία σε σχέση με του $T_n(t)$. Αυτό γίνεται αντιληπτό, στην προσπάθειά μας να βρούμε τις ρίζες της παραγώγου του $U_n(t)$. Δηλαδή

$$\frac{d}{dt}U_n(t) = \frac{d}{dt} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} = \frac{-(n+1)\sin \theta \cos(n+1)\theta + \cos \theta \sin(n+1)\theta}{\sin^3 \theta} = 0,$$

και έτσι τα ακρότατα αντιστοιχούν στις τιμές του θ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$\tan(n+1)\theta = (n+1)\tan \theta \neq 0.$$

Άρα, το μόνο που μπορούμε να πούμε με σιγουριά είναι ότι οι τιμές των ακροτάτων του $U_n(t)$ αυξάνονται μονότονα όσο το $|t|$ αυξάνεται μακριά από το 0, μέχρι τη μέγιστη τιμή $n+1$ στα σημεία $t = \pm 1$.

Από την άλλη μεριά, μέσω των σχέσεων (1.3), (1.5) και (1.6) μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\begin{aligned}(1-t^2)^{\frac{1}{2}}U_n(t) &= \sin(n+1)\theta, \\ (1+t)^{\frac{1}{2}}V_n(t) &= \sqrt{2}\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta, \\ (1-t)^{\frac{1}{2}}W_n(t) &= \sqrt{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta.\end{aligned}$$

Οπότε, θα υπολογίσουμε τα ακρότατα των πολυωνύμων $U_n(t)$, $V_n(t)$, $W_n(t)$ με συναρτήσεις βάρους τις $(1-t^2)^{\frac{1}{2}}$, $(1+t)^{\frac{1}{2}}$, $(1-t)^{\frac{1}{2}}$ αντίστοιχα, και θα καταλήξουμε στα εξής :

$$t = \cos \frac{(2\nu+1)\pi}{2(n+1)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n, \quad (1.16)$$

$$t = \cos \frac{2\nu\pi}{2n+1}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n, \quad (1.17)$$

$$t = \cos \frac{(2\nu+1)\pi}{2n+1}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n. \quad (1.18)$$

1.4 Ορθογωνιότητα και πολυώνυμα του Chebyshev

Τα ορθογώνια πολυώνυμα παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία ιδιοτήτων, μερικές από τις οποίες θα αναλυθούν στη συνέχεια. Τα πολυώνυμα του Chebyshev ανήκουν στην οικογένεια των ορθογωνίων πολυωνύμων (με συναρτήσεις βάρους) συγκεκριμένων πολλών θετικών στοιχείων ως προς τη χρήση τους σε εφαρμογές, γεγονός που τα καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμα σε σύγκριση με άλλα ορθογώνια πολυώνυμα, ενδεχομένως μετά τα πολυώνυμα του Legendre (που έχουν συνάρτηση βάρους τη μονάδα). Βέβαια, τα πολυώνυμα του Chebyshev πλεονεχτούν λόγω του ότι οι ρίζες τους μπορούν να βρεθούν με αναλυτικό τρόπο όπως έχουμε δει στο 1.3. Ακόμα, τα πολυώνυμα του Chebyshev, ανήκουν σε μια οικογένεια ορθογωνίων πολυωνύμων γνωστών ως πολυώνυμα Jacobi, τα οποία αντιστοιχούν σε συναρτήσεις βάρους της μορφής $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$.

Τα πολυώνυμα του Chebyshev έχουν περαιτέρω ιδιότητες, οι οποίες πηγάζουν από την τριγωνομετρική τους αναπαράσταση και επίσης οι ρίζες τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως κόμβοι στην αριθμητική ολοκλήρωση (όπως θα δούμε παρακάτω).

1.4.1 Ορθογωνιότητα πολυωνύμων σε σχέση με συναρτήσεις βάρους

Ορισμός 1.4. Δύο συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$ στον $L_2[a, b]$ είναι ορθογώνιες στο $[a, b]$ ως προς μια δοθείσα συνεχή και μη αρνητική συνάρτηση βάρους $w(t)$ αν

$$\int_a^b w(t)f(t)g(t)dt = 0, \quad (1.19)$$

ή χρησιμοποιώντας συμβολισμό εσωτερικού γινομένου

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(t)f(t)g(t)dt, \quad (1.20)$$

πρέπει

$$\langle f, g \rangle = 0. \quad (1.21)$$

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε σε οικογένειες ορθογωνίων πολυωνύμων της μορφής $\{\pi_\nu(t), \nu = 0, 1, 2, \dots\}$. Πιο ειδικά, η διαδικασία για την κατασκευή ενός ορθογωνίου συστήματος πολυωνύμων είναι η εξής:

Αρχικά, θεωρούμε μια συνάρτηση βάρους w η οποία είναι θετική στο πεπερασμένο διάστημα $[a, b]$, εκτός από μεμονωμένα σημεία που μηδενίζεται, καθώς και για την οποία ισχύει $0 < \int_a^b w(t)dt < \infty$. Εφόσον τώρα, τα μονώνυμα $1, t, t^2, \dots \in C[a, b]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο $[a, b]$, μπορούμε να εφαρμόσουμε σε αυτά ορθογωνοποίηση Gram-Schmidt. Έτσι, προκύπτει ένα σύνολο πολυωνύμων $\pi_\nu(t)$, με συντελεστή του μεγιστοβαθμίου όρου τη μονάδα, για τα οποία ισχύουν τα εξής

$$\deg(\pi_\nu) = \nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

και

$$\langle \pi_i, \pi_j \rangle_w = \int_a^b \pi_i(t)\pi_j(t)w(t)dt \begin{cases} = 0, & i \neq j \\ > 0, & i = j \end{cases}$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο ως προς τη συνάρτηση βάρους w . Κατ' αυτόν τον τρόπο, ορίζεται ένα μοναδικό σύνολο ορθογωνίων πολυωνύμων ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[a, b]$.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα ορθογώνια πολυώνυμα έχουν σημαντικό ρόλο στην αριθμητική ανάλυση και ειδικότερα στην αριθμητική ολοκλήρωση. Ορθογώνια πολυώνυμα είναι και τα πολυώνυμα καθενός από τα τέσσερα είδη του Chebyshev (όπως θα αποδείξουμε στην επόμενη παράγραφο), γεγονός που, αυτομάτως, τα καθιστά εξαιρετικά χρήσιμα σε εφαρμογές που σχετίζονται με την αριθμητική ολοκλήρωση.

1.4.2 Τα πολυώνυμα Chebyshev ως ορθογώνια πολυώνυμα με συναρτήσεις βάρους

- Αν ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο (1.20) χρησιμοποιώντας

$$[a, b] = [-1, 1], \quad w(t) = w^{(1)}(t) = (1 - t^2)^{-1/2}, \quad (1.22)$$

τότε τα πολυώνυμα του Chebyshev πρώτου είδους T_n ικανοποιούν

1.

$$\langle T_i, T_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad (1.23)$$

2.

$$\langle T_i, T_j \rangle > 0, \quad i = j. \quad (1.24)$$

Απόδειξη:

1. Για $i \neq j$:

$$\langle T_i, T_j \rangle = \int_{-1}^1 \frac{T_i(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt. \quad (1.25)$$

Θέτοντας τώρα όπου $t = \cos \theta$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $T_i(t) = \cos i\theta$ και $dt = -\sin \theta d\theta = -\sqrt{1-t^2} d\theta$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle T_i, T_j \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{T_i(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_0^\pi \cos i\theta \cos j\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(i+j)\theta + \cos(i-j)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(i+j)\theta}{i+j} + \frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} \right]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle T_i, T_j \rangle = 0, \quad i \neq j,$$

όπου $\{T_\nu(t), \nu = 0, 1, 2, \dots\}$ ένα ορθογώνιο πολυωνυμικό σύστημα στο διάστημα $[-1, 1]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $(1-t^2)^{-1/2}$.

2. Για $i = j$,

$$\begin{aligned} \langle T_i, T_j \rangle &= \langle T_i, T_i \rangle \\ &= \int_0^\pi (\cos i\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2i\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2i\theta}{2i} \right]_0^\pi, \quad i \neq 0, \\ &= \pi/2 > 0, \end{aligned}$$

με

$$\langle T_0, T_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \pi.$$

Άρα,

$$\langle T_i, T_i \rangle > 0.$$

□

- Αν ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο (1.20) με

$$[a, b] = [-1, 1], \quad w(t) = w^{(2)}(t) = (1-t^2)^{1/2}, \quad (1.26)$$

τότε τα πολυώνυμα του Chebyshev δευτέρου είδους U_n ικανοποιούν

$$1. \quad \langle U_i, U_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad (1.27)$$

$$2. \quad \langle U_i, U_j \rangle > 0, \quad i = j. \quad (1.28)$$

Απόδειξη:

1. Για $i \neq j$:

Θέτουμε όπου $t = \cos \theta$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $U_i(t) \sin \theta = \sin(i+1)\theta$ και $dt = -\sin \theta d\theta = -\sqrt{1-t^2} d\theta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle U_i, U_j \rangle &= \int_{-1}^1 U_i(t) U_j(t) (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-t^2)^{\frac{1}{2}} U_i(t) (1-t^2)^{\frac{1}{2}} U_j(t) dt \\ &= \int_0^\pi [\sin(i+1)\theta \sin(j+1)\theta] d\theta, \quad (\alpha\phi\acute{o}\upsilon \sin \theta U_i(t) = \sin(i+1)\theta), \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(i-j)\theta - \cos(i+j+2)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} - \frac{\sin(i+j+2)\theta}{i+j+2} \right]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle U_i, U_j \rangle = 0, \quad i \neq j,$$

όπου $\{U_\nu(t), \nu = 0, 1, 2, \dots\}$ ένα ορθογώνιο πολυωνυμικό σύστημα στο δι-
άστημα $[-1, 1]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $(1-t^2)^{1/2}$.

2. Για $i = j$,

$$\begin{aligned} \langle U_i, U_i \rangle &= \int_0^\pi \sin^2(i+1)\theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2(i+1)\theta}{2} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\sin 2(i+1)\theta}{2(i+1)} \right]_0^\pi \\ &= \pi/2 > 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle U_i, U_i \rangle > 0.$$

□

- Αν ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο (1.20) χρησιμοποιώντας

$$[a, b] = [-1, 1], \quad w(t) = w^{(3)}(t) = (1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.29)$$

τότε τα πολυώνυμα του Chebyshev τρίτου είδους V_n ικανοποιούν

$$1. \quad \langle V_i, V_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad (1.30)$$

$$2. \quad \langle V_i, V_j \rangle > 0, \quad i = j. \quad (1.31)$$

Απόδειξη:

1. Για $i \neq j$:

Θέτουμε όπου $t = \cos \theta$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $V_i(t) \cos \frac{\theta}{2} = \cos(i + \frac{1}{2})\theta$ και $dt = -\sin \theta d\theta = -\sqrt{1-t^2} d\theta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle V_i, V_j \rangle &= \int_{-1}^1 V_i(t) V_j(t) (1-t)^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1+t)^{\frac{1}{2}} V_i(t) (1+t)^{\frac{1}{2}} V_j(t) dt \\ &= 2 \int_0^\pi \cos\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta \cos\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\ &\left(\alpha \rho \acute{o} \upsilon \ (1+t)^{\frac{1}{2}} = (1+\cos \theta)^{\frac{1}{2}} = (2 \cos^2 \frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} \right. \\ &\text{και } (1+t)^{\frac{1}{2}} V_i(t) = \sqrt{2} \cos(i + \frac{1}{2})\theta \Big), \\ &= \int_0^\pi [\cos(i-j)\theta + \cos(i+j+1)\theta] d\theta \\ &= \left[\frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} + \frac{\sin(i+j+1)\theta}{i+j+1} \right]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle V_i, V_j \rangle = 0, \quad i \neq j,$$

όπου $\{V_\nu(t), \nu = 0, 1, 2, \dots\}$ ένα ορθογώνιο πολυωνυμικό σύστημα στο διάστημα $[-1, 1]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}$.

2. Για $i = j$,

$$\begin{aligned} \langle V_i, V_i \rangle &= 2 \int_0^\pi \cos^2\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[1 + \cos 2\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta \right] d\theta \\ &= \left[\theta + \frac{\sin(2i+1)\theta}{2i+1} \right]_0^\pi \\ &= \pi > 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle V_i, V_i \rangle > 0.$$

□

- Αν ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο (1.20) με

$$[a, b] = [-1, 1], \quad w(t) = w^{(4)}(t) = (1-t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.32)$$

τότε τα πολυώνυμα του Chebyshev τετάρτου είδους W_n ικανοποιούν

1.

$$\langle W_i, W_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad (1.33)$$

2.

$$\langle W_i, W_j \rangle > 0, \quad i = j. \quad (1.34)$$

Απόδειξη:

1. Για $i \neq j$:

Θέτουμε όπου $t = \cos \theta$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις
 $W_i(t) \sin \frac{\theta}{2} = \sin(i + \frac{1}{2})\theta$ και $dt = -\sin \theta d\theta = -\sqrt{1-t^2} d\theta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \langle W_i, W_j \rangle &= \int_{-1}^1 W_i(t) W_j(t) (1+t)^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{1}{2}} W_i(t) (1-t)^{\frac{1}{2}} W_j(t) dt \\ &= 2 \int_0^\pi \sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta \sin\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\ &\left(\alpha\phi\acute{o}\upsilon \ (1-t)^{\frac{1}{2}} = (1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}} = (2\sin^2\frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2} \right. \\ &\text{και } (1-t)^{\frac{1}{2}} W_i(t) = \sqrt{2}\sin(i + \frac{1}{2})\theta \Big), \\ &= \int_0^\pi [\cos(i-j)\theta - \cos(i+j+1)\theta] d\theta \\ &= \left[\frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} - \frac{\sin(i+j+1)\theta}{i+j+1} \right]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle W_i, W_j \rangle = 0, \quad i \neq j,$$

όπου $\{W_\nu(t), \nu = 0, 1, 2, \dots\}$ ένα ορθογώνιο πολυωνυμικό σύστημα στο διάστημα $[-1, 1]$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $(1+t)^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}$.

2. Για $i = j$,

$$\begin{aligned}
 \langle W_i, W_i \rangle &= 2 \int_0^\pi \sin^2 \left(i + \frac{1}{2} \right) \theta \, d\theta \\
 &= \int_0^\pi \left[1 - \cos 2 \left(i + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \, d\theta \\
 &= \left[\theta - \frac{\sin(2i+1)\theta}{2i+1} \right]_0^\pi \\
 &= \pi > 0.
 \end{aligned}$$

Άρα,

$$\langle W_i, W_i \rangle > 0.$$

□

Επομένως, καθένα από τα είδη πολυωνύμων Chebyshev ανήκει σε οικογένεια πολυωνύμων όπως την ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

2 Γενικά στοιχεία αριθμητικής ολοκλήρωσης

2.1 Τύποι εκ παρεμβολής

Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(t)dt$. Ένας συνήθης τρόπος για να προσεγγίσουμε την τιμή του είναι να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του πολυωνύμου παρεμβολής της f . Αν $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ είναι n διακριτά σημεία, διατεταγμένα σε φθίνουσα τάξη στο διάστημα $(-1, 1)$, τότε

$$f(t) = p_{n-1}(f; t) + r_n(f; t), \quad t \in [-1, 1],$$

όπου $p_{n-1}(f; t)$ είναι το πολυώνυμο παρεμβολής της f , βαθμού το πολύ $n-1$, το οποίο σε μορφή Lagrange γράφεται

$$p_{n-1}(f; t) \equiv p_{n-1}(f; \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n; t) = \sum_{\nu=1}^n f(\tau_\nu) l_\nu(t),$$

όπου

$$l_\nu(t) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \nu}}^n \frac{t - \tau_k}{\tau_\nu - \tau_k}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

είναι το n -οστό στοιχειώδες πολυώνυμο του Lagrange και $r_n(f; t)$ το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής, που δίνεται από τη σχέση

$$r_n(f; t) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{\nu=1}^n (t - \tau_\nu), \quad a < \xi = \xi(t) < b,$$

υπό την προϋπόθεση ότι $f \in C^n[-1, 1]$. Άρα, για κάθε $t \in [-1, 1]$,

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^n f(\tau_\nu) l_\nu(t) + r_n(f; t),$$

και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t)dt &= \int_{-1}^1 \sum_{\nu=1}^n \left(f(\tau_\nu) l_\nu(t) \right) dt + \int_{-1}^1 r_n(f; t) dt \\ &= \sum_{\nu=1}^n \left(\int_{-1}^1 l_\nu(t) dt \right) f(\tau_\nu) + \int_{-1}^1 r_n(f; t) dt. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\int_{-1}^1 f(t)dt = \sum_{\nu=1}^n w_\nu f(\tau_\nu) + R_n(f), \quad (2.1)$$

όπου $w_\nu = \int_{-1}^1 l_\nu(t)dt$ και $R_n(f) = \int_{-1}^1 r_n(f; t)dt$. Βέβαια, τα w_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$, μπορούν να δοθούν σε μια πιο πρακτική μορφή. Αν $\pi_n(t) = \prod_{\nu=1}^n (t - \tau_\nu)$, τότε

$$l_\nu(t) = \frac{\pi_n(t)}{(t - \tau_\nu) \pi'_n(\tau_\nu)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Συνεπώς, τα βάρη θα δίνονται από τον τύπο

$$w_\nu = \frac{1}{\pi'_n(\tau_\nu)} \int_{-1}^1 \frac{\pi_n(t)}{t - \tau_\nu} dt, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Κατά αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε έναν τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης εκ παρεμβολής, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί σαν τύπος ως προς τη συνάρτηση βάρους του Legendre $w(t) = 1$ στο διάστημα $[-1, 1]$. Τα $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$, ονομάζονται κόμβοι ενώ τα w_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$, είναι τα αντίστοιχα βάρη τα οποία είναι πραγματικοί αριθμοί. Τα παραπάνω ισχύουν για οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[a, b]$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Βαθμός ακριβείας ενός τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι ο μέγιστος βαθμός των πολυωνύμων που ο τύπος αυτός ολοκληρώνει ακριβώς, δηλαδή ο μέγιστος βαθμός των πολυωνύμων για τα οποία το σφάλμα του τύπου αυτού είναι μηδέν. Τώρα, σύμφωνα με τον τύπο (2.1), από τις συνθήκες της πολυωνυμικής παρεμβολής, αλλά και από τον τύπο για το σφάλμα της, βλέπουμε ότι αν $f \in \mathcal{P}_{n-1}$ τότε $p_{n-1}(f; t) = f(t)$, $t \in [-1, 1]$, δηλαδή $r_n(f; t) = 0$, $t \in [-1, 1]$, επομένως $R_n(f) = 0$ για κάθε $f \in \mathcal{P}_{n-1}$. Συνεπώς, ο τύπος (2.1) ολοκληρώνει ακριβώς (με σφάλμα 0) όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq n-1$, δηλαδή έχει βαθμό ακριβείας τουλάχιστον $n-1$. Γενικά, λέμε ότι ένας τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης έχει βαθμό ακριβείας, επακριβώς, d αν ολοκληρώνει ακριβώς όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq d$ και υπάρχει πολυώνυμο βαθμού $d+1$ για το οποίο το σφάλμα είναι διάφορο του μηδενός.

2.2 Τύποι του Gauss

Αρχικά, έστω ο τύπος εκ παρεμβολής (2.1) με $w(t)$ μία συνάρτηση βάρους, η οποία είναι θετική στο $[-1, 1]$ εκτός από μεμονωμένα σημεία στα οποία μηδενίζεται και για την οποία ισχύει $0 < \int_{-1}^1 w(t) dt < \infty$. Δηλαδή, ο εξής τύπος

$$\int_{-1}^1 f(t) w(t) dt = \sum_{\nu=1}^n w_\nu f(\tau_\nu) + R_n(f), \quad (2.1')$$

όπου $w_\nu = \int_{-1}^1 l_\nu(t) w(t) dt$ και $R_n(f) = \int_{-1}^1 r_n(f; t) w(t) dt$. Για να κατανοήσουμε την έννοια των τύπων του Gauss θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο θεώρημα (βλέπε [2]).

Θεώρημα 2.1. Έστω k ένας αέρας με $0 \leq k \leq n$. Ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.1') έχει βαθμό ακριβείας $d = n-1+k$ αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

- α) Ο τύπος (2.1') έχει βαθμό ακριβείας $n-1$.
- β) Το πολυώνυμο $\pi_n(t) = \prod_{\nu=1}^n (t - \tau_\nu)$ ικανοποιεί τη συνθήκη

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t) p(t) w(t) dt = 0 \quad \forall p \in \mathcal{P}_{k-1}, \quad (2.4)$$

δηλαδή το $\pi_n(t)$ είναι ορθογώνιο σε όλα τα πολυώνυμα $p \in \mathcal{P}_{k-1}$.

Απόδειξη:

-Αναγκαίο: Έστω ότι ο τύπος (2.1') έχει βαθμό ακριβείας $d = n - 1 + k$. Τότε, το α) είναι προφανές αφού $k \geq 0$ και άρα $d \geq n - 1$.

Όσον αφορά το β), το πολυώνυμο $\pi_n(t)p(t) \in \mathcal{P}_{n+k-1}$ ολοκληρώνεται ακριβώς (με σφάλμα 0) από τον τύπο (2.1'), οπότε

$$\int_{-1}^1 \pi_n(t)p(t)w(t)dt = \sum_{k=1}^n w_k \pi_n(\tau_k)p(\tau_k) = 0, \quad (\pi_n(\tau_k) = 0).$$

-Ικανό: Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι α) και β). Πρέπει να δείξουμε ότι ο τύπος (2.1') ολοκληρώνει ακριβώς ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού $\leq n - 1 + k$. Έστω $q(t)$ ένα τέτοιο πολυώνυμο.

Αν $k = 0$, τότε ισχύει το ζητούμενο λόγω του α).

Αν $k > 0$, διαιρούμε το $q(t)$ με το $\pi_n(t)$ και παίρνουμε από τη γνωστή ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης τη σχέση $q(t) = p(t)\pi_n(t) + r(t)$ όπου $p(t) \in \mathcal{P}_{k-1}$ και $r(t) \in \mathcal{P}_{n-1}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 q(t)w(t)dt &= \int_{-1}^1 [p(t)\pi_n(t) + r(t)]w(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 \pi_n(t)p(t)w(t)dt + \int_{-1}^1 r(t)w(t)dt \\ &= \int_{-1}^1 r(t)w(t)dt, \quad (\text{λόγω του } \beta), \\ &= \sum_{k=1}^n w_k r(\tau_k), \quad (\text{λόγω του } \alpha) \text{ και } r(t) \in \mathcal{P}_{n-1}, \\ &= \sum_{k=1}^n w_k [q(\tau_k) - \pi_n(\tau_k)p(\tau_k)] \\ &= \sum_{k=1}^n w_k q(\tau_k). \end{aligned}$$

Άρα καταλήξαμε ότι

$$\int_{-1}^1 q(t)w(t)dt = \sum_{k=1}^n w_k q(\tau_k),$$

δηλαδή το q ολοκληρώνεται ακριβώς. $\square$

Η συνθήκη β) λέει ότι προκειμένου ο τύπος (2.1') να έχει βαθμό ακριβείας $d = n - 1 + n = 2n - 1$ (η καλύτερη περίπτωση) θα πρέπει το $\pi_n(t)$ να είναι ορθογώνιο ως προς όλα τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ $n - 1$ δηλαδή να είναι το ορθογώνιο πολυώνυμο βαθμού n ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[-1, 1]$. Σε αυτήν λοιπόν την περίπτωση, ο τύπος (2.1') ονομάζεται **τύπος του**

Gauss. Προφανώς, τα παραπάνω ισχύουν για οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[a, b]$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Ιδιότητες του τύπου του Gauss

1. Όλοι οι κόμβοι είναι πραγματικοί αριθμοί, διακριτοί και στο διάστημα (a, b) (ή $(-1, 1)$ στην περίπτωση μας). Αυτή είναι χαρακτηριστική ιδιότητα των ορθογώνιων πολυωνύμων.
2. Όλα τα βάρη είναι θετικά.
3. Ο τύπος του Gauss συγκλίνει για συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ δηλαδή αν $f \in C[a, b] \Rightarrow R_n(f) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. (Το οποίο γενικά δεν ισχύει για τύπους εκ παρεμβολής).
4. Τα τ_k και w_k μπορούν να υπολογιστούν σαν ένα πρόβλημα Αριθμητικής Γραμμικής Άλγεβρας.
5. Ισχύει ο εξής τύπος για το σφάλμα του τύπου του Gauss

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b [\pi_n(t)]^2 w(t) dt, \quad a < \xi < b,$$

όπου π_n το ορθογώνιο πολυώνυμο βαθμού n ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο $[a, b]$.

2.2.1 Τύποι των Gauss-Chebyshev

Έστω ο τύπος (2.1'), δηλαδή ο

$$\int_{-1}^1 w(t) f(t) dt = \sum_{\nu=1}^n w_\nu f(\tau_\nu) + R_n(f).$$

Χρησιμοποιώντας τις τέσσερις συναρτήσεις βάρους του Chebyshev όπως θα δούμε παρακάτω, προκύπτουν τέσσερις τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss με τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Για $w(t) = w^{(1)}(t) = (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}$ και τ_ν τις ρίζες του πολυωνύμου του Chebyshev πρώτου είδους δηλαδή $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)} = \cos \frac{(2\nu-1)\pi}{2n}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, έχουμε

$$w_\nu = w_\nu^{(1)} = \frac{\pi}{n},$$

$$R_n(f) = R_n^{(1)}(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1. \quad (2.5)$$

(Βλέπε [1, Κεφάλαιο 8.2, Θεώρημα 8.4] και [3, (2.7.13)]).

2. Για $w(t) = w^{(2)}(t) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}$ και τ_ν τις ρίζες του πολυωνύμου του Chebyshev δευτέρου είδους δηλαδή $\tau_\nu = \tau_\nu^{(2)} = \cos \frac{\nu\pi}{n+1}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, έχουμε

$$w_\nu = w_\nu^{(2)} = \frac{\pi}{n+1} (1 - \tau_\nu^{(2)2}),$$

$$R_n(f) = R_n^{(2)}(f) = \frac{\pi}{2^{2n+1}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1. \quad (2.6)$$

(Βλέπε [1, Κεφάλαιο 8.2, Θεώρημα 8.4] και [3, (2.7.14)]).

3. Για $w(t) = w^{(3)}(t) = (1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}$ και τ_ν τις ρίζες του πολυωνύμου του Chebyshev τρίτου είδους δηλαδή $\tau_\nu = \tau_\nu^{(3)} = \cos \frac{(2\nu-1)\pi}{2n+1}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, έχουμε

$$\begin{aligned} w_\nu &= w_\nu^{(3)} = \frac{2\pi}{2n+1}(1 + \tau_\nu^{(3)}), \\ R_n(f) &= R_n^{(3)}(f) = \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

4. Για $w(t) = w^{(4)}(t) = (1-t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ και τ_ν οι ρίζες του πολυωνύμου του Chebyshev τετάρτου είδους δηλαδή $\tau_\nu = \tau_\nu^{(4)} = \cos \frac{2\nu\pi}{2n+1}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, έχουμε

$$\begin{aligned} w_\nu &= w_\nu^{(4)} = \frac{2\pi}{2n+1}(1 - \tau_\nu^{(4)}), \\ R_n(f) &= R_n^{(4)}(f) = \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1. \end{aligned} \quad (2.8)$$

(Βλέπε [1, Κεφάλαιο 8.2, Θεώρημα 8.4] και [3, (2.7.10)]).

Συγκεκριμένα, η παραπάνω αναφορά [3, (2.7.10)] περιέχει την εξής πρόταση:

Πρόταση 2.1. Έστω ο τύπος (2.1'). Αν έχουμε συνάρτηση βάρους της μορφής $w(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, στο διάστημα $[-1, 1]$ τότε το σφάλμα δίνεται από τον εξής τύπο

$$R_n(f) = \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad (2.9)$$

$\xi \in (-1, 1)$.

Παρατηρούμε ότι πρέπει να αποδείξουμε τις σχέσεις (2.7) και (2.8) ως προς τα σφάλματα, δηλαδή να δείξουμε ότι για τις σχέσεις (2.7) και (2.8) (όπου $\alpha = -1/2, \beta = 1/2$ και $\alpha = 1/2, \beta = -1/2$ αντίστοιχα) που προφανώς συμπίπτουν λόγω της (2.9) θα πρέπει

$$\begin{aligned} R_n^{(3)}(f) &= R_n^{(4)}(f) = \frac{2^{2n+1}\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{3}{2})\Gamma(n+1)n!}{\Gamma(2n+1)\Gamma(2n+2)(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \\ &= \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1. \end{aligned}$$

Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε την παραπάνω σχέση, θα χρησιμοποιήσουμε ότι $\Gamma(n) =$

$(n-1)!$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ καθώς και ότι

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{3}{2}\right) \\
&= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-3}{2}\right) \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^n(2n-2)(2n-4) \cdots 2}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^{n-1}2^n(n-1)(n-2) \cdots 1}\sqrt{\pi} \\
&= \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Οπότε, σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{2^{2n+1}\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(n + \frac{3}{2})\Gamma(n+1)n!}{\Gamma(2n+1)\Gamma(2n+2)(2n)!} = \\
&= \frac{2^{2n+1}\Gamma(n + \frac{1}{2})(n + \frac{3}{2} - 1)\Gamma(n + \frac{3}{2} - 1)\Gamma(n+1)n!}{\Gamma(2n+1)\Gamma(2n+2)(2n)!} \\
&= \frac{2^{2n+1}(n + \frac{1}{2})\left[\Gamma(n + \frac{1}{2})\right]^2 n!n!}{(2n)!(2n+1)!(2n)!} \\
&= \frac{2^{2n}(2n+1)\left[\frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}(n-1)!}\sqrt{\pi}\right]^2 n!n!}{(2n)!(2n+1)!(2n)!} \\
&= \frac{2^{2n}\pi(2n+1)[(2n-1)!]^2 n!n!}{2^{4n-2}(n-1)!(n-1)!(2n)!(2n+1)!(2n)!} \\
&= \frac{4\pi n^2(2n-1)!}{2^{2n}2n(2n+1)!(2n)!} \\
&= \frac{2n\pi(2n+1)}{2^{2n}2n(2n+1)(2n)!} \\
&= \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!}.
\end{aligned}$$

Άρα δείξαμε ότι

$$R_n^{(3)}(f) = R_n^{(4)}(f) = \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\xi), \quad -1 < \xi < 1,$$

οπότε επαληθεύονται και οι σχέσεις (2.7) και (2.8) για τα σφάλματα. $\square$

Τέλος, να σημειωθεί ότι οι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης των Gauss-Chebyshev είναι οι μόνοι τύποι του Gauss των οποίων οι κόμβοι τ_ν και τα βάρη w_ν μπορούν να γραφούν αναλυτικά και με ακρίβεια.

2.3 Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης γινομένου

Δοθείσας μιας μη αρνητικής συνάρτησης βάρους w στο διάστημα $[a, b]$, ένας κα-
νόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης γινομένου έχει τη μορφή

$$\int_{-1}^1 w(t)f(t)dt = \sum_{\nu=1}^n w(\tau_\nu) + R_n(f), \quad (2.10)$$

όπου οι κόμβοι τ_ν βρίσκονται σε φθίνουσα τάξη στο διάστημα $[a, b]$, και τα βάρη w_ν είναι πραγματικοί αριθμοί, έτσι ώστε ο τύπος (2.10) να είναι ακριβής για όλα τα πολυώνυμα βαθμού τουλάχιστον $n-1$ δηλαδή $R_n(f) = 0 \forall f \in \mathcal{P}_{n-1}$. Έτσι, ο (2.10) είναι στην ουσία ένας τύπος εκ παρεμβολής. Η ονομασία “τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης γινομένου” χρησιμοποιείται για να δώσουμε έμφαση στην παρουσία της συνάρτησης βάρους w (βλέπε [3, Κεφάλαιο 2.5]).

Οι τύποι γινομένου με κόμβους σε αναλυτική μορφή και θετικά βάρη τα οποία δίνονται από αναλυτικό τύπο παρουσιάζουν τα εξής πλεονεκτήματα:

- Οι κόμβοι και τα βάρη μπορούν να υπολογιστούν εύκολα με μεγάλη ακρίβεια.
- Το άθροισμα $Q_n(f) = \sum_{\nu=1}^n w_\nu f(\tau_\nu)$ είναι υπολογιστικά ευσταθές στην προσέγγιση του ολοκληρώματος $I(f) = \int_a^b w(t)f(t)dt$.
- Λόγω του αποτελέσματος του Rabinowitz (βλέπε [4, Λήμμα 1]), ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = I(f)$ για όλες τις συναρτήσεις f που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a, b]$.

Ένα σημαντικό μέγεθος που βοηθάει να εκτιμηθεί πως διαδίδονται τα σφάλματα που υπάρχουν στις τιμές $f(\tau_\nu)$ είναι η διακύμανση του αθροίσματος $Q_n(f)$, η οποία συμβολίζεται με $\text{Var}Q_n$. Η κεντρική ιδέα είναι να κατασκευάσουμε κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης με όσο το δυνατόν μικρότερη διακύμανση και μεγάλο βαθμό ακριβείας (βλέπε [5, Κεφάλαιο 9]).

Η σύγκλιση του τύπου (2.10) για συναρτήσεις που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a, b]$ μπορεί να δειχθεί χρησιμοποιώντας το παρακάτω αποτέλεσμα του Rabinowitz (βλέπε [4, Λήμμα 1]).

Λήμμα 2.1. Στον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = I(f)$ για όλες τις συναρτήσεις f που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[a, b]$ αν:

α) $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = I(f)$ για όλες τις συναρτήσεις $f(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

β) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu=1}^n |w_\nu| = \mu_0$, $\mu_0 = \int_a^b w(t)dt$.

Προφανώς, το λήμμα ικανοποιείται πάντοτε στην περίπτωση όπου τα βάρη w_ν , $\nu = 1, 2, \dots, n$, του τύπου (2.10) είναι θετικά.

2.3.1 Το σφάλμα των τύπων γινομένου μέσω του πυρήνα Peano

Έστω ότι ο τύπος (2.10) έχει βαθμό ακριβείας d δηλαδή $R_n(f) = 0 \ \forall f \in \mathcal{P}_d$. Έτσι, για $f \in C^{d+1}[a, b]$,

$$R_n(f) = \int_a^b K_d(t) f^{(d+1)}(t) w(t) dt, \quad (2.11)$$

όπου K_d είναι ο d -οστός πυρήνας Peano του R_n . Από (2.11), παίρνουμε κατευθείαν

$$|R_n(f)| \leq c_{d+1} \max_{a \leq t \leq b} |f^{(d+1)}(t)|, \quad c_{d+1} = \int_a^b |K_d(t)| w(t) dt. \quad (2.12)$$

Επιπλέον, αν ο K_d διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, b]$, τότε ο τύπος (2.10) λέγεται ορισμένος, συγκεκριμένα, θετικά ορισμένος αν $K_d \geq 0$ και αρνητικά ορισμένος αν $K_d \leq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, ο (2.11) μέσω του θεωρήματος μέσης τιμής για ολοκληρώματα δίνει

$$|R_n(f)| = \bar{c}_{d+1} f^{(d+1)}(\xi), \quad \bar{c}_{d+1} = \int_a^b K_d(t) w(t) dt, \quad a < \xi < b. \quad (2.13)$$

(βλέπε [3, Κεφάλαιο 4.3]). Έτσι, για να δείξουμε ότι ο τύπος (2.10) είναι θετικά ορισμένος αρκεί να δείξουμε ότι $\bar{c}_{d+1} > 0$ και αρνητικά ορισμένος ότι $\bar{c}_{d+1} < 0$.

Ένα χρήσιμο εργαλείο για να εκτιμήσουμε ασυμπτωτικά το βέλτιστο φράγμα του τύπου (2.12) για τον όρο του σφάλματος του (2.10) είναι το ακόλουθο.

Λήμμα 2.2. [6, Λήμμα Β] Έστω συνάρτηση $g \in C^{m+s}[a, b]$, $m \geq 1$, $s \geq 0$, με ρίζες t_ν , $1 \leq \nu \leq m + s$. Για κάποιο k , τέτοιο ώστε $1 \leq k \leq m$, υποθέτουμε ότι το πολυώνυμο $q_k(t) = \prod_{i=1}^k (t - t_i)$ έχει μόνο απλές ρίζες. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις $z_i \in C^{k+s-1}[a, b]$, $1 \leq i \leq k$, τέτοιες ώστε

$$g(t) = \sum_{i=1}^k \frac{z_i(t)}{q_k'(t_i)} \prod_{\nu=1}^m (t - t_\nu). \quad (2.14)$$

Κάθε z_i έχει $k + s - 1$ ρίζες, ειδικότερα, τις t_ν , $m + 1 \leq \nu \leq m + s$. Επίσης, υπάρχει $\xi_i = \xi_i(t) \in [a, b]$, $1 \leq i \leq k$, τέτοιο ώστε

$$\frac{z_i^{(k+s-1)}(t)}{(k+s-1)!} = \frac{g^{(m+s)}(\xi_i)}{(m+s)!}. \quad (2.15)$$

Ακόμα, ένα κλασσικό κριτήριο για να δείξουμε ότι οι τύποι εκ παρεμβολής είναι μη ορισμένοι παρουσιάζεται στην επόμενη πρόταση (βλέπε [7, Πρόταση 1]).

Πρόταση 2.2. Υποθέτουμε ότι ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10), με $a = \tau_n < \tau_{n-1} < \dots < \tau_1 = b$ και βαθμό ακρίβειας d , ικανοποιεί μία από τις ακόλουθες τέσσερις συνθήκες ως προς μία συνάρτηση $f \in C^{d+1}[a, b]$ με $f^{(d+1)} \geq 0$

και $f^{(d+1)} \neq 0$ για $t \in [a, b]$:

- α) $w_1 R_n(f) > 0$,
- β) $(-1)^{d+1} w_n R_n(f) > 0$,
- γ) $w_1 = 0$ και $R_n(f) < 0$,
- δ) $w_n = 0$ και $(-1)^{d+1} R_n(f) < 0$.

Τότε ο τύπος είναι είναι μη ορισμένος.

2.3.2 Το σφάλμα των τύπων γινομένου σε χώρους Hilbert για αναλυτικές συναρτήσεις

Ένας άλλος τρόπος, εκτός από αυτόν με τους πυρήνες Peano, για την εκτίμηση του σφάλματος του τύπου (2.10) είναι με τη χρήση μεθόδων σε χώρους Hilbert [8]. Αν η f είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής, ολόμορφη στο $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r > 1$, τότε μπορεί να γραφεί ως

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad z \in C_r.$$

Ορίζουμε

$$|f|_r = \sup\{|a_k| r^k : k \in \mathbb{N}_0, R_n(t^k) \neq 0\}, \quad (2.16)$$

η οποία ορίζει μία ημινόρμα στο χώρο

$$X_r = \{f : f \text{ ολόμορφη στο } C_r, |f|_r < \infty\}.$$

Τότε, μπορεί ναδειχθεί ότι το $R_n(f)$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στο $(X_r, |\cdot|_r)$ και η νόρμα του δίνεται από τον τύπο

$$\|R_n\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n(t^k)|}{r^k}. \quad (2.17)$$

Αν, επιπροσθέτως, ισχύει ότι

$$R_n(t^k) \geq 0, \quad k \geq 0, \quad (2.18\alpha)$$

ή

$$(-1)^k R_n(t^k) \geq 0, \quad k \geq 0, \quad (2.18\beta)$$

τότε, ορίζοντας

$$\pi_n(t) = \prod_{\nu=1}^n (t - \tau_\nu), \quad (2.19)$$

μπορούμε να ορίσουμε και τις σχέσεις

$$\|R_n\| = \frac{r}{\pi_n(r)} \int_{-1}^1 \frac{\pi_n(t)}{r-t} w(t) dt, \quad (2.20\alpha)$$

ή

$$\|R_n\| = \frac{r}{\pi_n(-r)} \int_{-1}^1 \frac{\pi_n(t)}{r+t} w(t) dt, \quad (2.20\beta)$$

αντίστοιχα (βλέπε [9, Κεφάλαιο 2]). Έτσι, αν $f \in X_R$, τότε

$$|R_n(f)| \leq \|R_n\| |f|_r, \quad 1 < r \leq R, \quad (2.21)$$

και βελτιστοποιώντας το δεξί μέλος της (2.21) σαν μια συνάρτηση του r , παίρνουμε

$$|R_n(f)| \leq \inf_{1 < r \leq R} (\|R_n\| |f|_r). \quad (2.22)$$

Ανάλογες εκτιμήσεις μπορούν να βρεθούν αν η $|f|_r$ υπολογιστεί μέσω του $\max_{|z|=r} |f(z)|$, το οποίο για $f \in X_R$, ισχύει τουλάχιστον για $r < R$ (βλέπε [9, (2.9)])

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &\leq \|R_n\| \max_{|z|=r} |f(z)|, \quad 1 < r < R, \\ |R_n(f)| &\leq \inf_{1 < r < R} \left(\|R_n\| \max_{|z|=r} |f(z)| \right). \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.3.3 Η σύγκλιση των τύπων γινομένου για συναρτήσεις με μονότονες ανωμαλίες

Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{M}[a, b)$ των συναρτήσεων f που είναι συνεχείς στο ημιανοικτό διάστημα $[a, b)$, μονότονες σε μια περιοχή του b και τέτοιες ώστε το $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t) dt$ υπάρχει. Οι κλάσεις $\mathcal{M}(a, b]$ και $\mathcal{M}(a, b)$ ορίζονται με ανάλογο τρόπο, ενώ με $\mathcal{M}$ συμβολίζουμε την ένωση των τριών κλάσεων. Έστω $I(f) = \int_a^b f(t) dt$, $Q_n(f) = \sum_{\nu=1}^n w_\nu f(\tau_\nu)$, $\tau_0 = b$, $\tau_{n+1} = a$.

Λήμμα 2.3. Έστω ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w(t) = 1$ και μια συνάρτηση $f \in \mathcal{M}[a, b)$. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = I(f),$$

αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(g) = I(g) \quad \forall g \in C[a, b]$.
- 2) Υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιες ώστε $|w_\nu| \leq c(\tau_{\nu-1} - \tau_\nu)$ για n αρκετά μεγάλο και για κάθε $\nu \geq 1$ τέτοιο ώστε $b - \delta \leq \tau_\nu \leq b$.
Για $f \in \mathcal{M}(a, b]$, το λήμμα ισχύει αν η συνθήκη 2) αντικατασταθεί από την:
- 2') Υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιες ώστε $|w_{\nu-1}| \leq c(\tau_{\nu-1} - \tau_\nu)$ για n αρκετά μεγάλο και για κάθε $\nu \leq n+1$ τέτοιο ώστε $a \leq \tau_{\nu-1} \leq a + \delta$.
(Βλέπε [10, Λήμμα 4.1])

Προφανώς, οι συνθήκες 1), 2) και 2') εξασφαλίζουν τη σύγκλιση του τύπου (2.10) με $w(t) = 1$ για κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{M}$, ενώ αν ο (2.10) είναι συμμετρικός,

δηλαδή αν $a = -b$ καθώς και αν

$$\tau_{n-\nu+1} = -\tau_\nu, \quad w_{n-\nu+1} = w_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (2.24)$$

τότε οι συνθήκες 2) και 2') είναι ισοδύναμες.

Το επόμενο λήμμα αποτελεί συνέπεια του προηγούμενου λήμματος. Αυτή τη φορά, αναφερόμαστε στον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10), υποθέτοντας ότι η συνάρτηση βάρους w δεν έχει ρίζες στο (a, b) . Σε αντιστοιχία με την προηγούμενη κλάση, ορίζουμε σαν $\mathcal{M}_w[a, b]$ την κλάση των συναρτήσεων τέτοιων ώστε η fw να είναι συνεχής στο ημι-ανοικτό διάστημα $[a, b]$, και μονότονη σε κάποια περιοχή του b , καθώς και να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(t)w(t)dt$. Οι κλάσεις $\mathcal{M}_w(a, b]$ και $\mathcal{M}_w(a, b)$ ορίζονται ανάλογα και η $\mathcal{M}_w$ να αποτελεί την ένωση των τριών κλάσεων. Έστω $I(f) = \int_a^b f(t)w(t)dt$, $Q_n(f) = \sum_{\nu=1}^n w_\nu f(\tau_\nu)$, $\tau_0 = b$, $\tau_{n+1} = a$.

Λήμμα 2.4. Έστω ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με τη συνάρτηση βάρους w να μην έχει ρίζες στο (a, b) και μια συνάρτηση $f \in \mathcal{M}_w[a, b]$. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = I(f),$$

αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(g) = I(g) \quad \forall g \in C[a, b]$.
- 2) Υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιες ώστε $\frac{|w_\nu|}{w(\tau_\nu)} \leq c(\tau_{\nu-1} - \tau_\nu)$ για n αρκετά μεγάλο και για κάθε $\nu \geq 1$ τέτοιο ώστε $b - \delta \leq \tau_\nu \leq b$.
Για $f \in \mathcal{M}_w(a, b]$, το λήμμα ισχύει αν η συνθήκη 2) αντικατασταθεί από την:
2') Υπάρχουν σταθερές $c > 0$ και $\delta > 0$ τέτοιες ώστε $\frac{|w_{\nu-1}|}{w(\tau_{\nu-1})} \leq c(\tau_{\nu-1} - \tau_\nu)$ για n αρκετά μεγάλο και για κάθε $\nu \leq n+1$ τέτοιο ώστε $a \leq \tau_{\nu-1} \leq a + \delta$.
(βλέπε [10, Πρόσμα 4.2]).

Αν ο (2.10) είναι συμμετρικός, δηλαδή αν $a = -b$, $w(t) = w(-t)$ καθώς και αν

$$\tau_{n-\nu+1} = -\tau_\nu, \quad w_{n-\nu+1} = w_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (2.24)$$

τότε οι συνθήκες 2) και 2') είναι ισοδύναμες.

Το ακόλουθο λήμμα είναι γνωστό και ως αποτέλεσμα των Polya-Steklov (βλέπε [11, Κεφάλαιο 12.3, Θεώρημα 8]).

Λήμμα 2.5. Για να συγκλίνει ο τύπος (2.10) για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $[a, b]$, οι επόμενες δύο συνθήκες είναι ικανές και αναγκαίες:

- 1) Ο τύπος συγκλίνει για κάθε πολυώνυμο.
- 2) Υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε

$$\sum_{\nu=1}^n |w_\nu| \leq K.$$

3 Τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης γινομένου με συνάρτηση βάρους Chebyshev δευτέρου είδους και κόμβους πρώτου, τρίτου ή τετάρτου είδους

3.1 Προκαταρκτικές πληροφορίες

Το κεφάλαιο 3 αποτελεί το κύριο μέρος της διπλωματικής εργασίας. Βασικό αντικείμενο μελέτης είναι οι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης γινομένου με συναρτήσεις βάρους και κόμβους Chebyshev. Μέχρι τώρα, η λίστα αυτών των τύπων εκτείνεται στους γνωστούς τύπους του Fejer πρώτου και δεύτερου είδους (γνωστούς και ως τύπους Polya και Filippi), στους κανόνες του Clenshaw-Curtis, και γενικά σε τύπους εκ παρεμβολής βασισμένους στα σημεία του Chebyshev, με, χωρίς, ή με ένα από τα άκρα του $[-1, 1]$ (βλέπε [3, Κεφάλαιο 2.5.5]). Οι τελευταίοι είναι ειδικές περιπτώσεις του τύπου (2.10) με $w(t) = 1$ στο $[-1, 1]$. Στόχος μας είναι να επεκτείνουμε την παραπάνω λίστα, με το να επιλέξουμε συνάρτηση βάρους και κόμβους σύμφωνα με διαφορετικούς συνδυασμούς μεταξύ των τεσσάρων ειδών πολωνύμων του Chebyshev. Έτσι, υπάρχουν 16 τέτοιοι συνδυασμοί, από τους οποίους βέβαια, εξαιρούμε τους ήδη γνωστούς τύπους Gauss-Chebyshev με συνάρτηση βάρους και κόμβους τα οποία ανήκουν στο ίδιο είδος πολωνύμων. Οπότε υπολείπονται άλλοι 12 συνδυασμοί. Παρακάτω, θα ασχοληθούμε με 3 συνδυασμούς που βασίζονται στη συνάρτηση βάρους Chebyshev δευτέρου είδους και κόμβους τα σημεία πρώτου, τρίτου και τετάρτου είδους. Δηλαδή, θα μελετήσουμε τις εξής τρεις περιπτώσεις:

$$w^{(2)}(t) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \tau_\nu^{(1)} = \cos \frac{2\nu - 1}{2n} \pi, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

$$w^{(2)}(t) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \tau_\nu^{(3)} = \cos \frac{2\nu - 1}{2n + 1} \pi, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (3.2)$$

$$w^{(2)}(t) = (1 - t^2)^{\frac{1}{2}}, \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \tau_\nu^{(4)} = \cos \frac{2\nu}{2n + 1} \pi, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Και οι τρεις αυτοί τύποι έχουν, όχι μόνο θετικά βάρη τα οποία δίνονται από αναλυτικούς τύπους, αλλά και αρκετά μεγάλο βαθμό ακριβείας ο οποίος πλησιάζει αυτόν του τύπου Gauss n σημείων.

Σκοπός μας είναι να εξερευνήσουμε τις πιο σημαντικές ιδιότητες και να μελετήσουμε τα κύρια θέματα των τύπων αυτών. Στην αμέσως επόμενη παράγραφο 3.2, θα υπολογίσουμε τα κύρια χαρακτηριστικά των τύπων μας όπως τα βάρη, το βαθμό ακριβείας, τη διακύμανση, θα δείξουμε τη σύγκλιση τους για συναρτήσεις ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[-1, 1]$ καθώς και τη θετικότητα των βαρών τους. Στην παράγραφο 3.3, θα υπολογίσουμε τα βέλτιστα ασυμπτωτικά φράγματα για το σφάλμα των τύπων, χρησιμοποιώντας μεθόδους του πυρήνα Peano, και

θα εξετάσουμε αν οι τύποι αυτοί είναι ορισμένοι. Στην παράγραφο 3.4, χρησιμοποιώντας τεχνικές σε χώρους Hilbert, θα εκτιμήσουμε τη νόρμα του σφάλματος, και θα οδηγηθούμε σε φράγματα σφαλμάτων για αναλυτικές συναρτήσεις. Τέλος, στην παράγραφο 3.5, θα εξετάσουμε τη σύγκλιση των τύπων μας για συναρτήσεις με μονότονη ανωμαλία στο ένα ή και στα δύο άκρα του $[-1, 1]$. Το τέταρτο (και τελευταίο) κεφάλαιο περιέχει κάποια αριθμητικά παραδείγματα των παραπάνω τύπων για συγκεκριμένες συναρτήσεις.

3.2 Υπολογισμός βασικών στοιχείων των τύπων

Στην παρούσα παράγραφο, θα διατυπώσουμε τρία βασικά θεωρήματα, με τα οποία θα αποσαφηνίσουμε τις βασικές ιδιότητες των τύπων μας. Θα ξεκινήσουμε με τον τύπο (2.10) για $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)}$ όπως στη σχέση (3.1), με βάρη $w_\nu = w_\nu^{(2,1)}$, σφάλμα $R_n(f) = R_n^{(2,1)}(f)$ και $Q_n^{(2,1)}(f) = \sum_{\nu=1}^n w_\nu^{(2,1)} f(\tau_\nu^{(1)})$. Για $n = 1$, έχουμε τον τύπο των Gauss-Chebyshev δευτέρου είδους, οπότε το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στο $n \geq 2$.

Θεώρημα 3.1. Έστω $n \geq 2$. Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)}$ όπως στη σχέση (3.1). Τότε:

α) Τα βάρη $w_\nu = w_\nu^{(2,1)}$ δίνονται από τη σχέση

$$w_\nu^{(2,1)} = \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{(2\nu - 1)\pi}{2n}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

και είναι όλα θετικά.

β) Ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης έχει βαθμό ακριβείας $2n - 3$.

γ) Η διακύμανση του τύπου ισούται με

$$\text{Var}Q_n^{(2,1)} = \begin{cases} \frac{3\pi^2}{8n}, & n \geq 3, \\ \frac{\pi^2}{8}, & n = 2. \end{cases} \quad (3.5)$$

δ) Ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{(2,1)}(f) = I(f)$ για όλες τις συναρτήσεις f που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[-1, 1]$.

Απόδειξη:

α) Έστω ο τύπος Gauss-Chebyshev πρώτου είδους n -σημείων (2.6). Δηλαδή ο τύπος

$$\int_{-1}^1 f(t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\tau_\nu^{(1)}) + R_n^{(1)}(f), \quad (3.6)$$

στον οποίο θα αντικαταστήσουμε όπου $f(t)$ τη συνάρτηση $(1-t^2)f(t)$. Οπότε θα έχουμε

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)f(t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n [1 - (\tau_\nu^{(1)})^2] f(\tau_\nu^{(1)}) + R_n^{(1)}((1-t^2)f(t))$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 f(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{\nu=1}^n [1 - (\tau_{\nu}^{(1)})^2] f(\tau_{\nu}^{(1)}) + R_n^{(1)}((1-t^2)f(t)). \quad (3.7)$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω τύπος έχει συνάρτηση βάρους Chebyshev δευτέρου είδους $w^{(2)}(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ και κόμβους πρώτου είδους $\tau_{\nu}^{(1)} = \cos \frac{2\nu-1}{2n}\pi$, $\nu = 1, 2, \dots, n$. Άρα, τα βάρη του τύπου θα είναι

$$\begin{aligned} w_{\nu}^{(2,1)} &= \frac{\pi}{n} [1 - (\tau_{\nu}^{(1)})^2] \\ &= \frac{\pi}{n} [1 - \cos^2 \frac{(2\nu-1)}{2n}\pi] \\ &= \frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{(2\nu-1)\pi}{2n}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

και προφανώς είναι όλα θετικά.

β) Γνωρίζουμε ότι ο τύπος (3.6) είναι τύπος Gauss n -σημείων και άρα έχει βαθμό ακριβείας $2n-1$. Δηλαδή, ολοκληρώνει ακριβώς όλα τα πολώνυμα βαθμού $\leq 2n-1$. Οπότε θα ισχύει

$$R_n^{(1)}(f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{P}_{2n-1}. \quad (3.8)$$

Έχουμε όμως ότι

$$R_n^{(2,1)}(f(t)) = R_n^{(1)}((1-t^2)f(t)), \quad (3.9)$$

και άρα αμέσως προκύπτει ότι

$$R_n^{(2,1)}(t^i) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2n-3, \quad (3.10)$$

αφού

$$\begin{aligned} R_n^{(2,1)}(t^i) &= R_n^{(1)}((1-t^2)t^i) \\ &= R_n^{(1)}(t^i) - R_n^{(1)}(t^{i+2}) \\ &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2n-3, \end{aligned}$$

λόγω των (3.8) και (3.9), και έτσι $R_n^{(2,1)}(f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{P}_{2n-3}$.

Για $f(t) = t^{2n-2}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} R_n^{(2,1)}(t^{2n-2}) &= R_n^{(1)}((1-t^2)t^{2n-2}) \\ &= R_n^{(1)}(t^{2n-2}) - R_n^{(1)}(t^{2n}) \\ &= -R_n^{(1)}(t^{2n}) \\ &\neq 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

επειδή στον τύπο του Gauss ισχύει ότι $R_n(t^{2n}) \neq 0$.

Άρα, ο βαθμός ακριβείας του τύπου με $w = w^{(2)}$ και $\tau_{\nu} = \tau_{\nu}^{(1)}$ είναι επακριβώς $2n-3$.

γ) Γενικά, ισχύει ότι $\text{Var}Q_n = \sum_{\nu=1}^n w_{\nu}^2$. Οπότε, στη δική μας περίπτωση έχουμε $\text{Var}Q_n^{(2,1)} = \sum_{\nu=1}^n (w_{\nu}^{(2,1)})^2$.

Για $n \geq 3$, με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\sin^4 \theta = \frac{3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8},$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Var}Q_n^{(2,1)} &= \sum_{\nu=1}^n (w_\nu^{(2,1)})^2 = \frac{\pi^2}{n^2} \sum_{\nu=1}^n \sin^4 \frac{(2\nu-1)\pi}{2n} \\ &= \frac{\pi^2}{8n^2} \left[\sum_{\nu=1}^n \left(3 - 4 \cos \frac{2(2\nu-1)\pi}{2n} + \cos \frac{4(2\nu-1)\pi}{2n} \right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{8n^2} \left[\sum_{\nu=1}^n 3 - 4 \sum_{\nu=1}^n \cos \frac{2(2\nu-1)\pi}{2n} + \sum_{\nu=1}^n \cos \frac{4(2\nu-1)\pi}{2n} \right] \\ &= \frac{\pi^2}{8n^2} \left[3n - 4 \sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1) \frac{\pi}{n} + \sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1) \frac{2\pi}{n} \right] \\ &= \frac{3\pi^2}{8n}, \end{aligned}$$

αφού

$$\sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1) \frac{\pi}{n} = \sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1) \frac{2\pi}{n} = 0,$$

(βλέπε [12, (1.342.4)] με $x = \pi/n$, $x = 2\pi/n$).

Για $n = 2$, έχουμε ότι $w_1^{(2,1)} = w_2^{(2,1)} = \pi/4$, οπότε κατευθείαν παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Var}Q_n^{(2,1)} &= (w_1^{(2,1)})^2 + (w_2^{(2,1)})^2 \\ &= \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{16} \\ &= \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\text{Var}Q_n^{(2,1)} = \begin{cases} \frac{3\pi^2}{8n}, & n \geq 3, \\ \frac{\pi^2}{8}, & n = 2. \end{cases}$$

δ) Η σύγκλιση του τύπου μας για συναρτήσεις Riemann στο $[-1, 1]$, προκύπτει από το γνωστό λήμμα του Rabinowitz (Λήμμα 2.1) λόγω της θετικότητας των βαρών $w_\nu^{(2,1)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Θα συνεχίσουμε με τον τύπο (2.10) για $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(3)}$ όπως στη σχέση (3.2), με βάρη $w_\nu = w_\nu^{(2,3)}$, σφάλμα $R_n(f) = R_n^{(2,3)}(f)$ και $Q_n^{(2,3)}(f) =$

$$\sum_{\nu=1}^n w_{\nu}^{(2,3)} f(\tau_{\nu}^{(3)}).$$

Θεώρημα 3.2. Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_{\nu} = \tau_{\nu}^{(3)}$ όπως στη σχέση (3.2). Τότε:

α) Τα βάρη $w_{\nu} = w_{\nu}^{(2,3)}$ δίνονται από τη σχέση

$$w_{\nu}^{(2,3)} = \frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{(2\nu-1)\pi}{2n+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (3.12)$$

και είναι όλα θετικά.

β) Ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης έχει βαθμό ακριβείας $2n-2$.

γ) Η διακύμανση του τύπου ισούται με

$$\text{Var}Q_n^{(2,3)} = \frac{3\pi^2}{4(2n+1)}. \quad (3.13)$$

δ) Ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{(2,3)}(f) = I(f)$ για όλες τις συναρτήσεις f που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[-1, 1]$.

Απόδειξη:

α) Έστω ο τύπος Gauss-Chebyshev τρίτου είδους n -σημείων (2.8). Δηλαδή ο τύπος

$$\int_{-1}^1 f(t)(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{\nu=1}^n (1+\tau_{\nu}^{(3)})f(\tau_{\nu}^{(3)}) + R_n^{(3)}(f), \quad (3.14)$$

στον οποίο θα αντικαταστήσουμε όπου $f(t)$ τη συνάρτηση $(1-t)f(t)$. Οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1-t)f(t)(1-t)^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}} dt &= \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{\nu=1}^n (1+\tau_{\nu}^{(3)})(1-\tau_{\nu}^{(3)})f(\tau_{\nu}^{(3)}) + R_n^{(3)}((1-t)f(t)) \\ &\Rightarrow \int_{-1}^1 f(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{\nu=1}^n [1-(\tau_{\nu}^{(3)})^2]f(\tau_{\nu}^{(3)}) + R_n^{(3)}((1-t)f(t)). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω τύπος έχει συνάρτηση βάρους Chebyshev δευτέρου είδους $w^{(2)}(t) = (1-t^2)^{\frac{1}{2}}$ και κόμβους τρίτου είδους $\tau_{\nu}^{(3)} = \cos \frac{2\nu-1}{2n+1}\pi$, $\nu = 1, 2, \dots, n$. Άρα, τα βάρη του τύπου θα είναι

$$\begin{aligned} w_{\nu}^{(2,3)} &= \frac{2\pi}{2n+1} [1-(\tau_{\nu}^{(3)})^2] \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} [1-\cos^2 \frac{(2\nu-1)\pi}{2n+1}] \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{(2\nu-1)\pi}{2n+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

και προφανώς είναι όλα θετικά.

β) Γνωρίζουμε ότι ο τύπος (3.14) είναι τύπος Gauss n -σημείων και άρα έχει βαθμό ακριβείας $2n-1$. Δηλαδή, ολοκληρώνει ακριβώς όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\leq 2n-1$. Οπότε θα ισχύει

$$R_n^{(3)}(f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{P}_{2n-1}. \quad (3.16)$$

Έχουμε όμως ότι

$$R_n^{(2,3)}(f(t)) = R_n^{(3)}((1-t)f(t)). \quad (3.17)$$

τότε θα πάρουμε

$$\begin{aligned} R_n^{(2,3)}(t^i) &= R_n^{(3)}((1-t)t^i) \\ &= R_n^{(3)}(t^i) - R_n^{(3)}(t^{i+1}) \\ &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, 2n-2 \end{aligned} \quad (3.18)$$

λόγω της (3.16), και άρα $R_n^{(2,3)}(f) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{P}_{2n-2}$.

Για $f(t) = t^{2n-1}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} R_n^{(2,3)}(t^{2n-1}) &= R_n^{(3)}((1-t)t^{2n-1}) \\ &= R_n^{(3)}(t^{2n-1}) - R_n^{(3)}(t^{2n}) \\ &= -R_n^{(3)}(t^{2n}) \\ &\neq 0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

αφού για τους τύπους Gauss ισχύει ότι $R_n(t^{2n}) \neq 0$.

Άρα, ο βαθμός ακριβείας του τύπου με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(3)}$ είναι επακριβώς $2n-2$.

γ) Γενικά, ισχύει ότι $\text{Var}Q_n = \sum_{\nu=1}^n w_\nu^2$. Οπότε, στη δική μας περίπτωση έχουμε $\text{Var}Q_n^{(2,3)} = \sum_{\nu=1}^n (w_\nu^{(2,3)})^2$.

Για $n \geq 2$, με τη βοήθεια της τριγωνομετρικής ταυτότητας

$$\sin^4 \theta = \frac{3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta}{8},$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Var}Q_n^{(2,3)} &= \sum_{\nu=1}^n (w_\nu^{(2,3)})^2 = \frac{4\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{\nu=1}^n \sin^4 \frac{(2\nu-1)\pi}{2n+1} \\ &= \frac{4\pi^2}{8(2n+1)^2} \left[\sum_{\nu=1}^n \left(3 - 4 \cos \frac{2(2\nu-1)\pi}{2n+1} + \cos \frac{4(2\nu-1)\pi}{2n+1} \right) \right] \\ &= \frac{\pi^2}{2(2n+1)^2} \left[\sum_{\nu=1}^n 3 - 4 \sum_{\nu=1}^n \cos \frac{2(2\nu-1)\pi}{2n+1} + \sum_{\nu=1}^n \cos \frac{4(2\nu-1)\pi}{2n+1} \right] \\ &= \frac{\pi^2}{2(2n+1)^2} \left[3n - 4 \sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1) \frac{2\pi}{2n+1} + \sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1) \frac{4\pi}{2n+1} \right] \\ &= \frac{\pi^2}{2(2n+1)^2} (3n - 4A + B), \end{aligned}$$

όπου $A = \sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1) \frac{2\pi}{2n+1}$ και $B = \sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1) \frac{4\pi}{2n+1}$.

- Υπολογισμός του $A = \sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1) \frac{2\pi}{2n+1}$.

Γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1)\theta = \frac{1}{2} \sin(2n\theta) \csc \theta,$$

(βλέπε [12, (1.342.4)]). Οπότε, αρκεί να αντικαταστήσουμε όπου $\theta = \frac{2\pi}{2n+1}$ και έτσι θα έχουμε

$$A = \frac{1}{2} \csc \left(\frac{2\pi}{2n+1} \right) \sin \left(\frac{4n\pi}{2n+1} \right) = \frac{\sin(\frac{4n\pi}{2n+1})}{2 \sin(\frac{2\pi}{2n+1})} = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2},$$

αφού

$$\sin \frac{4n\pi}{2n+1} = \sin \left[(2n+1-1) \frac{2\pi}{2n+1} \right] = \sin \left(2\pi - \frac{2\pi}{2n+1} \right) = -\sin \frac{2\pi}{2n+1}.$$

- Υπολογισμός του $B = \sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1) \frac{4\pi}{2n+1}$.

Κατά τον ίδιο τρόπο με προηγουμένως έχουμε ότι

$$\sum_{\nu=1}^n \cos(2\nu-1)\theta = \frac{1}{2} \sin(2n\theta) \csc \theta.$$

Οπότε, αρκεί να αντικαταστήσουμε $\theta = \frac{4\pi}{2n+1}$ και έτσι θα έχουμε

$$A = \frac{1}{2} \csc \left(\frac{4\pi}{2n+1} \right) \sin \left(\frac{8n\pi}{2n+1} \right) = \frac{\sin(\frac{8n\pi}{2n+1})}{2 \sin(\frac{4\pi}{2n+1})} = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2},$$

αφού

$$\sin \frac{8n\pi}{2n+1} = \sin \left[(2n+1-1) \frac{4\pi}{2n+1} \right] = \sin \left(2\pi - \frac{4\pi}{2n+1} \right) = -\sin \frac{4\pi}{2n+1}.$$

Άρα, εφόσον δείξαμε ότι $A = -1/2$ και $B = -1/2$, θα ισχύει

$$\begin{aligned} \text{Var}Q_n^{(2,3)} &= \frac{\pi^2}{2(2n+1)^2} (3n - 4A + B) \\ &= \frac{\pi^2}{2(2n+1)^2} \left[3n - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{\pi^2}{2(2n+1)^2} \left(3n + \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{3\pi^2}{4(2n+1)}. \end{aligned}$$

δ) Η σύγκλιση του τύπου μας για συναρτήσεις Riemann στο $[-1, 1]$, προκύπτει από το γνωστό λήμμα του Rabinowitz (Λήμμα 2.1) λόγω της θετικότητας των βαρών $w_\nu^{(2,3)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Τώρα, όσον αφορά τον τύπο (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(4)}$ πρώτου διατυπώσουμε το ανάλογο θεώρημα, θα κάνουμε την εξής σημαντική παρατήρηση.

Παρατήρηση 3.1. Αναζητούμε $w_\nu^{(2,4)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, καθώς και $R_n^{(2,4)}(f)$ τέτοια ώστε

$$\int_{-1}^1 f(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \sum_{\nu=1}^n w_\nu^{(2,4)} f(\tau_\nu^{(4)}) + R_n^{(2,4)}(f), \quad (3.20)$$

όπου $\tau_\nu^{(4)} = \cos \frac{2\nu\pi}{2n+1}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \tau_\nu^{(4)} &= \cos \frac{2\nu - 1 + 1}{2n+1} \pi \\ &= \cos \frac{2\nu - 1 + 1 + 2n - 2n}{2n+1} \pi \\ &= \cos \frac{2n+1 - 2(n-\nu+1) + 1}{2n+1} \pi \\ &= \cos \left[\pi - \frac{2(n-\nu+1) - 1}{2n+1} \pi \right] \\ &= -\cos \frac{2(n-\nu+1) - 1}{2n+1} \pi \\ &= -\tau_{n-\nu+1}^{(3)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\tau_\nu^{(4)} = -\tau_{n-\nu+1}^{(3)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (3.21)$$

Οπότε, ο τύπος (3.20) γίνεται

$$\int_{-1}^1 f(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \sum_{\nu=1}^n w_\nu^{(2,4)} f(-\tau_{n-\nu+1}^{(3)}) + R_n^{(2,4)}(f(\cdot)).$$

Θεωρούμε $f(t) = g(-t)$, οπότε έχουμε

$$\int_{-1}^1 g(-t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \sum_{\nu=1}^n w_\nu^{(2,4)} g(\tau_{n-\nu+1}^{(3)}) + R_n^{(2,4)}(g(-\cdot)).$$

Θέτουμε τώρα $x = -t \Rightarrow dx = -dt$, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_1^{-1} g(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} (-dx) &= \int_{-1}^1 g(-t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \sum_{\nu=1}^n w_\nu^{(2,4)} g(\tau_{n-\nu+1}^{(3)}) + R_n^{(2,4)}(g(-\cdot)). \end{aligned}$$

Άρα,

$$w_\nu^{(2,4)} = w_{n-\nu+1}^{(2,3)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (3.22)$$

και

$$R_n^{(2,4)}(f(\cdot)) = R_n^{(2,3)}(f(-\cdot)). \quad (3.23)$$

Οπότε με γνώμονα τις σχέσεις (3.21), (3.22) και (3.23) θα διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.3. Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(4)}$ όπως στη σχέση (3.3). Τότε:

α) Τα βάρη $w_\nu = w_\nu^{(2,4)}$ δίνονται από τη σχέση

$$w_\nu^{(2,4)} = \frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2\nu\pi}{2n+1}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad (3.24)$$

και είναι όλα θετικά.

β) Ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης έχει βαθμό ακριβείας $2n-2$.

γ) Η διακύμανση του τύπου ισούται με

$$\text{Var}Q_n^{(2,4)} = \frac{3\pi^2}{4(2n+1)}. \quad (3.25)$$

δ) Ισχύει ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^{(2,4)}(f) = I(f)$ για όλες τις συναρτήσεις f που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[-1, 1]$.

Απόδειξη:

α) Από τη σχέση (3.22) έχουμε

$$\begin{aligned} w_\nu^{(2,4)} &= w_{n-\nu+1}^{(2,3)} = \frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2(n-\nu+1)-1}{2n+1} \pi \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2n+1-2\nu}{2n+1} \pi \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \left(\pi - \frac{2\nu}{2n+1} \pi \right) \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2\nu\pi}{2n+1}. \end{aligned}$$

Άρα, $w_\nu^{(2,4)} = \frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2\nu\pi}{2n+1}$.

β) Λόγω της σχέσης (3.23), είναι προφανές ότι οι τύποι (2.10) με $w = w^{(2)}$, $\tau_\nu = \tau_\nu^{(4)}$ και $w = w^{(2)}$, $\tau_\nu = \tau_\nu^{(3)}$ έχουν τον ίδιο βαθμό ακριβείας και άρα ο βαθμός ακριβείας θα είναι $2n-2$.

γ) Έχουμε λόγω της (3.22) ότι

$$\text{Var}Q_n^{(2,4)} = \sum_{\nu=1}^n (w_\nu^{(2,4)})^2 = \sum_{\nu=1}^n (w_{n-\nu+1}^{(2,3)})^2 = \sum_{\nu=1}^n (w_\nu^{(2,3)})^2 = \frac{3\pi^2}{4(2n+1)}.$$

δ) Προφανώς, εφόσον ισχύει η παραπάνω παρατήρηση, και ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$, $\tau_\nu = \tau_\nu^{(3)}$ συγκλίνει για όλες τις συναρτήσεις f που είναι ολοκληρώσιμες κατά Riemann στο $[-1, 1]$, τότε αναγκαστικά, ο τύπος με $w = w^{(2)}$, $\tau_\nu = \tau_\nu^{(4)}$ θα συγκλίνει επίσης.

3.3 Φράγματα σφαλμάτων μέσω πυρήνα Peano

Στην παράγραφο αυτή, θα υπολογίσουμε τα βέλτιστα ασυμπτωτικά φράγματα για τα σφάλματα των τύπων μας, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του κεφαλαίου 2.3.1.

Θεώρημα 3.4. Έστω $n \geq 2$, και θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)}$ όπως στη σχέση (3.1). Τότε:

α) Η καλύτερη δυνατή σχέση για το $c_{d+1} = c_{2n-2}$ στην (2.12) καθώς $n \rightarrow \infty$ είναι $O(2^{-(2n-2)}(2n-2)!)$.

β) Ο παραπάνω τύπος γινομένου είναι μη ορισμένος.

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τον παρακάτω τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^1 f(t)w^{(2)}(t)dt = \sum_{\nu=1}^n \bar{w}_\nu^{(2,1)} f(\tau_\nu^{(1)}) + \sum_{\mu=1}^{n-2} w_\mu^{*(2,1)} f(\tau_\mu^{*(2)}) + R_n^{*(2,1)}(f), \quad (3.26)$$

όπου $\tau_\mu^{*(2)}$, $\mu = 1, 2, \dots, n-2$, είναι οι ρίζες του $(n-2)$ -οστού βαθμού πολυωνύμου Chebyshev δευτέρου είδους U_{n-2} . Θεωρούμε τώρα τις σχέσεις (2.2) και (2.3) με $\pi_{2n-2}(t) = T_n(t)U_{n-2}(t)$ στη θέση του π_n και έτσι θα έχουμε με τη βοήθεια της (2.3) (με συνάρτηση βάρους $w = w^{(2)}$) ότι

$$\begin{aligned} w_\mu^{*(2,1)} &= \frac{1}{\frac{d}{dt}[T_n(t)U_{n-2}(t)]_{t=\tau_\mu^{*(2)}}} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)U_{n-2}(t)}{t - \tau_\mu^{*(2)}} (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{T_n'(\tau_\mu^{*(2)})U_{n-2}(\tau_\mu^{*(2)}) + T_n(\tau_\mu^{*(2)})U_{n-2}'(\tau_\mu^{*(2)})} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)U_{n-2}(t)}{t - \tau_\mu^{*(2)}} (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{T_n(\tau_\mu^{*(2)})U_{n-2}'(\tau_\mu^{*(2)})} \int_{-1}^1 T_n(t) \frac{U_{n-2}(t)}{t - \tau_\mu^{*(2)}} (1-t^2)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n-2, \end{aligned}$$

λόγω ορθογωνιότητας. Οπότε, ο τύπος (3.26) γίνεται

$$\int_{-1}^1 f(t)w^{(2)}(t)dt = \sum_{\nu=1}^n \bar{w}_\nu^{(2,1)} f(\tau_\nu^{(1)}) + R_n^{*(2,1)}(f),$$

και άρα πλέον ισοδυναμεί με τον τύπο (2.10) με στοιχεία από τη σχέση (3.1). Έτσι, το ίδιο θα ισχύει με τα βάρη και τα σφάλματα δηλαδή $\bar{w}_\nu^{(2,1)} = w_\nu^{(2,1)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, και $R_n^{*(2,1)}(f) = R_n^{(2,1)}(f)$.

Τώρα, εφόσον ο τύπος (3.26) είναι τύπος εκ παραμβολής με βαθμό ακριβείας $2n - 3$ θα ισχύει ότι

$$R_n^{*(2,1)}(f) = \int_{-1}^1 r_{2n-3}^{*(2,1)}(f; t)(1 - t^2)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (3.27)$$

όπου το $r_{2n-3}^{*(2,1)}(f; \cdot)$ είναι το σφάλμα της παρεμβολής στα $2n - 2$ σημεία $\tau_\nu^{(1)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$ και $\tau_\mu^{*(2)}$, $\mu = 1, 2, \dots, n - 2$. Υποθέτοντας ότι η $f \in C^{2n-2}[-1, 1]$, το ίδιο θα ισχύει και για το $r_{2n-3}^{*(2,1)}(f; \cdot)$. Αφού, επιπλέον, $r_{2n-3}^{*(2,1)}(f; \tau_\nu^{(1)}) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, και $r_{2n-3}^{*(2,1)}(f; \tau_\mu^{*(2)}) = 0$, $\mu = 1, 2, \dots, n - 2$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.2 με τα εξής δεδομένα:

- $g(\cdot) = r_{2n-3}^{*(2,1)}(f; \cdot)$,
- $m = 2n - 2$,
- $s = 0$,
- $[a, b] = [-1, 1]$,
- $k = 2$,
- $q_2(t) = (t - \tau_1^{(1)})(t - \tau_n^{(1)}) = t^2 - (\tau_1^{(1)})^2$, λόγω της συμμετρίας των σημείων του Chebyshev πρώτου είδους (σχέση (1.10)),

με αποτέλεσμα το εξής

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{i=1}^k \frac{z_i(t)}{q_k'(t_i)} \prod_{\nu=1}^m (t - t_\nu) \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{z_i(t)}{q_2'(t_i)} \prod_{\nu=1}^{2n-2} (t - t_\nu) \\ &= \frac{z_1(t)}{2\tau_1^{(1)}} \prod_{\nu=1}^{2n-2} (t - t_\nu) - \frac{z_2(t)}{2\tau_1^{(1)}} \prod_{\nu=1}^{2n-2} (t - t_\nu). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $\prod_{\nu=1}^{2n-2} (t - t_\nu)$ είναι μονικό και έχει τις ρίζες των $T_n(t)$ και $U_{n-2}(t)$. Έτσι, αφού ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του T_n είναι 2^{n-1} και του $U_{n-2}(t)$ είναι 2^{n-2} θα ισχύει

$$\prod_{\nu=1}^{2n-2} (t - t_\nu) = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1}{2^{n-2}} T_n(t) U_{n-2}(t) = \frac{1}{2^{2n-3}} T_n(t) U_{n-2}(t).$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{z_1(t)}{2\tau_1^{(1)}} \frac{1}{2^{2n-3}} T_n(t) U_{n-2}(t) - \frac{z_2(t)}{2\tau_1^{(1)}} \frac{1}{2^{2n-3}} T_n(t) U_{n-2}(t) \\ &= \frac{1}{2^{2n-2}\tau_1^{(1)}} [z_1(t) T_n(t) U_{n-2}(t) - z_2(t) T_n(t) U_{n-2}(t)]. \end{aligned}$$

Άρα,

$$r_{2n-3}^{*(2,1)}(f; t) = \frac{1}{2^{2n-2}\tau_1^{(1)}} [z_1(t)T_n(t)U_{n-2}(t) - z_2(t)T_n(t)U_{n-2}(t)], \quad (3.28)$$

όπου $z_i \in C^1[-1, 1]$, $i = 1, 2$, κάθε z_i έχει μία ρίζα, και υπάρχει $\xi_i = \xi_i(t) \in [-1, 1]$, $i = 1, 2$, τέτοιο ώστε

$$z_i'(t) = \frac{f^{(2n-2)}(\xi_i)}{(2n-2)!}, \quad i = 1, 2. \quad (3.29)$$

Έστω h_1 συνάρτηση τέτοια ώστε

$$h_1(t) = \int_{-1}^t T_n(x)U_{n-2}(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx, \quad (3.30)$$

οπότε

$$h_1'(t) = T_n(t)U_{n-2}(t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.31)$$

Ενσωματώνοντας τώρα τη σχέση (3.28) στη (3.27) και εφαρμόζοντας, με τη βοήθεια της (3.31), ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$R_n^{*(2,1)}(f) = \frac{1}{2^{2n-2}\tau_1^{(1)}} \left[z_1(1)h_1(1) - \int_{-1}^1 z_1'(t)h_1(t)dt - z_2(1)h_1(1) + \int_{-1}^1 z_2'(t)h_1(t)dt \right]. \quad (3.32)$$

Τώρα, θα υπολογίσουμε την $h_1(t)$,

$$h_1(t) = \int_{-1}^t T_n(x)U_{n-2}(x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dx.$$

Λίγο παρακάτω, θα χρειαστούμε επίσης τις εξής τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)], \quad (3.33)$$

και

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]. \quad (3.34)$$

Θέτουμε λοιπόν στην $h_1(t)$ όπου $x = \cos \phi$, $0 \leq \phi \leq \pi$, και άρα $dx = -\sin \phi d\phi$.

Έτσι, θα έχουμε

$$\begin{aligned}
h_1(t) &= - \int_{\pi}^{\cos^{-1} t} T_n(\cos \phi) U_{n-2}(\cos \phi) (1 - \cos^2 \phi)^{\frac{1}{2}} \sin \phi \, d\phi \\
&= \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} \cos n\phi \frac{\sin(n-1)\phi}{\sin \phi} \sin \phi \sin \phi \, d\phi \\
&= \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} \cos n\phi \sin(n-1)\phi \sin \phi \, d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} \cos n\phi [\cos(n-2)\phi - \cos n\phi] \, d\phi, \quad (\text{Βλ. (3.33)}), \\
&= \frac{1}{2} \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} \cos n\phi \cos(n-2)\phi \, d\phi - \frac{1}{2} \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} \cos^2 n\phi \, d\phi \\
&= \frac{1}{4} \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} [\cos 2\phi + \cos 2(n-1)\phi] \, d\phi - \frac{1}{4} \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} (\cos 2n\phi + 1) \, d\phi, \quad (\text{Βλ. (3.34)}), \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{\sin 2\phi}{2} + \frac{\sin 2(n-1)\phi}{2(n-1)} - \phi - \frac{\sin 2n\phi}{2n} \right]_{\cos^{-1} t}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4} \left[-\pi - \frac{\sin 2(\cos^{-1} t)}{2} - \frac{\sin[2(n-1)\cos^{-1} t]}{2(n-1)} + \frac{\sin 2n(\cos^{-1} t)}{2n} + \cos^{-1} t \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[-\pi - \frac{\sin 2\theta}{2} - \frac{\sin 2(n-1)\theta}{2(n-1)} + \frac{\sin 2n\theta}{2n} + \theta \right], \quad (t = \cos \theta), \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{\sin 2n\theta}{2n \sin \theta} - \frac{\sin 2(n-1)\theta}{2(n-1) \sin \theta} - \frac{\sin 2\theta}{2 \sin \theta} \right] \sin \theta - (\pi - \theta) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{U_{2n-1}(t)}{2n} - \frac{U_{2n-3}(t)}{2n-2} - \frac{U_1(t)}{2} \right] (1-t^2)^{\frac{1}{2}} - (\pi - \cos^{-1} t) \right\}, \quad (\text{Βλ. (1.3)}).
\end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|U_m(t)| \leq m+1$, $-1 \leq t \leq 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$ (βλέπε [1, σελ. 25]), και ότι $0 \leq \theta \leq \pi$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|h_1(t)| &\leq \frac{1}{4} \left\{ \left| \frac{U_{2n-1}(t)}{2n} \right| + \left| \frac{U_{2n-3}(t)}{2n-2} \right| + \left| \frac{U_1(t)}{2} \right| \right\} |1-t^2|^{\frac{1}{2}} + |\pi - \cos^{-1} t| \\
&\leq \frac{1}{4} \left(\frac{2n}{2n} + \frac{2n-2}{2n-2} + \frac{2}{2} \right) 1 + \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\pi+3}{4}, \quad -1 \leq t \leq 1,
\end{aligned} \tag{3.35\alpha}$$

και

$$|h_1(1)| = \frac{\pi}{4}. \tag{3.35\beta}$$

Ακόμα, μέσω του θεωρήματος μέσης τιμής, παίρνουμε

$$|z_i(1)| \leq 2 \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-2)}(t)|}{(2n-2)!}, \quad i = 1, 2. \tag{3.36}$$

Έπειτα, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ανισότητα $\cos \theta \geq 1 - \frac{2\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\tau_1^{(1)} &= \cos \frac{\pi}{2n} \geq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \\ \Rightarrow \frac{1}{\tau_1^{(1)}} &\leq \frac{n}{n-1}.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Συνοψίζοντας, από τις σχέσεις (3.29), (3.32), (3.35α), (3.35β), (3.36) και (3.37) καταλήγουμε στο εξής

$$\begin{aligned}|R_n^{(2,1)}(f)| &= |R_n^{*(2,1)}(f)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{2n-2}|\tau_1^{(1)}|} \left[|z_1(1)||h_1(1)| + \int_{-1}^1 |z_1'(t)||h_1(t)|dt + |z_2(1)||h_1(1)| + \int_{-1}^1 |z_2'(t)||h_1(t)|dt \right] \\ &\leq \frac{n}{2^{2n-2}(n-1)} \left[4 \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-2)}(t)|}{(2n-2)!} \frac{\pi}{4} + 4 \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-2)}(t)|}{(2n-2)!} \frac{\pi+3}{4} \right] \\ &= \frac{(2\pi+3)n}{2^{2n-2}(n-1)} \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-2)}(t)|}{(2n-2)!}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$|R_n^{(2,1)}(f)| \leq \frac{(2\pi+3)n}{2^{2n-2}(n-1)} \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-2)}(t)|}{(2n-2)!}.\tag{3.38}$$

Τώρα, θα υπολογίσουμε το σφάλμα $R_n^{(2,1)}(f)$ για $f(t) = t^{2n-2}$. Έχουμε δείξει προηγουμένως ότι $R_n^{(2,1)}(f) = R_n^{(1)}((1-t^2)f(t))$ και λόγω της (2.6) (βλέπε [3, (2.7.10)]) ισχύει

$$\begin{aligned}R_n^{(2,1)}(t^{2n-2}) &= R_n^{(1)}((1-t^2)t^{2n-2}) \\ &= R_n^{(1)}(t^{2n-2}) - R_n^{(1)}(t^{2n}) \\ &= 0 - \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(2n)!} \\ &= -\frac{\pi}{2^{2n-1}}.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Επομένως, η καλύτερη δυνατή σχέση για $c_{d+1} = c_{2n-2}$ στην (2.12) καθώς $n \rightarrow \infty$ είναι $O(2^{-(2n-2)}(2n-2)!)$.

β) Προσθέτοντας τους κόμβους $\tau_0^{(2,1)} = 1$, $\tau_{n+1}^{(2,1)} = -1$ με βάρη $w_0^{(2,1)} = w_{n+1}^{(2,1)} = 0$ και παρατηρώντας από τη σχέση (3.39) ότι $R_n^{(2,1)}(t^{2n-2}) < 0$, όπου $f(t) = t^{2n-2}$ μία συνάρτηση που ανήκει στο $C^{2n-2}[-1, 1]$, $f^{(d+1)}(t) = f^{(2n-2)}(t) = (2n-2)! > 0$ και φυσικά $f^{(d+1)}(t) \not\equiv 0$, βλέπουμε ότι ισχύει η προϋπόθεση γ) της Πρότασης 2.2 (Παράγραφος 2.3.1.), αφού $w_0^{(2,1)} = 0$, $R_n^{(2,1)}(f) < 0$ για $f(t) = t^{2n-2}$. Λόγω αυτού συνεπάγεται ότι ο τύπος μας είναι μή ορισμένος. $\square$

Στη συνέχεια, θα ακολουθήσει ένα θεώρημα παρόμοιο με το προηγούμενο, που αναφέρεται στη συνάρτηση βάρους $w = w^{(2)}$ και κόμβους $\tau_\nu = \tau_\nu^{(3)}$ όπως στη σχέση (3.2).

Θεώρημα 3.5. Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(3)}$ όπως στη σχέση (3.2). Τότε:

α) Η καλύτερη δυνατή σχέση για το $c_{d+1} = c_{2n-1}$ στην (2.12) καθώς $n \rightarrow \infty$ είναι $O(2^{-(2n-1)}(2n-1)!)$.

β) Ο παραπάνω τύπος γινομένου είναι μη ορισμένος.

Απόδειξη:

α) Θεωρούμε τον παρακάτω τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^1 f(t)w^{(2)}(t)dt = \sum_{\nu=1}^n \bar{w}_\nu^{(2,3)} f(\tau_\nu^{(3)}) + \sum_{\mu=1}^{n-1} w_\mu^{*(2,3)} f(\tau_\mu^{*(2)}) + R_n^{*(2,3)}(f). \quad (3.40)$$

όπου $\tau_\mu^{*(2)}$, $\mu = 1, 2, \dots, n-1$, είναι οι ρίζες του $(n-1)$ -οστού βαθμού πολωνύμου Chebyshev δευτέρου είδους U_{n-1} . Θεωρούμε τώρα τις σχέσεις (2.2) και (2.3) με $\pi_{2n-1}(t) = V_n(t)U_{n-1}(t)$ στη θέση του π_n και έτσι θα έχουμε με τη βοήθεια της (2.3) (με συνάρτηση βάρους $w = w^{(2)}$) ότι

$$\begin{aligned} w_\mu^{*(2,3)} &= \frac{1}{\frac{d}{dt}[V_n(t)U_{n-1}(t)]_{t=\tau_\mu^{*(2)}}} \int_{-1}^1 \frac{V_n(t)U_{n-1}(t)}{t - \tau_\mu^{*(2)}} (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{V_n'(\tau_\mu^{*(2)})U_{n-1}(\tau_\mu^{*(2)}) + V_n(\tau_\mu^{*(2)})U_{n-1}'(\tau_\mu^{*(2)})} \int_{-1}^1 \frac{V_n(t)U_{n-1}(t)}{t - \tau_\mu^{*(2)}} (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{V_n(\tau_\mu^{*(2)})U_{n-1}'(\tau_\mu^{*(2)})} \int_{-1}^1 V_n(t) \frac{U_{n-1}(t)}{t - \tau_\mu^{*(2)}} (1-t)(1+t)^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

λόγω ορθογωνιότητας. Οπότε, ο τύπος (3.40) γίνεται

$$\int_{-1}^1 f(t)w^{(2)}(t)dt = \sum_{\nu=1}^n \bar{w}_\nu^{(2,3)} f(\tau_\nu^{(3)}) + R_n^{*(2,3)}(f),$$

και άρα πλέον ισοδυναμεί με τον τύπο (2.10) με στοιχεία από τη σχέση (3.3). Έτσι, το ίδιο θα ισχύει με τα βάρη και τα σφάλματα δηλαδή $\bar{w}_\nu^{(2,3)} = w_\nu^{(2,3)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, και $R_n^{*(2,3)}(f) = R_n^{(2,3)}(f)$.

Τώρα, εφόσον ο τύπος (3.40) είναι τύπος εκ παραμβολής με βαθμό ακριβείας $2n-2$ θα ισχύει ότι

$$R_n^{*(2,3)}(f) = \int_{-1}^1 r_{2n-2}^{*(2,3)}(f; t)(1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (3.41)$$

όπου το $r_{2n-2}^{*(2,3)}(f; \cdot)$ είναι το σφάλμα της παρεμβολής στα $2n-1$ σημεία $\tau_\nu^{(3)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, και $\tau_\mu^{*(2)}$, $\mu = 1, 2, \dots, n-1$. Υποθέτοντας ότι η $f \in C^{2n-1}[-1, 1]$, το

ίδιο θα ισχύει και για το $r_{2n-2}^{*(2,3)}(f; \cdot)$. Αφού, επιπλέον, $r_{2n-2}^{*(2,3)}(f; \tau_\nu^{(1)}) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, και $r_{2n-2}^{*(2,3)}(f; \tau_\mu^{*(2)}) = 0$, $\mu = 1, 2, \dots, n-1$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.2 (παράγραφος 2.3.1) με τα εξής δεδομένα:

- $g(\cdot) = r_{2n-2}^{*(2,3)}(f; \cdot)$,
- $m = 2n - 1$,
- $s = 0$,
- $[a, b] = [-1, 1]$,
- $k = 2$,
- $q_2(t) = (t - \tau_1^{(3)})(t - \tau_n^{(3)}) = t^2 - (\tau_1^{(3)} + \tau_n^{(3)})t + \tau_1^{(3)}\tau_n^{(3)}$,

με αποτέλεσμα το εξής

$$\begin{aligned} g(t) &= \sum_{i=1}^k \frac{z_i(t)}{q'_k(t_i)} \prod_{\nu=1}^m (t - t_\nu) \\ &= \sum_{i=1}^2 \frac{z_i(t)}{q'_2(t_i)} \prod_{\nu=1}^{2n-1} (t - t_\nu) \\ &= \frac{z_1(t)}{\tau_1^{(3)} - \tau_n^{(3)}} \prod_{\nu=1}^{2n-1} (t - t_\nu) - \frac{z_2(t)}{\tau_1^{(3)} - \tau_n^{(3)}} \prod_{\nu=1}^{2n-1} (t - t_\nu). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο $\prod_{\nu=1}^{2n-1} (t - t_\nu)$ είναι μονικό και έχει τις ρίζες των $V_n(t)$ και $U_{n-1}(t)$. Έτσι, αφού ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του V_n είναι 2^n και του $U_{n-1}(t)$ είναι 2^{n-1} θα ισχύει

$$\prod_{\nu=1}^{2n-1} (t - t_\nu) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2^{n-1}} V_n(t) U_{n-1}(t) = \frac{1}{2^{2n-1}} V_n(t) U_{n-1}(t).$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} g(t) &= \frac{z_1(t)}{\tau_1^{(3)} - \tau_n^{(3)}} \frac{1}{2^{2n-1}} V_n(t) U_{n-1}(t) - \frac{z_2(t)}{\tau_1^{(3)} - \tau_n^{(3)}} \frac{1}{2^{2n-1}} V_n(t) U_{n-1}(t) \\ &= \frac{1}{2^{2n-1}(\tau_1^{(3)} - \tau_n^{(3)})} [z_1(t) V_n(t) U_{n-1}(t) - z_2(t) V_n(t) U_{n-1}(t)]. \end{aligned}$$

Άρα,

$$r_{2n-2}^{*(2,3)}(f; t) = \frac{1}{2^{2n-1}(\tau_1^{(3)} - \tau_n^{(3)})} [z_1(t) V_n(t) U_{n-1}(t) - z_2(t) V_n(t) U_{n-1}(t)], \quad (3.42)$$

όπου $z_i \in C^1[-1, 1]$, $i = 1, 2$, κάθε z_i έχει μία ρίζα, και υπάρχει $\xi_i = \xi_i(t) \in [-1, 1]$, $i = 1, 2$, τέτοιο ώστε

$$z_i'(t) = \frac{f^{(2n-1)}(\xi_i)}{(2n-1)!}, \quad i = 1, 2. \quad (3.43)$$

Έστω h_1 συνάρτηση τέτοια ώστε

$$h_1(t) = \int_{-1}^t V_n(x) U_{n-1}(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx, \quad (3.44)$$

οπότε

$$h_1'(t) = V_n(t) U_{n-1}(t) (1-t^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.45)$$

Ενσωματώνοντας τώρα τη σχέση (3.42) στη (3.41) και εφαρμόζοντας, με τη βοήθεια της (3.45), ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$R_n^{*(2,3)}(f) = \frac{1}{2^{2n-1}(\tau_1^{(3)} - \tau_n^{(3)})} \left[z_1(1)h_1(1) - \int_{-1}^1 z_1'(t)h_1(t)dt - z_2(1)h_1(1) + \int_{-1}^1 z_2'(t)h_1(t)dt \right]. \quad (3.46)$$

Τώρα, θα υπολογίσουμε την $h_1(t)$,

$$h_1(t) = \int_{-1}^t V_n(x) U_{n-1}(x) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

Θέτουμε στην $h_1(t)$ όπου $x = \cos \phi$, $0 \leq \phi \leq \pi$, και άρα $dx = -\sin \phi d\phi$, οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
h_1(t) &= - \int_{\pi}^{\cos^{-1} t} V_n(\cos \phi) U_{n-1}(\cos \phi) (1 - \cos^2 \phi)^{\frac{1}{2}} \sin \phi \, d\phi \\
&= \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\phi}{\cos \frac{\phi}{2}} \frac{\sin(n\phi)}{\sin \phi} \sin \phi \, d\phi \\
&= \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi \sin(n\phi) 2 \sin \frac{\phi}{2} \, d\phi \\
&= \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\phi\right) \left[\cos\left(\frac{2n-1}{2}\phi\right) - \cos\left(\frac{2n+1}{2}\phi\right) \right] d\phi \\
&= \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\phi\right) \cos\left(\frac{2n-1}{2}\phi\right) d\phi - \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} \cos^2\left(\frac{2n+1}{2}\phi\right) d\phi \\
&= \frac{1}{2} \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} [\cos \phi + \cos 2n\phi] d\phi - \frac{1}{2} \int_{\cos^{-1} t}^{\pi} [\cos(2n+1)\phi + 1] d\phi \\
&= \frac{1}{2} \left[\sin \phi + \frac{\sin 2n\phi}{2n} - \phi - \frac{\sin(2n+1)\phi}{2n+1} \right]_{\cos^{-1} t}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2} \left[-\pi - \sin(\cos^{-1} t) - \frac{\sin(2n \cos^{-1} t)}{2n} + \frac{\sin[(2n+1) \cos^{-1} t]}{2n+1} + \cos^{-1} t \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[-\pi - \sin \theta - \frac{\sin 2n\theta}{2n} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} + \theta \right], \quad (t = \cos \theta), \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\sin(2n+1)\theta}{(2n+1) \sin \theta} - \frac{\sin 2n\theta}{2n \sin \theta} - 1 \right] \sin \theta - (\pi - \theta) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{U_{2n}(t)}{2n+1} - \frac{U_{2n-1}(t)}{2n} - 1 \right] (1-t^2)^{\frac{1}{2}} - (\pi - \cos^{-1} t) \right\}.
\end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|U_m(t)| \leq m+1$, $-1 \leq t \leq 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$ (βλέπε [1, σελ. 25]) και ότι $0 \leq \theta \leq \pi$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|h_1(t)| &\leq \frac{1}{2} \left\{ \left[\left| \frac{U_{2n-1}(t)}{2n} \right| + \left| \frac{U_{2n}(t)}{2n+1} \right| + 1 \right] |1-t^2|^{\frac{1}{2}} + |\pi - \cos^{-1} t| \right\} \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{2n} + \frac{2n+1}{2n+1} + 1 \right) 1 + \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi+3}{2}, \quad -1 \leq t \leq 1,
\end{aligned} \tag{3.47\alpha}$$

και

$$|h_1(1)| = \pi/2. \tag{3.47\beta}$$

Ακόμα, από θεώρημα μέσης τιμής παίρνουμε

$$|z_i(1)| \leq 2 \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-1)}(t)|}{(2n-1)!}, \quad i = 1, 2. \tag{3.48}$$

Έπειτα, θα χρησιμοποιήσουμε την τριγωνομετρική ανισότητα $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq$

$\pi/2$, καθώς και την $\cos b - \cos a = 2 \sin(\frac{a-b}{2}) \sin(\frac{a+b}{2})$ και θα πάρουμε

$$\begin{aligned}
|\tau_1^{(3)} - \tau_n^{(3)}| &= \left| \cos \frac{\pi}{2n+1} - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} \right| \\
&= 2 \left| \sin \frac{n\pi}{2n+1} \sin \frac{(n-1)\pi}{2n+1} \right| \\
&= 2 \sin \frac{n\pi}{2n+1} \sin \frac{(n-1)\pi}{2n+1} \\
&\geq 2 \frac{2n}{2n+1} \frac{2(n-1)}{2n+1} \\
&= \frac{8n(n-1)}{(2n+1)^2} \\
&\Rightarrow \frac{1}{|\tau_1^{(3)} - \tau_n^{(3)}|} \leq \frac{(2n+1)^2}{8n(n-1)}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Συνοψίζοντας, από τις σχέσεις (3.43), (3.46), (3.47α), (3.47β), (3.48) και (3.49) καταλήγουμε στο εξής

$$\begin{aligned}
|R_n^{(2,3)}(f)| &= |R_n^{*(2,3)}(f)| \leq \\
&\leq \frac{1}{2^{2n-1}|\tau_1^{(3)} - \tau_n^{(3)}|} \left[|z_1(1)||h_1(1)| + \int_{-1}^1 |z_1'(t)||h_1(t)|dt + |z_2(1)||h_1(1)| + \int_{-1}^1 |z_2'(t)||h_1(t)|dt \right] \\
&\leq \frac{(2n+1)^2}{2^{2n-1}8n(n-1)} \left[2 \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-1)}(t)|}{(2n-1)!} \pi + 4 \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-1)}(t)|}{(2n-1)!} \frac{\pi+3}{2} \right] \\
&= \frac{(4\pi+6)(2n+1)^2}{2^{2n-1}8n(n-1)} \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-1)}(t)|}{(2n-1)!} \\
&= \frac{(2\pi+3)(n+\frac{1}{2})^2}{2^{2n-1}n(n-1)} \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-1)}(t)|}{(2n-1)!}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$|R_n^{(2,3)}(f)| \leq \frac{(2\pi+3)(n+\frac{1}{2})^2}{2^{2n-1}n(n-1)} \frac{\max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-1)}(t)|}{(2n-1)!}. \tag{3.50}$$

Τώρα, θα υπολογίσουμε το σφάλμα $R_n^{(2,3)}(f)$ για $f(t) = t^{2n-1}$. Έχουμε δείξει προηγουμένως ότι $R_n^{(2,3)}(f) = R_n^{(3)}((1-t)f(t))$ και λόγω της (2.8), (βλέπε [3, (2.7.10)]), ισχύει

$$\begin{aligned}
R_n^{(2,3)}(t^{2n-1}) &= R_n^{(3)}((1-t)t^{2n-1}) \\
&= R_n^{(3)}(t^{2n-1}) - R_n^{(3)}(t^{2n}) \\
&= 0 - \frac{\pi(2n)!}{2^{2n}(2n)!} \\
&= -\frac{\pi}{2^{2n}}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Επομένως, η καλύτερη δυνατή σχέση για $c_{d+1} = c_{2n-1}$ στην (2.12) καθώς $n \rightarrow \infty$ είναι $O(2^{-(2n-1)}(2n-1)!)$

β) Προσθέτοντας τους κόμβους $\tau_0^{(2,3)} = 1$, $\tau_{n+1}^{(2,3)} = -1$ με βάρη $w_0^{(2,3)} = w_{n+1}^{(2,3)} = 0$ και παρατηρώντας από τη σχέση (3.51) ότι $R_n^{(2,3)}(t^{2n-1}) < 0$, όπου $f(t) = t^{2n-1}$ μία συνάρτηση που ανήκει στο $C^{2n-1}[-1, 1]$, $f^{(d+1)}(t) = f^{(2n-1)}(t) = (2n-1)! > 0$ και φυσικά $f^{(d+1)}(t) \not\equiv 0$, βλέπουμε ότι ισχύει η προϋπόθεση γ) της Πρότασης 2.2 (Παράγραφος 2.3.1.), αφού $w_0^{(2,3)} = 0$, $R_n^{(2,3)}(f) < 0$ για $f(t) = t^{2n-1}$. Οπότε, και σε αυτήν την περίπτωση ο τύπος μας είναι μή ορισμένος. $\square$

Το θεώρημα που θα ακολουθήσει αφορά τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(4)}$. Εδώ τα πράγματα θα είναι πιο απλά, καθώς λόγω των παρατηρήσεων (3.21), (3.22) και (3.23) τα αποτελέσματα της περίπτωσης αυτής θα αναχθούν στα αποτελέσματα της περίπτωσης $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(3)}$. Έτσι λοιπόν, θα έχουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.6. Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(4)}$ όπως στη σχέση (3.3). Τότε:

α) Η καλύτερη δυνατή σχέση για το $c_{d+1} = c_{2n-1}$ στην (2.12) καθώς $n \rightarrow \infty$ είναι $O(2^{-(2n-1)}(2n-1)!)$.

β) Ο παραπάνω τύπος γινομένου είναι μη ορισμένος.

Απόδειξη:

α) Από τη σχέση (3.23) έχουμε ότι

$$R_n^{(2,4)}(f(\cdot)) = R_n^{(2,3)}(f(-\cdot)),$$

και αφού παραπάνω δείξαμε ότι

$$|R_n^{(2,3)}(f)| \leq \frac{(2\pi+3)(n+\frac{1}{2})^2 \max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-1)}(t)|}{2^{2n-1}n(n-1)(2n-1)!},$$

τότε θα ισχύει

$$|R_n^{(2,4)}(f)| \leq \frac{(2\pi+3)(n+\frac{1}{2})^2 \max_{-1 \leq t \leq 1} |f^{(2n-1)}(t)|}{2^{2n-1}n(n-1)(2n-1)!}.$$

Σύμφωνα με τη σχέση (3.51) έχουμε ότι

$$R_n^{(2,3)}(t^{2n-1}) = -\frac{\pi}{2^{2n}},$$

οπότε λόγω της (3.23) θα ισχύει ότι

$$R_n^{(2,4)}(t^{2n-1}) = R_n^{(2,3)}(-t^{2n-1}) = \frac{\pi}{2^{2n}}. \quad (3.52)$$

Επομένως, και σε αυτήν την περίπτωση η καλύτερη δυνατή σχέση για το $c_{d+1} = c_{2n-1}$ στην (2.12) καθώς $n \rightarrow \infty$ είναι $O(2^{-(2n-1)}(2n-1)!)$.

β) Λόγω της σχέσης (3.52) βλέπουμε ότι $R_n^{(2,4)}(t^{2n-1}) > 0$. Οπότε, εφόσον $d = 2n - 2$ έχουμε ότι για $f(t) = t^{2n-1}$ ισχύει $f \in C^{2n-1}[-1, 1]$, $f^{(d+1)}(t) = f^{(2n-1)}(t) = (2n-1)! > 0$ και προφανώς $f^{(d+1)}(t) = f^{(2n-1)}(t) \neq 0$. Έτσι, προσθέτοντας τους κόμβους $\tau_0^{(2,4)} = 1$, $\tau_{n+1}^{(2,4)} = -1$ με βάρη $w_0^{(2,4)} = w_{n+1}^{(2,4)} = 0$, παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η προϋπόθεση δ) της Πρότασης 2.2, δηλαδή ότι $w_{n+1} = 0$ και $(-1)^{d+1}R_n(f) < 0$ αφού $R_n^{(2,4)}(t^{2n-1}) = \frac{\pi}{2^{2n}} > 0$ και $d = 2n - 2$. Άρα, ο τύπος μας είναι μη ορισμένος. $\square$

3.4 Φράγματα σφαλμάτων για αναλυτικές συναρτήσεις σε χώρους Hilbert

Επιστρέφουμε τώρα στον τύπο (2.10) με συνάρτηση βάρους και κόμβους που δίνονται από τη σχέση (3.1). Αρχικά, είναι σαφές ότι για να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους (2.20α) ή (2.20β), με στόχο να υπολογίσουμε τη νόρμα $\|R_n^{(2,1)}\|$, θα πρέπει να ισχύει μία εκ των (2.18α) ή (2.18β). Άρα, θα πρέπει να έχουμε κάποια εκτίμηση του προσήμου του σφάλματος $R_n^{(2,1)}(t^k)$, $k \geq 0$.

Μέχρι στιγμής, έχουμε δείξει ότι ο βαθμός ακριβείας του τύπου (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)}$ είναι ίσος με $2n - 3$. Άρα,

$$R_n^{(2,1)}(t^k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2n - 3, \quad (3.53)$$

και από την (3.39) έχουμε

$$R_n^{(2,1)}(t^{2n-2}) < 0.$$

Από την άλλη μεριά, αφού διατυπώσουμε τα τρία επόμενα λήμματα, θα ακολουθήσει η Πρόταση 3.1.

Λήμμα 3.1. Ισχύει ότι

$$\tau_\nu^{(1)} < \tau_1^{(1)}, \quad \nu = 2, 3, \dots, n. \quad (3.54)$$

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $f(t) = \cos t$ είναι γνησίως φθίνουσα για $0 \leq t \leq \pi$, οπότε η συνάρτηση $g(\nu) = \tau_\nu^{(1)} = \cos \frac{2\nu-1}{2n+1}\pi$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, είναι και αυτή γνησίως φθίνουσα αφού $0 < \frac{2\nu-1}{2n+1}\pi < \pi$ για $\nu = 1, 2, \dots, n$. Έτσι, για $\nu > 1 \Rightarrow \tau_\nu^{(1)} < \tau_1^{(1)}$ άρα αποδεικνύεται η (3.54). $\square$

Λήμμα 3.2. Ισχύει ότι

$$\sum_{\nu=1}^n w_\nu^{(2,1)} = \frac{\pi}{2}. \quad (3.55)$$

Απόδειξη:

Θέτουμε στον τύπο (2.10) όπου $f(t) = 1$, οπότε

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^n w_{\nu}^{(2,1)} &= \int_{-1}^1 (1-t^2)^{1/2} dt \\
&= \int_0^{\pi} (1-\cos^2 \theta)^{1/2} \sin \theta \, d\theta, \quad (t = \cos \theta, \, dt = -\sin \theta \, d\theta), \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
&= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

□

Λήμμα 3.3. Ισχύει ότι

$$\frac{(2l)!}{2^{2l}l!(l+1)!} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{l\sqrt{l}}, \quad (3.56)$$

όπου $a_l \simeq b_l$ έχει την έννοια ότι $\frac{a_l}{b_l} \rightarrow 1$ καθώς $l \rightarrow \infty$.

Απόδειξη:

Γνωρίζουμε από τον τύπο του Stirling ότι

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n},$$

οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{(2l)!}{2^{2l}l!(l+1)!} &\simeq \frac{\sqrt{2\pi}(2l)^{2l+1/2}e^{-2l}}{2^{2l}\sqrt{2\pi}l^{l+1/2}e^{-l}\sqrt{2\pi}(l+1)^{l+3/2}e^{-l-1}} \\
&= \frac{e^{l^l}}{\sqrt{\pi}(l+1)^{l+3/2}} \\
&= \frac{e}{\sqrt{\pi}(1+\frac{1}{l})^{l^3/2}} \\
&= \frac{e}{(1+\frac{1}{l})^l} \frac{1}{\sqrt{\pi}l\sqrt{l}}.
\end{aligned}$$

Αλλά,

$$\frac{e}{(1+\frac{1}{l})^l} \frac{1}{\sqrt{\pi}l\sqrt{l}} \sqrt{\pi}l\sqrt{l} \rightarrow 1, \quad l \rightarrow \infty,$$

αφού $(1+\frac{1}{l})^l \rightarrow e$ καθώς $l \rightarrow \infty$.

□

Οπότε, με τη βοήθεια των παραπάνω λημμάτων θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1. Το σφάλμα του τύπου (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)}$ ικανοποιεί

$$R_n^{(2,1)}(t^{2l}) > 0, \quad l \leq k_n^{(2,1)}, \quad (3.57)$$

όπου $k_n^{(2,1)} \geq n$ είναι μία σταθερά.

Απόδειξη:

Θέτοντας στον τύπο (2.10) με συνάρτηση βάρους $w = w^{(2)}$ και κόμβους $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)}$, όπου $f(t) = t^{2l}$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} R_n^{(2,1)}(t^{2l}) &= \int_{-1}^1 t^{2l}(1-t^2)^{1/2} dt - \sum_{\nu=1}^n w_\nu^{(2,1)}(\tau_\nu^{(1)})^{2l} \\ &> \frac{(2l)!}{2^{2l+1}l!(l+1)!} \pi - (\tau_1^{(1)})^{2l} \sum_{\nu=1}^n w_\nu^{(2,1)}, \quad (\text{λόγω της (3.54)}), \\ &= \frac{(2l)!}{2^{2l+1}l!(l+1)!} \pi - (\tau_1^{(1)})^{2l} \frac{\pi}{2}, \quad (\text{λόγω της (3.55)}), \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{(2l)!}{2^{2l}l!(l+1)!} - (\tau_1^{(1)})^{2l} \right] \\ &\simeq \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi l} \sqrt{l}} - (\tau_1^{(1)})^{2l} \right], \quad (\text{λόγω της (3.56)}). \end{aligned}$$

Άρα, θα πρέπει να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{\pi l} \sqrt{l}} - (\tau_1^{(1)})^{2l} > 0,$$

το οποίο ισχύει αφού

$$\lim_{l \rightarrow \infty} l \sqrt{l} (\tau_1^{(1)})^{2l} = 0.$$

□

Λόγω των σχέσεων (3.39), (3.53) και (3.57) είναι ξεκάθαρο ότι το $R_n^{(2,1)}(t^{2l})$ δε διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $l \geq 0$, ενώ παράλληλα, λόγω συμμετρίας, ισχύει ότι $R_n^{(2,1)}(t^{2l-1}) = 0$, $l \geq n$. Έτσι, η νόρμα $\|R_n^{(2,1)}\|$ δε μπορεί να υπολογιστεί μέσω των τύπων (2.20α) και (2.20β) αφού θα πρέπει να ισχύει μια εκ των (2.18α) και (2.18β). Οπότε, η άλλη επιλογή που έχουμε για να υπολογίσουμε τη $\|R_n^{(2,1)}\|$ είναι να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της, δηλαδή τη σχέση (2.17).

Έτσι, θα έχουμε, λόγω της (3.9),

$$\begin{aligned} \|R_n^{(2,1)}\| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n^{(2,1)}(t^{2k})|}{r^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n^{(1)}(t^{2k}) - R_n^{(1)}(t^{2k+2})|}{r^{2k}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n^{(1)}(t^{2k})|}{r^{2k}} + r^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n^{(1)}(t^{2k+2})|}{r^{2k+2}}. \end{aligned}$$

Τώρα, εφόσον ο τύπος Gauss-Chebyshev πρώτου είδους είναι θετικά ορισμένος, ισχύει ότι $R_n^{(1)}(t^{2k}) \geq 0$, $k \geq 0$, (βλέπε (2.5)). Επίσης, λόγω συμμετρίας, ισχύει $R_n^{(1)}(t^{2k+1}) = 0$, άρα καταλήγουμε ότι

$$\|R_n^{(2,1)}\| \leq (r^2 + 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{R_n^{(1)}(t^{2k})}{r^{2k}} = (r^2 + 1)\|R_n^{(1)}\|,$$

όπου

$$\|R_n^{(1)}\| = \frac{2\pi r \tau^{2n}}{(1 + \tau^{2n})\sqrt{r^2 - 1}}, \quad n \geq 1.$$

(βλέπε [9, Θεώρημα 3.2(α)]). Οπότε, προκύπτει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.7. Έστω $n \geq 2$, και θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_n = \tau_n^{(1)}$ όπως στη σχέση (3.1). Τότε αν $\tau = r - \sqrt{r^2 - 1}$, θα έχουμε

$$\|R_n^{(2,1)}\| \leq \frac{2\pi r \tau^{2n}(r^2 + 1)}{(1 + \tau^{2n})\sqrt{r^2 - 1}}. \quad (3.58)$$

Θα προχωρήσουμε τώρα, στην περίπτωση όπου ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) έχει συνάρτηση βάρους $w = w^{(2)}$ και κόμβους $\tau_n = \tau_n^{(3)}$. Όπως και προηγουμένως, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό (2.17) της νόρμας του σφάλματος. Έτσι λοιπόν, θα έχουμε το εξής:

$$\begin{aligned} \|R_n^{(2,3)}\| &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n^{(2,3)}(t^{2k})|}{r^{2k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n^{(3)}(t^{2k}) - R_n^{(3)}(t^{2k+1})|}{r^{2k}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n^{(3)}(t^{2k})|}{r^{2k}} + r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|R_n^{(3)}(t^{2k+1})|}{r^{2k+1}} \\ &= \|R_n^{(3)}\| + r\|R_n^{(3)}\| \\ &= (1 + r)\|R_n^{(3)}\|, \end{aligned}$$

όπου

$$\|R_n^{(3)}\| = \frac{2\pi r \tau^{2n+1}}{1 + \tau^{2n+1}} \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}, \quad n \geq 1.$$

(βλέπε [9, Θεώρημα 3.2(c)]). Επομένως, προκύπτει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.8. Έστω $n \geq 2$, και θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_n = \tau_n^{(3)}$ όπως στη σχέση (3.2). Τότε αν $\tau = r - \sqrt{r^2 - 1}$, θα έχουμε

$$\|R_n^{(2,3)}\| \leq \frac{2\pi r \tau^{2n+1}(r+1)}{1 + \tau^{2n+1}} \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}. \quad (3.59)$$

Τέλος, όσον αφορά τη συνάρτηση βάρους $w = w^{(2)}$ με κόμβους $\tau_n = \tau_n^{(4)}$, το φράγμα της νόρμας του σφάλματος θα συμπίπτει με αυτό της παραπάνω περίπτωσης

λόγω της σχέσης (3.23) $(R_n^{(2,4)}(f(\cdot)) = R_n^{(2,3)}(f(-\cdot)) \Rightarrow \|R_n^{(2,4)}\| = \|R_n^{(2,3)}\|$.
Ως εκ τούτου, έχουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.9. Έστω $n \geq 2$, και θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(4)}$ όπως στη σχέση (3.3). Τότε αν $\tau = r - \sqrt{r^2 - 1}$, θα έχουμε

$$\|R_n^{(2,4)}\| \leq \frac{2\pi r \tau^{2n+1}(r+1)}{1 + \tau^{2n+1}} \sqrt{\frac{r+1}{r-1}}. \quad (3.60)$$

3.5 Σύγκλιση των τύπων για συναρτήσεις με ανωμαλίες

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα δείξουμε ότι ο τύπος (2.10), με συνάρτηση βάρους και κόμβους που δίνονται από τις σχέσεις (3.1), (3.2) ή (3.3), συγκλίνει για συναρτήσεις που έχουν μια μονότονη ανωμαλία σε ένα ή και στα δύο άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης $[-1, 1]$. Έτσι, υποθέτοντας ότι η συνάρτηση βάρους w δε μηδενίζεται στο $(-1, 1)$, ορίζουμε (όπως είδαμε και στην παράγραφο 2.3.3) την κλάση $\mathcal{M}_w[-1, 1)$, η οποία αποτελείται από συναρτήσεις f τέτοιες ώστε η fw να είναι συνεχής στο ημι-ανοικτό διάστημα $[-1, 1)$ και μονότονη σε κάποια περιοχή του 1, και όπου το $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)w(t)dt$ να υπάρχει. (Ανάλογα ορίζουμε τις $\mathcal{M}_w(-1, 1]$ και $\mathcal{M}_w(-1, 1)$). Οπότε, με τη βοήθεια των Λημμάτων 2.4 και 2.5 της παραγράφου 2.3.3 θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τα παρακάτω θεωρήματα.

Θεώρημα 3.10. Έστω $n \geq 2$, και θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)}$ όπως στη σχέση (3.1). Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = I(f) \quad \forall f \in \mathcal{M}_w^{(2)}.$$

Απόδειξη:

Σκοπός μας είναι να ικανοποιήσουμε τα κριτήρια 1) και 2) του Λήμματος 2.4 ώστε να αποδείξουμε το ζητούμενο. Αρχικά, θα υποθέσουμε ότι $\tau_0^{(1)} = 1$ και θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις όπου $\nu = 1$ και $\nu \geq 2$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|w_\nu^{(2,1)}|}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(1)})} \leq c(\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)}) \quad \forall \nu \geq 1 : \tau_\nu^{(1)} \geq 0.$$

Για $\nu = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{w_1^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_1^{(1)})(\tau_0^{(1)} - \tau_1^{(1)})} &= \frac{\frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n}\right)} \\
&= \frac{\frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{2n}}{1 - \cos \frac{\pi}{2n}} \\
&= \frac{\frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{2n}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{4n}} \\
&= 2 \frac{\frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{\pi}{4n}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{4n}} \\
&= \frac{\pi \cos \frac{\pi}{4n}}{n \sin \frac{\pi}{4n}}.
\end{aligned}$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\cos \theta \leq 1 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4n} \leq 1, \quad (3.61)$$

και

$$\begin{aligned}
\sin \theta &\geq \frac{2\theta}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\
\Rightarrow \sin \frac{\pi}{4n} &\geq \frac{1}{2n} \\
\Rightarrow \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4n}} &\leq 2n.
\end{aligned} \quad (3.62)$$

Οπότε, από τις (3.61) και (3.62) έχουμε

$$\frac{w_1^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_1^{(1)})(\tau_0^{(1)} - \tau_1^{(1)})} = \frac{\pi \cos \frac{\pi}{4n}}{n \sin \frac{\pi}{4n}} \leq \frac{\pi}{n} \cdot 1 \cdot 2n = 2\pi.$$

Άρα,

$$\frac{w_1^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_1^{(1)})} \leq 2\pi(\tau_0^{(1)} - \tau_1^{(1)}). \quad (3.63)$$

Τώρα, για $\nu = 2, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{w_\nu^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(1)})(\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)})} &= \frac{\frac{\pi}{n} \sin^2 \frac{2\nu-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{2n} \pi \left(\cos \frac{2\nu-3}{2n} \pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi \right)} \\ &= \frac{\frac{\pi}{n} \sin \frac{2\nu-1}{2n} \pi}{\cos \frac{2\nu-3}{2n} \pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi}. \end{aligned}$$

Θα εξετάσουμε πρώτα την ποσότητα

$$\cos \frac{2\nu-3}{2n} \pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi = 2 \sin \frac{4\nu-4}{4n} \pi \sin \frac{2\pi}{4n} = 2 \sin \frac{\nu-1}{n} \pi \sin \frac{\pi}{2n}.$$

Τώρα, αφού $\nu = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$, θα ισχύει ότι

$$0 \leq \frac{\nu-1}{n} \pi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2},$$

και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, οπότε έχουμε

$$2 \sin \frac{\nu-1}{n} \pi \sin \frac{\pi}{2n} \geq 2 \frac{2(\nu-1)}{n} \frac{1}{n} = \frac{4(\nu-1)}{n^2},$$

και έτσι

$$\frac{1}{\cos \frac{2\nu-3}{2n} \pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi} = \frac{1}{2 \sin \frac{\nu-1}{n} \pi \sin \frac{\pi}{2n}} \leq \frac{n^2}{4(\nu-1)}. \quad (3.64)$$

Επίσης, λόγω της τριγωνομετρικής ανισότητας $\sin \theta \leq \theta$ για $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ έχουμε ότι

$$\sin \frac{2\nu-1}{2n} \pi \leq \frac{2\nu-1}{2n} \pi. \quad (3.65)$$

Έτσι, από (3.64) και (3.65) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{w_\nu^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(1)})(\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)})} &= \frac{\frac{\pi}{n} \sin \frac{2\nu-1}{2n} \pi}{\cos \frac{2\nu-3}{2n} \pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n} \pi} \\ &\leq \frac{\pi}{n} \frac{2\nu-1}{2n} \pi \frac{n^2}{4(\nu-1)} \\ &= \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{2\nu-1}{\nu-1} \right), \quad \nu = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $\frac{2\nu-1}{\nu-1}$ εφόσον $\nu = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$ λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της για $\nu = 2$, δηλαδή

$$\frac{2\nu-1}{\nu-1} \leq \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 3,$$

συνεπώς

$$\frac{\pi^2}{8} \left(\frac{2\nu - 1}{\nu - 1} \right) \leq \frac{\pi^2}{8} 3 = \frac{3\pi^2}{8}.$$

Οπότε,

$$\frac{w_\nu^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(1)})} \leq \frac{3\pi^2}{8} (\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)}), \quad \nu = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

Άρα, καταλήγουμε ότι

$$\frac{w_\nu^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(1)})} \leq c(\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)}) \quad \forall \nu \geq 1 : \tau_\nu^{(1)} \geq 0,$$

όπου $c = \max\{2\pi, \frac{3\pi^2}{8}\} = 2\pi$ και τελικά

$$\frac{w_\nu^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(1)})} \leq 2\pi(\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)}), \quad \nu = 1, 2, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

Έτσι, μέσω της τελευταίας μας σχέσης ικανοποιείται η προϋπόθεση 2) του Λήμματος 2.4 (Παράγραφος 2.3.3) και αυτομάτως ικανοποιείται η 2'), μιας όπως έχουμε δείξει ότι ο τύπος μας είναι συμμετρικός.

Τώρα, θα δείξουμε ότι ικανοποιείται και η προϋπόθεση 1) του παραπάνω λήμματος. Δηλαδή, θέλουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(g) = I(g) \quad \forall gw^{(2)} \in C[-1, 1]. \quad (3.66)$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

i) Αν $g \in C[-1, 1]$ τότε από γνωστό αποτέλεσμα των Polya-Steklov (βλέπε Λήμμα 2.5) η παραπάνω σύγκλιση προκύπτει από τη θετικότητα των βαρών $w_\nu^{(2,1)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$.

ii) Αν $gw^{(2)} \in C[-1, 1]$, αλλά $g \notin C[-1, 1]$, τότε ο τύπος (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν τύπος εκ παρεμβολής με κόμβους $\tau_\nu = \tau_\nu^{(1)}$ και βάρη $\frac{w_\nu^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(1)})}$ για τη συνάρτηση $g(t)w^{(2)}(t)$. Τότε, το ζητούμενο προκύπτει από το αποτέλεσμα των Polya-Steklov αφού λόγω της συμμετρίας των σημείων του Chebyshev πρώτου είδους (1.10) έχουμε

-Αν n άρτιος

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \frac{w_\nu^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(1)})} &= 2 \sum_{\nu=1}^{n/2} \frac{w_\nu^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(1)})} \\ &< 2 \cdot 2\pi \sum_{\nu=1}^{n/2} (\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_\nu^{(1)}) = 4\pi \left[1 - \cos \frac{n-1}{2n} \pi \right] \\ &< 4\pi. \end{aligned}$$

-Αν n περιττός

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(1)})} &= 2 \sum_{\nu=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{w_{\nu}^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(1)})} - \frac{w_{\frac{n+1}{2}}^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_{\frac{n+1}{2}}^{(1)})} \\
&< 2 \cdot 2\pi \sum_{\nu=1}^{\frac{n+1}{2}} (\tau_{\nu-1}^{(1)} - \tau_{\nu}^{(1)}) = 4\pi \left[1 - \cos \frac{n}{2n} \pi \right] \\
&= 4\pi[1 - 0] \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,1)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(1)})} < 4\pi.$$

και συνεπώς αποδεικνύεται η σχέση (3.66). $\square$

Τώρα, θα αποδείξουμε το ανάλογο θεώρημα για τον τύπο (2.10) με συνάρτηση βάρους δευτέρου είδους και κόμβους τρίτου είδους Chebyshev.

Θεώρημα 3.11. Θεωρούμε τον τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_{\nu} = \tau_{\nu}^{(3)}$ όπως στη σχέση (3.2). Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = I(f) \quad \forall f \in \mathcal{M}_w^{(2)}.$$

Απόδειξη:

Σκοπός μας και σε αυτήν την περίπτωση είναι να ικανοποιήσουμε τα κριτήρια 1), 2) και 2') του Λήμματος 2.4 . Αρχικά, θα υποθέσουμε ότι $\tau_0^{(3)} = 1$ και θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις όπου $\nu = 1$ και $\nu \geq 2$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|w_{\nu}^{(2,3)}|}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} \leq c(\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_{\nu}^{(3)}) \quad \forall \nu \geq 1 : \tau_{\nu}^{(3)} \geq 0.$$

Για $\nu = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{w_1^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_1^{(3)})(\tau_0^{(3)} - \tau_1^{(3)})} &= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{\pi}{2n+1}}{\sin \frac{\pi}{2n+1} \left(1 - \cos \frac{\pi}{2n+1}\right)} \\
&= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{\pi}{2n+1}}{1 - \cos \frac{\pi}{2n+1}} \\
&= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{\pi}{2n+1}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n+1)}} \\
&= 2 \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{\pi}{2(2n+1)} \cos \frac{\pi}{2(2n+1)}}{2 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n+1)}} \\
&= \frac{2\pi}{2n+1} \frac{\cos \frac{\pi}{2(2n+1)}}{\sin \frac{\pi}{2(2n+1)}}.
\end{aligned}$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\cos \theta \leq 1 \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2(2n+1)} \leq 1, \quad (3.67)$$

και

$$\begin{aligned}
\sin \theta &\geq \frac{2\theta}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\
\Rightarrow \sin \frac{\pi}{2(2n+1)} &\geq \frac{1}{2n+1} \\
\Rightarrow \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2(2n+1)}} &\leq 2n+1.
\end{aligned} \quad (3.68)$$

Οπότε, από τις (3.67) και (3.68) έχουμε

$$\frac{w_1^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_1^{(3)})(\tau_0^{(3)} - \tau_1^{(3)})} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{\cos \frac{\pi}{2(2n+1)}}{\sin \frac{\pi}{2(2n+1)}} \leq \frac{2\pi}{2n+1} \cdot 1 \cdot (2n+1) = 2\pi.$$

Άρα,

$$\frac{w_1^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_1^{(3)})} \leq 2\pi(\tau_0^{(3)} - \tau_1^{(3)}). \quad (3.69)$$

Τώρα, για $\nu = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})(\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_\nu^{(3)})} &= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi \left(\cos \frac{2\nu-3}{2n+1} \pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi \right)} \\ &= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi}{\cos \frac{2\nu-3}{2n+1} \pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi}. \end{aligned}$$

Ας εξετάσουμε πρώτα την ποσότητα

$$\cos \frac{2\nu-3}{2n+1} \pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi = 2 \sin \frac{4\nu-4}{2(2n+1)} \pi \sin \frac{2\pi}{2(2n+1)} = 2 \sin \frac{2\nu-2}{2n+1} \pi \sin \frac{\pi}{2n+1}.$$

Αφού $\nu = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$ θα ισχύει ότι

$$0 \leq \frac{2\nu-2}{2n+1} \pi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \frac{\pi}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2},$$

και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, έτσι έχουμε

$$2 \sin \frac{2\nu-2}{2n+1} \pi \sin \frac{\pi}{2n+1} \geq 2 \frac{4(\nu-1)}{2n+1} \frac{2}{2n+1} = \frac{16(\nu-1)}{(2n+1)^2},$$

οπότε,

$$\frac{1}{\cos \frac{2\nu-3}{2n+1} \pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi} = \frac{1}{2 \sin \frac{2\nu-2}{2n+1} \pi \sin \frac{\pi}{2n+1}} \leq \frac{(2n+1)^2}{16(\nu-1)}. \quad (3.70)$$

Επίσης, λόγω της τριγωνομετρικής ανισότητας $\sin \theta \leq \theta$ για $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ έχουμε ότι

$$\sin \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi \leq \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi \quad (3.71)$$

Έτσι, από τις (3.70) και (3.71) έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})(\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_\nu^{(3)})} &= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi}{\cos \frac{2\nu-3}{2n+1} \pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi} \\ &\leq \frac{2\pi}{2n+1} \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi \frac{(2n+1)^2}{16(\nu-1)} \\ &= \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{2\nu-1}{\nu-1} \right), \quad \nu = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Δείξαμε και προηγουμένως ότι η ποσότητα $\frac{2\nu-1}{\nu-1}$ εφόσον $\nu = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $\nu = 2$, έτσι παίρνουμε ότι

$$\frac{\pi^2}{8} \left(\frac{2\nu-1}{\nu-1} \right) \leq \frac{3\pi^2}{8}.$$

Οπότε,

$$\frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})} \leq \frac{3\pi^2}{8} (\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_\nu^{(3)}), \quad \nu = 2, 3, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Άρα, καταλήγουμε ότι

$$\frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})} \leq c(\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_\nu^{(3)}) \quad \forall \nu \geq 1 : \tau_\nu^{(3)} \geq 0,$$

όπου $c = \max\{2\pi, \frac{3\pi^2}{8}\} = 2\pi$ και τελικά

$$\frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})} \leq 2\pi(\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_\nu^{(3)}), \quad \nu = 1, 2, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]. \quad (3.72)$$

Έτσι, μέσω της τελευταίας μας σχέσης ικανοποιείται η προϋπόθεση 2) του Λήμματος 2.4 (Παράγραφος 2.3.3).

Όσον αφορά την προϋπόθεση 2') τώρα, θα υποθέσουμε ότι $\tau_{n+1}^{(3)} = -1$ και θα εξετάσουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις όπου $\nu = n+1$ και $\nu \leq n$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|w_{\nu-1}^{(2,3)}|}{w^{(2)}(\tau_{\nu-1}^{(3)})} \leq c(\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_\nu^{(3)}) \quad \forall \nu \leq n+1 : \tau_{\nu-1}^{(3)} \leq 0.$$

Για $\nu = n + 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{w_n^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_n^{(3)})(\tau_n^{(3)} - \tau_{n+1}^{(3)})} &= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2n-1}{2n+1} \pi}{\sin \frac{2n-1}{2n+1} \pi \left(\cos \frac{2n-1}{2n+1} \pi + 1 \right)} \\
&= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{2n-1}{2n+1} \pi}{\cos \frac{2n-1}{2n+1} \pi + 1} \\
&= 2 \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{2n-1}{2(2n+1)} \pi \cos \frac{2n-1}{2(2n+1)} \pi}{2 \cos^2 \frac{2n-1}{2(2n+1)} \pi} \\
&= \frac{2\pi}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n-1}{2(2n+1)} \pi}{\cos \frac{2n-1}{2(2n+1)} \pi} \\
&= \frac{2\pi}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n-1}{2(2n+1)} \pi}{\cos \left[\frac{(2n+1)\pi}{2(2n+1)} - \frac{2\pi}{2(2n+1)} \right]} \\
&= \frac{2\pi}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n-1}{2(2n+1)} \pi}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n+1} \right)} \\
&= \frac{2\pi}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n-1}{2(2n+1)} \pi}{\sin \frac{\pi}{2n+1}}
\end{aligned}$$

Τώρα, γνωρίζουμε ότι

$$\sin \theta \leq 1 \Rightarrow \sin \frac{2n-1}{2(2n+1)} \pi \leq 1, \quad (3.73)$$

και

$$\begin{aligned}
\sin \theta &\geq \frac{2\theta}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\
\Rightarrow \sin \frac{\pi}{2n+1} &\geq \frac{2}{2n+1} \\
\Rightarrow \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} &\leq \frac{2n+1}{2}.
\end{aligned} \quad (3.74)$$

Οπότε, από τις (3.3) και (3.74) έχουμε

$$\frac{w_n^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_n^{(3)})(\tau_n^{(3)} - \tau_{n+1}^{(3)})} = \frac{2\pi}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n-1}{2(2n+1)}\pi}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \leq \frac{2\pi}{2n+1} \cdot 1 \cdot \frac{2n+1}{2} = \pi.$$

Άρα,

$$\frac{w_n^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_n^{(3)})} \leq \pi(\tau_n^{(3)} - \tau_{n+1}^{(3)}). \quad (3.75)$$

Τώρα, για $\nu = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 2, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 3, \dots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{w_{\nu-1}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu-1}^{(3)})(\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_{\nu}^{(3)})} &= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2\nu-3}{2n+1}\pi}{\sin \frac{2\nu-3}{2n+1}\pi \left(\cos \frac{2\nu-3}{2n+1}\pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n+1}\pi \right)} \\ &= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{2\nu-3}{2n+1}\pi}{\cos \frac{2\nu-3}{2n+1}\pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n+1}\pi}. \end{aligned}$$

Ας εξετάσουμε πρώτα την ποσότητα

$$\cos \frac{2\nu-3}{2n+1}\pi - \cos \frac{2\nu-1}{2n+1}\pi = 2 \sin \frac{4\nu-4}{2(2n+1)}\pi \sin \frac{2\pi}{2(2n+1)} = 2 \sin \frac{2\nu-2}{2n+1}\pi \sin \frac{\pi}{2n+1}.$$

Αφού $\nu = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 2, \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 3, \dots, n$, ισχύει ότι

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{2\nu-2}{2n+1}\pi \leq \pi,$$

και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα $\sin \theta \geq \frac{2(\pi-\theta)}{\pi}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, οπότε θα έχουμε

$$\sin \frac{2\nu-2}{2n+1}\pi \geq \frac{2(\pi - \frac{2\nu-2}{2n+1}\pi)}{\pi} = \frac{4(n-\nu)+6}{2n+1}, \quad (3.76)$$

ενώ ταυτόχρονα ισχύει ότι

$$0 \leq \frac{\pi}{2n+1}\pi \leq \frac{\pi}{2},$$

επομένως

$$\sin \frac{\pi}{2n+1} \geq \frac{2}{2n+1}. \quad (3.77)$$

Αντιστρέφοντας τις σχέσεις (3.76) και (3.77) θα έχουμε ότι

$$\frac{1}{\sin \frac{2\nu-2}{2n+1}\pi} \leq \frac{2n+1}{4(n-\nu)+6}, \quad (3.78)$$

και

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2}. \quad (3.79)$$

Επίσης, ακόμη μία τριγωνομετρική ανισότητα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η $\sin \theta \leq \pi - \theta$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, η οποία αφού

$$\frac{\pi}{2} \leq \frac{2\nu-3}{2n+1}\pi \leq \pi,$$

θα μας δώσει

$$\sin \frac{2\nu-3}{2n+1}\pi \leq \frac{2(n-\nu)+4}{2n+1}\pi. \quad (3.80)$$

Έτσι, από (3.78), (3.79) και (3.80) προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{w_{\nu-1}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu-1}^{(3)})(\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_{\nu}^{(3)})} &= \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin \frac{2\nu-3}{2n+1}\pi}{2 \sin \frac{2\nu-2}{2n+1}\pi \sin \frac{\pi}{2n+1}} \\ &\leq \frac{\pi}{2n+1} \frac{2(n-\nu)+4}{2n+1} \pi \frac{2n+1}{2} \frac{2n+1}{4(n-\nu)+6} \\ &= \frac{1}{4} \frac{n-\nu+2}{n-\nu+\frac{3}{2}} \pi^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \frac{4}{3} \pi^2 \\ &= \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

Οπότε,

$$\frac{w_{\nu-1}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu-1}^{(3)})} \leq \frac{\pi^2}{3} (\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_{\nu}^{(3)}), \quad \nu = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 3, \dots, n.$$

Άρα, καταλήγουμε ότι

$$\frac{w_{\nu-1}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu-1}^{(3)})} \leq c(\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_{\nu}^{(3)}) \quad \forall \nu \leq n+1 : \tau_{\nu-1}^{(3)} \leq 0,$$

όπου $c = \max\{\pi, \frac{\pi^2}{3}\} = \frac{\pi^2}{3}$ και τελικά

$$\frac{w_{\nu-1}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu-1}^{(3)})} \leq \frac{\pi^2}{3} (\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_{\nu}^{(3)}), \quad \nu = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 2, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 3, \dots, n+1. \quad (3.81)$$

Τώρα, όπως και στο προηγούμενο θεώρημα, θα δείξουμε ότι ικανοποιείται και η προϋπόθεση 1) του παραπάνω λήμματος. Δηλαδή, θέλουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(g) = I(g) \quad \forall g w^{(2)} \in C[-1, 1]. \quad (3.82)$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

i) Αν $g \in C[-1, 1]$ τότε από γνωστό αποτέλεσμα των Polya-Steklov (βλέπε Λήμμα 2.5) η παραπάνω σύγκλιση προκύπτει από τη θετικότητα των βαρών $w_\nu^{(2,3)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n$.

ii) Αν $gw^{(2)} \in C[-1, 1]$, αλλά $g \notin C[-1, 1]$, τότε ο τύπος (2.10) με $w = w^{(2)}$ και $\tau_\nu = \tau_\nu^{(3)}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν τύπος εκ παρεμβολής με κόμβους $\tau_\nu = \tau_\nu^{(3)}$ και βάρη $\frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})}$ για τη συνάρτηση $g(t)w^{(2)}(t)$. Τότε, το ζητούμενο προκύπτει και πάλι από το αποτέλεσμα των Polya-Steklov αφού έχουμε:

-Αν n άρτιος

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})} = \sum_{\nu=1}^{n/2} \frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})} + \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^n \frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})}, \quad (3.83)$$

όπου λόγω της (3.72) ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n/2} \frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})} &\leq 2\pi \sum_{\nu=1}^{n/2} (\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_\nu^{(3)}) \\ &= 2\pi \left[1 - \cos \frac{n-1}{2n+1} \pi \right] \\ &< 2\pi \cdot 1 = 2\pi, \end{aligned}$$

(αφού η γωνία $\frac{n-1}{2n+1}\pi$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο) και έτσι,

$$\sum_{\nu=1}^{n/2} \frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})} < 2\pi. \quad (3.84)$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^n \frac{w_\nu^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_\nu^{(3)})} &= \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^n \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi} \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^n \sin \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^n \sin \left[(2\nu-1) \frac{\pi}{2n+1} \right]. \end{aligned}$$

Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$\sum_{\nu=1}^n \sin(2\nu-1)\theta = \csc \theta \sin^2 n\theta, \quad (3.85)$$

(βλέπε [12, 1.342.3]). Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned}
& \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^n \sin \left[(2\nu-1) \frac{\pi}{2n+1} \right] = \\
&= \frac{2\pi}{2n+1} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \sin \left[(2\nu-1) \frac{\pi}{2n+1} \right] - \sum_{\nu=1}^{n/2} \sin \left[(2\nu-1) \frac{\pi}{2n+1} \right] \right\} \\
&= \frac{2\pi}{2n+1} \left[\csc \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) - \csc \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2(2n+1)} \right) \right] \\
&= \frac{2\pi}{2n+1} \csc \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \left[\sin^2 \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) - \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2(2n+1)} \right) \right].
\end{aligned}$$

Πριν φράξουμε την παραπάνω ποσότητα πρέπει να αποδείξουμε ότι είναι θετική. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι

$$\sin^2 \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) - \sin^2 \left[\frac{n\pi}{2(2n+1)} \right] > 0.$$

Παρατηρούμε ότι, $0 < \frac{n\pi}{2(2n+1)} < \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2}$ και επίσης γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $\sin x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$. Άρα,

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{n\pi}{2(2n+1)} < \frac{n\pi}{2n+1} < 1 \\
\Rightarrow 0 &< \sin \frac{n\pi}{2(2n+1)} < \sin \frac{n\pi}{2n+1} < 1 \\
\Rightarrow 0 &< \sin^2 \frac{n\pi}{2(2n+1)} < \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1} < 1.
\end{aligned}$$

Λόγω του παραπάνω, εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$0 < \sin^2 \frac{n\pi}{2n+1} - \sin^2 \frac{n\pi}{2(2n+1)} < 1. \quad (3.86)$$

Επίσης, από την ανισότητα $\sin \theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, παίρνουμε

$$\sin \frac{\pi}{2n+1} \geq \frac{2}{2n+1} \Rightarrow \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2} \Rightarrow \csc \frac{\pi}{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2}. \quad (3.87)$$

Οπότε, λόγω των (3.86) και (3.87) έχουμε

$$\frac{2\pi}{2n+1} \csc \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \left[\sin^2 \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) - \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2(2n+1)} \right) \right] < \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot 1 = \pi.$$

Άρα,

$$\sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} < \pi. \quad (3.88)$$

Έτσι, επιστρέφοντας στη σχέση (3.83), με τη βοήθεια των σχέσεων (3.84) και (3.88), καταλήγουμε ότι

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} = \sum_{\nu=1}^{\frac{n}{2}} \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} + \sum_{\nu=\frac{n}{2}+1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} < 2\pi + \pi = 3\pi. \quad (3.89)$$

-Αν n περιττός

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} = \sum_{\nu=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} + \sum_{\nu=\frac{n+1}{2}+1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})}, \quad (3.90)$$

όπου λόγω της (3.72) ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} &\leq 2\pi \sum_{\nu=1}^{\frac{n+1}{2}} (\tau_{\nu-1}^{(3)} - \tau_{\nu}^{(3)}) \\ &= 2\pi \left[1 - \cos \frac{n}{2n+1} \pi \right] \\ &< 2\pi \cdot 1 = 2\pi, \end{aligned}$$

(αφού η γωνία $\frac{n}{2n+1}\pi$ βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο) και έτσι,

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} < 2\pi. \quad (3.91)$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=\frac{n+1}{2}+1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} &= \sum_{\nu=\frac{n+1}{2}+1}^n \frac{\frac{2\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi}{\sin \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi} \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{\nu=\frac{n+1}{2}+1}^n \sin \frac{2\nu-1}{2n+1} \pi \\ &= \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{\nu=\frac{n+1}{2}+1}^n \sin \left[(2\nu-1) \frac{\pi}{2n+1} \right]. \end{aligned}$$

Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (3.85). Οπότε, έχουμε

$$\begin{aligned}
& \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{\nu=\frac{n+1}{2}+1}^n \sin \left[(2\nu-1) \frac{\pi}{2n+1} \right] = \\
& = \frac{2\pi}{2n+1} \left\{ \sum_{\nu=1}^n \sin \left[(2\nu-1) \frac{\pi}{2n+1} \right] - \sum_{\nu=1}^{\frac{n+1}{2}} \sin \left[(2\nu-1) \frac{\pi}{2n+1} \right] \right\} \\
& = \frac{2\pi}{2n+1} \left[\csc \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) - \csc \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \sin^2 \left(\frac{(n+1)\pi}{2(2n+1)} \right) \right] \\
& = \frac{2\pi}{2n+1} \csc \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \left[\sin^2 \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) - \sin^2 \left(\frac{(n+1)\pi}{2(2n+1)} \right) \right].
\end{aligned}$$

Έτσι, προχωρώντας όπως και στην περίπτωση όπου n άρτιος (βλέπε (3.86)) θα έχουμε

$$\frac{2\pi}{2n+1} \csc \left(\frac{\pi}{2n+1} \right) \left[\sin^2 \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) - \sin^2 \left(\frac{(n+1)\pi}{2(2n+1)} \right) \right] < \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{2n+1}{2} \cdot 1 = \pi.$$

Άρα,

$$\sum_{\nu=\frac{n+1}{2}+1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} < \pi. \quad (3.92)$$

Επιστρέφουμε τώρα στη σχέση (3.90) και με τη βοήθεια των σχέσεων (3.91) και (3.92) καταλήγουμε ότι

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} = \sum_{\nu=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} + \sum_{\nu=\frac{n+1}{2}+1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} < 2\pi + \pi = 3\pi. \quad (3.93)$$

Απο τις σχέσεις (3.89) και (3.93) έχουμε

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{w_{\nu}^{(2,3)}}{w^{(2)}(\tau_{\nu}^{(3)})} < 3\pi. \quad (3.94)$$

και άρα αποδεικνύεται το ζητούμενο . $\square$

Αντίστοιχα αποτελέσματα μπορούν να αποδειχθούν για την περίπτωση όπου ο τύπος (2.10) έχει συνάρτηση βάρους $w = w^{(2)}$ και κόμβους $\tau_{\nu} = \tau_{\nu}^{(4)}$.

4 Αριθμητικά παραδείγματα

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα προχωρήσουμε σε υπολογιστικές εφαρμογές όσων αποδείξαμε θεωρητικά, με σκοπό να διαπιστώσουμε (εκτός από τη θεωρητική) και την πρακτική αξία των τύπων αυτών. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας το προγραμματιστικό περιβάλλον Octave, θα υπολογίσουμε καταρχάς το σφάλμα των τύπων με συνάρτηση βάρους δευτέρου είδους και κόμβους των τεσσάρων ειδών Chebyshev για μια σειρά από συναρτήσεις (Παράδειγμα 1), δηλαδή των εξής τύπων:

$$\int_{-1}^1 f(t)w^{(2)}(t)dt = \sum_{\nu=1}^n w_{\nu}^{(2,1)} f(\tau_{\nu}^{(1)}) + R_n^{(2,1)}(f), \quad (4.1)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)w^{(2)}(t)dt = \sum_{\nu=1}^n w_{\nu}^{(2)} f(\tau_{\nu}^{(2)}) + R_n^{(2)}(f), \quad (4.2)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)w^{(2)}(t)dt = \sum_{\nu=1}^n w_{\nu}^{(2,3)} f(\tau_{\nu}^{(3)}) + R_n^{(2,3)}(f), \quad (4.3)$$

$$\int_{-1}^1 f(t)w^{(2)}(t)dt = \sum_{\nu=1}^n w_{\nu}^{(2,4)} f(\tau_{\nu}^{(4)}) + R_n^{(2,4)}(f). \quad (4.4)$$

Παρατηρούμε ότι οι τύποι (4.1), (4.3) και (4.4) είναι τύποι αριθμητικής ολοκλήρωσης γινομένου με συνάρτηση βάρους και κόμβους που δίνονται από τις σχέσεις (3.1), (3.2) και (3.3) αντίστοιχα, ενώ ο (4.2) είναι ο τύπος Gauss-Chebyshev δευτέρου είδους στον οποίο αναφερθήκαμε στη σχέση (2.7).

Στη συνέχεια, θα προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης που παρουσιάζει μια μονότονη ανωμαλία σε ένα από τα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσης (Παράδειγμα 2), ενώ στο τέλος θα βρούμε φράγματα για το σφάλμα των παραπάνω τύπων για αναλυτικές συναρτήσεις (Παράδειγμα 3). Οι υπολογισμοί έγιναν σε έναν υπολογιστή με επεξεργαστή Intel i3 και διπλή ακρίβεια (ακρίβεια μηχανής 2.22×10^{-16}). Όταν κάποια τιμή είναι κοντά στην ακρίβεια μηχανής σημειώνουμε “α.μ.” αντί για την τιμή αυτή.

Παράδειγμα 1

Θα προσεγγίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 f(t)(1-t^2)^{1/2}dt$ με τη βοήθεια των τύπων (4.1), (4.2), (4.3) και (4.4) όταν η f είναι καθεμιά από τις συναρτήσεις t^{20} , e^t , e^{-t^2} , $1/(1+16t^2)$, e^{-1/t^2} , $|t|^3$ ή $|t+0.5|^{1/2}$. Η πρώτη συνάρτηση είναι ένα μονώνυμο, η δεύτερη και η τρίτη είναι αναλυτικές σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, η τέταρτη είναι αναλυτική σε μια περιοχή του διαστήματος $[-1, 1]$, η πέμπτη είναι C^∞ , η έκτη είναι C^2 και η τελευταία είναι απλά συνεχής. Όλες οι προηγούμενες συναρτήσεις χρησιμοποιήθηκαν από τον Trefethen (βλέπε [13]) προκειμένου να συγκρίνει τον τύπο των Clenshaw-Curtis με τον τύπο του Gauss με n σημεία (βλέπε [14, σελ. 269]). Έτσι λοιπόν, θα κατασκευάσουμε έναν πίνακα που δίνει το σφάλμα καθενός από τους τύπους (4.1), (4.2), (4.3) ή (4.4) καθώς το πλήθος των κόμβων αυξάνεται (Πίνακες 4.1-4.7). (Οι αριθμοί μέσα στις παρενθέσεις δηλώνουν δυνάμεις του 10.)

Πίνακας 4.1: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 t^{20} \sqrt{1-t^2} dt$$

n	Τύπος (4.1)	Τύπος (4.2)	Τύπος (4.3)	Τύπος (4.4)
5	1.884(-2)	1.041(-2)	1.498(-6)	1.498(-6)
10	2.696(-5)	1.498(-6)	α.μ.	α.μ.
15	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.
20	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.2: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 e^t \sqrt{1-t^2} dt$$

n	Τύπος (4.1)	Τύπος (4.2)	Τύπος (4.3)	Τύπος (4.4)
5	1.555(-7)	4.308(-10)	8.629(-9)	8.629(-9)
10	4.440(-16)	α.μ.	α.μ.	α.μ.
15	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.
20	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.3: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 e^{-t^2} \sqrt{1-t^2} dt$$

n	Τύπος (4.1)	Τύπος (4.2)	Τύπος (4.3)	Τύπος (4.4)
5	1.730(-4)	8.498(-6)	2.635(-13)	2.635(-13)
10	1.058(-11)	2.631(-13)	α.μ.	α.μ.
15	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.
20	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.4: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1+16t^2} \sqrt{1-t^2} dt$$

n	Τύπος (4.1)	Τύπος (4.2)	Τύπος (4.3)	Τύπος (4.4)
5	1.488(-1)	8.759(-2)	6.966(-3)	6.966(-3)
10	1.395(-2)	6.966(-3)	4.958(-5)	4.958(-5)
15	9.668(-4)	5.892(-4)	3.515(-7)	3.515(-7)
20	8.134(-5)	4.958(-5)	2.491(-9)	2.491(-9)
40	4.087(-9)	2.491(-9)	α.μ.	α.μ.
80	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.5: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{t^2}} \sqrt{1-t^2} dt$$

n	Τύπος (4.1)	Τύπος (4.2)	Τύπος (4.3)	Τύπος (4.4)
5	3.975(-3)	5.811(-3)	1.440(-4)	1.440(-4)
10	5.271(-4)	1.440(-4)	1.117(-6)	1.117(-6)
15	2.738(-5)	3.621(-6)	1.157(-8)	1.157(-8)
20	2.087(-6)	1.117(-6)	3.854(-9)	3.854(-9)
40	5.806(-9)	3.854(-9)	7.908(-14)	7.908(-14)
80	6.414(-14)	7.914(-14)	α.μ.	α.μ.
160	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.6: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 |t|^3 \sqrt{1-t^2} dt$$

n	Τύπος (4.1)	Τύπος (4.2)	Τύπος (4.3)	Τύπος (4.4)
5	3.385(-3)	1.551(-3)	1.036(-4)	1.036(-4)
10	1.539(-4)	1.036(-4)	7.435(-6)	7.435(-6)
15	3.310(-5)	2.547(-5)	1.550(-6)	1.550(-6)
20	9.054(-6)	7.435(-6)	5.050(-7)	5.050(-7)
40	5.576(-7)	5.050(-7)	3.303(-8)	3.303(-8)
100	1.472(-8)	1.366(-8)	8.704(-10)	8.704(-10)
200	8.880(-10)	8.704(-10)	5.494(-11)	5.494(-11)
500	2.272(-11)	2.254(-11)	α.μ.	α.μ.
1000	α.μ.	α.μ.	α.μ.	α.μ.

Πίνακας 4.7: Το σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{-1}^1 |t + 0.5|^{1/2} \sqrt{1 - t^2} dt$$

n	Τύπος (4.1)	Τύπος (4.2)	Τύπος (4.3)	Τύπος (4.4)
5	1.784(-3)	1.107(-1)	1.696(-2)	3.353(-2)
10	5.118(-3)	8.288(-3)	1.399(-2)	4.759(-2)
15	8.168(-3)	5.775(-3)	1.020(-3)	5.138(-3)
20	7.921(-4)	1.680(-3)	1.397(-3)	3.912(-3)
40	4.572(-4)	1.257(-3)	1.834(-3)	6.273(-3)
100	1.087(-4)	3.294(-4)	4.670(-4)	1.606(-3)
200	3.706(-5)	5.604(-4)	3.902(-5)	1.184(-4)
500	1.158(-5)	1.454(-4)	1.178(-5)	2.782(-5)
1000	5.929(-6)	8.020(-6)	1.220(-5)	2.380(-5)

Πρωτού ξεκινήσουμε την ανάλυση των αποτελεσμάτων μας, βλέπουμε ότι τα σφάλματα των τύπων (4.3) και (4.4) είναι σε πολλές περιπτώσεις ακριβώς ίδια, κάτι που ήδη έχουμε δείξει θεωρητικά μέσω της σχέσης (3.23). Αναλύοντας τώρα τα σφάλματα, το πρώτο γενικό συμπέρασμα που βγάζουμε μέσω των παραπάνω πινάκων, ιδίως των πινάκων 4.1-4.6, είναι ότι οι τύποι (4.3) και (4.4) είναι πιο ακριβείς από τους άλλους δύο. Στον πίνακα 4.7, βλέπουμε ότι τα σφάλματα των τεσσάρων τύπων μας είναι εξαιρετικά κοντά για κάθε πλήθος κόμβων, καθώς ότι ακόμα και για $n = 1000$ το σφάλμα δε φτάνει την ακρίβεια της μηχανής κάτι που σίγουρα σχετίζεται με την ομαλότητα της συνάρτησης. Έτσι, κοιτώντας πιο προσεκτικά, παρατηρούμε ότι όσο πιο ομαλή είναι η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε τόσο λιγότερα σημεία αριθμητικής ολοκλήρωσης χρειάζονται ώστε να επιτευχθεί η υψηλότερη δυνατή ακρίβεια. Συνεπώς, ο βαθμός αποτελεσματικότητας των τεσσάρων παραπάνω τύπων μειώνεται για συναρτήσεις με περιορισμένη ομαλότητα.

Συνολικά λοιπόν, αυτό που προκαλεί εντύπωση είναι η εξαιρετική ακρίβεια των τύπων γινομένου (4.3) και (4.4). Χωρίς να υπάρχει προφανής λόγος, αυτό που μπορούμε να εντοπίσουμε σαν αιτία της ακρίβειας αυτής, είναι η μη συμμετρικότητα των κόμβων. Ενδεχομένως, η μη συμμετρικότητα να συμβάλλει στην αποτελεσματικότητα των τύπων μας, κάτι που θα μπορούσε να αποτελέσει αφορμή για περαιτέρω έρευνα με σκοπό τη σύγκριση πολλών μη συμμετρικών τύπων έναντι συμμετρικών και να οδηγήσει σε τυχόν γενικεύσεις του παραπάνω συμπεράσματος.

Παράδειγμα 2

Θα προσεγγίσουμε την τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^1 t^\alpha \ln(e/t) dt = \frac{\alpha + 2}{(\alpha + 1)^2}, \quad \alpha > -1, \quad (4.5)$$

με τη βοήθεια των τύπων (4.1), (4.2) και (4.3). Να σημειώσουμε ότι στα [10, Κεφάλαιο 5], [15, Κεφάλαιο 4] και [16, Κεφάλαιο 5] το παραπάνω ολοκλήρωμα έχει προσεγγιστεί για αρκετές τιμές του α μέσω των τεσσάρων τύπων Gauss-Chebyshev. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε παρουσιάζει μια μονότονη ανωμαλία στο 0. Επίσης, το διάστημα ολοκλήρωσης δεν είναι το $[-1, 1]$,

οπότε, οι τύποι που αναφέραμε πρέπει να μετασχηματιστούν κατάλληλα. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = 2x - 1$,

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{1}{2}(t+1)\right)dt,$$

οι τύποι (4.1), (4.2) και (4.3) θα πάρουν τη μορφή

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^n w_{\nu}^{(2,1)} [x_{\nu}^{(1)}(1-x_{\nu}^{(1)})]^{-1/2} f(x_{\nu}^{(1)}), \quad x_{\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}(1+\tau_{\nu}^{(1)}), \quad (4.6)$$

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{\pi}{n+1} \sum_{\nu=1}^n [x_{\nu}^{(2)}(1-x_{\nu}^{(2)})]^{1/2} f(x_{\nu}^{(2)}), \quad x_{\nu}^{(2)} = \frac{1}{2}(1+\tau_{\nu}^{(2)}), \quad (4.7)$$

και

$$\int_0^1 f(x)dx \simeq \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^n w_{\nu}^{(2,3)} [x_{\nu}^{(3)}(1-x_{\nu}^{(3)})]^{-1/2} f(x_{\nu}^{(3)}), \quad x_{\nu}^{(3)} = \frac{1}{2}(1+\tau_{\nu}^{(3)}), \quad (4.8)$$

αντίστοιχα. Τα σφάλματα για τις διάφορες τιμές των α και n (πλήθος των σημείων), σε τάξεις του 10^{-6} , φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

Πίνακας 4.8: Το σφάλμα ($\times 10^{-6}$) κατά τον υπολογισμό του $\int_0^1 t^a \ln(e/t) dt$

a	n	Τύπος (4.6)	Τύπος (4.7)	Τύπος (4.8)
$-\frac{1}{2}$	32	67854	512813	518647
	64	33975	293023	294770
	128	17000	164315	164822
	256	8503	90897	91040
	512	4252	49768	49808
	1024	2126	27030	27040
0	32	2131	4555	4099
	64	602	1306	1176
	128	168	365	330
	256	46	101	91
	512	13	27	25
	1024	3	7	6
$\frac{1}{2}$	32	212	391	180
	64	52	99	47
	128	13	25	12
	256	3	6	3
	512	0.8	1.6	0.7
	1024	0.2	0.4	0.1
1	32	200	377	195
	64	50	97	49
	128	13	25	12
	256	3	6	3
	512	0.8	1.6	0.7
	1024	0.2	0.4	0.1

Παρατηρώντας τον Πίνακα 4.8, συμπεραίνουμε ότι τα σφάλματα των τριων τύπων μας βρίσκονται πολύ κοντά, με εξαίρεση την περίπτωση όπου $\alpha = -1/2$. Όταν λοιπόν, το α ισούται με $1/2$ βλέπουμε ότι ο τύπος (4.6) είναι με μικρή διαφορά πιο ακριβής από τους άλλους δύο. Επίσης, όταν $\alpha < 0$, όλοι οι τύποι συγκλίνουν πολύ αργά, πιθανώς λόγω της διπλής ανωμαλίας που παρουσιάζει στο 0 η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε. Ωστόσο, η σύγκλιση επιταχύνεται καθώς το α αυξάνεται από το 0 στο 1. Για αυτές τις τιμές, όλοι οι τύποι είναι ιδιαίτερος αποτελεσματικοί. Συγκρίνοντας λοιπόν τον τύπο των Gauss-Chebyshev δευτέρου είδους (4.7) με τους τύπους γινομένου που ορίσαμε (4.1) και (4.3) καταλήγουμε ότι για το συγκεκριμένο παράδειγμα οι τύποι γινομένου είναι ελάχιστα ακριβέστεροι από αυτόν του Gauss.

Παράδειγμα 3

Σε αυτό το παράδειγμα θα θεωρήσουμε τέσσερις αναλυτικές συναρτήσεις, των οποίων το ολοκλήρωμα θα προσεγγιστεί μέσω των τύπων (4.1), (4.2), (4.3) και (4.4). Είδαμε ότι αν ολοκληρώνουμε μια συνάρτηση $f \in X_r$ (όπως ορίστηκε στην παράγραφο 2.3.2) τότε οδηγούμαστε σε μια εκτίμηση του σφάλματος των παραπάνω τύπων που εξαρτάται από την ημινόρμα $|f|_r$ (βλέπε (2.21)). Ωστόσο, δεδομένου

ότι

$$|f|_r \leq \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

έχουμε

$$|R_n(f)| \leq \|R_n\| \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

για όλα τα σφάλματα των παραπάνω τύπων μας, και θεωρώντας το δεξί μέλος της ανισότητας ως συνάρτηση του r , το φράγμα μπορεί να βελτιστοποιηθεί

$$|R_n(f)| \leq \inf_{1 < r < R} \left(\|R_n\| \max_{|z|=r} |f(z)| \right). \quad (4.9)$$

Για τις συναρτήσεις που ακολουθούν, θα βασιστούμε στην τελευταία εκτίμηση.

-Ας ξεκινήσουμε με το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \frac{t^2}{\omega^2 - t^2} \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi}{2} (\omega - \sqrt{\omega^2 - 1})^2, \quad \omega > 1. \quad (4.10)$$

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2}{\omega^2 - z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+2}}{\omega^{2k+2}}$ είναι ολόμορφη στο $C_\omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \omega\}$, $\omega > 1$, οπότε $f \in X_\omega$. Εφόσον

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \frac{r^2}{\omega^2 - r^2}, \quad 1 < r < \omega,$$

παίρνουμε

$$|R_n(f)| \leq \inf_{1 < r < \omega} \left(\|R_n\| \frac{r^2}{\omega^2 - r^2} \right), \quad (4.11)$$

όπου το $R_n(f)$ αντιστοιχεί στο σφάλμα σε καθέναν από τους τέσσερις προαναφερθέντες τύπους.

Τα αποτελέσματά μας συγκεντρώνονται στους τρεις επόμενους πίνακες. (Οι αριθμοί μέσα στις παρενθέσεις δηλώνουν δυνάμεις του δέκα). Η τιμή του r για την οποία επιτυγχάνεται το infimum στο φράγμα (4.11) βρίσκεται στη στήλη με τίτλο r_{opt} , η οποία είναι τοποθετημένη ακριβώς πριν από τη στήλη με το αντίστοιχο φράγμα.

Πίνακας 4.9α: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του

ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \frac{t^2}{\omega^2 - t^2} \sqrt{1 - t^2} dt$ με τον τύπο (4.1)

ω	n	r_{opt}	Φράγμα (4.11)	Σφάλμα
2	5	1.809	9.001(-4)	4.152(-5)
	10	1.908	3.777(-9)	7.922(-11)
	15	1.940	1.112(-14)	1.511(-16)
	20	1.955	1.434(-20)	α.μ.
4	5	3.509	2.718(-7)	1.064(-7)
	10	3.787	6.403(-16)	1.163(-16)
	15	3.861	5.522(-24)	α.μ.
	20	3.898	8.245(-33)	α.μ.
8	5	6.952	3.769(-9)	3.774(-10)
	10	7.548	7.614(-21)	α.μ.
	15	7.712	1.292(-32)	α.μ.
	20	7.789	1.674(-44)	α.μ.
16	5	13.868	1.383(-11)	1.440(-12)
	10	15.088	3.015(-26)	α.μ.
	15	15.420	4.294(-41)	α.μ.
	20	15.574	5.278(-56)	α.μ.

Πίνακας 4.9β: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του

ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \frac{t^2}{\omega^2 - t^2} \sqrt{1 - t^2} dt$ με τον τύπο (4.2)

ω	n	r_{opt}	Φράγμα (4.11)	Σφάλμα
2	5	1.824	4.334(-5)	2.981(-6)
	10	1.912	1.771(-10)	5.688(-12)
	15	1.942	4.982(-16)	3.211(-16)
	20	1.956	1.275(-20)	α.μ.
4	5	3.595	2.180(-8)	1.716(-9)
	10	3.802	5.018(-17)	α.μ.
	15	3.869	8.322(-26)	α.μ.
	20	3.902	1.225(-34)	α.μ.
8	5	7.164	1.831(-11)	1.477(-12)
	10	7.593	3.654(-23)	α.μ.
	15	7.731	5.282(-35)	α.μ.
	20	7.799	6.740(-47)	α.μ.
16	5	14.315	1.723(-14)	1.190(-14)
	10	15.181	3.268(-29)	α.μ.
	15	15.449	4.275(-44)	α.μ.
	20	15.596	5.398(-59)	α.μ.

Όσον αφορά τους τύπους (4.3) και (4.4), έχουμε δείξει (βλέπε (3.59) και (3.60)) ότι $\|R_n^{(2,3)}\| = \|R_n^{(2,4)}\|$ και επομένως θα έχουν το ίδιο φράγμα. Οπότε, για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων τους αρκεί ο παρακάτω πίνακας.

Πίνακας 4.9γ: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \frac{t^2}{\omega^2 - t^2} \sqrt{1 - t^2} dt$ με τους τύπους (4.3) και (4.4)

ω	n	r_{opt}	Φράγμα (4.11)	Σφάλμα
2	5	1.838	1.754(-4)	5.688(-12)
	10	1.916	6.608(-10)	6.106(-16)
	15	1.943	1.902(-15)	α.μ.
	20	1.957	4.850(-21)	α.μ.
4	5	3.568	2.718(-7)	1.707(-15)
	10	3.801	6.338(-16)	α.μ.
	15	3.864	1.212(-24)	α.μ.
	20	3.902	1.245(-33)	α.μ.
8	5	7.177	4.236(-11)	9.475(-15)
	10	7.596	8.235(-23)	α.μ.
	15	7.732	1.208(-34)	α.μ.
	20	7.799	1.540(-46)	α.μ.
16	5	14.148	5.423(-13)	3.050(-14)
	10	15.143	1.290(-27)	α.μ.
	15	15.442	1.565(-42)	α.μ.
	20	15.586	1.552(-57)	α.μ.

Με βάση τα αποτελέσματα των προηγούμενων πινάκων, παρατηρούμε ότι το φράγμα (4.11) είναι πολύ κοντά στην τιμή του σφάλματος των τύπων (4.1) και (4.2). Μάλιστα, τα αποτελέσματα παραμένουν ικανοποιητικά ακόμα και για μεγάλες τιμές του ω , οπότε δεν φαίνεται να επηρεάζονται από αυτό. Όσον αφορά τους τύπους (4.3) και (4.4) βλέπουμε ότι για μικρό n το φράγμα δεν είναι τόσο καλό, ενώ όσο μεγαλώνει το n η τιμή του φράγματος πλησιάζει αυτή του σφάλματος. Οπότε, φαίνεται να απαιτείται περαιτέρω έρευνα.

– Το δεύτερο ολοκλήρωμα που θα εξετάσουμε είναι το

$$\int_{-1}^1 e^{\omega t^2} \sqrt{1 - t^2} dt. \quad (4.12)$$

Η συνάρτηση $f(z) = e^{\omega z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \omega^k z^{2k}}{k!}$ είναι ολόμορφη στο C , οπότε $f \in X_{\infty}$. Εφόσον

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = e^{\omega r^2},$$

παίρνουμε

$$|R_n(f)| \leq \inf_{1 < r < \infty} \left(\|R_n\| e^{\omega r^2} \right). \quad (4.13)$$

Τα αποτελέσματα μας συνοψίζονται στους παρακάτω τρεις πίνακες.

Πίνακας 4.10α: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του

ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 e^{\omega t^2} \sqrt{1-t^2} dt$ με τον τύπο (4.1)

ω	n	r_{opt}	Φράγμα (4.13)	Σφάλμα
0.5	5	2.989	1.325(-4)	1.956(-5)
	10	4.326	3.505(-13)	4.041(-14)
	15	5.351	5.328(-23)	α.μ.
1	5	2.214	3.358(-3)	3.851(-4)
	10	3.115	2.562(-10)	3.112(-11)
	15	3.826	1.202(-18)	α.μ.
	20	4.427	9.445(-28)	α.μ.
2	5	1.679	1.295(-1)	9.464(-3)
	10	2.281	2.656(-7)	2.126(-8)
	15	2.764	3.739(-14)	2.664(-15)
	20	3.179	9.081(-22)	α.μ.
4	5	1.355	1.127(1)	3.792(-1)
	10	1.718	5.533(-4)	2.864(-5)
	15	2.035	2.211(-9)	1.239(-10)
	20	2.315	1.610(-15)	α.μ.
8	5	1.158	5.115(3)	4.802(1)
	10	1.357	4.815(0)	1.161(-1)
	15	1.551	4.883(-4)	1.582(-5)
	20	1.731	9.989(-9)	3.658(-10)
16	5	1.060	7.970(7)	1.016(5)
	10	1.150	9.126(5)	6.194(3)
	15	1.253	1.798(3)	2.260(1)
	20	1.358	8.780(-1)	1.508(-2)
	30	1.556	8.505(-9)	1.018(-10)

Πίνακας 4.10β: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του

ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 e^{\omega t^2} \sqrt{1-t^2} dt$ με τον τύπο (4.2)

ω	n	r_{opt}	Φράγμα (4.13)	Σφάλμα
0.5	5	3.241	2.930(-6)	4.930(-7)
	10	4.526	4.145(-15)	6.661(-16)
	15	5.523	4.287(-25)	α.μ.
1	5	2.349	1.213(-4)	1.955(-5)
	10	3.242	5.470(-12)	6.537(-13)
	15	3.938	1.807(-20)	α.μ.
	20	4.527	1.093(-29)	α.μ.
2	5	1.743	6.595(-3)	9.738(-4)
	10	2.350	9.393(-9)	1.071(-9)
	15	2.831	9.880(-16)	8.881(-16)
	20	3.242	1.906(-23)	α.μ.
4	5	1.352	6.455(-1)	7.950(-2)
	10	1.744	2.796(-5)	2.894(-6)
	15	2.069	9.219(-11)	8.306(-12)
	20	2.350	5.631(-17)	α.μ.
8	5	1.127	2.400(2)	2.341(1)
	10	1.355	2.756(-1)	2.339(-2)
	15	1.560	2.685(-5)	2.115(-6)
	20	1.745	5.027(-10)	3.666(-11)
16	5	1.031	2.115(6)	8.701(4)
	10	1.134	4.208(4)	2.386(3)
	15	1.247	9.871(1)	5.834(0)
	20	1.357	5.027(-2)	2.972(-3)
	30	1.561	4.672(-10)	2.038(-10)

Πίνακας 4.10γ: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκλήρωματος $\int_{-1}^1 e^{\omega t^2} \sqrt{1-t^2} dt$ με τους τύπους (4.3) και (4.4)

ω	n	r_{opt}	Φράγμα (4.13)	Σφάλμα
0.5	5	3.198	3.240(-5)	6.661(-16)
	10	4.468	5.049(-14)	α.μ.
	15	5.465	6.737(-24)	α.μ.
1	5	2.347	1.392(-3)	6.541(-13)
	10	3.215	6.540(-11)	α.μ.
	15	3.908	2.762(-19)	α.μ.
	20	4.492	1.529(-28)	α.μ.
2	5	1.769	7.759(-2)	1.071(-9)
	10	2.349	1.102(-7)	4.440(-16)
	15	2.828	1.195(-14)	α.μ.
	20	3.228	2.374(-22)	α.μ.
4	5	1.397	9.437(0)	2.895(-6)
	10	1.758	3.280(-4)	3.721(-10)
	15	2.072	1.027(-9)	3.552(-15)
	20	2.345	6.255(-16)	α.μ.
8	5	1.178	5.782(3)	2.339(-2)
	10	1.393	4.086(0)	3.624(-11)
	15	1.574	3.719(-4)	8.526(-13)
	20	1.753	5.872(-9)	2.842(-14)
16	5	1.070	1.122(8)	2.386(3)
	10	1.163	1.083(6)	2.972(-3)
	15	1.268	1.736(3)	2.328(-10)
	20	1.373	7.457(-1)	1.455(-11)
	30	1.567	5.875(-9)	1.368(-12)

Στο παράδειγμα αυτό, παρατηρούμε αντίστοιχη συμπεριφορά των φραγμάτων για τους τύπους (4.1)-(4.4) με αυτή που παρατηρήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

– Το τρίτο ολοκλήρωμα που θα εξετάσουμε είναι το

$$\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{2-t}\right) \sqrt{1-t^2} dt. \quad (4.14)$$

Η συνάρτηση $f(z) = \ln\left(\frac{2}{2-z}\right)$ είναι ολόμορφη στο $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$, οπότε $f \in X_2$. Εφόσον

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \ln\left(\frac{2}{2-r}\right),$$

παίρνουμε

$$|R_n(f)| \leq \inf_{1 < r < 2} \left[\|R_n\| \ln\left(\frac{2}{2-r}\right) \right]. \quad (4.15)$$

Τα αποτελέσματά μας συγκεντρώνονται στους τρεις επόμενους πίνακες.

Πίνακας 4.11α: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{2-t}\right)\sqrt{1-t^2} dt$ με τον τύπο (4.1)

n	r_{opt}	Φράγμα (4.15)	Σφάλμα
5	1.949	3.317(-4)	4.635(-6)
10	1.980	7.574(-10)	3.870(-12)
15	1.988	1.577(-15)	α.μ.
20	1.991	3.177(-21)	α.μ.

Πίνακας 4.11β: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{2-t}\right)\sqrt{1-t^2} dt$ με τον τύπο (4.2)

n	r_{opt}	Φράγμα (4.15)	Σφάλμα
5	1.954	1.463(-5)	2.467(-7)
10	1.981	3.294(-11)	2.495(-13)
15	1.988	6.827(-17)	α.μ.
20	1.992	1.374(-22)	α.μ.

Πίνακας 4.11γ: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{2}{2-t}\right)\sqrt{1-t^2} dt$ με τους τύπους (4.3) και (4.4)

n	r_{opt}	Φράγμα (4.15)	Σφάλμα
5	1.956	1.655(-4)	1.101(-6)
10	1.981	3.702(-10)	9.815(-13)
15	1.989	7.659(-16)	α.μ.
20	1.992	1.540(-21)	α.μ.

Σε αυτό το παράδειγμα, το φράγμα (4.15) δίνει πολύ ικανοποιητικές τιμές, αφού σε καμία περίπτωση δεν υπερβαίνει την τιμή του σφάλματος και των τεσσάρων τύπων μας περισσότερο από δυο τάξεις μεγέθους, σε αντίθεση με τις προηγούμενες δύο συναρτήσεις όπου είδαμε ότι οι τύποι (4.3) και (4.4) δεν έδιναν ικανοποιητικά φράγματα. Αυτό ενδεχομένως να οφείλεται στη δομή της συνάρτησης ολοκλήρωσης στο $[-1, 1]$.

– Τέλος, θα εξετάσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \frac{\cos t}{t^2 + \omega^2} \sqrt{1-t^2} dt. \quad (4.16)$$

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{\cos z}{z^2 + \omega^2}$ είναι ολόμορφη στο C_ω , οπότε $f \in X_\omega$. Έτσι, όπως κάναμε και στις προηγούμενες συναρτήσεις, θα προσεγγίσουμε την ημινόρμα $|f|_r$ της συνάρτησης f με το $\max_{|z|=r} |f(z)|$. Δεδομένου ότι (βλέπε [17, σελ. 379])

$$\max_{|z|=r} |f(z)| = \frac{\cos hr}{\omega^2 - r^2}, \quad 1 < r < \omega,$$

παίρνουμε

$$|R_n(f)| \leq \inf_{1 < r < \omega} \left(\|R_n\| \frac{\cos hr}{\omega^2 - r^2} \right). \quad (4.17)$$

Τα φράγματα που προκύπτουν από την (4.17) μαζί με το σφάλμα του τύπων (4.1), (4.2), (4.3) και (4.4) για το ολοκλήρωμα (4.16) παρουσιάζονται στους πίνακες που ακολουθούν.

Πίνακας 4.12α: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \frac{\cos t}{\omega^2 + t^2} \sqrt{1 - t^2} dt$ με τον τύπο (4.1)

ω	n	r_{opt}	Φράγμα (4.17)	Σφάλμα
2	5	1.812	8.619(-4)	1.421(-5)
	10	1.908	3.572(-9)	7.635(-12)
	15	1.940	1.054(-14)	α.μ.
	20	1.955	2.715(-20)	α.μ.
3	5	2.629	1.628(-5)	8.426(-7)
	10	2.836	8.775(-13)	1.040(-14)
	15	2.896	3.096(-20)	α.μ.
	20	2.924	9.405(-28)	α.μ.
4	5	3.409	1.649(-6)	1.395(-7)
	10	3.760	4.894(-15)	α.μ.
	15	3.851	8.783(-24)	α.μ.

Πίνακας 4.12β: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του

ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \frac{\cos t}{\omega^2 + t^2} \sqrt{1 - t^2} dt$ με τον τύπο (4.2)

ω	n	r_{opt}	Φράγμα (4.17)	Σφάλμα
2	5	1.828	4.140(-5)	7.916(-7)
	10	1.913	1.625(-10)	4.254(-13)
	15	1.942	4.700(-16)	α.μ.
	20	1.956	1.202(-21)	α.μ.
3	5	2.686	4.665(-7)	2.223(-8)
	10	2.850	2.257(-14)	α.μ.
	15	2.901	7.717(-22)	α.μ.
	20	2.927	2.309(-29)	α.μ.
4	5	3.522	3.028(-8)	2.132(-9)
	10	3.783	7.745(-17)	α.μ.
	15	3.897	1.996(-25)	α.μ.

Πίνακας 4.12γ: Φράγμα του σφάλματος και σφάλμα κατά τον υπολογισμό του

ολοκληρώματος $\int_{-1}^1 \frac{\cos t}{\omega^2 + t^2} \sqrt{1 - t^2} dt$ με τους τύπους (4.3) και (4.4)

ω	n	r_{opt}	Φράγμα (4.17)	Σφάλμα
2	5	1.833	4.746(-4)	4.254(-13)
	10	1.914	1.837(-9)	α.μ.
	15	1.942	5.294(-15)	α.μ.
	20	1.956	1.351(-20)	α.μ.
3	5	2.680	5.281(-6)	1.012(-15)
	10	2.848	2.592(-13)	α.μ.
	15	2.900	8.906(-21)	α.μ.
	20	2.926	2.672(-28)	α.μ.
4	5	3.499	3.741(-7)	α.μ.
	10	3.777	9.889(-16)	α.μ.
	15	3.858	1.722(-24)	α.μ.

Και στο παράδειγμα αυτό, βλέπουμε ότι το φράγμα (4.17) είναι κοντά στην τιμή του σφάλματος των τύπων (4.1) και (4.2). Μάλιστα, καθώς το ω αυξάνεται, τα φράγματα βελτιώνονται ακόμα και για μικρές τιμές του n , το οποίο, ενδεχομένως, οφείλεται στη βελτίωση της τιμής του $\max_{|z|=r} |f(z)|$. Όσον αφορά τους τύπους (4.3) και (4.4), το φράγμα του σφάλματος δεν είναι ικανοποιητικό, κυρίως για μικρά n , ενώ όσο μεγαλώνει το n , τα φράγματα βελτιώνονται.

Βιβλιογραφία

- [1] J.C. Mason, D.C. Handscomb, Chebyshev Polynomials, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL 2002.
- [2] Σ.Ε. Νοτάρης, Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος “Υπολογιστικά Μαθηματικά Ι”.
- [3] P.J. Davis, P. Rabinowitz, Methods of Numerical Integration, 2nd ed., Academic Press, San Diego, 1984.
- [4] P. Rabinowitz, On the convergence of closed interpolatory integration rules based on the zeros of Gegenbauer polynomials, J. Comput. Appl. Math. 17 (1987) 43-46.
- [5] H. Brass, K. Petras, Quadrature Theory: The Theory of Numerical Integration on a Compact Interval, in: Mathematical Surveys and Monographs, vol. 178, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [6] M. Kutz, A note on error estimates for the Clenshaw-Curtis and other interpolatory quadratures, Analysis 4 (1984) 45-51.
- [7] G. Akrivis, K.-J. Förster, On the definiteness of quadrature formulae of Clenshaw-Curtis type, Computing 33 (1984) 363-366.
- [8] G. Hämmerlin, Fehlerabschätzung bei numerischer integration nach Gauss, in: B. Brosowski E. Martensen (Eds.), Methoden und Verfahren der mathematischen Physik, vol.6, Bibliographisches Institut, Mannheim (1972) pp. 153-163.
- [9] S.E. Notaris, The error norm of quadrature formulae, Numer. Algorithms 60 (2012) 555-578.
- [10] S.E. Notaris, Product integration rules for Chebyshev weight functions with Chebyshev abscissae, J. Comput. Appl. Math. 257 (2014) 180-194.
- [11] V.I. Krylov, Approximate Calculation of integrals, Dover Publications, Mineola, NY, 2005.
- [12] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, 4th ed., Academic Press, San Diego, 1980.
- [13] L.N. Trefethen, Is Gauss quadrature better than Clenshaw-Curtis? SIAM Rev. 50 (2008) 67-87.
- [14] Β.Α. Δουγαλής και Γ.Δ. Ακριβής, Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2009.

- [15] W. Gautschi, Numerical quadrature in the presence of a singularity, SIAM J. Numer. Anal. 4 (1967) 357-362.
- [16] S.E. Notaris, Interpolatory quadrature formulae with Chebyshev abscissae of the third or fourth kind, J. Comput. Appl. Math. 81 (1997) 83-99.
- [17] S.E. Notaris, Error bounds for Gauss-Kronrod quadrature formulae of analytic functions, Numer. Math. 64 (1993) 371-380.