

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παναγιώτης Σπανός

Εξωτερικοί Αυτομορφισμοί Ομάδων Επιφανειών

Τριμελής Επιτροπή:

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΡΑΠΤΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΒΑΡΣΟΣ

ΜΙΧΑΗΛ ΣΥΚΙΩΤΗΣ (Επιβλέπων)



Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Αθήνα – 2017

Περίληψη

Έστω S_g η επιφάνεια γένους $g \geq 1$. Η επεκτεταμένη ομάδα κλάσεων απεικονίσεων $Mod^\pm(S_g)$ ορίζεται να είναι η ομάδα πηλίκο των ομοιομορφισμών της S_g προς τους ομοιομορφισμούς που είναι ομοτοπικοί με την ταυτοτική απεικόνιση. Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε μία απόδειξη του θεωρήματος Dehn, Nielsen, Baer. Το θεώρημα αυτό ισχυρίζεται πως η $Mod^\pm(S_g)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα $Out(\pi_1(S_g))$ των εξωτερικών αυτομορφισμών της $\pi_1(S_g)$ θεμελιώδους ομάδας της επιφάνειας S_g . Τα βασικά εργαλεία της απόδειξης πηγάζουν από την υπερβολική δομή της επιφάνειας όταν $g \geq 2$.

Summary

Let S_g be a surface of genus $g \geq 1$. The extended mapping class group $Mod^\pm(S_g)$ is defined as the quotient group of homeomorphisms from S_g to itself modulo homeomorphisms homotopic to the identity. In this master's thesis we present a proof of the Dehn, Nielsen, Baer theorem, which states that $Mod^\pm(S_g)$ is isomorphic to the group $Out(\pi_1(S_g))$ of outer automorphisms of $\pi_1(S_g)$, where $\pi_1(S_g)$ denotes the fundamental group of the surface S_g . The basic tools used in the proof come from the hyperbolic structure of the surface, when $g \geq 2$.

Εισαγωγή

Κύριο εργαλείο για τη μελέτη των επιφανειών είναι η ομάδα κλάσεων απεικονίσεων (mapping class group). Η ομάδα αυτή ορίζεται ως η ομάδα πηλίκου των ομοιομορφισμών από την επιφάνεια στον εαυτό της, που διατηρούν τον προσανατολισμό, ως προς τους ομοιομορφισμούς που είναι ομοτοπικοί με την ταυτοτική απεικόνιση. Αν θεωρήσουμε και ομοιομορφισμούς που δε διατηρούν τον προσανατολισμό τότε έχουμε την επεκτεταμένη ομάδα κλάσεων απεικονίσεων.

Για κάθε ομάδα G , εσωτερικός αυτομορφισμός της G , λέγεται ένας ϕ αυτομορφισμός της μορφής $\phi(g) = hgh^{-1}$. Οι εσωτερικοί αυτομορφισμοί αποτελούν κανονική υποομάδα της ομάδας αυτομορφισμών και επομένως ορίζεται η ομάδα πηλίκου. Η ομάδα πηλίκου των εσωτερικών αυτομορφισμών στην ομάδα αυτομορφισμών καλείται ομάδα εξωτερικών αυτομορφισμών.

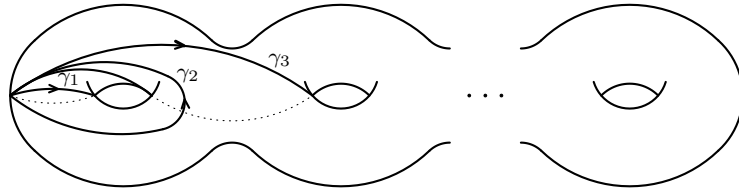
Στην παρούσα εργασία θα παρουσιάσουμε μία απόδειξη του θεωρήματος Dehn, Nielsen, Baer. Το θεώρημα αυτό ισχυρίζεται πως για επιφάνεια γένους μεγαλύτερου ή ίσου με 1, η επεκτεταμένη ομάδα κλάσεων απεικονίσεων είναι ισόμορφη με την ομάδα των εξωτερικών αυτομορφισμών της θεμελιώδους ομάδας της επιφάνειας. Το θεώρημα αυτό αποτελεί μία όμορφη ανάμιξη διαφορετικών κλάδων των μαθηματικών και είναι σημαντικό γιατί μέσω αυτού η μελέτη ενός τοπολογικού αντικειμένου, της ομάδας κλάσεων απεικονίσεων, ανάγεται στη μελέτη ενός πλήρως αλγεβρικού αντικειμένου, της ομάδας εξωτερικών αυτομορφισμών. Μάλιστα αυτή η ανάμειξη γίνεται μέσω της υπερβολικής γεωμετρίας.

Η αρχική μορφή του θεωρήματος ήταν η ύπαρξη ενός επιμορφισμού από την ομάδα κλάσεων απεικονίσεων στη θεμελιώδη ομάδα της επιφάνειας. Πρώτη φορά αποδείχθηκε η ύπαρξη του επιμορφισμού από τον Max Dehn το 1922, παρ' όλα αυτά η απόδειξη αυτή δε δημοσιεύτηκε. Ο Jakob Nielsen ήταν ο πρώτος που δημοσίευσε μία απόδειξη του αρχικού θεωρήματος το 1927. Η απόδειξη του Nielsen αποτελείται από δύο μέρη, το πρώτο μέρος αποδίδεται στον Dehn. Το 1928 το θεώρημα αποδείχθηκε σε όλη του τη γενικότητα από τον Reinhold Baer, ο οποίος έδειξε την ύπαρξη ισομορφισμού. Το 1931 ο Nielsen αποδεικνύει ξανά το θεώρημα, συντομότερα και πιο κομψά, η απόδειξη αυτή όμως δε δημοσιεύεται. Ό-

λες οι προαναφερθείσες αποδείξεις βασίζονται στην υπερβολική δομή της επιφάνειας γένους μεγαλύτερου ή ίσου με 2. Το 1937 ο Herbert Seifert αποδεικνύει το θεώρημα χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τοπολογία και όχι υπερβολική γεωμετρία, με αποτέλεσμα να ξεχαστεί η ιδέα από την οποία προήλθε το θεώρημα.

Ένα εξ' ίσου σημαντικό εργαλείο για τη μελέτη των υπερβολικών επιφανειών είναι ο χώρος Teichmüller. Ο χώρος Teichmüller ορίζεται ως ο χώρος πηλίκου του χώρου των υπερβολικών μετρικών της επιφάνειας ως προς ισοδυναμία, όπου δύο μετρικές d_1, d_2 είναι ισοδύναμες όταν υπάρχει ισομετρία της επιφάνειας, ισοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση που απεικονίζει την d_1 στην d_2 . Είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι υπάρχει το Θεώρημα ταξινόμησης των Jakob Nielsen και William Thurston, το οποίο δίνει έναν αντιπρόσωπο με συγκεκριμένες ιδιότητες για κάθε στοιχείο της ομάδας κλάσεων απεικονίσεων. Στην απόδειξη της ταξινόμησης από τον Lipman Bers χρησιμοποιείται η δράση της ομάδας κλάσεων απεικονίσεων στον χώρο Teichmüller.

Ακολουθεί μία σύντομη περιγραφή της απόδειξης του Θεωρήματος Dehn, Nielsen, Baer. Πρώτα δείχνουμε το θεώρημα για επιφάνεια γένους 1, και έπειτα για επιφάνεια γένους g , όπου $g \geq 2$. Η απόδειξη της πρώτης περίπτωσης μοιάζει με αυτήν της δεύτερης. Επομένως θα περιγράψουμε την απόδειξη για S_g επιφάνεια γένους g , με $g \geq 2$. Σταθεροποιούμε ένα σημείο βάσης και κατασκευάζουμε έναν ομομορφισμό $\sigma : Mod^\pm \rightarrow Out(\pi_1(S_g, x_0))$. Επιλέγουμε μία συλλογή καμπυλών $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g}$, των οποίων οι κλάσεις ομοτοπίας παράγουν την $\pi_1(S_g, x_0)$, ως εξής:



Δείχνουμε ότι η σ είναι μονομορφισμός παίρνοντας τυχαίο $[\phi] \in \ker \sigma$ και κατασκευάζοντας ομοτοπία από αντιπρόσωπο $\phi \in [\phi]$ στην ταυτοτική απεικόνιση id_{S_g} .

Τέλος για να δείξουμε ότι είναι επιμορφισμός παίρνουμε τυχαίο $[\Phi]_{Out} \in Out(\pi_1(S_g))$, έστω $\Phi \in [\Phi]_{Out}$. Το $[\Phi]_{Out}$ δρα στις κλάσεις συζυγίας, $[\Phi]_{Out} Cl([\gamma_i]) = Cl(\Phi([\gamma_i]))$. Δείχνουμε ότι οι $\{\Phi([\gamma_i])\}$ είναι αλυσίδα κλάσεων ελεύθερης ομοτοπίας απλών κλειστών καμπυλών με σταθερό αλγεβρικό αριθμό τομής ± 1 . Από αυτή την ιδιότητα προκύπτει ότι υπάρχει ομοιομορφισμός ϕ που απεικονίζει τις γ_i σε αντιπροσώπους του $\Phi([\gamma_i])$. Τέλος δείχνουμε για αντιπρόσωπο $\phi_* \in \sigma([\phi]_f)$, ότι η σύνθεση $\phi_*^{-1} \circ \Phi$ είναι εσωτερικός αυτομορφισμός, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

Εν κατακλείδι θα κάνουμε μία σύνοψη των κεφαλαίων. Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε

βασικές έννοιες της θεωρίας ομάδων, δράσεις ομάδων, αυτομορφισμοί και το γράφημα του Cayley. Στο Κεφάλαιο 2 μελετούμε τον δισδιάστατο υπερβολικό χώρο και δείχνουμε ότι κάθε επιφάνεια γένους $g \geq 2$ επιδέχεται υπερβολική δομή. Αυτό σημαίνει ότι ο καθολικός χώρος επικάλυψής κάθε τέτοιας επιφάνειας είναι το υπερβολικό επίπεδο. Στο Κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με καμπύλες και τόξα στις επιφάνειες και δίνουμε μία ταξινόμησή τους, εισάγεται επίσης η έννοια της ισοτοπίας.

Στο Κεφάλαιο 4 δίνεται ο ορισμός της ομάδας κλάσεων απεικονίσεων, πραγματοποιούμε τους υπολογισμούς μερικών απλών περιπτώσεων. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζουμε το Θεώρημα του Nielsen και τη μέθοδο του Alexander, τα οποία χρησιμεύουν για τον υπολογισμό ομάδων κλάσεων απεικονίσεων. Στο Κεφάλαιο 5 δίνονται τα βασικά εργαλεία για την απόδειξη του Θεωρήματος Dehn, Nielsen, Baer, δηλαδή οι έννοιες της σχεδόν ισομετρίας και της σύνδεσης στο άπειρο. Τέλος παρουσιάζεται η απόδειξη του Θεωρήματος όπως περιγράφηκε προηγουμένως.

Περιεχόμενα

1	Στοιχεία θεωρίας ομάδων και αλγεβρικής τοπολογίας	1
1.1	Δράσεις Ομάδων	1
1.2	Αυτομορφισμοί	2
1.3	Γράφημα Cayley	3
2	Υπερβολική γεωμετρία	7
2.1	Το Επίπεδο του Lobachevski	7
2.2	Ο Δίσκος του Poincaré	14
2.3	Το σύνορο του $\mathbb{H}^2$ και του $\mathbb{D}^2$	16
2.4	Ταξινόμηση ισομετριών	19
2.5	Η υπερβολική γεωμετρία των επιφανειών S_g	22
3	Καμπύλες και τόξα	35
3.1	Απλές κλειστές καμπύλες	35
3.2	Αριθμοί τομής	43
3.3	Τόξα	48
3.4	Ισοτοπία	50
3.5	Ταξινόμηση απλών κλειστών καμπυλών	52
4	Ομάδα κλάσεων απεικονίσεων	59
4.1	$\text{Mod}(S)$	59
4.2	Επεκτεταμένη ομάδα κλάσεων απεικονίσεων	62
4.3	Υπολογισμοί ομάδων κλάσεων απεικονίσεων	63
4.4	Μέθοδος Alexander	69
5	Εξωτερικοί αυτομορφισμοί ομάδων επιφανειών	73
5.1	Σχεδόν ισομετρίες	73
5.2	Σύνδεση στο άπειρο	79

5.3	Θεώρημα Dehn, Nielsen, Baer	83
-----	---------------------------------------	----

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία θεωρίας ομάδων και αλγεβρικής τοπολογίας

1.1 Δράσεις Ομάδων

Ορισμός 1.1.1.

1. Μία ομάδα G λέμε ότι δρα σε ένα σύνολο S , αν υπάρχει ομομορφισμός $\rho : G \rightarrow \text{Sym}(S)$, όπου $\text{Sym}(S) = \{f : S \rightarrow S \mid \text{όπου } f \text{ 1-1 και επί}\}$ (η ομάδα μεταθέσεων επί του S).
2. Μία ομάδα G λέμε ότι δρα σε έναν τοπολογικό χώρο X , αν υπάρχει ομομορφισμός $\rho : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$, όπου $\text{Homeo}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid \text{όπου } f \text{ ομοιομορφισμός}\}$ ($\text{Homeo}(X) \leq \text{Sym}(X)$).
3. Μία ομάδα G λέμε ότι δρα σε έναν μετρικό χώρο (X, d) με ισομετρίες, αν υπάρχει ισομετρία $\rho : G \rightarrow \text{Isom}(X)$, όπου $\text{Isom}(X) = \{f : X \rightarrow X \mid \text{όπου } f \text{ ισομετρία}\}$ ($\text{Isom}(X) \leq \text{Homeo}(X) \leq \text{Sym}(X)$).

Σημείωση. Όπως παρατηρούμε από το $\text{Isom}(X) \leq \text{Homeo}(X) \leq \text{Sym}(X)$, σε κάθε μία από τις περιπτώσεις ικανοποιείται η 1.

Συμβολισμός.

Όταν μια ομάδα G δρα στο X (είτε είναι σύνολο, τοπολογικός χώρος ή μετρικός χώρος) τότε αντί να γράφουμε $\rho(g)(x)$ θα γράφουμε απλούστερα $g \cdot x$ ή gx , αντίστοιχα $gA = \rho(g)(A)$ και $GA = \bigcup_{g \in G} \rho(g)(A)$.

Ορισμός 1.1.2.

Έστω G μία ομάδα που δρα σε ένα σύνολο X

1. Λέμε ότι μία δράση ρ είναι **πιστή** (ή **αποτελεσματική**) αν $\ker \rho = \{1_G\}$.
2. Λέμε ότι η δράση είναι **ελεύθερη** αν για κάθε $x \in X$ και κάθε $g \in G \setminus \{1\}$ ισχύει $gx \neq x$.
3. Λέμε ότι η δράση είναι **μεταβατική** αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $y = gx$.
4. Για κάθε $x \in X$ ορίζεται η **σταθεροποιούσα** του x , $\text{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$.
5. Αν ο X είναι τοπολογικός χώρος (ή επιπλέον μετρικός χώρος) η ομάδα $\text{Stab}_G(x)$ καλείται **ομάδα ισοτροπιών** του $x \in X$ και συμβολίζεται με G_x (isotropy group).

1.2 Αυτομορφισμοί**Ορισμός 1.2.1.**

Έστω G μία ομάδα. Το σύνολο των αυτομορφισμών της G (ισομορφισμών από την G στον εαυτό της), με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων, είναι ομάδα και καλείται **ομάδα αυτομορφισμών** της G . Συμβολίζεται

$$\text{Aut}(G) = \{\phi : G \rightarrow G \mid \phi \text{ ομομορφισμός, 1-1 και επί}\}.$$

Παρατήρηση 1.2.2.

Για κάθε $g \in G$ η συνάρτηση $T_g : G \rightarrow G$ με $x \mapsto gxg^{-1}$ είναι ομομορφισμός, 1-1 και επί, δηλαδή αυτομορφισμός, άρα $T_g \in \text{Aut}(G)$. Επίσης ισχύει $(T_g)^{-1} = T_{g^{-1}}$ και $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$, επομένως το σύνολο $\{T_g : G \rightarrow G : g \in G\}$ είναι υποομάδα της $\text{Aut}(G)$.

Ορισμός 1.2.3.

Η ομάδα $\text{Inn}(G) = \{T_g : G \rightarrow G : g \in G\}$ καλείται **ομάδα εσωτερικών αυτομορφισμών** και τα στοιχεία της, εσωτερικοί αυτομορφισμοί.

Παρατήρηση 1.2.4.

Έστω $\phi \in \text{Aut}(G)$ και $T_g \in \text{Inn}(G)$ τότε για κάθε $x \in G$ ισχύει:

$$\phi \circ T_g \circ \phi^{-1}(x) = \phi(g\phi^{-1}(x)g^{-1}) = \phi(g)x\phi(g^{-1}) = T_{\phi(g)}(x) \text{ για κάθε } x \in G$$

Επομένως $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$.

Ορισμός 1.2.5.

Η ομάδα πηλίκο $Aut(G)/Inn(G)$ καλείται **ομάδα εξωτερικών αυτομορφισμών** της ομάδας G και συμβολίζεται με $Out(G)$.

Παρατήρηση 1.2.6.

Με άλλα λόγια η $Out(G)$ είναι η ομάδα αυτομορφισμών της G modulo συζυγία. Επίσης, σε αντίθεση με το όνομά της, τα στοιχεία της δεν είναι αυτομορφισμοί της G . Αν σκεφτούμε ότι η ομάδα $Aut(G)$ δρα στην G με τον προφανή τρόπο, τότε αντίστοιχα η $Out(G)$ δρα στις κλάσεις συζυγίας της G , $Cl_G(x) = \{h \in G \mid h = gxg^{-1}\}$. Έστω $T \in Out(G)$ τότε $T = \phi Inn(G)$ για κάποιον αντιπρόσωπο $\phi \in Aut(G)$ της T . Η φυσιολογική δράση που ορίζεται είναι η $T * Cl_G(x) = Cl_G(\phi(x))$.

1.3 Γράφημα Cayley**Ορισμός 1.3.1** (Γράφημα).

Ένα γράφημα X αποτελείται από ένα μη-κενό σύνολο $V(X)$ (σύνολο κορυφών), ένα σύνολο $E(X)$ (σύνολο ακμών) ($V(X), E(X)$ ξένα) και τρεις απεικονίσεις:

- (i) αντιστροφή: $\bar{\cdot} : E(X) \rightarrow E(X)$
- (ii) αρχή: $\iota : E(X) \rightarrow V(X)$
- (iii) τέλος: $\tau : E(X) \rightarrow V(X)$

Έτσι ώστε $\bar{\bar{e}} = e$ για κάθε $e \in E(X)$, $\bar{e} \neq e$ για κάθε $e \in E(X)$ και τέλος $\iota(\bar{e}) = \tau(e)$ για κάθε $e \in E(X)$.

Ορισμός 1.3.2.

Ένας προσανατολισμός ενός γραφήματος X είναι ένα υποσύνολο $\mathcal{O}$ του $E(X)$ τέτοιο ώστε η τομή $\mathcal{O} \cap \{e, \bar{e}\}$ να είναι μονοσύνολο για κάθε $e \in E(X)$.

Ένα γράφημα λέγεται προσανατολισμένο αν έχει επιλεγεί ένας προσανατολισμός.

Ορισμός 1.3.3 (Δράση ομάδας σε γράφημα).

Λέμε ότι μία ομάδα G δρα σ'ένα γράφημα X αν η G δρα στα σύνολα κορυφών $V(X)$ και ακμών $E(X)$ έτσι ώστε για κάθε $g \in G$ και $e \in E(X)$ να ισχύει:

$$(i) \quad \overline{ge} = g\bar{e}$$

$$(ii) \quad \iota(ge) = g\iota(e)$$

$$(iii) \quad \tau(ge) = g\tau(e)$$

Λέμε ότι η δράση είναι χωρίς αντιστροφές αν $ge \neq \bar{e}$, για κάθε $g \in G, e \in E(X)$.

Σημείωση. Το (iii) μπορεί να προκύψει από τα (i) και (ii).

Παρατήρηση 1.3.4.

Στην περίπτωση που η G δρα στο γράφημα X χωρίς αντιστροφές ορίζεται το **γράφημα πηλίκου** X/G ως εξής:

(i) Κορυφές του X/G είναι οι τροχιές κορυφών.

(ii) Ακμές του X/G είναι οι τροχιές ακμών.

και ορίζουμε $\iota([e]) = [\iota(e)]$, $\tau([e]) = [\tau(e)]$ και $\overline{[e]} = [\bar{e}]$. Θέλουμε η δράση να είναι χωρίς αντιστροφές προκειμένου να έχουμε $[e] \neq [\bar{e}]$ για κάθε ακμή του γραφήματος πηλίκου.

Ορισμός 1.3.5.

Ένα γράφημα X λέγεται **συνεκτικό** αν για κάθε δύο κορυφές v και u του X υπάρχει μονοπάτι που τις συνδέει. Δηλαδή υπάρχει μονοπάτι με άκρα το v και u . Δηλαδή μία ακολουθία $p = e_1, \dots, e_n$ με $e_1, \dots, e_n \in E(X)$ και $\tau(e_i) = \iota(e_{i+1})$ για $i = 1, \dots, n-1$, $\iota(e_1) = v$ και $\tau(e_n) = u$.

Παρατήρηση 1.3.6.

Αν μία ομάδα G δρα χωρίς αντιστροφές σε ένα συνεκτικό γράφημα X τότε και το γράφημα πηλίκου είναι συνεκτικό.

Ορισμός 1.3.7 (Γεωμετρική αναπαράσταση).

Έστω X ένα γράφημα, θεωρούμε την ξένη ένωση

$$T = V(X) \sqcup (E(X) \times [0, 1]) = \bigsqcup_{v \in V(X)} \{v\} \bigsqcup_{e \in E(X)} (\{e\} \times [0, 1])$$

με τη διακριτή τοπολογία. Στον χώρο T ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας που περιγράφεται ως εξής : $\iota(e) \sim (e, 0)$, $\tau(e) \sim (e, 1)$, $(e, t) \sim (\bar{e}, 1 - t)$ για κάθε $e \in E(X)$. Ο αντίστοιχος χώρος πηλίκου $T/\sim$ λέγεται **γεωμετρική αναπαράσταση του γραφήματος X** .

Ορισμός 1.3.8.

Έστω X ένα συνεκτικό γράφημα. Ορίζουμε μετρική $d : V(X) \times V(X) \rightarrow [0, \infty)$ ως εξής

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \text{το ελάχιστο μήκος μονοπατιού που συνδέει τις κορυφές } u \text{ και } v \\ &= \min\{\text{μήκος}(p) : \iota(p) = v, \tau(p) = u\} \end{aligned}$$

Την παραπάνω μετρική την επεκτείνουμε σε όλο το γράφημα (στη γεωμετρική του αναπαράσταση) γραμμικά στις ακμές, με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ακμή να είναι ισομετρική με το $[0, 1]$ με τη συνήθη μετρική.

Παρατήρηση 1.3.9.

Ένα γράφημα X είναι συνεκτικό αν και μόνο αν η γεωμετρική του αναπαράσταση με τη μετρική του Ορισμού 1.3.8 είναι συνεκτικός χώρος.

Παρατήρηση 1.3.10.

Η τοπολογία που προκύπτει από τη μετρική δεν είναι η διακριτή τοπολογία.

Παρατήρηση 1.3.11.

Αν X είναι ένα συνεκτικό γράφημα στο οποίο δρα μία ομάδα G χωρίς αντιστροφές τότε η απεικόνιση $X \rightarrow X/G$ είναι απεικόνιση πηλίκο τοπολογικών χώρων (αν τα θεωρήσουμε μετρικούς χώρους με τη γεωμετρική αναπαράσταση των γραφημάτων και μετρική τη μετρική του Ορισμού 1.3.8).

Σημείωση. Από εδώ και πέρα όταν μιλάμε για γράφημα X θα εννοούμε τη γεωμετρική του αναπαράσταση και αν είναι συνεκτικό θα το θεωρούμε αντίστοιχα μετρικό χώρο.

Παρατήρηση 1.3.12.

Αν μία ομάδα G δρα σε ένα συνεκτικό γράφημα X , τότε η G δρα με ισομετρίες στον μετρικό χώρο X .

Ορισμός 1.3.13.

Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G . Το **γράφημα Cayley** της G ως προς S , συμβολίζεται $\Gamma(G, S)$, είναι το γράφημα με:

- (i) κορυφές: τα στοιχεία της G
- (ii) ακμές: για κάθε κορυφή (στοιχείο) $g \in G$ και κάθε $s \in S$ υπάρχει μια γεωμετρική ακμή με αρχή το g και τέλος το gs .

Παρατήρηση 1.3.14.

1. Δύο κορυφές g και h του $\Gamma(G, S)$ συνδέονται με μία ακμή αν και μόνο αν $g^{-1}h \in S^{\pm 1}$.
Για κάθε ακμή υπάρχει και η αντίστροφή της.
2. Το γράφημα $\Gamma(G, S)$ είναι συνεκτικό. (Αφού το S παράγει την G .)

Ορισμός 1.3.15.

Έστω G πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G . Ορίζουμε την **μετρική της λέξης**

$$d_S(1, g) = \|g\|_S = \min\{k \mid g = s_1 s_2 \dots s_k \text{ με } s_i \in S^{\pm 1}\}$$

και

$$d_S(g, h) = \|g^{-1}h\|_S = \min\{k \mid g^{-1}h = s_1 s_2 \dots s_k \text{ με } s_i \in S^{\pm 1}\}.$$

Παρατήρηση 1.3.16.

1. Αν $\Gamma(G, S)$ είναι το γράφημα Cayley μίας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας G . Η ομάδα G με τη μετρική της λέξης εμφυτεύεται ισομετρικά στο $\Gamma(G, S)$. (δηλαδή η μετρική της λέξης μπορεί να οριστεί και ως η απόσταση των αντίστοιχων κορυφών στο γράφημα Cayley)
2. Προφανώς η μετρική της λέξης, όπως και το γράφημα Cayley, εξαρτώνται από το σύνολο γεννητόρων S .
3. Η G δρα με ισομετρίες φυσικά στο $\Gamma(G, S)$ δηλαδή στις κορυφές με πολλαπλασιασμό $g \cdot x = gx$ και στις ακμές ως εξής: αν $e = (x, xs)$ τότε $ge = g(x, xs) = (gx, gxs)$.
4. Η παραπάνω δράση είναι ελεύθερη και μεταβατική στις κορυφές.
5. Το γράφημα πηλίκο $\Gamma(G, S)/G$ αποτελείται λοιπόν από μία κορυφή και $|S|$ το πλήθος γεωμετρικές ακμές (βρόγχους). (Είναι συμπαγής μετρικός χώρος)

Κεφάλαιο 2

Υπερβολική γεωμετρία

2.1 Το Επίπεδο του Lobachevski

Το άνω ημιεπίπεδο $\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ εφοδιασμένο με τη μετρική Riemann $ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \frac{-4dzd\bar{z}}{(z - \bar{z})^2}$ είναι το επίπεδο του Lobachevski που αποτελεί ένα μοντέλο του υπερβολικού επιπέδου.

Ορισμός 2.1.1 (Υπερβολικό μήκος).

Έστω $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ ένα κατά τμήματα διαφορίσιμο τόξο $\alpha(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{H}^2$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Ορίζουμε το υπερβολικό μήκος $\ell_{\mathbb{H}^2}$ του τόξου α ως εξής:

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\|\alpha'(t)\|}{y(t)} dt$$

Ορισμός 2.1.2 (Υπερβολική μετρική).

Η υπερβολική απόσταση δύο σημείων $z, w \in \mathbb{H}^2$ ορίζεται ως

$$d_{\mathbb{H}^2}(z, w) = \inf\{\ell_{\mathbb{H}^2}(\alpha) : \alpha \text{ κατά τμήματα διαφορίσιμο τόξο}\}.$$

Παρατήρηση 2.1.3.

Εύκολα βλέπουμε ότι η $d_{\mathbb{H}^2}$ είναι μετρική. Πράγματι είναι τετριμμένο ότι είναι μη αρνητική και συμμετρική, επίσης αν είναι μηδέν τότε το τόξο είναι η σταθερή απεικόνιση, δηλαδή $z = w$. Τέλος ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα αφού αν α_1, α_2 τόξα από το z_1 στο z_2 και z_2 στο z_3 αντίστοιχα, το $\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_1(2t), & \text{αν } t \in [0, 1/2] \\ \alpha_2(2t - 1), & \text{αν } t \in [1/2, 1] \end{cases}$ είναι τόξο από το z_1 στο z_3 .

Ορισμός 2.1.4.

Μία απεικόνιση της μορφής $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ όπου $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ με $ad - bc \neq 0$ λέγεται μετασχηματισμός Möbius.

Σημείωση. Ένας μετασχηματισμός Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ επεκτείνεται σε μία 1-1 και επί, σύμμορφη απεικόνιση της σφαίρας του Riemann. Όπου αν $c \neq 0$ τότε $T(-d/c) = \infty$ και $T(\infty) = a/c$, και αν $c = 0$ τότε $T(\infty) = \infty$. (Περισσότερες πληροφορίες ο αναγνώστης μπορεί να αναζητήσει στο [24] ή σε κάποιο άλλο βιβλίο μιγαδικής ανάλυσης.)

Παρατήρηση 2.1.5.

Θέλουμε να περιορίσουμε τις απεικονίσεις στο άνω ημιεπίπεδο, επομένως αναζητάμε εκείνες που το διατηρούν. Θεωρούμε το υποσύνολο των μετασχηματισμών Möbius, $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) := \{T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ με } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ και } ad - bc = 1\}$, το σύνολο αυτό είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση. Υπάρχει ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός από την ομάδα των πραγματικών πινάκων με ορίζουσα 1, $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ στην ομάδα $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$, τότε ο φυσικός ομομορφισμός είναι $A \mapsto T_A$ με $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Παρατηρούμε ότι ο ομομορφισμός είναι επί και ότι ο πυρήνας του είναι η υποομάδα $I = \{I_2, -I_2\}$, όπου I_2 είναι ο ταυτοτικός πίνακας. Άρα $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cong \text{SL}(2, \mathbb{R})/I$.

Επομένως κάθε στοιχείο της $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ αντιστοιχεί σε δύο πίνακες A και $-A$, άρα μπορούμε να ορίσουμε το ίχνος των στοιχείων της $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(T_A) = |\text{tr}(A)|$ έτσι ώστε να είναι καλά ορισμένη συνάρτηση στην ομάδα πηλίκο.

Παρατηρούμε επίσης ότι στην $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ περιέχονται όλοι οι μετασχηματισμοί Möbius της μορφής $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ με $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc > 0$, αφού διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με $\sqrt{ad - bc}$ έχουμε τον ίδιο μετασχηματισμό, με $a'd' - b'c' = 1$.

Θεώρημα 2.1.6.

$H \text{ PSL}_2(\mathbb{R})$ δρα στον $\mathbb{H}^2$ με ομοιομορφισμούς.

Απόδειξη. Θα δείξουμε αρχικά ότι ένας μετασχηματισμός Möbius $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ απεικονίζει τον $\mathbb{H}^2$ στον εαυτό του. Έστω λοιπόν T με $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Τότε έχουμε

$$(2.1.1) \quad T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{\|cz+d\|^2} = \frac{ac\|z\|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{\|cz+d\|^2}, \text{ επομένως}$$

$$(2.1.2) \quad \text{Im}(T(z)) = \frac{(T(z) - \overline{T(z)})}{2i} = \frac{(z - \bar{z})(ad - bc)}{2i\|cz+d\|^2} = \frac{z - \bar{z}}{2i\|cz+d\|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{i\|cz+d\|^2}$$

Δηλαδή $\text{Im}(z) > 0$ αν και μόνο αν $\text{Im}(T(z)) > 0$. Η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώνεται από τη συνέχεια της T και της $T^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$. $\square$

Θεώρημα 2.1.7.

$H \text{ PSL}_2(\mathbb{R})$ δρα στον $\mathbb{H}^2$ με ισομετρίες.

Απόδειξη. Δείξαμε ήδη ότι κάθε στοιχείο της $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ απεικονίζει τον $\mathbb{H}^2$ στον εαυτό του. Θα δείξουμε ότι αν το $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$ είναι κατά τόξα διαφορίσιμο, τότε για κάθε $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ έχουμε ότι $\ell_{\mathbb{H}^2}(T(\alpha)) = \ell_{\mathbb{H}^2}(\alpha)$.

Έστω α τόξο με $\alpha(t) = z(t) = x(t) + iy(t)$ και $T(\alpha(t)) = w(t) = \frac{az(t)+b}{cz(t)+d} = u(t) + iv(t)$. Έχουμε ότι

$$(2.1.3) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

Όπως στο Θεώρημα 2.1.6 στις σχέσεις 2.1.1, 2.1.2 έτσι και εδώ έχουμε

$$(2.1.4) \quad v = \text{Im}(T(z)) = \frac{(T(z) - \overline{T(z)})}{2i} = \frac{(z - \bar{z})(ad - bc)}{2i\|cz + d\|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{i\|cz + d\|^2} = \frac{y}{\|cz + d\|^2}$$

Άρα από 2.1.3 και 2.1.4 έχουμε $\left\| \frac{dw}{dz} \right\| = \frac{v}{y}$, επομένως

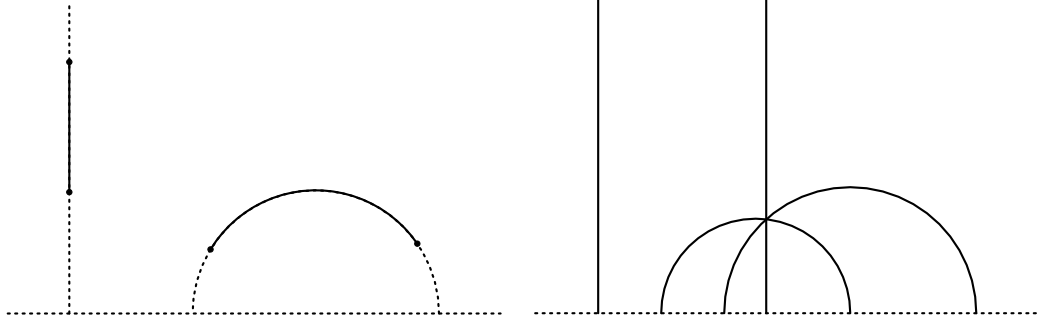
$$\ell_{\mathbb{H}^2}(T(\alpha)) = \int_0^1 \frac{\left\| \frac{dw}{dz} \right\|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left\| \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt} \right\|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\frac{v(t)}{y(t)} \left\| \frac{dz}{dt} \right\|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left\| \frac{dz}{dt} \right\|}{y(t)} dt = \ell_{\mathbb{H}^2}(\alpha)$$

Άρα η απεικόνιση T διατηρεί το υπερβολικό μήκος, επομένως και την υπερβολική μετρική, άρα είναι ισομετρία. $\square$

Για X τυχαίο μετρικό χώρο, $I \subset \mathbb{R}$ και $\alpha : I \rightarrow X$ καμπύλη, η α καλείται **γεωδαισιακή καμπύλη** ή απλώς **γεωδαισιακή**, αν για κάθε $x, y \in I$ ισχύει $d(\alpha(x), \alpha(y)) = |x - y|$. Για μία Riemann πολλαπλότητα, επειδή η απόσταση μεταξύ δύο σημείων ορίζεται ως το infimum των μηκών όλων των καμπυλών που διέρχονται από τα σημεία, **γεωδαισιακή καμπύλη** λέμε την καμπύλη που είναι τοπικά ελαχίστου μήκους. Εν γένει δεν είναι ισοδύναμοι ορισμοί. Δηλαδή γεωδαισιακή καμπύλη μεταξύ δύο σημείων είναι η καμπύλη που το μήκος της επιτυγχάνει την απόσταση των σημείων.

Αν το $I = [a, b]$, τότε η α καλείται **γεωδαισιακό τόξο**. Αν $I = [0, \infty)$, τότε η α καλείται **γεωδαισιακή ακτίνα** και τέλος αν $I = \mathbb{R}$, τότε καλείται **γεωδαισιακή γραμμή**.

Θα δείξουμε ότι οι γεωδαισιακές σ' αυτόν τον χώρο είναι οι ευθείες γραμμές οι οποίες είναι κάθετες στον άξονα των πραγματικών αριθμών και αντίστοιχα τα ημικύκλια που είναι κάθετα στον άξονα των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$.



Κάθε δύο σημεία επομένως μπορούν να ενωθούν με γεωδαισιακή, και η απόστασή τους δίνεται από την αντίστοιχη γεωδαισιακή. Αν επιλέξουμε ένα τρίτο σημείο εκτός αυτής της γεωδαισιακής, τότε υπάρχουν περισσότερες από μία γεωδαισιακές που δεν την τέμνουν και διέρχονται από το σημείο. Αυτό σημαίνει ότι η υπερβολική γεωμετρία δεν είναι ευκλείδεια, δηλαδή το πέμπτο αξίωμα των στοιχείων του Ευκλείδη, το αξίωμα της παραλληλίας δεν ικανοποιείται.

Θεώρημα 2.1.8.

Οι γεωδαισιακές καμπύλες στον $\mathbb{H}^2$ είναι τα ημικύκλια που είναι κάθετα στον άξονα $\mathbb{R}$ και οι ευθείες που είναι κάθετες στον άξονα $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$. Υποθέτουμε αρχικά ότι $z_1 = ia$ και $z_2 = ib$ ($b > a$). Αν $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ είναι ένα κατά τμήματα διαφορίσιμο τόξο που ενώνει το z με το w τότε:

$$\ell_{\mathbb{H}^2}(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)} dt = \int_a^b \frac{1}{y} dy = \ln \frac{b}{a}$$

Όμως $\ln \frac{b}{a}$ είναι το υπερβολικό μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα σημεία ia και ib . Άρα η γεωδαισιακή που ενώνει τα σημεία $z_1, z_2 \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}$ είναι ευθεία κάθετη στον άξονα των πραγματικών $\mathbb{R}$.

Έστω τώρα δύο τυχαία σημεία $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν τα z_1, z_2 ανήκουν στην ίδια, κάθετη στον άξονα $\mathbb{R}$, ευθεία τότε $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) = b$, ο μετασχηματισμός Möbius

$T(z) = z - b$ μετακινεί τα z_1, z_2 στον άξονα $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0\}$ και $T \in \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Άρα η γεωδαισιακή που ενώνει τα $T(z_1), T(z_2)$ είναι ευθεία ε , κάθετη στον άξονα των πραγματικών $\mathbb{R}$. Επομένως επειδή ο μετασχηματισμός $T^{-1}(z) = z + b$ πάει την ευθεία ε σε μία παράλληλη ευθεία $T^{-1}(\varepsilon)$ και διατηρεί τις γεωδαισιακές, έπεται ότι η γεωδαισιακή που ενώνει τα z_1, z_2 είναι ευθεία κάθετη στον άξονα των πραγματικών $\mathbb{R}$.

Αν τα z_1, z_2 δεν ανήκουν στην ίδια, κάθετη στον άξονα $\mathbb{R}$, ευθεία τότε υπάρχει μοναδικός κύκλος $\mathcal{C}$ κάθετος στον άξονα $\mathbb{R}$ που διέρχεται από τα z_1, z_2 . Έστω $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ($c_2 > c_1$) τα σημεία τομής του κύκλου με τον $\mathbb{R}$. Τότε θεωρούμε τους εξής μετασχηματισμούς Möbius:

$$T_1(z) = z - c_1, \text{ επομένως } 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-c_1) = 1, \text{ άρα } T_1 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

$$T_2(z) = \frac{-1}{z - (c_2 - c_1)}, \text{ επομένως } 0 \cdot (-(c_2 - c_1)) - (-1) \cdot 1 = 1, \text{ άρα } T_2 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

$$T_3(z) = z - \frac{1}{c_2 - c_1}, \text{ επομένως } 1 \cdot 1 - 0 \left(\frac{1}{c_2 - c_1} \right) = 1 \text{ άρα } T_3 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$$

Η σύνθεση $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$ είναι στοιχείο του $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ και άρα διατηρεί το άνω ημιεπίπεδο. Παρατηρούμε ότι ο T απεικονίζει τον κύκλο $\mathcal{C}$ στον άξονα $\mathbb{I} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) > 0\}$: πράγματι αν $z \in \mathcal{C}$ και αν $w := z - c_1$ και $c := \frac{c_2 - c_1}{2}$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \|z - \frac{c_2 + c_1}{2}\| &= \frac{c_2 - c_1}{2} \Rightarrow \|w + c_1 - \frac{c_2 + c_1}{2}\| = c \Rightarrow \|w - \frac{c_2 - c_1}{2}\| = c \\ &\Rightarrow (\text{Re}(w) - c)^2 + (\text{Im}(w))^2 = c^2 \\ &\Rightarrow (\text{Re}(w))^2 - 2c\text{Re}(w) + (\text{Im}(w))^2 = 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{-1}{z - c_2} - \frac{1}{c_2 - c_1} = \frac{-1}{w - 2c} - \frac{1}{2c} = \frac{1}{2c - w} - \frac{1}{2c} = \frac{2c}{2c(2c - w)} - \frac{(2c - w)}{2c(2c - w)} = \\ &= \frac{w}{2c(2c - w)} = \frac{w(2c - \bar{w})}{2c\|2c - w\|} = \frac{2cw - \|w\|^2}{2c\|2c - w\|} = \\ &= \frac{2c\text{Re}(w) + 2i\text{Im}(w) - (\text{Re}(w))^2 + (\text{Im}(w))^2}{2c\|2c - w\|} = \\ &= \frac{2i\text{Im}(w)}{2c\|2c - w\|} \end{aligned}$$

Άρα $T(z) \in \mathbb{I}$. Αφού ο T είναι μετασχηματισμός Möbius διατηρεί τα μήκη, και αφού η ε είναι γεωδαισιακή, έπεται ότι και ο $\mathcal{C}$ είναι γεωδαισιακή καμπύλη. $\square$

Συμβολισμός. $\mathbb{I} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) > 0\}$

Πόρισμα 2.1.9.

Κάθε δύο σημεία $z, w \in \mathbb{H}^2$ μπορούν να ενωθούν με μοναδική γεωδαισιακή και η υπερβολική απόσταση μεταξύ των z και w είναι ίση με το υπερβολικό μήκος της μοναδικής γεωδαισιακής που τα ενώνει.

Συμβολισμός. Συμβολίζουμε με $[z, w]$ τη μοναδική γεωδαισιακή που ενώνει το z με το w .

Πόρισμα 2.1.10.

Αν z και w είναι δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{H}^2$ τότε $d_{\mathbb{H}^2}(z, w) = d_{\mathbb{H}^2}(z, \xi) + d_{\mathbb{H}^2}(\xi, w)$ αν και μόνο αν $\xi \in [z, w]$.

Πόρισμα 2.1.11.

Κάθε μετασχηματισμός στην $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ απεικονίζει γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές στον $\mathbb{H}^2$.

Απόδειξη. Υπάρχουν δύο εύκολοι τρόποι να το δούμε. Έστω $z, w \in \mathbb{H}^2$ και $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Αν $\xi \in [z, w]$ τότε $d_{\mathbb{H}^2}(z, w) = d_{\mathbb{H}^2}(z, \xi) + d_{\mathbb{H}^2}(\xi, w)$ άρα $d_{\mathbb{H}^2}(T(z), T(w)) = d_{\mathbb{H}^2}(T(z), T(\xi)) + d_{\mathbb{H}^2}(T(\xi), T(w))$, άρα $T(\xi) \in [T(z), T(w)]$. Άρα ο T απεικονίζει τη γεωδαισιακή $[z, w]$ σε γεωδαισιακή.

Ένας δεύτερος τρόπος είναι γεωμετρικής φύσης. Ξέρουμε από τη μιγαδική ότι οι μετασχηματισμοί Möbius απεικονίζουν κύκλους και ευθείες σε κύκλους και ευθείες, επίσης διατηρούν γωνίες. Το υποσύνολό τους, $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ διατηρεί τον άξονα των πραγματικών $\mathbb{R}$, επομένως οι $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ απεικονίζουν ευθείες κάθετες στο $\mathbb{R}$ και κύκλους κάθετους στο $\mathbb{R}$ πάλι σε ευθείες και κύκλους κάθετους στο $\mathbb{R}$, άρα γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές. $\square$

Λήμμα 2.1.12.

Έστω $z, w \in \mathbb{H}^2$. Τότε $\sinh\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^2}(z, w)\right) = \frac{\|z - w\|}{2\sqrt{\text{Im}(z)\text{Im}(w)}}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος της προς απόδειξη ισότητας είναι αναλλοίωτο από τον ισομορφισμό $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι και το δεξιό μέλος της ισότητας είναι επίσης αναλλοίωτο από τον ισομορφισμό T . Έστω $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ τότε:

$$\begin{aligned}
 \frac{\|T(z) - T(w)\|}{2\sqrt{\text{Im}(T(z))\text{Im}(T(w))}} &= \frac{\left\|\frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d}\right\|}{2\sqrt{\text{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)\text{Im}\left(\frac{aw+b}{cw+d}\right)}} = \\
 &= \frac{\left\|\frac{adz+bcw-bcz-adw}{(cz+d)(cw+d)}\right\|}{2\sqrt{\text{Im}\left(\frac{adz+bc\bar{z}}{\|cz+d\|^2}\right)\text{Im}\left(\frac{adw+bc\bar{w}}{\|cw+d\|^2}\right)}} = \\
 &= \frac{\frac{\|adz+bcw-bcz-adw\|}{\|cz+d\|\|cw+d\|}}{2\sqrt{\frac{ad\text{Im}(z)-bc\text{Im}(z)}{\|cz+d\|^2} \frac{ad\text{Im}(w)-bc\text{Im}(w)}{\|cw+d\|^2}}} = \\
 &= \frac{\|(ad-bc)(z-w)\|}{2\sqrt{(ad-bc)(\text{Im}(z)\text{Im}(w))}} = \\
 &= \frac{\|z-w\|}{2\sqrt{\text{Im}(z)\text{Im}(w)}}
 \end{aligned}$$

Άρα η σχέση είναι αναλλοίωτη ως προς τη δράση της T στα z, w . Υπάρχει μετασχηματισμός $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.8 ο οποίος μεταφέρει τα z, w στον άξονα των φανταστικών $\mathbb{I}$. Επομένως αρκεί να δείξουμε τη σχέση για $z = ia$ και $w = ib$.

Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $b > a > 0$, τότε $\sinh(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^2}(ia, ib)) = \sinh(\frac{1}{2}\ln \frac{b}{a}) = \sinh\left(\ln \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ όμως $a = \|z\|$ και $b = \|w\|$. Να θυμήσουμε ότι ισχύει η ταυτότητα $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ άρα $x = \sinh(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}))$, άρα για $x = \frac{\|z - w\|}{2\sqrt{\text{Im}(z)\text{Im}(w)}}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\|z - w\|}{2\sqrt{\text{Im}(z)\text{Im}(w)}} &= \sinh\left(\ln\left(\frac{\|z - w\|}{2\sqrt{\text{Im}(z)\text{Im}(w)}} + \left(\frac{\|z - w\|^2}{4\text{Im}(z)\text{Im}(w)} + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) = \\ &= \sinh\left(\ln\left(\frac{|a - b|}{2\sqrt{ab}} + \left(\frac{|a - b|^2}{4ab} + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right) = \\ &= \sinh\left(\ln\left(\frac{|a - b|}{2\sqrt{ab}} + \frac{|a + b|}{2\sqrt{ab}}\right)\right) = \sinh\left(\ln\left(\frac{2b}{2\sqrt{ab}}\right)\right) = \\ &= \sinh\left(\ln\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)\right) = \sinh\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}^2}(z, w)\right) \end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.1.13.

Η ομάδα $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ είναι ισόμορφη με την ομάδα ισομετριών του υπερβολικού επιπέδου $\mathbb{H}^2$, που διατηρούν τον προσανατολισμό και η οποία συμβολίζεται με $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$

Απόδειξη. Έστω $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ μία ισομετρία του $\mathbb{H}^2$. Όπως το Πρόσχημα 2.1.11, η ϕ απεικονίζει γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές. Επομένως η εικόνα $\phi(\mathbb{I})$ είναι μία γεωδαισιακή. Έχουμε όμως ότι υπάρχει μία ισομετρία $T_1 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ που απεικονίζει την $\phi(\mathbb{I})$ στην $\mathbb{I}$ (αυτό το δείχνουμε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.8). Έχουμε ότι $T_1 \circ \phi(i) = \lambda i$, για $\lambda > 0$, και συνθέτουμε με $T_2(z) = \lambda^{-1}z$, όπου $T_2 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. Έχουμε επομένως ότι $T_2 \circ T_1 \circ \phi(i) = i$. Αν $T_2 \circ T_1 \circ \phi((0, i)) = (i, \infty)$ τότε συνθέτουμε με $T_3(z) = \frac{-1}{z}$, όπου $T_3 \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, αλλιώς αν $T_2 \circ T_1 \circ \phi((0, i)) = (0, i)$ την αφήνουμε έτσι. Θέτουμε $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1 \circ \phi$ (αντίστοιχα αν αφήνει αναλλοίωτο το $(0, i)$ θέτουμε $T = T_2 \circ T_1 \circ \phi$). Παρατηρούμε ότι $T(i) = i, T((0, i)) = (0, i)$ και $T((i, \infty)) = (i, \infty)$. Επίσης $d_{\mathbb{H}^2}(ia, ib) = \ln \frac{b}{a}$ για $b > a > 0$, άρα $d_{\mathbb{H}^2}(T(ia), i) = d_{\mathbb{H}^2}(T(ia), T(i)) = d_{\mathbb{H}^2}(ia, i)$, επομένως για $a > 1$ έχουμε $\ln \frac{\text{Im}(T(ia))}{1} = \ln \frac{a}{1} \Rightarrow T(ia) = ia$, όμοια για $a < i$. Δηλαδή η ισομετρία T αφήνει κατά σημείο σταθερό τον άξονα $\mathbb{I}$.

Έστω τώρα $z = x + iy$ τυχαίο σημείο $z \in \mathbb{H}^2$ και $T(z) = u + iv$. Για κάθε $t > 0$ έχουμε $d_{\mathbb{H}^2}(z, it) = d_{\mathbb{H}^2}(T(z), T(it)) = d_{\mathbb{H}^2}(T(z), it)$ από το Λήμμα 2.1.12 έχουμε

$$\frac{x^2 + (y - t)^2}{y} = \frac{u^2 + (v - t)^2}{v} \Rightarrow \frac{x^2 + (y - t)^2}{t^2} v = \frac{u^2 + (v - t)^2}{t^2} y$$

όμως η σχέση ισχύει για κάθε $t > 0$, παίρνοντας όρια

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x^2 + (y - t)^2}{t^2} v = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{u^2 + (v - t)^2}{t^2} y \Rightarrow v = y$$

Επομένως δείξαμε ότι $v = y$ και αντικαθιστώντας παίρνουμε $x^2 = u^2$. Όμως η συνάρτηση είναι συνεχής επομένως $x = u$ ή $x = -u$. Δηλαδή $T(z) = z$ ή $T(z) = \bar{z}$. Όμως η T είναι σύνθεση ισομετριών που διατηρούν τον προσανατολισμό, επομένως διατηρεί τον προσανατολισμό, ενώ $T(z) = \bar{z}$ τον αντιστρέφει, άρα $T(z) = z$. Δηλαδή $\phi \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. $\square$

Παρατήρηση 2.1.14.

Αν θεωρήσουμε $\text{PSL}_2^{\pm}(\mathbb{R}) = \{T(z) = \frac{az+b}{cz+d} : \mu \varepsilon \ ad - bc = -1\} \cup \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, τότε:

$$\text{PSL}_2^{\pm}(\mathbb{R}) \cong \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det(A) = \pm 1\} /_I \cong \text{GL}(2, \mathbb{R}) /_{\{\lambda I_2 : \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

έχουμε $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \subsetneq \text{PSL}_2^{\pm}(\mathbb{R})$ και μάλιστα $[\text{PSL}_2^{\pm}(\mathbb{R}) : \text{PSL}_2(\mathbb{R})] = 2$. Γιατί αν θεωρήσουμε $\psi : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$ με $\psi(z) = -\bar{z}$, τότε $\psi \circ \psi = id_{\mathbb{H}^2}$ και $\text{PSL}_2^{\pm}(\mathbb{R}) = \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \oplus \psi \text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι $\text{PSL}_2^{\pm}(\mathbb{R}) = \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία του Θεωρήματος 2.1.13 καταλήγουμε σε $T(z) = z$ ή $T(z) = \bar{z}$. Αν ισχύει η πρώτη περίπτωση όπως πριν τελειώσαμε. Αν ισχύει η δεύτερη περίπτωση τότε $T_3 \circ T_2 \circ T_1 \circ \phi(z) = -\bar{z}$ άρα $\phi(z) = \frac{a(-1)\bar{z} + b}{c(-1)\bar{z} + d}$ και $a(-1)d - c(-1)b = (-1)(ad - cb) = -1$ άρα $\phi \in \text{PSL}_2^{\pm}(\mathbb{R})$.

2.2 Ο Δίσκος του Poincaré

Τώρα θα περιγράψουμε το μοντέλο του δίσκου του Poincaré για το υπερβολικό επίπεδο, το οποίο καλείται **υπερβολικός δίσκος**. Έστω $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$. Η απεικόνιση $f(z) = \frac{zi + 1}{z + i}$ είναι ολόμορφη, 1-1 και επί απεικόνιση από τον $\mathbb{H}^2$ στον $\mathbb{D}^2$. Έχουμε επίσης $f'(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \mathbb{H}^2$ και $f^{-1}(z) = \frac{iz - 1}{i - z}$. Επειδή η f είναι σύμμορφη απεικόνιση, διατηρεί και τις γωνίες. Ορίζουμε για $z, w \in \mathbb{D}^2$ μετρική στην $\mathbb{D}^2$ ως $d_{\mathbb{D}^2}(z, w) = d_{\mathbb{H}^2}(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$. Με αυτή τη μετρική ο δίσκος ονομάζεται υπερβολικός δίσκος.

Σημείωση.

Ο φυσιολογικός τρόπος να οριστεί μετρική στον δίσκο $\mathbb{D}^2$ είναι ορίζοντας τη μετρική Riemann $ds = \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - x^2 + y^2} = \frac{2\|dz\|}{1 - \|z\|^2}$. Προκύπτει τότε για δύο σημεία $z, w \in \mathbb{D}^2$ η μετρική $d_{\mathbb{D}^2}(z, w) = \cosh^{-1} \left(1 + \frac{2\|z - w\|^2}{(1 - \|z\|^2)(1 - \|w\|^2)} \right)$. Η $f(z) = \frac{zi + 1}{z + i}$ τότε είναι ισομετρία από τον $\mathbb{H}^2$ στον $\mathbb{D}^2$.

Πόρισμα 2.2.1.

Η ομάδα ισομετριών του υπερβολικού δίσκου $\mathbb{D}^2$ είναι

$$Isom(\mathbb{D}^2) = \left\{ \phi : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 : \phi(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z - a}{\bar{a}z - 1} \right), a \in \mathbb{C}, \|a\| < 1, \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η $f \circ T \circ f^{-1}$ η οποία είναι ισομετρία του υπερβολικού δίσκου είναι της παραπάνω μορφής. Πράγματι, έστω $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ με $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ όπου $ad - bc = 1$ τότε

$$T(f^{-1}(z)) = \frac{zi(a + ib) - (a - ib)}{zi(c + id) - (c - id)}$$

Θέτουμε $x := a + ib$ και $y := c + id$. Τότε:

$$f(T(f^{-1}(z))) = w_1 \frac{z - w_2}{\bar{w}_2 z - 1}$$

όπου $w_1 = -\frac{x - iy}{\bar{x} + i\bar{y}} = -\frac{x - iy}{(x - iy)}$ και $w_2 = \frac{\bar{y} + i\bar{x}}{-x + iy}$. Επομένως $\|w_1\| = 1$ και άρα το w_1 γράφεται ως $w_1 = e^{i\theta}$. Εφ' όσον $\|\bar{y} + i\bar{x}\| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2$ και $\| -x + iy \| = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2$, έχουμε ότι $\|w_2\| < 1$. $\square$

Πόρισμα 2.2.2.

Κάθε ισομετρία $\phi \in Isom^+(\mathbb{D}^2)$ είναι σύμμορφη συνάρτηση.

Λήμμα 2.2.3.

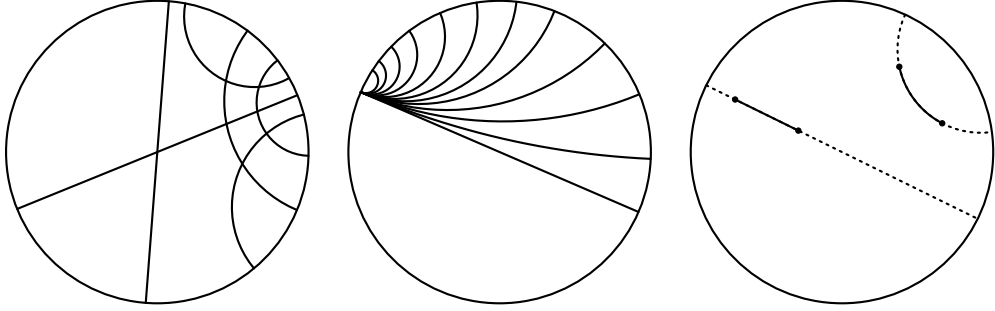
Έστω $\phi \in Isom^+(\mathbb{D}^2)$ μία ισομετρία. Αν η ϕ σταθεροποιεί ένα διάνυσμα και ένα σημείο, τότε η ϕ είναι η ταυτοτική απεικόνιση $id_{\mathbb{D}^2}$.

Απόδειξη. Έστω $\phi = e^{i\theta} \frac{z - a}{\bar{a}z - 1}$ μία ισομετρία, η οποία σταθεροποιεί ένα σημείο και ένα διάνυσμα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι σταθεροποιεί το 0 και ένα διάνυσμα. Αν σταθεροποιεί το 0, τότε $\phi(0) = 0$, δηλαδή $e^{i\theta} \frac{-a}{-1} = 0$, άρα $a = 0$. Επομένως $\phi = e^{i\theta'} z$, επειδή η ϕ σταθεροποιεί ένα διάνυσμα δεν γίνεται να το περιστρέφει. Επομένως $\phi = id_{\mathbb{D}^2}$. $\square$

Πόρισμα 2.2.4.

Οι γεωδαισιακές στον $\mathbb{D}^2$ είναι τμήματα κύκλων που τέμνουν κάθετα τον κύκλο $S^1 = \{z \in \mathbb{D}^2 : \|z\| = 1\}$ και οι διάμετροι.

Απόδειξη. Για κάθε κύκλο που τέμνει τον άξονα των πραγματικών $\mathbb{R}$ αντιστοιχεί μία καμπύλη της μορφής που ειπώθηκε. Αν έχουμε μία ευθεία που τέμνει τον άξονα $\mathbb{R}$ κάθετα στο σημείο x , τότε αντιστοιχεί σε καμπύλη που ένα της άκρο είναι το i και το άλλο $\frac{x i + 1}{x + i}$. Επομένως μπορούμε να κάνουμε μία περιστροφή κατά γωνία θ , με $\theta \neq 0$ και $\theta \neq \frac{\pi}{2} - \text{Arg}(\frac{x i + 1}{x + i})$, που είναι ισομετρία και διατηρεί τις γωνίες, άρα προκύπτει καμπύλη που τέμνει σε δύο σημεία τον κύκλο, έστω z_1, z_2 διάφορα του i . Η αντίστροφη της f απεικονίζει τα z_1, z_2 σε σημεία του $\mathbb{R}$ και την καμπύλη σε γεωδαισιακή άρα σε ημικύκλιο, άρα τέμνει το $\mathbb{R}$ κάθετα. Επομένως η αρχική καμπύλη έτεμνε τον S^1 κάθετα. $\square$

**2.3 Το σύνορο του $\mathbb{H}^2$ και του $\mathbb{D}^2$**

Θα παρουσιάσουμε δύο διαφορετικούς τρόπους για να πάρει κάποιος το σύνορο του $\mathbb{H}^2$ και του $\mathbb{D}^2$. Ο πρώτος είναι χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι και οι δύο αυτοί χώροι είναι τοπολογικοί υπόχωροι του $\mathbb{C}$ με την ιδιότητα η τοπολογία που προκύπτει απο τη μετρική τους συμπίπτει με την τοπολογία που προκύπτει από το $\mathbb{C}$. Ο δεύτερος τρόπος είναι κοιτώντας τους χώρους ως ανεξάρτητους μετρικούς χώρους.

Παρατηρούμε ότι η υπερβολική απόσταση στον υπερβολικό δίσκο $\mathbb{D}^2$ από την αρχή του 0 εξαρτάται μόνο από το μέτρο του z , $\|z\|$. Επομένως η ανοικτή μπάλα $B_{\mathbb{D}^2}(0, R)$ είναι η ευκλείδεια μπάλα $B_{\mathbb{D}^2}(0, R) = B_{\mathbb{C}}(0, R')$. Επίσης έχουμε ότι οι ισομετρίες του δίσκου $Isom(\mathbb{D}^2)$ διατηρούν του κύκλους, άρα και τις μπάλες, επομένως οι ανοικτές μπάλες με την υπερβολική μετρική είναι ευκλείδειες. Επομένως η τοπολογία του $\mathbb{D}^2$ που προκύπτει από τη μετρική συμπίπτει με την τοπολογία του σαν υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Λόγω της ισομετρίας f

έπεται ότι και η τοπολογία του $\mathbb{H}^2$ που προκύπτει από τη μετρική συμπίπτει με την τοπολογία που προκύπτει ως υποσύνολο του $\mathbb{C}$.

Σαν τοπολογικοί χώροι, το επίπεδο $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ είναι ανοικτός υπόχωρος τους μιγαδικού επιπέδου και κατ' επέκταση της σφαίρας του Riemann $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ο δίσκος $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}$ είναι ανοικτός υπόχωρος του μιγαδικού επιπέδου.

Παρατηρούμε επίσης ότι το $\mathbb{H}^2$ σαν υποσύνολο της σφαίρας του Riemann είναι ένας ανοικτός δίσκος που το σύνορό του διέρχεται από το επ' άπειρον σημείο $\{\infty\}$. Επομένως $\partial\mathbb{H}^2 = \overline{\mathbb{H}^2} \setminus \mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Τοπολογικά είναι κύκλος, δηλαδή $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cong \mathbb{S}^1$ και καλείται **κύκλος του απείρου**. Αυτό προκύπτει αμέσως από την παρατήρηση ότι το $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ είναι συνεκτικό σύνολο. Αν δεν ήταν θα υπήρχε ένα ανοικτό σύνολο U που θα περιείχε το $\{\infty\}$ και $\mathbb{R} \subset U^c$, αφού τα $B^c(0, R)$ είναι σύστημα περιοχών του $\{\infty\}$, $B^c(0, R) \subset U$ όμως $B^c(0, R) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ για κάθε $R > 0$, άρα είναι συνεκτικό σύνολο.

Για τον δίσκο άμεσα βλέπουμε ότι $\partial\mathbb{D}^2 = \overline{\mathbb{D}^2} \setminus \mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\} = \mathbb{S}^1$.

Σημείωση. Σημειώνουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις τα σύνορα είναι συνεκτικοί χώροι ομοιομορφικοί με το $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$.

Πόρισμα 2.3.1.

Μία γεωδαισιακή γραμμή $\gamma : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{H}^2$ καθορίζεται πλήρως από τα σημεία της στο σύνορο $\partial\mathbb{H}^2$ (όμοια για $\mathbb{D}^2$).

Τώρα θα κοιτάξουμε τοπολογικά το σύνορο των δύο αυτών χώρων.

Ορισμός 2.3.2 (Απόσταση Hausdorff).

Η **απόσταση Hausdorff** δύο υποσυνόλων $A, B \subseteq X$ ορίζεται ως $d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon : A \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(B) \text{ και } B \subseteq \mathcal{N}_\varepsilon(A)\}$, όπου $\mathcal{N}_\varepsilon(C) = \{x \in X : \text{dist}(x, C) < \varepsilon\}$, για $C \subseteq X$.

Ορισμός 2.3.3.

Έστω $X = \mathbb{H}^2$ ή $\mathbb{D}^2$. Δύο γεωδαισιακές ακτίνες $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \infty) \rightarrow X$ λέγονται **ασυμπτωτικές** και συμβολίζουμε $\gamma_1 \sim_H \gamma_2$ αν $d_H(\gamma_1, \gamma_2) < \infty$.

Παρατήρηση 2.3.4.

Η σχέση $\sim_H$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των γεωδαισιακών ακτίνων.

Ορισμός 2.3.5 (Σύνоро Gromov).

Το **σύνορο του Gromov** $\partial_\infty X$ είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας $\partial_\infty X = \{\gamma : \gamma \text{ γεωδαισιακή ακτίνα}\} / \sim_H$

Τώρα θα περιγράψουμε την δ -περιοχή μιας γεωδαισιακής γραμμής γ στον $\mathbb{H}^2$, δηλαδή το σύνολο $\mathcal{N}_\delta(\gamma)$. Έστω, όπως πριν, $\mathbb{I} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$, τότε το σύνολο $\mathcal{N}_\delta(\mathbb{I})$ φράσσεται από δύο ευθείες γραμμές από το 0 στο ∞ συμμετρικές ως προς τον άξονα των y που σχηματίζουν στο 0 γωνία θ από το $\mathbb{I}$.

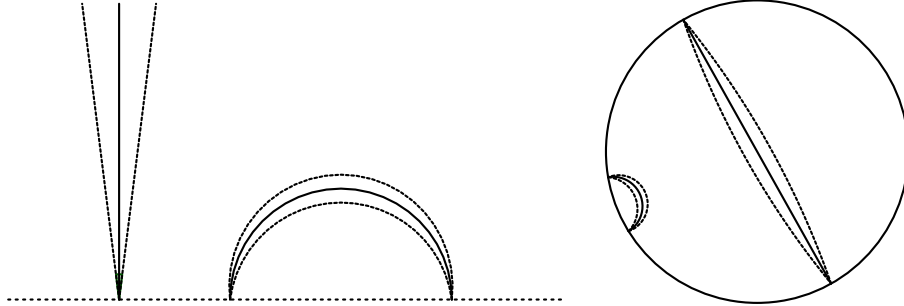
Πρόταση 2.3.6.

Η δ -περιοχή της $\mathbb{I}$ είναι $\mathcal{N}_\delta(\mathbb{I}) = \{x + iy : y > |x| \cot(\theta)\}$ όπου η θ προκύπτει από τη σχέση $\tanh(\frac{\delta}{2}) = \tan(\frac{\theta}{2})$.

Απόδειξη. Αν $z \in \mathcal{N}_\delta(\mathbb{I})$, τότε $d_{\mathbb{H}^2}(z, \mathbb{I}) < \delta$. Αφού για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ η υπερβολική ισομετρία $T_\lambda = \lambda z$ αφήνει τον $\mathbb{I}$ αναλλοίωτο, έχουμε $d_{\mathbb{H}^2}(\lambda z, \mathbb{I}) = d_{\mathbb{H}^2}(\lambda z, T_\lambda(\mathbb{I})) = d_{\mathbb{H}^2}(z, \mathbb{I}) < \delta$. Επομένως αν $z \in \mathcal{N}_\delta(\mathbb{I})$, τότε ολόκληρη η ευθεία $\{\lambda z : \lambda \in \mathbb{R}_{>0}\}$ περιέχεται στην περιοχή $\mathcal{N}_\delta(\mathbb{I})$.

Για να δείξουμε ότι η δ -περιοχή $\mathcal{N}_\delta(\mathbb{I})$ είναι συμμετρικό σύνολο ως προς τον $\mathbb{I}$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $d_{\mathbb{H}^2}(x + iy, \mathbb{I}) = d_{\mathbb{H}^2}(-x + iy, \mathbb{I})$, $x \in \mathbb{R}, y > 0$.

Για να βρούμε τον τύπο του θ , έστω $w = e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$ ένα σημείο του συνόρου του $\mathcal{N}_\delta(\mathbb{I})$. Από τον τύπο της υπερβολικής απόστασης έχουμε $\delta = d_{\mathbb{H}^2}(i, w) = \ln \frac{(i-1)(w+1)}{(i+1)(w-1)} = \ln \frac{-1 + ie^{i\theta}}{i - e^{i\theta}}$. Δηλαδή $e^\delta = \frac{-1 + ie^{i\theta}}{i - e^{i\theta}}$. Επομένως $\tanh(\frac{\delta}{2}) = \tan(\frac{\theta}{2})$. $\square$



Χρησιμοποιώντας τις $T \in \operatorname{PSL}_2(\mathbb{R})$ μπορούμε να κατασκευάσουμε όλες τις δ -περιοχές γεωδαισιακών γραμμών. Παρατηρούμε λοιπόν ότι για να ανήκει στην δ -περιοχή της γεωδαισιακής ακτίνας $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) \in (0, 1]\}$ μία άλλη γεωδαισιακή ακτίνα γ_2 πρέπει $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_2(t) = 0$. Από αυτό προκύπτει ότι το $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο $\partial_\infty \mathbb{H}^2 = \{\gamma : \gamma \text{ γεωδαισιακή ακτίνα}\} / \sim_H$.

2.4 Ταξινόμηση ισομετριών

Θα γίνει μία ταξινόμηση των ισομετριών που διατηρούν τον προσανατολισμό του $\mathbb{H}^2$, κοιτώντας τον αριθμό των σταθερών σημείων της ισομετρίας στο $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Πρόταση 2.4.1 (Επέκταση μετασχηματισμών Möbius).

Κάθε μετασχηματισμός Möbius $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ επεκτείνεται σε ομοιομορφισμό της σφαίρας του Riemann.

Απόδειξη. Ένας μετασχηματισμός $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ όπου $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ και $ad - bc = 1$ είναι σύμμορφη απεικόνιση $T : \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}$, αν $c \neq 0$, και $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, αν $c = 0$.

Επεκτείνεται επομένως σε σύμμορφη $\bar{T} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ θέτοντας $\bar{T}\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$ και $\bar{T}(\infty) = \frac{a}{c}$, αν $c \neq 0$, και $\bar{T}(\infty) = \infty$, αν $c = 0$.

Αν $c \neq 0$ βλέπουμε ότι σε οποιοδήποτε σημείο διάφορο του $\frac{-d}{c}$ έχουμε $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2} \neq 0$, ενώ στο σημείο $\frac{-d}{c}$ κοιτάμε την $f(z) = \frac{1}{T(z)} = \frac{cz+d}{az+b}$, $f'(z) = \frac{da-cb}{(az+b)^2} = \frac{1}{(az+b)^2}$ όπου στο σημείο $z = \frac{-d}{c}$ είναι $f'\left(\frac{-d}{c}\right) = \frac{c}{-ad+cb} \neq 0$.

Και τέλος για το σημείο $z = \infty$ κοιτάμε την $g(z) = T\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{bz+a}{dz+c}$ όπου $g'(z) = \frac{bc-ad}{(dz+c)^2}$ στο σημείο $z = 0$ γίνεται $g'(0) = \frac{-1}{c^2} \neq 0$.

Όμοια και για την περίπτωση $c = 0$. Επομένως ο μετασχηματισμός $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ επεκτείνεται σε σύμμορφη απεικόνιση $\bar{T} : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. $\square$

Πόρισμα 2.4.2.

Κάθε $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ επεκτείνεται σε σύμμορφη απεικόνιση $\bar{T} : \overline{\mathbb{H}^2} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^2}$.

Πρόταση 2.4.3.

Κάθε ισομετρία $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ έχει σταθερό σημείο στον $\overline{\mathbb{H}^2}$. Πιο συγκεκριμένα για $T \neq id_{\mathbb{H}^2}$ ισχύει μία από τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

- $H\bar{T}$ έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο στον $\mathbb{H}^2$.
- $H\bar{T}$ δεν έχει σταθερό σημείο στον $\mathbb{H}^2$ και έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο στον $\overline{\mathbb{H}^2}$.
- $H\bar{T}$ δεν έχει σταθερό σημείο στον $\mathbb{H}^2$ και έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία στον $\overline{\mathbb{H}^2}$.

Απόδειξη. Έστω $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ με $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \neq id_{\mathbb{H}^2}$. Αν η $\bar{T}$ έχει σταθερό σημείο στον $\mathbb{H}^2$, τότε είναι λύση της εξίσωσης

$$(2.4.1) \quad \frac{az+b}{cz+d} = z$$

και αντίστροφα αν z λύση της εξίσωσης, τότε είναι σταθερό σημείο. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

Αν $c \neq 0$, τότε το ∞ δεν είναι λύση της 2.4.1. Επομένως η 2.4.1 γράφεται ως $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Αν η διακρίνουσα $\Delta = (d-a)^2 - 4c(-b) < 0$, τότε η 2.4.1 έχει δύο μιγαδικές συζυγείς λύσεις, η μία θα έχει θετικό φανταστικό μέρος, άρα θα ανήκει στον $\mathbb{H}^2$ και η άλλη αρνητικό. Επομένως σε αυτή την περίπτωση θα έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο που ανήκει στον $\mathbb{H}^2$. Αν η διακρίνουσα $\Delta = (d-a)^2 - 4c(-b) = 0$, τότε η εξίσωση 2.4.1 έχει μόνο μία πραγματική λύση την $\frac{a-d}{2c}$, η οποία επειδή είναι πραγματική ανήκει στο $\mathbb{R} \subset \partial\mathbb{H}^2$. Άρα σε αυτή την περίπτωση θα έχει ακριβώς ένα σταθερό σημείο που ανήκει στο $\partial\mathbb{H}^2$. Τέλος αν η διακρίνουσα $\Delta = (d-a)^2 - 4c(-b) > 0$, τότε η εξίσωση 2.4.1 έχει δύο πραγματικές λύσεις οι οποίες ανήκουν επίσης στο $\mathbb{R} \subset \partial\mathbb{H}^2$. Δηλαδή σε αυτή την περίπτωση θα έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία που ανήκουν στο $\partial\mathbb{H}^2$.

Αν $c = 0$, τότε η 2.4.1 έχει πάντα μία λύση το ∞ και γράφεται

$$(2.4.2) \quad az + b = dz$$

Αν $(d-a) \neq 0$, τότε η 2.4.2 έχει λύση και το $\frac{b}{d-a}$, άρα δύο λύσεις μία το $\infty \in \partial\mathbb{H}^2$ και την πραγματική $\frac{b}{d-a} \in \mathbb{R} \subset \partial\mathbb{H}^2$, δηλαδή δύο σταθερά σημεία στο $\partial\mathbb{H}^2$. Αν $(d-a) = 0$, τότε η 2.4.2 έχει μοναδική λύση το ∞ το οποίο είναι στο $\partial\mathbb{H}^2$, δηλαδή ένα σταθερό σημείο στο $\partial\mathbb{H}^2$. $\square$

Ορισμός 2.4.4.

Έστω $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, με $T \neq id_{\mathbb{H}^2}$.

- Αν η $\bar{T}$ έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο στον $\mathbb{H}^2$, τότε καλείται **ελλειπτική ισομετρία**.
- Αν η $\bar{T}$ δεν έχει σταθερά σημεία στον $\mathbb{H}^2$ και έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο στο $\partial\mathbb{H}^2$, τότε καλείται **παραβολική ισομετρία**.
- Αν η $\bar{T}$ δεν έχει σταθερά σημεία στον $\mathbb{H}^2$ και έχει ακριβώς δύο σταθερά σημεία στο $\partial\mathbb{H}^2$, τότε καλείται **υπερβολική ισομετρία**.

Σημείωση. Στην επόμενη πρόταση χρησιμοποιούμε της συνάρτηση $Tr(\cdot)$ που έχει ορισθεί στην Παρατήρηση 2.1.5.

Πρόταση 2.4.5.

Έστω $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$, με $T \neq id_{\mathbb{H}^2}$ τότε:

- T ελλειπτική ισομετρία αν και μόνο αν $Tr(T) < 2$.
- T παραβολική ισομετρία αν και μόνο αν $Tr(T) = 2$.
- T υπερβολική ισομετρία αν και μόνο αν $Tr(T) > 2$.

Απόδειξη. Έστω $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, με $ad - bc = 1$ και $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Αν $c \neq 0$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} (Tr(T))^2 &= \left(tr \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)^2 = a^2 + d^2 + 2ad = (a - d)^2 + 4ad = \\ &= (d - a)^2 - 4(bc - bc - ad) = \\ &= (d - a)^2 - 4(c(-b) - 1) = \\ &= (d - a)^2 - 4(c(-b)) + 4 = \\ &= \Delta + 4 \end{aligned}$$

Τα σημεία που μένουν σταθερά δίνονται από την εξίσωση $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. Διακρίνουμε περιπτώσεις, αν $\Delta > 0$ ισοδύναμα $Tr(T) > 2$, τότε η εξίσωση έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες, επομένως η ισομετρία $\bar{T}$ έχει δύο σταθερά σημεία στο σύνορο, άρα είναι υπερβολική. Αν $\Delta = 0$ ισοδύναμα $Tr(T) = 2$, τότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα και άρα η ισομετρία $\bar{T}$ έχει ένα ακριβώς σταθερό σημείο στο σύνορο, δηλαδή είναι παραβολική. Αν $\Delta < 0$ ισοδύναμα $Tr(T) < 2$, τότε η εξίσωση έχει μόνο δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, εκ των οποίων μόνο η μία είναι στοιχείο της $\mathbb{H}^2$, άρα η ισομετρία είναι ελλειπτική.

Αν $c = 0$, τότε έχουμε ότι $ad = ad - bc = 1$ άρα $(d - a)^2 = d^2 + a^2 - 2ad = d^2 + a^2 - 2$ και επομένως $(Tr(T))^2 = a^2 + d^2 + 2 = (d - a)^2 + 4$. Αν λοιπόν $a = d$, τότε όπως δείξαμε πριν έχει μόνο ένα σταθερό σημείο η ισομετρία $\bar{T}$, το ∞ , που είναι στοιχείο του συνόρου, επομένως είναι παραβολική ισομετρία. Όταν όμως $a \neq d$ παίρνουμε $Tr(T) = 2$. Τέλος αν $a \neq d$, τότε πάλι όπως δείξαμε και πριν έχει δύο σταθερά σημεία στο σύνορο το $\frac{b}{a}$ και το ∞ , τότε όμως $Tr(T) > 2$. Επομένως σε κάθε περίπτωση το αποτέλεσμα συμβαδίζει με την εκφώνηση της πρότασης. $\square$

Ορισμός 2.4.6 (Άξονας υπερβολικής ισομετρίας).

Έστω $T \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ μία υπερβολική ισομετρία. **Άξονας** της ισομετρίας T , συμβολίζεται με $\text{Axis}(T)$, είναι η γεωδαισιακή γραμμή με πέρατα τα σταθερά σημεία της T .

Παρατήρηση 2.4.7.

Εξ' ορισμού έχουμε ότι $\text{Axis}(gTg^{-1}) = g(\text{Axis}(T))$ για κάθε $g \in \text{PSL}_2(\mathbb{R})$. (Η $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ είναι ομάδα και τα στοιχεία της δρουν στα στοιχεία του $\mathbb{H}^2$, επομένως ο συμβολισμός g βοηθάει να δούμε τους μετασχηματισμούς ως δράσεις). Αφού ο T στέλνει τη γεωδαισιακή $\text{Axis}(T)$ σε γεωδαισιακή γραμμή με τα ίδια πέρατα, έπεται $T(\text{Axis}(T)) = \text{Axis}(T)$.

2.5 Η υπερβολική γεωμετρία των επιφανειών S_g

Ορισμός 2.5.1.

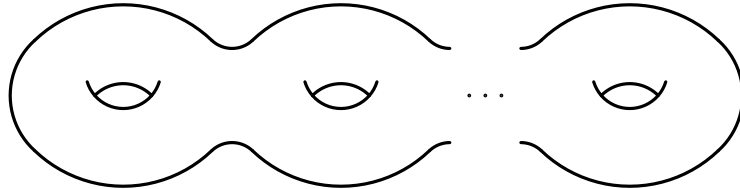
Έστω S μία επιφάνεια. Αν ο καθολικός χώρος επικάλυψης της S είναι ο $\mathbb{H}^2$, τότε η επιφάνεια καλείται **υπερβολική**.

Παρατήρηση 2.5.2.

Μία υπερβολική επιφάνεια S μπορεί να οριστεί ως μία λεία επιφάνεια εφοδιασμένη με μία μετρική Riemann σταθερής καμπυλότητας -1 . Αν η επιφάνεια είναι επιπλέον κλειστή, τότε καλούμε **υπερβολική δομή** της επιφάνειας, $\{(U_i, \phi_i) : \phi_i(U_i) \subset \mathbb{H}^2\}$ μία συλλογή λείων χαρτών έτσι ώστε τα U_i να καλύπτουν την επιφάνεια S και κάθε απεικόνιση αλλαγής χαρτών $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ στο $\phi_j(U_i \cap U_j)$ να είναι ο περιορισμός μιας ισομετρίας του $\mathbb{H}^2$, που διατηρεί τον προσανατολισμό.

Μπορεί ναδειχθεί ότι μία τέτοια επιφάνεια έχει καθολικό χώρο επικάλυψης το $\mathbb{H}^2$. Αντίστροφα αν μία επιφάνεια έχει καθολικό χώρο επικάλυψης το $\mathbb{H}^2$, τότε μπορεί να εφοδιαστεί με μία μετρική Riemann σταθερής καμπυλότητας -1 .

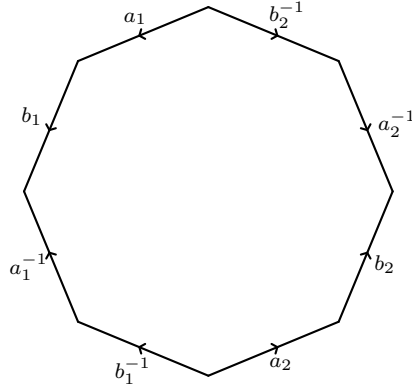
Επειδή είναι πιο βολικός λόγος συμμετρίας, θα δείξουμε ότι ο καθολικός χώρος επικάλυψης της κλειστής προσανατολίσιμης επιφάνειας γένους $g \geq 2$ είναι ο υπερβολικός δίσκος $\mathbb{D}^2$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το να δείχναμε ότι είναι το υπερβολικό επίπεδο $\mathbb{H}^2$. Επομένως για κάθε $g \geq 2$ η επιφάνεια S_g είναι υπερβολική.



Θεώρημα 2.5.3 (Η υπερβολική δομή των επιφανειών S_g).

Για κάθε $g \geq 2$ η επιφάνεια γένους g , S_g , επιδέχεται υπερβολική δομή.

Απόδειξη. Η επιφάνεια S_g είναι το πηλίκο ενός κανονικού ευκλειδείου $4g$ -γώνου, ταυτίζοντας τα ζεύγη των απέναντι πλευρών. Αν συμβολίσουμε με $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, b_g a_g$, τότε η αλγεβρική σχέση στο σύνορο δίνεται από την $a_1 b_1 \dots a_g b_g a_1^{-1} b_1^{-1} a_g^{-1} b_g^{-1}$.



Θα ταυτίσουμε την επιφάνεια S_g με το πηλίκο μίας συμπαγούς περιοχής του $\mathbb{D}^2$, φραγμένης από ένα γεωδαισιακό πολύγωνο (πολύγωνο με πλευρές γεωδαισιακές στον υπερβολικό δίσκο $\mathbb{D}^2$) του οποίου οι πλευρές θα έχουν ίσα μήκη και οι γωνίες που σχηματίζουν στα σημεία τομής θα είναι όλες ίσες (ένα κανονικό γεωδαισιακό πολύγωνο).

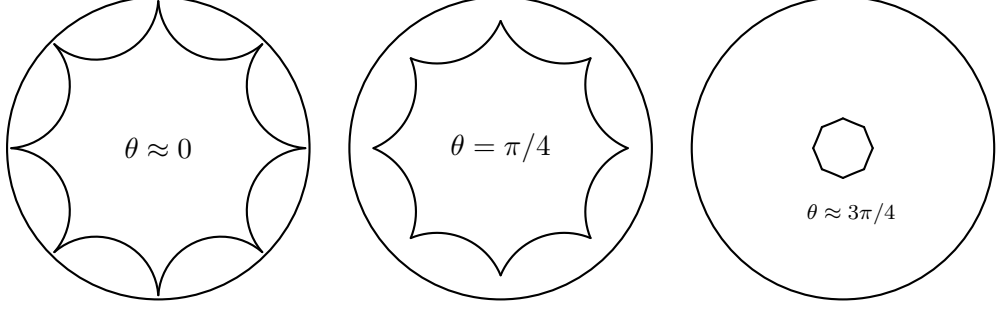
Ξεκινάμε με $4g$ σημεία $(z_0, z_1, \dots, z_{4g-1}, z_{4g} = z_0)$ ισομοιρασμένα σε ένα τυχαίο ευκλείδειο κύκλο με κέντρο το 0, $\|z_i\| = r$, με $r < 1$. Τα ενώνουμε με γεωδαισιακά τμήματα $[z_i, z_{i+1}]$. Επειδή η $d_{\mathbb{D}^2}$ είναι αναλλοίωτη από τις ισομετρίες της μορφής $e^{i\theta}$, δηλαδή από τις περιστροφές, τα γεωδαισιακά αυτά τμήματα έχουν όλα ίσο μήκος και σχηματίζουν ίσες γωνίες στα σημεία τομής τους (αφού οι ισομετρίες αυτές, διατηρούν τις γωνίες). Άρα η ένωση αυτών των γεωδαισιακών τμημάτων είναι ένα κανονικό γεωδαισιακό πολύγωνο.

Θεωρούμε $\theta(r)$ την εσωτερική γωνία δύο διαδοχικών πλευρών του πολυγώνου. Τότε έχουμε

$$\lim_{r \rightarrow 1} \theta(r) = 0 \text{ και } \lim_{r \rightarrow 0} \theta(r) = \pi - \frac{\pi}{2g}$$

Η πρώτη ισότητα προκύπτει επειδή καθώς η ακτίνα του κύκλου τείνει στο 1 τα γεωδαισιακά τμήματα τείνουν να γίνουν τμήματα κύκλου που τέμνουν κάθετα την $\mathbb{S}^1$, άρα γεωδαισιακές που εφάπτονται, δηλαδή η γωνία μεταξύ τους τείνει στο 0. Η δεύτερη ισότητα προκύπτει επειδή καθώς η ακτίνα του κύκλου τείνει στο 0 τα γεωδαισιακά τμήματα τείνουν να γίνουν

τμήματα διαμέτρων, δηλαδή ευθυγράμμων τμημάτων, επομένως το πολύγωνο τείνει να γίνει ευκλείδειο, επομένως η γωνία τείνει να γίνει η γωνία του κανονικού ευκλείδειου $4g$ -γωνου, η οποία είναι $\pi - \frac{\pi}{2g}$.



Η $\theta(r)$ είναι συνεχής απεικόνιση, (μπορεί να εκφραστεί ως συνεχή συνάρτηση του r και του g , μέσω του νόμου των συνημιτόνων) επομένως λόγω συνέχειας από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει r_0 τέτοιο ώστε $\theta(r_0) = \frac{\pi}{2g}$. Αυτό δε μπορεί να ισχύσει για $g = 1$ καθώς η θ δε μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{\pi}{2}$.

Έστω P το συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{D}^2$ που αποτελείται από το κανονικό γεωδαισιακό πολύγωνο γωνίας $\frac{\pi}{2g}$ και τη φραγμένη συνιστώσα. Επιλέγουμε μία ακμή v_0 και ταυτίζουμε διαδοχικά τις ακμές με $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$ με αντίστροφη φορά από τους δείκτες του ρολογιού, ξεκινώντας από το v_0 . Για κάθε a_i , $i = 2, 3, \dots, g$ ορίζουμε ως αρχή του γεωδαισιακού τμήματος την κορυφή ανάμεσα στην a_i και b_{i-1}^{-1} και για a_1 ορίζουμε ως αρχή την κορυφή ανάμεσα στην a_1 και b_g^{-1} , δηλαδή την v_0 . Για κάθε b_i , $i = 1, 2, \dots, g$ ορίζουμε ως αρχή του γεωδαισιακού τμήματος την κορυφή ανάμεσα στην b_i και την a_i . Παρόμοια για αρχή των γεωδαισιακών τμημάτων a_i^{-1} , $i = 1, 2, \dots, g$, την κορυφή που βρίσκεται ανάμεσα στην a_i^{-1} και την b_i^{-1} . Τέλος για αρχή των γεωδαισιακών τμημάτων b_i^{-1} , $i = 1, 2, \dots, g-1$ την κορυφή που βρίσκεται ανάμεσα στην b_i^{-1} και στην a_{i+1} , και αρχή της b_g^{-1} την v_0 .

Για κάθε ζεύγος a_j, a_j^{-1} υπάρχει μοναδική ισομετρία έστω α_j που πάει την ακμή με ετικέτα a_j^{-1} στην ακμή με ετικέτα a_j καλώς ορισμένη ως προς την αρχή του γεωδαισιακού τμήματος (δηλαδή απεικονίζει την αρχή σε αρχή). Όμοια για κάθε b_j υπάρχει η ισομετρία β_j που πάει την b_j στην b_j^{-1} καλώς ορισμένη ως προς την αρχή του γεωδαισιακού τμήματος. Έστω $\Gamma < Isom^+(\mathbb{D}^2)$ η υποομάδα που παράγεται από $\{\alpha_i, \beta_i : i = 1, 2, \dots, g\}$. Καλούμε τους γεννήτορες α_i, β_i και τους αντίστροφους τους, μετασχηματισμούς ταύτισης ακμών

(edge pairing tranformation).

Ισχυρισμός 2.5.4. Για κάθε μετασχηματισμό ταύτισης ακμών $\phi \in \Gamma$ έχουμε ότι η τομή $P \cap \phi(P)$ αποτελείται ακριβώς από μία ακμή του P .

Πράγματι, έστω e η ακμή που μετακινεί η ϕ και την πηγαίνει στην ακμή e' (εξ' ορισμού υπάρχει μία τέτοια ακμή). Κάθε γεωδαισιακή γραμμή γ στον $\mathbb{D}^2$ χωρίζει τον δίσκο σε δύο συνεκτικές συνιστώσες $\mathbb{D}^2 \setminus \gamma$, οι οποίες καλούνται **πλευρές της γεωδαισιακής**. Κάθε γεωδαισιακή ακμή του P ανήκει σε μία γεωδαισιακή γραμμή γ και το P° , επειδή είναι συνεκτικό σύνολο, ανήκει σε μία από τις δύο πλευρές $\mathbb{D}^2 \setminus \gamma$. Επομένως το ίδιο ισχύει για το $\phi(P)$. Για κάθε γεωδαισιακή ακμή του, το $\phi(P)^\circ$ ανήκει σε μία από τις δύο πλευρές της γεωδαισιακής γραμμής στην οποία ανήκει η ακμή.

Η γεωδαισιακή ακμή e' του P ανήκει σε μία γεωδαισιακή γραμμή, έστω ε . Η ε έχει δύο πλευρές. Η ε είναι γεωδαισιακή γραμμή στην οποία ανήκει ακμή του P άρα το P° ανήκει σε μία πλευρά της ε . Όμως το ε είναι γεωδαισιακή γραμμή στην οποία ανήκει και ακμή του $\phi(P)$ άρα και το $\phi(P)^\circ$ ανήκει σε μια από τις δύο πλευρές της ε . Επειδή η ϕ διατηρεί τον προσανατολισμό και τις γωνίες επομένως έχουμε ότι τα $\phi(P)^\circ$ και P° ανήκουν σε διαφορετικές πλευρές. Άρα $P \cap \phi(P) = (P \cap \varepsilon) \cap (\phi(P) \cap \varepsilon) = e'$. ■

Επειδή το P είναι ομοιομορφικό με ευκλείδειο κανονικό πολύγωνο, το πηλίκο του P υπό τις ταυτοποιήσεις από τους μετασχηματισμούς ταύτισης ακμών είναι ομοιομορφικό με την επιφάνεια S_g .

Ισχυρισμός 2.5.5. Οι μετασχηματισμοί ταύτισης ακμών ικανοποιούν τις ίδιες σχέσεις με τους γεννήτορες της θεμελιώδους ομάδας της επιφάνειας, $\pi_1(S_g)$.

Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha_1 \circ \beta_1 \circ \alpha_1^{-1} \circ \beta_1^{-1} \dots \circ \alpha_g \circ \beta_g \circ \alpha_g^{-1} \circ \beta_g^{-1} = id_{\mathbb{D}^2}$. Είναι πιο βολικό να δείξουμε την ισοδύναμη σχέση $\beta_g \circ \alpha_g \circ \beta_g^{-1} \circ \alpha_g^{-1} \dots \beta_1 \circ \alpha_1 \circ \beta_1^{-1} \circ \alpha_1^{-1} = id_{\mathbb{D}^2}$, που προκύπτει από την αντιστροφή. Ονομάζουμε για ευκολία τους μετασχηματισμούς ως $\phi_{4g} := \beta_g, \phi_{4g-1} := \alpha_g, \phi_{4g-2} := \beta_g^{-1}, \phi_{4g-3} := \alpha_g^{-1}, \dots, \phi_2 := \beta_1^{-1}, \phi_1 := \alpha_1^{-1}$. Εξ' ορισμού η $\alpha_1^{-1} = \phi_1$ παίρνει την v_0 (αρχή της a_1 και την πηγαίνει στην αρχή της a_1^{-1}). Αν ονομάσουμε τις κορυφές, ξεκινώντας από την v_0 και πηγαίνοντας αντίστροφα στους δείκτες του ρολογιού, ως v_0, v_3, v_2, v_1, v_4 . Βλέπουμε ότι η ϕ_i πάει την v_{i-1} στην v_i για $i = 1, 2, 3, 4$. Αφού η v_4 είναι η αρχή του γεωδαισιακού τμήματος a_2 , μπορούμε να συνεχίσουμε με επαγωγή να ονομάζουμε τις υπόλοιπες κορυφές, ως $v_5, \dots, v_{4g-1}$ καταλήγοντας $v_{4g} = v_0$, έτσι ώστε $\phi_i(v_{i-1}) = v_i$, για κάθε $i = 1, \dots, 4g - 1$ και $\phi_{4g}(v_{4g-1}) = v_0$. Ειδικότερα βλέπουμε ότι $\phi_{4g} \circ \dots \circ \phi_1(v_0) = v_0$. Για κάθε κορυφή v_i βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ακμές, θα μετράμε τις

γωνίες διανυσμάτων στο v_i από την ακμή που βρίσκεται αριστερά της, δηλαδή την επόμενη σύμφωνα με τον αριστερόστροφο προσανατολισμό στην P . Παράδειγμα μετράμε τις γωνίες στο v_0 από την a_1 , τις γωνίες στο v_1 από το b_1^{-1} , τις γωνίες στο v_2 από το a_1^{-1} και ούτω καθεξής. Θετική φορά εννοούμε την αριστερόστροφη (αντίθετη από τη φορά του ρολογιού) με αρχή την επιλεγμένη ακμή. Έστω $\theta = \frac{\pi}{2g}$ οι εσωτερικές γωνίες του κανονικού γεωδαισιακού πολυγώνου P . Γνωρίζουμε επίσης ότι κάθε $\phi \in Isom^+(\mathbb{D}^2)$ είναι σύμμορφη απεικόνιση, επομένως διατηρεί τις γωνίες.

Έστω $\vec{x}_0$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα στο v_0 το οποίο σχηματίζει γωνία 0 με το a_1 . Έστω $\vec{x}_i$ η εικόνα του $\vec{x}_0$ από την ισομετρία $\phi_i \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1(\vec{x}_0) =: \vec{x}_i$, δηλαδή το $\phi_i(\vec{x}_{i-1}) = \vec{x}_i$. Για κάθε $i = 1, 2, \dots, 4g$, η γωνία που σχηματίζει το $\vec{x}_i$ στο σημείο v_i είναι $i\theta$, για $i = 1, 2, \dots, 4g - 1$. Πράγματι για $i = 0$ ορίσαμε το $\vec{x}_0$ έτσι ώστε να ισχύει. Θα υποθέσουμε ότι ισχύει για i και θα το δείξουμε για $i + 1$. Αν το $\vec{x}_i$ σχηματίζει γωνία $i\theta$ στην κορυφή v_i , διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις.

Αν $i = 4k + 1$, τότε η $\phi_i = \alpha_{k+1}^{-1}$ πάει το διάνυσμα $\vec{x}_i$ στην κορυφή $\alpha_{k+1}^{-1}(v_i) = v_{i+1}$ επομένως, αφού διατηρεί γωνίες η ισομετρία $\phi_i = \alpha_{k+1}^{-1}$, και το διάνυσμα σχηματίζει γωνία $4k\theta$ με την αρχή της ακμής a_k , έχουμε ότι το $\alpha_{k+1}^{-1}(v_i)$ σχηματίζει γωνία $4k\theta$ με την αρχή της ακμής $\alpha_{k+1}^{-1}(a_k) = a_{k+1}^{-1}$ επομένως $(4k + 2)\theta = (i + 1)\theta$ με το πέρας της b_{k+1}^{-1} η οποία ακμή βρίσκεται αριστερά της v_{i+1} .

Αν $i = 4k + 2$, τότε η ισομετρία $\phi_i = \beta_{k+1}^{-1}$ διατηρεί γωνίες, το διάνυσμα σχηματίζει γωνία $(4k + 1)\theta$ με το πέρας της ακμής b_{k+1}^{-1} , επομένως έχουμε ότι το $\beta_{k+1}^{-1}(\vec{x}_i) = \vec{x}_{i+1}$ σχηματίζει γωνία $(4k + 1)\theta$ με την ακμή $\beta_{k+1}^{-1}(b_{k+1}^{-1}) = b_k$ στο τέλος της. Επομένως γωνία $(4k + 2)\theta = (i + 1)\theta$ με την ακμή a_{k+1}^{-1} στο τέλος της, η οποία ακμή βρίσκεται αριστερά της v_{i+1} .

Αν $i = 4k + 3$, τότε η ισομετρία $\phi_i = \alpha_{k+1}$ διατηρεί γωνίες, το διάνυσμα σχηματίζει γωνία $(4k + 2)\theta$ με το πέρας της ακμής a_{k+1}^{-1} , επομένως έχουμε ότι το $\alpha_k(\vec{x}_i) = \vec{x}_{i+1}$ σχηματίζει γωνία $(4k + 2)\theta$ με την ακμή $\alpha_{k+1}(a_{k+1}^{-1}) = a_{k+1}$ στο τέλος της. Άρα το $\vec{x}_{i+1}$ σχηματίζει γωνία $(4k + 3)\theta = (i + 1)\theta$ με την ακμή b_{k+1} στην αρχή της, η οποία ακμή βρίσκεται αριστερά του σημείου εφαρμογής.

Αν $i = 4k \neq 4g$, τότε η ισομετρία $\phi_i = \beta_k$ διατηρεί γωνίες, και απεικονίζει την ακμή b_k στην b_k^{-1} . Το διάνυσμα $\vec{x}_{4k-1}$ σχηματίζει γωνία $(4k - 1)\theta$ με την b_k στην αρχή της επομένως και το $\vec{x}_{4k}$ σχηματίζει γωνία $(4k - 1)\theta$ με την b_k^{-1} στην αρχή του, άρα γωνία $4k\theta$ με την ακμή a_{k+1} στην αρχή της, η οποία ακμή βρίσκεται αριστερά του σημείου εφαρμογής.

Τέλος αν το $i = 4g$, τότε η ισομετρία $\phi_i = \beta_g$ διατηρεί γωνίες, και απεικονίζει την

ακμή b_g στην b_g^{-1} . Το διάνυσμα $\vec{x}_{4g-1}$ σχηματίζει γωνία $(4g-1)\theta$ με την b_g στην αρχή της επομένως και το $\vec{x}_{4g}$ σχηματίζει γωνία $(4g-1)\theta$ με την b_g^{-1} στην αρχή του, άρα γωνία $4g\theta = 2\pi$ με την ακμή a_1 στο τέλος της, η οποία ακμή βρίσκεται αριστερά του σημείου εφαρμοής. Άρα $u_{4g} = v_0$, δηλαδή η $\phi_{4g} \circ \phi_{4g-1} \circ \phi_{4g-2} \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1(v_0) = v_0$. Από το Λήμμα 2.2.3 έπεται ότι τελικά $b_g \circ a_g \circ b_g^{-1} \circ a_g^{-1} \circ \dots \circ b_1^{-1} \circ a_1^{-1} = id_{\mathbb{D}^2}$. ■

Ισχυρισμός 2.5.6 (Poincaré).

Η ομάδα Γ είναι διακριτή και δρα στον $\mathbb{D}^2$ ελεύθερα και κανονικά.

Πράγματι, για να το δείξουμε αυτό θα κατασκευάσουμε ένα χώρο, ο οποίος είναι χώρος επικάλυψης της S_g , θα δείξουμε ότι είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{D}^2$ άρα απλά συνεκτικός, επομένως θα είναι ο καθολικός χώρος επικάλυψης της S_g (Η ιδέα αυτή οφείλεται στον Henri Poincaré).

Έστω G μία ομάδα με παράσταση $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g : [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$, επομένως είναι ισομορφική με $\pi_1(S_g)$. Έστω $\sim$ η σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $G \times P$ που παράγεται από όλες τις σχέσεις της μορφής $(h, \phi(z)) \sim (h\phi, z)$, όπου ϕ είναι ο μετασχηματισμός ταύτισης ακμών και τα $z, \phi(z)$ είναι στοιχεία του κανονικού γεωδαισιακού πολυγώνου ∂P . Εφοδιάζουμε την G με τη διακριτή τοπολογία. Έστω $\tilde{S}_g$ ο χώρος πηλίκο $G \times P / \sim$. Θα συμβολίζουμε με $[(h, z)]$ (όπου (h, z) αντιπρόσωπος της κλάσης) τις κλάσεις ισοδυναμίας στον $\tilde{S}_g$. Έστω $\pi : G \times P \rightarrow \tilde{S}_g$ η απεικόνιση πηλίκο.

Αριστερές μετατοπίσεις στη συντεταγμένη του G επάγουν μία φυσική συνεχή δράση της G στον $G \times P$. Αυτή η δράση σέβεται τις ταυτοποιήσεις που γίνονται από την π . Επομένως επάγει συνεχή δράση της G στον $\tilde{S}_g$, που ικανοποιεί την σχέση $h' \cdot [(h, z)] = [(h'h, z)]$. Αυτή η δράση προφανώς είναι ελεύθερη αφού $(h'h, z) \sim (h', z)$ αν και μόνο αν $h' = 1$.

Το υποσύνολο $\tilde{P} = \pi(\{1\} \times P) = \{[1, z] : z \in P\}$ του $\tilde{S}_g$ είναι ομοιομορφικό με το P και το $\tilde{S}_g$ είναι η ένωση συνόλων της μορφής $h \cdot \tilde{P} = \{[(h, z)] : z \in P\}$ καθώς το h τρέχει στην G , δηλαδή $\bigcup_{h \in G} h \cdot \tilde{P} = \tilde{S}_g$. Κάθε ένα από αυτά τα σύνολα είναι ομοιομορφικό με το P , και τα $h' \cdot \tilde{P}, h \cdot \tilde{P}$ τέμνονται σε ακμή αν και μόνο αν $h'h^{-1}$ είναι μετασχηματισμός ταύτισης ακμών. Αφού υπάρχουν πεπερασμένοι μετασχηματισμοί ταύτισης ακμών, έχουμε ότι κάθε σύνολο $h' \cdot \tilde{P}$ τέμνεται με πεπερασμένα άλλα σύνολα της μορφής $h \cdot \tilde{P}$.

Η σχέση ισοδυναμίας ταυτίζει σημεία (h, z) με $z \in \partial P$. Το νήμα της π πάνω από ένα σημείο $[(h, z)]$ για $z \in P^\circ$ αποτελείται από ακριβώς ένα σημείο $(h, z) \in G \times P$, αν πάλι το z ανήκει στο κανονικό πολύγωνο ∂P αλλά δεν είναι κορυφή, δηλαδή το z βρίσκεται στο εσωτερικό μίας ακμής, τότε υπάρχει ακριβώς ένας μετασχηματισμός ταύτισης ακμών ϕ

ο οποίος ταυτοποιεί την ακμή με μία άλλη, επομένως το νήμα πάνω από το $[(h, z)]$ αποτελείται ακριβώς από δύο σημεία (h, z) και $(h\phi^{-1}, \phi(z))$, αν τέλος το z είναι κορυφή του γεωδαισιακού πολυγώνου P , τότε έχουμε δείξει ότι υπάρχει μία ακολουθία μετασχηματισμών ταύτισης ακμών $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{4g}$, τέτοια ώστε αν z_i είναι η i κορυφή του πολυγώνου P μετρώντας με την αντίθετη φορά από τη φορά του ρολογιού και ξεκινώντας με $i = 0$ να είναι η κορυφή που είναι αρχή της a_1 , τότε $z_i = \phi_i \circ \dots \circ \phi_1(z_0)$. Επομένως όλες οι κορυφές του P είναι ισοδύναμες και άρα το νήμα της κλάσης $[(h_0, z_0)]$ αποτελείται από $4g$ σημεία $(h_0\phi_1^{-1}, z_1), \dots, (h_0\phi_1^{-1}\phi_2^{-1} \dots \phi_{4g}^{-1}, z_{4g})$.

Υπάρχει μία φυσική συνεχής απεικόνιση $\tilde{q} : \tilde{S}_g \rightarrow S_g$, η $\tilde{q}([h, z]) = q(z)$ που προκύπτει από την $q \circ \pi_2$ περνώντας στο πηλίκο.

$$\begin{array}{ccc} G \times P & \xrightarrow{\pi_2} & P \\ \pi \downarrow & & \downarrow q \\ \tilde{S}_g & \xrightarrow{\tilde{q}} & S_g \end{array}$$

Προφανώς η $\tilde{q}$ είναι επί γιατί $\tilde{q}(\tilde{P}) = S_g$. Είναι απεικόνιση πηλίκο γιατί, αν $U \subseteq \tilde{S}_g$ είναι ανοικτό υποσύνολο το οποίο είναι κορεσμένο ως προς την $\tilde{q}$, τότε $\pi^{-1}(U) \subseteq G \times P$ είναι ανοικτό και κορεσμένο ως προς την $\tilde{q} \circ \pi = q \circ \pi_2$ και αφού η $q \circ \pi_2$ είναι απεικόνιση πηλίκο, έπεται ότι $\tilde{q}(U) = \tilde{q} \circ \pi(\pi^{-1}(U)) = q \circ \pi_2(\pi^{-1}(U))$ είναι ανοικτό. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι τα νήματα της $\tilde{q}$ είναι ακριβώς οι τροχιές της G στην $\tilde{S}_g$, άρα έχουμε ταυτοποιήσει το S_g με τον χώρο των τροχιών $\tilde{S}_g/G$. Θέλουμε να δείξουμε ότι η $\tilde{q}$ είναι πράγματι μία απεικόνιση επικάλυψης.

Για να δείξουμε ότι η q είναι απεικόνιση επικάλυψης πρέπει να δείξουμε πρώτον ότι ο $\tilde{S}_g$ είναι συνεκτικός, κατά τόξα συνεκτικός, τοπικά συμπαγής και Hausdorff και δεύτερον ότι η δράση της G στον $\tilde{S}_g$ είναι κανονική (proper, σε κάποια βιβλία αναφέρεται ως properly discontinuous).

Η συνεκτικότητα είναι σχεδόν άμεση. Αν ϕ είναι ένας μετασχηματισμός ταύτισης ακμών που απεικονίζει την e στην e' , τότε τα συνεκτικά σύνολο $\tilde{P}$ και $\phi\tilde{P}$ έχουν κοινά σημεία $[(1, \phi(z))] = [(\phi, z)]$ για $z \in e$, επομένως $\tilde{P} \cup (\phi\tilde{P})$ είναι συνεκτικό. Χρησιμοποιώντας επαγωγή έχουμε ότι κάθε σύνολο της μορφής $\tilde{P} \cup (\phi_1\tilde{P}) \cup \dots \cup (\phi_n \dots \phi_1\tilde{P})$ είναι συνεκτικό. Αφού το $\tilde{S}_g$ είναι η ένωση όλων των συνόλων αυτής της μορφής έπεται ότι είναι συνεκτικό σύνολο.

Για να αποδειχθούν οι υπόλοιπες ιδιότητες του $\tilde{S}_g$, πρώτα πρέπει να εισάγουμε κάποιες

απεικονίσεις. Έστω $\tau : G \rightarrow \Gamma$ ο ομομορφισμός που στέλνει κάθε γεννήτορα a_i ή b_i , για $i = 1, 2, \dots, g$, στον εαυτό του, ο ομομορφισμός αυτός είναι καλά ορισμένος (αφού η Γ ικανοποιεί τις σχέσεις της G). Η απεικόνιση $G \times P \rightarrow \mathbb{D}^2$ που ορίζεται ως $(h, z) \mapsto \tau(h)z$ είναι συνεχής και σέβεται τις ταυτοποιήσεις που γίνονται από την $\sim$ άρα επάγει συνεχή δράση $\delta : \tilde{S}_g \rightarrow \mathbb{D}^2$ που δίνεται από τον τύπο $\delta([h, z]) = \tau(h)z$. Παρατηρούμε ότι η δ παίρνει τη δράση της G στον $\tilde{S}_g$ και την κάνει δράση της Γ στον $\mathbb{D}^2$, δηλαδή $\delta(h \cdot x) = \tau(h) \cdot \delta(x)$, όπου $x \in G \times P / \sim$.

Η πιο σημαντική ιδιότητα της $\tilde{S}_g$ είναι ότι κάθε $x \in \tilde{S}_g$ έχει περιοχή U και $\varepsilon > 0$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Η απεικόνιση δ απεικονίζει το $\bar{U}$ ομοιομορφικά σε κλειστή μπάλα, (ως προς την υπερβολική μετρική) $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(\delta(x), \varepsilon) \subseteq \mathbb{D}^2$.
- (ii) Η απεικόνιση δ απεικονίζει το U ομοιομορφικά σε ανοικτή μπάλα, $B_{\mathbb{D}^2}(\delta(x), \varepsilon) \subseteq \mathbb{D}^2$.
- (iii) Το U τέμνει τα σύνολα $h\tilde{P}$ για πεπερασμένα $h \in G$.

Κάθε τέτοια περιοχή καλείται **κανονική υπερβολική περιοχή**.

Αν υπάρχει τέτοια περιοχή U , τότε:

- Ο $\tilde{S}_g$ είναι τοπικά κατα τόξα συνεκτικός. Αφού κάθε κανονική υπερβολική περιοχή είναι τοπικά κατα τόξα συνεκτική, ως ομοιομορφική με κατα τόξα συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{D}^2$.
- Ο $\tilde{S}_g$ είναι τοπικά συμπαγής. Αφού κάθε κανονική υπερβολική περιοχή είναι τοπικά συμπαγής.
- Ο $\tilde{S}_g$ είναι Hausdorff. Πράγματι έστω $x, x' \in \tilde{S}_g$ και $U_x, U_{x'}$ δύο κανονικές υπερβολικές περιοχές των x και x' αντίστοιχα. Αν $x' \notin U_x$, τότε μικραίνοντας ίσως λίγο το U_x (αφού είναι ομοιομορφικό με μπάλα) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x' \notin \bar{U}_x$. Έχουμε λοιπόν ότι U_x και $U_{x'} \setminus U_x$ είναι ξένες περιοχές των x και x' . Αν τώρα $x' \in U_x$, τότε οι αντίστροφες εικόνες μέσω της συνάρτησης $\delta|_U$ ξένων περιοχών των $\delta(x)$ και $\delta(x')$ είναι ξένα ανοικτά σύνολα. Υπάρχουν ξένες περιοχές των $\delta(x)$ και $\delta(x')$ γιατί ο $\mathbb{D}^2$ είναι Hausdorff. Επομένως σε κάθε περίπτωση τα x και x' διαχωρίζονται.
- Η δράση της G στον $\tilde{S}_g$ είναι κανονική (ή αλλιώς properly discontinuous). Πράγματι, έστω $x, x' \in \tilde{S}_g$ και $U_x, U_{x'}$ δύο κανονικές υπερβολικές περιοχές των x και x' αντίστοιχα. Υπάρχουν πεπερασμένα $h \in G$ τέτοια ώστε $U_x \cap (h \cdot U_{x'}) \neq \emptyset$. Αφού τα

U_x και $U_{x'}$ τέμνονται μόνο σε πεπερασμένα σύνολα $h \cdot \tilde{P}$. Έπεται άμεσα ότι η δράση είναι κανονική.

Επομένως η $\tilde{q}$ είναι απεικόνιση επικάλυψης, άρα το μόνο που λείπει είναι ναδειχθεί η ύπαρξη κανονικής υπερβολικής περιοχής.

Έστω $x = [(h_0, z_0)]$ ένα τυχαίο σημείο του $\tilde{S}_g$. Το νήμα πάνω από το x αποτελείται από πεπερασμένα σημεία της μορφής (h_i, z_i) , όπου $z_i = \phi_i \circ \dots \circ \phi_1(z)$ για κάποια ακολουθία μετασχηματισμών ταύτισης ακμών $\phi_1, \dots, \phi_i$ και $h_i = h_0 \phi_1^{-1} \dots \phi_i^{-1}$ (το νήμα περιέχει 1, 2 ή 4g τέτοια σημεία ανάλογα με το αν το z_0 ανήκει στο εσωτερικό του P , στο εσωτερικό ακμής ή αν είναι κορυφή). Έστω $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε να είναι μικρότερο από το μισό της απόστασης του σημείου z_0 από οποιαδήποτε ακμή του P που δεν περιέχει το z_0 .

Έστω $W \subseteq G \times P$ η ένωση των συνόλων $\{h_i\} \times (B_{\mathbb{D}^2}(z_i, \varepsilon) \cap P)$ και $U := \pi(W)$. Επειδή το W είναι κορεσμένο ανοικτό σύνολο, το U είναι περιοχή του x στον $\tilde{S}_g$. Όμοια, επειδή το $\bar{W}$ είναι ένωση συνόλων $\{h_i\} \times (\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_i, \varepsilon) \cap P)$, που είναι κορεσμένα κλειστά σύνολα, έχουμε ότι $\pi(\bar{W}) = \bar{U}$. Άμεσα έχουμε ότι το U τέμνει τα $h \cdot \tilde{P}$ για πεπερασμένα h . Τέλος για να δείξουμε ότι το U είναι κανονική υπερβολική περιοχή, πρέπει να δείξουμε ότι η δ είναι ομοιομορφισμός από το $\bar{U}$ στο $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$ και από το U στο $B_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$. Αφού το διάγραμμα είναι μεταθετικό για κάθε $h \in G$ και οι $h, \tau(h)$ είναι ομοιομορφισμοί, αρκεί να το δείξουμε για $x = [(1, z_0)]$.

$$\begin{array}{ccc} \bar{U} & \xrightarrow{\delta} & \bar{B}_{\mathbb{D}^2}(\delta(x), \varepsilon) \\ h \downarrow & & \downarrow \tau(h) \\ h \cdot \bar{U} & \xrightarrow{\delta} & \bar{B}_{\mathbb{D}^2}(\delta(h \cdot x), \varepsilon) \end{array}$$

- Αν $z_0 \in P^\circ$, τότε $\bar{U} \subseteq \tilde{P}$ και είναι άμεσο από τον ορισμό ότι η δ περιορισμένη στο $\bar{U}$ είναι 1-1, $\delta(\bar{U}) = \bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$ και $\delta(U) = B_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$. Αφού το $\bar{U}$ είναι η αντίστροφη εικόνα ενός συμπαγούς συνόλου μέσω της π , έπεται ότι είναι συμπαγές. Άρα η $\delta : \bar{U} \rightarrow \bar{B}(z_0, \varepsilon)$ είναι ομοιομορφισμός.
- Αν z_0 ανήκει σε μία ακμή του P αλλά δεν είναι κορυφή (δηλαδή ανήκει στο εσωτερικό μίας ακμής). Έστω e_0 η ακμή στην οποία ανήκει το z_0 . Από την επιλογή του ε έχουμε ότι το $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon) \cap P$ περιέχει ολόκληρο το κομμάτι του $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$ που βρίσκεται στη μία πλευρά της ακμής e_0 . Υπάρχει ένας μετασχηματισμός ταύτισης ακμών σ ο οποίος παίρνει την e_0 και την απεικονίζει σε μία ακμή e_1 , και επομένως παίρνει το z_0 και το απεικονίζει στο $z_1 = \phi(z_0) \in e_1$. Ως ισομετρία στον $\mathbb{D}^2$, η ϕ απεικονίζει την

$\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$ ομοιομορφικά στην $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_1)$. Αφού τα $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon) \cap P$ και $\phi^{-1}(\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_1, \varepsilon) \cap P)$ βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές της e_0 , έπεται ότι $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon) = (\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon) \cap P) \cup \phi^{-1}(\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_1, \varepsilon) \cap P)$. Άρα $\delta(\bar{U}) = (\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon) \cap P) \cup (\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_1, \varepsilon) \cap P) = \bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$. Ο περιορισμός της δ στο $\bar{U}$ είναι 1-1, παίρνει το U και το απεικονίζει στο $B_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$ και άρα είναι ομοιομορφισμός.

- Έστω ότι το z_0 είναι κορυφή του P . Τότε $\delta(\bar{U}) = \bigcup_{i=1}^{4g} \phi_1^{-1} \circ \dots \circ \phi_i^{-1}(\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_i, \varepsilon) \cap P)$ όπου $z_1, z_2, \dots, z_{4g}$ είναι οι κορυφές του P . Από όλα όσα έχουμε δείξει έπεται ότι η ισομετρία $\phi_1^{-1} \circ \dots \circ \phi_i^{-1}$ απεικονίζει το z_i στο z_0 και το $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_i, \varepsilon) \cap P$ στην τομή του $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$ με το κομμάτι που βρίσκεται μεταξύ των γεωδαισιακών που περνάνε από το z_0 με γωνίες $-i\theta$ και $(-i+1)\theta$. Αυτές οι τομές όταν ενωθούν σχηματίζουν μία κλειστή μπάλα $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$ και η δ περιορισμένη στο $\bar{U}$ είναι 1-1 και το απεικονίζει επιμορφικά στο $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z_0, \varepsilon)$. Έπεται ότι είναι ομοιομορφισμός.

Έχουμε δείξει λοιπόν ότι υπάρχουν κανονικές υπερβολικές περιοχές και άρα ότι η $\tilde{g} : \tilde{S}_g \rightarrow S_g$ είναι απεικόνιση επικάλυψης. Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη μένει να δείξουμε ότι η $\delta : \tilde{S}_g \rightarrow \mathbb{D}^2$ είναι επίσης απεικόνιση επικάλυψης. Επειδή ο $\mathbb{D}^2$ είναι απλά συνεκτικός αυτό θα μας δώσει ότι η δ είναι ομοιομορφισμός και κατ' επέκταση ότι ο $\tilde{S}_g \cong \mathbb{D}^2$ είναι ο καθολικός χώρος επικάλυψης.

Αρχικά η απεικόνιση $\tau : G \rightarrow \Gamma$ είναι ισομορφισμός ομάδων. Είναι επί γιατί πάει τους γεννήτορες της G σε γεννήτορες της Γ και είναι 1-1 γιατί αν $\tau(h) = 1_\Gamma$, τότε για κάθε $x \in \tilde{S}_g$ έχουμε $\delta(h \cdot x) = \tau(h)\delta(x) = \delta(x)$, το οποίο δίνει $h \cdot x = x$ δηλαδή $h = 1$ γιατί η G δρα ελεύθερα.

Έπεται λοιπόν ότι η δράση της Γ στον $\mathbb{D}^2$ είναι ισοδύναμη με τη δράση της G στον $\tilde{S}_g$ μέσω του ομοιομορφισμού δ . Επίσης η απεικόνιση πηλίκο $\mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2/\Gamma$ είναι ισοδύναμη με την απεικόνιση επικάλυψης $\tilde{q} : \tilde{S}_g \rightarrow S_g$. Επομένως η δράση της Γ στον $\mathbb{D}^2$ είναι ελεύθερη, κανονική (ή αλλιώς properly discontinuous) και ο περιορισμός της απεικόνισης στο P είναι $\tilde{q} \circ \delta^{-1}|_P = q$.

Για να δείξουμε ότι η ομάδα Γ είναι διακριτή υποομάδα των $Isom^+(\mathbb{D}^2)$ υποθέτουμε ότι $\gamma_n \rightarrow \gamma$ στην Γ . Από συνέχεια $\gamma_n z \rightarrow \gamma z$ για κάθε $z \in \mathbb{D}^2$, και θέτουμε $h_n = \tau^{-1}(\gamma_n)$, $h = \tau^{-1}(\gamma)$ και $x = \delta^{-1}(z)$. Έπεται λοιπόν ότι $h_n \cdot x \rightarrow h \cdot x$. Αφού τα g_n είναι αυτομορφισμοί χώρου επικάλυψης αυτό συμβαίνει μόνο αν $g_n = g$ για κάθε $n > n_0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$.

Για να δείξουμε ότι η δ είναι απεικόνιση επικάλυψης, χρειαζόμαστε μία επιπλέον ιδιότητα των κανονικών υπερβολικών περιοχών. Υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε κάθε σημείο του $x \in \tilde{S}_g$

έχει μία κανονική υπερβολική περιοχή U_x τέτοια ώστε η κλειστότητα της να απεικονίζεται ομοιομορφικά μέσω της δ επί του $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(\delta(x), r)$. Για να τη δείξουμε αυτήν την ιδιότητα θεωρούμε $K \subseteq \tilde{S}_g$ την ένωση του $\tilde{P}$ με τις εικόνες $h \cdot \tilde{P}$ για τα πεπερασμένα $h \in G$ για τα οποία $\tilde{P} \cap (h \cdot \tilde{P}) \neq \emptyset$. Το K είναι συμπαγές, άρα η εικόνα του $\delta(K) \subseteq \mathbb{D}^2$ είναι κι αυτή συμπαγής, παρατηρούμε ότι το $\delta(K)$ περιέχει μία περιοχή του P . Πράγματι αν το U_x συμβολίζει τις κανονικές υπερβολικές περιοχές των σημείων $x \in K$, αυτά τα σύνολα $\delta(U_x)$ δημιουργούν ένα ανοικτό κάλυμμα του $\delta(K)$. Έστω c ο αριθμός Lebesgue του καλύμματος και έστω $r < c$ αρκετά μικρό έτσι ώστε για κάθε $z \in P$ η $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(z, r)$ να περιέχεται στην $\delta(K)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $z \in P$ υπάρχει μία κανονική υπερβολική περιοχή U_x του $x \in K$ τέτοια ώστε $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(\delta(x_0), r) \subseteq \delta(U_x)$. Για κάθε $x_0 \in \tilde{P}$, διαλέγουμε μία κανονική υπερβολική περιοχή U_x του $x \in K$ τέτοια ώστε $\bar{B}_{\mathbb{D}^2}(\delta(x_0), r) \subseteq \delta(U_x)$, και θέτουμε $V_{x_0} = (\delta|_U)^{-1}(B_{\mathbb{D}^2}(\delta(x_0), r))$. Άρα $\delta : V_{x_0} \rightarrow \bar{B}_{\mathbb{D}^2}(\delta(x_0), r)$ είναι ο περιορισμός ενός ομοιομορφισμού και άρα είναι απομόνος του ομοιομορφισμού. Άρα η δ είναι 1-1 στον $\tilde{P}$ και $\delta(x_0) \in \delta(V_{x_0})$, επομένως V_{x_0} είναι η επιθυμητή περιοχή του x_0 . Για κάθε $x \in \tilde{S}_g$ υπάρχει $h \in G$ τέτοιο ώστε $h \cdot x \in \tilde{P}$, και ώστε να μπορούμε να θέσουμε $V_x = \bar{h} \cdot V_{h \cdot x}$.

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι η δ είναι απεικόνιση επι κάλυψης. Πρώτα θα δείξουμε ότι είναι επί. Αν δεν ήταν, τότε η εικόνα $\delta(\tilde{S}_g)$ θα είχε συνοριακό σημείο $z_0 \in \mathbb{D}^2$. Θα υπήρχε τότε ένα σημείο $z \in \delta(\tilde{S}_g)$ του οποίου η απόσταση από το σημείο z_0 θα ήταν λιγότερη από $r/2$. Αλλά τότε $z = \delta(x)$ για κάποιο $x \in \tilde{S}_g$, και $\delta(V_x) = B_{\mathbb{D}^2}(z, r)$, το οποίο είναι γειτονιά του z_0 . Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το z_0 ανήκει στο σύνορο του $\delta(\tilde{S}_g)$.

Για κάθε $z_0 \in \mathbb{D}^2$, θα δείξουμε ότι η $B_{\mathbb{D}^2}(z_0, r/2)$ είναι ομοιόμορφα καλυμμένη. Έστω C μία συνιστώσα του $\delta^{-1}(B_{\mathbb{D}^2}(z_0, r/2))$ στην $\tilde{S}_g$. Αφού ο $\tilde{S}_g$ είναι κατά τόξα συνεκτικός, C είναι ανοικτό. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\delta : C \rightarrow B_{\mathbb{D}^2}(z_0, r/2)$ είναι ομοιομορφισμός. Διαλέγουμε $x \in C$ και θέτουμε $z = \delta(x)$ και $\phi = (\delta|_{V_x})^{-1} : B_{\mathbb{D}^2}(z, r) \rightarrow V_x$,

Το $\phi(B_{\mathbb{D}^2}(z_0, r/2))$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\delta^{-1}(B_{\mathbb{D}^2}(z_0, r/2))$ και περιέχει ένα σημείο x κοινό με την V , άρα πρέπει να περιέχεται στην C . Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $z' \in B_{\mathbb{D}^2}(z_0, r/2)$ έχουμε $\delta(\phi(z')) = z'$, άρα $\delta : C \rightarrow B_{\mathbb{D}^2}(z_0, r/2)$ είναι επί.

Από την άλλη μεριά το $\partial B_{\mathbb{D}^2}(z, r)$ είναι ξένο με το $B_{\mathbb{D}^2}(z_0, r/2)$ από τριγωνική ανισότητα. Αφού το δ πάει το ∂V_x στο $\partial B_{\mathbb{D}^2}(z, r)$ έπεται ότι $\partial V_x \cap C = \emptyset$. Ακόμα το $C \cap V_x$ είναι ανοικτό στον $\tilde{S}_g$ και επομένως ανοικτό στη συνιστώσα C , και $C \cap V_x = C \cap \bar{V}_x$ είναι κλειστό στην C . Αφού η C είναι συνεκτικό σύνολο ως συνεκτική συνιστώσα, $C \cap V_x = C$, άρα $C \subseteq V_x$. Επομένως ο $\delta|_C$ ο περιορισμός της δ στην C είναι ομοιομορφισμός, άρα είναι 1-1 και ανοικτή απεικόνιση, επομένως η $\delta : C \rightarrow B_{\mathbb{D}^2}(z_0, r/2)$ είναι ομοιομορφισμός. ■

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Μπορούμε λοιπόν να ταυτίσουμε τον καθολικό χώρο επικάλυψης της κλειστής επιφάνειας S_g γένους $g \geq 2$ με $\mathbb{D}^2$ ή $\mathbb{H}^2$. Βρήκαμε $\tilde{q}$ την απεικόνιση επικάλυψης από τον $\mathbb{D}^2$, έστω p η απεικόνιση επικάλυψης από τον $\mathbb{H}^2$.

Αν $x_0 \in S_g$, τότε μπορούμε να διαλέξουμε $z_0 \in \mathbb{H}^2$ τέτοιο ώστε $p(z_0) = x_0$. Η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(S_g, x_0)$ της επιφάνειας S_g μπορεί να ταυτοποιηθεί με την ομάδα μετασχηματισμών επικάλυψης Γ .

Για κάθε $a \in \pi_1(S_g)$, έστω α το γεωδαισιακό τμήμα από το z_0 στο $a \cdot z_0$. Τότε το γ_a είναι ένας βρόγχος με βάση το x_0 στην S_g , για τον οποίο έχουμε $[\gamma_a] = a$. Άμεσο πόρισμα των ιδιοτήτων της ομάδας μετασχηματισμών επικάλυψης είναι το ακόλουθο.

Πόρισμα 2.5.7.

1. Η ομάδα $\pi_1(S_g)$ δρα στον $\mathbb{H}^2$ με ισομετρίες.
2. Η ομάδα $\pi_1(S_g)$ είναι διακριτή και δρα στον $\mathbb{H}^2$ κανονικά (*properly discontinuous*).
3. Κάθε στοιχείο της $\pi_1(S_g)$ αντιστοιχεί σε ισομετρία η οποία δεν είναι ελλειπτική.

Ορισμός 2.5.8 (Ακτίνα μονομορφισμού).

Για κάθε $x \in S_g$ θεωρούμε $\varepsilon(x) = \sup\{\delta \in \mathbb{R}_{>0} : B_{S_g}(x, \delta) \text{ ισομετρική με την } B_{\mathbb{H}^2}(y, \delta)\}$. Ακτίνα μονομορφισμού καλούμε την $\varepsilon(S_g) := \inf\{\varepsilon(x) : x \in S_g\}$.

Θεώρημα 2.5.9.

Έστω S_g επιφάνεια γένους $g \geq 2$, τότε για κάθε $a \in \pi_1(S_g, x_0) \setminus \{1\}$ αντιστοιχεί μία ισομετρία.

1. Η a είναι υπερβολική ισομετρία.
2. Αν $b \in \pi_1(S_g, x_0)$ ισομετρία τέτοια ώστε $Axis(a) = Axis(b)$ οι άξονες να είναι ίσοι, τότε υπάρχει $c \in \pi_1(S_g, x_0)$ και $n, m \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $a = c^n$ και $b = c^m$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon = \varepsilon(S_g)$ η ακτίνα μονομορφισμού της S_g . Αφού η S_g είναι συμπαγής $\varepsilon > 0$. Εξ' ορισμού τότε ισχύει ότι για κάθε βρόγχο στην S_g με μήκος μικρότερο από $\varepsilon/2$ έχουμε ότι ο βρόγχος είναι ομοτοπικός με σημείο.

1. Υποθέτουμε εις άτοπο ότι η a είναι παραβολική ισομετρία. Από την ταξινόμηση των ισομετριών, μετά από συζυγία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a(z) = z + \lambda$ για $z \in \partial\mathbb{H}^2$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τώρα για τυχαίο $z \in \mathbb{H}^2$ υπολογίζουμε $d_{\mathbb{H}^2}(z, z + \lambda) = \ln \frac{\operatorname{Im}(z) + |\lambda|}{\operatorname{Im}(z)} = \frac{|\lambda|}{\operatorname{Im}(z)}$. Άρα επειδή υπάρχει σημείο $w \in \mathbb{H}^2$ το οποίο έχει αρκετά μεγάλο φανταστικό μέρος $\operatorname{Im}(w)$ τέτοιο ώστε $d_{\mathbb{H}^2}(w, a(w)) < \varepsilon/2$. Αυτό δείχνει ότι η προβολή του γεωδαισιακού τμήματος από το w στο $a(w)$ είναι βρόγχος στην S_g μήκους το πολύ $\varepsilon/2$ με βάση το σημείο $p(w)$. Από την κατασκευή ο βρόγχος αυτός είναι ελεύθερα ομοτοπικός με αντιπρόσωπο της κλάσης a και άρα η a πρέπει να είναι το τετριμμένο στοιχείο της ομάδας, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση. Αφού το a δεν είναι ελλειπτικό ούτε παραβολικό, έπεται ότι είναι υπερβολικό.
2. Επειδή τα a, b είναι στοιχεία της $\pi_1(S_g)$ έπεται ότι η ομάδα που παράγουν $\langle a, b \rangle =: H$ είναι διακριτή και δρα κανονικά και ελεύθερα στον $\mathbb{H}^2$. Επειδή και οι δύο ισομετρίες αφήνουν αναλλοίωτο τον άξονα $Axis(a) = Axis(b) =: A$ μπορούμε να περιορίσουμε τη δράση στον A . Ο άξονας A είναι ομοιομορφικός με τον $\mathbb{R}$. Επειδή ο $\mathbb{R}$ είναι ο καθολικός χώρος επικάλυψης του κύκλου και η δράση της H στον $\mathbb{R}$ είναι δράση επικάλυψης έχουμε ότι $H \leq \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$. Άρα H είναι κυκλική, από το οποίο προκύπτει το συμπέρασμα.

□

Κεφάλαιο 3

Καμπύλες και τόξα

3.1 Απλές κλειστές καμπύλες

Ορισμός 3.1.1.

1. **Κλειστή καμπύλη** μιας επιφάνειας S λέγεται μια συνεχής απεικόνιση $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$.
(Η ισοδύναμα μία συνεχής απεικόνιση $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ με $\alpha(0) = \alpha(1)$.)
2. Μία κλειστή καμπύλη α λέγεται **ουσιώδης** αν δεν είναι ομοτοπική με σημείο ή συ-
νοριακή συνιστώσα της επιφάνειας.

Συμβολισμός. Πολλές φορές γράφοντας α για μια κλειστή καμπύλη θα εννοούμε την εικόνα της μέσα στην S .

Πρόταση 3.1.2.

Έστω επιφάνεια S . Οι μη τετριμμένες κλάσεις συζυγίας της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(S)$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις μη τετριμμένες κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας των προσανατολισμένων κλειστών καμπυλών στην S .

Απόδειξη. Η μη επιλογή σημείου αναφοράς μας αναγκάζει να θεωρούμε κλάσεις συζυγίας. Σε κάθε προσανατολισμένη κλειστή καμπύλη στην επιφάνεια S μπορούμε να αντιστοιχήσουμε ένα στοιχείο της $\pi_1(S)$. Έστω α προσανατολισμένη κλειστή καμπύλη, διαλέγουμε ένα τόξο β από το x_0 σημείο βάσης της $\pi_1(S, x_0)$ σε ένα τυχαίο σημείο της καμπύλης. Προκύπτει ένα στοιχείο της $\pi_1(S)$, η κλάση ομοτοπίας της καμπύλης $\bar{\beta} * \alpha * \beta$, $[\bar{\beta} * \alpha * \beta] \in \pi_1(S, x_0)$.

Το στοιχείο της ομάδας που προκύπτει είναι καλώς ορισμένο ως προς συζυγία. Αρχικά εξαρτάται από την επιλογή του τόξου β , όμως για διαφορετικές επιλογές τόξων προκύπτουν

συζυγή στοιχεία. Πράγματι έστω γ_1, γ_2 δύο διαφορετικά τόξα, τα οποία ξεκινάνε από το σημείο βάσης της $\pi_1(S)$ και καταλήγουν σε ίσως διαφορετικά σημεία της α , έστω a_1, a_2 αντίστοιχα. Έστω α_1 η καμπύλη α με $\alpha_1(0) = a_1$, α_2 η καμπύλη α με $\alpha_2(0) = a_2$ και ψ το τμήμα της καμπύλης α που ενώνει το a_1 , με το a_2 , τότε

$$(3.1.1) \quad \gamma_1^{-1} * \alpha_1 * \gamma_1 = \gamma_1^{-1} * \psi^{-1} * \gamma_2 * \gamma_2^{-1} * \alpha_2 * \gamma_2 * \gamma_2^{-1} * \psi * \gamma_1 \Rightarrow$$

$$(3.1.2) \quad [\gamma_1^{-1} * \alpha_1 * \gamma_1] = [\gamma_1^{-1} * \psi^{-1} * \gamma_2][\gamma_2^{-1} * \alpha_2 * \gamma_2][\gamma_2^{-1} * \psi * \gamma_1] \Rightarrow$$

$$(3.1.3) \quad [\gamma_1^{-1} * \alpha_1 * \gamma_1] = [\gamma_2^{-1} * \psi * \gamma_1]^{-1}[\gamma_2^{-1} * \alpha_2 * \gamma_2][\gamma_2^{-1} * \psi * \gamma_1]$$

επομένως τα στοιχεία $[\gamma_1^{-1} * \alpha_1 * \gamma_1]$ και $[\gamma_2^{-1} * \alpha_2 * \gamma_2]$ είναι συζυγή, αφού η καμπύλη $\gamma_2^{-1} * \psi * \gamma_1$ είναι κλειστή και αρχίζει απο το σημείο βάσης της $\pi_1(S)$, δηλαδή $[\gamma_2^{-1} * \psi * \gamma_1] \in \pi_1(S)$.

Το ότι αυτή η αντιστοιχία είναι 1-1 και επί είναι άμεσο. Για το 1-1: δύο καμπύλες που δεν ανήκουν στην ίδια κλάση ελεύθερης ομοτοπίας δεν γίνεται να έχουν δύο ομοτοπικές τους καμπύλες οι οποίες είναι στην ίδια κλάση ομοτοπίας. Για το επί: για κάθε στοιχείο της $\pi_1(S)$ υπάρχει ένας αντιπρόσωπος, του οποίου η προηγούμενη διαδικασία μας δίνει συζυγές στοιχείο του. $\square$

Ορισμός 3.1.3.

Ένα στοιχείο g μιας ομάδας G λέγεται **πρωταρχικό** αν δεν υπάρχει $h \in G$ τέτοιο ώστε $g = h^k$ για κάποιο $|k| > 1$.

Παρατήρηση 3.1.4.

Η ιδιότητα του να είναι ένα στοιχείο πρωταρχικό είναι αναλλοίωτη ως προς συζυγία και επομένως έχει νόημα ο επόμενος ορισμός.

Ορισμός 3.1.5.

1. Μια κλειστή καμπύλη $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ μιας επιφάνειας S λέγεται **πρωταρχική** αν η κλάση συζυγίας που αντιστοιχεί στην κλάση ελεύθερης ομοτοπίας της (σύμφωνα με την Πρόταση 3.1.2) αποτελείται από πρωταρχικά στοιχεία.
2. Έστω α, β δύο κλειστές καμπύλες μιας επιφάνειας S . Η καμπύλη α λέγεται **πολλαπλάσιο** της β αν μπορεί να γραφτεί ως $\alpha = \beta \circ m_n$ όπου $m_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ με $e^{i\theta} \mapsto e^{in\theta}$ (ή αντίστοιχα $m_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ με $x \mapsto nx - [nx]$).

Ορισμός 3.1.6.

Έστω $p : \tilde{S} \rightarrow S$ μια απεικόνιση επικάλυψης και $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ μια κλειστή καμπύλη στην S . Με τον όρο ανύψωση της α στον $\tilde{S}$ εννοούμε την εικόνα μιας ανύψωσης $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \tilde{S}$ της απεικόνισης $f = \alpha \circ \pi$ όπου $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ είναι η $\theta \mapsto e^{2\pi i \theta}$ (η συνήθης απεικόνιση επικάλυψης του κύκλου).

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{S} \\ \pi \downarrow & \searrow \alpha \circ \pi & \downarrow p \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\alpha} & S \end{array}$$

Σημείωση. Αν S μία επιφάνεια με $\chi(S) \leq 0$, τότε μια ανύψωση μίας ουσιώδους απλής κλειστής καμπύλης της S στον καθολικό χώρο επικάλυψης, είναι ένα αντίγραφο του $\mathbb{R}$. Η ανύψωση της κλειστής καμπύλης α είναι διαφορετική από τη συνήθη ανύψωση της α .

Ορισμός 3.1.7.

Μία κλειστή καμπύλη $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ στην επιφάνεια S καλείται **απλή** αν είναι ένθεση, δηλαδή αν η απεικόνιση $\alpha : \mathbb{S}^1 \rightarrow S$ είναι μονομορφισμός.

Με άλλα λόγια μία απλή κλειστή καμπύλη είναι μία καμπύλη που δεν τέμνει τον εαυτό της. Αν τη θεωρήσουμε ως την εικόνα της στην επιφάνεια, τότε είναι απλή αν είναι ισομορφική με τον $\mathbb{S}^1$.

Ο λόγος που αυτή η συγκεκριμένη κατηγορία κλειστών καμπυλών είναι σημαντική είναι επειδή μπορούμε να ταξινομήσουμε τις κλάσεις ομοιομορφικών κλειστών καμπυλών στην S . Σημαντικό επίσης είναι ότι οι απλές κλειστές καμπύλες αντιστοιχούν σε πρωταρχικά στοιχεία της $\pi_1(S)$.

Πρόταση 3.1.8.

Έστω $\mathbb{T}^2$ ο τόρος διάστασης 2. Αν α είναι μια κλειστή καμπύλη στον $\mathbb{T}^2$ τότε η α είναι ομοτοπική με γεωδαισιακή.

Σημείωση.

Για την απόδειξη της Πρότασης, ανυψώνουμε την καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ και πραγματοποιώντας μία ομοτοπία "ευθείας γραμμής" ή αλλιώς "ακτινική ομοτοπία" παίρνουμε αυτό που θέλουμε. Η γεωδαισιακή αυτή δεν είναι απαραίτητα μοναδική.

Την ύπαρξη γεωδαισιακής σε κάθε κλάση ελεύθερης ομοτοπίας μπορούμε να δείξουμε και για υπερβολικές επιφάνειες. Ισχύει μάλιστα, κάτι ισχυρότερο, θα δείξουμε ότι κάθε κλάση ελεύθερης ομοτοπίας περιέχει μοναδική γεωδαισιακή.

Λήμμα 3.1.9.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια, $\tilde{S} = \mathbb{H}^2$ ο καθολικός χώρος επικάλυψης της S και a ένα στοιχείο της $\pi_1(S)$. Τότε $C_{\pi_1(S)}(a) \cong \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Το στοιχείο a αντιστοιχεί σε μία υπερβολική ισομετρία του $\mathbb{H}^2$, επομένως έχει έναν άξονα $Axis(a)$. Η υποομάδα $C_{\pi_1(S)}(a)$ της $\pi_1(S)$ είναι διακριτή ομάδα και δρα στον άξονα $Axis(a)$ κανονικά (ή properly discontinuous), επομένως είναι ισόμορφη με τη θεμελιώδη ομάδα του χώρου πηλίκου $Axis(a)/\sim$ όπου είναι ομοιομορφικός με τον κύκλο $\mathbb{S}^1$. Επομένως $C_{\pi_1(S)}(a) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

Πρόταση 3.1.10.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια, $\tilde{S}$ ο καθολικός χώρος επικάλυψης της S και $[\alpha]$ ένα πρωταρχικό στοιχείο της $\pi_1(S)$. Τότε τα στοιχεία της κλάσης συζυγίας του $[\alpha]$ στην $\pi_1(S)$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις ανυψώσεις της κλειστής καμπύλης α στον $\tilde{S}$.

Απόδειξη. Το σύνολο των ανυψώσεων της α στον $\tilde{S}$ είναι σε μία 1-1 και επί αντιστοιχία με τα σύμπλοκα της $\langle [\alpha] \rangle$ στην $\pi_1(S)$. Η ομάδα $\pi_1(S)$ δρα στο σύνολο των ανυψώσεων με μετασχηματισμούς επικάλυψης και αυτή η δράση συμφωνεί με τη φυσιολογική δράση της $\pi_1(S)$ στα σύμπλοκα της $\langle [\alpha] \rangle$, η σταθεροποιούσα της ανύψωσης που αντιστοιχεί στο σύμπλοκο $[\gamma]\langle [\alpha] \rangle$ είναι η κυκλική ομάδα $\langle [\gamma][\alpha][\gamma^{-1}] \rangle = \langle [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}] \rangle$

Επομένως η ανύψωση μιας καμπύλης α δίνεται από ένα σύμπλοκο $[\gamma]\langle [\alpha] \rangle$ και άρα αντιστοιχούμε την ανύψωση στο στοιχείο $[\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$ της κλάσης συζυγίας του $[\alpha]$. Το γεγονός ότι η αντιστοιχία αυτή είναι 1-1 και επί προκύπτει από το ότι η δράση μετασχηματισμών επικάλυψης είναι μεταβατική στα νήματα και από το Λήμμα 3.1.9, το ότι σε μια υπερβολική επιφάνεια η κεντροποιούσα κάθε στοιχείου της $\pi_1(S)$ είναι κυκλική. $\square$

Πρόταση 3.1.11.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια. Αν α είναι μία κλειστή καμπύλη στο S η οποία δεν είναι ομοτοπική με σημείο ή συνοριακή συνιστώσα, τότε η α είναι ομοτοπική με μοναδική γεωδαισιακή κλειστή καμπύλη γ .

Απόδειξη. Διαλέγουμε $\tilde{\alpha}$ μία ανύψωση της α στον $\mathbb{H}^2$. Όπως προηγουμένως η $\tilde{\alpha}$ σταθεροποιείται από κάποιο στοιχείο της κλάσης συζυγίας του $[\alpha]$ στην $\pi_1(S)$, $Cl_{\pi_1(S)}([\alpha])$, έστω T η αντίστοιχη ισομετρία του $\mathbb{H}^2$. Από υπόθεση για το $[\alpha]$ έχουμε ότι η T είναι υπερβολική ισομετρία και άρα έχει άξονα μεταφοράς $Axis([\alpha]) =: A$.

Θεωρούμε την προβολή του A στην S και θέτουμε γ_0 να είναι η γεωδαισιακή κλειστή καμπύλη που διανύει την προβολή αυτή μία φορά. Κάθε ισομεταβλητή ομοτοπία από το $\tilde{\alpha}$

στο A προβάλλεται σε ομοτοπία από το α στην γ_0 , η οποία είναι η επιθυμητή γ . Τώρα θα κατασκευάσουμε μια τέτοια ομοτοπία. Για κάθε σημείο της $\tilde{\alpha}$ παίρνουμε τη γεωδαισιακή που το ενώνει με το πλησιέστερο σημείο της στο A . Σημειώνουμε ότι δεν έχει σημασία η παραμετρικοποίηση της γ καθώς μία καμπύλη είναι ομοτοπική με τον αναπαραμετρικοποιημένο εαυτό της. Επομένως δείξαμε ότι υπάρχει τέτοια γ .

Μένει να δείξουμε τη μοναδικότητα. Για να δείξουμε τη μοναδικότητα υποθέτουμε ότι μας δίνεται μία ομοτοπία $\mathbb{S}^1 \times I \rightarrow S$ από την α σε ένα πολλαπλάσιο β κάποιας απλής κλειστής γεωδαισιακής γ' . Από συμπάγεια του $\mathbb{S}^1 \times I$ υπάρχει μια σταθερά $c \geq 0$ τέτοια ώστε κανένα σημείο του α δε μετακινείται απόσταση μεγαλύτερη από c από την ομοτοπία. Στον καθολικό χώρο επικάλυψης $\mathbb{H}^2$, η ομοτοπία ανυψώνεται σε ομοτοπία από την ανύψωση $\tilde{\alpha}$ του α σε μια γεωδαισιακή ανύψωση $\tilde{\gamma}'$ του γ' , και σημεία του $\tilde{\alpha}$ μετακινούνται το πολύ c . Έπεται ότι η $\tilde{\alpha}$ βρίσκεται στην c -περιοχή της $\tilde{\gamma}'$, άρα η $\tilde{\alpha}$ έχει τα ίδια πέρατα στο $\partial\mathbb{H}^2$. Όμως μια γεωδαισιακή στον $\mathbb{H}^2$ χαρακτηρίζεται από τα πέρατά της στο $\partial\mathbb{H}^2$, έπεται ότι η γεωδαισιακή κλειστή καμπύλη γ' είναι η ίδια με την γ πιθανώς με αντίθετο προσανατολισμό. Η κλειστή καμπύλη β καθορίζεται από το ποιο πολλαπλάσιο της γ είναι. Αλλά διαφορετικά πολλαπλάσια της γ αντιστοιχούν σε κλάσεις συζυγίας της $Isom^+(\mathbb{H}^2)$ που έχουν διαφορετικά μήκη μετατόπισης ή κατευθύνσεις μεταφοράς. Κλάσεις συζυγίας με διαφορετικά μήκη μετατόπισης είναι διαφορετικές μεταξύ τους και άρα διαφορετικά πολλαπλάσια της γ δεν βρίσκονται στην ίδια κλάση ελεύθερης ομοτοπίας. $\square$

Πόρισμα 3.1.12.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια. Τότε οι κλάσεις συζυγίας της $\pi_1(S)$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις προσανατολισμένες γεωδαισιακές κλειστές καμπύλες στην S .

Απόδειξη. Πράγματι από την Πρόταση 3.1.2 έχουμε ότι οι κλάσεις συζυγίας της $\pi_1(S)$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας των προσανατολισμένων κλειστών καμπυλών στην S , όμως από την πρόταση 3.1.11 κάθε κλάση ελεύθερης ομοτοπίας περιέχει ακριβώς μία γεωδαισιακή. $\square$

Πρόταση 3.1.13.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια και μία α απλή κλειστή καμπύλη της S . Αν η α δεν είναι ομοτοπική με σημείο, τότε κάθε στοιχείο της αντίστοιχης κλάσης συζυγίας της $\pi_1(S)$ είναι πρωταρχικό.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μία απεικόνιση επικάλυψης $\mathbb{H}^2 \rightarrow S$ και έστω $\phi \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$ η υπερβολική ισομετρία που αντιστοιχεί σε κάποιο στοιχείο της κλάσης συζυγίας του $[\alpha]$. Η πρωταρχικότητα του στοιχείου της κλάσης συζυγίας του $[\alpha]$ είναι ισοδύναμη με την πρωταρχικότητα του ϕ στην ομάδα μετασχηματισμών επικάλυψης.

Υποθέτουμε ότι $\phi = \psi^n$ όπου η ψ είναι ένα άλλο στοιχείο της ομάδας μετασχηματισμών επικάλυψης και $n \in \mathbb{Z}$. Σε οποιαδήποτε ομάδα δυνάμεις του ίδιου στοιχείου μετατίθενται και άρα η ϕ και η ψ μετατίθενται, από την Παρατήρηση 2.4.7 οι ϕ και ψ έχουν τον ίδιο άξονα. Επομένως οι ισομετρίες ϕ και ψ έχουν το ίδιο σύνολο σταθερών σημείων στο $\partial\mathbb{H}^2$.

Έστω $\tilde{\alpha}$ μία ανύψωση της κλειστής καμπύλης α η οποία έχει τα ίδια πέρατα στο $\partial\mathbb{H}^2$ με τον άξονα της ϕ . Ισχυριζόμαστε ότι $\psi(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$. Γνωρίζουμε ότι το $\psi(\tilde{\alpha})$ είναι μία ανύψωση του α . Αφού η α είναι απλή όλες οι ανυψώσεις της είναι ξένες και επομένως δεν υπάρχουν ανυψώσεις της α με τα ίδια πέρατα στο $\partial\mathbb{H}^2$. Τώρα έχουμε ότι $\phi(\psi(\tilde{\alpha})) = \psi^n(\psi(\tilde{\alpha})) = \psi(\psi^n(\alpha)) = \psi(\phi(\tilde{\alpha})) = \psi(\tilde{\alpha})$. Αφού τα σταθερά σημεία στο $\partial\mathbb{H}^2$ της ϕ είναι μόνο τα πέρατα της $\tilde{\alpha}$ έπεται ότι τα πέρατα της $\tilde{\alpha}$ είναι ίδια με τα πέρατα της $\psi(\tilde{\alpha})$. Επομένως $\psi(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$ και αποδείξαμε τον ισχυρισμό.

Άρα ο περιορισμός της ψ στο $\tilde{\alpha}$ είναι μεταφορές και $\phi = \psi^n$, δηλαδή η α διατρέχει n -φορές την κλειστή καμπύλη στην S και δίνεται από τον τύπο $\tilde{\alpha}/\langle\psi\rangle$. Όμως η α είναι απλή άρα $n = \pm 1$, το οποίο θέλαμε να δείξουμε. $\square$

Σημείωση. Η επόμενη Πρόταση 3.1.14 μας επιτρέπει τη γενίκευση της Προτάσης 3.1.13 σε συμπαγείς επιφάνειες. Αυτό γιατί οι κλάσεις συζυγίας στοιχείων της $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$ είναι μονοσύνολα.

Πρόταση 3.1.14 (Απλές κλειστές καμπύλες του τόρου).

Οι μη τετριμμένες κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας προσανατολισμένων απλών κλειστών καμπυλών στον $\mathbb{T}^2$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο των πρωταρχικών σημείων της $\pi_1(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{Z}^2$.

Απόδειξη. Αρχικά ένα στοιχείο της $\mathbb{Z}^2$, έστω (x, y) , είναι πρωταρχικό αν και μόνο αν $(x, y) = (0, \pm 1)$ ή $(\pm 1, 0)$ ή $\mu\chi\delta(x, y) = 1$.

Έστω $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ η συνήθης απεικόνιση επικάλυψης, όπου η ομάδα μετασχηματισμών επικάλυψης παράγεται από τα $(1, 0)$ και $(0, 1)$. Αν θεωρήσουμε για σημείο βάσης της $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ την εικόνα του $(0, 0)$, έστω x_0 , τότε ένας τρόπος για να πάρουμε αντιπρόσωπο του (x, y) ως βρόγχο στον $\mathbb{T}^2$ είναι να πάρουμε την ευθεία γραμμή που ενώνει το (x, y) με το $(0, 0)$ στο $\mathbb{R}^2$ και να την προβάλλουμε στο $\mathbb{T}^2$ μέσω της p .

Έστω γ μία προσανατολισμένη απλή κλειστή καμπύλη στον $\mathbb{T}^2$. Χρησιμοποιώντας αν χρειάζεται ομοτοπία μπορούμε να υποθέσουμε ότι η γ περνά από το σημείο x_0 . Οποιαδήποτε κατά τόξα ανύψωση της γ στον $\mathbb{R}^2$ με αρχή το $(0,0)$ (δηλαδή $\tilde{\gamma}_{(0,0)}$) έχει τέλος σε ένα σημείο (x,y) . Υπάρχει τότε μια ομοτοπία από το γ στη συνήθη "ευθεία γραμμή" που αντιπροσωπεύει το στοιχείο $(x,y) \in \pi_1(\mathbb{T}^2)$. Πράγματι αν θεωρήσουμε την ομοτοπία της "ευθείας γραμμής" στον χώρο επικάλυψης από την ανύψωση του γ στην ευθεία γραμμή που περνά από το $(0,0)$ και το (x,y) , τότε αυτή είναι ισομεταβλητή ως προς την ομάδα μετασχηματισμών επικάλυψης και άρα επάγει την επιθυμητή ομοτοπία.

Τέλος αν μία κλειστή καμπύλη στον $\mathbb{T}^2$ είναι απλή, τότε ο αντιπρόσωπος της μορφής που αναφέρθηκε θα είναι επίσης απλός. Αυτό γιατί για να είναι απλό ένα στοιχείο της μορφής που δημιουργήσαμε πρέπει η ευθεία από το $(0,0)$ στο (x,y) να μην διέρχεται από άλλο στοιχείο του $\mathbb{Z}^2$ στον $\mathbb{R}^2$, δηλαδή να έχει τη μορφή που αναφέρθηκε στην αρχή. $\square$

Ορισμός 3.1.15.

Έστω γ_1 και γ_2 δύο γεωδαισιακές γραμμές στον $\mathbb{H}^2$. Λέμε ότι τα πέρατα τους συνδέονται στο σύνορο $\partial\mathbb{H}^2$ αν οι γεωδαισιακές γραμμές τέμνονται.

Σημείωση. Μπορεί να δοθεί ισοδύναμος ορισμός (χαρακτηρισμός) εφόσον το σύνορο του χώρου είναι ομοιομορφικό με $\mathbb{S}^1$. Λέμε ότι τα πέρατα $\partial\gamma_1^{(1)}, \partial\gamma_1^{(2)}$ και $\partial\gamma_2^{(1)}, \partial\gamma_2^{(2)}$ των γ_1 και γ_2 αντιστοίχα, συνδέονται στο σύνορο $\partial\mathbb{H}^2$ αν δεν υπάρχουν στο $\partial\mathbb{H}^2$ τόξα από το $\partial\gamma_1^{(1)}$ στο $\partial\gamma_1^{(2)}$ και από το $\partial\gamma_2^{(1)}$ στο $\partial\gamma_2^{(2)}$ ξένα μεταξύ τους.

Λήμμα 3.1.16.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια και $\pi_1(S)$ η θεμελιώδης ομάδα της. Έστω γ μία γεωδαισιακή κλειστή καμπύλη στην S και $c = [\gamma] \in \pi_1(S)$ η αντίστοιχη κλάση ομοτοπίας.

1. Η γ είναι απλή αν και μόνο αν $a(\text{Axis}(c)) \cap \text{Axis}(c) = \emptyset$ για κάθε $a \in \pi_1(S) \setminus \{c^n : n \in \mathbb{Z}\}$.
2. Αν υπάρχει μία απλή κλειστή καμπύλη α ελευθέρως ομοτοπική με αντιπρόσωπο της c , τότε η γ είναι απλή.

Απόδειξη.

1. Έστω $p : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$ η απεικόνιση επικάλυψης. Έστω επίσης ότι υπάρχουν $a \in \pi_1(S) \setminus \{c^n : n \in \mathbb{Z}\}$ και $z \in a(\text{Axis}(c)) \cap \text{Axis}(c)$. Αφού $a \neq c^n$, $\text{Axis}(aca^{-1}) = a \cdot \text{Axis}(c) \neq \text{Axis}(c)$. Επομένως τα σταθερά σημεία των aca^{-1} και c είναι ξεχωριστά στον $\partial\mathbb{H}^2$ και άρα οι γεωδαισιακές γραμμές $a \cdot \text{Axis}(c)$ και $\text{Axis}(c)$ τέμνονται

εγκάρσια στον $\mathbb{H}^2$. Αυτές οι δύο γεωδαισιακές γραμμές προβάλλονται στην ίδια γεωδαισιακή, $p(\text{Axis}(c)) = p(\text{Axis}(aca^{-1})) \subset S$, δείξαμε στην απόδειξη της Πρότασης 3.1.11, ότι προβάλλονται σε γεωδαισιακή, και επειδή η $\pi_1(S)$ δρα με μετασχηματισμούς επικάλυψης έπεται ότι προβάλλονται στην ίδια γεωδαισιακή. Τότε $p(z) \in S$ είναι σημείο εγκάρσιας τομής, επομένως η γ δεν είναι απλή.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι η γ δεν είναι απλή, επομένως η προβολή $p(\text{Axis}(c))$ τέμνεται με τον εαυτό της σε ένα σημείο $w \in S$. Έστω $z \in \mathbb{H}^2$ τέτοιο ώστε $p(z) = w$. Θεωρούμε την ανύψωση του $p(\text{Axis}(c))$ σε μία περιοχή του z . Αφού η p είναι τοπικά ομοιομορφισμός, υπάρχουν δύο ξεχωριστές γεωδαισιακές γραμμές γ_1, γ_2 που τέμνονται στο z και προβάλλονται στο $p(\text{Axis}(c))$. Άρα υπάρχουν $a, b \in \pi_1(S)$ τέτοιο ώστε $\gamma_1 = a \cdot \text{Axis}(c)$ και $\gamma_2 = b \cdot \text{Axis}(c)$. Τουλάχιστον ένα από τα δύο $\gamma_i \neq \text{Axis}(c)$, έστω $\gamma_1 \neq \text{Axis}(c)$. Τότε $a \notin \{c^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Έπεται ότι τα στοιχεία της τροχιάς του $\text{Axis}(c)$ υπό τη δράση των στοιχείων $\pi_1(S) \setminus \{c^n : n \in \mathbb{Z}\}$ δεν είναι ανά δύο ξένα.

2. Υποθέτουμε εις άτοπο ότι η γ δεν είναι απλή. Από το 1. υπάρχουν $a, b \in \pi_1(S)$ τέτοια ώστε $b^{-1}a \notin \{c^n : n \in \mathbb{Z}\}$ και $a \cdot \text{Axis}(c) \cap b \cdot \text{Axis}(c) \neq \emptyset$. Έστω α μία απλή κλειστή καμπύλη ελευθέρως ομοτοπική με $p(\text{Axis}(c))$ και $\tilde{\alpha}$ μία κατά τόξα ανύψωση της α . Αφού η $\tilde{\alpha}$ είναι συμπαγής, έχει φραγμένη απόσταση από τον $\text{Axis}(c)$, την επεκτείνουμε σε ανύψωση σύμφωνα με τον Ορισμό 3.1.6. Έστω, επιπλέον, ότι $\tilde{\alpha}_1 = a \cdot \tilde{\alpha}$ και $\tilde{\alpha}_2 = b \cdot \tilde{\alpha}$. Έχουμε λοιπόν ότι $\tilde{\alpha}_1 \subset \mathcal{N}_c(a \cdot \text{Axis}(c))$ και $\tilde{\alpha}_2 \subset \mathcal{N}_c(b \cdot \text{Axis}(c))$. Έπεται ότι $\tilde{\alpha}_1 \cap \tilde{\alpha}_2 \neq \emptyset$. Τέλος $p(\tilde{\alpha}_i) = \alpha$ για $i = 1, 2$ δηλαδή η α δεν είναι απλή, άτοπο.

□

Πόρισμα 3.1.17.

Έστω S μια υπερβολική επιφάνεια και α μια κλειστή καμπύλη στην S . Έστω γ η μοναδική γεωδαισιακή στην κλάση ελεύθερης ομοτοπίας της α που προκύπτει από την Πρόταση 3.1.11. Αν η α είναι απλή, τότε και η γ είναι απλή.

3.2 Αριθμοί τομής

Ένα βασικό εργαλείο που θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος Dehn, Nielsen, Baer είναι αυτό των αριθμών τομής μεταξύ δύο απλών κλειστών καμπυλών. Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι για να οριστεί ο αριθμός τομής δύο απλών κλειστών καμπυλών μιας επιφάνειας. Ο ένας λαμβάνοντας υπ' όψιν τον προσανατολισμό και ο άλλος αγνοώντας τον. Επειδή οι επιφάνειες S είναι επιφάνειες Riemann, έχουμε την έννοια της γωνίας και επομένως μπορούμε να μιλήσουμε για εγκάρσιες καμπύλες.

Ορισμός 3.2.1.

Έστω α, β δύο εγκάρσιες, προσανατολισμένες, απλές, κλειστές καμπύλες σε μια επιφάνεια S . **Αλγεβρικός αριθμός τομής** των α και β , συμβολίζουμε με $\hat{i}(\alpha, \beta)$, λέγεται το άθροισμα των δεικτών των σημείων τομής των α και β .

Σημείωση. Δείκτης ενός σημείου τομής δύο καμπυλών είναι η συνάρτηση που δίνει $+1$ αν ο προσανατολισμός της τομής συμπίπτει με την επιφάνεια S και -1 στην αντίθετη περίπτωση. Διαισθητικά αν θεωρήσουμε προσανατολισμό στις καμπύλες και διατρέξουμε τη μία από τις δύο, τότε αν η άλλη σε ένα σημείο τομής την τέμνει από αριστερά προς τα δεξιά έχουμε $+1$, στην αντίθετη περίπτωση έχουμε -1 .

Παρατήρηση 3.2.2.

Αν $\alpha' \sim_f \alpha$ και $\beta' \sim_f \beta$ είναι ελευθέρως ομοτοπικές καμπύλες, τότε μπορεί ναδειχθεί $\hat{i}(\alpha, \beta) = \hat{i}(\alpha', \beta')$. Επομένως έχει νόημα να γράφουμε $\hat{i}([\alpha]_f, [\beta]_f)$. (Όπου $[\alpha]_f$ η κλάση ελεύθερης ομοτοπίας της κλειστής καμπύλης α .)

Ορισμός 3.2.3 (Αλγεβρικός αριθμός τομής).

Έστω a, b δύο κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας απλών, κλειστών καμπυλών σε μια επιφάνεια S . Ο **αλγεβρικός αριθμός τομής** (algebraic intersection number) των a και b , συμβολίζουμε με $\hat{i}(a, b)$, είναι ο $\hat{i}(\alpha, \beta)$ για δύο αντιπροσώπους $\alpha \in a$ και $\beta \in b$. (δηλαδή $[\alpha]_f = a$ και $[\beta]_f = b$)

Ορισμός 3.2.4 (Γεωμετρικός αριθμός τομής).

Έστω a, b δύο κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας απλών, κλειστών καμπυλών σε μια επιφάνεια S . Ο **γεωμετρικός αριθμός τομής** (geometric intersection number) των a και b , συμβολίζουμε με $i(a, b)$, ορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός σημείων τομής μεταξύ δύο αντιπροσώπων των a και b . Δηλαδή $i(a, b) = \min \{ |\alpha \cap \beta| : \alpha \in a, \beta \in b \}$.

Παρατήρηση 3.2.5.

Ο γεωμετρικός αριθμός τομής είναι συμμετρική συνάρτηση αφού $i(a, b) = \min \{ |\alpha \cap \beta| : \alpha \in a, \beta \in b \} = \min \{ |\beta \cap \alpha| : \alpha \in a, \beta \in b \} = i(b, a)$.

Αντιθέτως ο αλγεβρικός αριθμός τομής είναι αντισυμμετρική συνάρτηση αφού αν ο δείκτης ενός σημείου τομής της α με την β είναι $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, τότε ο δείκτης του ίδιου σημείου τομής της β με την α είναι $-\varepsilon$ (αφού η τομή έχει αντίθετο προσανατολισμό από την αρχική). Αυτό συμβαίνει όμως σε όλα τα σημεία τομής άρα $\hat{i}(\alpha, \beta) = \hat{i}(\beta, \alpha)$ και κατ' επέκταση $\hat{i}([\alpha]_f, [\beta]_f) = \hat{i}([\beta]_f, [\alpha]_f)$.

Για την κλάση ελεύθερης ομοτοπίας οποιασδήποτε απλής κλειστής καμπύλης α ισχύει $i([\alpha]_f, [\alpha]_f) = 0 = \hat{i}([\alpha]_f, [\alpha]_f)$.

Ισχύει κάτι που δε θα αποδείξουμε, αν μια καμπύλη α διαχωρίζει την επιφάνεια S σε δύο συνιστώσες, τότε για κάθε β έχουμε $\hat{i}(\alpha, \beta) = 0$ και $i(\alpha, \beta) \in 2\mathbb{Z}$. Γενικότερα, ισχύει ακόμα ότι $i(\alpha, \beta) - \hat{i}(\alpha, \beta) \in 2\mathbb{Z}$.

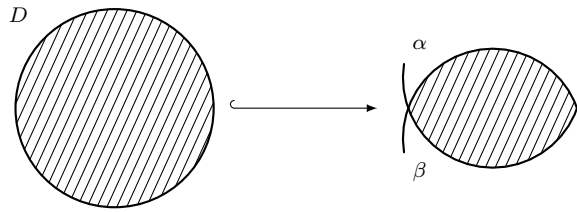
Ορισμός 3.2.6 (Ελαχιστική θέση).

Δύο απλές, κλειστές καμπύλες α και β λέμε ότι βρίσκονται σε **ελαχιστική θέση** αν $|\alpha \cap \beta| = i([\alpha]_f, [\beta]_f)$.

Θα αναπτύξουμε ορολογία και μια τεχνική έτσι ώστε με απλό τρόπο να υπολογίζουμε το πότε δύο απλές, κλειστές καμπύλες είναι σε ελαχιστική θέση.

Ορισμός 3.2.7.

Λέμε ότι δύο εγκάρσιες, απλές, κλειστές καμπύλες α και β , σε μια επιφάνεια S , δημιουργούν **δίγωνο** (bigon), αν υπάρχει η εμφύτευση ενός δίσκου στην S , η οποία έχει σύνορο την ένωση ενός τόξου της α και ενός τόξου της β , που τέμνονται ακριβώς σε δύο σημεία.

**Λήμμα 3.2.8.**

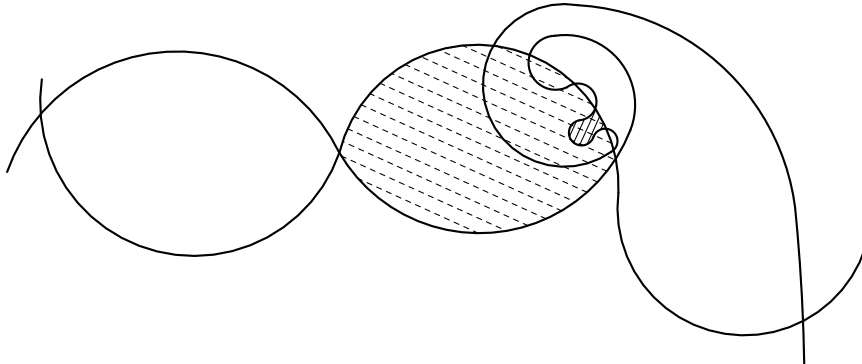
Αν δύο εγκάρσιες, απλές, κλειστές καμπύλες α και β σε μια συμπαγή επιφάνεια S δε σχηματίζουν δίγωνα, τότε, στον καθολικό χώρο επικάλυψης $\tilde{S}$ της S , κάθε ζεύγος ανυψώσεων $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$ των α και β αντίστοιχα τέμνονται το πολύ σε ένα σημείο.

Απόδειξη. Στην περίπτωση που η επιφάνεια S είναι η $\mathbb{S}^2$ τότε ο καθολικός χώρος επικάλυψής της είναι ο εαυτός της και άρα κάθε ζεύγος ανυψώσεων καμπυλών είναι οι ίδιες οι καμπύλες άρα ισχύει το αποτέλεσμα.

Αν η επιφάνεια S είναι είτε υπερβολική είτε $S = \mathbb{T}^2$, τότε ο καθολικός χώρος επικάλυψής της είναι ομοιομορφικός με το $\mathbb{R}^2$. Έστω $p : \tilde{S} \rightarrow S$ η απεικόνιση επικάλυψης.

Υποθέτουμε εις άτοπο ότι τα $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$ τέμνονται σε τουλάχιστον δύο σημεία. Έπεται ότι υπάρχει μία εμφύτευση ενός δίσκου D στο $\tilde{S} = \mathbb{R}^2$ η οποία φράσσεται από τμήμα της $\tilde{\alpha}$ και τμήμα της $\tilde{\beta}$.

Από τη συμπίεση του $(p^{-1}(\alpha) \cup p^{-1}(\beta)) \cap D = (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) \cap D$ και επειδή οι α και β είναι εγχάρσιες έπεται ότι το $(\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta}) \cap D$ είναι πεπερασμένο γράφημα, θεωρώντας τα σημεία τομής ως κορυφές και τα τμήματα των καμπυλών μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων τομής ως ακμές. Επομένως αφού το γράφημα είναι πεπερασμένο, υπάρχει μία εμφύτευση δίσκου D' στον $\tilde{S} = \mathbb{R}^2$ που φράσσεται από τμήμα της $\tilde{\alpha}$ και της $\tilde{\beta}$ έτσι ώστε η τομή $D' \cap (\tilde{\alpha} \cup \tilde{\beta})$ να είναι γράφημα με δύο ακμές και δύο κορυφές. Έστω v_1, v_2 οι δύο κορυφές του D' και α', β' οι ακμές του.



Ισχυρισμός 3.2.9. Ο περιορισμός της $p|_{\partial D'}$ στο $\partial D'$ είναι εμφύτευση (μονομορφισμός).

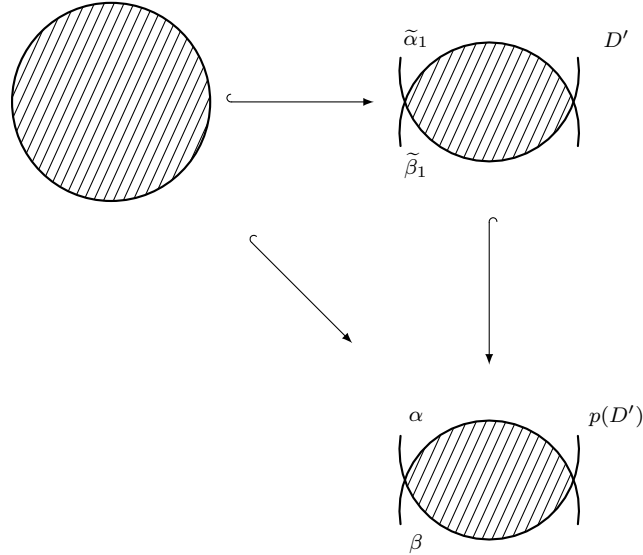
Πράγματι, τα σημεία v_1 και v_2 απεικονίζονται σε διαφορετικά σημεία στην S γιατί οι τομές των $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$ στα v_1 και v_2 έχουν αντίθετες κατευθύνσεις. Αν ένα σημείο του α' και ένα σημείο του β' είχαν την ίδια εικόνα στην S , τότε και τα δύο σημεία θα ήταν σημεία τομής της $p^{-1}(\alpha)$ και $p^{-1}(\beta)$ δηλαδή της $\tilde{\alpha}$ με την $\tilde{\beta}$ που έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι διαλέξαμε D' τέτοιο ώστε να έχει δύο κορυφές.

Αν δύο διαφορετικά σημεία του α' (αντίστοιχα του β') απεικονίζονταν στο ίδιο σημείο της S , τότε θα υπήρχε μία ανύψωση της $p(v_1)$ μεταξύ τους, το οποίο καταλήγει πάλι σε αντίφαση, για τον ίδιο λόγο με την προηγούμενη παράγραφο. ■

Ισχυρισμός 3.2.10. Ο δίσκος D' εμφυτεύεται (μέσω της p) στην S .

Πράγματι, αν x και y δύο σημεία στον D' προβάλλονται στο ίδιο σημείο στην S , τότε $x = \phi(y)$ για κάποιο μετασχηματισμό επικάλυψης ϕ . Η επικάλυψη είναι κανονική, αφού ο χώρος επικάλυψης είναι καθολικός χώρος επικάλυψης, άρα οι μετασχηματισμοί επικάλυψης δρουν μεταβατικά στα νήματα.

Αφού από τον Ισχυρισμό 3.2.9 πήραμε ότι το $\partial D'$ εμφυτεύεται με την απεικόνιση επικάλυψης, έπεται ότι $\phi(\partial D') \cap \partial D'$ είναι είτε κενό είτε ολόκληρο το $\partial D'$ (στην περίπτωση $\phi = id$). Από το θεώρημα του Jordan (Proposition 2B.1. [2]) έχουμε ότι είτε $\phi(D')$ είτε $\phi^{-1}(D')$ πρέπει να περιέχεται στον D' . Από το θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer (Theorem 1.9. [2] ή Theorem 6.1 [19]) η ϕ έχει σταθερό σημείο (αν $\phi^{-1}(D) \subseteq D'$, τότε η ϕ^{-1} έχει σταθερό σημείο και επομένως η ίδια η ϕ έχει σταθερό σημείο) το οποίο είναι άτοπο εκτός αν $\phi = id$ και άρα $x = y$. ■



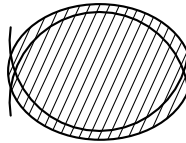
Επομένως οι α και β σχηματίζουν δίγωνο, άτοπο. □

Θεώρημα 3.2.11 (Το κριτήριο του διγώνου).

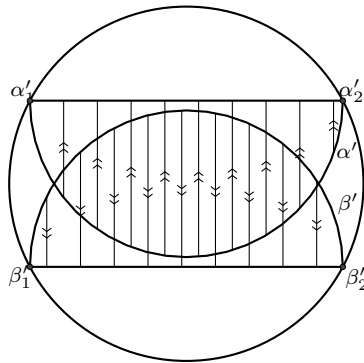
Δύο εγκάρσιες, απλές, κλειστές καμπύλες σε μια συμπαγή επιφάνεια S είναι σε ελαχιστική θέση αν και μόνο αν δημιουργούν δίγωνο.

Απόδειξη. Ήδη διαισθητικά μπορούμε να φανταστούμε ότι αν σχηματίζουν δίγωνο δύο καμπύλες, τότε μέσω μίας ομοτοπίας μπορούμε να μειώσουμε το πλήθος τομών κατά δύο, τραβώντας 'τες, μπορεί να πει κάποιος, μακριά τη μία από την άλλη.

Έστω α, β δύο εγκάρσιες απλές κλειστές καμπύλες που σχηματίζουν δίγωνο. Διαλέγουμε μία κλειστή περιοχή του διγώνου F , ώστε η F να είναι ομοιομορφική με τον κλειστό δίσκο και η τομή $F \cap (\alpha \cup \beta)$ να αποτελείται από ένα τμήμα α' της α και ένα τμήμα β' της β , τα οποία τέμνονται σε ακριβώς δύο σημεία και τα σημεία αυτά βρίσκονται στο εσωτερικό του F .



Το σύνολο F είναι απλά συνεκτικό αφού ο κλειστός δίσκος είναι απλά συνεκτικός. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το F είναι κλειστός δίσκος, αφού στη γενική περίπτωση μπορούμε να δουλέψουμε στην εικόνα του και μέσω ομοιομορφισμού να γυρίσουμε στο F .



Τα τελικά σημεία του α' , έστω α'_1 και α'_2 , βρίσκονται στην ίδια πλευρά του δίσκου σε σχέση με τα πέρατα του β' , έστω β'_1 και β'_2 , δηλαδή υπάρχει τόξο από το α'_1 στο α'_2 και τόξο από το β'_1 στο β'_2 ξένα μεταξύ τους. Παίρνουμε την ευθεία που ξεκινά από το α'_1 και καταλήγει στο α'_2 και πραγματοποιούμε μία ομοτοπία ευθείας γραμμής (straight line homotopy) από την α' στην ευθεία, όμοια και στην β' . Επομένως προκύπτουν δύο κλειστές καμπύλες, ομοτοπικές με τις α και β , που τέμνονται σε δύο λιγότερα σημεία. Άρα οι καμπύλες δεν ήταν σε ελαχιστική θέση. $\square$

Πόρισμα 3.2.12.

Οποιοσδήποτε δύο εγκάρσιες, απλές, κλειστές καμπύλες οι οποίες τέμνονται ακριβώς μία φορά είναι σε ελαχιστική θέση

Απόδειξη. Πράγματι, αφού για να σχηματίζουν δίγωνο πρέπει να τέμνονται τουλάχιστον σε δύο σημεία. $\square$

Πρόταση 3.2.13 (Οι γεωδαισιακές είναι σε ελάχιστη θέση).

Δύο απλές, κλειστές, γεωδαισιακές καμπύλες σε μία υπερβολική επιφάνεια S είναι σε ελαχιστική θέση.

Απόδειξη. Θα το δείξουμε για την περίπτωση υπερβολικής επιφάνειας, στις άλλες περιπτώσεις η απόδειξη είναι ανάλογη. Έστω ότι οι γεωδαισιακές είναι εγκάρσιες και σχηματίζουν ένα δίγωνο τότε αφού το δίγωνο είναι απλά συνεκτικό μπορούμε να το ανυψώσουμε στο καθολικό χώρο επικάλυψης $\mathbb{H}^2$ της S . Αλλά αυτό αντιφάσκει με το γεγονός ότι μεταξύ δύο σημείων του $\mathbb{H}^2$ είναι μοναδική η γεωδαισιακή που τα συνδέει. $\square$

3.3 Τόξα

Ορισμός 3.3.1.

Έστω S μία συμπαγής επιφάνεια με σύνορο, ένα **κανονικό** (proper) τόξο στην S είναι μία απεικόνιση $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ τέτοια ώστε $\alpha^{-1}(\partial S) = \{0, 1\}$, δηλαδή τα μόνα σημεία του α που περιέχονται στο σύνορο είναι τα άκρα του.

Παρατήρηση 3.3.2.

Όπως και στις καμπύλες συνήθως ταυτίζουμε τα τόξα με την εικόνα τους.

Ορισμός 3.3.3.

1. Ένα τόξο λέγεται **απλό** αν ο περιορισμός $\alpha|_{(0,1)}$ της α στο $(0, 1)$, είναι μονομορφισμός (ή αλλιώς εμφύτευση).
2. Μία **ομοτοπία τόξων** είναι μία ελεύθερη ομοτοπία $H : [0, 1] \times I \rightarrow S$ έτσι ώστε η απεικόνιση $H : [0, 1] \times \{t\}$ να είναι τόξο για κάθε $t \in I$.

Παρατήρηση 3.3.4.

Αν δεν βάζαμε τον περιορισμό, τότε κάθε τόξο θα ήταν ομοτοπικό με κάθε άλλο, ειδικότερα θα ήταν ομοτοπικό με σημείο.

Αυτός ο περιορισμός σημαίνει ότι κατά τη διάρκεια της ομοτοπίας τα σημεία του ∂S δε μπορούν να μετακινηθούν εκτός του ∂S , επομένως μένουν στην ίδια συνοριακή συνιστώσα.

Ορισμός 3.3.5.

Μία ομοτοπία H τόξων λέγεται **συσχετισμένη στο σύνορο** αν οι $H(1, t)$ και $H(0, t)$ είναι σταθερές συναρτήσεις.

Σημείωση. Δηλαδή μία ομοτοπία είναι συσχετισμένη στο σύνορο αν και μόνο αν είναι σταθερή στο σύνορο.

Ορισμός 3.3.6.

Ένα τόξο λέγεται **ουσιώδες** αν δεν υπάρχει ομοτοπία τόξων από το τόξο σε μία συνοριακή συνιστώσα. Δηλαδή αν τα $\alpha(0)$ και $\alpha(1)$ δεν ανήκουν στην ίδια συνοριακή συνιστώσα.

Ορισμός 3.3.7.

Έστω α και β κανονικά τόξα σε μια επιφάνεια S . Λέμε ότι τα α και β σχηματίζουν **γενικευμένο δίσκωνο** στην S αν υπάρχει μία εμφύτευση του δίσκου D τέτοια ώστε το σύνορο του:

- είτε να αποτελείται από ένα τμήμα της α και ένα τμήμα της β , τα οποία τέμνονται ακριβώς σε δύο σημεία
- είτε να αποτελείται από ένα τμήμα της α , ένα τμήμα της β και ένα τμήμα συνοριακής συνιστώσας, έτσι ώστε το τμήμα της α και το τμήμα της β να τέμνονται μία ακριβώς φορά.

Ανάλογα με τις αποδείξεις που έχουν προηγηθεί δεν είναι δύσκολο ναδειχθεί και η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.8.

1. Έστω S υπερβολική επιφάνεια με σύνορο. Αν το α είναι κανονικό τόξο στην S , τότε το α είναι ομοτοπικό με μοναδικό γεωδαισιακό τόξο γ .
2. Δύο εγκάρσια, απλά, κανονικά τόξα σε μία συμπαγή επιφάνεια με σύνορο S είναι σε ελαχιστική θέση ως προς ομοτοπία τόξων αν και μόνο αν δε σχηματίζουν γενικευμένο δίσκωνο.
3. Δύο εγκάρσια, απλά, κανονικά τόξα σε μια συμπαγή επιφάνεια με σύνορο S είναι σε ελαχιστική θέση ως προς ομοτοπία συσχετισμένη στο σύνορο αν και μόνο αν δε σχηματίζουν δίσκωνο.

4. Έστω α και β δύο διαφορετικά γεωδαισιακά τόξα σε μία υπερβολική, συμπαγή επιφάνεια με σύνορο S . Τα α και β είναι σε ελαχιστική θέση

3.4 Ισοτοπία

Ορισμός 3.4.1.

1. Έστω α, β δύο απλές, κλειστές καμπύλες. **Ισοτοπία** από το α στο β καλούμε μία ομοτοπία $H : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ από το α στο β με την επιπλέον ιδιότητα ότι η κλειστή καμπύλη $H(\mathbb{S}^1 \times \{t\})$ είναι απλή για κάθε $t \in [0, 1]$.
2. Αν υπάρχει ισοτοπία από το α στο β , τότε οι α και β καλούνται **ισοτοπικές** και το συμβολίζουμε $\alpha \sim_{iso} \beta$.

Παρατήρηση 3.4.2.

Η ισοτοπία είναι σχέση ισοδυναμίας (η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη για την ομοτοπία) και επομένως ορίζονται οι κλάσεις ισοτοπίας, τις οποίες συμβολίζουμε με $[\cdot]_{iso}$. Προφανώς έχουμε ότι αν α είναι μια απλή, κλειστή, καμπύλη, τότε $[\alpha]_{iso} \subseteq [\alpha]_f$.

Σημείωση. Με μια πρώτη ματιά το πρόβλημα ύπαρξης ισοτοπίας μεταξύ καμπυλών φαίνεται πιο δύσκολο απ' ό,τι αυτό της ομοτοπίας. Το επόμενο θεώρημα, που οφείλεται στον Baer, μας λέει ότι η ύπαρξη ισοτοπίας ανάγεται σε ύπαρξη ομοτοπίας.

Θεώρημα 3.4.3 (Baer).

Έστω S μία επιφάνεια και α, β δύο απλές, κλειστές, ουσιώδεις καμπύλες στην επιφάνεια S . Τότε η α είναι ισοτοπική με την β αν και μόνο αν η α είναι ομοτοπική με την β .

Απόδειξη. Αν $S \cong \mathbb{S}^2$, τότε το θεώρημα είναι προφανές αφού δεν υπάρχουν ουσιώδεις καμπύλες. Αν $S \cong \mathbb{T}^2$, τότε η απόδειξη είναι παρόμοια με την περίπτωση που η S είναι υπερβολική επιφάνεια. Η μία κατεύθυνση είναι προφανής από την Παρατήρηση 3.4.2.

Έστω λοιπόν ότι η α είναι ομοτοπική με την β . Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι α και β είναι εγχάρσιες αλλιώς πραγματοποιούμε μια ισοτοπία στην α και παίρνουμε μία α' εγχάρσια στην β . Έχουμε από όλα όσα προηγήθηκαν ότι $i(\alpha, \beta) = 0$ γιατί ανήκουν στην ίδια κλάση ελεύθερης ομοτοπίας Παρατήρηση 3.2.5. Αν οι α και β δεν είναι ξένες, δηλαδή τέμνονται, τότε σχηματίζουν δίγωνο. Στην απόδειξη του κριτηρίου του διγώνου, μπορεί να παρατηρήσει κανείς ότι η ομοτοπία που χρησιμοποιήσαμε (η ομοτοπία

της ευθείας γραμμής) είναι ισοτοπία. Επομένως αφαιρώντας δίγωνα μέσω ισοτοπιών θα προκύψουν τελικά α και β ξένες.

Επιλέγουμε τώρα δύο ανυψώσεις $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$ των α και β , οι οποίες έχουν τα ίδια πέρατα στον $\partial\mathbb{H}^2$ (γίνεται καθώς οι α και β είναι ομοτοπικές). Υπάρχει επομένως μία υπερβολική ισομετρία ϕ η οποία αφήνει τα $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$ αναλλοίωτα και δρα με μεταφορές στις ανυψώσεις. Αφού τα $\tilde{\alpha}$ και $\tilde{\beta}$ είναι ξένα μπορούμε να θεωρήσουμε την περιοχή μεταξύ τους, έστω R_1 . Το πηλίκο $R_2 := R_1/\langle\phi\rangle$ είναι ένας δακτύλιος. Πράγματι είναι δακτύλιος, αφού $\pi_1(R_2) = \langle\phi\rangle = \mathbb{Z}$ και έχει δύο συνοριακές συνιστώσες (τις $\tilde{\alpha}/\langle\phi\rangle$ και $\tilde{\beta}/\langle\phi\rangle$). Αν τώρα πάρουμε την εικόνα του R_2 στην S , $R_2 \xrightarrow{s} R_1 \xrightarrow{p_1} S$, τότε $p_1(s(R_2)) =: R_3$, όπου s μία τομή και p_1 ο περιορισμός της απεικόνισης επικάλυψης του $\mathbb{H}^2$ στο R_1 . Η $q := p_1 \circ s$ είναι απεικόνιση επικάλυψης.

Γνωρίζουμε ότι τα νήματα έχουν ίδια πληθικότητα. Αν $x \in \alpha$, τότε $p_1^{-1}(x)$ είναι νήμα που ανήκει στο R_1 όμως η $s^{-1} = p_2$ το πάει σε σημείο, έχουμε επομένως ότι $(p_1^{-1} \circ s^{-1})(x)$ είναι μονοσύνολο, όμως το $(p_1^{-1} \circ s^{-1})(x) = q^{-1}(x)$ είναι μονοσύνολο. Έπεται λοιπόν ότι χώρος R_2 είναι χώρος επικάλυψης του R_3 με ένα φύλλο (δηλαδή το νήμα είναι μονοσύνολο), άρα $R_2 \cong R_3$ και έχουμε επομένως έναν δακτύλιο ομοιομορφικό με το R_3 . Πραγματοποιώντας ομοτοπία ευθείας γραμμής στον R_2 παρατηρούμε ότι είναι ισοτοπία και μέσω του ομοιομορφισμού παραμένει ισοτοπία. Η ισοτοπία είναι η επιθυμητή ισοτοπία στην S . $\square$

Ορισμός 3.4.4.

Έστω μια επιφάνεια S . Μια ισοτοπία στην επιφάνεια S λέγεται μια ομοτοπία $H : S \times I \rightarrow S$ τέτοια ώστε για κάθε $t \in [0, 1]$ η απεικόνιση $H : S \times \{t\} \rightarrow S$ είναι ομοιομορφισμός για κάθε $t \in [0, 1]$.

Παρατήρηση 3.4.5. Πολλές φορές όταν έχουμε μία **ισοτοπία** μεταξύ δύο απλών κλειστών καμπυλών στην S είναι χρήσιμο να την επεκτείνουμε σε ισοτοπία της S . Επίσης έτσι ορίζεται η έννοια ισοτοπίας τυχαίου συνόλου.

Ορισμός 3.4.6.

Έστω μία επιφάνεια S , α, β δύο ισοτοπικές, απλές, κλειστές, καμπύλες στην S και $F : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow S$ η αντίστοιχη ισοτοπία. Αν η $H : S \times I \rightarrow S$ είναι μία ισοτοπία στην επιφάνεια τέτοια ώστε $H|_{\alpha \times I} = F$, τότε η H καλείται **περικλείουσα ισοτοπία**.

Θεώρημα 3.4.7.

Έστω S μία επιφάνεια. Αν $F : \mathbb{S}^1 \times I \rightarrow S$ είναι μια διαφορίσιμη ισοτοπία απλών κλειστών καμπυλών, τότε υπάρχει μία ισοτοπία $H : S \times I \rightarrow S$ τέτοια ώστε $H|_{S \times \{0\}} = id_S$ και $H|_{F(\mathbb{S}^1 \times \{0\}) \times I} = F$.

Η απόδειξη αυτή ανήκει στον κλάδο της διαφορικής τοπολογίας. Για την απόδειξή της και περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο [13].

3.5 Ταξινόμηση απλών κλειστών καμπυλών**Ορισμός 3.5.1.**

Έστω S μία επιφάνεια, πιθανώς με σύνορο, και α μία απλή, κλειστή καμπύλη στην S . Μία επιφάνεια με σύνορο S_α εφοδιασμένη με έναν ομοιομορφισμό $h_\alpha : C_1 \rightarrow C_2$ από μία συντομική συνιστώσα C_1 σε μία άλλη C_2 λέμε ότι είναι η επιφάνεια που προκύπτει από την S κόβοντας στην α , αν:

- (i) Το πηλίκο $S_\alpha /_{x \sim h_\alpha(x)}$ είναι ομοιομορφικό με την S .
- (ii) Η εικόνα του $\pi(C_1) = \pi(C_2)$ μέσω του ομοιομορφισμού της (i) είναι η καμπύλη α , όπου $\pi : S_\alpha \rightarrow S_\alpha /_{x \sim h_\alpha(x)}$ η απεικόνιση πηλίκο.

Παρατήρηση 3.5.2.

Προκύπτει το ερώτημα αν υπάρχει όμως τέτοια επιφάνεια. Αν υποθέσουμε ότι η α είναι λεία καμπύλη, τότε το ζεύγος (S, α) είναι τοπικά αμφιασφαρικό με το $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ και επομένως κατασκευάζεται τέτοια επιφάνεια, η οποία θα έχει δύο παραπάνω συντομικές συνιστώσες από την αρχική.

Ορισμός 3.5.3.

Έστω S μία επιφάνεια και α μία απλή κλειστή καμπύλη στην S .

1. Λέμε ότι η α **δε διαχωρίζει** την S αν η επιφάνεια S_α που προκύπτει από την S κόβοντας πάνω στην α είναι συνεκτικό σύνολο.
2. Λέμε ότι η α **διαχωρίζει** την S αν η επιφάνεια S_α που προκύπτει από την S κόβοντας πάνω στην α δεν είναι συνεκτικό σύνολο.

Πρόταση 3.5.4.

Έστω S μία επιφάνεια και α, β απλές κλειστές καμπύλες στην S . Αν οι α και β δε διαχωρίζουν την S , τότε υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : S \rightarrow S$ με $\phi(\alpha) = \beta$.

Απόδειξη. Έστω S_α και S_β οι επιφάνειες που προκύπτουν από την S κόβοντας κατά μήκος των α και β , αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με h_α και h_β τους αντίστοιχους ομοιομορφισμούς μεταξύ των συνοριακών συνιστωσών και με f_α, f_β τους ομοιομορφισμούς της S με τους αντίστοιχους χώρους πηλίκου $S_\alpha/x \sim h_\alpha(x)$ και $S_\beta/x \sim h_\beta(x)$. Οι S_α και S_β έχουν την ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση Euler. Πράγματι εφ' όσον οι συνοριακές συνιστώσες είναι δύο περισσότερες από της S , και ο αριθμός του γένους τους είναι ίδιος, έπεται ότι $\chi(S_\alpha) = \chi(S_\beta)$, άρα $S_\alpha \cong S_\beta$.

Μπορούμε να διαλέξουμε ομοιομορφισμό ϕ που να σέβεται τις συνοριακές συνιστώσες που ταυτοποιούνται από τους αντίστοιχους ομοιομορφισμούς h_α και h_β . Επομένως ορίζεται ομοιομορφισμός ψ που κάνει το επόμενο διάγραμμα μεταθετικό.

$$\begin{array}{ccc}
 S_\alpha & \xrightarrow{\phi} & S_\beta \\
 \pi_\alpha \downarrow & & \downarrow \pi_\beta \\
 S_\alpha/x \sim h_\alpha(x) & & S_\beta/x \sim h_\beta(x) \\
 f_\alpha \downarrow & & \downarrow f_\beta \\
 S & \xrightarrow{\psi} & S
 \end{array}$$

Δηλαδή

$$f_\beta \circ \pi_\beta \circ \phi = \psi \circ f_\alpha \circ \pi_\alpha$$

Άρα από τις σχέσεις

$$(3.5.1) \quad f_\beta(\pi_\beta(\phi(C_1^{(\alpha)}))) = \beta$$

$$(3.5.2) \quad f_\alpha(\pi_\alpha(C_1^{(\alpha)})) = \alpha$$

προκύπτει ότι $\psi(\alpha) = \beta$. □

Σημείωση. Αν ο ομοιομορφισμός θέλουμε να διατηρεί τον προσανατολισμό, τότε σε περίπτωση που η ψ τον αντιστρέφει μπορούμε να συνθέσουμε με έναν ομοιομορφισμό που αντιστρέφει τον προσανατολισμό και σταθεροποιεί την καμπύλη β σαν σύνολο.

Πρόταση 3.5.5.

Έστω S μία επιφάνεια και α, β δύο απλές κλειστές καμπύλες στην S . Υπάρχει ομοιομορφισμός ϕ που διατηρεί τον προσανατολισμό από την επιφάνεια στον εαυτό της με $\phi(\alpha) = \beta$ αν και μόνο αν η S_α είναι ομοιομορφική με την S_β .

Απόδειξη. Αν ϕ είναι ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό και $\phi(\alpha) = \beta$, τότε έχουμε $S_{\alpha/x \sim h_\alpha(x)} \cong S_{\beta/x \sim h_\beta(x)}$ και $C_1^{(\alpha)} \cong C_2^{(\alpha)} \cong C_1^{(\beta)} \cong C_2^{(\beta)}$. Άρα $S_\alpha \cong S_\beta$.

Αντίστροφα αν $S_\alpha \cong S_\beta$, τότε $\chi(S_\alpha) = \chi(S_\beta)$ και άρα υπάρχει $\phi : S_\alpha \rightarrow S_\beta$ ομοιομορφισμός, διαλέγουμε τέτοιον ώστε $\{\phi(C_1^{(\alpha)}), \phi(C_2^{(\alpha)})\} = \{\phi(C_1^{(\beta)}), \phi(C_2^{(\beta)})\}$. Επομένως επάγεται ομοιομορφισμός ψ όπως στην Πρόταση 3.5.4. $\square$

Ορισμός 3.5.6.

Έστω S μία επιφάνεια και α, β απλές κλειστές καμπύλες στην S . Λέμε ότι η α έχει τον ίδιο **τοπολογικό τύπο** με την β αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : S \rightarrow S$ με $\psi(\alpha) = \beta$.

Παρατήρηση 3.5.7.

Ισοδύναμα, σύμφωνα με την Πρόταση 3.5.5 η α έχει τον ίδιο τοπολογικό τύπο με την β αν $S_\alpha \cong S_\beta$.

Παρατηρούμε επίσης ότι η σχέση του να έχουν δύο καμπύλες τον ίδιο ομοιομορφικό τύπο είναι σχέση ισοδυναμίας.

Παράδειγμα 3.5.8 (Τοπολογικοί τύποι απλών κλειστών καμπυλών της S_g).

Έστω S_g η επιφάνεια γένους $g \geq 0$. Τότε μία καμπύλη που διαχωρίζει την S_g δίνει δύο ξένες υποεπιφάνειες γένους k και $g - k$ όπου $k \geq 0$. Ο αριθμός $\min\{k, g - k\}$ καλείται **γένος** της απλής κλειστής καμπύλης που διαχωρίζει την επιφάνεια.

Παρατηρούμε ότι αν οι α, β είναι δύο απλές κλειστές καμπύλες που διαχωρίζουν την επιφάνεια με γένος k_α και k_β αντίστοιχα, τότε η α έχει τον ίδιο τοπολογικό τύπο με την β αν και μόνο αν $k_\alpha = k_\beta$ αφού $S_\alpha = S_{k_\alpha} \sqcup S_{g-k_\alpha}$ και $S_\beta = S_{k_\beta} \sqcup S_{g-k_\beta}$. Επομένως έχουμε ότι υπάρχουν $\lfloor \frac{g}{2} \rfloor$ διαφορετικοί τοπολογικοί τύποι για απλές, κλειστές καμπύλες που διαχωρίζουν την επιφάνεια S_g και άλλον ένα για τις απλές κλειστές καμπύλες που δε διαχωρίζουν την επιφάνεια S_g .

Ορισμός 3.5.9.

- 1 Δύο απλές, κλειστές καμπύλες α και β σε μία επιφάνεια S , λέγονται **ομολογικές** αν υπάρχει μία εμφύτευση μίας συμπαγούς προσανατολισμένης επιφάνειας με σύνορο στην S τέτοια ώστε όταν περιορίσουμε την απεικόνιση στο σύνορο να προκύπτουν οι δύο καμπύλες α και β .

- 2 Αν έχουμε δύο ξένες, απλές, κλειστές καμπύλες σε μία επιφάνεια, οι οποίες δεν τη διαχωρίζουν και είναι ομολογικές, τότε το ζεύγος καλείται **δεσμευμένο ζεύγος**.

Σημείωση. Ο πρώτος ορισμός που δίνουμε στον Ορισμό 3.5.9 στην πραγματικότητα είναι χαρακτηρισμός του πότε δύο καμπύλες ορίζουν την ίδια κλάση ομολογίας στην $H_1(S; \mathbb{Z})$, απλά βολεύει να ορίσουμε έτσι τις ομολογικές καμπύλες, αφού δε θα ασχοληθούμε με αυτές.

Παρατήρηση 3.5.10.

Ορίζεται γένος στα δεσμευμένα ζεύγη όπως ακριβώς στο Παράδειγμα 3.5.8.

Ορισμός 3.5.11.

1. Έστω S μία επιφάνεια και α, β απλές, κλειστές καμπύλες που δε διαχωρίζουν την επιφάνεια S . Λέμε ότι οι καμπύλες α και β **γεμίζουν** την επιφάνεια S αν οι α και β είναι σε ελαχιστική θέση και το συμπλήρωμα του συνόλου $\alpha \cup \beta$ είναι ένωση τοπολογικών δίσκων.
2. Μία συλλογή απλών, κλειστών καμπυλών $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ που δε διαχωρίζουν την επιφάνεια S λέμε ότι γεμίζουν την S , αν είναι ανά δύο σε ελαχιστική θέση και η ένωσή τους $\bigcup_i \alpha_i$ είναι ένωση τοπολογικών δίσκων.

Ορισμός 3.5.12.

1. Έστω S μία επιφάνεια. Μια **αλυσίδα** απλών κλειστών καμπυλών είναι μία ακολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ απλών κλειστών καμπυλών με την ιδιότητα $i([\alpha_i]_f, [\alpha_{i+1}]_f) = 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, k-1$ και $i([\alpha_i]_f, [\alpha_j]_f) = 0$ αν $|i - j| > 1$.
2. Μία αλυσίδα απλών κλειστών καμπυλών σε μία επιφάνεια S λέμε ότι δε διαχωρίζει την επιφάνεια, αν η ένωση των καμπυλών δε διαχωρίζει την επιφάνεια.

Θεώρημα 3.5.13.

Έστω S μία συμπαγής επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο). Αν έχουμε δύο σύνολα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ από απλές κλειστές καμπύλες ή κανονικά τόξα στην S ίδιας μορφής, μίας εκ των παρακάτω:

1. Τα σύνολα αποτελούνται, το κάθε ένα, από δύο απλές, κλειστές καμπύλες που τέμνονται ακριβώς μία φορά.
2. Τα σύνολα αποτελούνται, το κάθε ένα, από ένα δεσμευμένο ζεύγος γένους k .

3. Τα σύνολα αποτελούνται, το κάθε ένα, από ένα ζεύγος ή μία n -άδα $n \geq 3$ απλών, κλειστών καμπυλών των οποίων η ένωση δε διαχωρίζει την επιφάνεια.
4. Τα σύνολα αποτελούνται, το κάθε ένα, από ένα ζεύγος απλών, κλειστών καμπυλών με γεωμετρικό αριθμό τομής ίσο με 2. Δηλαδή $\{\alpha, \beta\}$ με $i([\alpha]_f, [\beta]_f) = 2 = |\alpha \cap \beta|$.
5. Τα σύνολα αποτελούνται, το κάθε ένα, από ένα απλό, κανονικό τόξο που δε διαχωρίζει την S και συναντά μία συνοριακή συνιστώσα.
6. Τα σύνολα αποτελούνται, το κάθε ένα, από ένα απλό, κανονικό τόξο που δε διαχωρίζει την S και συναντά δύο συνοριακές συνιστώσες.
7. Τα σύνολα αποτελούνται, το κάθε ένα, από αλυσίδα απλών, κλειστών καμπυλών πλήθους n που δε διαχωρίζει την επιφάνεια.

Τότε η $\mathcal{B}$ μπορεί να προκύψει από την $\mathcal{A}$ μέσω ομοιομορφισμού ϕ που διατηρεί τον προσανατολισμό στην S .

Απόδειξη.

1. Έστω ότι $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ είναι ένα τέτοιο ζεύγος στην S . Έστω S_{α_1} η επιφάνεια που προκύπτει από την S κόβοντας πάνω στην α_1 . Υπάρχουν δύο συνοριακές συνιστώσες της S_{α_1} που αντιστοιχούν στις δύο πλευρές της α_1 . Η εικόνα της α_2 στην S_{α_1} είναι ένα απλό κανονικό τόξο που ενώνει αυτές ακριβώς τις συνεκτικές συνιστώσες μεταξύ τους. Μπορούμε να κόψουμε τώρα την επιφάνεια S_{α_1} πάνω στο ο τόξο α_2 και να πάρουμε μία επιφάνεια $(S_{\alpha_1})_{\alpha_2}$, η οποία είναι επιφάνεια με μία συνοριακή συνιστώσα (που χωρίζεται σε τέσσερα τόξα δύο από κάθε κλειστή καμπύλη). Η σχέση ισοδυναμίας που προκύπτει από τον ορισμό της επιφάνειας ταυτοποιεί αυτά τα τόξα και επαναφέρει την επιφάνεια S με τόξα α_1 και α_2 .

Έστω τώρα $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2\}$ ένα άλλο ίδιου τύπου ζεύγος στην S . Πραγματοποιώντας την ίδια διαδικασία με πριν προκύπτει μία επιφάνεια $(S_{\beta_1})_{\beta_2}$ με μία συνοριακή συνιστώσα. Από την ταξινόμηση των επιφανειών (από την χαρακτηριστική Euler) έχουμε $(S_{\beta_1})_{\beta_2} \cong (S_{\alpha_1})_{\alpha_2}$. Υπάρχει επομένως ομοιομορφισμός που διατηρεί τις κλάσεις ισοδυναμίας στο σύνολο. Κάθε τέτοιος ομοιομορφισμός δίνει ομοιομορφισμό στην S που πάει το $\mathcal{B}$ στο $\mathcal{A}$.

2. Έστω ότι $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ είναι ένα τέτοιο δεσμευμένο ζεύγος στην S . Έστω S_{α_1} η επιφάνεια που προκύπτει από την S κόβοντας πάνω στην α_1 . Η S_{α_1} εξακολουθεί να

είναι συνεκτικό σύνολο και έχει δύο συνοριακές συνιστώσες μία για κάθε "πλευρά" του α_1 . Επειδή οι καμπύλες α_1 και α_2 είναι ξένες, έχουμε ότι η εικόνα της α_2 στην S_{α_1} είναι απλή κλειστή καμπύλη. Επομένως κόβοντας την S_{α_1} πάνω στην α_2 προκύπτουν δύο επιφάνειες με δύο συνοριακές συνιστώσες η κάθε μία και γέννη $k - 1$ και $g - k$.

Έστω τώρα $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2\}$ ένα άλλο ίδιου τύπου ζεύγος στην S . Πραγματοποιώντας την ίδια διαδικασία με πριν προκύπτουν δύο επιφάνειες $(S_{\beta_1})_{\beta_2}$ με δύο συνοριακές συνιστώσες η κάθε μία και γέννη $k - 1$ και $g - k$. Όπως και πριν από την ταξινόμηση των επιφανειών υπάρχει ομοιομορφισμός από την $(S_{\beta_1})_{\beta_2}$ στην $(S_{\alpha_1})_{\alpha_2}$. Μπορεί να επιλεχθεί ομοιομορφισμός ο οποίος να διατηρεί τις σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνορο. Κάθε τέτοιος ομοιομορφισμός επάγει ομοιομορφισμό στην S που πάει το $\mathcal{B}$ στο $\mathcal{A}$.

3. Με τον ίδιο τρόπο.
4. Επίσης με τον ίδιο τρόπο.
5. Έστω α και β δύο απλά, κανονικά τόξα στη S που δεν τη διαχωρίζουν, των οποίων τα άκρα ανήκουν στην ίδια συνοριακή συνιστώσα. Οι επιφάνειες S_α και S_β που προκύπτουν έχουν το ίδιο γένος (1 λιγότερο από την S) και το ίδιο πλήθος συνοριακών συνιστωσών (1 περισσότερο από την S) επομένως $\chi(S_\alpha) = \chi(S_\beta)$ και άρα υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : S_\alpha \rightarrow S_\beta$ που διατηρεί τις σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνορο. Επομένως ο ϕ επάγει ομοιομορφισμό $\psi : S \rightarrow S$ με $\psi(\alpha) = \beta$.
6. Όμοια.
7. Θα το δείξουμε με επαγωγή στο πλήθος των καμπυλών της αλυσίδας. Έστω ότι έχουμε δύο αλυσίδες $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ και $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2\}$ με $i([\alpha_1]_f, [\alpha_2]_f) = 1$ και $i([\beta_1]_f, [\beta_2]_f) = 1$. Τότε είμαστε στην περίπτωση 1.

Έστω ότι ισχύει το θεώρημα για αλυσίδες πλήθους n θα το δείξουμε για $n + 1$. Έστω λοιπόν $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}\}$ και $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}\}$ δύο αλυσίδες απλών κλειστών καμπυλών. Τότε αφού ισχύουν οι ιδιότητες και για τις αλυσίδες $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ και $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ έχουμε ότι οι επιφάνειες $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ και $S_{\beta_1 \dots \beta_n}$ είναι ομοιομορφικές. Αφού η α_{n+1} τέμνεται μόνο με την α_n το κανονικό πλέον τόξο α_{n+1} στην $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ ξεκινά από μία συνοριακή συνιστώσα και περατώνεται στην ίδια. Το ίδιο συμβαίνει και για το β_{n+1} στην $S_{\beta_1 \dots \beta_n}$. Άρα από το 5. υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : S_{\beta_1 \dots \beta_n} \rightarrow S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ έτσι ώστε $\phi(\alpha_{n+1}) = \beta_{n+1}$. Έπεται λοιπόν ότι

$S_{\alpha_1 \dots \alpha_{n+1}} \cong S_{\beta_1 \dots \beta_{n+1}}$. Άρα μπορούμε να βρούμε ομοιομορφισμό που να διατηρεί τις κλάσεις ισοδυναμίας στο σύνορο, ο οποίος είναι ο ζητούμενος.

□

Σημείωση. Δείξαμε το θεώρημα για επιφάνειες χωρίς σύνορο, εκτός από την περίπτωση 5., ισχύει όμως γενικότερα, παρόλα αυτά δε μας χρειάζεται η γενική περίπτωση.

Το ακόλουθο Θεώρημα 3.5.14 αποδείχθηκε από τον Munkres [7] και τον Whitehead [10], στα άρθρα [7] και [10], στα οποία παραπέμπουμε για την απόδειξη, αποδεικνύεται επίσης ότι αν δύο αμφιδιαφορίσεις είναι ισοτοπικές, τότε αυτές είναι λεία ισοτοπικές. Δηλαδή η ισοτοπία είναι διαφορίσιμη συνάρτηση.

Θεώρημα 3.5.14.

Έστω συμπαγής επιφάνεια S . Τότε κάθε ομοιομορφισμός της S είναι ισοτοπικός με αμφιδιαφόριση της S .

Το ακόλουθο Θεώρημα 3.5.15 αποδείχθηκε από τον Baer το 1927 με 1928, παραπέμπουμε για την απόδειξή του στα άρθρα [14],[15] και [4].

Θεώρημα 3.5.15.

Έστω S μία επιφάνεια και f, g δύο ομοτοπικοί ομοιομορφισμοί της S . Τότε f και g είναι ισοτοπικοί.

Σημείωση. Ισχύει το προηγούμενο και για επιφάνειες με σύνορο, με την προϋπόθεση οι ομοιομορφισμοί να διατηρούν προσανατολισμό.

Κεφάλαιο 4

Ομάδα κλάσεων απεικονίσεων

4.1 Mod(S)

Ορισμός 4.1.1.

Έστω S μία συμπαγής επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο). Θεωρούμε την ομάδα, με πράξη τη σύνθεση,

$$Homeo^+(S, \partial S) = \{\phi \in Homeo(S) : \phi|_{\partial S} = id_{\partial S}, \phi \text{ διατηρεί τον προσανατολισμό}\}.$$

Δηλαδή τους ομοιομορφισμούς που διατηρούν τον προσανατολισμό και ο περιορισμός τους στο σύνορο είναι η ταυτοτική απεικόνιση.

Πρόταση 4.1.2.

1. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο της επιφάνειας S και K ένα συμπαγές υποσύνολο της S . Θέτουμε $V(K, U) = \{f \in Homeo^+(S, \partial S) : f(K) \subseteq U\}$. Τότε τα σύνολα $V(K, U)$ αποτελούν υποβάση μίας τοπολογίας.
2. Αν η επιφάνεια S εφοδιαστεί με μία μετρική d (συμβατή με την τοπολογία), τότε ορίζεται μετρική στην $Homeo^+(S, \partial S)$ ως εξής. Για κάθε $f, g \in Homeo^+(S, \partial S)$ ορίζουμε $\rho(f, g) = \sup_{x \in S} (d(f(x), g(x)))$. Τότε η ρ είναι μετρική και η τοπολογία που επάγει είναι η τοπολογία που παράγεται από τα $V(K, U)$.
3. Η ομάδα $Homeo^+(S, \partial S)$ είναι τοπολογική ομάδα.

Απόδειξη.

1. Από τις ιδιότητες που ικανοποιεί μία υποβάση αρκεί να δείξουμε ότι $Homeo^+(S, \partial S) = \cup V(K, U)$. Έστω $f \in Homeo^+(S, \partial S)$. Επιλέγουμε τυχαίο $x \in S \setminus \partial S$. Εφ' όσον το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι συμπαγές και το $B_d(f(x), \varepsilon)$ ανοικτό έχουμε ότι $f \in V(\{x\}, B_d(f(x), \varepsilon))$, άρα πράγματι $Homeo^+(S, \partial S) = \cup V(K, U)$.
2. Εύκολα βλέπουμε ότι η ρ είναι μετρική. Έστω τώρα $f \in Homeo^+(S, \partial S)$. Τότε $B_\rho(f, \varepsilon) = \left\{ g \in Homeo^+(S, \partial S) : \sup_{x \in S} \{d(f(x), g(x))\} < \varepsilon \right\}$. Για να δείξουμε ότι οι τοπολογίες ταυτίζονται αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ανοικτή μπάλα της μιας περιέχεται σε ανοικτή μπάλα της άλλης (άρα οι τοπολογίες έχουν τα ίδια ανοικτά σύνολα). Παρατηρούμε ότι $B_\rho(f, \varepsilon) \subseteq V(\{x\}, B_d(f(x), \varepsilon))$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, σημειώνουμε ότι η f είναι ομοιομορφισμός, άρα 1-1 και επί, και συνεπώς οι μπάλες $B_d(x, \delta)$ αποτελούν ανοικτή κάλυψη της συμπαγούς επιφάνειας S . Μπορούμε να διαλέξουμε δ τέτοιο ώστε $f(\hat{B}_d(x, \delta)) \subseteq B_d(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$ και οι μπάλες $B_d(f(x), \frac{\varepsilon}{2})$ επίσης να αποτελούν πεπερασμένη κάλυψη της επιφάνειας S . Από συμπάγεια έχουμε ότι υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη της, έστω $S = \bigcup_{i=1}^n B_d(x_i, \delta) = \bigcup_{i=1}^n \hat{B}_d(x_i, \delta) = \bigcup_{i=1}^n B_d(f(x_i), \frac{\varepsilon}{2})$. Παρατηρούμε ότι $f \in V(\hat{B}_d(x_i, \delta), B_d(f(x_i), \frac{\varepsilon}{2}))$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ και αν $g \in \bigcap_{i=1}^n V(\hat{B}_d(x_i, \delta), B_d(f(x_i), \frac{\varepsilon}{2}))$ παίρνουμε ότι για κάθε $y \in S$, $d(f(y), g(y)) < \delta + \frac{\varepsilon}{2}$. Επομένως αν υποθέσουμε στην αρχή επίσης ότι $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, τότε $\rho(f, g) < \varepsilon$ και άρα $\bigcap_{i=1}^n V(\hat{B}_d(x_i, \delta), B_d(f(x_i), \frac{\varepsilon}{2})) \subseteq B_\rho(f, \varepsilon)$. Το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

3. Έστω

$\text{inv} : Homeo^+(S, \partial S) \rightarrow Homeo^+(S, \partial S)$ η πράξη της αντιστροφής και

$*$: $Homeo^+(S, \partial S) \times Homeo^+(S, \partial S) \rightarrow Homeo^+(S, \partial S)$ η πράξη του γινομένου

Θα δείξουμε ότι η inv είναι συνεχής (ανάλογα για την $*$). Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f \in V(K, U) &\Leftrightarrow f(K) \subseteq U \Leftrightarrow S \setminus U \subseteq S \setminus f(K) = f(S \setminus K) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(S \setminus U) \subseteq S \setminus K \Leftrightarrow f^{-1} \in V(S \setminus U, S \setminus K) \end{aligned}$$

Άρα $\text{inv}^{-1}(V(K, U)) = \text{inv}(V(K, U)) = V(S \setminus U, S \setminus K)$ το οποίο είναι ανοικτό σύνολο. Επομένως η inv είναι συνεχής αφού αντιστρέφει τα ανοικτά σε ανοικτά.

□

Ορισμός 4.1.3.

Την τοπολογία που προκύπτει από την Πρόταση 4.1.2 την ονομάζουμε συμπαγή-ανοικτή τοπολογία.

Λήμμα 4.1.4.

Έστω G μία τοπολογική ομάδα και H η συνεκτική συνιστώσα της μονάδας. Τότε $H \triangleleft G$ και συνεπώς ορίζεται η ομάδα G/H .

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι το σύνολο $H * H = \{g * h \in G : g \in H, h \in H\}$ είναι συνεκτικό σύνολο καθώς ο πολλαπλασιασμός $*$: $G \times G \rightarrow G$ είναι συνεχής, επομένως απεικονίζει συνεκτικά σε συνεκτικά. Άρα πράγματι $H * H$ είναι συνεκτικό. Η μονάδα 1_G της ομάδας ανήκει στο $H * H$ γιατί $1_G \in H \Rightarrow 1_G = 1_G * 1_G \in H * H$. Άρα $H * H \subseteq H$. Πράγματι επειδή η H είναι η συνεκτική συνιστώσα που περιέχει τη μονάδα, κάθε συνεκτικό σύνολο που περιέχει τη μονάδα είναι υποσύνολό της. Όμοια $H_{-1} = \{h^{-1} \in G : h \in H\} \subseteq H$, πάλι με το ίδιο επιχείρημα, γιατί η απεικόνιση της αντιστροφής είναι συνεχής απεικόνιση. Άρα η H είναι υποομάδα της G .

Για την κανονικότητα της H , $H \triangleleft G$, αρκεί να δείξουμε ότι $gHg^{-1} \subseteq H$ για κάθε $g \in G$. Έστω $g \in G$. Από συνέχεια του γινομένου έχουμε ότι το σύμπλοκο gH είναι συνεκτικό σύνολο αφού $gH = \{g\} * H$ και $\{g\}$, H συνεκτικά σύνολα. Τέλος βλέπουμε ότι gHg^{-1} συνεκτικό σύνολο αφού $gHg^{-1} = gH * \{g^{-1}\}$ και πάλι gH και $\{g^{-1}\}$ συνεκτικά σύνολα. Επιπλέον $1_G \in gHg^{-1}$ άρα $gHg^{-1} \subseteq H$ όπως πριν, γιατί H συνεκτική συνιστώσα της 1_G . Άρα $H \triangleleft G$ και επομένως G/H ομάδα. $\square$

Παρατήρηση 4.1.5.

Έχουμε λοιπόν ότι το σύνολο $Homeo^+(S, \partial S)$ είναι τοπολογική ομάδα οπότε άμα συμβολίσουμε με $Homeo_0(S, \partial S)$ τη συνεκτική συνιστώσα της σταθερής απεικόνισης, τότε το πηλίκο $Homeo^+(S, \partial S) / Homeo_0(S, \partial S)$ είναι ομάδα.

Ορισμός 4.1.6.

Έστω S επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο), καλούμε **ομάδα κλάσεων απεικονίσεων** (mapping class group ή αλλιώς modular group, εξού και ο συμβολισμός) την ομάδα $Mod(S) := Homeo^+(S, \partial S) / Homeo_0(S, \partial S)$.

Τα στοιχεία της $Mod(S)$ λέγονται κλάσεις απεικονίσεων (mapping classes).

Συμβολισμός.

Σε πολλά βιβλία η $Mod(S)$ γράφεται ως $\mathcal{M}(S)$ ή $MCG(S)$. Επειδή τα στοιχεία της $Mod(S)$ είναι κλάσεις απεικονίσεων θα χρησιμοποιούμε ανάλογο συμβολισμό.

Πρόταση 4.1.7.

Έστω S μία συμπαγής επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο) τότε:

$$\begin{aligned}
 \text{Mod}(S) &= \text{Homeo}^+(S, \partial S) / \text{Homeo}_0(S, \partial S) \\
 &= \pi_0(\text{Homeo}^+(S, \partial S)) \\
 &\cong \text{Homeo}^+(S, \partial S) / \sim_{\text{hom}} \\
 &\cong \text{Homeo}^+(S, \partial S) / \sim_{\text{iso}} \\
 &\cong \text{Diff}^+(S, \partial S) / \sim_{\text{hom}} \\
 &\cong \text{Diff}^+(S, \partial S) / \sim_{\text{iso}} \\
 &\cong \pi_0(\text{Diff}^+(S, \partial S))
 \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει από όλα όσα αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Η μετάβαση από ομοτοπίες σε ισοτοπίες προκύπτει από το Θεώρημα 3.5.15 και η μεταβαση από ομοιομορφισμούς σε αμφιδιαφορίσεις προκύπτει από το Θεώρημα 3.5.14. Το ότι η π_0 (το σύνολο της 0-οστής ομολογίας) είναι ομάδα το δείξαμε στο Κεφάλαιο 4. $\square$

4.2 Επεκτεταμένη ομάδα κλάσεων απεικονίσεων

Ορισμός 4.2.1 (Επεκτεταμένη ομάδα κλάσεων απεικονίσεων).

Έστω S μία επιφάνεια χωρίς σύνορο. Η επεκτεταμένη ομάδα κλάσεων απεικονίσεων (extended mapping class group) είναι η ομάδα κλάσεων ισοτοπιών όλων των ομοιομορφισμών της S . Συμβολίζουμε με $\text{Mod}^\pm(S)$.

Παρατήρηση 4.2.2.

Δηλαδή $\text{Mod}^\pm(S) = \text{Homeo}(S, \partial S) / \sim_{\text{iso}}$. Αφού $\text{Homeo}^+(S, \partial S) < \text{Homeo}(S, \partial S)$ έπεται ότι $\text{Homeo}^+(S, \partial S) / \sim_{\text{iso}} < \text{Homeo}(S, \partial S) / \sim_{\text{iso}}$ δηλαδή $\text{Mod}(S) < \text{Mod}^\pm(S)$.

Η ομάδα $\text{Mod}(S_g)$ είναι δείκτου 2 στην $\text{Mod}^\pm(S_g)$. Πράγματι, θεωρούμε τον ομομορφισμό $\text{Mod}^\pm(S_g) \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ που ορίζεται ως εξής:

$$f([\phi]_{\text{iso}}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \phi \text{ αντιστρέφει προσανατολισμό} \\ 0 & \text{αν } \phi \text{ διατηρεί προσανατολισμό} \end{cases}$$

Τότε $\ker f = \text{Mod}(S_g)$. Άρα ορίζεται μία βραχεία ακολουθία ομάδων

$$1 \rightarrow \text{Mod}(S_g) \rightarrow \text{Mod}^\pm \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

Η ακολουθία διασπάται καθώς για κάθε $g > 0$ υπάρχει ένα στοιχείο τάξης 2 στην $Mod^\pm(S_g)$ το οποίο αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Παρατήρηση 4.2.3.

Για επιφάνειες με σύνορο δεν έχουμε αντίστοιχο ορισμό γιατί αν ένας ομοιομορφισμός περιορισμένος στο σύνορο είναι η ταυτοτική απεικόνιση, τότε απαραίτητα διατηρεί τον προσανατολισμό.

4.3 Υπολογισμοί ομάδων κλάσεων απεικονίσεων

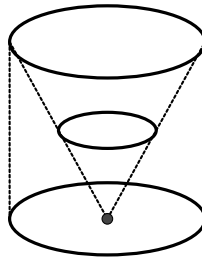
Λήμμα 4.3.1 (Alexander's trick).

Η ομάδα $Mod(D^2)$ είναι τετριμμένη. (Όπου D^2 ομοιομορφικός με τον μοναδιαίο κλειστό δίσκο $\{\|x\| \leq 1 : x \in \mathbb{R}^2\}$)

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα το δείξουμε για τον μοναδιαίο δίσκο. Έστω $\phi : D^2 \rightarrow D^2$ ένας ομοιομορφισμός με $\phi|_{\partial D^2} = id_{\partial D^2}$. Ορίζουμε

$$F(x, t) = \begin{cases} (1-t)\phi\left(\frac{x}{1-t}\right), & \text{αν } 0 \leq |x| < 1-t \\ x, & \text{αν } 1-t \leq |x| \leq 1 \end{cases}$$

για $0 \leq t < 1$ και ορίζουμε $F(x, 1)$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση στον D^2 . Τότε η F είναι ισοτοπία από τη ϕ στον id_{D^2} . Επομένως κάθε ομοιομορφισμός ϕ στον D^2 που είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο σύνορο, δηλαδή $\phi \in Homeo^+(D^2, \partial D^2)$, είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική. $\square$



Πόρισμα 4.3.2.

Η ομάδα $Mod(S^2)$ είναι τετριμμένη.

Απόδειξη. Έστω $\phi : S^2 \rightarrow S^2$ ένας ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό και έστω γ μία απλή κλειστή καμπύλη στην S^2 . Αφού η $\phi(\gamma)$ είναι ισοτοπική με τη γ , μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\phi(\gamma) = \gamma$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.3.1 στους δύο δίσκους $S^2 \setminus \gamma$ (αφού η γ χωρίζει την S^2 σε δύο συνιστώσες που είναι ομοιομορφικές με δίσκο) και προκύπτει ότι η ϕ είναι ισοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση. $\square$

Σημείωση. Αυτή η μέθοδος γενικεύεται για ομοιομορφισμούς που σταθεροποιούν καμπύλες που γεμίζουν (Ορισμός 3.5.11) επιφάνειες, καθώς μπορούμε να πραγματοποιήσουμε σε κάθε συνεκτική συνιστώσα της επιφάνειας, που προκύπτει αν αφαιρέσουμε τις καμπύλες, το λήμμα. Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος *Alexander*.

Θα υπολογίσουμε τώρα την ομάδα κλάσεων απεικονίσεων του δακτυλίου A , δηλαδή, το A είναι ομοιομορφικό με τον δακτύλιο $\{1 \leq \|x\| \leq 2 : x \in \mathbb{R}^2\}$ (A από τη λέξη *annulus*). Η βασική διαδικασία για να την υπολογίσουμε είναι να βρούμε ένα τόξο στον A τέτοιο ώστε όταν κόψουμε στο τόξο να προκύψει ο κλειστός δίσκος. Ήδη από το Λήμμα 4.3.1 έχουμε ότι αν η εικόνα του τόξου είναι ισοτοπική με το ίδιο το τόξο, με ισοτοπίες συσχετισμένες στο σύνορο, τότε ο ομοιομορφισμός είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση.

Πρόταση 4.3.3.

Η $Mod(A)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα των ακεραίων $\mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Πρώτα κατασκευάζουμε μία απεικόνιση $\sigma : Mod(A) \rightarrow \mathbb{Z}$. Έστω $f \in Mod(A)$ και έστω $\phi : A \rightarrow A$ ένας ομοιομορφισμός, αντιπρόσωπος της κλάσης του f . Ο καθολικός χώρος επικάλυψης του δακτυλίου A είναι μία άπειρη λωρίδα $\tilde{A} \cong \mathbb{R} \times [0, 1]$, και μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ϕ έχει μία ανύψωση $\tilde{\phi} : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ που σταθεροποιεί την αρχή $(0, 0)$. Έστω $\tilde{\phi}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ο περιορισμός της $\tilde{\phi}$ στο $\mathbb{R} \times \{1\}$, το οποίο μπορούμε να το ταυτίσουμε με το $\mathbb{R}$. Αφού $\tilde{\phi}_1$ είναι η ανύψωση στο $\mathbb{R}$ μιας ταυτοτικής απεικόνισης μιας από τις δύο συνοριακές συνιστώσες του A , έπεται ότι είναι μεταφορά ενός ακεραίου μήκους. Ορίζουμε λοιπόν $\sigma(f) = \tilde{\phi}_1(0)$. (Αν μάλιστα ταυτίσουμε το $\mathbb{Z}$ με την ομάδα μετατοπίσεων του $\mathbb{R}$ ακεραίου μήκους, τότε $\tilde{\phi}_1 \in \mathbb{Z}$, άρα μπορούμε να πούμε ότι $\sigma(f) = \tilde{\phi}_1$) Έχουμε ότι η σ είναι ομομορφισμός αφού η σύνθεση ομοιομορφισμών πάει σε σύνθεση απεικονίσεων μετατόπισης, που είναι μετατόπιση μήκους ίσου με το άθροισμα των επιμέρους μηκών.

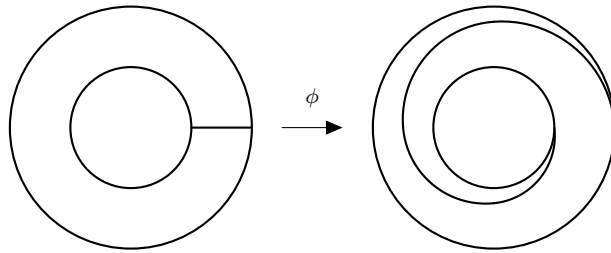
Μπορούμε να δώσουμε ισοδύναμο ορισμό της σ ως εξής. Έστω δ ένα προσανατολισμένο, απλό, κανονικό τόξο που ενώνει τις δύο συνοριακές συνιστώσες του A . Δοθείσης κλάσης

$f \in \text{Mod}(A)$ και αντιπροσώπου της ϕ όπως πριν, η συνάρτηση $\phi(\delta) * \bar{\delta}$ είναι βρόγχος με βάση το $\delta(0)$. Ορίζουμε $\sigma(f) := [\phi(\delta) * \bar{\delta}] \in \pi_1(A, \delta(0)) \cong \mathbb{Z}$. Δηλαδή με τον ισοδύναμο ορισμό που δώσαμε έχουμε ορίσει την σ ως εξής. Έστω $\tilde{\delta}$ η μοναδική ανύψωση του δ στον $\tilde{A}$ με βάση την αρχή $(0, 0)$ και θέτουμε $\sigma(f)$ να είναι το τελικό σημείο του $\tilde{\phi}(\tilde{\delta})$ στο $\mathbb{R} \times \{1\}$.

Η σ είναι επί. Ο γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^2$ που δίνεται από τον πίνακα $M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ διατηρεί το $\mathbb{R} \times [0, 1]$ και είναι ισομεταβλητή ως προς την ομάδα μετασχηματισμών επικάλυψης. Επομένως ο περιορισμός της γραμμικής απεικόνισης M στο $\mathbb{R} \times [0, 1]$ επάγει ομοιομορφισμό στην A . Έπεται από τον ορισμό της σ ότι $\sigma([\phi]) = n$.

Η σ είναι 1-1. Έστω $f \in \text{Mod}(A)$ ένα στοιχείο του πυρήνα της σ και επιπλέον ϕ ένας αντιπρόσωπος της f (ϕ ομοιομορφισμός). Έστω $\tilde{\phi}$ η ανύψωση της ϕ . Αφού $\sigma(f) = 0$ έχουμε ότι η $\tilde{\phi}$ δρα ως η ταυτοτική απεικόνιση στο σύνορο του καθολικού χώρου επικάλυψης $\partial\tilde{A}$. Ισχυριζόμαστε ότι η ομοτοπία της ευθείας γραμμής από το $\tilde{\phi}$ στην ταυτοτική $id_{\tilde{A}}$ της $\tilde{A}$ είναι ισομεταβλητή, δηλαδή $\tilde{\phi}(\tau x) = \tau \tilde{\phi}(x)$, για κάθε μετασχηματισμό επικάλυψης τ και για κάθε $x \in \tilde{A}$. Από τη θεωρία χώρων επικάλυψης, έπεται ότι $\tilde{\phi}(\tau x) = \phi_*(\tau) \tilde{\phi}(x)$, όπου ϕ_* είναι ο επαγόμενος ομομορφισμός στη θεμελιώδη ομάδα και ο μετασχηματισμός τ ταυτίζεται με τον αντίστοιχο ακέραιο, αφού (λόγω συνεκτικότητας του $\tilde{A}$) η ομάδα μετασχηματισμών επικάλυψης του χώρου είναι ισόμορφη με τη θεμελιώδη ομάδα του A που είναι $\mathbb{Z}$. Αλλά επειδή ϕ σταθεροποιεί το ∂A κατά σημείο έπεται ότι η ϕ_* είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός της $\pi_1(A) \cong \mathbb{Z}$ άρα $\phi_*(\tau) = \tau$ και άρα η $\tilde{\phi}$ είναι ισομεταβλητή.

Έχουμε επομένως ότι η ομοτοπία της ευθείας γραμμής από το $\tilde{\phi}$ στην ταυτοτική απεικόνιση $id_{\tilde{A}}$ είναι ισομεταβλητή και είναι σταθερή στο σύνορο του $\tilde{A}$, άρα επάγει ομοτοπία, μεταξύ της ϕ και της ταυτοτικής id_A του A , που είναι σταθερή στο σύνορο του A . Άρα η f είναι το ταυτοτικό στοιχείο και η σ μονομορφισμός. $\square$



Σημείωση. Ο ομοιομορφισμός στην εικόνα, που είναι αντιπρόσωπος για το στοιχείο f που απεικονίζεται στο -1 , ονομάζεται *Dehn twist*. Υπάρχουν παραδείγματα τέτοιου τύπου σε άλλες επιφάνειες με σημαντικές ιδιότητες.

Το ακόλουθο θεώρημα ήταν η διδακτορική διατριβή του Jakob Nielsen το 1913.

Θεώρημα 4.3.4 (Nielsen).

Η ομάδα $Mod(\mathbb{T}^2)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα των 2×2 πινάκων με στοιχεία ακεραίους ορίζουσας 1, δηλαδή $Mod(\mathbb{T}^2) \cong SL(2, \mathbb{Z})$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^2$ και κάθε ομοιομορφισμός ϕ του $\mathbb{T}^2$ επάγει έναν ομομορφισμό $\phi_* : H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$. Επειδή η ϕ είναι ομοιομορφισμός έπεται ότι έχει αντίστροφη και άρα η ϕ_* έχει αντίστροφη, επομένως είναι αυτομορφισμός. Ομοτοπικές απεικονίσεις επάγουν ίδια απεικόνιση στην ομολογία. Έχουμε λοιπόν ότι η απεικόνιση $\phi \mapsto \phi_*$ έχει πυρήνα τις ομοτοπικές με την ταυτοτική απεικονίσεις, δηλαδή η $\sigma : Mod(\mathbb{T}^2) \rightarrow Aut(\mathbb{Z}^2)$ με $[\phi] \mapsto \phi_*$ είναι καλώς ορισμένη. Σημειώνουμε ότι $Aut(\mathbb{Z}^2) \cong GL(2, \mathbb{Z})$. Η ταύτιση του στοιχείου $\sigma(f)$ με έναν 2×2 πίνακα εξαρτάται από την ταύτιση της ομάδας $H_1(\mathbb{T}^2; \mathbb{Z})$ με το $\mathbb{Z}^2$.

Για να περιορίσουμε την εικόνα της σ στην ομάδα $SL(2, \mathbb{Z})$ θα χρησιμοποιήσουμε τους αριθμούς τομής του $\mathbb{T}^2$. Είναι γνωστό ότι οι αλγεβρικοί αριθμοί τομής του τόρου (βλέπε [3]) έχουν τη μορφή $\hat{i}((p, q), (p', q')) = pq' - p'q = \det \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}$ και αν $\phi_*((p, q)) = A(p, q)$, τότε $\hat{i}(\phi_*((p, q)), \phi_*((p', q'))) = \hat{i}(A(p, q), A(p', q')) = \det A \det \begin{vmatrix} p & q \\ p' & q' \end{vmatrix}$. Ξέρουμε επίσης ότι διατηρούνται απο ομοιομορφισμούς (που διατηρούν τον προσανατολισμό) επομένως $\hat{i}(\phi_*((p, q)), \phi_*((p', q'))) = \hat{i}((p, q), (p', q'))$, άρα $\det A = 1$ δηλαδή $\sigma(f) \in SL(2, \mathbb{Z})$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η σ είναι επί. Κάθε στοιχείο A της $SL(2, \mathbb{Z})$ επάγει γραμμικό ομοιομορφισμό που διατηρεί τον προσανατολισμό του $\mathbb{R}^2$ και είναι ισομετάβλητος ως προς τη δράση της ομάδας μετασχηματισμών $\mathbb{Z}^2$ της επικάλυψης του $\mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{T}^2$. Επομένως κάθε A επάγει ομοιομορφισμό στο πηλίκο $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$, έστω ϕ_A . Επειδή στην Πρόταση 3.1.13 έχουμε ταυτίσει τα πρωταρχικά στοιχεία του $\mathbb{Z}^2$ με τις κλάσεις ομοτοπίας απλών κλειστών καμπυλών στον $\mathbb{T}^2$ έχουμε ότι $\sigma([\phi_A]) = A$, δηλαδή η σ είναι επί.

Τώρα θα δώσουμε τρεις διαφορετικές αποδείξεις για το 1-1 της απεικόνισης σ , η μία πιο κατασκευαστική και οι άλλες δύο βασισμένες στην επέκταση ομοτοπίας, σε έναν μεγάλο βαθμό όμοιες. (βασίζονται και οι δύο σε CW-συμπλέγματα)

Πρώτη απόδειξη. Έστω $f \in \text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ και υποθέτουμε ότι $\sigma(f)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας στην $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ και έστω $\phi \in \text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$ ένας αντιπρόσωπος της f . Αν α και β είναι δύο απλές, κλειστές καμπύλες που αντιστοιχούν στα στοιχεία $(1, 0)$ και $(0, 1)$ της $\pi_1(\mathbb{T}^2)$, τότε έπεται (αφού $\sigma(f) = I_2$) ότι η $\phi(\alpha)$ είναι ομοτοπική καμπύλη με την α και η $\phi(\beta)$ είναι ομοτοπική καμπύλη με την β .

Από το Θεώρημα 3.5.15 (Baer) έχουμε ότι η $\phi(\alpha)$ είναι ισοτοπική με την α και από το Θεώρημα 3.4.7 κάθε τέτοια ισοτοπία μπορεί να επεκταθεί σε ισοτοπία του $\mathbb{T}^2$. Άρα ως προς ισοτοπία μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ϕ σταθεροποιεί την α κατα σημείο. Επειδή η ϕ διατηρεί τον προσανατολισμό έπεται ότι η ϕ διατηρεί και τις δύο πλευρές της α .

Κόβοντας τον $\mathbb{T}^2$ πάνω στην α προκύπτει μία επιφάνεια με δύο συνοριακές συνιστώσες ομοιομορφική με τον δακτύλιο A . Δεδομένου ότι η ϕ σταθεροποιεί την α κατα σημείο και ότι η ϕ διατηρεί τις πλευρές της α , έχουμε ότι η ϕ επάγει ομοιομορφισμό $\bar{\phi}$ στον A ο οποίος σταθεροποιεί το σύνορο. Επομένως $[\bar{\phi}] \in \text{Mod}(A)$. Μπορούμε να θεωρήσουμε το β και το $\phi(\beta)$ ως τόξα στην A , μάλιστα αν β' και $\phi(\beta)'$ τα τόξα στην A , τότε $\bar{\phi}(\beta') = \phi(\beta)'$. Αφού το $\phi(\beta)$ είναι ισοτοπικό με το β στον $\mathbb{T}^2$, έχουμε ότι $\rho([\bar{\phi}]) = 0$ για την απεικόνιση $\rho : \text{Mod}(A) \rightarrow \mathbb{Z}$ της Πρότασης 4.3.3 (την οποία συμβολίζαμε ως σ).

Από την Πρόταση 4.3.3 έχουμε ότι $[\bar{\phi}] \in \ker \rho$, δηλαδή η $\bar{\phi}$ είναι ομοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση στο A , ως προς ομοτοπία συσχετισμένη στο σύνορο ∂A . Έπεται ότι η ϕ είναι ομοτοπική με τη σταθερή απεικόνιση. ■

Δεύτερη απόδειξη. Ο καθολικός χώρος επικάλυψης του $\mathbb{T}^2$ είναι το $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι συσταλτός χώρος, άρα ο $\mathbb{T}^2$ είναι $K(\mathbb{Z}^2, 1)$ -χώρος. Είναι γνωστό ότι υπάρχει μία 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των κλάσεων ομοτοπίας, με βάση, συνεχών απεικονίσεων $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ και των ενδομορφισμών της $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ (Proposition 1B.9 στο βιβλίο του Hatcher [2]). Είναι γνωστό ότι κάθε στοιχείο $f \in \text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ έχει έναν αντιπρόσωπο $\phi \in \text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$ ο οποίος σταθεροποιεί το στοιχείο βάσης για τον $\mathbb{T}^2$. Άρα η παραπάνω αντιστοιχία γίνεται μία 1-1 απεικόνιση από τις κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας ομοιομορφισμών του $\mathbb{T}^2$ στις κλάσεις συζυγίας ενδομορφισμών της $\mathbb{Z}^2$. Όμως επειδή η $\mathbb{Z}^2$ είναι αβελιανή οι κλάσεις συζυγίας είναι μονοσύνολα και επομένως έχουμε μία 1-1 απεικόνιση από τις κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας ομοιομορφισμών του $\mathbb{T}^2$ στους ενδομορφισμούς της $\mathbb{Z}^2$. Ο τρόπος που ορίζεται αυτή η απεικόνιση μας δίνει την σ , επομένως η σ είναι 1-1. ■

Τρίτη απόδειξη. Έστω πάλι $f \in \text{Mod}(\mathbb{T}^2)$ με $\sigma(f) = I_2$ ο ταυτοτικός πίνακας της $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ και $\phi \in \text{Homeo}^+(\mathbb{T}^2)$ ένας αντιπρόσωπος της f . Αναπαριστούμε τον $\mathbb{T}^2$ ως τον χώρο πηλίκου $[0, 1] \times [0, 1]$ ταυτοποιώντας τα $(t, 0)$ με τα $(t, 1)$ για $t \in [0, 1]$ και τα $(0, t)$ με $(1, t)$ για $t \in [0, 1]$.

Έστω α, β οι δύο απλές κλειστές καμπύλες της $\mathbb{T}^2$, που αντιστοιχούν στις κλάσεις $[0, 1] \times \{0, 1\}$ και $\{0, 1\} \times [0, 1]$, αντίστοιχα. Έστω x_0 το σημείο τομής των α και β , $x_0 = [(0, 0)] = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$. Έχουμε λοιπόν $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z}) \cong \pi_1(\mathbb{T}^2, x_0) = \langle [\alpha], [\beta] \rangle \cong \mathbb{Z}^2$. Επίσης το συμπλήρωμα $\mathbb{T}^2 \setminus \{\alpha, \beta\}$ είναι ανοικτός δίσκος.

Αφού $\sigma(f) = I_2$ έχουμε όπως στην πρώτη απόδειξη ότι $\phi(\alpha) \sim_{\text{hom}} \alpha$ και $\phi(\beta) \sim_{\text{hom}} \beta$. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτά για να κατασκευάσουμε μία ομοτοπία στον $\mathbb{T}^2$ που να πηγαίνει την α στην $\phi(\alpha)$ και την β στην $\phi(\beta)$.

Έστω $X = (\mathbb{T}^2 \times \{0, 1\}) \cup ((\alpha \cup \beta) \times [0, 1])$. Αρχικά ορίζουμε F από το X στο $\mathbb{T}^2$ ως εξής:

- (i) $F|_{\mathbb{T}^2 \times \{0\}} = \text{id}_{\mathbb{T}^2}$ και $H|_{\mathbb{T}^2 \times \{1\}} = \phi$.
- (ii) Η $F|_{\alpha \times [0, 1]}$ είναι μία ομοτοπία από την α στην $\phi(\alpha)$.
- (iii) Η $F|_{\beta \times [0, 1]}$ είναι μία ομοτοπία από την β στην $\phi(\beta)$.

Εύκολα βλέπουμε (από το Λήμμα της συγχόλλησης) ότι η F είναι συνεχής συνάρτηση. Έστω τώρα $p : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ η απεικόνιση πηλίκου, η οποία είναι συνεχής, άρα και η $p \times \text{id}_{[0, 1]} : [0, 1]^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T} \times [0, 1]$ είναι συνεχής. Θεωρούμε την απεικόνιση $F \circ (p \times \text{id}_{[0, 1]}) : \partial([0, 1]^2 \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{T}^2$. Αφού $\pi_2(\mathbb{T}^2) = 0$, η απεικόνιση $H \circ (p \times \text{id}_{[0, 1]})$ επεκτείνεται σε απεικόνιση $H : [0, 1]^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$. Σύμφωνα με την κατασκευή η απεικόνιση H επάγει συνεχή $\hat{H} : \mathbb{T}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$. Η απεικόνιση αυτή είναι η επιθυμητή ομοτοπία από την $\text{id}_{\mathbb{T}^2}$ στην ϕ . Άρα $[\phi] = 1$.

(Αν θεωρήσουμε $([0, 1]^2 \times [0, 1], X)$ ως CW-ζεύγος και την απεικόνιση $F \circ (p \times \text{id}_{[0, 1]}) : \partial([0, 1]^2 \times [0, 1]) \rightarrow \mathbb{T}^2$, έχουμε ότι η απεικόνιση επεκτείνεται σε $H : [0, 1]^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2$ γιατί $\pi_2(\mathbb{T}^2) = 0$ αφού η $([0, 1]^2 \times [0, 1]) \setminus \partial([0, 1]^2 \times [0, 1])$ αποτελείται από ένα 3-κελί. Η επέκταση υπάρχει, παραπέμπουμε στο Lemma 4.7 στο βιβλίο του Hatcher [2] για τη σχετική κατασκευή.) ■

Επομένως $\text{Mod}(\mathbb{T}^2) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$. □

Πόρισμα 4.3.5.

Η ομάδα $\text{Mod}^\pm(\mathbb{T}^2)$ είναι ισόμορφη με την ομάδα των 2×2 αντιστρέψιμων πινάκων με στοιχεία στους $\mathbb{Z}$, $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$.

Απόδειξη. Αν στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.4 δε θεωρήσουμε ομοιομορφισμούς που διατηρούν τον προσανατολισμό έχουμε ότι οι αλγεβρικοί αριθμοί τομής μπορούν να αλλάζουν πρόσημο, επομένως η ορίζουσα του πίνακα A μπορεί να είναι και -1 . Το 1-1 δεν χαλάει γιατί η τρίτη απόδειξη εξακολουθεί να "δουλεύει" για $f \in \text{Mod}^\pm(\mathbb{T}^2)$ κανονικά.

Ένας άλλος λόγος που μπορούμε να πάρουμε αυτό το αποτέλεσμα είναι ότι η $\text{Mod}(S)$ είναι δείκτου 2 στη $\text{Mod}^\pm(S)$ (θα το δούμε παρακάτω). $\square$

4.4 Μέθοδος Alexander

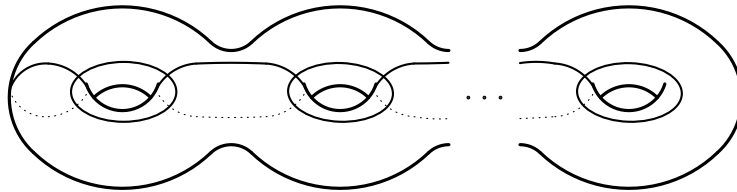
Ορισμός 4.4.1 (Σύστημα Alexander).

Έστω S μία συμπαγής επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο), μία συλλογή $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, από ουσιώδεις, απλές, κλειστές καμπύλες ή ουσιώδεις απλά κανονικά τόξα στην S , λέγεται **σύστημα Alexander** αν ικανοποιεί τα εξής:

- (i) Τα γ_i είναι ανά δύο σε ελαχιστική θέση.
- (ii) Τα γ_i είναι ανά δύο μη ισοτοπικά.
- (iii) Για διαφορετικά i, j, k τουλάχιστον ένα σύνολο από τα $\gamma_i \cap \gamma_j, \gamma_j \cap \gamma_k, \gamma_k \cap \gamma_i$ είναι κενό.

Παρατήρηση 4.4.2.

1. Κάθε S_g επιφάνεια γένους g , έχει ένα σύστημα Alexander που τη γεμίζει.



2. Για ένα σύστημα Alexander $\{\gamma_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ έχουμε ότι κάθε υποσύνολο του είναι κι αυτό σύστημα Alexander.
3. Μπορούμε να θεωρήσουμε την ένωση $\cup \gamma_i$ ως (πιθανώς μη συνεκτικό) γράφημα Γ στην S , όπου κορυφές: είναι τα σημεία τομής των γ_i και τα πέρατα των τόξων (όταν έχουμε τόξα) και ακμές: είναι τα τμήματα των γ_i που έχουν πέρατα κορυφές και δεν περιέχουν στο εσωτερικό τους κορυφή (σημείο τομής).

Λήμμα 4.4.3.

Έστω S μία συμπαγής επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο), και $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ και $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ δύο συστήματα Alexander τέτοια ώστε $\alpha_i \sim_{iso} \beta_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, με ισοτοπίες συσχετισμένες στο σύνορο (αν είναι τόξα). Τότε υπάρχει μία συσχετισμένη στο σύνορο ισοτοπία στην S η οποία πάει την α_i στην β_i για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. (Δηλαδή απεικονίζει την ένωση $\cup \alpha_i$ στην ένωση $\cup \beta_i$.)

Απόδειξη. Θα το δείξουμε με επαγωγή. Έστω ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ισοτοπία της S η οποία πάει τα α_i στα β_i για $i < k$. Θα κατασκευάσουμε μία ισοτοπία στην S η οποία πάει τα α_i στα β_i για $i = 1, 2, \dots, k$. Αυτό θα το κάνουμε φτιάχνοντας μία ισοτοπία της S που πάει την α_k στην β_k και αφήνει τα $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}$ αναλλοίωτα. Σαν βάση επαγωγής θα πάρουμε την περίπτωση για $k = 0$.

Πρώτα πραγματοποιούμε την ισοτοπία των $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ που πάνε στα $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{k-1}$ και μετακινεί τυχαία την α_k στην S . Έστω $\alpha_k^{(1)}$ η καμπύλη (ή τόξο) που προκύπτει μετά την ισοτοπία. Επειδή είναι σύστημα Alexander για κάθε $i \neq j$ με $i, j < k$ ένα από τα $\alpha_i \cap \alpha_j, \alpha_j \cap \alpha_k, \alpha_k \cap \alpha_i$ είναι κενό. Επομένως στο γράφημα $\cup_{i=1}^{k-1} \alpha_i$ δεν υπάρχει κορυφή που να ανήκει στην α_k . Επομένως μετά την ισοτοπία δεν υπάρχει κορυφή του γραφήματος $\cup_{i=1}^{k-1} \beta_i$ που να ανήκει στην $\alpha_k^{(1)}$.

Τώρα πραγματοποιούμε μία ισοτοπία στην S η οποία αφήνει σταθερό το $\cup_{i=1}^{k-1} \beta_i$ και διαχωρίζει τα $\alpha_k^{(1)}$ και β_k στις ακμές του $\cup_{i=1}^{k-1} \beta_i$, δηλαδή αν τέμνονται σε ακμή απλά τα απομακρύνει λίγο το ένα από το άλλο. Τις καμπύλες (ή τόξα) που προκύπτουν τις λέμε $\alpha_k^{(2)}$ και $\beta_k^{(1)}$.

Πραγματοποιούμε πάλι μία ισοτοπία η οποία να αφήνει σταθερή μία περιοχή του $\cup_{i=1}^{k-1} \beta_i$ και να μετακινεί τις $\alpha_k^{(2)}$ και $\beta_k^{(1)}$ ώστε να γίνουν εγκάρσιες (αν δεν ήταν). Προκύπτουν $\alpha_k^{(3)}$ και $\beta_k^{(2)}$.

Επειδή $\alpha_k \sim_{iso} \alpha_k^{(1)} \sim_{iso} \alpha_k^{(2)} \sim_{iso} \alpha_k^{(3)}$ και $\alpha_k \sim_{iso} \beta_k \sim_{iso} \beta_k^{(1)} \sim_{iso} \beta_k^{(2)}$, έπεται $\alpha_k^{(3)} \sim_{iso} \beta_k^{(2)}$. Τώρα αν οι $\alpha_k^{(3)}$ και $\beta_k^{(2)}$ τέμνονται, τότε από το κριτήριο του διγώνου 3.2.11 σχηματίζουν δίγωνο. Παρατηρούμε ότι αν οι $\alpha_k^{(3)}$ και $\beta_k^{(2)}$ είναι τόξα, τότε δε σχηματίζουν γενικευμένο δίγωνο (Ορισμός 3.3.7), αυτό γιατί είναι ισοτοπικά μεταξύ τους, με ισοτοπία συσχετισμένη στο σύνορο, δηλαδή έχουν τα ίδια πέρατα. Λόγω της υπόθεσης (iii) του Ορισμού 4.4.1 έχουμε ότι η τομή του $\cup_{i=1}^{k-1} \beta_i$ με το δίγωνο είναι ξένα απλά κανονικά τόξα. Από την υπόθεση (i) κάθε τέτοιο τόξο συνδέει μία συνοριακή συνιστώσα με την άλλη (και είναι ξένα από τα σημεία τομής του διγώνου). Έπεται λοιπόν ότι υπάρχει μία ισοτοπία συσχετισμένη στο σύνορο, η οποία σταθεροποιεί το $\cup_{i=1}^{k-1} \beta_i$ σαν σύνολο και διαχωρίζει τα

$\alpha_k^{(3)}$ και $\beta_k^{(2)}$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι οι καμπύλες που θα προκύψουν να είναι ξένες, έστω $\alpha_k^{(4)}$ και $\beta_k^{(3)}$.

Τέλος έχουμε δύο ξένες ισοτοπικές ουσιώδεις απλές κλειστές καμπύλες (ή κανονικά τόξα). Επομένως όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος Nielsen 4.3.4 είτε το χωρίο F , ανάμεσα τους είναι δακτύλιος (στην περίπτωση που είναι κλειστές καμπύλες) είτε είναι δίσκος (στην περίπτωση που είναι τόξα). Η τομή του $\cup_{i=1}^{k-1} \beta_i$ με την F είναι, αν όχι κενή, ξένα απλά κανονικά τόξα που ενώνουν τη $\alpha_k^{(4)}$ και $\beta_k^{(3)}$. Επομένως όπως πριν υπάρχει μία ισοτοπία της S που κρατάει σταθερό το $\cup_{i=1}^{k-1} \beta_i$ και πάει το $\alpha_k^{(4)}$ στο $\beta_k^{(3)}$. Άρα τελικά υπάρχει ισοτοπία της S που πάει τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ στα $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. $\square$

Θεώρημα 4.4.4 (Μέθοδος Alexander).

Έστω S μία συμπαγής επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο), $\phi \in \text{Homeo}^+(S, \partial S)$ ένας ομοιομορφισμός και $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ένα σύστημα Alexander.

1. Αν υπάρχει μετάθεση σ των $\{1, 2, \dots, n\}$ έτσι ώστε $\phi(\gamma_i) \sim_{iso} \gamma_{\sigma(i)}$ μέσω μίας ισοτοπίας συσχετισμένης στο σύνορο ∂S , για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, τότε $\phi(\cup \gamma_i) \sim_{iso} \cup \gamma_i$, μέσω μίας ισοτοπίας συσχετισμένης στο σύνορο ∂S .
2. Η σύνθεση του ομοιομορφισμού ϕ με την ισοτοπία που εξασφαλίζεται από τον προηγούμενο ισχυρισμό επάγει έναν αυτομορφισμό γραφημάτων $\phi_* : \Gamma \rightarrow \Gamma$ (όπου Γ είναι το γράφημα που ορίζεται στην Παρατήρηση 4.4.2).
3. Αν επιπλέον το σύστημα γ_i γεμίζει την S (Ορισμός 3.3.7) και ο ϕ_* είναι ο ταυτοτικός μορφισμός γραφημάτων, δηλαδή σταθεροποιεί κάθε κορυφή και ακμή με τον προσανατολισμό της, τότε ο ϕ είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική ή ο ϕ έχει μη τετριμμένη δύναμη η οποία είναι ισοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση.

Απόδειξη.

1. Εφ' όσον ο ϕ είναι ομοιομορφισμός, η συλλογή $\phi(\gamma_{\sigma^{-1}(1)}), \phi(\gamma_{\sigma^{-1}(2)}), \dots, \phi(\gamma_{\sigma^{-1}(n)})$ αποτελεί επίσης ένα σύστημα Alexander και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.4.3 για τα συστήματα Alexander $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ και $\phi(\gamma_{\sigma^{-1}(1)}), \phi(\gamma_{\sigma^{-1}(2)}), \dots, \phi(\gamma_{\sigma^{-1}(n)})$. Επομένως υπάρχει ισοτοπία της S , συσχετισμένη στο σύνορο, που πάει τα $\phi(\gamma_{\sigma^{-1}(i)})$ στα γ_i για $i = 1, 2, \dots, n$. Επομένως ισοτοπία που πάει την ένωση $\cup \gamma_i$ στην $\phi(\cup \gamma_i)$.

2. Ο ομοιομορφισμός ϕ μετά από την ισοτοπία αφήνει αναλλοίωτο το γράφημα Γ με τον προσανατολισμό στις ακμές. Επάγεται επομένως ένας αυτομορφισμός γραφημάτων $\phi_* : \Gamma \rightarrow \Gamma$.
3. Η ομάδα αυτομορφισμών ενός πεπερασμένου γραφήματος είναι πεπερασμένη. Μπορούμε λοιπόν να διαλέξουμε κ έτσι ώστε η δύναμη ϕ_*^κ να είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός. (διατηρεί κορυφές ακμές και προσανατολισμό)

Εφ' όσον ο ϕ είναι ομοιομορφισμός που διατηρεί τον προσανατολισμό της S , ο ϕ διατηρεί επίσης τις πλευρές στην S κάθε ακμής του Γ . Δηλαδή ο ϕ^κ , ίσως μετά από μία ισοτοπία, σταθεροποιεί κατά σημείο το Γ και στέλνει κάθε συνιστώσα C του $S \setminus \Gamma$ στον εαυτό της, δηλαδή $\phi^\kappa(C) = C$.

Αν έχουμε λοιπόν την επιπλέον συνθήκη ότι το σύστημα γεμίζει την S , τότε έχουμε ότι η επιφάνεια που προκύπτει αν κόψουμε πάνω στο Γ (ή $\cup \gamma_i$) είναι ένωση από κλειστούς ξένους δίσκους. Εφαρμόζουμε σε κάθε έναν από αυτούς το τριχ του Alexander (Λήμμα 4.3.1) και παίρνουμε ότι η ϕ^κ είναι ισοτοπική με τον ταυτοτικό ομοιομορφισμό της S . Αν $\kappa = 1$, τότε ο ϕ είναι ισοτοπικός με τον ταυτοτικό ομοιομορφισμό, αλλιώς έχει μία μη τετριμμένη δύναμη που είναι.

□

Παρατήρηση 4.4.5.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι στην τρίτη περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος μπορεί ναδειχθεί ότι αν ο ϕ έχει δύναμη ισοτοπική με την ταυτοτική απεικόνιση, τότε ο ϕ είναι ισοτοπικός με ομοιομορφισμό πεπερασμένης τάξης.

Πόρισμα 4.4.6.

Εστω μία συμπαγής επιφάνεια (πιθανώς με σύνορο) S , ένας ομοιομορφισμός $\phi \in \text{Homeo}^+(S, \partial S)$ και ένα σύστημα Alexander $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ που γεμίζει την S . Αν ισχύει $\phi(\gamma_i) \sim_{iso} \gamma_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, τότε ο ϕ είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση.

Κεφάλαιο 5

Εξωτερικοί αυτομορφισμοί ομάδων επιφανειών

5.1 Σχεδόν ισομετρίες

Για κάθε ομάδα G με πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων S έχουμε τη μετρική της λέξης $\|\cdot\|_S$ όπως ορίστηκε στο Κεφάλαιο 1 στον Ορισμό 1.3.15. Επομένως μία μετρική με την οποία μπορούμε να εφοδιάσουμε την $\pi_1(S)$ είναι η μετρική της λέξης.

Για μία υπερβολική επιφάνεια S μπορούμε επιλέγοντας μία απεικόνιση επικάλυψης $\mathbb{H}^2 \rightarrow S$ να εφοδιάσουμε την S με μία υπερβολική μετρική, η οποία κατ' επέκταση εφοδιάζει την $\pi_1(S)$ με μία μετρική.

Προφανώς η μετρική της λέξης στην $\pi_1(S)$ εξαρτάται από την επιλογή του συνόλου γεννητόρων και η μετρική στην $\pi_1(S)$ που προέρχεται από την S εξαρτώνται από την επιλογή απεικόνισης επικάλυψης. Τελικά όμως βασικές ιδιότητες της μετρικής δεν εξαρτώνται από αυτές τις επιλογές. Οι μετρικές αυτές μπορούμε να πούμε ότι δείχνουν το ίδιο "από μακριά". Αυτό μας οδηγεί στην έννοια της σχεδόν ισομετρίας.

Ορισμός 5.1.1.

Έστω $(X, d_X), (Y, d_Y)$ δύο μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ μία απεικόνιση. Η f λέγεται **σχεδόν ισομετρική εμφύτευση** ή **(λ, ε) -σχεδόν ισομετρική εμφύτευση** αν υπάρχουν $\lambda > 0$ και $\varepsilon \geq 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{\lambda}d_X(x_1, x_2) - \varepsilon \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + \varepsilon$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$.

Ορισμός 5.1.2.

Έστω $(X, d_X), (Y, d_Y)$ δύο μετρικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ μία (λ, ε) -σχεδόν ισομετρική εμφύτευση. Λέμε ότι η f είναι (λ, ε) -**σχεδόν ισομετρία** αν υπάρχει ένα $M > 0$ ώστε ο Y να περιέχεται στην M -περιοχή της εικόνας του X , δηλαδή $Y = \mathcal{N}_M(f(X))$, όπου $\mathcal{N}_M(f(X)) = \{y \in Y : \text{dist}(y, f(X)) < M\}$.

Ορισμός 5.1.3.

Έστω $(X, d_X), (Y, d_Y)$ δύο μετρικοί χώροι. Λέμε ότι ο X είναι **σχεδόν ισομετρικός** με τον Y και γράφουμε $X \sim_{qi} Y$ αν υπάρχει $f : X \rightarrow Y$ (λ, ε) -σχεδόν ισομετρία για κάποιο $\lambda > 0$ και $\varepsilon \geq 0$.

Παράδειγμα 5.1.4.

Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα και S_1, S_2 δύο πεπερασμένα σύνολα γεννητόρων της G . Τότε είναι εύκολο ναδειχθεί ότι η ταυτοτική απεικόνιση $id_G : (G, S_1) \rightarrow (G, S_2)$ είναι σχεδόν ισομετρία και έτσι $(G, S_1) \sim_{qi} (G, S_2)$ (βλέπε επίσης Πρόταση 5.1.9).

Από τους ορισμούς έπονται άμεσα οι ακόλουθες προτάσεις.

Πρόταση 5.1.5.

Η σχέση της σχεδόν ισομετρίας είναι σχέση ισοδυναμίας στους μετρικούς χώρους.

Σημείωση. Είναι πιθανόν να συναντήσει κανείς έναν ισοδύναμο ορισμό της σχεδόν ισομετρίας.

Πρόταση 5.1.6.

Έστω $(X, d_X), (Y, d_Y)$ δύο μετρικοί χώροι. Οι X και Y είναι σχεδόν ισομετρικοί αν και μόνο αν υπάρχουν δύο απεικονίσεις $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ και σταθερές $\lambda > 0, \varepsilon \geq 0, M \geq 0$ τέτοιες ώστε:

$$\begin{aligned} d_Y(f(x_1), f(x_2)) &\leq \lambda d_X(x_1, x_2) + \varepsilon & d_X(g(y_1), g(y_2)) &\leq \lambda d_Y(y_1, y_2) + \varepsilon \\ d_Y(f \circ g(y), y) &\leq M & d_X(g \circ f(x), x) &\leq M \end{aligned}$$

για κάθε $x, x_1, x_2 \in X$ και $y, y_1, y_2 \in Y$.

Ορισμός 5.1.7.

Μια απεικόνιση που απολαμβάνει τις ίδιες ιδιότητες με την g της Προτάσης 5.1.6, ονομάζεται **σχεδόν αντίστροφη** της f .

Σημείωση.

- 1 Στην απόδειξη της Πρότασης 5.1.5 κατασκευάζει κάποιος σχεδόν αντίστροφη για να δείξει ότι $X \sim_{qi} Y \Rightarrow Y \sim_{qi} X$.
- 2 Οι f, g είναι σχεδόν ισομετρίες και η μία είναι σχεδόν αντίστροφη της άλλης αλλά δεν είναι υποχρεωτικά 1-1 και επί.

Το επόμενο θεώρημα είναι γνωστό και ως Λήμμα Milnor Švarc και αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της γεωμετρικής θεωρίας ομάδων. Αποδείχθηκε πρώτα από τον Efremovič [18] και αργότερα, ανεξάρτητα, από τους Švarc [1] και Milnor [9].

Θεώρημα 5.1.8 (Θεμελιώδης παρατήρηση της γεωμετρικής θεωρίας ομάδων).

Έστω X ένας *proper* γεωδαισιακός μετρικός χώρος (δηλαδή, κάθε κλειστή μπάλα είναι συμπαγές υποσύνολο του X) και έστω G μία ομάδα η οποία δρα στον X με ισομετρίες. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) Για κάθε συμπαγές $K \subseteq X$ το σύνολο $\{g \in G : (gK) \cap K \neq \emptyset\}$ είναι πεπερασμένο.
(δηλαδή, η δράση είναι *properly discontinuous*)
- (ii) Το πηλίκο X/G είναι συμπαγές.
(δηλαδή, η δράση είναι *cocompact*)

Τότε η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα, σχεδόν ισομετρική με τον X . Δηλαδή υπάρχει μία μετρική της λέξης για την G τέτοια ώστε για κάθε $x_0 \in X$ η απεικόνιση $\phi : G \rightarrow X$ με $g \mapsto gx_0$ είναι σχεδόν ισομετρία.

Απόδειξη. Έστω x_0 ένα σταθερό σημείο του X . Επειδή η δράση της G στον X ικανοποιεί τη συνθήκη (i) μπορούμε να ορίσουμε μετρική στο πηλίκο X/G . Ορίζουμε απόσταση δύο σημείων του πηλίκου ως το *infimum* των αποστάσεων μεταξύ αντιπροσώπων των τροχιών.

$$d_{X/G}([x]_G, [y]_G) = \inf\{d(z, w) : z \in [x]_G, w \in [y]_G\}$$

Η ιδιότητα (i) μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε το *infimum* με *minimum* και κατέπεχταση κάνει την $d_{X/G}$ μετρική.

Πράγματι από τον ορισμό του *infimum* υπάρχουν ακολουθίες $z_n = g_n x$ και $w_n = h_n y$ τέτοιες ώστε $d(z_n, w_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d_{X/G}([x]_G, [y]_G)$ όμως $d(z_n, w_n) = d(g_n x, h_n y) = d(x, g_n^{-1} h_n y)$. Επομένως $g_n^{-1} h_n \in B(x, R)$ για $n \geq n_0$ για κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Από την

ιδιότητα (i) υπάρχουν πεπερασμένα $g_n^{-1}h_n \in B(x, R)$, ένα από τα οποία επιτυγχάνει το *infimum*. Άρα $d_{X/G}([x]_G, [y]_G) = \min\{d(z, w) : z \in [x]_G, w \in [y]_G\}$.

Επειδή από το (ii) ο μετρικός χώρος X/G είναι συμπαγής, έπεται ότι ως μετρικός χώρος είναι φραγμένος, άρα υπάρχει $R > 0$ ώστε $X/G = B([x_0], R)$. Έπεται ότι για κάθε $x \in X$ $[x] \in B([x_0], R)$ άρα υπάρχει $g \in G$ ώστε $gx \in B(x_0, R)$, άρα το X καλύπτεται από μεταφορές της μπάλας $B(x_0, R)$. (ισοδύναμος ορισμός στην περίπτωση μας του να είναι μία δράση cocompact)

Έστω $S = \{g \in G : g \neq 1 \text{ και } gB(x_0, R) \cap B(x_0, R) \neq \emptyset\}$ από το (i) της υπόθεσης το S είναι πεπερασμένο. Θέτουμε

$$\kappa := \max_{s \in S} d(x_0, sx_0) \text{ και } r := \inf \{d(B(x_0, R), gB(x_0, R)) : g \notin S \cup \{1\}\}.$$

Αν $r = 0$, τότε δεν υπάρχει $g \in G$ με $g \notin S \cup \{1\}$ άρα $G = S \cup \{1\}$ και συνεπώς G πεπερασμένα παραγόμενη.

Υποθέτουμε ότι $r > 0$. Έστω $g \in G$. Ο X ως γεωδαισιακός χώρος είναι κατά τόξα συνεκτικός. Επομένως υπάρχει μονοπάτι από το x_0 στο gx_0 . Επιλέγουμε σημεία $x_1, x_2, \dots, x_n = gx_0$ πάνω στο μονοπάτι ώστε $d(x_i, x_{i+1}) < r$ για $i = 0, 1, \dots, n-1$ (γίνεται να επιλέξουμε τέτοια σημεία γιατί το μονοπάτι είναι συμπαγές σύνολο). Αφού $GB(x_0, R) = X$ μπορούμε να διαλέξουμε $g_1, g_2, \dots, g_{n-1} \in G$ ώστε $x_i \in g_i B(x_0, R)$. Αν πάρουμε $g_0 = 1$, $g_n = g$ και $s_i = g_{i-1}^{-1}g_i$, τότε έχουμε $s_1 s_2 \dots s_n = g_0^{-1} g_1 g_1^{-1} \dots g_n = g$. Έχουμε

$$\begin{aligned} d(s_i B(x_0, R), B(x_0, R)) &= d(g_{i-1}^{-1} g_i B(x_0, R), B(x_0, R)) \\ &= d(g_i B(x_0, R), g_{i-1} B(x_0, R)) \\ &\leq d(x_i, x_{i-1}) < r \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του r έπεται ότι $s_i \in S \cup \{1\}$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Άρα το σύνολο S παράγει την G , δηλαδή G πεπερασμένα παραγόμενη.

Μένει να δείξουμε ότι η απεικόνιση $g \mapsto gx_0$ ορίζει σχεδόν ισομετρία. Πρώτα θα δείξουμε ότι είναι σχεδόν ισομετρική εμφύτευση, όπου η G θεωρείται μετρικός χώρος με τη μετρική της λέξης ως προς S . Πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι έχουμε

$$\frac{1}{\kappa} d(g_1 x_0, g_2 x_0) \leq d_S(g_1, g_2) \leq \frac{1}{r} d(g_1 x_0, g_2 x_0) + 1 \text{ για } g_1, g_2 \in G.$$

Αφού η G δρα με ισομετρίες στον X , η διπλή ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε είναι ισοδύναμη με

$$\frac{1}{\kappa} d(x_0, g_1^{-1} g_2 x_0) \leq d_S(1, g_1^{-1} g_2) \leq \frac{1}{r} d(x_0, g_1^{-1} g_2 x_0) + 1 \text{ για } g_1, g_2 \in G$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\kappa}d(x_0, gx_0) \leq d_S(1, g) \leq \frac{1}{r}d(x_0, gx_0) + 1 \text{ για } g \in G$$

Επομένως για $\lambda = \max\{\frac{1}{r}, \kappa\}$ και $\varepsilon = 1$ έχουμε ότι είναι (λ, ε) -σχεδόν ισομετρική εμφύτευση.

Παρατηρούμε ότι $\varepsilon \geq 1$, γιατί αν έχουμε $g \in \text{Stab}_g(x_0)$, τότε $\frac{1}{\lambda}d(x_0, x_0) \leq d_S(1, g) \leq \lambda d(x_0, x_0) + \varepsilon \Rightarrow d(1, g) \leq \varepsilon$.

Την ανισότητα $\frac{1}{\lambda}d(x_0, gx_0) \leq d_S(1, g)$, θα τη δείξουμε χρησιμοποιώντας τριγωνική ανισότητα. Έστω $g = s_1 \dots s_n$ τότε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}d(x_0, gx_0) &\leq \frac{1}{\lambda}(d(x_0, s_1x_0) + d(s_1x_0, s_1s_2x_0) + \dots + d(s_1s_2 \dots s_{n-1}x_0, s_1s_2 \dots s_nx_0)) \\ &= \frac{1}{\lambda}(d(x_0, s_1x_0) + d(x_0, s_2x_0) + \dots + d(x_0, s_nx_0)) \\ &\leq \frac{1}{\lambda}n \max\{d(x_0, s_1x_0) + d(x_0, s_2x_0) + \dots + d(x_0, s_nx_0)\} \\ &\leq n \frac{\lambda}{\lambda} = n = d_S(1, g) \end{aligned}$$

Η άλλη ανισότητα $d_S(1, g) \leq \lambda d(x_0, gx_0) + 1$, προκύπτει με το ίδιο επιχείρημα που δείξαμε ότι το S παράγει την G . Αφού ο X είναι γεωδαισιακός χώρος υπάρχει γεωδαισιακή μήκους $d(x_0, gx_0)$ που ενώνει το x_0 με το gx_0 . Έστω $n = \left\lfloor \frac{d(x_0, gx_0)}{r} \right\rfloor$, δηλαδή $n \leq \frac{d(x_0, gx_0)}{r} + 1$. Βρίσκουμε σημεία $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = gx_0$ στον X ώστε $d(x_i, x_{i+1}) < r$ για $i = 0, 1, \dots, n-1$. Αφού οι G -μεταφορές της $B(x_0, R)$ καλύπτουν τον X διαλέγουμε στοιχεία $1 = g_0, g_1, \dots, g_{n-1}, g_n = g$ στη G ώστε $x_i \in g_i B(x_0, R)$. Αν θέσουμε $s_i = g_{i-1}^{-1}g_i$, τότε $g = s_1s_2 \dots s_n$. Πάλι από τον ορισμό του r έχουμε $s_i \in S$ και άρα το μήκος της λέξης g είναι $\|g\|_S \leq n$. Δηλαδή

$$d_S(1, g) \leq n \leq \frac{d(x_0, gx_0)}{r} + 1 \leq \lambda d(x_0, gx_0) + 1.$$

Τέλος για να δείξουμε ότι είναι σχεδόν ισομετρία σημειώνουμε ότι $G \cdot B(x_0, R) = X$, άρα $X = \mathcal{N}_R(\phi(G))$, δηλαδή πράγματι η ϕ είναι σχεδόν ισομετρία. $\square$

Πόρισμα 5.1.9.

Έστω G μία πεπερασμένα παραγόμενη ομάδα. Τότε για κάθε δύο σύνολα γεννητόρων S_1, S_2 τα γραφήματα Cayley $\Gamma(G, S_1)$ και $\Gamma(G, S_2)$ είναι σχεδόν ισομετρικά.

Απόδειξη. Πράγματι όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1. στην Παρατήρηση 1.3.16, η φυσιολογική δράση της ομάδας G στο γράφημα Cayley ικανοποιεί τα (i) και (ii) του προηγούμενου θεωρήματος (Θεώρημα 5.1.8). $\square$

Σημείωση. Γίνεται να δείξουμε το προηγούμενο πόρισμα (Πόρισμα 5.1.9) και χωρίς το Θεώρημα 5.1.8 και μάλιστα στη σχεδόν ισομετρία που θα προκύψει το $\varepsilon = 0$.

Πρόταση 5.1.10.

Κάθε αυτομορφισμός μιας πεπερασμένα παραγόμενης ομάδας G είναι σχεδόν ισομετρία.

Απόδειξη. Έστω $\Phi : G \rightarrow G$ ένας αυτομορφισμός της ομάδας G και έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G . Αφού η Φ είναι αυτομορφισμός έχουμε ότι το $\Phi^{-1}(S) = \{\Phi^{-1}(s) : s \in S\}$ είναι κι αυτό ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων της G και ισχύει ότι $d_S(\Phi(g), \Phi(h)) = d_{\Phi^{-1}(S)}(g, h)$.

Από το Πόρισμα 5.1.9 έχουμε ότι $(G, S) \sim_{qi} (G, \Phi^{-1}(S))$. Επομένως

$$\frac{1}{\lambda} d_S(g, h) - \varepsilon \leq d_{\Phi^{-1}(S)}(g, h) \leq \lambda d_S(g, h) + \varepsilon.$$

Ισχύει επίσης ότι $G \subseteq \mathcal{N}_\delta(\Phi(G))$ για οποιοδήποτε $\delta > 0$, αφού $G = \Phi(G)$. Δηλαδή ο αυτομορφισμός Φ είναι σχεδόν ισομετρία $\Phi : (G, d_S) \rightarrow (G, d_S)$. $\square$

Παρατήρηση 5.1.11.

Έστω S μία συμπαγής επιφάνεια και $\tilde{S}$ ο καθολικός χώρος επικάλυψης της S . Η δράση της $\pi_1(S)$ στον $\tilde{S}$ με μετασχηματισμούς επικάλυψης ικανοποιεί τα (i) και (ii) του Θεωρήματος 5.1.8. Επομένως $\pi_1(S) \sim_{qi} \tilde{S}$.

Παρατήρηση 5.1.12.

Από το Πόρισμα 5.1.9 γνωρίζουμε ότι κάθε δύο μετρικές της λέξης στην $\pi_1(S)$ δίνουν σχεδόν ισομετρικούς χώρους. Αν επιπροσθέτως, η S είναι υπερβολική επιφάνεια, τότε από το Θεώρημα 5.1.8 και την Παρατήρηση 5.1.11 η θεμελιώδης ομάδα $\pi_1(S)$ είναι σχεδόν ισομετρική με τον υπερβολικό χώρο $\mathbb{H}^2$ και άρα είναι υπερβολική ομάδα με την έννοια του Gromov. Ιδιαίτέρως, οι θεμελιώδεις ομάδες δύο υπερβολικών επιφανειών είναι σχεδόν ισομετρικές μεταξύ τους.

Σημείωση. Έστω S_g η συμπαγής επιφάνεια γένους $g \geq 2$. Τελικά δείξαμε ότι για κάθε επιλογή μετρικής στην $\pi_1(S)$ είτε μετρική της λέξης είτε μετρική που προκύπτει από τη μετρική της επιφάνειας, προκύπτουν σχεδόν ισομετρικοί μετρικοί χώροι. Επομένως από εδώ και πέρα με αυτά τα εφόδια μας δίνεται η δυνατότητα να αλλάζουμε μετρικές χωρίς να χαλάει η γενικότητα, χρησιμοποιώντας ιδιότητες αναλλοίωτες ως προς τη σχεδόν ισομετρία.

5.2 Σύνδεση στο άπειρο

Ορισμός 5.2.1.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια. Λέμε ότι δύο υπερβολικά στοιχεία a, b της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(S)$ **συνδέονται στο σύνορο** αν οι άξονες $\text{Axis}(a)$ και $\text{Axis}(b)$ αντίστοιχα συνδέονται.

Παρατήρηση 5.2.2.

Στο Θεώρημα 2.5.9 δείξαμε, για υπερβολική επιφάνεια S_g , $g \geq 2$, ότι κάθε μη τετριμμένο στοιχείο της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(S)$ είναι υπερβολικό.

Οι άξονες $\text{Axis}(a)$ και $\text{Axis}(b)$ είναι γεωδαισιακές γραμμές που μένουν αναλλοίωτες από τη δράση (μέσω μετασχηματισμού επικάλυψης) του a και b αντίστοιχα. Επομένως το αν συνδέονται ή όχι προκύπτει βάση του Ορισμού 3.1.15. Ο χαρακτηρισμός του ορισμού είναι σημαντικός γιατί μας δίνει έναν ανεξάρτητο της μετρικής ορισμό.

Ξέρουμε ότι ένα υπερβολικό στοιχείο αντιστοιχεί σε μία υπερβολική ισομετρία του $\mathbb{H}^2$ η οποία έχει δύο σταθερά σημεία στο σύνορο του $\mathbb{H}^2$. Αυτά τα σταθερά σημεία ακριβώς είναι τα πέρατα του άξονα του στοιχείου (στον οποίο δρα με μεταφορές η ισομετρία).

Τα πέρατα των αξόνων ή αλλιώς τα σταθερά σημεία των ισομετριών είναι σημεία του $\partial\mathbb{H}^2$ όμως $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{S}^1$. Επομένως θεωρώντας τα αντίστοιχα σημεία $\partial a_1, \partial a_2, \partial b_1$ και ∂b_2 στο σύνορο λέμε ότι τα στοιχεία a, b συνδέονται ή όχι στο σύνορο αν υπάρχουν ξένα τόξα που να ενώνουν το ∂a_1 με το ∂a_2 και το ∂b_1 με το ∂b_2 .

Εκ πρώτης όψεως η έννοια αυτή εξαρτάται από την επιλογή της υπερβολικής μετρικής στην επιφάνεια S , δηλαδή της απεικόνισης επικάλυψης. Δείξαμε λοιπόν ότι η έννοια εξαρτάται από την επιφάνεια και τα στοιχεία αλλά όχι από την απεικόνιση επικάλυψης. Τα σταθερά σημεία στο σύνορο είναι ανεξάρτητα της μετρικής που επιλέγουμε και κατ'επέκταση της γεωδαισιακής που τα ενώνει (άξονα του στοιχείου)

Επίσης αποδείξαμε ότι κάθε δύο επιλογές υπερβολικής μετρικής στην ομάδα είναι σχεδόν ισομετρικές, επομένως μπορούμε να σταθεροποιήσουμε μία απεικόνιση επικάλυψης χωρίς βλάβη της γενικότητας.

Λήμμα 5.2.3.

Έστω $g \geq 2$ και έστω $p : \mathbb{H}^2 \rightarrow S_g$ μία σταθερή απεικόνιση επικάλυψης. Έστω Φ ένας αυτομορφισμός της $\pi_1(S_g)$ και a, b δύο μη τετριμμένα στοιχεία της $\pi_1(S_g)$. Τότε τα στοιχεία $\Phi(a)$ και $\Phi(b)$ συνδέονται στο άπειρο αν και μόνο αν τα a και b συνδέονται στο άπειρο.

Απόδειξη. Εφ' όσον η S_g είναι κλειστή υπερβολική επιφάνεια και όλα τα στοιχεία της είναι υπερβολικά, έχει νόημα να αναρωτηθούμε αν ή όχι δύο στοιχεία συνδέονται στο άπειρο. Επειδή η Φ είναι 1-1 και επί είναι αντιστρέψιμη, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν τα a και b δε συνδέονται στο άπειρο, τότε ούτε και τα $\Phi(a)$ και $\Phi(b)$ συνδέονται στο άπειρο. Επίσης υποθέτουμε ότι τα a και b δεν έχουν τον ίδιο άξονα, αλλιώς από το Θεώρημα 2.5.9 θα είχαν ίσες δυνάμεις (μη τετριμμένες). Αυτή η ιδιότητα διατηρείται από αυτομορφισμούς, ειδικότερα από τη Φ .

Από το Πρόσχημα 5.1.9, η Φ είναι σχεδόν ισομετρία της $\pi_1(S)$ (μετρικοποιώντας τη με οποιοδήποτε σύνολο γεννητόρων). Έστω $\lambda \geq 1$ και $\varepsilon \geq 0$ οι αντίστοιχες σταθερές από τον ορισμό της σχεδόν ισομετρίας. Έστω D η διάμετρος μιας θεμελιώδους περιοχής στον $\mathbb{H}^2$ (για τη δράση της $\pi_1(S_g)$ στον $\mathbb{H}^2$ μέσω μετασχηματισμών επικάλυψης).

Έστω $R(\lambda, \varepsilon, D) \equiv R$ (θα δούμε ότι το κατάλληλο είναι $R > 2D\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda$). Σταθεροποιούμε ένα σημείο βάσης στον $\mathbb{H}^2$ και θεωρούμε την τροχιά $\mathcal{O}_a = \{a^k x_0 : k \in \mathbb{Z}\} = [x_0]_{\langle a \rangle}$. Συνδέουμε τα σημεία της $\mathcal{O}_a$ με ένα άπειρο κατά τμήματα γεωδαισιακό μονοπάτι, όπου κάθε τμήμα του μονοπατιού ενώνει δύο σημεία στην τροχιά του x_0 τα οποία βρίσκονται σε γειτονικές θεμελιώδεις περιοχές και ολόκληρο το μονοπάτι βρίσκεται σε μια περιοχή του άξονα του a . Μπορούμε να συμβολίσουμε ένα τέτοιο μονοπάτι χρησιμοποιώντας από το σύνολο των κορυφών του $\{a_i\}$ (αφού στον $\mathbb{H}^2$ οι γεωδαισιακές που ενώνουν δύο σημεία είναι μοναδικές).

Τα a και b δε συνδέονται στο άπειρο και αντιστοιχούν σε υπερβολικές ισομετρίες του $\mathbb{H}^2$, επίσης το μονοπάτι $\{a_i\}$ βρίσκεται σε μία περιοχή του άξονα του a . Επομένως μπορούμε να διαλέξουμε ένα $m \equiv m(R)$ έτσι ώστε κάθε σημείο της $\mathcal{O}_{b^m}^* = \{(b^m)^k x_0 : k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$ να έχει απόσταση τουλάχιστον $R + D$ από τα σημεία της $\mathcal{O}_{b^m}^*$. ($\mathcal{O}_{b^m}^* \neq \mathcal{O}_{b^m}$ καθώς $x_0 \notin \mathcal{O}_{b^m}^*$). Μπορούμε να ενώσουμε τα σημεία του $\mathcal{O}_{b^m}^*$ με ένα κατά τμήματα γεωδαισιακό μονοπάτι $\{b_i\}$ όπου κάθε b_i είναι στην τροχιά του x_0 , έτσι ώστε το μονοπάτι $\{b_i\}$ να μένει σε υπερβολική απόσταση τουλάχιστον R από το μονοπάτι $\{a_i\}$ και διαδοχικές ακμές b_i και b_{i+1} να βρίσκονται σε γειτονικές θεμελιώδεις περιοχές. Για να βρούμε τα b_i ξεκινάμε ένα διπλά άπειρο μονοπάτι το οποίο ενώνει τα σημεία του $\mathcal{O}_{b^m}^*$ και μένει εκτός της $(R + D)$ περιοχής του $\{a_i\}$, κρατάμε το απο ποιες θεμελιώδεις περιοχές περνά.

Για τα δύο μονοπάτια που κατασκευάσαμε το μήκος κάθε γεωδαισιακού τμήματος είναι το πολύ $2D$, αφού κάθε ζεύγος στοιχείων σε γειτονικές θεμελιώδεις περιοχές απέχει το πολύ $2D$ καθώς η διάμετρος της θεμελιώδους περιοχής είναι D . Οι ακμές των δύο μονοπατιών μπορούν να ταυτοποιηθούν με στοιχεία της $\pi_1(S_g)$.

Υποθέτουμε εις άτοπο ότι οι υπερβολικές ισομετρίες που προκύπτουν από τα στοιχεία $\Phi(a)$ και $\Phi(b)$ συνδέονται στο άπειρο. Έπεται ότι οι κατά τμήματα γεωδαισιακές $\{\Phi(a_i)\}$ και $\{\Phi(b_i)\}$ τέμνονται. Αφού ο Φ είναι σχεδόν ισομετρία με σταθερές λ, ε κάθε γεωδαισιακό τμήμα των $\{\Phi(a_i)\}$ και $\{\Phi(b_i)\}$ έχει μήκος $\lambda(2D) + \varepsilon$ το πολύ. Αλλά αφού τέμνονται έχουμε ότι δύο γεωδαισιακά τμήματα πρέπει να τέμνονται. Τώρα κάθε γεωδαισιακό τμήμα έχει τουλάχιστον ένα τελικό σημείο του οποίου η απόσταση από το σημείο τομής είναι μικρότερη από $\frac{\lambda(2D) + \varepsilon}{2}$ και άρα τα δύο τελικά σημεία έχουν απόσταση το πολύ $\lambda(2D) + \varepsilon$.

Έχουμε λοιπόν ότι υπάρχουν δύο σημεία $a, b \in \pi_1(S_g)$ με $d(a, b)$ και $d(\Phi(a), \Phi(b)) \leq \lambda(2D) + \varepsilon$. Όμως $R > 2D\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda$ άτοπο. Επομένως τα $\Phi(a)$ και $\Phi(b)$ συνδέονται στο άπειρο.

□

Ορισμός 5.2.4.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια και $a, b \in \pi_1(S)$ δύο υπερβολικά στοιχεία. Λέμε ότι τα a και b είναι στην ίδια πλευρά ενός υπερβολικού στοιχείου $c \in \pi_1(S)$ αν:

- (i) Τα a και b δε συνδέονται με το c (και δεν έχουν κοινό άξονα με το c)
- (ii) Οι άξονές τους βρίσκονται στην ίδια πλευρά.

Σημείωση.

Έστω $\partial a_1, \partial a_2$ τα πέρατα του άξονα $Axis(a)$ του στοιχείου a , $\partial b_1, \partial b_2$ και $\partial c_1, \partial c_2$ τα πέρατα των αξόνων για τα στοιχεία b και c , αντίστοιχα. Ο άξονας του c χωρίζει τον $\mathbb{H}^2$ σε δύο συνεκτικές συνιστώσες. Όταν λεμε ότι οι άξονες των a και b βρίσκονται στην ίδια πλευρά εννοούμε ότι οι άξονες βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι βρίσκονται στην ίδια πλευρά όταν υπάρχει τόξο που ενώνει στο $\partial\mathbb{H}^2$ το ∂c_1 με το ∂c_2 και δεν περιέχει κανένα από τα $\partial a_1, \partial a_2$ και $\partial b_1, \partial b_2$. Αυτός ο ορισμός είναι καθαρά τοπολογικός γιατί δεν εξαρτάται από τη μετρική στην $\mathbb{H}^2$.

Η απόδειξη του επόμενου λήμματος προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς.

Λήμμα 5.2.5.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια και $a, b, c \in \pi_1(S)$ στοιχεία με διαφορετικούς άξονες. Οι άξονες $Axis(a)$ και $Axis(b)$ βρίσκονται στην ίδια πλευρά του άξονα $Axis(c)$ αν και μόνο αν υπάρχει $d \in \pi_1(S)$ τέτοιο ώστε να συνδέεται στο άπειρο με τα a και b αλλά όχι με το c .

Πρόταση 5.2.6.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια και Φ ένας αυτομορφισμός της $\pi_1(S)$. Αν a, b και c στοιχεία της $\pi_1(S)$ με διαφορετικούς άξονες, τότε οι άξονες $Axis(\Phi(a))$ και $Axis(\Phi(b))$ βρίσκονται στην ίδια πλευρά του άξονα $Axis(\Phi(c))$ αν και μόνο αν οι άξονες $Axis(a)$ και $Axis(b)$ βρίσκονται στην ίδια πλευρά του $Axis(c)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 5.2.5 η ιδιότητα του αν δύο στοιχεία συνδέονται στο άπειρο διατηρείται από τους αυτομορφισμούς και από το Λήμμα 5.2.5 η ιδιότητα του αν δύο στοιχεία βρίσκονται στην ίδια πλευρά ενός τρίτου χαρακτηρίζεται από τη σύνδεση στο άπειρο, επομένως διατηρείται από αυτομορφισμούς. $\square$

Λήμμα 5.2.7.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια και $c_1, c_2 \in \pi_1(S) \setminus \{1\}$ δύο κλάσεις ομοτοπίας απλών κλειστών καμπυλών. Αν υποθέσουμε ότι $Axis(c_1) \cap Axis(c_2) \neq \emptyset$ τότε $i(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ αν και μόνο αν κάθε $\sigma \in \pi_1(S) \setminus \{c_2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ συνεπάγεται $\sigma \cdot Axis(c_1) \cap Axis(c_2) = \emptyset$, όπου γ_1, γ_2 οι γεωδαισιακοί αντιπρόσωποι των c_1, c_2 .

Απόδειξη. Έστω $p : \mathbb{H}^2 \rightarrow S$ η απεικόνιση επικάλυψης και $z \in Axis(c_1) \cap Axis(c_2)$. Τότε το $p(z) \in S$ είναι ένα σημείο τομής των γεωδαισιακών αντιπροσώπων γ_1 και γ_2 (αυτό γιατί οι άξονες προβάλλονται σε γεωδαισιακές). Για $i = 1, 2$ ισχύει $p^{-1}(p(z)) \cap Axis(c_i) = \pi_1(S) \cdot \{z\} \cap Axis(\gamma_i)$ όπου $\pi_1(S) \cdot \{z\}$ είναι η τροχιά του z . Αφού τα γ_i είναι απλές καμπύλες έχουμε από το Λήμμα 3.1.16 ότι $\pi_1(S) \cdot \{z\} \cap Axis(c_i) = \{c_i^n z : n \in \mathbb{Z}\}$ για $i = 1, 2$.

Υποθέτουμε ότι $i(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ τότε οι καμπύλες γ_1 και γ_2 τέμνονται ακριβώς μία φορά στο σημείο $p(z)$. Αν $w \in \pi_1(S) \cdot Axis(c_1) \cap Axis(c_2)$ τότε $p(w) = p(z)$ και άρα $w \in \pi_1(S) \cdot \{z\}$. Έπεται ότι $w \in \pi_1(S) \cdot \{z\} \cap Axis(c_2)$. Από την προηγούμενη παράγραφο προκύπτει ότι $w = c_2^m z$ για $m \in \mathbb{Z}$. Επομένως αν $i(\gamma_1, \gamma_2) = 1$ τότε $\pi_1(S) \cdot Axis(c_1) \cap Axis(c_2) \subset \{c_2^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Αυτό δείχνει ότι $\sigma \in \pi_1(S) \setminus \{c_2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ συνεπάγεται $\sigma \cdot Axis(c_1) \cap Axis(c_2) = \emptyset$.

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή υποθέτουμε ότι υπάρχει $\sigma \in \pi_1(S) \setminus \{c_2^n : n \in \mathbb{Z}\}$ και $z' \in \mathbb{H}^2$ τέτοιο ώστε $z' \in \sigma \cdot Axis(c_1) \cap Axis(c_2)$. Θα δείξουμε ότι $i(\gamma_1, \gamma_2) \geq 2$ δείχνοντας ότι $p(z) \neq p(z')$. Υποθέτουμε εις άτοπο ότι $p(z) = p(z')$, τότε $z' = gz$ για κάποιο $g \in \pi_1(S)$. Και τα δύο σημεία z, z' ανήκουν στον άξονα $Axis(c_2)$. Άρα $z' = gz \in \pi_1(S) \cdot \{z\} \cap Axis(c_2)$. Επειδή η γ_2 είναι απλή καμπύλη από το Λήμμα 3.1.16 έχουμε ότι $z' = c_2^k z$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Από την άλλη, έχουμε υποθέσει ότι $z' \in \sigma \cdot Axis(c_1)$ όπου $\sigma \in \pi_1(S) \setminus \{c_2^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Άρα

$\sigma \cdot \text{Axis}(c_1) \neq c_2^k \text{Axis}(c_1)$, όμως οι δύο άξονες, επειδή είναι άξονες συζυγών στοιχείων, προβάλλονται στον ίδιο γεωδαισιακό αντιπρόσωπο $p(\text{Axis}(c_1))$ με σημείο τομής με τον εαυτό του το $p(z')$. Άτοπο γιατί η γ_1 είναι απλή καμπύλη. $\square$

Πόρισμα 5.2.8.

Έστω S μία υπερβολική επιφάνεια και a, b δύο κλάσεις συζυγίας της θεμελιώδους ομάδας $\pi_1(S)$. Οι a, b έχουν γεωμετρικό αριθμό τομής 1 αν και μόνο αν για κάποιον αντιπρόσωπο α της a που συνδέεται στο άπειρο με αντιπρόσωπο β της b το σύνολο των αντιπροσώπων του a που συνδέονται στο άπειρο με το β είναι ακριβώς το $\{\beta^k \alpha \beta^{-k} : k \in \mathbb{Z}\}$.

5.3 Θεώρημα Dehn, Nielsen, Baer

Θεώρημα 5.3.1.

Έστω $g \geq 1$. Οι ομάδες $\text{Mod}^\pm(S_g)$ και $\text{Out}(\pi_1(S_g))$ είναι ισόμορφες.

Απόδειξη. Έστω S_g μία επιφάνεια γένους $g \geq 2$ (για $g = 1$ το δείξαμε Θεώρημα Nielsen 4.3.4). Η επιφάνεια S_g είναι υπερβολική (Θεώρημα 2.5.3) επομένως ο καθολικός χώρος επικάλυψης της S_g είναι ο $\mathbb{H}^2$.

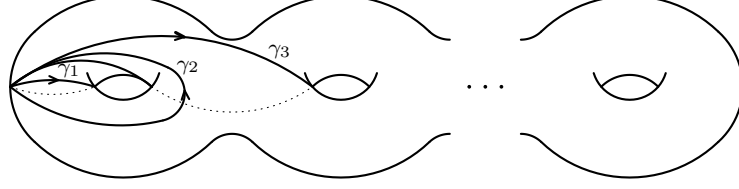
Έστω $x_0 \in S_g$ ένα σημείο βάσης της S_g και $\phi : S_g \rightarrow S_g$ μία απεικόνιση από την S_g στον εαυτό της. Για κάθε μονοπάτι α από το x_0 στο $\phi(x_0)$ επάγεται ένας ομομορφισμός $\phi_\alpha : \pi_1(S_g, x_0) \rightarrow \pi_1(S_g, \phi(x_0))$ ως εξής: για έναν βρόγχο γ με βάση το x_0 θέτουμε $\phi_\alpha([\gamma]) = [\alpha * \phi(\gamma) * \alpha^{-1}]$. Για σταθερή ϕ , διαφορετικές επιλογές της α δίνουν διαφορετικούς ομομορφισμούς ϕ_α . Οι ομομορφισμοί αυτοί διαφέρουν ως προς συζυγία. Πράγματι αν β είναι ένα άλλο μονοπάτι από το x_0 στο $\phi(x_0)$ τότε ba^{-1} είναι βρόγχος και $\phi_\beta([\gamma]) = [\beta * \phi(\gamma) * \beta^{-1}] = [\beta * \alpha^{-1}][\alpha * \phi(\gamma) * \alpha^{-1}][\alpha * \beta^{-1}] = [\beta\alpha^{-1}]\phi_\alpha([\gamma])[\beta\alpha^{-1}]^{-1}$.

Αν η ϕ είναι ομοιομορφισμός τότε είναι και αντιστρέψιμη, επομένως και ο ομομορφισμός ϕ_α είναι αντιστρέψιμος, άρα είναι αυτομορφισμός. Επομένως για κάθε ομοιομορφισμό ϕ αντιστοιχεί μία καλώς ορισμένη κλάση συζυγίας $\phi_* = [\phi_\alpha]_{\text{Out}} \in \text{Out}(\pi_1(S_g, x_0))$. Παρατηρούμε επίσης ότι $[(\phi \circ \psi)_\alpha]_{\text{Out}} = [\phi_\alpha]_{\text{Out}} \cdot [\psi_\alpha]_{\text{Out}} \Rightarrow (\phi \circ \psi)_* = \phi_* \cdot \psi_*$ για κάθε ομοιομορφισμό ϕ, ψ από την S_g στον εαυτό της. Τέλος ομοτοπικοί ομοιομορφισμοί επάγουν συζυγείς αυτομορφισμούς. Απεικονίζεται λοιπόν η κλάση ομοτοπίας $[\phi] \in \text{Mod}^\pm(S_g)$ στο στοιχείο ϕ_* . Προκύπτει επομένως ένας καλώς ορισμένος ομομορφισμός $\sigma : \text{Mod}^\pm(S_g) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(S_g, x_0))$. Θα δείξουμε ότι είναι ισομορφισμός.

Επιλέγουμε μία συλλογή απλών κλειστών καμπυλών $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2g}$ στην S_g που δε διαχωρίζουν την επιφάνεια τέτοιες ώστε:

(i) $\bigcap_{i=1}^{2g} \gamma_i = \{x_0\} = \gamma_j \cap \gamma_k$ για κάθε $j \neq k$ ζεύγος δεικτών.

(ii) Οι γ_i γεμίζουν την S_g .



Γνωρίζουμε ότι οι γ_i παράγουν την ομάδα $\pi(S_g)$ και παρατηρούμε επίσης ότι $\gamma_i \sim_{hom} \gamma'_i$ όπου $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{2g}$ είναι το σύστημα Alexander της Παρατήρησης 4.4.2.

Ισχυρισμός 5.3.2.

Ο σ είναι μονομορφισμός.

Πρώτη απόδειξη. Ο $\mathbb{H}^2$ είναι συσταλτός χώρος άρα η S_g είναι $K(1, \pi_1(S_g))$ -χώρος. Οι ελεύθερες κλάσεις ομοτοπίας συνεχών απεικονίσεων $\phi : S_g \rightarrow S_g$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τις κλάσεις συζυγίας ομομορφισμών $\pi_1(S_g) \rightarrow \pi_1(S_g)$ και περιορίζοντας την αντιστοιχία στους ομοιομορφισμούς προκύπτει η σ , επομένως η σ είναι 1-1.

Δεύτερη απόδειξη. Έστω $[\phi_*] \in \ker \sigma$. Τότε υπάρχει $\phi \in \text{Homeo}(S_g)$ τέτοιος ώστε $\phi_\alpha \in \text{Inn}(\pi_1(S_g, x_0))$ για κάποιο α μονοπάτι από το x_0 στο $\phi(x_0)$. Επομένως υπάρχει βρόγχος β που διέρχεται από το x_0 τέτοιος ώστε για κάθε $i = 1, 2, \dots, 2g$ ο βρόγχος $\phi(\gamma_i)$ να είναι ομοτοπικός με $\beta\gamma_i\beta^{-1}$. Επειδή ο ϕ είναι ομοιομορφισμός έχουμε ότι η $\phi(\gamma_i)$ είναι απλή κλειστή καμπύλη. Επομένως η $\phi(\gamma_i)$ είναι ομοτοπική με την γ_i . Θέλουμε λοιπόν να δείξουμε ότι η ϕ είναι ομοτοπική με την ταυτοτική.

Θα κατασκευάσουμε μία ομοτοπία από τον ϕ στην id_{S_g} . Ορίζουμε H στον $(S_g \times \{0, 1\}) \cup (\bigcup_{i=1}^{2g} \gamma_i \times [0, 1])$ με:

- (i) $H(x, 0) = \phi(x)$, για κάθε $x \in S_g$
- (ii) $H(x, 1) = x$, για κάθε $x \in S_g$
- (iii) $H(x_0, t) = \beta(t)$ για κάθε $t \in [0, 1]$
- (iv) $H|_{\gamma_i \times [0, 1]}$ να είναι ομοτοπία από το γ_i στο $\phi(\gamma_i)$, $i = 1, 2, \dots, 2g$.

Έχουμε ότι $\pi_2(S_g, x_0) = 0$ και $(S_g \times [0, 1]) \setminus (\bigcup_{i=1}^{2g} \gamma_i \times [0, 1])$ είναι 3-κελί με την H ορισμένη στο σύνορο του 3-κελίου, επομένως υπάρχει επέκταση της συνάρτησης σε ομοτοπία από την ϕ στην id_{S_g} . (Η ύπαρξη της επέκτασης εξασφαλίζεται από το Lemma 4.7 στο βιβλίο του Hatcher [2]).

Τρίτη απόδειξη. Όπως προηγουμένως έστω $[\phi_*] \in \ker \sigma$, τότε υπάρχει $\phi \in \text{Homeo}(S_g)$ με $\phi_* \in \text{Inn}(\pi_1(S_g, x_0))$ και $\phi(\gamma_i)$ ομοτοπική με γ_i . Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις της Μεθόδου του Alexander 4.4.4, άρα ο ϕ είναι ισοτοπικός με την ταυτοτική απεικόνιση, δηλαδή $[\phi_*] = [id_{S_g}]$. ■

Ισχυρισμός 5.3.3.

Ο σ είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μία απεικόνιση επικάλυψης. Έστω $[\Phi]_{\text{Out}} \in \text{Out}(\pi_1(S_g))$ και Φ ένας αντιπρόσωπος της κλάσης $[\Phi]_{\text{Out}}$, $\Phi \in \text{Aut}(\pi_1(S_g))$.

Έστω $(c_1, c_2, \dots, c_{2g})$ (g το γένος της επιφάνειας) μία αλυσίδα από τις κλάσεις ομοτοπίας των απλών κλειστών καμπυλών γ'_i στην S . Δηλαδή $i(c_i, c_{i+1}) = 1$ και $i(c_i, c_j) = 0$ όταν $|i - j| > 1$. Με τον προσανατολισμό που διαλέξαμε σε κάθε γ'_i έχουμε ότι ο αλγεβρικός αριθμός τομής είναι $\hat{i}(c_i, c_{i+1}) = 1$.

Έχουμε δείξει ότι οι κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας των προσανατολισμένων καμπυλών στην S αντιστοιχούν στις κλάσεις συζυγίας των στοιχείων της $\pi_1(S_g)$ (Πρόταση 3.1.2), άρα κάθε γ'_i ανήκει στην κλάση συζυγίας στοιχείου $[\gamma_i]$.

Αφού ο $[\Phi]_{\text{Out}}$ είναι εξωτερικός αυτομορφισμός της $\pi_1(S_g)$ και δρα στο σύνολο των κλάσεων συζυγίας της $\pi_1(S_g)$ όπως δείξαμε στην Παρατήρηση 1.2.6. Επομένως αν $Cl_{\pi_1(S_g)}([\gamma_i])$ η κλάση συζυγίας του στοιχείου $[\gamma_i]$, τότε ο εξωτερικός αυτομορφισμός $[\Phi]_{\text{Out}}$ δρα στις $Cl_{\pi_1(S_g)}([\gamma_i])$. Επομένως η $[\Phi]_{\text{Out}} Cl_{\pi_1(S_g)}([\gamma_i])$ είναι η κλάση συζυγίας $Cl_{\pi_1(S_g)}(\Phi([\gamma_i]))$ του στοιχείου $\Phi([\gamma_i])$. Επομένως αντιστοιχεί με τη σειρά της σε μία κλάση ελεύθερης ομοτοπίας προσανατολισμένων καμπυλών για την οποία επιλέγουμε έναν αντιπρόσωπο της β_i , δηλαδή $[\beta_i]_f = Cl_{\pi_1(S_g)}(\Phi([\gamma_i]))$.

Ισχυρισμός 5.3.4. Οι $\{[\beta_i]_f\}$ είναι αλυσίδα κλάσεων ελεύθερης ομοτοπίας απλών κλειστών καμπυλών, των οποίων ο αλγεβρικός αριθμός τομής είναι $\hat{i}([\beta_i]_f, [\beta_{i+1}]_f) = \varepsilon$ σταθερά, ανεξαρτήτως του i , όπου $\varepsilon \in \{-1, +1\}$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε τον ισχυρισμό σε τέσσερα στάδια.

- Οι β_i μπορούν να επιλεγθούν απλές κλειστές καμπύλες.

Έχουμε δείξει ότι μία κλάση συζυγίας ενός πρωταρχικού στοιχείου της $\pi_1(S_g)$ έχει αντιπρόσωπο μία απλή κλειστή καμπύλη αν και μόνο αν κάθε ζεύγος αντιπροσώπων της κλάσης δε συνδέεται στο άπειρο. (Λήμμα 3.1.16) Επομένως από το Λήμμα 5.2.3 ξέρουμε ότι η Φ διατηρεί και την ιδιότητα του να συνδέεται ή όχι ένα ζεύγος στο άπειρο. Επομένως διατηρεί και την ιδιότητα του να έχει μία κλάση συζυγίας έναν αντιπρόσωπο που είναι απλή κλειστή καμπύλη. Άρα οι β_i μπορούν να επιλεγθούν απλές κλειστές καμπύλες.

- $i([\beta_i]_f, [\beta_j]_f) = 0$ για $|i - j| > 1$.

Δύο κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας έχουν γεωμετρικό αριθμό τομής 0 αν και μόνο αν κάθε ζευγάρι αντιπροσώπων τους δε συνδέεται στο άπειρο. Η ιδιότητα αυτή όμως όπως πριν από το Λήμμα 5.2.3 διατηρείται από την Φ . Επομένως, αφού $i([\gamma_i]_f, [\gamma_j]_f) = 0$, για $|i - j| > 1$, έπεται ότι $i([\beta_i]_f, [\beta_j]_f) = 0$ για $|i - j| > 1$.

- $i(\beta_i, \beta_{i+1}) = 1$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, 2g - 1$.

Από το Πρόσμημα 5.2.8 και το Λήμμα 5.2.3 το να έχουν δύο κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας γεωμετρικό αριθμό τομής 1 είναι ιδιότητα που διατηρείται από την Φ .

- $\hat{i}(\beta_i, \beta_{i+1})$ δεν εξαρτάται από το i .

Αρκεί να δείξουμε ότι για τρεις δοθείσες κλάσεις ελεύθερης ομοτοπίας a, b, c με $i(a, b) = i(b, c) = 1$ και $i(a, c) = 0$ μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τη συμφωνία των προσήμων $\hat{i}(a, b)$ και $\hat{i}(b, c)$ χρησιμοποιώντας στοιχεία που ξέρουμε ότι διατηρούνται από την Φ . Έστω α, β, γ τρεις αντιπρόσωποι των a, b και c έτσι ώστε $Axis([\alpha]) \cap Axis([\beta]) = \emptyset$ και ο άξονας $Axis([\beta])$ να τέμνει τους άξονες $Axis([\alpha])$ και $Axis([\gamma])$ μία φορά. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\hat{i}(a, b)$ έχει το ίδιο πρόσημο με τον $\hat{i}(b, c)$ αν και μόνο αν οι άξονες των $[\alpha\beta\alpha^{-1}]$ και $[\gamma\beta\gamma^{-1}]$ βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές από τον $Axis([\beta])$. Η ιδιότητα αυτή από την Πρόταση 5.2.6 και το Λήμμα 5.2.3 διατηρείται από την Φ , επομένως αντικαθιστώντας τα a, b, c με $[\beta_i]_f, [\beta_{i+1}]_f$ και $[\beta_{i+2}]_f$ έχουμε το συμπέρασμα. ■

Έστω β_i (καταχρηστικά χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό) αντιπρόσωποι των $[\beta_i]_f$ οι οποίοι είναι απλές κλειστές καμπύλες που διέρχονται από το σημείο βάσης. Από το Θεώρημα 3.5.13 υπάρχει ένας ομοιομορφισμός ϕ ο οποίος σταθεροποιεί το σημείο βάσης της $\pi_1(S_g)$ και ικανοποιεί τη σχέση $\phi_*([\gamma_i]) = [\phi(\gamma_i)] = [\beta_i] \in Cl_{\pi_1(S_g)}(\Phi([\gamma_i]))$ για κάθε i (με προσανατολισμό). Έστω ϕ_* ο αντίστοιχος αυτομορφισμός της $\pi_1(S_g)$ που προκύπτει από την ϕ

και $[\phi_*]_{Out}$ το αντίστοιχο στοιχείο στην $Out(\pi_1(S_g))$.

Για να τελειώσει η απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι $[\phi_*]_{Out} = [\Phi]_{Out}$, καθώς $\sigma([\phi]_f) = [\phi_*]_{Out}$. Για κάθε $a \in \pi_1(S_g)$, θεωρούμε τον εσωτερικό αυτομορφισμό I_a της $\pi_1(S_g)$ με $I_a(b) = aba^{-1}$. Αφού οι αντιπροσώποι $[\gamma_i]$ παράγουν την $\pi_1(S_g)$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει εσωτερικός αυτομορφισμός I_a της $\pi_1(S_g)$ για τον οποίο ισχύει $I_a \circ \phi_*^{-1} \circ \Phi([\gamma_i]) = [\gamma_i]$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, 2g$, αφού τότε $\phi_*^{-1} \circ \Phi = I_{a^{-1}}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι συγκεκριμένες απλές κλειστές καμπύλες γ_i δημιουργούν μία ακολουθία με την ιδιότητα ότι οι ανυψώσεις των γ_i και γ_{i+1} στον $\mathbb{H}^2$ συνδέονται στο άπειρο για κάθε i . Αυτό έπεται από το γεγονός ότι τα γ_i και γ_{i+1} συνδέονται στην επιφάνεια, με την έννοια ότι άμα πάρουμε μία κλειστή περιοχή του σημείου βάσης της $\pi_1(S_g)$, τα γ_i και γ_{i+1} συνδέονται στο σύνορο αυτής της περιοχής.

Θέτουμε $\Psi := \phi_*^{-1} \circ \Phi$ ο οποίος είναι αυτομορφισμός της ομάδας $\pi_1(S_g)$. Επομένως από την Πρόταση 5.2.6 έχουμε ότι ο Ψ διατηρεί την ιδιότητα του να συνδέονται δύο στοιχεία στο άπειρο.

Από την επιλογή του ϕ , ο αυτομορφισμός Ψ διατηρεί κάθε μία από τις κλάσεις συζυγίας των στοιχείων $[\gamma_i]$. Επομένως, για κάθε $i = 1, 2, \dots, 2g$ υπάρχει στοιχείο $a_i \in \pi_1(S_g)$ τέτοιο ώστε $\Psi([\gamma_i]) = a_i^{-1}[\gamma_i]a_i$. Άρα $I_{a_1} \circ \Psi([\gamma_1]) = [\gamma_1]$. Γνωρίζουμε ότι ο Ψ διατηρεί την κλάση συζυγίας κάθε $[\gamma_i]$ και ότι η σύνθεση $I_{a_1} \circ \Psi$ (ως αυτομορφισμός) διατηρεί την ιδιότητα του να συνδέονται δύο στοιχεία στο άπειρο. Εφ' όσον τα $[\gamma_1]$ και $[\gamma_2]$ συνδέονται στο άπειρο, έπεται ότι και τα $I_{a_1} \circ \Psi([\gamma_1])$, $I_{a_1} \circ \Psi([\gamma_2])$ συνδέονται στο άπειρο, δηλαδή τα $[\gamma_1]$ και $I_{a_1} \circ \Psi([\gamma_2])$ συνδέονται στο άπειρο. Όμως $I_{a_1} \circ \Psi([\gamma_2]) = a_1^{-1}a_2^{-1}[\gamma_2]a_2a_1$. Συνεπώς από το Λήμμα 5.2.7, έπεται ότι $I_{a_1} \circ \Psi([\gamma_2]) = [\gamma_1]^{-k}[\gamma_2][\gamma_1]^k$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$. Επομένως

$$\begin{aligned} I_{[\gamma_1]^k a_1} \circ \Psi([\gamma_1]) &= I_{[\gamma_1]^k} \circ I_{a_1} \circ \Psi([\gamma_1]) = I_{[\gamma_1]^k}([\gamma_1]) = [\gamma_1] \text{ και} \\ I_{[\gamma_1]^k a_1} \circ \Psi([\gamma_2]) &= I_{[\gamma_1]^k} \circ I_{a_1} \circ \Psi([\gamma_2]) = I_{[\gamma_1]^k}([\gamma_1]^{-k}[\gamma_2][\gamma_1]^k) = [\gamma_2] \end{aligned}$$

Αυτό ήταν η βάση για μία επαγωγή που θα μας δώσει το αποτέλεσμα. Θα δείξουμε ότι $I_{[\gamma_1]^k a_1} \circ \Psi([\gamma_i]) = [\gamma_i]$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, 2g$. Επομένως το ζητούμενο a για το οποίο ισχύει $I_a \circ \Psi([\gamma_i]) = [\gamma_i]$, για κάθε i , θα είναι το $[\gamma_1]^k a_1$.

Έστω ότι $I_a \circ \Psi([\gamma_i]) = [\gamma_i]$ για κάθε $i < n$. Τότε τα $[\gamma_{n-1}]$, $[\gamma_{n-2}]$ και $\{[\gamma_{n-2}]^l [\gamma_{n-1}] [\gamma_{n-2}]^{-l} : l \in \mathbb{Z}\}$ σταθεροποιούνται από τον $I_a \circ \Psi$. Τα $[\gamma_{n-1}]$ και $[\gamma_n]$ συνδέονται στο άπειρο και ο άξονας του $[\gamma_n]$ στον $\mathbb{H}^2$ βρίσκεται μεταξύ των αξόνων του $[\gamma_{n-1}^l \gamma_{n-2} \gamma_{n-1}^l]$ και του $[\gamma_{n-1}^{l+1} \gamma_{n-2} \gamma_{n-1}^{l+1}]$ για κάποιο $l \in \mathbb{Z}$. Όμως τα στοιχεία αυτά στα-

θεροποιούνται από τον $I_a \circ \Psi$ άρα και το γ_n σταθεροποιείται από την $I_a \circ \Psi$. Επομένως $\Psi \in Inn(\pi_1(S_g))$ δηλαδή $[\phi_*]_{Out} = [\Phi]_{Out}$ και άρα η σ είναι επί. $\square$

Βιβλιογραφία

- [1] Albert Solomonovich Svarč, *A volume invariant of coverings*, 1955 (Doklady Akademii Nauk SSSR, volume 105, pp. 32-34).
- [2] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, 2001, (<https://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>).
- [3] Benson Farb and Dan Margalit, *A Primer on Mapping Class Groups*, 2012 (Princeton University Press).
- [4] David Bernard Alper Epstein, *Curves on 2-manifolds and isotopies*, 1966 (Acta Mathematica, volume 115, pp. 83-107).
- [5] Herbert Seifert, *Bemerkungen zur stetigen Abbildung von Flächen*, 1937 (Mathematisches Seminar der Universität Hamburg, volume 12)
- [6] Jakob Nielsen, *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen*, 1927 (Acta Mathematica, volume 50, pp. 189-358)
- [7] James Munkres, *Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms*, 1960 (Annals of Mathematics Second Series, volume 72, No. 3, pp. 521-554).
- [8] John M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, 2011 (volume 202 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlang).
- [9] John Willard Milnor, *A note on curvature and fundamental group*, 1968 (Journal of Differential Geometry, volume 2, pp. 1-7).
- [10] John Henry Constantine Whitehead, *Manifolds with transverse fields in euclidean space*, 1961 (Annals of Mathematics Second Series, volume 73, No. 1, pp. 154-212).
- [11] Martin R. Bridson and André Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, 1999 (volume 319 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlang).
- [12] Max Dehn, *Papers on group theory and topology*, 1987 (Springer-Verlang) Translated from the German and with introductions by John Stillwell
- [13] Morris W. Hirsch, *Differential topology*, 1994 (volume 33 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag) Corrected reprint of the 1976 original.
- [14] Reinhold Baer, *Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen*, 1927 (Journal für die reine und angewandte Mathematik, volume 156, pp. 231-246)

- [15] Reinhold Baer, *Kurventypen auf Flächen*, 1928 (Journal für die reine und angewandte Mathematik, volume 159, pp. 101-111)
- [16] Svetlana Katok, *Fuchsian Groups*, 1992 (Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press).
- [17] Thomas Kwok-Keung Au Feng Luo and Tian Yang, *Lectures on the Mapping Class Group of a Surface*, 2010, (<https://web.stanford.edu/~yangtian/lecture.pdf>)
- [18] Vadim Arsenyevich Efremovič, *On the proximity geometry of Riemannian manifolds*, 1953 (Uspekhi Matematicheskikh Nauk, volume 8, pp. 189).
- [19] William S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, 1977 (volume 56 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag).
- [20] William P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, 1997 (volume 35 of Princeton Mathematical Series, Princeton University Press) Edited by Silvio Levy.
- [21] Μιχαήλ Α. Συκιώτης, *Σημειώσεις Φοιτητών Αλγεβρικής Τοπολογίας*, 2014 (<https://eclass.uoa.gr>).
- [22] Μιχαήλ Α. Συκιώτης, *Σημειώσεις Φοιτητών Θεωρίας Ομάδων*, 2015 (<https://eclass.uoa.gr>).
- [23] Μιχαήλ Α. Συκιώτης, *Σημειώσεις Φοιτητών Θεωρίας Ομάδων II*, 2016 (<https://eclass.uoa.gr>).
- [24] Σοφοκλής Κ. Μερκουράκης και Τηλέμαχος Ε. Χατζηαφράτης, *Μια Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση*, 2005 (Εκδόσεις Συμμετρία).