

Ο Μετασχηματισμός Fourier στην ευθεία και τον κύκλο

Βασιλική Κούνη

28 Σεπτεμβρίου 2017

Περιεχόμενα

1	Σειρές Fourier στον $\mathbb{T}$	3
1.1	Συντελεστές Fourier	3
1.2	Ολοκληρωσιμότητα ως προς νόρμα και Ομογενείς χώροι Banach στον $\mathbb{T}$	9
1.3	Σημειακή σύγκλιση της $\sigma_n(f)$	17
1.4	Η τάξη μεγέθους των συντελεστών Fourier	22
1.5	Σειρές Fourier τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων	27
1.6	Απολύτως συγκλίνουσες σειρές Fourier	31
2	Η σύγκλιση σειρών Fourier	35
2.1	Σύγκλιση ως προς τη νόρμα	35
2.2	Σύγκλιση και απόκλιση σε ένα σημείο	39
3	Μετασχηματισμός Fourier στην πραγματική ευθεία	49
3.1	Μετασχηματισμοί Fourier στον $L^1(\mathbb{R})$	49
3.2	Μετασχηματισμοί Fourier – Stieltjes	58
3.3	Μετασχηματισμοί Fourier στον $L^p(\mathbb{R})$, για $1 < p \leq 2$	70

Πρόλογος

Στην παρούσα διπλωματική θα ασχοληθούμε με θέματα σειρών και μετασχηματισμών Fourier. Αρχικά, θα μιλήσουμε για βασικά αποτελέσματα, όπως ολοκληρωσιμότητα ως προς νόρμα και σειρές Fourier στον $L^2(\mathbb{T})$, αλλά και για λιγότερο κορεσμένα θέματα, όπως συνθήκες ομαλότητας που πρέπει να ικανοποιεί μια συνάρτηση, ώστε να βγάλουμε συμπεράσματα σχετικά με την τάξη μεγέθους των συντελεστών Fourier της. Ιδιαίτερα, θα δούμε κάποια θέματα της ανάλυσης Fourier από τη σκοπιά της συναρτησιακής ανάλυσης, π.χ. μέσω της ενασχόλησης με ομογενείς χώρους Banach, ή μέσω της «θεώρησης» της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων της σειράς Fourier μιας συνάρτησης f , ως μια ακολουθία τελεστών που δρουν πάνω στην f . Θα τελειώσουμε, παρουσιάζοντας σημαντικά αποτελέσματα για τους μετασχηματισμούς Fourier στον $L^p(\mathbb{R})$, για $1 \leq p \leq 2$, αλλά και για τους μετασχηματισμούς Fourier – Stieltjes, όπου θα δωθούν και κριτήρια για το πότε μια συνεχής συνάρτηση φ είναι ο μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes ενός πεπερασμένου Borel μέτρου μ στον $\mathbb{R}$.

Η παρούσα διπλωματική βασίστηκε σε μια επισκόπηση επιλεγμένων κεφαλαίων από το βιβλίο *An Introduction to Harmonic Analysis, Third Corrected Edition* του Yitzhak Katznelson.

Κεφάλαιο 1

Σειρές Fourier στον $\mathbb{T}$

1.1 Συντελεστές Fourier

Συμβολίζουμε με $L^1(\mathbb{T})$ τον χώρο όλων των (κλάσεων ισοδυναμίας¹ των) Lebesgue ολοκληρώσιμων μιγαδικών συναρτήσεων στο μοναδιαίο κύκλο $\mathbb{T}$. Για $f \in L^1(\mathbb{T})$, θέτουμε

$$\|f\|_{L^1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt = \frac{1}{2\pi} \int |f(t)| dt.$$

Από εδώ και στο εξής σε αυτό το κεφάλαιο, θα θεωρούμε ότι κάθε ολοκλήρωμα με μη καθορισμένα άκρα ολοκλήρωσης λαμβάνεται σε όλον τον $\mathbb{T}$ ή ισοδύναμα, σε όλο το διάστημα $[0, 2\pi)$ ή $[-\pi, \pi)$, λόγω της προφανούς ταύτισης των 2π – περιοδικών συναρτήσεων με συναρτήσεις στον $\mathbb{T}$.

Ως γνωστόν, ο $L^1(\mathbb{T})$ εφοδιασμένος με την προηγούμενη νόρμα, είναι χώρος Banach.

Ορισμός 1.1.1. Ένα τριγωνομετρικό πολύωνυμο στον $\mathbb{T}$ είναι μια έκφραση της μορφής:

$$(1.1) \quad P \sim \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}.$$

Οι αριθμοί n που εμφανίζονται στην (1.1) ονομάζονται *συχνότητες* του P . Ο μεγαλύτερος ακέραιος n τ.ώ. $|a_n| + |a_{-n}| \neq 0$, ονομάζεται *βαθμός* του P . Επίσης, αφού $n \in \mathbb{Z}$, κάθε ένας προσθεταίος στην (1.1) είναι μια συνάρτηση στον $\mathbb{T}$. Η (1.1), όντας πεπερασμένο άθροισμα,

¹ $f \sim g$ αν $f(t) = g(t)$ σ.π.

αναπαριστά μια συνάρτηση – που συμβολίζουμε ξανά με P – ορισμένη $\forall t \in \mathbb{T}$ ως:

$$(1.2) \quad P(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}.$$

Έστω ότι η P ορίζεται από την (1.2). Γνωρίζοντας την P μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές a_n από τον τύπο

$$(1.3) \quad a_n = \frac{1}{2\pi} \int P(t) e^{-int} dt$$

που προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι για $j \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ijt} dt = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση P ορίζει την έκφραση (1.1) και άρα θα θεωρούμε τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα και σαν φορμαλιστικές εκφράσεις και σαν συναρτήσεις.

Ορισμός 1.1.2. Μια τριγωνομετρική σειρά στον $\mathbb{T}$ είναι μια έκφραση της μορφής

$$(1.4) \quad S \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Στην (1.4), εν αντιθέσει με την (1.2), μπορεί να υπάρχουν άπειροι όροι, οπότε δεν κάνουμε κάποια υπόθεση σχετικά με το μέγεθος των συντελεστών ή τη σύγκλιση. Η συζυγής σειρά της (1.4) είναι, εξ' ορισμού, η σειρά:

$$\tilde{S} \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} -i \operatorname{sgn}(n) a_n e^{int}$$

όπου

$$\operatorname{sgn}(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ n/|n|, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Παρακινούμενοι από την (1.3), ορίζουμε τον n – οστό συντελεστή Fourier της f ως

$$(1.5) \quad \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-int} dt.$$

Ορισμός 1.1.3. Η σειρά Fourier $S(f)$ μιας συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι η τριγωνομετρική σειρά

$$(1.6) \quad S(f) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{int}.$$

Η συζυγής σειρά της $S(f)$ θα συμβολίζεται με $\tilde{S}(f)$ και θα λέμε ότι μια τριγωνομετρική σειρά είναι σειρά Fourier, αν είναι η σειρά Fourier κάποιας $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε με $S_n(f, t)$ το n – οστό μερικό άθροισμα της $S(f)$, δηλαδή

$$(1.7) \quad S_n(f, t) = \sum_{j=-n}^n \hat{f}(j) e^{ijt}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

όπου από εδώ και στο εξής θα θεωρούμε το σύνολο των φυσικών αριθμών να είναι το σύνολο $\mathbb{N} = \mathbb{N}_0$.

Ορισμός 1.1.4. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $j \geq 0$ ορίζουμε

$$(1.8) \quad a_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos jt \, dt$$

και για κάθε $j \geq 1$ ορίζουμε

$$(1.9) \quad b_j(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin jt \, dt.$$

Αν η f είναι άρτια μηδενίζονται όλα τα b_j , ενώ αν είναι περιττή μηδενίζονται όλα τα a_j . Παρατηρούμε επίσης ότι αν $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$(1.10) \quad \hat{f}(j) = \frac{a_j(f) - ib_j(f)}{2}$$

$$(1.11) \quad \hat{f}(-j) = \frac{a_j(f) + ib_j(f)}{2}.$$

Πρόταση 1.1.5. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Για κάθε $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύουν οι

$$(1.12) \quad a_j(f) = \hat{f}(j) + \hat{f}(-j)$$

$$(1.13) \quad b_j(f) = i(\hat{f}(j) - \hat{f}(-j))$$

$$(1.14) \quad a_0(f) = 2\hat{f}(0)$$

$$(1.15) \quad S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j(f) \cos jt + b_j(f) \sin jt).$$

Απόδειξη. Οι δύο πρώτοι τύποι προκύπτουν άμεσα από τις (1.10) και (1.11), ενώ ο τρίτος είναι προφανής. Για τον τελευταίο έχουμε:

$$\begin{aligned}
 S_n(f) &= \sum_{j=-n}^n \hat{f}(j) e^{ijt} = \\
 &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^n \hat{f}(j) e^{ijt} + \sum_{j=-n}^{-1} \hat{f}(j) e^{ijt} \\
 &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^n \hat{f}(j) e^{ijt} + \sum_{j=1}^n \hat{f}(-j) e^{-ijt} \\
 &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^n \hat{f}(j) (\cos jt + i \sin jt) + \sum_{j=1}^n \hat{f}(-j) (\cos jt - i \sin jt) \\
 &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^n (\hat{f}(j) + \hat{f}(-j)) \cos jt + \sum_{j=1}^n i(\hat{f}(j) - \hat{f}(-j)) \sin jt \\
 &= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j(f) \cos jt + b_j(f) \sin jt). \quad \square
 \end{aligned}$$

Θα δώσουμε τώρα κάποιες στοιχειώδεις ιδιότητες των συντελεστών Fourier.

Θεώρημα 1.1.6. Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε:

1. $\widehat{(f+g)}(n) = \hat{f}(n) + \hat{g}(n)$.
2. $\widehat{(af)}(n) = a\hat{f}(n)$, $\forall a \in \mathbb{C}$.
3. Αν $\bar{f}$ η συζυγής² συνάρτηση της f , τότε $\hat{\bar{f}}(n) = \overline{\hat{f}(-n)}$.
4. Συμβολίζουμε $f_\tau(t) = f(t - \tau)$, $t, \tau \in \mathbb{T}$. Τότε $\hat{f}_\tau(n) = \hat{f}(n) e^{-in\tau}$.
5. $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi} \int |f(t)| dt = \|f\|_{L^1}$.

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από την (1.5). □

Πόρισμα 1.1.7. Έστω ότι $f_j \in L^1(\mathbb{T})$, $j = 0, 1, \dots$, και $\|f_j - f_0\|_{L^1} \rightarrow 0$. Τότε $\hat{f}_j(n) \rightarrow \hat{f}_0(n)$ ομοιόμορφα.

²Που ορίζεται ως $\bar{f}(t) = \overline{f(t)}$ $\forall t \in \mathbb{T}$

Θεώρημα 1.1.8. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$, $\hat{f}(0) = 0$ και ορίζουμε $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Τότε η F είναι συνεχής, 2π – περιοδική και

$$(1.16) \quad \hat{F}(n) = \frac{1}{in} \hat{f}(n), \quad n \neq 0.$$

Απόδειξη. Η απόλυτη συνέχεια³ της F είναι προφανής. Η περιοδικότητα απορρέει από το ότι:

$$F(t + 2\pi) - F(t) = \int_t^{t+2\pi} f(\tau) d\tau = 2\pi \hat{f}(0) = 0,$$

και, ολοκληρώνοντας κατά μέρη παίρνουμε την (1.16):

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) e^{-int} dt = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F'(t) \frac{1}{-in} e^{-int} dt = \frac{\hat{f}(n)}{in}. \quad \square$$

Θα ορίσουμε τώρα την πράξη της συνέλιξης στον $L^1(\mathbb{T})$.

Ορισμός 1.1.9. Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε, η συνάρτηση $h = f * g$ που ορίζεται σχεδόν παντού από τη σχέση

$$(1.17) \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

λέγεται συνέλιξη των f, g .

Η ύπαρξη της συνάρτησης $h(t)$ εξασφαλίζεται από το Θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 1.1.10. Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$. Για σχεδόν όλα τα $t \in \mathbb{T}$, η συνάρτηση $f(t - \tau)g(\tau)$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του $\tau \in \mathbb{T}$) και, αν γράψουμε

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int f(t - \tau) g(\tau) d\tau,$$

τότε $h \in L^1(\mathbb{T})$ και

$$(1.18) \quad \|h\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Επιπλέον,

$$(1.19) \quad \hat{h}(n) = \widehat{(f * g)}(n) = \hat{f}(n) \hat{g}(n), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

³Ως γνωστόν [3], για $f \in L^1(\mathbb{T})$, το $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ είναι απολύτως συνεχής συνάρτηση. Μάλιστα ισχύει ότι $F'(t) = f(t)$ σ.π., η $F'(t)$ ορίζεται σ.π. και είναι ολοκληρώσιμη

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις $f(t - \tau)$ και $g(\tau)$, ειδομένες σαν συναρτήσεις δύο μεταβλητών (t, x) , είναι προφανώς μετρήσιμες, άρα μετρήσιμο είναι και το γινόμενο τους $F(t, \tau) = f(t - \tau)g(\tau)$. Για κάθε τ , η $F(t, \tau)$ είναι σταθερό πολλαπλάσιο της f_τ , άρα dt ολοκληρώσιμη, και

$$\frac{1}{2\pi} \int \left(\frac{1}{2\pi} \int |F(t, \tau)| dt \right) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int |g(\tau)| \|f\|_{L^1} d\tau = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα του Fubini, η $f(t - \tau)g(\tau)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, 2\pi)$ ως συνάρτηση του τ για σχεδόν όλα τα t , άρα η $h(t)$ είναι καλά ορισμένη από την (1.17) για σχεδόν κάθε t και

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int |h(t)| dt &= \frac{1}{2\pi} \int \left| \frac{1}{2\pi} \int F(t, \tau) d\tau \right| dt \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \int \int |F(t, \tau)| dt d\tau = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}, \end{aligned}$$

δηλ. αποδείξαμε την (1.18). Τώρα, για να αποδείξουμε την (1.19), γράφουμε

$$\begin{aligned} \hat{h}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int h(t) e^{-int} dt = \frac{1}{4\pi^2} \int \int f(t - \tau) e^{-in(t-\tau)} g(\tau) e^{-in\tau} dt d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-int} dt \cdot \frac{1}{2\pi} \int g(\tau) e^{-in\tau} d\tau = \hat{f}(n) \hat{g}(n), \end{aligned}$$

όπου στην παραπάνω αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα Fubini. $\square$

Θεώρημα 1.1.11. Η πράξη της συνέλιξης είναι αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική (ως προς την πρόσθεση).

Απόδειξη. Θέτοντας $\theta = t - \tau$ έχουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int g(t - \theta) f(\theta) d\theta \Rightarrow f * g = g * f.$$

Αν $f_1, f_2, f_3 \in L^1(\mathbb{T})$, τότε

$$\begin{aligned} [(f_1 * f_2) * f_3](t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int f_1(t - u - \tau) f_2(u) f_3(\tau) du d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int \int f_1(t - \omega) f_2(\omega - \tau) f_3(\tau) d\omega d\tau = [f_1 * (f_2 * f_3)](t). \end{aligned}$$

Τέλος, η επιμεριστική ιδιότητα

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$$

έπεται άμεσα από την (1.17). $\square$

Λήμμα 1.1.12. Έστω ότι $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\varphi(t) = e^{int}$ για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$. Τότε $(\varphi * f)(t) = \hat{f}(n)e^{int}$.

Απόδειξη.

$$(\varphi * f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{in(t-\tau)} f(\tau) d\tau = e^{int} \frac{1}{2\pi} \int f(\tau) e^{-in\tau} d\tau. \quad \square$$

Πόρισμα 1.1.13. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $k(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}$, τότε

$$(1.20) \quad (k * f)(t) = \sum_{n=-N}^N a_n \hat{f}(n) e^{int}.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} (k * f)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int k(t - \tau) f(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int f(\tau) \sum_{n=-N}^N a_n e^{int} e^{-in\tau} d\tau \\ &= \sum_{n=-N}^N a_n e^{int} \frac{1}{2\pi} \int f(\tau) e^{-in\tau} d\tau = \sum_{n=-N}^N a_n \hat{f}(n) e^{int}. \quad \square \end{aligned}$$

1.2 Ολοκληρωσιμότητα ως προς νόρμα και Ομογενείς χώροι Banach στον $\mathbb{T}$

Σε αυτήν την ενότητα, θα δούμε ότι τα $\hat{f}(n)$ προσδιορίζουν την f μονοσήμαντα και θα δείξουμε ότι, γνωρίζοντας τα $\hat{f}(n)$, μπορούμε να βρούμε την f .

Δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες του χώρου Banach $L^1(\mathbb{T})$ είναι οι κάτωθι:

1. (Αναλλοίωτο ως προς μεταφορές στον $L^1(\mathbb{T})$) Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\tau \in \mathbb{T}$, τότε $f_\tau(t) = f(t - \tau) \in L^1(\mathbb{T})$ και $\|f_\tau\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$ (είναι άμεση συνέπεια του αναλλοίωτου ως προς μεταφορές του μέτρου dt).
2. (Συνέχεια ως προς μεταφορές στον $L^1(\mathbb{T})$) Η απεικόνιση $f : \tau \mapsto f_\tau$ με τιμές στον $L^1(\mathbb{T})$ είναι συνεχής στον $\mathbb{T}$, δηλ. για $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\tau_0 \in \mathbb{T}$:

$$(1.21) \quad \lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_{L^1} = 0.$$

Απόδειξη. Το παραπάνω προφανώς ισχύει αν η f είναι συνεχής. Δεδομένου ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^1(\mathbb{T})$, θεωρούμε μια τυχαία $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$. Έστω $g \in C(\mathbb{T})$ τ.ώ. $\|g - f\|_1 < \varepsilon/2$. Τότε:

$$\begin{aligned} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 &\leq \|f_\tau - g_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|g_{\tau_0} - f_{\tau_0}\|_1 \\ &= \|(f - g)_\tau\|_1 + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1 + \|(g - f)_{\tau_0}\|_1 \\ &\leq \varepsilon + \|g_\tau - g_{\tau_0}\|_1. \end{aligned}$$

Άρα $\limsup \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_1 < \varepsilon$ και αφού ε τυχαίο, το ζητούμενο έπεται. $\square$

Ορισμός 1.2.1 (Καλοί Πυρήνες). Ένας πυρήνας ολοκληρωσιμότητας (ή πιο απλά (καλός) πυρήνας) είναι μια ακολουθία 2π - περιοδικών συνεχών συναρτήσεων που ικανοποιούν τις ιδιότητες:

$$(1.22) \quad \frac{1}{2\pi} \int k_n(t) dt = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(1.23) \quad \exists c > 0 \text{ σταθερά τ.ώ. } \frac{1}{2\pi} \int |k_n(t)| dt \leq c, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(1.24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta < |t| < \pi} |k_n(t)| dt = 0, \quad \forall \delta \in (0, \pi)$$

Ένας θετικός πυρήνας ολοκληρωσιμότητας $k_n(t)$ είναι τέτοιος ώστε $k_n(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{T}, \forall n \in \mathbb{N}$. Για θετικούς πυρήνες, η (1.23) είναι προφανώς περιττή.

Μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε οικογένειες k_r που εξαρτώνται από μια συνεχή παράμετρο r αντί για τη διακριτή n . Έτσι, ο πυρήνας του Poisson $P(r, t)$ (που θα ορίσουμε στο τέλος της παραγράφου), ορίζεται για $0 \leq r < 1$, οπότε η (1.24) γράφεται στην ανάλογη μορφή

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{\delta < |t| < \pi} |k_r(t)| dt = 0.$$

Λήμμα 1.2.2. Έστω B χώρος Banach, $\varphi \in C(\mathbb{T}, B)$, $\{k_n\}$ πυρήνας. Τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) \varphi(\tau) d\tau = \varphi(0)$$

ως προς τη νόρμα του B .

Απόδειξη. Από την (1.22), για $\delta \in (0, \pi)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
 (1.25) \quad & \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) \varphi(\tau) d\tau - \varphi(0) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0)) d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta < |\tau| < \pi} \right) k_n(\tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0)) d\tau.
 \end{aligned}$$

Τώρα, από τη συνέχεια της $\varphi(\tau)$ στο $\tau = 0$, έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ τ.ώ. αν $\tau \in \mathbb{T}$ και $|\tau| < \delta$, τότε $\|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B < \varepsilon$. Συνεπώς, από τα παραπάνω και την (1.23) παίρνουμε

$$(1.26) \quad \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} k_n(\tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0)) d\tau \right\|_B \leq \varepsilon \|k_n\|_{L^1}.$$

Επιπλέον, από την (1.24), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 (1.27) \quad & \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau| > \delta} k_n(\tau) (\varphi(\tau) - \varphi(0)) d\tau \right\|_B \\
 & \leq \max \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|_B \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau| > \delta} |k_n(\tau)| d\tau \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

καθώς $n \rightarrow \infty$. Το συμπέρασμα έπεται. $\square$

Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ θέτουμε $\varphi(\tau) = f_\tau(t) = f(t - \tau)$. Από τις ιδιότητες 1. και 2. της σελ. 9, η $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow L^1(\mathbb{T})$ είναι μια συνεχής συνάρτηση και $\varphi(0) = f$. Εφαρμόζοντας το τελευταίο Λήμμα, παίρνουμε το

Θεώρημα 1.2.3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και $\{k_n\}$ πυρήνας. Τότε

$$(1.28) \quad f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) f_\tau d\tau$$

ως προς την $L^1(\mathbb{T})$ νόρμα.

Παρατήρηση 1.2.4. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ταυτίζουμε το ολοκλήρωμα στην (1.28) με την πράξη της συνέλιξης (αν και εμφανίζεται διαφορετικά από τον τυπικό ορισμό της συνέλιξης που δώσαμε στην ενότητα 1).

Λήμμα 1.2.5. Έστω $k \in C(\mathbb{T})$, $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε

$$(1.29) \quad \frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau d\tau = k * f.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \in C(\mathbb{T})$. Εξ' ορισμού του (Riemann) ολοκληρώματος έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau d\tau = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f_{\tau_j},$$

με το όριο να λαμβάνεται ως προς την $L^1(\mathbb{T})$ νόρμα καθώς η διαμέριση $\{\tau_j\}$ του $[0, 2\pi)$ γίνεται όλο και λεπτότερη. Από την άλλη,

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n (\tau_{j+1} - \tau_j) k(\tau_j) f_{\tau_j} = k * f$$

και το Λήμμα έπεται για συνεχή συνάρτηση f . Για τυχαία $f \in L^1(\mathbb{T})$, έστω $\varepsilon > 0$ και $g \in C(\mathbb{T})$ τ.ώ. $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$. Τότε, αφού η (1.29) ισχύει για την g ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau d\tau - k * f &= \frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau d\tau - k * g + k * g - k * f = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int k(\tau) (f - g)_\tau d\tau + k * (g - f) \Rightarrow \\ \left\| \frac{1}{2\pi} \int k(\tau) f_\tau d\tau - k * f \right\|_{L^1} &\leq 2\|k\|_{L^1} \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Με χρήση του Λήμματος 1.2.5, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (1.28) ως

$$(1.30) \quad f = \lim_{n \rightarrow \infty} k_n * f \quad \text{ως προς την } L^1(\mathbb{T}) \text{ νόρμα.}$$

Συνεχίζουμε παρουσιάζοντας κάποιους γνωστούς πυρήνες. Ορίζουμε τον πυρήνα του *Dirichlet* ως:

$$(1.31) \quad D_n(t) = \sum_{j=-n}^n e^{ijt} = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin \frac{1}{2}t}, \quad n \geq 0.$$

Μάλιστα ισχύει ότι

$$(1.32) \quad |D_n(t)| \leq \sum_{j=-n}^n |e^{ijt}| = 2n + 1.$$

Παρατήρηση 1.2.6. Από το Πόρισμα (1.1.13) (για $a_n = 1$), έπεται ότι $S_n(f) = D_n * f$. Είναι σημαντικό να επισημάνουμε ότι ο D_n δεν είναι πυρήνας με την έννοια που ορίστηκε. Ικανοποιεί την ιδιότητα (1.22), εντούτοις δεν ικανοποιεί τις (1.23) και (1.24).

Ορίζουμε έναν από τους πιο χρήσιμους πυρήνες, και πιθανότατα το γνωστότερο, τον πυρήνα του Fejer (θα τον συμβολίζουμε με $\mathbf{K}_n$), ως εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n D_m(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n \sum_{j=-m}^m e^{ijt} \\ (1.33) \quad &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=-n}^n \sum_{m=|j|}^n e^{ijt} = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) e^{ijt}. \end{aligned}$$

Μάλιστα, μπορούμε να γράψουμε τον $\mathbf{K}_n$ σε κλειστή μορφή, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική μορφή του D_n :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n(t) &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \frac{\sin[(j + \frac{1}{2})t]}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2(n+1) \sin^2(t/2)} \sum_{j=0}^n 2 \sin \frac{t}{2} \sin \left(\left(j + \frac{1}{2}\right) t \right) \\ &= \frac{1}{2(n+1) \sin^2(t/2)} \sum_{j=0}^n [\cos(jt) - \cos((j+1)t)] = \frac{1 - \cos[(n+1)t]}{2(n+1) \sin^2(t/2)} \\ &= \frac{2 \sin^2((n+1)t/2)}{2(n+1) \sin^2(t/2)} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2. \end{aligned}$$

Λήμμα 1.2.7.

$$(1.34) \quad \mathbf{K}_n(t) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right)^2, \quad n \geq 0.$$

Από το προηγούμενο Λήμμα, συμπεραίνουμε ότι ο $\mathbf{K}_n$ είναι μη αρνητική άρτια συνάρτηση και ικανοποιεί την (1.22). Επιπλέον, $\forall 0 < |t| < \pi$ έχουμε:

$$0 \leq \mathbf{K}_n(t) \leq \frac{1}{(n+1)(t/\pi)^2} = \frac{\pi^2}{(n+1)t^2}$$

(όπου χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι $\sin \frac{t}{2} > \frac{t}{\pi}$) και άρα ικανοποιείται και η (1.24). Τέλος,

$$\begin{aligned} (1.35) \quad 0 \leq \mathbf{K}_n(t) &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n |D_m(t)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n 2m+1 \\ &= \frac{n^2 + n + 1}{n+1} \leq \frac{(n+1)^2}{n+1} = n+1. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.2.8. Από τα παραπάνω, προκύπτει η

$$(1.36) \quad \mathbf{K}_n(t) \leq \min \left(n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)t^2} \right).$$

Ορισμός 1.2.9. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Η ακολουθία των Cesaro μέσων της σειράς Fourier της f είναι η

$$(1.37) \quad \sigma_n(f) = \frac{S_0(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Από την παρατήρηση 1.2.6 και το Πρόρισμα 1.1.13, έχουμε ότι

$$(1.38) \quad \begin{aligned} \sigma_n(f) &= \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n (f * D_m) \\ &= f * \left(\frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n D_m \right) \\ &= f * \mathbf{K}_n = \sum_{j=-n}^n \left(1 - \frac{|j|}{n+1} \right) \hat{f}(j) e^{ijt}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.2.10. Το γεγονός ότι $\sigma_n(f) \rightarrow f$ ως προς την $L^1(\mathbb{T})$ νόρμα (Θεώρημα 1.2.3 και Λήμμα 1.2.5) $\forall f \in L^1(\mathbb{T})$ (που είναι ειδική περίπτωση της (1.30)) και το γεγονός ότι το $\sigma_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο, συνεπάγονται ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $L^1(\mathbb{T})$. Επιπλέον, από την (1.37), έπεται ότι αν η $S_n(f)$ συγκλίνει στον $L^1(\mathbb{T})$ καθώς $n \rightarrow \infty$, τότε το όριο είναι αναγκαστικά η f . Άλλες άμεσες συνέπειες είναι τα 2 παρακάτω σημαντικά θεωρήματα.

Θεώρημα 1.2.11 (Θεώρημα Μοναδικότητας). Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και υποθέτουμε ότι $\hat{f}(j) = 0, \forall j \in \mathbb{Z}$. Τότε $f = 0$ σ.π..

Απόδειξη. Από την (1.38), $\sigma_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Αφού $\sigma_n(f) \rightarrow f \Rightarrow f = 0$ σ.π.. $\square$

Πρόρισμα 1.2.12. Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ και υποθέτουμε ότι $\hat{f}(j) = \hat{g}(j), \forall j \in \mathbb{Z}$. Τότε $f = g$ σ.π..

Θεώρημα 1.2.13 (Λήμμα Riemann – Lebesgue). Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Τότε

$$(1.39) \quad \lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ και P ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο στον $\mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $\|f - P\|_{L^1} < \varepsilon$. Αν $|n| > \deg(P)$, τότε $P(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{T}$, συνεπώς $\hat{P}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ και άρα

$$|\hat{f}(n)| = |\widehat{f - P}(n)| \leq \|f - P\|_{L^1} < \varepsilon. \quad \square$$

Παρατήρηση 1.2.14. Αν K είναι ένα συμπαγές σύνολο στον $L^1(\mathbb{T})$ και $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος από τριγωνομετρικά πολυώνυμα $P_1, \dots, P_n$ τέτοια ώστε $\forall f \in K \exists j \in \{1, \dots, n\}$, τέτοιο ώστε $\|f - P_j\|_{L^1} < \varepsilon$. Αν $|n| > \max_{1 \leq j \leq N} \deg(P_j)$, τότε $|\hat{f}(n)| < \varepsilon \forall f \in K$. Συνεπώς, το Λήμμα Riemann – Lebesgue ισχύει ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $L^1(\mathbb{T})$.

Ορισμός 1.2.15. Ένας ομογενής χώρος Banach στον $\mathbb{T}$ είναι ένας γραμμικός υπόχωρος B του $L^1(\mathbb{T})$ με νόρμα $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$ υπό την οποία είναι ένας χώρος Banach με τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. (Αναλλοίωτο ως προς μεταφορές) Αν $f \in B$ και $\tau \in \mathbb{T}$, τότε $f_\tau \in B$ και $\|f_\tau\|_B = \|f\|_B$
2. (Συνέχεια ως προς μεταφορές) $\forall f \in B, \tau_0 \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_0} \|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = 0.$$

Παρατήρηση 1.2.16. Θα μπορούσαμε, για απολούστευση, να ζητήσουμε συνέχεια σε ένα συγκεκριμένο $\tau_0 \in \mathbb{T}$, π.χ. στο $\tau_0 = 0$, αντί για κάθε $\tau \in \mathbb{T}$, αφού από την 1 του Ορισμού 1.2.15

$$\|f_\tau - f_{\tau_0}\|_B = \|f_{\tau-\tau_0} - f\|_B$$

Επίσης, η μέθοδος της απόδειξης της (4.21), δείχνει ότι εάν έχουμε έναν χώρο B που ικανοποιεί την 1 του Ορισμού 1.2.15 και θέλουμε να δείξουμε ότι ικανοποιεί εξίσου την 2 του Ορισμού 1.2.15, αρκεί να ελέγξουμε την συνέχεια της μεταφοράς σε έναν πυκνό υποσύνολο του B . Ένα σχεδόν ισοδύναμο αποτέλεσμα είναι το

Λήμμα 1.2.17. Έστω $B \subset L^1(\mathbb{T})$ ένας χώρος Banach που ικανοποιεί την 1 του Ορισμού 1.2.15. Συμβολίζουμε με B_c το σύνολο όλων των $f \in B$: η απεικόνιση $\tau \mapsto f_\tau$ είναι μια συνεχής συνάρτηση με τιμές στον B . Τότε το B_c είναι ένας κλειστός υπόχωρος του B .

Παραδείγματα ομογενών χώρων Banach στον $\mathbb{T}$:

1. $C(\mathbb{T})$ – ο χώρος όλων των συνεχών 2π – περιοδικών συναρτήσεων με νόρμα

$$(1.40) \quad \|f\|_\infty = \max_t |f(t)|$$

2. $C^n(\mathbb{T})$ – ο υπόχωρος του $C(\mathbb{T})$ όλων των n φορών συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων με νόρμα

$$(1.41) \quad \|f\|_{C^n} = \sum_{j=0}^n \frac{\max_t |f^{(j)}(t)|}{j!}$$

3. $L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$ – ο υπόχωρος του $L^1(\mathbb{T})$ που περιέχει όλες τις συναρτήσεις που είναι p ολοκληρώσιμες με νόρμα

$$(1.42) \quad \|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

Η ισχύς της 1 του Ορισμού 1.2.15 είναι προφανής και για τα τρία παραδείγματα. Η ισχύς της 2 για τα (1) – (2) είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι συνεχείς συναρτήσεις στον $\mathbb{T}$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Η απόδειξη της 2 του Ορισμού 1.2.15 για το (3) είναι ίδια με αυτήν της (1.21).

Τώρα, επεκτείνουμε το Θεώρημα 1.2.3 σε ομογενείς χώρους Banach στον $\mathbb{T}$.

Θεώρημα 1.2.18. Έστω B ένας ομογενής χώρος Banach στον $\mathbb{T}$, $f \in B$ και $\{k_n\}$ ένας πυρήνας. Τότε

$$(1.43) \quad \|k_n * f - f\|_B \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad n \rightarrow \infty.$$

Απόδειξη. Αφού $\|\cdot\|_B \geq \|\cdot\|_{L^1}$, το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi} \int k_n(\tau) f_\tau d\tau$ με τιμές στον B είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα με τιμές στον $L^1(\mathbb{T})$ το οποίο, από το Λήμμα 1.2.5, είναι ίσο με $k_n * f$. Το Θεώρημα τώρα έπεται από το Λήμμα 1.2.2. $\square$

Θεώρημα 1.2.19. Έστω B ένας ομογενής χώρος Banach στον $\mathbb{T}$. Τότε τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα στον B είναι παντού πυκνά.

Απόδειξη. $\forall f \in B, \|\sigma_n(f) - f\|_B \rightarrow 0.$ $\square$

Πόρισμα 1.2.20 (Το προσεγγιστικό Θεώρημα του Weierstrass). Κάθε συνεχής 2π – περιοδική συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Τελειώνουμε αυτήν την ενότητα αναφέροντας δύο σημαντικούς πυρήνες:

1. Ο πυρήνας de la Vallee Poussin:

$$(1.44) \quad V_n(t) = 2K_{2n+1}(t) - K_n(t)$$

Οι (1.22), (1.23) και (1.24) είναι προφανείς απο την (1.44). Ο V_n είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2n+1$ με την ιδιότητα $\hat{V}(j) = 1$ αν $|j| \leq n+1$. Είναι συνεπώς πολύ χρήσιμος όταν θέλουμε να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση f με πολυώνυμα που έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier με την f πάνω σε προκαθορισμένα διαστήματα (θεωρώντας τη $V_n * f$).

2. Ο πυρήνας του Poisson: για $0 < r < 1$ θέτουμε

$$(1.45) \quad P_r(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} r^{|j|} e^{ijt} = 1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} r^j \cos jt = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2}$$

Έπεται, από το Πρόρισμα 1.1.13 και το γεγονός ότι η σειρά στην (1.45) συγκλίνει ομοιόμορφα, ότι

$$(1.46) \quad (P_r * f)(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j) r^{|j|} e^{ijt}.$$

Συνεπώς τα $P * f$ είναι οι μέσοι Abel της $S(f)$ και το Θεώρημα 1.2.18 (με τον πυρήνα του Poisson) αναφέρει ότι για $f \in B$, η $S(f)$ είναι Abel αθροίσιμη με Abel άθροισμα την f , ως προς την νόρμα του B . Συγκρινόμενος με τον πυρήνα του Fejer, ο πυρήνας του Poisson έχει το μειονέκτημα ότι δεν είναι πολυώνυμο. Ωστόσο, όντας ουσιαστικά το πραγματικό μέρος του πυρήνα Cauchy – για την ακρίβεια: $P(r, t) = \Re \left(\frac{1+re^{it}}{1-re^{it}} \right)$ – ο πυρήνας του Poisson συνδέει την θεωρία των τριγωνομετρικών σειρών με την θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων. Μια επίσης σημαντική ιδιότητα του $P(r, t)$ είναι ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση του t για $0 < t < \pi$.

1.3 Σημειακή σύγκλιση της $\sigma_n(f)$

Είδαμε στην ενότητα 2 ότι αν $f \in L^1(\mathbb{T})$, τότε η $\sigma_n(f)$ συγκλίνει στην f ως προς την τοπολογία του ομογενούς χώρου Banach B στον οποίον ανήκει η f . Συγκεκριμένα, αν $f \in C(\mathbb{T})$, τότε $\sigma_n(f) \rightarrow f$ ομοιόμορφα. Ωστόσο, αν η f είναι ασυνεχής, δεν μπορούμε συνήθως να συνάγουμε σημειακή σύγκλιση της $\sigma_n(f)$ από τη σύγκλιση της ως προς τη νόρμα, ούτε μπορούμε να συσχετίσουμε το όριο της $\sigma_n(f, t_0)$, αν υπάρχει, με το

$f(t_0)$. Συνεπώς, για σημειακή σύγκλιση, πρέπει να επανεξετάσουμε τα ολοκληρώματα που ορίζουν την $\sigma_n(f)$.

Θεώρημα 1.3.1 (Fejer). Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$.

1. Υποθέτουμε ότι $\exists \lim_{h \rightarrow 0} (f(t_0 + h) + f(t_0 - h))$ (επιτρέπουμε τις τιμές $\pm\infty$). Τότε

$$(1.47) \quad \sigma_n(f, t_0) \rightarrow \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} (f(t_0 + h) + f(t_0 - h))$$

Συγκεκριμένα, αν το t_0 είναι ένα σημείο συνέχειας της f , τότε $\sigma_n(f, t_0) \rightarrow f(t_0)$.

2. Αν κάθε σημείο ενός κλειστού διαστήματος I είναι σημείο συνέχειας της f , τότε $\sigma_n(f, t) \rightarrow f(t)$ ομοιόμορφα στο I .
3. Αν για σχεδόν κάθε t , $m \leq f(t)$, τότε $m \leq \sigma_n(f, t)$. Αν για σχεδόν κάθε t , $f(t) \leq M$, τότε $\sigma_n(f, t) \leq M$.

Παρατήρηση 1.3.2. Το Θεώρημα συνεχίζει να ισχύει αν αντικαταστήσουμε την $\sigma_n(f)$ με την $k_n * f$, όπου $\{k_n\}$ είναι ένας θετικός πυρήνας που ικανοποιεί την (1.24) και είναι άρτια συνάρτηση. Για παράδειγμα, ο πυρήνας του Poisson ικανοποιεί όλες τις παραπάνω απαιτήσεις και το Θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε την $\sigma_n(f)$ με τους μέσους Abel της σειράς Fourier της f .

Απόδειξη. Υποθέτουμε χάριν ευκολίας, ότι το $\tilde{f}(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(t_0 + h) + f(t_0 - h))$ είναι πεπερασμένο. Οι τροποποιήσεις που χρειάζονται αν $\tilde{f}(t_0) = \pm\infty$ είναι προφανείς. Τώρα,

$$\begin{aligned} \sigma_n(f, t_0) - \tilde{f}(t_0) &= \\ &\stackrel{1.22}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \mathbf{K}_n(\tau) (f(t_0 - \tau) - \tilde{f}(t_0)) d\tau \\ (1.48) \quad &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\theta}^{\theta} + \int_{\theta < |\tau| < \pi} \right) \mathbf{K}_n(\tau) (f(t_0 - \tau) - \tilde{f}(t_0)) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\theta} + \int_{\theta}^{\pi} \right) \mathbf{K}_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right) d\tau, \end{aligned}$$

με την τελευταία ισότητα να προκύπτει από το γεγονός ότι ο $\mathbf{K}_n$ είναι άρτια συνάρτηση (με απλές αλλαγές μεταβλητής). Εξ' ορισμού του $\tilde{f}(t_0)$, $\forall \varepsilon > 0 \exists \theta > 0$ τ.ώ.

$$(1.49) \quad |\tau| < \theta \Rightarrow \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right| < \varepsilon.$$

και άρα

$$(1.50) \quad \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\theta \mathbf{K}_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right) d\tau \right| \\ \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\theta \mathbf{K}_n(\tau) \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right| d\tau \stackrel{1.22}{\leq} \varepsilon.$$

Επιπλέον, $\forall \theta < \tau < \pi$, ισχύει για τον $\mathbf{K}_n(\tau)$ ότι

$$\mathbf{K}_n(\tau) \leq \frac{\pi^2}{(n+1)\theta^2}$$

(λόγω της (1.36)). Συνεπώς, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon)$ τ.ώ. $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$

$$(1.51) \quad \sup_{\theta < |\tau| < \pi} \mathbf{K}_n(\tau) < \varepsilon.$$

Απο τις (1.48), (1.50) και (1.51) έχουμε ότι

$$(1.52) \quad |\sigma_n(f, t_0) - \tilde{f}(t_0)| < \varepsilon + \varepsilon \|f - \tilde{f}\|_{L^1},$$

το οποίο αποδεικνύει το 1.

Το 2. έπεται από την ομοιόμορφη συνέχεια της f στο I : μπορούμε να επιλέξουμε θ τέτοιο ώστε η (1.49) να ισχύει $\forall t_0 \in I$ και $n_0 = n_0(\theta, \varepsilon)$.

Για το 3. χρησιμοποιούμε την (1.22) και το γεγονός ότι $\mathbf{K}_n(t) \geq 0$: αν $m \leq f$ τότε

$$\sigma_n(f, t) - m = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{K}_n(\tau) (f(t - \tau) - m) d\tau \geq 0.$$

Αν $f \leq M$ τότε

$$M - \sigma_n(f, t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathbf{K}_n(\tau) (M - f(t - \tau)) d\tau \geq 0. \quad \square$$

Πόρισμα 1.3.3. Αν το t_0 είναι ένα σημείο συνέχειας της f και αν η σειρά Fourier της f συγκλίνει στο t_0 , τότε $S(f, t_0) = f(t_0)$.

Η συνθήκη του Fejer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) + f(t_0 - h)}{2} = \tilde{f}(t_0)$$

συνεπάγεται ότι

$$(1.53) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right| d\tau = 0.$$

Η απαίτηση της ύπαρξης ενός αριθμού $\tilde{f}(t_0)$ ώστε να ισχύει η (1.53), είναι λιγότερο περιοριστική από την συνθήκη του Fejer και φυσικότερη για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Δεν αλλάζει αν τροποποιήσουμε την f σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν και, παρόλο που για μια συνάρτηση η συνθήκη του Fejer μπορεί να μην ισχύει για κανένα t_0 , η (1.53) ισχύει με $\tilde{f}(t_0) = f(t_0)$ για κάθε σχεδόν t_0 .

Θεώρημα 1.3.4 (Lebesgue). Αν η (1.53) ισχύει, τότε $\sigma_n(f, t_0) \rightarrow \tilde{f}(t_0)$. Συγκεκριμένα $\sigma_n(f, t) \rightarrow f(t)$ σ.π.

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του θεωρήματος του Fejer, έχουμε:

$$(1.54) \quad \begin{aligned} \sigma_n(f, t_0) - \tilde{f}(t_0) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\theta + \int_\theta^\pi \right) \mathbf{K}_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε την (1.36) που αποδείξαμε στην ενότητα 2 (δηλ. $\mathbf{K}_n(t) \leq \min \left(n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)t^2} \right)$). Συγκεκριμένα, για $\tau \in (\theta, \pi)$, λόγω της (1.36), έχουμε ότι $\mathbf{K}_n(\tau) \leq \frac{\pi^2}{(n+1)\theta^2}$, οπότε για το δεύτερο ολοκλήρωμα στην (1.54) ισχύει

$$\int_\theta^\pi \mathbf{K}_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right) d\tau \leq \frac{\pi^2}{(n+1)\theta^2} \|f - \tilde{f}\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Επιλέγουμε $\theta = n^{-1/4}$ και επανερχόμαστε στον υπολογισμό του πρώτου ολοκληρώματος. Ορίζουμε

$$\varphi(h) = \int_0^h \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right| d\tau.$$

Τότε

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_0^\theta \mathbf{K}_n(\tau) \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right) d\tau \right| \\ & \leq \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \right| + \frac{1}{\pi} \left| \int_{\frac{1}{n}}^\theta \right| \\ & \leq \frac{n+1}{\pi} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\pi}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^\theta \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right| \frac{d\tau}{\tau^2}. \end{aligned}$$

Από την (1.53) έχουμε $\frac{n+1}{\pi} \varphi\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$. Η ολοκλήρωση κατά μέρη στο 2ο ολοκλήρωμα δίνει

$$(1.55) \quad \begin{aligned} & \frac{\pi}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\theta} \left| \frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right| \frac{d\tau}{\tau^2} \\ &= \frac{\pi}{n+1} \left[\frac{\varphi(\tau)}{\tau^2} \right]_{1/n}^{\theta} + \frac{2\pi}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\theta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau^3} d\tau. \end{aligned}$$

Από την (1.53), για $\varepsilon > 0$ έχουμε:

$$\varphi(\tau) < \varepsilon \tau \quad \text{στο} \quad 0 < \tau < \theta = n^{-1/4},$$

άρα η (1.55) είναι φραγμένη από

$$(1.56) \quad \frac{\pi \varepsilon n}{n+1} + \frac{2\pi \varepsilon}{n+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\theta} \frac{d\tau}{\tau^2} < 3\pi \varepsilon. \quad \square$$

Πόρισμα 1.3.5. Αν η σειρά Fourier μιας $f \in L^1(\mathbb{T})$ συγκλίνει σε ένα σύνολο E θετικού μέτρου, τότε $S(f) \equiv f$ σ.π. στο E . Συγκεκριμένα, αν η σειρά Fourier συγκλίνει στο 0 σ.π., όλοι οι συντελεστές μηδενίζονται.

Παρατήρηση 1.3.6. Το τελευταίο αποτέλεσμα δεν ισχύει για κάθε τριγωνομετρική σειρά. Υπάρχουν παραδείγματα τριγωνομετρικών σειρών, συγκλινουσών στο μηδέν σ.π.⁴, χωρίς να είναι ταυτοτικά μηδέν.

Η ανάγκη για την αυστηρότερη συνθήκη (1.53) στο Θεώρημα 1.3.4 αντί της ασθενέστερης

$$(1.57) \quad \varphi(h) = \int_0^h \left(\frac{f(t_0 - \tau) + f(t_0 + \tau)}{2} - \tilde{f}(t_0) \right) d\tau = o(h),$$

προέρχεται από το γεγονός ότι προκειμένου να ολοκληρώσουμε κατά μέρη, χρειάζεται να αντικαταστήσουμε τον $K_n(t)$ με το άνω φράγμα $\min\left(n+1, \frac{\pi^2}{(n+1)\tau^2}\right)$. Η συνθήκη (1.57) είναι ικανή αν θέλουμε να αποδείξουμε ένα ανάλογο αποτέλεσμα για τον $P(r, t)$ αντί του $K_n(t)$. Έτσι παίρνουμε το:

Θεώρημα 1.3.7 (Fatou). Αν ισχύει η (1.57), τότε

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j) r^{|j|} e^{ijt_0} = \tilde{f}(t_0).$$

Η συνθήκη (1.57) με $\tilde{f}(t_0) = f(t_0)$ ικανοποιείται σε κάθε σημείο t_0 όπου η f είναι η παράγωγος του ολοκληρώματος (συνεπώς σ.π.).

⁴Παρόλα αυτά, μια τριγωνομετρική σειρά που συγκλίνει στο μηδέν παντού, είναι ταυτοτικά μηδέν

1.4 Η τάξη μεγέθους των συντελεστών Fourier

Μέχρι στιγμής, τα μόνα που ξέρουμε για το μέγεθος των συντελεστών Fourier $\{\hat{f}(n)\}$ μιάς συνάρτησης $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι τα εξής:

- $|\hat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1}$
- (Λήμμα Riemann – Lebesgue) $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \hat{f}(n) = 0$

Σε αυτή την παραγράφο θα συζητήσουμε τις παρακάτω τρεις ερωτήσεις:

1. Μπορεί το Λήμμα Riemann – Lebesgue να βελτιωθεί ώστε η ακολουθία των $\hat{f}(n)$ να πηγαίνει στο μηδέν με συγκεκριμένο ρυθμό, καθώς $|n| \rightarrow \infty$; Θα δείξουμε ότι η απάντηση είναι αρνητική. Οι $\hat{f}(n)$ πηγαίνουν στο 0 αυθαίρετα αργά.
2. Βάσει της αρνητικής απάντησης στο πρώτο ερώτημα, αληθεύει ότι κάθε ακολουθία a_n που τείνει στο μηδέν καθώς $|n| \rightarrow \infty$ είναι η ακολουθία των συντελεστών Fourier κάποιας $f \in L^1(\mathbb{T})$; Η απάντηση είναι πάλι αρνητική.
3. Πώς αντανακλώνονται ιδιότητες της f , όπως περιορισμοί, συνέχεια, ομαλότητα κ.λ.π., από τους $\hat{f}(n)$; Το ερώτημα αυτό έχει το μεγαλύτερο ερευνητικό ενδιαφέρον αυτήν τη στιγμή στην αρμονική ανάλυση.

Στο δεύτερο μισό αυτής της παραγράφου δείχνουμε πώς ποικίλες συνθήκες ομαλότητας επηρεάζουν το μέγεθος των συντελεστών Fourier. Συνθήκες «τάξης μεγέθους» επί των συντελεστών Fourier είναι σπανίως ικανές και αναγκαίες για να ανήκει η συνάρτηση σε ένα δεδομένο χώρο συναρτήσεων. Για παράδειγμα, μια αναγκαία συνθήκη για να είναι μια f συνεχής στον $\mathbb{T}$ είναι η $\sum |\hat{f}(n)|^2 < \infty$, ενώ μια ικανή⁵ [2] είναι $\sum |\hat{f}(n)| < \infty$.

Οι μόνοι χώροι, ορισμένοι απο συνθήκες μεγέθους ή ομαλότητας των συναρτήσεων, για τους οποίους έχουμε ικανή και αναγκαία συνθήκη εκφρασμένη σε όρους τάξης μεγέθους, για να είναι μία ακολουθία a_n η ακολουθία των συντελεστών Fourier μιας συνάρτησης στο χώρο, είναι ο $L^2(\mathbb{T})$ και οι «παραγώγοι» του⁶.

⁵Αν $\sum |\hat{f}(n)| < \infty$, τότε οι συναρτήσεις $f(t)$ και $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ είναι καλά ορισμένες και οι συντελεστές Fourier τους είναι ίσοι. Συνεπώς, από το Θεώρημα μοναδικότητας, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ σ.π. και, αφού η $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}$ είναι συνεχής συνάρτηση, η $f(t)$ είναι συνεχής σ.π. στο $\mathbb{T}$

⁶Π.χ. ο χώρος όλων των απολύτως συνεχών συναρτήσεων με παραγώγους στον $L^2(\mathbb{T})$

Θεώρημα 1.4.1. Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ μια άρτια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών τείνουσα στο μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$. Υποθέτουμε ότι για $n > 0$

$$(1.58) \quad a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n \geq 0.$$

Τότε υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$: $\hat{f}(n) = a_n$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$s_N = \sum_{n=0}^N (a_n - a_{n+1}) = a_0 - a_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} a_0.$$

Επιπλέον, η συνθήκη κυρτότητας (1.58) συνεπάγεται ότι η $(a_n - a_{n+1})$ είναι φθίνουσα προς το μηδέν, άρα

$$(1.59) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$$

και συνεπώς

$$(1.60) \quad \sum_{n=1}^N n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) = a_0 - a_N - N(a_N - a_{N+1}) \rightarrow a_0$$

καθώς $N \rightarrow \infty$. Θέτουμε

$$(1.61) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \mathbf{K}_{n-1}(t),$$

όπου με $\mathbf{K}_n$ συμβολίζουμε τον πυρήνα του Fejer. Αφού $\|\mathbf{K}_n\|_{L^1} = 1$, η σειρά (1.61) συγκλίνει στον $L^1(\mathbb{T})$ και αφού όλοι οι όροι της είναι μη αρνητικοί, η f είναι επίσης μη αρνητική. Τώρα,

$$(1.62) \quad \begin{aligned} \hat{f}(j) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \hat{\mathbf{K}}_{n-1}(j) = \\ &= \sum_{n=|j|+1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right). \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα την

$$(1.63) \quad \begin{aligned} s_m(j) &= \sum_{n=|j|+1}^m n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) \left(1 - \frac{|j|}{n}\right) \\ &= a_{|j|} - a_m(|j| - m - 1) + a_{m+1}(m - |j|) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_{|j|}, \end{aligned}$$

από το γεγονός ότι $a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ και από την (1.59). Συνεπώς, από τις (1.62) και (1.63), $\hat{f}(j) = a_{|j|}$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. $\square$

Συγκρίνοντας το Θεώρημα 1.4.1 με το επόμενο, φαίνεται η βασική διαφορά μεταξύ της σειράς ημιτόνων ($a_{-n} = -a_n$) και της σειράς συνημιτόνων ($a_{-n} = a_n$).

Θεώρημα 1.4.2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και υποθέτουμε ότι $\hat{f}(|n|) = -\hat{f}(-|n|) \geq 0$. Τότε

$$(1.64) \quad \sum_{n>0} \frac{\hat{f}(n)}{n} < \infty.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\hat{f}(0) = 0$. Γράφουμε $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Τότε $F \in C(\mathbb{T})$ και από το Θεώρημα 1.1.8,

$$\hat{F}(n) = \frac{\hat{f}(n)}{in}, \quad n \neq 0.$$

Θεωρούμε τη $G(t) = F(t) - \hat{F}(0)$, $\hat{G}(n) = \hat{F}(n) - \hat{F}(0)$ και, αφού η F είναι συνεχής, είναι και η G συνεχής και άρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε γι' αυτήν το Θεώρημα του Fejer για $t_0 = 0$ και έτσι παίρνουμε ότι

$$(1.65) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} 2 \sum_{n=1}^N \left(1 - \frac{n}{N+1}\right) \frac{\hat{f}(n)}{n} = i(F(0) - \hat{F}(0)) = -i\hat{F}(0)$$

και αφού $\frac{\hat{f}(n)}{n} \geq 0$, το Θεώρημα έπεται. $\square$

Πόρισμα 1.4.3. Αν $a_n > 0$ και $\sum \frac{a_n}{n} = \infty$, η $\sum a_n \sin nt$ δεν είναι σειρά Fourier. Συνεπώς, υπάρχει τριγωνομετρική σειρά με συντελεστές που τείνουν στο μηδέν που δεν είναι σειρά Fourier.

Από το Θεώρημα 1.4.1, η σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nt}{\log n} = \sum_{|n| \geq 2} \frac{e^{int}}{2 \log |n|}$$

είναι σειρά Fourier, ενώ από το Θεώρημα 1.4.2, η συζυγής της

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nt}{\log n} = -i \sum_{|n| \geq 2} \frac{\operatorname{sgn}(n) e^{int}}{2 \log |n|}$$

δεν είναι.

Τώρα, θα παρουσιάσουμε μερικά απλά αποτελέσματα σχετικά με την τάξη μεγέθους των συντελεστών Fourier συναρτήσεων που ικανοποιούν ποικίλες συνθήκες ομαλότητας.

Θεώρημα 1.4.4. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ είναι απολύτως συνεχής, τότε $\hat{f}(n) = o(1/n)$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.1.8, αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{f}'(0) = 0$. Αφού η f είναι απολύτως συνεχής και 2π – περιοδική έχουμε ότι

$$\hat{f}'(0) = \int_0^{2\pi} f'(t) dt = f(2\pi) - f(0) = 0.$$

Άρα παίρνουμε $\hat{f}(n) = (1/in)\hat{f}'(n)$. Τέλος, αφού $f' \in L^1(\mathbb{T})$, από το Λήμμα Riemann – Lebesgue καταλήγουμε ότι $\hat{f}'(n) \rightarrow 0$ και το συμπέρασμα έπεται. $\square$

Παρατήρηση 1.4.5. Εφαρμόζοντας επανειλημμένα το Θεώρημα 1.1.8 βλέπουμε ότι αν η f είναι k φορές παραγωγίσιμη και η $f^{(k-1)}$ είναι απολύτως συνεχής, τότε

$$(1.66) \quad \hat{f}(n) = o(1/n^k) \quad \text{καθώς} \quad |n| \rightarrow \infty.$$

Μπορούμε να πάρουμε μια πιο ακριβή εκτίμηση από την ασυμπτωτική συμπεριφορά (1.66). Αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να παρατηρήσουμε ότι αν $0 \leq j \leq k$, τότε $\hat{f}(n) = (in)^{-j} \widehat{f^{(j)}}(n)$ και συνεπώς

$$(1.67) \quad |\hat{f}(n)| \leq \frac{\|f^{(j)}\|_{L^1}}{|n|^j}.$$

Έτσι, καταλήγουμε στο

Θεώρημα 1.4.6. Αν η f είναι k φορές παραγωγίσιμη και η $f^{(k-1)}$ είναι απολύτως συνεχής, τότε

$$(1.68) \quad |\hat{f}(n)| \leq \min_{0 \leq j \leq k} \frac{\|f^{(j)}\|_{L^1}}{|n|^j}.$$

Αν η f είναι απείρως παραγωγίσιμη, τότε

$$(1.69) \quad |\hat{f}(n)| \leq \min_{0 \leq j} \frac{\|f^{(j)}\|_{L^1}}{|n|^j}.$$

Θεώρημα 1.4.7. Αν η f είναι φραγμένης κύμανσης στον $\mathbb{T}$, τότε

$$(1.70) \quad |\hat{f}(n)| \leq \frac{\text{var}(f)}{2\pi|n|}.$$

Απόδειξη. Ολοκληρώνουμε κατά μέρη χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα Stieltjes

$$\begin{aligned} |\hat{f}(n)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int e^{-int} f(t) dt \right| = \left| \frac{1}{2\pi in} \int f(t) d e^{-int} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi in} \int e^{-int} df(t) \right| \leq \frac{1}{2\pi|n|} \int |df(t)| \leq \frac{\text{var}(f)}{2\pi|n|}. \quad \square \end{aligned}$$

Για $f \in C(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε με $\omega(f, h)$ το δείκτη συνέχειας της f , δηλαδή

$$(1.71) \quad \omega(f, h) = \sup_{|y| \leq h} \|f_{-y} - f\|_{\infty}.$$

Για $f \in L^1(\mathbb{T})$ συμβολίζουμε με $\Omega(f, h)$ τον ολοκληρωτικό δείκτη συνέχειας της f , δηλαδή

$$(1.72) \quad \Omega(f, h) = \|f_{-y} - f\|_{L^1}.$$

Προφανώς ισχύει $\Omega(f, h) \leq \omega(f, h)$.

Θεώρημα 1.4.8. Για $n \neq 0$, $|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\Omega(f, \frac{\pi}{|n|})$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \hat{f}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-int} dt = -\frac{1}{2\pi} \int f(t) e^{-in(t-\pi/n)} dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int f(t + \pi/n) e^{-int} dt. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$(1.73) \quad \frac{\hat{f}(n)}{2} = -\frac{1}{4\pi} \int f(t + \pi/n) e^{-int} dt.$$

Όμως

$$(1.74) \quad \frac{\hat{f}(n)}{2} = \frac{1}{4\pi} \int f(t) e^{-int} dt.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1.73) και (1.74) παίρνουμε

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \right) e^{-int} dt$$

και άρα

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2}\Omega(f, \frac{\pi}{|n|}). \quad \square$$

Ορισμός 1.4.9. Για $0 < a < 1$, ορίζουμε τον υπόχωρο του $C(\mathbb{T})$:

$$Lip_a(\mathbb{T}) = \{f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{t \in \mathbb{T}, h \neq 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^a} < \infty\},$$

με νόρμα

$$\|f\|_{Lip_a} = \sup_t |f(t)| + \sup_{t \in \mathbb{T}, h \neq 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^a}.$$

Πόρισμα 1.4.10. Αν $f \in Lip_a(\mathbb{T})$, τότε $\hat{f}(n) = O(1/n^a)$.

Θεώρημα 1.4.11. Έστω $1 < p \leq 2$ και q ο συζυγής εκθέτης, δηλ. $q = \frac{p}{p-1}$. Αν $f \in L^p(\mathbb{T})$, τότε $\sum |\hat{f}(n)|^q < \infty$.

Η περίπτωση $p = 2$ θα αποδειχθεί στην επόμενη ενότητα, ενώ η περίπτωση $1 < p < 2$ αποδεικνύεται [1] σε κεφάλαιο που δε θα παρουσιαστεί.

Παρατήρηση 1.4.12. Το Θεώρημα 1.4.11 δεν μπορεί να επεκταθεί για $p > 2$. Έτσι, αν $f \in L^p(\mathbb{T})$ με $p > 2$, τότε $f \in L^2(\mathbb{T})$ και συνεπώς $\sum |\hat{f}(n)|^2 < \infty$. Αυτά είναι όσα μπορούμε να συνάγουμε για συνεχείς συναρτήσεις. Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις f τέτοιες ώστε $\forall \varepsilon > 0$, $\sum |\hat{f}(n)|^{2-\varepsilon} = \infty$. Για την ακρίβεια, δοθείσας κάθε $\{c_n\} \in l^2(\mathbb{Z})$ υπάρχει μια συνεχής f με $|\hat{f}(n)| > |c_n|$.

1.5 Σειρές Fourier τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Συνήθως, η μεγαλύτερη επιτυχία στην αναπαράσταση μιας συνάρτησης μέσω της σειράς Fourier της, συμβαίνει για τις τετραγωνικά ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Ο λόγος είναι ότι ο $L^2(\mathbb{T})$ είναι ένας χώρος Hilbert, με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τη σχέση

$$(1.75) \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \bar{g}(t) dt,$$

και σε αυτό το χώρο Hilbert τα εκθετικά αποτελούν ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα. Ξεκινάμε την ενότητα με μία σύντομη επισκόπηση των βασικών ιδιοτήτων ορθοκανονικών και πλήρων συστημάτων σε αφηρημένους χώρους Hilbert και κλείνουμε με τα αντίστοιχα αποτελέσματα για τις σειρές Fourier στον $L^1(\mathbb{T})$.

Έστω $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{C}$ ένας χώρος Hilbert και $f, g \in \mathcal{H}$. Λέμε ότι η f είναι ορθογώνια προς τη g αν $\langle f, g \rangle = 0$. Αυτή η σχέση είναι προφανώς συμμετρική. Αν E είναι ένα υποσύνολο του $\mathcal{H}$ λέμε ότι η $f \in \mathcal{H}$ είναι ορθογώνια στο E αν η f είναι ορθογώνια σε κάθε στοιχείο του E . Ένα σύνολο $E \subset \mathcal{H}$ είναι ορθογώνιο αν κάθε δύο στοιχεία του είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Ένα σύνολο $E \subset \mathcal{H}$ είναι ορθοκανονικό σύστημα αν για οποιαδήποτε $f, g \in E$, $\langle f, g \rangle = 0$ αν $f \neq g$ και $\langle f, f \rangle = 1$.

Λήμμα 1.5.1. Έστω $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ ένα πεπερασμένο ορθοκανονικό σύστημα και $a_1, \dots, a_N$ μιγαδικοί αριθμοί. Τότε

$$(1.76) \quad \left\| \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right\| = \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right\| &= \left(\left\langle \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n, \sum_{m=1}^N a_m \varphi_m \right\rangle \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{n=1}^N a_n \left\langle \varphi_n, \sum_{m=1}^N a_m \varphi_m \right\rangle \right)^{1/2} = \\ &= \left(\sum_{n=1}^N a_n \bar{a}_n \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^N |a_n|^2 \right)^{1/2}. \quad \square \end{aligned}$$

Πόρισμα 1.5.2. Έστω $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{H}$ ένα ορθοκανονικό σύστημα και $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών: $\sum |a_n|^2 < \infty$. Τότε το $\sum_{n=1}^\infty a_n \varphi_n$ συγκλίνει στον $\mathcal{H}$.

Απόδειξη. Αφού ο $\mathcal{H}$ είναι πλήρης, αρκεί να δείξουμε ότι τα μερικά αθροίσματα $S_N = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n$ αποτελούν ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{H}$: για $N > M$,

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{n=M+1}^N a_n \varphi_n \right\|^2 = \sum_{n=M+1}^N |a_n|^2 \rightarrow 0 \quad \text{καθώς} \quad M \rightarrow \infty. \quad \square$$

Λήμμα 1.5.3. Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $\{\varphi_n\} \in \mathcal{H}$ πεπερασμένο ορθοκανονικό σύστημα. Για $f \in \mathcal{H}$ γράφουμε $a_n = \langle f, \varphi_n \rangle$. Τότε

$$(1.77) \quad 0 \leq \left\| f - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |a_n|^2.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
 & \left\| f - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right\|^2 = \\
 &= \left\langle f - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n, f - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n \right\rangle \\
 &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N \bar{a}_n \langle f, \varphi_n \rangle - \sum_{n=1}^N a_n \langle \varphi_n, f \rangle + \sum_{n=1}^N |a_n|^2 \\
 &= \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N |a_n|^2. \quad \square
 \end{aligned}$$

Πόρισμα 1.5.4 (Ανισότητα του Bessel). Έστω $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert και $\{\varphi_a\} \in \mathcal{H}$ ορθοκανονικό σύστημα. Για $f \in \mathcal{H}$ γράφουμε $a_a = \langle f, \varphi_a \rangle$. Τότε

$$(1.78) \quad \sum |a_a|^2 \leq \|f\|^2.$$

Η οικογένεια $\{\varphi_a\}$ που εμφανίζεται στην ανισότητα του Bessel δεν χρειάζεται να είναι πεπερασμένη ούτε αριθμήσιμη. Η ανισότητα (1.78) ισοδυναμεί με το να πούμε ότι για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο της $\{\varphi_a\}$ παίρνουμε την (1.77). Συγκεκριμένα $a_a = 0$ εκτός από αριθμήσιμες το πλήθος τιμές του a και $\sum |a_a|^2 < \infty$.

Αν $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{T})$, όλα τα ορθοκανονικά συστήματα στον $\mathcal{H}$ είναι πεπερασμένα ή αριθμήσιμα και τα γράφουμε σαν ακολουθίες φ_n .

Ορισμός 1.5.5. Μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία στον $\mathcal{H}$ είναι μια ορθοκανονική ακολουθία με την επιπλέον ιδιότητα ότι το μόνο στοιχείο στον $\mathcal{H}$ ορθογώνιο προς αυτήν είναι το μηδενικό.

Λήμμα 1.5.6. Έστω $\{\varphi_n\} \in \mathcal{H}$ μια ορθοκανονική ακολουθία. Τότε *TEEI*:

1. Η $\{\varphi_n\}$ είναι πλήρης.

2. $\forall f \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$(1.79) \quad \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2.$$

3. $\forall f \in \mathcal{H}$ ισχύει

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Απόδειξη. (2. $\Rightarrow$ 1.) Αν η f είναι ορθογώνια στην $\{\varphi_n\}$ και αν ισχύει το 2., τότε $\|f\|^2 = 0 \Rightarrow f = 0$.

(1. $\Rightarrow$ 3.) Από την ανισότητα του Bessel και το Πόρισμα 1.5.2, έπεται ότι η $\sum \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$ συγκλίνει στον $\mathcal{H}$. Αν θέσουμε $g = \sum \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$, έχουμε ότι $\langle f - g, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle - \langle \sum \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle - \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = 0$. Συνεπώς, αν η $\{\varphi_n\}$ είναι πλήρης ισχύει $f = g$.

(3. $\Rightarrow$ 2.) Έπεται άμεσα από το 3. και την (1.77). $\square$

Λήμμα 1.5.7 (Parseval). Έστω $\{\varphi_n\} \in \mathcal{H}$ μια πλήρης ορθοκανονική ακολουθία και $f, g \in \mathcal{H}$. Τότε

$$(1.80) \quad \langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle.$$

Απόδειξη. Αν η f είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός της $\{\varphi_n\}$, η (1.80) είναι προφανής. Γενικά,

$$\langle f, g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle \sum_{n=1}^N \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n, g \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \langle f, \varphi_n \rangle \langle \varphi_n, g \rangle. \quad \square$$

Λήμμα 1.5.8. Η ακολουθία $\{e^{int}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ αποτελεί πλήρες ορθοκανονικό σύστημα του $\mathcal{H}$.

Απόδειξη. Η ορθοκανονικότητα είναι προφανής:

$$\langle e^{int}, e^{imt} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(n-m)t} dt = \delta_{n,m}.$$

Η πληρότητα έπεται από το Θεώρημα 1.2.11 αφού

$$\langle f, e^{int} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int f(t) \overline{e^{int}} dt = \hat{f}(n),$$

οπότε από το Θεώρημα μοναδικότητας, αν $\hat{f}(n) = 0$ τότε $f(t) = 0$ σ.π.. $\square$

Τα γενικά αποτελέσματα σχετικά με πλήρη ορθοκανονικά συστήματα σε χώρους Hilbert παρουσιάζονται τώρα στο

Θεώρημα 1.5.9. Έστω $f \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int |f(t)|^2 dt.$
2. $f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{int}$ ως προς την νόρμα του $L^2(\mathbb{T})$.
3. $\forall \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}$ τ.ώ. $\sum |a_n|^2 < \infty$, υπάρχει μοναδική $f \in L^2(\mathbb{T})$ τ.ώ.
 $a_n = \hat{f}(n) \forall n \in \mathbb{Z}.$
4. Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε

$$(1.81) \quad \frac{1}{2\pi} \int f(t) \overline{g(t)} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \overline{\hat{g}(n)}.$$

Συμβολίζουμε με $l^2(\mathbb{Z})$ το χώρο των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ (δηλ. $\sum |a_n|^2 < \infty$). Ο $l^2(\mathbb{Z})$, εφοδιασμένος με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, με νόρμα την $(\sum |a_n|^2)^{1/2}$ και εσωτερικό γινόμενο το $\langle a, b \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \bar{b}_n$, είναι ένα χώρος Hilbert. Σύμφωνα με το τελευταίο Θεώρημα, η απεικόνιση $f \mapsto \hat{f}(n)$ είναι μια ισομετρία από τον $L^2(\mathbb{T})$ στον $l^2(\mathbb{Z})$.

1.6 Απολύτως συγκλίνουσες σειρές Fourier

Συμβολίζουμε με $A(\mathbb{T})$ το χώρο των συνεχών συναρτήσεων στον $\mathbb{T}$ με απόλυτα συγκλίνουσα σειρά Fourier, δηλαδή $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)| < \infty$.

Θεώρημα 1.6.1. Αν $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$, η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε συνεχή συνάρτηση στο $\mathbb{T}$ και συμβολίζοντας το άθροισμά της με $f(t)$, έχουμε $a_n = \hat{f}(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την $s_N(t) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{int}$ και θα δείξουμε πρώτα ότι η ακολουθία s_N συγκλίνει σημειακά. Πράγματι, έστω $t \in \mathbb{T}$. Αφού $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$, έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ώ. $\forall N \geq n_0(\varepsilon)$

$$(1.82) \quad \sum_{|n| > N} |a_n| < \varepsilon.$$

Τότε, $\forall M > N \geq n_0$

$$|s_M(t) - s_N(t)| \leq \sum_{N < |n| \leq M} |a_n| < \varepsilon.$$

Άρα η $s_N(t)$ είναι Cauchy και συνεπώς συγκλίνουσα. Στη συνέχεια, $\forall t \in \mathbb{T}$ γράφουμε $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$. Έτσι, ορίζεται μια συνάρτηση $f : \mathbb{T} \mapsto$

$\mathbb{C}$. Τώρα, η s_N συγκλίνει ομοιόμορφα στην f , αφού από την (1.82)

$$\|s_N - f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{T}} \left| \sum_{|n| > N} a_n e^{int} \right| \leq \sum_{|n| > N} |a_n| \rightarrow 0$$

καθώς $N \rightarrow \infty$ και άρα $f \in C(\mathbb{T})$. Μάλιστα, από την ομοιόμορφη σύγκλιση της s_N και θεωρώντας την $e_m(t) = e^{imt}$, έχουμε ότι

$$\langle s_N, e_m \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \langle f, e_m \rangle = \hat{f}(m), \quad \forall t \in \mathbb{T}$$

και, αν $N > m$, τότε $\langle s_N, e_m \rangle = a_m$, άρα

$$\hat{f}(m) = a_m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Το συμπέρασμα έπεται. $\square$

Παρατήρηση 1.6.2. Από τα παραπάνω, καταλήγουμε ότι η απεικόνιση $T : f \mapsto \{\hat{f}(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός $A(\mathbb{T}) \mapsto l^1(\mathbb{Z})$.

Εισάγουμε μια νόρμα στον $A(\mathbb{T})$ ως

$$(1.83) \quad \|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|.$$

Με αυτήν τη νόρμα ο $A(\mathbb{T})$ είναι χώρος Banach ισομετρικός με τον $l^1(\mathbb{Z})$. Μάλιστα ισχυριζόμαστε ότι είναι άλγεβρα.

Λήμμα 1.6.3. Υποθέτουμε ότι $f, g \in A(\mathbb{T})$. Τότε $fg \in A(\mathbb{T})$ και

$$(1.84) \quad \|fg\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{A(\mathbb{T})} \|g\|_{A(\mathbb{T})}$$

Απόδειξη. Έχουμε $f(t) = \sum \hat{f}(k) e^{ikt}$, $g(t) = \sum \hat{g}(m) e^{imt}$ και αφού αμφότερες οι σειρές συγκλίνουν απολύτως παίρνουμε

$$f(t)g(t) = \sum_k \sum_m \hat{f}(k) \hat{g}(m) e^{i(k+m)t}.$$

Συλλέγοντας τους όρους για τους οποίους $k + m = n$, λαμβάνουμε

$$f(t)g(t) = \sum_n \sum_k \hat{f}(k) \hat{g}(n-k) e^{int}$$

ώστε $\widehat{fg}(n) = \sum_k \hat{f}(k) \hat{g}(n-k)$. Άρα

$$\sum_n |\widehat{fg}(n)| \leq \sum_n \sum_k |\hat{f}(k)| |\hat{g}(n-k)| = \sum_k |\hat{f}(k)| \sum_n |\hat{g}(n)|. \quad \square$$

Δεν έχουν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις στον $\mathbb{T}$ απόλυτα συγκλίνουσα σειρά Fourier, αλλά και αυτές που έχουν, δεν μπορούν να χαρακτηρισθούν από συνθήκες ομαλότητας. Κάποιες συνθήκες ομαλότητας, ωστόσο, είναι ικανές για απόλυτη σύγκλιση της σειράς Fourier.

Θεώρημα 1.6.4. Έστω f απόλυτα συνεχής στον $\mathbb{T}$ και $f' \in L^2(\mathbb{T})$. Τότε $f \in A(\mathbb{T})$ και

$$(1.85) \quad \|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1} + \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \right)^{1/2} \|f'\|_{L^2}.$$

Απόδειξη. Παίρνουμε τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$ και χρησιμοποιούμε την ανισότητα Cauchy – Schwartz:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)| &= |\hat{f}(0)| + \sum_{n=-N, n \neq 0}^N |\hat{f}(n)| \leq \|f\|_{L^1} + \sum_{n=-N, n \neq 0}^N \left| \frac{\hat{f}'(n)}{n} \right| \\ &\leq \|f\|_{L^1} + \left(2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=-N}^N |\hat{f}'(n)|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Τώρα, αφήνοντας το $N \rightarrow \infty$, παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 1.6.5 (Bernstein). Αν $f \in Lip_a(\mathbb{T})$ για κάποιο $a > 1/2$, τότε $f \in A(\mathbb{T})$ και

$$(1.86) \quad \|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq c_a \|f\|_{Lip_a},$$

όπου c_a σταθερά.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $f(t-h) - f(t) \sim \sum (e^{-inh} - 1) \hat{f}(n) e^{int}$. Αν πάρουμε $h = 2\pi/(3 \cdot 2^m)$ και $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$, έχουμε $|e^{-inh} - 1| \geq \sqrt{3}$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} \sum_{2^m \leq n < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)|^2 &\leq \sum_n |e^{-inh} - 1|^2 |\hat{f}(n)|^2 = \|f_h - f\|_{L^2}^2 \leq \\ (1.87) \quad &\leq \|f_h - f\|_{\infty}^2 \leq \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^m} \right)^{2a} \|f\|_{Lip_a(\mathbb{T})}^2. \end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι το άθροισμα στο αριστερό μέλος της (1.87) περιλαμβάνει το πολύ 2^m όρους, από την ανισότητα Cauchy – Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{2^m \leq n < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)| &\leq 2^{m/2} \left(\sum_{2^m \leq n < 2^{m+1}} |\hat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \\ (1.88) \quad &\leq 2^{m/2} \left(\frac{2\pi}{3 \cdot 2^m} \right)^a \|f\|_{Lip_a(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Αφού $a > 1/2$, μπορούμε να αθροίσουμε τις ανισότητες (1.88) για $m = 0, 1, \dots$ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $|\hat{f}(0)| \leq \|f\|_{Lip_a(\mathbb{T})}$, παίρνουμε την (1.86). $\square$

Η συνθήκη $a > 1/2$ στο Θεώρημα του Bernstein είναι απαραίτητη για το συμπέρασμα. Υπάρχουν συναρτήσεις στον $Lip_{1/2}(\mathbb{T})$ των οποίων η σειρά Fourier δεν συγκλίνει απόλυτα. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι η σειρά Hardy – Littlewood $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in \log n}}{n} e^{int}$.

Η συνθήκη Lipschitz στο τελευταίο Θεώρημα (1.86) μπορεί να διευρυνθεί αν η f έχει φραγμένη κύμανση.

Θεώρημα 1.6.6 (Zygmund). Έστω f φραγμένης κύμανσης στον $\mathbb{T}$ και υποθέτουμε ότι $f \in Lip_a(\mathbb{T})$, $a > 0$. Τότε $f \in A(\mathbb{T})$.

Παρατήρηση 1.6.7. Σε αυτή την ενότητα, έχουμε μια αλλαγή σκηνηκού. Δεν μιλάμε πλέον για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{T}$ και τη σειρά Fourier τους, αλλά συζητάμε για αθροίσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{Z}$ (π.χ. απόλυτα συγκλίνουσες ακολουθίες) και τους «μετασχηματισμούς Fourier» τους, οι οποίοι είναι συνεχείς συναρτήσεις στον $\mathbb{T}$. Το Λήμμα 1.6.3, παραδείγματος χάριν, είναι εντελώς ανάλογο του θεωρήματος 1.1.10 με ανεστραμένους τους ρόλους των $\mathbb{T}$ και $\mathbb{Z}$.

Κεφάλαιο 2

Η σύγκλιση σειρών Fourier

2.1 Σύγκλιση ως προς τη νόρμα

Έστω B ένας ομογενής χώρος Banach στον $\mathbb{T}$. Ως συνήθως γράφουμε

$$(2.1) \quad S_n(f) = S_n(f, t) = \sum_{-n}^n \hat{f}(j) e^{ijt}.$$

Λέμε ότι ο B επιδέχεται σύγκλιση ως προς νόρμα αν

$$(2.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_B = 0.$$

Ο σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να χαρακτηρίσουμε τους χώρους B που έχουν αυτήν την ιδιότητα.

Εισάγουμε τους τελεστές $S_n : f \mapsto S_n(f)$. Η ακολουθία των τελεστών $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι καλά ορισμένη σε κάθε ομογενή χώρο Banach B . Συμβολίζουμε τη νόρμα της, ως τελεστή στον B , με $\|S_n\|^B$.

Θεώρημα 2.1.1. Ένας ομογενής χώρος Banach B επιδέχεται σύγκλιση ως προς νόρμα αν οι $\|S_n\|^B$ είναι φραγμένες (καθώς $n \rightarrow \infty$), δηλαδή αν υπάρχει μια σταθερά K τ.ώ.

$$(2.3) \quad \|S_n(f)\|_B \leq K \|f\|_B, \quad \forall f \in B \quad \text{και} \quad n > 0.$$

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν η $S_n(f)$ συγκλίνει στην f , $\forall f \in B$, τότε η $S_n(f)$ είναι φραγμένη για κάθε $f \in B$. Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, έπεται ότι $\exists K > 0$ σταθερά τ.ώ. $\|S_n\|^B \leq K \forall n \in \mathbb{N}$.

($\Leftarrow$) Θεωρούμε δεδομένη την (2.3). Έστω $f \in B$, $\varepsilon > 0$ και P ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο τ.ώ. $\|f - P\|_B \leq \varepsilon/2K$. Για $n > \deg(P)$, έχουμε

$S_n(P) = P$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}\|S_n(f) - f\|_B &= \|S_n(f) - S_n(P) + P - f\|_B \\ &\leq \|S_n(f - P)\|_B + \|P - f\|_B \\ &\leq K \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2K} \leq \varepsilon.\end{aligned}\quad \square$$

Το γεγονός ότι $S_n(f) = D_n * f$, όπου D_n είναι ο πυρήνας του Dirichlet

$$(2.4) \quad D_n(t) = \sum_{j=-n}^n e^{ijt} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t},$$

δίνει ένα απλό φράγμα για τις $\|\mathbf{S}_n\|^B$. Για την ακρίβεια, $\|D_n * f\|_B \leq \|D_n\|_{L^1} \|f\|_B$, ώστε

$$(2.5) \quad \|\mathbf{S}_n\|^B \leq \|D_n\|_{L^1}.$$

Οι αριθμοί $L_n = \|D_n\|_{L^1}$ ονομάζονται σταθερές του Lebesgue και μάλιστα ισχύει $L_n \sim \frac{4 \ln n}{\pi^2}$.

Για $B = L^1(\mathbb{T})$, η ανισότητα (2.5) ισχύει σαν ισότητα:

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\mathbf{K}_N$ τον πυρήνα του Fejer και θυμίζουμε ότι $\|\mathbf{K}_N\| = 1$. Έχουμε $\|\mathbf{S}_n\|^{L^1} \geq \|S_n(\mathbf{K}_N)\|_{L^1} = \|\sigma_N(D_n)\|_{L^1}$ και αφού $\sigma_N(D_n) \rightarrow D_n$, καθώς $N \rightarrow \infty$, παίρνουμε $\|\mathbf{S}_n\|^{L^1(\mathbb{T})} \geq \|D_n\|_{L^1}$. Συνεπώς $\|\mathbf{S}_n\|^{L^1(\mathbb{T})} = \|D_n\|_{L^1}$. Έπεται ότι ο $L^1(\mathbb{T})$ δεν επιδέχεται σύγκλιση ως προς νόρμα. $\square$

Για $B = C(\mathbb{T})$ η σύγκλιση ως προς νόρμα είναι απλά ομοιόμορφη σύγκλιση. Θα δείξουμε ότι οι σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων δεν είναι απαραίτητο να συγκλίνουν ομοιόμορφα με το να δείξουμε ότι οι $\|\mathbf{S}_n\|^{C(\mathbb{T})}$ δεν είναι φραγμένες. Ακριβέστερα, θα δείξουμε ότι $\|\mathbf{S}_n\|^{C(\mathbb{T})} = L_n$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ψ_n που ικανοποιεί την

$$\|\psi_n\|_\infty = \sup_t |\psi_n(t)| \leq 1$$

και τέτοια ώστε $\psi_n(t) = \text{sgn}(D_n(t))$ εκτός από μικρά, πεπερασμένα το πλήθος, διαστήματα B_n γύρω από τα σημεία ασυνέχειας της $\text{sgn}(D_n(t))$.

Αν $\lambda(B) = \lambda(\bigcup B_n) = \sum \lambda(B_n) < \frac{\varepsilon}{2n+1}$, τότε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}_n\|^{C(\mathbb{T})} &\geq |S_n(\psi_n, 0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int \psi_n(t) D_n(t) dt \right| \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T} \setminus B} |D_n(t)| dt - \left| \frac{1}{2\pi} \int_B \psi_n(t) D_n(t) dt \right| \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int |D_n(t)| dt - \frac{1}{2\pi} \int_B |D_n(t)| dt - \frac{1}{2\pi} \int_B |\psi_n(t)| |D_n(t)| dt \\ &\geq \frac{1}{2\pi} \int |D_n(t)| dt - \frac{(2n+1)\lambda(B)}{\pi} > L_n - \varepsilon, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν $0 \leq |D_n(t)| \leq 2n+1$, τότε $\int_B |D_n(t)| dt \leq (2n+1)\lambda(B)$. Τα παραπάνω, σε συνδυασμό με τη (2.5), αποδεικνύουν τον ισχυρισμό μας. $\square$

Για μια κλάση ομογενών χώρων Banach στον $\mathbb{T}$, το πρόβλημα της σύγκλισης ως προς τη νόρμα μπορεί να συσχετισθεί με το αναλλοίωτό τους ως προς συζυγία. Στο κεφάλαιο 1 ορίσαμε τη συζυγή σειρά μιας τριγωνομετρικής σειράς $\sum a_n e^{int}$ να είναι η σειρά $-i \sum \operatorname{sgn}(n) a_n e^{int}$. Αν $f \in L^1(\mathbb{T})$ και αν η συζυγής σειρά της $\sum \hat{f}(n) e^{int}$ είναι η σειρά Fourier κάποιας συνάρτησης $g \in L^1(\mathbb{T})$, καλούμε την g τη συζυγή συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με $\tilde{f}$.

Ορισμός 2.1.2. Ένας χώρος συναρτήσεων $B \subseteq L^1(\mathbb{T})$ επιδέχεται συζυγία αν για κάθε $f \in B$, η $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένη και ανήκει στο B .

Αν B είναι ένας ομογενής χώρος Banach που επιδέχεται συζυγία, η απεικόνιση $f \mapsto \tilde{f}$ είναι ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής στο B . Η γραμμικότητα είναι προφανής εξ' ορισμού και προκειμένου να αποδείξουμε ότι είναι φραγμένος, εφαρμόζουμε το Θεώρημα Κλειστού Γραφήματος. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\lim f_n = f$ και $\lim \tilde{f}_n = g$ στο B , τότε $g = \tilde{f}$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι για κάθε ακέραιο j

$$\begin{aligned} \hat{g}(j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\tilde{f}_n}(j) = \lim_{n \rightarrow \infty} -i \operatorname{sgn}(j) \hat{f}_n(j) \\ &= -i \operatorname{sgn}(j) \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n(j) = -i \operatorname{sgn}(j) \hat{f}(j) = \hat{\tilde{f}}(j). \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 1.2.12.

Αν ο B επιδέχεται συζυγία, η απεικόνιση

$$(2.6) \quad f \mapsto f^b = \frac{1}{2} \hat{f}(0) + \frac{1}{2} (f + i\tilde{f}) \sim \sum_0^\infty \hat{f}(j) e^{ijt}$$

είναι ένας καλά ορισμένος φραγμένος γραμμικός τελεστής στο B . Αντίστροφα, αν η απεικόνιση $f \mapsto f^b$ είναι καλά ορισμένη στον χώρο B , τότε ο B επιδέχεται συζυγία αφού $\tilde{f} = -i(2f^b - f - \hat{f}(0))$.

Θεώρημα 2.1.3. Έστω B ένας ομογενής χώρος Banach στον $\mathbb{T}$ και υποθέτουμε ότι για $f \in B$ και για κάθε n , $e^{int}f \in B$ και

$$(2.7) \quad \|e^{int}f\|_B = \|f\|_B.$$

Τότε ο B επιδέχεται συζυγία ανν επιδέχεται σύγκλιση ως προς τη νόρμα.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.1.1 και τις προηγούμενες παρατηρήσεις, αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση $f \mapsto f^b$ είναι καλά ορισμένη στον B ανν οι τελεστές S_n είναι ομοιόμορφα φραγμένοι στον B . Υποθέτουμε αρχικά ότι υπάρχει μια σταθερά K τ.ώ. $\|S_n\|^B \leq K$. Ορίζουμε

$$(2.8) \quad S_n^b(f) = \sum_0^{2n} \hat{f}(j)e^{ijt} = e^{int}S_n(e^{-int}f)$$

και από την (2.7) έχουμε $\|S_n^b\|^B \leq K$.

Έστω $f \in B$, $\varepsilon > 0$ και $P \in B$ ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο τ.ώ. $\|f - P\|_B \leq \varepsilon/2K$. Έχουμε

$$(2.9) \quad \|S_n^b(f) - S_n^b(P)\|_B = \|S_n^b(f - P)\|_B \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Αν $n, m > \deg(P)$, τότε $S_n^b(P) = S_m^b(P)$ και από την (2.9) έπεται ότι

$$\|S_n^b(f) - S_m^b(f)\|_B \leq \varepsilon.$$

Συνεπώς, η ακολουθία $\{S_n^b(f)\}$ είναι Cauchy στον B , άρα συγκλίνει και το όριο της έχει τη σειρά Fourier $\sum_0^\infty \hat{f}(j)e^{ijt}$. Άρα $f^b = \lim S_n^b(f) \in B$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $f \mapsto f^b$ είναι καλά ορισμένη και άρα φραγμένη στον B . Τότε

$$S_n^b(f) = f^b - e^{i(2n+1)t}(e^{-i(2n+1)t}f)^b$$

που σημαίνει ότι η $\|S_n^b\|^B$ είναι φραγμένη από δύο φορές τη νόρμα στο B της απεικόνισης $f \mapsto f^b$. Αφού, από τις (2.7), (2.8), $\|S_n\|^B = \|S_n^b\|^B$, το Θεώρημα έπεται. $\square$

Αποδεικνύεται ότι για $1 < p < \infty$, ο $L^p(\mathbb{T})$ επιδέχεται συζυγία και άρα καταλήγουμε στο

Θεώρημα 2.1.4. Για $1 < p < \infty$, η σειρά Fourier κάθε $f \in L^p(\mathbb{T})$ συγκλίνει στην f ως προς την $L^p(\mathbb{T})$ νόρμα.

2.2 Σύγκλιση και απόκλιση σε ένα σημείο

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι η σειρά Fourier μιας συνεχούς συνάρτησης δε συγκλίνει απαραίτητα ομοιόμορφα. Σ' αυτήν την ενότητα θα δείξουμε ότι μπορεί να μη συγκλίνει καν σημειακά και θα δώσουμε δύο κριτήρια για τη σύγκλισή της σε ένα σημείο.

Θεώρημα 2.2.1. Υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει σε ένα σημείο.

Θα δώσουμε δύο αποδείξεις που στην ουσία είναι μία: η πρώτη είναι «αφηρημένη», σύντομη και βασίζεται στην Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος. Η δεύτερη αποτελεί κατασκευή ενός συγκεκριμένου παραδείγματος με ουσιαστικά τον ίδιο τρόπο που αποδεικνύεται η Αρχή Ομοιόμορφου Φράγματος.

1η Απόδειξη. Οι απεικονίσεις $f \mapsto S_n(f, 0)$ είναι συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή στον $C(\mathbb{T})$. Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι αυτά τα συναρτησοειδή δεν είναι ομοιόμορφα φραγμένα και συνεπώς, από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, υπάρχει μια $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε η $\{S_n(f, 0)\}$ να μην είναι φραγμένη. Με άλλα λόγια, η σειρά Fourier της f αποκλίνει στο $t = 0$. $\square$

2η Απόδειξη. Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, $\exists \psi_n \in C(\mathbb{T})$:

$$(2.10) \quad \|\psi_n\|_\infty \leq 1$$

$$(2.11) \quad |S_n(\psi_n, 0)| > \frac{1}{2} \|D_n\|_{L^1} > \frac{1}{10} \log n.$$

Θέτουμε $\varphi_n(t) = \sigma_{n^2}(\psi_n, t) = \sum_{k=-n^2}^{n^2} \left(1 - \frac{|k|}{n^2+1}\right) \widehat{\psi_n}(k) e^{ikt}$ και παρατηρούμε ότι η φ_n είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n^2 που ικανοποιεί την

$$(2.12) \quad \|\varphi_n\|_\infty \leq 1.$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi_n}(m) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(t) e^{-imt} dt \\ &= \sum_{k=-n^2}^{n^2} \left(1 - \frac{|k|}{n^2+1}\right) \widehat{\psi_n}(k) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)t} dt \\ &= \begin{cases} \left(1 - \frac{|m|}{n^2+1}\right) \widehat{\psi_n}(m) & |m| \leq n^2 \\ 0 & |m| > n^2, \end{cases} \end{aligned}$$

οπότε παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} |S_n(\varphi_n, t) - S_n(\psi_n, t)| &= \left| \sum_{k=-n}^n \left[\left(1 - \frac{|k|}{n^2 + 1} \right) - 1 \right] \widehat{\psi}_n(k) e^{ikt} \right| \\ &\leq \sum_{k=-n}^n \frac{|k|}{n^2 + 1} = \frac{n(n+1)}{n^2 + 1} = 1 + \frac{n-1}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

και άρα

$$(2.13) \quad |S_n(\varphi_n, t) - S_n(\psi_n, t)| < 2.$$

Συνεπώς

$$(2.14) \quad |S_n(\varphi_n, 0)| > \frac{1}{10} \log n - 2.$$

Για $\lambda_n = 2^{3^n}$ ορίζουμε

$$(2.15) \quad f(t) = \sum \frac{1}{n^2} \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t)$$

και θα αποδείξουμε ότι η f είναι μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η σειρά Fourier αποκλίνει στο $t = 0$. Η συνέχεια της f έπεται άμεσα από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς (κριτήριο Weierstrass). Για να δείξουμε την απόκλιση της σειράς Fourier της f στο μηδέν, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (2.16) \quad \tilde{\varphi}_j(t) &= \varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t) = \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \left(1 - \frac{|m|}{\lambda_j^2 + 1} \right) \widehat{\psi}_{\lambda_j}(m) e^{im\lambda_j t} \\ &= \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m) e^{im\lambda_j t}. \end{aligned}$$

Επομένως, αφού

$$\widehat{\tilde{\varphi}}_j(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\varphi}_j(t) e^{-ikt} dt = \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m\lambda_j - k)t} dt,$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 (2.17) \quad \widehat{\tilde{\varphi}}_j(k) &= \begin{cases} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(m) & \text{αν } k = \lambda_j m, m \in \{-\lambda_j^2, \dots, \lambda_j^2\} \cap \mathbb{Z} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(k/\lambda_j) & \text{αν } \lambda_j \mid k \wedge |k| \leq \lambda_j^3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(k/\lambda_j) & \text{αν } \lambda_j \mid k \wedge |k| \leq \lambda_{j+1} \\ 0 & \text{αλλιώς,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

αφού επίσης $\lambda_j^3 = \lambda_{j+1}$. Αφού $f = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \tilde{\varphi}_n$, για οποιαδήποτε $l, n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε

$$(2.18) \quad S_l(f, 0) = S_l\left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \tilde{\varphi}_j, 0\right) + S_l\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \tilde{\varphi}_j, 0\right).$$

Τώρα, προφανώς

$$\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \tilde{\varphi}_j\right)(k) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \widehat{\tilde{\varphi}}_j(k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Αν $|k| < \lambda_{n+1}$, τότε για $j > n$, $\lambda_j \mid k \Leftrightarrow k = 0$. Έπεται από την (2.17) ότι, αν $|k| < \lambda_{n+1}$, τότε

$$\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \tilde{\varphi}_j\right)(k) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \widehat{\tilde{\varphi}}_j(k) = \begin{cases} \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{-2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0) & \text{αν } k = 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και επομένως, για τον δεύτερο όρο στο δεξιό μέλος της (2.18) έχουμε ότι

$$S_l\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \tilde{\varphi}_j, 0\right) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0),$$

εφόσον $l < \lambda_{n+1}$. Ειδικότερα, αυτό ισχύει για $l = \lambda_n$, δηλαδή

$$S_{\lambda_n}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \tilde{\varphi}_j, 0\right) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0),$$

αλλά και για $l = \lambda_n^2$, δηλαδή

$$(2.19) \quad S_{\lambda_n^2}\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \tilde{\varphi}_j, 0\right) = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \widehat{\varphi}_{\lambda_j}(0),$$

αφού και στις δύο αυτές περιπτώσεις $l < \lambda_{n+1} = \lambda_n^3$. Για τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της (2.18) παρατηρούμε ότι, για $j = n$,

$$\begin{aligned} S_l(n^{-2}\tilde{\varphi}_n, 0) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=-l}^l \widehat{\tilde{\varphi}_n}(k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k \in [-l, l], \lambda_n |k|, |k| \leq \lambda_{n+1}} \widehat{\varphi_{\lambda_n}}(k/\lambda_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{|k| \leq \min\{l, \lambda_{n+1}\}, \lambda_n |k|} \widehat{\varphi_{\lambda_n}}(k/\lambda_n) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{|m| \leq \min\{l, \lambda_{n+1}\}/\lambda_n} \widehat{\varphi_{\lambda_n}}(m), \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (2.17), για οποιοδήποτε $l \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, για $l = \lambda_n^2$ και αφού $\lambda_n^2 \leq \lambda_n^3 = \lambda_{n+1}$,

$$(2.20) \quad S_{\lambda_n^2}(n^{-2}\tilde{\varphi}_n, 0) = \frac{1}{n^2} \sum_{|m| \leq \lambda_n} \widehat{\varphi_{\lambda_n}}(m) = \frac{1}{n^2} S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0).$$

Τέλος, πάντα σε σχέση με τον πρώτο όρο της (2.18), $\forall j < n$ έχουμε από τις (2.16) και ((2.17) ότι

$$\begin{aligned} S_{\lambda_n^2}(j^{-2}\tilde{\varphi}_j, 0) &= \frac{1}{j^2} \sum_{k=-\lambda_n^2}^{\lambda_n^2} \widehat{\tilde{\varphi}_j}(k) \\ (2.21) \quad &= \frac{1}{j^2} \sum_{|k| \leq \lambda_j^3, \lambda_j |k|} \widehat{\varphi_{\lambda_j}}(k/\lambda_j) \\ &= \frac{1}{j^2} \sum_{|m| \leq \lambda_j^3/\lambda_j} \widehat{\varphi_{\lambda_j}}(m) \\ &= \frac{1}{j^2} \sum_{m=-\lambda_j^2}^{\lambda_j^2} \widehat{\varphi_{\lambda_j}}(m) = \frac{1}{j^2} \varphi_{\lambda_j}(0) \end{aligned}$$

και επειδή, αν $j < n$ τότε $\lambda_j^3 = \lambda_{j+1} \leq \lambda_n \leq \lambda_n^2$. Συνοψίζοντας, από τις

(2.19), (2.20), (2.21), έχουμε τελικά ότι, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 |S_{\lambda_n^2}(f, 0)| &= \left| S_{\lambda_n^2} \left(\sum_1^n \frac{1}{j^2} \varphi_{\lambda_j}(\lambda_j t), 0 \right) + S_{\lambda_n^2} \left(\frac{1}{n^2} \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t), 0 \right) + S_{\lambda_n^2} \left(\sum_{n+1}^\infty \frac{1}{j^2} \widehat{\varphi_{\lambda_j}}(0) \right) \right| \\
 &= \left| \sum_1^{n-1} \frac{1}{j^2} \varphi_{\lambda_j}(0) + \frac{1}{n^2} S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0) + \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{j^2} \widehat{\varphi_{\lambda_j}}(0) \right| \\
 &\geq \frac{1}{n^2} |S_{\lambda_n}(\varphi_{\lambda_n}, 0)| - \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{n\}} \frac{1}{j^2} \\
 &\geq \frac{\frac{\ln \lambda_n}{10} - 2}{n^2} - \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus \{n\}} \frac{1}{j^2} \\
 &= \frac{\ln \lambda_n}{10n^2} - \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{j^2} - \frac{1}{n^2} \\
 &= \frac{\ln \lambda_n}{10n^2} - \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n^2}.
 \end{aligned}$$

Επειδή όμως $\pi^2/6 < (22/7)^2/6 \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{n^2} < \frac{484}{294} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{484}{294} + 1 = \frac{778}{294} < 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$(2.22) \quad |S_{\lambda_n^2}(f, 0)| \geq \frac{K3^n}{n^2} \ln 2 - 3 \rightarrow \infty$$

(όπου $K = 1/10$) και το Θεώρημα έπεται. $\square$

Παρατήρηση 2.2.2.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n^2} \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t) + \sum_{n=m}^\infty \frac{1}{n^2} \varphi_{\lambda_n}(\lambda_n t).$$

Βάσει της 2.17, αν θέλουμε να έχουμε απόκλιση σε κάθε ρητό πολλαπλάσιο του 2π , αρκεί να πάρουμε $\lambda_n = n!2^{3^n}$.

Το πρώτο μας κριτήριο σύγκλισης είναι ένα απλό Tauberian Θεώρημα που οφείλεται στον Hardy.

Θεώρημα 2.2.3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και υποθέτουμε ότι

$$(2.23) \quad \hat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{καθώς} \quad |n| \rightarrow \infty.$$

Τότε οι $S_n(f, t)$ και $\sigma_n(f, t)$ συγκλίνουν για τα ίδια t και στο ίδιο όριο. Επίσης, αν η $\sigma_n(f, t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο σύνολο, το ίδιο συμβαίνει και για την $S_n(f, t)$.

Απόδειξη. Η (2.23) συνεπάγεται την επόμενη ασθενέστερη συνθήκη, που είναι αυτό που χρειαζόμαστε για το Θεώρημα: $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda > 1$ τ.ώ.

$$(2.24) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{n < |j| \leq \lambda n} |\hat{f}(j)| < \varepsilon.$$

Πράγματι, έστω $C := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |n \hat{f}(n)|$ και, λόγω της (2.23), έχουμε ότι $C < \infty$. Για τυχαίο $\varepsilon > 0$, έστω $\lambda \in (1, e^{\varepsilon/2C})$. Επειδή η συνάρτηση $x \mapsto 1/x$ είναι φθίνουσα (γνησίως), $j^{-1} < \int_{j-1}^j x^{-1} dx$, $\forall j \in \mathbb{N}$, οπότε

$$\begin{aligned} \sum_{n < |j| \leq \lambda n} |\hat{f}(j)| &\leq \sum_{n < |j| \leq \lambda n} \frac{C}{|j|} = 2 \sum_{n < j \leq \lambda n} \frac{C}{j} \leq 2C \sum_{n < j \leq \lambda n} \int_{j-1}^j \frac{dx}{x} \\ &= 2C \sum_{n < j \leq \lambda n} [\ln j - \ln(j-1)] \\ &= 2C [\ln \lfloor \lambda n \rfloor - \ln n] \leq 2C \ln \lambda, \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παίρνοντας $\limsup$, και αφού $2C \ln \lambda < \varepsilon$, προκύπτει η ζητούμενη. Τώρα, για $\lambda > 1$,

$$\begin{aligned} &\frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f, t) - \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_n(f, t) \\ &= \frac{S_0(f, t) + \cdots + S_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f, t) - S_0(f, t) - \cdots - S_n(f, t)}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \\ &= \frac{S_{n+1}(f, t) + \cdots + S_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f, t)}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \\ &= \frac{1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sum_{n < j \leq \lambda n} \sum_{k=-j}^j \hat{f}(k) e^{ikt} \end{aligned}$$

Ισχύει όμως ότι

$$n < j \leq \lambda n \quad \wedge \quad -j \leq k \leq j \quad \Leftrightarrow \quad -\lfloor \lambda n \rfloor \leq k \leq \lambda n \quad \wedge \quad \lfloor \lambda n \rfloor \geq j \geq \max\{n+1, |k|\}.$$

Άρα το τελευταίο άθροισμα γράφεται ως

$$\begin{aligned}
& \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_{[\lambda n]}(f, t) - \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_n(f, t) \\
&= \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=-[\lambda n]}^{[\lambda n]} \sum_{\max\{n+1, |k|\} \leq j \leq [\lambda n]} \widehat{f}(k) e^{ikt} \\
&= \frac{1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=-[\lambda n]}^{[\lambda n]} ([\lambda n] - \max\{n + 1, |k|\} + 1) \widehat{f}(k) e^{ikt} \\
&= \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=-[\lambda n]}^{[\lambda n]} \left(1 - \frac{\max\{n + 1, |k|\}}{[\lambda n] + 1}\right) \widehat{f}(k) e^{ikt} \\
&= \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sum_{k=-n}^n \left(1 - \frac{n + 1}{[\lambda n] + 1}\right) \widehat{f}(k) e^{ikt} + \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sum_{n < |k| \leq \lambda n} \left(1 - \frac{|k|}{[\lambda n] + 1}\right) \widehat{f}(k) e^{ikt} \\
&= S_n(f, t) + \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sum_{n < |k| \leq \lambda n} \left(1 - \frac{|k|}{[\lambda n] + 1}\right) \widehat{f}(k) e^{ikt}
\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
(2.25) \quad S_n(f, t) &= \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_{[\lambda n]}(f, t) - \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_n(f, t) \\
&\quad - \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sum_{n < |k| \leq \lambda n} \left(1 - \frac{|k|}{[\lambda n] + 1}\right) \widehat{f}(k) e^{ikt}.
\end{aligned}$$

Τώρα, από την (2.24), $\forall \varepsilon > 0$ υπάρχουν $\lambda > 1$ και $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ώ. $\forall n \geq n_0$

$$\sum_{n < |j| \leq \lambda n} \left(1 - \frac{|j|}{[\lambda n] + 1}\right) |\widehat{f}(j)| \leq \sum_{n < |j| \leq \lambda n} |\widehat{f}(j)| < \varepsilon,$$

επειδή $0 \leq [1 - |j|/([\lambda n] + 1)] \leq 1$ για κάθε j με $|j| \leq [\lambda n]$.

Αν υποθέσουμε ότι $\sigma_n(f, t) \rightarrow \sigma(f, t)$ για κάποιο $t \in \mathbb{T}$, τότε και $\sigma_{[\lambda n]}(f, t) \rightarrow \sigma(f, t)$, καθώς $n \rightarrow \infty$, γι' αυτό το t . Επίσης

$$\frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda - 1} \quad \text{και} \quad \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} \rightarrow \frac{1}{\lambda - 1},$$

αφού $[\lambda n]/n \rightarrow \lambda$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Επομένως

$$\frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_{[\lambda n]}(f, t) \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda - 1} \sigma(f, t) \quad \text{και} \quad \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_n(f, t) \rightarrow \frac{1}{\lambda - 1} \sigma(f, t)$$

και άρα

$$\frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_{[\lambda n]}(f, t) - \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_n(f, t) \rightarrow \sigma(f, t),$$

καθώς $n \rightarrow \infty$. Άρα $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, το οποίο μπορούμε να επιλέξουμε ώστε να ισχύει $n_1 \geq n_0$, ώστε $\forall n \geq n_1$

$$(2.26) \quad \left| \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_{[\lambda n]}(f, t) - \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_n(f, t) - \sigma(f, t) \right| < \varepsilon$$

οπότε, από την (2.25)

$$(2.27) \quad \begin{aligned} & |S_n(f, t) - \sigma(f, t)| \\ & \leq \left| \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_{[\lambda n]}(f, t) - \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_n(f, t) - \sigma(f, t) \right| \\ & + \left| \sum_{n \leq |j| \leq \lambda n} \left(1 - \frac{|j|}{[\lambda n] + 1} \right) \widehat{f}(j) e^{ijt} \right| < 2\varepsilon, \quad \forall n \geq n_1. \end{aligned}$$

και άρα δείξαμε το πρώτο μέρος του θεωρήματος.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι, αν η $\sigma_n(f, t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς t σε κάποιο σύνολο $E \subseteq \mathbb{T}$, το ίδιο συμβαίνει και για την $S_n(f, t)$. Αφού οι ακολουθίες

$$\left(\frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{και} \quad \left(\frac{n + 1}{[\lambda n] - n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

συγκλίνουν, είναι φραγμένες και έστω A ένα κοινό τους φράγμα. Τότε

$$(2.28) \quad \begin{aligned} & \left| \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_{[\lambda n]}(f, t) - \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} \sigma_n(f, t) - \sigma(f, t) \right| \\ & = \left| \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} [\sigma_{[\lambda n]}(f, t) - \sigma(f, t)] - \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} [\sigma_n(f, t) - \sigma(f, t)] \right| \\ & \leq \frac{[\lambda n] + 1}{[\lambda n] - n} |\sigma_{[\lambda n]}(f, t) - \sigma(f, t)| + \frac{n + 1}{[\lambda n] - n} |\sigma_n(f, t) - \sigma(f, t)| \\ & \leq A (|\sigma_{[\lambda n]}(f, t) - \sigma(f, t)| + |\sigma_n(f, t) - \sigma(f, t)|). \end{aligned}$$

Αν $\sigma_n(f, t) \rightarrow \sigma(f, t)$ ομοιόμορφα ως προς t σε κάποιο σύνολο $E \subseteq \mathbb{T}$, τότε $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ τ.ώ. $|\sigma_n(f, t) - \sigma(f, t)| < \varepsilon/2A$ για κάθε $t \in E$, για κάθε $n \geq n_1$, δηλ.

$$\sup_{t \in E} |\sigma_n(f, t) - \sigma(f, t)| < \varepsilon/2A \quad \forall n \geq n_1$$

Όμως, επειδή $\lambda > 1$ και άρα $\lfloor \lambda n \rfloor \geq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι και $|\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f, t) - \sigma(f, t)| < \varepsilon/2A$ για κάθε $t \in E$, για κάθε $n \geq n_1$ και άρα

$$|\sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f, t) - \sigma(f, t)| + |\sigma_n(f, t) - \sigma(f, t)| < \varepsilon/A$$

για κάθε $t \in E$ και $n \geq n_1$. Έπεται από την (2.28), ότι

$$\left| \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f, t) - \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_n(f, t) - \sigma(f, t) \right| < \varepsilon$$

για κάθε $t \in E$ και $n \geq n_1$, δηλαδή

$$\sup_{t \in E} \left| \frac{\lfloor \lambda n \rfloor + 1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_{\lfloor \lambda n \rfloor}(f, t) - \frac{n+1}{\lfloor \lambda n \rfloor - n} \sigma_n(f, t) - \sigma(f, t) \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_1.$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Πόρισμα 2.2.4. Έστω f φραγμένης κύμανσης στον $\mathbb{T}$. Τότε τα μερικά αθροίσματα $S_n(f, t)$ συγκλίνουν στο $\frac{1}{2}(f(t+0) + f(t-0))$ και συγκεκριμένα στην $f(t)$ σε κάθε σημείο συνέχειάς της. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κλειστά διαστήματα συνέχειας της f .

Απόδειξη. Από το Θεώρημα του Fejer τα προαναφερθέντα ισχύουν για τον $\sigma_n(f, t)$ και, αφού για συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης, η (2.23) ισχύει (βλ. Θεώρημα 1.4.7), το συμπέρασμα έπεται από το προηγούμενο Θεώρημα. $\square$

Λήμμα 2.2.5. Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και υποθέτουμε ότι $\int_{-1}^1 \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt < \infty$. Τότε

$$\lim S_n(f, 0) = 0.$$

Απόδειξη. Αφού $S_n(f, t) = (D_n * f)(t)$ και ο D_n είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\begin{aligned} S_n(f, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{f(t)}{\sin t/2} \sin((n+1/2)t) dt = \\ (2.29) \quad &= \frac{1}{2\pi} \int f(t) \cos nt dt + \frac{1}{2\pi} \int \frac{f(t) \cos t/2}{\sin t/2} \sin t dt. \end{aligned}$$

Εξ' υποθέσεώς μας $\frac{f(t) \cos t/2}{\sin t/2} \in L^1(\mathbb{T})$. Συνεπώς, από το Λήμμα Riemann – Lebesgue, όλα τα ολοκληρώματα στην (2.29) τείνουν στο μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$. $\square$

Θεώρημα 2.2.6 (Αρχή της τοπικότητας του Riemann). Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$ και υποθέτουμε ότι $f(t) = 0, \forall t \in I$, όπου I ένα ανοικτό διάστημα. Τότε $S_n(f, t) \rightarrow 0$ για $t \in I$, και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κλειστά υποδιαστήματα του I .

Απόδειξη. Η σύγκλιση στο μηδέν σε κάθε $t \in I$ είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.2.5. Αν $I_0 \subseteq I$ κλειστό, οι συναρτήσεις $\varphi_{t_0}(t) = \frac{f(t-t_0) \cos t/2}{\sin t/2}$, $t_0 \in I_0$, σχηματίζουν μια συμπαγή οικογένεια στον $L^1(\mathbb{T})$, συνεπώς από την παρατήρηση 1.2.14, τα ολοκληρώματα στην (2.29) που αντιστοιχούν στις $f(t - t_0)$, $t_0 \in I_0$, τείνουν ομοιόμορφα στο μηδέν. $\square$

Η αρχή της τοπικότητας συχνά αναφέρεται ως εξής: έστω $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ και υποθέτουμε ότι $f(t) = g(t)$ σε κάποια γειτονιά του t_0 . Τότε οι σειρές Fourier των f και g στο t_0 είτε συγκλίνουν αμφότερες στο ίδιο όριο είτε αποκλίνουν αμφότερες με τον ίδιο τρόπο.

Μια άλλη άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.2.5 είναι το

Θεώρημα 2.2.7 (Dini). Έστω $f \in L^1(\mathbb{T})$. Αν

$$\int_{-1}^1 \left| \frac{f(t + t_0) - f(t_0)}{t} \right| dt < \infty$$

τότε

$$S_n(f, t_0) \rightarrow f(t_0).$$

Κεφάλαιο 3

Μετασχηματισμός Fourier στην πραγματική ευθεία

3.1 Μετασχηματισμοί Fourier στον $L^1(\mathbb{R})$

Συμβολίζουμε με $L^1(\mathbb{R})$ τον χώρο των Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στην πραγματική ευθεία. Για $f \in L^1(\mathbb{R})$ γράφουμε

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int |f(x)| dx,$$

και όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, γράφουμε $\|f\|_{L^1}$ ή απλά $\|f\|$. Ο μετασχηματισμός Fourier $\hat{f}$ της f ορίζεται ως

$$(3.1) \quad \hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Αυτός ο ορισμός είναι ανάλογος με τον (1.5) και η εξαφάνιση του παράγοντα $1/2\pi$ οφείλεται απλώς στην (αυθαίρετη) επιλογή μας να τον αφαιρέσουμε. Ήταν ένας φυσικός παράγοντας κανονικοποίησης του μέτρου Lebesgue στον $\mathbb{T}$ αλλά σε αυτό το σημείο, φαίνεται αυθαίρετος για τον $\mathbb{R}$. Ο παράγοντας $1/2\pi$ θα επανεμφανισθεί στον τύπο αντιστροφής και συχνά στην βιβλιογραφία, για να υπάρχει περισσότερη συμμετρία στον τύπο αντιστροφής, βρίσκουμε ένα $\sqrt{1/2\pi}$ μπροστά από το ολοκλήρωμα (3.1), ώστε ο ίδιος παράγοντας να εμφανίζεται στο μετασχηματισμό Fourier και τον αντίστροφό του. Η πρόσθετη συμμετρία, ωστόσο, αυξάνει την πιθανότητα σύγχυσης μεταξύ των πεδίων ορισμού της συνάρτησης και του μετασχηματισμού της. Στον $L^1(\mathbb{T})$ οι συναρτήσεις ορίζονται στον $\mathbb{T}$, ενώ οι μετασχηματισμοί Fourier ορίζονται στους ακεραίους. Στον $L^1(\mathbb{R})$ οι συναρτήσεις ορίζονται στον $\mathbb{R}$ και το πεδίο

ορισμού των μετασχηματισμών Fourier είναι πάλι η πραγματική ευθεία, που θα συμβολίζεται με $\mathbb{R}$ για να ξεχωρίζει από το πεδίο ορισμού της f . Οι περισσότερες από τις στοιχειώδεις ιδιότητες των συντελεστών Fourier ισχύουν και για τους μετασχηματισμούς Fourier.

Θεώρημα 3.1.1. Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε:

1. $\widehat{f+g}(\xi) = \hat{f}(\xi) + \hat{g}(\xi)$.
2. $\widehat{af}(\xi) = a\hat{f}(\xi) \forall a \in \mathbb{C}$.
3. Αν $\bar{f}$ η συζυγής συνάρτηση της f , τότε $\hat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.
4. Συμβολίζουμε $f_y(x) = f(x-y)$, $y \in \mathbb{R}$. Τότε $\hat{f}_y(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{-i\xi y}$.
5. $|\hat{f}(\xi)| \leq \int |f(x)| dx = \|f\|$.
6. Για $\lambda > 0$ ορίζουμε

$$\varphi(x) = \lambda f(\lambda x).$$

Τότε

$$\hat{\varphi}(\xi) = \hat{f}(\xi/\lambda).$$

Απόδειξη. Το Θεώρημα έπεται άμεσα από την (3.1). Τα μέρη (1) – (5) είναι τα αντίστοιχα των μερών του 1.1.6. Το (6) αποδεικνύεται με μια αλλαγή μεταβλητής $y = \lambda x$:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int f(\lambda x) e^{-i(\xi/\lambda)\lambda x} d\lambda x = \int f(y) e^{-i(\xi/\lambda)x} dy = \hat{f}(\xi/\lambda). \quad \square$$

Θεώρημα 3.1.2. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε ο $\hat{f}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη.

$$\hat{f}(\xi + \eta) - \hat{f}(\xi) = \int f(x)(e^{-i(\xi+\eta)x} - e^{-i\xi x}) dx,$$

συνεπώς

$$(3.2) \quad |\hat{f}(\xi + \eta) - \hat{f}(\xi)| \leq \int |f(x)| |e^{-i\eta x} - 1| dx.$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (3.2) είναι ανεξάρτητο του ξ , το εσωτερικό του ολοκληρώματος είναι φραγμένο από $2|f(x)|$ και τείνει στο 0 παντού, καθώς $\eta \rightarrow 0$. $\square$

Θεώρημα 3.1.3. Έστω $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Για σχεδόν όλα τα x , η $f(x-y)g(y)$ είναι ολοκληρώσιμη (ως συνάρτηση του y) και, αν γράψουμε

$$h(x) = \int f(x-y)g(y) dy,$$

τότε $h \in L^1(\mathbb{R})$ και

$$\|h\| \leq \|f\| \|g\|.$$

Επιπλέον,

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \quad \forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}.$$

Όπως και στο κεφάλαιο 1, γράφουμε $h = f * g$, καλούμε την h συνέλιξη των f και g και παρατηρούμε ότι είναι μια πράξη αντισυμμετρική, προσεταιριστική και επιμεριστική (ως προς την πρόσθεση).

Θεώρημα 3.1.4. Έστω $f, h \in L^1(\mathbb{R})$ και

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int H(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

με $H(\xi)$ ολοκληρώσιμη. Τότε

$$(3.3) \quad (h * f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int H(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $H(\xi)f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς (ξ, y) , συνεπώς από το Θεώρημα του Fubini,

$$\begin{aligned} (h * f)(x) &= \int h(x-y)f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int \int H(\xi) e^{i\xi x} e^{-i\xi y} f(y) d\xi dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int H(\xi) e^{i\xi x} \int e^{-i\xi y} f(y) dy d\xi = \frac{1}{2\pi} \int H(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad \square \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.1.5. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και ορίζουμε

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Τότε, αν $F \in L^1(\mathbb{R})$ έχουμε

$$(3.4) \quad \hat{F}(\xi) = \frac{\hat{f}(\xi)}{i\xi}, \quad \forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}, \xi \neq 0.$$

Ένας ισοδύναμος ισχυρισμός του θεωρήματος είναι ο εξής: εάν η F είναι διαφορίσιμη παντού στο $\mathbb{R}$ και $F, F' \in L^1(\mathbb{R})$, τότε $\widehat{F'}(\xi) = i\xi \hat{F}(\xi)$.

Θεώρημα 3.1.6. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε η $\hat{f}$ είναι παραγωγίσιμη και

$$(3.5) \quad \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi) = \widehat{(-ixf)}(\xi).$$

Απόδειξη.

$$(3.6) \quad \frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \int f(x) e^{-i\xi x} \left(\frac{e^{-ihx} - 1}{h} \right) dx.$$

Το εσωτερικό του ολοκληρώματος στην (3.6) είναι φραγμένο κατά απόλυτη τιμή από $xf(x)$ (το οποίο ανήκει στον $L^1(\mathbb{R})$ εξ' υποθέσεως) και τείνει στο $-ixf(x)e^{-i\xi x}$ κατά σημείο, επομένως (Lebesgue) συγκλίνει στο $-ixf(x)e^{-i\xi x}$ ως προς την νόρμα του $L^1(\mathbb{R})$. Αυτό σημαίνει ότι, καθώς $h \rightarrow 0$, το δεξί μέρος της (3.6) συγκλίνει στο $\widehat{(-ixf)}(\xi)$ και το Θεώρημα έπεται. $\square$

Θεώρημα 3.1.7 (Λήμμα Riemann – Lebesgue). Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε

$$(3.7) \quad \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Απόδειξη. Αν g είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και με συμπαγή φορέα, από τα Θεωρήματα 3.1.1 και 3.1.5, έχουμε ότι $|\xi \hat{g}(\xi)| \leq \|g'\|_{L^1(\mathbb{R})}$ και άρα $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{g}(\xi)| = 0$. Για αυθαίρετη $f \in L^1(\mathbb{R})$, έστω $\varepsilon > 0$ και g συνεχώς παραγωγίσιμη με συμπαγή φορέα τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Έχουμε $|\hat{f}(\xi) - \hat{g}(\xi)| \leq \|f - g\|_1 < \varepsilon$ και $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{g}(\xi)| = 0$. Συνεπώς $\limsup_{|\xi| \rightarrow \infty} |\hat{f}(\xi)| < \varepsilon$. Αφού το τελευταίο ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, παίρνουμε $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$. $\square$

Συμβολίζουμε με $A(\hat{\mathbb{R}})$ το χώρο όλων των συναρτήσεων φ στο $\hat{\mathbb{R}}$ οι οποίες αποτελούν τους μετασχηματισμούς Fourier συναρτήσεων στο $L^1(\mathbb{R})$. Από τα παραπάνω αποτελέσματα, ο $A(\hat{\mathbb{R}})$ είναι μια άλγεβρα ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο, δηλαδή μια υποάλγεβρα του $C_0(\hat{\mathbb{R}})$ (=η άλγεβρα όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $\hat{\mathbb{R}}$ που μηδενίζονται στο άπειρο). Εισάγουμε μια νόρμα στον $A(\hat{\mathbb{R}})$ μεταφέροντας σε αυτόν τη νόρμα του $L^1(\mathbb{R})$, δηλαδή

$$\|\hat{f}\|_{A(\hat{\mathbb{R}})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Έπεται από το 3.1.3 ότι η νόρμα $\|\cdot\|_{A(\hat{\mathbb{R}})}$ είναι υποπολλαπλασιαστική, δηλ. ικανοποιεί την ανισότητα:

$$\|\varphi_1 \varphi_2\|_{A(\hat{\mathbb{R}})} \leq \|\varphi_1\|_{A(\hat{\mathbb{R}})} \|\varphi_2\|_{A(\hat{\mathbb{R}})}.$$

Η νόρμα $\|\cdot\|_{A(\hat{\mathbb{R}})}$ δεν είναι ισοδύναμη με τη $\sup$ νόρμα. Συνεπώς, ο $A(\hat{\mathbb{R}})$ είναι γνήσια υποάλγεβρα του $C_0(\hat{\mathbb{R}})$.

Ένας πυρήνας ολοκληρωσιμότητας στην πραγματική ευθεία είναι μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων $\{k_\lambda\}$ ορισμένων στο $\mathbb{R}$, με διακριτή ή συνεχή παράμετρο, που ικανοποιεί τα κάτωθι:

$$(3.8) \quad \int k_\lambda(x) dx = 1.$$

$$(3.9) \quad \exists M > 0 : \|k_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq M, \quad \text{καθώς } \lambda \rightarrow \infty.$$

$$(3.10) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} |k_\lambda(x)| dx = 0, \quad \forall \delta > 0.$$

Ένας κοινός τρόπος για να παράγουμε πυρήνες στο $\mathbb{R}$ είναι να πάρουμε μια συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $\int f(x) dx = 1$ και να γράψουμε $k_\lambda(x) = \lambda f(\lambda x)$ για $\lambda > 0$. Οι συνθήκες (3.8) – (3.10) ικανοποιούνται αφού, με την αλλαγή μεταβλητής $y = \lambda x$, παίρνουμε

$$\int k_\lambda(x) dx = \int f(y) dy = 1$$

$$\|k_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int |k_\lambda(x)| dx = \int |f(y)| dy = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

και

$$\int_{|x| > \delta} |k_\lambda(x)| dx = \int_{|y| > \lambda\delta} |f(y)| dy \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0.$$

Ο πυρήνας του Fejer στο $\mathbb{R}$ ορίζεται ως

$$(3.11) \quad \mathbf{K}_\lambda(x) = \lambda \mathbf{K}(\lambda x), \quad \lambda > 0$$

όπου

$$(3.12) \quad \mathbf{K}(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{i\xi x} d\xi.$$

Συνεπώς,

$$(3.13) \quad \mathbf{K}_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi\lambda} \left(\frac{\sin \lambda x/2}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda} \right) e^{i\xi x} d\xi.$$

Η δεύτερη ισότητα στην (3.12) προκύπτει άμεσα με ολοκλήρωση. Από την προηγούμενη παρατήρηση είναι προφανές ότι προκειμένου να αποδειχθεί ότι ο $\{\mathbf{K}_\lambda\}$ είναι πυρήνας, αρκεί να δείξουμε ότι $\int \mathbf{K}(x) dx = 1$.

Αυτό μπορεί να γίνει είτε απευθείας, π.χ. με μιγαδική ολοκλήρωση, είτε χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που έχουμε για τον πυρήνα του Fejer στον κύκλο, δηλαδή ότι $\forall \delta \in (0, \pi)$

$$(3.14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 dx = 1.$$

Αφού $\int \mathbf{K}(x) dx = \int \mathbf{K}_\lambda(x) dx$, μπορούμε να πάρουμε $\lambda = n+1$, οπότε $\mathbf{K}_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2$ και έτσι

$$(3.15) \quad \left(\frac{\sin \delta}{\delta} \right)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 dx < \int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{K}_\lambda(x) dx < \\ < \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)} \right)^2 dx.$$

Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$, βλέπουμε ότι $\int \mathbf{K}(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{K}_\lambda(x) dx$ είναι ένας αριθμός μεταξύ των $\left(\frac{\sin \delta}{\delta} \right)^2$ και 1. Αφού το $\delta > 0$ ήταν αυθαίρετο, έχουμε ότι $\int \mathbf{K}(x) dx = 1$.

Θεώρημα 3.1.8. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $k_\lambda \in \mathbb{R}$ πυρήνας. Τότε

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|f - k_\lambda * f\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0.$$

Απόδειξη. Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του θεωρήματος 1.2.3 και του Λήμματος 1.2.5. $\square$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1.8 για τον πυρήνα του Fejer και με την βοήθεια του θεωρήματος 3.1.4, παίρνουμε το

Θεώρημα 3.1.9. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Τότε

$$(3.16) \quad f = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda} \right) \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

ως προς την $L^1(\mathbb{R})$ νόρμα.

Θεώρημα 3.1.10 (Θεώρημα Μοναδικότητας). Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και υποθέτουμε ότι $\hat{f}(\xi) = 0 \forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$. Τότε $f = 0$.

Αν $\hat{f}(\xi) \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$, το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (3.16) συγκλίνει, ομοιόμορφα ως προς x , στο ολοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$. Βλέπουμε ότι

η f είναι ισοδύναμη με μια ομοιόμορφα συνεχή συνάρτηση και έτσι καταλήγουμε στον αποκαλούμενο τύπο αντιστροφής:

$$(3.17) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Μια άμεση συνέπεια της (3.17) είναι η

$$(3.18) \quad \widehat{\mathbf{K}_\lambda}(\xi) = \max\left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}, 0\right)$$

και, από το Θεώρημα 3.1.3,

$$(3.19) \quad \widehat{\mathbf{K}_\lambda * f}(\xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{f}(\xi), & |\xi| < \lambda \\ 0, & |\xi| \geq \lambda. \end{cases}$$

Συνδυάζοντας το με το Θεώρημα 3.1.8, παίρνουμε το

Θεώρημα 3.1.11. *Οι συναρτήσεις των οποίων οι μετασχηματισμοί Fourier έχουν συμπαγή φορέα αποτελούν πυκνό υπόχωρο του $L^1(\mathbb{R})$.*

Το παραπάνω Θεώρημα είναι ανάλογο του ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα αποτελούν πυκνό υπόχωρο του $L^1(\mathbb{T})$.

Εκτός από τον πυρήνα του Fejer, αναφέρουμε τους παρακάτω πυρήνες:

1. Ο πυρήνας de la Vallee Poussin:

$$(3.20) \quad \mathbf{V}_\lambda(x) = 2\mathbf{K}_{2\lambda}(x) - \mathbf{K}_\lambda(x),$$

με μετασχηματισμό Fourier

$$(3.21) \quad \hat{\mathbf{V}}_\lambda(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \leq \lambda \\ 2 - \frac{|\xi|}{\lambda}, & \lambda \leq |\xi| < 2\lambda \\ 0, & 2\lambda \leq |\xi|. \end{cases}$$

2. Ο πυρήνας του Poisson

$$\mathbf{P}_\lambda(x) = \lambda \mathbf{P}(\lambda x),$$

όπου

$$(3.22) \quad \mathbf{P}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

και

$$(3.23) \quad \hat{\mathbf{P}}(\xi) = e^{-|\xi|},$$

3. Ο πυρήνας του Gauss

$$G_\lambda(x) = \lambda G(\lambda x),$$

όπου

$$(3.24) \quad G(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

και

$$(3.25) \quad \hat{G}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

Στον τύπο αντιστροφής (3.17) και την ολοκληρωσιμότητα ως προς τη νόρμα (θεωρήματα 3.1.8 και 3.1.9) πρέπει να προσθέσουμε αποτελέσματα σχετικά με την ολοκληρωσιμότητα κατά σημείο. Οι διατυπώσεις και οι αποδείξεις της ενότητας 1.3 μπορούν να υιοθετηθούν και στον $L^1(\mathbb{R})$ σχεδόν επί λέξη και δε θα τα επαναλάβουμε.

Όπως και στην ενότητα 1.2, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη νόρμα του $L^1(\mathbb{R})$, όσον αφορά τα θεωρήματα 3.1.8 και 3.1.9, με τη νόρμα οποιουδήποτε ομογενούς χώρου Banach $B \subset L^1(\mathbb{R})$. Όπως και στην ενότητα 1.2, ένας ομογενής χώρος Banach είναι ένας χώρος συναρτήσεων για τον οποίο ισχύει ότι $\forall f \in B$, η $f_y(x) = f(x - y) \in B$ και η f_y είναι συνεχής ως προς το y . Η υπόθεση $B \subset L^1(\mathbb{R})$ είναι πιο περιοριστική από εκείνη του κεφαλαίου 1, δηλ. $B \subset L^1(\mathbb{T})$, μιας και αποκλείει κάποιους χώρους όπως ο $L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$. Μπορούμε να αποκτήσουμε μια γενική θεωρία θεωρώντας ομογενείς χώρους Banach τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, δηλ. συναρτήσεων Lebesgue ολοκληρώσιμων σε κάθε πεπερασμένο διάστημα. Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}$ τον χώρο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων f στον $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει

$$\|f\|_{\mathcal{L}} = \sup_y \int_y^{y+1} |f(x)| dx < \infty$$

και με $\mathcal{L}_c$ τον υπόχωρο του $\mathcal{L}$ που περιέχει όλες τις συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει

$$\|f_y - f\|_{\mathcal{L}} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0.$$

Θεώρημα 3.1.12. Αν ο B είναι ένας ομογενής χώρος Banach τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$ και αν η σύγκλιση στο B συνεπάγεται σύγκλιση κατά μέτρο, τότε η $\mathcal{L}$ - νόρμα κυριαρχείται από την νόρμα του B , και συγκεκριμένα $B \subset \mathcal{L}_c$.

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο, ότι η νόρμα του $\mathcal{L}$ δεν κυριαρχείται από τη $\|\cdot\|_B$, δηλ. $\forall c > 0 \exists g \in B$ τ.ώ. $\|g\|_{\mathcal{L}} > c\|g\|_B$. Για $c = 6^n$, $\exists g_n \in B$ τ.ώ. $\|g_n\|_{\mathcal{L}} > 6^n\|g_n\|_B$. Επιλέγουμε $f_n = 2^{-n}\|g_n\|_B^{-1}g_n$. Τότε

$$\begin{aligned}\|f_n\|_B &= 2^{-n}\|g_n\|_B^{-1}\|g_n\|_B = 2^{-n} \\ \|f_n\|_{\mathcal{L}} &= 2^{-n}\|g_n\|_B^{-1}\|g_n\|_{\mathcal{L}} > 2^{-n}\|g_n\|_B^{-1}6^n\|g_n\|_B = 3^n.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την f_n με την $f_n(x - y_n)$, για κατάλληλο $y_n \in \mathbb{R}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$(3.26) \quad \int_0^1 |f_n(x)| dx > 3^n.$$

Αφού $\|f_n\|_B \rightarrow 0$, η f_n συγκλίνει στο μηδέν κατά μέτρο και έπεται ότι αν $n_j \rightarrow \infty$ αρκετά γρήγορα, τότε η $\sum f_{n_j}$, που ανήκει στο B , δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$. $\square$

Μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε το Θεώρημα 3.1.8 σε ομογενείς χώρους Banach τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Το Θεώρημα 3.1.9 μπορεί να γενικευτεί μόνο μετά την επέκταση του ορισμού του μετασχηματισμού Fourier.

Ολοκληρώνουμε αυτήν την ενότητα με μια παρατήρηση σχετικά με τη σχέση των συντελεστών Fourier και του μετασχηματισμού Fourier. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$ και ορίζουμε τη φ ως

$$(3.27) \quad \varphi(t) = 2\pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(t + 2\pi j).$$

Το t είναι ένας πραγματικός αριθμός, αλλά είναι προφανές ότι η $\varphi(t)$ εξαρτάται μόνο από τα $t \bmod 2\pi$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη φ ως ορισμένη στον $\mathbb{T}$. Προφανώς έχουμε ότι $\varphi \in L^1(\mathbb{T})$ και

$$\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Για $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$\hat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi} \int \varphi(t) e^{-int} dt = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(t+2\pi j) e^{-int} dt = \int f(x) e^{-inx} dx = \hat{f}(n),$$

δηλ. η $\hat{\varphi}$ είναι απλώς ο περιορισμός της $\hat{f}$ στους ακεραίους. Ομοίως, αν γράψουμε $f_\lambda(x) = \lambda f(\lambda x)$ και

$$(3.28) \quad \varphi_\lambda(t) = 2\pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_\lambda(t + 2\pi j),$$

από το Θεώρημα 3.1.1 παίρνουμε

$$(3.29) \quad \hat{\varphi}_\lambda(n) = \hat{f}\left(\frac{n}{\lambda}\right).$$

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις, όσο απλές και αν φαίνονται, συνδέουν τη θεωρία των μετασχηματισμών Fourier με αυτή των συντελεστών Fourier, οπότε μπορούμε να συνάγουμε πολλά αποτελέσματα για τους μετασχηματισμούς Fourier από τα αντίστοιχα των σειρών Fourier. Μια εφαρμογή της προηγούμενης διαδικασίας είναι ο πολύ σημαντικός τύπος του *Poisson*:

$$(3.30) \quad 2\pi\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2\pi\lambda n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{n}{\lambda}\right).$$

Προκειμένου να αποδείξουμε, να κατανοήσουμε το νόημά του και το πεδίο ορισμού του τύπου του Poisson, χρειάζεται απλά να τον ξαναγράψουμε ως:

$$(3.31) \quad \varphi_\lambda(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}_\lambda(n).$$

Αν το $\varphi_\lambda(0)$, όπως ορίσθηκε στην (3.28), είναι καλά ορισμένο και αν η σειρά Fourier της φ_λ συγκλίνει στο $\varphi_\lambda(0)$ για $t = 0$, τότε οι (3.30) και (3.31) ισχύουν. Η γενικότητα της (3.30) ενισχύεται σημαντικά αν το άθροισμα στο δεξί μέλος αντικατασταθεί από το

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{-N}^N \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \hat{f}\left(\frac{n}{\lambda}\right),$$

δηλ. αν αντί για αθροισμότητα χρησιμοποιηθεί $C - 1$ αθροισμότητα. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Fejer παίρνουμε ότι, με αυτήν την ερμηνεία, η (3.30) ισχύει αν το $t = 0$ είναι ένα σημείο συνέχειας της φ_λ . Σημειώνουμε ότι η συνέχεια της f δεν αρκεί για να πάρουμε την (3.30) ακόμα και αν αμφότερα τα μέλη της (3.30) συγκλίνουν απόλυτα.

3.2 Μετασχηματισμοί Fourier – Stieltjes

Συμβολίζουμε με $M(\mathbb{R})$ το χώρο όλων των πεπερασμένων μέτρων Borel στον $\mathbb{R}$. Ο $M(\mathbb{R})$ ταυτίζεται με τον δυϊκό χώρο του $C_0(\mathbb{R})$ (ο χώρος

όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με όρια μηδέν στα $\pm\infty$, εφοδιασμένος με την $\sup$ νόρμα), μέσω του εσωτερικού γινομένου

$$(3.32) \quad \langle f, \mu \rangle = \int f \overline{d\mu}, \quad f \in C_0(\mathbb{R}), \mu \in M(\mathbb{R}),$$

και έτσι μπορούμε να γράψουμε $M(\mathbb{R}) = C_0^*(\mathbb{R})$. Η νόρμα του μέτρου στον $M(\mathbb{R})$ ορίζεται ως $\|\mu\|_{M(\mathbb{R})} = \int |d\mu|$ και ταυτίζεται με την νόρμα του «δυϊκού χώρου» που ορίζεται μέσω της (3.32). Η απεικόνιση $f \mapsto \int f(x) dx$ ταυτίζει το $L^1(\mathbb{R})$ με έναν κλειστό υπόχωρο του $M(\mathbb{R})$. Η συνέλιξη ενός μέτρου $\mu \in M(\mathbb{R})$ και μιας συνάρτησης $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ ορίζεται από το ολοκλήρωμα

$$(3.33) \quad (\mu * \varphi)(x) = \int \varphi(x - y) d\mu(y),$$

και είναι προφανές ότι $\mu * \varphi \in C_0(\mathbb{R})$ και $\|\mu * \varphi\|_\infty \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{R})} \|\varphi\|_\infty$. Η συνέλιξη δυο μέτρων $\mu, \nu \in M(\mathbb{R})$, μπορεί να οριστεί μέσω δυϊκότητας και της (3.33) ή απευθείας ορίζοντας

$$(\mu * \nu)(E) = \int \mu(E - y) d\nu(y)$$

για κάθε Borel σύνολο E . Όπως και αν την ορίσουμε, παίρνουμε εύκολα ότι $\|\mu * \nu\|_{M(\mathbb{R})} \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{R})} \|\nu\|_{M(\mathbb{R})}$.

Ο μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes ενός μέτρου $\mu \in M(\mathbb{R})$ ορίζεται ως

$$(3.34) \quad \hat{\mu}(\xi) = \overline{\int e^{i\xi x} d\mu(x)} = \int e^{-i\xi x} d\mu(x), \quad \xi \in \hat{\mathbb{R}}.$$

Προφανώς αν το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, ας πούμε $d\mu = f(x) dx$, τότε $\hat{\mu}(\xi) = \hat{f}(\xi)$. Πολλές από τις ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier στο $L^1(\mathbb{R})$ είναι κοινές με εκείνες των μετασχηματισμών Fourier – Stieltjes: αν $\mu, \nu \in M(\mathbb{R})$, τότε $|\hat{\mu}(\xi)| \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{R})}$, ο $\hat{\mu}(\xi)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής και $\widehat{\mu * \nu}(\xi) = \hat{\mu}(\xi) \hat{\nu}(\xi)$. Μια παρέκλιση από την L^1 θεωρία του μετασχηματισμού Fourier είναι η μη ισχύς του Λήμματος Riemann – Lebesgue: ο μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes ενός μέτρου μ δε μηδενίζεται απαραίτητα στα $\pm\infty$.

Θεώρημα 3.2.1 (Parseval). Έστω $\mu \in M(\mathbb{R})$ και συνεχής $f \in L^1(\mathbb{R})$ με $\hat{f} \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$. Τότε¹

$$(3.35) \quad \int f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \hat{\mu}(-\xi) d\xi.$$

¹Προφανώς, η 3.35 είναι ισοδύναμη με το $\int f(x) \overline{d\mu(x)} = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\mu}(\xi)} d\xi$

Απόδειξη. Από την (3.17) έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα Fubini και την (3.34) παίρνουμε

$$\int f(x) d\mu(x) = \frac{1}{2\pi} \int \int \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\mu(x) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \hat{\mu}(-\xi) d\xi. \quad \square$$

Η υπόθεση $\hat{f}(\xi) \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ δικαιολογεί την αλλαγή στην σειρά ολοκλήρωσης. Ωστόσο, δεν είναι απαραίτητη. Ο τύπος (3.35) ισχύει και με την ασθενέστερη συνθήκη $\hat{f}(\xi) \hat{\mu}(-\xi) \in L^1(\hat{\mathbb{R}})$ και ισχύει για όλες τις φραγμένες και συνεχείς $f \in L^1(\mathbb{R})$, αν αντικαταστήσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος με $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{f}(\xi) \hat{\mu}(-\xi) d\xi$.

Θεώρημα 3.2.2 (Θεώρημα Μοναδικότητας). Αν $\hat{\mu}(\xi) = 0 \forall \xi \in \hat{\mathbb{R}}$, τότε $\mu = 0$.

Το πρόβλημα χαρακτηρισμού των μετασχηματισμών Fourier – Stieltjes μεταξύ των φραγμένων και ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων στον $\hat{\mathbb{R}}$ είναι πολύ δύσκολο. Όσον αφορά την τοπική συμπεριφορά αυτό είναι ισοδύναμο με τον χαρακτηρισμό του $A(\hat{\mathbb{R}})$: κάθε $f \in A(\hat{\mathbb{R}})$ είναι ένας μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes και αντίστροφα, αν $\mu \in M(\mathbb{R})$ και $\mathbf{V}_\lambda$ ο πυρήνας de la Vallee Poussin (3.20), τότε $\mu * \mathbf{V}_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ και $\widehat{\mu * \mathbf{V}_\lambda}(\xi) = \hat{\mu}(\xi)$ για $|\xi| \leq \lambda$.

Θεώρημα 3.2.3. Έστω $\varphi \in C(\hat{\mathbb{R}})$ και ορίζουμε ως Φ_λ την

$$\Phi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \varphi(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Τότε η φ είναι μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes αν $\Phi_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall \lambda > 0$ και $\|\Phi_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R})}$ είναι φραγμένη καθώς $\lambda \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Αν $\varphi = \hat{\mu}$ με $\mu \in M(\mathbb{R})$, τότε

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{\mu}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \\ (3.36) \quad &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \int e^{-i\xi y} d\mu(y) e^{i\xi x} d\xi \\ &= \int \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) e^{i(x-y)\xi} d\xi d\mu(y) = \\ &= (\mu * \mathbf{K}_\lambda)(x). \end{aligned}$$

Έπεται ότι για $\lambda > 0$, $\Phi_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ και $\|\Phi_\lambda\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{R})}$.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι $\Phi_\lambda \in L^1(\mathbb{R})$ με ομοιόμορφα φραγμένη νόρμα, θεωρούμε τα μέτρα $\Phi_\lambda(x) dx$ και θεωρούμε ένα ασθενές* σημείο συσσώρευσης μ των $\Phi_\lambda(x) dx$ καθώς $\lambda \rightarrow \infty$. Ισχυριζόμαστε ότι $\varphi = \hat{\mu}$ και αφού αμφότερες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς, ο ισχυρισμός μας θα αποδειχθεί αν δείξουμε ότι

$$(3.37) \quad \int \varphi(-\xi)g(\xi) d\xi = \int \hat{\mu}(-\xi)g(\xi) d\xi, \quad \forall g \in C_c^2(\hat{\mathbb{R}}).$$

Για μια τέτοια g έχουμε $g = \hat{G}$ με $G \in L^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R})$. Από τον τύπο του μετασχηματισμού Fourier για τη G , από το Θεώρημα Fubini και από τον τύπο του Parseval παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int g(\xi)\varphi(-\xi) d\xi &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) g(\xi)\varphi(-\xi) d\xi \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \varphi(-\xi) \int G(x)e^{-i\xi x} dx d\xi \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} 2\pi \int G(x)\Phi_\lambda(x)dx = 2\pi \int G(x) d\mu(x) = \\ &= \int g(\xi)\hat{\mu}(-\xi) d\xi \end{aligned}$$

και το Θεώρημα έπεται. $\square$

Παρατήρηση 3.2.4. Η εφαρμογή του τύπου του Parseval παραπάνω είναι τυπική και είναι γενικά ένας συνηθισμένος τρόπος να ελέγχουμε ότι τα ασθενή* όρια στον $M(\mathbb{R})$ είναι ότι περιμένει κανείς να είναι. Κάτι τέτοιο δε χρειάζεται στην περίπτωση του $M(\mathbb{T})$ αφού η ασθενής* σύγκλιση στον $M(\mathbb{T})$ συνεπάγεται σημειακή σύγκλιση των συντελεστών Fourier – Stieltjes (τα εκθετικά ανήκουν στον $C(\mathbb{T})$ του οποίου ο $M(\mathbb{T})$ είναι ο δυϊκός). Τα εκθετικά στο $\mathbb{R}$ δεν ανήκουν στο $C_0(\mathbb{R})$ και είναι λάθος ότι η ασθενής* σύγκλιση στον $M(\mathbb{R})$ συνεπάγεται σημειακή σύγκλιση των μετασχηματισμών Fourier – Stieltjes. Ωστόσο, το παραπάνω επιχείρημα δίνει:

Λήμμα 3.2.5. Έστω $\mu_n \in M(\mathbb{R})$ και υποθέτουμε ότι $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\hat{\mu}_n(\xi) \xrightarrow{\text{κ.σ.}} \varphi(\xi)$ και $\varphi \in C(\hat{\mathbb{R}})$. Τότε $\hat{\mu} = \varphi$.

Μια παρόμοια εφαρμογή του τύπου του Parseval δίνει το ακόλουθο χρήσιμο κριτήριο:

Θεώρημα 3.2.6. Μια συνάρτηση $\varphi \in C(\hat{\mathbb{R}})$ είναι ένας μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes αν υπάρχει μια σταθερά C τ.ώ.

$$(3.38) \quad \left| \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \varphi(-\xi) d\xi \right| \leq C \sup_x |f(x)|$$

για κάθε συνεχή $f \in L^1(\mathbb{R})$, τέτοια ώστε η $\hat{f}$ να έχει συμπαγή φορέα.

Απόδειξη. Αν $\varphi = \hat{\mu}$, η (3.38) έπεται από την (3.35) με $C = \|\mu\|_{M(\mathbb{R})}$. Αντίστροφα, αν ισχύει η (3.38), η απεικόνιση $f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \varphi(-\xi) d\xi$ ορίζει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές σε έναν πυκνό υπόχωρο του $C_0(\mathbb{R})$, συγκεκριμένα στο χώρο όλων των συναρτήσεων $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ για τις οποίες η $\hat{f}$ έχει συμπαγή φορέα. Αυτό το συναρτησοειδές έχει μια μοναδική φραγμένη επέκταση στον $C_0(\mathbb{R})$, η οποία, από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, έχει την μορφή $f \mapsto \int f(x) d\mu(x)$. Επιπλέον, $\|\mu\|_{M(\mathbb{R})} \leq C$. Χρησιμοποιώντας ξανά την (3.35), βλέπουμε ότι η $\hat{\mu} - \varphi$ είναι ορθογώνια σε κάθε $\hat{f} \in C_c(\hat{\mathbb{R}})$ με $f \in L^1(\mathbb{R})$, και συνεπώς $\hat{\mu} = \varphi$. $\square$

Παρατήρηση 3.2.7. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να πάρει κανείς την οικογένεια $\{f\}$ των συναρτήσεων δοκιμής για τις οποίες απαιτείται να ισχύει η (3.38). Οι μόνες ιδιότητες που χρησιμοποιήθηκαν είναι ότι η $\{f\}$ είναι πυκνή στο $C_0(\mathbb{R})$ και η $\{\hat{f}\}$ είναι πυκνή στο $C_0(\hat{\mathbb{R}})$. Συνεπώς, μπορούμε να ζητήσουμε να ισχύει η (3.38) μόνο για: 1) συναρτήσεις f με $\hat{f} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$ 2) συναρτήσεις f με $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ κ.λ.π..

Μπορούμε να συσχετίσουμε μέτρα στον $\mathbb{R}$ με μέτρα στον $\mathbb{T}$ απλώς ολοκληρώνοντας 2π – περιοδικές συναρτήσεις. Τυπικά: αν E είναι ένα σύνολο Borel στον $\mathbb{T}$ (όπου ο $\mathbb{T}$ ταυτίζεται με το $(-\pi, \pi]$), συμβολίζουμε με E_n το σύνολο $E + 2\pi n$ και γράφουμε $E' = \bigcup E_n$. Αν $\mu \in M(\mathbb{R})$, ορίζουμε

$$\mu_{\mathbb{T}}(E) = \mu(E').$$

Προφανώς το $\mu_{\mathbb{T}}$ είναι μέτρο στον $\mathbb{T}$ και, ταυτίζοντας συνεχείς συναρτήσεις στον $\mathbb{T}$ με 2π – περιοδικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}$, παίρνουμε

$$(3.39) \quad \int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{T}} f(t) d\mu_{\mathbb{T}}(t).$$

Η απεικόνιση $\mu \mapsto \mu_{\mathbb{T}}$ είναι ένας τελεστής νόρμας 1 από τον $M(\mathbb{R})$ στον $M(\mathbb{T})$ και ο περιορισμός του στο $L^1(\mathbb{R})$ είναι η απεικόνιση (3.27) που ορίσαμε στο τέλος της προηγούμενης ενότητας. Από την (3.39) έπεται ότι $\hat{\mu}(n) = \hat{\mu}_{\mathbb{T}}(n) \forall n \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, ο περιορισμός ενός μετασχηματισμού Fourier – Stieltjes στους ακεραίους δίνει μια ακολουθία συντελεστών Fourier – Stieltjes.

Θεώρημα 3.2.8. Μια $\varphi \in C(\hat{\mathbb{R}})$ είναι μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes αν $\exists C > 0$ σταθερά τ.ώ. για κάθε $\lambda > 0$ η $\{\varphi(\lambda n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ είναι η ακολουθία συντελεστών Fourier – Stieltjes ενός μέτρου $\mu \in M(\mathbb{T})$ με $\|\mu_{\mathbb{T}}\| \leq C$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Αν $\varphi = \hat{\mu}$ με $\mu \in M(\mathbb{R})$ έχουμε $\varphi(n) = \hat{\mu}(n) = \hat{\mu}_{\mathbb{T}}(n)$ με $\|\mu_{\mathbb{T}}\| \leq \|\mu\|$. Γράφοντας $d\mu(x/\lambda)$ για το μέτρο που ικανοποιεί

$$\int f(x) d\mu\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \int f(\lambda x) d\mu(x),$$

έχουμε ότι $\|\mu(x/\lambda)\|_{M(\mathbb{R})} = \|\mu\|_{M(\mathbb{R})}$ και $\widehat{\mu(x/\lambda)}(\xi) = \hat{\mu}(\xi\lambda)$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\varphi(\lambda n) = \widehat{\mu(x/\lambda)}_{\mathbb{T}}(n)$ και $\|\mu(x/\lambda)_{\mathbb{T}}\| \leq C$, όπου $C = \|\mu\|_{M(\mathbb{R})}$. ($\Leftarrow$) Θα χρησιμοποιήσουμε την (3.35) και το Θεώρημα 3.2.6. Έστω f συνεχής και ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και υποθέτουμε ότι $\hat{f} \in C_c^\infty(\hat{\mathbb{R}})$. Θέλουμε να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \varphi(-\xi) d\xi$ και, αφού η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα, μπορούμε να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα με τα Riemann αθροίσματά του. Έτσι, για αυθαίρετο $\varepsilon > 0$, αν το λ είναι αρκούντως μικρό:

$$(3.40) \quad \left| \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \varphi(-\xi) d\xi \right| < \left| \frac{\lambda}{2\pi} \sum \hat{f}(\lambda n) \varphi(-\lambda n) \right| + \varepsilon.$$

Τώρα, οι $\frac{\lambda}{2\pi} \hat{f}(\lambda n)$ είναι οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης $\psi_\lambda(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f((t + 2\pi m)/\lambda)$ στον $\mathbb{T}$ και, αφού η άπειρη παραγωγισιμότητα της $\hat{f}$ συνεπάγεται ότι η $f(x)$ φθίνει πολύ γρήγορα καθώς $|x| \rightarrow \infty$, βλέπουμε ότι για $\varepsilon > 0$ και λ αρκούντως μικρό

$$(3.41) \quad \sup |\psi_\lambda(t)| \leq \sup |f(x)| + \varepsilon.$$

Υποθέτοντας ότι $\varphi(\lambda n) = \hat{\mu}_\lambda(n)$, $\mu_\lambda \in M(\mathbb{T})$ και $\|\mu_\lambda\|_{M(\mathbb{T})} \leq C$, από τον τύπο του Parseval παίρνουμε ότι

$$\left| \frac{\lambda}{2\pi} \sum \hat{f}(\lambda n) \varphi(-\lambda n) \right| = \left| \sum \hat{\psi}_\lambda(n) \hat{\mu}_\lambda(-n) \right| \leq C \sup |\psi_\lambda(t)|.$$

Από τις (3.40), (3.41),

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \varphi(-\xi) d\xi \right| \leq C \sup |f(x)| + (C + 1)\varepsilon$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαίο, η (3.38) ικανοποιείται και το Θεώρημα έπεται από το Θεώρημα 3.2.6. $\square$

Ο τύπος του Parseval προσφέρει επίσης ένα προφανές κριτήριο για το πότε μια συνάρτηση φ είναι ο μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes ενός θετικού μέτρου. Το ανάλογο του θεωρήματος 3.2.6 είναι το

Θεώρημα 3.2.9. Μια συνάρτηση φ , φραγμένη και συνεχής στο $\hat{\mathbb{R}}$, είναι ο μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes ενός θετικού μέτρου Borel στο $\mathbb{R}$ ανν

$$(3.42) \quad \int \hat{f}(\xi) \varphi(-\xi) d\xi \geq 0, \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}), f \geq 0.$$

Απόδειξη. Ο τύπος του Parseval συνεπάγεται την ($\Rightarrow$) κατεύθυνση και το γεγονός ότι αν υποθέσουμε ότι $\varphi = \hat{\mu}$ με $\mu \in M(\mathbb{R})$, τότε το μ είναι ένα θετικό μέτρο.

($\Leftarrow$) Θα δείξουμε ότι η (3.42) συνεπάγεται την (3.38), με $C = \varphi(0)$, $\forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ με πραγματικές τιμές (και συνεπώς με $C = 2\varphi(0)$ για f με μιγαδικές τιμές). Ως συνήθως, συμβολίζουμε με $\mathbf{K}_\lambda(x)$ τον πυρήνα του Fejer και παρατηρούμε ότι

$$(3.43) \quad 0 \leq \lambda^{-1} \mathbf{K}_\lambda(x) = \mathbf{K}(\lambda x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin \lambda x/2}{\lambda x/2} \right)^2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi},$$

ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Από την (3.18), ο μετασχηματισμός Fourier του $\mathbf{K}(\lambda x)$ είναι ο $\lambda^{-1} \max(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}, 0)$ και, αφού η $\varphi(\xi)$ είναι συνεχής στο $\xi = 0$, έχουμε ότι

$$(3.44) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int \frac{1}{\lambda} \widehat{\mathbf{K}_\lambda}(\xi) \varphi(-\xi) d\xi = \varphi(0).$$

Τώρα, αν η f είναι πραγματική με συμπαγή φορέα, από την (3.43) έχουμε ότι $\forall \varepsilon > 0$, για αρκούντως μικρό λ και για κάθε x ,

$$(3.45) \quad 2\pi(\varepsilon + \sup |f|) \mathbf{K}(\lambda x) - f(x) \geq 0.$$

Συνεπώς, από τις (3.44) και (3.45), αν $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$

$$(3.46) \quad \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \varphi(-\xi) d\xi \leq \varphi(0)(2\varepsilon + \sup |f|).$$

Ξαναγράφοντας την (3.46) για $-f$ και αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$, παίρνουμε

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \varphi(-\xi) d\xi \right| \leq \varphi(0) \sup |f|. \quad \square$$

Το ανάλογο του 3.2.8 είναι το

Θεώρημα 3.2.10. Μια $\varphi \in C(\hat{\mathbb{R}})$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes ενός θετικού μέτρου ανν για κάθε $\lambda > 0$ η $\{\varphi(\lambda n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ είναι η ακολουθία συντελεστών Fourier – Stieltjes ενός θετικού μέτρου στον $\mathbb{T}$.

Απόδειξη. Η κατεύθυνση $(\Rightarrow)$ έπεται όπως στο 3.2.8.

$(\Leftarrow)$ Παρατηρούμε ότι αν $\varphi(\lambda n) = \hat{\mu}_\lambda(n)$ με $\mu_\lambda > 0$ στον $\mathbb{T}$, τότε $\|\mu_\lambda\| = \varphi(0)$ και συνεπώς, από το 3.2.8, η φ είναι μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes. Χρησιμοποιώντας τη συνέχεια της φ , μπορούμε τώρα να πάρουμε την (3.42) προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα με τα Riemann αθροίσματα του όπως στην απόδειξη του 3.2.8. $\square$

Ορισμός 3.2.11. Μια συνάρτηση φ ορισμένη στο $\mathbb{R}$ ονομάζεται *θετικά ορισμένη* αν για οποιαδήποτε $\xi_1, \dots, \xi_N \in \hat{\mathbb{R}}$ και μιγαδικούς αριθμούς $z_1, \dots, z_N$, ισχύει

$$(3.47) \quad \sum_{j,k=1}^N \varphi(\xi_j - \xi_k) z_j \bar{z}_k \geq 0.$$

Άμεσες συνέπειες της (3.47) είναι οι:

$$(3.48) \quad \varphi(-\xi) = \overline{\varphi(\xi)}$$

$$(3.49) \quad |\varphi(\xi)| \leq \varphi(0).$$

Για να αποδείξουμε τις (3.48) και (3.49), παίρνουμε $N = 2$, $z_1 = 1$, $z_2 = z$. Τότε, από την (3.47) παίρνουμε:

$$(3.50) \quad \varphi(0)(1 + |z|^2) + \varphi(\xi)z + \varphi(-\xi)\bar{z} \geq 0.$$

Για $z = 1$ και $z = -1$ στην προηγούμενη, παίρνουμε αντίστοιχα

$$(3.51) \quad 0 \leq 2\varphi(0) + \varphi(\xi) + \varphi(-\xi) \in \mathbb{R}$$

$$(3.52) \quad 0 \leq 2\varphi(0) - \varphi(\xi) - \varphi(-\xi) \in \mathbb{R}$$

και αφαιρώντας τις κατά μέλη έχουμε ότι

$$(3.53) \quad \varphi(\xi) + \varphi(-\xi) = a \in \mathbb{R},$$

ενώ προσθέτοντάς τις έχουμε ότι $0 \leq \varphi(0) \in \mathbb{R}$. Για $z = i$ στην (3.50): $2\varphi(0) + i(\varphi(\xi) - \varphi(-\xi)) \in \mathbb{R}$ και, αφού $\varphi(0) \in \mathbb{R}$, πρέπει

$$(3.54) \quad i(\varphi(\xi) - \varphi(-\xi)) = b \in \mathbb{R},$$

οπότε προσθαφαιρώντας τις (3.53) και (3.54) παίρνουμε ότι $\varphi(\xi) = \frac{a-ib}{2}$, $\varphi(-\xi) = \frac{a+ib}{2}$ και άρα καταλήγουμε στην (3.48). Τώρα, αν

1. $\varphi(\xi) = 0$, αφού $\varphi(0) \geq 0$, από τις (3.48) και (3.51) καταλήγουμε στην (3.49).
2. $\varphi(\xi) \neq 0$ και πάρουμε $z = -\frac{|\varphi(\xi)|}{\varphi(\xi)}$ στην (3.50), έχουμε:

$$2\varphi(0) - 2|\varphi(\xi)| \geq 0,$$

δηλ. καταλήγουμε πάλι στην (3.49).

Θεώρημα 3.2.12 (Bochner). Μια φ ορισμένη στο $\hat{\mathbb{R}}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes ενός θετικού μέτρου ανν είναι θετικά ορισμένη και συνεχής.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\varphi = \hat{\mu}$ με $\mu \geq 0$. Έστω $\xi_1, \dots, \xi_N \in \hat{\mathbb{R}}$ και μιγαδικοί αριθμοί $z_1, \dots, z_N$. Τότε

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \varphi(\xi_j - \xi_k) z_j \overline{z_k} &= \int \sum e^{-i\xi_j x} z_j e^{i\xi_k x} \overline{z_k} d\mu(x) = \\ (3.55) \quad &= \int \left| \sum_1^N e^{-i\xi_j x} z_j \right|^2 d\mu(x) \geq 0, \end{aligned}$$

άρα μετασχηματισμοί Fourier – Stieltjes θετικών μέτρων είναι θετικά ορισμένοι.

Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι η φ είναι θετικά ορισμένη, έπεται ότι για κάθε $\lambda > 0$, η $\{\varphi(\lambda n)\}$ είναι θετικά ορισμένη ακολουθία. Από το Θεώρημα του Herglotz², $\varphi(\lambda n) = \hat{\mu}_\lambda(n)$ για κάποιο θετικό μέτρο $\mu_\lambda \in \mathbb{T}$ και, από το Θεώρημα 3.2.10, $\varphi = \hat{\mu}$ για κάποιο θετικό μέτρο $\mu \in M(\mathbb{R})$. $\square$

Παρατήρηση 3.2.13. Κάποια συνθήκη συνέχειας της φ στο Θεώρημα του Bochner είναι απαραίτητη, αλλά μπορούμε να υποθέσουμε απλώς ότι η φ είναι συνεχής στο $\xi = 0$, αφού μια θετικά ορισμένη συνάρτηση που είναι συνεχής στο $\xi = 0$ είναι ομοιομόρφα συνεχής στην πραγματική ευθεία. Μπορούμε να καταλήξουμε σε αυτό το συμπέρασμα κατευθείαν από τη συνθήκη (3.47).

Λήμμα 3.2.14. Έστω $\varphi = \hat{\mu}$ για κάποιο θετικό μέτρο $\mu \in M(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι η φ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\xi = 0$ ή ότι $2\varphi(0) - \varphi(h) - \varphi(-h) = O(h^2)$. Τότε $\int x^2 d\mu < \infty$ και η φ έχει ομοιόμορφα συνεχή 2η παράγωγο στο $\hat{\mathbb{R}}$.

²Μια $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι θετικά ορισμένη ανν υπάρχει θετικό μέτρο $\mu \in M(\mathbb{T})$ ώστε $a_n = \hat{\mu}(n) \forall n \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη. Εξ' υποθέσεως, $\exists C \geq 0$:

$$(3.56) \quad h^{-2}(2\varphi(0) - \varphi(h) - \varphi(-h)) = \int 2h^{-2}(1 - \cos hx) d\mu(x) \leq C.$$

Τώρα, $\forall a > 0, \forall x \in (-a, a)$ ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{1 - \cos hx}{h^2} = x^2.$$

Αφού το εσωτερικό του ολοκληρώματος στην (3.56) είναι θετικό, από το Λήμμα του Fatou και $\forall a > 0$ έχουμε ότι

$$(3.57) \quad \begin{aligned} \int_{-a}^a x^2 d\mu(x) &= \int_{-a}^a \lim_{h \rightarrow 0} 2 \frac{1 - \cos hx}{h^2} d\mu(x) \\ &= \int_{-a}^a \liminf_{h \rightarrow 0} 2 \frac{1 - \cos hx}{h^2} d\mu(x) \\ &\leq \liminf_{h \rightarrow 0} \int 2 \frac{1 - \cos hx}{h^2} d\mu(x) \leq C. \end{aligned}$$

Τώρα, αφού $\varphi = \hat{\mu}$, γράφοντας $\nu = x^2 \mu \in M(\mathbb{R})$, παίρνουμε $\varphi'' = -\hat{\nu}$. $\square$

Παρατηρήστε ότι αν $2\varphi(0) - \varphi(h) - \varphi(-h) = o(h^2)$, τότε $\mu = \varphi(0)\delta_0$. Με επαγωγή στο m παίρνουμε την

Πρόταση 3.2.15. Έστω $\varphi = \hat{\mu}$ για κάποιο θετικό μέτρο $\mu \in M(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι η φ είναι $2m$ φορές παραγωγίσιμη στο $\xi = 0$. Τότε $\int x^{2m} d\mu < \infty$ και η φ έχει ομοιόμορφα συνεχή παράγωγο τάξεως $2m$ στο $\hat{\mathbb{R}}$. Αν $\varphi^{(2m)}(0) = 0$, τότε $\mu = \varphi(0)\delta_0$.

Θετικά ορισμένες συναρτήσεις που είναι αναλυτικές στο $\xi = 0$ είναι αυτόματα αναλυτικές σε μια λωρίδα της μορφής $\{\zeta : \zeta = \xi + i\eta, |\eta| < a\}$, για $a > 0$. Από το Θεώρημα του Bochner (και την προηγούμενη παρατήρηση), τέτοιες συναρτήσεις είναι μετασχηματισμοί Fourier – Stieltjes θετικών μέτρων.

Λήμμα 3.2.16. Έστω μ θετικό μέτρο στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η $F(\xi) = \hat{\mu}(\xi)$ είναι αναλυτική στο $\xi = 0$. Τότε υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $\int e^{\eta|x|} d\mu < \infty$ και το $\hat{\mu}$ είναι ο περιορισμός στο $\hat{\mathbb{R}}$ της συνάρτησης

$$(3.58) \quad F(\zeta) = \int e^{-i\zeta x} d\mu(x).$$

Απόδειξη. Εξ' υποθέσεως, για κάποιο $a > 0$, $F(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} \xi^n$ για $|\xi| \leq a$, συνεπώς $\exists C > 0$ τ.ώ. $|F^{(n)}(0)| \leq Cn!a^{-n}$ και συγκεκριμένα, $\int x^{2m} d\mu \leq C(2m)!a^{-2m}$. Αφού $|x|^{2m+1} \leq x^{2m} + x^{2m+2}$, έχουμε

$$\int |x|^{2m+1} d\mu(x) \leq (2 + a^2)C(2m + 2)!a^{-2(m+2)}$$

και, $\forall 0 < \eta < a$ ισχύει

$$\begin{aligned} \int e^{\eta|x|} d\mu(x) &= \sum \int \frac{\eta^n |x|^n}{n!} d\mu(x) \\ (3.59) \quad &= \sum \eta^n \frac{\int |x|^n d\mu(x)}{n!} < \infty. \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα έπεται. □

Ένα άμεσο Πόρισμα της (3.58) είναι το ότι η $F(\xi + i\eta)$ είναι θετικά ορισμένη ως προς ξ και (για $\zeta = \xi + i\eta$),

$$(3.60) \quad |F(\zeta)| \leq F(i\eta).$$

Επίσης, αφού $F^{(k)}(\zeta) = \int (-ix)^k e^{-i\zeta x} d\mu(x)$, έχουμε ότι

$$(3.61) \quad |F^{(k)}(\zeta)| \leq F^{(k)}(i\eta) + O(1).$$

Έπεται ότι αν το $\{\zeta = \xi + i\eta : a_0 < \eta < a_1\}$ είναι μια μεγιστική λωρίδα στην οποία η $F(\zeta)$ είναι ολόμορφη, τότε τα σημεία ia_0, ia_1 είναι αμφότερα ιδιάζοντα σημεία της F .

Αν η F είναι ολόμορφη σε όλο το φανταστικό άξονα, τότε είναι παντού ολόμορφη και παίρνουμε την ακόλουθη ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Marcinkiewicz:

Θεώρημα 3.2.17. Υποθέτουμε ότι το $e^{P(\xi)}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes ενός θετικού μέτρου, με P πολυώνυμο. Τότε $\deg P \leq 2$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $e^{P(\xi)} = \int e^{-i\xi x} d\mu(x)$. Αν $P(\xi) = \sum_{n=0}^k a_n \xi^n$, $a_k \neq 0$, τότε $\exists k$ διευθύνσεις θ_n τέτοιες ώστε $F(re^{i\theta_n}) = e^{|a_k r^k| + O(r^{k-1})}$. Από την (3.60), $\theta_n = \pm \frac{\pi}{2}$ και $k \leq 2$. □

Τα θετικά μέτρα και οι θετικά ορισμένες συναρτήσεις είναι το Λ και το Ω στη Θεωρία Πιθανοτήτων που χρησιμοποιεί τη δική της ορολογία.

Ορισμός 3.2.18. 1. Μια *πραγματική τυχαία μεταβλητή* είναι μια μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση X σε κάποιο χώρο μέτρου πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$.

2. Η *μέση τιμή* μιας ολοκληρώσιμης τυχαίας μεταβλητής X είναι η

$$\mathbf{E}(X) = \int X d\mathbf{P}.$$

3. Η *κατανομή* μιας (πραγματικής) τυχαίας μεταβλητής X είναι η εικόνα του $\mathbf{P}$ μέσω της X και είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}$.

4. Η (αθροιστική) *συνάρτηση κατανομής* της X είναι η συνάρτηση

$$(3.62) \quad F_X(\lambda) = \mathbf{P}(X \leq \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(ώστε η κατανομή της X να είναι απλά το μέτρο dF_X). Αν $\Phi \in C(\mathbb{R})$ τότε η $\Phi \circ X$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ αν η Φ είναι ολοκληρώσιμη ως προς dF_X και

$$(3.63) \quad \mathbf{E}(\Phi \circ X) = \int \Phi(\lambda) dF_X(\lambda).$$

5. Η *χαρακτηριστική συνάρτηση* μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι ο μετασχηματισμός Fourier – Stieltjes της κατανομής της. Παίρνοντας $\Phi(X) = e^{i\xi X}$ στην (3.63), έχουμε

$$(3.64) \quad \chi_X(\xi) = \mathbf{E}(e^{i\xi X}) = \int e^{i\xi\lambda} dF_X(\lambda).$$

Ο όρος δικαιολογείται από το Θεώρημα μοναδικότητας 3.2.2.

6. Μια *κανονική (πραγματική) μεταβλητή* είναι μια μεταβλητή με κατανομή $dF_X = \mathbf{G}(x) dx$. Η X είναι Gaussian αν είναι σταθερό πολλαπλάσιο μιας κανονικής μεταβλητής. Υπενθυμίζεται ότι η X είναι κανονική αν $\chi_X(\xi) = \hat{\mathbf{G}}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

7. Μια ακολουθία X_n πραγματικών τυχαίων μεταβλητών *συγκλίνει κατά κατανομή* στη X_0 αν $dF_{X_n} \rightarrow dF_{X_0}$ στην ασθενή* τοπολογία.

Διατυπώνουμε εδώ και το ανάλογο του Θεωρήματος του Wiener για συναρτήσεις στον κύκλο.

Θεώρημα 3.2.19. Έστω $\mu \in M(\mathbb{R})$. Τότε

$$\sum |\mu(\{x\})|^2 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi.$$

Συγκεκριμένα, μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για τη συνέχεια του μ είναι η

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} |\hat{\mu}(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

3.3 Μετασχηματισμοί Fourier στον $L^p(\mathbb{R})$, για $1 < p \leq 2$

Ο ορισμός του μετασχηματισμού Fourier για συναρτήσεις σε ποικίλους χώρους συναρτήσεων στον $\mathbb{T}$ διευκολύνθηκε ιδιαίτερα από το γεγονός ότι όλοι αυτοί οι χώροι περιέχονταν στον $L^1(\mathbb{T})$. Αφού όμως το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$ είναι άπειρο, η κατάσταση αλλάζει άρδην. Αν $p > 1$, δεν ισχύει πλέον $L^p \subset L^1$ και, αν θέλουμε να πάρουμε μετασχηματισμούς Fourier για συναρτήσεις στον $L^p(\mathbb{R})$ (ή άλλους χώρους συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$), πρέπει να βρούμε νέο τρόπο να τους ορίσουμε. Στην παρούσα ενότητα θεωρούμε τις περιπτώσεις $1 < p \leq 2$ και λαμβάνουμε μια ικανοποιητική επέκταση του μετασχηματισμού Fourier γι' αυτές. Ξεκινάμε με τον $L^2(\mathbb{R})$.

Λήμμα 3.3.1. Έστω $f \in C_c(\mathbb{R})$. Τότε

$$(3.65) \quad \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int |f(x)|^2 dx.$$

1η Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\text{supp}(f) \subset (-\pi, \pi)$. Από το Θεώρημα 1.5.9,

$$\frac{1}{2\pi} \int |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n) \right|^2$$

και, αντικαθιστώντας την f με $e^{-iax} f$ παίρνουμε

$$(3.66) \quad \int |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n+a)|^2.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέρη της (3.66) ως προς a για $0 \leq a \leq 1$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int |f(x)|^2 dx.$$

Αν ο $\text{supp}(f)$ δεν περιέχεται μέσα στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, θεωρούμε την $g(x) = \sqrt{\lambda} f(\lambda x)$. Αν το λ είναι αρκετά μεγάλο, τότε $\text{supp}(g) \subset (-\pi, \pi)$ και, αφού $\hat{g}(\xi) = \lambda^{-1/2} \hat{f}(\xi/\lambda)$, παίρνουμε

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |g(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad \square$$

2η Απόδειξη. Γράφοντας $g = f * \tilde{f}$ όπου $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, παίρνουμε ότι $g(0) = \int f(x) \overline{f(x)} dx = \int |f(x)|^2 dx$ και $\hat{g}(\xi) = |\hat{f}(\xi)|^2$. Υποθέτοντας ότι $\int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty$, π.χ. αν η f είναι παραγωγίσιμη, από τον τύπο αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier έπεται ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = g(0) = \int |f(x)|^2 dx.$$

Στη γενική περίπτωση, εφαρμόζοντας το Θεώρημα του Fejer παίρνουμε

$$\begin{aligned} (3.67) \quad g(0) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{g}(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

με την τελευταία ισότητα να προκύπτει από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης. $\square$

Ορισμός 3.3.2. Για $g \in L^2(\hat{\mathbb{R}})$ γράφουμε

$$\|g\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int |g(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}.$$

Θεώρημα 3.3.3 (Plancherel). Υπάρχει μοναδικός τελεστής $\mathcal{F}$ από τον $L^2(\mathbb{R})$ επί του $L^2(\hat{\mathbb{R}})$ που να έχει τις ιδιότητες

$$(3.68) \quad \mathcal{F}f = \hat{f} \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}),$$

$$(3.69) \quad \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\hat{\mathbb{R}})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι το $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ είναι πυκνό στο $L^2(\mathbb{R})$ και συνεπώς κάθε συνεχής τελεστής ορισμένος στον $L^2(\mathbb{R})$ προσδιορίζεται από τις τιμές του στον $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει το πολύ ένας τελεστής που να ικανοποιεί τις (3.68) και (3.69). Από το προηγούμενο Λήμμα, η (3.69) ικανοποιείται αν $f \in C_c(\mathbb{R})$ και αφού τέτοιες συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ (ως προς τη νόρμα

$\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$, η (3.69) ισχύει $\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, δηλ. ο $\mathcal{F}$ είναι ισομετρία, και ως τέτοια, είναι και $1-1$. Συνεπώς, υπάρχει μοναδική φραγμένη γραμμική επέκταση του $\mathcal{F}$ σε όλον τον $L^2(\mathbb{R})$. Τέλος, αφού κάθε 2 φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας φραγμένης ολοκληρώσιμης συνάρτησης στον $\mathbb{R}$ (Θεώρημα 3.1.5 και τύπος αντιστροφής), έπεται ότι $\overline{\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}))} = L^2(\mathbb{R})$ και άρα ο $\mathcal{F}$ είναι και επί. $\square$

Παρατήρηση 3.3.4. 1. Δοθείσης μιας $f \in L^2(\mathbb{R})$ ορίζουμε ως $\hat{f}$ το όριο στον $L^2(\mathbb{R})$ των $\hat{f}_n$, για οποιαδήποτε ακολουθία $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ που συγκλίνει στην f στον $L^2(\mathbb{R})$. Ως τέτοια ακολουθία μπορούμε να πάρουμε την

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < n \\ 0, & |x| \geq n \end{cases}$$

και να έχουμε την ακόλουθη μορφή του θεωρήματος του Plancherel: η ακολουθία

$$(3.70) \quad \hat{f}_n(\xi) = \int_{-n}^n f(x) e^{-i\xi x} dx$$

συγκλίνει στον $L^2(\mathbb{R})$, σε μια συνάρτηση που συμβολίζουμε με $\hat{f}$, και για την οποία ισχύουν οι (3.68) και (3.69).

2. Η απεικόνιση $f \mapsto \hat{f}$, όντας ισομετρία από τον $L^2(\mathbb{R})$ στον $L^2(\mathbb{R})$, αντιστρέφεται. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.9 και το γεγονός ότι έχουμε ισομετρία, παίρνουμε την αντίστροφη απεικόνιση ως $f = \lim f_{(n)}$ στον $L^2(\mathbb{R})$ όπου

$$(3.71) \quad f_{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

3. Ο τύπος του Parseval

$$(3.72) \quad \int f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}),$$

έπεται άμεσα από την (3.69) και είναι ισοδύναμοι.

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε μετασχηματισμούς Fourier για συναρτήσεις στον $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο τελεστής $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ έχει νόρμα 1 ως τελεστής από το $L^1(\mathbb{R})$ στο $L^\infty(\mathbb{R})$ και από το $L^2(\mathbb{R})$ στο $L^2(\mathbb{R})$, από το Θεώρημα των Riesz – Thorin παίρνουμε το

Θεώρημα 3.3.5 (Hausdorff – Young). Έστω $1 < p < 2$, $q = p/(p-1)$, $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Τότε

$$(3.73) \quad \left(\frac{1}{2\pi} \int |\hat{f}(\xi)|^q d\xi \right)^{1/q} \leq \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Για $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$, μπορούμε τώρα να ορίσουμε την $\hat{f}$ μέσω συνέχειας, π.χ. ως το όριο στον $L^q(\hat{\mathbb{R}})$ του $\int_{-n}^n f(x)e^{-i\xi x} dx$. Η απεικόνιση $\mathcal{F}: f \mapsto \hat{f}$ είναι τελεστής με νόρμα 1 από τον $L^p(\mathbb{R})$ στον $L^q(\hat{\mathbb{R}})$. Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι δεν είναι πλέον ισομετρία και η εικόνα του δεν είναι όλος ο χώρος.

Το γεγονός ότι για $p < 2$ ο $\mathcal{F}$ δεν είναι αντιστρέψιμος τελεστής από τον $L^p(\mathbb{R})$ στον $L^q(\hat{\mathbb{R}})$ κάνει το πρόβλημα αντιστροφής πιο λεπτό από ότι στον $L^2(\mathbb{R})$. Η κατάσταση στην περίπτωση του $L^p(\mathbb{R})$ είναι παρόμοια με αυτήν που αντιμετωπίσαμε στον $L^p(\mathbb{T})$. Έχουμε τύπους αντιστροφής τόσο του τύπου του Θεωρήματος 3.1.8 όσο και του τύπου του Θεωρήματος 3.1.9. Το ανάλογο του Θεωρήματος 3.1.8 μπορεί να διατυπωθεί με χρήση γενικών πυρήνων ολοκληρωσιμότητας χωρίς αναφορά στο μετασχηματισμό Fourier όπως κάναμε στο Θεώρημα 3.1.8 για τον $L^1(\mathbb{R})$. Ακριβέστερα, το Θεώρημα 3.1.8 συνεχίζει να ισχύει με τον $L^p(\mathbb{R})$ στη θέση του $L^1(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Για $p \leq 2$, μπορούμε να γενικεύσουμε το Θεώρημα 3.1.9. Ελέγχουμε πρώτα ότι αν $g \in L^p(\mathbb{R})$, $f \in L^1(\mathbb{R})$, τότε η $f * g$ είναι καλά ορισμένο στοιχείο του $L^p(\mathbb{R})$ και $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$. Αυτό είναι ιδιαίτερα απλό αν πάρουμε για f τον πυρήνα του Fejer $\mathbf{K}_\lambda$:

$$\widehat{\mathbf{K}_\lambda * g}(\xi) = \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right)^+ \hat{g}(\xi)$$

και, αφού η $\mathbf{K}_\lambda * g$ είναι φραγμένη ($\mathbf{K}_\lambda \in L^q(\mathbb{R})$, $q = p/(p-1)$) και συνεπώς ανήκει στο $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, έπεται ότι

$$(\mathbf{K}_\lambda * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{g}(\xi) e^{i\xi x} d\xi.$$

Από τη γενική μορφή του θεωρήματος 3.1.8 παίρνουμε το

Θεώρημα 3.3.6. Έστω $g \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq 2$. Τότε

$$g = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|\xi|}{\lambda}\right) \hat{g}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

ως προς την $L^p(\mathbb{R})$ νόρμα.

Πόρισμα 3.3.7. Οι συναρτήσεις των οποίων οι μετασχηματισμοί Fourier έχουν συμπαγή φορέα, σχηματίζουν έναν πυκνό υπόχωρο του $L^p(\mathbb{R})$.

Το ανάλογο του τύπου αντιστροφής που παρουσιάστηκε στο 2. της παρατήρησης 3.3.4 ισχύει για $1 < p < 2$ αλλά δεν αποδεικνύεται τόσο εύκολα όσο για $p = 2$. Αντιστοιχεί στο Θεώρημα 2.1.4 και ένας τρόπος απόδειξης είναι απευθείας μέσω αυτού του Θεωρήματος. Η ιδέα που χρειάζεται για να αποκτήσουμε τον τύπο αντιστροφής ως προς τη νόρμα του $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$ από το Θεώρημα 2.1.4, είναι βασικά η ίδια που χρησιμοποιήσαμε στο Λήμμα 3.3.1.

Για $f \in \bigcup_{1 \leq p \leq 2} L^p(\mathbb{R})$ γράφουμε $S_N(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$.

Λήμμα 3.3.8. Για $1 < p < \infty$, υπάρχουν σταθερές c_p τ.ώ.

$$(3.74) \quad \|S_N(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \forall N > 0,$$

για κάθε f με συμπαγή φορέα.

Απόδειξη. Η (3.74) είναι ισοδύναμη με τον ισχυρισμό ότι, για $M \rightarrow \infty$

$$(3.75) \quad \left(\int_{-M}^M |S_N(f, x)|^p dx \right)^{1/p} \leq c_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Γράφοντας $\varphi_M(x) = M^{1/p} f(Mx)$ βλέπουμε ότι $\|\varphi_M\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$ και ελέγχουμε ότι

$$(3.76) \quad S_{MN}(\varphi_M, x) = M^{1/p} S_N(f, Mx).$$

Από την (3.76), η (3.75) (με την αλλαγή μεταβλητής $x = My$) είναι ισοδύναμη με την

$$(3.77) \quad \left(\int_{-1}^1 |S_{MN}(\varphi_M, x)|^p dx \right)^{1/p} \leq c_p \|\varphi_M\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Καθώς $M \rightarrow \infty$, ο φορέας της φ_M ελαττώνει προς το 0 και συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η (3.75), με ένα κατάλληλο c_p , $\forall f$ με $\text{supp}(f) \subset (-\pi, \pi)$ για $M = 1$ (ή οποιονδήποτε άλλο σταθεροποιημένο θετικό αριθμό) και για όλους τους ακεραίους N . Γράφουμε τώρα

$$(3.78) \quad \begin{aligned} S_N(f, x) &= \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \int_n^{n+1} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \\ &\stackrel{\xi=a+n}{=} \int_0^1 \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n+a) e^{i(n+a)x} da \end{aligned}$$

και παρατηρούμε ότι το $\sum_{n=-N}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \hat{f}(n+a) e^{inx}$ είναι το μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της $f(x) e^{-iax}$. Ως συνάρτηση του a με τιμές στον $L^p(\mathbb{T})$, το εσωτερικό της (3.78) είναι προφανώς συνεχής σ.π.³ και, από τα θεωρήματα 2.1.3, 2.1.4, είναι φραγμένη στον $L^p(\mathbb{T})$ από ένα σταθερό πολλαπλάσιο της $\|e^{iax} f\|_{L^p(\mathbb{T})} = \frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}}{(2\pi)^{1/p}}$. Επομένως, παίρνουμε

$$\left(\int_{-1}^1 |S_N(f, x)|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(f, x)|^p \right)^{1/p} \leq c_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

και το Λήμμα έπεται. $\square$

Πόρισμα 3.3.9. Για $1 < p \leq 2$, η ανισότητα (3.74) ισχύει $\forall f \in L^p(\mathbb{R})$.

Απόδειξη. Γράφουμε $\|f_n - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ για $f_n \in L^p(\mathbb{R})$ με συμπαγή φορέα. Από το Θεώρημα 3.3.5, $\hat{f} = \lim \hat{f}_n$ στο $L^q(\mathbb{R})$ και συνεπώς, για κάθε σταθεροποιημένο $N > 0$, $S_N(f, x) = \lim_n S_N(f_n, x)$ ομοιόμορφα ως προς x . Έπεται ότι

$$\|S_N(f)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \liminf_n \|S_N(f_n)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_p \lim_n \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R})} = c_p \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \quad \square$$

Θεώρημα 3.3.10. Έστω $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p \leq 2$. Τότε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0.$$

Απόδειξη. Η $\{S_N\}$ είναι μια ομοιόμορφα φραγμένη οικογένεια τελεστών που συγκλίνει στο 1, καθώς $N \rightarrow \infty$, σε όλες τις συναρτήσεις που οι μετασχηματισμοί Fourier τους έχουν συμπαγή φορέα και συνεπώς, από το Πόρισμα 3.3.7, συγκλίνει στη μονάδα ως προς την ισχυρή τοπολογία. $\square$

³Παρατηρούμε ότι, αφού η f έχει συμπαγή φορέα, ισχύει $f \in L^1(\mathbb{R})$ και άρα είναι συνεχής σ.π.

Βιβλιογραφία

- [1] LOUKAS GRAFAKOS, *Classical Fourier Analysis, Second Edition*.
- [2] YITZHAK KATZNELSON, *An Introduction to Harmonic Analysis, Third Corrected Edition*.
- [3] ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΣ, *Ανάλυση Fourier και Ολοκλήρωμα Lebesgue (Σημειώσεις)*.