

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΔΙΠΛΩΜΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Gorenstein Διάσταση Ομάδων

Φοιτητής:
ΚΑΠΕΡΩΝΗΣ ΗΛΙΑΣ

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια:
ΟΛΥΜΠΙΑ ΤΑΛΕΛΛΗ

Αθήνα,
Οκτώβριος 2017

Περιεχόμενα

Πρόλογος	1
1 Στοιχεία της Gorenstein Ομολογικής Άλγεβρας	4
1.1 Εισαγωγή	4
1.2 Gorenstein προβολικά πρότυπα	18
1.3 Πεπερασμένη Gorenstein προβολική διάσταση και μηδενισμός του Ext	29
2 Ομαδοδακτύλιοι	37
2.1 Gorenstein συνομολογική διάσταση επι του $\mathbb{Z}$	37
2.2 Ιδιότητες της Gorenstein Συνομολογικής Διάστασης	44
2.3 Γενίκευση για Μεταθετικούς Δακτυλίους	56
2.4 Η Gorenstein συνομολογική διάσταση μία αυξουσας ένωσης ομάδων	64
2.5 Αριθμησιμότητα και Gorenstein προβολική διάσταση	68

Πρόλογος

Το 1967 ο Auslander στην εργασία του με τίτλο ‘Anneaux de Gorenstein, et torsion en algèbre commutative’ εισήγαγε μία καινούργια σταθερά για πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα πάνω από αντιμεταθετικό δακτύλιο της Noether, R , τη λεγόμενη G -διάσταση ($G-dim$). Λέμε ότι ένα πρότυπο M έχει G -διάσταση μηδέν αν και μόνο εάν ανήκει στην αριστερή ορθογώνια κλάση των προβολικών R -προτύπων (Ορισμός 1.1.19). Το 1995 οι Enochs και Jenda ([5]) όρισαν μία ομολογική σταθερά, την Gorenstein προβολική διάσταση, για πρότυπα πάνω από έναν οποιονδήποτε δακτύλιο η οποία ορίζεται μέσω Gorenstein προβολικών επιλύσεων (Ορισμός 1.2.4). Αποδεικνύετε ότι ([19, 4.2.6]) ένα πρότυπο M πάνω από έναν μεταθετικό δακτύλιο της Noether είναι Gorenstein προβολικό αν και μόνο εάν έχει G -διάσταση μηδέν. Το 2004 ο Henrik Holm ([2]) έδωσε μία «συναρτητική» περιγραφή για τα πρότυπα πεπερασμένης Gorenstein προβολικής διάστασης (Θεώρημα 1.3.9).

Η παρούσα διπλωματική εργασία δομείται σε δύο κεφάλαια και έχει ως αφηγήτρια την προαναφερθείσα εργασία του Henrik Holm. Το πρώτο κεφάλαιο έχει ως σκοπό να ορίσει τη Gorenstein προβολική διάσταση προτύπου (Gpd) πάνω από έναν οποιονδήποτε μοναδιαίο δακτύλιο και να δείξει ότι αυτή γενικεύει την προβολική διάσταση (pd). Στο δεύτερο κεφάλαιο περιοριζόμαστε σε ομαδοδακτυλίους με σκοπό να μελετήσουμε τη Gorenstein συνομολογική διάσταση ομάδων, (Gcd).

Πιο αναλυτικά, το πρώτο κεφάλαιο αποτελείται από τρεις υποπαραγράφους, στη πρώτη από αυτές αναπτύσσουμε τη βασική θεωρία που είναι απαραίτητη για τη συνέχεια. Επιπλέον, αποδεικνύουμε ότι αν ο R είναι μοναδιαίος δακτύλιος τότε κάθε ακυκλικό R -σύμπλεγμα προβολικών προτύπων του οποίου όλες οι συζυγίες είναι επίπεδα πρότυπα είναι συμπτίξιμο. Στη δεύτερη υποπαραγραφο του πρώτου κεφαλαίου εισάγουμε την έννοια των Gorenstein προβολικών προτύπων ως συζυγίες ενός $Hom_R(\cdot, Q)$ -ακριβούς ακυκλικού συμπλέγματος προβολικών προτύπων, όπου το Q είναι R -προβολικό πρότυπο. Αμέσως μετά δίνουμε παράδειγμα προτύπου το οποίο είναι Gorenstein προβολικό αλλά δεν είναι προβολικό. Συνεχίζουμε μελετώντας τις ιδιότητες της κλάσης των Go-

renstein προβολικών προτύπων με σκοπό να ορίσουμε τη Gorenstein προβολική διάσταση. Στην τρίτη υποπαράγραφο μελετάμε πρότυπα τα οποία έχουν πεπερασμένη Gorenstein προβολική διάσταση με σκοπό να δείξουμε ότι αν για ένα πρότυπο M η προβολική διάσταση του M είναι πεπερασμένη τότε ισχύει ότι $pd_R(M) = Gpd_R(M)$, δηλαδή ότι η Gorenstein προβολική διάσταση γενικεύει την προβολική διάσταση. Τέλος δίνουμε τους ορισμούς της *Gorenstein*, καθώς και της συνηθισμένης συνομολογικής διάστασης.

Το κεφάλαιο 2 αφιερώνεται αποκλειστικά στη μελέτη της Gorenstein συνομολογικής διάστασης η οποία ορίζεται για οποιαδήποτε ομάδα G και είναι πεπερασμένη σε μεγαλύτερη κλάση ομάδων από ότι η συνηθισμένη συνομολογική διάσταση (cd). Δηλαδή για κάθε ομάδα G με $cdG < \infty$ έχουμε ότι $GcdG < \infty$ και μάλιστα ισχύει η ισότητα $cdG = GcdG$, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει. Για παράδειγμα, κάθε πεπερασμένη ομάδα G έχει Gorenstein συνομολογική διάσταση 0 ενώ η συνομολογική διάσταση κάθε ομάδας η οποία δεν είναι ελευθέρως στρέψης είναι άπειρη. Ένα ακόμα τέτοιο παράδειγμα αποτελούν όλες οι αριθμήσιμα άπειρες τοπικά πεπερασμένες ομάδες οι οποίες, όπως θα δούμε στη Παράγραφο 2.4 έχουν πεπερασμένη Gorenstein συνομολογική διάσταση ίση με 1.

Η σημαντικότητα της Gorenstein συνομολογικής διάστασης γίνεται πιο κατανοητή αν κανείς γνωρίζει τις ιδιότητές της. Στις παραγράφους 2.2 και 2.4 αποδεικνύουμε τα εξής:

1. Μία ομάδα G έχει Gorenstein συνομολογική διάσταση 0 αν και μόνο αν είναι πεπερασμένη ομάδα.
2. Αν $H \leq G \Rightarrow GcdH \leq GcdG$
3. Αν $H \trianglelefteq G$ και $|H| < \infty$ τότε $Gcd(G/H) \leq GcdG$
4. Αν $H \trianglelefteq G$ τότε $GcdG \leq GcdH + Gcd(G/H)$
5. Έστω ομάδα G , αν η H είναι κανονική υποομάδα της G πεπερασμένου δείκτη τότε $GcdH = GcdH$.
6. Αν η ομάδα G εκφράζεται ως ένωση μίας αύξουσα αλυσίδας υποομάδων της, $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, τότε ισχύει η ανισότητα $GcdG \leq 1 + \sup_n GcdG_n$.

Στη τελευταία παράγραφο αποδεικνύουμε ότι αν η G είναι αριθμήσιμη ομάδα πεπερασμένης Gorenstein συνομολογικής διάστασης, τότε ισχύει η ισότητα $GcdG = \sup\{n : H^n(G, \mathbb{Z}G) \neq 0\}$

Κλείνοντας το πρόλογο θα ήθελα να ευχαριστήσω τη καθηγήτρια μου Ολυμπία Ταλέλλη για τη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη επίβλεψη της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον καθηγητή Παναγή Καραζέρη για τις γνώσεις που μου μετέδωσε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στο Πανεπιστήμιο Πατρών καθώς και για τις συχνές συζητήσεις μας που με ωρίμασαν, όχι μόνο ως μαθηματικό, αλλά και ως άνθρωπο. Τέλος, δεν μπορώ να μην αναφέρω τους καλούς φίλους και συμφοιτητές μου Ανδρέα Αλέξη, Νίκο Παναγόπουλο και Βασίλη Μουστάκα οι οποίοι είχαν, ο καθένας με το τρόπο του, σημαντική επιρροή στο άτομο μου.

Καπερώνης Ηλίας,
Οκτώβριος 2017

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία της Gorenstein Ομολογικής Άλγεβρας

Συμβολισμοί: Με R θα συμβολίζουμε πάντα έναν τυχαίο δακτύλιο με μονάδα και με τον όρο R -πρότυπο θα εννοούμε αριστερό R -πρότυπο ενώ ως συνάρτηση θα αναφερόμαστε στους R -ομομορφισμούς. Επιπλέον όλοι οι δακτύλιοι που εμφανίζονται στη παρούσα διπλωματική εργασία θεωρούνται μοναδιαίοι.

1.1 Εισαγωγή

Ορισμός 1.1.1 (Προβολικό Πρότυπο). Ένα R -πρότυπο P καλείται προβολικό εάν, οποτεδήποτε η p είναι επί και η h είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, τότε υπάρχει συνάρτηση g η οποία κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \swarrow g & \downarrow h \\ B & \xrightarrow{p} & D \end{array}$$

Σημείωση: Στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί (ισοδύναμοι) ορισμοί του Προβολικού προτύπου. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [1]

Θεώρημα 1.1.2 (Kaplansky). Έστω P, Q R -πρότυπα με $P \oplus Q = \bigoplus_{i \in I} M_i$, όπου I είναι οποιοδήποτε σύνολο δεικτών και τα M_i είναι αριθμησίμως παραγόμενα R -πρότυπα, τότε το P είναι ευθύ άθροισμα αριθμησίμως παραγόμενων R -προτύπων.

Απόδειξη: [1, Σελ. 103]

Πόρισμα 1.1.3. Κάθε προβολικό R -πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα αρισμησίμως παραγόμενων R -προτύπων.

Απόδειξη: Είναι γνωστό ότι κάθε προβολικό R -πρότυπο είναι ευθύς προσθετός κάποιου ελεύθερου R -προτύπου και ότι κάθε ελεύθερο R -πρότυπο είναι ευθύ άθροισμα κυκλικών R -προτύπων. Επομένως από το **Θεώρημα Kaplansky** έχουμε ότι $P \cong \bigoplus_{i \in I} P_i$, όπου τα P_i είναι αριθμησίμως παραγόμενα R -πρότυπα. Τέλος, επειδή κάθε P_i είναι ευθύς προσθετός προβολικού R -προτύπου έχουμε ότι κάθε P_i είναι προβολικό R -πρότυπο.

Ορισμός 1.1.4. (Επίπεδο πρότυπο) Ένα R -πρότυπο καλείται επίπεδο (*flat*) αν και μόνο αν ο συναρτητής $\cdot \otimes_R M$ είναι ακριβής. Αντίστοιχα ένα δεξιό R -πρότυπο καλείται επίπεδο αν και μόνο αν ο συναρτητής $M \otimes_R \cdot$ είναι ακριβής.

Πρόταση 1.1.5. Κάθε προβολικό R -πρότυπο είναι επίπεδο.

Τα επόμενα αποτελέσματα (Λήμμα 1.1.6, Λήμμα 1.1.7, Λήμμα 1.1.8, Λήμμα 1.1.9, Λήμμα 1.1.10,) θα μας βοηθήσουν να αποδείξουμε ότι αν η $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0$ είναι βραχεία ακριβής ακολουθία R -προτύπων με το M να είναι επίπεδο R -πρότυπο και το P προβολικό R -πρότυπο τότε το M θα είναι αναγκαστικά προβολικό R -πρότυπο (Θεώρημα 1.1.11). Το συγκεκριμένο Θεώρημα έχει ως συνέπεια το Θεώρημα 1.1.13 το οποίο με τη σειρά του θα παίζει καθοριστικό ρόλο στη Παράγραφο 2.3

Λήμμα 1.1.6. (Το Λήμμα του φιδιού) Δοσμένου του παρακάτω μεταθετικού διαγράμματος R -προτύπων:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' \longrightarrow 0 \\ & & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

υπάρχει η εξής ακριβής ακολουθία:

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow \ker g \rightarrow \ker h \rightarrow \operatorname{coker} f \rightarrow \operatorname{coker} g \rightarrow \operatorname{coker} h \rightarrow 0.$$

Απόδειξη. [1, 6.12]

□

Λήμμα 1.1.7. (Villamayor) Έστω M υποπρότυπο ενός προβολικού R -προτύπου P . Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

1. Το P/M είναι επίπεδο.
2. Για κάθε $x \in M$, υπάρχει ομομορφισμός $f \in \text{Hom}_R(P, M)$ τέτοιος ώστε $f(x) = x$.
3. Για κάθε $x_1, \dots, x_n \in M$, υπάρχει ομομορφισμός $f \in \text{Hom}_R(P, M)$ τέτοιος ώστε $f(x_i) = x_i$ για κάθε i .

Απόδειξη: [1, Σελ. 141]

Λήμμα 1.1.8. Έστω M ένα αριθμησίμως παραγόμενο υποπρότυπο ενός προβολικού R -προτύπου P . Αν το P/M είναι επίπεδο τότε το M είναι προβολικό R -πρότυπο.

Απόδειξη: Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ ακολουθία γεννητόρων του M . Με χρήση επαγωγής και του Λήμματος 1.1.7 έχουμε ότι υπάρχουν μορφισμοί $f_j \in \text{Hom}_R(P, M)$ ώστε $(1 - f_n) \cdots (1 - f_2)(1 - f_1)(x_i) = 0$ για κάθε $n > i$.

Θεωρούμε τις απεικονίσεις

$$g_n = (1 - f_n) \cdots (1 - f_2)(1 - f_1)|_M$$

και παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(x, g_1(x), \dots, g_n(x) \dots)$ έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων. Επομένως ορίζεται ομομορφισμός $g : M \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} P$ με τύπο

$$g(x) = (x, g_1(x), \dots, g_n(x), \dots).$$

Θεωρούμε επίσης τον ομομορφισμό $f : \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} P \rightarrow M$ ο οποίος δίνεται από το τύπο

$$f(a_1, a_2, \dots) = f_1(a_1) + f_2(a_2) + \cdots.$$

Τελικά, επειδή για κάθε n ισχύει ότι $f_n g_{n-1} = g_{n-1} - g_n$ (όπου με g_0 συμβολίζουμε τη ταυτοτική συνάρτηση), συμπεραίνουμε ότι:

$$\begin{aligned} f g(x) &= f_1(x) + f_2 g_1(x) + f_3 g_2(x) + \cdots \\ &= x - g_1(x) + g_1(x) - g_2(x) + g_2(x) - g_3(x) + \cdots = x \end{aligned} \quad (1.1)$$

Επομένως η ακολουθία

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} P \rightarrow M \rightarrow 0$$

διασπάται και άρα το M είναι προβολικό R -πρότυπο ως ευθύς προσθετός προβολικού R -προτύπου.

Λήμμα 1.1.9. [12, 2.3] Έστω M υποπρότυπο ενός προβολικού R -πρότυπου P , ώστε το P/M να είναι επίπεδο R -πρότυπο. Τότε κάθε αριθμησίμως παραγόμενο υποπρότυπο του M περιέχεται σε ένα αριθμησίμως παραγόμενο υποπρότυπο K του M ώστε το P/K να είναι επίπεδο R -πρότυπο.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι δεν αλλάζει το αποτέλεσμα αν στην εκφώνηση αντικαταστήσουμε το M με $M \oplus 0$ και το P με $P \oplus Q$ για κάποιο προβολικό R -πρότυπο Q . Επομένως μπορούμε, χωρίς να χάσουμε τη γενικότητα, να υποθέσουμε ότι το P είναι ελεύθερο R -πρότυπο με βάση X .

Έστω λοιπόν ένα αριθμησίμως παραγόμενο υποπρότυπο K_0 του M . Τότε υπάρχει αριθμήσιμο υποσύνολο του X , X_0 ώστε το K_0 να περιέχεται στο υποπρότυπο P_0 του P το οποίο παράγεται από το X_0 . Τότε το P_0 είναι ευθύς προσθετός του P .

Θεωρούμε προβολή $\pi : P \rightarrow P_0$, δηλαδή έναν ενδομορφισμό του P με την ιδιότητα $\pi^2 = \pi$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι μία τέτοια προβολή υπάρχει και ότι η εικόνα της είναι αριθμήσιμα παραγόμενο R -πρότυπο που περιέχει το K_0 .

Έστω τώρα $x_1, \dots, x_n, \dots$ μία αριθμήσιμη ακολουθία γεννητόρων του K_0 , τότε από το Λήμμα 1.1.7(3.) υπάρχει ακολουθία $f_1, \dots, f_n, \dots$ του $\text{Hom}_R(P, M)$ τέτοια ώστε $f_n(x_i) = x_i$ για κάθε $i < n$. Αφού $\pi(x_i) = x_i$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις f_n με τις $f_n \pi$. Έτσι κάθε $f_n P$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενο και επομένως το R -πρότυπο

$$K_1 = K_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n P$$

είναι ένα αριθμήσιμα παραγόμενο υποπρότυπο του M το οποίο περιέχει το K_0 και έχει την επιπλέον ιδιότητα ότι για κάθε $x \in K_0$ υπάρχει $f \in \text{Hom}_R(P, K_1)$ με $f(x) = x$.

Επαναλαμβάνοντας τη παραπάνω διαδικασία παίρνουμε διαδοχικά μία ακολουθία R -προτύπων

$$K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_n \subset \dots$$

Θεωρούμε το (αριθμήσιμα παραγόμενο) πρότυπο $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Για να εφαρμόσουμε ξανά το Λήμμα 1.1.7 παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in K$ υπάρχει $i \in \mathbb{N}$ με $x \in K_i$ και επομένως υπάρχει συνάρτηση $f_x \in \text{Hom}_R(P, K_{i+1})$ με $f_x(x) = x$, έτσι από το Λήμμα 1.1.7 έχουμε ότι το P/K είναι επίπεδο. □

Λήμμα 1.1.10. Έστω $0 \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_{i \in I} P_i \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ μία βραχεία ακριβής ακολουθία όπου τα P_i είναι αριθμησίμως παραγόμενα προβολικά R -πρότυπα. Τότε για κάθε αριθμήσιμο σύνολο $J_0 \subset I$ και κάθε αριθμησίμως παραγόμενο R -πρότυπο $K_0 \subset M$ υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $J \subset I$ τέτοιο ώστε το J_0 να είναι

υποσύνολο του J , το K_0 να περιέχεται στο $P_J = \bigoplus_{j \in J} P_j$ και η εικόνα $g(P_J)$ να είναι προβολικό R -πρότυπο. Επιπλέον ισχύει η ισότητα $g(P_J) = g(P_J) \cup M$.

Απόδειξη: [12, 2.4]

Θεώρημα 1.1.11. [12, 2.5] Έστω $0 \rightarrow M \rightarrow P \xrightarrow{g} M \rightarrow 0$ βραχεία ακριβής ακολουθία R -προτύπων όπου το M είναι επίπεδο R -πρότυπο και το P είναι προβολικό R -πρότυπο. Τότε το M είναι προβολικό R -πρότυπο.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα **Kaplansky** το προβολικό πρότυπο P είναι ευθύ άθροισμα αριθμησίμως παραγόμενων υποπροτύπων του, γράφουμε $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$. Θέτουμε επίσης $P_J = \bigoplus_{j \in J} P_j$ και $M_J = M \cap P_J$ για κάθε υποσύνολο J του I .

Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{P}$ όλων των διατεταγμένων ζευγών (J, L) όπου το J είναι υποσύνολο του I και το L είναι υποπρότυπο του P_J με $P_J = M_J \oplus L$. Ειδικότερα έχουμε ότι $(\emptyset, 0) \in \mathcal{P}$. Ορίζουμε διάταξη στο $\mathcal{P}$ ως εξής :

$$(J_1, L_1) \leq (J_2, L_2) \Leftrightarrow J_1 \subset J_2 \text{ \& } L_1 \subset L_2.$$

Προφανώς αν $\{(J_\alpha, L_\alpha)\}$ είναι αλυσίδα στοιχείων του $\mathcal{P}$ τότε το ζεύγος $(\bigcup_{\alpha \in A} J_\alpha, \bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha)$ ανήκει στο $\mathcal{P}$. Επομένως από το Λήμμα του **Zorn** έχουμε ότι υπάρχει μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{P}$, έστω ένα τέτοιο το (J, L) . Αν $J = I$ τότε $P = M \oplus L$ και τελειώσαμε.

Υποθέτουμε τώρα ότι $J \neq I$. Αφού λοιπόν $gP_j = M_j$, έπεται από το snake lemma (Λήμμα 1.1.6) ότι υπάρχει η ακριβής ακολουθία :

$$0 \rightarrow M/M_J \xrightarrow{f} P/P_J \xrightarrow{\bar{g}} M/M_J \rightarrow 0,$$

όπου η f επάγεται από την ένθεση $M \rightarrow P$ και η $\bar{g}$ από τη g . Τότε η f απεικονίζει ισομορφικά το M/M_J στο υποπρότυπο $\overline{M} = (M + P)/P_J$ του P/P_J και έτσι παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow \overline{M} \rightarrow P/P_J \xrightarrow{h} \overline{M} \rightarrow 0,$$

όπου η h είναι η σύνθεση $f\bar{g}$. Σημειώνουμε επίσης ότι $P/P_J = P_{I \setminus J}$, ιδιαιτέρως έχουμε ότι το P/P_J είναι προβολικό και αποτελεί ευθύ άθροισμα αριθμησίμως παραγόμενων υποπροτύπων $P_i + P_j/P_J$, για $i \in I$. Επομένως το M_J ως ευθύ προσθετός του P_J είναι και ευθύ προσθετός του P . Επιπροσθέτως από τη σχέση $M_J \subset M \subset P$ έχουμε ότι το M_J είναι και ευθύ προσθετός του M . Δηλαδή το M/M_J είναι επίπεδο πρότυπο που σημαίνει ότι και το $\overline{M}$ είναι επίπεδο πρότυπο.

Εφαρμόζοντας τώρα στα παραπάνω το Λήμμα 1.1.10 παίρνουμε ένα υποσύνολο K του I , τέτοιο ώστε $h(P_K/P_J) = \overline{M} \cap (P_K/P_J)$, με $h(P_K/P_J)$ προβολικό. Αφού λοιπόν

$$h(P_K/P_J) = f(gP_K/M_J) = (gP_K + P_J)/P_J$$

$$\overline{M} \cap (P_K/P_J) = [(M + P_J) \cap P_K]/P_J = (M_K + P_J)/P_J$$

συμπεραίνουμε ότι $gP_K + P_J = M_K + P_J$. Αν τμήσουμε τα μέλη της τελευταίας ισότητας με το M , παίρνουμε ότι $gP_K = M_K$.

Αφού ο πυρήνας της $h|_{P_K/P_J}$ είναι το υποπρότυπο $\overline{M} \cap (P_K/P_J) = (M_K + P_J)/P_J$, βλέπουμε ότι $h(P_K/P_J) \cong P_K/(M_K + P_J)$. Επομένως το τελευταίο πηλίκο είναι προβολικό, και έτσι έχουμε $P_K = (M_K + P_J) \oplus T$ για κάποιο T . Επιπλέον, από τις σχέσεις $P_J = M_J \oplus L$ και

$$M_K \cap L = M_K \cap P_J \cap L = M_J \cap L = 0,$$

συμπεραίνουμε ότι $M_K + P_J = M_K \oplus L$ και έτσι $P_K = M_K \oplus L \oplus T$. Όμως, τότε έχουμε $K, L \oplus T \in \mathcal{P}$, το οποίο είναι άτοπο αφού το (J, L) έχει υποτεθεί μεγιστικό.

Άρα $J = I$ και $P = M \oplus L$.

□

Ορισμός 1.1.12. (Συμπλέγματα:) Συνοψίζουμε σε ένα ορισμό τις βασικές έννοιες που αφορούν συμπλέγματα και αλυσωτές απεικονίσεις:

- Σύμπλεγμα R -προτύπων καλείται μία ακολουθία R -προτύπων και R -μορφισμών:

$$(C, d) = \cdots \rightarrow C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \rightarrow \cdots$$

Με την ιδιότητα:

$$d_n d_{n+1} = 0, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}.$$

- Ένα σύμπλεγμα P καλείται ακυκλικό αν $\ker d_n = \operatorname{Im} d_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.
- Έστω $(C, d), (C', d')$ συμπλέγματα, αλυσωτή απεικόνιση μεταξύ των $(C, d), (C', d')$ ονομάζουμε μία ακολουθία ομομορφισμών $f = (f)_n : C_n \rightarrow C'_n$ η οποία κάνει το ακόλουθο διάγραμμα μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{d'_{n+1}} & C'_n & \xrightarrow{d'_n} & C'_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

1. Μία αλυσωτή απεικόνιση, $f = (f)_n : C_n \rightarrow C'_n$, καλείται ψευδοισομορφισμός (*quasi-isomorphism*) εαν όλες οι επαγόμενες απεικονίσεις της f μέσω του συναρτητή ομολογίας, $f_* : H_n(C) \rightarrow H_n(C')$ είναι ισομορφισμοί.
2. Οι αλυσωτές απεικονίσεις, $f, g : C \rightarrow C'$, είναι ομοτοπικές, συμβολικά $f \simeq g$, ανν υπάρχει ακολουθία μορφισφλων $s_n : C_n \rightarrow C'_{n+1}$ ώστε:

$$f_n - g_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n.$$

3. Αν $f = (f)_n : C_n \rightarrow C'_n$ είναι μία αλυσωτή απεικόνιση τότε ορίζουμε ως κώνο (*mapping cone*) της f το σύμπλεγμα $(\mathbf{cone}(f), D_n)$, όπου

$$\mathbf{cone}(f)_n = C_{n-1} \oplus C'_n$$

και

$$D(c_{n-1}, c'_n) = (-d_{n-1}c_{n-1}, d'_nc'_n - f_{n-1}c_{n-1}).$$

- Ένα σύμπλεγμα P καλείται συμπτύξιμο (*contractible*) ανν $id_P \simeq 0$.

Θεώρημα 1.1.13. Κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα, $\mathbf{P}$, προβολικών R -προτύπων του οποίου όλες οι συζυγίες είναι επίπεδα πρότυπα είναι συμπτύξιμο.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\mathbf{B}(\mathbf{P})_n$ την n -οστή συζυγία του $\mathbf{P}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ η ακολουθία $0 \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{P})_n \rightarrow \mathbf{P}_n \rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{P})_{n-1} \rightarrow 0$ είναι ακριβής. Περνώντας στο συνγινόμενο των παραπάνω β.α.α έχουμε την β.α.α $0 \rightarrow \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{B}(\mathbf{P})_n \rightarrow \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}_n \rightarrow \coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{B}(\mathbf{P})_n \rightarrow 0$. Επειδή το συνγινόμενο επίπεδων προτύπων (αντίστοιχα προβολικών) προτύπων είναι επίπεδο πρότυπο (αντίστοιχα προβολικό) πρότυπο συμπεραίνουμε ότι το $\coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{B}(\mathbf{P})_n$ (αντίστοιχα $\coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{P}_n$) είναι επίπεδο πρότυπο (αντίστοιχα προβολικό). Από το Θεώρημα 1.1.11 το $\coprod_{n \in \mathbb{Z}} \mathbf{B}(\mathbf{P})_n$ είναι προβολικό. Επομένως κάθε $\mathbf{B}(\mathbf{P})_n$ είναι προβολικό και άρα το $\mathbf{P}$ είναι συμπτύξιμο (Υπόδειξη: $P_n \cong B(P)_n \oplus B(P)_{n-1}$).

□

Ορισμός 1.1.14. (Επιλύσεις) Έστω M ένα R -πρότυπο και $\mathcal{X}$ μία οποιαδήποτε κλάση R -προτύπων ονομάζουμε:

- Αριστερή $\mathcal{X}$ -επίλυση του M κάθε ακριβή ακολουθία

$$\mathbf{X} = \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

με $X_n \in \mathcal{X}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

- Δεξιά $\mathcal{X}$ -επίλυση του M κάθε ακριβή ακολουθία

$$\mathbf{X} = 0 \rightarrow M \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots,$$

με $X^n \in \mathcal{X}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Θα αναφερόμαστε στις αριστερές επιλύσεις απλά ως επιλύσεις. Επιπλέον μια επίλυση $\mathbf{X}$ θα λέγεται **γνήσια**, εάν η ακολουθία $\text{Hom}_R(Y, \mathbf{X})$ είναι ακριβής για κάθε αντικείμενο Y της $\mathcal{X}$. Αντίστοιχα μια επίλυση $\mathbf{X}$ θα λέγεται **συν-γνήσια**, εάν η ακολουθία $\text{Hom}_R(\mathbf{X}, Y)$ είναι ακριβής για κάθε αντικείμενο Y της $\mathcal{X}$.

Πρόταση 1.1.15. Έστω $\mathcal{X}$ μία κλάση R -προτύπων η οποία είναι κλειστή ως προς ευθεία αθροίσματα. Αν M_i είναι R -πρότυπα τα οποία δέχονται συνγνήσιες δεξιές $\mathcal{X}$ -επιλύσεις, τότε και το άθροισμα $\coprod M_i$ δέχεται δεξιά συνγνήσια επίλυση.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{X}^i$ μία δεξιά συνγνήσια $\mathcal{X}$ -επίλυση του M_i . Αν σκεφτούμε τις δεξιές επιλύσεις ως συμπλέγματα τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το συν-γινόμενο τους, $\coprod \mathbf{X}^i = \mathbf{X}$ στην $\text{Comp}(R\text{Mod})$, δηλαδή στη κατηγορία όλων των συμπλεγμάτων της $R\text{Mod}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η $\mathbf{X}$ είναι δεξιά $\mathcal{X}$ -επίλυση του $\coprod M_i$. Τέλος για να δείξουμε ότι η επίλυση $\mathbf{X}$ είναι επιπλέον συνγνήσια αρκεί να θυμηθούμε ότι ισχύει ο παρακάτω ισομορφισμός αβελιανών ομάδων :

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{i \in I} A_i, B\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(A_i, B).$$

□

Η παρακάτω πρόταση είναι μία μορφή του κλασικού Horseshoe Lemma. Η απόδειξη στηρίζεται στην απόδειξη της Πρότασης 8.2.1 των Enochs και Jenda στο βιβλίο *Relative Homological Algebra*, [4].

Πρόταση 1.1.16. (*Horseshoe Lemma*) Έστω $\mathcal{X}$ μία κλάση R -προτύπων, η οποία είναι κλειστή ως προς πεπερασμένα ευθεία αθροίσματα. Έστω επίσης μία βραχεία ακριβής ακολουθία R -προτύπων $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$, τέτοια ώστε η:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M'', Y) \rightarrow \text{Hom}_R(M, Y) \rightarrow \text{Hom}_R(M', Y) \rightarrow 0$$

να είναι ακριβής για κάθε $Y \in \mathcal{X}$. Αν τα M', M'' δέχονται δεξιά συνγνήσια $\mathcal{X}$ -επίλυση τότε και το M δέχεται δεξιά συνγνήσια $\mathcal{X}$ -επίλυση.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{X}', \mathbf{X}''$ δεξιές συνγνήσιες επιλύσεις των M', M'' αντίστοιχα, με $\mathbf{X}' = 0 \rightarrow M' \rightarrow X'_0 \rightarrow \cdots$ και $\mathbf{X}'' = 0 \rightarrow M'' \rightarrow X''_0 \rightarrow \cdots$.

Έχουμε το διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & X'_0 & & & & X''_0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & C'_0 & & & & C''_0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

Όπου τα C'_0, C''_0 είναι οι συμπυρήνες των μορφισμών $M' \rightarrow X'_0$, $M'' \rightarrow X''_0$ αντίστοιχα.

Επειδή η ακολουθία:

$$Hom(M'', X'_0) \rightarrow Hom(M, X'_0) \rightarrow Hom(M', X'_0) \rightarrow 0$$

είναι ακριβής, έχουμε ότι υπάρχει R -μορφισμός $g : M \rightarrow X'_0$ ο οποίος κάνει το παρακάτω τρίγωνο μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc}
 M' & \hookrightarrow & M \\
 \downarrow & \nwarrow g & \\
 X'_0 & &
 \end{array}$$

Ονομάζουμε h την σύνθεση: $M \rightarrow M'' \rightarrow X''_0$.

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση $i : M \rightarrow X'_0 \oplus X''_0$, με τύπο $i(m) = (g(m), h(m))$ η οποία είναι ένα-προς-ένα, διότι εαν η g μηδενίζεται σε κάποιο μη μηδενικό m τότε το m δεν θα ανήκει στην εικόνα της $M' \rightarrow M$.

Τελικά παίρνουμε το διάγραμμα :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X'_0 & \longrightarrow & X'_0 \oplus X''_0 & \longrightarrow & X''_0 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & C'_0 & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & C''_0 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Όπου $C_0 \cong X'_0 \oplus X''_0 / \text{Im}(M \rightarrow X'_0 \oplus X''_0)$.

Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί για την ακολουθία:

$$0 \rightarrow C'_0 \rightarrow C_0 \rightarrow C''_0 \rightarrow 0.$$

Πράγματι, Το C'_0 δέχεται ως δεξιά συνγνήσια επίλυση την :

$$0 \rightarrow C'_0 \rightarrow X'_1 \rightarrow \dots .$$

Όμοια και για το C''_0 έχουμε την δεξιά συνγνήσια επίλυση

$$0 \rightarrow C''_0 \rightarrow X''_1 \rightarrow \dots .$$

Τέλος πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $Y \in \mathcal{X}$ ο συναρτητής $\text{Hom}(\cdot, Y)$ διατηρεί την ακρίβεια της $0 \rightarrow C'_0 \xrightarrow{j} C_0 \rightarrow C''_0 \rightarrow 0$.

Αυτό συμβαίνει επειδή για κάθε $f' \in \text{Hom}(C'_0, Y)$ τότε μπορούμε να ορίσουμε απεικόνιση $f \in \text{Hom}(C_0, Y)$,με τύπο : $f([x'_0, x''_0]) = f'([x'_0])$ για την οποία ισχύει ότι $j^*(f) = f'$. $\square$

Πρόταση 1.1.17. Έστω $f : M \rightarrow \overline{M}$ ομομορφισμός R -προτύπων, θεωρούμε επίσης το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i} & X^0 & \xrightarrow{d^0} & X^1 \longrightarrow \dots \\
& & \downarrow f & & & & \\
0 & \longrightarrow & \overline{M} & \xrightarrow{\bar{i}} & \overline{X}^0 & \xrightarrow{\bar{d}^0} & \overline{X}^1 \longrightarrow \dots
\end{array}$$

Όπου η πρώτη σειρά είναι μία συνγνήσια δεξιά $\mathcal{X}$ -επίλυση του M , και η δεύτερη σειρά είναι μία δεξιά $\mathcal{X}$ -επίλυση του $\overline{M}$. Τότε η f επάγει μία αλυσωτή απεικόνιση $(f^i)_{i \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X^0 & \longrightarrow & X^1 & \longrightarrow & X^2 \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f^0 & & \downarrow f^1 & & \downarrow f^2 \\ 0 & \longrightarrow & \overline{X}^0 & \longrightarrow & \overline{X}^1 & \longrightarrow & \overline{X}^2 \longrightarrow \dots \end{array}$$

με την ιδιότητα ότι το τετράγωνο:

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & X^0 \\ \downarrow f & & \downarrow f^0 \\ \overline{M} & \longrightarrow & \overline{X}^0 \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Επιπλέον, η αλυσωτή απεικόνιση (f^i) είναι μοναδική (ως προς ομοτοπία) με τη παραπάνω ιδιότητα.

Απόδειξη. 1. Επειδή η ακολουθία

$$\dots \rightarrow \operatorname{Hom}(X^0, \overline{X}^0) \rightarrow \operatorname{Hom}(M, \overline{X}^0) \rightarrow 0$$

είναι ακριβής μπορούμε να βρούμε R -μορφισμό f^0 ο οποίος κάνει το τετράγωνο μεταθετικό

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & X^0 \\ \downarrow f & & \downarrow f^0 \\ \overline{M} & \longrightarrow & \overline{X}^0 \end{array}$$

Για τον ίδιο λόγο μπορεί να κατασκευαστεί ολόκληρη η αλυσωτή απεικόνιση (f^i) .

2. Δείχνουμε την μοναδικότητα ως προς ομοτοπία: Έστω λοιπόν ακόμη μία αλυσωτή απεικόνιση, $h = (h^i)_i \in \mathbb{N}$ με τις επιθυμητές ιδιότητες. Θεωρούμε την διεγγραμμένη επίλυση $\mathbf{X} = 0 \rightarrow X^0 \rightarrow X^1 \rightarrow \dots$ ως σύμπλεγμα, όπου το 0 είναι ο όρος 1 του συμπλέγματος, το X^0 είναι ο όρος 0, το X^1 είναι ο όρος -1 κ.ο.κ. Όμοια, επιλέγουμε την αρίθμηση των όρων του συμπλέγματος $\overline{\mathbf{X}} = 0 \rightarrow \overline{X}^0 \rightarrow \overline{X}^1 \rightarrow \dots$.

Κατασκευάζουμε, τώρα, επαγωγικά την αλυσωτή απεικόνιση

$$s = (s_n) : \mathbf{X} \rightarrow \overline{\mathbf{X}} \text{ με } s_{-n} : X^n \rightarrow \overline{X}^{n-1}$$

Προφανώς, έχουμε μία μόνο επιλογή για το $s_0 : X^0 \rightarrow 0$ την $s_0 = 0$.

Ύπαρξη της s_{-1} : Θέλουμε $s_{-1} : X^1 \rightarrow \overline{X}^0$ έτσι ώστε

$$f^0 - h^0 = \overline{d}^1 s_0 + s_{-1} d^0 \Rightarrow f^0 - h^0 = s_{-1} d^0. \text{ Έχουμε την ακριβή ακολουθία:}$$

$$0 \leftarrow Hom(M, \overline{X}^0) \xleftarrow{i^*} Hom(X^0, \overline{X}^0) \xleftarrow{d^{0*}} Hom(X^1, \overline{X}^0) \leftarrow \dots$$

Από τη μεταθετικότητα του τετραγώνου :

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & X^0 \\ \downarrow & & \downarrow f^0 \downarrow h^0 \\ \overline{M} & \longrightarrow & \overline{X}^0 \end{array}$$

Έχουμε ότι ο μορφισμός $f^0 - h^0$ ανήκει στον πυρήνα της i^* , επομένως υπάρχει $s_{-1} \in Hom(X^0, \overline{X}^0)$ με $s_{-1} d^0 = f^0 - h^0$.

Επαγωγικό βήμα: Έστω ότι έχει κατασκευαστεί η ακολουθία μορφισμών (s) μέχρι το βήμα s_{-n} . Θέλουμε να δείξουμε την ύπαρξη απεικόνισης $s_{-n-1} : X^{n-1} \rightarrow \overline{X}^{n-2}$, έτσι ώστε:

$$f^n - h^n = \overline{d}^{n-1} s_{-n} + s_{-n-1} d^n \Rightarrow f^n - h^n - \overline{d}^{n-1} s_{-n} = s_{-n-1} d^n.$$

Όμως, λόγω της ακρίβειας της :

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow Hom(X^{n+1}, \overline{X}^n) \xrightarrow{d^{n*}} Hom(X^n, \overline{X}^n) \xrightarrow{d^{n-1*}} \\ &\rightarrow Hom(X^{n-1}, \overline{X}^n) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

αρκεί να δείξουμε ότι ο μορφισμός $f^n - h^n - \overline{d}^{n-1} s_{-n}$ ανήκει στον πυρήνα της d^{n-1*} . Αλλά:

$$\begin{aligned} d^{n-1*}(f^n - h^n - \overline{d}^{n-1} s_{-n}) &= f^n d^{n-1} - h^n d^{n-1} - \overline{d}^{n-1} s_{-n} d^{n-1} \\ &= \overline{d}^{n-1} f^{n-1} - \overline{d}^{n-1} h^{n-1} - \overline{d}^{n-1} s_{-n} d^{n-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

και

$$s_{-n} d^{n-1} = f^{n-1} - h^{n-1} - \overline{d}^{n-2} s_{-n+1} \quad (1.3)$$

Τέλος από τις 1.2 και 1.3 έχουμε το ζητούμενο.

□

Ορισμός 1.1.18. (Επιλύσιμες κλάσεις:) Έστω $\mathcal{X}$ μία οποιαδήποτε κλάση R -προτύπων η οποία περιέχει όλα τα προβολικά R -πρότυπα. Θα καλούμε την $\mathcal{X}$ προβολικά επιλύσιμη αν για κάθε $X_2 \in \mathcal{X}$ και κάθε β.α.α. της μορφής

$0 \rightarrow X_1 \rightarrow X \rightarrow X_2 \rightarrow 0$, οι συνθήκες $X_1 \in \mathcal{X}$ και $X \in \mathcal{X}$ είναι ισοδύναμες.

Ορισμός 1.1.19. (Ορθογώνιες κλάσεις:) Για κάθε κλάση R -προτύπων $\mathcal{X}$ ορίζουμε την αριστερή ορθογώνια κλάση της $\mathcal{X}$ ως εξής:

$${}^\perp \mathcal{X} = \{M \in R_{Mod} : Ext_R^i(M, X) = 0 \text{ για όλα τα } X \in \mathcal{X}, \text{ και όλα τα } i > 0\}.$$

Αντίστοιχα ορίζουμε την δεξιά ορθογώνια κλάση της $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X}^\perp = \{M \in R_{Mod} : Ext_R^i(X, M) = 0 \text{ για όλα τα } X \in \mathcal{X}, \text{ και όλα τα } i > 0\}.$$

Παρατήρηση 1.1.20. 1. Η κλάση όλων των R -προτύπων, $\mathcal{M}(R)$, έχει ως αριστερή ορθογώνια κλάση τη κλάση των προβολικών προτύπων.

2. Η κλάση των προβολικών προτύπων είναι προβολικά επιλύσιμη και κλειστή ως προς ευθεία αθροίσματα και ευθύς προσθετέους.

Πρόταση 1.1.21. Για κάθε κλάση R -προτύπων, $\mathcal{X}$, η αριστερή ορθογώνια κλάση ${}^\perp \mathcal{X}$ είναι προβολικά επιλύσιμη και κλειστή ως προς ευθεία αθροίσματα και ευθύς προσθετέους.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι κάθε προβολικό πρότυπο ανήκει στη ${}^\perp \mathcal{X}$.

Έστω λοιπόν $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ βραχεία ακριβής ακολουθία με $M_2 \in {}^\perp \mathcal{X}$.

Έστω επίσης $M_1 \in {}^\perp \mathcal{X}$ τότε η μακρά ακριβής ακολουθία για το $Ext(\cdot, X)$ όπου $X \in \mathcal{X}$ έχει τη μορφή:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom(M_2, X) & \longrightarrow & Hom(M, X) & \longrightarrow & Hom(M_1, X) \\ & & & & \searrow^{\theta^0} & & \nearrow \\ & & 0 & \longrightarrow & Ext_R^1(M, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \searrow^{\theta^1} & & \nearrow \\ & & 0 & \longrightarrow & Ext_R^2(M, A) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & 0 & \longrightarrow & Ext_R^n(M, A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Επομένως $\text{Ext}_R^i(M, X) = 0$ για κάθε $X \in \mathcal{X}$ και για κάθε $i > 0$, το οποίο σημαίνει ακριβώς ότι $M \in {}^\perp\mathcal{X}$. Όμοια αποδεικνύεται και η συνεπαγωγή $M \in {}^\perp\mathcal{X} \Rightarrow M_1 \in {}^\perp\mathcal{X}$.

Τέλος από τη Πρόταση 7.21 στο [1] έχουμε ότι η ${}^\perp\mathcal{X}$ είναι κλειστή ως προς ευθέα αθροίσματα και ευθύς προσθετέους.

□

Ορισμός 1.1.22. (Προβολική Διάσταση:) Έστω M R -πρότυπο, θα λέμε ότι η προβολική διάσταση του M είναι μικρότερη ή ίση του $n \in \mathbb{N}$ εάν υπάρχει πεπερασμένη προβολική επίλυση του M :

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Συμβολικά γράφουμε $\text{pd}_R(M) \leq n$. Επίσης λέμε ότι η προβολική διάσταση του M είναι ίση με n και γράφουμε $\text{pd}_R(M) = n$ εάν το n είναι το μήκος της μικρότερης προβολικής επίλυσης του M . Αν δεν υπάρχει πεπερασμένη προβολική επίλυση του M τότε ορίζουμε $\text{pd}_R(M) = \infty$.

1.2 Gorenstein προβολικά πρότυπα

Ορισμός 1.2.1. Διπλά άπειρη ακριβή ακολουθία προβολικών προτύπων καλούμε κάθε ακριβή ακολουθία της μορφής:

$$\mathbf{P} = \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \cdots,$$

όπου τα P^i, P_i είναι προβολικά R -πρότυπα.

Ορισμός 1.2.2. (Πλήρης προβολική επίλυση του προτύπου M .) Έστω M R -πρότυπο. Πλήρη προβολική επίλυση του M καλούμε μία διπλά άπειρη ακριβή ακολουθία προβολικών προτύπων η οποία συμφωνεί με μία προβολική επίλυση του M σε κατάλληλα μεγάλες διαστάσεις. Δηλαδή έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow P^0 \longrightarrow \cdots \\ & & & \nearrow & & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_{n+1} & \longrightarrow & P_n & & \\ & & & \searrow & & & \\ & & & P'_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow & P'_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \end{array}$$

Επίσης, λέμε ότι η πλήρης προβολική επίλυση του M έχει δείκτη συμφωνίας (coincidence index) n αν ξεκινάει να συμπίπτει με τη αντίστοιχη προβολική επίλυση του M στη διάσταση n .

Ορισμός 1.2.3. Έστω M R -πρότυπο και $\mathbf{P}$ μία πλήρης προβολική επίλυση του M . Η $\mathbf{P}$ θα καλείται ισχυρώς πλήρης προβολική επίλυση εάν η ακολουθία $\text{Hom}(\mathbf{P}, Q)$ είναι ακριβής για κάθε προβολικό R -πρότυπο Q .

Ορισμός 1.2.4. (Gorenstein Προβολικό Πρότυπο) Ένα R -πρότυπο M θα καλείται **Gorenstein Προβολικό** αν και μόνο εάν υπάρχει ισχυρώς πλήρης προβολική επίλυση $\mathbf{P}$ του M με δείκτη συμφωνίας 0.

Συμβολισμός: Με $\mathcal{GP}(R)$ θα συμβολίζουμε τη κλάση των Gorenstein προβολικών R -προτύπων.

Παράδειγμα 1.2.5. 1. Το $\mathbb{Z}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο αν και μόνο αν η G είναι η ομάδα με ένα στοιχείο.

Πράγματι, αν το $\mathbb{Z}$ είναι $\mathbb{Z}G$ -προβολικό τότε κάθε $\mathbb{Z}G$ -επιμορφισμός, $\epsilon : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}$, είναι διασπάσιμος. Θεωρούμε τον επιμορφισμό ϵ με τύπο $\epsilon(g) = 1$, για κάθε $g \in G$. Έστω επίσης $\mu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}G$ ένας $\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμός με $\epsilon\mu = \text{id}_{\mathbb{Z}}$. Είναι προφανές ότι ο μ εξαρτάται μόνο από τη τιμή $\mu(1) = x \in \mathbb{Z}G$. Τότε $g\mu(1) = \mu(g1) = gx = x$, για κάθε $g \in G$.

Δηλαδή το x μένει αναλλοίωτο από όλα τα στοιχεία της G . Αναγκαστικά λοιπόν η G πρέπει να είναι πεπερασμένη ομάδα και το x να είναι κάποιο πολλαπλάσιο του $\sum_{g \in G} g$. Έστω λοιπόν ότι $x = n \sum_{g \in G} g$, τότε $\epsilon(x) = n \cdot |G| = 1 \Rightarrow n \cdot |G| = 1 \Rightarrow |G| = 1$.

2. Το $\mathbb{Z}$ είναι Gorenstein προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για κάθε πεπερασμένη ομάδα G (Πρόταση 2.2.10).

Παρατήρηση 1.2.6. Κάθε προβολικό R -πρότυπο P είναι και Gorenstein προβολικό R -πρότυπο αφού η:

$$\mathbf{P} = \cdots 0 \rightarrow 0 \rightarrow P \xrightarrow{id} P \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

είναι μία ισχυρώς πλήρης προβολική επίλυση του προτύπου P .

Επίσης, λόγω συμμετρίας κάθε εικόνα, κάθε πυρήνας και κάθε συμπυρήνας που εμφανίζεται σε μία ισχυρώς πλήρη προβολική επίλυση κάποιου προτύπου M είναι Gorenstein προβολικό πρότυπο.

Πρόταση 1.2.7. [2, 2.3] Ένα R -πρότυπο M είναι Gorenstein προβολικό αν και μόνο αν το M ανήκει στην αριστερή ορθογώνια κλάση ${}^{\perp}\mathcal{P}(R)$ και το M δέχεται δεξιά συνγνήσια $\mathcal{P}(R)$ -επίλυση. Όπου με $\mathcal{P}(R)$ συμβολίζουμε τη κλάση των προβολικών R -προτύπων.

Απόδειξη. Η Απόδειξη είναι άμεση από τους ορισμούς:

- Έστω M Gorenstein προβολικό πρότυπο τότε υπάρχει ισχυρώς πλήρης προβολική επίλυση $\mathbf{P}$ του M . Δηλαδή η ακολουθία:

$$\rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

είναι μία προβολική επίλυση του M , η οποία μένει ακριβής μέσω του συναρτητή $Hom(\cdot, Q)$ για κάθε προβολικό πρότυπο Q . Επομένως από τον ορισμό του $Ext(\cdot, Q)$ έχουμε ότι $Ext^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > 0$, το οποίο σημαίνει ακριβώς ότι $M \in {}^{\perp}\mathcal{P}(R)$. Επιπλέον, το δεξιό μέρος της $\mathbf{P}$:

$$0 \rightarrow M \rightarrow P^0 \rightarrow \cdots \rightarrow P^n \rightarrow$$

αποτελεί μία δεξιά συνγνήσια $\mathcal{P}(R)$ -επίλυση του M .

- Έστω τώρα M το οποίο ανήκει στην αριστερή ορθογώνια κλάση ${}^{\perp}\mathcal{P}(R)$ και δέχεται δεξιά συνγνήσια P_+ προβολική επίλυση.

Έστω P_- μία οποιαδήποτε προβολική επίλυση του M :

$$\rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Επειδή $\text{Ext}^j(M, Q) = 0$ για κάθε j μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η P παραμένει ακριβής αν εφαρμόσουμε σε αυτή τον συναρτητή $\text{Hom}(\cdot, Q)$.

Τέλος, από την ακολουθία :

$$P_- \rightarrow M \rightarrow P_+$$

μπορούμε να φτιάξουμε την :

$$\mathbf{P} = P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \xrightarrow{d_0} P^0 \rightarrow \cdots \rightarrow P^n$$

όπου ο μορφισμός $d_0 : P_0 \rightarrow P^0$ είναι η σύνθεση των μορφισμών $P_0 \xrightarrow{\epsilon} M$ και $M \xrightarrow{i} P^0$, δηλαδή $\text{Im} d_0 \cong M$. Αρκεί πλέον να δείξουμε ότι η ακολουθία $\text{Hom}(\mathbf{P}, Q)$ είναι ακριβής στις θέσεις $\text{Hom}(P_0, Q)$ και $\text{Hom}(P^0, Q)$.

Για το σκοπό αυτό αρκεί να παρατηρήσουμε ότι:

ο πυρήνας του μορφισμού $d_0^* : \text{Hom}(P^0, Q) \rightarrow \text{Hom}(P_0, Q)$ ισούται με το πυρήνα του μορφισμού $i^* : \text{Hom}(P^0, Q) \rightarrow \text{Hom}(M, Q)$ και ότι η εικόνα του μορφισμού $d_0^* : \text{Hom}(P^0, Q) \rightarrow \text{Hom}(P_0, Q)$ ισούται με την εικόνα του μορφισμού $\epsilon^* : \text{Hom}(M, Q) \rightarrow \text{Hom}(P_0, Q)$.

□

Πρόταση 1.2.8. [2, 2.3] Έστω $\mathbf{P}$ μία ισχυρώς πλήρης προβολική επίλυση ενός R -προτύπου M τότε η ακολουθία $\text{Hom}_R(\mathbf{P}, L)$ είναι ακριβής για όλα τα R -πρότυπα L με πεπερασμένη προβολική διάσταση. Ιδιαίτέρως έχουμε ότι $\text{Ext}_R^i(M, L) = 0$ για όλα τα $i > 0$ και όλα τα R -πρότυπα L πεπερασμένης προβολικής διάστασης.

Απόδειξη. Έστω L πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης και

$$\mathbf{Q} \twoheadrightarrow Q_n \rightarrow \cdots \rightarrow Q_0 \rightarrow L \rightarrow 0,$$

μία προβολική επίλυση του L . Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Hom(P_1, Q_n) & \longleftarrow & Hom(P_0, Q_n) & \longleftarrow & Hom(P^0, Q_n) & \longleftarrow & Hom(P^1, Q_n) \\
& \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Hom(P_1, Q_0) & \longleftarrow & Hom(P_0, Q_0) & \longleftarrow & Hom(P^0, Q_0) & \longleftarrow & Hom(P^1, Q_0) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Hom(P_1, L) & \longleftarrow & Hom(P_0, L) & \longleftarrow & Hom(P^0, L) & \longleftarrow & Hom(P^1, L) \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Το οποίο επεκτείνεται αριστερά και δεξιά. Οι κάθετοι μορφισμοί είναι αυτοί που προκύπτουν εάν εφαρμόσουμε τους συναρτητές $Hom(P_i, \cdot)$ και $Hom(P^i, \cdot)$ στη προβολική επίλυση $\mathbf{Q}$, ενώ οι οριζόντιοι μορφισμοί είναι αυτοί που προκύπτουν εάν εφαρμόσουμε τους συναρτητές $Hom(\cdot, Q_i)$ και $Hom(\cdot, L)$ στην πλήρη προβολική επίλυση $\mathbf{P}$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το παραπάνω διάγραμμα είναι μεταθετικό και ότι η ακρίβεια των στηλών καθώς και η ακρίβεια των γραμμών $Hom(\mathbf{P}, Q_i)$ έχουν ως συνέπεια την ακρίβεια της γραμμής $Hom(\mathbf{P}, L)$, το οποίο είναι το ζητούμενο.

□

Θεώρημα 1.2.9. [2, 2.5] Η κλάση των Gorenstein προβολικών προτύπων είναι προβολικά επιλύσιμη. Επιπλέον είναι κλειστή ως προς ευθέα αθροίσματα.

Απόδειξη. Η αριστερή ορθογώνια κλάση ${}^\perp \mathcal{P}(R)$ είναι κλειστή ως προς ευθέα αθροίσματα από τη Πρόταση 1.1.21. Επίσης από τη Πρόταση 1.1.15 έχουμε ότι η κλάση των R -προτύπων τα οποία δέχονται δεξιά συνγνήσια $\mathcal{P}(R)$ -επίλυση είναι κλειστή ως προς ευθέα αθροίσματα. Τέλος, από το χαρακτηρισμό που μας δίνει η Πρόταση 1.2.7 για τα Gorenstein προβολικά πρότυπα έχουμε ότι η κλάση των Gorenstein προβολικών προτύπων είναι κλειστή ως προς ευθέα αθροίσματα.

Για να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{GP}(R)$ είναι προβολικά επιλύσιμη, θεωρούμε μία βραχεία ακριβή ακολουθία R -προτύπων $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$, όπου το M'' είναι Gorenstein προβολικό.

Πρώτα υποθέτουμε ότι το M' είναι Gorenstein προβολικό. Λόγω του χαρακτηρισμού των Gorenstein προβολικών προτύπων μέσω της Πρότασης 1.2.7, αρκεί να δείξουμε ότι το M ανήκει στην κλάση ${}^\perp \mathcal{P}(R)$ και ότι δέχεται δεξιά συνγνήσια $\mathcal{P}(R)$ –επίλυση. Το ότι το M ανήκει στην ${}^\perp \mathcal{P}(R)$ είναι συνέπεια της Πρότασης 1.1.21 και ότι το M δέχεται δεξιά συνγνήσια $\mathcal{P}(R)$ –επίλυση είναι συνέπεια του **Horseshoe lemma**.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι το M είναι Gorenstein προβολικό. Αφού η κλάση ${}^\perp \mathcal{P}(R)$ είναι προβολικά επιλύσιμη, για να δείξουμε ότι το M' είναι Gorenstein προβολικό αρκεί να αποδείξουμε ότι το M' δέχεται δεξιά συνγνήσια $\mathcal{P}(R)$ –επίλυση. Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχουν δεξιές συνγνήσιες $\mathcal{P}(R)$ –επιλύσεις,

$$\mathbf{M} = 0 \rightarrow M \rightarrow P^0 \rightarrow P^1 \rightarrow \dots \quad \text{και} \quad \mathbf{M}'' = 0 \rightarrow M'' \rightarrow P''^0 \rightarrow P''^1 \rightarrow \dots$$

Από τη Πρόταση 1.1.17 ξέρουμε ότι υπάρχει μοναδική (ως προς ομοτοπία) αλυσωτή απεικόνιση $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}''$ η οποία επάγεται από την απεικόνιση $M \rightarrow M''$. Συμβολίζουμε με $\mathbf{C}$ το κώνο (mapping cone) της $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}''$.

Επειδή οι $\mathbf{M}, \mathbf{M}''$ είναι ακριβείς έχουμε ότι η απεικόνιση $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}''$ είναι ψευδο–ισομορφισμός. Εφαρμόζοντας τώρα το Πόρισμα 10.41 του [1] παίρνουμε ότι ο κώνος $\mathbf{C}$ είναι ακριβής. Εξ ορισμού έχουμε ότι για κάθε προβολικό πρότυπο Q , τα συμπλέγματα $\text{Hom}(M'', Q), \text{Hom}(M, Q)$ είναι ακυκλικά. Επομένως, η απεικόνιση $\text{Hom}(M'', Q) \rightarrow \text{Hom}(M, Q)$ είναι ψευδο–ισομορφισμός. Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι υπάρχει ισομορφία του κώνου της $\text{Hom}(M'', Q) \rightarrow \text{Hom}(M, Q)$ με το σύμπλεγμα $\text{Hom}(\mathbf{C}, Q)$ και έτσι συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $\text{Hom}(\mathbf{C}, Q)$ είναι ακριβής.

Μελετάμε τώρα την εξής βραχεία ακριβή ακολουθία συμπλεγμάτων :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & P''^0 \oplus P^1 & \xlongequal{\quad} & P''^0 \oplus P^1 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & P^0 & \longrightarrow & M'' \oplus P^0 & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & \mathbf{M}' & \longrightarrow & \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{D} \longrightarrow 0
\end{array} \tag{1.4}$$

Ισχυρισμός: Η στήλη $\mathbf{M}'$ είναι μία δεξιά συνγνήσια $\mathcal{P}(R)$ -επίλυση του M' .

Πράγματι: Αφού οι $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ είναι ακριβείς, από τη μακρά ακριβή ακολουθία για το συναρτητή ομολογίας συμπεραίνουμε ότι και η $\mathbf{M}'$ είναι ακριβής.

Για να δούμε τώρα ότι είναι και συνγνήσια, διαλέγουμε ένα προβολικό πρό-τυπο Q και εφαρμόζουμε το συναρτητή $Hom(\cdot, Q)$ στην ακολουθία 1.4 και έτσι κατασκευάσαμε την β.α.α. :

$$0 \rightarrow Hom(\mathbf{D}, Q) \rightarrow Hom(\mathbf{C}, Q) \rightarrow Hom(\mathbf{M}', Q) \rightarrow 0.$$

Η ακρίβεια της παραπάνω ακολουθίας έπεται από τη Πρόταση 1.2.8 για τη πρώτη γραμμή :

$$0 \rightarrow Hom(M'', Q) \rightarrow Hom(M, Q) \rightarrow Hom(M', Q) \rightarrow 0.$$

και είναι προφανής για τις υπόλοιπες γραμμές.

Τέλος, επειδή οι $Hom(\mathbf{C}, Q), Hom(\mathbf{D}, Q)$ είναι ακριβείς έπεται ότι και η $Hom(\mathbf{M}', Q)$ είναι ακριβής. Επομένως αποδείξαμε τον ισχυρισμό.

□

Πόρισμα 1.2.10. Η κλάση των $\mathcal{G}\mathcal{P}(R)$ είναι κλειστή ως προς ευθύς προσθετέους.

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathcal{GP}(R)$ και Y ευθύς προσθετέος του X . Γράφουμε το X ως $X = Y \oplus Z$ για κάποιο πρότυπο Z . Αφού η κλάση των Gorenstein προβολικών προτύπων είναι κλειστή ως προς ευθέα αθροίσματα ορίζουμε

$$W = Y \oplus Z \oplus Y \oplus Z \oplus Y \oplus Z \oplus Y \oplus Z \oplus \cdots \in \mathcal{GP}(R).$$

Τότε $W \cong Y \oplus W$.

Θεωρούμε τώρα την (διασπώμενη) βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \rightarrow Y \rightarrow Y \oplus W \rightarrow W \rightarrow 0.$$

Τελικά, επειδή η $\mathcal{GP}(R)$ είναι προβολικά επιλύσιμη έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Σχόλιο 1.2.11. Η παραπάνω απόδειξη μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε κλάση R -προτύπων $\mathcal{X}$, η οποία είναι κλειστή ως προς ευθέα αθροίσματα και είναι προβολικά επιλύσιμη. Στο [2] παρουσιάζεται με την ονομασία ‘Eilenberg’s swindle’ καθώς η τεχνική που χρησιμοποιήθηκε αποδίδεται στον Eilenberg.

Πρόταση 1.2.12. [2, 2.7] Έστω M ένα οποιοδήποτε R -πρότυπο, θεωρούμε τις ακριβείς ακολουθίες R -προτύπων :

$$0 \longrightarrow K_n \longrightarrow G_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \tilde{K}_n \longrightarrow \tilde{G}_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tilde{G}_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

όπου τα πρότυπα $G_i, \tilde{G}_i$ είναι Gorenstein προβολικά. Τότε το K_n ανήκει στη $\mathcal{GP}(R)$ αν και μόνο εάν το $\tilde{K}_n$ ανήκει στη $\mathcal{GP}(R)$.

Απόδειξη. Λόγω συμμετρίας αρκεί να δείξουμε τη συνεπαγωγή, $K_n \in \mathcal{GP}(R) \Rightarrow \tilde{K}_n \in \mathcal{GP}(R)$. Μπορούμε να κατασκευάζουμε ένα μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές και στήλες της παρακάτω μορφής:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & K_n & \longrightarrow & G_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & L_{n-1} & \longrightarrow & \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

όπου τα P_i είναι προβολικά (και άρα Gorenstein προβολικά). Επειδή τα G_i είναι επίσης Gorenstein προβολικά και η κλάση $\mathcal{GP}(R)$ προβολικά επιλύσιμη έχουμε ότι και τα L_i , $0 \leq i \leq n-1$, είναι Gorenstein προβολικά. Τέλος, λόγω της προβολικής επιλυσιμότητας της $\mathcal{GP}(R)$ και του γεγονότος ότι τα L_i είναι Gorenstein προβολικά εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι όλοι οι πυρήνες και οι συμπυρήνες της:

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow 0$$

είναι Gorenstein προβολικά πρότυπα, ιδιαίτερος το L είναι Gorenstein προβολικό. Επομένως και το K ανήκει στη $\mathcal{GP}(R)$.

Έστω τώρα K' να είναι η n -όστη συζυγία κάποιας προβολικής επίλυσης Q_* του M . Τότε, επειδή τα K, K' είναι n -οστές συζυγίες σε προβολικές επιλύσεις του M από τη Πρόταση 8.5 του [1] γνωρίζουμε ότι τα K, K' είναι προβολικά ισοδύναμα, δηλαδή υπάρχουν προβολικά πρότυπα P, Q έτσι ώστε $K \oplus P \cong K' \oplus Q$. Εξ αιτίας της προβολικότητας του P συμπεραίνουμε ότι το $K \oplus P$ είναι Gorenstein προβολικό, επομένως και το K' είναι Gorenstein προβολικό ως ευθύς προσθετέος του $K \oplus P$.

Μελετάμε το ακόλουθο μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 & \longrightarrow & \tilde{K}_n & \longrightarrow & \tilde{G}_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \tilde{G}_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \parallel \\
0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & Q_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & Q_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_{n-1} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & V_0 \longrightarrow 0 \\
& \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Με παρόμοιους συλλογισμούς όπως νωρίτερα, καταλήγουμε ότι όλα τα πρό-
τυπα, εκτός του $\tilde{K}_n$, στο παρόνω διάγραμμα είναι Gorenstein προβολικά. Κα-
θώς και όλοι οι πυρήνες και συμπυρήνες της:

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow V_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_0 \longrightarrow 0$$

είναι Gorenstein προβολικά προβολικά πρότυπα.

Θεωρούμε το ακόλουθο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc}
& 0 & & 0 & & 0 & \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_{n-1} & \longrightarrow & U \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & Q_{n-1} & \longrightarrow & S \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \searrow \alpha & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \tilde{K}_n & \longrightarrow & \tilde{G}_{n-1} & \longrightarrow & T \longrightarrow 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\
& 0 & & 0 & & & 0
\end{array}$$

Όπου U, S, T είναι οι συμπυρήνες των μορφισμών $V_n \rightarrow V_{n-1}$, $K' \rightarrow Q_{n-1}, \tilde{K}_n \rightarrow \tilde{G}_{n-1}$ αντίστοιχα. Ένω ο μορφισμός α είναι η σύνθεση των μορφισμών $Q_{n-1} \rightarrow S \rightarrow T$.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι έχουμε την ακόλουθη ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow K' \rightarrow \ker \alpha \rightarrow U \rightarrow 0,$$

λογω της οποίας και του γεγονότος ότι $K', U \in \mathcal{GP}(R)$ συμπεραίνουμε επιπλέον ότι $\ker \alpha \in \mathcal{GP}(R)$. Έστω τώρα W το pull back των μορφισμών $Q_{n-1} \xrightarrow{\alpha} T$ και $\tilde{G}_{n-1} \rightarrow T$. Παίρνουμε το ακόλουθο μεταθετικό και ακριβές διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \ker \alpha & \xlongequal{\quad} & \ker \alpha & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{K}_n & \longrightarrow & W & \longrightarrow & Q_{n-1} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{K}_n & \longrightarrow & \tilde{G}_{n-1} & \longrightarrow & T \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Τελικά, έχουμε ότι το W είναι Gorenstein προβολικό αφού τα $\ker \alpha, \tilde{G}_{n-1}$ είναι Gorenstein προβολικά και έτσι έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι το $\tilde{K}_n$ είναι προβολικό, αφού τα W, Q_{n-1} είναι Gorenstein προβολικά. $\square$

Ορισμός 1.2.13. *Gorenstein προβολική διάσταση:*

Η Gorenstein προβολική διάσταση ενός R -προτύπου ορίζεται ομοίως με τη προβολική διάσταση (Ορισμός 1.1.22). Δηλαδή θα λέμε ότι η Gorenstein προβολική διάσταση του R -προτύπου M είναι μικρότερη ή ίση του φυσικού αριθμού n και θα γράφουμε $\text{Gpd}_R M \leq n$ αν υπάρχει πεπερασμένη Gorenstein προβολική επίλυση του M :

$$0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Το ελάχιστο n ώστε $\text{Gpd}_R M \leq n$ ορίζεται να είναι η Gorenstein προβολική διάσταση του M .

Η επόμενη (γνωστή) πρόταση μας ενημερώνει ότι για κάθε R -πρότυπο M ορίζεται η προβολική διάσταση του M και κατ' επέκταση ορίζεται και η Gorenstein προβολική διάσταση του M .

Πρόταση 1.2.14. 1. Κάθε ελεύθερο R -πρότυπο είναι προβολικό R -πρότυπο.
2. Κάθε R -πρότυπο δέχεται ελεύθερη επίλυση.

1.3 Πεπερασμένη Gorenstein προβολική διάσταση και μηδενισμός του Ext

Θεώρημα 1.3.1. [2, 2.10] Έστω M ένα R -πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein προβολικής διάστασης $n > 0$, τότε υπάρχει β.α.α. R -προτύπων,

$$0 \rightarrow K \rightarrow A' \rightarrow M \rightarrow 0,$$

όπου $pd_R K = n - 1$ και το A' είναι Gorenstein προβολικό.

Απόδειξη. Έστω οποιαδήποτε ακριβής ακολουθία,

$\mathbf{P} = 0 \rightarrow K' \rightarrow P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \rightarrow P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0$, με P_i προβολικά. Τότε από τη Πρόταση 1.2.12 το K' είναι Gorenstein προβολικό. Επομένως, υπάρχει ακριβής ακολουθία $\mathbf{Q} = 0 \rightarrow K' \rightarrow Q^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \rightarrow Q^{n-1} \xrightarrow{\epsilon'} G \rightarrow 0$ όπου τα Q^i είναι προβολικά και το G είναι Gorenstein προβολικό, τέτοια ώστε να παραμένει ακριβής από τη δράση του συναρτητή $Hom(\cdot, Q)$ για κάθε προβολικό πρότυπο Q .

Λόγω της ακρίβειας των ακολουθιών $Hom(\mathbf{Q}, P_i)$ για $0 \leq i \leq n - 1$, μπορούμε να βρούμε μορφισμούς $\phi_i : Q_i \rightarrow P_{n-1-i}$ οι οποίοι σχηματίζουν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q^{n-1} & \xrightarrow{\epsilon'} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.5)$$

Επιπλέον, μπορούμε να ορίσουμε μορφισμό $\phi_G : G \rightarrow M$ ως εξής : $\phi_G(g) = \epsilon \phi_{n-1}(q)$, για κάποιο q με $\epsilon'(q) = g$. Έτσι παίρνουμε την ακόλουθη αλυσωτή απεικόνιση:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Q^0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q^{n-1} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1.6)$$

Λόγω της ακρίβειας των $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ και της ισομορφιάς των πυρήνων $ker d_{n-1} \cong ker d^0 = K'$ έχουμε ότι η αλυσωτή απεικόνιση 1.6 επάγει ισομορφισμό στις αντίστοιχες ομάδες ομολογίας. Επομένως ο κώνος (mapping cone) της:

$$0 \rightarrow Q^0 \rightarrow Q^1 \oplus P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \oplus G \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$$

είναι ακριβής.

Ονομάζουμε $A' = P_0 \oplus G$ το οποίο ανήκει στη $\mathcal{GP}(R)$ ως ευθύ άθροισμα Gorenstein προβολικών προτύπων και $K = \ker \phi$.

Έχουμε ήδη δείξει ότι $pd_R K \leq n - 1$. Πράγματι, η ακολουθία:

$$0 \rightarrow Q^0 \rightarrow Q^1 \oplus P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow \ker \phi = K \rightarrow \cdots \rightarrow 0$$

είναι μία προβολική επίλυση του K . Τέλος, για να αποδείξουμε ότι $pd_R K = n - 1$ υποθέτουμε ότι $pd_R K = m < n - 1$ και θεωρούμε μία προβολική επίλυση Λ του K μήκους m , όμως έτσι καταλήγουμε σε άτοπο αφού η ακολουθία:

$$\Lambda \rightarrow P_0 \oplus G \xrightarrow{\phi} M \rightarrow 0$$

θα ήταν Gorenstein προβολική επίλυση του M μήκους $m + 1 < n - 1 + 1 = n$. $\square$

Πόρισμα 1.3.2. [2, 2.11] Έστω $0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$ μία βραχεία ακριβής ακολουθία R -προτύπων όπου τα G και G' είναι Gorenstein προβολικά, και όπου $Ext_R^1(M, Q) = 0$ για κάθε προβολικό πρότυπο Q . Τότε και το M είναι Gorenstein προβολικό.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $Gpd_R M \leq 1$. Επομένως, υπάρχει βραχεία ακριβής ακολουθία $0 \rightarrow Q \rightarrow A' \rightarrow M \rightarrow 0$, όπου $pd_R Q = 0$ και A' είναι Gorenstein προβολικό. Όμως επειδή $Ext^1(M, Q) = 0$, από τη μακρά ακριβή ακολουθία για το Ext παίρνουμε την ακόλουθη βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \rightarrow Hom(M, Q) \rightarrow Hom(A', Q) \rightarrow Hom(Q, Q) \rightarrow 0,$$

επομένως η αρχική ακολουθία διασπάτε και άρα το M είναι ευθύς προσθετός του Gorenstein προβολικού A' . Τέλος, από το Πόρισμα 1.2.10 έπεται ότι και το M είναι Gorenstein προβολικό. $\square$

Πόρισμα 1.3.3. [15, 2.17] Έστω R -πρότυπο M πεπερασμένης Gorenstein προβολικής διάστασης.

Τότε υπάρχει ακριβής ακολουθία R -προτύπων,

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0,$$

όπου το L είναι Gorenstein προβολικό και $pd_R N = Gpd_R M$.

Για να απλουστεύσουμε την απόδειξη του Πορίσματος 1.3.3 παρεμβάλλουμε τα επόμενα δύο Λήμματα.

Απόδειξη 1.3.3 : Έστω M Gorenstein προβολικό, τότε το ζητούμενο έπεται εύκολα αφού το M είναι συζυγία κάποιας πλήρης προβολικής επίλυσης:

$$\mathbf{P} = \cdots \rightarrow P_0 \xrightarrow{d_0} P^0 \xrightarrow{d^0} P^1 \cdots$$

Επομένως, η ζητούμενη βραχεία ακριβής ακολουθία είναι η:

$$0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0,$$

όπου $N = P^0$ και $L = \text{Im} d^0$.

Έστω τώρα ότι $\text{Gpd}_R M = n > 0$. Από το Θεώρημα 1.3.1 υπάρχει β.α.α.,

$$0 \rightarrow K \rightarrow A' \rightarrow M \rightarrow 0,$$

όπου το A' είναι Gorenstein προβολικό, και $\text{pd}_R K = n - 1$. Αφού το A' είναι Gorenstein προβολικό υπάρχει β.α.α.,

$$0 \rightarrow A' \rightarrow Q \rightarrow L \rightarrow 0,$$

με Q προβολικό, και L Gorenstein προβολικό Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα όπου το N είναι push out:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & L & = & L & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & Q & \rightarrow & N \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & K & \rightarrow & A' & \rightarrow & M \rightarrow 0 \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

Τέλος, αρκεί να δείξουμε ότι $\text{pd}_R N = n$: Αρχικά παρατηρούμε ότι το N δεν είναι προβολικό αφού τότε θα είχαμε $\text{Gpd}_R N = 0$ και επειδή η κλάση των Gorenstein προβολικών είναι προβολικά επιλύσιμη (Θεώρημα 1.2.9) θα είχαμε ότι και το M είναι Gorenstein προβολικό, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\text{pd}_R N > 0$. Τέλος, από το Λήμμα 1.3.4 έχουμε ότι $\text{pd}_R N = \text{pd}_R K + 1 = n$.

□

Λήμμα 1.3.6. [2, 2.17] Έστω μία ακριβής ακολουθία R -προτύπων $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, όπου τα G_i είναι Gorenstein προβολικά. Τότε

$$\operatorname{Ext}_R^i(K_n, L) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+n}(M, L)$$

για όλα τα R -πρότυπα L πεπερασμένης προβολικής διάστασης, και όλους τους θετικούς ακέραιους i .

Συμβολισμός: Με $\overline{\mathcal{P}}(R)$ θα συμβολίζουμε τη κλάση των R -προτύπων τα οποία έχουν πεπερασμένη προβολική διάσταση.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο n :

$n = 1$ Έστω η ακολουθία $0 \rightarrow K_1 \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$. Από τη Πρόταση 1.2.8 γνωρίζουμε ότι $\operatorname{Ext}_R^i(G_0, L) = 0$ για κάθε $i > 0$ και κάθε $L \in \overline{\mathcal{P}}(R)$. Η μακρά ακριβής ακολουθία για το Ext παίρνει τη μορφή :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(M, L) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(G_0, L) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}(K_1, L) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \operatorname{Ext}_R^1(M, L) \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^1(K_1, L) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \operatorname{Ext}_R^2(M, L) \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^2(K_1, L) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \operatorname{Ext}_R^m(M, L) \longrightarrow 0 \longrightarrow \operatorname{Ext}_R^m(K_1, L) \\ & & & & & & \searrow \\ & & & & & & \operatorname{Ext}_R^{m+1}(M, L) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Έτσι έπεται το ζητούμενο, δηλαδή ότι $\operatorname{Ext}_R^i(K_1, L) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+1}(M, L)$, για κάθε $i > 0$ και $L \in \overline{\mathcal{P}}(R)$.

Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε την ακολουθία $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, όπου τα G_i είναι Gorenstein προβολικά. Μπορούμε, τώρα, να σχηματίσουμε τις ακολουθίες :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow K_n & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & K_1 \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \parallel \\ & & & & 0 & \longrightarrow & K_1 \longrightarrow G_0 \longrightarrow M \rightarrow 0 \end{array}$$

Από την υπόθεση της επαγωγής, και τη περίπτωση $n = 1$ έχουμε τις ισότητες

$$\operatorname{Ext}_R^i(K_n, L) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+n-1}(K_1, L) \quad \text{και} \quad \operatorname{Ext}_R^{i+n}(K_1, L) \cong \operatorname{Ext}_R^{i+n-1+1}(M, L).$$

□

Πρόταση 1.3.7. [2, 2.20] Έστω R -πρότυπο M Gorenstein προβολικής διάστασης μικρότερης ή ίσης του ακεραίου n , τότε έχουμε ότι $\operatorname{Ext}_R^i(M, L) = 0$ για κάθε R -πρότυπο L πεπερασμένης προβολικής διάστασης και για κάθε $i > n$.

Απόδειξη. Έστω λοιπόν $\operatorname{Gpd}_R M \leq n$. Εξ ορισμού έχουμε ότι υπάρχει ακριβής ακολουθία $0 \rightarrow G_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, όπου $G_i \in \mathcal{GP}(R)$. Από το Λήμμα 1.3.6 και τη Πρόταση 1.2.8 παίρνουμε τις ισότητες $\operatorname{Ext}_R^i(M, L) \cong \operatorname{Ext}_R^{i-n}(G_n, L) = 0$, για $i > n$, και $L \in \overline{\mathcal{P}}(R)$.

□

Πρόταση 1.3.8. [2, 2.18] Έστω $0 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$ μια ακριβής ακολουθία R -προτύπων όπου το G είναι Gorenstein προβολικό και $1 \leq \operatorname{Gpd} M < \infty$. Τότε ισχύει η ισότητα $\operatorname{Gpd}_R K = \operatorname{Gpd}_R M - 1 \geq 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι η Gorenstein προβολική διάσταση του M είναι πεπερασμένη και ότι ισούται με $n > 0$. Τότε υπάρχει πεπερασμένη $\mathcal{GP}(R)$ -επίλυση του K . Πράγματι, αν θεωρήσουμε μία $\mathcal{GP}(R)$ -επίλυση του K , την $\mathbf{GP} = \cdots G_m \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow K \rightarrow 0$, τότε παίρνουμε μία $\mathcal{GP}(R)$ -επίλυση του M την :

$$\cdots G_m \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Από τη Πρόταση 1.2.12 είναι άμεσο ότι ο n -οστός πυρήνας της παραπάνω ακολουθίας είναι Gorenstein προβολικό πρότυπο. Επομένως, η:

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow \cdots \rightarrow G_1 \rightarrow K \rightarrow 0 \tag{1.7}$$

είναι μία $\mathcal{GP}(R)$ -επίλυση του K . Οπότε $\operatorname{Gpd}_R K \leq n - 1$

Για να δείξουμε την ισότητα, $\operatorname{Gpd}_R K = n - 1$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η επίλυση 1.7 είναι ελάχιστου μήκους. Όμως αυτό είναι προφανές διότι αν υπήρχε μία $\mathcal{GP}(R)$ -επίλυση του K , $\mathbf{GP}_1$ μήκους $\lambda < n - 1$, τότε θα είχαμε την $\mathcal{GP}(R)$ -επίλυση του M : $\mathbf{GP}_1 \rightarrow G \rightarrow M \rightarrow 0$. Το οποίο σημαίνει ότι $\operatorname{Gpd}_R M < n$, πράγμα που αντιβαίνει της υπόθεσης. □

Θεώρημα 1.3.9 (HOLM). [2, 2.20] Έστω M ένα R -πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein προβολικής διάστασης και έστω n ακέραιος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. $Gpd_R M \leq n$.
2. $Ext_R^i(M, L) = 0$ για κάθε $i > n$, και όλα τα R -πρότυπα L πεπερασμένης προβολικής διάστασης.
3. $Ext_R^i(M, Q) = 0$ για κάθε $i > n$, και όλα τα προβολικά R -πρότυπα Q .
4. Για κάθε ακριβή ακολουθία R -προτύπων $0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0$, όπου τα $G_0, \dots, G_{n-1}$ είναι Gorenstein προβολικά, τότε το R -πρότυπο K_n είναι Gorenstein προβολικό.

Απόδειξη. Οι συνεπαγωγές 2. $\Rightarrow$ 3. και 4. $\Rightarrow$ 1. είναι προφανείς. Ενώ η συνεπαγωγή 1. $\Rightarrow$ 2. είναι η Πρόταση 1.3.7.

Μας μένει να δείξουμε 3. $\Rightarrow$ 4. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε μία ακριβή ακολουθία:

$$0 \rightarrow K_n \rightarrow G_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow G_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

όπου τα G_i είναι Gorenstein προβολικά. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.3.6 στη παραπάνω ακολουθία, παίρνουμε την ισότητα $Ext_R^i(K_n, Q) \cong Ext_R^{i+n}(M, Q) = 0$, για κάθε προβολικό πρότυπο Q και κάθε ακέραιο $i > 0$. Διασπώντας τώρα την 1.8 σε βραχείες ακριβείς ακολουθίες και εφαρμόζοντας διαδοχικά n τη Πρόταση 1.3.8, βλέπουμε ότι $Gpd_R K_n < \infty$. Επομένως, υπάρχει ακριβής ακολουθία,

$$0 \rightarrow G'_m \rightarrow \cdots \rightarrow G'_0 \rightarrow K_n \rightarrow 0, \quad (1.9)$$

όπου τα G'_i είναι Gorenstein προβολικά. Διασπάμε τώρα και την ακολουθία 1.9 σε βραχείες ακριβείς ακολουθίες :

$$0 \rightarrow C'_j \rightarrow G'_{j-1} \rightarrow C'_{j-1} \rightarrow 0,$$

με $1 \leq j \leq m$ και $C'_m = G'_m$, $C'_0 = K_n$.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.3.6 έχουμε ότι

$$Ext_R^1(C'_{j-1}, Q) \cong Ext_R^j(K_n, Q) = 0$$

για κάθε j και κάθε προβολικό πρότυπο Q . Τέλος, από το Πόρισμα 1.3.2 έχουμε ότι το K_n είναι Gorenstein προβολικό. □

Πόρισμα 1.3.10. Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 1.3.9 ότι ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες για κάθε R -πρότυπο M .

$$\begin{aligned} Gpd_R M &= \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \exists L \in \overline{\mathcal{P}}(R) : Ext_R^i(M, L) \neq 0\} \\ &= \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \exists Q \in \mathcal{P}(R) : Ext_R^i(M, Q) \neq 0\} \end{aligned}$$

Ορισμός 1.3.11. (Συνομολογική Διάσταση) Η συνομολογική διάσταση μίας ομάδας G επί του $\mathbb{Z}$ ορίζεται να είναι η προβολική διάσταση του δακτυλίου των ακεραίων, $\mathbb{Z}$, ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, όπου η δράση ορίζεται να είναι $g \cdot z = z$, για κάθε $g \in G$ και $z \in \mathbb{Z}$. Συμβολικά γράφουμε: $cd(G) = pd_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z})$. Όταν αναφερόμαστε στη συνομολογική διάσταση μίας ομάδας επί του $\mathbb{Z}$ θα λέμε απλώς συνομολογική διάσταση.

Ορισμός 1.3.12. (Συνομολογική Gorenstein Διάσταση) Η συνομολογική Gorenstein διάσταση μίας ομάδας G επί του $\mathbb{Z}$ ορίζεται να είναι Gorenstein προβολική διάσταση του δακτυλίου των ακεραίων, $\mathbb{Z}$, ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο όπου η δράση ορίζεται να είναι $g \cdot z = z$ για κάθε $g \in G$ και $z \in \mathbb{Z}$. Συμβολικά γράφουμε: $Gcd(G) = Gpd_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z})$. Επίσης, στη περίπτωση της Gorenstein συνομολογικής διάστασης επί του $\mathbb{Z}$ θα λέμε απλώς Gorenstein συνομολογική διάσταση.

Παρατήρηση 1.3.13. 1. Οι τελευταίοι δύο ορισμοί μπορούν να γενικευτούν για οποιοδήποτε μεταθετικό δακτύλιο k .

2. Είναι εύκολο να δούμε ότι $Gcd(G) \leq cd(G)$, αφού κάθε προβολική επίλυση είναι και Gorenstein προβολική επίλυση.

Μία εφαρμογή του Θεωρήματος 1.3.7: Έστω ένα R -πρότυπο πεπερασμένης προβολικής διάστασης τότε ισχύει ότι $pd_R M = Gpd_R M$, μία άμεση συνέπεια της παραπάνω ιδιότητας είναι η εξής ισότητα κλάσεων:

$$\mathcal{G}\mathcal{P}(R) \cap \overline{\mathcal{P}}(R) = \mathcal{P}(R).$$

Ιδιαίτερος, για κάθε ομάδα G και κάθε δακτύλιο k αν $cd_k G < \infty$, τότε $Gcd_k G = cd_k G$.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι $\infty > n \geq pd_R M \Leftrightarrow Ext_R^i(M, A) = 0$ για κάθε πρότυπο A και κάθε $i > n$.

Έστω ότι $n = pd_R M < \infty$. Εξ ορισμού ισχύει η ανισότητα $Gpd_R M \leq pd_R M = n < \infty$. Για να δείξουμε την ισότητα $Gpd_R M = n$, λόγω του Πορίσματος 1.3.10 αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη προβολικού προτύπου P τέτοιου ώστε $Ext_R^n(M, P) \neq 0$.

Αφού $pd_R M = n$, γνωρίζουμε ότι υπάρχει πρότυπο, N , με $Ext_R^n(M, N) \neq 0$. Έστω P ένα οποιοδήποτε προβολικό πρότυπο, το οποίο έχει ως επιμορφική εικόνα ο N . Από τη μακρά ακριβή ακολουθία για το Ext έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 2

Ομαδοδακτύλιοι

2.1 Gorenstein συνομολογική διάσταση επι του $\mathbb{Z}$

Στο Κεφάλαιο 1 μελετήσαμε τα Gorenstein προβολικά πρότυπα και ορίσαμε τη Gorenstein συνομολογική διάσταση μίας ομάδας G . Στο παρόν κεφάλαιο θα εξειδικεύσουμε τη μελέτη μας σε ομαδοδακτυλίους με σκοπό να μελετήσουμε τη Gorenstein συνομολογική διάσταση η οποία αποτελεί ουσιαστική γενίκευση της συνομολογικής διάστασης με την έννοια ότι είναι πεπερασμένη σε μεγαλύτερη κλάση ομάδων και ότι για κάθε ομάδα G με $cdG < \infty$ ισχύει η ισότητα $cdG = GcdG$.

Γενικά, για ένα δακτύλιο R , ισχύει ότι κάθε συμπτύξιμο σύμπλεγμα είναι ακυκλικό το επόμενο λήμμα δείχνει ότι ισχύει και το αντίστροφο εάν λάβουμε ως R το δακτύλιο των ακεραίων $\mathbb{Z}$.

Πρόταση 2.1.1. [11, 1.1]

- Κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα προβολικών $\mathbb{Z}$ -προτύπων είναι συμπτύξιμο.
- Για οποιαδήποτε ομάδα G , έχουμε ότι κάθε Gorenstein προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο.

Απόδειξη:

- Έστω P_* ένα ακυκλικό σύμπλεγμα προβολικών $\mathbb{Z}$ -προτύπων. Είναι γνωστό ότι κάθε υποπρότυπο $\mathbb{Z}$ -ελεύθερου προτύπου είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο, άρα

επειδή κάθε προβολικό πρότυπο είναι ευθύς προσθετός ελεύθερου έχουμε ότι κάθε $\mathbb{Z}$ -προβολικό είναι και $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο. Επομένως, το P_* είναι ένα ακυκλικό σύμπλεγμα ελεύθερων $\mathbb{Z}$ -προτύπων του οποίου όλες οι συζυγίες είναι ελεύθερα πρότυπα. Το ζητούμενο έπεται εύκολα συνδυάζοντας το Λήμμα 1.1.13 και τη Πρόταση 1.1.5.

- Έστω M Gorenstein προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Τότε το M είναι μία συζυγία ενός (κατάλληλου) ακυκλικού συμπλέγματος προβολικών $\mathbb{Z}G$ -προτύπων $\mathbf{P}$. Αφού το $\mathbb{Z}G$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο και κάθε πρότυπο που εμφανίζεται στο $\mathbf{P}$ είναι ευθύς προσθετός $\mathbb{Z}G$ -ελεύθερου έχουμε ότι κάθε πρότυπο που εμφανίζεται στο $\mathbf{P}$ είναι ευθύς προσθετός $\mathbb{Z}$ -ελεύθερου. Επομένως, όλα τα πρότυπα και οι συζυγίες του $\mathbf{P}$ είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερά, άρα και το M .

Πόρισμα 2.1.2. [11, 1.2] Έστω M ένα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein προβολικής διάστασης. Τότε υπάρχει $\mathbb{Z}$ -διασπώμενος μονομορφισμός, $\mathbb{Z}G$ -προτύπων, $i : M \rightarrow N$ όπου $pd_{\mathbb{Z}G}N = Gpd_{\mathbb{Z}G}M$. Αν επιπλέον το M είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο τότε και το N θα είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο.

Απόδειξη: Επειδή $Gpd_{\mathbb{Z}G}M < \infty$ το Πόρισμα 1.3.3 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας βραχείας ακριβής ακολουθίας

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} N \rightarrow L \rightarrow 0$$

με $pd_{\mathbb{Z}G}N = Gpd_{\mathbb{Z}G}M$ και L Gorenstein προβολικό. Λόγω της Πρότασης 2.1.1 γνωρίζουμε ότι το L είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και επομένως η παραπάνω ακριβής ακολουθία διασπάται. Τέλος, αν το M είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο τότε και το N είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο ως ευθύ άθροισμα των ελεύθερων προτύπων M, L .

Πόρισμα 2.1.3. [11, 1.3] Έστω ομάδα G πεπερασμένης Gorenstein συνομολογικής διάστασης. Τότε υπάρχει $\mathbb{Z}$ -διασπώμενος μονομορφισμός $\mathbb{Z}G$ -προτύπων $i : \mathbb{Z} \rightarrow A$, όπου το A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $pd_{\mathbb{Z}G}A = GcdG$.

Απόδειξη: Η συνθήκη $GcdG < \infty$ σημαίνει ακριβώς ότι το $\mathbb{Z}$ έχει πεπερασμένη Gorenstein προβολική διάσταση ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, αφού $GcdG = Gpd_{\mathbb{Z}G}\mathbb{Z}$. Επομένως, το ζητούμενο έπεται από το Πόρισμα 2.1.2.

Σχόλιο 2.1.4. (Τανυστικό γινόμενο και Hom)[10, III]

1. Θα αναφερόμαστε στα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα απλώς ως G -πρότυπα.
2. Για ένα G -πρότυπο M συμβολίζουμε ως:

- $M^G = \{m \in M : gm = m, \forall g \in G\}$ το G -υποπρότυπο του M που αποτελείται από όλα τα G -αναλλοίωτα στοιχεία του M και ως
 - $M_G = M / \langle gm - m \rangle$ το μεγαλύτερο πηλίκo του M στο οποίο η G δρα με τετριμμένο τρόπο.
3. Υπενθυμίζουμε ότι για ένα δακτύλιο R κάθε φορά που έχουμε ένα R -δεξιό πρότυπο M και ένα αριστερό R -πρότυπο N , μπορούμε να ορίσουμε μοναδικά μία αβελιανή ομάδα η οποία εξαρτάται από τον R και τα πρότυπα M, N . Αυτή η αβελιανή ομάδα ονομάζεται το τανυστικό γινόμενο των M και N πάνω από τον R και συμβολίζεται με $M \otimes_R N$. Επιπλέον, θυμίζουμε ότι, το τανυστικό γινόμενο των M, N γίνεται αριστερό R -πρότυπο στη περίπτωση που το M έχει δομή και αριστερού και δεξιού R -προτύπου με δράση: $r(m \otimes n) = (rm) \otimes n$.
4. Στην περίπτωση των ομαδοδακτυλίων, $\mathbb{Z}G$, είναι αρκετές φορές χρήσιμο να μπορούμε να ορίσουμε το τανυστικό γινόμενο δύο αριστερών $\mathbb{Z}G$ -προτύπων M, N .

(α') Έστω λοιπόν αριστερό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M , τότε το M γίνεται δεξιό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ορίζοντας $m \cdot g = g^{-1} \cdot m$, με $m \in M$ και $g \in G$. Με αυτό το τρόπο δώσαμε νόημα στο τανυστικό γινόμενο $M \otimes_G N$ των αριστερών $\mathbb{Z}G$ -προτύπων M και N .

(β') Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε το $M \otimes_G N$ είναι να θεωρήσουμε το τανυστικό γινόμενο $M \otimes N (= M \otimes_{\mathbb{Z}} N)$ και να επιβάλλουμε σε αυτό τις σχέσεις: $g^{-1}m \otimes n = m \otimes gm$. Αυτές οι σχέσεις μπορούν να γραφούν στη μορφή $m \otimes n = gm \otimes gn$ απλώς αν αντικαταστήσουμε το m με το gm .

Δηλαδή έχουμε τον ισομορφισμό:

$$M \otimes_G N \cong (M \otimes N)_G,$$

όπου η G δρα διαγώνια στο $M \otimes N$: $g \cdot (m \otimes n) = gm \otimes gn$.

Τέλος, λόγω των παραπάνω και του γεγονότος ότι ο συναρτητής $\cdot \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$ είναι μεταθετικός ([1, 2.56]) συμπεραίνουμε εύκολα ότι και ο συναρτητής $\cdot \otimes_G \cdot$ είναι μεταθετικός.

5. Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε μία διαγώνια δράση για το $\text{Hom}(M, N) (= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, N))$, όταν τα M, N είναι G -πρότυπα, ως εξής:

$$(gu)(m) = g \cdot u(g^{-1}m)$$

όπου $g \in G$ και $u \in \text{Hom}(M, N)$. Αντίστοιχα με πριν θα συμβολίζουμε το G -πρότυπο $\text{Hom}(M, N)$, με διαγώνια δράση, ως $\text{Hom}_G(M, N)$ και μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι το $\text{Hom}_G(M, N)$ ισούται με το $\text{Hom}(M, N)^G$.

Σχόλιο 2.1.5. (Προσαρτημένοι συναρτητητές)[1, Κεφ.5 παρ.3]

1. Έστω C, D κατηγορίες και $F : C \rightarrow D$, $G : D \rightarrow C$ συναλλοίωτοι συναρτητητές. Το διατεταγμένο ζεύγος (F, G) καλείται προσαρτημένο ζεύγος αν για κάθε αντικείμενο C της C και κάθε αντικείμενο D της D υπάρχει ισομορφισμός $\tau_{C,D}$, ο οποίος είναι φυσικός και ως προς τη μεταβλητή C και ως προς τη μεταβλητή D :

$$\tau_{C,D} : \text{Hom}_D(FC, D) \rightarrow \text{Hom}_C(C, GD).$$

2. Θεωρούμε τους συναρτητητές $B \otimes_S \cdot : {}_S\text{Mod} \rightarrow {}_R\text{Mod}$ και $\text{Hom}_R(B, \cdot) : {}_R\text{Mod} \rightarrow {}_S\text{Mod}$ όπου το B είναι ένα οποιοδήποτε (R, S) διπρότυπο. Είναι τότε γνωστό ότι ([1, 2.76]) το ζεύγος $(B \otimes_S \cdot, \text{Hom}_R(B, \cdot))$.

3. Έστω $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Θεωρούμε τους συναρτητητές

$$A \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot : {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod} \rightarrow {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod},$$

όπου για $B \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ το $A \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot (B)$ γίνεται $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο με τη διαγώνια δράση και

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \cdot) : {}_{\mathbb{Z}G}\text{ModMod} \rightarrow {}_{\mathbb{Z}G}\text{ModMod},$$

όπου για $B \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{ModMod}$ το $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \cdot)(B)$ γίνεται $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο με τη διαγώνια δράση.

Αποδεικνύεται ότι το ζεύγος συναρτητών $(A \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \cdot))$ αποτελεί προσαρτημένο ζεύγος.

Λήμμα 2.1.6. [10, III, ex.5.3] Έστω M προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και N ένα $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο τότε το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $M \otimes N$, με διαγώνια δράση, είναι $\mathbb{Z}G$ -προβολικό.

Απόδειξη. Έστω M ένα προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και N ένα $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Από τα Σχόλια 2.1.4 και 2.1.5 έχουμε τους ισομορφισμούς:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_G(M \otimes N, \cdot) &\cong \text{Hom}(M \otimes N, \cdot)^G \\ &\cong \text{Hom}(M, \text{Hom}(N, \cdot))^G \cong \text{Hom}_G(M, \text{Hom}(N, \cdot)). \end{aligned}$$

Τέλος επειδή το M είναι $\mathbb{Z}G$ -προβολικό και το N είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο έχουμε ότι οι συναρτητητές $\text{Hom}_G(M, \cdot)$ και $\text{Hom}(N, \cdot)$ είναι ακριβής άρα και ο $\text{Hom}_G(M, \text{Hom}(N, \cdot)) \cong \text{Hom}_G(M \otimes N, \cdot)$ είναι ακριβής συναρτητής το οποίο σημαίνει ακριβώς ότι το $M \otimes N$ είναι $\mathbb{Z}G$ -προβολικό. $\square$

Πρόταση 2.1.7. [11, 1.4] Έστω ομάδα G . Τότε για κάθε $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M έχουμε ότι $\text{Gpd}_{\mathbb{Z}G} M \leq \text{Gcd} G$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\text{Gcd} G < \infty$. Από το Πόρισμα 2.1.3 γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\mathbb{Z}$ -διασπώμενος $\mathbb{Z}G$ -μονομορφισμός $i : \mathbb{Z} \rightarrow A$, όπου το A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} A = \text{Gcd} G = n$.

Θεωρούμε ένα $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M και μία $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση αυτού:

$$\cdots \rightarrow P_2 \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

με M_i θα συμβολίζουμε τις συζυγίες, $\text{Im}(P_i \rightarrow P_{i-1})$ της (2.1), $i > 0$, ενώ θέτουμε $M_0 = M$. Θα λάβουμε το ζητούμενο αποδεικνύοντας ότι το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M_n είναι Gorenstein προβολικό, αφού τότε η

$$0 \rightarrow M_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

θα είναι μία Gorenstein προβολική επίλυση του M .

Παίρνοντας τανυστικό γινόμενο με το A στην ακολουθία (2.1), έχουμε την ακολουθία :

$$\cdots \rightarrow P_1 \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow P_0 \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow 0,$$

η οποία είναι $\mathbb{Z}$ -ακριβής αφού όλα τα πρότυπα της 2.1 είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερα που σημαίνει ότι η (2.1) είναι διασπώμενη, επιπλέον επειδή οι μορφισμοί της (2.1) είναι $\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμοί έχουμε και ότι οι μορφισμοί $P_n \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow P_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ είναι $\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμοί αν αφήσουμε τη G να δράσει διαγώνια στα τανυστικά $P_n \otimes A$. Επιπλέον, επειδή το A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο, λόγω του Λήμματος 2.1.6, η παραπάνω ακριβής ακολουθία είναι μία προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}G$ -πρότυπου $M \otimes_{\mathbb{Z}} A$.

Έστω τώρα μία $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση, $\mathbf{E}_*$, του A . Τότε η ακολουθία $\mathbf{E}_* \otimes_{\mathbb{Z}} M$ είναι μία $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του $M \otimes_{\mathbb{Z}} A$, αφού το M είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο πρότυπο. Επειδή $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} A = n$ έχουμε ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G}(M \otimes_{\mathbb{Z}} A) \leq n$. Ιδιαίτερος έχουμε ότι τα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα $M_i \otimes_{\mathbb{Z}} A$ είναι προβολικά για κάθε $i \geq n$ και ότι το διαγώνιο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $M_n \otimes_{\mathbb{Z}} N \otimes_{\mathbb{Z}} A$ είναι προβολικό για κάθε $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο N .

Θεωρούμε την $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη βραχεία ακριβή ακολουθία $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} A \rightarrow \bar{A} \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

όπου το $\bar{A}$ είναι ο συμπυρήνας του i . Παίρνοντας τανυστικό γινόμενο με το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $M_n \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{A}^{\otimes j}$, όπου με $\bar{A}^{\otimes j}$ συμβολίζουμε την j -οστή τανυστική δύναμη του $\bar{A}$ πάνω από το $\mathbb{Z}$, στην ακολουθία την (2.2) παίρνουμε τις βραχείες ακριβείς ακολουθίες:

$$0 \rightarrow M_n \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{A}^{\otimes j} \rightarrow M_n \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{A}^{\otimes j} \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow M_n \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{A}^{\otimes j+1} \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

για κάθε $j \geq 0$. Από όσα έχουν ειπωθεί μέχρι τώρα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα πρότυπα $M_n \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{A}^{\otimes j} \otimes_{\mathbb{Z}} A$ είναι $\mathbb{Z}G$ -προβολικά για κάθε $j \geq 0$.

Θυμίζουμε ότι η 2.1 μας δίνει την εξής προβολική επίλυση:

$$\cdots \rightarrow P_{n+2} \rightarrow P_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow M_n \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

του M_n .

Μπορούμε πλέον ενώνοντας τις ακολουθίες 2.3 και 2.4 να πάρουμε μία διπλά άπειρη ακριβή ακολουθία $\mathbf{B}$ προβολικών $\mathbb{Z}G$ -προτύπων:

$$\cdots \rightarrow P_n \rightarrow M_n \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow M_n \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{A} \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow M_n \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{A}^{\otimes 2} \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \cdots,$$

η οποία έχει ως συζυγία το M_n . Οπότε για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη ότι το M_n είναι Gorenstein προβολικό αρκεί να δείξουμε ότι το σύμπλεγμα $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{B}, Q)$ είναι ακυκλικό για κάθε προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο Q . Για το σκοπό αυτό θεωρούμε ένα προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο Q , παρατηρούμε επίσης ότι επειδή η 2.2 είναι διασπώμενη, η δράση του συναρτητή $Hom_{\mathbb{Z}}(\cdot, Q)$ επάγει την βραχεία ακριβή ακολουθία $\mathbb{Z}G$ -προτύπων (με διαγώνια δράση):

$$0 \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(\bar{A}, Q) \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(A, Q) \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Αφού λοιπόν το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο Q είναι προβολικό η παραπάνω ακριβής ακολουθία διασπάται, επομένως έχουμε τον ισομορφισμό

$$Hom_{\mathbb{Z}}(A, Q) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(\bar{A}, Q) \oplus Q,$$

ο οποίος επάγει τους ισομορφισμούς:

$$\begin{aligned} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{B}, Hom_{\mathbb{Z}}(A, Q)) &\cong Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{B}, Hom_{\mathbb{Z}}(\bar{A}, Q) \oplus Q) \\ &\cong Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{B}, Hom_{\mathbb{Z}}(\bar{A}, Q)) \oplus Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{B}, Q). \end{aligned}$$

Τέλος, λόγω των παραπάνω, η ακρίβεια της $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{B}, Q)$ θα προκύψει από την ακρίβεια της $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{B}, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, Q))$. Από το Σχόλιο 2.1.5 έχουμε τον ισομορφισμό:

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{B}, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, Q)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{B} \otimes A, Q).$$

Επειδή το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο έχουμε ότι το σύμπλεγμα $\mathbb{Z}G$ -προτύπων $\mathbf{B} \otimes A$ είναι ακυκλικό με συζυγίες $(M_i \otimes A)_{i \geq n}$ και $(M_n \otimes \bar{A}^{\otimes j} \otimes A)_{j \geq 1}$, οι οποίες είναι $\mathbb{Z}G$ -προβολικά πρότυπα και άρα το $\mathbf{B} \otimes A$ είναι συμπτύξιμο. Επομένως, το $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbf{B} \otimes A, Q)$ είναι συμπτύξιμο και άρα ακυκλικό. $\square$

Πόρισμα 2.1.8. [8, 2.4 c] Έστω ομάδα G , τότε για κάθε $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M έχουμε ότι $\text{Gpd}_{\mathbb{Z}G} M \leq \text{Gcd} G + 1$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M και F ένα $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο το οποίο έχει ως επιμορφική εικόνα το M , δηλαδή έχουμε την βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow \ker \epsilon \rightarrow F \xrightarrow{\epsilon} M \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Τότε γνωρίζουμε ότι $\text{Gpd}_{\mathbb{Z}G} \ker \epsilon, \text{Gpd}_{\mathbb{Z}G} F \leq \text{Gcd} G$, αφού το $\ker \epsilon$ είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο ως υποπρότυπο του F . Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.3.9 και χρησιμοποιώντας τη μακρά ακριβή ακολουθία για το Ext στην ακολουθία 2.5 έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Συνοψίζουμε στο παρακάτω Θεώρημα τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 2.1.9. [11, 1.7] Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για οποιαδήποτε ομάδα G .

1. $\text{Gcd} G < \infty$,
2. Υπάρχει $\mathbb{Z}$ -διασπώμενος μονομορφισμός $\mathbb{Z}G$ -προτύπων $i : \mathbb{Z} \rightarrow A$, όπου το A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} A < \infty$ και
3. κάθε $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο έχει πεπερασμένη Gorenstein προβολική διάσταση.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή 1. $\Rightarrow$ 2. έπεται από το Πόρισμα 2.1.3, ενώ η συνεπαγωγή 2. $\Rightarrow$ 3. έπεται από την Απόδειξη της Πρότασης 2.1.7 και το Πόρισμα 2.1.8. Τέλος η συνεπαγωγή 3. $\Rightarrow$ 1. είναι προφανής. $\square$

2.2 Ιδιότητες της Gorenstein Συνομολογικής Διάστασης

Θεωρούμε γνωστό το γεγονός ότι μία ομάδα G έχει συνομολογική διάσταση μηδέν αν και μόνο αν είναι η ομάδα με ένα στοιχείο. Ξεκινάμε αυτή τη παράγραφο με σκοπό να αποδείξουμε το ανάλογο αποτέλεσμα για την Gorenstein συνομολογική διάσταση (Πρόταση 2.2.8), που λέει ότι μία ομάδα G είναι πεπερασμένη αν και μόνο $GcdG = 0$. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της Gorenstein Συνομολογικής Διάστασης ως προς επεκτάσεις και υποομάδες.

Ορισμός 2.2.1. (Εμφυτευτικά Πρότυπα) Ένα R -πρότυπο E καλείται εμφυτευτικό αν κάθε βραχεία ακριβής ακολουθία R -προτύπων της παρακάτω μορφής

$$0 \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

διασπάται.

Σημειώνουμε ότι στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί (ισοδύναμοι) ορισμοί των εμφυτευτικών προτύπων. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [1].

Ορισμός 2.2.2. [10, VI. 2] Έστω ομάδα G και H υποομάδα της. Έστω επίσης ένας μονομορφισμός G -προτύπων, $i : M' \hookrightarrow M$.

- Θα καλούμε τον i αποδεκτά διασπασίμο ως προς την υποομάδα H αν ο i είναι διασπασίμος μονομορφισμός όταν θεωρηθεί ως ομομορφισμός H -προτύπων.
- Ένα πρότυπο Q καλείται σχετικά εμφυτευτικό ως προς την H αν ο συναρτητής $\text{Hom}_G(\cdot, Q)$ στέλνει κάθε αποδεκτά διασπασίμο G -μονομορφισμό ως προς την H σε επιμορφισμό αβελιανών ομάδων.

Δίνουμε το επόμενο λήμμα, όπως και το Λήμμα 2.2.7 που θα εμφανιστεί αργότερα, χωρίς απόδειξη. Τα δύο αυτά Λήμματα συνδυασμένα θα μας αποκαλύψουν ότι πράγματι όπως έχουμε προαναφέρει μία ομάδα G είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν $GcdG = 0$.

Λήμμα 2.2.3. [10, VI. 2.6] Αν H είναι υποομάδα πεπερασμένης ομάδας G τότε κάθε H -προβολικό G -πρότυπο M δέχεται σχετικά εμφυτευτική δεξιά επίλυση η οποία αποτελείται από G -προβολικά πρότυπα. Επιπλέον, αν το G -πρότυπο M είναι H -προβολικό και H -πεπερασμένα παραγόμενο, τότε η σχετική εμφυτευτική επίλυση του M αποτελείται από πεπερασμένα παραγόμενα προβολικά G -πρότυπα.

Ορισμός 2.2.4. Έστω $\mathbf{E}$ μία επίλυση (δεξιά, αριστερή ή πλήρης) κάποιου R -προτύπου M αποτελούμενη από R -πρότυπα. Η $\mathbf{E}$ θα καλείται πεπερασμένου τύπου εάν όλα τα πρότυπα της είναι πεπερασμένα παραγόμενα.

Σχόλιο 2.2.5. Έστω $H \leq G$, όπου η G είναι πεπερασμένη ομάδα. Γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Z}$ είναι $\mathbb{Z}H$ -προβολικό αν λάβουμε ως H την ομάδα με ένα στοιχείο. Από το προηγούμενο Λήμμα έχουμε ότι το $\mathbb{Z}$ δέχεται σχετικά εμφυτευτική επίλυση $\mathbf{Q}$:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow Q^0 \rightarrow Q^1 \rightarrow \dots$$

στην οποία τα Q^i είναι G -προβολικά, με άλλα λόγια το $\mathbb{Z}$ ως G -πρότυπο δέχεται δεξιά προβολική επίλυση. Εφαρμόζοντας άλλη μία φορά το Λήμμα 2.2.3 βλέπουμε ότι η παραπάνω δεξιά προβολική επίλυση θα είναι και πεπερασμένου τύπου, αφού το $\mathbb{Z}$ ως $\mathbb{Z}$ -πρότυπο είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Ενώνοντας τη $\mathbf{Q}$ με μία συνηθισμένη G -προβολική του $\mathbb{Z}$, $\mathbf{P}$, παίρνουμε τη πλήρη προβολική επίλυση:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & Q^0 \longrightarrow Q^1 \longrightarrow \dots \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & \mathbb{Z} & & \end{array}$$

(2.6)

Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει και ισχυρώς πλήρης προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$.

Ορισμός 2.2.6. Έστω R δακτύλιος και C ένα σύμπλεγμα R -προτύπων, ως δυϊκό σύμπλεγμα του C ορίζουμε το $\bar{C} = \text{Hom}_R(C, R)$.

Λήμμα 2.2.7. [10, VI. 3.5] Αν $P \rightarrow \mathbb{Z}$ είναι μία πεπερασμένου τύπου προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω από το $\mathbb{Z}G$, τότε η δυϊκή της ακολουθία $\mathbb{Z} \rightarrow \bar{P}$ αποτελεί δεξιά συγγνήσια προβολική επίλυση. Επιπλέον, η δυϊκή ακολουθία μίας πεπερασμένου τύπου δεξιάς επίλυσης αποτελεί μία αριστερή συγγνήσια προβολική επίλυση.

Πόρισμα 2.2.8. [7, Παράδειγμα 2.2] Κάθε πεπερασμένη ομάδα έχει Gorenstein συνομολική διάσταση μηδέν.

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο από τα Λήμματα 2.2.3 και 2.2.7.

□

Σχόλιο 2.2.9. Εκμεταλλευόμενοι την απόδειξη της Πρότασης 2.1.7 μπορούμε να δώσουμε και μία εναλλακτική απόδειξη του παραπάνω πορίσματος. Σύμφωνα λοιπόν με την απόδειξη της Πρότασης 2.1.7, αν υπάρχει ένας $\mathbb{Z}$ -διασπώμενος $\mathbb{Z}G$ -μονομορφισμός $i : \mathbb{Z} \rightarrow A$ όπου το A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο με $\text{rd}_{\mathbb{Z}G} A = n$ τότε για κάθε $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο M υπάρχει μία ισχυρώς πλήρης προβολική $\mathbb{Z}G$ -επίλυση με δείκτη συμφωνίας n . Αρκεί λοιπόν, για να αποδείξουμε το ζητούμενο, να παρατηρήσουμε ότι ο $\mathbb{Z}G$ -μονομορφισμός $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}G$ με τύπο $i(1) = \sum_{g \in G} g$ είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενος για κάθε πεπερασμένη ομάδα G .

Πρόταση 2.2.10. [11, 2.3] Μία ομάδα G είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν $\text{Gcd}G = 0$

Απόδειξη. Το ευθύ της πρότασης είναι το Πόρισμα 2.2.8.

Για το αντίστροφο υποθέτουμε ότι $\text{Gcd}G = 0$. Τότε υπάρχει ισχυρώς πλήρης προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ πάνω από το δακτύλιο $\mathbb{Z}G$. Δηλαδή το $\mathbb{Z}$ ως G -πρότυπο εμφυτεύεται σε ένα $\mathbb{Z}G$ -προβολικό P . Επειδή η G δρα με τετριμμένο τρόπο στο $\mathbb{Z}$ έχουμε ότι θα υπάρχει μη τετριμμένο υποπρότυπο A του P στο οποίο η G δρα τετριμμένα.

Θα δείξουμε ότι για κάθε άπειρη ομάδα G και κάθε G -προβολικό πρότυπο P ισχύει ότι $P^G = \{0\}$. Πράγματι, έστω $\alpha = \sum_{g \in G} r_g g \in \mathbb{Z}G$, όπου $g \in G$ και τα $r_g \in \mathbb{Z}$ είναι μη μηδενικά για σχεδόν όλα τα g (Δηλ. μόνο πεπερασμένο πλήθος r_g είναι μη μηδενικά.), τέτοιο ώστε $g'\alpha = \alpha$ για κάθε $g' \in G$. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες :

$$\begin{aligned} g'\alpha = \alpha &\Leftrightarrow g' \sum_{g \in G} r_g g = \sum_{g \in G} r_g g \\ &\Leftrightarrow \sum_{g \in G} r_g g'g = \sum_{g \in G} r_g g \\ &\Leftrightarrow r_{g'g} = r_g \quad \forall g' \in G. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα σημαίνει ότι $r_g = 0$ για κάθε $g \in G$, το οποίο ήταν το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.2.11. [11, 2.4] Για κάθε H υποομάδα μίας ομάδας G ισχύει ότι $\text{Gcd}H \leq \text{Gcd}G$.

Απόδειξη. Επειδή η ανισότητα προς απόδειξη είναι προφανής για $\text{Gcd}G = \infty$, αρκεί να θεωρήσουμε τη περίπτωση $\text{Gcd}G = n < \infty$. Από το Πόρισμα 2.1.3

γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας $\mathbb{Z}$ -διασπώμενος μονομορφισμός G -προτύπων $i : \mathbb{Z} \rightarrow A$ όπου το A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $pd_{\mathbb{Z}G}A = n$.

Επειδή το $\mathbb{Z}G$ είναι ελεύθερο ως $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο (με βάση ένα οποιοδήποτε δεξιό σύνολο αντιπροσώπων των συμπλόκων της H στη G) έχουμε ότι κάθε προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο είναι και $\mathbb{Z}H$ -προβολικό, επομένως έχουμε ότι $pd_{\mathbb{Z}H}A \leq pd_{\mathbb{Z}G}A$. Επιπλέον, ο i μπορεί να θεωρηθεί ως $\mathbb{Z}$ -διασπώμενος μονομορφισμός $\mathbb{Z}H$ -προτύπων και άρα από την Απόδειξη της Πρότασης 2.1.7 έχουμε : $GcdH = Grpd_{\mathbb{Z}H}\mathbb{Z} \leq pd_{\mathbb{Z}H}A \leq n$.

□

Ορισμός 2.2.12. (Επαγωγή, συνεπαγωγή και περιορισμός) Έστω H υποομάδα μίας ομάδας G , ένα H -πρότυπο N και ένα G -πρότυπο M .

Επαγωγή: Ορίζουμε ως επαγόμενο πρότυπο της G το $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} N$, όπου η δράση είναι η εξής:

$$g \cdot (g' \otimes n) = gg' \otimes n.$$

Συμβολικά γράφουμε: $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} N = Ind_H^G N$.

Συνεπαγωγή: Αντίστοιχα, το συνεπαγόμενο G -πρότυπο από τη H στη G ορίζεται να είναι το $Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, N)$, όπου η δράση είναι η εξής:

$$g \cdot \phi(a) = \phi(a \cdot g)$$

Συμβολικά γράφουμε : $Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, N) = Coind_H^G N$.

Περιορισμός: Το περιορισμένο H -πρότυπο από τη G στην H ορίζεται να είναι απλώς το M όπου η δράση της H στο M είναι ακριβώς η δράση της G περιορισμένη στα στοιχεία της H . Συμβολικά γράφουμε $Res_H^G M$.

Παρατήρηση 2.2.13. Μπορούμε να ορίσουμε τα παραπάνω για οποιονδήποτε μεταθετικό δακτύλιο k και οποιοδήποτε kG -πρότυπο M και kH -πρότυπο N .

Παράδειγμα 2.2.14. Κάθε ελεύθερο G -πρότυπο είναι επαγόμενο πρότυπο. Πράγματι, αν το F είναι G -ελεύθερο, τότε $F \cong Ind_{\{e\}}^G F'$ όπου το F' είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα διάστασης $n = \text{rank}_G F$.

Πρόταση 2.2.15. [10, ch. III, par. 3] Έστω H υποομάδα μίας ομάδας G και k μεταθετικός δακτύλιος. Τότε για κάθε kH -πρότυπο M και κάθε kG -πρότυπο N ισχύει ο τύπος $Hom_{kG}(kG \otimes_{kH} M, N) \cong Hom_{kH}(M, N)$. Όπου το $kG \otimes_{kH} M$ γίνεται kG -πρότυπο με την επαγόμενη δράση και το N γίνεται kH -πρότυπο με το περιορισμό της kG -δράσης. Επιπλέον ο παραπάνω ισομορφισμός είναι φυσικός.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $i : M \rightarrow kG \otimes_{kH} M$ με τύπο $i(m) = 1 \otimes m$.

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη του ζητούμενου ισομορφισμού αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε kH -απεικόνιση $f : M \rightarrow N$ υπάρχει μοναδική απεικόνιση $g : kG \otimes_{kH} M \rightarrow N$ η οποία είναι τέτοια ώστε $gi = f$. Με άλλα λόγια, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ακόλουθη καθολική ιδιότητα :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & kG \otimes_{kH} M \\ \downarrow f & \swarrow g & \\ N & & \end{array} \quad (2.7)$$

Έστω λοιπόν δοσμένη kH -απεικόνιση $f : M \rightarrow N$, ορίζουμε τη ζητούμενη g θέτοντας $g(\alpha h \otimes m) = (\alpha h)f(m)$, όπου $\alpha \in K$ και $h \in H$. Είναι προφανές ότι g όπως ορίστηκε κάνει το παραπάνω διάγραμμα μεταθετικό, μένει λοιπόν να δείξουμε τη μοναδικότητα της απεικόνισης g . Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε μία kG -απεικόνιση g' η οποία πληροί τη συνθήκη $g'i = f$. Τότε, για $\alpha \in K$ και $h \in H$, ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες :

$$\begin{aligned} g'(\alpha h \otimes m) &= (\alpha h)g'(1 \otimes m) \\ &= (\alpha h)g'(i(m)) \\ &= (\alpha h)f(m) \\ &= g(\alpha h \otimes m). \end{aligned}$$

Δηλαδή η g είναι η μοναδική απεικόνιση η οποία κάνει το διάγραμμα 2.7 μεταθετικό, το οποίο ήταν το ζητούμενο.

Για να δείξουμε τη φυσικότητα του παραπάνω ισομορφισμού θεωρούμε δύο kG -πρότυπα L, N και ένα kG -ομομορφισμό $\phi : L \rightarrow N$. Θέλουμε να δείξουμε ότι το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{kG}(kG \otimes_{kH} M, L) & \xrightarrow{g_1} & \text{Hom}_{kG}(kG \otimes_{kH} M, N) \\ \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 \\ \text{Hom}_{kH}(M, L) & \xrightarrow{g_2} & \text{Hom}_{kH}(M, N) \end{array}$$

Όπου οι g_1 και g_2 έχουν τύπο $g_i(f) = \phi f$, $i = 1, 2$ ενώ οι ψ_i για $i = 1, 2$ είναι οι ισομορφισμοί που κατασκευάσαμε προηγουμένως. Έστω λοιπόν $f \in \text{Hom}_{kG}(kG \otimes_{kH} M, L)$ τότε $\psi_2 g_1(f) = \psi_2(\phi f) = (\phi f) \circ i$, επίσης $g_2 \psi_1(f) = g_2(f \circ i) = \phi \circ f \circ i$.

□

- Παρατήρηση 2.2.16.** 1. Η παραπάνω πρόταση μας ενημερώνει ότι εάν το P είναι ένα H –προβολικό πρότυπο τότε το $\text{ind}_H^G P$ είναι G –προβολικό.
2. Μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την Πρόταση 2.2.15 αν παρατηρήσουμε ότι στην ουσία ο ισομορφισμός που δίνεται αποτελεί προσάρτηση μεταξύ των συναρτητών Ind_H^G και Res_H^G . Δηλαδή αποδείξαμε ότι το ζεύγος συναρτητών $(\text{Ind}_H^G, \text{Res}_H^G)$ είναι προσαρτημένο ζεύγος.
3. Μία εναλλακτική απόδειξη της Πρότασης 2.2.15 μπορεί να δοθεί από τα Σχόλια 2.1.5(2.) θεωρώντας το kG ως (kG, kH) -διπρότυπο.

Πόρισμα 2.2.17. Έστω H υποομάδα μίας πεπερασμένης ομάδας G και ένα H -πρότυπο M . Ισχύει ότι $\text{Ind}_H^G M \cong \text{Coind}_H^G M$.

Απόδειξη. Έστω λοιπόν ένα H –πρότυπο M ορίζουμε τον H –ομομορφισμό $\phi_0 : M \rightarrow \text{Coind}_H^G M$ η οποία δίνεται από το τύπο

$$\phi_0(m)(g) = \begin{cases} gm & g \in H \\ 0 & g \notin H \end{cases}$$

Από τη Πρόταση 2.2.15 η ϕ_0 επεκτείνεται σε μία G –απεικόνιση $\phi : \text{ind}_H^G M \rightarrow \text{coind}_H^G M$. Για διευκόλυνση του αναγνώστη δίνουμε το τύπο της ϕ :

$$\begin{aligned} \phi(g \otimes m)(g_1) &= g\phi(1 \otimes m)(g_1) \\ &= \phi(1 \otimes m)(g_1 g) = \begin{cases} g_1 g m & g_1 g \in H \\ 0 & g_1 g \notin H \end{cases} \end{aligned}$$

Επειδή η ομάδα G είναι πεπερασμένη έχουμε ότι η ομάδα πηλίκου G/H είναι πεπερασμένη και άρα για οποιαδήποτε $f \in \text{Coind}_H^G$ το άθροισμα $\sum_{g \in G/H} g \otimes f(g^{-1})$ έχει νόημα. Πλέον το ζητούμενο έπεται εύκολα διότι η απεικόνιση $\psi(f) = \sum_{g \in G/H} g \otimes f(g^{-1})$ είναι αντίστροφη της ϕ . □

Σχόλιο 2.2.18. Για να αποδείξουμε το επόμενο Πόρισμα εκτός από το Πόρισμα 2.2.17 θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το γεγονός ότι ένα οποιαδήποτε συνεπαγόμενο πρότυπο μίας ομάδας G από μία υποομάδα της H είναι σχετικά εμφυτευτικό ως προς την H ([10, VI, 2.1]).

Πόρισμα 2.2.19. [10, VI, 2.3] Έστω H πεπερασμένη ομάδα, τότε κάθε H –προβολικό πρότυπο είναι σχετικά εμφυτευτικό ως προς τη τετριμμένη υποομάδα $\{e\}$ της H .

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα ελεύθερο H -πρότυπο F και παρατηρούμε ότι μπορούμε να αντιλαμβανόμαστε το F ως το επαγόμενο πρότυπο μίας ελεύθερης αβελιανής ομάδας F' , όπου η F' έχει διάσταση πάνω από το $\mathbb{Z}$ ίση με τη διάσταση του F πάνω από το δακτύλιο $\mathbb{Z}H$. Συμβολικά τα παραπάνω διατυπώνονται με τον ισομορφισμό $F \cong \text{Ind}_{\{e\}}^H F'$. Από το Πόρισμα 2.2.17 έχουμε τον ισομορφισμό $F \cong \text{Ind}_{\{e\}}^H F' \cong \text{coind}_{\{e\}}^H F'$, επομένως από το Σχόλιο 2.2.18 συμπεραίνουμε ότι το F είναι σχετικά εμφυτευτικό.

Πλέον για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ευθύς προσθετός σχετικά εμφυτευτικού προτύπου είναι επίσης σχετικά εμφυτευτικό γεγονός το οποίο έπεται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε το ισομορφισμό αβελιάνων ομάδων:

$$\text{Hom}(\cdot, F_1 \oplus F_2) \cong \text{Hom}(\cdot, F_1) \oplus \text{Hom}(\cdot, F_2).$$

□

Πρόταση 2.2.20. [8, 2.8(3)] Έστω H πεπερασμένη υποομάδα μίας ομάδας G τότε $\text{Gcd}(N_G(H)/H) \leq \text{Gcd}G$.

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 2.2.11 έχουμε ότι $\text{Gcd}N_G(H) \leq \text{Gcd}G$, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $N_G(H) = G$. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι τα G/H -πρότυπα είναι ακριβώς τα G -πρότυπα στα οποία η H δρα με τετριμμένο τρόπο. Δηλαδή ${}_{\text{Mod}}G/H = \{M \in {}_{\text{Mod}}G : M^H = M\}$.

Ισχυρισμός: Αν το M είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο G -πρότυπο με $\text{pd}_{\mathbb{Z}G}M < \infty$, τότε το G/H -πρότυπο M^H είναι επίσης $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $\text{pd}_{\mathbb{Z}(G/H)}M^H \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G}M$.

Απόδειξη ισχυρισμού: Προφανώς, το M^H είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο ως υποπρότυπο του $\mathbb{Z}$ -ελεύθερου M .

Έστω τώρα ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G}M = n$ και

$$0 \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (2.8)$$

μία $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του M .

Επειδή το M είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο έχουμε ότι η παραπάνω ακριβής ακολουθία είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη. Επιπλέον, μπορούμε να θεωρήσουμε την (2.8) ως ακολουθία προβολικών H -προτύπων. Είναι πλέον εύκολο, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.2.19, να δούμε ότι το M είναι kH -προβολικό. Πράγματι, θεωρούμε την ακολουθία

$$0 \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \rightarrow \text{Im}d_{n-1} \rightarrow 0 \quad (2.9)$$

και παρατηρούμε ότι ο d_n είναι αποδεκτά διασπάσιμος μονομορφισμός ως προς την υποομάδα $\{e\}$ της H . Επειδή το P_n είναι προβολικό H -πρότυπο και η H είναι πεπερασμένη ομάδα από το Πόρισμα 2.2.19 συμπεραίνουμε ότι η ακρίβεια της (2.9) διατηρείται από τη δράση του συναρτητή $Hom(\cdot, P_n)$ και επομένως η (2.9) είναι $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενη. Δηλαδή η εικόνα Imd_{n-1} είναι $\mathbb{Z}H$ -προβολικό πρότυπο. Εφαρμόζοντας διαδοχικά τα παραπάνω επιχειρήματα στις ακολουθίες

$$0 \rightarrow Ker d_i \xrightarrow{d_i} P_{i-1} \rightarrow Imd_{i-1} \rightarrow 0,$$

για $1 < i < n$ έχουμε το ζητούμενο.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του ισχυρισμού παρατηρούμε ότι τα $\mathbb{Z}(G/H)$ -πρότυπα P_i^H είναι προβολικά, αφού ισχύει ο ισομορφισμός $\mathbb{Z}(G/H)$ -προτύπων $(\mathbb{Z}G)^H \cong \mathbb{Z}(G/H)$. Τέλος, το γεγονός ότι η ακολουθία (2.8) είναι $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενη μας πληροφορεί ότι η παρακάτω ακολουθία G/H είναι πράγματι ακριβής

$$0 \rightarrow P_n^H \rightarrow \cdots \rightarrow P_0^H \rightarrow M^H \rightarrow 0$$

και αποτελεί μία $\mathbb{Z}(G/H)$ -προβολική επίλυση του M^H , το οποίο είναι το ζητούμενο.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $GcdG = n < \infty$. Τότε από το Πόρισμα 2.1.3 γνωρίζουμε ότι υπάρχει $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη ακριβής ακολουθία G -προτύπων $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow A$ όπου το A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $pd_{\mathbb{Z}}A = n$. Αφού η $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow A^H$ είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη ακριβής ακολουθία G/H -προτύπων, τότε από την Απόδειξη της Πρότασης 2.1.7 προκύπτει ότι $Gcd(G/H) = Gpd_{\mathbb{Z}(G/H)}\mathbb{Z} \leq pd_{\mathbb{Z}(G/H)}A^H \leq n$. $\square$

Λήμμα 2.2.21. [11, 2.6] Έστω ομάδα G , H υποομάδα της G και M ένα H -πρότυπο.

1. Αν το M είναι Gorenstein προβολικό, τότε και το επαγόμενο G -πρότυπο, $ind_H^G M$, είναι Gorenstein προβολικό.
2. Επιπλέον ισχύει ότι $Gpd_{\mathbb{Z}G}(ind_H^G M) \leq Gpd_{\mathbb{Z}H}M$.

Απόδειξη. 1. Έστω P_* ένα ακυκλικό σύμπλεγμα H -προτύπων το οποίο έχει ως συζυγία το M και παραμένει ακυκλικό υπό τη δράση του συναρτητή $Hom_{\mathbb{Z}H}(\cdot, Q)$ για κάθε H -προβολικό πρότυπο Q . Τότε το επαγόμενο σύμπλεγμα $ind_H^G P_*$ είναι ακυκλικό, αποτελείται από προβολικά πρότυπα (Παρατήρηση 2.2.16) και έχει το $ind_H^G M$ ως συζυγία. Επιπλέον, επειδή κάθε G -προβολικό πρότυπο είναι προβολικό και

ως H -πρότυπο (με τη περιορισμένη δράση), έχουμε ότι το σύμπλεγμα $Hom_{\mathbb{Z}G}(ind_H^G P_*, T) \cong Hom_{\mathbb{Z}H}(P_*, T)$ είναι ακυκλικό για κάθε προβολικό G -πρότυπο T . Επομένως, το $ind_H^G M$ είναι Gorenstein προβολικό G -πρότυπο.

2. Αφού η ανισότητα προς απόδειξη είναι προφανής για $Gpd_{\mathbb{Z}H} M = \infty$, αρκεί να θεωρήσουμε ότι $Gpd_{\mathbb{Z}H} M = n < \infty$. Τότε, υπάρχει μία $\mathbb{Z}H$ -Gorenstein προβολική επίλυση του M της παρακάτω μορφής:

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

.

Από το 1. έχουμε ότι τα πρότυπα $ind_H^G P_i$ είναι Gorenstein προβολικά για κάθε $i = 0, \dots, n$. Επομένως, η ακριβής ακολουθία

$$0 \rightarrow ind_H^G P_n \rightarrow \cdots \rightarrow ind_H^G P_0 \rightarrow ind_H^G M \rightarrow 0$$

μας πληροφορεί ότι $Gpd_{\mathbb{Z}G}(ind_H^G M) \leq Gpd_{\mathbb{Z}H} M$.

□

Λήμμα 2.2.22. [2, 2.19] Έστω $(M_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ μία οποιαδήποτε οικογένεια R -προτύπων. Τότε :

$$Gpd_R(\bigoplus M_\lambda) = \sup\{Gpd_R M_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Απόδειξη. Για την ανισότητα “ $\leq$ ” αρκεί να θυμηθούμε ότι η κλάση των Gorenstein προβολικών προτύπων είναι κλειστή ως προς ευθείς προσθετέους, αφού αν $\mathbf{GP}_\lambda$ είναι μία Gorenstein προβολική επίλυση του M_λ για κάθε $\lambda \in \Lambda$. Τότε το ευθύ άθροισμα των $\mathbf{GP}_\lambda$ είναι μία Gorenstein προβολική επίλυση του $\bigoplus M_\lambda$.

Για την άλλη ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ευθύ προσθετέο, M' , ενός R -προτύπου M ισχύει ότι $Gpd_R M' \leq Gpd_R M$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Gpd_R M = n \in \mathbb{N}$. Η απόδειξη ακολουθεί επαγωγή στο n .

Το ζητούμενο για $n = 0$ έπεται από το Πόρισμα 1.2.10. Για $n > 0$, γράφουμε $M = M' \oplus M''$. Θεωρούμε επίσης προβολικά πρότυπα G' και G'' τα οποία έχουν ως επιμορφικές εικόνες τα πρότυπα M' και M'' αντίστοιχα. Τότε παίρνουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα με διασπώμενες ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G' \oplus G'' & \longrightarrow & G'' \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & K' & \longrightarrow & K' \oplus K'' & \longrightarrow & K'' \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Τότε η Πρόταση 1.3.8, εφαρμοσμένη στη μεσαία στήλη, μας πληροφορεί ότι $Gpd_R(K' \oplus K'') = n - 1$. Επομένως, η επαγωγική υπόθεση μας λέει ότι $Gpd_R K' \leq n - 1$, και άρα λόγω της ύπαρξης της βραχείας ακριβής ακολουθίας $0 \rightarrow K' \rightarrow G' \rightarrow M' \rightarrow 0$ έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι: $Gpd_R M' \leq n = Gpd_R M$. $\square$

Πόρισμα 2.2.23. [11, 2.7] Έστω H κανονική υποομάδα μίας ομάδας G . Τότε για κάθε προβολικό G/H -πρότυπο P ισχύει η ανισότητα $Gpd_{\mathbb{Z}G} P \leq Gcd H$. Όπου το P γίνεται G -πρότυπο μέσω του ομομορφισμού $G \rightarrow G/H$.

Απόδειξη. Αφού η Gorenstein προβολική διάσταση του τετριμμένου H -προτύπου $\mathbb{Z}$ ισούται με τη $Gcd H$, το Λήμμα 2.2.21(2.) μας λέει ότι η Gorenstein προβολική διάσταση του επαγόμενου G -προτύπου $ind_H^G \mathbb{Z} = \mathbb{Z}(G/H)$ είναι φραγμένη από την $Gcd H$. Από το Λήμμα 2.2.22 συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\mathbb{Z}(G/H)$ -ελεύθερο πρότυπο F ισχύει ότι $Gcd_{\mathbb{Z}G} F \leq Gcd H$. Τέλος, εφαρμόζοντας για άλλη μία φορά το Λήμμα 2.2.22 έχουμε ότι $Gcd_{\mathbb{Z}G} P \leq Gcd H$, για κάθε $\mathbb{Z}(G/H)$ -προβολικό πρότυπο P . $\square$

Λήμμα 2.2.24. [11, 2.8] Έστω R δακτύλιος και μία ακριβής ακολουθία R -προτύπων

$$0 \rightarrow M_n \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Τότε, $Gpd_R M \leq \max\{i + Gpd_R M_i : i = 0, 1, \dots, n\}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο n .

n = 1 : Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Gpd_R M_0 = m_0 < \infty$ και ότι $Gpd_R M_1 = m_1 < \infty$. Από το Θεώρημα 1.3.9 γνωρίζουμε ότι για κάθε προβολικό πρότυπο P οι αβελιανές ομάδες $Ext_R^m(M_0, P)$ και

$Ext_R^m(M_1, P)$ μηδενίζοντε αν $m > m_0$ και $m > m_1$ αντιστοίχως. Χρησιμοποιώντας ξανά το Θεώρημα 1.3.9 και τη μακρά ακριβή ακολουθία για το Ext έχουμε το ζητούμενο.

Επαγωγικό Βήμα: Έστω λοιπόν ότι το ζητούμε ισχύει για το $n - 1$. Θεωρούμε επίσης την ακολουθία $0 \rightarrow M_n \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow M \rightarrow 0$ και το R -πρότυπο $M' = im(M_1 \rightarrow M_0)$. Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στην παρακάτω ακολουθία :

$$0 \rightarrow M_n \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow M' \rightarrow 0,$$

έχουμε ότι $Gpd_R M' \leq \max\{i - 1 + Gpd_R M_i : i = 1, \dots, n\}$. Πλέον είναι εύκολο να αποδείξουμε το ζητούμενο αφού η ακολουθία :

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M_0 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

εμπίπτει στη περίπτωση $n = 1$. Επομένως, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} Gpd_R M &\leq \max\{Gpd_R M_0, 1 + Gpd_R M'\} \\ &\leq \max\{i + Gpd_R M_i : i = 0, 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

□

Πρόταση 2.2.25. *[8, 2.8 (2)][11, 2.9] Αν $1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$ είναι επέκταση ομάδων, τότε $Gcd G \leq Gcd N + Gcd K$.*

Απόδειξη. Ο συνήθης ομορφισμός πηλίκου $G \rightarrow K$ μας επιτρέπει να θεωρούμε κάθε K -πρότυπο ως G -πρότυπο και κάθε K -μορφισμό ως G -μορφισμό. Αρχεί να αποδείξουμε την ανισότητα της εκφώνησης στη περίπτωση όπου $Gcd N + Gcd K < \infty$, θέτουμε λοιπόν $Gcd N = n$ και $Gcd K = m$ όπου $n, m \in \mathbb{N}$. Τότε, από το Πρόσχημα 2.1.3 έπεται ότι υπάρχει μία $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη ακολουθία K -προτύπων $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} A$ όπου το A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $pd_{\mathbb{Z}K} A = m$. Δηλαδή για το A υπάρχει ακριβής ακολουθία :

$$0 \rightarrow P_m \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0,$$

όπου τα P_i είναι K -προβολικά. Αφού $Gpd_{\mathbb{Z}G} P_i \leq Gcd N$ για κάθε i (Δες Πρόσχημα 2.2.23), από το Λήμμα 2.2.24 έχουμε ότι $Gpd_{\mathbb{Z}G} A \leq n + m$. Πλέον από το Πρόσχημα 2.1.2 μπορούμε να θεωρήσουμε μία $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη ακριβή ακολουθία G -προτύπων $0 \rightarrow A \xrightarrow{j} B$ όπου το B είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $pd_{\mathbb{Z}G} B = Gpd_{\mathbb{Z}G} A \leq n + m$. Χρησιμοποιώντας την σύνθεση $\mathbb{Z} \rightarrow A \rightarrow B$ η

οποία είναι επίσης $\mathbb{Z}$ –διασπώμενος μονομορφισμός G –προτύπων και αξιοποιώντας την Απόδειξη της Πρότασης 2.1.7 συμπεραίνουμε ότι $GcdG = Gpd_{\mathbb{Z}G}\mathbb{Z} \leq pd_{\mathbb{Z}G}B \leq n + m$, το οποίο ήταν το ζητούμενο. $\square$

Πόρισμα 2.2.26. [11, 2.10] Έστω H κανονική υποομάδα μίας ομάδας G . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν η H είναι πεπερασμένη, τότε $GcdG = Gcd(G/H)$
2. Αν η G/H είναι πεπερασμένη τότε $GcdG = GcdH$

Απόδειξη. Το 1. είναι άμεσο από το Πόρισμα 2.2.10 και τις Προτάσεις 2.2.25 και 2.2.20. Για το 2. αρκούν οι Προτάσεις 2.2.25 και 2.2.11. $\square$

2.3 Γενίκευση για Μεταθετικούς Δακτυλίους

Πριν εξετάσουμε το τρόπο με το οποίο γενικεύονται τα αποτελέσματα των παραγράφων 2.1 και 2.2 εισάγουμε την έννοια της *global dimension*.

Η σχετική θεωρία για τη *global dimension* ενός δακτυλίου R μπορεί να βρεθεί στο Κεφάλαιο 8 του [1].

Ορισμός 2.3.1. (*Global Dimension*) Για ένα δακτύλιο R ορίζουμε τις σταθερές :

- 1. $lpD(R) = \sup\{pd(A) : A \in {}_R\text{Mod}\}$ (*Left projective global dimension*)
- 2. $liD(R) = \sup\{id(A) : A \in {}_R\text{Mod}\}$ (*Left injective global dimension*)

Αποδεικνύεται ότι οι $lpD(R)$ και $liD(R)$ ταυτίζονται, την κοινή τους αυτή τιμή την ονομάζουμε *Left global dimension* του R ($l.gl.dim R$).

- 1. $rpD(R) = \sup\{pd(A) : A \in \text{Mod}_R\}$ (*Right projective global dimension*)
- 2. $riD(R) = \sup\{id(A) : A \in \text{Mod}_R\}$ (*Right injective global dimension*)

Αποδεικνύεται, επίσης, ότι οι $rpD(R)$ και $riD(R)$ ταυτίζονται, ονομάζουμε *Right global dimension* του R ($r.gl.dim R$) τη κοινή τιμή των σταθερών $rpD(R)$ και $riD(R)$:

Προφανώς, στη περίπτωση που ο R είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος μιλάμε απλά για τη *global dimension* του R , αφού οι σταθερές $l.gl.dim R$, $r.gl.dim R$ ταυτίζονται.

Ορισμός 2.3.2. (*Weak Global Dimension*) Έστω M R -πρότυπο, υπενθυμίζουμε ότι συμβολίζουμε με $fd(M)$ την επίπεδη διάσταση του M , η οποία έχει οριστεί στο Κεφάλαιο 1.

Για το δακτύλιο R ορίζουμε την αριστερή *weak global dimension* ως το *supremum* των επίπεδων διαστάσεων των αριστερών R -προτύπων, όμοια ορίζουμε την δεξιά *weak global dimension* ως το *supremum* των επίπεδων διαστάσεων των δεξιών R -προτύπων. Αποδεικνύεται ότι η δύο παραπάνω σταθερές για ένα δακτύλιο R ταυτίζονται ([1, 8.19]), τη κοινή τους αυτή τιμή την καλούμε *weak global dimension* του R και συμβολικά γράφουμε $wgl.dim.(R)$.

Παράδειγμα 2.3.3. Ο δακτύλιος των ακεραίων $\mathbb{Z}$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με πεπερασμένη *weak global dimension*. Πράγματι, κάθε $\mathbb{Z}$ -πρότυπο έχει

προβολική διάσταση το πολύ 1 πάνω απο το $\mathbb{Z}$ και επειδή κάθε προβολικό πρότυπο είναι επίπεδο έχουμε ότι κάθε $\mathbb{Z}$ -πρότυπο έχει επίπεδη διάσταση το πολύ 1 πάνω απο το $\mathbb{Z}$.

Πρόταση 2.3.4. [11, 1.1] Έστω k μεταθετικός δακτύλιος πεπερασμένης *weak global dimension*.

1. Κάθε ακυκλικό σύμπλεγμα προβολικών k -προτύπων είναι συμπτύξιμο.
2. Αν G είναι μία οποιαδήποτε ομάδα, τότε κάθε Gorenstein προβολικό kG -πρότυπο είναι k -προβολικό

Απόδειξη. 1. Έστω ότι $wgl.dim k = m < \infty$ και ένα ακυκλικό σύμπλεγμα προβολικών k -προτύπων P_* με συζυγίες $K_n = im(P_n \rightarrow P_{n-1})$, $n \in \mathbb{Z}$. Επειδή κάθε προβολικό πρότυπο είναι επίπεδο, έχουμε ότι για κάθε n το K_n είναι ο m -οστός πυρήνας σε μία επίπεδη επίλυση του K_{n-m} , επομένως αφού $wgl.dim k = m$ οι συζυγίες K_n είναι επίπεδα πρότυπα. Από το Θεώρημα 1.1.13 έχουμε το ζητούμενο.

2. Έστω M Gorenstein προβολικό kG -πρότυπο. Τότε, το M αποτελεί συζυγία ενός (κατάλληλου) ακυκλικού συμπλέγματος προβολικών kG -προτύπων P_* . Επειδή κάθε προβολικό kG -πρότυπο είναι επίσης k -προβολικό έχουμε ότι το P_* είναι συμπτύξιμο ως k -σύμπλεγμα, ισοδύναμα το P_* είναι k -διασπασίμο ([10, 0.3]) και άρα το M είναι k -προβολικό. $\square$

Πόρισμα 2.3.5. [11, 1.2] Έστω k μεταθετικός δακτύλιος πεπερασμένης *weak global dimension* και M ένα kG -πρότυπο πεπερασμένης Gorenstein προβολικής διάστασης. Τότε υπάρχει k -διασπώμενος μονομορφισμός, kG -προτύπων, $i : M \rightarrow N$ όπου $pd_{kG} N = Gpd_{kG} M$. Αν το M είναι, επιπλέον, k -προβολικό τότε και το N θα είναι k -ελεύθερο.

Απόδειξη: Επειδή $Gpd_{kG} M < \infty$ το Πόρισμα 1.3.3 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη μίας βραχείας ακριβής ακολουθίας kG -προτύπων

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} N \rightarrow L \rightarrow 0$$

με $pd_{kG} N = Gpd_{kG} M$ και L Gorenstein προβολικό. Λόγω της Πρότασης 2.3.4 γνωρίζουμε ότι το L είναι k -προβολικό και επομένως η παραπάνω ακριβής ακολουθία διασπάται. Τέλος, αν το M είναι k -προβολικό τότε και το N είναι k -προβολικό ως ευθύ άθροισμα των προβολικών προτύπων M, L .

Πόρισμα 2.3.6. [11, 1.3] Έστω ομάδα G πεπερασμένης Gorenstein συνομολογικής διάστασης. Τότε υπάρχει k -διασπώμενος μονομορφισμός kG -προτύπων $i : k \rightarrow A$, όπου το A είναι k -προβολικό και $pd_{kG} A = Gcd_k G$.

Απόδειξη: Η συνθήκη $Gcd_k G < \infty$ σημαίνει ακριβώς ότι το k έχει πεπερασμένη Gorenstein προβολική διάσταση ως kG -πρότυπο. Επομένως, το ζητούμενο έπεται από το Πόρισμα 2.1.2.

Πρόταση 2.3.7. [11, 1.4] Έστω k μεταθετικός δακτύλιος και G ομάδα τέτοια ώστε να υπάρχει k -διασπώμενος μονομορφισμός kG -προτύπων $i : k \rightarrow A$, όπου το A είναι k -προβολικό και $pd_{kG} A < \infty$. Τότε, για κάθε k -προβολικό kG -πρότυπο M έχουμε $Gpd_{kG} M \leq pd_{kG} A$.

Απόδειξη. Όμοια με την Απόδειξη 2.1.7. □

Πόρισμα 2.3.8. [11, 1.5] Έστω k μεταθετικός δακτύλιος και G ομάδα ώστε να υπάρχει k -διασπώμενος μονομορφισμός kG -προτύπων $i : k \rightarrow A$, όπου το A είναι k -προβολικό και $pd_{kG} A < \infty$. Τότε, για κάθε kG -πρότυπο M έχουμε $Gpd_{kG} M \leq pd_{kG} A + pd_k M$.

Απόδειξη. Αρκεί να θεωρήσουμε ότι $pd_{kG} M = m < \infty$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο m .

Η περίπτωση $m = 0$ είναι η Πρόταση 2.3.7. Έστω λοιπόν ότι $m > 0$ και P ένα προβολικό kG -πρότυπο το οποίο έχει ως επιμορφική εικόνα το M , δηλαδή έχουμε την παρακάτω βραχεία ακριβή ακολουθία kG -προτύπων:

$$0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Επειδή το P είναι προβολικό και ως k -πρότυπο είναι εύκολο να δει κανείς ότι $pd_k K = m - 1$. Τέλος, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $Gpd_{kG} K \leq pd_{kG} A + m - 1$ και άρα ότι $Gpd_{kG} M \leq Gpd_{kG} K + 1 \leq pd_{kG} A + pd_k M$. □

Θεώρημα 2.3.9. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες για κάθε αντιμεταθετικό δακτύλιο k πεπερασμένης *global dimension* και για κάθε ομάδα G :

1. $Gcd_k G < \infty$,
2. υπάρχει k -διασπώμενος μονομορφισμός kG -προτύπων $i : k \rightarrow A$, όπου A είναι k -προβολικό και $pd_{kG} A < \infty$,
3. κάθε kG -πρότυπο έχει πεπερασμένη Gorenstein προβολική διάσταση,

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $1. \Rightarrow 2.$ έπεται από το Πόρισμα 2.3.6, η συνεπαγωγή $2. \Rightarrow 3.$ είναι το Πόρισμα 2.3.8, τέλος η συνεπαγωγή $3. \Rightarrow 1.$ είναι προφανής. □

Πρόταση 2.3.10. [11, 2.1] Για κάθε ομάδα G και κάθε μεταθετικό δακτύλιο k ισχύει ότι $Gcd_k G \leq Gcd_{\mathbb{Z}} G$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο ισχύει αν $Gcd_{\mathbb{Z}} G = \infty$, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Gcd_{\mathbb{Z}} G = n < \infty$. Τότε από το Πόρισμα 2.1.3 έχουμε ότι υπάρχει $\mathbb{Z}$ -διασπώμενος μονομορφισμός $\mathbb{Z}G$ -προτύπων $i : \mathbb{Z} \rightarrow A$ όπου το A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $pd_{\mathbb{Z}G} A = n$. Παίρνοντας τανυστικό γινόμενο με το k του παραπάνω μονομορφισμού i παίρνουμε τον k -διασπώμενο μονομορφισμό kG -προτύπων $k \rightarrow k \otimes_{\mathbb{Z}} A$, όπου το kG -πρότυπο $k \otimes_{\mathbb{Z}} A$ είναι k -ελεύθερο, ιδιαιτέρως είναι k -προβολικό.

Επειδή $pd_{\mathbb{Z}G} A = n < \infty$ γνωρίζουμε ότι υπάρχει πεπερασμένη προβολική επίλυση του A της μορφής:

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Όμως, λόγω του ότι το A είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο, η ακολουθία (2.10) είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, επομένως η παρακάτω ακολουθία kG -προτύπων :

$$0 \rightarrow k \otimes_{\mathbb{Z}} P_n \rightarrow \cdots \rightarrow k \otimes_{\mathbb{Z}} P_0 \rightarrow k \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow 0.$$

είναι ακριβής. Αφού λοιπόν τα πρότυπα $k \otimes_{\mathbb{Z}} P_i$ είναι προβολικά για κάθε $i = 1, \dots, n$ έχουμε ότι $pd_{kG}(k \otimes_{\mathbb{Z}} A) \leq n$. Τέλος, λόγω της Πρότασης 2.3.7 έχουμε ότι $Gcd_k G = Gpd_{kG} k \leq n$, το οποίο ήταν το ζητούμενο. $\square$

Πόρισμα 2.3.11. [11, 2.3] Έστω ομάδα G και k μεταθετικός δακτύλιος. Η G είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν $Gcd_k G = 0$.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι αν μία ομάδα G είναι πεπερασμένη η $Gcd_{\mathbb{Z}} G$ είναι μηδέν και επομένως από τη προηγούμενη πρόταση έπεται ότι $Gcd_k G = 0$. Η απόδειξη για το αντίστροφο είναι όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.2.10. $\square$

Πρόταση 2.3.12. [11, 2.4] Για κάθε H υποομάδα μίας ομάδας G , και κάθε μεταθετικό δακτύλιο k πεπερασμένης *weak global dimension* ισχύει ότι $Gcd_k H < Gcd_k G$.

Απόδειξη. Επειδή η ανισότητα προς απόδειξη είναι προφανής για $Gcd_k G = \infty$, αρκεί να θεωρήσουμε τη περίπτωση $Gcd_k G = n < \infty$. Από το Πόρισμα 2.3.6 γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένας k -διασπώμενος μονομορφισμός G -προτύπων $i : k \rightarrow A$ όπου το A είναι k -προβολικό και $pd_{kG} A = n$.

Ο i μπορεί να θεωρηθεί ως k -διασπώμενος μονομορφισμός kH -προτύπων, επιπλέον γνωρίζουμε ότι $pd_{kH} \leq pd_{kG}A = n$. Επομένως, από τη Πρόταση 2.3.7 έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι $Gcd_k H = Gpd_{kH}k \leq pd_{kH}A \leq n$. $\square$

Λήμμα 2.3.13. [11, 2.5] Έστω ομάδα G και H κανονική υποομάδα της G και k μεταθετικός δακτύλιος πεπερασμένης *weak global dimension*. Θεωρούμε επίσης την ομάδα πηλίκο $W = G/H$. Τότε ισχύουν τα εξής :

1. Αν P είναι προβολικό kG -πρότυπο, τότε το P^H είναι προβολικό kW -πρότυπο
2. Αν M είναι k -προβολικό kG -πρότυπο με $pd_{kG}M < \infty$, τότε το kW -πρότυπο M^H είναι επίσης k -προβολικό και ισχύει ότι $pd_{kW}M^H \leq pd_{kG}M$.

Απόδειξη. 1. Αρχικά σημειώνουμε ότι είναι εύκολο να δει κανείς ότι το P^H είναι πράγματι και kW -πρότυπο. Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση $P = kG$, ισχύει όμως ο ισομορφισμός kW -προτύπων $(kG)^H \cong kW$, και το kW είναι (προφανώς) προβολικό ως kW -πρότυπο

2. Η απόδειξη είναι όμοια με την απόδειξη του Ισχυρισμού της Πρότασης 2.2.20. $\square$

Πρόταση 2.3.14. [11, 2.5] Έστω H μία κανονική και πεπερασμένη υποομάδα μίας ομάδας G . Έστω επίσης k μεταθετικός δακτύλιος πεπερασμένης *weak global dimension*. Τότε $Gcd_k(W) \leq Gcd_k G$, όπου με W συμβολίζουμε την ομάδα πηλίκο G/H .

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η Gorenstein συνομολογική διάσταση της ομάδας G πάνω από το k είναι πεπερασμένη και ότι ισούτε με n . Τότε το Πρόσχημα 2.3.6 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός k -διασπώμενου kG -μονομορφισμού $\iota : k \rightarrow A$ όπου το A είναι k -προβολικό με $pd_{kG}A = n$. Αφού οι ομάδες G, H δρουν με τετριμμένο τρόπο στο k , έχουμε ότι η εικόνα του ι περιέχεται στο $A^G \subset A^H$. Είναι βολικό πλέον να κατανοήσουμε τον ι ως ένα kW -μονομορφισμό $j : k \rightarrow A^H$, ο οποίος είναι επίσης k -διασπώμενος. Από το Λήμμα 2.3.13 συμπεραίνουμε ότι το kW -πρότυπο A^H είναι k -προβολικό και ότι $pd_{kW}A^H \leq pd_{kG}A = n$. Τέλος, από τη Πρόταση 2.3.7 έχουμε ότι $Gcd_k W = Gpd_{kW}A^H \leq pd_{kW}A^H \leq n$, το οποίο ήταν το ζητούμενο. $\square$

Πόρισμα 2.3.15. Έστω H πεπερασμένη υποομάδα μίας ομάδας G και k μεταθετικός δακτύλιος πεπερασμένης *weak global dimension*. Τότε $Gcd_k(W) \leq Gcd_k G$, όπου με W συμβολίζουμε την ομάδα πηλίκου $N_G(G)/H$.

Απόδειξη. Από τη Πρόταση 2.3.7 έχουμε ότι $Gcd_k N_G(H) \leq Gcd_k G$ ενώ από τη προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι $Gcd_k W \leq Gcd_k N_G(H)$. Συνδυάζοντας τις παραπάνω δύο ανισότητες έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 2.3.16. [11, 2.6] Έστω ομάδα G , H υποομάδα της G και M ένα H -πρότυπο.

1. Αν το M είναι Gorenstein προβολικό, τότε και το επαγόμενο G -πρότυπο $ind_H^G M$ είναι Gorenstein προβολικό.
2. $Gpd_{kG}(ind_H^G M) \leq Gpd_{kH} M$.

Απόδειξη. 1. Έστω P_* ένα ακυκλικό σύμπλεγμα kH -προτύπων το οποίο έχει ως συζυγία το M και παραμένει ακυκλικό υπό τη δράση του συναρτητή $Hom_{kH}(\cdot, Q)$ για κάθε kH -προβολικό πρότυπο Q . Τότε το επαγόμενο σύμπλεγμα $ind_H^G P_*$ είναι ακυκλικό, αποτελείται από προβολικά πρότυπα και έχει το $ind_H^G M$ ως συζυγία. Επιπλέον, επειδή κάθε kG -προβολικό πρότυπο είναι προβολικό και ως kH -πρότυπο (με τη περιορισμένη δράση), έχουμε ότι το σύμπλεγμα $Hom_k G(ind_H^G P_*, T) \cong Hom_{kH}(P_*, T)$ είναι ακυκλικό για κάθε προβολικό kG -πρότυπο T . Επομένως, το $ind_H^G M$ είναι Gorenstein προβολικό kG -πρότυπο.

2. Αφού η ανισότητα προς απόδειξη είναι προφανής για $Gpd_{kH} M = \infty$, αρκεί να θεωρήσουμε ότι $Gpd_{kH} M = n < \infty$. Τότε, υπάρχει μία kH -Gorenstein προβολική επίλυση του M της παρακάτω μορφής:

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

Από το 1. έχουμε ότι τα πρότυπα $ind_H^G P_i$ είναι Gorenstein προβολικά για κάθε $i = 0, \dots, n$. Επομένως η ακριβής ακολουθία

$$0 \rightarrow ind_H^G P_n \rightarrow \cdots \rightarrow ind_H^G P_0 \rightarrow ind_H^G M \rightarrow 0$$

μας πληροφορεί ότι $Gpd_{kG}(ind_H^G M) \leq Gpd_{kH} M$. $\square$

Πόρισμα 2.3.17. [11, 2.7] Έστω H κανονική υποομάδα μίας ομάδας G και k μεταθετικός δακτύλιος. Τότε, για κάθε προβολικό $k(G/H)$ -πρότυπο P έχουμε ότι $Gpd_{kG}P \leq Gcd_kH$, όπου το P γίνεται kG -πρότυπο μέσω του ομομορφισμού πηλίκου $G \rightarrow G/H$.

Απόδειξη. Αφού η Gorenstein προβολική διάσταση του τετριμμένου kH -προτύπου k είναι ίση με Gcd_kH , από το προηγούμενο Λήμμα έπεται ότι η Gorenstein προβολική διάσταση του επαγόμενου kG -προτύπου $ind_H^G k = k(G/H)$ είναι φραγμένη από τη Gcd_kH . Χρησιμοποιώντας, τώρα, το Λήμμα 2.2.22 συμπεραίνουμε ότι $Gcd_{kG}F \leq Gcd_kH$, για κάθε $k(G/H)$ -ελεύθερο πρότυπο F . Τέλος, ξανά από το Λήμμα 2.2.22 είναι άμεσο ότι $Gpd_{kG}P \leq Gcd_kH$ για κάθε $k(G/H)$ -προβολικό πρότυπο P . □

Πρόταση 2.3.18. [11, 2.9] Έστω H κανονική υποομάδα της ομάδας G και k μεταθετικός δακτύλιος πεπερασμένης *weak global dimension*. Τότε $Gcd_kG \leq Gcd_kH + Gcd_k\bar{G}$. Όπου με $\bar{G}$ συμβολίζουμε το πηλίκο G/H .

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι ο ομομορφισμός πηλίκου $G \rightarrow \bar{G}$ μας επιτρέπει να δούμε κάθε $k\bar{G}$ -πρότυπο ως kG -πρότυπο και κάθε $k\bar{G}$ -ομομορφισμό ως kG -ομομορφισμό. Επιπλέον, υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η ποσότητες $Gcd_kH = n$ και $Gcd_k\bar{G} = m$ είναι πεπερασμένες. Τότε από Πόρισμα 2.3.6 έπεται η ύπαρξη ενός k -διασπώμενου μονομορφισμού kG -προτύπων $\iota : k \rightarrow A$, όπου το A είναι k -προβολικό και $pd_{k\bar{G}}A = m$ έχουμε λοιπόν την ύπαρξη μίας ακριβής ακολουθίας:

$$0 \rightarrow P_m \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0,$$

όπου τα P_i είναι $k\bar{G}$ -προβολικά για όλα τα $i = 1, \dots, m$. Αφού λοιπόν $Gpd_{kG}P \leq Gcd_kH = n$ για κάθε i (Πόρισμα 2.3.17), από το Λήμμα 2.2.24 έχουμε ότι $Gpd_{kG}A \leq n + m$. Εφαρμόζοντας τώρα το Πόρισμα 2.3.5, έχουμε ακόμα έναν k -διασπώμενο μονομορφισμό kG -προτύπων $j : A \rightarrow N$, όπου το N είναι k -προβολικό και $pd_{kG}N = Gpd_{kG}A \leq n + m$. Η σύνθεση $k \rightarrow A \rightarrow N$ είναι επίσης k -διασπώμενος μονομορφισμός kG -προτύπων, οπότε από τη Πρόταση 2.3.7 έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι $Gcd_kG = Gpd_{kG}k \leq pd_{kG}N \leq n + m$. □

Πόρισμα 2.3.19. [11, 2.10] Έστω H κανονική υποομάδα μίας ομάδας G και k μεταθετικός δακτύλιος πεπερασμένης *weak global dimension*. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν η H είναι πεπερασμένη, τότε $Gcd_kG = Gcd_k(G/H)$

2. Αν η G/H είναι πεπερασμένη τότε $Gcd_k G = Gcd_k H$

Απόδειξη. Το 1. είναι άμεσο από το Πόρισμα 2.3.11 και τις Προτάσεις 2.3.18, 2.3.15. Ένω για το 2. αρχούν οι Προτάσεις 2.3.18 και 2.3.12

□

2.4 Η Gorenstein συνομολογική διάσταση μία αυξουσας ένωσης ομάδων

Έστω ομάδα G τέτοια ώστε να υπάρχει οριακός διατακτικός αριθμός μ και μία οικογένεια υποομάδων της $\{G_\kappa\}_{\kappa \in \mu+1}$ ώστε $G_\mu = G$ και $G_\lambda = \bigcup_{\kappa < \lambda} G_\kappa$ για λ οριακό διατακτικό, μία τέτοια οικογένεια θα τη καλούμε συνεχές φίλτρο της G . Πριν αποδείξουμε τη βασική Πρόταση αυτής της παραγράφου (Πρόταση 2.4.4) υπενθυμίζουμε την έννοια του διατακτικού αριθμού:

Ορισμός 2.4.1. Ένα σύνολο T καλείται μεταβατικό εάν $\forall x(x \in T \Rightarrow x \subset T)$, δηλαδή $\bigcup T \subset T$ ή αλλιώς $T \subset P(T)$. Ένα σύνολο καλείται διατακτικός αριθμός εάν είναι μεταβατικό και καλά διατεταγμένο από τη σχέση του «ανήκει». Τη κλάση των διατακτικών αριθμών θα τη συμβολίζουμε με ord

Σχόλιο 2.4.2. [13] Ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\omega \cap ord = \omega$ όπου με ω συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών.
- Αν το κ είναι διατακτικός αριθμός τότε και το $\kappa \cup \{\kappa\}$ είναι επίσης διατακτικός αριθμός, καλείται επόμενος του κ και συμβολίζεται με $\kappa + 1$.
- Η κλάση ord είναι καλά διατεταγμένη και το 0 είναι το ελάχιστο στοιχείο της.
- Υπάρχουν διατακτικοί αριθμοί οι οποίοι δεν έχουν κανέναν διατακτικό αριθμό ως προηγούμενο. Τέτοιοι αριθμοί καλούνται οριακοί διατακτικοί.
- Ο πρώτος οριακός διατακτικός είναι το σύνολο ω .
- (Υπερπερασμένη Επαγωγή) Έστω κλάση C διατακτικών αριθμών τέτοια ώστε:

1. $0 \in C$,
2. αν $\alpha \in C$ τότε $\alpha + 1 \in C$,
3. αν $\alpha \neq 0$ οριακός διατακτικός και $\beta \in C$ για κάθε $\beta < \alpha$ τότε $\alpha \in C$.

Τότε έχουμε την ισότητα κλάσεων $C = ord$.

Λήμμα 2.4.3. Έστω αύξουσα ακολουθία R -προτύπων $(N_\lambda)_{\lambda \leq \mu}$, όπου το μ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, με τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. $N_0 = 0$,

2. $N_\lambda = \bigcup_{\kappa < \lambda} N_\kappa$ για κάθε οριακό διατακτικό $\lambda < \mu$ και
3. το $N_{\lambda+1}/N_\lambda$ είναι Gorenstein προβολικό για κάθε $\lambda < \mu$.

Τότε το N_μ είναι επίσης Gorenstein προβολικό.

Απόδειξη. Παρακαλώ δείτε τη απόδειξη στο [21, 2.5]

□

Πρόταση 2.4.4. [11, 3.1] Έστω k μεταθετικός δακτύλιος, ομάδα G , μ οριακός διατακτικός και ένα συνεχές φίλτρο της G το $(G_\lambda)_{\lambda \leq \mu}$. Αν το M είναι ένα kG -πρότυπο το οποίο είναι Gorenstein προβολικό ως kG_λ για κάθε $\lambda < \mu$, τότε $\text{Gpd}_{kG} M \leq 1$.

Απόδειξη. Για κάθε διατακτικό $\lambda \leq \mu$ μπορούμε να θεωρούμε το M και ως kG_λ -πρότυπο και έτσι έχουμε το δικαίωμα να θεωρήσουμε τα επαγόμενα πρότυπα $M_\lambda = \text{ind}_{G_\lambda}^G M = kG \otimes_{kG_\lambda} M$. Αφού $G_\mu = G$ είναι προφανές ότι $M_\mu = M$. Επιπλέον, από το Λήμμα 2.3.16 και την υπόθεση ότι το M είναι kG_λ -Gorenstein προβολικό για κάθε $\lambda < \mu$ συμπεραίνουμε ότι και τα πρότυπα M_λ είναι kG_λ -Gorenstein προβολικά για κάθε $\lambda < \mu$. Σημειώνουμε επίσης ότι για όλους τους διατακτικούς $\kappa \leq \lambda \leq \mu$ υπάρχει kG -επιμορφισμός $f_{\kappa, \lambda} : M_\kappa \rightarrow M_\lambda$, ο οποίος δίνεται από το τύπο $f_\kappa(a \otimes m) = a \otimes m$, όπου $a \in kG$, $m \in M$. Έτσι η οικογένεια $(M_\lambda)_{\lambda \leq \mu}$ μαζί με τις απεικονίσεις $f_{\kappa, \lambda}$ έχει δομή επαγωγικού συστήματος (direct system). Ονομάζουμε τώρα ως N_λ το πυρήνα του επιμορφισμού $f_{0, \lambda} : M_0 \rightarrow M_\lambda$, και παρατηρούμε ότι $N_\kappa \subset N_\lambda$ για κάθε $\kappa \leq \lambda \leq \mu$ καθώς και ότι $N_0 = 0$. Επιπλέον, εφαρμόζοντας το snake lemma (Λήμμα 1.1.6) στο παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_\kappa & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M_\kappa \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \text{id} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N_\lambda & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M_\lambda \longrightarrow 0 \end{array}$$

συμπεραίνουμε ότι $N_\lambda/N_\kappa \cong \ker(M_\kappa \rightarrow M_\lambda)$ για κάθε $\kappa \leq \lambda \leq \mu$. Από το Θεώρημα 1.2.9 έχουμε ότι κλάση τω Gorenstein προβολικών προτύπων είναι προβολικά επιλύσιμη, ιδιαιτέρως είναι κλειστή ως προς πυρήνες επιμορφιών και άρα από τα παραπάνω έχουμε ότι το kG -πρότυπο N_λ/N_κ είναι Gorenstein προβολικό για όλους τους διατακτικούς $\kappa \leq \lambda < \mu$. Εχμεταλλευόμενοι τώρα ότι για κάθε οριακό $\lambda \leq \mu$ έχουμε ότι $G_\lambda = \bigcup_{\kappa < \lambda} G_\kappa$ καθώς και τη καθολική ιδιότητα του συνόριου μπορούμε να δείξουμε ότι $M_\lambda = \lim_{\rightarrow \kappa < \lambda} M_\kappa$. Εφαρμόζοντας τώρα το συναρτητή του συνόριου στη πρώτη σειρά του παραπάνω διαγράμματος, παίρνουμε :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \lim_{\rightarrow \kappa < \lambda} N_\kappa & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & \lim_{\rightarrow \kappa < \lambda} M_\kappa \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N_\lambda & \longrightarrow & M_0 & \longrightarrow & M_\lambda \longrightarrow 0
\end{array}$$

Από το 5-Λήμμα συμπεραίνουμε ότι $N_\lambda = \lim_{\rightarrow \kappa < \lambda} N_\kappa = \bigcup_{\kappa < \lambda} N_\kappa$. Έχουμε λοιπόν αποδείξει ότι η οικογένεια $(N_\lambda)_{\lambda \leq \mu}$ πληροί τις προϋποθέσεις του Λήμματος 2.4.3, επομένως το N_μ είναι Gorenstein προβολικό, τέλος από τη παρακάτω βραχεία ακριβή ακολουθία:

$$0 \rightarrow N_\mu \rightarrow M_0 \rightarrow M_\mu \rightarrow 0,$$

εξ ορισμού παίρνουμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι το kG -πρότυπο $M_\mu = M$ έχει Gorenstein προβολική διάσταση ≤ 1 . $\square$

Πόρισμα 2.4.5. Έστω k μεταθετικός δακτύλιος και ομάδα G , ώστε να υπάρχει συνεχές φίλτρο, $(G_\lambda)_{\lambda \leq \mu}$, της G με μ να είναι οριακός διατακτικός. Για οποιοδήποτε kG -πρότυπο M ισχύει η ανισότητα $Gpd_{kG} M \leq 1 + \sup_{\lambda < \mu} Gpd_{kG_\lambda} M$.

Απόδειξη. Μπορούμε, χωρίς να χάσουμε τη γενικότητα, να υποθέσουμε ότι $\sup_{\lambda < \mu} Gpd_{kG_\lambda} M = n < \infty$. Έστω λοιπόν:

$$\cdots \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

μία kG -προβολική επίλυση του M , ονομάζουμε N τη συζυγία $im(P_n \rightarrow P_{n-1})$. Αφού η παραπάνω επίλυση μπορεί να θεωρηθεί και ως G_λ -προβολική επίλυση για κάθε του M , μέσω της υπόθεσης, $\sup_{\lambda < \mu} Gpd_{kG_\lambda} M = n < \infty$, συμπεραίνουμε ότι το N είναι G_λ -Gorenstein προβολικό πρότυπο για κάθε $\lambda < \mu$. Επομένως, από τη προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι $Gpd_{kG} N \leq 1$. Τέλος, η ακριβής ακολουθία :

$$0 \rightarrow N \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

δείχνει ότι $Gpd_{kG} M \leq Gpd_{kG} N + n \leq 1 + n$, το οποίο ήταν το ζητούμενο. $\square$

Πόρισμα 2.4.6. Έστω k μεταθετικός δακτύλιος και ομάδα G , ώστε να υπάρχει συνεχές φίλτρο, $(G_\lambda)_{\lambda \leq \mu}$, της G για κάποιο οριακό διατακτικό αριθμό μ . Τότε ισχύει η ανισότητα $Gcd_k G \leq 1 + \sup_{\lambda < \mu} Gcd_k G_\lambda$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο αποτελεί ειδική περίπτωση του Πορίσματος 2.4.5, θέτοντάς $M = k$.

□

Πόρισμα 2.4.7. Έστω k μεταθετικός δακτύλιος και ομάδα G η οποία μπορεί να εκφραστεί ως ένωση μίας αύξουσας ακολουθίας υποομάδων της, $(G_n)_n$. Τότε ισχύει η ανισότητα $\text{Gcd}_k G \leq 1 + \sup_n \text{Gcd}_k G_n$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο αποτελεί ειδική περίπτωση του Πορίσματος 2.4.6. Πράγματι, θέτοντάς $G_\omega = G$, η οικογένεια $(G_\lambda)_{\lambda < \omega}$ αποτελεί ένα συνεχές φίλτρο της G .

□

Παρατήρηση 2.4.8. Κάθε αριθμήσιμα άπειρη τοπικά πεπερασμένη (*locally finite*) ομάδα έχει Gorenstein συνομολογική διάσταση 1. Πράγματι, η συνθήκη ότι η G είναι τοπικά πεπερασμένη σημαίνει ακριβώς ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της G είναι πεπερασμένη. Θεωρούμε το υποκείμενο σύνολο της ομάδας G ως σύνολο γεννητόρων της, και διαλέγουμε μία οποιαδήποτε αριθμηση αυτού $G = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε η ακολουθία $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ αποτελεί συνεχές φίλτρο της G , όπου με G_n συμβολίζουμε την ομάδα η οποία παράγεται από τα πρώτα n στοιχεία της παραπάνω αριθμησης. Συμφωνά λοιπόν με το Πόρισμα 2.4.7 έχουμε ότι $\text{Gcd}_{\mathbb{Z}} G \leq 1 + \sup_n \text{Gcd}_{\mathbb{Z}} G_n$ όμως επειδή οι ομάδες G_n είναι πεπερασμένες η προηγούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή $\text{Gcd}_{\mathbb{Z}} G \leq 1$. Τέλος, επειδή η G είναι άπειρη ομάδα έχουμε ότι η Gorenstein συνομολογική της διάσταση δεν μπορεί να είναι 0. Επομένως $\text{Gcd}_{\mathbb{Z}} G = 1$.

Παράδειγμα 2.4.9. (Τοπικά πεπερασμένες ομάδες)

1. Κάθε υποομάδα τοπικά πεπερασμένης ομάδας είναι τοπικά πεπερασμένη.
2. Κάθε πηλίκο τοπικά πεπερασμένης ομάδας είναι τοπικά πεπερασμένη ομάδα.
3. Κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι τοπικά πεπερασμένη.
4. Κάθε αβελιανή ομάδα A της οποίας τα στοιχεία έχουν πεπερασμένη τάξη είναι τοπικά πεπερασμένη. Πράγματι, αν H είναι μία πεπερασμένα παραγόμενη υποομάδα της A τότε από το θεμελιώδες θεώρημα των πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων έχουμε ότι η H είναι πεπερασμένη.
5. Η ομάδα $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι μία αριθμήσιμη τοπικά πεπερασμένη ομάδα.

2.5 Αριθμησιμότητα και Gorenstein προβολική διάσταση

Λήμμα 2.5.1. [11, 5.1] Έστω δύο R -πρότυπα M, N και ένα σύνολο Λ . Τότε η φυσική απεικόνιση $f_\Lambda : \text{Ext}_R^n(M, N)^{(\Lambda)} \rightarrow \text{Ext}_R^n(M, N^{(\Lambda)})$ είναι μονομορφισμός για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Είναι γνωστό ότι η f_Λ είναι ισομορφισμός αν το Λ είναι πεπερασμένο σύνολο. Έστω λοιπόν δύο στοιχεία του a, b του $\text{Ext}_R^N(M, N)^{(\Lambda)}$, με $f_\Lambda(a) = f_\Lambda(b)$ τότε υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο Λ' του Λ ώστε $a, b \in \text{Ext}_R^N(M, N)^{(\Lambda')}$. Επομένως από το γεγονός ότι η $f_{\Lambda'}$, για κάθε $\Lambda' \subset \Lambda$ γράφεται σαν ευθύ άθροισμα των $f_{\Lambda'}$ και $f_{\Lambda''}$, όπου $\Lambda'' = \Lambda \setminus \Lambda'$, έχουμε ότι $f_\Lambda(a) = f_{\Lambda'}(a) = f_{\Lambda'}(b) = f_\Lambda(b)$. Τέλος, αφού η $f_{\Lambda'}$ είναι ισομορφισμός συμπεραίνουμε ότι $a = b$, το οποίο ήταν το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 2.5.2. Έστω R δακτύλιος και K ένα πεπερασμένα παριστώμενο (φινιτελψ πρεσεντεδ) R -πρότυπο. Έστω επίσης ένα επαγωγικό σύστημα (direct system) προτύπων, $(N_i, a_{ij} : N_i \rightarrow N_j)$. Αν N είναι το συνόριο του συστήματος $(N_i)_i$ τότε η φυσική απεικόνιση $c_K : \lim_{\rightarrow i} \text{Hom}_R(K, N_i) \rightarrow \text{Hom}_R(K, N)$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $K \cong R$, αφού τότε έχουμε τους ισομορφισμούς $\lim_{\rightarrow i} \text{Hom}_R(R, N_i) \cong \lim_{\rightarrow i} N_i$ και $\text{Hom}_R(R, N) \cong N$. Λόγω της παραπάνω παρατήρησης και του γεγονότος ότι οι συναρτητές $\lim_{\rightarrow i} \text{Hom}_R(\cdot, N_i)$, $\text{Hom}_R(\cdot, N)$ διατηρούν τα πεπερασμένα ευθέα αθροίσματα συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο ισχύει επίσης για $K \cong R^n$.

Έστω λοιπόν μία παράσταση $R^m \rightarrow R^n \rightarrow K \rightarrow 0$ του προτύπου M και το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \lim_{\rightarrow i} \text{Hom}_R(K, N_i) & \longrightarrow & \lim_{\rightarrow i} \text{Hom}_R(R^n, N_i) & \longrightarrow & \lim_{\rightarrow i} \text{Hom}_R(R^m, N_i) \\ & & \downarrow c_K & & \downarrow c_{R^n} & & \downarrow c_{R^m} \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_R(K, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R^n, N) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(R^m, N) \end{array}$$

Επειδή οι απεικονίσεις c_{R^n} και c_{R^m} είναι ισομορφισμοί έπεται ότι και η c_K είναι ισομορφισμός, δηλαδή το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 2.5.3. [11, 5.2] Έστω R δακτύλιος και ένα πεπερασμένα σχετιζόμενο (finitely related) R -πρότυπο M . Θεωρούμε επίσης ένα επαγωγικό σύστημα προτύπων, $(N_i, a_{ij} : N_i \rightarrow N_j)$ όπου οι απεικονίσεις a_{ij} είναι μονομορφισμοί. Αν N είναι το συνόριο του συστήματος $(N_i)_i$ τότε η φυσική απεικόνιση $\lim_{\rightarrow i} Ext_R^1(M, N_i) \rightarrow Ext_R^1(M, N)$ είναι επί.

Απόδειξη. Έστω P_* μία προβολική επίλυση του M , επειδή το M είναι πεπερασμένα σχετιζόμενο το P_1 μπορεί να υποτεθεί ότι είναι πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο. Θεωρούμε λοιπόν το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccc} \lim_{\rightarrow i} Hom_R(P_0, N_i) & \xrightarrow{d_1} & \lim_{\rightarrow i} Hom_R(P_1, N_i) & \xrightarrow{d_2} & \lim_{\rightarrow i} Hom_R(P_2, N_i) \\ \downarrow c_{P_0} & & \downarrow c_{P_1} & & \downarrow c_{P_2} \\ Hom_R(P_0, N) & \xrightarrow{d'_1} & Hom_R(P_1, N) & \xrightarrow{d'_2} & Hom_R(P_2, N) \end{array}$$

Στο παραπάνω διάγραμμα η απεικόνιση c_{P_1} είναι ισομορφισμός αφού κάθε πεπερασμένα παραγόμενο προβολικό πρότυπο είναι πεπερασμένα παριστώμενο (Λήμμα 2.5.2). Επιπλέον, επειδή οι απεικονίσεις a_{ij} είναι μονομορφισμοί, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι και οι απεικονίσεις c_{P_0}, c_{P_2} είναι επίσης μονομορφισμοί. Έστω λοιπόν $0 \neq [x] \in Ext_R^1(M, N) \cong kerd'_2/Imd'_1$, τότε $d'_2(x) = 0$ και $x \notin Imd'_1$. Επειδή η c_{P_2} είναι μονομορφισμός και η c_{P_1} είναι ισομορφισμός έχουμε ότι υπάρχει $y \in \lim_{\rightarrow i} Hom_R(P_1, N_i)$ με $c_{P_1}(y) = x$, $y \notin Imd_1$ και $y \in kerd_2$, το οποίο ήταν το ζητούμενο. □

Πόρισμα 2.5.4. [11, 5.3] Έστω δύο R -πρότυπα M, N και Λ σύνολο. Αν το M είναι πεπερασμένα σχετιζόμενο, τότε η φυσική απεικόνιση $Ext_R^1(M, N)^{(\Lambda)} \rightarrow Ext_R^1(M, N^{(\Lambda)})$ είναι ισομορφισμός.

Απόδειξη. Το ότι η φυσική απεικόνιση είναι μονομορφισμός είναι άμεσο από το Λήμμα 2.5.1. Για να αποδείξουμε το επί αρκεί να θεωρήσουμε το επαγωγικό σύστημα προτύπων $(N^{\Lambda'})_{\Lambda'}$ όπου το Λ' παίρνει τιμές μέσα στο σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του Λ . Πλέον το αποτέλεσμα έπεται εύκολα αφού από τη Πρόταση 2.5.3 έχουμε ότι η απεικόνιση $\lim_{\rightarrow \Lambda'} Ext_R^1(M, N^{(\Lambda')}) \rightarrow Ext_R^1(M, \lim_{\rightarrow \Lambda'} N^{(\Lambda')})$ είναι επί. □

Ορισμός 2.5.5 (Η συνθήκη Mittag-Leffler). Έστω ένα αριθμήσιμο προβολικό σύστημα ομάδων (inverse system), δηλαδή μία ακολουθία ομάδων G_n και

μορφισμοί $p_n^m : G_m \rightarrow G_n$ μεταξύ αυτών για $m > n$, έτσι ώστε αν $l > m > n$ τα τρήγωνα :

$$\begin{array}{ccc} G_l & \xrightarrow{p_m^l} & G_m \\ \downarrow p_n^l & \swarrow p_n^m & \\ G_n & & \end{array}$$

είναι πάντα μεταθετικά. Λέμε ότι το σύστημα $\{G_n, p_n^m\}$ πληροί τη συνθήκη Mittag-Leffler εαν για κάθε n υπάρχει $m > n$ ώστε για κάθε $l > m$, να ισχύει ότι

$$p_n^l(G_l) = p_n^m(G_m).$$

Επιπλέον λέμε ότι το σύστημα G_n πληροί τη τετριμμένη συνθήκη Mittag-Leffler αν για κάθε k υπάρχει $j > k$ ώστε η απεικόνιση p_k^j να είναι μηδέν.

Ορισμός 2.5.6. $(\lim^1)$ Έστω $\{G_i\} : \cdots \xrightarrow{p_3} G_2 \xrightarrow{p_2} G_1 \xrightarrow{p_1} G_0$ ένα προβολικό σύστημα αβελιανών ομάδων. Ορίζουμε το $\lim_{\leftarrow}^1 G_i$ (προσωρινά μόνο ως σύμβολο) ως το συμπυρήνα της απεικόνισης :

$$\Delta : \prod_{i=0}^{\infty} G_i \rightarrow \prod_{i=0}^{\infty} G_i$$

η οποία δίνεται από τύπο:

$$\Delta(g_0, \dots, g_i, \dots) = (g_0 - p_1(g_1), \dots, g_i - p_{i+1}(g_{i+1}), \dots).$$

Σχόλιο 2.5.7. [18, ch. 3, par. 5]

1. Αν στο προβολικό σύστημα του ορισμού 2.5.6 υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις p_n είναι όλες επί τότε και η απεικόνιση Δ θα είναι επί και άρα $\lim_{\leftarrow}^1 G_i = 0$. Πράγματι, αν το $(g_i) = (g_0, \dots, g_i, \dots) \in \prod_{i=0}^{\infty} G_i$ μπορούμε να φτιάξουμε αναδρομικά μία ακολουθία $(a_0, \dots, a_i, \dots)$ του $\prod_{i=0}^{\infty} G_i$ η οποία αποτελεί προεικόνα της (g_i) . Διαλέγουμε ως a_0 ένα οποιαδήποτε στοιχείο της G_0 και επιλέγουμε το στοιχείο a_1 να είναι ένα οποιαδήποτε στοιχείο της αντίστροφης εικόνας $p_1^{-1}(\{a_0 - g_0\})$. Αντίστοιχα επιλέγουμε το a_2 να είναι ένα οποιαδήποτε στοιχείο της αντίστροφης εικόνας $p_2^{-1}(\{a_1 - g_1\})$ κ.ο.κ.
2. Έστω $\mathbf{Z}$ η κατηγορία των μη αρνητικών ακεραίων με αντίθετη διάταξη από τη συνηθισμένη (poset category) και $\mathbf{Ab}'$ η κατηγορία των συναλλοιώτων συναρτητών από τη $\mathbf{Z}$ στη κατηγορία $\mathbf{Ab}$ των αβελιανών

ομάδων. Στο συγκεκριμένο πλαίσιο μπορούμε πλέον να θεωρούμε ότι ένα προβολικό σύστημα αβελιανών $\{G_i\} : \cdots \xrightarrow{p_3} G_2 \xrightarrow{p_2} G_1 \xrightarrow{p_1} G_0$ είναι απλά ένα αντικείμενο της κατηγορίας $\mathbf{Ab}'$. Επιπλέον, κάθε αντικείμενο της $\mathbf{Ab}'$ είναι ένα προβολικό σύστημα της παραπάνω μορφής.

Ονομασία: Τέτοια προβολικά συστήματα αβελιανών ομάδων καλούνται πύργοι.

3. Τέλος, για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τους συναρτητές $\lim_{\leftarrow}^n : \mathbf{Ab}' \rightarrow \mathbf{Ab}$ όπου:

$$\text{για } n = 0: \lim_{\leftarrow}^0 = \lim_{\leftarrow}$$

$$\text{για } n = 1: \lim_{\leftarrow}^1 = \text{coker } \Delta$$

$$\text{για } n > 1: \lim_{\leftarrow}^n = 0$$

4. Αποδεικνύετε [18, 3.5.2] ότι οι συναρτητές $\lim_{\leftarrow}^n$ αποτελούν θ -συνομολογικό συναρτητή και ότι επιπλέον αποτελούν τους δεξιά προερχόμενους (Right derived) συναρτητές του $\lim_{\leftarrow}$.

Λήμμα 2.5.8. [18, 3.5.7] Αν ένας πύργος αβελιανών ομάδων $\{G_i\}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler τότε $\lim_{\leftarrow}^1 G_i = 0$

Απόδειξη. Αρχικά υποθέτουμε ο πύργος $\{G_i\}$ ικανοποιεί τη τετριμμένη συνθήκη Mittag-Leffler και θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχείο $(g_0, g_1, \dots)$ του γινομένου $\prod_{i=0}^{\infty} G_i$. Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να βρούμε ένα στοιχείο $(a_0, a_1, \dots) \in \prod_{i=0}^{\infty} G_i$ ώστε $\Delta(a_0, a_1, \dots) = (g_0, g_1, \dots)$. Έστω λοιπόν $G_k \in \{G_i\}$ τότε επειδή η $\{G_i\}$ ικανοποιεί τη τετριμμένη συνθήκη Mittag-Leffler γνωρίζουμε ότι υπάρχει $j > k$ ώστε $p_k^j = 0$. Θεωρούμε λοιπόν το στοιχείο $a_k = g_k + \overline{g_{k+1}} + \cdots + \overline{g_{j-1}}$ του G_k , όπου με $\overline{g_i}$ συμβολίζουμε το στοιχείο $p_k^i(g_i)$. Είναι πλέον εύκολο να δούμε ότι το στοιχείο $(\dots, a_1, a_0)$ αποτελεί προεικόνα του στοιχείου $(\dots, g_1, g_0)$ μέσω της Δ .

Έστω τώρα ότι ο $\{G_i\}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler και μία ομάδα $G_k \in \{G_i\}$. Για την ομάδα G_k μπορούμε να σχηματίσουμε την ακολουθία $B_i^k = \text{Imp}_k^i(G_i) \subset G_k$ η οποία είναι τελικώς σταθερή, δηλαδή υπάρχει j ώστε $B_j^k = B_l^k$ για κάθε $l > j$. Θέτουμε λοιπόν $B_k = B_j^k$. Καταφέραμε λοιπόν να κατασκευάσουμε μία ακολουθία $B_k \subset G_k$ ώστε οι απεικονίσεις $B_{k+1} \rightarrow B_k$ να είναι όλες επί, δηλαδή $\lim_{\leftarrow}^1 B_i = 0$. Τέλος, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο πύργος $\{G_i/B_i\}$ πληροί τη τετριμμένη συνθήκη Mittag-Leffler αφού τότε με τη βοήθεια της βραχείας ακριβής ακολουθίας

$$0 \rightarrow \{B_i\} \rightarrow \{G_i\} \rightarrow \{G_i/B_i\} \rightarrow 0$$

μπορούμε να συμπεράνουμε το ζητούμενο εύκολα.

□

Λήμμα 2.5.9. [16][22, Appendix] Έστω αριθμήσιμη αβελιανή ομάδα A και υπομάδες της $A_n \subset A$ ώστε $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ $\mu \in A_n \subsetneq A_{n+1}$, για κάθε $n > 1$. Τότε $\varprojlim A_n \neq 0$

Απόδειξη. Έστω, για άτοπο, ότι $\varprojlim A_n = 0$. Από τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow (A_n) \rightarrow (A)_n \rightarrow (A/A_n)_n \rightarrow 0$$

επάγεται η ακριβής ακολουθία

$$0 \rightarrow \varprojlim (A_n) \rightarrow \varprojlim (A)_n \rightarrow \varprojlim (A/A_n)_n \rightarrow \varprojlim^1 (A_n) \rightarrow \dots$$

η οποία, λόγω της υπόθεσης μας, παίρνει τη μορφή

$$0 \rightarrow \varprojlim (A_n) \rightarrow \varprojlim (A)_n \rightarrow \varprojlim (A/A_n)_n \rightarrow 0.$$

Θα δείξουμε όμως ότι αυτό είναι άτοπο δείχνοντας ότι το όριο $\varprojlim (A/A_n)_n$ του συστήματος

$$\dots \rightarrow A/A_n \xrightarrow{\psi_{n-1}} \dots \xrightarrow{\psi_1} A/A_1 \xrightarrow{\psi_0} A/A_0$$

είναι υπεραριθμήσιμο. Πράγματι, έχουμε ότι το $\varprojlim A/A_n$ είναι η υποομάδα L του $\prod_{n=0}^{\infty} A/A_n$ όπου $(a^n + A_n)_n \in L$ αν και μόνο αν $a^n + A_n = \psi_n^j(a^j + A_j)$ για κάθε $n \leq j$, όπου ψ_n^j είναι απεικονίσεις δομής του συστήματος (A/A_n) , δηλαδή $\psi_n^j = \psi_n \circ \psi_{n+1} \circ \dots \circ \psi_j$. Όμως αφού όλες οι απεικονίσεις ψ_n είναι επί αλλά όχι ένα προς ένα μπορούμε να κατασκευάσουμε τις ζητούμενες ακολουθίες ως εξής:

Έστω $0 = a_0 + A_0 \in A/A_0 = 0$ τότε επειδή η A/A_1 δεν είναι τετριμμένη ομάδα έχουμε ότι η αντίστροφη εικόνα της ψ_0 έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Διαλέγουμε ένα από αυτά και το ονομάζουμε $a^1 + A_1$. Επειδή η ψ_1 είναι επί αλλά όχι ένα προς ένα έχουμε ότι η αντίστροφη εικόνα $(\psi_1)^{-1}(a^1 + A_1)$ περιέχει τουλάχιστον δύο στοιχεία (αν $\psi^1(x) = a^1 + A_1 \Rightarrow \psi^1(x+k) = a^1 + A_1$, $\forall k \in \ker \psi^1$), διαλέγουμε ένα από αυτά ως το $a^2 + A_2$. Με το ίδιο τρόπο μπορούν να γίνουν οι επιλογές για τους υπόλοιπους όρους της ακολουθίας. Είναι προφανές ότι οι τρόποι με τους οποίους μπορούν να επιλεγθούν οι παραπάνω ακολουθίες είναι περισσότεροι από το πλήθος των δυαδικών ακολουθιών, δηλαδή το $\varprojlim (A/A_n)_n$ είναι υπεραριθμήσιμο.

□

Η επόμενη πρόταση λέει ότι για έναν πύργο αριθμήσιμων αβελιανών ομάδων $\{A_i, p_i\}$ η απαίτηση να πληρείτε η συνθήκη Mittag-Leffler είναι ισοδύναμη με την απαίτηση να μηδενίζεται το $\lim_{\leftarrow} {}^1A_i$.

Πρόταση 2.5.10 (Κριτήριο Gray). [16] Έστω $\{A_n, f_n\}$ ένα προβολικό σύστημα αριθμήσιμων αβελιανών ομάδων, τέτοιο ώστε $\lim_{\leftarrow i} {}^1A_n = 0$ τότε το σύστημα $\{A_n, f_n\}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler.

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι αν $a_i : \{X_i\} \rightarrow \{Y_i\}$ είναι ένας μορφισμός προβολικών συστημάτων ο οποίος είναι επί τότε ο επαγόμενος μορφισμός $a : \lim_{\leftarrow i} {}^1X_i \rightarrow \lim_{\leftarrow i} {}^1Y_i$ είναι επίσης επί.

Υποθέτουμε για άτοπο ότι το σύστημα $\{A_n, f_n\}$ δεν ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler, δηλαδή ότι υπάρχει m τέτοιο ώστε για άπειρα i να ισχύει ότι $Im(A_{m+i} \rightarrow A_m) \neq Im(A_{m+i+1} \rightarrow A_m)$. Θέτουμε $X_i = A_{m+i}$, $Y_i = Im(A_{m+i} \rightarrow A_m)$. Το ζητούμενο έπεται εφαρμόζοντας στο σύστημα Y_i το προηγούμενο Λήμμα.

□

Σημειώνουμε ότι υπάρχουν και πιο γενικές μορφές του κριτηρίου Gray κάπως και διαφορετικές αποδειξεις αυτού. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί τα [20, 11.3.2], [17, Theorem 2].

Πρόταση 2.5.11. [11, 5.4] Έστω R αριθμήσιμος δακτύλιος και δύο αριθμησίμως παραγόμενα R -πρότυπα M, N . Αν $Ext_R^1(M, N) = 0$, τότε $Ext_R^1(M, N^{(\Lambda)}) = 0$ για κάθε σύνολο Λ .

Απόδειξη. Επειδή το M είναι αριθμήσιμο μπορεί να εκφραστεί ως το συνόριο ενός αριθμήσιμου επαγωγικού συστήματος $(M_i)_i$, όπου τα M_i είναι πεπερασμένα παριστώμενα πρότυπα ([23, Θεώρημα 4.34]). Υπάρχει επομένως ([18, Θεώρημα 3.5.8]) η βραχεία ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow i} {}^1Hom_R(M_i, N) \rightarrow Ext_R^1(M, N) \rightarrow \lim_{\leftarrow i} Ext_R^1(M_i, N) \rightarrow 0$$

και άρα η υπόθεση ότι $Ext_R^1(M, N) = 0$ σημαίνει ότι $\lim_{\leftarrow i} {}^1Hom_R(M_i, N) = \lim_{\leftarrow i} Ext_R^1(M_i, N) = 0$.

Έστω λοιπόν ότι το πρότυπο M_i παράγεται από m_i στοιχεία, τότε η αβελιανή ομάδα $Hom_R(M_i, N)$ εμφυτεύεται στη N^{m_i} , ιδιαιτέρως η $Hom_R(M_i, N)$ είναι αριθμήσιμη. Επομένως από το κριτήριο του Gray και το γεγονός ότι η ομάδα $\lim_{\leftarrow i} {}^1Hom_R(M_i, N)$ ισούται με μηδέν έπεται ότι το προβολικό σύστημα (inverse system) $(Hom_R(M_i, N))_i$ ικανοποιεί τη συνθήκη Mittag-Leffler.

Αφού λοιπόν τα M_i είναι πεπερασμένα παραγόμενα, το προβολικό σύστημα $(Hom_R(M_i, N)^{(\Lambda)})_i$ μπορεί να θεωρηθεί ίδιο με το σύστημα $(Hom_R(M_i, N^{(\Lambda)}))_i$ και επομένως το $(Hom_R(M_i, N^{(\Lambda)}))_i$ πληροί τη συνθήκη Mittag-Leffler. Συνεπώς,

$$\lim_{\leftarrow i} {}^1Hom_R(M_i, N^{(\Lambda)}) = 0.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι λόγω του Πορίσματος 2.5.4 τα προβολικά σύστημα $(Ext_R^1(M_i, N^{(\Lambda)}))_i$ και $(Ext_R^1(M_i, N)^{(\Lambda)})_i$ είναι ισομορφικά. Ιδιαίτέρως έχουμε ότι το $(Ext_R^1(M_i, N^{(\Lambda)}))_i$ εμφυτεύεται στο προβολικό σύστημα $(Ext_R^1(M_i, N)^{\Lambda})_i$, όπου με $Ext_R^1(M_i, N)^{\Lambda}$ συμβολίζουμε το γινόμενο των Λ αντιτύπων του $Ext_R^1(M_i, N)$. Όμως ο συναρτητής του συνόρου αντιμετατίθεται με τα γινόμενα και επομένως από το γεγονός ότι το $\lim_{\leftarrow i} Ext_R^1(M_i, N) = 0$ έχουμε ότι $\lim_{\leftarrow i} Ext_R^1(M_i, N)^{\Lambda} = 0$ το οποίο σημαίνει με τη σειρά του ότι $\lim_{\leftarrow i} Ext_R^1(M_i, N^{(\Lambda)}) = 0$. Τέλος, από την βραχεία ακριβή ακολουθία αβελιανών ομάδων:

$$0 \rightarrow \lim_{\leftarrow i} {}^1Hom_R(M_i, N^{(\Lambda)}) \rightarrow Ext_R^1(M, N^{(\Lambda)}) \rightarrow \lim_{\leftarrow i} Ext_R^1(M_i, N^{(\Lambda)}) \rightarrow 0$$

έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Πόρισμα 2.5.12. [11, 5.5] Έστω R αριθμήσιμος δακτύλιος και δύο αριθμησίμως παραγόμενα R -πρότυπα M, N και ένας φυσικός αριθμός $n > 0$. Αν $Ext_R^n(M, N) = 0$, τότε $Ext_R^n(M, N^{(\Lambda)}) = 0$ για κάθε σύνολο Λ .

Απόδειξη. Το ζητούμενο έπεται διαλέγοντας μία ελεύθερη επίλυση P_* του M η οποία αποτελείται από αριθμησίμως παραγόμενα πρότυπα και εφαρμόζοντας τη Πρόταση 2.5.11 στη συζυγία $M_{n-1} = im(P_{n-1} \rightarrow P_{n-1})$. $\square$

Θεώρημα 2.5.13. [11, 5.6] Έστω R αριθμήσιμος δακτύλιος και δύο αριθμησίμως παραγόμενα R -πρότυπα M, N και ένας φυσικός αριθμός $n > 0$. Αν $Ext_R^n(M, R) = 0$, τότε $Ext_R^n(M, P) = 0$ για κάθε προβολικό πρότυπο P .

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.5.12 βλέπουμε ότι $Ext_R^n(M, F) = 0$ για κάθε ελεύθερο πρότυπο F , και έτσι έχουμε το ζητούμενο αφού κάθε προβολικό πρότυπο είναι ευθύς προσθετός ελεύθερου. $\square$

Πόρισμα 2.5.14. [11, 5.7] Έστω R αριθμήσιμος δακτύλιος και ένα αριθμησίμως παραγόμενο πρότυπο M πεπερασμένης Gorenstein προβολικής διάστασης. Τότε $Gpd_R M = \sup\{n : Ext_R^n(M, R) \neq 0\}$.

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο από τα Θεωρήματα 2.5.13 και 1.3.9

□

Πόρισμα 2.5.15. [11, 5.8] Έστω k αριθμήσιμος δακτύλιος και G μία αριθμήσιμη ομάδα πεπερασμένης Gorenstein συνομολογικής διάστασης πάνω από το k . Τότε, $Gcd_k G = \sup\{n : H^n(G, kG) \neq 0\}$

Απόδειξη. Το ζητούμενο αποτελεί ειδική περίπτωση του Πορίσματος 2.5.14.

□

Βιβλιογραφία

- [1] Joseph J. Rotman, An introduction to Homological Algebra , 2ed ed., Springer, 2008
- [2] Holm, H.: Gorenstein homological dimensions. J.Pure Appl. Algebra **189**,167-193, 2004
- [3] Gerdich, T.V., Gruenberg, K.W.: Complete cohomological functors on groups. Topology Appl. **25**,203-223 (1987)
- [4] E.E. Enochs, O.M.G. Jenda, Relative Homological Algebra, in: de Gruyter Exposition in Mathematics, Vol. 30, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 2000
- [5] E.E. Enochs, O.M.G. Jenda, Gorenstein injective and projective modules, Math. Z 220 (1995) 611-633.
- [6] M. Auslander, M. Bridger, Stable Module Theory, American Mathematical Society, Providence, RI, 1969, Memoirs of the American Society, No. 94
- [7] J. Asadollahi, A.Bahlekeh and Sh. Salarian, On the hierarchy of cohomological dimensions of groups, J.Pure Appl. Algebra 213 (2009) 1795-1803
- [8] Abdolnaser Bahlekeh, Fotini Dembegioti and Olympia Talelli, Gorenstein dimension and proper actions, Bull. London Math. Soc. 41 (2009) 859-871
- [9] O. Talelli, Periodicity in group cohomology and complete resolutions, Bull. London Math. Soc.37 (2005) 547-554
- [10] Brown, K.S.: Cohomology of Groups. Grad Texts Math. **87**, Berlin Heidelberg New work: Spronger 1982

- [11] Ioannis Emmanouil and Olympia Talelli, Gorenstein Dimension and Group cohomology with group ring coefficients (submitted)
- [12] Benson, D.J., Goodearl, K., Periodic flat modules, and flat modules for finite groups. *Pacific J. Math. Soc.* 41, 859-871(2009)
- [13] Thomas Jech, Set Theory. The Third Millennium Edition, revised and expanded, Springer Monographs in Mathematics(2002)
- [14] Eklof, P.C., Trlifaj, J.: How to make Ext vanish. *Bull. London Math. Soc.* 33, 41-51 (2001)
- [15] Christensen, L.W., Franklind, A., Holm, H.: On Gorenstein projective, injective and flat dimensions-a functorial description with applications. *J. Algebra* 302, 231-279(2006)
- [16] Gray, B.: Spaces of the same n -type, for all n . *Topology* 5 241-243 (1966)
- [17] C. A. McGibbon and J. M. Møller : On spaces with the same n -type, for all n . *Topology* vol.31 (1990)
- [18] Charles A. Weibel: An Introduction To Homological Algebra, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS (1994)
- [19] L. W. Christensen, Gorenstein dimensions, *Lecture Notes in Mathematics* 1747 (Springer, Berlin, 2000).
- [20] Ross Geoghegan *Topological Methods in Group Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer(2007)
- [21] Wang, J., Liang, L.: A characterization of Gorenstein projective modules. (preprint)
- [22] Ioannis Emmanouil, The cyclic homology of affine algebras, *Inventiones mathematicae* 121,1-19, Springer-Verlag (1995)
- [23] T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Graduate Texts in Mathematics 189, 199