ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΘΕΟΔΩΡΑ ΤΟΥΛΙΑΤΟΥ

Μεταξύ Θεωρητικής και Πρακτικής Γεωμετρίας:

Μια Νέα Ανάγνωση των *Μετρικών* του Ήρωνα του Αλεξανδρινού

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΑΘΗΝΑ

2017

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Μεταξύ Θεωρητικής και Πρακτικής Γεωμετρίας:

Μια Νέα Ανάγνωση των *Μετρικών* του Ήρωνα του Αλεξανδρινού

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ: ΘΕΟΔΩΡΑ ΤΟΥΛΙΑΤΟΥ Α.Μ. ΔΤ08/20

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΙΩΑΝΝΗΣ ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ

Εἴτε βραδιάζει

εἴτε φέγγει

μένει λευκὸ

τὸ γιασεμί.

Γ.Σ.

Ημ. Κ. Α’, Το γιασεμί

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ viii

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Ιστοριογραφική επισκόπηση 1-23

1.1 Γενική ιστοριογραφική επισκόπηση 1

1.2 Επισκόπηση της ιστοριογραφίας περί τον Ήρωνα 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Βιογραφική και εργογραφική επισκόπηση 24-41

2.1 Βιογραφικά στοιχεία για τον Ήρωνα 24

2.2 Η εργογραφία που αποδίδεται στον Ήρωνα 27

2.3 Η χρονολόγηση του Ήρωνα 32

2.3.1 Επιχειρήματα που προκύπτουν "εκ της σιωπής" (a silentio) 33

2.3.2 Επιχειρήματα που προκύπτουν από τη συσχέτιση του Ήρωνα με γνωστά πρόσωπα 33

2.3.3 Επιχειρήματα που προκύπτουν από τη σύγκριση μεθόδων, μηχανών ή εργαλείων, που περιγράφονται από τον Ήρωνα και από άλλους συγγραφείς με γνωστή χρονολόγηση 35

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Τα *Μετρικά* και η παράδοσή τους 42-76

3.1 Η παράδοση του κειμένου των *Μετρικών* 42

3.1.1 Στοιχεία για την παράδοση του κειμένου των *Μετρικών* 42

3.1.2 Κωδικολογικά στοιχεία 44

3.1.3 Το περιεχόμενο του κώδικα..... 45

3.1.4 Παλαιογραφικά στοιχεία 46

3.1.5 Οι απόγονοι της ηρώνειας παράδοσης 48

3.2 Το κείμενο των *Μετρικών*: Τα Προοίμια 60

3.2.1 Εισαγωγή 60

3.2.2 Το Προοίμιο του πρώτου Βιβλίου: Μέτρηση των επιφανειών 61

3.2.3 Το Προοίμιο του δεύτερου Βιβλίου: Μέτρηση των στερεών 64

3.2.4 Το Προοίμιο του τρίτου Βιβλίου: Διαίρεση επιπέδων και στερεών σωμάτων 66

3.3 Το κείμενο των *Μετρικών*: Προτάσεις/Προβλήματα 68

3.3.1 Βιβλίο I: Μέτρηση επιφανειών 68
3.3.2 Βιβλίο II: Μέτρηση όγκων 71
3.3.3 Βιβλίο III: Διαίρεση των σχημάτων 74

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: Μια νέα ερμηνεία των *Μετρικών* 77-184

4.1 Το εδάφιο 160.16-17 των *Μετρικών* 77
4.2 Επιλύοντας Προβλήματα "ἐπιλογιζόμενοι τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις" 87
4.2.1 Εισαγωγή 87
4.2.2 Παραδείγματα προβλημάτων που επιλύονται με "ἐπιλογισμόν" 88
4.3 Επιλύοντας Προβλήματα "κατά ἀνάλυσιν" 118
4.3.1 Εισαγωγή 118
4.3.2 Ενδείξεις για τη χρήση της γεωμετρικής ανάλυσης στα *Μετρικά* 121
4.3.3 Παραδείγματα προβλημάτων που επιλύονται με ανάλυση: Πρώτη περίπτωση 125
4.3.4 Παραδείγματα προβλημάτων που επιλύονται με ανάλυση: Δεύτερη περίπτωση 140
4.3.5 Παραδείγματα προβλημάτων που επιλύονται με ανάλυση: Τρίτη περίπτωση 146
4.3.6 Παραδείγματα προβλημάτων που επιλύονται με ανάλυση: Τέταρτη περίπτωση 154
4.3.7 Γενικά σχόλια 162
4.4 Ιστορική και φιλοσοφική έρευνα της έννοιας του "ἐπιλογισμοῦ" 165
4.4.1 Εισαγωγή 165
4.4.2 Ο όρος/έννοια του "ἐπιλογισμοῦ" στην επικούρεια παράδοση 167
4.4.3 Η εφαρμογή των όρων ἐπιλογισμός/ἐπιλογίζεσθαι σε άλλες περιοχές εκτός της επικούρειας φιλοσοφίας 182

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: Εντάσσοντας τα *Μετρικά* στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά 186-198

5.1 Αριθμητικοποίηση 185
5.1.2 Αριθμητικοποιημένα Μαθηματικά 187
5.1.3 Η αριθμητικοποίηση στα *Μετρικά* του Ήρωνα 188
5.2 Ερμηνεύοντας το εγχείρημα του Ήρωνα: Εύρεση υπολογιστικών διαδικασιών για τη μέτρηση και τη διαίρεση σχημάτων 190
5.2.1 Εισαγωγή 190
5.2.2 *Μετρικά*: Μεταξύ θεωρίας και πρακτικής 191
5.2.3 Ο ευρετικός χαρακτήρας του γεωμετρικού "λόγου" 194

5.2.4 Τεκμηρίωση της ευρετικής διάστασης του γεωμετρικού "λόγου" στα Προβλήματα των *Μετρικών* 195

5.2.5 Τεκμηρίωση της ευρετικής διάστασης που χαρακτηρίζει τον γεωμετρικό "λόγο" στις δύο προτεινόμενες από τον Ήρωνα μεθόδους επίλυσης: την "*έπιλογιστικήν*" και την "*κατὰ ἀνάλυσιν*" 195

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 199-209

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διατριβή είναι μια ερευνητική εργασία που εκπονείται στα *Μετρικά*, έργο μετρολογικού περιεχομένου, του Ήρωνα του Αλεξανδρινού. Ο Ήρων ήταν ένας πολυγραφότατος μαθηματικός που έζησε, κατά πάσα πιθανότητα, τον 1ο μ.Χ. αιώνα. Στα έργα του περιλαμβάνονται κείμενα θεωρητικών Μαθηματικών, όπως το *Σχόλιο* στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, κείμενα μετρολογικού περιεχομένου, όπως τα *Μετρικά*, καθώς και κείμενα μηχανικού και τεχνολογικού περιεχομένου, όπως τα *Μηχανικά*, το *Περί Διόπτρας* και τα *Πνευματικά*. Η πλούσια και πολυσχιδής εργογραφία του, η οποία περιλαμβάνει τα περισσότερα από τα είδη του μαθηματικού λόγου που παρήχθησαν στην αρχαία Ελλάδα, καθώς και η εποχή που έζησε, μεταίχμιο μεταξύ της ελληνιστικής εποχής και της Ύστερης αρχαιότητας, καθιστούν τον Ήρωνα, δικαιωματικά, μια σημαντική πηγή γνώσης των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών.

Τα *Μετρικά* είναι ένα από τα πιο σημαντικά έργα μετρολογικού περιεχομένου που μας παρέδωσε η αρχαιότητα. Έχουν τη μορφή σειράς προβλημάτων με τις λύσεις τους, οι οποίες δίνονται, κατά κανόνα, με τη μορφή υπολογιστικής διαδικασίας. Το στοιχείο που διαφοροποιεί τα *Μετρικά*, από τα άλλα σωζόμενα έργα μετρολογικού περιεχομένου, είναι η ανάπτυξη μιας αλληλουχίας γεωμετρικών επιχειρημάτων που σχετίζονται με, και προηγούνται της υπολογιστικής διαδικασίας που ολοκληρώνει την αριθμητική επίλυση κάθε προβλήματος. Η συνύπαρξη γεωμετρικών αποδεικτικών στοιχείων και αριθμητικών υπολογισμών οριοθετεί και κατατάσσει τα *Μετρικά* μεταξύ της "θεωρητικής" και "πρακτικής" γεωμετρίας.

Σκοπός της παρούσας διατριβής είναι να διερευνήσει τον ρόλο της γεωμετρικής συνιστώσας που περιέχεται σε κάθε πρόβλημα. Η εκτύλιξη του γεωμετρικού λόγου, υπό τη μορφή παραγωγικού συλλογισμού, προσιδιάζει με τα κλασικά αποδεικτικά κείμενα της αρχαιότητας, με αποτέλεσμα να ερμηνεύεται ως "απόδειξη" των υπολογιστικών διαδικασιών. Πράγματι, οι F. Acerbi και B. Vitrac, σε πρόσφατη μελέτη τους για το έργο των *Μετρικών*, ερμηνεύουν τη γεωμετρική συνιστώσα ως "επικυρωτική απόδειξη" (la preuve validante) [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 373] της υπολογιστικής διαδικασίας που την ακολουθεί· τότε, με άξονα αυτήν την ερμηνευτική άποψη, θα ισχυριστούν ότι βασική επιδίωξη του Ήρωνα, κατά τη συγγραφή των *Μετρικών*, είναι η δημιουργία "αποδεικτικού" εδάφους, κατάλληλου για την αιτιολόγηση των υπολογιστικών διαδικασιών.

Σε αντίθεση με την παραπάνω ερμηνεία, υποστηρίζουμε ότι ο γεωμετρικός "λόγος" (discourse), που περιέχεται σε κάθε πρόβλημα, λειτουργεί ως ευρετικό εργαλείο στην αναζήτηση των διαδικασιών υπολογισμού. Η τεκμηρίωση της

παραπάνω θέσης οδηγεί σε μια νέα ερμηνευτική διάσταση του εγχειρήματος της συγγραφής των *Μετρικών*, αναδεικνύοντας τον στόχο του Ήρωνα να διδάξει στον αναγνώστη *πώς* μπορεί ο ίδιος να βρίσκει κατάλληλες υπολογιστικές διαδικασίες για την επίλυση μετρολογικών προβλημάτων.

Η διατριβή αποτελείται από πέντε κεφάλαια. Αναλυτικότερα:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια σύντομη επισκόπηση της ιστοριογραφίας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, στην οποία διακρίνονται δύο κύριες μεθοδολογικές τάσεις: **α)** η παραδοσιακή ιστοριογραφία των Μαθηματικών και, **β)** η νέα ιστοριογραφία των Μαθηματικών. Η ιστορική αναδρομή των απόψεων για την ιστορία των Μαθηματικών κρίνεται απαραίτητη, ώστε να ακολουθήσει μια σύντομη επισκόπηση των μεθόδων που εφαρμόστηκαν για την προσέγγιση και ερμηνεία των έργων του Ήρωνα και, ειδικότερα, να σκιαγραφηθεί το τοπίο που είχε διαμορφωθεί, μέχρι και πρόσφατα, σαν βάση για την ανάγνωση και ερμηνεία των *Μετρικών.* Για τη μεθοδολογική οριοθέτηση και ερμηνεία της παρούσας διατριβής, λαμβάνονται υπόψη κάποια από τα ιστοριογραφικά εργαλεία με τα οποία διεξάγεται σήμερα η έρευνα για τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά. Στο τέλος του πρώτου κεφαλαίου θέτουμε τα ερωτήματα τα οποία προσπαθούμε να απαντήσουμε και από τα οποία αναδεικνύεται, επίσης, και ο σκοπός αυτής της διατριβής.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, αρχικά, παρουσιάζουμε βιογραφικά στοιχεία για τον Ήρωνα, τα οποία συλλέγονται από μαρτυρίες άλλων συγγραφέων. Ακολουθεί μια εκτενής παρουσίαση των είκοσι έργων τα οποία παραδίδονται υπό το όνομά του. Λόγω του ποικίλου περιεχομένου που τα χαρακτηρίζει, θεωρήσαμε αναγκαίο να ακολουθήσουμε, κατά την παρουσίαση αυτών, εν μέρει, την ταξινόμηση που προτείνεται από τον Γεμίνο και να τα κατατάξουμε σε δύο μεγάλες κατηγορίες: **α)** σε έργα γεωμετρικού και μετρολογικού περιεχομένου, και, **β)** σε έργα που πραγματεύονται θέματα σχετικά με εφαρμογές των Μαθηματικών. Τέλος, παραθέτουμε τις διάφορες εκδοχές που υποστηρίχθηκαν, κατά καιρούς, σχετικά με την εποχή που έζησε ο Ήρων. Ιδιαίτερα, κρίνουμε σημαντική και απαραίτητη την παράθεση της κριτικής, η οποία διατυπώνεται τα τελευταία χρόνια από κάποιους ιστορικούς, σχετικά με την εγκυρότητα των επιχειρημάτων που χρησιμοποιήθηκαν για την τεκμηρίωση της χρονολογικής τοποθέτησης του Ήρωνα, τον 1ο μ.Χ. αιώνα. Η σπουδαιότητα των κριτικών αυτών απόψεων έγκειται στα μεθοδολογικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την υποστήριξή τους: νέα μελέτη και ενδελεχή φιλολογική ερμηνεία του κειμένου, καθώς και ανάλυση αυτού με ακριβή στατιστικά στοιχεία.

Το τρίτο κεφάλαιο αφιερώνεται στο κείμενο των *Μετρικών*, δομικό λίθο της παρούσας διατριβής, και αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιέχει στοιχεία για την παράδοση του κειμένου· στο δεύτερο μέρος παρουσιάζεται το κείμενο, προοίμια και Προβλήματα/Προτάσεις.

Συγκεκριμένα και σχετικά με την παράδοση του κειμένου: **1)** παρουσιάζουμε την ιστορία του κώδικα, ο οποίος μας παραδίδει το μοναδικό χειρόγραφο των *Μετρικών* που διασώζεται, **2)** δίνουμε σύντομα κωδικολογικά στοιχεία, **3)** καταγράφουμε τα περιεχόμενα του κώδικα (σελίδες, τίτλος, σχόλια), **4)** παραθέτουμε παλαιογραφικά στοιχεία (γραφέας, παρουσίαση κειμένου, σχολιαστές). Στη συνέχεια, **5)** ερευνούμε ερωτήσεις που σχετίζονται με: **α)** πιθανές αναφορές των *Μετρικών* σε έργα μεταγενέστερων εποχών, **β)** μεταφράσεις των *Μετρικών* σε γλώσσες του αρχαίου και μεσαιωνικού κόσμου και, **γ)** πιθανές συνδέσεις των *Μετρικών* με τα άλλα έργα του μετρολογικού συντάγματος· συγκεκριμένα, εξετάζουμε: **γ$_1$)** την πιθανότητα προέλευσης των συλλογών του επονομαζόμενου "ψευδό-ηρώνειου" συντάγματος από τα *Μετρικά* και, **γ$_2$)** την πιθανότητα κάποιες συλλογές από το σύνταγμα των Ρωμαίων agrimensores να αποτελούν διασκευή/μετάφραση των *Μετρικών*. Η ιδιαίτερη μνεία στις περιπτώσεις **γ$_1$)** και **γ$_2$)** κρίνεται απαραίτητη, από τη στιγμή που τα ερωτήματα αυτά απασχόλησαν, κατά το παρελθόν, τους ιστορικούς και συνεχίζουν να τίθενται στη σύγχρονη ιστοριογραφία. Το πρώτο μέρος του τρίτου κεφαλαίου ολοκληρώνεται με την καταγραφή μιας μοναδικής μαρτυρίας: πρόκειται για το έργο *Ḥibbūr ha-meshīḥa weha-tishboret* του M. Comtino, στο οποίο, εμφανώς, παρατηρείται ότι αρκετά από τα προβλήματα υπολογισμού και μετρήσεων, τα οποία περιέχει, παρουσιάζουν κειμενική συγγένεια με αντίστοιχα προβλήματα των *Μετρικών*. Αρχικά και εν συντομία, αναφέρουμε κάποια κωδικολογικά στοιχεία του έργου· αμέσως μετά, παραθέτουμε τη συζήτηση που είχε διεξαχθεί, κατά το παρελθόν, σχετικά με τις πιθανές πηγές του έργου· τέλος, ακολουθώντας μια συγκεκριμένη διαδικασία, αντιπαραθέτουμε το κείμενο των *Μετρικών*, για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, με το αντίστοιχο κείμενο από το έργο του M. Comtino. Από τη σύγκριση των δύο κειμένων, καταρχήν, επιβεβαιώνουμε τον ισχυρό μεταξύ τους κειμενικό σύνδεσμο. Η αντιστροφή της σειράς των διαδικασιών, με τις οποίες επιλύεται το πρόβλημα στα δύο έργα, οδηγεί στην αναγνώριση της αποδεικτικής/αιτιολογικής διάστασης που χαρακτηρίζει το έργο *Ḥibbūr ha-meshīḥa weha-tishboret* και καθορίζει τους στόχους συγγραφής του. Ταυτόχρονα, μας επιτρέπει να διακρίνουμε την διαφορετική στόχευση του Ήρωνα και να επιχειρηματολογήσουμε για τον ευρετικό χαρακτήρα των *Μετρικών*.

Στο δεύτερο μέρος του τρίτου κεφαλαίου, αρχικά, κρίνουμε ουσιαστική και αναγκαία τη λεπτομερή εξέταση των Προοιμίων, τα οποία προηγούνται των αντίστοιχων τριών Βιβλίων του έργου των *Μετρικών*. Τα προοίμια των αρχαίων

ελληνικών κειμένων έχουν μελετηθεί από τη σύγχρονη ιστοριογραφία, κυρίως, ως πολύτιμες πηγές ιστορικών πληροφοριών, καθώς και ως μαρτυρίες του τρόπου με τον οποίο οι συγγραφείς προσεγγίζουν και παρουσιάζουν το αντικείμενο της έρευνάς τους. Από τη μελέτη, λοιπόν, των τριών Προοιμίων συνάγουμε σημαντικά και ενδιαφέροντα στοιχεία, τα οποία αφορούν στη σχέση των *Μετρικών* με τον κλάδο της Γεωμετρίας, την ευκρινή περιγραφή τόσο του θέματος όσο και του περιεχομένου του κάθε Βιβλίου, τη χρησιμότητα της πραγματείας, καθώς και την υπογράμμιση του τεχνικού χαρακτήρα του έργου. Τέλος, ακολουθεί η συνοπτική περιγραφή του περιεχομένου των Προβλημάτων/ Προτάσεων των τριών Βιβλίων, με την οποία ολοκληρώνεται το τρίτο κεφάλαιο.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την πρότασή μας για την ανάγνωση και ερμηνεία του έργου των *Μετρικών*. Ισχυριζόμαστε ότι ο Ήρων προτείνει και χρησιμοποιεί δύο μεθόδους για την εύρεση του εμβαδού επιφανειών, του όγκου στερεών σωμάτων και της διαίρεσης σε τμήματα επιπέδων και στερεών σχημάτων, υπό δοθέντα λόγο: τη μέθοδο του "*ἐπιλογισμοῦ*" και τη μέθοδο "*κατὰ ἀνάλυσιν*". Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της κάθε μεθόδου αναδεικνύονται, κατά την εφαρμογή αυτής σε διαδικασίες επίλυσης συγκεκριμένων Προβλημάτων. Προς τούτο επιλέγουμε και κατηγοριοποιούμε αντιπροσωπευτικά Προβλήματα, τα οποία παρουσιάζουμε, λεπτομερώς, αναλύουμε και σχολιάζουμε.

Το κλειδί για την παραπάνω ερμηνεία είναι ένα σύντομο εδάφιο, το οποίο εισάγεται από τον Ήρωνα, υπό μορφή σχολίου. Η ορθή νοηματική κατανόηση του σχολίου δεν αποτελεί εύκολο εγχείρημα, με αποτέλεσμα να προτείνονται διάφορες μεταφράσεις/ερμηνείες αυτού, οι οποίες καταγράφονται και σχολιάζονται. Τέλος, θα παραθέσουμε την ερμηνεία που προτείνουμε και θα την αιτιολογήσουμε, προσφεύγοντας σε προσεκτικές γραμματικές και συντακτικές παρατηρήσεις· στη συνέχεια, και με βάση αυτήν την ερμηνεία, θα θεμελιώσουμε και θα προτείνουμε μια νέα ανάγνωση του έργου των *Μετρικών*.

Σχετικά με τον τρόπο παρουσίασης των υπό εξέταση Προβλημάτων: Διακρίνουμε δύο κειμενικές ενότητες, την πρώτη και τη δεύτερη, εκ των οποίων η δεύτερη κειμενική ενότητα περιλαμβάνει τη διαδικασία υπολογισμού και προσδιορίζεται από συγκεκριμένα στιλιστικά χαρακτηριστικά, τα οποία καταγράφουμε. Η πρώτη κειμενική ενότητα περιλαμβάνει τον "γεωμετρικό λόγο", αλλά σε αρκετά Προβλήματα και έναν "αριθμο-γεωμετρικό λόγο". Ο "γεωμετρικός λόγος" απαρτίζεται από γεωμετρικά αντικείμενα και την επί αυτών ανάπτυξη επιχειρημάτων, ενώ ο αριθμο-γεωμετρικός λόγος" απαρτίζεται από γεωμετρικά αντικείμενα, αριθμούς και υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις. Κατά την παρουσίαση της πρώτης κειμενικής ενότητας, επιλέγουμε, για τα μέρη από τα οποία απαρτίζεται μια γεωμετρική πρόταση, το σχήμα του Πρόκλου, ενώ, για την

ανάλυσή της, χρησιμοποιούμε μεθοδολογικά εργαλεία που προκύπτουν από μελέτη κειμενικών και γλωσσολογικών στοιχείων.

Για τη μελέτη των Προβλημάτων που επιλύονται "*κατὰ ἀνάλυσιν*", επιλέγουμε, ως θεωρητική βάση, την ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης που προτείνεται από τους Γ. Χριστιανίδη και Φ. Φουρναράκη [Fournarakis & Christianidis, 2006, σ. 33-57]. Δύο είναι οι λόγοι που συνηγορούν σε αυτήν την επιλογή: **α)** Η σαφής διάκριση "Υποθετικού-Βεβαιωτικού μέρους", η οποία καταγράφεται κατά τη διαδικασία επίλυσης των Προβλημάτων των *Μετρικών* και, **β)** ο ρόλος που διαδραματίζει ο όρος "*δοθέν*", για την πρόσληψη και κατανόηση της αναλυτικής διαδικασίας.

Η "*ἐπιλογιστική*" διαδικασία, όπως εφαρμόζεται στα Προβλήματα των *Μετρικών*, περιλαμβάνει μια καταρχήν έρευνα/επισκόπηση γεωμετρικών προτάσεων, ώστε, μετά από συγκριτική αξιολόγηση, να ακολουθήσει η επιλογή μιας ομάδας αυτών, η οποία αποτελεί ικανή και επαρκή βάση για τη μετάβαση σε αριθμητικούς υπολογισμούς. Για την αναζήτηση θεωρητικής βάσης, προβήκαμε σε μια ιστορική και φιλοσοφική έρευνα της έννοιας του "*ἐπιλογισμοῦ*", η οποία μας οδήγησε στην επικούρεια σχολή. Καταλήξαμε, μετά από μελέτη, ότι τα χαρακτηριστικά του "*ἐπιλογισμοῦ*" που προτείνεται και εφαρμόζεται από τον Επίκουρο και τους διαδόχους του, τόσο στην επιστημολογία όσο και στην ηθική, συνάδουν με τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά της "*ἐπιλογιστικής*" διαδικασίας που εφαρμόζεται στα *Μετρικά*: επισκόπηση/έρευνα και συγκριτική αξιολόγηση δεδομένων, ώστε να δημιουργηθεί η κατάλληλη βάση για την άντληση συμπερασμών. Επιπλέον, επεκτείναμε την έρευνά μας και σε άλλους επιστημονικούς και τεχνικούς κλάδους και διαπιστώσαμε ότι στην εμπειρική σχολή της Ιατρικής, που ιδρύθηκε τον 3ο π.Χ. αιώνα, εφαρμόζεται, επίσης, μια διαδικασία "*ἐπιλογισμοῦ*" για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Το πέμπτο κεφάλαιο περιλαμβάνει δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος: **α)** περιγράφουμε τον όρο *αριθμητικοποιημένα Μαθηματικά* και εξετάζουμε τον τρόπο που διεισδύει, σταδιακά, στις μαθηματικές παραδόσεις της αρχαιότητας, **β)** διερευνούμε τον ιδιαίτερο τρόπο με τον οποίο τα *Μετρικά* συνδέονται με τη διαδικασία της *αριθμητικοποιημένης γεωμετρίας*, καταγράφοντας και μελετώντας τα χαρακτηριστικά των διάφορων μορφών με τις οποίες εμφανίζεται αυτή στο έργο και, **γ)** εξετάζουμε την έκταση, τα όρια και τη μορφή της *αριθμητικοποίησης* στο έργο των *Μετρικών*. Από τη μελέτη που προηγήθηκε στο τέταρτο κεφάλαιο, συμπεραίνουμε ότι οι δύο κειμενικές ενότητες, οι οποίες χαρακτηρίζουν τα περισσότερα Προβλήματα των *Μετρικών*, παρά τη μεταξύ τους σύνδεση, δεν συγχωνεύονται η μία με την άλλη, αλλά διατηρούν τη διακριτή τους ύπαρξη· οπότε, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η *αριθμητικοποίηση* στα *Μετρικά*,

“διανύοντας τα πρώτα της βήματα”, δεν μπορεί να χαρακτηριστεί “δομική”, όπως εκείνη που εμφανίζεται σε κείμενα μεταγενέστερης εποχής.

Τέλος, στο δεύτερο μέρος του πέμπτου κεφαλαίου επιχειρούμε την τεκμηρίωση της ευρετικής διάστασης, η οποία χαρακτηρίζει τον γεωμετρικό “λόγο” που καταγράφεται στα Προβλήματα των *Μετρικών*. Τα επιχειρήματα, τα οποία χρησιμοποιούμε και αναπτύσσουμε, προέρχονται από τη μελέτη του κειμένου, από γλωσσολογικές παρατηρήσεις, αλλά κυρίως, από την ευρετική λειτουργία που επιτελούν, κατά την επίλυση προβλημάτων, οι μέθοδοι του “*ἐπιλογισμοῦ*” και της “*κατὰ ἀνάλυσιν*”. Υπό το φως αυτής της ανάλυσης και ερμηνείας, κατατάσσουμε το έργο των *Μετρικών* στα ελάχιστα έργα της αρχαίας ελληνικής γραμματείας τα οποία αφιερώνονται στην εύρεση μαθηματικών μεθόδων.

Όσο μοναχική πορεία και αν αποτελεί η τελική διαδικασία σύνθεσης μιας διατριβής, τόσο πλούσια σε εμπειρίες και αναπάντεχες “συναντήσεις” είναι η έρευνα που προηγείται. Πολλές, λοιπόν, οι οφειλές… σε όλους όσους “συνάντησα” αυτά τα χρόνια και με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, συνειδητά ή ασυνείδητα, με βοήθησαν… Όμως, η ολοκλήρωση μιας διατριβής εμπεριέχει πολλά διακριτά βήματα και στάδια, με ιδιαίτερο ρόλο για το παρελθόν και δεσμευτικά για το παρόν και το μέλλον. Ανακαλώντας, λοιπόν, τα κομμάτια αυτής της πορείας, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω:

Τους καθηγητές στο Τμήμα Ιστορίας και Φιλοσοφίας της Επιστήμης του Πανεπιστημίου Αθηνών, στους οποίους οφείλω τη γόνιμη μαθητεία μου στις ανθρωπιστικές σπουδές.

Την τριμελή μου επιτροπή, συγκεκριμένα τον κ. Γιάννη Χριστιανίδη, τον κ. Κώστα Γαβρόγλου και την κ. Δήμητρα Χριστοπούλου. Την κ. Δήμητρα Χριστοπούλου για τη τιμή που μου έκανε να συμμετέχει στην τριμελή μου επιτροπή.

Ευχαριστώ τον καθηγητή μου κ. Κώστα Γαβρόγλου, που παρακολούθησε, άγρυπνα, την πορεία αυτής της διατριβής, θέτοντας ερωτήματα με το δικό του εμβριθή, πάντα, τρόπο. Η ευγνωμοσύνη μου, όμως, δεν περιορίζεται εδώ. Τον ευχαριστώ, βαθύτατα, για την σταθερή εμπιστοσύνη του στις ικανότητες μου και την αμέριστη στήριξή του στον δρόμο που επέλεξα, τελικά, να ακολουθήσω.

Τέλος, το πιο σημαντικό: η αρχή, η πορεία και η ολοκλήρωση αυτής της διατριβής οφείλονται, αποκλειστικά, στον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γιάννη Χριστιανίδη. Ξεκίνησε από μια δική του έμπνευση και καθοδηγήθηκε με ενθουσιασμό, αλλά και αδιάλειπτη επαγρύπνηση για υψηλό επίπεδο έρευνας και

διαρκή ενημέρωση στη σύγχρονη ιστοριογραφία. Η οξυδέρκεια και ευφυΐα του να συλλαμβάνει τα καίρια και ουσιαστικά, που με τη σειρά τους οδηγούν σε πρωτότυπες προσεγγίσεις και ερμηνείες, συνέβαλε αποφασιστικά στην εκπόνηση αυτής της διατριβής. Τον ευχαριστώ για όλα αυτά… Πάνω από όλα, όμως, τον ευχαριστώ για τις αμέτρητες ώρες που διέθεσε για να ακούσει, πρόθυμα και υπομονετικά, απορίες και προβλήματα και να υποδείξει, με απαράμιλλο τρόπο, τις πλέον κατάλληλες λύσεις. Εύχομαι και ελπίζω να ανταποδίδω, πάντα, την προσφορά και την εμπιστοσύνη του.

Ακόμη, οφείλω να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ.κ. Alain Bernard, Jeffrey Oaks, Bernard Vitrac και Βούλα Τσούνα για την προθυμία τους να μοιραστούν μαζί μου ερωτήματα και προβληματισμούς. Οι διαφορετικές, σε κάποια σημεία, ερμηνευτικές προσεγγίσεις τους αποδείχτηκαν ουσιαστικές, από τη στιγμή που με ώθησαν να διερευνήσω, περαιτέρω, την τεκμηρίωση της δικής μου "ανάγνωσης".

Ευχαριστώ, επίσης, τους καθηγητές κ.κ. Θόδωρο Αραμπατζή, Στάθη Αραποστάθη, Μανώλη Πατηνιώτη, Θύμιο Νικολαΐδη και Μιχάλη Σιάλαρο για τη συμμετοχή τους στην επταμελή μου επιτροπή και τον χρόνο που αφιέρωσαν στη διατριβή μου.

Επιπλέον, θέλω να σταθώ σε φίλους και συνεργάτες που, με τον ένα ή άλλο τρόπο, μοιραστήκαμε αυτή τη διαδρομή. Ευχαριστώ τη Γιάννα Σκούρα και τον Τάσο Γαβρά για τις συζητήσεις μας, τα ερωτήματα και τους προβληματισμούς μας. Ιδιαίτερα, αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω τη συνεργάτιδα, αλλά πάνω από όλα φίλη, Νάνσυ Μεγρέμη, για τις αναζητήσεις μας, τα ελπιδοφόρα σχέδια μας, κυρίως όμως, για τη σταθερή της παρουσία τόσο στις καλές όσο και τις "στενόχωρες" στιγμές. Ευχαριστώ, ακόμη, τη φίλη Αντιγόνη Τσελούδη για τις φιλολογικές της επισημάνσεις.

Ο Δημήτρης Δημητρόπουλος δεν χρειάζεται να δει το όνομά του για να καταλάβει πόσα πολλά του οφείλω. Τον ευχαριστώ για όλες εκείνες τις ενθουσιώδεις συζητήσεις, αλλά κυρίως, για την προτροπή και επιμονή του να τιθασεύσω τα σκόρπια σχέδια σε μια πορεία με αρχή, μέση και τέλος.

Τελευταία, αλλά με ιδιαίτερη συγκίνηση, ευχαριστώ τη δική μου "οικογένεια"· για την αγάπη, τη βοήθεια και στήριξη, την πίστη σε μένα και τις δυνατότητές μου, κυρίως όμως, για τις "σιωπές" και την κατανόηση στις δύσκολες ώρες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΙΣΤΟΡΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

1.1 ΓΕΝΙΚΗ ΙΣΤΟΡΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Από τη γέννησή της, στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα, η νεότερη ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, ο αρχαιότερος κλάδος όχι μόνο της ιστορίας των Μαθηματικών, αλλά και της ιστορίας των Επιστημών συνολικά, έχει αποτελέσει πεδίο ερευνητικής ενασχόλησης μερικών πρωτεργατών της ιστορίας των Επιστημών, όπως είναι ο P. Tannery (1843−1904), ο H. G. Zeuthen (1839−1920), ο J. L. Heiberg (1854−1928), ο T. L. Heath (1861−1940), ο O. Neugebauer (1899−1990), ο B. L. van der Waerden (1903−1996), ο W. R. Knorr (1945−1997) κ.λπ.

Η έναρξη της νεότερης ιστορίας του 19ου αιώνα σηματοδοτείται από τα εγκαίνια ενός μεγάλου προγράμματος κριτικών εκδόσεων όλων των σωζόμενων έργων της αρχαίας ελληνικής γραμματείας, συμπεριλαμβανομένων και των έργων των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και αστρονόμων. Μερικά από τα έργα αυτά είχαν εκδοθεί κατά το παρελθόν σε μη κριτικές εκδόσεις, άλλα, όμως, ήταν ανέκδοτα και σώζονταν είτε σε χειρόγραφη μορφή είτε σε αραβικές, λατινικές και άλλες μεταφράσεις. Το έργο των νέων εκδόσεων ανέλαβε, κυρίως, ο εκδοτικός οίκος Teubner της Λειψίας με τη συμμετοχή διάσημων λογίων, όπως ο H. Diels (1848−1922), ο J. L. Heiberg, ο F. Hultsch (1833−1906), ο P. Tannery, ο H. Schöne (1870−1941) και άλλοι διακεκριμένοι ιστορικοί των Μαθηματικών. Καρπός του μεγαλόπνοου αυτού προγράμματος είναι οι δεκάδες τόμοι με τις "οριστικές", όπως θεωρούνταν, μέχρι πρότινος, εκδόσεις των έργων των Ελλήνων μαθηματικών και αστρονόμων της αρχαιότητας, που έχουν συμπεριληφθεί στην περίφημη Biblioteca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana, και αποτέλεσαν τη βάση της ιστορικής έρευνας για τα ελληνικά Μαθηματικά που αναπτύχθηκε σ' όλον τον 20ό αιώνα.

Το έργο της κριτικής έκδοσης των κειμένων που άρχισε τον 19ο αιώνα συνεχίστηκε και στη διάρκεια του 20ού αιώνα με τη δεύτερη, συμπληρωμένη, έκδοση των έργων του Αρχιμήδη, από τον J. L. Heiberg, με τη μελέτη και έκδοση του συνόλου της αραβικής και λατινικής παράδοσης των κειμένων του Αρχιμήδη, από τον M. Clagett, με την έκδοση των βιβλίων 4-7 των *Αριθμητικών* του

Διόφαντου, από τους J. Sesiano (1982) και R. Rashed (1984), με την έκδοση παπυρικών κειμένων μαθηματικού, αστρονομικού και αστρολογικού περιεχομένου, προερχόμενων από την Αίγυπτο της ελληνιστικής και ελληνορωμαϊκής περιόδου, από τους R. A. Parker (1972) και A. Jones (1999), κ.λπ.

Παράλληλα με την κριτική έκδοση των κειμένων, άρχισε την ίδια περίπου περίοδο μία συστηματική προσπάθεια μελέτης, κατανόησης και ερμηνείας τού περιεχομένου αυτών, η οποία με τη σειρά της δίνει αφηγήσεις τόσο της ιστορίας των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών όσο και, γενικότερα, των Μαθηματικών της αρχαιότητας, στις οποίες, γενικά, διακρίνουμε δύο κύριες μεθοδολογικές τάσεις. Στη μία τάση, την οποία θα ονομάσουμε "παραδοσιακή ιστοριογραφία των Μαθηματικών", ανήκουν όλες εκείνες οι αφηγήσεις που προσεγγίζουν και ερμηνεύουν τα αρχαία Μαθηματικά πρωτίστως από τη σκοπιά του μαθηματικού και δευτερευόντως από τη σκοπιά του ιστορικού. Στην άλλη τάση, την οποία θα ονομάσουμε "νέα ιστοριογραφία των Μαθηματικών", ανήκουν όλες εκείνες οι αφηγήσεις που προσεγγίζουν και ερμηνεύουν τα αρχαία Μαθηματικά από τη σκοπιά του ιστορικού. Οι ονομασίες αυτές απηχούν και την "ηλικία" των δύο τάσεων. Πράγματι, η νέα ιστοριογραφία εμφανίζεται με όλη της τη δυναμική μόλις το τελευταίο τέταρτο του 20ού αιώνα. Προβάλλει αιφνιδιαστικά, με τη μορφή ρήξης προς την παραδοσιακή ιστοριογραφία, αρχικά με αφορμή το θέμα της αλγεβρικής ερμηνείας ενός σημαντικού γεωμετρικού τμήματος των Μαθηματικών τόσο της κλασικής όσο και της ελληνιστικής περιόδου και, στη συνέχεια, με τη διατύπωση διαφορετικών αναγνώσεων και σε άλλα κεφάλαια της ιστορίας, όχι μόνο των ελληνικών, αλλά και των βαβυλωνιακών Μαθηματικών, καθώς και για μεθοδολογικά ζητήματα που αφορούν, γενικά, στην ιστοριογραφία των Μαθηματικών.

Αν και το θέμα της διαμάχης είναι η "γεωμετρική άλγεβρα", η ουσία της δεν βρίσκεται εκεί, αλλά στις βαθύτερες μεθοδολογικές διαφορές που χωρίζουν την παραδοσιακή από τη νέα ιστοριογραφία. Και η αφετηρία αυτών των διαφορών εντοπίζεται στο πώς αντιλαμβάνονται οι εκπρόσωποι των δύο σχολών το αντικείμενο της ιστορίας των Μαθηματικών και το έργο του ιστορικού των Μαθηματικών. Οι εκπρόσωποι της παραδοσιακής ιστοριογραφίας αντιλαμβάνονται τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος ως ουδέτερα, διαχρονικά, αυτάρκη φυσικά αντικείμενα, μέσα στα οποία είναι ενσωματωμένες όλες οι ιδέες, τα μηνύματα και τα διδάγματα που τούς ανήκουν. Τότε, το περιεχόμενο ενός αρχαίου μαθηματικού κειμένου και η μορφή με την οποία εμφανίζεται αποτελούν δύο εντελώς ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές. Έργο του ιστορικού των Μαθηματικών είναι να αντλήσει το περιεχόμενο από την απαρχαιωμένη μορφή και να το μεταφέρει σε μία νέα, κατανοητή στον σύγχρονο αναγνώστη, μορφή. Επομένως, το έργο του ιστορικού των Μαθηματικών "περιορίζεται στην αναγνώριση των αναλλοίωτων, τελικώς, παρά την ποικιλία των ιστορικών τους εκφάνσεων, μαθηματικών Ιδεών, που εμφανίζονται στο έργο του κάθε συγγραφέα του παρελθόντος, και η απονομή της δέουσας τιμής στον

μαθηματικό ο οποίος έδωσε πρώτος έκφραση σε μια από αυτές τις Ιδέες, σε εκείνον που πρώτος την κατέβασε από το πλατωνικό βασίλειο στον κόσμο της ανθρώπινης συνείδησης. Στην ακραία της εκδοχή, αυτή η αντίληψη οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ιστορία των Μαθηματικών πρέπει να γράφεται από τους επαγγελματίες μαθηματικούς και να απευθύνεται, βασικά, στους συναδέλφους τους" [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 8]. Είναι εμφανές, λοιπόν, ότι εκείνο που χαρακτηρίζει την παραδοσιακή ιστοριογραφία είναι η αναζήτηση των καθολικών χαρακτηριστικών των μαθηματικών κειμένων του παρελθόντος, ώστε να αναδυθούν οι σύγχρονες μαθηματικές ιδέες που λανθάνουν σε αυτά. Όμως, αυτό ακριβώς το χαρακτηριστικό της μεθοδολογίας που προτείνει και χρησιμοποιεί η παραδοσιακή ιστοριογραφία, δηλαδή την αναζήτηση σύγχρονων μαθηματικών ιδεών σε κείμενα του παρελθόντος, θέτει τα όρια αυτής και προετοιμάζει το έδαφος για την ανατροπή της. Ωστόσο, δεν πρέπει να υποτιμούμε τα σημαντικά αποτελέσματα που έχουν παραχθεί από την παραδοσιακή ιστοριογραφία, όπως οι μεγάλες εκδόσεις των αρχαίων μαθηματικών κειμένων και οι εμβριθείς μελέτες πάνω σε αυτά.

Οι ιστορικοί που υιοθετούν τη νέα ιστοριογραφία των Μαθηματικών θεωρούν ότι τα μαθηματικά κείμενα του παρελθόντος χαρακτηρίζονται από τοπικότητα, και είναι προϊόντα μιας προσδιορισμένης στον χρόνο και στον χώρο ανθρώπινης δραστηριότητας, η οποία εκφράζει τη βούληση, τις προθέσεις, τους στόχους, τις στρατηγικές και τις τεχνικές τού εκάστοτε συγγραφέα και της παράδοσης στην οποία εντάσσεται. Κατά συνέπεια, το περιεχόμενο ενός μαθηματικού κειμένου και η μορφή υπό την οποία εκφράζεται δεν μπορούν να αποτελούν δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, αυθαίρετα διαχωριζόμενες μεταξύ τους. Η επένδυση του μαθηματικού περιεχομένου ενός αρχαίου κειμένου με μια ξένη για τον συγγραφέα και την εποχή του μορφή, συγκεκριμένα, η ελεύθερη μετάφρασή του στη συμβολική γλώσσα της σύγχρονης άλγεβρας, επιφέρει ανεπανόρθωτη ζημιά στην ορθή, από ιστορική άποψη, κατανόησή του· ουσιαστικά, καθιστά το κείμενο ανιστορικό [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 9]. Υπό αυτήν την έννοια, η κύρια προσπάθεια τού ιστορικού έγκειται στην ιστορική κατανόηση των μαθηματικών κειμένων του παρελθόντος, δηλαδή στην προσπάθεια κατανόησης τού ιστορικού και πολιτισμικού πλαισίου στο οποίο εντάσσονται, καθώς και στην προσπάθεια ανασυγκρότησης, όσο αυτό είναι δυνατόν, των αυθεντικών προθέσεων τού κάθε ιστορικού προσώπου.

Στο σημείο αυτό κρίνεται απαραίτητο να αναφέρουμε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα από την ιστορία των Μαθηματικών, τα οποία αποτέλεσαν πεδία διαμάχης μεταξύ των δύο ιστοριογραφικών τάσεων, ώστε να αναδειχθούν οι διαφορές μεταξύ των προσεγγίσεών τους.

Το πρώτο παράδειγμα σχετίζεται με την ερμηνεία της παραδοσιακής ιστοριογραφίας για ένα μέρος των κλασικών και ελληνιστικών Μαθηματικών· η ερμηνεία αυτή διαμορφώθηκε από μελέτες που ξεκίνησαν από τα τέλη του 19ου

αιώνα, ολοκληρώθηκαν στις δεκαετίες 1930-1950 και βασίζεται στις παρακάτω παραδοχές: **α)** ένα μέρος από την ύλη των *Στοιχείων* και *Δεδομένων* του Ευκλείδη φαίνεται ότι στερείται γεωμετρικού περιεχομένου και, επομένως, πιστεύεται ότι προέρχεται από ένα σώμα μαθηματικών γνώσεων και τεχνικών, επί της ουσίας αλγεβρικό, ξένο προς την ελληνική γεωμετρία και, ιδιαίτερα, προερχόμενο από τη βαβυλωνιακή παράδοση[1], **β)** οι Έλληνες μαθηματικοί της προ του Ευκλείδη περιόδου αντλούν ευρέως από αυτήν τη "βαβυλωνιακή άλγεβρα" και βασιζόμενοι σ' αυτήν αναπτύσσουν μια δική τους άλγεβρα, η οποία στο μόνο που διαφέρει από την άλγεβρα των Βαβυλωνίων είναι ότι διατυπώνεται στη γεωμετρική γλώσσα, και γι' αυτό ονομάζεται "γεωμετρική άλγεβρα" και **γ)** η ανακάλυψη της ασυμμετρίας στη διάρκεια του 5ου π.Χ. αιώνα είναι το αίτιο που οδηγεί τους Έλληνες μαθηματικούς στην επανεξέταση και επαναδιατύπωση τεχνικών της βαβυλωνιακής άλγεβρας στη γλώσσα της γεωμετρίας [Χριστιανίδης & Διαλέτης 2006, σ. 4].

Η ιδέα της "βαβυλωνιακής άλγεβρας" προκύπτει από μια περίτεχνη "μαθηματική ανακατασκευή", η οποία ερμηνεύει αλγεβρικά τους αριθμητικούς υπολογισμούς που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων στα βαβυλωνιακά κείμενα. Η ίδια "μαθηματική ανακατασκευή" δίνει τη δυνατότητα να διακριθούν και να ερμηνευτούν ως αλγεβρικά, τμήματα του Βιβλίου ΙΙ των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι, με τη μέθοδο της "μαθηματικής ανακατασκευής", η παραδοσιακή ιστοριογραφία δημιουργεί δύο νέες κατηγορίες: τη "βαβυλωνιακή άλγεβρα" και τη "γεωμετρική άλγεβρα". Επιπλέον, προβαίνει και στην κατασκευή μιας ιστορικής εικασίας η οποία αφορά στην επίδραση των βαβυλωνιακών Μαθηματικών στα ελληνικά Μαθηματικά τον 5ο π.Χ. αιώνα.

Επίσης, η ερμηνευτική άποψη της "γεωμετρικής άλγεβρας" βασίζεται σε απλές παραδοχές που δεν αποτελούν τεκμηριωμένα γεγονότα. Έτσι, **α)** δεν υπάρχει καμία ένδειξη ότι στη διάρκεια του 5ου π.Χ. αιώνα έχουμε μεταφορά μαθηματικών γνώσεων από τη Μεσοποταμία στην Ελλάδα, **β)** οι βαβυλωνιακοί αλγόριθμοι είναι δυνατόν να εξηγηθούν και με άλλα μη αλγεβρικά ερμηνευτικά σχήματα και, **γ)** ο ρόλος που διαδραμάτισε η ανακάλυψη της ασυμμετρίας στα ελληνικά Μαθηματικά δεν είναι σαφής και προβληματίζει, ακόμη και σήμερα, τους ιστορικούς της Επιστήμης. Εν τούτοις, αυτή η ερμηνευτική άποψη έχει ένα βασικό "πλεονέκτημα": "εξηγεί" με μεγάλη συνέπεια, απλότητα και ευκολία πολλές σελίδες των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών και, ειδικότερα, παρέχει ένα πολύ ελκυστικό πλαίσιο "εξήγησης", τον αλγεβρικό τρόπο τού σκέπτεσθαι, που ωθεί τους Έλληνες μαθηματικούς, όπως υποστηρίζουν οι οπαδοί τής εν λόγω ερμηνευτικής άποψης, στη συγγραφή κειμένων χωρίς κανένα ουσιαστικό

[1] Ο αλγεβρικός χαρακτήρας της βαβυλωνιακής αριθμητικής προτείνεται στα τέλη της δεκαετίας του 1920, όταν ανιχνεύεται από τον O. Neugebauer στις βαβυλωνιακές πινακίδες, οι οποίες περιείχαν πλήθος αριθμητικών υπολογισμών, κάποιο αλγεβρικό περιεχόμενο.

γεωμετρικό περιεχόμενο. Παρέχοντας όλα αυτά τα "πλεονεκτήματα", η ανάγνωση και ερμηνεία των ελληνικών Μαθηματικών, μέσω της οπτικής της παραδοσιακής ιστοριογραφίας, γίνεται κυρίαρχη και υιοθετείται, από τους ιστορικούς των Μαθηματικών, επί έναν σχεδόν αιώνα, έστω και αν δεν έλειψαν, εντελώς, σε αυτό το διάστημα κάποιες κριτικές φωνές που, κατά καιρούς, ακούστηκαν από λίγους ιστορικούς των Μαθηματικών, όπως για παράδειγμα τους J. Klein, A. Rey, M. Mahoney και, ιδίως, τον Á. Szabó, ο οποίος, με σκοπό να δοθεί έμφαση στον γεωμετρικό χαρακτήρα των θεωρημάτων, προτείνει την αντικατάσταση του όρου "γεωμετρική άλγεβρα", από τον όρο "γεωμετρία των χωρίων" [Berggren, 1984, σ. 397]. Αυτές οι φωνές, όμως, δεν ήταν ικανές να δημιουργήσουν κανένα ουσιαστικό πρόβλημα στην επικρατούσα ερμηνευτική άποψη και, κυρίως, να αμφισβητήσουν τις πεποιθήσεις που είχαν παγιωθεί [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 6-7].

Όμως, η προσέγγιση των μαθηματικών κειμένων της αρχαιότητας, μέσω "μαθηματικών ανακατασκευών", παρόλο που συμβάλλει στην κατανόηση του μαθηματικού περιεχομένου, δίνει συχνά μια στρεβλή εικόνα του κειμένου. Η εγγενής αυτή αδυναμία γίνεται αντιληπτή και επισημαίνεται από κάποιους ιστορικούς των Μαθηματικών. Για παράδειγμα αναφέρουμε τον Á. Szabó [Szabó, 1973], ο οποίος είναι ο πρώτος που ασκεί κριτική στις μαθηματικο-λογικές ανακατασκευές, χρησιμοποιώντας, μάλιστα, φιλοσοφικά επιχειρήματα. Ακολουθεί ο M. S. Mahoney, ο οποίος αναφέρει ότι "τα σύμβολα και οι όροι των σύγχρονων Μαθηματικών είναι φορείς των δικών τους εννοιών και μεθόδων. Η εφαρμογή τους σε ιστορικό υλικό εγκυμονεί, πάντα, τον κίνδυνο να δοθεί σε αυτό το υλικό ένα περιεχόμενο που στην πραγματικότητα δεν έχει" [Mahoney, 1973, σ. xii-xiii].

Αλλά, η κύρια αμφισβήτηση της παραδοσιακής ιστοριογραφίας προέρχεται από την ιστοριογραφική κατηγορία της "γεωμετρικής άλγεβρας", γύρω από την οποία αναπτύχθηκε στα μέσα της δεκαετίας του 1970 μια διαμάχη, η οποία έδωσε το έναυσμα για να αναπτυχθεί η νέα ιστοριογραφία των Μαθηματικών. Αφετηρία υπήρξε ένα άρθρο του ιστορικού των Μαθηματικών S. Unguru [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 13-77], ο οποίος καταφέρεται εναντίον της "σκανδαλώδους καταστάσεως" που επικρατούσε στην ιστορία των αρχαίων και μεσαιωνικών Μαθηματικών. Γράφει: "Είναι πράγματι θλιβερό και λυπηρό όταν ένας μελετητής του πολιτισμού και των ιδεών της Αρχαιότητας ή του Μεσαίωνα πρέπει πρώτα να εξοικειωθεί με τις έννοιες και τις πράξεις των μοντέρνων Μαθηματικών προκειμένου να συλλάβει το νόημα και την πρόθεση των σύγχρονών του σχολιαστών που ασχολούνται με τα αρχαία και τα μεσαιωνικά μαθηματικά κείμενα" [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 14]. "Τα περισσότερα πυρά της επίθεσής του κατευθύνονται εναντίον της ιδέας περί «γεωμετρικής άλγεβρας», ιδέας την οποία κατήγγειλε ως σκέτη φαντασία, ως λογική και ιστορική αδυνατότητα, ως ένα τερατώδες υβριδικό, αντιφατικό δημιούργημα, που κατασκευάστηκε από μαθηματικούς οι οποίοι δεν είχαν καμία αίσθηση της

ιστορίας" [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 7]. Αυτή η κατά μέτωπο επίθεση δεν έμεινε αναπάντητη, αλλά προκάλεσε τις αντιδράσεις τόσο του B. L. van der Waerden, επιφανούς εκπροσώπου της παραδοσιακής ιστοριογραφίας, όσο και των A. Weil και H. Freudenthal, διακεκριμένων μαθηματικών [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 79-114]. Στις απαντήσεις των τριών, ο S. Unguru ανταπάντησε με ένα δεύτερο άρθρο [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 115-131], στο οποίο εξηγεί γιατί πρέπει να διαχωρίζει κανείς την ιστορία των Μαθηματικών από τα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα, γράφει: "Η ιστορία των Μαθηματικών είναι ιστορία, όχι Μαθηματικά. Είναι η μελέτη των ιδιοσυγκρασιακών πλευρών της δραστηριότητας των μαθηματικών που ασχολούνται οι ίδιοι με τη μελέτη του νομοθετικού, δηλαδή αυτού που ισχύει διά νόμου. Αν κάποιος πρόκειται να γράψει την ιστορία των Μαθηματικών και όχι τα Μαθηματικά της ιστορίας, αυτός ο συγγραφέας οφείλει να προσέξει να μην υποκαταστήσει το ιδιοσυγκρασιακό με το νομοθετικό, δηλαδή να μην πραγματευτεί τα Μαθηματικά του παρελθόντος σαν να μην είχαν τα Μαθηματικά παρελθόν, πέραν των τετριμμένων διαφορών στην εξωτερική εμφάνιση ενός κατά βάση αναλλοίωτου σκληρού περιεχομένου" [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 127-128].

Παρόλο που δεν θα υπεισέλθουμε στις λεπτομέρειες αυτής της διαμάχης, μπορούμε να σημειώσουμε ότι η αλγεβρική ερμηνεία που συνέδεσε τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων με τη "γεωμετρική άλγεβρα", βαθμιαία, αρχίζει να φθίνει και να γίνεται λιγότερο πειστική. Παράλληλα, η έμφαση στις "μαθηματικές ανακατασκευές" και εξηγήσεις αρχίζει να εγκαταλείπεται και αντικαθίσταται με μια διαρκώς αυξανόμενη συνειδητοποίηση σχετικά με τις μαθηματικές δομές, οι οποίες μπορούν να διαμορφώνονται σε συνάρτηση με την πολιτισμική αντίληψη και προοπτική. Εν κατακλείδι, από τη δεκαετία του 1980 και μετά, η νέα ιστοριογραφία κερδίζει συνεχώς έδαφος και, βαθμιαία, επικρατεί, με την πλειονότητα των λογίων να δεσμεύεται σε κάποιες κοινές μεθοδολογικές και ιστοριογραφικές δεσμεύσεις, όπως την αποδοχή της ιδέας ότι τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, καθώς και τα Μαθηματικά των άλλων αρχαίων πολιτισμών, δεν είναι τα δικά μας Μαθηματικά και ότι για να γίνουν κατανοητά απαιτείται να τοποθετηθούν στο πλαίσιο τού δικού τους ιστορικού χώρου. Οι διαμάχες, πλέον, στρέφονται γύρω από ερωτήσεις που αφορούν στο πώς πρέπει να ξαναγραφτεί η ιστορία των ελληνικών Μαθηματικών, και όχι αν αυτό χρειάζεται να γίνει. Γενικά, η ιστοριογραφία των ελληνικών Μαθηματικών ακολουθεί τις τάσεις που, κατά καιρούς, επικρατούν στην ιστοριογραφία της Επιστήμης και των Μαθηματικών, αλλά αργά και διστακτικά, από τη στιγμή που οι ιστορικοί των ελληνικών Μαθηματικών δεν μπορούν να εφαρμόσουν πολλές από τις μεθοδολογικές προσεγγίσεις, που έχουν χρησιμοποιηθεί από ιστορικούς μεταγενέστερων περιόδων. Από την άλλη, είναι υποχρεωμένοι να χρησιμοποιούν μεθόδους, όπως η φιλολογική μελέτη και η ανακατασκευή των κειμένων, για τις οποίες οι ιστορικοί μεταγενέστερων περιόδων δεν έχουν το παραμικρό ενδιαφέρον. Παρ' όλα αυτά, οι ιστορικοί των ελληνικών Μαθηματικών έχουν

ακολουθήσει τις γενικές κατευθύνσεις της ιστορίας των Επιστημών, για παράδειγμα την εστίαση σε τοπικά θέματα, ή την προσθήκη περισσότερων λεπτομερειών στην επίδραση που άσκησαν τα πολιτισμικά, θρησκευτικά και διανοητικά πλαίσια στη μαθηματική δραστηριότητα. Το πιο σημαντικό, όμως, είναι ότι "οι ιστορικοί των ελληνικών Μαθηματικών, όπως και άλλοι ιστορικοί των επιστημών, δεν ενδιαφέρονται πλέον να καταγράφουν μια σειρά από αποτελέσματα, τα οποία αυθαίρετα θεωρούνται σημαντικά, αλλά, μάλλον, εστιάζουν σε πρακτικές παραγωγής και εκφοράς της γνώσης στις μαθηματικές επιστήμες και πώς αυτές οι πρακτικές σχετίζονται με άλλα πεδία της αρχαίας ζωής" [Sidoli, 2014, σ. 26].

Αν, τώρα, στραφούμε στην έρευνα που διεξάγεται για τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά στις αρχές του 21ου αιώνα, μπορούμε να διακρίνουμε ότι εστιάζεται σε δύο κύριους τομείς: στις "Μεθόδους", με τις οποίες οι ερευνητές προσεγγίζουν τα αντικείμενα της μελέτης τους, και στα "Θέματα", τα οποία επιλέγουν και ερευνούν. Επιχειρώντας, λοιπόν, μια σύντομη επισκόπηση[2] μπορούμε να καταγράψουμε τα παρακάτω:

Α. Μέθοδοι

Κάποιες από τις μεθόδους που εφαρμόζονται σήμερα από τους σύγχρονους ερευνητές έχουν χρησιμοποιηθεί για δεκαετίες, όπως για παράδειγμα οι Κειμενικές Σπουδές, ενώ κάποιες άλλες προέρχονται από τεχνικές που χρησιμοποιούν, ήδη, οι ιστορικοί των Επιστημών, όπως οι μελέτες του πολιτισμικού υλικού, καθώς και η χρήση *εξηγητικών πλαισίων* (contextualization) για την ερμηνεία τού υπό μελέτη έργου.

Ι. *Κειμενικές Σπουδές*

Στις κειμενικές Σπουδές εντάσσεται ένα ευρύ φάσμα δραστηριοτήτων, το οποίο συνοψίζεται στις κωδικολογικές μελέτες παπύρων και εν γένει πηγών, οι οποίες οδηγούν στην παραγωγή κριτικών εκδόσεων· οι κριτικές εκδόσεις, με τη γραμματική και φιλολογική ανάλυση του κειμένου, εμπλουτίζονται και με σχολιαστική μετάφραση. Επομένως, ο δομικός λίθος των ιστοριογραφικών

[2] Οι πληροφορίες που ακολουθούν, αναφορικά με την επισκόπηση της έρευνας που διεξάγεται για τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, αντλούνται, κατά ένα μεγάλο μέρος, από το άρθρο του N. Sidoli [Sidoli, 2014, σ. 25-50].

μελετών για τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά είναι και θα παραμείνει η ενδελεχής μελέτη των κειμένων. Το πλέον άμεσο κειμενικό στοιχείο για την αρχαία ελληνική μαθηματική σκέψη λαμβάνεται από τους ελάχιστους παπύρους και τις άλλες γραπτές πηγές που παραδίδονται από την αρχαιότητα. Όμως, λόγω του ελάχιστου αριθμού που διασώζεται, η κύρια πηγή μελέτης των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών αποτελείται από τα κείμενα που παραδίδονται σε μεσαιωνικά χειρόγραφα.

Σχετικά με την εκδοτική δραστηριότητα ελληνικών τεκμηρίων, που καταγράφεται τα τελευταία χρόνια, μπορούμε, ενδεικτικά, να αναφέρουμε: **α)** εκδόσεις και μελέτες αριθμητικών πινάκων, όπως έχουν καταγραφεί από τον D. Fowler [Fowler, 1995], **β)** έναν πάπυρο που περιέχει "πρακτικά" γεωμετρικά προβλήματα, παρόμοια με εκείνα που συναντώνται στο "ψευδο-ηρώνειο" σύνταγμα, ο οποίος έχει εκδοθεί και μελετηθεί από τους A. Bülow-Jacosen και C. M. Taisbak [Bülow- Jacosen & Taisbak, 2003] και, **γ)** μια νέα πηγή τεκμηρίων για την ιστορία της ελληνικής αστρονομίας, η οποία έχει εκδοθεί και μελετηθεί από τον A. Jones [Sidoli, 2014, σ. 27].

Βέβαια, ο σημαντικός αριθμός των νέων μελετών αφορά στη μεσαιωνική παράδοση, από την οποία, ενδεικτικά, μπορούμε να αναφέρουμε: **α)** μια νέα μελέτη στα χειρόγραφα των *Σφαιρικών* του Θεοδοσίου, από τον C. Czinczenheim [Sidoli, 2014, σ. 27], η οποία, μαζί με τις προγενέστερες εκδόσεις στους Αυτόλυκο και Αρίσταρχο, από τους J. Mogenet [Mogenet, 1950] και B. Noack [Noack, 1992], δίνει μια καλή εικόνα για τη συνολική χειρόγραφη παράδοση της επονομαζόμενης *Μικρής Αστρονομίας*, **β)** μια ενδελεχή μελέτη χειρόγραφων από τα *Κωνικά* του Απολλώνιου, όπως διασώζονται από τον Ευτόκιο, από την M. Decorps-Foulquier [Decorps-Foulquier, 1999] και, **γ)** μια καταγραφή όλων των κύριων χειρόγραφων πηγών για τα ελληνικά Μαθηματικά, τόσο των ελληνικών όσο και αραβικών, από τον F. Acerbi [Acerbi, 2010, σ. 269-375],.

Ένα άλλο θέμα, που απασχολεί τους ιστορικούς τα τελευταία χρόνια, σχετίζεται με τις άμεσες και έμμεσες παραδόσεις της ιστορίας των μαθηματικών έργων. Συγκεκριμένα, οι ιστορικοί των Μαθηματικών διαιρούν τις χειρόγραφες παραδόσεις σε άμεσες και έμμεσες. Η άμεση παράδοση αποτελείται από ελληνικά κείμενα-πηγές και βρίσκεται στα χειρόγραφα ή τους παπύρους· η έμμεση παράδοση αποτελείται αφενός από σχόλια και περιλήψεις, στα ελληνικά, των κειμένων-πηγών και αφετέρου από μεταφράσεις, σχόλια και περιλήψεις των κειμένων-πηγών, στα αραβικά ή τα λατινικά. Ως πρωταρχικές πηγές από την άμεση παράδοση θεωρούνται μόνο τα χειρόγραφα, τα οποία, όμως, υπόκεινται σε πολυάριθμες αναθεωρήσεις κατά τη διάρκεια των αιώνων. Πράγματι, τα κείμενα εκδίδονται από λόγιους, οι οποίοι, τις περισσότερες φορές, διδάσκουν οι ίδιοι τα αντικείμενα που παραδίδονται από τα κείμενα που εκδίδονται, διαμορφώνοντας με αυτόν τον τρόπο μια δική τους αντίληψη για τις ιδέες και το νόημα που αυτά μεταφέρουν· θεωρούν, λοιπόν, ως υποχρέωσή τους να προβούν σε διορθώσεις

λέξεων του αρχικού κειμένου. Τότε, όμως, η κατανόηση της φύσης των τεκμηρίων απαιτεί την ανακατασκευή εκείνης της μαθηματικής δραστηριότητας που προηγήθηκε, στη βάση τόσο της άμεσης όσο και της έμμεσης παράδοσης. Επομένως, η συζήτηση για τη σημασία και την αξιοπιστία μεταξύ της άμεσης και έμμεσης παράδοσης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και ενδιαφέρουσα και επανέρχεται στο προσκήνιο, από τον W. R. Knorr [Knorr, 1996, 2001], ο οποίος επανεξετάζει μια διαμάχη που έλαβε χώρα στο τέλος του 19ου αιώνα μεταξύ των J. L. Heiberg και M. Klamroth και αφορούσε την αξιοπιστία των αραβικών πηγών για τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Η ίδια ερώτηση τίθεται, εκ νέου, από τους S. Rommevaux, A. Djebbar και B. Vitrac [Rommevaux & Djebbar & Vitrac, 2001], οι οποίοι καταλήγουν ότι η αξιοσημείωτη διαφορά μεταξύ ελληνικών και αραβικών πηγών καθιστά το θέμα της αξιοπιστίας αυτών ιδιαίτερα σύνθετο. Παρόμοια ερώτηση, που αφορά στη σπουδαιότητα της αραβο-λατινικής παράδοσης σχετικά με τη μελέτη των περιεχομένων του Βιβλίου V των *Στοιχείων* του Ευκλείδη, θέτει και ο F. Acerbi [Acerbi, 2003], ενώ, η πιο πρόσφατη μελέτη για το θέμα της κειμενικής παράδοσης των *Στοιχείων* του Ευκλείδη προέρχεται από τον B. Vitrac [Vitrac, 2012]. Για κάποια θέματα ή, ακόμη, και για κάποιους συγγραφείς η έμμεση παράδοση είναι ουσιαστική, όπως για παράδειγμα τα έργα του al-Sijzī, στα οποία ο J. P. Hogendijk [Hogendijk, 1999/2000] βρίσκει ίχνη ενός χαμένου βιβλίου του Μενελάου· επίσης, ο A. Lo Bello εκδίδει, από την αραβική μαρτυρία του al-Nayrīzī, το *Σχόλιο* του Ήρωνα στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη [Lo Bello, 2003, 2009].

Ο προβληματισμός, η συζήτηση, και τα συμπεράσματα που συνάγονται σχετικά με την αξιοπιστία των κειμένων, τα οποία προέρχονται τόσο από την άμεση όσο και από την έμμεση παράδοση, οδήγησε στην παραγωγή ενός σημαντικού αριθμού νέων κριτικών εκδόσεων. Μερικές από αυτές βασίζονται σε μια επανεκτίμηση των χειρόγραφων στοιχείων, όμως, οι περισσότερες αποτελούν μια κριτική έκδοση που εμφανίζεται και διατίθεται για πρώτη φορά. Ενδεικτικά, λοιπόν, μπορούμε να αναφέρουμε: **α)** την έκδοση, από την A. Tihon [Tihon, 1999], του σχολίου του Θέωνα στους *Πρόχειρους Κανόνες* του Πτολεμαίου, **β)** την παραγωγή, από τους A. Stückelberger και G. Grasshoff [Sidoli, 2014, σ. 29], μιας νέας έκδοσης της *Γεωγραφίας* του Πτολεμαίου, με γερμανική μετάφραση και εκτεταμένα σχόλια, **γ)** την έκδοση, από τους J. L. Berggren και N. Sidoli [Sidoli & Berggren, 2007] του αραβικού κειμένου του έργου *Planisphere* του Πτολεμαίου, με αγγλική μετάφραση και σχόλια, **δ)** την παραγωγή της πρώτης κριτικής έκδοσης, από τους R. Rashed και H. Bellosta [Rashed & Bellosta, 2010], του αραβικού κειμένου του έργου *Περί Λόγου Άποτομῆς* του Απολλώνιου, το οποίο προηγουμένως ήταν διαθέσιμο μόνο στη λατινική μετάφραση του Halley, **ε)** την επανέκδοση, από τον A. Jones [Jones, 2001], της λατινικής μετάφρασης που είχε γίνει από τον Γουλιέλμο του Moerbeke του έργου *Κατοπτρικά* του Ήρωνα, με αγγλική μετάφραση και σχολιασμό, **στ)** τις εκδόσεις που περιέχουν πολλαπλές εκδοχές ενός κειμένου, όπως για παράδειγμα **στ$_{\alpha}$)** την ελληνική έκδοση, από τους B. Vitrac και A. Djebbar [Vitrac & Djebbar, 2011], του λεγόμενου Βιβλίου XIV των

Στοιχείων του Ευκλείδη, μαζί με την πρώτη έκδοση της αραβικής μετάφρασης αυτού του κειμένου και, **στβ)** την πλήρη έκδοση, από τους R. Rashed, M. Decorps-Foulquier και M. Federspiel [Rashed & Decorps-Foulquier & Federspiel, 2008-2010], των ελληνικών και αραβικών κειμένων των *Κωνικῶν* του Απολλώνιου, με γαλλική μετάφραση και σχόλια και, **ζ)** την έκδοση, από τους F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac 2014], των *Μετρικών* του Ήρωνα, με εκτενή και εμπεριστατωμένη εισαγωγή, γαλλική μετάφραση και σχολιασμό.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει μια σειρά μελετών για την τεχνική γλώσσα των μαθηματικών έργων. Ενδεικτικά, μπορούμε να αναφέρουμε: **α)** μια σειρά άρθρων, από τον M. Federspiel [Federspiel, 1994, 1999-2000, 2008], για τη γλώσσα των *Κωνικῶν* του Απολλώνιου, **β)** τα κεφάλαια 4 και 5, από το έργο *Shaping of Deduction in Greek Mathematics* του R. Netz [Netz, 1999a, 127-239], τα οποία αφιερώνονται στη γλωσσική δομή του ελληνικού μαθηματικού πεζού λόγου, **γ)** τη μονογραφία *La sintassi logica della matematica greca*, από τον F. Acerbi [Acerbi, 2011a], στην οποία αναπτύσσονται, λεπτομερώς και σε μεγάλη έκταση, οι γλωσσικές επιλογές τις οποίες χρησιμοποιούσαν οι Έλληνες μαθηματικοί για να εκφράσουν τη λογική ανάπτυξη των επιχειρημάτων τους και, **δ)** το άρθρο *The language of givens*, από τον F. Acerbi [Acerbi, 2011b], στο οποίο μελετάται η χρήση του όρου "*δοθέν*" στα μαθηματικά κείμενα.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε την αξιοσημείωτη κειμενική εργασία που αφιερώνεται στους τρεις μεγάλους γεωμέτρες της ελληνιστικής περιόδου: τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη και τον Απολλώνιο.

1) Για τον Ευκλείδη

Υπάρχει ένας αριθμός νέων μεταφράσεων των έργων του. Συγκεκριμένα: **α)** η γαλλική μετάφραση των *Στοιχείων* με σχόλια, από τον B. Vitrac [Vitrac, 1990-2001], **β)** η ιταλική μετάφραση του συνολικού έργου του Ευκλείδη με σχόλια, από τον F. Acerbi [Acerbi, 2007], **γ)** η μελέτη των *Δεδομένων*, η οποία συμπεριλαμβάνει περιλήψεις και αγγλική μετάφραση, από τον C. M. Taisbak [Taisbak, 2003] και, **δ)** μια αξιοσημείωτη έρευνα της μεσαιωνικής παράδοσης των έργων του Ευκλείδη, από τους S. Brentjes, G. De Young, A. Djebbar, E. Kheirandish και A. Lo Bello [Van Brummelen, 2014, σ. 102-106], η οποία αποτελεί και τη μεγαλύτερη πρόσφατη προσθήκη στη γνώση μας σχετικά με τις κειμενικές πηγές του έργου του.

2) Για τον Αρχιμήδη

α) Υπάρχει, σε εξέλιξη, ένα ερευνητικό σχέδιο παραγωγής αγγλικών μεταφράσεων των *Απάντων* του Αρχιμήδη, συνοδευόμενες από γλωσσικά και φιλολογικά σχόλια, από τον R. Netz, **β)** η πλέον, όμως, σημαντική ανάπτυξη στις κειμενικές μελέτες του Αρχιμήδειου συντάγματος είναι η, εκ νέου, ανακάλυψη και η δημοπρασία τού επονομαζόμενου Αρχιμήδειου Παλίμψηστου. Αυτό το

χειρόγραφο, που περιέχει μερικές μοναδικές πραγματείες του Αρχιμήδη, διαβάστηκε, κατά την πρώτη δεκαετία του 20ού αιώνα, από τον J. L. Heiberg και, αμέσως μετά, χάθηκε. Μία καταρχήν περιγραφή του κώδικα δίνεται από τον N.G. Wilson [Wilson, 1999], ενώ η ιστορία του περιγράφεται από τους R. Netz και N. G. Wilson [Netz & Wilson, 2010]. Με ευθύνη του R. Netz και με βάση μια νέα ανάγνωση των χειρόγραφων, κατά την οποία αξιοποιούνται οι δυνατότητες που παρέχει η σύγχρονη τεχνολογία, έχει πραγματοποιηθεί η έκδοση τού ελληνικού κειμένου, η οποία φιλοδοξεί να αντικαταστήσει, τουλάχιστον για μερικές από αυτές τις πραγματείες, την κλασική έκδοση της Λειψίας.

3) Για τον Απολλώνιο

Το κειμενικά έργα για τον Απολλώνιο, κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, είναι αρκετά εκτενή και παρέχουν επαρκές υλικό για την αξιολόγηση της συνεισφοράς του. Πρόκειται: α) για τις προαναφερθείσες εργασίες των R. Rashed, M. Decorps-Foulquier και M. Federspiel [Rashed & Decorps-Foulquier & Federspiel, 2008-2010], β) για την εκτενή μελέτη των *Κωνικῶν*, από τους M. Fried και S. Unguru [Fried & Unguru, 2001], στο τέλος της οποίας επισυνάπτεται και η πρώτη αγγλική μετάφραση των *Κωνικῶν* IV, από τον M. Fried.

II. *Υλικός πολιτισμός και "επιστημονική κουλτούρα"*

Ο υλικός πολιτισμός της Επιστήμης αποτέλεσε μία από τις κύριες περιοχές ενδιαφέροντος και έρευνας των ιστορικών της Επιστήμης στις δεκαετίες του 1970 και 1980. Η επίδραση αυτής της τάσης, όμως, λόγω της έλλειψης πρωτογενούς υλικού, εμφανίζεται αργά στους ιστορικούς των αρχαίων Μαθηματικών. Εντούτοις, κατά την περίοδο που εξετάζουμε, ένας αριθμός μελετητών, μέσω διαφόρων τεχνικών, επιχειρεί να γεφυρώσει το χάσμα.

Αρχικά, υπήρξε ένας αριθμός εργασιών με σαφείς αναφορές στην κοινωνική ζωή και θέση των ανθρώπων οι οποίοι είχαν τα Μαθηματικά ως επάγγελμα ή ως ευρύτερη ενασχόληση. Ενδεικτικά, αναφέρουμε την εργασία *Ελληνικά Μαθηματικά*, στην οποία η S. Cuomo [Cuomo, 2001] επιχειρεί μια γενική επισκόπηση των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών σχετικά με τη χρήση τους από διάφορες επαγγελματικές ομάδες, όπως για παράδειγμα οι τεχνίτες και οι λογιστές.

Ένα σημαντικό τεκμήριο, από το οποίο προέκυψε γόνιμη ερευνητική δραστηριότητα, είναι ο επονομαζόμενος "Μηχανισμός των Αντικυθήρων", δηλαδή τα *σπαράγματα* ενός μηχανισμού που χρησιμοποιήθηκε για υπολογισμούς αστρονομικών θέσεων. Επιγραμματικά, μπορούμε να αναφέρουμε ότι η εργασία που πραγματοποιείται σε αυτήν την περιοχή είναι ιδιαίτερα πλούσια και έχει οδηγήσει, μέχρι στιγμής, σε έναν αριθμό σημαντικών αποτελεσμάτων, που

αφορούν όχι μόνο στα τεχνικής φύσης ευρήματα, αλλά και στην κουλτούρα της μαθηματικής αστρονομίας στον αρχαίο κόσμο. Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι το ερευνητικό πρόγραμμα του "Μηχανισμού των Αντικυθήρων", και ειδικά η μελέτη της συσκευής, απαιτούσε και έφερε σε επαφή πληθώρα ερευνητών από διαφορετικές ερευνητικές περιοχές, προωθώντας με αυτόν τον τρόπο τη *διεπιστημονική έρευνα*.

Τέλος, υπάρχει και μια σειρά μελετών, στην οποία επιχειρείται να συσταθεί η εικόνα των πολιτισμικών συνθηκών κάτω από τις οποίες εργάζονται οι Έλληνες μαθηματικοί. Ενδεικτικά, αναφέρουμε την K. Tybjerg [Tybjerg, 2004], η οποία ισχυρίζεται ότι ο Ήρων στα έργα του *Πνευματικά, Κατοπτρικά και Αύτόματα* περιγράφει μια σειρά μηχανικών εργαλείων, με σκοπό να προσελκύσει τον θαυμασμό του ακροατηρίου. Η ανάγκη επισήμανσης και μιας άλλης διάστασης, εκτός από την πρακτική χρησιμότητα των μηχανών, αναπαριστά, πιθανώς, μια συνιστώσα της φιλοσοφικής διαμάχης που διεξάγεται εκείνη την εποχή.

III. *Κοινωνικό και θεσμικό πλαίσιο*

Οι πληροφορίες που έχουμε για τις συνθήκες ζωής των αρχαίων επαγγελματιών (practitioners), καθώς και για τα κοινωνικά και διανοητικά πλαίσια στα οποία εργάστηκαν είναι ελάχιστες. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να επισημάνουμε κάποιες μελέτες, στις οποίες επιχειρείται να γεφυρωθεί αυτό το κενό με έμμεσους τρόπους. Ενδεικτικά, αναφέρουμε:

1) Τον R. Netz [Netz, 2002], ο οποίος, χρησιμοποιώντας γενικές δημογραφικές τεχνικές, ισχυρίζεται ότι οι μαθηματικοί που έδρασαν κατά την περίοδο της ελληνορωμαϊκής αρχαιότητας ήταν ολιγάριθμοι. Επίσης, χρησιμοποιώντας μια ευρεία επισκόπηση των κειμενικών στοιχείων, ισχυρίζεται ότι η γνώση μας για τη ζωή των μαθηματικών οι οποίοι προέρχονται από την ανώτερη τάξη και δεν κερδίζουν τη ζωή τους με μαθηματικές δραστηριότητες είναι αρκετά περιορισμένη.

2) Τον M. Asper [Asper, 2003], ο οποίος, αποδεχόμενος τον διαχωρισμό "θεωρητικών" και "πρακτικών" Μαθηματικών, ισχυρίζεται ότι η προέλευση των "θεωρητικών" Μαθηματικών ανιχνεύεται στα "πρακτικά" Μαθηματικά που ασκούνται από διάφορες επαγγελματικές ομάδες. Επίσης, ο M. Asper [Asper, 2009] ισχυρίζεται ότι τα "θεωρητικά" Μαθηματικά, τουλάχιστον της κλασικής και ελληνιστικής περιόδου, δεν εντάσσονται σε κάποιο θεσμικό πλαίσιο· αντίθετα, τα "πρακτικά" Μαθηματικά θεσμοθετούνται εντός των εκπαιδευτικών χώρων, όπου οι επαγγελματίες διδάσκονται την τέχνη τους λαμβάνοντας προφορικές οδηγίες.

3) Την S. Cuomo [Cuomo, 2000, σ. 9-56], η οποία εξετάζει τη δημόσια εικόνα εκείνων των ομάδων, όπως είναι για παράδειγμα οι τεχνίτες, οι λογιστές και οι

αστρολόγοι, που χρησιμοποιούσαν μαθηματικές πρακτικές κατά την άσκηση του επαγγέλματός τους.

IV. *Νέες αναγνώσεις*

Από τη σύγχρονη, διεπιστημονικά προσδιορισμένη, μελέτη για τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά αξίζει να αναφέρουμε: **α)** την ανάγνωση που επιχειρεί η S. Cuomo [Cuomo, 2000], η οποία κατατάσσει το έργο του Πάππου στο γενικό διανοητικό πλαίσιο της εποχής του, **β)** την ανάλυση, από τον A. Bernard [Bernard, 2003b], μαθηματικών κειμένων με τη χρήση κατηγοριών της αρχαίας ρητορικής, η οποία συμπληρώνεται με τη λεπτομερή παράθεση και επεξήγηση μιας δυσνόητης παραγράφου από τη *Συναγωγή* του Πάππου [Bernard, 2003a] και, **γ)** τη φιλοσοφική προσέγγιση, από τους A. Jones και J. Feke [Sidoli, 2014, σ. 37], από την οποία διαφαίνεται ότι ο Πτολεμαίος συνέλαβε το ερευνητικό του σχέδιο με όρους φιλοσοφίας της εποχής του και ότι το έργο του είχε μια εσωτερική φιλοσοφική συνοχή και συνέπεια.

Β. Θέματα

Τα θέματα που συζητούνται από τους ιστορικούς στις αρχές του 21ου αιώνα διακρίνονται σε δύο κατηγορίες: **α)** σε θέματα που απασχολούν σταθερά τους ιστορικούς, όπως η προέλευση των ελληνικών Μαθηματικών, η γεωμετρική ανάλυση, καθώς και κάποιοι κλάδοι των Μαθηματικών, όπως η αστρονομία και η αρμονική και, **β)** σε θέματα που αναδείχτηκαν σχετικά πρόσφατα, όπως οι μαθηματικοί και σχολιαστές της Ύστερης αρχαιότητας, η ελληνική συνδυαστική, καθώς και οι τεχνικές επίλυσης προβλημάτων.

α) Σχετικά με το θέμα της προέλευσης των ελληνικών Μαθηματικών από άλλους λαούς, συγκεκριμένα, από τους λαούς της Μεσοποταμίας διαθέτουμε ελάχιστα στοιχεία και πολλές υποθέσεις. Παρ' όλα αυτά, αποτέλεσε, για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, προσφιλές θέμα για τους ιστορικούς των Μαθηματικών· σήμερα, όμως, αντιμετωπίζεται με μεγάλη επιφύλαξη και ιδιαίτερη προσοχή.

β) Το υλικό που προέρχεται από κείμενα που έχουν γραφτεί κατά την περίοδο της Ύστερης αρχαιότητας, εξαιτίας της χρησιμότητάς του για τη μελέτη προγενέστερων περιόδων, συγκεντρώνει σταθερά το ενδιαφέρον των ιστορικών των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Τα τελευταία χρόνια, όμως, μια αλλαγή έχει συντελεστεί στις ιστορικές μελέτες αυτής της περιόδου: οι ιστορικοί αναπτύσσουν ένα ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά της Ύστερης αρχαιότητας και τη βιβλιογραφία τους, "ιδίω δικαιώματι", και όχι μόνο για το ιστορικό υλικό που περιέχουν.

Αποτέλεσμα αυτής της νέας ιστοριογραφικής προσέγγισης είναι η παραγωγή ενός μεγάλου αριθμού μελετών και νέων αναγνώσεων, τις κυριότερες των οποίων έχουμε, ήδη, προαναφέρει. Θα σταθούμε ιδιαίτερα, όμως, σε ένα από τα πλέον αξιοσημείωτα επιτεύγματα των τελευταίων ετών, στην επανεκτίμηση του έργου του Διόφαντου, υπό το πρίσμα της νέας ιστοριογραφίας. Ιδιαίτερη μνεία πρέπει να γίνει στις μελέτες του Γ. Χριστιανίδη, αρχής γενομένης από το 2007, όπου διασαφηνίζει τη γενική προσέγγιση του Διόφαντου (*ὁδός*), υποδεικνύοντας ότι η εισαγωγή των *Ἀριθμητικῶν* μπορεί να διαβαστεί ως μια εξήγηση του τρόπου με τον οποίο ένα πρόβλημα μετασχηματίζεται σε εξίσωση, η οποία, στη συνέχεια, επιλύεται· θα ακολουθήσει η άμεση εφαρμογή αυτής της μεθόδου που προτείνεται στο Πρόβλημα II.8 των *Ἀριθμητικῶν* [Christianidis, 2007]. Ακολουθεί η παρουσίαση ενός νέου πλαισίου για τα πρώτα τρία Βιβλία των *Ἀριθμητικῶν*, στα οποία επιχειρείται τόσο η απαρίθμηση όλων των μεθόδων, οι οποίες χρησιμοποιούνται από τον Διόφαντο για τον μετασχηματισμό των Προβλημάτων σε εξισώσεις, όσο και η εξήγηση του ρόλου των *ὑποστάσεων* [Bernard & Christianidis, 2012]. Τέλος, το έργο του Διόφαντου θα ερμηνευθεί ως έργο "προ-μοντέρνας" άλγεβρας [Christianidis & Oaks, 2013]. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι ο όρος "προ–μοντέρνα" (pre-modern) άλγεβρα εισάγεται από τους Γ. Χριστιανίδη και J. Oaks ως μια νέα ιστοριογραφική κατηγορία, η οποία χρησιμεύει για την περιγραφή και ερμηνεία μιας περιόδου της ιστορίας της άλγεβρας· πρόκειται για την περίοδο που προηγείται της περιόδου της "μοντέρνας" άλγεβρας, και διακρίνεται από αυτήν όσον αφορά στον στόχο, την εμβέλεια και τα εννοιολογικά εργαλεία που χρησιμοποιεί.

Είναι, λοιπόν, σαφές, από την παραπάνω ενδεικτική επισκόπηση, ότι η σταδιακή αλλαγή που παρατηρείται τις τελευταίες δεκαετίες στην ιστορία των Μαθηματικών απέδωσε καρπούς, με αποτέλεσμα στις αρχές του 21ου αιώνα να είμαστε σε θέση να καταγράψουμε ένα σημαντικό έργο. Το γεγονός ότι δεν ανακαλύφθηκαν κάποια σημαντικά νέα κείμενα δεν αποτέλεσε εμπόδιο στην εξέλιξη της μελέτης για την ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών, αλλά έδωσε τη δυνατότητα στους μελετητές να στοχαστούν σε προγενέστερο υλικό και, πιθανώς, να αρχίσουν να τροποποιούν τα συμπεράσματά τους. Πολλοί νέοι ερευνητές εμφανίζονται και η ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών εμπλουτίζεται με νέες ιδέες και προσεγγίσεις.

Η παραδοσιακή ιστοριογραφία τείνει, πλέον, να ξεπεραστεί. Η νέα ιστοριογραφία των Μαθηματικών, η οποία έγινε αντικείμενο σφοδρής διαμάχης στη δεκαετία του 1970, είναι σήμερα η επικρατούσα άποψη. Ο σύγχρονος ερευνητής "αποκρυπτογραφεί" τα αρχαία κείμενα και προσπαθεί να κατανοήσει τα κίνητρα και τις μεθόδους των μαθηματικών της αρχαιότητας, χωρίς να προσφεύγει σε

μαθηματικές θεωρίες και έννοιες που αναπτύχθηκαν πολλούς αιώνες αργότερα από τη χρονική περίοδο που εξετάζει. Αντίθετα, αδιάλειπτο μέλημά του είναι η *ιστορική* προσέγγιση του κειμένου, δηλαδή η ανάγνωση και ερμηνεία αυτού με τη χρήση, αυστηρά και μόνο, των αρχαίων μεθόδων που θα ήταν προσιτές στον συγγραφέα του κειμένου.

Ο πλούτος των νέων μελετών είναι πιθανό να οδηγήσει, σύντομα, σε μια νέα σύνθεση, στην οποία οι πρακτικές των Ελλήνων μαθηματικών της αρχαιότητας θα περιγράφονται ως μαθηματική δραστηριότητα, η οποία θα μπορεί να συγκρίνεται με τις μαθηματικές πρακτικές άλλων αρχαίων πολιτισμών και, ταυτόχρονα, να συσχετίζεται με τις υπόλοιπες διανοητικές και πολιτισμικές δραστηριότητες της εκάστοτε περιόδου.

1.2 ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΙΣΤΟΡΙΟΓΡΑΦΙΑΣ ΠΕΡΙ ΤΟΝ ΗΡΩΝΑ

Οι απόψεις των ιστορικών της αρχαίας ελληνικής Επιστήμης για τον Ήρωνα και το έργο του, στα τέλη του 19ου και στις αρχές του 20ού αιώνα, δεν ήταν, γενικά, και τόσο "θετικές", γεγονός που μπορεί να αποδοθεί, κατά κύριο λόγο, σε δύο παράγοντες: α) στην ελλιπή γνώση του ηρώνειου συντάγματος και, β) στις επικρατούσες ιστοριογραφικές απόψεις εκείνης της εποχής, οι οποίες, όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, χαρακτηρίζονται από αναχρονισμό τόσο ως προς τη μεθοδολογία όσο και ως προς την εστίαση σε ερωτήματα, στα οποία το περιεχόμενο και η μορφή ενός αρχαίου μαθηματικού κειμένου είναι δύο ανεξάρτητες, μεταξύ τους, μεταβλητές. Το 1893 ο H. Diels έθεσε το ερώτημα περί επιστημονικής επάρκειας του Ήρωνα, ισχυριζόμενος ότι τα επιχειρήματα τα σχετικά με την ύπαρξη κενού, που αναπτύσσει στην εισαγωγή των *Πνευματικών* [*HOO*, 4.1-28.15], συναντώνται, επίσης, στην αντίστοιχη πραγματεία του Φίλωνα του Βυζάντιου. Κατά την άποψη του H. Diels, ο αυθεντικός εφευρέτης των επιχειρημάτων ήταν ο Κτησίβιος, ενώ τόσο ο Ήρων όσο και ο Φίλων ήταν απλοί ανεπιτήδευτοι χειρώνακτες, εξαρτώμενοι, αποκλειστικά, από τον πραγματικό εφευρέτη Κτησίβιο [Diels, 1893, σ. 101-127]. Όμως, οι ισχυρισμοί του H. Diels δεν επιβεβαιώθηκαν, αφού το αντίστοιχο χωρίο δεν περιέχεται στα *Πνευματικά* του Φίλωνα που ανακαλύφθηκαν, εκ νέου, σε αραβική μετάφραση. Επιπλέον, οι λεπτομερείς αναλύσεις των πραγματειών τού Φίλωνα και του Ήρωνα, από τον A. G. Drachmann [Drachmann, 1948], δεν επιβεβαιώνουν την άποψη περί απλών χειρώνακτων, οι οποίοι απλώς ανθολογούν και αναπαράγουν στοιχεία. Οι γνώσεις του H. Diels για το έργο του Ήρωνα είναι μάλλον περιορισμένες, αφού ο

προοδευτικός εμπλουτισμός του ηρώνειου συντάγματος χρονολογείται αμέσως μετά.

Αμφισβήτηση για την πρωτοτυπία των επιχειρημάτων του Ήρωνα στην εισαγωγή των *Πνευματικών* εκφράζει και η I. Hammer-Jensen [Hammer-Jensen, 1910], η οποία κατέταξε τον Ήρωνα στη θέση του απλού συλλέκτη στοιχείων από διάφορες πηγές τις οποίες, μάλιστα, έκρινε ότι κατανοεί ελάχιστα· το αποτέλεσμα ήταν να υποβαθμιστεί, ακόμη περισσότερο, η επιστημονική επάρκεια του Ήρωνα. Η I. Hammer-Jensen [Hammer-Jensen, 1913], παρά την εκ νέου ανακάλυψη σημαντικών έργων του Ήρωνα, διατήρησε, σε μεγάλο βαθμό, την ίδια άποψη [Hammer-Jensen, 1913]· μόνο, μεταγενέστερα, σε ένα άρθρο της [Hammer-Jensen, 1928], αναγνωρίζει τις μηχανικές δεξιότητες του Ήρωνα, οι οποίες, όμως, κατά την εκτίμησή της, τον οδήγησαν να γράψει βιβλία σε πεδία στα οποία οι γνώσεις του ήταν πενιχρές. Δεν αναφέρει το παραμικρό για τα γεωμετρικά του έργα.

Ένα από τα έργα του Ήρωνα που αποτέλεσε σημείο αναφοράς των ιστορικών, στο τέλος του 19ου και στις αρχές του 20ού αιώνα, για τη διερεύνηση της επιστημονικής και μαθηματικής επάρκειας αυτού, είναι το *Σχόλιο* στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Και μόνο η αναφορά της ύπαρξης σχολίου στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη είναι ικανή, από μόνη της, να υπερασπιστεί την ειδημοσύνη του Ήρωνα και να καταδείξει ότι δεν είναι ένας απλός χειρώνακτας. Παρ' όλα αυτά, ιστορικοί, όπως ο P. Tannery, δεν αναθεώρησαν την άποψή τους για τη μαθηματική δραστηριότητα του Ήρωνα και, μάλιστα, θεώρησαν απίθανο ένας *πρωτότυπος* συγγραφέας, όπως ο Ήρων, να είναι ταυτόχρονα και σχολιαστής [Tannery, 1882]. Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε ότι, ακόμη και μετά την πλήρη έκδοση του *Σχολίου* και παρά τις πολλαπλές αναφορές του al-Nayrīzī στον Ήρωνα, ο P. Tannery δεν αποδίδει στον Ήρωνα την ιδιότητα του σχολιαστή· ο P. Tannery θα μεταβάλλει την άποψή του και θα αποκαταστήσει την εικόνα του Ήρωνα, μόνο μετά την εκ νέου ανακάλυψη των *Μετρικών* και την έκδοσή τους το 1903 [Tannery, 1904, σ. 147-157, 203-211].

Ανάλογη εικόνα για τη μη σπουδαιότητα του σχολίου μεταφέρει και ο T. Heath. Συγκεκριμένα, γράφει: "Γενικά μιλώντας, τα σχόλια του Ήρωνα δεν φαίνεται να έχουν συμπεριλάβει πολλά από εκείνα που θεωρούνται σημαντικά ... Φαίνεται ότι ο Ήρων ήταν ο πρώτος που εισήγαγε την εύκολη ημι-αλγεβρική μέθοδο απόδειξης των προτάσεων II. 2–10, η οποία, τώρα, είναι ιδιαίτερα δημοφιλής ... Επίσης, υπάρχουν λίγες προσθήκες και επεκτάσεις των προτάσεων του Ευκλείδη. Κάποιες από αυτές είναι ασήμαντες, όπως για παράδειγμα η κατασκευή του ισοσκελούς και του σκαληνού τριγώνου ..." [Heath, 1921, τ. II, σ. 310-312].

Είναι προφανές ότι το *Σχόλιο* στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη αντιμετωπίζεται από τους συγκεκριμένους ιστορικούς σαν σχόλιο σχολικού τύπου, παρά τα παραθέματα του al-Nayrīzī και άλλων Αράβων συγγραφέων, οι οποίοι στην

ολότητά τους πιστεύουν ότι επιλύει δύσκολα σημεία των *Στοιχείων.* Η δυσκολία αποδοχής, αρχικά, της ύπαρξης και, δευτερευόντως, της σπουδαιότητας αυτού του έργου του Ήρωνα, πιθανώς, οφείλεται στην επικρατούσα ιστοριογραφική αντίληψη της εποχής, στην οποία το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά σχόλια επικεντρώνονταν σε εκείνα τα οποία μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν ως πηγές πρόσβασης σε μη διασωθέντα έργα.

Στο σημείο αυτό, και πριν στραφούμε στις ερμηνείες που, κατά καιρούς, έχουν δοθεί για το γεωμετρικό και μετρολογικό σύνταγμα που αποδίδεται στον Ήρωνα, θα είχε ενδιαφέρον να καταγράψουμε ορισμένες πληροφορίες, οι οποίες αντλούνται από αρχαίες μαρτυρίες και αναφέρονται σε διάφορους τομείς, με τους οποίους ασχολείται στο έργο του. Παρά το γεγονός ότι η πλειονότητα των αναφορών επικεντρώνεται σε τεχνικής φύσης σημεία ή παρέχει περιορισμένες βιβλιογραφικές πληροφορίες, το πορτραίτο του Ήρωνα που σκιαγραφείται είναι, μάλλον, ενδιαφέρον και αξιόλογο.

Ενδεικτικά, λοιπόν, μπορούμε να αναφέρουμε: **α)** τις πολλαπλές αναφορές του Πάππου στα *Μηχανικά* του Ήρωνα, όπως καταγράφονται στο Βιβλίο VIII της *Συναγωγής* του, αναφορές που αναδεικνύουν ένα συνθετικό έργο μεγάλης έκτασης, που αποτελείται από τρία τουλάχιστον βιβλία και παρουσιάζει τη θεωρία του κέντρου βάρους, σκέψεις για την κυκλική κίνηση, τη θεωρία των πέντε απλών μηχανών, μελέτη για τους μοχλούς και για τις μηχανές μεταφοράς και ανύψωσης, **β)** τα παραθέματα του Πρόκλου σχετικά με το *Σχόλιο* στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη του Ήρωνα, όπως καταγράφονται στο έργο του *Σχόλιο στο Πρώτο Βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη* [*iE*, 1873, σ. 196.16, 305.24, 346.13], παραθέματα που, παρά τον περιορισμένο αριθμό τους και μολονότι δεν αναφέρουν τον τίτλο της πραγματείας, αποδεικνύουν, πολύ πριν από τη μαρτυρία του al-Nayrīzī, ότι ο Ήρων είχε ενδιαφερθεί για μία πραγματεία θεωρητικής γεωμετρίας, εγείροντας ερωτήματα σχετικά με τη λογική των αποδείξεων και, **γ)** τη μαρτυρία του Γρηγορίου του Ναζιανζηνού, στον επικήδειο λόγο που συνέθεσε για τον αδελφό του Καισάρειο [Boulenger, 1908, σ. XX.4-5]. Στην εισαγωγή του επικήδειου, η οποία περιλαμβάνει μία καλή μελέτη για τη ρητορική του εγκωμίου, απαριθμούνται εμβληματικές φυσιογνωμίες, αντιπροσωπευτικές διαφόρων κλάδων γνώσης, για παράδειγμα από την ιατρική αναφέρονται ο Ιπποκράτης και ο Γαληνός, από τη φιλοσοφία ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης και από τα Μαθηματικά ο Ευκλείδης, ο Πτολεμαίος και ο Ήρων. Η κατάταξη του Ήρωνα μαζί με τον Ευκλείδη και τον Πτολεμαίο αναδεικνύει αυτόν ως έναν διαπρεπή αντιπρόσωπο της μαθηματικής επιστήμης.

Αν στραφούμε, τώρα, στο γεωμετρικό και μετρολογικό σύνταγμα, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι έρευνες των σύγχρονων ιστορικών συνοψίζονται στην ακόλουθη ερώτηση, η οποία, κατά καιρούς, έχει τεθεί με ιδιαίτερη οξύτητα: ο Ήρων ήταν γεωμέτρης ή ένας απλός τοπογράφος/χωρομέτρης;

Αν προσπαθήσουμε να καταγράψουμε τα στοιχεία που πυροδότησαν αυτό το ερώτημα, θα πρέπει να ανατρέξουμε στο Προοίμιο του πρώτου Βιβλίου των *Μετρικών*, στο οποίο η γεωμετρία γίνεται αντιληπτή, στη γραμμή της "αρχαίας παράδοσης", συγκεκριμένα, στη γραμμή του Ηρόδοτου [*Ἡροδότου Ἱστορίαι* ΙΙ, 109, σε αγγλική μετάφραση: Godley, 1926/1990], ως η επιστήμη των μετρήσεων και των κατανομών της γης. Η έμφαση στις ανθρώπινες ανάγκες υποδεικνύει τη χρηστική συνιστώσα του έργου. Το δεύτερο στοιχείο ανιχνεύεται στο κεφάλαιο 25 του έργου *Περί Διόπτρας* [*ΗΟΟ*, 1903, σ. 268], στο οποίο ο Ήρων επιλύει το πρόβλημα του προσδιορισμού όλων των σημείων οριοθέτησης ενός αγροκτήματος, όταν στο σχεδιάγραμμά του έχουν απομείνει μόνο δύο ή τρία σημεία, πρόβλημα που παραπέμπει σε μια διαδικασία την οποία οφείλουν να γνωρίζουν και να εκτελούν οι χωρομέτρες/τοπογράφοι. Οι δύο αυτές αναφορές, ενδεχομένως, ώθησαν πολλούς σύγχρονους ιστορικούς να θεωρήσουν ότι και ο ίδιος ο Ήρων ήταν ένας χωρομέτρης/τοπογράφος, που αντλούσε την έμπνευσή του από τις αρχαίες μεθόδους των Αιγυπτίων. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τον T. Heath, ο οποίος γράφει: "Ο Ήρων ήταν ένας σχεδόν εγκυκλοπαιδικός συγγραφέας των μαθηματικών και φυσικών θεμάτων. Στόχευε, μάλλον, στην πρακτική χρησιμότητα παρά στη θεωρητική πληρότητα· το περιβάλλον του στην Αίγυπτο αποτελεί, χωρίς αμφιβολία, ικανοποιητική εξήγηση αυτού του στόχου" [Heath, 1921, τ. ΙΙ, σ. 307].

Όμως, το πλέον σημαντικό ερώτημα, που καθόρισε μία σειρά ιστοριογραφικών προσεγγίσεων σχετικά με την "ταυτότητα" του Ήρωνα, σχετίζεται με την προέλευση των *Γεωμετρικών*, *Στερεομετρικών* και *Περί Μέτρου*, δηλαδή του επονομαζόμενου "ψευδο-ηρώνειου" συντάγματος, από τα *Μετρικά*. Η καταρχήν αδιαμφισβήτητη ύπαρξη κοινών σημείων οδήγησε στην υπόθεση της προέλευσης των παραπάνω έργων από τα *Μετρικά*, η οποία αποτέλεσε και την ιστορική υπόθεση που υποβόσκει στην επιχειρούμενη ανακατασκευή των *Μετρικών*, από τον Th. H. Martin [Martin, 1854], την εποχή που το έργο των *Μετρικών* θεωρείτο χαμένο. Η εκ νέου ανακάλυψη των *Μετρικών*, όμως, δεν επιβεβαίωσε αυτήν την απευθείας προέλευση, επειδή, κατά την άποψη του Th. H. Martin, θα έπρεπε να μελετηθούν ένα ή περισσότερα ενδιάμεσα έργα.

Τα προαναφερθέντα στοιχεία, όμως, παρακάμφθηκαν από αρκετούς ιστορικούς, οι οποίοι επέστρεψαν στην ιδέα της απλής προέλευσης των συλλογών από τα *Μετρικά*. Έτσι, ο M. Mahoney γράφει: "Αυτός (ο Ήρων) φαίνεται, τώρα, σαν ένας καλά εκπαιδευμένος και συχνά ευφυής εφαρμοσμένος μαθηματικός, όπως επίσης, και σαν ένας ζωτικός σύνδεσμος σε μία συνεχή παράδοση των πρακτικών Μαθηματικών από τους Βαβυλώνιους, μέσω των Αράβων, στην Αναγεννησιακή Ευρώπη. Το πλάτος και το βάθος των Μαθηματικών του Ήρωνα αποκαλύπτεται, πιο καθαρά, στα *Μετρικά* του, μία πραγματεία μετρικού τύπου ... στην οποία η κύρια ασχολία του – να εξάγει από τα έργα μαθηματικών, όπως ο Αρχιμήδης, μόνο τα ευρήματα που συμβάλλουν σε αποτελεσματικές μετρήσεις – βρίσκει την πλήρη λειτουργία της στα άλλα έργα που έχουν φθάσει σε μας, υπό το όνομά του. Τα

Γεωμετρικά είναι, επί της ουσίας, το Βιβλίο Ι των *Μετρικών*. Τα *Στερεομετρικά* είναι, επί της ουσίας, το Βιβλίο ΙΙ. Τα έργα *Γεωδαισία* και *De mensuris* δεν περιέχουν τίποτα περισσότερο από αποσπάσματα των *Γεωμετρικών*. Σε όλα αυτά τα κείμενα είναι δύσκολο να εντοπισθεί η πρωτότυπη συνεισφορά του Ήρωνα ...” [Mahoney, 1972, τ. IV, σ. 314-315]. Όμως, τα σημεία επαφής των *Γεωμετρικών, Στερεομετρικών Ι και ΙΙ* με τα *Μετρικά* είναι, στην πραγματικότητα, πολύ περιορισμένα, οπότε αυτή η, εκ παραλλήλου, ανάγνωση που επιχειρεί ο M. Mahoney δεν βοηθάει να αναδειχθεί το “πλάτος και το βάθος” της μαθηματικής/γεωμετρικής διάστασης των *Μετρικών*.

Παρόμοιες σκέψεις διατυπώνει και ο B. L. van der Waerden. Συγκεκριμένα, γράφει: “Το έργο του Ήρωνος είναι ένα είδος εγκυκλοπαίδειας της στοιχειώδους γεωμετρίας, της εφαρμοσμένης γεωμετρίας και της εφαρμοσμένης μηχανικής … Συνέγραψε, επίσης, ένα υπόμνημα στον Ευκλείδη, ένα σύγγραμμα περί ορισμών, και, τέλος, έναν αριθμό έργων περί εμβαδών και όγκων, το πιο γνωστό από τα οποία φέρει τον τίτλο *Μετρικά* … Διάφοροι τύποι που εμφανίζονται στα έργα του Ήρωνος έχουν ληφθεί από τον Αρχιμήδη … Ορισμένα από τα αριθμητικά παραδείγματα που περιέχονται στις πραγματείες του Ήρωνος έχουν ήδη ανευρεθεί σε σφηνοειδή κείμενα” [van der Waerden, 2003, σ. 324-325]. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, ο B. L. van der Waerden δεν διατυπώνει με σαφήνεια τη θεωρία προέλευσης των συλλογών του “ψευδο-ηρώνειου” συντάγματος από τα *Μετρικά*· κατατάσσει, όμως, τα *Μετρικά,* μαζί με τα έργα του “ψευδο-ηρώνειου” συντάγματος, στα “ήσσονος σημασίας βιβλία υπολογισμού” [van der Waerden, 2003, σ. 325], τα οποία, συγκρινόμενα με τα αριστουργήματα του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου, στερούνται οποιασδήποτε γεωμετρικής/μαθηματικής διάστασης.

Τέλος, ο ιστορικός C. B. Boyer, δίνοντας τη δική του ερμηνεία, γράφει: “Η λέξη *γεωμετρία* αρχικά σήμαινε *μέτρηση της γης*, αλλά η κλασική γεωμετρία, όπως εκείνη που ανακαλύφθηκε στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη και στα *Κωνικά* του Απολλώνιου, πόρρω απείχε από την τοπογραφία. Το έργο του Ήρωνα, από την άλλη, μας δείχνει ότι τα μαθηματικά στην Ελλάδα δεν ήταν όλα *κλασικού* τύπου. Προφανώς, υπάρχουν δύο επίπεδα στη μελέτη των γεωμετρικών σχημάτων ... το ένα εξόχως ορθολογικό, το οποίο μπορεί να είναι γνωστό ως γεωμετρία, και το άλλο *βαθιά* πρακτικό, το οποίο μπορεί να περιγραφεί ως γεωδαισία ... και ήταν, κυρίως, ο βαβυλωνιακός τύπος των Μαθηματικών που βρίσκεται στον Ήρωνα. Είναι αλήθεια ότι στα *Μετρικά* συμπεριλαμβάνεται μία περιστασιακή απόδειξη, αλλά, το σώμα τού έργου ασχολείται με αριθμητικά παραδείγματα στη μέτρηση των μεγεθών, των εμβαδών και των όγκων” [Boyer, 1968, σ. 193-194].

Για τη συνολικότερη αποτίμηση των παραπάνω ιστοριογραφικών απόψεων, θα ήταν χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι στις περισσότερες αναφορές για την ιστορία της αρχαίας ελληνικής Επιστήμης, ακόμη και σε σχετικά πρόσφατες εργασίες, παρουσιάζεται μία διχοτόμηση μεταξύ των θεωρητικών επιτευγμάτων,

όπως είναι η φιλοσοφία και τα θεωρητικά Μαθηματικά, και των πρακτικών επιτευγμάτων, όπως είναι η τεχνολογία και τα Μαθηματικά του εμπορίου και των μετρήσεων. Οι ιστορικοί που αποδέχονται τον παραπάνω διαχωρισμό ταυτίζουν τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά με τα επιτεύγματα μιας εκλεκτής ομάδας συγγραφέων της ελληνιστικής εποχής, όπως ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος, στα έργα των οποίων συναντάται ένα εξαιρετικά πολύπλοκο και αναπτυγμένο είδος Μαθηματικών, καθώς επίσης και ολοκληρωμένες πρακτικές παραγωγικής απόδειξης. Είναι εύλογο, λοιπόν, ότι το ενδιαφέρον τους για εκείνα τα Μαθηματικά, των οποίων οι μέθοδοι βασίζονται, κατά κύριο λόγο, σε αριθμητικούς υπολογισμούς και προσεγγίσεις που εφαρμόζονται από επαγγελματίες σε μία πληθώρα πρακτικών, όπως στη μέτρηση της γης, στο εμπόριο, στην αρχιτεκτονική ή στη διοίκηση, είναι άκρως περιορισμένο. Τότε, όμως, τα Μαθηματικά αυτά περιθωριοποιούνται είτε σαν "πρακτικά Μαθηματικά", στην καλύτερη περίπτωση, είτε σαν "υποδεέστερες μορφές Μαθηματικών", στη χειρότερη. Σύμφωνα με την άποψη του B. Vitrac [Vitrac, 2010, σ. 13-14], δημιουργείται η πολική αντίθεση "γεωμετρία εναντίον γεωδαισίας" ή, με άλλα λόγια, "θεωρία εναντίον πρακτικής", με τον Ήρωνα να τοποθετείται, σύμφωνα με τις παραπάνω ερμηνείες, στον πόλο της γεωδαισίας και να εξομοιώνεται είτε με τους Αιγύπτιους (Heath, Kline) είτε με τους Βαβυλώνιους[3] (Mahoney, van der Waerden, Boyer).

Μολονότι κάποιοι ιστορικοί συνεχίζουν να υποστηρίζουν τη διχοτόμηση μεταξύ "θεωρητικών" και "πρακτικών" Μαθηματικών, όπως για παράδειγμα ο M. Asper [Asper, 2003], η σύγχρονη ιστοριογραφία αρχίζει να υποδεικνύει ότι η εικόνα είναι περισσότερο σύνθετη· επομένως, η αυστηρή διαίρεση σε μαθηματικές πρακτικές "υψηλού" και "χαμηλού" επιπέδου, με άλλα λόγια η διαίρεση μεταξύ "θεωρητικών" και "πρακτικών" Μαθηματικών, δεν απεικονίζει με ακρίβεια το μαθηματικό τοπίο της αρχαιότητας. Στη βάση αυτού του προβληματισμού: **α)** ο R. Netz διακρίνει ένα "υλικό" στοιχείο στον χειρισμό των Ευκλείδειων-Αρχιμήδειων διαγραμμάτων, τα οποία παρατηρεί ότι "κατασκευάζονται" στον πραγματικό χώρο [Netz, 1999a, σ. 56], **β)** ο J. Høyrup, εξετάζοντας την περίπτωση των Μαθηματικών που ασκούνται από επαγγελματίες, εφιστά την προσοχή σε μία κουλτούρα "ψυχαγωγικών" προβλημάτων επίλυσης και, επομένως, υποδεικνύει ότι ο υπολογισμός των εμβαδών της γης δεν στοχεύει πάντα σε πρακτικές επιδιώξεις [Høyrup, 1997a] και, **γ)** η S. Cuomo ενσωματώνει πρακτικές

[3] Η πιθανότητα προέλευσης της γεωμετρίας του Ήρωνα από τους Βαβυλώνιους υποστηρίχθηκε, επίσης, και από τον ιστορικό των Επιστημών Otto Neugebauer. Συγκεκριμένα, γράφει: "Αυτές οι γεωμετρικές πραγματείες, οι οποίες παραδίδονται υπό το όνομα του Ήρωνα του Αλεξανδρινού, θεωρούνται, μερικές φορές, ότι είναι ενδείξεις της παρακμής των ελληνικών Μαθηματικών, και αυτό θα ήταν έτσι αν κάποιος όφειλε να τις θεωρήσει σαν απόγονους των έργων του Αρχιμήδη ή του Απολλώνιου. Αλλά, τέτοια σύγκριση είναι άδικη. Λαμβάνοντας υπόψη την πρόσφατα αποκτηθείσα γνώση μας για τα Βαβυλωνιακά κείμενα, η γεωμετρία του Ήρωνα πρέπει να θεωρηθεί, απλά, μία ελληνιστική μορφή της, εν γένει, ανατολικής παράδοσης" [Neugebauer, 1957, σ. 146].

"χαμηλού προφίλ" στις προηγμένες πρακτικές παραγωγικής απόδειξης και, γενικότερα, τοποθετεί τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά σε ένα υλικό και πολιτισμικό πλαίσιο [Cuomo, 2001].

Τότε, σε αυτήν την εικόνα που αρχίζει να διαμορφώνεται για τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, η συνεισφορά της K. Tybjerg [Tybjerg, 2004, σ. 29-56] μπορεί να θεωρηθεί ιδιαίτερα σημαντική. Γενικά, η K. Tybjerg επισημαίνει την αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρίας, μηχανικής και επαγγελματικών Μαθηματικών, που παρατηρείται στα περισσότερα έργα του Ήρωνα, και προσθέτει ότι αυτού του είδους το εγχείρημα συναντάται πολύ συχνά και σε άλλα έργα του αρχαίου κόσμου. Ειδικά, παρουσιάζει και αναλύει τις στρατηγικές, με τις οποίες η γεωμετρία χρησιμοποιείται στο μηχανικό και μαθηματικό έργο του Ήρωνα. Τα χαρακτηριστικά αυτών των στρατηγικών, οι οποίες προέρχονται κατά πολύ από τον Αρχιμήδη, συνοψίζονται στα παρακάτω: **α)** τα αριθμητικά παραδείγματα αποτελούν ένα σημαντικό τμήμα των αποδεικτικών πρακτικών, **β)** οι μηχανικές μέθοδοι αποτελούν νόμιμα αποδεικτικά εργαλεία και, **γ)** η γεωμετρία εφαρμόζεται τόσο σε φυσικό χώρο όσο και σε μηχανικές συσκευές, ώστε τα σύνορα μεταξύ γεωμετρικών και μηχανικών αντικειμένων να είναι δυσδιάκριτα [Tybjerg, 2004, σ. 34]. Τελικά, ισχυρίζεται η K. Tybjerg, ο Ήρων υιοθετεί Ευκλείδειες-Αρχιμήδειες αποδείξεις για την παραγωγή μιας μηχανικής και πρακτικής γεωμετρίας, η οποία επιτυγχάνεται με μεταβάσεις από μηχανικά σε γεωμετρικά εργαλεία και από μηχανικά σε γεωμετρικά αντικείμενα, και η οποία μπορεί να ονομαστεί *Μηχανική Γεωμετρία*. Με την ερμηνεία αυτή η K. Tybjerg, αφενός, αντικρούει τη διχοτόμηση μεταξύ "θεωρητικών" και "πρακτικών" Μαθηματικών και προεκτείνει τη δύναμη της γεωμετρίας σε κοινωνικά και πρακτικά πλαίσια, και αφετέρου, προσδιορίζει τον στόχο του Ήρωνα, κυρίως, ως παραγωγή μιας μορφής αποδεικτικής γεωμετρίας, κατάλληλης για μετρήσεις, που συμπεριλαμβάνει γεωμετρικές και αριθμητικές διαδικασίες [Tybjerg, 2004, σ. 39].

Τέλος, η ανεπάρκεια του διπλού σχήματος "θεωρητικά-πρακτικά" Μαθηματικά επισημαίνεται και από τον B. Vitrac [Vitrac, 2010, σ. 13], ο οποίος μας υπενθυμίζει ότι η αντίθεση "γεωμετρία *εναντίον* γεωδαισίας" υπάρχει, ήδη, από την αρχαιότητα, όμως, σε ένα μεγάλο βαθμό, είναι τεχνητή. Στην πραγματικότητα, ισχυρίζεται ο B. Vitrac [Vitrac, 2010, σ. 13], δεν υπάρχουν δύο διαφορετικές, ως προς τη φύση των αντικειμένων τους ("νοητά *εναντίον* αισθητών") επιστήμες, αλλά μια πολλαπλότητα χρήσεων της ίδιας γνώσης με διαφορετικούς στόχους. Επομένως, τα μαθηματικά έργα της αρχαιότητας θα μπορούσαν να τεθούν στην πολικότητα "αλγόριθμοι *εναντίον* απόδειξης". Τότε, η κατάταξη για κάποια από τα μαθηματικά έργα της αρχαιότητας είναι προφανής: τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη αποτελούν μέρος της αξιωματικής παραγωγικής αποδεικτικής προσέγγισης, ενώ οι "ψευδο-ηρώνειες" συλλογές αποτελούν ένα από τα κύρια τμήματα των αρχαίων ελληνικών αλγοριθμικών Μαθηματικών [Vitrac, 2010, σ. 13]. Όσον αφορά τώρα στο έργο των *Μετρικών*, εύλογα, δεν μπορεί να καταταγεί σε κάποια

από τις παραπάνω κατηγορίες. Όπως ισχυρίζεται ο B. Vitrac [Vitrac, 2010, σ. 14], ο προφανής στόχος του Ήρωνα, κατά τη συγγραφή του έργου, είναι η διατύπωση μετρολογικών αλγορίθμων, οι οποίοι επικυρώνονται με τη χρήση προτάσεων της αποδεικτικής γεωμετρίας.

Την ίδια ερμηνευτική άποψη θα επαναλάβουν οι F. Acerbi και B. Vitrac στην έκδοση του έργου των *Μετρικών* που πραγματοποίησαν πρόσφατα [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 363]. Συγκεκριμένα, ερμηνεύουν την αναλυτική διαδικασία που καταγράφεται στο έργο των *Μετρικών* ως διαδικασία με αποδεικτικά στοιχεία· θεωρούν ότι οι μετρολογικοί αλγόριθμοι, που καταγράφονται, επικυρώνονται από την ανάπτυξη της αναλυτικής διαδικασίας· επομένως, θεωρούν ότι ο στόχος του Ήρωνα, κατά τη συγγραφή των *Μετρικών*, είναι να "προσφέρει" αυστηρές γεωμετρικές αποδείξεις, με αναλυτική μορφή, για την επικύρωση των αλγορίθμων [επίσης, Acerbi, 2011a, σ. 142].

Η ανάδειξη και κατοχύρωση της αποδεικτικής διάστασης της αναλυτικής διαδικασίας προκύπτει, σύμφωνα με τον F. Acerbi, μετά από την εξέταση των γλωσσικών χαρακτηριστικών του κειμένου, στο οποίο αναπτύσσεται αυτή η διαδικασία. Γενικότερα, ο προσδιορισμός/κατάταξη κειμένων σε συγκεκριμένα είδη, με βάση τα γλωσσικά τους χαρακτηριστικά, είναι ιδιαίτερα εμφανής στην εργασία του F. Acerbi, *I Codici stilistici della matematica greca* [Acerbi, 2012, σ. 167-214]. Στο άρθρο αυτό, ο F. Acerbi ισχυρίζεται ότι τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, με βάση τα γλωσσικά τους χαρακτηριστικά, είναι δομημένα σε συγκεκριμένη γλώσσα, οπότε μπορούν να ταξινομηθούν και να οργανωθούν στα παρακάτω είδη μαθηματικού λόγου: στις *αποδείξεις* (proofs), τους *αλγόριθμους* (algorithms) και τις *διαδικασίες* (procedures). Κάθε είδος από αυτά διακρίνεται από τα δικά του ειδικά γλωσσικά, γραμματικά και συντακτικά, χαρακτηριστικά: οι αποδείξεις από την παρατακτική σύνδεση και τον παραγωγικό συλλογισμό, οι αλγόριθμοι από την υποτακτική σύνδεση και τη χρήση προστακτικών, οι διαδικασίες από την αναφορά στο πρώτο πληθυντικό και τον συμπερασμό. Με βάση αυτήν την οργάνωση, προτείνει τον χαρακτηρισμό των αρχαίων μαθηματικών κειμένων σε *αποδεικτικά*, *αλγοριθμικά* ή *διαδικασιακά*, ή μείξεις αυτών των κατηγοριών, ανάλογα με το είδος και το ποσοστό των ειδών μαθηματικού λόγου που περιέχουν. Επομένως, ο παραγωγικός συλλογισμός της αναλυτικής διαδικασίας καθορίζει, αυτόματα, τον χαρακτήρα της ως αποδεικτικό και αυτή η αποδεικτική διάσταση μεταφέρεται, ως στόχος του Ήρωνα, σε όλο το έργο των *Μετρικών*.

Τότε, όμως, γεννώνται τα παρακάτω ερωτήματα: η σχέση κειμένου και γλώσσας είναι μονοσήμαντη, δηλαδή ένα κείμενο το οποίο εκφράζεται με παραγωγικούς συλλογισμούς μπορεί, άμεσα, να χαρακτηρίζεται ως αποδεικτικό ή χρειάζονται και επιπλέον στοιχεία για να στηρίξουν την αποδεικτική του διάσταση; Αν ναι, τότε, ποια είναι τα στοιχεία αυτά; Γενικότερα, ποια είναι τα στοιχεία που καθορίζουν το είδος του κειμένου και, το κυριότερο, μπορεί η απλή καταγραφή

του είδους του κειμένου να οδηγήσει στη στόχευση του συγγραφέα ή θα πρέπει να ληφθούν υπόψη και άλλες παράμετροι, όπως η ανάγνωση του κειμένου ως *όλον*, ο συνδυασμός διαφόρων παραγόντων, για παράδειγμα το θέμα του κειμένου, η εποχή που γράφεται, το ακροατήριο που απευθύνεται…; Η διερεύνηση των παραπάνω ερωτημάτων, ο εμπλουτισμός με νέα και η προσπάθεια απάντησής τους αποτελεί τον στόχο της παρούσας διατριβής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΚΑΙ ΕΡΓΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

2.1 ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΗΡΩΝΑ

Ο Ήρων ήταν πολυσχιδής και πολυγραφότατος μαθηματικός. Η εργογραφία του περιλαμβάνει κείμενα θεωρητικών Μαθηματικών, όπως το *Σχόλιο* στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, κείμενα μετρολογικού περιεχομένου[4], όπως τα *Μετρικά*, αλλά και κείμενα μηχανικού και τεχνικού/τεχνολογικού περιεχομένου, όπως, για παράδειγμα τα *Μηχανικά*, το *Περί Διόπτρας*, τα *Αύτόματα* και τα *Πνευματικά*. Παρά τα δύσκολα προβλήματα αυθεντικότητας που εγείρονται, είτε για ολόκληρα έργα είτε για τμήματα αυτών, ο Ήρων αποτελεί εξαιρετικά σημαντική πηγή γνώσης των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Η σημασία του γίνεται αμέσως αντιληπτή, αν αναλογιστούμε ότι περισσότερο από το ήμισυ των σωζόμενων ελληνικών μαθηματικών κειμένων αποδίδονται σε πέντε μόνο συγγραφείς: στον Ευκλείδη, στον Πτολεμαίο, στους Αλεξανδρινούς σχολιαστές Πάππο και Θέωνα και στον Ήρωνα [Vitrac, 2008, σ. 1]. Στα έργα των παραπάνω συγγραφέων εμφανίζονται σχεδόν[5] όλα τα είδη του μαθηματικού λόγου που παρήχθησαν στην αρχαία Ελλάδα, όπως η θεωρία αριθμών, η γεωμετρία, η μαθηματική αστρονομία, η λογιστική, η μετρολογία/γεωδαισία, η αρμονική, η μαθηματική γεωγραφία, η οπτική και η μηχανική[6]. Υπό το όνομα του Ήρωνα, λοιπόν, παραδίδονται είκοσι πραγματείες, οι οποίες συγκροτούν αυτό που αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία ως ηρώνειο σύνταγμα και εκτείνεται σε πέντε ολόκληρους τόμους της σειράς Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana (Teubner) της Λειψίας.

---

[4] "Μετρολογικά" χαρακτηρίζονται τα κείμενα που έχουν ως κύριο αντικείμενο τις μετρήσεις της γης, καθώς και τη μέτρηση επιφανειών και όγκων γεωμετρικών σχημάτων.

[5] Χρησιμοποιούμε το επίρρημα "σχεδόν" για να δηλώσουμε, κυρίως, την ιδιαίτερη περίπτωση των *Άριθμητικών* του Διόφαντου, το οποίο είναι ένα έργο "πρώιμης" άλγεβρας και δεν εμπίπτει κυριολεκτικά σε κανένα από τα είδη της παραπάνω ταξινόμησης. Παρόμοιο έργο δεν συναντάμε στα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά. Το αμέσως επόμενο έργο "πρώιμης" άλγεβρας, που συναντάμε στην ιστορία, είναι η *Άλγεβρα* του al-Khwārizmī, γύρω στο 830 μ.Χ.

[6] Για μια σύγχρονη μελέτη σχετικά με την ταξινόμηση των Μαθηματικών στην αρχαία Ελλάδα βλ. B. Vitrac [Vitrac, 2005, σ. 269-301].

Όμως, σε αντίθεση με το πλούσιο έργο του Ήρωνα, οι πληροφορίες που έχουμε για τη ζωή του είναι ελάχιστες. Από όσο γνωρίζουμε, καμία αρχαία βιογραφία δεν έχει αφιερωθεί σε αυτόν, όπως εξάλλου συμβαίνει με τους περισσότερους μαθηματικούς της αρχαιότητας, με μοναδική εξαίρεση τον Αρχιμήδη[7]. Επομένως, για την απόκτηση πληροφοριών χρειάζεται να ανατρέξουμε σε μαρτυρίες άλλων συγγραφέων, καθώς και σε αναφορές που συλλέγονται μέσα από τα έργα του. Θα πρέπει, βέβαια, να προηγηθεί έρευνα της γνησιότητας των έργων αυτών, αφού ο Ήρων είναι ένας από τους αρχαίους Έλληνες συγγραφείς, για τους οποίους το θέμα της αυθεντικότητας των τίτλων που παραδίδονται υπό το όνομά του εγείρεται επιτακτικά.

Μολονότι δεν υπάρχει ποτέ απόλυτη βεβαιότητα για την αυθεντικότητα μιας αρχαίας πραγματείας, δεν έχουμε λόγους να αμφιβάλλουμε ότι ο Ήρων είναι ο συγγραφέας των *Μετρικών*, του *Περί Διόπτρας*, των *Πνευματικών* και των *Αύτομάτων*. Όμως, από τα έργα αυτά δεν αντλούμε ουσιαστικές βιογραφικές πληροφορίες για τον συγγραφέα. Εξάλλου, οι αναφορές άλλων συγγραφέων στον Ήρωνα επικεντρώνονται, κυρίως, σε τεχνικής φύσεως σημεία ή παρέχουν περιορισμένες βιβλιογραφικές πληροφορίες. Μπορούμε, λοιπόν, να παρατηρήσουμε ότι ο Ήρων παραθέτει[8] τον Εύδοξο στο Προοίμιο των *Μετρικών* I [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 146.6-7][9]· τον Αρχιμήδη στο Προοίμιο των *Μετρικών* I [146.6, 146.11], στα *Μετρικά* I.26 [212.1, 212.6, 212.16], I.32 [228.33], I.34 [234.2], I.37 [240.7], I.38 [242.1, 242.9], I.39 [244.5], στο Προοίμιο των *Μετρικών* II [248.4-5], στα *Μετρικά* II.11 [280.2], II.12 [282.2], II.14 [290.3], II.15 [292.1], II.20 [304.2], III.17 [344.15], III.23 [358.10], και στο Προοίμιο των *Πνευματικών* I [*HOO*, τ. I, σ. 24.11-12]· τον Ερατοσθένη στο *Περί Διόπτρας* 35 [*HOO*, τ. III, σ. 302.16]· τον Φίλωνα τον Βυζάντιο στα *Αύτόματα* XX.1, XX.3 [*HOO*, τ. I, σ. 404.13-14, 408.10]· τον Διονυσόδωρο στα *Μετρικά* II.13 [284.19]. Πιθανώς, πρέπει να προσθέσουμε και τον Απολλώνιο τον Περγαίο· παρόλο που ο Ήρων δεν τον αναφέρει ρητά, μνημονεύει τρεις φορές, στα *Μετρικά* III.10 [330.9], III.13 [336.10] και III.15 [340.6], ένα έργο με τίτλο *<Περὶ> τῆς τοῦ χωρίου ἀποτομῆς*, το οποίο δεν διασώζεται, αλλά, όπως μας πληροφορεί ο Πάππος στη *Συναγωγή* VII.3 σ. 34, VII.7-8 σ. 38-40 [Hultsch, 1876-1878], αποδίδεται στον Απολλώνιο. Επίσης, ο Ήρων χρησιμοποιεί δύο φορές, στα *Μετρικά* I.22 [204.5] και I.24

[7] Η βιογραφία του Αρχιμήδη είχε γραφτεί από κάποιον Ηρακλείδη ή Ηράκλειο· δεν διασώζεται, αλλά μνημονεύεται από τον Ευτόκιο [*AOO*, 1910-1915, τ. III, σ. 228.20– 21& *AGE*, 1891-1893, τ. II, σ. 168.7-8].

[8] Οι περισσότερες βιβλιογραφικές πληροφορίες αντλούνται από τα ίδια τα κείμενα των έργων του Ήρωνα, καθώς και από την *Εισαγωγή* της πρόσφατης έκδοσης των *Μετρικών* από τους F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi-Vitrac, 2014, σ. 85-97].

[9] Για το αρχαίο κείμενο των *Μετρικών* χρησιμοποιείται η μεταγραφή των F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi-Vitrac, 2014, σ. 143-359]. Από εδώ και στο εξής, οι παραπομπές στο κείμενο των *Μετρικών* θα γίνονται με αναφορά τού αριθμού σελίδας και του στίχου.

[208.5], αποτελέσματα, τα οποία προκύπτουν από τους πίνακες κάποιου έργου, του "*περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν*", τα οποία παραπέμπουν, μάλλον, στον Πίνακα Χορδών του Ιππάρχου. Θεωρώντας ότι και τα *Μηχανικά*, τα οποία διασώζονται μόνο στην αραβική μετάφραση του Qustā ibn Lūqā, συγκαταλέγονται στα αυθεντικά έργα του Ήρωνα, μπορούμε να σημειώσουμε ότι ο Ήρων αναφέρει, επίσης, τον Ποσειδώνιο (ήκμασε τον 1ο π.Χ. αιώνα) [*HOO*, τ. II, σ. xxi-xxii & 63].

Ο Ήρων αναφέρεται, από τον Πάππο, στη *Συναγωγή* III.21−22 σ. 56, III.25 σ. 62, VIII.1 σ. 1022, VIII.2 σ. 1024 και 1026, VIII.8 σ. 1034, VIII.19 σ. 1060, VIII.20 σ. 1064, VIII.24 σ. 1068, VIII.50 σ. 1114, VIII.52 σ. 1014 και 1016, και VIII.60 σ. 1130 [Hultsch, 1876-1878], από τον Πάππο και τον Θέωνα, στο *iA* [*iA*, 1943, V.14, σ. 89.5], από τον Πρόκλο, στο *iE* [*iE*, 1873, σ. 41.10, 196.16, 305.24, 323.7, 346.13, 429.13] και στο *Ὑποτύπωσις* [Manitius, 1902, σ. 120.23-24], από τον Ευτόκιο, στο *AOO* [*AOO*, 1910-1915, τ. *III,* σ. 58.15, 84.11, 232.15], από τον ανώνυμο συγγραφέα των *Προλεγομένων στη Μαθηματική σύνταξη* του Πτολεμαίου, [Tannery, 1912, τ. II. σ. 447–450] και, πιθανώς, από τον Κασσιόδωρο [Tannery, 1929, τ. IX, σ. 291-293 & 1912-1950, τ. III, σ. 52], από τον οποίο προέρχεται και η μοναδική αρχαία μαρτυρία που περιέχει μία χρονολογική ένδειξη σχετικά με την εποχή που έζησε ο Ήρων. Σύμφωνα με τον Κασσιόδωρο, ο Ήρων είναι μεταγενέστερος της κτηματογράφησης που πραγματοποιήθηκε κατά τη βασιλεία του Αύγουστου (27 π.Χ. – 14 μ.Χ.).

Στην πλειονότητα των πραγματειών που φέρονται υπό το όνομά του περιέχονται πρόλογοι, ένας ή και περισσότεροι, στην περίπτωση που η πραγματεία αποτελείται από περισσότερα του ενός βιβλία· πρόκειται για εισαγωγές, χωρίς αφιέρωση[10], τεχνικού και όχι προσωπικού χαρακτήρα. Δεν έχουμε προλόγους υπό μορφή επιστολής, σαν αυτούς που συναντούμε σε κάποιους συγγραφείς της ελληνιστικής περιόδου (Αρχιμήδης, Διοκλής, Απολλώνιος, Φίλων ο Βυζαντινός και Ὑψικλής), οι οποίοι παρέχουν σπάνιες και αξιοσημείωτες βιογραφικές πληροφορίες σχετικά με τους συγγραφείς. Από τα προλεγόμενα του Ήρωνα δεν λαμβάνουμε καμιά πληροφορία για τη ζωή του, όπως για τον τόπο που έζησε, για το πού και με ποιους σπούδασε Μαθηματικά, αν δίδαξε και σε ποιο πλαίσιο κ.λπ. Περιγράφεται, από τον Πρόκλο, με τον τίτλο "*Ἥρων ὁ μηχανικὸς ἐν τοῖς περὶ ὑδρίων ὡροσκοπείων*" [Manitius, 1902, IV.73] και είναι πράγματι συγγραφέας μηχανικών έργων, αλλά δεν γνωρίζουμε αν αυτός ο τίτλος υποδήλωνε μία ιδιαίτερη λειτουργία, όπως εκείνη του στρατιωτικού μηχανικού ή/και του αρχιτέκτονα.

[10] Μοναδική εξαίρεση αποτελεί το έργο *Ὁρισμοί*, το οποίο εικάζεται ότι ανήκει στο ηρώνειο σύνταγμα. Το βιβλίο αφιερώνεται σε κάποιον Διονύσιο· όμως, λόγω του νεο-πλατωνικού ύφους της, η εισαγωγή δεν θεωρείται αυθεντική [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 16, υπ. 8].

Κάποιες ενδείξεις, σύμφωνα με τις οποίες το σχόλιο του Ήρωνα στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη παρατίθεται από μεταγενέστερούς του, αλλά αγνοείται από τον Μενέλαο και τον Πτολεμαίο, δεν αξιολογούνται ως σημαντικές. Στο ίδιο πνεύμα αξιολογείται και η αναφορά του Πάππου στη *Συναγωγή* III, στην οποία, κατά την ανάπτυξη της επιχειρηματολογίας του για τη στερεά φύση του προβλήματος των δύο μέσων ανάλογων σε συνεχή αναλογία μεταξύ δύο δεδομένων ευθειών, συγκαταλέγει τον Ήρωνα (μαζί με τον Ερατοσθένη, τον Νικομήδη και τον Φίλωνα) στους "*παλαιούς γεωμέτρας*". Η συμπερίληψη του Ήρωνα από τον Πάππο στους "*παλαιούς γεωμέτρας*" δεν υποδεικνύει ότι ο Ήρων έζησε, κατ' ανάγκην, την ελληνιστική περίοδο· απλά, υποδεικνύει ότι δεν μπορεί να είναι σύγχρονος του Πάππου, που έζησε τον 3ο μ.Χ. αιώνα. Οι παραπάνω ενδείξεις, μολονότι είναι αρκετά αβέβαιες, οδηγούν στην υπόθεση ότι ο Ήρων έζησε μεταξύ του 0 και 200 μ.Χ., πιθανώς το δεύτερο ήμισυ του 1ου μ.Χ. αιώνα, σύμφωνα με τους ισχυρισμούς των περισσοτέρων ιστορικών, όπως θα δούμε παρακάτω.

2.2 Η ΕΡΓΟΓΡΑΦΙΑ ΠΟΥ ΑΠΟΔΙΔΕΤΑΙ ΣΤΟΝ ΗΡΩΝΑ

Οι σύγχρονοι ιστορικοί, λαμβάνοντας υπόψη τόσο τα παραθέματα των αρχαίων συγγραφέων όσο και τις αναφορές στα ελληνικά, μεσαιωνικά και αναγεννησιακά χειρόγραφα, ισχυρίζονται, σωστά ή λανθασμένα, ότι υπό το όνομα του Ήρωνα μεταφέρονται περίπου είκοσι έργα, ποικίλης έκτασης, μορφής και περιεχομένου. Τα έργα αυτά μπορούν να καταταγούν σε δύο μεγάλες κατηγορίες: **(α)** έργα γεωμετρικού και μετρολογικού περιεχομένου, και **(β)** έργα που πραγματεύονται θέματα σχετικά με εφαρμογές των Μαθηματικών[11].

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα εξής έργα:

[11] Αυτού του είδους η ταξινόμηση συνάδει, εν μέρει, με την ταξινόμηση των Μαθηματικών που είχε προταθεί από τον Γεμίνο, μαθητή του στωικού Ποσειδώνιου, ο οποίος έζησε, πιθανώς, τον 1ο μ.Χ. αιώνα Ο Γεμίνος είχε γράψει μια μαθηματική εγκυκλοπαίδεια η οποία, όμως, δεν διασώζεται. Σύμφωνα με τον Πρόκλο [*iE*, 1873, σ. 38], ο Γεμίνος ταξινομεί τις μαθηματικές επιστήμες σε δύο κατηγορίες: στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα Μαθηματικά που πραγματεύονται τα αντικείμενα της "καθαρής" σκέψης ("*τὰ νοητὰ*"), και είναι η *Γεωμετρία* και η *Αριθμητική* ("*καὶ τῆς μὲν περὶ τὰ νοητὰ πραγματευομένης δύο τὰ πρώτιστα και κυριώτατα μέρη τίθενται ἀριθμητικὴν καὶ γεωμετρίαν*")· στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα Μαθηματικά που ασχολούνται με τα αισθητά αντικείμενα ("*περὶ τὰ αίσθητά*"), και είναι η *Μηχανική*, η *Αστρονομία*, η *Οπτική*, η *Γεωδαισία*, η *Κανονική* (Μουσική) και η *Λογιστική* ("*τῆς δὲ περὶ τὰ αίσθητὰ τὴν ένέργειαν έχούσης ἕξ, μηχανικήν, άστρολογίαν, όπτικήν, γεωδεσίαν, κανονικήν, λογιστικήν*").

1. ***Μετρικά*** **(*Metrica*),** σε τρία βιβλία.[12]

2. ***Ὁρισμοί*** **(*Definitiones*) 1-132.** Οι *Ὁρισμοί* απαρτίζουν μία σύνθεση 138 ενοτήτων, η οποία περιέχει μία συλλογή γεωμετρικών ορισμών, μετρολογικούς πίνακες, αποσπάσματα από έργα διαφόρων συγγραφέων, όπως σχόλια τού Πρόκλου στο πρώτο βιβλίο των *Στοιχείων*, σχόλια στα ίδια τα *Στοιχεία* ... Η πλειονότητα των ιστορικών, όπως οι K. Dasypodius, Th. H. Martin, F. Hultsch, J. L. Heiberg, T. L. Heath, A. G. Drachmann κ.ά., αποδίδουν ένα μέρος της συλλογής των *Ὁρισμῶν* (ενότητες 1-129, 131 ή 132) στον Ήρωνα. Εξαίρεση αποτελεί ο P. Tannery [Tannery, 1887], ο οποίος ισχυρίζεται ότι ο βασικός πυρήνας του έργου οφείλεται στον Γεμίνο, καθώς και ο W. R. Knorr [Knorr, 1993, σ. 180-192] ο οποίος θεωρεί ότι ο συγγραφέας των *Ὁρισμῶν* είναι ο Διόφαντος. Έχουν βρεθεί αποσπάσματα των *Ὁρισμῶν* σε 30 χειρόγραφα, από τα οποία τα 15 περιέχουν ορισμούς που εικάζεται ότι είναι ηρώνειοι[13]. Η πρώτη έκδοση του ελληνικού κειμένου (ενότητες 1-130), με λατινική μετάφραση, πραγματοποιείται το 1570 από τον K. Dasypodius [Dasypodius, 1570]. Ακολουθεί το 1826 μια επανέκδοση με διορθώσεις από τον C. Hasenbalg [Hasenbalg, 1826]. Οι *Ὁρισμοί* περιλαμβάνονται στις εκδόσεις Teubner [*HOO*, τ. IV].

3. ***Γεωμετρικά*** **(*Geometrica*).** Τα Γεωμετρικά είναι μία συλλογή, η οποία αποτελείται από 24 παραγράφους, μεταβλητής έκτασης (η παράγραφος 2 αποτελείται από 13 γραμμές, ενώ οι παράγραφοι 12 και 24 περιέχουν περισσότερες από 15 σελίδες)· κάθε παράγραφος, με τη σειρά της, χωρίζεται σε έναν αριθμό υποπαραγράφων. Έχουν βρεθεί αποσπάσματα σε 43 χειρόγραφα, αλλά κανένα δεν περιέχει τη συλλογή που έχει ανασυσταθεί από τον Heiberg. Τα *Γεωμετρικά* περιλαμβάνονται στις εκδόσεις Teubner [*HOO*, τ. IV].

4. ***Στερεομετρικά*** **(*Stereometrica*) I & II.** Τα *Στερεομετρικά* I είναι μία συλλογή, η οποία αποτελείται από 97 ενότητες. Έχουν βρεθεί αποσπάσματα σε 15 χειρόγραφα, αλλά κανένα δεν περιέχει τη συλλογή που έχει ανασυσταθεί από τον Heiberg. Τα *Στερεομετρικά* II είναι μια συλλογή, η οποία αποτελείται από 69 ενότητες. Έχουν βρεθεί αποσπάσματα σε 14 χειρόγραφα, αλλά, πάλι, κανένα δεν περιέχει τη συλλογή που έχει ανασυσταθεί από τον Heiberg. Τα *Στερεομετρικά* περιλαμβάνονται στις εκδόσεις Teubner [*HOO*, τ. V].

5. ***Περί μέτρων*** **(*De mensuris*).** Το *Περί Μέτρων* είναι μία συλλογή, η οποία αποτελείται από 61 ενότητες και διασώζεται αυτούσια σε 10 χειρόγραφα. Έχουν

---

[12] Για την αναλυτική περιγραφή των *Μετρικών* βλ. το Κεφάλαιο 3 της παρούσας διατριβής.

[13] Οι πληροφορίες που ακολουθούν, αναφορικά με τα χειρόγραφα που μεταφέρουν το "ηρώνειο σύνταγμα", έχουν αντληθεί από τις εισαγωγές στους διάφορους τόμους τής έκδοσης της Λειψίας (Teubner), καθώς και από την εισαγωγή στο έργο για τα *Μετρικά* των F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 15-31].

βρεθεί αποσπάσματα σε ακόμη περισσότερα χειρόγραφα, αλλά κανένα δεν περιέχει τη συλλογή που έχει ανασυσταθεί από τον Heiberg. Το *Περί μέτρων* περιλαμβάνεται στις εκδόσεις Teubner [*HOO*, τ. V].

6. *Γεωδαισία* (*Geodaesia*). Η *Γεωδαισία* είναι μια σειρά αποσπασμάτων από τα *Γεωμετρικά*, τα οποία μεταφέρονται σε τουλάχιστον 20 χειρόγραφα. Ο Heiberg συγκρότησε αυτά τα αποσπάσματα ως ξεχωριστή πραγματεία, η οποία περιλαμβάνεται στις εκδόσεις Teubner [*HOO*, τ. V]· συγκεκριμένα, στα Προλεγόμενα του τόμου αυτού (τ. V) υπό τον τίτλο: "*Γεωδαισία σὺν Θεῷ τοῦ Ἥρωνος τὸν τῶν σχημάτων ἀποδεικνύουσα μοδισμὸν καὶ πάντα τὰ κατὰ μέρος αὐτοῦ*". Η *Γεωδαισία* έχει εκδοθεί από τον F. Hultsch [Hultsch, 1864, σ. 141-152], με βάση το χειρόγραφο *Par. gr.* 2013, ff. 141r-151r.

7. *Ἥρωνος γεηπονικόν βιβλίον* (*Liber geeponicus*). Το *Ἥρωνος γεηπονικόν βιβλίον*, σύμφωνα με τον Heiberg, περιέχει διάσπαρτα αποσπάσματα από τους *Ὁρισμούς*, τα *Γεωμετρικά*, τα *Στερεομετρικά* I & II και το *Περί μέτρων*, τα οποία μεταφέρονται σε τουλάχιστον 8 χειρόγραφα. Το *Ἥρωνος γεηπονικόν βιβλίον* έχει εκδοθεί από τον F. Hultsch [Hultsch, 1864, σ. 208-234].

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν τα εξής έργα:

8. *Πνευματικά* (*Pneumatica*), σε δύο βιβλία. Είναι το έργο του Ήρωνα που, όπως υποδεικνύουν τα πολυάριθμα μεσαιωνικά χειρόγραφα (περισσότερα από 100) και οι διάφορες εκδόσεις της Αναγέννησης, έχει, πιθανώς, μελετηθεί περισσότερο από τα υπόλοιπα. Αναφέρεται από τον Πάππο στη *Συναγωγή* VIII.2, σ. 1024.26 [Hultsch, 1876-1878]. Αρχικά, τα *Πνευματικά* εκδίδονται στο τέλος του 16ου αιώνα, συγκεκριμένα, το 1575, στη λατινική μετάφραση του F. Commantino, ως *Heronis Alexandrini spiritalium liber, A Federico Commantino Urbinate, ex Graeco, nuper in Latinum converses*. Ακολουθούν πολυάριθμες εκδόσεις, σε τοπικές διαλέκτους. Τελικά, το ελληνικό κείμενο εκδίδεται από τον M. Thévenot [Thévenot, 1693]. Περιλαμβάνεται στις εκδόσεις Teubner [*HOO*, τ. I].

9. *Αὐτόματα* (*Automates*), σε δύο μέρη. Διασώζεται τουλάχιστον σε 39 χειρόγραφα. Αναφέρεται από τον Πάππο στη *Συναγωγή* VIII.2, σ. 1024.28 [Hultsch, 1876-1878]. Το ελληνικό κείμενο έχει εκδοθεί από τον M. Thévenot [Thévenot, 1693]. Περιλαμβάνεται στις εκδόσεις Teubner [*HOO*, τ. I].

10. *Μηχανικά* (*Mechanica*), σε τρία βιβλία. Διασώζεται στην αραβική μετάφραση του Qustā ibn Lūqā. Ο B. Carra de Vaux γνώριζε μόνο 1 χειρόγραφο, ο L. Nix 4, ενώ σύμφωνα με τον F. Sezgin, γνωρίζουμε ότι έχει μεταφερθεί σε 7 χειρόγραφα [Sezgin, 1974, σ. 153-154]. Η αρχή του Βιβλίου I είναι κατεστραμμένη. Στα χειρόγραφα και στις εκδόσεις, το πρόβλημα: "*Τῇ δοθείσῃ δυνάμει τὸ δοθὲν βάρος κινῆσαι διὰ τυμπάνων ὁδοντωτῶν παραθέσεως*", το οποίο αναφέρεται στην αρχή του κειμένου, αναπτύσσεται στο Πρόβλημα 37 του έργου *Περί Διόπτρας*, επαναλαμβάνεται, πιθανώς, στη μη διασωθείσα πραγματεία *Βαρουλκός* και

παρατίθεται από τον Πάππο στη *Συναγωγή* VIII.10 [Hultsch, 1876-1878]. Τα *Μηχανικά* αναφέρονται από τον Πάππο, στη *Συναγωγή* III.21–22, σ. 56.1-2, 56.17, VIII.8, σ. 1034.4, VIII.19, σ. 1060.6, VIII.20, σ. 1064.8, VIII.24, σ. 1063.3, 1068.20-21, VIII.50, σ. 1114.5-6, VIII.60, 1130.7-8 [Hultsch, 1876-1878]. Ο Ευτόκιος παραθέτει την πραγματεία υπό τον τίτλο: "*Ὡς Ἥρων ἐν Μηχανικαῖς εἰσαγωγαῖς*" [*AOO*, τ. III, σ. 58.15]· ο τίτλος αυτός ήταν μάλλον και η επικεφαλίδα του πρώτου βιβλίου, η οποία επιβεβαιώνει το συμπέρασμά του: "Αυτό το βιβλίο είναι επαρκές σαν μια πρώτη εισαγωγή στις μηχανικές τέχνες. Σε αυτά που ακολουθούν… " [Carra de Vaux, 1894, σ. 92]. Η πρώτη έκδοση των *Μηχανικών*, μαζί με τη γαλλική μετάφραση του B. Carra de Vaux, εμφανίζεται το 1893 σε μερικά τεύχη του *Journal Asiatique* και επανεκδίδεται, ως ανεξάρτητος τόμος, το 1894· ο τόμος αυτός αναπαράγεται το 1894, με εισαγωγή του D. R. Hill και σχόλια του A. G. Drachmann [Carra de Vaux, 1894]. Το αραβικό κείμενο περιλαμβάνεται στις εκδόσεις Teubner [*HOO*, τ. II].

11. *Κατοπτρικά* (*De Speculis*). Πρόκειται για μια σύντομη μονογραφία, η οποία μέχρι πρότινος διασώζονταν, περιληπτικά και σε παραποιημένη μορφή, στη λατινική μετάφραση του Γουλιέλμου του Moerbeke. Ο τίτλος των *Κατοπτρικῶν*, για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, αποδίδονταν στον Πτολεμαίο. Η απόδοση αυτή έχει από παλιά αναγνωριστεί ως λάθος του αντιγραφέα, από τη στιγμή που ο μεταγενέστερος οπτικός συγγραφέας Δαμιανός στις *Ὀπτικές ὑποτυπώσεις* [Schöne, 1897] αποδίδει στον Ήρωνα μια απόδειξη ("*ἀπέδειξε γὰρ ὁ μηχανικὸς Ἥρων ἐν τοῖς αὐτοῦ κατοπτρικοῖς*" [Schöne, 1897, σ. 14]), που έχει βρεθεί, ακριβώς η ίδια, στα *Κατοπτρικά*. Σήμερα υπάρχει και μία νέα έκδοση του έργου, από τον A. Jones [Jones, 2001, σ. 145-186], που βασίζεται σε μια νέα ανάγνωση της μετάφρασης του Γουλιέλμου του Moerbeke. Περιλαμβάνεται στις εκδόσεις Teubner [*HOO*, τ. II].

12. *Περί Διόπτρας* (*Dioptra*). Το *Περί Διόπτρας* έχει μεταφερθεί σε 5 χειρόγραφα. Το αρχέτυπο της χειρόγραφης παράδοσης είναι ο κώδικας *Par. suppl. gr*. 607, ο οποίος, όσον αφορά στο τμήμα που περιέχει το *Περί Διόπτρας*, τοποθετείται στις αρχές του 10ου αιώνα. Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει έμμεση αρχαία παράδοση για το έργο αυτό, με μοναδική εξαίρεση μία αναφορά που συναντάται στο *De Speculis* [*HOO*, τ. II, σ. 318.7-9]. Η πρώτη έκδοση του έργου γίνεται, στα ιταλικά, από τον G. B. Venturi [Venturi, 1814, σ. 77-147]. Ακολουθεί η πρώτη έκδοση του ελληνικού κειμένου από τον A. J. H. Vincent [Vincent, 1858]. Περιλαμβάνεται στις εκδόσεις Teubner [*HOO*, τ. III].

13. *Βελοποιϊκά* (*Belopoeica*). Έργο στρατιωτικών μηχανών, το οποίο αναφέρεται από τον Ευτόκιο [*AOO*, τ. III, σ. 58.15]. Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Πάππος αποδίδει στον Ήρωνα και μια πραγματεία με τίτλο *Καταπαλτικά* (*Catapultes*) στη *Συναγωγή* III.21-22 [Hultsch, 1876-1878].

14. *Χειροβαλίστρα*. Το κείμενο αυτού του έργου, πιθανώς ελλιπές, συνοδεύει στα χειρόγραφα εκείνο των *Βελοποιϊκών*. Η πρώτη, μη κριτική έκδοση, και των δύο έργων έγινε από τον M. Thévenot [Thévenot, 1693]. Το αρχέτυπο της χειρόγραφης παράδοσης και για τα δύο έργα είναι ο κώδικας Par. suppl. gr. 607 (*Βελοποιϊκά*, ff. 46r-55v· *Χειροβαλίστρα*, ff. 58-56-57), στον οποίο βασίστηκε η κριτική έκδοση από C. Wescher [Wescher, 1867]. Το ελληνικό κείμενο των *Βελοποιϊκῶν* βρίσκεται στις σελίδες 69-119, και της *Χειροβαλίστρας* στις σελίδες 121-134. Τα *Βελοποιϊκά* επανεκδόθηκαν το 1918 [Diels, Hermann, Schramm, Erwin, 1918], και η *Χειροβαλίστρα* το 1877 [Prou, 1877, σ. 1-319]. Τα ελληνικά κείμενα και των δύο έργων αναπαράχθηκαν και συνοδεύτηκαν με μία αγγλική μετάφραση από τον E. W. Marsden [Marsden, 1971], όπου το κείμενο των *Βελοποιϊκῶν* αναπαράγεται στις σελίδες 18-60, ενώ εκείνο της *Χειροβαλίστρας* στις σελίδες 206-233.

Εκτός από τα παραπάνω έργα, τα οποία έχουν μεταδοθεί από την άμεση παράδοση, αποσπάσματα από μια σειρά έργων που αποδίδονται στον Ήρωνα έχουν μεταφερθεί και από την έμμεση παράδοση. Συγκεκριμένα, πρόκειται για τα έργα:

15. *Σχόλιο* στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (*Kitāb Ḥall shukūk Uqlīdis*). Γνωρίζουμε από μαρτυρίες Αράβων συγγραφέων, κυρίως των Ibn an-Nādim[14] και al-Bīrūnī [Sezgin, 1974, σ. 153], ότι ο Ήρων είχε συνθέσει μια πραγματεία στην οποία διατύπωνε σχόλια στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Το έργο δεν σώζεται. Όμως, γνωρίζουμε μεγάλο μέρος του περιεχομένου του από τον Άραβα μαθηματικό an-Nayrīzī, ο οποίος περιέλαβε πολλά αποσπάσματα από αυτό στο δικό του σχόλιο στα *Στοιχεία*. Το κείμενο του an-Nayrīzī, το οποίο περιέχει σχόλια στα έξι πρώτα βιβλία των *Στοιχείων*, παρατίθεται στον *Codex Leidensis Or.* 399,1, ο οποίος γνωστοποιείται το 1842 από τον J. G. Weinrich [Weinrich, 1842, σ. 213-214] και συντάσσεται από τον Th. H. Martin [Martin, 1854, σ. 96-97]. Οι πρώτες, κατά κάποιον τρόπο, λεπτομερείς πληροφορίες οφείλονται στον P. Tannery [Tannery, 1887, σ. 165-176]. Τελικά, το κείμενο του an-Nayrīzī που περιέχει τα σχόλια στα έξι πρώτα Βιβλία των *Στοιχείων*[15] εκδίδεται από τους R. O Besthorn, J. L. Heiberg κ.ά. [*CL*, partes I-II, 1893-1905, pars III, 1932]. Οι προσθήκες και τα παραθέματα, όχι όμως το "ευκλείδειο" κείμενο με το οποίο συνδέονται, έχουν μεταφραστεί και στα λατινικά από τον Gherardo της Κρεμώνας. Αυτό το αραβικό και λατινικό κείμενο, που εκδίδεται το 1899 από τον M. Curtze [*EOO*, 1899], έχει το

[14] Ο Ibn al-Nādim αναφέρει, στο λήμμα "Ήρων" του δικού του *Fihrist*, τον αραβικό τίτλο της πραγματείας (*Kitāb Ḥall shukūk Uqlīdis*), ενώ στο λήμμα "Ευκλείδης", διευκρινίζει ότι η προαναφερθείσα πραγματεία χρησιμοποιήθηκε από τους Άραβες συγγραφείς al-Nayrīzī και al-Karābīsī.

[15] Πληροφορούμαστε από τον M. Caveing [Vitrac, 1990-2001, τ. I, σ. 30] ότι, όπως προκύπτει από το κείμενο του al-Nayrīzī, το *Σχόλιο* του Ήρωνα εκτεινόταν τουλάχιστον στα οκτώ πρώτα Βιβλία των *Στοιχείων*.

πλεονέκτημα να εκτείνεται από το βιβλίο Ι μέχρι τα δύο τρίτα του βιβλίου Χ. Πρόσφατα, ο A. Lo Bello εκδίδει αγγλική μετάφραση του *Σχολίου* του al-Nayrīzī στα τέσσερα πρώτα Βιβλία των *Στοιχείων* [Lo Bello, 2003, Βιβλίο I, & 2009, Βιβλία II–IV]. Το *Σχόλιο* του Ήρωνα είναι γνωστό, σε μικρότερο βαθμό, και από τον Πρόκλο [*iE*, σ. 196.16-17, 305.24, 323.5[16], 346.13, 429.13[17]].

16. ***Περὶ ὑδρίων ὡροσκοπείων*** (***Fragmenta de horoscopiis***), σε τέσσερα βιβλία. Υπάρχει αναφορά από τον ίδιο τον Ήρωνα στα *Πνευματικά* [*HOO*, τ. I, σ. 2.13–14]. Επίσης, μνημονεύεται από τον Πάππο στη *Συναγωγή* VIII.2, σ. 1026.1 [Hultsch, 1876-1878]. Έχουν μεταδοθεί δύο αποσπάσματα του έργου. Το ένα μεταφέρεται από τον Πάππο σε σχόλιο του έργου *Μεγάλη Μαθηματική Σύνταξη* [*iA*, *Tome I. Alm.* V.14, σ. 89.5]· το άλλο μεταφέρεται από τον Πρόκλο στο έργο του *Ὑποτύπωσις* [*iE*, 1902, IV.73].

17. ***Βαρουλκός*** (***Barulcus)***. Υπάρχει αναφορά από τον Πάππο στη *Συναγωγή* VIII, σ. 1060.5–6, 1060.10–11[Hultsch, 1876-1878].

Τέλος, υπάρχει μια σειρά έργων των οποίων γνωρίζουμε μόνο τους τίτλους:

18. ***Καμαρικά*** (***Camarica***). Έργο, το οποίο έχει υπομνηματισθεί από τον Ισίδωρο τον Μιλήσιο (6ος μ.Χ. αιώνας), σύμφωνα με μία υποσημείωση του Ευτόκιου στα σχόλια στον Αρχιμήδη [*AOO*, vol. III, σ. 84.11]

19. ***Ζυγία***. Έργο, το οποίο μνημονεύεται από τον Πάππο στη *Συναγωγή* VIII.2, σ. 1024.28 [Hultsch, 1876-1878].

20. Ένα έργο για τη χρήση του αστρολάβου, το οποίο μνημονεύεται στο *Fihrist* [Sezgin, 1974, σ. 153].

2.3 Η ΧΡΟΝΟΛΟΓΗΣΗ ΤΟΥ ΗΡΩΝΑ

Ο προσδιορισμός της εποχής που έζησε ο Ήρων είναι ένα από τα θέματα που απασχόλησαν, κατά κόρον, τους ιστορικούς στο παρελθόν και συνεχίζουν να συζητούνται μέχρι και σήμερα. Αυτό που μπορεί να ειπωθεί με βεβαιότητα είναι ότι το όνομά του δεν αναφέρεται σε καμία λόγια πηγή πριν από τον Πάππο (ήκμασε περί το 300 μ.Χ.), ενώ ο ίδιος μνημονεύει τον Αρχιμήδη († 212 π.Χ.). Μέσα

[16] Σε αυτή τη σελίδα ο Πρόκλος δεν αναφέρεται ειδικά στον Ήρωνα, αλλά στους "*περὶ Ἥρωνα καὶ Πορφύριον*".

[17] Σε αυτή τη σελίδα ο Πρόκλος δεν αναφέρεται ειδικά στον Ήρωνα, αλλά στους "*περὶ Ἥρωνα καὶ Πάππον*".

σε αυτό το διάστημα των πεντακοσίων ετών προτάθηκαν, κατά καιρούς, διάφορες εκδοχές, οι οποίες υποστηρίχτηκαν με τη χρήση ποικίλων επιχειρημάτων. Επιχειρώντας μια κατάταξη αυτών, μπορούμε να σημειώσουμε:

2.3.1 Επιχειρήματα που προκύπτουν "εκ της σιωπής" (a silentio)

Ο Βιτρούβιος στο έργο του *De architectura*, που έχει γράψει γύρω στο 25 π.Χ., δεν αναφέρει τον Ήρωνα μεταξύ των Ελλήνων συγγραφέων μηχανικών έργων. Η μη συμπερίληψη του Ήρωνα σε έναν κατάλογο, στον οποίο ο Βιτρούβιος παραθέτει, με συστηματικό τρόπο, τους προκατόχους του[18], ωθεί τον O. Neugebauer [Neugebauer, 1975, σ. 846, υπ. 9] στην εικασία ότι ο Ήρων είναι μεταγενέστερος του Βιτρούβιου. Το επιχείρημα του O. Neugebauer είναι ασθενές και δεν οδηγεί σε ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με την εποχή που έζησε ο Ήρων, από τη στιγμή που ο Βιτρούβιος μπορεί να διαμορφώνει τον συγκεκριμένο κατάλογο από τους μηχανικούς που συγκαταλέγονται μόνο στις κύριες πηγές του έργου του[19].

2.3.2 Επιχειρήματα που προκύπτουν από τη συσχέτιση του Ήρωνα με γνωστά πρόσωπα

Η πρώτη θεωρία που διατυπώθηκε σχετικά με την εποχή που έζησε ο Ήρων διαμορφώνεται, όταν παρατηρήθηκε ότι πολλά χειρόγραφα του έργου *Βελοποιϊκά* έφεραν τον τίτλο: "*Ήρωνος Κτησιβίου βελοποιϊκά*". Δημιουργείται, λοιπόν, η υποψία μιας σχέσης δασκάλου-μαθητή μεταξύ Κτησίβιου και Ήρωνα, αλλά, κατά την προσπάθεια ταυτοποίησης του Κτησίβιου, προκύπτουν δύο διαφορετικοί άντρες με αυτό το όνομα. Ο πρώτος είναι ο εφευρέτης μηχανικός και κατασκευαστής πολιορκητικών μηχανών που έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του ΙΙ (309-247 π.Χ.), ενώ ο δεύτερος, ο νεότερος, έζησε την εποχή του Πτολεμαίου του VII (146-117π.Χ.). Ο T.H. Martin [Martin, 1854, τ. IV] εικάζει ότι ο αναφερόμενος στην επιγραφή των *Βελοποιϊκών* με το όνομα "Κτησίβιος" ήταν ο δεύτερος και, συνεπώς, τοποθετεί τον Ήρωνα στην αρχή του 1ου π.Χ. αιώνα (126-50 π.Χ.). Αντίθετα, ο A. G. Drachmann [Drachmann, 1948, σ. 1-10] θεωρεί ότι ο αναφερόμενος στην επιγραφή με το όνομα "Κτησίβιος" είναι ο μηχανικός του 3ου π.Χ. αιώνα, αλλά δεν συσχετίζει αυτόν με την εποχή που έζησε ο Ήρων,

[18] Ενδεικτικά, αναφέρουμε τους: Αρχύτας (4ος π.Χ. αιώνας), Αρχιμήδης (3ος π.Χ. αιώνας), Κτησίβιος (3ος π.Χ. αιώνας), Φίλων ο Βυζάντιος (3ος π.Χ. αιώνας), Αγησίστρατος (1ος π.Χ. αιώνας) … [Fleury, 1993, τ. VII, σ. 14].

[19] Για παράδειγμα, δεν αναφέρει τον Biton (ήκμασε γύρω στο 170 π.Χ.), συγγραφέα ενός σημαντικού έργου που αναφέρεται σε "*κατασκευές πολεμικών οργάνων και καταπλατικών*", ούτε κάποιον από τους πέντε κατασκευαστές μηχανών που αναφέρει ο Biton με τη σειρά του [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 16].

επισημαίνοντας ότι η αναφερόμενη επιγραφή των *Βελοποιϊκών* θα μπορούσε να αποδεικνύει την επανέκδοση, από τον Ήρωνα, μιας προγενέστερης πραγματείας του Κτησίβιου, η οποία, όμως, σε καμία περίπτωση δεν υποδεικνύει άμεση σχέση μεταξύ τους.

Μια άλλη θεωρία που διατυπώθηκε σχετικά με την εποχή που έζησε ο Ήρων σχετίζεται με την αφιέρωση που υπάρχει στην εισαγωγή του έργου *Όρισμοί* σε κάποιον "*λαμπρότατον Διονύσιον*". Η I. Hammer-Jensen [Hammer-Jensen, 1913, σ. 224-235] ισχυρίζεται ότι με την παραπάνω αφιέρωση ο Ήρων απευθύνεται στον συγκλητικό L. Helius Helvius Dionysius, ο οποίος έζησε στην Αλεξάνδρεια κατά τα έτη 301-302 μ.Χ., οπότε τοποθετεί χρονικά τον Ήρωνα στο τέλος του 3ου μ.Χ. αιώνα και, μάλιστα, μετά τον Πτολεμαίο. Στο παραπάνω επιχείρημα της I. Hammer-Jensen απαντάει ο A. Stein [Stein, 1914, σ. 154-156], ο οποίος ισχυρίζεται ότι η έκφραση "*λαμπρότατος*" δεν απευθύνεται στον L. Helius Helvius Dionysius, όπως ισχυρίζεται η I. Hammer-Jensen, γιατί ο τίτλος "*λαμπρότατος*", που αντιστοιχεί στο λατινικό "*vir clarissimus*", δεν χρησιμοποιείται κατά τους χρόνους του Διοκλητιανού (3ος μ. Χ. αι.). Ο A. Stein ισχυρίζεται ότι ο Ήρων προσφωνεί "*λαμπρότατον*" τον M. Aurelius Papirius Dionysius, ο οποίος ήταν ηγεμόνας της Αιγύπτου το 187-188 μ.Χ., οπότε τοποθετεί χρονικά τον Ήρωνα στο τέλος του 2ου μ.Χ. αιώνα.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι ο Διόφαντος, στην εισαγωγή των "*Ἀριθμητικῶν*" του, απευθύνεται σε κάποιον, αποκαλώντας αυτόν ως "*τιμιώτατον Διονύσιον*". Αυτή η σύμπτωση ονόματος και χαρακτηρισμού, πιθανώς, οδηγεί τον P. Tannery [Tannery, 1912, τ. II, σ. 527-539] στο επιχείρημα, σύμφωνα με το οποίο ο "Διονύσιος" που αναφέρεται στα δύο παραπάνω έργα είναι ο επίσκοπος Αλεξανδρείας (247-265 μ.Χ.), και, επομένως, ο Ήρων είναι σύγχρονος του Διόφαντου και τοποθετείται χρονικά στον 3ο μ. Χ. αιώνα. Ο F. Hultsch στο λήμμα για τον Διόφαντο, που περιέχεται στην εγκυκλοπαίδεια Pauly-Wissova, βλέπει με ιδιαίτερο σκεπτικισμό αυτήν την "ταύτιση" που επιχειρεί ο P. Tannery, αλλά ο T. L. Heath [Heath, 1921, τ. II, σ. 306] αναβιώνει την ιδέα, μολονότι υποστηρίζει ότι ο "Διονύσιος" που αναφέρεται στους *Όρισμούς* και στα *Ἀριθμητικά* είναι ο L. Helius Helvius Dionysius, οπότε, τοποθετεί χρονικά τον Ήρωνα στο τέλος του 3ου μ.Χ. αιώνα και, ίσως, λίγο νωρίτερα από τον Πάππο. Όσο για τον J. L. Heiberg, υποστηρίζει την άποψη της I. Hammer- Jensen, σύμφωνα με την οποία ο "*λαμπρότατος Διονύσιος*" στον οποίο απευθύνεται ο Ήρων είναι το ίδιο πρόσωπο με τον L. Helius Helvius Dionysius [Heiberg, 1914, τ. V, σ. xi, υπ. 1]. Τέλος, ο J. Klein [Klein, 1968, σ. 246-248], επικαλούμενος την προαναφερθείσα αφιέρωση στον "Διονύσιο", θεωρεί ότι ο Ήρων και ο Διόφαντος θα μπορούσαν να έχουν ζήσει την ίδια εποχή· και, αφού παραθέτει διάφορες εκδοχές σχετικά με την εποχή που έζησε ο Ήρων, θα υποστηρίξει, μάλλον, την άποψη του πρώτου εκδότη του Διόφαντου (1621), του C. Bachet de Méziriac [Klein, 1968, σ. 248], σύμφωνα με την οποία ο Ήρων και ο Διόφαντος έζησαν την εποχή του αυτοκράτορα Νέρωνα τον 1ο μ.Χ. αιώνα.

2.3.3 Επιχειρήματα που προκύπτουν από τη σύγκριση μεθόδων ή μηχανών/εργαλείων, που περιγράφονται τόσο από τον Ήρωνα όσο και από άλλους συγγραφείς με γνωστή χρονολόγηση

Σύμφωνα με τον O. Neugebauer [Neugebauer, 1975, σ. 846], η χρήση από τον Βιτρούβιο της μεθόδου τού αναλήμματος[20], στο έργο του *De architectura* IX.7, όπως και από τον Ήρωνα, στο έργο του *Περί Διόπτρας* 35, γίνεται με έναν, μάλλον, απλοϊκό τρόπο, αν συγκριθεί με την πολυπλοκότητα που παρουσιάζει η ίδια μέθοδος, όταν χρησιμοποιείται από τον Πτολεμαίο, στο αντίστοιχο έργο του *Περί Άναλήμματος* [*POO*, 1907, σ. 189-223]. Επιπλέον, συνεχίζει ο O. Neugebauer, η διαδικασία που περιγράφεται από τον Ήρωνα, στο κεφάλαιο 35 του έργου *Περί Διόπτρας* (για τον προσδιορισμό των γεωγραφικών συντεταγμένων των πόλεων Αλεξάνδρειας και Ρώμης χρησιμοποιεί το ανάλημμα και, πιθανώς, μια κοίλη σφαίρα), δεν θα είχε χρησιμοποιηθεί, αν ήταν ήδη γνωστό το έργο τού Πτολεμαίου *Γεωγραφία* (περ. 150-170 μ.Χ.), στο οποίο δίνονται πίνακες με τις γεωγραφικές συντεταγμένες των κύριων πόλεων, μεταξύ των οποίων συμπεριλαμβάνονται η Αλεξάνδρεια και η Ρώμη. Επομένως, συμπεραίνει ο O. Neugebauer, η παραπάνω διαπίστωση είναι αρκετή για να τοποθετηθεί ο Ήρων μεταξύ του 0-150 μ.Χ.

Από την άλλη, η I. Hammer-Jensen [Hammer-Jensen, 1913, σ. 224-235], στηριζόμενη στα ίδια στοιχεία που παραθέτει ο O. Neugebauer και προσθέτοντας, επιπλέον, μια σύγκριση μεταξύ του οργάνου της διόπτρας, που παρέχεται από τον Ήρωνα, και του οργάνου για την παρατήρηση των παραλλάξεων, που περιγράφεται από τον Πτολεμαίο στη *Μεγάλη Μαθηματική Σύναξιν* [*POO*, 1898-1903, τ. I.1, σ. 403-408], καταλήγει σε εντελώς διαφορετικά συμπεράσματα και εικάζει ότι ο Ήρων είναι κατά πολύ μεταγενέστερος του Πτολεμαίου! Τα επιχειρήματα που παραθέτει η Hammer-Jensen, για την αιτιολόγηση της θέσης της, συνοψίζονται στα εξής: **α)** Ο Πτολεμαίος, στο έργο του *Γεωγραφία*, ισχυρίζεται ότι έχει ανακαλύψει μία μαθηματική μέθοδο μέτρησης της απόστασης μεταξύ δύο τόπων, ακόμη και στην περίπτωση που δεν βρίσκονται στον ίδιο μεσημβρινό ή στον ίδιο παράλληλο κύκλο. Όμως, σύμφωνα με την I. Hammer-Jensen, η μέθοδος αυτή είναι ευρέως γνωστή και χρησιμοποιείται ήδη από τον Ήρωνα, στο έργο του *Περί Διόπτρας*, στο οποίο ασχολείται με το πρόβλημα μέτρησης τής απόστασης δύο τόπων μέσω του οργάνου της διόπτρας· συγκεκριμένα, λαμβάνοντας ως παράδειγμα τη μέτρηση της απόσταση μεταξύ Ρώμης και Αλεξάνδρειας, ο Ήρων αναφέρει την παρατήρηση της ίδιας έκλειψης

[20] Στην Αστρονομία ο όρος *ανάλημμα* αναφέρεται στην παρουσίαση μιας μεθόδου με την οποία διάφορα σημεία, τόξα και γωνίες της ουράνιας σφαίρας, αναπαρίστανται σε ένα επίπεδο. Η αναπαράσταση αυτή επιτυγχάνεται με τη χρήση ορθών προβολών σε τρία επίπεδα που τέμνονται κάθετα ανά δύο.

σελήνης στις δύο πόλεις και δίνει το σχέδιο του αναλήμματος για τη Ρώμη. Άρα, ο Ήρων είναι μεταγενέστερος του Πτολεμαίου. **β)** Το όργανο διόπτρα που περιγράφεται στο έργο *Περί Διόπτρας* του Ήρωνα, παρατηρεί η I. Hammer-Jensen, είναι ένα περίτεχνο και ακριβές όργανο, το οποίο, μάλλον, δεν γνώριζε ο Πτολεμαίος, γιατί τότε δεν θα κατασκεύαζε ένα ατελές "παραλλακτικό" όργανο, όπως το δικό του, και μάλιστα σε μια εποχή που χαρακτηρίζεται από την αλματώδη εξέλιξη της κατασκευής οργάνων. Τελικά, συμπεραίνει, ο Ήρων είναι, κατά πολύ, μεταγενέστερος του Πτολεμαίου.

Με τη σειρά του ο A. G. Drachmann [Drachmann, 1950], διαφωνώντας με την αιτιολόγηση των επιχειρημάτων της I. Hammer-Jensen, αναλαμβάνει το καθήκον να επιβεβαιώσει τους ισχυρισμούς του B. Carra de Vaux [Carra de Vaux, 1894, σ. 21-22], τους οποίους αναπαράγει ο W. Schmidt στην εισαγωγή της έκδοσής του [*HOO*, 1903, τ. I, σ. xix-xx], οι οποίοι βασίζονται στην περιγραφή ενός μικρού πιεστηρίου με κοχλία, που περιγράφεται από τον Ήρωνα στο τέλος των *Μηχανικών* του [*HOO*, 1900, τ. II, σ. 241-253]. Ο κοχλίας αυτός, όπως παρατηρούν οι B. Carra de Vaux, W. Schmidt και A. G. Drachmann, αναφέρεται, επίσης, και από τον Πλίνιο τον Πρεσβύτερο στη *Φυσική Ιστορία* του [Thayer, 2009]. Ο Πλίνιος, ο οποίος αφιερώνει τη *Φυσική Ιστορία* του στον αυτοκράτορα Τίτο το 77 μ.Χ., παρατηρεί ότι το πιεστήριο που περιγράφεται από τον Ήρωνα έχει αντικαταστήσει, από το 55 μ.Χ., όλα τα παλιά πιεστήρια. Η ιστορική μαρτυρία του Πλίνιου γίνεται αποδεκτή, ως αληθινή, από τον W. Schmidt, ο οποίος θα προχωρήσει τον συλλογισμό του και θα ισχυριστεί ότι η συγγραφή των *Μηχανικών* πραγματοποιείται από τον Ήρωνα το 55 μ.Χ., επομένως, κατατάσσει χρονολογικά τον Ήρωνα τον 1ο μ.Χ. αιώνα. Την ίδια άποψη συμμερίζεται και ο A. G. Drachmann [Drachmann, 1963, σ. 140], ο οποίος, μάλιστα, ισχυρίζεται ότι η ανακάλυψη του πιεστηρίου οφείλεται αποκλειστικά στον Ήρωνα.

Ένα άλλο τεκμήριο από το ηρώνειο σύνταγμα, που έχει χρησιμοποιηθεί με παρόμοιο τρόπο, αφορά στην περιγραφή ενός υδραυλικού οργάνου που περιγράφεται από τον Ήρωνα στο τέλος του Βιβλίου I των *Πνευματικών* [*HOO*, 1903, τ. I, σ. 192-202]· και αυτό το υδραυλικό όργανο συγκρίνεται με εκείνο που προτείνεται από τον Βιτρούβιο στο *De architectura* X. 8.1-6 [Callebat & Fleury, 1986]. Κάποιοι σχολιαστές βρίσκουν ότι οι περιγραφές είναι συμπληρωματικές [Fleury, 1993] ή ταυτόσημες [Drachmann, 1948, σ. 7 & 100]. Ο P. Keyser [Keyser, 1988, σ. 219-220], όμως, καταφέρνει να δείξει ότι η συσκευή που περιγράφει ο Ήρων στο έργο του είναι μια εξελιγμένη μορφή εκείνης που περιγράφεται από τον Βιτρούβιο. Με την επίκληση μιας μαρτυρίας που προέρχεται από τον Ρωμαίο ιστορικό Σουητώνιο, ο P. Keyser συμπεραίνει ότι το έτος 68 μ.Χ. αποτελεί ένα *terminus ante quem* για την έκδοση των *Πνευματικών*.

Το έργο, όμως, που διαδραμάτισε τον πλέον καθοριστικό ρόλο για τη χρονολογική κατάταξη του Ήρωνα είναι το έργο του *Περί Διόπτρας*. Με βάση την παρατήρηση ότι ο Ήρων στο *Περί Διόπτρας* μετράει τις γωνίες όχι μόνο σε μέρη ορθής, όπως

συνήθιζαν οι αρχαίοι Έλληνες και οι Αιγύπτιοι, αλλά και σε μοίρες, υποστηρίχθηκε ότι έζησε το δεύτερο ήμισυ του 2ου π.Χ. αιώνα. Αλλά η διαίρεση του κύκλου σε 360 μοίρες, όπως και η συγκρότηση του πίνακα χορδών κύκλου, στον οποίο δίνονται τα μήκη των χορδών του κύκλου συναρτήσει των επίκεντρων γωνιών τους, αποδίδονται στον Ίππαρχο [Heath, 1926, τ. I, σ. 20], ο οποίος έζησε τον 2ο π.Χ. αιώνα.

Τα πλέον, όμως, σημαντικά στοιχεία για τη χρονολογική κατάταξη του Ήρωνα απορρέουν από το κεφάλαιο 35 του έργου *Περί Διόπτρας*, στο οποίο περιγράφεται μια διαδικασία για την εύρεση της απόστασης μεταξύ των πόλεων Αλεξάνδρειας και Ρώμης ή ακριβέστερα την εύρεση του μήκους τόξου ενός μεγίστου κύκλου της γης. Η μέτρηση απαιτεί μια μετατροπή μεταξύ των τοπικών συντεταγμένων της Αλεξάνδρειας και της Ρώμης. Το κλειδί αυτής της μετατροπής είναι οι δύο ταυτόχρονες παρατηρήσεις μιας έκλειψης σελήνης, η οποία ήταν ταυτόχρονα ορατή και στις δύο πόλεις. Η έκλειψη αυτή έλαβε μέρος την δέκατη μέρα πριν από την εαρινή ισημερία και άρχισε στην Αλεξάνδρεια την πέμπτη ώρα της νύχτας, ενώ στη Ρώμη την τρίτη ώρα, προφανώς, της ίδιας νύχτας[21].

Σύμφωνα με τον T. H. Martin [Martin, 1854, τ. IV], η επιλογή των δύο συγκεκριμένων πόλεων, Αλεξάνδρειας και Ρώμης, παραπέμπει σε μια εποχή κατά την οποία οι δύο πόλεις συνδέονται με ιδιαίτερους δεσμούς, οπότε και ενισχύει τη χρονολογική τοποθέτηση του Ήρωνα τον 1ο π.Χ. αιώνα, που προτείνει.

Τέλος, ο O. Neugebauer [Neugebauer, 1938, σ. 3-26 & 1975, σ. 847-848], με βάση τις πληροφορίες αυτές, μπόρεσε να ταυτίσει την έκλειψη για την οποία γίνεται λόγος με την έκλειψη που γνωρίζουμε ότι συνέβη την 13η Μαρτίου του 62 μ.Χ, με κάποια απόκλιση βέβαια, αφού η εαρινή ισημερία συνέβη την 20η Μαρτίου του 1962. Η ημερομηνία αυτή συνιστά ένα *terminus post quem* για τη συγγραφή του έργου *Περί Διόπτρας*, επομένως, και για την εποχή που έζησε ο Ήρων. Η χρονολογική τοποθέτηση του Ήρωνα, το δεύτερο ήμισυ του 1ου μ. Χ., αιώνα γίνεται για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα αποδεκτή από την πλειονότητα των ιστορικών, όπως για παράδειγμα τους A. Rome [Rome, 1923, σ. 234-258], A. G. Drachman [Drachman, 1950, σ. 137 & 1963 σ. 12], J. G. Landels [Landels, 1978, σ. 200-201], K. White [White, 1984, σ. 180]· συνεχίζει να γίνεται αποδεκτή από αρκετούς ιστορικούς, όπως για παράδειγμα τους D. Raïos [Raïos, 2000, σ. 19-36], T. Lewis [Lewis, 2001, σ. 54], G. L. Irby-Massie & P. Keyser [Irby-Massie & Keyser, 2002, σ. 117]· αλλά, όπως θα δούμε παρακάτω, η συζήτηση για τη χρονολογική τοποθέτηση του Ήρωνα επανέρχεται με νέα ερωτήματα και διαφορετικές προσεγγίσεις.

---

[21] "*ἔστω οὖν ... αὕτη <ἡ> ἔκλειψις, ἐν Ἀλεξανδρείᾳ μὲν νυκτὸς ὥρας ε, ἐν Ῥώμῃ δὲ ἡ αὐτὴ νυκτὸς ὥρας γ, δηλονότι τῇ αὐτῇ νυκτί. ἔστω δὲ καὶ ἡ νύξ, τουτέστιν ὁ ἡμερήσιος κύκλος, καθ᾽ οὗ φέρεται ὁ ἥλιος ἐν τῇ εἰρημένῃ νυκτί, ἀπέχων ἀπὸ ἰσημερίας ἐαρινῆς, ὡς ἐπὶ τροπὰς χειμερινάς, ἡμέρας δέκα.*" [*HOO*, τ. III, σ. 302. 22-28, 304.1]

Μολονότι η λεπτομερής ανάπτυξη του επιχειρήματος τού O. Neugebauer δεν εμπίπτει στη συνοπτική παρουσίαση των προτεινόμενων ερμηνειών για τη χρονολόγηση του Ήρωνα που επιχειρούμε, κρίνουμε απαραίτητο, για μια καταρχήν κατανόηση του επιχειρήματος αυτού, να αναφέρουμε, επιγραμματικά, τους τρεις ισχυρισμούς επί των οποίων ο O. Neugebauer στηρίζει την ερμηνεία του: **α)** το πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση καθαρά γραφικών τεχνικών[22], μέσω των οποίων παράγονται ευθύγραμμα τμήματα ή τόξα που μπορούν να μετρηθούν με φυσικό τρόπο, **β)** τα δεδομένα αναφέρονται σε μια έκλειψη σελήνης, η οποία έχει παρατηρηθεί στην πραγματικότητα και, **γ)** η έκλειψη της 13ης Μαρτίου του 62 μ. Χ. είναι η μόνη που ικανοποιεί τα δεδομένα.

Η πρώτη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι τα δύο πρώτα επιχειρήματα που προβάλλει ο O. Neugebauer αλληλεξαρτώνται. Πράγματι, η εγγύτητα της έκλειψης με την εαρινή ισημερία καθιστά τα στοιχεία που προέρχονται απ' αυτήν και χρησιμοποιούνται στο κείμενο τόσο ακατάλληλα για την προτεινόμενη γραφική επίλυση του Προβλήματος, ώστε ο Ήρων αναγκάζεται να καταφύγει στην "πρόσφατη μνήμη των αναγνωστών του" [Neugebauer, 1975, σ. 846], επομένως η έκλειψη δεν μπορεί παρά να έχει παρατηρηθεί στην πραγματικότητα από τον Ήρωνα.

Ο N. Sidoli [Sidoli 2005, σ. 236-258], όμως, με μια νέα κειμενική μελέτη του Κεφαλαίου 35 του έργου *Περί Διόπτρας*, δίνοντας ιδιαίτερη προσοχή σε θέματα των μαθηματικών λεπτομερειών του κειμένου, αναδεικνύει μια μαθηματική διαδικασία, κατά την οποία το μήκος του τόξου ενός μεγίστου κύκλου, στη συγκεκριμένη περίπτωση το μήκος του τόξου της απόστασης Ρώμης-Αλεξάνδρειας, μπορεί να υπολογισθεί με τη χρήση τεχνικών οι οποίες συναντώνται σε αρχαίες και μεσαιωνικές πηγές και χρησιμοποιούνται για την επίλυση μετρολογικών προβλημάτων. Τότε, όμως, το πρόβλημα είναι προσιτό σε αριθμητική λύση, η οποία με τη σειρά της θα καθιστούσε πιθανή τη χρησιμοποίηση μιας υποθετικής, και όχι πραγματικής, έκλειψης από τον Ήρωνα. Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχει κάποια ένδειξη στο κείμενο η οποία να δείχνει ότι ο Ήρων πραγματοποίησε τις παρατηρήσεις που αναφέρει, παρά μόνο η επισήμανσή του για τη συχνότητα εμφάνισης των εκλείψεων· οπότε, η πιθανότητα τα στοιχεία που παρέχει να είναι υποθετικά, υπολογισμένα, ή τροποποιημένα από μια πραγματική έκλειψη είναι ανοιχτή[23].

---

[22] Συγκεκριμένα, ο Neugebauer προεκτείνει τον συλλογισμό του και χαρακτηρίζει τη διαδικασία επίλυσης "εξ ολοκλήρου μη μαθηματική" [Neugebauer, 1975, σ. 846].

[23] "… *τετηρήσθω οὖν ἔν τε Ἀλεξανδρείᾳ καὶ Ῥώμῃ <ἡ> αὐτὴ ἔκλειψις τῆς σελήνης· εἰ μὲν γὰρ ἐν ταῖς ἀναγραφείσαις εὑρίσκεται, ταύτῃ χρησόμεθα· εἰ δὲ οὔ, δυνατὸν ἔσται ἡμᾶς αὐτοὺς τηρήσαντας εἰπεῖν διὰ τὸ τὰς τῆς σελήνης ἐκλείψεις διὰ πενταμήνων καὶ ἑξαμήνων γίνεσθαι*…" [*HOO*, 1903, τ. III, σ. 302.17-22].

Σχετικά τώρα με το τρίτο επιχείρημα που προβάλλει ο O. Neugebauer, σύμφωνα με το οποίο η μόνη έκλειψη σελήνης που ικανοποιεί τα στοιχεία που παραθέτει ο Ήρων είναι εκείνη της 13ης Μαρτίου του 62 μ.Χ., ο N. Sidoli καταφεύγει στους πίνακες των B. L. Liu και A. D. Fiala [Liu & Fiala, 1992] για την αναζήτηση εκλείψεων σελήνης οι οποίες πρέπει να πληρούν τα παρακάτω χαρακτηριστικά: **α)** να έχουν παρατηρηθεί μεταξύ του 300 π.Χ. και του 200 μ.Χ., **β)** να έχουν προηγηθεί 10 ± 3 ημέρες της εαρινής ισημερίας, και **γ)** να βρίσκονται εντός του χρονικού διαστήματος των ±5 ωρών από τους προκαθορισμένους χρόνους τόσο για την Αλεξάνδρεια όσο και για τη Ρώμη. Τότε, προκύπτουν οι παρακάτω πιθανές περιπτώσεις [Sidoli 2005, σ. 251]:

Ημερομηνία έκλειψης	Ώρα	Ημερομηνία εαρινής ισημερίας	Ώρα
10 Μαρτίου 133 π.Χ.	4 36	21 Μαρτίου	3 26
12 Μαρτίου 3 π.Χ.	1 41	20 Μαρτίου	16 02
13 Μαρτίου 62 π.Χ.	22 50	20 Μαρτίου	10 20

Είναι σαφές ότι για την έκλειψη του έτους 62 π.Χ., μολονότι η ώρα είναι κατάλληλη, η ημερομηνία είναι πολύ κοντά στην έκλειψη. Για την έκλειψη του έτους 133 π.Χ., μολονότι η ημερομηνία είναι βελτιωμένη, η ώρα είναι προχωρημένη. Όσο για την έκλειψη του έτους 3 π.Χ., τα λάθη τόσο για την ημερομηνία όσο και για την ώρα είναι λιγότερα. Βέβαια, το πιο σημαντικό στοιχείο που προκύπτει από τις περιπτώσεις τού παραπάνω πίνακα είναι οι διαφορές που παρατηρούνται μεταξύ των στοιχείων που δίνει ο Ήρων και των αναφορών των εκλείψεων στους πίνακες των B. L. Liu και A. D. Fiala· οι διαφορές αυτές υποδεικνύουν ότι τα στοιχεία του Ήρωνα δεν μπορούν να αντιστοιχούν σε μια καταχωρημένη, με ακρίβεια, πραγματική έκλειψη [Sidoli, 2005, σ. 251].

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι ο N. Sidoli, σε μεταγενέστερο άρθρο του [Sidoli, 2011, σ. 55-61], αναθεωρεί τον ισχυρισμό του για την πιθανότητα ύπαρξης περισσοτέρων από μίας εκλείψεων σελήνης και αναγνωρίζει ότι στο διάστημα των πέντε αιώνων, μεταξύ του 2ου π.Χ. και 3ου μ.Χ. αιώνα, η μόνη έκλειψη η οποία, εν μέρει, προσιδιάζει με τα στοιχεία που παρέχει ο Ήρων στο κεφάλαιο 35 του έργου *Περί Διόπτρας* είναι εκείνη που ταυτοποιήθηκε, αρχικά, από τον O. Neugebauer, δηλαδή η έκλειψη της 13ης Μαρτίου του 62 μ.Χ. Η παραπάνω διαπίστωση, όμως, δεν οδηγεί, κατ' ανάγκην, και στην παραδοχή ότι η έκλειψη αυτή παρατηρήθηκε στην πραγματικότητα από τον Ήρωνα, οπότε ο N. Sidoli αναγνωρίζει την παραπάνω ημερομηνία μόνο ως *terminus post quem* για τη χρονολόγηση του Ήρωνα.

Παρόμοιοι προβληματισμοί εκφράζονται και από τον F. Acerbi [Acerbi, 2008, τ. III, σ. 283-284], ο οποίος, αφού παραθέσει, περιληπτικά, τα συμπεράσματα της επιχειρηματολογίας που αναπτύσσει ο N. Sidoli, στρέφεται στο κείμενο για να

επισημάνει τη δυνατότητα που παρέχει ο ίδιος ο Ήρων στον αναγνώστη να καταφύγει σε υποθετικές εκλείψεις, αν αυτό κριθεί απαραίτητο. Επιπλέον, παρατηρεί ο F. Acerbi, η ύπαρξη της έκλειψης παρουσιάζεται από τον Ήρωνα με τη χρήση της προστακτικής "*τετηρήσθω οὖν ἔν τε Ἀλεξανδρείᾳ καὶ Ῥώμῃ <ἡ> αὐτὴ ἔκλειψις τῆς σελήνης*", δηλαδή ακολουθεί το τυπικό σχήμα έκφρασης των γεωμετρικών προτάσεων. Η γλωσσική εκφορά, όμως, των ισχυρισμών σε προστακτική έγκλιση προσδίδει σε αυτούς έναν υποθετικό τρόπο έκφρασης, ο οποίος ενισχύει την εικασία ότι τα στοιχεία της έκλειψης που δίνονται, στο κεφάλαιο 35 του έργου *Περί Διόπτρας*, έχουν εφευρεθεί από τον Ήρωνα.

Στη μη επαρκή αιτιολόγηση των επιχειρημάτων που προβάλλονται από τον O. Neugebauer αναφέρεται, επίσης, και ο B. Vitrac [Vitrac, 2009, σ. 155-199 & 2010, σ. 2]. Παράλληλα, θέτει υπό αμφισβήτηση την αυθεντικότητα του κεφαλαίου 35 του έργου *Περί Διόπτρας* και συμπεραίνει ότι η χρονική τοποθέτηση του Ήρωνα στο ευρύ διάστημα μεταξύ του 1ου και του 3ου μ.Χ. αιώνα, ακριβέστερα μεταξύ του 50 και 250 μ.Χ., αποτελεί την πλέον αξιόπιστη και πιθανή επιλογή.

Τέλος, ο R. Masià, σε ένα εκτενές άρθρο του [Masià, 2015, σ. 231-255], θα επιχειρήσει μια νέα προσέγγιση σχετικά με τη χρονολόγηση του Ήρωνα, η οποία βασίζεται στη μελέτη τόσο των "πραγματικών" στοιχείων, δηλαδή των στοιχείων που απορρέουν από τα γεγονότα, όσο και των στοιχείων που προκύπτουν από την ερμηνεία του κειμένου. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα αστρονομικά στοιχεία, που αναφέρονται στις αρχαίες εκλείψεις, τα οποία σήμερα είναι διαθέσιμα σε μια μεγάλη ποικιλία μορφών. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκει το ίδιο το κείμενο του κεφαλαίου 35 του έργου *Περί Διόπτρας* και η πραγμάτευση των εκλείψεων που λαμβάνουν χώρα την περίοδο εκείνη που υποτίθεται ότι έζησε ο Ήρων. Κατά την άποψη του R. Masià, οι σχέσεις μεταξύ αυτών των δύο κατηγοριών έχουν διαμορφώσει το κομβικό σημείο τής διαμάχης για τον προσδιορισμό τής χρονολόγησης τού Ήρωνα· η διαμάχη αυτή αναπτύχθηκε χωρίς σαφή διάκριση μεταξύ γεγονότων και ισχυρισμών, οι οποίοι σε αρκετές περιπτώσεις τίθενται χωρίς ακρίβεια. Επομένως, συνεχίζει ο R. Masià, η ανάλυση που θα στηρίζεται σε ακριβή στατιστικά στοιχεία και σε μια ενδελεχή φιλολογική ερμηνεία του κειμένου κρίνεται απαραίτητη. Επιχειρείται από τον ίδιο και καταλήγει στο παρακάτω συμπέρασμα: η έκλειψη που αναφέρεται στο κείμενο εφευρέθηκε από τον ίδιο τον Ήρωνα, ως παράδειγμα, επομένως, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως δείκτης για το χρονικό διάστημα που έζησε ο Ήρων [Masià, 2015, σ. 253].

Ολοκληρώνοντας, λοιπόν, τη συνοπτική παρουσίαση των κυριότερων υποθέσεων, οι οποίες, κατά καιρούς, διατυπώθηκαν σχετικά με το χρονικό διάστημα που ήκμασε ο Ήρων, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το κοινό στοιχείο των προσεγγίσεων που επιχειρούνται από τους N. Sidoli, F. Acerbi, B. Vitrac, και R. Masià είναι η μη κατάληξη σε συγκεκριμένη χρονολόγηση του Ήρωνα, από τη στιγμή που δεν τίθεται ως στόχος η απόρριψη ή η επιβεβαίωση

κάποιας συγκεκριμένης υπόθεσης. Θέλουν, απλώς, να υποδείξουν την ιδιαίτερη προσοχή που πρέπει να δίνεται, για τον καθορισμό ημερομηνιών, στον χειρισμό αστρονομικών φαινομένων, ώστε να μην μετατρέπονται, λανθασμένα, από *terminus post quem* σε απόλυτους χρονολογικούς καθορισμούς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΑ *ΜΕΤΡΙΚΑ* ΚΑΙ Η ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΤΟΥΣ

3.1 Η ΠΑΡΑΔΟΣΗ ΤΟΥ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΡΙΚΩΝ

Αναμφισβήτητα, τα *Μετρικά* είναι το πλέον σημαντικό από τα έργα μετρολογικού[24] περιεχομένου που μας παρέδωσε η αρχαιότητα[25]. Ωστόσο, η ενασχόληση των ιστορικών των Μαθηματικών με το έργο αυτό έγινε αρκετά αργά, στο τέλος του 19ου αιώνα. Πράγματι, μέχρι το 1896, η ύπαρξη των *Μετρικών* πιστοποιείται, μόνο, από τα σχόλια του Ευτόκιου στην πραγματεία *Κύκλου μέτρησις* του Αρχιμήδη [*ΑΟΟ*, 1910–1915, τ. III, σ. 270.2–3] και από τα ανώνυμα *Προλεγόμενα* στη *Μαθηματική σύνταξη* του Πτολεμαίου [Tannery, 1912, τ. II. σ. 447–450][26].

3.1.1 Στοιχεία για την παράδοση του κειμένου των Μετρικών[27]

Το δεύτερο μισό του 10ου αιώνα, επί αυτοκράτορα Βυζαντίου του Κωνσταντίνου Ζ΄ του Πορφυρογέννητου, τα *Μετρικά*, καθώς και κάποια άλλα έργα, τα οποία παραδίδονται μαζί με τα έργα του Ήρωνα, μεταγράφηκαν σε έναν κώδικα, τον *Constantinopolitanus palatii veteris nº 1*, ο οποίος είναι γνωστός και ως

[24] Βλ. υποσημείωση 4.

[25] Τέτοια έργα κυκλοφορούσαν, ευρέως, στην αρχαιότητα. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τη συλλογή που έχει εκδώσει ο F. Hultsch με γενικό τίτλο *Metrologicorum Scriptorum Reliquiae* [Hultsch, 1864].

[26] Πιο συγκεκριμένα, ο Ευτόκιος, κατά τη συζήτηση του τρόπου εύρεσης της τετραγωνικής ρίζας ενός μη τέλειου τετραγώνου, παραπέμπει στα *Μετρικά*, καθώς και στους Πάππο και Θέωνα: "*ὅπως δὲ δεῖ σύνεγγυς τὴν δυναμένην πλευρὰν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εὑρεῖν, εἵρηται μὲν Ἥρωνι ἐν τοῖς Μετρικοῖς, εἵρηται δὲ Πάππῳ καὶ Θέωνι καὶ ἑτέροις πλείοσιν ἐξηγουμένοις τὴν Μεγάλην σύνταξιν τοῦ Κλαυδίου Πτολεμαίου*". Το ίδιο εδάφιο το συναντούμε, επίσης, σε πολλά χειρόγραφα των *Προλεγομένων* στη *Μαθηματική σύνταξη* του Πτολεμαίου.

[27] Οι πληροφορίες σχετικά με την παράδοση του κειμένου των *Μετρικών* αντλούνται, κατά ένα μεγάλο μέρος, από τα *Προλεγόμενα* του τρίτου τόμου των απάντων του Ήρωνα, που εξέδωσε ο H. Schöne στην περίφημη Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana της Λειψίας [*HOO*, 1903, τ. III σ. VII-XXI], καθώς και από την *Εισαγωγή* της πρόσφατης έκδοσης των *Μετρικών* από τους F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 85-97]

Seragliensis G.I.1, που θα αναφέρουμε στο εξής, εν συντομία, ως κώδικα **S**. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα *Μετρικά*, σε αντίθεση με πολλά από τα άλλα έργα που περιέχει ο κώδικας, παραδίδονται, μόνο, με τον κώδικα **S**.

Η ιστορία του κώδικα **S** στους αιώνες που ακολούθησαν, μετά τη συγγραφή του, δεν είναι γνωστή. Το πιο πιθανό είναι ότι παρέμεινε για πάντα στην Κωνσταντινούπολη. Το 1816 αρχίζει να αναπτύσσεται κάποιο ενδιαφέρον για τα έργα μετρολογικού περιεχομένου που αποδίδονται στον Ήρωνα, όπως φανερώνεται με τα έργα των J.-A. Lettrone [Lettrone, 1816] και A. Mai [Mai, 1819]. Ο Th. H. Martin, το 1854, επιχειρεί να ανασυνθέσει τα *Μετρικά*, τα οποία εκείνη την εποχή θεωρούνταν χαμένα, από τις συλλογές των μετρολογικών προβλημάτων που περιέχονται σε δέκα εννέα χειρόγραφα της Αυτοκρατορικής Βιβλιοθήκης των Παρισίων [Martin, 1854]. Ο κώδικας **S** ανασύρεται, για πρώτη φορά, από τη λήθη, το 1865, από τον E. Miller [Acerbi & Vitrac, 2014], μνημονεύεται, στη συνέχεια, το 1888, από τον F. Blass [Blass, 1888, σ. 222], ανακαλύπτεται, εκ νέου, το 1896, από τον R. Schöne και χρησιμοποιείται, το 1903, από τον υιό του H. Schöne, για την πρώτη έκδοση των *Μετρικών* στον τρίτο τόμο των απάντων του Ήρωνα της περίφημης Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Teubneriana της Λειψίας [*HOO*, 1903, τ. III][28]. Ο κώδικας **S** χρησιμοποιήθηκε το 1912-1914, από τον J. L. Heiberg, για την έκδοση του μετρολογικού συντάγματος στον τέταρτο και πέμπτο τόμο της ίδιας συλλογής [*HOO*, 1912, τ. IV & 1914, τ. V]. Ο κώδικας **S** εκδίδεται, επίσης, το 1964, από τον E. M. Bruins [Bruins, 1964], σε τρεις τόμους, εκ των οποίων ο πρώτος περιέχει φωτογραφικά πανομοιότυπα όλων των σελίδων του χειρόγραφου, ο δεύτερος τη μεταγραφή του ελληνικού κειμένου και ο τρίτος την αγγλική μετάφραση του κειμένου και σχολιασμό. Τέλος, πολύ πρόσφατα, το 2014 κυκλοφορεί μια νέα έκδοση των *Μετρικών*, από τους F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014], σε έναν τόμο, ο οποίος, εκτός από τη μεταγραφή του ελληνικού κειμένου, τη γαλλική μετάφραση και τον σχολιασμό αυτού, περιέχει και μια εκτενή και εμπεριστατωμένη εισαγωγή.

Σήμερα, ο κώδικας **S** φυλάσσεται στη βιβλιοθήκη του ανακτόρου Τοπ-Καπί, η οποία εδώ και κάποιο χρονικό διάστημα παραμένει κλειστή· ως εκ τούτου, μοναδική πηγή, για την εξέταση του χειρόγραφου, αποτελούν τα φωτογραφικά πανομοιότυπα του πρώτου τόμου της έκδοσης του E. M. Bruins [Bruins, 1964].

Η παρουσία των *Μετρικών* στον κώδικα **S**[29], δηλαδή η παρουσία ενός έργου αισθητά διαφορετικού από άλλα έργα μετρολογικού χαρακτήρα, που σώζονται

[28] Τα *Μετρικά* εκδόθηκαν χωρίς τα πολυάριθμα σχόλια που περιέχονται στο χειρόγραφο. Η έκδοση αυτών των σχολίων, παρόλο που είχε αναγγελθεί από τον H. Schöne, δεν πραγματοποιήθηκε ποτέ.

[29] Τα υπόλοιπα έργα που περιέχονται στον κώδικα **S** αναφέρονται, λεπτομερώς, παρακάτω.

στην ελληνική γλώσσα, τόσο ως προς τη δομή και το περιεχόμενο όσο και ως προς τη στόχευση και το ακροατήριο στο οποίο απευθύνεται, οδήγησε τον J. L. Heiberg [Heiberg, 1914, τ. V, σ. xiii] να υποθέσει ότι ο κώδικας συντάχθηκε με σκοπό να χρησιμοποιηθεί για την εκπαίδευση των αρχιτεκτόνων και των μηχανικών στο "Πανεπιστήμιο της Κωνσταντινούπολης"[30]. Μολονότι, πολλές λεπτομέρειες σχετικά με τις συνθήκες και τους λόγους που οδήγησαν στη δημιουργία του κώδικα παραμένουν άγνωστες, αξίζει να σημειωθεί ότι ο κώδικας δημιουργήθηκε σε μια εποχή που διαπνέεται από την ιδέα του εγκυκλοπαιδισμού, καρπός της οποίας ήταν η παραγωγή πλήθους ανθολογίων, παραφράσεων, εγκυκλοπαιδειών και άλλων έργων που τα περιγράφουμε, συνήθως, με τον όρο "δευτερονομικά"[31].

3.1.2 Κωδικολογικά στοιχεία[32]

Ο κώδικας **S** είναι ένας κώδικας, από περγαμηνή 312/317×238/241mm (λόγω, 31 γραμμών που έχουν γραφτεί σε ολόκληρη τη σελίδα). Η επιφάνεια που φυλάσσεται για το κείμενο είναι 221×142/146 mm, με διάστημα 7 mm μεταξύ των γραμμών. Ο κώδικας **S** περιέχει 112 αριθμημένες σελίδες (folios), οι οποίες κατανέμονται ως εξής: αρχικά 2 κενές σελίδες· κατόπιν, ακολουθούν 14 τετράδια, τα οποία περιέχουν τις αριθμημένες σελίδες 3-10, 11-18, 19-26, 27-34, 35-42, 43-50, 51-58, 59-66, 67-74, 75-82, 83-90, 91-98, 99-106, 107-110· τέλος, πάλι 2 κενές σελίδες.

---

[30] Με τον όρο "Πανεπιστήμιο της Κωνσταντινούπολης" εννοείται, πιθανώς, το ίδρυμα που αναφέρεται και ως Σχολή της Μαγναύρας. Η παράδοση αποδίδει στον καίσαρα Βάρδα την αναδιοργάνωση, περί το 855/6, της σχολής της Μαγναύρας, μιας σχολής ανοιχτής και με δωρεάν φοίτηση. Η σχολή σηματοδοτεί την απαρχή της πρώτης βυζαντινής αναγέννησης και αποτελείται από τέσσερα τμήματα: της φιλοσοφίας, της γραμματικής, της γεωμετρίας και της αστρονομίας. Όπως σημειώνει ο P. Lemerle [Lemerle, 1981, σ. 240], σύμφωνα με μαρτυρία του συγγραφέα του έκτου βιβλίου της *Συνέχειας* του Θεοφάνη, το ίδρυμα αυτό επέζησε με την ίδια οργάνωση και τις ίδιες έδρες, αν και όχι με την ίδια λάμψη, μέχρι την εποχή του Κωνσταντίνου Ζ΄ του Πορφυρογέννητου, δηλαδή μέχρι την εποχή που συντάσσεται ο κώδικας **S**.

[31] Χρησιμοποιούμε τον όρο "δευτερονομικά", για να περιγράψουμε τα έργα εκείνα που, ουσιωδώς, βασίζονται σε ένα ή περισσότερα καθιερωμένα έργα-πηγές και αποσκοπούν, σύμφωνα με μια άποψη που έχει διατυπώσει ο R. Netz, είτε: **α)** στην παραγωγή ενός κειμένου, υπό τη μορφή μετάφρασης ή νέας έκδοσης, το οποίο θεσπίζει εκ νέου το παλαιό κείμενο ή, **β)** στη χρησιμοποίησή του, κατά ριζικά νέο τρόπο, όπως για παράδειγμα στην παραγωγή μιας επιτομής ή μιας εγκυκλοπαίδειας [Netz, 1998, σ. 261-288, στη σ. 263].

[32] Οι πληροφορίες που ακολουθούν, αναφορικά με τα διάφορα κωδικολογικά, παλαιογραφικά, σχολιαστικά κ.λπ. χαρακτηριστικά του κώδικα **S**, αντλούνται, κατά ένα μεγάλο μέρος, από την *Εισαγωγή* των *Μετρικών* των F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 85-97].

3.1.3 Το περιεχόμενο του κώδικα

Η διάταξη των σελίδων του χειρόγραφου εμφανίζει πολλά κείμενα ως ανεξάρτητα, ο κατάλογος των οποίων είναι ο παρακάτω:

1) ff. 3r1-17v13: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *Εὐκλείδου γεωμετρία*· κείμενο με σχόλια, από τρεις σχολιαστές

2) ff. 17v16-19r17: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *Διοφάνους* (διορθώθηκε, πιθανώς, από κάποιον από τους σχολιαστές σε *Διοφάντους*)· κείμενο με τέσσερα σχόλια, από έναν σχολιαστή.

3) ff. 19r19-23r15: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *μέθοδος τῶν πολυγώνων*· κείμενο με σχόλια, από δύο σχολιαστές.

4) ff. 23v1-24v21: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *μέθοδος καθολικὴ ἐπὶ τῶν πολυγώνων*· κείμενο με ένα σχόλιο, από έναν σχολιαστή.

5) ff. 24v23-25r11: κείμενο ατελές, χωρίς σχόλια, προερχόμενο από τα *Σφαιρικά* του Θεοδοσίου· δεν φέρει τίτλο, αλλά χωρίζεται από το προηγούμενο κείμενο με μια γραμμή από τελείες.

6) ff. 25r12-26r26: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *περὶ κυλίνδρου* κείμενο χωρίς σχόλια.

7) f. 26v1-25: συλλογή, χωρίς τίτλο, προβλημάτων επί της σφαίρας· κείμενο με ένα σχόλιο, από έναν σχολιαστή.

8) f. 27r1-22: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *Ἥρωνος εἰσαγωγαί*· κείμενο χωρίς σχόλια.

9) ff. 27r23-28v10: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *περὶ εὐθυμετρικῶν* κείμενο χωρίς σχόλια.

10) ff. 28v12-42r16: συλλογή, χωρίς τίτλο, που χωρίζεται από το προηγούμενο κείμενο με μια γραμμή από τελείες· κείμενο με ένα σχόλιο, από έναν σχολιαστή.

11) ff. 42r18-51r10: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *μέτρησις τετραστόου ἤτοι τετρακαμάρου ἐπὶ τετραγώνου βάσεως* · κείμενο με δύο σχόλια, από έναν σχολιαστή.

12) ff. 51r12-54r10: συλλογή, χωρίς τίτλο, στερεομετρικών προβλημάτων, που χωρίζεται από το προηγούμενο κείμενο με μια γραμμή από τελείες· κείμενο με ένα σχόλιο, από έναν σχολιαστή.

13) f. 54r12-v15: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *μέτρησις ὄντος σίτου ἐξ' ἀποθέσεως* το κείμενο χωρίζεται από το προηγούμενο με μια γραμμή από τελείες· κείμενο χωρίς σχόλια.

14) ff. 55r1-61r6: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *μέτρησις πυραμίδων* · κείμενο χωρίς σχόλια.

15) ff. 61r21-62v13: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *Εὐκλείδου εὐθυμετρικά* · το κείμενο χωρίζεται από το προηγούμενο με μια συμμετρική γραμμή από τελείες· κείμενο χωρίς σχόλια.

16) f. 63r1-v25: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *Ἥρωνος γεωμετρικά* · κείμενο χωρίς σχόλια.

17) ff. 64r1-66r23: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *Διδύμου αλεξανδρέως περὶ παντοίων ξύλων τῆς μετρήσεως* · κείμενο χωρίς σχόλια.

18) f. 66v: κενή.

19) ff. 67r1-110v1: τίτλος, με κεφαλαία γράμματα, *Ἥρωνος Μετρικῶν* : βιβλίο I, ff. 67r1-87r1· βιβλίο II, ff. 87v1-99r11· βιβλίο III, ff. 99v1-110v1. Σχόλια, από τον πρώτο σχολιαστή, στα ff. 75r, 79v, 81r-v, 82r-v, από τον δεύτερο και τρίτο, στα ff. 73v, 74r, 77r-v, 78r-v, 79r. Μόνο στο βιβλίο I υπάρχει ο τίτλος, με κεφαλαία γράμματα: *Ἥρωνος Μετρικῶν α΄ προοίμιον* · ενώ, στο τέλος του βιβλίου II, υπάρχει, με κεφαλαία γράμματα: *Ἥρωνος άλεξανδρέως μέτρησις στερεῶν* .

3.1.4 Παλαιογραφικά στοιχεία

Ο αντιγραφέας του χειρόγραφου είναι ο φημισμένος γραφέας Εφραίμ [Prato, 1993, σ. 279-281], στον οποίο αποδίδεται, επίσης, ο περίφημος κώδικας *Laur. Plut.* 28.3 [Perria, 1999, σ. 97-101]. Πρόκειται για έναν κώδικα του 10ου αιώνα, ο οποίος περιέχει τα παρακάτω έργα του Ευκλείδη: *Στοιχεία* (ff. 1-189), *Όπτικά* (ff. 189-209) και *Φαινόμενα* (ff. 209-223). Η μεταγραφή του κώδικα *Laur. Plut.* 28.3, σύμφωνα με την L. Perria [Perria, 1999, ό.π], πραγματοποιήθηκε την εποχή της μεταγραφής του κώδικα *Marc. gr*. 201. Πρόκειται για έναν κώδικα του 10ου αιώνα (954 μ.Χ.), ο οποίος περιέχει την *Εἰσαγωγή* του Πορφύριου και το *Ὄργανον* του Αριστοτέλη. Επίσης, όπως αναφέρει ο G. Prato [Prato, 1993, ό.π.], η γραφική ωριμότητα του Εφραίμ, κατά την αντιγραφή του κώδικα **S**, έχει εξελιχθεί, σε τέτοιο βαθμό, ώστε να μπορεί να συγκριθεί με την ωριμότητα που παρουσιάζει η γραφή του, όταν αντιγράφει τον κώδικα *Vat. gr*. 124. Πρόκειται για έναν κώδικα του 10ου αιώνα (962 μ.Χ.), ο οποίος περιέχει το έργο του Πολύβιου *Ἱστορίαι*. Τα παραπάνω στοιχεία συνηγορούν στην τοποθέτηση της μεταγραφής του κώδικα **S** στον 10ο αιώνα.

Συγκρίνοντας, τώρα, τους κώδικες *Laur. Plut.* 28.3 και **S** μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, εκτός από κάποιες διαφορές που αφορούν στις διαστάσεις τους και τον χώρο στον οποίο τοποθετούνται τα διαγράμματα, δίνουν την ίδια συνολική εντύπωση. Ενδεικτικά, είναι αξιοσημείωτη η ομοιότητα που αφορά στα

κεφαλαία γράμματα για τους τίτλους, το περίγραμμα των εσωτερικών γραμμάτων της παραγράφου και, ιδιαίτερα, τα μικρά γράμματα τού κυρίως κειμένου. Οι δύο κώδικες μπορεί να έχουν μεταγραφεί κατά τη διάρκεια των ίδιων ετών και, πιθανώς, από τον ίδιο χορηγό[33].

Δεν θα υπεισέλθουμε σε μια λεπτομερή περιγραφή της γραφής του Εφραίμ[34], αλλά θα περιοριστούμε σε κάποιες πληροφορίες σχετικά με στις λύσεις που υιοθετούνται για τη διαχείριση των προβλημάτων γραφής, καθώς και των προβλημάτων διαρρύθμισης και διάταξης που τίθενται, ειδικά, σε ένα μαθηματικό κείμενο.

Συγκεκριμένα:

α) η παρουσίαση του κειμένου είναι συμμετρική, με αποτέλεσμα να έχει, σχεδόν, τη μορφή πίνακα.

β) ο κώδικας **S**, αντίθετα με τον *Laur. Plut.* 28.3, περιέχει ελάχιστες συντομογραφίες και τυποποιημένα σύμβολα· για παράδειγμα το τυπικό σύμβολο για το "παραλληλόγραμμο", στον κώδικα *Laur. Plut.* 28.3, εμφανίζεται εκατοντάδες φορές τόσο στο κείμενο όσο και στα σχόλια, ενώ στον κώδικα **S,** αναγράφεται μόνο μια φορά στο περιθώριο του f. 65r. Οι συντομογραφίες και τα τυποποιημένα σύμβολα που καταγράφονται στον κώδικα **S** συσσωρεύονται στο τμήμα που προηγείται των *Μετρικών*· οι μόνες εξαιρέσεις τυπικών συμβόλων, τα οποία συναντώνται, εν αφθονία, στα *Μετρικά*, είναι τα σημεία ς για το *καὶ* και μº για το ουσιαστικό *μονάς*. Η σπανιότητα της χρήσης συμβατικών συμβόλων και συντομογραφιών ενισχύει την υπόθεση, σύμφωνα με την οποία το υπόδειγμα των *Μετρικών* που μεταγράφτηκε στον κώδικα **S** ήταν, ήδη, σε μικρογράμματη γραφή, δηλαδή η εργασία της ανάλυσης των συντομογραφιών τής γραφής που χαρακτηρίζουν τα χειρόγραφα των Μαθηματικών σε μεγαλογράμματη γραφή είχε γίνει, ήδη, σε αυτό το αντίγραφο.

γ) Τα γεωμετρικά αντικείμενα και οι αριθμοί δηλώνονται με κεφαλαία γράμματα, με άνω επισημείωση από μια οριζόντια γραμμή, η οποία εκτείνεται, χωρίς διακοπή, σε ομάδες γραμμάτων, οι οποίες, σχεδόν πάντα, συμφωνούν με τη μαθηματική έννοια που εκφράζεται. Σχετικά με τα κλάσματα: το $\frac{1}{2}$ έχει ένα ιδιαίτερο σημείο (μια μορφή καμπυλόγραμμη), τα υπόλοιπα μοναδιαία κλάσματα χαρακτηρίζονται από ένα κεφαλαίο γράμμα που τονίζεται στην κορυφή του, ενώ τα μη μοναδιαία κλάσματα ονομάζονται από δύο διαδοχικά γράμματα, με το δεύτερο (ο παρονομαστής) να σημειώνεται πάνω από το πρώτο.

---

[33] Για μια λεπτομερή εξέταση των γραφικών στοιχείων του κώδικα **S**, βλ. F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 91-97]

[34] Εκτενή στοιχεία για τη γραφή του Εφραίμ, καθώς και πλούσια βιβλιογραφία, δίνονται από την L. Perria [Perria, 1977-1979].

δ) Από τα κείμενα που περιέχονται στον κώδικα **S,** τα *Μετρικά*, κυρίως, συνοδεύονται από μια σειρά σχολίων. Τα σχόλια αυτά αποδίδονται από τους F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 96] σε τρεις σχολιαστές[35], εκ των οποίων οι δύο είναι μεταγενέστεροι της σύνταξης του κώδικα· συγκεκριμένα, ο πρώτος εξ αυτών, και πλέον ενεργός, τοποθετείται στον 12ο αιώνα και αναγνωρίστηκε ότι σχολίασε, επίσης, το χειρόγραφο 3 του κώδικα *Matrit*. 4678, στο οποίο μεταγράφτηκαν τα *Άριθμητικά* του Διόφαντου [Pérez Martin, 2006, σ. 447-448, και 2009, υπ. 62]. Ο δεύτερος εξ αυτών είναι ακόμη μεταγενέστερος και τοποθετείται τον 13ο-14ο αιώνα. Η γραφή του, η οποία διακρίνεται από τη φωτεινότητα του μελανιού που χρησιμοποίησε, είναι διατεταγμένη, μικρού μεγέθους, και αναγνωρίστηκε ως η γραφή του Μάξιμου Πλανούδη, ο οποίος σχολίασε επίσης και τον κώδικα *Matrit*. 4678 [Pérez Martin, ό.π.].

ε) Υπάρχουν, επίσης, και ελάχιστα διαγραμματικά σχόλια, τα οποία έχουν σχεδιαστεί από τον αρχαιότερο σχολιαστή και βρίσκονται στις παρακάτω σελίδες: 70r, 75v, 76r, 78v και 82v.

3.1.5 Οι απόγονοι της ηρώνειας παράδοσης.

Όπως έχουμε, ήδη, επισημάνει μόνο δύο Έλληνες συγγραφείς της Ύστερης αρχαιότητας, ο Ευτόκιος και ο ανώνυμος συγγραφέας των *Προλεγομένων* στη *Μαθηματική Σύνταξη* του Πτολεμαίου, αναφέρονται, με σαφήνεια, στα *Μετρικά*.

Αν στραφούμε, τώρα, στη μεσαιωνική περίοδο η εικόνα φαίνεται να είναι αρκετά συγκεχυμένη: Από τη μια μεριά, η μετρική συνιστώσα της γεωμετρίας[36] είναι γνωστή στις χώρες του Ισλάμ ως "επιστήμη της μέτρησης" και στις χώρες της Λατινικής Δύσης ως "πρακτική γεωμετρία"[37]. Από την άλλη, είναι ριψοκίνδυνο να

---

[35] Σύμφωνα με τον E. M. Bruins [Bruins, 1964 τ. I, σ. x], τα σχόλια των *Μετρικών* αποδίδονται, τουλάχιστον, σε τέσσερις σχολιαστές, δύο εκ των οποίων χρονολογούνται σε εποχές παλαιότερες του 10ου αιώνα (είναι δηλ. προγενέστεροι της σύνταξης του κώδικα **S**), ενώ οι άλλοι δύο χρονολογούνται στις αρχές του 15ου αιώνα.

[36] Συμπεριλαμβάνει: **α)** αποτελέσματα που απορρέουν από τον Εύδοξο, τον Αρχιμήδη και τον Ευκλείδη (οι κύριες πηγές των *Μετρικών* του Ήρωνα και του ψευδο-ηρώνειου συντάγματος), **β)** εισαγωγικές, στη γεωμετρία, διδακτικές πραγματείες και, **γ)** κείμενα που έχουν γραφτεί, για την εκπαίδευση κάποιων τεχνικών (αρχιτέκτονες, στρατιωτικοί μηχανικοί, τοπογράφοι, κτλ.).

[37] Το παλαιότερο γνωστό έργο με αυτόν τον τίτλο φαίνεται να είναι το *Practica Geometriae*, που αποδίδεται στον Hughes de Saint-Victor και γράφτηκε τα έτη 1120-1130. Όμως, το πλέον γνωστό είναι το *Practica Geometrie*, έργο του Λεονάρντο της Πίζας, γνωστού ως Fibonacci, το οποίο συντέθηκε έναν αιώνα αργότερα. Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι ο όρος "πρακτική γεωμετρία" επιβίωσε τόσο μεταξύ των συγγραφέων της Αναγέννησης όσο και σε μεταγενέστερες εποχές, με κάποιους ιστορικούς των Μαθηματικών να τον χρησιμοποιούν ακόμη και σήμερα.

συμπεράνουμε ότι αυτή η μετρική συνιστώσα της γεωμετρίας σχετίζεται με το αυθεντικό ηρώνειο μετρολογικό έργο, δηλαδή τα *Μετρικά*. Συγκεκριμένα:

1) Σε αντίθεση με τα έργα του Ήρωνα *Μηχανικά*, *Πνευματικά* και το *Σχόλιο* στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, τα οποία είναι γνωστά στους Άραβες λόγιους και, μάλιστα, έχουν μεταφραστεί στα Αραβικά, δεν καταγράφεται καμία αναφορά στα *Μετρικά*· εξαίρεση, ίσως, αποτελεί εκείνη που αφορά στην πιθανότητα ύπαρξης κάποιας αραβικής μετάφρασης του έργου, όπως υποστηρίζει ο F. Sezgin [Sezgin, 1974, σ. 153].

2) Αν στραφούμε, τώρα, στη λατινική Δύση, εκείνο που, αρχικά, μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι ότι ο όρος "πρακτική γεωμετρία" αφορά σε μία ευρεία κατηγορία έργων με διδακτικό προσανατολισμό, που σχετίζονται με διάφορες εποχές και περιβάλλοντα· όμως, παρά αυτήν την ευρύτητα, δεν συναντάμε κάποιο μεσαιωνικό παράθεμα, που να αναφέρεται στα *Μετρικά* ή, γενικότερα, να αναφέρει τον Ήρωνα, ως συγγραφέα έργων μετρολογικού περιεχομένου.

Τελικά, ερωτήσεις σχετικά με πιθανές μεταφράσεις των *Μετρικών*, σε διάφορες γλώσσες του αρχαίου και μεσαιωνικού κόσμου (Λατινικά, Αραβικά, Εβραϊκά, Περσικά, Αρμενικά, κ.λπ.), ή ερωτήσεις σχετικά με αναμφισβήτητες χρήσεις του έργου των *Μετρικών* δεν είναι σίγουρο ότι μπορούν να απαντηθούν, από τη στιγμή που η πραγματεία διασώζεται σε ένα μοναδικό χειρόγραφο, το οποίο, επιπλέον, ταυτοποιήθηκε, μόλις, τον 19ο αιώνα, είχε, πιθανώς, μικρή μετάδοση και διαβάστηκε λίγο.

Επιπλέον, για την απάντηση ερωτήσεων σχετικά με πιθανές συνδέσεις των *Μετρικών* με τα υπόλοιπα έργα του μετρολογικού συντάγματος, απαιτείται μια, εκ νέου, συγκριτική μελέτη των χειρόγραφων από τα οποία οι συλλογές των προβλημάτων, που αποτελούν τους τόμους IV και V των εκδόσεων Teubner της Λειψίας, έχουν παραχθεί. Αυτή η, εκ νέου, μεταγραφή ενός υλικού, που περιέχει, κατά κύριο λόγο, μετρολογικά προβλήματα και, δευτερευόντως, συλλογές πινάκων και γεωμετρικούς ορισμούς πρέπει να επιχειρηθεί, με τη χρήση των μεθόδων που απορρέουν από τη νέα ιστοριογραφική προσέγγιση και με αξιοποίηση των εργαλείων που έχουν εκπονηθεί στο πλαίσιο των Digital Humanities. Τότε, μόνο, θα αναδειχθεί η πραγματική συνεισφορά του Ήρωνα στην ανάπτυξη και εξέλιξη μετρολογικών πραγματειών, οι οποίες προέρχονται τόσο από την αρχαία λατινική παράδοση όσο και από βυζαντινά και αραβικά μεσαιωνικά έργα. Παρόλο που μια τέτοιου είδους μελέτη υπερβαίνει, κατά πολύ, τους στόχους μας, θεωρούμε σκόπιμο να αναφερθούμε, επιγραμματικά[38], σε δύο περιπτώσεις, οι οποίες αποτέλεσαν και συνεχίζουν να αποτελούν αντικείμενο έρευνας και διαμάχης μεταξύ των ιστορικών της αρχαιότητας. Η πρώτη

[38] Για μια αναλυτική παρουσίαση βλ. F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac 2014, σ. 497-533].

περίπτωση αφορά στο ενδεχόμενο να προέρχονται/βασίζονται από/στα *Μετρικά* συλλογές προβλημάτων, όπως οι *Ἥρωνος εἰσαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων*, *Εὐκλείδου εὐθυμετρικά*, και *Ἥρωνος εἰσαγωγαὶ τῶν στερεομετρουμένων*· οι συλλογές αυτές αποτέλεσαν την κύρια βάση με την οποία δομήθηκαν τα *Γεωμετρικά*, τα *Στερεομετρικά* και το *Περί Μέτρου* των εκδόσεων της Λειψίας. Η δεύτερη περίπτωση αφορά στην έμπνευση των Ρωμαίων agrimensores (πεδιομέτρες) από το έργο των *Μετρικών*, προκειμένου να συντάξουν το δικό τους μετρολογικό σύνταγμα.

Α. *Το "ψευδο-ηρώνειο" σύνταγμα και τα* Μετρικά

Η καταρχήν αδιαμφισβήτητη ύπαρξη κοινών σημείων, μεταξύ των προαναφερθεισών συλλογών προβλημάτων και των *Μετρικών*, οδήγησε στην υπόθεση της προέλευσης αυτών των συλλογών από τα *Μετρικά*, η οποία, μάλιστα, αποτέλεσε και την ιστορική υπόθεση που υποβόσκει στην επιχειρούμενη, από τον Th. H. Martin [Martin, 1854], ανακατασκευή των *Μετρικών* την εποχή που το έργο των *Μετρικών* θεωρείτο χαμένο. Όμως, παρά την, εκ νέου, ανακάλυψη, στο τέλος του 19ου αιώνα, του χειρόγραφου των *Μετρικών*, η ιδέα αυτής της προέλευσης δεν φαίνεται να έχει εγκαταλειφθεί, εντελώς, αλλά συνεχίζει να απασχολεί κάποιους ιστορικούς, όπως θα δούμε παρακάτω. Για την καλύτερη κατανόηση αυτών των ιστορικών υποθέσεων, θα προσπαθήσουμε να σκιαγραφήσουμε το πλαίσιο εντός του οποίου τοποθετείται και αιτιολογείται αυτή η προέλευση. Η επιλογή ενός γενικού και αφηρημένου μαθηματικού πλαισίου, που παρέχει τη δυνατότητα αιτιολόγησης/ερμηνείας κάποιων ομοιοτήτων στις διαδικασίες επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων, ως σύνδεση μεταξύ των δύο έργων, θα μπορούσε να είναι μια πιθανή εκδοχή. Όμως, η απλή καταγραφή ομοιοτήτων σε διαδικασίες επίλυσης, στα υπό εξέταση έργα, δεν αναδεικνύει, ούτε στο ελάχιστο, τον στόχο του συγγραφέα, στην προκειμένη περίπτωση του Ήρωνα, ο οποίος έγκειται, στα δύο πρώτα Βιβλία των *Μετρικών*, στην εύρεση[39] διαδικασιών μέτρησης επιπέδων και στερεών σχημάτων, από τις οποίες απορρέουν, δευτερευόντως, οι καθαρά υπολογιστικές διαδικασίες. Επομένως, η καταγραφή μαθηματικών, και μόνο, ομοιοτήτων δεν αποτελεί έναν ισχυρό συνδετικό κρίκο, μεταξύ των κειμένων, στα οποία καταγράφονται, και ούτε αιτιολογεί την προέλευση τού ενός από το άλλο.

[39] Η στόχευση στην εύρεση διαδικασιών επιβεβαιώνεται και από ένα επιπλέον στοιχείο: παρόλο που κάποιες από τις προτεινόμενες διαδικασίες ήταν γνωστές, πολύ πριν τη συγγραφή του έργου, όπως είναι για παράδειγμα η μέτρηση ορθογωνίου από τις δύο πλευρές του, η μέτρηση τριγώνου από τη βάση και το ύψος του, η μέτρηση ενός τραπεζίου, ο υπολογισμός της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου…, ο Ήρων τις συμπεριλαμβάνει στο έργο με σκοπό να υποδειχθεί η μέθοδος εύρεσής τους.

Μια πιο ολοκληρωμένη επιχειρηματολογία σχετικά με την προέλευση των *Γεωμετρικών, Στερεομετρικών* και *Περί Μέτρου*, δηλαδή του επονομαζόμενου "ψευδο-ηρώνειου" συντάγματος, από τα *Μετρικά* δίνεται σε μια σύντομη μονογραφία, από τον ίδιο τον J. L. Heiberg, στην οποία, κατά την παρουσίαση των *Μετρικών*, γράφει:

"Αυτό το έργο μετασχηματίστηκε σε συλλογές ασκήσεων, από τους Βυζαντινούς, με αφαίρεση του θεωρητικού του μέρους" [Heiberg, 1912, σ. 79].

Θα μπορούσε, λοιπόν, να διατυπωθεί η παρακάτω υπόθεση: το "ψευδο-ηρώνειο" σύνταγμα προκύπτει από τα *Μετρικά*, όταν αφαιρεθεί το θεωρητικό του μέρος και, πιθανώς, τα πλέον εκλεπτυσμένα γεωμετρικά του σχήματα και, παράλληλα, προστεθούν επιπλέον αριθμητικά δεδομένα[40]. Στο σημείο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η επιλογή των τίτλων *Γεωμετρικά*, *Στερεομετρικά* και *Περί Μέτρου*, οι οποίοι, πρακτικά, δεν ανήκουν σε κανέναν συγγραφέα τόσο στα χειρόγραφα όσο και στην έμμεση παράδοση, εξυπηρετούν την υπόθεση σύνδεσης με τα *Μετρικά*. Η επιλογή μιας τέτοιας ερμηνείας διατηρεί, με σαφήνεια, τη διάκριση μεταξύ της αυθεντικής ηρώνειας πραγματείας των *Μετρικών* και των συλλογών, που υποτίθεται ότι προέρχονται από αυτήν, όπως, επίσης, και μεταξύ των αντίστοιχων δημιουργών τους. Αν είναι έγκυρη, πρέπει οι προαναφερθείσες συλλογές να αποτελούνται από ομάδες αντικειμένων, οι οποίες θα έχουν άμεση και υποδειγματική σχέση με αντίστοιχες ομάδες αντικειμένων των *Μετρικών*: τα αριθμητικά παραδείγματα της αυθεντικής πραγματείας, ακόμη και αν προστίθενται άλλα, πρέπει να μεταφέρονται στις συλλογές και, το κυριότερο, οι διαδικασίες για την επίλυση κοινών θεμάτων πρέπει να είναι ταυτόσημες. Όμως, όπως προκύπτει από την εξέταση και σύγκριση των κειμένων[41], τα σημεία επαφής με τα *Μετρικά* φαίνεται να είναι ιδιαίτερα περιορισμένα. Πράγματι, ελάχιστα Προβλήματα των *Μετρικών* ταυτίζονται με αντίστοιχα προβλήματα των προαναφερθέντων συλλογών[42], συγκεκριμένα, 18 από τα 400 συνολικά προβλήματα, δηλαδή ποσοστό λιγότερο από 5%! Επιπλέον, η μεγάλη πλειονότητα των προβλημάτων που περιέχονται στις συλλογές δεν εμπίπτει στη λογική της προέλευσης, υπό την έννοια που περιγράψαμε παραπάνω, δηλαδή τα αριθμητικά παραδείγματα δεν "μεταφέρονται" από τα *Μετρικά*, αλλά αποτελούν προσθήκη μεταγενέστερης εκδοτικής δραστηριότητας.

---

[40] Σύμφωνα με τον J. L. Heiberg [Heiberg, 1912, *HOO*, τ. IV, σ. xxi], η εργασία αυτή απαιτεί ένα ελάχιστο επίπεδο μαθηματικών δεξιοτήτων και θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί από βυζαντινούς δασκάλους.

[41] Για μια λεπτομερέστατη ανάλυση των κειμένων του "ψευδο-ηρώνειου" συντάγματος, συγκριτικά με τα αντίστοιχα κείμενα των *Μετρικών*, βλ. F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 497-519].

[42] Για την αναλυτική παρουσίαση αυτής της λίστας βλ. F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 499].

Η θεωρία της προέλευσης των συλλογών που αποτελούν το "ψευδο-ηρώνειο" σύνταγμα από τα *Μετρικά* , όπως διατυπώθηκε παραπάνω από τον J. L. Heiberg, απασχόλησε αρκετούς από τους μεταγενέστερους ιστορικούς, με αποτέλεσμα την επιλογή απλουστευμένων παρουσιάσεων.

Ενδεικτικά αναφέρουμε, ότι ο B. L. van der Waerden γράφει: "το έργο τού Ήρωνος είναι ένα είδος εγκυκλοπαίδειας της στοιχειώδους γεωμετρίας, της εφαρμοσμένης γεωμετρίας και της εφαρμοσμένης μηχανικής. Σε μια σειρά εργασιών πραγματεύεται την κατασκευή και τη χρήση διαφόρων οργάνων μέτρησης και μηχανημάτων. Συνέγραψε, επίσης, ένα υπόμνημα στον Ευκλείδη, ένα σύγγραμμα περί ορισμών, και, τέλος, έναν αριθμό έργων περί εμβαδών και όγκων το πιο γνωστό από τα οποία φέρει τον τίτλο *Μετρικά* …" [van der Waerden, 2003, σ. 324-325]. Παρόλο που B. L. van der Waerden δεν διατυπώνει με σαφήνεια τη θεωρία προέλευσης των συλλογών του "ψευδο-ηρώνειου" συντάγματος από τα *Μετρικά*, τα κατατάσσει, μαζί με τα έργα του "ψευδο-ηρώνειου" συντάγματος, στα "ήσσονος σημασίας βιβλία υπολογισμού" [van der Waerden, 2003, σ. 325][43]

Τη θεωρία της προέλευσης των παραπάνω συλλογών από τα *Μετρικά* φαίνεται να ασπάζεται, σε μια αρκετά απλουστευμένη εκδοχή, και ο M. Mahoney [Mahoney, 1972, τ. IV, σ. 314-315], ο οποίος γράφει: "… τα *Γεωμετρικά* είναι, κατά βάση, το βιβλίο I των *Μετρικών* · τα *Στερεομετρικά* είναι, κατά βάση, το βιβλίο II. Και στις δύο περιπτώσεις τα αριθμητικά παραδείγματα χρησιμοποιούνται με σκοπό να εξαλείψουν τη γεωμετρική προέλευση…".

Συνοψίζοντας, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι συλλογές προβλημάτων, που εκδόθηκαν στους τόμους IV και V των εκδόσεων Teubner της Λειψίας, δεν μπορούν να προέρχονται από τα *Μετρικά*, αν με τον όρο προέλευση εννοούμε έναν ισχυρό νοητικό και κειμενικό σύνδεσμο. Επιπλέον, ο ευρετικός χαρακτήρας των *Μετρικών*, κύρια συνιστώσα του έργου, δεν συνδέεται, σε καμία περίπτωση, με την απλή παράθεση επιλυτικών διαδικασιών και παραδειγμάτων, η οποία καθορίζει αποκλειστικά το "ψευδο-ηρώνειο" σύνταγμα.

[43] Μια εντελώς διαφορετική εκδοχή της άποψης που διατυπώνεται από B. L. van der Waerden μεταφέρεται από τους F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 28]. Συγκεκριμένα, ισχυρίζονται ότι ο B. L. van der Waerden γράφει: "Ο Ήρων συνέγραψε έναν αριθμό έργων περί εμβαδών και όγκων, το πιο γνωστό από τα οποία φέρει τον τίτλο *Μετρικά*. Είναι ένα παιδαριώδες βιβλίο: τα πρώτα 10 παραδείγματα αφορούν στον υπολογισμό του εμβαδού τετραγώνου, τα επόμενα 4 στον υπολογισμό ορθογωνίου, και 14 στον υπολογισμό ορθογωνίων τριγώνων … Τίποτα άλλο από αριθμητικά παραδείγματα, χωρίς αποδείξεις. Ακριβώς, όπως τα κείμενα σφηνοειδούς γραφής … [van der Waerden, 1950, σ. 277-278]". Όμως, στις συγκεκριμένες σελίδες του έργου δεν μεταφέρεται αυτή η εκδοχή. Πιθανά, να υπήρχε σε προηγούμενη έκδοση.

Β. *Το σύνταγμα των Ρωμαίων agrimensores και τα* Μετρικά

Το 1875, ο M. Cantor [Cantor, 1875] προτείνει μια λεπτομερή σύγκριση του "ψευδο-ηρώνειου" συντάγματος και εκείνου των Ρωμαίων agrimensores ή gromatici, γνωστού και ως Corpus Agrimensorum Romanorum. Πρόκειται για συλλογές λατινικών κειμένων τοπογραφίας, γεωμετρίας και αγροτικών νόμων, τις οποίες οι ειδικοί χωρίζουν σε δύο κατηγορίες: **α)** ειδικές μονογραφίες που αποδίδονται σε συγκεκριμένους συγγραφείς, όπως οι Frontin, Balbus, Agennius Urbicus, Hygin και Siculus Flaccus και, **β)** ένα αρκετά σύνθετο σύνολο κειμένων πληροφοριακού χαρακτήρα, όπως κατάλογοι για τα εδαφικά όρια συνόρων, αποσπάσματα κειμένων, κεφάλαια νόμων, κατάλογοι συντομογραφιών, θέματα κτηματολογίου, επιτύμβιες πλάκες … Οι απαρχές αυτού του συντάγματος τοποθετούνται στον 1ο π.Χ. αιώνα, αλλά η συγγραφική δραστηριότητα συνεχίζεται μέχρι και τον 5ο μ.Χ. αιώνα.

Βέβαια, η αντιπαραβολή, μεταξύ μεμονωμένων έργων του Ήρωνα και Ρωμαίων agrimensores, έχει ξεκινήσει νωρίτερα, από το 1875· αρχικά, επιχειρείται από τον G. Venturi, πρώτο σχολιαστή της πραγματείας *Περί Διόπτρας* [Venturi, 1814, σ. 96-97, 100, 102, 113-114, 116-119, 125, 132-133]. Ακολουθεί ο Th. H. Martin [Martin, 1854, σ. 220-221], ο οποίος επιχειρεί πιθανές συγκρίσεις έργων από το σύνταγμα των Ρωμαίων agrimensores με έργα του Ήρωνα. Συγκεκριμένα: το έργο *Podismus*, που αργότερα αποδόθηκε στον Marcus Iunius Nipsius, αντιπαραβάλλεται με τη *Γεωδαισία*· στο ανώνυμο *De iugeribus metiundis* μεταγράφονται "λανθασμένοι τύποι" από το *Περί μέτρων* και *Ἥρωνος γεηπονικόν βιβλίον* και στο *Balbus Exposition and ratio omnium formarum* αναπαράγονται μερικά αποσπάσματα από τη συλλογή των *Ὁρισμῶν*.

Είκοσι χρόνια αργότερα, ο M. Cantor, έχοντας ως σημείο εκκίνησης τις προαναφερθείσες εργασίες, θα αφιερώσει μια λεπτομερή εργασία στον σύνδεσμο που θεσπίζεται μεταξύ του Ήρωνα και των Ρωμαίων agrimensores και, μάλιστα, δεν θα διστάσει να μιλήσει για την ύπαρξη "ηρώνειας επιστήμης" ή "ηρώνειας γεωμετρίας" στις περισσότερες από αυτές [Cantor, 1875, σ. 95-139].

Παρόμοιες προσεγγίσεις υποστηρίζονται και σε μεταγενέστερες μελέτες, με το ηρώνειο "υλικό" σύγκρισης να αναδεικνύεται, πλέον, από τις εκδόσεις Teubner της Λειψίας. Ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί ο J. Y. Guillaumin, ο πλέον σύγχρονος μεταφραστής και σχολιαστής των προαναφερθέντων λατινικών κειμένων, ο οποίος συντάσσεται με την άποψη του M. Cantor και υποστηρίζει ότι έργα, όπως για παράδειγμα το *Podismus*, "λειτουργούν σαν ένα είδος λατινικής μετάφρασης/διασκευής ενός πρωτότυπου ελληνικού, το οποίο πρέπει να αναζητηθεί σε εκείνο που μεταφέρεται στην ηρώνεια παράδοση υπό τον τίτλο *Γεωμετρικά"* [Guillaumin, 1996, σ. 104].

Όμως, όπως υποδεικνύεται, από την λεπτομερή εξέταση και σύγκριση[44] των έργων *Podismus* και των επονομαζόμενων αποσπασμάτων του Epaphroditus και Vitruvius Rufus, με τη συλλογή *Γεωμετρικά*, δεν υπάρχουν ικανά στοιχεία για να υποστηριχθεί η υπόθεση της μετάφρασης που προτείνεται από τον J. Y. Guillaumin και, γενικότερα, να υποστηριχθούν υποθέσεις, σύμφωνα με τις οποίες έργα του συντάγματος των Ρωμαίων agrimensores αποτελούν διασκευές/ μεταφράσεις έργων από ελληνικές μετρολογικές συλλογές. Συγκεκριμένα: **α)** δεν καταγράφονται τα ίδια γεωμετρικά αντικείμενα, **β)** τα αριθμητικά δεδομένα δεν ταυτίζονται, **γ)** δεν τίθενται οι ίδιες ερωτήσεις και, **δ)** οι διαδικασίες επίλυσης δεν ταυτίζονται. Σχετικά, τώρα, με την απαρίθμηση μιας πληθώρας κοινών όρων, όπως *κάθετος*, *υποτείνουσα*, *τρίγωνο*, *εμβαδόν*, κ.τλ., είναι προφανές ότι δεν αποτελεί υποστηρικτικό στοιχείο μιας υπόθεσης διασκευής/μετάφρασης, από τη στιγμή που αυτού του είδους οι όροι συναντώνται, κατά κόρον, σε όλες τις μετρολογικές συλλογές.

Τέλος, μια πιο ευρεία άποψη, η οποία εκφράζεται από την πλειονότητα των σύγχρονων ιστορικών που ασχολούνται με τη χωρομέτρηση των Ρωμαίων[45], συνοψίζεται στην ύπαρξη σταθερών και "καλά ορισμένων" ηρώνειων σημείων που ανιχνεύονται στο λατινικό σύνταγμα. Όμως, με εξαίρεση κάποια αποσπάσματα από το αυθεντικό έργο του Ήρωνα *Περί Διόπτρας*, τα έργα ή αποσπάσματα έργων που προσεγγίζουν, σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό, το σύνταγμα των Ρωμαίων agrimensores δεν είναι τα αυθεντικά έργα του Ήρωνα, αλλά ανήκουν στο επονομαζόμενο "ψευδο-ηρώνειο" σύνταγμα [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 520].

Τελικά, μεταξύ των αναφορών που υπήρξαν για το έργο των *Μετρικών* στην περίοδο της Ύστερης αρχαιότητας (Ευτόκιος και *Προλεγόμενα* στη *Μαθηματική σύνταξη* του Πτολεμαίου) και την περιγραφή, στα μέσα του 19ου αιώνα, του μοναδικού διασωθέντος χειρόγραφου που μεταφέρει το έργο, δεν γνωρίζουμε, μέχρι στιγμής τουλάχιστον, οποιαδήποτε άλλη αναφορά σε αυτήν την ηρώνεια πραγματεία. Όσον αφορά, τώρα, στη σύνδεση των *Μετρικών* με το υπόλοιπο μετρολογικό σύνταγμα, τα μέχρι τώρα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι: **α)** η θεωρία προέλευσης των συλλογών του επονομαζόμενου "ψευδο-ηρώνειου" συντάγματος από τα *Μετρικά*, αποδεικνύεται, μάλλον, ανύπαρκτη και, **β)** ο σύνδεσμος του συντάγματος των Ρωμαίων agrimensores με ελληνικά μετρολογικά κείμενα, αν υπάρχει, θα πρέπει να τοποθετηθεί στα έργα του

[44] Τα αναλυτικά στοιχεία και τα αποτελέσματα αυτής της σύγκρισης δίνονται από τους F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 524-530].

[45] Ενδεικτικά, αναφέρουμε τους F. T. Hinrichs [Hinrichs, 1989, σ. 111-117], A. Roth Congès [Roth Congès, 2000, σ. 107-109], και G. Chouquer και F. Favory [Chouquer & Favory, 2001, σ. 264-266].

"ψευδο-ηρώνειου" συντάγματος και όχι στην αυθεντική πραγματεία των *Μετρικών*.

Γ. *Ο Mordekhai Comtino και η μετρολογική παράδοση στην Κωνσταντινούπολη του 15ου αιώνα.*

Επομένως, ιδιαίτερη βαρύτητα και σημασία αποκτά η ουσιαστική και πρωτότυπη συνεισφορά του Mordekhai Comtino, Εβραίου λόγιου της Κωνσταντινούπολης του 15ου αιώνα.[46] Ο M. Comtino (1402-1482) αναγνωρίζεται ως θρησκευτικός ηγέτης και λόγιος σχολιαστής βιβλικών κειμένων και κοσμικών έργων, όπως των Abraham ibn Ezra και Μαϊμονίδη· ταυτόχρονα, σχολιάζει έργα του Ευκλείδη, καθώς και έργα αστρονομίας. Το κυριότερο, όμως, είναι η συγγραφή μιας μαθηματικής πραγματείας, η οποία αποτελείται από δύο μέρη, αριθμητική και γεωμετρία, και φέρει τον τίτλο *Sefer ha-ḥeshbon we-ha-Middot* (στα Ελληνικά θα μπορούσε να είναι: *Βιβλίο υπολογισμού και μετρήσεων*). Οι κύριες πηγές της πραγματείας αυτής, όσον αφορά στο δεύτερο βιβλίο της γεωμετρίας, μολονότι δεν ονομάζονται με σαφήνεια, είναι οι παρακάτω: **α)** η γεωμετρική πραγματεία του Abraham Bar Hiyya η οποία συντάχτηκε στη Βαρκελώνη, τον 12ο αιώνα, και φέρει τον τίτλο *Ḥibbūr ha-meshīḥa weha-tishboret* (στα ελληνικά θα μπορούσε να είναι: *Πραγματεία περί επιφανειών και όγκων*), **β)** ελληνικά έργα μετρολογικού περιεχομένου, για την ακρίβεια, τα *Μετρικά* του Ήρωνα και αποσπάσματα από το "ψευδο-ηρώνειο" σύνταγμα.

Η πραγματεία του M. Comtino παραδίδεται από μια δωδεκάδα χειρόγραφα· γνωστοποιήθηκε από τον Steinschneider και μεταγράφτηκε, με βάση μόνο δύο χειρόγραφα, από τον M. Silberberg [Silberberg, 1905-1906, τ. III, σ. 277-292, & τ. IV, σ. 214-237], αμέσως μετά την έκδοση των *Μετρικών*, από τον H. Schöne [*HOO*, 1903], αλλά πριν την έκδοση του "ψευδο-ηρώνειου" συντάγματος, από τον J. L. Heiberg [*HOO*, 1912-1914]. Ο M. Silberberg, παρά την επισήμανση κάποιων αναφορών του M. Comtino στον Ευκλείδη, τον Νικόμαχο τον Γερασηνό, τον Πτολεμαίο και τον Abraham ibn Ezra, στην πραγματικότητα, δεν ερευνά σε βάθος την ερώτηση για τις πηγές της πραγματείας. Η συσχέτιση με τον Ήρωνα πραγματοποιείται από P. Schub [Schub, 1932] ο οποίος, αν και αφιερώνει το μεγαλύτερο μέρος του άρθρου του στην αριθμητική (δέκα σελίδες έναντι μίας για τη γεωμετρία), και παρόλο που δεν διακρίνει τι είναι αυθεντικά ηρώνειο και τι δεν είναι, αναγνωρίζει ότι ο M. Comtino, με σκοπό τη διασαφήνιση της γεωμετρίας του, χρησιμοποιεί τον κώδικα **S** και, μάλιστα, ενσωματώνει αυτόν στην

[46] Οι πληροφορίες που ακολουθούν, αναφορικά με βιογραφικά και εργογραφικά στοιχεία του Mordekhai Comtino, αντλούνται, κατά ένα μεγάλο μέρος, από το κεφάλαιο *Études Complémentaires* των *Μετρικών* των F. Acerbi & B. Vitrac [Acerbi-Vitrac, 2014, σ. 551-554].

πραγματεία του, μεταφράζοντας διάφορα τμήματα που δανείζεται είτε από τα *Μετρικά* είτε από τα "ψευδο-ηρώνεια" προβλήματα.

Τελικά, το επιχείρημα που διατυπώνει ο P. Schub περιέχει δύο συνιστώσες: **α)** ο κώδικας **S** είναι το μοναδικό χειρόγραφο που μεταφέρει τα *Μετρικά*, ισχυρισμός ο οποίος μπορεί να αληθεύει σήμερα, αλλά όχι, κατ' ανάγκην, γύρω στο 1450 και, **β)** ο M. Comtino χρησιμοποιεί αποσπάσματα που περιέχονται μόνο στον κώδικα **S**, από τη στιγμή που αναπαραγάγει, με μεγάλη ακρίβεια, τα λάθη και τα διαγράμματα που συναντάει [Schub, 1932, σ. 57 υπ. 11]. Πράγματι, σύμφωνα με τον P. Schub, ο M. Comtino, κατά τον σχεδιασμό της πραγματείας του, χρησιμοποιεί στοιχεία τόσο από το έργο *Ḥibbūr ha-meshīḥa weha-tishboret* του Abraham Bar Hiyya όσο και από τα *Μετρικά* ή το "ψευδο-ηρώνειο" σύνταγμα· όμως, όταν δανείζεται σειρές προβλημάτων από το έργο του Abraham Bar Hiyya, επιτρέπει στον εαυτό του να τις παραφράσει, είτε επεκτείνοντας είτε συντομεύοντας αυτές, ενώ, όταν χρησιμοποιεί στοιχεία από τον Ήρωνα ή το "ψευδο-ηρώνειο" σύνταγμα, αρκείται σε μια απλή μετάφρασή τους [Schub, 1932, σ. 58-68].

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι οι B. Vitrac και T. Lévy, με σκοπό τον έλεγχο της ορθότητας των συμπερασμάτων του P. Schub, έχουν αναπαραγάγει, μετά από σύγκριση της μεταγραφής που πραγματοποιήθηκε από M. Silberberg, τρία από τα δέκα χειρόγραφα της πραγματείας. Μετά από εμπεριστατωμένη μελέτη, κατέληξαν[47] ότι ο M. Comtino αναπτύσσει την πραγματεία του στηριζόμενος, κατά πολύ, στα παρακάτω έργα: *Μετρικά*, *Εύκλείδου γεωμετρία*, *Διοφάνους* και *μέτρησις πυραμίδων*, τα οποία περιέχονται, όλα, στον κώδικα **S**. Μπορούμε, επομένως, να συμπεράνουμε ότι ο χαρακτήρας της πραγματείας τού M. Comtino καθορίζεται από τη χρήση των παραπάνω έργων και προσιδιάζει, από μια άλλη παράδοση, με το έργο του Abraham Bar Hiyya· επιπλέον, η ιδιαίτερη μνεία στα *Μετρικά*, όπως θα δούμε παρακάτω, προσδίδει στο έργο μια επιπλέον ενδιαφέρουσα διάσταση. Ο M. Comtino προσαρμόζει πολλά από τα Προβλήματα των *Μετρικών* ακολουθώντας τη διαδικασία, που θα παραθέσουμε στη συνέχεια, του Προβλήματος I.12. Στην πρώτη και δεύτερη στήλη του παρακάτω πίνακα παραθέτουμε το αρχαίο κείμενο των *Μετρικών* και τη γαλλική μετάφραση του, όπως δίνεται από τους F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 177]· στην τρίτη στήλη του πίνακα παρατίθεται σε γαλλική μετάφραση του T. Lévy το κείμενο στο οποίο ο M. Comtino αναπτύσσει τη δική του, για το ίδιο πρόβλημα, εκδοχή.

Πρόβλημα I.12: Κείμενο *Μετρικών*	**Πρόβλημα I.12: Μετάφραση στα γαλλικά από τους Acerbi - Vitrac**	**M. Comtino**

[47] Άρθρο, υπό έκδοση, στο περιοδικό *Aleph: Historical Studies in Science and Judaism*.

		Χφ. New York 2639, ff. 41r-43r, Μετάφραση T. Lévy
Ἔστω τραπέζιον ὀξυγώνιον τὸ ΑΒΓΔ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΒ μονάδων ιγ ἡ δὲ ΓΔ μονάδων κ ἡ δὲ ΑΔ μονάδων ς ἡ δὲ ΒΓ μονάδων κζ. εὑρεῖν αὐτοῦ τὴν κάθετον καὶ τὸ ἐμβαδόν.	Soit un trapèze acutangle ABGD ayant l'angle en B aigu, et soit d'une part AB de 13 unités, d'autre part GD de 20 unités, et AD de 6 unités, et BG de 27 unités. Trouver sa perpendiculaire et l'aire.	Et si tu veux mesurer le trapèze à angles aigus comme le trapèze ABGD, et que l'angle qui est du côté B est aigu, et le côté AB est 13 coudées et le côté GD, 20 coudées, et le côté AD, 6 coudées et le côté BG, 27 coudées, et si tu veux trouver la hauteur et la surface, tu fais ainsi.

		Tu soustrais les 6 coudées des 27 coudées, il reste 21 coudées.
		et comme les côtés du triangle acutangle sont connus, et ce sont 13 et 21 et 20, on connaît aussi la longueur de la hauteur qui est 12 coudées, comme nous l'avons appris précédemment
		Et nous ajoutons aux 6 coudées, 27 coudées et sa moitié est 16 coudées et demie;
		on les multiple avec la hauteur : elles sont 198 et elles sont l'aire du trapèze.
		Et la preuve de cette mesure
ἤχθω τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΕ καὶ κάθετος ἡ ΑΖ.	Qu'une [droite] AE soit menée parallèle à GD et une [droite] AZ perpendiculaire.	Je mènerai la ligne AE parallèle à la ligne GD et je mènerai AZ la hauteur
ἡ μὲν ἄρα ΑΕ ἔσται μονάδων κ ἡ δὲ ΓΕ μονάδων ς· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ μονάδων κα·	D'une part AE sera donc de 20 unités, d'autre part GE de 6 unités : BE restante sera donc de 21 unités ;	Comme AE est de 20 coudées, GE est de 6 coudées, donc BE qui reste est 21 coudées.
ὥστε διὰ <τὸ> τὸ ΑΒΕ ὀξυγώνιον τρίγωνον <εἶναι> ἔσται ἡ ΑΖ κάθετος μονάδων ιβ.	de sorte que – à cause du fait que le triangle ABE est acutangle –, la perpendiculaire AZ sera de 12 unités.	C'est pourquoi, comme la ligne AZ, hauteur du triangle acutangle ABE, est de 12 coudées,
δίχα δὴ τμηθεισῶν τῶν ΑΒ ΓΔ τοῖς Η, Θ καὶ καθέτων ἀχθεισῶν τῶν ΚΗΛ ΜΘΝ, ὁμοίως τῷ ἐπάνω δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν ΑΒΓ<Δ> τραπέζιον	Alors, les [côtés] AB, GD étant coupés en deux [parties égales] aux [points] H, Q, et des [droites] KHL, MQN étant	et que les côtés ABGD sont coupés au milieu aux points H et T, et que KHL est perpendiculaire, ainsi aussi que TN, comme on l'a

ἴσον ἐστὶ τῷ ΚΛΜΝ παραλληλογράμμῳ	menées perpendiculaires, nous démontrerons semblablement à ce qui précède que, d'une part, le trapèze ABGD est égal au parallélogramme KLMN,	vu dans la figure précédant celle-ci, il sera montré que le trapèze ABGD sera égal à la surface KLMN, parallèle quant aux côtés.
συναμφότερος δὲ ἡ ΒΓ ΑΔ διπλῆ ἐστι τῆς ΚΜ·	d'autre part, que BG AD, l'une avec l'autre, est double de KM.	Et la ligne BG, AD, ensemble, est le double de KM.
καὶ ἔσται ἡ ΚΜ μονάδων ις ∠′·	Et KM sera de 16 ½ unités ;	Et KM est de 16 coudées et demi.
ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΛ μονάδων ιβ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΖ·	Mais, en outre, KL est de 12 unités – puisqu'aussi AZ –:	Et KL est de 12 coudées, car il en est ainsi de la ligne AZ.
τὸ ἄρα ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἔσται μονάδων ρϙη.	l'aire du trapèze sera donc de 198 unités.	S'il en est ainsi, la superficie de ce trapèze est 198 coudées.

συντεθήσεται δὲ ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει οὕτως.	Et, en conséquence de l'analyse, cela sera synthétisé ainsi.	
ἄφελε ἀπὸ τῶν κζ τὰ ϛ· λοιπὰ γίγνεται κα.	Retranche les 6 des 27 : il en résulte 21 restants.	
καὶ τριγώνου ὀξυγωνίου τῶν πλευρῶν δοθεισῶν ιγ καὶ κα καὶ κ εὑρήσθω ἡ ΑΖ κάθετος· ἔστιν δὲ μονάδων ιβ, ὡς ἐμάθομεν.	Et les côtés d'un triangle acutangle étant donnés : 13 et 21 et 20, que la perpendiculaire AZ soit trouvée ; or elle est de 12 unités, comme nous l'avons appris.	
καὶ σύνθες κζ καὶ <ϛ>· γίγνεται τὸ ἥμισυ ις ∠′·	Et compose 27 et les 6 : il en résulte 33 ; de ceux-ci, la moitié résulte $16\frac{1}{2}$.	
ταῦτα ἐπὶ <ιβ· γίγνεται ρϙη>, τοσούτου ἄρα τὸ ἐμβαδόν:— ⌋	ceux-ci par les 12: il en résulte 198. Autant que cela sera l'aire.	

Όπως είναι φανερό, το πρώτο πράγμα που χαρακτηρίζει τη διασκευή του προβλήματος που επιχειρεί ο M. Comtino είναι η ισχυρή κειμενική συγγένεια με το Πρόβλημα Ι.12 των *Μετρικών*. Όμως, η σειρά των βημάτων που ακολουθείται, κατά την επίλυση του προβλήματος, διαφέρει ριζικά στα δύο κείμενα· συγκεκριμένα, στα *Μετρικά*, η γεωμετρική διαδικασία εύρεσης της υπολογιστικής διαδικασίας προηγείται αυτής, ενώ στην προσαρμογή που δίνει ο M. Comtino, η σειρά αντιστρέφεται: αρχικά, παρατίθεται η υπολογιστική διαδικασία, η οποία, ακολούθως, αιτιολογείται, γεωμετρικά, επομένως, δεν πρόκειται για ακριβή μετάφραση των *Μετρικών*, όπως ισχυρίζεται ο P. Schub [Schub, 1932, σ. 58-68].

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω αντιστροφή, κατά τη διαδικασία επίλυσης, παρατηρείται, επίσης, και στα Προβλήματα Ι.13, Ι.14 και

I.16 των *Μετρικών*. Παρόμοια προσαρμογή ακολουθείται, επίσης, και στα Προβλήματα I.17-25, η οποία συμπληρώνεται με την παράθεση των λημμάτων και διαγραμμάτων που συνοδεύουν τα Προβλήματα αυτά στο κείμενο των *Μετρικών*.

Η διαδικασία που ακολουθεί ο M. Comtino, κατά την επίλυση των συγκεκριμένων *Προβλημάτων*, δηλαδή, αρχικά, παράθεση του αλγορίθμου που επιλύει το πρόβλημα και, ακολούθως, απόδειξη/αιτιολόγηση αυτού, επιβεβαιώνει, σύμφωνα με τους F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 554], την αποδεικτική διαδικασία που ακολουθεί ο ίδιος ο Ήρων στα *Μετρικά*. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι οι F. Acerbi & B. Vitrac ερμηνεύουν τη γεωμετρική συνιστώσα, που περιέχεται στα Προβλήματα των *Μετρικών*, ως απόδειξη του αλγορίθμου που προκύπτει, και ακολουθεί αυτή. Στο ερώτημα, τώρα, γιατί ο M. Comtino επιλέγει την αντιστροφή της σειράς των διαδικασιών, οι F. Acerbi & B. Vitrac ισχυρίζονται ότι "ο συγγραφέας δεν θέλει να διατηρήσει τη χαρακτηριστική δυαδικότητα της πλειονότητας των Προβλημάτων των *Μετρικών*, δηλαδή γεωμετρική ανάλυση με όρους δοθέντων/αριθμητική σύνθεση, επομένως, αντιστρέφει τη σειρά τους και εκθέτει, πρώτα, την αριθμητική διαδικασία, για να ακολουθήσει η απόδειξη που την αιτιολογεί". [Acerbi & Vitrac, 2014, ό.π.].

Όμως, κατά τη δική μας άποψη, η επιλογή αντιστροφής της σειράς των διαδικασιών κατά την επίλυση των Προβλημάτων, από τον M. Comtino, υποδεικνύει τη στόχευση της πραγματείας του, η οποία δεν μπορεί, σε καμία περίπτωση, να ταυτίζεται με τη στόχευση του Ήρωνα στα *Μετρικά*. Πράγματι, ο M. Comtino γράφει το έργο *Ḥibbūr ha-meshīḥa weha-tishboret* τον 15ο αιώνα, όπου η πραγματεία *Μετρικά* του Ήρωνα είναι, ήδη, γνωστή· επομένως, είναι γνωστές και οι διαδικασίες υπολογισμού που προτείνει. Άρα, η συγγραφή ενός έργου στο οποίο παρατίθενται οι ήδη γνωστές υπολογιστικές διαδικασίες, για να ακολουθήσει η αιτιολόγηση αυτών, είναι ένα εγχείρημα που εξυπηρετεί συγκεκριμένους στόχους και διακρίνεται από τα υπόλοιπα μετρολογικά έργα εκείνης της εποχής, τα οποία, απλώς, παραθέτουν αλγόριθμους επίλυσης. Αντίθετα, η στόχευση του Ήρωνα δεν μπορεί παρά να είναι διαφορετική και να επικεντρώνεται στην αναζήτηση και εύρεση, με τη βοήθεια συγκεκριμένων μεθόδων, των διαδικασιών υπολογισμού, όπως, άλλωστε, υποδεικνύει και η σειρά που ακολουθείται κατά την επίλυση: προηγείται η εύρεση, ακολουθεί ο υπολογισμός.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι οι απόπειρες κατάταξης του έργου *Ḥibbūr ha-meshīḥa weha-tishboret* του M. Comtino είτε σε μια άποψη "καθημερινής πρακτικής" [Silberberg, 1906, σ. 237] είτε σε μια "βυζαντινή παράδοση, στην οποία το μαθηματικό έργο περιορίζεται σε λιγοστά σχόλια στην αριθμητική και γεωμετρία, όπως συμβαίνει στις γεωμετρίες του Ιωάννη Πεδιάσιμου ή του Ισαάκ Αργυρού" [Schub, 1932, σ. 54-55], είναι, μάλλον, επιφανειακές. Στην

πραγματικότητα, η πραγματεία καθορίζεται, εν πολλοίς, από έναν αποδεικτικό/αιτιολογικό χαρακτήρα, ο οποίος προκύπτει με κατάλληλη διαμόρφωση της ευρετικής διαδικασίας που ακολουθείται από τον Ήρωνα, κατά την επίλυση προβλημάτων, στο έργο του *Μετρικά*. Η ανάδειξη της μέριμνας, για την αιτιολόγηση των, ήδη, γνωστών διαδικασιών, αποτελεί ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον εγχείρημα για την εποχή του.

3.2 ΤΟ ΚΕΙΜΕΝΟ ΤΩΝ ΜΕΤΡΙΚΩΝ: ΤΑ ΠΡΟΟΙΜΙΑ

3.2.1 Εισαγωγή

Τα προοίμια των αρχαίων ελληνικών κειμένων έχουν μελετηθεί από τη σύγχρονη ιστοριογραφία, κυρίως, ως πολύτιμες πηγές ιστορικών πληροφοριών, καθώς και ως μαρτυρίες του τρόπου με τον οποίο οι συγγραφείς προσεγγίζουν και παρουσιάζουν το αντικείμενο της έρευνάς τους. Ως βασικά κοινά χαρακτηριστικά των προοιμίων[48] θα μπορούσαμε να αναφέρουμε: **α)** την προκαταρκτική τους φύση, **β)** την αναφορά στην ολότητα του έργου που θα ακολουθήσει και, **γ)** το αναγνωστικό κοινό στο οποίο απευθύνεται ο συγγραφέας, που πολλές φορές παρουσιάζεται με τη μορφή συγκεκριμένης αφιέρωσης.

Όμως, σε αντίθεση με τα προοίμια που απαντούν σε άλλα είδη της αρχαίας γραμματείας, τα προοίμια των μαθηματικών κειμένων έχουν αποτελέσει αντικείμενο ειδικής σπουδής, σε πολύ μικρότερο βαθμό. Εξαίρεση αποτελούν δύο ενδιαφέρουσες μελέτες, το έργο του J. Mansfeld [Mansfeld, 1998] και το άρθρο του B. Vitrac [Vitrac, 2008, σ. 518-556], από τις οποίες, ως πλέον σημαντικά στοιχεία, καταγράφουμε, συνοπτικά, τα παρακάτω:

Α) Αναγνωρίζονται οι διάφορες μορφές προοιμίων, σε ένα σώμα 89 έργων, που οριοθετείται από τον 4ο π.Χ. έως τον 6ο μ.Χ. αιώνα, και περιλαμβάνει "καθαρές" μαθηματικές πραγματείες (αριθμητική, γεωμετρία), "μεικτά" μαθηματικά έργα (όπως, η *Όπτική* του Ευκλείδη, το *Περί Έπιπέδων ίσορροπιῶν* του Αρχιμήδη, η *Μεγάλη Μαθηματική Σύναξις* του Πτολεμαίου…), καθώς και συνθέσεις αστρολογίας, γεωγραφίας, μηχανικής, γεωδαισίας, μουσικής, λογιστικής… Καταγράφονται, συνολικά, 75 έργα στα οποία περιέχονται προοίμια/εισαγωγές [Vitrac, 2008, σ. 521-525].

[48] Συναντώνται και ως "πρόλογοι", "εισαγωγές", "αφιερώσεις", "υπομνήματα", "προκαταρκτικά", "πρελούδια" …

Β) Δίνονται σημαντικές ιστορικές πληροφορίες σχετικά με την κοινότητα των μαθηματικών κατά την ελληνιστική περίοδο, οι οποίες αφορούν, κυρίως, στην μεταξύ τους επικοινωνία, τη μετάδοση του έργου τους, την κριτική που ασκούσε ο ένας στον άλλον, καθώς και τις μεταξύ τους διαμάχες [Vitrac, 2008, σ. 525-530].

Γ) Οι ιστορικές πληροφορίες εμπλουτίζονται με στοιχεία σχετικά με την περαιτέρω πρόοδο των μαθηματικών της Ύστερης αρχαιότητας, οι οποίες αφορούν στις ομοιότητες, αλλά, κυρίως, στις διαφορές με την προγενέστερη περίοδο[49].

Δ) Κατηγοριοποιούνται τα κοινά, κατά το μάλλον ή ήττον, χαρακτηριστικά των προοιμίων τόσο στα έργα της ελληνιστικής περιόδου όσο και της Ύστερης αρχαιότητας, με τη μορφή "εισαγωγικών αντικειμένων συζήτησης"[50] [Mansfeld, 1998, σ. 4-5]. Μερικά από τα προαναφερθέντα στοιχεία συναντώνται και στα Προοίμια των τριών βιβλίων των *Μετρικών* του Ήρωνα, στη μελέτη των οποίων θα προχωρήσουμε ευθύς αμέσως.

3.2.2 Το Προοίμιο του πρώτου Βιβλίου: Μέτρηση των επιφανειών

Το πρώτο θέμα το οποίο αναφέρει ο Ήρων, στο Προοίμιο του πρώτου Βιβλίου, είναι η προέλευση της γεωμετρίας, την οποία ανάγει, ακολουθώντας την αρχαία παράδοση, στις μετρήσεις και τις διαιρέσεις της γης. Η σύνδεση με την αρχαία παράδοση, συγκεκριμένα, με τον Ηρόδοτο [*Ἡροδότου Ἱστορίαι* II.109, σε αγγλική μετάφραση: Godley, 1926/1990], είναι ιδιαίτερα σημαντική και επιτρέπει στον Ήρωνα να δηλώσει άμεσα το θέμα και την πρόθεση της πραγματείας του, δηλαδή τη συγγραφή και συστηματοποίηση των αποτελεσμάτων που θα προκύψουν από τις μετρήσεις και διαιρέσεις χωρίων[51]. Η έμφαση στις ανθρώπινες ανάγκες υποδεικνύει τη χρηστική διάσταση του θέματος, γεγονός που με τη σειρά του οδηγεί στην επέκταση της μελέτης σε μετρήσεις και διαιρέσεις των στερεών

---

[49] Η σημαντικότερη διαφορά από την ελληνιστική περίοδο είναι η διεύρυνση του ακροατηρίου από έναν κύκλο συναδέλφων σε ένα ευρύ αναγνωστικό κοινό [Vitrac 2008, σ. 530-533].

[50] Τα "εισαγωγικά αντικείμενα συζήτησης" που ανιχνεύονται στα μαθηματικά προοίμια είναι τα εξής: **i)** το θέμα του κειμένου, από το οποίο καθορίζεται και η πρόθεση του είτε του συγγραφέα είτε του βιβλίου του, **ii)** η θέση που κατέχει το συγκεκριμένο κείμενο σε ένα σύνταγμα έργων, **iii)** η χρησιμότητά του, **iv)** η εξήγηση του τίτλου του, **v)** το ζήτημα της γνησιότητάς του, **vi)** η διαίρεσή του σε μέρη, για παράδειγμα σε βιβλία ή κεφάλαια, **vii)** η αναγωγή του σε κάποιον ιδιαίτερο (υπο)επιστημονικό κλάδο, **viii)** η σαφήνεια ή η ασάφεια είτε του συγγραφέα είτε του κειμένου, καθώς και οι λόγοι που οδηγούν σε αυτήν, οι οποίοι συνδέονται με τον τρόπο παρουσίασης ή διδασκαλίας, **ix)** τα προσόντα τα οποία απαιτούνται από το μαθητή και/ή το δάσκαλο και, **x)** Στην περίπτωση ενός συντάγματος έργων, η αναφορά στην πρώτη εργασία που πρέπει να μελετηθεί.

[51] "… *διοίκησιν τῶν τε μετρήσεων καὶ διανομῶν*…" [146.4].

σωμάτων και, επομένως, στην περαιτέρω ανάπτυξη και εξέλιξη της γεωμετρίας. Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε ότι ο Ήρων, με την αναφορά στη χρησιμότητα[52], ως κίνητρου παραγωγής και συγγραφής των *Μετρικών*, διαχωρίζει την πραγματεία του από το επονομαζόμενο "ελληνικό ιδεώδες" των Μαθηματικών, το οποίο συνίσταται στην παραγωγή αποτελεσμάτων, "ιδίου ενδιαφέροντος", και συναντάται στις μελέτες συγγραφέων, όπως για παράδειγμα ο Ευκλείδης ή ο Απολλώνιος.

Το θεωρητικό υπόβαθρο, το αναγκαίο για την πραγματοποίηση των μετρήσεων, συγκροτείται από μια σειρά θεωρημάτων, του Εύδοξου και του Αρχιμήδη. Αρχικά, ο Ήρων παραθέτει δύο θεωρήματα του Εύδοξου· πρόκειται για τα αποτελέσματα που διαβάζουμε στα *Στοιχεία* XII.10 (σχέση κυλίνδρου και κώνου με την ίδια βάση και ίσα ύψη[53]) και στα *Στοιχεία* XII.2 (σχέση του λόγου δύο κύκλων προς τον λόγο των τετραγώνων των διαμέτρων τους[54]). Αμέσως μετά, ο Ήρων προσθέτει δύο θεωρήματα του Αρχιμήδη· πρόκειται για τα αποτελέσματα που παραθέτει ο Αρχιμήδης στο *Περὶ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου* I.33 (σχέση της επιφάνειας της σφαίρας με έναν μέγιστο κύκλο αυτής[55]) και στο *Περί Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου* I.34 Πόρισμα (σχέση του όγκου μιας σφαίρας με τον περιγεγραμμένο αυτής κύλινδρο[56]). Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι ο Αρχιμήδης μνημονεύει τα δύο προαναφερθέντα θεωρήματα του Εύδοξου τόσο στο προοίμιο τής *Μεθόδου* [Dijksterhuis, 1987, σ. 313-314] όσο και στο προοίμιο του *Περὶ Σφαίρας καὶ Κυλίνδρου* [*ΑΟΟ*, τ. Ι, σ. 2-4]. Η μνεία του Εύδοξου από τον Αρχιμήδη και η μνεία αμφότερων, Εύδοξου και Αρχιμήδη, από τον Ήρωνα, μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι η συμπερίληψη σαφών ιστορικών αναφορών, η οποία συναντάται σε προοίμια μαθηματικών έργων τόσο της ελληνιστικής περιόδου όσο και μεταγενέστερων εποχών, διαμορφώνει έναν συγκεκριμένο τρόπο γραφής αυτών. Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε ότι από τα προοίμια των έργων της ελληνιστικής περιόδου αντλούνται, επίσης, σημαντικές πληροφορίες σχετικά με την πρώτη "πηγή" ευρημάτων τα οποία μεταγράφονται σε έργα μεταγενέστερων συγγραφέων. Όπως έχουμε, ήδη, προαναφέρει, γνωρίζουμε, χάριν στον Αρχιμήδη, ότι τα θεωρήματα που διαβάζουμε στα *Στοιχεία* XII.10 και *Στοιχεία* XII.2 οφείλονται στον Εύδοξο· επίσης, πάλι, από αναφορά του Αρχιμήδη, στο προοίμιο του έργου του *Ψαμμίτης*, γνωρίζουμε κάποιες πληροφορίες για το

---

[52] "… *χρειώδους δὲ τοῦ πράγματος τοῖς ἀνθρώποις ὑπάρχοντος*…" [146.3].

[53] "… *ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον τριπλάσιός ἐστι*..." [146.9-10].

[54] "… *οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς <τὰ> ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα*…" [146.10-11].

[55] "… *ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ*…" [146.12].

[56] "… *τὸ στερεὸν αὐτῆς δύο τριτημόριά ἐστι τοῦ περιλαμβάνοντος αὐτὴν κυλίνδρου*…" [146.12-13].

ηλιοκεντρικό σύστημα, όπως παρατίθενται από τον Αρίσταρχο τον Σάμιο [*AOO*, τ. ΙΙ, σ. 244.9-15][57]. Επίσης, ιστορικές αναφορές συναντώνται και στα προοίμια έργων τόσο της Ρωμαϊκής εποχής όσο και της Ύστερης αρχαιότητας, με κάποιες διαφοροποιήσεις, όμως, συγκριτικά με την προγενέστερη περίοδο· για παράδειγμα οι αναφορές σε σύγχρονους συγγραφείς περιορίζονται αισθητά· από την άλλη, για κάθε συγγραφέα, εμφανίζεται ένας ικανός αριθμός από ειδήμονες: ο Ήρων μνημονεύει τον Εύδοξο, τον Αρχιμήδη και τον Ευκλείδη, ο Πτολεμαίος τον Αριστοτέλη, ο Πάππος τον Πυθαγόρα, τον Θεαίτητο, τον Πλάτωνα, τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη, τον Ερατοσθένη, τον Απολλώνιο, τον Ήρωνα και τον Πτολεμαίο, ο Μαρίνος τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη, τον Απολλώνιο, τον Διόδωρο, τον Πτολεμαίο και τον Πάππο και ο Ευτόκιος τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη, τον Ευκλείδη, τον Αρχιμήδη, τον Απολλώνιο και τον Πτολεμαίο [Vitrac, 2008, σ. 531].

Αμέσως μετά, ο Ήρων δηλώνει τον επόμενο στόχο του, ο οποίος συνίσταται στη συγκέντρωση όλων των θεωρημάτων που έχουν διατυπωθεί από προγενέστερους μαθηματικούς και είναι απαραίτητα για τις μετρήσεις, καθώς και στον εμπλουτισμό όλου αυτού του υλικού με δικές του ανακαλύψεις. Στο σημείο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι διάφορα ευρήματα, κατά κανόνα των ίδιων των συγγραφέων, που συναντώνται στα προοίμια έργων τόσο της ελληνιστικής περιόδου όσο και μεταγενέστερων εποχών, αναφέρονται υπό το πρίσμα μιας καινοφανούς ανακάλυψης. Για παράδειγμα στα προοίμια των Βιβλίων Ι & ΙV των *Κωνικών* [*AGE*, τ. Ι, σ. 4.16-22 & τ. IV, σ. 3.22-4.5], ο Απολλώνιος υποστηρίζει την πρωτοτυπία της πραγματείας του, καθώς και τη σπουδαιότητα των αποτελεσμάτων, που αυτή προσκομίζει. Επίσης, είναι αξιοσημείωτη η χρήση της λέξης "*ἄπιστον*" (μη-αληθοφανές) από τον Ήρωνα, όταν αναφέρεται στα ευρήματα του Αρχιμήδη για τη σφαίρα[58].

Θα ακολουθήσει η μετάβαση σε περισσότερο "τεχνικά" θέματα, δηλαδή στις μετρήσεις και στον τρόπο με τον οποίο θα πραγματοποιηθούν. Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι ο Ήρων, όπως και όλοι οι μαθηματικοί κατά την αρχαιότητα, εννοεί τη μέτρηση ως σύγκριση· για παράδειγμα ως εμβαδόν ενός επιπέδου σχήματος θεωρείται ο λόγος αυτού προς ένα άλλο σχήμα που επιλέγεται ως "πρότυπο". Τότε, ο Ήρων, αφού τονίσει την αναγκαιότητα εξέτασης όλων των επιφανειών τόσο των επιπέδων όσο και των κοίλων ή κυρτών, προχωράει στον καθορισμό του πρότυπου μέτρου για τις επιφάνειες· πρόκειται για το

[57] Μια νέα εκτίμηση της μη γεωκεντρικής παράδοσης στην αρχαία ελληνική αστρονομία, άμεσα συνδεδεμένη με τον Αρίσταρχο και το ηλιοκεντρικό του σύστημα, αναπτύσσεται από τους Κ. Γαβρόγλου, Δ. Διαλέτη και Γ. Χριστιανίδη [Γαβρόγλου & Διαλέτης & Χριστιανίδης, 2001].

[58] "*… καὶ πρὸ τῆς Ἀρχιμήδους συνέσεως ἄπιστον ἦν ἐπινοῆσαι διότι ἡ τῆς σφαίρας ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν αὐτῇ καὶ ὅτι τὸ στερεὸν αὐτῆς δύο τριτημόριά ἐστι τοῦ περιλαμβάνοντος αὐτὴν κυλίνδρου καὶ ὅσα τούτων ἀδελφὰ τυγχάνει.*" [146. 11-14].

ευθύγραμμο και ορθογώνιο σχήμα, το οποίο με τη σειρά του μετρείται με βάση την τετραγωνική μονάδα. Η επιλογή του παραπάνω σχήματος αιτιολογείται, από τη στιγμή που η ευθεία γραμμή και η ορθή γωνία είναι οι μοναδικές που εφαρμόζουν μεταξύ τους. Αντίστοιχα, στην περίπτωση των στερεών, το πρότυπο μέτρο για τις μετρήσεις/συγκρίσεις είναι ο κύβος. Μολονότι ο Ήρων προσδιορίζει τις μονάδες των επιφανειών και των στερεών με βάση τις μονάδες μήκους[59], στην πράξη, και για λόγους ευκολίας, αναφέρει στις μετρήσεις του μόνο τις αριθμητικές τιμές παραλείποντας τις συγκεκριμένες μονάδες.

3.2.3 Το Προοίμιο του δεύτερου Βιβλίου: Μέτρηση των στερεών

Η ανακεφαλαίωση των ειδών των επιφανειών που μετρήθηκαν στο πρώτο Βιβλίο κρίνεται απαραίτητη, ώστε να ακολουθήσει η ανακοίνωση του θέματος του δεύτερου Βιβλίου, που είναι η μέτρηση των στερεών. Αρχικά, λοιπόν, ο Ήρων απαριθμεί τα είδη των επιφανειών[60], των οποίων τη μέτρηση πραγματοποίησε στο πρώτο Βιβλίο. Ιδιαίτερη μνεία γίνεται για τις "*ἄτακτες*" επίπεδες επιφάνειες, των οποίων η μέτρηση συμπεριλαμβάνεται στην τελευταία παράγραφο του πρώτου Βιβλίου. Πρόκειται για επιφάνειες που περικλείονται από "*ἄτακτες*" γραμμές ή για μη-επίπεδες επιφάνειες, όπως για παράδειγμα η επιφάνεια του ανδριάντα ή κάτι παρόμοιου[61]. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε ότι με τον όρο "*ἄτακτες*" επίπεδες επιφάνειες, γενικά με τον όρο "*ἄτακτα*" σχήματα, νοούνται εκείνα που δεν μπορούν να μετρηθούν με τις καθιερωμένες γεωμετρικές μεθόδους. Όπως μας πληροφορεί ο Ήρων, κάποιοι ιστορικοί[62] θεωρούν τον Αρχιμήδη ως πιθανό εμπνευστή των μεθόδων μέτρησης των "*ἀτάκτων*" σχημάτων, τις οποίες, μάλλον, χαρακτηρίζουν, ως "*παραδόξους*". Ο ίδιος ο Ήρων, βέβαια, δεν φαίνεται να ασπάζεται τον χαρακτηρισμό της "παραδοξότητας"[63], ούτε δείχνει να ενδιαφέρεται για την πατρότητά τους. Απλά, η συμπερίληψη

---

[59] "*ἐμβαδὸς πῆχυς*" [146.25-26], "*ἐμβαδὸς ποῦς*" [146.26-27], "*κυβικὸς πῆχυς*" [148.5], "*κυβικὸς ποῦς*" [148.5].

[60] "… *ἐπιπέδους τε καὶ σφαιρικάς, ἔτι τε κωνικὰς καὶ κυλινδρικάς*…" [248.3].

[61] "*εἰ μὲν οὖν ἐπιφάνεια ἐπίπεδός ἐστιν, ἡ δὲ περιέχουσα αὐτὴν γραμμὴ ἄτακτος ὑπάρχει,…*" [244.12], "*εἰ δὲ οὔκ ἐστιν ἐπίπεδος ἡ ἐπιφάνεια ἀλλ΄ ὥσπερ ἀνδριάντος ἢ ἄλλου τινὸς τοιούτου …*" [244.15-16].

[62] "*…τὰς ἐπινοίας … τινὲς εἰς Ἀρχιμήδην ἀναφέρουσιν κατὰ διαδοχὴν ἱστοροῦντες*." [248.4-5]. Ο Ήρων, όπως ισχυρίζεται ο J. Mansfeld [Mansfeld, 1988, σ.53, υπ. 177], με τη φράση "*κατὰ διαδοχὴν ἱστοροῦντες*" παρέχει τη μοναδική διασωθείσα μαρτυρία για εκείνους τους ιστορικούς οι οποίοι ασχολήθηκαν, ο ένας μετά τον άλλον (*Successions literature*), με τα Μαθηματικά. Η πιθανή ερμηνεία της παραπάνω φράσης για ιστορικούς οι οποίοι ασχολήθηκαν, ο ένας μετά τον άλλον, με έργα του Αρχιμήδη κρίνεται, από τον J. Mansfeld [Mansfeld, 1988, σ.53, υπ. 177], λιγότερο πιθανή.

[63] Χαρακτηρίζει αυτές τις μεθόδους μέτρησης "*ὥσπερ παραδόξους*" [248.4].

αυτών στις μεθόδους μέτρησης κρίνεται απαραίτητη, ώστε η πραγματεία να είναι επαρκής.

Αμέσως μετά, θα ακολουθήσουν οι τρεις κανόνες για τη μέτρηση των στερεών:

(K1) Μέτρηση ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, του οποίου έχουν δοθεί οι διαστάσεις του[64]. Αρχικά, ο Ήρων διευκρινίζει ότι θα μετρήσει τόσο τα κοίλα όσο και τα συμπαγή σώματα, τονίζοντας ότι δεν υπάρχει διαφορά στη μέθοδο μέτρησής τους[65], παρά μόνο σε μία από τις διαστάσεις τους, η οποία ονομάζεται "*βάθος*" στα κοίλα και "*πάχος*" στα συμπαγή[66]. Αμέσως μετά, δίνει συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές στις τρεις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου και πραγματοποιεί τον αριθμητικό υπολογισμό. Η διαδικασία που ακολουθείται είναι Όγκος=(μήκος)×(πλάτος)×(ύψος)[67]. Η διαδικασία αιτιολογείται από μια απόδειξη ανάλογη εκείνης που έχει ακολουθηθεί στο Πρόβλημα Ι.1 (υπολογισμός του εμβαδού ορθογωνίου παραλληλογράμμου, του οποίου έχουν δοθεί οι διαστάσεις, δηλαδή το μήκος και το πλάτος). Πράγματι, ο Ήρων διαιρεί τις διαστάσεις του στερεού σε μοναδιαία διαστήματα, φέρνει παράλληλα επίπεδα από τις τομές, οπότε το στερεό τεμαχίζεται[68] σε μοναδιαία στερεά. Δύο είναι τα σημεία εκείνα που πρέπει να επισημανθούν: **α)** ο "τεμαχισμός" του στερεού (ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου) σε μοναδιαία στερεά (κύβους) παραπέμπει στην ιδέα των "αδιαιρέτων" και, **β)** η απόδειξη πραγματοποιείται με έναν στοιχειώδη τρόπο και θεωρείται προφανής[69].

(K2) Γενίκευση 1η: Μέτρηση ενός οποιουδήποτε στερεού σχήματος του οποίου το ύψος είναι κάθετο προς τη βάση. Η διαδικασία είναι Όγκος=(βάση)×(ύψος)[70]. Είναι προφανές ότι η πρόταση αυτή συνιστά γενίκευση της προηγούμενης, υπό την έννοια ότι η βάση του στερεού μπορεί να είναι οποιαδήποτε ευθύγραμμη ή, ακόμη, και καμπυλόγραμμη επιφάνεια. Ο ίδιος ο Ήρων εφαρμόζει την εν λόγω πρόταση, παραδειγματικά, στην περίπτωση ενός ορθού στερεού με βάση έλλειψη και δοθέν ύψος. Το παραπάνω στερεό περιγράφεται με μεταφορά της βάσης του, κατά δοθείσα διεύθυνση κάθετη στη βάση· τότε, ο υπολογισμός του όγκου πραγματοποιείται με τη διαίρεση του στερεού σε διαδοχικές τομές και οδηγεί στην προαναφερθείσα διαδικασία.

---

[64] "*Στερεὸν εὐθύγραμμον ὀρθογώνιον μετρῆσαι δοθείσης ἑκάστης αὐτοῦ πλευρᾶς, μήκους τε καὶ πλάτους καὶ βάθους ἢ πάχους*" [248.8-9].

[65] "*οὐδὲν γὰρ διοίσει [εἰ] ἢ κοῖλον ὑπάρχον μετρεῖσθαί τι σῶμα ἢ ναστόν.*" [248.9-10].

[66] "*βάθος μὲν γὰρ καλεῖται ἐπὶ τῶν κοίλων σωμάτων, πάχος δὲ ἐπὶ τῶν ναστῶν.*" [248.11].

[67] "*… δι΄ ἀλλήλων τοὺς ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν,…*" [248.12-13].

[68] "*… ἔσται ὥσπερ καταπεπρισμένον…*" [248.16-17].

[69] "*… ἡ ἀπόδειξις φανερά.*" [248.14].

[70] "*… τῆς βάσεως …ἐπὶ τὸ ὕψος πολλαπλασιασθείσης.*" [248.19].

(K3) Γενίκευση 2η: Μέτρηση ενός οποιουδήποτε στερεού σχήματος του οποίου το ύψος δεν είναι κάθετο προς τη βάση του, αλλά "*κεκλιμένον*". Η διαδικασία είναι Όγκος=(βάση)×(κάθετη από την κορυφή του στερεού προς τη βάση[71])[72]. Ο Ήρων εφαρμόζει την εν λόγω πρόταση σε στερεό, το οποίο περιγράφεται με μεταφορά της βάσης του, κατά δοθείσα διεύθυνση, η οποία, όμως, δεν είναι κάθετη στη βάση. Ο υπολογισμός του όγκου πραγματοποιείται με τη διαίρεση του στερεού, από επίπεδο παράλληλο προς τη βάση, σε διαδοχικές τομές ίσες με τη βάση και οδηγεί στην προαναφερθείσα διαδικασία. Είναι προφανές ότι η (K3) αποτελεί μια περαιτέρω γενίκευση της (K2).

Αξίζει να επισημάνουμε ότι ο Ήρων για τους τρεις προαναφερθέντες κανόνες παραθέτει "αποδείξεις", οι οποίες πραγματοποιούνται εντός του ίδιου του Προοιμίου. Συγκεκριμένα, η πρώτη διαδικασία "αποδεικνύεται" με τη διαίρεση του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου σε μοναδιαία στερεά, των οποίων το πλήθος θα δώσει τη συγκεκριμένη μέτρηση, ενώ, οι άλλες δύο διαδικασίες "αποδεικνύονται" με την κατασκευή παράλληλων τομών προς τη βάση στερεών, τα οποία ο Ήρων έχει επιλέξει, κατάλληλα, ώστε να πληρούν τις προϋποθέσεις μέτρησης. Ο Ήρων, με την επιλογή να παραθέσει στο Προοίμιο τις τρεις βασικές αρχές που διέπουν τη μέτρηση των στερεών σωμάτων, αναδεικνύει τον τεχνικό χαρακτήρα του, καθώς και τη στενή σχέση του με το κυρίως σώμα του δεύτερου Βιβλίου, με το οποίο αποτελεί ένα αρμονικό όλον.

3.2.4 Το Προοίμιο του τρίτου Βιβλίου: Διαίρεση επιπέδων και στερεών σωμάτων

Το Προοίμιο του τρίτου Βιβλίου αρχίζει με τη διαπίστωση της συνάφειας μεταξύ μετρήσεων και διαιρέσεων των χωρίων[73]. Με τη διαπίστωση αυτή αιτιολογείται, κατά κάποιον τρόπο, η συμπερίληψη στο έργο των *Μετρικών* του τρίτου Βιβλίου, του οποίου το θέμα είναι οι διαιρέσεις επιπέδων και στερεών σχημάτων, υπό δοθέντα λόγο.

Αμέσως μετά, ο Ήρων επισημαίνει τη χρησιμότητα και αναγκαιότητα του διαμερισμού της γης σε ίσα ή, όταν κρίνεται αναγκαίο, σε άνισα μέρη. Η ίδια η φύση, γράφει, λειτουργεί με τέτοιον τρόπο, ώστε στα μεγάλα έθνη να αναλογεί μεγαλύτερο μερίδιο γης από εκείνο που παραχωρείται σε μικρότερα[74]. Με βάση

---

[71] "… *ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς αὐτοῦ κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὴν βάσιν*,…" [250.2-3].

[72] "… *τῆς βάσεως … πολλαπλασιάσαι ἐπὶ τὴν εἰρημένην κάθετον*…" [250.4].

[73] "*Οὐ πολὺ ἀπᾴδειν νομίζομεν τὰς τῶν χωρίων διαιρέσεις τῶν γιγνομένων ἐν τοῖς χωρίοις μετρήσεων*" [308.1-2].

[74] "… *νέμεται γὰρ κατ΄ αὐτὴν ἔθνη μέγιστα μεγάλην λελογχότα χώραν ἔνια δὲ καὶ ὀλίγην μικρὰ καθ΄ αὐτὰ ὑπάρχοντα*" [308.4-6].

αυτήν την αναλογική λειτουργία της φύσης οι άνθρωποι προχώρησαν και σε άλλη διαίρεση της γης, ώστε οι ηγεμόνες να απολαμβάνουν μεγαλύτερο μερίδιο από τους υποδεέστερούς τους[75]

Όμως, ο Ήρων απορρίπτει αυτή τη μέθοδο κατανομής, ως πρόχειρη και επιπόλαιη και, επικαλούμενος την ακρίβεια και τη δικαιοσύνη, προτείνει τη διαίρεση με βάση τις αρχές της γεωμετρίας[76]. Η γεωμετρία, ισχυρίζεται, είναι η μόνη από τις τέχνες και τις επιστήμες που μας δίνει αδιαμφισβήτητες αποδείξεις. Αξίζει να επισημάνουμε ότι η σύνδεση του πολιτικού και κοινωνικού θέματος της διανομής της γης με τη γεωμετρία προσδίδει σε αυτήν έναν ρόλο, που εκτός από τις αξίες, όπως το "αδιαμφισβήτητο" των πορισμάτων της με τις οποίες, παραδοσιακά, συνδέεται, σχετίζεται και με άλλου τύπου αξίες, ηθικές αυτή τη φορά, όπως η δικαιοσύνη, η εντιμότητα και η αμεροληψία.

Τα κυριότερα στοιχεία, λοιπόν, που καταγράφονται στα Προοίμια των τριών Βιβλίων των *Μετρικών* συνοψίζονται στα εξής:

α) απουσιάζει οποιαδήποτε αφιέρωση,

β) αναφέρεται η άμεση και στενή σχέση των *Μετρικών* με τον κλάδο της γεωμετρίας και δίνονται πληροφορίες για την ιστορία της,

γ) περιγράφονται, ευκρινώς, τόσο το θέμα όσο και τα περιεχόμενα του κάθε Βιβλίου,

δ) αφού αναφερθούν οι γνώσεις προγενέστερων μαθηματικών "αυθεντιών" και διαταχθούν με συστηματικό τρόπο, κρίνεται απαραίτητο να εμπλουτιστούν, με τα ευρήματα του Ήρωνα, ώστε το αποτέλεσμα που θα προκύψει να είναι σαφές και προσιτό στον αναγνώστη,

ε) εξετάζεται, λεπτομερώς, η χρησιμότητα της πραγματείας και, επομένως, αιτιολογείται η αναγκαιότητα σύνθεσης αυτής,

στ) δίνονται εισαγωγικές πληροφορίες σχετικά με τις μονάδες μέτρησης, καθώς και με τα βασικά επίπεδα και στερεά σχήματα με τα οποία θα γίνει η μέτρηση/σύγκριση και,

ζ) με την παράθεση των τριών βασικών αρχών που είναι απαραίτητες για τη μέτρηση των στερεών, υπογραμμίζεται η τεχνική διάσταση που χαρακτηρίζει όχι

---

[75] "*... τοῖς μὲν ἡγεμόσι καὶ τοῖς ἄλλοις τοῖς ἄρχειν δυναμένοις μείζω καὶ κατὰ ἀναλογίαν, τοῖς δὲ μηδὲν τοιοῦτο δυναμένοις δρᾶν μικροὶ κατελείφθησαν τόποι, κῶμαί τε τοῖς μικροψυχοτέροις καὶ ἐποίκια καὶ ὅσα τοιαῦτά ἐστιν...*"[308.6-9].

[76] "*... εἰ δέ τις βούλοιτο κατὰ τὸν δοθέντα λόγον διαιρεῖν τὰ χωρία ὥστε μηδὲ ὡς εἰπεῖν κέγχρον μίαν τῆς ἀναλογίας ὑπερβάλλειν ἢ ἐλλείπειν τοῦ δοθέντος λόγου, μόνης προσδεήσεται γεωμετρίας*" [308.10-12].

μόνο τα Προοίμια των *Μετρικών*, αλλά και των λοιπών έργων του ηρώνειου συντάγματος.

3.3 ΤΟ ΚΕΙΜΕΝΟ ΤΩΝ *ΜΕΤΡΙΚΩΝ*: ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ/ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

3.3.1 Βιβλίο Ι: Μέτρηση επιφανειών

Το βιβλίο Ι περιέχει 39 Προβλήματα/Προτάσεις και μπορεί να διαιρεθεί σε δύο κύρια μέρη. Στο πρώτο μέρος, στο οποίο περιλαμβάνονται τα Προβλήματα/ Προτάσεις 1−25, μετρούνται εμβαδά ευθύγραμμων σχημάτων. Στο δεύτερο μέρος, στο οποίο περιλαμβάνονται τα Προβλήματα/Προτάσεις 26−39, μετρούνται εμβαδά των εξωτερικών επιφανειών σωμάτων τα οποία είναι, εν μέρει τουλάχιστον, καμπυλόγραμμα, όπως ο κύκλος, τα τμήματα κύκλου, η έλλειψη, η παραβολή, καθώς και η επιφάνεια κυλίνδρου, ισοσκελούς κώνου, σφαίρας και τμημάτων σφαίρας. Μια επιμέρους διάκριση που μπορεί να εισαχθεί, αφορά στις επιφάνειες επίπεδων σχημάτων, των οποίων το εμβαδόν μετρείται στα Προβλήματα/Προτάσεις 26−35 και στις επιφάνειες μη επιπέδων σχημάτων, των οποίων το εμβαδόν μετρείται στα Προβλήματα 36−39. Αναλυτικότερα:

Το πρώτο μέρος του Βιβλίου Ι είναι το πλέον σύνθετο και σημαντικό τμήμα ολόκληρης της πραγματείας των *Μετρικών*, αποτελεί το 1/3 αυτής και τα Προβλήματά του καλύπτουν την εύρεση εμβαδών ενός ευρέως φάσματος βασικών ευθύγραμμων σχημάτων. Η πρώτη μέτρηση αφορά στο εμβαδόν ορθογώνιου παραλληλογράμμου (Πρόβλημα 1)· το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, όπως έχει προαναφερθεί, είναι το σχήμα με το οποίο συγκρίνονται τα προς μέτρηση επίπεδα σχήματα. Ακολουθούν οι μετρήσεις των εμβαδών ορθογώνιου τριγώνου (Πρόβλημα 2) και ισοσκελούς τριγώνου (Πρόβλημα 3). Στην Πρόταση 4 δίνεται το κριτήριο καθορισμού του είδους μιας γωνίας, το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στις μετρήσεις των εμβαδών οξυγώνιου τριγώνου (Πρόβλημα 5) και αμβλυγώνιου τριγώνου (Πρόβλημα 6). Στο τέλος του Προβλήματος 6, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σχόλιο στο οποίο ο Ήρων υποδεικνύει δύο μεθόδους μέτρησης, στη βάση των οποίων μπορούν να ταξινομηθούν οι περισσότερες προτάσεις του έργου του. Η λεπτομερής ανάλυση και ερμηνεία αυτού του σχολίου θα γίνει σε επόμενο κεφάλαιο. Η διαδικασία εύρεσης του εμβαδού οποιουδήποτε τριγώνου, όταν δίδονται οι τρεις πλευρές του[77], γνωστή και ως "ηρώνειος τύπος", αποδεικνύεται στο Πρόβλημα 8. Για την

[77] "*Ἔστι δὲ καθολικὴ μέθοδος ὥστε τριῶν πλευρῶν δοθεισῶν οἱουδηποτοῦν τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εὑρεῖν χωρὶς καθέτου.*" [164.1-2].

απόδειξη αυτής της διαδικασίας χρησιμοποιείται ένα αριθμητικό λήμμα[78], το οποίο θα αποδειχτεί στην Πρόταση 7. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Ήρων υποδεικνύει, στην αρχή του Προβλήματος 8, την προσεγγιστική μέθοδο εύρεσης τετραγωνικής ρίζας του μη τετράγωνου αριθμού 720[79], την οποία παραθέτει, αμέσως μετά, υπό τη μορφή αριθμητικού αλγόριθμου [164.10-16]. Οι μετρήσεις των εμβαδών τριγώνων ολοκληρώνονται με τον υπολογισμό του εμβαδού τριγώνου με ύψος μη ρητό αριθμό (Πρόβλημα 9). Θα ακολουθήσει ο υπολογισμός των εμβαδών: ορθογώνιου τραπεζίου (Πρόβλημα 10), ισοσκελούς τραπεζίου (Πρόβλημα 11), οξυγώνιου τραπεζίου (Πρόβλημα 12), και αμβλυγώνιου τραπεζίου (Πρόβλημα 13). Ο Ήρων στην αρχή του Προβλήματος 14 υπενθυμίζει τον τρόπο εύρεσης εμβαδού ρόμβων και ρομβοειδών, με γνωστά τα μήκη των πλευρών τους και μίας διαγωνίου τους, για να ακολουθήσει ο υπολογισμός του εμβαδού τετράπλευρων με μία ορθή γωνία (Προβλήματα 14, 15 και 16). Στο τέλος του Προβλήματος 16, ο Ήρων προβαίνει σε ανακεφαλαίωση/σύνοψη της μελέτης των "τρίπλευρων" και τετράπλευρων[80], για να ακολουθήσει η μετάβαση στο τελευταίο τμήμα του πρώτου μέρους (Προβλήματα 17−25), το οποίο περιλαμβάνει τη μέτρηση των εμβαδών κανονικών πολυγώνων από το τρίγωνο μέχρι το δωδεκάγωνο[81]. Συγκεκριμένα, υπολογίζονται τα εμβαδά: ισόπλευρου τριγώνου (Πρόβλημα 17), κανονικού πενταγώνου (Πρόβλημα 18), κανονικού εξαγώνου (Πρόβλημα 19), κανονικού επταγώνου (Πρόβλημα 20), κανονικού οκταγώνου (Πρόβλημα 21), κανονικού εννεαγώνου (Πρόβλημα 22), κανονικού δωδεκαγώνου (Πρόβλημα 23), κανονικού ενδεκαγώνου (Πρόβλημα 24) και κανονικού δωδεκαγώνου (Πρόβλημα 25). Για τον υπολογισμό των εμβαδών του κανονικού πενταγώνου και του κανονικού επταγώνου χρειάζονται δύο λήμματα, τα οποία ο Ήρων παραθέτει και αποδεικνύει στο τέλος των Προβλημάτων 17 και 19, αντίστοιχα. Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Ήρων, για την προσεγγιστική τιμή των λόγων λ_9/δ και λ_{11}/Δ[82], χρησιμοποιεί στοιχεία τα οποία προκύπτουν, όπως ισχυρίζεται ο T. Heath [Heath, 1921, τ. II, σ. 329], από τον "Πίνακα Χορδών" του Ιππάρχου. Ο Ήρων, στο τέλος της Πρότασης 25, υποδεικνύει τη μέθοδο μέτρησης

[78] "*Ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔσται τοῦ ἀπὸ ΑΒ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΒΓ τετράγωνον πλευρὰ <ὁ> ὑπὸ ΑΒ<Γ> περιεχόμενος ἀριθμός.*" [162.1-2].

[79] "*ἐπεὶ οὖν αἱ ψκ ῥητὴν τὴν πλευρὰν οὐκ ἔχουσι, ληψόμεθα μετὰ διαφόρου ἐλαχίστου τὴν πλευρὰν οὕτως.*" [164.8-9].

[80] "*Ὅσα μὲν οὖν ἔδει ἐπί τε τριπλεύρων καὶ τετραπλεύρων τεταγμένων εἰπεῖν, προγέγραπται.*" [188. 1].

[81] "*… ἐξῆς δὲ περὶ τῶν ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων εὐθυγράμμων γράψομεν ἄχρι τοῦ δωδεκαγώνου,…*" [188.9-10].

[82] λ_9, λ_{11} θα ονομάσουμε τις πλευρές του κανονικού εννεαγώνου και ενδεκαγώνου αντίστοιχα, ενώ, δ, Δ θα ονομάσουμε τις διαμέτρους των περιγεγραμμένων κύκλων στο κανονικό εννεάγωνο και ενδεκάγωνο, αντίστοιχα.

του εμβαδού μη κανονικών πολυγώνων[83], για να ακολουθήσει η μετάβαση στη μέτρηση των επιφανειών καμπυλόγραμμων σχημάτων[84].

Το δεύτερο μέρος του Βιβλίου Ι χαρακτηρίζεται, συνήθως, ως "αρχιμήδειο τμήμα". Τα Προβλήματα, από τα οποία απαρτίζεται, περιέχουν ρητές αναφορές στον Αρχιμήδη, συγκεκριμένα στα έργα του: *Κύκλου μέτρησις* [βλ. 212.1, 212.16. 240.7], *Περί πλινθίδων και κυλίνδρων* [βλ. 212.6], *Μέθοδος* [βλ. 228.33, 236.4], *Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων* [βλ. 234.2], και *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* [βλ. 242.1-2, 244.5]. Αν εξαιρέσουμε τα Προβλήματα 30-32, στα οποία η μέτρηση των εμβαδών πραγματοποιείται με διαδικασίες οι οποίες είναι λίγο πιο σύνθετες, η προσέγγιση σε όλες τις υπόλοιπες προτάσεις του "αρχιμήδειου τμήματος" είναι πολύ απλή και πάντα η ίδια: ένας στοιχειώδης αριθμητικός αλγόριθμος "παρακολουθεί" μία αρχιμήδεια γεωμετρική πρόταση.

Η έναρξη, λοιπόν, του δεύτερου μέρους του Βιβλίου Ι γίνεται με το Πρόβλημα 26, στο οποίο θα υπολογισθούν: **i)** το εμβαδόν κύκλου, όταν δίνεται η διάμετρος αυτού, **ii)** η περίμετρος κύκλου, όταν δίνεται η διάμετρος αυτού και αντίστροφα, **iii)** το εμβαδόν κύκλου, όταν δίνεται η περίμετρος αυτού και αντίστροφα και, **iv)** το εμβαδόν του τμήματος το οποίο περιέχεται μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων[85]. Αξίζει να επισημάνουμε ότι ο Ήρων, αφού παραθέσει τα πλέον ακριβή όρια για τον λόγο της περιμέτρου κάθε κύκλου προς τη διάμετρο αυτού[86], χρησιμοποιεί, για λόγους ευκολίας, την αρχιμήδεια προσέγγιση 22/7[87]. Οι Προτάσεις 27, 28 και 29 που ακολουθούν μπορεί να χαρακτηριστούν ως γεωμετρικά λήμματα. Συγκεκριμένα, οι Προτάσεις 27, 29 χρησιμοποιούνται στο Πρόβλημα 32, ενώ, η Πρόταση 28 χρησιμοποιείται στην Πρόταση 29. Στη συνέχεια, ο Ήρων προχωράει στις μετρήσεις κυκλικών τμημάτων. Στο Πρόβλημα 30 παραθέτει τη μη ακριβή διαδικασία των προγενεστέρων του, για τη μέτρηση του εμβαδού κυκλικού τμήματος μικρότερου του ημικυκλίου[88]. Αμέσως μετά, στο Πρόβλημα 31, προτείνει μια ακριβέστερη διαδικασία[89], η οποία, όμως, περιορίζεται στην περίπτωση που η βάση του κυκλικού τμήματος δεν είναι μεγαλύτερη τού

---

[83] "*Ὅσα δὲ τῶν πολυγώνων σχημάτων οὔκ ἐστιν ἰσόπλευρα καὶ ἰσογώνια, ταῦτα εἰς τρίγωνα καταδιαιρούμενα μετρεῖται.*" [210.13-14].

[84] "*τὰ δὲ περιφερῆ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων καὶ καθόλου τῶν ἐπιφανειῶν ὅσαι δύνανται μετρεῖσθαι ἐξῆς κατὰ τὸ ἀκόλουθον ἐκθησόμεθα·—*" [210.15-16].

[85] "*… ὃ καλεῖται ἴτυς.*" [214.9].

[86] "*ὁ δὲ αὐτὸς Ἀρχιμήδης δείκνυσιν ἐν τῷ περὶ πλινθίδων καὶ κυλίνδρων ὅτι παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα μὲν λόγον ἔχει <ἢ ὃν ἔχει> $\mu^{\kappa\alpha}$,αωοε πρὸς μ^{ς} ,ζυμα ἐλάσσονα δὲ ἢ ὃν ἔχει $\mu^{\iota\theta}$,ζωπη πρὸς μ^{ς} ,βτνα.*" [212.6-8].

[87] "*ἀλλ᾽ ἐπεὶ οὗτοι οἱ ἀριθμοὶ πρὸς τὰς μετρήσεις οὐκ εὐθετοῦσι, καταβιβάζονται εἰς ἐλαχίστους ἀριθμούς ὡς τὸν κβ πρὸς τὰ ζ*" [212.9-10].

[88] "*Τὸ δὲ τμῆμα τοῦ κύκλου τὸ ἔλαττον ἡμικυκλίου οἱ μὲν ἀρχαῖοι ἀμελέστερον ἐμέτρουν*" [222.1].

[89] "*Οἱ δὲ ἀκριβέστερον ἐζητηκότες…*" [224.1].

τριπλάσιου του ύψους. Στο Πρόβλημα 32 ο Ήρων επεκτείνεται στη διαδικασία που ακολουθείται, όταν η βάση του κυκλικού τμήματος είναι μεγαλύτερη του τριπλάσιου του ύψους[90]. Η μελέτη των εμβαδών κυκλικών τμημάτων ολοκληρώνεται στο Πρόβλημα 33, στο οποίο ο Ήρων υποδεικνύει τη διαδικασία μέτρησης στην περίπτωση κυκλικού τμήματος μεγαλύτερο του ημικυκλίου[91]. Αμέσως μετά, θα υπολογισθούν τα εμβαδά: **α)** έλλειψης (Πρόβλημα 34) και, **β)** παραβολής (Πρόβλημα 35).

Στη συνέχεια, ο Ήρων θα στραφεί σε προβλήματα μέτρησης επιφανειών μη επίπεδων σχημάτων. Στο Πρόβλημα 36, μετρείται το εμβαδόν της επιφάνειας κυλίνδρου χωρίς τις βάσεις του και στο Πρόβλημα 37, μετρείται το εμβαδόν της επιφάνειας κώνου χωρίς τις βάσεις του. Ακολουθούν οι μετρήσεις του εμβαδού της επιφάνειας σφαίρας (Πρόβλημα 38) και του εμβαδού της επιφάνειας σφαιρικού τμήματος με βάση κύκλο (Πρόβλημα 39), με το οποίο θα ολοκληρωθεί η μελέτη των μετρήσεων σχημάτων με εύτακτο σχήμα[92]. Θα ακολουθήσει η μετάβαση σε μετρήσεις επιφανειών ακανόνιστου σχήματος ("*ἀτάκτους*")[93], όπου θα υποδειχθούν τρόποι μέτρησης αυτών. Η συμπερίληψη της μέτρησης της επιφάνειας αυτών των σωμάτων κρίνεται, για λόγους επάρκειας της πραγματείας, απαραίτητη και με αυτό το γενικό συμπέρασμα[94] ο Ήρων κλείνει το Βιβλίο Ι.

3.3.2 Βιβλίο ΙΙ: Μέτρηση όγκων

Το Βιβλίο ΙΙ περιέχει 20 Προβλήματα και μπορεί να διαιρεθεί σε τέσσερα μέρη. Στο πρώτο μέρος, στο οποίο περιλαμβάνονται τα Προβλήματα 1-5, μετρούνται οι όγκοι "βασικών" στερεών. Στο δεύτερο μέρος, στο οποίο περιλαμβάνονται τα Προβλήματα 6−10, μετρούνται οι όγκοι κόλουρων στερεών. Στο τρίτο μέρος, στο οποίο περιλαμβάνονται τα Προβλήματα 11−15, μετρούνται οι όγκοι καμπυλόγραμμων στερεών. Τέλος, στο τέταρτο μέρος, στο οποίο περιλαμβάνονται τα Προβλήματα 16−19, μετρούνται οι όγκοι των τεσσάρων από τα πέντε πλατωνικά στερεά. Το βιβλίο ΙΙ θα κλείσει με την Πρόταση 20, στην

---

[90] "*ἁρμόσει δὲ ἡ αὐτὴ μέθοδος ὅταν ἡ βάσις τῆς καθέτου μείζων ᾖ ἢ τριπλασίων.*" [228.28].

[91] "*Ἐὰν δὲ δέῃ τμῆμα μετρῆσαι μεῖζον ἡμικυκλίου, μετρήσομεν οὕτως.*" [232.1].

[92] "*Ὅσα μὲν οὖν ἦν σχήματα τεταγμένων ἐπιφανειῶν αὐτάρκως νομίζομεν μεμετρῆσθαι*" [244.10].

[93] "*ἀναγκαῖον δὲ ὡς οἶμαι πρὸς τὰς ἀτάκτους εἰπεῖν ἐπιφανείας ὡς δέον αὐτὰς μετρεῖσθαι.*" [244.11].

[94] "*καὶ γὰρ αὐτάρκως νομίζομεν τὰς ἐκ δυεῖν διαστάσεων ἐπιφανείας μεμετρηκέναι·—*" [244.21-22].

οποία περιγράφονται δύο "πρακτικές" διαδικασίες για τον υπολογισμό του όγκου μη κανονικών στερεών. Αναλυτικότερα:

Τα Προβλήματα του πρώτου μέρους καλύπτουν την εύρεση όγκων στερεών, όπως του κώνου − ορθού ή σκαληνού − (Πρόβλημα 1), του σκαληνού κυλίνδρου (Πρόβλημα 2), του στερεού πλάγιου παραλληλεπίπεδου με βάση οποιοδήποτε πολύγωνο (Πρόβλημα 3), του πρίσματος με βάση παραλληλόγραμμο (Πρόβλημα 4) και της πυραμίδας με βάση οποιοδήποτε πολύγωνο (Πρόβλημα 5).

Τα Προβλήματα του δεύτερου μέρους περιέχουν μετρήσεις για την εύρεση όγκων κόλουρων στερεών, όπως της κόλουρης πυραμίδας με βάσεις όμοια τρίγωνα (Προβλήματα 6−7), του βωμίσκου − στερεό με βάση και κορυφή όμοια ορθογώνια − (Πρόβλημα 8), και του κόλουρου κώνου (Προβλήματα 9−10). Στο Πρόβλημα 7 η κόλουρη πυραμίδα παρουσιάζεται με διαφορετικό τρόπο από τον τρόπο που παρουσιάζεται στο Πρόβλημα 6· δεν δίνονται αριθμητικά δεδομένα, επομένως, ο αλγόριθμος εύρεσης του όγκου της περιορίζεται στην περιγραφή μιας σειράς γεωμετρικών λειτουργιών. Το Πρόβλημα ολοκληρώνεται με γενίκευση σε κόλουρη πυραμίδα με οποιαδήποτε βάση[95]. Στο Πρόβλημα 10, προτείνεται μια εναλλακτική μέθοδος μέτρησης του κόλουρου κώνου[96], από εκείνη του Προβλήματος 9· όπως και στην πρόταση 7, δεν δίνονται αριθμητικά δεδομένα, επομένως, ο αλγόριθμος μέτρησης συνίσταται στην περιγραφή μιας σειράς γεωμετρικών λειτουργιών.

Τα Προβλήματα του τρίτου μέρους αναφέρονται στις μετρήσεις για την εύρεση όγκων στερεών, όπως της σφαίρας (Πρόβλημα 11), του τμήματος σφαίρας (Πρόβλημα 12), της σπείρας (Πρόβλημα 13), του τμήματος κυλίνδρου, το οποίο δημιουργείται από την τομή ενός επιπέδου, που διέρχεται από το κέντρο μιας βάσης του (Πρόβλημα 14), και ενός στερεού, το οποίο σχηματίζεται από την τομή δύο ορθογώνιων κυλίνδρων εγγεγραμμένων σε έναν κύβο (Πρόβλημα 15). Αξίζει να σημειώσουμε ότι στο Πρόβλημα 11 ο όγκος της σφαίρας υπολογίζεται, αρχικά, με έναν αλγόριθμο που "παρακολουθεί" αριθμητικά την πρόταση του Αρχιμήδη[97]· θα ακολουθήσει και δεύτερος αλγόριθμος που θα "παρακολουθήσει" αριθμητικά την ίδια πρόταση του Αρχιμήδη, όπως έχει διαμορφωθεί από τον Ήρωνα[98]. Στο τέλος του Προβλήματος 12 υποδεικνύεται ο τρόπος υπολογισμού του όγκου λουτήρα και κογχυλίου[99]· ο ίδιος τρόπος υπολογισμού προτείνεται

---

[95] "*Καὶ καθόλου δὲ πᾶσα πυραμὶς κόλουρος βάσιν ἔχουσα οἱανδήποτε ὠσαύτως μετρεῖται*" [266.26].

[96] "*Ἔστι δὲ καὶ ἄλλως τὸν κόλουρον κῶνον μετρῆσαι προδηλοτέρᾳ μὲν ἀποδείξει χρησάμενον…*" [278.1].

[97] "*… ὁ κύλινδρος ὁ βάσιν μὲν ἔχων ἴσην τῷ μεγίστῳ κύκλῳ τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ ὕψος δὲ ἴσον τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας ἡμιόλιός ἐστι τῆς σφαίρας*" [280.2-4].

[98] "*… ια κύβοι οἱ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας ἴσοι γίγνονται κα σφαίραις*" [280.7-8].

[99] "*ἔστι γὰρ β τμημάτων ὑπεροχή.*" [282.19-20].

στην αρχή του Προβλήματος 13 και για τη μέτρηση καμάρων ή θόλων[100]. Στη συνέχεια του Προβλήματος 13 ο Ήρων, αφού εκθέσει τον τρόπο δημιουργίας μιας σπείρας, θα προχωρήσει στη μέτρηση του όγκου της. Η διαδικασία υπολογισμού στηρίζεται σε πρόταση του Διονυσόδωρου, την οποία και παραθέτει[101]. Στο τέλος του Προβλήματος 13 προτείνεται και μία εναλλακτική διαδικασία μέτρησης τής σπείρας, η οποία βασίζεται στην παρατήρηση ότι η σπείρα, αν απλωθεί, εξισώνεται με κύλινδρο[102]. Ο υπολογισμός του όγκου των δύο αξιοσημείωτων στερεών των Προβλημάτων 14 και 15 γίνεται με εφαρμογή σε προτάσεις που προέρχονται από τον Αρχιμήδη [290.3-5, 292.1-3]. Στο τέλος του Προβλήματος 15 θα γίνει η μετάβαση στα πλατωνικά στερεά[103], όπου θα παρατεθεί η προφανής εύρεση του όγκου κύβου.

Τα Προβλήματα του τέταρτου μέρους αφορούν στην εύρεση του όγκου των τεσσάρων από τα πέντε πλατωνικά στερεά. Συγκεκριμένα υπολογίζονται οι όγκοι: πυραμίδας με βάση ισόπλευρο τρίγωνο (Πρόβλημα 16), οκταέδρου (Πρόβλημα 17), εικοσάεδρου (Πρόβλημα 18), και δωδεκάεδρου (Πρόβλημα 19).

Τέλος, στο Πρόβλημα 20, μετά την ολοκλήρωση του υπολογισμού των όγκων σωμάτων με εύτακτο σχήμα[104], ο Ήρων μεταβαίνει στην περιγραφή διαδικασιών μέτρησης του όγκου στερεών σωμάτων με ακανόνιστο σχήμα[105]· οι δύο μηχανικές διαδικασίες που περιγράφονται αποδίδονται στον Αρχιμήδη[106]. Όπως και στην περίπτωση της μέτρησης επιφανειών, η συμπερίληψη τής μέτρησης του όγκου στερεών σωμάτων με ακανόνιστο σχήμα κρίνεται αναγκαία και κατοχυρώνει την πληρότητα της πραγματείας. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι ο Ήρων εισάγει και θεωρεί, μάλλον, αξιόπιστες τις μηχανικές μεθόδους μέτρησης στη γεωμετρία[107].

---

[100] "… *ἐὰν δέῃ καὶ καμάρας … μετρεῖν ἢ θόλους, ἀκολούθως τῇ ἐπὶ τοῦ λουτῆρος μετρήσει ποιήσομεν*" [284.1-2].

[101] "*δέδεικται δὲ Διονυσοδώρῳ ἐν τῷ περὶ τῆς σπείρας ἐπιγραφομένῳ…*" [284.19-20].

[102] "*ἁπλωθεῖσα ἄρα ἡ σπεῖρα καὶ γενομένη ὡς κύλινδρος…*" [288.3].

[103] "*ἀκόλουθον δέ ἐστι καὶ τὰς τῶν πέντε σχημάτων τῶν Πλάτωνος καλουμένων,…"* [292.7].

[104] "*Τῶν δὴ ἐν τάξει στερεῶν σωμάτων μετρηθέντων…*" [304.1].

[105] "… *εὔλογον ὑπολαμβάνομεν καὶ τὰ ἄτακτα, οἷον ῥιζώδη ἢ πετρώδη, παριστορῆσαι τῇ μετρήσει…*" [304.1-2].

[106] "… *ὡς ἔνιοι ἱστοροῦσι τὸν Ἀρχιμήδη ἐπινενοηκέναι πρὸς τὰ τοιαῦτα μέθοδον.*" [304.2-3].

[107] Για μια λεπτομερή ανάπτυξη της μηχανικής γεωμετρίας στα έργα του Ήρωνα, βλ. K. Tybjerg [Tybjerg, 2004, σ. 29-56].

3.3.3 Βιβλίο ΙΙΙ: Διαίρεση των σχημάτων

Το Βιβλίο ΙΙΙ περιέχει 23 Προβλήματα και μπορεί να διαιρεθεί σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος περιλαμβάνει τα Προβλήματα 1−16, 18−19, στα οποία μία ή περισσότερες γραμμές διαιρούν επίπεδες επιφάνειες σε δύο ή περισσότερα τμήματα, υπό δοθέντα λόγο. Στο Πρόβλημα 17 πραγματοποιείται διαίρεση τής επιφάνειας της σφαίρας σε δύο τμήματα, υπό δοθέντα λόγο, από τυχαίο επίπεδο. Τα Προβλήματα 1−9 επιδέχονται αριθμητικής επίλυσης, αντίθετα, τα Προβλήματα 10−19 ερευνώνται διεξοδικά με γεωμετρικό τρόπο. Το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει τα Προβλήματα 20−23, στα οποία ένα επίπεδο διαιρεί στερεά σώματα σε δύο τμήματα, υπό δοθέντα λόγο. Αναλυτικότερα:

Στα Προβλήματα του πρώτου μέρους πραγματοποιούνται διαιρέσεις τριγώνων (προτάσεις 1−4, 10 και 19), τετράπλευρων (προτάσεις 5−8, 11−13), τυχαίου πολυγώνου (προτάσεις 14−15) και κύκλων (προτάσεις 9, 18). Στα Προβλήματα 1, 2 και 3, ένα τρίγωνο θα διαιρεθεί σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από ευθεία γραμμή, όταν: **α)** διέρχεται από μία κορυφή του (Πρόβλημα 1), **β)** είναι παράλληλη σε μια πλευρά του (Πρόβλημα 2) και, **γ)** διέρχεται από τυχαίο σημείο μιας πλευράς του (Πρόβλημα 3). Στο Πρόβλημα 4 πραγματοποιείται η διαίρεση τριγώνου σε τέσσερα τρίγωνα, με την εξής διαδικασία: από το αρχικό τρίγωνο θα αφαιρεθεί ένα τρίγωνο, δοθέν σε μέγεθος, ώστε τα τρία άλλα τρίγωνα που απομένουν να είναι μεταξύ τους ίσα. Θα ακολουθήσει η διαίρεση τραπεζίου σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από ευθεία γραμμή, όταν: **α)** διέρχεται από το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρών (Πρόβλημα 5), **β)** διέρχεται από δοθέν σημείο της μικρής βάσης του τραπεζίου (Πρόβλημα 6), **γ)** είναι παράλληλη προς τις βάσεις του (Πρόβλημα 7) και, δ) διέρχεται από δοθέν σημείο μιας εκ των μη παραλλήλων πλευρών του (Πρόβλημα 8). Οι προτάσεις που επιδέχονται αριθμητικής επίλυσης θα ολοκληρωθούν με τη διαίρεση κύκλου σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από έναν ομόκεντρό του κύκλο (Πρόβλημα 9).

Η μετάβαση σε διαιρέσεις επιφανειών, οι οποίες θα πραγματοποιηθούν με γεωμετρικό τρόπο αναγγέλλεται στην αρχή του Προβλήματος 10[108]. Στη συνέχεια θα ακολουθήσει η διαίρεση τριγώνου σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από ευθεία γραμμή που διέρχεται από δοθέν σημείο μιας πλευράς του. Το Πρόβλημα επεκτείνεται και στην περίπτωση στην οποία το δοθέν σημείο δεν ανήκει σε πλευρά του τριγώνου[109]. Στο Πρόβλημα 11 ο Ήρων υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο διαιρείται δοθέν τετράπλευρο σε δύο μέρη, από ευθεία γραμμή η οποία διέρχεται από δοθέν σημείο μιας πλευράς του, ώστε ο λόγος, υπό τον οποίον διαιρείται το τετράπλευρο, να είναι ο λόγος στον οποίον διαιρείται η ευθεία από

[108] "*Ὅσα μὲν οὖν τῶν ἐπιπέδων δυνατὸν ἦν ἀριθμοῖς διαιρεῖσθαι προγέγραπται· ὅσα δὲ διαιρεῖσθαι μὲν ἀναγκαῖόν ἐστι δι΄ ἀριθμῶν δὲ οὐ δύναται, ταῦτα γεωμετρικῶς ἐκθησόμεθα.*" [330.1-2].

[109] "*κἂν τὸ Δ σημεῖον μὴ ᾖ ἐπὶ τῆς ΒΓ ἀλλ΄ ὡς ἔτυχεν, οὐδὲν διοίσει·—*"[330.10].

το δοθέν σημείο. Στο Πρόβλημα 12, το ίδιο τετράπλευρο διαιρείται σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από ευθεία γραμμή, η οποία διέρχεται από δοθέν σημείο μιας πλευράς του. Στο Πρόβλημα 13, το ίδιο τετράπλευρο διαιρείται σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από ευθεία γραμμή, η οποία διέρχεται από τυχαίο δοθέν σημείο, που, όμως, δεν ανήκει σε κάποια από τις πλευρές του. Στο Πρόβλημα 14, δοθέν πολύγωνο διαιρείται σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από ευθεία γραμμή, η οποία διέρχεται από δοθέν σημείο μιας πλευράς του. Στο Πρόβλημα 15, το ίδιο πολύγωνο διαιρείται σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από ευθεία γραμμή, η οποία διέρχεται από τυχαίο δοθέν σημείο, που, όμως, δεν ανήκει σε κάποια από τις πλευρές του. Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο Ήρων κατά την επίλυση των Προβλημάτων 10 [330.9], 13 [336.10] και 15 [340.6], αναφέρει τρεις φορές ένα έργο, με τίτλο "*<Περὶ> τῆς τοῦ χωρίου ἀποτομῆς*", έργο που δεν διασώζεται, αλλά, όπως πληροφορούμαστε από τον Πάππο στη *Συναγωγή* VII.3, 7-8, 43-67 [Hultsch, 1876-1878], αποδίδεται στον Απολλώνιο. Θα ακολουθήσει η κατασκευή ευθείας, η οποία διέρχεται από δοθέν σημείο και αποκόπτει δύο τμήματα, με δοθέν άθροισμα, τα οποία βρίσκονται σε δύο δοθείσες, κατά θέση, παράλληλες ευθείες (Πρόβλημα 16). Το παραπάνω Πρόβλημα θα μπορούσε να χαρακτηρισθεί ως λήμμα, το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί στην επίλυση του Προβλήματος 13, στην ειδική περίπτωση κατά την οποία οι δύο πλευρές του τετράπλευρου είναι παράλληλες. Στο Πρόβλημα 17 θα διαιρεθεί σφαίρα, από ένα επίπεδο, σε δύο τμήματα των οποίων οι επιφάνειες θα βρίσκονται υπό δοθέντα λόγο. Στο Πρόβλημα 18 θα επιλυθεί το πρόβλημα της διαίρεσης δοθέντος κύκλου, από δύο ευθείες, σε τρία ίσα μέρη. Η λύση που δίνεται, αν και είναι προσεγγιστική, κρίνεται απαραίτητη από τον Ήρωνα, λόγω της πρακτικής χρησιμότητας του συγκεκριμένου προβλήματος[110]. Τέλος, στο Πρόβλημα 19 θα ολοκληρωθούν οι διαιρέσεις των επιφανειών, με τη διαίρεση ενός δοθέντος τριγώνου σε τρία ίσα τρίγωνα, από ευθείες, οι οποίες διέρχονται από κάποιο σημείο, το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου. Στο τέλος του Προβλήματος 19, ο Ήρων, αφού επισημάνει την επαρκή ολοκλήρωση των διαιρέσεων επιπέδων χωρίων, θα αναγγείλει την μετάβαση στις διαιρέσεις των στερεών σωμάτων[111].

Στα Προβλήματα του δεύτερου μέρους πραγματοποιούνται διαιρέσεις πυραμίδας (Πρόβλημα 20), κώνου (Πρόβλημα 21), κόλουρου κώνου (Πρόβλημα 22), και σφαίρας (Πρόβλημα 23). Ειδικότερα: η πυραμίδα, ο κώνος και ο κόλουρος κώνος διαιρούνται σε δύο τμήματα, υπό δοθέντα λόγο, από επίπεδο παράλληλο προς τη βάση τους. Αξίζει να σημειώσουμε ότι στο τέλος του Προβλήματος 20, ο Ήρων υποδεικνύει την προσεγγιστική μέθοδο εύρεσης κυβικής ρίζας[112], την οποία και θα παραθέσει, αμέσως μετά, υπό τη μορφή αριθμητικού αλγόριθμου για τον

---

110 "… *δῆλον, τῆς εὐχρηστίας δὲ ἕνεκεν διελοῦμεν αὐτὸν ὡς ἔγγιστα οὕτω.*" [346.2-3].

111 "*αἱ μὲν οὖν τῶν εἰρημένων ἐπιπέδων χωρίων διαιρέσεις αὐτάρκως εἴρηνται ἐξῆς δὲ ἐπὶ τὰ στερεὰ χωρήσομεν.*" [348.13-14].

112 "*ὡς δὲ δεῖ λαβεῖν τῶν ρ μονάδων κυβικὴν πλευρὰν νῦν ἐροῦμεν.*" [350.17].

αριθμό 100 [350.18-22]. Με τη διαίρεση μιας σφαίρας σε δύο τμήματα, υπό δοθέντα λόγο, από ένα επίπεδο (Πρόβλημα 23), ολοκληρώνεται το Βιβλίο ΙΙΙ, καθώς και ολόκληρη η πραγματεία των *Μετρικών*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΜΙΑ ΝΕΑ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΩΝ *ΜΕΤΡΙΚΩΝ*

4.1 ΤΟ ΕΔΑΦΙΟ 160.16-17 ΤΩΝ *ΜΕΤΡΙΚΩΝ*

Κλειδί για την ανάπτυξη και ερμηνεία των μεθόδων επίλυσης Προβλημάτων, όπως προτείνονται από τον Ήρωνα, αποτελεί ένα σύντομο εδάφιο από το Πρώτο Βιβλίο των *Μετρικών*. Το εδάφιο αυτό εισάγεται στο τέλος του έκτου Προβλήματος, υπό μορφή σχολίου "μετά-μαθηματικού" χαρακτήρα[113], και η ορθή κατανόηση και ερμηνεία του θα συμβάλλει αποφασιστικά στη συνολική ερμηνεία του ηρώνειου εγχειρήματος συγγραφής των *Μετρικών*. Στην πραγματικότητα, όμως, η ορθή νοηματική κατανόηση του σχολίου δεν αποτελεί εύκολο εγχείρημα· αυτό οφείλεται σε δύο, κυρίως, παράγοντες: **α)** στην πυκνή, ελλειπτική σύνταξη του ελληνικού κειμένου και, **β)** στη χρήση της μετοχής "*επιλογιζόμενοι*", της οποίας η μη συχνή εμφάνιση και χρήση σε μαθηματικά κείμενα συνοδεύεται, ταυτόχρονα, και από την απόδοση διαφορετικών, κατά το μάλλον ή ήττον, μεταξύ τους ερμηνειών.

Η σπουδαιότητα αυτού του σχολίου έγκειται στο ότι χωρίζει, σε γενικές γραμμές, τα Προβλήματα των *Μετρικών* σε δύο ομάδες: η πρώτη ομάδα αποτελείται από τα έξι αρχικά Προβλήματα του Πρώτου Βιβλίου, που προηγούνται του σχολίου, ενώ η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει, σχεδόν, όλο το Πρώτο Βιβλίο (στην πραγματικότητα όλο το υπόλοιπο έργο), που έπεται του σχολίου. Η διαίρεση των Προβλημάτων σε δύο ομάδες αντιστοιχεί στις δύο διαφορετικές μεθόδους/προσεγγίσεις τις οποίες, σύμφωνα με τη δική μας ανάγνωση, προτείνει και υιοθετεί ο Ήρων με σκοπό να ανακαλύψει/δημιουργήσει την κατάλληλη γεωμετρική βάση, ώστε να μεταβεί σε υπολογιστικές διαδικασίες, οι οποίες και θα επιλύσουν τα Προβλήματα.

[113] Ο χαρακτηρισμός του σχολίου, ως "μετά-μαθηματικού" περιεχομένου, οφείλεται στους Acerbi και Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ.44], οι οποίοι, επίσης, περιγράφουν το σχόλιο και ως "cheville de transition" [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 161, υπ. 43], δηλαδή ως σύνδεσμο μεταξύ εκείνων που έχουν, προηγουμένως, διατυπωθεί με εκείνα που πρόκειται, ακολούθως, να αναπτυχθούν.

Ας εξετάσουμε, λοιπόν, το σχόλιο λεπτομερώς. Το κείμενο είναι το εξής :

"*μέχρι μὲν οὖν τούτου ἐπιλογιζόμενοι τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις ἐποιησάμεθα ἐξῆς δὲ κατὰ ἀνάλυσιν διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν συνθέσεως τὰς μετρήσεις ποιησόμεθα*:" [160. 16-17]

Για το κείμενο αυτό έχουν προταθεί οι ακόλουθες αναγνώσεις :

1) Η μετάφραση/ερμηνεία που προτείνεται από τον H. Schöne είναι η ακόλουθη:

"*Bis hierher nun haben wir die geometrischen Beweise durch Rechnung gegeben; im Folgenden aber werden wir die Messungen nach Maßgabe einer Analyse vermittelst Zusammensetzung der Zahlenwerte bewerkstelligen*." [*HOO*, 1903, τ. III, σ. 17.19-22].

Μια ελληνική μετάφραση του γερμανικού κειμένου θα μπορούσε, κατά προσέγγιση, να είναι η παρακάτω:

"*Μέχρι τώρα λοιπόν έχουμε δώσει τις γεωμετρικές αποδείξεις με υπολογισμό· αλλά από τώρα και στο εξής θα πραγματοποιήσουμε τις μετρήσεις σύμφωνα με την ανάλυση μέσω της σύνθεσης των αριθμών."*

2) Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο E. M. Bruins εκδίδει τον κώδικα **S,** το 1964, σε τρεις τόμους. Η μετάφραση του κειμένου που προτείνεται από αυτόν είναι η ακόλουθη:

"*Until now we delivered the geometrical demonstrations by computation, next we shall effectuate the measurements according to an analysis by means of compounding numbers*." [Bruins, 1964, τ. I, σ. 187].

Μια ελληνική μετάφραση του αγγλικού κειμένου θα μπορούσε να είναι η παρακάτω:

"*Μέχρι τώρα διατυπώσαμε τις γεωμετρικές αποδείξεις με υπολογισμό, από τώρα και στο εξής θα πραγματοποιήσουμε τις μετρήσεις σύμφωνα με κάποια ανάλυση μέσω της σύνθεσης των αριθμών."*

3) Αν στραφούμε στη σύγχρονη βιβλιογραφία, η μετάφραση/ερμηνεία του κειμένου που προτείνεται από την K. Tybjerg είναι παρόμοια με τις προηγούμενες:

"*Until now we produced the geometrical demonstrations through calculation; next we shall produce the measurements according to analysis through the synthesis of numbers.*" [Tybjerg, 2004, σ. 36].

Μια ελληνική μετάφραση του αγγλικού κειμένου θα μπορούσε να είναι η παρακάτω:

"*Μέχρι τώρα παραγάγαμε τις γεωμετρικές αποδείξεις μέσω υπολογισμού· στη συνέχεια θα παράγουμε τις μετρήσεις σύμφωνα με ανάλυση μέσω της σύνθεσης των αριθμών.*"

4) Τέλος, ας στραφούμε στη μετάφραση/ερμηνεία του κειμένου που προτείνεται στην πρόσφατη έκδοση των *Μετρικών* από τους F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014]. Παρόλο που δεν είναι συνηθισμένο, δύο διαφορετικές μεταφράσεις/ερμηνείες του κειμένου υιοθετούνται: η πρώτη προτείνεται στη γενική εισαγωγή του έργου, ενώ η δεύτερη στο κύριο μέρος, δηλαδή στη γαλλική μετάφραση του ελληνικού κειμένου.

4α) Το σχόλιο, όπως μεταφράζεται, στην εισαγωγή:

"*En tirant nos conclusions jusqu'à ce ‹problème›-ci, nous avons alors produit des démonstrations géométriques, mais, dans ce qui suit, nous produirons les mesures selon l'analyse, moyennant la synthèse des nombres.*" [44.25-28].

Μια ελληνική μετάφραση του γαλλικού κειμένου θα μπορούσε να είναι η παρακάτω:

"*Εξάγοντας τα συμπεράσματά μας μέχρι αυτού του προβλήματος, έχουμε παράγει τις γεωμετρικές αποδείξεις, αλλά, από εδώ και στο εξής, θα παράγουμε τις μετρήσεις σύμφωνα με ανάλυση, μέσω της σύνθεσης των αριθμών.*"

4β) Το σχόλιο, όπως δίνεται στη γαλλική μετάφραση του ελληνικού κειμένου:

"*Nous avons alors produit, jusqu'à ce [problème]-ci, des démonstrations géométriques en explicitant le calcul, mais dans ce qui suit, nous produirons les mesures selon l'analyse, moyennant la synthèse des nombres.*" [161.19-21].

Μια ελληνική μετάφραση του γαλλικού κειμένου θα μπορούσε να είναι η παρακάτω:

"*Έχουμε λοιπόν παράγει, μέχρι αυτού του προβλήματος, τις γεωμετρικές αποδείξεις επεξηγώντας τους υπολογισμούς, αλλά από εδώ και το εξής, θα παράγουμε τις μετρήσεις σύμφωνα με ανάλυση, μέσω της σύνθεσης των αριθμών.*"

Σε όλες τις παραπάνω μεταφράσεις καταγράφεται το εξής κοινό χαρακτηριστικό: αντικείμενο του ρήματος "*ποιῶ*" στη ρηματική μορφή "*ἐποιησάμεθα*" θεωρείται το ουσιαστικό "*ἀπόδειξις*" ("*τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις*"), ενώ στη ρηματική μορφή "*ποιησόμεθα*" θεωρείται το ουσιαστικό "*μέτρησις*" ("*τὰς μετρήσεις*"), δηλαδή, ανεξάρτητα από τις διαφορετικές ερμηνείες με τις οποίες αποδίδεται το ρήμα "*ἐποιησάμεθα*" στις παραπάνω μεταφράσεις, όλοι οι προαναφερθέντες ιστορικοί συμφωνούν ότι το ρήμα "*ποιῶ*" στο πρώτο μέρος του σχολίου αναφέρεται στις "*γεωμετρικές ἀποδείξεις*".

Ας προσπαθήσουμε, τώρα, να αναδείξουμε τις κυριότερες από τις συνέπειες αυτής της ερμηνείας:

Α) Η πρώτη συνέπεια, σύμφωνα με όλες τις παραπάνω αναγνώσεις, είναι ότι η πρόθεση/στόχευση του Ήρωνα, σε εκείνα τα Προβλήματα των *Μετρικών* που προηγούνται του σχολίου, εμφανίζεται να είναι η παραγωγή/διατύπωση γεωμετρικών αποδείξεων. Μια τέτοια ερμηνευτική άποψη, όμως, υποδηλώνει ότι το ερευνητικό σχέδιο του Ήρωνα στα *Μετρικά*, είναι, τουλάχιστον μέχρι αυτού του σημείου (αλλά το πιθανότερο, στο σύνολο του έργου), καθαρά θεωρητικό.

Β) Η δεύτερη συνέπεια είναι ότι η μετοχή "*ἐπιλογιζόμενοι*" εμφανίζεται στο κείμενο χωρίς να έχει αντικείμενο· συγκεκριμένα, θεωρείται εντελώς αποσυνδεδεμένη από τη φράση "*τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις*", η οποία την ακολουθεί άμεσα και, επομένως, θα μπορούσε γραμματικά να θεωρηθεί ως αντικείμενο της μετοχής αυτής.

Γ) Η τρίτη συνέπεια είναι ότι δεν υπάρχει οποιαδήποτε ουσιαστική συμμετρία μεταξύ των δύο μερών του σχολίου. Πράγματι, στο πρώτο μέρος το ρήμα "*ποιῶ*" αναφέρεται στις "*γεωμετρικές ἀποδείξεις*", ενώ, στο δεύτερο μέρος το ίδιο ρήμα αναφέρεται στις "*μετρήσεις*".

Με την αναφορά των παραπάνω συνεπειών, αποκαλύπτονται τα μειονεκτήματα των αναγνώσεων που έχουν, μέχρι τώρα, προταθεί. Η ανάγνωση που προτείνουμε είναι ουσιαστικά διαφορετική και βασίζεται σε δύο, κυρίως, ισχυρισμούς, οι οποίοι είναι το αντίθετο των παραπάνω συνεπειών/χαρακτηριστικών.

1. Ύπαρξη συμμετρίας ανάμεσα στα δύο μέρη του κειμένου, η οποία επιβεβαιώνεται με τις παρακάτω παρατηρήσεις:

1.1 Ύπαρξη χρονικού προσδιορισμού και στα δύο μέρη· στο πρώτο μέρος, που αναφέρεται στο παρελθόν, ο χρονικός προσδιορισμός εκφράζεται με το "*μέχρι μὲν…τούτου*", ενώ στο δεύτερο μέρος, που αναφέρεται στο μέλλον, εκφράζεται με το "*ἐξῆς δὲ*".

1.2 Ύπαρξη προσδιορισμών τρόπου και στα δύο μέρη· στο πρώτο μέρος εκφράζεται με την τροπική μετοχή "*ἐπιλογιζόμενοι*" ("*ἐπιλογιζόμενοι τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις*"), ενώ στο δεύτερο μέρος εκφράζεται με τον εμπρόθετο προσδιορισμό "*κατὰ ἀνάλυσιν*" ("*κατὰ ἀνάλυσιν διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν συνθέσεως*").

1.3 Ύπαρξη του κοινού ρήματος "*ποιῶ*" και στα δύο μέρη· στο πρώτο μέρος εκφράζεται με α′ πρόσωπο οριστικής πληθυντικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής μέσης ("*ἐποιησάμεθα*"), ενώ στο δεύτερο μέρος εκφράζεται με α′ πρόσωπο οριστικής πληθυντικού αριθμού, χρόνου μέλλοντα, φωνής μέσης ("*ποιησόμεθα*").

Θεωρώντας, λοιπόν, ως δεδομένο ότι και τα δύο μέρη του κειμένου έχουν συμμετρική σύνταξη, και με την παρατήρηση ότι η ύπαρξη κοινού ρήματος σε έναν συλλογισμό υποδηλώνει, συνήθως, την ύπαρξη κοινού αντικειμένου, ερμηνεύουμε το ρήμα "*ποιῶ*" ως να αναφέρεται και στα δύο μέρη στο ουσιαστικό "*μετρήσεις*", παρόλο που στο πρώτο μέρος του κειμένου δεν αναφέρεται ρητά, αλλά υποδηλώνεται. Ισχυριζόμαστε ότι η ερμηνεία αυτή είναι περισσότερο πειστική από την κρατούσα ερμηνεία, δηλαδή την ερμηνεία που προτείνεται από τους προαναφερθέντες ιστορικούς, παλαιούς και νεότερους, η οποία περιγράφει το ρήμα "*ποιῶ* ", στην πρώτη περίπτωση να αναφέρεται "*είς τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις*", ενώ στη δεύτερη περίπτωση να αναφέρεται στις "*μετρήσεις*". Όμως, σε ένα έργο μετρολογικού περιεχομένου, όπως τα *Μετρικά*, στο οποίο η κύρια στόχευση είναι η παραγωγή μετρήσεων, οι πιθανότητες παραγωγής γεωμετρικών αποδείξεων, και μάλιστα σε αντιδιαστολή με τις μετρήσεις, είναι ελάχιστες. Ο Ήρων, στα *Μετρικά*, προτείνει δύο διαφορετικές μεθόδους για την επίτευξη ενός και μόνο εγχειρήματος, εκείνου της πραγματοποίησης μετρήσεων.

2. Τότε, και με αυτήν την παραδοχή, η φράση "*τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις*" δεν θα μπορούσε να είναι το αντικείμενο του ρήματος "*ἐποιησάμεθα*". Σύμφωνα με την ερμηνεία που προτείνουμε, η φράση "*τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις*" συνδέεται άμεσα με τη μετοχή "*ἐπιλογιζόμενοι*" στη θέση του γραμματικού αντικειμένου αυτής.

Άρα, η ερμηνεία που προτείνουμε για το υπό εξέταση εδάφιο είναι η παρακάτω:

"*μέχρι μὲν οὖν τούτου ἐπιλογιζόμενοι τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις ἐποιησάμεθα < τὰς μετρήσεις> ἐξῆς δὲ κατὰ ἀνάλυσιν διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν συνθέσεως τὰς μετρήσεις ποιησόμεθα.*"

Σχηματικά:

Μέχρι μὲν οὖν τούτου		
	ἐπιλογιζόμενοι τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις	
		ἐποιησάμεθα < τὰς μετρήσεις>
ἐξῆς δὲ		
	κατὰ ἀνάλυσιν διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν συνθέσεως	
		τὰς μετρήσεις ποιησόμεθα.

Η ερμηνεία αυτή, η οποία συνδέει τη μετοχή "*ἐπιλογιζόμενοι*" με τη φράση "*τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις*", επιβεβαιώνεται και από την ετυμολογική ανάλυση του ρήματος "*ἐπιλογίζομαι*", το οποίο κατά λέξη σημαίνει "*λογίζομαι - ἐπί*". Το κύριο σημείο για την ερμηνεία μας δεν βρίσκεται στη σημασία/ερμηνεία του

"*λογίζομαι*", αλλά στο πρόθεμα "*έπί* ". Έτσι, το ρήμα "*έπιλογίζομαι*" μπορεί να υποδηλώνει συλλογισμό ή υπολογισμό, αλλά στην προκειμένη περίπτωση, επί της βάσης των "*γεωμετρικῶν ἀποδείξεων*".

Τότε, σύμφωνα με την ερμηνεία που αποδίδουμε στο συγκεκριμένο εδάφιο, το έργο των *Μετρικών* χωρίζεται, σε γενικές γραμμές, σε δύο μέρη: το πρώτο μέρος αποτελείται από τα έξι αρχικά Προβλήματα τα οποία προηγούνται του συγκεκριμένου σχολίου, ενώ το δεύτερο μέρος περιλαμβάνει την πλειονότητα των Προβλημάτων των *Μετρικών*, τα οποία έπονται του σχολίου. Ο Ήρων για την εύρεση διαδικασιών υπολογισμού επιφανειών, στερεών σχημάτων και διαίρεσης επιπέδων ή στερεών σχημάτων σε τμήματα που έχουν δοθέντα λόγο, προτείνει και χρησιμοποιεί δύο μεθόδους: τη μέθοδο/διαδικασία του "*ἐπιλογισμοῦ*", την οποία εφαρμόζει στο πρώτο μέρος και τη μέθοδο/διαδικασία "*κατὰ ἀνάλυσιν*", την οποία εφαρμόζει σ' όλο σχεδόν το υπόλοιπο έργο· τις μεθόδους αυτές θα παρουσιάσουμε, λεπτομερώς, θα αναλύσουμε και θα σχολιάσουμε. Προς τούτο επιλέγονται αντιπροσωπευτικά Προβλήματα, μέσω των οποίων θα αναδειχθούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της κάθε μεθόδου.



Εικόνα 1: Το folio 70r του κώδικα **S**. Στις γραμμές 5-8 φαίνεται το εδάφιο που συζητήσαμε στην ενότητα 4.1

τρίγωνον ἔσται μονάδων ξ ⟨ς⟩. ἡ δὲ μέθοδος ἔσται [ἡ] αὕτη. τὰ ιγ ἐφ' ἑαυτὰ γίγνεται ρξθ· καὶ τὰ ια ἐφ' ἑαυτά· γίγνεται ρκα· καὶ τὰ κ ἐφ' ἑαυτά· γίγνεται υ. σύνθες τὰ ρξθ καὶ τὰ ρκα· γίγνεται σϙ· ταῦτα ἄφελε
fol. 70ʳ ἀπὸ τῶν υ· λοιπὰ ρι. | τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται νε.

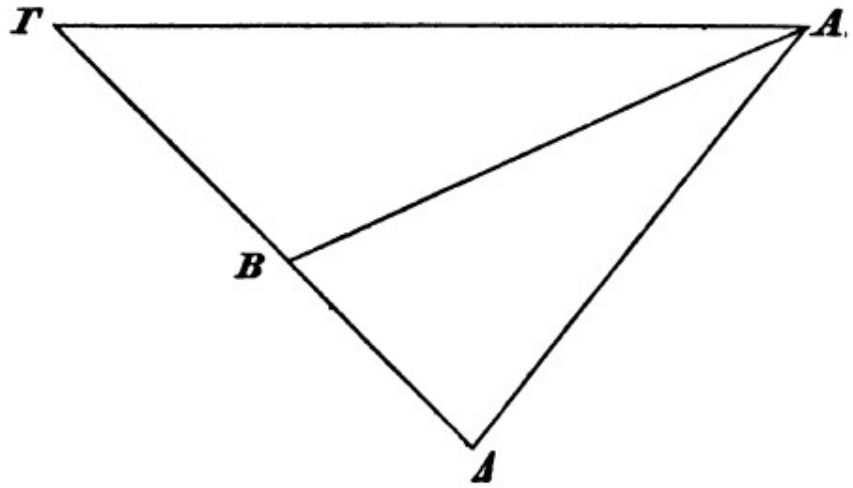


Fig. 6.

παράβαλε παρὰ τὸν ια· γίγνεται ε. καὶ τὰ ιγ ἐφ' ἑαυτά· γίγνεται ρξθ. ἄφελε τὰ ε ἐφ' ἑαυτά· λοιπὰ ρμδ. τούτων πλευρὰ γίγνεται ιβ. ἔσται ἡ κάθετος μονάδων ιβ. ταῦτα ἐπὶ τὰ ια· γίγνεται ρλβ. τούτων τὸ ἥμισυ ξς· τοσούτου ἔσται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

Μέχρι μὲν οὖν τούτου ἐπιλογιζόμενοι τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις ἐποιησάμεθα, ἐξῆς δὲ κατὰ ἀνάλυσιν διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν συνθέσεως τὰς μετρήσεις ποιησόμεθα.

ξ. Ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ, ΒΓ, ἔσται τοῦ ἀπὸ ΑΒ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἀπὸ τοῦ ΒΓ τετράγωνον πλευρὰ ⟨δ⟩ ὑπὸ ΑΒ ⟨Γ⟩ περιεχόμενος ἀριθμός. ἐπεὶ

Google

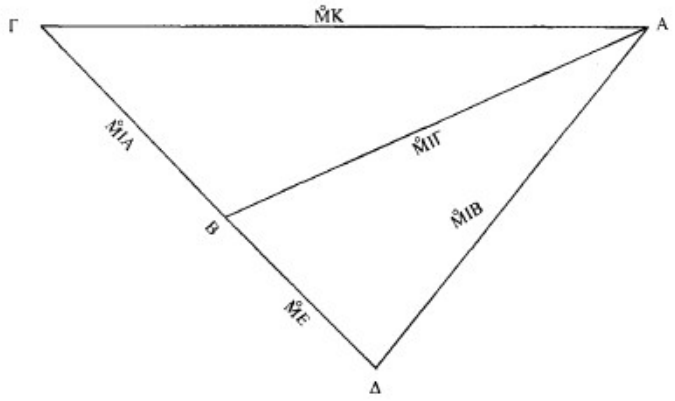
Εικόνα 2: Η σελίδα 16 της έκδοσης των Μετρικών από τον H. Schoene. Το εδάφιο βρίσκεται στους στίχους 11-14.

ς Ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον τὸ ΑΒΓ ἔχον τὴν μὲν ΑΒ μονάδων ιγ τὴν δὲ ΒΓ μονάδων ια τὴν δὲ ΑΓ μονάδων κ. εὑρεῖν αὐτοῦ τὴν κάθετον καὶ τὸ ἐμβαδόν.

ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ καὶ ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ. τὸ ‹ἄρα› ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ· καὶ ἔστιν ‹τὸ› μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ μονάδων υ τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ μονάδων ‹ρκα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ μονάδων ρξθ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ› τῶν ΓΒ ΒΔ μονάδων ρι· τὸ ἄρα ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ἔστιν ‹μονάδων νε›· καὶ ἔστιν ἡ ΒΓ μονάδων ια· ἡ ἄρα ΒΔ ἔσται μονάδων ε· ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ μονάδων ιγ· ἡ ἄρα ΑΔ ἔσται μονάδων ιβ· ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ μονάδων ‹ια· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ› ΒΓ ἔσται μονάδων ρλβ· καὶ ἔστι διπλάσιον τοῦ ΑΒ‹Γ› τριγώνου· τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον ἔσται μονάδων ξ‹ς›.

ἡ δὲ μέθοδος ἔσται ἡ αὐτή. τὰ ιγ ἐφ᾽ ἑαυτά· γίγνεται ρξθ. καὶ τὰ ια ἐφ᾽ ἑαυτά· γίγνεται ρκα. καὶ τὰ κ ἐφ᾽ ἑαυτά· γίγνεται υ. σύνθες τὰ ρξθ καὶ τὰ ρκα· γίγνεται σϙ· ταῦτα ἄφελε ἀπὸ τῶν υ· λοιπὰ ρι· | τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται νε· παράβαλε παρὰ τὸν ια· γίγνεται ε. καὶ τὰ ιγ 70r
ἐφ᾽ ἑαυτά· γίγνεται ρξθ· ἄφελε τὰ ε ἐφ᾽ ἑαυτά· λοιπὰ ρμδ· τούτων πλευρά· γίγνεται ιβ. ἔσται ἡ κάθετος μονάδων ιβ. ταῦτα ἐπὶ τὰ ια· γίγνεται ρλβ· τούτων τὸ ἥμισυ· ξς. τοσούτου ἔσται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου: –

μέχρι μὲν οὖν τούτου ἐπιλογιζόμενοι τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις ἐποιησάμεθα ἑξῆς δὲ κατὰ ἀνάλυσιν διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν συνθέσεως τὰς μετρήσεις ποιησόμεθα:



2 ια] ιδ **S** : corr. m. 2 **3** ἄρα] add. Schöne **4** τῶν (pr.)] τὸ **S** : corr. m. 2 | τὸ] add. Schöne | υ] ι **S** : corr. m. 2 **5** τῆς] τῶν **S** : corr. m. 2 | ρκα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ μονάδων ρξθ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ] in spatio 21 litt. suppl. m. 3 : ρκα, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ρξθ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ Schöne **6** μονάδων νε] in spatio 2 litt. suppl. m. 3 **8** ια· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ] in spatio 15 litt. suppl. Schöne : ια· ἡ ἄρα ΑΔ πολλαπλασιάσασα τὴν m. 3. **9** ΑΒΓ] ΑΒ **S** : Γ add. m. 2 | τὸ] ἡ **S** : corr. m. 3 | ξς] ξ **S** : ς add. m. 2 **10** ἡ (sec.)] delendum putauit Schöne **11** post υ litt. 6 erasae **14** τοσούτου] Schöne : τοσοῦτον **S**

Εικόνα 3: Η σελίδα 160 της έκδοσης των Μετρικών από τους Acerbi, Vitrac. Το σχόλιο φαίνεται στους στίχους 16-17.

VI Soit un triangle obtusangle ABΓ ayant d'une part AB de 13 unités, d'autre part BΓ de 11 unités, et AΓ de 20 unités. Trouver sa perpendiculaire[37] et l'aire.

Que BΓ soit prolongée et que soit menée une [droite] AΔ [qui] lui est perpendiculaire[38]. Le [carré] sur AΓ est donc plus grand que ceux sur AB, BΓ par deux fois le [rectangle contenu] par ΓB, BΔ[39] ; et d'une part celui sur AΓ est de 400 unités, d'autre part celui sur BΓ de 121 unités, et celui sur BA de 169 : deux fois le [rectangle contenu] par ΓB, BΔ est donc de 110 unités ; une fois le [rectangle contenu] par ΓB, BΔ est donc de 55 unités ; et BΓ est de 11 unités : BΔ sera donc de 5 unités ; mais, en outre, AB est de 13 unités : AΔ sera donc de 12 unités[40] ; mais, en outre, BΓ est de 11 unités : le [rectangle contenu] par AΔ, BΓ sera donc de 132 unités ; et il est double du triangle ABΓ[41] ; le triangle ABΓ sera donc de 66 unités.

Et la méthode sera la même. Les 13 par eux-mêmes : il en résulte 169. Et les 11 par eux-mêmes : il en résulte 121. Et les 20 par eux-mêmes : il en résulte 400. Compose les 169 et les 121 : il en résulte 290 ; ceux-ci, retranche-les des 400 : 110 restants ; de ceux-ci, la moitié : il en résulte 55 ; applique[-les] au 11 : il en résulte 5. Et les 13 par eux-mêmes : il en résulte 169 ; retranche les 5 par eux-mêmes : 144 restants ; de ceux-ci, un côté : il en résulte 12. La perpendiculaire sera de 12 unités. Ceux-ci par les 11 : il en résulte 132 ; de ceux-ci, la moitié : 66. Autant que cela sera l'aire du triangle.

Nous avons alors produit, jusqu'à ce [problème]-ci, des démonstrations géométriques en explicitant le calcul[42], mais dans ce qui suit, nous produirons les mesures selon l'analyse, moyennant la synthèse des nombres[43].

[37] La hauteur des figures planes n'est jamais appelée ὕψος, *pace El.* VI.déf.4, compilée en *Def.* 72, *HOO*, vol. IV, p. 48.15-16, en remplaçant « chaque figure » par « un triangle ».
[38] *El.* I.12.
[39] *El.* II.12.
[40] Conséquence de *El.* I.47.
[41] *El.* I.41.
[42] Sur le verbe ἐπιλογίζειν voir encore *supra*, introduction générale, 4. 2.
[43] Sur les démarches analytiques héroniennes, voir *infra*, étude complémentaire I ; sur l'authenticité de cette cheville de transition, voir *supra*, introduction générale, 3. 5.

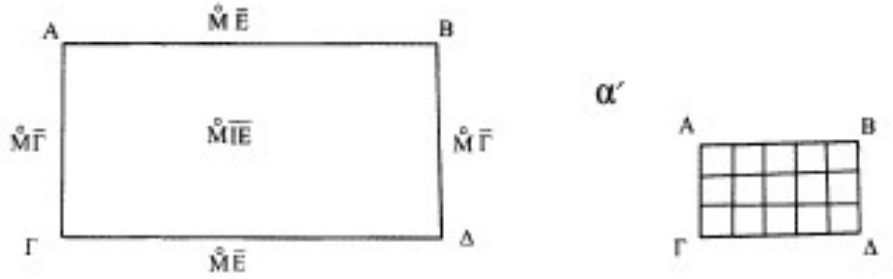
Εικόνα 4: Η γαλλική μετάφραση του σχολίου από τους Acerbi, Vitrac.

4.2 ΕΠΙΛΥΟΝΤΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ "*ΕΠΙΛΟΓΙΖΟΜΕΝΟΙ ΤΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ*"

4.2.1 Εισαγωγή

Πριν την εξέταση οποιουδήποτε Προβλήματος, κρίνεται απαραίτητη η παράθεση της διαδικασίας εύρεσης του εμβαδού ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν μια ορθή γωνία του. Πρόκειται για το Πρόβλημα Ι.1, το οποίο, παρά το γεγονός ότι συγκαταλέγεται στα έξι αρχικά Προβλήματα που προηγούνται του προαναφερθέντος σχολίου, θα εξεταστεί χωριστά, λόγω του ιδιαίτερου χαρακτήρα του: το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι το σχήμα με το οποίο συγκρίνονται/μετρούνται τα επίπεδα σχήματα[114], επομένως, η εύρεση του εμβαδού του, όταν δίνονται οι πλευρές που περιέχουν μια ορθή γωνία του, είναι ουσιώδης και ενέχει, στο έργο των *Μετρικών*, θέση "θεωρίας".

Πρόβλημα Ι.1



Ἔστω χωρίον ἑτερόμηκες <τὸ ΑΒΓΔ ἔχον> τὴν μὲν ΑΒ μονάδων ε, τὴν δὲ ΑΓ μονάδων γ. εὑρεῖν αὐτοῦ <τὸ ἐμβαδόν>.

Η εύρεση του εμβαδού πραγματοποιείται με έναν στοιχειώδη τρόπο: **α)** οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ διαιρούνται σε 5 και 3 μονάδες αντίστοιχα[115], **β)** από τα σημεία

[114] "… *τὴν διοίκησιν τῶν τε μετρήσεων καὶ διανομῶν·… ἀρξώμεθα δὲ ἀπὸ τῶν ἐπιπέδων μετρήσεων… αἱ δὲ συγκρίσεις τῶν εἰρημένων ἐπιφανειῶν γίγνονται πρός τι χωρίον εὐθύγραμμόν τε καὶ ὀρθογώνιον,*…" [146.4…146.17…146.19-20].

[115] "*<ἐὰν γὰρ ἑκατέρα πλευρὰ> διαιρεθῇ ἡ μὲν ΑΒ εἰς τὰς μονάδας ε ἡ δὲ ΑΓ ὁμοίως <εἰς τὰς μονάδας γ*…" [150. 5-6].

τομής κατασκευάζονται παράλληλοι προς τις πλευρές[116] και, **γ)** μετρείται ο αριθμός των μοναδιαίων χωρίων στα οποία χωρίζεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ο οποίος είναι και το ζητούμενο εμβαδόν[117].

4.2.2 Παραδείγματα προβλημάτων που επιλύονται με "έπιλογισμόν"

Ακολουθούν τα Προβλήματα Ι.2, Ι.3, Ι.5, και Ι.6, στα οποία πραγματοποιούνται μετρήσεις εμβαδών ορθογωνίου τριγώνου (Πρόβλημα Ι.2), ισοσκελούς τριγώνου (Πρόβλημα Ι.3), οξυγώνιου τριγώνου (Πρόβλημα Ι.5) και αμβλυγωνίου τριγώνου (Πρόβλημα Ι.6). Το Πρόβλημα Ι.4 δεν αναφέρεται σε συγκεκριμένη μέτρηση· είναι, μάλλον, "θεωρητικό" και αποτελεί κριτήριο καθορισμού του είδους μιας γωνίας[118], επομένως δεν κατηγοριοποιείται μαζί με τα παραπάνω Προβλήματα. Οι μετρήσεις αυτών των Προβλημάτων πραγματοποιούνται, σύμφωνα με τα σχόλιο στο τέλος του Προβλήματος Ι.6 "*έπιλογιζόμενοι τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις*".

Σχετικά με τον τρόπο παρουσίασης των υπό εξέταση Προβλημάτων: **α)** δίνεται το διάγραμμα που συνοδεύει το κάθε Πρόβλημα, **β)** ακολουθεί η διαίρεση τού κάθε Προβλήματος σε μέρη, με βάση το σχήμα του Πρόκλου [*iE*, 1873, σ. 203.1-15], το οποίο περιέχει έξι μέρη: **1)** "*Πρότασις*", η οποία, στην ιδεατή μορφή, αποτελείται από μια συνθήκη και ένα αποτέλεσμα που ακολουθεί, σε γενική μορφή και τα δύο, **2)** "*Ἔκθεσις*", στην οποία τίθεται μια ειδική εκδοχή, **3)** "*Διορισμός*", στον οποίο δηλώνεται το ζητούμενο αποτέλεσμα για την ειδική εκδοχή που έχει τεθεί στην "*Ἔκθεσιν*", ώστε να ακολουθήσει η απόδειξη, **4)** "*Κατασκευή*", στην οποία κατασκευάζονται τα αντικείμενα της απόδειξης, **5)** "*Ἀπόδειξις*", η οποία αποτελείται από μια σειρά επιχειρημάτων που αναφέρονται στα ειδικά αντικείμενα που εκτίθενται στο διάγραμμα και ολοκληρώνεται, όταν το ζητούμενο αποτέλεσμα το οποίο δηλώνεται στον "*Διορισμόν* " αποκτάται και τέλος, **6)** "*Συμπέρασμα*", στο οποίο επισυνάπτεται το ζητούμενο αποτέλεσμα, με την προσθήκη της λέξης "*ἄρα*". Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε ότι το σχήμα του Πρόκλου δεν εφαρμόζεται, με απόλυτη πιστότητα, σε όλα τα μαθηματικά Θεωρήματα και Προβλήματα της αρχαιότητας· οι δομές, μάλιστα, των περισσοτέρων εξ' αυτών αποκλίνουν, κατά το μάλλον ή ήττον, από τον συγκεκριμένο κανόνα [Netz, 1999b]. Όσον αφορά στα συγκεκριμένα Προβλήματα των *Μετρικών* που πρόκειται να μελετηθούν, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, παραλείπονται ένα ή και περισσότερα από τα έξι μέρη του σχήματος ή, ακόμη, μπορεί να διεισδύει το ένα στο άλλο. Όμως, η πρακτική με την

---

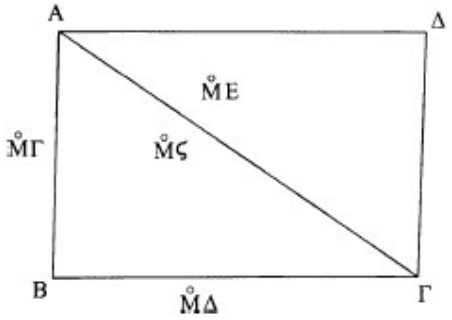
[116] "*… καὶ δι>ὰ τῶν τομῶν παράλληλοι ἀχθῶσιν ταῖς τοῦ παραλληλογράμμου πλευ/ραῖς,…*" [150.6-7].

[117] "*… ἔσται τὸ χωρίον διῃρημένον εἰς χωρία ιε ὧν ἕκαστον ἔσται μονάδος α.*" [150.7-9].

[118] "*Τῶν δὲ ἀνισοσκελῶν τριγώνων <τὰς γωνίας δεῖ ἐπισκέψασθαι…*" [156.1].

οποία αναπτύσσονται αυτά τα Προβλήματα ταιριάζει, κατά πολύ, στους κανόνες του σχήματος του Πρόκλου, και αυτός είναι ο λόγος που επιλέγεται για την παρουσίασή τους.

Πρόβλημα Ι.2

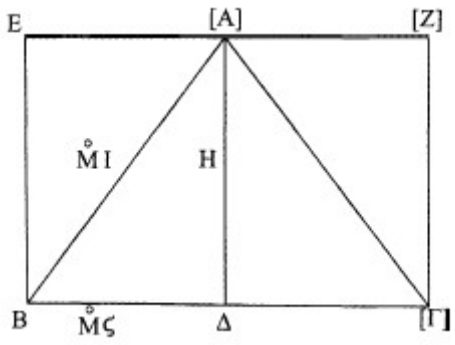


Διαίρεση σε μέρη	Γεωμετρικός "λόγος"	Αριθμητικο-γεωμετρικός "λόγος"	Υποδηλωμένες πράξεις
Ἔκθεσις συνθήκη *αριθμητικές τιμές των δοθέντων*	Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν. καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΒ μονάδων γ ἡ δὲ ΒΓ μονάδων δ.		
Διορισμός	εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου καὶ <τὴν ὑποτείνουσαν.		
Κατασκευή	(Κ) συμ>πεπληρώσθω τὸ ΑΒΓΔ. (*Στ.* Ι.31)		
Ἀπόδειξις	(A_1) <ἐπεὶ γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ὀρθογωνίου παραλληλόγραμμου> Υποδηλώνεται γεωμετρικό Πρόβλημα (*Μ.* Ι.1)	(M_1) τὸ ἐμβαδὸν, ὡς ἐπάνω <δέδεικται, μονάδων ιβ.	3×4→12
	(A_2) τὸ δὲ ΑΒΓ τρίγωνον> ἥμισύ ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ <παραλληλογράμμου, (*Στ.* Ι. 34)	(M_2) ἔσται οὖν> τοῦ ΑΒ<Γ> τριγώνου <τὸ ἐμβαδὸν εξ.	12×½→6
	(A_3) καὶ> ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν <ἡ ἀπὸ ΑΒΓ γωνία, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ> τετράγωνα ἴσα ἐστὶν <τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ·> (*Στ.* Ι.47)	(M_3) καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶ<ν> ΑΒ ΒΓ <τετράγωνα μονάδων κε· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς> ΑΓ ἄρα ἔσται μονάδων κε· αὐτὴ <ἄρα ἡ ΑΓ μονάδων ε.	3×3→9 4×4→16 9+16→25 √25→5

	ἡ δὲ μέθοδός ἐστιν αὕτη.>
(3 × 4) × ½ → 6	τὰ μὲν γ ἐπὶ τὰ δ ποιήσαντα λαβεῖν <τὸ ἥμισυ τούτων· γίνεται ς. τοσούτων> τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου.
3 × 3 → 9	καὶ < τὴν ὑποτείνουσαν·

$4 \times 4 \rightarrow 16$ $9 + 16 \rightarrow 25$	τὰ γ> ἐφ᾽ ἑαυτὰ ποιήσαντα καὶ ὁμοίως τὰ δ ἐφ᾽ ἑαυτὰ <ποιήσαντα συνθεῖναι>· καὶ γίγνονται κε·
$\sqrt{25} \rightarrow 5$	καὶ τούτων πλευρὰν λαβόντα ἔχειν <τοῦ τριγώνου τὴν> ὑποτείνουσαν:

Πρόβλημα Ι.3

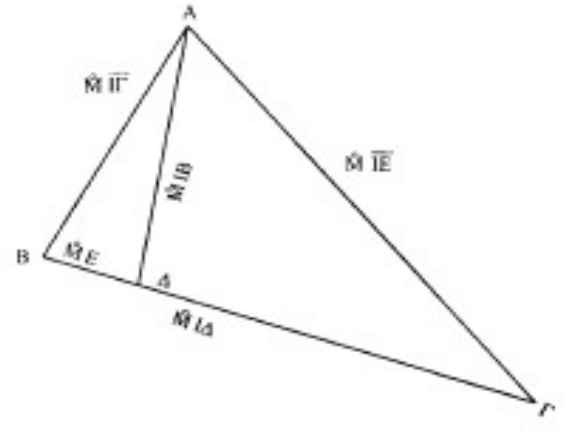


Διαίρεση σε μέρη	Γεωμετρικός "λόγος"	Αριθμο-γεωμετρικός "λόγος"	Υποδηλωμένες πράξεις
Ἔκθεσις *συνθήκη* *αριθμητικές τιμές των δοθέντων*	Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ τῇ ΑΓ καὶ ἑκατέραν <τῶν μὲν> ἴσων μονάδων ι τὴν δὲ ΒΓ | μονάδων ιβ.		
Διορισμός	εὑρεῖν αὐτοῦ <τὸ ἐμβαδὸν.>		
Κατασκευή	(K_1) ἤχθω κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΑΔ (*Στ.* Ι.12) (K_2) καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ διὰ δὲ τῶν Β Γ τῇ ΑΔ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΒΕ Γ<Ζ>. (*Στ.* Ι.31)		
Ἀπόδειξις	(A_1) διπλάσιον ἄρα ἐστὶν τὸ ΒΓΕΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ ἔχει τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. (*Στ.* Ι.41)		
	(A_2) καὶ ἐπεὶ ἰσοσκελές ἐστι καὶ κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ· (*Στ.* Ι.5&26).	(M_2)καὶ ἔστιν ἡ ΒΓ μονάδων ιβ· ἡ ἄρα ΒΔ ἐστὶ μονάδων ς·	$12 \times ½ \rightarrow 6$
		(M_3) ἡ δὲ ΑΒ μονάδων ι· ἡ ἄρα ΑΔ ἔσται μονάδων η,	$10 \times 10 \rightarrow 100$ $6 \times 6 \rightarrow 36$

	(A_3) ἐπειδήπερ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΔ ΔΑ· (*Στ.* I.47) (A_4) Ὑποδηλώνεται γεωμετρική Πρόταση (*Στ.* I.34)	(M_4) <ὥστε καὶ> ἡ ΒΕ ἔσται μονάδων η·	100−36→64 √64→8
	(A_5) Ὑποδηλώνεται γεωμετρικό Πρόβλημα (*M.* I.1)	(M_2) ἡ δὲ ΒΓ ἐστὶ μονάδων ιβ· (M_5) τοῦ ἄρα ΒΓΕΖ παραλληλογράμμου τὸ ἐμβαδόν ἐστι μονάδων ρς·	12×8→96
	(A_1)	(M_1) ὥστε τοῦ ΑΒΓ τριγώνου τὸ ἐμβαδόν ἐστι μονάδων μη.	96 ×½→48

	ἡ δὲ μέθοδός ἐστιν αὕτη.
12×½→6	λαβὲ τῶν ιβ τὸ ἥμισυ· γίνονται ς.
10×10→100	καὶ τὰ ι ἐφ᾽ ἑαυτά· γίνονται ρ·
6×6→36 100−36→64	ἄφελε τὰ ς ἐφ᾽ ἑαυτὰ, ἅ ἐστι λς· γίγνονται λοιπὰ ξδ·
√64→8	<τούτων πλευρὰ· γίνεται η.> τοσούτου ἔσται ἡ ΑΔ κάθετος.
12×8→96	<καὶ τὰ ιβ ἐπὶ τὰ η· γίνονται> ρς·
96×½→48	τούτων τὸ ἥμισυ· <γίνονται μη. τοσούτων ἔσται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου>:

Πρόβλημα I.5

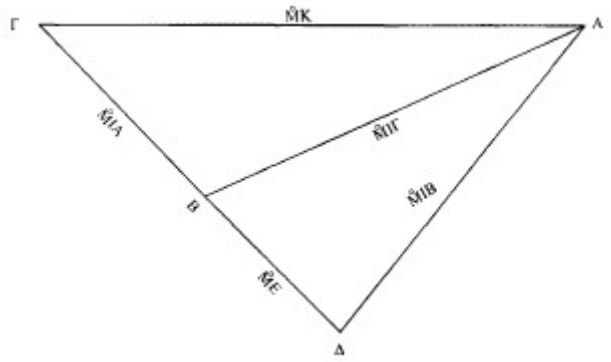


Διαίρεση σε μέρη	Γεωμετρικός “λόγος”	Αριθμο-γεωμετρικός “λόγος”	Ὑποδηλωμένες πράξεις

Ἔκθεσις *συνθήκη* *αριθμητικές τιμές των δοθέντων*	Ἔστω τρίγωνον ὀξυγώνιον τὸ ΑΒΓ ἔχον τὴν μὲν ΑΒ μονάδων ιγ τὴν δὲ <ΒΓ ιδ τὴν δὲ ΑΓ μονάδων ιε.>		
Διορισμός	εὑρεῖν αὐτοῦ τὸ ἐμβαδὸν.		
Κατασκευή	(Κ) κάθετος ἤχθω ἐπὶ> τὴν ΒΓ ἡ ΑΔ. (*Στ.* I.12)		
Ἀπόδειξις	(A_1) τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ <τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ἔλασσόν> ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ὡς δέδεικται· (*Στ.* II.13)	(M_1) καὶ ἔστι τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ <μονάδων τξε τὸ δὲ ἀπὸ τῆς> ΑΓ μονάδων <σ>κε· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ <τῶν ΓΒ ΒΔ μονάδων ρμ· τὸ ἄρα> ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ἔσται μονάδων ο· καὶ <ἔστιν ἡ ΒΓ μονάδων> ιδ· ἡ ἄρα ΒΔ ἔσται μονάδων ε.	13×13→169 14×14→196 169+196→365 15×15→225 365−225→140 140×½→70 70:14→5
	(A_2) καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ <ἴσον ἐστὶ> τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ (*Στ.* I.47)	(M_2) καὶ ἔστι τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ μονάδων ρξθ | τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΔ μονάδων κε, λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ ἔσται μονάδων ρμδ· αὐτὴ ἄρα ἡ ΑΔ ἔσται μονάδων ιβ·	13×13→169 5×5→25 169−25→144 √144→12
	(A_3) Ὑποδηλώνεται γεωμετρικὸ Πρόβλημα (*Μ.* I.1)	(M_3) ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ μονάδων ιδ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ ἔσται μονάδων ρξη·	14×12→168
	(A_4) καὶ ἔστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιον· (*Στ.* I.41).	(M_4) τὸ <ἄρα> ΑΒΓ τρίγωνον ἔσται μονάδων πδ.	168×½→84

	ἡ δὲ μέθοδός ἔσται τοιαύτη.
3×13→169 14×14→196 15×15→225	τὰ ιγ ἐφ᾽ ἑαυτά· γίγνεται ρξθ. καὶ τὰ ιδ ἐφ᾽ ἑαυτά· γίγνεται ρος· καὶ τὰ ιε ἐφ᾽ ἑαυτά· γίγνεται σκε·
169+196→365	<σύνθες τὰ ρξθ καὶ τὰ ρος· γίγνεται τξε·
365−225→140	ἀπὸ τούτων ἄφελε τὰ σκε·> γίγνεται λοιπὰ ρμ·
140×½→70	τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται ο·
70:14→5	παράβαλε παρὰ τὸν ιδ· γίγνεται ε·
13×13→169	καὶ τὰ ιγ ἐφ᾽ ἑαυτά· γίγνεται ρξθ·
169−(5×5)→144	ἀφ᾽ ὧν ἄφελε τὰ ε ἐφ᾽ ἑαυτά· λοιπὰ ρμδ·
√144→12	τούτων πλευρὰ γίγνεται ιβ· τοσούτου ἔσται ἡ κάθετος.
12×14→168	ταῦτα πολυπλασίασον ἐπὶ τὸν ιδ· γίγνεται ρξη·
168×½→84	τούτων τὸ ἥμισυ· πδ· τοσούτου ἔσται τὸ ἐμβαδόν:−

Πρόβλημα Ι.6



Διαίρεση σε μέρη	Γεωμετρικός "λόγος"	Αριθμο-γεωμετρικός "λόγος"	Υποδηλωμένες πράξεις
Ἔκθεσις συνθήκη *αριθμητικές τιμές των δοθέντων*	Ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον τὸ ΑΒΓ ἔχον τὴν μὲν ΑΒ μονάδων ιγ τὴν δὲ ΒΓ μονάδων ια τὴν δὲ ΑΓ μονάδων κ.		
Διορισμός	εὑρεῖν αὐτοῦ τὴν κάθετον καὶ τὸ ἐμβαδόν.		
Κατασκευή	(Κ) ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΓ καὶ ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ. (*Στ.* Ι.12)		
Ἀπόδειξις	(A_1) τὸ <ἄρα> ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ· (*Στ.* ΙΙ.12) (A_2) Υποδηλώνεται γεωμετρική Πρόταση (*Στ.* Ι.47)	(M_1) καὶ ἔστιν <τὸ> μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ μονάδων υ τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ μονάδων <ρκα τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΑ μονάδων ρξθ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ> τῶν ΓΒ ΒΔ μονάδων ρι· τὸ ἄρα ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ἔστιν <μονάδων νε>· καὶ ἔστιν ἡ ΒΓ μονάδων <ια· ἡ ἄρα ΒΔ ἔσται μονάδων ε· (M_2) ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ μονάδων ιγ· ἡ ἄρα ΑΔ ἔσται μονάδων ιβ·	20 × 20 → 400 11 × 11 → 121 13 × 13 → 169 121 + 169 → 290 400−290 → 110 110 × ½ → 55 55: 11 → 5 13 × 13 → 169 5 × 5 → 25 169−25 → 144 √144 → 12
	(A_3) Υποδηλώνεται γεωμετρικό Πρόβλημα (*Μ.* Ι.1)	(M_3) ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ μονάδων <ια· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ> ΒΓ ἔσται μονάδων ρλβ·	12 × 11 → 132
	(A_4) καὶ ἔστι διπλάσιον τοῦ ΑΒ<Γ> τριγώνου· (*Στ.* Ι.41)	(M_4) τὸ ἄρα ΑΒΓ τρίγωνον ἔσται μονάδων ξ <ς>.	132 × ½ → 66

	ἡ δὲ μέθοδος ἔσται ἡ αὐτή.
13 × 13 → 169 11 × 11 → 121 20 × 20 → 400	τὰ ιγ ἐφ᾽ ἑαυτὰ· γίγνεται ρξθ. καὶ τὰ ια ἐφ᾽ ἑαυτὰ· γίγνεται ρκα. καὶ τὰ κ ἐφ᾽ ἑαυτὰ· γίγνεται υ.
169 + 121 → 290	<σύνθες τὰ ρξθ καὶ τὰ ρκα· γίγνεται σϙ·

$400-290 \rightarrow 110$	ταῦτα ἄφελε ἀπὸ τῶν υ· λοιπὰ ρι· |
$110 \times ½ \rightarrow 55$	τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται νε·
$55: 11 \rightarrow 5$	παράβαλε παρὰ τὸν ια· γίγνεται ε.
$13 \times 13 \rightarrow 169$	καὶ τὰ ιγ ἑφ᾽ ἑαυτά· γίγνεται ρξθ·
$169-(5 \times 5) \rightarrow 144$	ἄφελε τὰ ε ἑφ᾽ ἑαυτά· λοιπὰ ρμδ·
$\sqrt{144} \rightarrow 12$	τούτων πλευρὰ· γίγνεται ιβ. ἔσται ἡ κάθετος μονάδων ιβ.
$12 \times 11 \rightarrow 132$	ταῦτα ἐπὶ τὸν ια· γίγνεται ρλβ·
$132 \times ½ \rightarrow 66$	τούτων τὸ ἥμισυ· ξς. τοσούτου ἔσται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου:—

Παρατηρήσεις

I. Κάθε Πρόβλημα συνοδεύεται από ένα μεικτό-εγγράμματο και αριθμητικό διάγραμμα.

II. Τα Προβλήματα χωρίζονται σε δύο διακριτές ενότητες:

Α. Πρώτη κειμενική ενότητα:

1) Η "*Πρότασις*" του σχήματος του Πρόκλου έχει παραλειφθεί.

2) Στην "*Ἔκθεσιν*" ανιχνεύονται: α) η συνθήκη και, β) οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων.

3) Ακολουθεί ο "*Διορισμός*", στον οποίο ζητούνται να βρεθούν αριθμητικά μεγέθη: το εμβαδόν των τριγώνων που έχουν περιγραφεί στην "*Ἔκθεσιν*", η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου στο Πρόβλημα Ι.2 και η κάθετος του αμβλυγωνίου τριγώνου στο Πρόβλημα Ι.6.

4) Η διαδικασία επίλυσης του κάθε Προβλήματος αρχίζει να εκτυλίσσεται από την "*Κατασκευήν*". Στόχος του Ήρωνα είναι η αναγωγή της εύρεσης του εμβαδού των τεσσάρων τριγώνων στην εύρεση του εμβαδού κατάλληλου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Τα κατασκευαστικά βήματα που ακολουθούν υπακούουν σε αυτήν τη στόχευση:

• Στο Πρόβλημα Ι.2 κατασκευάζονται οι παράλληλες ΑΔ και ΓΔ προς τις πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ που περιέχουν την ορθή γωνία Β, ΒΓ και ΑΒ αντίστοιχα (Κ), οπότε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που δημιουργείται είναι το (ΒΓ, ΑΒ).

• Στο Πρόβλημα Ι.3 κατασκευάζονται α) το ύψος ΑΔ προς τη βάση ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (K_1) και, β) η παράλληλη ΕΑΖ προς την ΒΓ, καθώς και

οι παράλληλες ΒΕ και ΓΖ προς το ύψος ΑΔ (K_2), οπότε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που δημιουργείται είναι το (ΒΓ, ΑΔ).

• Στο Πρόβλημα Ι.5 κατασκευάζεται το ύψος ΑΔ προς την πλευρά ΒΓ του οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ (∡ Β οξεία) (K_1). Η κατασκευή (K_2), που ακολουθείται στο Πρόβλημα Ι.3, υποδηλώνεται, οπότε, πάλι, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που δημιουργείται είναι το (ΒΓ, ΑΔ).

• Στο Πρόβλημα Ι.6 προεκτείνεται η πλευρά ΒΓ του αμβλυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ(∡ Β αμβλεία) και κατασκευάζεται το ύψος ΑΔ προς αυτήν (K_1). Η κατασκευή (K_2), που ακολουθείται στο Πρόβλημα Ι.3 υποδηλώνεται, όπως και στο Πρόβλημα Ι.5, οπότε, πάλι, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που δημιουργείται είναι το (ΒΓ, ΑΔ).

5) Αμέσως μετά, θα ακολουθήσει η "*Άπόδειξις*", όπου μια ομάδα γεωμετρικών Προτάσεων, *μετά από έρευνα/επισκόπηση, σε ήδη γνωστές γεωμετρικές Προτάσεις και Προβλήματα, επιλέγεται* και εκτυλίσσεται, υπό τη μορφή αποδεικτικού/παραγωγικού "λόγου", με στόχο: **5_α)** να αποδειχτεί ότι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που κατασκευάζεται σε κάθε Πρόβλημα είναι διπλάσιο του αντίστοιχου τριγώνου, **5_β)** να δειχτεί ότι οι πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται σε κάθε Πρόβλημα δύνανται να ευρεθούν, δηλαδή να εκφραστούν από τα δοθέντα του Προβλήματος· *τότε μόνο αποτιμάται/αξιολογείται* ότι, **5_γ)** η ομάδα αυτών των Προτάσεων θα αποτελέσει την ικανή και επαρκή γεωμετρική βάση, ώστε, διά μέσου ή λόγω αυτής, να ακολουθήσει η μετάβαση σε μια αλληλουχία αριθμητικών υπολογισμών, η οποία: **i)** εκφράζεται με τη μορφή ενός αριθμο-γεωμετρικού "λόγου", **ii)** ακολουθεί την εκδίπλωση των γεωμετρικών επιχειρημάτων που παρατίθενται στην "*Άπόδειξιν*" και, **iii)** οδηγεί στο τελικό αποτέλεσμα, δηλαδή στην επίλυση του Προβλήματος. Συγκεκριμένα:

• Στο Πρόβλημα Ι.2, **α)** το επιχείρημα "ορθογώνιο(ΒΓ, ΑΒ)=2τρίγωνο(ΑΒΓ)" αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης Ι.34 των *Στοιχείων*, **β)** οι πλευρές ΒΓ, ΑΒ του ορθογωνίου εκφράζονται στην "*Έκθεσιν*" από τα δοθέντα του Προβλήματος και, τότε μόνο, **γ)** "κατασκευάζεται" η απαραίτητη γεωμετρική βάση για τη μετάβαση στη σειρά των αριθμητικών υπολογισμών με τους οποίους θα επιλυθεί το Πρόβλημα.

• Στο Πρόβλημα Ι.3, **α)** η σχέση "ορθογώνιο(ΒΓ, ΒΕ)=2τρίγωνο(ΑΒΓ)" αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης Ι.41 των *Στοιχείων*, **β)** η πλευρά ΒΓ εκφράζεται στην "*Έκθεσιν*" από τα δοθέντα του Προβλήματος, ενώ, για την εύρεση της πλευράς ΒΕ ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα: **β_1)** "ΒΕ=ΑΔ", σχέση που αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης Ι.34 των *Στοιχείων*, **β_2)** "η κάθετος ΑΔ είναι και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου, άρα ΒΔ=ΔΓ=½ΒΓ", σχέση που αιτιολογείται με την επιλογή των Προτάσεων Ι.5&26 των *Στοιχείων*, και, **β_3)** τετράγωνο(ΑΒ) = τετράγωνο(ΒΔ) + τετράγωνο(ΑΔ)", σχέση που

αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης Ι.47 των *Στοιχείων*, οπότε, και εφόσον οι πλευρές ΑΒ, ΒΓ άρα και η ΒΔ=½ΒΓ, εκφράζονται από τα δοθέντα στην "*Έκθεσιν*" του Προβλήματος, η πλευρά ΒΕ δύναται να ευρεθεί και, τότε μόνο, **γ)** "κατασκευάζεται", όπως και στο Πρόβλημα Ι.2, η απαραίτητη γεωμετρική βάση για τη μετάβαση στη σειρά των αριθμητικών υπολογισμών με τους οποίους θα επιλυθεί το Πρόβλημα.

• Στο Πρόβλημα Ι.5, **α)** η σχέση "ορθογώνιο(ΒΓ, ΑΔ)=2τρίγωνο(ΑΒΓ)" υποδηλώνεται και αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης Ι.41 των *Στοιχείων*, **β)** η πλευρά ΒΓ εκφράζεται από τα δοθέντα στην "*Έκθεσιν*" του Προβλήματος, ενώ για την εύρεση της πλευράς ΑΔ ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα: **β_1)** "τετράγωνο(ΑΓ) + 2ορθογώνιο(ΒΓ,ΒΔ) = τετράγωνο(ΑΒ) + τετράγωνο(ΒΓ)", σχέση που αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης ΙΙ.13 των *Στοιχείων*, οπότε, και εφόσον οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ εκφράζονται από τα δοθέντα στην "*Έκθεσιν*" του Προβλήματος, η πλευρά ΒΔ δύναται να ευρεθεί και, **β_2)** "τετράγωνο(ΑΒ) = τετράγωνο(ΒΔ) + τετράγωνο(ΑΔ)", σχέση που αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης Ι.47 των *Στοιχείων*, οπότε, και εφόσον η πλευρά ΑΒ εκφράζεται από τα δοθέντα στην "*Έκθεσιν*" του Προβλήματος, και η πλευρά ΒΔ δύναται να ευρεθεί από τα δοθέντα του Προβλήματος, άρα και η πλευρά ΑΔ δύναται να ευρεθεί και αυτή από τα δοθέντα του Προβλήματος, οπότε, **γ)** "κατασκευάζεται", όπως και στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3 η απαραίτητη γεωμετρική βάση για τη μετάβαση στη σειρά αριθμητικών υπολογισμών με τους οποίους θα επιλυθεί το Πρόβλημα.

• Στο Πρόβλημα Ι.6, **α)** η σχέση "ορθογώνιο(ΒΓ, ΑΔ) = 2τρίγωνο(ΑΒΓ)" υποδηλώνεται και αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης Ι.41 των *Στοιχείων*, **β)** η πλευρά ΒΓ εκφράζεται από τα δοθέντα στην "*Έκθεσιν*" του Προβλήματος, ενώ για την εύρεση της πλευράς ΑΔ ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα: **β_1)** "τετράγωνο(ΑΓ) + 2ορθογώνιο(ΒΓ,ΒΔ) = τετράγωνο(ΑΒ) + τετράγωνο(ΒΓ)", σχέση που αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης ΙΙ.13 των *Στοιχείων*, οπότε, και εφόσον οι πλευρές ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ εκφράζονται από τα δοθέντα στην "*Έκθεσιν*" του Προβλήματος, η πλευρά ΒΔ δύναται να ευρεθεί και, **β_2)** "τετράγωνο(ΑΒ) = τετράγωνο(ΒΔ) + τετράγωνο(ΑΔ)", σχέση που υποδηλώνεται και αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης Ι.47 των *Στοιχείων*, οπότε, και εφόσον η πλευρά ΑΒ εκφράζεται από τα δοθέντα στην "*Έκθεσιν*" του Προβλήματος, η πλευρά ΒΔ δύναται να ευρεθεί από τα δοθέντα του Προβλήματος, άρα και η πλευρά ΑΔ δύναται να ευρεθεί και αυτή από τα δοθέντα του Προβλήματος, οπότε, **γ)** "κατασκευάζεται", όπως και στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3 και Ι.5 η απαραίτητη γεωμετρική βάση για τη μετάβαση σε μια σειρά αριθμητικών υπολογισμών, με τους οποίους θα επιλυθεί το Πρόβλημα.

Τέλος, αξίζει να σημειώσουμε ότι για τον υπολογισμό του εμβαδού των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (ΒΓ, ΑΒ) στο Πρόβλημα Ι.1, (ΒΓ, ΒΕ) στο Πρόβλημα Ι.2, και (ΒΓ, ΑΔ) στα Προβλήματα Ι.5 και Ι.6 χρησιμοποιείται το

Πρόβλημα Ι.1 των *Μετρικών*, η οποία υποδηλώνεται και, όπως έχουμε ήδη επισημάνει, αποτελεί την πλέον βασική Πρόταση για τον υπολογισμό των εμβαδών ευθυγράμμων σχημάτων.

Ο γεωμετρικός "λόγος"

Αναφέρει γεωμετρικά αντικείμενα.

Συγκεκριμένα:

• Στο Πρόβλημα Ι.2, τα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται είναι: το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα τετράγωνα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ

• Στο Πρόβλημα Ι.3, τα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται είναι: οι πλευρές ΑΔ, ΒΔ και ΔΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα ΒΓΕΖ και (ΒΔ, ΔΑ) και το τετράγωνο της πλευράς ΑΒ.

• Στο Πρόβλημα Ι.5, τα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται είναι: το τρίγωνο ΑΒΓ, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (ΓΒ, ΒΔ), και τα τετράγωνα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ΑΔ και ΔΒ.

• Στο Πρόβλημα Ι.6 τα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται είναι: το τρίγωνο ΑΒΓ, το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (ΓΒ, ΒΔ) και τα τετράγωνα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ.

Γλωσσικά χαρακτηριστικά

Αν εξετάσουμε τη γραμματική και συντακτική δομή των γεωμετρικών Προτάσεων που συναντώνται στην "*Ἀπόδειξιν*" των τεσσάρων Προβλημάτων, μπορούμε να καταγράψουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

• Στο Πρόβλημα Ι.2, **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** το επιχείρημα εισάγεται τόσο στην Πρόταση (A_1) όσο και στην Πρόταση (A_2) χωρίς τη χρήση συμπερασματικών συνδέσμων, **γ)** η αιτιολογία του επιχειρήματος της Πρότασης (A_1) παραλείπεται, ενώ για την αιτιολογία του επιχειρήματος της Πρότασης (A_2) χρησιμοποιείται ο αιτιολογικός σύνδεσμος "*ἐπεὶ* ", **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο επιχείρημα των Προτάσεων (A_1) και (A_2) είναι γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἐστί*" ή "*ἐστίν*") και, **ε)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στην αιτιολογία του επιχειρήματος της Πρότασης (A_2) είναι γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἐστιν*").

• Στο Πρόβλημα Ι.3, **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** το επιχείρημα εισάγεται στην Πρόταση (A_1) με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ἄρα*"[119], ενώ στις Προτάσεις (A_2) και (A_3) εισάγεται χωρίς τη χρήση συμπερασματικού συνδέσμου, **γ)** για την αιτιολογία του επιχειρήματος της Πρότασης (A_1) χρησιμοποιείται ο αιτιολογικός σύνδεσμος "*γάρ*", ενώ, για την αιτιολογία του επιχειρήματος της Πρότασης (A_2) χρησιμοποιείται ο αιτιολογικός σύνδεσμος "*ἐπεί*"[120], **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο επιχείρημα των Προτάσεων (A_1), (A_2) και (A_3) είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἐστὶν*" ή "*ἐστί*")και, **ε)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στην αιτιολογία του επιχειρήματος της Πρότασης (A_1) είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἐστι*"), ενώ ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στην αιτιολογία της πρότασης (A_2) είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής των ρημάτων "*εἰμί*" ("*ἐστι*") και "*ἔχω*" ("*ἔχει*"), καθώς και γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου, φωνής μέσης του ρήματος "*ἄγομαι*"("*ἦκται*").

• Στο Πρόβλημα Ι.5, **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** το επιχείρημα εισάγεται στην Πρόταση (A_1) με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ἄρα*", ενώ στις Προτάσεις (A_2) και (A_4) εισάγεται χωρίς τη χρήση συμπερασματικού συνδέσμου, **γ)** για την αιτιολογία του επιχειρήματος της Πρότασης (A_1) χρησιμοποιείται ο ρηματικός τύπος "*ὡς δέδεικται*"[121], ενώ η αιτιολογία του επιχειρήματος (A_4) παραλείπεται, **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο επιχείρημα των Προτάσεων (A_1), (A_2) και (A_4) είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἐστι*" ή "*ἐστί*" ή "*ἔστι*") και, **ε)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στην αιτιολογία της Πρότασης (A_1) είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου, φωνής μέσης του ρήματος "*δείκνυμαι*" ("*δέδεικται*").

• Στο Πρόβλημα Ι.6, **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** το επιχείρημα εισάγεται στην Πρόταση (A_1) με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ἄρα*", ενώ, στην Πρόταση (A_4) εισάγεται χωρίς τη χρήση συμπερασματικού συνδέσμου, **γ)** η αιτιολογία των επιχειρημάτων των Προτάσεων (A_1) και (A_4) παραλείπεται, **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο επιχείρημα των Προτάσεων (A_1) και (A_4) είναι γ΄

---

[119] Ο συνήθης τρόπος, με τον οποίο εισάγονται τα επιχειρήματα-συμπεράσματα, είναι ο συμπερασματικός σύνδεσμος "*ἄρα*", ενώ, σε μικρότερη έκταση, συναντάται και ο συμπερασματικός σύνδεσμος "*ὥστε*".

[120] Ο αιτιολογικός σύνδεσμος "*ἐπειδήπερ*", με τον οποίο εισάγεται η Πρόταση (A_3), δεν αιτιολογεί το επιχείρημα αυτής, αλλά τον αριθμητικό-γεωμετρικό "λόγο" που έχει προηγηθεί.

[121] Ο αιτιολογικός σύνδεσμος "*ἐπεί*", με τον οποίο εισάγεται η Πρόταση (A_2) δεν αιτιολογεί το επιχείρημα αυτής, αλλά τον αριθμητικό-γεωμετρικό "λόγο" που θα ακολουθήσει.

πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*είμι*" ("*έστι*" ή "*ἔστι*").

Από τις παραπάνω παρατηρήσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο γεωμετρικός "λόγος" των παραπάνω Προβλημάτων, από την άποψη της εκφοράς του κειμένου, παρουσιάζει βαθιές αναλογίες με τον αποδεικτικό γεωμετρικό "λόγο" των κλασικών ελληνικών γεωμετρικών κειμένων, όπως άλλωστε έχει υπογραμμιστεί στην Ιστορία των Μαθηματικών [Acerbi, 2012, σ. 186]. Με βάση αυτή την ομοιότητα, ο γεωμετρικός "λόγος" της πρώτης κειμενικής ενότητας κάθε Προβλήματος έχει ερμηνευθεί είτε ως "απόδειξη" [Tybjerg, 2004, σ. 34, 36] [geometrical demonstration] είτε ως "επικύρωση" [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 373] [la prevue validante] της υπολογιστικής διαδικασίας/αλγορίθμου που παρατίθεται στο δεύτερο μέρος των Προβλημάτων[122]. Όμως, ένα τέτοιο συμπέρασμα δεν είναι επαρκώς αιτιολογημένο. Βασίζεται σε μια υπερβολική εκτίμηση του ρόλου και της σημασίας της γλωσσικής εκφοράς ενός κειμένου, για την κατανόηση της χρηστικής λειτουργίας του. Και το κυριότερο: όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα παραπάνω Προβλήματα, ο γεωμετρικός "λόγος", παρά το γεγονός ότι περιέχει μια αλληλουχία γεωμετρικών επιχειρημάτων, δεν ολοκληρώνεται, είναι ελλιπής, και, κυρίως, δεν οδηγεί ως την τελική εύρεση του ζητούμενου μεγέθους, δηλαδή του εμβαδού[123]. Τότε, όμως, τίθεται το κρίσιμο για την ερμηνεία του εγχειρήματος των *Μετρικών* ερώτημα : τι ακριβώς είναι αυτό που "αποδεικνύει" ο γεωμετρικός "λόγος"; Φυσικά, όχι την ορθότητα των υπολογιστικών διαδικασιών, οι οποίες, μάλιστα, ακολουθούν τα γεωμετρικά επιχειρήματα που υποτίθεται ότι τις αποδεικνύουν, σχήμα που, όπως γνωρίζουμε, δεν συναντάται σε μαθηματικά κείμενα με αποδεικτική δομή, στα οποία η απόδειξη έπεται και δεν προηγείται εκείνου που ζητείται να αποδειχθεί. Τότε, σε τι χρησιμεύει αυτή η σειρά των γεωμετρικών επιχειρημάτων που προηγείται των αριθμητικών υπολογισμών; Όπως έχουμε προαναφέρει, ο γεωμετρικός "λόγος" ευρίσκεται/δημιουργείται, ώστε να αποτελέσει εκείνη την ικανή βάση για τη μετάβαση στην εξαγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων. Πράγματι, από τη στιγμή που ο συγγραφέας αξιολογεί ότι αυτή η βάση "κατασκευάστηκε", ο γεωμετρικός "λόγος" εκλείπει/εγκαταλείπεται, για να ακολουθήσει ένας αριθμο-γεωμετρικός "λόγος", ο οποίος και θα επιλύσει, τελικά, το πρόβλημα.

---

[122] Από την άλλη πλευρά, έχει διατυπωθεί και η αντίθετη άποψη, σύμφωνα με την οποία οι υπολογιστικές διαδικασίες/αλγόριθμοι είναι οι "*άποδείξεις*" των γεωμετρικών Προτάσεων που διατυπώνονται στον γεωμετρικό "λόγο"! [Lloyd, 2012, σ. 300].

[123] Όπως θα δούμε παρακάτω, κατά την επίλυση Προβλημάτων "*κατὰ ἀνάλυσιν*", ο γεωμετρικός "λόγος" εκτείνεται μέχρι να ευρεθεί/δειχτεί ότι το ζητούμενο μέγεθος είναι "*δοθέν*", διαδικασία η οποία δυνητικά επιλύει το Πρόβλημα, και, ταυτόχρονα, αποτελεί τη βάση επί της οποίας θα πραγματοποιηθούν οι αριθμητικοί υπολογισμοί.

Ο αριθμο-γεωμετρικός "λόγος"

Αναφέρεται σε γεωμετρικά αντικείμενα, αριθμούς και υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις.

Συγκεκριμένα:

• Στο Πρόβλημα Ι.2, **α)** τα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται είναι η πλευρά ΑΓ, τα τετράγωνα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ, και το τρίγωνο ΑΒΓ, **β)** οι αριθμοί που καταγράφονται είναι οι αριθμητικές τιμές που προκύπτουν κατά την ανάπτυξη του Προβλήματος.

• Στο Πρόβλημα Ι.3, **α)** τα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται είναι οι πλευρές ΒΓ, ΒΔ, ΑΒ, ΑΔ, το τρίγωνο ΑΒΓ, και το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΒΓΕΖ, **β)** οι αριθμοί που καταγράφονται είναι είτε οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων του Προβλήματος είτε αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία προκύπτουν κατά την ανάπτυξη αυτού.

• Στο Πρόβλημα Ι.5, **α)** τα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται είναι οι πλευρές ΒΓ, ΒΔ, ΑΔ, τα τετράγωνα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, ΒΔ, το τρίγωνο ΑΒΓ και τα ορθογώνια (ΓΒ, ΒΔ), (ΒΓ, ΑΔ), **β)** οι αριθμοί που καταγράφονται είναι είτε οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων του Προβλήματος είτε αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία προκύπτουν κατά την ανάπτυξη αυτού.

• Στο Πρόβλημα Ι.6, **α)** τα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται είναι οι πλευρές ΒΓ, ΒΔ, ΑΒ, ΑΔ, τα τετράγωνα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, το τρίγωνο ΑΒΓ και τα ορθογώνια (ΓΒ, ΒΔ), (ΑΔ, ΒΓ), **β)** οι αριθμοί που καταγράφονται είναι είτε οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων του Προβλήματος είτε αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία προκύπτουν κατά την ανάπτυξη αυτού.

Γλωσσικά χαρακτηριστικά

Αν εξετάσουμε την γραμματική και συντακτική δομή του αριθμητικό-γεωμετρικού "λόγου", μπορούμε να καταγράψουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

• Στο Πρόβλημα Ι.2, **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** στην Πρόταση (M_1) το επιχείρημα εισάγεται χωρίς τη χρήση συμπερασματικού συνδέσμου, στην Πρόταση (M_2) εισάγεται με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*οὖν*" και στην Πρόταση (M_3) τα επιχειρήματα εισάγονται με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ἄρα*", **γ)** για την αιτιολογία του επιχειρήματος (M_1) χρησιμοποιείται ο ρηματικός τύπος "*ὡς δέδεικται*", η αιτιολογία του επιχειρήματος (M_2) παραλείπεται, ενώ, για την αιτιολογία του επιχειρήματος (M_3) χρησιμοποιούνται οι αριθμητικοί υπολογισμοί που έχουν προηγηθεί.

• Στο Πρόβλημα Ι.3, **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** στις Προτάσεις (M_1), (M_2) και (M_4) το επιχείρημα εισάγεται με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ἄρα*", ενώ, στις Προτάσεις (M_3) και (M_5) με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ὥστε*", **γ)** για την αιτιολογία των επιχειρημάτων των Προτάσεων (M_1), (M_2), (M_3), (M_4) και (M_5), χρησιμοποιούνται οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων και οι αριθμητικοί υπολογισμοί που έχουν προηγηθεί.

• Στο Πρόβλημα Ι.5, **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** στις Προτάσεις (M_1), (M_2), (M_3) και (M_4) το επιχείρημα εισάγεται με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ἄρα*", **γ)** για την αιτιολογία των επιχειρημάτων των Προτάσεων (M_1), (M_2), (M_3) και (M_4), όπως και στο Πρόβλημα Ι.3, χρησιμοποιούνται οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων και οι αριθμητικοί υπολογισμοί που έχουν προηγηθεί.

• Στο Πρόβλημα Ι.6, **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** στις Προτάσεις (M_1), (M_2), (M_3) και (M_4) το επιχείρημα εισάγεται με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ἄρα*", **γ)** για την αιτιολογία των επιχειρημάτων των Προτάσεων (M_1), (M_2), (M_3) και (M_4), όπως και στα Προβλήματα Ι.3 και Ι.5, χρησιμοποιούνται οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων και οι αριθμητικοί υπολογισμοί που έχουν προηγηθεί.

Ιδιαίτερα, αξίζει να σημειώσουμε ότι η γραμματική δομή των επιχειρημάτων τού αριθμητικό-γεωμετρικού "λόγου", και στα τέσσερα Προβλήματα, ακολουθεί μια συγκεκριμένη μορφή, η οποία περιγράφεται ως εξής: **1)** τα προαναφερθέντα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται βρίσκονται στη θέση του υποκειμένου της πρότασης, **2)** ο ρηματικός τύπος δίνεται με γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἔστι*", "*ἔστιν*", "*ἐστὶ*", "*ἐστί*") ή γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου μέλλοντα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἔσται*"), **3)** οι αριθμοί ενέχουν τη θέση του κατηγορήματος των γεωμετρικών αντικειμένων και συνοδεύονται πάντα από το ουσιαστικό "*μονάς*"[124] και, **4)** οι υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις από τις οποίες προκύπτουν τα αριθμητικά αποτελέσματα θα καταγραφούν στη 2η ενότητα των Προβλημάτων.

Β. Δεύτερη κειμενική ενότητα:

Περιλαμβάνει τη διαδικασία υπολογισμού, δηλαδή τις αριθμητικές πράξεις που εκτελούνται, ώστε να προκύψουν τα αριθμητικά αποτελέσματα που καταγράφονται στον αριθμο-γεωμετρικό "λόγο".

[124] "*ἐπὶ μονάδων τοὺς ἀριθμοὺς ἐκθησόμεθα*" [148.8].

Στιλιστικά χαρακτηριστικά

1. Αναγγελία της διαδικασίας

Στα Προβλήματα Ι.2 και Ι.3, εισάγεται με το "*ἡ δὲ μέθοδός ἐστιν αὕτη*", στο Πρόβλημα Ι.5, με το "*ἡ δὲ μέθοδός ἔσται τοιαύτη*" και στο Πρόβλημα Ι.6, με το "*ἡ δὲ μέθοδός ἔσται ἡ αὐτή*".

2. Επιλογές εκκίνησης

Οι αριθμητικές πράξεις και στα τέσσερα Προβλήματα εκτελούνται άμεσα.

3. Αλληλουχία των πράξεων που εκτελούνται ή περιγράφονται κατά την εκτύλιξη της υπολογιστικής διαδικασίας

3.1 Οι διαδικασίες υπολογισμού, και στα τέσσερα Προβλήματα, εφαρμόζονται σε συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα και η πλειονότητα των πράξεων πραγματοποιείται.

3.2 Η υπολογιστική ροή εκτυλίσσεται, ώστε να ακολουθεί ένα "μεικτό" σύστημα, δηλαδή, εκτός από τις σειρές βημάτων στις οποίες τα αποτελέσματα των πράξεων χρησιμοποιούνται άμεσα για την επόμενη πράξη, υπάρχουν και σειρές βημάτων στις οποίες τα αποτελέσματα των πράξεων δεν χρησιμοποιούνται άμεσα, αλλά, "αποθηκεύονται", για να χρησιμοποιηθούν σε επόμενα βήματα. Οι δύο αυτές ομάδες εμπλέκονται μεταξύ τους, με αποτέλεσμα σε πολλά Προβλήματα να υπάρχουν διάφορα στάδια που εναλλάσσονται. Το "μεικτό" αυτό σύστημα είναι το πλέον σύνηθες, για την παρουσίαση της υπολογιστικής διαδικασίας στα περισσότερα Προβλήματα των *Μετρικών*. Συναντάται και στα τέσσερα εξεταζόμενα Προβλήματα.

Συγκεκριμένα:

• Στο Πρόβλημα Ι.2, μπορούμε να καταγράψουμε: "*τὰ μὲν γ ἐπὶ τὰ δ ποιήσαντα λαβεῖν <τὸ ἥμισυ τούτων· γίνεται ς·*", δηλαδή μια σειρά βημάτων στην οποία το αποτέλεσμα μιας πράξης χρησιμοποιείται σαν "input" στην επόμενη.

• Στο Πρόβλημα Ι.3, μπορούμε να καταγράψουμε διαδοχικά τα εξής στάδια: **α)** "*λαβὲ τῶν ιβ τὸ ἥμισυ· γίνονται ς· καὶ τὰ ι ἑφ΄ ἑαυτά· γίνονται ρ.*", δηλαδή μια σειρά "ανεξάρτητων" μεταξύ τους πράξεων, **β)** "*ἄφελε τὰ ς ἑφ΄ ἑαυτὰ, ἅ ἐστι λ· γίγνονται λοιπὰ ξδ. <τούτων πλευρὰ γίνεται η·>*", δηλαδή μια σειρά βημάτων στην οποία το αποτέλεσμα μιας πράξης θα χρησιμοποιηθεί άμεσα σαν "input" στην επόμενη και, **γ)** "*<καὶ τὰ ιβ ἐπὶ τὰ η· γίνονται> ρς. τούτων τὸ ἥμισυ. <γίνονται μη·*", δηλαδή μια δεύτερη σειρά βημάτων στην οποία το αποτέλεσμα μιας πράξης θα χρησιμοποιηθεί άμεσα σαν "input" στην επόμενη.

• Στο Πρόβλημα Ι.5, μπορούμε να καταγράψουμε διαδοχικά τα εξής στάδια: **α)** "*τὰ ιγ ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνεται ρξθ. καὶ τὰ ιδ ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνεται ρρς. καὶ τὰ ιε ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνεται σκε. <σύνθες τὰ ρξθ καὶ τὰ ρρς· γίγνεται τξε*", δηλαδή μια σειρά "ανεξάρτητων" μεταξύ τους πράξεων, **β)** "*ἀπὸ τούτων ἄφελε τὰ σκε·> γίγνεται λοιπὰ ρμ· τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται ο· παράβαλε παρὰ τὸν ιδ· γίγνεται ε·*", δηλαδή μια σειρά βημάτων στην οποία το αποτέλεσμα μιας πράξης θα χρησιμοποιηθεί άμεσα σαν "input" στην επόμενη και, **γ)** "*καὶ τὰ ιγ ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνεται ρξθ. ἀφ΄ ὧν ἄφελε τὰ ε ἑφ΄ ἑαυτά· λοιπὰ ρμδ. τούτων πλευρὰ γίγνεται ιβ· ταῦτα πολυπλασίασον ἐπὶ τὸν ιδ· γίγνεται ρξη· τούτων τὸ ἥμισυ πδ·*", δηλαδή μια σειρά βημάτων στην οποία εμπλέκονται τα δύο προηγούμενα στάδια.

Στο Πρόβλημα Ι.6, μπορούμε να καταγράψουμε διαδοχικά τα εξής στάδια: **α)** "*τὰ ιγ ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνεται ρξθ. καὶ τὰ ια ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνεται ρκα· καὶ τὰ κ ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνεται υ. <σύνθες τὰ ρξθ καὶ τὰ ρκα· γίγνεται σϙ*", δηλαδή μια σειρά "ανεξάρτητων" μεταξύ τους πράξεων, **β)** "*ταῦτα ἄφελε ἀπὸ τῶν υ· λοιπὰ ρι·/ τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται νε· παράβαλε παρὰ τὸν ια· γίγνεται ε·*", δηλαδή μια σειρά βημάτων στην οποία το αποτέλεσμα μιας πράξης θα χρησιμοποιηθεί άμεσα σαν "input" στην επόμενη και, **γ)** "*καὶ τὰ ιγ ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνεται ρξθ. ἄφελε τὰ ε ἑφ΄ ἑαυτά· λοιπὰ ρμδ. τούτων πλευρὰ· γίγνεται ιβ· ταῦτα ἐπὶ τὸν ια· γίγνεται ρλβ· τούτων τὸ ἥμισυ· ξς.*", δηλαδή μια σειρά βημάτων στην οποία εμπλέκονται τα δύο προηγούμενα στάδια.

4. Διατύπωση των πράξεων

Κατά τη δήλωση των πράξεων καταγράφονται οι παρακάτω ρηματικοί τύποι[125]:

Α΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει ρήματα β΄ προσώπου, προστακτικής ενικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής.

[125] Οι ρηματικοί τύποι που συναντώνται κατά τη δήλωση πράξεων στο έργο των *Μετρικών* είναι οι παρακάτω:

• Α΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει ρήματα β΄ προσώπου προστακτικής, ενικού/πληθυντικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής.

• Β΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει μετοχές, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής και απαρέμφατα, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής.

• Γ΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει ρήματα γ΄ προσώπου προστακτικής, ενικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου, φωνής μέσης.

• Δ΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει το απρόσωπο ρήμα *δεῖ* (ενεστώτας) ή *δεήσει* (μέλλων), το οποίο συνοδεύεται από ρήματα β΄ προσώπου προστακτικής, ενικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής μέσης, ή από μετοχές, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής, ή από απαρέμφατα, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής.

Β΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει μετοχές, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής και απαρέμφατα, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής.

• Το Πρόβλημα Ι.2 κατατάσσεται στον Β΄ ρηματικό τύπο (μετοχή: "*ποιήσαντα*", απαρέμφατο: " *λαβεῖν*").

• Τα Προβλήματα Ι.3, Ι.5 και Ι.6 κατατάσσονται στον Α΄ ρηματικό τύπο (ρήματα: "*λαβέ*", "*ἄφελε*", "*σύνθες*", "*παράβαλε*", "*πολυπλασίασον*").

5. Δήλωση των πράξεων

5.1 Στην πρόσθεση χρησιμοποιείται ρήμα: "*συντίθημι*".

• Πρόβλημα Ι.2: "*συνθεῖναι*".

• Πρόβλημα Ι.5&Ι.6: "*σύνθες*".

5.2 Στην αφαίρεση χρησιμοποιούνται τα παρακάτω ρήματα: "*ἀφαιρέω*".

• Πρόβλημα Ι.3&Ι.5&Ι.6: "*ἄφελε*".

5.3 Στον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιούνται τα παρακάτω ρήματα: "*πολλαπλασιάζω*", "*πολυπλασιάζω*", "*ποιῶ*".

• Πρόβλημα Ι.2: "*ποιήσαντα*".

• Πρόβλημα Ι.5: "*πολυπλασίασον*".

5.4 Στην ύψωση στο τετράγωνο χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική φράση: "*ἐφ΄ ἑαυτὰ ποιῶ*".

• Πρόβλημα Ι.2: "*ἐφ΄ ἑαυτὰ ποιήσαντα*".

• Προβλήματα Ι.3&Ι.5&Ι.6: "*ἐφ΄ ἑαυτὰ*".

5.5 Στη διαίρεση χρησιμοποιείται το παρακάτω ρήμα: "*παραβάλλω* (*παρὰ*)".

• Πρόβλημα Ι.5: "*παράβαλε παρὰ*".

5.5.1 Στον υποδιπλασιασμό χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική φράση: "*λαμβάνω τὸ ἥμισυ*", με το ρήμα ενίοτε να παραλείπεται.

• Πρόβλημα Ι.2: "*λαβεῖν τὸ ἥμισυ*".

• Πρόβλημα Ι.3: "*λαβὲ τὸ ἥμισυ*", "*τούτων τὸ ἥμισυ*".

• Προβλήματα Ι.5&Ι.6: "*τούτων τὸ ἥμισυ*".

5.6 Στον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική φράση: "*λαμβάνω πλευρὰν*", με το ρήμα ενίοτε να παραλείπεται.

• Πρόβλημα Ι.2: "*πλευρὰν λαβόντα*".

• Πρόβλημα Ι.3 & Ι.5 & Ι.6: "*τούτων πλευρὰ*".

5.7 Συχνά οι ρηματικοί τύποι υποδηλώνονται, και υπάρχουν περιπτώσεις που παραλείπονται τελείως. Οι ασάφειες, που σχετίζονται με την υποδήλωση ή την παντελή έλλειψη του ρήματος, αναπληρώνονται με την παρουσία χαρακτηριστικών προθέσεων, συνδέσμων, επιρρημάτων, επιθέτων και ουσιαστικών. Συγκεκριμένα:

5.7.1 Για τον πολλαπλασιασμό/ύψωση στο τετράγωνο παρουσιάζονται οι προθέσεις: "*ἐπὶ*", "*ἐπ΄*", "*ἐφ΄*".

• Πρόβλημα Ι.2: "*ἐφ΄*".

• Πρόβλημα Ι.3&Ι.5&Ι.6: "*ἐφ΄*" "*ἐπὶ*".

• Προβλήματα Ι.3&Ι.5&Ι.6: "*ἐφ΄ ἑαυτὰ*".

5.7.2 Για τη διαίρεση/υποδιπλασιασμό παρουσιάζεται το παρακάτω επίθετο: "*ἥμισυ*".

• Πρόβλημα Ι.3&Ι.5&Ι.6: "*τούτων τὸ ἥμισυ*".

5.7.3 Για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας παρουσιάζεται το παρακάτω ουσιαστικό: "*πλευρὰ*".

• Πρόβλημα Ι.3&Ι.5&Ι.6: "*τούτων πλευρὰ*".

6. Αναγγελία αποτελέσματος

6.1 Στην πρόσθεση χρησιμοποιείται το ρήμα: "*γίγνομαι*".

• Πρόβλημα Ι.2: "*γίγνονται*".

• Πρόβλημα Ι.5&Ι.6: "*γίγνεται*".

6.2 Στην αφαίρεση χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική έκφραση: "*γίγνομαι λοιπὸς*", με το ρήμα, μερικές φορές, να παραλείπεται.

• Πρόβλημα Ι.3: "*γίγνονται λοιπὰ*".

• Πρόβλημα Ι.5: "*γίγνεται λοιπὰ*" ,"*λοιπὰ*".

• Πρόβλημα Ι.6: "*λοιπὰ*".

6.3 Στον πολλαπλασιασμό, τη διαίρεση, τον υποδιπλασιασμό και τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας χρησιμοποιείται το παρακάτω ρήμα: "*γίγνομαι*".

• Πρόβλημα I.2& I.3: "*γίνονται*".

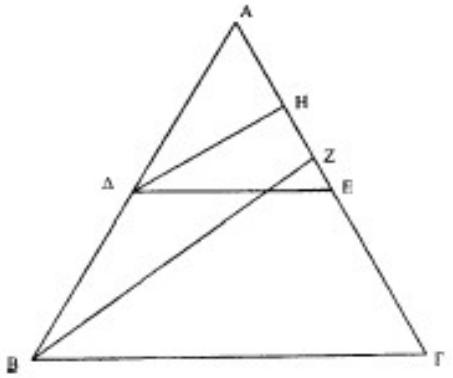
• Πρόβλημα I.3&I.5&I.6: "*γίγνεται*".

4.2.3 Παραδείγματα χρήσης "ἐπιλογισμοῦ" σε άλλα προβλήματα

Παρά το γεγονός ότι το σχόλιο αναφέρεται στα αρχικά Προβλήματα των *Μετρικών*, χαρακτηριστικά της προαναφερθείσας διαδικασίας/μεθόδου, την οποία καταγράφουμε ως "*ἐπιλογισμό τῶν γεωμετρικῶν ἀποδείξεων*", ανιχνεύονται και σε άλλα Προβλήματα του έργου. Μπορούμε να σημειώσουμε δύο Προβλήματα, στα οποία τα παραπάνω χαρακτηριστικά αναπαράγονται, ακριβώς, με τον ίδιο τρόπο. Πρόκειται για τα Προβλήματα III.2 και III.3.

Θα ακολουθήσει η παρουσίαση του Προβλήματος III.3

Πρόβλημα III.3



Διαίρεση σε μέρη	Γεωμετρικός "λόγος"	Αριθμητικό-γεωμετρικός "λόγος"	Υποδηλωμένες πράξεις
Ἔκθεσις *1η συνθήκη* *αριθμητικές τιμές των δοθέντων* *2η συνθήκη* *αριθμητικές τιμές των δοθέντων*	Ἔστω δὴ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον τὴν μὲν ΑΒ μονάδων ιγ τὴν δὲ ΒΓ μονάδων ιδ τὴν δὲ ΓΑ μονάδων ιε. καὶ ἀπειλήφθω ἡ ΑΔ, εἱ τύχοι, μονάδων ιβ.		
Διορισμός	καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Δ διαγαγεῖν τὴν ΔΕ διαιροῦσαν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐν λόγῳ τῷ δοθέντι. ἔστω δὴ ὁ λόγος, ὃν ἔχει τὰ ε πρὸς τὰ β.		
Κατασκευή	(Κ) ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Β Δ ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετοι αἱ ΒΖ ΔΗ. (*Στ.* I.12)		
Ἀπόδειξις	(A_1) Υποδηλώνεται η διαδικασία εύρεσης του ύψους οξυγωνίου τριγώνου, όπως έχει αναπτυχθεί στο Πρόβλημα *Μ.* I.5	(M_1) ἔσται δὴ ἡ ΒΖ κάθετος, ὡς ἐμάθομεν, μονάδων ια ε′.	
	(A_2) καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΔ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΔΗ (*Στ.* VI.4)	(M_2) τουτέστιν ὡς ιγ πρὸς ιβ, καὶ ἔστιν ἡ ΒΖ ια ε′, ἡ ἄρα ΔΗ ἔσται μονάδων ι καὶ κβ ξε′.	(11⅕×12):13 →10 $\frac{22}{65}$
	(A_3) καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ λόγον ἔχει ὃν ε πρὸς γ (*Στ.* V.19), Υποδηλώνεται γεωμετρικό Πρόβλημα (*Μ.* I.5)	(M_3) καὶ ἔστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον μονάδων πδ, τὸ ἄρα ΑΔΕ τρίγωνον ἔσται μονάδων ν καὶ β ε′·	3+2→5 3×84→252 252:5→50 ⅖
	(A_4) τοῦ δὲ ΑΔΕ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΔΗ· (*Στ.* I.41) Υποδηλώνεται γεωμετρικό Πρόβλημα (*Μ.* I.1)	(M_4)τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ ΔΗ ἔσται μονάδων ρ καὶ δ ε′· καὶ ἔστιν ἡ ΔΗ μονάδων ι καὶ κβ ξε′· ἡ ἄρα ΑΕ ἔσται μονάδων θ ∠′ δ′.	50 ⅖×2→100 ⅘ 100 ⅘:10 → 9 ½ ¼
Συμπέρασμα	κἂν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΔΕ, ἔσται τὸ προκείμενον.		

	ἔστι δὲ ἡ μέθοδος τοιαύτη.
(11⅕×12):13→10 $\frac{22}{65}$	ἐπεὶ ἡ ΒΖ κάθετός ἐστιν, ια ε′ ἐπὶ τὰ ιβ· | καὶ τὰ γενόμενα μέρισον εἰς τὸν ιγ· γίνονται μονάδες ι καὶ κβ ξε′.

3+2→5	καὶ ἐπεὶ λόγος, ἐν ᾧ διαιρεῖται, ὁ τῶν γ πρὸς τὰ β, σύνθες γ καὶ β· γίγνεται ε.
3×84→252	καὶ πολλαπλασίασον τὸν γ ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τουτέστιν ἐπὶ τὰ πδ· γίγνεται σνβ·
252:5→50 ⅖	ταῦτα μέρισον εἰς τὸν ε· γίγνεται ν β ε′·
50 ⅖×2→100 ⅘	ταῦτα δίς· γίγνεται ρ καὶ δ ε′·
	μέρισον ταῦτα παρὰ τὸν ι καὶ κβ ξε′· γίγνονται μονάδες θ ∠′ δ′. τοσούτου ἀπολαβὼν τὴν ΑΕ ἐπίζευξον τὴν ΔΕ καὶ ἔσται τὸ προκείμενον:

Παρατηρήσεις

I. Το Πρόβλημα συνοδεύεται από ένα εγγράμματο διάγραμμα.

II. Το Πρόβλημα, πάλι, χωρίζεται σε δύο διακριτές ενότητες:

Α. Πρώτη κειμενική ενότητα:

1) Η "*Πρότασις*" του σχήματος του Πρόκλου έχει παραλειφθεί.

2) Στην "*Ἔκθεσιν* ", ανιχνεύονται δύο συνθήκες και οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων.

3) Ακολουθεί ο "*Διορισμός*", στον οποίο ζητείται να διαιρεθεί το δοθέν τρίγωνο σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από ευθεία γραμμή.

4) Η διαδικασία επίλυσης του Προβλήματος αρχίζει, πάλι, να εκτυλίσσεται από την "*Κατασκευήν*". Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι το τρίτο Βιβλίο των *Μετρικών* περιέχει Προβλήματα που αφορούν στη διαίρεση επιπέδων σχημάτων, από μία ή περισσότερες γραμμές, ή στερεών σχημάτων, από ένα επίπεδο σε τμήματα, υπό δοθέντα λόγο. Στα Προβλήματα ΙΙΙ.1-9 και ΙΙΙ.20-23, τα οποία επιδέχονται αριθμητικής επίλυσης, η εύρεση των γραμμών ή του επιπέδου, που πραγματοποιούν τις διαιρέσεις των αντίστοιχων σωμάτων, ακολουθεί τα παρακάτω βήματα: **4α)** αρχικά, οι γραμμές ή το επίπεδο, μέσω των οποίων θα πραγματοποιηθούν οι αντίστοιχες διαιρέσεις, κατασκευάζονται, σύμφωνα με τις προϋποθέσεις του εκάστοτε Προβλήματος, **4β)** ακολουθεί η αριθμητική εύρεση των θέσεων τους, με την οποία εξασφαλίζεται, ταυτόχρονα, η ύπαρξη και μοναδικότητα αυτών. Για την εύρεση, λοιπόν, της γραμμής ΔΕ, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα: **4α)** κατασκευή της ΔΕ, σύμφωνα με τις προϋποθέσεις του Προβλήματος, ώστε να διαιρεί το τρίγωνο ΑΒΓ σε δύο τμήματα ΑΔΕ και ΔΒΓΕ, με λόγο, αντίστοιχα, 3:2, **4β)** ακολουθεί η εύρεση τής θέσης της, δηλαδή η εύρεση τής

θέσης των άκρων της Δ και Ε. Όμως, **i)** τα σημεία Δ και Ε βρίσκονται, αντίστοιχα, επί των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, **ii)** η θέση του σημείου Δ θεωρείται γνωστή, εφόσον το τμήμα ΑΔ εκφράζεται από τα δοθέντα του Προβλήματος, άρα, **iii)** η εύρεση της θέσης του σημείου Ε ανάγεται στην εύρεση, δηλαδή την έκφραση του τμήματος ΑΕ, από τα δοθέντα του Προβλήματος. Σε αυτήν τη στόχευση υπακούουν τα κατασκευαστικά βήματα που ακολουθούν:

• (Κ): Κατασκευάζονται οι ΔΗ, ΒΖ κάθετες επί την ΑΓ.

5) Αμέσως μετά, ακολουθεί η "*Άπόδειξις*", στην οποία, μετά από έρευνα/επισκόπηση σε ήδη γνωστές γεωμετρικές Προτάσεις και Προβλήματα, μια ομάδα γεωμετρικών Προτάσεων επιλέγεται και εκτυλίσσεται με τη μορφή αποδεικτικού/παραγωγικού "λόγου", με στόχο: **5$_\alpha$)** να δειχτεί ότι η κάθετη ΔΗ και ακολούθως, **5$_\beta$)** το ορθογώνιο (ΑΕ, ΔΗ) δύνανται να ευρεθούν, δηλαδή να εκφραστούν από τα δοθέντα του Προβλήματος· τότε, μόνο, αξιολογείται/ αποτιμάται ότι, **5$_\gamma$**) η ομάδα αυτών των Προτάσεων θα αποτελέσει την ικανή και επαρκή γεωμετρική βάση, ώστε, μέσω αυτής ή λόγω αυτής, να ακολουθήσει η μετάβαση σε μια αλληλουχία αριθμητικών υπολογισμών, η οποία, όπως και στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3, Ι.5 και Ι.6: **i)** εκφράζεται με τη μορφή ενός αριθμητικό-γεωμετρικού "λόγου", **ii)** ακολουθεί την εκδίπλωση των γεωμετρικών επιχειρημάτων που παρατίθενται στην "*Άπόδειξιν*" και, **iii)** οδηγεί στο τελικό αποτέλεσμα, δηλαδή στην επίλυση του Προβλήματος. Συγκεκριμένα,

α) για την εύρεση της πλευράς ΔΗ, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα: **α$_1$)** "το ύψος ΒΖ του τριγώνου ΑΒΓ δύναται να εκφραστεί από τα δοθέντα του Προβλήματος", επιχείρημα που αιτιολογείται με την υποδηλωμένη διαδικασία που έχει αναπτυχθεί στο Πρόβλημα Ι.5, **α$_2$)** "ΒΑ:ΑΔ::ΒΖ:ΔΗ", επιχείρημα που αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης VI.4 των *Στοιχείων*, οπότε, και εφόσον οι πλευρές ΒΑ, ΑΔ εκφράζονται στην "*Έκθεσιν*" από τα δοθέντα του Προβλήματος, η πλευρά ΔΗ δύναται να ευρεθεί. **β)** για την εύρεση του ορθογωνίου (ΑΕ, ΔΗ) ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα: **β$_1$)** "ΑΒΓ:ΑΔΕ::5:3", επιχείρημα που αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης V.19 των *Στοιχείων*, οπότε, και εφόσον το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ δύναται να ευρεθεί με τη διαδικασία που υποδηλώνεται και αιτιολογείται από το Πρόβλημα Ι.5, το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ δύναται να εκφραστεί από τα δοθέντα του Προβλήματος, **β$_2$)** "$(\text{ΑΕ}, \text{ΔΗ}) = 2\text{ΑΔΕ}$", επιχείρημα που αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης Ι.41 των *Στοιχείων*, οπότε, και εφόσον το τρίγωνο ΑΔΕ δύναται να εκφραστεί από τα δοθέντα του Προβλήματος, το ορθογώνιο (ΑΕ, ΔΗ) δύναται να ευρεθεί, και αυτό, από τα δοθέντα του Προβλήματος, και εφόσον η πλευρά του ΔΗ δύναται να ευρεθεί, και η πλευρά ΑΕ δύναται, τελικά, να ευρεθεί. Τότε μόνο, **γ)** "κατασκευάζεται", όπως και στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3, Ι.5 και Ι.6, η απαραίτητη γεωμετρική βάση για τη μετάβαση σε μια σειρά αριθμητικών υπολογισμών οι οποίοι θα επιλύσουν το Πρόβλημα.

Τα χαρακτηριστικά της γραμματικής και συντακτικής δομής των γεωμετρικών Προτάσεων, που συναντώνται στην "*Ἀπόδειξιν*" του παραπάνω Προβλήματος, καθώς και τα χαρακτηριστικά του αριθμητικό-γεωμετρικού "λόγου", δεν διαφέρουν από εκείνα που έχουν καταγραφεί, λεπτομερώς, κατά την ανάπτυξη των Προβλημάτων Ι.2, Ι.3, Ι.5 και Ι.6. Πράγματι:

Ο γεωμετρικός "λόγος

Αναφέρει γεωμετρικά αντικείμενα. Συγκεκριμένα, καταγράφονται: τα σημεία Β, Δ, οι πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΒΖ και ΔΗ και τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ.

Γλωσσικά χαρακτηριστικά

Αν εξετάσουμε τη γραμματική και συντακτική δομή των γεωμετρικών Προτάσεων, που συναντώνται στην "*Ἀπόδειξιν*", μπορούμε να καταγράψουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά: **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** τα επιχειρήματα εισάγονται χωρίς τη χρήση συμπερασματικών συνδέσμων, **γ)** η αιτιολογία των επιχειρημάτων παραλείπεται[126], **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο επιχείρημα της Πρότασης (A_2) είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἐστιν*"). Ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο επιχείρημα της Πρότασης (A_3) είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής, των ρημάτων "*ἔχω*" ("*ἔχει*") και ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο επιχείρημα της Πρότασης (A_4) είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἐστί*").

Ο αριθμο-γεωμετρικός "λόγος"

Χαρακτηρίζεται από γεωμετρικά αντικείμενα, αριθμούς και υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις. Συγκεκριμένα: **α)** τα γεωμετρικά αντικείμενα, που καταγράφονται, είναι οι πλευρές ΒΖ, ΔΗ και ΑΕ, τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ και το ορθογώνιο (ΑΕ, ΔΗ), **β)** οι αριθμοί, που καταγράφονται, είναι είτε οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων του Προβλήματος είτε τα αριθμητικά αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την ανάπτυξη αυτού.

[126] Ο αιτιολογικός σύνδεσμος "*ἐπεί*", με τον οποίο εισάγονται οι Προτάσεις (A_2) και (A_3), δεν αιτιολογεί τα επιχειρήματά τους, αλλά τον αριθμο-γεωμετρικό "λόγο", ο οποίος θα ακολουθήσει.

Γλωσσικά χαρακτηριστικά

Αν εξετάσουμε τη γραμματική συντακτική δομή του αριθμο-γεωμετρικού "λόγου", μπορούμε να καταγράψουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά: **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** το επιχείρημα (M_1) εισάγεται χωρίς τη χρήση συμπερασματικού συνδέσμου, ενώ τα επιχειρήματα (M_2), (M_3) και (M_4) εισάγονται με τη χρήση του συμπερασματικού συνδέσμου "*ἄρα*", **γ)** για την αιτιολογία του επιχειρήματος (M_1) χρησιμοποιείται ο ρηματικός τύπος "*ὡς ἐμάθομεν*" και για την αιτιολογία των επιχειρημάτων (M_2), (M_3) και (M_4) χρησιμοποιούνται αριθμητικές τιμές των δοθέντων και οι αριθμητικοί υπολογισμοί που έχουν προηγηθεί.

Η γραμματική δομή των επιχειρημάτων του αριθμο-γεωμετρικού "λόγου", όπως και στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3. Ι.5 και Ι.6, ακολουθεί μια συγκεκριμένη μορφή, η οποία περιγράφεται ως εξής: **i)** τα προαναφερθέντα γεωμετρικά αντικείμενα, που καταγράφονται, βρίσκονται στη θέση του υποκειμένου της πρότασης, **ii)** ο ρηματικός τύπος δίνεται με γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἔστιν*", "*ἔστι*") ή γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου μέλλοντα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἔσται*"), **iii)** οι αριθμοί ενέχουν τη θέση τού κατηγορήματος των γεωμετρικών αντικειμένων και συνοδεύονται, πάντα, από το ουσιαστικό "*μονάς*" και, **iv)** οι υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις, από τις οποίες προκύπτουν τα αριθμητικά αποτελέσματα, θα καταγραφούν στη 2η ενότητα των Προβλημάτων.

Β. Δεύτερη κειμενική ενότητα

Περιλαμβάνει, όπως και στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3. Ι.5 και Ι.6, αριθμητικές πράξεις που εκτελούνται, ώστε να προκύψουν τα αριθμητικά αποτελέσματα που καταγράφονται στον αριθμητικό-γεωμετρικό "λόγο".

Στιλιστικά χαρακτηριστικά

1. Αναγγελία της διαδικασίας

Εισάγεται με το "*ἔστι δὲ ἡ μέθοδος τοιαύτη*"

2. Επιλογές εκκίνησης και εκτύλιξης

2.1 Κατά την εκτύλιξη της υπολογιστικής διαδικασίας, επαναλαμβάνονται κάποιες αριθμητικές τιμές. Συγκεκριμένα στον "*Διορισμόν*" του Προβλήματος, δίνεται ο λόγος, στον οποίο ζητείται να διαιρεθεί το δοθέν τρίγωνο: "*ἔστω δὴ ὁ*

λόγος, ὃν ἔχει τὰ ε πρὸς τὰ β', ο οποίος επαναλαμβάνεται[127] ως εξής: "*καὶ ἐπεὶ λόγος, ἐν ᾧ διαιρεῖται, ὁ τῶν γ πρὸς τὰ β*", για να ακολουθήσει, αμέσως μετά, η εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων.

2.2 Πολλές φορές, κατά την υπολογιστική ροή ενός Προβλήματος, απαιτείται ο αριθμητικός υπολογισμός ενός στοιχείου, του οποίου η βήμα προς βήμα διαδικασία έχει αναπτυχθεί σε προηγούμενο Πρόβλημα. Τότε, η διαδικασία εύρεσης παραλείπεται και δίνεται, μόνο, το αριθμητικό αποτέλεσμα αυτής, το οποίο χρησιμοποιείται, άμεσα ή σε κάποιο από τα επόμενα βήματα. Μπορούμε να διακρίνουμε:

2.2.1 Εύρεση ύψους οξυγωνίου τριγώνου με δοθείσες πλευρές.

Κατά την εκκίνηση της υπολογιστικής διαδικασίας, απαιτείται η εύρεση του ύψους ΒΖ του δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ. Η βήμα προς βήμα εύρεση του ύψους ΑΔ οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχει αναπτυχθεί στο Πρόβλημα Ι.5, οπότε η διαδικασία υποδηλώνεται και χρησιμοποιείται, μόνο, το αριθμητικό αποτέλεσμα που προκύπτει.

2.2.2 Εύρεση εμβαδού οξυγωνίου τριγώνου με δοθείσες πλευρές.

Κατά την εκτύλιξη της υπολογιστικής διαδικασίας, απαιτείται η εύρεση του εμβαδού του δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ. Η βήμα προς βήμα εύρεση της διαδικασίας υπολογισμού του έχει αναπτυχθεί στο Πρόβλημα Ι.5, οπότε η διαδικασία, πάλι, υποδηλώνεται και χρησιμοποιείται, μόνο, το αριθμητικό αποτέλεσμα που προκύπτει.

3. Αλληλουχία των πράξεων που εκτελούνται ή περιγράφονται κατά την εκτύλιξη της υπολογιστικής διαδικασίας

3.1 Οι διαδικασίες υπολογισμού εφαρμόζονται σε συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές και η πλειονότητα των πράξεων πραγματοποιείται.

3.2 Η υπολογιστική ροή εκτυλίσσεται, ώστε να ακολουθεί το "μεικτό" σύστημα που έχει περιγραφεί κατά τη ανάπτυξη των υπολογιστικών διαδικασιών των Προβλημάτων Ι.2, Ι.3, Ι.5 και Ι.6.

---

[127] Αξίζει να σημειωθεί ότι σε άλλα Προβλήματα, όπως το ΙΙΙ.2 ή το ΙΙΙ.20, ο λόγος διαίρεσης δίνεται περιφραστικά στον "*Διορισμόν*", όπως για παράδειγμα στο Πρόβλημα ΙΙΙ.2 : "*καὶ δέον ἔστω αὐτὸ διελεῖν, ὥστε τὸ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον τριπλάσιον εἶναι τοῦ λοιποῦ τραπεζίου*" [312. 3-4], οπότε η αριθμητική εκφορά, πριν από την εκτέλεση των πράξεων, κρίνεται αναγκαία.

4. Διατύπωση των πράξεων

Κατά τη δήλωση των πράξεων, καταγράφεται ο παρακάτω ρηματικός τύπος:

Α΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει ρήματα β΄ προσώπου, προστακτικής ενικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής ("*σύνθες*", "*πολλαπλασίασον*", "*μέρισον*", "*έπίζευξον*"), με μοναδικές εξαιρέσεις: **α)** τη μετοχή, χρόνου αορίστου, φωνής μέσης, του ρήματος "*γίγνομαι*" ("*γενόμενα*") και, **β)** τη μετοχή, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*άπολαμβάνω*" ("*άπολαβὼν*").

5. Δήλωση των πράξεων

5.1 Στην πρόσθεση, χρησιμοποιείται ρήμα: "*συντίθημι*" ("*σύνθες*")

5.2 Στον πολλαπλασιασμό, χρησιμοποιείται το ρήμα: "*πολλαπλασιάζω*" ("*πολλαπλασίασον*").

5.2.1 Στον διπλασιασμό, χρησιμοποιείται η ρηματική έκφραση: "*ποιῶ δὶς*", με το ρήμα να υποδηλώνεται ("*ταῦτα δὶς*").

5.4 Για τη γραφή των κλασμάτων, χρησιμοποιείται ο γενικός τρόπος, οικείος από τα σύγχρονα μαθηματικά, με τον αριθμητή να γράφεται πρώτος και να ακολουθεί ο παρονομαστής ("*ι καὶ κβ ξε΄*", "*θ∠΄ δ΄*").

5.5 Για τη γραφή των λόγων χρησιμοποιείται το ουσιαστικό "*λόγος*", με το ρήμα να υποδηλώνεται (για παράδειγμα "*λόγος ἐστὶν*" ή "*λόγος ἔχειν*"), για να ακολουθήσουν με την εξής σειρά: ο ηγούμενος, η πρόθεση "*πρὸς*" και τέλος ο επόμενος ("*ὁ τῶν γ πρὸς τὰ β*").

6. Αναγγελία αποτελέσματος

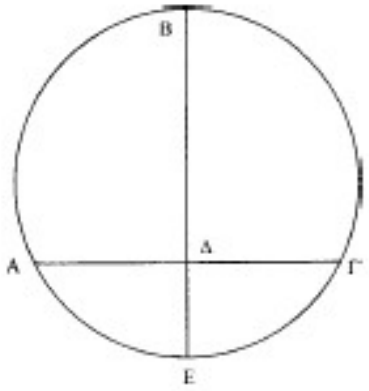
6.1 Στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιείται το ρήμα: "*γίγνομαι*" ("*γίγνεται*").

6.2 Στη διαίρεση χρησιμοποιείται το ρήμα: "*γίγνομαι*" ("*γίγνεται*", "*γίνονται*").

Η διαδικασία/μέθοδος του "*ἐπιλογισμοῦ τῶν γεωμετρικῶν ἀποδείξεων*" ανιχνεύεται και σε κάποια άλλα Προβλήματα των *Μετρικών*. Μπορούμε να σημειώσουμε τα Προβλήματα Ι.33, Ι.36, Ι.37 και ΙΙ.17. Η διαδικασία αναπαράγεται, ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, όπως και στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3, Ι.5, Ι.6 και ΙΙΙ.2, με μία διαφορά που αφορά στον τρόπο παρουσίασης του Προβλήματος: η 2η κειμενική ενότητα παραλείπεται.

Θα ακολουθήσει η παρουσίαση του Προβλήματος Ι.33

Πρόβλημα Ι. 33



Διαίρεση σε μέρη	Γεωμετρικός "λόγος"	Αριθμο-γεωμετρικός "λόγος"	Υποδηλωμένες πράξεις
Πρότασις	Ἐὰν δὲ δέῃ τμῆμα μετρῆσαι μεῖζον ἡμικυκλίου, μετρήσομεν οὕτως.		
Ἔκθεσις συνθήκη *αριθμητικές τιμές των δοθέντων*	ἔστω τμῆμα κύκλου τοῦ ΑΒΓ οὗ ἡ μὲν ΑΓ βάσις ἔστω μονάδων ιδ ἡ δὲ ΒΔ κάθετος μονάδων ιδ.		
Κατασκευή	(Κ) προσαναπεπληρώσθω ὁ κύκλος καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. (*Στ.* ΙΙΙ.25)		
Ἀπόδειξις	($Α_1$) ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ, (*Στ.* ΙΙ.14) Υποδηλώνεται γεωμετρική Πρόταση (*Στ.* Ι.5&26)	($Μ_1$) τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΔ μονάδων ἐστὶ μθ, ἔσται ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔΕ μονάδων μθ· καὶ ἔστιν ἡ ΒΔ μονάδων ιδ· ἡ ἄρα ΔΕ ἔσται μονάδων γ ∠′·	14×½→7 7×7→49 49:14→3 ½
	($Α_2$) Υποδηλώνεται γεωμετρικό Πρόβλημα (*Μ.* Ι.31)	($Μ_2$) ἔστιν δὲ καὶ ἡ ΑΓ μονάδων ιδ· τοῦ ἄρα ΑΕΓ τμήματος, ὅ ἐστιν ἔλασσον ἡμικυκλίου, τὸ ἐμβαδὸν ἔσται μονάδων, ὡς ἐμάθομεν, λδ η′·	[(14+3½)×½]× 3 ½ +3 ½→ 34 ⅛

	(A_3) Πρόσθεση ευθυγράμμων τμημάτων	(M_3) καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΒΔ ἐστὶ μονάδων ιδ, ἡ δὲ ΔΕ γ∠΄, ἡ ἄρα ΒΕ διάμετρος ἔσται μονάδων ιζ∠΄·	14+3 ½→ 17 ½
	(A_4) Υποδηλώνεται γεωμετρικό Πρόβλημα (*Μ.* Ι.26)	(M_4) τοῦ ἄρα κύκλου τὸ ἐμβαδὸν ὡς ἐμάθομεν ἔσται σμ∠΄η΄·	[(17 ½ ×17 ½)×11]:14 →240 ½⅛
	(A_5) Αφαίρεση δύο χωρίων	(M_5) ὧν τὸ τοῦ ΑΕΓ τμήματος ἐμβαδόν ἐστι μονάδων λδ η΄· λοιπὸν ἄρα τὸ τοῦ ΑΒΓ τμήματος ἐμβαδὸν ἔσται μονάδων σς∠΄.	240 ½⅛−34 ⅛ →206 ½

Παρατηρήσεις

I. Το Πρόβλημα συνοδεύεται από ένα εγγράμματο διάγραμμα.

II. Το Πρόβλημα περιέχει μόνο μία ενότητα.

Α. Πρώτη κειμενική ενότητα:

1. Στην "*Πρότασιν*", ζητείται να μετρηθεί, δηλαδή να βρεθεί, το εμβαδόν κυκλικού τμήματος μεγαλύτερου του ημικυκλίου.

2. Στην "*Ἔκθεσιν*", ανιχνεύονται **α)** η συνθήκη και, **β)** οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων.

3. Η διαδικασία επίλυσης του Προβλήματος αρχίζει, πάλι, να εκτυλίσσεται από την "*Κατασκευήν*". Στόχος του Ήρωνα είναι η αναγωγή εύρεσης του ζητούμενου εμβαδού στην εύρεση του εμβαδού κατάλληλου κυκλικού τμήματος, μικρότερου του ημικυκλίου[128]. Σε αυτήν τη στόχευση υπακούουν τα κατασκευαστικά βήματα που ακολουθούν:

(Κ): Συμπληρώνεται ο κύκλος και προεκτείνεται το ύψος ΒΔ.

4. Αμέσως μετά, ακολουθεί η "*Ἀπόδειξις*", στην οποία μια ομάδα γεωμετρικών Προτάσεων *επιλέγεται* και εκτυλίσσεται με τη μορφή αποδεικτικού/ παραγωγικού "λόγου", με στόχο: **4α)** να δειχτεί ότι το κυκλικό τμήμα, το οποίο είναι μικρότερο του ημικυκλίου και προκύπτει από τη συμπλήρωση του κύκλου, δύναται να ευρεθεί, δηλαδή να εκφραστεί από τα δοθέντα του Προβλήματος, **4β)** να δειχτεί ότι ο κύκλος, που προκύπτει από τη συμπλήρωση και είναι το άθροισμα

[128] Πρόκειται για το Πρόβλημα Ι. 31 [224.1-4].

των δύο κυκλικών τμημάτων, δύναται να ευρεθεί· *τότε μόνο αξιολογείται* ότι, **4γ)** η ομάδα αυτών των Προτάσεων θα αποτελέσει την ικανή και επαρκή γεωμετρική βάση, ώστε, διά μέσου αυτής ή λόγω αυτής, να ακολουθήσει η μετάβαση σε μια αλληλουχία αριθμητικών υπολογισμών η οποία, όπως και στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3, Ι.5, Ι.6 και ΙΙΙ.3: **i)** εκφράζεται με τη μορφή ενός αριθμητικό-γεωμετρικού "λόγου", **ii)** ακολουθεί την εκδίπλωση των γεωμετρικών επιχειρημάτων, που παρατίθενται στην "*Άπόδειξιν*" και, **iii)** οδηγεί στο τελικό αποτέλεσμα, δηλαδή στην επίλυση του Προβλήματος. Συγκεκριμένα,

α) η βάση ΑΓ εκφράζεται από τα δοθέντα του Προβλήματος, ενώ, για την εύρεση της καθέτου ΔΕ, ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα: **α1)** "ΑΔ = ΔΓ = ½ ΑΓ", επιχείρημα που υποδηλώνεται και αιτιολογείται με την επιλογή των Προτάσεων Ι.5&26 των *Στοιχείων*, **α2)** "τετράγωνο(ΑΔ)=ορθογώνιο(ΒΔ, ΔΕ)", επιχείρημα που υποδηλώνεται και αιτιολογείται με την επιλογή της Πρότασης ΙΙ.14 των *Στοιχείων* , οπότε, και εφόσον η πλευρά ΑΔ= ½ ΑΓ, άρα και το τετράγωνο αυτής δύναται να εκφραστεί από τα δοθέντα του Προβλήματος, τότε το ορθογώνιο (ΒΔ, ΔΕ) δύναται να ευρεθεί, **α3)** και, εφόσον η πλευρά ΒΔ δύναται να εκφραστεί από τα δοθέντα του Προβλήματος, η κάθετος ΔΕ δύναται να ευρεθεί, **α4)** τελικά, για την εύρεση του κυκλικού τμήματος ΑΕΓ, ακολουθείται το "ΑΕΓ= ½ (ΑΓ+ΔΕ)×ΔΕ + $\frac{1}{14}$ [½τετράγωνο(ΔΕ)]", επιχείρημα, που υποδηλώνεται και αιτιολογείται από την επιλογή του Προβλήματος Ι.31 των *Μετρικών*. **β) β1)** "ΒΕ = ΒΔ + ΔΕ", επιχείρημα που αιτιολογείται από την πρόσθεση τμημάτων, οπότε, και εφόσον οι πλευρές ΒΔ και ΔΕ εκφράζονται από τα δοθέντα του Προβλήματος, άρα, και η διάμετρος ΒΕ του κύκλου εκφράζεται από τα δοθέντα του Προβλήματος, **β2)** για την εύρεση του κύκλου διαμέτρου ΒΕ, ακολουθείται το: "14 κύκλοι διαμέτρου (ΒΕ) = 11 τετράγωνα (ΒΕ)", επιχείρημα που υποδηλώνεται και αιτιολογείται με την επιλογή του Προβλήματος Ι.26 των *Μετρικών* , οπότε, **γ)** "κατασκευάζεται", όπως και στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3, Ι.5, Ι.6 και ΙΙΙ.3, η απαραίτητη γεωμετρική βάση, για τη μετάβαση σε μια σειρά αριθμητικών υπολογισμών που θα επιλύσουν το Πρόβλημα.

Τα χαρακτηριστικά της γραμματικής και συντακτικής δομής των γεωμετρικών Προτάσεων, που συναντώνται στην "*Άπόδειξιν*" του παραπάνω Προβλήματος, καθώς και τα χαρακτηριστικά του αριθμητικό-γεωμετρικού "λόγου", δεν διαφέρουν, σημαντικά, από εκείνα που έχουν καταγραφεί, λεπτομερώς, κατά την ανάπτυξη των Προβλημάτων Ι.2, Ι.3, Ι.5, Ι.6 και ΙΙΙ.2. Πράγματι:

Ο γεωμετρικός "λόγος"

Αναφέρει γεωμετρικά αντικείμενα. Συγκεκριμένα, καταγράφονται: το τετράγωνο της πλευράς ΑΔ και το ορθογώνιο ΒΔΕ

Η πλειονότητα των γεωμετρικών Προτάσεων και Προβλημάτων, που συναντώνται στην "*Ἀπόδειξιν*", υποδηλώνονται με μόνη καταγεγραμμένη την Πρόταση (A_1), από την οποία μπορούμε να παρατηρήσουμε: **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** το επιχείρημα εισάγεται χωρίς τη χρήση συμπερασματικού συνδέσμου, **γ)** η αιτιολογία του παραλείπεται[129] και, **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἐστί*").

Ο αριθμο-γεωμετρικός "λόγος"

Αναφέρει γεωμετρικά αντικείμενα, αριθμούς και υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις. Συγκεκριμένα: **α)** τα γεωμετρικά αντικείμενα, που καταγράφονται, είναι οι πλευρές ΒΔ, ΔΕ, ΑΓ και ΒΕ, το τετράγωνο της πλευράς ΑΔ, το ορθογώνιο ΒΔΕ, το, μικρότερο του ημικυκλίου, κυκλικό τμήμα ΑΕΓ και ο κύκλος διαμέτρου ΒΕ, **β)** οι αριθμοί, που καταγράφονται, είναι είτε οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων του Προβλήματος είτε αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία προκύπτουν από την ανάπτυξη αυτού ή άλλων γνωστών Προβλημάτων.

Γλωσσικά χαρακτηριστικά

Αν εξετάσουμε τη γραμματική-συντακτική δομή του αριθμητικό-γεωμετρικού "λόγου", μπορούμε να καταγράψουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά: **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** τα επιχειρήματα (M_1), (M_2), (M_3) και (M_4) εισάγονται με τη χρήση του συμπερασματικού συνδέσμου "*ἄρα*" και, **γ)** για την αιτιολογία των επιχειρημάτων (M_4) χρησιμοποιείται ο ρηματικός τύπος "*ὡς ἐμάθομεν*", ενώ, για την αιτιολογία των επιχειρημάτων (M_1), (M_2) και (M_3) χρησιμοποιούνται αριθμητικές τιμές των δοθέντων και αριθμητικοί υπολογισμοί που έχουν προηγηθεί.

Η γραμματική δομή των επιχειρημάτων του αριθμο-γεωμετρικού "λόγου", όπως και στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3. Ι.5 και Ι.6, ακολουθεί μια συγκεκριμένη μορφή, η οποία περιγράφεται ως εξής: **i)** τα προαναφερθέντα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται, βρίσκονται στη θέση του υποκειμένου της πρότασης, **ii)** ο ρηματικός τύπος δίνεται με γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἔστιν*", "*ἔστι*") ή γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου μέλλοντα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἔσται*"), **iii)** οι αριθμοί ενέχουν τη θέση του κατηγορήματος των γεωμετρικών αντικειμένων και συνοδεύονται πάντα από το ουσιαστικό "*μονάς*",

[129] Ο αιτιολογικός σύνδεσμος "*ἐπεί*", με τον οποίο εισάγεται η Πρόταση (A_1), δεν αιτιολογεί το επιχείρημα, αλλά τον αριθμητικό-γεωμετρικό "λόγο", που θα ακολουθήσει.

και, **iv)** τα συγκεκριμένα αριθμητικά αποτελέσματα προκύπτουν από τις υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις.

4.3 ΕΠΙΛΥΟΝΤΑΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ "*ΚΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΙΝ*"

4.3.1 Εισαγωγή

Η γεωμετρική ανάλυση είναι ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα θέματα έρευνας στην ιστορία των αρχαίων ελληνικών Μαθηματικών. Επινοήθηκε και χρησιμοποιήθηκε ως η βασική και ουσιαστική μέθοδος για την εύρεση λύσεων σε γεωμετρικά προβλήματα. Η αποτελεσματικότητά της γίνεται αποδεκτή από μαθηματικούς της αρχαιότητας, όπως ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης, ο Απολλώνιος και ο Πάππος. Οι διασωθείσες θεωρητικές περιγραφές και τα σχόλια για τη μέθοδο της ανάλυσης, αλλά, κυρίως, το ευρέως γνωστό χωρίο από την εισαγωγή του Βιβλίου VII της *Συναγωγής* του Πάππου [Hultsch, 1876-1878], έδωσαν το έναυσμα για έναν σημαντικό αριθμό ιστοριογραφικών ερωτημάτων, τα κυριότερα των οποίων είναι τα ακόλουθα: **α)** περιέχει το κείμενο του Πάππου έναν ή περισσότερους ακριβείς ορισμούς της γεωμετρικής ανάλυσης, **β)** ή περιέχει μόνο απλές περιγραφές αυτής, **γ)** η θεωρητική περιγραφή της γεωμετρικής ανάλυσης συμφωνεί με τον τρόπο που χρησιμοποιείται στην πράξη, **δ)** ποια είναι η λογική δομή της, **ε)** ποια είναι η σημασία, για τους Έλληνες μαθηματικούς, των όρων "*δοθέν*" και "*δεδομένον*", όροι που χρησιμοποιούνται, αποκλειστικά, στο δεύτερο μέρος της γεωμετρικής ανάλυσης, **στ)** η μέθοδος της ανάλυσης χρησιμοποιείται μόνο για την επίλυση προβλημάτων ή μεταφέρεται, εξίσου καλά, και στην απόδειξη θεωρημάτων, **ζ)** ποια είναι η "*εὑρετική*" αξία της μεθόδου και πόσο σπουδαία ήταν η σημασία της για τα αρχαία ελληνικά Μαθηματικά, **η)** αν η σημασία της ήταν, πράγματι, ουσιαστική, τότε γιατί διασώθηκε σε έναν μικρό αριθμό κειμένων … και πολλές άλλες ερωτήσεις, οι οποίες θα μπορούσαν να προστεθούν στις παραπάνω … Τα υπό εξέταση θέματα, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τις ερωτήσεις που τίθενται, γειτνιάζουν τόσο με τη φιλοσοφία όσο και με την ιστορία της επιστήμης, με αποτέλεσμα, ιστορικοί και φιλόσοφοι της επιστήμης να προσπαθούν, ακόμη και σήμερα, να δώσουν πειστικές απαντήσεις. Ενδεικτικά, αναφέρουμε τους H. Hankel, H. G. Zeuthen, T. L. Heath, F. M. Conford, R. Robinson, H. Cherniss, N. Gulley, M. S. Mahoney, J. Hintikka & U. Remes, Á. Szabó, W. R. Knorr, V. Karasmanis, R. Rashed, A. Behboud, M. Otte & M. Panza, J. L. Berggren & G. Van Brummelen, R. Netz.[130]

[130] Για λεπτομερείς βιβλιογραφικές αναφορές, βλ. [Fournarakis & Christianidis, 2006].

Όμως, παρά τον μεγάλο αριθμό ερωτημάτων, οι επικρατέστερες ερμηνείες σχετικά με τη γεωμετρική ανάλυση, οι οποίες στηρίζονται, κατά πολύ, στο προαναφερθέν κείμενο του Πάππου, κατηγοριοποιούνται σε δύο βασικές ομάδες. Αν και οποιαδήποτε λεπτομερής ανάλυση αυτών δεν εμπίπτει στους στόχους αυτής της διατριβής, κρίνεται σκόπιμο να επισημανθούν και να αποτιμηθούν τα κύρια χαρακτηριστικά τους, ώστε η μέθοδος που επιλέγουμε και θα ακολουθήσουμε, συγκρινόμενη μαζί τους, να αναδειχτεί ως η πλέον κατάλληλη, για τη μελέτη και την ερμηνεία της διαδικασίας με την οποία επιλύεται η πλειονότητα των Προβλημάτων που περιέχονται στα *Μετρικά*.

Επιγραμματικά[131], λοιπόν, μπορούμε να σημειώσουμε ότι η πρώτη ερμηνεία, η πλέον κλασική, "διαβάζει" την ανάλυση σαν μια παραγωγική διαδικασία που εκτυλίσσεται ως εξής: με σημείο εκκίνησης εκείνο που ζητείται να ευρεθεί, εκτυλίσσεται, διαδοχικά, μια ακολουθία συνεπειών του, η οποία, μετά από έναν πεπερασμένο αριθμό βημάτων, καταλήγει σε μια πρόταση που είναι αναντίρρητα αληθής. Σκοπός τής μεθόδου είναι να δοθεί στον ερευνητή η δυνατότητα να συμπεράνει, ακολουθώντας διαδοχικά την αντίστροφη παραγωγική διαδικασία, ότι, από τη στιγμή που η τελευταία πρόταση είναι αναμφισβήτητα αληθής, εκείνο που, αρχικά, ζητείται έχει βρεθεί. Όμως, υπάρχει και η πιθανότητα λάθους· συμβαίνει, όταν για δύο διαδοχικές προτάσεις Α και Β της ακολουθίας έχουμε τη Β αναγκαστική συνέπεια τής Α, αλλά όχι την Α αναγκαστική συνέπεια τής Β. Άρα, για να είναι αληθής η αντίστροφη παραγωγική διαδικασία, είναι απαραίτητο κάθε βήμα στην αλυσίδα των συμπερασμών να είναι ικανή και αναγκαία συνέπεια του προηγουμένου του. Η ερμηνεία αυτή υποστηρίχθηκε, μεταξύ άλλων, από τους Hankel, Zeuthen, Heath, Robinson, Cherniss και Mahoney. Η δεύτερη ερμηνεία, η οποία εισάγεται από τον Cornford, αναγνωρίζει την ανάλυση σαν εκείνη την ενορατική διαδικασία μέσω της οποίας αναζητούνται προαπαιτούμενα και προϋποθέσεις ("προς τα πάνω κίνηση ενόρασης"). Αυτή η ερμηνεία υποστηρίζεται, εν μέρει, και από τους Hintikka και Remes, οι οποίοι, όμως, παραδέχονται ότι η ερμηνεία της ανάλυσης ως ενορατικής "προς τα πάνω" κίνησης δεν ολοκληρώνει τη διαδικασία, η οποία μπορεί και πρέπει να προχωρήσει και "προς τα κάτω", ώστε να αποκτήσει, με αυτόν τον τρόπο, έναν επιβεβαιωτικό χαρακτήρα.

Μια διαφορετική ανάγνωση του επίμαχου χωρίου του Πάππου επιχειρείται από τον W. R. Knorr, ο οποίος θεωρεί ότι ένα μέρος της θεωρητικής περιγραφής τής γεωμετρικής ανάλυσης που παρέχεται από τον Πάππο, προέρχεται από, χρονικά, προγενέστερες πηγές, ενώ ένα άλλο μέρος προέρχεται από τον ίδιο τον Πάππο· όμως, η θεωρητική περιγραφή του, θεωρούμενη ως όλον, επηρεάζεται, κατά πολύ, από τις φιλοσοφικές του δεσμεύσεις, με αποτέλεσμα να περιέχει όχι μόνο

[131] Για μια εκτενή παρουσίαση των ερμηνειών που προτάθηκαν για τη γεωμετρική ανάλυση, καθώς και για λεπτομερείς βιβλιογραφικές αναφορές, βλ. [Fournarakis and Christianidis, 2006, σ. 47-48].

αντικρουόμενα μεταξύ τους στοιχεία, αλλά και στοιχεία τα οποία δεν είναι συμβατά με την πρακτική της. Επομένως, ο Knorr προτείνει, αντί της προσπάθειας κατανόησης της λογικής δομής και κατεύθυνσης της γεωμετρικής ανάλυσης, την εστίαση στη μαθηματική πρακτική της. Την ίδια άποψη μοιράζονται και οι Berggren και Van Brummelen, οι οποίοι, επιπλέον, διευκρινίζουν ότι τόσο η αναζήτηση προκείμενων/προϋποθέσεων όσο και η αναζήτηση συνεπειών θεωρήθηκαν από τους αρχαίους συγγραφείς ως δραστηριότητες, που συμπεριλαμβάνονται κάτω από την επικεφαλίδα της "ανάλυσης".

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη τα στοιχεία που αναδύονται από την προηγούμενη παρουσίαση και συζήτηση, οι Γ. Χριστιανίδης και Φ. Φουρναράκης προτείνουν μια νέα ερμηνεία της γεωμετρικής ανάλυσης, η οποία περιέχει δύο μέρη: **α)** το "Υποθετικό μέρος", το οποίο είναι μια πορεία αναζήτησης προκείμενων/προϋποθέσεων (αναγωγή) και, **β)** το "Βεβαιωτικό μέρος", το οποίο είναι μια πορεία παραγωγής συμπερασμών. Το "Υποθετικό μέρος", η "προς τα πάνω" κίνηση, αρχίζει από εκείνο που αναζητείται, ως να ήταν αποδεδειγμένο, και στοχεύει να φτάσει σε κάτι του οποίου η αλήθεια επιβεβαιώνεται, ανεξάρτητα από εκείνο που αναζητείται. Αν ο στόχος αυτής της υποθετικής πορείας δεν επιτευχθεί, τότε ο γεωμέτρης-ερευνητής έχει αποτύχει στην ανάλυσή του και πρέπει είτε να την τροποποιήσει ή να ακολουθήσει μια εντελώς διαφορετική πορεία. Με άλλα λόγια, ο γεωμέτρης-ερευνητής, μέσω του "Υποθετικού μέρους", στοχεύει να φθάσει σε κάτι από το οποίο υποθέτει ότι εκείνο που αναζητείται μπορεί να παραχθεί. Τα βήματα που ακολουθεί είναι υποθετικά, αλλά, ταυτόχρονα, και νοητικά άλματα, τα οποία συνδυάζουν νοητική ικανότητα, γνώση, εμπειρία και διαίσθηση και στοχεύουν στην ανακάλυψη της δομής του προβλήματος. Το "Βεβαιωτικό μέρος", η "προς τα κάτω" κίνηση, αποτελείται από συμπερασμούς και στοχεύει να διασφαλίσει στον γεωμέτρη-ερευνητή ότι οι προτάσεις που περιέχονται στο "Υποθετικό μέρος", αν αντιστραφούν, αποτελούν μια παραγωγική διαδικασία, η οποία μπορεί να επιλύσει το πρόβλημα. Οι συμπερασμοί του Βεβαιωτικού μέρους εκτυλίσσονται στη γλώσσα των *Δεδομένων*, με την ορολογία "*δοθέν*"-"*δεδομένον*" να αποτελεί αναπόσπαστο τμήμα αυτού. Τα δύο μέρη της ανάλυσης "Υποθετικό" και "Βεβαιωτικό" λαμβάνουν χώρα στο ανώτερο επίπεδο του "*νοητοῦ*", στη "*νόηση*" του γεωμέτρη-ερευνητή. Μετά την επιτυχή ολοκλήρωση της ανάλυσης ακολουθεί η σύνθεση, στην οποία παρουσιάζονται, λεπτομερώς και σε πλήρη έκταση, τα αποτελέσματα που έχουν, ήδη, εξαχθεί. Η σύνθεση λαμβάνει χώρα στο δεύτερο επίπεδο "*νοητοῦ*", στη "*διάνοια*" του γεωμέτρη-ερευνητή [Fournarakis and Christianidis, 2006, σ. 47-48]. Με τον διαχωρισμό της αναλυτικής διαδικασίας στα δύο παραπάνω μέρη καθίσταται σαφής και κατανοητός ο τρόπος λειτουργίας αυτής στην πράξη, όπως αποδεικνύεται από τη λεπτομερέστατη παρουσίαση της Πρότασης 105 του 7ου Βιβλίου της *Συναγωγής* του Πάππου [Fournarakis & Christianidis, 2006, σ. 49-54].

4.3.2 Ενδείξεις για τη χρήση της γεωμετρικής ανάλυσης στα Μετρικά

Ας στραφούμε, τώρα, σε εκείνα τα Προβλήματα των *Μετρικών* που επιλύονται "*κατὰ ἀνάλυσιν*". Η καταρχήν εμφανής και σαφής διάκριση σε "Υποθετικό – Βεβαιωτικό μέρος", η οποία παρατηρείται κατά τη διαδικασία επίλυσής τους, αποτελεί ένα ικανό κριτήριο επιλογής τής παραπάνω ερμηνείας για τη μελέτη τους. Το πλέον, όμως, σημαντικό στοιχείο που ενισχύει, καθοριστικά, την επιλογή της παραπάνω ερμηνείας, αφορά στον ρόλο που διαδραματίζει η ορολογία "*δοθέν*" για την πρόσληψη και κατανόηση της αναλυτικής διαδικασίας, όχι μόνο στα συγκεκριμένα Προβλήματα των Μετρικών, αλλά, εν γένει, στο μετρολογικό σύνταγμα. Πράγματι, η ορολογία "*δοθέν*"-"*δεδομένον*", όπως έχουμε, ήδη, αναφέρει, αποτελεί το κύριο και βασικό συστατικό του "Βεβαιωτικού μέρους" της παραπάνω ερμηνείας και χρησιμοποιείται, ώστε να αποκαλύψει/γνωστοποιήσει τη νοητική διαδικασία του γεωμέτρη-ερευνητή, με την οποία οι υποθέσεις μετατρέπονται σε επιβεβαιώσεις.

Παρόλο που η λεπτομερής εξέταση του νοήματος των όρων "*δοθέν*"-"*δεδομένον*"[132] δεν εντάσσεται στους στόχους αυτής της διατριβής, θεωρείται αναγκαίο να επισημανθούν τα εξής σημεία: **α)** και οι δύο όροι προέρχονται από το ρήμα "*δίδωμι* ", συγκεκριμένα, ο όρος "*δοθέν*" είναι μετοχή αορίστου, ενώ ο όρος "*δεδομένον* " είναι μετοχή παρακειμένου, **β)** ο όρος/κατηγόρημα "*δοθέν*" εκφράζει την προσωρινή, και χωρίς διάρκεια, είσοδο του αντικειμένου σε μια νέα κατάσταση, ενώ ο όρος "*δεδομένον*" οδηγεί το αντικείμενο στην παρούσα του κατάσταση, αποδίδοντας μεγαλύτερη σημασία στην παρελθοντική πράξη η οποία συνεχίζει, όμως, να επηρεάζει το παρόν, **γ)** η συχνή εμφάνιση της ορολογίας "*δεδομένον*" περιορίζεται στα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, ενώ στα υπόλοιπα έργα της ελληνικής μαθηματικής γραμματείας εμφανίζεται ελάχιστα ή καθόλου[133], **δ)** στα Προβλήματα των *Μετρικών* έχουμε 339 εμφανίσεις του όρου "*δοθέν*", καμία εμφάνιση του όρου "*δεδομένον*" και δύο εμφανίσεις της μετοχής ενεστώτα του ρήματος "*δίδομαι*" ("*διδόμενον*")[134].

---

[132] Για την πλήρη διασαφήνιση του νοήματος και της λειτουργίας των όρων "*δοθέν* "-"*δεδομένον*", καθώς και για μια ενδελεχή εξέταση τής μεταξύ τους γλωσσικής, φιλοσοφικής και μαθηματικής διάκρισης, βλ. [Fournarakis & Christianidis, 2006, σ. 35-45].

[133] Για τον ακριβή αριθμό των εμφανίσεων των όρων "*δοθέν* "-"*δεδομένον*", βλ. [Acerbi, 2011b, σ. 127].

[134] "*τὸ διδόμενον σημεῖον*" [336.1], "*τὰς διδομένας τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ μονάδας*" [292.10].

Η σχεδόν αποκλειστική εμφάνιση του όρου "*δοθέν*" στα Προβλήματα των *Μετρικών* καθιστά αναγκαία και χρήσιμη την περαιτέρω διερεύνηση[135] και επισήμανση εκείνων των ιδιοτήτων του όρου οι οποίες επεκτείνονται και επιτελούν καθοριστικό ρόλο στην επίλυση μετρολογικών Προβλημάτων. Συγκεκριμένα:

1. Η λειτουργία του κατηγορήματος "*δοθέν*" είναι διττή: ένα αντικείμενο μπορεί να δίνεται **i)** όταν ορίζεται/καθορίζεται από την υπόθεσή του ή **ii)** όταν μπορεί να αποκτηθεί από τα ήδη ορισμένα/καθορισμένα στοιχεία, μέσω γεωμετρικών κατασκευών ή θεωρημάτων. Στη δεύτερη περίπτωση λέμε ότι το αντικείμενο είναι αποδεικτικά "*δοθέν*".

2. Υπάρχουν διάφορα είδη "*δοθέντων*": **i)** "*δοθέν*" σε μέγεθος, **ii)** "*δοθέν*" σε θέση και **iii)** "*δοθέν*" σε είδος, ανάλογα από το γεωμετρικό αντικείμενο στο οποίο εφαρμόζεται το κατηγόρημα "*δοθέν*", και από την οπτική γωνία από την οποία θεωρείται το παραπάνω γεωμετρικό αντικείμενο. Για την καλύτερη κατανόηση του τρόπου με τον οποίο τα παραπάνω είδη "*δοθέντων*" λειτουργούν στην επίλυση μετρολογικών προβλημάτων, κρίνεται απαραίτητη η καταρχήν αναγνώριση του θεωρητικού υπόβαθρου στο οποίο τοποθετούνται, ώστε να καταστεί δυνατή η αναγνώριση των ιδιοτήτων, τις οποίες αποκτούν όταν εφαρμόζονται και λειτουργούν στο μετρολογικό σύνταγμα.

A. Η θεωρητική βάση των "*δοθέντων*" ειδών ανιχνεύεται στους Ορισμούς α′-δ′ & θ′ των *Δεδομένων*.

Ορισμός α′ : Δεδομένα τῷ μεγέθει λέγεται χωρία τε καὶ γραμμαὶ καὶ γωνίαι, οἷς δυνάμεθα ἴσα πορίσασθαι.
Ορισμός β′: Λόγος δεδόσθαι λέγεται ᾧ δυνάμεθα τὸν αὐτὸν πορίσασθαι.
Ορισμός γ′: Εὐθύγραμμα σχήματα τῷ εἴδει δεδόσθαι λέγεται, ὧν αἵ τε γωνίαι δεδομέναι εἰσὶ κατὰ μίαν καὶ οἱ λόγοι τῶν πλευρῶν πρὸς ἀλλήλας δεδομένοι.
Ορισμός δ′: Τῇ θέσει δεδόσθαι λέγονται σημεῖά τε καὶ γραμμαὶ καὶ γωνίαι, ἃ τὸν αὐτὸν ἀεὶ τόπον ἐπέχει.
Ορισμός θ′: Μέγεθος μεγέθους δοθέντι μεῖζόν ἐστιν, ὅταν, ἀφαιρεθέντος τοῦ δοθέντος, τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἴσον.

Τότε, λαμβάνοντας υπόψη τους παραπάνω ορισμούς, είμαστε σε θέση να τονίσουμε τα παρακάτω θεμελιώδη σημεία: η γλώσσα των "*δοθέντων*"-"*δεδομένων*" είναι η τυπική "κατηγορηματική" γλώσσα κάποιων σχέσεων, οι οποίες είναι ιδιαίτερα σημαντικές τόσο στη γεωμετρία όσο και στη θεωρία των αριθμών. Πρόκειται για την "ισότητα", στην οποία αντιστοιχούν τα "*δεδομένα τῷ*

[135] Για μια αναλυτική και λεπτομερή παρουσίαση της γλώσσας και των ιδιοτήτων των "*δοθέντων*" βλ. [Acerbi, 2011b].

μεγέθει", την "ταυτότητα", στην οποία αντιστοιχεί ο "*λόγος δεδόσθαι*", την "ομοιότητα", στην οποία αντιστοιχούν τα "*τῷ εἴδει δεδόσθαι*" και την "ταύτιση μετά από τοποθέτηση", στην οποία αντιστοιχούν τα "*τῇ θέσει δεδόσθαι*". Τότε, ο μηχανισμός σχηματισμού τέτοιων κατηγορημάτων είναι απλός και επιτυγχάνεται από την αντίστοιχη σχέση· για παράδειγμα το κατηγόρημα "*δοθέν σε μέγεθος*", για μια ευθεία ΑΒ, ισοδυναμεί με τον ισχυρισμό "υπάρχει μια ευθεία που έχει κατασκευαστεί ή μπορεί να κατασκευαστεί ίση με την ευθεία ΑΒ". Ανάλογοι μηχανισμοί σχηματισμού, κατά το μάλλον πιο σύνθετοι, μπορούν να πραγματοποιηθούν και για τα υπόλοιπα κατηγορήματα.

Β. Αν στραφούμε τώρα στα *Μετρικά*, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο όρος "*δοθέν*", εκτός από τα προαναφερθέντα βασικά χαρακτηριστικά, τα οποία προέρχονται από τη θεωρητική βάση των *Δεδομένων*, εφοδιάζεται, επιπλέον, και με αριθμητικές υποδηλώσεις. Πράγματι, τα *Μετρικά* είναι ένα έργο αφιερωμένο στην εύρεση, κυρίως, υπολογιστικών διαδικασιών, για την επίλυση μετρολογικών προβλημάτων που έχουν ως αντικείμενο τις μετρήσεις και διαιρέσεις επιπέδων και στερεών σχημάτων. Κατά την "*κατὰ ἀνάλυσιν*" επίλυση Προβλημάτων, σύμφωνα με τη μέθοδο της ανάλυσης, το "Βεβαιωτικό μέρος" εκτυλίσσεται σε μια αλυσίδα "*δοθέντων*", μέσω των οποίων επικυρώνονται οι υποθέσεις που έχουν παραχθεί στο "Υποθετικό μέρος" της ανάλυσης και αίρεται ο υποθετικός χαρακτήρας τους. Οι συμπερασμοί του "Βεβαιωτικού μέρους" ακολουθούν ορισμούς και θεωρήματα των *Δεδομένων* και έχουν ως στόχο να βεβαιώσουν τη δυνατότητα επίλυσης του Προβλήματος. Δηλαδή, με την ολοκλήρωση του "Βεβαιωτικού μέρους" υποδεικνύεται και η δυνητική επίλυση του Προβλήματος. Όμως, για να προκύψει ο αριθμητικός υπολογισμός των ζητούμενων μεγεθών απαιτείται και κάποια περαιτέρω διαδικασία[136], η οποία ακολουθεί τα παρακάτω βήματα: οι αριθμητικές τιμές, που εκχωρούνται κατά την εκφώνηση στα "*δοθέντα*" γεωμετρικά στοιχεία του προβλήματος, χρησιμοποιούνται για να αναπτυχθεί μια αλληλουχία αριθμητικών πράξεων, η οποία αναπτύσσεται, κατά το μάλλον ή ήττον, παράλληλα με την ομάδα των γεωμετρικών Προτάσεων του "Βεβαιωτικού μέρους" και ακολουθεί αυτήν. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας αποκτάται και η αριθμητική τιμή των ζητούμενων γεωμετρικών μεγεθών, δηλαδή ολοκληρώνεται η αριθμητική επίλυση του Προβλήματος. Τότε, η εκχώρηση αριθμητικής τιμής στα "*δοθέντα*" γεωμετρικά στοιχεία εφοδιάζει τον όρο "*δοθέν*" με ένα επιπλέον χαρακτηριστικό, εκείνο της αριθμητικής υποδήλωσης. Με άλλα λόγια, το κατηγόρημα "*δοθέν*" για ένα γεωμετρικό αντικείμενο μπορεί να αποδώσει σε αυτό το αντικείμενο και ένα επιπλέον νόημα: του μονοσήμαντα ορισμένου και δυνάμενου να υπολογιστεί αριθμητικά· για παράδειγμα, στα μετρολογικά κείμενα, το κατηγόρημα "*δοθέν σε*

[136] Η διαδικασία αυτή ονομάζεται, από τον Ήρωνα, "*διὰ τῶν ἀριθμῶν σύνθεσις*".

μέγεθος" για μια ευθεία ΑΒ έχει ως συνέπεια τον ισχυρισμό: "η ευθεία ΑΒ είναι *k* μονάδων", όπου *k* είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός.

Όσον αφορά στην εκτύλιξη της αλληλουχίας των αριθμητικών πράξεων: όπως έχουμε, ήδη, αναφέρει, οι αριθμητικές πράξεις αναπτύσσονται παράλληλα, σε γενικές γραμμές, με την ομάδα των συμπερασμών που παράγονται στο "Βεβαιωτικό μέρος". Κρίνουμε, λοιπόν, απαραίτητο να συγκεντρώσουμε σε έναν πίνακα Ορισμούς και Θεωρήματα των *Δεδομένων*, στη βάση των οποίων προκύπτουν οι συμπερασμοί, που εκτυλίσσονται στο "Βεβαιωτικό" μέρος όλων των Προβλημάτων των *Μετρικών* που επιλύονται "*κατὰ ἀνάλυσιν*". Ο πίνακας αυτός εφοδιάζεται και με μια επιπλέον στήλη, στην οποία καταγράφονται οι πράξεις που προκύπτουν, αν τα δοθέντα μεγέθη εφοδιαστούν με αριθμητικές τιμές. Τα σύμβολα α και β επονομάζουν τις ποσότητες που έχουν εκφρασμένη αριθμητική τιμή και το βέλος χωρίζει την "είσοδο" (input) από την "έξοδο" (output) μιας πράξης[137]. Στο κείμενο, όπως θα δούμε παρακάτω, οι πράξεις αυτές εμφανίζονται με τη χρήση δύο ρημάτων.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΑΠΟ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΠΡΑΞΗ
Ορισμός α′: Δεδομένα τῷ μεγέθει λέγεται χωρία τε καὶ γραμμαὶ καὶ γωνίαι, οἷς δυνάμεθα ἴσα πορίσασθαι.	α, α = β → β
Ορισμός β′: Λόγος δεδόσθαι λέγεται ᾧ δυνάμεθα τὸν αὐτὸν πορίσασθαι.	
Πρόταση 1: Τῶν δεδομένων μεγεθῶν ὁ λόγος ὁ πρὸς ἄλληλα δέδοται.	α, β → α:β
Πρόταση 2: Ἐὰν δεδομένον μέγεθος πρὸς ἄλλο τι μέγεθος λόγον ἔχῃ δεδομένον,δέδοται κἀκεῖνο τῷ μεγέθει.	α, α:β → β
Πρόταση 3:Ἐὰν δεδομένα μεγέθη ὁποσαοῦν συντεθῇ, καὶ τὸ ἐξ αὐτῶν συγκείμενον δεδομένον ἔσται.	α, β…→ α+β+...
Πρόταση 4: Ἐὰν ἀπὸ δεδομένου μεγέθους δεδομένον μέγεθος ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν δεδομένον ἔσται.	α, β → α—β
Πρόταση 5: Ἐὰν μέγεθος πρὸς ἑαυτοῦ τι μέρος λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ πρὸς τὸ λοιπὸν λόγον ἕξει δεδομένον.	α:β → α: (α—β)
Πρόταση 6: Ἐὰν δύο μεγέθη συντεθῇ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα δεδομένον, καὶ τὸ ὅλον πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον ἕξει δεδομένον.	α:β → (α+β):α α:β → (α+β):β
Πρόταση 7: Ἐὰν δεδομένον μέγεθος εἰς δεδομένον λόγον διαιρεθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων δεδομένον ἐστίν.	α+β, α:β → α,β
Πρόταση 8: Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἔχοντα δεδομένον καὶ πρὸς ἄλληλα λόγον ἕξει δεδομένον.	α:β, γ:β → α:γ
Πρόταση 22: Ἐὰν δύο μεγέθη πρός τι μέγεθος λόγον ἔχῃ δεδομένον, καὶ τὸ συναμφότερον πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἕξει δεδομένον.	α:γ, β:γ → (α+β): γ

[137] Ο πίνακας, που δίνει τη σύνδεση ορισμών και θεωρημάτων από τα *Δεδομένα* με πράξεις μεταξύ δοθέντων μεγεθών, παρουσιάζεται από τον F. Acerbi [Acerbi, 2011b].

Πρόταση 52: Ἐὰν ἀπὸ δεδομένης εὐθείας τῷ μεγέθει δεδομένον τῷ εἴδει εἶδος ἀναγραφῇ, δέδοται τὸ ἀναγραφὲν τῷ μεγέθει.	α → φ(α)
Πρόταση 55: Ἐὰν χωρίον τῷ εἴδει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένον ᾖ, καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τῷ μεγέθει δεδομέναι ἔσονται.	φ(α) → α
Πρόταση 57: Ἐὰν δοθὲν παρὰ δοθεῖσαν παραβληθῇ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ, δέδοται τὸ πλάτος τῆς παραβολῆς.	αβ, α → β

Όπως έχουμε, ήδη, αναφέρει, η πλειονότητα των Προβλημάτων των *Μετρικών* επιλύεται "*κατὰ ἀνάλυσιν*". Παρακάτω, θα επιχειρήσουμε μια κατηγοριοποίηση των διαφόρων περιπτώσεων, με στόχο την επισήμανση των μεταξύ τους ομοιοτήτων και διαφορών, καθώς και την ανάδειξη των ορίων και δυνατοτήτων τής μεθόδου κατά την εφαρμογή της στο μετρολογικό σύνταγμα.

Όσον αφορά στον τρόπο παρουσίασης των υπό εξέταση Προβλημάτων, θα ακολουθήσουμε, όπως και στην περίπτωση των Προβλημάτων που επιλύονται με "*ἐπιλογισμό τῶν γεωμετρικῶν ἀποδείξεων*", τη διαίρεση σε μέρη, με βάση το σχήμα του Πρόκλου, το οποίο, βέβαια, δεν εφαρμόζεται με ακρίβεια, αφού ένα ή περισσότερα από τα έξι μέρη του ("*Πρότασις*", "*Ἔκθεσις*", "*Διορισμός*" "*Κατασκευή*", "*Ἀπόδειξις*", "*Συμπέρασμα*") μπορεί να παραλείπονται. Όμως, η πρακτική με την οποία αναπτύσσονται και τα επιλυόμενα "*κατὰ ἀνάλυσιν*" Προβλήματα συνάδει με τους κανόνες του και για αυτόν τον λόγο επιλέγεται, με κάποιες τροποποιήσεις, για την παρουσίασή τους.

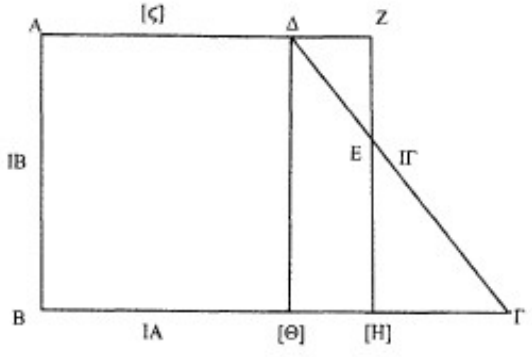
4.3.3 Παραδείγματα προβλημάτων που επιλύονται "κατὰ ἀνάλυσιν": *Πρώτη περίπτωση*

Είναι η πλέον "κλασική" κατηγορία και περιέχει τα Προβλήματα των *Μετρικών* στα οποία παρατηρούνται τα παρακάτω: **α)** η μοναδική εμφάνιση αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" παρατηρείται κατά την "*Ἔκθεσιν*" του Προβλήματος, όταν εκχωρούνται οι αριθμητικές τιμές στα δοθέντα αυτού, **β)** ακολουθεί ένας αμιγής γεωμετρικός "λόγος", που εκτυλίσσεται σύμφωνα με την προταθείσα ερμηνεία της ανάλυσης, δηλαδή διακρίνεται με σαφήνεια ο διαχωρισμός σε "Υποθετικό-Βεβαιωτικό μέρος", καθώς και η δυνητική επίλυση του Προβλήματος στο τέλος του "Βεβαιωτικού μέρους", **γ)** η επίλυση του Προβλήματος ολοκληρώνεται "*διὰ τῆς τῶν ἀριθμῶν συνθέσεως*". Πρόκειται για την υπολογιστική διαδικασία, η οποία περιέχει μόνο αριθμητικές πράξεις, ακολουθεί βήμα προς βήμα το "Βεβαιωτικό μέρος" της ανάλυσης και επιλύει, αριθμητικά, το Πρόβλημα.

Αμέσως μετά θα παρουσιάσουμε το Πρόβλημα Ι.10 των *Μετρικών*, στο οποίο πραγματοποιείται η μέτρηση του εμβαδού ορθογωνίου τραπεζίου.

Σχετικά με τον τρόπο παρουσίασης τού υπό εξέταση Προβλήματος: **α)** δίνεται το διάγραμμα που το συνοδεύει, **β)** ακολουθεί η διαίρεση του Προβλήματος σε μέρη με βάση το σχήμα του Πρόκλου. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε ότι η "*Κατασκευή*" αποτελεί συστατικό στοιχείο του "Υποθετικού μέρους" της ανάλυσης και ενσωματώνει ένα μέρος αυτού, ενώ στην "*Ἀπόδειξιν*" καταγράφεται τμήμα του "Υποθετικού μέρους" και ολόκληρο το "Βεβαιωτικό μέρος".

Πρόβλημα Ι.10



Διαίρεση σε μέρη	Γεωμετρικός "λόγος"	Ορολογία *Δεδομένων*	Αντίστοιχες πράξεις
Ἔκθεσις συνθήκη *αριθμητικές τιμές των δοθέντων*	Ἔστω τραπέζιον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓΔ ὀρθὰς ἔχον τὰς πρὸς τοῖς Α, Β γωνίας καὶ ἔστω ἡ | μὲν ΑΔ μονάδων ς ἡ δὲ ΒΓ ια ἡ δὲ ΑΒ μονάδων ιβ.		
Διορισμός	εὑρεῖν αὐτοῦ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἔτι τὴν ΓΔ.		
Υποθετικό μέρος Α΄	*Κατασκευή*		
	(K_1) τετμήσθω δίχα ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Ε (*Στ.* Ι.10)		
	(K_2) καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΖΕΗ (*Στ.* Ι.31)		
	(K_3) καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐπὶ τὸ Ζ. (*Στ.* Αἰτ. 2)		
	Ἀπόδειξις		
	($Υ_1$) ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΓ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΗΓ· (*Στ.* Ι.15&26)		
	($Υ_2$) κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ ΑΔ ΒΗ· συναμφότερος ἄρα ἡ ΑΖ ΒΗ συναμφοτέρῳ τῇ ΑΔ ΒΓ ἴση ἐστίν· (*Στ.* Κ.Ε.2)		
	($Β_1$) δοθεῖσα δέ ἐστιν συναμφότερος ἡ ΑΔ ΒΓ, ἐπεὶ καὶ ἑκατέρα αὐτῶν· (*Δ.* 3)	ΑΔ δοθείσα ΒΓ δοθείσα ∴ ΑΔ + ΒΓ δοθείσα	6 11 6+11→17

Βεβαιωτικό μέρος Α′	(B_2) δοθεῖσα ἄρα καὶ συναμφότερος ἡ ΑΖ ΒΗ, τουτέστι δύο αἱ ΒΗ· (*Δ*. Ορ.1)	∴ ΑΖ + ΒΗ δοθείσα ∴ 2ΒΗ δοθείσα	17 17
	(B_3) καὶ ἡ ΒΗ ἄρα ἐστὶ δοθεῖσα· (*Δ*. 2)	∴ ΒΗ δοθείσα	17×½→8½
	(B_4) ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ·		12
	(B_5) δοθὲν ἄρα τὸ ΑΒΖΗ παραλληλόγραμμον. (*Δ*. 52) Ὑποδηλώνεται ότι το σχήμα ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο από τη γεωμετρική Πρόταση νς′ των *Ὁρισμῶν*	∴ ΑΒΖΗ δοθέν	8½ ×12→102
Υποθετικό μέρος Β′	($Υ_3$) καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΕΗΓ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΒΗΕΔ πεντάπλευρον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΖΗ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ τραπεζίῳ ἴσον ἐστί· (*Στ*. Κ.Ε.2)		
Βεβαιωτικό μέρος Β′	(B_6) δοθὲν δὲ ἐδείχθη τὸ ΑΒΖΗ παραλληλόγραμμον· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον. (*Δ*. Ορ.1)	ΑΒΖΗ ∴ ΑΒΓΔ δοθέν	
ἡ δὲ ΓΔ εὑρεθήσεται οὕτως.			
Υποθετικό μέρος Γ′	*Κατασκευή*		
	(K_4) ἤχθω κάθετος ἡ ΔΘ. (*Στ*. Ι.12)		
Βεβαιωτικό μέρος Γ′	*Ἀπόδειξις*		
	(B_7) ἐπεὶ οὖν δοθεῖσά ἐστιν ἡ ΑΔ, δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΒΘ· (*Δ*. Ορ.1)	ΑΔ δοθείσα ∴ ΒΘ δοθείσα	6 6
	(B_8) ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ·	ΒΓ δοθείσα	11
	(B_9) καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΘ δοθεῖσά ἐστιν· (*Δ*. 4)	∴ ΓΘ δοθείσα	11−6→5
	(B_{10}) ἀλλὰ καὶ ἡ ΔΘ· ἴση γάρ ἐστι τῇ ΑΒ· (*Δ*. Ορ.1)	ΑΒ δοθείσα ∴ ΔΘ δοθείσα	12 12
	(B_{11}) καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Θ γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΓΔ. Ὑποδηλώνεται διαδοχική εφαρμογή στα *Στ*. Ι.47 των γεωμετρικών Προτάσεων: (*Δ*. 52), (*Δ*. 3), (*Δ*. Ορ.1), (*Δ*. 55).	ΔΘ δοθείσα ∴ □(ΔΘ) δοθέν ΓΘ δοθείσα ∴ □(ΓΘ) δοθέν □ (ΔΘ)+ □ ΓΘ) δοθέν ∴ □(ΓΔ) δοθέν ∴ ΓΔ δοθείσα	5 5×5→25 12 12×12→144 25+144→169 169 √169→13

	συντεθήσεται δὲ ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει οὕτως.
6+11→17	σύνθες τὰ ς καὶ τὰ ια· γίγνεται ιζ·
17×½→8½	τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται η ∠′·
8½×12→102	ταῦτα ἐπὶ τὰ ιβ· γίγνεται ρβ. τοσούτου ἄρα τὸ ἐμβαδόν.
11−6→5	ὕφελε ἀπὸ τῶν ια τὰ ς· καὶ γίγνεται λοιπὰ ε·
5×5→25 12×12→144 25+144→169 √169→13	ταῦτα ἐφ′ ἑαυτά· γίγνεται κε. καὶ τὰ ιβ ἐφ′ ἑαυτά· γίγνεται ρμδ· πρόσθες τὰ κε· γίγνεται ρξθ· τούτων πλευρὰ· γίγνεται <ιγ>. τοσούτων ἔσται ἡ ΔΓ.

Παρατηρήσεις

I. Το Πρόβλημα συνοδεύεται από ένα μεικτό-εγγράμματο και αριθμητικό-διάγραμμα.

II. Τα Πρόβλημα χωρίζεται σε δύο διακριτές ενότητες:

Α. Πρώτη κειμενική ενότητα:

1. Η "*Πρότασις*" του σχήματος του Πρόκλου έχει παραλειφθεί.

2. Στην "*Έκθεσιν*" ανιχνεύονται: **α)** η συνθήκη και, **β)** οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων.

3. Ακολουθεί ο "*Διορισμός*", στον οποίο ζητούνται να βρεθούν αριθμητικά μεγέθη: το εμβαδόν του τραπεζίου που έχει περιγραφεί στην "*Έκθεσιν*" και η πλευρά του ΓΔ.

4. Επίλυση του Προβλήματος

4.1 Για την εύρεση του εμβαδού: Η διαδικασία αρχίζει να εκτυλίσσεται από το "Υποθετικό μέρος Α′" της ανάλυσης, στο οποίο ο Ήρων κατασκευάζει: **α)** το μέσον Ε της πλευράς ΓΔ (K_1), **β)** την ευθεία ΖΕΗ παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ (K_2) και, **γ)** προεκτείνει την πλευρά ΑΔ μέχρι το σημείο Ζ (K_3). Με αυτά τα τρία κατασκευαστικά βήματα ο Ήρων πραγματοποιεί το πρώτο νοητικό του άλμα, από το οποίο υποδηλώνονται οι δύο παρακάτω ισχυρισμοί: **i)** το τετράπλευρο ΑΒΖΗ που δημιουργείται είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ισχυρισμός που αιτιολογείται από την Πρόταση νς′ των *Ὁρισμῶν*, **ii)** τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΕΗΓ είναι ίσα, ισχυρισμός που αιτιολογείται από τη σύζευξη των Προτάσεων Ι.15 και Ι.26 των *Στοιχείων* και οδηγεί στο επιχείρημα, **iii)** "ΔΖ = ΗΓ" (Y_1). Με πρόσθεση του αθροίσματος των πλευρών ΑΔ και ΒΗ και στα δύο μέλη της ισότητας (Y_1), πράξη που αιτιολογείται από την Κοινή Έννοια Ι.2 των *Στοιχείων*, ο Ήρων επιχειρεί το δεύτερο νοητικό του άλμα, το οποίο θα οδηγήσει στο επιχείρημα "ΑΖ + ΒΗ = ΑΔ + ΒΓ" (Y_2), με το οποίο σηματοδοτείται το τέλος του "Υποθετικού μέρους Α′", αλλά όχι το τέλος της ανάλυσης, αφού με σημείο εκκίνησης το επιχείρημα (Y_2) θα εκτυλιχθεί μια αλληλουχία έγκυρων παραγωγικών συλλογισμών, το "Βεβαιωτικό μέρος Α′", με το οποίο θα επικυρωθούν, στη γλώσσα των *Δεδομένων*, διαδοχικά, τα παρακάτω: **α)** "ΑΔ + ΒΓ είναι δοθέν" (B_1), ισχυρισμός που αιτιολογείται από το ότι οι πλευρές ΑΔ και ΒΓ είναι δοθείσες και από την Πρόταση 3 των *Δεδομένων*, **β)** "ΑΖ + ΒΗ είναι δοθέν", άρα και "2ΒΗ είναι δοθέν" (B_2), ισχυρισμός που αιτιολογείται από τον Ορισμό 1 των *Δεδομένων*, **γ)** "ΒΗ είναι δοθείσα" (B_3), ισχυρισμός που αιτιολογείται από την Πρόταση 2 των *Δεδομένων*, **δ)** "ΑΒ είναι δοθείσα" (B_4), ισχυρισμός που αιτιολογείται από την υπόθεση και, **ε)** "το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΖΗ είναι δοθέν" (B_5)

ισχυρισμός που αιτιολογείται από το ότι οι πλευρές ΒΗ και ΑΒ είναι δοθείσες και από την Πρόταση 52 των *Δεδομένων*.

Θα ακολουθήσει το "Υποθετικό μέρος Β′" της ανάλυσης, όπου με πρόσθεση του πενταπλεύρου ΑΒΗΕΔ και στα δύο μέλη της ισότητας "τρίγωνο(ΔΕΖ)=τρίγωνο(ΕΗΓ)", πράξη που αιτιολογείται από την Κοινή Έννοια Ι.2 των *Στοιχείων*, ο Ήρων επιχειρεί το τρίτο νοητικό του άλμα, το οποίο θα οδηγήσει στο επιχείρημα " παραλληλόγραμμο (ΑΒΖΗ)=τραπέζιο (ΑΒΓΔ)" ($Υ_3$), με το οποίο σηματοδοτείται το τέλος του "Υποθετικού μέρους Β′", για να ακολουθήσει το "Βεβαιωτικό μέρος Β′", στο οποίο θα επικυρωθεί, στη γλώσσα των *Δεδομένων*, ότι: "το ΑΒΓΔ τραπέζιο είναι δοθέν" ($Β_6$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από το ότι το παραλληλόγραμμο ΑΒΖΗ είναι δοθέν και από τον Ορισμό 1 των *Δεδομένων*.

4.2 Για την εύρεση της πλευράς ΓΔ: Η διαδικασία αρχίζει να εκτυλίσσεται από το "Υποθετικό μέρος Γ′" της ανάλυσης, όπου ο Ήρων κατασκευάζει την κάθετη ΔΘ. Με αυτό το κατασκευαστικό βήμα ο Ήρων πραγματοποιεί νοητικό άλμα, μέσω του οποίου η πλευρά ΓΔ ζητείται να ευρεθεί ως υποτείνουσα τού ορθογωνίου τριγώνου ΔΘΓ. Στο "Βεβαιωτικό μέρος Γ′", που θα ακολουθήσει, θα επικυρωθεί, στη γλώσσα των *Δεδομένων*, ότι: **i)** "η πλευρά ΒΘ είναι δοθείσα" ($Β_7$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από το ότι η πλευρά ΑΔ είναι δοθείσα και από τον Ορισμό 1 των *Δεδομένων*, **ii)** "η πλευρά ΒΓ είναι δοθείσα" ($Β_8$) ισχυρισμός που αιτιολογείται από την υπόθεση, **iii)** "η πλευρά ΓΘ είναι δοθείσα"($Β_9$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από το ότι η πλευρά ΒΓ είναι δοθείσα και από την Πρόταση 4 των *Δεδομένων*, **iv)** "η πλευρά ΔΘ είναι δοθείσα" ($Β_{10}$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από το ότι η πλευρά ΑΒ είναι δοθείσα και από τον Ορισμό 1 των *Δεδομένων* και, **v)** "η πλευρά ΓΔ είναι δοθείσα" ($Β_{11}$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από την υποδηλωμένη διαδοχική εφαρμογή στη γεωμετρική Πρόταση Ι.47 των *Στοιχείων* των γεωμετρικών Προτάσεων 52, 3, Ορισμού 1, και 55 των *Δεδομένων*.

Ο γεωμετρικός "λόγος"

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, ο γεωμετρικός "λόγος" χαρακτηρίζεται από τα παρακάτω γεωμετρικά αντικείμενα: **α)** τα σημεία Ε, Ζ και Θ, **β)** τις πλευρές ΓΔ, ΑΒ, ΖΕΗ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΓ, ΔΖ, ΗΓ, ΒΗ, ΒΓ, ΑΖ, ΔΘ, ΒΘ, ΓΘ, **γ)** τη γωνία ∢Θ, **δ)** τα τρίγωνα ΔΕΖ, ΕΗΓ, **ε)** το παραλληλόγραμμο ΑΒΖΗ, **στ)** το τραπέζιο ΑΒΓΔ και, **ζ)** το πεντάπλευρο ΑΒΗΕΔ.

Γλωσσικά χαρακτηριστικά

Όσον αφορά στη γραμματική και συντακτική δομή του Προβλήματος, καταγράφονται τα παρακάτω χαρακτηριστικά: **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική,

β) τα επιχειρήματα ($Υ_1$), ($Υ_2$), ($Β_2$), ($Β_3$), ($Β_5$), ($Υ_3$), ($Β_6$), ($Β_7$) και ($Β_9$) εισάγονται με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ἄρα*", συγκεκριμένα το ($Β_1$) εισάγεται χωρίς τη χρήση συμπερασματικού συνδέσμου, ενώ τα ($Β_4$), ($Β_8$) και ($Β_{10}$) εισάγονται με τη χρήση του αντιθετικού συνδέσμου "*ἀλλά*", **γ)** η αιτιολογία των επιχειρημάτων ($Υ_1$), ($Β_1$), ($Υ_3$), ($Β_7$) είναι άμεση και εισάγεται με τον αιτιολογικό σύνδεσμο "*ἐπεί*", ενώ τα επιχειρήματα ($Υ_2$), ($Β_2$) ($Β_3$), ($Β_4$), ($Β_5$), ($Β_7$), ($Β_8$) και ($Β_9$) αιτιολογούνται έμμεσα με τη χρήση γεωμετρικών στοιχείων, που προέρχονται είτε από τα δοθέντα του Προβλήματος είτε από τους συμπερασμούς επιχειρημάτων που έχουν προηγηθεί, **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο "Υποθετικό μέρος Α′, Β′ & Γ′" είναι: **$δ_1$)** στα κατασκευαστικά βήματα ($Κ_1$), ($Κ_2$), ($Κ_3$) και ($Κ_4$) γ′ πρόσωπο προστακτικής ενικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου, φωνής μέσης, των ρημάτων "*τέμνομαι*" ("*τετμήσθω*"), "*ἄγομαι*" ("*ἤχθω*"), "*ἐκβάλλομαι*" ("*ἐκβεβλήσθω*"), **$δ_2$)** στα αποδεικτικά βήματα, γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*"("*ἐστί*" ή "*ἐστὶ*" ή "*ἐστὶν*" ή "*ἐστίν*"), και γ′ πρόσωπο προστακτικής ενικού και πληθυντικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου, φωνής μέσης, του ρήματος "*πρόσκειμαι*" ("*προσκείσθω*", "*προσκείσθωσαν*"), **ε)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο "Βεβαιωτικό μέρος Α′, Β′ & Γ′" είναι γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἐστί*" ή "*ἐστὶ*" ή "*ἐστίν*" ή "*ἐστὶν*" ή "*ἐστιν*", ή "*ἐστί*"), ή γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου παθητικού αορίστου, φωνής μέσης, του ρήματος "*δείκνυμαι*"("*ἐδείχθη*").

Όπως έχουμε, ήδη, επισημάνει ο γεωμετρικός "λόγος" του παραπάνω Προβλήματος αποτελείται από δύο μέρη: το "Υποθετικό μέρος" και το "Βεβαιωτικό μέρος". Αναλυτικότερα:

Στο "Υποθετικό μέρος Α′&Β′" ο Ήρων ανάγει την εύρεση του εμβαδού του τραπεζίου στην εύρεση του εμβαδού ενός ισοδύναμου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Σε αυτήν τη στόχευση υπακούουν τα κατασκευαστικά βήματα ($Κ_1$), ($Κ_2$) και ($Κ_3$) που πραγματοποιεί. Θα ακολουθήσει μια ομάδα γεωμετρικών Προτάσεων, η οποία εκτυλίσσεται υπό τη μορφή αποδεικτικού/παραγωγικού "λόγου", με στόχο: **α)** να αποδειχτεί ότι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που κατασκευάζεται είναι ίσο/ισοδύναμο του τραπεζίου, **β)** να δειχτεί ότι οι πλευρές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που κατασκευάζεται δύνανται να εκφραστούν από τα δοθέντα στοιχεία του Προβλήματος. Σε αυτήν τη στόχευση υπακούουν τα αποδεικτικά βήματα ($Υ_1$), ($Υ_2$) και ($Υ_3$) τα οποία, όπως και στην περίπτωση των κατασκευαστικών βημάτων ($Κ_1$), ($Κ_2$) και ($Κ_3$), είναι ταυτόχρονα και νοητικά άλματα που συνδυάζουν νοητική ικανότητα, γνώση, εμπειρία και διαίσθηση. Τότε, η ομάδα αυτών των Προτάσεων θα χρησιμοποιηθεί ως βάση για την ανάπτυξη μιας άλλης ομάδας γεωμετρικών Προτάσεων, η οποία αποτελεί το "Βεβαιωτικό μέρος Α′&Β′" και εκτυλίσσεται, επίσης, με τη μορφή αποδεικτικού/παραγωγικού λόγου, με στόχο να βεβαιώσει τη δυνατότητα επίλυσης του Προβλήματος. Συγκεκριμένα,

αποτελείται από συμπερασμούς, οι οποίοι προκύπτουν με εφαρμογή Ορισμών και Θεωρημάτων από τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη σε γεωμετρικά στοιχεία του Προβλήματος. Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι ο γεωμετρικός "λόγος" που αναπτύσσεται στο "Βεβαιωτικό μέρος Α′&Β′" εκτείνεται μέχρι να ευρεθεί/δειχτεί ότι το ζητούμενο εμβαδόν του τραπεζίου είναι "*δοθέν*", δηλαδή, δυνητικά, επιλύει το Πρόβλημα.

Στο "Υποθετικό μέρος Γ′" ο Ήρων ανάγει την εύρεση της πλευράς του τραπεζίου στην εύρεση της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου. Σε αυτήν τη στόχευση υπακούει το κατασκευαστικό βήμα (K_4) που πραγματοποιεί. Σε αντίθεση με το "Υποθετικό μέρος Α′&Β′", στο "Υποθετικό μέρος Γ′" δεν εκτυλίσσεται καμία μορφή αποδεικτικού/παραγωγικού "λόγου", αλλά αναπτύσσεται άμεσα το "Βεβαιωτικό μέρος Γ′", το οποίο, όπως προηγουμένως, αποτελείται από συμπερασμούς, οι οποίοι προκύπτουν με εφαρμογή Ορισμών και Θεωρημάτων από τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη είτε σε γεωμετρικά στοιχεία του Προβλήματος είτε σε υποδηλωμένη γεωμετρική Πρόταση των *Στοιχείων*. Πάλι, ο γεωμετρικός "λόγος" εκτείνεται, μέχρι να ευρεθεί/δειχτεί ότι η ζητούμενη πλευρά είναι "*δοθείσα*" , δηλαδή, δυνητικά, επιλύει το Πρόβλημα.

Η αριθμητική επίλυση του Προβλήματος ακολουθεί και θα καταγραφεί στη 2η ενότητα.

Β. Δεύτερη κειμενική ενότητα:

Περιλαμβάνει τη διαδικασία υπολογισμού, δηλαδή την αλληλουχία των αριθμητικών πράξεων, ώστε να προκύψει η αριθμητική επίλυση του Προβλήματος, η οποία ευρίσκεται/πραγματοποιείται, όταν οι αριθμητικές τιμές που εκχωρούνται κατά την "*Έκθεσιν*" στα δοθέντα γεωμετρικά στοιχεία του Προβλήματος χρησιμοποιούνται για να αναπτυχθεί μια αλληλουχία αριθμητικών πράξεων, η οποία εκτυλίσσεται παράλληλα με την ομάδα των γεωμετρικών Προτάσεων του "Βεβαιωτικού μέρους" και ακολουθεί αυτή. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας αποκτάται η αριθμητική τιμή των ζητούμενων γεωμετρικών μεγεθών, δηλαδή ολοκληρώνεται η επίλυση του Προβλήματος.

Στιλιστικά χαρακτηριστικά

1. Αναγγελία της διαδικασίας

Εισάγεται με το "*συντεθήσεται δὲ ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει οὕτως*".

2. Επιλογές εκκίνησης

Οι αριθμητικές πράξεις εκτελούνται άμεσα.

3. Αλληλουχία των πράξεων που εκτελούνται ή περιγράφονται κατά την εκτύλιξη της υπολογιστικής διαδικασίας

3.1 Η διαδικασία υπολογισμού εφαρμόζεται σε συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα και όλες οι πράξεις πραγματοποιούνται.

3.2.1 Κατά τον αριθμητικό υπολογισμό του εμβαδού, η υπολογιστική ροή εκτυλίσσεται σε μια σειρά βημάτων, ώστε το αποτέλεσμα μιας πράξης να χρησιμοποιείται άμεσα σαν 'inputʼ στην επόμενη. Συγκεκριμένα: "*σύνθες τὰ ς καὶ τὰ ια· γίγνεται ιζ· τούτων τὸ ἥμισυ· γίγνεται η∠΄· ταῦτα ἐπὶ τὰ ιβ· γίγνεται ρβ*".

3.2.2 Κατά τον αριθμητικό υπολογισμό της πλευράς ΓΔ, η υπολογιστική ροή εκτυλίσσεται, ώστε να ακολουθεί ένα " μεικτό" σύστημα, δηλαδή, εκτός από τις σειρές βημάτων στις οποίες τα αποτελέσματα των πράξεων χρησιμοποιούνται άμεσα για την επόμενη πράξη, υπάρχουν και σειρές βημάτων στις οποίες τα αποτελέσματα των πράξεων δεν χρησιμοποιούνται άμεσα, αλλά "αποθηκεύονται", για να χρησιμοποιηθούν σε επόμενα βήματα. Συγκεκριμένα, καταγράφεται: **α)** η πρώτη σειρά ανεξάρτητων βημάτων: "*ὕφελε ἀπὸ τῶν ια τὰ ς· καὶ γίγνεται λοιπὰ ε· ταῦτα ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνεται κε*" με το αποτέλεσμα να "αποθηκεύεται", **β)** η δεύτερη σειρά ανεξάρτητων βημάτων: "*καὶ τὰ ιβ ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνεται ρμδ*" και, **γ)** το "αποθηκευμένο" αποτέλεσμα της πρώτης σειράς χρησιμοποιείται, ώστε να ακολουθήσει η τρίτη σειρά ανεξάρτητων βημάτων: "*πρόσθες τὰ κε· γίγνεται ρξθ· τούτων πλευρὰ· γίγνεται <ιγ>*".

4. Διατύπωση των πράξεων

Κατά τη δήλωση των πράξεων καταγράφεται ο παρακάτω ρηματικός τύπος:

Α΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει ρήματα β΄ προσώπου προστακτικής ενικού/πληθυντικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής. Συγκεκριμένα, καταγράφονται: "*σύνθες*", "*ὕφελε*", "*πρόσθες*").

5. Δήλωση των πράξεων

5.1 Στην πρόσθεση χρησιμοποιούνται τα ρήματα: "*συντίθημι*" και "*προστίθημι*" ("*σύνθες*", "*πρόσθες*").

5.2 Στην αφαίρεση χρησιμοποιείται το ρήμα: "*ὑφαιρέω*" ("*ὕφελε*").

5.3 Στον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιείται η παρακάτω φράση "*ἐπὶ* " ("*ταῦτα ἐπὶ…*"), με το ρήμα να υποδηλώνεται.

5.4 Στην ύψωση στο τετράγωνο χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική φράση: "*ἑφ΄ ἑαυτὰ ποιῶ*", με το ρήμα να υποδηλώνεται ("*… ἑφ΄ ἑαυτὰ*").

5.5 Στον υποδιπλασιασμό χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική φράση: "*λαμβάνω τὸ ἥμισυ*", με το ρήμα να παραλείπεται ("*τούτων τὸ ἥμισυ*").

5.6 Στον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική φράση: "*λαμβάνω πλευρὰν*", με το ρήμα να παραλείπεται ("*τούτων πλευρά*").

6. Αναγγελία αποτελέσματος

6.1 Στην πρόσθεση χρησιμοποιείται το ρήμα: "*γίγνομαι*" ("*γίγνεται*").

6.2 Στην αφαίρεση χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική έκφραση: "*γίγνομαι λοιπὸς*" ("*γίγνεται λοιπά*").

6.3 Στον πολλαπλασιασμό, τον υποδιπλασιασμό και τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας χρησιμοποιείται το παρακάτω ρήμα: "*γίγνομαι*" ("*γίγνεται*").

Παρατηρήσεις

I. Την ίδια αυστηρή/ακριβή δομή μπορούμε να καταγράψουμε και στα παρακάτω Προβλήματα: I.16, I.17, I.18, I.19, I.20, I.21, I.22, I.23, I.24, I.25, II.4, II.6, II.9, II.12, III.8, III.22.

II. Μια ελαφρά παραλλαγμένη μορφή της παραπάνω δομής, στην οποία οι αριθμητικές τιμές που εκχωρούνται στα δοθέντα του Προβλήματος δίνονται με τη μορφή αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" όχι κατά την "*Ἔκθεσιν*" αλλά στην αρχή της "*Σύνθεσης*", παρατηρείται στα Προβλήματα I.15, II.8, III.4, III.5, III.6, III.7, III.9.

Για παράδειγμα στο Πρόβλημα I.18, μπορούμε να καταγράψουμε τα παρακάτω βήματα:

1. "*Ἔκθεσις*" & "*Διορισμός*": "*Ἔστω δὲ στερεὸν μετρῆσαι ὑπὸ εὐθυγράμμων περιεχόμενον ἐπιπέδων, οὗ βάσις ἔστω τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον, κορυφὴ δὲ τὸ ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον ἤτοι ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ ἢ μή*".

2. Ακολουθεί η ανάπτυξη του "Υποθετικού-Βεβαιωτικού μέρους", το οποίο ολοκληρώνεται με τη δυνητική επίλυση του Προβλήματος: "*δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ἐξ ἀρχῆς στερεόν*".

3. Αναγγέλλεται η "*Σύνθεσις*": "*συντεθήσεται δὴ οὕτως ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει*".

4. Αμέσως μετά εκχωρούνται οι αριθμητικές τιμές στα δοθέντα της "*Ἐκθέσεως*": "*ἔστω γὰρ ἡ μὲν ΑΒ μονάδων κ, ἡ δὲ ΒΓ μονάδων ιβ, ἡ δὲ ΕΖ μονάδων ις, ἡ δὲ ΖΗ μονάδων γ, ἡ δὲ κάθετος τοῦ στερεοῦ, τουτέστι τὸ ὕψος, μονάδων ι*", ακολουθούν οι πράξεις οι οποίες οδηγούν στην αριθμητική επίλυση του Προβλήματος: "*… γίγνεται˙ ατπ. τοσούτου ἔσται τὸ προκείμενον στερεόν*".

Πριν προχωρήσουμε στις υπόλοιπες κατηγορίες Προβλημάτων που επιλύονται "*κατὰ ἀνάλυσιν*", θα παρουσιάσουμε ένα Πρόβλημα, που προέρχεται από το Βιβλίο ΙΙΙ των *Μετρικών*, στο οποίο πραγματοποιούνται διαιρέσεις επιπέδων και στερεών σχημάτων, υπό δοθέντα λόγο. Η ξεχωριστή μελέτη ενός Προβλήματος "διαίρεσης" κρίνεται αναγκαία και χρήσιμη, ώστε να αναδειχτεί και να κατανοηθεί ο ιδιαίτερος χειρισμός με τον οποίο αντιμετωπίζονται οι "κατασκευές" που προκύπτουν και πρέπει να πραγματοποιηθούν, κατά τη διαίρεση ενός σχήματος, σε ένα μετρολογικό σύνταγμα.

Όπως έχουμε, ήδη, επισημάνει, στα Προβλήματα των Βιβλίων Ι&ΙΙ των *Μετρικών*, στα οποία ζητείται η εύρεση εμβαδών και όγκων επιπέδων και στερεών σχημάτων, το κατηγόρημα "*δοθέν σε μέγεθος*", για ένα γεωμετρικό αντικείμενο, κατέχει τον κυρίαρχο ρόλο σε όλες τις Προτάσεις του "Βεβαιωτικού μέρους", οι οποίες αναπτύσσονται με τη μορφή παραγωγικού/συμπερασματικού λόγου και επιλύουν δυνητικά το εκάστοτε Πρόβλημα. Επιπλέον, η εκχώρηση αριθμητικής τιμής στα δοθέντα γεωμετρικά στοιχεία ενός Προβλήματος εφοδιάζει τον όρο "*δοθέν*", για ένα γεωμετρικό αντικείμενο, με το επιπλέον χαρακτηριστικό της αριθμητικής υποδήλωσης, το οποίο δίνει τη δυνατότητα στο γεωμετρικό αντικείμενο να υπολογισθεί αριθμητικά. Τότε, η αριθμητικοποίηση των γεωμετρικών αντικειμένων είναι αρκούντως απλή και πραγματοποιείται άμεσα· αρκεί οι αριθμητικές τιμές, που εκχωρούνται στα δοθέντα γεωμετρικά στοιχεία, να αναπτυχθούν σε μια αλληλουχία αριθμητικών πράξεων. Αν στραφούμε, τώρα, στα Προβλήματα του Βιβλίου ΙΙΙ *Μετρικών*, όπου ζητείται η κατασκευή/εύρεση γραμμών και επιπέδων που διαιρούν επίπεδα και στερεά σχήματα, υπό δοθέντα λόγο, το κατηγόρημα "*δοθέν σε θέση*", για ένα γεωμετρικό αντικείμενο, κατέχει τον κυρίαρχο ρόλο σε όλες τις Προτάσεις του "Βεβαιωτικού μέρους", οι οποίες, όπως και στα δύο πρώτα Βιβλία, αναπτύσσονται με τη μορφή παραγωγικού/συμπερασματικού λόγου και επιλύουν δυνητικά το εκάστοτε Πρόβλημα. Με την εκχώρηση αριθμητικών τιμών στα δοθέντα γεωμετρικά στοιχεία ενός Προβλήματος, οι γραμμές και τα επίπεδα, που πραγματοποιούν τις διαιρέσεις των επιπέδων και στερεών σχημάτων, αποκτούν τη δυνατότητα να υπολογισθούν, όχι γεωμετρικά, αλλά με αριθμητικό τρόπο. Στο σημείο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στα περισσότερα Προβλήματα των *Μετρικών* η αναλυτική διαδικασία ανάγει την εύρεση των γραμμών και επιπέδων, που πραγματοποιούν τις διαιρέσεις των επιπέδων και στερεών σχημάτων, στην εύρεση σημείων, οπότε το κατηγόρημα "*δοθέν σε θέση*", για σημείο στο τέλος του "Βεβαιωτικού μέρους", εξασφαλίζει τη δυνητική επίλυση του Προβλήματος. Για την αριθμητικοποίηση, όμως, ενός "*δοθέντος σε θέση*" σημείου, πρέπει να προηγηθεί η εύρεση ενός "*δοθέντος σε μέγεθος*" τμήματος, το οποίο: **i)** τοποθετείται επί μιας ευθείας δοθείσας ως προς θέση και μέγεθος, **ii)** το ένα άκρο του είναι δοθέν σημείο, είτε υποθετικά είτε αποδεικτικά, ενώ το άλλο άκρο του είναι το "*δοθέν σε θέση* " σημείο που ζητείται να αριθμητικοποιηθεί· τότε, η αριθμητικοποίηση αυτού ανάγεται στην αριθμητικοποίηση ενός "*δοθέντος σε*

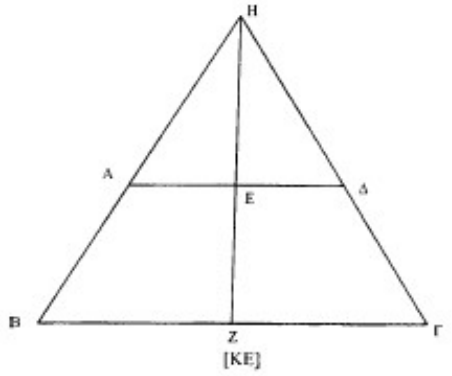
μέγεθος" τμήματος και πραγματοποιείται με τη διαδικασία που έχουμε προαναφέρει.

Παρακάτω, θα παραθέσουμε σε πίνακα τα τρία Θεωρήματα των *Δεδομένων*, τα οποία χρησιμοποιούνται στη μελέτη των Προβλημάτων του Βιβλίου ΙΙΙ των *Μετρικών*. Στη δεξιά στήλη του πίνακα καταγράφονται οι γεωμετρικές κατασκευές που αντιστοιχούν στις συγκεκριμένες Προτάσεις, οι οποίες, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τις Προτάσεις 26&27, πραγματοποιούνται με την αναγωγή των "*δοθέντων σε θέση*" γεωμετρικών αντικειμένων σε αντίστοιχα "*δοθέντα σε μέγεθος*" γεωμετρικά αντικείμενα.

ΠΡΟΤΑΣΗ ΑΠΟ ΤΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ
Πρόταση 26: Ἐὰν εὐθείας γραμμῆς τὰ πέρατα ᾖ δεδομένα τῇ θέσει, δέδοται ἡ εὐθεῖα τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει.	Συνέδεσε δύο σημεία με ένα τμήμα δοθέντος μεγέθους.
Πρόταση 27: Ἐὰν εὐθείας γραμμῆς τῇ θέσει καὶ τῷ μεγέθει δεδομένης τὸ ἓν πέρας δοθὲν ᾖ, καὶ τὸ ἕτερον δοθήσεται.	Απόκοψε ένα τμήμα δοθέντος μεγέθους
Πρόταση 28: Ἐὰν διὰ δεδομένου σημείου παρὰ θέσει δεδομένην εὐθεῖαν εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, δέδοται ἡ ἀχθεῖσα τῇ θέσει.	Φέρε από ένα σημείο μια παράλληλη ευθεία προς κάποια άλλη.

Αμέσως μετά, θα παρουσιάσουμε το Πρόβλημα ΙΙΙ.5 των *Μετρικών*, στο οποίο πραγματοποιείται η διαίρεση τραπεζίου σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από την ευθεία γραμμή που διέρχεται από το σημείο τομής των μη παραλλήλων πλευρών του.

Σχετικά με τον τρόπο παρουσίασης τού υπό εξέταση Προβλήματος: **α)** δίνεται το διάγραμμα που το συνοδεύει, **β)** ακολουθεί η διαίρεση του Προβλήματος σε μέρη, με βάση το σχήμα του Πρόκλου.



[ΚΕ]

Διαίρεση σε μέρη	**Γεωμετρικός "λόγος"**	**Ορολογία *Δεδομένων***	**Αντίστοιχες πράξεις**
Ἔκθεσις & Διορισμός	Τετραπλεύρου δοθέντος τοῦ ΑΒΓΔ καὶ παραλλήλου οὔσης τῆς ΑΔ τῇ ΒΓ διελεῖν τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον τῇ ΕΖ εὐθείᾳ ὥστε λόγον <εἶναι> τοῦ ΑΒΕΖ πρὸς τὸ ΕΖΓΔ δοθέντα τῶν ΕΖ ΓΔ <ΑΒ> καὶ εἰς τὸ αὐτὸ νευουσῶν σημεῖον τὸ Η.		
	Ἀπόδειξις		
Υποθετικό μέρος	($Υ_1$) διὰ δὴ τοῦτο ἔσται ὡς τὸ ΑΒΕΖ πρὸς τὸ ΕΖΓΔ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΓ· (*Στ.* VI.1&4 & V.19)		
Βεβαιωτικό μέρος	($Β_1$) ὥστε λόγος καὶ τῆς ΒΖ πρὸς ΖΓ δοθείς· (*Δ.* Ορ.2)	ΒΖ:ΖΓ δοθείς ∴ ΒΖ:(ΒΖ+ΖΓ) δοθείς ∴ ΒΖ:ΒΓ δοθείς	2:3 2:(2+3) 2:5
	($Β_2$) καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΒΓ·	ΒΓ δοθείσα	25
	($Β_3$) δοθὲν ἄρα τὸ Ζ. (*Δ.* 7&27)	∴ ΒΖ δοθέν, Β δοθέν ∴ Ζ δοθέν	25×2→50 50:5→10
	($Β_4$) κατὰ τὰ αὐτὰ | δὴ καὶ τὸ Ε·	Ε δοθέν	20×2→40 40:5→8
	($Β_5$) θέσει ἄρα ἡ ΕΖ. (*Δ.* 26)	∴ ΕΖ δοθείσα	

	συντεθήσεται δὴ ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει οὕτως·
2:3 25 20	ἔστω δοθεὶς λόγος ὃν ἔχει τὰ β πρὸς τὰ γ· καὶ ἔστω ἡ μὲν ΒΓ μονάδων κε ἡ δὲ ΑΔ μονάδων κ αἱ δὲ ΑΒ ΓΔ οἱαιδηποτοῦν.
2+3→5	σύνθες τὰ β καὶ τὰ γ· γίγνεται ε.
25×2→50	καὶ τὰ κε ἐπὶ τὸν β· γίγνεται ν·
50:5→10	ταῦτα παράβαλε παρὰ τὸν ε· γίγνεται ι. τοσούτων ἀπειλήφθω μονάδων ἡ ΒΖ.

20×2→40	πάλιν τὰ κ ἐπὶ τὰ β· γίγνεται μ·
40:5→8	ταῦτα παράβαλε παρὰ τὸν ε· γίγνεται η. τοσούτων ἀπόλαβε τὴν ΑΕ. καὶ ἐὰν ἐπιζευχθῇ ἡ ΕΖ, ποιήσει τὸ προκείμενον.

Παρατηρήσεις

I. Το Πρόβλημα συνοδεύεται από ένα εγγράμματο διάγραμμα.

II. Τα Πρόβλημα χωρίζεται σε δύο διακριτές ενότητες:

Α. Πρώτη κειμενική ενότητα:

1. Η "*Πρότασις*" του σχήματος του Πρόκλου έχει παραλειφθεί.

2. Στην "*Ἔκθεσιν*" ανιχνεύεται η συνθήκη, δηλαδή παρουσιάζονται τα δοθέντα του Προβλήματος χωρίς, όμως, να εκχωρούνται σε αυτά αριθμητικές τιμές.

3. Ακολουθεί ο "*Διορισμός*", στον οποίο ζητείται να διαιρεθεί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, που έχει περιγραφεί στην "*Ἔκθεσιν*", από μια ευθεία ΕΖ σε δύο μέρη, ΑΒΕΖ και ΕΖΓΔ, υπό δοθέντα λόγο.

4. Επίλυση του Προβλήματος

Η διαδικασία αρχίζει να εκτυλίσσεται από το "Υποθετικό μέρος" της ανάλυσης, όπου ο Ήρων, με σύζευξη των Προτάσεων VI.1, VI.4 και V.19 των *Στοιχείων*, πραγματοποιεί το πρώτο νοητικό του άλμα και οδηγείται στο επιχείρημα: "ΑΒΕΖ:ΕΖΓΔ::ΒΖ:ΖΓ" ($Υ_1$). Αμέσως μετά και με σημείο εκκίνησης το επιχείρημα ($Υ_1$), θα ακολουθήσει το "Βεβαιωτικό μέρος" της ανάλυσης, στο οποίο με μια σειρά έγκυρων παραγωγικών συλλογισμών θα επικυρωθούν τα παρακάτω: **α)** "ΒΖ:ΖΓ είναι δοθείς" ($Β_1$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από τον Ορισμό 1 των *Δεδομένων*, **β)** υποδηλώνεται το επιχείρημα "ΒΖ:ΒΖ+ΖΓ", δηλαδή ΒΖ:ΒΓ είναι δοθείς" και, αφού λάβει υπόψη ότι "ΒΓ είναι δοθείσα" ($Β_2$), καθώς και την Πρόταση 2 των *Δεδομένων*, καταλήγει στον υποδηλωμένο ισχυρισμό "ΒΖ είναι δοθείσα", **γ)** ακολουθεί "το σημείο Ζ είναι δοθέν" ($Β_3$), επιχείρημα που αιτιολογείται από τη σύζευξη των Προτάσεων 7&27 των *Δεδομένων*, **δ)** με ανάλογους παραγωγικούς συλλογισμούς επικυρώνεται το επιχείρημα "το σημείο Ε είναι δοθέν" ($Β_4$), το οποίο με τη σειρά του, τελικά, οδηγεί, **ε)** "η ευθεία ΕΖ είναι δοθείσα ως προς θέση" ($Β_5$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από την Πρόταση 26 των *Δεδομένων*.

Ο γεωμετρικός "λόγος"

Τα γεωμετρικά αντικείμενα που χαρακτηρίζουν τον γεωμετρικό "λόγο" είναι: **α)** σημεία, **β)** γραμμές και, **γ)** τετράπλευρα.

Γλωσσικά χαρακτηριστικά

Τα γλωσσικά χαρακτηριστικά του όσον αφορά στη γραμματική και συντακτική δομή του Προβλήματος είναι: **α)** σύνδεση παρατακτική, **β)** μια σειρά επιχειρημάτων (Υ1), (Β1), (Β2), (Β3), (Β4), (Β5), τα οποία είτε εισάγονται με τη χρήση των συμπερασματικών συνδέσμων "*ἄρα*" και "*ὥστε*" είτε με τους προσδιορισμούς "*διὰ δὴ τοῦτο*" και "*κατὰ τὰ αὐτὰ δή*", **γ)** η αιτιολογία των επιχειρημάτων είναι έμμεση και πραγματοποιείται με τη χρήση γεωμετρικών στοιχείων, τα οποία προέρχονται από τα δοθέντα του Προβλήματος ή και από συμπερασμούς επιχειρημάτων που έχουν προηγηθεί, **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο "Υποθετικό μέρος" είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου μέλλοντα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμί*" ("*ἔσται*"), **ε)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο "Βεβαιωτικό μέρος " είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμὶ*" ("*ἔστι*").

Όπως έχουμε, ήδη, καταγράψει ο γεωμετρικός "λόγος" αποτελείται από δύο μέρη: το "Υποθετικό μέρος" και το "Βεβαιωτικό μέρος". Επειδή πρόκειται για Πρόβλημα εύρεσης/κατασκευής, ο Ήρων υποθέτει[138] ότι η ζητούμενη ευθεία έχει κατασκευαστεί και είναι η ΕΖ, της οποίας η θέση θα προσδιοριστεί, όταν προσδιοριστεί η θέση των άκρων της Ε και Ζ. Η σύγκλιση των ευθειών ΕΖ και ΓΔ, επομένως, και της ΑΒ, στο σημείο Η, επιτρέπει στον Ήρωνα να κάνει ένα νοητικό άλμα και, στη βάση ενός συνδυασμού Προτάσεων των *Στοιχείων*, να καταλήξει στο επιχείρημα ($Υ_1$). Το επιχείρημα αυτό αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη της ομάδας των Προτάσεων ($Β_1$), ($Β_2$), ($Β_3$), ($Β_4$) και ($Β_5$), που αποτελούν το "Βεβαιωτικό μέρος" του Προβλήματος. Πρόκειται για εκείνη την ομάδα συμπερασμών οι οποίοι δηλώνονται ή υποδηλώνονται, προκύπτουν με εφαρμογή Ορισμών και Θεωρημάτων από τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη σε γεωμετρικά στοιχεία του Προβλήματος και εκτυλίσσονται με τη μορφή παραγωγικού/αποδεικτικού λόγου. Στόχος του "Βεβαιωτικού μέρους" είναι η βεβαίωση της δυνατότητας επίλυσης του Προβλήματος και, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, ο γεωμετρικός "λόγος" που αναπτύσσεται στο "Βεβαιωτικό μέρος" είναι πλήρης και εκτείνεται μέχρι να δειχθεί ότι η ζητούμενη ευθεία ΕΖ είναι "ως προς θέση" δοθείσα, δηλαδή υπάρχει και δύναται να κατασκευαστεί.

---

[138] Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, στα περισσότερα Προβλήματα του Βιβλίου ΙΙΙ των *Μετρικών* το "Υποθετικό μέρος" εισάγεται με τον χαρακτηριστικό ισχυρισμό "*γεγονέτω*"…

Η διαδικασία κατασκευής της ευθείας ΕΖ καταγράφεται στη 2η ενότητα του Προβλήματος.

Β. Δεύτερη κειμενική ενότητα:

Περιλαμβάνει μια αλληλουχία αριθμητικών πράξεων, η οποία αναπτύσσεται με βάση την ομάδα των γεωμετρικών Προτάσεων του "Βεβαιωτικού μέρους" και ακολουθεί, εν μέρει, αυτή. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε και έχουμε, ήδη, επισημάνει, η εύρεση/κατασκευή της θέσης της ευθείας ΕΖ ανάγεται στην εύρεση της θέσης των άκρων της Ε και Ζ. Όμως, η εύρεση της θέσης σημείων, σε προβλήματα μετρολογικού χαρακτήρα, ισοδυναμεί με την αριθμητική εύρεση αυτών. Συγκεκριμένα, για την εύρεση της θέσης του σημείου Ζ, αρκεί ο αριθμητικός υπολογισμός του τμήματος ΒΖ, το οποίο βρίσκεται επί της πλευράς ΒΓ, που είναι δοθείσα ως προς θέση και μέγεθος, με το σημείο Β να είναι επίσης δοθέν. Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο αριθμητικός υπολογισμός του σημείου Ζ με τον προαναφερθέντα τρόπο εξασφαλίζει, ταυτόχρονα, την ύπαρξη και τη μοναδικότητα αυτού. Για την εύρεση της θέσης του σημείου Ε ακολουθείται αντίστοιχη διαδικασία.

Στιλιστικά χαρακτηριστικά

1. Αναγγελία της διαδικασίας

Εισάγεται με το "*συντεθήσεται δὴ ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει οὕτως*".

2. Επιλογές εκκίνησης

Οι αριθμητικές τιμές που εκχωρούνται στα δοθέντα του Προβλήματος εισάγονται, κατά την εκκίνηση της υπολογιστικής διαδικασίας, με τη μορφή αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" · αμέσως μετά, ακολουθεί η εκτέλεση των πράξεων.

3. Αλληλουχία των πράξεων που εκτελούνται ή περιγράφονται κατά την εκτύλιξη της υπολογιστικής διαδικασίας.

3.1 Η διαδικασία υπολογισμού εφαρμόζεται σε συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα και όλες οι πράξεις πραγματοποιούνται.

3.2 Κατά τον αριθμητικό υπολογισμό του τμήματος ΒΖ, η υπολογιστική ροή εκτυλίσσεται ώστε να ακολουθεί ένα "μεικτό" σύστημα, δηλαδή καταγράφεται: **α)** μια σειρά ανεξάρτητων βημάτων: "*σύνθες τὰ β καὶ τὰ γ· γίγνεται ε*", το αποτέλεσμα των οποίων αποθηκεύεται για να χρησιμοποιηθεί σε επόμενο βήμα, **β)** ακολουθεί μια σειρά βημάτων, στα οποία το αποτέλεσμα μιας πράξης χρησιμοποιείται άμεσα σαν "input" στην επόμενη. Συγκεκριμένα: "*καὶ τὰ κε ἐπὶ τὸν β· γίγνεται ν· ταῦτα παράβαλε παρὰ τὸν ε· γίγνεται ι*". Κατά τον αριθμητικό υπολογισμό του τμήματος ΑΕ, η υπολογιστική ροή εκτυλίσσεται ώστε το

αποτέλεσμα μιας πράξης να χρησιμοποιείται άμεσα σαν 'input' στην επόμενη. Συγκεκριμένα: "*πάλιν τὰ κ ἐπὶ τὰ β· γίγνεται μ· ταῦτα παράβαλε παρὰ τὸν ε· γίγνεται η*".

4. Διατύπωση των πράξεων

Κατά τη δήλωση των πράξεων επισημαίνονται οι παρακάτω ρηματικοί τύποι:

Α΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει ρήματα β΄ προσώπου, προστακτικής, ενικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής. Συγκεκριμένα καταγράφονται: "*σύνθες*", "*παράβαλε*", "*άπόλαβε*".

Γ΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει ρήματα γ΄ προσώπου, προστακτικής, ενικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου, φωνής μέσης. Συγκεκριμένα καταγράφεται: "*άπειλήφθω*".

6. Αναγγελία αποτελέσματος

6.1 Στην πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση χρησιμοποιείται το ρήμα: "*γίγνομαι*" ("*γίγνεται*").

Στο σημείο αυτό, λαμβάνοντας υπόψη τα βασικά χαρακτηριστικά της αναλυτικής μεθόδου που ακολουθούμε και την εφαρμογή τους στην επιλυτική διαδικασία των Προβλημάτων που έχουμε, ήδη, μελετήσει, μπορούμε να συνοψίσουμε τα παρακάτω σημαντικά σημεία: **α)** Το "Υποθετικό μέρος" της ανάλυσης αποτελεί μια βάση επί της οποίας αναπτύσσεται το "Βεβαιωτικό μέρος", με το οποίο επιλύεται δυνητικά το Πρόβλημα, **β)** η δυνητική επίλυση του Προβλήματος αποτελεί την αναγκαία προϋπόθεση για να ακολουθήσει η αριθμητική επίλυση, δηλαδή μια σειρά πράξεων που εκτελούνται παράλληλα, κατά μάλλον ή ήττον, με την αλυσίδα των συμπερασμών του "Βεβαιωτικού μέρους" και, **γ)** ο γεωμετρικός "λόγος", αυτός καθαυτός, που αναπτύσσεται στο "Βεβαιωτικό μέρος" είναι πλήρης και ανεξάρτητος από οποιονδήποτε αριθμητικό υπολογισμό. Η ανεξαρτησία αυτή παρέχει στον Ήρωνα τη δυνατότητα να διαπραγματευτεί Προβλήματα, στα οποία η σειρά των πράξεων που θα οδηγούσε σε αριθμητικό αποτέλεσμα να μην εκτελείται, αλλά, απλά, να περιγράφεται.

Διακρίνουμε, λοιπόν, τις παρακάτω κατηγορίες:

4.3.4 Παραδείγματα προβλημάτων που επιλύονται με ανάλυση: Δεύτερη περίπτωση

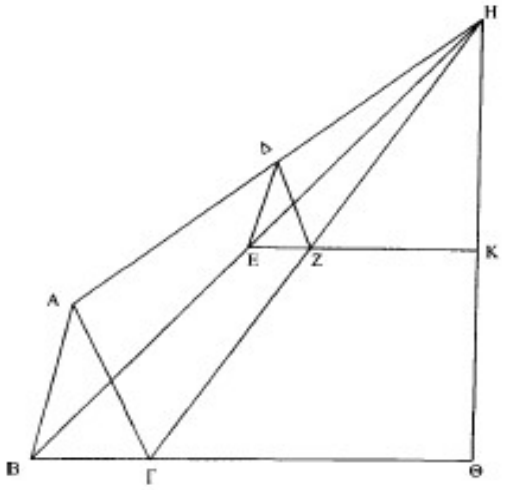
Σε αυτήν την κατηγορία περιλαμβάνονται Προβλήματα των *Μετρικών*, στα οποία παρατηρούνται τα παρακάτω: **α)** δεν εκχωρούνται αριθμητικές τιμές στα

δοθέντα του Προβλήματος, δηλαδή δεν καταγράφεται οποιαδήποτε εμφάνιση αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" τόσο κατά την "*Έκθεσιν*" όσο και κατά τη "*Σύνθεσιν*", **β)** ακολουθεί ο αμιγής γεωμετρικός "λόγος", στον οποίο διακρίνεται με σαφήνεια ο διαχωρισμός σε "Υποθετικό- Βεβαιωτικό μέρος", καθώς και η δυνητική επίλυση του Προβλήματος, με την οποία ολοκληρώνεται το "Βεβαιωτικό μέρος" και, **γ)** η υπολογιστική διαδικασία, ανεξάρτητα αν αναγγέλλεται ή όχι, περιέχει πράξεις, οι οποίες περιγράφονται, αλλά δεν εκτελούνται.

Αμέσως μετά, θα παρουσιάσουμε το Πρόβλημα ΙΙ.7, στο οποίο πραγματοποιείται η μέτρηση του στερεού μιας κόλουρης πυραμίδας με βάσεις όμοια τρίγωνα.

Σχετικά με τον τρόπο παρουσίασης τού υπό εξέταση Προβλήματος: **α)** δίνεται το διάγραμμα που το συνοδεύει, **β)** ακολουθεί η διαίρεση του Προβλήματος σε μέρη, με βάση το σχήμα του Πρόκλου.

Πρόβλημα ΙΙ.7



Διαίρεση σε μέρη	Γεωμετρικός "λόγος"	Ορολογία *Δεδομένων*	Υπολογιστική διαδικασία
Πρότασις	Στερεὸν μετρῆσαι περιεχόμενον ὑπὸ ἐπιπέδων τριγώνους ἔχον βάσεις.		

Ἔκθεσις	ἔστω τὸ εἰρημένον στερεὸν οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ ΔΕΖ παράλληλον <δὲ> τῷ ΑΒΓ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδα δὲ ἔστω τὰ ΑΒΔΕ ΒΓΕΖ ΑΓΔΖ καὶ δοθεῖσα ἔστω ἑκάστη τῶν Α<Β ΒΓ Γ>Α ΔΕ ΕΖ ΖΔ καὶ ἔτι ἡ ἀ|πὸ τοῦ ΔΕΖ ἐπιπέδου κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπίπεδον.		
Ὑποθετικό μέρος	*Ἀπόδειξις*		
	($Υ_1$) ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ καὶ μείζων ἡ ΒΓ, αἱ ἄρα ΒΕ ΓΖ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. (*Στ.* I.34) συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η.		
	($Υ_2$) λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ ΑΔ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται κατὰ τὸ Η. ὅτι μὲν οὖν ἑκατέρα τῶν ΒΕ ΓΖ συμπίπτει τῇ ΑΔ, φανερὸν διὰ τὸ εἶναι τὴν μὲν ΑΒ μείζονα τῆς ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῆς ΔΖ. (*Στ.* I.34) λέγω ὅτι κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ γὰρ <τὰ> ΑΔΗ σημεῖα ἕν τε τῷ διὰ τῶν ΑΒ ΔΕ ἐστὶν ἐπιπέδῳ καὶ ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΓ ΔΖ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔΗ. (*Στ.* XI.3)		
	Κατασκευή		
	($Κ_1$) ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον (*Στ.* XI.11) καὶ ἐμβαλλέτω κατὰ τὸ Θ τῷ δὲ ΔΕΖ κατὰ τὸ Κ·		
	($Κ_2$) καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΘ<ΖΚ>.		
	Ἀπόδειξις		
	($Υ_3$) παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΘ τῇ ΖΚ· (*Στ.* XI.16) ἀλλὰ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ. ἔσται ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς ΕΖ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΗΚ· (*Στ.* VI.4 & VI.2)		
Βεβαιωτικό μέρος	($Β_1$) λόγος δὲ τῆς ΒΓ πρὸς ΕΖ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· (*Δ.* 1)	ΒΓ:ΕΖ δοθείς	δεῖ τὴν ΘΚ ποιῆσαι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς ΕΖ
	($Β_2$) λόγος ἄρα καὶ τῆς ΗΘ πρὸς ΗΚ δοθείς· (*Δ.* Ορ. 2)	∴ ΘΗ:ΗΚ δοθείς	προστεθείσης τῆς ΚΗ τὴν ΘΗ πρὸς ΗΚ.
	($Β_3$) ὥστε καὶ τῆς ΘΚ πρὸς ΚΗ. (*Δ.* 5 & 8)	∴ (ΘΗ−ΗΚ):ΗΚ δοθείς ∴ ΘΚ:ΗΚ δοθείς	
	($Β_4$) καὶ ἔστι δοθεῖσα ἡ ΘΚ· ἡ γὰρ ἀπὸ τοῦ ΔΕΖ ἐπιπέδου κάθετος ἐπὶ τὸ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπίπεδον δοθεῖσά ἐστιν·	ΘΚ δοθείσα	
	($Β_5$) δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΚΗ· (*Δ.* 2)	∴ ΚΗ δοθείσα	

	(B_6) ὥστε καὶ ἡ ΗΘ δοθεῖσά ἐστιν. (*Δ*. 3)	∴ ΗΘ δοθείσα	
	(B_7) ἐπεὶ οὖν πυραμίδος ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Η σημεῖον δέδοται ἥ τε βάσις καὶ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἡ ΗΘ, δοθὲν ἄρα τὸ τῆς πυραμίδος στερεόν. (*Μ* ΙΙ.5)	τρίγωνο ΑΒΓ δοθέν ΗΘ δοθείσα ∴ η πυραμίδα με βάση το τρίγωνο ΑΒΓ δοθείσα	καὶ εὑρόντα ἑκατέραν τῶν καθέτων τῶν ΗΘ ΗΚ καθ᾽ ἑαυτὰς μετρῆσαι ἑκατέραν πυραμίδα, ἧς τε βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγωνον καὶ ἧς βάσις τὸ ΔΕΖ, κορυφὴ δὲ τὸ Η σημεῖον,
	(B_8) κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ τῆς πυραμίδος στερεόν ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον κορυφὴ δὲ τὸ Η σημεῖον δοθέν ἐστι· (*Μ* ΙΙ.5)	τρίγωνο ΔΕΖ δοθέν ΚΗ δοθείσα ∴ πυραμίδα με βάση το τρίγωνο ΔΕΖ δοθείσα	
	(B_9) λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ στερεὸν δοθέν ἐστι. (*Δ*. 4)	∴ η κόλουρος πυραμίδα με βάσεις τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ δοθείσα	καὶ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν ἀποφαίνεσθαι ἴσην εἶναι τῷ ζητουμένῳ στερεῷ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως.
δεῖ τὴν ΘΚ ποιῆσαι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς ΕΖ, προστεθείσης τῆς ΚΗ, τὴν ΘΗ πρὸς ΗΚ
καὶ εὑρόντα ἑκατέραν τῶν καθέτων τῶν ΗΘ ΗΚ καθ᾽ ἑαυτὰς μετρῆσαι ἑκατέραν πυραμίδα, ἧς τε βάσις τὸ ΑΒΓ τρίγων<ον> καὶ ἧς βάσις τὸ ΔΕΖ κορυφὴ δὲ τὸ Η σημεῖον
καὶ τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν ἀποφαίνεσθαι ἴσην εἶναι τῷ ζητουμένῳ στερεῷ.

Παρατηρήσεις

I. Το Πρόβλημα συνοδεύεται από ένα εγγράμματο διάγραμμα.

II. Το Πρόβλημα χωρίζεται σε δύο διακριτές ενότητες:

Α. Πρώτη κειμενική ενότητα:

1. Η "*Πρότασις*" και ο "*Διορισμός*" του σχήματος του Πρόκλου διατυπώνονται σε μία πρόταση, στην οποία ζητείται να ευρεθεί το στερεό μια κόλουρης πυραμίδας με βάσεις τρίγωνα.

2. Στην "*Ἔκθεσιν*" ανιχνεύεται η συνθήκη, δηλαδή παρουσιάζονται τα δοθέντα του Προβλήματος χωρίς, όμως, να εκχωρούνται σε αυτά αριθμητικές τιμές.

3. Επίλυση του Προβλήματος

Η διαδικασία αρχίζει να εκτυλίσσεται από το "Υποθετικό μέρος" της ανάλυσης, στο οποίο ο Ήρων, με μια σειρά κατασκευαστικών βημάτων, των (K_1), (K_2), και ισχυρισμών που εκτυλίσσονται με παραγωγικό τρόπο και αιτιολογούνται από Προτάσεις των *Στοιχείων*, των ($Υ_1$), ($Υ_2$), πραγματοποιεί νοητικά άλματα, που οδηγούν στο παρακάτω επιχείρημα: την αναλογία "ΒΓ:ΕΖ::ΓΗ:ΗΖ::ΘΗ:ΗΚ", δηλαδή την αναλογία " ΒΓ:ΕΖ::ΘΗ:ΗΚ" ($Υ_3$), όπου ΒΓ, ΕΖ οι πλευρές των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ, και ΘΗ, ΗΚ οι κάθετοι, από το σημείο Η, στα επίπεδα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ, αντίστοιχα. Το επιχείρημα ($Υ_3$) σηματοδοτεί το τέλος του "Υποθετικού μέρους" και αποτελεί το σημείο εκκίνησης του "Βεβαιωτικού μέρους", από το οποίο, με μια σειρά παραγωγικών συμπερασμών, θα επικυρωθούν στη γλώσσα των *δεδομένων* τα παρακάτω: **α)** "ΒΓ:ΕΖ" δοθείς ($Β_1$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από το ότι οι πλευρές ΑΒ και ΕΖ είναι δοθείσες και από την Πρόταση 1 των *Δεδομένων*, **β)** "ΗΘ:ΗΚ" δοθείς ($Β_2$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από τον Ορισμό 2 των *Δεδομένων*, **γ)** "(ΗΘ—ΗΚ):ΗΚ", δηλαδή "ΘΚ:ΗΚ" ($Β_3$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από τη σύζευξη των Προτάσεων 5 και 8 των *Δεδομένων*, **δ)** και εφόσον "ΘΚ δοθείσα" ($Β_4$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από τα δοθέντα του Προβλήματος, **ε)** "ΚΗ δοθείσα" ($Β_5$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από την Πρόταση 2 των *Δεδομένων*, **στ)** "ΗΘ δοθείσα" ($Β_6$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από την Πρόταση 3 των *Δεδομένων*, **ζ)** "η πυραμίδα με βάση το τρίγωνο ΑΒΓ δοθείσα" ($Β_7$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από το Πρόβλημα ΙΙ.5 των *Μετρικών*, **η)** "η πυραμίδα με βάση το τρίγωνο ΔΕΖ δοθείσα" ($Β_8$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από το Πρόβλημα ΙΙ.5 των *Μετρικών* και, **η)** "η κόλουρη πυραμίδα με βάσεις τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ δοθείσα" ($Β_9$), ισχυρισμός που αιτιολογείται από την Πρόταση 4 των *Δεδομένων.*

Ο γεωμετρικός "λόγος"

Τα αντικείμενα που εμπλέκονται στον γεωμετρικό "λόγο" είναι: **α)** σημεία, **β)** πλευρές, **γ)** τρίγωνα, **δ)** πυραμίδες και, **ε)** κόλουρη πυραμίδα.

Τα γλωσσικά χαρακτηριστικά του, όσον αφορά στη γραμματική και συντακτική δομή του Προβλήματος, είναι: **α)** σύνδεση παρατακτική, **β)** μια σειρά επιχειρημάτων ($Υ_1$), ($Υ_2$), ($Υ_3$), ($Β_1$), ($Β_2$), ($Β_3$), ($Β_4$), ($Β_5$), ($Β_6$), ($Β_7$), ($Β_8$),($Β_9$), τα οποία είτε εισάγονται με τη χρήση των συμπερασματικών συνδέσμων "*ἄρα*" και "*ὥστε*" είτε χωρίς τη χρήση οποιουδήποτε συμπερασματικού συνδέσμου, **γ)** η αιτιολογία των επιχειρημάτων είτε είναι άμεση και εισάγεται με τον αιτιολογικό σύνδεσμο "*ἐπεί*" είτε είναι έμμεση και πραγματοποιείται με τη χρήση γεωμετρικών στοιχείων, που προέρχονται από τα δοθέντα του Προβλήματος ή και από συμπερασμούς επιχειρημάτων που έχουν προηγηθεί, **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στα κατασκευαστικά βήματα (K_1) και (K_2) είναι γ′ πρόσωπο, προστακτικής ενικού ή πληθυντικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου

και φωνής μέσης, **ε)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο "Υποθετικό μέρος" είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής, ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα ή μέλλοντα και φωνής ενεργητικής και, **στ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο "Βεβαιωτικό μέρος" είναι γ΄ πρόσωπο οριστικής, ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα και φωνής ενεργητικής, καθώς και γ΄ πρόσωπο οριστικής, ενικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου και φωνής μέσης.

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, ο γεωμετρικός "λόγος" του παραπάνω Προβλήματος αποτελείται από δύο μέρη: το "Υποθετικό μέρος" και το "Βεβαιωτικό μέρος". Αναλυτικότερα:

Στο "Υποθετικό μέρος" ο Ήρων ανάγει την εύρεση του όγκου της κόλουρης πυραμίδας στην εύρεση του όγκου δύο πυραμίδων, των οποίων η διαφορά είναι ισοδύναμη με τη ζητούμενη κόλουρη πυραμίδα. Σε αυτήν τη στόχευση υπακούουν τόσο τα κατασκευαστικά βήματα (K_1) και (K_2) όσο και τα αποδεικτικά επιχειρήματα ($Υ_1$), ($Υ_2$) και ($Υ_3$). Η ομάδα αυτών των Προτάσεων αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη της ομάδας των Προτάσεων (B_1), (B_2), (B_3), (B_4), (B_5), (B_6), (B_7), (B_8) και (B_9), που αποτελούν το " Βεβαιωτικό μέρος" του Προβλήματος. Πρόκειται για εκείνη την ομάδα συμπερασμών που προκύπτει, με εφαρμογή Ορισμών και Θεωρημάτων από τα *Δεδομένα* του Ευκλείδη, σε γεωμετρικά στοιχεία του Προβλήματος και εκτυλίσσεται με τη μορφή παραγωγικού/ αποδεικτικού λόγου. Στόχος του "Βεβαιωτικού μέρους" είναι η βεβαίωση της δυνατότητας επίλυσης του Προβλήματος και, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, ο γεωμετρικός "λόγος", που αναπτύσσεται στο "Βεβαιωτικό μέρος", εκτείνεται μέχρι να ευρεθεί/δειχτεί ότι το ζητούμενο εμβαδόν της κόλουρης πυραμίδας είναι "δοθέν", δηλαδή η εκτύλιξη του "Βεβαιωτικού μέρους" παρέχει, ολοκληρωμένα και με επάρκεια, τη δυνητική επίλυση του Προβλήματος.

Η διαδικασία υπολογισμού καταγράφεται στην 2η ενότητα του Προβλήματος.

Β. Δεύτερη κειμενική ενότητα:

Περιγράφει τη διαδικασία υπολογισμού, η οποία θα πρόκυπτε αν είχαν εκχωρηθεί, είτε κατά την "*Έκθεσιν*" είτε στην αρχή της "*Σύνθεσης*", αριθμητικές τιμές στα δοθέντα γεωμετρικά στοιχεία του Προβλήματος, οι οποίες θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να αναπτυχθεί μια αλληλουχία αριθμητικών πράξεων. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, η διαδικασία που περιγράφεται είναι συνοπτική, δεν ακολουθεί παράλληλα την εκτύλιξη του "Βεβαιωτικού μέρους", αλλά επισημαίνει, μόνο τα κύρια σημεία της διαδικασίας, παραλείποντας αναφορές σε επιμέρους πράξεις.

Στιλιστικά χαρακτηριστικά

1. Αναγγελία της διαδικασίας

Εισάγεται με το " *συντεθήσεται δὴ οὕτως*".

2. Η διαδικασία υπολογισμού δεν εφαρμόζεται σε συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα, επομένως καμία πράξη δεν εκτελείται.

3. Στη διαδικασία υπολογισμού καταγράφονται τα παρακάτω γεωμετρικά αντικείμενα: α) το σημείο Η, β) πλευρές ΘΚ, ΒΓ, ΕΖ, ΚΗ, ΘΗ και, γ) οι πυραμίδες με βάση τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ

4. Διατύπωση των πράξεων

Κατά τη δήλωση των πράξεων χρησιμοποιείται το απρόσωπο ρήμα "*δεῖ* " συνοδευόμενο από β΄ πρόσωπο προστακτικής ενικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής μέσης, του ρήματος "*ποιοῦμαι*", από μετοχή γενικής ενικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*προστίθημι*", και από β΄ πρόσωπο προστακτικής ενικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής μέσης, του ρήματος "*μετροῦμαι*" ("*δεῖ* …*ποιῆσαι*…*προστεθείσης*…*μετρῆσαι*"). Επίσης, χρησιμοποιείται μετοχή ονομαστικής πληθυντικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*μετρῶ* " ("*μετρήσαντες*").

5. Δήλωση των πράξεων

5.1 Στην πρόσθεση χρησιμοποιείται το ρήμα: "*προστίθημι* " ("*προστεθείσης*").

5.2 Για την αναλογία χρησιμοποιείται το ρήμα " *ποιῶ* " και κατόπιν ακολουθούν οι λόγοι. Η ισότητα των λόγων δηλώνεται με το επίρρημα "*ὡς* " και ο πρώτος λόγος, για να ακολουθήσει ο δεύτερος λόγος. Το επίρρημα "*οὕτω(ς)*", που προηγείται του δεύτερου λόγου, στη συγκεκριμένη περίπτωση παραλείπεται)

6. Αναγγελία αποτελέσματος

Δεν καταγράφονται αναγγελίες αποτελεσμάτων, από τη στιγμή που δεν εκτελούνται πράξεις.

Παρατήρηση

Την ίδια ακριβώς δομή μπορούμε να καταγράψουμε και στο Πρόβλημα ΙΙ.10.

4.3.5 Παραδείγματα προβλημάτων που επιλύονται με ανάλυση: Τρίτη περίπτωση

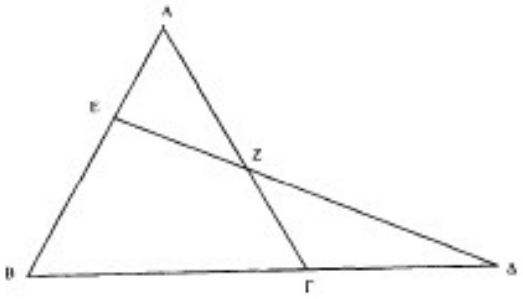
Πρόκειται για μια ομάδα Προβλημάτων που έχει ως αντικείμενο: i) τη διαίρεση επίπεδων σχημάτων σε δύο μέρη, υπό δοθέντα λόγο, από ευθεία που διέρχεται

από δοθέν σημείο (Προβλήματα ΙΙΙ.10, ΙΙΙ.11, ΙΙΙ.12, ΙΙΙ.13, ΙΙΙ.14, ΙΙΙ.15), **ii)** τη διαίρεση σφαίρας σε δύο τμήματα, υπό δοθέντα λόγο, από επίπεδο (Πρόβλημα ΙΙΙ.17), **iii)** τη διαίρεση κύκλου σε τρία ίσα μέρη, από δύο ευθείες (Πρόβλημα ΙΙΙ.18), **iv)** τη διαίρεση τριγώνου σε τρία ίσα τρίγωνα, από ευθείες που διέρχονται από σημείο που βρίσκεται στο εσωτερικό του (Πρόβλημα ΙΙΙ.19). Η επίλυση των παραπάνω Προβλημάτων επιτυγχάνεται με γεωμετρικό τρόπο, από τη στιγμή που οποιαδήποτε αριθμητική διαίρεση αυτών δεν είναι δυνατή. Κατά την ανάπτυξη, λοιπόν, της διαδικασίας επίλυσης, καταγράφονται τα παρακάτω: **α)** προφανώς, δεν εκχωρούνται αριθμητικές τιμές στα δοθέντα του εκάστοτε Προβλήματος, επομένως, **β)** μετά την "*Πρότασιν*" ή την "*Ἔκθεσιν*", ακολουθεί ένας αμιγής γεωμετρικός "λόγος", στον οποίο διακρίνεται με σαφήνεια ο διαχωρισμός σε " Υποθετικό- Βεβαιωτικό μέρος". Η δυνητική επίλυση του κάθε Προβλήματος που επιτυγχάνεται, κατά την ανάπτυξη του "Βεβαιωτικού μέρους", κατοχυρώνει τη δυνατότητα είτε **γ1)** να αναχθεί το Πρόβλημα σε γνωστή κατασκευή είτε **γ2)** να δοθεί η περιγραφή της διαδικασίας κατασκευών, με τις οποίες ολοκληρώνεται η επίλυση.

Παρακάτω θα παραθέσουμε δύο Προβλήματα από τις προαναφερθείσες υποκατηγορίες **γ1)** και **γ2)** αντίστοιχα, το Πρόβλημα ΙΙΙ.10, του οποίου η τελική επίλυση ανάγεται σε γνωστή κατασκευή και το Πρόβλημα ΙΙΙ.11, του οποίου η διαδικασία επίλυσης δύναται να δοθεί περιγραφικά.

Σχετικά με τον τρόπο παρουσίασης των υπό εξέταση Προβλημάτων: **α)** δίνονται τα διαγράμματα που τα συνοδεύουν, **β)** ακολουθεί η διαίρεση των Προβλημάτων σε μέρη, με βάση το σχήμα του Πρόκλου.

Πρόβλημα ΙΙΙ.10



Διαίρεση σε μέρη	**Γεωμετρικός "λόγος"**	**Ορολογία *Δεδομένων***
Ἔκθεσις & *Διορισμός*	Ἔστω τριγώνου δοθέντος τοῦ ΑΒΓ καὶ ἐκβληθείσης αὐτοῦ μιᾶς πλευρᾶς τῆς ΒΓ ἀπὸ δοθέντος τοῦ Δ	

	διαγαγεῖν τὴν ΔΕ διαιροῦσαν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐν λόγῳ δοθέντι.	ΑΕΖ: ΖΕΒΓ δοθείς ∴(ΑΕΖ+ΖΕΒΓ):ΑΕΖ δοθείς ∴ ΑΒΓ:ΑΕΖ δοθείς ΑΒΓ δοθέν ∴ ΑΖΕ δοθέν Δ δοθέν
	γεγονέτω.	
Υποθετικό μέρος & Βεβαιωτικό μέρος	*Ἀπόδειξις*	
	(B_1) ἐπεὶ οὖν λόγος ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ τριγώνου πρὸς τὸ ΖΕΒΓ τετράπλευρον, συνθέντι λόγος ἄρα τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὸ ΑΖΕ· Εφαρμογή στα *Στ.* V.18 της Πρότασης (*Δ.* 6)	
Βεβαιωτικό μέρος	(B_2) καὶ ἔστι δοθὲν τὸ ΑΒΓ·	
	(B_3) δοθὲν ἄρα καὶ τὸ ΑΖΕ· (*Δ.* 2)	
	(B_4) καὶ ἔστι δοθὲν τὸ Δ.	
	εἰς δύο ἄρα θέσεις τὰς ΑΒ ΑΓ πεπερασμένας κατὰ τὸ αὐτὸ τὸ Α ἀπὸ δοθέντος τοῦ Δ διῆκταί τις εὐθεῖα χωρίον ἀποτέμνουσα δοθέν·	
	δοθέντα ἄρα τὰ Ε Ζ σημεῖα·	
	τοῦτο δὲ ἐν τῷ β΄ τῆς τοῦ χωρίου ἀποτομῆς δέδεικται· δέδεικται ἄρα τὸ προκείμενον.	

Παρατηρήσεις

I. Το Πρόβλημα συνοδεύεται από ένα εγγράμματο διάγραμμα.

II. Το Πρόβλημα χωρίζεται σε δύο ενότητες:

Α. Πρώτη κειμενική ενότητα:

1. Η "*Ἔκθεσις*" και ο "*Διορισμός*" του σχήματος του Πρόκλου διατυπώνονται σε μία πρόταση, στην οποία ζητείται να διαιρεθεί το τρίγωνο ΑΒΓ, από ευθεία που διέρχεται από σημείο Δ, σε τμήματα, υπό δοθέντα λόγο.

3. Επίλυση του Προβλήματος

Η διαδικασία επίλυσης αρχίζει με τον χαρακτηριστικό ισχυρισμό "*γεγονέτω*". Στο "Υποθετικό μέρος" της ανάλυσης μπορούμε να καταγράψουμε ένα νοητικό άλμα το οποίο, με εφαρμογή της Πρότασης V.18 των *Στοιχείων* στον λόγο "ΑΕΖ: ΖΕΒΓ", οδηγεί στον λόγο "ΑΒΓ:ΑΕΖ". Η έναρξη του "Βεβαιωτικού μέρους" τοποθετείται άμεσα και περιλαμβάνει τις εξής Προτάσεις: "ΑΒΓ:ΑΕΖ δοθείς" (B_1), ισχυρισμός που αιτιολογείται από τα δοθέντα του Προβλήματος και από την Πρόταση 6 των *Δεδομένων*, "ΑΒΓ δοθέν ως προς θέση" (B_2), ισχυρισμός που αιτιολογείται από τα δοθέντα στοιχεία του Προβλήματος, "ΑΖΕ δοθέν ως προς θέση" (B_3), ισχυρισμός που αιτιολογείται από την Πρόταση 2 των *Δεδομένων* και "Δ δοθέν ως προς θέση" (B_4), ισχυρισμός που αιτιολογείται από τα δοθέντα στοιχεία του Προβλήματος. Η εκτύλιξη και ολοκλήρωση του "Βεβαιωτικού μέρους" παρέχει τη δυνατότητα αναγωγής της ζητούμενης κατασκευής σε, ήδη, γνωστή κατασκευή της θεωρητικής Γεωμετρίας.

Ο γεωμετρικός "λόγος "

Τα αντικείμενα που χαρακτηρίζουν τον γεωμετρικό "λόγο " είναι: **α)** σημεία, **β)** πλευρές, **γ)** τρίγωνα και, **δ)** τετράπλευρο.

Τα γλωσσικά χαρακτηριστικά του, όσον αφορά στη γραμματική και συντακτική δομή του Προβλήματος, είναι: **α)** σύνδεση παρατακτική, **β)** μια σειρά επιχειρημάτων (B_1), (B_2), (B_3), (B_4), τα οποία είτε εισάγονται με τη χρήση του συμπερασματικού συνδέσμου "*ἄρα*" είτε χωρίς τη χρήση οποιουδήποτε συμπερασματικού συνδέσμου, **γ)** η αιτιολογία των επιχειρημάτων είτε είναι άμεση και εισάγεται με τον αιτιολογικό σύνδεσμο "*ἐπεί*" είτε είναι έμμεση και πραγματοποιείται με τη χρήση γεωμετρικών στοιχείων, που προέρχονται από τα δοθέντα του Προβλήματος ή και από συμπερασμούς επιχειρημάτων που έχουν προηγηθεί και, **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται είναι γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα και φωνής ενεργητικής, του ρήματος "*εἰμὶ*" ("*ἔστι*", " *ἐστὶ*").

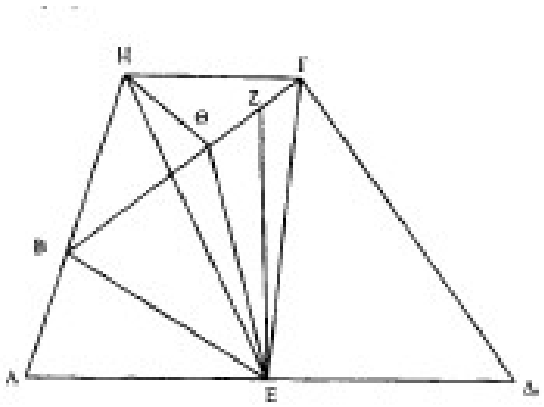
Ο γεωμετρικός "λόγος " του παραπάνω Προβλήματος αποτελείται, κυρίως, από το "Βεβαιωτικό μέρος". Αναλυτικότερα:

Στοιχεία "Υποθετικού μέρους" ανιχνεύονται στην αρχή της Πρότασης (B_1), στην οποία ο Ήρων, με εφαρμογή γνωστής Πρότασης των *Στοιχείων* σε δοθέντα στοιχεία του Προβλήματος, ανάγει τον δοθέντα λόγο δύο χωρίων σε λόγο ενός χωρίου και του δοθέντος ως προς θέση τριγώνου. Ακολουθεί η ομάδα των Προτάσεων B_1), (B_2), (B_3), (B_4), που αποτελούν το " Βεβαιωτικό μέρος" του Προβλήματος"· πρόκειται για παραγωγικούς συμπερασμούς, στη γλώσσα των *Δεδομένων*, μέσω των οποίων εξασφαλίζεται η δυνητική επίλυση του Προβλήματος.

Β. Δεύτερη κειμενική ενότητα:

Παραθέτει εκείνα τα στοιχεία που έχουν προκύψει από τη δυνητική επίλυση του Προβλήματος, τα οποία αποτελούν, ταυτόχρονα, και προαπαιτούμενα στοιχεία για την επιλογή της συγκεκριμένης κατασκευής στην οποία ανάγεται το συγκεκριμένο Πρόβλημα. Πρόκειται για: **α)** δοθέντα στοιχεία του Προβλήματος, δηλαδή τις δοθείσες, ως προς θέση, τεμνόμενες στο Α ευθείες ΒΑ, ΓΑ και το δοθέν, ως προς θέση, σημείο Δ και, **β)** στοιχεία που έχουν προκύψει από την αναλυτική διαδικασία που έχει προηγηθεί, δηλαδή το δοθέν ως προς θέση τρίγωνο ΑΕΖ.

Πρόβλημα ΙΙΙ.11



Διαίρεση σε μέρη	Γεωμετρικός "λόγος"	Ορολογία *Δεδομένων*
Έκθεσις & *Διορισμός*	Τετραπλεύρου δοθέντος τοῦ ΑΒΓΔ καὶ τμηθείσης τῆς ΑΔ κατὰ τὸ Ε διαγαγεῖν τὴν ΕΖ τέμνουσαν τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον ἐν τῷ τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΔΕ λόγῳ.	
Υποθετικό μέρος	γεγονέτω.	
	Κατασκευή	
	($Κ_1$) καὶ τῇ μὲν ΑΔ παράλληλος ἡ ΓΗ, τῇ δὲ ΕΒ ἐπιζευχθείσῃ παράλληλος ἡ ΗΘ (*Στ.* I.31)	
	($Κ_2$) καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΕ ΕΘ ΕΗ.	
	Ἀπόδειξις	
	($Υ_1$) ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗΕ τρίγωνον τῷ ΕΒΘ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΒΕ· (*Στ.* I.37) τὸ ἄρα | ΑΗΕ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒΘΕ τετραπλεύρῳ·	
	($Υ_2$) ὡς ἄρα τὸ ΑΗΕ τρίγωνον <πρὸς τὸ ΕΓΔ τρίγωνον>, τουτέστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως τὸ ΑΒΘΕ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΕΓΔ τρίγωνον. (*Στ.* VI.1& I.37)	
	Κατασκευή	
	($Κ_3$) τετμήσθω δὴ καὶ ἡ ΓΘ κατὰ τὸ Ζ	
	Ἀπόδειξις	
	($Υ_3$) ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ τὴν ΘΖ πρὸς ΖΓ, (*Στ.* VI.10)	
	($Υ_4$) τουτέστι τὸ ΕΘΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΓΖ· (*Στ.* VI.1)	
	($Υ_5$) καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΖΕ τετράπλευρον πρὸς τὸ ΕΖΔΓ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον τῷ τῆς ΑΕ πρὸς τὴν ΕΔ. (*Στ.* V.12)	

Βεβαιωτικό μέρος	(B_1) ἐπεὶ οὖν δοθὲν τὸ Γ, θέσει ἄρα καὶ ἡ ΓΗ· (*Δ*. 28)	Γ δοθέν ως προς θέση ΓΗ παράλληλη στην ΑΔ ΑΔ δοθείσα ως προς θέση ∴ ΓΗ δοθείσα ως προς θέση
	(B_2) θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΒΗ· δοθὲν ἄρα τὸ Η· (*Δ*. 25)	ΑΒΗ δοθείσα ως προς θέση ∴ Η δοθέν ως προς θέση
	(B_3) καὶ ἔστι παρὰ θέσει τὴν ΒΕ ἡ ΗΘ· (*Δ*. 28)	ΗΘ παράλληλη στη ΒΕ ΒΕ δοθείσα ως προς θέση ∴ ΗΘ δοθείσα ως προς θέση
	(B_4) δοθὲν ἄρα τὸ Θ· (*Δ*. 25)	ΗΘ δοθείσα ως προς θέση ∴ Θ δοθέν ως προς θέση
	(B_5) δοθεῖσα ἄρα ἡ ΓΘ· (*Δ*. 25)	Γ δοθέν ως προς θέση Θ δοθέν ως προς θέση ∴ ΓΘ δοθείσα ως προς θέση
	(B_6) καὶ τέτμηται ἐν δοθέντι λόγῳ κατὰ τὸ Ζ· δοθὲν ἄρα τὸ Ζ· (*Δ*. 7& 27)	ΘΖ:ΖΓ δοθείς ∴ (ΘΖ+ΖΓ):ΖΓ δοθείς ∴ ΓΘ:ΖΓ δοθείς ΓΘ δοθείσα ως προς θέση Γ δοθέν ως προς θέση ∴ ΖΓ δοθείσα ως προς θέση ∴ Ζ δοθέν ως προς θέση
	(B_7) θέσει ἄρα ἡ ΕΖ. (*Δ*. 26)	Ε δοθέν ως προς θέση Ζ δοθέν ως προς θέση ∴ ΕΖ δοθείσα ως προς θέση

δεήσει ἄρα εἰς τὴν σύνθεσιν
ἐπιζεῦξαι τὴν ΒΕ καὶ τῇ μὲν ΔΕ παράλληλον ἀγαγεῖν τὴν ΓΗ τῇ δὲ ΒΕ τὴν ΗΘ καὶ τεμεῖν τὴν ΘΓ κατὰ τὸ Ζ ὥστε εἶναι ὡς τὴν ΑΕ πρὸς ΕΔ οὕτω τὴν ΘΖ πρὸς ΖΓ.
καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΖ ποιήσει τὸ προκείμενον:—

Παρατηρήσεις

I. Το Πρόβλημα συνοδεύεται από ένα εγγράμματο διάγραμμα.

II. Το Πρόβλημα χωρίζεται σε δύο ενότητες:

Α. Πρώτη κειμενική ενότητα:

1. Η "*Ἔκθεσις*" και ο "*Διορισμός*" του σχήματος του Πρόκλου διατυπώνονται σε μία πρόταση, στην οποία ζητείται να διαιρεθεί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ σε δύο μέρη, από την ευθεία γραμμή ΕΖ που διέρχεται από το δοθέν σημείο Ε της πλευράς του ΑΔ, ώστε ο λόγος υπό τον οποίο διαιρείται το τετράπλευρο να είναι ο λόγος στον οποίον διαιρείται η ευθεία από το σημείο, δηλαδή ΑΒΖΕ:ΕΖΔΓ::ΑΕ:ΕΔ.

2. Επίλυση του Προβλήματος

Η διαδικασία επίλυσης αρχίζει με τον χαρακτηριστικό ισχυρισμό "*γεγονέτω* ". Εκτυλίσσεται από το "Υποθετικό μέρος" της ανάλυσης, από το οποίο με μια σειρά των κατασκευαστικών βημάτων (Κ1), (Κ2), (Κ3) και των ισχυρισμών (Υ1), (Υ2), (Υ3) και (Υ4), που εκτυλίσσονται με παραγωγικό τρόπο και αιτιολογούνται από Προτάσεις των *Στοιχείων*, ο Ήρων πραγματοποιεί νοητικά άλματα που οδηγούν στο παρακάτω επιχείρημα: ΑΒΖΕ:ΕΖΔΓ::ΑΕ:ΕΔ (Υ5), στο οποίο ΑΒΖΕ και ΕΖΓΔ είναι τα τετράπλευρα στα οποία διαιρείται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, από την ευθεία ΕΖ, και ΑΕ:ΕΖ είναι ο λόγος στον οποίο διαιρείται η πλευρά ΑΔ, από το σημείο Ε. Το επιχείρημα (Υ5) σηματοδοτεί το τέλος του "Υποθετικού μέρους" και αποτελεί το σημείο εκκίνησης του "Βεβαιωτικού μέρους", όπου με μια σειρά παραγωγικών συμπερασμών, των (Β1), (Β2), (Β3), (Β4), (Β5), (Β6) και (Β7) θα επικυρωθεί, τελικά, στη γλώσσα των *Δεδομένων* ότι η ευθεία ΕΖ, η οποία πληροί τις προϋποθέσεις του Προβλήματος, είναι "ως προς θέση" δοθείσα, άρα μπορεί να κατασκευαστεί. Με την ανάπτυξη και ολοκλήρωση του "Βεβαιωτικού μέρους" εξασφαλίζεται ταυτόχρονα και η δυνητική επίλυση του Προβλήματος. Όπως παρατηρούμε, ο γεωμετρικός "λόγος" που αναπτύσσεται στο "Βεβαιωτικό μέρος" είναι πλήρης και εκτείνεται μέχρι να δειχθεί ότι η ζητούμενη ευθεία ΕΖ είναι "ως προς θέση" δοθείσα, δηλαδή υπάρχει και δύναται να κατασκευαστεί.

Ο γεωμετρικός "λόγος"

Τα αντικείμενα που χαρακτηρίζουν τον γεωμετρικό "λόγο " είναι: **α)** σημεία, **β)** πλευρές, **γ)** τρίγωνα και, **δ)** τετράπλευρα.

Τα γλωσσικά χαρακτηριστικά του όσον αφορά στη γραμματική και συντακτική δομή του Προβλήματος είναι: **α)** σύνδεση παρατακτική, **β)** τα επιχειρήματα τόσο του "Υποθετικού μέρους" όσο και του "Βεβαιωτικού μέρους" εισάγονται με τους συμπερασματικούς συνδέσμους "*ἄρα*" και "*ὥστε*", **γ)** η αιτιολογία των επιχειρημάτων όταν είναι άμεση εισάγεται με τον αιτιολογικό σύνδεσμο "*ἐπεὶ* ", ενώ όταν είναι έμμεση χρησιμοποιούνται γεωμετρικά στοιχεία που προέρχονται είτε από τα δοθέντα του Προβλήματος είτε από τους συμπερασμούς επιχειρημάτων που έχουν προηγηθεί, **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο "Υποθετικό μέρος" είναι: **δ1)** στα κατασκευαστικά βήματα (Κ1), (Κ2) και (Κ3) γ′ πρόσωπο, προστακτικής ενικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου και φωνής μέσης, **δ2)** στα αποδεικτικά βήματα γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα και φωνής ενεργητικής και, **ε)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο "Βεβαιωτικό μέρος είναι γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα και φωνής ενεργητικής, καθώς και γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου και φωνής μέσης.

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, ο γεωμετρικός "λόγος" του παραπάνω Προβλήματος αποτελείται από δύο μέρη: το "Υποθετικό μέρος" και το "Βεβαιωτικό μέρος". Αναλυτικότερα:

Στο "Υποθετικό μέρος" του Προβλήματος ο Ήρων τόσο με τα κατασκευαστικά βήματα (K_1),(K_2) και (K_3) όσο και με τα αποδεικτικά επιχειρήματα (Y_1), (Y_2), (Y_3) (Y_4) και (Y_5) ανάγει την κατασκευή της ζητούμενης ευθείας, της οποίας το ένα άκρο είναι δοθέν ως προς θέση, στον προσδιορισμό της θέσης του άλλου άκρου της. Η ομάδα των Προτάσεων (Y_1), (Y_2), (Y_3) (Y_4) και (Y_5) αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη της ομάδας των Προτάσεων (B_1), (B_2), (B_3), (B_4), (B_5), (B_6) και (B_7) που αποτελούν το "Βεβαιωτικό μέρος" του Προβλήματος. Πρόκειται για συμπερασμούς, που αποτελούνται από Θεωρήματα των *Δεδομένων*, εκτυλίσσονται με τη μορφή παραγωγικού λόγου και ολοκληρώνονται μόνο όταν βεβαιώσουν τη δυνατότητα επίλυσης του Προβλήματος.

Β. Δεύτερη κειμενική ενότητα:

Επαναλαμβάνονται τα κατασκευαστικά βήματα (K_1), (K_2) και (K_3), τα οποία τοποθετούνται στο "Υποθετικό μέρος" του Προβλήματος, και από τα οποία προκύπτει η εύρεση του ζητούμενου σημείου Z. Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι με την ανάπτυξη του "Βεβαιωτικού μέρους" του Προβλήματος ο υποθετικός χαρακτήρας των επιχειρημάτων του "Υποθετικού μέρους", άρα και των (K_1), (K_2) και (K_3), απεμπολείται. Τότε, η δυνητική επίλυση, η οποία παρέχεται κατά την εκτύλιξη του "Βεβαιωτικού μέρους", μεταφέρεται σε πραγματική λύση/κατασκευή στη "*Σύνθεση*" του Προβλήματος.

Παρατήρηση

Η γεωμετρική εύρεση ενός "δοθέντος σε θέση" σημείου επιτυγχάνεται με τη βοήθεια γεωμετρικών κατασκευών· για παράδειγμα στο Πρόβλημα III.11 των *Μετρικών*, ο γεωμετρικός προσδιορισμός του "δοθέντος σε θέση" σημείου Z πραγματοποιείται μέσω της Πρότασης VI.10 των *Στοιχείων*. Όμως, η διαδικασία που ακολουθείται στο μετρολογικό σύνταγμα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει[139], είναι διαφορετική. Πράγματι, η εύρεση ενός "δοθέντος σε θέση" σημείου ανάγεται στην εύρεση ενός "δοθέντος σε μέγεθος" κατάλληλου τμήματος, το οποίο μπορεί να αριθμητικοποιηθεί, όταν χρησιμοποιηθούν οι αριθμητικές τιμές που εκχωρούνται στα δοθέντα στοιχεία του Προβλήματος.

[139] Βλέπε προηγουμένως σελ. 122-123.

Τέλος, θα μελετήσουμε Προβλήματα στα οποία, ενώ επιλέγεται η ανάλυση ως μέθοδος επίλυσης, κατά την ανάπτυξη του "Υποθετικού-Βεβαιωτικού μέρους" αναπτύσσονται ταυτόχρονα δύο "λόγοι": ο γεωμετρικός και ένας αριθμο-γεωμετρικός, ο οποίος στα περισσότερα Προβλήματα κατέχει τον κυρίαρχο ρόλο και, όπως είναι αναμενόμενο, οδηγεί στην αριθμητική επίλυση του Προβλήματος.

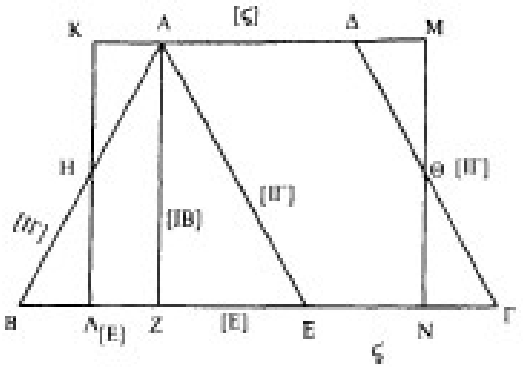
4.3.6 Παραδείγματα Προβλημάτων που επιλύονται με ανάλυση: Τέταρτη περίπτωση

Περιέχει εκείνα τα Προβλήματα των *Μετρικών* στα οποία παρατηρούνται τα παρακάτω: **α)** ο αριθμο-γεωμετρικός "λόγος" εμφανίζεται κατά την "*Έκθεσιν*" του Προβλήματος, όταν εκχωρούνται οι αριθμητικές τιμές στα δοθέντα αυτού, **β)** διακρίνεται με σαφήνεια το "Υποθετικό μέρος" της αναλυτικής διαδικασίας, το οποίο εκτυλίσσεται με τη μορφή ενός αυστηρά αμιγούς γεωμετρικού "λόγου", όμως, **γ)** κατά την ανάπτυξη του "Βεβαιωτικού μέρους" η ορολογία των *Δεδομένων* απουσιάζει ή εμφανίζεται σποραδικά, αντίθετα, **δ)** εμφανίζεται μια αλληλουχία επιχειρημάτων με τη μορφή ενός αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" με την οποία αναπτύσσεται και ολοκληρώνεται η αριθμητική επίλυση του Προβλήματος, τότε, **ε)** η υπολογιστική διαδικασία που ακολουθεί στη "*Σύνθεσιν*" περιέχει μόνο αριθμητικές πράξεις, με τις οποίες επαναλαμβάνεται η αριθμητική επίλυση που έχει προηγηθεί.

Αμέσως μετά θα παρουσιάσουμε το Πρόβλημα Ι.11 των *Μετρικών*, στο οποίο πραγματοποιείται η μέτρηση του εμβαδού ενός ισοσκελούς τραπεζίου.

Σχετικά με τον τρόπο παρουσίασης τού υπό εξέταση Προβλήματος: **α)** δίνεται το διάγραμμα που το συνοδεύει, **β)** ακολουθεί η διαίρεση του Προβλήματος σε μέρη, με βάση το σχήμα του Πρόκλου.

Πρόβλημα Ι.11



Διαίρεση σε μέρη	Γεωμετρικός "λόγος"	αριθμό-γεωμετρικός "λόγος"	Αντίστοιχες πράξεις
Ἔκθεσις συνθήκη *αριθμητικές τιμές των δοθέντων*	Ἔστω τραπέζιον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓΔ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ καὶ ἑκατέρα αὐτῶν ἔστω μονάδων ιγ ἡ δὲ ΑΔ μονάδων ς ἡ δὲ ΒΓ μονάδων ις.		
Διορισμός	εὑρεῖν αὐτοῦ τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὴν κάθετον.		
Κατασκευή	($Κ_1$) ἤχθω τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΑΕ (*Στ.* Ι.31) ($Κ_2$) καὶ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΑΖ. (*Στ.* Ι.12)		
Ἀπόδειξις	**Υποθετικό μέρος Α′**		
	($Υ_1$) παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΕΓΔ· (*Ὁρισμοί* νς′)		
	($Υ_2$) ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΔ τῇ ΕΓ ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΑΕ·		
	Βεβαιωτικό μέρος Α′		
	Υποδηλώνονται οι παρακάτω γεωμετρικές Προτάσεις: ($Β_1$) ΓΔ δοθεῖσα ἄρα ΑΕ δοθεῖσα (*Δ.* Ορ.1) ($Β_2$) ΑΔ δοθεῖσα ἄρα ΑΕ δοθεῖσα (*Δ.* Ορ.1)	($Μ_1$) ὥστε ἔσται ἡ μὲν ΑΕ μονάδων ιγ ἡ δὲ ΕΓ μονάδων ς·	13 6
	($Β_3$) ΒΓ δοθεῖσα, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ δοθεῖσα (*Δ.* 4)	($Μ_2$) λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΕ μονάδων ι.	16 16−6→10
	($Β_4$) ἐπεὶ οὖν ἰσοσκελές ἐστι τὸ ΑΒΕ τρίγωνον ἔχον ἑκάστην πλευρὰν δοθεῖσαν, ἔσται ἄρα καὶ ἡ ΑΖ κάθετος δοθεῖσα· Υποδηλώνονται τα παρακάτω: α)Εφαρμογή στις Προτάσεις (*Στ.* Ι.5&26), της Πρότασης (*Δ.* 2). β) διαδοχική εφαρμογή στα *Στ.* Ι.47 των γεωμετρικών Προτάσεων: (*Δ.* 52), (*Δ.* 4), (*Δ.* Ορ.1), (*Δ.* 55).	($Μ_3$) καὶ ἔσται μονάδων ιβ, ὡς προδέδεικται.	10×½→5 5×5→25 13×13→169 169−25→144 √144→12
	Υποθετικό μέρος		
	($Κ_3$) τετμήσθωσαν δὴ δίχα αἱ ΑΒ ΓΔ τοῖς Η Θ καὶ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ <ἤχθωσαν> αἱ ΚΗΛ ΜΘΝ. (*Στ.* Ι.10&12)		
	($Υ_3$) ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ΑΚΗ τρίγωνον τῷ ΒΗΛ, τὸ δὲ ΔΜΘ τῷ ΓΝΘ· (*Στ.* Ι.15&26)		
	($Υ_4$) ὥστε κοινοῦ προστεθέντος τοῦ ΑΗΛΝΘΔ ἐξαπλεύρου ἴσον ἔσται τὸ ΚΛΜΝ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓΔ τραπεζίῳ. (*Στ.* Κ.Ε.2)		
	($Υ_5$) καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΚ τῇ ΒΛ ἡ δὲ ΔΜ τῇ ΓΝ, αἱ ἄρα ΑΚ ΔΜ ἴσαι εἰσὶν ταῖς ΒΛ ΝΓ· (*Στ.* Κ.Ε.2)		

	($Υ_6$) κοινῶν προστεθεισῶν τῶν ΑΔ ΛΝ ἔσται συναμφότερος ἡ ΚΜΛΝ, τουτέστι δύο αἱ ΚΜ, συναμφοτέρῳ τῇ ΑΔ ΒΓ ἴση· (*Στ.* Κ.Ε.2)		
	Βεβαιωτικό μέρος		
	($Β_5$) καὶ ἔστι δοθεῖσα συναμφότερος ἡ ΑΔ ΒΓ· (*Δ.* 3)	($Μ_4$) ἔστι γὰρ μονάδων κβ· Παρατήρηση, η οποία καθιστά σαφή τη σχέση μεταξύ του δοθέντος και μιας καλά καθορισμένης τιμής	6 16 6+16→22
	Ὑποδηλώνονται οι παρακάτω γεωμετρικές Προτάσεις: ($Β_6$) δύο αἱ ΚΜ δοθεῖσαι (*Δ.* Ορ.1)	($Μ_5$) ἔσονται ἄρα καὶ αἱ δύο αἱ ΚΜ μονάδων κβ·	22
	($Β_7$) ἄρα ἡ ΚΜ δοθεῖσα (*Δ.* 2)	($Μ_6$) <αὐτὴ ἄρα ἡ ΚΜ> μονάδων ια·	22×½→11
	Ὑποδηλώνονται η παρακάτω γεωμετρική Πρόταση: ($Β_8$) ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΛ δοθεῖσα ἴση γάρ ἐστι τῇ Α <Ζ· (*Δ.* Ορ.1)	($Μ_7$) ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΛ μονάδων ιβ·	12
	Ὑποδηλώνονται τα παρακάτω: ($Β_9$) τὸ ἄρα ΚΛΝΜ> παραλληλόγραμμον δοθέν Εφαρμογή στο πρόβλημα *Μ.* Ι.1 της γεωμετρικής Πρότασης (*Δ.* 52)	($Μ_8$) τὸ ἄρα ΚΛΝΜ> παραλληλόγραμμον ἔσται μονάδων ρλβ·	11×12→132
	($Β_{10}$) καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ τραπεζίῳ· Ὑποδηλώνεται η γεωμετρική Πρόταση ΑΒΓΔ τραπέζιον δοθέν (*Δ.* Ορ.1)	($Μ_9$) ἔσται ἄρα καὶ τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον μονάδων ρλβ.	

	συντεθήσεται δὲ ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει οὕτως.
16—6→10	ἄφελε ἀπὸ τῶν ις τὰς ς· γίγνονται λοιπαὶ ι·
10×½→5	τούτων τὸ ἥμισυ· ε·
5×5→25 13×13→169 169—25→144 √144→12	καὶ ταῦτα ἑφ᾽ ἑαυτά· γίγνονται κε. καὶ τὰ ιγ ἑφ᾽ ἑαυτά· γίγνονται ρξθ· ἄφελε τὰ κε· λοιπὰ ρμδ· τούτων πλευρὰ· γίγνεται <ιβ>. ἔσται ἡ κάθετος μονάδων ιβ.
16+6→22	τὸ δὲ ἐμβαδὸν οὕτως. σύνθες τὰ ις καὶ τὰ ς· γί|νονται κβ·
22×½→11	ὧν ἥμισυ· γίγνονται ια·
11×12→132	<ταῦτα> ἐπὶ τὴν κάθετον· γίγνεται ρλβ. τοσούτων ἔσται τὸ ἐμβαδόν.

Παρατηρήσεις

I. Το Πρόβλημα συνοδεύεται από ένα μεικτό-εγγράμματο και αριθμητικό-διάγραμμα.

II. Τα Πρόβλημα χωρίζεται σε δύο διακριτές ενότητες:

Α. Πρώτη κειμενική ενότητα:

1. Η "*Πρότασις*" του σχήματος του Πρόκλου έχει παραλειφθεί.

2. Στην "*Έκθεσιν*" ανιχνεύονται: **α)** η συνθήκη και **β)** οι αριθμητικές τιμές των δοθέντων.

3. Ακολουθεί ο "*Διορισμός*" στον οποίο ζητούνται να βρεθούν αριθμητικά μεγέθη: **α)** το εμβαδόν του τραπεζίου που έχει περιγραφεί στην "*Έκθεσιν*" και **β)** η κάθετος ΑΔ.

4. Επίλυση του Προβλήματος

4.1 Για την εύρεση της καθέτου: Η διαδικασία αρχίζει να εκτυλίσσεται από το "Υποθετικό μέρος Α′" της ανάλυσης, όπου ο Ήρων κατασκευάζει: **α)** την ευθεία ΑΕ παράλληλη προς την πλευρά ΓΔ (K_1) και, **β)** την ευθεία ΑΖ κάθετη πάνω στην πλευρά ΒΓ (K_2). Με αυτά τα δύο κατασκευαστικά βήματα ο Ήρων πραγματοποιεί το πρώτο νοητικό του άλμα, από το οποίο προκύπτει: "το τετράπλευρο ΑΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο" (Y_1), επιχείρημα που αιτιολογείται από τους *Ὁρισμούς* νς′ και οδηγεί στις παρακάτω ισότητες: "ΑΔ = ΕΓ & ΓΔ = ΑΕ" (Y_2), με τις οποίες σηματοδοτείται το τέλος του "Υποθετικού μέρους Α′", αλλά όχι το τέλος της ανάλυσης. Με σημείο εκκίνησης το επιχείρημα (Y_2), και ενώ αναμένεται η εκτύλιξη μιας σειράς έγκυρων παραγωγικών συλλογισμών στη γλώσσα των *Δεδομένων*, ακολουθεί ένας αριθμο-γεωμετρικός "λόγος", ο οποίος αναπτύσσεται με βάση τις αριθμητικές τιμές που εκχωρούνται, κατά την "*Έκθεσιν*", στα δοθέντα του Προβλήματος. Με την ανάπτυξη αυτού του αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" αποκτώνται οι αριθμητικές τιμές των πλευρών ΑΕ και ΕΓ, για να ακολουθήσει και η αριθμητική τιμή της πλευράς ΒΕ, η οποία προκύπτει με αφαίρεση της πλευράς ΕΓ από την πλευρά ΒΓ. Με σημείο εκκίνησης τον ισχυρισμό, "τρίγωνο ΑΒΕ ισοσκελές", ο οποίος προκύπτει από τις ισότητες "ΑΒ = ΓΔ" (πλευρές του ισοσκελούς τραπεζίου) και "ΓΔ = ΑΕ" (Y_1), θα ακολουθήσει, στη γλώσσα των *Δεδομένων*, μια αλληλουχία δηλωμένων και υποδηλωμένων παραγωγικών συλλογισμών, η οποία θα καταλήξει στο επιχείρημα "το ύψος ΑΖ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΕ είναι δοθέν" (B_4), το οποίο αιτιολογείται από την υποδηλωμένη εφαρμογή της Πρότασης 2 των *Δεδομένων* στις Προτάσεις Ι.5&26 των *Στοιχείων*, καθώς και τη διαδοχική υποδηλωμένη εφαρμογή των Προτάσεων 52, 4, Ορισμού 1 και 55 των *Δεδομένων* στη γεωμετρική Πρόταση Ι.47 των *Στοιχείων*. Με την εκχώρηση των αριθμητικών τιμών στις αντίστοιχες πλευρές και λαμβάνοντας υπόψη τη διαδικασία εύρεσης που έχει προηγηθεί στο Πρόβλημα Ι.5 των *Μετρικών*, καταγράφεται, με τη μορφή αριθμο-γεωμετρικού "λόγου", η αριθμητική τιμή της πλευράς ΑΖ.

4.2 Για την εύρεση του εμβαδού: Θα ακολουθήσει το "Υποθετικό μέρος Β'" της ανάλυσης, όπου ο Ήρων κατασκευάζει: **α)** τα μέσα Η και Θ των πλευρών ΑΒ, ΓΔ (K_3)και, **β)** τις ευθείες ΚΗΛ και ΜΘΝ κάθετες στην πλευρά ΒΓ (K_4). Με αυτά τα δύο κατασκευαστικά βήματα ο Ήρων πραγματοποιεί το δεύτερο νοητικό του άλμα, το οποίο θα οδηγήσει στα: **γ)** "τρίγωνο (ΑΚΗ) = τρίγωνο (ΒΗΛ) & τρίγωνο (ΔΜΘ) = τρίγωνο (ΓΝΘ)" ($Υ_3$), επιχείρημα που αιτιολογείται από τη σύζευξη των γεωμετρικών Προτάσεων Ι.15&26 των *Στοιχείων* και, **δ)** με κοινή πρόσθεση του εξάπλευρου ΑΗΛΝΘΔ στα μέλη των ισοτήτων του επιχειρήματος ($Υ_3$), διαδικασία που αιτιολογείται από την Κοινή Έννοια 2 των *Στοιχείων*, προκύπτει το επιχείρημα "παραλληλόγραμμο (ΚΛΜΝ) = τραπέζιο (ΑΒΓΔ)" ($Υ_4$). Από το επιχείρημα ($Υ_3$) προκύπτουν οι ισότητες "ΑΚ = ΒΛ & ΔΜ = ΝΓ ", οι οποίες, αν προστεθούν, κατά μέλη, θα δώσουν το επιχείρημα "ΑΚ + ΔΜ = ΒΛ + ΝΓ" ($Υ_5$), επιχείρημα που αιτιολογείται από την Κοινή Έννοια 2 των *Στοιχείων*. Στη συνέχεια, με πρόσθεση των ΑΔ και ΛΝ στα μέλη της ισότητας του επιχειρήματος ($Υ_6$), διαδικασία που αιτιολογείται, πάλι, από την Κοινή Έννοια 2 των *Στοιχείων*, θα προκύψει το επιχείρημα "ΚΜ + ΛΝ = ΑΔ + ΒΓ", δηλαδή "2ΚΜ = ΑΔ + ΒΓ "($Υ_6$), με το οποίο σηματοδοτείται το τέλος του "Υποθετικού μέρους Β'". Στη συνέχεια θα ακολουθήσει ένα και μοναδικό επιχείρημα στη γλώσσα των *Δεδομένων*, συγκεκριμένα το "ΑΔ + ΒΓ δοθείσα" ($Β_5$), επιχείρημα που αιτιολογείται από την επιλογή της Πρότασης 3 των *Δεδομένων*. Αμέσως μετά, και αφού εκχωρηθούν οι αριθμητικές τιμές στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ, καταγράφεται ένας αριθμο-γεωμετρικός "λόγος", ο οποίος οδηγεί στην αριθμητική επίλυση του Προβλήματος. Συγκεκριμένα: **i)** υπολογίζεται αριθμητικά το ΑΔ + ΒΓ, δηλαδή το 2ΚΜ, **ii)** η ΚΜ δίνεται, **iii)** η ΚΛ υπολογίζεται αριθμητικά και, **iv)** το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΚΛΝΜ, δηλαδή το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ, υπολογίζεται αριθμητικά.

Ο γεωμετρικός "λόγος "

Ο γεωμετρικός "λόγος", όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, χαρακτηρίζεται από τα παρακάτω γεωμετρικά αντικείμενα: **α)** τα σημεία Η και Θ, **β)** οι πλευρές ΑΒ, ΓΔ, ΑΔ, ΒΓ, ΑΕ, ΑΖ, ΕΓ, ΒΕ, ΑΖ, ΚΗΛ, ΜΘΝ, ΑΚ, ΒΛ, ΔΜ, ΓΝ, ΛΝ, ΚΜ, **γ)** τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΚΗ, ΒΗΛ, ΔΜΘ, ΓΝΘ, **δ)** τα παραλληλόγραμμα ΑΕΓΔ, ΚΛΜΝ, **ε)** το τραπέζιο ΑΒΓΔ και, **στ)** το εξάπλευρο ΑΗΛΝΘΔ.

Γλωσσικά χαρακτηριστικά

Όσον αφορά στη γραμματική και συντακτική δομή του Προβλήματος, καταγράφονται τα παρακάτω χαρακτηριστικά: **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** τα επιχειρήματα ($Υ_1$), ($Υ_2$), ($Υ_3$), ($Υ_5$), ($Β_4$) εισάγονται με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*άρα*", το ($Υ_4$) εισάγεται με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ώστε*", ενώ

τα ($Υ_6$), ($Β_5$) εισάγονται χωρίς τη χρήση συμπερασματικών συνδέσμων, **γ)** η αιτιολογία των επιχειρημάτων ($Υ_1$), ($Υ_2$), ($Υ_3$), ($Υ_4$), ($Υ_6$) και ($Β_5$) είναι έμμεση και πραγματοποιείται με τη χρήση γεωμετρικών στοιχείων, τα οποία προέρχονται, είτε από τα δοθέντα του Προβλήματος, είτε από τα κατασκευαστικά βήματα που έχουν προηγηθεί ή, ακόμη, από συμπερασμούς επιχειρημάτων που έχουν προηγηθεί, **δ)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στο "Υποθετικό μέρος Α′&Β′" είναι: **$δ_1$)** στα κατασκευαστικά βήματα ($Κ_1$), ($Κ_2$) και ($Κ_3$) γ′ πρόσωπο, προστακτικής ενικού ή πληθυντικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου, φωνής μέσης των ρημάτων "*ἄγομαι*" ("*ἤχθω*", "*ἤχθωσαν*"), "*τέμνομαι*" ("*τετμήσθωσαν*"), **$δ_2$)** στα αποδεικτικά βήματα γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού ή πληθυντικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμὶ* " ("*ἐστὶ* " ή "*ἐστὶν* " ή "*εἰσὶν* "), γ′πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου μέλλοντα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμὶ* ("*ἔσται*"), καθώς και μετοχές παθητικού αορίστου ενικού και πληθυντικού αριθμού του ρήματος "*προστίθημι*" ("*προστεθέντος* ", "*προστεθεισῶν* ") και, **ε)** ο ρηματικός τύπος που χρησιμοποιείται στις Προτάσεις που εκφράζονται στη γλώσσα των *Δεδομένων* είναι γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού ή πληθυντικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμὶ* " ("*ἔστι* " ή "*ἐστὶν* ").

Ο αριθμο-γεωμετρικός "λόγος "

Χαρακτηρίζεται από γεωμετρικά αντικείμενα, αριθμούς και υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις.

Συγκεκριμένα:

α) τα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται είναι: **i)** οι πλευρές ΑΕ, ΕΓ, ΒΕ, ΚΜ, ΜΛ, **ii)** το παραλληλόγραμμο ΚΛΝΜ και, **iii)** το τραπέζιο ΑΒΓΔ, **β)** οι αριθμοί που καταγράφονται είναι οι αριθμητικές τιμές που προκύπτουν κατά την ανάπτυξη του Προβλήματος.

Αν εξετάσουμε τη γραμματική και συντακτική δομή του αριθμητικό-γεωμετρικού "λόγου", μπορούμε να καταγράψουμε τα παρακάτω χαρακτηριστικά: **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** τα επιχειρήματα εισάγονται στις Προτάσεις ($Μ_2$), ($Μ_5$), ($Μ_6$), ($Μ_8$) και ($Μ_9$) με τη χρήση του συμπερασματικού συνδέσμου "*ἄρα*", στην Πρόταση ($Μ_1$) με τον συμπερασματικό σύνδεσμο "*ὥστε*", στην Πρόταση ($Μ_7$) με τον αντιθετικό σύνδεσμο "*ἀλλά* " και στην Πρόταση ($Μ_4$) χωρίς τη χρήση συνδέσμου, **γ)** για την αιτιολογία του επιχειρήματος ($Μ_3$) χρησιμοποιείται ο ρηματικός τύπος "*ὡς προδέδεικται*", ενώ η αιτιολογία των υπόλοιπων επιχειρημάτων είτε παραλείπεται είτε χρησιμοποιούνται αριθμητικοί υπολογισμοί που έχουν προηγηθεί.

Η γραμματική δομή των επιχειρημάτων του αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" παρουσιάζει τη μορφή που, συνήθως, συναντάται σε αυτό το είδος, δηλαδή **i)** τα γεωμετρικά αντικείμενα που καταγράφονται βρίσκονται στη θέση του υποκειμένου της πρότασης, **ii)** ο ρηματικός τύπος δίνεται με γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού ή πληθυντικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμὶ*" ("*ἔστι*", "*ἔσονται*") ή γ′ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου μέλλοντα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμὶ*" ("*ἔσται*"), **iii)** οι αριθμοί ενέχουν τη θέση του κατηγορήματος των γεωμετρικών αντικειμένων και συνοδεύονται πάντα από το ουσιαστικό "*μονάς*" και, **iv)** οι υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις, από τις οποίες προκύπτουν τα αριθμητικά αποτελέσματα, καταγράφονται στη 2η ενότητα του Προβλήματος.

Β. Δεύτερη κειμενική ενότητα:

Περιλαμβάνει τη διαδικασία υπολογισμού, δηλαδή τις αριθμητικές πράξεις που εκτελούνται, ώστε να προκύψουν τα αριθμητικά αποτελέσματα που καταγράφονται στον αριθμητικό-γεωμετρικό "λόγο ".

Στιλιστικά χαρακτηριστικά

1. Αναγγελία της διαδικασίας

Εισάγεται με το "*συντεθήσεται δὲ ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει οὕτως*"

2. Επιλογές εκκίνησης

Οι αριθμητικές πράξεις εκτελούνται άμεσα.

3. Αλληλουχία των πράξεων που εκτελούνται ή περιγράφονται κατά την εκτύλιξη της υπολογιστικής διαδικασίας.

3.1 Η διαδικασία υπολογισμού εφαρμόζεται σε συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα και η πλειονότητα των πράξεων πραγματοποιείται.

3.2 Η υπολογιστική ροή εκτυλίσσεται ώστε να ακολουθεί ένα "μεικτό" σύστημα. Συγκεκριμένα, καταγράφονται: **α)** η πρώτη σειρά ανεξάρτητων βημάτων "*ἄφελε ἀπὸ τῶν ις τὰς ς· γίγνονται λοιπαὶ ι· τούτων τὸ ἥμισυ ε. καὶ ταῦτα ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνονται κε* ", με το αποτέλεσμα να αποθηκεύεται, **β)** το "αποθηκευμένο" αποτέλεσμα χρησιμοποιείται στη δεύτερη σειρά ανεξάρτητων βημάτων "*καὶ τὰ ιγ ἑφ΄ ἑαυτά· γίγνονται ρξθ· ἄφελε τὰ κε· λοιπὰ ρμδ· τούτων πλευρὰ· γίγνεται <ιβ>* ", με το αποτέλεσμα να αποθηκεύεται, **γ)** το "αποθηκευμένο" αποτέλεσμα χρησιμοποιείται στην τρίτη σειρά ανεξάρτητων βημάτων "*σύνθες τὰ ις καὶ τὰ ς·*

γίνονται κβ· ὧν ἥμισυ· γίγνονται ια·<ταῦτα> ἐπὶ τὴν κάθετον· γίγνεται ρλβ", με την οποία ολοκληρώνεται η αριθμητική επίλυση του Προβλήματος.

4. Διατύπωση των πράξεων

Κατά τη δήλωση των πράξεων καταγράφεται ο παρακάτω ρηματικός τύπος:

Α΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει ρήματα β΄ προσώπου, προστακτικής ενικού αριθμού, χρόνου αορίστου β' και φωνής ενεργητικής. Συγκεκριμένα, καταγράφονται: "*σύνθες*", "*ἄφελε*").

5. Δήλωση των πράξεων

5.1 Στην πρόσθεση χρησιμοποιείται το ρήμα: "*συντίθημι*" ("*σύνθες*").

5.2 Στην αφαίρεση χρησιμοποιείται το ρήμα: "*ἀφαιρέω*" ("*ἄφελε*").

5.3 Στον πολλαπλασιασμό χρησιμοποιείται η παρακάτω πρόθεση: "*ἐπὶ*" ("*ταῦτα ἐπὶ…*), με το ρήμα να υποδηλώνεται.

5.4 Στην ύψωση στο τετράγωνο χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική φράση: "*ἑφ΄ ἑαυτὰ ποιῶ*", με το ρήμα να υποδηλώνεται ("*…ἑφ΄ ἑαυτὰ*").

5.5 Στον υποδιπλασιασμό χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική φράση: "*λαμβάνω τὸ ἥμισυ*", με το ρήμα να υποδηλώνεται (" *ὧν ἥμισυ*").

5.6 Στον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας χρησιμοποιείται η παρακάτω ρηματική φράση: " *λαμβάνω πλευρὰν*", με το ρήμα να υποδηλώνεται (" *τούτων πλευρὰ*").

6. Αναγγελία αποτελέσματος

6.1 Στην πρόσθεση, στον πολλαπλασιασμό, στην ύψωση στο τετράγωνο, στον υποδιπλασιασμό και στον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας χρησιμοποιείται το ρήμα: "*γίγνομαι*" (" *γίγνεται*", "*γίγνονται*", "*γίνονται*").

6.2 Στην αφαίρεση χρησιμοποιείται η ρηματική έκφραση: "*γίγνομαι λοιπός*" ("*γίγνονται λοιπαί*"), καθώς και η αντίστοιχη έκφραση ("*λοιπά*"), με το ρήμα να υποδηλώνεται.

4.3.7 Γενικά σχόλια

1. Πριν προχωρήσουμε στην καταγραφή των σημαντικών διαφορών που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία επίλυσης του παραπάνω Προβλήματος, και γενικότερα των Προβλημάτων που κατατάσσονται σε αυτήν την υβριδική μορφή, θα ήταν χρήσιμο να επικεντρωθούμε στα κύρια χαρακτηριστικά, κυρίως, της "κλασικής" αναλυτικής διαδικασίας, καθώς και των παραλλαγών αυτής. Τότε, μπορούμε να συνοψίσουμε τα παρακάτω: **α)** στο "Υποθετικό μέρος", το οποίο αποτελεί τον δομικό λίθο της αναλυτικής διαδικασίας, παράγονται υποθέσεις, οι οποίες στη συνέχεια μπορούν να αναπτύσσονται, παραγωγικά, σε έναν αμιγή γεωμετρικό "λόγο" και, ως υποθέσεις, πρέπει να επικυρωθούν, **β)** στο "Βεβαιωτικό μέρος", συμπερασμοί μεταξύ γεωμετρικών, αποκλειστικά, αντικειμένων εκτυλίσσονται, παραγωγικά, ακολουθώντας Ορισμούς και Θεωρήματα των *Δεδομένων*, με στόχο την επικύρωση των υποθετικών επιχειρημάτων του "Υποθετικού μέρους", **γ)** η ανάπτυξη και ολοκλήρωση του "Βεβαιωτικού μέρους" υποδεικνύει τη δυνητική επίλυση του Προβλήματος, **δ)** η αριθμητική επίλυση του Προβλήματος πραγματοποιείται, όταν οι αριθμητικές τιμές, που εκχωρούνται στα δοθέντα στοιχεία του Προβλήματος, χρησιμοποιηθούν για την εκτέλεση πράξεων, οι οποίες εκτυλίσσονται ακολουθώντας, παράλληλα, τους συμπερασμούς του "Βεβαιωτικού μέρους", **ε)** παρά το γεγονός ότι η αριθμητική διαδικασία απορρέει από τα επιχειρήματα του "Βεβαιωτικού μέρους", την εκτύλιξη των οποίων ακολουθεί, κατά το μάλλον ή ήττον, αποτελεί ένα ανεξάρτητο και διακεκριμένο πεδίο, το οποίο μπορεί, σε κάποια Προβλήματα, όπως έχουμε ήδη εξετάσει, και να παραλείπεται. Τότε, η επίλυση του Προβλήματος αναπτύσσεται, πλήρως, στη δυνητική εκδοχή της, ενώ η μετάβαση στο αριθμητικό πεδίο μπορεί, είτε **i)** να αναπτύσσεται περιληπτικά, είτε **ii)** απλά να περιγράφεται, είτε **iii)** να ακολουθεί ένα συνδυασμό των περιπτώσεων i) και ii).

2. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, όμως, από τη μελέτη του Προβλήματος Ι.11, μόνο η δομή του "Υποθετικού μέρους" συνάδει με τα χαρακτηριστικά της "κλασικής" αναλυτικής διαδικασίας και των παραλλαγών της. Πράγματι, αν αναζητήσουμε τους συμπερασμούς του "Βεβαιωτικού μέρους" θα καταγράψουμε μόνο δύο Προτάσεις, τις (B_4) και (B_5), με αποτέλεσμα ο γεωμετρικός "λόγος" που εκτυλίσσεται να είναι ελλιπής και να μην οδηγεί στη δυνητική επίλυση του Προβλήματος. Στη θέση αυτού ο Ήρων παραθέτει έναν αριθμο-γεωμετρικό "λόγο", ο οποίος χαρακτηρίζεται από γεωμετρικά αντικείμενα, αριθμούς και υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις. Η ανάπτυξη και ολοκλήρωση των επιχειρημάτων του αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" παρέχει την αριθμητική επίλυση του Προβλήματος, η οποία επαναλαμβάνεται στη 2η κειμενική ενότητα.

3. Παραλλαγές του παραπάνω σχήματος μπορούμε να σημειώσουμε στα Προβλήματα Ι.12 και Ι.13, στα οποία ζητείται ο υπολογισμός του εμβαδού ενός οξυγώνιου και ενός αμβλυγώνιου τραπεζίου αντίστοιχα. Όπως μπορούμε να

παρατηρήσουμε: **α)** τα επιχειρήματα του " Υποθετικού μέρους" αναπτύσσονται παραγωγικά και διαμορφώνουν τον μοναδικό αμιγή γεωμετρικό "λόγο" τού Προβλήματος, **β)** το " Βεβαιωτικό μέρος" απουσιάζει, ολοσχερώς, δηλαδή δεν καταγράφεται ούτε ένας συμπερασμός στη γλώσσα των *Δεδομένων*, **γ)** αντίθετα, αναπτύσσεται εκείνος ο αριθμο-γεωμετρικός "λόγος" που θα επιλύσει αριθμητικά το Πρόβλημα και, **δ)** η αριθμητική διαδικασία επαναλαμβάνεται στη 2η ενότητα του Προβλήματος και εισάγεται στο Πρόβλημα Ι.12 με το "*συντεθήσεται δὲ ἀκολούθως τῇ ἀναλύσει οὕτως*", ενώ στο Πρόβλημα Ι.13 με το "*συντεθήσεται δὲ οὕτως*". Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω χαρακτηρισμοί, με τους οποίους εισάγεται η υπολογιστική διαδικασία που ακολουθείται, διασαφηνίζουν και τη μέθοδο επίλυσης που έχει προηγηθεί. Πράγματι, η απουσία του "Βεβαιωτικού μέρους" και της ορολογίας των *Δεδομένων*, με την οποία αναπτύσσεται, συγχέει τα όρια μεταξύ των δύο κύριων μεθόδων επίλυσης Προβλημάτων που ακολουθεί ο Ήρων στα *Μετρικά* : τη μέθοδο του " *ἐπιλογισμοῦ* " και τη μέθοδο "*κατὰ ἀνάλυσιν* ".

4. Τότε, όμως, προκύπτουν τα παρακάτω ερωτήματα: **α)** "νομιμοποιείται" η παράλειψη του ενός από τα δύο βασικά μέρη, του "Βεβαιωτικού μέρους", με τα οποία αναπτύσσεται η αναλυτική μέθοδος που επιλέγουμε για την ερμηνεία των Προβλημάτων των *Μετρικών*; **β)** αν ναι, τότε πώς μετατρέπονται τα επιχειρήματα που αποτελούν το "Υποθετικό μέρος" από υποθέσεις σε επιβεβαιώσεις; **γ)** οι συμπερασμοί που αναπτύσσονται με τη μορφή αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" μπορούν να διαδραματίσουν αντίστοιχο ρόλο με εκείνον που επιτελούν οι συμπερασμοί του "Βεβαιωτικού μέρους", δηλαδή μπορούν να επικυρώνουν τις υποθέσεις που παράγονται στο "Υποθετικό μέρος"; και, **δ)** είναι δυνατή, λοιπόν, η επικύρωση ενός γεωμετρικού "λόγου" με αριθμο-γεωμετρικά επιχειρήματα;

5. Στο σημείο αυτό και επιχειρώντας μια πρώτη προσέγγιση των ερωτημάτων που έχουν τεθεί θα ήταν χρήσιμο να υπενθυμίσουμε τα παρακάτω: το κατηγόρημα "*δοθέν* σε μέγεθος" το οποίο συναντάται στα *Μετρικά* Ι&ΙΙ, κατά την εύρεση εμβαδών και όγκων επιπέδων και στερεών σωμάτων, και στο οποίο ανάγεται το κατηγόρημα "*δοθέν* σε θέση", το οποίο συναντάται στα *Μετρικά* ΙΙΙ, κατά τη διαίρεση επιπέδων και στερεών σχημάτων, υπό δοθέντα λόγο, εφοδιάζεται με μια αριθμητική υποδήλωση. Πράγματι, στα Προβλήματα που αναπτύσσεται ο αριθμο-γεωμετρικός "λόγος", αριθμητικές τιμές εκχωρούνται στα δοθέντα του Προβλήματος και δύνανται να χρησιμοποιηθούν. Τότε, το "*δοθέν* σε μέγεθος" κατηγόρημα έχει ως συνέπεια την αριθμητική "παροχή" του αντικειμένου που "κατηγορείται", η οποία επιτυγχάνεται είτε μέσω ενός υπολογισμού είτε μέσω μιας κατασκευής. Με την παραπάνω παραδοχή, λοιπόν, εικάζουμε ότι είναι δυνατή η παράλειψη της αντίστοιχης ορολογίας των *Δεδομένων* και η αντικατάστασή της με έναν αριθμο-γεωμετρικό "λόγο".

6. Προς επίρρωση του παραπάνω ισχυρισμού μπορούμε να ανατρέξουμε και σε άλλα μετρολογικά κείμενα της αρχαιότητας, όπου καταγράφονται παρόμοιες διαδικασίες επίλυσης. Ένα ενδεικτικό παράδειγμα αποτελεί το 5ο Θεώρημα του V Βιβλίου της *Μεγίστης Σύνταξης* [*POO*, 1907, I, pars I, σ. 367 κ.εξ.], στο οποίο ο Πτολεμαίος υπολογίζει το μέσο απόγειο της σελήνης, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα: **α)** περιγράφει το σχετικό διάγραμμα, **β)** αναπτύσσει με παραγωγικό τρόπο υποθέσεις/ ισχυρισμούς, από τους οποίους μεταβαίνει, **γ)** στην άμεση παράθεση, υπό μορφή αριθμο-γεωμετρικού "λόγου"[140], αποτελεσμάτων, τα οποία προκύπτουν από την εκχώρηση αριθμητικών τιμών στα στοιχεία του Προβλήματος και την εκτέλεση υποδηλωμένων αριθμητικών πράξεων. Η διαδικασία αυτή αναλύεται περαιτέρω στο σχόλιο του Πάππου[141], με μια σειρά συλλογισμών, οι οποίοι πραγματοποιούνται μεταξύ γεωμετρικών μεγεθών. Οι παραπάνω συλλογισμοί ακολουθούν Ορισμούς και Θεωρήματα των *Δεδομένων* και αναπτύσσονται παράλληλα προς τους υπολογισμούς του Πτολεμαίου. Με αυτήν την ανάλυση ο Πάππος υποδεικνύει μια περισσότερο ολοκληρωμένη επίλυση του Προβλήματος παρέχοντας την, τρόπο τινά, δυνητική επίλυση του Προβλήματος, η οποία μπορεί να προηγηθεί της αντίστοιχης αριθμητικής. Όσον αφορά σε αυτήν καθαυτή τη διαδικασία, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι συλλογισμοί εκτυλίσσονται χωρίς να συνοδεύονται από τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα, μέχρι να δειχτεί ότι μια ενδιάμεση, βασική για το Πρόβλημα, ποσότητα είναι δοθείσα και από την οποία θα ακολουθήσει η αντίστοιχη αριθμητική τιμή της[142]. Αυτή η διαδικασία θα επαναληφθεί μέχρι το τελικό αποτέλεσμα.

7. Τότε, ακολουθώντας το σχόλιο του Πάππου, θα μπορούσαμε σε όλα αυτά τα Προβλήματα, που κατατάσσονται στην παραπάνω κατηγορία και εμφανίζουν αυτήν την υβριδική μορφή, να "χτίσουμε" συλλογισμούς, οι οποίοι εκφράζονται στη γλώσσα των *Δεδομένων* και αποτελούν το ενδιάμεσο στάδιο μεταξύ των επιχειρημάτων από τη μια μεριά του "Υποθετικού μέρους" και του αμιγούς γεωμετρικού "λόγου" και από την άλλη των επιχειρημάτων του αριθμο-γεωμετρικού "λόγου", τα οποία παρέχουν την αριθμητική επίλυση και από τα οποία προέρχονται αμιγείς αριθμητικές πράξεις.

---

[140] Τα χαρακτηριστικά του αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" είναι παρόμοια με εκείνα που καταγράφονται στα *Μετρικά*.

[141] "*ἀναλύσομεν τὸ ε τῆς συντάξεως θεώρημα τὸν τρόπον τοῦτον*" [*iA*, 1931, σ. 35.21-22].

[142] "… *δείκνυται δὲ τῶν ἀριθμῶν παραληφθέντων, μοιρῶν ιδ μγ οἵων ὁ ἐπίκυκλος τξ*…" [*iA*, 1931, σ. 37.10-11].

4.4 ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ "*ΕΠΙΛΟΓΙΣΜΟΥ*"

4.4.1 Εισαγωγή

Η ιστορική και φιλοσοφική έρευνα της έννοιας του "*ἐπιλογισμοῦ*" οδηγεί στον Επίκουρο και την επικούρεια σχολή, στην οποία το ουσιαστικό "*ἐπιλογισμός*" και ομόρριζες λέξεις, όπως "*ἐπιλογίζεσθαι*" "*ἐπιλόγισμα*" "*ἐπιλόγισις*" "*ἐπιλογιστικός*" "*ἀνεπιλόγιστος*" "*δυσεπιλόγιστος*", συναντώνται συχνά στα επικούρεια κείμενα και διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της επικούρειας επιστημολογίας και, γενικότερα, στη θεωρία της επικούρειας γνώσης.

Ας ξεκινήσουμε με λίγα λόγια για τη ζωή και τα έργα του Επίκουρου[143].

Η επικούρεια σχολή ιδρύεται, γύρω στο 306−305 π.Χ., στην Αθήνα από τον Επίκουρο (341−271 π.Χ.). Αποτέλεσε για πολλούς αιώνες τη μία από τις τέσσερις εδραιωμένες φιλοσοφικές σχολές της Αθήνας, μαζί με την Ακαδημία του Πλάτωνα, το Λύκειο του Αριστοτέλη και τη Στοά του Ζήνωνα. Η φιλοσοφική παράδοση της σχολής, ο επονομαζόμενος Επικουρισμός, έχει τις ρίζες της στην ελληνιστική περίοδο της αρχαιότητας. Η πρώτη γενιά διαδόχων του Επίκουρου[144], ιδιαίτερα ο Έρμαρχος ο οποίος διαδέχθηκε τον Επίκουρο στη σχολή μετά τον θάνατό του, συνέβαλαν στην εκβάθυνση της επικούρειας θεωρίας. Η ιστορικές συνθήκες, οι διαδοχικές αντιπαραθέσεις, καθώς και η φιλολογική και φιλοσοφική ιδιοσυγκρασία των συγγραφέων της επικούρειας φιλοσοφικής παράδοσης συνέβαλαν στην εξέλιξη της επικούρειας θεωρίας, στη βαθμιαία επέκταση της επιρροής της Σχολής και σε άλλες πόλεις, όπως η Αλεξάνδρεια και η Αντιόχεια, με αποκορύφωμα την επικούρεια αναγέννηση του 1ου π.Χ. αιώνα στην Ρώμη, με κύριους εκφραστές τον Φιλόδημο από τα Γάδαρα, επικούρειο φιλόσοφο και ποιητή , και τον Λουκρήτιο, Ρωμαίο ποιητή της εποχής του Κικέρωνα. Η ανθεκτικότητα της επικούρειας παράδοσης επιβεβαιώνεται τουλάχιστον μέχρι τον 2ο μ.Χ. αιώνα από τα διασωθέντα αποσπάσματα μιας

[143] Οι πληροφορίες για τη ζωή και το έργο του Επίκουρου αντλούνται, κυρίως, από τον A. A Long [Long, 1990].

[144] Οι κυριότεροι από τους πρώτους μαθητές του Επίκουρου ήταν ο Μητρόδωρος, ο Πολύαινος, οι οποίοι πέθαναν πριν από τον Επίκουρο, και ο Έρμαρχος. Στους άμεσους μαθητές του Επίκουρου συγκαταλέγεται και ο Κωλώτης, ο οποίος έδρασε παράλληλα με τον Έρμαρχο, καθώς και ο Πολύστρατος, ο οποίος διαδέχθηκε τον Έρμαρχο στη σχολή. Μετά τον Πολύστρατο αναφέρεται ως σημαντικός φιλόσοφος ο Φιλωνίδης, ενώ κατά το δεύτερο ήμισυ του 2ου π.Χ. αιώνα σημαντική δράση εμφανίζει ο Απολλόδωρος, ο επονομαζόμενος «Κηποτύραννος», μαθητής του οποίου αναφέρεται ο Ζήνων ο Σιδώνιος, ο οποίος με τη σειρά του υπήρξε δάσκαλος του Φιλόδημου από τα Γάδαρα. Σύγχρονος του Ζήνωνα του Σιδώνιου είναι και ο Δημήτριος ο Λάκων, ένας Επικούρειος του οποίου το σημαντικό συγγραφικό έργο έγινε γνωστό μετά την ανασκαφή στο Herculanum.

επιγραφής που χάραξε στα Οινόανδα, γύρω στο 200 μ.Χ., ένας γέρος που ονομάζονταν Διογένης και τα οποία αποτελούν περίληψη της διδασκαλίας του Επίκουρου.

Ο ίδιος ο Επίκουρος υπήρξε συγγραφέας ενός αξιοσημείωτου σώματος έργων, τα περισσότερα των οποίων δεν σώζονται. Όπως μας πληροφορεί, όμως, ο Διογένης Λαέρτιος στο Βιβλίο 10 του έργου του *Βίοι φιλοσόφων*, τα έργα τού Επίκουρου κάλυπταν την έκταση τριακοσίων κυλίνδρων [Βιβλίο 10, 26].

Ο Διογένης Λαέρτιος διέσωσε σαράντα έναν τίτλους έργων του[145] [Βιβλίο 10, 27−28], μεταξύ των οποίων το *Περὶ φύσεως* [146] σε τριάντα επτά βιβλία. Επίσης, στο Βιβλίο 10, ο Διογένης Λαέρτιος αναπαράγει τρεις επιστολές. Πρόκειται για τρία φιλοσοφικά κείμενα, στα οποία συνοψίζονται τα βασικά σημεία της Επικούρειας θεωρίας: στην εκτενέστερη και πλέον σημαντική *Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον* [Βιβλίο 10, 35−83] δίνει μια συμπυκνωμένη περίληψη των βασικών αρχών της επικούρειας φυσικής, στην *Ἐπιστολὴ πρὸς Πυθοκλέα* [Βιβλίο 10, 84−121] συζητά τα αστρονομικά φαινόμενα και στην *Ἐπιστολὴ πρὸς Μενοικέα* [Βιβλίο 10, 122−123] παρουσιάζει μια σαφή έκθεση της επικούρειας ηθικής. Εκτός των τριών επιστολών, ο Διογένης διέσωσε μια συλλογή σαράντα βασικών δογμάτων στην ηθική με τον τίτλο *Κύριαι δόξαι* [Βιβλίο 10, 139−154]. Μια ακόμη σειρά ογδόντα ένα επικούρειων γνωμικών (*Vaticanae sententiae*) διασώζεται σε χειρόγραφο του 14ου αιώνα, που είναι γνωστό ως κώδικας του Βατικανού 1950 [Wiener Studien, 1888][147].

---

[145] Οι τίτλοι των έργων του Επίκουρου που διασώθηκαν από τον Διογένη Λαέρτιο είναι οι ακόλουθοι: Περὶ φύσεως ἑπτὰ καὶ τριάκοντα, Περὶ ἀτόμων καὶ κενοῦ, Περὶ ἔρωτος, Ἐπιτομὴ τῶν πρὸς τοὺς φυσικούς, Πρὸς τοὺς Μεγαρικούς, Διαπορίαι, Κύριαι δόξαι, Περὶ αἱρέσεων καὶ φυγῶν, Περὶ τέλους, Περὶ κριτηρίου ἢ Κανών, Χαιρέδημος, Περὶ θεῶν, Περὶ ὁσιότητος, Ἡγησιάναξ, Περὶ βίων δ, Περὶ δικαιοπραγίας, Νεοκλῆς πρὸς Θεμίσταν, Συμπόσιον, Εὐρύλοχος πρὸς Μητρόδωρον, Περὶ τοῦ ὀρᾶν, Περὶ τῆς ἐν τῇ ἀτόμῳ γωνίας, Περὶ ἀφῆς, Περὶ εἱμαρμένης, Περὶ παθῶν δόξαι πρὸς Τιμοκράτην, Προγνωστικόν, Προτρεπτικός, Περὶ εἰδώλων, Περὶ φαντασίας, Ἀριστόβουλος, Περὶ μουσικῆς, Περὶ δικαιοσύνης καὶ τῶν ἄλλων ἀρετῶν, Περὶ δώρων καὶ χάριτος, Πολυμήδης, Τιμοκράτης γ, Μητρόδωρος ε, Ἀντίδωρος β, Περὶ νόσων δόξαι πρὸς Μίθρην, Καλλιστόλας, Περὶ βασιλείας, Ἀναξιμένης, Ἐπιστολαί.

[146] Η ανασκαφή, τον 18ο αιώνα, στο Herculaneum, τοποθεσία που βρίσκεται κοντά στη σημερινή Νάπολη, έφερε στο φως μια μεγάλη έπαυλη, η οποία ανήκε σε κάποιον πλούσιο Ρωμαίο. Μέσα στην έπαυλη βρέθηκαν πολλοί απανθρακωμένοι κύλινδροι παπύρων, φιλοσοφικού, κυρίως, περιεχομένου και επικούρειας προέλευσης. Οι περισσότεροι από τους παπύρους που ξετυλίχθηκαν και διαβάσθηκαν είναι αποσπάσματα έργων του Φιλόδημου. Οι κύλινδροι περιέχουν, επίσης, αποσπάσματα μερικών βιβλίων από το *Περί φύσεως* του Επίκουρου. Η ανάγνωσή τους και η αποκατάστασή τους είναι εξαιρετικά δύσκολη, αποτελούν όμως ανεκτίμητο συμπλήρωμα των προηγούμενων γνώσεων μας.

[147] Πρόκειται για τον Βατικανό κώδικα με αριθμό 1950 του 14ου αιώνα, ο οποίος εκδόθηκε το 1888 στο περιοδικό Wiener Studien.

Ακόμη, πληροφορίες που αναφέρονται σε λεπτομέρειες της θεωρίας του Επίκουρου αντλούνται, σε μεγάλο βαθμό, και από δευτερεύουσες πηγές. Μια από τις πλέον σημαντικές είναι ο Λουκρήτιος, συγγραφέας του ποιήματος *De rerum natura*. Στα έξι βιβλία τού παραπάνω έργου ο Λουκρήτιος εκθέτει με πολλές λεπτομέρειες επιχειρήματα της επικούρειας θεωρίας, συμβάλλοντας, με αυτόν τον τρόπο καθοριστικά, στη διασαφήνιση πολλών θεμελιωδών σημείων της. Μία εξίσου σημαντική πηγή είναι ο Φιλόδημος, συγγραφέας ενός σημαντικού αριθμού έργων σχετικά με την ηθική, την αισθητική, την πολιτική, τη λογική, τη θεολογία και τις θέσεις διαφόρων φιλοσοφικών σχολών. Χωρίς αμφιβολία, το σημαντικό έργο του *Περί σημείων* (ένα μέρος του οποίου, μόνο, διασώθηκε σε πάπυρο) περιέχει βελτιώσεις και κάποιες καινοτομίες στην επικούρεια θεωρία. Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε ότι στο *Περί σημείων* βρίσκεται ενσωματωμένο ένα έργο για τη λογική του Ζήνωνα του Σιδωνίου (περίπου 150−70 π.Χ.), στο οποίο η θεωρία της γνώσης του Επίκουρου αναπτύσσεται περαιτέρω.

Επιπλέον, κάποιες δευτερεύουσες, και μερικές φορές, εχθρικές πηγές έχουν συμβάλει στην καλύτερη κατανόηση του Επικουρισμού. Πρόκειται για τις διάφορες πραγματείες του Πλούταρχου, καθώς και τις μαρτυρίες του Κικέρωνα στο *De Natura deorum* [Βιβλίο 1] και στο *De finibus bonorum et malorum* [Βιβλία 1&2]. Πληροφορίες αντλούνται και από τον Σενέκα, ο οποίος, μολονότι Στωικός, στο τέλος των περισσοτέρων από τις πρώτες *Ηθικές επιστολές* του, αναφέρει ένα επικούρειο γνωμικό. Ο Σέξτος Εμπειρικός προσφέρει ένα χρήσιμο συμπλήρωμα στη γνώση μας για την επικούρεια φιλοσοφία. Τέλος, όπως έχει αναφερθεί, η επιγραφή του Διογένη από τα Οινόανδα προσφέρει σημαντικά αποσπάσματα της επικούρειας διδασκαλίας.

4.4.2 Ο όρος/έννοια του "ἐπιλογισμοῦ" στην επικούρεια παράδοση

Ο όρος/έννοια του "*ἐπιλογισμοῦ*" αναπτύχθηκε σε έναν αξιοσημείωτο αριθμό έργων του Επίκουρου. Συγκεκριμένα, συναντάται στις δύο από τις τρεις προαναφερθείσες επιστολές, την *Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον* [72-73] και την *Ἐπιστολὴ πρὸς Μενοικέα* [133], στη συλλογή *Κύριαι δόξαι* [22], ενώ αναφορές σημειώνονται και στα γνωμικά του *Vaticanae sententiae*. Επίσης, ο Επίκουρος αναπτύσσει την έννοια του "*ἐπιλογισμοῦ*" στο έργο του *Περὶ φύσεως*, Βιβλίο XXVIII[148].

[148] Μια λεπτομερής μελέτη του *Περὶ φύσεως*, Βιβλίο XXVIII δίνεται στο άρθρο του D. Sedley [Sedley, 1973 σ. 27-34], στο οποίο αναφέρονται σημαντικές και ενδιαφέρουσες πληροφορίες για τις εμφανίσεις του όρου "*ἐπιλογισμός*" σε έργα του Επίκουρου. Συγκεκριμένα, και σύμφωνα με τον Sedley, η πρώτη εμφάνιση του όρου καταγράφεται στο *Περὶ φύσεως*, Βιβλίο XV, αλλά η πλήρης ανάπτυξη αυτού, μαζί με την έννοια της "*προλήψεως*", πραγματοποιείται στο *Περὶ φύσεως*, Βιβλίο XXVIII.

Ο όρος/έννοια του "*ἐπιλογισμοῦ*" συνεχίζει να απασχολεί, σταθερά, τους επικούρειους φιλόσοφους για μεγάλο χρονικό διάστημα και μετά την εποχή τού Επίκουρου. Ο όρος χρησιμοποιείται από τον Φιλόδημο στα έργα του *Περί Σημείων* (*Signis*), *Περί Ρητορικῆς* (*Rhetorica*), *Περί Ὀργῆς* (*De ira*) και *Περί Οἰκονομίας* (*De oeconomia*), όπως και από τον Λουκρήτιο στο έργο του *De rerum natura*. Ενδεικτικά, αναφέρουμε: *Περί Σημείων* [VIII. 32-IX. 3 XXII. 37-XXIII. 7 XXVII.22-3], *Περί Ὀργῆς* [VII. 22-26, VII. 17, XLVI.18-35, XLVI.40—XLVII.18, XLVII.18—XLVIII.3], *Περί Οἰκονομίας* [XIII.22, XIII.8 και εξής].

Παρά τον καθοριστικό ρόλο που διαδραματίζει η έννοια του "*ἐπιλογισμοῦ*" και η χρήση της στην επικούρεια παράδοση, δεν είχε μελετηθεί, διεξοδικά, μέχρι πρότινος από τους ιστορικούς και φιλόσοφους της αρχαίας ελληνικής γραμματείας, όπως άλλες έννοιες που προέρχονται από την πλατωνική, αριστοτέλεια ή στωική φιλοσοφία. Το κενό αυτό, όπως αποδεικνύεται από τη σύγχρονη βιβλιογραφία, επιχειρείται να καλυφθεί από μια σειρά αξιοσημείωτων μελετών, με τις οποίες γίνεται προσπάθεια, καταρχάς, να διασαφηνιστεί και, περαιτέρω, να διερευνηθεί η έννοια του "*ἐπιλογισμοῦ*" και των παραγώγων του. Όμως, ανατρέχοντας στις παραπάνω μελέτες, εκείνο που γίνεται άμεσα αντιληπτό είναι η έλλειψη συμφωνίας σχετικά με τον τρόπο με τον οποίον οι ιστορικοί και φιλόσοφοι, που ασχολούνται με το παραπάνω θέμα, κατανοούν την έννοια του "*ἐπιλογισμοῦ* " και τη λειτουργία της. Για παράδειγμα, όπως παρατηρεί ο M. Schofield [Schofield, 1996, σ. 221-222]: η E. Asmis ερμηνεύει τον "*ἐπιλογισμό*" ως "αποτίμηση των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την πορεία μιας πράξης" (calculation) ή ως "ανάλυση" (analysis)· ο P. De Lacy επιχειρηματολογεί υπέρ της ερμηνείας αυτού ως "εμπειρική γενίκευση/ συμπερασμός"· ο D. Sedley, εκλεπτύνοντας το παραπάνω επιχείρημα, καταλήγει σε "συλλογισμό που βασίζεται σε εμπειρικά δεδομένα"· ο J. Barnes επικεντρώνεται σε ένα είδος "επισκόπησης/έρευνας (survey) των φαινομένων"· τέλος, ο ίδιος ο M. Schofield αποδίδει τον "*ἐπιλογισμό* " ως "μια καθημερινή διαδικασία εκτίμησης/ αξιολόγησης (appraisal)" [Schofield, 1996 σ. 226], μια ερμηνεία που γίνεται, επίσης, αποδεκτή και από τους J. Allen [Allen, 2004 σ. 103] και V. Tsouna [Tsouna, 2007, σ. 55].

Α. Η έννοια του "*ἐπιλογισμοῦ*" στον Επίκουρο

Η έννοια του "*ἐπιλογισμοῦ*" εισάγεται από τον Επίκουρο με σκοπό την εφαρμογή της τόσο στην επιστημονική θεωρία όσο και στην ηθική, όπως μπορούμε να συμπεράνουμε από το παρακάτω χωρίο, στο οποίο ο "*ἐπιλογισμός*" εφαρμόζεται και στα δύο πεδία ταυτόχρονα: "*Τὸ ὑφεστηκὸς δεῖ τέλος ἐπιλογίζεσθαι καὶ πᾶσαν τὴν ἐνάργειαν* … "[*ΚΔ*, 22]. Επομένως, ο τρόπος με τον οποίο ο "*ἐπιλογισμός* " εφαρμόζεται στην ηθική πρέπει να έχει κάποια δομική συνάφεια με τον ρόλο που διαδραματίζει στην επιστημονική γνώση. Θα ξεκινήσουμε, λοιπόν, με την έρευνα

της επιστημολογικής χρήσης της έννοιας, προβαίνοντας σε μια σύντομη επισκόπηση της επικούρειας επιστημολογίας.

Α.1 Στοιχεία της επικούρειας επιστημολογίας

Ο Επίκουρος εκθέτει τη μέθοδο της επιστημονικής του έρευνας στο έργο του *Περὶ κριτηρίου ἢ Κανών*, το οποίο, δυστυχώς, δεν διασώζεται, αλλά σημαντικά στοιχεία σχετικά με αυτήν την μέθοδο αντλούνται από άλλα έργα του, κυρίως, από την *Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*. Πρόκειται για ένα έργο που γράφτηκε γύρω στο 301 π.Χ. και, όπως έχουμε προαναφέρει, αποτελεί μια εκτεταμένη περίληψη της επικούρειας φυσικής. Επίσης, στο έργο αυτό περιέχεται μια περίληψη της επικούρειας κανονικής, η οποία προηγείται της παράθεσης των φυσικών θεωριών, στην οποία δηλώνονται δύο κανόνες έρευνας:

α) Στον πρώτο κανόνα, ο Επίκουρος απαιτεί/χρειάζεται την πλήρη κατανόηση των εννοιών οι οποίες αντιστοιχούν στις λέξεις που χρησιμοποιούνται για να δηλώσουν το υπό διερεύνηση πρόβλημα· η απόκτηση αυτών των εννοιών προηγείται της έρευνας του προβλήματος και θεωρείται απαραίτητη για τη θεμελίωση δεδομένων, στα οποία μπορούν να αναχθούν τα αντικείμενα των πεποιθήσεων, των αμφιβολιών ή των αναζητήσεων, με σκοπό τη διατύπωση κρίσεων σχετικά με το πρόβλημα[149]. Η δήλωση του κανόνα ακολουθείται από μια εξήγηση: ο Επίκουρος θεωρεί αναγκαία την ύπαρξη αρχικών εννοιών που αντιστοιχούν στις λέξεις μας, ώστε να αποφευχθεί είτε μία άπειρη παλινδρόμηση αποδείξεων ή χρήση κενών λέξεων[150]. Ο Επίκουρος οδηγείται σε αυτήν την εξήγηση από τη στιγμή που θεωρεί ως μοναδικό δεδομένο την "πρώτη έννοια"[151] που αντιστοιχεί σε κάθε λέξη και η οποία γίνεται αντιληπτή χωρίς απόδειξη.

β) Αμέσως μετά, θα ακολουθήσει ο δεύτερος κανόνας έρευνας, στον οποίο ο Επίκουρος, αρχικά, απαιτεί/χρειάζεται παρατηρήσεις σε συμφωνία με αδιαμφισβήτητες πηγές δεδομένων για τον κόσμο[152]. Σύμφωνα με τον Διογένη Λαέρτιο, ο Επίκουρος θεωρεί ως κριτήρια αλήθειας (αδιαμφισβήτητες πηγές δεδομένων για τον κόσμο) τις *αίσθήσεις*, τις *προλήψεις* και τα *πάθη*, (μεταγενέστεροι Επικούρειοι θα προσθέσουν και τις *φανταστικές έπιβολές τῆς*

---

149 "*Πρῶτον μὲν οὖν τὰ ὑποτεταγμένα τοῖς φθόγγοις, ὦ Ἡρόδοτε, δεῖ εἰληφέναι, ὅπως ἂν τὰ δοξαζόμενα ἢ ζητούμενα ἢ ἀπορούμενα ἔχωμεν εἰς ταῦτα ἀναγαγόντες ἐπικρίνειν* ..." [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 37].

150 "... *καὶ μὴ ἄκριτα πάντα ἠμῖν <ᾖ> εἰς ἄπειρον ἀποδεικνύουσιν ἢ κενοὺς φθόγγους ἔχωμεν* ..." [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 37].

151 Ο τεχνικός όρος για αυτήν την "πρώτη έννοια" είναι "*πρόληψις*".

152 "*Εἶτα κατὰ τὰς αἰσθήσεις δεῖ πάντα τηρεῖν καὶ ἁπλῶς τὰς παρούσας ἐπιβολὰς εἴτε διανοίας εἴθ᾽ ὅτου δήποτε τῶν κριτηρίων, ὁμοίως δὲ καὶ τὰ ὑπάρχοντα πάθη* ..." [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 38].

διανοίας)[153]. Ο Επίκουρος θεωρεί ότι η αναλήθεια μπορεί να προκύψει μόνο στο επίπεδο των πεποιθήσεων ή των κρίσεων, και όχι των *αίσθήσεων·* όσον αφορά στις πεποιθήσεις μπορούν να επαληθευθούν ή να διαψευστούν με αναφορά στα κριτήρια αλήθειας. Η δήλωση αυτή ακολουθείται, πάλι, από μια εξήγηση: ο Επίκουρος θεωρεί αναγκαία την απόκτηση παρατηρήσεων που βασίζονται, άμεσα, στις *αίσθήσεις* και τα *πάθη*, όπως παρουσιάζονται στην αντίληψή μας, χωρίς κάποιο επιπλέον στοιχείο ερμηνείας, με σκοπό τη δυνατότητα διατύπωσης συμπερασμών. Ο όρος-κλειδί για την εξήγηση αυτού του κανόνα είναι το απαρέμφατο *σημειοῦσθαι*, μέσω του οποίου ο Επίκουρος αφήνει να εννοηθεί ότι οι παρατηρήσεις πρόκειται να χρησιμοποιηθούν σαν *σημεῖα* εκείνων που αναμένονται να παρατηρηθούν (*πρόσμενα*), καθώς και εκείνων που δεν δύνανται να παρατηρηθούν (*ἄδηλα*)[154]. Επειδή, όμως, τα κριτήρια αλήθειας στα οποία βασίζονται οι ανωτέρω παρατηρήσεις είναι ά−λογα[155], είναι αναγκαία μια διαδικασία συλλογισμού, ώστε να μπορούν να συστηματοποιηθούν σε ένα ορθολογικό υπόδειγμα γνώσης [Λουκρήτιος, IV. 379−85].

Παρόλο που ο Επίκουρος δεν κατηγοριοποιεί τις διαδικασίες συλλογισμού/ συμπερασμού, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι διακρίνει τρία σημαντικά είδη *λογισμοῦ*, τα οποία εκφράζονται με σύνθετες λέξεις αυτού του όρου: τον *συλλογισμό*, τον *άναλογισμό* και τον *έπιλογισμό*. Συγκεκριμένα, ο επικούρειος όρος *συλλογισμός* αποδίδεται από τους σύγχρονους σχολιαστές ως "εν γένει ικανότητα λογισμού (reasoning in general)" [Sedley, 1973 σ. 27] ή ως "η διαδικασία με την οποία οι έννοιες συντίθενται μέσω επιχειρήματος (the combination of concepts by argument") [Asmis, 1984, σ. 176]. Ο επικούρειος όρος *άναλογισμός* αποδίδεται ως "η διαδικασία με την οποία πραγματοποιούνται εικασίες για ομοιότητες που λαμβάνουν χώρα είτε μεταξύ των *προφανῶν* είτε μεταξύ των *προφανῶν* και *άδήλων*" (... calculating similarities, whether they are similarities between the phenomena or similarities between the phenomena and things that are unobserved) [Asmis, 1984, σ. 177]. Χαρακτηριστικό παράδειγμα *άναλογισμοῦ* αποτελεί η διαδικασία με την οποία ο Επίκουρος ισχυρίζεται ότι το μέγεθος των ατόμων πρέπει να συμπεραθεί από την αναλογία του μεγέθους των

---

153 "*ἐν τοίνυν τῷ Κανόνι λέγων ἐστὶν ὁ Ἐπίκουρος (fg. 35 Us.) κριτήρια τῆς ἀληθείας εἶναι τὰς αἰσθήσεις καὶ προλήψεις καὶ τὰ πάθη, οἱ δ΄ Ἐπικούρειοι καὶ τὰς φανταστικὰς ἐπιβολὰς τῆς διανοίας·*" [Διογένης Λαέρτιος, Βιβλίο Χ.31].

154 "*… ὅπως ἂν καὶ τὸ προσμένον καὶ τὸ ἄδηλον ἔχωμεν οἷς σημειωσόμεθα, ταῦτα δὲ διαλαβόντας συνορᾶν ἤδη περὶ τῶν ἀδήλων*" [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 38].

155 "*λέγει δὲ καὶ ἐν τῇ πρὸς Ἡρόδοτον ἐπιτομῇ καὶ ἐν ταῖς Κυρίαις δόξαις· "πᾶσα γάρ," φησίν, "αἴσθησις ἄλογός ἐστι καὶ μνήμης οὐδεμιᾶς δεκτική*" [Διογένης Λαέρτιος, Βιβλίο Χ.31].

αισθητών σωμάτων[156]. Τέλος, υπάρχει και το τρίτο είδος *λογισμού*, ο *έπιλογισμός*, τον οποίο θα εξετάσουμε διεξοδικά.

Α.2 Λεξικογραφικές και ερμηνευτικές παρατηρήσεις

Διερευνώντας τα κείμενα της αρχαίας ελληνικής γραμματείας και καταγράφοντας τις εμφανίσεις και τη χρήση των όρων "*έπιλογισμός/ έπιλογίζεσθαι*", το πρώτο πράγμα που μπορούμε να παρατηρήσουμε είναι ότι αυτοί οι όροι υπήρχαν, ήδη, πριν από τον Επίκουρο. Αν ανατρέξουμε στο LSJ, μπορούμε να καταγράψουμε ως κύριες τυπικές αποδόσεις του ρήματος "*έπιλογίζομαι*", τις: "υπολογίζω πάνω σε κάτι" (reckon over), "συμπεραίνω" (conclude), " θεωρώ /εξετάζω προσεκτικά" (consider), "λαμβάνω υπόψη" (take into account), ενώ ως κύριες τυπικές αποδόσεις των ουσιαστικών "*έπιλογισμός*", "*έπιλόγισις*", "*έπιλόγισμα*", τις: "συλλογισμός" (reasoning), "επαγωγικός συλλογισμός" (inductive reasoning), "συμπερασμός" (inference), "γενικά αποδεκτός συμπερασμός" (generally accepted inference), "θεωρία εκ των υπαρχόντων", "στοχασμός" (reflection), "ένδειξη για κάτι" (signification), "υπολογισμός" (calculation), "μεταγενέστερη σκέψη" (afterthought). Στην επικούρεια φιλολογία συναντώνται λίγες παράγραφοι στις οποίες διατηρούνται κάποιες από τις προαναφερθείσες αποδόσεις. Αλλά, όπως έχουμε προαναφέρει, η έννοια του "*έπιλογισμοῦ*" εισάγεται από τον Επίκουρο με σκοπό την εφαρμογή της τόσο στην επιστημονική θεωρία όσο και στην ηθική. Διαδραματίζει έναν σημαντικό ρόλο στη φιλοσοφία των μεταγενέστερων Επικούρειων, κυρίως στον Φιλόδημο, ο οποίος δείχνει να δεσμεύεται στην έννοια του "*έπιλογισμοῦ*" με τρόπο που αντανακλά τη χρήση της έννοιας από τον Επίκουρο, αλλά, ταυτόχρονα, χειρίζεται και εφαρμόζει αυτήν με έναν τρόπο που είναι χρήσιμος για το δικό του ερευνητικό σχέδιο. Έτσι, ο όρος "*έπιλογισμός*" και οι ομόρριζες μορφές του συναντώνται, συχνά, στα επικούρεια κείμενα, μεταφέρουν επικούρειες φιλοσοφικές υποδηλώσεις, προσεγγίζοντας σε κάτι περισσότερο τεχνικό· ταυτόχρονα, υποδεικνύουν κάτι ξεχωριστό για την επικούρεια ηθική και επιστημολογία, κάτι που δεν είχε χρησιμοποιηθεί, τουλάχιστον σε σχέση με συμπερασμούς, στον Πλάτωνα ή τον Αριστοτέλη.

Πώς ορίζεται, λοιπόν, η έννοια του "*έπιλογισμοῦ*" στις περιπτώσεις που εμπλουτίζεται με ειδικές φιλοσοφικές υποδηλώσεις ή στις περιπτώσεις που αναφέρεται/παραπέμπει σε τεχνική χρήση; Κανένας ορισμός δεν διασώθηκε ούτε από τον Επίκουρο ούτε από τους μεταγενέστερους Επικούρειους. Επομένως, ο μοναδικός τρόπος κατανόησης της έννοιας αυτής είναι η εξέταση και ερμηνεία της χρήσης των όρων "*έπιλογισμός/ έπιλογίζεσθαι*" σε διάφορα κείμενα. Όμως,

[156] παράδειγμα "... *ταύτῃ τῇ ἀναλογίᾳ νομιστέον καὶ τὸ ἐν τῇ ἀτόμῳ ἐλάχιστον κεχρῆσθαι· μικρότητι γὰρ ἐκεῖνο δῆλον ὡς διαφέρει τοῦ κατὰ τὴν αἴσθησιν θεωρουμένου, ἀναλογίᾳ δὲ τῇ αὐτῇ κέχρηται* ..." [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 58−59].

όπως έχουμε ήδη αναφέρει, παρά τις ποικίλες απόπειρες καταγραφής, ερμηνείας και σχολιασμού που επιχειρήθηκαν από την πρόσφατη βιβλιογραφία, η προσέγγιση του θέματος παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες εξαιτίας των πολλαπλών και, σε αρκετές περιπτώσεις, αντικρουόμενων ερμηνειών. Πάντως, αξίζει να σημειωθεί ότι οι όροι "*έπιλογισμός/έπιλογίζεσθαι*", καθώς και οι ομόρριζες μορφές τους, αναγνωρίζονται, από την πλειονότητα των προαναφερθέντων σύγχρονων σχολιαστών[157], ότι χαρακτηρίζουν μια ορθολογική διαδικασία/δραστηριότητα[158], την οποία μπορούμε να ονομάζουμε με τον όρο "*έπιλογιστική*" διαδικασία, μέσω της οποίας εξηγείται και αιτιολογείται ο σύνδεσμος μεταξύ αντιλήψεων και γνώσης. Συγκεκριμένα, ο νους μελετάει, κατανοεί και οργανώνει σε μια βάση δεδομένα των *αίσθήσεων* και των *παθῶν*, τα οποία με τη σειρά τους χρησιμεύουν και οδηγούν σε συμπερασμούς/κρίσεις τόσο στο επιστημολογικό όσο και στο ηθικό πεδίο. Για την πληρέστερη κατανόηση, λοιπόν, εκείνων που ο Επίκουρος εννοεί να ενσωματώνει στους όρους "*έπιλογισμός/έπιλογίζεσθαι*" θα πρέπει να στραφούμε τόσο στο πεδίο της επιστημολογίας όσο και στην περιοχή της ηθικής, όπου με τη μελέτη κατάλληλων παραγράφων θα προσπαθήσουμε να ανιχνεύσουμε στοιχεία που αφορούν στη φύση και τις χρήσεις αυτών των όρων.

Α.3 Η "*έπιλογιστική*" διαδικασία ως διαδικασία διαφορετική από τις ειδικές μεθόδους απόδειξης ή συλλογισμού.

Η πλέον κατατοπιστική παράγραφος από την οποία συνάγονται στοιχεία σχετικά με τη φύση και τη χρησιμότητα της **"*έπιλογιστικής*" διαδικασίας** είναι εκείνη στην οποία εξετάζεται η φύση του χρόνου. Ο Επίκουρος θα ξεκινήσει λέγοντας ότι ο χρόνος δεν μπορεί να αναχθεί σε κάποια πρώτη έννοια, δηλαδή δεν υπάρχει η *πρόληψις* του χρόνου, αλλά η ολοφάνερη πραγματικότητα μέσω της οποίας και με αναλογικό συμπερασμό μπορούμε να αρθρώσουμε λέξεις, όπως "πολύς" ή "λίγος" χρόνος[159]. Στο σημείο αυτό και πριν αρχίσουμε να αναλύουμε την

---

[157] Εξαίρεση αποτελούν οι C. Diano [Diano, 1939, σ. 144] και G. Arrighetti [Arrighetti, 1952]. Θεωρούν ότι ο όρος "*έπιλογισμός*" χαρακτηρίζει έναν τρόπο κατανόησης μη ορθολογικό, σχεδόν ενορατικό.

[158] Στο σημείο αυτό αξίζει να επισημάνουμε ότι η εμφάνιση της μορφής "*έπιλόγισις*" σε κείμενα του Επίκουρου, όπως παρατηρεί ο D. Sedley [Sedley, 1973, σ. 32-33], παρουσιάζει μια διαφοροποίηση συγκρινόμενη με τον όρο "*έπιλογισμός*"· συγκεκριμένα, ο όρος "*έπιλόγισις*" είναι, μάλλον, γενικός και εμφαίνει την ικανότητα (ability) του σκέπτεσθαι, ενώ ο όρος "*έπιλογισμός*" εμπεριέχει μια πράξη (act) συλλογισμού και υποδεικνύει τη "δραστηριότητα".

[159] "... *τὸν γὰρ δὴ χρόνον οὐ ζητητέον ὥσπερ καὶ τὰ λοιπά, ὅσα ἐν ὑποκειμένῳ ζητοῦμεν ἀνάγοντες ἐπὶ τὰς βλεπομένας παρ᾽ ἡμῖν αὐτοῖς προλήψεις, ἀλλ᾽ αὐτὸ τὸ ἐνάργημα, καθ᾽ ὃ τὸν πολὺν ἢ ὀλίγον χρόνον ἀναφωνοῦμεν, συγγενικῶς τοῦτο περιφέροντες, ἀναλογιστέον* ..." [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 72].

παραπάνω παράγραφο, είναι χρήσιμο να σημειώσουμε ότι οι *προλήψεις* είναι ένα από τα προαναφερθέντα κριτήρια αλήθειας της επικούρειας φιλοσοφίας και μπορούν να εξηγηθούν, μεταξύ των άλλων, και ως μία εναποθηκευμένη γενική σκέψη, δηλαδή μια ανάμνηση εκείνου που συχνά έχει εμφανιστεί από έξω. Για παράδειγμα από την παρατήρηση πολλών διαφορετικών ανθρώπων προκύπτει μια πρώτη σύλληψη της έννοιας του ανθρώπου, δηλαδή προκύπτει η *πρόληψις του* ανθρώπου[160]. Στην περίπτωση του χρόνου, λοιπόν, ερχόμαστε αντιμέτωποι με το εξής παράδοξο: παρόλο που ο χρόνος είναι ένα *ένάργημα*, δηλαδή κάτι του οποίου η ύπαρξη είναι σαφής σε όλους, δεν μπορεί να παρατηρηθεί και να προσδιοριστεί άμεσα, αλλά πρέπει να κατανοηθεί μέσω αναλογικής σκέψης (*άναλογιστέον*). Πράγματι, εκείνα που προσλαμβάνουμε και προσδιορίζουμε, άμεσα, με τη βοήθεια των *προλήψεων* δεν είναι η λέξη "χρόνος", αλλά φαινόμενα, όπως η ημέρα, η νύχτα, η κίνηση και η ακινησία, τα οποία συνδέονται άμεσα με τη λέξη αυτή· τότε, και μόνο αναλογικά με τα παραπάνω φαινόμενα, μπορούμε να καταλήξουμε, έμμεσα, στην καθαυτή φύση αυτού, δηλαδή μπορούμε να αποκτήσουμε το νόημα "διάρκεια του χρόνου ", στον βαθμό που γνωρίζουμε το νόημα "διάρκεια μιας ημέρας ", "διάρκεια μιας νύχτας" κ.λπ.

Αμέσως μετά, ο Επίκουρος απορρίπτει τη χρήση ειδικής ορολογίας με την οποία επιχειρείται να διασαφηνιστεί η έννοια του χρόνου και να δοθεί ο ορισμός του και υποστηρίζει ότι η έννοια του χρόνου μπορεί να περιγραφεί με εκφράσεις που, ήδη, χρησιμοποιούνται[161]. Επιπλέον, επισημαίνει ο Επίκουρος, δεν μπορεί να συλληφθεί η έννοια του χρόνου μέσω κάποιας χαρακτηριστικής ιδιότητας που είναι κατηγόρημα αυτού, ως να έχουν την ίδια ουσία (κάτι που, όπως αναφέρει, κάνουν μερικοί άνθρωποι)[162]· επομένως, το μόνο που πρέπει να κάνουμε είναι να κάνουμε μια αποτίμηση εκείνων που συνδέονται με αυτήν τη χαρακτηριστική ιδιότητα και να τα συγκρίνουμε με αυτήν[163]. Εν τέλει, συμπεραίνει ο Επίκουρος, δεν χρειάζεται *άπόδειξις*, αλλά *έπιλογισμός*, για να δούμε ότι συνδέουμε κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό γνώρισμα με τις μέρες, τις νύχτες και τα μέρη αυτών, όπως και με την παρουσία και απουσία αισθημάτων, καθώς και με την κίνηση και την ακινησία[164]· και μόνο σε σύνδεση με αυτά τα φαινόμενα σκεφτόμαστε αυτό

---

[160] Για μια λεπτομερή ανάπτυξη της έννοιας "*πρόληψις*" βλ. E. Asmis [Asmis, 1984, σ. 21-23, 25-26, 49-50 και 61-63]

[161] "… καὶ οὔτε διαλέκτους ὡς βελτίους μεταληπτέον, ἀλλ᾽ αὐταῖς ταῖς ὑπαρχούσαις κατ᾽ αὐτοῦ χρηστέον," [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 72].

[162] "… *οὔτε ἄλλο τι κατ΄ αὐτοῦ κατηγορητέον, ὡς τὴν αὐτὴν οὐσίαν ἔχοντος τῷ ἰδιώματι τούτῳ—καὶ γὰρ τοῦτο ποιοῦσί τινες—* …" [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 72].

[163] "… *ἀλλὰ μόνον ᾧ συμπλέκομεν τὸ ἴδιον τοῦτο καὶ παραμετροῦμεν, μάλιστα ἐπιλογίστέον*…" [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 72]

[164] "… *καὶ γὰρ τοῦτο οὐκ ἀποδείξεως προσδεῖται ἀλλ΄ ἐπιλογισμοῦ, ὅτι ταῖς ἡμέραις καὶ ταῖς νυξὶ συμπλέκομεν, καὶ τοῖς τούτων μέρεσιν, ὡσαύτως δὲ καὶ τοῖς πάθεσι καὶ ταῖς ἀπαθείαις, καὶ κινήσεσι καὶ στάσεσιν ἴδιόν τι σύμπτωμα* …" [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 73]

το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό, το οποίο εκφράζουμε με τη λέξη "χρόνος"[165]. Επομένως, καταλήγει ο Επίκουρος, χρειάζεται *έπιλογισμός* και όχι *άπόδειξις* για να απαντήσουμε με ποιες κατηγορίες φαινομένων συνδέουμε τη λέξη "χρόνος". Είναι φανερό, λοιπόν, ότι ο Επίκουρος διακρίνει και συνιστά μια άλλη διαδικασία από την ειδική τεχνική της *άποδείξεως*.

Τότε, όμως, προκύπτει το ερώτημα: η "*έπιλογιστική*" διαδικασία, όπως αναπτύσσεται στο συγκεκριμένο χωρίο, αντιπαραβάλλεται με την τεχνική της *άποδείξεως* ή, απλά, είναι μια μέθοδος που μπορεί να λειτουργεί παράλληλα με αυτήν;

Ανατρέχοντας στη σύγχρονη βιβλιογραφία μπορούμε να σημειώσουμε τα παρακάτω: ο M. Schofield [Schofield, 1996, σ. 223] αποδίδοντας στον *έπιλογισμό* το νόημα μιας καθημερινής διαδικασίας αποτίμησης/αξιολόγησης, διακρίνει, προφανώς, αντίθεση μεταξύ *έπιλογισμοῦ* και *άποδείξεως*, χαρακτηρίζοντας, βέβαια, την *άπόδειξιν* ως μια ειδική φιλοσοφική τεχνική[166]· ο G. Arrighetti [Arrighetti 1952, σ. 135] βλέπει μια ισχυρή αντίθεση μεταξύ *άποδείξεως* και *έπιλογισμοῦ* · απεναντίας, ο D. Sedley [Sedley, 1973, σ. 30, υπ. 203] υποστηρίζει ότι ο Επίκουρος δεν αντιπαραβάλλει τον *έπιλογισμό* με την *άπόδειξιν*, απλά υπαινίσσεται ότι η "*έπιλογιστική*" διαδικασία είναι επαρκής για τη σύνδεση των φαινομένων με τον χρόνο.

Ανακεφαλαιώνοντας, λοιπόν, παρατηρούμε ότι ο Επίκουρος προτείνει μια διαδικασία συλλογισμού, την "*έπιλογιστική*" διαδικασία, διαφορετική, κατά το μάλλον ή ήττον, από την ειδική τεχνική της *άποδείξεως*, όπως αναπτύσσεται από τον Αριστοτέλη [*Ἀναλυτικά Ὕστερα*, 71b-72b]. Τότε, όμως, γεννώνται τα εξής σημαντικά ερωτήματα: **α)** η παραπάνω διαδικασία/πρακτική διέπεται από κατάλληλες αρχές και κανόνες, με επιδιωκόμενο στόχο την κατάληξη σε συγκεκριμένα συμπεράσματα, δηλαδή ανιχνεύονται στην "*έπιλογιστική*" διαδικασία τα χαρακτηριστικά μιας "μεθόδου"; **β)** αν αυτό ισχύει, τότε υπάρχουν πεδία και επιστημονικοί κλάδοι όπου μπορεί να εφαρμοστεί, και, αν ναι, ποια;

---

[165] "… *περὶ ταῦτα πάλιν αὐτὸ τοῦτο ἐννοοῦντες, καθὸ χρόνον ὀνομάζομεν.*" [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 73].

[166] Στο σημείο αυτό αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η έννοια της *άποδείξεως* στον Επίκουρο αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης σύγχρονων σχολιαστών, από την οποία αναδεικνύονται παρόμοιες ή διαφορετικές απόψεις: επιγραμματικά, λοιπόν, αναφέρουμε ότι οι E. Bignone [Bignone, 1936, σ. 73, υπ. 2] και C. Bailey [Bailey, 1928, σ.176] ισχυρίζονται ότι οι όροι "*άπόδειξις/ άποδεικνύειν*" χρησιμοποιούνται από τον Επίκουρο με τη σημασία του "εξηγώ", παρά "αποδεικνύω"· αντίθετα, η G. Striker [Striker, 1974, σ.72-73] υποστηρίζει ότι ο Επίκουρος χρησιμοποιεί τους προαναφερθέντες όρους για να δείξει, μέσω κάποιου επιχειρήματος, εκείνο που δεν είναι αυταπόδεικτο· η E. Asmis [Asmis, 1984, σ. 31] αποδέχεται την άποψη της Striker, συμπληρώνοντας ότι για την απόδειξη του αναπόδεικτου των πρώτων αρχών ο Επίκουρος χρησιμοποιεί επιχείρημα του ίδιου γενικού τύπου με εκείνο που χρησιμοποιεί ο Αριστοτέλης στα *Ἀναλυτικά Ὕστερα*.

Α.4 Τα κύρια χαρακτηριστικά της "*ἐπιλογιστικῆς*" διαδικασίας

Το κείμενο-κλειδί, από το οποίο αντλούνται στοιχεία για το πώς λειτουργεί η παραπάνω διαδικασία στα δύο κυριότερα πεδία της επικούρειας φιλοσοφίας, την ηθική και την επιστημονική θεωρία, είναι το εικοστό δεύτερο από τα σαράντα γνωμικά που διασώθηκαν από τον Διογένη Λαέρτιο με τον τίτλο *Κύριαι Δόξαι*:

"*Τὸ ὑφεστηκὸς δεῖ τέλος ἐπιλογίζεσθαι καὶ πᾶσαν τὴν ἐνάργειαν, ἐφ΄ ἣν τὰ δοξαζόμενα ἀνάγομεν· εἰ δὲ μὴ πάντα ἀκρισίας καὶ ταραχῆς ἔσται μεστά.*" [Κυρίου Δόξαι, 22].

Μια μετάφραση του παραπάνω χωρίου θα μπορούσε να είναι η παρακάτω:

"Πρέπει να *ἐπιλογιζόμεθα* τον σκοπό που έχει καθορισθεί[167], καθώς και κάθε εναργή εμφάνιση στην οποία παραπέμπουμε τις γνώμες που σχηματίζουμε· διαφορετικά, τα πάντα θα είναι γεμάτα από αμφιβολία και σύγχυση".

Το παραπάνω κείμενο παρέχει ένα σπάνιο πλαίσιο στο οποίο η "*ἐπιλογιστική*" διαδικασία εφαρμόζεται, ταυτόχρονα, σε δύο κύρια για την επικούρεια φιλοσοφία πεδία: την ηθική και τον επιστημονικό συμπερασμό. Επομένως, επιτελεί ένα σημαντικό ρόλο όχι μόνο για τη διαμόρφωση της κατάλληλης ερμηνείας των όρων "*ἐπιλογισμός*/*ἐπιλογίζεσθαι*", αλλά και για τον έλεγχο της αξιοπιστίας αυτής, η οποία κρίνεται, σε ένα μεγάλο βαθμό, από τη δομική συνάφεια μεταξύ του τρόπου που ερμηνεύεται η "*ἐπιλογιστική*" διαδικασία στην ηθική σφαίρα και του ρόλου που διαδραματίζει στην εξαγωγή επιστημονικών συμπερασμών.

Η ερμηνεία που πληροί τις παραπάνω προϋποθέσεις και γίνεται αποδεκτή, κατά το μάλλον ή ήττον, από τους περισσότερους σύγχρονους σχολιαστές[168] είναι εκείνη που προτείνεται από τον M. Schofield [Schofield, 1996 σ. 226] και η οποία, σε μια ολοκληρωμένη μορφή, συνοψίζεται στα παρακάτω: οι όροι "*ἐπιλογισμός*/*ἐπιλογίζεσθαι*" γίνονται αντιληπτοί ως ένα είδος επισκόπησης στα δεδομένα της επικούρειας φιλοσοφίας, δηλαδή στις *αίσθήσεις*, τις *προλήψεις* και τα *πάθη*, για να ακολουθήσει μια συγκριτική αποτίμηση/αξιολόγηση αυτών, η οποία με τη σειρά της θα μας επιτρέψει να θεμελιώσουμε μια ομοιότητα μεταξύ τους, και, σε αυτήν τη βάση, να πραγματοποιήσουμε συμπερασμούς τόσο για τα *πρόδηλα* όσο και για τα *ἄδηλα*. Για παράδειγμα, διευκρινίζει ο M. Schofield [Schofield, 1996 σ. 226-227], ας ανατρέξουμε στη σφαίρα της επιστημονικής θεωρίας: με συγκριτική αξιολόγηση όλων των εναργών εμφανίσεων που έχουμε

---

[167] "*τὸ ὑφεστηκὸς τέλ*ος" έχει αποδοθεί από τον M. Schofield ως "the end which has been laid down" [Schofield, 1996 σ. 226], από τον C. Bailey ως "real purpose" [Bailey, 1926, σ.101] και από την E. Asmis ως "underlying end" [1984, σ. 178, υπ. 9].

[168] Ενδεικτικά αναφέρουμε, τους J. Allen [Allen, 2004, σ. 103] και V. Tsouna [Tsouna, 2007, σ. 55].

για τους ανθρώπους, μπορούμε να καθορίσουμε εκείνο που είναι σύνηθες για όλους και εκείνο που είναι ιδιαίτερο για μερικούς. Τότε, με αυτή τη μέθοδο που ονομάζουμε μέθοδο της ομοιότητας, θα είμαστε σε θέση να συμπεράνουμε πώς είναι εκείνοι οι άνθρωποι που δεν έχουμε δει. Παρόμοια, ας στραφούμε στην ηθική: με συγκριτική αξιολόγηση των εμφανίσεων της ευχαρίστησης και της οδύνης μπορούμε να αποτιμήσουμε ότι η ευχαρίστηση αποκτάται εύκολα, ενώ η οδύνη είναι μικρής διάρκειας ή όχι τόσο έντονη· επιπλέον, σε ειδικές περιπτώσεις μπορούμε, εν τέλει, να καθορίσουμε τον τρόπο που πρέπει να ενεργούμε, μέσω εκείνου που ο Επίκουρος ονομάζει "συγκριτικές μετρήσεις των πλεονεκτημάτων και των μειονεκτημάτων" [*Ἐπιστολὴ πρὸς Μενοικέα*, 130].

Πιο συγκεκριμένα:

α) Ο Επίκουρος, στην αρχή του χωρίου *Κύριαι Δόξαι* 22, τονίζει την αναγκαιότητα "*ἐπιλογισμοῦ τοῦ ὑφεστηκὸτος τέλους*", ώστε να αποφευχθεί οποιαδήποτε αμφιβολία και σύγχυση στη σφαίρα της ηθικής. Σε τι συνίσταται, όμως, αυτός ο "*ἐπιλογισμός*"; Αν ανατρέξουμε στις κυριότερες ερμηνείες, που έχουν δοθεί από τους σύγχρονους σχολιαστές, μπορούμε να σημειώσουμε τα παρακάτω: **i)** ο G. Arrighetti [Arrighetti, 1952, σ. 123, 125] ερμηνεύει τον "*ἐπιλογισμόν τοῦ τέλους*" ως επίγνωση της φύσης της ευχαρίστησης, και επομένως, απουσία της λύπης· και αιτιολογεί το επιχείρημά του, υπενθυμίζοντας ότι η αναζήτηση της ευχαρίστησης αποτελεί το *τέλος* για την επικούρεια φιλοσοφία. **ii)** Κριτική στην παραπάνω ερμηνεία ασκεί ο D. Sedley [Sedley, 1973, σ. 28], με την παρατήρηση ότι ο *ἐπιλογισμός τοῦ τέλους* αναγνωρίζεται, γενικά, από τον Επίκουρο ως μια δραστηριότητα που χαρακτηρίζει τον σοφό άνθρωπο και τον διακρίνει από τον άφρονα· άρα, η αναζήτηση της ευχαρίστησης και η αποφυγή της λύπης αποτελούν προϋπόθεση της ανθρώπινης συμπεριφοράς, και, επομένως, δεν τίθενται υπό ερώτηση. Επιπλέον, συνεχίζει ο D. Sedley [Sedley, 1973, σ. 28], ο *ἐπιλογισμός τοῦ τέλους* προτείνεται, μάλλον, από τον Επίκουρο ως μια εμπειρική διαδικασία, μέσω της οποίας κάποιος επιλέγει ευχαριστήσεις, αλλά και λύπες ή αποφεύγει λύπες, αλλά και ευχαριστήσεις, με στόχο το *μακαρίως ζῆν*. **iii)** Κριτική στην ερμηνεία του G. Arrighetti ασκεί και M. Schofield [Schofield, 1996, σ. 230-231], υποστηρίζοντας ότι η χρήση της μετοχής παρακειμένου του ρήματος *ὑφίσταμαι* υποδεικνύει ότι ο Επίκουρος θεωρεί δεδομένο ότι υπάρχει, ήδη, εξοικείωση με τα βασικά αξιώματα του ηθικού του συστήματος, επομένως δεν μπορεί να μας παροτρύνει να αποτιμήσουμε ότι η ευχαρίστηση είναι το *τέλος*. Επίσης, σημειώνει ο M. Schofield [Schofield, 1996, σ. 231 υπ. 9], η ερμηνεία του D. Sedley, με την οποία ως *ἐπιλογισμός τοῦ τέλους* θεωρείται ο συλλογισμός για το πώς θα επιτευχθεί αυτό το *τέλος*, δεν είναι αρκούντως γενική, από τη στιγμή που έχει προκύψει από την εξέταση μόνο κάποιων ειδικών περιπτώσεων. Ο ίδιος [Schofield, 1996, σ. 231] θα καταφύγει σε ένα απόσπασμα από την *Ἐπιστολὴ πρὸς*

Μενοικέα[169], στην οποία ο Επίκουρος θεωρεί ανώτερο τον άνθρωπο ο οποίος *έπιλογίζεται* το *τέλος* που έχει "διαταχθεί" από τη φύση με την καταρχήν διάκριση τού τι είναι καλό (ευχαρίστηση που συλλαμβάνεται ως απουσία της οδύνης) και τού τι είναι κακό (οδύνη), ώστε να ακολουθήσει η σύγκριση της δεκτικότητας στο καλό με τη σχετική ασημαντότητα του κακού[170], δηλαδή ο σοφός άνθρωπος "αξιολογεί τις επιλογές του για την επίτευξη του *τέλους"*, μέσω μιας συγκριτικής εξέτασης/μελέτης. Στο σημείο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ερμηνεία του *έπιλογισμοῦ τοῦ τέλους* ως συγκριτική αξιολόγηση του καλού και του κακού, συνάδει με την ερμηνεία, γενικά, του *έπιλογισμοῦ* ως συγκριτική αξιολόγηση δεδομένων, που οδηγεί στην άντληση συμπερασμών.

β) στη συνέχεια του χωρίου *Κύριαι Δόξαι* 22, ο Επίκουρος τονίζει την αναγκαιότητα "*έπιλογισμοῦ πάσης τῆς ἐνάργειας*", ώστε να αποφευχθεί οποιαδήποτε αμφιβολία και σύγχυση και στο πεδίο του επιστημονικού συμπερασμού. Προφανώς, με τη χρήση του επιθέτου *πᾶσα*, ο Επίκουρος προτείνει μια μέθοδο επαγωγής, η οποία, μεταγενέστερα, θα αναπτυχθεί, με κάθε λεπτομέρεια, στα κείμενα του Φιλόδημου. Προς το παρόν και για την κατανόηση της φύσης τού "*έπιλογισμοῦ τῆς ἐνάργειας"*, ο M. Schofield [Schofield, 1996, σ. 230] υπενθυμίζει την πραγμάτευση της έννοιας του χρόνου, στην οποία με *έπιλογισμό* συνδέουμε κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό γνώρισμα με τις μέρες και τις νύχτες… με την παρουσία και απουσία … Εκείνο που έχουν κοινό όλα αυτά τα φαινόμενα είναι η διάρκεια: δηλαδή, με συγκριτική αποτίμηση όλων αυτών των φαινομένων, αποκτάμε επίγνωση του χρόνου ή της διάρκειας ως κοινή τους ιδιότητα. Πάλι, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η ερμηνεία του "*έπιλογισμοῦ τῆς ἐνάργειας* ", ως συγκριτική αξιολόγηση φαινομένων που χαρακτηρίζονται από διάρκεια, εναρμονίζεται με την προταθείσα ερμηνεία του *έπιλογισμοῦ* ως συγκριτική αξιολόγηση δεδομένων, που οδηγεί στην άντληση συμπερασμών.

Β. Η έννοια του "*έπιλογισμοῦ*" στον Φιλόδημο

Παρόλο που ο Φιλόδημος δεν εκθέτει με ακρίβεια την επιστημολογική βάση της ανάλυσής του, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι δεσμεύεται στις βασικές θέσεις τού Επίκουρου: όλες οι αισθητηριακές εντυπώσεις είναι αληθείς, και ως κριτήρια αλήθειας αναγνωρίζει τις *αίσθήσεις*, τις *προλήψεις* και τα *πάθη*. Ο Φιλόδημος ισχυρίζεται ότι ψευδείς μπορεί να είναι, μόνο, οι γνώμες ή οι κρίσεις, οι οποίες μπορούν να επαληθευθούν ή να διαψευστούν με αναφορά στα κριτήρια αλήθειας.

---

[169] "… *ἔχοντος καὶ τὸ τῆς φύσεως ἐπιλελογισμένου τέλος* …" [*Ἐπιστολὴ πρὸς Μενοικέα*, 133].

[170] "… *καὶ τὸ μὲν τῶν ἀγαθῶν πέρας ὡς ἔστιν εὐσυμπλήρωτόν τε καὶ εὐπόριστον διαλαμβάνοντος, τὸ δὲ τῶν κακῶν ὡς ἢ χρόνους ἢ πόνους ἔχει βραχεῖς*…" [*Ἐπιστολὴ πρὸς Μενοικέα*, 133].

Επιπλέον, ακολουθώντας την απαίτηση του Επίκουρου [*Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 38], θεωρεί ότι τα δεδομένα των αισθήσεων προσλαμβάνονται ως *σημεῖα*[171] για εκείνα που δεν παρατηρούνται[172]. Στο έργο του *Περί Σημείων* επιβεβαιώνεται η δέσμευσή του στην επικούρεια μεθοδολογία που αναπτύχθηκε από τον δάσκαλό του, τον Ζήνωνα τον Σιδώνιο, καθώς και από τον Δημήτριο τον Λάκωνα· πρόκειται για τη μέθοδο της *ὁμοιότητας* (*ὁ καθ' ὁμοιότητα τρόπος*), δηλαδή μια μέθοδος συμπερασμού από τα σημεία (sign inference), η οποία βασίζεται στην αναλογία και την επαγωγή και έρχεται σε αντίθεση με την παραγωγική μέθοδο της *ἀνασκευῆς* (*ὁ κατ' ἀνασκευήν τρόπος*), η οποία υποστηρίζεται από τους Στωικούς. Σημαντικό βήμα για την επαγωγική μέθοδο της *ὁμοιότητας* αποτελεί ο *ἐπιλογισμός*, οπότε κρίνεται αναγκαίο να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί και εφαρμόζεται στα κείμενα του Φιλόδημου.

Β.1 Η μέθοδος/διαδικασία του *ἐπιλογισμοῦ* στον Φιλόδημο

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε η "*ἐπιλογιστική*" διαδικασία στα έργα του Φιλόδημου ακολουθεί, κατά το μάλλον, την *ἐπιλογιστικῇ*" διαδικασία που καταγράφεται στα έργα του Επίκουρου: δηλαδή συνίσταται στην, καταρχήν, επισκόπηση/έρευνα *σημείων* που προέρχονται από τις *αἰσθήσεις*, τα *πάθη* και τις *προλήψεις*, ώστε να ακολουθήσει μια συγκριτική αξιολόγηση αυτών, από την οποία θα είμαστε σε θέση να θεμελιώσουμε καθολικές ομοιότητες μεταξύ των *σημείων* · τότε μόνο, οι ομοιότητες αυτές συνιστούν μια βάση, από την οποία μπορεί να ακολουθήσουν συμπερασμοί που αφορούν στα *ἄδηλα* ή τα *ἀφανῆ*.

Συγκεκριμένα,

α) στη σφαίρα του επιστημονικού συμπερασμού:

με *ἐπιλογισμό*, δηλαδή έρευνα/επισκόπηση, σύγκριση και αξιολόγηση των χαρακτηριστικών/*σημείων* που παρατηρούνται στα εν κινήσει σώματα της εμπειρίας μας, είμαστε σε θέση να αντιληφθούμε και να καθορίσουμε τα κοινά χαρακτηριστικά τους, ώστε να τεκμηριώσουμε μια ομοιότητα μεταξύ αυτών. Με βάση αυτήν την ομοιότητα, είμαστε σε θέση να συνάγουμε τα χαρακτηριστικά όλων των κινούμενων σωμάτων και, επιπλέον, να προβούμε σε συμπερασμούς,

---

171 Το *σημεῖον* είναι εκείνο από το οποίο ξεκινάει ο συμπερασμός, και ο Φιλόδημος αναφέρεται, γενικά, σε αυτό με έναν από τους παρακάτω όρους: *τὸ φαινόμενον* (εκείνο το οποίο εμφανίζεται), *τὸ φανερόν* (εκείνο που καθίσταται σαφές), *τὸ ἐναργές* (εκείνο το οποίο είναι ολοφάνερο) , αλλά, *τὸ παρ' ἡμῖν* (εκείνο που είναι παρόν σε μας) είναι ο κυρίως χρησιμοποιούμενος όρος [Manetti, 2002, σ. 285].

172 Οι όροι που χρησιμοποιούνται από τον Φιλόδημο για να υποδείξουν εκείνο στο οποίο οδηγεί ο συμπερασμός είναι *τὸ ἄδηλον* (εκείνο που δεν είναι άμεσα εμφανές) *και τὸ ἀφανὲς* (εκείνο που δεν μπορεί να είναι εμφανές) [Manetti, 2002 σ. 285].

σημειούμεθα, που αφορούν στις αναγκαίες συνθήκες για την κίνηση, όπως είναι η ύπαρξη κενού [*Περί Σημείων*, VIII. 32-IX. 3].

Επίσης, με *έπιλογισμό*, δηλαδή με επισκόπηση και συγκριτική αξιολόγηση όλων των χαρακτηριστικών/*σημείων* τα οποία συναντώνται στους ανθρώπους της εμπειρίας μας, είμαστε σε θέση να διαχωρίσουμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του καθενός από τα κοινά χαρακτηριστικά όλων, οπότε να θεμελιώσουμε πάλι μια ομοιότητα μεταξύ αυτών. Τότε, με βάση αυτήν την ομοιότητα, μπορούμε να συνάγουμε τα, σε οποιεσδήποτε συνθήκες, κοινά χαρακτηριστικά όλων των ανθρώπων και, επιπλέον, να συμπεράνουμε, *σημειούμεθα*, ότι η θνητότητα είναι το χαρακτηριστικό που συνοδεύει κάθε ανθρώπινη ύπαρξη [*Περί Σημείων*, XXII. 37-XXIII. 7].

β) στη σφαίρα της ηθικής

με *έπιλογισμό*, δηλαδή με έρευνα/επισκόπηση και συγκριτική αξιολόγηση των χαρακτηριστικών του θυμού που παρατηρούνται στα άτομα της εμπειρίας μας, είμαστε σε θέση να απαριθμήσουμε τα κοινά χαρακτηριστικά όλων, διαχωρίζοντάς τα από τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του καθενός. Με βάση την ομοιότητα των κοινών χαρακτηριστικών, μπορούμε να καταλήξουμε σε χαρακτηριστικά γνωρίσματα που αποδίδονται σε όλους τους θυμωμένους ανθρώπους και να εξάγουμε, *σημειούμεθα*, ποικίλους συμπερασμούς σχετικά με την προδιάθεση του θυμωμένου ατόμου [*Περί Όργῆς*, VII. 26-VIII. 8], τις συνέπειες του θυμού [*Περί Όργῆς*, VII. 22-26] ή, ακόμη, και την αληθή φύση του κακού [*Περί Όργῆς*, VII. 17].

γ) Στο σημείο αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο Φιλόδημος συνιστά την "*έπιλογιστική*" διαδικασία, μολονότι δεν κατονομάζει αυτήν, και σε άλλα πεδία, όπως στην πρακτική ηθική. Για παράδειγμα, ισχυρίζεται ότι ο καλός διαχειριστής περιουσίας είναι εκείνος που καθορίζει πολλά πράγματα, με αναφορά σε επικερδή και ωφέλιμη δραστηριότητα [*Περί Οἰκονομίας*, XIII. 22], και επιλέγει σύμφωνα με συγκριτικούς υπολογισμούς [*Περί Οἰκονομίας*, XIII. 8 και εξής].

Όπως, λοιπόν, επιβεβαιώνεται από τα παραπάνω παραδείγματα, η "*έπιλογιστική*" διαδικασία που εφαρμόζει ο Φιλόδημος στα έργα του συνάδει με εκείνη που ακολουθεί ο Επίκουρος και συνοψίζεται στα παρακάτω χαρακτηριστικά: 1) δεν είναι απόδειξη, 2) είναι θέμα μιας, καταρχήν, προσεκτικής έρευνας/επισκόπησης *σημείων* που προέρχονται από τα αδιαμφισβήτητα κριτήρια αλήθειας της επικούρειας φιλοσοφίας (*αίσθήσεις*, *προλήψεις* και *πάθη*), για να ακολουθήσει μια συγκριτική αξιολόγηση των πραγματικών ομοιοτήτων και διαφορών αυτών, ώστε, 3) να αναγνωρισθεί/τεκμηριωθεί μια ομοιότητα μεταξύ *σημείων*, στη βάση της οποίας εξάγονται, *σημειώνονται* , οι κατάλληλοι συμπερασμοί.

Στο σημείο αυτό πρέπει να διευκρινίσουμε τα εξής: **i)** ο Φιλόδημος, εκτός από την έμφαση που δίνει στην έρευνα/επισκόπηση *σημείων*, αναγνωρίζει, επίσης, τη σπουδαιότητα αναφορών από "*δεύτερο χέρι*", καθώς και τη χρήση *ἱστοριῶν* [*Περί Σημείων*, ΧΧ. 31-ΧΧΧ. 3], δηλαδή αναφορές που προέρχονται από προγενέστερες αυθεντίες της επικούρειας σχολής, **ii)** ο Φιλόδημος δείχνει να γνωρίζει ότι, κατά τη συγκριτική αξιολόγηση δεδομένων, έχει ιδιαίτερη σημασία η επιλογή κατάλληλων ομοιοτήτων ή διαφορών αυτών, καθώς και οι συμπερασμοί που εξάγονται από κάποιες συγκεκριμένες ομοιότητες, αλλά όχι από άλλες και, **iii)** ο Φιλόδημος, κατά τη συγκριτική αξιολόγηση, επιτρέπει πιθανές παραλλαγές και ιδιαιτερότητες, τις οποίες, κατά περίπτωση, βρίσκει τρόπο να προσαρμόσει με έναν συστηματικό τρόπο στη βάση ομοιοτήτων[173].

Β.2 Παρατηρήσεις-Συμπεράσματα

1. Η συχνή αναφορά του Φιλόδημου στον "*έπιλογισμό των φαινομένων*" θα μπορούσε να οδηγήσει στην υπόθεση ότι ο "*έπιλογισμός*" εφαρμόζεται σε εκείνα τα θέματα που έχουν "συλληφθεί" μόνο από την εμπειρία. Αλλά, με την έρευνα που προηγήθηκε στα έργα του Επίκουρου και του Φιλόδημου και, εν γένει, από τη χρήση του όρου στην επικούρεια φιλοσοφία, διαπιστώνουμε ότι, παρόλο που οι Επικούρειοι καθιστούν τα φαινόμενα ως κύρια σφαίρα εφαρμογής του "*ἐπιλογισμοῦ*", ο "*έπιλογισμός*", συχνά, εφαρμόζεται και σε θέματα τα οποία, προφανώς, δεν είναι εμπειρικά. Πράγματι, όπως έχουμε ήδη προαναφέρει, ο ίδιος ο Επίκουρος μιλάει και εξετάζει τον "*ἐπιλογισμόν τοῦ τέλους*", ο Δημήτριος ο Λάκων, όπως αναφέρει ο Φιλόδημος, μιλάει για την αποτυχία των αντιπάλων του να εφαρμόσουν τον "*ἐπιλογισμόν*" στις δικές τους μεθόδους συμπερασμού [*Περί Σημείων*, ΧΧVIII. 13 και εξής]. Τέλος, ας υπενθυμίσουμε ότι το χαρακτηριστικό γνώρισμα του "*ἐπιλογισμοῦ"* έγκειται στην συγκριτική αξιολόγηση *σημείων* που έχουν προκύψει κατόπιν προσεκτικής παρατήρησης. Όμως, στον όρο *σημεία* δεν συγκαταλέγονται μόνο τα *φαινόμενα*, αλλά και τα *φανερά*, τα *έναργῆ* και τα *παρ' ἡμῖν*.

2. Οι συμπερασμοί που συμπεριλαμβάνονται στο τελικό βήμα της *επιλογιστικῆς διαδικασίας*, τους οποίους περιγράψαμε παραπάνω, ερμηνεύθηκαν από κάποιους σύγχρονους σχολιαστές [De Lacys, 1978, σ. 100, υπ. 34] ως να επονομάζουν τον ίδιο τον "*έπιλογισμό*". Βέβαια, αν ανατρέξουμε στο έργο *Περί Σημείων*, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχουν ελάχιστα χωρία, στα οποία ο Φιλόδημος ερμηνεύει τον "*έπιλογισμό*" ως τον συμπερασμό ενός μη-προφανούς συμπεράσματος από προφανή *σημεῖα* [*Περί Σημείων*, ΧΧII. 37 και εξής]. Όμως, μια πληρέστερη επισκόπηση της εμφάνισης και εφαρμογής του όρου στα έργα της

[173] Για περαιτέρω ανάπτυξη των παραπάνω σημείων, βλ. V. Tsouna [Tsouna , 2007 σ. 58-59].

επικούρειας παράδοσης δείχνει, μάλλον, ότι ο *έπιλογισμός* ανήκει σε ένα στάδιο προγενέστερο του συμπερασμού [Allen, 2004 σ. 101]. Στην πραγματικότητα, όπως άλλωστε είναι φανερό από την προηγηθείσα ανάλυση και ερμηνεία, ο "*έπιλογισμός*", μέσω της επισκόπησης και συγκριτικής αξιολόγησης *σημείων,* κατέχει τον ρόλο θεμελίωσης μιας καθολικής ομοιότητας αυτών, από την οποία, και στη βάση αυτής, θα ακολουθήσουν συμπερασμοί μη-προφανών συμπερασμάτων. Με άλλα λόγια, ο "*έπιλογισμός*" αποτελεί την αναγκαία προϋπόθεση για τους συμπερασμούς, και όχι τον κατάλληλο συμπερασμό. Συγκεκριμένα, με τη βοήθεια του "*έπιλογισμοῦ*", δηλαδή της συγκριτικής αξιολόγησης δεδομένων, ο Επικούρειος αποκτά μια αντίληψη, πιθανώς μερική και ατελή, της φύσης των θεμάτων που μελετά. Τότε, σε αυτή τη βάση είναι σε θέση να συμπεράνει ότι εκείνα που δεν παρατηρούνται ή εκείνα που είναι αδύνατον να παρατηρηθούν πρέπει να είναι τα ίδια ή παρόμοια. Με λόγια του ίδιου του Φιλόδημου: "εκείνος που πραγματοποιεί συμπερασμούς έχει παρατηρήσει και κατανοήσει σωστά τα κοινά και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των ουσιών, των δυνάμεων, των ποιοτήτων, των ιδιοτήτων (*σύμπτωμα*), των προδιαθέσεων, των ποσοτήτων (*πλῆθος*), και των αριθμών, ώστε να κάνει την πρέπουσα "*μετάβασιν*" [*Περί Σημείων*, XXIV. 11-18].

3. Η "*έπιλογιστική*" διαδικασία στην ολοκληρωμένη μορφή της χαρακτηρίζεται από δύο διακεκριμένες συνιστώσες: από τη μια, το υλικό (material), επί του οποίου εφαρμόζεται ο "*έπιλογισμός*", και από την άλλη, το αποτέλεσμα (result), στην οποία καταλήγουν οι συμπερασμοί. Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι: **3α)** στην επικούρεια παράδοση ο "*έπιλογισμός*" εφαρμόζεται σε ένα ευρύ πεδίο θεμάτων, τα οποία απευθύνονται τόσο στη θεωρητική όσο και στην πρακτική σφαίρα και, **3β)** οι Επικούρειοι επιτρέπουν, μέσω της "*έπιλογιστικῆς*" διαδικασίας, την πραγματοποίηση συμπερασμών που αφορούν στα *πρόδηλα,* τα *ἄδηλα* και τα *ἀφανῆ*, δηλαδή δίνουν τη δυνατότητα μετάβασης σε ποικίλα πεδία, τα οποία μπορεί να είναι όμοια, αλλά και διαφορετικά από το πεδίο στο οποίο έχει εφαρμοστεί ο "*έπιλογισμός*", και αποτελεί τη βάση συμπερασμού. Για παράδειγμα με συγκριτική αξιολόγηση των φυσιολογικών συμπτωμάτων θυμωμένων ατόμων της εμπειρίας μας, παρατηρούμε ότι φυσιολογικά συμπτώματα της *πυρεξίας* και της *διόγκωσης* είναι κοινά σε όλους· με βάση αυτήν την ομοιότητα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η *πυρεξία* και η *διόγκωση* είναι τα φυσιολογικά συμπτώματα που ακολουθούν όλους τους θυμωμένους ανθρώπους· επίσης, από αυτά τα φυσιολογικά συμπτώματα είναι δυνατόν να εξαχθούν συμπερασμοί σχετικά με την προδιάθεσή τους, από την οποία προέρχεται μια συγκεκριμένη κρίση θυμού, όπως η οξυθυμία. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο παραπάνω παράδειγμα, οι συνιστώσες της επιλογιστικής διαδικασίας διακρίνονται με σαφήνεια: από τη μια, υπάρχει το πεδίο των φυσιολογικών συμπτωμάτων, επί του οποίου εφαρμόζεται ο "*έπιλογισμός*", και από την άλλη, μέσω των συμπερασμών, πραγματοποιούνται

δύο μεταβάσεις: μία στο ίδιο πεδίο, δηλαδή το πεδίο της φυσιολογίας, και η άλλη σε ένα διαφορετικό πεδίο, το πεδίο των ψυχικών διαθέσεων.

4. Όσον αφορά τη συντακτική δομή των όρων "*έπιλογισμός/έπιλογίζεσθαι*", σύμφωνα με τον J. Allen [Allen, 2004 σ. 102], μπορούμε να σημειώσουμε τα παρακάτω: **4α)** το ρήμα μπορεί να χρησιμοποιείται με άμεσο αντικείμενο[174], **4β)** το ουσιαστικό λαμβάνει ένα αντικείμενο στη γενική[175], **4γ)** το ρήμα χρησιμοποιείται για να εισάγει μια δευτερεύουσα πρόταση "*ὅτι*"[176] και, **4δ)** το ρήμα χρησιμοποιείται με άμεσο αντικείμενο και εισάγει μια δευτερεύουσα πρόταση[177]. Τα αποσπάσματα στα οποία οι όροι "*έπιλογισμός/έπιλογίζεσθαι*" λαμβάνουν αντικείμενο στη γενική ή χρησιμοποιούνται με άμεσο αντικείμενο εκφράζουν το υλικό επί του οποίου εφαρμόζεται ο "*έπιλογισμός*"· τα αποσπάσματα στα οποία το ρήμα χρησιμοποιείται για να εισάγει μια δευτερεύουσα πρόταση "*ὅτι*" εκφράζουν το αποτέλεσμα του συμπερασμού. Τέλος, οι περιπτώσεις στις οποίες το ρήμα χρησιμοποιείται με άμεσο αντικείμενο, υποδεικνύοντας το υλικό επί του οποίου εφαρμόζεται ο "*έπιλογισμός*", και οι περιπτώσεις στις οποίες το ρήμα εισάγει δευτερεύουσα πρόταση, υποδεικνύοντας το αποτέλεσμα του συμπερασμού, μπορούν να θεωρηθούν ατελείς εξειδικεύσεις ενός πρότυπου στο οποίο η "*έπιλογιστική*" διαδικασία αναπτύσσεται πλήρως.

4.4.3 Η εφαρμογή των όρων "έπιλογισμός/έπιλογίζεσθαι" σε άλλες περιοχές εκτός της επικούρειας φιλοσοφίας

Η υιοθέτηση και χρήση των όρων "*έπιλογισμός/έπιλογίζεσθαι*" στην επικούρεια παράδοση, ως καθημερινή δραστηριότητα έρευνας και συγκριτικής αξιολόγησης *φαινομένων*, θα μπορούσε να μεταφέρει και ένα επιπλέον νόημα: το κύριο είδος σκέψης που χρειαζόμαστε στη φιλοσοφία είναι ένα εντελώς συνηθισμένο είδος δραστηριότητας διαθέσιμο σε όλους τους ανθρώπους, και όχι κάποιο ιδιαίτερο νοητικό επίτευγμα που περιορίζεται σε εκείνους που ασχολούνται με συγκεκριμένους τομείς, όπως για παράδειγμα η διαλεκτική. Με αυτό το νόημα οι όροι "*έπιλογισμός/έπιλογίζεσθαι*" εισάγονται τόσο στη φιλοσοφική συζήτηση, όπως του Σέξτου Εμπειρικού, όσο και σε άλλους επιστημονικούς και τεχνικούς κλάδους, όπως στην Ιατρική, σε έργα μετρολογικού περιεχομένου, καθώς και σε έργα που πραγματεύονται θέματα σχετικά με τις εφαρμογές των Μαθηματικών,

---

[174] Ενδεικτικά, αναφέρουμε: *Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 72, *Ἐπιστολὴ πρὸς Μενοικέα*, 133, *Περί Σημείων*, XIII 32.

[175] Ενδεικτικά, αναφέρουμε: *Κύριαι Δόξαι*, 20, *Περί Σημείων*, XXII 37, XXVII 23.

[176] Ενδεικτικά, αναφέρουμε: *Ἐπιστολὴ πρὸς Ἡρόδοτον*, 73, *Περί Σημείων*, XXVIII 16.

[177] Ενδεικτικά, αναφέρουμε: *Περί Σημείων*, XXVIII 15-25.

για παράδειγμα στην Αστρονομία. Είναι προφανές, βέβαια, ότι η εφαρμογή του όρου ακολουθεί τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά γνωρίσματα του εκάστοτε κλάδου, και, επομένως, δεν προσαρμόζεται με απόλυτο τρόπο στο σχήμα που εμφανίζεται στον Επίκουρο και, ιδιαίτερα, σε εκείνη την πλήρως ανεπτυγμένη εκδοχή που προτείνεται από τον Φιλόδημο.

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα σαφούς εφαρμογής της "*ἐπιλογιστικῆς*" διαδικασίας, σε κλάδο εκτός φιλοσοφικής παράδοσης, συναντάται στον χώρο της Ιατρικής και συγκεκριμένα, στην εμπειρική σχολή της Ιατρικής που ιδρύθηκε τον 3ο π.Χ. αιώνα. Παρόλο που η λεπτομερής συζήτηση σχετικά με τη μέθοδο και τις τεχνικές που ακολούθησαν οι εμπειρικοί γιατροί δεν εμπίπτει στους στόχους της παρούσας διατριβής, θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι οι εμπειρικοί γιατροί δείχνουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για θέματα μεθοδολογίας και αναπτύσσουν ένα λεπτομερές σύστημα εμπειρικής έρευνας, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τις μεθοδολογικές προσεγγίσεις των επονομαζόμενων ορθολογικών γιατρών. Τα κύρια σημεία αυτού του συστήματος [Frede 2003] συνοψίζονται στα παρακάτω: **α)** άμεση διάκριση των *συμπτωμάτων* του ασθενή, **β)** σύνδεση των *συμπτωμάτων* αυτών μεταξύ τους σε μια ομάδα, τη *συνδρομή*, **γ)** χρησιμοποίηση των *συμπτωμάτων* της ομάδας αυτής ως *σημεῖα* για την *εὕρεσιν* εκείνων των *συμπτωμάτων* που, παροδικά, δεν διακρίνονται.

Η ιατρική γνώση, η ιατρική ικανότητα ή επάρκεια για την επίτευξη των παραπάνω στόχων δεν είναι τίποτα άλλο, για τους εμπειρικούς γιατρούς, παρά ζήτημα σύνθετης εμπειρίας, η οποία πρέπει να νοείται ως τριμερής. Υπάρχει, πρώτον, η εμπειρία που έχει κανείς με βάση τις ίδιες τις παρατηρήσεις του· η εμπειρία αυτή, η οποία ονομάζεται από τους εμπειρικούς γιατρούς *αὐτοψία*, αποτελεί τη βάση και τον πυρήνα της τριμερούς εμπειρίας. Υπάρχει, δεύτερον, η εμπειρία κατά την οποία έχει κανείς πρόσβαση ή μπορεί να στηριχτεί στην εμπειρία άλλων, με την προϋπόθεση ότι οι ιατρικές πηγές μεταφέρουν, αξιόπιστα, πληροφορίες· η εμπειρία αυτή αποτελεί την *ἱστορία*. Υπάρχει, τρίτον, η εμπειρία κατά την οποία μπορεί κανείς να προσφεύγει στη μετάβαση σε κάτι παρόμοιο, η οποία ονομάζεται *καθ' ὁμοιότητα μετάβασις*. Η τρίτη εμπειρία/μέθοδος χρησιμοποιείται με τρεις τρόπους: μια άγνωστη αρρώστια αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζεται μια παρόμοια, ήδη, γνωστή αρρώστια· μια αρρώστια που προσβάλλει ένα μέρος του σώματος, στο οποίο δεν έχει παρατηρηθεί, προηγουμένως, αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο που αντιμετωπίζεται η ίδια αρρώστια που έχει παρατηρηθεί, προηγουμένως, σε ένα διαφορετικό μέρος του σώματος· και στη θέση μιας γνωστής θεραπείας, που είναι ακατάλληλη, χρησιμοποιείται μια παρόμοια. Αυτό το είδος συλλογισμού που χρησιμοποιείται για τον σχηματισμό κρίσεων για εκείνα που δεν μπορούν, προσωρινά μόνο, να γίνουν αντιληπτά, ονομάζεται "*ἐπιλογισμός*".

Μπορούμε, λοιπόν, να εικάσουμε ότι η "*ἐπιλογιστική*" διαδικασία των εμπειρικών γιατρών χαρακτηρίζεται από τα παρακάτω: **1)** είναι μια καθημερινή, απλή

διαδικασία, κοινή σε όλα τα ανθρώπινα όντα, **2)** σε αντίθεση με τους Επικούρειους, οι οποίοι καθιστούν τα *φαινόμενα* την κύρια σφαίρα εφαρμογής του "*ἐπιλογισμοῦ*", οι εμπειρικοί γιατροί ορίζουν τον "*ἐπιλογισμό*" ως *φαινομένων λόγος*, δηλαδή ένα είδος συλλογισμού που σχετίζεται με τα *φαινόμενα*, **3)** σε αντίθεση πάλι με τους Επικούρειους, οι οποίοι θεωρούν τον "*ἐπιλογισμό*" την αναγκαία προϋπόθεση για την πραγματοποίηση συμπερασμών, οι εμπειρικοί γιατροί ονομάζουν τον "*ἐπιλογισμό*" ως τον ίδιο τον συμπερασμό, **4)** τέλος, οι εμπειρικοί γιατροί θεωρούν τον "*ἐπιλογισμό*" χρήσιμο και απαραίτητο εργαλείο για την *εὕρεσιν* των φαινομένων που ονομάζουν προσωρινά μη-προφανή. Τελικά, η κρίσιμη διαφορά μεταξύ Επικούρειων και εμπειρικών γιατρών αφορά στο "εύρος" και το είδος των συμπερασμών στους οποίους μπορεί να καταλήξει κάποιος μέσω του *ἐπιλογισμοῦ*. Συγκεκριμένα, ο εμπειρικός γιατρός αξιολογεί τα φαινόμενα και σχηματίζει κρίσεις είτε για φαινόμενα είτε για θέματα που δεν δύνανται, προσωρινά, να παρατηρηθούν. Από την άλλη, ο Επικούρειος αξιολογεί τα *σημεῖα* και σχηματίζει κρίσεις για φαινόμενα, για θέματα που δεν είναι άμεσα εμφανή, αλλά, επιπλέον, θεωρώντας εφικτή μια γνώση, έστω ατελή, της φύσης των υπό μελέτη θεμάτων, προεκτείνει τις κρίσεις του και για θέματα που δεν *δύνανται* να είναι εμφανή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΝΤΑΣΣΟΝΤΑΣ ΤΑ *ΜΕΤΡΙΚΑ* ΣΤΑ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

5.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΠΟΙΗΣΗ

5.1.1 Εισαγωγή

Ο S. Unguru στο άρθρο του που άφησε εποχή, με τον τίτλο "Για την ανάγκη να ξαναγραφεί η ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών" ("On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics") [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 13-77], επισημαίνει ότι στην ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών υπάρχουν, γενικά μιλώντας, τρία στάδια: το *αριθμητικό*, το *γεωμετρικό* και το *αλγεβρικό*. Στο *αριθμητικό* στάδιο εντάσσονται τα βαβυλωνιακά και τα αιγυπτιακά Μαθηματικά, στα οποία αναπτύσσονται συλλογισμοί που, σε μεγάλο βαθμό, είναι συλλογισμοί της στοιχειώδους αριθμητικής ή βασίζονται σε εμπειρικούς κανόνες που έχουν προκύψει από επιτυχείς δοκιμές και χρησιμοποιούνται ως υποδείγματα. Σύμφωνα με τον D. Fowler [Fowler, 1999, σ. 372], τα βαβυλωνιακά Μαθηματικά είναι, κατά κανόνα, αλγοριθμικής υφής, περιέχουν ελάχιστες γεωμετρικές αναφορές, οι οποίες, μάλιστα, περιορίζονται στο μετρολογικό επίπεδο· τα αιγυπτιακά Μαθηματικά είναι, επίσης, αλγοριθμικά, και μολονότι οι γεωμετρικές αναφορές τους είναι περισσότερο εκτεταμένες από εκείνες των βαβυλωνιακών Μαθηματικών, παραμένουν και αυτές περιορισμένες σε ένα, αυστηρά, μετρολογικό πεδίο. Αν στραφούμε τώρα στο *γεωμετρικό* στάδιο, μπορούμε να καταγράψουμε ως αποκορύφωμά του τα κλασικά ελληνικά Μαθηματικά, δηλαδή τα Μαθηματικά του Ευκλείδη, του Αρχιμήδη και του Απολλώνιου, τα οποία είναι, από πολλές απόψεις, μοναδικά μεταξύ των άλλων αρχαίων μαθηματικών παραδόσεων: είναι, αποκλειστικά, γεωμετρικά και χαρακτηρίζονται από συλλογισμούς που εκτυλίσσονται υπό τη μορφή της αξιωματικής-παραγωγικής μεθόδου. Τέλος, το *αλγεβρικό* στάδιο χαρακτηρίζεται από έναν τελεστικό πράξεων συμβολισμό· παρουσιάζει έναν υψηλό βαθμό αφαίρεσης· ως εκ τούτου, δεν εστιάζεται σε μαθηματικά αντικείμενα, αλλά σε μαθηματικές σχέσεις, οι οποίες καθορίζουν τις δομές που αποτελούν το αντικείμενο της νεότερης άλγεβρας· μολονότι τα πρώτα ίχνη του *αλγεβρικού*

σταδίου συναντώνται στα *Αριθμητικά* του Διόφαντου και στο *Kitāb al-muhtasar fī hisāb al-jabr w'al-muqābala* του Al-Khwārizmī, οι απαρχές της πλήρους εκτύλιξης των δυνατοτήτων του δεν θα αρχίσουν πριν από τον 16ο αιώνα στη Δυτική Ευρώπη.

Στο σημείο αυτό πρέπει να προσθέσουμε ότι η κλασική περίοδος, εκτός από τον αξιωματικό-παραγωγικό συλλογισμό, χαρακτηρίζεται, επίσης, και από μια καθαρή διάκριση μεταξύ των μαθηματικών κλάδων/περιοχών, όπως η γεωμετρία και η αριθμητική. Κάθε κλάδος έχει τον δικό του χώρο και ασχολείται με το αντικείμενό του, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τις δικές του μεθόδους και τεχνικές. Όπως ισχυρίζεται ο Αριστοτέλης στα *Αναλυτικά Ύστερα* [75a37-75b20], υπάρχουν δύο διαφορετικά γένη, η αριθμητική και η γεωμετρία, και δεν μπορούμε να μεταβαίνουμε, κατά την απόδειξη, από το ένα γένος στο άλλο, όπως για παράδειγμα να αποδεικνύουμε γεωμετρικές προτάσεις με αριθμητικές μεθόδους. Πράγματι, υπάρχουν τρία στοιχεία στην απόδειξη: **1)** το συμπέρασμα, δηλαδή ένα εγγενές χαρακτηριστικό κάθε γένους, **2)** τα αξιώματα, τα οποία είναι οι προκείμενες της απόδειξης και, **3)** το γένος, του οποίου τα χαρακτηριστικά αποκαλύπτονται από την απόδειξη[178]. Τα αξιώματα μπορεί να είναι ταυτόσημα σε δύο ή περισσότερες επιστήμες, αλλά στην περίπτωση των δύο διαφορετικών γενών, όπως η αριθμητική και η γεωμετρία, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η αριθμητική απόδειξη προκειμένου να αποδειχθούν θεωρήματα περί μεγεθών, παρά μόνο στην περίπτωση στην οποία τα υπό ερώτηση μεγέθη είναι αριθμοί[179]. Η αριθμητική απόδειξη, όπως και κάθε απόδειξη, έχει το δικό της γένος· επομένως, το γένος πρέπει να είναι, είτε εντελώς είτε σε κάποιο βαθμό, το ίδιο· αν αυτό δεν συμβαίνει η μετάβαση της απόδειξης είναι αδύνατη, επειδή "οι άκροι και μέσοι όροι" πρέπει να αντλούνται από το ίδιο γένος· γιατί, αν δεν συνδέονται *καθαυτά* (per se), θα είναι μεταξύ τους τυχαίοι[180]. Επομένως, η γεωμετρία δεν μπορεί να αποδείξει τα θέματα/αντικείμενα της αριθμητικής, ούτε οποιαδήποτε επιστήμη μπορεί να αποδείξει τα θέματα/αντικείμενα άλλης, εκτός αν εντάσσονται σε αυτήν, όπως στην περίπτωση της οπτικής που εντάσσεται στην γεωμετρία και

---

178 "*Ούκ ἄρα ἔστιν ἐξ ἄλλου γένους μεταβάντα δεῖξαι, οἷον τὸ γεωμετρικὸν ἀριθμητικῆι. τρία γάρ ἐστι τὰ ἐν ταῖς ἀποδείξεσιν, ἓν μὲν τὸ ἀποδεικνύμενον, τὸ συμπέρασμα (τοῦτο δ΄ ἐστὶ τὸ ὑπάρχον γένει τινὶ καθ΄ αὑτό), ἓν δὲ τὰ ἐξιώματα (ἀξιώματα δ΄ ἐστὶν ἐξ ὧν)· τρίτον τὸ γένος τὸ ὑποκείμενον, οὗ τὰ πάθη καὶ τὰ καθ΄ αὑτὰ συμβεβηκότα δηλοῖ ἡ ἀπόδειξις".*

179 "*ὧν δὲ τὸ γένος ἕτερον, ὥσπερ ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρίας, οὐκ ἔστι τὴν ἀριθμητικὴν ἀπόδειξιν ἐφαρμόσαι ἐπὶ τὰ τοῖς μεγέθεσι συμβεβηκότα, εἰ μὴ τὰ μεγέθη ἀριθμοί εἰσι· τοῦτο δ΄ ὡς ἐνδέχεται ἐπί τινων, ὕστερον λεχθήσεται".*

180 "*ὥστ΄ ἢ ἁπλῶς ἀνάγκη τὸ αὐτὸ εἶναι γένος ἢ πῆι, εἰ μέλλει ἡ ἀπόδειξις μεταβαίνειν. ἄλλως δ΄ ὅτι ἀδύνατον, δῆλον· ἐκ γὰρ τοῦ αὐτοῦ γένους ἀνάγκη τὰ ἄκρα καὶ τὰ μέσα εἶναι. εἰ γὰρ μὴ καθ΄ αὑτά, συμβεβηκότα ἔσται".*

της αρμονικής που εντάσσεται στην αριθμητική[181]· ούτε η γεωμετρία, πάλι, μπορεί να αποδείξει κάποια χαρακτηριστικά των γραμμών, τα οποία οι γραμμές δεν κατέχουν *ως* γραμμές· για παράδειγμα δεν μπορεί να αποδειχθεί ότι η ευθεία γραμμή είναι η πλέον τέλεια των γραμμών ή αντίθετη του κύκλου, γιατί αυτές οι ιδιότητες δεν ανήκουν στις γραμμές εξαιτίας του ιδιαίτερου γένους τους, αλλά λόγω κάποιων ιδιοτήτων που μοιράζονται με άλλα γένη[182].

Άρα, η πρώτη ελληνική γεωμετρία, τουλάχιστον μέχρι τον 2ο π.Χ. αιώνα, φαίνεται να είναι, στο μέγιστο βαθμό, εντελώς μη-αριθμητικοποιημένη, σύμφωνα με έναν όρο που χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον D. Fowler [Fowler, 1999, σ. 8]. Συγκεκριμένα:

5.1.2 Αριθμητικοποιημένα Μαθηματικά

Ο D. Fowler [Fowler 1999, σ. 8] χρησιμοποιεί τον όρο *αριθμητικοποιημένα Μαθηματικά* για να περιγράψει εκείνα τα μαθηματικά με το εξής χαρακτηριστικό γνώρισμα: η χρήση μιας ιδέας αριθμού είναι επαρκώς γενική, ώστε να είναι δυνατή η περιγραφή ενός μοντέλου που συνηθίζεται, σήμερα, να ονομάζεται *θετική ευθεία των αριθμών* μαζί με την *αριθμητική* της. Το εύρος αυτών των αριθμών είναι αρκετά περιεκτικό για να συμπεριλάβει μεγάλο μέρος των Βαβυλωνιακών αριθμών, οι οποίοι περιορίζονται στους επονομαζόμενους "κανονικούς" αριθμούς, καθώς και αριθμούς που μπορούν να γραφτούν σαν συνήθη κλάσματα με παρονομαστές που περιέχουν δυνάμεις του 2, του 3 και του 5· ενώ, σε άλλες εποχές, το όριο της αριθμητικής επεκτείνεται και συμπεριλαμβάνει άτυπες ή τυπικές περιγραφές άρρητων, σύνθετων, απειροστών και άπειρων ποσοτήτων, που μπορούν να συμπεριληφθούν υπό τον γενικό όρο *αριθμοί*. Αυτοί οι *αριθμοί*, κατόπιν, διαχέονται στα Μαθηματικά: στη γεωμετρία οι γραμμές αποκτούν μήκος, έναν αριθμό· το ορθογώνιο έχει ένα εμβαδόν, πάλι έναν αριθμό, που προκύπτει ως γινόμενο των μηκών που έχουν αποκτήσει οι τρεις πλευρές του· τα τρισδιάστατα διαγράμματα έχουν έναν αριθμητικό όγκο· τελευταία, έχουν δημιουργηθεί καθαρά αριθμητικές κατασκευές, οι χώροι ανώτερων διαστάσεων, των οποίων οι ιδιότητες περιγράφονται από *γεωμετρικές αναλογίες*. Οι λόγοι ορίζονται αριθμητικά ως το πηλίκο των δύο αριθμών που τους αναπαριστούν· για παράδειγμα ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο ενός κύκλου γίνεται ένας αριθμός, ο οποίος μπορεί να προσεγγίζεται

---

181 "*οὐδ΄ ἄλλη ἐπιστήμη τὸ ἑτέρας, ἀλλ΄ ἢ ὅσα οὕτως ἔχει πρὸς ἄλληλα ὥστ΄ εἶναι θάτερον ὑπὸ θάτερον, οἷον τὰ ὀπτικὰ πρὸς γεωμετρίαν καὶ τὰ ἁρμονικὰ πρὸς ἀριθμητικήν*".

182 "*οὐδ΄ εἴ τι ὑπάρχει ταῖς γραμμαῖς μὴ ἧι γραμμαὶ καὶ ἧι ἐκ τῶν ἀρχῶν τῶν ἰδίων, οἷον εἰ καλλίστη τῶν γραμμῶν ἡ εὐθεῖα ἢ εἰ ἐναντίως ἔχει τῆι περιφερεῖ· οὐ γὰρ ἧι τὸ ἴδιον γένος αὐτῶν, ὑπάρχει, ἀλλ΄ ἧι κοινόν τι*".

από τον αριθμό 3, ή από τα κλάσματα $3\frac{1}{8}$, $\frac{22}{7}$ και $\frac{355}{113}$, ή από τον δεκαδικό αριθμό 3,1416…, ή από ένα άπειρο γινόμενο $(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}$ …) [Fowler, 1999, σ. 9]. Επομένως, η γεωμετρία μεταφράζεται σε αριθμητικό χειρισμό των αριθμών, δηλαδή πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, εξαγωγή ριζών κ.λπ., και αυτή η αριθμητική, αργότερα, ενσωματώνεται/συνοψίζεται στην άλγεβρα· για παράδειγμα το επονομαζόμενο Πυθαγόρειο θεώρημα γίνεται $a^2 + b^2 = c^2$· πρόκειται για μια πρόταση που εμπλέκει μήκη, δηλαδή τους αριθμούς a, b και c των πλευρών του τριγώνου.

Βέβαια, τα ελληνικά Μαθηματικά, τουλάχιστον μέχρι τον 2ο π.Χ. αιώνα, φαίνεται ότι είναι, σε έναν αξιοσημείωτο βαθμό, διαφορετικά· δεν χρησιμοποιούν τα συνήθη κλάσματα, δηλαδή δεν θεωρούν τους λόγους ως πραγματικούς αριθμούς και, επομένως, δεν θεωρούν την αριθμητική ως τη φυσική και προφανή βάση, επί της οποίας θα οικοδομήσουν τα μαθηματικά τους. Το κύριο, λοιπόν, χαρακτηριστικό των πρώτων ελληνικών Μαθηματικών είναι ότι φαίνονται να είναι εντελώς μη-αριθμητικοποιημένα.

Όμως, μια βαθμιαία μετατόπιση από αυτήν την αντίληψη σημειώνεται κατά τη διάρκεια της Ύστερης αρχαιότητας, η οποία έχει ως αποτέλεσμα μία αξιοσημείωτη αριθμητικοποίηση. Υπάρχουν δύο παραδόσεις που υποδεικνύουν αυτή την αριθμητικοποίηση. Η πρώτη είναι η αστρονομική, η οποία, αρχικά, ανιχνεύεται στα έργα του Υψικλή και του Ίππαρχου τον 2ο π.Χ. αιώνα, αλλά κυρίως, εκφράζεται στη *Μεγάλη Μαθηματική Σύναξιν* του Πτολεμαίου και την παράδοσή της. Η δεύτερη είναι η μετρολογική παράδοση, η οποία επιβεβαιώνεται στα Βαβυλωνιακά και Αιγυπτιακά Μαθηματικά, αλλά η πλήρης ανάπτυξή της δηλώνεται στο ηρώνειο σύνταγμα. Με λόγια του ίδιου του D. Fowler [Fowler, 1999, σ. 9]: "Η αστρονομία του Πτολεμαίου και τα μαθηματικά του Ήρωνα και του Διόφαντου φαίνεται να είναι μια δυνατή και εμβριθής μείξη των πρώτων ελληνικών γεωμετρικών μεθόδων με βαβυλωνιακές αριθμητικές μεθόδους".

5.1.3 Η αριθμητικοποίηση στα Μετρικά *του Ήρωνα*

Ποιος, όμως, είναι ο ιδιαίτερος τρόπος με τον οποίον τα *Μετρικά* του Ήρωνα συνδέονται με τη διαδικασία της αριθμητικοποιημένης γεωμετρίας και, ιδιαίτερα, ποια είναι η έκταση και τα όρια αυτής στο συγκεκριμένο έργο;

Στο σημείο αυτό πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι τα *Μετρικά* περιέχουν διαφορετικά είδη κειμενικών ενοτήτων, όπως για παράδειγμα προοίμια, θεωρήματα και λήμματα με τις αποδείξεις τους, παραθέματα από έργα άλλων συγγραφέων, κυρίως όμως, Προβλήματα με τις λύσεις τους, τα οποία αποτελούν και το κύριο μέρος της πραγματείας. Η σύνθεση αριθμητικών και γεωμετρικών στοιχείων παρατηρείται κατά την ανάπτυξη των Προβλημάτων· πιο αναλυτικά

συναντάται: **α)** κατά την *Έκθεσιν* του προβλήματος, όταν εκχωρούνται αριθμητικές τιμές στα δοθέντα αυτού, για παράδειγμα: "*Έστω τρίγωνον όρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν καὶ ἔστω ἡ μὲν ΑΒ μονάδων γ ἡ δὲ ΒΓ μονάδων δ.*" [152.1-2], **β)** κατά την αναγγελία των αποτελεσμάτων, για παράδειγμα: "*ἔσται ἡ κάθετος μονάδων ιβ* " [160.13-14], **γ)** στον "αριθμο-γεωμετρικό λόγο" και, **δ)** στο Πρόβλημα, θεωρούμενο ως όλον και ως αποτελούμενο από δύο κειμενικές ενότητες, εκ των οποίων η δεύτερη είναι η αμιγώς αριθμητική.

Η αριθμητικοποίηση στις περιπτώσεις **α)** και **β)** δεν χρήζει περαιτέρω διερεύνησης· πράγματι, τα δοθέντα στοιχεία προβλημάτων μετρολογικής υφής, καθώς και τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την επίλυση αυτών, συνοδεύονται, σχεδόν πάντα, από αριθμητικές τιμές.

Όμως εξετάζοντας την περίπτωση **δ)**, εύλογα, γεννιέται το ερώτημα: οι δύο κειμενικές ενότητες, που καταγράφονται στα Προβλήματα των *Μετρικών*, μπορούν να θεωρηθούν ότι συνυφαίνονται αξεδιάλυτα σε μία και μόνο μία κειμενική ενότητα ή εξακολουθούν να αποτελούν δύο ενότητες με διακεκριμένα όρια. Λαμβάνοντας υπόψη την ανάλυση και ερμηνεία που προηγήθηκε, κατά την επίλυση Προβλημάτων τόσο με την μέθοδο του "*επιλογισμού* " όσο και με την "*κατὰ ἀνάλυσιν*" μέθοδο, θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι οι δύο αυτές κύριες μορφές "λόγου" που καθορίζουν το έργο των *Μετρικών*, παρά τη στενή σύνδεσή τους, εξακολουθούν να διαχωρίζονται και να αποτελούν δύο διακριτές συνιστώσες. Πράγματι, κατά την επίλυση Προβλημάτων με τη μέθοδο του "*επιλογισμού* " πραγματοποιείται μια "*καθ' ὁμοιότητα μετάβασις*", από τον "γεωμετρικό λόγο" στους αριθμητικούς υπολογισμούς, οπότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι αριθμητικοί υπολογισμοί συνιστούν μια διακριτή κειμενική ενότητα με συστατικό στοιχείο μια αλληλουχία αριθμητικών πράξεων, η οποία αναπτύσσεται παράλληλα, κατά το μάλλον ή ήττον, και ακολουθεί τα γεωμετρικά επιχειρήματα του "γεωμετρικού λόγου". Ας στραφούμε, τώρα, στην επίλυση Προβλημάτων με την "*κατὰ ἀνάλυσιν*" μέθοδο, και ας υπενθυμίσουμε ότι από τα δύο μέρη του "γεωμετρικού λόγου", "Υποθετικό" και "Βεβαιωτικό", το "Βεβαιωτικό" εκτυλίσσεται στη γλώσσα των δεδομένων και επιλύει δυνητικά το Πρόβλημα· οι αριθμητικοί υπολογισμοί αναπτύσσονται παράλληλα, κατά το μάλλον ή ήττον, με τις γεωμετρικές προτάσεις του "Βεβαιωτικού μέρους", οπότε μπορούμε, πάλι, να ισχυριστούμε ότι αποτελούν μια διακριτή κειμενική ενότητα.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η **γ)** περίπτωση. Πρόκειται για μια μορφή αριθμητικοποιημένης γεωμετρίας την οποία ονομάζουμε "αριθμο-γεωμετρικό λόγο" και στην οποία εμπλέκονται γεωμετρικά αντικείμενα, αριθμοί και υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις. Ο "αριθμο-γεωμετρικός λόγος" συναντάται σε όλα τα Προβλήματα που επιλύονται με την μέθοδο του "*επιλογισμού* ", καθώς και σε κάποια Προβλήματα των *Μετρικών* που επιλύονται με την "*κατὰ ἀνάλυσιν*" μέθοδο, και καταγράφεται με μια συγκεκριμένη γραμματική και

συντακτική δομή [βλέπε ενότητα 4.2.2]. Όσον αφορά, τώρα, στα επιχειρήματα που εκτυλίσσονται κατά την εκδίπλωση του "αριθμο-γεωμετρικού λόγου" παρατηρούμε ότι ακολουθούν μια συγκεκριμένη αντίστοιχη ομάδα επιχειρημάτων του "γεωμετρικού λόγου"· η ομάδα αυτή αποτελεί, τόσο κατά την επίλυση Προβλημάτων με τη μέθοδο του "*έπιλογισμού*" όσο και κατά την επίλυση Προβλημάτων με την "*κατὰ ἀνάλυσιν*" μέθοδο, μια επαρκή και ικανή βάση για να πραγματοποιηθεί μια μετάβαση από τον ένα "λόγο" στον άλλο. Και ακριβώς αυτή η μετάβαση επιτρέπει τον διαχωρισμό των δύο αυτών "λόγων" σε δύο διακριτές συνιστώσες, οι οποίες διατηρούν την ύπαρξή τους και τα διακριτά χαρακτηριστικά τους.

Τελικά, η ανάμειξη αριθμητικών και γεωμετρικών στοιχείων αποτελεί ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα των *Μετρικών*· η αριθμητικοποίηση αυτή, με τις διάφορες μορφές που περιγράψαμε παραπάνω, διαχέεται σε ολόκληρο το έργο. Όμως, όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε, δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως "δομική" αριθμητικοποίηση, όπως εκείνη που εμφανίζεται σε κείμενα μεταγενέστερης εποχής. Πράγματι, οι κειμενικές ενότητες που καταγράφονται στο έργο των *Μετρικών*, παρά τη μεταξύ τους σύνδεση, δεν συγχωνεύονται η μία με την άλλη, αλλά διατηρούν τη διακριτή τους ύπαρξη.

5.2 Ερμηνεύοντας το εγχείρημα του Ήρωνα: Εύρεση υπολογιστικών διαδικασιών για τη μέτρηση και τη διαίρεση σχημάτων

5.2.1 Εισαγωγή

Οι δύο κύριες μαθηματικές παραδόσεις που συναντώνται στον αρχαίο κόσμο

Όπως έχουμε, ήδη, αναφέρει τα ελληνικά Μαθηματικά, τουλάχιστον μέχρι τον 3ο π.Χ. αιώνα, ταυτίστηκαν με τα γεωμετρικά επιτεύγματα μιας εκλεκτής ομάδας συγγραφέων της ελληνιστικής εποχής, όπως ο Ευκλείδης, ο Αρχιμήδης και ο Απολλώνιος, στα έργα των οποίων συναντάται ένα εξαιρετικά πολύπλοκο και προηγμένο μαθηματικό είδος με κύριο χαρακτηριστικό την ανάπτυξη ολοκληρωμένων πρακτικών αυστηρής μαθηματικής απόδειξης. Η πλέον ευκρινής εικόνα των πρακτικών αυτών συναντάται στα *Στοιχεία*, το αρχαιότερο και αντιπροσωπευτικότερο έργο που με μεγάλη συνέπεια είναι γραμμένο σε αξιωματική-παραγωγική μορφή: όλες οι προτάσεις (θεωρήματα και προβλήματα κατασκευών) που περιέχει εξάγονται με παραγωγικό συλλογισμό από λίγες σε αριθμό πρώτες αρχές (ορισμοί, αιτήματα και κοινές έννοιες).

Παράλληλα, όμως, με αυτήν την παράδοση υπήρξαν και άλλες μορφές Μαθηματικών, που ασκήθηκαν από επαγγελματίες που ασχολούνταν με το εμπόριο, ή τη διοίκηση, αλλά και από αρχιτέκτονες ή τοπογράφους, που

ασχολούνταν με υπολογισμούς εμβαδών και όγκων γεωμετρικών σχημάτων, καθώς και με τη μέτρηση της γης. Τα κοινά χαρακτηριστικά αυτών των μαθηματικών πρακτικών συνίστανται στη διατύπωση προβλημάτων υπολογισμού και στην παρουσίαση μεθόδων που τα επιλύουν. Οι μέθοδοι επίλυσης βασίζονται σε αριθμητικούς υπολογισμούς, οι οποίοι δίνονται υπό μορφή αλγορίθμων ή, γενικότερα, επιλυτικών διαδικασιών. Τα προβλήματα αυτού του είδους έχουν μακρά παράδοση και απαντούν σε όλους τους αρχαίους πολιτισμούς, κυρίως, με δύο μορφές: **α)** είτε με τη μορφή στοιχειωδών προβλημάτων, τα οποία έλκουν την καταγωγή τους από προβλήματα της καθημερινής ζωής· **β)** είτε με τη μορφή προβλημάτων εκπαιδευτικού χαρακτήρα με σκοπό την υπόδειξη και εκμάθηση τεχνικών επίλυσης.

5.2.2 Μετρικά *: Μεταξύ θεωρίας και πρακτικής*

Ας στραφούμε τώρα στα *Μετρικά* και ας υπενθυμίσουμε ότι το κύριο χαρακτηριστικό του έργου είναι η επίλυση προβλημάτων που αφορούν στην εύρεση εμβαδών και όγκων επίπεδων και στερεών σωμάτων, καθώς και στη διαίρεση επίπεδων και στερεών σωμάτων, υπό δοθέντα λόγο. Η διαφορά, όμως, των *Μετρικών* από τα υπόλοιπα έργα μετρολογικού περιεχομένου[183], όπως έχουμε ήδη αναφέρει και αναπτύξει, έγκειται στο ότι τα περισσότερα Προβλήματα των *Μετρικών*, εκτός από την υπολογιστική διαδικασία η οποία αναπτύσσεται με τη μορφή καθαρού αριθμητικού λόγου, περιέχουν και μια αλληλουχία επιχειρημάτων, τα οποία παρατίθενται υπό τη μορφή γεωμετρικού λόγου, η οποία προηγείται των αριθμητικών υπολογισμών.

Επομένως, ανακεφαλαιώνοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτό που χαρακτηρίζει τα *Μετρικά* είναι ότι κάθε Πρόβλημα συνίσταται, κατά κανόνα, από δύο διακριτές κειμενικές ενότητες: **α)** έναν γεωμετρικό "λόγο" που κατατάσσεται στην 1η κειμενική ενότητα και αναπτύσσεται, αμέσως, μετά τη διατύπωση του Προβλήματος και, **β)** μια διαδικασία υπολογισμού που κατατάσσεται στη 2η κειμενική ενότητα, η οποία ακολουθεί τον γεωμετρικό "λόγο" και καταλήγει στη λύση του Προβλήματος. Από την προηγηθείσα εξέταση και μελέτη των Προβλημάτων που πραγματοποιήσαμε στο Κεφάλαιο 4 μπορούμε να συνοψίσουμε τα χαρακτηριστικά αυτών των δύο κειμενικών ενοτήτων. Συγκεκριμένα:

[183] Ενδεικτικά, αναφέρουμε: αιγυπτιακοί πάπυροι, βαβυλωνιακά σφηνοειδή κείμενα, οι πραγματείες των Ρωμαίων agrimensores (ποδομέτρες) που χρονολογούνται από το 1ο μ.Χ. αιώνα μέχρι τις αρχές του 5ου μ.Χ. αιώνα, βυζαντινές συλλογές στις οποίες, πιθανώς, μεταγράφονται παλαιότερα κείμενα κ.λπ.

1η κειμενική ενότητα

Ο γεωμετρικός "λόγος"

i) Αναφέρεται σε γεωμετρικά αντικείμενα.

ii) Όσον αφορά στη γλωσσική εκφορά του, μπορούμε να συνοψίσουμε τα παρακάτω γραμματικά και συντακτικά χαρακτηριστικά: α) η σύνδεση είναι παρατακτική, β) η πλειονότητα των επιχειρημάτων εισάγεται με τη χρήση συμπερασματικών συνδέσμων, για παράδειγμα των συνδέσμων "*ἄρα*" και "*ὥστε*" και αιτιολογείται είτε, άμεσα, με τη χρήση αιτιολογικών συνδέσμων, για παράδειγμα του συνδέσμου "*ἐπεί*", είτε, έμμεσα, από τα δοθέντα του Προβλήματος και, γ) η "ρηματική" δομή είναι πλούσια, όσον αφορά στους χρόνους και τις εγκλίσεις, δηλαδή μπορούμε να συναντήσουμε οριστική ενεστώτα, προστακτική ενεστώτα, οριστική μέλλοντα, καθώς και τετελεσμένους χρόνους.

iii) Για την ανάπτυξη και τεκμηρίωση των γεωμετρικών επιχειρημάτων, χρησιμοποιούνται τόσο "εσωτερικές" αναφορές, σε αποτελέσματα που έχουν προκύψει από προηγούμενες προτάσεις των *Μετρικών*, όσο και "εξωτερικές" αναφορές, σε αποτελέσματα προγενέστερων Μαθηματικών. Συγκεκριμένα, υπάρχουν πολυάριθμες υπόρρητες αναφορές στα έργα *Στοιχεία* και *Δεδομένα* του Ευκλείδη και ρητές, ως επί το πλείστον, αναφορές στα έργα *Κύκλου μέτρησις*, *Περί πλινθίδων και κυλίνδρων*, *Μέθοδος*, *Περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων* και *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* του Αρχιμήδη, καθώς και αποτελέσματα που προκύπτουν από έργα του Εύδοξου και του Διονυσόδωρου.

iv) Είναι συναφής με τους αριθμητικούς υπολογισμούς που, διαδοχικά, καταγράφονται κατά την εκτύλιξη της υπολογιστικής διαδικασίας. Σε κάποια Προβλήματα, μάλιστα, τα διαδοχικά βήματα με τα οποία αναπτύσσεται η υπολογιστική διαδικασία ακολουθούν, κατά βήμα, την εκδίπλωση των γεωμετρικών επιχειρημάτων.

Όμως, όπως έχουμε, ήδη, επισημάνει, η μείξη αριθμητικών και γεωμετρικών στοιχείων διατρέχει το σύνολο του έργου των *Μετρικών*, με αποτέλεσμα σε πολλά Προβλήματα του έργου η 1η κειμενική ενότητα, εκτός από την ύπαρξη του γεωμετρικού "λόγου", να περιέχει και εκείνον τον λόγο που χαρακτηρίζουμε ως αριθμο-γεωμετρικό "λόγο" και στον οποίο καταγράφονται τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

Ο αριθμο-γεωμετρικός "λόγος"

i) Αναφέρεται σε γεωμετρικά αντικείμενα, αριθμούς και υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις.

ii) Όσον αφορά στη γλωσσική εκφορά του, μπορούμε να συνοψίσουμε τα παρακάτω γραμματικά και συντακτικά χαρακτηριστικά: **α)** η σύνδεση είναι παρατακτική, **β)** η πλειονότητα των επιχειρημάτων εισάγεται με τη χρήση συμπερασματικών συνδέσμων, για παράδειγμα των συνδέσμων "*ἄρα*", "*ὥστε*" και "*οὖν*" και αιτιολογείται είτε, άμεσα, με τη χρήση αιτιολογικών συνδέσμων, για παράδειγμα του συνδέσμου "*ἐπεὶ*" ή του ρηματικού τύπου "*ὡς δέδεικται*" είτε, έμμεσα, από προηγηθέντες αριθμητικούς υπολογισμούς, **γ)** η γραμματική δομή ακολουθεί μια συγκεκριμένη μορφή, η οποία περιγράφεται ως εξής: **γ1)** τα γεωμετρικά αντικείμενα, που καταγράφονται, βρίσκονται στη θέση του υποκειμένου της πρότασης, **γ2)** ο ρηματικός τύπος δίνεται με γ΄ πρόσωπο οριστικής ενικού αριθμού, χρόνου ενεστώτα ή μέλλοντα, φωνής ενεργητικής του ρήματος "*εἰμὶ*", **γ3)** οι αριθμοί ενέχουν τη θέση του κατηγορήματος και συνοδεύονται πάντα από το ουσιαστικό "μονάς" και, **γ4)** οι υποδηλωμένες αριθμητικές πράξεις από τις οποίες προκύπτουν τα αριθμητικά αποτελέσματα θα καταγραφούν στη 2η ενότητα του Προβλήματος.

2η κειμενική ενότητα

Η υπολογιστική διαδικασία

i) Περιλαμβάνει τη διαδικασία υπολογισμού, δηλαδή τις αριθμητικές πράξεις που, διαδοχικά, εκτελούνται, ώστε να δοθεί η λύση του Προβλήματος.

ii) Περιγράφεται ως "*μέθοδος*" στα Προβλήματα Ι.2, Ι.3, Ι.5, Ι.6, ΙΙΙ.2 και ΙΙΙ.3, στα υπόλοιπα Προβλήματα περιγράφεται, ως επί το πλείστον, ως "*σύνθεσις*" και χαρακτηρίζεται από μια καθοδηγητική χροιά.

iii) Κατά τη διατύπωση/δήλωση των πράξεων υπενθυμίζουμε ότι συναντώνται οι παρακάτω ρηματικοί τύποι: **α)** Α΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει ρήματα β΄ προσώπου, προστακτικής ενικού/πληθυντικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής, **β)** Β΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει μετοχές, χρόνου αορίστου, ενεργητικής φωνής και απαρέμφατα, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής **γ)** Γ΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει ρήματα γ΄ προσώπου, προστακτικής ενικού αριθμού, χρόνου παρακειμένου, φωνής μέσης και, **δ)** Δ΄ ρηματικός τύπος: περιλαμβάνει το απρόσωπο ρήμα *δεῖ* (ενεστώτας) ή *δεήσει* (μέλλων) το οποίο συνοδεύεται από ρήματα β΄ προσώπου, προστακτικής ενικού αριθμού, χρόνου αορίστου, φωνής μέσης, ή από μετοχές, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής, ή από απαρέμφατα, χρόνου αορίστου, φωνής ενεργητικής.

iv) Η αναγγελία του αποτελέσματος γίνεται, συνήθως, στο τρίτο ενικό ή πληθυντικό πρόσωπο της οριστικής ενεστώτα ή της οριστικής μέλλοντα. Το γεωμετρικό λεξιλόγιο παρεμβαίνει μόνο στην αναγγελία του αποτελέσματος,

όπως για παράδειγμα "*έμβαδόν*", "*ὑποτείνουσα*", "*στερεό*", κ.λπ. του ευρεθέντος σχήματος.

v) Παρατηρούνται, βέβαια, και κάποιες παραλλαγές στο προαναφερθέν υπόδειγμα υπολογιστικής διαδικασίας. Ενδεικτικά αναφέρουμε: **α)** περιπτώσεις στις οποίες οι αριθμητικές τιμές που εκχωρούνται στα δοθέντα του Προβλήματος εισάγονται με τη μορφή αριθμο-γεωμετρικού "λόγου" κατά την εκκίνηση της υπολογιστικής διαδικασίας, όπως για παράδειγμα στο Πρόβλημα III.5, **β)** περιπτώσεις στις οποίες δεν υπάρχουν αριθμητικά δεδομένα και παρατίθεται μόνο μια σειρά γεωμετρικών περιγραφών και αναφορές σε γενικές διαδικασίες μέτρησης, όπως για παράδειγμα η πρόταση II.10 και, **γ)** περιπτώσεις στις οποίες δεν υπάρχουν αριθμητικά δεδομένα και δίνεται μόνο η περιγραφή ενός άτυπου σχεδίου μέτρησης, για παράδειγμα η πρόταση II.20, που αφορά στη μέτρηση σωμάτων με "*ἄτακτο*" σχήμα.

5.2.3 Ο ευρετικός χαρακτήρας του γεωμετρικού "λόγου"

Εισαγωγή

Από τα παραπάνω καταγεγραμμένα χαρακτηριστικά των δύο κειμενικών ενοτήτων των *Μετρικών* μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο γεωμετρικός "λόγος", από την άποψη της εκφοράς του κειμένου, παρουσιάζει βαθιές αναλογίες με τον αποδεικτικό γεωμετρικό "λόγο" των κλασικών ελληνικών γεωμετρικών κειμένων, όπως, άλλωστε, έχει υπογραμμιστεί στην Ιστορία των Μαθηματικών [Acerbi, 2005, σ. 186]. Με βάση αυτήν την ομοιότητα, ο γεωμετρικός "λόγος" της 1ης κειμενικής ενότητας κάθε Προβλήματος έχει ερμηνευθεί είτε ως "απόδειξη" (demonstration) [Tybjerg, 2004, σ. 39] είτε ως "επικυρωτική απόδειξη" (la preuve validante) [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 373] της υπολογιστικής διαδικασίας που παρατίθεται στο δεύτερο μέρος των Προβλημάτων[184]. Όμως, κατά τη γνώμη μας, ένα τέτοιο συμπέρασμα δεν είναι επαρκώς αιτιολογημένο και βασίζεται σε μια υπερβολική εκτίμηση του ρόλου και της σημασίας της γλωσσικής εκφοράς ενός κειμένου για την κατανόηση της χρηστικής λειτουργίας αυτού.

Τότε, όμως, τίθεται το κρίσιμο για την ερμηνεία του εγχειρήματος του Ήρωνα ερώτημα: Σε τι χρησιμεύει ο γεωμετρικός "λόγος", που παραθέτει ο Ήρων στις προτάσεις του, αν δεν λειτουργεί ως "απόδειξη" της ορθότητας της υπολογιστικής διαδικασίας που ακολουθεί στην 2η ενότητα κάθε Προβλήματος. Η απάντησή μας σε αυτό το ερώτημα είναι: ο γεωμετρικός "λόγος" χρησιμεύει στην εύρεση αυτής. Δεν αποσκοπεί στο να "αποδείξει" την υπολογιστική διαδικασία που ακολουθεί·

[184] Όπως έχουμε, ήδη, προαναφέρει έχει διατυπωθεί και η αντίθετη άποψη: σύμφωνα με τον G. E. R. Lloyd [Chemla, 2012, σ. 300], οι υπολογιστικές διαδικασίες είναι οι "αποδείξεις" των γεωμετρικών προτάσεων που διατυπώνονται στον γεωμετρικό "λόγο"!

ο ρόλος του είναι να δείξει *πώς* βρέθηκε η υπολογιστική διαδικασία και, επομένως, να διδάξει στον αναγνώστη *πώς* να γίνει ο ίδιος ικανός να βρίσκει αντίστοιχες υπολογιστικές διαδικασίες για να λύνει προβλήματα μετρολογικού χαρακτήρα.

5.2.4 Τεκμηρίωση της ευρετικής διάστασης του γεωμετρικού "λόγου" στα Προβλήματα των Μετρικών*.*

Όπως προαναφέρθηκε, η ομοιότητα της γλωσσικής εκφοράς του γεωμετρικού "λόγου" με εκείνη των αποδείξεων δεν είναι αρκετή ώστε να μας οδηγήσει στην ερμηνεία αυτών των κειμενικών ενοτήτων του έργου του Ήρωνα ως "αποδείξεις" των υπολογιστικών διαδικασιών. Θα υποστηρίξουμε ότι η ανάπτυξη των γεωμετρικών επιχειρημάτων αποσκοπεί *στην εύρεση* της υπολογιστικής διαδικασίας, που ακολουθεί, και όχι στην απόδειξη της ορθότητάς της. Κάποια από τα στοιχεία που συνηγορούν υπέρ αυτής της άποψης είναι τα ακόλουθα:

α) Σε κάθε πρόταση των *Μετρικών* η κειμενική ενότητα που περιέχει τον γεωμετρικό "λόγο" προηγείται εκείνης που περιέχει την υπολογιστική διαδικασία. Είναι φυσικό κάθε ευρετική διαδικασία να προηγείται της υπολογιστικής διαδικασίας, που προκύπτει από αυτήν και επιλύει το πρόβλημα. Αντίθετα, στα μαθηματικά κείμενα που η δομή τους είναι αποδεικτική οι αποδείξεις έπονται και δεν προηγούνται τής προς απόδειξη πρότασης.

β) Είναι αλήθεια ότι τα ευρετικά κείμενα παρουσιάζουν, από την άποψη της γλωσσικής εκφοράς, βαθιά αναλογία με τα αποδεικτικά κείμενα. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η *Μέθοδος* του Αρχιμήδη. Όμως, παρά το γεγονός ότι οι προτάσεις αυτού του έργου, από την άποψη της γραμματικής σύνταξης, "μοιάζουν" με αποδείξεις, ο ίδιος ο Αρχιμήδης δηλώνει, ρητά, στην εισαγωγή του ότι η *Μέθοδος* υπολείπεται της αυστηρής γεωμετρικής απόδειξης και, μάλιστα, αναφέρεται σε αυτήν με τον όρο "μηχανική", για να την διακρίνει από τη "γεωμετρική" [*ΑΟΟ*, 1910-1915, τ. ΙΙ, σ. 428.18-430.18]. Επομένως, συμπεραίνεται ότι η γλωσσική ομοιότητα δεν συνεπάγεται, κατ' ανάγκην, και ομοιότητα ως προς τη μαθηματική λειτουργία των κειμένων.

5.2.5 Τεκμηρίωση της ευρετικής διάστασης που χαρακτηρίζει τον γεωμετρικό "λόγο" στις δύο προτεινόμενες από τον Ήρωνα μεθόδους επίλυσης: την "έπιλογιστικήν " και την "κατὰ ἀνάλυσιν ".

Όπως έχουμε, ήδη, επισημάνει, δύο είναι οι μέθοδοι που ο Ήρων προτείνει, υιοθετεί και διδάσκει για την εύρεση/δημιουργία του κατάλληλου γεωμετρικού "λόγου", ώστε να μεταβεί σε υπολογιστικές διαδικασίες, οι οποίες θα δώσουν την

τελική επίλυση του εκάστοτε Προβλήματος: η μέθοδος/διαδικασία του "*έπιλογισμοῦ*" και η μέθοδος /διαδικασία "*κατὰ ἀνάλυσιν*".

α) μέθοδος/διαδικασία του "*έπιλογισμοῦ*": Καταγράφοντας τα κύρια χαρακτηριστικά της μεθόδου [ενότητα, 4.3], μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο "*έπιλογισμός τῶν γεωμετρικῶν ἀποδείξεων*" συνοψίζεται στην έρευνα/ επισκόπηση με σκοπό την εύρεση και επιλογή γεωμετρικών προτάσεων, οι οποίες αξιολογούνται ως οι κατάλληλες για τη θεμελίωση μιας ικανής και επαρκούς γεωμετρικής βάσης, ώστε, διά μέσου αυτής ή λόγω αυτής, να ακολουθήσει μια αλληλουχία αριθμητικών υπολογισμών εκφρασμένων με τη μορφή ενός αριθμο-γεωμετρικού "λόγου", η οποία ακολουθεί την εκδίπλωση των γεωμετρικών επιχειρημάτων και οδηγεί στο τελικό αποτέλεσμα.

Προς επίρρωση της ευρετικής λειτουργίας που διακρίνεται κατά τη διαδικασία του "*έπιλογισμοῦ*", μπορούμε να υπενθυμίσουμε ότι, από την ιστορική και φιλοσοφική έρευνα της έννοιας του "*έπιλογισμοῦ*" [Κεφάλαιο, 4.4], αναδεικνύονται χαρακτηριστικά, τα οποία, επιγραμματικά, συνοψίζονται στα παρακάτω: **α)** η διαδικασία του "*έπιλογισμοῦ*" προτείνεται από τον Επίκουρο ως διαδικασία διαφορετική από τις ειδικές μεθόδους απόδειξης ή συλλογισμού, **β)** συνίσταται, τόσο στον Επίκουρο όσο και στην πιο προηγμένη μορφή της που προτείνεται από τον Φιλόδημο, από την καταρχήν επισκόπηση/ έρευνα *σημείων* που προέρχονται από τις *αίσθήσεις*, τα *πάθη* και τις *προλήψεις*, ώστε με συγκριτική αξιολόγηση αυτών να θεμελιωθούν/ευρεθούν εκείνες οι καθολικές μεταξύ τους ομοιότητες, οι οποίες θα αποτελέσουν τη βάση συμπερασμών. Επομένως, κατά την εκτύλιξη της διαδικασίας του "*έπιλογισμοῦ*" η ευρετική συνιστώσα διαδραματίζει τον καθοριστικό ρόλο. Τέλος, αν ανατρέξουμε στην εφαρμογή της μεθόδου του "*έπιλογισμοῦ*" και σε άλλες περιοχές, εκτός της επικούρειας φιλοσοφίας, συγκεκριμένα στους εμπειρικούς γιατρούς, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι εμπειρικοί γιατροί θεωρούν τον "*έπιλογισμόν*" χρήσιμο και απαραίτητο εργαλείο για την *εὕρεσιν* των φαινομένων που είναι προσωρινά μη-προφανή.

Τέλος, ο ευρετικός χαρακτήρας της μεθόδου του "*έπιλογισμοῦ*" αναδεικνύεται πλήρως, αν παρατηρήσουμε ότι ο γεωμετρικός "λόγος" σε όλα τα Προβλήματα των Μετρικών που επιλύονται με την παραπάνω μέθοδο, παρά το γεγονός ότι περιέχει μια αλληλουχία γεωμετρικών επιχειρημάτων, δεν ολοκληρώνεται, είναι ελλιπής, και, κυρίως, δεν οδηγεί στην τελική εύρεση του ζητούμενου μεγέθους, δηλαδή του εμβαδού. Τότε, ο αποδεικτικός χαρακτήρας του γεωμετρικού "λόγου", και κατά προέκταση του εγχειρήματος των *Μετρικών*, αίρεται με το κρίσιμο ερώτημα: τι ακριβώς αποδεικνύει αυτός ο ελλιπής γεωμετρικός "λόγος"; Φυσικά όχι την ορθότητα των υπολογιστικών διαδικασιών, οι οποίες, μάλιστα, ακολουθούν τα γεωμετρικά επιχειρήματα που υποτίθεται ότι τις αποδεικνύουν, σχήμα που, όπως έχουμε προαναφέρει, δεν συναντάται σε μαθηματικά κείμενα με αποδεικτική δομή, στα οποία η απόδειξη έπεται και δεν προηγείται εκείνου που

ζητείται να αποδειχθεί. Τότε σε τι χρησιμεύει αυτή η σειρά των γεωμετρικών επιχειρημάτων που προηγείται των αριθμητικών υπολογισμών; Όπως έχουμε προαναφέρει, ο γεωμετρικός "λόγος" ευρίσκεται/δημιουργείται, ώστε να αποτελέσει εκείνη την ικανή βάση για τη μετάβαση στην εξαγωγή αριθμητικών αποτελεσμάτων. Πράγματι, από τη στιγμή που ο συγγραφέας αξιολογεί ότι αυτή η βάση "κατασκευάστηκε", ο γεωμετρικός "λόγος" εκλείπει/εγκαταλείπεται, για να ακολουθήσει ένας αριθμο-γεωμετρικός "λόγος ", ο οποίος και θα επιλύσει, τελικά, το πρόβλημα.

β) μέθοδος/διαδικασία "*κατὰ ἀνάλυσιν*". Καταγράφοντας τα κύρια χαρακτηριστικά της μεθόδου, υπό το πρίσμα της νέας ερμηνείας που έχουμε ακολουθήσει [Κεφάλαιο, 4.3], μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δύο είναι τα μέρη τα οποία συμπεριλαμβάνονται στον γεωμετρικό "λόγο" της αναλυτικής διαδικασίας: **i)** το "Υποθετικό" και, **ii)** το "Βεβαιωτικό". Το "Υποθετικό μέρος" είναι μια πορεία αναζήτησης και εύρεσης προκείμενων, μέσω των οποίων ο ερευνητής στοχεύει να προσεγγίσει σε κάτι, από το οποίο υποθέτει ότι εκείνο που αναζητείται μπορεί να παραχθεί. Τα βήματα που ακολουθεί είναι υποθετικά, αλλά, ταυτόχρονα, και νοητικά άλματα που συνδυάζουν νοητική ικανότητα, γνώση, εμπειρία και διαίσθηση, στοχεύοντας στην ανακάλυψη/εύρεση της δομής του προβλήματος. Το "Βεβαιωτικό μέρος" είναι μια πορεία συμπερασμών, οι οποίοι προκύπτουν από τα βήματα του "Υποθετικού μέρους" και στοχεύουν να βεβαιώσουν τη δυνατότητα επίλυσης του προβλήματος.

Όπως έχουμε, ήδη, προαναφέρει, η ευρετική αξία της αναλυτικής μεθόδου αποτέλεσε ένα από τα κυριότερα ιστοριογραφικά ερωτήματα που τέθηκαν και συνεχίζουν να τίθενται στην Ιστορία των Μαθηματικών. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η πλειονότητα των σύγχρονων σχολιαστών ερμηνεύει την αναλυτική διαδικασία ως τη βασική και ουσιαστική μέθοδο για την εύρεση λύσεων σε γεωμετρικά προβλήματα και, επιπρόσθετα, σε γεωμετρικά θεωρήματα. Επιγραμματικά, μπορούμε να αναφέρουμε: τον T. L. Heath [Heath, 1921, σ. 371] ο οποίος ισχυρίζεται ότι "η *ανάλυση*, η οποία ανάγει το άγνωστο ή το πλέον σύνθετο στο γνωστό…, θα μπορούσε να παίξει ένα σημαντικό μέρος στην ανακάλυψη/εύρεση (discovery) των αποδείξεων"· τον W. R. Knorr [Knorr, 1986, σ. 354] ο οποίος τονίζει ότι "η μέθοδος της ανάλυσης παρέχει στους αρχαίους την ευρετική δύναμη (heuristic power) για την αναζήτηση λύσεων σε γεωμετρικά προβλήματα"· και, τέλος, τον S. Unguru [Χριστιανίδης & Διαλέτης, 2006, σ. 74, υπ. 138], ο οποίος υπενθυμίζει ότι " για τους Έλληνες η *ανάλυση* ήταν απλώς ένα μέσο ανακάλυψης, ένα ευρετικό εργαλείο"[185].

[185] Διαφορετική άποψη εκφράζουν οι F. Acerbi και B. Vitrac [Acerbi & Vitrac, 2014, σ. 363], οι οποίοι "διαβάζουν" την ανάλυση που καταγράφεται στο έργο των *Μετρικών* ως διαδικασία με αποδεικτικά στοιχεία και, επιπλέον, θεωρούν ότι οι υπολογισμοί που καταγράφονται στη 2η ενότητα των *Μετρικών* επικυρώνονται από την αλυσίδα των δεδομένων που εκτυλίσσονται κατά την ανάπτυξη της αναλυτικής διαδικασίας.

Ολοκληρώνοντας, μπορούμε να επισημάνουμε ότι, σύμφωνα με την καθιερωμένη άποψη της παραδοσιακής ιστοριογραφίας, οι Έλληνες μαθηματικοί δεν αποκάλυπταν τον τρόπο ανακάλυψης των αποτελεσμάτων τους, με συνέπεια η μορφή των μαθηματικών επιχειρημάτων που παραθέτουν στα έργα τους να είναι συνθετική, δηλαδή να περιλαμβάνει μία αλληλουχία λογικών συμπερασμών. Είναι προφανές ότι η συνθετική μέθοδος παρουσίασης, είτε για την απόδειξη θεωρημάτων είτε για τη λύση προβλημάτων, δεν ικανοποιεί την επιθυμία του αναγνώστη που θέλει να αποκτήσει γνώση της μεθόδου με την οποία ανακαλύφθηκε το μαθηματικό αποτέλεσμα. Εξαίρεση στον παραπάνω κανόνα αποτελεί ο Αρχιμήδης, ο οποίος στα γεωμετρικά συγγράμματά του εκθέτει, αρκετά συχνά, τη μέθοδο ανακάλυψης των θεωρημάτων, προτού παρουσιάσει την αυστηρή απόδειξή τους, κατά το πρότυπο των ευκλείδειων αποδείξεων. Μάλιστα, το έργο του *Μέθοδος* είναι αφιερωμένο, αποκλειστικά, στις ευρετικές μεθόδους που χρησιμοποίησε, προκειμένου να οδηγηθεί σε ορισμένα αποτελέσματα. Το επόμενο σύγγραμμα που περιέχει και αναπτύσσει ευρετικές μεθόδους είναι το 7ο βιβλίο της *Μαθηματικής συναγωγής* του Πάππου, που πραγματεύεται τη γεωμετρική ανάλυση, ένα από τα πλέον ενδιαφέροντα ερευνητικά θέματα στην ιστορία των ελληνικών Μαθηματικών. Υπό το φως της ανάλυσης και ερμηνείας που προηγήθηκε, τα *Μετρικά* μπορούν, εύλογα, να χαρακτηριστούν έργο αφιερωμένο σε μεθόδους εύρεσης υπολογιστικών διαδικασιών για την επίλυση μιας ευρείας κατηγορίας μετρολογικών προβλημάτων, που έχουν ως αντικείμενο τις μετρήσεις και διαιρέσεις επίπεδων και στερεών σωμάτων. Επομένως, τα *Μετρικά*, μαζί με τη *Μέθοδο* του Αρχιμήδη και το 7ο βιβλίο της *Συναγωγής* του Πάππου, κατατάσσονται στα έργα της αρχαίας ελληνικής γραμματείας στα οποία δεν επιλύονται μόνο τα συγκεκριμένα προβλήματα που παραθέτουν, αλλά κυρίως, διδάσκονται μαθηματικές μέθοδοι εύρεσης διαδικασιών/μεθόδων, οι οποίες μπορούν να χρησιμεύσουν στον αναγνώστη ως εργαλείο για περαιτέρω ανακαλύψεις. Με λόγια του Αρχιμήδη: "*ὑπολαμβάνω γάρ τινας ἢ τῶν ὄντων ἢ ἐπιγινομένων διὰ τοῦ ἀποδειχθέντος τρόπου καὶ ἄλλα θεωρήματα οὔπω ἡμῖν συνπαραπεπτωκότα εὑρήσειν*".

Ειδικότερα, ο F. Acerbi [Acerbi, 2011b, σ. 142] ισχυρίζεται ότι ο στόχος του Ήρωνα στο έργο των *Μετρικών* είναι να "προσφέρει" αυστηρές γεωμετρικές αποδείξεις, σε μορφή αναλυτική, για την επικύρωση των αλγορίθμων. Παρόμοια άποψη με τους F. Acerbi και B. Vitrac εκφράζει και ο N. Sidoli [Sidoli, 2004, σ. 17], ο οποίος, μάλιστα, θεωρεί ότι υπάρχει ένα είδος ανάλυσης, η "*μετρική ανάλυση*" (*metrical analysis*), με την οποία αιτιολογείται, θεωρητικά, (*theoretical justification*) η παραγωγή αριθμητικών υπολογισμών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Οι τίτλοι των έργων των κλασικών συγγραφέων αναφέρονται σύμφωνα με τη συντομογραφία που προτείνεται από το λεξικό Liddell-Scott-Jones. Η παραπομπή στις προτάσεις των μαθηματικών έργων γίνεται με αναφορά σε βιβλίο και αριθμό, για παράδειγμα *Στοιχεία* II.47 σημαίνει ότι αναφέρεται η Πρόταση 47 του Δεύτερου Βιβλίου των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Η *Συναγωγή* του Πάππου παρατίθεται με βιβλίο, κεφάλαιο και σελίδα από την έκδοση του F. Hultsch. Παραπομπές σε αρχαία ελληνικά κείμενα για τα οποία δεν υπάρχει βιβλιογραφική αναφορά δίνονται σύμφωνα με την ηλεκτρονική έκδοση του TLG.

Α. Πηγές

ABRAAM BAR HIIA *Llibre de geometria*. *Hibbur hameixihà uehatixboret*, Segons el text editat i prologat pel Dr. M. Guttmann, versió de l'hebreu per J. Millàs i Vallicrosa, Barcelona, Editorial Alpha, 1931.

ACERBI, F., *Euclide: Tutte le opere*. Bompiani, Milan, 2007.

ACERBI, F., VINEL, N., VITRAC, B., «Les Prolégomènes à l'Almageste. Une édition à partir des manuscrits les plus anciens : Introduction générale – Parties I-III», *SCIAMVS* XI, σ. 53-210, 2010.

ACERBI, F., VITRAC, B., *Héron d'Alexandrie* : *Introduction*, *texte critique*, *traduction française et notes de commentaire*, Pisa-Roma, Fabrizio Serra Editore MMXIV, 2014.

ADLER, A., (ed.), *Lexicographi graeci*. τ. I., *Suidae Lexicon A-W. Index*, 5 τ., Leipzig, B. G. Teubner, 1928-1938.

AGE : *Apollonii Pergaei quae graece exstant, cum commentariis antiquis*, edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg, 2 τ., Leipzig, B. G. Teubner, 1891-1893.

AOO : *Archimedis opera omnia, cum commentariis Eutocii*, iterum edidit J. L. Heiberg, 3 τ., Leipzig, B. G.Teubner, 1910-1915, τ. IV, *Über einander berührende Kreise*, aus dem Arabischen übersetzt und mit Ammerkungen versehen von Y. Dold-Samplonius, H. Hermelink und M. Schramm, Stuttgart, B. G.Teubner, 1975.

BERGGREN, J. L., JONES, A., *Ptolemy's* Geography*: An Annotated Translation of the Theoretical Chapters*, Princeton, Princeton University Press, 2000.

BERGGREN, J. L., SIDOLI, N., «Aristarchus's On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon: Greek and Arabic texts», *Archive for History of Exact Sciences* 61, σ. 213-254, 2007.

BÜLOW-JACOSEN, A., TAISBAK, C., M., (eds.), «P. Cornell inv. 69. Fragment of a Handbook in Geometry», in A. Piltz, J. Akujärvi, V. Sabatakakis, K. Blomqvist, G. Walser, L. Nord-gren (eds.), *For Particular Reasons: Studies in Honour of Jerker Blomqvist*. Lund, Nordic Academic Press, 2003, σ. 55-70, 2003.

BRUINS, E. M., *Codex Constantinopolitanus Palatii Veteris No. 1*, 3 τ., Leiden: Brill (*Janus Supplements,* II), 1964.

CARRA DE VAUX, B., (éd.), *Héron d'Alexandrie*, *Les Mécaniques ou l'élévateur des corps lourds*, Paris, Imprimerie Nationale 1894, reproduit avec une introduction de D. R. Hill et des commentaires par A. G. Drachmann, Paris, Les Belles Lettres, 1988.

CL : *Codex Leidensis 399,1. Euclidis Elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum commentariis al-Narizii*, partes I-II (libri I-III), arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt R. O. Besthorn et J. L. Heiberg, Copenhagen, in Libraria Gyldendaliana, 1893-1905, pars III (libri IV-VI), arabice et latine ediderunt notisque instruxerunt G. Junge, J. Raeder, W. Thomson, Copenhagen, in Libraria Gyldendaliana, 1932.

CLAGETT, M., (ed.), *Archimedes in the Middle Ages*, Philadelphia, The University of Wisconsin Press, 1964–84.

DASYPODIUS, C., (ed.), *ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΟ ΠΡΩΤΟΝ. ΗΡΩΝΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΟΣ ὀνόματα γεωμετρικά. EUCLIDIS ELEMENtorum, Liber Primus. HERONIS ALEXANDRIni vocabula geometrica antehac nunquam edita, græcè & Latinè*, Argentorati, Apud hæredes Christiani Myly, 1570.

DIELS, H., SCHRAMM, E., (eds.), *Herons Belopoiika (Schrift vom Geschützbau)*, Aus den Abhandlungen der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften Jahrgang. Phil.-Hist. Klasse n° 2, Berlin, Akademie der Wissenschaften in Kommission bei Georg Reimer, 1918.

EOO : *Euclidis opera omnia*, ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge, τ*. VI. Euclidis Data, cum commentario Marini et scholiis antiquis*, edidit H. Menge,1896, τ*. VII. Euclidis Optica, Opticorum Recensio Theonis, Catoptrica, cum scholiis antiquis*, edidit J. L. Heiberg 1895, τ*. VIII. Euclidis Phaenomena et Scripta musica*, edidit H. Menge. *Fragmenta*, collegit et disposuit J. L. Heiberg 1916, *Supplementum. Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii. Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata*, edidit M. Curtze,1899, Leipzig, B. G. Teubner.

FABRICIUS, J. A., *Bibliotheca Graeca*, 14 τ., Hamburgi, sumptu Christiani Liebezeit, 1705-1728.

FRIED, M. & UNGURU, S., *Apollonius of Perga's Conica*: Text, Context, Subtext. Brill, Leiden, 2001.

HASENBALG, C., (ed.), *Heronis Alexandrini definitiones geometricas recensuit notasque maximam partem criticas adspersit*, Stralsund, C. Kirchner, 1826.

HOO : *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia.* τ*. I. Pneumatica et Automata*, recensuit G. Schmidt, 1899, τ*. II. Mechanica et Catoptrica*, recensuerunt L. Nix et W. Schmidt, 1903 τ*. III. Rationes dimetiendi et Commentatio dioptrica*, recensuit H. Schoene, 1903, τ*. IV. Heronis Definitiones cum variis collectionibus. Heronis quae feruntur Geometrica*, edidit J. L. Heiberg, 1912, τ*. V. Heronis quae feruntur Stereometrica et De mensuris*, edidit J. L. Heiberg, 1914, Leipzig, B. G. Teubner.

HULTSCH, F., (ed.), *Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum reliquiae*, Berlin, Weidmann, 1864.

— (ed.), *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt*, 3 τ., Berlin, Weidmann, 1876-1878.

iA : *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, texte établi et annoté par A. Rome, τ*. I. Pappus d'Alexandrie*, *Commentaire sur les livres 5 et 6 de l'Almageste*, Studi e Testi 54, 1931, τ*. II. Théon d'Alexandrie*, *Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste*, Studi e Testi 72, 1936, τ*. III. Théon d'Alexandrie*, *Commentaire sur les livres 3 et 4 de l'Almageste*, Studi e Testi 106, 1943, Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana.

iE: *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, ex recognitione G. Friedlein, Leipzig, B. G. Teubner, 1873, *Hypotyposis Astronomicarum Positionum* C. Manitius, (ed.), Leipzig, B. G. Teubner, 1902.

JONES, A., (ed.), *Pappus of Alexandria*, *Book 7 of the Collection*, 2 τ., New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, Springer, 1986.

— «Pseudo-Ptolemy *De Speculis*», *SCIAMVS*, II, σ. 145-186, 2001.

MARSDEN, E. W., *Greek and Roman Artillery. Technical Treatises*, Oxford, Clarendon Press, 1971.

MOGENET, J., *Autolycus de Pitane*: Histoire du texte suivie de l'édition critique des traités de *La sphère en mouvement* et *Des levers et couchers*. Louvain, Publications universitaires de Louvain, Louvain, 1950.

NOACK, B., *Aristarch von Samos: Untersuchungen zur Überlieferungsgeschichte der Schrift περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλίου και σελήνης*: Ludwig Reichert Verlag, Wiesbaden, 1992.

POO: *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia. Vol. I. Syntaxis mathematica*, edidit J. L. Heiberg, τ. 1 σε δύο μέρη, 1898-1903, *Vol. II. Opera astronomica minora*, edidit J. L. Heiberg, 1907.

PROU, V., «La Chirobaliste d'Héron d'Alexandrie», *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale et autres bibliothèques,* XXVI(2), σ. 1-319, 1877.

RASHED, R., & DECORPS-FOULQUIER, M., & FEDERSPIEL, M., *Apollonius de* Perge, *Coniques: Text grec et arabe établi, traduit et commencé*. Walter de Gruyter, Berlin, 2008-2010.

SIDOLI, N., & BERGGREN, J. L., «The Arabic version of Ptolemy's Planisphere or Flattening the Surface of the Sphere: Text, translation, commentary», *SCIAMVS* 8, 37-139, 2007.

THEVENOT, M., *Mathematici Veteres*, Paris, Imprimerie du Louvre, 1693.

TIHON, A., (1999) (ed.), *Le "Grand Commentaire" de Théon d'Alexandrie aux Tables Faciles de Ptolémée*, Livre IV Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica, 1999.

VENTURI, G. B., *Commentari sopra la storia e le teorie dell'ottica*, Bologna, Fratelli Masi, e compagno, 1814.

VINCENT, A. J. H., *Extraits des manuscrits relatifs à la géométrie pratique des Grecs (1° Traité de la Dioptre, par Héron d'Alexandrie ; 2° Fragments de Pappus ; 3° Géodésie attribuée à un Héron de Byzance ; 4° Fragments de Jules l'Africain, etc.)*, Notices et extraits des Manuscrits de la Bibliothèque impériale et autres bibliothèques, XIX, Paris, Imprimerie impériale, 1858.

Β. Μελέτες

ACERBI, F., «Drowning by multiples. Remarks on the fifth book of Euclid's Elements, with special emphasis on prop. 8», *Archive for History of Exact Sciences* 57, σ. 175-242, 2003.

— *Hero of Alexandria*, in N. Koertge (ed.), *New Dictionary of Scientific Biography*, 7 τ., Detroit, C. Scribner's Sons, τ. III, σ. 283-284, 2008.

— *Il silenzio delle sirene*. Carocci Editore, Rome, 2010.

— «La sintassi logica della matematica greca», *Archives-ouvertes.fr, Sciences de l'Homme et de Ia Societe, Histoire, Philosophic et Sociologic des sciences*. hal.archives-ouvertes.fr:hal-00727063, 2011a.

— «The language of the "Givens": its forms and its use as a deductive tool in Greek mathematics», *Archive for History of Exact Sciences*, LXV, σ. 119-153, 2011b.

— «I codici stilistici della matematica greca: dimostrazioni, procedure, algoritmi», *Quaderni Urbinati di Cultura Classica*, CI (2), σ. 167-214, 2012.

ALLEN, J., «Experience as a Source and Ground of Theory in Epicureanism», in Ph. Lang (ed.), *Re-inventions: Essays on Hellenistic and Early Roman Science*, Edmonton, Academic Printing & Publishing, σ. 89-106, 2004.

ARRIGHETTI, G., «Sul valore di ΕΠΙΛΟΓΙΖΟΜΑΙ ΕΠΙΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΠΙΛΟΓΙΣΙΣ nel sistema epicureo», *Parola del Passato* 7, σ. 119-44, 1952.

ASMIS, E., *Epicurus' Scientific Theory*, Ithaca, New York, 1984.

ASPER, M., «Mathematik, Milieu, Text», *Sudhoffs Archiv* 87, σ. 1-31, 2003.

— «The two cultures of mathematics in ancient Greece», in: Robson, E., Stedall,J. (eds.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, σ. 107-132, 2009.

BAILEY, C., *The Greek Atomists and Epicurus*, Oxford, Oxford University Press, 1928.

BERNARD, A., «Sophistic aspects of Pappus's Collection», *Archive for History of Exact Sciences* 57, 93-150, 2003a.

— «Ancient rhetoric and Greek mathematics: A response to a modern historiographical dilemma», *Science in Context* 16, σ. 391-412, 2003b.

BERNARD, A., & CHRISTIANIDIS, J., «A new analytical framework for the understanding of Diophantus's Arithmetica I-III», *Archive for History of Exact Sciences* 66, σ. 1-69, 2012.

BERGGREN, J. L., *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, New York, Springer, 1986.

BIGNONE, E., *L' Aristotele perduto e la formazione filosofica di Epicuro.* 2 τ., Florence: Nuova Italia, 1936.

BLASS, F., «Die griechischen und lateinischen Handschriften in Alten Serail zur Konstantinopel», *Hermes*, n.s., XXIII, σ. 219-233, 1888.

BOULENGER, F., (éd.), *Grégoire de Naziance*, *Discours funèbres en l'honneur de son frère Césaire et de Basile de Césarée*, Paris, Alphonse Picard et fils, 1908.

BOYER, C., *A History of Mathematics*, 2nd ed., revised by U. C. Merzbach, New York, John Wiley & Sons, 1968.

CALLEBAT, L., & FLEURY, P., (éds.), *Vitruve*, *De l'architecture, Livre X*, Paris, Les Belles Lettres, 1986.

CANTOR, M., *Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Eine historisch-mathematische Untersuchung*, Leipzig, B. G. Teubner, 1875.

CHOUQUER, G., FAVORY, F., *L'arpentage romain. Histoire des textes – Droit –Techniques*, avec la collaboration d'A. Roth Congès, Paris, Éditions Errance. Clagett, Marshall, 1964, (ed.), *Archimedes in the Middle Ages*. *Volume 1. The Arabo-Latin Tradition*, Madison, The University of Wisconsin Press, 2001.

CHRISTIANIDIS, J., «The way of Diophantus: Some clarifications on Diophantus' method of solution», *Historia Mathematica* 34, σ. 289-305, 2007.

CHRISTIANIDIS, J., & OAKS, J., «Practicing algebra in late antiquity: The problem-solving of Diophantus of Alexandria», *Historia Mathematica* 40, 127–163, 2013.

ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ, Γ., *Θέματα από την ιστορία των Μαθηματικών*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003.

ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ, Γ., & ΔΙΑΛΕΤΗΣ, Δ., *Διαμάχες για την ιστορία των αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών*, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2006.

CUOMO, S., *Pappus of Alexandria and the Mathematics of Late Antiquity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

— *Ancient Mathematics*. Roudedge, London, 2001.

DECORPS-FOULQUIER, M., *Recherches sur les Coniques d'Apollonios de Perge et leurs commentateurs grecs: Histoire de la transmission des Livres I-IV*. Paris, Klincksieck, 1999.

DE LACY, P., «Epicurean *ἐπιλογισμός*», *American Journal of Philology* 79, σ. 179–83, 1958.

DE LACY, P., & DE LACY, E., *Philodemus: On Methods of Inference*, 2nd edn., Naples, 1978.

DIANO, C., «La psicologia d'Epicuro e la teoria delle passioni.» Pts. 1-4. *Giornale Critico della Filosofia Italiana* 20, 1939.

DIELS, H., «Über das physikalische System des Straton», *Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*», σ. 101-127, 1893, reproduit in id., *Kleine Schriften zur Geschichte der antiken Philosophie*, Darmstadt, Wissenschaftlichen Buchgesellschaft, σ. 239-265, 1969.

— «La géométrie du mesurage et du découpage dans les mathématiques d'al-Andalus (Xe-XIIIe s.)», in P. Radelet de Grave (éd.), *Liber amicorum Jean Dhombres*, Turnhout, Brepols, σ. 113-147, 2008.

DIJKSTERHUIS E. J., *Archimedes*. Princeton, Princeton University Press, 1987.

DRACHMANN, A. G., *Ktesibios, Philon and Heron. A Study in Ancient Pneumatics*, Copenhagen, Munksgaard, 1948.

— «Heron and Ptolemaios», *Centaurus*, I, σ. 117-13, 1950.

— *The Mechanical Technology of Greek and Roman Antiquity*, Copenhagen, Munksgaard, 1963.

— «A Physical Experiment in Heron's Dioptra?», *Centaurus*, XIII, σ. 220-227, 1968.

— *Hero*, in C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, 16 τ., New York, C. Scribner's Sons, 1970-1980, τ. VI, σ. 310-315, 1972.

FEDERSPIEL, M., «Notes critiques sur le livre I des Coniques d'Apollonius de Perge», *Revue des études greques* 107, σ. 203-218, 1994.

— «Notes critiques sur le livre II des Coniques d'Apollonius de Perge. (Premiere partie, Seconde partie.)», *Revue de etudes greques* 112, 409-443, 113, 359-391, 1999-2000.

— «Les Problemes des livres Grecs des Coniques d'Apollonius de Perge», *Les études classiques* 76, 321-360, 2008.

FLEURY, P., *La mécanique de Vitruve*, Caen, Presses universitaires de Caen, 1993.

FOWLER, D., «Further arithmetical tables», *Zeitschrift flir Papyrologie und Epigraphik* 105, σ. 225-228, 1995.

— *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, Second Edition, Oxford, Clarendon Press, 1999.

FOURNARAKIS, P., & CHRISTIANIDIS, J., «Greek geometrical analysis: A new interpretation through the "givens"-tenninology», *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* 26, σ. 3-56, 2006.

FREDE, M., «Experience in the Ancient «Empiricists», *Δευκαλίων*, τόμος 21/1, σ. 5-22, 2003.

GIARDINA, G., *Héron d'Alexandrie*, in R. Goulet (éd.), *Dictionnaire des Philosophes Antiques*, Paris, CNRS Éditions, 1994–, supplément, σ. 87-103, 2003.

GODLEY A. D., *Herodotus The Histories* (engl. trans.). London: Heinemann, Loeb, 1926/1990.

GUILLAUMIN, J. Y., (ed.), *Corpus agrimensorum Romanorum. II. Balbus. Présentation systématique de toutes lesfigures. III. Podismus et textes connexes*, Napoli, Jovene Editore, 1996.

— (2005) (éd.), *Les arpenteurs romains : Hygin le gromatique. Frontin*, Paris, Les Belles-Lettres, 2005.

ΓΑΒΡΟΓΛΟΥ, Κ., & ΔΙΑΛΕΤΗΣ, Δ., & ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ, Γ., «Αρίσταρχος ο Σάμιος και ηλιοκεντρισμός: μια νέα εκτίμηση της μη γεωκεντρικής παράδοσης στην αρχαία ελληνική αστρονομία», *Νεύσις*, τ. 10, σ. 3-44, 2001.

HAMMER-JENSEN, I., «Die Druckwerke Herons von Alexandria», *Neue Jahrbücher für das klassischen Altertum*, XXV, σ. 413-427, 480-503, 1910.

— «Ptolemaios und Heron», *Hermes*, XLVIII, σ. 224-235, 1913.

— « Die Heronische Frage», *Hermes*, LXIII, σ. 34-47, 1928.

HEATH, T. L., *A History of Greek Mathematics*, 2 τ., Oxford, Clarendon Press, 1921.

— *Euclid*, *The Thirteen Books of the Elements*, 3 τ., Oxford, Clarendon Press, 1926.

HEIBERG, J. L., «Philologische Studien zu griechischen Mathematikern. I. Ueber Eutokios», *Supplementbände der Jahrbücher für classische Philologie*, XI, σ. 357-384, 1880.

— (ed.), *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, 3 τ., Leipzig, B. G. Teubner, 1880-1881.

— *Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum*, Leipzig, B. G. Teubner, 1912.

HINRICHS, F. T., *Histoire des institutions gromatiques. Recherches sur la répartition des terres, l'arpentage agraire, l'administration et le droit foncier dans l'Empire romain*, Paris, Librairie orientaliste Paul Geuthner (traduction française de *Die Geschichte der gromatischen Institutionen, Untersuchungen zu Landverteilung, Landvermessung, Bodenverwaltung und Bodenrecht im römischen Reich*, Wiesbaden, Franz Steiner, 1974), 1989.

HOGENDIJK, J. P., «Arabic Traces of Lost Works of Apollonius», *Archive for History of Exact Sciences*, XXXV, σ. 187-253, 1986.

— «The Arabic Version of Euclid's *On Divisions*», in M. Folkerts, J. P. Hogendijk (eds.), *Vestigia Mathematica. Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard*, Amsterdam, Rodopi, σ. 143-162, 1993.

— «Traces of the lost Geometrical Elements of Menelaus in two texts of al-Sijzi», *Zeitschrift fiir Geschichte der Arabisch-Islamischen Wlssenschaften* 13, 129-164, 1999/2000.

HØYRUP, J., «Mathematics, Practical and Recreational», σ. 660–663 in Helaine Selin (ed.), *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*. Dordrecht etc., Kluwers. σ. 660–663, 1997a.

— «Hero, Ps.-Hero, and Near Eastern Practical Geometry. An Investigation of Metrica, Geometrica, and other Treatises», in K. Döring, B. Herzhoff, G. Wöhrle (eds.), *Antike Naturwissenschaft und ihre Rezeption*, Band 7, Trier, Wissenschaftlicher Verlag Trier, σ. 67-93, 1997b.

HUGHES, B., (ed.), *Fibonacci's De Practica Geometrie*, New York, Springer, 2008.

IRBY-MASSIE, G. L., & KEYSER, P., (eds. and trans.), *Greek Science in the Hellenistic Era:* A *Sourcebook*, London, 2002.

KEYSER, P., «Suetonius Nero 41.2 and the Date of Heron Mechanicus of Alexandria», *Classical Philology*, LXXXIII, σ. 218-220, 1988.

— «A New Look at Heron's 'Steam Engine», *Archive for History of Exact Sciences*, XLIV, σ. 107-124, 1992.

KLAMROTH, M., «Ueber die Auszüge aus griechischen Schriftstellern bei al-Ja'qûbî. IV. Mathematiker und Astronomen», *Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft*, XLII, σ. 1-44, 1888.

KLEIN, J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, English translation by E. Brann, New York, MIT Press, 1968.

KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford, Oxford University Press, 1972.

KNORR, W. R., *The Ancient Tradition of Geometrical Problems*, Boston, Birkhäuser, 1986.

— «Arithmêtikê Stoicheiôsis: On Diophantus and Hero of Alexandria», *Historia Mathematica*, XX, σ. 180-192, 1993.

— «The wrong text of Euclid: On Heiberg's text and its alternatives», *Centaurus* 38, σ. 208-276, 1996

— «On Heiberg's Euclid. Intercultural transmission of scientific knowledge in the middle ages: Graeco-Arabic-Latin (Berlin, 1996), *Science in Context* 14, σ. 133-143, 2001.

LANDELS, J. G., *Engineering in the Ancient World*, Berkeley, Los Angeles, University of *O* California Press, 1978.

LEMERLE, P., *Ο πρώτος Βυζαντινός Ουμανισμός*, μτφ. Νυσταζοπούλου-Πελεκίδου, Μ., Αθήνα, MIET, 1981.

LETRONNE, J. A., *Recherches critiques, historiques et géographiques sur les fragments d'Héron d'Alexandrie, ou du système métrique égyptien ... depuis le règne des pharaons jusqu'à l'invasion des Arabes*, ouvrage posthume couronné en 1816 par l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, revu et mis en rapport avec les principales découvertes faites depuis par A. J. H. Vincent, Paris, Imprimerie nationale, 1851.

LEVY, T., «Les débuts de la littérature mathématique hébraïque: la géométrie d'Abraham bar Hiyya (XIe-XIIe siècle)», *Micrologus*, IX, σ. 35-64, 2001.

— *Mathematik bei dem Juden, cent ans après*, in R. Leicht, G. Freudenthal (eds.), *Studies on Steinschneider. Moritz Steinschneider and the Emergence of the Science of Judaism in Nineteenth-Century Germany*, Leiden-Boston, Brill, σ. 457-476, 2012.

LEWIS , M. J. T., *Surveying Instruments of Greece and Rome*, Cambridge, 2001.

LIU, B. L., & FIALA, A. D., (1992), *Canon of Lunar Eclipses 1500 B.C. to A.D.3000*, Richmond, CA, 1992.

LLOYD, G. E. R., *The Pluralism in Greek Mathematics*, in K. Chemla (ed.), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, Cambridge, Cambridge University Press, σ. 294-310, 2012.

LO BELLO, A., *The Commentary of al-Nayrizi on Book I of Euclidi's Elements of Geometry, with an Introduction on the Transmission of Eucidi's Elements in the Middle Ages*. Boston, Brill, 2003.

— *The Commentary of al-Nayrizi on Books II-IV of Euclidi's Elements of Geometry*. Boston, Brill, 2009.

LONG, A. A., *Η ελληνιστική φιλοσοφία,* μτφ. Δημόπουλος, Σ., Δραγώνα-Μονάχου, Μ., Αθήνα, MIET, 1990.

MAHONEY, M., (1972), *Hero of Alexandria: Mathematics*, in C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, 16 τ., New York, C. Scribner's Sons, 1970-1980, τ. VI, σ. 314-315, 1972.

— *The Mathematical Carrer of Pierre de Fermat* (1601-1665), Princenton, N.J., Princenton University Press, 1973.

MAI, A., *Iliadis fragmenta antiquissima cum picturis. Item Scholia vetera ad Odysseam edente Angelo Maio*, Mediolani, Regiis Typis, 1819.

MANNETI, G., «Philodemus "De signis": An important ancient semiotic debate», *Semiotica*, σ. 279-297, 2002.

MANSFELD, J., *Prolegomena Mathematica: From Apollonius of Perga to Late Neoplatonism*, Brill, Leiden, 1998.

MARTIN, T. H., *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie*, Paris, Imprimerie impériale, 1854.

MASIA, R., «Some Remarks on Hero of Alexandria's Date», *Archive for History of Exact Sciences*, 69, σ. 231-255, 2015.

MERCATI, G. & FRANCHI DE' CAVALIERI, P., *Codices Vaticani graeci. Tomus I, Codices 1-329*, Città del Vaticano, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1923.

MONTANA, F., *The Making of Greek Scholiastic* Corpora, in F. Montanari, L. Pagani (eds.), *From Scholars to Scholia. Chapters in the History of Ancient Greek Scholarship*, Berlin-New York, Walter de Gruyter, σ. 105-161, 2011.

MONTFAUCON, B., *Analecta graeca sive varia opuscula graeca hactenus non edita*, Lutetiae Parisorum, Apud Edmundi Martin, Joannem Boudot, & Stephanum Martin, 1688.

NETZ, R., «Deuteronomic texts: Late antiquity and the history of mathematics», *Revue d'Histoire des Mathématiques* 42, σ. 261-288, 1998.

— *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999a.

— «Proclus' division of the mathematical proposition into parts: How and why was it formulated?» *Classical Quarterly* (N. S.) 49, σ. 282-303, 1999b.

— *Greek mathematicians: A group picture*, in Wolpert, L., Tuplin, C.J ., Rihll, T. E. (eds.), *Science and Mathematics in Ancient Greek Culture*. Oxford University Press, Oxford, σ. 196-216, 2002.

NETZ, R., & WILSON, N., *The Archimedes Codex: Revealing the Secrets of the World's Greatest Palimpsest*. Phoenix, London, 2010.

NEUGEBAUER, O., «Über eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria-Rom bei Heron», *Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab. Historisk-filologiske Meddelelser*, XXVI (2), σ. 3-26, 1938.

— *The Exact Sciences in Antiquity* 2nd ed., Providence. R. I., 1957.

— *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, 3 τ., Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1975.

PEREZ MARTIN, I., «Maxime Planude et le Diophantus Matritensis (Madrid, Biblioteca Nacional, ms. 4678) : un paradigme de la récupération des textes anciens dans la "renaissance paléologue"», *Byzantion*, LXXVI, σ. 433-462, 2006.

PERRIA, L. H., «Aspetti inediti dell'attività del copista Efrem. L'uso delle abbreviazioni nel Laur. 28.3», *Bollettino della Badia Greca di Grottaferrata*, n.s., LIII (= Ὀπώρα*. Miscellanea di studi in onore di mgr Paul Canart per il LXX compleanno*, τ. III), σ. 97-101, 1999.

PRATO, G., *Due postille paleografico-codicologiche*, in F. Berger (ed.), *Symbolae Berolinenses für Dieter Harlfinger*, Amsterdam, Hakkert, σ. 279-291, 1993.

RAÏOS, D., *La date d'Héron d'Alexandrie : témoignages internes et cadre historico-culturel*, in G. Argoud, J.-Y. Guillaumin (éds.), *Autour de LA DIOPTRE d'Héron d'Alexandrie*, Saint-Étienne, Publications de l'Université de Saint-Étienne, σ. 19-36, 2000.

RASHED, R., & BELLOSTA, H., *Apollonius de Perge, La section des droites sellon des rapports*. Walter de Gruyter, Berlin, 2010.

ROME, A., «Le problème de la distance entre deux villes dans la dioptra de Héron», *Annales de la Sociéte Scientifique de Bruxelles*, XLII, σ. 234–258, 1923.

ROMMEVAUX, S., & DJEBBAR, A., & VITRAC, B., «Remarques sur l'Histoire du Texte des *Éléments* d'Euclide», *Archive for History of Exact Sciences* 55, σ. 221-295, 2001.

ROTH CONGÈS, A., Artis copia*. Questions d'arpentage dans la* Dioptre *et les textes gromatiques romains*, in G. Argoud, J.-Y. Guillaumin (éds.), *Autour de LA DIOPTRE d'Héron d'Alexandrie*, Saint Étienne, Publications de l'Université de Saint-Étienne, σ. 107-147, 2000.

SCHOFIELD, M.,*Ἐπιλογισμός: An Appraisal*, in Frede and Striker (eds), σ. 221–37, 1996.

SCHUB, P., «A Mathematical Text by Mordecai Comtino (Constantinople, XV Century)», *Isis*, XVII, σ. 54-70, 1932.

SEDLEY, D. N., «Epicurus *On Nature* Book XXVIII», *Cronache Ercolanesi* 3: σ. 5–83, 1973.

SEZGIN, F., *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V, Leiden, E. J. Brill, 1974.

SCHÖNE, R., (ed.) *Damianos Schrift über Optik, mit Auszügen aus Geminos, griechisch und deutsch*, Berlin, Reichsdruckerei, σ. 14, 1897.

SIDOLI, N., *Ptolemy's Mathematical Approach: Applied Mathematics in the Second Century*, PhD thesis, Institute for the History and Philosophy of Science and Technology University of Toronto, 2004.

SIDOLI, N., «Heron's Dioptra 35 and Analemma Methods: An Astronomical Determination of the Distance between Two Cities», *Centaurus*, XLVII, σ. 236-258, 2005.

— «Heron of Alexandria's Date», *Centaurus*, LIII, σ. 55-61, 2011.

— *Research on Ancient Greek Mathematical Sciences* in N. Sidoli & G. V. Brummelen (eds.) *From Alexandria, Through Baghdad* Surveys and Studies in the Ancient Greek and Medieval Islamic Mathematical Sciences in Honor of J.L. Berggren, σ. 25-50, 2014.

SILBERBERG, M., «Ein handschriftliches hebräisch-mathematisches Werk des Mordechai Comtino (15. Jahrhundert)», *Jahrbuch der Jüdisch-Literarischen Geselschaft*, III, σ. 277-292, & IV, σ. 214-237, 1905-1906.

SOUFFRIN, P., *Remarques sur la datation de la Dioptre d'Héron par l'éclipse de lune de 62*, in G. Argoud, J.-Y. Guillaumin (éds.), *Autour de LA DIOPTRE d'Héron d'Alexandrie*, Saint-Étienne, Publications de l'Université de Saint-Étienne, σ. 13-17, 2000.

STEIN, A., «Zur genaueren Zeitbestimmung Herons von Alexandria», *Hermes* 49, σ. 154-156, 1914.

STRIKER, G., «Κριτήριον τῆς ἀληθείας», *Nachrichten der Akademie der Wissenshaften in Göttingen*, Phil.- Hist. Klasse II: σ. 48–110, 1974.

STUCKELBERGER, A., & GRASSHORF, G., *Ptolemaios: Handbuch der Geographic*, (2 Biinde), Schwabe, Basel, 2006.

SZABO, Á., *Ἀπαρχαί τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν*, Μτφ. Α. Τεγοπούλου. Αθήνα, Τ.Ε.Ε., 1973.

TAISBAK, C. M., «An Archimedean Proof of Heron's Formula for the Area of a Triangle; Reconstructed», *Centaurus*, XXIV, σ. 110-116, 1980.

— *Euclid's Data. Or the Importance of Being Given*. Museum Th. sculanum Press, Copenhagen, 2003.

TANNERY, P., «Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus», *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, VI, σ. 99-108, 1882, reproduit in id., 1912-1950, τ. I, n° 14, σ. 156-167, 1912.

— *La géométrie grecque*, Paris, Gauthier-Villars, 1887.

— « Cassiodore Variarum III, 52 », *Revue de philologie*, XXVII, σ. 245-247, 1903, reproduit in id., (1912-1950), τ. IX, n° 34, σ. 291-293, 1929.

— « Notes critiques sur les "Metrica" de Héron », *Revue de philologie*, XXVIII, σ. 181-188, 1904, reproduit in id., 1912-1950, τ. III, n° 79, σ. 196-207, 1915.

— *Mémoires Scientifiques*, publiés par J. L. Heiberg & H. G. Zeuthen, 17 τ., Toulouse, Privat, Paris, Gauthier-Villars, 1912-1950.

THAYER, W. P., *Pliny the Elder: the Natural History* (in Latin and English), University of Chicago, Retrieved, 2009.

THULIN, C., (ed.), *Corpus agrimensorvm Romanorvm. τ. I, fasc. I, Opuscula agrimensorumueterum*, Leipzig, B. G. Teubner, 1913.

TOOMER, G. J., «The Chord Table of Hipparchus and the Early History of Greek Trigonometry», *Centaurus*, XVIII, σ. 177-192, 1973.

ΤΟΥΛΙΑΤΟΥ, Ν., ΧΡΙΣΤΙΑΝΙΔΗΣ, Γ., «Μεταξύ θεωρητικής και πρακτικής γεωμετρίας: μια νέα ερμηνεία των *Μετρικών* του Ήρωνα», *Νεύσις*, τ. 22, σ. 87-120, 2014.

TSOUNA, V., *The Ethics of Philodemus*, Oxford, Oxford University Press, 2007.

TYBJERG, K., «Wonder-making and philosophical wonder in Hero of Alexandria», *Studies in History and Philosophy of Science*, XXXIV, σ. 443-466, 2003.

— *Hero of Alexandria's Mechanical Geometry*, in Ph. Lang (ed.), *Re-inventions: Essays on Hellenistic and Early Roman Science*, Edmonton, Academic Printing & Publishing, σ. 29-56, 2004.

VAN BRUMMELEN, G., *A Survey of Research in the Mathematical Sciences in Medieval Islam from 1996 to 2011* in N. Sidoli & G. V. Brummelen (eds.) *From Alexandria, Through Baghdad* Surveys and Studies in the Ancient Greek and Medieval Islamic Mathematical Sciences in Honor of J.L. Berggren, σ. 101-124, 2014.

VAN DER WAERDEN, B. L., *Η Αφύπνιση της Επιστήμης*, μτφ. Γ. Χριστιανίδης, Ηράκλειο, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003.

VITRAC, B., *Euclide et Héron: Deux approches de l'enseignement des mathématiques dans l' Antiquité?*, in G. Argoud (éd.), *Science et vie intellectuelle à Alexandrie (Ier–IIIe siècle après J.-C.)*, Saint-Étienne, Publications de l'Université de Saint-Étienne, σ. 121-145, 1994.

— *Euclide*, *Les Éléments*, 4 τ., Paris, Presses Universitaires de France, 1990-2001.

— « Les classifications des sciences mathématiques en Grèce ancienne», *Archives de philosophie*, LXVIII, σ. 269-301, 2005.

— *Promenade dans les préfaces des textes mathématiques grecs anciens*, in P. Radelet de Grave (éd.), *Liber amicorum Jean Dhombres*, Brepols, Turnhout, σ. 518-556, 2008.

— «Mécanique et mathématiques à Alexandrie : le cas de Héron», *Oriens-Occidens*, VII, σ. 155- 199, 2009.

— *Faut-il réhabiliter Héron d'Alexandrie ?*. Το κείμενο βρίσκεται σε ηλεκτρονική μορφή στο https://www.academia.edu/1229035/Faut-il_r%C3%A9habiliter_H%C3%A9ron_dAlexandrie, Version 1.pdf, 2010.

— *The Euclidean Ideal of Proof in the Elements and the Philological Uncertainties of Heiberg's edition of the Text* in K. Chemla (ed.), *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*, Cambridge, Cambridge University Press, σ. 69-134, 2012.

VITRAC, B., DJEBBAR, A., «Le Livre XIV des Éléments d'Euclide : versions grecques et arabes (première partie)», *SCIAMVS*, XII, σ. 29-158, (second partie), XIII, σ. 3-156, 2011.

WEINRICH, J. G., (1842), *De Auctorum Graecorum versionibus et commentariis Syriacis, Arabicis, Armeniacis, Persicisque Commentatio*, Leipzig, F. C. G. Vogel, 1842.

WESCHER, C., *La poliorcétique des Grecs*, Paris, Imprimerie impériale, 1867.

WHITE, K., *Greek and Roman Technology*, Ithaca (NY), Cornell University Press, 1984.

WILSON, N., «Archimedes: The palimpsest and the tradition», *Byzantinische Zeitschrift* 92, σ. 89-101, 1999.