

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

"Η συμβολή των Διαγωνισμών (Εθνικών και Διεθνών) στα Μαθηματικά, στην ανίχνευση των χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά, στην εξέλιξη τους ως νέων επιστημόνων και στη διαμόρφωση του περιεχομένου των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση"

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΤΥΡΛΗΣ

ΑΘΗΝΑ 2017

νίκην. Il. 659. D: *ὡς ἄρα παιδεία μέν ἐσθ' ἡ παίδων ὁλκή τε καὶ ἀγωγὴ πρὸς τὸν ὑπὸ τοῦ νόμου λόγον ὀρθὸν εἰρημένον.* Def. 416: *παιδεία δύναμις θεραπευτικὴ ψυχῆς.* Prot.

" … είναι λοιπόν η παιδεία προσέλκυση των νέων και καθοδήγησή τους προς τον ορθό λόγο όπως τον έχει ορίσει ο νόμος"

Πλάτων

Ευχαριστίες

Η ολοκλήρωση της παρούσας διδακτορικής διατριβής επιτεύχθηκε με την αμέριστη συμπαράσταση (επιστημονική και ηθική) των μελών της τριμελούς επιτροπής.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Τον επιβλέποντα καθηγητή κ. Γεώργιο Δημάκο, για την ανάθεση της συγκεκριμένης μελέτης, την άψογη επιστημονική καθοδήγηση, την άριστη συνεργασία που είχαμε με τις εύστοχες παρατηρήσεις και υποδείξεις. Οι γνώσεις και η εμπειρία του καθώς και η ηθική υποστήριξη ήταν πολύτιμη για την πρόοδο, την εξέλιξη και την ολοκλήρωση της εργασίας μου.

Τον καθηγητή κ. Θεόδωρο Εξαρχάκο για τις πολύτιμες επισημάνσεις, παρατηρήσεις και διορθώσεις σε θέματα διδακτικής των μαθηματικών και αναλυτικών προγραμμάτων που βοήθησαν στην διαμόρφωση της διατριβής.

Τον καθηγητή κ. Θεόδωρο Μπόλη για την μεγάλη βοήθεια που μου παρείχε μέσα από τις συζητήσεις που είχαμε σχετικά με τους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Η εμπειρία και η σημαντική του ενασχόληση με τους μαθηματικούς διαγωνισμούς ήταν πολύ χρήσιμη.

Τον Σχολικό Σύμβουλο κ. Σπύρο Φερεντίνο για την πολύτιμη συμβολή του στη στατιστική επεξεργασία των ερευνών καθώς και για τις παρατηρήσεις του.

Τον μαθηματικό Βαγγέλη Ψύχα για την συμβολή του σε όλα τα στάδια εκπόνησης αυτής της διατριβής.

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες 3

Κατάλογος Πινάκων 7

Κατάλογος Διαγραμμάτων 10

Περίληψη 13

Λέξεις Κλειδιά 13

Α΄ ΜΕΡΟΣ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ 15

Κεφάλαιο 1ο. Εισαγωγή 15

1.1 Παρουσίαση του θέματος 15

1.2 Στόχος Διατριβής 16

1.3 Ερευνητικά ερωτήματα 16

1.4 Δομή της Διατριβής 17

Κεφάλαιο 2ο. Χαρίσματα-Ταλέντο 18

2.1 Χαρισματικά παιδιά 18

2.2 Παιδεία 18

2.3 Το Ολυμπιακό Πνεύμα 19

2.4 Αγώνες-Διαγωνισμοί 20

2.5 Χαρισματικά-Ταλαντούχα Παιδιά 20

2.6 Αγωγή-Κίνητρα-Επηρεασμός 24

Κεφάλαιο 3ο. Μαθηματικοί Διαγωνισμοί 25

3.1 Γενικά 25

3.2 Οι Πρώτοι Διαγωνισμοί 26

3.3 Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί στην πρώην "Σοβιετική Ένωση" (ΕΣΣΔ-USSR) 29

3.4 Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής (ΗΠΑ-USA). 30

3.4.1 Πανεπιστημιακοί Διαγωνισμοί 30

3.4.2 Διαγωνισμοί της Mathematical Association of America (MAA) 31

3.5 Οι Ελληνικοί Μαθηματικοί Διαγωνισμοί 34

3.5.1 Ιστορικά Στοιχεία-Κανονισμοί 35

3.5.2 76ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά "Ο Θαλής" 39
3.5.3 76ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά "Ο Ευκλείδης" 48
3.5.4 33η ΕΜΟ "Ο Αρχιμήδης" 63
3.5.5 19ος Μεσογειακός Μαθηματικός Διαγωνισμός 75
3.6 Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (BMO) 81
3.7 Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (BMON) 96
3.8 Asian Pacific Mathematics Olympiad (APMO) 104
3.9 Middle European Mathematical Olympiad (MEMO) 107
3.10 Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες 109
3.10.1 Ιστορικά Στοιχεία-Κανονισμοί 109
3.10.2 Η 56η IMO 2015 110
Β΄ ΜΕΡΟΣ - ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ 122
Κεφάλαιο 4ο. Έρευνα 1η 122
4.1 Γενικά 122
4.2 Περιγραφική Παρουσίαση της Έρευνας 122
4.3 Παραγοντική Ανάλυση 164
Κεφάλαιο 5ο. Έρευνα 2η 173
5.1 Γενικά 173
5.2 Περιγραφική Ανάλυση Έρευνας 174
Οι Ερωτήσεις 1 έως 6 174
Η Ερώτηση 7 188
5.3 Παραγοντική Ανάλυση 191
5.4 Περιγραφή παραγόντων 194
Κεφάλαιο 6ο. Έρευνα 3η 196
6.1 Γενικά 196
6.2 Η Θεωρία της Προσχεδιασμένης Συμπεριφοράς (Theory of Planned Behaviour). 196
6.3 Η στάση απέναντι στα μαθηματικά και τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς και οι συμπεριφορικές πεποιθήσεις 199
6.4 Τα υποκειμενικά πρότυπα και οι ρυθμιστικές πεποιθήσεις 202

6.5 Ο αντιληπτός συμπεριφορικός έλεγχος και οι πεποιθήσεις ελέγχου 208

6.6 Επίδραση των Μαθηματικών Διαγωνισμών στη σχέση με τα Μαθηματικά 213

6.7 Επίδραση Μαθηματικών Διαγωνισμών στην ερευνητική πορεία των ολυμπιονικών 218

6.8 Σημερινή ενασχόληση με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.... 224

Κεφάλαιο 7ο. Συμβολή των Διαγωνισμών στα Μαθηματικά στη διαμόρφωση του περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. 228

7.1 Γενικά 228

7.2 Προτάσεις για Α΄ Γυμνασίου 228

7.3 Προτάσεις για Β΄ Γυμνασίου..... 231

7.4 Προτάσεις για Γ΄ Γυμνασίου 232

7.5 Προτάσεις για Α΄ Λυκείου 234

7.6 Προτάσεις για Β΄ Λυκείου..... 237

7.7 Ενδεικτικές Ασκήσεις Διαγωνισμών..... 240

7.7.1 Άσκηση Θεωρίας Αριθμών..... 240

7.7.2 Άσκηση Θεωρίας Αριθμών..... 240

Παρατήρηση για Διαφάνιες 242

7.7.3 Άσκηση (Θαλής 2014-2015. Β΄ Γυμνασίου)..... 242

7.7.4 Άσκηση (Θαλής 2014-2015. Γ΄ Γυμνασίου) 243

7.7.5 Άσκηση (Ευκλείδης 2014-2015. Β΄ Γυμνασίου)..... 245

7.7.6 Άσκηση (Ευκλείδης 2014-2015. Γ΄Γυμνασίου) 247

7.7.7 Άσκηση (Σημείο των Μέσων Τετραπλεύρου)..... 249

7.7.8 Άσκηση (Ιδιότητα Ισοσκελούς Τριγώνου) 249

7.7.9 Άσκηση (Ιδιότητα Ισοπλεύρου Τριγώνου 1)..... 252

7.7.10 Άσκηση (Ιδιότητα Ισοπλεύρου Τριγώνου 2)..... 254

7.7.11 Άσκηση (Τα Συμμετρικά του Ορθοκέντρου 1) 254

7.7.12 Άσκηση (Τα Συμμετρικά του Ορθοκέντρου 2) 256

Κεφάλαιο 8ο. Συμπεράσματα - Προτάσεις..... 258

8.1 Γενικά 258

8.2 Από την 1η Έρευνα: 258

8.3 Από την 2η Έρευνα: 259
8.4 Από την 3η Έρευνα: 260
8.5 Προτάσεις για τη διαμόρφωση του Αναλυτικού Προγράμματος στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση 262
Παράρτημα 264
Ερωτηματολόγιο 1ης Έρευνας 264
Ερωτηματολόγιο 2ης Έρευνας 268
1st Austrian-Polish Mathematical Competition 1978 270
Διαφάνιες Θεωρίας Αριθμών 271
Βιβλιογραφία 279
Ελληνόγλωσση 279
Ξενόγλωσση 284

Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1. Κατανομή βαθμών στην 56η IMO 112
Πίνακας 2. Ποσοστά συμμετοχής διαγωνιζομένων, ανάλογα με την ηλικία και το φύλο τους (Αγόρι-Κορίτσι) 125
Πίνακας 3. Ποσοστό διαγωνιζομένων που ένας τουλάχιστον γονέας είναι μαθηματικός, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 127
Πίνακας 4. Ποσοστά διαγωνιζομένων που θέλουν να ακολουθήσουν συγκεκριμένο επάγγελμα ή κατηγορία επαγγελμάτων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 129
Πίνακας 5. Ποσοστά διαγωνιζομένων που συμμετέχουν για 1η , 2η ή 3η φορά σε Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 131
Πίνακας 6. Ποσοστά διαγωνιζομένων για το επάγγελμα ή την κατηγορία επαγγελμάτων που επιθυμούν να σπουδάσουν, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 132
Πίνακας 7. Συχνότητα και ποσοστά διαγωνιζομένων, για τις χρονικές περιόδους που έχουν προετοιμαστεί, με σκοπό τη συμμετοχή τους στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (εκτός σχολείου) 133
Πίνακας 8. Ποσοστά διαγωνιζομένων για τις κατηγορίες των χρονικών περιόδων προετοιμασίας για τη συμμετοχή στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (εκτός του σχολείου), ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 134

Πίνακας 9. Συχνότητα και ποσοστά διαγωνιζομένων, για τους αριθμούς των ωρών (ανα ημέρα) που έχουν προετοιμαστεί, με σκοπό τη συμμετοχή τους στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες..... 135
Πίνακας 10. Ποσοστά διαγωνιζομένων, για τους αριθμούς των ωρών (ανα ημέρα) που έχουν προετοιμαστεί, με σκοπό τη συμμετοχή τους στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 136
Πίνακας 11. Ποσοστά του βαθμού βοήθειας που έδωσαν τα σχολικά βιβλία στην αντιμετώπιση θεμάτων Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 138
Πίνακας 12. Συχνότητες για το βαθμό αρεσκείας των διαγωνιζομένων στους κλάδους των μαθηματικών που εξετάζονται στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες..... 138
Πίνακας 13. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Θεωρίας Αριθμων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 140
Πίνακας 14. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Άλγεβρας, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 141
Πίνακας 15. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Γεωμετρίας, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 143
Πίνακας 16. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο των Διακριτών Μαθηματικών, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 144
Πίνακας 17. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Ανάλυσης, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 145
Πίνακας 18. Συχνότητες και ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα..... 147
Πίνακας 19. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 148
Πίνακας 20. Συχνότητες και ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή..... 148
Πίνακας 21. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 150
Πίνακας 22. Συχνότητες και ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στις Θεωρητικές Ασκήσεις 151
Πίνακας 23. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στις Θεωρητικές Ασκήσεις, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 152
Πίνακας 24. Πίνακας ερωτήσεων γιά την ανίχνευση χαρακτηριστικών των παιδιών που συμμετέχουν στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες..... 156
Πίνακας 25 158
Πίνακας 26 158
Πίνακας 27 159

Πίνακας 28. 160
Πίνακας 29 161
Πίνακας 30 162
Πίνακας 31 163
Πίνακας 32 167
Πίνακας 33. Συχνότητες Αγοριών Κοριτσιών ανά Τάξη 174
Πίνακας 34. Ποσοστά Αγοριών Κοριτσιών ανά Τάξη 174
Πίνακας 35. Συχνότητες τελικών μέσων όρων των βαθμών στα μαθηματικά του γυμνασίου 176
Πίνακας 36. Ποσοστά τελικών μέσων όρων των βαθμών στα μαθηματικά του γυμνασίου 177
Πίνακας 37. Συχνότητες τελικών μέσων όρων των βαθμών στα μαθηματικά του Λυκείου 178
Πίνακας 38. Ποσοστά τελικών μέσων όρων των βαθμών στα μαθηματικά του Λυκείου 178
Πίνακας 39. Συχνότητες Γενικών Μέσων Όρων βαθμολογιών ανά τάξη 180
Πίνακας 40. Ποσοστά Γενικών Μέσων Όρων βαθμολογιών ανά τάξη ... 180
Πίνακας 41. Συχνότητα και ποσοστά των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου Πατέρα 182
Πίνακας 42. Συχνότητα και ποσοστά των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου Μητέρας 183
Πίνακας 43. Συχνότητα των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου γονέων 184
Πίνακας 44. Συχνότητα και Σχετική συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών του Πατέρα 186
Πίνακας 45. Συχνότητα και Σχετική συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών της Μητέρας 187
Πίνακας 46. Συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών του Πατέρα και της Μητέρας 188
Πίνακας 47. Ποσοστά Επηρεασμού Γονέων 189
Πίνακας 48. Ποσοστά Διαφοράς Επηρεασμού γονέων 190
Πίνακας 49. Ποσοστά παραγόντων που επηρεάζουν την ενασχόληση των ταλαντούχων μαθητών με τα μαθηματικά 192
Πίνακας 50. Οι ρυθμιστικές/κανονιστικές πεποιθήσεις των μαθητών 203
Πίνακας 51. Παράγοντες που διευκόλυναν τους μαθητές να ασχοληθούν με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς 209
Πίνακας 52. Διδακτέα Ύλη Α΄ Γυμνασίου (Α΄ Μέρος) 229
Πίνακας 53. Διδακτέα Ύλη Α΄ Γυμνασίου (Β΄ Μέρος) 229
Πίνακας 54. Διδακτέα Ύλη Β΄ Γυμνασίου (Α΄ Μέρος) 231
Πίνακας 55. Διδακτέα Ύλη Β΄ Γυμνασίου (Α΄ Μέρος) 231
Πίνακας 56. Διδακτέα Ύλη Β΄ Γυμνασίου (Β΄ Μέρος) 232
Πίνακας 57. Διδακτέα Ύλη Γ΄ Γυμνασίου (Α΄ Μέρος) 233

Πίνακας 58. Διδακτέα Ύλη Γ΄ Γυμνασίου (Β΄ Μέρος) 234
Πίνακας 59. Διδακτέα Ύλη Α΄ Λυκείου (Άλγεβρα) 234
Πίνακας 60. Διδακτέα Ύλη Α΄ Λυκείου (Γεωμετρία) 236
Πίνακας 61. Διδακτέα Ύλη Β΄ Λυκείου (Άλγεβρα) 238
Πίνακας 62. Διδακτέα Ύλη Β΄ Λυκείου (Γεωμετρία) 239

Κατάλογος Διαγραμμάτων

Διάγραμμα 1.Κατανομή βαθμών στην 56η ΙΜΟ 112
Διάγραμμα 2. Ποσοστά Αγοριών-Κοριτσιών 124
Διάγραμμα 3. Ποσοστά συμμετοχής διαγωνιζομένων, ανάλογα με την ηλικία τους 124
Διάγραμμα 4. Ποσοστά συμμετοχής διαγωνιζομένων, ανάλογα με την ηλικία και το φύλο τους (Αγόρι-Κορίτσι) 125
Διάγραμμα 5. Ποσοστό διαγωνιζομένων που ένας τουλάχιστον γονέας είναι μαθηματικός 126
Διάγραμμα 6. Ποσοστό διαγωνιζομένων που ένας τουλάχιστον γονέας είναι μαθηματικός, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 126
Διάγραμμα 7. Ποσοστά διαγωνιζομένων που θέλουν να ακολουθήσουν συγκεκριμένο επάγγελμα ή κατηγορία επαγγελμάτων 128
Διάγραμμα 8. Ποσοστά διαγωνιζομένων που θέλουν να ακολουθήσουν συγκεκριμένο επάγγελμα ή κατηγορία επαγγελμάτων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 129
Διάγραμμα 9. Ποσοστά διαγωνιζομένων που συμμετέχουν για 1η , 2η ή 3η φορά σε Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα. 130
Διάγραμμα 10. Ποσοστά διαγωνιζομένων που συμμετέχουν για 1η , 2η ή 3η φορά σε Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι). 130
Διάγραμμα 11. Ποσοστά διαγωνιζομένων για το επάγγελμα ή την κατηγορία επαγγελμάτων που επιθυμούν να σπουδάσουν 131
Διάγραμμα 12. Ποσοστά διαγωνιζομένων για το επάγγελμα ή την κατηγορία επαγγελμάτων που επιθυμούν να σπουδάσουν, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 132
Διάγραμμα 13. Ποσοστά διαγωνιζομένων για τις κατηγορίες των χρονικών περιόδων προετοιμασίας για τη συμμετοχή στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (εκτός του σχολείου) 133
Διάγραμμα 14. Ποσοστά διαγωνιζομένων για τις κατηγορίες των χρονικών περιόδων προετοιμασίας για τη συμμετοχή στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (εκτός του σχολείου), ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 134

Διάγραμμα 15. Ποσοστά διαγωνιζομένων, για τους αριθμούς των ωρών (ανα ημέρα) που έχουν προετοιμαστεί, με σκοπό τη συμμετοχή τους στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες 135
Διάγραμμα 16. Ποσοστά διαγωνιζομένων, για τους αριθμούς των ωρών (ανα ημέρα) που έχουν προετοιμαστεί, με σκοπό τη συμμετοχή τους στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες), ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 136
Διάγραμμα 17. Ποσοστά του βαθμού βοήθειας που έδωσαν τα σχολικά βιβλία στην αντιμετώπιση θεμάτων Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων 137
Διάγραμμα 18. Ποσοστά του βαθμού βοήθειας που έδωσαν τα σχολικά βιβλία στην αντιμετώπιση θεμάτων Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 137
Διάγραμμα 19. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Θεωρίας Αριθμων 139
Διάγραμμα 20. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Θεωρίας Αριθμων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 140
Διάγραμμα 21. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Άλγεβρας..... 141
Διάγραμμα 22. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Άλγεβρας, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 141
Διάγραμμα 23. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Γεωμετρίας..... 142
Διάγραμμα 24. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Γεωμετρίας, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 143
Διάγραμμα 25. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο των Διακριτών Μαθηματικών..... 143
Διάγραμμα 26. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο των Διακριτών Μαθηματικών, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 144
Διάγραμμα 27. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Ανάλυσης 145
Διάγραμμα 28. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Ανάλυσης, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 145
Διάγραμμα 30. Συγκριτικά ποσοστά για το βαθμό αρεσκείας στα κεφάλαια των μαθηματικών που εξετάζονται στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες 146
Διάγραμμα 31. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα 147
Διάγραμμα 32. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)..... 148
Διάγραμμα 33. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή..... 149

Διάγραμμα 34. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 150
Διάγραμμα 35. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στις Θεωρητικές Ασκήσεις 151
Διάγραμμα 36. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στις Θεωρητικές Ασκήσεις, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι) 152
Διάγραμμα 37 . Συγκριτικά Ποσοστά για το βαθμό προτίμησης στις διάφορες κατηγορίες προβλημάτων 153
Διάγραμμα 38 154
Διάγραμμα 39 154
Διάγραμμα 40 155
Διάγραμμα 41 155
Διάγραμμα 42 158
Διάγραμμα 43 159
Διάγραμμα 44. 160
Διάγραμμα 45 161
Διάγραμμα 46 162
Διάγραμμα 47 163
Διάγραμμα 48 164
Διάγραμμα 49. Συχνότητες ανά Τάξη Αγοριών Κοριτσιών 175
Διάγραμμα 50. Συχνότητες Αγοριών Κοριτσιών ανά Τάξη 175
Διάγραμμα 51. Συχνότητες Βαθμών Μαθηματικών (τελικών μέσων όρων) ανά τάξη Γυμνασίου 178
Διάγραμμα 52. Ποσοστά βαθμών (τελικοί μέσοι όροι) στα μαθηματικά για το Λύκειο 179
Διάγραμμα 53. Ποσοστά Γενικών Μέσων Όρων 181
Διάγραμμα 54. Συχνότητα των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου Πατέρα 182
Διάγραμμα 55. Συχνότητα των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου Μητέρας 183
Διάγραμμα 56. Συχνότητα των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου γονέων 184
Διάγραμμα 57. Συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών του Πατέρα 186
Διάγραμμα 58. Συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών της Μητέρας 187
Διάγραμμα 59. Συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών του Πατέρα και της Μητέρας 188
Διάγραμμα 60. Ποσοστά Διαφοράς Επηρεασμού γονέων 190

Περίληψη

Στην αρχή της διατριβής αναπτύσονται σημαντικές έννοιες που λειτουργούν καταλυτικά και επηρεάζουν έμμεσα στην ενασχόληση των μαθητών με τους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Περιγράφονται και αναλύονται οι έννοιες, παιδεία , ολυμπιακό πνεύμα, αγώνας, διαγωνισμός, χαρισματικότητα, ταλέντο, αγωγή, κίνητρα και επηρεασμός.

Στη συνέχεια γίνεται λεπτομερέστερη αναφορά και ανάλυση στους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Αναφέρουμε τη γέννηση και την εξέλιξη των μαθηματικών διαγωνισμών χωρίζοντάς τους σε δύο μεγάλες κατηγορίες (Ελληνικούς και Διεθνείς). Αναφέρουμε επίσης θέματα των διαγωνισμών για καλύτερη εκτίμηση του θεματικού προσανατολισμού και του βαθμού δυσκολίας τους.

Η ανίχνευση των χαρακτηριστικών, μαθητών που συμμετέχουν σε μαθηματικές ολυμπιάδες, γίνεται μέσα από έρευνα σε 429 μαθητές που συμμετείχαν στην 45η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Αθήνα 2004) και προέρχονταν από 100 περίπου χώρες.

Ακολουθεί δεύτερη έρευνα (45η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης", με σκοπό τη μελέτη της συμβολής των διαγωνισμών στην ανίχνευση των χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά.

Η τρίτη τέλος έρευνα μελετά τη συμβολή των διαγωνισμών, στην εξέλιξη των μαθητών, ως νέων επιστημόνων. Τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψαν από τη μελέτη των συνεντεύξεων 26 Ολυμπιονικών μαθητών που συμμετείχαν με την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία στους Ελληνικούς και διεθνείς Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.

Τα συμπεράσματα των παραπάνω ερευνών μας οδηγούν στην διατύπωση προτάσεων για την διαμόρφωση του προγράμματος σπουδών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, με σκοπό την αναβάθμιση και ορθότερη διαχείρηση της ύλης των μαθηματικών.

Λέξεις Κλειδιά

Παιδεία, Χαρισματικότητα, Ταλέντο, Διαγωνισμοί, Ολυμπιακό πνεύμα, Μαθηματικοί Διαγωνισμοί, Αγωγή, Κίνητρα, Επηρεασμός, Μαθηματικές Ολυμπιάδες, Λογικομαθηματική νοημοσύνη, Άλγεβρα, Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών, Συνδυαστική.

ABSTRACT

At the beginning of the article there are developed important concepts that function catalytically and indirectly influence the students' engagement with mathematical competitions. Describe and analyze concepts, education,

Olympic spirit, struggle, contest, charisma, talent, education, motivation and influence.

Then, more detailed reference and analysis is made to mathematical contests. We mention the birth and evolution of mathematical contests by dividing them into two major categories (Greek and International). We also mention issues of competitions for better assessment of the thematic orientation and their degree of difficulty.

The detection of the characteristics of pupils participating in mathematical Olympiads is done through a survey of 429 students who participated in the 45th International Mathematical Olympiad (Athens 2004) and came from around 100 countries.

A second research follows (45th National Mathematical Olympiad "Archimedes", aiming at studying the contribution of competitions to the detection of charismatic students in mathematics.

The third research study examines the contribution of competitions to the evolution of students as new scientists. The results of the survey came from the study of the interviews of 26 Olympic students who participated with the Hellenic Mathematical Society in Greek and International Mathematical Competitions.

The conclusions of the above surveys lead us to formulate proposals for the curriculum development in secondary education with the aim of upgrading and better managing mathematics.

KEYWORDS

Education, Charisma, Talent, Competitions, Olympic Spirit, Mathematical Competitions, Education, Motivation, Effect, Mathematical Olympiads, Logic-Mathematical Intelligence, Algebra, Geometry, Number Theory, Combinational.

Α΄ ΜΕΡΟΣ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ

Κεφάλαιο 1ο. Εισαγωγή

1.1 Παρουσίαση του θέματος

Η έννοια της χαρισματικότητας είναι ένα «ανοιχτό» και πολυσύνθετο φαινόμενο που σχετίζεται σε αρκετό βαθμό και με τις κυρίαρχες δομές και αντιλήψεις της κάθε κοινωνίας. Πάντως σε κάθε περίπτωση αφορά ένα πολύ μικρό ποσοστό των ατόμων του γενικού πληθυσμού που έχουν εκφράσει τη χαρισματικότητά τους, και η προσπάθεια ορισμού της κρίνεται πολύ δύσκολη (Τσιάμης, 2005, Κονιστή, 2012, Σούλης και Φλωρίδης 2008).

Αρκετοί ερευνητές συγκλίνουν στο ότι τα χαρισματικά παιδιά αποτελούν το 3-5% του μαθητικού πληθυσμού (Δαβάζογλου, 1999; Αλαχιώτης, 2004; Καρλατήρα & Τσιώλη, 2004; Ματσαγγούρας, 2005). Σύμφωνα με τον Ματσαγγούρα (2008), «η χαρισματικότητα χαρακτηρίζεται από μία ασύγχρονη εξέλιξη, κατά την οποία προηγμένες γνωστικές ικανότητες δημιουργούν ένα σύνολο εσωτερικών εμπειριών που διαφέρει ποιοτικά από το μέσο όρο». Ο όρος «ασύγχρονη» στο χαρισματικό άτομο μαρτυρά μία έλλειψη συγχρονισμού στο ρυθμό της γνωστικής, συναισθηματικής και βιολογικής του εξέλιξης που διαφέρει ποιοτικά από το μέσο όρο. Ο Gagné (2008) υποστηρίζει οτι η χαρισματικότητα προϋποθέτει την έμφυτη παρουσία φυσικών κλίσεων και ικανοτήτων που ονομάζονται «χαρίσματα» ή «ξεχωριστές κλίσεις».

Η έννοια της χαρισματικότητας, ιδιαίτερα στα Μαθηματικά που είναι και το αντικείμενο της παρούσας μελέτης, έχει αποκτήσει ιδιαίτερο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια στη χώρα μας, καθώς από χρόνο σε χρόνο αυξάνονται οι επιτυχίες των Ελλήνων μαθητών και φοιτητών σε εθνικούς και διεθνείς διαγωνισμούς στα Μαθηματικά. Φέτος η Ελλάδα κατέκτησε τη 12η θέση μέσα σε 111 χώρες του κόσμου στην 58η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα στο Ρίο ντε Τζανέιρο. Η ελληνική ομάδα κέρδισε ένα χρυσό, τέσσερα αργυρά και ένα χάλκινο μετάλλιο, κατακτώντας την πρώτη θέση ανάμεσα στις χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης. Είναι η μεγαλύτερη διάκριση που έχουν κερδίσει Έλληνες μαθητές σε παγκόσμιο διαγωνισμό μαθηματικών. Ακόμη σημαντικές διακρίσεις πέτυχε το Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο σε διεθνείς διαγωνισμούς, καθώς ομάδα φοιτητών κατέκτησε το χρυσό μετάλλιο στον διεθνή διαγωνισμό μαθηματικών SEEMOUS 2016, στον διαγωνισμό SEEMOUS 2016,

διέπρεψε για άλλη μια φορά κατακτώντας δύο χρυσά και δύο αργυρά μετάλλια.

Η παρούσα εργασία, που εκπονήθηκε στα πλαίσια διδακτορικής διατριβής, εστιάζει στη συμβολή των Διαγωνισμών (Εθνικών και Διεθνών) στα Μαθηματικά, στην ανίχνευση των χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά, στην εξέλιξη τους ως νέων επιστημόνων και στη διαμόρφωση του περιεχομένου των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. Μεθοδολογικά, πραγματοποιήθηκαν 3 έρευνες, η πρώτη έρευνα έγινε σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ηλικίας 16 έως 19 ετών) που συμμετείχαν στην 45η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα που έγινε το 2004 στην Αθήνα (δείγμα σε διεθνές επίπεδο). Η δεύτερη έρευνα έγινε σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ηλικίας 13 έως 17 ετών) που συμμετείχαν στην 25η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ" το Μάρτιο του 2008 (δείγμα σε εθνικό επίπεδο) και η τρίτη τέλος έρευνα έγινε σε Έλληνες Ολυμπιονίκες των Μαθηματικών (ηλικίας 19 ετών και άνω) που είναι φοιτητές ή πτυχιούχοι.

1.2 Στόχος Διατριβής

Στόχος της παρούσας μελέτης είναι η διερεύνηση της συμβολής των Διαγωνισμών (Εθνικών και Διεθνών) στα Μαθηματικά:
α) στην ανίχνευση των χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά,
β) στην εξέλιξη τους ως νέων επιστημόνων και
γ) στη διαμόρφωση του περιεχομένου των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

1.3 Ερευνητικά ερωτήματα

- Οι διαγωνισμοί (Εθνικοί και Διεθνείς) στα Μαθηματικά συμβάλλουν στην ανίχνευση των χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά στη χώρα μας;
- Οι διαγωνισμοί (Εθνικοί και Διεθνείς) στα Μαθηματικά συμβάλλουν στην εξέλιξη των χαρισματικών μαθητών της χώρας μας στα Μαθηματικά ως νέων επιστημόνων;
- Οι διαγωνισμοί (Εθνικοί και Διεθνείς) στα Μαθηματικά συμβάλλουν στη διαμόρφωση του περιεχομένου των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στη χώρα μας;

1.4 Δομή της Διατριβής

Στο 1ο κεφάλαιο περιγράφεται η παρουσίαση του θέματος, ο στόχος της διατριβής, τα ερευνητικά ερωτήματα και η δομή της διατριβής.

Στο 2ο κεφάλαιο περιγράφονται οι έννοιες "χάρισμα" και "ταλέντο", που η μελέτη τους, αποτελεί σημαντική πτυχή της παρούσας διατριβής.

Στο 3ο κεφάλαιο γίνεται αναφορά στους Μαθηματικούς διαγωνισμούς (στη χώρα μας και διεθνώς), επίσης παρουσιάζοντα τα θέματα των διαγωνισμών για καλύτερη εκτίμηση του θεματικού προσανατολισμού και του βαθμού δυσκολίας τους.

Στο 4ο κεφάλαιο αναπτύσσεται η ποσοτική έρευνα που αφορά τη μελέτη των χαρακτηριστικών και των στάσεων των μαθητών που συμμετέχουν στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες, καθώς επίσης και η μελέτη των παραγόντων που επηρεάζουν την πορεία αυτών των μαθητών. Στην έρευνα αυτή συμμετείχαν 420 μαθητές που διαγωνίσθηκαν στην 45η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Αθήνα 2004) και προέρχονταν από 100 περίπου χώρες.

Στο 5ο κεφάλαιο αναπτύσσεται η ποσοτική έρευνα που αφορά τη μελέτη της συμβολής των διαγωνισμών στην ανίχνευση των χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά. Πιο συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε μελέτη και ανάλυση των παραγόντων που επηρεάζουν την ενασχόληση των μαθητών με τα μαθηματικά, με σκοπό την εφαρμογή στην εκπαίδευση μεθόδων και πρακτικών που τονώνουν, προωθούν και ενθαρρύνουν τη θετική στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά. Στην έρευνα αυτή συμμετείχαν τριακόσια τριάντα εννέα (**339**) παιδιά από Λύκεια και Γυμνάσια όλης της χώρας που διαγωνίστηκαν στην 25η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ".

Στο 6ο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έρευνα που μελετά ποιοτικά τη συμβολή των διαγωνισμών, στην εξέλιξη των μαθητών, ως νέων επιστημόνων. Τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψαν από τη μελέτη των συνεντεύξεων 26 Ολυμπιονικών μαθητών που συμμετείχαν με την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία στους Ελληνικούς και διεθνείς Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στη Θεωρία της Προσχεδιασμένης Συμπεριφοράς, στην οποία στηρίχθηκε η ανάλυση των συνεντεύξεων.

Στο 7ο κεφάλαιο εξετάζεται η συμβολή των διαγωνισμών στα Μαθηματικά στη διαμόρφωση του περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος των Μαθηματικών στη Β/θμια εκπαίδευση.

Στα Συμπεράσματα – Προτάσεις παρουσιάζονται τα συμπεράσματα από τις τρεις έρευνες που διεξήχθηκαν καθώς και οι απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Επίσης διατυπώνονται ορισμένες προτάσεις για την διαμόρφωση του προγράμματος σπουδών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, με σκοπό την αναβάθμιση και ορθότερη διαχείρηση της ύλης των μαθηματικών.

Κεφάλαιο 2ο. Χαρίσματα-Ταλέντο

2.1 Χαρισματικά παιδιά

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να διασαφηνίσουμε, με συντομία, κάποιες έννοιες που στη συνέχεια θα αποτελέσουν σημαντικές παραμέτρους στη ανάπτυξη της παρούσας διατριβής. Θα αναφερθούμε περιγραφικά στις έννοιες αυτές και θα επεκταθούμε σε ιστορικές αναφορές για να αναδειχθεί η διαχρονική αξία τους και η επίδρασή τους στις ανθρώπινες δραστηριότητες.

Θα δώσουμε έμφαση στις έννοιες "χάρισμα" και "ταλέντο", που η μελέτη τους, αποτελεί σημαντική πτυχή της παρούσας διατριβής.

Σε κάποιες περιπτώσεις (όπου αυτό είναι δυνατό) θα δώσουμε έμφαση στις "μαθηματικές πτυχές" και "προεκτάσεις" που μπορεί να περιέχουν οι έννοιες αυτές.

2.2 Παιδεία

Η προσπάθεια για τον ορισμό (προσδιορισμό) της έννοιας "παιδεία", από την οποία πηγάζει η οργάνωση της ανθρώπινης σκέψης, ξεκινά από την Αρχαία Ελλάδα.

Πολλοί φιλόσοφοι και πολιτικοί λειτούργησαν προς την κατεύθυνση της επιστημονικής και πρακτικής εδραίωσης της παιδείας, ως βασικό συστατικό της πνευματικής υγείας των ανθρώπων.

Παιδεία κατά τον Πλάτωνα, είναι "**η θεραπεία του πνεύματος**" δηλαδή η θεραπεία της ψυχής (σκέψης).

Είναι φυσικό οι προτεραιότητες της παιδείας να αφορούν κυρίως τους νέους ανθρώπους οι οποίοι γίνονται φορείς συστήματος αξιών που θα μεταφερθούν στη συνέχεια στις επόμενες γενεές.

Ο Πλάτων αναφέρει σχετικά: *“ ... είναι λοιπόν η παιδεία προσέλκυση των νέων και καθοδήγησή τους προς τον ορθό λόγο όπως τον έχει ορίσει ο νόμος”*. (LEXIKON PLATONICUM, 1838)

νίκην. II. 659. D: ὡς ἄρα παιδεία μέν ἐσθ' ἡ παίδων ὁλκή τε καὶ ἀγωγὴ πρὸς τὸν ὑπὸ τοῦ νόμου λόγον ὀρθὸν εἰρημένον. Def. 416: παιδεία δύναμις θεραπευτικὴ ψυχῆς. Prot.

2.3 Το Ολυμπιακό Πνεύμα

Η αδιάκοπη προσπάθεια του ανθρώπου να επιβιώσει και να βελτιώσει τις συνθήκες διαβίωσής του, τον “ανάγκασαν” να αναπτύξει σωματικές και πνευματικές ικανότητες-δεξιότητες, με σκοπό να επιβληθεί στους συνανθρώπους του και γενικότερα στη φύση.

Με αυτή τη συλλογιστική, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η έννοια του “ολυμπιακού πνεύματος” χάνεται στις απαρχές του ανθρώπινου γένους και η αρχέγονη έκφρασή της έχει τη ρίζα της στο ένστικτο της αυτοσυντήρησης που λειτουργεί παράλληλα με τη βιολογική έννοια του “ανταγωνισμού των ειδών”.

Με την πάροδο του χρόνου, στις οργανωμένες κοινωνίες, η έννοια του “ολυμπιακού πνεύματος” παρουσίασε ραγδαία εξέλιξη με αποτέλεσμα να είναι βασικό συστατικό της παιδείας και του τρόπου ζωής των ανθρώπων.

Εμπλουτισμός της έννοιας του “ολυμπιακού πνεύματος” με ηθικές αξίες και τεχνικές που αντικαθιστούν τα αρχέγονα ένστικτα, συνετελέσθη στην Αρχαία Ελλάδα με τη δυναμική παρέμβαση και συμβολή μεγάλων φιλοσόφων.

Το ολυμπιακό πνεύμα ξεκίνησε πριν πολλά χρόνια και έχει κάνει μία ενδιαφέρουσα ιστορική διαδρομή η οποία χαρακτηρίζεται από συνέχειες και ασυνέχειες. Το ενδιαφέρον της διαδρομής αυτής είναι ότι το 1896 που έγινε η επανεκκίνηση των σύγχρονων ολυμπιακών αγώνων, έγινε και γίνεται προσπάθεια να διατηρηθεί η συνέχεια με το σημείο από το οποίο σταμάτησαν.

Ο αθλητισμός όμως μπορεί να αναφέρεται στην άσκηση και τις επιδόσεις του σώματος αλλά ουσιαστικά αναπτύσσεται και εξελίσσεται με βάση την παιδεία του ανθρώπου η οποία καθορίζει την πορεία εκγύμνασης που πρέπει να ακολουθήσει ο αθλητής για να έχει τη βέλτιστη επίδοση. Η παιδεία γενικά έχει να κάνει με την εκγύμναση του πνεύματος και για το λόγο αυτό προηγείται του αθλητισμού και συνεπώς είναι αυτή που καθορίζει το “ολυμπιακό πνεύμα” (Χατζόπουλος, 2003).

Η αλληλεπίδραση παιδείας και ολυμπιακού πνεύματος, δημιούργησε τους αγώνες για το σώμα και τους διαγωνισμούς για το πνεύμα.

2.4 Αγώνες-Διαγωνισμοί

Αγώνες – (Διαγωνισμούς) θεωρούμε γενικά, ένα σύνολο δραστηριοτήτων που κατά κύριο λόγο αποσκοπούν στην εκγύμναση και ανάδειξη των δυνατοτήτων του ανθρώπινου σώματος - (πνεύματος) μέσα από τη μορφή της διαμάχης (αντιπαράθεσης). Θα μπορούσαμε δηλαδή να πούμε ότι: διαγωνισμοί είναι οι αγώνες σε πνευματικό επίπεδο.

Είναι φυσικό λοιπόν, οι διαγωνισμοί να χρησιμοποιούν μεθόδους και πρακτικές ανάλογες με αυτές του αθλητισμού, για την εκγύμναση του πνεύματος και να αποτελούν την πληρέστερη έκφραση και εφαρμογή του "ευ αγωνίζεσθε" των αθλητικών αγώνων.

"Οι αγώνες στην ελληνική αρχαιότητα είναι θεσμοί που εξασφάλιζαν τον έλεγχο της αντιπαράθεσης μέσα στα όρια του ορθού λόγου" (Γεωργουσόπουλος, 2004).

Οι διαγωνισμοί σκοπό έχουν να αναδείξουν την αξία αυτού καθαυτού του αντικειμένου του διαγωνισμού, να τονώσουν το ενδιαφέρον των διαγωνιζομένων και να κινητοποιήσουν μεγαλύτερες ομάδες πληθυσμού να ασχοληθούν με το αντικείμενο.

Στην αρχαία Ελλάδα, παράλληλα με τους αγώνες, εξελίσσονταν και Δραματικοί διαγωνισμοί, Μουσικοί διαγωνισμοί και διαγωνισμοί Ποίησης. Εκεί ίσως να βρίσκονται οι ρίζες των σύγχρονων διαγωνισμών που γίνονται σε όλο σχεδόν τον κόσμο και καλύπτουν το μεγαλύτερο μέρος του φάσματος της ανθρώπινης επιστημονικής και πολιτιστικής δραστηριότητας.

Ειδικότερα θα ασχοληθούμε με Μαθηματικούς διαγωνισμούς και θα προσπαθήσουμε να ερευνήσουμε πόσο συμβάλουν στην ανίχνευση και πόσο επηρεάζουν την εξέλιξη χαρισματικών παιδιών.

2.5 Χαρισματικά-Ταλαντούχα Παιδιά

Η χαρισματικότητα είναι έννοια πολυδιάστατη και ο προσδιορισμός της αποτελεί πεδίο έρευνας και επιστημονικής αντιπαράθεσης διακεκριμένων επιστημόνων που ασχολούνται κυρίως με τα Παιδαγωγικά και την Ψυχολογία.

Όλες σχεδόν οι θεωρίες που έχουν διατυπώσει κορυφαίοι επιστήμονες (π.χ. Gardner, 2011; Heller, 1991; Gagné, 2008; Renzulli, 1978) για τη χαρισματικότητα και το ταλέντο καταλήγουν (επιγραμματικά) στα εξής συμπεράσματα:

α) Η χαρισματικότητα και το ταλέντο είναι έννοιες αλληλένδετες αλλά όχι ταυτόσημες (η χαρισματικότητα είναι έμφυτη και το ταλέντο η φυσιολογική της εξέλιξη μετά από την εφαρμογή μεθόδων για την ανάδειξή της).

β) Τα διάφορα τεστ IQ δεν αποτελούν ασφαλή τρόπο ανίχνευσης χαρισματικών παιδιών (λόγω του πλήθους των αλληλοεπιδρώντων παραγόντων που συμμετέχουν στον προσδιορισμό της χαρισματικότητας).

Το 1983 ο Gardner εισάγει τη θεωρία της "πολλαπλής νοημοσύνης" με την έννοια των ανεξάρτητων και διακριτών νοητικών δυνατοτήτων που δρουν συμπληρωματικά. Ο Gardner (1993a & b), αναγνωρίζει οκτώ τύπους νοημοσύνης:

α) Γλωσσική νοημοσύνη

β) Λογικομαθηματική νοημοσύνη

γ) Χωρική νοημοσύνη

δ) Κιναισθητική νοημοσύνη

ε) Μουσική Νοημοσύνη

ζ) Ενδοπροσωπική νοημοσύνη

η) Διαπροσωπική νοημοσύνη

θ) Νατουραλιστική νοημοσύνη

Ο Goleman, τέλος εισάγει την ανατρεπτική ιδέα της "συναισθηματικής νοημοσύνης" και αναλύει την επίδραση που μπορεί να έχουν τα συναισθήματα στην ανάπτυξη και τη μάθηση.

Οι τύποι της νοημοσύνης μπορεί στο μέλλον να αυξηθούν με τη προσθήκη τύπων που προς το παρόν βρίσκονται υπό έρευνα.

Οι έρευνες του Gagné προσπαθούν να απαντήσουν στον προσδιορισμό της χαρισματικότητας και του ποσοστού των χαρισματικών ατόμων.

Βασικό στοιχείο της θεωρίας του Gagné είναι η διαφοροποίηση της έννοιας της χαρισματικότητας και του ταλέντου.

Τα χαρίσματα (που μπορούν να θεωρηθούν ως φυσικές κλήσεις ή ικανότητες) είναι τα ακατέργαστα υλικά επάνω στα οποία θα ευδοκιμήσει και θα αναπτυχθεί το ταλέντο. Το ταλέντο λοιπόν προϋποθέτει την ύπαρξη έμφυτων φυσικών ικανοτήτων που ξεπερνούν τους συνηθισμένους μέσους όρους.

Πολλές φορές ένα "χάρισμα" μπορεί να παραμείνει "χάρισμα", χωρίς να εξελιχθεί σε ταλέντο. Είναι λοιπόν απαραίτητο (μέσα από τη γενικότερη εκπαιδευτική διαδικασία) να αναγνωρισθούν τα χαρίσματα και να εξελιχθούν σε ταλέντα. (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2008)

Ένας από τους τύπους "πολλαπλής νοημοσύνης" που εισάγει ο Gardner είναι και η "Λογικομαθηματική Νοημοσύνη".

Ο τύπος αυτός νοημοσύνης αφορά την ικανότητα του ατόμου να διαχειρίζεται την λογική και συστηματική σκέψη. Αφορά επίσης την ικανότητα του ατόμου να χρησιμοποιεί αφηρημένες σχέσεις για την περιγραφή-εξήγηση γεγονότων και για τη λύση προβλημάτων.

*Κύρια έκφραση της **Λογικομαθηματικής νοημοσύνης** (σε επιστημονικό επίπεδο) αποτελούν οι θεωρητικές και οι θετικές επιστήμες και στο καθημερινό επίπεδο η άνεση του ατόμου να επιλύει αποτελεσματικά διάφορα προβλήματα.*

Τα άτομα με αυτό το είδος νοημοσύνης αρέσκονται στο να πειραματίζονται, να διατυπώνουν υποθέσεις και να προσπαθούν να τις επαληθεύσουν, να δουλεύουν με αριθμούς και να κάνουν ερωτήσεις. Οι μαθητές αυτοί ξεχωρίζουν στα φυσικομαθηματικής φύσης μαθήματα, διακρίνονται για την αναλυτική σκέψη τους και τον τεκμηριωμένο λόγο, την κατανόηση συμβολικών μεγεθών και του συμβολικού τρόπου απόδοσής τους. Αρέσκονται στη λογική τεκμηρίωση των πραγμάτων. Προτιμούν παιχνίδια όπως το σκάκι, έχουν την τάση να διατυπώνουν με εξισώσεις και μαθηματικούς τύπους φαινόμενα που βλέπουν γύρω τους, ζητούν πάντα από τους συνομιλητές τους να αποδείξουν αυτό που υποστηρίζουν, αναζητούν πάντα ορθολογικές ιδέες και διαδικασίες.

Σε αυτά τα άτομα ταιριάζουν διδακτικές δραστηριότητες που εμπεριέχουν διαδικασίες επαγωγικών, απαγωγικών και αναλυτικών συλλογισμών. Αντιστοιχούν μαθησιακές δραστηριότητες που περιλαμβάνουν ποσοτικοποιήσεις, μαθηματικούς υπολογισμούς αξίας, μεγέθους, βάρους, απόστασης, χρόνου, κατηγοριοποιήσεις, γενικεύσεις, υποθέσεις, αιτιολογήσεις, συμπερασμούς.

Είναι ο τύπος νοημοσύνης που χαρακτηρίζει επιστήμονες, προγραμματιστές ηλεκτρονικών υπολογιστών, μαθηματικούς, ντετέκτιβ κ.ά.

(Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, 2008)

Από πολλούς ερευνητές (βλ. π.χ. Krutetski, 1976; aitra, 2000; Miller, 1990) έχουν εντοπιστεί κάποια χαρακτηριστικά, τα οποία συνοψίζονται στα παρακάτω, που μπορούν να αποτελέσουν ενδείξεις για τον χαρακτηρισμό ενός ατόμου χαρισματικού (προικισμένου) στα μαθηματικά και κατά συνέπεια “εν δυνάμει” ταλαντούχου στα μαθηματικά.

- Μια κατ' ασυνήθιστο τρόπο έντονη συνειδητοποίηση και περιέργεια για τα μαθηματικά .
- Μια ασυνήθιστη ταχύτητα στην εκμάθηση, την κατανόηση, και την εφαρμογή των μαθηματικών ιδεών.
- Μια υψηλή δυνατότητα να σκεφτεί και να εργαστεί αφαιρετικά καθώς και να διαβλέπει τα ενυπάρχοντα μαθηματικά μοτίβα και σχέσεις.

- Μια ασυνήθιστη δυνατότητα να σκεφτεί και να εργαστεί πάνω στα μαθηματικά προβλήματα με ευέλικτους και δημιουργικούς τρόπους και όχι με μια στερεότυπη προσέγγιση.
- Μια ασυνήθιστη δυνατότητα να μεταφέρει τη μάθηση σε νέες καταστάσεις, τις οποίες δεν έχει διδαχθεί.

Άλλοι ερευνητές (ΠΙ, 2008) δίνουν την έμφαση στα εξής χαρακτηριστικά που θεωρούν ότι αφορούν τους χαρισματικούς μαθητές στα Μαθηματικά:

- Μαθαίνει και καταλαβαίνει μαθηματικές ιδέες πολύ γρήγορα.
    - Επιδεικνύει πολλαπλές στρατηγικές στην επίλυση προβλημάτων.
    - Βοηθά τους άλλους μαθητές στην επίλυση προβλημάτων.
    - Παραμένει συγκεντρωμένος και δείχνει μεγάλη εμμονή στην επίλυση προβλημάτων.
    - Αλλάζει εύκολα προσεγγίσεις επίλυσης προβλημάτων και αποφεύγει όσες δεν είναι α- ποτελεσματικές.
- Ενεργεί εύκολα με σύμβολα και έχει καλή αντίληψη του χώρου.
    - Αναγνωρίζει εύκολα ομοιότητες, διαφορές και πρότυπα.
    - Κοιτά τα προβλήματα περισσότερο αναλυτικά παρά συνολικά.
    - Δουλεύει συστηματικά και με ακρίβεια.
    - Επιδεικνύει μαθηματικές ικανότητες σε άλλους τομείς.
    - Προτιμά να παρουσιάζει στοιχεία μέσω διαγραμμάτων, πινάκων, και γραφημάτων.

Πάντως η επικρατούσα αντίληψη για την έννοια της χαρισματικότητας στα μαθηματικά, όπως και για την εν γένει έννοια της χαρισματικότητας, είναι ότι δεν υπάρχει ένας κοινά αποδεκτός ορισμός (Bicknell, 2008, Bicknell, 2009).

Σύμφωνα με τους Βλάμο, Βλάμου και Δημάκο (2000) ελάχιστοι ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τα θέματα που αφορούνν στον προσδιορισμό των μαθηματικών ταλέντων, στον τρόπο αντιμετώπισης συγκεκριμένων μαθηματικών προβλημάτων και στην εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικών με το μέσο μαθητή (Sternberg & Davidson, 1986; Span & Overtoom-Corsmit, 1986; Weinert & Waldmann, 1985).

Θεωρώντας ως πολύ σημαντικά τα ως άνω χαρακτηριστικά κρίνεται ως εξόχως επιτακτική η ανάγκη να βρεθεί και να αξιοποιηθεί το κατάλληλο ανθρώπινο δυναμικό που έχει μία έμφυτη ικανότητα (χάρισμα) να διαχειρίζεται, να δημιουργεί και να λύνει μαθηματικά προβλήματα υψηλών απαιτήσεων (Θωμαΐδου και Μελετέα, 2003). Επίσης να βρεθούν οι τρόποι

ώστε η υψηλή νοημοσύνη να μη κινδυνεύσει να μετατραπεί απο χάρισμα σε πρόβλημα (Θωμαΐδου, 1999; Καριώτη 2011).

Η εκπαιδευτική διαδικασία με σκοπό τη προετοιμασία των μαθητών για τη συμμετοχή σε μαθηματικούς διαγωνισμούς διεγείρει και εξωτερικεύει τις πρώτες έμφυτες ικανότητες (που ενδεχομένως) έχουν οι μαθητές.

Οι διαγωνισμοί στη συνέχεια αποτελούν (ανεξάρτητα από αποτέλεσμα) το επιστέγασμα της προσπάθειας, την τόνωση του ενδιαφέροντος για τα μαθηματικά και το γόνιμο έδαφος που θα μεταμορφωθεί-εξελιχθεί το χάρισμα σε ταλέντο.

Με σκοπό την ανακάλυψη, τη μελέτη της συμπεριφοράς και την παρακολούθηση της εξέλιξης των χαρισματικών παιδιών έγιναν τρείς έρευνες.

Η **πρώτη έρευνα** έγινε σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ηλικίας 16 έως 19 ετών) που συμμετείχαν στην 45η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα που έγινε το 2004 στην Αθήνα (δείγμα σε διεθνές επίπεδο).

Η **δεύτερη έρευνα** έγινε σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ηλικίας 13 έως 17 ετών) που συμμετείχαν στην 25η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ" το Μάρτιο του 2008 (δείγμα σε εθνικό επίπεδο).

Η **τρίτη** τέλος **έρευνα** έγινε σε Έλληνες Ολυμπιονίκες των Μαθηματικών (ηλικίας 19 ετών και άνω) που είναι φοιτητές ή πτυχιούχοι.

2.6 Αγωγή-Κίνητρα-Επηρεασμός

"**Αγωγή** είναι το σύνολο των επιδράσεων που δέχεται ο άνθρωπος σε όλη τη διάρκεια της ζωής του από το περιβάλλον του (φυσικό, οικογενειακό, οικολογικό, κοινωνικό και πολιτιστικό) γενικά (αγωγή ως αλληλεπίδραση) και ειδικότερα, κατά την παιδική και εφηβική ηλικία, από τους παιδαγωγούς (γονείς, δασκάλους ή άλλους φορείς συστηματικής αγωγή)".

(Κρουσταλάκης)

Η Ψυχολογία και η Κοινωνιολογία είναι οι επιστήμες που συνδράμουν δυναμικά στην εξελικτική ανάπτυξη της παιδαγωγικής, δεδομένου ότι ο επηρεασμός μίας κοινωνικής ομάδας από εξωτερικούς παράγοντες είναι αντικείμενο μελέτης της Κοινωνικής Ψυχολογίας.

"Τις τελευταίες δύο-τρεις δεκαετίες γίνεται όλο και ευρύτερα αποδεκτή η άποψη ότι η μάθηση, και ως διαδικασία και ως περιεχόμενο (γνώση), δεν είναι ατομικευμένη υπόθεση, όπως υποστήριζε η Ψυχολογία, αλλά κοινωνικά προσδιορισμένη. Το ίδιο, δε, είναι κοινωνικά προσδιορισμένη η θεσμοθέτηση και η λειτουργία των ιδρυμάτων παραγωγής και διδασκαλίας

της γνώσης. Η αποδοχή των παραπάνω θέσεων έστρεψε την προσοχή των παιδαγωγών προς την Κοινωνιολογία, η οποία, με τον τρόπο αυτό, επέβη η δεύτερη μετά την Ψυχολογία επιστήμη που επιδρά και διαμορφώνει τους παιδαγωγικούς προβληματισμούς." (Ματσαγγούρας, 2011)

Ο **επηρεασμός** μίας κοινωνικής ομάδας (θετικός ή αρνητικός) είναι αποτελεσματικότερος όταν στοχεύει σε συγκεκριμένα κοινωνικά χαρακτηριστικά που ονομάζουμε **κίνητρα**.

Όταν λέμε **κίνητρα** εννοούμε το σύνολο των εσωτερικών και εξωτερικών παραγόντων που δραστηριοποιούν τον οργανισμό και τον παρωθούν στο να θέσει κάποιο σκοπό και να προσπαθήσει να τον επιτύχει. Ο McFarland (2001) αναφέρει: "η **παρώθηση** θέτει σε κίνηση την ενέργεια που θα καταλήξει σε μάθηση, τη διατηρεί σε δραστηριότητα και τη κατευθύνει" (Κασσωτάκης, Φλουρής, 2005).

Δηλαδή τα κίνητρα αποτελούν τους βασικούς διαμορφωτές της συμπεριφοράς και κατά συνέπεια και τους κυριότερους παράγοντες μάθησης.

Η εκπαίδευση είναι μία διαρκής και συνεχώς εξελισσόμενη διαδικασία **"επηρεασμού"** του τρόπων διδασκαλίας και μάθησης (μέσα από την αμφίδρομη σχέση διδάσκοντος – διδασκομένου) με σκοπό το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα.

Κεφάλαιο 3ο. Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

3.1 Γενικά

Έρευνες που έγιναν σε εθνικό και διεθνές επίπεδο (θα τις αναφέρουμε και θα τις μελετήσουμε διεξοδικά παρακάτω) αναδεικνύουν τους μαθηματικούς διαγωνισμούς σε πρωτεύοντα παράγοντα και καθοριστικό κίνητρο για την ενασχόληση μαθητών με τα μαθηματικά. Είναι λοιπόν αναγκαίο να αναφερθούμε στην αρχή, τη δομή και την εξέλιξη των διαγωνισμών αυτών.

Οι μαθηματικοί διαγωνισμοί έχουν ξεκινήσει από πολύ παλιά και πολλοί από αυτούς συμπεριλαμβάνουν στην ονομασία τους, τον όρο "Ολυμπιάδα".

Ο όρος "Ολυμπιάδα" (σαν συνθετικό του ονόματος μαθηματικών διαγωνισμών) τίθεται με σκοπό να προσδώσει στον διαγωνισμό το κύρος, την αξιοπιστία και την οικουμενικότητα των Ολυμπιακών Αγώνων.

Πολλοί Μαθηματικοί διαγωνισμοί, φέρουν ονόματα μεγάλων μαθηματικών που συνέβαλαν καθοριστικά στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης, από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα.

Κάποιες χώρες απετέλεσαν την κοιτίδα των Μαθηματικών Διαγωνισμών και συνέβαλαν καθοριστικά στην εξέλιξη και διάδοσή τους. Μεταξύ αυτών εξέχουσα θέση κατέχουν οι Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής (ΗΠΑ-USA), η πρώην " Σοβιετική Ένωση" (ΕΣΣΔ-USSR), η Ρουμανία , η Βουλγαρία και η Ουγγαρία.

Πολλοί διακεκριμένοι μαθηματικοί ή φυσικοί έχουν διακριθεί σε εθνικούς ή διεθνείς διαγωνισμούς.

Ο Κ. Καραθεοδωρή για δύο συνεχή έτη (1890-1891) πήρε το πρώτο βραβείο σε Μαθηματικό Διαγωνισμό στο Βέλγιο και μάλιστα το 1891 ήταν ο μοναδικός πρώτος νικητής .

Οι νομπελίστες φυσικοί R. Feynman, S. Neinberg και M. Gell-Mann υπήρξαν νικητές στο διαγωνισμό Putnam των ΗΠΑ. Ο μαθηματικός G. Faltings, κάτοχος του βραβείου Fields, ήταν νικητής στο διαγωνισμό της Δ. Γερμανίας και ο J. Matijasevich, λύτης του 10ου προβλήματος του Hilbert, ήταν νικητής στην Πανενωσιακή Ολυμπιάδα της Ε.Σ.Σ.Δ. Αξίζει εδώ να αναφέρουμε και τη σημαντική συμβολή ενός από τους κορυφαίους Μαθηματικούς του 20ου αιώνα, του Α. Κολμογκόρωφ στη διοργάνωση των Πανενωσιακών Ολυμπιάδων. (Τυρλής 2003)

3.2 Οι Πρώτοι Διαγωνισμοί

Ο πρώτος (χρονικά) Μαθηματικός Διαγωνισμός έγινε πιθανότατα περί το 1885 στο Βουκουρέστι της Ρουμανίας. Στο διαγωνισμό αυτό συμμετείχαν εβδομήντα περίπου διαγωνιζόμενοι από την πρωτοβάθμια εκπαίδευση και βραβεύθηκαν δύο κορίτσια και εννέα αγόρια. Ο διαγωνισμός όμως Eötvös (που έγινε στην Ουγγαρία το 1894) θεωρείται, κατά γενική ομολογία, ο πρόδρομος των σύγχρονων Μαθηματικών Διαγωνισμών σε επίπεδο μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Οι διαγωνιζόμενοι είχαν στη διάθεσή τους τέσσερεις ώρες για να λύσουν τρία προβλήματα. Τα προβλήματα στο διαγωνισμό Eötvös είχαν σχεδιαστεί με σκοπό να εξετάσουν τη δημιουργικότητα και τη μαθηματική σκέψη, χωρίς να χρειάζονται ειδικές γνώσεις και τεχνικές.

Θα αναφερθούμε αναλυτικά στα θέματα και τις λύσεις αυτού του "πρώτου" διαγωνισμού, διότι το πνεύμα του (διευρυμένο βέβαια για να ανταποκρίνεται στις σύγχρονες ανάγκες) κυριαρχεί μέχρι σήμερα στη διεθνή σκηνή των μαθηματικών διαγωνισμών.

Θέμα 1ο

Αποδείξτε ότι:

$$\{(m,n): 17 \text{ διαιρεί } 2m+3n\} = \{(m,n): 17 \text{ διαιρεί } 9m+5n\}.$$

Λύση

Θέτουμε $N = 2m+3n$ *και* $M = 9m+5n$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι: το N *είναι πολλαπλάσιο του* 17 *αν και μόνο αν το* M *είναι πολλαπλάσιο του* 17.

Από την υπόθεση $N = 2m+3n$ *και* $M = 9m+5n$, *έχουμε*

$M = 13N - 17(m+2n)$ *και* $N = 4M - 17(2m+n)$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $17 \mid N$ *τότε* $N \mid (13N - 17(m+2n) = M)$ *και αντίστροφα αν υποθέσουμε ότι* $17 \mid M$ *τότε* $17 \mid (4M - 17(2m+n) = N)$.

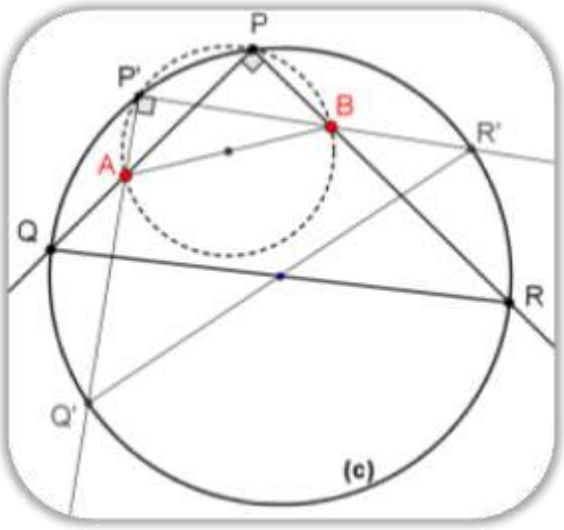
Θέμα 2ο

Δίνεται κύκλος (c) *και δύο σημεία* A,B *στο εσωτερικό του. Κατασκευάστε ορθογώνιο τρίγωνο* PQR *που οι κορυφές του ανήκουν στο κύκλο* (c), *υποτείνουσά του είναι η* QR *και τα σημεία* A,B *ανήκουν στις πλευρές* PQ *και* PR *αντίστοιχα. Για ποια σημεία* A,B *είναι αυτό αδύνατο;*

Λύση

Ανάλυση

Έστω PQR *το ζητούμενο τρίγωνο. Με δεδομένο ότι η* QR *είναι διάμετρος συμπεραίνουμε ότι η γωνία* $\hat{P}$ *είναι ορθή. Άρα το σημείο* P *θα βρίσκεται στο κύκλο με διάμετρο την* AB. *Δηλαδή το σημείο* P *θα είναι σημείο τομής του κύκλου* (c) *και του κύκλου με διάμετρο την* AB.



Σχήμα 3-1

Σύνθεση-Κατασκευή

Θεωρούμε το κύκλο με διάμετρο την AB. *Έστω* P *κοινό σημείο του δοσμένου κύκλου* (c) *και του κύκλου με διάμετρο την* AB. *Θεωρούμε τις* PA

και PB οι οποίες προεκτεινόμενες τέμνουν τον κύκλο (c) στα σημεία Q και R αντίστοιχα. Τότε PQR είναι το ζητούμενο τρίγωνο.

Απόδειξη

Προφανώς τα σημεία P,Q,R ανήκουν στο κύκλο (c). Τα σημεία A,B ανήκουν στις πλευρές PQ και PR αντίστοιχα. Τέλος η RQ είναι υποτείνουσα του τριγώνου PQR.

Διερεύνηση

Αν οι κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία, τότε υπάρχουν δύο τρίγωνα που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος (το πρόβλημα έχει δύο λύσεις).
Αν οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο (εφάπτονται εσωτερικά) τότε το πρόβλημα έχει μία λύση.
Αν οι κύκλοι δεν έχουν κοινό σημείο, τότε το πρόβλημα δεν έχει λύση.

Θέμα 3ο

Τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη $a, a+d, a+2d$ και εμβαδό S. Βρείτε τις πλευρές και τις γωνίες του συναρτήσει του d και του S. Δώστε αριθμητικά αποτελέσματα για $d=1$ και $S=6$.

Λύση

Αν θέσουμε $a+d=x$, τότε η μία πλευρά θα είναι $x-d$ και η άλλη $x+d$.
Η ημιπερίμετρος τώρα του τριγώνου είναι $\tau=\frac{(x-d)+x+(x+d)}{2}=\frac{3x}{2}$ και από το τύπο του Ήρωνα έχουμε: $S^2=\tau(\tau-x+d)(\tau-x)(\tau-x-d)=$

$$\frac{3x}{2}\left(\frac{x}{2}+d\right)\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-d\right)=\frac{3x^2}{4}\left(\frac{x^2}{4}-d^2\right).$$

Από τη τελευταία ισότητα μπορούμε να υπολογίσουμε το x συναρτήσει των d,S.

Συγκεκριμένα το x είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^4=\frac{4S^2+d^2}{3}$.

Το 1894 είναι ξεχωριστή χρονιά διότι γεννιέται το περίφημο μαθηματικό περιοδικό KöMal που ιδρύθηκε από τον D. Arany (ένα καθηγητή μαθηματικών Λυκείου στο Györ της Ουγγαρίας). Το περιοδικό ήταν ουσιαστικά αφιερωμένο στη προετοιμασία μαθητών και δασκάλων για τους διαγωνισμούς.

Την ίδια περίπου εποχή, παρόμοια εξέλιξη εμφανίστηκε στη Ρουμανία. Τα πρώτα θέματα του μηνιαίου περιοδικού Gazeta Matematikă δημοσιεύτηκαν το Σεπτέμβρη του 1895. Το περιοδικό οργάνωσε ένα διαγωνισμό για μαθητές σχολείου, ο οποίος με τη πάροδο του χρόνου βελτιώθηκε, ως προς τη μορφή και το περιεχόμενο, με αποτέλεσμα να

δημιουργηθεί το σύγχρονο εθνικό σύστημα διαγωνισμών στη Ρουμανία. Σύντομα και άλλες χώρες άρχισαν να διοργανώνουν μαθηματικούς διαγωνισμούς. [4]

3.3 Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί στην πρώην "Σοβιετική Ένωση" (ΕΣΣΔ-USSR)

Η πρώην Ένωση Σοβιετικών Σοσιαλιστικών Δημοκρατιών (ΕΣΣΔ) , με κύρια συνιστώσα τη Ρωσία, έχει διαδραματίσει σημαντικό ρόλο στην δημιουργία, εδραίωση και εξέλιξη των Μαθηματικών Διαγωνισμών. Είναι ιστορικά ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι για πρώτη φορά το 1934 διοργανώνεται στο Λένινγκραντ (Αγία Πετρούπολη), μαθηματικός διαγωνισμός με το όνομα "Μαθηματική Ολυμπιάδα" (Mathematical Olympiad). [4],[5]

Οι μη συμβατικές (με στοιχειώδεις μεθόδους) λύσεις δύσκολων μαθηματικών προβλημάτων προσέλκυαν και προσελκύουν του ανθρώπους. Δύσκολα μαθηματικά προβλήματα με στοιχειώδεις λύσεις δημοσιεύτηκαν στο Κίεβο (Ρωσική αυτοκρατορία) στο περιοδικό "Journal of Elementary Mathematics" ("Περιοδικό των Στοιχειωδών Μαθηματικών") το 1664. Το περιοδικό αυτό ήταν γραμμένο για τους δάσκαλους και τους μαθητές τους και περιείχε ένα τμήμα με μαθηματικά προβλήματα. Οι λύσεις των προβλημάτων, που πρότειναν οι αναγνώστες, δημοσιεύονταν στη συνέχεια στο περιοδικό.

Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, οι ενδιαφέρουσες ιδέες για τις λύσεις των παραπάνω επιλεγμένων προβλημάτων, άρχισε να ενσωματώνεται στους πρώτους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς για απόφοιτους γυμνασίων (Λυκείων) που άρχισαν να "εξαπλώνονται" στην Αυστροουγγαρία και τις Ηνωμένες Πολιτείες.

Οι Ρωσικές Μαθηματικές Ολυμπιάδες άρχισαν το 1934 όταν μία ομάδα διάσημων μαθηματικών (B.N. Delone, O.K. Zhitomirskiy, B.A. Tartakovski, D.K. Fadeev, G.M. Fikhtengolts) (Fomin & Kirichenko 1994) ξεκίνησαν τη πρώτη Μαθηματική Ολυμπιάδα του Λένινγκραντ. Ο διαγωνισμός περιείχε τρείς φάσεις. Στη πρώτη φάση οι διαγωνιζόμενοι εξετάζονταν σε θέματα τα οποία επεξεργάζονταν με τη μορφή εργασίας στο σπίτι. Η δεύτερη φάση περιελάμβανε (κλασική) γραπτή εξέταση. Η τρίτη φάση τέλος περιελάμβανε, προφορική εξέταση.

Πολλές φορές οι κανόνες διεξαγωγής των Μαθηματικών Ολυμπιάδων αλλάζουν. Συμμετέχουν βαθμιαία νεότεροι διαγωνιζόμενοι (το όριο ηλικίας

σήμερα είναι 12 χρόνια). Δοκιμάζονται νέοι κανόνες διεξαγωγής των μαθηματικών ολυμπιάδων. Για κάποια χρόνια όλοι οι συμμετέχοντες διαγωνίζονταν στα ίδια ακριβώς προβλήματα και για κάποια άλλα σε διαφορετικά προβλήματα (με κριτήριο κυρίως την ηλικία). Ο αριθμός επίσης των διαγωνισμών ακολουθεί ανάλογη διαδικασία μεταβολών.

Η Μόσχα και το Κίεβο διοργανώνουν Μαθηματικές Ολυμπιάδες από το 1935. Οι Ολυμπιάδες της Μόσχας ξεκίνησαν από τους μαθηματικούς (L.G. Shpirelman, L.A. Liusternik, P.S. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, V.F. Kagan, S. L. Sobolob, S. Y. Yanovskaya), που αποτέλεσαν τα μέλη της οργανωτικής επιτροπής. Οι Ολυμπιάδες περιελάμβαναν δύο διαγωνισμούς. Στο πρώτο διαγωνισμό συμμετείχαν 300 μαθητές και στο δεύτερο 120. Οι τρεις καλύτεροι (I. Zverev, I. Korobov, A. Mishkis), του δεύτερου διαγωνισμού, βραβεύτηκαν με πρώτα βραβεία. [5]

3.4 Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής (ΗΠΑ-USA).

Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί στις Ηνωμένες πολιτείες Αμερικής ξεκίνησαν το 1938 με τον περίφημο “William Lowell Putnam Mathematical Competition”.

Ο διαγωνισμός αυτός διεξάγεται το πρώτο Σάββατο του Δεκεμβρίου κάθε χρόνου και απευθύνεται στους απόφοιτους (της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης) των Ηνωμένων Πολιτειών και του Καναδά. Την ευθύνη για τη διεξαγωγή του διαγωνισμού έχει η Αμερικανική Μαθηματική Ένωση (Mathematical Association of America).

3.4.1 Πανεπιστημιακοί Διαγωνισμοί

Την τελευταία εικοσαετία (οι μαθηματικοί Διαγωνισμοί στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής) έχουν πάρει μεγάλες διαστάσεις και ποιοτικά και ποσοτικά.

Όλα σχεδόν τα Πανεπιστήμια ή και ομάδες Πανεπιστημίων έχουν θεσπίσει μαθηματικούς διαγωνισμούς με σκοπό να προσελκύσουν και να αναδείξουν μαθηματικά ταλέντα (Talent Search). Πολλές φορές δίνονται κίνητρα-βραβεία στους διακριθέντες μαθητές, υποτροφίες σπουδών στα συγκεκριμένα πανεπιστήμια.

3.4.1.1 Colorado Springs Mathematical Olympiad (CMO)

Μαθηματικός διαγωνισμός που διεξάγεται με την ευθύνη και στις εγκαταστάσεις του πανεπιστήμιου του Κολοράντο UCCS (University of Colorado Colorado Springs) υπό την καθοδήγηση του καθηγητή Alexander Soifer.

Ο διαγωνισμός διενεργείται την τελευταία Παρασκευή κάθε Απρίλη και την επόμενη Παρασκευή γίνεται η απονομή των βραβείων.

Ο CMO είναι ένας τετράωρος ατομικός διαγωνισμός που αποτελείται από πέντε προβλήματα και απευθύνεται σε μαθητές που φοιτούν από το δημοτικό έως το λύκειο (Soifer, 2017).

3.4.1.2 The Harvard-MIT Mathematics Tournament (HMMT) Τουρνουά μαθηματικών Harvard-MIT

Ο διαγωνισμός συμβολίζεται συντομογραφικά HMMT και έγινε για πρώτη φορά το 1998. Οι πρόσφατοι διαγωνισμοί έγιναν στις 12 Νοεμβρίου 2016 στο Harvard και 18 Φεβρουαρίου 2017 στο MIT (The Harvard – MIT Mathematics Tournament (2016, 2017).

Είναι ένας από τους ποιο μεγάλους και αναγνωρισμένου κύρους διαγωνισμούς του κόσμου. Κάθε τουρνουά προσελκύει χίλιους περίπου μαθητές από όλο τον κόσμο, συμπεριλαμβανομένων υψηλόβαθμων μαθητών σε εθνικές και διεθνείς Ολυμπιάδες.

3.4.2 Διαγωνισμοί της Mathematical Association of America (MAA)

Στην επίσημη Ιστοσελίδα της Αμερικανικής Μαθηματικής Ένωσης (**M**athematical **A**ssociation of **A**merica), που αναφέρεται στους διαγωνισμούς (AMC) (http://www.maa.org/math-competitions/about-amc), επισημαίνονται τα εξής:

"Οι Αμερικανικοί Μαθηματικοί Διαγωνισμοί (American Mathematical Competitions) που συντομογραφικά θα αναφέρουμε ως AMC, είναι αφιερωμένοι στο στόχο της ενίσχυσης των μαθηματικών ικανοτήτων των νέων του έθνους μας. Πιστεύουμε ότι ένας τρόπος για την επίτευξη αυτού του στόχου είναι να ***εντοπίσει****, να* ***αναγνωρίσει*** *και να* ***επιβραβεύσει την αριστεία*** *στα μαθηματικά μέσα από μία σειρά εθνικών διαγωνισμών που ονομάζονται:*

- ***A**merican **M**athematics **C**ontest **8** (**AMC 8**).*
  http://www.maa.org/math-competitions/amc-contests/amc-8

Ο **AMC 8** είναι ένας διαγωνισμός που αποτελείται από 25 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και διαρκεί 40 λεπτά. Διεξάγεται κάθε Νοέμβριο μεταξύ μαθητών γυμνασίου και έχει σχεδιαστεί με σκοπό να προωθήσει την ανάπτυξη και τη βελτίωση των δεξιοτήτων επίλυσης προβλημάτων.

Η εξέταση παρέχει στους μαθητές την ευκαιρία να εφαρμόσουν τις έννοιες που διδάσκονται σε γυμνασιακό επίπεδο για την επίλυση προβλημάτων που όχι μόνο είναι κλιμακούμενης δυσκολίας, αλλά και καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών. Πολλά προβλήματα έχουν σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να προκαλούν τους μαθητές και να τους προσφέρουν εμπειρίες επίλυσης προβλημάτων, πέρα από αυτές που προβλέπονται στις μικρές τάξεις του λυκείου. Οι μαθητές με υψηλές βαθμολογίες μπορούν να συμμετάσχουν στον διαγωνισμό (AMC 10).

Στους επιπρόσθετους στόχους-σκοπούς του (AMC 8) είναι να προωθήσει το ενδιαφέρον, τον ενθουσιασμό και τη θετική στάση των μαθητών προς τα μαθηματικά, ώστε να τονώσει το ενδιαφέρον για τη συνέχιση της μελέτης των μαθηματικών πέρα από το ελάχιστο που απαιτείται για την αποφοίτηση από το λύκειο.

Αναπτυξιακά, οι μαθητές των μικρών τάξεων του λυκείου βρίσκονται στο σημείο όπου στερεοποιούνται και σταθεροποιούνται οι απόψεις τους, απέναντι στο σχολείο, τη μάθηση και τις αντιλήψεις τους ως προς την ικανότητα μάθησης των μαθηματικών. Είναι σημαντικό να δοθούν οι ευκαιρίες που προωθούν την ανάπτυξη θετικών στάσεων απέναντι στα μαθηματικά και τις θετικές αντιλήψεις για τον εαυτό τους ως μαθητές σε σχέση με την ικανότητα μάθησης των μαθηματικών.

Ο διαγωνισμός AMC 8 προσφέρει μία τέτοια δυνατότητα.

- ***A**merican **M**athematics **C**ontest **10** (**AMC 10**).*
  http://www.maa.org/math-competitions/amc-contests/amc-1012

- ***A**merican **M**athematics **C**ontest **12** (**AMC 12**).*
  http://www.maa.org/math-competitions/amc-contests/amc-1012

Ο AMC 10 είναι ένας διαγωνισμός που αποτελείται από 25 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και διαρκεί 75 λεπτά. Έχει ως εξεταστέα ύλη τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και περιλαμβάνει προβλήματα που μπορούν να κατανοηθούν και να λυθούν με τη βοήθεια εννοιών της άλγεβρας και της γεωμετρίας.

Ο AMC 12 είναι επίσης ένας διαγωνισμός που αποτελείται από 25 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και διαρκεί 75 λεπτά. Έχει ως εξεταστέα ύλη τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και περιλαμβάνει προβλήματα που μπορούν να κατανοηθούν και να λυθούν με τη βοήθεια εννοιών του pre-calculus (ύλη μαθηματικών που αντιστοιχεί στη Α΄ και Β΄ λυκείου).

Τον Φεβρουάριο γίνονται δύο διαφορετικοί διαγωνισμοί που απέχουν μεταξύ τους, δύο εβδομάδες. Τα θέματα των δύο διαφορετικών διαγωνισμών AMC 10 και AMC 12, περιέχουν 12 περίπου κοινά προβλήματα.

Ο κύριος σκοπός των διαγωνισμών AMC 10/12 είναι να τονώσουν το ενδιαφέρων των μαθητών στα μαθηματικά και να αναπτύξουν το ταλέντο τους μέσα από τον ενθουσιασμό που προκαλεί η λύση "προκλητικών" προβλημάτων (που είναι σε μορφή ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής) μέσα σε ένα συγκεκριμένο χρόνο.

Ο βαθμός δυσκολίας των προβλημάτων ξεκινά από πολύ εύκολα, ως εξαιρετικά δύσκολα.

Οι μαθητές που συμμετέχουν στους διαγωνισμούς AMC 10/12 διαπιστώνουν ότι τα περισσότερα προβλήματα αποτελούν πρόκληση, αλλά είναι μέσα στις δυνατότητές τους.

Ο διαγωνισμός απευθύνεται σε όλους, από ένα μέσο μαθητή ενός συνηθισμένου σχολείου που απλά αγαπάει τα μαθηματικά, μέχρι πολύ καλούς μαθητές που προέρχονται από ειδικά σχολεία.

Ένας ειδικός σκοπός των διαγωνισμών AMC 10/12 είναι να βοηθήσει στον εντοπισμό αυτών των λίγων μαθητών που έχουν πραγματικά, εξαιρετικό μαθηματικό ταλέντο.

Οι διαγωνισμοί AMC 10/12 είναι οι πρώτοι από μία σειρά διαγωνισμών που οδηγούν στη συμμετοχή στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, τον ποιο διάσημο και δύσκολο μαθηματικό διαγωνισμό της δευτεροβάθμιας εξέτασης στον κόσμο.

- ***A**merican **I**nvitational **M**athematics **E**xamination (**AIME**).*
  http://www.maa.org/math-competitions/amc-contests/invitational-competitions

Ο **A**merican **I**nvitational **M**athematics **E**xamination θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως ένας "μαθηματικός διαγωνισμός πρόκληση" που απευθύνεται στους μαθητές που αρίστευσαν στον AMC 10 και AMC 12.

Έχει διάρκεια τρεις ώρες και αποτελείται από 15 ερωτήσεις, που η απάντηση σε κάθε μία από αυτές είναι ακέραιος μεταξύ του 0 και του 999.

Οι ερωτήσεις του AIME είναι πολύ ποιό δύσκολες από τις ερωτήσεις των AMC 10 και AMC 12.

Οι αριστεύσαντες του AIME καλούνται να πάρουν μέρος στην USAMO ή στην USAJMO.

- *The **Putnam** Competition.*
  http://math.scu.edu/putnam/

Ο διαγωνισμός Putnam (William Lowell Putnam Mathematical Competition) είναι ο ανώτερος μαθηματικός διαγωνισμός που γίνεται για σπουδαστές από τις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής και τον Καναδά που φοιτούν στα κολέγια. Ο διαγωνισμός γίνεται κάθε χρόνο, το πρώτο Σάβατο του Δεκεμβρίου.

Ο διαγωνισμός αποτελείται από δύο τρίωρες εξετάσεις (μία το πρωι και μία το απόγευμα). Σε κάθε εξέταση οι διαγωνιζόμενοι αντιμετωπίζουν έξι υψηλού επιπέδου μαθηματικά προβλήματα.

Ο Putnam ξεκίνησε το 1938 ως διαγωνισμός μεταξύ των μαθηματικών τμημάτων κολεγίων και πανεπιστημίων. Τώρα ο διαγωνισμός έχει εξελιχθεί στον κορυφαίο μαθηματικό διαγωνισμό πανεπιστημιακού επιπέδου.

- ***United States of America Mathematical Olympiad (USAMO).***
  http://www.maa.org/math-competitions/amc-contests/invitational-competitions

Η Μαθηματική Ολυμπιάδα των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής (USAMO) καθώς και η Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής (USAJMO) διενεργείται στα πρότυπα της Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας (IMO). Δηλαδή ο διαγωνισμός γίνεται σε δύο διαδοχικές ημέρες. Κάθε μέρα δίνονται τρία προβλήματα τα οποία πρέπει να απαντηθούν σε 4,5 ώρες.

3.5 Οι Ελληνικοί Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Οι Ελληνικοί Μαθηματικοί Διαγωνισμοί αποτελούν το ισχυρότερο και σημαντικότερο “εργαλείο” ανακάλυψης και εξέλιξης ταλαντούχων παιδιών στα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην Ελλάδα.

Στις επόμενες παραγράφους, θα δούμε την γέννηση, την εξέλιξή τους, τους κανονισμούς (με βάση τους οποίους διεξάγονται οι διαγωνισμοί) και τα θέματα της τελευταίας σχολικής χρονιάς (2015-2016).

3.5.1 Ιστορικά Στοιχεία-Κανονισμοί

Όλοι σχεδόν οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί στην Ελλάδα, από το ξεκίνημά τους έως και σήμερα, διεξάγονται με την οργάνωση και άμεση εποπτεία της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ).

Ο πρώτος Μαθηματικός Διαγωνισμός στην Ελλάδα έγινε το 1933. Ειδικότερα, η ΕΜΕ ξεκίνησε την προσπάθεια διενέργειας Πανελληνίου διαγωνισμού σε συνεργασία με την ΕΛΜΕ Αχαΐας για τους μαθητές της 6ης Τάξης των Γυμνασίων του Νομού Αχαΐας στα Μαθηματικά και Φυσικά.

Το 1933 με την ευθύνη της ΕΜΕ που έστειλε και τα θέματα, πήραν μέρος στο διαγωνισμό αυτό λίγοι τελειόφοιτοι των Γυμνασίων της Πάτρας. Πρώτος αθλοθέτης ήταν ο φιλόλογος Κ. Πλάκας, που διέθεσε 1000 δρχ. Επίσης πρόσφερε 500 δρχ. ο τότε πρόεδρος της ΕΜΕ Ν. Σακελλαρίου και 500 δρχ. το Δ.Σ. της ΕΜΕ.

Πρώτο βραβείο πήρε ο Γιώργος Τσάμης του 3ου Γυμνασίου Πάτρας. Δεύτερο βραβείο δόθηκε στον μαθητή Π. Δασκαλόπουλο του 2ου Γυμνασίου Πάτρας και τρίτο βραβείο στο μαθητή Ν. Σφήκα του 3ου Γυμνασίου Πάτρας.

Το 1934 οργανώνεται ο **1ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός (ΠΜΔ)** στα Μαθηματικά. Τα αποτελέσματα δημοσιεύονται στο "Παράρτημα του Δελτίου" τεύχος 28, Ιούλιος 1934.

Βραβεύτηκαν με πρώτα βραβεία των 1000 δρχ. οι Γεράσιμος Θεοδωράκης που σταδιοδρόμησε ως μαθηματικός, καθηγητής στατιστικής και μέλος του Π. Ινστιτούτου, ο Θ. Μιχάλτσος που έγινε άριστος Μηχανικός του Πολυτεχνείου (τακτικός συνεργάτης των περιοδικών της ΕΜΕ) και ο Ε. Μητακίδης μαθητής τότε της 5ης Τάξης του Πρακτικού Λυκείου Θεσσαλονίκης.

Οι τελετές βράβευσης γίνονταν Οκτώβριο ή Νοέμβριο. Οι μαθητές που έπαιρναν μέρος στους ΠΜΔ δεν ξεπερνούσαν τους 250 από τους οποίους βραβεύονταν γύρω στους 10. Οι "νικητές" προέρχονταν συνήθως από τα Πρακτικά Λύκεια, από το Βαρβάκειο και από τα Πειραματικά Λύκεια (Αθήνας, Θεσσαλονίκης).

Από το 1941 ως το 1950 δεν έγιναν από την ΕΜΕ οι ετήσιοι μαθητικοί διαγωνισμοί, λόγω των πολέμων που βασάνιζαν τη χώρα μας.

Ο 7ος ΠΜΔ οργανώθηκε το 1951 με το νέο κανονισμό που δημοσιεύθηκε στο τεύχος 32(1) Οκτώβριος 1951 του Παραρτήματος του Δελτίου. Στο διαγωνισμό αυτό παίρνουν μέρος 1900 περίπου μαθητές.

Από τότε συνεχίζονται ανελλιπώς οι ετήσιοι μαθηματικοί διαγωνισμοί με διαρκή προσπάθεια βελτίωσης της οργάνωσης και αύξησης της συμμετοχής των μαθητών.

Μέχρι το 1975 συμμετείχαν μαθητές μόνο από την 6η Γυμνασίου (Γ Λυκείου). Από το 1976 συμμετέχουν για πρώτη φορά και μαθητές της 5ης Γυμνασίου (Β Λυκείου) .

Από το 1983 αλλάζει η δομή του συστήματος επιλογής υποψηφίων μαθητών για τις Ολυμπιάδες. Δημιουργείται μόνιμη επιτροπή η οποία εκτός από την οργάνωση αναλαμβάνει και την προετοιμασία των μαθητών.

Η Επιτροπή Διαγωνισμών Ολυμπιάδων αποφασίζει ο ΠΜΔ να γίνεται το Νοέμβριο κάθε χρόνου και να καθιερωθεί η διοργάνωση Εθνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας (ΕΜΟ) πριν από τη Βαλκανιάδα.

Η **1η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα** (**ΕΜΟ**) έγινε στις 16-3-1985 στη Ράλλειο Παιδαγωγική Ακαδημία και η 2η έγινε στις 22-12-1986. Η ΕΜΟ αυτή έγινε στη Σχολή Αναβρύτων όπου και φιλοξενήθηκαν οι υποψήφιοι που έμεναν στην επαρχία. Η 3η ΕΜΟ έγινε στις 20-12-1986 και η 4η στις 19-12-1987.

Από το 1990, με την ευθύνη της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (ΕΜΕ), διεξάγονται κάθε χρόνο τρείς πανελλήνιοι μαθηματικοί διαγωνισμοί που φέρουν το όνομα μεγάλων μαθηματικών της αρχαιότητας.

Στην επιτυχή (κατά γενική ομολογία) διεξαγωγή των διαγωνισμών συμβάλουν (εκτός από την ΕΜΕ) πολλοί μαθηματικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς επίσης και το Υπουργείο Παιδείας (Υλικοτεχνικές υποδομές).

Πρώτος χρονικά είναι ο διαγωνισμός με το όνομα "**ΘΑΛΗΣ**" που διενεργείται (συνήθως) στο τρίτο δεκαήμερο του Οκτωβρίου. Στο διαγωνισμό αυτό έχει δικαίωμα να λάβει μέρος οποιοσδήποτε μαθητής όλων των τάξεων των Λυκείων και των Β και Γ τάξεων των Γυμνασίων της χώρας. Κάθε μαθητής που θέλει να λάβει μέρος στον διαγωνισμό πρέπει να δηλώσει συμμετοχή στον διευθυντή του σχολείου του μέχρι την ημερομηνία που καθορίζεται, ως προθεσμία υποβολής αίτησης συμμετοχής, στην εγκύκλιο της Διεύθυνσης Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης του ΥΠΕΠΘ. Η εκάστοτε επιτροπή διαγωνισμών της ΕΜΕ επιμελείται και επεξεργάζεται διαφορετικά θέματα για κάθε τάξη. Ως "εξεταστέα ύλη" για τον διαγωνισμό και για κάθε τάξη θεωρείται η διδακτέα ύλη όλων των προηγουμένων τάξεων σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα κάθε τάξης του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τα Μαθηματικά. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα τελευταία χρόνια στο διαγωνισμό "ΘΑΛΗ" συμμετέχουν περίπου 12000 μαθητές.

Μετά την διόρθωση των γραπτών ανακοινώνεται πίνακας επιτυχόντων από την επιτροπή διαγωνισμών της ΕΜΕ. Ο πίνακας αυτός περιλαμβάνει (για κάθε τάξη) τα ονόματα των μαθητών που έχουν βαθμό μεγαλύτερο είτε

ίσο με τη βάση που έχει διαμορφωθεί και θεωρούνται επιτυχόντες. Η βάση διαμορφώνεται ανάλογα με τις επιδόσεις των μαθητών και του ορισμού του αριθμού των επιτυχόντων. Οι επιτυχόντες του διαγωνισμού "ΘΑΛΗΣ" (περίπου 2500 μαθητές) έχουν δικαίωμα συμμετοχής στον δεύτερο διαγωνισμό.

Δεύτερος κατά σειρά είναι ο διαγωνισμός με το όνομα "**ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ**", που διεξάγεται συνήθως στο δεύτερο δεκαήμερο του Δεκεμβρίου. Τα θέματα του "ΕΥΚΛΕΙΔΗ" (όπως και του "ΘΑΛΗ") είναι διαφορετικά για κάθε τάξη.

Με ανάλογη διαδικασία ανακοινώνεται ο πίνακας επιτυχόντων (περιλαμβάνει 300 περίπου μαθητές) που θα συμμετάσχουν στον τρίτο και τελευταίο διαγωνισμό, την **ΕΘΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ "Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ"**.

Οι 300 συμμετέχοντες στον ΑΡΧΙΜΗΔΗ χωρίζονται (ανάλογα με την ηλικία τους) σε "Μικρούς" (μαθητές Β,Γ Γυμνασίου) και "Μεγάλους" (μαθητές Α,Β,Γ Λυκείου) και διαγωνίζονται σε διαφορετικά θέματα.

Η διόρθωση των γραπτών της Εθνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας γίνεται στα γραφεία της ΕΜΕ την ίδια ημέρα (αμέσως μετά το πέρας του διαγωνισμού)

Την επόμενη μέρα της διεξαγωγής της ΕΜΟ ο Αρχιμήδης γίνεται η τελετή βράβευσης, όπου βραβεύονται 24 μαθητές από κάθε κατηγορία. Τα βραβεία είναι τριών ειδών:

Α΄ βραβείο, για το οποίο δίνεται χρυσό μετάλλιο,

Β΄ βραβείο, για το οποίο δίνεται αργυρό μετάλλιο και

Γ΄ βραβείο, για το οποίο δίνεται χάλκινο μετάλλιο

και δίνονται σε αναλογία 1:2:3.

Οι 24 μαθητές που βραβεύονται από κάθε κατηγορία (μικροί-μεγάλοι) προκρίνονται για τον επόμενο και τελευταίο εσωτερικό διαγωνισμό της ακαδημαϊκής χρονιάς που είναι:

- **Ο προκριματικός διαγωνισμός Νέων.**
- **Η Μεσογειακός Μαθηματικός Διαγωνισμός, για τους Μεγάλους.**

Ο Μεσογειακός μαθηματικός Διαγωνισμός, γίνεται προς τιμήν της μνήμης του Peter O' Halloran, είναι ένας μαθηματικός διαγωνισμός για μαθητές Λυκείου των οποίων οι χώρες ή έχουν ακτές στη Μεσόγειο Θάλασσα ή συνορεύουν με μία από αυτές τις χώρες. Διοργανώθηκε για πρώτη φορά το 1998 και (εκτός από τον πρώτο χρόνο) αποτελείται από τέσσερα προβλήματα που πρέπει να απαντηθούν μέσα σε τέσσερις ώρες. Οργανώνεται χωριστά σε κάθε χώρα κυρίως στις αρχές της Άνοιξης. Θεμελιωτής του διαγωνισμού αυτού είναι ο Ισπανός μαθηματικός *Francisco Bellot Rosado.*

Από τον προκριματικό διαγωνισμό Νέων επιλέγονται οι 6 καλύτεροι μαθητές (και 6 αναπληρωματικοί) οι οποίοι αποτελούν την Ελληνική ομάδα

που συμμετέχει στην αντίστοιχη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων, ενώ από τη Μεσογειακή Μαθηματική Ολυμπιάδα επιλέγονται οι 6 με τη μεγαλύτερη βαθμολογία μαθητές (και 6 αναπληρωματικοί) οι οποίοι απότελούν την Ελληνική ομάδα που συμμετέχει στη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα. Τέλος, σε συνδυασμό με την επίδοση των μαθητών στη Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα επιλέγονται οι 6 μαθητές που αποτελούν την Ελληνική ομάδα που συμμετέχει στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.

Τα τελευταία 7 χρόνια, η Μεσογειακή Μαθηματική Ολυμπιάδα (για την επιλογή της Ολυμπιακής ομάδας των μεγάλων) έχει αντικατασταθεί από προκριματικό διαγωνισμό (για μεγάλους).

Η ύλη πάνω στην οποία διαγωνίζονται οι μαθητές που συμμετέχουν στην ΕΜΟ, ο Αρχιμήδης καθώς και στο Μεσογειακό μαθηματικό διαγωνισμό είναι ευρύτερη από αυτήν των προηγούμενων διαγωνισμών Θαλή και Ευκλείδη, είναι αυτή που ατύπως έχει θεσμοθετηθεί ως ύλη των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων και μπορεί να ταξινομηθεί στις ενότητες:

- **Άλγεβρα**

Συνοπτικά η ύλη της Άλγεβρας συνίσταται από τα Κεφάλαια:
Πραγματικοί και μιγαδικοί αριθμοί – Εξισώσεις – Συστήματα –Ανισότητες - Θεωρία πολυωνύμων - Πρόοδοι – Λογάριθμοι – Συναρτήσεις – Ακολουθίες.

- **Γεωμετρία**

Συνοπτικά η ύλη της Γεωμετρίας συνίσταται από τις ενότητες:

Επιπεδομετρία – Στερεομετρία.

Αν και έχει πολλά χρόνια να τεθεί πρόβλημα Στερεομετρίας σε μαθηματική Ολυμπιάδα, η ενότητα αυτή ανήκει στην ύλη των Ολυμπιάδων. Η Αναλυτική Γεωμετρία, αλλά και οι γεωμετρικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση των ασκήσεων της Γεωμετρίας.

- **Θεωρία αριθμών**,

Συνοπτικά η ύλη της Θεωρίας αριθμών συνίσταται από τις ενότητες:
Διαιρετότητα - Πρώτοι αριθμοί με όλα τα βασικά θεωρήματα – Ισοτιμίες- Γραμμικές και τετραγωνικές Διοφαντικές εξισώσεις – Τετραγωνικά κατάλοιπα και γενικά ότι έχει σχέση με τη θεωρία των αριθμών.

- **Διακριτά μαθηματικά**.

Συνοπτικά η ύλη των Διακριτών μαθηματικών συνίσταται από τις ενότητες:
Συνδυαστική – Γραφήματα – Αριθμοί Ramsey – Χρωματισμοί – Συνδυαστική Γεωμετρία – Επιστρώσεις.

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε τους πρόσφατους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς που γίνονται (με σκοπό) την γενικότερή αναβάθμιση της μαθηματικής παιδείας, αλλά και την επιλογή των ομάδων που μας εκπροσωπούν στις Διεθνείς Ολυμπιάδες.

Παρατήρηση

Όλα τα θέματα των Ελληνικών μαθηματικών διαγωνισμών, της Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας (BMO), της Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας Νέων (JBMO) καθώς και της Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας (IMO), προέρχονται από τα περιοδικά της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας "Ευκλείδης Α΄" και "Ευκλείδης Β΄".

3.5.2 76ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά "Ο Θαλής"

Πρώτος (χρονικά) σε κάθε σχολική χρονιά είναι ο διαγωνισμός Θαλής. Τα προβλήματα είναι διαφορετικά για κάθε τάξη. Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων (κάθε τάξης), είναι απαραίτητη η γνώση των μαθηματικών που διδάσκονται οι διαγωνιζόμενοι στις προηγούμενες τάξεις.

76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"
14 Νοεμβρίου 2015

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την ανίσωση: $\mathbf{2x+(x+1)(x-1)<x^2+x-2+\lambda}$, *όπου* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Στη συνέχεια να λύσετε την ανίσωση* $\frac{\mathbf{2x-1}}{\mathbf{4}}-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}>\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{4}}$ *και να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν.*

Λύση. Έχουμε:

$$2x+(x+1)(x-1)<x^2+x-2+\lambda \Leftrightarrow 2x+x^2-1<x^2+x-2+\lambda \Leftrightarrow x<\lambda-1,$$

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε:

$$\frac{2x-1}{4}-\frac{3}{8}>\frac{x-1}{4} \Leftrightarrow 4x-2-3>2x-2 \Leftrightarrow 2x>3 \Leftrightarrow x>\frac{3}{2}.$$

Επομένως οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{3}{2}<x<\lambda-1,$, εφόσον ισχύει:

$$\lambda-1>\frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda>\frac{5}{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να λυθεί το σύστημα $\left\{\begin{array}{c}\mathbf{x+y-1=6(x-3)(y+2)}\\ \mathbf{\frac{3}{x-3}-\frac{4}{y+2}=11}\end{array}\right\}$

Λύση

Οι περιορισμοί είναι $x \neq 3, y \neq -2$. Θέτουμε $\frac{1}{x-3} = a$ και $\frac{1}{y+2} = b$, οπότε

$$x + y - 1 = (x-3) + (y+2) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}..$$

Επομένως, με περιορισμό $a, b \neq 0$ το σύστημα παίρνει τη μορφή:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{6}{ab} \\ 3a - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 3a - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 - b \\ 3(6-b) - 4b = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 - b \\ 7b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 1 \end{cases},$$

οπότε $x = \frac{16}{5}, y = -1$, που πληρούν τους περιορισμούς.

Πρόβλημα 3

Να βρεθούν οι ακέραιοι x, y που είναι λύσεις της εξίσωσης

$$x + y + x^2 + y^2 = p$$

όπου p πρώτος θετικός ακέραιος.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση γράφεται: $x + x^2 + y + y^2 = p \Leftrightarrow x(x+1) + y(y+1) = p$ (1)

Όμως οι αριθμοί $x(x+1),\ y(y+1)$ ως γινόμενα διαδοχικών ακέραιων είναι και οι δύο άρτιοι, οπότε και το άθροισμα τους θα είναι άρτιος. Επομένως πρέπει $p = 2$, αφού ο μοναδικός πρώτος που είναι άρτιος είναι το 2. Επειδή οι ακέραιοι $x(x+1),\ y(y+1)$ είναι άρτιοι μη αρνητικοί, έχουμε:

$$x(x+1) + y(y+1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 2 \\ y(y+1) = 0 \end{cases} (\Sigma_1) \text{ ή } \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ y(y+1) = 2 \end{cases} (\Sigma_2)$$

Έχουμε $x(x+1) = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -2$ και $y(y+1) = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ή $y = -1$.

Επομένως το σύστημα (Σ_1) έχει τις λύσεις:

$(x, y) = (1, 0)$ ή $(1, -1)$ ή $(-2, 0)$ ή $(-2, -1)$

Ομοίως, για το σύστημα (Σ_2) βρίσκουμε τις λύσεις:

$(x, y) = (0, 1)$ ή $(-1, 1)$ ή $(0, -2)$ ή $(-1, -2)$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 30°$. Έστω Δ,Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε (εξωτερικά του τριγώνου) ισόπλευρο τρίγωνο ΒΔΕ και τετράγωνο ΑΖΗΘ. Η μεσοκάθετη του ΒΔ, τέμνει την ΑΓ στο σημείο Τ. Να αποδείξετε ότι:

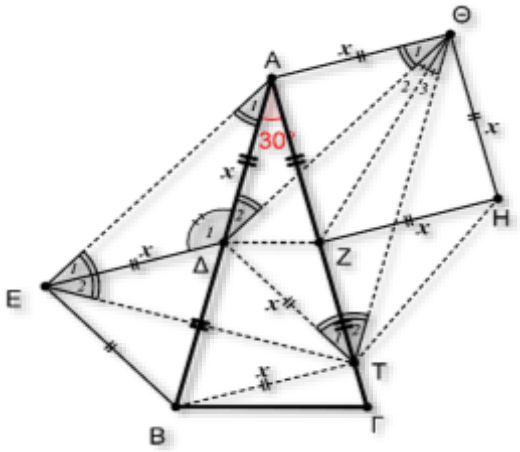
(α) το τρίγωνο ΑΕΤ είναι ισόπλευρο, (β) τα τρίγωνα ΑΤΒ και ΔΘΤ είναι ίσα.

Λύση

(α) Το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές ($\Delta A = \Delta E = x$) με $\hat{\Delta}_1 = 120^o$. Άρα

$\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = 30^o$.

Η ΕΤ είναι μεσοκάθετη της ΒΔ, άρα (από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΔΕ) έχουμε: $\hat{E}_2 = \frac{B\hat{E}\Delta}{2} = 30^o$.



Σχήμα 3-2

Στο τρίγωνο ΑΕΤ έχουμε, $E\hat{A}T = \hat{A}_1 + \hat{A} = 60^o$ και $A\hat{E}T = \hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 60^o$, οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Σχήμα 3-3

(β) Στο ισόπλευρο τρίγωνο η ΑΒ είναι κάθετη (άρα και μεσοκάθετη) της ΕΤ. Άρα

$$\Delta E = \Delta T = BT = x \qquad (1).$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΘ και ΑΔΤ είναι ίσα μεταξύ τους διότι,

$$A\Delta = A\Theta = \Delta T = x \text{ και } \Delta\hat{A}\Theta = A\hat{\Delta}T = 120^o.$$

Άρα έχουμε $\Delta\Theta = AT$ (2).

Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$$\Theta\hat{\Delta}T = 180^o - \hat{\Delta}_2 - B\hat{\Delta}T = 180^o - 30^o - 60^o = 90^o.$$

$$A\hat{T}B = \hat{T}_1 + B\hat{T}\Delta = 30^o + 60^o = 90^o.$$

Έχουμε δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΤΒ και ΔΘΤ είναι ορθογώνια με δύο κάθετες πλευρές ίσες (σχέσεις (1) και (2)).

Παρατήρηση. Επιπλέον, στο σημείο Ζ τέμνονται οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ΔΘΤ, δηλαδή το σημείο Ζ είναι έκκεντρο του τριγώνου ΔΘΤ .

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x,y ισχύει ότι $\mathbf{x^2 + 2y^2 = 4}$, *να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης* $\mathbf{A = \sqrt{x^4 + 5x^2 + 2y^2} + \sqrt{x^4 + 32y^2}}$ *είναι σταθερή, ανεξάρτητη των x,y.*

Λύση

Έχουμε ότι $x^4+5x^2+2y^2=x^4+5x^2+4-x^2=x^4+4x^2+4=(x^2+2)^2$, οπότε

$$\sqrt{x^4+5x^2+2y^2}=x^2+2.$$

Επιπλέον $x^4+32y^2=\left(4-2y^2\right)^2+32y^2=16+16y^2+4y^4=4\left(y^2+2\right)^2$, οπότε

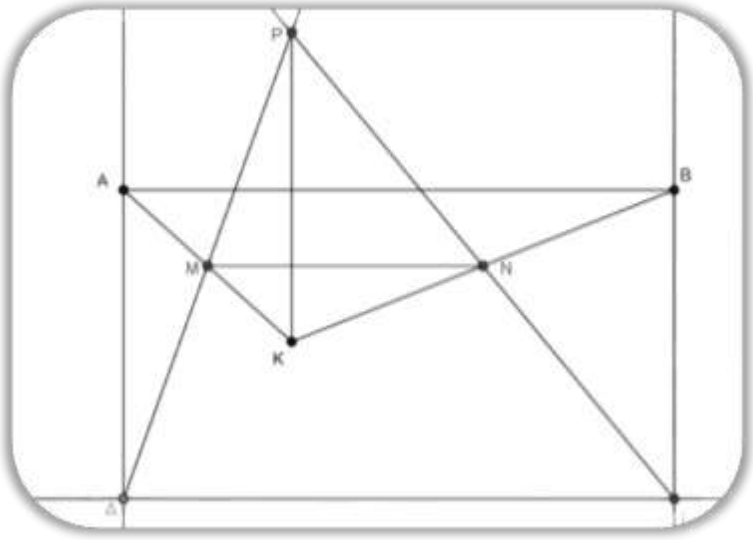
$$\sqrt{x^4+32y^2}=2(y^2+2).$$

Συνεπώς $\mathrm{A}=x^2+2+2(y^2+2)=x^2+2y^2+6=4+6=10$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Κ στο εσωτερικό του. Θεωρούμε τα μέσα Μ,Ν των ΑΚ,ΒΚ αντίστοιχα και έστω ότι οι ευθείες ΓΝ,ΔΜ τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΡΚ είναι κάθετη στην ευθεία ΓΔ.

Λύση



Σχήμα 3-4

Στο τρίγωνο AKB το τμήμα MN συνδέει τα μέσα των πλευρών του, άρα $\mathrm{MN}//\mathrm{AB}$ και $\mathrm{MN}=\frac{\mathrm{AB}}{2}$. Όμως το $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οπότε $\mathrm{AB}=\Gamma\Delta$, επομένως $\mathrm{MN}=\frac{\Gamma\Delta}{2}$ και επιπλέον $\mathrm{AB}//\Gamma\Delta$ οπότε και $\mathrm{MN}//\Gamma\Delta$. Από την τελευταία παραλληλία έπεται ότι τα τρίγωνα $\mathrm{PMN},\mathrm{P}\Delta\Gamma$ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{MN}}=2$, οπότε θα είναι και $\frac{\mathrm{P}\Delta}{\mathrm{PM}}=2$ οπότε το M είναι το μέσον του $\mathrm{P}\Delta$. Άρα στο τετράπλευρο $\mathrm{PA\Delta K}$ οι διαγώνιοι διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως, $\mathrm{PK}//\mathrm{A}\Delta$, οπότε, αφού $\mathrm{A}\Delta\perp\Gamma\Delta$, έπεται ότι η ευθεία PK είναι κάθετη στην ευθεία $\Gamma\Delta$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ότι ο αριθμός α είναι θετικός ακέραιος.

(α) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $\frac{5\alpha}{2}, \frac{\alpha+2}{5}, \alpha$.

(β) Να βρείτε το υποσύνολο Α των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις:

$$\frac{3x-\alpha}{2}-\frac{x}{2}\le\frac{2x+\alpha}{3},\ 2(3x-\alpha)+x>2(x+1)-\alpha,\ \alpha-x\le 2(x-\alpha)$$

καθώς και το πλήθος των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α.

Λύση

(α) Αφού $a>0$, έχουμε: $\frac{5a}{2}-a=\frac{3a}{2}>0\Leftrightarrow\frac{5a}{2}>a.$ Επίσης, έχουμε $a>\frac{a+2}{5}\Leftrightarrow 5a>a+2\Leftrightarrow 4a>2\Leftrightarrow a>\frac{1}{2}$, που ισχύει αφού ο a είναι θετικός ακέραιος Άρα $a>\frac{a+2}{5}$. Επομένως έχουμε τη διάταξη: $\frac{a+2}{5}<a<\frac{5a}{2}$.

(β) Λύνουμε καθεμία από τις δεδομένες ανισώσεις. Έχουμε:

- $\frac{3x-a}{2}-\frac{x}{2}\le\frac{2x+a}{3}\Leftrightarrow 9x-3a-3x\le 4x+2a\Leftrightarrow 2x\le 5a\Leftrightarrow x\le\frac{5a}{2}.$
- $2(3x-a)+x>2(x+1)-a\Leftrightarrow 6x-2a+x>2x+2-a\Leftrightarrow 5x>a+2\Leftrightarrow x>\frac{a+2}{5}$.
- $a-x\le 2(x-a)\Leftrightarrow a-x\le 2x-2a\Leftrightarrow 3a\le 3x\Leftrightarrow x\ge a$.

Επειδή ισχύει ότι $\frac{a+2}{5}<a<\frac{5a}{2}$, το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο συναληθεύουν οι τρεις ανισώσεις είναι:

$$\mathrm{A}=\left\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le\frac{5a}{2},\ a\in\mathbb{Z}_+^*\right\}=\left[a,\frac{5a}{2}\right],\ a\in\mathbb{Z}_+^*..$$

Για την εύρεση των ακέραιων τιμών του x που περιέχονται στο σύνολο Α θα προσδιορίσουμε τον ελάχιστο και μέγιστο ακέραιο του συνόλου Α. Αν αυτοί είναι m και Μ, αντίστοιχα, τότε ο αριθμός των ακέραιων που περιέχονται στο σύνολο Α είναι: $(M-m)+1$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $a=2k, k\in\mathbb{N}^*$. Τότε $\mathrm{A}=[2k,5k]$, οπότε περιέχει $3k+1=\frac{3a}{2}+1$ ακέραιους.
- $a=2k+1, k\in\mathbb{N}$. Τότε $\mathrm{A}=\left[2k+1,5k+\frac{5}{2}\right]=\left[2k+1,5k+2+\frac{1}{2}\right]$, οπότε περιέχει $3k+1+1=\frac{3(a-1)}{2}+2=\frac{3a}{2}+\frac{1}{2}$ ακέραιους.

Πρόβλημα 4

Να λυθεί το σύστημα Σ στο σύνολο των μη-αρνητικών πραγματικών αριθμών:

$$\Sigma:\begin{cases} a\sqrt[3]{b}-c=a \\ b\sqrt[3]{c}-a=b \\ c\sqrt[3]{a}-b=c \end{cases}.$$

Λύση

Αν κάποιος από τους a,b,c είναι ίσος με 0, τότε από τις εξισώσεις βγαίνει ότι και οι άλλοι δύο πρέπει να είναι ίσοι με 0, οπότε $a=b=c=0$ είναι μία λύση. Υποθέτουμε τώρα ότι $a,b,c>0$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο c είναι μεγαλύτερος ή ίσος των a,b. Τότε από την πρώτη σχέση έχουμε $a\sqrt[3]{b}=a+c\geq 2a$, οπότε $\sqrt[3]{b}\geq 2$, δηλαδή $b\geq 8(1)$. Οπότε θα είναι $c\geq 8$ (αφού είναι μεγαλύτερος ή ίσος του b). Οπότε από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε $b=b\sqrt[3]{c}-a\geq 2b-a$, οπότε $a\geq b$ και από την (1) έχουμε $a\geq 8$. Η τελευταία τώρα δίνει $c=c\sqrt[3]{a}-b\geq 2c-b$, οπότε $b\geq c$. Επομένως, τελικά έχουμε $b\geq c\geq a\geq b$, δηλαδή $a=b=c$. Αντικαθιστώντας στην πρώτη έχουμε $a\sqrt[3]{a}=2a$ και αφού $a>0$, έχουμε ότι $a=8$, οπότε $a=b=c=8$ είναι λύση. Τελικά οι δύο λύσεις είναι $(a,b,c)\in\{(0,0,0),(8,8,8)\}$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy θεωρούμε τις υπερβολές με εξισώσεις $y=\frac{1}{x}$ και $y=-\frac{1}{x}$. Μία ευθεία ε τέμνει τον κλάδο της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο των αξόνων στα σημεία $\mathrm{A}\left(\alpha,\frac{1}{\alpha}\right),\mathrm{B}\left(\beta,\frac{1}{\beta}\right)$, και τους δύο κλάδους της υπερβολής $y=-\frac{1}{x}$ στα σημεία $\Gamma\left(\gamma,-\frac{1}{\gamma}\right)$ και $\Delta\left(\delta,-\frac{1}{\delta}\right)$ με $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$. Να αποδείξετε ότι:

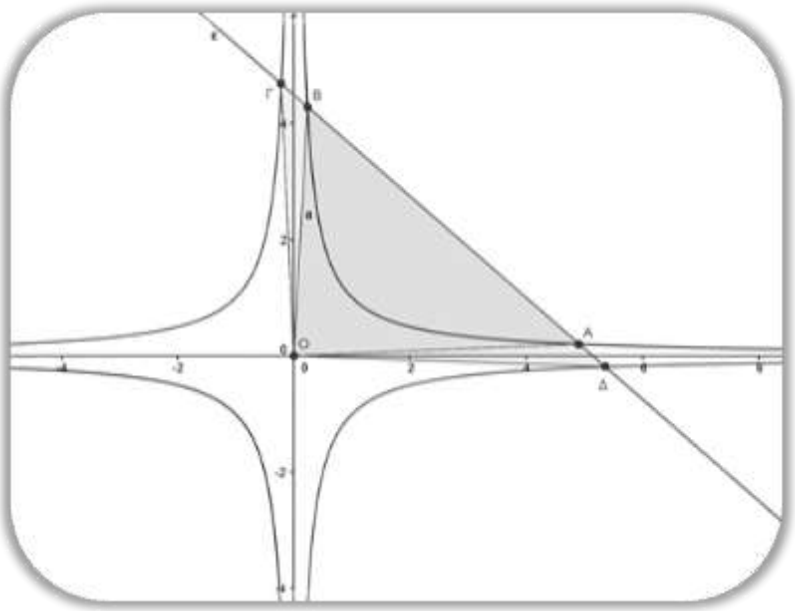
(i) $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ *(ii) τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσα εμβαδά.*

Λύση

Η ευθεία $\varepsilon_{\mathrm{AB}}$ που περνάει από τα σημεία Α και Β έχει εξίσωση:

$$y-\frac{1}{\alpha}=\left(\frac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}{\beta-\alpha}\right)(x-\alpha)\Leftrightarrow y=-\frac{1}{\alpha\beta}x+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}.$$ Η ευθεία $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ που περνάει από τα

σημεία Γ και Δ έχει εξίσωση: $y+\frac{1}{\gamma}=\left(\frac{-\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\gamma}}{\delta-\gamma}\right)(x-\gamma)\Leftrightarrow y=\frac{1}{\gamma\delta}x-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}$. Επειδή οι ευθείες ε_{AB} και $\varepsilon_{\Gamma\Delta}$ συμπίπτουν, έπεται ότι: $-\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\gamma\delta}$ και $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\delta}$, από τις οποίες προκύπτει η ισότητα: $\alpha+\beta=\gamma+\delta$.



Σχήμα 3-5

(ii) Τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ και ΓΔ έχουν τετμημένες $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και $\frac{\gamma+\delta}{2}$ οι οποίες λόγω της (i) ταυτίζονται, οπότε τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν κοινό μέσο, έστω Μ. Τότε, δεδομένης της διάταξης των σημείων πάνω στην ευθεία ε που προκύπτει από τις συνθήκες $\gamma<0<\beta<\alpha<\delta$, ισχύει ότι:

$$A\Gamma=AM+M\Gamma=BM+M\Delta=B\Delta,$$

οπότε τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΔ έχουν ίσες βάσεις στις οποίες αντιστοιχούν ίσα ύψη από την κορυφή Ο, οπότε έχουν και ίσα εμβαδά.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$\sqrt{3x^2-3x+4}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x^2-3x+5}+\sqrt{2x^2+2}.$$

Λύση

Αν θέσουμε $A(x)=3x^2-3x+4,\ B(x)=x^2+3,\ \Gamma(x)=2x^2-3x+5,\Delta(x)=2x^2+2$, παρατηρούμε ότι όλα τα παραπάνω τριώνυμα έχουν αρνητική διακρίνουσα, οπότε έχουν θετική τιμή, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι οι

ποσότητες μέσα στα ριζικά των δύο μελών της εξίσωσης έχουν σταθερό άθροισμα, δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathrm{A}(x)+\mathrm{B}(x)=\Gamma(x)+\Delta(x)\Leftrightarrow \mathrm{A}(x)-\Delta(x)=\Gamma(x)-\mathrm{B}(x)=\mathrm{P}(x)=x^2-3x+2.$$

Τότε η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\sqrt{\Delta(x)+\mathrm{P}(x)}+\sqrt{\mathrm{B}(x)}=\sqrt{\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)}+\sqrt{\Delta(x)}\Leftrightarrow \Delta(x)+\mathrm{P}(x)+\mathrm{B}(x)+2\sqrt{\mathrm{B}(x)\left[\Delta(x)+\mathrm{P}(x)\right]}=$$
$$=(x)+\mathrm{P}(x)+\Delta(x)+2\sqrt{\Delta(x)\left[\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)\right]}\Leftrightarrow \mathrm{B}(x)\left[\Delta(x)+\mathrm{P}(x)\right]=\Delta(x)\left[\mathrm{B}(x)+\mathrm{P}(x)\right]$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{P}(x)\left[\mathrm{B}(x)-\Delta(x)\right]=0\Leftrightarrow \mathrm{P}(x)=0 \text{ ή } \mathrm{B}(x)-\Delta(x)=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \text{ ή } x^2+3-2x^2-2=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2=1\Leftrightarrow x=1(\text{διπλή}) \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-1.$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη αρνητικούς ακεραίους x,y που ικανοποιούν την εξίσωση $\mathbf{x^3+y^3-x-y=pq}$*, όπου p,q πρώτοι αριθμοί.*

Λύση

Γράφουμε $x^3-x=x(x^2-1)=(x-1)x(x+1)$, το οποίο είναι γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων, επομένως διαιρείται και από το 2 και από το 3. Επομένως ο 6 διαιρεί το $(x-1)x(x+1)$.

Όμοια ο 6 διαιρεί το $(y-1)y(y+1)$, οπότε το αριστερό μέλος διαιρείται από 6. Άρα ο 6 διαιρεί το pq, και αφού p,q πρώτοι αριθμοί, θα πρέπει $pq=6$. Επομένως η εξίσωση γίνεται $(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)=6$. Αν τώρα $x,y\geq 2$, τότε $(x-1)x(x+1)+(y-1)y(y+1)\geq 6+6=12$, οπότε κάποιος είναι μικρότερος του 2, έστω ο y. Τότε όμως $(y-1)y(y+1)=0$, οπότε $(x-1)x(x+1)=6$ και αφού x μη αρνητικός ακέραιος, πρέπει $x=2$. Επομένως οι λύσεις είναι: $(x,y)\in\{(2,0),(2,1),(0,2),(1,2)\}$.

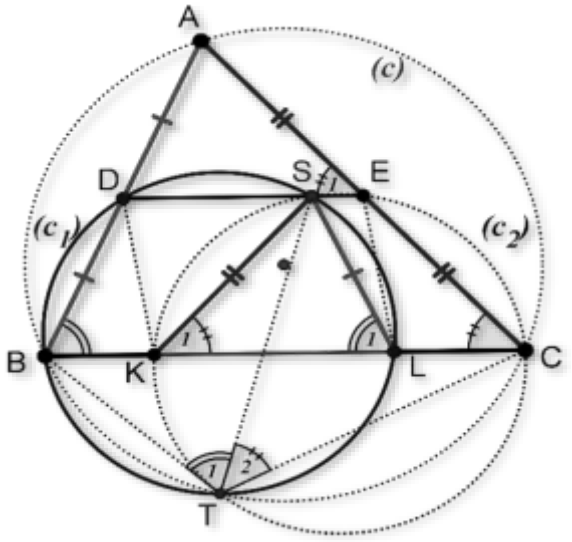
Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $\mathbf{ABC}$ *(με* $\mathbf{AB<AC<BC}$*) εγγεγραμμένο σε κύκλο* $\mathbf{c(O,R)}$ *και έστω* $\mathbf{D,E}$ *τα μέσα των* $\mathbf{AB}$ *και* $\mathbf{AC}$ *αντίστοιχα. Έστω Τ τυχόν σημείο του μικρού τόξου* $\mathbf{BC}$ *και* $\mathbf{(c_1)}$, $\mathbf{(c_2)}$ *οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων* $\mathbf{BDT}$ *και* $\mathbf{CET}$ *αντίστοιχα. Οι κύκλοι* $\mathbf{(c_1)}$ *και* $\mathbf{(c_2)}$ *τέμνουν την BC στα σημεία L και K. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο DELK είναι παραλληλόγραμμο.*

Λύση

Η DE συνδέει τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, άρα $DE//=\dfrac{BC}{2}$, άρα το τετράπλευρο $DELK$, είναι τραπέζιο. Επομένως, για να είναι το

τετράπλευρο $DELK$ παραλληλόγραμμο, αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $DE = KL = \frac{BC}{2}$.



Σχήμα 3-6

Έστω ότι ο κύκλος (c_1), τέμνει το τμήμα DE στο σημείο S. Θα αποδείξουμε ότι και ο κύκλος (c_2) περνάει από το σημείο S. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABTC$, έχουμε:

$$\hat{A} + \hat{T}_1 + \hat{T}_2 = 180^o \quad (1).$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $SLTB$, έχουμε:

$$\hat{T}_1 = \hat{L}_1 \quad (2).$$

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $DSLB$, έχουμε:

$$\hat{L}_1 = \hat{B} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε: $\hat{T}_2 = \hat{C}$ και επειδή $\hat{E}_1 = \hat{C}$ (από την παραλληλία $DE // BC$), συμπεραίνουμε ότι $\hat{T}_2 = \hat{E}_1$ και κατά συνέπεια το τετράπλευρο $CEST$ είναι εγγράψιμο (η εξωτερική γωνία $\hat{E}_1$ είναι ίση με την απέναντι εσωτερική $\hat{T}_2$). Επομένως έχουμε αποδείξει ότι το δεύτερο σημείο τομής των κύκλων (c_1) και (c_2) βρίσκεται πάνω στην ευθεία DE.

Παρατηρούμε τώρα ότι τα τετράπλευρα $DSLB$ και $SECK$ είναι εγγεγραμμένα τραπέζια (άρα ισοσκελή τραπέζια), οπότε θα ισχύουν οι ισότητες τμημάτων $SL = DB = \frac{AB}{2}$, $SK = EC = \frac{AC}{2}$, από τις οποίες σε συνδυασμό με τις ισότητες γωνιών $\hat{L}_1 = \hat{B}$ και $\hat{K}_1 = \hat{C}$, συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα ABC και SLK είναι όμοια (με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$. Τελικά

προκύπτει ότι: $DE = KL = \frac{BC}{2}$.

3.5.3 76ος Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά "Ο Ευκλείδης"

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων του Ευκλείδη (για κάθε τάξη), είναι απαραίτητη η γνώση των μαθηματικών που διδάσκονται στις προηγούμενες τάξεις, καθώς και γνώσεις από τα μαθηματικά που διδάσκονται στο πρώτο τρίμηνο της τρέχουσας τάξης.

76ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ"
16 Ιανουαρίου 2016

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνονται οι δεκαδικοί περιοδικοί αριθμοί $\alpha = 0,\overline{2}$ **και** $\beta = 0,\overline{3}$.

(α) Να γράψετε τους αριθμούς α και β σε κλασματική μορφή.

(β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016}$.

Λύση: **(α)** Έχουμε διαδοχικά: α=0,222 …

$$10\alpha = 2,222\ldots$$
$$10\alpha = 0,222\ldots + 2$$
$$10\alpha = \alpha\ldots + 2$$
$$9\alpha = 2$$

Άρα είναι $\alpha = \frac{2}{9}$. Εργαζόμενοι ομοίως, βρίσκουμε ότι: $\beta = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

(β) Έχουμε:

$$A = (3\alpha - 5\beta)^{2015} + (18\alpha^2 + \beta^2)^{2016} = \left(3\cdot\frac{2}{9} - 5\cdot\frac{3}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{3}{9}\right)^2\right)^{2016}$$

$$= \left(\frac{6}{9} - \frac{15}{9}\right)^{2015} + \left(18\cdot\frac{4}{81} + \frac{9}{81}\right)^{2016} = (-1)^{2015} + (+1)^{2016} = -1 + 1 = 0.$$

Πρόβλημα 2.

Να βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο με τον οποίο είτε πολλαπλασιάσουμε είτε διαιρέσουμε το 2016, προκύπτει ως αποτέλεσμα τέλειο τετράγωνο.

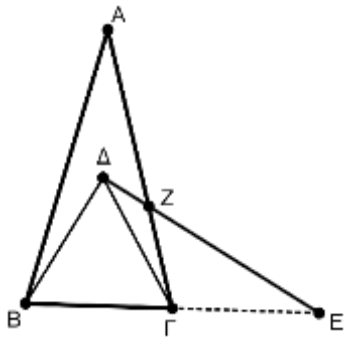
Λύση: Αναλύουμε το 2016 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έχουμε ότι

$2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Επομένως, όταν ο αριθμός 2016 πολλαπλασιαστεί με κάποιο παράγοντα, για να προκύψει γινόμενο που είναι τέλειο τετράγωνο, θα πρέπει ο παράγοντας αυτός να έχει ως παράγοντες τους αριθμούς 2 και 7 σε περιττό εκθέτη και κάθε άλλο πρώτο παράγοντα σε άρτιο εκθέτη. Ο μικρότερος τέτοιος αριθμός είναι ο $2\cdot 7=14$. Παρατηρούμε ότι και η διαίρεση $2016:(2\cdot 7)$ δίνει πηλίκο ίσο με $2^4\cdot 3^2=(2^2\cdot 3)^2=12^2$, που είναι τέλειο τετράγωνο.

Επομένως ο μικρότερος θετικός ακέραιος με τη ζητούμενη ιδιότητα είναι ο 14.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ=ΑΓ) και $\hat{A}=30^0$. *Το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισόπλευρο και το σημείο Ε βρίσκεται στη προέκταση της πλευράς ΒΓ και είναι τέτοιο ώστε ΒΓ=ΓΕ. Αν η πλευρά ΑΓ τέμνεται από τη ΔΕ στο σημείο Ζ, τότε:*

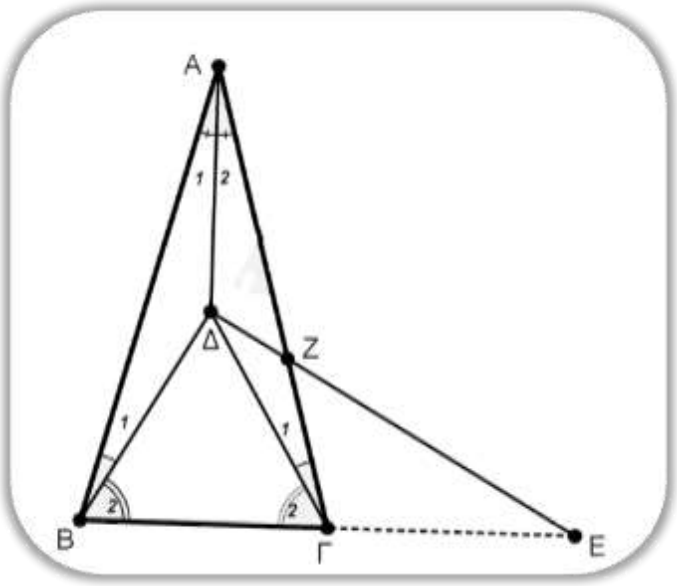


(α) Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{AB\Delta}$ *και* $\hat{A\Gamma\Delta}$.

(β) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ είναι ισοσκελή.

(γ) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ορθογώνιο.

Λύση:



Σχήμα 3-7

(α) Το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο άρα $\hat{B}_2=\hat{\Gamma}_2=60^0$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{A}=30^0$ άρα $\hat{B}=\hat{\Gamma}=75^0$.

Αφαιρώντας τις ισότητες κατά μέλη, έχουμε:

$$\hat{B} - \hat{B}_2 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_2 = 75^0 - 60^0 = 15^0 \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 15^0.$$

(β) Επειδή $AB = A\Gamma$ και $\Delta B = \Delta\Gamma$ η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετη της $B\Gamma$, άρα και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15^0$. Άρα τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $A\Delta B$ είναι ισοσκελή.

(γ) Το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές ($\Gamma\Delta = \Gamma E$) με

$$\Delta\hat{E}\Gamma = \hat{\Gamma}_1 + Z\hat{\Gamma}E = 15^0 + (180^0 - \hat{\Gamma}) = 15^0 + 180^0 - 75^0 = 120^0.$$

Άρα $\Gamma\hat{\Delta}E = \Delta\hat{E}\Gamma = 30^0$. Επειδή από το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ είναι $E\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = 60^o$, έπεται ότι: $B\hat{\Delta}E = 180^\circ - \left(E\hat{B}\Delta + \Delta\hat{E}B\right) = 180^\circ - \left(60^\circ + 30^\circ\right) = 90^\circ,$ οπότε το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ορθογώνιο.

Πρόβλημα 4.

Για την εκτέλεση ενός μεγάλου ερευνητικού έργου στο προαπαιτούμενο χρονικό όριο, ξεκίνησαν να εργάζονται συνολικά 500 ερευνητές. Όταν τελείωσε στην ώρα του το $\mathbf{\frac{1}{4}}$ *του έργου, αποχώρησαν 100 ερευνητές, οπότε το δεύτερο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με καθυστέρηση. Αποχώρησαν όμως τότε και άλλοι 100 ερευνητές, οπότε το τρίτο τέταρτο του έργου ολοκληρώθηκε με επιπλέον καθυστέρηση. Πόσοι ερευνητές πρέπει να προσληφθούν, ώστε το έργο να τελειώσει στον προγραμματισμένο χρόνο.*

(*Υποθέτουμε ότι όλοι οι ερευνητές που εργάστηκαν, αλλά και αυτοί που θα προσληφθούν, δουλεύουν με την ίδια απόδοση*)

Λύση:

Αφού στο πρώτο τέταρτο δούλευαν όλοι οι ερευνητές, το έργο ολοκληρώθηκε στην ώρα του και υποθέτουμε ότι χρειάστηκαν χρόνο t.

Στο δεύτερο τέταρτο σε κάθε χρονική μονάδα ολοκληρώνεται το $\frac{500-100}{500} = \frac{400}{500} = \frac{4}{5}$ από το έργο που θα ολοκληρωνόταν αν δούλευαν όλοι.

Επομένως, για να ολοκληρωθεί το δεύτερο τέταρτο του έργου χρειάζεται χρόνος $\frac{5}{4}t$.

Όμοια για να ολοκληρωθεί το τρίτο τέταρτο του έργου θα χρειαστεί χρόνος $\frac{5}{3}t$.

Έστω τέλος ότι με την προσθήκη των ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο χρειάζεται χρόνος x.

Το έργο για να τελειώσει στην ώρα ή νωρίτερα του χρειάζεται χρόνος τετραπλάσιος από το πρώτο τέταρτο που δούλευαν όλοι, δηλαδή χρόνος μικρότερος ή ίσος με $4t$.

Άρα, έχουμε τη σχέση:

$$t+\frac{5}{4}t+\frac{5}{3}t+x=4t \Leftrightarrow x=t\left(3-\frac{5}{4}-\frac{5}{3}\right)=t\frac{(36-15-20)}{12}=\frac{1}{12}t$$

Επομένως, αν έγινε πρόσληψη y ερευνητών στο τελευταίο τέταρτο δούλεψαν $300+y$ επιστήμονες και για το τελευταίο τέταρτο χρειάστηκαν χρόνο $x=\frac{500}{300+y}t$, οπότε πρέπει $\frac{500}{300+y}t=\frac{1}{12}t \Rightarrow 6000=y+300 \Rightarrow 5700=y$

Επομένως πρέπει να προσληφθούν 5700 επιστήμονες.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο: $\mathbf{P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48}$ *και να βρείτε*

την τιμή της παράστασης

$$\mathbf{A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}}\ .$$

Λύση

(α) $P(x)=4(x+4)^2-28(x+4)+48=4\left[(x+4)^2-7(x+4)+12\right]$

$=4\left(x^2+8x+16-7x-28+12\right)=4\left(x^2+x\right)=4x(x+1).$

(β)

$$A=6\sqrt{P(-5)}-4\sqrt{P(4)}=6\sqrt{-20(-5+1)}-4\sqrt{16(4+1)}=6\sqrt{80}-4\sqrt{80}=2\sqrt{80}=8\sqrt{5}$$

Πρόβλημα 2

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\mathbf{x(2x-1)(2x+1)+x=4x^3}$*, για κάθε πραγματικό αριθμό x.*

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathbf{A=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256}$ *είναι κύβος ενός ακεραίου αριθμού τον οποίο και να προσδιορίσετε.*

Λύση

(α) $x(2x-1)(2x+1)+x=x\left(4x^2-1\right)+x=4x^3-x+x=4x^3.$

(β) Επειδή οι ακέραιοι 4031 και 4033 διαφέρουν κατά δύο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $2x-1=4031,\ 2x+1=4033$, οπότε θα είναι $x=2016$. Για να αντιστοιχήσουμε τον αριθμό Α στην προηγούμενη ταυτότητα, πρέπει να την πολλαπλασιάσουμε με τον ακέραιο $\frac{32256}{2016}=16$. Τότε αυτή γίνεται: $16x(2x-1)(2x+1)+16x=64x^3$, οπότε θέτοντας $x=2016$, έχουμε:

$$\mathrm{A}=4031\cdot 4033\cdot 32256+32256=64\cdot 2016^3=4^3\cdot 2016^3=(4\cdot 2016)^3=8064^3.$$

Επομένως, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 8064.

Πρόβλημα 3

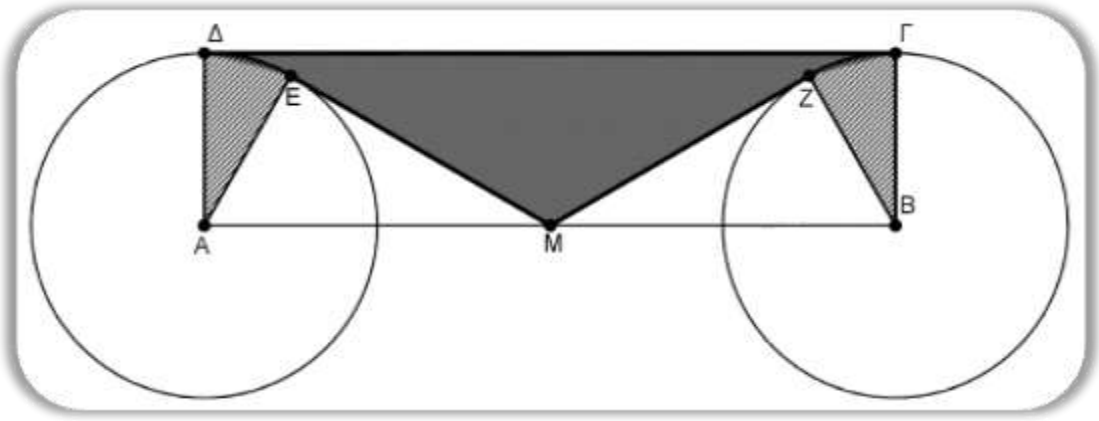
Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathbf{A\Delta = \alpha}$ **και** $\mathbf{AB = 4\alpha}$. *Με κέντρα τα σημεία Α, Β και ακτίνα α γράφουμε κύκλους Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ, η ΜΕ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Α και η ΜΖ είναι εφαπτόμενη του κύκλου κέντρου Β, όπως φαίνεται στο σχήμα.*

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\mathbf{\Delta\hat{A}E}$.

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου $\mathbf{\Delta EMZ\Gamma}$ *που περικλείεται από το τόξο ΔΕ, τα τμήματα ΕΜ,ΜΖ, το τόξο ΖΓ και το τμήμα ΓΔ.*

Λύση

(α) Επειδή το M είναι το μέσον του AB θα έχουμε ότι $MA = 2\alpha$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο EAM έχουμε $\eta\mu(E\hat{M}A) = \frac{EA}{AM} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$, οπότε $E\hat{M}A = 30°$, $E\hat{A}M = 90° - 30° = 60°$ και συνεπώς $E\hat{A}\Delta = 90° - 60° = 30°$.



Σχήμα 3-8

(β) Το εμβαδό του μικτόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει, αν από το εμβαδό του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ αφαιρέσουμε το εμβαδό των τριγώνων EAM, MZB και αφαιρέσουμε και τους κυκλικούς τομείς $\Delta AE, ZB\Gamma$. Προφανώς $(AB\Gamma\Delta) = \alpha \cdot 4\alpha = 4\alpha^2$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε $EM^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2 = 3\alpha^2 \Rightarrow EM = \alpha\sqrt{3}$, οπότε $(EAM) = \frac{1}{2} EA \cdot EM = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$, και όμοια $(BZM) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}$. Επιπλέον, ομοίως με το ερώτημα (α) υπολογίζουμε ότι $Z\hat{B}\Gamma = 30°$, οπότε έχουμε

$$\text{εμβτομέα}(\Delta\text{ΑΕ}) = \text{εμβτομέα}(\text{ΖΒΓ}) = \frac{\pi\alpha^2}{12}.$$

Επομένως, έχουμε:

$$\text{εμβγραμ. χωρίου}\left(\Delta\text{ΕΜΖΓ}\right) = 4\alpha^2 - 2\cdot\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\pi\alpha^2}{12} = \alpha^2\left(4-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right).$$

Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\mathbf{\frac{3}{4}}$ *και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις δίνει στο Βαγγέλη. Στη συνέχεια ο Βαγγέλης παίρνει τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το* $\mathbf{\frac{1}{12}}$ *και δίνει στο Γιάννη τις υπόλοιπες. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι εξαπλάσιες από τις καραμέλες του Βαγγέλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.*

Λύση.

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη $\frac{\alpha}{4}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 4. (1)

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{12}$ και δίνει στο Γιάννη $\frac{11\beta}{12}$.

Επομένως, ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12}$ καραμέλες, ενώ ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει $6\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}\right) = \frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12} \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{4} = \frac{5\beta}{12} \Leftrightarrow 9\alpha = 5\beta$. (2)

Για να ισχύει η (2), πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 5. (3)

Από τις (1) και (3) συνάγουμε ότι το α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5\cdot 4 = 20$, οπότε η ελάχιστη τιμή του α είναι 20. Επομένως, από τη σχέση (2) παίρνουμε $\beta = 36$. Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $20+36=56$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

$$A=\left(\frac{25}{x+8}-\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+4}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4}+8\cdot\sqrt[3]{x}}{9-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{21-\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}},\ \text{όπου}\ x>0\ \text{και}\ x\neq 27.$$

Λύση: Θέτουμε: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}=y>0,\ x>0\Rightarrow x=y^3,\ x,y>0$, οπότε η Α γράφεται:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{25}{y^3+8}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right)\cdot\frac{y^4+8y}{9-y^2}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\left[\frac{25}{(y+2)(y^2-2y+4)}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right]\cdot\frac{y(y^3+8)}{(3-y)\cdot(3+y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{[5^2-(y+2)^2]}{(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}\cdot\frac{y\cdot(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}{(3+y)\cdot(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{(7+y)(3-y)y(y+2)(y^2-2\cdot y+4)}{(y+2)(y^2-2y+4)(3+y)(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{y(7+y)}{3+y}+\frac{21-y^2}{3+y}=\frac{7y+y^2+21-y^2}{3+y}=\frac{7(y+3)}{y+3}=7.$$

Πρόβλημα 2

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση $\mathbf{64x^2+16^{10}x-2016^{2016}=0}$ έχει ρητή ρίζα.

Λύση: Αν η εξίσωση έχει ρητή λύση, τότε η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο ρητού. Έχουμε ότι $\Delta=16^{20}+4\cdot 64\cdot 2016^{2016}$ και ας υποθέσουμε ότι: $16^{20}+4\cdot 64\cdot 2016^{2016}=\kappa^2$, όπου κ ρητός.

Αφού όμως το αριστερό μέλος είναι ακέραιος, θα πρέπει και ο κ να είναι ακέραιος. Παρατηρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 16^{20} είναι 6 και το ίδιο ισχύει για το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $4\cdot 64\cdot 2016^{2016}=256\cdot 2016^{2016}$. Επομένως το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $16^{20}+4\cdot 64\cdot 2016^{2016}$ είναι το 2, αφού $6+6=12$. Όμως, κάθε τέλειο τετράγωνο λήγει σε κάποιο από τα ψηφία $0,1,4,5,6,9$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως η εξίσωση δεν έχει ρητή ρίζα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{\mathbf{A}}=\mathbf{40^o}$ *και έστω Δ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΕΔ, ΔΓΖ των οποίων οι κορυφές Ε,Ζ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΓ και στο οποίο ανήκει η κορυφή Β. Αν η ΕΔ τέμνει την ΑΒ στο Κ, να αποδείξετε ότι η ΚΖ είναι κάθετη στη ΒΓ.*

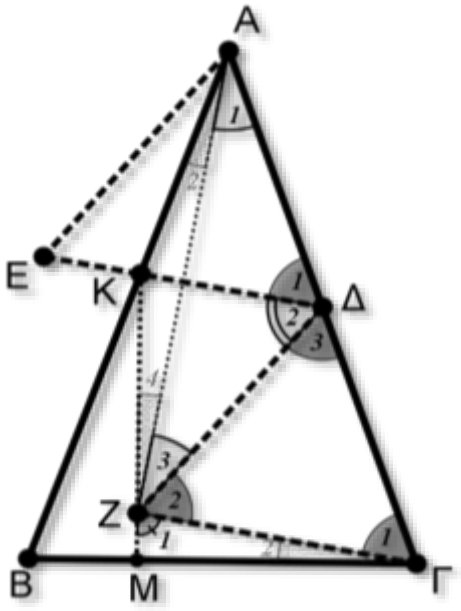
Λύση: Έστω ότι η ΚΖ τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Μ. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma}_2+\hat{Z}_1=90^0$.

Το τρίγωνο ΓΔΖ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma}_1 = 60^0$.

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$) με $\hat{A} = 40^0$ (οπότε από $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$) έχουμε: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^0$.

Άρα $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1 = 70^0 - 60^0 = 10^0 \qquad (1)$.

Ισχύει $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = 180^0$ και επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3 = 60^0$ (ως γωνίες ισόπλευρων τριγώνων), συμπεραίνουμε ότι: $\hat{\Delta}_2 = 60^0$.



Το τρίγωνο ΑΔΖ είναι ισοσκελές (διότι ΑΔ=ΔΓ=ΔΖ) και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 60^0$.

Δηλαδή η ΔΚ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}Z$, οπότε θα είναι και μεσοκάθετη της βάσης ΑΖ του (ισοσκελούς) τριγώνου ΑΔΖ.

Εφόσον η ΔK είναι μεσοκάθετη της ΑΖ, το τρίγωνο ΑΚΖ είναι ισοσκελές.

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΖ έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_3$. Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΖ έχουμε: $\hat{A}_2 = \hat{Z}_4$. Προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε: $\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 40^0$.

Από τη ισότητα $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = 180^0$ (με δεδομένο ότι $\hat{Z}_2 = 60^0$), καταλήγουμε:

$$\hat{Z}_1 = 80^0 \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^0$.

Πρόβλημα 4

Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες

καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\mathbf{\frac{3}{4}}$ *και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το* $\mathbf{\frac{1}{4}}$ *από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το* $\mathbf{\frac{1}{6}}$ *από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.*

Λύση: Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης και γ ο Βασίλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη και το Βασίλη $\frac{\alpha}{8}$.

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{4}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βασίλη $\frac{3\beta}{8}$.

Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το β να είναι πολλαπλάσιο του 8. (1) Τέλος, ο Βασίλης κρατάει $\frac{\gamma}{6}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βαγγέλη από $\frac{5\gamma}{12}$.

Επομένως ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4}+\frac{3\beta}{8}+\frac{5\gamma}{12}$ καραμέλες, ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}+\frac{5\gamma}{12}$ και ο Βασίλης έχει $\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει

$$3\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}\right)=\frac{3\alpha}{4}+\frac{3\beta}{8}+\frac{5\gamma}{12}\Leftrightarrow\frac{3\beta}{4}+\frac{\gamma}{12}=\frac{3\alpha}{8}\Leftrightarrow 18\beta+2\gamma=9\alpha. \quad (2)$$

$$2\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}\right)=\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}+\frac{5\gamma}{12}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{12}\Leftrightarrow 3\alpha+12\beta=2\gamma \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2), (3) κατά μέλη έχουμε ότι : $30\beta=6\alpha\Leftrightarrow 5\beta=\alpha$

Οπότε από την (3) προκύπτει ότι: $27\beta=2\gamma$.

Το β αφού είναι πολλαπλάσιο του 8 η ελάχιστη τιμή του είναι 8. Οπότε η ελάχιστη τιμή για το α είναι $\alpha=5\cdot 8=40$ και για το $\gamma=\frac{27\cdot 8}{2}=27\cdot 4=108$.

Δηλαδή η ελάχιστη τιμή από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $8+40+108=156$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\boldsymbol{\alpha_1 = (2-x)^2}$, $\boldsymbol{\alpha_2 = 2^2 + x^2, \ldots}$, *όπου* x *πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:*

(α) Το άθροισμα των n *πρώτων όρων της.*

(β) Την τιμή του $\mathbf{n, (n>1)}$, *για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.*

Λύση: (α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega = 2^2 + x^2 - (2-x)^2 = 4x$. Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι: $S_n = \dfrac{\left[2(2-x)^2 + 4(n-1)x\right]n}{2} = \left(x^2 + 2(n-3)x + 4\right)n.$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n} = x^2 + 2(n-3)x + 4$$

και είναι τριώνυμο μεταβλητής x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 4(n-3)^2 - 16 = 4\left(n^2 - 6n + 5\right)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x, αν και μόνον, αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 5 = 0 \Leftrightarrow n = 1$ ή $n = 5$.

Η τιμή $n = 1$ απορρίπτεται, γιατί $n > 1$. Επομένως, για $n = 5$ είναι $\dfrac{S_5}{5} = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x, τότε έχουμε $\dfrac{S_n}{n} = x^2 + 2(n-3)x + 4 \geq 0$, για $x \in \mathbb{R}$, εφόσον $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 5$. Τότε, για $n \in \{2,3,4,5\}$ ισχύει: $\dfrac{S_n}{n} = \left(\sqrt{x^2 + 2(n-3)x + 4}\right)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση

$$\mathbf{10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0}.$$

Λύση: Έχουμε $10x^3 - 6x^2 - 12x - 8 = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - \left(6x^2 + 12x + 8\right) = 0$.

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

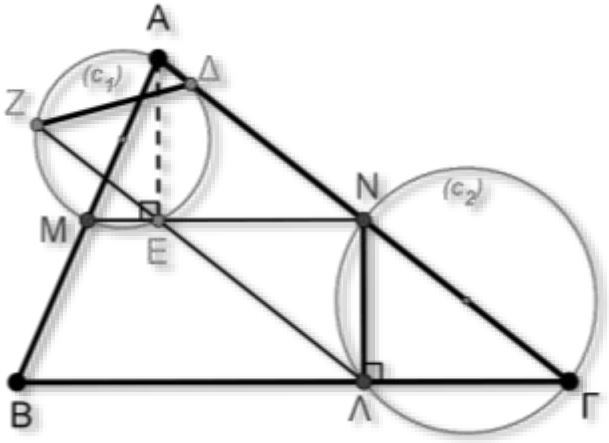
$6x^2 + 12x + 8 = \left(x^3 + 6x^2 + 12x + 8\right) - x^3 = (x+2)^3 - x^3$, οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$10x^3 - \left(6x^2 + 12x + 8\right) = 0 \Leftrightarrow 10x^3 - (x+2)^3 + x^3 = 0 \Leftrightarrow 11x^3 = (x+2)^3 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{11} = x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{11} - 1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ<ΑΓ<ΒΓ) και τα μέσα Μ,Ν των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Ο κύκλος **(c_1)** έχει διάμετρο την ΑΜ και τέμνει τις ΑΓ,ΜΝ στα σημεία Δ,Ε, αντίστοιχα. Ο κύκλος **(c_2)** έχει διάμετρο την ΓΝ και τέμνει την ΒΓ στο σημείο Λ. Η ΕΛ τέμνει το κύκλο **(c_1)** στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΔΝΛ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση: Η γωνία $\text{A}\hat{\text{E}}\text{M}$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_1)) και βαίνει στη διάμετρο ΑΜ του κύκλου (c_1), οπότε θα είναι: $\text{AE} \perp \text{MN} \quad (1)$.



Σχήμα 3-9

Η γωνία $\text{N}\hat{\Lambda}\Gamma$ είναι ορθή διότι είναι εγγεγραμμένη (στο κύκλο (c_2)) και βαίνει στη διάμετρο ΝΓ του κύκλου (c_2), οπότε θα είναι $\text{N}\Lambda \perp \text{B}\Gamma \quad (2)$.

Τα σημεία M, N είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ , οπότε θα είναι: $\text{MN} = // \frac{\text{B}\Gamma}{2} \quad (3)$.

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ συμπεραίνουμε ότι: $\text{AE} = \Lambda\text{N} = \frac{\upsilon_\alpha}{2}$ και $\text{AE} // \Lambda\text{N}$.

Άρα το τετράπλευρο ΑΕΛΝ είναι παραλληλόγραμμο. Το τετράπλευρο ΑΔΕΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο , διότι είναι τραπέζιο $\text{EZ} \| \text{A}\Delta$, εγγεγραμμένο στον κύκλο (c_1). Άρα $\text{AE} = \Delta\text{Z}$ οπότε θα είναι και $\Delta\text{Z} = \text{N}\Lambda$. Δηλαδή το τετράπλευρο ΔΖΛΝ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη θετικών ακεραίων **(a,b)** που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $\mathbf{\frac{a}{b}+\frac{17b}{36a}}$ να είναι ακέραιος.

Λύση: Θέλουμε $\frac{a}{b}+\frac{17b}{36a}=\kappa$, όπου κ είναι ένας ακέραιος. Θέτουμε $\frac{a}{b}=x$ και τότε η σχέση γράφεται ως $x+\frac{17}{36x}=\kappa \Leftrightarrow 36x^2-36\kappa x+17=0$ (1) και ουσιαστικά ψάχνουμε τις ρητές λύσεις της (1). Για να έχει ρητές λύσεις η (1) πρέπει η διακρίνουσα να είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή θέλουμε $\Delta=(36\kappa)^2-4\cdot 36\cdot 17=(2\cdot 6)^2(9\kappa^2-17)$ να είναι τέλειο τετράγωνο, οπότε θέλουμε $9\kappa^2-17=s^2$ για κάποιον θετικό ακέραιο s.

Τότε $(3\kappa)^2-s^2=17\Leftrightarrow(3\kappa-s)(3\kappa+s)=17$ και αφού ο 17 είναι πρώτος και οι κ,s θετικοί ακέραιοι, έπεται ότι $\begin{cases}3\kappa-s=1\\3\kappa+s=17\end{cases}\Leftrightarrow \kappa=3, s=8$.

Για $\kappa=3$ η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις τις $x_1=\frac{17}{6}$ και $x_2=\frac{1}{6}$, οπότε $\frac{a}{b}=\frac{17}{6}$ ή $\frac{a}{b}=\frac{1}{6}$, οπότε έχουμε για λύσεις τις $(a,b)=(17t,6t)$ ή $(a,b)=(t,6t)$ όπου t θετικός ακέραιος.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1.

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\mathbf{b_1=(x-4)^2}$, $\mathbf{b_2=x^2+16,\ldots}$, *όπου* x *πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:*

(α) Το άθροισμα των n *πρώτων όρων της.*

(β) Την τιμή του $\mathbf{n,(n>1)}$, *για την οποία ο μέσος όρος των* n *πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του* x*, για κάθε πραγματικό αριθμό* x.

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega=x^2+16-(x-4)^2=8x.$

Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n=\frac{\left[2(x-4)^2+8(n-1)x\right]n}{2}=\left(x^2+4(n-3)x+16\right)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n}=x^2+4(n-3)x+16$$

και μπορεί να θεωρηθεί ως τριώνυμο μεταβλητής x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta = 16(n-3)^2 - 64 = 16\left(n^2 - 6n + 5\right)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x, αν και μόνον, αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow n^2 - 6n + 5 = 0 \Leftrightarrow n = 1$ ή $n = 5$.

Η τιμή $n = 1$ απορρίπτεται, γιατί $n > 1$. Επομένως, μόνον για $n = 5$ είναι

$$\frac{S_5}{5} = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2.$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x, τότε έχουμε $\frac{S_n}{n} = x^2 + 4(n-3)x + 16 \geq 0$, για $x \in \mathbb{R}$, εφόσον $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq n \leq 5$. Τότε για $n \in \{2,3,4,5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n} = \left(\sqrt{x^2 + 4(n-3)x + 16}\right)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2

Να λυθεί στο σύνολο των πραγματικών αριθμών η εξίσωση:

$$\mathbf{10x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 6 = 0}.$$

Λύση

Έχουμε $10x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 32x - 16 = 0 \Leftrightarrow 10x^4 - \left(8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\right) = 0$.

Παρατηρούμε ότι η παράσταση που είναι μέσα στην παρένθεση γράφεται:

$$8x^3 + 24x^2 + 32x + 16 = \left(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\right) - x^4 = (x+2)^4 - x^4,$$

οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$10x^4 - \left(8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\right) = 0 \Leftrightarrow 10x^4 - (x+2)^4 + x^4 = 0 \Leftrightarrow 11x^4 = (x+2)^4$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt[4]{11} = x + 2 \text{ ή } x\sqrt[4]{11} = -x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[4]{11} - 1} \text{ ή } x = -\frac{2}{\sqrt[4]{11} + 1}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f, g : A \to R}$, *όπου* $\mathbf{A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)}$ *και* $\mathbf{f(x) \cdot g(x) \neq 0}$ *για κάθε* $\mathbf{x \in A}$. *Αν για κάθε* $\mathbf{x, y \in A}$ *ισχύουν οι σχέσεις:*

$$\mathbf{f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right) = \frac{f\left(g(x)\right)}{y}} \quad \mathbf{(1)}, \qquad \mathbf{g\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right) = \frac{g\left(f(x)\right)}{y}}, \quad \mathbf{(2)}$$

Να αποδείξετε ότι: (α) Οι συναρτήσεις $\mathbf{f, g}$ *είναι '1-1' (ένα προς ένα).*

(β) $\mathbf{f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x) \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) = 1}$ *για κάθε* $\mathbf{x \in A}$.

Λύση

(α) Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου x το x_1 και όπου y το x_2, έχουμε:

$$f\left(\frac{g(x_1)}{g(x_2)}\right)=\frac{f\left(g(x_1)\right)}{x_2}\Leftrightarrow f(1)=\frac{f\left(g(x_1)\right)}{x_2}\Leftrightarrow f\left(g(x_1)\right)=f(1)\cdot x_2 \quad (\text{A}).$$

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου x το x_2 και όπου y το x_1, έχουμε:

$$f\left(\frac{g(x_2)}{g(x_1)}\right)=\frac{f\left(g(x_2)\right)}{x_1}\Leftrightarrow f(1)=\frac{f\left(g(x_2)\right)}{x_1}\Leftrightarrow f\left(g(x_2)\right)=f(1)\cdot x_1 \quad (\text{B})$$

Από την ισότητα $g(x_1)=g(x_2)$ έχουμε: $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ (Γ).

Από τις σχέσεις $(\text{A}),(\text{B}),(\Gamma)$ συμπεραίνουμε ότι: $x_1=x_2$.

Ομοίως, μέσω της σχέσης (2), αποδεικνύουμε ότι και η συνάρτηση f είναι '1-1'.

(β) Στις σχέσεις (1)**,**(2) θέτουμε όπου y το x και έχουμε τις σχέσεις:

$$f\left(\frac{g(x)}{g(x)}\right)=\frac{f\left(g(x)\right)}{x}\Leftrightarrow f(1)=\frac{f\left(g(x)\right)}{x}\Leftrightarrow f\left(g(x)\right)=f(1)\cdot x$$

$$g\left(\frac{f(x)}{f(x)}\right)=\frac{g\left(f(x)\right)}{x}\Leftrightarrow g(1)=\frac{g\left(f(x)\right)}{x}\Leftrightarrow g\left(f(x)\right)=g(1)\cdot x$$

που για $x=1$, γίνονται: $f\left(g(1)\right)=f(1)$ και $g\left(f(1)\right)=g(1)$.

Επειδή όμως οι συναρτήσεις f,g είναι '1-1', θα ισχύει: $f(1)=g(1)=1$ που σε συνδυασμό με τις προηγούμενες ισότητες έχουμε: $f\left(g(x)\right)=g\left(f(x)\right)=x$.

Άρα η ισότητα (1) γίνεται: $f\left(\frac{g(x)}{g(y)}\right)=\frac{x}{y}$.

Στην τελευταία ισότητα θέτουμε όπου x το $f(x)$ και όπου y το $f(y)$.

Άρα $f\left(\frac{g\left(f(x)\right)}{g\left(f(y)\right)}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}\Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{f(x)}{f(y)}$ και για $x=1$, έχουμε:

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{f(1)}{f(y)}\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{f(y)}\Leftrightarrow f(y)\cdot f\left(\frac{1}{y}\right)=1.$$

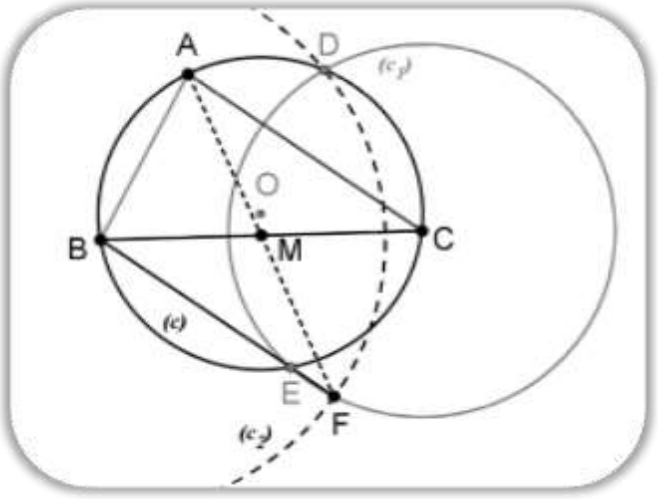
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ABC (με $\mathbf{AB<AC<BC}$*) και ο περιγεγραμμένος κύκλος του* $\mathbf{c(O,R)}$*. Ο κύκλος* $\mathbf{c_1(C,AB)}$ *(με κέντρο το σημείο C και ακτίνα AB) τέμνει τον κύκλο* **(c)** *στα σημεία D και E (το E ανήκει στο τόξο στο οποίο δεν ανήκει το σημείο A). Ο κύκλος* $\mathbf{c_2(B,BD)}$ *(με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BD) τέμνει τον κύκλο* $\mathbf{(c_1)}$ *στο σημείο F. Να αποδείξετε ότι η AF περνάει από το μέσο M της BC.*

Λύση: Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABCD$, ισχύει $AB=CD$ (διότι CD ακτίνα του κύκλου (c_1)). Άρα το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB=CD$, $AD\,//\,BC$ **(*)**.

Από τις ίσες διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου $ABCD$ έχουμε: $AC = BD$ (1).

Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$, ισχύει $AB = CD = CE$ (διότι $CD = CE$ ακτίνες του κύκλου (c_1)). Άρα το τετράπλευρο $ABEC$ είναι ισοσκελές τραπέζιο με $AB = CE$ και $AC // BE$ (2).



Σχήμα 3-10

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι τα σημεία B, E, F είναι συνευθειακά (θα αποδείξουμε ότι $E\hat{B}C = F\hat{B}C$). Από το ισοσκελές τραπέζιο $ABEC$ έχουμε: $E\hat{B}C = A\hat{C}B = \hat{C}$ (3).

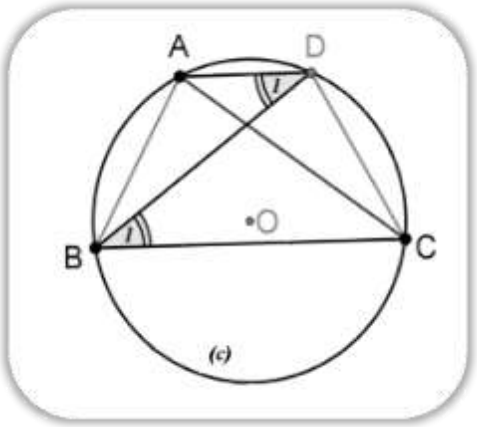
Η διάκεντρος BC των κύκλων (c_1) και (c_2) είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους DF.

Άρα, από το ισοσκελές τραπέζιο $ABCD$ έχουμε:

$$F\hat{B}C = C\hat{B}D = A\hat{C}B = \hat{C} \quad (4).$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $E\hat{B}C = F\hat{B}C = \hat{C}$.

Από τη σχέση (2), έχουμε $AC // BE // BF$ και επειδή $AC = BF = BD$ (από τη σχέση (1)), καταλήγουμε ότι τα τμήματα AC, BF είναι ίσα και παράλληλα.



Σχήμα 3-11

Δηλαδή το τετράπλευρο $ABFC$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται.

(*)

Ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον ίδιο κύκλο και βαίνουν σε ίσα τόξα).

Οι γωνίες αυτές είναι εντός εναλλάξ στις AD και BC με τέμνουσα την BD. Άρα $AD//BC$,

δηλαδή το τετράπλευρο $ABCD$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

3.5.4 33η ΕΜΟ "Ο Αρχιμήδης"

Το γνωστικό επίπεδο των θεμάτων της Εθνικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας ανταποκρίνεται στην ύλη των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τα θέματα της 33ης ΕΜΟ.

Το πρώτο πρόβλημα είναι από την περιοχή της Θεωρίας Αριθμών (**Θ.Α**), το δεύτερο πρόβλημα είναι από την περιοχή της Άλγεβρας (**Α**), το τρίτο πρόβλημα είναι από τη περιοχή της Γεωμετρίας (**Γ**) και το τέταρτο από την περιοχή της Συνδυαστικής Γεωμετρίας (**Σ.Γ**).

33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"

27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Οι θετικοί ακέραιοι p, q και r είναι πρώτοι και έχουν γινόμενο ίσο με n. Αν αυξήσουμε καθέναν από τους p, q κατά 1, τότε το γινόμενο $(p+1)(q+1)r$ είναι ίσο με $n+138$. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του n.

Λύση: Σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{c} pqr=n \\ (p+1)(q+1)r=n+138 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} pqr=n \\ pqr+(p+q)r+r=n+138 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} pqr=n \\ (p+q+1)r=138 \end{array}\right\}.$$

Από την εξίσωση $(p+q+1)r=138=2\cdot 3\cdot 23$ (1)

θα προσδιορίσουμε τις δυνατές τιμές των p,q,r και στη συνέχεια από την εξίσωση $pqr=n$ θα βρούμε τις δυνατές τιμές του n.

Επειδή οι θετικοί ακέραιοι p,q,r είναι πρώτοι, οι δυνατές τιμές του r είναι 2 ή 3 ή 23, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $r=2,$ τότε $p+q+1=69 \Leftrightarrow p+q=68$, από την οποία, αφού p,q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη: $(p,q)=(7,61),\ (p,q)=(61,7),\ (p,q)=(31,37),(p,q)=(37,31).$

  Επομένως για το αρχικό γινόμενο προκύπτουν οι τιμές: $n=7\cdot 61\cdot 2=\mathbf{854}$ ή $n=31\cdot 37\cdot 2=\mathbf{2294}$.
- Αν $r=3,$ τότε προκύπτει η εξίσωση $p+q+1=46 \Leftrightarrow p+q=45$, από την οποία, αφού p,q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη: $(p,q)=(2,43),\ (p,q)=(43,2)$ και η τιμή $n=2\cdot 43\cdot 3=\mathbf{258}$.
- Αν $r=23,$ τότε $p+q+1=6 \Leftrightarrow p+q=5 \Leftrightarrow (p,q)=(2,3)$ ή $(p,q)=(3,2),$ οπότε θα είναι $n=2\cdot 3\cdot 23=\mathbf{138}$.

Επομένως οι δυνατές τιμές του n είναι οι: **138, 258, 854** και **2294**.

Πρόβλημα 2

Οι πραγματικοί αριθμοί $x, y, z,$ με $x\neq z$ είναι διαφορετικοί από το 0 και ικανοποιούν τις ισότητες $\mathbf{(x+y)^2+(2-xy)=9,\ (y+z)^2-(3+yz)=4.}$

Να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A=\left(\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}\right).$$

Λύση: Οι δεδομένες σχέσεις γίνονται:

$x^2+y^2+xy=7,$ (1)

$y^2+z^2+yz=7,$ (2)

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$x^2-z^2+xy-yz=0 \Leftrightarrow (x-z)(x+z)+y(x-z)=0 \Leftrightarrow (x-z)(x+z+y)=0.$$

Από την τελευταία ισότητα, επειδή είναι από την υπόθεση $x-z\neq 0$, έπεται ότι:

$$x+y+z=0\,.$$

(3)

Θεωρούμε τώρα καθέναν χωριστά τους παράγοντες της παράστασης A. Έχουμε

$$\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}=\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2y},\frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}=\frac{x^3+y^3+z^3}{y^2z},$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}=\frac{x^3+y^3+z^3}{z^2x},\ \text{οπότε η παράσταση γίνεται:}$$

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^3}{\left(xyz\right)^3}. \qquad (4)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνουμε: $z=-x-y,$ οπότε

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+\left(-x-y\right)^3=x^3+y^3-\left(x+y\right)^3$$

$$=-3xy\left(x+y\right)=-3xy\left(-z\right)=3xyz. \qquad (5)$$

Η σχέση (5) προκύπτει άμεσα και από την ταυτότητα του Euler.

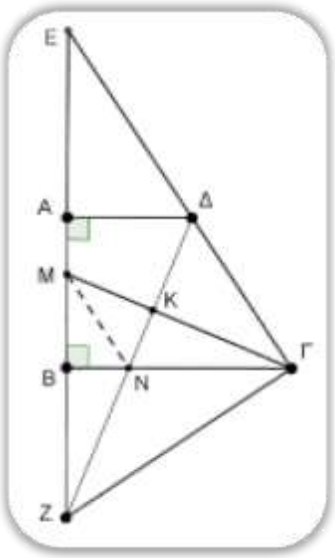
Επομένως, από τη σχέση (4) λαμβάνουμε

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^3}{\left(xyz\right)^3}=\frac{\left(3xyz\right)^3}{\left(xyz\right)^3}=27.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta\ (A\Delta//B\Gamma)$ με $\hat{A}=\hat{B}=90°$ και $A\Delta<B\Gamma$ Ονομάζουμε E το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών AB και $\Gamma\Delta$, Z το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία $B\Gamma$ και M το μέσον της EZ. Αν δίνεται ότι η ευθεία ΓM είναι κάθετη στην ευθεία ΔZ, να αποδείξετε ότι η ευθεία $Z\Gamma$ είναι κάθετη στην ευθεία $E\Gamma$.

Λύση: Έστω ότι η $\Delta\mathrm{Z}$ τέμνει τις $\Gamma\mathrm{M},\mathrm{B}\Gamma$ στα K,N αντίστοιχα. Τότε στο τρίγωνο $\mathrm{A}\Delta\mathrm{Z}$, έχουμε ότι B μέσον του AZ και $\mathrm{BN}//\mathrm{A}\Delta$, οπότε έχουμε ότι N μέσον του $\mathrm{Z}\Delta$.



Σχήμα 3-12

Επομένως στο τρίγωνο $ZE\Delta$ η MN συνδέει τα μέσα δύο πλευρών, οπότε:
$MN // E\Delta$ (1)
Επιπλέον στο τρίγωνο $M\Gamma Z$, τα $\Gamma B, ZK$ είναι ύψη, άρα το σημείο N είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε:

$$MN \perp Z\Gamma \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $Z\Gamma \perp E\Gamma$, που είναι το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4.

Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξάδων $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)$ *που μπορούν να δημιουργηθούν, αν οι αριθμοί* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6$ *μπορούν να πάρουν τις τιμές 0,1 και 2 και το άθροισμα* $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ *είναι άρτιος.*

Λύση: Το άθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6$ είναι άρτιος, αν και μόνο αν το πλήθος των 1 είναι άρτιο, δηλαδή 0,2, 4,6.

Αν δεν έχουμε καθόλου 1, οι δυνατές επιλογές είναι 2^6, αφού για καθέναν από τους a_i έχουμε δύο επιλογές (0 ή 2)

Αν έχουμε δύο 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{2}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 4 θέσεις έχουμε 2^4 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^4\cdot\binom{6}{2}$ δυνατές εξάδες.

Αν έχουμε τέσσερα 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{4}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 2 θέσεις έχουμε 2^2 επιλογές. Δηλαδή

συνολικά έχουμε $2^2 \cdot \binom{6}{4}$ δυνατές εξάδες. Αν έχουμε έξι 1, τότε είναι φανερό ότι έχουμε έναν τρόπο.

Επομένως, συνολικά έχουμε:

$2^6 + 2^4 \cdot \binom{6}{2} + 2^2 \cdot \binom{6}{4} + 1 = 64 + 16 \cdot 15 + 4 \cdot 15 + 1 = 365$ εξάδες.

33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"

27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τις τριάδες μη αρνητικών ακεραίων (x,y,z) με $\mathbf{x \le y}$*, που ικανοποιούν την εξίσωση:*

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 3 \cdot 2016^z + 77}$$

Λύση

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: Αν $z = 0$, τότε έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 = 80$.

Τότε πρέπει οι x, y να είναι πολλαπλάσια του 4, δηλαδή $x = 4a,\ y = 4b$, $0 \le a \le b$, και η εξίσωση γίνεται $a^2 + b^2 = 5$ οπότε $(a,b) = (1,2)$, δηλαδή $(x, y) = \mathbf{(4,8)}$.

Αν $z > 0$, τότε $7 \mid 2016^z$ (επειδή $7 \mid 2016$) και $7 \mid 77$, επομένως το 7 πρέπει να διαιρεί και το αριστερό μέλος, δηλαδή $7 \mid x^2 + y^2$. Τα πιθανά υπόλοιπα ενός τετραγώνου με το 7 είναι τα ίδια με τα υπόλοιπα των $0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2$ που είναι $0,1,2,4$. Οπότε, για να ισχύει $7 \mid x^2 + y^2$ πρέπει $7 \mid x, 7 \mid y$ και γράφουμε $x = 7x_1$ και $y = 7y_1$, με $0 \le x_1 \le y_1$. Αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε $49(x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 2016^z + 77$. Αν $z \ge 2$, τότε $49 \mid 2016^z$, οπότε αφού διαιρεί και το αριστερό μέλος, θα πρέπει $49 \mid 77$, που είναι άτοπο. Αν $z = 1$, τότε $49(x_1^2 + y_1^2) = 3 \cdot 7 \cdot 288 + 77 = 7(3 \cdot 288 + 11) = 7 \cdot 7 \cdot 125$. Δηλαδή πρέπει $x_1^2 + y_1^2 = 125$. Αφού $x_1 \le y_1$, έχουμε ότι $2y_1^2 \ge 125 \Rightarrow y_1 \ge 8$. Για $y_1 = 8,9,10,11$, βρίσκουμε τις λύσεις $(x_1, y_1) \in \{(5,10), (2,11)\}$. Τελικά οι λύσεις είναι: $(x, y) \in \{\mathbf{(4,8), (35, 70), (14, 77)}\}$.

Πρόβλημα 2

Τα πολυώνυμα $\mathbf{P(x), Q(x)}$ *με πραγματικούς συντελεστές είναι μη σταθερά, έχουν συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου ίσο με* 1 *και επιπλέον ικανοποιούν τις ισότητες:*

$\mathbf{2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)}$, *για κάθε* $\mathbf{x \in \mathbb{R}}$, $\mathbf{P(1) = 1}$. *Να βρείτε τα πολυώνυμα* $\mathbf{P(x)}$ **και** $\mathbf{Q(x)}$.

Λύση

Έστω $Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$. Τότε ο μεγιστοβάθμιος όρος του πολυωνύμου $Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)$ προέρχεται από το ανάπτυγμα των μεγιστοβάθμιων όρων $\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right)^n - \left(\frac{(x-1)^2}{2}\right)^n$. Ο μεγιστοβάθμιος όρος του τελευταίου ισούται με

$$\frac{2nx^{2n-1}}{2^n} + \frac{2nx^{2n-1}}{2^n} = \frac{4n}{2^n}x^{2n-1} \qquad (1).$$

Όμως ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου στο αριστερό μέλος ισούται με 2, οπότε πρέπει $\frac{4n}{2^n} = 2 \Leftrightarrow 2^{n+1} = 4n$. Όμως $2^{n+1} > 4n$ για $n \geq 3$, οπότε $n = 1$ ή $n = 2$ και από την (1) ο βαθμούς του P είναι $2-1=1$ ή $2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Για $x = 0$ στην αρχική σχέση παίρνουμε $2P(0) = Q(1/2) - Q(1/2) = 0$, άρα $P(0) = 0$.

- Αν τώρα $n = 1$, τότε $P(x) = ax$ και αφού $P(1) = 1$, θα είναι
$$P(x) = x \text{ και } Q(x) = x + a_0,\ a_0 \in \mathbb{R}.$$
- Αν $n = 2$, τότε αν $Q(x) = x^2 + bx + c$, έχουμε:

$$2P(x) = Q\left(\frac{(x+1)^2}{2}\right) - Q\left(\frac{(x-1)^2}{2}\right) = \frac{1}{4}\left((x+1)^4 - (x-1)^4\right) + \frac{b}{2}\left((x+1)^2 - (x-1)^2\right) =$$
$$= \frac{1}{4}(8x^3 + 8x) + \frac{b}{2}(4x) = 2x^3 + 2(1+b)x.$$

Επομένως, $P(x) = x^3 + (1+b)x$. Επειδή επιπλέον $P(1) = 1$, πρέπει $b = -1$, οπότε
$$P(x) = x^3 \text{ και } Q(x) = x^2 - x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές και οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (με ΑΒ=ΑΓ) και το ύψος του ΓΔ. Ο κύκλος $\mathbf{c_2(Γ, ΓΔ)}$ *τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ, την προέκταση της ΑΓ στο σημείο Ζ και τον κύκλο* $\mathbf{c_1(Β, ΒΔ)}$ *στο σημείο Ε. Η ΔΖ τέλος τέμνει τον κύκλο*

$\mathbf{c_1}$ *στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:*

(α) $\mathbf{Z\hat{\Delta}E = 45^0}$, *(β) Τα σημεία* **Ε,Μ και Κ** *βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία,*

(γ) Η ευθεία **ΒΜ** *είναι παράλληλη με την ευθεία* **ΕΓ**.

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΒΓΔ έχουμε: $\hat{\Gamma}_1 = 90^0 - \hat{\text{B}}$.

Η διάκεντρος ΒΓ των κύκλων c_1 και c_2 είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους ΔE.

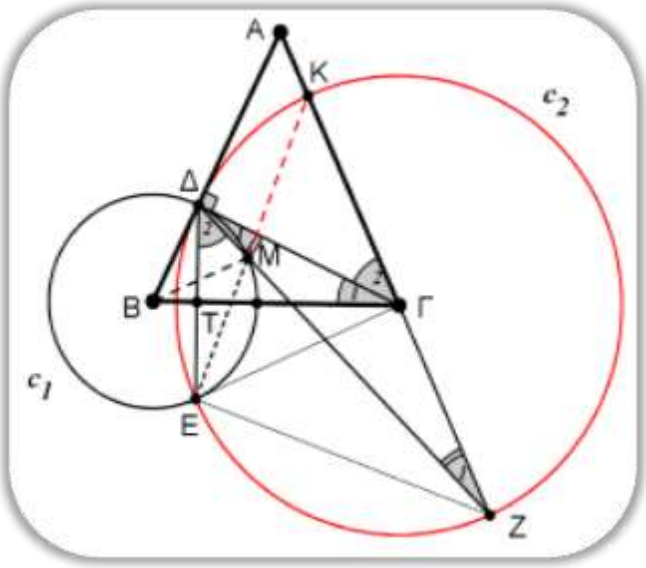
Αν λοιπόν Τ είναι το σημείο τομής των ΒΓ και ΔE,

τότε (από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\text{Τ}\Delta$) έχουμε: $\hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 90^0$, δηλαδή

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{\text{B}} = \hat{\Gamma}. \qquad (1)$$

Από το ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma\Delta\text{Z}$ έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = \hat{\text{Z}}_1$ και $\hat{\Gamma}_2 = 2\hat{\Delta}_1 = 90^0 - \hat{\text{A}}$, οπότε

$$\hat{\Delta}_1 = 45^0 - \frac{\hat{\text{A}}}{2}. \qquad (2)$$



Σχήμα 3-13

Από το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$\hat{\text{B}} = 90^0 - \frac{\hat{\text{A}}}{2}. \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = \hat{\text{B}} = \hat{\Gamma} \Leftrightarrow \hat{\Delta}_2 = \hat{\text{B}} - \hat{\Delta}_1 \overset{(2),(3)}{\Leftrightarrow} \hat{\Delta}_2 = 90^0 - \frac{\hat{\text{A}}}{2} - \left(45^0 - \frac{\hat{\text{A}}}{2}\right) = 45^0.$$

(β) Η γωνία $\hat{\Delta}_1$ σχηματίζεται από την χορδή ΔM και την εφαπτομένη $\Delta\Gamma$ του κύκλου c_1, άρα $\Delta\hat{\text{E}}\text{M} = \hat{\Delta}_1$. Ισχύει επίσης $\Delta\hat{\text{E}}\text{K} = \Delta\hat{\text{Z}}\text{K} = \hat{\text{Z}}_1$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο c_2 και βαίνουν στο τόξο ΔK). Επειδή όμως $\hat{\Delta}_1 = \hat{\text{Z}}_1$, θα ισχύει $\Delta\hat{\text{E}}\text{M} = \Delta\hat{\text{E}}\text{K}$, οπότε τα σημεία $\text{E},\text{M},\text{K}$ είναι συνευθειακά.

(γ) Θα αποδείξουμε ότι $\Delta\hat{B}M = 90^0 - \hat{A}$.

Ισχύει: $\Delta\hat{B}M = 2\Delta\hat{E}M = 2\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 = 90 - \hat{A}$, οπότε $BM \perp A\Gamma$.

Επιπλέον, ισχύει $E\hat{K}Z = E\hat{\Delta}Z = \hat{\Delta}_2 = 45^0$, οπότε το ορθογώνιο τρίγωνο EZK είναι ισοσκελές και η διάμεσός του $E\Gamma$ είναι και ύψος, δηλαδή $E\Gamma \perp KZ$.

Άρα $BM // E\Gamma$ (ως κάθετες στην ευθεία AZ).

Πρόβλημα 4

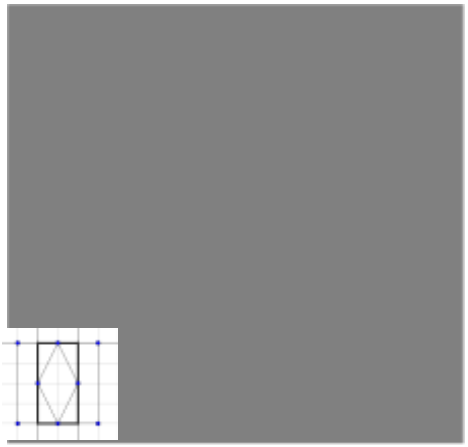
Τετράγωνο $ABCD$ διαιρείται σε n^2 ίσα μικρά (στοιχειώδη) τετράγωνα, σχεδιάζοντας ευθείες παράλληλες στις πλευρές του. Τις κορυφές των στοιχειωδών τετραγώνων τις ονομάζουμε σημεία του πλέγματος. Ένα ρόμβο θα τον ονομάζουμε "καλό", όταν:

- *δεν είναι τετράγωνο*
- *οι κορυφές του είναι σημεία του πλέγματος,*
- *οι διαγώνιές του είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$.*

Να βρεθεί συναρτήσει του n (με κλειστό τύπο) το πλήθος των "καλών" ρόμβων, όπου n ακέραιος αριθμός μεγαλύτερος του 2.

Λύση

Από τις κορυφές του ρόμβου φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές τους πλέγματος, οπότε βρίσκουμε το ελάχιστο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περιέχει το ρόμβο. Λόγω της συμμετρίας ως προς κέντρο του ρόμβου, θα πρέπει το ορθογώνιο αυτό να έχει άρτια μήκη πλευρών.



Επομένως αρκεί να μετρήσουμε τα ορθογώνια με άρτια μήκη πλευρών $2s \times 2t$ για τα οποία ισχύει $s \neq t$.

Για το σκοπό αυτό θα μετρήσουμε όλα τα ορθογώνια $2s \times 2t$ και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s \times 2s$.

- Έστω ότι $n = 2k$

Αριθμούμε τις κάθετες ευθείες του πλέγματος από αριστερά προς τα δεξιά $1,2,3,...,2k+1$ και τις γραμμές του πλέγματος, από κάτω προς τα πάνω $1,2,3,...,2k+1$. Ένα ορθογώνιο $2s \times 2t$ προσδιορίζεται από δύο κάθετες γραμμές του πλέγματος και δύο οριζόντιες που έχουν άρτια απόσταση. Για να έχουν άρτια απόσταση πρέπει και οι δύο να έχουν άρτιο αριθμό ή και οι δύο περιττό αριθμό. Για να διαλέξουμε δύο κάθετες γραμμές

με άρτιο αριθμό έχουμε $\binom{k}{2}$ επιλογές, ενώ για να διαλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με περιττό αριθμό έχουμε $\binom{k+1}{2}$ επιλογές. Οπότε για να επιλέξουμε δύο κάθετες γραμμές με άρτια απόσταση έχουμε $\binom{k}{2}+\binom{k+1}{2}=k^2$ επιλογές. Όμοια, έχουμε k^2 επιλογές για τις στήλες. Οπότε συνολικά έχουμε $k^2\cdot k^2=k^4$ ορθογώνια $2s\times 2t$. Μένει τώρα να αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$. Τα 2×2 τετράγωνα είναι $(n-2+1)^2=(2k-2+1)^2$. Τα 4×4 είναι $(n-4+1)^2=(2k-4+1)^2$. Γενικά τα $2s\times 2s$ είναι $(n-2s+1)^2=(2k-2s+1)^2$. Άρα όλα μαζί είναι

$$\sum_{s=1}^{k}(2k-2s+1)^2=\sum_{s=1}^{k}(2k+1)^2-4s(2k+1)+4s^2=$$

$$k(2k+1)^2-2(2k+1)k(k+1)+4\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

Επομένως οι ρόμβοι είναι: $k^4-\frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}=\frac{k(k-1)(3k^2-k-1)}{3}$.

- Όταν $n=2k+1$, εντελώς όμοια με παραπάνω έχουμε $\binom{k+1}{2}+\binom{k+1}{2}=k(k+1)$

επιλογές για την επιλογή των δύο κάθετων γραμμών και $k(k+1)$ επιλογές για την επιλογή των οριζόντιων. Επομένως έχουμε συνολικά $(k(k+1))^2$ ορθογώνια $2s\times 2t$ και πρέπει να αφαιρέσουμε τα τετράγωνα $2s\times 2s$ που είναι $(n-2s+1)^2=(2k+1-2s+1)^2=(2k+2-2s)^2$. Δηλαδή συνολικά

$$\sum_{s=1}^{k}(2k+2-2s)^2=\sum_{s=1}^{k}(2k+2)^2-4(2k+2)s+4s^2$$

$$=k(2k+2)^2-2(2k+2)k(k+1)+4\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}$$

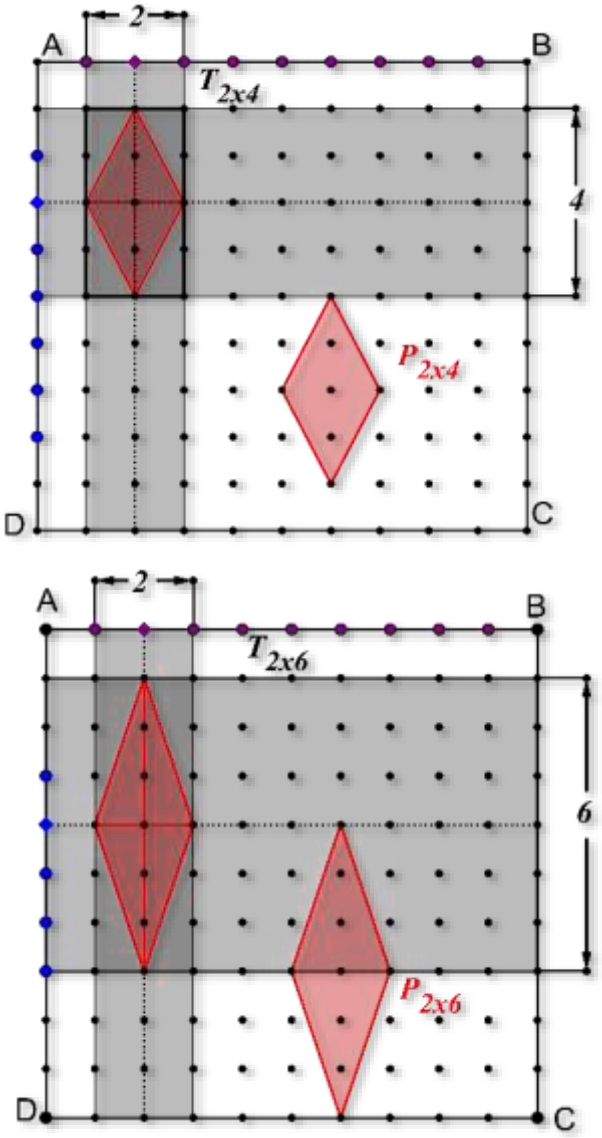
Επομένως, οι ρόμβοι είναι συνολικά: $(k(k+1))^2-\frac{2k(k+1)(2k+1)}{3}=\frac{k(k+1)(3k^2-k-2)}{3}$

2ος τρόπος

Υποθέτουμε ότι το μήκος των πλευρών των στοιχειωδών τετραγώνων είναι *1*.

Αν οι διαγώνιες του ρόμβου είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου, τότε οι κορυφές του θα είναι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη πολλαπλάσια του *2*

και είναι παράλληλες με τις πλευρές του αρχικού τετραγώνου.



Στα δύο παραπάνω σχήματα βλέπουμε ορθογώνια παραλληλόγραμμα (που οι πλευρές τους είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραγώνου $ABCD$).
Σε κάθε ορθογώνιο τύπου T_{2x4} αντιστοιχεί ένας και μόνο ρόμβος τύπου P_{2x4}.
Σε κάθε ορθογώνιο τύπου T_{2x6} αντιστοιχεί ένας και μόνο ρόμβος τύπου $P_{2x6}\ldots$
Για να προσδιορίσουμε λοιπόν το πλήθος των ρόμβων, αρκεί να υπολογίσουμε το πλήθος των ορθογωνίων τύπου $T_{(2m)x(2k)}$, όπου m,k ακέραιοι με $1 \le m < k \le l$, όταν $n = 2l$.
Για $m = 1$ και $k = 2$, έχουμε:
Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{2x4} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x2}) είναι $(n-1)(n-3)$.

Για $m=1$ και $k=3$, έχουμε:

Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους 6, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-5$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{2x6} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{6x2}) είναι $(n-1)(n-5)$.

……

Για $m=1$ και $k=l$, έχουμε:

Ένα τμήμα μήκους 2, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-1$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους $2l$, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-2l+1=1$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{2x(2l)}$ (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{(2l)x2}$) είναι $(n-1)(n-2l+1)=(n-1)\cdot 1$.

Τελικά το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων η μία πλευρά, έχει μήκος 2, είναι:

$$S_2 = 2\big((n-1)(n-3)+(n-1)(n-5)+\cdots+(n-1)\cdot 1\big) =$$

$$= 2(n-1)\big((n-3)+(n-5)+\cdots+1\big) = 2(n-1)\frac{1+(n-3)}{2}\cdot\frac{n-2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)^2}{2}.$$

Για $m=2$ και $k=3$, έχουμε:

Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους 6, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-5$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x6} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{6x4}) είναι $(n-3)(n-5)$.

Για $m=2$ και $k=4$, έχουμε:

Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB).

Ένα τμήμα μήκους 8, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-7$ τρόπους (στην πλευρά AD).

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{4x8} (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου T_{8x4}) είναι $(n-3)(n-7)$.

……

Για $m=2$ και $k=l$, έχουμε: Ένα τμήμα μήκους 4, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-3$ τρόπους (στην πλευρά AB). Ένα τμήμα μήκους $2l$, μπορούμε να το επιλέξουμε με $n-2l+1=1$ τρόπους (στην πλευρά AD).
Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{4x(2l)}$ (καθώς και των ορθογωνίων παραλληλογράμμων τύπου $T_{(2l)x4}$) είναι $(n-3)(n-2l+1)=(n-3)\cdot 1$.

Τελικά το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων των οποίων η μία πλευρά, έχει μήκος 4, είναι:

$$S_4 = 2\big((n-3)(n-5)+(n-3)(n-7)+\cdots+(n-3)\cdot 1\big)=$$

$$=2(n-3)\big((n-5)+(n-7)+\cdots+1\big)=\frac{(n-3)(n-4)^2}{2}.$$

Ανακεφαλαιώνοντας και επεκτείνοντας τη διαδικασία έχουμε:

$$S_2 = 2(n-1)(n-l-1)(l-1)=\begin{cases}\dfrac{(n-1)(n-2)^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{(n-3)(n-1)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

$$S_4 = 2(n-3)(n-l-2)(l-2)=\begin{cases}\dfrac{(n-3)(n-4)^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{(n-5)(n-3)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

$$S_6 = 2(n-5)(n-l-3)(l-3)=\begin{cases}\dfrac{(n-5)(n-6)^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{(n-7)(n-5)^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

……

$$S_{2l-4}=\begin{cases}\dfrac{5\cdot 4^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{6\cdot 8^2}{2}, & n=2l+1,\end{cases}\quad S_{2l-2}=\begin{cases}\dfrac{3\cdot 2^2}{2}, & n=2l\\ \dfrac{4\cdot 6^2}{2}, & n=2l+1,\end{cases}\quad S_{2l}=\begin{cases}0, & n=2l\\ \dfrac{2\cdot 4^2}{2}, & n=2l+1\end{cases}$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (για $n=2l$) δίνεται από το άθροισμα:

$$S=S_2+S_4+\cdots+S_{2l-2}=\frac{(n-1)(n-2)^2}{2}+\frac{(n-3)(n-4)^2}{2}+\cdots+\frac{5\cdot 4^2}{2}+\frac{3\cdot 2^2}{2}$$

$$=\frac{(n-2)^3+(n-2)^2}{2}+\frac{(n-4)^3+(n-4)^2}{2}+\ldots+\frac{4^3+4^2}{2}+\frac{2^3+2^2}{2}$$

.

Γράφοντας $n=2l$ το παραπάνω άθροισμα, γίνεται:

$$S=\frac{8(l-1)^3+4(l-1)^2}{2}+\frac{8(l-2)^3+4(l-2)^2}{2}+\ldots+\frac{8\cdot 2^3+4\cdot 2^2}{2}+\frac{8+4}{2}=$$

$$=4((l-1)^3+(l-2)^3+\ldots+1)+2((l-1)^2+\ldots+1)=$$

$$=\left(l(l-1)\right)^2+2\cdot\frac{(l-1)l(2l-1)}{6}=l(l-1)\left(l(l-1)+\frac{2l-1}{3}\right)=\frac{l(l-1)(3l^2-l-1)}{3}$$

Άρα το πλήθος των ορθογωνίων παραλληλογράμμων (για $n=2l+1$) δίνεται από το άθροισμα:

$$S'=S_2+S_4+\cdots+S_{2l-2}+S_{2l}=\frac{(n-3)(n-1)^2}{2}+\frac{(n-5)(n-3)^2}{2}+\cdots+\frac{4\cdot 6^2}{2}+\frac{2\cdot 4^2}{2}$$

Γράφοντας $n=2l+1$ το παραπάνω άθροισμα, γίνεται:

$$S'=\frac{(2l-2)(2l)^2}{2}+\frac{(2l-4)(2l-2)^2}{2}+\ldots+\frac{4\cdot 6^2}{2}+\frac{2\cdot 4^2}{2}=$$

$$=4(l^3-l^2)+4((l-1)^3-(l-1)^2)+\ldots+4(3^3-2^3)+4(2^3-2^2)+4(1^3-1^2)=$$

$$=4((l^3+(l-1)^3+\ldots+1)-(l^2+(l-1)^2+\ldots+1))=$$

$$=(l(l+1))^2-2\frac{l(l+1)(2l+1)}{3}=\frac{l(l+1)(3l^2-l-2)}{3}.$$

Τους δύο τύπους μπορούμε να τους συνοψίσουμε με τη βοήθεια του ακεραίου μέρους ως:

$$\frac{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor\cdot\left\lfloor\frac{n+1}{2}\right\rfloor\left(3\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2-\left\lfloor\frac{n+3}{2}\right\rfloor\right)}{3}.$$

3.5.5 19ος Μεσογειακός Μαθηματικός Διαγωνισμός

19ος ΜΕΣΟΓΕΙΑΚΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ 2016
PETER O' HALLORAN MEMORIAL

27 Μαρτίου 2016

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους $n\geq 1$ για τους οποίους ο αριθμός $n^8+n^6+n^4+4$ είναι πρώτος.

Λύση

Χρησιμοποιούμε την παραγοντοποίηση

$$n^8+n^6+n^4+4=n^8+n^4+4+2n^6+4n^4+4n^2-\left(n^6+4n^4+4n^2\right)$$
$$=\left(n^4+n^2+2\right)^2-\left(n^3+2n\right)^2$$
$$=\left(n^4-n^3+n^2-2n+2\right)\left(n^4+n^3+n^2+2n+2\right)=f(n)g(n).$$

Ο πρώτος παράγοντας $f(n)$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f(n)=n^4-n^3+n^2-2n+2=n^3(n-1)+(n-1)^2+1,$$

οπότε ικανοποιεί την ανισότητα $f(n)\geq 2,$ για κάθε $n\geq 2.$ Ο δεύτερος παράγοντας $g(n)$ ικανοποιεί επίσης τη σχέση

$$g(n)=n^4+n^3+n^2+2n+2>2, \text{ για κάθε } n\geq 2.$$

Επομένως, απομένει η περίπτωση για $n=1$ η οποία πράγματι δίνει πρώτο αριθμό, αφού $f(1)g(1)=1\cdot 7=7$.

Πρόβλημα 2

Έστω a,b,c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a+b+c=3$ Να αποδείξετε ότι

$$\sqrt{\frac{b}{a^2+3}}+\sqrt{\frac{c}{b^2+3}}+\sqrt{\frac{a}{c^2+3}}\leq\frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{abc}}.$$

Λύση

Θεωρώντας τις τριάδες $\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+3}},\frac{1}{\sqrt{b^2+3}},\frac{1}{\sqrt{c^2+3}}\right)$ και $\left(\sqrt{b},\sqrt{c},\sqrt{a}\right),\ a,b,c>0,$ από την ανισότητα Cauchy – Schwarz έχουμε

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a^2+3}}+\sqrt{\frac{c}{b^2+3}}+\sqrt{\frac{a}{c^2+3}}\right)^2\leq\left(\frac{1}{a^2+3}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+3}\right)(b+c+a)$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{\frac{b}{a^2+3}}+\sqrt{\frac{c}{b^2+3}}+\sqrt{\frac{a}{c^2+3}}\right)^2\leq 3\left(\frac{1}{a^2+3}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+3}\right),\qquad(1)$$

αφού από την υπόθεση δίνεται ότι $a+b+c=3$.

Από την ισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου έχουμε

$$a^2+3=a^2+1+1+1\geq 4\sqrt[4]{a^2}=4\sqrt{a}\Rightarrow\frac{1}{a^2+3}\leq\frac{1}{4\sqrt{a}}$$

και ομοίως προκύπτουν οι ανισότητες $\frac{1}{b^2+3}\leq\frac{1}{4\sqrt{b}},\ \frac{1}{c^2+3}\leq\frac{1}{4\sqrt{c}}$ οπότε

$$\frac{1}{a^2+3}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+3}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)=\frac{\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}}{4\sqrt{abc}}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{a^2+3}+\frac{1}{b^2+3}+\frac{1}{c^2+3}\leq\frac{\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}+\frac{a+b}{2}}{4\sqrt{abc}}=\frac{a+b+c}{4\sqrt{abc}}.\qquad(2)$$

Από τις ανισότητες (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a^2+3}}+\sqrt{\frac{c}{b^2+3}}+\sqrt{\frac{a}{c^2+3}}\right)^2\leq\frac{3(a+b+c)}{4\sqrt{abc}}=\frac{9}{4\sqrt{abc}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{b}{a^2+3}}+\sqrt{\frac{c}{b^2+3}}+\sqrt{\frac{a}{c^2+3}} \le \frac{3}{2\sqrt[4]{abc}}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $a=b=c$ και $a+b+c=3 \Leftrightarrow a=b=c=1.$

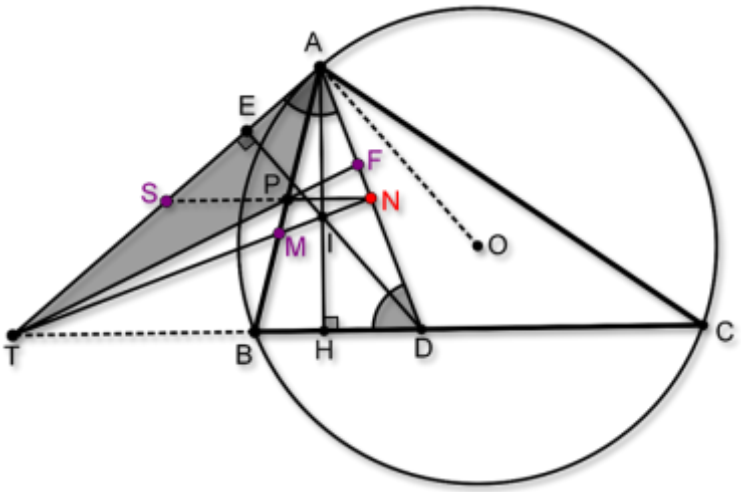
Πρόβλημα 3

΄Εστω τρίγωνο ABC και έστω D το σημείο στο οποίο η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την πλευρά BC. Η κάθετη από το D προς την εφαπτομένη AT του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC (το σημείο T ανήκει στην ευθεία BC) τέμνει το ύψος AH_a στο σημείο I (το σημείο H_a ανήκει στην ευθεία BC. Αν P είναι το μέσο της πλευράς AB, O είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, η ευθεία TI τέμνει την AB στο σημείο M και η ευθεία PT τέμνει την AD στο σημείο F, να αποδείξετε ότι η ευθεία MF είναι κάθετη προς την ευθεία AO.

Λύση

Η γωνία $T\hat{A}B$ σχηματίζεται από τη χορδή AB και την εφαπτομένη TA, άρα θα ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στη χορδή. Δηλαδή $T\hat{A}B=\hat{C}$. Επειδή η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, έπεται ότι: $B\hat{A}D=\frac{\hat{A}}{2}$. Άρα για τη γωνία $T\hat{A}D$, έχουμε

$$T\hat{A}D = T\hat{A}B + B\hat{A}D = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2} \qquad (1)$$



Σχήμα 3-14

Η γωνία $A\hat{D}T$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ADC, οπότε

$$A\hat{D}T = D\hat{A}C + \hat{C} = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), συμπεραίνουμε ότι $T\hat{A}D = A\hat{D}T$, οπότε το τρίγωνο TAD είναι ισοσκελές (TA=TD). Οι DE και AH είναι ύψη του ισοσκελούς τριγώνου TAD, άρα το σημείο I είναι το ορθόκεντρό του. Το TI

είναι το τρίτο ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου TAD, άρα θα είναι και διάμεσος. Δηλαδή το σημείο N (που βρίσκεται στη προέκταση του TI) είναι το μέσο του AD.

Αν τώρα P είναι το μέσο του AB, τότε η PN θα είναι παράλληλη στην BC και θα διέρχεται από το μέσο S του AT. Έστω ότι η PT τέμνει την AD στο σημείο F.

Στο τρίγωνο APT οι AF, PS, TM είναι σεβιανές που συντρέχουν στο σημείο N, οπότε θα ισχύει ότι:

$$\frac{FP}{FT}\cdot\frac{ST}{SA}\cdot\frac{MA}{MP}=1\Rightarrow\frac{FP}{MP}=\frac{TF}{MA},$$

αφού το S είναι το μέσο της AT. Επομένως προκύπτει ότι: $MF\parallel AT$.Ισχύει όμως ότι $AT\perp OA$, οπότε $MF\perp OA$.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε έναν 25x25 σκακιστικό πίνακα με τετράγωνα $C(i,j),\ \text{για}\ 1\le i,j\le 25$. Βρείτε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό n των χρωμάτων με τα οποία αυτά τα τετράγωνα μπορούν να χρωματιστούν, έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη:

- Για $1\le i<j\le 25$ και για $1\le s<t\le 25,$ τα τρία τετράγωνα $C(i,s),C(j,s),C(j,t)$ έχουν χρωματιστεί με δύο τουλάχιστον διαφορετικά χρώματα.

Λύση

Σύμφωνα με τη συνθήκη του προβλήματος δεν επιτρέπεται να υπάρχει στον σκακιστικό πίνακα χρωματισμός με το ίδιο χρώμα της μορφής



Για έναν 3×3 σκακιστικό πίνακα εύκολα διαπιστώνουμε ότι δύο χρώματα, έστω 1 και 2, είναι αρκετά, αφού μπορούμε να έχουμε τον πίνακα

1	1	2
1	2	2
2	2	1

Για έναν πίνακα 5×5 παρατηρούμε ότι χρειαζόμαστε 3 χρώματα, αφού έχουμε:

1	1	2	2	3
1	2	2	3	3
2	2	3	3	1
2	3	3	1	1

3	3	1	1	2

Έτσι για έναν πίνακα τύπου $n \times n$ φαίνεται πιθανό, ότι ο ελάχιστος αριθμός των απαιτούμενων χρωμάτων είναι $m(n) = \frac{n+1}{2}$. Έτσι για την περίπτωση που είναι $n = 25$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο ελάχιστος αναγκαίος αριθμός χρωμάτων είναι 13.

- ***Τα 13 χρώματα είναι αρκετά για το ζητούμενο χρωματισμό***

Χρησιμοποιώντας τα χρώματα (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,0) μπορούμε να έχουμε, εργαζόμενοι ανάλογα με τις προηγούμενες περιπτώσεις τον πίνακα

1	1	2	2	…	11	12	12	0
1	2	2	3	…	12	12	0	0
2	2	3	3		12	0	0	1
.	.	.	.	…	.	.	.	.
.	.	.	.	…	.	.	.	.
.	.	.	.	…	.	.	.	.
12	12	0	0		9	10	10	11
12	0	0	1		10	10	11	11
0	0	1	1		10	11	11	12

ο οποίος ικανοποιεί τη συνθήκη του προβλήματος. Πράγματι, αν συμβολίσουμε το χρώμα του τετραγώνου $C(i, j)$ με $C[i, j]$, τότε, σύμφωνα με την τεχνική του χρωματισμού μας, έχουμε: $C[i, j] = \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor (\text{mod}13)$, για $1 \le i \le j \le 25$. Για να ισχύει η μη επιτρεπόμενη συνθήκη πρέπει να υπάρχουν i, j, s, t τέτοια ώστε

$$C[i,s] = C[j,s] = C[j,t], \qquad 1 \le i < j \le 25, \qquad 1 \le s < t \le 25$$
$$\Leftrightarrow \left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor (\text{mod}13) = \left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor (\text{mod}13) = \left\lfloor \frac{j+t}{2} \right\rfloor (\text{mod}13), 1 \le i < j \le 25, \ 1 \le s < t \le 25.$$

Επειδή $0 \le \left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor < \left(\frac{j+s}{2} + 1 \right) - \frac{i+s}{2} = \frac{j-i}{2} + 1 \le \frac{24}{2} + 1 = 13$, από την ισοδυναμία $\left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor (\text{mod}13) = \left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor (\text{mod}13) \Leftrightarrow \left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor = \pi o \lambda .13$, έπεται ότι

$$\left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor. \qquad (1)$$

Εργαζόμενοι ομοίως, από την σχέση $\left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor (\text{mod}13) = \left\lfloor \frac{j+t}{2} \right\rfloor (\text{mod}13)$, προκύπτει η ισότητα

$$\left\lfloor \frac{j+s}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j+t}{2} \right\rfloor. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει η ισότητα

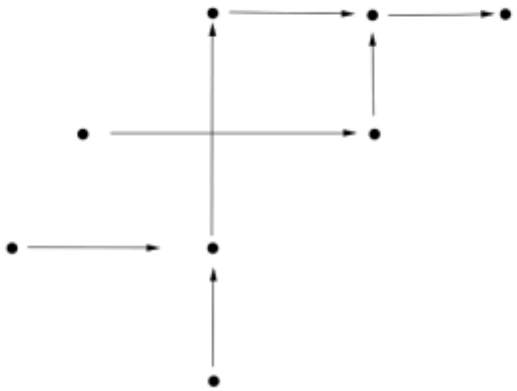
$$\left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{j+t}{2} \right\rfloor$$

η οποία είναι αδύνατη, αφού

$$\left\lfloor \frac{i+s}{2} \right\rfloor \le \frac{i+s}{2} \le \frac{j-1+t-1}{2} = \frac{j+t}{2} - 1 < \left\lfloor \frac{j+t}{2} \right\rfloor.$$

- ***Τα 13 χρώματα είναι αναγκαία.***

Απομένει να αποδείξουμε ότι 13 χρώματα είναι αναγκαία για το ζητούμενο χρωματισμό. Θεωρούμε έναν πίνακα 25×25 με ένα χρωματισμό που ικανοποιεί τη δεδομένη συνθήκη. Περιοριζόμαστε σε ένα μόνο χρώμα, έστω το 2. Ονομάζουμε 2-τετράγωνα εκείνα που είναι χρωματισμένα με το χρώμα 2. Έστω c_2 ο αριθμός των 2-τετραγώνων. Θεωρούμε τον πίνακα μόνο με το χρώμα 2, σβήνοντας όλα τα υπόλοιπα χρώματα. Από κάθε 2-τετράγωνο φέρουμε οριζόντια βέλη από αριστερά προς τα δεξιά ή κατακόρυφα βέλη από κάτω προς τα πάνω που συνδέουν δύο διαδοχικά 2–τετράγωνα. Ονομάζουμε αυτά τα βέλη 2-βέλη.



Από κάθε 2-τετράγωνο δεν μπορεί να ξεκινούν δύο ή περισσότερα 2-βέλη, γιατί διαφορετικά δεν θα ισχύει η συνθήκη του προβλήματος.

Επομένως ο συνολικός αριθμός των 2-βελών, έστω a_2, θα ικανοποιεί τη σχέση: $c_2 \ge a_2$. Είναι φανερό ότι στην *i*-γραμμή, αν υπάρχουν k_i 2-τετράγωνα, τότε υπάρχουν $k_i - 1$ οριζόντια 2-βέλη στη γραμμή αυτή, οπότε ο συνολικός αριθμός των οριζόντιων 2-βελών ισούται με

$$k_1 - 1 + k_2 - 1 + \ldots + k_{25} - 1 = \left(k_1 + k_2 + \ldots + k_{25}\right) - 25 = c_2 - 25,$$

αφού υπάρχουν συνολικά 25 γραμμές.

Ομοίως, μελετώντας τις στήλες, διαπιστώνουμε ότι ο συνολικός αριθμός των κατακόρυφων 2-βελών ισούται με $c_2 - 25.$ Επομένως ο συνολικός αριθμός των 2-βελών ισούται με $a_2 = 2\left(c_2 - 25\right)$ και ισχύει ότι $c_2 \ge a_2 = 2\left(c_2 - 25\right) \Leftrightarrow c_2 \le 50.$

Επειδή υπάρχουν $25 \cdot 25 = 625$ τετράγωνα και $\frac{625}{50} = 12\frac{1}{2} > 12$ θα χρειαστούμε τουλάχιστον 13 χρώματα για τη δημιουργία του χρωματισμού.

3.6 Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (ΒΜΟ)

Balkan Mathematical Olympiad (BMO)

"Ήταν πλέον καιρός τα Βαλκανικά νιάτα να μη συναντώνται μόνο στους συνήθεις αθλητικούς στίβους, όπου αναδεικνύεται και επιβραβεύεται η σωματική ρώμη και ομορφιά, αλλά και σε στίβους πλέον υπέροχους, έστω και λιγότερο εντυπωσιακούς όπου η Αθηνά μόνο λατρεύεται και αυτή απονέμει τον κότινο της Νίκης".

(Απόσπασμα από την ομιλία του Προέδρου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας Ε. Γαλανή κατά την τελετή έναρξης της 1ης Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας).[12]

Η δημιουργία ενός θεσμού (δηλαδή μιας Μαθηματικής Ολυμπιάδας μεταξύ των χωρών της Βαλκανικής) υπήρξε ως ιδέα διότι απηχούσε και ανταποκρινόταν στις προσδοκίες των Μαθηματικών των Βαλκανικών χωρών.

Όμως για πρώτη φορά συμφωνήθηκε στο Παρίσι μόλις τον Ιούλιο του 1983 κατά την διοργάνωση της 24ης Διεθνούς Μαθηματικής Ολυμπιάδας από τους συνοδούς της Ελλάδας (Γ. Κολέτσος, Δ. Κοντογιάννης και Γ. Ωραιόπουλος), της Βουλγαρίας και της Ρουμανίας να γίνει εισήγηση στα Διοικητικά Συμβούλια των αντίστοιχων Εθνικών Μαθηματικών Εταιρειών για τη διοργάνωση Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας.

Έτσι μετά από εισήγηση του Διοικητικού Συμβουλίου της Ε.Μ.Ε προς τα αντίστοιχα Διοικητικά Συμβούλια των Βαλκανικών χωρών διοργανώθηκε στην Αθήνα από 6 μέχρι 10 Μαΐου το 1984 η 1η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (ΒΜΟ). Συμμετείχαν, η Ελλάδα, η Βουλγαρία και η Ρουμανία με 6 μαθητές καθεμία. Οι μαθητές διαγωνίστηκαν σε 4 προβλήματα με μέγιστη βαθμολογία 10 βαθμούς για κάθε πρόβλημα. Η τελική βαθμολογία της 1ης ΒΜΟ ήταν:

1. Ρουμανία 237 βαθμοί [5 Χρυσά και 1 Αργυρό μετάλλιο]

2. Βουλγαρία 236 βαθμοί [5 Χρυσά και 1 Αργυρό μετάλλιο]

3. Ελλάδα 116 βαθμοί [1 Χρυσό (Α. Μελάς), 1 Αργυρό, (Θ. Αποστολάτος) και 2 Χάλκινα (Μ. Μυλωνάκης, Γ. Κορίνθιος)].

Η Κύπρος έλαβε μέρος για πρώτη φορά στην 3η ΒΜΟ (Βουκουρέστι, 1985). Η Γιουγκοσλαβία έλαβε μέρος για πρώτη φορά στην 4η ΒΜΟ (Αθήνα, 1987). Η Αλβανία έλαβε μέρος για πρώτη φορά στην 7η ΒΜΟ (Σόφια, 1990). Η Π.Γ.Δ.Μ. έλαβε μέρος για πρώτη φορά στην 12η ΒΜΟ (Φιλιππούπολη, 1995) και τέλος η Μολδαβία και η Τουρκία έλαβαν μέρος για πρώτη φορά στην 13η ΒΜΟ (Μπακάου, 1996).

Σύμφωνα με τους κανονισμούς οι σκοποί των Βαλκανικών Μαθηματικών Ολυμπιάδων περιλαμβάνουν:

(i) Την άμιλλα, την ενθάρρυνση και την ανακάλυψη των ταλαντούχων στα Μαθηματικά μαθητών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σε όλες τις Βαλκανικές χώρες.
(ii) Τη σύναψη φιλικών δεσμών μεταξύ μαθητών και δασκάλων από όλες τις Βαλκανικές χώρες.
(iii) Τη δημιουργία ευκαιριών για την ανταλλαγή πληροφοριών πάνω στα σχολικά προγράμματα των Βαλκανικών χωρών.
(iv) Την απόκτηση εμπειρίας για τη συμμετοχή των μαθητών στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες.

Μεταξύ των κανονισμών για την οργάνωση των ΒΜΟ (συνολικά υπάρχουν 34 άρθρα) είναι και οι εξής:

1. Η επίσημη γλώσσα της ΒΜΟ είναι η Αγγλική.

2. Η ΒΜΟ διοργανώνεται μία φορά κάθε χρόνο μέσα στο χρονικό διάστημα από 25 Απριλίου μέχρι 10 Μαΐου.

Οι χώρες μέλη της ΒΜΟ είναι: Αλβανία, Βοσνία και Ερζεγοβίνη, Βουλγαρία, Γιουγκοσλαβία, Ελλάδα, Κύπρος, Μολδαβία, Π.Γ.Δ.Μ, Ρουμανία και Τουρκία.

3. Κάθε χρόνο ορίζεται μία **Επιτροπή της ΒΜΟ** που αποτελείται από 3 χώρες μέλη:
Προεδρεύουσα είναι η διοργανώτρια χώρα της ΒΜΟ της τρέχουσας χρονιάς και συμμετέχουν, η χώρα που διοργάνωσε τη ΒΜΟ την προηγούμενη χρονιά και η χώρα που θα διοργανώσει τη ΒΜΟ την επόμενη χρονιά.

4. Η Επιτροπή των Αρχηγών (Jury) της ΒΜΟ αποτελείται από τους αρχηγούς όλων των χωρών μελών, ενώ ο Πρόεδρος της Επιτροπής ορίζεται από τη διοργανώτρια χώρα.

5. Η συμμετοχή στην ΒΜΟ γίνεται με επίσημη πρόσκληση από τη διοργανώτρια χώρα, τουλάχιστον τρεις μήνες νωρίτερα από την έναρξη της ΒΜΟ. Η πρόσκληση αφορά 6 μαθητές από κάθε χώρα-μέλος που φοιτούν στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση και δεν έχουν ξεπεράσει σε ηλικία τα 20 χρόνια. Αφορά επίσης δύο συνοδούς (Αρχηγό και

Υπαρχηγό) καθώς επίσης και την αποστολή προβλημάτων κατάλληλων για το διαγωνισμό, το πολύ 5 από κάθε χώρα πλην της διοργανώτριας.

6. Ο διαγωνισμός γίνεται μία μόνο μέρα και διαρκεί 4 ώρες και 30 λεπτά. Δίνονται προς επίλυση 4 προβλήματα καθένα από τα οποία βαθμολογείται με 10 βαθμούς.

Οι χρονολογίες και οι τόποι διεξαγωγής των ΒΜΟ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

1η ΒΜΟ 1984	Athens, Greece	18η ΒΜΟ 2001	Belgrade, Serbia
2η ΒΜΟ 1985	Sofia, Bulgaria	19η ΒΜΟ 2002	Antalya, Turkey
3η ΒΜΟ 1986	Bucharest, Romania	20η ΒΜΟ 2003	Tirana, Albania
4η ΒΜΟ 1987	Athens, Greece	21η ΒΜΟ 2004	Pleven, Bulgaria
5η ΒΜΟ 1988	Nicosia, Cyprus	22η ΒΜΟ 2005	Iasi, Romania
6η ΒΜΟ 1989	Split, Yugoslavia	23η ΒΜΟ 2006	Agros, Cyprus
7η ΒΜΟ 1990	Sofia, Bulgaria	24η ΒΜΟ 2007	Rhodes, Greece
8η ΒΜΟ 1991	Constanta, Romania	25η ΒΜΟ 2008	Ohrid, F.Y.R.O.M
9η ΒΜΟ 1992	Athens, Greece	26η ΒΜΟ 2009	Kragujevac, Serbia
10η ΒΜΟ 1993	Nicosia, Cyprus	27η ΒΜΟ 2010	Chisinau, Moldova
11η ΒΜΟ 1994	Novi Sad, Yugoslavia	28η ΒΜΟ 2011	Iasi, Romania
12η ΒΜΟ 1995	Plovdiv, Bulgaria	29η ΒΜΟ 2012	Antalya, Turkey
13η ΒΜΟ 1996	Bacau, Romania	30η ΒΜΟ 2013	Agros, Cyprus

14η ΒΜΟ 1997	Kalambaka, Greece	31η ΒΜΟ 2014	Pleven, Bulgaria
15η ΒΜΟ 1998	Nicosia, Cyprus	32η ΒΜΟ 2015	Athens, Greece
16η ΒΜΟ 1999	Ohrid, F.Y.R.O.M	33η ΒΜΟ 2016	Tirana, Albania
17η ΒΜΟ 2000	Chisinau, Moldova		

Έτος	**Χώρα**	**Πόλη**	**Αριθμός χωρών**
1984	Ελλάδα	Αθήνα	3
1985	Βουλγαρία	Σόφια	3
1986	Ρουμανία	Βουκουρέστι	4
1987	Ελλάδα	Αθήνα	5
1988	Κύπρος	Λευκωσία	5
1989	Γιουγκοσλαβία	Σπλιτ	5
1990	Βουλγαρία	Σόφια	6
1991	Ρουμανία	Κωνστάντζα	6
1992	Ελλάδα	Αθήνα	6
1993	Κύπρος	Λευκωσία	6
1994	Γιουγκοσλαβία	Νοβισάντ	5
1995	Βουλγαρία	Φιλιππούπολη	7
1996	Ρουμανία	Μπακάου	8
1997	Ελλάδα	Καλαμπάκα	8
1998	Κύπρος	Λευκωσία	8
1999	Π.Γ.Δ.Μ.	Οχρίδα	4

2000	Μολδαβία	Κιζινάου	9
2001	Γιουγκοσλαβία	Βελιγράδι	10
2002	Τουρκία	Αττάλεια	10
2003	Αλβανία	Τίρανα	10
2004	Βουλγαρία	Πλέβεν	10
2005	Ρουμανία	Ιάσιο	10
2006	Κύπρος	Αγρός	10
2007	Ελλάδα	Ρόδος	10
2008	Π.Γ.Δ.Μ.	Οχρίδα	10
2009	Σερβία	Κραγκούεβατς	10
2010	Μολδαβία	Κιζινάου	10
2011	Ρουμανία	Ιάσιο	10
2012	Τουρκία	Αττάλεια	10
2013	Κύπρος	Αγρός	9
2014	Βουλγαρία	Φιλιππούπολη	10
2015	Ελλάδα	Αθήνα	10
2016	Αλβανία	Τίρανα	18

Η 33η ΒΜΟ

Η 33η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα (ΒΜΟ 2016) διεξήχθη στα Τίρανα της Αλβανίας, από 5 έως 10 Μαΐου 2016.

Οι χώρες που συμμετείχαν ήταν:

Albania A	Αλβανία (Α ομάδα)
Bosnia and Herzegovina	Βοσνία-Ερζεγοβίνη
Bulgaria	Βουλγαρία
Cyprus	Κύπρος
F.Y.R.O.M (*)	Π.Γ.Δ.Μ (**)
Greece	Ελλάς
Montenegro	Μαυροβούνιο
Republic of Moldova	Μολδαβία
Romania	Ρουμανία
Serbia	Σερβία
Turkey	Τουρκία

(*) Former Yugoslav Republic of Macedonia (F.Y.R.O.M)

(**) Πρώην Γιουγκοσλαβική Δημοκρατία της Μακεδονίας (Π.Γ.Δ.Μ)

Τα τελευταία χρόνια (η χώρα που φιλοξενεί τον διαγωνισμό) προσκαλεί να διαγωνιστούν (ως επισκέπτριες-φιλοξενούμενες) και άλλες χώρες (εκτός από τις επίσημα διαγωνιζόμενες).

Συμμετείχαν επίσης (ως φιλοξενούμενες) και οι χώρες:

Albania B (*)	Αλβανία (Β ομάδα)
Azerbaijan	Αζερμπαϊτζάν
France	Γαλλία
Italy	Ιταλία
Kazakhstan	Καζακστάν
Saudi Arabia	Σαουδική Αραβία
Turkmenistan	Τουρκμενιστάν
United Kingdom	Ηνωμένο Βασίλειο

(*) Η χώρα που φιλοξενεί τον διαγωνισμό, μπορεί να συμμετέχει και με μία δεύτερη ομάδα των 6 ατόμων (Albania B).

Στη παράγραφο αυτή θα δούμε τα θέματα και κάποια στοιχεία από τις επιδόσεις των διαγωνιζόμενων μαθητών.



33η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα, Τίρανα

Πρόβλημα 1.

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *οι οποίες είναι "ένα προς ένα" και τέτοιες, ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό* x *και κάθε θετικό ακέραιο* n, *να ισχύει*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} i\left(f\left(x+i+1\right)-f\left(f\left(x+i\right)\right)\right)\right|<2016.$$

(Προτάθηκε από τη FYROM)

Λύση. Γράφοντας τη δοθείσα θέτοντας όπου n το $n-1$ έχουμε

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1} i\left(f\left(x+i+1\right)-f\left(f\left(x+i\right)\right)\right)\right|<2016.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|a-b|\leqslant|a|+|b|$, παίρνουμε

$$4032>\left|\sum_{i=1}^{n} i\left(f\left(x+i+1\right)-f\left(f\left(x+i\right)\right)\right)\right|+\left|\sum_{i=1}^{n-1} i\left(f\left(x+i+1\right)-f\left(f\left(x+i\right)\right)\right)\right|$$

$$\geqslant\left|n\left(f\left(x+n+1\right)-f\left(f\left(x+n\right)\right)\right)\right|,$$

από όπου παίρνουμε ότι

$$\left|f\left(x+n+1\right)-f\left(f\left(x+n\right)\right)\right|<\frac{4032}{n}$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x και κάθε θετικό ακέραιο n.

Θέτουμε στην τελευταία όπου x το $y-n$ και παίρνουμε

$$\left|f\left(y+1\right)-f\left(f\left(y\right)\right)\right|<\frac{4032}{n},$$

για κάθε πραγματικό αριθμό y και κάθε θετικό ακέραιο n.

Παίρνοντας $n\to\infty$, θα πρέπει $f(y+1)=f(f(y))$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$ και αφού η συνάρτηση f είναι ((ένα προς ένα)) λαμβάνουμε ότι $f(y)=y+1$, η οποία επαληθεύει τη συνθήκη.

Πρόβλημα 2.

Έστω $ABCD$ ένα εγγράψιμο τετράπλευρο με $AB < CD$. Οι διαγώνιοί του τέμνονται στο σημείο F και οι ευθείες AD και BC τέμνονται στο σημείο E. Θεωρούμε τις προβολές K και L του σημείου F στις πλευρές AD και BC αντίστοιχα και τα μέσα M, S και T των EF, CF και DF αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το δεύτερο κοινό σημείο των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων MKT και MLS ανήκει στο τμήμα CD.

(*Προτάθηκε από την Ελλάδα-Σιλουανός Μπραζιτίκος*)

Λύση. Έστω N το μέσον του τμήματος CD. Θα αποδείξουμε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων MKT, MLS περνούν από το N.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου MLS περνάει από το N και για το τρίγωνο MLS = εργαζόμαστε ομοίως.

Παρατηρούμε αρχικά ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του MLS είναι ο κύκλος Euler του τριγώνου EFC, επομένως περνάει από το μέσον Q της EC, επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $NSQL$ είναι εγγράψιμο, δηλαδή, σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\angle SLQ = \angle QNS$

Πράγματι, καθώς το τρίγωνο FLC είναι ορθογώνιο και LS είναι η διάμεσός του, θα έχουμε ότι $SL = SC$, οπότε

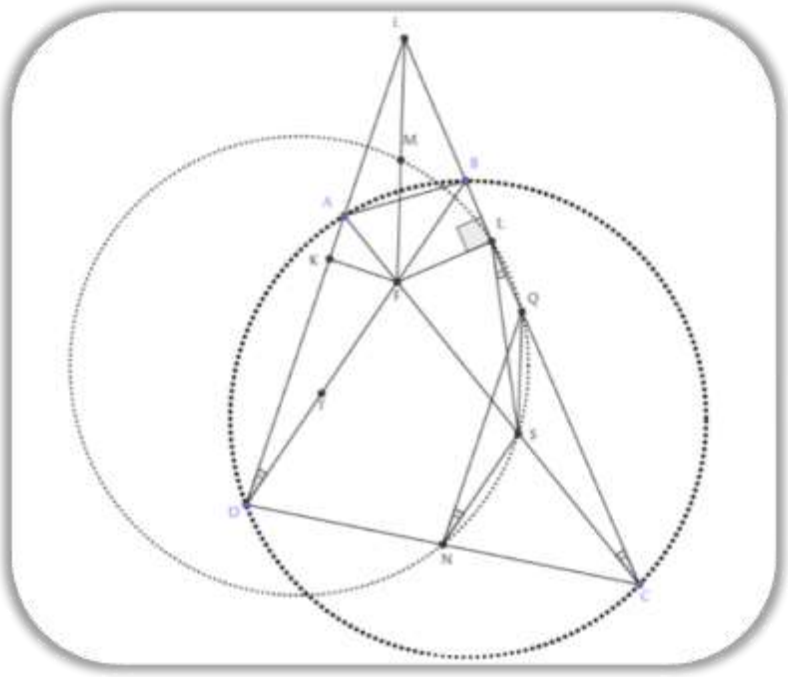
$$\angle SLC = \angle SCL = \angle ACB \qquad (2)$$

Επιπλέον, τα N, S είναι τα μέσα των DC, FC οπότε $SN \| FD$ και τα Q, N είναι τα μέσα των EC, CD οπότε $QN \| ED$.

Έπεται ότι οι γωνίες $\angle EDB$ και $\angle QNS$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, και λόγω της συνθήκης $AB < CD$, είναι και οι δύο οξείες, οπότε

$$\angle ADB = \angle QNS \qquad (3)$$

Συνδυάζοντας τις (2) και (3) με το γεγονός ότι το τετράπλευρο $ABCD$ είναι εγγράψιμο, παίρνουμε την (1) και το ζητούμενο έπεται.



2η Λύση.

Έστω N το μέσον του τμήματος CD.

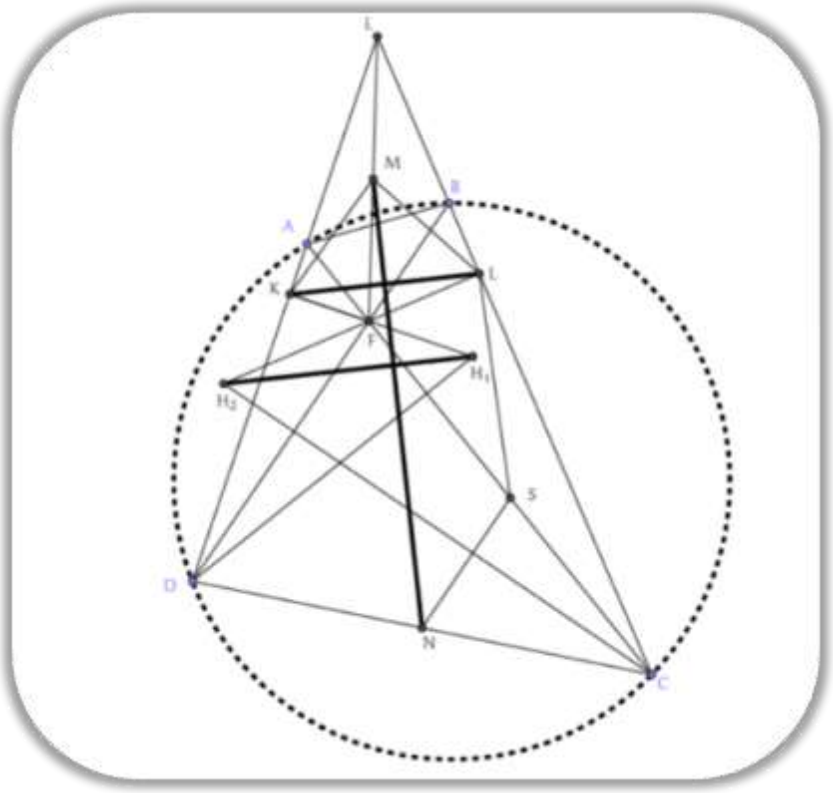
Θα αποδείξουμε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων MKT, MLS περνούν από το N. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου MLS περνάει από το N και για το τρίγωνο MLS εργαζόμαστε ομοίως. Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$\angle NML + \angle LSN = 180^{\circ}$.

Όμως,

$$\angle LSN = \angle LSA + \angle ASN = 2\angle LCA + 180^{\circ} - \angle DAC = 180^{\circ} - \angle AEC. \qquad (4)$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι $\angle NML = \angle DEC$. Το τετράπλευρο FKEL είναι εγγράψιμο και το κέντρο του είναι το M οπότε $\angle KML = 2\angle DEC$, συνεπώς αρκεί να αποδείξουμε ότι $\angle KML = \angle NML$ και επειδή $MK = ML$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $MN \perp KL$. Αυτή την καθετότητα θα την αποδείξουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους.



Σχήμα 3-15

1ος Τρόπος (Παναγιώτης Μισιακός).

Η ευθεία MN συνδέει τα μέσα δύο διαγωνίων στο πλήρες τετράπλευρο $EAFBDC$ οπότε είναι η ευθεία **Newton-Gauss** του πλήρους τετραπλεύρου. Γνωρίζουμε ότι η ευθεία αυτή είναι κάθετη στην ευθεία **Aubert** των ορθοκέντρων του πλήρους τετραπλεύρου. Δηλαδή αν H_1, H_2 είναι τα ορθόκεντρα των τριγώνων AFD και BFC αντίστοιχα, τότε $MN \perp H_1H_2$. Αλλά τα H_1, H_2 ανήκουν στις ευθείες FK και αντίστοιχα και τα τρίγωνα AFD και BFC είναι όμοια. Αυτό σημαίνει ότι τα αντίστοιχα τμήματά τους έχουν λόγο το λόγο ομοιότητας των τριγώνων αυτών, οπότε , θα ισχύει $\frac{FH_1}{H_1K} = \frac{FH_2}{H_2L}$.

Από την τελευταία όμως έχουμε ότι $H_1H_2 \| KL$ οπότε $MN \perp KL$, που είναι το ζητούμενο.

2ος Τρόπος (Γιώργος Γαβριλόπουλος, Βασίλης Γεωργιάδης).

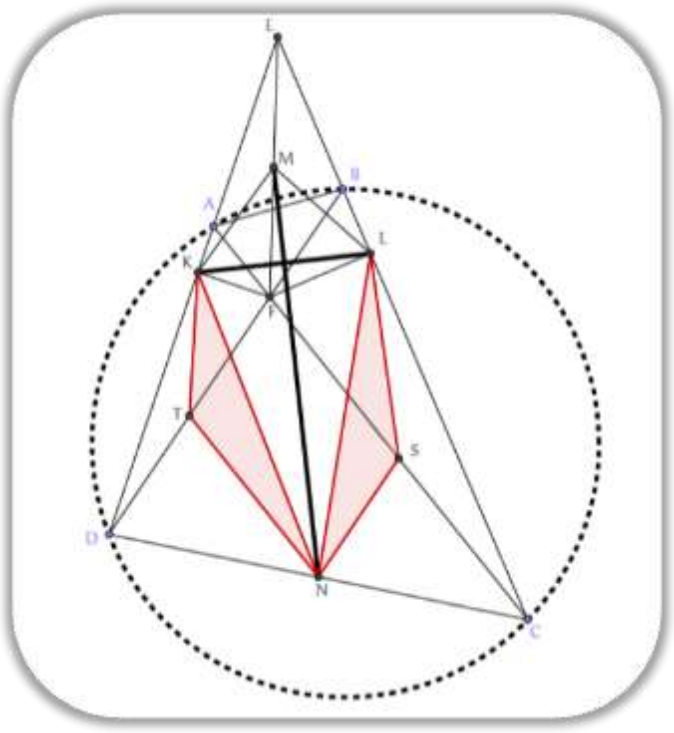
Αφού ισχύει ότι $MK = ML$, για να δείξουμε ότι $MN \perp KL$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $NK = NL$. Για το σκοπό αυτό θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα KTN και LSN. Όπως στην (4), βρίσκουμε ότι

$$\angle KTN = \angle LSN = 180^\circ - \angle AEC.$$

Επιπλέον από τα ορθογώνια τρίγωνα KDF και FLC καθώς και τις παραλληλίες $SN \| FD$ και $NT \| FC$ έχουμε

$$KT = \frac{DF}{2} = SN \quad και \quad LS = \frac{FC}{2} = KT,$$

επομένως τα τρίγωνα KTN και LSN είναι ίσα και το ζητούμενο έπεται.



Σχήμα 3-16

Πρόβλημα 3.

Να βρείτε όλα τα μονικά πολυώνυμα f με ακεραίους συντελεστές που ικανοποιούν την ακόλουθη ιδιότητα: Υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος, ώστε ο p να διαιρεί τον $2(f(p)!)+1$ για κάθε πρώτο $p > N$, για τον οποίο ο αριθμός $f(p)$ είναι θετικός ακέραιος.

Σημείωση: Ένα μονικό πολυώνυμο έχει συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του ίσο με 1.

(*Προτάθηκε από την Ελλάδα-Σιλουανός Μπραζιτίκος- Παναγιώτης Λώλας*)

Λύση.

Αν το f είναι σταθερό, τότε η συνθήκη δεν μπορεί να ικανοποιείται για $p \geqslant 5$, αφού $f(p) = 1$. Αν το f δεν είναι σταθερό, τότε από τη σχέση $p \mid 2(f(p)!)+1$ έχουμε ότι:

$$f(p) < p, \text{ για όλους τους πρώτους } p > N \quad (*)$$

Πράγματι, αν για κάποιον πρώτο p έχουμε ότι $f(p) \geqslant p$, τότε $p \mid (f(p)!)$, επομένως $p \mid 1$, που είναι άτοπο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\deg f = m > 1$. Τότε αφού ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του f είναι ίσος με ένα, θα έχουμε $\lim_{p\to\infty} \frac{f(p)}{p} = +\infty$, που αντιβαίνει στην (*)

Επομένως πρέπει να ισχύει $\deg f(x) = 1$, δηλαδή $f(x) = x - a$, για κάποιο θετικό ακέραιο a. Επομένως η δοθείσα συνθήκη γίνεται:

$$p \mid 2(p-a)! + 1 \qquad (1)$$

Αλλά από το θεώρημα Wilson παίρνουμε

$$2(p-3)! \equiv -(p-3)!(p-2) \equiv -(p-2)! \equiv -1 (\mathrm{mod} p),$$

δηλαδή

$$p \mid 2(p-3)! + 1 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$(p-3)! \equiv (p-a)! (\mathrm{mod}\ p)$$
$$(p-3)!(-1)^a (a-1)! \equiv (p-a)!(-1)^a (a-1)! (\mathrm{mod}\ p)$$
$$(p-3)!(-1)^a (a-1)! \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$$

Επειδή $-2(p-3)! \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$, έπεται ότι $(-1)^a (a-1)! \equiv -2 (\mathrm{mod}\ p)$.

Παίρνοντας $p > (a-1)! + 2$ έχουμε από την τελευταία ότι $(a-1)! = 3$, οπότε $a = 3$ και άρα $f(p) = p - 3$, για κάθε πρώτο $p > N$.

Τέλος, αφού το πλήθος των πρώτων είναι άπειρο, θα έχουμε ότι $f(x) = x - 3$, για κάθε x.

Πρόβλημα 4.

Το επίπεδο χωρίζεται σε μοναδιαία τετράγωνα από δύο σύνολα παράλληλων ευθειών, σχηματίζοντας ένα άπειρο πλέγμα. Κάθε μοναδιαίο τετράγωνο χρωματίζεται με ένα από τα 1201 *χρώματα έτσι, ώστε να μην υπάρχει ορθογώνιο με περίμετρο* 100 *το οποίο να περιέχει δύο τετράγωνα του ιδίου χρώματος. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει ορθογώνιο με διαστάσεις* 1×1201 *ή* 1201×1 *που να περιέχει δύο τετράγωνα του ιδίου χρώματος.*

Σημείωση: Υποθέτουμε εδώ ότι κάθε ορθογώνιο έχει πλευρές που περιέχονται στις ευθείες του πλέγματος.

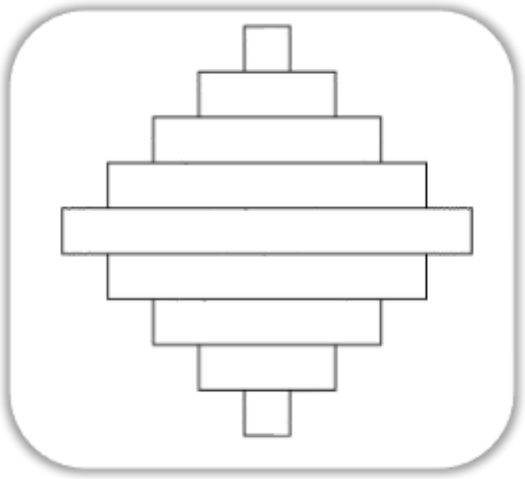
(Προτάθηκε από τη Βουλγαρία)

Λύση.

Θεωρούμε ότι τα κέντρα των τετραγώνων είναι τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες και στο εξής θα συμβολίζουμε κάθε μοναδιαίο τετράγωνο με τις συντεταγμένες του κέντρου του. Θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα σχήμα που αποτελείται από όσο το δυνατόν περισσότερα μοναδιαία τετράγωνα και μεταξύ τους να έχουν όλα διαφορετικό χρώμα. Αυτό το σχήμα πρέπει να χτίζεται από ορθογώνια με περίμετρο 100 γιατί μόνο για

αυτά έχουμε κάποια πληροφορία. Χτίζουμε λοιπόν αυτό το σχήμα με ορθογώνια με περίμετρο 100 μήκους 49,47,45 ... και λοιπά.

Το σχήμα που προκύπτει θα το ονομάζουμε **αστέρι** και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 3-17

Το σχήμα αυτό αποτελείται από ένα ορθογώνιο μήκους 49 και από 2 ορθογώνια μήκους $2s+1$ για $s=0,1,\ldots,23$. Επομένως αποτελείται από

$$49+2(47+45+\ldots+1)=49+2\cdot 24^2=1201$$

τετράγωνα. Επιπλέον, από την κατασκευή του αστεριού θα έχουμε ότι οποιαδήποτε δύο μοναδιαία τετράγωνα σε αυτό πρέπει να έχουν διαφορετικό χρώμα. Επομένως το σχήμα αυτό περιέχει όλα τα 1201 χρώματα.

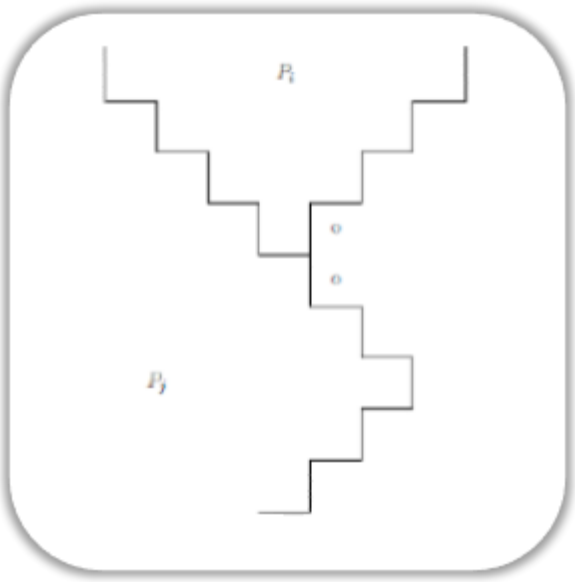
Επιλέγουμε τώρα ένα χρώμα, ας πούμε πράσινο, και ονομάζουμε a_1, a_2, … όλα τα πράσινα τετράγωνα. Θα συμβολίζουμε με P_i το αστέρι με κέντρο το a_i. Θα δείξουμε πρώτα ότι δεν υπάρχει μοναδιαίο τετράγωνο που να καλύπτεται από δύο διαφορετικά αστέρια P_i και P_j και ότι κάθε μοναδιαίο τετράγωνο καλύπτεται από κάποιο P_i.

Πράγματι, ας υποθέσουμε πρώτα ότι τα P_i και P_j καλύπτουν το ίδιο μοναδιαίο τετράγωνο b. Τότε το ελάχιστο ορθογώνιο που περιέχει το b και τα κέντρα των P_i και P_j έχει περίμετρο το πολύ 100. Αυτό είναι άτοπο αφού τα κέντρα των P_i και P_j έχουμε υποθέσει ότι είναι πράσινα.

Από την άλλη, θεωρούμε ένα τυχόν μοναδιαίο τετράγωνο b. Το αστέρι με κέντρο το b περιέχει σίγουρα κάποιο πράσινο μοναδιαίο τετράγωνο a_i. Επομένως και το αστέρι P_i με κέντρο το πράσινο a_i περιέχει το b.

Έπεται ότι τα αστέρια P_1, P_2, … δημιουργούν μία κάλυψη του επιπέδου. Αυτή η κάλυψη μπορούμε εύκολα να δούμε ότι είναι μοναδική ως προς μεταφορές και ανακλάσεις. Πράγματι, ας θεωρούμε δύο γειτονικά αστέρια. Πράγματι, ας θεωρήσουμε δύο γειτονικά διαμάντια. Ο τρόπος για να μπει το

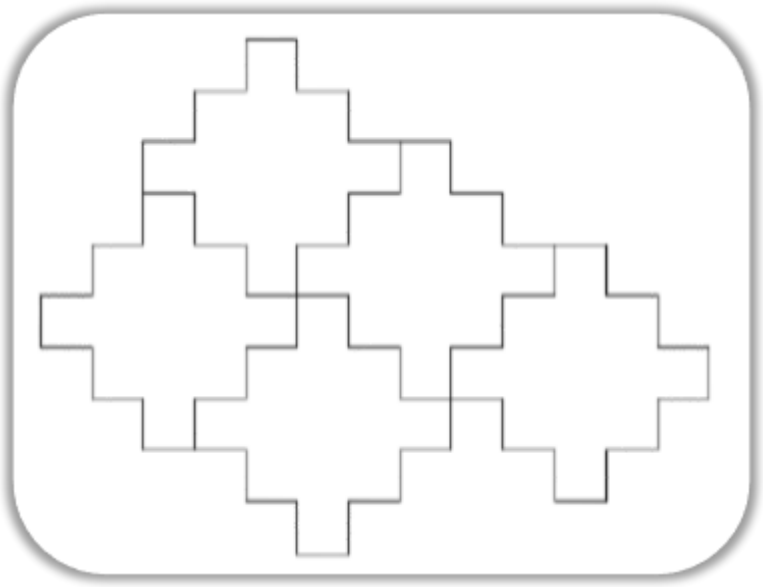
ένα δίπλα στο άλλο είναι μοναδικός ως προς ανάκλαση, γιατί σε κάθε άλλη περίπτωση, δημιουργούνται δύο διαδοχικά κενά σε κάποιες γωνίες που δεν μπορούν στη συνέχεια να καλυφθούν.



Σχήμα 3-18

Μπορούμε λοιπόν δίχως βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι τα κέντρα των αστεριών βρίσκονται στα σημεία (x, y) που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $24x + 25y$ να διαιρείται από 1201.

Μία τέτοια κάλυψη (με μικρότερα αστέρια) φαίνεται στο Σχήμα 6. Σε αυτή την περίπτωση, το πρώτο κέντρο αστεριού δεξιά του $(0,0)$ με συντεταγμένη $(0,k)$ είναι το $(0,1201)$. Οπότε το ορθογώνιο διαστάσεων 1×1201 που είναι τοποθετημένο οριζόντια και ξεκινά από το $(0,0)$ δεν έχει δύο τετράγωνα του ίδιου χρώματος. Το ίδιο συμβαίνει για όλες τις μεταφορές του και το ζητούμενο έπεται.



Σχήμα 3-19

3.7 Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων (BMON)

Junior Balkan Mathematical Olympiad (JBMO)

Η ιδέα για τη διοργάνωση Βαλκανικής Μαθηματικής Ολυμπιάδας Νέων (BMON) συζητήθηκε πρώτα από τους Μαθηματικούς Ιβάν Τόνοφ (Βουλγαρία) και Δημήτρη Κοντογιάννη (Ελλάδα). Σύντομα στις συζητήσεις αναμείχθηκε και ο Γιουγκοσλάβος Βλαδιμίρ Στογιάνοβιτς. Σχετικά με τους κανονισμούς συμφωνήθηκαν τα εξής:

- Κάθε χώρα να εκπροσωπείται από 5 μαθητές ηλικίας μέχρι 15 ½ ετών κατά την ημέρα του διαγωνισμού και από δύο συνοδούς (αρχηγός-υπαρχηγός).
- Τα προβλήματα του διαγωνισμού να είναι 5 και καθένα θα βαθμολογείται με άριστα τις 10 μονάδες.
- Η διάρκεια του διαγωνισμού να είναι 4 ώρες.

Δεν ελήφθη συγκεκριμένη απόφαση για το ποια χώρα θα διοργανώσει για πρώτη φορά το διαγωνισμό, αλλά συμφωνήθηκε να καταβληθεί προσπάθεια από όλους για τη διοργάνωση του διαγωνισμού. Συμφωνήθηκε ακόμη ο διαγωνισμός να γίνει το δεύτερο δεκαπενθήμερο του Ιουνίου, γιατί οι Εθνικές Εξετάσεις στις περισσότερες χώρες γίνονται λίγο νωρίτερα. Τελικά η Γιουγκοσλαβία με δική της πρωτοβουλία έστειλε προσκλήσεις στις υπόλοιπες χώρες ανακοινώνοντας τη διοργάνωση της πρώτης BMON στο Βελιγράδι στις αρχές του 1997.

Έτσι η 1η BMON έγινε στο Βελιγράδι από 18-22 Ιουνίου 1997 και πήραν μέρος 5 χώρες (Γιουγκοσλαβία, Βουλγαρία, Ελλάδα, Κύπρος και Π.Γ.Δ.Μ.).

Η 2η BMON έγινε στην Αθήνα από 16-21 Ιουνίου 1998 και πήραν μέρος 9 χώρες. Για πρώτη φορά πήραν μέρος η Αλβανία, η Μολδαβία, η Ρουμανία και η Τουρκία. Στη διοργάνωση αυτή έγινε η πρώτη αλλαγή στους κανονισμούς:

- τα προβλήματα του διαγωνισμού να είναι 4 αντί 5 και
- η διάρκεια του διαγωνισμού να είναι 4 ώρες και 30 λεπτά αντί για 4 ώρες.

Η 3η BMON έγινε στη Φιλιππούπολη της Βουλγαρίας από 23-27 Ιουνίου 1999 με συμμετοχή 9 χωρών.

Η 4η BMON έγινε στην Οχρίδα της Π.Γ.Δ.Μ. από 21-25 Ιουνίου 2000 με συμμετοχή 9 χωρών και τέλος η 5η BMON έγινε στην Κύπρο (Λευκωσία και Αγρός) από 17-23 Ιουνίου 2001 με συμμετοχή 8 χωρών (η Τουρκία δεν πήρε μέρος). Στη διοργάνωση αυτή πραγματοποιήθηκε η δεύτερη αλλαγή του κανονισμού: κάθε χώρα συμμετείχε με 6 μαθητές αντί για 5.

Τα τελευταία χρόνια (η χώρα που φιλοξενεί τον διαγωνισμό) προσκαλεί να διαγωνιστούν (ως επισκέπτριες-φιλοξενούμενες) και άλλες χώρες (εκτός από τις επίσημα διαγωνιζόμενες).

Οι χρονολογίες και οι τόποι διεξαγωγής των JBMO φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Οι βαλκανικές χώρες που φιλοξένησαν τις JBMO είναι:

1η JBMO 1997	Belgrade, Yugoslavia	12η BMO 2008	Vlore, Albania 23–28 June
2η JBMO 1998	Athens, Greece	13η BMO 2009	Bosnia & Herzegovina 25-30 June
3η JBMO 1999	Plovdiv, Bulgaria	14η BMO 2010	Olanesti, Romania 18-22, June
4η JBMO 2000	Ohrid, F.Y.R.O.M	15η BMO 2011	Larnaca, Cyprus 19-24, June
5η JBMO 2001	Nicosia, Cyprus	16η BMO 2012	Veria, Greece 25-29, June
6η JBMO 2002	Targu-Mures, Romania	17η BMO 2013	Antalya, Turkey 21-26, June
7η JBMO 2003	Ismir, Turkey	18η BMO 2014	Ohrid, F.Y.R.O.M 21-26, June
8η JBMO 2004	Novi Sad, Yugoslavia	19η BMO 2015	Belgrade, Serbia 24-29, June
9η JBMO 2005	Veria, Greece 20-26, June	20η BMO 2016	Slatina, Romania 24-29, June
10η JBMO 2006	Chisinau, Moldova 25-30, June	21η BMO 2017	Bulgaria
11η JBMO 2007	Shumen, Bulgaria 25–30, June		

20η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων

Η 20η Βαλκανική Μαθηματική Ολυμπιάδα Νέων διεξήχθη στη Σλάτινα της Ρουμανίας από 24 μέχρι 29 Ιουνίου. Συμμετείχαν οι 11 χώρες της Νοτιοανατολικής Ευρώπης και άλλες 10 φιλοξενούμενες χώρες από Ευρώπη και Ασία. Οι Έλληνες μαθητές κατέκτησαν 1 χρυσό, ένα αργυρό και 3 χάλκινα μετάλλια, ως εξής:

Λώλας Δημήτριος, Εκπαιδευτήρια Αθηνά, Τρίκαλα,	Χρυσό μετάλλιο
Μηλιώρη Ειρήνη, Γυμνάσιο Νέας Πεντέλης,	Αργυρό μετάλλιο
Λιγνός Ορέστης, Εκπαιδευτήρια Νέα Παιδεία,	Χάλκινο μετάλλιο
Πλοιαρίδης Ορφέας, Εκπαιδευτήρια Μαντουλίδη,	Χάλκινο μετάλλιο
Τσαταλπμασίδης Ορέστης, 3ο Γυμν. Αλεξ/πολης,	Χάλκινο μετάλλιο
Χαλιμούρδας Παναγιώτης, Αρσάκειο Θεσσαλονίκης,	Συμμετοχή.

Αρχηγός της Ελληνικής ομάδας ήταν ο μαθηματικός Σιλουανός Μπραζιτίκος και υπαρχηγός ο μαθηματικός Βασίλης Βισκαδουράκης.

Τα προβλήματα και οι λύσεις τους

Πρόβλημα 1. Δίνεται ένα περιγράψιμο τραπέζιο $ABCD$ με $AB \| CD$ και $AB > CD$. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ABC εφάπτεται των πλευρών AB και AC στα σημεία M και N αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το έκκεντρο του τραπεζίου ανήκει στην ευθεία MN.

(*Βουλγαρία*)

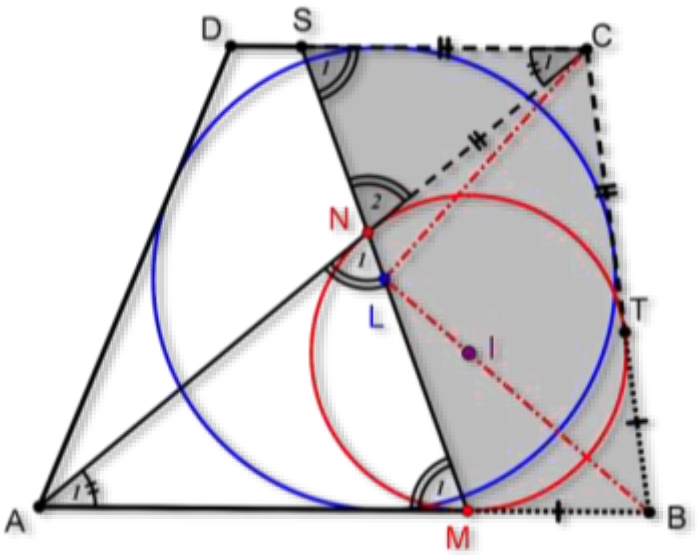
Λύση. Ονομάζουμε I το έκκεντρο του τριγώνου ABC και R το σημείο τομής της ευθείας BI με την ευθεία MN. Θα δείξουμε ότι το R είναι το έκκεντρο του τραπεζίου $ABCD$. Για το σκοπό αυτό αρκεί να αποδείξουμε ότι η CR είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle C$. Οι γωνίες $\angle ABC$ και $\angle BCD$ είναι παραπληρωματικές. Επομένως, οι διχοτόμοι τους τέμνονται κάθετα. Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι $CR \perp BR$. Παρατηρούμε τώρα ότι από το ισοσκελές τρίγωνο ANM έχουμε ότι:

$$\angle AMN = \angle ANM = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2} \qquad (1)$$

Επιπλέον αφού το I είναι το έκκεντρο του τριγώνου ABC είναι γνωστό ότι:

$$\angle BIC = 90^\circ - \frac{\angle BAC}{2}$$

(2)



Σχήμα 1

Από τις και έπεται ότι το τετράπλευρο $CIRN$ είναι εγγράψιμο, οπότε

$$\angle CRI = \angle INC = 90^\circ,$$

που είναι και το ζητούμενο.

2ος τρόπος

Έστω ότι η προέκταση της MN, τέμνει τη πλευρά CD στο σημείο S. Στο τραπέζιο $BCSM$, θα αποδείξουμε ότι :

$$BC = BM + CS \qquad (1)$$

(το άθροισμα των βάσεων ισούται με μία από τις μη παράλληλες), οπότε οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{C}$ θα τέμνονται στο μέσο L της SM.

Πράγματι, αν από το L θεωρήσουμε την παράλληλη προς τις βάσεις που τέμνει την BC στο σημείο Q, τότε η LQ είναι μεσοπαράλληλη στο τραπέζιο $BCSM$, επομένως $LQ = \frac{BM + SC}{2} = \frac{BC}{2}$, οπότε στο τρίγωνο CLB η διάμεσος LQ ισούται με το μισό της αντίστοιχης πλευράς, επομένως το τρίγωνο CLB είναι ορθογώνιο και από τα ισοσκελή τρίγωνα BLQ και CLQ συμπεραίνουμε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{C}$ θα τέμνονται στο μέσο L της SM.

Θα αποδείξουμε τώρα την (1). Από τις ισότητες των γωνιών $\hat{A}_1 = \hat{C}_1$ (εντός εναλλάξ) και $\hat{M}_1 = \hat{N}_1 = \hat{N}_2 = \hat{S}_1$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο SCN είναι ισοσκελές ($CN = CS$).

Ισχύουν επίσης οι ισότητες των τμημάτων $CN = CT$ και $BM = BT$ (εφαπτόμενα τμήματα). Άρα $BC = BT + CT = BM + CS$.

Πρόβλημα 2. Δίνονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί a, b και c. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{8}{(b+c)^2+4abc}+\frac{8}{(c+a)^2+4abc}+a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{8}{a+3}+\frac{8}{b+3}+\frac{8}{c+3}$$

(*Βοσνία*)

Λύση. Από τη γνωστή ανισότητα $(a+b)^2\geqslant 4ab,$ παίρνουμε ότι:

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}\geqslant\frac{8}{(a+b)^2+(a+b)^2c}=\frac{8}{(a+b)^2(c+1)} \quad (1)$$

Επιπλέον, από την ανισότητα του Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου και την ανισότητα $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2,$ παίρνουμε ότι:

$$\frac{8}{(a+b)^2(c+1)}+\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{4(a^2+b^2)}{(a+b)^2(c+1)}}\geqslant\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}} \quad (2)$$

Τέλος, από την ανισότητα του Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου παίρνουμε:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{c+1}}=\frac{4}{\sqrt{2(c+1)}}\geqslant\frac{4}{\frac{(c+1)+2}{2}}=\frac{8}{c+3} \quad (3)$$

Από τις (1),(2) και (3) παίρνουμε ότι:

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\frac{8}{c+3}$$

Προσθέτοντας κυκλικά τις όμοιες με αυτή, παίρνουμε το ζητούμενο.

Πρόβλημα 3. Να βρείτε όλες τις τριάδες ακεραίων $(a,b,c),$ για τις οποίες ο αριθμός $N=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$ είναι δύναμη του 2016.

(Δύναμη του 2016 *είναι ένας ακέραιος αριθμός της μορφής* $2016^n,$ *όπου* n *είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος.)*

(*Ελλάδα - Σιλουανός Μπραζιτίκος*)

Λύση. Υποθέτουμε αρχικά ότι υπάρχει $z>0,$ τέτοιος ώστε:

$$(a-b)(b-c)(c-a)+4=2\cdot 2016^z$$

Θέτουμε $a-b=-x, b-c=-y$. Η παραπάνω εξίσωση γράφεται ως:

$$xy(x+y)+4=2\cdot 2016^z$$

(1)

Αφού $7\mid 2016,$ θα έχουμε:

$$xy(x+y)+4\equiv 0 \pmod 7 \text{ ή} \quad (2)$$

$$3xy(x+y)\equiv 2 \pmod 7 \text{ ή}$$

$$(x+y)^3-x^3-y^3\equiv 2 \pmod 7 \quad (3)$$

Από το μικρό Θεώρημα του Fermat παίρνουμε ότι για κάθε ακέραιο k τα κυβικά υπόλοιπα είναι $k^3\equiv -1,0,1 \pmod 7$. Επομένως, από την (3) έπεται ότι

κάποιος από τους $(x+y)^3, x^3$ και y^3 πρέπει να διαιρείται με το 7. Αλλά αν αυτό ισχύει, τότε ο αριθμός $xy(x+y)$ διαιρείται και αυτός με το 7, άτοπο. Επομένως, πρέπει $z=0$ και τότε:

$$xy(x+y)+4=2 \Leftrightarrow xy(x+y)=-2.$$

Οι λύσεις της τελευταίας είναι $(x,y)\in\{(-1,-1),(2,-1),(-1,2)\}$, οπότε

$$(a,b,c)\in\{(k-2,k-1,k),(k,k-2,k-1),(k-1,k,k-2)\},\ \text{όπου}\ k\in\mathbb{Z}.$$

Σημείωση 1. *Εναλλακτικά, για να αποδείξουμε ότι η (2) είναι αδύνατη, αρκεί να φτιάξουμε τον παρακάτω πίνακα με τις δυνατές τιμές των x και y ως προς modulo 7. Οι τιμές που γράφουμε σε κάθε κελί του πίνακα, είναι οι τιμές της παράστασης $xy(x+y)$ ως προς modulo 7.*

		x					
		1	2	3	4	5	6
y	1	2	6	5	6	2	0
	2		2	2	6	0	5
	3			5	0	1	1
	4				2	5	2
	5					5	1
	6						5

Σημείωση 2. *Φτάνοντας στη σχέση (1) μπορούμε αντί για modulo 7, να καταλήξουμε σε άτοπο θεωρώντας την ως προς modulo 9.*

Πρόβλημα 4. *Μία 5×5 τετραγωνική διάταξη καλείται* κανονική *αν κάθε κελί της περιέχει ακριβώς έναν από τέσσερεις διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς και κάθε αριθμός εμφανίζεται ακριβώς μία φορά σε οποιαδήποτε 2×2 τετραγωνική διάταξή της. Το άθροισμα όλων των αριθμών μιας κανονικής τετραγωνικής διάταξης καλείται ολικό άθροισμα. Για οποιουσδήποτε τέσσερεις πραγματικούς αριθμούς, κατασκευάζουμε όλες τις δυνατές κανονικές τετραγωνικές διατάξεις, υπολογίζουμε τα ολικά αθροίσματά τους και καταγράφουμε τον αριθμό των διακεκριμένων ολικών αθροισμάτων. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή του αριθμού αυτού.*

(Ελλάδα - Σιλουανός Μπραζιτίκος)

Λύση. Θα αποδείξουμε ότι η μέγιστη τιμή του αριθμού αυτού είναι 60.

Η απόδειξη βασίζεται στον ακόλουθο ισχυρισμό.

Ισχυρισμός. Είτε κάθε γραμμή έχει ακριβώς δύο από τους αριθμούς, είτε κάθε στήλη έχει ακριβώς δύο από τους αριθμούς.

Απόδειξη του Ισχυρισμού .Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι στη γραμμή R υπάρχουν τουλάχιστον τρεις από τους αριθμούς. Τότε στη γραμμή R

μπορούμε να βρούμε τρεις από τους αριθμούς σε διαδοχικά κελιά της τετραγωνικής διάταξης, έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι αυτοί είναι οι a, b, c. Σύμφωνα με την υπόθεση ότι σε κάθε 2×2 τετραγωνική διάταξη κάθε αριθμός εμφανίζεται ακριβώς μία φορά, στην ακριβώς επάνω γραμμή από την R (αν υπάρχει τέτοια), θα βρίσκονται οι αριθμοί c, d, a, με αυτή τη σειρά. Και στην πιο πάνω θα βρίσκονται οι αριθμοί a, b, c με αυτή τη σειρά. Το ίδιο συμβαίνει και για τις γραμμές κάτω από την R, όπως φαίνεται στο παρακάτω πίνακα.

$$\begin{pmatrix} \bullet & a & b & c & \bullet \\ \bullet & c & d & a & \bullet \\ \bullet & a & b & c & \bullet \\ \bullet & c & d & a & \bullet \\ \bullet & a & b & c & \bullet \end{pmatrix}$$

Συμπληρώνοντας όλη την τετραγωνική διάταξη βάσει της παραπάνω τοποθέτησης, προκύπτει ότι κάθε στήλη έχει ακριβώς δύο από τους αριθμούς και ο ισχυρισμός έχει αποδειχθεί.

Λόγω της συμμετρίας ως προς γραμμές και στήλες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε γραμμή περιέχει ακριβώς δύο από τους αριθμούς. Αν τώρα αγνοήσουμε την πρώτη γραμμή και την πρώτη στήλη, τότε το 4×4 κομμάτι που αποκόπτεται έχει συνολικό άθροισμα ίσο με $4(a+b+c+d)$. Επομένως, αρκεί να βρούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε τους αριθμούς στην πρώτη γραμμή R_1 και την πρώτη στήλη C_1.

Αν συμβολίσουμε με a_1, b_1, c_1 και d_1 το πλήθος των εμφανίσεων των a, b, c και d στην R_1 και την C_1, τότε το συνολικό άθροισμα σε ολόκληρη την 5×5 τετραγωνική διάταξη ισούται με:

$$S = 4(a+b+c+d) + a_1\cdot a + b_1\cdot b + c_1\cdot c + d_1\cdot d.$$

Αν η πρώτη, η τρίτη και η πέμπτη γραμμή περιέχουν μόνο τους αριθμούς a και b, τότε η δεύτερη και η τέταρτη θα περιέχουν μόνο τους αριθμούς c και d. Τότε $a_1+b_1=7$ με $a_1 \geqslant b_1$ και $c_1+d_1=2$ με $c_1 \geqslant d_1$. Έχουμε λοιπόν τις ακόλουθες τέσσερεις περιπτώσεις

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \in \{(5,2,2,0), (5,2,1,1), (4,3,2,0), (4,3,1,1)\}$$

και όλες τις μεταθέσεις τους.

Σε καθεμιά από τις παραπάνω τετράδες και τις μεταθέσεις τους αντιστοιχεί ακριβώς μία κανονική τετραγωνική διάταξη. Πράγματι, αν πάρουμε τρεις γραμμές $a\ b\ a\ b\ a$ που εναλλάσσονται με δύο $c\ d\ c\ d\ c$ παίρνουμε την $(5,2,2,0)$. Αν πάρουμε τρεις γραμμές $a\ b\ a\ b\ a$ που εναλλάσσονται με μία $c\ d\ c\ d\ c$ και μία $d\ c\ d\ c\ d$ παίρνουμε την $(5,2,1,1)$ Αν πάρουμε τρεις γραμμές

$a\ b\ a\ b\ c$ να εναλλάσσονται με δύο γραμμές $c\ d\ c\ d\ c$ παίρνουμε την $(4,3,2,0)$. Τέλος, αν πάρουμε τρεις γραμμές $a\ b\ c\ d\ a$ να εναλλάσσονται με δύο γραμμές $c\ d\ a\ b\ c$ παίρνουμε την $(4,3,1,1)$.

Υπάρχουν συνολικά $\frac{4!}{2!}=12$ μεταθέσεις για την $(5,2,2,0)$, 12 μεταθέσεις για την $(5,2,1,1)$, 24 μεταθέσεις για την $(4,3,2,0)$ και τέλος 12 μεταθέσεις για την $(4,3,1,1)$.

Επομένως, υπάρχουν το πολύ $12+12+24+12=60$ διαφορετικά συνολικά αθροίσματα.

Παίρνοντας για παράδειγμα $a=10^3, b=10^2, c=10, d=1$, δηλαδή τη βάση για το δεκαδικό σύστημα, μπορούμε να επιτύχουμε όλα τα συνολικά αθροίσματα να είναι 60. Επομένως, αυτό είναι το ζητούμενο μέγιστο.

3.8 Asian Pacific Mathematics Olympiad (APMO)

Η Asian Pacific Mathematics Olympiad (συντομογραφικά **APMO**) είναι μαθηματική ολυμπιάδα που διεξάγετε (κυρίως) μεταξύ χωρών της Ασίας και χωρών που βρέχονται από τον Ειρηνικό Ωκεανό (.

Στο διαγωνισμό συμμετέχουν οι χώρες:

1.Αργεντινή (ARGENTINA)	2.Αυστραλία (AUSTRALIA)
3.Αζερμπαϊτζάν (AZERBAIJAN)	4.Μπαγκλαντές (BANGLADESH)
5.Βραζιλία (BRAZIL)	6.Καμπότζη (CAMBODIA)
7.Καναδάς (CANADA)	8.Κολομβία (COLOMBIA)
9.Κόστα Ρίκα (COSTA RICA)	10.Εκουαδόρ (ECUADOR)
11.Ελ Σαλβαδόρ (EL SALVADOR)	12.Χόνγκ Κονγκ (HONG KONG)
13.Ινδία (INDIA)	14.Ινδονησία (INDONESIA)
15.Ιράν (IRAN)	16.Ιαπωνία (JAPAN)
17. Καζακστάν (KAZAKHSTAN)	18.Κορέα (KOREA)
19.Μαλαισία (MALAYSIA)	20.Μεξικό (MEXICO)
21.Νέα Ζηλανδία (NEW ZEALAND)	22.Νικαράγουα (NICARAGUA)
23.Πακιστάν (PAKISTAN)	24.Παναμάς (PANAMA)
25.Περού (PERU)	26.Φιλιππίνες (PHILIPPINES)
27. Ρωσία RUSSIA (ASIAN PART)	28.Σαουδική Αραβία (SAUDI ARABIA)
29.Σιγκαπούρη (SINGAPORE)	30.Σρι Λάνκα (SRI LANKA)
31.Συρία (SYRIA)	32.Ταιβάν (TAIWAN)
33.Τατζικιστάν (TAJIKISTAN)	34.Ταϊλάνδη (THAILAND)
35.Τρινιντάντ & Τομπάγκο (TRINIDAD AND TOBAGO)	36.Τουρκμενιστάν (TURKMENISTAN)
37.Ουρουγουάη URUGUAY	38.Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής (UNITED STATES OF AMERICA)

Η πρώτη APMO έγινε το 1989. Στους σκοπούς και στόχους των APMO συμπεριλαμβάνονται και τα παρακάτω:

- Η ανακάλυψη, ενθάρρυνση και πρόκληση ευγενούς άμιλλα μεταξύ των προικισμένων στα μαθηματικά σπουδαστών που προέρχονται από όλες τις χώρες της "λεκάνης του Ειρηνικού Ωκεανού" (Pacific-Rim countries).

● Η προώθηση των φιλικών (διεθνών) σχέσεων και της συνεργασίας, μεταξύ των μαθητών και των δασκάλων που δραστηριοποιούνται στις παραπάνω χώρες της περιοχής "Pacific-Rim".

● Η δημιουργία ευκαιριών για την ανταλλαγή πληροφοριών σχετικά με τη διδακτέα ύλη και τις πρακτικές που εφαρμόζονται σε όλες τις χώρες της περιοχής "Pacific-Rim".

● Η ενθάρρυνση και η υποστήριξη για την ενασχόληση με μαθηματικά επιπέδου Ολυμπιάδων, όχι μόνο στις χώρες που συμμετέχουν στις ΑΡΜΟ, αλλά και σε άλλες χώρες της περιοχής "Pacific-Rim".

Ο διαγωνισμός ΑΡΜΟ αποτελείται από μία τετράωρη γραπτή εξέταση που αποτελείται από 5 θέματα-ερωτήσεις κλιμακούμενης δυσκολίας.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με άριστα το 7 (οπότε άριστα είναι 35).

Οι διαγωνιζόμενοι δεν θα πρέπει να έχουν εγγραφεί επίσημα σε οποιοδήποτε πανεπιστήμιο (ή ισοδύναμο ίδρυμα τριτοβάθμιας εκπαίδευσης) και πρέπει να είναι ηλικίας κάτω των 20 ετών την 1η Ιουλίου του έτους του διαγωνισμού.

Η ΑΡΟΜ διεξάγεται κάθε χρόνο ως εξής:

α) Το απόγευμα της δεύτερης Δευτέρας του Μαρτίου διαγωνίζονται οι χώρες της Βόρειας και Νότιας Αμερικής.

β) Το πρωί της δεύτερης Τρίτης του Μαρτίου διαγωνίζονται οι χώρες του Δυτικού Ειρηνικού και της Ασίας.

Ο διαγωνισμός διεξάγεται με αυτό τον τρόπο, ώστε να γίνεται η καλύτερη εκμετάλλευση της διαφοράς ώρας (μεταξύ των διαγωνιζόμενων χωρών).

Παρόλα αυτά όμως, μεσολαβούν κάποιες ώρες μεταξύ των δύο διαγωνισμών (οι οποίοι γίνονται με τα ίδια θέματα!).

Για να διαφυλαχτεί λοιπόν το αδιάβλητο του διαγωνισμού, ακολουθούνται οι παρακάτω ενέργειες και νουθεσίες.

Όλοι οι διαγωνιζόμενοι παραδίδουν το έντυπο των θεμάτων (μετά το τέλος του διαγωνισμού) τα οποία θα πρέπει να παραμείνουν άκρως εμπιστευτικά, μέχρι την ***ημερομηνία*** που η Ανώτερη Συντονίστρια-Διορθώτρια (*) Χώρα να τα αναρτήσει στην επίσημη ιστοσελίδα της ΑΡΜΟ.

Στο έντυπο των θεμάτων υπάρχει γραμμένο ένα κείμενο που προειδοποιεί τους μαθητές να μην συζητήσουν τα προβλήματα μέσω του διαδικτύου μέχρι την ***ημερομηνία*** αυτή.

Ποιο συγκεκριμένα (όπως θα δούμε στο έντυπο θεμάτων του 2006), στην αρχή του εντύπου υπάρχει η παράγραφος: *"The contest problems are to be kept **confidential** until they are posted on the official APMO website http://apmo.ommenlinea.org. Please do not disclose nor discuss the problems over online until that date."*

(*) Για τη περίοδο 2016-2018, "Senior Coordinating Country" είναι το Μεξικό και για τη περίοδο 2016-2017 "Assistant Coordinating Country" το Περού.

Κάθε διαγωνιζόμενος (τέλος) παίρνει βεβαίωση συμμετοχής, εύφημη μνεία ή μετάλλια (ανάλογα με την επίδοσή του).

Παρακάτω παραθέτουμε τα θέματα του 2016.

XXVIII Asian Pacific Mathematics Olympiad

March, 2016

Time allowed: 4 hours Each problem is worth 7 points
The contest problems are to be kept confidential until they are posted on the official APMO website http://apmo.ommenlinea.org. Please do not disclose nor discuss the problems over online until that date. The use of calculators is not allowed.

Problem 1. We say that a triangle ABC is great if the following holds: for any point D on the side BC, if P and Q are the feet of the perpendiculars from D to the lines AB and AC, respectively, then the reflection of D in the line PQ lies on the circumcircle of the triangle ABC. Prove that triangle ABC is great if and only if $\widehat{A} = 90°$ and AB = AC.

Problem 2. A positive integer is called fancy if it can be expressed in the form $2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{100}}$, where $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ are non-negative

integers that are not necessarily distinct. Find the smallest positive integer n such that no multiple of n is a fancy number.

Problem 3. Let AB and AC be two distinct rays not lying on the same line, and let ω be a circle with center O that is tangent to ray AC at E and ray AB at F. Let R be a point on segment EF. The line through O parallel to EF intersects line AB at P. Let N be the intersection of lines PR and AC, and let M be the intersection of line AB and the line through R parallel to AC. Prove that line MN is tangent to ω.

Problem 4. The country Dreamland consists of 2016 cities. The airline Starways wants to establish some one-way flights between pairs of cities in such a way that each city has exactly one flight out of it. Find the smallest positive integer k such that no matter how Starways establishes its flights, the cities can always be partitioned into k groups so that from any city it is not possible to reach another city in the same group by using at most 28 flights.

Problem 5. Find all functions $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ such that

$$(z + 1)\cdot f(x + y) = f(x\cdot f(z) + y) + f(y\cdot f(z) + x),$$

for all positive real numbers x, y, z.

Ιστότοποι με πληροφορίες σε σχέση με τον διαγωνισμό (APMO) είναι:

http://www.apmo-official.org/

http://www.ommenlinea.org/apmo/

3.9 Middle European Mathematical Olympiad (MEMO)

Ο διαγωνισμός **Austrian-Polish Mathematical Competition (APMC)** (Μαθηματικός Διαγωνισμός Αυστρίας-Πολωνίας) ξεκίνησε το 1978. Η Αυστρία και η Πολωνία φιλοξενούσαν εναλλάξ τον διαγωνισμό, ο οποίος πραγματοποιείτο νωρίς το καλοκαίρι, πριν από τη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα και αποτελείτο από δύο μέρη.

Το πρώτο μέρος ήταν ένας ατομικός διαγωνισμός έξι προβλημάτων (τρία την πρώτη και τρία τη δεύτερη ημέρα). Το δεύτερο μέρος ήταν ομαδικός διαγωνισμός που αποτελείτο από τρία έως τέσσερα προβλήματα.

http://artofproblemsolving.com/community/c103442_1978_austrianpolish_competition

Το 2007 ο διαγωνισμός μετονομάστηκε σε "**M**iddle **E**uropean **M**athematical **O**lympiad" (συντομογραφικά **MEMO**) και προσκλήθηκαν να συμμετάσχουν σε αυτόν πολλές άλλες χώρες της κεντρικής Ευρώπης.

Οι χώρες που έχουν οργανώσει MEMO, είναι οι εξής:

1η MEMO – 2007: *Eisenstadt, Austria,* (20-26 Σεπτεμβρίου)
http://www.oemo.at/en/info/memo.php

2η MEMO – 2008: *Olomouc, Czech Republic*, (4-9 Σεπτεμβρίου)
http://kag.upol.cz/memo/

3η MEMO – 2009: *Poznan, Poland,* (24-29 Σεπτεμβρίου)
http://www.memo2009.wmi.amu.edu.pl

4η MEMO – 2010: *Žilina, Slovakia,* (9-15 Σεπτεμβρίου)
http://memo2010.skmo.sk

5η MEMO – 2011: *Varaždin, Croatia,* (1-7 Σεπτεμβρίου)
http://memo2011.math.hr

6η MEMO – 2012: *Solothurn, Switzerland*, (6-12 Σεπτεμβρίου)
http://imosuisse.ch/index.php/de/internationale-olympiaden/memo

7η MEMO – 2013: *Veszprém, Hungary*, (22-28 Αυγούστου)
http://memo2013.mik.uni-pannon.hu

8η MEMO – 2014: Dresden, Germany, (18-24 Αυγούστου)
http://memo2014.de

9η MEMO – 2015*:* Koper, Slovenia, (25-31 Αυγούστου)
http://memo2015.dmfa.si/

10η MEMO – 2016: Vöcklabruck, Austria, (22-28 Αυγούστου)
https://www.math.aau.at/MEMO2016/

3.10 Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες

International Mathematical Olympiad (IMO)

Ο ποιο ενδιαφέρον και φημισμένος μαθηματικός διαγωνισμός είναι η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα (International Mathematical Olympiad (IMO)), που γίνεται κάθε χρόνο για μαθητές λυκείου.

Έμμεσα ή άμεσα όλοι οι άλλοι διαγωνισμοί στα μαθηματικά και τις επιστήμες, έχουν σαν σημείο αναφοράς την IMO.[10]

3.10.1 Ιστορικά Στοιχεία-Κανονισμοί

Η ιδέα της οργάνωσης ενός διεθνούς διαγωνισμού στα μαθηματικά αποκρυσταλλώθηκε κατά τη διάρκεια του τέταρτου συνεδρίου των Ρουμάνων μαθηματικών το 1956

Η πρώτη Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα (ΔΜΟ) έγινε το 1959, δηλαδή πριν 57 χρόνια, στο Βουκουρέστι της Ρουμανίας. Την πρωτοβουλία για τη διοργάνωση είχε η Ρουμανική Εταιρεία Μαθηματικών και Φυσικής, η οποία είχε μακρά παράδοση διοργανώσεων διαγωνισμών στα Μαθηματικά και τη Φυσική.

Τα πρώτα χρόνια συμμετείχαν μόνο οι Ευρωπαϊκές Σοσιαλιστικές χώρες, όπως η Ρουμανία, Ουγγαρία, Τσεχοσλοβακία, Βουλγαρία, Πολωνία, Σοβιετική Ένωση και η τέως Ανατολική Γερμανία. Η πρώτη μη Ευρωπαϊκή χώρα που έλαβε μέρος ήταν η Μογγολία το 1964. Η πρώτη Ευρωπαϊκή μη Σοσιαλιστική χώρα που έλαβε μέρος ήταν η Φιλανδία το 1965. Οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής έλαβαν μέρος για πρώτη φορά το 1974 στο Βερολίνο της τέως Ανατολικής Γερμανίας, ενώ η Ελλάδα έλαβε μέρος για πρώτη φορά το 1975 στη Σόφια της Βουλγαρίας και στη συνέχεια συμμετέχει ανελλιπώς εκτός των ετών 1976, 1977 και 1993. Η μοναδική χρονιά που δεν διοργανώθηκε η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα ήταν το 1980.

Σύμφωνα με τους κανονισμούς οι σκοποί των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων είναι οι εξής:

- Να ανακαλύψουν και να ενθαρρύνουν τους προικισμένους στα Μαθηματικά νέους ανθρώπους, καθώς και να διεγείρουν την ευγενή άμιλλα μεταξύ αυτών, σε όλες τις χώρες.
- Να συνάψουν φιλικές σχέσεις μεταξύ Μαθηματικών από όλες τις χώρες.
- Να δημιουργήσουν δυνατότητες για την ανταλλαγή πληροφοριών για τα Σχολικά προγράμματα όλων των χωρών.

Η συμμετοχή σε μία ΔΜΟ γίνεται με πρόσκληση από τη διοργανώτρια χώρα. Κάθε προσκαλούμενη χώρα έχει το δικαίωμα να στείλει μία ομάδα που θα αποτελείται από έναν αρχηγό, έναν υπαρχηγό και από 6 το πολύ μαθητές, οι οποίοι δεν πρέπει να έχουν αρχίσει σπουδές σε κάποιο Πανεπιστήμιο ή σε οποιοδήποτε άλλο ισοδύναμο Μεταλυκειακό Ίδρυμα. Επιπλέον οι διαγωνιζόμενοι δεν πρέπει να έχουν συμπληρώσει τα 20 χρόνια τους κατά τη δεύτερη ημέρα του διαγωνισμού.

Ο διαγωνισμός γίνεται σε δύο διαδοχικές ημέρες. Κάθε ημέρα δίνονται στους διαγωνιζόμενους προς επίλυση 3 προβλήματα διαφορετικής δυσκολίας με διάρκεια εξέτασης 4 ώρες και 30 λεπτά. Κάθε πρόβλημα έχει ως μέγιστη βαθμολογία τις 7 μονάδες.

Τα εξεταζόμενα προβλήματα επιλέγονται από το Συμβούλιο των Αρχηγών (Jury) σε διαδοχικές συνεδριάσεις που προηγούνται του διαγωνισμού, μέσα από ένα σύνολο 25 περίπου προβλημάτων που έχουν ήδη επιλεγεί από την Επιτροπή Επιλογής Προβλημάτων (Problem Selection Committee) της διοργανώτριας χώρας. Η επιλογή της παραπάνω λίστας προβλημάτων γίνεται από τα προβλήματα που αποστέλλουν οι συμμετέχουσες χώρες στην Επιτροπή Επιλογής Προβλημάτων. Κάθε συμμετέχουσα χώρα, πλην της διοργανώτριας μπορεί να στείλει μέχρι 6 προβλήματα.

Η τελική βαθμολογία κάθε διαγωνιζόμενου αποφασίζεται από τους βαθμολογητές της διοργανώτριας χώρας (Coordinators), με τη βοήθεια των αρχηγών και υπαρχηγών των ομάδων οι οποίοι μεταφράζουν τις λύσεις των μαθητών, όταν αυτό είναι αναγκαίο.

Οι αριθμοί των πρώτων, δεύτερων και τρίτων βραβείων που απονέμονται είναι κατά προσέγγιση σε αναλογία 1:2:3. Ο συνολικός αριθμός των παραπάνω βραβείων δεν πρέπει να ξεπερνάει το μισό του αριθμού των διαγωνιζομένων. Για τους διαγωνιζόμενους που δεν πήραν κάποιο από τα παραπάνω βραβεία, αλλά σε κάποιο πρόβλημα βαθμολογήθηκαν με το μέγιστο των 7 βαθμών, υπάρχει η απονομή πιστοποιητικού εύφημης μνείας (honorable mention).

3.10.2 Η 56η IMO 2015

Ενδεικτικά θα αναφέρουμε, θα σχολιάσουμε και θα αναφέρουμε κάποια στατιστικά στοιχεία για τα θέματα της IMO 2015 που έγινε από 4 έως 13 Ιουλίου στην Ταϊλάνδη.

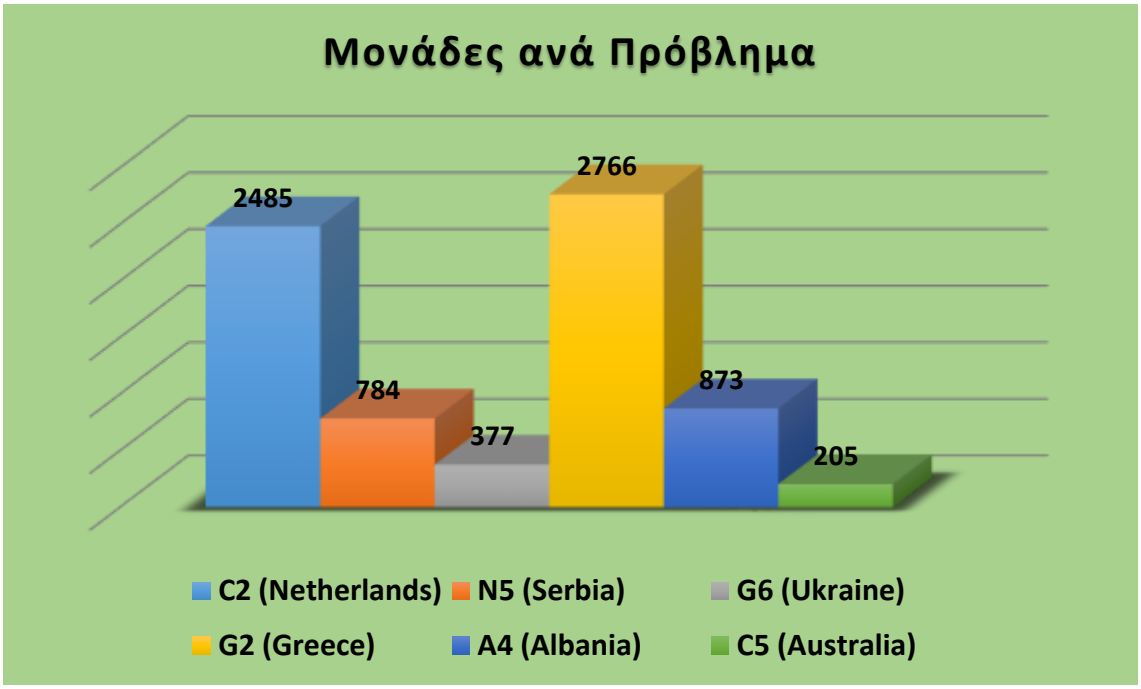
Την Επιτροπή Επιλογής Προβλημάτων (Problem Selection Committee) της 56ης IMO (Ταϊλάνδη 2015) αποτελούσαν οι: Dungjade Shiowattana, Ilya I. Bogdanov, Tirasan Khandhawit, Wittawat Kositwattanarerk, G´eza Ko´s, Weerachai Neeranartvong, Nipun Pitimanaaree, Christian Reiher, Nat Sothanaphan, Warut Suksompong, Wuttisak Trongsiriwat, Wijit Yangjit
Assistants: Jirawat Anunrojwong, Pakawut Jiradilok

Στην επιτροπή έστειλαν 155 προβλήματα οι παρακάτω 53 χώρες: **A**lbania, **A**lgeria, Armenia, Australia, **A**ustria, **B**razil, **B**ulgaria, **C**anada, **C**osta Rica, **C**roatia, **C**yprus, **D**enmark, **E**l **S**alvador, **E**stonia, **F**inland, **F**rance, **G**eorgia, **G**ermany, **G**reece, **H**ong Kong, **H**ungary, **I**ndia, **I**ran, **I**reland, **I**srael, **I**taly, **J**apan, **K**azakhstan, **L**ithuania, **L**uxembourg, **M**ontenegro, **M**orocco, **N**etherlands, **P**akistan, **P**oland, **R**omania, **R**ussia, **S**audi Arabia, **S**erbia, **S**ingapore, **S**lovakia, **S**lovenia, **S**outh Africa, **S**outh Korea, **S**weden, **T**urkey, **T**urkmenistan, **T**aiwan, **T**anzania, **U**kraine, **U**nited Kingdom, **U**.S.A., **U**zbekistan. Κάθε χώρα έχει δικαίωμα να στείλει μέχρι 6 προβλήματα.
Τα προβλήματα χωρίζονται σε τέσσερεις μεγάλες κατηγορίες και η Επιτροπή Επιλογής Προβλημάτων επέλεξε:
α) 6 Προβλήματα Άλγεβρας (Algebra), A1 (Serbia), A2 (Croatia), A3 (Austria), A4 (Albania), A5 (U.S.A.), A6 (Canada).
β) 7 Προβλήματα Συνδυαστικής (Combinatorics), C1 (Estonia), C2 (Netherlands), C3 (Ukraine), C4 (Finland), C5 (Australia), C6 (U.S.A.) , C7 (Russia).
γ) 8 Προβλήματα Γεωμετρίας (Geometry), G1 (Australia), G2 (Greece), G3 (Georgia), G4 (Russia), G5 (El Salvador), G6 (Ukraine), G7 (Bulgaria), G8 (Bulgaria).
δ) 8 Προβλήματα Θεωρίας Αριθμών (Number Theory), N1 (Luxembourg), N2 (United Kingdom), N3 (Austria), N4 (France), N5 (Serbia), N6 (Singapore), N7 (Canada), N8 (Brazil).

Η αύξουσα αρίθμηση των προβλημάτων, έχει σχέση με το βαθμό δυσκολίας τους, ανάμεσα στα προβλήματα της ίδιας κατηγορίας.

Τα τελικά προβλήματα του διαγωνισμού που επελέγησαν (κατόπιν ψηφοφορίας) από το Συμβούλιο των Αρχηγών ήταν:
Πρώτο πρόβλημα επελέγη το C2 (Netherlands).
Δεύτερο πρόβλημα επελέγη το N5 (Serbia).
Τρίτο πρόβλημα επελέγη το G6 (Ukraine).
Τέταρτο πρόβλημα επελέγη το G2 (Greece).

Πέμπτο πρόβλημα επελέγη το A4 (Albania).
Έκτο πρόβλημα επελέγη το C5 (Australia).



Διάγραμμα 1.Κατανομή βαθμών στην 56η IMO

Πίνακας 1. Κατανομή βαθμών στην 56η IMO

C2	N5	G6	G2	A4	C5
2485	784	377	2766	873	205
33,2%	10,5%	5,0%	36,9%	11,7%	2,7%

Στο προηγούμενο Διάγραμμα και τον αντίστοιχο Πίνακα παρουσιάζεται το συνολικό πλήθος των μονάδων που "έδωσε" στους διαγωνιζόμενους κάθε πρόβλημα.

56η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, 4-16 Ιουλίου 2015, Τσιάνγκ Μάι, Ταϊλάνδη

Η 56η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα έγινε από 4 έως 16 Ιουλίου 2015 στην πόλη Τσιάνγκ Μάι της Ταϊλάνδης, με συμμετοχή 104 χωρών και 577 διαγωνιζόμενων (525 μαθητές και 52 μαθήτριες). Η Ελληνική ομάδα κατέκτησε 1 αργυρό μετάλλιο, 2 χάλκινα μετάλλια και 2 εύφημες μνείες, ως εξής:

Ντούνης Πέτρος	1ο ΓΕΛ Κορωπίου	Αργυρό Μετάλλιο
Μισιακός Παναγιώτης	Κολλέγιο Αθηνών	Χάλκινο μετάλλιο
Χαχάμης Νέστορας	ΓΕΛ Παλαίρου	Χάλκινο Μετάλλιο
Παναγιωτόπουλος Απόστολος	Σχολή Μαντουλίδη	Εύφημη μνεία
	Σχολή Μωραϊτη	Εύφημη μνεία
Μελάς Δημήτριος	3ο ΓΕΛ Βέροιας	Συμμετοχή
Καρατζά Παναγιώτα		

Επίσης η Ελληνική ομάδα κατέλαβε την 51η θέση στην κατάταξη των χωρών. Τις τρεις πρώτες θέσεις στη κατάταξη κατέλαβαν οι ομάδες των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής, της Κίνας και Κορέας.

Αρχηγός της Ελληνικής αποστολής ήταν ο Αναπληρωτής καθηγητής του Ε. Μ. Πολυτεχνείου Ανάργυρος Φελλούρης και υπαρχηγός ο μαθηματικός Ευάγγελος Ζώτος. Εκτός αυτών, στο τελικό στάδιο της προετοιμασίας των μαθητών, έλαβαν μέρος οι συνάδελφοι μαθηματικοί Σιλουανός Μπραζιτίκος, Γιάννης Τυρλής και Ευάγγελος Ψύχας.

Τα προβλήματα

Πρόβλημα 1.

Λέμε ότι ένα πεπερασμένο σύνολο S, που αποτελείται από σημεία του επιπέδου, είναι ισορροπημένο, αν για κάθε δυο διαφορετικά σημεία A και B του S, υπάρχει σημείο C του S τέτοιο ώστε $AC = BC$. Λέμε ακόμα ότι το σύνολο S είναι ελεύθερο κέντρου, αν για οποιαδήποτε τρία διαφορετικά σημεία A, B και C του S, δεν υπάρχει σημείο P του S τέτοιο ώστε $PA = PB = PC$.

(a) Να αποδείξετε ότι για όλους τους ακέραιους $n \geq 3$, υπάρχει ένα ισορροπημένο σύνολο, που αποτελείται από n σημεία.

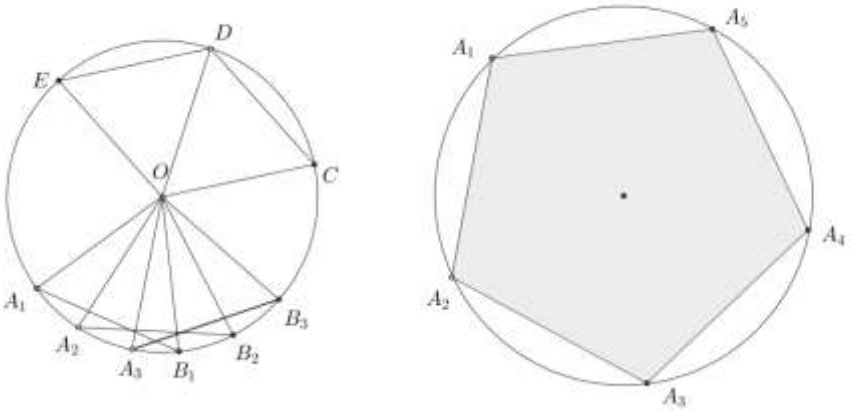
(b) Να προσδιορίσετε όλους τους ακέραιους $n \geq 3$, για τους οποίους υπάρχει ένα ισορροπημένο και ελεύθερο κέντρου σύνολο, που αποτελείται από n σημεία.

Λύση

(a) Παρατηρούμε ότι για $n = 3$ τρεις κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου ορίζουν ένα ισορροπημένο σύνολο σημείων του επιπέδου. Έτσι για την κατασκευή ενός ισορροπημένου συνόλου σημείων μπορούμε να θεωρήσουμε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R και να κατασκευάσουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $OA_1B_1, OA_2B_2, ..., OA_kB_k$ έτσι ώστε τα σημεία A_i, B_i, $i = 1, 2, ..., k$ να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Τότε έχουμε ένα σύνολο $n = 2k + 1$ σημείων του επιπέδου τέτοιο ώστε για κάθε ζευγάρι από αυτά

υπάρχει σημείο του συνόλου που ισαπέχει από τα δύο σημεία. Αν τώρα κατασκευάσουμε το ισόπλευρο τρίγωνο OB_kA_{k+1}, τότε έχουμε σύνολο $n=2k+2$ σημείων με αντίστοιχες ιδιότητες. Διαφορετικά θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε δύο διαδοχικά ισόπλευρα τρίγωνα *OCD* και *ODE* οπότε ο αριθμός των νέων σημείων είναι τρία (σχήμα 1).

Εναλλακτικά, για την περίπτωση περιττού πλήθους σημείων μπορούμε να θεωρήσουμε τις κορυφές ενός κανονικού $n-$γώνου, $n=2k+1$. Δεδομένου ότι κάθε μεσοκάθετη πλευράς είναι άξονας συμμετρίας του πολυγώνου και περνάει από την απέναντι κορυφή του πολυγώνου, η κορυφή αυτή ισαπέχει από κάθε ζευγάρι συμμετρικών κορυφών. Έτσι έχουμε μία ακόμα κατασκευή $2k+1$ σημείων του επιπέδου που είναι ισορροπημένο.



Σχήμα 3-20

(b) Για την περίπτωση του κανονικού πολυγώνου που κατασκευάσαμε παραπάνω με $n=2k+1$ κορυφές, παρατηρούμε ότι για κάθε τριάδα σημείων του το σημείο του επιπέδου που ισαπέχει από τα τρία σημεία είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού πολυγώνου, το οποίο όμως δεν ανήκει στο σύνολο. Επομένως ένα τέτοιο σύνολο σημείων είναι ισορροπημένο και ελεύθερο κέντρου.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα ισορροπημένο σύνολο $n=2k$ σημείων. Τότε υπάρχουν συνολικά $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ ζευγάρια σημείων. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του συνόλου που ισαπέχει από κάθε ζευγάρι σημείων, τότε θα υπάρχει ένα από τα n σημεία του συνόλου που θα ισαπέχει από τουλάχιστον $\left\lfloor \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n} \right\rfloor +1=\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor +1\geq 2$, ζευγάρια σημείων.

Επομένως, αυτό το σημείο θα ισαπέχει από τρία σημεία του συνόλου, οπότε το σύνολο που θεωρήσαμε δεν μπορεί να είναι ελεύθερο κέντρου.

Πρόβλημα 2.

Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (a,b,c) *θετικών ακεραίων, που είναι*

τέτοιες ώστε κάθε ένας από τους αριθμούς ***ab - c, bc - a, ca - b*** *, είναι δύναμη του 2 . (Δύναμη του 2 είναι ένας ακέραιος της μορφής* $\mathbf{2^n}$ *, όπου* **n** *είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος.)*

Λύση

Παρατηρούμε ότι οι δεδομένοι αριθμοί $ab-c,\ bc-a,\ ca-b$ παρουσιάζουν συμμετρία ως προς τους αριθμούς a,b και $c,$ αφού οποιαδήποτε μετάθεση της τριάδας (a,b,c) δεν μεταβάλλει τους δεδομένους αριθμούς. Επομένως, αν μία τριάδα (a,b,c) είναι λύση του προβλήματος, τότε και οι έξι μεταθέσεις αυτής $(a,b,c),(b,c,a),\ (c,a,b),\ (a,c,b),(c,b,a),(b,a,c)$ είναι επίσης λύσεις.

Επίσης, ας υποθέσουμε ότι η τριάδα (a,b,c) είναι λύση του προβλήματος. Αν ήταν $a=1,$ τότε και οι δύο αριθμοί $b-c$ και $c-b$ θα ήταν δυνάμεις του 2, οπότε και το άθροισμα τους που είναι 0 θα ήταν δύναμη του 2, που είναι αδύνατο. Επομένως, λόγω και της υπάρχουσας συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι: $a,b,c\geq 2.$ Με βάση τα προηγούμενα διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. *Μεταξύ των* a,b,c *υπάρχουν τουλάχιστον δύο ίσοι αριθμοί.*

Λόγω συμμετρίας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι: $a=b$. Τότε οι αριθμοί a^2-c και $a(c-1)$ θα είναι δυνάμεις του 2. Αν είναι $a^2-c=2^k$ και $a(c-1)=2^\ell,\ k,\ell\in\mathbb{N},$ τότε $a=2^\alpha, c-1=2^\gamma,$ όπου $\alpha,\gamma\in\mathbb{N}$ και $a^2-c=2^{2\alpha}-2^\gamma-1=2^k$, οπότε για να διαιρούνται και τα δύο μέλη της ισότητας $2^{2\alpha}-2^\gamma-1=2^k$ με το 2 πρέπει: $\gamma\leq 1.$ Για $\gamma=1,$ οπότε $c=3,$ προκύπτει η εξίσωση $2^{2\alpha}-3=2^k,\alpha,k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\alpha=1,k=0$. Άρα έχουμε τη λύση: $(a,b,c)=(2,2,3)$ και τις μεταθέσεις της $(2,3,2),(3,2,2).$ Για $\gamma=0$, οπότε $c=2,$ προκύπτει η εξίσωση

$2^{2\alpha}-2=2^k,\alpha,k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 2^{2\alpha-1}-1=2^{k-1},\alpha,k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\alpha=1,k=1$. Άρα έχουμε τη λύση:

$$(a,b,c)=(2,2,2).$$

Περίπτωση 2. *Οι αριθμοί* a,b,c *είναι διαφορετικοί ανά δύο.*

Λόγω συμμετρίας και της σχέσης $a,b,c\geq 2.$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι:

$$2\leq a<b<c.$$

(1)

Από την υπόθεση του προβλήματος έχουμε;

$$bc-a=2^\alpha,\alpha\in\mathbb{N}, \qquad (2)$$

$$ac-b=2^\beta,\ \beta\in\mathbb{N}, \qquad (3)$$

$$ab-c=2^\gamma,\ \gamma\in\mathbb{N}. \qquad (4)$$

Λόγω της (1) εύκολα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$\alpha>\beta>\gamma\ .$$

(5)

Στη συνέχεια διακρίνουμε δύο περιπτώσεις σχετικά με την τιμή του a.

Περίπτωση 2.1. $a=2.$

Τότε $2b-c=2^{\gamma},\ \gamma\in\mathbb{N}$. Αν υποθέσουμε ότι είναι $\gamma>0$, τότε ο c πρέπει να είναι άρτιος. Επίσης, λόγω των (3) και (5) προκύπτει ότι και ο b πρέπει να είναι άρτιος. Τότε από τη σχέση (2) έχουμε: $2^{\alpha}=bc-2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4),\alpha\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\alpha=2,\ bc=4$, το οποίο είναι αδύνατο λόγω της (1). Άρα πρέπει $\gamma=0$, οπότε $c=2b-1$. Τότε η εξίσωση (3) γίνεται: $2(2b-1)-b=2^{\beta},\ \beta\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 3b-2=2^{\beta},\ \beta\in\mathbb{N}$. Επειδή $b>2$, πρέπει $\beta\geq 4$. Για $\beta=4,$ έχουμε $b=6$ και $c=2\cdot 6-1=11$, οπότε έχουμε τη λύση: $(a,b,c)=(2,6,11)$, καθώς και όλες τις μεταθέσεις της. Για $\beta\geq 5$ από τη σχέση (2) έχουμε: $9\cdot 2^{\alpha}=9b(2b-1)-18=(3b-2)(6b+1)-16=2^{\beta}\left(2^{\beta+1}+5\right)-16,$ οπότε, λόγω της υπόθεσης $\beta\geq 5$ ο αριθμός $2^{\beta}\left(2^{\beta+1}+5\right)-16=9\cdot 2^{\alpha}$ δεν διαιρείται με το 32. Επομένως θα πρέπει $\alpha\leq 4$, που αντίκειται στη σχέση (5).

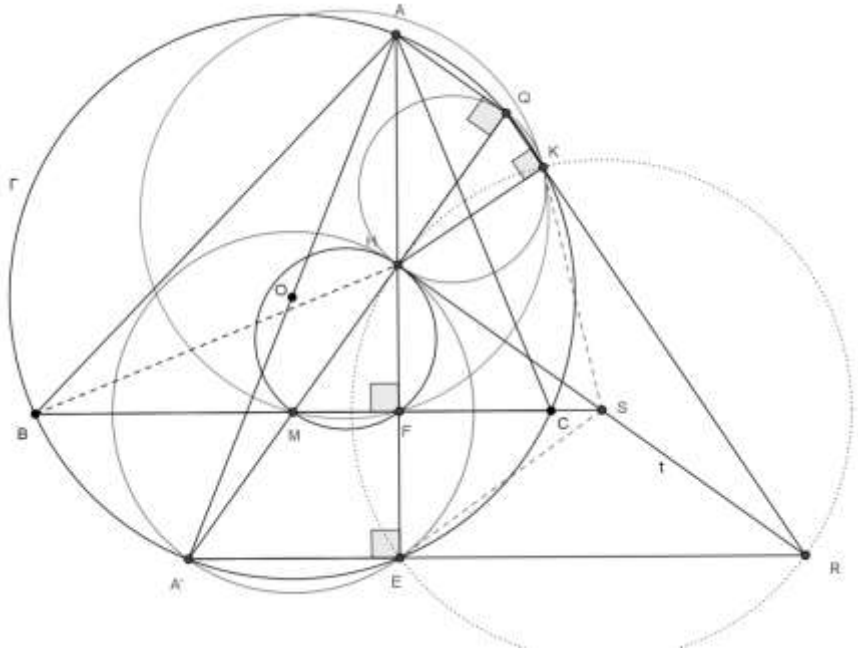
Περίπτωση 2.2. $a\geq 3.$

Θεωρούμε έναν αριθμό $\theta\in\{-1,1\}$ έτσι ώστε ο αριθμός $c-\theta$ να διαιρείται με το 4. Τότε ο αριθμός $2^{\alpha}+\theta\cdot 2^{\beta}=\left(bc-a\theta^2\right)+\theta(ca-b)=(b+a\theta)(c-\theta)$, διαιρείται με το 2^{β}, οπότε και ο αριθμός $b+a\theta$ θα διαιρείται με το $2^{\beta-1}$. Επίσης, ισχύει ότι: $2^{\beta}=ac-b>(a-1)c\geq 2c$, οπότε, λόγω της (1) προκύπτει ότι $a<2^{\beta-1}$ και $b<2^{\beta-1}$. Επομένως πρέπει $\theta=1$ και $a+b=2^{\beta-1}$. Τότε από την (3) λαμβάνουμε: $ac-b=2(a+b),$ (6) οπότε $4b>a+3b=a(c-1)\geq ab\Rightarrow a=3.$ Τότε η (6) γίνεται $c=b+2,$ οπότε από τη (2) προκύπτει ότι ο αριθμός $b(b+2)-3=(b-1)(b+3)$ είναι δύναμη του 2. Επομένως και οι παράγοντες $b-1$ και $b+3$ είναι δυνάμεις του 2. Επειδή η διαφορά τους είναι 4, έπεται ότι $b=5,$ οπότε $c=7$. Άρα έχουμε τη λύση $(a,b,c)=(3,\ 5,\ 7)$ καθώς και όλες τις μεταθέσεις της.

Πρόβλημα 3.

Έστω $\boldsymbol{ABC}$ *ένα οξυγώνιο τρίγωνο με* $\boldsymbol{AB>AC}$ *. Έστω* $\boldsymbol{\Gamma}$ *ο περιγεγραμμένος κύκλος του,* $\boldsymbol{H}$ *το ορθόκεντρό του και* $\boldsymbol{F}$ *το ίχνος του ύψους του από την κορυφή* $\boldsymbol{A}$*. Έστω* $\boldsymbol{M}$ *το μέσον της πλευράς* $\boldsymbol{BC}$*. Έστω* $\boldsymbol{Q}$ *το σημείο πάνω στον κύκλο* $\boldsymbol{\Gamma}$*, τέτοιο ώστε* $\boldsymbol{\angle HQA=90^{o}}$ *και έστω* $\boldsymbol{K}$ *το σημείο πάνω στον κύκλο* $\boldsymbol{\Gamma}$*, τέτοιο ώστε* $\boldsymbol{\angle HKQ=90^{o}}$*. Υποθέτουμε ότι τα σημεία* $\boldsymbol{A, B.C, K}$ *και* $\boldsymbol{Q}$ *είναι όλα διαφορετικά και βρίσκονται πάνω στον κύκλο* $\boldsymbol{\Gamma}$ *με τη σειρά που δίνονται. Να αποδείξετε* ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $\boldsymbol{KQH}$ **και** $\boldsymbol{KFM}$ εφάπτονται μεταξύ τους.

Λύση



Σχήμα 3-21

Έστω A' το αντιδιαμετρικό σημείο της κορυφής A. Επειδή $\angle A'QA = \angle HQA = 90^\circ$, τα σημεία Q, H, A' είναι συνευθειακά. Επειδή $OM \parallel AF$, ως κάθετες προς την πλευρά BC, και O είναι το μέσο του AA', έπεται ότι το σημείο M θα είναι το μέσου του ευθύγραμμου τμήματος HA'. Αν το ύψος AF τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ABC στο σημείο E, τότε $\angle AEA' = 90^\circ$ και το σημείο F είναι το μέσο του τμήματος HE.

Στους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων HQK και $A'EK$ τα τμήματα HQ και HA' είναι διάμετροι, οπότε οι κύκλοι αυτοί εφάπτονται εξωτερικά. Το ίδιο ισχύει και για τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων HQK και HMF. Επομένως τα δύο ζεύγη των παραπάνω κύκλων έχουν κοινή εφαπτομένη ευθεία t στο σημείο H κάθετη προς την ευθεία QM των διαμέτρων τους στο σημείο H. Τότε η εφαπτομένη t περνάει από το ριζικό κέντρο των τριών κύκλων που είναι το σημείο τομής R των χορδών QK και $A'E$. Αν η ευθεία BC τέμνει την εφαπτομένη t στο σημείο S, τότε το S θα είναι το μέσο του τμήματος HR (αφού $BC \parallel A'R$ και F μέσο HE). Επειδή τα τρίγωνα HKR και HER είναι ορθογώνια με υποτείνουσα HR, έπεται ότι $SK = SH = \dfrac{HR}{2}$, οπότε $SK^2 = SH^2 = SF \cdot SM$,

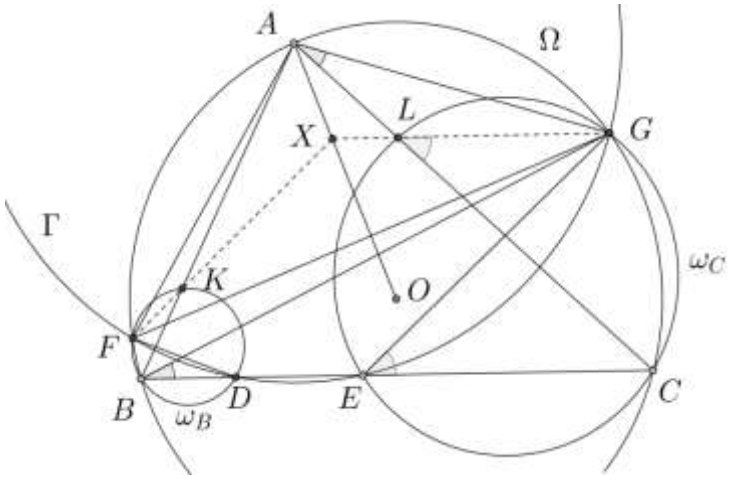
όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο SHM. Επομένως, το σημείο S έχει την ίδια δύναμη ως προς τους κύκλους (K,Q,H) και (K,F,M), οπότε η ευθεία SK είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων στο σημείο K.

Πρόβλημα 4.

Τρίγωνο $\boldsymbol{ABC}$ *έχει περιγεγραμμένο κύκλο* $\boldsymbol{\Omega}$ *και περίκεντρο* $\boldsymbol{O}$. *Ένας κύκλος* Γ *με κέντρο* $\boldsymbol{A}$ *τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα* $\boldsymbol{BC}$ *στα σημεία στα σημεία* $\boldsymbol{D}$ *και* $\boldsymbol{E}$ *έτσι ώστε τα σημεία* $\boldsymbol{B, D, E}$ *και* $\boldsymbol{C}$ *είναι όλα διαφορετικά*

και βρίσκονται πάνω στην ευθεία BC *με αυτή τη σειρά. Έστω* F *και* G *τα σημεία τομής των κύκλων* Γ **και** Ω *έτσι ώστε* A, F, B, C **και** G *βρίσκονται πάνω στον κύκλο* Ω *με αυτή τη σειρά. Έστω* K *το δεύτερο σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου* BDF *και του ευθύγραμμου τμήματος* AB*. Έστω* L *το δεύτερο σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου* CGE *και του ευθύγραμμου τμήματος* CA*. Υποθέτουμε ότι οι ευθείες* FK *και* GL *είναι διαφορετικές και τέμνονται στο σημείο* X**.** *Να αποδείξετε ότι το σημείο* X *βρίσκεται πάνω στην ευθεία* AO**.***(Προτάθηκε από τον Ευάγγελο Ψύχα)*

Λύση



Σχήμα 3-22

Αρκεί να αποδείξουμε ότι οι ευθείες FK και GL είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία AO. Επειδή η διάκεντρος AO των κύκλων Γ και Ω είναι μεσοκάθετη της κοινής χορδής τους FG, έπεται ότι οι ευθείες AF και AG είναι ίσες και συμμετρικές ως προς την ευθεία AO. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι: $K\hat{F}A = A\hat{G}L.$ (1)

Σημειώνουμε με ω_B και ω_C τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων BDG και CEG, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι: $K\hat{F}A = D\hat{F}G + G\hat{F}A - D\hat{F}K$ (2)

Όμως, από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $FDEG$ προκύπτει η ισότητα $D\hat{F}G = C\hat{E}G$, ενώ στον κύκλο Ω οι εγγεγραμμένες γωνίες $G\hat{F}A$ και $G\hat{B}A$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, οπότε θα είναι ίσες: $G\hat{F}A = G\hat{B}A$. Ομοίως από τον κύκλο ω_B, ισχύει: $D\hat{F}K = D\hat{B}K$. Έτσι η σχέση (1) γράφεται:

$$K\hat{F}A = C\hat{E}G + G\hat{B}A - D\hat{B}K = C\hat{E}G - \left(D\hat{B}K - G\hat{B}A\right) = C\hat{E}G - C\hat{B}G. \quad (3)$$

Από τον κύκλο ω_C προκύπτει η ισότητα των γωνιών $C\hat{E}G = G\hat{L}C$, ενώ από τον κύκλο Ω προκύπτει: $C\hat{B}G = C\hat{A}G$. Επομένως η σχέση (3) γράφεται:

$$K\hat{F}A = C\hat{E}G - C\hat{B}G = C\hat{L}G - C\hat{A}G = A\hat{G}L, \quad (4)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη σχέση εξωτερικής γωνίας και των δύο απέναντι εσωτερικών στο τρίγωνο ALG.

Πρόβλημα 5.

Έστω $\mathbb{R}$ *το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Να προσδιορίσετε όλες τις*

συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *που ικανοποιούν την εξίσωση*

$$f\left(x+f\left(x+y\right)\right)+f\left(xy\right)=x+f\left(x+y\right)+yf\left(x\right). \quad (1)$$

για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x *και* y*.*

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι f είναι μία συνάρτηση που ικανοποιεί την (1). Τότε θέτοντας $y=1$ στην (1), λαμβάνουμε: $f\left(x+f\left(x+1\right)\right)=x+f\left(x+1\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, (2)

δηλαδή το $x+f\left(x+1\right)$ είναι σταθερό σημείο της f, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν θέσουμε $x=0$ στην (1) λαμβάνουμε: $f\left(f\left(y\right)\right)+f\left(0\right)=f\left(y\right)+yf\left(0\right)\Rightarrow$

$$f\left(f\left(y\right)\right)-f\left(y\right)=\left(y-1\right)f\left(0\right), \quad (3)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις σχετικά με την τιμή του $f\left(0\right)$.

Περίπτωση 1. $f\left(0\right)\neq 0$.

Τότε, αν υποθέσουμε ότι y_0 είναι ένα σταθερό σημείο της f, με την αντικατάσταση $y=y_0$ στην (3) λαμβάνουμε:

$$f\left(f\left(y_0\right)\right)-f\left(y_0\right)=\left(y_0-1\right)f\left(0\right)\Rightarrow 0=\left(y_0-1\right)f\left(0\right)\overset{f(0)\neq 0}{\Rightarrow} y_0=1.$$

Επομένως, θα είναι $x+f\left(x+1\right)=1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε $f\left(x+1\right)=1-x,\ x\in\mathbb{R}$ και

$f\left(x\right)=2-x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, η οποία εύκολα επαληθεύεται ότι ικανοποιεί την εξίσωση (1).

Περίπτωση 2. $f\left(0\right)=0.$

Αν θέσουμε $y=0$ στην (1) και αντικαταστήσουμε το x με το $x+1$, έχουμε:

$$f\left(x+1+f\left(x+1\right)\right)=x+1+f\left(x+1\right), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Επίσης, από την (1) για $x=1$ λαμβάνουμε:

$$f\left(1+f\left(y+1\right)\right)+f\left(y\right)=1+f\left(y+1\right)+yf\left(1\right), \text{ για κάθε } y\in\mathbb{R}, \quad (5)$$

ενώ για $x=-1$ η σχέση (2) δίνει: $f\left(-1\right)=-1$. Έτσι, για $y=-1$ στη σχέση (5) λαμβάνουμε $f\left(1\right)=1$, οπότε η σχέση (5) τελικά γίνεται:

$$f\left(1+f\left(y+1\right)\right)+f\left(y\right)=1+f\left(y+1\right)+y, \text{ για κάθε } y\in\mathbb{R}. \quad (6)$$

Επομένως, αν υποθέσουμε ότι οι αριθμοί y_0 και y_0+1 είναι και οι δύο σταθερά σημεία για τη συνάρτηση f, τότε από τη σχέση (6) προκύπτει ότι:

$$f\left(1+f\left(y_0+1\right)\right)+f\left(y_0\right)=1+f\left(y_0+1\right)+y_0\Leftrightarrow f\left(1+f\left(y_0+1\right)\right)=1+f\left(y_0+1\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(1+y_0+1\right)=1+y_0+1\Leftrightarrow f\left(y_0+2\right)=y_0+2,$$

δηλαδή τότε και ο αριθμός y_0+2 είναι επίσης σταθερό σημείο της f.

Επομένως, από τις σχέσεις (2) και (4) προκύπτει ότι ο $x+f\left(x+1\right)+2$ είναι σταθερό σημείο της f, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή

$$f\left(x+f\left(x+1\right)+2\right)=x+f\left(x+1\right)+2, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \quad (7)$$

Με αντικατάσταση του x με το $x-2$ στην (7), αυτή γίνεται:

$$f\left(x+f\left(x-1\right)\right)=x+f\left(x-1\right), \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}. \quad (8)$$

Αν τώρα θέσουμε στη σχέση (1) $y=-1$, λαμβάνουμε:

$$f\left(x+f\left(x-1\right)\right)=x+f\left(x-1\right)-f\left(x\right)-f\left(-x\right)\overset{(8)}{\Rightarrow} f\left(x\right)=-f\left(-x\right), \qquad (9)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η συνάρτηση f είναι περιττή. Τελικά, θέτουμε στην (1) το ζεύγος $\left(-1,-y\right)$ αντί του $\left(x,y\right)$, για να λάβουμε:

$$f\left(-1+f\left(-1-y\right)\right)+f\left(y\right)=-1+f\left(-1-y\right)-yf\left(-1\right)\overset{f(-1)=-1}{\Rightarrow}$$

$$f\left(-1+f\left(-1-y\right)\right)+f\left(y\right)=-1+f\left(-1-y\right)+y\overset{f\ \text{περιττή}}{\Rightarrow}$$

$$-f\left(1+f\left(y+1\right)\right)+f\left(y\right)=-1-f\left(y+1\right)+y. \quad (10)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων (6) και (10), λαμβάνουμε $f\left(y\right)=y$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$, η οποία εύκολα επαληθεύεται ότι ικανοποιεί τη σχέση (1).

Πρόβλημα 6.

Η ακολουθία $\boldsymbol{a_1,a_2,...}$ *ακεραίων αριθμών ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(i) $\boldsymbol{1\le a_j\le 2015,}$ *για κάθε* $\boldsymbol{j\ge 1}$*.,* *(ii)* $\boldsymbol{k+a_k\ne \ell+a_\ell,}$ *για κάθε* $1\le k<\ell$*.*

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο θετικοί ακέραιοι $\boldsymbol{b}$ *και* $\boldsymbol{N}$ *τέτοιοι ώστε* $\left|\sum_{j=m+1}^{n}\left(a_j-b\right)\right|\le 1007^2$ *για όλους τους ακέραιους* m *και* n*, για τους οποίους ισχύει* $n>m\ge N$*.*

Λύση.

Θα προσπαθήσουμε να απεικονίσουμε το σύνολο των θετικών ακέραιων ως μία ακολουθία σημείων. Για κάθε n γράφουμε ένα βέλος που ξεκινάει από το n και δείχνει προς το $n+a_n$, δηλαδή $n\to n+a_n$. Λέμε ότι το μήκος αυτού του βέλους είναι a_n. Επειδή ισχύει ότι $m+a_m\ne n+a_n$, για κάθε $m\ne n$, σε κάθε θετικό ακέραιο αντιστοιχίζεται ένα μόνο βέλος. Υπάρχουν μερικοί ακέραιοι, όπως ο 1, στους οποίους δεν αντιστοιχίζεται κανένα βέλος. Τους αριθμούς αυτούς στη συνέχεια θα αναφέρουμε ως σημεία εκκίνησης. Όταν κάποιος ξεκινά από οποιοδήποτε σημείο εκκίνησης και συνεχίζει να ακολουθεί τα βέλη, τότε οδηγείτε σε ένα άπειρο μονοπάτι το οποίο καλούμε **ακτίνα (ray)** η οποία αντιστοιχεί σε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακέραιων. Επειδή το μήκος οποιουδήποτε βέλους είναι το πολύ 2015, μία τέτοια ακτίνα, έστω με σημείο εκκίνησης s, συναντά κάθε διάστημα της μορφής $[n,n+2014]$ με $n\ge s$ τουλάχιστον μία φορά.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον 2016 σημεία εκκίνησης. Τότε μπορούμε να θεωρήσουμε έναν ακέραιο μεγαλύτερο από τα πρώτα 2016 σημεία εκκίνησης. Όμως, τώρα το διάστημα $[n,n+2014]$ θα συναντάται με τουλάχιστον 2016 ακτίνες σε διαφορετικά σημεία, που είναι άτοπο. Επομένως ο αριθμός b των σημείων εκκίνησης ικανοποιεί τη σχέση: $1\le b\le 2015$. Έστω N είναι οποιοσδήποτε ακέραιος που είναι μεγαλύτερος

από όλα τα σημεία εκκίνησης. Ισχυριζόμαστε ότι οι αριθμοί b και N είναι οι αριθμοί που ζητούνται στο πρόβλημά μας.

Για την απόδειξη αυτού, ας θεωρήσουμε δύο ακέραιους m και n τέτοιους, ώστε $n>m\geq N$. Το άθροισμα $\sum_{i=m+1}^{n} a_i$ δίνει το συνολικό μήκος των βελών που ξεκινάνε από τους αριθμούς $m+1,...,n$. Θεωρούμενα όλα αυτά τα βέλη μαζί, σχηματίζουν b υπομονοπάτια των ακτίνων μας, μερικά από τα οποία είναι κενά. Τώρα σε κάθε ακτίνα εντοπίζουμε τον πρώτο αριθμό που είναι μεγαλύτερος του m. Έστω $x_1, x_2, ..., x_b$ είναι αυτοί οι αριθμοί και έστω ακόμη $y_1, y_2, ..., y_b$ αριθμημένοι σε αντίστοιχη σειρά οι αριθμοί που αντιστοιχούν ομοίως στο n. Τότε η λίστα των διαφορών $y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n$ αποτελείται από τα μήκη αυτών των μονοπατιών και πιθανώς από κάποια μηδενικά που αντιστοιχούν στα κενά μονοπάτια. Επομένως, λαμβάνουμε: $\sum_{i=m+1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{b}\left(y_j - x_j\right)$, οπότε $\sum_{i=m+1}^{n}\left(a_i - b\right) = \sum_{j=1}^{b}\left(y_j - n\right) - \sum_{j=1}^{b}\left(x_j - m\right)$.

Τώρα καθεμία από τις b ακτίνες συναντά το διάστημα $[m+1, m+2015]$ σε κάποιο σημείο και έτσι οι αριθμοί $x_1 - m, x_2 - m, ..., x_b - m$ είναι m διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\{1, 2, ..., 2015\}$. Επιπλέον, επειδή το $m+1$ δεν είναι σημείο εκκίνησης, αυτό πρέπει να ανήκει σε μία ακτίνα, οπότε το 1 πρέπει να βρίσκεται μέσα σε αυτούς τους αριθμούς, οπότε

$$1+\sum_{j=1}^{b-1}\left(j+1\right) \leq \sum_{j=1}^{b}\left(x_j - m\right) \leq 1+\sum_{j=1}^{b-1}\left(2016-b+j\right).$$

Η ίδια συζήτηση μπορεί να γίνει για τους n και $y_1, y_2, ..., y_b$, οπότε

$$1+\sum_{j=1}^{b-1}\left(j+1\right) \leq \sum_{j=1}^{b}\left(y_j - n\right) \leq 1+\sum_{j=1}^{b-1}\left(2016-b+j\right).$$

Επομένως, έχουμε

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n}\left(a_i - b\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{b-1}\left(\left(2016-b+j\right)-\left(j+1\right)\right) = \left(b-1\right)\left(2015-b\right)$$

$$\leq \left(\frac{\left(b-1\right)+\left(2015-b\right)}{2}\right)^2 = 1007^2.$$

Β΄ ΜΕΡΟΣ - ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ

Κεφάλαιο 4ο. Έρευνα 1η

Ανίχνευση χαρακτηριστικών των μαθητών που συμμετείχαν στη 45η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Αθήνα 2004)

4.1 Γενικά

Η 45η Διεθνής Μαθηματική Ολυμπιάδα, έγινε από 4 έως 18 Ιουλίου του 2004 στην Ελλάδα (Αθήνα). Το κύριο τμήμα της έρευνας (σχετικά με τους διεθνείς διαγωνισμούς) έγινε κατά τη διάρκεια του συγκεκριμένου διαγωνισμού στους 486 συμμετέχοντες.
Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε και θα σχολιάσουμε τα θέματα και τα αποτελέσματα του διαγωνισμού (ώστε να συγκριθούν με τα "ευρήματα" της έρευνας).

4.2 Περιγραφική Παρουσίαση της Έρευνας

Η πρώτη έρευνα έγινε σε τετρακόσια είκοσι παιδιά από 88 διαφορετικές χώρες του κόσμου. Όλοι ήταν μαθητές και μαθήτριες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (ηλικίας 16 έως 19 ετών) που είχαν επιλεγεί (μέσα από διαγωνισμούς των χωρών τους) για να συμμετάσχουν στην 45η Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα που έγινε το 2004 στην Αθήνα. Από τα παιδιά αυτά, τα 384 (ποσοστό 91,4%) ήταν αγόρια και τα 36 (ποσοστό 8,6%) ήταν κορίτσια. Τα παιδιά ήταν από 15 έως 19 ετών. Συγκεκριμένα, 18 παιδιά (ποσοστό 4,3%) ήταν 15 ετών, 47 παιδιά (ποσοστό 11,2%) ήταν 16 ετών, 101 παιδιά (ποσοστό 24%) ήταν 17 ετών, 145 παιδιά (ποσοστό 34,5%) ήταν 18 ετών και 109 παιδιά(ποσοστό 26%) ήταν 19 ετών.

Οι μαθητές που συμμετέχουν στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες, επιλέγονται ανάμεσα από πολλά παιδιά της χώρας τους μετά από υψηλού επιπέδου μαθηματικούς διαγωνισμούς. Για το λόγο αυτό, τα παιδιά αυτά μπορούμε να τα θεωρούμε χαρισματικά στα Μαθηματικά και μάλιστα χαρισματικά που το χάρισμα έχει εξελιχθεί σε ταλέντο. Τα παιδιά αυτά λοιπόν θα τα θεωρούμε (και είναι) ταλαντούχα, ανεξάρτητα από τις επιδόσεις τους στην Μαθηματική Ολυμπιάδα.

Στόχος της συγκεκριμένης εργασίας είναι η μελέτη χαρακτηριστικών και στάσεων των μαθητών που συμμετέχουν στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες, καθώς επίσης και η μελέτη των παραγόντων που επηρεάζουν την πορεία αυτών των μαθητών με σκοπό την όσο το δυνατό καλύτερη εξέλιξη τους (Δημάκος, Τυρλής και Φερεντίνος, 2008).

Παρατηρήσεις

Δεν ετέθησαν ερωτήσεις για το όνομα και την εθνικότητα των μαθητών, διότι θεωρούνται προσωπικά δεδομένα.

Από τους 486 μαθητές που συμμετείχαν, απάντησαν οι 420. Οι υπόλοιποι 66 μαθητές δεν απάντησαν διότι ίσως δεν γνώριζαν την Αγγλική γλώσσα (παρότι υπήρχε δυνατότητα μετάφρασης και σε άλλες γλώσσες) ή δεν θέλησαν να απαντήσουν.

Στους μαθητές δόθηκε ερωτηματολόγιο με 52 κλειστές ερωτήσεις.

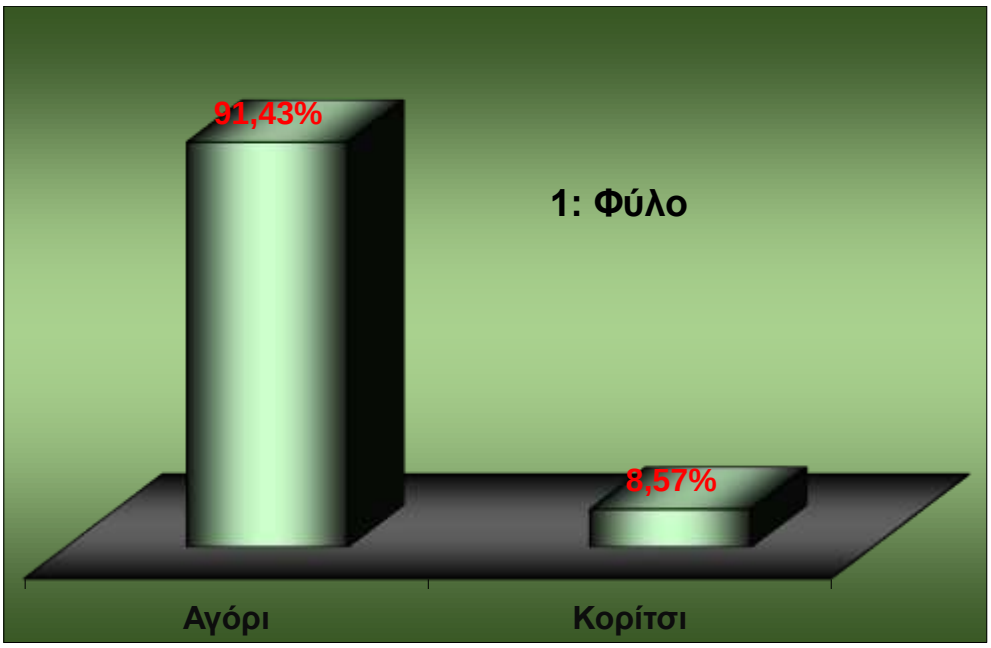
Οι ερωτήσεις 1,2 και 3 είναι δημογραφικού χαρακτήρα και αφορούν το φύλο και την ηλικία των μαθητών, καθώς και το επάγγελμα των γονέων.

Η ερώτηση 5 αναφέρεται στον αριθμό των συμμετοχών στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα. Οι ερωτήσεις 4 και 6 αναφέρονται στη μελλοντική πορεία των μαθητών (σπουδές-επάγγελμα). Οι ερωτήσεις 7,8 και 9 αναφέρονται στην γενικότερη προετοιμασία των μαθητών για τη συμμετοχή στις Ολυμπιάδες. Οι ερωτήσεις 10 έως 19 αναφέρονται στην στάση των μαθητών απέναντι στα θέματα των διαγωνισμών και στο τρόπο αντιμετώπισής τους

Τέλος, οι ερωτήσεις 20 έως 52 έχουν δημιουργηθεί με βάση τις κλίμακες Fenemma και Sherman (1976) και έχουν σκοπό τη διερεύνηση της στάσης των ταλαντούχων μαθητών απέναντι στους μαθηματικούς διαγωνισμούς και γενικότερα στα μαθηματικά, καθώς και της στάσης των γονέων και των καθηγητών τους. Για κάθε μία από τις ερωτήσεις (20 έως 52) ζητήθηκε από τους ταλαντούχους μαθητές να εκφράσουν το βαθμό συμφωνίας πάνω σε μια πενταβάθμια κλίμακα τύπου Likert (**1**=Συμφωνώ απόλυτα, **2**=Συμφωνώ, **3**=Αναποφάσιστος, **4**=Διαφωνώ, **5**=Διαφωνώ απόλυτα).

Παρακάτω θα αναφερθούμε περιγραφικά τα αποτελέσματα των απαντήσεων και θα δώσουμε μία πρώτη ερμηνευτική προσέγγιση.

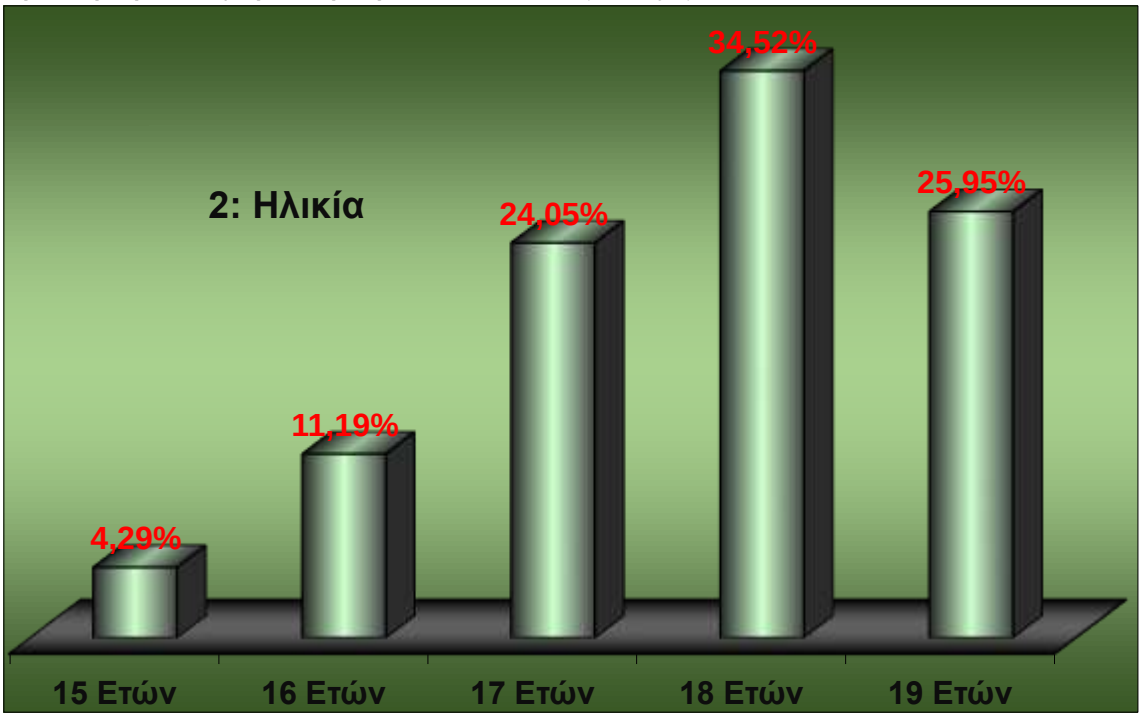
Ερώτηση 1: Αφορά το φύλο των διαγωνιζομένων



Διάγραμμα 2. Ποσοστά Αγοριών-Κοριτσιών

Η μεγάλη διαφορά του αριθμού των αγοριών από τον αριθμό των κοριτσιών, αποτελεί αντικείμενο μελέτης. Οι περισσότερες έρευνες δείχνουν ότι οφείλεται κυρίως σε κοινωνικοπολιτισμικούς παράγοντες και δεν αφορά γενετικά αίτια.

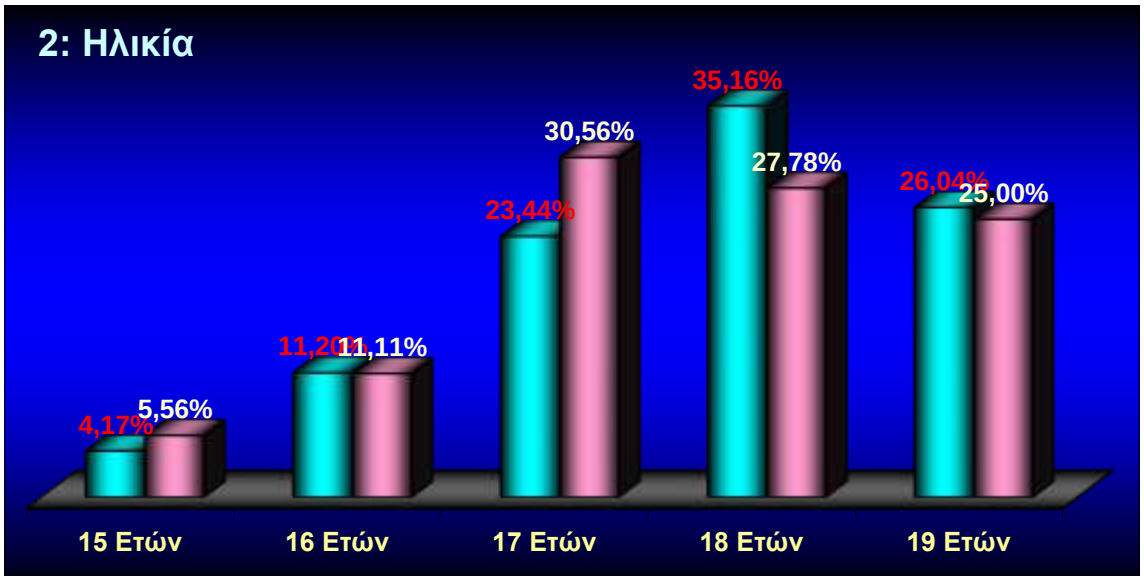
Ερώτηση 2: Αφορά την ηλικία των διαγωνιζομένων



Διάγραμμα 3. Ποσοστά συμμετοχής διαγωνιζομένων, ανάλογα με την ηλικία τους

Το ποσοστό των μαθητών που είναι 15 και 16 ετών είναι αρκετά χαμηλό (15,48%). Εδώ φαίνεται ότι η έλλειψη εμπειρίας, δεν επιτρέπει στα παιδιά

αυτής της ηλικίας να διακριθούν στους διαγωνισμούς των χωρών τους, ώστε να συγκροτήσουν τις αντίστοιχες ομάδες που συμμετέχουν στην Ολυμπιάδα (είναι γνωστό ότι κάθε χώρα, μπορεί να συμμετάσχει με 6 το πολύ διαγωνιζόμενους).

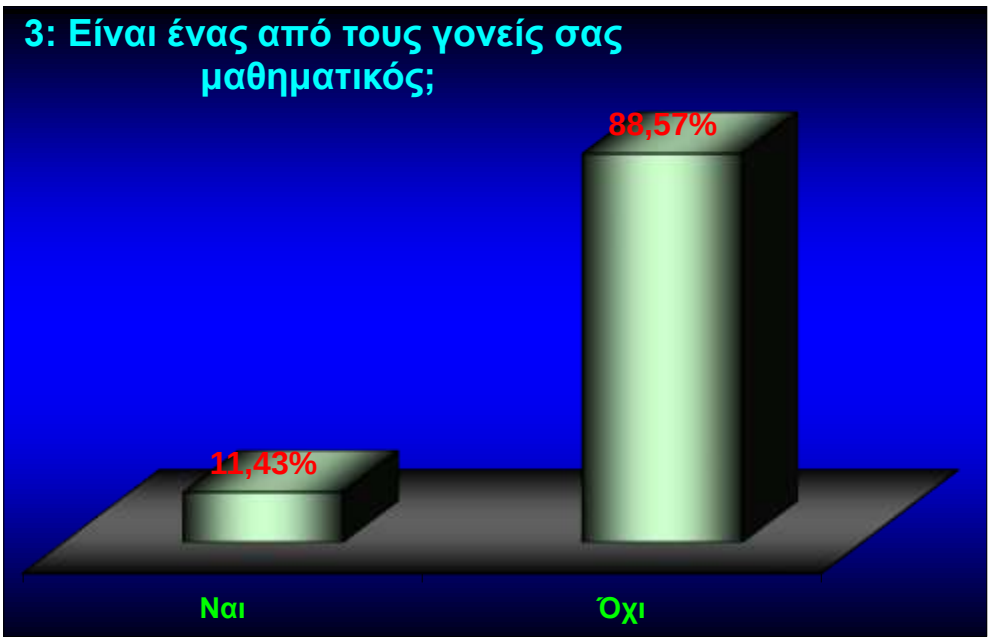


Διάγραμμα 4. Ποσοστά συμμετοχής διαγωνιζομένων, ανάλογα με την ηλικία και το φύλο τους (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 2. Ποσοστά συμμετοχής διαγωνιζομένων, ανάλογα με την ηλικία και το φύλο τους (Αγόρι-Κορίτσι)

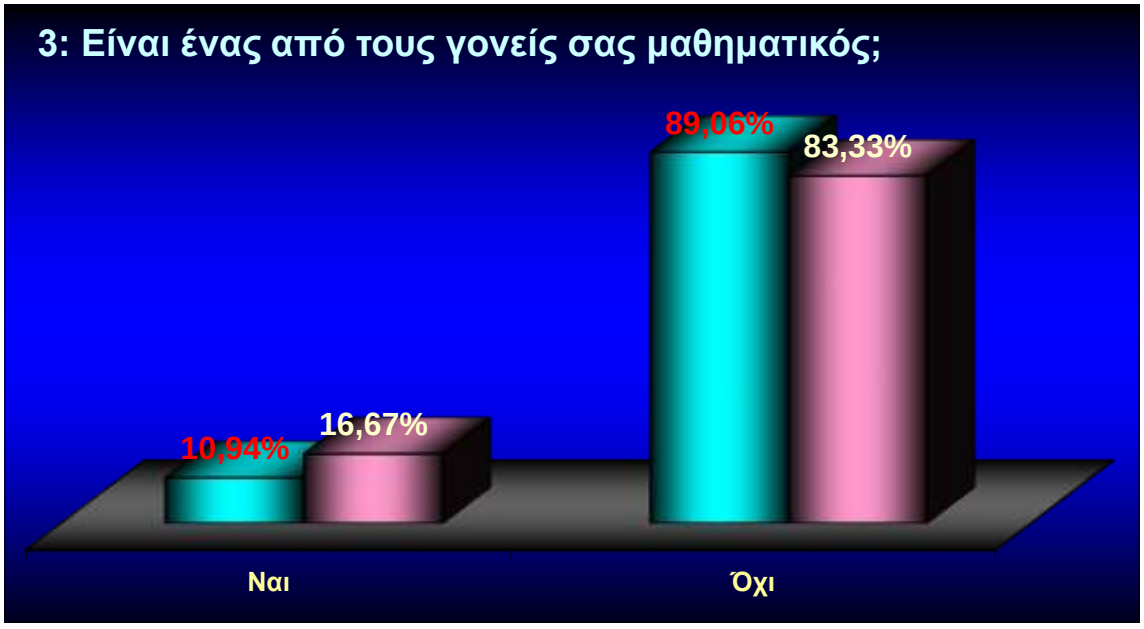
ΑΓΟΡΙ	4,167%	11,198%	23,438%	35,156%	26,042%
ΚΟΡΙΤΣΙ	5,556%	11,111%	30,556%	27,778%	25,000%

Ερώτηση 3: "Είναι κάποιος από τους γονείς σας μαθηματικός;"



Διάγραμμα 5. Ποσοστό διαγωνιζομένων που ένας τουλάχιστον γονέας είναι μαθηματικός

Στην ερώτηση αυτή 48 μαθητές (11,4%) απάντησαν ΝΑΙ και 372 μαθητές (88,6%) απάντησαν ΟΧΙ. Το ποσοστό των μαθητών που οι γονείς τους είναι μαθηματικοί (αν και είναι αριθμητικά μικρό), μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αποτελεί σημαντικό παράγοντα για ένα μαθηματικό ταλέντο να έχει γονέα μαθηματικό, λαμβάνοντας υπόψη ότι το ποσοστό των μαθηματικών είναι κάτω από το 1% του ενεργού πληθυσμού.



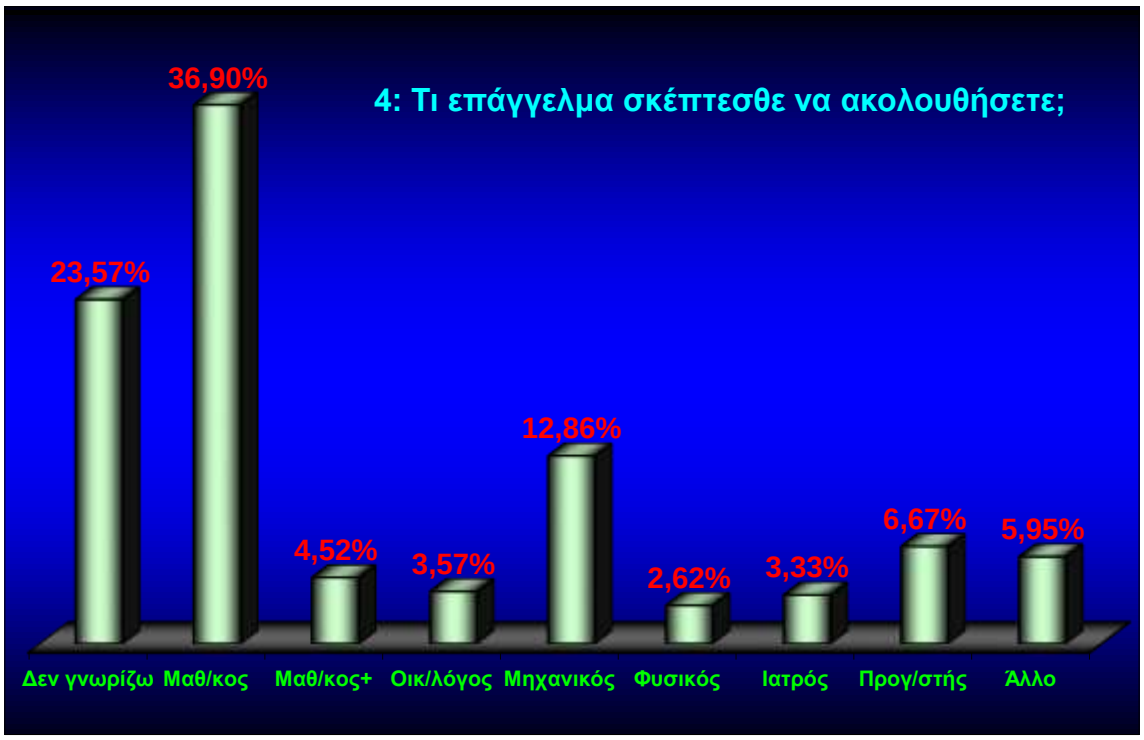
Διάγραμμα 6. Ποσοστό διαγωνιζομένων που ένας τουλάχιστον γονέας είναι μαθηματικός, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 3. Ποσοστό διαγωνιζομένων που ένας τουλάχιστον γονέας είναι μαθηματικός, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	10,938%	89,063%
ΚΟΡΙΤΣΙ	16,667%	83,333%

Παρατηρώντας τώρα τα ποσοστά των αγοριών και των κοριτσιών που απάντησαν στην ερώτηση 3, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα κορίτσια επηρεάζονται περισσότερο από τους γονείς μαθηματικούς στην ενασχόλησή τους και την επιτυχία τους στα μαθηματικά.

Ερώτηση 4: "Τι επάγγελμα σκέπτεστε να ακολουθήσετε;"
Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές ήταν "ελεύθεροι" να αναφέρουν το επάγγελμα που θα ήθελαν να ακολουθήσουν. Δηλαδή δεν δόθηκε συγκεκριμένη λίστα επαγγελμάτων από την οποία οι μαθητές ήταν υποχρεωμένοι να διαλέξουν. Μετά από επεξεργασία και σχετική ομαδοποίηση των απαντήσεων, καταλήξαμε στα εξής: 155 μαθητές, δηλ ποσοστό 36,9%, απάντησαν "**Μαθηματικός**". 19 μαθητές, δηλ ποσοστό 4,5%, απάντησαν "**Μαθηματικός+**", δηλαδή Μαθηματικός με εξειδίκευση στον αναλογισμό ή τις χρηματιστηριακές πράξεις (ενδεχομένως σε κάποιες χώρες να είναι ευρύτατα διαδεδομένες αυτές οι ειδικότητες – επαγγέλματα). 15 μαθητές, δηλ ποσοστό 3,6%, απάντησαν "**Οικονομολόγος**". 54 μαθητές, δηλ ποσοστό 12,9%, απάντησαν "**Μηχανικός**". 11 μαθητές, δηλ ποσοστό 2,6%, απάντησαν "**Φυσικός**". 14 μαθητές. δηλ ποσοστό 3,3%, απάντησαν "**Ιατρός**". 28 μαθητές, δηλ ποσοστό 6,7%, απάντησαν **"Προγραμματιστής"**. 25 μαθητές, δηλ ποσοστό, 6% απάντησαν **"Άλλο"**. 99 μαθητές. δηλ ποσοστό 23,6%, απάντησαν **"Δεν γνωρίζω"**.
Παρατηρούμε ότι μεγάλο ποσοστό (περίπου 75%) επιθυμούν να ακολουθήσουν επάγγελμα που έχει άμεση σχέση με τα μαθηματικά.



Διάγραμμα 7. Ποσοστά διαγωνιζομένων που θέλουν να ακολουθήσουν συγκεκριμένο επάγγελμα ή κατηγορία επαγγελμάτων

Μελετώντας τη διαφοροποίηση (λόγω φύλου) στην επιλογή του επαγγέλματος του "Μαθηματικού" και του "Μηχανικού" που επέλεξαν οι διαγωνιζόμενοι, παρατηρούμε (στο επόμενο διάγραμμα) τις "αντίθετες" προτιμήσεις αγοριών και κοριτσιών. Η μεγαλύτερη τάση των κοριτσιών να ακολουθήσουν το επάγγελμα του μηχανικού, μπορεί να οφείλεται στην σταθερότητα και την κοινωνική αναγνώριση που (θεωρητικά) προσφέρει αυτή τους η επιλογή. Είναι σημαντική (επίσης) η διαφοροποίηση των αγοριών στην απάντηση Δεν γνωρίζω. Τα αγόρια φαίνονται ποιο κατασταλαγμένα ή ποιο αποφασισμένα.



Διάγραμμα 8. Ποσοστά διαγωνιζομένων που θέλουν να ακολουθήσουν συγκεκριμένο επάγγελμα ή κατηγορία επαγγελμάτων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 4. Ποσοστά διαγωνιζομένων που θέλουν να ακολουθήσουν συγκεκριμένο επάγγελμα ή κατηγορία επαγγελμάτων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

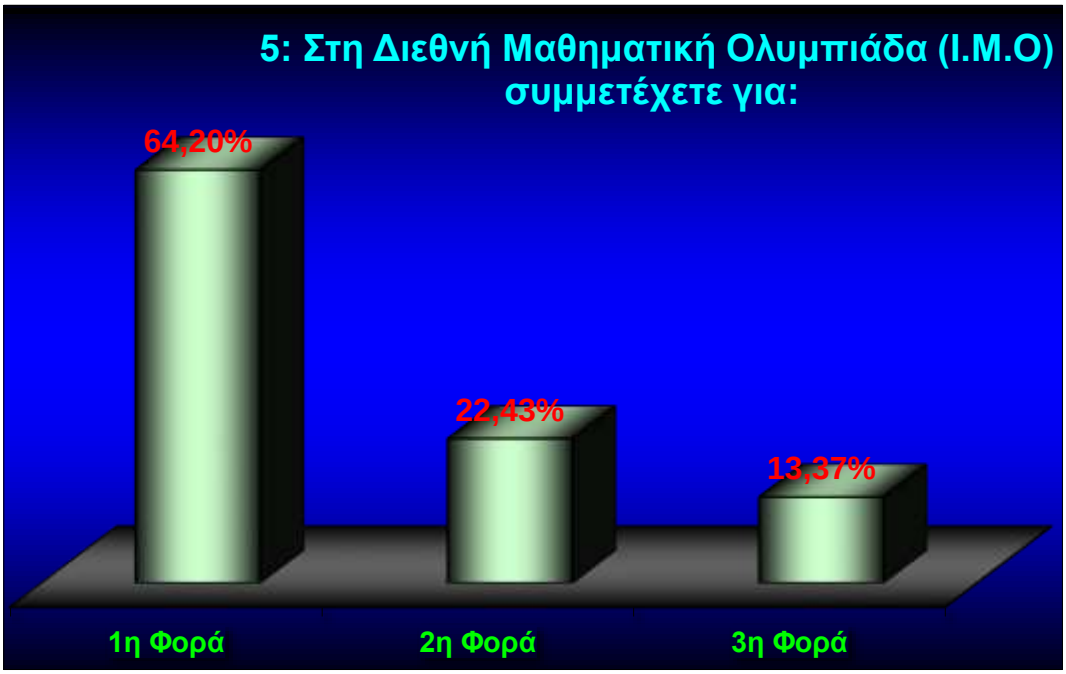
ΑΓΟΡΙ	0,23	0,38	0,05	0,04	0,11	0,03	0,03	0,07	0,06
ΚΟΡΙΤΣΙ	0,31	0,22	0,03	0,00	0,36	0,03	0,03	0,00	0,03

Ερώτηση 5: " Στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (I.M.O) συμμετέχετε για:"

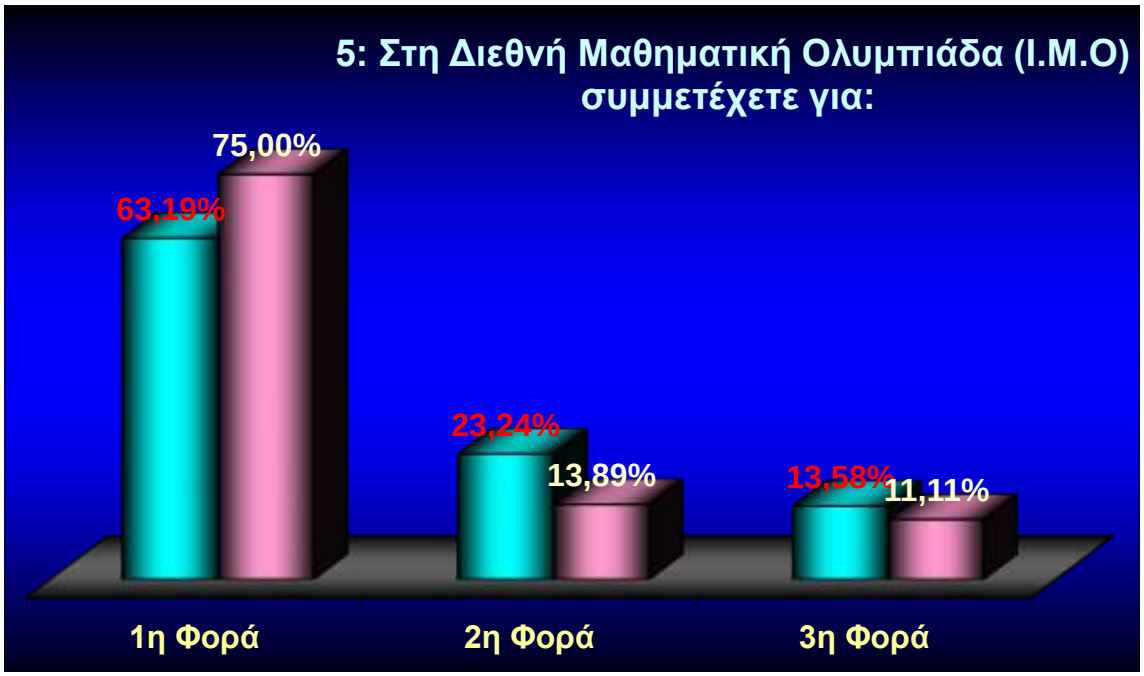
Στην ερώτηση αυτή 269 μαθητές (64%) απάντησαν "1η Φορά", 94 μαθητές (22,4%) απάντησαν "2η Φορά", 56 μαθητές (13,3%) απάντησαν "3η Φορά" και 1 μαθητής (0,2%) απάντησε "4η Φορά".

Τις απαντήσεις στην ερώτηση αυτή θα πρέπει να τις ερμηνεύσουμε σε συνδυασμό με την Ερώτηση 2 (που αφορά την ηλικία των διαγωνιζομένων). Στην Ερώτηση 2, παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο πλήθος διαγωνιζομένων βρίσκεται στις ηλικίες 17, 18 και 19 ετών. Ένα μεγάλο μέρος των μαθητών αυτών, τον επόμενο ή τον μεθεπόμενο χρόνο δεν μπορούν να συμμετέχουν στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες, λόγω ηλικίας ή λόγω εγγραφής στα πανεπιστήμια.

Αυτός είναι ο βασικός λόγος που είναι μικρός ο αριθμός των μαθητών που συμμετέχουν 2η και 3η φορά.



Διάγραμμα 9. Ποσοστά διαγωνιζομένων που συμμετέχουν για 1η , 2η ή 3η φορά σε Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα.



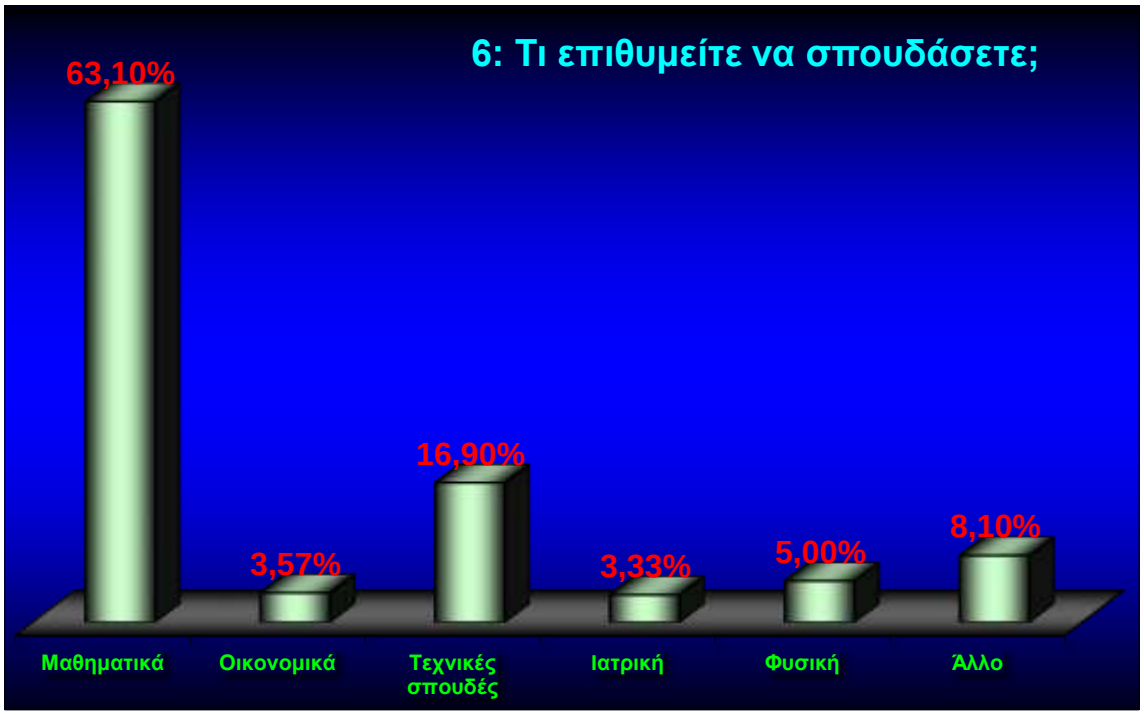
Διάγραμμα 10. Ποσοστά διαγωνιζομένων που συμμετέχουν για 1η , 2η ή 3η φορά σε Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι).

Πίνακας 5. Ποσοστά διαγωνιζομένων που συμμετέχουν για 1η , 2η ή 3η φορά σε Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	63,185%	23,238%	13,577%
ΚΟΡΙΤΣΙ	75,000%	13,889%	11,111%

Μελετώντας τώρα τη διαφοροποίηση Αγοριών-Κοριτσιών, παρατηρούμε ότι είναι μικρές (και άνευ σημασίας) οι διαφορές στα ποσοστά των συμμετοχών.

Ερώτηση 6: " Τι επιθυμείτε να σπουδάσετε;"
Στην ερώτηση αυτή 265 μαθητές (63,1%) απάντησαν "Μαθηματικά", 15 μαθητές (3,6%) απάντησαν "Οικονομικά", 71 μαθητές (16,9%) απάντησαν "Τεχνικές σπουδές", 14 μαθητές (3,3%) απάντησαν "Ιατρική", 21 μαθητές (5%) απάντησαν "Φυσική" και 34 μαθητές (8,1%) απάντησαν "Άλλο". Γίνεται φανερό ότι υπάρχει πολύ μεγάλη επιθυμία για σπουδές που έχουν άμεση ή έμμεση σχέση με τα μαθηματικά.



Διάγραμμα 11. Ποσοστά διαγωνιζομένων για το επάγγελμα ή την κατηγορία επαγγελμάτων που επιθυμούν να σπουδάσουν



Διάγραμμα 12. Ποσοστά διαγωνιζομένων για το επάγγελμα ή την κατηγορία επαγγελμάτων που επιθυμούν να σπουδάσουν, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 6. Ποσοστά διαγωνιζομένων για το επάγγελμα ή την κατηγορία επαγγελμάτων που επιθυμούν να σπουδάσουν, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	64,063%	3,646%	15,365%	3,385%	4,688%	8,854%
ΚΟΡΙΤΣΙ	52,778%	2,778%	33,333%	2,778%	8,333%	0,000%

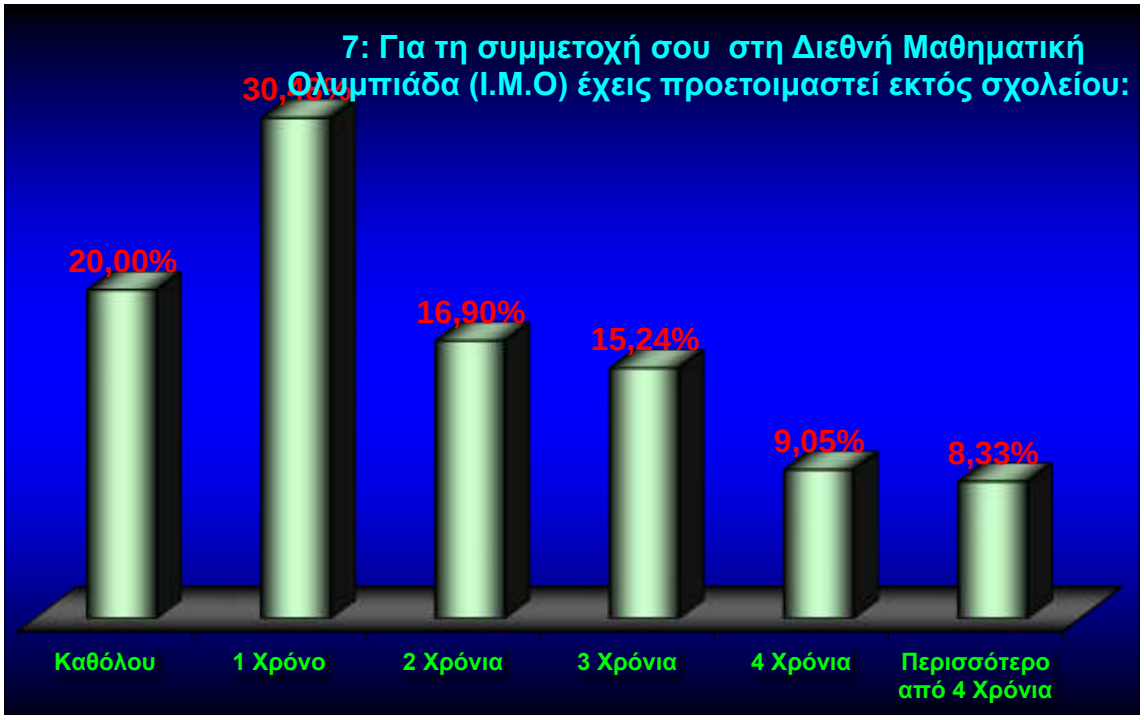
Τα δύο προηγούμενα διαγράμματα βρίσκονται σε πλήρη αρμονία-συμφωνία με τα αντίστοιχα διαγράμματα της ερώτησης 4: **"Τι επάγγελμα σκέπτεστε να ακολουθήσετε;"**. Αυτό είναι απόλυτα φυσιολογικό (διότι οι κατάλληλες σπουδές θα σε οδηγήσουν στο αντίστοιχο επάγγελμα) και παράλληλα αποδεικνύουν την αξιοπιστία των απαντήσεων.

Ερώτηση 7: " Για τη συμμετοχή σου στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ι.Μ.Ο) έχεις προετοιμαστεί εκτός σχολείου;"

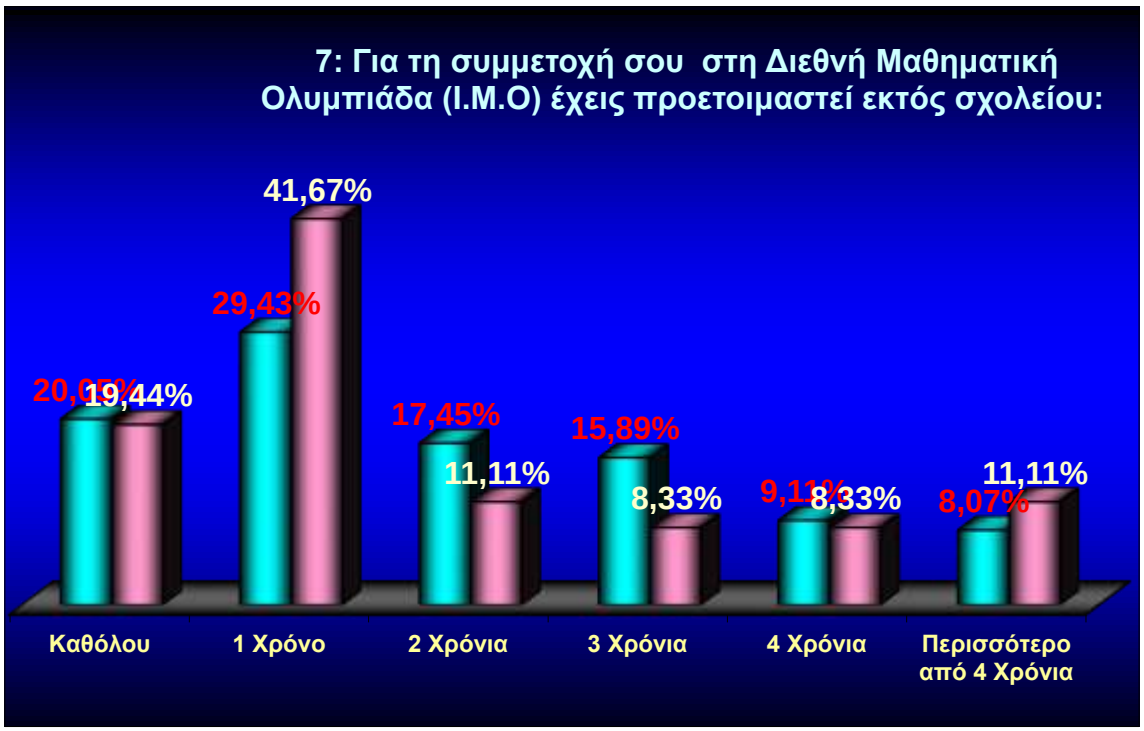
● Οι απαντήσεις της ερώτησης αυτής συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα, από τον οποίο προκύπτει ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών προετοιμάζεται εκτός σχολείου περίπου τρία χρόνια.

Πίνακας 7. Συχνότητα και ποσοστά διαγωνιζομένων, για τις χρονικές περιόδους που έχουν προετοιμαστεί, με σκοπό τη συμμετοχή τους στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (εκτός σχολείου)

Ερώτηση 7	Συχνότητα	%
Καθόλου	84	20,0
1 Χρόνο	128	30,5
2 Χρόνια	71	16,9
3 Χρόνια	64	15,2
4 Χρόνια	38	9,0
Περισσότερο από 4 Χρόνια	35	8,3
Σύνολο	420	100,0



Διάγραμμα 13. Ποσοστά διαγωνιζομένων για τις κατηγορίες των χρονικών περιόδων προετοιμασίας για τη συμμετοχή στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (εκτός του σχολείου)



Διάγραμμα 14. Ποσοστά διαγωνιζομένων για τις κατηγορίες των χρονικών περιόδων προετοιμασίας για τη συμμετοχή στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (εκτός του σχολείου), ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 8. Ποσοστά διαγωνιζομένων για τις κατηγορίες των χρονικών περιόδων προετοιμασίας για τη συμμετοχή στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες (εκτός του σχολείου), ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

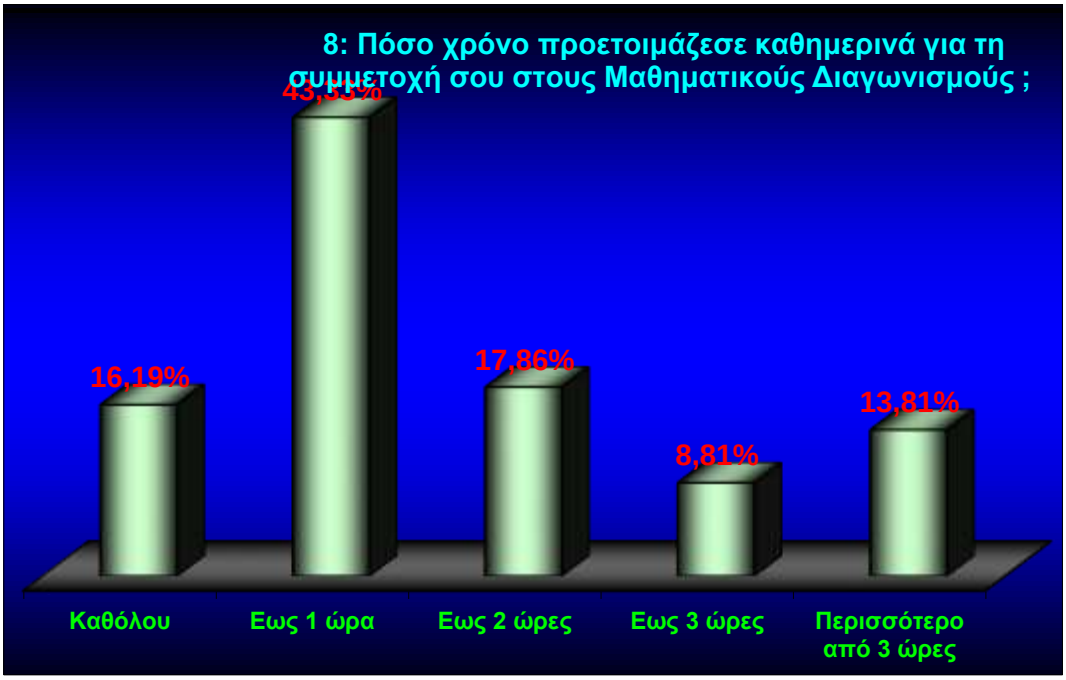
ΑΓΟΡΙ	20,052%	29,427%	17,448%	15,885%	9,115%	8,073%
ΚΟΡΙΤΣΙ	19,444%	41,667%	11,111%	8,333%	8,333%	11,111%

Ερώτηση 8: “ Πόσο χρόνο προετοιμάζεσαι καθημερινά για τη συμμετοχή σου στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς ;”

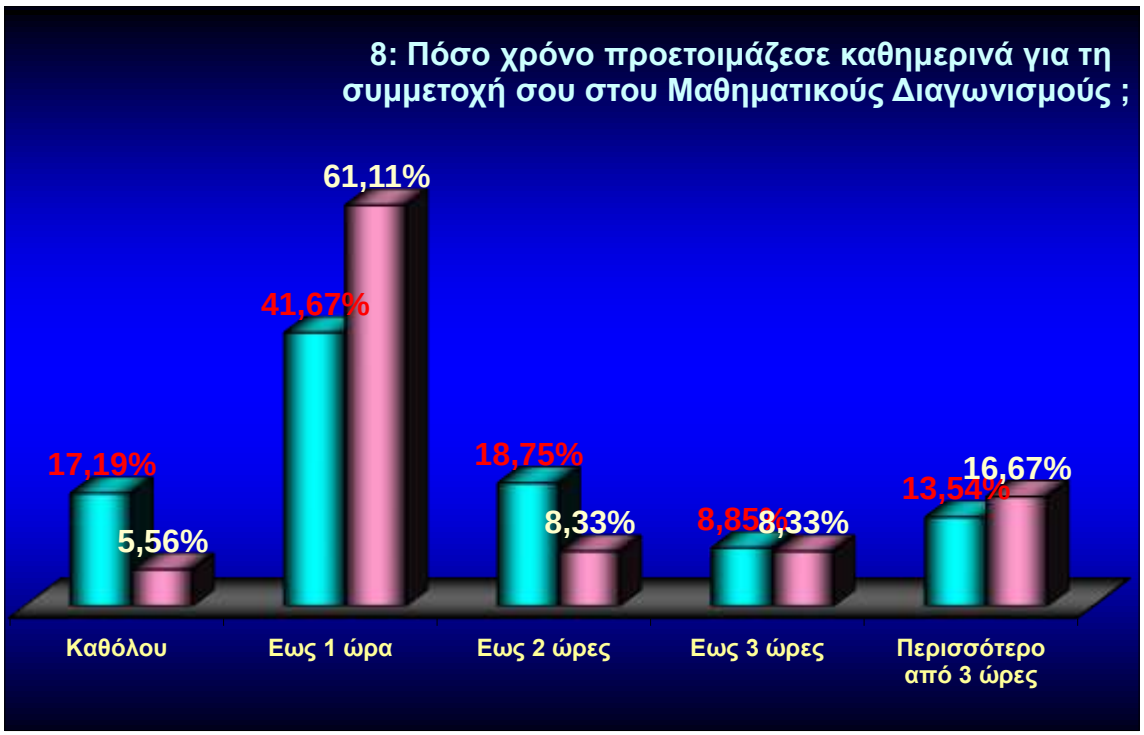
Οι απαντήσεις της ερώτησης αυτής συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα και μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών (περίπου 60%) προετοιμάζεται εκτός σχολείου περίπου δύο ώρες κατά μέσο όρο καθημερινά.

Πίνακας 9. Συχνότητα και ποσοστά διαγωνιζομένων, για τους αριθμούς των ωρών (ανα ημέρα) που έχουν προετοιμαστεί, με σκοπό τη συμμετοχή τους στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Ερώτηση 8	Συχνότητα	%
Καθόλου	68	16,2
Έως 1 ώρα	182	43,3
Έως 2 ώρες	75	17,9
Έως 3 ώρες	37	8,8
Περισσότερο από 3 ώρες	58	13,8
Σύνολο	420	100,0



Διάγραμμα 15. Ποσοστά διαγωνιζομένων, για τους αριθμούς των ωρών (ανα ημέρα) που έχουν προετοιμαστεί, με σκοπό τη συμμετοχή τους στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες



Διάγραμμα 16. Ποσοστά διαγωνιζομένων, για τους αριθμούς των ωρών (ανα ημέρα) που έχουν προετοιμαστεί, με σκοπό τη συμμετοχή τους στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες), ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

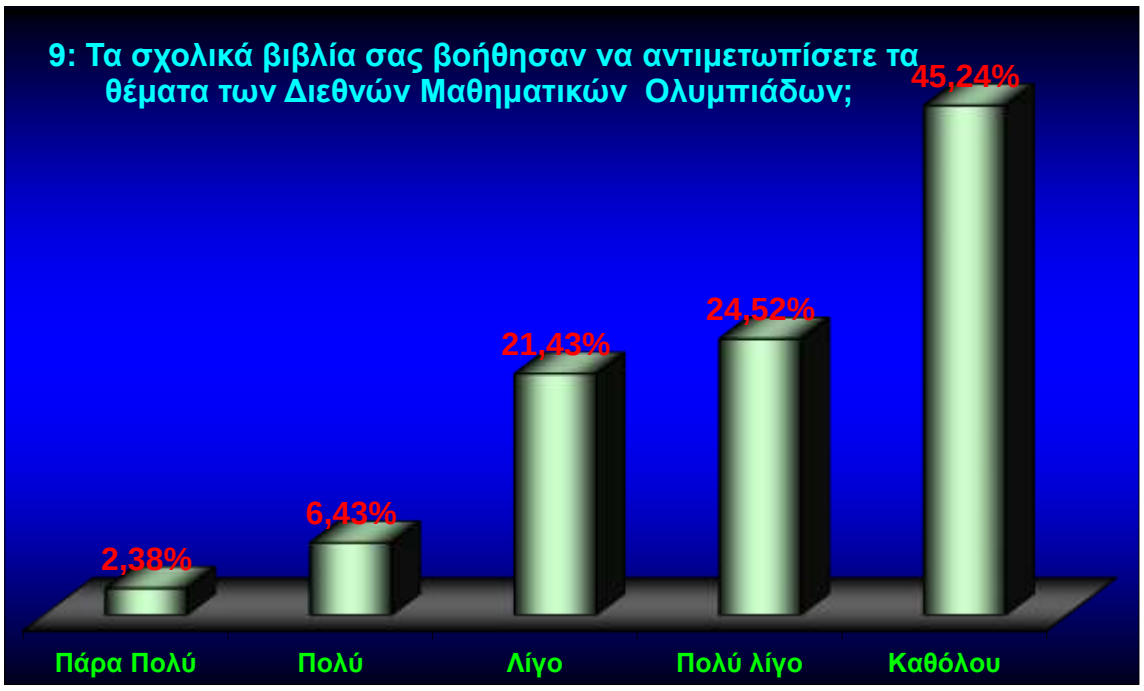
Πίνακας 10. Ποσοστά διαγωνιζομένων, για τους αριθμούς των ωρών (ανα ημέρα) που έχουν προετοιμαστεί, με σκοπό τη συμμετοχή τους στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	17,188%	41,667%	18,750%	8,854%	13,542%
ΚΟΡΙΤΣΙ	5,556%	61,111%	8,333%	8,333%	16,667%

Ερώτηση 9: “ Τα σχολικά βιβλία σας βοήθησαν να αντιμετωπίσετε τα θέματα των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων;”

Στην ερώτηση αυτή 10 μαθητές (2,4%) απάντησαν “Πάρα πολύ”, 27 μαθητές (6.4%) απάντησαν “Πολύ”, 90 μαθητές (21,4%) απάντησαν “Λίγο”, 103 μαθητές (24,5%) απάντησαν “Πολύ λίγο”, 190 μαθητές (45,2%) απάντησαν “Καθόλου”. Από τις απαντήσεις των μαθητών προκύπτει ότι η μεγάλη πλειοψηφία δεν θεωρεί ότι βοηθήθηκε από τα σχολικά βιβλία στην αντιμετώπιση των θεμάτων Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων.

Η απάντηση των διαγωνιζομένων είναι “φυσιολογική” διότι τα σχολικά βιβλία απευθύνονται σε ένα ευρύ φάσμα μαθητών και προσπαθούν να καλύψουν βασικές γνώσεις μαθηματικών. Για τις ανάγκες αντιμετώπισης θεμάτων Μαθηματικών Ολυμπιάδων, χρειάζεται ειδική βιβλιογραφία.



Διάγραμμα 17. Ποσοστά του βαθμού βοήθειας που έδωσαν τα σχολικά βιβλία στην αντιμετώπιση θεμάτων Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων



Διάγραμμα 18. Ποσοστά του βαθμού βοήθειας που έδωσαν τα σχολικά βιβλία στην αντιμετώπιση θεμάτων Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 11. Ποσοστά του βαθμού βοήθειας που έδωσαν τα σχολικά βιβλία στην αντιμετώπιση θεμάτων Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

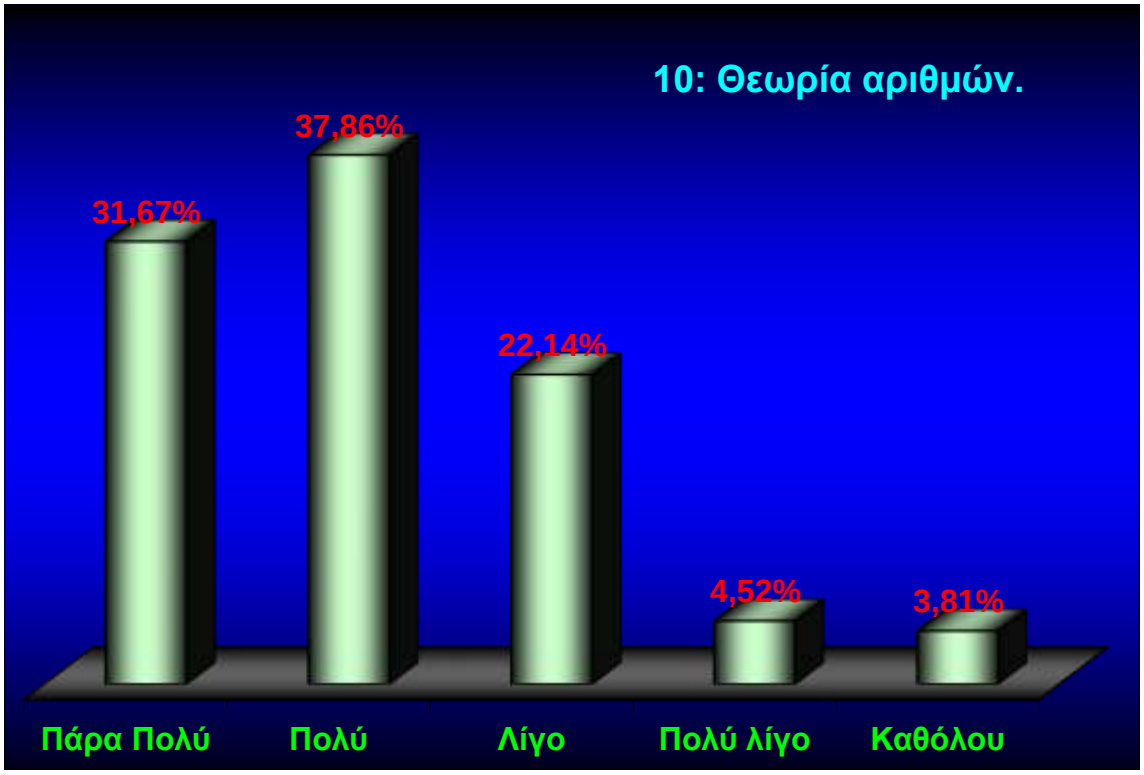
ΑΓΟΡΙ	2,344%	6,510%	21,094%	22,135%	47,917%
ΚΟΡΙΤΣΙ	2,778%	5,556%	25,000%	50,000%	16,667%

Η γενική ερώτηση "Πόσο σας αρέσουν οι κλάδοι των μαθηματικών που εξετάζονται στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα;", περιλαμβάνει πέντε ερωτήσεις (Ερωτήσεις 10 έως 14, οι οποίες είναι όσα, με τη ευρύτερη έννοια, κεφάλαια των μαθηματικών που εξετάζονται στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα). Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν, πόσο τους αρέσει η Θεωρία αριθμών (Ερώτηση 10), η Άλγεβρα (Ερώτηση 11), η Γεωμετρία (Ερώτηση 12), τα Διακριτά μαθηματικά (Ερώτηση 13) και τέλος η Ανάλυση (Ερώτηση 14). Οι δυνατές απαντήσεις ήταν: "Πάρα πολύ" (Π.Π), "Πολύ" (Π), "Λίγο" (Λ), "Πολύ λίγο" (Π.Λ) και "Καθόλου" (Κ). Στα δέκα επόμενα διαγράμματα θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις απαντήσεις καθώς και την (ενδεχόμενη) διαφοροποίησή τους (σε σχέση με το φύλο). Στο ενδέκατο διάγραμμα θα παρουσιάσουμε τις ερωτήσεις αυτές μαζί, για να μας δοθεί και ένα μέτρο σύγκρισης των προτιμήσεων των μαθητών. Οι συχνότητες των απαντήσεων δίνονται στον παρακάτω πίνακα και οι αντίστοιχες συχνότητες % στο ενδέκατο διάγραμμα.

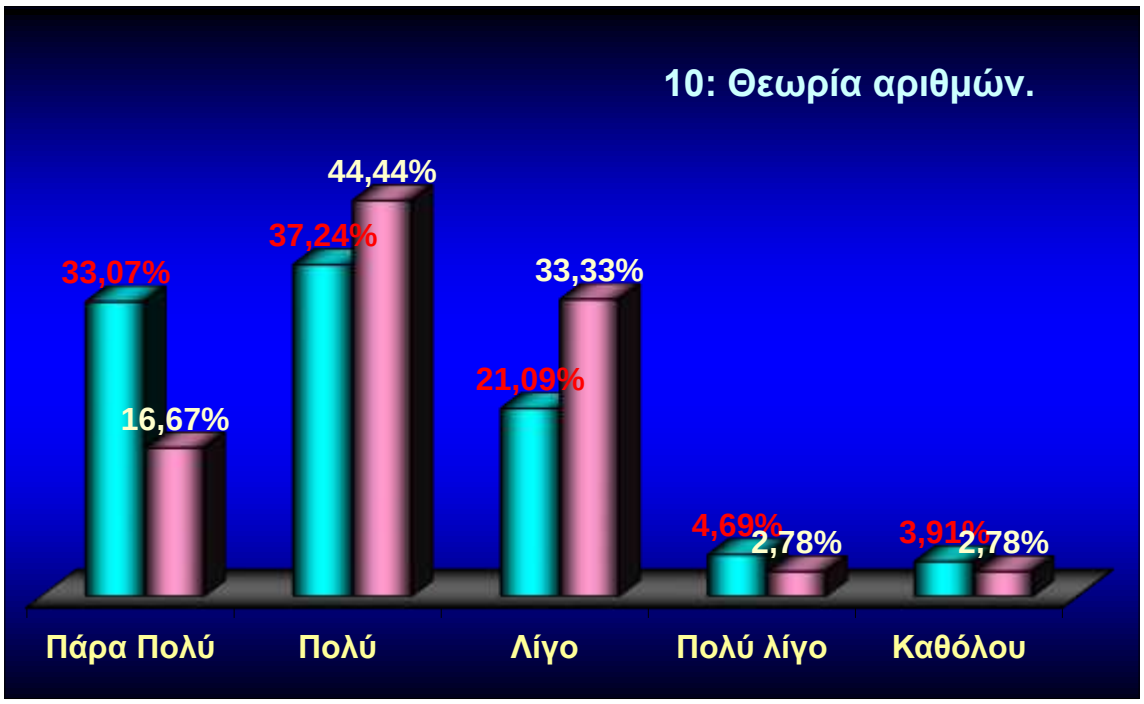
Πίνακας 12. Συχνότητες για το βαθμό αρεσκείας των διαγωνιζομένων στους κλάδους των μαθηματικών που εξετάζονται στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Ποιος από τους κλάδους των μαθηματικών που εξετάζονται στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα σας αρέσει;	Π.Π	Π	Λ	Π.Λ	Κ	ΣΥΝΟΛΟ
Θεωρία αριθμών.	133	159	93	19	16	420
Άλγεβρα.	84	220	87	24	5	420
Γεωμετρία.	148	117	82	40	33	420

Διακριτά Μαθηματικά.	89	125	112	62	32	420
Ανάλυση.	62	124	132	62	40	420



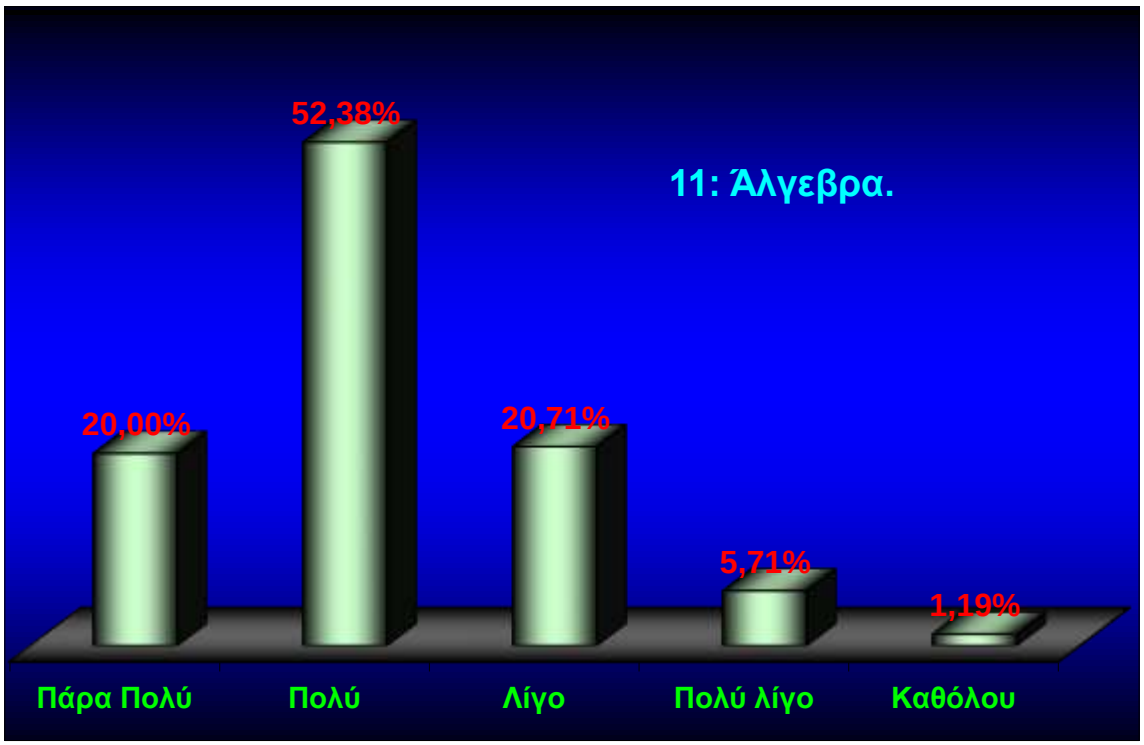
Διάγραμμα 19. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Θεωρίας Αριθμων



Διάγραμμα 20. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Θεωρίας Αριθμων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 13. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Θεωρίας Αριθμων, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	33,073%	37,240%	21,094%	4,688%	3,906%
ΚΟΡΙΤΣΙ	16,667%	44,444%	33,333%	2,778%	2,778%



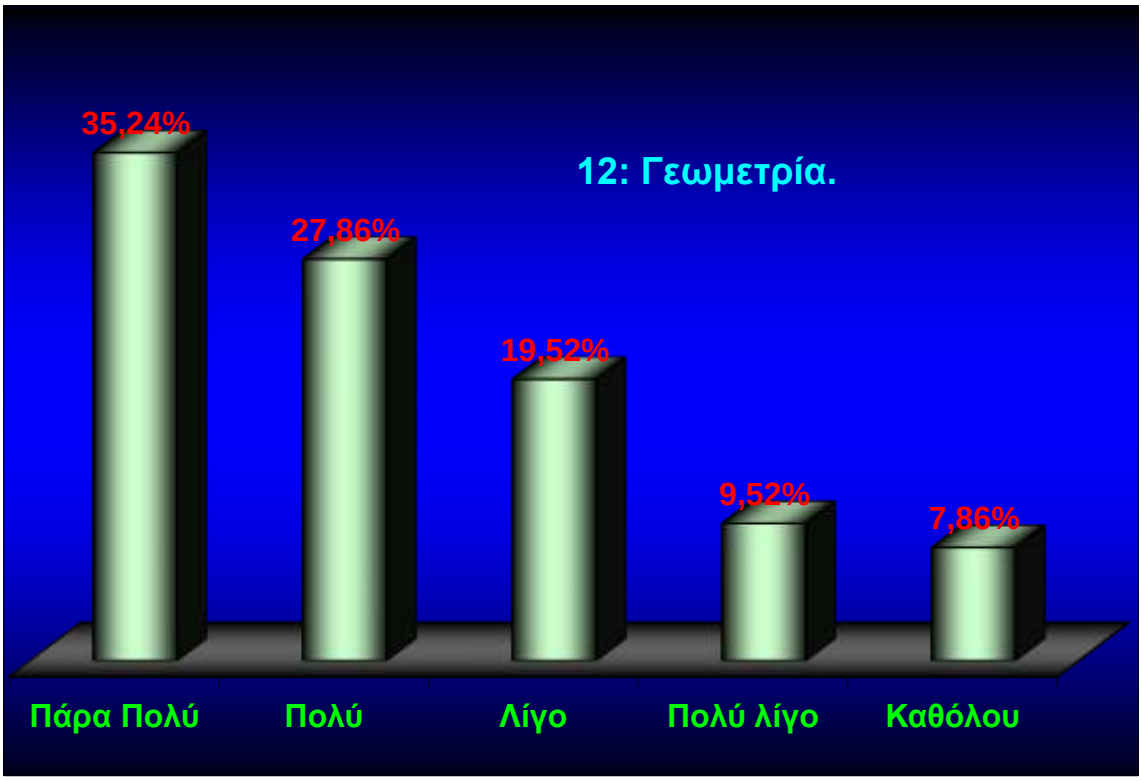
Διάγραμμα 21. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Άλγεβρας



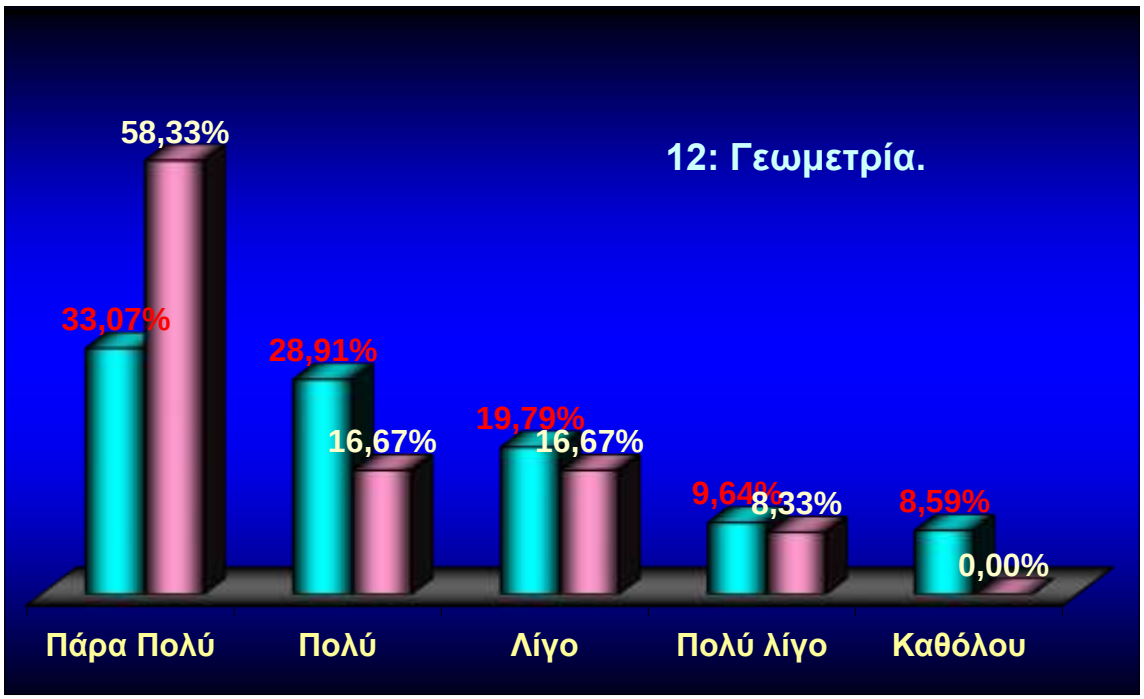
Διάγραμμα 22. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Άλγεβρας, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 14. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Άλγεβρας, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	20,313%	52,604%	20,052%	5,729%	1,302%
ΚΟΡΙΤΣΙ	16,667%	50,000%	27,778%	5,556%	0,000%



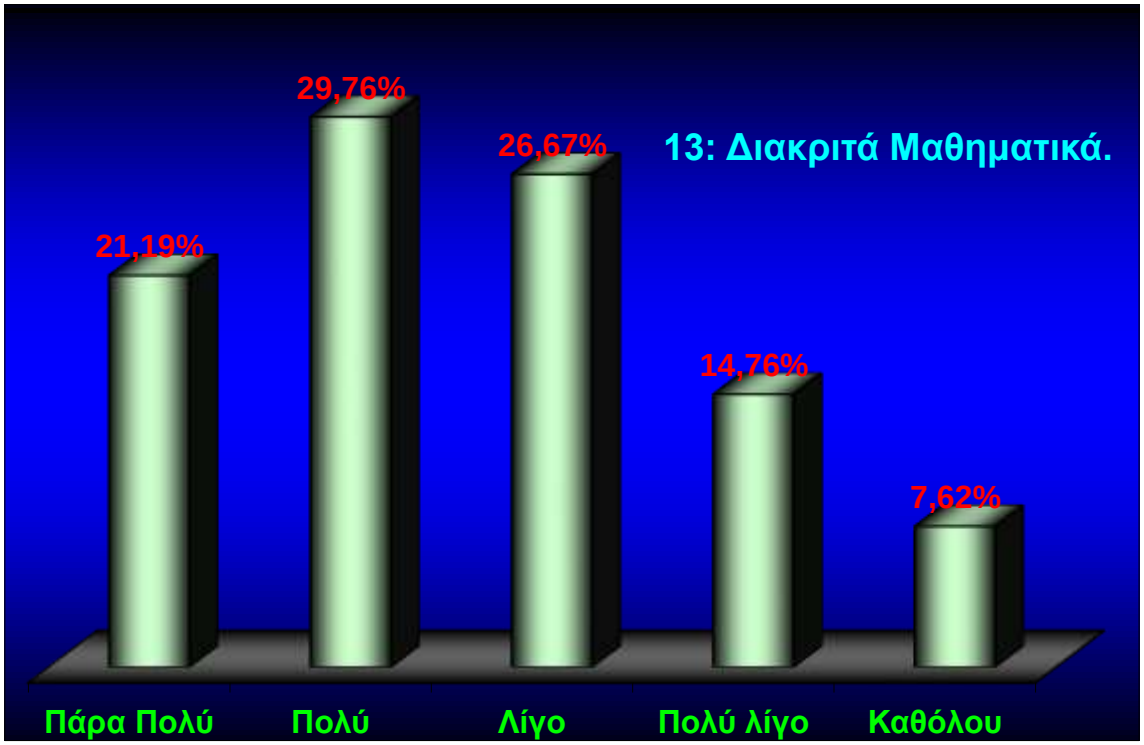
Διάγραμμα 23. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Γεωμετρίας



Διάγραμμα 24. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Γεωμετρίας, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 15. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Γεωμετρίας, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	33,073%	28,906%	19,792%	9,635%	8,594%
ΚΟΡΙΤΣΙ	58,333%	16,667%	16,667%	8,333%	0,000%



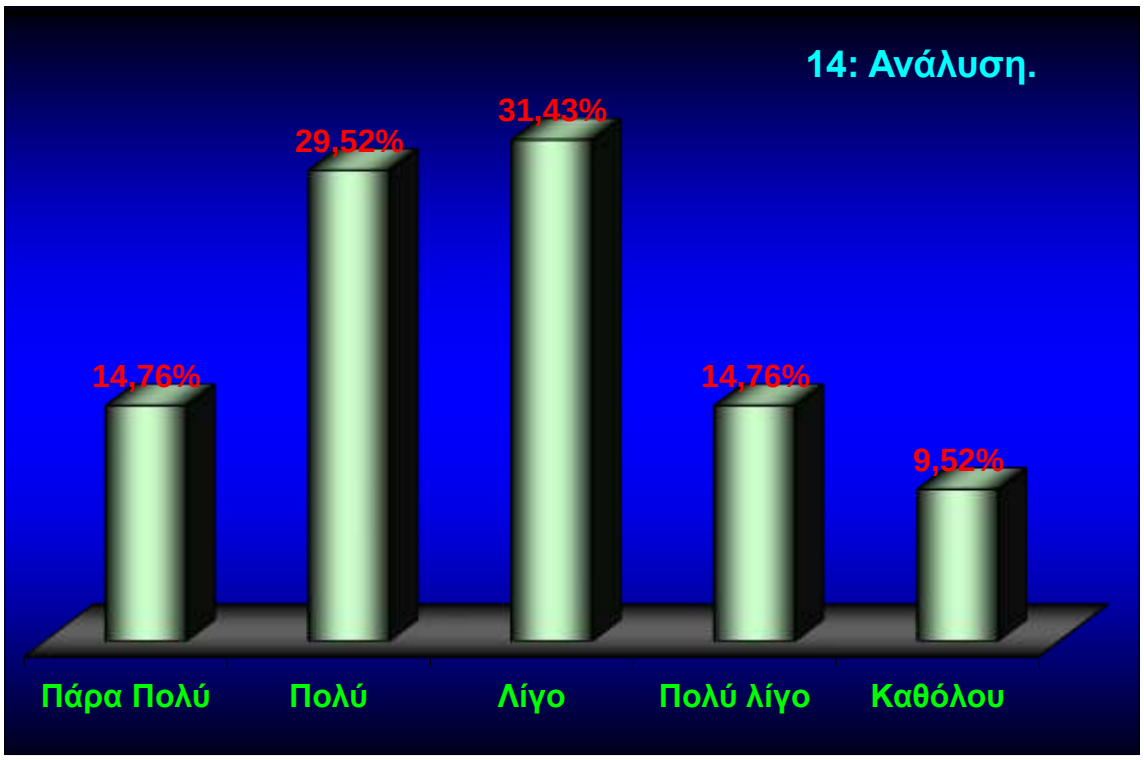
Διάγραμμα 25. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο των Διακριτών Μαθηματικών



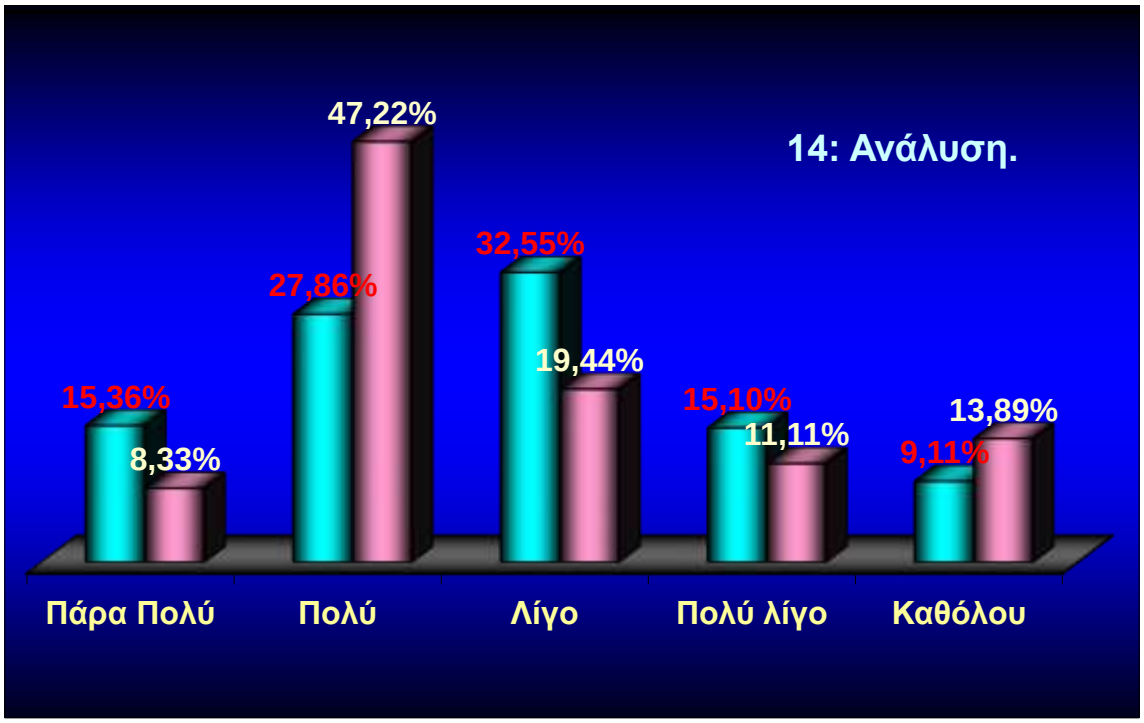
Διάγραμμα 26. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο των Διακριτών Μαθηματικών, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 16. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο των Διακριτών Μαθηματικών, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	21,875%	30,469%	27,344%	12,500%	7,813%
ΚΟΡΙΤΣΙ	13,889%	22,222%	19,444%	38,889%	5,556%



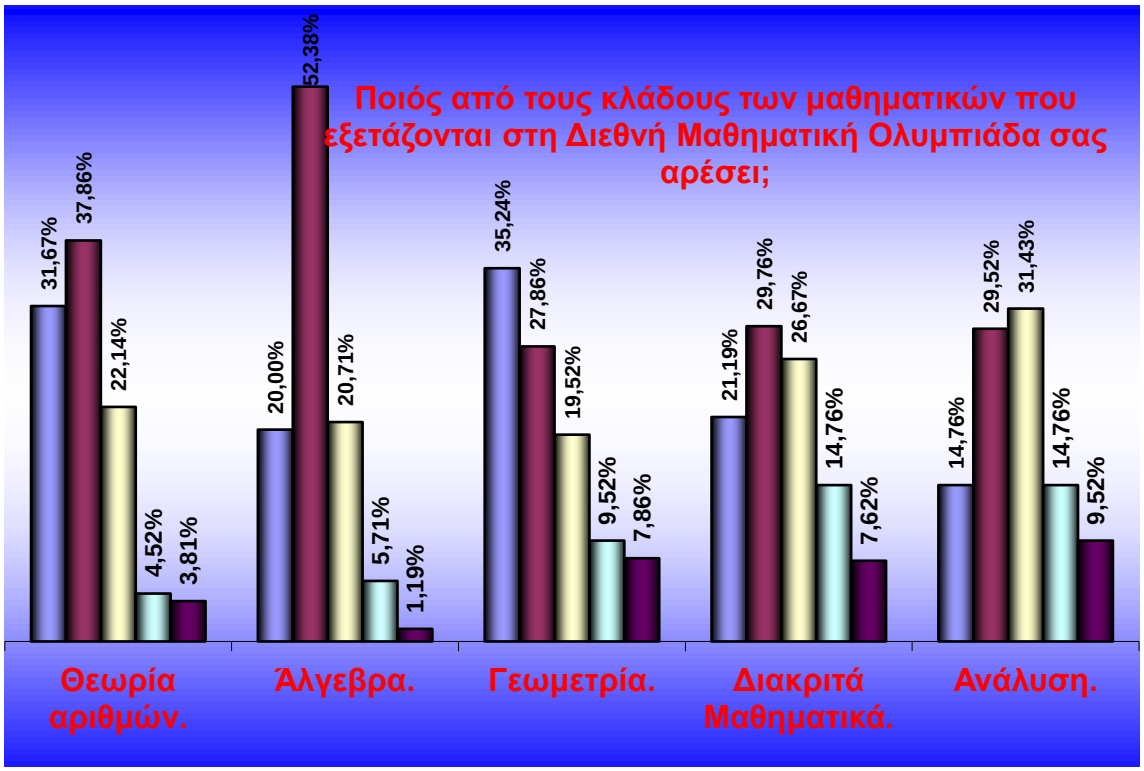
Διάγραμμα 27. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Ανάλυσης



Διάγραμμα 28. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Ανάλυσης, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 17. Ποσοστά αρεσκείας για τον κλάδο της Ανάλυσης, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	15,365%	27,865%	32,552%	15,104%	9,115%
ΚΟΡΙΤΣΙ	8,333%	47,222%	19,444%	11,111%	13,889%



Διάγραμμα 29. Συγκριτικά ποσοστά για το βαθμό αρεσκείας στα κεφάλαια των μαθηματικών που εξετάζονται στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες

Από το προηγούμενο διάγραμμα προκύπτει ότι στα ταλαντούχα παιδιά αρέσει κυρίως η **Άλγεβρα (72,38%)**, η **Θεωρία αριθμών (69,52%)** και η **Γεωμετρία (63,09%)**. Η μεγαλύτερη προτίμηση στα κεφάλαια αυτά οφείλεται ίσως στο γεγονός ότι μπορεί να διδάσκονται στην (αντίστοιχη) δευτεροβάθμια εκπαίδευση των περισσοτέρων χωρών του κόσμου, με αποτέλεσμα τα παιδιά να έχουν μεγαλύτερη εξοικείωση με αυτά.

Η γενική ερώτηση "Σας αρέσει να επιλύετε:", περιλαμβάνει τις ερωτήσεις 15, 16 και 17, οι απαντήσεις των οποίων παρουσιάζονται αμέσως παρακάτω στους τρείς πίνακες. Πιο συγκεκριμένα οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν, πόσο τους αρέσει να επιλύουν: Καθαρά Μαθηματικά προβλήματα (Ερώτηση 15), Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή (Ερώτηση 16) και Θεωρητικές ασκήσεις (Ερώτηση 17). Οι δυνατές απαντήσεις ήταν: "Πάρα πολύ", "Πολύ", "Λίγο", "Πολύ λίγο" και "Καθόλου".

Σας αρέσει να επιλύετε:

Ερώτηση 15: " Καθαρά μαθηματικά προβλήματα;"

Πίνακας 18. Συχνότητες και ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα

Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα	Συχνότητα	%
Πάρα Πολύ	226	53,8
Πολύ	156	37,1
Λίγο	30	7,1
Πολύ λίγο	4	1,0
Καθόλου	4	1,0
Σύνολο	420	100,0

Στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε τη σχεδόν ολοκληρωτική προτίμηση των μαθητών στα **καθαρά μαθηματικά προβλήματα**.



Διάγραμμα 30. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα



Διάγραμμα 31. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 19. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	54,948%	35,938%	7,292%	0,781%	1,042%
ΚΟΡΙΤΣΙ	41,667%	50,000%	5,556%	2,778%	0,000%

Ερώτηση 16: " Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή;"

Πίνακας 20. Συχνότητες και ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή

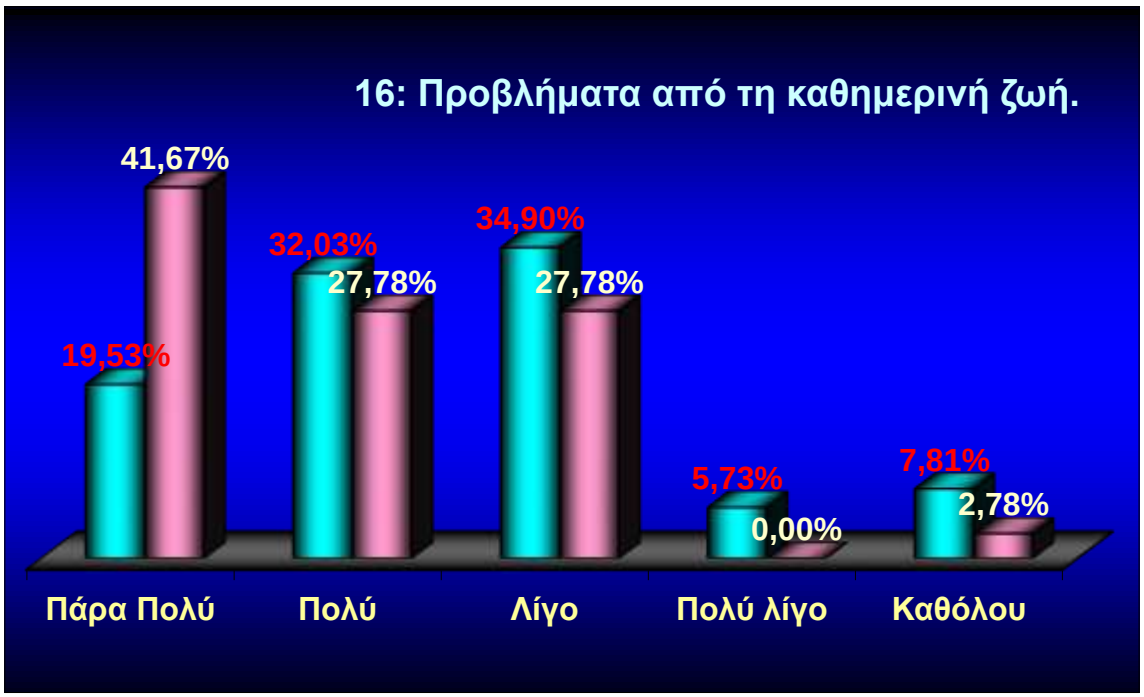
Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή	Συχνότητα	%
Πάρα Πολύ	90	21,4
Πολύ	133	31,7
Λίγο	144	34,3
Πολύ λίγο	22	5,2

Καθόλου	31	7,4
Σύνολο	420	100,0

Στο παραπάνω πίνακα παρατηρούμε τη μειωμένη προτίμηση των μαθητών στα **προβλήματα από τη καθημερινή ζωή**.



Διάγραμμα 32. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή



Διάγραμμα 33. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 21. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στα Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

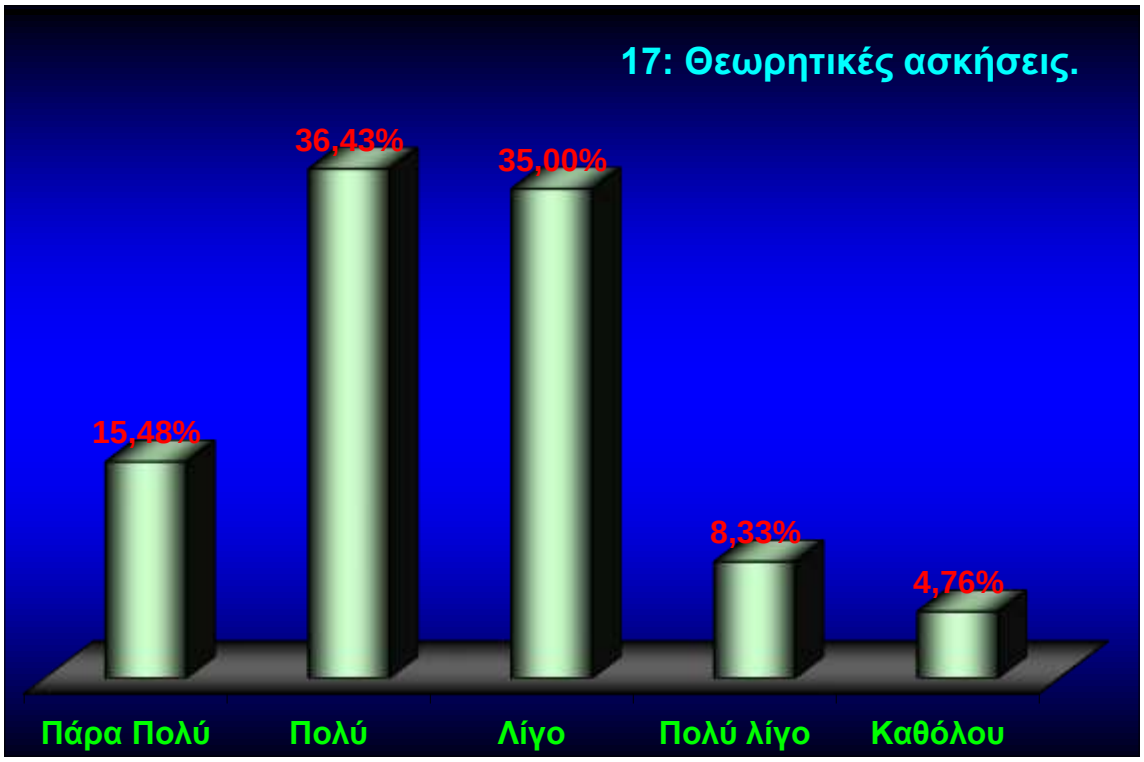
ΑΓΟΡΙ	19,531%	32,031%	34,896%	5,729%	7,813%
ΚΟΡΙΤΣΙ	41,667%	27,778%	27,778%	0,000%	2,778%

Ερώτηση 17: “ Θεωρητικές ασκήσεις;”

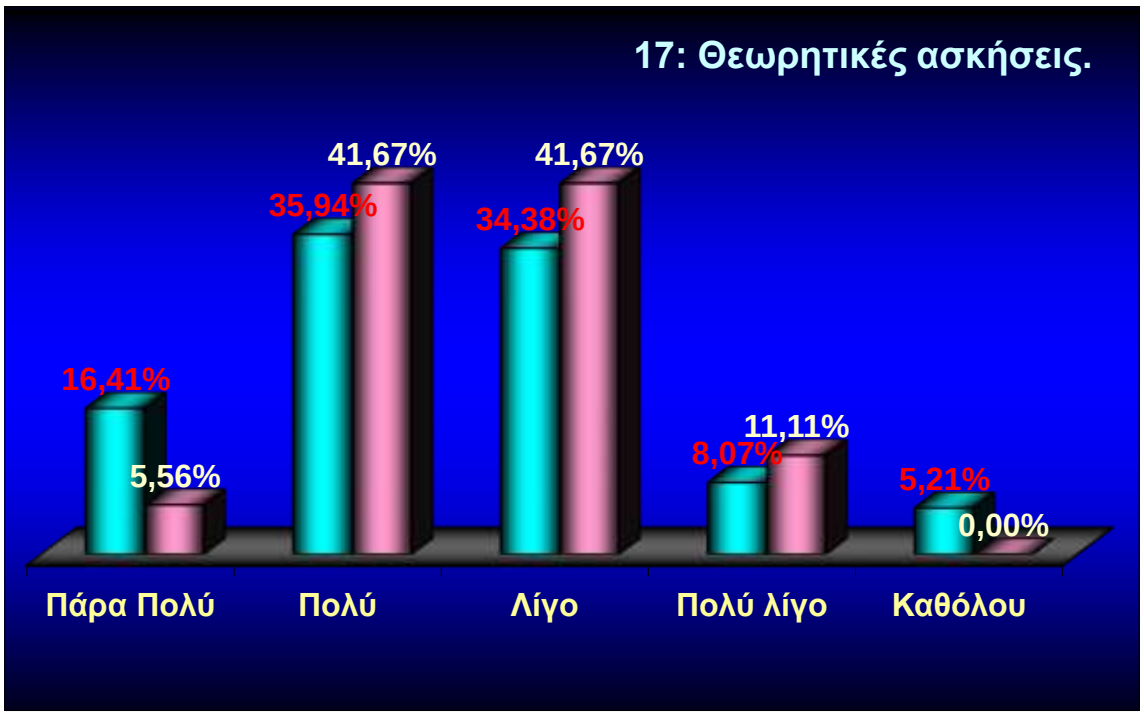
Πίνακας 22. Συχνότητες και ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στις Θεωρητικές Ασκήσεις

Θεωρητικές ασκήσεις	Συχνότητα	%
Πάρα Πολύ	65	15,5
Πολύ	153	36,4
Λίγο	147	35,0
Πολύ λίγο	35	8,3
Καθόλου	20	4,8
Σύνολο	420	100,0

Τέλος στον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε την ομαλότερη κατανομή της προτίμησης των μαθητών στις **θεωρητικές ασκήσεις**.



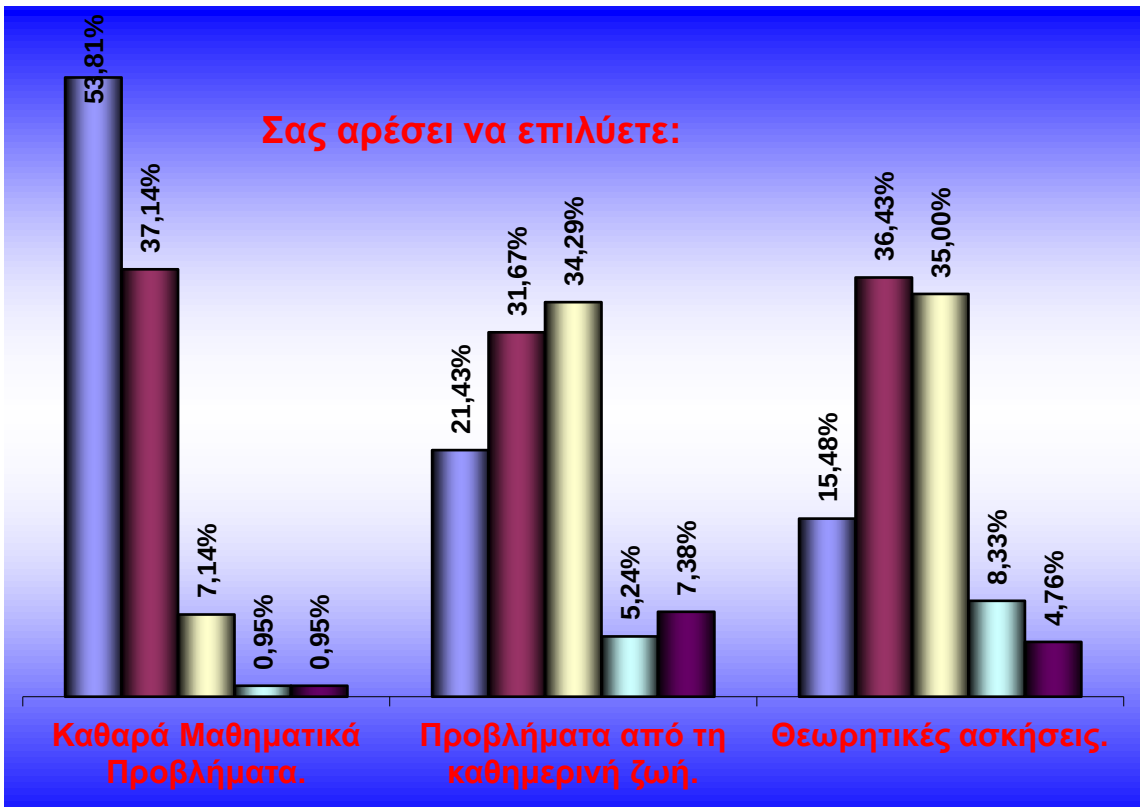
Διάγραμμα 34. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στις Θεωρητικές Ασκήσεις



Διάγραμμα 35. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στις Θεωρητικές Ασκήσεις, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

Πίνακας 23. Ποσοστά για τη κλίμακα προτίμησης των διαγωνιζομένων στις Θεωρητικές Ασκήσεις, ανάλογα με το φύλο (Αγόρι-Κορίτσι)

ΑΓΟΡΙ	16,406%	35,938%	34,375%	8,073%	5,208%
ΚΟΡΙΤΣΙ	5,556%	41,667%	41,667%	11,111%	0,000%

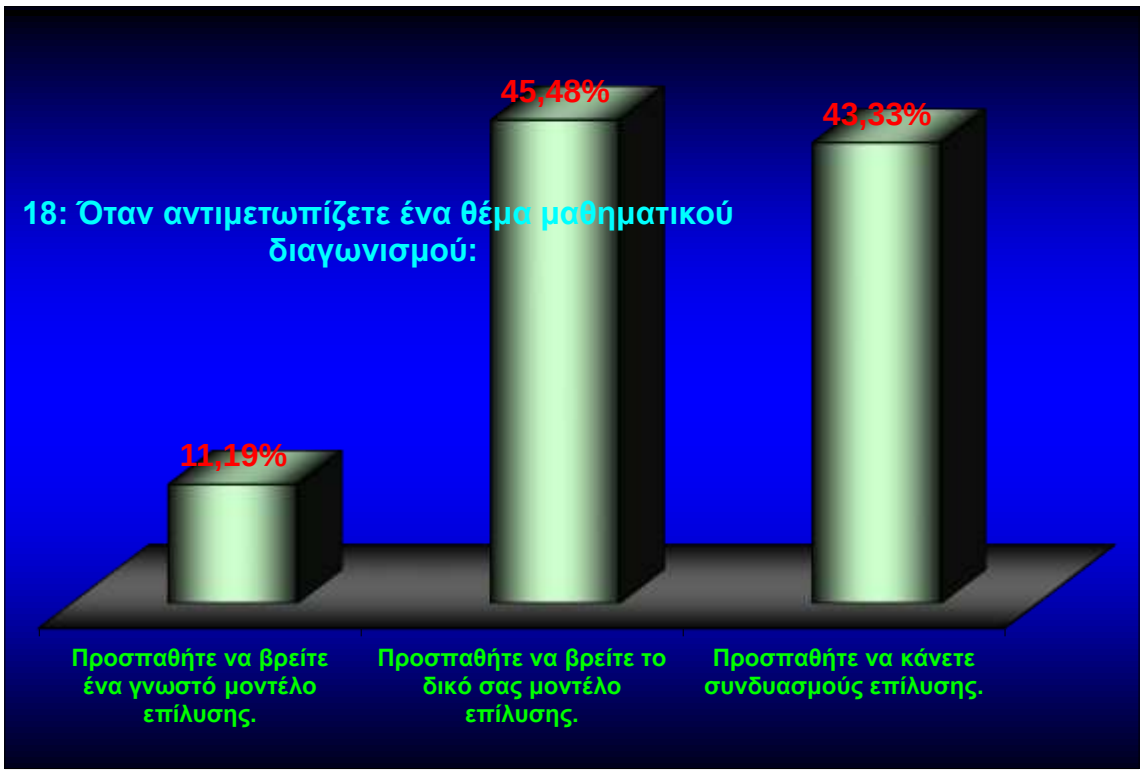


Διάγραμμα 36 . Συγκριτικά Ποσοστά για το βαθμό προτίμησης στις διάφορες κατηγορίες προβλημάτων

Παρατήρηση

Στην ερώτηση 15 με τον όρο "**Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα**" , εννοούμε μαθηματικά προβλήματα που χρειάζονται μέτριο γνωστικό υπόβαθρο θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων. Στην ερώτηση 17 με τον όρο "**Θεωρητικές ασκήσεις**", εννοούμε μαθηματικά προβλήματα που χρειάζονται αρκετά υψηλό γνωστικό υπόβαθρο θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων. Τα υψηλά ποσοστά προτίμησης στην Ερώτηση 15 σε σχέση με την Ερώτηση 17, οφείλεται στο χαρακτηριστικό των ταλαντούχων στα μαθηματικά μαθητών να έχουν την ασυνήθιστη δυνατότητα να μεταφέρουν τη μάθηση στις νέες καταστάσεις τις οποίες δεν έχουν διδαχθεί.

Ερώτηση 18: "Όταν αντιμετωπίζετε ένα θέμα μαθηματικού διαγωνισμού:" Στην συμπλήρωση της πρότασης αυτής 47 μαθητές (11,2%) είπαν ότι "Προσπαθούν να βρουν ένα γνωστό μοντέλο επίλυσης", 191 μαθητές (45,5%) είπαν ότι "Προσπαθούν να βρουν το δικό τους μοντέλο επίλυσης" και 182 μαθητές (43,3%) είπαν ότι "Προσπαθούν να κάνουν συνδυασμούς επίλυσης".



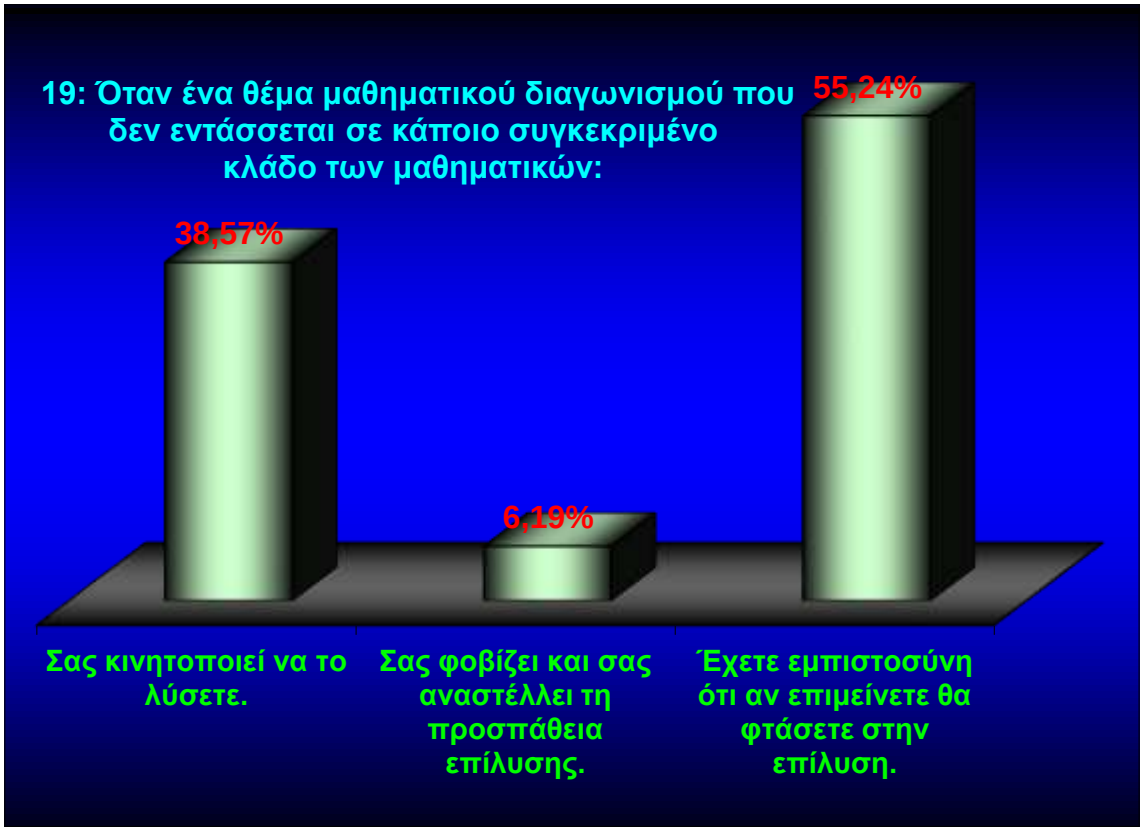
Διάγραμμα 37



Διάγραμμα 38

Ερώτηση 19: "Όταν ένα θέμα μαθηματικού διαγωνισμού που δεν εντάσσεται σε κάποιο συγκεκριμένο κλάδο των μαθηματικών:"
Στην συμπλήρωση της πρότασης αυτής 162 μαθητές (38,6%) είπαν ότι "Τους κινητοποιεί να το λύσουν", 26 μαθητές (6,2%) είπαν ότι "Τους φοβίζει και τους αναστέλλει τη προσπάθεια επίλυσης" και 232 μαθητές

(55,2%) είπαν ότι “Έχουν εμπιστοσύνη ότι αν επιμείνουν θα φτάσουν στην επίλυση”.



Διάγραμμα 39



Διάγραμμα 40

Οι ερωτήσεις 20 έως 52 (που δημιουργήθηκαν με βάση τις κλίμακες Fenemma και Sherman (1976)) δόθηκαν στους ταλαντούχους μαθητές με την παρακάτω σειρά και τους ζητήθηκε να εκφράσουν το βαθμό συμφωνίας πάνω σε μια πενταβάθμια κλίμακα τύπου Likert (1=Συμφωνώ απόλυτα, 2=Συμφωνώ, 3=Αναποφάσιστος, 4=Διαφωνώ, 5=Διαφωνώ απόλυτα).

Πίνακας 24. Πίνακας ερωτήσεων γιά την ανίχνευση χαρακτηριστικών των παιδιών που συμμετέχουν στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες

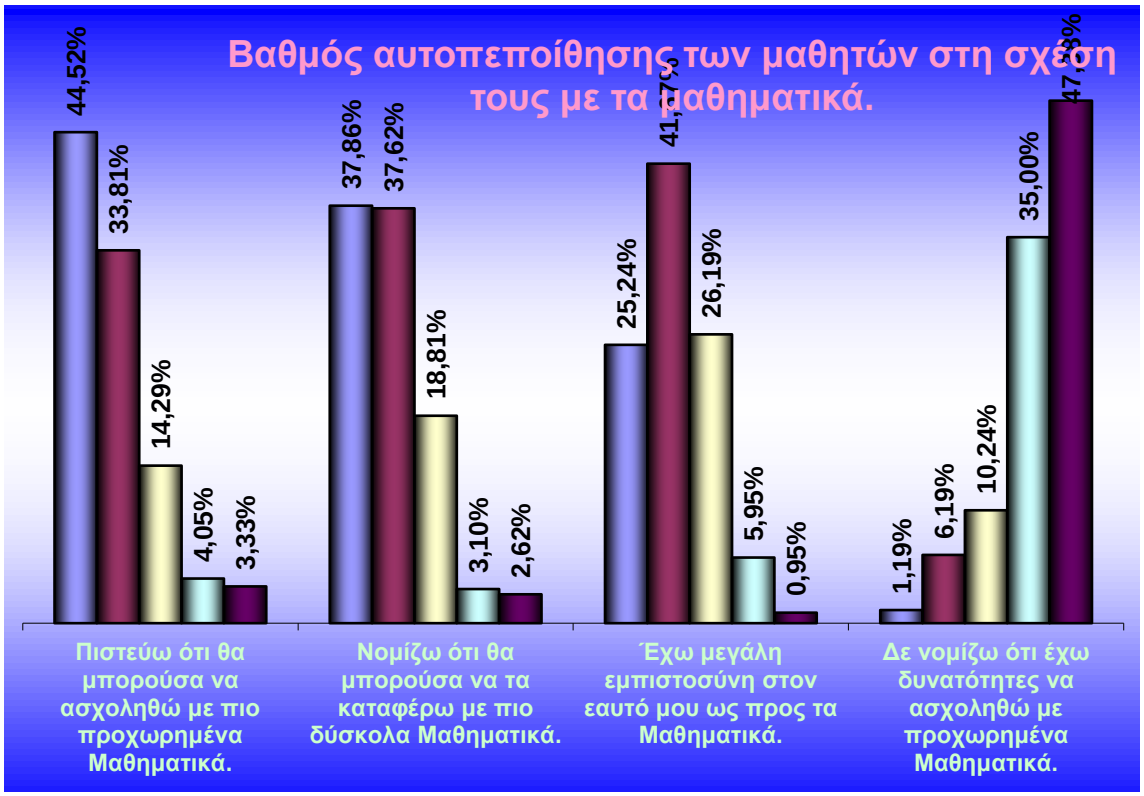
20.Πιστεύω ότι θα μπορούσα να ασχοληθώ με πιο προχωρημένα Μαθηματικά.
21.Συνήθως νιώθω ήρεμος όταν γράφω διαγώνισμα Μαθηματικών σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς.
22.Μου αρέσουν οι μαθηματικές σπαζοκεφαλιές.
23.Όταν μένει αναπάντητη μία ερώτηση κατά την ώρα των Μαθηματικών συνεχίζω να τη σκέπτομαι και μετά το μάθημα.
24.Από τη στιγμή που θα ασχοληθώ με μία μαθηματική σπαζοκεφαλιά μου είναι αδύνατο να σταματήσω.
25.Οι γονείς μου πιστεύουν ότι τα Μαθηματικά θα με βοηθήσουν και στην εξέλιξή μου μετά το σχολείο.
26.Οι καθηγητές των Μαθηματικών με ενθάρρυναν να ασχοληθώ όσο περισσότερο μπορώ με τα Μαθηματικά
27.Σχεδόν ποτέ δεν είχα άγχος κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς.
28.Όταν δεν μπορώ να λύσω ένα μαθηματικό πρόβλημα αρχίζω να ασχολούμαι επίμονα με αυτό ώσπου να βρω τη λύση του.
29.Οι γονείς μου πιστεύουν ότι η ασχολία μου με τα προχωρημένα Μαθηματικά είναι χαμένος χρόνος για μένα
30.Θα ήταν πράγματι σπουδαίο να κερδίσω ένα βραβείο στα Μαθηματικά.
31.Αν πράγματι ήμουν πολύ καλός στα Μαθηματικά αυτό θα έκανε κάποιους να με αντιπαθούν.
32.Οι γονείς μου ενδιαφέρονται πολύ για τη πρόοδό μου στα Μαθηματικά.
33.Ως ενήλικας θα χρησιμοποιήσω τα Μαθηματικά ποικιλοτρόπως.
34.Συνήθως νιώθω ήρεμος όταν γράφω διαγώνισμα Μαθηματικών στο σχολείο.
35.Οι γονείς μου με ενθαρρύνουν συνεχώς να είμαι καλός στα Μαθηματικά.

36. Σχεδόν ποτέ δεν είχα άγχος κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών στο σχολείο.
37. Βλέπω τα Μαθηματικά ως αντικείμενο που σπάνια θα μου χρησιμεύσει στην καθημερινή μου ζωή στο μέλλον.
38. Θα ήταν σπουδαίο για μένα να με θεωρούν πολύ ικανό στα Μαθηματικά.
39. Θα ήμουν υπερήφανος να διακρίνομαι ως μαθητής στα Μαθηματικά.
40. Οι καθηγητές μου πιστεύουν ότι το να ασχοληθώ με προχωρημένα Μαθηματικά είναι χαμένος χρόνος για μένα.
41. Θα μου χρειαστούν τα Μαθηματικά στη μελλοντική μου εργασία.
42. Οι γονείς μου δε με ενεθάρρυναν να στραφώ σ' ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται τα Μαθηματικά.
43. Δε νομίζω ότι έχω δυνατότητες να ασχοληθώ με προχωρημένα Μαθηματικά.
44. Έχω μεγάλη εμπιστοσύνη στον εαυτό μου ως προς τα Μαθηματικά.
45. Τα Μαθηματικά με διασκεδάζουν και με ενεργοποιούν.
46. Μελετώ Μαθηματικά γιατί ξέρω πόσο χρήσιμα είναι.
47. Οι καθηγητές των Μαθηματικών ενδιαφέρονται για τη πρόοδό μου στα Μαθηματικά.
48. Μου προκαλούν μεγάλο ενδιαφέρον τα μαθηματικά προβλήματα που δεν μπορώ να καταλάβω αμέσως.
49. Νομίζω ότι θα μπορούσα να τα καταφέρω με πιο δύσκολα Μαθηματικά.
50. Θα με ευχαριστούσε να έβγαινα πρώτος σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό.
51. Θα μπορούσα να συζητήσω με τους καθηγητές μου για ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται Μαθηματικά.
52. Τα Μαθηματικά δεν είναι σημαντικά για τη μελλοντική μου εργασία.

Οι παραπάνω ερωτήσεις, μπορούν να ομαδοποιηθούν ανάλογα με την τάση που θέλουμε να ανιχνεύσουμε, ως εξής:

Βαθμός αυτοπεποίθησης των μαθητών στη σχέση τους με τα μαθηματικά.
Πιστεύω ότι θα μπορούσα να ασχοληθώ με πιο προχωρημένα Μαθηματικά.
Νομίζω ότι θα μπορούσα να τα καταφέρω με πιο δύσκολα Μαθηματικά.
Έχω μεγάλη εμπιστοσύνη στον εαυτό μου ως προς τα Μαθηματικά.
Δε νομίζω ότι έχω δυνατότητες να ασχοληθώ με προχωρημένα Μαθηματικά.

Πίνακας 25

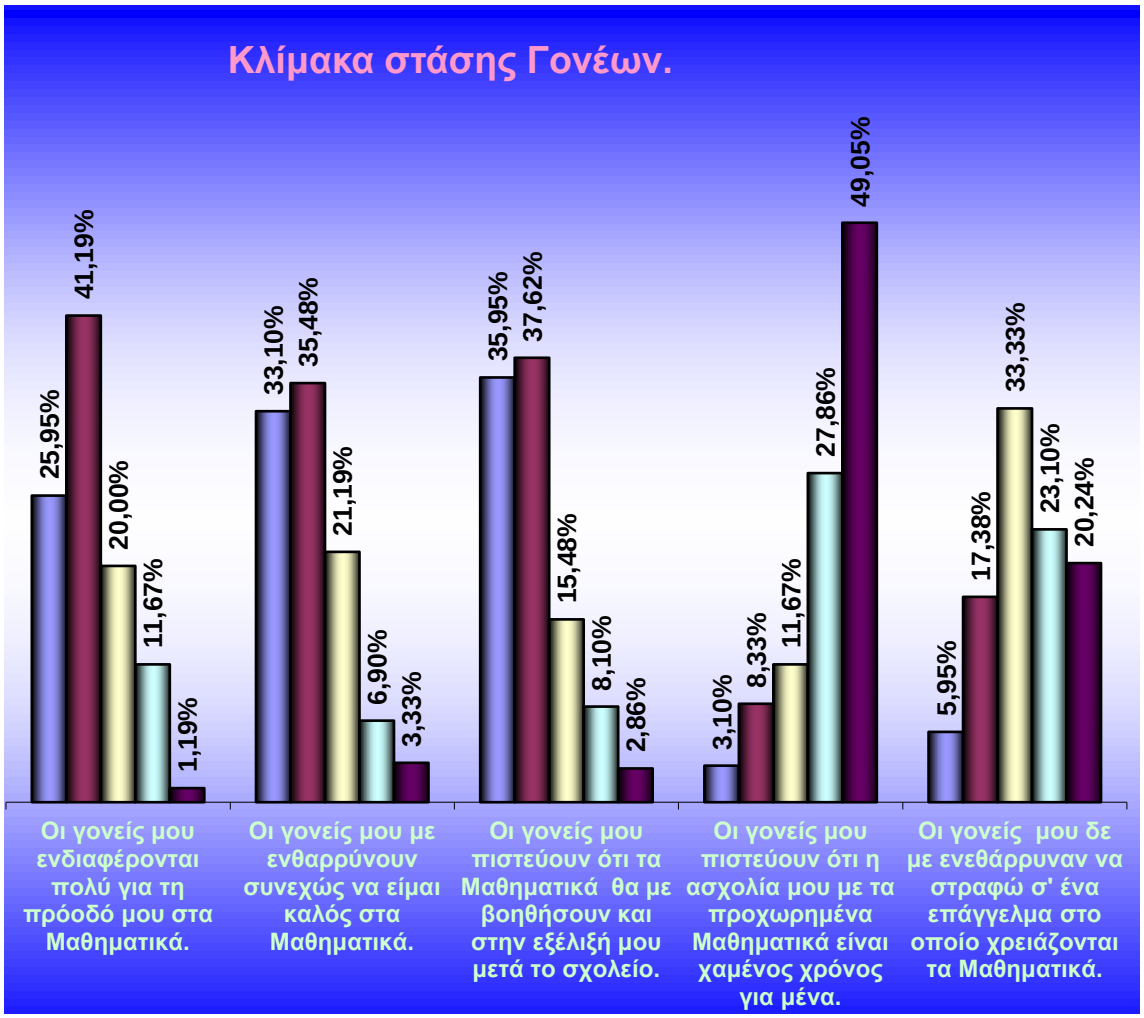


Διάγραμμα 41

Πίνακας 26

Κλίμακα στάσης Γονέων.
Οι γονείς μου ενδιαφέρονται πολύ για τη πρόοδό μου στα Μαθηματικά.
Οι γονείς μου με ενθαρρύνουν συνεχώς να είμαι καλός στα Μαθηματικά.
Οι γονείς μου πιστεύουν ότι τα Μαθηματικά θα με βοηθήσουν και στην εξέλιξή μου μετά το σχολείο.
Οι γονείς μου πιστεύουν ότι η ασχολία μου με τα προχωρημένα Μαθηματικά είναι χαμένος χρόνος για μένα.

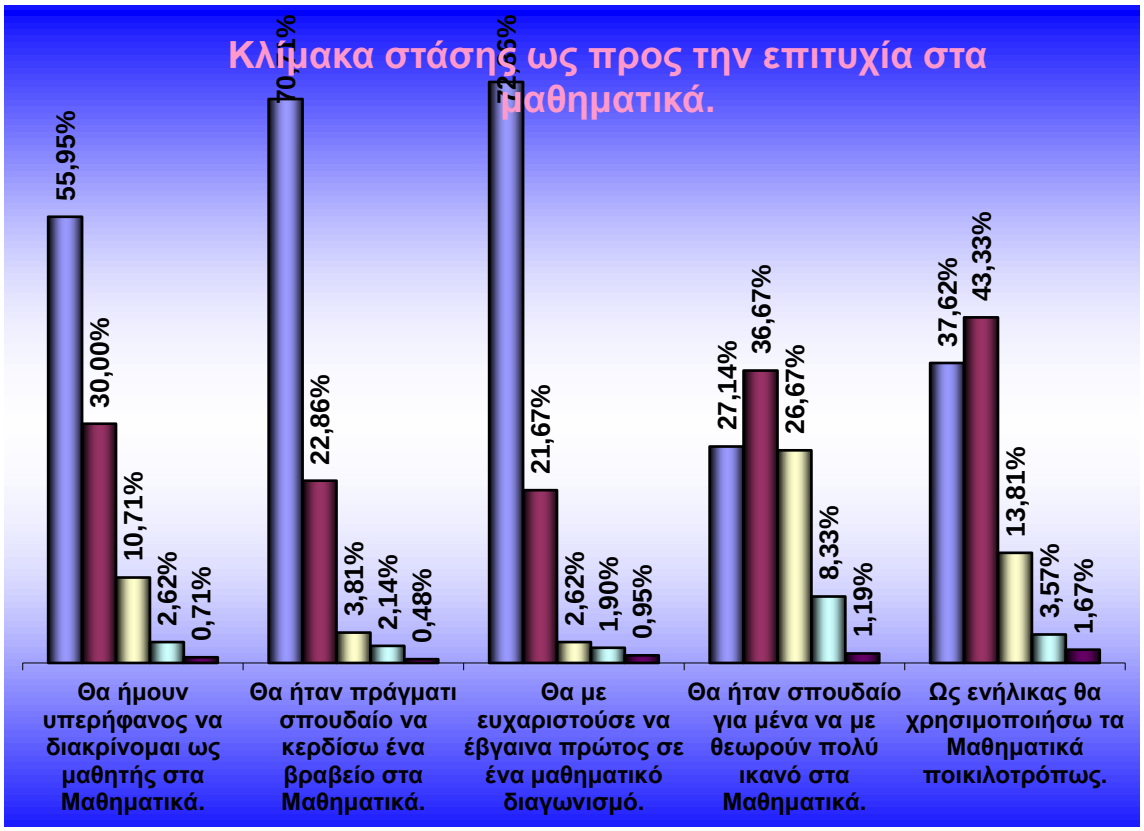
Οι γονείς μου δε με ενεθάρρυναν να στραφώ σ' ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται τα Μαθηματικά.



Διάγραμμα 42

Πίνακας 27

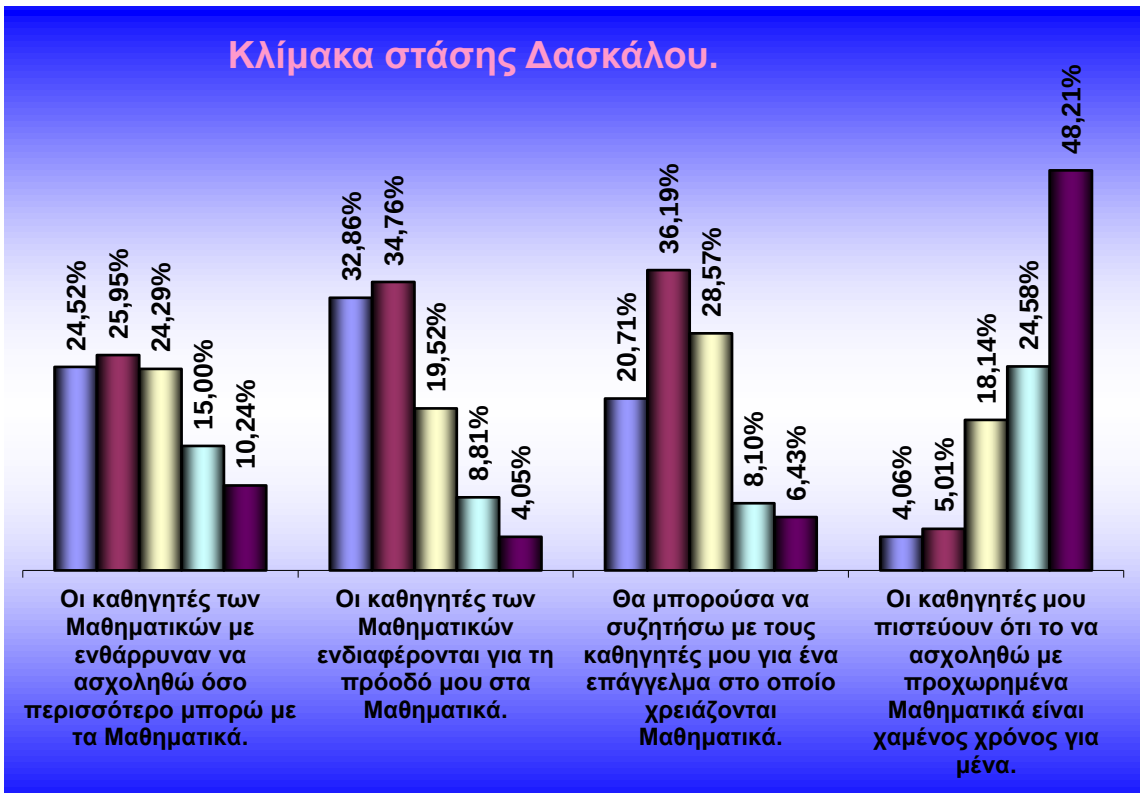
Κλίμακα στάσης ως προς την επιτυχία στα μαθηματικά.
Θα ήμουν υπερήφανος να διακρίνομαι ως μαθητής στα Μαθηματικά.
Θα ήταν πράγματι σπουδαίο να κερδίσω ένα βραβείο στα Μαθηματικά.
Θα με ευχαριστούσε να έβγαινα πρώτος σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό.
Θα ήταν σπουδαίο για μένα να με θεωρούν πολύ ικανό στα Μαθηματικά.
Ως ενήλικας θα χρησιμοποιήσω τα Μαθηματικά ποικιλοτρόπως.



Διάγραμμα 43.

Πίνακας 28.

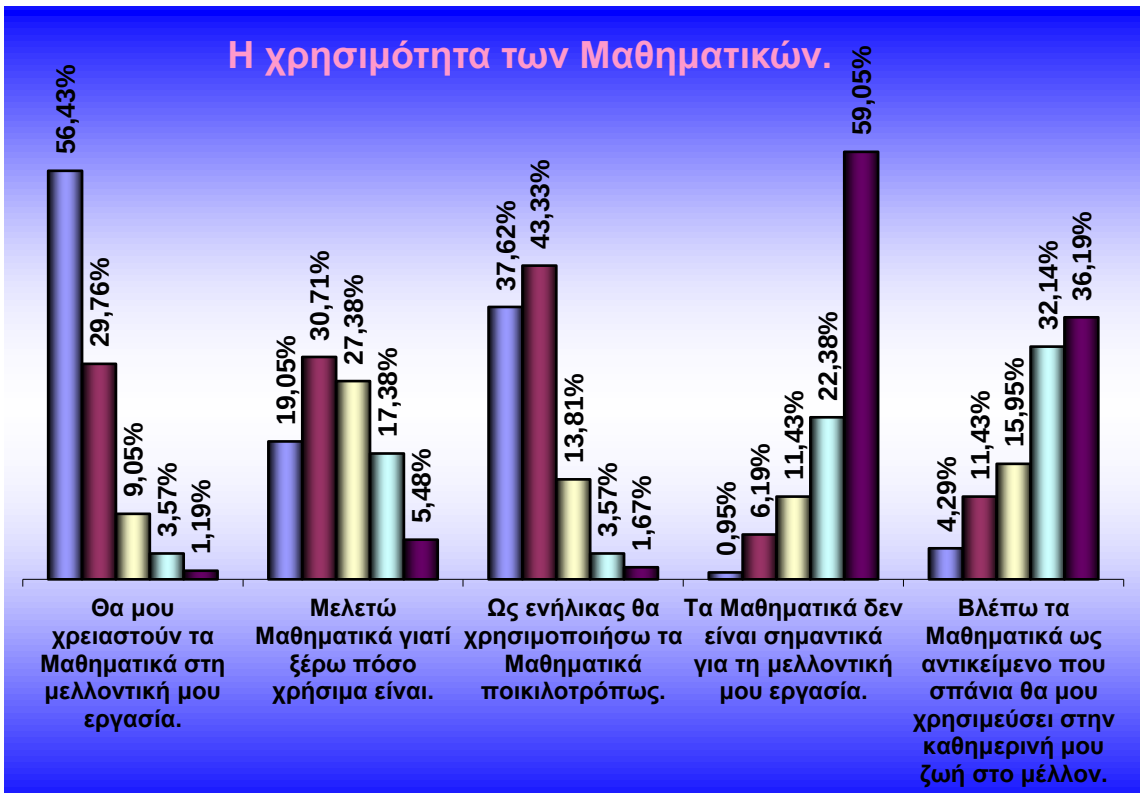
Κλίμακα στάσης Δασκάλου.
Οι καθηγητές των Μαθηματικών με ενθάρρυναν να ασχοληθώ όσο περισσότερο μπορώ με τα Μαθηματικά.
Οι καθηγητές των Μαθηματικών ενδιαφέρονται για τη πρόοδό μου στα Μαθηματικά.
Θα μπορούσα να συζητήσω με τους καθηγητές μου για ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται Μαθηματικά.
Οι καθηγητές μου πιστεύουν ότι το να ασχοληθώ με προχωρημένα Μαθηματικά είναι χαμένος χρόνος για μένα.



Διάγραμμα 44

Η χρησιμότητα των Μαθηματικών.
Θα μου χρειαστούν τα Μαθηματικά στη μελλοντική μου εργασία.
Μελετώ Μαθηματικά γιατί ξέρω πόσο χρήσιμα είναι.
Ως ενήλικας θα χρησιμοποιήσω τα Μαθηματικά ποικιλοτρόπως.
Τα Μαθηματικά δεν είναι σημαντικά για τη μελλοντική μου εργασία.
Βλέπω τα Μαθηματικά ως αντικείμενο που σπάνια θα μου χρησιμεύσει στην καθημερινή μου ζωή στο μέλλον.

Πίνακας 29



Διάγραμμα 45

Πίνακας 30

Το άγχος στα Μαθηματικά.
Συνήθως νιώθω ήρεμος όταν γράφω διαγώνισμα Μαθηματικών σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς.
Σχεδόν ποτέ δεν είχα άγχος κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς.
Συνήθως νιώθω ήρεμος όταν γράφω διαγώνισμα Μαθηματικών στο σχολείο.
Σχεδόν ποτέ δεν είχα άγχος κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών στο σχολείο.



Διάγραμμα 46

Αποτελεσματικότητα από το ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.
Μου αρέσουν οι μαθηματικές σπαζοκεφαλιές.
Τα Μαθηματικά με διασκεδάζουν και με ενεργοποιούν.
Όταν δεν μπορώ να λύσω ένα μαθηματικό πρόβλημα αρχίζω να ασχολούμαι επίμονα με αυτό ώσπου να βρω τη λύση του.
Από τη στιγμή που θα ασχοληθώ με μία μαθηματική σπαζοκεφαλιά μου είναι αδύνατο να σταματήσω.
Όταν μένει αναπάντητη μία ερώτηση κατά την ώρα των Μαθηματικών συνεχίζω να τη σκέπτομαι και μετά το μάθημα.
Θα μπορούσα να συζητήσω με τους καθηγητές μου για ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται Μαθηματικά.

Πίνακας 31



Διάγραμμα 47

4.3 Παραγοντική Ανάλυση

Από την εφαρμογή της Περιγραφικής εξέτασης στις ερωτήσεις 20 – 52 προέκυψε ο παρακάτω πίνακας που περιέχει τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τα ποσοστά συμφωνίας (συμφωνώ απόλυτα έως συμφωνώ), αναφορικά με τη συμπεριφορά των ταλαντούχων στα μαθηματικά παιδιών, που αντιστοιχούν σε κάθε μια από τις ερωτήσεις.

Μέσες τιμές, τυπικές αποκλίσεις και ποσοστά συμφωνίας

	Ποσοστό συμφωνίας %	Μέση τιμή	Τ.Α
Q20. Πιστεύω ότι θα μπορούσα να ασχοληθώ με πιο προχωρημένα Μαθηματικά.	78,33	1,88	1,02

Q21. Συνήθως νιώθω ήρεμος όταν γράφω διαγώνισμα Μαθηματικών σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς.	61,43	2,36	1,13
Q22. Μου αρέσουν οι μαθηματικές σπαζοκεφαλιές.	72,14	2,07	1,01
Q23. Όταν μένει αναπάντητη μία ερώτηση κατά την ώρα των Μαθηματικών συνεχίζω να τη σκέπτομαι και μετά το μάθημα.	79,29	1,91	0,95
Q24. Από τη στιγμή που θα ασχοληθώ με μία μαθηματική σπαζοκεφαλιά μου είναι αδύνατο να σταματήσω.	50,24	2,65	1,09
Q25. Οι γονείς μου πιστεύουν ότι τα Μαθηματικά θα με βοηθήσουν και στην εξέλιξή μου μετά το σχολείο.	73,57	2,04	1,05
Q26. Οι καθηγητές των Μαθηματικών με ενθάρρυναν να ασχοληθώ όσο περισσότερο μπορώ με τα Μαθηματικά.	50,48	2,60	1,28
Q27. Σχεδόν ποτέ δεν είχα άγχος κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς.	38,10	2,86	1,15
Q28. Όταν δεν μπορώ να λύσω ένα μαθηματικό πρόβλημα αρχίζω να ασχολούμαι επίμονα με αυτό ώσπου να βρω τη λύση του.	54,29	2,53	0,98
Q29. Οι γονείς μου πιστεύουν ότι η ασχολία μου με τα προχωρημένα Μαθηματικά είναι χαμένος χρόνος για μένα.	11,43	4,11	1,10
Q30. Θα ήταν πράγματι σπουδαίο να κερδίσω ένα βραβείο στα Μαθηματικά.	93,57	1,39	0,71
Q31. Αν πράγματι ήμουν πολύ καλός στα Μαθηματικά αυτό θα έκανε κάποιους να με αντιπαθούν.	20,00	3,41	1,12

Q32. Οι γονείς μου ενδιαφέρονται πολύ για τη πρόοδό μου στα Μαθηματικά.	67,14	2,21	0,99
Q33. Ως ενήλικας θα χρησιμοποιήσω τα Μαθηματικά ποικιλοτρόπως.	80,95	1,88	0,89
Q34. Συνήθως νιώθω ήρεμος όταν γράφω διαγώνισμα Μαθηματικών στο σχολείο.	84,29	1,61	1,00
Q35. Οι γονείς μου με ενθαρρύνουν συνεχώς να είμαι καλός στα Μαθηματικά.	68,57	2,12	1,05
Q36. Σχεδόν ποτέ δεν είχα άγχος κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών στο σχολείο.	66,19	2,15	1,33
Q37. Βλέπω τα Μαθηματικά ως αντικείμενο που σπάνια θα μου χρησιμεύσει στην καθημερινή μου ζωή στο μέλλον.	15,71	3,85	1,16
Q38. Θα ήταν σπουδαίο για μένα να με θεωρούν πολύ ικανό στα Μαθηματικά.	63,81	2,20	0,97
Q39. Θα ήμουν υπερήφανος να διακρίνομαι ως μαθητής στα Μαθηματικά.	85,95	1,62	0,83
Q40. Οι καθηγητές μου πιστεύουν ότι το να ασχοληθώ με προχωρημένα Μαθηματικά είναι χαμένος χρόνος για μένα.	9,05	4,07	1,12
Q41. Θα μου χρειαστούν τα Μαθηματικά στη μελλοντική μου εργασία.	86,19	1,63	0,88
Q42. Οι γονείς μου δε με ενεθάρρυναν να στραφώ σ' ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται τα Μαθηματικά.	23,33	3,34	1,16

Q43. Δε νομίζω ότι έχω δυνατότητες να ασχοληθώ με προχωρημένα Μαθηματικά.	7,38	4,21	0,94
Q44. Έχω μεγάλη εμπιστοσύνη στον εαυτό μου ως προς τα Μαθηματικά.	66,90	2,16	0,90
Q45. Τα Μαθηματικά με διασκεδάζουν και με ενεργοποιούν.	84,52	1,73	0,84
Q46, Μελετώ Μαθηματικά γιατί ξέρω πόσο χρήσιμα είναι.	49,76	2,60	1,14
Q47. Οι καθηγητές των Μαθηματικών ενδιαφέρονται για τη πρόοδό μου στα Μαθηματικά.	67,62	2,16	1,10
Q48. Μου προκαλούν μεγάλο ενδιαφέρον τα μαθηματικά προβλήματα που δεν μπορώ να καταλάβω αμέσως.	43,81	2,77	1,14
Q49. Νομίζω ότι θα μπορούσα να τα καταφέρω με πιό δύσκολα Μαθηματικά.	75,48	1,95	0,96
Q50. Θα με ευχαριστούσε να έβγαινα πρώτος σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό.	94,52	1,36	0,72
Q51. Θα μπορούσα να συζητήσω με τους καθηγητές μου για ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται Μαθηματικά.	56,90	2,43	1,10
Q52. Τα Μαθηματικά δεν είναι σημαντικά για τη μελλοντική μου εργασία.	7,14	4,32	0,97

Πίνακας 32

Από τον προηγούμενο πίνακα είναι δυνατό να προκύψει μια πρώτη εκτίμηση της συμπεριφοράς του μέσου όρου του δείγματος ως προς ορισμένες από τις ερωτήσεις, κυρίως αυτές που παρουσιάζουν ιδιαίτερα μεγάλη ή ιδιαίτερα μικρή συμφωνία.

Παρατηρούμε ότι τα μεγαλύτερα ποσοστά συμφωνίας παρουσιάζονται (με φθίνουσα διάταξη) στις ερωτήσεις Q50, Q30, Q41, Q39, Q45, Q34, Q33, Q23, Q20, Q49. Οι ερωτήσεις αυτές φανερώνουν τις τάσεις και απόψεις των ταλαντούχων στα μαθηματικά παιδιών για:

- Να διακριθούν στα μαθηματικά.

- ❖ Την αναγκαιότητα των μαθηματικών (για το παρόν και το μέλλον τους).
- ❖ Τη χρησιμότητα των μαθηματικών.
- ❖ Την ηρεμία και ευχαρίστηση (διασκέδαση) που τους προσφέρουν τα μαθηματικά.
- ❖ Την αυτοπεποίθηση που αποκτούν απέναντι στα μαθηματικά.

Τα μικρότερα ποσοστά συμφωνίας παρουσιάζονται (με αύξουσα διάταξη) στις ερωτήσεις Q52, Q43, Q40, Q29, Q37, Q31, Q42, Q27, Q48, Q46. Οι ερωτήσεις αυτές φανερώνουν τις τάσεις και απόψεις των ταλαντούχων στα μαθηματικά παιδιών για:

- ❖ Τη θετική στάση των δασκάλων (στην ενασχόληση των παιδιών με τα μαθηματικά).
- ❖ Τη θετική συμπεριφορά του κοινωνικού περίγυρου.
- ❖ Τη θετική στάση των γονιών και τη παρότρυνση να ασχοληθούν τα παιδιά με τα μαθηματικά.

Παραγοντική Ανάλυση

Η Παραγοντική Ανάλυση είναι μια στατιστική μέθοδος που αποσκοπεί στον καθορισμό νέων ερωτήσεων, τις οποίες ονομάζουμε παράγοντες. Οι παράγοντες ερμηνεύουν τις σχέσεις μεταξύ των αρχικών ερωτήσεων μέσω της ομαδοποίησής τους σε μικρότερα σύνολα από το αρχικό. Η κλασσική μέθοδος της παραγοντικής ανάλυσης, την οποία θα εφαρμόσουμε στο δείγμα μας, είναι η διερευνητική Παραγοντική Ανάλυση σε Κύριες Συνιστώσες, με ορθογώνια περιστροφή (Varimax - Principal Components Analysis) (SPSS, 2001).

Πριν παρουσιασθούν τα συμπεράσματα από την Παραγοντική Ανάλυση σε Κύριες Συνιστώσες, θα γίνει αναφορά σε κάποια κριτήρια που πρέπει να πληρούνται, ώστε να έχουμε με τη μέθοδο αυτή αξιόπιστα αποτελέσματα.

Πρώτο κριτήριο είναι η τιμή του δείκτη που χαρακτηρίζει την καλή προσαρμογή στην Παραγοντική Ανάλυση, σύμφωνα με τον μέτρο των Kaiser-Meyer-Olkin (KMO), να είναι από 0,6 μέχρι 1, διότι, σύμφωνα με τον Kaiser (1974) η τιμή 0,6 θεωρείται μέτρια, η τιμή 0,5 κακή, ενώ τιμές μικρότερες από 0,5 θεωρούνται απαράδεκτες. Δεύτερο κριτήριο είναι ο πίνακας που εμφανίζει το συσχετισμό ανά δύο όλων των ερωτήσεων να μην είναι διαγώνιος (διαγώνιοι όροι μονάδες και οι υπόλοιποι όροι μηδέν), γιατί στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει συσχέτιση. Για να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση, σύμφωνα με την οποία ο πίνακας συσχέτισης είναι διαγώνιος,

δηλαδή δεν υπάρχει καμία συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών, χρησιμοποιείται το τεστ Bartlett. Εάν το επίπεδο σημαντικότητας (sig) είναι αρκούντως μικρό (<0,05), τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και γίνεται δεκτή η εναλλακτική υπόθεση, η οποία δηλώνει ότι υπάρχει συσχέτιση για τουλάχιστον δύο από τις μεταβλητές. Τρίτο κριτήριο είναι το κατάλληλο μέγεθος του δείγματος. Κατά την άποψη του Gorsuch (1983), πρέπει σε κάθε μεταβλητή να αντιστοιχούν τουλάχιστον πέντε άτομα και το ελάχιστο μέγεθος του δείγματος να είναι 200 άτομα.

Κατά την εξέταση των παραπάνω κριτηρίων διαπιστώθηκε ότι ισχύουν πλήρως όλες οι προϋποθέσεις που διασφαλίζουν την εφαρμογή της Παραγοντικής Ανάλυσης Σε Κύριες Συνιστώσες. Συγκεκριμένα: ο δείκτης KMO έχει τιμή 0,728, άρα η τιμή του, κατά τον Kaiser (1974) είναι πολύ καλή, το Bartlett Test έχει επίπεδο σημαντικότητας <0,001, άρα απορρίπτεται η υπόθεση ότι ο πίνακας συσχέτισης είναι διαγώνιος, το δείγμα αποτελείται από 420 άτομα και οι μεταβλητές που εισήλθαν στο μοντέλο της Παραγοντικής Ανάλυσης ήταν 33.

Από την εφαρμογή της Παραγοντικής Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες με ορθογώνια περιστροφή στις ερωτήσεις Q20 – Q53 προέκυψαν δέκα παράγοντες με ιδιοτιμή μεγαλύτερη της μονάδας. Από τους δέκα παράγοντες κρατήθηκαν οι εννέα, διότι ο δέκατος παράγοντες περιείχε μια μόνο μεταβλητή, οι οποίοι ερμηνεύουν το 57,454 % της συνολικής διασποράς, ποσοστό ικανοποιητικό για μια πρώτη προσέγγιση.

Οι ερωτήσεις που συγκροτούν τον κάθε παράγοντα συνοδεύονται με τα αντίστοιχα ποσοστά συμφωνίας (Συντομογραφικά **Π.Σ**).

- Ο πρώτος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι: Μπορούν να ασχοληθούν επιτυχώς με μαθηματικά κάθε επιπέδου. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: "Αυξημένη αυτοπεποίθηση για την ενασχόληση με τα μαθηματικά". Ερμηνεύει το 8,18 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 2,70. Περιέχει τις δηλώσεις **Q20** (Πιστεύω ότι θα μπορούσα να ασχοληθώ με πιο προχωρημένα Μαθηματικά **Π.Σ** 78.33%), **Q34** (Συνήθως νιώθω ήρεμος όταν γράφω διαγώνισμα Μαθηματικών στο σχολείο **Π.Σ** 84,29%), **Q44** (Έχω μεγάλη εμπιστοσύνη στον εαυτό μου ως προς τα Μαθηματικά **Π.Σ** 66,90%), **Q45** (Τα Μαθηματικά με διασκεδάζουν και με ενεργοποιούν **Π.Σ** 84,52%) και **Q49** (Νομίζω ότι θα μπορούσα να τα καταφέρω με πιό δύσκολα Μαθηματικά **Π.Σ** 75.48%).
- Ο δεύτερος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι: Οι γονείς παίζουν σημαντικό ρόλο στην ενασχόληση τους με τα μαθηματικά. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: "Η ενθάρρυνση και το

ενδιαφέρον των γονιών κίνητρο για την ενασχόληση με τα μαθηματικά". Ερμηνεύει το 7,40 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 2,44. Περιέχει τις δηλώσεις **Q25** (Οι γονείς μου πιστεύουν ότι τα Μαθηματικά θα με βοηθήσουν και στην εξέλιξή μου μετά το σχολείο **Π.Σ** 73,57%), **Q32** (Οι γονείς μου ενδιαφέρονται πολύ για τη πρόοδό μου στα Μαθηματικά **Π.Σ** 67,14%) και **Q35** (Οι γονείς μου με ενθαρρύνουν συνεχώς να είμαι καλός στα Μαθηματικά **Π.Σ** 68,57%).

- Ο τρίτος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι: Η διάκριση σε μαθηματικούς διαγωνισμούς αποτελεί σημαντικό στόχο τους. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: " Η διάκριση σε μαθηματικούς διαγωνισμούς αποτελεί πολύ σημαντικό στόχο ". Ερμηνεύει το 7,17 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 2,37. Περιέχει τις δηλώσεις **Q30** (Θα ήταν πράγματι σπουδαίο να κερδίσω ένα βραβείο στα Μαθηματικά **Π.Σ** 93,57%), **Q39** (Θα ήμουν υπερήφανος να διακρίνομαι ως μαθητής στα Μαθηματικά **Π.Σ** 85,95%) και **Q50** (Θα με ευχαριστούσε να έβγαινα πρώτος σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό **Π.Σ** 94,52%).
- Ο τέταρτος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι: Η ενασχόληση με προχωρημένου επιπέδου μαθηματικά, απαιτεί υπομονή και επιμονή. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: "Το αυξημένο ενδιαφέρον που δημιουργούν τα δύσκολα μαθηματικά προβλήματα ". Ερμηνεύει το 6,89 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 2,27. Περιέχει τις δηλώσεις **Q22** (Μου αρέσουν οι μαθηματικές σπαζοκεφαλιές **Π.Σ** 72,14%), **Q23** (Όταν μένει αναπάντητη μία ερώτηση κατά την ώρα των Μαθηματικών συνεχίζω να τη σκέπτομαι και μετά το μάθημα **Π.Σ** 79,29%), **Q24** (Από τη στιγμή που θα ασχοληθώ με μία μαθηματική σπαζοκεφαλιά μου είναι αδύνατο να σταματήσω **Π.Σ** 50,24%), **Q28** (Όταν δεν μπορώ να λύσω ένα μαθηματικό πρόβλημα αρχίζω να ασχολούμαι επίμονα με αυτό ώσπου να βρω τη λύση του **Π.Σ** 54,29%) και **Q48** (Μου προκαλούν μεγάλο ενδιαφέρον τα μαθηματικά προβλήματα που δεν μπορώ να καταλάβω αμέσως **Π.Σ** 43,81%).
- Ο πέμπτος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι: Με το ενδιαφέρον για τη πρόοδό τους στα μαθηματικά και τις σωστές κατευθύνσεις για το μέλλον, οι καθηγητές των μαθηματικών παίζουν εποικοδομητικό ρόλο στην εξέλιξή τους. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: "Η θετική επιρροή των καθηγητών των Μαθηματικών για την ενασχόληση με τα μαθηματικά ". Ερμηνεύει το 6,27 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 2,07. Περιέχει τις δηλώσεις **Q26** (Οι καθηγητές των Μαθηματικών με ενθάρρυναν να ασχοληθώ όσο

περισσότερο μπορώ με τα Μαθηματικά **Π.Σ** 50,48%), **Q47** (Οι καθηγητές των Μαθηματικών ενδιαφέρονται για τη πρόοδό μου στα Μαθηματικά **Π.Σ** 67,62%) και **Q51** (Θα μπορούσα να συζητήσω με τους καθηγητές μου για ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται Μαθηματικά **Π.Σ** 56,90%).

- Ο έκτος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι: Τα μαθηματικά δεν έχουν άμεση χρηστικότητα στη καθημερινή ζωή με αποτέλεσμα να αποτρέπουν τον εαυτό τους να ασχοληθεί με επάγγελμα που εξαρτάται άμεσα και μονόπλευρα από τα μαθηματικά. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: "Η έλλειψη χρησιμότητας των μαθηματικών". Ερμηνεύει το 5,77 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 1,90. Περιέχει τις δηλώσεις **Q42** (Οι γονείς μου δε με ενεθάρρυναν να στραφώ σ' ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται τα Μαθηματικά **Π.Σ** 23,33%), **Q43** (Δε νομίζω ότι έχω δυνατότητες να ασχοληθώ με προχωρημένα Μαθηματικά **Π.Σ** 7,38%) και **Q52** (Τα Μαθηματικά δεν είναι σημαντικά για τη μελλοντική μου εργασία **Π.Σ** 7,14%).
- Ο έβδομος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι: Υπάρχουν και αρνητικές καταστάσεις που αναπτύσσονται από τη αποκλειστική ενασχόληση με τα ανωτέρου επιπέδου μαθηματικά, οι οποίες επισημαίνονται από τους γονείς, από τους δασκάλους και το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: "Οι αρνητικές επιπτώσεις απο την αποκλειστική ενασχόληση με τα μαθηματικά". Ερμηνεύει το 5,64 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 1,86. Περιέχει τις δηλώσεις **Q29** (Οι γονείς μου πιστεύουν ότι η ασχολία μου με τα προχωρημένα Μαθηματικά είναι χαμένος χρόνος για μένα **Π.Σ** 11,43%), **Q31** (Αν πράγματι ήμουν πολύ καλός στα Μαθηματικά αυτό θα έκανε κάποιους να με αντιπαθούν **Π.Σ** 20%), **Q37** (Βλέπω τα Μαθηματικά ως αντικείμενο που σπάνια θα μου χρησιμεύσει στην καθημερινή μου ζωή στο μέλλον **Π.Σ** 15,71%) και **Q40** (Οι καθηγητές μου πιστεύουν ότι το να ασχοληθώ με προχωρημένα Μαθηματικά είναι χαμένος χρόνος για μένα **Π.Σ** 9,05%).
- Ο όγδοος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι: Η ενασχόληση με προχωρημένου επιπέδου μαθηματικά αποβάλει το άγχος κατά τη διάρκεια μαθηματικών διαγωνισμάτων στο σχολείο και τους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: "Η αποβολή του άγχους στις εξετάσεις, λόγω της συμμετοχής σε μαθηματικούς διαγωνισμούς". Ερμηνεύει το 5,54 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 1,82. Περιέχει τις δηλώσεις **Q21**

(Συνήθως νιώθω ήρεμος όταν γράφω διαγώνισμα Μαθηματικών σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς **Π.Σ** 61,43%), **Q27** (Σχεδόν ποτέ δεν είχα άγχος κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς **Π.Σ** 38,10%) και **Q36** (Σχεδόν ποτέ δεν είχα άγχος κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών στο σχολείο **Π.Σ** 66,19%).

- Ο ένατος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι: Υπάρχει ποικιλομορφία στην εφαρμογή των μαθηματικών με συνέπεια την ευρύτατη χρησιμότητά τους στο μέλλον. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: "Η ποικιλομορφία και η χρησιμότητα των μαθηματικών ". Ερμηνεύει το 4,60 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 1,52. Περιέχει τις δηλώσεις **Q33** (Ως ενήλικας θα χρησιμοποιήσω τα Μαθηματικά ποικιλοτρόπως **Π.Σ** 80,95%) και **Q46** (Μελετώ Μαθηματικά γιατί ξέρω πόσο χρήσιμα είναι **Π.Σ** 49,76%).

Ο συντελεστής εσωτερικής αξιοπιστίας, alpha του Coronach, για τον πρώτο παράγοντα είναι 0,77, για τον δεύτερο παράγοντα είναι 0,71, για τον τρίτο παράγοντα είναι 0,75, για τον τέταρτο παράγοντα είναι 0,61, για τον πέμπτο παράγοντα είναι 0,66, για τον έκτο παράγοντα είναι 0,46, για τον έβδομο παράγοντα είναι 0,60, για τον όγδοο παράγοντα είναι 0,53 και για τον ένατο παράγοντα είναι 0,46, ενώ για το σύνολο των 33 ερωτήσεων είναι 0,67. Οι τιμές του συντελεστή εσωτερικής αξιοπιστίας που αντιστοιχούν στους περισσότερους από τους παράγοντες καθώς και στο σύνολο των ερωτήσεων, είναι ικανοποιητικές σύμφωνα με τον Aiken (1970). Εξαίρεση αποτελούν οι τιμές που αντιστοιχούν στον έκτο, όγδοο και ένατο παράγοντα οι οποίες είναι κάτω του 0,60 και συνιστούν μέτρια έως χαμηλή αξιοπιστία, επομένως τα όποια συμπεράσματα προκύπτουν από τους παράγοντες αυτούς πρέπει να αντιμετωπισθούν με επιφύλαξη.

Κεφάλαιο 5ο. Έρευνα 2η

Η συμβολή των Διαγωνισμών στην ανίχνευση των χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά (45η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης").

5.1 Γενικά

Στη προηγούμενη έρευνά μας, μελετήσαμε τα χαρακτηριστικά μαθητών που συμμετέχουν σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς. Στην έρευνα αυτή (μεταξύ άλλων) διαφαίνεται και η (απόλυτα φυσιολογική) επιθυμία των μαθητών για διάκριση στους μαθηματικούς διαγωνισμούς που αποτελεί ενδεχομένως το επιστέγασμα και την αναγνώριση μίας επίπονης προσπάθειας.

Στην εργασία μας αυτή, γίνεται προσπάθεια μελέτης του επηρεασμού των μαθητών (κοινωνική ομάδα), από παράγοντες που ενδεχομένως τους παρακινούν να ασχοληθούν με τα μαθηματικά σε υψηλότερο επίπεδο από αυτό που υπαγορεύουν τα συνήθη αναλυτικά σχολικά προγράμματα σπουδών.

Στόχος της συγκεκριμένης έρευνας είναι η μελέτη και ανάλυση των παραγόντων που επηρεάζουν την ενασχόληση των μαθητών με τα μαθηματικά, με σκοπό την εφαρμογή στην εκπαίδευση μεθόδων και πρακτικών που τονώνουν, προωθούν και ενθαρρύνουν τη θετική στάση των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά (Δημάκος, Τυρλής και Φερεντίνος, in press).

Στη δεύτερη έρευνα συμμετείχαν τριακόσια τριάντα εννέα (**339**) παιδιά από Λύκεια και Γυμνάσια όλης της χώρας που διαγωνίστηκαν στην 25η Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ". Τα παιδιά αυτά ήταν οι επιτυχόντες των δύο προηγούμενων διαγωνισμών "ΘΑΛΗΣ" και "ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ". Η επιτυχία στους δύο αυτούς πανελλήνιους διαγωνισμούς μας επιτρέπει να εικάσουμε ότι τα παιδιά αυτά διαθέτουν κάποιο χάρισμα σε σχέση με τα μαθηματικά (έστω και σε πολύ αρχικό στάδιο). Θα μπορούσαμε δηλαδή να τα θεωρήσουμε χαρισματικά στα μαθηματικά.

5.2 Περιγραφική Ανάλυση Έρευνας

Εδώ θα περιγράψουμε τον τρόπο και τα εργαλεία της έρευνας καθώς και μία αρχική στατιστική εκτίμηση των αποτελεσμάτων.

Στους μαθητές δόθηκε ερωτηματολόγιο με 7 κλειστές ερωτήσεις.

Οι Ερωτήσεις 1 έως 6

► Η **ερώτηση 1** είναι δημογραφικού χαρακτήρα και αφορά το φύλο των μαθητών.

Στην ερώτηση αυτή προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα: Από τα (339) παιδιά που συμμετείχαν στην έρευνα, τα 247 (ποσοστό 72,9%) ήταν αγόρια και τα 92 (ποσοστό 27,1%) ήταν κορίτσια.

► Η **ερώτηση 4** αναφέρεται στην τάξη φοίτησης των μαθητών.

Η ερώτηση αυτή δεν μας παρέχει κάποιες πληροφορίες για το πλήθος των μαθητών (ανά τάξη) που συμμετέχουν στην Εθνική Μαθηματική Ολυμπιάδα, διότι το πλήθος των μαθητών (ανά τάξη) είναι προαποφασισμένο από την επιτροπή διαγωνισμών.

Σημαντικές πληροφορίες μπορεί να μας δώσει η ερώτηση αυτή αν συνδυαστεί με τα αποτελέσματα της ερώτησης 1. Σημαντική λοιπόν είναι η μελέτη της κατανομής Αγοριών-Κοριτσιών (όχι μόνο συνολικά) αλλά και ανά τάξη όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες και διαγράμματα.

Πίνακας 33. Συχνότητες Αγοριών Κοριτσιών ανά Τάξη

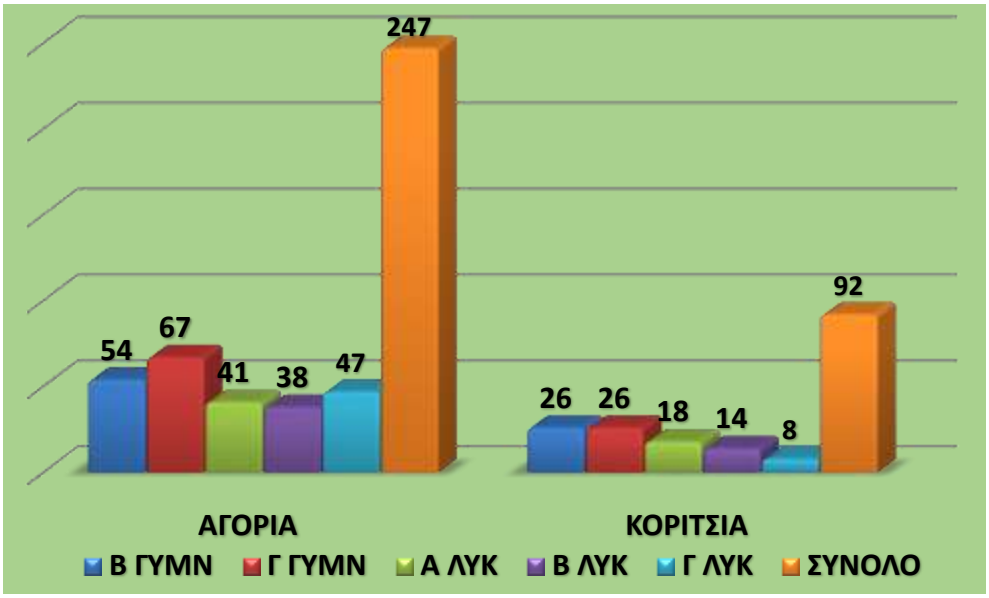
	Β ΓΥΜΝ	Γ ΓΥΜΝ	Α ΛΥΚ	Β ΛΥΚ	Γ ΛΥΚ	ΣΥΝΟΛΟ
ΑΓΟΡΙΑ	54	67	41	38	47	247
ΚΟΡΙΤΣΙΑ	26	26	18	14	8	92
ΣΥΝΟΛΟ	80	93	59	52	55	339

Πίνακας 34. Ποσοστά Αγοριών Κοριτσιών ανά Τάξη

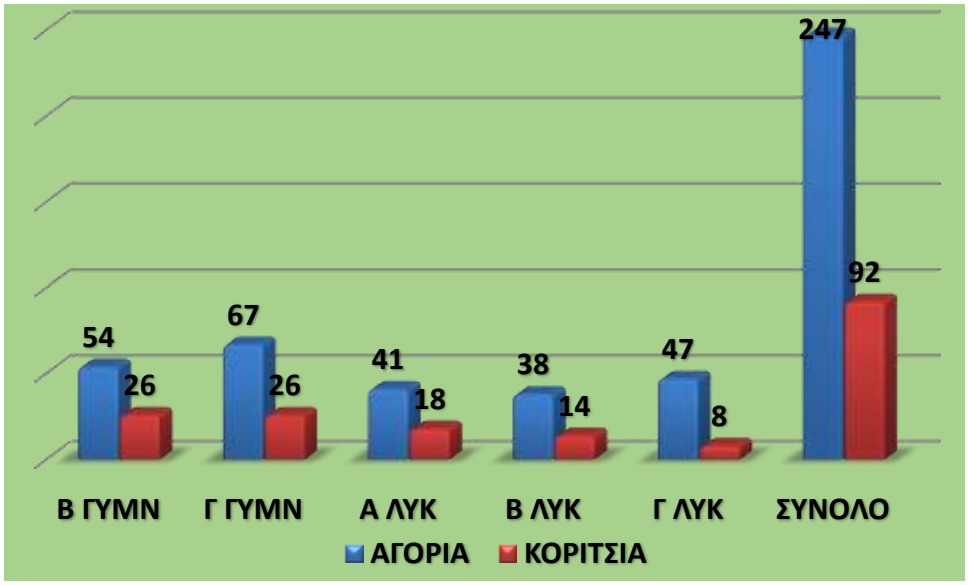
	Β ΓΥΜΝ	Γ ΓΥΜΝ	Α ΛΥΚ	Β ΛΥΚ	Γ ΛΥΚ	ΣΥΝΟΛΟ
ΑΓΟΡΙΑ	68%	72%	69%	73%	85%	73%
ΚΟΡΙΤΣΙΑ	33%	28%	31%	27%	15%	27%
ΣΥΝΟΛΟ	101%(*)	100%	100%	100%	100%	100%

Η ερμηνεία και τα αίτια της μεγάλης διαφοράς του ποσοστού των αγοριών σε σχέση με τα κορίτσια αποτέλεσε και αποτελεί αντικείμενο έρευνας για πολλούς επιστήμονες από διάφορα επιστημονικά πεδία.

Ακόμη και νευροφυσιολογικές μέθοδοι έχουν επιστρατευθεί για να δώσουν μία πειστική και γενικά αποδεκτή ερμηνεία του φαινομένου.
Με τη πάροδο του χρόνου όμως τείνει να υπάρξει μία εξισορρόπηση των ποσοστών, οπότε οι σύγχρονες μέθοδοι έρευνας εγκατέλειψαν παλιούς τρόπους προσέγγισης.
Οι τελευταίες έρευνες προσανατολίζουν και εστιάζουν την ανίχνευση και ερμηνεία του φαινομένου βασιζόμενες σε κοινωνικοπολιτισμικές παραμέτρους.



Διάγραμμα 48. Συχνότητες ανά Τάξη Αγοριών Κοριτσιών



Διάγραμμα 49. Συχνότητες Αγοριών Κοριτσιών ανά Τάξη

Στα προηγούμενα διαγράμματα λοιπόν βλέπουμε τη διαφορά του πλήθους των κοριτσιών από το πλήθος των αγοριών ανά τάξη. Παρατηρούμε μία αύξουσα πορεία της διαφοράς στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο. Αυτό μας φανερώνει ότι υπάρχουν ενδεχομένως κάποιοι παράγοντες που αποθαρρύνουν ("εμποδίζουν") τα κορίτσια να ασχοληθούν και να διαγωνιστούν με ίσους όρους τα αγόρια. Τα "εμπόδια" αυτά ίσως είναι οι κοινωνικοπολιτισμικές παράμετροι που αναφέραμε στο προηγούμενο σχολιασμό. Σημαντική κοινωνικοπολιτισμική παράμετρος είναι και τα στερεότυπα που δημιουργούνται (για την συμπεριφορά των κοριτσιών απέναντι στα μαθηματικά) τα οποία όμως στηρίζονται σε διάφορες στατιστικές μελέτες. Έτσι δημιουργείται ένας φαύλος κύκλος που αποθαρρύνει τα κορίτσια να ασχοληθούν με τα μαθηματικά.

Οι **ερωτήσεις 2 και 3** αναφέρονται στη βαθμολογία που είχαν οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις, στα μαθηματικά και όλα τα μαθήματα (γενικός μέσος όρος) αντίστοιχα.

► Η <u>Δεύτερη ερώτηση</u> του ερωτηματολόγιου ήταν: " Τι βαθμούς πήρατε στα μαθηματικά στις προηγούμενες τάξεις;"

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές αναφέρουν το τελικό μέσο όρο που διαμορφώθηκε και από τη τελική γραπτή εξέταση στο μάθημα των μαθηματικών στις προηγούμενες τάξεις. Για τις τάξεις του λυκείου αναφέρονται σε ξεχωριστές στήλες οι βαθμοί στην Άλγεβρα, στη Γεωμετρία και στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης (Β Λυκείου).

Μελετώντας τις απαντήσεις, μπορούμε να παρατηρήσουμε τις υψηλές επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά (το 95% των μαθητών έχουν κατά μέσο όρο βαθμούς 19 και 20). Το γεγονός αυτό οφείλεται στην αυξημένη ενασχόληση των μαθητών με τα μαθηματικά, πέρα και έξω από τα αυστηρά πλαίσια του σχολικού αναλυτικού προγράμματος.

Τα αποτελέσματα της ταξινόμησης των βαθμών, φαίνονται στους παρακάτω πίνακες.

Πίνακας 35. Συχνότητες τελικών μέσων όρων των βαθμών στα μαθηματικά του γυμνασίου

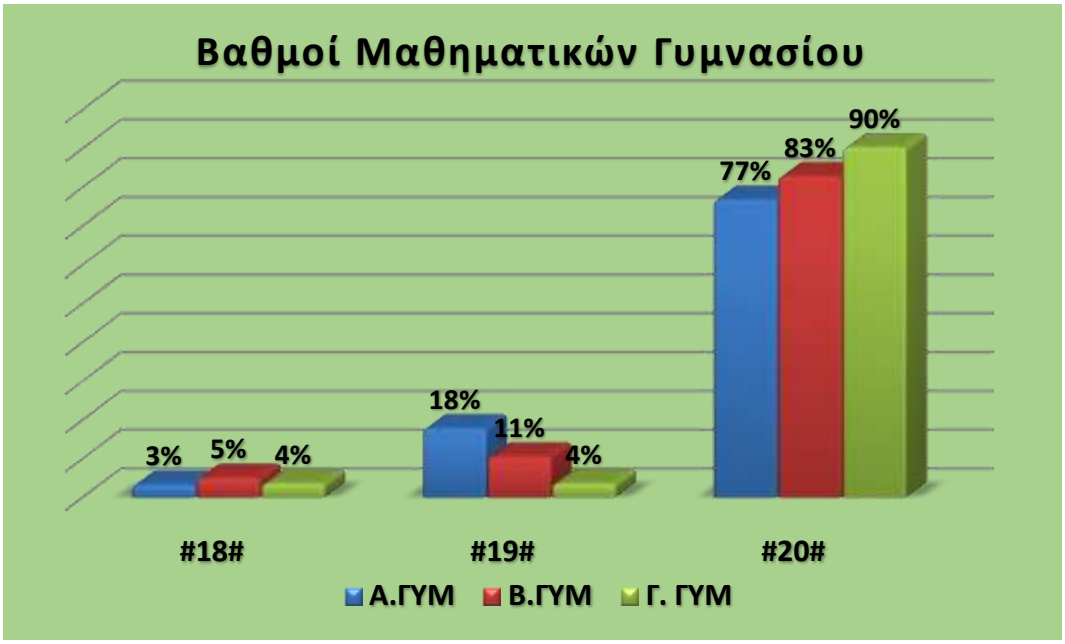
ΒΑΘΜΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ			
ΒΑΘΜΟΣ	Α.ΓΥΜ	Β.ΓΥΜ	Γ.ΓΥΜ

#15#	1		2
#16#	1	2	
#17#	5	2	2
#18#	11	13	6
#19#	60	27	6
#20#	258	212	149
ΣΥΝΟΛΟ	336	256	165

Πίνακας 36. Ποσοστά τελικών μέσων όρων των βαθμών στα μαθηματικά του γυμνασίου

ΒΑΘΜΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ			
ΒΑΘΜΟΣ	Α.ΓΥΜ	Β.ΓΥΜ	Γ. ΓΥΜ
#15#	0,30%	0,00%	1,21%
#16#	0,30%	0,78%	0,00%
#17#	1,49%	0,78%	1,21%
#18#	3,27%	5,08%	3,64%
#19#	17,86%	10,55%	3,64%
#20#	76,79%	82,81%	90,30%
ΣΥΝΟΛΟ	100,00%	100,00%	100,00%

Στα επόμενα διαγράμματα, αναφέρουμε μόνο τα ποσοστά που αντιστοιχούν στους βαθμούς 18,19 και 20. Τα ποσοστά που αντιστοιχούν στους υπόλοιπους βαθμούς δεν παρουσιάζονται στα διαγράμματα διότι είναι μηδενικά ή πολύ κοντά στο μηδέν. Η πλήρης κατανομή των βαθμών περιγράφεται στους προηγούμενους πίνακες.



Διάγραμμα 50. Συχνότητες Βαθμών Μαθηματικών (τελικών μέσων όρων) ανά τάξη Γυμνασίου

Ανάλογα συμπεράσματα έχουμε και για τους βαθμούς του λυκείου (όπως φαίνεται στους παρακάτω πίνακες και διαγράμματα).

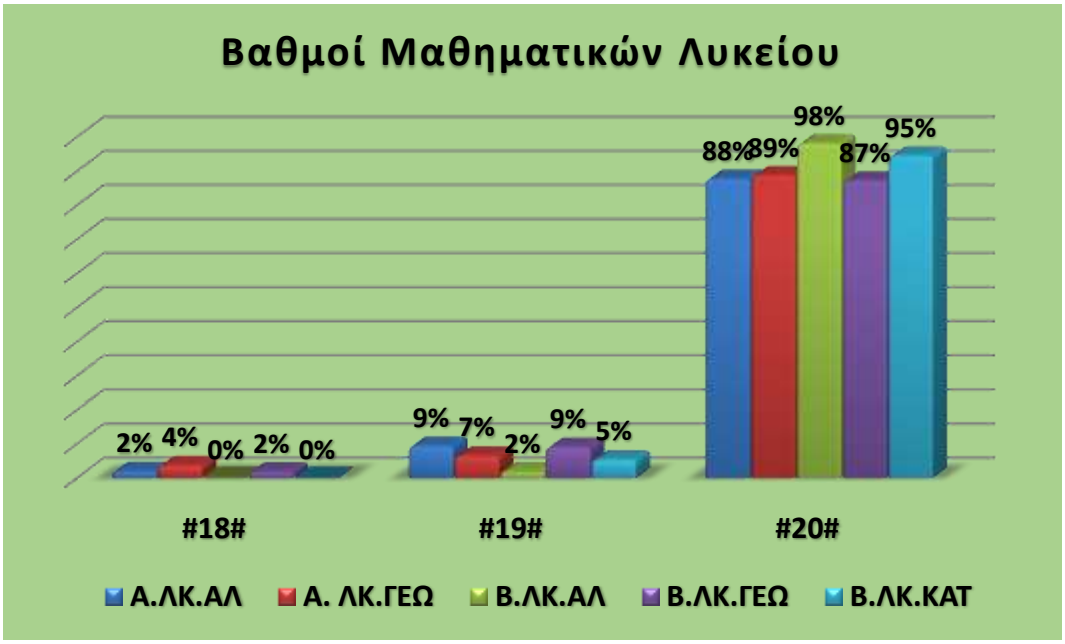
Πίνακας 37. Συχνότητες τελικών μέσων όρων των βαθμών στα μαθηματικά του Λυκείου

ΒΑΘΜΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ					
ΒΑΘΜΟΣ	Α.ΛΚ.ΑΛ	Α.ΛΚ.ΓΕΩ	Β.ΛΚ.ΑΛ	Β.ΛΚ.ΓΕΩ	Β.ΛΚ.ΚΑΤ
#15#					
#16#	1	1			
#17#				1	
#18#	2	4		1	
#19#	10	7	1	5	3
#20#	93	95	54	48	52
ΣΥΝΟΛΟ	106	107	55	55	55

Πίνακας 38. Ποσοστά τελικών μέσων όρων των βαθμών στα μαθηματικά του Λυκείου

ΒΑΘΜΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ					
ΒΑΘΜΟΣ	Α.ΛΚ.ΑΛ	Α.ΛΚ.ΓΕΩ	Β.ΛΚ.ΑΛ	Β.ΛΚ.ΓΕΩ	Β.ΛΚ.ΚΑΤ
#15#	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%

#16#	0,94%	0,93%	0,00%	0,00%	0,00%
#17#	0,00%	0,00%	0,00%	1,82%	0,00%
#18#	1,89%	3,74%	0,00%	1,82%	0,00%
#19#	9,43%	6,54%	1,82%	9,09%	5,45%
#20#	87,74%	88,79%	98,18%	87,27%	94,55%
ΣΥΝΟΛΟ	100%	100%	100%	100%	100%



Διάγραμμα 51. Ποσοστά βαθμών (τελικοί μέσοι όροι) στα μαθηματικά για το Λύκειο

► Η Τρίτη ερώτηση του ερωτηματολόγιου ήταν: " Τι βαθμό ενδεικτικού πήρατε στις προηγούμενες τάξεις;"

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές αναφέρουν τον τελικό μέσο όρο όλων των μαθημάτων που εξετάστηκαν στις προηγούμενες τάξεις. Τα υψηλά ποσοστά (περίπου 95%) στη κλίμακα βαθμολογίας από 18 έως 20 , φανερώνουν την ιδιαίτερα καλή σχέση των μαθητών με τη μελέτη και κατανόηση όλου του φάσματος των μαθημάτων (ανεξάρτητα από τις υψηλές επιδόσεις τους στα μαθηματικά).

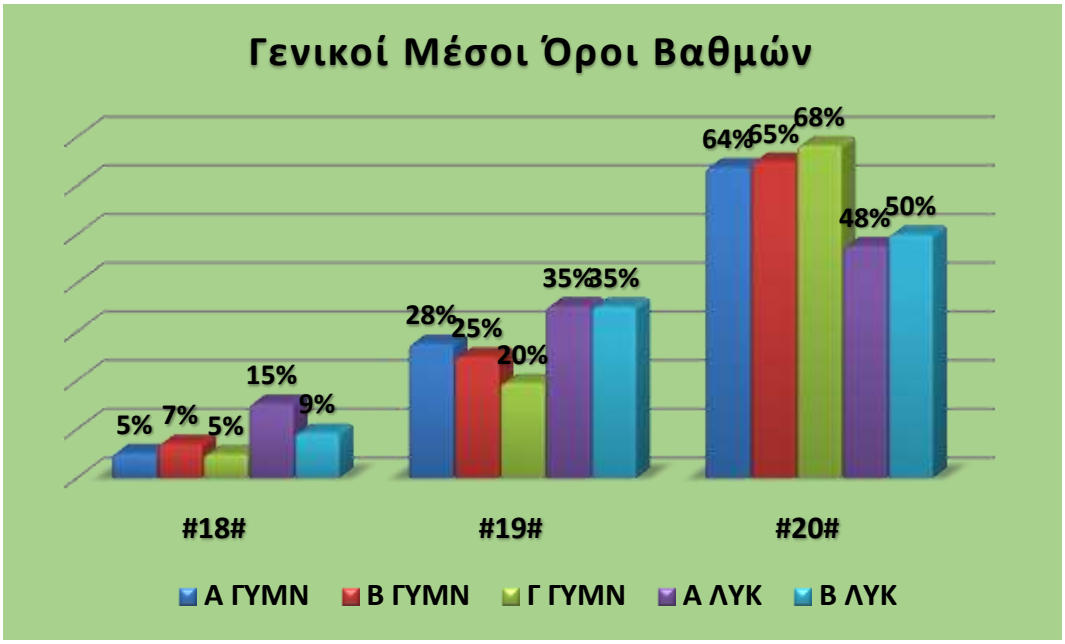
Στους παρακάτω πίνακες και διαγράμματα, γίνεται αναλυτική παρουσίαση των απαντήσεων.

Πίνακας 39. Συχνότητες Γενικών Μέσων Όρων βαθμολογιών ανά τάξη

ΓΕΝΙΚΟΙ ΜΕΣΟΙ ΟΡΟΙ					
ΒΑΘΜΟΣ	Α.ΓΥΜ	Β.ΓΥΜ	Γ.ΓΥΜ	Α.ΛΥΚ	Β.ΛΥΚ
#15#	1	2	1		
#16#	3		3		
#17#	8	6	8	2	3
#18#	17	18	8	16	5
#19#	92	64	32	37	19
#20#	213	167	112	50	27
ΣΥΝΟΛΟ	334	257	164	105	54

Πίνακας 40. Ποσοστά Γενικών Μέσων Όρων βαθμολογιών ανά τάξη

ΓΕΝΙΚΟΙ ΜΕΣΟΙ ΟΡΟΙ					
ΒΑΘΜΟΣ	Α ΓΥΜ	Β ΓΥΜ	Γ ΓΥΜ	Α ΛΥΚ	Β ΛΥΚ
#15#	0,30%	0,78%	0,61%	0,00%	0,00%
#16#	0,90%	0,00%	1,83%	0,00%	0,00%
#17#	2,40%	2,33%	4,88%	1,90%	5,56%
#18#	5,09%	7,00%	4,88%	15,24%	9,26%
#19#	27,54%	24,90%	19,51%	35,24%	35,19%
#20#	63,77%	64,98%	68,29%	47,62%	50,00%
ΣΥΝΟΛΟ	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

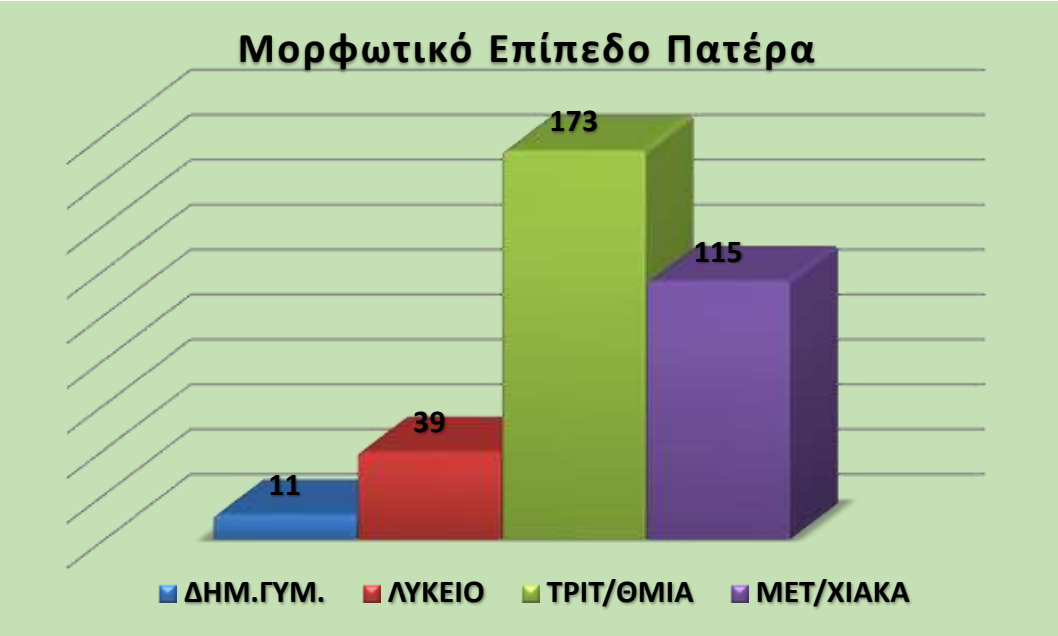


Διάγραμμα 52. Ποσοστά Γενικών Μέσων Όρων

Οι **ερωτήσεις 5 και 6** αφορούν το επίπεδο σπουδών καθώς και το επάγγελμα του πατέρα και της μητέρας των μαθητών.

► Η Πέμπτη Ερώτηση του ερωτηματολογίου ήταν: "Ποιό είναι το επίπεδο σπουδών του πατέρα και της μητέρας σας;"

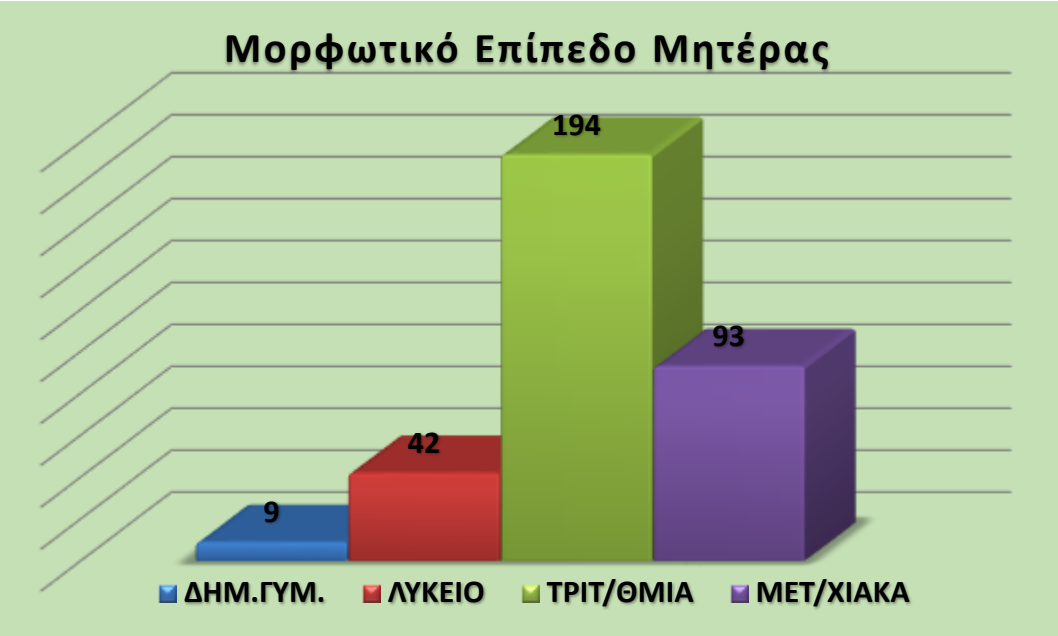
Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν για το μορφωτικό επίπεδο του πατέρα τους και της μητέρας τους, επιλέγοντας ένα από τα πέντε επίπεδα σπουδών. Στα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους παρακάτω πίνακες, έγινε σύμπτυξη του επιπέδου 1(Δημοτικό) και του επιπέδου 2 (Γυμνάσιο), επειδή παρουσιάστηκε ένας μόνο πατέρας με γνώσεις επιπέδου 1. Επίσης γίνεται σαφής η υπεροχή των γονέων που έχουν πτυχίο ανώτατης σχολής ποσοστό (85,2% για τον πατέρα και 84,9% για τη μητέρα).



Διάγραμμα 53. Συχνότητα των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου Πατέρα

Πίνακας 41. Συχνότητα και ποσοστά των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου Πατέρα

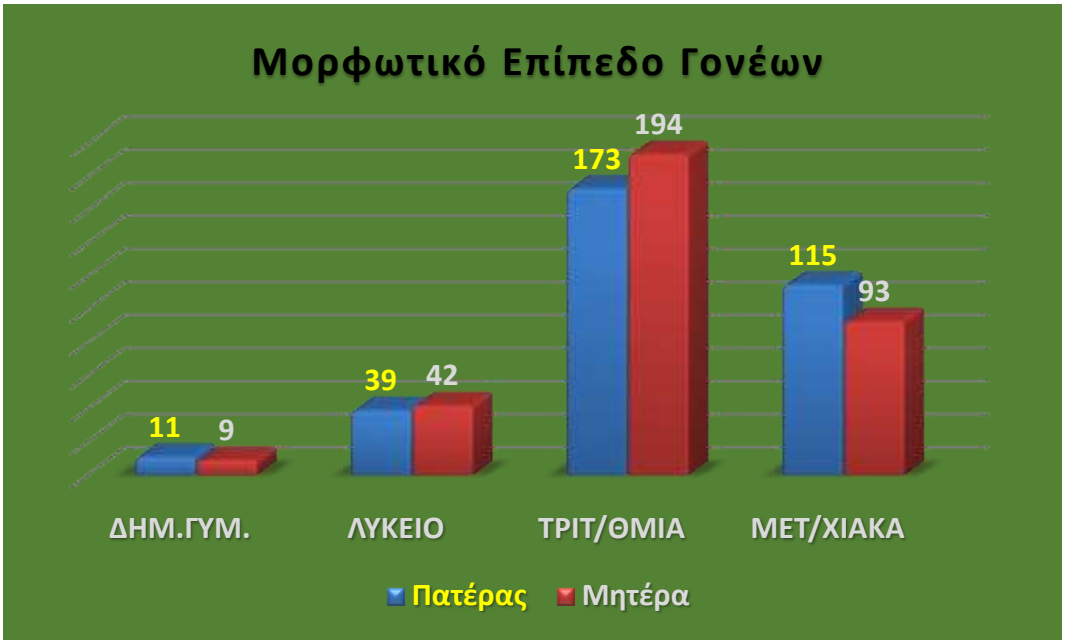
ΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΠΑΤΕΡΑ		
	Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα
ΔΗΜ.ΓΥΜ.	11	3,3%
ΛΥΚΕΙΟ	39	11,5%
ΤΡΙΤ/ΘΜΙΑ	173	51,2%
ΜΕΤ/ΧΙΑΚΑ	115	34,0%
ΣΥΝΟΛΟ	338	100%



Διάγραμμα 54. Συχνότητα των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου Μητέρας

Πίνακας 42. Συχνότητα και ποσοστά των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου Μητέρας

ΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΜΗΤΕΡΑΣ		
	Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα
ΔΗΜ.ΓΥΜ.	9	2,7%
ΛΥΚΕΙΟ	42	12,4%
ΤΡΙΤ/ΘΜΙΑ	194	57,4%
ΜΕΤ/ΧΙΑΚΑ	93	27,5%
ΣΥΝΟΛΟ	338	100%



Διάγραμμα 55. Συχνότητα των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου γονέων

Πίνακας 43. Συχνότητα των κατηγοριών του Μορφωτικού Επιπέδου γονέων

ΜΟΡΦΩΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΓΟΝΕΩΝ		
	Πατέρας	Μητέρα
ΔΗΜ.ΓΥΜ.	11	9
ΛΥΚΕΙΟ	39	42
ΤΡΙΤ/ΘΜΙΑ	173	194
ΜΕΤ/ΧΙΑΚΑ	115	93
ΣΥΝΟΛΟ	338	338

Ερώτηση 6: "Ποιό είναι το επάγγελμα του πατέρα και της μητέρας σας;"

Στην ερώτηση αυτή οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν για το επάγγελμα του πατέρα και της μητέρας τους ελεύθερα (δηλαδή χωρίς να υπάρχουν προεπιλεγμένες απαντήσεις).

Τα διάφορα επαγγέλματα κατηγοριοποιήθηκαν λαμβάνοντας υπόψιν το βαθμό συνάφειας που έχουν (τα επαγγέλματα) με τα μαθηματικά και την εκπαίδευση γενικότερα. Έτσι δημιουργήθηκαν οι εξής κατηγορίες:

Κατηγορία 1: Μαθηματικός

Κατηγορία 2: Εκπαιδευτικός

(στη κατηγορία αυτή συμπεριελήφθησαν καθηγητές άλλων ειδικοτήτων της δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης).

Κατηγορία 3: Μηχανικός

(στην κατηγορία αυτή συμπεριελήφθησαν οι Μηχανικοί του Πολυτεχνείου ανεξαρτήτως ειδικότητας).

Κατηγορία 4: Οικονομολόγος

(στη κατηγορία αυτή συμπεριελήφθησαν οι Οικονομολόγοι και γενικότερα οι απόφοιτοι οικονομικών σχολών)

Κατηγορία 5: Διάφορα επιπέδου 4+

(στη κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται επαγγέλματα από τα οποία απαιτείται μορφωτικό επίπεδο πανεπιστημιακού επιπέδου και άνω. Π.χ Ιατρός, Φαρμακοποιός, Δικηγόρος κλπ)

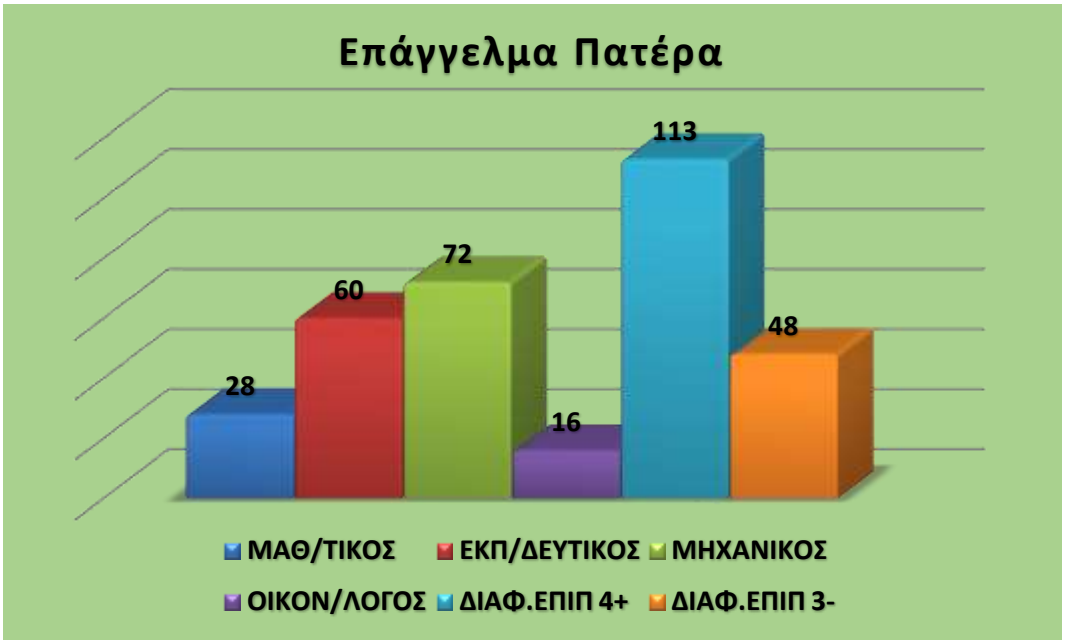
Κατηγορία 6: Διάφορα επιπέδου 3-

(στη κατηγορία αυτή συμπεριλαμβάνονται επαγγέλματα από τα οποία δεν απαιτείται μορφωτικό επίπεδο πανεπιστημιακού επιπέδου και άνω. Π.χ Αγρότης, Χρυσοχόος, Πυροσβέστης κλπ)

Ειδικά στα επαγγέλματα για τις γυναίκες (Μητέρες) προστέθηκε και άλλη μία κατηγορία, τα “Οικιακά”.

Η προσθήκη αυτή έγινε για να διερευνηθεί στατιστικά, αν και σε ποιο βαθμό μπορεί να επηρεάσει η παρουσία της μητέρας στο σπίτι, την ενασχόληση των μαθητών με τα μαθηματικά και γενικότερα με τις σπουδές.

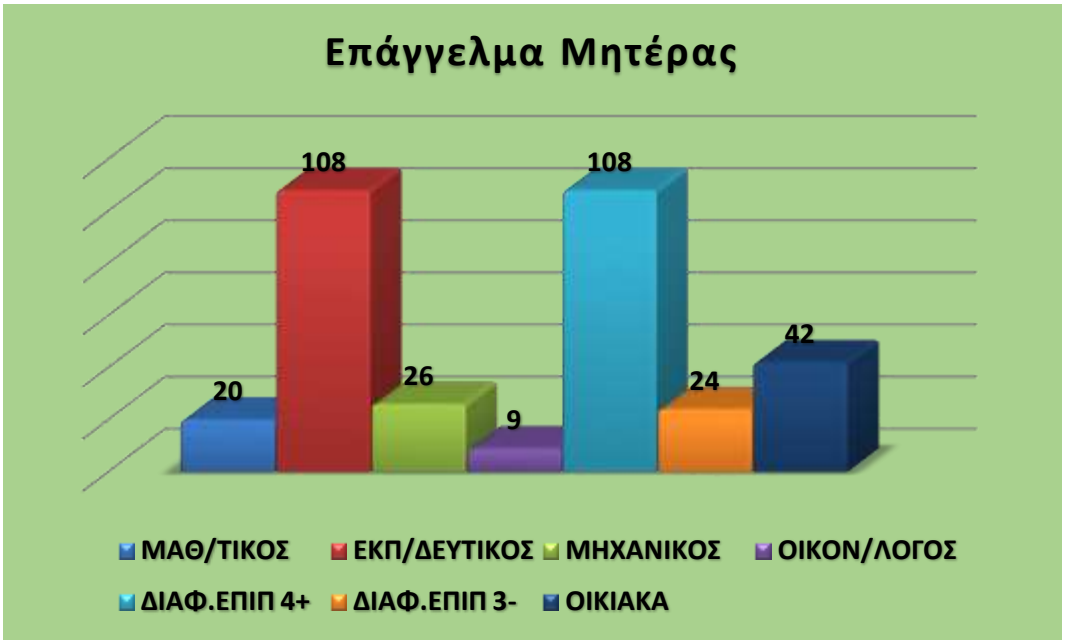
Τα αποτελέσματα της κατηγοριοποίησης που περιγράψαμε προηγουμένως περιγράφονται στους παρακάτω πίνακες και διαγράμματα.



Διάγραμμα 56. Συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών του Πατέρα

Πίνακας 44. Συχνότητα και Σχετική συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών του Πατέρα

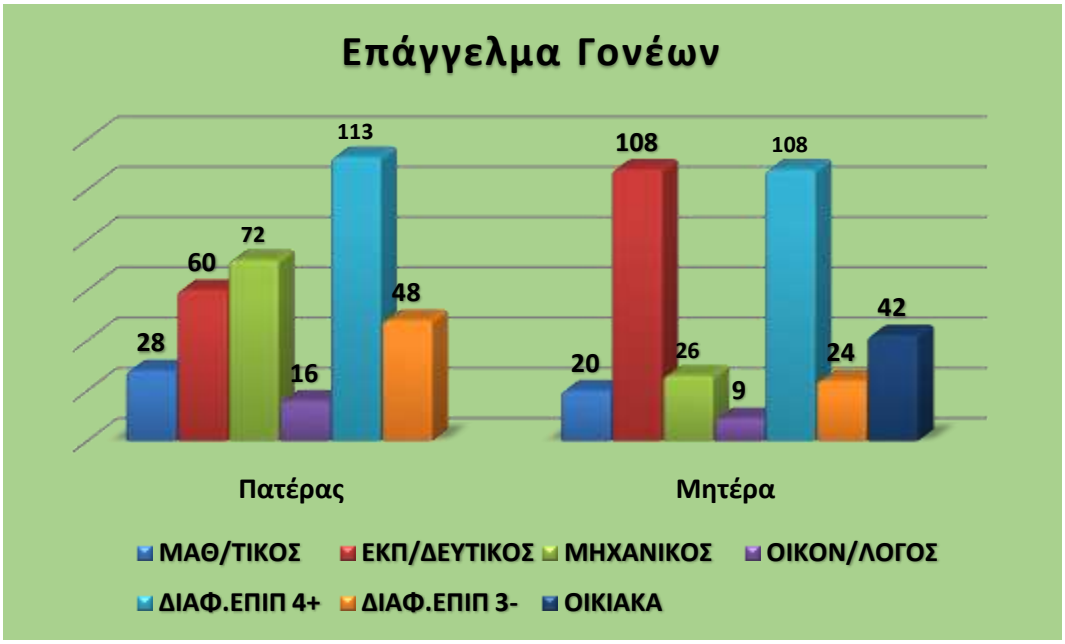
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑ ΠΑΤΕΡΑ		
	Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα
ΜΑΘ/ΤΙΚΟΣ	28	8,3%
ΕΚΠ/ΔΕΥΤΙΚΟΣ	60	17,8%
ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ	72	21,4%
ΟΙΚΟΝ/ΛΟΓΟΣ	16	4,7%
ΔΙΑΦ.ΕΠΙΠ 4+	113	33,5%
ΔΙΑΦ.ΕΠΙΠ 3-	48	14,2%
ΣΥΝΟΛΟ	337	100,0%



Διάγραμμα 57. Συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών της Μητέρας

Πίνακας 45. Συχνότητα και Σχετική συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών της Μητέρας

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑ ΜΗΤΕΡΑΣ		
	Συχνότητα	Σχ. Συχνότητα
ΜΑΘ/ΤΙΚΟΣ	20	5,9%
ΕΚΠ/ΔΕΥΤΙΚΟΣ	108	32,0%
ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ	26	7,7%
ΟΙΚΟΝ/ΛΟΓΟΣ	9	2,7%
ΔΙΑΦ.ΕΠΙΠ 4+	108	32,0%
ΔΙΑΦ.ΕΠΙΠ 3-	24	7,1%
ΟΙΚΙΑΚΑ	42	12,5%
ΣΥΝΟΛΟ	337	100,0%



Διάγραμμα 58. Συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών του Πατέρα και της Μητέρας

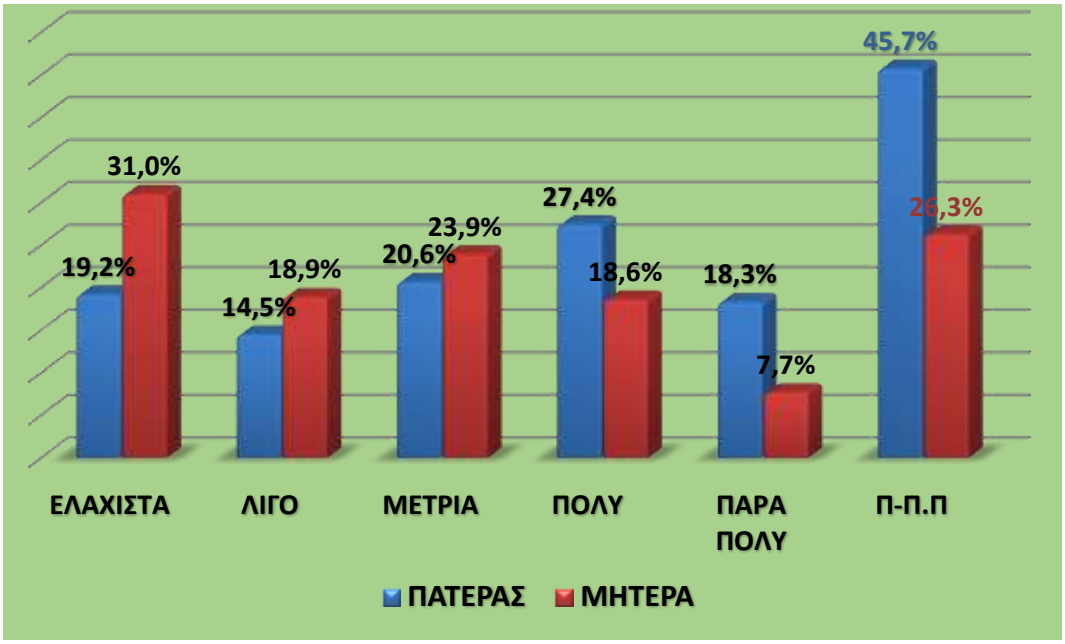
Πίνακας 46. Συχνότητα Επαγγελματικών κατηγοριών του Πατέρα και της Μητέρας

ΕΠΑΓΓΕΛΜΑ ΓΟΝΕΩΝ		
	Πατέρας	Μητέρα
ΜΑΘ/ΤΙΚΟΣ	28	20
ΕΚΠ/ΔΕΥΤΙΚΟΣ	60	108
ΜΗΧΑΝΙΚΟΣ	72	26
ΟΙΚΟΝ/ΛΟΓΟΣ	16	9
ΔΙΑΦ.ΕΠΙΠ 4+	113	108
ΔΙΑΦ.ΕΠΙΠ 3-	48	24
ΟΙΚΙΑΚΑ		42
ΣΥΝΟΛΟ	337	337

Η Ερώτηση 7

Τέλος, στην **ερώτηση 7** οι μαθητές καλούνται να αναφέρουν το βαθμό επηρεασμού τους από 12 παράγοντες (που επηρεάζουν την ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά), εκφράζοντας το βαθμό επηρεασμού τους πάνω σε μια πενταβάθμια κλίμακα τύπου Likert (Ελάχιστα=1, Λίγο=2, Μέτρια=3, Πολύ=4, Πάρα πολύ=5).

Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται ο βαθμός επηρεασμού των μαθητών, από τους γονείς τους. Στις δύο τελευταίες στήλες του διαγράμματος έχουμε το άθροισμα των ποσοστών συμφωνίας (**ΠΟΛΥ** και **ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ**) που θα το συμβολίζουμε συνοπτικά (**Π-Π.Π**)



Πίνακας 47. Ποσοστά Επηρεασμού Γονέων

	ΕΛΑΧΙΣΤΑ	ΛΙΓΟ	ΜΕΤΡΙΑ	ΠΟΛΥ	ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ	Π-Π.Π
ΠΑΤΕΡΑΣ	19,2%	14,5%	20,6%	27,4%	18,3%	45,7%
ΜΗΤΕΡΑ	31,0%	18,9%	23,9%	18,6%	7,7%	26,3%

Από τον παραπάνω πίνακα, συμπεραίνουμε ότι το ποσοστό των παιδιών που επηρεάζονται θετικά από τον πατέρα είναι μεγαλύτερο από το ποσοστό των παιδιών που επηρεάζονται από τη μητέρα.

Αν τώρα σε κάθε παιδί αντιστοιχίσουμε την διαφορά του βαθμού επηρεασμού του Πατέρα μείον το βαθμό επηρεασμού της Μητέρας, τότε προκύπτει ένας αριθμός, τον οποίο θα ονομάσουμε **Διαφορά Επηρεασμού** (**Δ.Ε**) και θα φανερώνει ποιος γονιός επηρεάζει (και πόσο) περισσότερο την ενασχόληση με τα μαθηματικά (μέσα στην ίδια οικογένεια).

Μετά τη δημιουργία των σχετικών πινάκων προέκυψαν τα εξής αποτελέσματα:

Για **2** παιδιά (ποσοστό **0,6%**) η **Δ.Ε** ήταν **-4**.

Στη περίπτωση αυτή η **Μητέρα** επηρεάζει θετικά με βαθμό **5 (Πάρα-Πολύ)** και ο **Πατέρας** επηρεάζει θετικά με βαθμό **1 (Ελάχιστα).**

Για **18** παιδιά (ποσοστό **5,3%**) η **Δ.Ε** ήταν **4**.

Στη περίπτωση αυτή ο **Πατέρας** επηρεάζει θετικά με βαθμό **5 (Πάρα-Πολύ)** και η **Μητέρα** επηρεάζει θετικά με βαθμό **1 (Ελάχιστα).**

Για **8** παιδιά (ποσοστό **0,6%**) η **Δ.Ε** ήταν **-3**.

Στη περίπτωση αυτή η **Μητέρα** επηρεάζει θετικά με βαθμό **5 (Πάρα-Πολύ)** και ο **Πατέρας** επηρεάζει θετικά με βαθμό **2 (Λίγο) (2** περιπτώσεις**) ή** η **Μητέρα** επηρεάζει θετικά με βαθμό **4 (Πολύ)** και ο **Πατέρας** επηρεάζει θετικά με βαθμό **1 (Ελάχιστα) (6** περιπτώσεις**).**

Για **23** παιδιά (ποσοστό **6,8%**) η **Δ.Ε** ήταν **3**.

Στη περίπτωση αυτή ο **Πατέρας** επηρεάζει θετικά με βαθμό **5 (Πάρα-Πολύ)** και ο **Μητέρα** επηρεάζει θετικά με βαθμό **2 (Λίγο) (11** περιπτώσεις**) ή ο Πατέρας** επηρεάζει θετικά με βαθμό **4 (Πολύ)** και ο **Μητέρα** επηρεάζει θετικά με βαθμό **1 (Ελάχιστα) (12** περιπτώσεις**).**



Διάγραμμα 59. Ποσοστά Διαφοράς Επηρεασμού γονέων

Πίνακας 48. Ποσοστά Διαφοράς Επηρεασμού γονέων

Δ.Ε(-4)	Δ.Ε (-3)	Δ.Ε(3)	Δ.Ε(4)
2	8	23	18
0,6%	2,4%	6,8%	5,3%

5.3 Παραγοντική Ανάλυση

Η ερώτηση 7 είναι πολύ σημαντική, διότι σκιαγραφεί τους παράγοντες (αίτια) που επηρεάζουν την ενασχόληση των μαθητών με τα μαθηματικά και μας δείχνει τι πρέπει να προσέξουμε ώστε να τονώσουμε και να ενισχύσουμε αυτή την ενασχόληση και την θετική στάση (απέναντι στα Μαθηματικά).

Αυτός είναι κυρίως ο λόγος για τον οποίο θα ασχοληθούμε ξεχωριστά και ειδικά με αυτή την ερώτηση. Ο ακριβής τρόπος με τον οποίο τέθηκε η ερώτηση ήταν:

Ερώτηση 7: "Επιλέξτε το βαθμό που επηρέασαν οι διάφοροι παράγοντες την ενασχόλησή σας με τα μαθηματικά, βάζοντας το σύμβολο "✓ ή x " στο κατάλληλο τετράγωνο;"

Τους παράγοντες που αναφέρονται στην ερώτηση αυτή, θα τους ονομάζουμε "αίτια επηρεασμού", προκειμένου να μη δημιουργηθεί σύγχυση με τους παράγοντες που θα εξαχθούν αμέσως παρακάτω με τη μέθοδο της Παραγοντικής Ανάλυσης και οι οποίοι (παράγοντες) αποτελούν ομαδοποιήσεις των αρχικών παραγόντων (αιτίων επηρεασμού) σε ευρύτερες ομάδες.

Από την εφαρμογή της Περιγραφικής εξέτασης στους 12 παράγοντες (αίτια) της ερώτησης 7 προέκυψε ο παρακάτω πίνακας που περιέχει τα ποσοστά επηρεασμού (πολύ έως πάρα πολύ), αναφορικά με το βαθμό επηρεασμού των μαθητών, που αντιστοιχεί σε κάθε ένα από τα αίτια επηρεασμού. Τα αίτια επηρεασμού έχουν διαταχθεί ανάλογα με τα ποσοστά επηρεασμού.

Παρατηρούμε ότι τη μεγαλύτερη επίδραση "ασκούν" οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί και τη μικρότερη τα Μέσα Μαζικής Επικοινωνίας (όπως βλέπουμε στον παρακάτω πίνακα).

Πίνακας 49. Ποσοστά παραγόντων που επηρεάζουν την ενασχόληση των ταλαντούχων μαθητών με τα μαθηματικά

ΑΙΤΙΑ ΕΠΗΡΕΑΣΜΟΥ	Ποσοστό Επηρεασμού %
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ	61,95
ΠΑΤΕΡΑΣ	45,72
ΕΞΩΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ	34,81
ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΣΧΟΛΕΙΟΥ	31,27
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ (Ε.Μ.Ε)	26,55
ΜΗΤΕΡΑ	26,25
ΚΑΘ ΗΓΗΤΕΣ ΕΚΤΟΣ ΣΧΟΛΕΙΟΥ	24,78
ΣΤΕΝΟ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΚΟ. ΠΕΡΙΒΑΛΟΝ	23,01
(INTERNET)	18,88
ΦΙΛΟΙ-ΣΥΜΜΑΘΗΤΕΣ	17,11
ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ	12,98
ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ	2,36

Η **Παραγοντική Ανάλυση** (όπως αναφέραμε στην Παραγοντική Ανάλυση της 1ης Έρευνας) είναι μια στατιστική μέθοδος που αποσκοπεί στον καθορισμό νέων ερωτήσεων, τις οποίες ονομάζουμε παράγοντες. Οι παράγοντες ερμηνεύουν τις σχέσεις μεταξύ των αρχικών ερωτήσεων μέσω της ομαδοποίησής τους σε μικρότερα σύνολα από το αρχικό. Η κλασσική μέθοδος της παραγοντικής ανάλυσης, την οποία θα εφαρμόσουμε στο δείγμα μας, είναι η *διερευνητική Παραγοντική Ανάλυση σε Κύριες Συνιστώσες, με ορθογώνια περιστροφή (Varimax - Principal Components Analysis) (SPSS, 2001).*

Πριν παρουσιασθούν τα συμπεράσματα από την Παραγοντική Ανάλυση σε Κύριες Συνιστώσες, θα γίνει αναφορά σε κάποια κριτήρια που πρέπει να πληρούνται, ώστε να έχουμε με τη μέθοδο αυτή αξιόπιστα αποτελέσματα.

Πρώτο κριτήριο είναι η τιμή του δείκτη που χαρακτηρίζει την καλή προσαρμογή στην Παραγοντική Ανάλυση, σύμφωνα με τον μέτρο των Kaiser-Meyer-Olkin (ΚΜΟ), να είναι από 0,6 μέχρι 1, διότι, σύμφωνα με τον Kaiser (1974) η τιμή 0,6 θεωρείται μέτρια, η τιμή 0,5 κακή, ενώ τιμές μικρότερες από 0,5 θεωρούνται απαράδεκτες.

Δεύτερο κριτήριο είναι ο πίνακας που εμφανίζει το συσχετισμό ανά δύο όλων των ερωτήσεων να μην είναι διαγώνιος (διαγώνιοι όροι μονάδες και οι υπόλοιποι όροι μηδέν), γιατί στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει συσχέτιση. Για να ελεγχθεί η μηδενική υπόθεση, σύμφωνα με την οποία ο πίνακας συσχέτισης είναι διαγώνιος, δηλαδή δεν υπάρχει καμία συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών, χρησιμοποιείται το τεστ Bartlett. Εάν το επίπεδο σημαντικότητας (sig) είναι αρκούντως μικρό (<0,05), τότε απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και γίνεται δεκτή η εναλλακτική υπόθεση, η οποία δηλώνει ότι υπάρχει συσχέτιση για τουλάχιστον δύο από τις μεταβλητές. Τρίτο κριτήριο είναι το κατάλληλο μέγεθος του δείγματος. Κατά την άποψη του Gorsuch (1983), πρέπει σε κάθε μεταβλητή να αντιστοιχούν τουλάχιστον πέντε άτομα και το ελάχιστο μέγεθος του δείγματος να είναι 200 άτομα.

Κατά την εξέταση των παραπάνω κριτηρίων διαπιστώθηκε ότι ισχύουν πλήρως όλες οι προϋποθέσεις που διασφαλίζουν την εφαρμογή της Παραγοντικής Ανάλυσης Σε Κύριες Συνιστώσες. Συγκεκριμένα: ο δείκτης ΚΜΟ έχει τιμή 0,701, άρα η τιμή του, κατά τον Kaiser (1974) είναι πολύ καλή, το Bartlett Test έχει επίπεδο σημαντικότητας <0,001, άρα απορρίπτεται η υπόθεση ότι ο πίνακας συσχέτισης είναι διαγώνιος, το δείγμα αποτελείται από 339 άτομα και οι μεταβλητές που εισήλθαν στο μοντέλο της Παραγοντικής Ανάλυσης ήταν 12.

Από την εφαρμογή της Παραγοντικής Ανάλυσης σε Κύριες Συνιστώσες με ορθογώνια περιστροφή προέκυψαν 4 παράγοντες με ιδιοτιμή μεγαλύτερη της μονάδας οι οποίοι ερμηνεύουν το 55,948 % της συνολικής διασποράς, ποσοστό ιδιαίτερα ικανοποιητικό (όπως φαίνεται στο παρακάτω πίνακα).

Total Variance Explained

Component	Initial Eigenvalues			Rotation Sums of Squared Loadings		
	Total	% of Variance	Cumulative %	Total	% of Variance	Cumulative %
1	2,904	24,201	24,201	2,444	20,366	20,366
2	1,430	11,913	36,114	1,546	12,882	33,248
3	1,256	10,466	46,581	1,410	11,751	44,999
4	1,124	9,367	55,948	1,314	10,949	55,948
5	,972	8,102	64,050			
6	,839	6,988	71,038			
7	,767	6,393	77,431			
8	,670	5,585	83,016			
9	,608	5,065	88,081			
10	,527	4,389	92,470			
11	,471	3,925	96,395			
12	,433	3,605	100,000			

Extraction Method: Principal Component Analysis.

Στον αμέσως παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ερωτήσεις που συγκροτούν τον κάθε παράγοντα με τα αντίστοιχα φορτία, τα οποία είναι ιδιαίτερα σημαντικά εφόσον όλα είναι μεγαλύτερα από 0,60.

Rotated Component Matrix[a]

	Component			
	1	2	3	4
ΕΠΗΡΕΑΣΜΟΣ ΠΑΤΕΡΑ:				,791
ΕΠΗΡΕΑΣΜΟΣ ΜΗΤΕΡΑΣ:				,742
ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ:			,884	
ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΕΚΤΟΣ ΣΧΟΛΕΙΟΥ:		,664		
ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ:			,606	
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ:	,736			
ΕΞΩΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ (ΕΚΤΟΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΜΕ:	,754			
ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ (INTERNET):	,714			
ΦΙΛΟΙ-ΣΥΜΜΑΘΗΤΕΣ:		,648		
ΑΤΟΜΑ ΣΤΕΝΟΥ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ:		,732		
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ:	,643			
ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ:	,452			

Extraction Method: Principal Component Analysis.
Rotation Method: Varimax with Kaiser Normalization.
a. Rotation converged in 5 iterations.

5.4 Περιγραφή παραγόντων

Ο πρώτος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι ο παράγοντας που κυρίως επηρέασε την ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά συγκροτείται από τις εκδόσεις της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, τα εξωσχολικά βιβλία, το διαδίκτυο, τους μαθηματικούς

διαγωνισμούς και τα μέσα μαζικής επικοινωνίας. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί "**επηρεασμός όχι από άτομα, αλλά από μέσα και διαδικασίες εκτός σχολείου**" Ερμηνεύει το 20,366 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 2,444.

Ο δεύτερος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι ο παράγοντας που κυρίως επηρέασε την ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά συγκροτείται από καθηγητές εκτός σχολείου, φίλους - συμμαθητές και άτομα του στενού οικογενειακού περιβάλλοντος. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: "**επηρεασμός από το άμεσο κοινωνικό περιβάλλον**". Ερμηνεύει το 12,882 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 1,546.

Ο τρίτος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι ο παράγοντας που κυρίως επηρέασε την ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά συγκροτείται από τους καθηγητές του σχολείου τους και τα σχολικά βιβλία. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί: "**επηρεασμός από το σχολείο**". Ερμηνεύει το 11,751 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 1,410.

Ο τέταρτος παράγοντας ορίζεται από τις απόψεις των μαθητών που θεωρούν ότι ο παράγοντας που κυρίως επηρέασε την ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά συγκροτείται από τον επηρεασμό του πατέρα και της μητέρας. Θα ήταν δυνατό να ονομασθεί "**επηρεασμός από τους γονείς**". Ερμηνεύει το 10,949 % της συνολικής διασποράς και έχει ιδιοτιμή 1,314.

Ο συντελεστής εσωτερικής αξιοπιστίας, alpha του Coronach, για τον πρώτο παράγοντα είναι 0,72, για τον δεύτερο παράγοντα είναι 0,70, για τον τρίτο παράγοντα είναι 0,65 και για τον τέταρτο παράγοντα είναι 0,50. Οι τιμές του συντελεστή εσωτερικής αξιοπιστίας που στους παράγοντες είναι ικανοποιητικές σύμφωνα με τον Aiken (1970). Εξαίρεση αποτελεί η τιμή που αντιστοιχεί στον τέταρτο παράγοντα η οποία είναι κάτω του 0,60 και συνιστά μέτρια αξιοπιστία, επομένως τα όποια συμπεράσματα προκύπτουν από τον παράγοντα αυτόν πρέπει να αντιμετωπισθούν με επιφύλαξη.

Κεφάλαιο 6ο. Έρευνα 3η

Η συμβολή των Διαγωνισμών , στην εξέλιξη των μαθητών ως νέων επιστημόνων.

6.1 Γενικά

Το κεφάλαιο αυτό αναφέρεται στα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις συνεντεύξεις 26 Ολυμπιονικών μαθητών που συμμετείχαν με την Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Το κεφάλαιο αρχικά αναφέρεται στη Θεωρία της Προσχεδιασμένης Συμπεριφοράς, στην οποία στηρίχθηκε η ανάλυση των συνεντεύξεων. Στη συνέχεια, το κεφάλαιο εστιάζει στα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των συνεντεύξεων καθώς επίσης στα κυριότερα συμπεράσματα που απορρέουν από αυτές.

6.2 Η Θεωρία της Προσχεδιασμένης Συμπεριφοράς (Theory of Planned Behaviour).

Σύμφωνα με τη Θεωρία της Προσχεδιασμένης Συμπεριφοράς (Ajzen, 1988; 1991; 2006), η οποία αποτελεί επέκταση της Θεωρίας της Δικαιολογημένης Δράσης (Theory of Reasoned Action, βλ. Ajzen & Fishbein, 1980), η εκδήλωση της ανθρώπινης συμπεριφοράς επηρεάζεται από την πρόθεση απέναντι στη συμπεριφορά. Στη περίπτωση της παρούσας έρευνας υποθέτουμε ότι οι μαθητές που συμμετείχαν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς είχαν θετική πρόθεση να συμμετάσχουν σε αυτούς. Η πρόθεση με τη σειρά της επηρεάζεται από τρεις παράγοντες. Αρχικά από τη στάση του ατόμου προς την ενδεχόμενη συμπεριφορά (attitude toward the behaviour). Σύμφωνα με τους Ajzen & Fishbein, (1980, σ. 6), με τον όρο "στάση απέναντι στη συμπεριφορά" ορίζουμε τη συνολική θετική ή αρνητική αξιολόγηση του ατόμου για τη συμπεριφορά που πρόκειται να εκδηλώσει. Στην παρούσα έρευνα υποθέτουμε ότι οι μαθητές συμμετείχαν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς επειδή είχαν θετικές στάσεις απέναντι σε αυτούς και στα μαθηματικά γενικότερα.

Δεύτερον, η πρόθεση επηρεάζεται από τα "υποκειμενικά πρότυπα" (subjective norms). Αυτά είναι η υποκειμενική εκτίμηση του ατόμου για την

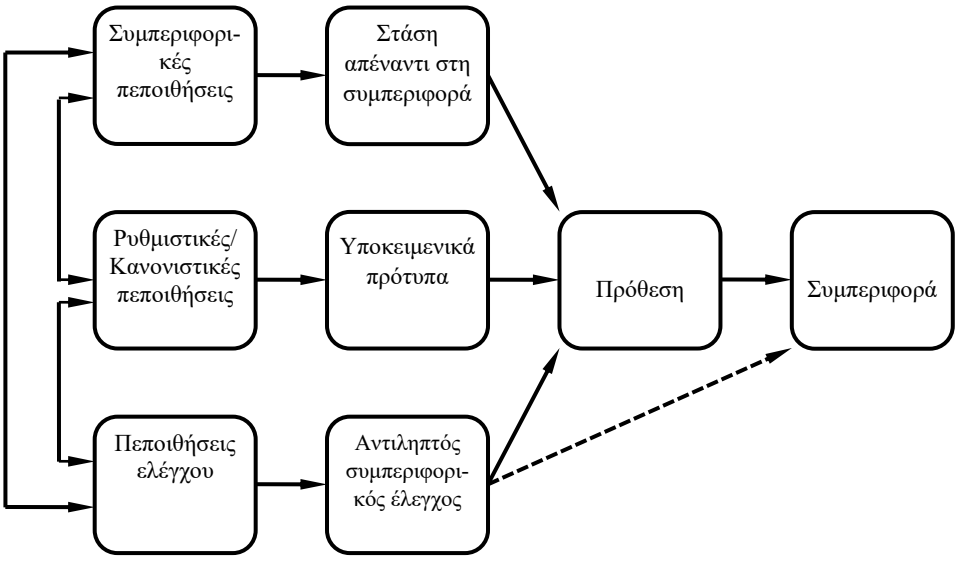
κοινωνική πίεση που δέχεται ως προς το να εκδηλώσει ή όχι τη συμπεριφορά. Με άλλα λόγια το κατά πόσο οι άλλοι θα επιδοκίμαζαν, ή θα αποδοκίμαζαν τη συμπεριφορά αυτή (Γεώργας, 1990). Στην παρούσα έρευνα υποθέτουμε ότι οι μαθητές συμμετείχαν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς επειδή πίστευαν ότι ο κοινωνικός τους περίγυρος, τούς ωθούσε και τους επιβράβευε ως προς τη συμμετοχή σε αυτούς άμεσα ή έμμεσα. Τέλος, η πρόθεση επηρεάζεται από τον "αντιλαμβανόμενο έλεγχο της συμπεριφοράς" (perceived behavioural control), ο οποίος αντανακλά την αντίληψη του ατόμου σχετικά με τον έλεγχο που έχει πάνω στη συμπεριφορά (Ajzen, 1988; 2006). Στην παρούσα έρευνα υποθέτουμε ότι οι μαθητές συμμετείχαν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς επειδή πίστευαν ότι είχαν όλες εκείνες τις προϋποθέσεις που θα τους βοηθήσουν να συμμετάσχουν στους διαγωνισμούς.

Σύμφωνα με τον Ajzen (2006), α) η στάση απέναντι στη συμπεριφορά με τη σειρά της διαμορφώνεται από τις συμπεριφοριστικές πεποιθήσεις (behavioural beliefs), β) τα υποκειμενικά πρότυπα διαμορφώνονται από τις ρυθμιστικές/κανονιστικές πεποιθήσεις (normative beliefs), και γ) ο αντιλαμβανόμενος έλεγχος της συμπεριφοράς διαμορφώνεται από τις ελεγχόμενες πεποιθήσεις (control beliefs).

Με τον όρο "συμπεριφορικές πεποιθήσεις" (behavioural beliefs) (Κουτρομάνος, 2008) νοείται ότι, αν ένα άτομο πιστεύει ότι μια δική του συμπεριφορά "Α" θα έχει συγκεκριμένα θετικά επακόλουθα, τότε θα έχει θετική στάση απέναντι σε αυτή τη συμπεριφορά γενικότερα. Αντιθέτως, αν θεωρεί ότι μια δική του συμπεριφορά "Α" θα έχει συγκεκριμένα αρνητικά επακόλουθα, τότε θα έχει αρνητική στάση απέναντι σε αυτή τη συμπεριφορά γενικότερα. Για παράδειγμα, η πεποίθηση ενός μαθητή ότι η συμμετοχή του στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς θα του δώσει περισσότερες ευκαιρίες για διάκριση και επιτυχία, πιθανόν να τον οδηγήσει στο να έχει θετική στάση απέναντι στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Από την άλλη, αν πιστεύει ότι η συμμετοχή αυτή θα του περιορίσει τον ελεύθερο χρόνο του, τότε είναι πιθανόν να διαμορφώσει λιγότερο θετική στάση απέναντι στη συμμετοχή στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.

Με τον όρο "ρυθμιστικές/κανονιστικές πεποιθήσεις" (normative beliefs) (Κουτρομάνος, 2008) νοείται ότι, αν ένα άτομο θεωρεί ότι συγκεκριμένα πρόσωπα/φορείς που εκτιμά και/ή το επηρεάζουν, πιστεύουν ότι πρέπει να έχει μια συμπεριφορά "Α", τότε το άτομο αυτό δέχεται μια σχετική κοινωνική πίεση ως προς το να έχει αυτή τη συμπεριφορά "Α" (Ajzen & Fishbein, 1980). Αυτά τα πρόσωπα και οι φορείς στις περισσότερες έρευνες που έχουν διεξαχθεί μέχρι σήμερα ποικίλουν. Στο

χώρο της εκπαίδευσης οι "ρυθμιστικές/κανονιστικές πεποιθήσεις" διαμορφώνονται υπό την επίδραση των φίλων, προσώπων του σχολικού, οικογενειακού και του επαγγελματικού περιβάλλοντος, εκπαιδευτικών οργανισμών, ερευνητικών ιδρυμάτων και πανεπιστημίων, συνδικαλιστικών οργανώσεων και φορέων της τοπικής αυτοδιοίκησης. Στην παρούσα έρευνα υποθέτουμε ότι οι μαθητές συμμετείχαν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς επειδή πίστευαν ότι συγκεκριμένα πρόσωπα θα τους επικροτούσαν ως προς την απόφαση αυτή. Οι πεποιθήσεις ελέγχου σχετίζονται με την ύπαρξη συγκεκριμένων "αντικειμενικών" παραγόντων, όπως αυτοί εκλαμβάνονται από το άτομο, οι οποίοι διευκολύνουν ή εμποδίζουν την εκδήλωση της συμπεριφοράς του (Ajzen, 2006). Στον χώρο της εκπαίδευσης αυτές οι πεποιθήσεις μπορεί να αφορούν στην ύπαρξη ή στην έλλειψη απαραίτητης υλικοτεχνικής υποδομής, στην οικονομική ή στην ηθική υποστήριξη από την πολιτεία. Σύμφωνα με τον Ajzen (1988), εάν η συμπεριφορά του ατόμου δεν είναι υπό τον απόλυτο έλεγχό του, τότε το άτομο αυτό χρειάζεται τις απαραίτητες προϋποθέσεις και δυνατότητες για να εκδηλώσει τη συμπεριφορά που τον ενδιαφέρει. Ο "αντιληπτός συμπεριφορικός έλεγχος" θεωρείται ότι επηρεάζει τη συμπεριφορά είτε άμεσα είτε έμμεσα διαμέσου της πρόθεσης. Στην παρούσα έρευνα υποθέτουμε ότι οι μαθητές συμμετείχαν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς επειδή πίστευαν ότι θα έχουν ηθική υποστήριξη από συγκεκριμένα άτομα. Οι μεταβλητές της θεωρίας παρουσιάζονται στο **Σχήμα 6-1**.



Σχήμα 6-1: Η Θεωρία της Σχεδιασμένης Συμπεριφοράς (The Theory of Planned Behaviour) (Ajzen 2006, βλ. http://people.umass.edu/aizen/tpb.diag.html).

Η Θεωρία της Προσχεδιασμένης Συμπεριφοράς έχει εφαρμοστεί σε περισσότερες από 900 έρευνες (βλ. http://people.umass.edu/aizen/tpbrefs.html). Στο χώρο της εκπαίδευσης η Θεωρία της Προσχεδιασμένης Συμπεριφοράς έχει εφαρμοστεί με σκοπό να κατανοηθούν και να προβλεφθούν οι προθέσεις των φοιτητών αλλά και μαθητών να εγγραφούν σε διάφορα μαθήματα αλλά και να προβλεφθούν διάφορες συμπεριφορές τους (π.χ. Koballa, 1998; Crawley & Black, 1992; Davis et al., 2002; Κουτρομάνος, 2008; Koutromanos, Styliaras, & Christodoulou, 2015; Koutromanos, 2009; Κουτρομάνος, & Παπαϊωάννου, 2008).

Επομένως με βάση τα ανωτέρω ο σκοπός της παρούσας έρευνας ήταν να εξετάσει τους παράγοντες που επηρέασαν τους Ολυμπιονίκες των Μαθηματικών Διαγωνισμών να συμμετάσχουν σε αυτούς. Οι στόχοι της έρευνας ήταν:

1. Να εξετάσει τις στάσεις τους απέναντι στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς και τις πεποιθήσεις τους σχετικά με τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν από αυτούς.
2. Να εξετάσει τα υποκειμενικά τους πρότυπα για τη συμμετοχή τους στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς και τις αντιλήψεις τους σχετικά με τα πρόσωπα που πίστευαν ότι τους επηρέασαν να συμμετάσχουν στους διαγωνισμούς.
3. Να εξετάσει τον αντιλαμβανόμενο έλεγχο της συμπεριφοράς τους ως προς τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς και τους παράγοντες που τους διευκόλυναν σε αυτή τη συμμετοχή τους.

Οι επόμενες ενότητες παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των αναλύσεων των συνεντεύξεων με βάση το ανωτέρω θεωρητικό πλαίσιο.

6.3 Η στάση απέναντι στα μαθηματικά και τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς και οι συμπεριφορικές πεποιθήσεις

Ένας από τους στόχους της παρούσας έρευνας ήταν να εξετάσει τις στάσεις των ολυμπιονικών απέναντι στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς αλλά και τις συμπεριφορικές πεποιθήσεις τους. Έτσι, οι συνεντεύξεις τους αναλύθηκαν με σκοπό να διερευνηθεί κατά πόσο οι στάσεις τους ήταν θετικές ή αρνητικές απέναντι στους διαγωνισμούς αλλά και να διερευνηθούν οι συμπεριφορικές τους πεποιθήσεις για αυτούς.

Η ανάλυση των συνεντεύξεων έδειξε την πολύ θετική στάση των ολυμπιονικών απέναντι στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Όπως αναφέρει και ο Ολυμπιονίκης 23:

«Το έκανα [σημ: εννοεί τη συμμετοχή] με πολλή μεγάλη χαρά και ευχαρίστηση αφού πιστεύω ότι συμμετέχοντας σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς (όταν αγαπάς τα Μαθηματικά) έχεις μόνο να κερδίσεις. Αν διακριθείς καλώς, αν δεν διακριθείς δε χάνεις τίποτα. Θα έλεγα μάλιστα ότι έχεις ζήσει μια σημαντική εμπειρία πνευματικού συναγωνισμού και άμιλλας και να επανέλθεις έχοντας δουλέψει περισσότερο την επόμενη χρονιά».

«Από την ε΄ δημοτικού συμμετείχα με θέματα β΄ γυμνασίου. Ήταν μια πολύ ευχάριστη εμπειρία αφού δοκίμαζα τις δυνάμεις μου σε Μαθηματικά πολύ πιο δύσκολα από την ύλη του σχολείου μέσα από μια διαδικασία που για μένα έμοιαζε σαν παιχνίδι. Δεν είχα κανένα άγχος γιατί και αν δεν πήγαινα καλά δεν είχα τίποτα να χάσω» (Ολυμπιονίκης 17).

«Η ενασχόληση με τα Μαθηματικά από μικρή ηλικία ήταν για μένα μια ευχάριστη και διασκεδαστική εμπειρία. Κάπως έτσι είδα και τη συμμετοχή μου σαν έναν αγώνα που είχα μόνο να κερδίσω είτε παίρνοντας διάκριση είτε «παίζοντας» με ενδιαφέροντα μαθηματικά προβλήματα» (Ολυμπιονίκης 20).

Ειδικότερα από τις συνεντεύξεις φάνηκε η μεγάλη αγάπη των ολυμπιονικών για τα μαθηματικά και τους μαθηματικούς διαγωνισμούς. Οι ακόλουθες εκφράσεις δείχνουν ενδεικτικά αυτή την αγάπη.

«Στη συμμετοχή με οδήγησε η αγάπη για τα Μαθηματικά» (Ολυμπιονίκης 2).

«Ήθελα να δω αν στα Μαθηματικά που αγαπούσα και με διασκέδαζαν ήμουν πράγματι καλός» (Ολυμπιονίκης 3).
«Ήταν για μένα μια πολύ ευχάριστη διαδικασία ...» (Ολυμπιονίκης 4).

«Ήταν κάτι που έκανα με ευχαρίστηση αφού και σε μένα άρεσε πολύ η ιδέα να συμμετάσχω σε ένα πνευματικό αγώνα» (Ολυμπιονίκης 6).

«Η συμμετοχή μου σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς προέκυψε σχεδόν αυτονόητα ως συνέπεια της αγάπης μου για τα Μαθηματικά» (Ολυμπιονίκης 7).

«Η αγάπη μου για τα Μαθηματικά τα οποία πιστεύω ότι μου προσέφεραν πνευματική ισορροπία με έκανε να δω τη συμμετοχή στους διαγωνισμούς σαν πνευματικό αθλητισμό» (Ολυμπιονίκης 9).

«Η συμμετοχή μου σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς ήλθε ως φυσική συνέπεια της πολύ καλής σχέσης που είχα με τα Μαθηματικά» (Ολυμπιονίκης 10).

«Περίμενα με χαρά να φτάσω στη β΄ γυμνασίου για να πάρω μέρος στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς… Οι επιτυχίες που είχα με έκαναν να θέλω να γνωρίζω όσο περισσότερο μπορώ τον κόσμο των Μαθηματικών» (Ολυμπιονίκης 11).

«… Ήταν μεγάλη χαρά όταν συμμετείχα σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς γιατί ασκούσαν πάνω μου ιδιαίτερη επιρροή» (Ολυμπιονίκης 13).

«Το έκανα με πολλή μεγάλη χαρά γιατί θα διαγωνιζόμουν σε ένα αντικείμενο που με γοήτευε» (Ολυμπιονίκης 14).
«Η συμμετοχή μου στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς θεωρώ ότι ήταν η λογική συνέχεια της πολύ καλής σχέσης που είχα με τα Μαθηματικά. Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί αντιμετωπίστηκαν από εμένα σαν πνευματικός αθλητισμός. Έχοντας ασχοληθεί από μικρός με τον αθλητισμό ήταν για μένα μια ενδιαφέρουσα πρόκληση η συμμετοχή μου σε αυτούς του πνευματικούς αγώνες» (Ολυμπιονίκης 15).

«Ήταν πολύ ευχάριστη διαδικασία για μένα να συμμετέχω σε πνευματικούς αγώνες» (Ολυμπιονίκης 21).

«…έλαβα μέρος σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς χωρίς κανένα άγχος και με πολλή χαλαρή διάθεση» (Ολυμπιονίκης 26).

Ως προς τις πεποιθήσεις των ολυμπιονικών να συμμετάσχουν στους διαγωνισμούς αυτές είχαν σχέση με συγκεκριμένο πλεονέκτημα. Σε αρκετούς ολυμπιονίκες αυτό ήταν ότι μπορούσαν να αποδείξουν στους ίδιους αλλά και στον κοινωνικό τους περίγυρο ότι είναι καλοί στα μαθηματικά. Με άλλα λόγια η διάκριση που παρείχε η επιτυχία σε αυτούς τους διαγωνισμούς τόσο για τους ίδιους όσο για την οικογένεια αλλά και το σχολείο τους διαμόρφωνε θετική στάση απέναντι στη συμμετοχή τους στους διαγωνισμούς. Αυτό, μπορεί να ερμηνευθεί ως απόλυτα λογικό από τη στιγμή που το περιβάλλον αυτών των μαθητών είχε σχέση με τα μαθηματικά είτε άμεσα είτε έμμεσα και επομένως μια διάκριση σε αυτά ήταν μεγάλη επιτυχία. Η διάκριση εκτός από πεποίθηση που επηρεάζει τη στάση στην παρούσα ενότητα φάνηκε ότι αποτελεί, όπως αναλύεται σε επόμενη ενότητα παρακάτω, σημαντικό παράγοντα που διευκόλυνε τη συμμετοχή των μαθητών στους διαγωνισμούς και τους ενίσχυσε την αυτοπεποίθηση.

6.4 Τα υποκειμενικά πρότυπα και οι ρυθμιστικές πεποιθήσεις

Ο δεύτερος στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να διερευνήσει κατά πόσο το περιβάλλον των ολυμπιονικών επέδρασσε θετικά ή αρνητικά στο να συμμετάσχουν στους Μαθητικούς Διαγωνισμούς. Επίσης να καταγράψει ποια είναι τα πρόσωπα από το περιβάλλον τους που έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στο να εμπλακούν σε αυτούς τους διαγωνισμούς. Επομένως, στις συνεντεύξεις οι ολυμπιονίκες ρωτήθηκαν εάν το περιβάλλον τους, τούς επηρέασε στο να ασχοληθούν με τους διαγωνισμούς και αν ναι, ποια συγκεκριμένα πρόσωπα.

Από τις αναλύσεις των συνεντεύξεων προέκυψε ότι τα υποκειμενικά πρότυπα διαδραμάτισαν ουσιαστικό ρόλο στην απόφαση των μαθητών να ασχοληθούν με τα μαθηματικά και ειδικότερα με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Η επίδραση των υποκειμενικών προτύπων εκλαμβάνονταν συγκεκριμένα από το οικογενειακό και το σχολικό περιβάλλον.

Ο **Πίνακας 47**, παρουσιάζει ενδεικτικές απαντήσεις των ολυμπιονικών που δείχνουν τα πρόσωπα που τους επηρέασαν. Τα πρόσωπα που επέδρασσαν θετικά στην απόφαση των μαθητών από το οικογενειακό περιβάλλον ήταν αρχικά οι γονείς, με μεγαλύτερη επίδραση από τον πατέρα.

Σε ελάχιστες περιπτώσεις, η επίδραση προέρχονταν σε από τον παππού, τον νονό και κάποιον οικογενειακό φίλο. Όσον αφορά το σχολικό περιβάλλον, η επίδραση αυτή φαίνεται ότι προέρχεται από ορισμένους δασκάλους και τους καθηγητές των σχολείων που φοιτούσαν οι μαθητές.

Πίνακας 50. Οι ρυθμιστικές/κανονιστικές πεποιθήσεις των μαθητών

Πρόσωπα που οι μαθητές πίστευαν ότι τους επηρέασαν θετικά να ασχοληθούν με τα Μαθηματικά		**Κωδικός Ολυμπιονίκη**
Οι γονείς		
1	Με επηρέασαν θετικά και οι δύο γονείς μου (πολιτικός μηχανικός και αρχιτέκτονας).	Ολυμπ. 2
2	*Θεωρώ ότι οι γονείς μου και οι καθηγητές μου επηρέασαν θετικά στην ενασχόλησή μου με τα Μαθηματικά.*	Ολυμπ. 7
3	*Ο πατέρας μου που είναι μαθηματικός με επηρέασε σε σημαντικό βαθμό στην ενασχόλησή μου με τα Μαθηματικά αλλά και η μητέρα μου…*	Ολυμπ. 20
4	*Η οικογένειά μου θεωρώ ότι με επηρέασε σε σημαντικό βαθμό.*	Ολυμπ. 21
5	*Με πατέρα και μητέρα μαθηματικό είναι δύσκολο να μην κολλήσεις το μικρόβιο των Μαθηματικών.*	Ολυμπ. 22
6	*Στην οικογένειά μας υπήρχε πάντοτε μια θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά.*	Ολυμπ. 23
7	*Οι γονείς μου αγαπούσαν τα Μαθηματικά χωρίς να είναι μαθηματικοί και μου μετέδωσαν αυτή την αγάπη.*	Ολυμπ. 24
Ο πατέρας		
8	*Με επηρέασε πολύ θετικά ο πατέρας μου που είναι μαθηματικός.*	Ολυμπ. 1
9	*Με επηρέασαν πολύ θετικά οι γονείς μου και περισσότερο θα έλεγα ο πατέρας μου που είναι μηχανικός.*	Ολυμπ. 3
10	*Σημαντική συμβολή είχε ο πατέρας μου που είναι μαθηματικός και φυσικός.*	Ολυμπ. 4
11	*Σημαντική συμβολή είχε ο πατέρας μου που είναι μαθηματικός.*	Ολυμπ. 6

12	*Ιδιαίτερη συμβολή είχε ο πατέρας μου που ήταν στρατιωτικός αλλά αγαπούσε πολύ τα Μαθηματικά.*	Ολυμπ. 8
13	*Ο πατέρας μου που είναι Μαθηματικός θεωρώ ότι με επηρέασε σε μεγάλο βαθμό και με έμαθε να αγαπάω τα Μαθηματικά.*	Ολυμπ. 10
14	*Ο πατέρας μου ο οποίος είναι πολιτικός μηχανικός μου έδινε προβλήματα να λύνω όπως και στα αδέλφια μου.*	Ολυμπ. 11
15	*Ο πατέρας μου θεωρώ ότι μου μετέφερε την αγάπη του για τα Μαθηματικά.*	Ολυμπ. 12
16	*Ιδιαίτερη επιρροή στην ενασχόλησή μου με τα Μαθηματικά άσκησε ο πατέρας.*	Ολυμπ. 14
17	*Θετική επιρροή είχε ο πατέρας μου ο οποίος είναι οικονομολόγος.*	Ολυμπ. 15
18	*Ο παππούς μου και ο πατέρας μου είναι μαθηματικοί.*	Ολυμπ. 17
19	*Το οικογενειακό περιβάλλον θεωρώ ότι επέδρασσε θετικά και ειδικά ο πατέρας μου που είναι φυσικός.*	Ολυμπ. 19
20	*Θεωρώ καθοριστική την επίδραση που άσκησε ο πατέρας μου ο οποίος είναι μαθηματικός στο να αγαπήσω τα Μαθηματικά.*	Ολυμπ. 26
Οι δάσκαλοι στο δημοτικό		
21	Στο δημοτικό οι δάσκαλοι επέδρασσαν θετικά όπως και οι καθηγητές στο γυμνάσιο.	Ολυμπ. 11
22	Οι δάσκαλοι στο δημοτικό και οι καθηγητές στο γυμνάσιο και λύκειο με ενθάρρυναν στην ενασχόλησή μου με τα Μαθηματικά.	Ολυμπ. 17
23	Οι δάσκαλοι και οι καθηγητές μου επίσης με επηρέασαν θετικά όπως και γενικότερα το περιβάλλον του σχολείου που φοιτούσα.	Ολυμπ. 20
24	Πρέπει να αναφέρω και τη θετική συμβολή κάποιων δασκάλων και καθηγητών.	Ολυμπ. 21

25	Νομίζω ότι κάποιοι δάσκαλοι και καθηγητές με επηρέασαν θετικά.	Ολυμπ. 23
Οι καθηγητές στο γυμνάσιο και λύκειο		
26	Οι καθηγητές με ενθάρρυναν για τις επιδόσεις μου στα Μαθηματικά και ως εκ τούτου θεωρώ ότι συνέβαλλαν θετικά.	Ολυμπ. 5
27	Στο δημοτικό οι δάσκαλοι επέδρασαν θετικά όπως και οι καθηγητές στο γυμνάσιο.	Ολυμπ. 11
28	Οι δάσκαλοι στο δημοτικό και οι καθηγητές στο γυμνάσιο και λύκειο με ενθάρρυναν στην ενασχόλησή μου με τα Μαθηματικά.	Ολυμπ. 17
29	Οι δάσκαλοι και οι καθηγητές μου επίσης με επηρέασαν θετικά όπως και γενικότερα το περιβάλλον του σχολείου που φοιτούσα.	Ολυμπ. 20
30	Πρέπει να αναφέρω και τη θετική συμβολή κάποιων δασκάλων και καθηγητών.	Ολυμπ. 21
31	Νομίζω ότι κάποιοι δάσκαλοι και καθηγητές με επηρέασαν θετικά.	Ολυμπ. 23
Άλλα πρόσωπα		
31	Σημαντική επίδραση όμως είχε ο νονός μου ο οποίος ήταν μαθηματικός και αριθμομνήμονας. Θα έλεγα ότι αποτελούσε πρότυπο ως προς τις ικανότητες των Μαθηματικών για μένα.	Ολυμπ. 3
32	Σημαντική συμβολή είχε ο παππούς μου που είχε πτυχίο Φυσικομαθηματικής ο οποίος με προβλήματα που μου έδινε σαν παιχνίδι έκανε να μου φαίνονται τα Μαθηματικά ελκυστικά.	Ολυμπ. 9
33	Ένας φίλος του πατέρα μου επίσης Μαθηματικός συνέβαλλε σημαντικά δίνοντάς μου προβλήματα για επίλυση…	Ολυμπ. 10
34	Από την οικογένειά μου θεωρώ ότι ενθαρρύνθηκα να ασχοληθώ με τα Μαθηματικά αλλά καθοριστικό ρόλο έπαιξε το σχολείο.	Ολυμπ. 18

Από την ανάλυση των συνεντεύξεων προέκυψαν και κάποια αποτελέσματα που δείχνουν ότι το οικογενειακό περιβάλλον δεν είχε μεγάλη επίδραση όπως φαίνεται από τις απαντήσεις των ολυμπιονικών:

«*Οι γονείς μου δε με επηρέασαν ιδιαίτερα. Οι καθηγητές μου με ενθάρρυναν για τις επιδόσεις μου στα Μαθηματικά και ως εκ τούτου θεωρώ ότι συνέβαλαν θετικά*» (Ολυμπιονίκης 5).
«*Οι γονείς μου δε με επηρέασαν ιδιαίτερα. Σημειώνω ότι είναι και οι δύο φιλόλογοι*» (Ολυμπιονίκης 13).

«*Από το σπίτι μου δε θεωρώ ότι είχα κάποια ενθάρρυνση…*» (Ολυμπιονίκης 26).

Ένα άλλο αποτέλεσμα που προκύπτει από την ανάλυση των απαντήσεων των ολυμπιονικών είναι ότι σε ορισμένες περιπτώσεις οι εκπαιδευτικοί τους είτε είχαν ελάχιστη επίδραση είτε καθόλου. Πιο συγκεκριμένα ο Ολυμπιονίκης 1 ανέφερε ότι «*Οι καθηγητές του σχολείου μου με επηρέασαν λίγο*» ενώ ο Ολυμπιονίκης 2 ανέφερε ότι «*Οι καθηγητές δεν θεωρώ ότι με επηρέασαν ιδιαίτερα*». Ενδεικτικές επίσης είναι και οι ακόλουθες απαντήσεις:

«*Η επιρροή των καθηγητών δεν θεωρώ ότι ήταν ιδιαίτερα σημαντική*» (Ολυμπιονίκης 3).

«*Οι δάσκαλοι και αργότερα οι καθηγητές δεν θεωρώ ότι με επηρέασαν θετικά στο να συμμετάσχω στους διαγωνισμούς*» (Ολυμπιονίκης 4).

«*Οι δάσκαλοι και οι καθηγητές ήταν ουδέτεροι με εξαίρεση κάποιους οι οποίοι με ενεθάρρυναν και προσπάθησαν να με βοηθήσουν*» (Ολυμπιονίκης 8).

«*Όσον αφορά την επιρροή δασκάλων και καθηγητών θα μπορούσα να τη χαρακτηρίσω όχι σημαντική με εξαίρεση ίσως στις τελευταίες τάξεις του Λυκείου*» (Ολυμπιονίκης 9).

«*Οι δάσκαλοι και οι καθηγητές μπορώ να πω ότι δεν άσκησαν καμία ιδιαίτερη επιρροή στην ενασχόλησή μου με τα Μαθηματικά*» (Ολυμπιονίκης 13).

«*Δε νομίζω ότι οι δάσκαλοι και οι καθηγητές με επηρέασαν ιδιαίτερα χωρίς όμως να μπορώ να ισχυριστώ ότι με αποθάρρυναν*» (Ολυμπιονίκης 19).

«*Θεωρώ ότι οι δάσκαλοι και οι καθηγητές δε με επηρέασαν ιδιαίτερα*» (Ολυμπιονίκης 22).

«*Οι δάσκαλοι στο δημοτικό δε νομίζω ότι με επηρέασαν ιδιαίτερα όπως και στο γυμνάσιο και στο λύκειο με ελάχιστες εξαιρέσεις*» (Ολυμπιονίκης 24).

«*Στο δημοτικό δε νομίζω ότι είχα κάποια ιδιαίτερη επιρροή από τους δασκάλους ενώ στο γυμνάσιο και στο λύκειο υπήρξαν καθηγητές που με επηρέασαν θετικά και με ενθάρρυναν αλλά και κάποιοι που προσπάθησαν να με υποτιμήσουν και να με αποθαρρύνουν*» (Ολυμπιονίκης 26).

Επιπρόσθετα, υπήρχαν κάποιοι ολυμπιονίκες που είχαν αρνητική εμπειρία από τους εκπαιδευτικούς τους. Παράδειγμα αποτελούν οι ακόλουθες απαντήσεις τους.

«*Αρκετοί καθηγητές θα έλεγα ότι με επηρέασαν αρνητικά, ειδικά στο Γυμνάσιο καθώς έδειχναν να ενοχλούνται!!! Από τις επιδόσεις μου σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Αυτό ήταν κάτι που με είχε ενοχλήσει ιδιαίτερα*» (Ολυμπιονίκης 10).

«*…Στο δημοτικό οι δάσκαλοι επέδρασσαν θετικά όπως και οι καθηγητές στο γυμνάσιο. Στο λύκειο όμως είχα την αίσθηση ότι κάποιοι καθηγητές με ανταγωνίζονταν. Ευτυχώς όμως είχα αναπτύξει αντισώματα από τη θετική επιρροή των υπολοίπων. Είχα αγαπήσει τα Μαθηματικά πλέον τόσο πολύ που αγνοούσα κάθε τέτοια συμπεριφορά*» (Ολυμπιονίκης 11).

«*Οι καθηγητές ήταν από ουδέτεροι έως αρνητικοί και σε κάποιες περιπτώσεις πολύ αρνητικοί πράγμα το οποίο με ενοχλούσε και με πείσμωνε. Κάποιος καθηγητής μάλιστα ενώ είχα ήδη διάκριση στη Διεθνή Ολυμπιάδα προσπαθούσε να υποτιμήσει τις δυνατότητές μου*» (Ολυμπιονίκης 19).

Από τα ανωτέρω φαίνεται ότι τόσο το οικογενειακό όσο και το σχολικό περιβάλλον είναι αυτό που επηρέασε είτε θετικά είτε αρνητικά τους ολυμπιονίκες να συμμετάσχουν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Οι γονείς και οι εκπαιδευτικοί ήταν τα πρόσωπα που άσκησαν ιδιαίτερη επιρροή στους ολυμπιονίκες. Από την άλλη, από τις συνεντεύξεις των

ολυμπιονικών φάνηκε, ότι ορισμένοι εκπαιδευτικοί είχαν ουδέτερη ή αρνητική στάση απέναντι στη συμμετοχή των ολυμπιονικών στους διαγωνισμούς.

6.5 Ο αντιληπτός συμπεριφορικός έλεγχος και οι πεποιθήσεις ελέγχου

Ο τρίτος στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να εξετάσει κατά πόσο οι ολυμπιονίκες μπορούσαν να συμμετάσχουν στους διαγωνισμούς από την άποψη τους αντιλαμβανόμενου ελέγχου. Από τη γενικότερη μελέτη των συνεντεύξεών τους φάνηκε ότι αυτοί οι ολυμπιονίκες είχαν μια ιδιαίτερη αυτοπεποίθηση ως προς τις δυνάμεις τους να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις των Μαθηματικών Διαγωνισμών και να πάρουν μέρος σε αυτούς.

Επιπρόσθετα, η παρούσα έρευνα εξέτασε ποιοι παράγοντες τους διευκόλυναν να συμμετάσχουν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Ο Πίνακας 2 παρουσιάζει ενδεικτικές απαντήσεις των ολυμπιονικών που δείχνουν αυτούς τους παράγοντες. Από τις απαντήσεις αυτές αλλά και από τη γενικότερη ανάλυση των συνεντεύξεών τους, φάνηκε ότι ο σημαντικότερος παράγοντας που τους επηρέασε είναι η παρότρυνση. Εξετάζοντας σε βάθος τις απαντήσεις τους, διαπιστώνεται ότι αυτή προέρχεται αρχικά από τους γονείς τους και περισσότερο από τον πατέρα τους. Επιπρόσθετα, εκτός από τους γονείς η παρότρυνση των μαθητών να συμμετάσχουν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς προέρχεται από τους καθηγητές του σχολείου τους.

Εκτός από την παρότρυνση, άλλος παράγοντας που αναφέρθηκε είναι η ενημέρωση σχετικά με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς είτε από πρόσωπα της οικογένειας (πατέρας, μητέρα, παππούς) είτε από το σχολικό περιβάλλον. Σημαντικός επίσης παράγοντας σε ορισμένους μαθητές φάνηκε ότι ήταν η ενασχόληση με τον αθλητισμό. Χαρακτηριστική είναι η έκφραση του Ολυμπιονίκη 24: «*Έχοντας ασχοληθεί με τον αθλητισμό μου φαινόταν πολύ οικείο να συμμετέχω σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς θεωρώντας τους ως πνευματικό αγώνα*».

Αυτό όμως που διαφάνηκε στο σύνολο των συνεντεύξεων είναι ότι οι ολυμπιονίκες παροτρύνθηκαν να ασχοληθούν με τα μαθηματικά και να συμμετάσχουν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς από την έντονη επιθυμία τους για διάκριση. Ειδικότερα, παρατηρήθηκε ότι αυτή η επιθυμία για

διάκριση είτε καλλιεργήθηκε από την οικογένεια είτε από το σχολικό περιβάλλον και οφείλονταν στην αγάπη των μαθητών για τα μαθηματικά.

Πίνακας 51. Παράγοντες που διευκόλυναν τους μαθητές να ασχοληθούν με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς

Παράγοντες		**Κωδικός Ολυμπιονίκη**
Η παρότρυνση των γονέων		
1	*Για τη συμμετοχή στους Διαγωνισμούς με ενεθάρρυναν κυρίως οι γονείς μου.*	Ολυμπ. 3
2	*Συμμετείχα στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς παρακινούμενος από τον πατέρα μου.*	Ολυμπ. 20
3	*Ο πατέρας μου με ενθάρρυνε να συμμετάσχω σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς…*	Ολυμπ. 6
4	*Με παρότρυνση του πατέρα μου…*	Ολυμπ. 8
5	*Ο πατέρας μου ήταν αυτός που μου πρότεινε να συμμετάσχω ενημερώνοντάς με για τη φύση τους.*	Ολυμπ. 10
6	*Περίμενα με χαρά να φτάσω στη Β΄ γυμνασίου για να πάρω μέρος στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς για τους οποίους με είχε ενημερώσει και με παρότρυνε να συμμετάσχω ο πατέρας μου.*	Ολυμπ. 11
7	*Είχα μάθει για το θεσμό των Μαθηματικών Διαγωνισμών από τον πατέρα μου.*	Ολυμπ. 12
8	*Είχα ενημερωθεί από τον πατέρα μου και τον παππού μου για τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς από τις Α΄ τάξεις του δημοτικού. Από την Ε΄ δημοτικού συμμετείχα με θέματα Β΄ γυμνασίου.*	Ολυμπ. 17
Η παρότρυνση των καθηγητών του σχολείου		
9	*Με παρότρυναν να συμμετάσχω οι καθηγητές του σχολείου και ο πατέρας μου ο οποίος είναι μαθηματικός.*	Ολυμπ. 1
10	*Στη συμμετοχή με οδήγησε … η παρότρυνση των γονέων και των καθηγητών.*	Ολυμπ. 2

11	*Με παρότρυναν να συμμετάσχω σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς οι καθηγητές του σχολείου.*	Ολυμπ. 5
12	*Οι καθηγητές στο σχολείο με παρότρυναν να συμμετάσχω αφού θεώρησαν ότι θα έχω καλά αποτελέσματα.*	Ολυμπ. 6
13	*Με προέτρεψαν να συμμετάσχω ο πατέρας μου και οι καθηγητές στο σχολείο.*	Ολυμπ. 15
14	*Με παρότρυνση του πατέρα μου και των καθηγητών του σχολείου πήρα μέρος σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.*	Ολυμπ. 19
15	*Με προτροπή της οικογένειάς μου και κάποιων καθηγητών μου συμμετείχα σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς.*	Ολυμπ. 21
16	*Με παρότρυνση του πατέρα μου και κάποιων καθηγητών έλαβα μέρος σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς χωρίς κανένα άγχος και με πολλή χαλαρή διάθεση.*	Ολυμπ. 26

Οι ακόλουθες απαντήσεις δείχνουν αυτή την έντονη επιθυμία των μαθητών για διακρίσεις.

> «*Άρχισα να ασχολούμαι με Μαθηματικούς διαγωνισμούς από τη β΄ γυμνασίου. Με παρακίνησαν να ασχοληθώ η αγάπη για τα Μαθηματικά και η επιθυμία μου να δοκιμάσω τις δυνάμεις μου σε θέματα πιο δύσκολα από τα σχολικά… Η επιτυχία που είχα μου αύξησε την επιθυμία για μεγαλύτερες διακρίσεις*» (Ολυμπιονίκης 1).
>
> «*Συμμετείχα για πρώτη φορά σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς στη β΄ γυμνασίου χωρίς ιδιαίτερη επιτυχία. Αυτό όμως με πείσμωσε και μου γεννήθηκε η επιθυμία να βελτιωθώ και να έχω στη συνέχεια καλύτερες επιδόσεις*» (Ολυμπιονίκης 2).
>
> «*Συμμετείχα σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς για να δοκιμάσω τον εαυτό μου στα δύσκολα. Ήθελα να δω αν στα Μαθηματικά που αγαπούσα και με διασκέδαζαν ήμουν πράγματι καλός*» (Ολυμπιονίκης 3).

«*…Ήταν για μένα μια πολύ ευχάριστη διαδικασία και οι επιτυχίες που είχα μου άνοιγαν την όρεξη για μεγαλύτερες επιτυχίες και διακρίσεις*» (Ολυμπιονίκης 4).

«*…Μια τυχόν επιτυχία σε αυτούς, πίστευα ότι θα πιστοποιούσε τις ικανότητες που θεωρούσα ότι είχα στα Μαθηματικά. Θεωρούσα επίσης ότι μπορώ να διακριθώ*» (Ολυμπιονίκης 5).
«*Η συμμετοχή μου σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς προέκυψε σχεδόν αυτονόητα ως συνέπεια της αγάπης μου για τα Μαθηματικά και της επιθυμίας μου για επιβράβευση των δυνατοτήτων που πίστευα ότι είχα*» (Ολυμπιονίκης 7).

«*…Οι επιτυχίες που είχα μου έδιναν δύναμη να συνεχίσω και να επιθυμώ ολοένα και περισσότερες διακρίσεις*» (Ολυμπιονίκης 10).

«*Οι επιτυχίες που είχα με έκαναν να θέλω να γνωρίζω όσο περισσότερο μπορώ τον κόσμο των Μαθηματικών. Παράλληλα με ενοχλούσε η αμφισβήτηση των δυνατοτήτων μου από κάποιους καθηγητές και αυτό είχε σαν αποτέλεσμα να βλέπω την επιτυχία στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς σαν μία απάντηση και σε αυτούς*» (Ολυμπιονίκης 11).

«*Οι επιτυχίες που είχα με έκαναν να βάζω συνέχεια υψηλότερους στόχους. Με ευχαριστούσε η ιδέα να αποδεικνύεται με τον πιο αξιόπιστο τρόπο ότι είμαι καλός στα Μαθηματικά*» (Ολυμπιονίκης 12).

«*Ο βασικός λόγος για τον οποίο συμμετείχα σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς ήταν η επιθυμία μου να διακριθώ σε ένα τομέα που πίστευα ότι έχω ιδιαίτερες ικανότητες όπως είναι τα Μαθηματικά. Είναι προφανές ότι μια επιτυχία θα αποδείκνυε ότι πράγματι είμαι καλός. Ευτυχώς πήγα καλά και οι επιτυχίες είχαν σαν αποτέλεσμα να θέλω μεγαλύτερες διακρίσεις. Ήταν μεγάλη χαρά όταν συμμετείχα σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς γιατί ασκούσαν πάνω μου ιδιαίτερη επιρροή ενώ τις εξετάσεις του σχολείου τις έβλεπα σαν μια τυπική διαδικασία*» (Ολυμπιονίκης 13).

«*…Ήταν μια πολύ ευχάριστη εμπειρία αφού δοκίμαζα τις δυνάμεις μου σε Μαθηματικά πολύ πιο δύσκολα από την ύλη του σχολείου*

μέσα από μια διαδικασία που για μένα έμοιαζε σαν παιχνίδι» (Ολυμπιονίκης 17).

«*Η συμμετοχή μου σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς ήταν για μένα μια ευκαιρία να μετρήσω τις δυνάμεις μου στα Μαθηματικά που τόσο αγαπούσα. Οι σχολικές ανακοινώσεις για τους διαγωνισμούς της ΕΜΕ μου κίνησαν το ενδιαφέρον να συμμετάσχω. Ήθελα να έχω και τη χαρά της διάκρισης σε ένα τομέα τόσο σημαντικό για μένα*» (Ολυμπιονίκης 18).

«*Με πολλή μεγάλη χαρά συμμετείχα γιατί θα είχα την ευκαιρία να αποδείξω στον εαυτό μου κυρίως ότι ήμουν πράγματι καλός στα Μαθηματικά*» (Ολυμπιονίκης 19).

«*…είδα και τη συμμετοχή μου σαν έναν αγώνα που είχα μόνο να κερδίσω είτε παίρνοντας διάκριση είτε «παίζοντας» με ενδιαφέροντα μαθηματικά προβλήματα*» (Ολυμπιονίκης 20).
«*…Ήθελα πολύ να διακριθώ αλλά δε με τρόμαζε και η ιδέα μιας αποτυχίας. Ο χαρακτήρας των Μαθηματικών Διαγωνισμών είναι τέτοιος που ενώ αναδεικνύει τους νικητές δεν θεωρείται κάτι αρνητικό μια πιθανή αποτυχία. Και μόνο η συμμετοχή έχει αξία*» (Ολυμπιονίκης 21).

«*…πιστεύω ότι συμμετέχοντας σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς (όταν αγαπάς τα Μαθηματικά) έχεις μόνο να κερδίσεις. Άν διακριθείς καλώς, αν δεν διακριθείς δε χάνεις τίποτα. Θα έλεγα μάλιστα ότι έχεις ζήσει μια σημαντική εμπειρία πνευματικού συναγωνισμού και άμιλλας και να επανέλθεις έχοντας δουλέψει περισσότερο την επόμενη χρονιά*» (Ολυμπιονίκης 23).
«*…το έκανα με μεγάλη χαρά και με έντονη επιθυμία για διάκριση…*» (Ολυμπιονίκης 24).

«*Η συμμετοχή μου σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς ήταν μια ευκαιρία να δοκιμάσω τις δυνάμεις μου σε δύσκολα μαθηματικά προβλήματα. Θα έλεγα ότι ήταν μια μοναχική απόφαση. Οι διακρίσεις όμως μου αύξησαν την αυτοπεποίθηση και έκαναν την οικογένειά μου και τον κοινωνικό περίγυρο να δουν θετικά την ενασχόλησή μου με τα Μαθηματικά*» (Ολυμπιονίκης 25).

«*…μετά τις πρώτες επιτυχίες και διακρίσεις άρχισα να ασχολούμαι πιο συστηματικά*» (Ολυμπιονίκης 26).

Από τα ανωτέρω καθώς επίσης από τη μελέτη των συνεντεύξεων φαίνεται ότι οι Ολυμπιονίκες ως μαθητές συμμετείχαν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς έχοντας αυτοπεποίθηση και πίστη στις δυνάμεις τους. Μεταξύ των παραγόντων που τους ώθησαν σε αυτή τη συμμετοχή ήταν η υποστήριξη και παρότρυνση από το οικογενειακό και σχολικό περιβάλλον καθώς επίσης η επιθυμία τους για διάκριση.

6.6 Επίδραση των Μαθηματικών Διαγωνισμών στη σχέση με τα Μαθηματικά

Ένας άλλος στόχος της παρούσας έρευνας ήταν να εξετάσει εάν η ενασχόληση των ολυμπιονικών με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς επηρέασε τη σχέση τους με τα Μαθηματικά.

Από τις συνεντεύξεις φάνηκε σε μεγάλο βαθμό ότι υπήρχε θετική σχέση. Καταρχήν φάνηκε ότι οι ολυμπιονίκες ως μαθητές απέκτησαν ακόμα πιο θετικές στάσεις απέναντι στα μαθηματικά και ήθελαν να τα μελετούν περισσότερο. Αυτό για παράδειγμα φαίνεται από τις ακόλουθες απαντήσεις:

«*Η συμμετοχή στους Διαγωνισμούς θεωρώ ότι με έφερε ακόμα πιο κοντά στα Μαθηματικά. Στην προσπάθειά μου για καλύτερες επιδόσεις διάβαζα όλο και πιο πολύ με αποτέλεσμα να εμβαθύνω στα Μαθηματικά και να μαγεύομαι από αυτά. Τα πολύ δύσκολα προβλήματα που καλείσαι να λύσεις κάθε φορά σε αναγκάζουν να ενεργοποιείς τις δυνάμεις σου και πολλές φορές πρέπει να παράγεις κάτι καινούργιο για να φθάσεις στην επίλυση*» (Ολυμπιονίκης 1).

«*Όσο ασχολιόμουν με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς τόσο περισσότερο αγαπούσα τα Μαθηματικά. Προσπαθώντας να λύσεις τα προβλήματα των Μαθηματικών Διαγωνισμών ανακαλύπτεις έναν πολύ γοητευτικό κόσμο που σε κάνει να θέλεις να τον γνωρίσεις όλο και πιο βαθιά*» (Ολυμπιονίκης 2).

«*Τα Μαθηματικά του σχολείου έχουν σίγουρα την ομορφιά τους αλλά από ένα σημείο και μετά μου φαίνονταν λίγο βαρετά. Πιστεύω ότι τα Μαθηματικά είναι ωραία γιατί είναι δύσκολα. Στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς γνωρίζεις προβλήματα που για να τα λύσεις πρέπει να σκεφθείς με εντελώς πρωτότυπο τρόπο. Η λύση των προβλημάτων των Μαθηματικών Διαγωνισμών σε οδηγεί να*

γίνεις ερευνητής και να θέτεις συνέχεια μεγαλύτερους στόχους. Η δυσκολία τους σε προσγειώνει και σε αποτρέπει από συμπεριφορές αλαζονικές (τα ξέρω όλα). Ήταν μεγάλη χαρά για μένα όταν άρχισα να κατασκευάζω προβλήματα κατάλληλα για Μαθηματικούς Διαγωνισμούς» (Ολυμπιονίκης 3).

«*Κάθε συμμετοχή σε Μαθηματικό Διαγωνισμό αύξανε την αγάπη μου για τα Μαθηματικά. Ένα άριστα σε σχολική εξέταση ήταν για μένα συνήθως κάτι εύκολο. Στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς κάτι πολύ πιο δύσκολο μα συνάμα ελκυστικό. Προσπαθώντας να λύσεις προβλήματα Ολυμπιάδων νοιώθεις το μεγαλείο των Μαθηματικών. Συνειδητοποιείς πόσα πράγματα δεν ξέρεις και προσπαθείς όχι μόνο να μάθεις κάποια θεωρία αλλά και να βρεις τρόπους επίλυσης πέρα από καθιερωμένες τεχνικές*» (Ολυμπιονίκης 4).

«*Ήταν μια ευκαιρία να δοκιμάσω τις δυνάμεις μου σε δύσκολα μαθηματικά προβλήματα. Με τις επιτυχίες που είχα αυτό το 'παιχνίδι' με έκανε να αγαπήσω ακόμα περισσότερο τα Μαθηματικά. Σίγουρα οι επιτυχίες σε οδηγούν να βάζεις όλο και υψηλότερους στόχους που θα επιτευχθούν με μεγαλύτερη προσπάθεια*» (Ολυμπιονίκης 11).
«*Με έκαναν να αγαπήσω ακόμα περισσότερο τα Μαθηματικά. Συνειδητοποίησα ότι ομορφιά και δυσκολία συμβαδίζουν*» (Ολυμπιονίκης 22).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό που απορρέει από τις συνεντεύξεις είναι η βελτίωση του τρόπου σκέψης των ολυμπιονικών ως μαθητών αλλά και η διαμόρφωση της προσωπικότητάς τους, όπως ενίσχυση της αυτοπεποίθησης. Ενδεικτικές είναι οι ακόλουθες απαντήσεις:

«*Η συμμετοχή μου σε κάθε Μαθηματικό Διαγωνισμό ήταν για μένα μια πρόκληση να βελτιώνομαι συνεχώς...*» (Ολυμπιονίκης 5).
«*Μετά από κάθε συμμετοχή μου σε Μαθηματικό Διαγωνισμό ένοιωθα αφ' ενός μεν ότι ωρίμαζε η μαθηματική μου σκέψη και αφ' ετέρου συνειδητοποιούσα πόσα πράγματα είχα ακόμα να μάθω. Οι επιτυχίες και οι αποτυχίες με έφερναν όλο και πιο κοντά στα Μαθηματικά*» (Ολυμπιονίκης 6).

«*Οι επιτυχίες μου στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς μου ανέβαζαν την αυτοπεποίθηση και έβαζα συνέχεια μεγαλύτερους στόχους. Κάποιες αποτυχίες βέβαια μου υπενθύμιζαν τις δυσκολίες των Μαθηματικών και πόση δουλειά ακόμη πρέπει να κάνω. Σε κάθε περίπτωση όμως συνειδητοποιούσα το μεγαλείο των Μαθηματικών με αποτέλεσμα «να κολλάω» και να θέλω να ασχολούμαι περισσότερο*» (Ολυμπιονίκης 7).

«*Συμμετέχοντας στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς γνώρισα την ουσία των Μαθηματικών. Ένας ασυνήθιστος τρόπος σκέψης και οι καινούργιες ιδέες που πρέπει να επινοήσεις κάνουν τη λύση ενός προβλήματος Ολυμπιάδας μια δημιουργία. Μετά από κάθε επιτυχημένη συμμετοχή μου γινόταν έμμονη ιδέα η επόμενη διάκριση. Αυτό βέβαια για μένα σήμαινε περισσότερη προσπάθεια που την έκανα με πολλή μεγάλη όρεξη κάθε φορά*» (Ολυμπιονίκης 8).

«*Η συμμετοχή μου και μάλιστα με επιτυχία σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς μου ανέβασε την αυτοπεποίθηση και συνειδητοποίησα ότι με πολλή μεγάλη προσπάθεια μπορώ να γίνω καλύτερος. Οι δυσκολίες που αντιμετώπισα με πείσμωναν με αποτέλεσμα μέσα από τη μελέτη να συνειδητοποιώ το μεγαλείο των Μαθηματικών. Τα σχολικά Μαθηματικά τα αντιμετώπιζα με μεγάλη ευκολία και η συμμετοχή μου στις εξετάσεις ήταν πια μια τυπική διαδικασία*» (Ολυμπιονίκης 9).

«*Οπωσδήποτε η συμμετοχή μου σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς μ' έκανε να γνωρίσω έναν υπέροχο κόσμο αχανή που σε προκαλούσε να τον εξερευνήσεις. Έχοντας από μικρή ηλικία προχωρήσει στη σχολική ύλη, χαιρόμουν αφ' ενός μεν να ασχολούμαι με τη μελέτη περισσότερων μαθηματικών εννοιών και αφ' ετέρου να προσπαθώ να λύνω προβλήματα, των οποίων η λύση δεν απαιτούσε τη γνώση κάποιου θεωρήματος αλλά στοιχειώδεις γνώσεις σε συνδυασμό με εφευρετικότητα*» (Ολυμπιονίκης 10).
«*… Θεωρώ ότι η πολύ καλή σχέση που ήδη είχα με τα Μαθηματικά βελτιώθηκε σε σημαντικό βαθμό. Με ακόμα μεγαλύτερη χαρά ήθελα να μαθαίνω όσο το δυνατόν περισσότερα*» (Ολυμπιονίκης 12).

«*… Η συμμετοχή μου με έκανε να αγαπήσω τα Μαθηματικά ακόμα περισσότερο. Ασχολιόμουν με αυτά πάρα πολλές ώρες με πολύ μεγάλο κέφι. Θεωρώ βέβαια ως λάθος μου ότι παραμέρισα άλλες δραστηριότητες κυρίως κοινωνικές*» (Ολυμπιονίκης 14).

«*Η αγάπη για τα Μαθηματικά μεγάλωσε ακόμα περισσότερο όταν συμμετείχα από την ε΄ δημοτικού σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Οι επιτυχίες αλλά και οι αποτυχίες με έφερναν όλο και πιο κοντά στα Μαθηματικά. Πιστεύω ότι τα Μαθηματικά μέσω των διαγωνισμών επέδρασσαν καθοριστικά στην διαμόρφωση της προσωπικότητάς μου*» (Ολυμπιονίκης 17).

«*Θεωρώ ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί βοήθησαν στην εξέλιξη της μαθηματικής μου σκέψης …*» (Ολυμπιονίκης 22).

«*Πιστεύω ότι ήταν σημαντικοί οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί στη σχέση μου με τα Μαθηματικά. Με έφεραν πιο κοντά σε πολλά ελκυστικά και ενδιαφέροντα πράγματα που με οδηγούσαν στο να θέλω να ασχολούμαι ακόμα περισσότερο*» (Ολυμπιονίκης 26).

Ένα άλλο στοιχείο που φάνηκε από τις συνεντεύξεις ήταν ότι η ενασχόληση των μαθητών με τους μαθηματικούς διαγωνισμούς τους ώθησε στην απόφαση να ασχοληθούν επαγγελματικά με την επιστήμη των μαθηματικών. Ενδεικτικές είναι οι ακόλουθες απαντήσεις:

«*... Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί μου άλλαξαν την ιδέα για τα Μαθηματικά. Η αγάπη και ευχαρίστηση που έδινε η μελέτη των Μαθηματικών έγινε πάθος. Συνειδητοποίησα ότι θέλω να γίνω Μαθηματικός*» (Ολυμπιονίκης 13).

«*Πιστεύω ότι η ενασχόληση με τους διαγωνισμούς με έκανε ν΄ αγαπήσω τα Μαθηματικά , γιατί πριν τους διαγωνισμούς δεν σκεφτόμουν να σπουδάσω Μαθηματικά αλλά κάποια άλλη εφαρμοσμένη θετική επιστήμη π.χ. σχολές Πολυτεχνείου ή Πληροφορική. Ωστόσο η επαφή μου με τους διαγωνισμούς στο λύκειο μ' έκανε ν' αλλάξω γνώμη και να στραφώ στα Μαθηματικά*» (Ολυμπιονίκης 18).

«*Με έφερε πολύ πιο κοντά στα Μαθηματικά η ενασχόλησή μου με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς με αποτέλεσμα να αποφασίσω οριστικά ότι θα σπουδάσω Μαθηματικά. Άρα μπορώ να πω ότι ήταν*

καθοριστική η συμβολή των διαγωνισμών στη σχέση με τη επιστήμη των Μαθηματικών» (Ολυμπιονίκης 19).

«*Ήταν καθοριστική η επιρροή των Μαθηματικών Διαγωνισμών στη σχέση μου με τα Μαθηματικά. Μελετώντας πολύ στην προσπάθειά μου να επιτύχω διακρίσεις ανακάλυπτα έναν υπέροχο κόσμο που με καλούσε να τον εξερευνήσω και το έκανα πολύ ευχάριστα. Θεωρώ επίσης ότι ως ένα βαθμό μπήκα και σε μια πρώτη μορφή έρευνας, πολύτιμη σαν εμπειρία στη μετέπειτα πορεία μου*» (Ολυμπιονίκης 20).

«*Θεωρώ ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί μ' έκαναν να αγαπήσω ακόμα περισσότερο τα Μαθηματικά. Με ώθησαν να μελετάω με πολλή ευχαρίστηση τα Μαθηματικά σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό απ' ότι προηγουμένως. Οι επιτυχίες μου αύξαναν την αυτοπεποίθηση αλλά και την επιθυμία να γνωρίσω σε πιο μεγάλη έκταση τα Μαθηματικά*» (Ολυμπιονίκης 21).

«*Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί πιστεύω ότι με έκαναν να γνωρίσω την ουσία των Μαθηματικών που είναι η επίλυση προβλημάτων που ξεφεύγουν από την εφαρμογή τυποποιημένων διαδικασιών. Είναι μια διαδικασία που σε κάνει έναν δυνάμει ερευνητή. Στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς δεν είσαι ποτέ σίγουρος για την επιτυχία. Αυτό σε οδηγεί να προσπαθείς και να μελετάς ακόμα περισσότερο*» (Ολυμπιονίκης 23).

«*Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί επηρέασαν σε σημαντικό βαθμό τη σχέση μου με τα Μαθηματικά. Με οδήγησαν να μελετάω σε βάθος και να αναζητώ και διαφορετικές λύσεις στα προβλήματα. Η ομορφιά των προβλημάτων παράλληλα με την πολύ μεγάλη δυσκολία τους με συνέπαιρνε. Συνειδητοποίησα ότι η σπουδή των Μαθηματικών θέλει βαθιά μελέτη αλλά και έμπνευση. Δεν πρέπει να απογοητεύεσαι στις δυσκολίες και να είσαι μαχητής*» (Ολυμπιονίκης 24).

«*Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί με βοήθησαν να συνειδητοποιήσω το μεγαλείο των Μαθηματικών. Προσπαθώντας να λύσω τα δύσκολα αυτά προβλήματα των οποίων οι λύσεις συνήθως απαιτούν στοιχειώδεις και βασικές γνώσεις των Μαθηματικών, μελετούσα και πανεπιστημιακά Μαθηματικά με στόχο να διευρύνω τις γνώσεις μου με συνέπεια να ανακαλύπτω συνεχώς πράγματα που με συνάρπαζαν. Αποφάσισα οριστικά να γίνω μαθηματικός*» (Ολυμπιονίκης 25).

Από τα ανωτέρω φάνηκε ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί είχαν θετική επίδραση στους ολυμπιονίκες ως μαθητές στη σχέση τους με τα Μαθηματικά. Ειδικότερα φάνηκε από τις συνεντεύξεις τους η μεγαλύτερη ενασχόληση με τα Μαθηματικά αλλά και η επίδραση που είχε στην προσωπικότητά τους όπως για παράδειγμα η ενίσχυση της αυτοπεποίθησής τους.

6.7 Επίδραση Μαθηματικών Διαγωνισμών στην ερευνητική πορεία των ολυμπιονικών

Από την ανάλυση των συνεντεύξεων φάνηκε επίσης ότι οι μαθηματικοί διαγωνισμοί επηρέασαν την ερευνητική πορεία των ολυμπιονικών. Τα ακόλουθα αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις τους δείχνουν αυτή την επίδραση.

«*Ήταν πολύ σημαντική η επιρροή των Μαθηματικών Διαγωνισμών στην ερευνητική μου πορεία. Η προσπάθεια να λύσεις ένα δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα έχει κάποια κοινά στοιχεία με την έρευνα. Υπάρχουν στιγμές που δυσκολεύεσαι πολύ που σε οδηγούν να σκεφθείς με εντελώς διαφορετικό τρόπο για να παράγεις νέες ιδέες. Οι επιτυχίες που είχα μου αύξησαν την αυτοπεποίθηση που είναι απαραίτητη για την ενασχόληση με την έρευνα*» (Ολυμπιονίκης 1).

«*Θεωρώ ότι ασχολούμενος με Μαθηματικούς Διαγωνισμούς έχεις μπει ήδη σε μία ερευνητική πορεία ανεξάρτητα από την επιστήμη που θα ακολουθήσεις μετά. Όπως π.χ. εγώ που έχω σπουδάσει πολιτικός μηχανικός*» (Ολυμπιονίκης 2).

«*Μέσω των Μαθηματικών Διαγωνισμών πιστεύω ότι μπήκα στον κόσμο της έρευνας. Η διάκρισή μου συντέλεσε σημαντικά στο να γίνω δεκτός στο Πανεπιστήμιο του εξωτερικού στο οποίο φοιτώ. Ελπίζω να συνεχίσω να ασχολούμαι ερευνητικά με τα Μαθηματικά που είναι και η επιλογή μου*» (Ολυμπιονίκης 3).

«*Ήταν καθοριστική για τη συμμετοχή μου σε έρευνα η συμμετοχή μου σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Υπάρχουν βέβαια διαφορές*

όπως π.χ. ότι ένα πρόβλημα Μαθηματικού Διαγωνισμού έχει λύση ενώ στην έρευνα βαδίζεις στο άγνωστο. Υπάρχουν όμως και πολλά κοινά στοιχεία αφού η λύση ενός προβλήματος Μαθηματικού Διαγωνισμού προϋποθέτει πολλές φορές ανορθόδοξους τρόπους σκέψης» (Ολυμπιονίκης 4).

«*Το αντικείμενο της έρευνάς μου είναι η Ιατρική. Θεωρώ όμως ότι τα Μαθηματικά και οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί με έχουν επηρεάσει σημαντικά. Στο βιογραφικό μου πάντοτε αναφέρω τις διακρίσεις μου στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Πιστεύω ότι αυτό είναι σημαντικό στοιχείο της προσωπικότητάς μου μιας και η ενασχόληση με αυτούς μου άνοιξε το δρόμο προς την έρευνα*» (Ολυμπιονίκης 5).

«*Με βοήθησε πάρα πολύ η συμμετοχή μου στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς στην ερευνητική μου πορεία. Στην έρευνα βέβαια δεν έχεις χρονικούς περιορισμούς, ούτε είσαι βέβαιος για την αλήθεια αυτού που θέλεις να αποδείξεις. Όμως σχεδόν κάθε πρόβλημα Ολυμπιάδας για να λυθεί θέλει και μια μικρή έρευνα*» (Ολυμπιονίκης 6).

«*Από τη φύση τους οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί σε οδηγούν στην έρευνα ανεξάρτητα με το τι σπουδάζεις. Η δική μου πορεία δεν αποτελεί εξαίρεση και πιστεύω ότι τελειώνοντας το Πολυτεχνείο θα συνεχίσω να ασχολούμαι ερευνητικά πάνω στο αντικείμενο των σπουδών μου*» (Ολυμπιονίκης 7).

«*Θεωρώ ότι συμμετέχοντας στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς είχα μπει ήδη στον κόσμο της έρευνας. Στο Μεταπτυχιακό μου συνειδητοποίησα για μια ακόμα φορά πόσο είχα βοηθηθεί. Υπάρχουν βέβαια διαφορές όπως η έλλειψη χρονικών περιορισμών, η αβεβαιότητα για αυτό που ψάχνεις, αλλά και η*

εξειδίκευση σε ένα συγκεκριμένο αντικείμενο των Μαθηματικών» (Ολυμπιονίκης 8).

«*Η συμμετοχή μου σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς καθώς και οι επιτυχίες μου σε αυτούς θεωρώ ότι αφενός μεν υπήρξε βασικό προσόν για την επιλογή μου σε Πανεπιστήμιο του εξωτερικού, όσο και για τη δική μου πορεία στην έρευνα. Η μαθηματική σκέψη και η ενασχόληση με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς με έχουν βοηθήσει σημαντικά στην έρευνα στο χώρο της Πληροφορικής*» (Ολυμπιονίκης 9).

«*Επειδή στην έρευνα δεν έχεις χρονικούς περιορισμούς αλλά ούτε τη βεβαιότητα γι' αυτό που θέλεις να αποδείξεις, θεωρώ ότι η συμβολή των Μαθηματικών Διαγωνισμών ήταν σχετικά μικρή. Παρ' όλα αυτά η προσπάθεια που κάνεις να λύσεις δύσκολα προβλήματα Ολυμπιάδων σε βάζει σε μια διαδικασία ψαξίματος ειδικά όταν είσαι μαθητής που δεν μπορείς να ασχοληθείς με την έρευνα*» (Ολυμπιονίκης 10).

«*Θεωρώ ότι η συμμετοχή μου και η επιτυχία που είχα στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς με έχουν βοηθήσει να ασχοληθώ με την έρευνα μετά τις σπουδές στο Πολυτεχνείο. Παρ' ότι το αντικείμενο της έρευνας δεν είναι τα Μαθηματικά, εντούτοις η μαθηματική σκέψη υπάρχει παντού*» (Ολυμπιονίκης 11).

«*Θεωρώ ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί έχουν καθοριστική επιρροή στην ερευνητική μου πορεία. Όσο και να διαφέρει ο τρόπος εργασίας της έρευνας από τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς, η ενασχόληση με προβλήματα Ολυμπιάδων από μικρή ηλικία πιστεύω ότι σε οδηγούν κατευθείαν στην έρευνα*» (Ολυμπιονίκης 12).

«*Η εμπλοκή μου με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς και οι επιτυχίες που είχα σ' αυτούς πιστεύω ότι με οδήγησαν στο να κάνω έρευνα στα Μαθηματικά. Δε νομίζω ότι θα μπορούσα να ασχοληθώ*

με οτιδήποτε άλλο. Η επιθυμία μου για διάκριση στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς έχει εξελιχθεί σ' ένα πάθος για την έρευνα» (Ολυμπιονίκης 13).

«*Με επηρέασαν σημαντικά. Μου αρέσουν οι προκλήσεις. Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί με προκάλεσαν να ασχοληθώ με δύσκολα μαθηματικά προβλήματα που πιστεύω ότι ήταν το πρώτο βήμα για ενασχόληση με την έρευνα*» (Ολυμπιονίκης 14).

«*Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί σε προκαλούν να μπεις στα βαθιά νερά. Ξεφεύγεις από τη λύση απλών προβλημάτων. Χρειάζεται να βρεις πρωτότυπες ιδέες. Αυτό είναι ιδιαίτερα συμβατό με την έρευνα. Για το λόγο αυτό πιστεύω ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί με οδήγησαν στην έρευνα. Σημειώνω ότι χρησιμοποίησα μια ιδέα από ένα πρόβλημα Ολυμπιάδων στη Διπλωματική μου*» (Ολυμπιονίκης 15).
«*Πιστεύω ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί σε οδηγούν στην έρευνα. Ένοιωθα μεγάλη χαρά όταν στην προσπάθειά μου να λύσω δύσκολα προβλήματα ανακάλυπτα ιδέες που άνοιγαν νέους δρόμους στις σκέψεις μου. Όταν βέβαια κάνεις έρευνα δεν είσαι σίγουρος για το αποτέλεσμα, κάτι που συμβαίνει σ' ένα μαθηματικό πρόβλημα που είναι θέμα διαγωνισμού*» (Ολυμπιονίκης 16).

«*Θεωρώ τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς ένα δρόμο που σε οδηγεί στην έρευνα. Έχοντας ασχοληθεί από πολύ μικρός με αυτούς νομίζω ότι κάθε θέμα Μαθηματικού Διαγωνισμού είναι μια μικρή έρευνα*» (Ολυμπιονίκης 17).

«*Η συναναστροφή με άλλους μαθητές, με παρόμοια κλίση στα Μαθηματικά, μέσω των διαγωνισμών, έχει θετικό αποτέλεσμα και δίνει τη δυνατότητα για εποικοδομητικές συζητήσεις σε μαθηματικά προβλήματα. Χωρίς τους διαγωνισμούς αυτό είναι δύσκολο, γιατί δύσκολα θα βρεθούν αυτά τα παιδιά μαζί ιδίως σ' αυτές τις ηλικίες. Οι διαγωνισμοί σίγουρα βοηθούν την καλλιέργεια της μαθηματικής σκέψης η οποία είναι χρήσιμη σε κάθε επιστημονικό τομέα. Όσον αφορά την έρευνα αυτή καθαυτή, οι*

διαγωνισμοί δίνουν ένα προβάδισμα στο πρώτο-δεύτερο έτος του προπτυχιακού, αλλά από εκεί και πέρα δεν συμβάλλουν στην περαιτέρω ερευνητική εξέλιξη η οποία εξαρτάται κυρίως από τη μελέτη σε βάθος των Μαθηματικών» (Ολυμπιονίκης 18).

«*Πιστεύω ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί σε οδηγούν στην έρευνα. Η φύση των προβλημάτων σε κάνει να ψάχνεις ιδέες πέρα από τις συνηθισμένες, κάτι που είναι απαραίτητο και στην έρευνα. Στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς βέβαια υπάρχει χρονικός περιορισμός και η σιγουριά ότι το πρόβλημα έχει λύση*» (Ολυμπιονίκης 19).

«*Ως ένα βαθμό με έχουν βοηθήσει οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί αφού η λύση ενός «ολυμπιακού» προβλήματος σε οδηγεί σε μια μικρή έρευνα. Υπάρχουν όμως και μεγάλες διαφορές. Η έρευνα δεν έχει τους χρονικούς περιορισμούς που έχει ένας Μαθηματικός Διαγωνισμός, ούτε και τη σιγουριά ότι το πρόβλημα που προσπαθείς να λύσεις έχει λύση. Σε κάποιες περιπτώσεις στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς διαπίστωσα ότι αναπτύσσεται και ένας αρνητικός ανταγωνισμός*» (Ολυμπιονίκης 20).

«*Θεωρώ ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί ήταν η πρώτη μου επαφή με την έρευνα. Όταν προσπαθείς να λύσεις ένα δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα αναγκάζεσαι να βρεις καινούριες διαδρομές στη σκέψη σου, που θα σε οδηγήσουν στη λύση. Αυτό πιστεύω σε παρακινεί να μπεις στην περιπέτεια της έρευνας*» (Ολυμπιονίκης 21).

«*Πιστεύω ότι ασχολούμενος με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς έχω κάνει τα πρώτα βήματα στο μακρύ ταξίδι της έρευνας. Η χαρά που νοιώθω μετά τη λύση ενός πολύ δύσκολου μαθηματικού προβλήματος νομίζω ότι έχει αρκετά κοινά στοιχεία με την*

ερευνητική προσπάθεια, χωρίς να παραβλέπω όμως την αβεβαιότητα που κρύβει η έρευνα» (Ολυμπιονίκης 22).

«*Νομίζω ότι ασχολήθηκα με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς επειδή μου αρέσει να ερευνώ και μου αρέσει να ανακαλύπτω καινούρια πράγματα στα Μαθηματικά. Είναι βέβαια πολύ νωρίς να θεωρώ τον εαυτό μου ερευνητή, ελπίζω όμως να επιτύχω στον τομέα αυτό*» (Ολυμπιονίκης 23).

«*Θεωρώ ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί είναι ο προθάλαμος για τη Μαθηματική έρευνα. Η ενασχόληση μ' αυτούς μου ενίσχυσε την αυτοπεποίθηση και μου αύξησε τη διάθεση να ψάξω για πράγματα πέρα από τη λύση ενός πάρα πολύ δύσκολου μαθηματικού προβλήματος που όμως γνωρίζουμε ότι υπάρχει λύση*» (Ολυμπιονίκης 24).

«*Οι επιτυχίες στους Μαθηματικούς διαγωνισμούς μου αύξησαν σε σημαντικό βαθμό την αυτοπεποίθηση και με οδηγούν στο επόμενο βήμα που είναι η έρευνα. Ασχολούμενος με προβλήματα Μαθηματικών Διαγωνισμών χωρίς όμως χρονικούς περιορισμούς είχα το περιθώριο να ψάχνω και άλλες περιοχές των Μαθηματικών που ήταν μια εξαιρετικά γοητευτική αναζήτηση*» (Ολυμπιονίκης 25).

«*Μέσα από τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς πιστεύω ότι ήρθα σε μια πρώτη επαφή με την έρευνα. Πέρα από τη λύση προβλημάτων Μαθηματικών Διαγωνισμών μου αρέσει να κατασκευάζω μαθηματικά προβλήματα μέσα από διαφορετικές ιδέες που προέκυπταν στην προσπάθειά μου να λύσω μια άσκηση. Μόλις έχω αρχίσει να ασχολούμαι με έρευνα, θεωρώ όμως ότι η εμπλοκή μου στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς θα με βοηθήσει*» (Ολυμπιονίκης 26).

Από τα ανωτέρω φαίνεται ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί διαμόρφωσαν την ερευνητική πορεία των ολυμπιονικών αλλά και την επαγγελματική τους εξέλιξη. Ιδιαίτερη ήταν η συμβολή των διαγωνισμών στη επιλογή της ερευνητικής κατεύθυνσης των ολυμπιονικών και ιδίως στα πρώτα χρόνια των προπτυχιακών ή μεταπτυχιακών τους σπουδών.

6.8 Σημερινή ενασχόληση με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς

Η παρούσα έρευνα εξέτασε κατά πόσο σήμερα οι ολυμπιονίκες ασχολούνται με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Σύμφωνα με τις απαντήσεις τους, 10 δεν ασχολούνται καθόλου. Αυτό όπως φαίνεται από τις ακόλουθες ενδεικτικές τους απαντήσεις οφείλεται στην έλλειψη χρόνου.

«*Όσο ήμουν φοιτητής παρακολουθούσα τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Τα τελευταία όμως χρόνια έχω αφοσιωθεί στην έρευνα στα πλαίσια του διδακτορικού μου*» (Ολυμπιονίκης 1).

«*Στο πρώτο και το δεύτερο έτος ασχολιόμουν ως ένα βαθμό με τα θέματα των διαγωνισμών. Τώρα όμως ασχολούμαι με τις σπουδές μου στο Πολυτεχνείο αφού μετά τις σπουδές μου θα εργασθώ στην οικογενειακή επιχείρηση*» (Ολυμπιονίκης 2).

«*Όταν πέρασα στο Πανεπιστήμιο μου άρεσε να παρακολουθώ τα θέματα των διαγωνισμών. Μετά την αποφοίτησή μου και στα πλαίσια των μεταπτυχιακών σπουδών δεν προλαβαίνω να ασχοληθώ αφού έχω αφοσιωθεί στην έρευνα*» (Ολυμπιονίκης 13).

«*Δεν έπαψα ποτέ να ασχολούμαι με τους Διαγωνισμούς, κυρίως ως φοιτητής. Τώρα πια μ' ενδιαφέρει η έρευνα στη θεωρία αριθμών και οι εφαρμογές της στην ψηφιακή φωτογραφία*» (Ολυμπιονίκης 14).

«*Δεν ασχολούμαι ιδιαίτερα πια, με εξαίρεση ίσως τα πρώτα φοιτητικά μου χρόνια*» (Ολυμπιονίκης 17).

«*Όχι πλέον λόγω έλλειψης χρόνου, απόστασης από την Ελλάδα και των οικογενειακών υποχρεώσεων. Ωστόσο ασχολήθηκα κατά διαστήματα στο παρελθόν με τους διαγωνισμούς και την προετοιμασία των Μαθηματικών ομάδων*» (Ολυμπιονίκης 18).

«*Στις αρχές της φοιτητικής μου ζωής ασχολιόμουν, τώρα όμως τα έχω αφήσει γιατί έχω απορροφηθεί από τις επαγγελματικές μου δραστηριότητες*» (Ολυμπιονίκης 21).

«*Στα πρώτα φοιτητικά μου χρόνια παρακολουθούσα τα θέματα των Μαθηματικών Διαγωνισμών και μερικές φορές μου άρεσε να λύνω και ασκήσεις. Τώρα πια δεν ασχολούμαι ιδιαίτερα*» (Ολυμπιονίκης 23).

«*Στα πρώτα φοιτητικά μου χρόνια μου άρεσε να λύνω θέματα των Διαγωνισμών για να συντηρώ τις γνώσεις που είχα αποκτήσει. Τώρα πια όμως δεν ασχολούμαι ιδιαίτερα*» (Ολυμπιονίκης 24).

«*Ασχολήθηκα πολύ χαλαρά τα πρώτα φοιτητικά μου χρόνια. Στη συνέχεια όμως έχω αφοσιωθεί στις σπουδές μου*» (Ολυμπιονίκης 25).

Εννέα ολυμπιονίκες ασχολούνται περιστασιακά όπως φαίνεται από τις ακόλουθες απαντήσεις τους.

«*Ασχολούμαι με Μαθηματικούς Διαγωνισμούς όσο μου επιτρέπει ο χρόνος αντιμετωπίζοντάς τους πια σαν παιχνίδι*» (Ολυμπιονίκης 3).

«*Όταν ήμουν προπτυχιακός φοιτητής στο ΕΜΠ συμμετείχα σε φοιτητικούς διαγωνισμούς Μαθηματικών με επιτυχία. Μετά την απόκτηση του πτυχίου παρακολουθώ περιστασιακά θέματα Μαθηματικών Διαγωνισμών*» (Ολυμπιονίκης 4).

«*Κατά τη διάρκεια των σπουδών μου στην Ιατρική στον ελεύθερο χρόνο μου «έπαιζα» με θέματα Διαγωνισμών. Όσο βέβαια περνάει ο καιρός ασχολούμαι λιγότερο*» (Ολυμπιονίκης 5).

«*Ασχολούμαι περιστασιακά με Διαγωνισμούς, πιο πολύ σαν παιχνίδι*» (Ολυμπιονίκης 7).

«*Όχι ιδιαίτερα. Σκέφτομαι όμως να γράψω ένα βιβλίο για μικρά παιδιά που θα έχει σχέση με γρίφους, αλγορίθμους και τεχνολογία*» (Ολυμπιονίκης 9). «*Τα πρώτα χρόνια της φοιτητικής μου ζωής ασχολιόμουν αρκετά. Σιγά σιγά όμως ασχολούμαι μόνο περιστασιακά*» (Ολυμπιονίκης 11).

«*Δεν ασχολούμαι ιδιαίτερα, απλώς κάπου κάπου παρακολουθώ τα θέματα των ελληνικών και ξένων διαγωνισμών*» (Ολυμπιονίκης 12).

«*Εξακολουθούν να μ' ενδιαφέρουν, δε δίνω όμως τώρα πια ιδιαίτερη βαρύτητα γιατί ασχολούμαι με τις σπουδές μου*» (Ολυμπιονίκης 22).

Επτά ολυμπιονίκες ασχολούνται περισσότερο, σύμφωνα με τις ακόλουθες απαντήσεις τους.

«*Στη διάρκεια της φοιτητικής μου ζωής ασχολιόμουν πάρα πολύ. Ακόμα και τώρα, ως μεταπτυχιακός φοιτητής, ασχολούμαι αρκετά*» (Ολυμπιονίκης 6).

«*Δε σταμάτησα ποτέ να ασχολούμαι με Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Εξακολουθεί να είναι για μένα ένα πολύ ενδιαφέρον πνευματικό παιχνίδι*» (Ολυμπιονίκης 8).

«*Δε σταμάτησα ποτέ να ασχολούμαι με Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Ακόμα και τώρα ασχολούμαι ενεργά και μάλιστα συμμετέχω στην προετοιμασία της ελληνικής ομάδας*» (Ολυμπιονίκης 10).

«*Οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί εξακολουθούν να μ' ενδιαφέρουν, όχι πια για πρωταθλητισμό αλλά σαν χόμπι*» (Ολυμπιονίκης 15).

«*Η ενασχόλησή μου με Μαθηματικούς Διαγωνισμούς έχει πια περιοριστεί στο να παρακολουθώ τα θέματα και κάπου κάπου να λύνω κάποιες ασκήσεις*» (Ολυμπιονίκης 16).

«*Εξακολουθώ να ασχολούμαι πιο πολύ με στόχο την προσωπική μου ευχαρίστηση*» (Ολυμπιονίκης 19).

«*Εξακολουθώ να ασχολούμαι διότι είναι διασκεδαστικό*» (Ολυμπιονίκης 20).

«*Εξακολουθώ να ασχολούμαι ενημερωνόμενος για θέματα που τίθενται σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς και κάπου κάπου κατασκευάζω και ο ίδιος θέματα. Παράλληλα έχω συμμετάσχει με επιτυχία σε φοιτητικούς διαγωνισμούς Μαθηματικών*» (Ολυμπιονίκης 26).

Από τα ανωτέρω φαίνεται ότι ένας σημαντικός αριθμός ολυμπιονικών έχει επαφή ακόμη με τους Μαθηματικούς διαγωνισμούς είτε άμεσα είτε έμμεσα. Τόσο από τις συνεντεύξεις τους όσο και με την επικοινωνία που υπήρχε με αυτούς πριν και μετά τη συνέντευξη φάνηκε ότι η περιορισμένη ενασχόληση σήμερα με τους διαγωνισμούς δεν οφείλεται στην έλλειψη αγάπης για αυτούς και τα Μαθηματικά αλλά κυρίως στην έλλειψη χρόνου.

Κεφάλαιο 7ο. Συμβολή των Διαγωνισμών στα Μαθηματικά στη διαμόρφωση του περιεχομένου του αναλυτικού προγράμματος των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.

7.1 Γενικά

Εκτιμώντας τα αποτελέσματα των ερευνών καθώς και την πολυετή εμπειρεία της διδασκαλίας σε χαρισματικά παιδιά, προτείνουμε παρακάτω κάποιες τροποποιήσεις στην Διδακτέα Ύλη των μαθηματικών.

Οι τροποποιήσεις αυτές έχουν δύο στόχους:

1) Τη γενική αναβάθμιση της μαθηματικής παιδείας ,

2) Την καλύτερη διαχείριση (ανακάλυψη-εξέλιξη) των χαρισματικών παιδιών.

Θεωρούμε ότι είναι απαραίτητη είναι η αύξηση των ωρών διδασκαλίας των μαθηματικών, για την καλύτερη αφομοίωσή τους (μέσα από την ποιοτική και ποσοτική αναβάθμιση των ασκήσεων).

Οι προτάσεις γίνονται με βάση την διδακτέα ύλη του Σχολικού έτους 2016-2017, γιαυτό αναφέρεται για κάθε τάξη ξεχωριστά.

Αναγκαία είναι η ανάπτυξη και επέκταση της Θεωρία Αριθμών με σκοπό την ανάπτυξη και επέκταση της όλης της άλγεβρας.

Στο τέλος του κεφαλαίου αναφέρουμε μία σειρά από ασκήσεις που θα μπορούσαν να αποτελέσουν την αρχή για την διδασκαλία “διαγωνιστικών” μαθηματικών.

7.2 Προτάσεις για Α΄ Γυμνασίου

✦ Η διδακτέα ύλη (για την Α΄ Γυμνασίου), καθώς και ο αντίστοιχος αριθμός διδακτικών ωρών που πρέπει να διατεθούν για την κάλυψή της, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Το Α΄ Μέρος αναφέρεται στην Άλγεβρα και το Β΄ Μέρος στην Γεωμετρία.

Οι παράγραφοι αναφέρονται στο βιβλίο:

Βανδουλάκης, Ι. κ.α. (2007). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου.* ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Πίνακας 52. Διδακτέα Ύλη Α΄ Γυμνασίου (Α΄ Μέρος)

Κεφ. 1ο: Οι φυσικοί αριθμοί 1.4 Ευκλείδεια διαίρεση – Διαιρετότητα 1.5 Χαρακτήρες διαιρετότητας – Μ.Κ.Δ. – Ε.Κ.Π. – Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων	**7**
Κεφ. 2ο: Τα κλάσματα 2.1 Η έννοια του κλάσματος 2.2 Ισοδύναμα κλάσματα 2.3 Σύγκριση κλασμάτων 2.4 Πρόσθεση και Αφαίρεση κλασμάτων 2.5 Πολλαπλασιασμός κλασμάτων 2.6 Διαίρεση κλασμάτων	**9**
Κεφ. 3ο: Δεκαδικοί αριθμοί 3.1 Δεκαδικά κλάσματα, Δεκαδικοί αριθμοί, Διάταξη δεκαδικών αριθμών, Στρογγυλοποίηση 3.3 Υπολογισμοί με τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης	**4**
Κεφ. 4ο: Εξισώσεις και προβλήματα 4.1 Η έννοια της εξίσωσης – Εξισώσεις 1^{ου} βαθμού.	**4**
Κεφ. 5ο: Ποσοστά 5.1 Ποσοστά 5.2 Προβλήματα με ποσοστά	**6**
Κεφ. 7ο: Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί 7.1 Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί (Ρητοί αριθμοί) – Η ευθεία των ρητών – Τετμημένη σημείου 7.2 Απόλυτη τιμή ρητού – Αντίθετοι ρητοί – Σύγκριση ρητών 7.3 Πρόσθεση ρητών αριθμών 7.4 Αφαίρεση ρητών αριθμών 7.5 Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών 7.6 Διαίρεση ρητών αριθμών 7.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών	**29**

Πίνακας 53. Διδακτέα Ύλη Α΄ Γυμνασίου (Β΄ Μέρος)

Κεφ. 1ο: Βασικές γεωμετρικές έννοιες 1.1 Σημείο – Ευθύγραμμο τμήμα – Ευθεία – Ημιευθεία – Επίπεδο – Ημιεπίπεδο 1.2 Γωνία – Γραμμή – Επίπεδα σχήματα – Ευθύγραμμα σχήματα – Ίσα σχήματα	**19**

1.3 Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα ευθυγράμμων τμημάτων – Απόσταση σημείων – Μέσο ευθυγράμμου τμήματος 1.4 Πρόσθεση και αφαίρεση ευθυγράμμων τμημάτων 1.5 Μέτρηση, σύγκριση και ισότητα γωνιών – Διχοτόμος γωνίας 1.6 Είδη γωνιών – Κάθετες ευθείες 1.7 Εφεξής και διαδοχικές γωνίες – Άθροισμα γωνιών 1.8 Παραπληρωματικές και Συμπληρωματικές γωνίες – Κατακορυφήν γωνίες 1.9 Θέσεις ευθειών στο επίπεδο 1.10 Απόσταση σημείου από ευθεία – Απόσταση παραλλήλων 1.11 Κύκλος και στοιχεία του κύκλου 1.13 Θέσεις ευθείας και κύκλου	
Κεφ. 2ο: Συμμετρία 2.1 Συμμετρία ως προς άξονα 2.2 Άξονας συμμετρίας 2.3 Μεσοκάθετος ευθυγράμμου τμήματος 2.4 Συμμετρία ως προς σημείο 2.5 Κέντρο συμμετρίας 2.6 Παράλληλες ευθείες που τέμνονται από μία άλλη ευθεία	**11**
Κεφ. 3ο: Τρίγωνα – Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια 3.1 Στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων 3.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου – Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου 3.3 Παραλληλόγραμμο – Ορθογώνιο – Ρόμβος – Τετράγωνο – Τραπέζιο – Ισοσκελές τραπέζιο 3.4 Ιδιότητες Παραλληλογράμμου – Ορθογωνίου – Ρόμβου – Τετραγώνου – Τραπεζίου – Ισοσκελούς τραπεζίου	**11**

• Για την Α΄ Γυμνασίου προτείνεται η αύξηση των ωρών για την Θεωρία Αριθμών (Κεφάλαιο 1) με σκοπό τη λύση και μελέτη μεγαλύτερου πλήθους ασκήσεων.

• Με την αναβάθμιση του ρόλου της Θεωρίας Αριθμών, επιτυγχάνεται ταυτόχρονα και η αναβάθμιση της Άλγεβρας (της οποίας χρησιμοποιεί πολλές μεθόδους επίλυσης).

• Προτείνεται επίσης ο εμπλουτισμός της ύλης της Γεωμετρίας, με περισσότετρες ασκήσεις και προβλήματα.

7.3 Προτάσεις για Β΄ Γυμνασίου

✦ Η διδακτέα ύλη (για την Β΄ Γυμνασίου), καθώς και ο αντίστοιχος αριθμός διδακτικών ωρών που πρέπει να διατεθούν για την κάλυψή της, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Το Α΄ Μέρος αναφέρεται στην Άλγεβρα και το Β΄ Μέρος στην Γεωμετρία.

Οι παράγραφοι αναφέρονται στο βιβλίο:
Βανδουλάκης, Ι. κ.α. (2007). *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου.* ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Πίνακας 54. Διδακτέα Ύλη Β΄ Γυμνασίου (Α΄ Μέρος)

Κεφ. 7ο: Θετικοί και Αρνητικοί Αριθμοί 7.8 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη φυσικό 7.9 Δυνάμεις ρητών αριθμών με εκθέτη ακέραιο 7.10 Τυποποιημένη μορφή μεγάλων και μικρών αριθμών	**7**

Οι παράγραφοι αναφέρονται στο βιβλίο:
Βλάμος, Π. κ.α. (2007). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Πίνακας 55. Διδακτέα Ύλη Β΄ Γυμνασίου (Α΄ Μέρος)

Κεφ. 1ο: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές παραστάσεις 1.2 Εξισώσεις α' βαθμού 1.4 Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων	**13**
Κεφ. 2ο: ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ 2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού 2.2 Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί	**7**
Κεφ. 3ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ 3.1 Η έννοια της συνάρτησης 3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες – Γραφική παράσταση συνάρτησης 3.3 Η συνάρτηση $y=\alpha x$ 3.4 Η συνάρτηση $y=\alpha x+\beta$ 3.5 Η συνάρτηση $y=\alpha/x$ – Η υπερβολή	**18**

Κεφ. 4ο: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ 4.1 Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα 4.2 Γραφικές Παραστάσεις 4.5 Μέση τιμή – Διάμεσος	**8**

Πίνακας 56. Διδακτέα Ύλη Β΄ Γυμνασίου (Β΄ Μέρος)

Κεφ. 1ο: ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ – ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας 1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών 1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων 1.4 Πυθαγόρειο θεώρημα	**14**
Κεφ. 2ο: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ – ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ 2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας 2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας	**7**
Κεφ. 3ο: ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ 3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες 3.2 Κανονικά πολύγωνα 3.3 Μήκος κύκλου 3.5 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου	**12**
Κεφ. 4ο: ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΣΤΕΡΕΑ – ΜΕΤΡΗΣΗ ΣΤΕΡΕΩΝ 4.1 Ευθείες και επίπεδα στο χώρο 4.2 Στοιχεία και εμβαδόν πρίσματος και κυλίνδρου 4.3 Όγκος πρίσματος και κυλίνδρου 4.4 Η πυραμίδα και τα στοιχεία της 4.6 Η σφαίρα και τα στοιχεία της	**8**

• Στή Β΄ Γυμνασίου προτείνεται η κατάργηση των ωρών που αντιστοιχούν στην παράγραφο 7.10 και στο Κεφάλαιο 4 του πρώτου μέρους. Στη θέση τους μπορει να γίνει επανάληψη και επέκταση της ύλης της Θεωρίας Αριθμών.

• Προτείνεται επίσης η πρώτη αναφορά στις αλγεβρικές ταυτότητες, με απλές εφαρμογές τους.

7.4 Προτάσεις για Γ΄ Γυμνασίου

✦ Η διδακτέα ύλη (για την Γ΄ Γυμνασίου), καθώς και ο αντίστοιχος αριθμός διδακτικών ωρών που πρέπει να διατεθούν για την κάλυψή της, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα. Το Α΄ Μέρος αναφέρεται στην Άλγεβρα και το Β΄ Μέρος στην Γεωμετρία.

Οι παράγραφοι αναφέρονται στο βιβλίο:
Αργυράκης, Δ. κ.α. (2007). Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Πίνακας 57. Διδακτέα Ύλη Γ΄ Γυμνασίου (Α΄ Μέρος)

Κεφ. 1ο: ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ 1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς Α. Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους Β. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού 1.2 Μονώνυμα – Πράξεις με μονώνυμα Α. Αλγεβρικές παραστάσεις – Μονώνυμα Β. Πράξεις με μονώνυμα 1.3 Πολυώνυμα – Πρόσθεση και Αφαίρεση πολυωνύμων 1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων 1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες 1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων 1.8 Ε.Κ.Π. και Μ.Κ.Δ. ακεραίων αλγεβρικών παραστάσεων 1.9 Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις 1.10 Πράξεις ρητών παραστάσεων Α. Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων Β. Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων	**27**
Κεφ. 2ο: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού Α. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με τη βοήθεια τύπου 2.3 Προβλήματα εξισώσεων δευτέρου βαθμού 2.5 Ανισότητες – Ανισώσεις μ' έναν άγνωστο Α. Διάταξη πραγματικών αριθμών Β. Ιδιότητες της διάταξης Γ. Ανισώσεις πρώτου βαθμού μ' έναν άγνωστο	**15**
Κεφ. 3ο: ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	**10**

3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης 3.2 Η έννοια του γραμμικού συστήματος και η γραφική επίλυσή του 3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος	
Κεφ. 5ο : ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ 5.1 Σύνολα 5.2 Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα 5.3 Έννοια της πιθανότητας	**8**

Πίνακας 58. Διδακτέα Ύλη Γ΄ Γυμνασίου (Β΄ Μέρος)

Κεφ. 1ο: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 1.1 Ισότητα τριγώνων 1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων 1.5 Ομοιότητα Α. Όμοια πολύγωνα Β. Όμοια τρίγωνα 1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων	**22**
Κεφ. 2ο: ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ 2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας με 2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών 2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας	**13**

• Προτείνεται η διδαχή θεμάτων και ύλης που άπτεται των (σχετικά) ποιό εύκολων θεμάτων που διδάσκονται στην Α΄ Λυκείου.

7.5 Προτάσεις για Α΄ Λυκείου

✦ Η διδακτέα ύλη (για την **Άλγεβρα** της **Α΄ Λυκείου**), καθώς και ο αντίστοιχος αριθμός διδακτικών ωρών που πρέπει να διατεθούν για την κάλυψή της, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Οι παράγραφοι αναφέρονται στο βιβλίο:
Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. (1998). Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Πίνακας 59. Διδακτέα Ύλη Α΄ Λυκείου (Άλγεβρα)

Εισαγωγικό κεφάλαιο	**2**

Ε.2. Σύνολα	
Κεφ.2ο: Οι Πραγματικοί αριθμοί 2.1 Οι Πράξεις και οι ιδιότητες τους 2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών 2.3 Απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών 2.4 Ρίζες πραγματικών αριθμών	**19**
Κεφ.3ο: Εξισώσεις 3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού 3.2 Η Εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$ 3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού	**14**
Κεφ.4ο: Ανισώσεις 4.1 Ανισώσεις 1ου Βαθμού 4.2 Ανισώσεις 2ου Βαθμού	**9**
Κεφ.5ο: Πρόοδοι 5.1 Ακολουθίες 5.2 Αριθμητική πρόοδος 5.3 Γεωμετρική πρόοδος	**10**
Κεφ.6ο: Βασικές Έννοιες των Συναρτήσεων 6.1 Η Έννοια της Συνάρτησης 6.2 Γραφική Παράσταση Συνάρτησης 6.3 Η Συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$	**11**
Κεφ.7ο: Μελέτη Βασικών Συναρτήσεων 7.1 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^2$ 7.3 Μελέτη της Συνάρτησης: $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$	**10**

• Για την καλύτερη διαχείριση και αναβάθμιση της διδακτέας ύλης, προτείνονται τα παρακάτω:

α) Να διδαχτούν όλες οι γνωστές ταυτότητες που αναφέρονται στο βιβλίο καθώς και μία σειρά από λιγότερο γνωστές που εξετάζονται και θεωρούνται γνωστές σε επίπεδο μαθηματικών διαγωνισμών (θα τις αναφέρουμε παρακάτω).

β) Να διδαχτούν εκτενέστερα οι ανισότητες και να γίνει η απόδειξη μερικών από αυτές, με τη βοήθεια των ταυτοτήτων.

✦ Η διδακτέα ύλη (για την **Γεωμετρία** της **Α΄ Λυκείου**), καθώς και ο αντίστοιχος αριθμός διδακτικών ωρών που πρέπει να διατεθούν για την κάλυψή της, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Οι παράγραφοι αναφέρονται στο βιβλίο:

Αργυρόπουλος, Η. κ.α. (2015). Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Πίνακας 60. Διδακτέα Ύλη Α΄ Λυκείου (Γεωμετρία)

Κεφ.1ο: Εισαγωγή στην Ευκλείδεια Γεωμετρία 1.1 Το αντικείμενο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας 1.2 Ιστορική αναδρομή στη γένεση και ανάπτυξη της Γεωμετρίας	**1**
Κεφ.3ο: Τρίγωνα 3.1 Είδη και στοιχεία τριγώνων 3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων 3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων 3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων 3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου 3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων 3.7 Κύκλος - Μεσοκάθετος – Διχοτόμος 3.8 Κεντρική συμμετρία 3.9 Αξονική συμμετρία 3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας 3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών 3.12 Τριγωνική ανισότητα 3.13 Κάθετες και πλάγιες 3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου 3.15 Εφαπτόμενα τμήματα 3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων 3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές 3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων	**14**
Κεφ.4ο: Παράλληλες ευθείες 4.1. Εισαγωγή 4.2. Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα 4.3. Κατασκευή παράλληλης ευθείας 4.4. Γωνίες με πλευρές παράλληλες 4.5. Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου 4.6. Άθροισμα γωνιών τριγώνου 4.7. Γωνίες με πλευρές κάθετες 4.8. Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου	**9**
Κεφ.5ο: Παραλληλόγραμμα – Τραπέζια	**19**

5.1. Εισαγωγή 5.2. Παραλληλόγραμμα 5.3. Ορθογώνιο 5.4. Ρόμβος 5.5. Τετράγωνο 5.6. Εφαρμογές στα τρίγωνα 5.7. Βαρύκεντρο τριγώνου 5.8. Το ορθόκεντρο τριγώνου 5.9. Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου 5.10. Τραπέζιο 5.11. Ισοσκελές τραπέζιο 5.12. Αξιοσημείωτες ευθείες και κύκλοι τριγώνου	
Κεφ.6ο: Εγγεγραμμένα σχήματα 6.1. Εισαγωγικά – Ορισμοί 6.2. Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης 6.3. Γωνία χορδής και εφαπτομένης 6.4. Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο –Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία. 6.5 Το εγγεγραμμένο τετράπλευρο 6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο	**7**

• Για την καλύτερη διαχείριση και αναβάθμιση της διδακτέας ύλης, προτείνονται τα παρακάτω:

α) Να γίνει σύντομη αναφορά στα κεφάλαια 1 και 3 (με δεδομένο ότι τα κριτήρια ισότητας έχουν διδαχτεί και στη Γ΄ Γυμνασίου).

β) Να δοθεί έμφαση στα Κεφάλαια 4,5,6 με παράλληλη ανάπτυξη θεμάτων γεωμετρίας (μέτριας δυσκολίας) από μαθηματικούς διαγωνισμούς.

• Προτείνεται η ενασχόληση και λύση δυσκολότερων ασκήσεων που υπάρχουν μέσα στο βιβλίο της γεωμετρίας (αλλά αφαιρούνται από την διδακτέα ύλη). Αυτό βέβαια προϋποθέτει μία ανάλογη αύξηση των ωρών διδασκαλίας της γεωμετρίας.

7.6 Προτάσεις για Β΄ Λυκείου

✦ Η διδακτέα ύλη (για την **Άλγεβρα** της **Β΄ Λυκείου**), καθώς και ο αντίστοιχος αριθμός διδακτικών ωρών που πρέπει να διατεθούν για την κάλυψή της, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Οι παράγραφοι αναφέρονται στο βιβλίο:
Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. (2012). Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Πίνακας 61. Διδακτέα Ύλη Β΄ Λυκείου (Άλγεβρα)

Κεφ. 1ο: Γραμμικά Συστήματα 1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα	**2**
Κεφ.2ο: Ιδιότητες Συναρτήσεων 2.1 Μονοτονία-Ακρότατα-Συμμετρίες Συνάρτησης 2.2 Κατακόρυφη-Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης	**5**
Κεφ. 3ο: Τριγωνομετρία 3.1 Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Γωνίας 3.2. Βασικές Τριγωνομετρικές Ταυτότητες 3.3 Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο 3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις 3.5 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις 3.6 Τριγωνομετρικοί αριθμοί αθροίσματος γωνιών 3.7 Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας 2α	**25**
Κεφ. 4ο: Πολυώνυμα - Πολυωνυμικές εξισώσεις 4.1 Πολυώνυμα 4.2 Διαίρεση πολυωνύμων 4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις 4.4 Εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές	**20**
Κεφ. 5ο : Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση 5.1 Εκθετική συνάρτηση 5.2 Λογάριθμοι 5.3 Λογαριθμική συνάρτηση	**22**

✦ Η διδακτέα ύλη (για την **Γεωμετρία** της **Β΄ Λυκείου**), καθώς και ο αντίστοιχος αριθμός διδακτικών ωρών που πρέπει να διατεθούν για την κάλυψή της, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Οι παράγραφοι αναφέρονται στο βιβλίο:
Αργυρόπουλος, Η. κ.α. (2015). Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ-ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Πίνακας 62. Διδακτέα Ύλη Β΄ Λυκείου (Γεωμετρία)

Κεφ. 7ο : Αναλογίες 7.1. Εισαγωγή 7.4. Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα – Αναλογίες 7.5. Μήκος ευθύγραμμου τμήματος 7.6. Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο 7.7. Θεώρημα του Θαλή 7.8. Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου	**5**
Κεφ. 8ο: Ομοιότητα 8.1. Όμοια ευθύγραμμα σχήματα 8.2. Κριτήρια ομοιότητας	**5**
Κεφ. 9ο: Μετρικές σχέσεις 9.1. Ορθές προβολές 9.2. Το Πυθαγόρειο θεώρημα 9.3. Γεωμετρικές κατασκευές 9.4. Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος	**8**
Κεφ. 10ο: Εμβαδά 10.1. Πολυγωνικά χωρία 10.2. Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα 10.3. Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων 10.4. Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου 10.5. Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων – πολυγώνων	**10**
Κεφ. 11ο: Μέτρηση Κύκλου 11.1. Ορισμός κανονικού πολυγώνου 11.2. Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων 11.3. Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους 11.4. Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα 11.5. Μήκος τόξου 11.6. Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα 11.7. Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος	**11**

• Οι προτάσεις για την διδακτέα ύλη της Β΄ Λυκείου, είναι ανάλογες με τις προτάσεις που αφορούν την Α΄ Λυκείου.

7.7 Ενδεικτικές Ασκήσεις Διαγωνισμών

Παρακάτω αναφέρουμε μία σειρά από ασκήσεις που έχουν τα εξής χαρακτηριστικά:

1) Οι γνώσεις που απαιτούνται για την επίλυσή τους, δεν απέχουν πολύ από τις γνώσεις που στοχεύει η δομή της διδακτέας ύλης (την οποία προβλέπουν τα αναλυτικά προγράμματα).
2) Εισάγουν νέους δημιουργικούς τρόπους σκέψεις (πέρα από τους συνηθισμένους λογιστικούς).
3) Αποτελούν ένα καλό ξεκίνημα για την ενασχόληση με διαγωνιστικά μαθηματικά, χωρίς να περιέχουν αποτρεπτικές δυσκολίες.

Στη συνέχεια αναπτύσονται ασκήσεις και προβλήματα υψηλότερου επιπέδου καθώς και ασκήσεις οι οποίες (σε επίπεδο διαγωνισμών) θεωρούνται θεωρήματα και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη λύση άλλων ασκήσεων.

Δίνουμαι ιδιαίτερη έμφαση στη γεωμετρία η οποία έχει υποβαθμιστεί από τα αναλυτικά προγράμματα ενώ διεθνώς γνωρίζει άνθιση.

Τέλος αναπτύσουμε ασκήσεις που χρειάζονται γνώσεις από περισσότερα του ενός κεφάλαια (που εξετάζονται στους μαθηματικούς διαγωνισμούς) και κάποια θέματα Μαθηματικών Ολυμπιάδων.

7.7.1 Άσκηση Θεωρίας Αριθμών

✦ **Το γινόμενο οποιονδήποτε ακεραίων της μορφής $\mathbf{4k+1}$, $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}$ είναι επίσης ακέραιος της ίδιας μορφής.**

Λύση

Έστω m, n ακέραιοι της παραπάνω μορφής.

Τότε $m = 4k+1$ και $n = 4l+1$.

Άρα $m \cdot n = (4k+1)(4l+1) =$

$$= 16kl + 4k + 4l + 1 = 4\underbrace{(4kl + k + l)}_{r} + 1 = 4r + 1.$$

7.7.2 Άσκηση Θεωρίας Αριθμών

✦ **Δεκαπέντε θετικοί ακέραιοι αριθμοί έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους "15". Αποδείξτε ότι το άθροισμα τους είναι πολλαπλάσιο του 25.**

Λύση

Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 15 είναι της μορφής: $100x+15$, όπου x μη αρνητικός ακέραιος.

Άρα το άθροισμα των δεκαπέντε θετικών ακεραίων θα είναι:

$$S=(100x_1+15)+(100x_2+15)+\cdots+(100x_{15}+15)=$$
$$=100(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+15\cdot 15=$$
$$=25\cdot 4(x_1+x_2+\cdots+x_{15})+25\cdot 9.$$

Παρατήρηση

Η "κεντρική ιδέα" της άσκησης είναι ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο διψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta$", έχει τη μορφή $100x+\overline{\alpha\beta}$.

Με όμοιο τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: ο θετικός ακέραιος που το τελευταίο τριψήφιο τμήμα του είναι "$\alpha\beta\gamma$", έχει τη μορφή $1000x+\overline{\alpha\beta\gamma}$.

Με τη παραπάνω λογική μπορούν να δημιουργηθούν και άλλες ασκήσεις (όπως η παρακάτω).

✦ **Εννέα θετικοί ακέραιοι αριθμοί, έχουν το τελευταίο διψήφιο τμήμα τους *11, 12 13, 14, 15, 16, 17, 18* και *19* αντίστοιχα. Να βρεθεί το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αθροίσματος των τετραγώνων τους.**

Λύση

Κάθε θετικός ακέραιος που τελειώνει σε 11 είναι της μορφής: $100x+11$, όπου x μη αρνητικός ακέραιος. Το τετράγωνο του ακεραίου αυτού είναι:

$$(100x+11)^2=10000x^2+2\cdot 11\cdot 100x+121=100\left(100x^2+2\cdot 11x+1\right)+21.$$

Δηλαδή το τελευταίο διψήφιο τμήμα του ακέραιου $(100x+11)^2$, ταυτίζεται με το τελευταίο διψήφιο τμήμα του ακέραιου $11^2=121$.

Όμοια το τελευταίο διψήφιο τμήμα του ακέραιου $(100x+12)^2$, ταυτίζεται με το τελευταίο διψήφιο τμήμα του ακέραιου $12^2=144$.

Ισχύει όμως : $11^2+12^2+13^2+14^2+15^2+16^2+17^2+18^2+19^2=$
$$=121+144+169+196+225+256+289+324+361=2085,$$

Άρα το τελευταίο διψήφιο τμήμα του αθροίσματος των τετραγώνων , θα είναι 85.

Το ίδιο αποτέλεσμα βρίσκουμε θεωρώντας το άθροισμα:

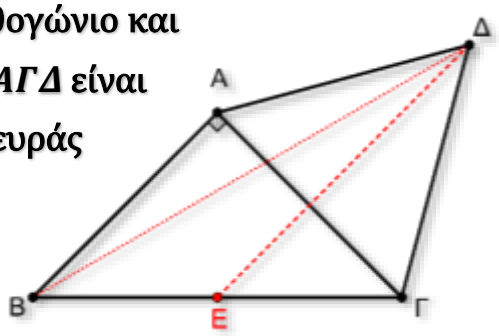
$$21+44+69+96+25+56+89+24+61=485.$$

Παρατήρηση για Διαφάνιες

Στο παράρτημα παρουσιάζεται μία σειρά από διαφάνιες, που θα μπορούσαν (μέσα απο μία παρουσίαση του PowerPoint) να αποτελέσουν μία καλή και γρήγορη διδακτική προσέγγιση των εννοιών της Θεωρίας Αριθμών.

7.7.3 Άσκηση (Θαλής 2014-2015. Β΄ Γυμνασίου)

✦ **Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90°$ και $AB = A\Gamma$. Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο και το σημείο E είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.**



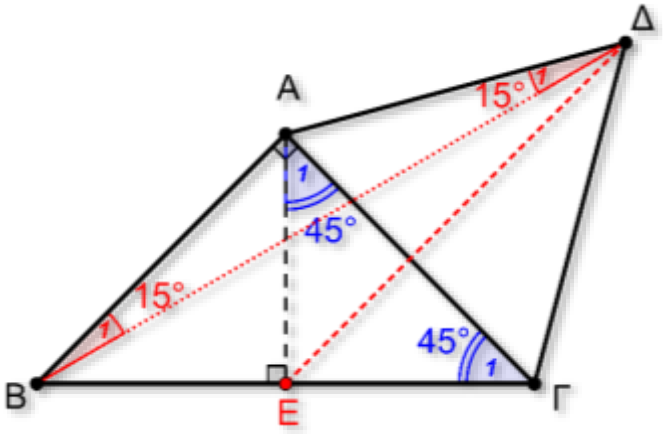
(α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΔE είναι μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$.

(β) Βρείτε πόσων μοιρών είναι η γωνία $B\hat{\Delta}E$.

Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές θα έχει $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45°$ και η διάμεσός του AE είναι και ύψος του, οπότε το τρίγωνο $AE\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο E με μία γωνία του $45°$. Επομένως θα έχει $E\hat{A}\Gamma = 180° - (90° + 45°) = 45°$, οπότε αυτό είναι ισοσκελές με $EA = E\Gamma$.

Επιπλέον, από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε ότι: $\Delta A = \Delta\Gamma$. Επομένως τα σημεία Δ και E ισαπέχουν από τα άκρα A και Γ του ευθύγραμμου τμήματος $A\Gamma$, οπότε η ευθεία ΔE είναι η μεσοκάθετη του $A\Gamma$.



(β) Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ λαμβάνουμε τις ισότητες $AB = A\Gamma = A\Delta$, οπότε το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισοσκελές. Από το ισόπλευρο τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = 60°$, οπότε $\Delta\hat{A}B = \Delta\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}B = 60 + 90 = 150$. Επειδή $A\hat{B}\Delta$ ισοσκελές τρίγωνο έπεται ότι:

$$A\hat{\Delta}B = A\hat{B}\Delta = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

Επειδή οι ευθείες AB και ΔE είναι παράλληλες, ως κάθετες προς την ίδια ευθεία $A\Gamma$, που τις τέμνει η ευθεία $B\Delta$, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες του ίσες, οπότε: $B\hat{\Delta}E = A\hat{B}\Delta = 15°$.

7.7.4 Άσκηση (Θαλής 2014-2015. Γ΄ Γυμνασίου)

✦ Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευρά α. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = \alpha/2$ και στη συνέχεια προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma\Delta = A\Delta$. Αν $E(AB\Delta)$ και $E(AB\Delta Z)$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$ και του τετραπλεύρου $AB\Delta Z$, αντίστοιχα, να βρείτε το λόγο

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)}.$$

Λύση

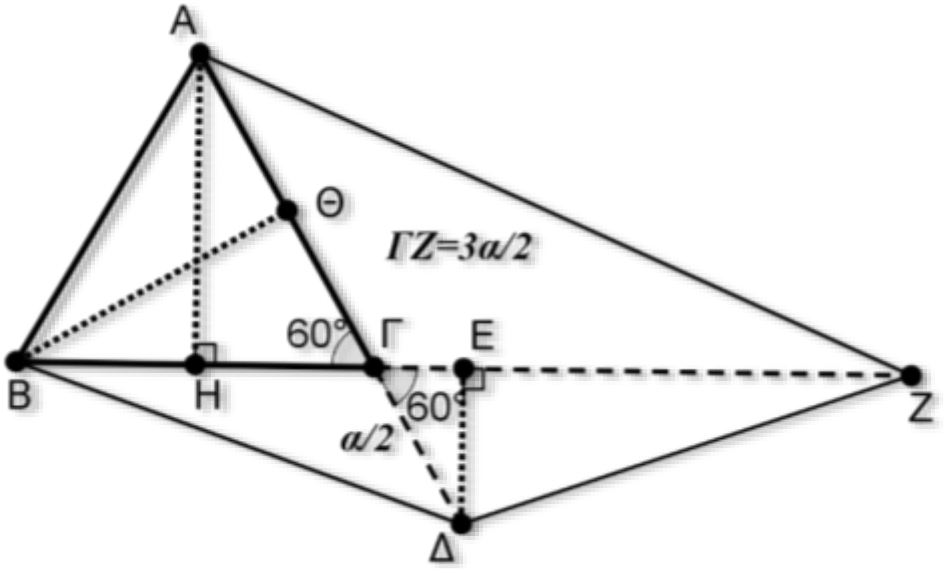
1ος Τρόπος

Το τρίγωνο $AB\Delta$ έχει βάση $A\Delta = \frac{3\alpha}{2}$ και ύψος

$$B\Theta = AH = \sqrt{\alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Άρα είναι:

$$E(AB\Delta) = \frac{1}{2}A\Delta \cdot B\Theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\mathbf{3\sqrt{3}\alpha^2}}{\mathbf{8}}.$$



Για το τετράπλευρο $AB\Delta Z$ έχουμε: $E(AB\Delta Z) = E(ABZ) + E(B\Delta Z)$.

Στο τρίγωνο ABZ έχουμε βάση $BZ = \alpha + \frac{3\alpha}{2} = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος $AH = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

Οπότε το τρίγωνο ABZ έχει εμβαδό $\boldsymbol{E(ABZ)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8}}$.

Στο τρίγωνο $B\Delta Z$ έχουμε βάση $BZ = \frac{5\alpha}{2}$ και ύψος ΔE το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα $AH\Gamma$ και $\Gamma E\Delta$ ως εξής:

$$\frac{E\Delta}{AH} = \frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma} \Leftrightarrow \frac{E\Delta}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow E\Delta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Διαφορετικά, μπορούμε να έχουμε:

$$E\Delta = \Gamma\Delta \cdot \eta\mu 60° = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Άρα έχουμε:

$$\boldsymbol{E(B\Delta Z)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{\frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16}}.$$

Επομένως έχουμε:

$$\boldsymbol{E(AB\Delta Z)} = E(ABZ) + E(B\Delta Z) = \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{8} + \frac{5\sqrt{3}\alpha^2}{16} = \boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}}$$

οπότε θα είναι:

$$\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{\frac{3\sqrt{3}\alpha^2}{8}}{\frac{15\sqrt{3}\alpha^2}{16}} = \frac{6\sqrt{3}\alpha^2}{15\sqrt{3}\alpha^2} = \frac{2}{5}$$

2ος τρόπος

Έστω $E(AB\Gamma) = E$. Τότε $E(B\Gamma\Delta) = E/2$, γιατί έχει το ίδιο ύψος $B\Theta$ με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και βάση $\Gamma\Delta = \alpha/2$.

Άρα είναι: $E(AB\Delta) = E(AB\Gamma) + E(B\Gamma\Delta) = \frac{3E}{2}$.

Ακόμα έχουμε: $E(A\Gamma Z)$

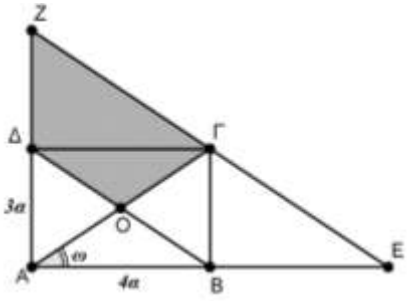
$= \frac{3E}{2}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος AH με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και βάση $\Gamma Z = \frac{3\alpha}{2}$.

Τέλος έχουμε $E(\Gamma\Delta Z)$

$= \frac{3E}{4}$, γιατί έχει το ίδιο ύψος ΔE με το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ και βάση $\Gamma Z = \frac{3\alpha}{2}$. Έτσι έχουμε: $E(AB\Delta Z) = E + \frac{E}{2} + \frac{3E}{2} + \frac{3E}{4} = \frac{15E}{4}$

και επομένως: $\frac{E(AB\Delta)}{E(AB\Delta Z)} = \frac{\frac{3E}{2}}{\frac{15E}{4}} = \frac{2}{5}$.

7.7.5 Άσκηση (Ευκλείδης 2014-2015. Β΄ Γυμνασίου)



✦ **Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $\Gamma\hat{A}B = \hat{\omega}$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από την κορυφή Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη διαγώνιο $B\Delta$ η οποία τέμνει την ευθεία AB στο σημείο E και την ευθεία $A\Delta$ στο σημείο Z. Δίνεται ότι:**

$AB = 4\alpha, A\Delta = 3\alpha$.

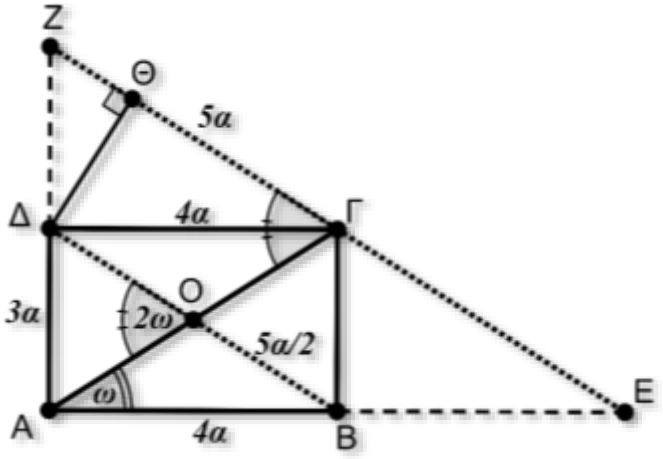
1. Βρείτε τη γωνία $A\hat{\Gamma}Z$ συναρτήσει της γωνίας $\hat{\omega}$.

2. Αποδείξετε ότι: $A\Gamma = \Gamma Z = \Gamma E$.

3. Βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπεζίου $\Delta O\Gamma Z$.

Σημείωση. *Να σχεδιάσετε το σχήμα του προβλήματος στο τετράδιο σας. Να αιτιολογήσετε κάθε απάντησή σας.*

Λύση



1. Επειδή οι διαγώνιες ορθογωνίου είναι ίσες και διχοτομούνται, έπεται ότι $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, οπότε το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές με $O\hat{B}A = \hat{\omega} = O\hat{A}B$. Η γωνία $A\hat{O}\Delta$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AOB, οπότε θα είναι ΑΟΔ=ΟΑΒ+ΟΒΑ=2ω. Από την παραλληλία $EZ \parallel B\Delta$, επειδή οι γωνίες $A\hat{\Gamma}Z$ και $A\hat{O}\Delta$ είναι εντός εκτός και επί τα αυτά, έχουμε: $A\hat{\Gamma}Z = 2\hat{\omega}$.

2. Επειδή $EZ \parallel B\Delta$ και $\Gamma\Delta \parallel AE$, $B\Gamma \parallel AZ$, τα τετράπλευρα $\Delta BE\Gamma$ και $\Delta B\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες.

Άρα είναι: $B\Delta = \Gamma Z = \Gamma E$. Όμως οι διαγώνιες παραλληλογράμμου είναι ίσες, οπότε $A\Gamma = B\Delta$. Επομένως, θα είναι και $A\Gamma = \Gamma Z = \Gamma E$.

3. Το τρίγωνο $A\Gamma Z$ είναι ισοσκελές με $A\Gamma = \Gamma Z$, οπότε το ύψος του $\Gamma\Delta = AB = 4\alpha$ είναι και διάμεσος. Αρα είναι: $AZ = 2 \cdot A\Delta = 6\alpha$ και $\Delta Z = 3\alpha$ $\Delta Z = 3\alpha\, cm$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Delta$ έχουμε:

$$B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 = (4\alpha)^2 + (3\alpha)^2 = 25\alpha^2 \Rightarrow B\Delta = 5\alpha\ cm.$$

$$\text{Άρα είναι: } O\Delta = \frac{B\Delta}{2} = \frac{5\alpha}{2} \text{ και } \Gamma Z = 5\alpha\ cm.$$

Για το ύψος $\upsilon = \Delta\Theta$ έχουμε ότι:

$$E(\Gamma\Delta Z) = \frac{\Delta\Gamma \cdot \Delta Z}{2} = \frac{\Gamma Z \cdot \Delta\Theta}{2} \Leftrightarrow \frac{4\alpha \cdot 3\alpha}{2} = \frac{\Gamma Z \cdot \upsilon}{2} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{12\alpha}{5}.$$

Επομένως, είναι:

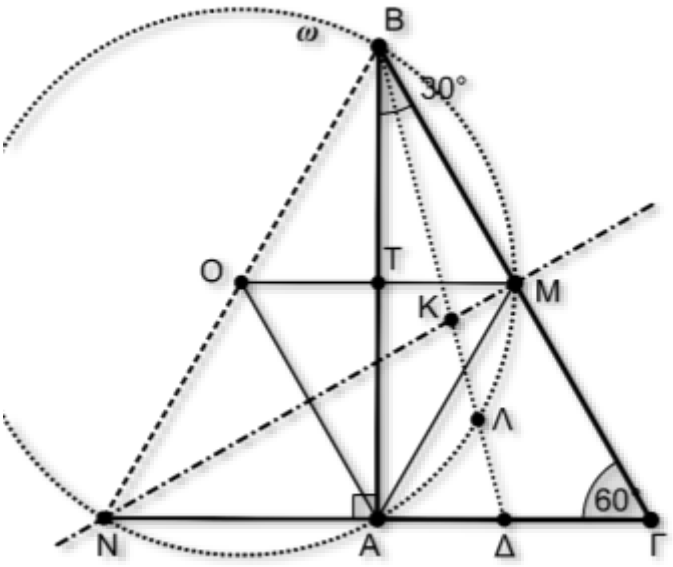
$$E(\Delta O\Gamma Z) = \frac{\Delta O + \Gamma Z}{2} \cdot \upsilon = \frac{\frac{5\alpha}{2} + 5\alpha}{2} \cdot \frac{12\alpha}{5} = 9\alpha^2 cm^2.$$

7.7.6 Άσκηση (Ευκλείδης 2014-2015. Γ΄Γυμνασίου)

✦ Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$, $\hat{\Gamma} = 60°$ και υποτείνουσα $B\Gamma = \alpha$. Η μεσοκάθετη στο μέσον Μ της ΒΓ τέμνει τη διχοτόμο ΒΔ στο σημείο Κ και την ευθεία ΑΓ στο σημείο Ν. Έστω Λ είναι το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΚΔ.

1. **Να αποδείξετε ότι: $N\Lambda \perp B\Delta$.**
2. **Θεωρούμε τον κύκλο ω με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΒΝ, ο οποίος δίνεται ότι περνάει από τα σημεία Α, Λ και Μ. Έστω Ε το χωρίο που έχει πλευρές τις ΜΓ, ΑΓ και το τόξο ΑΜ του κύκλου ω. Να υπολογίσετε το εμβαδό χωρίου Ε συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = \alpha$.**

Σημείωση: Το χωρίο Ε είναι στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ και εξωτερικά του κύκλου ω.



Λύση

1. Έστω ότι οι ευθείες ΚΜ, ΑΓ τέμνονται στο σημείο Ν. Τότε:

$$N\hat{K}\Delta = B\hat{K}M = 90 - \frac{\hat{B}}{2} = 75°.$$

Επίσης η γωνία $N\hat{\Delta}K$ ως εξωτερική του τριγώνου $\Delta\Gamma B$ ισούται με

$$N\hat{\Delta}K = \Gamma + \frac{B}{2} = 60° + \frac{30°}{2} = 75°.$$

Συνεπώς το τρίγωνο $NK\Delta$ είναι ισοσκελές με $NK = N\Delta$. Αφού το Λ είναι μέσον της βάσης $K\Delta$ του ισοσκελούς τριγώνου $NK\Delta$, έπεται ότι: $NK \perp B\Delta$.

2. Το τρίγωνο $B\Gamma N$ είναι ισοσκελές με $N\Gamma = NB$ και $\hat{\Gamma} = 60°$. Επομένως, το τρίγωνο $B\Gamma N$ είναι ισόπλευρο, οπότε $BN = \alpha$. Οι BA και NM είναι ύψη και διάμεσοι αυτού, οπότε $A\Gamma = M\Gamma = \alpha/2$. Ο κύκλος διαμέτρου ΒΝ έχει κέντρο, έστω O και περνάει από τα σημεία A, Λ και M. Το τρίγωνο OAM είναι ισοσκελές και έχει

$$A\hat{O}M = 2 \cdot A\hat{B}\Gamma = 2 \cdot (90° - 60°) = 60°.$$

Επίσης $\mathrm{A\hat{O}B} = 2 \cdot \Gamma\hat{\mathrm{N}}\mathrm{B} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, οπότε $\mathrm{M\hat{O}B} = 60^\circ$ και το τρίγωνο ΟΜΒ είναι ισόπλευρο πλευράς $\frac{\alpha}{2}$. Άρα το τετράπλευρο ΟΑΜΒ είναι ρόμβος που αποτελείται από δύο ισόπλευρα τρίγωνα πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, οπότε το ύψος ΑΤ του τριγώνου ΑΟΜ ισούται με το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς $\frac{\alpha}{2}$, δηλαδή

$$\mathrm{AT} = \frac{\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{4}.$$

Το εμβαδόν του χωρίου E δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{E}\left(\Gamma\mathrm{AM}\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right) - \mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{OAM}\right). \qquad (1)$$

Έχουμε

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma MO}\right) = \left(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\right) \cdot \left(\acute{\upsilon}\psi o\varsigma\right) = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} \qquad (2)$$

Επίσης

$$\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{OAM}\right) = \frac{60^\circ}{360^\circ}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{24} \qquad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

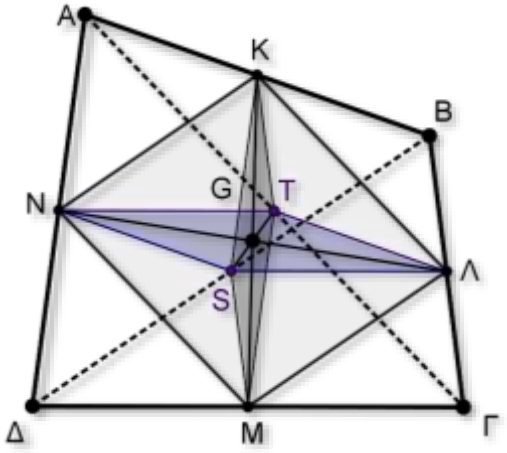
$$\mathrm{E}\left(\Gamma\mathrm{AM}\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{A\Gamma BO}\right)-\mathrm{E}_{\kappa.\tau o\mu\acute{\varepsilon}\alpha}\left(\mathrm{OAM}\right)=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8}-\frac{\pi\alpha^2}{24}=\frac{\left(3\sqrt{3}-\pi\right)\alpha^2}{24}.$$

7.7.7 Άσκηση (Σημείο των Μέσων Τετραπλεύρου)

✦ Τα μέσα των πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων κυρτού τετραπλεύρου ορίζουν παραλληλόγραμμα με κοινό κέντρο, το οποίο ονομάζεται βαρύκεντρο του τετραπλεύρου ή σημείο των μέσων.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα μέσα των πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων.
Τα τετράπλευρα $KΛMN$, $KTMS$ και $TNSΛ$ είναι παραλληλόγραμμα.



Τα τρία ευθύγραμμα τμήματα TS, KM και $ΛN$ που ορίζουν τα μέσα των πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων, περνάνε από τα ίδιο σημείο (είναι διαγώνιοι των παραλληλογράμμων).

7.7.8 Άσκηση (Ιδιότητα Ισοσκελούς Τριγώνου)

✦ Το άθροισμα των αποστάσεων τυχόντος σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό.

✦ Η διαφορά των αποστάσεων τυχόντος σημείου της προέκτασης της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό.

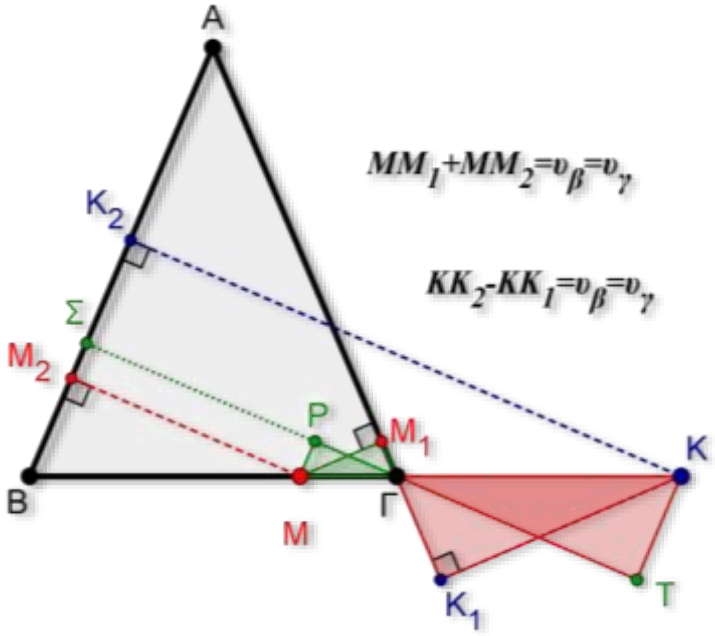
Απόδειξη (1ος Τρόπος)

Έστω M τυχόν σημείο στη βάση $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου και MM_1, MM_2 τα κάθετα τμήματα προς τις ίσες πλευρές του τριγώνου. Θα αποδείξουμε ότι $MM_1 + MM_1 = \Gamma\Sigma = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.

Θεωρούμε $MP \perp \Gamma\Sigma$, τότε το τετράπλευρο $MM_2\Sigma P$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα $MM_2 = \Sigma P$.

Τα τρίγωνα $MM_1\Gamma$ και $MP\Gamma$ είναι ίσα, διότι είναι ορθογώνια με κοινή υποτείνουσα $(M\Gamma)$ και μία οξεία γωνία ίση. Άρα $MM_1 = P\Gamma$.

Τελικά $MM_1 + MM_2 = P\Sigma + P\Gamma = \Gamma\Sigma = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.



Έστω K τυχόν σημείο στη προέκταση της βάσης $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου και KK_1, KK_2 τα κάθετα τμήματα προς τις ίσες πλευρές του τριγώνου. Θα αποδείξουμε ότι $KK_2 - KK_1 = \Gamma\Sigma = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.

Θεωρούμε $KT \perp \Gamma\Sigma$, τότε το τετράπλευρο $KK_2\Sigma T$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, άρα $KK_2 = \Sigma T$.

Τα τρίγωνα $KK_1\Gamma$ και $KT\Gamma$ είναι ίσα, διότι είναι ορθογώνια με κοινή υποτείνουσα $(K\Gamma)$ και μία οξεία γωνία ίση. Άρα $KK_1 = \Gamma T$.

Τελικά $KK_2 - KK_1 = T\Sigma - T\Gamma = \Gamma\Sigma = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.

Παρατήρηση

Το σημείο M "κινείται" επάνω στο τμήμα $B\Gamma$. Αν λοιπόν το άθροισμα των αποστάσεων (τελικά) είναι σταθερό τότε θα ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων και στη περίπτωση που το σημείο M ταυτιστεί με το σημείο Γ.

Στη περίπτωση αυτή όμως το τμήμα MM_2 ταυτίζεται με το τμήμα $\Gamma\Sigma = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$ και το τμήμα MM_1 εκφυλίζεται στο σημείο Γ (που προφανώς έχει μήκος μηδέν), οπότε $MM_1 + MM_2 = \Gamma\Sigma + 0 = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.

Αυτός είναι ο λόγος που ξεκινάμε την απόδειξη με τη φράση " Θα αποδείξουμε ότι

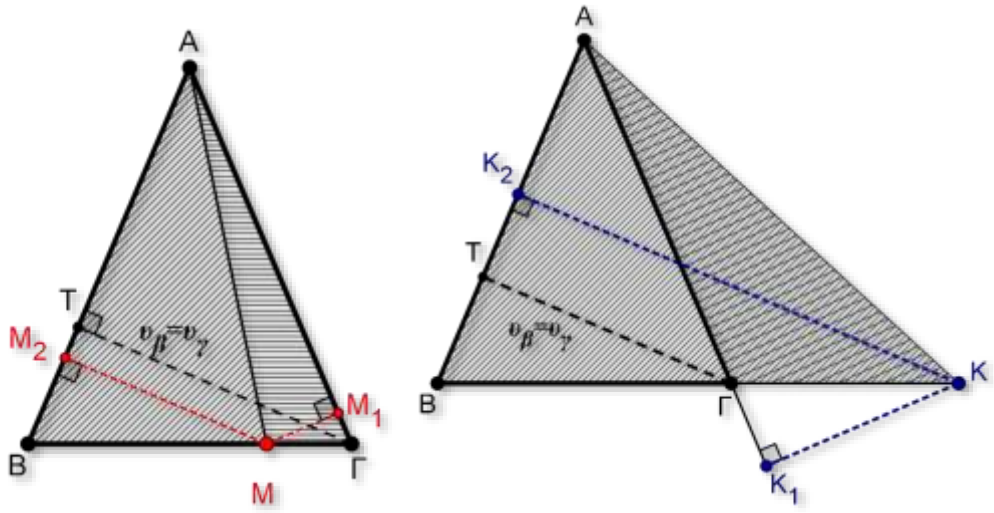
$MM_1 + MM_2 = \Gamma\Sigma = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$."

Ο παραπάνω τρόπος σκέψης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε άλλες περιπτώσεις και ονομάζεται "**μέθοδος των οριακών σημείων".** Ουσιαστικά μας βοηθάει να προσδιορίσουμε την **"σταθερή"**.

2ος Τρόπος

Για τον δεύτερο τρόπο θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του εμβαδού τριγώνου:

$$E_{AB\Gamma} = (AB\Gamma) = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma.$$



Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}AB \cdot \Gamma T = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma.$$

Το εμβαδό του τριγώνου AMB είναι:

$$(AMB) = \frac{1}{2}AB \cdot MM_2 = \frac{1}{2}\gamma \cdot MM_2.$$

Το εμβαδό του τριγώνου $AM\Gamma$ είναι:

$$(AM\Gamma) = \frac{1}{2}A\Gamma \cdot MM_1 = \frac{1}{2}\gamma \cdot MM_1.$$

Από το σχήμα είναι φανερό ότι $(AMB) + (AM\Gamma) = (AB\Gamma)$, οπότε (σε συνδυασμό με τις παραπάνω ισότητες) έχουμε: $MM_1 + MM_2 = \Gamma T = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.

Όμοια εργαζόμαστε και για το εξωτερικό σημείο.

Το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}AB \cdot \Gamma T = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma.$$

Το εμβαδό του τριγώνου AKB είναι:

$$(AKB) = \frac{1}{2} AB \cdot KK_2 = \frac{1}{2} \gamma \cdot KK_2.$$

Το εμβαδό του τριγώνου $AK\Gamma$ είναι:

$$(AK\Gamma) = \frac{1}{2} A\Gamma \cdot KK_1 = \frac{1}{2} \gamma \cdot KK_1.$$

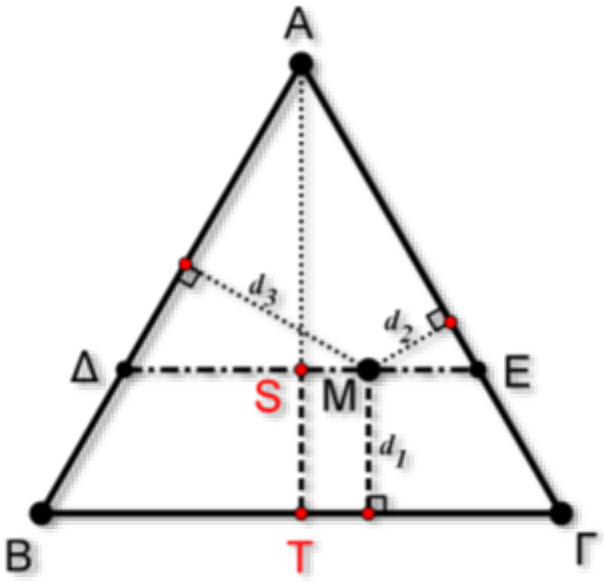
Από το σχήμα είναι φανερό ότι $(AKB) - (AK\Gamma) = (AB\Gamma)$, οπότε (σε συνδυασμό με τις παραπάνω ισότητες) έχουμε: $KK_2 - KK_1 = \Gamma T = \upsilon_\beta = \upsilon_\gamma$.

7.7.9 Άσκηση (Ιδιότητα Ισοπλεύρου Τριγώνου 1)

Η ιδιότητα του ισοπλεύρου τριγώνου (που θα αναπτύξουμε) βασίζεται στην προηγούμενη ιδιότητα του ισοσκελούς τριγώνου.

✦ **Το άθροισμα των αποστάσεων τυχόντος σημείου M (που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου) από τις πλευρές του είναι σταθερό.**

Απόδειξη



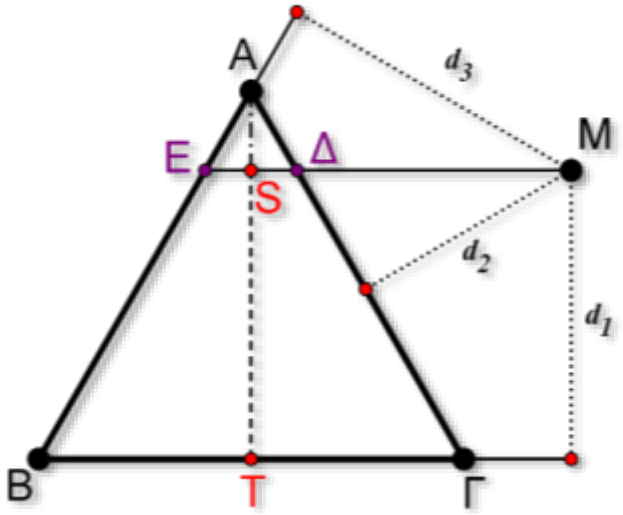
Από το ισόπλευρο (ισοσκελές) τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε: $d_1 + d_3 = AS$.
Ισχύει επίσης $d_1 = ST$. Άρα $d_1 + d_2 + d_3 = AT = ct$.

Παρατήρηση

Αν το σημείο M βρίσκεται στο εξωτερικό του τριγώνου, τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις που αναλύουμε παρακάτω.

1η Περίπτωση

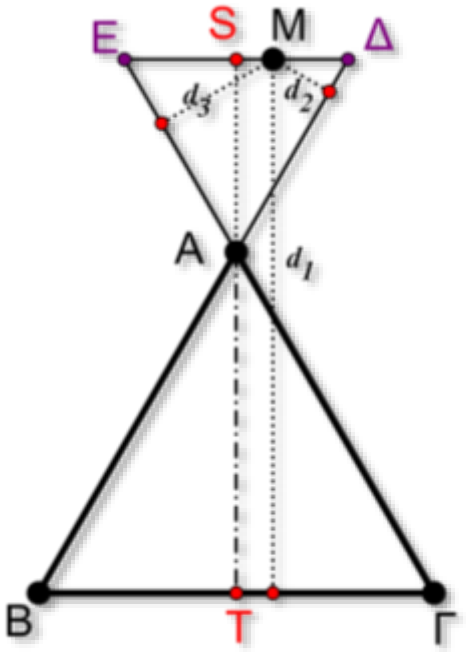
Από το ισόπλευρο (ισοσκελές) τρίγωνο $AE\Delta$ έχουμε: $d_3 - d_2 = AS$.
Ισχύει επίσης $d_1 = ST$. Άρα $d_1 - d_2 + d_3 = AT = ct$.
Κυκλικά, μπορούμε να αποδείξουμε και τις άλλες περιπτώσεις, όπου το σημείο M είναι σημείο στο εσωτερικό των γωνιών του τριγώνου.



2η Περίπτωση

Από το ισόπλευρο (ισοσκελές) τρίγωνο $A\Delta E$, έχουμε: $d_2 + d_3 = AS$

Ισχύει επίσης $d_1 = ST$. Άρα $d_1 - d_2 - d_3 = AT = ct$.

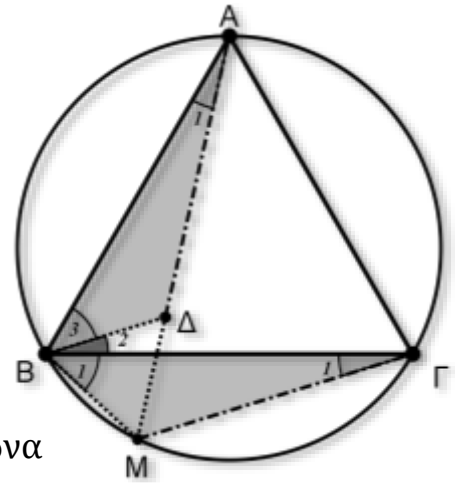


Κυκλικά, μπορούμε να αποδείξουμε και τις άλλες περιπτώσεις, όπου το σημείο M είναι σημείο στο εσωτερικό των κατά κορυφή γωνιών του τριγώνου.

7.7.10 Άσκηση (Ιδιότητα Ισοπλεύρου Τριγώνου 2)

✦ **Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Αν $Μ$ τυχόν σημείο του τόξου $ΒΓ$ τότε $ΜΑ = ΜΒ + ΜΓ$.**

Απόδειξη



Έστω $Δ$ σημείο της $ΜΑ$, ώστε $ΜΔ = ΜΒ$. Θα αποδείξουμε ότι $ΜΓ = ΑΔ$.

Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΓΜΒ$.

Το τρίγωνο $ΜΒΔ$ είναι ισοσκελές ($ΜΒ = ΜΔ$) και $\widehat{ΒΜΑ} = 60°$ άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο. Οπότε $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = \widehat{ΜΒΔ} = 60°$.

Ισχύει επίσης $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = \hat{B} = 60°$.

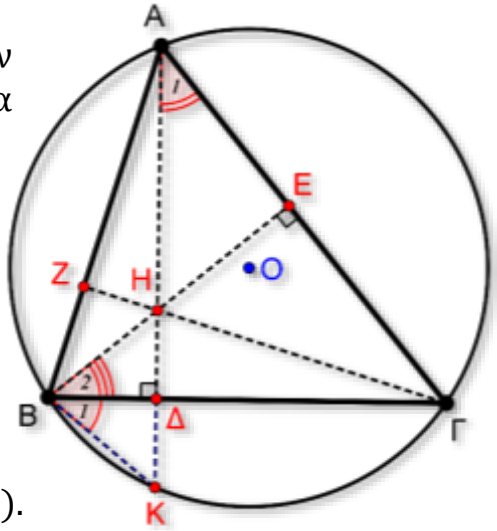
Άρα $\hat{B}_1 = \hat{B}_3$ και σε συνδυασμό με τις ισότητες $ΒΜ = ΒΔ$, $ΒΓ = ΑΒ$ συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα $ΑΒΔ$ και $ΒΓΔ$ είναι ίσα. Οπότε $ΜΓ = ΑΔ$.

7.7.11 Άσκηση (Τα Συμμετρικά του Ορθοκέντρου 1)

✦ **Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τις πλευρές τριγώνου, βρίσκονται επάνω στο περιγεγραμμένο κύκλο του.**

Απόδειξη

1ος Τρόπος



Έστω ότι η προέκταση του ύψους $A\Delta$, τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο K. Θα αποδείξουμε ότι το K είναι το συμμετρικό του ορθοκέντρου H ως προς την πλευρά $B\Gamma$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $\Delta H = \Delta K$.

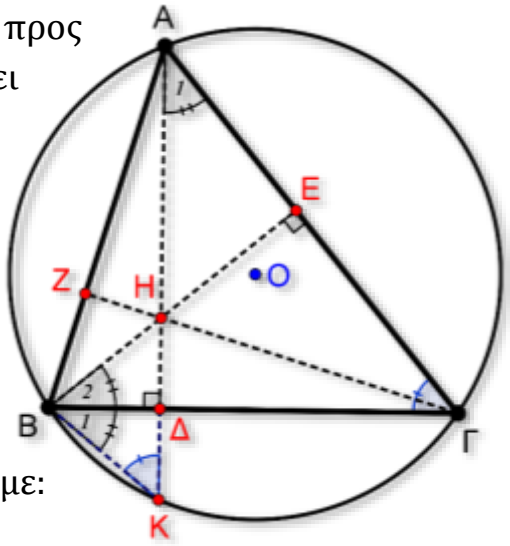
Οι γωνίες $K\hat{B}\Gamma$ και $K\hat{A}\Gamma$ είναι ίσες μεταξύ τους διότι είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο τόξο $K\Gamma$. Δηλαδή $\boldsymbol{\hat{B}_1 = \hat{A}_1}$ **(1)**.

Από τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ έχουμε: $\boldsymbol{\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 90° - \hat{\Gamma}}$ **(2)**.

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\boldsymbol{\hat{B}_1 = \hat{B}_2}$ **(3)**.

Τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta K$ και $B\Delta H$ είναι ίσα μεταξύ τους, διότι η $B\Delta$ είναι κοινή και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$. Άρα $\Delta H = \Delta K$.

2ος Τρόπος



Έστω K το συμμετρικό του ορθοκέντρου H ως προς την πλευρά $B\Gamma$. Θα αποδείξουμε ότι το K ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου. Δηλαδή ότι το τετράπλευρο $ABK\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

Εφόσον K είναι το συμμετρικό του ορθοκέντρου H ως προς την πλευρά $B\Gamma$, τα ορθογώνια τρίγωνα $B\Delta K$ και $B\Delta H$ είναι ίσα.

Άρα $\boldsymbol{\hat{B}_1 = \hat{B}_2}$ **(1)**.

Από τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και $BE\Gamma$ έχουμε:

$\boldsymbol{\hat{A}_1 = \hat{B}_2 = 90° - \hat{\Gamma}}$ **(2)**.

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: $\boldsymbol{\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 90° - \hat{\Gamma}}$ **(3)** .

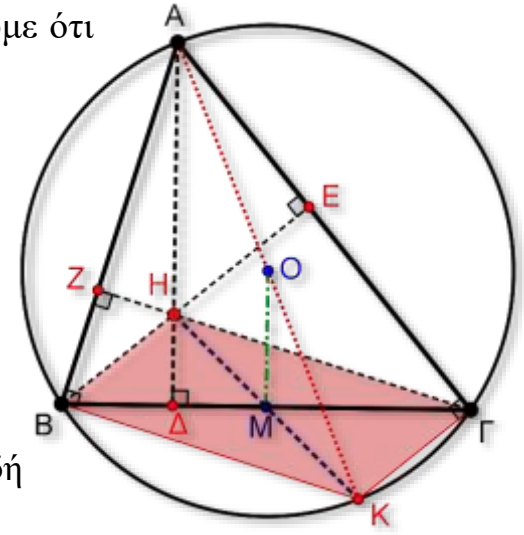
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $B\Delta K$ έχουμε: $\boldsymbol{\hat{B}_1 = 90° - \hat{K}}$ **(4).**

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε: $\boldsymbol{\hat{K} = \hat{\Gamma}}$.

7.7.12 Άσκηση (Τα Συμμετρικά του Ορθοκέντρου 2)

✦ **Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τα μέσα των πλευρών του τριγώνου, βρίσκονται επάνω στο περιγεγραμμένο κύκλο του και είναι αντιδιαμετρικά των κορυφών του.**

Απόδειξη



Έστω K το αντιδιαμετρικό του A. Θα αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $BH\Gamma K$ είναι παραλληλόγραμμο.
Ισχύει $BE \perp A\Gamma$ (διότι η BE είναι ύψος). Ισχύει επίσης $\Gamma K \perp A\Gamma$ (διότι η γωνία $A\hat{\Gamma}K$ βαίνει σε διάμετρο). Άρα $\boldsymbol{K\Gamma /\!/ BH}$ $(\mathbf{1})$.
Ισχύει $\Gamma Z \perp AB$ (διότι η ΓZ είναι ύψος). Ισχύει επίσης $\Gamma B \perp AB$ (διότι η γωνία $A\hat{B}K$ βαίνει σε διάμετρο). Άρα $\boldsymbol{KB /\!/ \Gamma H}$ $(\mathbf{2})$.
Από τις σχέσεις $(\mathbf{1})$ και $(\mathbf{2})$ συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $BH\Gamma K$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιές του θα διχοτομούνται. Δηλαδή το M είναι μέσο της $B\Gamma$ και του KH.

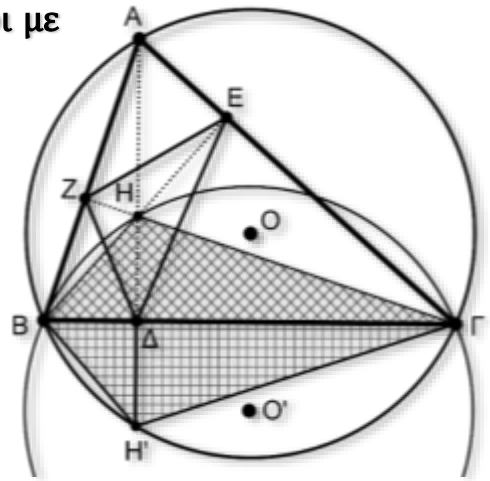
Παρατήρηση

Στο τρίγωνο AKH η OM συνδέει τα μέσα των πλευρών AK και HK.

$$\text{Άρα } \boldsymbol{OM =/\!/ \frac{AH}{2}}.$$

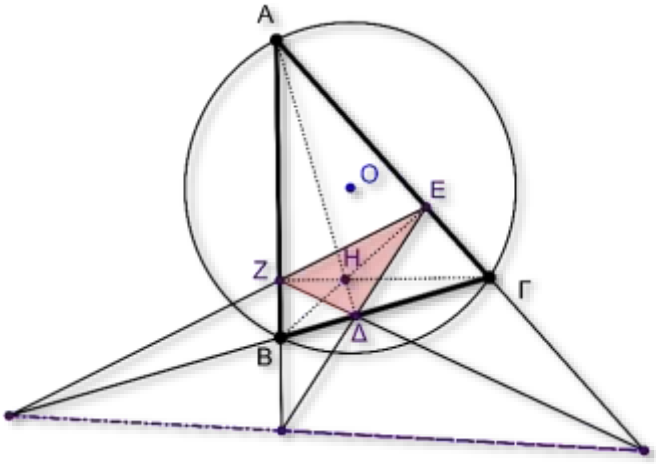
✦ **Αν H είναι το ορθόκεντρο τριγώνου $AB\Gamma$, τότε οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $HB\Gamma, HA\Gamma, HAB$ είναι ίσοι με τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$.**

Απόδειξη



Τα τρίγωνα $BH\Gamma$ και $BH'\Gamma$ είναι ίσα διότι το H' είναι το συμμετρικό του H ως προς τη $B\Gamma$. Άρα οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων αυτών θα είναι ίσοι μεταξύ τους. Κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $BH\Gamma$ είναι το σημείο O' που είναι το συμμετρικό του O ως προς τη $B\Gamma$.

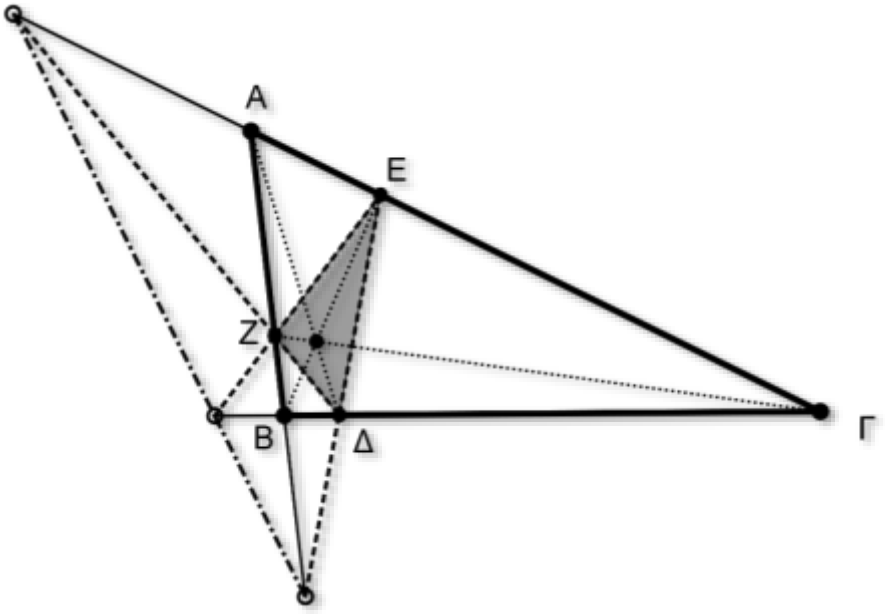
✦ **Οι ευθείες που ορίζουν οι πλευρές του τριγώνου, τέμνονται με τις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές του ορθικού του, σε σημεία συνευθειακά.**



Η απόδειξη είναι μία απλή εφαρμογή του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα Desargue

✦ **Ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές τριγώνου $AB\Gamma$ με σημεία των απέναντι πλευρών Δ, E, Z αντίστοιχα (σεβιανές) περνάνε από το ίδιο σημείο. Οι ευθείες που ορίζουν οι πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$, τέμνονται με τις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές του τριγώνου ΔEZ, σε σημεία συνευθειακά.**



Κεφάλαιο 8ο. Συμπεράσματα - Προτάσεις

8.1 Γενικά

Παρουσιάζονται τα συμπεράσματα – προτάσεις που αφορούν τις τρεις έρευνες που διεξήχθηκαν καθώς και οι απαντήσεις στα ερευνητικά ερωτήματα που τέθηκαν. Επίσης διατυπώνονται ορισμένες προτάσεις για την διαμόρφωση του προγράμματος σπουδών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, με σκοπό την αναβάθμιση και ορθότερη διαχείρηση της ύλης των μαθηματικών.

8.2 Από την 1η Έρευνα:

Συμπεράσματα

Τα ταλαντούχα παιδιά στα μαθηματικά:

- Προτιμούν σπουδές που περιέχουν αποκλειστικά μαθηματικά ή έχουν άμεση σχέση με τα μαθηματικά.
- Προετοιμάζονται, για τη συμμετοχή τους στους μαθηματικούς διαγωνισμούς, κυρίως εκτός σχολείου.
- Ενθαρρύνονται σημαντικά από του γονείς και τους καθηγητές τους, οι οποίοι παίζουν καταλυτικό ρόλο στην όλη προσπάθειά τους..
- Έχουν αυξημένη αυτοπεποίθηση απέναντι στα μαθηματικά.
- Έχουν αποβάλει σημαντικά το άγχος κατά τη διάρκεια διαγωνισμάτων μαθηματικών στο σχολείο.
- Νιώθουν υπερηφάνεια για τη διάκριση σε μαθηματικούς διαγωνισμούς

Προτάσεις με σκοπό τη καλύτερη "αντιμετώπιση" των ταλαντούχων στα μαθηματικά παιδιών:

- Να υπάρχει ηθική και επιστημονική υποστήριξη των ταλαντούχων μαθητών για τη συμμετοχή τους στους μαθηματικούς διαγωνισμούς.
- Να αναγνωρίζονται και να προβάλλονται οι επιτυχίες των ταλαντούχων παιδιών στους μαθηματικούς διαγωνισμούς.
- Να "χρησιμοποιούνται" τα ταλαντούχα παιδιά για τη δημιουργική έκφραση και ανταλλαγή απόψεων, που πιθανώς υπερβαίνουν τα «στενά» πλαίσια των σχολικών βιβλίων, κατά τη διάρκεια του μαθήματος.
- Να επιλύονται κάποιες φορές κατά τη διάρκεια του μαθήματος (με τη βοήθεια ενδεχομένως των ταλαντούχων παιδιών) προβλήματα

μαθηματικών διαγωνισμών για τα οποία δεν απαιτείται εξειδικευμένο μαθηματικό θεωρητικό υπόβαθρο (όταν βέβαια κρίνει ο διδάσκων οτι υπάρχουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις).

8.3 Από την 2η Έρευνα:

Με βάση τις εκτιμήσεις που προκύπτουν από την περιγραφική μελέτη καθώς και την παραγοντική ανάλυση, θα μπορούσαμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα και να διατυπώσουμε κάποιες προτάσεις για την στήριξη όλων των εμπλεκόμενων παραγόντων της εκπαίδευσης.

Συμπεράσματα

- Διαδικασίες με κοινωνικές βάσεις και προεκτάσεις προτρέπουν τους μαθητές να ασχοληθούν με τα μαθηματικά σε επίπεδο υψηλότερο του συνηθισμένου.
- Οι μαθηματικοί διαγωνισμοί (διά μέσου του Ολυμπιακού πνεύματος και χωρίς να αναδεικνύουν τη νίκη ως αυτοσκοπό) δρουν ευεργετικά στην ενασχόληση των μαθητών με τα μαθηματικά.
- Η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (μέσω της διοργάνωσης των μαθηματικών διαγωνισμών και των εκδόσεων της) αναδεικνύεται σε σημαντικό παράγοντα επηρεασμού των μαθητών.
- Οι μαθηματικοί διαγωνισμοί αποτελούν την αφετηρία για την ανακάλυψη ταλαντούχων παιδιών (στα μαθηματικά), καθώς και το εφαλτήριο για την πάρα πέρα εξέλιξή τους.

Προτάσεις

Με βάση τα προηγούμενα συμπεράσματα, θα μπορούσαν να διατυπωθούν μερικές προτάσεις με σκοπό τη ενίσχυση των παραγόντων που επηρεάζουν τους μαθητές να ασχοληθούν με τα μαθηματικά.

Προτείνεται λοιπόν:

- Να υπάρχει ηθική και επιστημονική υποστήριξη των μαθητών για τη συμμετοχή τους στους μαθηματικούς διαγωνισμούς.
- Να ενισχύεται και να ενθαρρύνεται από τους καθηγητές (εντός ή εκτός σχολείου) και από όλο το κοινωνικό περίγυρο η συμμετοχή των μαθητών στους μαθηματικούς διαγωνισμούς (ανεξάρτητα από τις επιδόσεις τους και τα τελικά αποτελέσματα).
- Να αναγνωρίζονται και να προβάλλονται οι επιτυχίες των παιδιών που συμμετέχουν στους μαθηματικούς διαγωνισμούς.

- Να ενισχυθεί η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (ως ο μοναδικός εξωσχολικός φορέας που ασχολείται με τους διαγωνισμούς) για την καλύτερη και ποιοτικά αναβαθμισμένη διενέργεια των διαγωνισμών.
- Να "χρησιμοποιούνται" τα παιδιά που συμμετέχουν σε διαγωνισμούς, για τη δημιουργική έκφραση και ανταλλαγή απόψεων, που πιθανώς υπερβαίνουν τα "στενά" πλαίσια των σχολικών βιβλίων, κατά τη διάρκεια του μαθήματος (στα σχολεία).
- Να επιλύονται κάποιες φορές κατά τη διάρκεια του μαθήματος (με τη βοήθεια ενδεχομένως των παιδιών που έχουν την εμπειρία της συμμετοχής σε μαθηματικούς διαγωνισμούς) προβλήματα μαθηματικών διαγωνισμών για τα οποία δεν απαιτείται εξειδικευμένο μαθηματικό θεωρητικό υπόβαθρο (όταν βέβαια κρίνει ο διδάσκων ότι υπάρχουν οι κατάλληλες προϋποθέσεις).

Με βάση τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την 1η και τη 2η έρευνα θεωρούμε ότι το 1ο ερευνητικό ερώτημα (Οι διαγωνισμοί (Εθνικοί και Διεθνείς) στα Μαθηματικά συμβάλλουν στην ανίχνευση των χαρισματικών μαθητών στα Μαθηματικά στη χώρα μας;) απαντήθηκε θετικά.

8.4 Από την 3η Έρευνα:

Σκοπός της έρευνας αυτής ήταν να παρουσιάσει τους παράγοντες που επηρέασαν την πρόθεση των ολυμπιονικών των Μαθηματικών Διαγωνισμών να συμμετάσχουν σε αυτούς ως πρώην μαθητές. Το δείγμα αποτέλεσαν 26 ολυμπιονίκες που συμμετείχαν στους διαγωνισμούς διαμέσου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. Για το σκοπό αυτό υλοποιήθηκαν ημιδομημένες συνεντεύξεις με τους ολυμπιονίκες αυτούς, οι οποίες στηρίχθηκαν και αναλύθηκαν στη Θεωρία της Προσχεδιασμένης Συμπεριφοράς, που αναπτύχθηκε συνοπτικά στην αρχή του κεφαλαίου.

Σύμφωνα με τις συνεντεύξεις των ολυμπιονικών φάνηκε ότι αυτοί ως μαθητές συμμετείχαν στους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς επειδή είχαν θετικές στάσεις απέναντι στα Μαθηματικά. Αυτή η θετική στάση διαμορφώθηκε πιθανόν από τα υποκειμενικά πρότυπα των ολυμπιονικών και ειδικότερα από το οικογενειακό τους και σχολικό τους περιβάλλον. Άμεσα ή έμμεσα το περιβάλλον αυτό είτε είχε σχέση με τα Μαθηματικά είτε επιβράβευε την ενασχόληση με αυτά. Πρόσωπα όπως οι γονείς και ιδίως ο πατέρας, αλλά και συγκεκριμένοι εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ενθάρρυναν και παρότρυναν τους

ολυμπιονίκες να ασχοληθούν με τα Μαθηματικά και τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Επιπρόσθετα, από την ανάλυση των συνεντεύξεων φάνηκε ότι οι μαθητές αυτοί είχαν έντονη την επιθυμία για διάκριση και επιτυχία και ισχυρή αυτοπεποίθηση για συμμετοχή στους διαγωνισμούς. Τέλος, φάνηκε ότι οι ολυμπιονίκες θεωρούν ότι οι Μαθηματικοί Διαγωνισμοί είχαν θετική επίδραση τόσο στην ενασχόλησή τους με τα Μαθηματικά όσο και στην μελλοντική τους ερευνητική και επαγγελματική τους πορεία.

Τα ανωτέρω δείχνουν ότι το οικογενειακό και σχολικό περιβάλλον παίζει καθοριστικό ρόλο στην δημιουργία θετικών στάσεων για ενασχόληση των μαθητών με τα Μαθηματικά και τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Ως προς αυτή την κατεύθυνση προτείνεται τόσο οι εκπαιδευτικοί φορείς της χώρας (π.χ. σχολεία, πανεπιστήμια, ερευνητικά ινστιτούτα), όσο και το Υπουργείο Παιδείας να διοργανώνει εκδηλώσεις για γονείς και μαθητές (π.χ. ενημερώσεις στο διαδίκτυο, συνέδρια, ημερίδες, ομιλίες σε σχολεία) για τα πλεονεκτήματα της ενασχόλησης των μαθητών με τα Μαθηματικά και με τους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς. Ιδιαίτερα σημαντικός είναι ο ρόλος την Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας σε αυτή την διαμόρφωση θετικών στάσεων των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Εκτός από τα συνέδρια, τις ημερίδες, τις εκδόσεις της και τις βραβεύσεις των μαθητών στους διαγωνισμούς μπορεί να ενισχύσει τον ανωτέρω σκοπό και με άλλους τρόπους. Μια πρόταση θα μπορούσε να είναι η ίδια ενημέρωση των μαθητών και γονέων από πρώην ολυμπιονίκες των Μαθηματικών Διαγωνισμών. Αυτό θα μπορούσε να υλοποιηθεί είτε με κάποιες επισκέψεις ολυμπιονικών αλλά και ατόμων με εμπειρία σε Μαθηματικούς Διαγωνισμούς στα σχολεία είτε με την αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας. Πιο συγκεκριμένα θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν εφαρμογές Web 2, όπως το Skype, το Youtube, το Facebook, το Twitter όπου θα προβάλλονται σε μεγαλύτερο βαθμό τα πλεονεκτήματα της ενασχόλησης με τα Μαθηματικά και τους διαγωνισμούς.

Με βάση τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την 3η έρευνα θεωρούμε ότι το 2ο ερευνητικό ερώτημα (Οι διαγωνισμοί (Εθνικοί και Διεθνείς) στα Μαθηματικά συμβάλλουν στην εξέλιξη των χαρισματικών μαθητών της χώρας μας στα Μαθηματικά ως νέων επιστημόνων;) απαντήθηκε θετικά.

8.5 Προτάσεις για τη διαμόρφωση του Αναλυτικού Προγράμματος στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση

Τέλος διατυπώνονται ορισμένες προτάσεις για την διαμόρφωση του προγράμματος σπουδών στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση, με σκοπό την αναβάθμιση και ορθότερη διαχείρηση της ύλης των μαθηματικών.

Οι παρακάτω προτάσεις, γίνονται με σκοπό την αναβάθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης (ποιοτικά και ποσοτικά) στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Πολλά από τα θέματα των διαγωνισμών μπορούν να εξειδικευτούν και να απλοποιηθούν κατάλληλα, ώστε να ενταχθούν στο κορμό της ύλης των μαθηματικών που διδάσκεται στα σχολεία.

Θα μπορούσε να προστεθεί ή να παραχωρηθεί ένας μικρός αριθμός ωρών για την διδασκαλία "διαγωνιστικών μαθηματικών".

Θα μπορούσαν να δημιουγηθούν "μαθηματικά σχολεία" (όπως τα μουσικά-αθλητικά κ.λ.π) που θα δίνουν έμφαση στα διαγωνιστικά μαθηματικά με σκοπό την αναβάθμιση της μαθηματικής μας παδείας.

Θεωρούμε πολύ χρήσιμο να αναβαθμιστεί και να εξελιχτεί η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τη βοήθεια σύγχρονων εποπτικών μέσων. Η αξία και η συμβολή της γεωμετρίας στην ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης και αντίληψης, έχει αποδειχτεί διαχρονικά γιαυτό είναι αναγκαία η επιστροφή της στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών του γυμνασίου.

Θερούμε πολύ καλό να διδαχθεί και η θεωρία αριθμών η οποία έχει πολλές εφαρμογές στα σύγχρονα Διακριτά Μαθηματικά και στην Θεωρία αλγορίθμων.

Η διδασκαλία πρέπει να προσανατολιστεί προς την επίλυση ασκήσεων-προβλημάτων τα οποία ενεργοποιούν και κινητοποιούν τη σκέψη.

Με βάση τη λεπτομερή εξέταση της διδακτέας ύλης των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση θεωρούμε ότι το 3^{ο} ερευνητικό ερώτημα (Οι διαγωνισμοί (Εθνικοί και Διεθνείς) στα Μαθηματικά συμβάλλουν στη διαμόρφωση του περιεχομένου των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στη χώρα μας;) απαντήθηκε αρνητικά, εφόσον ουδεμία μέριμνα έχει ληφθεί μέχρι σήμερα από την Πολιτεία προκειμένου η διδακτέα ύλη των Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση να συνδεθεί με τους διαγωνισμούς (Εθνικούς και Διεθνείς) στα Μαθηματικά. Ο μόνος φορέας που μέχρι τώρα ασχολείται συστηματικά με την προετοιμασία των μαθητών για τους διαγωνισμούς (Εθνικούς και Διεθνείς) στα Μαθηματικά είναι η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Τα τελευταία χρόνια παρατηρείται μία στροφή προς τους διαγωνισμούς από μεγάλο πλήθος μαθητών. Σε αυτή τη στροφή έχει μεγάλη συμβολή η διεξαγωγή διαγωνισμών και στις δύο τελευταίες τάξεις του δημοτικού (Παιχνίδι και Μαθηματικά). Το εδιαφέρον αυτό δημιούργησε μιάς μορφής πίεση, οπότε από πολλά Δημόσια και Ιδιωτικά Γυμνάσια και Λύκεια, δημιουργούν Ομίλους Μαθηματικών με σκοπό την ενασχόληση των μαθητών με μαθηματικά που κινούνται σε επίπεδο διαγωνιστικό. Υπάρχει δηλαδή μία "παράπλευρη" συμβολή των διαγωνισμών στη διαμόρφωση του περιεχομένου των μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης

Παράρτημα

Ερωτηματολόγιο 1ης Έρευνας

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ (ΙΜΟ 2004)

Φύλο	Αγόρι		Κορίτσι	

Ηλικία	.....

Είναι ένας από τους γονείς σας μαθηματικός**;**	**Ναι**		**Όχι**	

Τι επάγγελμα σκέπτεστε να ακολουθήσετε;	....

Στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ι.Μ.Ο) συμμετέχετε για:

1η Φορά		2η Φορά		3η Φορά	

Τι επιθυμείτε να σπουδάσετε;

Μαθηματικά	
Οικονομικά	
Τεχνικές σπουδές	

Ιατρική	
Φυσική	
Άλλο	

Για τη συμμετοχή σου στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα (Ι.Μ.Ο) έχεις προετοιμαστεί εκτός σχολείου:

Καθόλου	
1 Χρόνο	
2 Χρόνια	

3 Χρόνια	
4 Χρόνια	
Περισσότερο από 4 Χρόνια	

Πόσο χρόνο προετοιμάζεσαι καθημερινά για τη συμμετοχή σου στου Μαθηματικούς Διαγωνισμούς ;

Καθόλου	
Έως 1 ώρα	
Έως 2 ώρες	
Έως 3 ώρες	

Περισσότερο από 3 ώρες	

Τα σχολικά βιβλία σας βοήθησαν να αντιμετωπίσετε τα θέματα των Διεθνών Μαθηματικών Ολυμπιάδων;

Πάρα πολύ	
Πολύ	
Λίγο	
Πολύ λίγο	
Καθόλου	

Ποιος από τους παρακάτω κλάδους των μαθηματικών που εξετάζονται στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα σας αρέσει;

	Πάρα πολύ	Πολύ	Λίγο	Πολύ λίγο	Καθόλου
Θεωρία αριθμών.					
Άλγεβρα.					
Γεωμετρία.					
Διακριτά Μαθηματικά.					
Ανάλυση.					

Σας αρέσει να επιλύετε	Πάρα πολύ	Πολύ	Λίγο	Πολύ λίγο	Καθόλου
Καθαρά Μαθηματικά Προβλήματα.					
Προβλήματα από τη καθημερινή ζωή.					
Θεωρητικές ασκήσεις.					

Όταν αντιμετωπίζετε ένα θέμα μαθηματικού διαγωνισμού:

Προσπαθείτε να βρείτε ένα γνωστό μοντέλο επίλυσης.	

Προσπαθείτε να βρείτε το δικό σας μοντέλο επίλυσης.	
Προσπαθείτε να κάνετε συνδυασμούς επίλυσης.	

Όταν ένα θέμα μαθηματικού διαγωνισμού που δεν εντάσσεται σε κάποιο συγκεκριμένο κλάδο των μαθηματικών:

Σας κινητοποιεί να το λύσετε.	
Σας φοβίζει και σας αναστέλλει τη προσπάθεια επίλυσης.	
Έχετε εμπιστοσύνη ότι αν επιμείνετε θα φτάσετε στην επίλυση.	

Βάλτε ένα κύκλο γύρω από τη επιλογή σας, για κάθε μία από τις προτάσεις που δίνονται παρακάτω.

1=Συμφωνώ απόλυτα **2**=Συμφωνώ **3**=Αναποφάσιστος **4** =Διαφωνώ **5**= Διαφωνώ πλήρως

Πιστεύω ότι θα μπορούσα να ασχοληθώ με πιο προχωρημένα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Συνήθως νιώθω ήρεμος όταν γράφω διαγώνισμα Μαθηματικών σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς.	1 2 3 4 5
Μου αρέσουν οι μαθηματικές σπαζοκεφαλιές.	1 2 3 4 5
Όταν μένει αναπάντητη μία ερώτηση κατά την ώρα των Μαθηματικών συνεχίζω να τη σκέπτομαι και μετά το μάθημα.	1 2 3 4 5
Από τη στιγμή που θα ασχοληθώ με μία μαθηματική σπαζοκεφαλιά μου είναι αδύνατο να σταματήσω.	1 2 3 4 5
Οι γονείς μου πιστεύουν ότι τα Μαθηματικά θα με βοηθήσουν και στην εξέλιξή μου μετά το σχολείο.	1 2 3 4 5
Οι καθηγητές των Μαθηματικών με ενθάρρυναν να ασχοληθώ όσο περισσότερο μπορώ με τα Μαθηματικά	1 2 3 4 5
Σχεδόν ποτέ δεν είχα άγχος κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών σε Μαθηματικούς διαγωνισμούς.	1 2 3 4 5
Όταν δεν μπορώ να λύσω ένα μαθηματικό πρόβλημα αρχίζω να ασχολούμαι επίμονα με αυτό ώσπου να βρω τη λύση του.	1 2 3 4 5

Οι γονείς μου πιστεύουν ότι η ασχολία μου με τα προχωρημένα Μαθηματικά είναι χαμένος χρόνος για μένα.	1 2 3 4 5
Θα ήταν πράγματι σπουδαίο να κερδίσω ένα βραβείο στα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Αν πράγματι ήμουν πολύ καλός στα Μαθηματικά αυτό θα έκανε κάποιους να με αντιπαθούν.	1 2 3 4 5
Οι γονείς μου ενδιαφέρονται πολύ για τη πρόοδό μου στα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Ως ενήλικας θα χρησιμοποιήσω τα Μαθηματικά ποικιλοτρόπως.	1 2 3 4 5
Συνήθως νιώθω ήρεμος όταν γράφω διαγώνισμα Μαθηματικών στο σχολείο.	1 2 3 4 5
Οι γονείς μου με ενθαρρύνουν συνεχώς να είμαι καλός στα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Σχεδόν ποτέ δεν είχα άγχος κατά τη διάρκεια ενός διαγωνίσματος Μαθηματικών στο σχολείο.	1 2 3 4 5
Βλέπω τα Μαθηματικά ως αντικείμενο που σπάνια θα μου χρησιμεύσει στην καθημερινή μου ζωή στο μέλλον.	1 2 3 4 5
Θα ήταν σπουδαίο για μένα να με θεωρούν πολύ ικανό στα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Θα ήμουν υπερήφανος να διακρίνομαι ως μαθητής στα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Οι καθηγητές μου πιστεύουν ότι το να ασχοληθώ με προχωρημένα Μαθηματικά είναι χαμένος χρόνος για μένα.	1 2 3 4 5
Θα μου χρειαστούν τα Μαθηματικά στη μελλοντική μου εργασία.	1 2 3 4 5
Οι γονείς μου δε με ενεθάρρυναν να στραφώ σ' ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται τα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Δε νομίζω ότι έχω δυνατότητες να ασχοληθώ με προχωρημένα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Έχω μεγάλη εμπιστοσύνη στον εαυτό μου ως προς τα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Τα Μαθηματικά με διασκεδάζουν και με ενεργοποιούν.	1 2 3 4 5
Μελετώ Μαθηματικά γιατί ξέρω πόσο χρήσιμα είναι.	1 2 3 4 5
Οι καθηγητές των Μαθηματικών ενδιαφέρονται για τη πρόοδό μου στα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5

Μου προκαλούν μεγάλο ενδιαφέρον τα μαθηματικά προβλήματα που δεν μπορώ να καταλάβω αμέσως.	1 2 3 4 5
Νομίζω ότι θα μπορούσα να τα καταφέρω με πιο δύσκολα Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Θα με ευχαριστούσε να έβγαινα πρώτος σε ένα μαθηματικό διαγωνισμό.	1 2 3 4 5
Θα μπορούσα να συζητήσω με τους καθηγητές μου για ένα επάγγελμα στο οποίο χρειάζονται Μαθηματικά.	1 2 3 4 5
Τα Μαθηματικά δεν είναι σημαντικά για τη μελλοντική μου εργασία.	1 2 3 4 5

Ερωτηματολόγιο 2ης Έρευνας

ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ "ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ 2008"

1) **ΑΓΟΡΙ** ☐ **ΚΟΡΙΤΣΙ** ☐

2) Τι βαθμούς πήρατε στα μαθηματικά στις προηγούμενες τάξεις;

Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	. . . . .	Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	. . .	Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	. . .

Α ΛΥΚΕΙΟΥ	ΑΛΓΕΒΡΑ	. . . . .	Β ΛΥΚΕΙΟΥ	ΑΛΓΕΒΡΑ	. . .
	ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	. . . . .		ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ	. . .
				ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ	. . .

3) Τι βαθμό ενδεικτικού πήρατε στις προηγούμενες τάξεις;

Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ	Α ΛΥΚΕΙΟΥ	Β ΛΥΚΕΙΟΥ

4) Σε ποιά τάξη φοιτάτε;

Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ☐ Γ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ☐ Α ΛΥΚΕΙΟΥ☐ Β ΛΥΚΕΙΟΥ☐ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ☐

5) Ποιό είναι το επίπεδο σπουδών του πατέρα και της μητέρας σας;

ΕΠΙΠΕΔΟ ΣΠΟΥΔΩΝ	ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΑ	ΤΡΙΤΟΒΑΘΜΙΑ	ΛΥΚΕΙΟ	ΓΥΜΝΑΣΙΟ	ΔΗΜΟΤΙΚΟ
ΠΑΤΕΡΑ:					
ΜΗΤΕΡΑΣ:					

6) Ποιό είναι το επάγγελμα του πατέρα και της μητέρας σας;

	ΕΠΑΓΓΕΛΜΑ
ΠΑΤΕΡΑ:	
ΜΗΤΕΡΑΣ:	

7) Επιλέξτε το βαθμό που επηρέασαν οι διάφοροι παράγοντες την ενασχόλησή σας με τα μαθηματικά, βάζοντας το σύμβολο "✓ ή x " στο κατάλληλο τετράγωνο;

ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΠΟΥ ΕΠΗΡΕΑΣΑΝ ΤΗΝ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗ ΣΑΣ ΜΕ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	ΠΟΛΥ ΛΙΓΟ	ΛΙΓΟ	ΜΕΤΡΙΑ	ΠΟΛΥ	ΠΑΡΑ ΠΟΛΥ
ΠΑΤΕΡΑΣ:					
ΜΗΤΕΡΑ:					
ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ:					
ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΕΚΤΟΣ ΣΧΟΛΕΙΟΥ:					
ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ:					
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ:					
ΕΞΩΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ (ΕΚΤΟΣ ΑΠΟ ΤΙΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ):					
ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ (INTERNET):					
ΦΙΛΟΙ-ΣΥΜΜΑΘΗΤΕΣ:					
ΑΤΟΜΑ ΣΤΕΝΟΥ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑΚΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ:					
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ:					
ΜΕΣΑ ΜΑΖΙΚΗΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΣ:					

1st Austrian-Polish Mathematical Competition 1978

1-st Austrian–Polish Mathematical Competition 1978

Individual Competition – June

First Day

1. Find all functions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ which satisfy

$$f(x+y) = f(x^2+y^2) \quad \text{for all } x,y > 0.$$

2. A parallelogram is inscribed into a regular hexagon so that the centers of symmetry of both figures coincide. Prove that the area of the parallelogram is at most $2/3$ the area of the hexagon.

3. Show that

$$\sqrt[44]{\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdots \tan 44^\circ} < \sqrt{2} - 1 < \frac{\tan 1^\circ + \cdots + \tan 44^\circ}{44}.$$

Second Day

4. Given a positive rational number $c \neq 1$, show that one can partition $\mathbb{N}$ into two nonempty subsets A and B such that $\frac{x}{y} \neq c$ whenever x,y are both in A or both in B.

5. We are given 1978 sets, each containing 40 elements. Every two sets have exactly one element in common. Prove that all 1978 sets have a common element.

6. A family of disks with pairwise disjoint interiors is given in the plane. Each disk is tangent to at least six other disks in the family. Show that the family is infinite.

Team competition

7. Let M be the set of integer points in the coordinate plane. For any point $(x,y) \in M$ we call the points $(x \pm 1, y), (x, y \pm 1)$ *neighbors* of P. Let S be a given finite subset of M. A one-to-one mapping $f : S \to S$ is called *perfect* if $f(P)$ is a neighbor of P for any $P \in S$. Prove that if such a mapping exists, then there exists also a perfect mapping $g : S \to S$ satisfying $g(g(P)) = P$ for any $P \in S$.

8. For any positive integer k, define

$$a_n = \sqrt{k + \sqrt{k + \cdots + \sqrt{k}}} \quad (n \text{ square roots.}$$

(a) Show that the sequence converges for every fixed k.

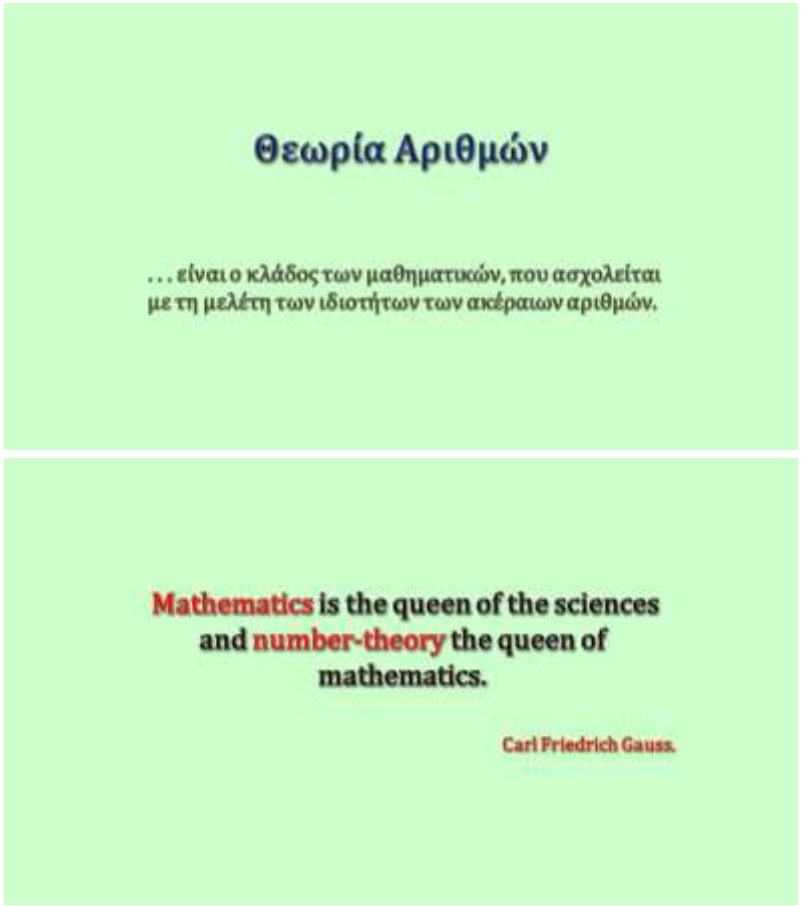
(b) Find all k for which this limit is an integer. Furthermore, prove that if k is odd then the limit is irrational.

9. In a convex polygon $\mathscr{P}$ some diagonals have been drawn, without intersections inside $\mathscr{P}$. Show that there are at least two vertices of $\mathscr{P}$, neither of which being an endpoint of any of the drawn diagonals.

The IMO Compendium Group,
D. Djukić, V. Janković, I. Matić, N. Petrović
www.imomath.com

Περισσότερες πληροφορίες για τον διαγωνισμό, υπάρχουν στον ιστότοπο: http://artofproblemsolving.com/community/c103442_1978_austrianpolish_competition

Διαφάνιες Θεωρίας Αριθμών



Euclid's Elements constitutes one of the great success stories of world literature. Scarcely any other book save the Bible has been more widely circulated or studied.

Euclid's *Elements* constitutes one of the great success stories of world literature. Scarcely any other book save the Bible has been more widely circulated or studied. Over a thousand editions of it have appeared since the first printed version in 1482, and before its printing, manuscript copies dominated much of the teaching of mathematics in Western Europe. Unfortunately, no copy of the work has been found that actually dates from Euclid's own time; the modern editions are descendants of a revision prepared by Theon of Alexandria, a commentator of the 4th century A.D.

Γιάννης Τυρλής 3

Κυριότερα Αριθμοσύνολα

♦ Το σύνολο των Φυσικών Αριθμών

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \qquad \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$

♦ Το σύνολο των Ακεραίων Αριθμών

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}, \qquad \mathbb{Z}^* = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Γιάννης Τυρλής 4

Κυριότερα Αριθμοσύνολα

♦ Το σύνολο των Ρητών Αριθμών

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\right\}, \qquad \mathbb{Q}^* = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$

- Ρητοί είναι οι αριθμοί που είναι γραμμένοι ή μπορούν να γραφούν σαν κλάσματα.
- Οι ακέραιοι αριθμοί, μπορούν να θεωρηθούν ως ρητοί με παρονομαστή τη μονάδα.

Γιάννης Τυρλής 5

Κυριότερα Αριθμοσύνολα

♦ Το σύνολο των Άρρητων Αριθμών

- Άρρητοι είναι οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφούν σαν κλάσματα.
- π.χ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$,... (οι τετραγωνικές ρίζες αριθμών που δεν είναι τέλεια τετράγωνα).
- Το 350 π.Χ. ο Εύδοξος ο Κνίδιος, απέδειξε ότι ο $\sqrt{2}$, είναι άρρητος.

Γιάννης Τυρλής 6

Άρτιοι-Περιττοί

♦ Τους ακέραιους αριθμούς τους συμβολίζουμε (συνήθως) με τα γράμματα $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ ή $k, l, m, n, \ldots$ και τους χωρίζουμε σε δύο μεγάλες κατηγορίες, τους **άρτιους** (ζυγούς) και τους **περιττούς** (μονούς).

• Κάθε ακέραιος αριθμός, θα είναι ή **άρτιος** ή **περιττός**.

Γιάννης Τυρλής 7

• Ο **επόμενος** του ακεραίου αριθμού k, είναι ο $k+1$ και **προηγούμενος** ο $k-1$.

• Αν υπάρχει ακέραιος αριθμός k ώστε να ισχύει η ισότητα $n = 3k+1$, τότε λέμε ότι ο ακέραιος n είναι της μορφής $3k+1$.

• Γενικότερα, αν υπάρχει ακέραιος αριθμός k ώστε να ισχύει η ισότητα $n = m \cdot k + l$, τότε λέμε ότι ο ακέραιος n είναι της μορφής $m \cdot k + l$, $(k, l \in \mathbb{Z})$.

Γιάννης Τυρλής 8

• Το γινόμενο οποιονδήποτε ακεραίων της μορφής $4k+1$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι επίσης ακέραιος της ίδιας μορφής

• Έστω m, n ακέραιοι της παραπάνω μορφής.
Τότε $m = 4k+1$ και $n = 4l+1$.
Άρα $m \cdot n = (4k+1)(4l+1) =$
$= 16kl + 4k + 4l + 1 = 4\underbrace{(4kl + k + l)}_{r} + 1 = 4r + 1.$

Γιάννης Τυρλής 9

Άρτιοι-Περιττοί

• Ένας ακέραιος αριθμός είναι **άρτιος** αν και μόνο αν είναι της μορφής $2k$ (όπου k τυχόν ακέραιος).

• Ένας ακέραιος αριθμός είναι **περιττός** αν και μόνο αν είναι της μορφής $2k+1$ (όπου k τυχόν ακέραιος).

• Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων αριθμών είναι **άπειρο**.

Γιάννης Τυρλής 10

Άρτιοι-Περιττοί

♦ Έστω k, l δύο άρτιοι ακέραιοι αριθμοί.
Τότε $k = 2m$ και $l = 2n$. Άρα:

• το άθροισμά τους $k + l$ είναι της μορφής
$k + l = 2m + 2n = 2(m + n) = 2\mu$
(δηλαδή άρτιος αριθμός).

• το γινόμενό τους $k \cdot l$ είναι της μορφής
$k \cdot l = 2m \cdot 2n = 2(2mn) = 2\mu$
(δηλαδή άρτιος αριθμός).

Γιάννης Τυρλής 11

Άρτιοι-Περιττοί

♦ Έστω k, l δύο περιττοί ακέραιοι αριθμοί.
Τότε $k = 2m + 1$ και $l = 2n + 1$. Άρα:

• το άθροισμά τους $k + l$ είναι της μορφής
$k + l = 2m + 1 + 2n + 1 = 2(m + n + 1) = 2\mu$
(δηλαδή άρτιος αριθμός).

• το γινόμενό τους $k \cdot l$ είναι της μορφής
$k \cdot l = (2m + 1) \cdot (2n + 1) =$
$= 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1 = 2\mu + 1$
(δηλαδή περιττός αριθμός).

Γιάννης Τυρλής 12

• Το γινόμενο ενός άρτιου και ενός οποιουδήποτε ακέραιου αριθμού είναι άρτιος αριθμός.

• Έστω k άρτιος και m ένας οποιοσδήποτε ακέραιος αριθμός.
Τότε: $k \cdot m = 2n \cdot m = 2(n \cdot m) = 2n$ (άρτιος).

Γιάννης Τυρλής 13

• Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων αριθμών είναι άρτιος ακέραιος.

• Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι ένα γινόμενο ακεραίων της μορφής $k(k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Αν ο αριθμός k είναι άρτιος, τότε:
$k(k + 1) = 2m(2m + 1) = 2(2m^2 + m) = 2n$ (άρτιος).

Αν ο αριθμός k είναι περιττός, τότε:
$k(k + 1) = (2m + 1)(2m + 2) = 2(2m^2 + 3m + 1) = 2n$
(άρτιος).

Γιάννης Τυρλής 14

• Το τετράγωνο οποιουδήποτε ακέραιου αριθμού είναι της μορφής $4k$ ή $4k+1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Κάθε ακέραιος αριθμός είναι ή άρτιος ή περιττός.

• Έστω m τυχόν ακέραιος.

Αν m άρτιος, τότε $m = 2n \Rightarrow m^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 4k$.

Αν m περιττός, τότε $m = 2n+1 \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4(n^2+n) + 1 = 4k+1$.

Γιάννης Τυρλής 15

• Το τετράγωνο οποιουδήποτε περιττού ακέραιου αριθμού είναι της μορφής $8k+1$, $m \in \mathbb{Z}$.

• Έστω m τυχόν περιττός ακέραιος.

Τότε $m = 2n+1 \Rightarrow m^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4\underbrace{n(n+1)}_{2k} + 1 = 4(2k) + 1 = 8k+1$.

Το γινόμενο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος αριθμός.

Γιάννης Τυρλής 16

Ευκλείδεια Διαίρεση

♦ Αν a και b είναι ακέραιοι αριθμοί με $b \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί ακέραιοι αριθμοί k και $υ$, τέτοιοι ώστε: $a = k \cdot b + υ$, $0 \leq υ < |b|$.

• Ο a λέγεται διαιρετέος (dividend).

• Ο b λέγεται διαιρέτης (divisor).

• Ο k λέγεται πηλίκο (quotient).

• Ο $υ$ λέγεται υπόλοιπο (remainder).

Γιάννης Τυρλής 17

Διαιρετότητα

♦ Ένας ακέραιος αριθμός $b \neq 0$, θα λέμε ότι διαιρεί τον ακέραιο αριθμό a, όταν υπάρχει ακέραιος αριθμός k τέτοιος ώστε: $a = k \cdot b$.

• Συμβολικά γράφουμε : $b|a$.

• Ισοδύναμα λέμε ότι :
Ο a διαιρείται από τον b
ή ότι ο a είναι πολλαπλάσιο του b.

Γιάννης Τυρλής 18

Ιδιότητες Διαιρετότητας

- $m|0, \quad m \in \mathbb{Z}^*$
- $1|m, \quad m \in \mathbb{Z}$
- $\left.\begin{matrix} m|k \\ n|l \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \cdot n|k \cdot l, \quad \begin{matrix} m,n \in \mathbb{Z}^* \\ k,l \in \mathbb{Z} \end{matrix}$
- $\left.\begin{matrix} m|k \\ k|l \end{matrix}\right\} \Rightarrow m|l, \quad \begin{matrix} m,k \in \mathbb{Z}^* \\ l \in \mathbb{Z} \end{matrix}$
- $m|1 \Leftrightarrow m = \pm 1$
- $(m|n \& n|m) \Leftrightarrow m = \pm n$
- $(m|n \& m|k) \Rightarrow m|(x \cdot n + y \cdot k)$
- $(m|n \& n \neq 0) \Rightarrow |m| \leq |n|$

Γιάννης Τυρλής 19

- Να βρεθεί το πλήθος των θετικών ακεραίων που δεν είναι μεγαλύτεροι από το 1000 και διαιρούμενοι με το 5 αφήνουν υπόλοιπο 2.

- Οι ακέραιοι που ζητάμε να αριθμήσουμε είναι οι ακέραιοι: $2, 7, 12, 17, 22, \cdots, 997.$

Οι ακέραιοι αυτοί αποτελούν τους όρους μίας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 2$ και διαφορά $\omega = 5$.

Ο $\nu-$ οστός όρος της προόδου, δίνεται από την ισότητα:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 2 + (\nu - 1)5 = 5\nu - 3.$

Αν $\alpha_\nu = 997$ τότε $5\nu - 3 = 997 \Leftrightarrow \nu = 200.$

Γιάννης Τυρλής 20

- Αν $m|n$ και $k|l$ τότε $mk|nl$.

- $\left.\begin{matrix} m|n \\ k|l \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} n = x \cdot m \\ l = y \cdot k \end{matrix}\Big\} \Rightarrow n \cdot l = (x \cdot y) \cdot (m \cdot k) \Rightarrow mk|nl.$

- Αν $11|(n+2)$ και $11|(35-k)$ τότε $11|(n+k)$.

- $\left.\begin{matrix} 11|(n+2) \\ 11|(35-k) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 11|((n+2)-(35-k)) \Rightarrow 11|(n+k-33).$

$\left.\begin{matrix} 11|(n+k-33) \\ 11|33 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 11|((n+k-33)+33) \Rightarrow 11|(n+k).$

Γιάννης Τυρλής 21

- Αν m, n θετικοί ακέραιοι και $m|n$ τότε: $(2^m - 1)|(2^n - 1)$.

- Εφόσον $m|n$, θα υπάρχει θετικός ακέραιος k ώστε : $n = km.$

Τότε $2^n - 1 = 2^{km} - 1 = (2^m)^k - 1 =$
$= (2^m - 1)\left((2^m)^{k-1} + (2^m)^{k-2} + \cdots + 1\right).$

Άρα $(2^m - 1)|(2^n - 1).$

Γιάννης Τυρλής 22

• Αν m, n, x θετικοί ακέραιοι με $x > 1$ και $m|n$ τότε: $(x^m - 1)|(x^n - 1)$.

• Εφόσον $m|n$, θα υπάρχει θετικός ακέραιος k ώστε: $n = km$.

Τότε $x^n - 1 = x^{km} - 1 = (x^m)^k - 1 =$
$= (x^m - 1)\left((x^m)^{k-1} + (x^m)^{k-2} + \cdots + 1\right)$.

Άρα $(x^m - 1)|(x^n - 1)$.

Γιάννης Τυρλής 23

• Αν m, n ακέραιοι με $n|(2m + 1)$ και $n|(3m - 1)$, να βρεθούν οι πιθανές θετικές τιμές του n.

• Εφόσον ο n διαιρεί τους ακέραιους $2m + 1$ και $3m - 1$, θα διαιρεί και οποιοδήποτε γραμμικό τους συνδυασμό.

Δηλαδή $n|\big(3(2m + 1) - 2(3m - 1)\big)$ άρα $n|5$.
Οπότε $n = 1$ ή $n = 5$.

Γιάννης Τυρλής 24

• Από τρεις ακέραιους k, m, n, ή κάποιος από αυτούς θα διαιρείται με το τρία ή το άθροισμα κάποιων από αυτούς θα διαιρείται με το τρία.

• Αν κάποιος από τους ακέραιους k, m, n διαιρείται με το τρία, τότε η πρόταση έχει αποδειχτεί.
Έστω ότι οι ακέραιοι k, m, n δεν διαιρούνται με το τρία, τότε οι ακέραιοι θα είναι της μορφής $3l + 1$ ή $3l + 2$.
Οι δυνατές περιπτώσεις (για τη μορφή των ακεραίων) είναι:
1) και οι τρείς είναι της μορφής $3l + 1$.
Στη περίπτωση αυτή, το άθροισμα και των τριών ακεραίων, θα είναι της μορφής:
$(3l_1 + 1) + (3l_2 + 1) + (3l_3 + 1) = 3(l_1 + l_2 + l_3 + 1)$.

Γιάννης Τυρλής 25

2) και οι τρείς είναι της μορφής $3l + 2$.
Στη περίπτωση αυτή, το άθροισμα και των τριών ακεραίων, θα είναι της μορφής:
$(3l_1 + 2) + (3l_2 + 2) + (3l_3 + 2) = 3(l_1 + l_2 + l_3 + 2)$.

3) Δύο ακέραιοι είναι της μορφής $3l + 1$ και ένας της μορφής $3l + 2$ ή δύο ακέραιοι είναι της μορφής $3l + 2$ και ένας της μορφής $3l + 1$.
Στη περίπτωση αυτή, το άθροισμα δύο ακεραίων, θα είναι της μορφής:
$(3l_1 + 1) + (3l_2 + 2) = 3(l_1 + l_2 + 1)$.

Γιάννης Τυρλής 26

• Να αποδειχτεί ότι ο θετικός ακέραιος $m = 9^{n+1} - 8n - 9$ είναι πολλαπλάσιο του 64 (όπου n θετικός ακέραιος).

• $m = 9^{n+1} - 8n - 9 = 9^{n+1} - 8n - 8 - 1 =$
$= 9^{n+1} - 1 - (8n + 8) = 9^{n+1} - 1 - 8(n + 1) =$
$= (9 - 1)(9^n + 9^{n-1} + \cdots + 1) - 8(n + 1) =$
$= 8(9^n + 9^{n-1} + \cdots + 1 - n - 1) =$
$= 8\left((9^n - 1) + (9^{n-1} - 1) + \cdots + (9 - 1)\right) =$
$\left[9^n - 1 = 8(9^{n-1} + 9^{n-2} + \cdots + 1)\right]$
$= 64\left((9^{n-1} + \cdots + 1) + (9^{n-2} + \cdots + 1) + \cdots + (1)\right)$

Γιάννης Τυρλής 27

• Το γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων διαιρείται με το 6.

• Έστω $n, n + 1, n + 2$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι και $m = n(n + 1)(n + 2)$ το γινόμενό τους.

Αν $n = 3k$ τότε $m = 3k\underbrace{(3k + 1)(3k + 2)}_{2l} = 6kl.$

Αν $n = 3k + 1$ τότε $m = \underbrace{(3k + 1)(3k + 2)}_{2l}(3k + 3) = 6l(k + 1).$

Αν $n = 3k + 2$ τότε $m = (3k + 2)(3k + 3)(3k + 4).$ ⟶

Γιάννης Τυρλής 28

⟶ Αν $n = 3k + 2$ τότε $m = (3k + 2)(3k + 3)(3k + 4).$

Αν $3k + 3$ άρτιος, τότε ο $3k + 3$ θα είναι πολλαπλάσιο του 6, άρα και ο m θα είναι πολλαπλάσιο του 6.

Αν $3k + 3$ περιττός, τότε οι άλλοι δύο ακέραιοι θα είναι άρτιοι, άρα ο m θα είναι πολλαπλάσιο του 6.

• Αποδείξτε ότι: $6 | n(n + 1)(2n + 1), n \in \mathbb{Z}.$

• $n(n + 1)(2n + 1) = n(n + 1)(n - 1 + n + 2) =$
$= n(n + 1)(n - 1) + n(n + 1)(n + 2) =$
$= \underbrace{(n - 1)n(n + 1)}_{6m} + \underbrace{n(n + 1)(n + 2)}_{6k}.$

Γιάννης Τυρλής 29

• Αποδείξτε ότι: $6 | (n^3 + 3n^2 - 4n), n \in \mathbb{Z}.$

• $n^3 + 3n^2 - 4n = n(n^2 + 3n - 4) = n(n - 1)(n + 4) =$
$= n(n - 1)(n - 2 + 6) = \underbrace{n(n - 1)(n - 2)}_{6m} + n(n - 1) \cdot 6.$

Γιάννης Τυρλής 30

Βιβλιογραφία

Ελληνόγλωσση

Αδαμόπουλος, Λ. κ.α. (1998). Μαθηματικά Β΄ τάξη Γενικού Λυκείου. Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Αδαμόπουλος, Λ. κ.α. (1999). Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής Γ΄ Γενικού Λυκείου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Αλαχιώτης, Στ. Ν. (2004). Μύθοι και αλήθειες για τα χαρισματικά παιδιά. Το *Βήμα*, Επιφυλλίδα Science.

Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. (1998). Άλγεβρα και στοιχεία Πιθανοτήτων Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. (2012). Άλγεβρα Β΄ Γενικού Λυκείου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου. Ομάδα Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής. Β΄ Μέρος. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ

ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Αργυράκης, Δ. κ.α. (2007). Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Αργυρόπουλος, Η. κ.α. (2015). Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

ΒΑΛΚΑΝΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ 1984-2007. (1985). ΑΘΗΝΑ: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία. Ανακτήθηκε στις 16/9/2016 από www.hms.gr/apothema/?s=sb&i=4

Βανδουλάκης, Ι. κ.α. (2007). Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Βλάμος, Π. κ.α. (2007). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου. ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ- ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ: ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Δαβάζογλου, Α. (1999). *Τα χαρισματικά παιδιά στην εκπαίδευση*. Αλεξανδρούπολη: Αυτοέκδοση.

Βλάμος, Μ. Π., Βλάμου, Μ. Ε. & Δημάκος, Μ. Γ.(2000). Επεξεργασία δεδομένων από μαθηματικά ταλέντα. *Μέντορας,* 2, 149- 165.

Γεώργας, Δ. (1990). *Κοινωνική Ψυχολογία*. Αθήνα.

Γεωργουσόπουλος, Κ. (2004). *"Οι Δραματικοί Αγώνες"* Καθημερινή 27-6-2004. Ανακτήθηκε στις 1/1/2016 από http://www.kathimerini.gr/4dcgi/_w_articles_kathglobal_1_27/06/2004_1282997

Δημάκος, Γ., Τυρλής, Γ., & Φερεντίνος, Σ. (2008). Χαρακτηριστικά μαθητών που συμμετέχουν σε διεθνείς μαθηματικούς διαγωνισμούς, *Ευκλείδης Γ΄*, 68, 62 – 84.

Δημάκος, Γ., Τυρλής, Γ., & Φερεντίνος, Σ. (2009). Παράγοντες που επηρεάζουν την ενασχόληση των μαθητών με τα Μαθηματικά. Πρακτικά 1ου Διεθνούς Συνέδριου Εκπαίδευσης και Ιατρικής. Υπό την αιγίδα του Πανεπιστημίου Αθηνών και του ΥΠΕΠΘ, Αθήνα, 1–4/7/09.

Ευκλείδης Α'. Μαθηματικό περιοδικό για το Γυμνάσιο (4 διμηνιαία τεύχη ετησίως). Έκδοση Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας.

Ευκλείδης Β'. Μαθηματικό περιοδικό για το Λύκειο (4 διμηνιαία τεύχη ετησίως). Έκδοση Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας.

Gardner, H. (2011). Πως το παιδί αντιλαμβάνεται τον κόσμο – Μέθοδοι διδασκαλίας σε αρμονία με τους τρόπους σκέψης του παιδιού. Επιμ. Κουτσουβάνου Ευγενία, Πανταζής Σπύρος. Αθήνα – Διάδραση.

Θωμαΐδου, Λ. (1999). Υψηλή Νοημοσύνη: Χάρισμα ή Πρόβλημα; Δελτίο Α΄ Παιδιατρικής Κλινικής Πανεπιστημίου Αθηνών, *46*, 56-60.

Θωμαΐδου, Λ., & Μελετέα, Ε. (2003). Έρευνα και Δράση για τα χαρισματικά ταλαντούχα παιδιά στην Ελλάδα. Περιοδικό «Η Λέσχη των Εκπαιδευτικών», εκδ. Πατάκη, 29, 40-41.

Καργιώτη, Μ. (2011). Συναισθηματική υποστήριξη χαρισματικών μαθητών στο ελληνικό δημοτικό σχολείο. Στο ΙΔ΄ Διεθνές Συνέδριο Παιδαγωγική Εταιρεία Ελλάδος «Εκπαίδευση Ατόμων με Ειδικές

Ανάγκες: μια Πρόκληση για το Σχολείο και την Κοινωνία, 1-3 Δεκεμβρίου 2011 (σσ. 1-12). Θεσσαλονίκη: ΠΕΕ.

Καρλατήρα, Π., & Τσώλη Θ. (2004). Ανακτήθηκε στις 2/8/17 από //www.disabled.gr/portal/modules.php?name=News&file=article&sid =1 802

Κασσωτάκης, Μ. & Φλουρής, Γ (2005). *Μάθηση και Διδασκαλία*, τ. Α΄, Β΄Αθήνα. Αυτοέκδοση.

Κονιστή, Π. (2010). Χαρισματικά παιδιά: Τα ενδοπροσωπικά και διαπροσωπικά προβλήματα προσαρμογής τους. Στο Ε. Κολιάδης (Επιμ.), Συμπεριφορά στο σχολείο: Αξιοποιούμε δυνατότητες, αντιμετωπίζουμε προβλήματα (σσ. 623-645). Αθήνα: Γρηγόρης.

Κουτρομάνος, Γ. (2008). Παράγοντες που επηρεάζουν τους εκπαιδευτικούς να χρησιμοποιήσουν τις ΤΠΕ στη διδασκαλία τους. Αγγελή Χ., Βαλανίδης Ν. (επιμ.) Πρακτικά 6ου Πανελλήνιου Συνεδρίου με Διεθνή Συμμετοχή *«Οι Τεχνολογίες της Πληροφορίας και των Επικοινωνιών στην Εκπαίδευση»,* Πανεπιστήμιο Κύπρου, Κύπρος, Σεπτέμβριος 2008, Τόμος Β', 439-446.

Κουτρομάνος Γ. & Παπαϊωάννου Γ. (2008). Η φοίτηση μαθητών σε ελληνικό παροικιακό σχολείο του Λονδίνου: Εφαρμογή και σύγκριση της Θεωρίας της Έλλογης Δράσης (Theory of Reasoned Action) και της Θεωρίας της Σχεδιασμένης Συμπεριφοράς (Theory of Planned Behaviour). *Παιδαγωγική Επιθεώρηση, 45,* 125-142.

Κρουσταλάκης, Γ. "Γενική Παιδαγωγική". Αθήνα: ΜΠΙΛΑΛΗΣ Γ. - ΚΑΡΑΒΑΝΗΣ Α. ΟΕ (Μη διαθέσιμο).

Λόξα, Γ. (2004). Οδηγός για Μαθητές με Ιδιαίτερες Νοητικές Ικανότητες και Ταλέντα. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο: Τμήμα Ειδικής Αγωγής, Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών. Υπεύθυνη έργου Λαμπροπούλου, Β.

Μακρίδης, Γ. *Αναγνώριση, Κινήτρα και Στήριξη Ταλαντούχων Μαθητών στα Μαθηματικά, στα Ευρωπαϊκά Σχολεία*, Κύπρος: Intercollege.

Ματσαγγούρας, Η. (2005, 29 Απριλίου). Οι υποψήφιοι Αϊνστάιν των σχολείων. Άρθρο στην εφημερίδα *Καθημερινή*.

Ματσαγγούρας, Γ. Η. (2008). Διαφοροποιημένη Συνεκπαίδευση : Εκπαιδευτικές Πολιτικές, Παραδοχές και Πρακτικές. Στο Η. Γ. Ματσαγγούρας (Επιμ.), Εκπαιδεύοντας Παιδιά Υψηλών Ικανοτήτων Μάθησης: Διαφοροποιημένη Συνεκπαίδευση (σσ. 47-90). Αθήνα: Gutenberg.

Ματσαγγούρας, Η. (2011). *Θεωρία και πράξη της διδασκαλίας*. Αθήνα: Gutenberg - Γιώργος & Κώστας Δαρδανός.

Παιδαγωγικό Ινστιτούτο (2008). Καλλιέργεια του ταλέντου στα Μαθηματικά. Ανακτήθηκε στις 8/8/17 από http://www.pi-schools.gr/special_education/harismatika/harismatika-part-08.pdf

Σούλης, Σ. Γ. & Φλωρίδης, Θ. (2008). Χαρισματικοί και ταλαντούχοι μαθητές: εντοπισμός, διάγνωση και εκπαιδευτική υποστήριξη. Στο Ε. Τζελέπη-Γιαννάτου (Επιμ.), Θέματα διαχείρισης προβλημάτων σχολικής τάξης, Τόμος Β΄(σσ. 82-95). Αθήνα: ΥΠΕΠΘ.

Τσιάμης, Α. (2005). *Τα χαρισματικά παιδιά ζουν ανάμεσά μας: Ανακαλύπτοντας τα ίδια και τις ανάγκες τους*. Αθήνα: Εκδόσεις Γρηγόρη.

Τυρλής, Ι. (2003). Διερεύνηση χαρακτηριστικών σε μαθητές που διακρίθηκαν σε μαθηματικούς διαγωνισμούς. Διπλωματική εργασία στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών. Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ.

Φελλούρης, Α., Τυρλής, Γ., Κοντοκώστας, Δ., Ράππος, Ε., & Ψύχας, Ε., (2008). "ΔΙΕΘΝΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ 2001-2008, ΤΕΥΧΟΣ Β΄" Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.

Φιλίππου, Γ. (1992). *Μαθηματικές γνώσεις των τελειοφοίτων του γυμνασίου. Αθήνα*: Ελληνικά Γράμματα.

Χατζόπουλος, Ι. (2003). *Το Ολυμπιακό πνεύμα στην παιδεία και προτάσεις για την ευημερία και πρόοδο του σύγχρονου ανθρώπου*. Πρακτικά Συνεδρίου που οργανώθηκε από το ΙΔΙΣΥΕΕΠ με θέμα: *"Η επίδραση του Ολυμπισμού στην ανθρώπινη πρόοδο"* Θεσσαλονίκη 5-7 Δεκεμβρίου 2003.) Ανακτήθηκε στις 10/12/2016 από http://www2.e-yliko.gr/htmls/arctles/Hatzopoulos.pdf

Ξενόγλωσση

Aiken, L., R. (1970). Nonintellective variables and mathematics achievement. *Journal of school Psychology*, 8, 28 – 36.

Ajzen, I. (1988). *Attitudes, personality, and behaviour*. Milton-Keynes, England, Open University Press and Chicago, IL, Dorsey Press.

Ajzen, I. (1991). The Theory of Planned Behavior. *Organizational Behavior and Human Decision Processes, 50*, 179-211.

Ajzen, I. (2006). *Constructing a TpB Questionnaire: Conceptual and Methodological Considerations*. Ανακτήθηκε τον Σεπτέμβριο του 20014 από www-unix.oit.umass.edu

Ajzen, I., and Fishbein, M. (1980). *Understanding attitudes and predicting social behavior.* Prentice Hall, Inc., England Cliffs.

American Invitational Mathematics Examination (AIME). Ανακτήθηκε στις 9/8/2017 από *http://www.maa.org/math-competitions/amc-contests/invitational-competitions*

American Mathematics Contest 10 (AMC 10). Ανακτήθηκε στις 9/8/2017 από http://www.maa.org/math-competitions/amc-contests/amc-1012

American Mathematics Contest 12 (AMC 12). Ανακτήθηκε στις 9/8/2017 από http://www.maa.org/math-competitions/amc-contests/amc-1012

American Mathematics Contest 8 (AMC 8).Ανακτήθηκε στις 9/8/2017 από http://www.maa.org/math-competitions/amc-contests/amc-8

APMO Contest1: Ανακτήθηκε στις 9/8/2017 από http://www.apmo-official.org/

APMO Contest2: Ανακτήθηκε στις 9/8/2017 από http://www.ommenlinea.org/apmo/

Australian Education Council (1991). *A national statement on mathematics for Australian schools*. Melbourne: Curriculum Corporation.

Bicknell, B. (2008). Who are the Mathematically Gifted? : Student, Parent, and Teacher Perspectives. In 11th International Congress on Mathematics Education, July 6 – 13 2008 (pp. 1-9). Mexico: ICME.

Bicknell, B. (2009). Multiple perspectives on the education of mathematically gifted and talented students. (Διδακτορική Διατριβή). Massey University, New Zealand (Auckland, Wellington).

Crawley, E. F., and Black, B. C. (1992). Causal modeling of secondary science students' intentions to enroll in physics. *Journal of Research in Science Teaching*, 29(6), 585-599.

Davis, L. E., Ajzen, I., Saunders, J., and Williams, T. (2002). The Decision of African American Students to Complete High School: An Application of the Theory of Planned Behaviour. *Journal of Educational Psychology*, 94(4), 810-819.

Dimakos, G., Tyrlis, I., & Ferentinos, S. (2012). Factors that influence students to do mathematics. *THE TEACHING OF MATHEMATICS* 2012, Vol. XV, 1, 43–54.

Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (2016). Evan Chen. MAA PRESS. Washington D.C.

Fenemme, E. & Sherman, J. (1976). Mathematics Attitudes Scales, Abstracted in the JSAS Catalog of Selected Documents in Psychology, 6 (1).

Fomin, D., Kirichenko. A. (1994). *Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991*. USA: MathPro Press.

Gagné, F. (2008*). Building Gifts Into Talents: Brief Overview of the DMGT 2.0*. Ανακτήθηκε στις 3/5/2016 από www.templetonfellows.org/program/francoysgagne.pdf

Gardner, H. (1993a). *Frames of mind* . Fontana Press, London.

Gardner, H. (1993b). *The theory of multiple intelligences*. Basic books. N.Y.

Gorsuch, R. L. (1983). *Factor analysis*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Heller, K. (1991). The nature and development of giftedness: A longitudinal study. *European Journal for High Ability*, 2(2), 174 – 188.

Kaiser, H. F. (1974). An Index of factorial simplicity. *Psychometrika* 39, 31-36.

Kenderov, P. S. (2009). *A short History of the World Federation of National Mathematics Competitions* (In connection with the 25th anniversary of the organization). Mathematics Competitions, 22(2). Ανακτήθηκε στις 10/8/2016 από http://www.amt.canberra.edu.au/wfnmchistory.pdf

Kenderov, P. S. (2006). Competitions and mathematics education. Ανακτήθηκε στις 15/9/2016 από

http://www.icm2006.org/proceedings/Vol_III/contents/ICM_Vol_3_76.pdf

Koballa, T. R. (1988). The determinants of female junior high school students' intentions to enroll in elective physical science in high school: Testing the applicability of the theory of reasoned action. *Journal of Research in Science Teaching*, 25(6), 479-492.

Koutromanos, G. (2009). The examination and prediction of university students' decisions to acquire access to Broadband Internet for personal and educational purposes. In A. Lionarakis (Ed.), *5th International Conference in Open and Distance Learning "Open and Distance Learning for International Cooperation and Educational Development", 27-29 November 2009, Athens, Greece (pp. 84-96).*

Koutromanos, G., Styliaras, G. & Christodoulou, S. (2015). Student and in-service teachers' acceptance of modern hypermedia in their teaching: The case of Hypersea. *Education and Information Technologies*, 20: 559-578. DOI: 10.1007/s10639-013-9302-8

Krutetski, V., A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: The University of Chicago Press.

Kukushkin , B. *"Olympic Movement in Russia"*Ανακτήθηκε στις 1/9/2016 απ http://www.olympiadprojects.com/v2/pubs_web/mo_7.pdf

LEXIKON PLATONICUM sive VOCUM PLATINICARUM, LIPSIAE 1838. Ανακτήθηκε στις 1/12/2016 από http://www.google.gr/books?id=9dZ3pbNgjwEC

Maitra, K. (2000). Identification of the gifted—some methodological issues. *Gifted Education International*, 14, 296-301.

McFarland, D., H.(2001). A Student resistance. How the formal and informal organization of classroom facilitates everyday forms of student defiance. *American Journal of Psychology*, *107*(3), 612 – 678.

Miller, R., C. (1990). *Discovering mathematical talent* (ERIC Digest No. E482). Reston, VA: Council for Exceptional Children, ERIC Clearinghouse on Disabilities and Gifted Education.

utnam Competition. Ανακτήθηκε στις 9/8/2017 από *http://math.scu.edu/putnam/*

Renzulli, J. S. (1978). What Makes Giftedness? Reexamining a Definition. *Phi Delta Kappan*, 60, 180-184.

Schoenfeld, H.(1982). Sex, grade, level, and the relationship between mathematics attitude and achievement in children. *Journal of Education Journal*, 75(5), 280-284.

Soifer, A. (2017). *The Colorado Mathematical Olympiad: The Third Decade and Further Explorations*, From the Mountains of Colorado to the Peaks of Mathematics. Bridges Olympiad problems with "real" mathematics by showing how solved. Springer International Publishing.

Span, P. & Overtoom - Corsmit, R. (1986). Information processing by Intellectually gifted pupils solving mathematical problems, *Educational Studies in Mathematics*, 17, 273-295.

SPSS (2001). *SPSS Base 11.0 User' s Guide*. Inc.: Chicago.

Sternberg, R. J. & Davidson, J. E. (Eds.) (1986). *Conceptions of giftedness*, Cambridge University press, Cambridge.

Sternberg, R. J. & Davidson, J. E. (Eds.) (1986). *Conceptions of intelligence*, Cambridge University Press.

Stoetzel, J. (1963). *La psychologie sociale*. Paris: Flammarion.

The Harvard – MIT Mathematics Tournament (2016, 2017). Ανακτήθηκε στις 20/04/2017 από https://www.hmmt.co/

United States of America Mathematical Olympiad (USAMO). Ανακτήθηκε στις 9/8/2017 από *http://www.maa.org/math-competitions/amc-contests/invitational-competitions*

Weinert, F. E. & Waldann, M. R. (1985). «Das Denken Hochbegabter - Intellektuelle Fahigkeiten und kognitive Prozesse», *Zeitschr. Fur Padag, 31*(6), 789-804.