ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΣΤΗΡΙΞΗ ΜΙΑΣ ΜΑΘΗΤΡΙΑΣ Δ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ: ΕΝΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΠΕΙΡΑΜΑ

της φοιτήτριας
Καραμίχαλου Μαρίας
Α.Μ. 215306

Επιβλέπουσα:
Μπούφη Ανδρονίκη, Καθηγήτρια

Συνεπιβλέποντες:
Βουδούρη Αγγελική, Καθηγήτρια
Μπαραλής Γεώργιος, Αναπλ. Καθηγητής

Αθήνα
Μάρτιος 2018

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν η κριτική μελέτη μιας οργανωμένης προσπάθειας στήριξης μιας μαθήτριας Δ΄ Δημοτικού στην κατασκευή ενός συνεκτικού γνωστικού σχήματος για τις κλασματικές μονάδες στο ευρύτερο πλαίσιο της προσέγγισης της ισοδυναμίας των κλασμάτων. Στην εργασία γίνεται εκτενής αναφορά στον σχεδιασμό και τη διεξαγωγή αυτής της προσπάθειας και επιχειρείται μια αναστοχαστική θεώρησή της, προκειμένου να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο θα μπορούσε η μαθήτρια να στηριχθεί αποτελεσματικότερα ώστε να κατανοήσει τις πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ των τριών επιπέδων μονάδων σε προβλήματα τα οποία εμπλέκουν κλασματικές μονάδες και στα οποία υπεισέρχεται η έννοια της ισοδυναμίας των κλασμάτων.

ABSTRACT

The purpose of this paper was the critical study of an organized effort to support a primary school student in constructing a coherent cognitive scheme for fractional units in the wider context of the approach of equivalent fractions. In this paper, an extensive reference is made to the design and implementation of this effort. Furthermore, a reflective view of this effort is presented in this paper in order to investigate an effective way that could support student's understanding of the multiplicative relationships between the three levels of units in problems which involve fractional units and equivalent fractions.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή....3

Κεφάλαιο 2: Γενικό θεωρητικό υπόβαθρο....5

2.1 Κατασκευή της γνώσης....7

2.1.1 Η θεωρία μάθησης του εποικοδομισμού....7

2.1.2 Γνωστικά σχήματα....11

2.2 Στήριξη της κατασκευής της γνώσης....15

2.2.1 Ρεαλιστική Θεωρία Μαθηματικής Εκπαίδευσης....15

2.2.2 Περιβάλλον μάθησης και μέσα στήριξης....18

Κεφάλαιο 3: Μεθοδολογικό πλαίσιο....21

3.1 Η μέθοδος του πειράματος σχεδιασμού....21

3.2 Σύνδεση μεθοδολογικού και θεωρητικού πλαισίου....22

3.3 Γενικά χαρακτηριστικά ενός πειράματος σχεδιασμού....23

3.4 Φάσεις ενός πειράματος σχεδιασμού....25

3.5 Τα στοιχεία του δικού μας πειράματος σχεδιασμού....27

3.6 Η φάση της προετοιμασίας....28

3.6.1 Συνοπτική περιγραφή πρώτου κύκλου συναντήσεων....28

3.6.2 Προετοιμασία του δεύτερου κύκλου συναντήσεων....32

Κεφάλαιο 4: Ανάλυση στοιχείων....37

4.1 Πρώτη συνάντηση....38

4.2 Δεύτερη συνάντηση....47

4.3 Τρίτη συνάντηση....53

Κεφάλαιο 5: Αναστοχασμός και προτάσεις....59

Κεφάλαιο 6: Βιβλιογραφικές αναφορές....65

Κεφάλαιο 1: Εισαγωγή

Πώς θα μπορούσε να βοηθηθεί ένα παιδί ώστε να φτάσει σε εννοιολογική κατανόηση της ισοδυναμίας δύο κλασμάτων; Τι είδους ιδέες και μέσα θα μπορούσαν να στηρίξουν ουσιαστικά μια τέτοια κατανόηση;

Μια συχνή, παραδοσιακή προσέγγιση της ισοδυναμίας των κλασμάτων αποτελεί η επίδειξη του ίσου μεγέθους δύο κλασματικών μερών μέσω της σύγκρισης των κυκλικών ή ορθογώνιων περιοχών του όλου στις οποίες αντιστοιχούν. Μια τέτοια προσέγγιση περιορίζεται στη σύλληψη του κλάσματος ως μέρος όλου και απομονώνει την ιδέα της ισοδυναμίας από άλλες εν δυνάμει ωφέλιμες ιδέες, όπως αυτές του ισοτεμαχισμού και του ισοτεμαχισμού των αποτελεσμάτων ενός ισοτεμαχισμού.

Επιχειρώντας μια διαφορετική από την παραδοσιακή προσέγγιση της ισοδυναμίας των κλασμάτων, πραγματοποιήθηκαν δύο κύκλοι συναντήσεων με μία μαθήτρια Δ΄ Δημοτικού. Αρχικός μας σκοπός ήταν να στηρίξουμε τη μαθήτρια ώστε να προσεγγίσει με τις δικές της δυνάμεις την έννοια της ισοδυναμίας στο πλαίσιο καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς, μέσω διαφορετικών ισοτεμαχισμών. Η διαπίστωση στο τέλος του πρώτου κύκλου μιας συγκεκριμένης δυσκολίας της μαθήτριας που αφορούσε τις κλασματικές μονάδες οδήγησε στον σχεδιασμό και τη διεξαγωγή ενός δεύτερου κύκλου συναντήσεων. Λαμβάνοντας υπόψη αυτή τη δυσκολία της, στο δεύτερο κύκλο κατεύθυνσή μας ήταν τόσο ο σχεδιασμός οργανωμένης στήριξης ώστε η μαθήτρια να αναδιοργανώσει τη μαθηματική της δραστηριότητα τροποποιώντας τα υπάρχοντα σχήματά της για τις κλασματικές μονάδες όσο και η αναστοχαστική μελέτη της πορείας μάθησής της στο πλαίσιο που ορίζεται από τα μέσα στήριξής της.

Η παρούσα εργασία εστιάζει στην προσπάθεια που έγινε στον δεύτερο κύκλο συναντήσεων για παροχή στοχευμένης στήριξης της μαθήτριας και αποσκοπεί όχι μόνο σε περιγραφή του τι συνέβη αλλά και σε κριτική μελέτη του γιατί συνέβη.

Με βάση αυτό το αναστοχαστικό πνεύμα της εργασίας που αφορά τόσο στην πορεία μάθησης της μαθήτριας όσο και στην αποτελεσματικότητα της στήριξης αυτής της πορείας εντοπίζονται οι κύριες ιδέες που αποτέλεσαν τα θεμέλια του θεωρητικού πλαισίου.

Οι συναντήσεις οργανώθηκαν, σχεδιάστηκαν, διεξήχθησαν και αναλύθηκαν με βάση τις μεθοδολογικές αρχές του πειράματος σχεδιασμού. Αυτό το μεθοδολογικό πλαίσιο κρίθηκε πως είναι συμβατό και εξυπηρετεί τις ανάγκες του θεωρητικού πλαισίου της

εργασίας, το οποίο απαιτεί διττή μελέτη (εκ των προτέρων – εκ των υστέρων) της πορείας μάθησης και των μέσων στήριξης της μαθήτριας.

Από την οπτική της προετοιμασίας των συναντήσεων, το γενικό θεωρητικό υπόβαθρο, κεντρικές ιδέες του οποίου ήταν η προσέγγιση της μάθησης ως κατασκευής και εξέλιξης γνωστικών σχημάτων και η ανάγκη για οργανωμένη στήριξη αυτής της προσπάθειας, και το συγκεκριμένο μεθοδολογικό πλαίσιο της εργασίας αποτέλεσαν τις βάσεις στις οποίες στηρίχθηκε η διαμόρφωση της αρχικής υποθετικής τροχιάς. Μια συγκεκριμένη δυσκολία την οποία εμφάνισε η μαθήτρια κατά τη διεξαγωγή του πρώτου κύκλου συναντήσεων και η ανάγκη για παροχή οργανωμένης στήριξής της οδήγησαν σε έναν δεύτερο κύκλο συναντήσεων και μία νέα υποθετική τροχιά. Οι δύο αυτές τροχιές, η γενικότερη αρχική και η μετέπειτα πιο στοχευμένη, προσδιόριζαν τόσο την υποθετική πορεία με την οποία η μαθήτρια θα αναδιοργάνωνε τη μαθηματική της δραστηριότητα και θα κατασκεύαζε περισσότερο εξελιγμένα γνωστικά σχήματα όσο και τα μέσα στήριξης της κατασκευής αυτής.

Από μια αναστοχαστική οπτική των συναντήσεων με τη μαθήτρια, αυτές οι αρχικές υποθέσεις έγιναν αντικείμενο κριτικής μελέτης και αναστοχασμού ως προς την πορεία και τα μέσα στήριξης της μάθησης.

Πιο συγκεκριμένα, το γενικό θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας παρουσιάζεται εκτενώς στο δεύτερο κεφάλαιο, ενώ στο τρίτο προσδιορίζεται το συγκεκριμένο μεθοδολογικό πλαίσιο. Ακολουθεί η ανάλυση των στοιχείων στο τέταρτο κεφάλαιο, στο οποίο παρουσιάζονται και συζητούνται επιλεγμένα αποσπάσματα των συναντήσεων με τη μαθήτρια. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν μέσα από αυτήν την αναστοχαστική μελέτη.

Τέλος, στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στην επιβλέπουσα της παρούσας εργασίας καθηγήτρια Ανδρονίκη Μπούφη και στις διδακτορικές φοιτήτριες Κωστούλα Ντούμα και Άννα Σπηλιοπούλου για την καθοδήγηση και βοήθεια που μου παρείχαν καθώς και στις συμφοιτήτριές μου, Καραΐσκου Βασιλική και Πασάλη Μαρία, με τις οποίες συνεργαστήκαμε για την προετοιμασία και διεξαγωγή του πειράματος σχεδιασμού.

Κεφάλαιο 2: Γενικό θεωρητικό υπόβαθρο

Η παρούσα μελέτη βασίζεται σε δύο θεωρητικές υποθέσεις για τον τρόπο με τον οποίο συντελείται η μάθηση των παιδιών. Η πρώτη αφορά την πεποίθηση πως οι μαθητές και οι μαθήτριες κατασκευάζουν τη νέα γνώση κτίζοντας ενεργά πάνω στις προγενέστερες γνώσεις και εμπειρίες τους σε άμεση αλληλεπίδραση με το περιβάλλον τους. Η δεύτερη υποστηρίζει ότι η μάθηση αυτή δεν εμφανίζεται αυθόρμητα αλλά απαιτεί ένα οργανωμένο περιβάλλον στήριξης.

Η αντιμετώπιση της μάθησης ως ενεργής κατασκευής της γνώσης από τα ίδια τα παιδιά εμπίπτει στην ευρέως γνωστή θεωρία μάθησης του εποικοδομισμού. Δύο βασικές προσεγγίσεις στη θεωρία του εποικοδομισμού είναι η γνωστική και η κοινωνική. Η μεν πρώτη δίνει έμφαση στην κατασκευή της γνώσης από το άτομο μέσα από την οικοδόμηση και εξέλιξη των γνωστικών του σχημάτων, ενώ η δεύτερη τονίζει την επίδραση των κοινωνικών αλληλεπιδράσεων και του περιβάλλοντος στη μάθηση (Simon, 1995; Cobb & Bowers,1998; Korthagen, 2000; Schcolnik, Kol & Abarbanel, 2006). Η παρούσα εργασία δεν αντιμετωπίζει τις δύο αυτές οπτικές ως αμοιβαία αποκλειόμενες αλλά επηρεαζόμενη από το έργο των Cobb, Yackel και Wood (2002) θεωρεί τον συντονισμό και τη συσχέτιση των δύο προσεγγίσεων αναγκαία προκειμένου να κατανοηθεί πληρέστερα ο τρόπος με τον οποίο τα παιδιά μαθαίνουν. Το κεντρικό ζήτημα που μας απασχολεί δεν αφορά στο ποια από τις δύο διαστάσεις κυριαρχεί έναντι της άλλης αλλά στο τι θα μπορούσαμε να μάθουμε και να αξιοποιήσουμε από τις δύο αυτές διαστάσεις ώστε να κατανοήσουμε και να στηρίξουμε τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές κατασκευάζουν τις γνώσεις τους όσο το δυνατόν αποτελεσματικότερα (Cobb, Yackel & Wood, 2002).

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου, το οποίο εστιάζει στη μάθηση ως ενεργή κατασκευή, γίνεται αναφορά στις ιδέες του εποικοδομισμού στις οποίες στηρίχθηκε η εργασία αυτή, θεωρώντας τις δύο διαστάσεις που προαναφέρθηκαν ως άρρηκτα συνδεδεμένες και εμπλεκόμενες στη διαδικασία της μάθησης. Στο πλαίσιο της εποικοδομιστικής θεώρησης της μάθησης που αξιοποιείται ως θεωρητική βάση, σημαντική θέση έχει η οριοθέτηση και ο εννοιολογικός προσδιορισμός των γνωστικών σχημάτων, όπως αναλύονται στο έργο του Steffe (Steffe et.al., 1991; Steffe, 2002; Olive & Steffe, 2002; Steffe, 2004).

Στο δεύτερο μέρος, η κεντρική ιδέα που εξετάζεται αφορά στον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να στηρίξουμε τη μάθηση ως ενεργή κατασκευή και εξέλιξη γνωστικών

σχημάτων, όπως αναλύθηκε στο πρώτο μέρος. Μεταθέτοντας το ενδιαφέρον στη στήριξη και στο πλαίσιο της μάθησης, στο κομμάτι αυτό δίνεται έμφαση στον ρόλο που διαδραματίζει για την κατασκευή της γνώσης το περιβάλλον, το οποίο με τη σειρά του αποτελεί και αυτό προϊόν κατασκευής από κοινού του δασκάλου/ερευνητή με το παιδί. Η ιδέα της μάθησης που καθορίζεται και επηρεάζεται από το περιβάλλον και τα μέσα στήριξής της καθώς και ο σχεδιασμός κατάλληλων μέσων στήριξης καθοδηγείται από τις αρχές μιας συγκεκριμένης θεωρίας σχεδιασμού που είναι γνωστή ως Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση. Η συγκεκριμένη θεωρία είναι συμβατή με την κονστρουκτιβιστική προσέγγιση της μάθησης που περιγράφεται στο πρώτο μέρος και παρέχει ένα πλήθος συγκεκριμένων ευρετικών για τη στήριξη της προοδευτικής αναδιοργάνωσης της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών. Τέλος, γίνεται αναφορά σε συγκεκριμένα μέσα στήριξης τα οποία θεωρήθηκε πως συνδιαμορφώνουν το κοινωνικό πλαίσιο της μάθησης και επηρεάζουν τόσο τη διαδικασία όσο και τα προϊόντα της.

2.1 Κατασκευή της γνώσης

2.1.1 Η θεωρία μάθησης του εποικοδομισμού

«*Αν η δημιουργία των εννοιολογικών δικτύων που συνιστούν τον χάρτη της πραγματικότητας για κάθε άτομο – συμπεριλαμβανομένης της μαθηματικής του κατανόησης – είναι προϊόν εποικοδομητικής και ερμηνευτικής δραστηριότητας, τότε συνεπάγεται ότι με όση σαφήνεια και υπομονή κι αν εξηγούν οι δάσκαλοι στους μαθητές και τις μαθήτριές τους, δεν είναι δυνατόν να καταλάβουν οι ίδιοι για λογαριασμό των μαθητών και των μαθητριών τους*» (Schifter & Fosnot, 1993:9 στο Van de Walle, 2005).

Όπως γίνεται φανερό και από την άποψη των Schifter & Fosnot, η θεωρία του εποικοδομισμού απορρίπτει την αντίληψη ότι τα παιδιά είναι άγραφοι χάρτες. Οι μαθητές δεν αφομοιώνουν τις ιδέες όπως τις παρουσιάζουν οι δάσκαλοί τους αλλά είναι δημιουργοί της ίδιας τους της γνώσης.

Η θεωρία αυτή αποτελεί μια θέση για τη φύση της γνώσης και κατ' επέκταση της μαθηματικής γνώσης και για τη λειτουργική αξία που έχει για τους ανθρώπους. Ο εποικοδομισμός συνεπάγεται επίσης έναν μηχανισμό για τον τρόπο με τον οποίο αποκτάμε τη γνώση και ως εκ τούτου για το πώς είναι δυνατόν να διδάξουμε (Lochhead, 2002). Παρέχει λοιπόν ιδέες σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά μαθαίνουν μαθηματικά και οδηγεί σε γενικές διδακτικές στρατηγικές.

Πώς μαθαίνουν τα παιδιά;

Τα παιδιά όλη την ώρα οικοδομούν και προσδίδουν νόημα στα πράγματα που αντιλαμβάνονται ή σκέφτονται. Ο ουσιαστικός τρόπος γνώσης του κόσμου δεν είναι απευθείας μέσα από τις αισθήσεις τους, αλλά πρωτίστως μέσα από τις υλικές και νοητικές πράξεις τους (Steffe, 2002). Μαθαίνουν κατασκευάζοντας τις γνώσεις τους για τον κόσμο μέσα από τις αντιλήψεις και τις εμπειρίες τους οι οποίες διαμεσολαβούνται από τις προηγούμενες γνώσεις τους (Simon, 1995).

Αυτή η διαδικασία οικοδόμησης της γνώσης συνιστά ένα εγχείρημα που απαιτεί την άκρως ενεργό συμμετοχή του παιδιού. Η οικοδόμηση και η κατανόηση μιας νέας ιδέας χρειάζεται ενεργό σκέψη: «Πώς σχετίζεται αυτό με όσα ήδη ξέρω;», «Πώς το καταλαβαίνω αυτό με βάση τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνομαι τώρα αυτήν την ιδέα;»

Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις γνωστικές τους κατασκευές για να ερμηνεύσουν το περιβάλλον. Αφομοιώνουν νέες πληροφορίες στις ήδη υπάρχουσες συγκροτημένες δομές,

κατανοώντας τις στο βαθμό που τους επιτρέπουν οι προϋπάρχουσες αυτές δομές (Schcolnik, Kol & Abarbanel, 2006).

Κατά τη διαδικασία όμως αυτού του ταιριάσματος των νέων ιδεών με τα υπάρχοντα γνωστικά δίκτυα, πολλές φορές οι μαθητές απαιτείται να θέσουν υπό αμφισβήτηση τόσο τις δικές τους ιδέες όσο και τις ιδέες των άλλων. Όταν λοιπόν αυτό που αντιλαμβάνονται διαφέρει από αυτό που περίμεναν, όταν προκύπτουν νέες εμπειρίες ή γεγονότα (όπως ένα απροσδόκητο αποτέλεσμα σε ένα πρόβλημα, μια διαφορετική λύση ενός συμμαθητή τους), οι οποίες δεν ταιριάζουν και δεν μπορούν να αφομοιωθούν από τις υπάρχουσες γνωστικές δομές τους, δημιουργείται μια κατάσταση γνωστικών συγκρούσεων και αναταράξεων. Σε αυτήν την περίπτωση οι δομές μετασχηματίζονται, αναδιοργανώνονται και διευρύνονται για να αφομοιωθούν επιτυχώς οι νέες ιδέες (Simon, 1995; Schcolnik, Kol & Abarbanel, 2006).

Συνεπώς, η οικοδόμηση της γνώσης απαιτεί ενεργό, αναστοχαστική σκέψη, συνεχή ανασυγκρότηση και τροποποίηση των νοητικών δομών ώστε οι νέες ιδέες να εναρμονίζονται καλύτερα με την πρότερη γνώση (Van de Walle, 2005). Μάλιστα αυτή η κρίσιμη πτυχή του αναστοχασμού (reflection) αποτελεί το σημείο κλειδί για τη μάθηση στον εποικοδομισμό (Cobb & Steffe, 1983).

Οι δύο προαναφερθέντες μηχανισμοί της αφομοίωσης, δηλαδή της διαδικασίας με την οποία ο μαθητής χρησιμοποιεί τις προϋπάρχουσες νοητικές δομές για να κατανοήσει το περιβάλλον του και της συμμόρφωσης, δηλαδή της διαδικασίας με την οποία αλλάζει τις προηγούμενες γνωστικές δομές προκειμένου να ανταποκριθεί καλύτερα σε νέες περιβαλλοντικές απαιτήσεις και εμπειρίες που συνήθως αντιφάσκουν με προηγούμενα μη βιώσιμα γνωστικά σχήματα συνιστούν σύμφωνα με την ορολογία του Piaget ένα ενιαίο λειτουργικό σύστημα νοητικής προσαρμογής του παιδιού στο περιβάλλον του (Schcolnik, Kol & Abarbanel, 2006). Μέσα από μια συνεχή διαδικασία προσαρμογής και αναδιοργάνωσης, οι νοητικές δομές διαφοροποιούνται και αναπτύσσονται αυξάνοντας την πληρότητα και την ευστάθειά τους.

Η μάθηση αντιμετωπίζεται ως μια διαρκής διαδικασία οικοδόμησης, καθώς όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Piaget οι γνωστικές δομές των ατόμων είναι συνεχώς «υπό κατασκευή» (Schcolnik, Kol & Abarbanel, 2006). Έτσι κατά τη μάθηση, η αφομοίωση νέων ιδεών οδηγεί σε τροποποίηση των γνωστικών δομών που ήδη υπάρχουν προκειμένου να προσαρμοστούν σε αυτές τις νέες ιδέες, να αντιμετωπιστεί η γνωστική σύγκρουση και να επέλθει εξισορρόπηση των νοητικών δομών με το περιβάλλον (Steffe, 2002).

Δε θα μπορούσαμε όμως να προσεγγίσουμε επαρκώς τον τρόπο με τον οποίο μαθαίνουν τα παιδιά και συλλαμβάνουν τις μαθηματικές ιδέες, αν εστιάζαμε μόνο στις παραπάνω γνωστικές διεργασίες κατά τη διαδικασία της μάθησης και αγνοούσαμε τη διαλεκτική φύση της και το κοινωνικό πλαίσιο στο οποίο αυτή πραγματοποιείται και το οποίο με τη σειρά του είναι και αυτό δημιούργημα των συμμετεχόντων (Cobb, Zhao & Visnovska, 2010). Το βάρος μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση όχι του εκπαιδευτικού ούτε του μαθητή αλλά της διαδραστικής επικοινωνίας ανάμεσά τους.

Αυτό που μπορεί να ειδωθεί από γνωστική πλευρά ως μια πράξη επανοργάνωσης της μαθηματικής συλλογιστικής των παιδιών, συλλαμβάνεται από κοινωνική πλευρά ως πράξη κοινωνικής αλληλεπίδρασης και συμμετοχής στην ανάπτυξη κοινών πρακτικών μιας μαθηματικής κοινότητας όπως διαμορφώνεται στην περίπτωσή μας από μία μαθήτρια και την ερευνητική ομάδα (Cobb, Yackel & Wood, 2002; Steffe, 2002; Schcolnik, Kol & Abarbanel, 2006; Cobb, Zhao & Visnovska, 2010).

Γενικές διδακτικές κατευθύνσεις του εποικοδομισμού

Εστιάζοντας το ενδιαφέρον μας στη μάθηση ως ενεργή κατασκευή και τροποποίηση γνωστικών δομών μέσα σε ένα πλαίσιο κοινωνικής αλληλεπίδρασης και συμμετοχής στην ανάπτυξη κοινών πρακτικών, οδηγούμαστε σε μια αλλαγή κατεύθυνσης που αφορά τόσο τον σκοπό όσο και τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών (Simon, 1995).

Καθώς οι μαθητές κατασκευάζουν τη μαθηματική τους γνώση, ο εκπαιδευτικός κατασκευάζει τη δική του κατανόηση για τη μαθηματική πραγματικότητα των μαθητών του που αφορά στις υπάρχουσες μαθηματικές τους ιδέες και τον τρόπο σκέψης τους (Cobb & Steffe, 1983). Κατά την αλληλεπίδρασή τους, ο δάσκαλος και οι μαθητές προσπαθούν να αποδώσουν νόημα στη λεκτική και μη λεκτική δραστηριότητα ο ένας του άλλου. Έτσι κατά την προσπάθειά του αυτή, ο εκπαιδευτικός επιχειρεί να κατασκευάσει έναν χάρτη, ένα μοντέλο για τη μαθηματική γνώση των μαθητών του, μέσα από τη διατύπωση και τον έλεγχο υποθέσεων σχετικά με τις ποικίλες όψεις της μαθηματικής δραστηριότητάς τους (Steffe, 2002). Συνεπώς, πρόκειται για έναν χάρτη αποσπασματικό, αναιρέσιμο και πάντα υποκείμενο σε διορθώσεις.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, παρατηρείται μια νέα κατεύθυνση στον σκοπό της μαθηματικής διδασκαλίας που δίνει έμφαση στη μοντελοποίηση του τρόπου δράσης και σκέψης των μαθητών εκ μέρους του δασκάλου και στην προσπάθειά του να τους

βοηθήσει βασιζόμενος σε αυτή τη μοντελοποίηση να κατασκευάσουν όλο και πιο εξελιγμένες και ισχυρές γνωστικές δομές (Cobb & Steffe, 1983).

Σημαντική επισήμανση στον παραπάνω σκοπό αποτελεί το γεγονός ότι αυτά τα μοντέλα δεν είναι τίποτε άλλο παρά εύλογες εξηγήσεις των εκπαιδευτικών για τη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών τους. Δε θα μπορούσε κανένας να ισχυριστεί κάποια αντιστοιχία των μοντέλων αυτών με τη μαθηματική, μη προσβάσιμη πραγματικότητα των μαθητών. Στη θεωρία του εποικοδομισμού, σημαντική θέση έχει η συνειδητοποίηση ότι ένας δάσκαλος ή ερευνητής δεν μπορεί να γνωρίζει τι συμβαίνει στο μυαλό των μαθητών του (Cobb & Steffe, 1983; Lochhead, 2002).

Ο παραπάνω προσδιορισμός του σκοπού της διδασκαλίας των μαθηματικών οδηγεί και σε μια αναθεωρημένη άποψη του τρόπου διδασκαλίας τους από μια εποικοδομιστική σκοπιά.

Πολλές φορές επικρατεί μια υπεραπλουστευμένη άποψη που συνδέει τον εποικοδομισμό με τη ρομαντική ιδέα: «Αφήστε τους μαθητές σας μόνους τους και θα κατασκευάσουν μαθηματικές έννοιες.» ή «Βάλτε τους μαθητές σας σε ομάδες και αφήστε τους να επικοινωνούν καθώς λύνουν προβλήματα» (Simon, 1995).

Αντίθετα με τις παραπάνω ιδέες, θεωρούμε πως μία εποικοδομιστική διδασκαλία χρειάζεται σοβαρό σχεδιασμό από τον εκπαιδευτικό μέσα σε ένα πνεύμα που χαρακτηρίζεται από συνειδητοποίηση του ρόλου της έντονης διαδραστικής επικοινωνίας στη μάθηση, της συνεχούς αμφισβήτησης, της ετοιμότητας που πρέπει να διαθέτει ο ίδιος για διόρθωση και τροποποίηση των μοντέλων που έχει κατασκευάσει για τις γνώσεις των μαθητών του. Χρειάζεται επίσης η διδασκαλία να διαπνέεται από ένα κλίμα εμπιστοσύνης στις προσπάθειες και τις δυνατότητες των παιδιών για ενεργό κατασκευή της γνώσης και ενθάρρυνσης των σημαντικών διαδικασιών του αναστοχασμού και της αφαίρεσης (Cobb & Steffe, 1983; Cobb, Yackel & Wood, 2002; Steffe, 2002).

Σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσαμε να μετουσιώσουμε τις παραπάνω γενικές διδακτικές κατευθύνσεις του εποικοδομισμού και να στηρίξουμε τη μάθηση ως κατασκευή και τροποποίηση των γνωστικών δομών των μαθητών θα γίνει εκτενής αναφορά σε επόμενη ενότητα.

Στη συνέχεια, θα εστιάσουμε στη σημασία της οργάνωσης των μαθηματικών ιδεών των μαθητών από τους εκπαιδευτικούς και στον ρόλο που έχει αυτή η οργάνωση για τη μάθηση, αξιοποιώντας την ορολογία των σχημάτων.

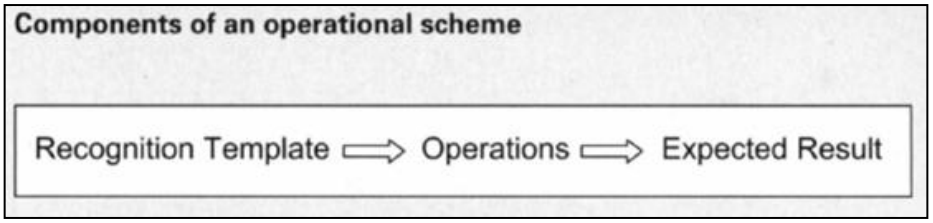
2.1.2 Γνωστικά σχήματα

Η μαθηματική γνώση των παιδιών μπορεί να οργανωθεί με βάση τα σχήματα και τις λειτουργίες (Steffe et al., 1991; Steffe, 2002; Olive & Steffe, 2002; Steffe, 2004).

Οι λειτουργίες (operations) είναι νοητικές ενέργειες, που έχουν αφαιρεθεί (abstraction) από εμπειρικά δεδομένα προκειμένου να είναι διαθέσιμες για να αξιοποιηθούν σε διάφορες καταστάσεις (Steffe, 2002; McCloskey & Norton,2008; McCloskey & Norton,2009). Συγκεκριμένα, στη θεματική των κλασμάτων με την οποία ασχολούμαστε στην παρούσα εργασία έχουν παρατηρηθεί και καταγραφεί διάφορες λειτουργίες στις οποίες προβαίνουν παιδιά Δημοτικού, όπως η επανάληψη ενός μέρους για να δημιουργηθεί το όλο, ο τεμαχισμός ενός όλου/ μονάδας σε ίσα μέρη, η δημιουργία μονάδων θεωρώντας ένα σύνολο αντικειμένων ως ένα όλο ή μια μονάδα (McCloskey & Norton,2009). Οι λειτουργίες συνιστούν το πιο ουσιαστικό μέρος των σχημάτων, καθώς πρόκειται για νοητικές ενέργειες που οδηγούν στην κατασκευή των κλασματικών και γενικότερα μαθηματικών ιδεών από τους μαθητές.

Τα σχήματα (schemes) είναι δομές/κατασκευές που χρησιμοποιούνται από τους δασκάλους και τους ερευνητές για να οργανώσουν και να μοντελοποιήσουν τις γνωστικές δομές των μαθητών τους (McCloskey & Norton,2008). Αποδίδονται στους μαθητές προκειμένου να εξηγήσουν και να προβλέψουν τις ενέργειές τους (σε νοητικό και χειραπτικό επίπεδο) και να δώσουν ανατροφοδότηση για τον τρόπο προσέγγισης και διδασκαλίας. Τα σχήματα συγκροτούνται από τρία συστατικά στοιχεία: την αναγνώριση μιας κατάστασης στην οποία το σχήμα μπορεί να εφαρμοστεί, τις νοητικές ενέργειες/ λειτουργίες (operations) που ενεργοποιούνται όταν μια τέτοια κατάσταση αναγνωριστεί και ένα αναμενόμενο αποτέλεσμα αυτών των ενεργειών.

Για παράδειγμα ένας μαθητής στην ερώτηση «πόσο κάνει 8 και 3;» δίνει την εξής απάντηση: «9 είναι το 1, 10 είναι το 2, 11 είναι το 3». Ο δάσκαλός του θα μπορούσε να του αποδώσει ένα σχήμα καταμέτρησης. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μια κατάσταση προς αναγνώριση συνιστά μια προβληματική κατάσταση πρόσθεσης όπως η συνένωση δύο συνόλων αντικειμένων σε ένα. Η αναγνώρισή της από τον μαθητή δίνει το έναυσμα για τις λειτουργίες της επανάληψης μιας μονάδας και της μέτρησης, οι οποίες αποτυπώνονται στις γλωσσικές εκφράσεις του μαθητή «9 είναι το 1…». Τελικά, οι ενέργειες του μαθητή οδηγούν στο επιθυμητό αποτέλεσμα, αφού φτάνει με αυτόν τον τρόπο στον προσθετέο «3».



Εικόνα 1: Τα συστατικά στοιχεία του γνωστικού σχήματος (McCloskey & Norton,2009)

Τα γνωστικά σχήματα με τον τρόπο που ορίζονται παραπάνω δεν πρέπει να συγχέονται με τις στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές αλλά και ούτε με τις ίδιες τις μαθηματικές γνώσεις των παιδιών (Steffe, 2002; McCloskey & Norton,2008; McCloskey & Norton,2009).

Ως προς τη διαφοροποίησή τους από τις στρατηγικές των μαθητών, χρειάζεται να αναφερθεί πως τα σχήματα περιγράφουν τρόπους λειτουργίας που συνήθως συμβαίνουν εκτός συνείδησης των μαθητών, ενεργοποιούνται απευθείας παρά με έναν διαδικαστικό τρόπο και αποτελούν κατασκευάσματα των δασκάλων προκειμένου όπως προαναφέρθηκε να εξηγήσουν τις δράσεις των μαθητών τους.

Ακόμη, είναι σημαντικό να συνειδητοποιηθεί πως τα σχήματα αυτά δεν είναι ταυτόσημα με τη μαθηματική γνώση των παιδιών. Χρειάζεται να αναγνωριστεί η ύπαρξη μη προσβάσιμων μαθηματικών πραγματικοτήτων που διαφέρουν από τα σχήματα που προσδίδουν οι δάσκαλοι στους μαθητές (Cobb & Steffe, 1983). Δεδομένου πως στο πλαίσιο ενός μαθησιακού περιβάλλοντος διαθέσιμες στους δασκάλους ή ερευνητές είναι οι λεκτικές εκφράσεις και οι ενέργειες των μαθητών τους, τα σχήματα που θεωρούν οι ίδιοι πως έχουν κατασκευάσει οι μαθητές επηρεάζονται αναπόφευκτα από τη γνώση και τις ιδέες τους (Steffe, 2002). Το σχήμα δεν υπάρχει στην πραγματικότητα μέσα στο μυαλό του μαθητή αλλά αποδίδεται σε αυτόν επειδή είναι χρήσιμο για την εξήγηση και την πρόβλεψη των ενεργειών του (McCloskey & Norton,2008).

Για παράδειγμα, σε διδακτικά πειράματα που διενεργούσε ο Steffe με μαθητές, είχε θέσει την εξής προβληματική κατάσταση: «Εντόπισε και κόψε από μία ολόκληρη σοκολάτα τη μερίδα του ενός από τα 4 άτομα που μοιράζονται δίκαια τη σοκολάτα αυτή». Ένας μαθητής του, ο Jason, για να δώσει λύση έκοβε τη μερίδα που υπέθετε ότι ήταν το κομμάτι του ενός και στη συνέχεια την επαναλάμβανε 4 φορές για να φτιάξει πάλι το όλο ώστε να διαπιστώσει ότι ο υπολογισμός του ήταν σωστός. Μέσα από τη μελέτη των ενεργειών του, φάνηκε πως μπορούσε να τεμαχίσει ένα όλο σε ν μέρη αναγνωρίζοντας ότι καθένα από αυτά είναι ίσο με τα υπόλοιπα, οπότε και ο ερευνητής του απέδωσε ένα σχήμα

ισοτεμαχισμού (equi-partitioning scheme) για να οργανώσει τη δραστηριότητά του και να προβλέψει μελλοντικές πιθανές ενέργειές του (Steffe,2004; McCloskey & Norton,2008).

Συνδέοντας την ορολογία των σχημάτων με τη θεωρία του εποικοδομισμού, ο τρόπος με τον οποίο τα σχήματα που κατασκευάζουν τα παιδιά σύμφωνα με τις αντιλήψεις των δασκάλων τους αξιοποιούνται για να οργανωθεί και να ερμηνευτεί η μαθηματική τους δραστηριότητα είναι συμβατός και μπορεί να τοποθετηθεί στο ευρύτερο πλαίσιο της εποικοδομιστικής θεώρησης της μάθησης. Όταν λοιπόν ένας μαθητής αντιμετωπίσει μια προβληματική κατάσταση, αξιοποιεί τα υπάρχοντα σχήματά του για να την ερμηνεύσει. Στη συνέχεια προβαίνει στις αντίστοιχες ενέργειες και παράγει ένα αποτέλεσμα. Πρόβλημα για τους μαθητές (κατάσταση γνωστικής σύγκρουσης) δημιουργείται όταν το αποτέλεσμα διαφέρει από το αναμενόμενο, οπότε τα υπάρχοντα γνωστικά σχήματα δεν μπορούν να επιλύσουν την ανισορροπία που έχει προκληθεί. Έτσι ο μαθητής χρειάζεται να ξαναδεί την κατάσταση και να τροποποιήσει τα σχήματά του προκειμένου να αντιμετωπίσει αυτές τις γνωστικές αναταράξεις. Άρα, το κάθε σχήμα αποτελεί μια αναδιοργάνωση κάποιου προηγούμενου. Η μαθηματική γνώση συνίσταται σε αυτές τις τροποποιήσεις και αναδιοργανώσεις γνωστικών σχημάτων μέσω της ουσιαστικής διαδικασίας της αναστοχαστικής αφαίρεσης (reflective abstraction) (Steffe et al., 1991; Steffe & D' Ambrosio, 1995; Steffe, 2002; Olive & Steffe, 2002; Steffe, 2004; McCloskey & Norton, 2008; Hackenberg & Tillema, 2009).

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω γίνεται κατανοητό πως οι μαθηματικές ιδέες που έχουν τα παιδιά δεν είναι ίδιες αλλά και πως δεν πρέπει να αγνοηθούν σε καμία περίπτωση από τον δάσκαλο ή τον ερευνητή (Cobb & Steffe, 1983; Steffe et.al., 1991). Θα ήταν πολύ ατυχές ένας εκπαιδευτικός ή ερευνητής να επιχειρούσε για παράδειγμα να διδάξει το προαναφερθέν σχήμα του ισοτεμαχισμού στους μαθητές του, αγνοώντας τα ήδη υπάρχοντα σχήματά τους. Οι τρόποι λειτουργίας και οι ενέργειες των μαθητών είναι στενά συνδεδεμένες με τα νοήματά τους και οποιαδήποτε προσπάθεια να παρακαμφθούν ή να αντικατασταθούν αυτοί οι τρόποι θα οδηγούσε σε κατακερματισμένη γνώση.

Για παράδειγμα, όταν ζητήθηκε από έναν εννιάχρονο μαθητή (Steffe & al, 1991) να συγκρίνει τα κλάσματα $\frac{4}{5}$ και $\frac{8}{10}$ λειτούργησε με τον παρακάτω τρόπο: ο μαθητής είχε ήδη τοποθετήσει 100 λεπτά σε 5 φλιτζάνια, βάζοντας 20 λεπτά σε καθένα από αυτά και 100 λεπτά σε 10 φλιτζάνια, βάζοντας 10 λεπτά στο καθένα. Θέλοντας να συγκρίνει τα παραπάνω κλάσματα, συνέκρινε τα αποτελέσματα των συμπληρωμάτων τους ($\frac{1}{5}$ και $\frac{2}{10}$

αντίστοιχα) όταν αυτά επενεργούσαν στο ίδιο όλο (100 λεπτά). Βρίσκοντας πως τα $\frac{2}{10}$ και το $\frac{1}{5}$ των 100 νομισμάτων είναι ίσα γιατί αναφέρονται στον ίδιο αριθμό νομισμάτων κατέληξε πως και τα ζητούμενα κλάσματα είναι ίσα. Αυτός ο τρόπος λειτουργίας του μαθητή δείχνει ότι συνειδητοποιεί πως τα δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα όχι εκ των προτέρων αλλά εκ των υστέρων, αφού συγκρίνει τα αποτελέσματα που δίνουν όταν επενεργήσουν στο ίδιο όλο. Θα ήταν όμως ατυχές να παραγνωριστεί ο τρόπος που λειτούργησε ο μαθητής και να επιχειρηθεί να γίνει απευθείας διδασκαλία ενός σχήματος ισοδυναμίας των κλασμάτων.

Τελικά, αντιμετωπίζοντας τη μάθηση από μία εποικοδομιστική οπτική και θεωρώντας την ως ενεργή κατασκευή και εξέλιξη γνωστικών σχημάτων σε όλο και πιο εκλεπτυσμένες μορφές η οποία λαμβάνει χώρα σε ένα πλαίσιο θέσπισης κοινών μαθηματικών πρακτικών, εγείρεται το κρίσιμο ερώτημα που αναφέρεται στον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσαμε να στηρίξουμε αποτελεσματικά έναν τέτοιο τύπο μάθησης. Αυτό λοιπόν το ερώτημα για τη στήριξη της κατασκευής της μαθηματικής γνώσης αποτελεί το κεντρικό ζήτημα το οποίο θα συζητηθεί στην επόμενη ενότητα.

2.2 Στήριξη της κατασκευής της γνώσης

2.2.1 Ρεαλιστική Θεωρία Μαθηματικής Εκπαίδευσης

Με βάση την εποικοδομιστική θεώρηση του τρόπου μάθησης που περιγράφηκε, αναδύονται τα εξής διδακτικά ζητήματα: *Πώς ένας εκπαιδευτικός θα μπορούσε να στηρίξει αποτελεσματικά τους μαθητές του ώστε να κατασκευάζουν όλο και πιο ανεπτυγμένα και εκλεπτυσμένα γνωστικά σχήματα προς την κατεύθυνση καθιερωμένων, μαθηματικών πρακτικών, ενώ ταυτόχρονα να λαμβάνει σοβαρά υπόψη του τη μαθηματική κατανόηση και τις υπάρχουσες ιδέες των μαθητών του*; *Με ποιον τρόπο ο δάσκαλος των μαθηματικών μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές του να κατασκευάσουν ιδέες και έννοιες τις οποίες η μαθηματική κοινότητα χρειάστηκε χιλιάδες χρόνια να αναπτύξει;*

Η Ρεαλιστική Θεωρία Μαθηματικής Εκπαίδευσης (PME) είναι μια εμπειρικά θεμελιωμένη θεωρία σχεδιασμού, συμβατή με την εποικοδομιστική θεώρηση για τη μαθηματική μάθηση, η οποία προτείνει μία λύση στα παραπάνω θέματα (Cobb, Zhao & Visnovska, 2008; Gravemeijer, 2015). Η συνεισφορά της PME σε αυτά τα διδακτικά ζητήματα συνίσταται σε ευρετικές για τη στήριξη της προοδευτικής αναδιοργάνωσης της μαθηματικής δραστηριότητας και συλλογιστικής των μαθητών προκειμένου τελικά να μπορέσουν να συμμετάσχουν στις καθιερωμένες μαθηματικές πρακτικές που έχουν προκύψει μετά από αιώνες επινόησης. Η λύση αυτή απαιτεί αλλαγή του παραδοσιακού τρόπου διδασκαλίας των μαθηματικών ο οποίος διέπεται από την αποστήθιση τύπων χωρίς νόημα για τα παιδιά και από το ρητό «Μάθε πρώτα, κατάλαβε ύστερα» (Steffe et al., 1991; Gravemeijer, 2015).

Πιο συγκεκριμένα, η θεωρία αυτή βασίζεται στην ερμηνεία του Freudenthal για τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; Stephan, Bowers & Cobb, 2003; Cobb, Zhao & Visnovska, 2008; Gravemeijer, 2015). Σύμφωνα με τον ίδιο, χρειάζεται να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να επανεπινοήσουν τα μαθηματικά, μέσα από την αναδιοργάνωση της μαθηματικής τους δραστηριότητας κατά την εργασία τους στο πλαίσιο ρεαλιστικών καταστάσεων. Ο όρος «ρεαλιστικές» καταστάσεις δεν περιορίζεται μόνο σε καταστάσεις από τον πραγματικό ή κοινωνικό κόσμο αλλά επεκτείνεται και στην πραγματικότητα της φαντασίας των παιδιών. Αυτή μάλιστα η δραστηριότητα αναδιοργάνωσης και αναδόμησης στην οποία ο μαθητής αξιοποιώντας τις ήδη υπάρχουσες μαθηματικές του ιδέες επινοεί καθοδηγούμενος από τον

δάσκαλο ή τον ερευνητή άγνωστες για αυτόν σχέσεις, συνδέσεις και δομές ονομάζεται μαθηματικοποίηση και αποτελεί τη διαδικασία – κλειδί στη μάθηση (Cobb, Zhao & Visnovska, 2008).

Κεντρικός σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης σύμφωνα με αυτήν τη θεωρία είναι να στηρίζει τη μαθηματική μάθηση των παιδιών ως μια διαδικασία καθοδηγούμενης επανεπινόησης όπως περιγράφηκε προηγουμένως (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; Cobb, Zhao & Visnovska, 2008; Gravemeijer, 2015).

Συνεπώς, η ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση θέτει τον τρόπο μαθηματικής δραστηριότητας και δικαιολόγησης των παιδιών στο επίκεντρο του σχεδιασμού, ενώ ταυτόχρονα προτείνει συγκεκριμένα μέσα με τα οποία αυτή η εξέλιξη του τρόπου δικαιολόγησής τους μπορεί να στηριχθεί συστηματικά (Cobb, Zhao & Visnovska, 2008).

Συγκεκριμένα, σημαντική θέση στη στήριξη της μάθησης έχουν οι διδακτικές δραστηριότητες, δηλαδή οι προβληματικές καταστάσεις που αξιοποιούνται κατά τη διδασκαλία και που παρουσιάζονται σε ένα πλαίσιο το οποίο έχει νόημα για τα παιδιά (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003; Stephan, Bowers & Cobb, 2003; Cobb, Zhao & Visnovska, 2008; Gravemeijer, 2015). Για παράδειγμα, οι Olive και Steffe (2002) υποστηρίζουν πως ένα κατάλληλο, ρεαλιστικό πλαίσιο δραστηριοτήτων για τη στήριξη της κατασκευής των κλασματικών αριθμών θα μπορούσε να περιλαμβάνει καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς πιτσών ανάμεσα σε φίλους σε μια πιτσαρία.

Η κατασκευή μιας μαθηματικής έννοιας είναι μια διαδικασία που απαιτεί χρόνο και κινείται σε διάφορα επίπεδα αφαίρεσης από το συγκεκριμένο προς το αφηρημένο. Αρχικά οι μαθητές μέσα από την εργασία και το συλλογισμό τους πάνω σε πλαισιωμένες διδακτικές καταστάσεις προσεγγίζουν μια μαθηματική ιδέα στο πλαίσιο στο οποίο εμφανίζεται. Στη συνέχεια μέσα από τον αναστοχασμό σε αυτή τους την άτυπη μαθηματική δραστηριότητα σταδιακά φτάνουν σε ένα επίπεδο αφαίρεσης όπου κατασκευάζουν τη μαθηματική ιδέα αποπλαισιωμένη ώστε να μπορούν να τη χρησιμοποιούν και σε διαφορετικά πλαίσια από αυτό της αρχικής προβληματικής κατάστασης.

Τέλος, σημαντικό ρόλο για τη στήριξη της μαθηματικοποίησης διαδραματίζουν τα συμβολικά εργαλεία και μοντέλα για την αναπαράσταση των μαθηματικών ιδεών. Έτσι, μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί οποιοδήποτε αντικείμενο, εικόνα ή σχέδιο το οποίο αναπαριστά μια μαθηματική έννοια ή στο οποίο μπορεί να επιβληθεί μια σχέση για αυτήν την έννοια (Van de Walle, 2005). Η σημασία τους για τη στήριξη της μάθησης συνίσταται στο γεγονός ότι τα μοντέλα της άτυπης μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών

(models of) μπορούν με την καθοδήγηση του δασκάλου μέσα από την αξιοποίησή τους να εξελίσσονται σε στηρίγματα (models for) για πιο γενική μαθηματική σκέψη (Cobb, Zhao & Visnovska, 2008).

2.2.2 Περιβάλλον μάθησης και μέσα στήριξης

Η θεωρία της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης, όπως περιγράφηκε στο προηγούμενο υποκεφάλαιο, επιχείρησε μια αλλαγή στον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας. Πρότεινε συγκεκριμένες ευρετικές για σχεδιασμό μιας αποτελεσματικής στήριξης της μάθησης ως προοδευτικής αναδιοργάνωσης εστιάζοντας στη σημασία των εργαλείων και μοντέλων αναπαράστασης της μαθηματικής άτυπης δραστηριότητας των παιδιών και των ρεαλιστικά πλαισιωμένων διδακτικών δραστηριοτήτων ως μέσων στήριξης αυτής της αναδιοργάνωσης.

Εν συνεχεία του προηγούμενου υποκεφαλαίου, θα επιχειρηθεί μια διεύρυνση αυτής της προοπτικής της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Θεωρίας που αφορά τα μέσα στήριξης της μάθησης. Ύστερα από σχετική ανασκόπηση βιβλιογραφίας, καταλήξαμε σε τέσσερα μέσα στήριξης, τις διδακτικές δραστηριότητες, τα συμβολικά εργαλεία αναπαράστασης των μαθηματικών ιδεών, τη φύση των συζητήσεων, την οργάνωση των δραστηριοτήτων, τα οποία αλληλεξαρτώμενα διαμορφώνουν το περιβάλλον μάθησης, δηλαδή ένα πολύπλοκο διαδραστικό σύστημα που συνιστά μια οικολογία της μάθησης (Cobb, 2000; Stephan, Bowers & Cobb, 2003; Cobb, Zhao & Visnovska, 2008).

Καταρχάς, η συζήτηση μεταξύ μαθητών και δασκάλου έχει χαρακτηριστεί από πολλούς ερευνητές (Cobb & Steffe, 1983; Cobb, Boufi, McClain & Whitenack, 1997; Cobb, 2000; Cobb, Zhao & Visnovska, 2008; Stein et al., 2015) ως το σημαντικότερο μέσο στήριξης και το πιο κρίσιμο γνώρισμα του μαθησιακού περιβάλλοντος. Δύο σημαντικά ζητήματα που σχετίζονται με αυτό το μέσο στήριξης και επηρεάζουν τη μάθηση κατά τον Cobb (2000) είναι οι νόρμες που καθορίζουν ποια θεωρείται ως αποδεκτή μαθηματική εξήγηση αλλά και το περιεχόμενο μιας συζήτησης στα μαθηματικά. Το πρώτο ζήτημα αφορά στις κοινωνικομαθηματικές νόρμες οι οποίες ρυθμίζουν τη μαθηματική επιχειρηματολογία και προσδιορίζουν κάποιον τρόπο εξήγησης ως επαρκή, εκλεπτυσμένο, αποτελεσματικό. Ως προς το δεύτερο ερώτημα, υποστηρίζεται πως μια συζήτηση για να στηρίζει αποτελεσματικά τη μαθηματική μάθηση χρειάζεται να αναδύει σημαντικά μαθηματικά θέματα (Cobb, 2000; Cobb, Zhao & Visnovska, 2008). Ως τέτοια μπορεί να θεωρηθούν τα θέματα που προκύπτουν από αντιπαράθεση διαφορετικών λύσεων μαθητών ή από τις γνωστικές αναταράξεις που προκαλούνται όταν ο ίδιος ο μαθητής έρχεται αντιμέτωπος με μια υπάρχουσα ιδέα του.

Μια σημαντική διάκριση που αφορά στη φύση της συζήτησης είναι μεταξύ υπολογιστικής και εννοιολογικής (Thompson and Thompson, 1996 στο Cobb, Zhao &

Visnovska, 2008). Ο όρος υπολογιστική αναφέρεται σε έναν τύπο συζήτησης, στον οποίο ο μαθητής εξηγεί με ποιον τρόπο οδηγήθηκε σε κάποιο αποτέλεσμα αλλά δεν είναι υποχρεωμένος να εξηγήσει για ποιον λόγο χρησιμοποίησε αυτή την συγκεκριμένη μέθοδο. Αντίθετα, σε μια εννοιολογική συζήτηση, στην οποία δίνεται έμφαση και στην παρούσα εργασία, κεντρικό ενδιαφέρον παρουσιάζει όχι μόνο τι έκανε ο μαθητής για να οδηγηθεί σε μια λύση αλλά και γιατί έδρασε κατ' αυτόν τον τρόπο.

Ακόμη, υιοθετώντας την εποικοδομιστική άποψη πως ο μαθητής μαθαίνει όχι μόνο κάνοντας αλλά και στοχαζόμενος πάνω σε αυτά που έχει κάνει, αναγνωρίζουμε την ανάγκη να ενθαρρύνεται και να υποστηρίζεται ο αναστοχασμός και η αναδιοργάνωση της πρότερης μαθηματικής δραστηριότητας του μαθητή μέσα από τη συμμετοχή του στη συζήτηση. Η συμμετοχή σε μια τέτοια συζήτηση (reflective discourse) δημιουργεί τις συνθήκες για τη δυνατότητα μαθηματικής μάθησης (Cobb, Boufi, McClain & Whitenack, 1997).

Αναφορικά με τη δομή των δραστηριοτήτων, ο Cobb και οι συνεργάτες του έχουν προτείνει κάποιες φάσεις οργάνωσης των δραστηριοτήτων (αρχική συζήτηση, εργασία σε ομάδες, συζήτηση στην τάξη που προκαλείται από την αντιπαράθεση διαφορετικών λύσεων) που αφορούν στο μαθησιακό περιβάλλον της τάξης (Cobb, 2000; Stephan, Bowers & Cobb, 2003; Cobb, Zhao & Visnovska, 2008). Όταν το περιβάλλον μάθησης αποτελείται από έναν μόνο μαθητή ή μαθήτρια και την ερευνητική ομάδα, σημαντική ιδέα οργάνωσης συνιστά μια αρχική συζήτηση πριν την εισαγωγή στις διδακτικές δραστηριότητες ώστε να αποκτήσουν νόημα για το παιδί. Ιδανική θα ήταν η συμμετοχή του παιδιού στη διδακτική δραστηριότητα με έναν τρόπο ώστε να θεωρήσει το πρόβλημα που περιγράφεται σε αυτήν ως «δικό του» πρόβλημα στου οποίου τη λύση έχει το ίδιο την ευθύνη να φτάσει (Simon,1995). Στη συνέχεια, σημαντική ευθύνη του εκπαιδευτικού – ερευνητή είναι να τον εμπλέξει ενεργά σε συζητήσεις, από τις οποίες αναδύονται σημαντικά μαθηματικά θέματα που οδηγούν στη σταδιακή αναδιοργάνωση του τρόπου δικαιολόγησής του.

Ως προς τις ίδιες τις διδακτικές δραστηριότητες που επιλέγονται ως μέσα στήριξης έχει ήδη τονιστεί η ανάγκη να είναι με τέτοιο τρόπο δομημένες ώστε να έχουν νόημα για τον μαθητή, να προκαλούν τον προβληματισμό του, να ενθαρρύνουν ένα διερευνητικό πνεύμα αλλά και να προσφέρονται για πιθανή πρόκληση γνωστικών αναταράξεων προκειμένου ο μαθητής να οδηγηθεί στην ανάγκη αναδιαμόρφωσης των υπαρχόντων γνωστικών του σχημάτων.

Σχετικά με τα συμβολικά εργαλεία, θεωρείται πως συνιστούν αναπόσπαστη πτυχή των μαθηματικών πρακτικών τις οποίες θεσμοθετεί από κοινού εκπαιδευτικός και μαθητές μέσα από τις αλληλεπιδράσεις τους. Έμφαση δίνεται όχι στα ίδια τα εργαλεία αλλά στον τρόπο που αξιοποιούνται από τα παιδιά επηρεάζοντας και αλλάζοντας τη φύση της μαθηματικής δραστηριότητάς τους και τον τύπο της μαθηματικής τους δικαιολόγησης σε όλο και πιο εκλεπτυσμένες και εξελιγμένες μορφές (Cobb, 2000; Stephan, Bowers & Cobb, 2003; Cobb, Zhao & Visnovska, 2008).

Τα παραπάνω μέσα στήριξης επηρεάζουν ουσιαστικά τόσο τη διαδικασία της μάθησης όσο και τα προϊόντα της και στενά συνδεδεμένα συνιστούν ένα σύστημα και διαμορφώνουν το κοινωνικό και πολιτισμικό πλαίσιο της μάθησης (Cobb, 2000).

Συνεπώς, για τους σκοπούς της εργασίας μας με μια μαθήτρια στην ευρύτερη θεματική της ισοδυναμίας κλασμάτων, χρειάστηκε μια μεθοδολογία που θα ήταν συμβατή με την αντίληψη της μάθησης ως ενεργή κατασκευή και τροποποίηση γνωστικών σχημάτων αλλά και θα επέτρεπε την εξήγησή της στο πλαίσιο που ορίζεται από τα μέσα στήριξής της. Με βάση αυτά τα κριτήρια επιλέχθηκε η μεθοδολογία διδακτικού πειράματος σχεδιασμού, η οποία θα συζητηθεί στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 3: Μεθοδολογικό πλαίσιο

3.1 Η μέθοδος του πειράματος σχεδιασμού

Το ευρύτερο θεωρητικό υπόβαθρο οδήγησε στην ανάγκη για ένα συγκεκριμένο μεθοδολογικό πλαίσιο, το οποίο να αντιμετωπίζει τη μάθηση ως κατασκευή και αναδιαμόρφωση πρότερων γνωστικών σχημάτων και να αναγνωρίζει την ανάγκη για οργανωμένη στήριξή της.

Με βάση τις παραπάνω θεωρητικές κατευθύνσεις, η μεθοδολογία που επιλέχθηκε στην παρούσα εργασία στηρίχθηκε στη μέθοδο του πειράματος σχεδιασμού ένα προς ένα (one to one design experiment) (Cobb et al., 2003).

Σε ένα πείραμα σχεδιασμού ένα προς ένα μια ερευνητική ομάδα διεξάγει μια σειρά από εκπαιδευτικές συναντήσεις με έναν μικρό αριθμό παιδιών, στην περίπτωσή μας με μία μαθήτρια. Σκοπός είναι να δημιουργηθεί μια μικρής κλίμακας εκδοχή της οικολογίας της μάθησης, δηλαδή του πολύπλοκου, διαδραστικού συστήματος που περιλαμβάνει πολλά και διαφορετικών επιπέδων στοιχεία – μέσα στήριξης, έτσι ώστε η μάθηση μέσα σε αυτό το σύστημα να μελετηθεί σε βάθος (Cobb et al., 2003). Αυτή η μεθοδολογία λοιπόν μας επιτρέπει να μελετάμε τις μορφές μάθησης και την πορεία σκέψης και αναδιοργάνωσης της μαθηματικής δραστηριότητας των παιδιών στο πλαίσιο στο οποίο εμφανίζονται και το οποίο ορίζεται από τα μέσα στήριξής τους. Τέλος, σε ένα πείραμα σχεδιασμού δεν είναι μόνο ο μαθητής που μαθαίνει αλλά και ο εκπαιδευτικός καθώς συμμετέχει στη μελέτη, τον σχεδιασμό και την αναστοχαστική ανάλυση της πορείας μάθησης του μαθητή.

3.2 Σύνδεση μεθοδολογικού και θεωρητικού πλαισίου

Ο ερευνητής αλληλεπιδρώντας με τον μαθητή προσπαθεί να κατανοήσει και να εξηγήσει τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζει μαθηματικά νοήματα καθώς και τον τρόπο που η μαθηματική του δραστηριότητα αλλάζει στο πλαίσιο της διδασκαλίας – πειράματος (Stephan, Bowers & Cobb, 2003). Γίνεται λοιπόν φανερό πως ο τρόπος που αντιμετωπίζεται η μάθηση των μαθητών ως κατασκευή και αναδιαμόρφωση σχημάτων είναι συμβατός με την εποικοδομιστική θεωρία της μάθησης.

Όμως, ο σχεδιασμός, η διεξαγωγή και η ανάλυση διδακτικών πειραμάτων θα ήταν ελλιπείς αν εστίαζαν μόνο στον τρόπο κατασκευής και αναδιοργάνωσης της μαθηματικής γνώσης χωρίς σαφή αναφορά και συνυπολογισμό των μέσων με τα οποία η μάθηση αυτή στηρίζεται και οργανώνεται (Stephan, Bowers & Cobb, 2003).

Στα πειράματα σχεδιασμού αναγνωρίζεται πως για να μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο μαθαίνει ένα παιδί μαθηματικά, χρειάζεται ο σχεδιασμός και η οργάνωση ενός πλαισίου στήριξης αλλά και η διαρκής ετοιμότητα για αλλαγή και σχεδιασμό νέων πιο κατάλληλων προβλημάτων, ερωτημάτων, εργαλείων στήριξης κατά την προσπάθεια μελέτης της μαθηματικής εξέλιξης του παιδιού. Στο κρίσιμο αυτό κομμάτι του σχεδιασμού της στήριξης της μάθησης τα πειράματα σχεδιασμού βασίζονται και αξιοποιούν ευρετικές της θεωρίας της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

3.3 Γενικά χαρακτηριστικά ενός πειράματος σχεδιασμού

Κύριος στόχος (Cobb, 2000; Cobb et al., 2003; van Eerde, 2013; Gravemeijer, 2015): Τα πειράματα σχεδιασμού διεξάγονται προκειμένου να αναπτύξουν «τοπικές θεωρίες», που αναφέρονται σε συγκεκριμένο μαθηματικό περιεχόμενο. Τα πειράματα αυτά έχοντας τόσο πραγματική όσο και θεωρητική κατεύθυνση αναπτύσσουν τις τοπικές θεωρίες κοντά στον σχεδιασμό.

Από τη διατύπωση του σκοπού των πειραμάτων σχεδιασμού γίνεται φανερό πως σε αυτά η θεωρία και η πράξη είναι στενά συνδεδεμένες, αφού ο εκπαιδευτικός σχεδιασμός και τα διδακτικά πειράματα αλληλεπιδρούν, τροφοδοτώντας το ένα το άλλο. Για να γίνει περισσότερο κατανοητή αυτή η αλληλοσύνδεση, αρκεί να δούμε πώς προκύπτουν οι τοπικές θεωρίες.

Πιο συγκεκριμένα, σε ένα πείραμα σχεδιασμού εξαρχής κεντρικό ρόλο έχουν η ανάπτυξη ακολουθιών διδακτικών δραστηριοτήτων και σχετικών μέσων στήριξης για ουσιαστική μάθηση σε συγκεκριμένο πεδίο των μαθηματικών αλλά και η διεξαγωγή αναλύσεων σχετικά με τη διαδικασία μάθησης και τα μέσα με τα οποία αυτή η μάθηση υποστηρίχθηκε και οργανώθηκε. Μέσα από τη διαρκή και επαναλαμβανόμενη διαδικασία σχεδιασμού, ανάλυσης και αναθεώρησης των διδακτικών δραστηριοτήτων και των μέσων στήριξής τους αναπτύσσονται οι διδακτικές θεωρίες.

Εξειδικεύοντας στη δική μας περίπτωση πειράματος σχεδιασμού ένα προς ένα, σκοπός ήταν η μελέτη της πορείας σκέψης και εξέλιξης της μαθηματικής δραστηριότητας μιας μαθήτριας προς μια ουσιαστική κατανόηση συγκεκριμένων μαθηματικών ιδεών, όπως αυτή της ισοδυναμίας, μαζί με τα μέσα στήριξης αυτής της πορείας, όπως οι τύποι των δραστηριοτήτων και οι πρακτικές που ακολούθησε ο δάσκαλος – ερευνητής.

Παρεμβατική φύση (Cobb et al., 2003; van Eerde, 2013): Άλλο ένα σημαντικό χαρακτηριστικό της μεθοδολογίας αυτής είναι η παρεμβατική της φύση. Τα πειράματα σχεδιασμού αποτελούν συχνά δοκιμαστικές βάσεις καινοτόμων ιδεών. Σκοπός είναι η διερεύνηση των πιθανοτήτων για βελτίωση της εκπαιδευτικής πρακτικής φέροντας στο προσκήνιο νέες μορφές μάθησης προκειμένου να μελετηθούν.

Έτσι οι ερευνητές των πειραμάτων σχεδιασμού παρεμβαίνουν στις τρέχουσες εκπαιδευτικές πρακτικές με σκοπό τη βελτίωση της εκπαίδευσης. Εντοπίζοντας ένα πρόβλημα σε μια θεματική των μαθηματικών που συνίσταται για παράδειγμα σε παρατηρούμενη μη ικανοποιητική τρέχουσα μάθηση των μαθητών (π.χ. παρατηρούμενες

δυσκολίες μαθητών στην εννοιολογική κατανόηση της ισοδυναμίας κλασμάτων), οι ερευνητές σχεδιάζουν και θεσπίζουν νέες μορφές μάθησης συσχετίζοντάς τις με τα μέσα με τα οποία θα τις στηρίξουν. Στη συνέχεια, με τη διεξαγωγή και τις αναλύσεις των διδακτικών πειραμάτων, διερευνούν την πορεία μάθησης και πώς αυτή στηρίζεται από τα διάφορα μέσα.

Οι δύο όψεις στα πειράματα σχεδιασμού (Cobb et al., 2003): Το χαρακτηριστικό αυτό εδράζεται στα δύο πρώτα. Στην πρώτη όψη, πριν το πείραμα, ο σχεδιασμός συνίσταται σε μια δέσμη υποθέσεων για τη διαδικασία της μάθησης και τα μέσα στήριξης που εικάζεται ότι θα στηρίξουν αυτήν την πορεία.

Στη μετέπειτα όψη του αναστοχασμού, οι εικασίες του αρχικού σχεδιασμού ελέγχονται και αναδιαμορφώνονται, ενώ πολλές φορές νέες εικασίες γεννιούνται έτσι ώστε να ελεγχθούν στο μέλλον.

Κυκλικός χαρακτήρας (Cobb et al., 2003; van Eerde, 2013): Όπως φαίνεται και από το προηγούμενο χαρακτηριστικό, ένα πείραμα σχεδιασμού στο σύνολό του έχει επαναληπτική μορφή, καθώς στο τέλος μιας σειράς συναντήσεων η αναστοχαστική ανάλυση (retrospective analysis) των δεδομένων για την πορεία μάθησης και την επίδραση των μέσων στήριξης σε αυτήν οδηγεί σε έναν επανασχεδιασμό των αρχικών υποθέσεων. Ο κυκλικός χαρακτήρας χαρακτηρίζει επίσης το πείραμα σχεδιασμού ενόσω διεξάγεται, καθώς η ανάλυση (ongoing analysis) που πραγματοποιείται μετά το πέρας κάθε συνάντησης ανατροφοδοτεί τον σχεδιασμό της επόμενης στο πλαίσιο μιας κυκλικής διαδικασίας σχεδιασμού – ανάλυσης.

Πρακτικός προσανατολισμός (Cobb et al., 2003; Stephan, Bowers & Cobb, 2003): Ένα πείραμα σχεδιασμού, όπως γίνεται φανερό και από τα παραπάνω χαρακτηριστικά, δεν στοχεύει στην παραγωγή γενικών αλλά τοπικών θωριών, οι οποίες αναφέρονται σε διαδικασίες μάθησης και στήριξης ενός συγκεκριμένου τομέα των μαθηματικών. Οι πραγματικές ρίζες ως κύριο χαρακτηριστικό των τοπικών αυτών θεωριών αναφέρονται στο ότι η δημιουργία και η εξέλιξη τους βασίζεται στην εκπαιδευτική πράξη.

3.4 Φάσεις ενός πειράματος σχεδιασμού

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά γνωρίσματα διαφαίνονται στις τρεις φάσεις από τις οποίες αποτελείται ένα πείραμα σχεδιασμού (Cobb, 2000; Cobb et al., 2003; Stephan, Bowers & Cobb, 2003; Gravemeijer, 2015):

- Προετοιμασία του πειράματος σχεδιασμού

Κατά την προετοιμασία του πειράματος σχεδιασμού διασαφηνίζεται ο θεωρητικός σκοπός του. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται τα τελικά σημεία, δηλαδή οι υποθετικοί στόχοι της μάθησης του μαθητή. Αυτό συμβαίνει μετά από ανασκόπηση και σύνθεση της διαθέσιμης βιβλιογραφίας από την ερευνητική ομάδα. Κατά τον προσδιορισμό των στόχων, τα μέλη της ερευνητικής ομάδας παρέχουν μία εναλλακτική της υπάρχουσας ερευνητικής βιβλιογραφίας προσέγγιση για τον μαθηματικό τομέα με τον οποίο ασχολούνται. Ακολουθεί ο καθορισμός των υποθέσεων για τα σημεία εκκίνησης του παιδιού, ύστερα από σχετική μελέτη της βιβλιογραφίας, των σχολικών βιβλίων και πολλές φορές μετά από διανομή και ανάλυση αποτελεσμάτων πιλοτικής έρευνας. Μεγάλη πρόκληση για τους ερευνητές είναι η διαμόρφωση μιας υποθετικής πορείας μάθησης (Hypothetical Learning Trajectory/HLT) (Simon, 1995) που συνδέει τα υποθετικά σημεία εκκίνησης με τους τελικούς στόχους και την οποία το διδακτικό πείραμα σκοπό έχει να ελέγξει και να αναθεωρήσει. Η υποθετική αυτή τροχιά συνίσταται σε μία δέσμη υποθέσεων σχετικά με την ανάπτυξη και τις σημαντικές μεταβάσεις της μαθηματικής συλλογιστικής του μαθητή μαζί με τα μέσα τα οποία εικάζεται πως θα στηρίξουν την ανάπτυξη αυτή.

- Διεξαγωγή του πειράματος σχεδιασμού

Κατά τη διεξαγωγή ενός πειράματος σχεδιασμού, ένα πολύ σημαντικό ζήτημα είναι τα μέλη της ερευνητικής ομάδας να έχουν στο μυαλό τους πως ο στόχος στο πείραμα σχεδιασμού δεν είναι να δειχθεί ότι ο αρχικός σχεδιασμός είναι ορθός αλλά να επιχειρηθεί μια βελτίωση του σχεδιασμού και να κατανοηθούν οι λόγοι για τους οποίους αυτός λειτουργεί ή όχι. Σε αυτήν την κατεύθυνση τους βοηθά η διεξαγωγή συνεχών αναλύσεων μετά από κάθε συνάντηση που τροφοδοτούν τη συνέχεια. Γι' αυτόν τον λόγο, απαιτείται συστηματική και προσεκτική καταγραφή των δεδομένων κατά τη διεξαγωγή του πειράματος ως προς την πορεία μάθησης και τη λειτουργία των μέσων στήριξης προκειμένου να πραγματοποιηθούν στη συνέχεια οι αναλύσεις και η ερευνητική ομάδα να εμβαθύνει στη μελέτη του διδακτικού φαινομένου.

- Διεξαγωγή της αναστοχαστικής ανάλυσης

Σε αυτή τη φάση ολοκληρώνεται ο κύκλος του πειράματος σχεδιασμού. Αναλύεται το τι συνέβη συνολικά στο πείραμα και κυρίως το γιατί συνέβη και συγκρίνεται με τις αρχικές υποθέσεις. Σε μια τέτοια ανάλυση αξιοποιούνται οι διαφορετικές οπτικές των μελών της ομάδας. Οι ερευνητές κινούνται συνεχώς μπρος και πίσω μεταξύ της εξελισσόμενης υποθετικής τροχιάς και τα αποτελέσματα αυτής της ανάλυσης τροφοδοτούν στην εξέλιξη της τοπικής θεωρίας σχετικά με το πώς αυτή η εκπαιδευτική παρέμβαση λειτουργεί. Το «τι δουλεύει» συνδέεται με το «πώς, πότε και γιατί» δουλεύει και οδηγεί στο τι ακριβώς είναι αυτό που ψάχνουμε αλλά και σε προτάσεις για τη διεξαγωγή ενός μελλοντικού κύκλου πειραμάτων.

3.5 Τα στοιχεία του δικού μας πειράματος σχεδιασμού

Το διδακτικό πείραμα έγινε με μία μαθήτρια της Δ΄ Δημοτικού ενός πειραματικού σχολείου της Αθήνας. Κατόπιν συνεννόησης με τον δάσκαλο της Δ΄ Δημοτικού και τη διευθύντρια του σχολείου πραγματοποιήθηκαν δύο κύκλοι συναντήσεων με τη μαθήτρια.

Ένα μέλος της ερευνητικής ομάδας ανέλαβε το ρόλο του κεντρικού ερευνητή/δασκάλου που αλληλεπιδρούσε κατά κύριο λόγο με τη μαθήτρια κατά τη διεξαγωγή του διδακτικού πειράματος. Τα υπόλοιπα μέλη κρατούσαν σημειώσεις, ενώ μπορούσαν να παρεμβαίνουν και να θέτουν ερωτήσεις στη μαθήτρια.

Τα μέλη στο σύνολό τους συμμετείχαν σε όλες τις συναντήσεις σχεδιασμού και αποτίμησης των επισκέψεων στο σχολείο. Για τους σκοπούς της συλλογής και ανάλυσης των δεδομένων, οι συναντήσεις βιντεοσκοπούνταν με τη χρήση μίας κάμερας. Έτσι, τα δεδομένα που συλλέχθηκαν και αναλύθηκαν προήλθαν από την απομαγνητοσκόπηση των συναντήσεων, τη μελέτη των χειρόγραφων σημειώσεων των ερευνητικών μελών και των καταγεγραμμένων απαντήσεων και σχημάτων της μαθήτριας στα φύλλα δραστηριοτήτων.

Ο πρώτος κύκλος επισκέψεων περιελάμβανε συνολικά 7 συναντήσεις διάρκειας 20-30 λεπτών η καθεμία που σχεδιάστηκαν με σκοπό μια αρχική προσέγγιση της έννοιας της ισοδυναμίας κλασμάτων μέσα από καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς. Αυτές οι συναντήσεις πραγματοποιήθηκαν σε μία περίοδο δυόμιση περίπου μηνών (από τις 8 Νοεμβρίου του 2016 μέχρι τις 24 Ιανουαρίου του 2017).

Ο δεύτερος κύκλος συναντήσεων προέκυψε με σκοπό την ανάπτυξη μιας συγκροτημένης πορείας στήριξης σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα κατανόησης που εμφάνισε η μαθήτρια στο τέλος του πρώτου κύκλου και αποτελούνταν από 3 συναντήσεις 30-50 λεπτών η καθεμία. Ο συγκεκριμένος κύκλος συναντήσεων πραγματοποιήθηκε μετά από διάστημα 3 μηνών από το τέλος του πρώτου κύκλου και ολοκληρώθηκε σε μία περίπου εβδομάδα (από τις 8 Μαΐου του 2017 μέχρι τις 15 Μαΐου του 2017).

Στην παρούσα εργασία, το πείραμα σχεδιασμού που συζητείται αφορά στον δεύτερο κύκλο συναντήσεων. Ακολουθεί αναλυτική μελέτη και σχολιασμός καθεμίας εκ των τριών φάσεών του, της προετοιμασίας, της διεξαγωγής του πειράματος σχεδιασμού και της αναστοχαστικής ανάλυσής του.

3.6 Η φάση της προετοιμασίας

Προκειμένου να μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο έγινε η προετοιμασία του πειράματος σχεδιασμού θα χρειαστεί να αναφερθούμε συνοπτικά στον προηγούμενο κύκλο συναντήσεών μας με τη μαθήτρια, καθώς όπως προαναφέρθηκε αφορμή για τον σχεδιασμό και τη διεξαγωγή του δεύτερου κύκλου συναντήσεων που μελετάμε ήταν ένα συγκεκριμένο πρόβλημα κατανόησης που ανιχνεύτηκε στο τέλος του πρώτου κύκλου.

3.6.1 Συνοπτική περιγραφή πρώτου κύκλου συναντήσεων

Ευρύτερος θεωρητικός σκοπός: Κεντρική προβληματική του συγκεκριμένου κύκλου ήταν το πώς θα μπορούσαμε να στηρίξουμε μία μαθήτρια Δ΄ Δημοτικού ώστε να προσεγγίσει με τις δικές της δυνάμεις αναδιοργανώνοντας τα υπάρχοντα γνωστικά της σχήματα την έννοια της ισοδυναμίας των κλασμάτων.

Ανασκόπηση σχετικής βιβλιογραφίας: Με σκοπό τη διαμόρφωση υποθέσεων για τα τελικά σημεία μάθησης της μαθήτριας, είχαμε προβεί σε ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσεγγιστεί η έννοια της ισοδυναμίας των κλασμάτων.

Στα σχολικά βιβλία της Γ΄ Δημοτικού που είναι η τάξη στην οποία τυπικά ξεκινά η διδασκαλία της έννοιας του κλάσματος, το κλάσμα παρουσιάζεται ως μέρος όλου, όπου ο παρονομαστής μας λέει «σε πόσα ίσα μέρη χωρίζουμε» και ο αριθμητής «πόσα ίσα μέρη παίρνουμε». Στη συνέχεια η ισοδυναμία δύο κλασμάτων παρουσιάζεται μέσω της επίδειξης του ίσου μεγέθους δύο κλασματικών μερών, συνήθως χρωματίζοντας τις κυκλικές ή ορθογώνιες περιοχές του όλου στο οποίο αντιστοιχούν.

Πολλοί είναι οι ερευνητές (Steffe et al., 1991; Empson, 2001; Olive & Steffe, 2002; Steffe, 2004; Naik & Subramaniam, 2008; Norton & McCloskey, 2009; Izsák et al., 2012; Wong, 2013) οι οποίοι συνηγορούν πως ο παραπάνω τρόπος προσέγγισης της ισοδυναμίας που στηρίζεται αποκλειστικά στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος όλου οδηγεί σε μια πολύ περιοριστική αντίληψή της. Μια τέτοια προσέγγιση δεν επιτρέπει την ανάδυση της εν λόγω έννοιας μέσα από τις πλούσιες λειτουργίες της επανάληψης, του ισοτεμαχισμού και του ισοτεμαχισμού του αποτελέσματος ενός ισοτεμαχισμού στις οποίες μπορεί να προβεί ένα παιδί.

Κάποιοι ερευνητές προσέγγισαν την έννοια της ισοδυναμίας στο πλαίσιο προβληματικών καταστάσεων στις οποίες τα κλάσματα αντιμετωπίζονται ως μέτρα συνεχών μεγεθών (Naik & Subramaniam, 2008; Lamon, 2008; Wong, 2013). Από αυτήν την οπτική δύο ισοδύναμα κλάσματα μετρούν το ίδιο τμήμα ενός μεγέθους αλλά με διαφορετικές μονάδες μέτρησης. Σημαντικά θέματα συζήτησης που μπορούν να προκύψουν αφορούν τον τρόπο με τον οποίο επιδρούν πιθανές μεταβολές του μεγέθους της μονάδας μέτρησης στο μέτρο του τμήματος. Σε ένα πλαίσιο προβλημάτων μέτρησης, ως σημαντικό εργαλείο στήριξης και οργάνωσης της μαθηματικής δραστηριότητας αναδύεται η αριθμογραμμή.

Αρκετοί επίσης ερευνητές επιχείρησαν να προσεγγίσουν την ισοδυναμία σε ένα πλαίσιο προβλημάτων που εμπλέκουν καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς (Empson 2001; Naik & Subramaniam, 2008; Lamon, 2008). Στη συγκεκριμένη περίπτωση τα κλάσματα εκφράζουν τόσο τη διαίρεση ν αντικειμένων σε μ άτομα όσο και το μέγεθος της μερίδας καθενός από αυτά. Δύο ισοδύναμα κλάσματα μέσα σε ένα τέτοιο πλαίσιο δείχνουν την ίδια πολλαπλασιαστική σχέση μερίδας – όλου. Η Lamon (2008) αναφέρει πως ερωτήσεις στο πλαίσιο σύγκρισης δύο καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς που ωθούν το παιδί να σκεφτεί σε ποια κατάσταση τρώει το κάθε άτομο περισσότερο αλλά και πόσο περισσότερο (more and how much more) προσφέρουν πλούσιες ευκαιρίες για να αναδυθούν τα ισοδύναμα κλάσματα. Επίσης, η Empson (2001) αναφέρεται σε πολλαπλές άτυπες στρατηγικές που εφευρίσκουν οι μαθητές προκειμένου να προβούν σε έναν διαφορετικό ισοτεμαχισμό των αντικειμένων στα άτομα στην ίδια κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς. Μέσα από τους διαφορετικούς ισοτεμαχισμούς με κατάλληλη στήριξη θα μπορούσαν να αναδυθούν ισοδύναμα κλάσματα.

Ο Steffe (1991) θεωρεί τη λειτουργία του ισοτεμαχισμού του αποτελέσματος ενός ισοτεμαχισμού θεμελιώδη για την προσέγγιση των ισοδύναμων κλασμάτων με έναν ώριμο και ουσιαστικό τρόπο. Η δυνατότητα του παιδιού να προβαίνει για παράδειγμα στον ισοτεμαχισμό καθενός τετάρτου μιας σοκολάτας (τα τέταρτα έχουν προκύψει ως αποτέλεσμα ενός ισοτεμαχισμού σε 4 μέρη της σοκολάτας) σε 3 μικρότερα κομμάτια και να συνειδητοποιεί πως το $\frac{1}{4}$ της σοκολάτας περιλαμβάνει 3 κομμάτια καθένα από τα οποία αντιστοιχούν στο $\frac{1}{12}$ της σοκολάτας βρίσκεται στο επίκεντρο της κατανόησης της ισοδυναμίας. Μια τέτοια συνειδητοποίηση απαιτεί συντονισμό τριών επιπέδων μονάδων (Steffe, 1991; Steffe, 2004; Hackenberg & Tillema, 2009, Izsák et al., 2012). Στο

παράδειγμά μας, σε ένα πρώτο επίπεδο, μονάδα είναι η μία σοκολάτα, σε δεύτερο επίπεδο μονάδα θεωρείται καθεμία από τις κλασματικές μονάδες $\frac{1}{4}$, ενώ σε τρίτο επίπεδο εντοπίζεται ως μονάδα η μικρότερη κλασματική μονάδα $\frac{1}{12}$.

Τελικά σημεία μάθησης: Μετά την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, συγκεκριμένος στόχος για τη μάθηση της μαθήτριας ήταν να μπορεί να αξιοποιεί διαφορετικές κλασματικές εκφράσεις για να προσδιορίσει τη μερίδα καθενός από τα ν άτομα σε μια κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς, συνειδητοποιώντας εκ των προτέρων ότι αυτές οι εκφράσεις είναι ισοδύναμες καθώς δείχνουν την ίδια σχέση μερίδας – όλου.

Σημεία εκκίνησης: Για τον προσδιορισμό των σημείων εκκίνησης της μαθήτριας, αξιοποιήθηκε η μελέτη των σχολικών βιβλίων και η ανάλυση ερωτηματολογίων που είχαν δοθεί σε μαθητές Γ΄ και Δ΄ δημοτικού σε πιλοτικό στάδιο και τα οποία διερευνούσαν τις ιδέες των μαθητών για τα κλάσματα. Επιπλέον, για τον καθορισμό των σημείων εκκίνησης συνυπολογίστηκε η πρώτη συνάντηση με τη μαθήτρια. Από τα παραπάνω καταλήξαμε στο ότι λειτουργούσε προσθετικά παρά πολλαπλασιαστικά., στηριζόμενη σε διαδικασίες κενές νοήματος για την ίδια. Ως εκ τούτου είχε μια πολύ περιορισμένη αντίληψη του κλάσματος, σύμφωνα με την οποία για παράδειγμα το κλάσμα $\frac{3}{5}$ αντιστοιχούσε πάντα σε «3 από τα 5». Στο μυαλό της υποθέσαμε πως η έννοια του κλάσματος ήταν αποκομμένη από τις ουσιαστικές λειτουργίες του ισοτεμαχισμού και της επανάληψης οι οποίες βρίσκονται στην καρδιά της γένεσής του.

Υποθετική πορεία μάθησης: Προκειμένου να συνδέσουμε τα παραπάνω σημεία εκκίνησης και τους τελικούς στόχους, διαμορφώσαμε μια υποθετική πορεία για τη μάθηση της μαθήτριας και τα μέσα στήριξής της. Συνοπτικά η συγκεκριμένη πορεία έδινε έμφαση στην προσέγγιση της πολλαπλασιαστικής φύσης του κλάσματος μέσα από δραστηριότητες που ωθούσαν τη μαθήτρια να κόψει και να επαναλάβει. Υποθέσαμε πως αν η μαθήτρια σταδιακά εμπλακεί σε προβλήματα όπως «Η σοκολάτα του σχήματος είναι τριπλάσια από τη δική μου. Ζωγράφισε τη δική μου σοκολάτα» ή «Η σοκολάτα που βλέπεις είναι το $\frac{1}{4}$ από τη δική μου. Πόσο είναι η δική μου;» η μαθήτρια θα οδηγούνταν σε μία πληρέστερη αντίληψη του κλάσματος, συνειδητοποιώντας πως αν για παράδειγμα ισοτεμαχίσουμε ένα αντικείμενο σε 4 κομμάτια καθένα από αυτά ισούται με το $\frac{1}{4}$ του αντικειμένου και

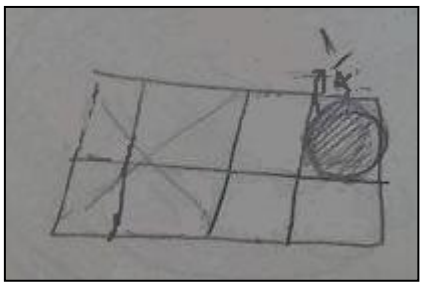
αντίστροφα αν επαναλάβουμε οποιοδήποτε από αυτά τα κομμάτια 4 φορές θα φτιάξουμε και πάλι το αρχικό αντικείμενο. Στη συνέχεια, υποθέταμε πως μια αρχική προσέγγιση της ισοδυναμίας κλασμάτων θα μπορούσε να επιτευχθεί μέσα από το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς στηρίζοντας τη μαθήτρια να προβεί σε δύο διαφορετικούς ισοτεμαχισμούς στην ίδια κατάσταση και συγκρίνοντας σε καθέναν από αυτούς τους δύο ισοτεμαχισμούς τη μερίδα του κάθε ατόμου. Για να στηρίξουμε την προσπάθεια αυτή της μαθήτριας, είχαμε σχεδιάσει ένα πλαίσιο προβληματικών καταστάσεων που αφορούσαν σε δίκαιη μοιρασιά πιτσών σε άτομα, στις οποίες διακρίνονται δύο περιπτώσεις: οι πίτσες φτάνουν στο τραπέζι μία – μία ή οι πίτσες φτάνουν στο τραπέζι όλες μαζί.

Διεξαγωγή και ανάλυση του πρώτου κύκλου: Αρχικά κατά τη διεξαγωγή αυτού του κύκλου, πραγματοποιήθηκε μια προσπάθεια να εντοπιστούν και να συζητηθούν οι πολλαπλασιαστικές σχέσεις μεταξύ δύο μεγεθών έτσι ώστε στη συνέχεια να γίνει προσέγγιση του κλάσματος ως πολλαπλασιαστικής σύγκρισης. Σε αυτό το αρχικό πλαίσιο δραστηριοτήτων πολλαπλασιασμού φυσικών αριθμών, η μαθήτρια παρουσίασε δυσκολίες. Για παράδειγμα, σε μια προβληματική κατάσταση στην οποία δίνονταν ένα κίτρινο φίδι με μήκος 6 εκατοστά και ένα μοβ με μήκος 12 εκατοστά και ζητούνταν πόσες φορές πρέπει να επαναλάβουμε το κίτρινο φίδι ώστε να δημιουργηθεί το μοβ, η μαθήτρια απάντησε: «6 φορές, γιατί έκανα 6 φορές το 2 μας κάνει 12». Μια τέτοια απάντηση φανερώνει μη εννοιολογική κατανόηση του ρόλου των δύο φυσικών αριθμών – όρων του πολλαπλασιασμού, καθώς δεν υπάρχει σαφής διάκριση του αριθμού που αντιστοιχεί στη μονάδα που επαναλαμβάνεται (6 εκατοστά) και του αριθμού που εκφράζει των αριθμό των επαναλήψεων αυτής της μονάδας (2 φορές).

Στη συνέχεια, κατά την εμπλοκή της σε προβληματικές καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, παρατηρήθηκε πως η μαθήτρια δεν προσέγγιζε την έννοια της ισοδυναμίας κλασμάτων όπως θέλαμε και είχαμε υποθέσει κατά τον σχεδιασμό με αποτέλεσμα στο τέλος του πρώτου κύκλου να οδηγηθούμε στη διαπίστωση μιας εννοιολογικής δυσκολίας της μαθήτριας την οποία δεν είχαμε προβλέψει.

Πιο συγκεκριμένα, η μαθήτρια στην προβληματική κατάσταση «αν 2 ίδιες σοκολάτες μοιράζονταν δίκαια σε 8 φίλους, πόση σοκολάτα θα έτρωγε ο καθένας;» προέβη σε δύο διαφορετικούς ισοτεμαχισμούς μετά από συζήτηση με την ερευνήτρια. Στη μία περίπτωση χώρισε την κάθε σοκολάτα σε 4 ίσα κομμάτια, ενώ στην άλλη οδηγήθηκε στον ισοτεμαχισμό της κάθε σοκολάτας σε 8 κομμάτια. Στο σχήμα στο οποίο κάθε σοκολάτα ήταν κομμένη σε 8 ίσα κομμάτια της ζητήθηκε να δείξει ποιο μέρος αντιστοιχούσε στο $\frac{1}{4}$

της σοκολάτας. Η μαθήτρια, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 1 που έφτιαξε η ίδια, έκρυψε τη μισή σοκολάτα με το χέρι της, έτσι ώστε στο οπτικό της πεδίο να μείνει η άλλη μισή σοκολάτα (4 κομμάτια) και έδειξε το ένα από αυτά, δείχνοντας μας ουσιαστικά όχι το $\frac{1}{4}$ που της ζητήσαμε αλλά το $\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{2}$ της σοκολάτας, δηλαδή το $\frac{1}{8}$.



Σχήμα 1: Εντοπισμός του ¼ μιας σοκολάτας ισοτεμαχισμένης σε 8 κομμάτια

Αφού παρατηρήθηκε το συγκεκριμένο πρόβλημα κατανόησης της μαθήτριας, προσπαθήσαμε να διαπιστώσουμε τους λόγους για τους οποίους υπήρχε αυτή η ελλιπής κατανόηση. Η κίνηση της μαθήτριας να κρύψει τη μισή σοκολάτα και να δείξει ως $\frac{1}{4}$ το ένα από 4 κομμάτια της μισής σοκολάτας δείχνει πως στο μυαλό της το κλάσμα ήταν συνδεδεμένο με στενό και επίμονο τρόπο ως μέρος όλου και μάλιστα ισοτεμαχισμένου σε όσα κομμάτια λέει ο παρονομαστής του κλάσματος. Η συζήτηση και στήριξη της αναδιοργάνωσης του συγκεκριμένου γνωστικού σχήματος της μαθήτριας κρίθηκε απαραίτητη σε επόμενο κύκλο συναντήσεων προκειμένου να γίνουν σταθερά βήματα προς την κατεύθυνση της προσέγγισης της ισοδυναμίας μακροπρόθεσμα.

3.6.2 Προετοιμασία του δεύτερου κύκλου συναντήσεων

Γενικότερος θεωρητικός σκοπός: Το ενδιαφέρον μας σε αυτόν τον κύκλο συναντήσεων εστιάζει:

- στον σχεδιασμό οργανωμένης στήριξης ώστε η μαθήτρια να αναδιοργανώσει τη μαθηματική της δραστηριότητα και να αναπτύξει τη σημαντική μαθηματική ιδέα πως μια κλασματική μονάδα $\frac{1}{\nu}$ δεν αναφέρεται κατ'

ανάγκη σε ένα από ν ίσα κομμάτια αλλά μπορεί να περιλαμβάνει κάποιον αριθμό μικρότερων κομματιών

- στη μελέτη της πορείας μάθησης της μαθήτριας στο πλαίσιο που ορίζεται από τα μέσα στήριξής της

Τελικά σημεία μάθησης: Βασική μας επιδίωξη ήταν η μαθήτρια να κατασκευάσει ένα συνεκτικό σχήμα για σύνθετες[1] κλασματικές μονάδες ούτως ώστε:

- να αναγνωρίζει εκ των προτέρων πως η σύνθετη κλασματική μονάδα $\frac{1}{\nu}$ χρειάζεται να επαναληφθεί ν φορές για να δημιουργηθεί το όλο
- να εκφράζει την ποσότητα ενός όλου που αντιστοιχεί σε μία σύνθετη κλασματική μονάδα και με άλλες ισοδύναμες κλασματικές εκφράσεις.

Παρατηρείται λοιπόν μια αναδιαμόρφωση των τελικών σημείων μάθησης σε σχέση με το προηγούμενο κύκλο συναντήσεων, εστιάζοντας περισσότερο σε μία συγκεκριμένη μαθηματική ιδέα (αυτή των σύνθετων κλασματικών μονάδων) παρά στην προσέγγιση της ευρύτερης έννοιας της ισοδυναμίας. Αναγνωρίζεται βέβαια πως η οικοδόμηση μιας συνεκτικής αντίληψης γύρω από τις σύνθετες κλασματικές μονάδες μακροπρόθεσμα θα συμβάλλει σε ουσιαστικότερη προσέγγιση της έννοιας της ισοδυναμίας των κλασμάτων.

Σημεία εκκίνησης: Τα σημεία εκκίνησης του πειράματος σχεδιασμού προσδιορίστηκαν με βάση τη μελέτη της πορείας και των τελικών σημείων μάθησης της μαθήτριας στο πλαίσιο στήριξης του προηγούμενου κύκλου συναντήσεων. Η μαθήτρια στο τέλος των συναντήσεων αυτών παρατηρήθηκε πως ήταν σε θέση να προσδιορίσει ένα μοναδιαίο κλάσμα $\frac{1}{\nu}$ ενός δοσμένου, συνεχούς και μη ισοτεμαχισμένου όλου προβαίνοντας σε ισοτεμαχισμό του σε τόσα κομμάτια όσα προσδιορίζει ο παρονομαστής.

[1] Στην παρούσα εργασία όταν αναφερόμαστε σε απλή ή σύνθετη κλασματική μονάδα θα εννοούμε μια κλασματική μονάδα που αποτελείται από ένα ή περισσότερα του ενός μικρότερα κομμάτια αντίστοιχα. Για παράδειγμα, η απλή κλασματική μονάδα $\frac{1}{3}$ περιλαμβάνει 1 από τα 3 ίσα κομμάτια στα οποία έχει χωριστεί η σοκολάτα. Αντίθετα, η σύνθετη κλασματική μονάδα $\frac{1}{3}$ μιας σοκολάτας θα μπορούσε να περιλαμβάνει 2 από τα 6 ίσα κομμάτια, 3 από τα 9 κ.ο.κ.

Επίσης, ήταν σε θέση να επαναλάβει ν φορές ένα απλό μοναδιαίο κλάσμα $\frac{1}{\nu}$ ώστε να δημιουργήσει το όλο. Πρόβλημα για τη μαθήτρια συνιστούσε η επανάληψη μιας σύνθετης κλασματικής μονάδας $\frac{1}{\nu}$, η οποία περιελάμβανε μ αριθμό μικρότερων, ίσων κομματιών ώστε να φτιάξει το όλο ή αντίστροφα ο εντοπισμός σε ένα ισοτεμαχισμένο σε μ κομμάτια όλο του κλάσματος $\frac{1}{\nu}$ του όλου. Αυτή η αδυναμία θεωρήσαμε ότι οφείλεται στην επίμονη ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος όλου και πιο συγκεκριμένα στη σύλληψη της κλασματικής μονάδας ως «ένα από τα ν». Τέλος, υποθέσαμε με βάση τις αναλύσεις του προηγούμενου κύκλου, πως η μαθήτρια αξιοποιούσε τις γραφικές αναπαραστάσεις στις λύσεις της ως αναγκαίο στήριγμα για να οργανώσει τη σκέψη της, οπότε και η κατανόηση μαθηματικών εννοιών ερχόταν εκ των υστέρων και όχι εκ των προτέρων.

Υποθετική τροχιά μάθησης: Για να συνδέσουμε τα σημεία εκκίνησης της μαθήτριας με τα τελικά σημεία που προσδιορίσαμε, αποφασίσαμε πως καταλληλότερο θα ήταν ένα πλαίσιο δραστηριοτήτων που θα είχε στο επίκεντρο όχι τη λειτουργία του ισοτεμαχισμού σε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς αλλά της επανάληψης ενός μέρους για να κατασκευαστεί το όλο.

Σε μία πρώτη φάση, βασική επιδίωξή μας ήταν να εμπλέξουμε τη μαθήτρια στη λειτουργία της επανάληψης ενός σύνθετου μέρους με δραστηριότητες όπως αυτή που περιγράφεται στη συνέχεια:

> *«Μια παρέα ν φίλων μοιράζεται δίκαια μία σοκολάτα. Ο καθένας τρώει το $\frac{1}{\nu}$ της σοκολάτας, το οποίο περιλαμβάνει μ μικρότερα κομμάτια. Αν η μερίδα του ενός από τα ν άτομα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, μπορείς να ζωγραφίσεις ολόκληρη τη σοκολάτα;»*

Οι σημαντικές μεταβάσεις που υποθέταμε πως θα γίνουν στη σκέψη και τη μαθηματική δραστηριότητα της μαθήτριας κατά την εμπλοκή της σε τέτοιου τύπου δραστηριότητες και τη συμμετοχή της στη συζήτηση με την ερευνήτρια, αφορούσαν στη συνειδητοποίηση της ιδέας ότι μια κλασματική μονάδα $\frac{1}{\nu}$ μπορεί να περιλαμβάνει ένα

πλήθος μικρότερων, ίσων μεταξύ τους κομματιών. Ακόμη, εικάζαμε πως η μαθήτρια θα έφτανε στην κατανόηση του ότι η κλασματική μονάδα $\frac{1}{\nu}$ ανεξάρτητα από τον αριθμό των κομματιών που περιλαμβάνει χρειάζεται να επαναληφθεί ν φορές ώστε να δημιουργηθεί το όλο.

Με αυτόν τον τρόπο υποθέσαμε πως θα τροποποιούσε την προηγούμενη ιδέα της σχετικά με τις κλασματικές μονάδες, ερμηνεύοντας τις πλέον όχι ως ένα από τα ν κομμάτια, αλλά ως τμήμα (σύνθετο ή απλό) το οποίο αν επαναληφθεί ν φορές θα φτιάξει το όλο.

Στη συνέχεια, προκειμένου να τη στηρίξουμε να εκφράσει τη σύνθετη κλασματική μονάδα και με άλλα ισοδύναμα κλάσματα, τα οποία προκύπτουν από τη συσχέτιση των μ κομματιών που περιλαμβάνει η σύνθετη μονάδα με το όλο, σχεδιάζαμε να εργαστούμε πάνω σε δραστηριότητες όπως:

> *«Αν ένα αγαθό έχει μ κομμάτια και κάθε ημέρα ένα παιδί τρώει το* $\frac{1}{\nu}$ *αυτού του αγαθού, σε πόσες ημέρες θα τελειώσει το αγαθό και πόσα κομμάτια θα τρώει καθημερινά το παιδί;»*

Για να απαντήσει η μαθήτρια στην ερώτηση «σε πόσες ημέρες θα τελειώσει το αγαθό», υποθέσαμε πως θα βασιζόταν στην ιδέα που είχε κατασκευάσει στην προηγούμενη φάση δραστηριοτήτων σχετικά με την επανάληψη ν φορές μιας κλασματικής μονάδας $\frac{1}{\nu}$ για να δημιουργηθεί το όλο.

Μετατοπίζοντας την προσοχή της μαθήτριας από τα μεγάλα κομμάτια στα μικρότερα με την ερώτηση «πόσα κομμάτια θα έτρωγε καθημερινά» στοχεύαμε στη στήριξη της μαθήτριας ώστε να «δει» πως η ημερήσια μερίδα μπορεί να εκφραστεί όχι μόνο με μια κλασματική μονάδα του όλου αλλά και με ένα ισοδύναμο κλάσμα που θα προέκυπτε από το συσχετισμό των μικρότερων κομματιών που περιέχει το κάθε μεγαλύτερο κομμάτι με το όλο.

Τέλος, σχετικά με τα μέσα στήριξης της πορείας μάθησης της μαθήτριας που περιγράφηκε, εκτός από τις διδακτικές δραστηριότητες και τη συζήτηση με την ερευνήτρια ώστε να προκύψουν τα παραπάνω σημαντικά μαθηματικά θέματα, θα αξιοποιούνταν και τα σχήματα της μαθήτριας. Τα σχήματα της μαθήτριας και ο τρόπος που τα αξιοποιούσε,

εκτός της χρησιμότητάς τους ως μέσα στήριξης και οργάνωσης της σκέψης της, θεωρήσαμε πως θα μας έδιναν σημαντικές ενδείξεις για την εξελισσόμενη μαθηματικής της δραστηριότητα.

Κεφάλαιο 4: Ανάλυση στοιχείων

Αφού έγινε η προετοιμασία του δεύτερου κύκλου επισκέψεων, ο οποίος είναι αντικείμενο ανάλυσης και συζήτησης, πραγματοποιήθηκαν οι τρεις συναντήσεις της ερευνητικής ομάδας με τη μαθήτρια. Μετά από κάθε συνάντηση, διεξάγονταν συνεχείς αναλύσεις (ongoing analysis) που τροφοδοτούσαν τη συνέχεια του πειράματος. Βάση για τις συγκεκριμένες αναλύσεις ήταν η συστηματική και προσεκτική καταγραφή των δεδομένων ως προς την πορεία μάθησης και τη λειτουργία των μέσων στήριξης. Πηγές άντλησης τέτοιων δεδομένων ήταν οι βιντεοσκοπημένες συναντήσεις, οι απομαγνητοφωνήσεις των βιντεοσκοπημένων δραστηριοτήτων και της συζήτησης μεταξύ μαθήτριας και ερευνήτριας, οι προσωπικές σημειώσεις των μελών της ερευνητικής ομάδας και τα αποτελέσματα των δραστηριοτήτων της μαθήτριας πάνω στα προβλήματα στα οποία εργάστηκε όπως είχαν καταγραφεί στα φύλλα εργασίας.

Αφού μελετήθηκαν προσεκτικά οι βιντεοσκοπημένες δραστηριότητες και οι αντίστοιχες απομαγνητοφωνήσεις ακολούθησε ο προσδιορισμός κρίσιμων επεισοδίων σε κάθε συνάντηση. Τα επεισόδια που προσδιορίστηκαν αφορούν νοηματοδοτήσεις ή αποτυχία νοηματοδοτήσεων που προέκυψαν καθώς η μαθήτρια προσπάθησε να αποκωδικοποιήσει και να δώσει μία λογική για την ίδια απάντηση σε προβληματικές καταστάσεις. Αυτές οι νοηματοδοτήσεις ή οι δυσκολίες νοηματοδότησης μελετώνται σε συνάρτηση με το πλαίσιο και τα μέσα στήριξής τους.

Μονάδα ανάλυσης λοιπόν αποτέλεσε το θεματικό επεισόδιο, το οποίο ορίστηκε ως ένα απόσπασμα δράσεων και διαλόγων της μαθήτριας με την ερευνήτρια γύρω από την προσπάθεια οικοδόμησης σημαντικών μαθηματικών ιδεών για τις σύνθετες κλασματικές μονάδες σε ένα πλαίσιο οργανωμένης στήριξης αυτής της οικοδόμησης.

Ακολουθεί η ανάλυση και συζήτηση των τριών συναντήσεων με τη μαθήτρια. Σε καθεμία από αυτές αρχικά δίνεται μια συνοπτική εικόνα της συνάντησης και έπεται η ανάλυση και συζήτηση ενός ή περισσοτέρων θεματικών επεισοδίων. Η ανάλυση, όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, έχει διττή στόχευση. Από τη μία πλευρά, προσανατολίζεται σε σημαντικές μαθηματικές ιδέες που οικοδόμησε ή δυσκολεύτηκε να οικοδομήσει η μαθήτρια. Από την άλλη πλευρά, η τροποποίηση προηγούμενων ιδεών σε νέες πιο εξελιγμένες ή η εννοιολογική δυσκολία της μαθήτριας για τροποποίηση προηγούμενων σχημάτων μελετώνται σε συνάρτηση με τη στήριξη που δόθηκε στη μαθήτρια, διερευνώντας τους λόγους για τους οποίους η στήριξη αυτή λειτούργησε ή δε λειτούργησε.

4.1 Πρώτη συνάντηση

Γενικότερος στόχος αυτής της πρώτης συνάντησης με τη μαθήτρια ήταν να οικοδομήσει τη σημαντική μαθηματική ιδέα που αφορά στο γεγονός ότι μια κλασματική μονάδα $\frac{1}{\nu}$, ανεξαρτήτως του αριθμού μικρότερων κομματιών που περιλαμβάνει, χρειάζεται να επαναληφθεί ν φορές προκειμένου να φτιαχτεί το όλο. Σε αυτήν τη συνάντηση έμφαση δόθηκε όχι στα μικρότερα κομμάτια από τα οποία μπορεί να αποτελούνταν μια κλασματική μονάδα, αλλά στη σχέση που έχει η κλασματική μονάδα με το όλο, η οποία είναι σταθερή και ανεξάρτητη των μικρότερων κομματιών που περιλαμβάνει.

Για τον σκοπό αυτό, δόθηκε μια σειρά δραστηριοτήτων που προκαλούσαν την ανάγκη στη μαθήτρια να επαναλάβει μια σύνθετη κλασματική μονάδα προκειμένου να φτιάξει το όλο. Οι δραστηριότητες ήταν δομημένες με τέτοιον τρόπο ώστε να δημιουργήσουν ευκαιρίες να έρθει η μαθήτρια σε σύγκρουση με το προηγούμενο, ελλιπές γνωστικό σχήμα της για τις κλασματικές μονάδες, σύμφωνα με το οποίο μια κλασματική μονάδα $\frac{1}{\nu}$ αντιστοιχεί πάντα σε 1 από τα ν ίσα κομμάτια.

Έτσι, στη συγκεκριμένη συνάντηση συζητήθηκε με τη μαθήτρια μια σειρά προβληματικών καταστάσεων, που χαρακτηρίζονταν από ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο. Δινόταν η κλασματική μονάδα η οποία αντιστοιχούσε σε έναν πολλαπλό αριθμό κομματιών σοκολάτας και ζητούνταν να σχεδιαστεί ολόκληρη η σοκολάτα. Η επιλογή προβλημάτων που αξιοποιούσαν ως ποσότητες αναφοράς τις σοκολάτες θεωρείται κατάλληλη, γιατί παρείχε δυνατότητα εύκολης αναπαράστασης από τη μαθήτρια με σχέδιο αλλά και επειδή συνιστούσε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο στο οποίο η έκφραση «ένα μεγάλο κομμάτι σοκολάτας περιλαμβάνει κάποια μικρότερα κομματάκια» μπορεί να ευδοκιμήσει και να έχει νόημα για αυτήν αφού συνδέεται με τις καθημερινές της εμπειρίες.

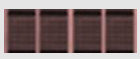
Η συνάντηση ξεκίνησε με μια γενικότερη συζήτηση με τη μαθήτρια, η οποία στόχευε τόσο στη δημιουργία ενός ευχάριστου και φιλικού κλίματος όσο και στην ομαλή εισαγωγή στις δραστηριότητες και την ενεργό εμπλοκή της σε αυτές στη συνέχεια. Στην παρούσα φάση σε κάθε προβληματική κατάσταση, ζητήθηκε εξαρχής από τη μαθήτρια να ζωγραφίσει την ζητούμενη σοκολάτα. Μελετώντας συνολικά τον τρόπο με τον οποίο η μαθήτρια αξιοποιούσε τα σχήματά της για να απαντήσει στις δραστηριότητες, παρατηρείται πως το σχήμα της ήταν αναγκαίο, καθώς το χρησιμοποιούσε περισσότερο ως

μέσο οργάνωσης της σκέψης της παρά ως μέσο επικοινωνίας μιας ήδη δομημένης σκέψης. Έτσι, η όποια κατανόηση της σχέσης που έχει μια σύνθετη κλασματική μονάδα με το όλο κατά κύριο λόγο στην παρούσα συνάντηση έρχεται για τη μαθήτρια εκ των υστέρων αφού στηριχθεί στα σχήματά της παρά εκ των προτέρων.

Οι συζητήσεις μεταξύ ερευνήτριας και μαθήτριας στόχευαν στη διερεύνηση της σχέσης που έχει το όλο με την κλασματική μονάδα. Προς αυτόν τον σκοπό, η ερευνήτρια έθετε αντίστοιχες ερωτήσεις, όπως: «Ολόκληρη η σοκολάτα τι σχέση έχει με το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας;» και εστίαζε σε πολλαπλασιαστικές σχέσεις στις οποίες κατέληγε η μαθήτρια «θα το τριπλασιάσω» ή «είναι πενταπλάσιο», τις οποίες κατέγραφε και τις έφερνε στο προσκήνιο για να συζητηθούν εκτενέστερα.

Κατά την προσπάθεια της να δώσει εύλογες απαντήσεις στα παραπάνω προβλήματα και ερωτήματα, η μαθήτρια εμφάνισε μέχρι και το τέλος της συνάντησης κάποιες επίμονες εννοιολογικές δυσκολίες οι οποίες την εμπόδιζαν να φτάσει στην κατανόηση που στοχεύαμε αλλά παρουσίασε και κάποιες σκέψεις με δυνατότητα για περαιτέρω αξιοποίηση. Τα παρακάτω αποσπάσματα επιλέχθηκαν με στόχο να εντοπιστούν και να συζητηθούν περιορισμοί και δυνατότητες που αφορούν τόσο στην οικοδόμηση πιο συνεκτικών γνωστικών σχημάτων από τη μαθήτρια όσο και στη στήριξη που δόθηκε σε αυτήν. Στο πρώτο από τα παρακάτω επιλεγμένα θεματικά επεισόδια δίνεται εικόνα ορισμένων δυσκολιών τόσο της μαθήτριας σχετικά με τον προσδιορισμό της σχέσης του όλου και των σύνθετων κλασματικών μονάδων όσο και της ερευνητικής ομάδας, σχετικά με τη στήριξη της μαθήτριας. Το δεύτερο και τρίτο απόσπασμα εξετάζονται μαζί, καθώς η συγκριτική μελέτη τους αναδεικνύει μια σημαντική προσπάθεια της μαθήτριας να κατασκευάσει με ποιοτικότερο τρόπο τις γραφικές αναπαραστάσεις της, η οποία παρουσιάζει δυνατότητες για περαιτέρω αξιοποίηση.

Δραστηριότητα 1:
Αν το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας έχει 4 κομματάκια, πόσα κομματάκια θα έχει ολόκληρη η σοκολάτα;



Επεισόδιο 1:

(…)

Μαθήτρια: Θα είναι 10 κομμάτια.
Ερευνήτρια: Πώς το βρήκες;
Μαθήτρια: Είχα βάλει άλλα 3 … άλλα 6 κομμάτια και πρόσθεσα άλλο 1 που ήταν το περισσευόμενο.
Ερευνήτρια: Εδώ (δείχνει στο σχήμα το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας) δεν είναι 3 τα κομμάτια όμως είναι 4. Και τι έκανες δηλαδή για να βρεις ολόκληρη τη σοκολάτα;
Μαθήτρια: Εδώ *(παίρνει το μολύβι της και κρύβει το τέταρτο κομμάτι από τα 4 που αποτελούν το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας)* πρόσθεσα άλλα 6 και έβαλα (ταυτόχρονα σηκώνει το μολύβι της, φανερώνοντας το κρυμμένο κομμάτι) και αυτό (με το μολύβι δείχνει το τέταρτο κομμάτι).
Ερευνήτρια: Δηλαδή τριπλασίασες αυτό; (δείχνοντας τα 3 από τα 4 κομμάτια που αποτελούν το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας)
Μαθήτρια: Ναι.
Ερευνήτρια: Γιατί όμως το $\frac{1}{3}$ εσύ μου είπες πως είναι 3 κομμάτια; Αφού σου είπα πως είναι 4 κομμάτια. Γιατί το έκρυψες αυτό (δείχνει το τέταρτο κομμάτι); Το ίδιο σοκολάτα θα φας;
Μαθήτρια: …
Ερευνήτρια: Πριν που είχαμε το $\frac{1}{5}$ της σοκολάτας, το πενταπλασιάσαμε για (να βρούμε) την ολόκληρη σοκολάτα. Τώρα πόσες φορές θα το πάρεις αυτό για να φτιάξεις ολόκληρη τη σοκολάτα;
Μαθήτρια: 4.
Ερευνήτρια: Είναι το $\frac{1}{4}$;
Μαθήτρια: 3 φορές.
Ερευνήτρια: Πώς το κατάλαβες τώρα ενώ στην αρχή είπες 4;
Μαθήτρια: Γιατί μπερδεύτηκα με τα κομμάτια.

(…)

Στο παραπάνω απόσπασμα διαφαίνονται δύο δυσκολίες της μαθήτριας που αφορούν στον αριθμό που περιλαμβάνει η σύνθετη κλασματική μονάδα $\frac{1}{3}$ και εμποδίζουν την οικοδόμηση μιας συνεκτικής κατανόησης γύρω από τη σχέση που έχει αυτή η κλασματική μονάδα με ολόκληρη τη σοκολάτα.

Αρχικά, η μαθήτρια φαίνεται να συνδέει τον παρονομαστή της κλασματικής μονάδας με τον αριθμό των μικρότερων κομματιών που περιλαμβάνει, θεωρώντας ότι το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας περιέχει αναγκαστικά 3 κομμάτια.

Αναφορικά με τον τρόπο που λειτούργησε το πλαίσιο και τα μέσα στήριξης ως προς την τροποποίηση και εξέλιξη αυτής της ιδέας, το περιεχόμενο της αρχικής συζήτησης πριν

την εμπλοκή της μαθήτριας στη δραστηριότητα με τις σοκολάτες και η επαναληπτική δομή των προβλημάτων δε στήριξαν όπως αναμέναμε την πορεία μάθησης της μαθήτριας.

Πιο συγκεκριμένα, σε αυτήν τη συνάντηση δε συζητήθηκε αρκετά το πλαίσιο του κάθε προβλήματος οπότε δεν επιχειρήθηκε ουσιαστική σύνδεσή τους με την πραγματικότητα και τις εμπειρίες της μαθήτριας. Ακόμη, έπειτα από κάποιο σημείο παρουσιάζεται η τάση της ερευνήτριας να θέτει προβληματικές καταστάσεις - ερωτήσεις, αποπλαισιωμένες εστιάζοντας στη διαδικασία επανάληψης της κλασματικής μονάδας ώστε να προκύψει το όλο και όχι στο πλαίσιο που δημιουργεί αυτήν την ανάγκη επανάληψης.

Από την άλλη πλευρά, η ερευνητική ομάδα θεώρησε πως εμπλέκοντας τη μαθήτρια σε δραστηριότητες επαναληπτικού μοτίβου οι οποίες κινούνταν από σύνθετες κλασματικές μονάδες που περιέχουν διαφορετικό κάθε φορά αριθμό μικρότερων κομματιών στην κατασκευή του όλου, θα στήριζε τη γενίκευση της σχέσης που συνδέει μια κλασματική μονάδα με το όλο αλλά και τη συνειδητοποίηση της σταθερότητας αυτής της σχέσης, η οποία είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό μικρότερων κομματιών που περιλαμβάνει. Στην πράξη, όμως, αυτή η επαναληπτικότητα στις δραστηριότητες ώθησε τη μαθήτρια σε μηχανιστικούς τρόπους λύσης, εφαρμόζοντας αυτόματα τρόπους δράσης και διαδικασίες προηγούμενων δραστηριοτήτων σε επόμενες. Πριν τη συζήτηση της συγκεκριμένης δραστηριότητας, είχε τεθεί στη μαθήτρια παρόμοια προβληματική κατάσταση στην οποία χρειαζόταν να σχεδιάσει μια ολόκληρη σοκολάτα με δεδομένο πως το $\frac{1}{5}$ αυτής περιείχε 5 κομμάτια. Εικάζεται, λοιπόν, πως έγινε μια βεβιασμένη συσχέτιση των δύο δραστηριοτήτων και λανθασμένη γενίκευση σχετικά με το γεγονός ότι οι κλασματικές μονάδες περιλαμβάνουν όσα κομμάτια λέει ο παρονομαστής.

Η ερευνήτρια προσπάθησε να στηρίξει τη μαθήτρια ώστε να υπερβεί αυτή τη δυσκολία της δίνοντας έμφαση στα δεδομένα του προβλήματος. Η συγκεκριμένη παρέμβαση δημιούργησε στη μαθήτρια την ανάγκη να αλλάξει γνώμη, καθώς μέσω ρεαλιστικών ερωτήσεων που απευθύνονταν στην καθημερινή εμπειρία της («Το ίδιο σοκολάτα θα φας;») αναγνωρίστηκε από αυτήν μια λογική ασυνέπεια στον προηγούμενο τρόπο λύσης της. Η στήριξη αυτή όμως δε συνέβαλε στην οριστική τροποποίηση της εν λόγω ιδέας της μαθήτριας όπως φαίνεται από τις επόμενες δραστηριότητες. Παρ' όλο που η μαθήτρια σε αυτό το σημείο άλλαξε απάντηση, η συγκεκριμένη ιδέα της εμφανίζεται μέχρι και το τέλος αυτής της συνάντησης σε παρόμοιες προβληματικές καταστάσεις που τέθηκαν στη συνέχεια. Για παράδειγμα, σε επόμενη δραστηριότητα η μαθήτρια απάντησε πως αν το $\frac{1}{6}$ της σοκολάτας περιλαμβάνει 7 μικρότερα κομμάτια ολόκληρη η σοκολάτα θα

έχει 36 κομμάτια, γιατί όπως χαρακτηριστικά αναφέρει «*έκανα 6 φορές το 6 και έβγαλα 36 κομμάτια*».

Εναλλακτικά, θεωρείται πως δίνοντας περισσότερη έμφαση σε μία αρχική συζήτηση με αφετηρία τις εμπειρίες της μαθήτριας πριν την εισαγωγή της στα προβλήματα, θα δινόταν ευκαιρία να αναδυθούν καθημερινά θέματα πλούσια σε σημαντικές μαθηματικές ιδέες (π.χ. πώς είναι μια σοκολάτα που αγοράζει η μαθήτρια από το περίπτερο, πόσα κομματάκια έχει, την έχει μοιραστεί ποτέ δίκαια με τον αδερφό της, πόσα κομμάτια τρώει ο καθένας, τι μέρος της σοκολάτας τρώει η ίδια, τι σχέση έχει αυτό που τρώει με ολόκληρη τη σοκολάτα) οι οποίες θα συνδέονταν και θα έβρισκαν εφαρμογή στη συνέχεια στο πλαίσιο των δραστηριοτήτων.

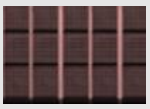
Σχετικά με τη δεύτερη δυσκολία, η μαθήτρια αναγνωρίζοντας πως το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας περιέχει 4 κομματάκια και όχι 3 όπως ισχυριζόταν προηγουμένως, συνδέει τον αριθμό των μικρότερων αυτών κομματιών με τις φορές που χρειάζεται να επαναληφθεί η κλασματική μονάδα ώστε να φτιαχτεί το όλο. Η δυσκολία αυτή φανερώνει μια σύγχυση στο διαχωρισμό των τριών επιπέδων μονάδων που εμπλέκονται στο εν λόγω πρόβλημα. Η μαθήτρια στην παρούσα φάση δε φαίνεται να κατανοεί πως οι αριθμοί 3 και 4 αναφέρονται σε διαφορετικά πράγματα, ο πρώτος προσδιορίζει τα μεγαλύτερα κομμάτια – σύνθετες κλασματικές μονάδες από τα οποία αποτελείται η σοκολάτα, ενώ ο δεύτερος αναφέρεται στα μικρότερα κομμάτια σε χαμηλότερο επίπεδο στα οποία χωρίζεται το κάθε μεγάλο κομμάτι της σοκολάτας.

Ένας σχετικός περιορισμός όσον αφορά στη στήριξη που παρείχαμε στη μαθήτρια αποτελεί το γεγονός ότι δεν ήταν ξεκάθαρη σε επικοινωνιακό επίπεδο η σημασιολογία της λέξης «κομμάτι», καθώς ορισμένες φορές αναφερόταν στα μεγάλα κομμάτια της σοκολάτας – κλασματικές μονάδες και άλλες στα μικρότερα κομματάκια τα οποία περιέχονταν στα μεγαλύτερα. Προτιμότερη ίσως θα ήταν η προσπάθεια από την πλευρά της ερευνήτριας προκειμένου να καθιερωθεί μια κοινά συμφωνημένη ορολογία μεταξύ αυτής και της μαθήτριας, η οποία θα μπορούσε να υποστηριχθεί και από κατάλληλες προσαρμογές του πλαισίου των προβλημάτων ώστε να κατανοείται κάθε φορά σε ποιο επίπεδο μονάδων γίνεται αναφορά. Αυτή η αδυναμία γίνεται φανερή και από την ίδια τη μαθήτρια όταν λέει «μπερδεύτηκα με τα κομμάτια», προσπαθώντας να εξηγήσει το λόγο που τροποποίησε την προηγούμενη απάντησή της.

Από την άλλη πλευρά, η στρατηγική της ερευνήτριας να βοηθήσει τη μαθήτρια ώστε να ξεπεράσει τη δυσκολία της μέσω της υπενθύμισης και επανάληψης όσων είχαν ειπωθεί

και καταγραφεί από τις προηγούμενες δραστηριότητες (Πριν που είχαμε το $\frac{1}{5}$ της σοκολάτας, το πενταπλασιάσαμε για την ολόκληρη σοκολάτα) ώθησε τη μαθήτρια να αλλάξει την απάντησή της προς τη σωστή κατεύθυνση. Επειδή όμως, όπως φαίνεται και από το παραπάνω απόσπασμα, η σύνδεση δόθηκε έτοιμη από την ερευνήτρια, αυτή η παρέμβαση – στήριξη ίσως λειτούργησε περιοριστικά για τη μαθήτρια. Έτσι, μια πιο ανοικτή προτροπή που θα ωθούσε τη μαθήτρια να αναζητήσει μόνη της τη διαδικασία που ακολούθησε σε προηγούμενες δραστηριότητες και να τη συσχετίσει με την απάντησή της ή και μια στήριξη που θα την ωθούσε να σχεδιάσει ολόκληρη τη σοκολάτα όπως τη φανταζόταν (τετραπλάσια) ώστε να οδηγηθεί σε μια μη λειτουργική κατάσταση (πλέον το κάθε μεγάλο κομμάτι θα ήταν το ¼ της σοκολάτας και όχι το $\frac{1}{3}$) ίσως οδηγούσαν σε καλύτερα μαθησιακά αποτελέσματα.

<u>Δραστηριότητα 2:</u>
Ο νονός του Γιώργου τού έκανε δώρο για το Πάσχα μια μεγάλη σοκολάτα αντί για σοκολατένιο αυγό. Μέχρι σήμερα ο Γιώργος έχει φάει τη μισή σοκολάτα και του έχει μείνει η σοκολάτα που φαίνεται παρακάτω. Μπορείς να σχεδιάσεις ολόκληρη τη σοκολάτα;



<u>Επεισόδιο 2:</u>

(…)

Ερευνήτρια: Μπορείς να μου σχεδιάσεις ολόκληρη τη σοκολάτα;
Μαθήτρια: (Η μαθήτρια σχεδιάζει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και μέσα σε αυτό φέρνει 5 κάθετες γραμμές και 2 οριζόντιες, οπότε δημιουργούνται 6 στήλες και 3 γραμμές, συνολικά δηλαδή 18 κομματάκια.)
Ερευνήτρια: Τώρα τι έχεις φτιάξει;
Μαθήτρια: (Η μαθήτρια μετρά τα κομμάτια ανα στήλες.) 18 κομμάτια.
Ερευνήτρια: Πώς θα πρέπει να τη ζωγραφίσεις τη σοκολάτα ώστε να είναι ολόκληρη;
Μαθήτρια: (Προεκτείνει κατά τρεις στήλες το παραλληλόγραμμό της από τη δεξιά μεριά.)
Ερευνήτρια: Τώρα είναι ολόκληρη η σοκολάτα;
Μαθήτρια: (Μετρά και πάλι τα κομμάτια ανά στήλες) Έχω βάλει 27 κομμάτια.
Ερευνήτρια: Πόσα σου λείπουν δηλαδή;
Μαθήτρια: Άλλα 3. (Προσθέτει άλλη μία στήλη στο παραλληλόγραμμό της από την αριστερή μεριά.)

(…)

Δραστηριότητα 3:

Τρεις φίλοι μοιράζονται δίκαια μια σοκολάτα και ο καθένας τρώει το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας. Αν η μερίδα που αντιστοιχεί σε κάθε φίλο είναι η παρακάτω σοκολάτα, μπορείς να σχεδιάσεις ολόκληρη τη σοκολάτα;

Απόσπασμα 3:

(…)

Μαθήτρια: (Η μαθήτρια φτιάχνει ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με 2 στήλες και 5 γραμμές. Στη συνέχεια στη δεξιά πλευρά του ορθογωνίου, φτιάχνει ένα ίδιο ορθογώνιο και το χωρίζει σε 10 κομμάτια και στην αριστερή πλευρά ζωγραφίζει επίσης ένα ακόμα ίδιο ορθογώνιο, το οποίο ύστερα το χωρίζει σε 10 μικρότερα κομμάτια)

Ερευνήτρια: Στο σχήμα σου έχεις κάποιες έντονες διαχωριστικές γραμμές. Τι χωρίζουν;

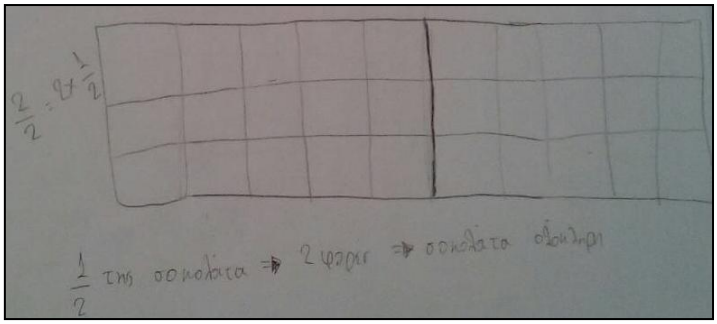
Μαθήτρια: Το $\frac{1}{3}$.

Ερευνήτρια: Και όλη η σοκολάτα τι είναι σε σχέση με αυτό;

Μαθήτρια: Είναι τα $\frac{3}{3}$.

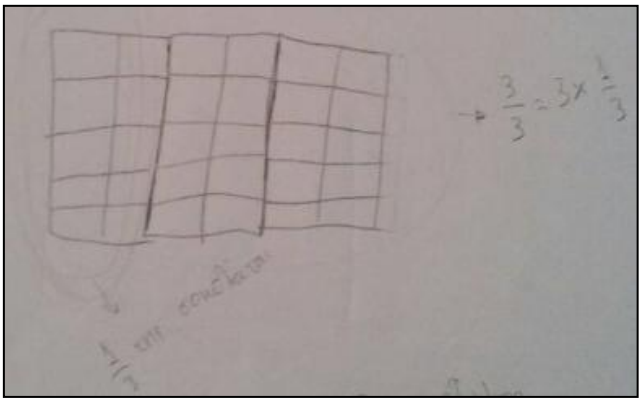
(…)

Η συγκριτική παρουσίαση των δύο παραπάνω αποσπασμάτων στοχεύει στην ανάδειξη μιας αλλαγής στον τρόπο που οργάνωνε η μαθήτρια τις γραφικές αναπαραστάσεις της κατά την επίλυση σχετικών δραστηριοτήτων. Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως η συγκεκριμένη αλλαγή δεν προέκυψε έπειτα από σχετική ερώτηση ή παρότρυνση της ερευνήτριας αλλά συνέβη αυθόρμητα από την ίδια τη μαθήτρια. Έτσι, σε μια αρχική δραστηριότητα για να σχεδιάσει ολόκληρη τη σοκολάτα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, η μαθήτρια πρόσθετε σταδιακά στο σχήμα της τριάδες μικρών κομματιών μέχρι να φτάσει στον επιθυμητό συνολικό αριθμό που είχε υπολογίσει. Με αυτόν τον τρόπο δράσης της, η μαθήτρια «έχανε» την πολλαπλασιαστική σχέση που είχε το όλο με τη σύνθετη κλασματική μονάδα.



Σχήμα 2: Προσπάθεια σχεδίασης ολόκληρης σοκολάτας με δεδομένο τη μισή σοκολάτα

Απεναντίας, σε μετέπειτα προβληματική κατάσταση η μαθήτρια επέλεξε έναν πιο αποδοτικό τρόπο σχηματοποίησης (επεισόδιο 3, Σχήμα 3), από τον οποίο διαφαίνεται πως έχει κάνει κάποια αρχικά βήματα στην αναγνώριση διαφορετικών επιπέδων μονάδων. Η κίνηση μάλιστα της μαθήτριας φτιάξει πρώτα τα μεγάλα κομμάτια και μετά να χωρίσει καθένα από αυτά σε 10 μικρότερα δείχνει πως προέβη σε ισοτεμαχισμό του αποτελέσματος ενός ισοτεμαχισμού. Ακόμη, ουσιαστική κρίνεται σε αυτό το σημείο η ερώτηση της ερευνήτριας: «Στο σχήμα σου έχεις κάποιες έντονες διαχωριστικές γραμμές. Τι χωρίζουν;», καθώς εστιάζει την προσοχή της μαθήτριας στον προσδιορισμό της σχέσης μεταξύ κλασματικής μονάδας και της σοκολάτας (σχέση μονάδων 2 επιπέδων).



Σχήμα 3: Προσπάθεια σχεδίασης ολόκληρης της σοκολάτας με δεδομένο το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας

Σημαντικός περιορισμός της στήριξης ήταν το γεγονός ότι δε δόθηκε αρκετή έμφαση σε αυτήν τη στρατηγική της μαθήτριας ώστε να παγιωθεί και να εξελιχθεί ως μια κοινή μαθηματική πρακτική που προήλθε από την ανάγκη της ίδιας για μια καλύτερη οργάνωση των σχεδίων της και θα τη βοηθούσε μακροπρόθεσμα να προσδιορίσει σαφέστερα τα τρία επίπεδα μονάδων που εμπλέκονται σε κάθε προβληματική δραστηριότητα αλλά και τις σχέσεις μεταξύ αυτών των επιπέδων.

Συνολικά στο τέλος της πρώτης συνάντησης, μπορούμε να πούμε πως η μαθήτρια είχε κάνει κάποια βήματα στην προσέγγιση της σχέσης που έχει μια κλασματική μονάδα με το όλο, όπως φαίνεται μέσα από μεμονωμένες προσπάθειές της για ποιοτική αναδιοργάνωση των σχημάτων της. Παρ' όλα αυτά, η σύγχυση μεταξύ των διαφορετικών επιπέδων μονάδων συνέχιζε να υπάρχει, αφού καθόλη τη συνάντηση η μαθήτρια εξακολουθούσε να εμφανίζει συγκεκριμένες επίμονες δυσκολίες, οι οποίες την εμπόδιζαν να κατασκευάσει σε αρχικό επίπεδο ένα συνεκτικό σχήμα για τη σχέση μεταξύ μονάδων δύο επιπέδων (ολόκληρη σοκολάτα – σύνθετη κλασματική μονάδα).

4.2 Δεύτερη συνάντηση

Ευρύτερος στόχος αυτής της δεύτερης συνάντησης ήταν η μαθήτρια να μπορεί να εντοπίζει μια σύνθετη κλασματική μονάδα $\frac{1}{\nu}$ ενός όλου ισοτεμαχισμένου σε πολλαπλάσιο αριθμό κομματιών του ν. Να μπορεί να διακρίνει για παράδειγμα ότι το $\frac{1}{3}$ μιας σοκολάτας με 6 κομμάτια είναι υποτριπλάσιο από ολόκληρη τη σοκολάτα και επομένως περιλαμβάνει 2 από τα 6 κομμάτια. Η επίτευξη ενός τέτοιου στόχου απαιτούσε σε ένα πρώτο στάδιο την αξιοποίηση και σταθεροποίηση της ιδέας που συζητήθηκε στην προηγούμενη συνάντηση για τη σχέση των κλασματικών μονάδων με το όλο (ν φορές επανάληψης μιας κλασματικής μονάδας $\frac{1}{\nu}$ δίνουν το όλο) ενώ σε επόμενο στάδιο προχωρούσε ένα βήμα πιο πέρα, καθώς ζητούσε από τη μαθήτρια να εντοπίσει τον αριθμό μικρότερων κομματιών τα οποία περιείχε η κάθε σύνθετη μονάδα.

Για τη στήριξη αυτής της μαθησιακής πορείας δόθηκε μια σειρά δραστηριοτήτων με την εξής λογική: «*Αν μια σοκολάτα έχει μ κομμάτια και κάθε μέρα ένα παιδί τρώει το* $\frac{1}{\nu}$ *αυτής, σε πόσες ημέρες θα τελειώσει η σοκολάτα και πόσα κομμάτια θα τρώει κάθε μέρα;*». Με το συγκεκριμένο πλαίσιο προβλημάτων έμφαση δόθηκε και στα τρία επίπεδα μονάδων που εμπλέκονταν. Η ερώτηση: «σε πόσες ημέρες θα τελειώσει η σοκολάτα;» εστίαζε την προσοχή της μαθήτριας σε επίπεδο των μεγαλύτερων κομματιών που περιλαμβάνει και στη σχέση που έχουν με το όλο, ενώ η ερώτηση: «πόσα κομματάκια θα τρώει κάθε μέρα;» μετατοπίζει το ενδιαφέρον σε μικρότερες μονάδες κατώτερου επιπέδου, δηλαδή στα κομματάκια από τα οποία αποτελούνται οι σύνθετες κλασματικές μονάδες. Αυτή η σαφής και ρεαλιστική διατύπωση των προβληματικών καταστάσεων στη δεύτερη συνάντηση συνιστά ένα δυνατό σημείο της στήριξης της μαθήτριας και μια ουσιαστική προσπάθεια βελτίωσης των αδυναμιών της πρώτης συνάντησης ως προς το πλαίσιο των δραστηριοτήτων.

Ακόμη, οι δραστηριότητες της συνάντησης αυτής ήταν έτσι δομημένες ώστε να μη δίνονται έτοιμα σχήματα μαζί με τις εκφωνήσεις, όπως γινόταν στην πρώτη συνάντηση, ούτε και να ζητείται απευθείας από τη μαθήτρια να σχεδιάσει. Υπήρξε λοιπόν μια σταδιακή ώθηση της μαθήτριας να δίνει απαντήσεις οι οποίες στηρίζονται στη νοητικοποίηση κάποιων λειτουργιών και να αξιοποιεί τα σχήματά της ως μέσα επικοινωνίας αυτών των σκέψεών της.

Πριν την εμπλοκή της μαθήτριας στις προβληματικές καταστάσεις, πραγματοποιήθηκε μια συζήτηση – πρόδρομος των δραστηριοτήτων. Η συζήτηση αυτή θεωρείται πληρέστερη και ουσιαστικότερη από την αρχική συζήτηση της πρώτης συνάντησης, καθώς στην προκειμένη περίπτωση παρατηρήθηκε πιο ενεργή εμπλοκή της μαθήτριας σε αυτήν και μεγαλύτερη αναφορά στην καθημερινή εμπειρία της: «εγώ τρώω μεγάλες σοκολάτες με φράουλα που έχουν 12 κομμάτια» ή «έχω δει και σοκολάτες με 15 κομμάτια».

Στη συνέχεια, η συζήτηση οδήγησε ομαλά στις δραστηριότητες της συνάντησης. Όλες οι δραστηριότητες είχαν ως κεντρική προβληματική τον εντοπισμό του αριθμού των ημερών στις οποίες θα τελείωνε μια σοκολάτα και τα κομματάκια που θα καταναλώνονταν καθημερινά, όταν ο ήρωας του προβλήματος τρώει το $\frac{1}{6}$ της σοκολάτας κάθε μέρα. Αυτό που διαφοροποιεί τις προβληματικές καταστάσεις είναι ο συνολικός αριθμός κομματιών που έχει η σοκολάτα, 6 στην πρώτη περίπτωση, 12 και 18 στις δύο άλλες αντίστοιχα. Θετικό σημείο της στήριξης συνιστά το ότι οι συγκεκριμένοι αριθμοί δε δόθηκαν έτοιμοι στη μαθήτρια αλλά προέκυψαν από τη συζήτησή της με την ερευνήτρια, γεγονός που αναδεικνύει την αξία της εισαγωγικής συζήτησης. Ακόμη, η ενασχόληση και η δράση της μαθήτριας πάνω σε αυτές τις πολλαπλές εκδοχές μιας προβληματικής κατάστασης που αναφέρεται στην ίδια σύνθετη κλασματική μονάδα (σε όλες τις εκδοχές καθημερινά καταναλώνεται το $\frac{1}{6}$ της σοκολάτας) θεωρείται αποτελεσματική βοήθεια προς τη μαθήτρια η οποία την οδήγησε σε σημαντικά βήματα προς τη συνειδητοποίηση της σταθερότητας της πολλαπλασιαστικής σχέσης που συνδέει ολόκληρη τη σοκολάτα με το $\frac{1}{6}$ αυτής. Η πρόοδος προς αυτήν την κατεύθυνση διαφαίνεται και στο παρακάτω σύντομο επεισόδιο.

Δραστηριότητα 4:

Η μαμά της Κατερίνας της αγόρασε μία μεγάλη σοκολάτα. και της δίνει κάθε μέρα το $\frac{1}{6}$. Αν η σοκολάτα έχει 12 κομμάτια, σε πόσες ημέρες θα τελειώσει τη σοκολάτα και πόσα κομματάκια θα τρώει κάθε μέρα;

Επεισόδιο 4:

(…)

Ερευνήτρια: Όταν η σοκολάτα είχε 6 κομμάτια και έτρωγε το $\frac{1}{6}$ κάθε μέρα, σε πόσες ημέρες είπαμε πως τελείωσε η σοκολάτα;
Μαθήτρια: Σε 6.
Ερευνήτρια: Και τώρα σε αυτήν τη σοκολάτα (εννοεί με τα 12 κομμάτια), σε πόσες ημέρες θα την φάει;
Μαθήτρια: Σε 6 μέρες.
Ερευνήτρια: Πάλι σε 6 ημέρες; Δεν έχει σημασία δηλαδή πόσα κομματάκια έχει η σοκολάτα, όταν τρώει το $\frac{1}{6}$, την τρώει …
Μαθήτρια: Πάντα σε 6 ημέρες.

(…)

Παρ' όλο που η μαθήτρια έκανε όπως φαίνεται βήματα προς τη σημαντική οικοδόμηση που περιγράφεται, παρατηρήθηκε πολλές φορές στον τρόπο δράσης και σκέψης της γύρω από τις δραστηριότητες παλινδρόμηση σε προηγούμενες δυσκολίες της, όπως η ιδέα ότι μια κλασματική μονάδα $\frac{1}{\nu}$ περιλαμβάνει μόνο ένα από τα ν κομμάτια. Έτσι, σε σχετική ερώτηση της ερευνήτριας για το αν θα μπορούσε το $\frac{1}{6}$ των 18 κομματιών να περιέχει 2 μικρότερα κομμάτια από τα 18, η μαθήτρια απαντά: «όχι, γιατί πρέπει να είναι μόνο ένα κομμάτι».

Η εμφάνιση τέτοιων δυσκολιών πραγματοποιήθηκε σε μεγαλύτερο ποσοστό στην τελευταία εκ των τριών εκδοχών της κύριας προβληματικής κατάστασης, όπου η σοκολάτα είχε 18 κομμάτια. Το παρακάτω επιλεγμένο επεισόδιο αφορά στον τρόπο με τον οποίο λειτούργησε η στήριξη που δόθηκε ώστε η μαθήτρια να εντοπίσει το $\frac{1}{6}$ των 18 κομματιών και να προσεγγίσει μια σημαντική μαθηματική ιδέα για τις σύνθετες κλασματικές μονάδες, όπως αυτή εκφράζεται από την ίδια στο τέλος του αποσπάσματος αλλά και στο κατά πόσο αυτή η ιδέα της μαθήτριας αντανακλά μια σταθερή οικοδόμηση και τροποποίηση προηγούμενων δυσκολιών ή όχι.

<u>Δραστηριότητα 5:</u>
Αν η σοκολάτα που αγόρασε η μαμά της Κατερίνας έχει 18 κομμάτια και της δίνει κάθε μέρα το $\frac{1}{6}$ αυτής, σε πόσες ημέρες η Κατερίνα θα τελειώσει τη σοκολάτα και πόσα κομματάκια θα τρώει κάθε μέρα;

Η μαθήτρια, με τη βοήθεια της ερευνήτριας στις προηγούμενες δραστηριότητες, οδηγείται στο συμπέρασμα ότι η Κατερίνα θα τελειώσει τη σοκολάτα σε 6 ημέρες, αφού καθημερινά τρώει το $\frac{1}{6}$. Αυτό που τη δυσκόλευε ήταν ο εντοπισμός των μικρότερων κομματιών που περιέχονται σε κάθε $\frac{1}{6}$ της σοκολάτας. Γι' αυτόν το λόγο η ερευνήτρια προέτρεψε τη μαθήτρια να κάνει εικασίες σχετικά με τα κομμάτια που τρώει κάθε ημέρα. Η μαθήτρια κάνει εικασίες και στη συνέχεια προσπαθεί να αναγνωρίσει τι μέρος της σοκολάτας είναι τα κομμάτια που είπε επαναλαμβάνοντάς τα ώστε να φτιάξει από αυτά ολόκληρη τη σοκολάτα. Μετά από συζήτηση ερευνήτρια και μαθήτρια έχουν καταλήξει στα εξής:

- Η Κατερίνα δε μπορεί να τρώει 1 κομμάτι την ημέρα, γιατί έτσι η σοκολάτα δε θα τελειώσει σε 6 ημέρες.
- Η Κατερίνα δε μπορεί να τρώει 2 κομμάτια την ημέρα, γιατί έτσι η σοκολάτα δε θα τελειώσει σε 6 ημέρες.
- Η Κατερίνα δε μπορεί να τρώει 9 κομμάτια την ημέρα, γιατί τα 9 κομμάτια είναι το μισό της σοκολάτας και όχι το $\frac{1}{6}$.

Επεισόδιο 5:

(…)

Ερευνήτρια: Μπορεί να τρώει κάθε μέρα κάτι ενδιάμεσο ανάμεσα σε 2 και 9 κομματάκια; Αν τρώει 6 κομματάκια την ημέρα, θες να μου δείξεις στο σχήμα τι τρώει;
Μαθήτρια: (η μαθήτρια τοποθετεί την πρώτη εξάδα κομματιών σε έναν κύκλο)
Ερευνήτρια: Πολύ ωραία! Την πρώτη ημέρα τρώει αυτό, τη δεύτερη;
Μαθήτρια: (συνεχίζει να τοποθετεί κάθε έξι κομμάτια σε έναν κύκλο, με αποτέλεσμα να δημιουργηθούν 3 μεγάλοι κύκλοι στη σοκολάτα)
Ερευνήτρια: Δηλαδή κάθε ημέρα τι μέρος της σοκολάτας τρώει;
(Η μαθήτρια μπερδεύεται, οπότε η ερευνήτρια για να στηρίξει και να οργανώσει τη σκέψη της εστιάζει την προσοχή της στα μεγάλα κομμάτια – κύκλους που έχουν δημιουργηθεί στο σχήμα)
Μαθήτρια: Το $\frac{1}{3}$.
Ερευνήτρια: Και σε πόσες ημέρες πιστεύεις θα την τελειώσει τη σοκολάτα;
Μαθήτρια: 3
Ερευνήτρια: Οπότε θέλουμε να διαρκέσει περισσότερες ημέρες, διπλάσιες ημέρες. Τι πρέπει να τρώει λοιπόν, πιο πολύ ή πιο λίγο; Ποια είναι η γνώμη σου;
Μαθήτρια: Περισσότερα.

(Η μαθήτρια μπερδεύεται με την ερώτηση οπότε η ερευνήτρια την επαναλαμβάνει εστιάζοντας την προσοχή της στο σχήμα)
Μαθήτρια: Λιγότερα.
Ερευνήτρια: Πόσα λες να τρώει; Πόσα λιγότερα;
Μαθήτρια: …
Ερευνήτρια: Να βάλουμε τα μισά;
Μαθήτρια: (Η μαθήτρια σχεδιάζει ένα Χ ανά 3 κομμάτια στο σχήμα της, ομαδοποιώντας τα σε τριάδες)
Ερευνήτρια: Σε πόσες ημέρες (εννοεί θα της τελειώσει τώρα η σοκολάτα);
Μαθήτρια: Σε 6.
Ερευνήτρια: Είναι το $\frac{1}{6}$ αυτό που τρώει κάθε μέρα;
Μαθήτρια: Ναι.
Ερευνήτρια: Γιατί; Εξήγησέ το μου.
Μαθήτρια: Γιατί εδώ την πρώτη μέρα (δείχνει με το μολύβι της το πρώτο μεγάλο κομμάτι που αποτελείται από 3 μικρότερα) είναι 1 κομμάτι όλο μαζί.
Ερευνήτρια: Και πόσα μεγάλα κομμάτια βγαίνουν όλα μαζί;
Μαθήτρια: 6.

(…)

Θετικό σημείο της παραπάνω στήριξης της ερευνήτριας αποτελεί το γεγονός ότι οδήγησε τη μαθήτρια στην ενοποίηση μικρότερων κομματιών και την αναγνώριση ότι αυτά μαζί μπορεί να αποτελέσουν μια σύνθετη μονάδα όπως φαίνεται από την εξήγηση που δίνει η μαθήτρια: «είναι ένα κομμάτι όλα μαζί (εννοεί τα 3 μικρότερα)» αλλά και από το παρακάτω σχήμα της (Σχήμα 4) . Μια τέτοια παρατήρηση από τη μαθήτρια αναδεικνύει ότι έχουν γίνει βήματα στη σκέψη της προς την οικοδόμηση ενός πιο λειτουργικού σχήματος για τις σύνθετες κλασματικές μονάδες.

Σχήμα 4: Ομαδοποίηση των κομματιών ανα 3 διαγράφοντας με Χ κάθε τριάδα κομματιών, ώστε να προσδιοριστεί το $\frac{1}{6}$ της σοκολάτας με 18 κομμάτια

Παρ' όλα αυτά, χρειάζεται να αναφερθεί πως η παραπάνω στήριξη παρουσιάζει αρκετές αδυναμίες. Σε ένα πρώτο στάδιο, η ερευνήτρια εμφανίζεται καθοδηγητική σε βαθμό περιοριστικό για την μαθήτρια, καθώς η ίδια είναι αυτή που κάνει εικασίες κατά κύριο λόγο για τον διαφορετικό αριθμό των κομματιών που θα μπορούσε να περιέχει το $\frac{1}{6}$: «αν τρώει 6 κομματάκια την ημέρα», «να βάλουμε τα μισά».

Σημαντικός επίσης περιορισμός είναι το ότι δε δόθηκε αρκετή έμφαση στον προβληματισμό που προέκυψε κατά τη συζήτηση στο σημείο που έχει βρεθεί πως τρώγοντας 6 κομματάκια την ημέρα, η σοκολάτα τελειώνει σε 3 ημέρες: «Οπότε θέλουμε να διαρκέσει περισσότερες ημέρες, διπλάσιες ημέρες. Τι πρέπει να τρώει λοιπόν (καθημερινά), πιο πολύ ή πιο λίγο;». Η μαθήτρια βρέθηκε σε μια σύγχυση όπως αποκαλύπτει η απάντησή της, ενώ από την άλλη πλευρά παρατηρήθηκε μια αδυναμία της ερευνήτριας να στηρίξει αποτελεσματικά αυτήν τη δυσκολία κατανόησης που προέκυψε. Η συγκεκριμένη σύγκριση μεταξύ των δύο καταστάσεων (όταν η σοκολάτα τελειώνει σε 6 ημέρες και όταν τελειώνει σε 3) θα μπορούσε να γίνει αντικείμενο εκτενέστερης συζήτησης, να συνδεθεί πιο ουσιαστικά με την καθημερινή εμπειρία της μαθήτριας (κάνω «οικονομία» στα κομματάκια σοκολάτας για να μου κρατήσει περισσότερες ημέρες) και τελικά να δώσει χώρο και χρόνο στη συνειδητοποίηση της αντίστροφης σχέσης που συνδέει τις ημέρες στις οποίες τελειώνει η σοκολάτα και τα κομματάκια τα οποία καταναλώνονται καθημερινά.

Συνολικά, στη συγκεκριμένη συνάντηση η μαθήτρια μπόρεσε να προσεγγίσει και να εκφράσει σημαντικές μαθηματικές ιδέες και να προβεί σε σημαντικές δραστηριότητες, όπως είναι η ενοποίηση μικρότερων κομματιών και η θεώρησή τους ως μία μονάδα. Όμως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι σε εκείνο το σημείο η μαθήτρια με τις δικές της δυνάμεις είχε οικοδομήσει μια συνεκτική κατανόηση που αφορά στη σχέση των κλασματικών μονάδων με το όλο (σχέση μονάδων δύο επιπέδων) πόσο μάλλον σε πιο ανεβασμένο στάδιο στη συσχέτιση του όλου, των κλασματικών μονάδων και των μικρότερων κομματιών από τα οποία αποτελούνται (σχέσεις μονάδων τριών επιπέδων).

4.3 Τρίτη συνάντηση

Στόχος αυτής της τελευταίας συνάντησης ήταν η μαθήτρια να εξελίξει τις ιδέες τις οποίες προσέγγισε στις προηγούμενες συναντήσεις ώστε να κατασκευάσει ένα συνεκτικό γνωστικό σχήμα για τις σύνθετες κλασματικές μονάδες. Η κατασκευή ενός τέτοιου σχήματος θα επέτρεπε στη μαθήτρια να συσχετίζει μια σύνθετη κλασματική μονάδα με το όλο αλλά και να την εκφράζει με ένα ισοδύναμο γνήσιο κλάσμα, συσχετίζοντας τα μικρότερα κομμάτια που περιλαμβάνει με τα συνολικά κομμάτια του όλου. Βασική προϋπόθεση για να προβεί η μαθήτρια στις παραπάνω λειτουργίες ήταν να μπορεί να διακρίνει 3 μονάδες διαφορετικών επίπεδων και να τις συσχετίζει μεταξύ τους. Προς αυτήν την κατεύθυνση είχαν γίνει βήματα στις προηγούμενες συναντήσεις , όπως είδαμε, αλλά δε θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε πως η μαθήτρια ήταν πλέον σε θέση να λειτουργεί αυτόνομα και χωρίς την παροχή στήριξης από την ερευνήτρια/δασκάλα.

Η κεντρική λογική των δραστηριοτήτων σε αυτήν τη συνάντηση παρέμεινε ίδια με την προηγούμενη (αν μια σοκολάτα έχει μ κομμάτια και κάποιος τρώει το $\frac{1}{\nu}$ της σοκολάτας την ημέρα, σε πόσες ημέρες θα τελειώσει η σοκολάτα και πόσα κομμάτια την ημέρα θα καταναλωθούν), καθώς θεωρήθηκε πως εξυπηρετούσε αποτελεσματικά τον παραπάνω σκοπό. Λαμβάνοντας υπόψη την αρχική δυσκολία της μαθήτριας – αφόρμηση για τον δεύτερο κύκλο συναντήσεων, η οποία αφορούσε την αδυναμία εντοπισμού του ¼ των 8 κομματιών σε πλαίσιο δίκαιης μοιρασιάς, θεωρήσαμε καλό σε αυτήν την συνάντηση να εμπλέξουμε τη μαθήτρια στην ίδια προβληματική κατάσταση αλλά σε διαφορετικό πλαίσιο. Πιο συγκεκριμένα, η αρχική δραστηριότητα αυτής της συνάντησης ζητούσε από τη μαθήτρια να βρει το ¼ του 8 όχι σε ένα πλαίσιο δίκαιης μοιρασιάς αλλά με βάση τη λογική που περιγράφηκε παραπάνω. Αυτή η κίνηση αποσκοπούσε στη διερεύνηση του βαθμού και του τρόπου που η μαθήτρια είχε ή δεν είχε τροποποιήσει τα αρχικά γνωστικά της σχήματα κατά τη διάρκεια των επισκέψεών μας.

Και σε αυτήν τη συνάντηση δε δίνονταν έτοιμα τα σχήματα στη μαθήτρια και ενθαρρύνθηκε να σκέφτεται πρώτα το πρόβλημα και έπειτα να εξηγεί σχεδιάζοντας, αν αυτή το χρειάζεται.

Η μαθήτρια, προσπαθώντας να δώσει λύσεις στο γνώριμο πλέον πλαίσιο των δραστηριοτήτων, εξέφρασε ιδέες, από τις οποίες φάνηκε πως δεν είχε τροποποιήσει κύριες δυσκολίες που παρουσίαζε κατά τη διάρκεια των προηγούμενων συναντήσεων:

- το $\frac{1}{\nu}$ είναι πάντα το 1 από τα ν ίσα κομμάτια

- το $\frac{1}{\nu}$ περιέχει πάντα ν μικρότερα κομμάτια
- το $\frac{1}{\nu}$ που περιέχει μ μικρότερα κομμάτια, πρέπει να επαναληφθεί μ φορές για να ανακατασκευάσει το όλο.

Τα δύο θεματικά επεισόδια που παρουσιάζονται στη συνέχεια αναδεικνύουν το πλαίσιο εμφάνισης αυτών των δυσκολιών της μαθήτριας και γίνονται αντικείμενο ανάλυσης και συζήτησης ως προς τους λόγους επιμονής ορισμένων προηγούμενων ιδεών της, τον βαθμό εξέλιξής τους μέσα στις τρεις συναντήσεις μας και τον ρόλο που είχε η στήριξή μας στη διαμόρφωση της πορείας μάθησής της.

Δραστηριότητα 6:
Ο μπαμπάς του Γιάννη αγόρασε μια σοκολάτα με 8 κομματάκια. Συμφώνησαν να τρώει κάθε μέρα το $\frac{1}{4}$ της σοκολάτας. Σε πόσες ημέρες θα έχει φάει ολόκληρη τη σοκολάτα και πόσα κομματάκια θα τρώει την ημέρα;

Επεισόδιο 6:

(…)

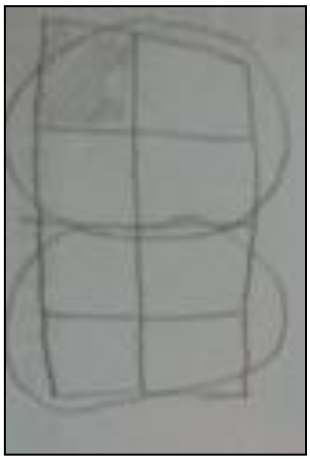
Ερευνήτρια: Όταν τρώει το ¼ της σοκολάτας, μπορείς να σκεφτείς πόσες μέρες θα κάνει; (εννοεί για να φάει όλη τη σοκολάτα)
Μαθήτρια: (Η μαθήτρια στο σχήμα της σοκολάτας που έχει ζωγραφίσει με τα 8 κομμάτια, οργανωμένα σε 2 στήλες και 4 γραμμές, κυκλώνει τα κομμάτια ανά 4, σχηματίζοντας έτσι δύο μεγάλους κύκλους. Στη συνέχεια με το μολύβι της γραμμοσκιάζει το ένα κομμάτι από τα 4 που βρίσκονται στον πρώτο κύκλο.) Το ¼ είναι εδώ.
Ερευνήτρια: Το ¼ ποιανού είναι αυτό;
Μαθήτρια: Του πρώτου κομματιού.
Ερευνήτρια: Του πρώτου. Του μισού δηλαδή. Εγώ όμως δε θέλω του μισού. Αλλά θέλω το ¼ από όλη τη σοκολάτα.
Μαθήτρια: (Ξαναφτιάχνει όλη τη σοκολάτα και κυκλώνει και πάλι ένα κομμάτι από τα 8 στη δεύτερη στήλη.) Αυτό.
Ερευνήτρια: Αν τρώει το ¼ κάθε μέρα, σε πόσες ημέρες θα έχει φάει ολόκληρη τη σοκολάτα;
Μαθήτρια: Σε 8 ημέρες.
Ερευνήτρια: Κι αν τρώει το $\frac{1}{8}$ πάλι είπες ότι θα κάνει 8 μέρες. Κι αν τρώει το ¼ πάλι 8 μέρες θα κάνει;
Μαθήτρια: 4 ημέρες.

Στη συνέχεια η μαθήτρια με παρότρυνση της ερευνήτριας επαναλαμβάνει το μικρό κομμάτι που θεωρούσε ότι είναι το ¼ της σοκολάτας και διαπιστώνει πως τρώγοντας τόσο κάθε μέρα, η σοκολάτα τελειώνει σε 8 και όχι 4 ημέρες. Έπειτα, μόνη της εντοπίζει σωστά το

¼ της σοκολάτας και το εκφράζει με δύο διαφορετικούς τρόπους, μετά από σχετική ερώτηση της ερευνήτριας.

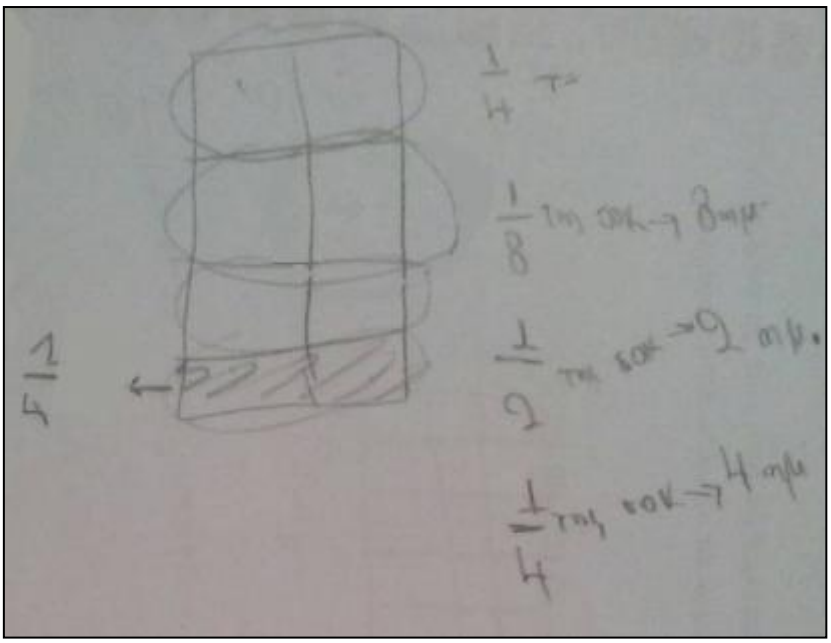
(…)

Στο παραπάνω απόσπασμα γίνεται φανερή η επίμονη τάση της μαθήτριας να συνδέει την κλασματική μονάδα ¼ με το 1 από τα 4. Μάλιστα η ίδια χώρισε τη σοκολάτα σε δύο μέρη των 4 κομματιών, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα (Σχήμα 5), ώστε η απάντησή της «1 από τα 4» να έχει νόημα για εκείνη.



Σχήμα 5: Προσδιορισμός του ¼ της σοκολάτας μέσω του χωρισμού της σε δύο ίσα τμήματα και της επιλογής του 1 από τα 4 κομμάτια του πρώτου τμήματος

Η στήριξη της ερευνήτριας σε αυτό το επεισόδιο κρίνεται ουσιαστική, καθώς βοήθησε αποτελεσματικά τη μαθήτρια να διαπιστώσει μια λογική ασυνέχεια στον τρόπο απάντησής της και να τροποποιήσει τη λύση της (Σχήμα 6). Καταρχάς, το ερώτημα της ερευνήτριας: «Αν τρώει το $\frac{1}{8}$ πάλι είπες ότι θα κάνει 8 μέρες. Κι αν τρώει το ¼ πάλι 8 μέρες θα κάνει;» ήταν καίριο, καθώς βοήθησε τη μαθήτρια να διαπιστώσει μια λογική ασυνέχεια στις ιδέες της. Επιπλέον, η παρότρυνση της να ελέγξει την ορθότητα της ιδέας της στην πράξη με την επανάληψη 4 φορές του $\frac{1}{8}$ και τη συνειδητοποίηση ότι με αυτόν τον τρόπο δε θα μπορούσε να οδηγηθεί σε ανακατασκευή ολόκληρης της σοκολάτας, οδήγησαν τη μαθήτρια σε κατάσταση γνωστικής σύγκρουσης αφού η ιδέα της φάνηκε πως δεν ήταν λειτουργική και σε ανάγκη για επεξεργασία εκ νέου του προβλήματος.



Σχήμα 6: Επαναπροσδιορισμός του ¼ της σοκολάτας με τα 8 κομμάτια

Παρατηρείται βέβαια σε αυτήν τη συνάντηση πως παρ' όλο που η μαθήτρια αρχικά παρουσίασε ξανά τις ίδιες δυσκολίες και ιδέες για τις κλασματικές μονάδες, εμφανίστηκε πιο ανοικτή στην αλλαγή της απάντησής της με το που αντιλήφθηκε πως η λύση που είχε δώσει ήταν μη λειτουργική. Αντίθετα, στο τέλος του πρώτου κύκλου προσπαθώντας να εντοπίσει το ¼ των 8 κομματιών, δεν μπόρεσε ούτε με τη στήριξη της ερευνήτριας να τροποποιήσει την απάντησή της και επέμεινε στην αρχική, λανθασμένη λύση της.

<u>Δραστηριότητα 7:</u>
Ο Κώστας πήρε από το περίπτερο μια τετράγωνη σοκολάτα με 16 κομματάκια. Αποφάσισε να τρώει το $\frac{1}{8}$ της σοκολάτας κάθε μέρα. Σε πόσες μέρες θα φάει ολόκληρη τη σοκολάτα;

<u>Επεισόδιο 7:</u>

(…)

Ερευνήτρια: Αν τρώει κάθε μέρα το $\frac{1}{8}$, για να τη φάει ολόκληρη πόσες ημέρες θέλει;
Μαθήτρια: 2.
Ερευνήτρια: Πώς το κατάλαβες ότι θέλει 2 ημέρες;
Μαθήτρια: Από το $\frac{1}{8}$.
Ερευνήτρια: Κι αν τρώει το ½ την ημέρα;
Μαθήτρια: Θα κάνει 2 ημέρες.
Ερευνήτρια: Πάλι 2 ημέρες;

(…)

Στη συνέχεια, η μαθήτρια δουλεύει στο σχήμα που απεικονίζει την τετράγωνη σοκολάτα με τα 16 κομμάτια. Εντοπίζει με ευκολία το μισό. Όταν της ζητείται να εντοπίσει το $\frac{1}{8}$ της σοκολάτας, δυσκολεύεται. Γι' αυτό και η ερευνήτρια τη ρωτά πόσα όγδοα υπάρχουν σε μία σοκολάτα. Η μαθήτρια απαντά σωστά και εντοπίζει το $\frac{1}{8}$ στο σχήμα.

Από τη μελέτη του παραπάνω επεισοδίου αναδύονται και πάλι κάποιες παλαιότερες δυσκολίες της μαθήτριας. Η απάντηση «2» που δίνει και η οποία αναφέρεται στις ημέρες στις οποίες θα τελειώσει η σοκολάτα, μας δείχνει πως επιμένει να θεωρεί ότι το $\frac{1}{8}$ περιλαμβάνει 8 κομμάτια και γι' αυτό το λόγο θα χρειαστεί 2 μόνο ημέρες για να φάει ολόκληρη τη σοκολάτα.

Η στήριξη της ερευνήτριας κινήθηκε πάλι στα ίδια επίπεδα όπως στο προηγούμενο απόσπασμα, καθώς είχε ως κεντρικό στόχο να προκαλέσει γνωστική σύγκρουση με προηγούμενες ιδέες της μαθήτριας.

Συνολικά σε αυτήν την τελευταία συνάντηση, η μαθήτρια εξακολουθεί να εμφανίζει κάποιες συγκεκριμένες δυσκολίες κατανόησης στις κλασματικές μονάδες, τις οποίες όμως τροποποιεί προς τη σωστή κατεύθυνση όταν της παρέχεται στήριξη από την ερευνήτρια.

Θεωρείται πως αυτή η τάση της μαθήτριας να επιμένει στις ίδιες ιδέες για τις σύνθετες κλασματικές μονάδες πηγάζει από τη δυσκολία που εμφανίζει στο να αντιλαμβάνεται, να διαχωρίζει νοητικά και να συσχετίζει μονάδες τριών επιπέδων. Η μαθήτρια μέχρι και στην τελευταία συνάντηση δεν μπορούσε στα προβλήματα με τις σοκολάτες να συλλάβει αυτόνομα και χωρίς την ανάγκη στήριξης ότι στην περίπτωση σύνθετων κλασματικών μονάδων υπήρχαν μονάδες σε τρία επίπεδα

- σε ένα πρώτο επίπεδο όπου μονάδα ήταν ολόκληρη η σοκολάτα,
- σε ένα δεύτερο επίπεδο όπου μονάδα αποτελούσε η σύνθετη κλασματική μονάδα σοκολάτας και
- σε ένα τρίτο επίπεδο όπου μονάδα αποτελούσε το καθένα από τα μικρότερα κομμάτια που περιελάμβανε αυτή η σύνθετη κλασματική μονάδα

Το γεγονός αυτό θεωρείται ως ο κύριος λόγος της τάσης της μαθήτριας είτε να συγχέει τον αριθμό των κομματιών που περιλαμβάνει μια σύνθετη κλασματική μονάδα με τον αριθμό των φορών που χρειάζονται για να κατασκευαστεί το όλο, είτε να ταυτίζει την κλασματική μονάδα πάντα με «το 1 από τα πολλά».

Από την ανάλυση των παραπάνω επεισοδίων, διαφαίνεται πως το πλαίσιο και η λογική των δραστηριοτήτων οι οποίες εστίαζαν κατά κύριο λόγο στην επανάληψη ενός

σύνθετου μέρους για την κατασκευή του όλου, οι ερωτήσεις της ερευνήτριας και ο τρόπος με τον οποίον αξιοποιήθηκαν τα σχήματα της μαθήτριας δεν έδωσαν τόσες ευκαιρίες ώστε να αναδειχθούν τα τρία επίπεδα μονάδων που εμπλέκονταν σε κάθε προβληματική κατάσταση. Πιο συγκεκριμένα, η διάκριση, η συσχέτιση ακόμα και η κατασκευή διαφορετικών επιπέδων μονάδων από την ίδια την μαθήτρια δεν είχαν κεντρική θέση στον σχεδιασμό των επισκέψεων. Η στήριξη, λοιπόν, που παρείχαμε στη μαθήτρια και η οποία εστίαζε πιο πολύ σε λειτουργίες επανάληψης παρά διαδοχικών ισοτεμαχισμών από τους οποίους θα προέκυπταν διαφορετικά επίπεδα μονάδων, δεν οδήγησε τη μαθήτρια στη διαμόρφωση ενός συνεκτικού σχήματος για αυτά και κατ' επέκταση και για τις σύνθετες κλασματικές μονάδες.

Κεφάλαιο 5: Αναστοχασμός και προτάσεις

Η παρούσα εργασία ήταν ένα πρώτο βήμα στην αναζήτηση τρόπων αξιοποιήσιμων στη διδασκαλία μακροπρόθεσμα της ισοδυναμίας κλασμάτων με τους οποίους ένας δάσκαλος θα μπορούσε να στηρίξει αποτελεσματικά τη μάθηση ενός παιδιού για τις σύνθετες κλασματικές μονάδες. Αντικείμενο συζήτησης και ανάλυσης αποτέλεσε ο δεύτερος κύκλος ενός πειράματος σχεδιασμού με μια μαθήτρια Δ΄ Δημοτικού, ο οποίος προέκυψε από την ανάγκη για παροχή στοχευμένης στήριξής της σε μια συγκεκριμένη εννοιολογική δυσκολία που εμφάνισε στον πρώτο κύκλο συναντήσεων κατά την προσπάθεια να προσεγγίσει τα ισοδύναμα κλάσματα σε καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς. Η δυσκολία αυτή, όπως έχουμε αναφέρει, συνδεόταν με την επίμονη τάση της να ερμηνεύει το κλάσμα ως μέρος όλου και αφορούσε στη σύλληψη των κλασματικών μονάδων μόνο ως «ένα από τα πολλά».

Για την αντιμετώπιση αυτής της δυσκολίας, επιχειρήθηκε από την ερευνητική ομάδα στο δεύτερο κύκλο συναντήσεων αλλαγή στη θεματική των δραστηριοτήτων και στο γενικότερο πλαίσιο στήριξης. Έτσι, κρίθηκε προτιμότερη μια μετατόπιση της έμφασης από τις λειτουργίες ισοτεμαχισμού σε πλαίσιο καταστάσεων δίκαιης μοιρασιάς σε λειτουργίες επανάληψης σε πλαίσιο δραστηριοτήτων κατασκευής του όλου από ένα σύνθετο μέρος.

Κοιτάζοντας με αναστοχαστική διάθεση τις συναντήσεις του δεύτερου κύκλου και μελετώντας κριτικά τα αρχικά και τα τελικά σημεία μάθησης της μαθήτριας αλλά και τη μαθησιακή πορεία μεταξύ αυτών σε συνάρτηση πάντα με το πλαίσιο που ορίζεται από τα μέσα στήριξής της, γίνεται φανερό πως παρά τα βήματα που έκανε, δεν κατασκεύασε ένα συνεκτικό σχήμα για τις σύνθετες κλασματικές μονάδες. Το γεγονός ότι μέχρι και στην τελευταία συνάντηση η μαθήτρια εμφάνιζε ακόμα κάποιες από τις αρχικές της ιδέες για τις κλασματικές μονάδες, οδηγεί στο συμπέρασμα πως παρά τη στήριξη που της παρείχαμε δεν τροποποίησε στο βαθμό που θέλαμε το προηγούμενο περιοριστικό γνωστικό σχήμα της για τις σύνθετες κλασματικές μονάδες. Όπως φάνηκε και από την ανάλυση στοιχείων, η μαθήτρια δεν μπορούσε να αντιμετωπίσει τις αρχικές της δυσκολίες αποτελεσματικά και σταθερά, καθώς δεν ήταν σε θέση με τις δικές της δυνάμεις να διακρίνει και να συσχετίσει τις μονάδες τριών διαφορετικών επιπέδων που εμπλέκονται με έναν καθοριστικό τρόπο στην κατανόηση των σύνθετων κλασματικών μονάδων και σε επόμενο στάδιο της ισοδυναμίας των κλασμάτων. Η δυσκολία της να εντοπίζει και να συσχετίζει πολλαπλασιαστικά τρία επίπεδα μονάδων θα μπορούσε να ερμηνευτεί και να συνδεθεί με

την παρατηρούμενη αδυναμία της σε προβλήματα πολλαπλασιασμού με φυσικούς αριθμούς στην αρχή του πρώτου κύκλου συναντήσεων. Λαμβάνοντας υπόψη τη θέση πολλών ερευνητών (Thompson & Saldanha, 2003; Steffe, 2004; Hackenberg & Tillema, 2009) ότι οι γνώσεις από τους φυσικούς αριθμούς δε λειτουργούν παρεμποδιστικά αλλά αντίθετα ενισχυτικά για την οικοδόμηση των κλασματικών αριθμών, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε πως η κατασκευή ενός συνεκτικού γνωστικού σχήματος για τον πολλαπλασιασμό φυσικών αριθμών θα στήριζε τη μαθήτρια στην αποτελεσματική σύλληψη του κλάσματος ως πολλαπλασιαστικής σχέσης.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις όμως σε καμία περίπτωση δεν οδηγούν στο συμπέρασμα πως όλη η προσπάθεια που έγινε από την ερευνητική ομάδα και τη μαθήτρια ήταν μάταιη. Δεν πρέπει να παραγνωρίζεται το γεγονός ότι ο στόχος ενός πειράματος σχεδιασμού δεν είναι να δειχθεί ότι ο αρχικός σχεδιασμός είναι ορθός αλλά να επιχειρηθεί μια βελτίωση του σχεδιασμού και να κατανοηθούν οι λόγοι για τους οποίους αυτός λειτούργησε ή όχι (Cobb, 2000; Cobb et al., 2003; Stephan, Bowers & Cobb, 2003).

Σε ένα τέτοιο πλαίσιο αναστοχασμού που διαπνέεται από τον παραπάνω σκοπό, είναι σημαντικό να αναφερθεί πως ο σχεδιασμός του δεύτερου κύκλου, ο οποίος απομακρύνθηκε από τη λογική των προβλημάτων δίκαιης μοιρασιάς του πρώτου κύκλου και εστίασε σε λειτουργίες επανάληψης, δεν είχε τα αποτελέσματα που θέλαμε. Οι δραστηριότητες που δόθηκαν στη μαθήτρια δεν προσέφεραν αρκετές ευκαιρίες για να αναδειχθεί ως σημαντικό μαθηματικό θέμα προς συζήτηση η ύπαρξη και η συσχέτιση διαφορετικών επιπέδων μονάδων όπου το πρώτο περιλαμβάνει το δεύτερο και το δεύτερο με τη σειρά του το τρίτο. Από την αρχή μέχρι και το τέλος του δεύτερου κύκλου οι σύνθετες κλασματικές μονάδες, όπως τις αντιμετώπιζε η ερευνητική ομάδα, δεν ήταν προσβάσιμες για τη μαθήτρια σε ικανοποιητικό βαθμό.

Μετά από την εκ των υστέρων μελέτη των επισκέψεων και των αναλύσεών τους, θα μπορούσε να ειπωθεί πως η αξιοποίηση δραστηριοτήτων δίκαιης μοιρασιάς και στον δεύτερο κύκλο θα ήταν πιθανό να εξυπηρετούσε καλύτερα τον στόχο αυτών των συναντήσεων. Οι δραστηριότητες διαίρεσης μερισμού θα μπορούσαν να σχεδιαστούν με τέτοιον τρόπο ώστε να αναδυθούν οι σύνθετες κλασματικές μονάδες μέσα από την εμπλοκή της μαθήτριας σε διαδικασίες ισοτεμαχισμού των αποτελεσμάτων ενός προηγούμενου ισοτεμαχισμού. Αυτή η λειτουργία των διαδοχικών ισοτεμαχισμών βρίσκεται στον πυρήνα κατανόησης μονάδων διαφορετικών επιπέδων και των μεταξύ τους σχέσεων (Steffe, 1991; Steffe, 2004; Hackenberg & Tillema,2009).

Θεωρώντας λοιπόν για τους παραπάνω λόγους πως ο ισοτεμαχισμός των αποτελεσμάτων ενός ισοτεμαχισμού θα ήταν ουσιαστικός για την κατασκευή ενός λειτουργικού σχήματος για τις κλασματικές μονάδες και κατ' επέκταση για την προσέγγιση ισοδύναμων κλασμάτων με έναν ώριμο και ρεαλιστικό για τα παιδιά τρόπο, προτείνεται μια εναλλακτική προσέγγιση για τον δεύτερο κύκλο συναντήσεων. Πιο συγκεκριμένα, θεωρείται προτιμότερος ο σχεδιασμός δραστηριοτήτων που εμπλέκουν καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς και προκαλούν την ανάγκη για επαναλαμβανόμενους ισοτεμαχισμούς αγαθών. Μάλιστα, οι δραστηριότητες πιθανόν να παρέχουν περισσότερες και πιο πλούσιες ευκαιρίες για συζήτηση και προβληματισμό αν είναι έτσι σχεδιασμένες ώστε αυτές οι λειτουργίες του ισοτεμαχισμού ενός ισοτεμαχισμού να μην «επιβάλλονται» στο παιδί με έναν καθοδηγητικό και περιοριστικό τρόπο από το πλαίσιο του προβλήματος αλλά να βρίσκονται στο παρασκήνιο της προβληματικής κατάστασης.

Αντιμετωπίζοντας μια δραστηριότητα που προϋποθέτει για τη λύση της τον ισοτεμαχισμό του αποτελέσματος ενός προηγούμενου ισοτεμαχισμού χωρίς όμως να έχει κάποιον φανερό σκοπό ισοτεμαχισμού, ένας μαθητής ωθείται να αναγνωρίσει με τις δικές του δυνάμεις την ανάγκη για επαναληπτικούς ισοτεμαχισμούς και να προβεί σε αυτούς. Μέσα από τον προβληματισμό σε καταστάσεις όπως: «Στο πάρτυ της Μαρίας, η τούρτα μοιράστηκε σε 15 ίσα κομμάτια ώστε να φάνε όλα τα άτομα που ήταν εκεί. Η Άννα, μια φίλη της Μαρίας, έφτασε αργοπορημένη οπότε η Μαρία αποφάσισε να μοιραστεί δίκαια το κομμάτι της με αυτήν. Τι μέρος της τούρτας έφαγε η Μαρία;» ο ισοτεμαχισμός ενός ισοτεμαχισμού και τα τρία επίπεδα μονάδων εμφανίζονται σε μια καθημερινή και ρεαλιστική κατάσταση για το παιδί, οπότε μπορούν να αποκτήσουν ένα συνεκτικό νόημα για αυτό.

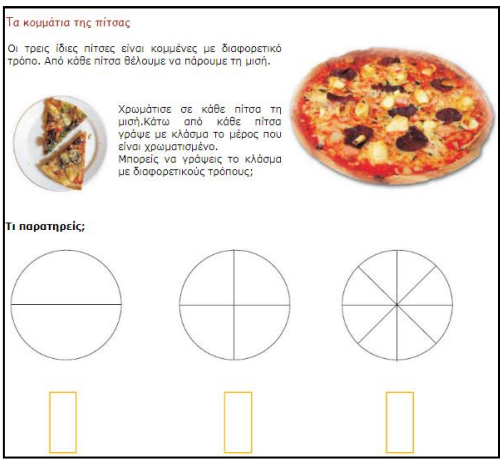
Τέλος, η προετοιμασία, η διεξαγωγή και η αναστοχαστική ανάλυση του συγκεκριμένου πειράματος σχεδιασμού, προσωπικά ως ένα από τα μέλη της ερευνητικής ομάδας, με βοήθησε να κατανοήσω στην πράξη την πολυπλοκότητα που χαρακτηρίζει την προσπάθεια ενός δασκάλου ή ερευνητή να στηρίξει ένα παιδί προκειμένου να προσεγγίσει με τις δικές του δυνάμεις μια σημαντική μαθηματική ιδέα, όπως αυτή της ισοδυναμίας των κλασμάτων και των σύνθετων κλασματικών μονάδων. Η πολυπλοκότητα αυτή αντικατοπτρίζεται στις διαρκείς προσπάθειές μας να κατασκευάσουμε έναν χάρτη για τον τρόπο σκέψης και δράσης της μαθήτριας, αναιρέσιμο και πάντα υποκείμενο σε διορθώσεις, ώστε να προβούμε σε σχεδιασμό κάθε φορά ενός κατάλληλου πλαισίου στήριξης της μαθήτριας για να κατασκευάσει όλο και πιο εξελιγμένα και λειτουργικά γνωστικά σχήματα μέσα από τροποποιήσεις προηγούμενων.

Δεδομένης αυτής της πολυπλοκότητας της προσέγγισης της ισοδυναμίας των κλασμάτων, γεννιέται το εύλογο ερώτημα σχετικά με τον τρόπο που αυτή η έννοια προσεγγίζεται στα βιβλία του Δημοτικού σχολείου. Μια κριτική μελέτη των σχολικών βιβλίων θα μπορούσε να δώσει απάντηση στον παραπάνω προβληματισμό.

Κριτική μελέτη παρουσίασης της ισοδυναμίας κλασμάτων στα βιβλία του Δημοτικού

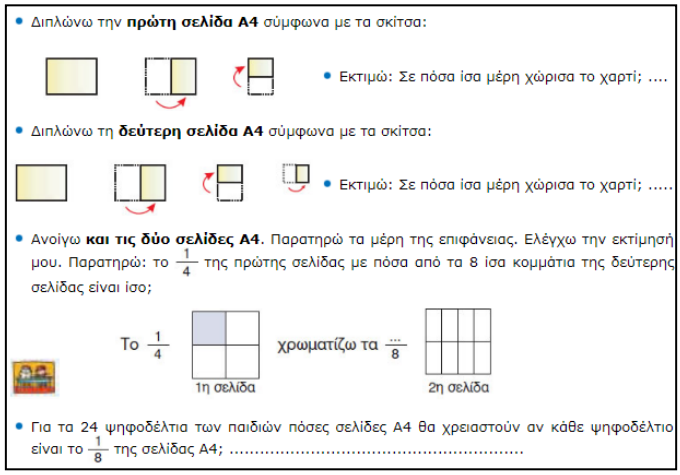
Η έννοια των κλασμάτων και της ισοδυναμίας κλασμάτων εμφανίζεται στη Γ΄ τάξη του Δημοτικού. Έτσι, στις πρώτες δύο τάξεις, το παιδί εμπεδώνει τον προσθετικό τρόπο σκέψης, χωρίς να έχει τόσες ευκαιρίες για να έρθει σε επαφή με τον πολλαπλασιαστικό ή αναλογικό τρόπο σκέψης. Εξασκείται στο να βρίσκει το μισό και το διπλάσιο ποσοτήτων και προσεγγίζει τον πολλαπλασιασμό ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.

Στην τρίτη τάξη Δημοτικού, ο μαθητής εισάγεται πρώτα στις κλασματικές μονάδες, οι οποίες του παρουσιάζονται οπτικά με τη βοήθεια ισοτεμαχισμένων σχημάτων, στα οποία είναι ζωγραφισμένο το ένα από τα κομμάτια τους. Με αυτόν τον τρόπο, από πολύ νωρίς οι κλασματικές μονάδες εμφανίζονται στενά συνδεδεμένες με την έκφραση «ένα από τα πολλά ίσα κομμάτια», των οποίων ο συνολικός αριθμός υποδεικνύεται από τον παρονομαστή της κλασματικής μονάδας. Στη συνέχεια, οι απλοί κλασματικοί αριθμοί παρουσιάζονται ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση κλασματικών μονάδων. Στο τέλος του κεφαλαίου των κλασμάτων σε αυτήν την τάξη επιχειρείται για πρώτη φορά η προσέγγιση των ισοδύναμων κλασμάτων. Μέσα από την επίδειξη του ίσου μεγέθους δύο μερών σε σχήματα με διαφορετικούς ισοτεμαχισμούς που μάλιστα δίνονται έτοιμοι στον μαθητή (Εικόνα 2) προσεγγίζονται τα ισοδύναμα κλάσματα ως κλάσματα που αντιστοιχούν στο ίδιο μέρος όλου.



Εικόνα 2: Βιβλίο Μαθητή Γ΄ Δημοτικού – Εισαγωγική δραστηριότητα για την ισοδυναμία κλασμάτων

Η επόμενη οργανωμένη προσπάθεια προσέγγισης της ισοδυναμίας κλασμάτων γίνεται στην πέμπτη τάξη του Δημοτικού. Σε αυτήν την τάξη σε συνέχεια της προηγούμενης προσπάθειας, οι κλασματικές μονάδες παρουσιάζονται σε πιο αφηρημένο επίπεδο με τον κανόνα «κλασματική μονάδα είναι ένας αριθμός που μας δείχνει σε πόσα ίσα μέρη έχει χωριστεί μια ποσότητα». Ένας τέτοιος κανόνας όμως εστιάζει μόνο σε επίπεδο ίσων κομματιών που έχει χωριστεί το όλο και δε βοηθά την κατασκευή μιας συνεκτικής αντίληψης για την κλασματική μονάδα μέσα από τη συνειδητοποίηση της πολλαπλασιαστικής σχέσης που τη συνδέει με το όλο. Στο ακριβώς επόμενο μάθημα, το οποίο αναφέρεται στα ισοδύναμα κλάσματα, επιχειρείται μια προσέγγισή τους μέσα από διαδοχικούς ισοτεμαχισμούς – διαδοχικές διπλώσεις ενός χαρτιού Α4 (Εικόνα 3).

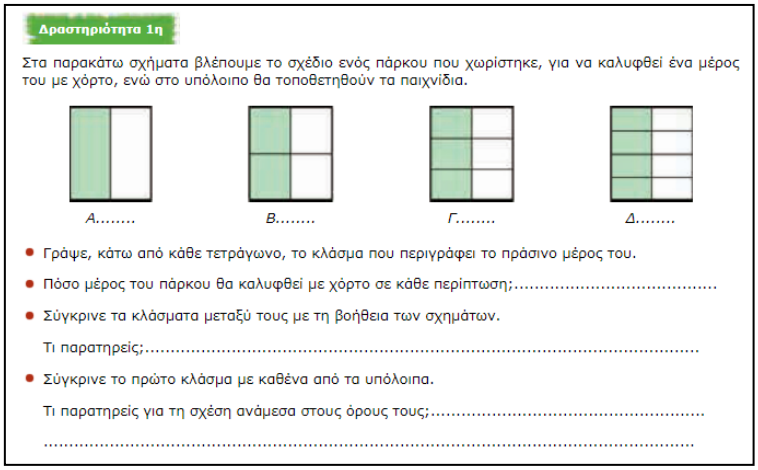


Εικόνα 3: Βιβλίο Μαθητή Ε΄ Δημοτικού – Δραστηριότητα διαδοχικών, έτοιμων ισοτεμαχισμών για την παρουσίαση ισοδύναμων κλασμάτων

Αν και όπως έχει ήδη αναφερθεί η λειτουργία αυτή του ισοτεμαχισμού του αποτελέσματος ενός ισοτεμαχισμού έχει κεντρική θέση στην ουσιαστική κατανόηση των ισοδύναμων κλασμάτων, στο σχολικό βιβλίο η συγκεκριμένη λειτουργία παρουσιάζεται έτοιμη στον μαθητή, χωρίς κάποιο ρεαλιστικό, καθημερινό πλαίσιο μέσα στο οποίο ο μαθητής θα μπορούσε να αναγνωρίσει την ανάγκη να προβεί σε αυτήν, δίνοντας έτσι νόημα στη διαδικασία παραγωγής ισοδύναμων κλασμάτων. Στο τέλος αυτού του μαθήματος παρουσιάζεται ο ορισμός των ισοδύναμων κλασμάτων, σύμφωνα με τον οποίο αποτελούν κλάσματα με διαφορετικούς όρους που εκφράζουν την ίδια ποσότητα, αλλά και ο έτοιμος, γνωστός κανόνας για να προκύψουν ισοδύναμα κλάσματα με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση των δύο όρων του κλάσματος με τον ίδιο αριθμό. Με τον τρόπο που παρουσιάζονται, χωρίς να έχει προηγηθεί προσπάθεια εμπλοκής του μαθητή σε

κατάλληλες δραστηριότητες που του αφήνουν χώρο για να δοκιμάσει τις ιδέες του, πρόκειται για κανόνες χωρίς ουσιαστικό νόημα για αυτόν. Του παρέχουν μία γρήγορη μέθοδο για παραγωγή σωστών απαντήσεων ως προς το πώς μπορεί να βρει ισοδύναμα κλάσματα, χωρίς όμως να συνειδητοποιεί τι σημαίνει αυτό και τι εφαρμογές έχει σε καθημερινά πλαίσια.

Στην έκτη τάξη γίνεται μια επανάληψη των προαναφερθέντων κανόνων για τα ισοδύναμα κλάσματα. Βασικός τρόπος στήριξης του μαθητή για την κατανόησή τους αποτελεί η επίδειξη του ίσου μεγέθους των κλασματικών μερών μέσω της σύγκρισης των ορθογώνιων περιοχών του όλου στις οποίες αντιστοιχούν (Εικόνα 4).



Εικόνα 4: Βιβλίο Μαθητή Στ΄ Δημοτικού –Εισαγωγική δραστηριότητα για επίδειξη ισοδύναμων κλασμάτων

Συνολικά η προσέγγιση της ισοδυναμίας στα σχολικά βιβλία του Δημοτικού διαπνέεται από την τάση για απομνημόνευση έτοιμων κανόνων και μεθόδων σε μια προσπάθεια προσέγγισης απευθείας της συμβατικής και αφηρημένης έννοιας της ισοδυναμίας των κλασμάτων και όχι σταδιακής ανέλιξης από τις συγκεκριμένες ιδέες των παιδιών στις πιο αφηρημένες πτυχές της ισοδυναμίας των κλασμάτων.

Η παραπάνω διαπίστωση μπορεί να εξηγήσει και τους λόγους διαμόρφωσης της αρνητικής στάσης που έχει μεγάλο μερίδιο μαθητών για τα ισοδύναμα κλάσματα, καθώς παρατηρείται πως πολλοί από αυτούς μετά από χρόνια εξάσκησης ισχυρίζονται πως δε μπορούν να θυμηθούν «τι» πρέπει να κάνουν με τα ισοδύναμα κλάσματα ή όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν «ποια βήματα» χρειάζεται να ακολουθήσουν.

Κεφάλαιο 6: Βιβλιογραφικές αναφορές

Cobb, P. & Steffe, L. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education*. 14(2), 83-94.

Cobb, P. (2000). *The importance of a situated view of learning to the design of research and instruction*. Office of Educational Research and Improvement. 45 – 74.

Cobb, P., & Bowers, J. (1999). Cognitive and situated learning perspectives in theory and practice. *Educational Researcher*, *28*(2), 4-15.

Cobb, P., & Whitenack, J. W. (1996). A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. *Educational studies in mathematics*, *30*(3), 213-228.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in mathematics education*, 258-277.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A. & Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher*. 32(9), 9-13.

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. In *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 157-176). Springer, Dordrecht.

Cobb, P., Zhao, Q., & Visnovska, J. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Éducation et didactique*, *2*(1), 105-124.

Empson, S. B. (2001). Equal sharing and the roots of fraction equivalence. *Teaching Children Mathematics*, *7*(7), 421 – 425.

Gravemeijer, K. (2015). Design research as a research method in education. *AAV Pereira, C. Delgado, CG da Silva, F. Botelho, J. Pinto, J. Duarte, M. Rodrigues, & MP Alves (Coords.), Entre a Teoria, os Dados e o Conhecimento (III): Investigar práticas em contexto*, 5-19.

Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 1-18.

Izsák, A., Jacobson, E., de Araujo, Z., & Orrill, C. H. (2012). Measuring mathematical knowledge for teaching fractions with drawn quantities. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(4), 391-427.

Korthagen, F. A. (2010). Situated learning theory and the pedagogy of teacher education: Towards an integrative view of teacher behavior and teacher learning. *Teaching and teacher education*, *26*(1), 98-106.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. Routledge.

Lochhead, J. (1991). Making math mean. In *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 75-87). Springer, Dordrecht.

McCloskey, A. V., & Norton, A. H. (2009). Using Steffe's Advanced Fraction Schemes. *Mathematics teaching in the middle school*, *15*(1), 44-50.

Naik, S., & Subramaniam, K. (2008). Integrating the measure and quotient interpretation of fractions. In *International group of the psychology of mathematics education: Proceedings of the Joint Meeting of PME* (Vol. 32, pp. 17-24).

Norton, A. H., & McCloskey, A. V. (2008). Modeling Students' Mathematics Using Steffe's Fraction Schemes. *Teaching Children Mathematics*, *15*(1), 48-54.

Olive, J., & Steffe, L. P. (2001). The construction of an iterative fractional scheme: The case of Joe. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(4), 413-437.

Schcolnik, M., Kol, S., & Abarbanel, J. (2016). Constructivism in theory and in practice. In *English teaching forum* (Vol. 44, No. 4, pp. 12-20). US Department of State. Bureau of Educational and Cultural Affairs, Office of English Language Programs, SA-5, 2200 C Street NW 4th Floor, Washington, DC 20037.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in mathematics education*, 114-145.

Steffe, L. P. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 177-194). Springer, Dordrecht.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical thinking and learning*, *6*(2), 129-162.

Steffe, L. P., & D'Ambrosio, B. S. (1995). Toward a working model of constructivist teaching: A reaction to Simon. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 146-159.

Steffe, L. P., & Gale, J. E. (Eds.). (1995). *Constructivism in education* (p. 159). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Steffe, L. P., & Olive, J. (1991). The problem of fractions in the elementary school. *The Arithmetic Teacher*, *38*(9), 22 – 24.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 267-306.

Stephan, M., Bowers, J., Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2003). *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. *Research companion to the principles and standards for school mathematics*, 95-113.

Van De Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια Εξελικτική Διαδικασία*. Επιμ. Τριανταφυλλίδης, Τ., Μτφρ Αλεξανδροπούλου, Α. Κομπορόζος, Β. Αθήνα : Τυπωθήτω

Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational studies in Mathematics*, *54*(1), 9-35.

Wong, M. (2013). Identifying fractions on a number line. *Australian Primary Mathematics Classroom*, *18*(3), 13.