

ΠΡΟΒΟΛΙΚΑ ΟΡΙΑ ΧΩΡΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ
ΣΤΙΣ ΠΟΛΛΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΙ
ΕΝΑ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ BANACH ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ
ΣΤΟΥΣ ΤΟΠΟΥΣ ΟΛΟΜΟΡΦΙΑΣ.

ΑΓΓΕΛΙΚΗ Κ. ΚΑΜΠΟΥΚΟΥ

Τμήμα Μαθηματικών
Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα 2018

Αντί προλόγου

Από τη θέση αυτή θα ήθελα να εκφράσω τις θερμότερες ευχαριστίες μου προς τον καθηγητή κ. Βασίλη Νεστορίδη για την υπόδειξη του θέματος και κυρίως για την ουσιαστική βοήθεια και υποστήριξη που πρόσφερε κατά τη συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Ευχαριστώ επίσης τον καθηγητή κ. Σοφοκλή Μερκουράκη τόσο για την τιμή που μου έκανε να συμμετάσχει στην Τριμελή Επιτροπή όσο και για βοήθεια που πρόσφερε στην κατανόηση των αναλυτικών χώρων και γενικότερα στο θέμα του τρίτου κεφαλαίου.

Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω τον επίκουρο καθηγητή κ. Παντελή Δοδό για τις χρήσιμες διευκρινήσεις πάνω στους χώρους με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο.

Τέλος, ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Τηλέμαχο Χατζηαφράτη για την τιμή που μου έκανε να συμμετάσχει στην Τριμελή Επιτροπή.

Περιεχόμενα

1		9
1.1	Όρια προβολικών συστημάτων τοπολογικών χώρων	9
1.2	Προβολικό όριο χώρων μιγαδικών συναρτήσεων	13
1.3	Παραδείγματα	19
1.3.1	Οι χώροι $A^p(\Omega)$ και $H_\infty^p(\Omega)$	19
1.3.2	Χώροι Bergman	20
1.3.3	Χώροι Hardy	21
1.3.4	Κλάση Nevanlinna	23
1.3.5	Χώροι BMOA	24
1.3.6	Ο χώρος Bloch.	26
1.3.7	Ο χώρος Dirichlet.	27
1.4	Αρμονικές συναρτήσεις	28
2		35
2.1	Επεκτάσιμες συναρτήσεις	35
2.2	Χωρία ολομορφίας	37
2.3	Το σύνολο των μη-επεκτάσιμων συναρτήσεων	39
3		47
3.1	Ιεραρχία συνόλων Borel	47
3.2	Συνέχεια ομομορφισμών μεταξύ τοπολογικών ομάδων	51
3.3	Αναλυτικοί χώροι	53
3.4	Χώροι με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο	54
3.4.1	Ορισμός	54
3.4.2	Υπόχωροι χώρου γινόμενου με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο	56
3.4.3	Υπόχωροι του $K^{\mathbb{N}}$ με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο	58
3.4.4	Δύο ακολουθίες υποσυνόλων του $C = 2^{\mathbb{N}}$	59
3.4.5	Υπόχωροι χώρων Banach με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο	61

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται δύο θέματα. Το πρώτο θέμα αποτελεί το πρώτο κεφάλαιο και συνδέεται με το προβολικό όριο χώρων ολομόρφων ή αρμονικών συναρτήσεων, ορισμένων σε μια ακολουθία $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ φραγμένων και ανοικτών υποσυνόλων ενός Ω ανοικτού και συνεκτικού υποσυνόλου του $\mathbb{C}^d$ τέτοια ώστε $\Omega_m \subset \overline{\Omega_m} \subset \Omega_{m+1}$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται ότι το προβολικό όριο τοπολογικών χώρων μιγαδικών συναρτήσεων, που ικανοποιούν κάποιες «καλές» ιδιότητες, όπως οι χώροι Bergman, οι χώροι Hardy, η κλάση της Nevanlinna, οι χώροι BMOA κ.α., είναι ομοιομορφικό και γραμμικά ισομορφικό με τον χώρο των ολομόρφων συναρτήσεων, εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιομορφικής σύγκλισης στα συμπαγή. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πρωτότυπο και υπάρχει στο ([18]). Στη συνέχεια, το αποτέλεσμα επεκτείνεται σε χώρους αρμονικών συναρτήσεων.

Το δεύτερο θέμα αφορά σε μη επεκτασιμότητα ολομόρφων συναρτήσεων ορισμένων σε τόπους στο $\mathbb{C}^d$. Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των μη-επεκτάσιμων ολομόρφων συναρτήσεων που ανήκουν σε κάποιες κλάσεις συναρτήσεων $\mathcal{F}$ είναι G_δ και πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{F}$ ([23]). Η απόδειξη γίνεται με την βοήθεια του θεωρήματος του Baire και το θεώρημα μιγαδικής ανάλυσης του Montel. Αυτό είναι το περιεχόμενο του δεύτερου κεφαλαίου.

Στο τρίτο κεφάλαιο, το οποίο είναι κομμάτι της Περιγραφικής Συνολοθεωρίας, βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα του δευτέρου κεφαλαίου δεν μπορεί να αποδειχθεί σε τόσο ισχυρή μορφή, με τη χρήση ενός θεωρήματος συναρτησιακής ανάλυσης του Banach, όπως γίνεται στο ([17]), όπου αποδεικνύεται ότι το σύνολο των μη-επεκτασιμων ολομόρφων συναρτήσεων είναι residual στο $\mathcal{F}$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Banach η συνεχής και γραμμική εικόνα ενός χώρου Fréchet είναι είτε όλο το σύνολο τιμών είτε 1ης κατηγορίας στο σύνολο τιμών, δηλαδή περιέχεται σε ένα σύνολο F_σ και λεπτό. Δεν μπορούμε όμως να αποδείξουμε ότι η εικόνα ενός χώρου Fréchet μέσω μίας συνεχούς, γραμμικής και όχι επί απεικόνισης είναι F_σ , καθώς μπορούμε να βρούμε συνεχή, γραμμική εικόνα χώρου Banach οσοδήποτε ψηλά στην ιεραρχία των συνόλων Borel ([25]). Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε υπάρχει στο ([7]).

Κεφάλαιο 1

Έστω Y ένας χώρος ολομόρφων συναρτήσεων ορισμένων σε ένα Ω ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$, $d = 1, 2, \dots$.

Παραδείγματα τέτοιων χώρων είναι ο χώρος $H(\Omega)$ των ολομόρφων συναρτήσεων στο Ω εφοδιασμένος με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή του Ω , οι χώροι $A^p(\Omega)$ και $H_\infty^p(\Omega)$, οι χώροι Bergman, οι χώροι Hardy κ.α..

Δεδομένου ότι το σύνολο Ω ικανοποιεί κάποιες καλές υποθέσεις, οι περισσότεροι από τους χώρους αυτούς, εφοδιασμένοι με τη συνήθη τους τοπολογία, περιέχουν τον χώρο $A^\infty(\Omega)$ και περιέχονται στον χώρο $H(\Omega)$:

$$A^\infty(\Omega) \subseteq Y \subseteq H(\Omega) .$$

Επιπλέον, οι εμφυτεύσεις

$$\iota_1: A^\infty(\Omega) \rightarrow Y, \iota_2: Y \rightarrow H(\Omega) \text{ με } \iota_1(f) = f \text{ και } \iota_2(w) = w$$

είναι συνεχείς. Συμβολίζουμε με $M(\Omega)$ το σύνολο αυτών των χώρων μιγαδικών συναρτήσεων στο Ω .

Έστω K_m μια εξαντλούσα οικογένεια συμπαγών υποσυνόλων του ανοικτού συνόλου $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ και $\Omega_m = K_m^\circ$. Έστω $X_m(\Omega_m)$ ένας τοπολογικός χώρος συναρτήσεων που ανήκει στο $M(\Omega_m)$. Θεωρούμε X το προβολικό όριο της οικογένειας $X_m(\Omega_m)$, $m = 1, 2, \dots$ όπου η $T_{m,n}: X_m(\Omega_m) \rightarrow X_n(\Omega_n)$, $n \leq m$ απεικονίζει την $f \in X_m(\Omega_m)$ στον περιορισμό της στο Ω_n , δηλαδή $f \rightarrow f|_{\Omega_n}$.

Στη συνέχεια θα δούμε ότι ο X είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος, ομοιομορφικός και γραμμικά ισομορφικός με τον χώρο Fréchet $H(\Omega)$ των ολομόρφων συναρτήσεων στο Ω , εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή του Ω , ανεξάρτητα από την επιλογή των τοπολογικών χώρων $X_m(\Omega_m)$ από το σύνολο $M(\Omega_m)$. Το αποτέλεσμα ισχύει ακόμα κι αν οι χώροι $X_m(\Omega_m)$ δεν είναι πλήρεις ή δεν είναι διανυσματικοί χώροι.

Το αντίστοιχο αποτέλεσμα θα δούμε ότι ισχύει και για το προβολικό όριο χώρων αρμονικών συναρτήσεων, που ικανοποιούν παρόμοιες ιδιότητες.

1.1 Όρια προβολικών συστημάτων τοπολογικών χώρων

Ορισμός 1.1.1. ([10]) Προβολικό (ή αντίστροφο) σύστημα τοπολογικών χώρων λέγεται μια οικογένεια

$$P = \{X_i, \pi_{i,j}, I\},$$

όπου το $(I, \leq)$ είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο, το X_i είναι τοπολογικός χώρος, για κάθε $i \in I$, και η $\pi_{i,j}: X_i \rightarrow X_j$ είναι μια συνεχής απεικόνιση, για κάθε $i, j \in I$ με $i \geq j$, τέτοια ώστε η $\pi_{i,i}$ να είναι η ταυτοτική απεικόνιση στο X_i και να ικανοποιεί τη σχέση $\pi_{j,k} \circ \pi_{i,j} = \pi_{i,k}$ για $i, j, k \in I$ με $i \geq j \geq k$.

Ορισμός 1.1.2. ([10]) Προβολικό (ή αντίστροφο) όριο ενός προβολικού συστήματος $P = \{X_i, \pi_{i,j}, I\}$ λέγεται το σύνολο

$$X = \{x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i : \pi_{i,j}(x_i) = x_j \text{ για κάθε } i, j \in I, i \geq j\}.$$

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε προβολικά συστήματα με μερικά διατεταγμένο σύνολο, το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

Η τοπολογία του προβολικού ορίου

Έστω $S = \{Y_m, T_{m,n}, \mathbb{N}\}$ ένα προβολικό σύστημα τοπολογικών χώρων και Y το προβολικό του όριο. Η τοπολογία $\mathcal{T}_Y$ του Y θεωρούμε ότι είναι η σχετική από τον χώρο γινόμενο $\prod_{m \in \mathbb{N}} Y_m$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με την καρτεσιανή τοπολογία.

Παρατήρηση 1.1.3. ([10]) Με τους παραπάνω συμβολισμούς και υποθέσεις, παρατηρούμε ότι ένα δίκτυο $g^i = (g_1^i, g_2^i, \dots) \in Y, i \in I$ συγχλίνει στο $g = (g_1, g_2, \dots) \in Y$ στην τοπολογία $\mathcal{T}_Y$ του Y αν και μόνο αν $g_k^i \rightarrow g_k$ στην τοπολογία $\mathcal{T}_k$ του Y_k για κάθε $k = 1, 2, \dots$.

Πρόταση 1.1.4. ([10]) Η οικογένεια

$$\{\pi_i|_Y^{-1}(U) : i \in \mathbb{N}, U \text{ ανοικτό στο } U_i\},$$

όπου $\pi_i: \prod_{i \in \mathbb{N}} Y_i \rightarrow Y_i$ η συνήθης προβολή, είναι βάση για την τοπολογία του Y .

Απόδειξη. Αν $\mathcal{T}$ η καρτεσιανή τοπολογία του $\prod_{i \in \mathbb{N}} Y_i$, τότε η οικογένεια των συνόλων της μορφής

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} G_i, G_i \in \mathcal{T}_i, \text{ με } \{i \in \mathbb{N} : G_i \neq Y_i\} \text{ πεπερασμένο}$$

είναι βάση για την $\mathcal{T}$. Για την σχετική τοπολογία στον Y ισχύει $\mathcal{T}_Y = \{G \cap U : G \in \mathcal{T}\}$.

Θεωρούμε $\pi_i|_Y: Y \rightarrow Y_i$ τον περιορισμό της συνήθους προβολής από τον $\prod Y_i$ στο Y_i . Θα δείξουμε ότι η οικογένεια

$$\begin{aligned} B &= \{\pi_i|_Y^{-1}(U_i) : U_i \text{ ανοικτό στον } Y_i, i \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{g \in Y : g_k \in U_k, U_k \text{ ανοικτό στον } Y_k\} \end{aligned}$$

είναι βάση για την $\mathcal{T}_Y$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε U_i ανοικτό στο Y_i , το σύνολο $\pi_i|_Y^{-1}(U_i)$ είναι ανοικτό στον Y , αφού για κάθε $i \in \mathbb{N}$ η $\pi_i|_Y: Y \rightarrow Y_i$ είναι συνεχής. Άρα

$$B \subseteq \mathcal{T}_Y.$$

Μένει να δείξουμε ότι για κάθε περιοχή U ενός $g = (g_k)_{k \in \mathbb{N}} \in Y$ υπάρχει $\pi_{i_0}|_Y^{-1}(U_{i_0}) \in B$ ώστε $g \in \pi_{i_0}|_Y^{-1}(U_{i_0}) \subset U$.

Αφού $U \in \mathcal{T}_Y$ υπάρχει $V \in \mathcal{T}$ ώστε $U = V \cap Y$. Αφού $g \in U$, έπεται $g \in V$, άρα υπάρχει βασικό σύνολο της $\mathcal{T}$ που περιέχει το g και περιέχεται στο V . Δηλαδή, υπάρχουν $i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}$ και U_{i_j} ανοικτά στα Y_{i_j} για $j = 1, \dots, k$ ώστε

$$g \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subseteq V.$$

Επιλέγουμε $i_0 = \max\{i_1, \dots, i_k\}$ και θέτουμε

$$U_{i_0} = \bigcap_{j=1}^k (T_{i_0, i_j})^{-1}(U_{i_j}).$$

Αφού η T_{i_0, i_j} είναι συνεχής για κάθε $j = 1, \dots, k$, έπεται ότι το σύνολο $(T_{i_0, i_j})^{-1}(U_{i_j})$ είναι ανοικτό στο Y_{i_0} . Άρα και η πεπερασμένη τομή τους U_{i_0} είναι ανοικτό σύνολο στο Y_{i_0} .

Αφού $g \in \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ έχουμε $g_{i_j} \in U_{i_j}$ για κάθε $j = 1, \dots, k$. Άρα

$$T_{i_0, i_j}(g_{i_0}) = g_{i_j} \in U_{i_j} \text{ για κάθε } j = 1, \dots, k.$$

Συνεπώς,

$$g_{i_0} \in (T_{i_0, i_j})^{-1}(U_{i_j}) \text{ για κάθε } j = 1, \dots, k.$$

Άρα

$$g_{i_0} \in \bigcap_{j=1}^k (T_{i_0, i_j})^{-1}(U_{i_j}) = U_{i_0} \Rightarrow g \in \pi_{i_0}|_Y^{-1}(U_{i_0})$$

και επιπλέον

$$\pi_{i_0}|_Y^{-1}(U_{i_0}) \subseteq \pi_{i_0}|_Y^{-1}((T_{i_0, i_j})^{-1}(U_{i_j})) \text{ , για κάθε } j = 1, \dots, k \Rightarrow$$

$$\pi_{i_0}|_Y^{-1}(U_{i_0}) \subseteq Y \cap \pi_{i_0}^{-1}(T_{i_0, i_j})^{-1}(U_{i_j}) \text{ , για κάθε } j = 1, \dots, k \Rightarrow$$

$$\pi_{i_0}|_Y^{-1}(U_{i_0}) \subseteq Y \cap \pi_{i_j}^{-1}(U_{i_j}) \text{ , για κάθε } j = 1, \dots, k \Rightarrow$$

$$\pi_{i_0}|_Y^{-1}(U_{i_0}) \subseteq Y \cap \pi_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \Rightarrow$$

$$\pi_{i_0}|_Y^{-1}(U_{i_0}) \subseteq Y \cap V \subseteq U$$

Δηλαδή, έχουμε $g \in \pi_{i_0}|_Y^{-1}(U_{i_0}) \subseteq U$ όπου $\pi_{i_0}|_Y^{-1}(U_{i_0}) \in B$.

Συνεπώς η B είναι βάση για την $\mathcal{T}_Y$.

□

Το προβολικό όριο χώρων Fréchet

Πρόταση 1.1.5. Το προβολικό όριο χώρων Fréchet είναι χώρος Fréchet.

Απόδειξη. Έστω $\{Y_n, T_{m,n}, \mathbb{N}\}$ ένα προβολικό σύστημα χώρων Fréchet.

Γνωρίζουμε ότι αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η σ_n είναι μια μετρική για την τοπολογία του Y_n με $\sigma_n(x, y) \leq 1$ για κάθε $x, y \in Y_n$, τότε ο $\prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ εφοδιασμένος με την καρτεσιανή τοπολογία είναι μετριοποιήσιμος με μετρική την

$$\sigma(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n(x, y)}{2^n}.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι ο $(\prod_{n=1}^{\infty} Y_n, \mathcal{T}_{\sigma})$ είναι χώρος Fréchet.

Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ο Y_n είναι χώρος Fréchet, άρα καθορίζεται από αριθμήσιμη, διαχωρίζουσα οικογένεια ημινορμών

$$\{r_{n,m} : m = 1, 2, \dots\}.$$

Οι ημινόρμες $r_{n,m}$ ορίζουν μετρική στον Y_n την

$$\sigma_n(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{r_{n,m}(x - y)}{1 + r_{n,m}(x - y)}.$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{r_{n,m}(x-y)}{1+r_{n,m}(x-y)} \leq 1$, οπότε

$$\sigma_n(x, y) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Βλέπουμε ότι η οικογένεια ημινορμών

$$\{\rho_{\ell} : \ell = \ell(n, m), n = 1, 2, \dots, m = 1, 2, \dots\}$$

με

$$\rho_{\ell}(g) = r_{n,m}(g_n), \text{ για κάθε } g = (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

είναι αριθμήσιμη και διαχωρίζουσα στον $\prod_{n=1}^{\infty} Y_n$.

Πράγματι, αν $\rho_{\ell}(g) = 0$ για κάθε $\ell = 1, 2, \dots$, τότε $r_{n,m}(g_n) = 0$ για κάθε $n, m = 1, 2, \dots$, άρα $g_n = 0$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$, δηλαδή $g = 0$.

Συνεπώς ο $\prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ είναι τοπικά κυρτός F-χώρος με μετρική την

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x - y)}{1 + \rho_k(x - y)}.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι ο $\prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Έστω $(x^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ μια ακολουθία Cauchy. Τότε για κάθε $k = 1, 2, \dots$ έχουμε ότι $x_n^k \in Y_n$ και η $(x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον Y_n . Αφού ο Y_n είναι πλήρης χώρος, υπάρχει $x_n^0 \in Y_n$ ώστε

$$\sigma_n(x_n^k, x_n^0) \rightarrow 0.$$

Θέτουμε $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots) \in \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$. Τότε έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_n(x_n^k, x_n^0) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} r_{n,m}(x_n^k - x_n^0) = 0, \forall n, m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \rho_l(x^k - x^0) = 0, \forall l \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x^k, x^0) = 0.$$

Άρα ο $\prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ είναι πλήρης ως προς την μετρική d . Παρατηρούμε όμως ότι οι μετρικές d, σ είναι ισοδύναμες αφού

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(x^k, x^0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_n(x_n^k, x_n^0) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma(x^k, x) = 0.$$

Άρα ο $\prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ με την καρτεσιανή τοπολογία είναι χώρος Fréchet.

Το προβολικό όριο Y εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία $\mathcal{T}_Y$ είναι προφανώς τοπικά κυρτός F- χώρος ως υπόχωρος του $\prod_{n=1}^{\infty} Y_n$.

Είναι επίσης κλειστός υπόχωρος του $(\prod_{n=1}^{\infty} Y_n, \mathcal{T})$.

Πράγματι, αν $(g^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον Y και $g \in \prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ ώστε $\lim_{k \rightarrow +\infty} d(g^k, g) = 0$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_n(g_n^k, g_n) = 0.$$

Δεδομένου ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$, η απεικόνιση $T_{m,n}: X_n \rightarrow X_m$ είναι συνεχής, έπεται ότι

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_m(T_{m,n}(g_n^k), T_{m,n}(g_n)) = 0.$$

Όμως, $T_{m,n}(g_n^k) = g_m^k$ και $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sigma_m(g_m^k, g_m) = 0$. Οπότε $T_{m,n}(g_n) = g_m$ για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \leq n$. Άρα $g \in Y$.

Κι αφού ο $\prod_{n=1}^{\infty} Y_n$ είναι πλήρης, έπεται ότι ο κλειστός υπόχωρός του, Y , είναι επίσης πλήρης.

Άρα ο $(Y, \mathcal{T}_Y)$ είναι χώρος Fréchet.

□

1.2 Προβολικό όριο χώρων μιγαδικών συναρτήσεων

Στη συνέχεια θεωρούμε G ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$, $d \geq 1$. Ωστόσο, οι χώροι που θα θεωρήσουμε μπορούν να οριστούν και για ένα μη φραγμένο, ανοικτό σύνολο G με κάποιες τροποποιήσεις στην συνήθη τοπολογία τους.

Συμβολίζουμε με $H(G)$ το σύνολο των ολομόρφων συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο G . Θεωρούμε τον $H(G)$ εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή του G . Ο χώρος αυτός καθορίζεται από τις ημινόρμες

$$\|f\|_m = \sup_{z \in K_m} |f(z)|, m = 1, 2, \dots$$

όπου K_m μια εξαντλούσα οικογένεια συμπαγών υποσυνόλων του G . Για παράδειγμα, για κάθε $m = 1, 2, \dots$ μπορούμε να θεωρήσουμε

$$K_m = \{z \in G: \|z\| \leq m \text{ και } \text{dist}(z, G^c) \geq \frac{1}{m}\}.$$

Τέλος, είναι εύκολο να δούμε ότι ο $H(G)$ εφοδιασμένος με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή είναι πλήρης χώρος. Άρα και χώρος Fréchet.

Συμβολίζουμε με $A^\infty(G)$ το σύνολο που αποτελείται από τις ορισμένες στο σύνολο G ολόμορφες συναρτήσεις των οποίων κάθε μικτή μερική παράγωγος επεκτείνεται συνεχώς στην κλειστότητα $\bar{G}$ του G .

Η συνήθης τοπολογία στον $A^\infty(G)$ ορίζεται από τις ημινόρμες

$$\sup_{z \in G} \left| \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_d} f}{\partial z_1^{a_1} \dots \partial z_d^{a_d}} \right|, \quad a_1 \dots a_d \in \{0, 1, \dots\}, \quad \text{όπου } z = (z_1, \dots, z_d).$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η οικογένεια των παραπάνω ημινόρμων ορίζει μία πλήρη μετρική d , αναλλοίωτη στις μεταφορές, και ο $A^\infty(G)$ γίνεται επίσης χώρος Fréchet.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $f_n, f \in A^\infty(G)$ με $d(f_n, f) \rightarrow 0$ τότε κάθε μικτή, μερική παράγωγος της ακολουθίας $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην αντίστοιχη μικτή, μερική παράγωγο της f .

Ορισμός 1.2.1. Έστω G ένα φραγμένο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$.

Συμβολίζουμε $M(G)$ το σύνολο όλων των τοπολογικών χώρων $X(G)$ τέτοιων ώστε

$$A^\infty(G) \subseteq X(G) \subseteq H(G)$$

και οι αντίστοιχες εμφυτεύσεις

$$\iota_1: A^\infty(G) \rightarrow X(G) \text{ με } \iota_1(f) = f \text{ και } \iota_2: X(G) \rightarrow H(G) \text{ με } \iota_2(g) = g$$

είναι συνεχείς.

Δηλαδή, αν ένα δίκτυο συναρτήσεων $f^i \in A^\infty(G), i \in I$ συγκλίνει σε μία $f \in A^\infty(G)$ στην τοπολογία του $A^\infty(G)$ τότε το (f^i) συγκλίνει στην f και στην τοπολογία του $X(G)$. Επίσης, αν ένα δίκτυο συναρτήσεων $f^i \in X(G), i \in I$ συγκλίνει σε μία $f \in X(G)$ στην τοπολογία του $X(G)$ τότε το f^i συγκλίνει στην f και στην τοπολογία του $H(G)$.

Παρατήρηση 1.2.2. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, παραδείγματα τέτοιων χώρων είναι οι χώροι $A^p(G)$ και $H_\infty^p(G)$, οι χώροι Bergman, οι χώροι Hardy, κάποιο υποσύνολο της κλάσης Nevanlinna, οι χώροι BMOA, VMOA, ο χώρος Dirichlet στον μοναδιαίο δίσκο κ.α.

Οι προηγούμενοι χώροι είναι παραδείγματα πλήρων χώρων. Ωστόσο, υπάρχουν χώροι που ανήκουν στην οικογένεια $M(G)$ αλλά δεν είναι πλήρεις.

Για παράδειγμα, θεωρούμε το σύνολο

$$Y = A^\infty(G)$$

εφοδιασμένο με την τοπολογία που επάγεται από τον $H(G)$. Δηλαδή, αν $f_n, f \in A^\infty(G)$ τότε η σύγκλιση $f_n \rightarrow f$ στην τοπολογία του νέου χώρου, είναι η σύγκλιση της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή. Τότε,

$$A^\infty(G) \subseteq Y \subseteq H(G)$$

και οι απεικονίσεις $\iota_1: A^\infty(G) \rightarrow Y$ με $\iota_1(f) = f$ και $\iota_2: Y \rightarrow H(G)$ με $\iota_2(g) = g$ είναι συνεχείς. Αλλά ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης για κάθε ανοικτό και φραγμένο G . Για

παράδειγμα, θεωρούμε ένα σύνολο G τέτοιο ώστε να υπάρχει $\zeta \in \partial G$ που προσεγγίζεται από μία ακολουθία $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\overline{G})^c$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η συνάρτηση $\frac{1}{z-w_n}$ ανήκει στον χώρο $A^\infty(G)$ κι άρα υπάρχει σταθερά C και συμπαγές K_m ώστε

$$\left| \frac{1}{\zeta - w_n} \right| \leq C \sup_{z \in K_m} \left| \frac{1}{z - w_n} \right|.$$

Όμως,

$$\sup_{z \in K_m} \left| \frac{1}{z - w_n} \right| = \frac{1}{\text{dist}(w_n, K_m)}.$$

Άρα,

$$+\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{\zeta - w_n} \right| \leq C \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{dist}(w_n, K_m)} = \frac{C}{\text{dist}(\zeta, K_m)} < +\infty,$$

το οποίο είναι άτοπο. Αυτή την ιδιότητα έχουν οι χώροι Καραθεωδωρή([6]), για τους οποίους ισχύει

$$(\overline{G})^0 = G.$$

Επίσης, αν το G είναι φραγμένο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$, τότε υπάρχει ακολουθία $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ώστε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Re} z_n = a,$$

όπου $a = \sup_{z \in G} \text{Re} z$. Η $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Θεωρούμε w το όριο της $(z_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Τότε

$$w \in \overline{G} \text{ αλλά } w \notin G.$$

Άρα $w \in \partial G$. Επίσης

$$\text{Re} w = a.$$

Έστω $P = w + x$, $x > 0$. Τότε

$$P \notin \overline{G},$$

αφού για κάθε $s \in \overline{G}$, υπάρχει $s_n \in G$ ώστε $s_n \rightarrow s$, οπότε $\text{Re} s_n \rightarrow \text{Re} s$ κι από τον ορισμό του a έπεται $\text{Re} s_n, \text{Re} s \leq a$. Όμως $\text{Re} P = a + x > a$. Τέλος, για $x \rightarrow 0^+$ έχουμε $P \rightarrow w$.

Είναι επίσης πιθανόν, ένας χώρος να ανήκει στην οικογένεια $M(G)$ αλλά να μην είναι καν διανυσματικός χώρος. Για παράδειγμα, θεωρούμε το σύνολο

$$Y = A^\infty(G) \cup \{f: G \rightarrow \mathbb{C} \text{ τέτοια ώστε } f \text{ ολόμορφη και } |f(z)| < 1, \text{ για κάθε } z \in G\}$$

εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στο G . Τότε,

$$A^\infty(G) \subseteq Y \subseteq H(G)$$

και οι αντίστοιχες εμφυτεύσεις είναι συνεχείς. Πράγματι, αν $f_n, f \in A^\infty(G)$ και $f_n \rightarrow f$ στην τοπολογία του $A^\infty(G)$ τότε τετριμμένα έπεται η σύγκλιση $f_n \rightarrow f$ στην τοπολογία του Y , ενώ αν $\phi_n, \phi \in Y$ και $\phi_n \rightarrow \phi$ στην τοπολογία του Y τότε είναι προφανές ότι $\phi_n \rightarrow \phi$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του G .

Πρόταση 1.2.3. Έστω Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$ φραγμένο ή μη φραγμένο. Τότε υπάρχει μια $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ανοικτών και φραγμένων υποσυνόλων του Ω ώστε $\bigcup_m \Omega_m = \Omega$ και

$$\bigcup_m \Omega_m = \Omega \quad \text{και} \quad \Omega_m \subseteq \overline{\Omega_m} \subseteq \Omega_{m+1},$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θεωρούμε

$$K_m = \overline{B}(0, m) \cap \left\{ z \in \Omega : \text{dist}(\Omega^c, z) \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ είναι εξαντλούσα και φθίνουσα οικογένεια συμπαγών υποσυνόλων του Ω . Θέτουμε $\Omega_m = (K_m)^\circ$ και παρατηρούμε ότι η οικογένεια $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί το ζητούμενο. $\square$

Πρόταση 1.2.4. Έστω Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$ φραγμένο ή μη φραγμένο και $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του, ώστε $\Omega = \bigcup_m \Omega_m$ και $\Omega_m \subseteq \overline{\Omega_m} \subseteq \Omega_{m+1}$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $m = 1, 2, \dots$ θεωρούμε $X_m(\Omega_m)$ έναν χώρο μιγαδικών συναρτήσεων που ανήκει στην οικογένεια $M(\Omega_m)$ και για $n \leq m$ θεωρούμε την απεικόνιση

$$T_{m,n} : X_m(\Omega_m) \rightarrow X_n(\Omega_n) \text{ με } T_{m,n}(f) = f|_{\Omega_n} \text{ για κάθε } f \in X_m(\Omega_m).$$

Τότε, η οικογένεια $\{X_m(\Omega_m), T_{m,n}, \mathbb{N}\}$ είναι ένα προβολικό σύστημα τοπολογικών χώρων.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι οι απεικονίσεις $T_{m,n} : X_m(\Omega_m) \rightarrow X_n(\Omega_n)$ είναι καλά ορισμένες, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \leq m$.

Έχουμε $X_m(\Omega_m) \subseteq H(\Omega_m)$ και $\overline{\Omega_n} \subseteq \Omega_m$, για κάθε $n < m$, άρα για κάθε $f \in X_m(\Omega_m)$ ισχύει

$$T_{m,n}(f) = f|_{\Omega_n} \in A^\infty(\Omega_n) \subseteq X_n(\Omega_n).$$

Επιπλέον, αν ένα δίκτυο $f^i \in X_m(\Omega_m)$ συγκλίνει σε μία συνάρτηση $f \in X_m(\Omega_m)$ στην τοπολογία του $X_m(\Omega_m)$, τότε από την υπόθεση συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω_m . Από το θεώρημα του Weierstrass, έπεται ότι κάθε μικτή, μερική παράγωγος του δικτύου $(f^i)_{i \in I}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω_m στην αντίστοιχη παράγωγο της f .

Όμως το σύνολο $\overline{\Omega_n}$ είναι συμπαγές στο Ω_m , άρα $f^i|_{\Omega_n} \rightarrow f|_{\Omega_n}$ στην τοπολογία του $A^\infty(\Omega_n)$. Από την υπόθεση, έπεται ότι

$$T_{m,n}(f^i) = f^i|_{\Omega_n} \rightarrow f|_{\Omega_n} = T_{m,n}(f)$$

στην τοπολογία του $X_n(\Omega_n)$.

Συνεπώς, η $T_{m,n} : X_m(\Omega_m) \rightarrow X_n(\Omega_n)$ είναι συνεχής.

Τέλος, είναι εύκολο να δούμε ότι $T_{m,n} = T_{s,n} \circ T_{m,s}$, για κάθε $n \leq m \leq s$.

Άρα, η οικογένεια $\{X_m(\Omega_m), T_{m,n}, \mathbb{N}\}$ είναι ένα προβολικό σύστημα τοπολογικών χώρων. $\square$

Θεωρούμε X τον τοπολογικό χώρο που είναι το προβολικό όριο του συστήματος

$$\{X_m(\Omega_m), T_{m,n}, \mathbb{N}\}.$$

Θεώρημα 1.2.5. *Με τους παραπάνω συμβολισμούς και υποθέσεις, ο τοπολογικός χώρος X είναι ομοιομορφικός με τον $H(\Omega)$.*

Απόδειξη. Αν $f \in H(\Omega)$, τότε

$$f|_{\Omega_m} \in A^\infty(\Omega_m) \subseteq X_m(\Omega_m) .$$

Οπότε, αν θέσουμε

$$g_m = f|_{\Omega_m} \text{ και } g = (g_1, g_2, \dots) = g(f) ,$$

τότε $g \in \prod_{m=1}^\infty X_m(\Omega_m)$. Για κάθε $n \leq m$ είναι εύκολο να δούμε ότι $T_{m,n}(g_m) = g_n$. Συνεπώς,

$$g \in X.$$

Έτσι, ορίζουμε μια απεικόνιση

$$\Phi: H(\Omega) \rightarrow X, \text{ με } \Phi(f) = g(f).$$

Η απεικόνιση Φ είναι 1-1. Πράγματι, αν $g(f) = g(w)$ τότε

$$f|_{\Omega_m} = w|_{\Omega_m} , \text{ για κάθε } m = 1, 2, \dots .$$

Αφού $\bigcup_m \Omega_m = \Omega$, έπεται ότι $f(z) = w(z)$ για κάθε $z \in \Omega$, δηλαδή

$$f \equiv w$$

και η Φ είναι 1-1.

Η απεικόνιση Φ είναι επίσης επί. Πράγματι, αν $g = (g_1, g_2, \dots) \in X$, τότε για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός αριθμός $n(z)$ τέτοιος ώστε

$$z \in \Omega_m, \text{ για κάθε } m \geq n(z) ,$$

αφού ισχύει ότι $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1}$ και $\bigcup_m \Omega_m = \Omega$. Επιπλέον, δεδομένου ότι $T_{m,n(z)}(g_m) = g_{n(z)}$, έχουμε

$$g_m(z) = g_{n(z)}(z) , \text{ για κάθε } m \geq n(z) .$$

Θέτουμε

$$f(z) = g_{n(z)}(z) .$$

Θα δείξουμε ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω . Πράγματι, αν $z_0 \in \Omega$ τότε $z_0 \in \Omega_{n(z_0)}$. Αφού το $\Omega_{n(z_0)}$ είναι ανοικτό, υπάρχει $r > 0$, ώστε $B(z_0, r) \subseteq \Omega_{n(z_0)}$. Για κάθε $z \in B(z_0, r)$, έχουμε

$$n(z) \leq n(z_0) \text{ και } f(z) = g_{n(z)}(z) = g_{n(z_0)}(z) .$$

Αλλά $g_{n(z_0)} \in X_{n(z_0)}(\Omega_{n(z_0)}) \subseteq H(\Omega_{n(z_0)})$. Έπεται ότι η f είναι ολόμορφη στην μπάλα $B(z_0, r)$. Αφού το z_0 ήταν τυχόν στο Ω , έπεται ότι

$$f \in H(\Omega).$$

Επίσης, είναι προφανές ότι

$$\Phi(f) = g.$$

Αφού η g ήταν τυχούσα απεικόνιση στο X , έπεται ότι η απεικόνιση Φ είναι επί.

Επιπλέον, η Φ είναι συνεχής. Πράγματι, αν ένα δίκτυο $f^i \in H(\Omega)$, $i \in I$, συγκλίνει σε μία $f \in H(\Omega)$, ομοιόμορφα στα συμπαγή, τότε από το θεώρημα του Weierstrass το ίδιο ισχύει για κάθε μικτή, μερική παράγωγο. Αφού το $\overline{\Omega_m}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω έπεται ότι

$$f^i|_{\Omega_m} \rightarrow f|_{\Omega_m} \text{ στην τοπολογία του } A^\infty(\Omega_m).$$

Από την υπόθεση έπεται

$$f^i|_{\Omega_m} \rightarrow f|_{\Omega_m} \text{ στην τοπολογία του } X_m(\Omega_m).$$

Από την παρατήρηση 1.1.3, έχουμε ότι $\Phi(f^i) \rightarrow \Phi(f)$ στην τοπολογία του X . Συνεπώς, η απεικόνιση Φ είναι συνεχής.

Μένει να δείξουμε ότι η Φ^{-1} είναι επίσης συνεχής. Έστω ότι

$$\Phi(f^i) = (f^i|_{\Omega_1}, f^i|_{\Omega_2}, \dots) \rightarrow (f|_{\Omega_1}, f|_{\Omega_2}, \dots) = \Phi(f) \text{ στην τοπολογία του } X.$$

Από την παρατήρηση 1.1.3 έπεται $f^i|_{\Omega_m} \rightarrow f|_{\Omega_m}$ για κάθε $m = 1, 2, \dots$ στην τοπολογία του $X_m(\Omega_m)$, το οποίο, από την υπόθεση, επάγει την ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή του Ω_m . Θα δείξουμε ότι $f^i \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$.

Έστω K συμπαγές υποσύνολο του Ω . Αφού

$$K \subseteq \Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m$$

και τα ανοικτά σύνολα Ω_m ικανοποιούν τη σχέση $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1}$, από την συμπαγεία του K έπεται ότι υπάρχει m_0 τέτοιο ώστε

$$K \subseteq \Omega_{m_0}.$$

Αλλά $f^i|_{\Omega_{m_0}} \rightarrow f|_{\Omega_{m_0}}$ ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω_{m_0} και ειδικότερα στο K . Συνεπώς $f^i \rightarrow f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subseteq \Omega$ κι άρα

$$f^i \rightarrow f \text{ στην τοπολογία του } H(\Omega).$$

Έτσι, η Φ^{-1} είναι συνεχής. □

Παρατήρηση 1.2.6. Παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις

$$T_{m,n}: X_m(\Omega_m) \rightarrow X_n(\Omega_n) \text{ με } T_{m,n}(f) = f|_{\Omega_n}$$

είναι καλά ορισμένες και συνεχείς, ανεξάρτητα από το αν οι χώροι $X_m(\Omega_m)$, $X_n(\Omega_n)$ ανήκουν στην ίδια ή σε διαφορετικές κατηγορίες.

Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε

$$X_m(\Omega_m) = A^m(\Omega_m), \text{ αν ο } m \text{ είναι περιττός}$$

και

$$X_m(\Omega_m) = H_\infty^m(\Omega_m), \text{ αν ο } m \text{ είναι άρτιος.}$$

Παρατήρηση 1.2.7. Είδαμε ότι το αριθμήσιμο γινόμενο χώρων Fréchet είναι επίσης χώρος Fréchet. Από το θεώρημα 1.2.5, ο χώρος X είναι ομοιομορφικός με τον χώρο Fréchet $H(\Omega)$. Ωστόσο οι χώροι $X_m(\Omega_m)$ μπορεί να μην είναι χώροι Fréchet. Επιπλέον, ανεξάρτητα από το αν οι χώροι $X_m(\Omega_m)$ είναι τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι ή δεν έχουν γραμμική δομή, ο χώρος X είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος και η απεικόνιση Φ γραμμικός ισομορφισμός.

Παρατήρηση 1.2.8. Θεωρούμε

$$K_t = \left\{ z \in \Omega : |z| \leq t, \text{dist}(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{t} \right\}, \quad t \geq t_0,$$

για κατάλληλο $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε $K_{t_0}^o \neq \emptyset$. Τότε, για $t < s$ έχουμε $K_t \subseteq K_s^o$ και $\cup_{t \geq t_0} K_t = \Omega$. Θέτουμε $\Omega_t = K_t^o$ κι έστω $X_t(\Omega_t)$ ένα στοιχείο της οικογένειας $M(\Omega_t)$. Τότε το προβολικό όριο της οικογένειας $X_t(\Omega_t)$ καθώς $t \rightarrow +\infty$, όπου η $T_{s,t}$ απεικονίζει μια $f \in X_s(\Omega_s)$ στον περιορισμό της στο σύνολο Ω_t , $t < s$, είναι ομοιόμορφο και γραμμικά ισόμορφο με τον χώρο $H(\Omega)$. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του θεωρήματος 1.2.5.

1.3 Παραδείγματα

1.3.1 Οι χώροι $A^p(\Omega)$ και $H_\infty^p(\Omega)$

Έστω Ω ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$, $d \geq 1$.

Συμβολίζουμε με $A^p(\Omega)$ το σύνολο των ολομόρφων συναρτήσεων στο Ω των οποίων κάθε μικτή, μερική παράγωγος τάξης μικρότερης ή ίσης με p επεκτείνεται συνεχώς στην κλειστότητα $\bar{\Omega}$ του Ω .

Συμβολίζουμε επίσης με $H_\infty^p(\Omega)$ το σύνολο των ολομόρφων συναρτήσεων στο Ω των οποίων κάθε μικτή, μερική παράγωγος τάξης μικρότερης ή ίσης με p είναι φραγμένη στην κλειστότητα $\bar{\Omega}$ του Ω .

Είναι προφανές ότι

$$A^\infty(\Omega) \subseteq A^p(\Omega) \subseteq H(\Omega)$$

και

$$A^\infty(\Omega) \subseteq H_\infty^p(\Omega) \subseteq H(\Omega).$$

Η συνήθης τοπολογία των χώρων $A^p(\Omega)$ και $H_\infty^p(\Omega)$ ορίζεται από τις ημινόρμες

$$\sup_{z \in G} \left| \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_d} f}{\partial z_1^{a_1} \dots \partial z_d^{a_d}} \right|, \quad a_1 + \dots + a_d \leq p, \quad \text{όπου } z = (z_1, \dots, z_d).$$

Εφοδιασμένοι με αυτή την τοπολογία, οι χώροι $A^p(\Omega)$ και $H_\infty^p(\Omega)$ είναι χώροι Banach για $p < +\infty$ και χώροι Fréchet για $p = +\infty$. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων ως προς την συνήθη τοπολογία του χώρου $A^\infty(\Omega)$, επάγει σύγκλιση στην τοπολογία των $A^p(\Omega)$ και $H_\infty^p(\Omega)$ και η σύγκλιση ως προς την τοπολογία των $A^p(\Omega)$ και $H_\infty^p(\Omega)$ επάγει σύγκλιση στην συνήθη τοπολογία του $H(\Omega)$.

Συνεπώς, οι εμφυτεύσεις ι_1, ι_2 , όπως ορίστηκαν στην προηγούμενη ενότητα, είναι συνεχείς και οι χώροι $A^p(\Omega)$ και $H_\infty^p(\Omega)$ ανήκουν στο σύνολο $M(\Omega)$.

1.3.2 Χώροι Bergman

Έστω Ω ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$.

Για $0 < p < +\infty$, συμβολίζουμε $OL^p(\Omega)$ τον χώρο των μιγαδικών συναρτήσεων f που είναι ολόμορφες στο Ω και ικανοποιούν τη σχέση

$$\left(\int_{\Omega} |f|^p d\nu(z) \right)^{1/p} < +\infty,$$

όπου $d\nu$ το μέτρο Lesbegue στον $\mathbb{C}^d$. Δηλαδή,

$$OL^p(\Omega) = H(\Omega) \cap L^p(\Omega).$$

Ο χώρος $OL^p(\Omega)$ ονομάζεται χώρος p -Bergman ([16]).

Για $f \in OL^p(\Omega)$ ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\nu(z) \right)^{1/p}.$$

Για $1 \leq p < +\infty$, η $\|f\|_p$ είναι πλήρης νόρμα και ο $OL^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ είναι χώρος Banach. ([16])

Για $0 < p < 1$, η $\|f\|_p$ δεν είναι νόρμα, αλλά ορίζει στον $OL^p(\Omega)$ μετρική

$$d(f, g) := \|f - g\|_p^p,$$

η οποία είναι πλήρης και αναλοιώτη στις μεταφορές ([16]). Άρα ο $OL^p(\Omega)$, $0 \leq p < 1$ είναι χώρος Fréchet.

Πρόταση 1.3.1. ([16]) Για κάθε $0 < p < +\infty$ και για κάθε K συμπαγές υποσύνολο του Ω υπάρχει σταθερά $C = C(p, K)$ τέτοια ώστε

$$\sup_{z \in K} |f(z)| \leq C \|f\|_p.$$

Παρατήρηση 1.3.2. Έστω Ω ένα φραγμένο, ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$. Παρατηρούμε ότι οι χώροι $OL^p(\Omega)$, $0 < p < +\infty$, ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.5.

Είναι προφανές ότι $OL^p(\Omega) \subseteq H(\Omega)$.

Συμβολίζουμε με d την μετρική του χώρου $OL^p(\Omega)$. Αν $f, f_n \in OL^p(\Omega)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f_n, f) = 0$ τότε, από την πρόταση 1.3.1, για κάθε K συμπαγές υποσύνολο του Ω έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

Δηλαδή η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω . Άρα η εμφύτευση

$$\iota_2: OL^p(\Omega) \rightarrow H(\Omega), \text{ με } \iota_2(g) = g,$$

όπου οι χώροι $OL^p(\Omega)$ και $H(\Omega)$ θεωρούνται εφοδιασμένοι με τη συνήθη τοπολογία τους, είναι συνεχής.

Επιπλέον, $A^\infty(\Omega) \subseteq OL^p(\Omega)$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μία συνάρτηση $f \in A^\infty(\Omega)$, τότε η f είναι συνεχής στο συμπαγές $\overline{\Omega}$. Άρα η f παίρνει μέγιστη τιμή στο $\overline{\Omega}$, έστω $C = \max_{z \in \overline{\Omega}} |f(z)|$. Κι αφού $\nu(\Omega) < \infty$ έπεται

$$\left(\int_{\Omega} |f(z)|^p d\nu(z) \right)^{1/p} \leq (C^p \nu(\Omega))^{1/p} < +\infty,$$

δηλαδή $f \in L^p(\Omega)$. Επίσης, $f \in A^\infty(\Omega) \subseteq H(\Omega)$. Άρα

$$f \in H(\Omega) \cap L^p(\Omega) = OL^p(\Omega) .$$

Τέλος, αν $f_n, f \in A^\infty(\Omega)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και οι f_n συγχλίνουν στην f ως προς την συνήθη τοπολογία του $A^\infty(\Omega)$, τότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει ομοιόμορφα στην f , δηλαδή

$$\sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0.$$

Όμως

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_p^p &\leq \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| \left(\int_{\Omega} d\nu(z) \right)^{1/p} \Rightarrow \\ \|f_n - f\|_p^p &\leq \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| \cdot \nu(\Omega) , \end{aligned}$$

άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f_n, f) = 0$. Συνεπώς, η απεικόνιση

$$\iota_1 : A^\infty(\Omega) \rightarrow OL^p(\Omega), \text{ με } \iota_1(g) = g,$$

όπου οι χώροι $A^\infty(\Omega)$ και $OL^p(\Omega)$ είναι εφοδιασμένοι με τη συνήθη τοπολογία τους, είναι συνεχής.

1.3.3 Χώροι Hardy

Για $0 < p < +\infty$, συμβολίζουμε $H^p = H^p(D)$ τον χώρο των μιγαδικών συναρτήσεων f που είναι ολόμορφες στον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο D και ικανοποιούν τη σχέση

$$\sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < +\infty.$$

Ο χώρος $H^p(D)$ ονομάζεται χώρος p -Hardy ([13]).

Για $f \in H^p(D)$ ορίζουμε

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} .$$

Για $1 \leq p < +\infty$ η $\|f\|_{H^p}$ είναι νόρμα στον $H^p(D)$. Για $0 < p < 1$ η $\|f\|_{H^p}$ δεν είναι νόρμα, αλλά ορίζει μετρική, την $d(f, g) = \|f - g\|_{H^p}^p$ ([13]).

Παρατήρηση 1.3.3. Παρατηρούμε ότι η σύγκλιση ως προς την $\|\cdot\|_{H^p}$ είναι πιο ισχυρή από τη σύγκλιση ως προς την $\|\cdot\|_p$ αφού $\|f\|_p^p \leq \|f\|_{H^p}^p$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_D |f(z)|^p dv(z) \Rightarrow \\ \|f\|_p^p &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 |f(re^{i\theta})|^p r dr \frac{d\theta}{2\pi} \Rightarrow \\ \|f\|_p^p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sup_{0 < r < 1} |f(re^{i\theta})|^p \cdot \int_0^1 r dr \right) d\theta \Rightarrow \\ \|f\|_p^p &\leq \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \Rightarrow \\ \|f\|_p^p &\leq \|f\|_{H^p}^p \end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.3.4. Οι χώροι $H^p(D)$, $0 < p < +\infty$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.5.

Είναι προφανές ότι $H^p(D) \subseteq H(D)$.

Αν $f, f_n \in H^p(D)$, $n \in \mathbb{N}$ και η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει στην f στη συνήθη τοπολογία του $H^p(D)$, τότε από την παρατήρηση 1.3.3 η ακολουθία f_n συγχλίνει στην f και στην τοπολογία του $OL^p(D)$. Από την παρατήρηση 1.3.2 προκύπτει ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή του D . Άρα η απεικόνιση

$$\iota_2 : H^p(D) \rightarrow H(D), \text{ με } \iota_2(g) = g,$$

όπου οι χώροι $H^p(D)$ και $H(D)$ είναι εφοδιασμένοι με τη συνήθη τοπολογία τους, είναι συνεχής.

Επιπλέον, $A^\infty(D) \subseteq H^p(D)$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μία συνάρτηση $f \in A^\infty(D)$, τότε η f είναι συνεχής στο συμπαγές $\overline{D}$. Άρα η f παίρνει μέγιστη τιμή στο $\overline{D}$, έστω

$$C = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|.$$

Τότε

$$\|f\|_{H^p} \leq \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} C^p \int_0^{2\pi} d\theta \right)^{1/p} \leq C \leq +\infty$$

δηλαδή, $f \in H^p(D)$.

Τέλος, αν $f, f_n \in A^\infty(D)$, $n \in \mathbb{N}$ και η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει στην f ως προς τη συνήθη τοπολογία του $A^\infty(D)$, τότε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει ομοιόμορφα στην f , δηλαδή

$$\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \rightarrow 0.$$

Όμως

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{H^p}^p &= \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^p d\theta \Rightarrow \\ \|f_n - f\|_{H^p}^p &\leq \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\|f_n - f\|_{H^p}^p \leq \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)|.$$

Άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f_n, f) = 0$, όπου d η μετρική στον $H^p(D)$. Συνεπώς, η εμφύτευση

$$\iota_1 : A^\infty(D) \rightarrow H^p(D), \text{ με } \iota_1(g) = g,$$

όπου οι χώροι $A^\infty(D)$ και $H^p(D)$ είναι εφοδιασμένοι με τη συνήθη τοπολογία τους, είναι συνε-
χής.

1.3.4 Κλάση Nevanlinna

Μια συνάρτηση λέμε ότι ανήκει στην κλάση της Nevanlinna $\mathcal{N}$ επί του μοναδιαίου δίσκου D ([13]), αν η f είναι ολόμορφη στον D και ικανοποιεί τη σχέση

$$\sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 + |f(re^{i\theta})|) d\theta < +\infty.$$

Για $f \in \mathcal{N}$ ορίζουμε

$$\|f\|_{\mathcal{N}} = \sup_{0 \leq r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 + |f(re^{i\theta})|) d\theta.$$

Η $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ είναι μία ψευδονόρμα και ορίζει την πλήρη μετρική $d(f, g) = \|f - g\|_{\mathcal{N}}$ ([13]).

Παρατήρηση 1.3.5. Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $0 < p < +\infty$ ισχύει

$$H^p(D) \subseteq \mathcal{N} \text{ και } \|f\|_{\mathcal{N}} \leq \|f\|_{H^p},$$

αφού για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $\log(1 + x) \leq x$.

Πρόταση 1.3.6. ([13]) Για κάθε $f \in \mathcal{N}$ και $z \in D$ ισχύει

$$|f(z)| \leq \exp\left(\frac{2\|f\|_{\mathcal{N}}}{1 - |z|}\right) - 1.$$

Παρατήρηση 1.3.7. Η κλάση της Nevanlinna $\mathcal{N}$ επί του μοναδιαίου δίσκου D ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 1.2.5.

Είναι προφανές ότι $\mathcal{N} \subseteq H(D)$.

Έστω $f, f_n \in \mathcal{N}$, $n \in \mathbb{N}$, και $\|f_n - f\|_{\mathcal{N}} \rightarrow 0$. Αν K συμπαγές υποσύνολο του D , τότε υπάρχει $0 < r < 1$ ώστε $|z| \leq r$ για κάθε $z \in K$ και από την πρόταση 1.3.6 έπεται

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \exp\left(\frac{2\|f_n - f\|_{\mathcal{N}}}{1 - r}\right) - 1.$$

Άρα

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \leq \exp\left(\frac{2\|f_n - f\|_{\mathcal{N}}}{1 - r}\right) - 1 \rightarrow 0.$$

Αφού το K ήταν τυχόν συμπαγές υποσύνολο του D , έπεται ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή του D . Δηλαδή, η απεικόνιση

$$\iota_2 : \mathcal{N} \rightarrow H(D), \text{ με } \iota_2(g) = g,$$

όπου οι χώροι $\mathcal{N}$ και $H(D)$ είναι εφοδιασμένοι με τη συνήθη τοπολογία τους, είναι συνεχής.

Επιπλέον, από τις παρατηρήσεις 1.3.4 και 1.3.5 έπεται $A^\infty(D) \subseteq H^p(D) \subseteq \mathcal{N}$.

Τέλος, η απεικόνιση

$$\iota_1 : A^\infty(D) \rightarrow \mathcal{N}, \text{ με } \iota_1(f) = f$$

είναι συνεχής. Πράγματι, αν $f_n, f \in A^\infty(D)$, $n \in \mathbb{N}$ και οι f_n συγχλίνουν στην f ως προς την συνήθη τοπολογία του $A^\infty(D)$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0 \text{ και για κάθε } z \in D$$

Ισοδύναμα,

$$|f_n(re^{i\theta}) - f(re^{i\theta})| < \varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0 \text{ και για κάθε } r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi) .$$

Άρα για κάθε $n \geq n_0$,

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{N}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log(1 + \varepsilon) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon d\theta = \varepsilon .$$

Δηλαδή, $\|f_n - f\|_{\mathcal{N}} \rightarrow 0$.

1.3.5 Χώροι BMOA

Έστω $f \in L^1(T)$, όπου T η μοναδιαία περιφέρεια και I ένα τόξο της T . Συμβολίζουμε $m_I(f)$ τον μέσο όρο της f πάνω στο τόξο I , δηλαδή

$$m_I(f) = \frac{1}{I} \int_I f(e^{i\theta}) d\theta.$$

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f \in L^1(T)$ έχει φραγμένη μέση ταλάντωση (bounded mean oscillation) ή ότι ανήκει στον χώρο BMO ([15]) αν

$$\sup_{I \subset T} \frac{1}{I} \int_I |f(e^{i\theta}) - m_I(f)| d\theta < +\infty .$$

Για $f \in BMO$ θέτουμε $\|f\|_* = \sup_{I \subset T} \frac{1}{I} \int_I |f(e^{i\theta}) - m_I(f)| d\theta$ και ορίζουμε

$$\|f\|_{BMO} = |m_T(f)| + \|f\|_* .$$

Ο BMO εφοδιασμένος με την $\|\cdot\|_{BMO}$ είναι χώρος Banach ([15]).

Λέμε ότι μια συνάρτηση f ανήκει στον χώρο BMOA αν είναι ολόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο D κι αν επιπλέον είναι ο πυρήνας Poisson μιας συνάρτησης που ανήκει στον χώρο BMO ([15]).

Για $f \in H(D)$ και ορίζουμε

$$\|f\|_{BMOA} := |f(0)| + \sup_{a \in D} \|f_a\|_{H^1} ,$$

όπου $f_a = f \circ \phi_a - f(a)$ και $\phi_a : D \rightarrow D$ με $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

Τότε αποδεικνύεται ([15]) ότι

$$BMOA = \{f \in H(D) : \|f\|_{BMOA} < +\infty\}$$

και ο $(BMOA, \|\cdot\|_{BMOA})$ είναι χώρος Banach.

Παρατήρηση 1.3.8. Ο χώρος BMOA ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 1.2.5.

Είναι προφανές ότι $BMOA \subseteq H(D)$.

Έστω $f, f_n \in BMOA$, $n \in \mathbb{N}$ και $\|f_n - f\|_{BMOA} \rightarrow 0$. Τότε, από τον ορισμό της $\|\cdot\|_{BMOA}$, έχουμε ότι $\|f_n - f\|_{H^1} \rightarrow 0$ κι από την παρατήρηση 1.3.4 έπεται ότι η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή του D . Άρα η απεικόνιση

$$\iota_2 : (BMOA, \|\cdot\|_{BMOA}) \rightarrow H(D), \text{ με } \iota_2(g) = g,$$

όπου ο χώρος $H(D)$ είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη τοπολογία του, είναι συνεχής.

Επιπλέον, $A^\infty(D) \subseteq BMOA$. Πράγματι, αν $f \in A^\infty(D)$, τότε η f είναι συνεχής στο $\bar{D}$. Άρα παίρνει μέγιστη τιμή στο $\bar{D}$, έστω $C = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$. Οπότε για κάθε $a \in D$ και $z \in D$ έχουμε

$$|f_a(z)| \leq \left| f\left(\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right) \right| + |f(a)| \leq 2C$$

και

$$\|f_a\|_{H^1} \leq \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2C d\theta = 2C .$$

Συνεπώς, $\|f\|_{BMOA} \leq 3C < +\infty$, άρα

$$f \in BMOA.$$

Τέλος, αν $f, f_n \in A^\infty(D)$, $n \in \mathbb{N}$ και η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f στη συνήθη τοπολογία του $A^\infty(D)$, τότε επίσης η $(f_{a,n})_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f_a ως προς τη συνήθη τοπολογία του $A^\infty(D)$. Από την παρατήρηση 1.3.4 προκύπτει $\|f_{a,n} - f_a\|_{H^1} \rightarrow 0$. Επιπλέον, $f_n(0) \rightarrow f(0)$, άρα $\|f_n - f\|_{BMOA} \rightarrow 0$. Δηλαδή, η εμφύτευση

$$\iota_1 : A^\infty(D) \rightarrow (BMOA, \|\cdot\|_{BMOA}), \text{ με } \iota_1(g) = g,$$

όπου ο $A^\infty(D)$ είναι εφοδιασμένος με τη συνήθη τοπολογία, είναι συνεχής.

Λέμε ότι μία συνάρτηση $f \in L^1(\mathbb{T})$ έχει φθίνουσα μέση ταλάντωση (vanishing mean oscillation) ή ότι ανήκει στον χώρο VMO ([15]) αν

$$\lim_{|I| \rightarrow 0} \frac{1}{|I|} \int_I |f(e^{i\theta}) - m_I(f)| d\theta = 0 .$$

Μια συνάρτηση f ανήκει στον χώρο $VMOA$ αν είναι ολόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο D και αν επιπλέον είναι ο πυρήνας Poisson μιας συνάρτησης που ανήκει στον χώρο VMO ([15]). Ισοδύναμα,

$$VMOA = \left\{ f \in H(D) : \lim_{|a| \rightarrow 1} \|f \circ \phi_a - f(a)\|_{H^1} = 0 \right\}.$$

Ο $(VMOA, \|\cdot\|_{BMOA})$ είναι υπόχωρος του $BMOA$ και ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 1.2.5.

Σημείωση 1.3.9. Για $1 \leq p < +\infty$ και $f \in L^1(T)$ ορίζουμε

$$\|f\|_{*,p} = \sup_{I \subset T} \left(\frac{1}{I} \int_I |f(e^{i\theta}) - m_I(f)|^p d\theta \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{BMO,p} = |m_T(f)| + \|f\|_{*,p}$$

Αποδεικνύεται ότι οι ποσότητες $\|f\|_{*,p}$ είναι ισοδύναμες. Το ίδιο ισχύει και για τις $\|f\|_{BMO,p}$. ([15]) Επιπλέον θέτουμε

$$\|f\|_{BMOA_p} := |f(0)| + \sup_{a \in D} \|f_a\|_{H_p}.$$

Τότε,

$$BMOA = \{f \in H(D) : \|f\|_{BMOA_p} < +\infty\}$$

και για κάθε $1 \leq p < +\infty$ η $\|\cdot\|_{BMOA_p}$ είναι πλήρης νόρμα στον $BMOA$ ([15]).

1.3.6 Ο χώρος Bloch.

Μια συνάρτηση f που είναι ολόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο D λέμε ότι ανήκει στον κλασσικό χώρο Bloch $\mathcal{B}$ ([16]), αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\sup \{ (1 - |z|^2) |f'(z)| : z \in D \} < +\infty.$$

Για $f \in \mathcal{B}$ ορίζουμε

$$\|f\|_{\mathcal{B}} = |f(0)| + \sup \{ (1 - |z|^2) |f'(z)| : z \in D \}.$$

Ο χώρος Bloch εφοδιασμένος με την νόρμα $\|f\|_{\mathcal{B}}$ είναι χώρος Banach ([16]).

Παρατήρηση 1.3.10. Ο χώρος Bloch ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 1.2.5.

Είναι προφανές ότι $\mathcal{B} \subseteq H(D)$.

Για κάθε $0 < R < 1$

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D(0,R)} |f_n(z) - f(z)| &\leq |f_n(0) - f(0)| + \int_{\zeta=0}^z |f'_n(\zeta) - f'(\zeta)| d\zeta \Rightarrow \\ \sup_{z \in D(0,R)} |f_n(z) - f(z)| &\leq |(f_n - f)(0)| + \int_{\zeta=0}^z \frac{\|f_n(\zeta) - f(\zeta)\|_{\mathcal{B}}}{|1 - |\zeta||} |d\zeta| \Rightarrow \\ \sup_{z \in D(0,R)} |f_n(z) - f(z)| &\leq |(f_n - f)(0)| + \frac{\|f_n - f\|_{\mathcal{B}}}{1 - R} R \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\sup_{z \in D(0,R)} |f_n(z) - f(z)| \leq \|f_n - f\|_{\mathcal{B}} \left(1 + \frac{R}{1-R}\right).$$

Άρα αν $f, f_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ και K συμπαγές υποσύνολο του D , τότε υπάρχει $0 < R < 1$ ώστε $K \subset D(0, R)$ και

$$\sup_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \leq |(f_n - f)(0)| + \frac{\|f_n(z) - f(z)\|_{\mathcal{B}}}{1-R} R \rightarrow 0.$$

Οπότε, η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει στη f ομοιόμορφα στα συμπαγή του D . Δηλαδή, η εμφύτευση

$$\iota_2: \mathcal{B} \rightarrow H(D), \text{ με } \iota_2(f) = f,$$

όπου οι χώροι $\mathcal{B}$ και $H(D)$ είναι εφοδιασμένοι με τη συνήθη τοπολογία τους, είναι συνεχής.

Επιπλέον, $A^\infty(D) \subseteq \mathcal{B}$. Πράγματι, αν $f \in A^\infty(D)$, τότε η f' είναι συνεχής στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{D}$. Άρα, η f' παίρνει μέγιστη τιμή στο $\overline{D}$, έστω $C = \max_{z \in \overline{D}} |f'(z)|$. Οπότε

$$\sup_{|z| < 1} |f'(z)| |1 - |z|| \leq C \cdot \sup_{|z| < 1} |1 - |z|| < +\infty.$$

Τέλος, αν $f, f_n \in A^\infty(D)$, $n \in \mathbb{N}$ και η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει στην f στην τοπολογία του $A^\infty(D)$, τότε κάθε παράγωγος της f_n συγχλίνει ομοιόμορφα στην αντίστοιχη παράγωγο της f . Συνεπώς,

$$f_n(0) \rightarrow f(0) \text{ και } \sup_{z \in D} |f'_n(z) - f'(z)| \rightarrow 0.$$

Οπότε

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$$

και άρα η εμφύτευση $\iota_1: A^\infty(D) \rightarrow \mathcal{B}$ με $\iota_1(f) = f$ είναι συνεχής.

Μια συνάρτηση f , που είναι ολόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο D , λέμε ότι ανήκει στον little Bloch χώρο $\mathcal{B}_0$ ([16]), αν $f \in \mathcal{B}$ και επιπλέον ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} (1 - |z|^2) |f'(z)| = 0.$$

Ο χώρος $\mathcal{B}_0$ με νόρμα την $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{B}$ και προφανώς ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 1.2.5.

1.3.7 Ο χώρος Dirichlet.

Μια συνάρτηση f ολόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο D λέμε ότι ανήκει στον κλασσικό χώρο Dirichlet, $\mathcal{D}$ ([13]), αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_D |f'(z)|^2 d\nu < +\infty,$$

όπου ν το μέτρο Lebesgue στον D . Για $f \in \mathcal{D}$ θεωρούμε την νόρμα

$$\|f\|_{\mathcal{D}} = \left(\int_D |f'(z)|^2 d\nu + |f(0)|^2 \right)^{1/2} \quad ([28]).$$

Παρατήρηση 1.3.11. Ο χώρος του Dirichlet εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 1.2.5 .

Είναι προφανές ότι $\mathcal{D} \subseteq H(D)$.

Έστω ότι $f, f_n \in \mathcal{D}, n \in \mathbb{N}$ και $\|f_n - f\|_{\mathcal{D}} \rightarrow 0$. Τότε $\|f'_n - f'\|_2 \rightarrow 0$ και $f_n(0) \rightarrow f(0)$. Από την παρατήρηση 1.3.2 έπεται ότι η ακολουθία των παραγώγων $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην f' ομοιόμορφα στα συμπαγή του D . Οπότε για κάθε K συμπαγές υποσύνολο του D και για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(0) - f(0)| + \int_0^z |f'_n(\zeta) - f'(\zeta)| |d\zeta| \Rightarrow$$

$$|f_n(z) - f(z)| \leq |f_n(0) - f(0)| + \sup_{\zeta \in K} |f'_n(\zeta) - f'(\zeta)| \cdot \int_0^z |d\zeta| \rightarrow 0$$

Συνεπώς η f_n συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του D κι άρα η εμφύτευση

$$\iota_2: \mathcal{D} \rightarrow H(D), \text{ με } \iota_2(f) = f$$

είναι συνεχής στο D .

Επιπλέον, $A^\infty(D) \subseteq \mathcal{D}$. Πράγματι, αν $f \in A^\infty(D)$ τότε η f' είναι συνεχής στον $\overline{D}$, οπότε παίρνει μέγιστη τιμή και

$$\frac{1}{\pi} \int_D |f'(z)|^2 dz < +\infty.$$

Τέλος, αν $f, f_n \in A^\infty(D)$ και $f_n \rightarrow f$ στην τοπολογία του $A^\infty(D)$. Τότε, $f_n \rightarrow f$ και $f'_n \rightarrow f'$ ομοιόμορφα. Οπότε $\|f_n - f\|_{\mathcal{D}} \rightarrow 0$ κι άρα η εμφύτευση

$$\iota_1: A^\infty(D) \rightarrow \mathcal{D}, \text{ με } \iota_1(f) = f$$

είναι συνεχής στο D .

1.4 Αρμονικές συναρτήσεις

Ορισμός 1.4.1. ([2]) Έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Μία δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $u: G \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται αρμονική στο G αν

$$\Delta u = 0,$$

όπου

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \text{ και } x = (x_1, x_2, \dots).$$

Πρόταση 1.4.2. ([2]) Αν u μία πραγματική συνάρτηση, ορισμένη στην κλειστή μοναδιαία μπάλα $\overline{B}$ του $\mathbb{R}^n$, η οποία είναι αρμονική στην ανοικτή μοναδιαία μπάλα B και συνεχής στην $\overline{B}$, τότε για κάθε $x \in B$ ισχύει

$$u(x) = \int_S u(\zeta) P(x, \zeta) d\sigma(\zeta),$$

όπου

$$P(x, \zeta) = \frac{1 - |x|^2}{|x - \zeta|^n} \text{ ο πυρήνας του Poisson,}$$

$S = \partial B$ η μοναδιαία σφαίρα και

σ το μέτρο Haar στην S .

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $u \in C^\infty(B)$ και για κάθε μικτή μερική παράγωγο ισχύει

$$\frac{\partial^{a_1+\dots+a_d} u(x)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_d^{a_d}} = \int_S u(\zeta) \frac{\partial^{a_1+\dots+a_d} P(x, \zeta)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_d^{a_d}} d\sigma(\zeta),$$

για κάθε $x \in B$.

Με μεταφορά και διαστολή, η προηγούμενη πρόταση ισχύει για κάθε μπάλα $B(a, r)$ με κέντρο a και ακτίνα r . Συνεπώς, κάθε αρμονική συνάρτηση είναι απείρως διαφορίσιμη.

Το επόμενο θεώρημα είναι το αντίστοιχο του θεωρήματος Weierstrass για την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών ολομόρφων συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.4.3. ([16]) Έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ και $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων στο G που συγκλίνει σε μία συνάρτηση u , ομοιόμορφα στα συμπαγή του G . Τότε η u είναι αρμονική στο G .

Επιπλέον, κάθε μικτή μερική παράγωγος της ακολουθίας $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην αντίστοιχη παράγωγο της u ομοιόμορφα στα συμπαγή του G .

Απόδειξη. Αρχεί να δείξουμε ότι για κάθε $\overline{B}(a, r) \subset \Omega$ η u είναι αρμονική στην $B(a, r)$ κι ότι κάθε μικτή μερική παράγωγος της ακολουθίας $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην αντίστοιχη παράγωγο της u ομοιόμορφα στα συμπαγή της $B(a, r)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $B(a, r)$ είναι η ανοικτή μοναδιαία μπάλα B .

Από την πρόταση 1.4.2, για κάθε $x \in B$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$u_m(x) = \int_S u_m(\zeta) P(x, \zeta) d\sigma(\zeta).$$

Παίρνοντας όριο $m \rightarrow +\infty$ και στα δύο μέρη έπεται ότι

$$u(x) = \int_S u(\zeta) P(x, \zeta) d\sigma(\zeta),$$

για κάθε $x \in B$. Συνεπώς, η u είναι αρμονική στην B .

Επιπλέον,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\partial B} u_m(\zeta) \frac{\partial^{a_1+\dots+a_d} P(x, \zeta)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_d^{a_d}} d\sigma(\zeta) = \int_{\partial B} u(\zeta) \frac{\partial^{a_1+\dots+a_d} P(x, \zeta)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_d^{a_d}} d\sigma(\zeta).$$

Δηλαδή

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\partial^{a_1+\dots+a_d} u_m(x)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_d^{a_d}} = \frac{\partial^{a_1+\dots+a_d} u(x)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_d^{a_d}}.$$

Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο της B , τότε κάθε μικτή μερική παράγωγος του πυρήνα Poisson,

$$\frac{\partial^{a_1+\dots+a_d} P(x, \zeta)}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_d^{a_d}},$$

είναι ομοιόμορφα φραγμένη στο $K \times S$. Άρα κάθε μικτή μερική παράγωγος της ακολουθίας u_m συγκλίνει στην αντίστοιχη παράγωγο της u ομοιόμορφα στο K , κι έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος θα δείξουμε ότι κάτω απο προϋποθέσεις που θυμίζουν αυτές του θεωρήματος 1.2.5, το προβολικό όριο χώρων αρμονικών συναρτήσεων, ορισμένων στα $\Omega_m = K_m^\circ$ είναι ομοιομορφικό με τον χώρο των αρμονικών συναρτήσεων στο Ω εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή.

Το προβολικό όριο χώρων αρμονικών συναρτήσεων.

Έστω G ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

Συμβολίζουμε με $h(G)$ το σύνολο των αρμονικών συναρτήσεων ορισμένων στο σύνολο G , εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή του G .

Συμβολίζουμε με $a^\infty(G)$ το σύνολο που αποτελείται από τις ορισμένες στο σύνολο G αρμονικές συναρτήσεις των οποίων κάθε μικτή μερική παράγωγος επεκτείνεται συνεχώς στην κλειστότητα $\bar{G}$ του G , εφοδιασμένο με την τοπολογία που ορίζουν οι ημινόρμες

$$\sup_{x \in G} \left| \frac{\partial^{a_1+\dots+a_d} f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_d^{a_d}} \right|, \quad a_1 \dots a_d \in \{0, 1, \dots\}, \quad \text{όπου } x = (x_1, \dots, x_d).$$

Ορισμός 1.4.4. Έστω G ένα φραγμένο ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.

Συμβολίζουμε $m(G)$ το σύνολο όλων των τοπολογικών χώρων $X(G)$ τέτοιων ώστε

$$a^\infty(G) \subseteq X(G) \subseteq h(G)$$

και οι αντίστοιχες εμφυτεύσεις,

$$\iota_1: a^\infty(G) \rightarrow X(G) \text{ με } \iota_1(u) = u \text{ και } \iota_2: X(G) \rightarrow h(G) \text{ με } \iota_2(w) = w$$

είναι συνεχείς.

Δηλαδή, αν ένα δίκτυο συναρτήσεων $u^i \in a^\infty(G)$, $i \in I$ συγκλίνει σε μία $u \in a^\infty(G)$ στην τοπολογία του $a^\infty(G)$ τότε το u^i συγκλίνει στην u και στην τοπολογία του $X(G)$. Επίσης, αν ένα δίκτυο συναρτήσεων $u^i \in X(G)$, $i \in I$ συγκλίνει μία $u \in X(G)$ στην τοπολογία του $X(G)$ τότε το u^i συγκλίνει στην u και στην τοπολογία του $h(G)$.

Πρόταση 1.4.5. Έστω Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ φραγμένο ή μη φραγμένο. Τότε υπάρχει μια οικογένεια $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ανοικτών και φραγμένων υποσυνόλων του Ω ώστε

$$\bigcup_m \Omega_m = \Omega \text{ και } \Omega_m \subseteq \overline{\Omega_m} \subseteq \Omega_{m+1},$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Η απόδειξη είναι ανάλογη με την περίπτωση ανοικτού υποσυνόλου του $\mathbb{C}^d$ στην Πρόταση 1.3.3..

Πρόταση 1.4.6. Έστω Ω ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ φραγμένο ή μη φραγμένο και $(\Omega_m)_{m \in \mathbb{N}}$ μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του, ώστε $\Omega = \bigcup_m \Omega_m$ και $\Omega_m \subseteq \overline{\Omega_m} \subseteq \Omega_{m+1}$, για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Για κάθε $m = 1, 2, \dots$ θεωρούμε $X_m(\Omega_m)$ έναν χώρο αρμονικών συναρτήσεων που ανήκει στο $m(\Omega_m)$ και για $n \leq m$ θεωρούμε την απεικόνιση

$$T_{m,n}: X_m(\Omega_m) \rightarrow X_n(\Omega_n) \text{ με } T_{m,n}(u) = u|_{\Omega_n} \text{ για κάθε } f \in X_m(\Omega_m).$$

Τότε, η οικογένεια $\{X_m(\Omega_m), T_{m,n}, \mathbb{N}\}$ είναι ένα προβολικό σύστημα τοπολογικών χώρων.

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα ότι οι απεικονίσεις $T_{m,n}: X_m(\Omega_m) \rightarrow X_n(\Omega_n)$ είναι καλά ορισμένες, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \leq m$.

Έχουμε $X_m(\Omega_m) \subseteq h(\Omega_m)$ και $\overline{\Omega_n} \subset \Omega_m$. Οπότε, αν $u \in X_m(\Omega_m)$ και $n < m$, τότε η u είναι αρμονική στο $\overline{\Omega_n}$. Άρα κάθε παράγωγος της $u|_{\Omega_n}$ επεκτείνεται συνεχώς στο σύνορο του Ω_n . Δηλαδή $u \in a^\infty(\Omega_n) \subseteq X_n(\Omega_n)$ και η

$$T_{m,n}: X_m(\Omega_m) \rightarrow X_n(\Omega_n) \text{ με } T_{m,n}(u) = u|_{\Omega_n},$$

είναι καλά ορισμένη.

Επιπλέον, αν ένα δίκτυο $u^i \in X_m(\Omega_m)$ συγκλίνει σε μία συνάρτηση $u \in X_m(\Omega_m)$ στην τοπολογία του $X_m(\Omega_m)$, τότε από την υπόθεση συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω_m . Από το θεώρημα 1.4.3 έπεται ότι κάθε μικτή, μερική παράγωγος της $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στην αντίστοιχη παράγωγο της u ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω_m .

Όμως το σύνολο $\overline{\Omega_n}$ είναι συμπαγές στο Ω_m , άρα

$$u^i|_{\Omega_n} \rightarrow u|_{\Omega_n} \text{ στην τοπολογία του } a^\infty(\Omega_n).$$

Από την υπόθεση, έπεται ότι

$$T_{m,n}(u^i) = u^i|_{\Omega_n} \rightarrow u|_{\Omega_n} = T_{m,n}(u)$$

στην τοπολογία του $X_n(\Omega_n)$.

Συνεπώς, η $T_{m,n}: X_m(\Omega_m) \rightarrow X_n(\Omega_n)$ είναι συνεχής.

Τέλος, είναι εύκολο να δούμε ότι $T_{m,n} = T_{s,n} \circ T_{m,s}$, για κάθε $n \leq m \leq s$.

Άρα, η οικογένεια $\{X_m(\Omega_m), T_{m,n}, \mathbb{N}\}$ αποτελεί ένα προβολικό σύστημα τοπολογικών χώρων. □

Θεωρούμε X τον τοπολογικό χώρο που είναι το προβολικό όριο της $\{X_m(\Omega_m), T_{m,n}, \mathbb{N}\}$.

Θα δούμε ότι η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος δεν διαφέρει ουσιαστικά από αυτήν του θεωρήματος 1.2.5.

Θεώρημα 1.4.7. Με τους παραπάνω συμβολισμούς και υποθέσεις, ο τοπολογικός χώρος X είναι ομοιομορφικός με τον $h(\Omega)$.

Απόδειξη. Αν $u \in h(\Omega)$ τότε $u|_{\Omega_m} \in a^\infty(\Omega_m) \subseteq X_m(\Omega_m)$. Οπότε, αν θέσουμε

$$g_m = u|_{\Omega_m} \text{ και } g = (g_1, g_2, \dots) = g(f),$$

τότε $g \in \prod_{m=1}^\infty X_m(\Omega_m)$. Για κάθε $n \leq m$ είναι εύκολο να δούμε ότι $T_{m,n}(g_m) = g_n$. Συνεπώς, $g \in X$. Έτσι, ορίζουμε μια απεικόνιση

$$\Phi: h(\Omega) \rightarrow X, \text{ με } \Phi(u) = g(u).$$

Η απεικόνιση Φ είναι 1-1. Πράγματι, αν $g(u) = g(w)$ τότε

$$u|_{\Omega_m} = w|_{\Omega_m} \text{ για κάθε } m = 1, 2, \dots$$

Αφού $\cup_m \Omega_m = \Omega$, έπεται ότι $u(z) = w(z)$ για κάθε $z \in \Omega$, δηλαδή $u \equiv w$ και η Φ είναι 1-1.

Η απεικόνιση Φ είναι επίσης επί. Πράγματι, αν $g = (g_1, g_2, \dots) \in X$, τότε για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός αριθμός $n(z)$ τέτοιος ώστε

$$z \in \Omega_m, \text{ για κάθε } m \geq n(z),$$

αφού $\Omega_m \subseteq \Omega_{m+1}$ και $\cup_m \Omega_m = \Omega$. Επιπλέον, δεδομένου ότι $T_{m,n(z)}g_m = g_{n(z)}$, έχουμε $g_m(z) = g_{n(z)}(z)$, για κάθε $m \geq n(z)$. Θέτουμε

$$u(z) = g_{n(z)}(z).$$

Θα δείξουμε ότι η u είναι αρμονική στο Ω . Αν $z_0 \in \Omega$ τότε $z_0 \in \Omega_{n(z_0)}$. Αφού το $\Omega_{n(z_0)}$ είναι ανοικτό, υπάρχει $B(z_0, r)$ που περιέχεται στο $\Omega_{n(z_0)}$. Για κάθε $z \in B(z_0, r)$, έχουμε

$$n(z) \leq n(z_0) \text{ και } u(z) = g_{n(z)}(z) = g_{n(z_0)}(z).$$

Αλλά $g_{n(z_0)} \in X_{n(z_0)}(\Omega_{n(z_0)}) \subset h(\Omega_{n(z_0)})$. Έπεται ότι η u είναι αρμονική στην μπάλα $B(z_0, r)$. Αφού το z_0 ήταν τυχόν στο Ω , έχουμε ότι

$$u \in h(\Omega).$$

Επίσης, είναι προφανές ότι $\Phi(u) = g$. Αφού η g τυχούσα απεικόνιση στο X , έπεται ότι η απεικόνιση Φ είναι επί.

Επιπλέον, η Φ είναι συνεχής. Πράγματι, αν ένα δίκτυο $u^i \in h(\Omega)$, $i \in I$ συγκλίνει σε μία u , ομοιόμορφα στα συμπαγή, τότε από το θεώρημα 1.4.3 το ίδιο ισχύει για κάθε μικτή, μερική παράγωγο. Αφού το Ω_m είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω έπεται ότι $u^i|_{\Omega_m} \rightarrow u|_{\Omega_m}$ στην τοπολογία του $a^\infty(\Omega_m)$. Από την υπόθεση έχουμε

$$u^i|_{\Omega_m} \rightarrow u|_{\Omega_m} \text{ στην τοπολογία του } X_m(\Omega_m).$$

Από την παρατήρηση 1.1.3, έχουμε ότι $\Phi(u^i) \rightarrow \Phi(u)$ στην τοπολογία του X . Συνεπώς, η απεικόνιση Φ είναι συνεχής.

Μένει να δείξουμε ότι η Φ^{-1} είναι επίσης συνεχής. Έστω ότι

$$(u^i|_{\Omega_1}, u^i|_{\Omega_2}, \dots) = \Phi(u^i) \rightarrow \Phi(u) = (u|_{\Omega_1}, u|_{\Omega_2}, \dots) \text{ στην τοπολογία του } X.$$

Τότε $u^i|_{\Omega_m} \rightarrow u|_{\Omega_m}$ για κάθε $m = 1, 2, \dots$ στην τοπολογία του $X_m(\Omega_m)$, το οποίο, από την υπόθεση, επάγει την ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή του Ω_m . Θα δείξουμε ότι $u^i \rightarrow u$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$.

Αν K συμπαγές υποσύνολο του Ω , τότε υπάρχει m_0 τέτοιο ώστε $K \subset \Omega_{m_0}$. Αλλά

$$u^i|_{\Omega_{m_0}} \rightarrow u|_{\Omega_{m_0}}$$

ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω_{m_0} και ειδικότερα στο K . Συνεπώς $u^i \rightarrow u$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές $K \subset \Omega$ κι άρα $u^i \rightarrow u$ στην τοπολογία του $h(\Omega)$. Έτσι, η Φ^{-1} είναι συνεχής κι η Φ ομοιομορφισμός. $\square$

Κεφάλαιο 2

Είναι γνωστό ότι οι έννοιες χωρίου ολομορφίας και χωρίου ασθενούς ολομορφίας είναι ισοδύναμες. Η αρχική απόδειξη ήταν κατασκευαστική, πολύπλοκη κι όχι στοιχειώδης. ([24])

Στη συνέχεια με χρήση του θεωρήματος του Baire δίδεται απλούστερη απόδειξη ([17]) και μάλιστα για γενικότερες κλάσεις $\mathcal{F}$ ολομόρφων συναρτήσεων κι όχι μόνο για $\mathcal{F} = H(\Omega)$, όπου $H(\Omega)$ είναι ο χώρος των ολομόρφων συναρτήσεων στο χωρίο $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Η απόδειξη βασίζεται σε ένα θεώρημα του Banach το οποίο συνεπάγεται ότι για κάθε χωρίο ασθενούς $\mathcal{F}$ -ολομορφίας το σύνολο $\mathcal{A}$ των μη επεκτάσιμων συναρτήσεων που ανήκουν στο $\mathcal{F}$ είναι δεύτερης κατηγορίας ως προς κάποια «καλή» τοπολογία του $\mathcal{F}$. Δηλαδή, το $\mathcal{A}$ περιέχει G_δ και πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{F}$.

Η χρήση του θεωρήματος του Banach δεν επιτρέπει να δείξουμε ότι το ίδιο το $\mathcal{A}$ είναι και G_δ μέσα στο $\mathcal{F}$. Αυτό επιτυγχάνεται αν το θεώρημα του Banach αντικατασταθεί από το θεώρημα μιγαδικής ανάλυσης φυσιολογικών οικογενειών του Montel. ([23])

Παραδείγματα χώρων που ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα είναι οι χώροι $A^p(\Omega)$, $H_\infty^p(\Omega)$, οι χώροι Bergman, Hardy κ.α.

Το ότι το θεώρημα του Banach δεν μπορεί να δώσει ότι το $\mathcal{A}$ είναι το ίδιο G_δ έπεται από δουλειές των St. Raymond, Ding και Gao ([25], [7]) διότι αποδεικνύουν ότι η συνεχής γραμμική εικόνα χώρου Banach ή Fréchet μέσα σε άλλο χώρο Fréchet, μπορεί να είναι οσοδήποτε ψηλά στην ιεραρχία Borel.

2.1 Επεκτάσιμες συναρτήσεις

Δίνουμε αρχικά δύο ορισμούς για τις επεκτάσιμες (αντίστοιχα μη επεκτάσιμες) συναρτήσεις και δείχνουμε ότι είναι ισοδύναμοι.

Ορισμός 2.1.1. ([23]) Έστω Ω ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$ και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση. Τότε η f λέγεται επεκτασιμη αν υπάρχουν ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $U \subseteq \mathbb{C}^d$ ώστε $U \cap \Omega \neq \emptyset$, $U \cap \Omega^c \neq \emptyset$, μία ολόμορφη συνάρτηση $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ και μια συνεκτική συνιστώσα V του $U \cap \Omega$ τέτοια ώστε $F|_V = f|_V$.

Διαφορετικά, η f ονομάζεται μη επεκτάσιμη.

Ορισμός 2.1.2. ([23]) Έστω Ω ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$ και $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ μια ολόμορφη συνάρτηση. Τότε η f λέγεται επεκτασιμη, υπό την έννοια των χωρίων Riemann, αν υπάρχουν δύο ευκλείδειες μπάλες $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{C}^d$, με

$$B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2 \cap \Omega, B_2 \cap \Omega \neq \emptyset, B_2 \cap \Omega^c \neq \emptyset,$$

και μία φραγμένη ολόμορφη συνάρτηση $F: B_2 \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $F|_{B_1} = f|_{B_1}$.

Διαφορετικά, η f ονομάζεται μη επεκτάσιμη, υπό την έννοια των χωρίων Riemann.

Πρόταση 2.1.3. ([23]) Οι ορισμοί 2.1.1 και 2.1.2 είναι ισοδύναμοι.

Απόδειξη. Έστω ότι η f ικανοποιεί τον ορισμό 2.1.2. Θέτουμε $U = B_2$ και θεωρούμε V τη συνιστώσα του $U \cap \Omega$ που περιέχει την B_1 . Δεδομένου ότι $f|_{B_1} = F|_{B_1}$, από την αρχή αναλυτικής συνέχισης έπεται $f|_V = F|_V$. Οπότε ο ορισμός 2.1.1 ικανοποιείται.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί τον ορισμό 2.1.1. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\bar{V} \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

Έστω $z_1 \in V \cap \Omega \subseteq U \cap \Omega$ και $z_2 \in U \cap \Omega^c$. Δεδομένου ότι το U είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$, υπάρχει πολυγωνική γραμμή Γ στο U που ενώνει τα z_1, z_2 . Όμως, $z_1 \in V$ ενώ $z_2 \notin V$, οπότε η Γ τέμνει το ∂V . Έστω

$$w \in \Gamma \cap \partial V.$$

Αφού $\Gamma \subseteq U$, έπεται $w \in \partial\Omega$. Έτσι,

$$w \in \partial V \cap \partial\Omega \subseteq \bar{V} \cap \partial\Omega$$

και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Αφού $w \in U$, υπάρχει $r > 0$, ώστε $B(w, r) \subset U$, όπου $B(w, r)$ η ευκλείδεια μπάλα με κέντρο w και ακτίνα r . Θέτουμε

$$B_2 = B\left(w, \frac{r}{2}\right).$$

Τότε η F είναι ολόμορφη και φραγμένη στην B_2 . Δεδομένου ότι $w \in \bar{V}$, έπεται $B_2 \cap V \neq \emptyset$ και θεωρούμε ένα $z \in B_2 \cap V$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $B(z, \delta) \subseteq B_2 \cap V$. Θέτουμε

$$B_1 = B\left(z, \frac{\delta}{2}\right).$$

Έτσι

$$B_1 \subseteq \bar{B_1} \subseteq B_2 \cap V \subseteq B_2 \cap \Omega, F|_{B_1} = f|_{B_1} \text{ και}$$

η F είναι ολόμορφη και φραγμένη στην B_2 .

Άρα η f ικανοποιεί τον ορισμό 2.1.2.

□

Παρατήρηση 2.1.4. Συχνά μία μη επεκτάσιμη συνάρτηση καλείται πουθενά επεκτάσιμη, ενώ μία επεκτάσιμη συνάρτηση καλείται κάπου επεκτάσιμη.

2.2 Χωρία ολομορφίας

Έστω Ω ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^d$ και $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\Omega)$ ένα σύνολο ολομόρφων συναρτήσεων $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$.

Ορισμός 2.2.1. ([23]) Το ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ λέγεται $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας αν υπάρχει $f \in \mathcal{F}$ μη επεκτάσιμη.

Ορισμός 2.2.2. ([23]) Το ανοικτό και συνεκτικό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ λέγεται ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας αν για κάθε ζευγάρι ανοικτών Ευκλείδειων μπαλών B_1, B_2 με

$$B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2 \cap \Omega, \quad B_2 \cap \Omega \neq \emptyset \text{ και } B_2 \cap \Omega^c \neq \emptyset$$

υπάρχει συνάρτηση $f_{B_1, B_2} \in \mathcal{F}$ ώστε ο περιορισμός της f_{B_1, B_2} στην B_1 να μην έχει φραγμένη, ολόμορφη επέκταση στην B_2 .

Στα επόμενα συμβολίζουμε $d_\Omega(x)$ την απόσταση του x από το Ω^c , δηλαδή

$$d_\Omega(x) = \sup\{r \in [0, +\infty): B(x, r) \subseteq \overline{\Omega}\},$$

$T_x f$ τη δυναμοσειρά της f με κέντρο το x , δηλαδή

$$T_x(f) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^d} \frac{\partial^\nu f(x)}{\nu!} (z - x)^\nu$$

και $d(T_x f)$ την ακτίνα σύγκλισής της $T_x f$.

Παρατήρηση 2.2.3. ([17]) Το ανοικτό συνεκτικό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ είναι ένα ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας αν και μόνο αν

$$d_\Omega(x) = \inf\{d(T_x f) : f \in \mathcal{F}\} \text{ για κάθε } x \in \Omega$$

ισοδύναμα αν και μόνο αν για κάθε $r > d_\Omega(x)$ υπάρχει $f \in \mathcal{F}$ ώστε $d(T_x f) < r$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}^d$ είναι ένα ασθενώς $\mathcal{F}$ -χώριο ολομορφίας, δηλαδή υποθέτουμε ότι για κάθε ζευγάρι ανοικτών ευκλείδειων μπαλών

$$B_1, B_2 \subseteq \mathbb{C}^d \text{ με } B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2 \cap \Omega, \quad B_2 \cap \Omega \neq \emptyset, \quad B_2 \cap \Omega^c \neq \emptyset$$

υπάρχει $f := f_{B_1, B_2} \in \mathcal{F}$ ώστε ο περιορισμός $f|_{B_1}$ να μην έχει φραγμένη, ολόμορφη επέκταση στην B_2 .

Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \Omega$ και $r > d_\Omega(x_0)$ ώστε $d(T_{x_0} f) \geq r$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Διαλέγουμε μια $f \in \mathcal{F}$ και $r' > 0$ τέτοιο ώστε $r > r' > d_\Omega(x_0)$. Θέτουμε

$$B_1 = B\left(x_0, \frac{d_\Omega(x_0)}{2}\right)$$

$$B_2 = B(x_0, r')$$

και

$$F(z) = T_{x_0}f(z) \text{ για κάθε } z \in B_2.$$

Τότε $B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2 \cap \Omega$, $B_2 \cap \Omega \neq \emptyset$, $B_2 \cap \Omega^c \neq \emptyset$, F ολόμορφη στην B_2 , $F|_{B_1} = f|_{B_1}$ και F φραγμένη στην B_2 αφού

$$|f(z)| \leq \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \partial B(x_0, r')\} \text{ για κάθε } z \in B_2.$$

Δηλαδή, η F είναι φραγμένη, ολόμορφη επέκταση της $f|_{B_1}$ στην B_2 , το οποίο είναι άτοπο.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $d_\Omega(x) = \inf\{d(T_x f) : f \in \mathcal{F}\}$, για κάθε $x \in \Omega$. Έστω ότι υπάρχουν ανοικτές ευκλείδειες μπάλες $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{C}^n$ με $B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2 \cap \Omega$, $B_2 \cap \Omega \neq \emptyset$, $B_2 \cap \Omega^c \neq \emptyset$ και συναρτήσεις $f \in \mathcal{F}$ και φραγμένη $F \in H(B_2)$ με $F|_{B_1} = f|_{B_1}$. Επιλέγουμε

$$x_0 \in B_1 \text{ ώστε } d_\Omega(x_0) < d_{B_2}(x_0) = r.$$

Τότε, $d(T_{x_0}f) = d(T_{x_0}F) \geq d_{B_2}(x_0) = r$, το οποίο είναι άτοπο. $\square$

Λήμμα 2.2.4. ([17]) Έστω $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$. Το Ω είναι ένα ασθενές $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας αν και μόνο αν υπάρχει ένα πυκνό υποσύνολο $A \subseteq \Omega$ τέτοιο ώστε $d_\Omega(x) = \inf\{d(T_x f) : f \in \mathcal{F}\}$ για κάθε $x \in A$.

Απόδειξη. Αν το Ω είναι ένα ασθενές $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας προφανώς ισχύει το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω $x_0 \in \Omega$ και $r > r_0 > d_\Omega(x_0)$. Υποθέτουμε ότι $d(T_{x_0}f) \geq r$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Επιλέγουμε

$$0 < s < \min\{d_\Omega(x_0), r - r_0, r_0 - d_\Omega(x_0)\}$$

και θέτουμε

$$U' = B(x_0, s).$$

Τότε $U' \subseteq \Omega$ ανοικτή περιοχή του x_0 και για κάθε $x \in U'$ και για κάθε $f \in \mathcal{F}$ έχουμε

$$d(T_x f) \geq r - s \geq r_0 \text{ και } d_\Omega(x) \leq d_\Omega(x_0) + s < r_0.$$

Όμως το A είναι πυκνό στο Ω , άρα $U' \cap A \neq \emptyset$ οπότε υπάρχει $x \in A$ με $d(T_x f) > d_\Omega(x)$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα ο Ω είναι ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας. $\square$

Η έννοια του ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίου ολομορφίας, είναι πιο γενική και μπορεί να οριστεί σε οποιοδήποτε (X, p) χωρίο Riemann επί του $\mathbb{C}^n$ ([17]).

Ορισμός 2.2.5. ([17]) Ένα ζευγάρι (X, p) λέγεται χωρίο Riemann (Riemann domain) επί του $\mathbb{C}^n$ αν ο X είναι Hausdorff συνεκτικός τοπολογικός χώρος και η απεικόνιση $p: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ είναι τοπικός ομοιομορφισμός.¹

Παρατήρηση 2.2.6. ([17]) Αν το σύνολο Ω είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}^n$, τότε το (Ω, id_Ω) είναι χωρίο Riemann επί του $\mathbb{C}^n$. Αυτή είναι η συνήθης ταυτοποίηση των τόπων του $\mathbb{C}^n$ με τα χωρία Riemann.

Ωστόσο, οποιοσδήποτε τοπικός ομοιομορφισμός $p: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ δίνει στο Ω δομή χωρίου Riemann επί του $\mathbb{C}^n$. Για παράδειγμα, το ζεύγος $(\mathbb{C}, \exp)$ είναι χωρίο Riemann επί του $\mathbb{C}$.

¹για κάθε $a \in X$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του a τέτοια ώστε $p(U)$ ανοικτό στο $\mathbb{C}^n$ και $p|_U: U \rightarrow p(U)$ ομοιομορφισμός

Ορισμός 2.2.7. ([17]) Έστω (X, p) ένα χωρίο Riemann επί του $\mathbb{C}^n$.

Μια συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται ολόμορφη αν η συνάρτηση $f \circ (p|_U)^{-1}$ είναι ολόμορφη με τη συνήθη έννοια στο $p(U) \subseteq \mathbb{C}^n$, για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε ο περιορισμός $p|_U: U \rightarrow p(U)$ να είναι ομοιομορφισμός.

Μια απεικόνιση $F = (F_1, \dots, F_m): X \rightarrow \mathbb{C}^m$ λέγεται ολόμορφη αν οι συναρτήσεις $F_1, \dots, F_m$ είναι ολόμορφες.

Ορισμός 2.2.8. ([17]) Έστω (X, p) ένα χωρίο Riemann επί του $\mathbb{C}^n$.

Η δυναμοσειρά

$$T_a f(z) := T_{p(a)}(f \circ p_a^{-1})(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^n} \frac{\partial^\nu f(a)}{\nu!} (z - p(a))^\nu$$

λέγεται σειρά Taylor της f . Θεωρούμε $d(T_a f)$ την ακτίνα σύγκλισης της σειράς Taylor $T_a f$,

$$d(T_a f) = \sup\{r > 0: T_a f(z) \text{ συγκλίνει για κάθε } z \in B_q(p(a), r)\},$$

όπου $q(z) = \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\}$ για $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

Παρατηρούμε ότι $d(T_a f) \geq d_X(a)$, όπου $d_X(a)$ η απόσταση από το σύνορο, δηλαδή

$$d_X(a) = \sup\{r \in (0, +\infty]: \text{υπάρχει } \hat{B}_q(a, r)\}$$

όπου για κάθε $a \in X$ και $r \in (0, +\infty]$ συμβολίζουμε με $\hat{B}_q(a, r)$ μια ανοικτή περιοχή του a τέτοια ώστε ο περιορισμός $p|_{\hat{B}_q(a, r)}: \hat{B}_q(a, r) \rightarrow p(\hat{B}_q(a, r))$ να είναι ομοιομορφισμός κι επιπλέον ισχύει $p(\hat{B}_q(a, r)) = B_q(p(a), r)$.

Επιπλέον, $f(x) = T_a f(p(x))$, αν $a \in X$, $x \in \hat{B}_q(a, r)$ και f ολόμορφη στο X .

Ορισμός 2.2.9. ([17]) Έστω (X, p) ένα χωρίο Riemann επί του $\mathbb{C}^n$ και $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq H(X)$.

Λέμε ότι ο (X, p) είναι ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας αν

$$d_X(a) = \inf \{d(T_a f): f \in \mathcal{F}\}, \text{ για κάθε } a \in X,$$

ισοδύναμα, αν για κάθε $r > d_X(a)$ υπάρχει $f \in \mathcal{F}$ ώστε $d(T_a f) < r$.

2.3 Το σύνολο των μη-επεκτάσιμων συναρτήσεων

Ορισμός 2.3.1. ([19]) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος.

Ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται 1ης κατηγορίας ή meager αν περιέχεται σε μια αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων με κενό εσωτερικό.

Ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται residual ή comeager αν το συμπλήρωμά του είναι 1ης κατηγορίας.

Παρακάτω βλέπουμε ότι, για κάθε ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας, το σύνολο $\mathcal{A}$ των μη επεκτάσιμων συναρτήσεων που ανήκουν στο $\mathcal{F}$ είναι residual, ως προς κάποια «καλή» τοπολογία του $\mathcal{F}$. Η απόδειξη γίνεται με τη χρήση του ακόλουθου θεωρήματος ανοικτής απεικόνισης του Banach.

Θεώρημα 2.3.2. [Banach] ([4]) Έστω διανυσματικοί χώροι E, F , όπου ο E είναι πλήρης μετριοποιήσιμος χώρος, ο F ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος και μια απεικόνιση $u: E \rightarrow F$ συνεχής και γραμμική. Τότε:

- Είτε η εικόνα $u(E)$ είναι 1ης κατηγορίας στο F .
- Η $u(E) = F$, η u είναι ανοικτή απεικόνιση και ο F είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Θεώρημα 2.3.3. ([17]) Έστω $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$ ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος Fréchet, του οποίου η τοπολογία $\mathcal{T}$ είναι συμβατή με τις συνήθεις πράξεις $+$, $\cdot$. Υποθέτουμε επίσης ότι η σύγκλιση $f_n \rightarrow f$ ως προς την τοπολογία του $\mathcal{F}$ συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση. Αν το Ω είναι ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας τότε το σύνολο

$$\mathcal{A} := \{f \in \mathcal{F} : f \text{ μη-επεκτάσιμη}\}$$

είναι residual στο $\mathcal{F}$.

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \Omega$ και $r > 0$ θέτουμε $\mathcal{F}_{a,r} := \{f \in \mathcal{F} : d(T_a f) \geq r\}$.

Τότε ο $\mathcal{F}_{a,r}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathcal{F}$. Πράγματι, αν $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_{a,r}$ και $c \in \mathbb{C}$ τότε $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$ και αφού ο F είναι διανυσματικός χώρος έπεται $f_1 + f_2 \in \mathcal{F}$ και $cf_i \in \mathcal{F}$, για $i = 1, 2$. Επιπλέον,

$$T_a f_i = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^\nu} \frac{\partial^\nu f_i(a)}{\nu!} (z - a)^\nu$$

με $d(T_a f_i) \geq r$. Όμως

$$\begin{aligned} T_a(f_1 + f_2) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^\nu} \frac{\partial^\nu (f_1 + f_2)(a)}{\nu!} (z - a)^\nu \\ &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^\nu} \frac{\partial^\nu f_1(a)}{\nu!} (z - a)^\nu + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^\nu} \frac{\partial^\nu f_2(a)}{\nu!} (z - a)^\nu \end{aligned}$$

και

$$T_a(cf_1) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^\nu} \frac{\partial^\nu (cf_1)(a)}{\nu!} (z - a)^\nu = c \cdot \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^\nu} \frac{\partial^\nu f_1(a)}{\nu!} (z - a)^\nu$$

οπότε $d(T_a(f_1 + f_2)) \geq r$ και $d(T_a(cf_1)) \geq r$. Άρα $f_1 + f_2 \in \mathcal{F}_{a,r}$ και $cf_1 \in \mathcal{F}_{a,r}$.

Εφοδιάζουμε τον $\mathcal{F}_{a,r}$ με τοπολογία $\mathcal{T}_{a,r}$ ώστε για $f_n, f_0 \in \mathcal{F}_{a,r}$ να ισχύει $f_n \rightarrow f_0$ ως προς την $\mathcal{T}_{a,r}$ αν και μόνο αν $f_n \rightarrow f_0$ ως προς την $\mathcal{T}$ και $T_a f_n \rightarrow T_a f_0$ ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή της ευκλείδειας μπάλας $B(a, r)$ με κέντρο a και ακτίνα r .

Με αυτή την τοπολογία ο $\mathcal{F}_{a,r}$ είναι χώρος Fréchet. Πράγματι, ο $\mathcal{F}_{a,r}$ παράγεται από την οικογένεια Γ των ημινορμών που παράγουν τους χώρους Fréchet $\mathcal{F}$ και $H(B(a, r))$. Η οικογένεια Γ είναι προφανώς αριθμήσιμη και διαχωρίζουσα, άρα ορίζει μετρική αναλλοίωτη στις μεταφορές. Μένει να δείξουμε ότι ο $\mathcal{F}_{a,r}$ είναι πλήρης. Θεωρούμε $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{F}_{a,r}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n \in \mathcal{F}$ και η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον πλήρη χώρο $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$. Άρα υπάρχει

$$f_0 \in \mathcal{F} \text{ ώστε } f_n \rightarrow f_0 \text{ ως προς την τοπολογία } \mathcal{T}.$$

Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $d(T_a f_n) \geq r$ και η $(T_a f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στον πλήρη χώρο $H(B(a, r))$ εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή. Άρα υπάρχει

$$f_1 \in H(B(a, r)) \text{ με } T_a f_n \rightarrow f_1 \text{ ομοιόμορφα στα συμπαγή της } B(a, r),$$

οπότε $T_a f_n(z) \rightarrow f_1(z)$ για κάθε $z \in B(a, r)$. Όμως από την υπόθεση η σύγκλιση $f_n \rightarrow f_0$ ως προς την τοπολογία $\mathcal{T}$ συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση στο X . Οπότε για κάθε $z \in B(a, r) \cap X$ έχουμε

$$f_0(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_a f_n(z) = f_1(z).$$

Επομένως $f_0 \in \mathcal{F}_{a,r}$ και $f_n \rightarrow f_0$ ως προς την $\mathcal{T}_{a,r}$ κι έχουμε το ζητούμενο.

Παρατηρούμε ότι η ταυτοτική απεικόνιση $id: (\mathcal{F}_{a,r}, \mathcal{T}_{a,r}) \rightarrow (\mathcal{F}, \mathcal{T})$ είναι συνεχής, από τον ορισμό της $\mathcal{T}_{a,r}$. Έτσι, από το θεώρημα Banach είτε $\mathcal{F}_{a,r} = \mathcal{F}$ ή το σύνολο $\mathcal{F}_{a,r}$ είναι πρώτης κατηγορίας στο $\mathcal{F}$. Αφού ο Ω είναι $\mathcal{F}$ -χωρίς ολομορφίας, έπεται ότι για $r > d_\Omega(a)$ ο $\mathcal{F}_{a,r}$ είναι πρώτης κατηγορίας.

Θεωρούμε ένα $B \subseteq \Omega$ αριθμήσιμο και πυκνό στο Ω και θέτουμε

$$\mathcal{H} := \bigcup_{a \in B, k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{a, d_\Omega(a) + 1/k}.$$

Τότε ο $\mathcal{H}$ είναι πρώτης κατηγορίας στο $\mathcal{F}$, ως αριθμήσιμη ένωση συνόλων πρώτης κατηγορίας στο $\mathcal{F}$ κι άρα το συμπλήρωμα του $\mathcal{F} \setminus \mathcal{H}$ είναι residual στο $\mathcal{F}$.

Όμως, $\mathcal{F} \setminus \mathcal{H} = \mathcal{A}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \setminus \mathcal{H} &= \bigcap_{a \in B, k \in \mathbb{N}} \left\{ f \in \mathcal{F} : d(T_a f) < d_\Omega(a) + \frac{1}{k} \right\} \\ &= \bigcap_{a \in B} \{ f \in \mathcal{F} : d(T_a f) \leq d_\Omega(a) \} \end{aligned}$$

κι αφού για κάθε $a \in \Omega$ ισχύει $d(T_a f) \geq d_\Omega(a)$ έπεται

$$\mathcal{F} \setminus \mathcal{H} = \bigcap_{a \in B} \{ f \in \mathcal{F} : d(T_a f) = d_\Omega(a) \}.$$

Δηλαδή $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{H}$ αν και μόνο αν $d(T_a f) = d_\Omega(a)$ για κάθε $a \in B$. Από το λήμμα 2.2.4 έπεται $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{H}$ αν και μόνο αν το Ω είναι ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίς ολομορφίας, δηλαδή $d(T_x f) = d_\Omega(x)$ για κάθε $x \in \Omega$. Άρα $f \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{H}$ αν και μόνο αν η f είναι μη επεκτάσιμη. $\square$

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και στην γενικότερη περίπτωση που το ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίς ολομορφίας είναι ορισμένο επί ενός χωρίου Riemann (X, p) και η απόδειξη του θεωρήματος είναι παρόμοια.

Παρατήρηση 2.3.4. Στην προηγούμενη απόδειξη χρησιμοποιείται η ακτίνα σύγκλισης του αναπτύγματος Taylor ολόμορφης συνάρτησης. Μπορούμε να αποφύγουμε την χρήση της ακτίνας σύγκλισης με τον ακόλουθο τρόπο.

Έστω U τόπος που τέμνει και το Ω και το Ω^c και έστω V μια σταθεροποιημένη συνιστώσα της τομής $U \cap \Omega$. Θεωρούμε

$$X = X_{U,V,\mathcal{F}}$$

το σύνολο των ολομόρφων συναρτήσεων $f \in H(U)$ για τις οποίες υπάρχει $g \in \mathcal{F}$ με $f|_V = g|_V$. Προφανώς η $g = g(f)$ είναι μοναδική. Ο X γίνεται χώρος Fréchet αν εφοδιαστεί με τις ημινόρμες του $\mathcal{F}$ για την $g = g(f)$ και τις συνήθεις ημινόρμες για την f στο $H(U)$.

Για να αποδειχθεί η πληρότητα του χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η σύγκλιση $g_n \rightarrow g$ μέσα στο $\mathcal{F}$ συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση $g_n(z) \rightarrow g(z)$ για κάθε $z \in V$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$T: X \rightarrow Y \text{ με } T(f) = g(f).$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι η T είναι γραμμική και συνεχής. Άρα βάσει του θεωρήματος 2.3.2 του Banach η εικόνα $T(X) \subset \mathcal{F}$ ικανοποιεί είτε τη σχέση $T(X) = \mathcal{F}$ ή η εικόνα $T(X)$ είναι πρώτης κατηγορίας.

Παίρνοντας ως U όλες τις ευκλείδειες μπάλες με ρητές ακτίνες και κέντρα σε ένα αριθμήσιμο, πυκνό υποσύνολο του $\partial\Omega$, κι επειδή κάθε φορά τα V είναι το πολύ αριθμήσιμα καταλήγουμε στο ότι το σύνολο των επεκτάσιμων στοιχείων του $\mathcal{F}$ είτε είναι όλο το $\mathcal{F}$ ή είναι σύνολο πρώτης κατηγορίας. Παίρνοντας συμπληρώματα βλέπουμε ότι το σύνολο των μη επεκτάσιμων στοιχείων του $\mathcal{F}$ ή είναι κενό ή περιέχει G_δ - πυκνό υποσύνολο του $\mathcal{F}$ και έχουμε αποφύγει τη χρήση της ακτίνας σύγκλισης.

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια των θεωρημάτων του Baire και του Montel, παίρνουμε πιο ισχυρό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.3.5 (κατηγορίας του Baire). ([10]) Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και (G_n) ακολουθία ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X . Τότε το σύνολο $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X .

Θεώρημα 2.3.6 (Montel). ([1]) Έστω $f_n, n = 1, 2, \dots$ μια ακολουθία ολομόρφων συναρτήσεων σε ένα ανοικτό Ω , η οποία είναι τοπικά ομοιόμορφα φραγμένη. Τότε υπάρχει υπακολουθία f_{k_n} της $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή του Ω .

Θεώρημα 2.3.7. ([23]) Υποθέτουμε ότι ο $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\Omega) \subseteq H(\Omega)$ είναι ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος με τις συνήθεις πράξεις $+, \cdot$ και η τοπολογία του επάγεται από μία πλήρη μετρική. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η σύγκλιση $f_n \rightarrow f$ ως προς την τοπολογία του $\mathcal{F}$ συνεπάγεται την κατά σημείο σύγκλιση $f_n(z) \rightarrow f(z)$ για κάθε $z \in \Omega$. Τότε το Ω είναι ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας αν και μόνο αν είναι $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας.

Επιπλέον, αν ισχύουν οι παραπάνω υποθέσεις και το Ω είναι ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας τότε το σύνολο

$$\mathcal{A} := \{f \in \mathcal{F} : f \text{ μη επεκτάσιμη}\}$$

είναι πυκνό και G_δ στο $\mathcal{F}$.

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι κάθε ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας είναι και $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας. Για τον αντίστροφο ισχυρισμό, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ μη επεκτάσιμη}\}$ είναι πυκνό και G_δ . Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathcal{A}^c$ είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathcal{F}$ με κενό εσωτερικό.

Θεωρούμε Y το σύνολο των ζευγαριών (B_1, B_2) Ευκλείδειων μπαλών τέτοιες ώστε

$$B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2 \cap \Omega, \quad B_2 \cap \Omega \neq \emptyset, \quad B_2 \cap \Omega^c \neq \emptyset,$$

τα κέντρα των B_1, B_2 ανήκουν στο $\mathbb{Q}^{2d}$ και οι ακτίνες των B_1, B_2 ανήκουν στο $(0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$, όπου $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών. Παρατηρούμε ότι το Y είναι αριθμήσιμο.

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$A^c = \bigcup_{(B_1, B_2) \in Y} \bigcup_{M \in \{1, 2, \dots\}} T(B_1, B_2, M)$$

όπου $T(B_1, B_2, M) \subseteq \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε αν $f \in \mathcal{F}$, τότε υπάρχει F ολόμορφη στην B_2 και φραγμένη από το M ώστε $F|_{B_1} = f|_{B_1}$.

Συνεπώς, το A^c είναι αριθμήσιμη ένωση των συνόλων $T(B_1, B_2, M)$. Από το θεώρημα του Baire αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε B_1, B_2 και M το σύνολο $T(B_1, B_2, M)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{F}$ με κενό εσωτερικό.

Θεωρούμε $f_n \in T(B_1, B_2, M)$ και $f \in \mathcal{F}$ με $f_n \rightarrow f$ ως προς την τοπολογία του $\mathcal{F}$. Για κάθε $n \in \{1, 2, \dots\}$ υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση F_n στην B_2 , φραγμένη από το M με $F_n|_{B_1} = f_n|_{B_1}$. Από το θεώρημα του Montel υπάρχει υπακολουθία F_{k_n} της F_n που συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή της B_2 σε μία συνάρτηση F ολόμορφη στην B_2 και φραγμένη από το M .

Από την υπόθεση, η σύγκλιση $f_n \rightarrow f$ στην τοπολογία του $\mathcal{F}$, συνεπάγεται την κατα σημείο σύγκλιση στο Ω . Συνεπώς,

$$f|_{B_1} = \lim_n f_n|_{B_1} = \lim_n f_{k_n}|_{B_1} = \lim_n F_{k_n}|_{B_1} = F|_{B_1},$$

όπου $f \in \mathcal{F}$ και F ολόμορφη στην B_2 και φραγμένη από το M . Επομένως, $f \in T(B_1, B_2, M)$ και το $T(B_1, B_2, M)$ είναι κλειστό στο $\mathcal{F}$.

Μένει να δείξουμε ότι το εσωτερικό του $T(B_1, B_2, M)$ είναι κενό. Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $f \in T(B_1, B_2, M)^0$. Από την υπόθεση, υπάρχει συνάρτηση $f_{B_1, B_2} \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε ο περιορισμός της στην B_1 να μην έχει φραγμένη, ολόμορφη επέκταση στην B_2 . Δεδομένου ότι

$$f + \frac{1}{n} f_{B_1, B_2} \rightarrow f,$$

στην τοπολογία του $\mathcal{F}$, και η f είναι στο εσωτερικό του $T(B_1, B_2, M)$, υπάρχει $n \in \{1, 2, \dots\}$ ώστε η

$$f + \frac{1}{n} f_{B_1, B_2} \in T(B_1, B_2, M).$$

Συνεπώς τόσο η f όσο και η $f + \frac{1}{n} f_{B_1, B_2}$ περιορισμένες στην B_1 έχουν ολόμορφη επέκταση στην B_2 φραγμένη από M . Συνεπώς και η διαφορά τους, $\frac{1}{n} f_{B_1, B_2}$, έχει ολόμορφη επέκταση στην B_2 φραγμένη από $2M$. Έπεται ότι η f_{B_1, B_2} έχει ολόμορφη επέκταση στην B_2 φραγμένη από $2nM$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την επιλογή της f_{B_1, B_2} . Άρα

$$T(B_1, B_2, M)^0 = \emptyset.$$

□

Παρατήρηση 2.3.8. Παραδείγματα συνόλων $X = X(\Omega)$ που ικανοποιούν τις υποθέσεις των θεωρημάτων 2.3.3 και 2.3.7 είναι οι χώροι $A^p(\Omega)$, $H_\infty^p(\Omega)$, οι χώροι Bergman, οι χώροι Hardy κ.α.

Δίνουμε τώρα μερικές εφαρμογές.

Εφαρμογή 2.3.9. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος στο επίπεδο και $\mathcal{F} = H(\Omega)$ το σύνολο των ολομόρφων συναρτήσεων στο Ω με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή. Τότε υπάρχει $f \in H(\Omega)$ μη επεκτάσιμη και το σύνολο τους είναι G_δ -πυκνό στο $H(\Omega)$.

Απόδειξη. Για κάθε $w \in \partial\Omega$ θεωρούμε την συνάρτηση

$$f_w(z) = \frac{1}{z - w} \in H(\Omega).$$

Αυτή δεν είναι επεκτάσιμη σε κανένα δίσκο που περιέχει το w . Το θεώρημα 2.3.7 δίνει το αποτέλεσμα. $\square$

Σημειώνουμε ότι στο $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, υπάρχουν τόποι Ω ώστε κάθε $f \in H(\Omega)$ να είναι επεκτάσιμη. Ένα παράδειγμα είναι το

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 : \frac{1}{2} < |z| < 1\}.$$

Εφαρμογή 2.3.10. Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ένας τόπος στο επίπεδο, τέτοιος ώστε η κλειστότητα $\bar{\Omega}$ να είναι μέσα στο $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $w \in \partial\Omega$ υπάρχει ακολουθία $w_n \in (\bar{\Omega})^c$ με $w_n \rightarrow w$. Έστω $\mathcal{F}$ οποιοσδήποτε χώρος που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 2.3.7 και

$$\mathcal{F} \supseteq A^\infty(\Omega),$$

όπου $A^\infty(\Omega)$ ο χώρος των ολομόρφων συναρτήσεων $f \in H(\Omega)$ για τις οποίες κάθε παράγωγος $f^{(l)}$, $l = 0, 1, 2, \dots$ έχει συνεχή επέκταση στο $\bar{\Omega}$. Τότε το σύνολό των $f \in \mathcal{F}$ μη επεκτάσιμων συναρτήσεων είναι μη κενό, G_δ και πυκνό στο $\mathcal{F}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο δίσκους (B_1, B_2) όπως στο θεώρημα 2.3.7. Επειδή $B_2 \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, υπάρχει $w \in B_2 \cap \partial\Omega$ και $w_{n_0} \in \bar{\Omega}^c$ με $w_{n_0} \in B_2$. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z - w_{n_0}}.$$

Αυτή ανήκει στο $A^\infty(\Omega) \subseteq \mathcal{F}$ και ο περιορισμός $f|_{B_1}$ δεν επεκτείνεται στο B_2 όπως εύκολα φαίνεται χρησιμοποιώντας την αρχή της αναλυτικής συνέχισης και το γεγονός ότι η f έχει πόλο στο w_{n_0} . Το θεώρημα 2.3.7 δίνει το αποτέλεσμα. $\square$

Εφαρμογή 2.3.11. Έστω $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, z \notin [0, \frac{1}{2}]\}$ και

$$\mathcal{F} = A(\Omega) = \{f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C} \text{ συνεχής με } f|_\Omega \text{ ολόμορφη}\},$$

με την supremum νόρμα. Τότε κάθε $f \in A(\Omega)$ είναι επεκτάσιμη και το σύνολο των μη επεκτάσιμων στοιχείων της $A(\Omega)$ είναι κενό.

Απόδειξη. Μια γνωστή εφαρμογή του θεωρήματος του Morera είναι ότι αν $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής στο ανοικτό $G \subseteq \mathbb{C}$ και για μία ευθεία ε η $f|_{G \setminus \varepsilon}$ είναι ολόμορφη, τότε η f είναι ολόμορφη στο G . Εφαρμόζουμε το προηγούμενο για

$$G = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$$

και ε την πραγματική ευθεία και καταλήγουμε ότι κάθε $f \in A(\Omega)$ επεκτείνεται ολόμορφα στο $G \supseteq \Omega$. Το αποτέλεσμα είναι άμεσο. $\square$

Παρατήρηση 2.3.12. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι το θεώρημα του Banach δεν μπορεί να δώσει ότι το σύνολο $\mathcal{A}$ είναι το ίδιο G_δ , καθώς η συνεχής γραμμική εικόνα χώρου Banach ή χώρου Fréchet, μπορεί να είναι οσοδήποτε ψηλά στην ιεραρχία Borel.

Κεφάλαιο 3

Στο ([12]) αναφέρεται ότι ήδη από το 1933 οι Banach ([3]) και Mazur ([22]) έθεσαν ερωτήματα σχετικά με την πολυπλοκότητα υποδομών Πολωνικών δομών, τα οποία απαντήθηκαν από τον Klee το 1958 στο ([20]).

Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος X λέμε ότι έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach, αν είναι εικόνα ενός διαχωρίσιμου χώρου Banach μέσω μιας συνεχούς και γραμμικής απεικόνισης ([25]).

Αποδεικνύεται ότι σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach υπάρχει υπόχωρος με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο, με οσοδήποτε μεγάλη πολυπλοκότητα στην ιεραρχία των συνόλων Borel. Το ίδιο συμπέρασμα ισχύει και για απειροδιάστατο χώρο Fréchet. Αυτό είναι αποτέλεσμα του Jean Saint Raymond στο ([25]).

Κατά συνέπεια το θεώρημα ανοικτής απεικόνισης του Banach δεν μας επιτρέπει να δείξουμε ότι για κάθε ασθενώς $\mathcal{F}$ -χωρίο ολομορφίας το σύνολο $\mathcal{A}$ των μη-επεκτάσιμων συναρτήσεων είναι G_δ και πυκνό. Όπως είδαμε αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των θεωρημάτων του Baire και του Montel ([23]).

Παρακάτω θα δούμε μια πιο απλή απόδειξη για την ύπαρξη χώρου με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο, οσοδήποτε ψηλά στην ιεραρχία των συνόλων Borel, που δίνεται από τους Longyun Ding και Su Gao στο ([7]). Θα ξεκινήσουμε με κάποια στοιχεία από την Περιγραφική Συνολοθεωρία.

3.1 Ιεραρχία συνόλων Borel

Θεωρούμε έναν μετριοποιήσιμο τοπολογικό χώρο X και τον πρώτο μη αριθμήσιμο διατακτικό αριθμό ω_1 . Για κάθε $1 \leq \xi < \omega_1$ ορίζουμε ([19]) τις κλάσεις $\Sigma_\xi^0(X)$, $\Pi_\xi^0(X)$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\Sigma_1^0(X) &= \{U \subseteq X : U \text{ ανοικτό} \} \\ \Pi_\xi^0(X) &= \{A \subseteq X : X \setminus A \in \Sigma_\xi^0\} \\ \Sigma_\xi^0(X) &= \left\{ \bigcup_n A_n : A_n \in \Pi_{\xi_n}^0(X), \xi_n < \xi, n \in \mathbb{N} \right\}, \text{ για } \xi > 1\end{aligned}$$

Επιπλέον, θεωρούμε

$$\Delta_\xi^0 = \Sigma_\xi^0 \cap \Pi_\xi^0$$

Χρησιμοποιώντας, το συμβολισμό $G(X)$ για τα ανοικτά, $F(X)$ για τα κλειστά και $\mathcal{E}_\sigma$, $\mathcal{E}_\delta$ για τις αριθμήσιμες ενώσεις και τομές αντίστοιχα στοιχείων της κλάσης $\mathcal{E}$ έχουμε:

$$\Sigma_1^0(X) = G(X)$$

$$\begin{aligned}
\Pi_1^0(X) &= F(X) \\
\Sigma_2^0(X) &= (F(X))_\sigma = F_\sigma(X) \\
\Pi_2^0(X) &= (G(X))_\delta = G_\delta(X) \\
\Sigma_3^0(X) &= (G_\delta(X))_\sigma = G_{\delta\sigma}(X) \\
\Pi_3^0(X) &= (F_\sigma(X))_\delta = F_{\sigma\delta}(X) \text{ κ.ο.κ}
\end{aligned}$$

Επίσης, $\Delta_1^0(X) = \{A \subset X : A \text{ ανοικτό και κλειστό}\}$.

Γενικότερα ισχύει:

1. $\Sigma_\xi^0(X) \cup \Pi_\xi^0(X) \subsetneq \Delta_a^0(X)$, για κάθε $1 \leq \xi < a < \omega_1$.
2. $\Sigma_\xi^0(X) = (\Delta_\xi^0(X))_\sigma$
3. $\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\xi < \omega_1} \Sigma_\xi^0(X) = \bigcup_{\xi < \omega_1} \Pi_\xi^0(X) = \bigcup_{\xi < \omega_1} \Delta_\xi^0(X)$

Οπότε, για την άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των συνόλων Borel του X , έχουμε την εξής εικόνα :

$$\begin{array}{ccccccc}
& \Sigma_1^0 & & \Sigma_2^0 & & \Sigma_\xi^0 & & \Sigma_\eta^0 \\
\Delta_1^0 & & \Delta_2^0 & & \dots & \Delta_\xi^0 & & \Delta_\eta^0 & \dots \\
& \Pi_1^0 & & \Pi_2^0 & & \Pi_\xi^0 & & \Pi_\eta^0
\end{array}$$

όπου ξ, η διατακτικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\xi < \eta < \omega_1$.

Παρατηρούμε ότι κάθε κλάση ανήκει σε οποιαδήποτε κλάση βρίσκεται δεξιά της.

Παρατήρηση 3.1.1. ([19]) Για κάθε $\xi < \omega_1$, οι κλάσεις $\Sigma_\xi^0(X)$, $\Pi_\xi^0(X)$ και $\Delta_\xi^0(X)$ είναι κλειστές ως προς πεπερασμένες τομές, πεπερασμένες ενώσεις και συνεχείς προεικόνες.

Επίσης, η $\Sigma_\xi^0(X)$ είναι κλειστή ως προς αριθμήσιμες ενώσεις, η $\Pi_\xi^0(X)$ ως προς αριθμήσιμες τομές και η $\Delta_\xi^0(X)$ ως προς συμπληρώματα.

Στα επόμενα χρησιμοποιούμε τους τελεστές $\forall^\infty, \exists^\infty$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\forall^\infty n P(n) &\Leftrightarrow \text{το σύνολο } \{n \in \mathbb{N} : P(n)\} \text{ έχει πεπερασμένο συμπλήρωμα} \\
\exists^\infty n P(n) &\Leftrightarrow \text{το σύνολο } \{n \in \mathbb{N} : P(n)\} \text{ είναι άπειρο}
\end{aligned}$$

Ορισμός 3.1.2. ([19]) Έστω μια ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $A_n \subset X$. Τότε ορίζουμε:

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}_n A_n &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m = \{x : \exists^\infty n (x \in A_n)\} \\
\underline{\lim}_n A_n &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m = \{x : \forall^\infty n (x \in A_n)\}
\end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι $\underline{\lim}_n A_n \subseteq \overline{\lim}_n A_n$.

Αν είναι $\underline{\lim}_n A_n = \overline{\lim}_n A_n$ τότε ορίζουμε

$$\lim_n A_n = \underline{\lim}_n A_n = \overline{\lim}_n A_n.$$

Πρόταση 3.1.3. ([19]) Για κάθε $\xi \geq 1$ ισχύει

$$A \in \Delta_{\xi+1}^0 \Leftrightarrow A = \lim_n A_n, \text{ όπου } A_n \in \Delta_\xi^0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη. Υποθετούμε ότι υπάρχουν $A_m \in \Delta_\xi^0$ ώστε $A = \lim_m A_m$. Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $A_m \in \Sigma_\xi^0$, οπότε,

$$\bigcup_{m \geq n} A_m \in \Sigma_\xi^0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Από τον ορισμό της κλάσης $\Pi_{\xi+1}^0$, έπεται

$$A = \bigcap_n \left(\bigcup_{m \geq n} A_m \right) \in \Pi_{\xi+1}^0.$$

Επιπλέον, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $A_m \in \Pi_\xi^0$. Οπότε,

$$\bigcap_{m \geq n} A_m \in \Pi_\xi^0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και από τον ορισμό της κλάσης $\Sigma_{\xi+1}^0$, έπεται

$$A = \bigcup_n \left(\bigcap_{m \geq n} A_m \right) \in \Sigma_{\xi+1}^0,$$

δηλαδή,

$$A \in \Sigma_{\xi+1}^0 \cap \Pi_{\xi+1}^0 = \Delta_{\xi+1}^0.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $A \in \Delta_{\xi+1}^0 = \Sigma_{\xi+1}^0 \cap \Pi_{\xi+1}^0$. Τότε υπάρχουν $B_n \in \Pi_\xi^0$ και $C_n \in \Sigma_\xi^0$ ώστε

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Επίσης, από τον ορισμό των κλάσεων Σ_ξ, Π_ξ , για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $B_{n,p} \in \Sigma_{\xi-1}^0$ και $C_{n,p} \in \Pi_{\xi-1}^0$ ώστε

$$B_n = \bigcap_{p=1}^{\infty} B_{n,p} \text{ και } C_n = \bigcup_{p=1}^{\infty} C_{n,p}.$$

Όμως, οι κλάσεις $\Sigma_{\xi-1}^0$ και $\Pi_{\xi-1}^0$ περιέχονται στην Δ_ξ^0 , οπότε $B_{n,p}, C_{n,p} \in \Delta_\xi^0$, για κάθε $n, p \in \mathbb{N}$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ακολουθίες $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\{B_{n,p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ είναι φθίνουσες, ενώ οι $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\{C_{n,p}\}_{p \in \mathbb{N}}$ αύξουσες. Θέτουμε

$$K_{n,p} = B_{p,n} \cap \bigcap_{i=1}^p C_{i,n}$$

και

$$A_n = \bigcup_{p=1}^n K_{n,p}.$$

Αφού η κλάση Δ_ξ^0 είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις και πεπερασμένες τομές έπεται ότι

$$A_n \in \Delta_\xi^0 \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Θα δείξουμε ότι $\overline{\lim_n A_n} \subseteq A \subseteq \underline{\lim_n A_n}$, οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

Έστω $D \subsetneq A$, δηλαδή $D \subsetneq \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. Τότε υπάρχει $w \in \mathbb{N}$ ώστε

$$D \subseteq \bigcup_{n=1}^w B_n.$$

Όμως $\bigcup_{n=1}^w B_n = B_w = \bigcap_{p=1}^\infty B_{w,p}$. Άρα, για κάθε $p \in \mathbb{N}$

$$D \subseteq B_{w,p}.$$

Επιπλέον, $D \subsetneq \bigcap_{m=1}^\infty C_m$, δηλαδή για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$D \subsetneq C_m = \bigcup_{p=1}^\infty C_{m,p}.$$

Άρα, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, υπάρχει $r_m \in \mathbb{N}$ ώστε $D \subseteq C_{m,p}$ για κάθε $p \geq r_m$. Δηλαδή, υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε $D \subseteq C_{m,\ell}$ για κάθε $m = 1, 2, \dots, w, \ell > r$. Τότε για $n > r$ έχουμε

$$K_{n,w} = B_{w,n} \cap \left(\bigcap_{i=1}^w C_{i,n} \right) \supseteq D$$

οπότε για $n' > r + w$ έχουμε

$$A_{n'} = \bigcup_{p=1}^{n'} K_{n,p} \supseteq K_{n,w} \supseteq D.$$

Άρα, $\bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m \geq n} A_m \supseteq \bigcap_{n > r+w} A_n \supseteq D$, κι αφού το D είναι τυχόν γνήσιο υποσύνολο του A έχουμε

$$\bigcup_{D \subsetneq A} D \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m \geq n} A_m.$$

Άρα

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{m \geq n} A_m = \underline{\lim_n A_n}.$$

Θεωρούμε τώρα ένα $E \subsetneq A$, δηλαδή $E \subsetneq \bigcap_{m=1}^\infty C_m$. Τότε υπάρχει $q \in \mathbb{N}$ ώστε

$$E \supseteq \bigcap_{m=1}^q C_m.$$

Όμως $\bigcap_{m=1}^q C_m = C_q = \bigcup_{m=1}^\infty C_{q,m}$. Άρα, $E \supseteq C_{q,m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Επιπλέον, $E \subsetneq \bigcup_{m=1}^\infty B_m$, οπότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$E \subsetneq B_m = \bigcap_{p=1}^\infty B_{m,p}.$$

Συνεπώς για κάθε $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει $s_m \in \mathbb{N}$ ώστε $E \supseteq B_{m,n}$ για κάθε $n > s_m$. Άρα υπάρχει $s \in \mathbb{N}$ ώστε

$$E \supseteq B_{m,n}$$

για κάθε $m = 1, 2, \dots, q$ και $n > s$. Έστω $n > s$. Αν $m \leq q$ τότε

$$K_{n,m} \subseteq B_{m,n} \subseteq E.$$

Αν $m > q$ τότε

$$K_{n,m} \subseteq \bigcap_{i=1}^q C_{i,n} \subseteq C_{q,n} \subseteq E.$$

Άρα, για κάθε $n > s$ έχουμε $A_n = \bigcup_{p=1}^n K_{n,p} \subseteq E$, οπότε $\bigcup_{n>s} A_n \subseteq E$. Συνεπώς,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \leq n} A_m \subseteq \bigcup_{m>s} A_m \subseteq E.$$

Κι αφού το E είναι τυχόν γνήσιο υπερσύνολο του A , έπεται

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \leq n} A_m \subset \bigcup_{m>s} A_m \subseteq \bigcap_{A \subsetneq E} E,$$

οπότε

$$\overline{\lim}_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m \leq n} A_m \subset A.$$

Τελικά, έχουμε $A = \lim_n A_n$.

□

3.2 Συνέχεια ομομορφισμών μεταξύ τοπολογικών ομάδων

Ορισμός 3.2.1. ([19]) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος.

Ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται πουθενά πυκνό αν $(\overline{A})^o = \emptyset$.

Ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται meager ή 1ης κατηγορίας αν $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το A_n είναι πουθενά πυκνό.

Ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται non-meager ή 2ης κατηγορίας αν δεν είναι meager.

Ένα σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται comeager ή residual αν το συμπλήρωμά του είναι meager.

Ορισμός 3.2.2. ([19]) Έστω X τοπολογικός χώρος. Ένα σύνολο $A \subset X$ έχει την ιδιότητα Baire (BP) αν υπάρχει U ανοικτό υποσύνολο του X , ώστε η συμμετρική διαφορά $A \Delta U$ να είναι meager στο X .

Ειδικότερα, κάθε ανοικτό, κλειστό, F_σ ή G_δ σύνολο έχει την ιδιότητα Baire.

Ορισμός 3.2.3. ([19]) Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι. Μια συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$ λέγεται Baire μετρήσιμη αν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού υποσυνόλου του Y έχει την ιδιότητα Baire στο X .

Πρόταση 3.2.4. ([19]) Έστω X ένας τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. Κάθε μη κενό ανοικτό υποσύνολο του X είναι non-meager.
2. Κάθε comeager υποσύνολο του X είναι πυκνό.
3. Η αριθμήσιμη τομή ανοικτών και πυκνών υποσυνόλων του X είναι πυκνό σύνολο στο X .

Ορισμός 3.2.5. ([19]) Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται χώρος Baire αν ικανοποιεί τις ισοδύναμες συνθήκες της πρότασης 3.2.4.

Ειδικότερα, κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι χώρος Baire.

Λήμμα 3.2.6. ([19]) Έστω G τοπολογική ομάδα. Αν το σύνολο $A \subseteq G$ έχει την ιδιότητα Baire και είναι non-meager, τότε το σύνολο $A^{-1}A = \{x^{-1}y: x, y \in A\}$ περιέχει μια ανοικτή περιοχή του 1.

Θεώρημα 3.2.7. ([19]) Έστω G, H τοπολογικές ομάδες και $\phi: G \rightarrow H$ ένας ομομορφισμός. Αν η ομάδα G είναι χώρος Baire, η ομάδα H είναι διαχωρίσιμος χώρος και η απεικόνιση ϕ είναι Baire μετρήσιμη, τότε η ϕ είναι συνεχής.

Απόδειξη. Αφού η $\phi: G \rightarrow H$ είναι ομομορφισμός ομάδων, αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχής στο 1. Έστω U μια ανοικτή περιοχή του $1 \in H$. Τότε υπάρχει V μια ανοικτή περιοχή του $1 \in H$ ώστε

$$V^{-1}V \subseteq U.$$

Θεωρούμε $\{h_n\}$ μια πυκνή ακολουθία στον H τέτοια ώστε

$$\bigcup_n h_n V = H.$$

Τότε

$$G = \bigcup_n \phi^{-1}(h_n V).$$

Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\phi^{-1}(h_n V)$ ήταν meager, τότε το G θα ήταν αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών υποσυνόλων, το οποίο αντιφάσκει με το γεγονός ότι το σύνολο G είναι χώρος Baire.

Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε το σύνολο $\phi^{-1}(h_n V)$ να είναι non-meager. Επιπλέον, η απεικόνιση ϕ είναι Baire μετρήσιμη, το $h_n V$ είναι ανοικτό υποσύνολο του H , άρα το $\phi^{-1}(h_n V)$ έχει την ιδιότητα Baire.

Από το λήμμα 3.2.6 έπεται ότι το σύνολο $(\phi^{-1}(h_n V))^{-1} \phi^{-1}(h_n V)$ περιέχει ανοικτή περιοχή του $1 \in G$. Αλλά

$$(\phi^{-1}(h_n V))^{-1} \phi^{-1}(h_n V) \subseteq \phi^{-1}(V^{-1}V) \subseteq \phi^{-1}(U),$$

οπότε υπάρχει ανοικτή περιοχή του $1 \in G$ που περιέχεται στο $\phi^{-1}(U)$, δηλαδή η ϕ είναι συνεχής στο $1 \in G$. $\square$

3.3 Αναλυτικοί χώροι

Ορισμός 3.3.1. ([5]) Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται Πολωνικός αν είναι διαχωρίσιμος, μετριοποιήσιμος και υπάρχει μετρική d συμβατή με την τοπολογία του X ώστε ο (X, d) να είναι πλήρης.

Είναι προφανές ότι κάθε πλήρης μετρικός χώρος είναι Πολωνικός.

Ορισμός 3.3.2. ([5]) Ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος X λέγεται αναλυτικός χώρος ή χώρος Souslin αν υπάρχουν ένας πολωνικός χώρος P και μία συνεχής και επί απεικόνιση $f: P \rightarrow X$.

Παρατηρούμε ότι κάθε Πολωνικός χώρος είναι και αναλυτικός χώρος.

Παρατήρηση 3.3.3. Είναι εύκολο να δούμε ότι η εικόνα ενός αναλυτικού χώρου μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης είναι επίσης αναλυτικός χώρος.

Λήμμα 3.3.4. ([5]) Έστω X ένας αναλυτικός τοπολογικός χώρος. Τότε κάθε σύνολο Borel του X είναι αναλυτικός υπόχωρος του X .

Λήμμα 3.3.5. ([5]) Έστω X ένας Hausdorff τοπολογικός χώρος και A, A' δύο αναλυτικοί υπόχωροι του X , ξένοι μεταξύ τους. Τότε υπάρχει ένα σύνολο Borel B του X τέτοιο ώστε $B \supseteq A$ και $B \cap A' = \emptyset$.

Πρόταση 3.3.6. ([5]) Έστω E, F δύο αναλυτικοί χώροι και $f: E \rightarrow F$ μια απεικόνιση συνεχής και επί. Τότε ένα σύνολο B είναι Borel υποσύνολο του F αν και μόνο αν το $f^{-1}(B)$ είναι Borel υποσύνολο του E .

Απόδειξη. Αν το B είναι σύνολο Borel στον F τότε, από την συνέχεια της f , έχουμε ότι το $f^{-1}(B)$ είναι Borel στον E .

Αντίστροφα, αν το $f^{-1}(B)$ είναι Borel στον E και το $E \setminus f^{-1}(B)$ είναι επίσης Borel στον E , και από το λήμμα 3.3.4 έπεται ότι τα σύνολα

$$f^{-1}(B) \quad \text{και} \quad E \setminus f^{-1}(B)$$

είναι αναλυτικοί χώροι στον E . Από την συνέχεια της f έπεται ότι τα σύνολα

$$B = f(f^{-1}(B)) \quad \text{και} \quad F \setminus B = f(E \setminus f^{-1}(B))$$

είναι αναλυτικοί χώροι στον F . Από το λήμμα 3.3.5 έπεται ότι το B είναι σύνολο Borel. □

3.4 Χώροι με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο

3.4.1 Ορισμός

Ορισμός 3.4.1. ([25]) Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος και Y ένας Borel διανυσματικός υπόχωρος του X . Λέμε ότι ο Y έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach αν υπάρχουν ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach Z και μια συνεχής γραμμική απεικόνιση $\phi: Z \rightarrow X$ ώστε $\phi(Z) = Y$.

Παρατήρηση 3.4.2. Αν ο Y έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach τότε υπάρχει διαχωρίσιμη, πλήρης νόρμα, που δίνει στον Y την ίδια Borel δομή, όπως αυτή που κληρονομεί από τον X .

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι υπάρχουν Z διαχωρίσιμος χώρος Banach και $\phi: Z \rightarrow X$ συνεχής, γραμμικός τελεστής με $\phi(Z) = Y$.

Θέτουμε $E = \ker \phi$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\Phi: Z/E \rightarrow Y \text{ με } \Phi(x + E) = \phi(x).$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η Φ είναι καλά ορισμένη, γραμμική, 1-1 και επί του Y . Επιπλέον, η Φ είναι συνεχής. Πράγματι, αν

$$x_n + E \in Z/E \text{ με } \|x_n + E\|_{Z/E} \rightarrow 0 ,$$

τότε από τον ορισμό της νόρμας πηλίκο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $y_n \in x_n + E$ ώστε

$$\|y_n\|_Z \leq \|x_n + E\|_{Z/E} + \frac{1}{n} .$$

Συνεπώς $\|y_n\|_Z \rightarrow 0$ κι από τη συνέχεια της ϕ έχουμε $\lim_n \phi(y_n) = 0$, οπότε

$$\lim_n \Phi(x_n + E) = \lim_n \phi(x_n) = \lim_n \phi(y_n) = 0 ,$$

άρα η Φ είναι συνεχής στο 0. Λόγω της γραμμικότητας έπεται ότι η Φ είναι συνεχής απεικόνιση.

Ο $(Z/E, \|\cdot\|_{Z/E})$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, άρα αναλυτικός χώρος και μάλιστα Πολωνικός. Συμβολίζουμε $\mathcal{T}_X$ την σχετική από τον X τοπολογία στον Y . Τότε ο $(Y, \mathcal{T}_X)$ είναι αναλυτικός χώρος, ως εικόνα πολωνικού χώρου μέσω μίας συνεχούς και επί απεικόνισης.

Από την πρόταση 3.3.6 έπεται ότι η Φ είναι Borel ισομορφισμός.

Ορίζουμε νόρμα στον Y , $\|\cdot\|_Y$, με

$$\|y\|_Y = \|\Phi^{-1}(y)\|_{Z/E} ,$$

για κάθε $y \in Y$. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\|\cdot\|_Y$ είναι πλήρης και διαχωρίσιμη νόρμα. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$B_{\|\cdot\|_Y}(y, \varepsilon) = \Phi \left(B_{\|\cdot\|_{Z/E}}(\Phi^{-1}(y), \varepsilon) \right) .$$

Οπότε ο $(Y, \|\cdot\|_Y)$ έχει την ίδια Borel δομή με τον $(Z/E, \|\cdot\|_{Z/E})$ άρα και με τον $(Y, \mathcal{T}_X)$. $\square$

Λήμμα 3.4.3. ([7]) Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach, Y διαχωρίσιμος τοπολογικός διανυσματικός χώρος και Y_1 υπόχωρος του Y που έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach. Αν η απεικόνιση $T: X \rightarrow Y$ είναι συνεχής και γραμμική, τότε ο $X_1 = T^{-1}(Y_1)$ έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach.

Απόδειξη. Από την παρατήρηση, υπάρχει πλήρης διαχωρίσιμη νόρμα $\|\cdot\|_{Y_1}$ που δίνει στον Y_1 την ίδια Borel δομή όπως αυτή που κληρονομεί από τον Y . Έστω $\mathcal{T}$ η τοπολογία που ορίζει η νόρμα στον Y_1 . Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση

$$id_{Y_1}: (Y_1, \mathcal{T}) \rightarrow Y \text{ με } id_{Y_1}(y) = y.$$

Παρατηρούμε ότι οι Y, Y_1 είναι τοπολογικές ομάδες ως προς την πράξη της πρόσθεσης, ο $(Y_1, \mathcal{T})$ είναι χώρος Baire, ως πλήρης μετρικός χώρος και η id_{Y_1} είναι Baire μετρήσιμη, αφού για κάθε $A \subset Y$ ανοικτό, το $id_{Y_1}^{-1}(A) = A \cap Y_1$ είναι ανοικτό στον Y_1 . Δηλαδή, το $id_{Y_1}^{-1}(A)$ έχει την ιδιότητα BP. Επιπλέον από την υπόθεση ο χώρος Y είναι διαχωρίσιμος. Συνεπώς, ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος 3.2.7 και η id_{Y_1} είναι συνεχής.

Θέτουμε

$$G_T = \{(x, y) \in X \times (Y_1, \mathcal{T}): T(x) = id_{Y_1}(y)\}.$$

Από την συνέχεια των απεικονίσεων T και id_{Y_1} , είναι εύκολο να δούμε ότι ο G_T είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $X \times (Y_1, \mathcal{T})$.

Ο $X \times Y_1$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach άρα και ο G_T είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

Αφού η Borel δομή του $(Y_1, \mathcal{T})$ είναι ίδια με αυτή που κληρονομεί από τον Y , έπεται ότι η Borel δομή του G_T είναι ίδια με αυτή που κληρονομεί από τον $X \times Y$.

Έστω σ η σχετική από τον $X \times Y$ τοπολογία στο G_T .

Θεωρούμε την απεικόνιση $E: X_1 \rightarrow (G_T, \sigma)$ με $E(x) = (x, T(x))$, όπου ο X_1 είναι εφοδιασμένος με την σχετική τοπολογία από τον X .

Τότε η E είναι 1-1, αφού για $x_1, x_2 \in X_1$ με $x_1 \neq x_2$ είναι προφανές ότι $(x_1, T(x_1)) \neq (x_2, T(x_2))$. Επιπλέον, αν $(x, y) \in G_T$ τότε $T(x) = id_{Y_1}(y) = y \in Y_1$. Άρα $x \in T^{-1}(Y_1) = X_1$ και $(x, y) = (x, T(x)) = E(x)$, δηλαδή η E είναι επί. Θεωρούμε $x_n, x \in X_1$ με $x_n \rightarrow x$ στην τοπολογία του X . Τότε, αφού η T είναι συνεχής, έπεται $T(x_n) \rightarrow T(x)$ στην τοπολογία του Y , άρα $(x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, T(x))$. Δηλαδή $E(x_n) \rightarrow E(x)$ στην τοπολογία του G_T και η E είναι συνεχής. Τέλος, αν $(x_n, y_n), (x, y) \in G_T$ και $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ στην τοπολογία του G_T , τότε $x_n \rightarrow x$ και $y_n \rightarrow y$ στις τοπολογίες των X και Y_1 αντίστοιχα. Όμως $x_n, x \in X_1$, άρα $x_n \rightarrow x$ στην τοπολογία του X_1 , δηλαδή η E^{-1} είναι συνεχής.

Οπότε, η E είναι Borel ισομορφισμός από το X_1 στον G_T .

Τέλος, ορίζουμε νόρμα στον X_1 ως εξής:

Θεωρούμε $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_{Y_1}$ τις νόρμες που δίνουν δομή διαχωρίσιμου χώρου Banach στους χώρους X και Y_1 αντίστοιχα. Για $x \in X_1$ θέτουμε

$$\|x\|_{X_1} = \frac{1}{2} (\|x\|_X + \|T(x)\|_{Y_1})$$

Παρατηρούμε ότι ο χώρος $(X_1, \|\cdot\|_{X_1})$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach και επιπλέον η απεικόνιση $id_{X_1}: (X_1, \|\cdot\|_{X_1}) \rightarrow X$ είναι συνεχής, αφού ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος

3.2.7. Πράγματι, οι X_1, X είναι τοπολογικές ομάδες, ο X_1 είναι χώρος Baire, ο X είναι διαχωρίσιμος και η id_{X_1} είναι Baire μετρήσιμη. Επιπλέον, η id_{X_1} είναι γραμμική και $id_{X_1}(X_1) = X_1$.

Άρα, ο X_1 έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach. $\square$

Παρακάτω θα δούμε ότι για κάθε διατακτικό $a < \omega_1$ υπάρχει υπόχωρος του $K^{\mathbb{N}}$, με την καρτεσιανή τοπολογία, όπου $K = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, που έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach και δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 . Στη συνέχεια θα δούμε ότι το συμπέρασμα αυτό επεκτείνεται στην περίπτωση απειροδιάστατου χώρου Banach και απειροδιάστατου χώρου Fréchet.

3.4.2 Υπόχωροι χώρου γινόμενου με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο

Έστω $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων Banach με νόρμες $\|\cdot\|_{X_n}$. Το γινόμενο $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ είναι γραμμικός, μετριοποιήσιμος χώρος, αλλά όχι απαραίτητα χώρος Banach.

Ωστόσο, μπορούμε να ορίσουμε υπόχωρο του $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ που έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach ως εξής ([7]):

Θέτουμε

$$X = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n : \lim_n \frac{\|x_n\|_{X_n}}{n+1} = 0\}$$

και

$$\|x\|_X = \sup_n \frac{\|x_n\|_{X_n}}{n+1}$$

Θεωρούμε $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_n X_n$, ώστε $\sup_n \frac{\|x_n\|_{X_n}}{n+1} < +\infty$. και $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει A_n αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X_n . Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a_n \in A_n$ ώστε $\frac{\|x_n - a_n\|}{n+1} < \varepsilon$. Συνεπώς

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|x_n - a_n\|_{X_n}}{n+1} < \varepsilon.$$

Θέτουμε $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ κι έχουμε $\|x - a\|_X < \varepsilon$. Αν $A = \prod_n A_n$, τότε το A είναι αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο του χώρου των στοιχείων του $\prod_n X_n$, για τα οποία $\sup_n \frac{\|x_n\|_{X_n}}{n+1} < +\infty$, εφοδιασμένου με την νόρμα $\|\cdot\|_X$. Συνεπώς, το σύνολο $A \cap X$ είναι αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του X και ο $(X, \|\cdot\|_X)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος.

Επιπλέον ο X είναι χώρος Banach. Πράγματι, θεωρούμε $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ακολουθία Cauchy στον X , όπου $x_m = (x_m^k)_{k \in \mathbb{N}}$ για κάθε $m = 1, 2, \dots$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x_m - x_n\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $m, n \geq m_0$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(x_m^k)_{m \in \mathbb{N}}$ είναι Cauchy στον πλήρη μετρικό χώρο X_k , άρα συγκλίνει σε κάποιο x^k . Σταθεροποιούμε ένα $k \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $m_k \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x_m^k - x^k\|_{X_k} < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $m \geq m_k$. Θέτουμε $N = \max\{m_k, m_0\}$. Τότε

$$\frac{\|x_m^k - x^k\|_{X_k}}{k+1} \leq \frac{\|x_m^k - x_N^k\|_{X_k}}{k+1} + \frac{\|x_N^k - x^k\|_{X_k}}{k+1} \Rightarrow$$

$$\frac{\|x_m^k - x^k\|_{X_k}}{k+1} < \|x_m - x_N\|_X + \frac{\varepsilon}{2},$$

οπότε για $m \geq m_0$

$$\frac{\|x_m^k - x^k\|_{X_k}}{k+1} < \varepsilon$$

Αφού το k ήταν τυχόν, έπεται $\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|x_m^k - x^k\|_{X_k}}{k+1} \leq \varepsilon$. Θέτουμε $x = (x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ και έχουμε $x \in X$ και $\|x_m - x\|_X \rightarrow 0$.

Θεωρούμε τώρα μια ακολουθία φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $\lambda_n: X_n \rightarrow K$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$X' = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X: \eta \ (\lambda_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ συγκλίνει}\}$$

$$\|x\|_{X'} = \frac{1}{2} \left(\|x\|_X + \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n(x_n)| \right)$$

και

$$\lambda'(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n(x_n) .$$

Λήμμα 3.4.4. ([7])

- i. Ο X' έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach.
- ii. Το λ' είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στο X'

Απόδειξη. i. Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή

$$T: X \rightarrow K^{\mathbb{N}} \text{ με } T((x_n)) = (\lambda_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}} .$$

Παρατηρούμε ότι ο T είναι συνεχής, αφού αν $x^m, x \in X$, $m \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{m \in \mathbb{N}} \|x_m - x\|_{X'} = 0,$$

τότε από τον ορισμό της $\|\cdot\|_{X'}$ ισχύει

$$\lim_{m \in \mathbb{N}} |\lambda_n((x_n^m) - (x_n))|,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε $\lim_{m \in \mathbb{N}} T(x^m) = T(x)$ ως προς την τοπολογία του $K^{\mathbb{N}}$.

Επιπλέον,

$$X' = T^{-1}(c),$$

όπου c ο χώρος των συγκλίνουσων ακολουθιών με την supremum νόρμα. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο c έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach.

Συνεπώς από το λήμμα 3.4.3 ο X' έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach.

- ii. Από την γραμμικότητα του ορίου και των συναρτησοειδών λ_n , $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι το συναρτησοειδές λ' είναι γραμμικό. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε τη συνέχεια του λ' στο 0. Έστω $x^m \in X'$ και $\lim_m \|x^m\|_{X'} = 0$. Τότε από τον ορισμό της $\|\cdot\|_{X'}$ έχουμε

$$\lim_m \left(\sup_n |\lambda_n(x_n^m)| \right) = 0.$$

Όμως

$$\lim_n \lambda_n(x_n^m) \leq \sup_n |\lambda_n(x_n^m)|,$$

οπότε

$$\lim_m \left(\lim_n \lambda_n(x_n^m) \right) = 0 ,$$

δηλαδή,

$$\lim_m (\lambda'((x_n^m))) = 0 .$$

Συνεπώς το λ' είναι συνεχές συναρτησοειδές.

□

3.4.3 Υπόχωροι του $K^{\mathbb{N}}$ με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε μια ακολουθία $(X^{(a)})_{a < \omega_1}$ υποχώρων του $K^{\mathbb{N}}$, που έχουν ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach ([7]).

Θεωρούμε μία 1-1 και επί απεικόνιση $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ με $(n, m) \rightarrow \langle n, m \rangle$. Για κάθε $s \in K^{\mathbb{N}}$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $s(\langle n, \cdot \rangle) \in K^{\mathbb{N}}$ και $s(\langle \cdot, \cdot \rangle) \in K^{\mathbb{N}^2}$.

Θέτουμε :

$$X^{(0)} = \{(r, r, \dots) : r \in K\} \simeq K$$

$$\|(r, r, \dots)\|_0 = |r|$$

$$\lambda^{(0)}((r, r, \dots)) = r$$

Υποθέτουμε ότι ο χώρος $(X^{(a)}, \|\cdot\|_a)$ και το συναρτησοειδές $\lambda^{(a)}$ έχουν ορισθεί για κάποιο διατακτικό αριθμό $a < \omega_1$.

Ορίζουμε:

$$X^{(a+1)} = \left\{ s \in K^{\mathbb{N}} : s(\langle \cdot, \cdot \rangle) \in (X^{(a)})^{\mathbb{N}}, \lim_n \frac{\|s(\langle n, \cdot \rangle)\|_a}{n+1} = 0 \text{ και } \lambda^{(a)}(s(\langle n, \cdot \rangle)) \text{ συγχλίνει} \right\}$$

$$\|s\|_{a+1} = \frac{1}{2} \left(\sup_n \frac{\|s(\langle n, \cdot \rangle)\|_a}{n+1} + \sup_n |\lambda^{(a)}(s(\langle n, \cdot \rangle))| \right)$$

$$\lambda^{(a+1)}(s) = \lim_n \lambda^{(a)}(s(\langle n, \cdot \rangle))$$

Αν ο $b < \omega_1$ είναι ένας οριακός διατακτικός, κι αν οι χώροι $(X^{(a)}, \|\cdot\|_a)$ και $\lambda^{(a)}$ έχουν ορισθεί για κάθε $a < b$, τότε σταθεροποιούμε μία αρίθμηση $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του συνόλου $\{a : a < b\}$ και ορίζουμε:

$$X^{(b)} = \left\{ s \in K^{\mathbb{N}} : s(\langle \cdot, \cdot \rangle) \in \prod_n X^{(a_n)}, \lim_n \frac{\|s(\langle n, \cdot \rangle)\|_{a_n}}{n+1} = 0 \text{ και } \lambda^{(a_n)}(s(\langle n, \cdot \rangle)) \text{ συγχλίνει} \right\}$$

$$\|s\|_b = \frac{1}{2} \left(\sup_n \frac{\|s(\langle n, \cdot \rangle)\|_{a_n}}{n+1} + \sup_n |\lambda^{(a_n)}(s(\langle n, \cdot \rangle))| \right)$$

$$\lambda^{(b)}(s) = \lim_n \lambda^{(a_n)}(s(\langle n, \cdot \rangle))$$

Από το λήμμα 3.4.4, για κάθε $a < \omega_1$, ο υπόχωρος του $K^{\mathbb{N}}$, $X^{(a)}$, έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach και το $\lambda^{(a)}$ είναι φραγμένο, γραμμικό συναρτησοειδές στον $X^{(a)}$.

3.4.4 Δύο ακολουθίες υποσυνόλων του $C = 2^{\mathbb{N}}$

Για $a < \omega_1$ ορίζουμε δύο ακολουθίες υποσυνόλων του συνόλου Cantor $C = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = 2^{\mathbb{N}}$, ως εξής ([7]):

Για $i = 0, 1$ θέτουμε:

$$S_i^{(0)} = \{(i, i, \dots)\} ,$$

$$S_i^{(a+1)} = \left\{ s \in 2^{\mathbb{N}} : \forall n (s(\langle n, \cdot \rangle)) \in S_0^{(a)} \cup S_1^{(a)} , \forall^\infty n (s(\langle n, \cdot \rangle)) \in S_i^{(a)} \right\}$$

και για $b < \omega_1$ οριακό διατακτικό, με $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια αρίθμηση του συνόλου $\{a : a < b\}$,

$$S_i^{(b)} = \left\{ s \in 2^{\mathbb{N}} : \forall n (s(\langle n, \cdot \rangle)) \in S_0^{(a_n)} \cup S_1^{(a_n)} , \forall^\infty n (s(\langle n, \cdot \rangle)) \in S_i^{(a_n)} \right\}$$

Συμβολίζουμε τον χώρο του Baire με

$$\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Με τη βοήθεια του επόμενου λήμματος θα δείξουμε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό $a < \omega_1$ κανένα από τα σύνολα $S_0^{(a)}, S_1^{(a)}$ δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 .

Λήμμα 3.4.5. ([7]) Για κάθε $E \subseteq \mathcal{N}$ που ανήκει στην κλάση Δ_{a+1}^0 , υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : \mathcal{N} \rightarrow C$, τέτοια ώστε

$$x \in E \Leftrightarrow f(x) \in S_0^{(a)} , x \notin E \Leftrightarrow f(x) \in S_1^{(a)}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο διατακτικό αριθμό a . Για $a = 0$, παρατηρούμε ότι αν $E \in \Delta_1^0$, δηλαδή αν το E είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό στο $\mathcal{N}$, τότε η συνάρτηση $f : E \rightarrow C$ με

$$f(x) = (0, 0, \dots) \text{ αν } x \in E \text{ και } f(x) = (1, 1, \dots) \text{ αν } x \notin E$$

είναι συνεχής.

Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για κάποιον διατακτικό αριθμό a . Θα δείξουμε ότι ισχύει και για τον επόμενο διατακτικό $a + 1$.

Έστω $E \subseteq \mathcal{N}$ ένα σύνολο που ανήκει στην κλάση Δ_{a+2}^0 . Από την πρόταση 3.1.3 υπάρχει ακολουθία συνόλων $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ που ανήκουν στην κλάση Δ_{a+1}^0 ώστε

$$E = \lim_n E_n = \{x \in \mathcal{N} : \forall^\infty n (x \in E_n)\} = \{x \in \mathcal{N} : \exists^\infty n (x \in E_n)\}.$$

Από την επαγωγική υπόθεση για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν συνεχείς απεικονίσεις $f_n : \mathcal{N} \rightarrow C$ ώστε

$$x \in E_n \Leftrightarrow f_n(x) \in S_0^{(a)} , x \notin E_n \Leftrightarrow f_n(x) \in S_1^{(a)}.$$

Ορίζουμε $f : \mathcal{N} \rightarrow C$ θέτοντας

$$f(x)(\langle n, m \rangle) = f_n(x)(m) .$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής.

Επιπλέον,

$$x \in E \Leftrightarrow \forall^\infty n (x \in E_n) \Leftrightarrow \forall^\infty n (f_n(x) \in S_0^{(a)}) \Leftrightarrow f(x) \in S_0^{(a+1)} \text{ και}$$

$$x \notin E = \{x \in \mathcal{N} : \exists^\infty (x \in E_n)\} \Leftrightarrow \forall^\infty n (x \notin E_n) \Leftrightarrow \forall^\infty n (f_n(x) \in S_1^{(a)}) \Leftrightarrow f(x) \in S_1^{(a+1)}.$$

Η απόδειξη για τους οριακούς διατακτικούς είναι ανάλογη. $\square$

Παρατήρηση 3.4.6. Διαλέγοντας λοιπόν ένα $E \subseteq \mathcal{N}$ που ανήκει στην μη κενή κλάση $\Delta_{a+1}^0 \setminus (\Pi_a^0 \cup \Sigma_a^0)$, βρίσκουμε μια συνεχή απεικόνιση $f: \mathcal{N} \rightarrow C$ ώστε

$$E = f^{-1}(S_0^{(a)}) \text{ και } \mathcal{N} \setminus E = f^{-1}(S_1^{(a)}).$$

Συνεπώς, για κάθε $a < \omega_1$ κανένα από τα $S_0^{(a)}, S_1^{(a)}$ δεν ανήκει στην Π_a^0 .

Λήμμα 3.4.7. ([7]) Για $a < \omega_1$ και $i = 0, 1$ έχουμε $S_i^{(a)} \subseteq X^{(a)}$ και για κάθε $s \in S_i^{(a)}$ έχουμε $\|s\|_a \leq 1$ και $\lambda^{(a)}(s) = i$.

Απόδειξη. Για $a = 0$ έχουμε:

$$S_i^{(0)} = \{(i, i, \dots)\} \subseteq \{(r, r, \dots)\} = X^{(0)},$$

$$s \in S_i^{(0)} \Rightarrow s = (i, i, \dots) \Rightarrow \|s\|_0 = |i| \leq 1, \text{ αφού } i = 0, 1$$

και

$$\lambda^{(0)}(s) = \lambda^{(0)}((i, i, \dots)) = i$$

Υποθέτουμε ότι το λήμμα ισχύει για κάποιον διατακτικό αριθμό a . Θα δείξουμε ότι ισχύει για τον επόμενο διατακτικό αριθμό $a + 1$.

Έστω $s \in S_i^{(a+1)}$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $s(\langle n, \cdot \rangle) \in S_0^{(a)} \cup S_1^{(a)} \subseteq X^{(a)}$. Άρα $s(\langle \cdot, \cdot \rangle) \in (X^{(a)})^{\mathbb{N}}$. Επιπλέον,

$$\lim_n \frac{\|s(\langle n, \cdot \rangle)\|_a}{n+1} \leq \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_n \frac{\|s(\langle n, \cdot \rangle)\|_a}{n+1} = 0$$

Επίσης, όταν $s \in S_i^{(a+1)}$, τότε $\forall^\infty n s(\langle n, \cdot \rangle) \in S_i^{(a)}$, άρα $\forall^\infty n \lambda^{(a)}(s(\langle n, \cdot \rangle)) = i$, δηλαδή η $\lambda^{(a)}(s(\langle n, \cdot \rangle))$ συγχλίνει. Οπότε,

$$S_i^{(a+1)} \subseteq X^{(a+1)} \text{ και } \lambda^{(a+1)}(s) = i.$$

Τέλος, για $s \in S_i^{(a+1)}$ έχουμε

$$\|s\|_{a+1} = \frac{1}{2} \left(\sup_n \frac{\|s(\langle n, \cdot \rangle)\|_a}{n+1} + \sup_n |\lambda^{(a)}(s(\langle n, \cdot \rangle))| \right) \Rightarrow$$

$$\|s\|_{a+1} \leq \frac{1}{2} \left(\sup_n \frac{1}{n+1} + \sup_n |i| \right) \Rightarrow$$

$$\|s\|_{a+1} \leq \frac{1}{2}(1+i) \Rightarrow$$

$$\|s\|_{a+1} \leq 1$$

Η απόδειξη για τους οριακούς διατακτικούς είναι ανάλογη. $\square$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι μπορούμε να βρούμε υπόχωρο του $K^{\mathbb{N}}$ με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο που δεν είναι στην κλάση Π_a^0 .

Θεώρημα 3.4.8. ([7]) Για κάθε $a < \omega_1$ ο υπόχωρος $\ker(\lambda^{(a)})$ του $K^{\mathbb{N}}$, έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach, αλλά δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 .

Απόδειξη. Ο $\ker(\lambda^{(a)})$ είναι κλειστός υπόχωρος του $X^{(a)}$, οπότε έχει ως μοντέλο διαχωρίσιμο χώρο Banach.

Η απεικόνιση $id_C: C \rightarrow K^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής, αφού οι χώροι $C, K^{\mathbb{N}}$ είναι εφοδιασμένοι με τις τοπολογίες γινόμενο που προκύπτουν από την διακριτή μετρική στον $\{0, 1\}$ και τη συνήθη μετρική στο K αντίστοιχα.

Ισχυριζόμαστε ότι για $a < \omega_1$ έχουμε $id_C^{-1}(\ker(\lambda^{(a)})) = S_0^{(a)}$.

Από το λήμμα 3.4.7 έπεται ότι $S_0^{(a)} \subseteq \ker(\lambda^{(a)})$ για κάθε $a < \omega_1$ κι αφού $S_0^{(a)} \subseteq C$ έχουμε

$$S_0^{(a)} \subseteq id_C^{-1}(\ker(\lambda^{(a)})).$$

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό θα δείξουμε με επαγωγή στο διατακτικό αριθμό a ότι αν $s \in \ker \lambda^{(a)} \cap C$ τότε

$$\lambda^{(a)}(s(\langle n, \cdot \rangle)) = 0 \text{ ή } 1 \text{ και } s \in S_0^{(a)}.$$

Για $a = 0$ αν $\lambda^{(0)}(s) = 0$ τότε $s = (0, 0, \dots)$ κι έχουμε το ζητούμενο. Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για τον διατακτικό a . Τότε, αν $s \in X^{(a+1)} \cap C$ με $\lambda^{(a+1)}(s) = 0$, έπεται

$$\lim_n \lambda^{(a)}(s(\langle n, \cdot \rangle)) = 0 \text{ άρα}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: |\lambda^{(a)}(s(\langle n, \cdot \rangle))| < \varepsilon, \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Από την επαγωγική υπόθεση, θέτοντας $\varepsilon = \frac{1}{2}$ βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\lambda^{(a)}(s(\langle n, \cdot \rangle)) = 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή, $s(\langle n, \cdot \rangle) \in id_C^{-1}(\ker(\lambda^{(a)})) \subseteq S_0^{(a)}$ για κάθε $n \geq n_0$. Από τον ορισμό του συνόλου $S_0^{(a+1)}$ έπεται $s \in S_0^{(a+1)}$, οπότε

$$id_C^{-1}(\ker(\lambda^{(a+1)})) \subseteq S_0^{(a+1)}.$$

Η απόδειξη του ισχυρισμού στην περίπτωση των οριακών διατακτικών είναι ανάλογη.

Από τις παρατηρήσεις 3.4.6 και 3.1.1 έπεται ότι για κάθε $a < \omega_1$, ο $\ker(\lambda^{(a)})$ δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 .

□

3.4.5 Υπόχωροι χώρων Banach με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο

Έστω $L = \left\{ s \in K^{\mathbb{N}}: \lim_n \frac{|s(n)|}{n+1} = 0 \right\}$.

Παρατηρούμε, όπως στην περίπτωση του $(X, \|\cdot\|_X)$ στην παράγραφο 3.4.2, ότι ο $(L, \|\cdot\|_L)$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

Για κάθε $a < \omega_1$ θέτουμε $L^{(a)} = L \cap \ker(\lambda^{(a)})$.

Λήμμα 3.4.9. ([7]) Ο $L^{(a)}$ είναι υπόχωρος του L με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο, αλλά δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 .

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η $id_L: L \rightarrow K^{\mathbb{N}}$ είναι συνεχής, αφού αν

$$s_n, s \in L \text{ και } \|s_n - s\|_L \rightarrow 0,$$

τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(s_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $s(k)$ ως προς την συνήθη τοπολογία στο K , άρα και η (s_n) συγκλίνει στο s ως προς την τοπολογία γινόμενο του $K^{\mathbb{N}}$.

Από το λήμμα 3.4.3, ο χώρος

$$L^{(a)} = id_L^{-1}(\ker(\lambda^{(a)}))$$

είναι υπόχωρος του L με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο.

Επιπλέον έχουμε

$$C \subseteq L,$$

αφού για κάθε $s \in C = 2^{\mathbb{N}}$ ισχύει $\left| \lim_n \frac{|s(n)|}{n+1} \right| \leq \lim_n \frac{1}{n+1} = 0$.

Η $id_C: C \rightarrow L$ είναι συνεχής. Πράγματι, έστω έστω $s \in C$ και (s_m) ακολουθία του C ώστε $s_m \rightarrow s$ στην τοπολογία του C και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0+1} < \varepsilon$, οπότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\frac{|s_m(n) - s(n)|}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon, \text{ για κάθε } m \in \mathbb{N}$$

Επιπλέον, από τη σύγκλιση $s_m \rightarrow s$ έπεται η σύγκλιση $s_m(n) \rightarrow s(n)$ στην τοπολογία του $\{0, 1\}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m_n \in \mathbb{N}$, ώστε

$$\frac{|s_m(n) - s(n)|}{n+1} < \varepsilon \text{ για κάθε } m \geq m_n.$$

Θέτουμε $M = \max\{m_1, \dots, m_{n_0}\}$. Τότε, για $n \leq n_0$ και για $m \geq M$ έχουμε

$$\frac{|s_m(n) - s(n)|}{n+1} < \varepsilon.$$

Τελικά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $m \geq M$ ισχύει

$$\frac{|s_m(n) - s(n)|}{n+1} < \varepsilon.$$

Συνεπώς, για κάθε $m \geq M$

$$\sup_n \frac{|s_m(n) - s(n)|}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\|s_m - s\|_L < \varepsilon$$

Αφού, το ε είναι τυχόν έπεται $\|s_m - s\|_L \rightarrow 0$ και η απεικόνιση id_C είναι συνεχής.

Επιπλέον,

$$id_C^{-1}(L^{(a)}) = id_C^{-1}(L \cap \ker(\lambda^{(a)})) = C \cap \ker(\lambda^{(a)}) = S_0^{(a)}.$$

Από τις παρατηρήσεις 3.4.6 και 3.1.1 έπεται ότι ο $L^{(a)}$ δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 .

□

Θεώρημα 3.4.10. ([7]) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε, για κάθε $a < \omega_1$ υπάρχει υπόχωρος του X , με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο που δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 .

Απόδειξη. Θεωρούμε $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μια ακολουθία του X τέτοια ώστε για κάθε $s \in K^{\mathbb{N}}$ ισχύει

$$\sum_n s(n)x_n = 0 \Leftrightarrow s = 0.$$

Παράδειγμα τέτοιας ακολουθίας είναι μια βασική ακολουθία στον X . Σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach υπάρχει βασική ακολουθία ([11]).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Για $s \in L$ και $n < m$ έχουμε

$$\left\| \sum_{k=n}^m s(k)x_k \right\| \leq \sum_{k=n}^m |s(k)|\|x_k\| \leq \sum_{k=n}^m \|s\|_L (k+1) \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \leq \|s\|_L \sum_{k=n}^m \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{\|s\|_L}{2^n}.$$

Συνεπώς, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(\sum_{k=1}^{\infty} s(k)x_k)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy στο χώρο Banach X κι άρα συγκλίνει.

Συνεπώς, μπορούμε να ορίσουμε τον γραμμικό τελεστή

$$F: L \rightarrow X \text{ με } F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s(k)x_k.$$

Από την επιλογή της ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ η F είναι 1-1.

Επίσης, η F είναι συνεχής αφού

$$\|F(s)\| \leq \sum_k |s(k)|\|x(k)\| \leq \|s\|_L \sum_k \frac{k+1}{(k+1)2^k} \leq \|s\|_L.$$

Γνωρίζουμε ότι ο $L^{(a)}$ είναι υπόχωρος του L με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο $F(L^{(a)})$ είναι υπόχωρος του X , με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο.

Τέλος, ο $F(L^{(a)})$ δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 του X , αφού ο $L^{(a)}$ δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 του L και η F είναι συνεχής. $\square$

Παρατήρηση 3.4.11. ([7]) Το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που ο χώρος X είναι χώρος Fréchet κι όχι χώρος Banach.

Απόδειξη. Αν ο X είναι απειροδιάστατος χώρος Fréchet μπορούμε να βρούμε ακολουθία κλειστών υποχώρων $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ του X τέτοια ώστε

$$L_n \supsetneq L_{n+1} \quad \text{και} \quad L_n \neq L_{n+1} ,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, έστω $x_1 \in X$ με $x_1 \neq 0$. Τότε από το θεώρημα Hahn-Banach ([11]) υπάρχει συνεχής συνάρτηση

$$f_1: X \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f_1(x_1) \neq 0.$$

Θέτουμε

$$L_1 = \ker f_1 .$$

Τότε ο L_1 είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του X και μάλιστα απειροδιάστατος, αφού ο $\ker f_1$ είναι συνδιάστασης 1. Ομοίως, υπάρχει

$$f_2: L_1 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f_2 \neq 0.$$

Θέτουμε

$$L_2 = \ker f_2 .$$

Τότε ο L_2 είναι κλειστός στον L_1 , κι άρα στον X , και

$$L_1 \supsetneq L_2.$$

Αφού ο X είναι απειροδιάστατος μπορούμε να επαναλάβουμε το ίδιο επιχείρημα άπειρες φορές και παίρνουμε τη ζητούμενη ακολουθία $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε ένα

$$x_n \in L_n \setminus L_{n+1}.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $s \in K^{\mathbb{N}}$, $s \neq 0$ ισχύει $\sum_n s(n)x_n = 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε $s(1) \neq 0$. Τότε

$$x_1 = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s(n)}{s(1)} x_n.$$

Όμως, $x_n \in L_2$ για κάθε $n \geq 2$. Οπότε $x_1 \in L_2$. Όμως $x_1 \in L_1$ και $L_1 \supsetneq L_2$, κι έχουμε αντίφαση. Άρα, η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ικανοποιεί την ιδιότητα

$$\sum_n s(n)x_n = 0, \quad s \in K^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow s = 0.$$

Έστω $\|\cdot\|$ η (F) -νόρμα του χώρου Fréchet X ([21]). Τότε, η απόδειξη συνεχίζεται όπως και στην περίπτωση του χώρου Banach. Δηλαδή, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι

$$\|x_n\| \leq \frac{1}{(n+1)2^{n+1}},$$

ώστε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $(\sum_{k=1}^{\infty} s(k)x_k)_{n \in \mathbb{N}}$ να είναι Cauchy στον πλήρη χώρο X κι άρα να συγκλίνει. Έτσι, ο τελεστής

$$F: L \rightarrow X \text{ με } F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s(k)x_k$$

είναι καλά ορισμένος, γραμμικός, 1-1 και συνεχής. Ο $L^{(a)}$ είναι υπόχωρος του L με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο που δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 του L . Από τη συνέχεια της F έπεται ότι ο $F(L^{(a)})$ είναι υπόχωρος του X με διαχωρίσιμο Banach μοντέλο, αλλά δεν ανήκει στην κλάση Π_a^0 του X .

□

Βιβλιογραφία

- [1] Ahlfors L. V., *Complex Analysis. An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable*, McGraw-Hill, Third Edition, 1979.
- [2] Axler S., Bourdon P., Ramey W., *Harmonic Function Theory*, Springer- Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2001.
- [3] Banach S., Kuratowski C., *Sur la structure des ensembles linéaires*, Studia Math. 4 p.95-99. 1933.
- [4] Beauzamy B., *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*, Notas de Matemática 86, North-Holland, 1982.
- [5] Bourbaki N., *Éléments de mathématique: Topologie générale*, Springer, 2007.
- [6] Conway J., *A course in operator theory*, American Mathematical Soc., 1999.
- [7] Ding L. and Gao S., *Separable Banach subspaces*, JMAA 340 p. 746 - 751, 2008.
- [8] Duren P.L., *Theory of H^p spaces*, Academic Press, N.Y. 1970.
- [9] Duren P., Schuster A., *Bergman spaces*, Mathematical Surveys and Monographs vol.100, AMS.
- [10] Engelking R., *General Topology*, PWN, Warszawa, 1977.
- [11] Fabian M., Habala P., Hájek P., Montesinos Santalucía V., Pelant J., Zizler V., *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, CMS Books in Mathematics, Springer, 2001.
- [12] Farah I., Solecki S. *Borel subgroups of Polish groups*, Adv. Math. 199(2) p. 499-541, 2006.
- [13] Garnett J., *Bounded Analytic Functions*, Springer, New York, 2007.
- [14] Gauthier P.M., *Lectures on Several Complex Variables*, Birkhäuser, Heidelberg, N.Y., Dordrecht, London.
- [15] Girela D., *Analytic functions of bounded mean oscillation*, Complex Function Spaces, Mekrijärvi, 1999, Univ. Joensuu Dept. Math. Rep. Ser., vol. 4, Univ. Joensuu, Joensuu p.61-170, 2001.

- [16] Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K., *Theory of Bergman spaces*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [17] Jarnicki M. , Pflug P. , *Extension of Holomorphic Functions*, De Gruyter expositions in Mathematics 34, Berlin, N.Y. 2000.
- [18] Kampoukou A., Nestoridis V., *A remark on projective limits of function spaces*, arxiv:1704.05780.
- [19] Kehris A.S., *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, 1996.
- [20] Klee V., *On the Borelian and projective types of linear subspaces*, Math. Scand 6, p.189-199, 1958.
- [21] Köthe G., *Topological Vector Spaces I*, Springer-Verlag, 1969.
- [22] Mazur S. , Sternbach L. *Über die Borelschen Typen von linearen Mengen*, Studia Math. 4 p. 48-53, 1933.
- [23] Nestoridis V., *Domains of Holomorphy*, Annales Mathématiques du Quebec, 21st Semptember 2017, p.01 - 05 / arxiv:1701.00734.
- [24] Range R. M., *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Graduate Texts in Mathematics 108, Springer-Verlag, N. York 1998.
- [25] Raymond J.S., *Espaces á modèles separable*, Ann. Ann. Inst. Fourier, vol. 26 No. 3 p. 211-256, 1976.
- [26] Rudin W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, co N.Y., 1966.
- [27] Rudin W., *Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$* , Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [28] Siskakis A., *On the Bergman space norm of the Cesàro operator*, Arch. Math.67 p.312-318, 1996.
- [29] Stein E., *Boundary Behavior of Holomorphic Functions of Several Complex Variables*, Math. Notes 11, Princeton University Press, 2016.