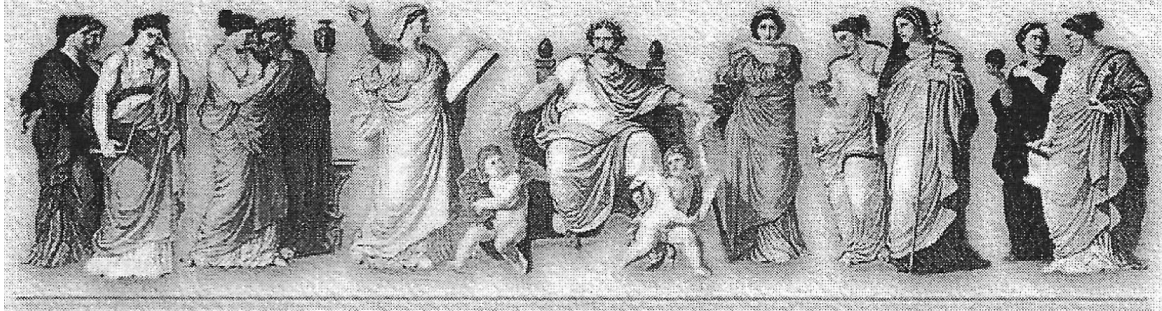


**ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ



Διπλωματική Εργασία

Παράδοξα στα Μαθηματικά

**ΒΟΥΔΟΥΡΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ
Α.Μ.: 201336**

Επιβλέπων καθηγητής: **ΓΡΥΛΛΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ**

Αθήνα, 2017

Περιεχόμενα

Πρόλογος	1
Εισαγωγή	2
1 Τ.Α.Σ. – Α.Σ. – Σ.Σ.	5
1.1 Χωροχρονικό πλαίσιο του Αξιώματος της Επιλογής	5
1.2 Απλή διατύπωση του Αξιώματος Επιλογής Α.Σ.	6
1.3 Τυπικά Αξιωματικά Συστήματα (Τ.Α.Σ)	7
1.4 Αξιωματικά Συστήματα που αφορούν στη Θεωρία Συνόλων	10
1.4.1 Αξιωματικό Σύστημα Zermelo-Fraenkel	10
1.5 Πρόγραμμα Hilbert	12
2 Ι Συνολοθεωρητικά Παράδοξα (χωρίς χρήση του Α.Σ.)	15
2.1 Συνολοθεωρητικά Παράδοξα σχετιζόμενα με τον ορισμό του συνόλου	15
2.2 Ισοδυναμία κατάτμησης	19
2.3 Ισοδυναμία Διάσπασης	22
2.3.1 Απαραίτητα στοιχεία	22
2.3.2 Κύκλος ισοδύναμος μέσω διάσπασης με κύκλο, ίσης ακτίνας, από τον οποίο έχει “αφαιρεθεί” ένα σημείο	23
2.3.3 Κυκλικός δίσκος ισοδύναμος μέσω διάσπασης με κυκλικό δίσκο, ίσης ακτίνας, από τον οποίο έχει “αφαιρεθεί” ένα ευθύγραμμο τμήμα	24
2.3.4 Σφαίρα από την οποία έχει “αφαιρεθεί” ένα σημείο είναι ισοδύναμη μέσω διάσπασης με μια πλήρη σφαίρα	26
2.3.5 Ερώτημα του Tarski το 1925 (τετραγωνισμός του κύκλου)	28
2.4 Επέκταση	30
2.5 Σημαντικό διευκρινιστικό σχόλιο	34
2.6 (1-2-3)-διάστατα “σύνολα Cantor”	34
2.6.1 Το σύνολο του Cantor (η σκόνη του Cantor)	35
2.7 Το παράδοξο των Sierpinski-Mazurkiewicz ($1=2!!!$)	37
II Συνολοθεωρητικά παράδοξα (με χρήση του Α.Σ.)	41
2.8 Περί του Αξιώματος της Επιλογής (Α.Σ.)	41
2.9 Κατασκευή Vitali	42
2.9.1 Σύνολο Vitali	42
2.9.2 Παράδοξα σχετιζόμενα με την κατασκευή Vitali	44

3 Το ΠΑΡΑΔΟΞΟ των Banach-Tarski (με χρήση A.C.)	49
3.1 Α' Μέρος (απαραίτητα εργαλεία της απόδειξης του Θεωρήματος)	50
3.2 Β' Μέρος (εκδοχή διπλασιασμού)	51
3.3 Γ' Μέρος (Εκδοχή μεγεθυντική ή Ισχυρή μορφή)	60
3.4 Ένα μη-ευκλείδειο μοντέλο του παραδόξου Hausdorff	62
3.5 Συλλογισμοί τύπου Banach-Tarski (ιδιότητα Baire)	63
3.5.1 Robinson	64
3.5.2 J. Mycielski	64
3.5.3 Randal Dougherty και Matthew Foreman	65

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον καθηγητή κ. Γρυλλάκη Κωνσταντίνο για την επίβλεψη της διπλωματικής εργασίας και τους καθηγητές της εξεταστικής επιτροπής κ. Δημητρακόπουλο Κωνσταντίνο και κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο.

Επίσης ευχαριστώ την Αλεξάνδρα, την Έλενα, τον Τάσο και τον Χρήστο για τη βοήθειά τους.

Πρόλογος

“Η οντογένεση συγκεκριαλιώνει τη φυλογένεση”.

Παιδαγωγική αρχή

Το άτομο επαναλαμβάνει την ανάπτυξη της ομάδας

(τουλάχιστον μια φορά ο μαθητής πρέπει να διδάσκεται το θέμα με τη σειρά με την οποία το θέμα αυτό αναπτύχθηκε στο πέρασμα του χρόνου).

Καταραμένε Έλληνα, όπου να γυρίσω τη σκέψη μου, όπου και να στρέψω την ψυχή μου, μπροστά μου σε βλέπω, σε βρίσκω: Τέχνη θλαχταρώ, Ποίηση, Θέατρο, Αρχιτεκτονική εσύ μπροστά! Πρώτος και αξεπέραστος.

Επιστήμη αναζητώ, Μαθηματικά, Φιλοσοφία, Ιατρική. . . κορυφαίος και ανυπέρβλητος.

Για Δημοκρατία διψώ, Ισονομία και Ισότητα. . . Εσύ μπροστά μου, ασυναγώνιστος και ανεπισκίαστος.

Καταραμένε Έλληνα, καταραμένη Γνώση. . . Γιατί να σε αγγίξω;

Για να αισθανθώ πόσο μικρός είμαι, ασήμαντος, μηδαμινός;

Γιατί δεν με αφήνεις στη δυστυχία μου και στην ανεμεθιά μου;

Friedrich Schiller (1795-1805) Γερμανός συγγραφέας και ποιητής.

Εισαγωγή (μια σύνθεση εισαγωγών)

Τα μαθηματικά δεν είναι μόνο ένα σύνολο αριθμητικών τεχνασμάτων που τα μαθαίνουμε στο σχολείο και μόλις ενηλικιωθούμε τα ξεχνάμε. Έχουν μακρόχρονη ιστορία εμπλοκής στην εξέλιξη του ανθρώπινου πολιτισμού, ιστορία που διαρκεί τουλάχιστον πέντε χιλιάδες χρόνια. Και εδώ, αντίθετα από ό,τι συμβαίνει στο χώρο των καλών τεχνών, δεν μιλάμε για πέντε χιλιάδες χρόνια στα οποία ο x επηρέαζε τον y κατά κάποιο επουσιώδη τρόπο, αλλά για πέντε χιλιάδες χρόνια στα οποία ο y έχτιζε πάνω στο σύνολο της δουλειάς του x . Τα μαθηματικά ήταν και είναι μια συλλογική δραστηριότητα ενός σχετικά μικρού αριθμού εξαιρετικά προικισμένων ατόμων που αγνοώντας τους περιορισμούς του χώρου και του χρόνου επικοινωνούν μεταξύ τους δημιουργώντας ένα από τα θαύματα του κόσμου.

Θα έφταναν στο σημείο να πω ότι η εξέλιξη της επιστήμης, της φιλοσοφίας και των μαθηματικών, συγγενών μεταξύ τους κλάδων, είναι πολύ πιο σημαντική για την ιστορία της ανθρωπότητας από ότι μια απαρίθμηση ηγεμόνων και πολέμων.

Τα Μαθηματικά, είναι ένα από τα πιο σημαντικά πολιτιστικά συστατικά κάθε σύγχρονης κοινωνίας και θεωρούνται πρωτοπόρος κλάδος στην επιστημονική έρευνα, κεντρικός μοχλός στην ανάπτυξη της τεχνολογίας και παράγοντας πολιτισμού. Τα μαθηματικά ποτέ δεν έπαψαν να είναι όλα αυτά τα πράγματα. Το καινούργιο είναι ότι τώρα, αυτό το βλέπουν περισσότεροι άνθρωποι.

Ο Einstein (και το ίδιο ισχύει και για τις άλλες μαθηματικές ιδιοφυίες) πέτυχε αυτό που πέτυχε εξαιτίας ενός συμπλέγματος παραγόντων, ένας από τους οποίους ήταν και η αναφίμβολη ευφυΐα του. Οι περισσότεροι από τους παράγοντες αυτούς είναι πολιτιστικής φύσης.

Αντικείμενο των μαθηματικών δεν είναι τα δυσνόητα σύμβολα. Είναι οι ιδέες: ιδέες για το χώρο, το χρόνο, τους αριθμούς, τις σχέσεις.

Όποιος ενδιαφέρεται για τη γέννηση των ιδεών που αποτελούν το πολιτιστικό του περιβάλλον μόνο όφελος έχει. Η εξέλιξη του αριθμού και της γεωμετρίας αρκεί για την παρουσίαση όλων των χαρακτηριστικών που υπάρχουν στην ανάπτυξη των πιο προχωρημένων μαθηματικών. Γεωμετρία είναι η μελέτη των αναλλοίωτων. Άλγεβρα είναι σε μεγάλο βαθμό η μελέτη της δομής.

Τα μαθηματικά είναι δραστηριότητα του ανθρώπινου μυαλού. Το ανθρώπινο μυαλό όμως επιδιώκει μια συνολική εικόνα, από την οποία μπορεί να κατανοήσει όλο το επίχειρημα, συνθέτοντας τις ιδέες σε μια γενικότερη δομή και συνδέοντας αυτές με άλλες ιδέες. Ο συνδυασμός της λογικής ανάλυσης και της συνολικής προσέγγισης δίδει τα καλύτερα αποτελέσματα. Η διαδικασία με την οποία δημιουργούνται μαθηματικές έννοιες δεν είναι λογική και ευθύγραμμη. Αυτή η διαδικασία δεν έχει καμία σχέση με μια αξιω-

ματική κατασκευή όλων των μαθηματικών από το κενό, η οποία είναι εφικτή και μπορεί να έχει φιλοσοφικό ενδιαφέρον, αλλά δεν έχει ιδιαίτερη διδακτική χρησιμότητα. Μεγάλο μέρος της μαθησιακής διαδικασίας συνίσταται στην ανακατασκευή πρότερων μαθηματικών εννοιών, για να προσαρμοστούν σε νέες ιδέες. Αυτή η διαδικασία είναι που προκαλεί σύγχυση. Πρέπει να περιμένετε ότι θα συναντήσετε περιόδους σύγχυσης, όταν αυτές δεν οφείλονται σε ελλειπή εξήγηση ή απλώς παρερμηνεία και πρέπει να τις θεωρείτε χρήσιμες και ευπρόσδεκτες. Είναι ένδειξη ότι συντελείται πρόοδος στις γνώσεις σας.

Ένα καλό παράδειγμα είναι η σύγχυση που προκάλεσε η έννοια των μιγαδικών αριθμών. Ήταν γνωστό ότι το τετράγωνο ενός αριθμού διαφορετικού από το μηδέν, είτε θετικού είτε αρνητικού, είναι πάντοτε θετικό. Άρα η τετραγωνική ρίζα του -1 δεν μπορούσε να είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός αριθμός, και δεν υπήρχε θέση πάνω στην ευθεία των αριθμών για μια τέτοια ποσότητα. Για να ξεπεραστεί η σύγχυση, ήταν απαραίτητο, να τροποποιηθεί η έννοια των αριθμών, που συνδεόταν με σημεία μιας ευθείας. Η τετραγωνική ρίζα του -1 έχει τη θέση της όχι στην ευθεία αλλά στο επίπεδο.

Το μυστήριο των μαθηματικών είναι ότι τα συμπεράσματα που πηγάζουν από το παιχνίδι του νου βρίσκουν εκπληκτικές εφαρμογές. (Το μυστήριο μόνο περιγράφεται, δεν εξηγείται).

Μια εκλαΐκευση αυτών των συμπερασμάτων, είναι καταδικασμένη να κινείται μεταξύ Σκύλλας και Χάρυβδης, με τη Σκύλλα να είναι η επαγγελματική καταδίκη και τη Χάρυβδη να είναι η παρανόηση από το κοινό.

Η προσπέλαση των Μαθηματικών στο μορφωμένο αλλά όχι ειδικευμένο κόσμο χωρίς την εγκατάλειψη υψηλών επιστημονικών κριτηρίων είναι πάντα μια απατηλή πλοήγηση.

Τουλάχιστον ο προορισμός του ταξιδιού αυτός ας απομακρύνεται της υπεραπλούστευσης.

Είναι δυνατόν ένα άτομο να κατανοήσει όλα ή σχεδόν όλα που αφορούν τα μαθηματικά.

Αυτό που είναι αδύνατον όμως είναι να τα συνοψίσει και να τα συμπίεσει σε λίγες σελίδες.

Αυτό που μπορεί όμως να κάνει και αυτό επιχειρούμε να κάνουμε είναι να εισέλθει σε αυτό το τεράστιο και δαιδαλώδες νοητικό οικοδόμημα από την κατάλληλη είσοδο.

Μια πραγματική κατανόηση των Μαθηματικών ιδεών δεν είναι δυνατή χωρίς την ανάλυση της προέλευσής τους.

Η παράθεση χρονολογιών έχει βασικό σκοπό να προσανατολίσει τον αναγνώστη ως προς την εποχή κατά την οποία κάποιος Μαθηματικός έδωσε τις πρωτότυπες εργασίες του. Η ακριβής ημερομηνία αρκετές φορές δεν είναι γνωστή, αλλά όπως είπαμε, δεν έχει βαρύνουσα σημασία για το σκοπό μας.

Ο Lagrange (1763-1813) αναφέρει *ο μαθηματικός δεν έχει κατανοήσει πλήρως το ίδιο του το έργο παρά μόνο όταν το έχει κάνει τόσο ξεκάθαρο, ώστε να μπορεί να το εξηγήσει αποτελεσματικά στον πρώτο τυχόντα που θα συναντήσει στο δρόμο*. Ιδανική κατάσταση αλλά όχι πάντα εφικτή.

Σταύρος Βουδούρης

Νοέμβριος 2017

Κεφάλαιο 1

Τ.Α.Σ. – Α.Σ. – Σ.Η.

1.1 Χωροχρονικό πλαίσιο του Αξιώματος της Επιλογής

Ο David Hilbert το 1900 στο Β' Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών (Παρίσι) παρουσιάζει μια λίστα 23 προβλημάτων (αναφέρθηκε στην ομιλία του στα 10 πρώτα) με πρώτο την Υπόθεση του Συνεχούς (C.H.) του Cantor.

Ο Cantor είχε υποθέσει την ακολουθία $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$ (υπερπεπερασμένοι πληθάριθοι). Κάθε πληθάριθος έχει μια θέση, εντάσσεται σε αυτό το σύστημα (ακολουθία). Υπέθετε επίσης ότι έπρεπε να υπακούουν σε μια διατακτική αρχή (όπως στο $\mathbb{R}$ είναι $a < b$, $a = b$, $a > b$). Επινόησε γι' αυτό την αρχή του πρώτου ή ελάχιστου στοιχείου, η οποία αποδεικνύεται ισοδύναμη με την «Αρχή της Καλής Διάταξης» (Α.Κ.Δ.).

- Το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι καλά διατεταγμένο (Κ.Δ.), ενώ το σύνολο $\mathbb{Z}$ δεν έχει ελάχιστο οπότε δεν είναι καλά διατεταγμένο.

Το 1883 σε άρθρο του αναγνώριζε την «Αρχή Καλής Διάταξης» ως καθοριστικής σημασίας παραδοχή για ολόκληρη τη θεωρία των σημειοσυνόλων. Πίστευε επίσης ότι κάθε σύνολο, καλώς ορισμένο, μπορεί να διαταχθεί καλώς. Δεν μπορούσε όμως να αποδείξει τους ισχυρισμούς του ότι κάθε υπερπεπερασμένος πληθικός αριθμός είναι ισοδύναμος με ένα από τα άλεφ του και συγκεκριμένα ότι το $\aleph_1$ (δηλαδή η επόμενη τάξη απείρου μετά το $\aleph_0$) ήταν ίσο με το c (τον πληθάριθο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, **του συνεχούς**) δηλαδή την Υπόθεση του Συνεχούς (C.H.).

Μάλιστα ο Gyula König (1849-1913) το 1904 στο Γ' Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών (Χαϊδελβέργη), καλής φήμης Μαθηματικός, παρουσίασε μια εργασία του με τον ισχυρισμό ότι ο πληθάριθος του συνεχούς του Cantor δεν ήταν ίσος με κανένα άλεφ (ούτε βέβαια με το $\aleph_1$).

Ο Cantor αρνείται να αποδεχθεί την απόδειξη, στην οποία όμως δεν μπορεί να βρει και κάποιο λάθος ή κενό.

Σε μια μέρα ο Ernest Zermelo (1871-1953), ο οποίος στο χειμερινό εξάμηνο του 1900-1901 δίδαξε μαθήματα σχετικά με θεωρία συνόλων στο Πανεπιστήμιο του Göttingen (Γκέτινγκεν) οπότε και έστρεψε το ενδιαφέρον του στη θεωρία συνόλων, απέδειξε ότι μία από τις προϋποθέσεις του König ήταν λανθασμένη, οπότε η απόδειξη δεν ήταν έγκυρη.

Ο Zermelo, όπως άλλωστε και ο Cantor, ανησυχούν για τη θεωρία συνόλων με αυτή της τη μορφή. Τη θεωρούν ευάλωτη.

Γενικά οι μέθοδοι του Cantor, όπως και οι ισχυρισμοί του ήταν αποσπασματικοί τις πρώτες μέρες της θεωρίας των συνόλων και κάποιοι και αναπόδεικτοι. Μεταξύ αυτών και ο ισχυρισμός ότι κάθε καλώς ορισμένο σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλώς, τον οποίο ο Zermelo θεώρησε αρκετά σημαντικό και βάλθηκε να τον αποδείξει.

Στην προσπάθεια αυτή δημιουργεί-επινοεί ένα κρίσιμο εργαλείο (η πραγματικότητα είναι ότι αυτή η ιδέα έχει εκφραστεί για πρώτη φορά από τον Berro-Levy το 1902 και έχει χρησιμοποιηθεί και από τον Cantor για να υποστηρίξει την απόδειξη της αρχής της καλής διάταξης). Αυτό είναι το «περιβόητο» όπως χαρακτηρίστηκε «Αξίωμα της Επιλογής του Zermelo» πηγή βεβαίως, θυελλωδών αντιδράσεων, οπαδών και πολεμίων με πιο σκληρό αντίπαλο τον Γάλλο Borel (1871-1956).

Το Αξίωμα της Επιλογής ισχυρίζεται ότι με δεδομένη οποιαδήποτε συλλογή μη κενών συνόλων είναι δυνατόν να επιλέξουμε ένα ακριβώς στοιχείο από κάθε σύνολο και να δημιουργήσουμε μ' αυτόν τον τρόπο ένα νέο σύνολο. Μια τέτοια παραδοχή ήταν απαραίτητη διότι απλοποιούσε πολλές αποδείξεις. Η καινοτομία ήταν ότι υπήρχε η δυνατότητα να γίνουν ταυτοχρόνως (εννοιολογικά) άπειρες επιλογές.

Ο Γάλλος Borel έδειξε ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη θεωρία συνόλων και το 1898 δημοσίευσε μια κριτική της θεωρίας συνόλων του Cantor. Εξέφρασε επίσης την άποψή του για την απόδειξη του Θεωρήματος Καλής Διάταξης από τον Zermelo το 1904, —η οποία απόδειξη ήταν βασισμένη στο Αξίωμα της Επιλογής— με τρόπο επικριτικό προς κάθε κατεύθυνση, η οποία έκανε χρήση μιας αυθαίρετης επιλογής, που διεξάγεται για ένα μη αριθμήσιμο πλήθος φορές, τονίζοντας ότι ένας τέτοιος συλλογισμός δεν ανήκει στα Μαθηματικά. Στο ίδιο μήκος κύματος κινήθηκε και ο Russell το 1905, με το γνωστό παράδειγμά του για τις αλεφ-μηδέν πλήθους μπότες.

1.2 Απλή διατύπωση του Αξιώματος Επιλογής A.C.

Έστω $\{A_i\}_{i \in I}$, δεδομένη, μια μη κενή οικογένεια, μη κενών και ξένων μεταξύ τους συνόλων. Τότε υπάρχει ένα σύνολο A που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο α_i από κάθε A_i .

Είναι ανεξάρτητο από τα υπόλοιπα αξιώματα της ZF συνολοθεωρίας (σε αυτό μοιάζει με το Αξίωμα των παράλληλων στην Ευκλείδεια Γεωμετρία). Η αναφορά του Αξιώματος της Επιλογής σε πεπερασμένες οικογένειες πεπερασμένων συνόλων με καθορισμένα στοιχεία, θεωρείται κάτι τελείως προφανές και εφικτό, καθορισμένο και ελέγξιμο (διατάσσουμε τα σύνολα στη σειρά και διαλέγουμε π.χ. το πρώτο στοιχείο από το καθένα).

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την εικασία του Goldbach να καθορίζει το σύνολο B όπως παρακάτω

$$B = \{x : x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ αν η εικασία Goldbach είναι σωστή ή λάθος αντίστοιχα}\}$$

Αν και γνωρίζουμε ότι το B είναι μονοσύνολο παρόλα αυτά, δεν είναι σαφώς καθορισμένο!!! Η αποδοχή του Αξιώματος Επιλογής γίνεται πιο δύσκολα, από ορισμένους Μα-

θηματικούς, ακόμη και από αυτή την αποδοχή του πραγματικού απείρου. Είναι πολύ δύσκολη, από φιλοσοφικής πλευράς τουλάχιστον, η αποδοχή του.

Αναλογιζόμενοι το προηγούμενο παράδειγμα του μονοσυνόλου B με την εικασία του Goldbach να το καθορίζει, αντιλαμβανόμαστε πόσο “τολμηρό πνευματικά” είναι το Αξίωμα της Επιλογής το οποίο αναφέρεται σε άπειρη οικογένεια με τα μέλη της μερικά ή όλα να είναι επίσης απειροσύνολα. Το πρόβλημα βρίσκεται βασικά στην διαδικασία επιλογής των στοιχείων (τις περισσότερες φορές είναι ακαθόριστη και απλώς εικάζεται η ύπαρξή της μόνο).

Το Αξίωμα της Επιλογής “υπεισέρχεται” σε πάρα πολλά θέματα. Θέλουμε να δείξουμε την ισοδυναμία του ορισμού του πεπερασμένου συνόλου κατά Dedekind και κατά τον συνήθη.

- Ο συνήθης ορισμός, αν τον χαρακτηρίσουμε σαν (O_σ) , αναφέρει ότι ένα σύνολο A είναι πεπερασμένο, αν υπάρχει φυσικός αριθμός n ώστε $\bar{A} = n$.
- Ο ορισμός κατά Dedekind, αν τον χαρακτηρίσουμε (O_D) , αναφέρει ότι ένα σύνολο A είναι πεπερασμένο, αν **δεν** υπάρχει αμφιμονοσήμαντη $(1-1)$ συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ (όχι αναγκαστικά επί) όπου $\mathbb{N}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Η απόδειξη του $(O_\sigma) \implies (O_D)$ είναι απλή.

Απόδειξη $((O_\sigma) \implies (O_D))$. Είναι προφανές ότι ένα πεπερασμένο σύνολο είναι πεπερασμένο κατά Dedekind, γιατί αλλιώς θα υπήρχε μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow n$ (άτοπο). $\square$

Η απόδειξη όμως του $(O_D) \implies (O_\sigma)$ δεν είναι καθόλου απλή υπόθεση.

Απόδειξη $((O_D) \implies (O_\sigma))$. Έστω ένα σύνολο A το οποίο δεν είναι πεπερασμένο. Τότε δεν υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $\bar{A} = n$. Αυτό σημαίνει ότι είναι $A \neq \emptyset$, οπότε θα έχει ένα στοιχείο τουλάχιστον.

Επιλέγουμε ένα στοιχείο $x_0 \in A$ και το σύνολο $A_0 = A \setminus \{x_0\}$ είναι επίσης μη κενό διότι αν ήταν το κενό, τότε το A θα ήταν μονοσύνολο οπότε $\bar{A} = 1$ (κάτι που έχουμε υποθέσει ότι δεν ισχύει).

Επιλέγουμε στη συνέχεια ένα στοιχείο x_1 από το A_0 και συνεχίζουμε με ίδιο τρόπο (και για τον ίδιο λόγο) επ’ άπειρο την διαδικασία.

Δημιουργούμε κατά αυτό τον τρόπο μια ακολουθία (άπειρη) στοιχείων του A (διαφορετικών ανά δύο εξαιτίας του τρόπου επιλογής) οπότε στην ουσία δημιουργούμε μια αμφιμονοσήμαντη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow A$, οπότε το σύνολο αυτό σημαίνει ότι το σύνολο A δεν είναι πεπερασμένο κατά Dedekind (άτοπο). $\square$

1.3 Τυπικά Αξιωματικά Συστήματα (Τ.Α.Σ)

Τα Στοιχεία εισήγαγαν για πρώτη φορά μια αξιωματική δομή στα Μαθηματικά. Η δομή αυτή στηρίζεται σε ορισμένα βασικά συμπεράσματα και έννοιες, οι οποίες προέκυψαν με αφαίρεση από την αντικειμενική πραγματικότητα (εννοούμε αυτήν που αντιλαμβανόμαστε

με τις αισθήσεις μας), και απαιτεί την εξαγωγή όλων των υπόλοιπων συμπερασμάτων μόνο με τη βοήθεια της Λογικής και χωρίς άλλη προσφυγή στην εμπειρία.

Τα Μαθηματικά και η Φυσική συνυφαίνονταν τόσους αιώνες με το νήμα της πίστης ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν απαραίτητα η γεωμετρία του χώρου. Κατέστη πλέον φανερό ότι υπάρχουν και άλλες περιγραφές του χώρου προστιτές στην ανθρώπινη νόηση ως συνέπεια της μελέτης ενός συνόλου αξιωμάτων, ας πούμε “τυχαίου”. Είναι τεράστιας σημασίας η μετατόπιση της σκέψης των ανθρώπων και η αποδέσμευση από πλαίσια παραδεκτά για τουλάχιστον δύο χιλιετίες.

Ανάλογου διαμετρήματος μπορεί να θεωρηθεί η στροφή από το γεωκεντρικό στο ηλιοκεντρικό σύστημα από τον Πολωνό αστρονόμο Nicolaus Copernicus (1473-1543) (με αρνητικό σημείο την επιμονή του στις κυκλικές τροχιές και τους επίκυκλους ώστε να πετύχει συμφωνία με τις παρατηρήσεις). Της ίδιας ποιότητας είναι η “ανακάλυψη” από τον Einstein ότι ο χρόνος δεν είναι ο ίδιος για όλους τους παρατηρητές.

Η συνειδητοποίηση ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν ήταν ο μοναδικός τύπος γεωμετρίας είχε συνέπειες που εκτείνονται σε τόσο διαφορετικές περιοχές γνώσης, έρευνας και δράσης όπως η Θρησκεία, η Φυσική και άλλα.

Τυπικό σύστημα χαρακτηρίζουμε το αξιωματικό σύστημα που έχει απογυμνωθεί πλήρως από όλα τα νοήματα, εκτός από εκείνα που μπορούν να οριστούν βάσει των συμφωνημένων αξιωμάτων και κανόνων του συστήματος.

Οι κανόνες έχουν τεθεί από εμάς και δεν διατείνονται ότι περιγράφουν κάποια αντικειμενική πραγματικότητα ή ανεξάρτητα αντικείμενα όπως αριθμούς και σύνολα.

Το *Τυπικό Σύστημα* είναι ένα αξιωματικό σύστημα με πρωτογενή δεδομένα (τα αξιώματα), κανόνες συμπερασμού και αποδεδειγμένα θεωρήματα

το οποίο όμως, αντί να αποτελείται από σύμβολα με νόημα όπως όρους που αναφέρονται π.χ. στον αριθμό 0 ή στη συνάρτηση διάδοχου αριθμού, οικοδομείται εξ ολοκλήρου από σύμβολα χωρίς νόημα, από σημάδια στο χαρτί που η σημασία τους ορίζεται αποκλειστικά βάσει των σχέσεων του καθενός με όλα τα άλλα όπως αυτές προκύπτουν από τους κανόνες.

Το *Τυπικό Σύστημα* είναι ένα αξιωματικό σύστημα που, αφ’ εαυτού, δεν αφορά τίποτα.

Ένα τυπικό σύστημα αποτελείται από συμφωνημένα αξιώματα και κανόνες. Οι κανόνες προσδιορίζουν τα σύμβολα (το «αλφάβητο») του συστήματος, μας δεσμεύουν πως μπορούμε να συνδυάσουμε τα σύμβολα αυτά μεταξύ τους, για να παράγουμε γραμματικές εκφράσεις (αλλιώς καλά διαμορφωμένους τύπους) και, τέλος, μας υπαγορεύουν πως μπορούμε να παράγουμε καλά διαμορφωμένους τύπους από, άλλους καλά διαμορφωμένους τύπους (μας καθορίζουν δηλαδή τους κανόνες συμπερασμού).

Σε ένα τυπικό σύστημα ο κίνδυνος να παρεισφρύσει η διαίσθηση εξαλείφεται. Η διαίσθηση είναι (κατά κοινή εκτίμηση) ένας τρόπος να εξερευνούμε την απροσδιόριστη ουσία των πραγματικών αντικειμένων, ένας τρόπος να αποκτούμε επαφή με αυτά.

Τα τυπικά μαθηματικά είναι απαλλαγμένα από αλήθειες που παρουσιάζονται να πηγάζουν από την «αληθινή φύση των πραγμάτων».

Τυπικό Αξιωματικό Σύστημα (Τ.Α.Σ) λοιπόν χαρακτηρίζουμε ένα σύστημα που αποτελείται από:

1. ορισμένους **απροσδιόριστους όρους**,
2. πιθανόν κάποιους **προσδιορισμένους όρους** (οι οποίοι βασίζονται στους απροσδιόριστους όρους) και
3. ορισμένες διατυπώσεις αποκαλούμενες **αξιώματα**
4. αποδεικτικούς (ή παραγωγικούς) κανόνες

ενώ οι άλλες διατυπώσεις καλούνται **Θεωρήματα** και τα οποία συνάγονται λογικά από τα αξιώματα και από τα προηγούμενα θεωρήματα. Κάποιες διατυπώσεις τις χαρακτηρίζουμε και ως **προτάσεις** (μικρότερης εμβέλειας συμπεράσματα από αυτή των θεωρημάτων).

Μια σημαντική έννοια (αρκετά πρακτική) είναι η έννοια του *Μοντέλου ενός Συστήματος*. **Μοντέλο** ενός Αξιωματικού Συστήματος είναι ένας τρόπος ερμηνείας των απροσδιόριστων όρων του, ώστε όλα τα αξιώματα να ικανοποιούνται.

Ερώτημα: Είναι δυνατόν ένα Αξιωματικό Σύστημα να οδηγεί σε κάποια αντίφαση, δηλαδή μια πρόταση μπορεί να αποδειχθεί ταυτόχρονα αληθής και ψευδής;

Απάντηση: Ασφαλώς και είναι δυνατόν κάτι τέτοιο. Ένα τέτοιο σύστημα βέβαια θα χαρακτηρίζεται **ασυνεπές** ή **αντιφατικό**. Όμως είναι δύσκολο πρακτικά να αποδειχθεί ένα σύστημα συνεπές διότι πρέπει να καταγραφούν όλα(!) τα συνεπαγόμενα θεωρήματα-προτάσεις και στη συνέχεια να διαπιστωθεί ότι δεν υπάρχει πρόταση που να αποδεικνύεται και αυτή και η άρνησή της.

Υπάρχει όμως ευτυχώς και ευκολότερος τρόπος ελέγχου της συνέπειας ενός Αξιωματικού Συστήματος και αυτός είναι η ύπαρξη μοντέλου (ιδιαίτερως χρήσιμη λοιπόν, η έννοια του μοντέλου).

Ερώτημα: Είναι δυνατόν ένα αξίωμα σε ένα συνεπές Αξιωματικό Σύστημα να μπορεί να αποδειχθεί με την βοήθεια των υπολοίπων (ή κάποιων από αυτά) αξιωμάτων;

Απάντηση: Ασφαλώς και είναι δυνατόν κάτι τέτοιο. Σε ένα τέτοιο σύστημα το αξίωμα αυτό θα καλείται **εξαρτημένο** και προφανώς *περιττεύει*. Είναι φανερό ότι αξιώματα σε ένα Αξιωματικό Σύστημα χωρίς την παραπάνω “παθολογία” θα καλούνται **ανεξάρτητα**.

Ερώτημα:

- i) Είναι δυνατόν δύο Αξιωματικά Συστήματα με τους ίδιους απροσδιόριστους όρους να παράγουν τα ίδια θεωρήματα;
- ii) Αν παράγουν τα ίδια θεωρήματα υποχρεωτικά διαθέτουν και τα ίδια αξιώματα;

- Απάντηση:**
- i) Ασφαλώς και είναι δυνατόν κάτι τέτοιο και αυτό συμβαίνει ακριβώς τότε όταν καθένα από τα αξιώματα του ενός συστήματος μπορεί να αποδειχθεί ως θεώρημα του άλλου συστήματος, με κάποια αξιώματα ίσως κοινά. Σε αυτή τη περίπτωση τα συστήματα καλούνται **ισοδύναμα**.
 - ii) Αν δύο Αξιωματικά Συστήματα συμφωνούν σε όλα τα αξιώματα, πλήν ενός, τότε τα δύο διαφορετικά αξιώματα θα χαρακτηρίζονται **ισοδύναμα** αν τα Αξιωματικά Συστήματα είναι ισοδύναμα. (Τα ισοδύναμα αξιώματα αλληλοϋποκαθίστονται.)

Προσοχή! Η ισοδυναμία δύο αξιωμάτων δεν εξαρτάται μόνο από αυτά αλλά και από τα κοινά αξιώματα των δύο συστημάτων.

Να διευκρινίσουμε εξ αρχής ότι ο τρόπος θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη δεν αποτελεί Τυπικό Αξιωματικό Σύστημα (Τ.Α.Σ) με την αυστηρή έννοια. Σε γενικές γραμμές (όχι αυστηρά κρίνοντας) θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως τέτοιας δομής.

1.4 Αξιωματικά Συστήματα που αφορούν στη Θεωρία Συνόλων

1.4.1 Αξιωματικό Σύστημα Zermelo-Fraenkel



Ernst Zermelo



Abraham Fraenkel

Το 1908 ο Zermelo (1871-1953) παρουσιάζει επτά αξιώματα [το πρώτο καθόριζε πως συμπεριφέρεται η έννοια «ισότητα» μεταξύ των συνόλων, τα υπόλοιπα έξι βεβαίωναν την ύπαρξη (παρήγαγαν) κάποιων συνόλων].

Ο Fraenkel (1891-1965) πρόσθεσε ένα ακόμη «άκρως παραγωγικό» αξίωμα, αυτό της αντικατάστασης. Στην πορεία μέχρι το 1925 (οπότε έχουμε και την τελική μορφή της ZF) προστέθηκε στον κατάλογο και ένα επιπλέον αξίωμα, το αξίωμα βάσης ή θεμελίωσης όπως το χαρακτηρίζουμε.

Το 1925 έχουμε την τελική μορφή της ZF θεωρίας συνόλων. Τα αξιώματα αναφέρονται μόνο στις έννοιες «σύνολο» και «ανήκει ή είναι στοιχείο του» τις οποίες θεωρούμε πρωταρχι-

κές έννοιες (δεν δίνεται ο ορισμός τους και οι ιδιότητές τους καθορίζονται από τα αξιώματα της θεωρίας και αποκαλύπτονται από τα προκύπτοντα θεωρήματα).

Για όλες τις άλλες έννοιες υπάρχουν αυστηροί ορισμοί. Η θεωρία είναι γραμμένη από τους Skolem (1887-1963) και Fraenkel (1891-1965) σε πολύ απλή συμβολική γλώσσα και αυτό οφείλεται στην πρόοδο που έκανε η Συμβολική Λογική εκείνα τα χρόνια, με τη δημιουργία της Λογικής Α Τάξης (first-order logic).

1. Αξίωμα της έκτασης

Τα τυχόντα σύνολα A και B είναι ίσα αν και μόνον αν έχουν τα ίδια στοιχεία.

2. Αξίωμα του κενού συνόλου

Υπάρχει σύνολο χωρίς στοιχεία.

3. Αξίωμα του ζεύγους

Για οποιαδήποτε σύνολα A και B υπάρχει σύνολο Γ που έχει στοιχεία του ακριβώς τα A και B .

4. Αξίωμα της Ένωσης

Για κάθε σύνολο A υπάρχει σύνολο B που αποτελείται από τα σύνολα που ανήκουν σε ένα τουλάχιστον στοιχείο του A .

5. Αξίωμα του Δυναμοσυνόλου

Για κάθε σύνολο A , υπάρχει σύνολο B που έχει για στοιχεία του ακριβώς τα υποσύνολα του A .

6. Διαχωριστικό αξίωμα (Σχήμα ή αξίωμα σχήμα υποσυνόλων)

Για κάθε σύνολο A και κάθε ιδιότητα $P(x)$, υπάρχει σύνολο B το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του A που έχουν την ιδιότητα $P(x)$.

7. Αξίωμα του Άπειρου

Υπάρχει επαγωγικό σύνολο.

[Συμβολίζουμε με $A^+ = A \cup \{A\}$. Ένα σύνολο Σ καλείται επαγωγικό ή επόμενο εάν 1) $\emptyset \in \Sigma$ και 2) $(\forall A \in \Sigma)(A^+ \in \Sigma)$]

8. Αξίωμα-σχήμα της αντικατάστασης

(Μη αυστηρή διατύπωση του αξιώματος-σχήματος της αντικατάστασης.) Έστω ότι έχουμε

- i) έναν κανόνα που αντιστοιχεί σε κάθε σύνολο A το πολύ ένα σύνολο B_A
- ii) ένα σύνολο Γ

Τότε η κλάση $\{B_A : A \in \Gamma\}$ που προκύπτει με την αντικατάσταση των $A \in \Gamma$ από τα υπάρχοντα B_A , είναι σύνολο, όπου το B_A συμβολίζει το B για το οποίο ισχύει η ιδιότητα $P(A, B)$.

9. Αξίωμα βάσης

Κάθε μη κενό σύνολο A έχει στοιχείο B ώστε $A \cap B = \emptyset$.

[Συμβολική γραφή: $(\forall A \neq \emptyset)(\exists B \in A)(A \cap B = \emptyset)$.]

1.5 Πρόγραμμα Hilbert



Ο David Hilbert προσπάθησε όσο κανείς άλλος να επιβάλλει στα μαθηματικά αυστηρούς κανόνες ισχυριζόμενος ότι τα μαθηματικά «είναι ένα παιχνίδι με απλούς κανόνες, που παίζεται γράφοντας στο χαρτί σημάδια χωρίς νόημα». Η πρότασή του για τυποποίηση όλων των κλάδων των μαθηματικών αρχίζοντας από την αριθμητική ονομάστηκε ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΤΟΥ HILBERT (εμβολιασμός κατά του Παραδόξου). Αν το πρόγραμμα του Hilbert πετύχαινε, τα μαθηματικά θα αποκτούσαν επιτέλους ξεκάθαρα θεμέλια και η ασάφεια που είχε ενθαρρύνει τη “ρασιοναλιστική αγυρτεία” θα εξαλειφόταν.

Τα θεμέλια της Γεωμετρίας (Grundlagen der Geometrie) του Hilbert το 1899 χαρακτηρίστηκαν ως η σημαντικότερη συνεισφορά στη Γεωμετρία, μετά τον Ευκλείδη, δείχνοντας ότι η Γεωμετρία θα μπορούσε να συλληφθεί σε ένα τυπικό σύστημα, με την προϋπόθεση βέβαια να τυποποιηθεί πρώτα η αριθμητική, το πιο θεμελιώδες μαθηματικό σύστημα. Το 1900 στο Παρίσι στην ομιλία του με τίτλο «Μαθηματικά Προβλήματα» παρουσίασε δέκα χαρακτηριστικά προβλήματα προφητεύοντας κατά κάποιο τρόπο τα μαθηματικά επιτεύγματα στον αιώνα που ερχόταν. Ο Gödel συνέβαλε καθοριστικά στη λύση των τριών πιο σημαντικών προβλημάτων από αυτά τα δέκα προβλήματα.

Το πρώτο ήταν η υπόθεση του Συνεχούς (C.H.) του Cantor (1845–1918). Ο Cantor είχε διατυπώσει την υπόθεση ότι «δεν υπάρχει σύνολο ανώτερης πληθικότητας από αυτή των φυσικών και κατώτερης πληθικότητας από ‘κείνης των πραγματικών αριθμών».

Με βάση ένα θεώρημα που έδειξε ο Gödel και ένα (άλλο) θεώρημα που έδειξε ο Paul Cohen (1934–2007), έπεται ότι η Υπόθεση του Συνεχούς δεν μπορεί ούτε να αποδειχθεί αληθής αλλά ούτε και να διαψευστεί στα πλαίσια της υπάρχουσας θεωρίας συνόλων. Έδειξε δηλαδή αυτό που κατά τον Hilbert δεν μπορεί να υπάρξει: ένα **ignorabimus** (ένας ισχυρισμός που δεν μπορεί ούτε να επιβεβαιωθεί ούτε να απορριφθεί, ένας ισχυρισμός που αγνοούμε αν ευσταθεί).

Το δεύτερο ήταν η απόδειξη της συνέπειας των αξιωμάτων της αριθμητικής. Η ανάγκη αυτή προέκυψε από τη στροφή προς το φορμαλισμό, αφού σε ένα τυπικό σύστημα τα αξιώματα είναι απογυμνωμένα παντός νοήματος και **η αλήθεια είναι συνώνυμο της αποδειξιμότητας**, οπότε δεν μπορεί να θεωρηθεί δεδομένο ότι τα αξιώματα δεν οδηγούν σε λογικά ασύμβατα θεωρήματα. Έχουμε αμφιβολίες διότι οι συμφωνημένοι κανόνες δεν γνωρίζουμε αν επιτρέπουν αντιφατικά συμπεράσματα.

Έτσι διαμορφώνεται μια μεταμαθηματική στάση γνωστή και ως “φορμαλισμός” αντίθετη σε κάθε μυστικιστική εξήγηση της εμβέλειας των Μαθηματικών στην οποία ωθήθηκε ακόμη και ο Πλάτωνας (ιντουισιονισμός). Η αλήθεια συνίσταται από τους συμφωνημένους κανόνες. Δεν υπάρχει κάποια εξωτερική αλήθεια με την οποία θα πρέπει να αντιπαραβάλλουμε τα Μαθηματικά.

Αυτή είναι η αρνητική πλευρά της θέσης «ο άνθρωπος είναι το μαθηματικό μέτρο όλων των πραγμάτων». Αυτή η επιμονή του Hilbert για απόδειξη δείχνει πως κατά βάθος δεν ήταν γνήσιος φορμαλιστής. Τον παλιό καλό καιρό που τα αξιώματα θεωρούσαμε

ότι είναι αληθείς δηλώσεις για υπαρκτά αντικείμενα δεν ανησυχούσαμε ιδιαίτερα για την ασυνέπεια. Ήταν επιβεβλημένη λοιπόν η ανάγκη μιας «απόλυτης απόδειξης» της συνέπειας της αριθμητικής. Οι ανησυχίες του Hilbert, πέραν της αρχικής αισιοδοξίας, άρχισαν να μεγαλώνουν διότι ωστόσο το 1902 ο Russell ανακαλύπτει το παράδοξο «του συνόλου όλων των συνόλων που δεν είναι μέλη του εαυτού τους» στον απόηχο του άλλου παραδόξου του Cantor που αφορούσε το αδύνατο καθολικό σύνολο, δηλαδή το σύνολο όλων των συνόλων.

Παρεμπιπτόντως αναφέρουμε το ρεύμα των ιντουισιονιστών μεταξύ των υποστηρικτών του οποίου ήταν και ο Ολλανδός Luitzen Brouwer (1881–1966), η πιο ακραία αντιπαράθεση στον πλατωνισμό (ο φορμαλισμός ωχρία μπροστά του) το οποίο ρεύμα προκειμένου να αποφύγει τα παράδοξα επιβάλλει ακραίους περιορισμούς όπως αποβολή της έννοιας του απείρου από τα Μαθηματικά, την κατάργηση της αρχής του αποκλειόμενου τρίτου. Ακόμη και ο Hilbert μιλάει για «προδοσία» του πνεύματος των μαθηματικών αναφερόμενος στις θέσεις των ιντουισιονιστών. Το έργο του Gottlob Frege και αργότερα με την ανακάλυψη του παραδόξου του Russell, το Principia Mathematica των Russell και Whitehead έχουν προλείανει το έδαφος γι' αυτή τη νομιμοποιητική απόδειξη. Θυμίζουμε τις έννοιες «επαρκές», «συνεπές», «πλήρες» που αφορούν ένα τυπικό σύστημα για να δούμε τι ακριβώς έχει δειχτεί και τι υπολείπεται.

Επαρκές ή αλγοριθμικά αποκρίσιμο είναι το τυπικό σύστημα στο οποίο για κάθε τύπο, υπάρχει διαδικασία η οποία με χρήση των κανόνων αυτού του συστήματος αποδεικνύει τον τύπο ή την άρνησή του σε εύλογα (χρονικά) πλαίσια.

Συνεπές είναι το τυπικό σύστημα στο οποίο με χρήση των κανόνων αυτού του συστήματος δεν μπορεί να παραχθεί καμία αντίφαση.

Πλήρες είναι το τυπικό σύστημα στο οποίο με χρήση των κανόνων αυτού του συστήματος κάθε τύπος που ανήκει σε προκαθορισμένο σύνολο (για παράδειγμα στο σύνολο αξιωμάτων ZF) δύναται να αποδειχθεί.

Οι ad hoc κανόνες της θεωρίας των τύπων απέκλειαν τη δημιουργία συνόλων που να αναπαράγουν την ασυνέπεια, όπως το σύνολο όλων των συνόλων που δεν είναι μέλη του εαυτού τους. Χρειαζόταν όμως και η απόδειξη της πληρότητας ενός τυπικού συστήματος, δηλαδή να μας επιτρέπει την απόδειξη όλων των αριθμητικών αληθειών. Ο Gödel φέρνει ένα απρόσμενο αποτέλεσμα!!! «Η απόδειξη που χρειαζόταν ως άξονα το πρόγραμμα του Hilbert δεν θα βρισκόταν ποτέ». Οι επιπτώσεις για το φορμαλισμό ήταν συντριπτικές και αναπόδραστες.

Τον προηγούμενο αιώνα τρεις ανακαλύψεις μας εισήγαγαν σ' έναν κόσμο ανοίκειο, έναν κόσμο που συγκρούεται τόσο ριζικά με όλες τις προηγούμενες υποθέσεις και διαισθήσεις μας, ώστε έναν αιώνα μετά ακόμη προσπαθούμε να τον καταλάβουμε. Το τρίπτυχο που συγκλόνισε τα θεμέλια των «θετικών επιστημών»

1. Το Θεώρημα μη-πληρότητας του Gödel.
2. Η αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg.
3. Η θεωρία σχετικότητας του Einstein.

Στο λήμμα «Θεώρημα του Gödel» η Encyclopedia of Philosophy διατυπώνει τη σημασία των δύο θεωρημάτων και γενικεύει αορίστως διατυπωμένα τα συμπεράσματα που δημοσίευσε το 1931 ο Kurt Gödel στη Βιέννη. «Σε κάθε τυπικό σύστημα επαρκές για τη Θεωρία Αριθμών, υπάρχει ένας μη αποφασίσιμος μαθηματικός τύπος, δηλαδή ένας τύπος που δεν είναι αποδείξιμος και που η άρνησή του είναι επίσης μη αποδείξιμη». (Η δήλωση αυτή αναφέρεται και ως *πρώτο Θεώρημα του Gödel*.)

Πόρισμα 1.1. *Η συνέπεια ενός τυπικού συστήματος επαρκούς για τη Θεωρία Αριθμών δεν μπορεί να αποδειχθεί εντός αυτού του συστήματος.*

[Το συμπέρασμα αυτό αναφέρεται άληθεως ως Θεώρημα του Gödel κι άληθεως ως δεύτερο Θεώρημα του Gödel.]

Οι μετα-πεποιθήσεις (μετά=ελληνικό πρόθεμα που σημαίνει *μετά, πέρα*) του Gödel και του Einstein· η μετα-θεώρηση μιας γνωστικής περιοχής εγείρει ερωτήματα του είδους «πώς είναι δυνατόν αυτή η περιοχή της γνώσης να κάνει αυτό που κάνει;». Τα Μαθηματικά, είναι η μόνη επιστήμη που φτάνει με *a priori* μεθόδους πολλές φορές, σε αναπάντεχα, αλλά αδιάψευστα, αποτελέσματα και θέτουν για τους επιστημολόγους (θεωρητικούς της γνώσης) πολλά τέτοια μετα-ερωτήματα: «Πώς είναι δυνατόν να κάνουν αυτό που κάνουν;».

Κεφάλαιο 2

Ι Συνολοθεωρητικά Παράδοξα (χωρίς χρήση του A.C)

Ο Cantor (1845-1918) θυμίζουμε είχε μια διαισθητική αντίληψη για το σύνολο ως συλλογή ορισμένων και διακεκριμένων αντικειμένων.

Επακόλουθο αυτής της αντίληψης είναι μια αρχή, ας την καλέσουμε συλλεκτική αρχή, σύμφωνα με την οποία αν $P(x)$ είναι μια ιδιότητα (μπορεί να την έχει ή να μην την έχει) ενός αντικειμένου αυτή η διαδικασία συλλέγει - συγκεντρώνει όλα τα αντικείμενα x με αυτή την ιδιότητα, δημιουργώντας ένα μοναδικό σύνολο. Αυτή η αρχή οδήγησε σε διάφορα παράδοξα αποτελέσματα τα οποία διαπιστώθηκαν αρχικά από τον ίδιο τον Cantor και στη συνέχεια από τους Burali-Forti (1861-1931) και Russell (1872-1970). Τα παραπάνω ανακαλυφθέντα παράδοξα μπορούμε να τα διακρίνουμε σε δύο κατηγορίες ανάλογα με την ανησυχία που προκάλεσε η εμφάνισή τους στο Μαθηματικό χώρο εν γένει.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν τα παράδοξα των Cantor και Burali-Forti τα οποία πέρασαν σχεδόν απαρατήρητα μιας και αφορούσαν έννοιες που βρίσκονταν «στα σύνορα» της θεωρίας συνόλων. Αφορούσαν τους υπερπεπερασμένους αριθμούς και ήταν ένα θέμα «ακραίο» και κατά κάποιον τρόπο τεχνικό.

Στη δεύτερη όμως κατηγορία ανήκει το παράδοξο του Russell το οποίο προκάλεσε μεγάλο θόρυβο μιας και η πηγή της προέλευσής του ήταν ο ίδιος ο ορισμός του συνόλου (συλλεκτική αρχή), δηλαδή τα ίδια τα θεμέλια της Συνολοθεωρίας.

2.1 Συνολοθεωρητικά Παράδοξα σχετιζόμενα με τον ορισμό του συνόλου

1. Το παράδοξο του Cantor (1845-1918)

Έστω X το σύνολο όλων των συνόλων. Κάθε υποσύνολο του X (ως σύνολο) πρέπει να είναι μέλος-στοιχείο του συνόλου X . Έτσι προκύπτει ότι το δυναμοσύνολο $P(X)$ του συνόλου X θα είναι υποσύνολο του X , δηλαδή $P(X) \subseteq X$.

Τότε είναι ο πληθάριθμος του $P(X)$ μικρότερος από τον πληθάριθμο του X δηλαδή $n(P(X)) \leq n(X)$ το οποίο είναι άτοπο σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα του Cantor (ισχύει

2.1. ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

πάντα ότι $n(A) < n(P(A))$, A τυχόν σύνολο).

2. Το παράδοξο Burali-Forti (1861-1931)



«Ένας διατακτικός αριθμός μπορεί να οριστεί συνοψιθεωρητικά ως το σύνολο όλων των προηγούμενων του».

Burali-Forti

★ Cesare Burali-Forti (1861-1931) (βοηθός του Giuseppe Peano (1858-1932) από το 1894-1896 όπου και ανακάλυψε το παράδοξο).

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό το σύνολο όλων των διατακτικών αριθμών θα όριζε έναν διατακτικό αριθμό μεγαλύτερο από οποιονδήποτε άλλο διατακτικό αριθμό που ανήκει στο σύνολο αυτό.

3. Το παράδοξο του Russell (1872-1970)

Ο Bertrand Russell (1872-1970) το 1902 γνωστοποίησε το εξής παράδοξο.

Έστω Y το σύνολο όλων των συνόλων με την ιδιότητα

$P(x)$: το x είναι σύνολο που δεν περιέχει τον εαυτό του.

δηλαδή $Y = A$, όπου A είναι σύνολο με $A \notin A$.

Το Y είναι μέλος-στοιχείο του εαυτού του;

Στην περίπτωση που το Y είναι μέλος του εαυτού του, τότε το Y δεν ανήκει στο Y σύμφωνα με τον ορισμό οπότε δεν είναι μέλος του εαυτού του (άτοπο).

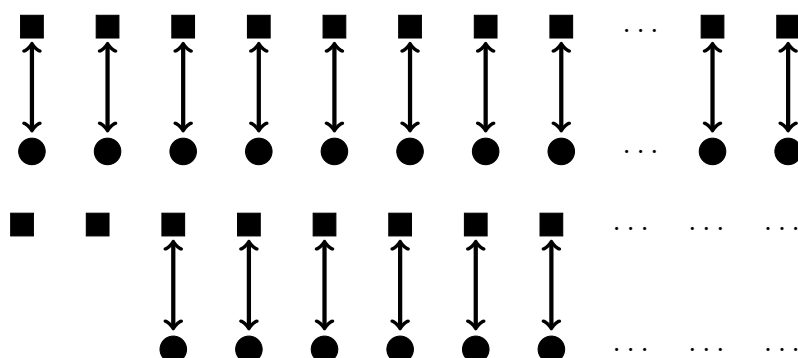
Στην περίπτωση που το Y δεν είναι μέλος του εαυτού του, τότε από τον ορισμό του Y , το Y είναι μέλος του εαυτού του (άτοπο).

Το παράδοξο του Russell έχει γίνει γνωστό και με άλλες παραλλαγές, όπως το παράδοξο του κουρέα κλπ.

Ποια θεώρηση προτιμάτε ;; (υπάρχει κάτι που καθορίζει την επιλογή;)

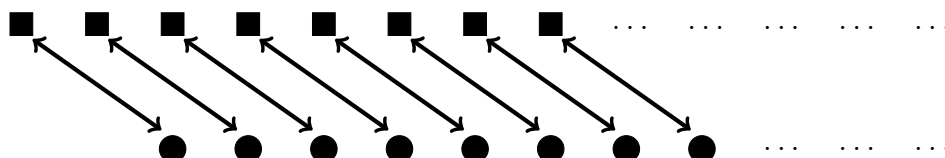
Ακολουθούν αντιστοιχίσεις μεταξύ των στοιχείων πεπερασμένων και άπειρων συνόλων με διάφορους τρόπους-θεωρήσεις-παραδοχές. Τα στοιχεία τους τα συμβολίζουμε με τετραγώνια και κυκλάκια.

- Τα τετράγωνα φαίνονται σαφώς ίσα σε πλήθος με τα κυκλάκια. ΑΡΧΗ ΠΕΡΙΣΤΕΡΕΩΝΑ (χειροπιαστή εμπειρία) στο παρακάτω σχήμα



- Τα τετραγώνια φαίνονται σαφώς περισσότερα εξαιτίας

1. των δυο παραπάνω τετραγώνων στα αριστερά.
2. της θεώρησής μας ότι οι δυο συλλογές σταματούν μαζί στο (ΑΠΕΙΡΟ). Αν δεν ισχύει η θεώρηση αυτή (ii) τότε δεν είναι σαφές ότι τα τετραγώνια είναι περισσότερα από τα κυκλάκια.



- Τα τετραγώνια δεν φαίνονται σαφώς περισσότερα αλλά εν τέλει έτσι πιστεύουμε εξαιτίας
 1. του ότι δεν υπάρχουν δυο παραπάνω τετραγώνια αριστερά λόγω του τρόπου αντιστοίχισης.
 2. της θεώρησής μας ότι οι δύο συλλογές “σταματούν” μαζί στο (ΑΠΕΙΡΟ) οπότε δεν υπάρχουν αντίστοιχα κυκλάκια για τα δύο τελευταία τετράγωνα.
- Τα τετράγωνα δεν φαίνονται περισσότερα εξαιτίας
 1. του τρόπου αντιστοίχισης (δεν υπάρχουν δύο τετραγώνια επιπλέον αριστερά)
 2. δεν θεωρούμε ότι οι δυο συλλογές “σταματούν” μαζί στο (ΑΠΕΙΡΟ). Αποσύρουμε αυτή τη δέσμευση αφήνοντας έτσι αντίθετα ελεύθερα και απεριόριστα τα πράγματα “εις τους αιώνες των αιώνων” της διαδικασίας.

2.1. ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΣΧΕΤΙΖΟΜΕΝΑ ΜΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

Προσοχή: Είναι τελείως διαφορετική η κατάσταση όταν θεωρούμε ότι οι συλλογές μας “σταματούν” μαζί στο (ΑΠΕΙΡΟ) από την αντίθετη θεώρηση. Έχουμε δικαίωμα σε οποιαδήποτε από τις θεωρήσεις με τις ανάλογες βέβαια συνέπειες (θετικές ή αρνητικές). Ο Cantor επέλεξε αναγκαστικά τη δεύτερη θεώρηση χρησιμοποιώντας την $1 - 1$ αντιστοιχία στον ορισμό των απειροσυνόλων.

Στην αποτυπωμένη στο χαρτί μαθηματική πραγματικότητα- σε αντίθεση με την μαθηματική πραγματικότητα, στην οποία τα σημεία έχουν μηδενικό μέτρο και θεωρούνται ως θέσεις – αντιλαμβανόμαστε και παριστάνουμε (αποδίδουμε) ένα σημείο ως τελεία, είτε αναφερόμαστε σε σημείο σημειοσυνόλου διάστασης 1, είτε διάστασης 2, είτε διάστασης 3, ..., είτε διάστασης n . Συχνά προτείνουμε για ευκολία (!), φανταστείτε ένα σημείο ενός σημειοσυνόλου διάστασης 3, του χώρου στον οποίο ζούμε σαν έναν πολύ, πολύ απειροελάχιστο κόκκο άμμου. (δηλαδή ως τρισδιάστατο στερεό μικρού πεπερασμένου όγκου) και ένα σχήμα πεπερασμένου μεγέθους ως συνδυασμό τέτοιων σημείων. Ευτυχώς για το σημείο του επιπέδου δεν έχουμε επινοήσει κάτι.

Αυτή η προτροπή αποκλείει την δυνατότητα ένας συνδυασμός άπειρων τέτοιων σημείων να δημιουργεί σώμα στερεό – σχήμα πεπερασμένου μεγέθους. Ο συνδυασμός άπειρων τέτοιων ποσοτήτων – σημείων θα αποδίδει σχήματα – σώματα που είναι απείρως μεγάλα. Με παγιωμένη αυτή την εντύπωση (την σφυρηλατεί η εκπαίδευση και η διδασκαλία κάθε χρονική στιγμή) είναι αναπόφευκτη μια στάση έκπληξης, δυσπιστίας και απόστασης ακόμης και λογικής αντίληψης π.χ. της αριθμητικής των υπερπεπερασμένων αριθμών. Θα έπρεπε να είναι αναμενόμενη μια τέτοια στάση αφού προσπάθειες να παίξεις παιχνίδια που “στρώνει” το άπειρο με όρους πεπερασμένους και κατά αναλογία (την οποία φυσικά μάταια προσπαθείς να διακρίνεις και να αναγνωρίσεις). Αν όμως υπερτονιστεί και παγιωθεί ότι στη μαθηματική πραγματικότητα (και αυτή εμείς προσπαθούμε να αποδώσουμε άλλοτε πετυχημένα άλλοτε όχι) τα σημεία έχουν μηδενικό μέτρο και θεωρούνται ως “ΘΕ-ΣΕΙΣ” τα εμφανιζόμενα ΠΑΡΑΔΟΞΑ θα μετατραπούν αυτόματα σε παράδοξα (φυσικά όσα έχουν ως αντικείμενο, σημειοσύνολα).

Συνεχίζουμε αναφερόμενοι σε παράδοξα κλιμακούμενης (αυξανόμενης) παραδοξότητας.

Παράδοξα μικρά και μεγάλα:

1. Μετατόπιση από και προς το άπειρο
2. Επέκταση
3. Σύνολα Cantor
4. Κατασκευές Vitali
5. Banach-Tarski

2.2 Ισοδυναμία κατάτμησης

- Στον δισδιάστατο χώρο (πολυγωνικές κατατμήσεις)
Θεωρούμε ένα πολύγωνο έστω A (Αρχικό) το οποίο χωρίζουμε σε «κομμάτια» δεσμευόμενοι στα εξής:

- i) σε πεπερασμένο αριθμό
- ii) (πολυγωνικών) υποπεριοχών
- iii) με σύνορα (πλευρές) ευθύγραμμα τμήματα

Στη συνέχεια, μόνο με άκαμπτες κινήσεις (ισομετρίες) επιχειρούμε με μια ανάταξη (αναδιάταξη) των κομματιών να σχηματίσουμε ένα άλλο πολύγωνο T (Τελικό). Αγνοώντας τα σύνορα των κομματιών χαρακτηρίζουμε τα δύο πολύγωνα ισοδύναμα μέσω κατάτμησης σε πολυγωνικά χωρία («ψαλιδωτά» ή «πριονωτά»)

- Στον τρισδιάστατο χώρο (πολυεδρικές κατατμήσεις)
Θεωρούμε ένα πολύεδρο έστω A (Αρχικό) το οποίο χωρίζουμε σε «κομμάτια» δεσμευόμενοι

- i) σε πεπερασμένο αριθμό
- ii) πολυεδρικών (υποσωμάτων)
- iii) με σύνορα (έδρες) πολύγωνα

Στη συνέχεια μόνο με άκαμπτες κινήσεις (ισομετρίες) επιχειρούμε με μια ανάταξη (αναδιάταξη) των κομματιών να σχηματίσουμε ένα άλλο πολύεδρο T (τελικό). Αγνοώντας τα σύνορα των κομματιών χαρακτηρίζουμε τα δύο πολύεδρα ισοδύναμα μέσω κατάτμησης σε πολυεδρικά σώματα.

Θεώρημα Wallace-Bolyai-Gerwien (στον δισδιάστατο χώρο)



William Wallace
(1768–1843)



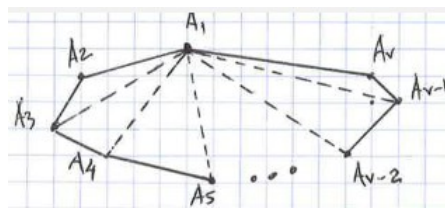
Farkas Bolyai
(1775–1856)

2.2. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΚΑΤΑΤΜΗΣΗΣ

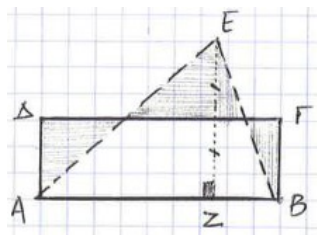
Θεώρημα 2.1. Δύο πολύγωνα είναι ισοδύναμα μέσω κατάτμησης αν και μόνο αν έχουν το ίδιο εμβαδόν. (ειδικότερα κάθε πολύγωνο είναι ισοδύναμο μέσω κατάτμησης με τετράγωνο ίσου εμβαδού)

Απόδειξη. Σκιαγραφούμε την απόδειξη στα παρακάτω βήματα:

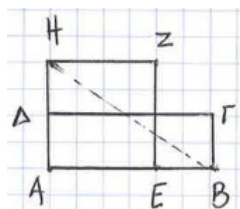
Βήμα I: Διαμέριση πολυγώνου σε πεπερασμένο αριθμό τριγώνων.



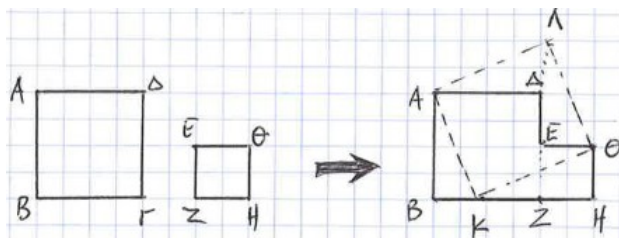
Βήμα II: Κατάτμηση και ανασυναρμολόγηση ενός τριγώνου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Βήμα III: Κατάτμηση και ανασυναρμολόγηση ενός ορθογωνίου σε τετράγωνο.



Βήμα IV: Κατάτμηση και ανασυναρμολόγηση δύο τετραγώνων σε ένα (επαναλαμβανόμενη εφαρμογή του Βήματος III συναρμολογεί όλα τα τετράγωνα σε ένα όπως φαίνεται παρακάτω



□

3ο πρόβλημα της λίστας του Hilbert

(ανάλογο του Θεωρήματος Wallace- Bolyai-Gerwien στον τρισδιάστατο χώρο)

Όπως ξέρουμε το 1900 ο David Hilbert στο Συνέδριο των Μαθηματικών στο Παρίσι ανακοίνωσε μια λίστα με προβλήματα τα οποία συνόψιζαν τους μέχρι τότε προβληματισμούς και η λύση των οποίων θα άνοιγε νέους ορίζοντες στα Μαθηματικά. Μεταξύ αυτών των προβλημάτων (3ο στη σειρά) βρισκόταν και το εξής πρόβλημα *Υπάρχουν δύο τετράεδρα ίσων βάσεων και υψών, άρα ίσων όγκων που δεν είναι ισοδύναμα μέσω κατατμήσεων* του οποίου την απάντηση ο Hilbert υποπτευόταν ως καταφατική και τη λύση την έδωσε ο Max Dehn, επιβεβαιώνοντας τον Hilbert.



Ο Max Dehn ήταν γερμανο-αμερικανός Μαθηματικός, διακεκριμένος στη γεωμετρία, τοπολογία και τη θεωρία γεωμετρικών συνόλων. Ο πρώτος που έλυσε ένα από τα 23 γνωστά προβλήματα του David Hilbert. Ο Dehn, λοιπόν, κατασκεύασε δύο τετράεδρα ίσου όγκου με διαφορετικές αναλλοίωτες Dehn. Βασική ιδιότητα της αναλλοίωτης Dehn, η οποία υπολογίζεται με χρήση των μηκών των ακμών και των γωνιών μεταξύ των εδρών του τετράεδρου, είναι ότι δεν αλλάζει γενικά για δοσμένο πολύεδρο από κανέναν αριθμό τεμαχισμών και συγκολλήσεων. Είναι επόμενο λοιπόν αυτά τα δύο τετράεδρα να μην είναι ισοδύναμα μέσω κατατμήσεων.



Έτσι επιβεβαιώθηκε η υποψία του Hilbert ότι δύο οποιαδήποτε πολύεδρα ίσου όγκου δεν μπορούν να αποδειχθούν ισοδύναμα μέσω κατάτμησης.

Να τονίσουμε πάλι ότι το 3ο πρόβλημα απαιτούσε κατάτμηση με επίπεδες τομές σε πολυεδρικά κομμάτια χωρίς να επιτρέπει άλλου είδους τομές και κομμάτια. Ένα ερώτημα που προκύπτει, αβίαστα, από τα παραπάνω είναι το εξής: *Αν δεν έχει λύση το τρίτο πρόβλημα του Hilbert, πώς είναι δυνατόν να έχει λύση το πρόβλημα Banach-Tarski*; Περιέργως πως, επειδή στο θεώρημα Banach-Tarski απαιτείται ακριβής περιγραφή για τη φύση της κατάτμησης, αυτή η ακρίβεια είναι ίσως που επιτρέπει την ισχύ του.

2.3 Ισοδυναμία Διάσπασης

Τονίζουμε από την αρχή ότι πρόκειται για μια κατάτμηση (τεμαχισμό) ακριβέστερη από αυτήν που εφαρμόσαμε στην ισοδυναμία κατάτμησης, στην οποία αγνοήσαμε, δεν μας ενδιέφεραν, κατά μία έννοια επικαλύψεις-επαναλήψεις συνόρων, κορυφών κτλ. Στην νέα κατάτμηση θα ληφθούν υπόψη όλα τα σημεία του σχήματος (σημειοσυνόλου) συμπεριλαμβανομένων των συνόρων και των άκρων και θα χαρακτηριστούν τα πολυγωνικά χωρία (αρχικό και τελικό) ισοδύναμα μέσω διάσπασης. Θα ακολουθήσει παράδειγμα ισοδυναμίας πολυγωνικών χωρίων, μέσω διάσπασης, ώστε να φανεί η διαφορά στην οποία αναφερθήκαμε (μεταξύ κατάτμησης και διάσπασης). Το παράδειγμα θα αναφέρεται στην ισοδυναμία μέσω διάσπασης ενός τετραγώνου με ένα τρίγωνο ορθογώνιο και ισοσκελές ίσου εμβαδού. (Η απόδειξη βρίσκεται στις σελίδες 25 και 26 διότι παρεμβάλλονται άκρως απαραίτητα στοιχεία για την κατανόησή της).

2.3.1 Απαραίτητα στοιχεία

Πριν αναφερθούμε όμως στο παράδειγμα, το διευκρινιστικό, θα αναφερθούμε σε μια, ως την χαρακτηρίσουμε “περίεργη” διαδικασία η οποία αποτελεί από μόνη της “θολή διαδικασία” αλλά είναι κατοχυρωμένη στην πράξη και θα εξηγήσουμε βεβαίως γιατί και πώς. Ας γίνουμε πιο συγκεκριμένοι. Θα περιγράψουμε μια διαδικασία (δύο κατευθύνσεων) την οποία θα χαρακτηρίσουμε “μετατόπιση προς το άπειρο” και “μετατόπιση από το άπειρο” ανάλογα με την κατεύθυνση. Η περιγραφή θα γίνει (για καλύτερη κατανόηση) μέσω σημειοσυνόλων της ευθείας των πραγματικών αριθμών



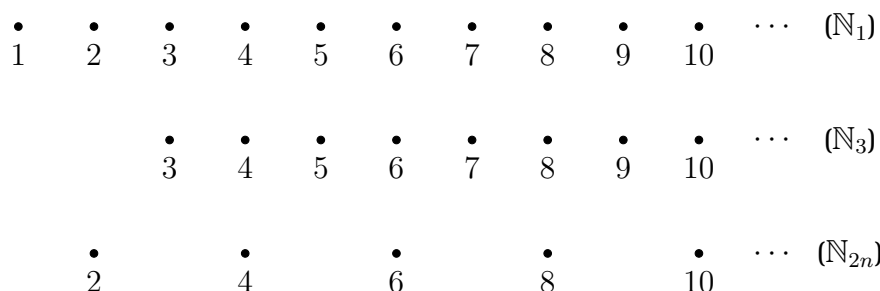
και θα έχει αρκετή έκταση. Μπορούμε να πούμε ότι αποτελεί την βάση στήριξης της ισοδυναμίας διάσπασης.

Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned}\mathbb{N}_0 &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\} \\ \mathbb{N} = \mathbb{N}_1 &= \{\star, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\} \\ \mathbb{N} - \{4\} &= \{\star, 1, 2, 3, \star, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\} \\ \mathbb{N}_2 &= \{\star, \star, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\} \\ \mathbb{N}_3 &= \{\star, \star, \star, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\} \\ \mathbb{N}_{2n} &= \{\star, \star, 2, \star, 4, \star, 6, \star, 8, \star, 10, \dots\}\end{aligned}$$

Είναι γνωστό από την θεωρία συνόλων ότι όλα τα παραπάνω σύνολα είναι ισοδύναμα πληθικά (ισοπληθικά) με το $\mathbb{N}$ και έχουν πληθάρημο που συμβολίζεται με $\aleph_0$.

Το σημειοσύνολο $\mathbb{N}_1$ είναι ασφαλώς διαφορετικό από το $\mathbb{N}_2$, αλλά είναι ισοπληθικά. Αν μετατοπίσουμε το σύνολο $\mathbb{N}_1$, κατά δύο μονάδες προς τα δεξιά, με μια άκαμπτη κίνηση (ισομετρία) θα συμπίσει με το $\mathbb{N}_3$.



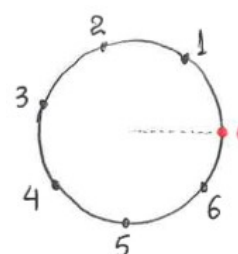
Επομένως τα $\mathbb{N}_1$ και $\mathbb{N}_3$ σημειοσύνολα είναι ισοδύναμα μέσω διάσπασης. Δεν συμβαίνει βεβαίως το ίδιο με τα $\mathbb{N}_1$ και τα $\mathbb{N}_{2n}$, (τα οποία είναι διάφορα, είναι ισοπληθικά) δηλαδή δεν είναι ισοδύναμα μέσω διάσπασης αφού δεν υπάρχει ισομετρία που θα ταυτίσει το $\mathbb{N}_1$ με το $\mathbb{N}_{2n}$ (δηλαδή δεν θα συμπίσουν ως σημειοσύνολα - σχήματα).

2.3.2 Κύκλος ισοδύναμος μέσω διάσπασης με κύκλο, ίσης ακτίνας, από τον οποίο έχει “αφαιρεθεί” ένα σημείο

Θεωρούμε έναν κύκλο ακτίνας $R = 1$ και αρχίζουμε όπως φαίνεται στο σχήμα να τοποθετούμε τους αριθμούς $0, 1, 2, 3, \dots$ υπό μορφή σημείων σε ίσες αποστάσεις (μήκους $1 = R$). Η περίμετρος έχει μήκος $L = 2\pi$ (αφού $R = 1$) και είναι άρρητος αριθμός.

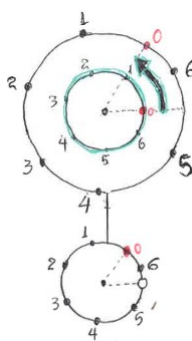
Θεωρούμε ένα σύνολο σημείων

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$



και επειδή το μήκος της περιμέτρου είναι αριθμός άρρητος, κατά την διαδικασία (της τοποθέτησης των αριθμών επί του κύκλου) αυτή, δεν πρόκειται δύο σημεία του παραπάνω συνόλου να ταυτιστούν έστω και αν συνεχιστεί επ' άπειρον. (αναφερόμαστε στις εικόνες των στοιχείων του $\mathbb{N}_0$).

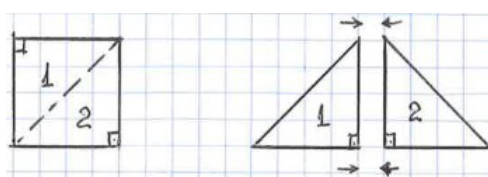
Θεωρούμε ως σύνολο A το σύνολο των σημείων της περιφέρειας που δεν ανήκουν στο $\mathbb{N}_0$. Έτσι ο κύκλος μπορεί να θεωρηθεί ως η ένωση των $\mathbb{N}_0$ και A (εννοείται το σύνολο των σημείων του κύκλου) (όπως στην μετατόπιση προς το άπειρο με τα σύνολα $\mathbb{T}_3$ και $\mathbb{N}_4$ όπου $\mathbb{N}_1 = \mathbb{T}_3 \cup \mathbb{N}_4$). Περιστρέφουμε όλα τα σημεία του κύκλου αριστερόστροφα (αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού) κατά ένα βήμα μήκους 1. [Ο μεγάλος κύκλος παριστάνει τον μικρό μετά την πρώτη περιστροφή κατά 1 για να φαίνεται η αντιστοιχία.]



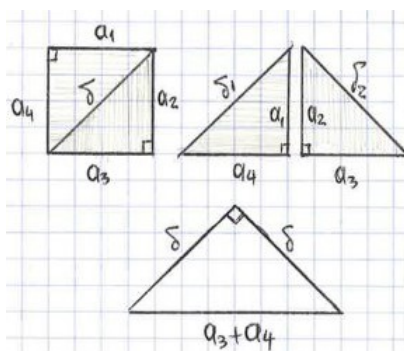
Επιστρέφουμε στο παράδειγμα και στην απόδειξή του. Επαναλαμβάνουμε

Παράδειγμα: Το τετράγωνο είναι ισοδύναμο μέσω διάσπασης με ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ίσου εμβαδού.

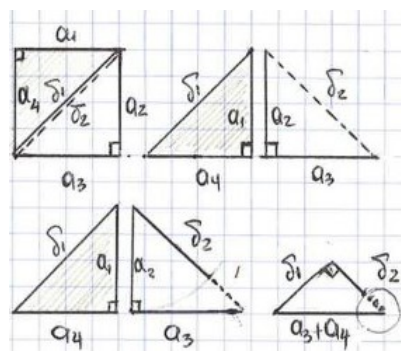
Απόδειξη. Παραθέτουμε σχηματικά (για λόγους συντομίας στις περιγραφές αλλά κυριότερα σύγκρισης μεταξύ των δύο ισοδυναμιών, κατάτμησης και διάσπασης).



Θεωρούμε ένα τετράγωνο πλευράς 1.



Ισοδυναμία κατάτμησης (ΙοΚ)



Ισοδυναμία διάσπασης (ΙοΔ)

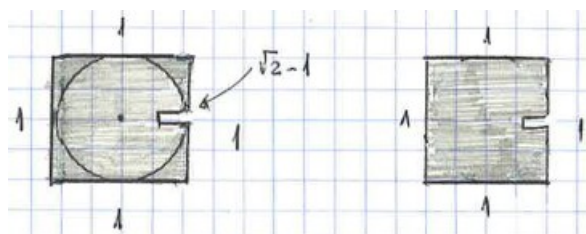
Μας λείπει από ο,τι παρατηρούμε στην ΙοΚ (ώστε η ισοδυναμία να είναι διάσπασης) ένα σύνολο σημείων επί της διαγωνίου δ_2 το οποίο δημιουργεί ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\sqrt{2} - 1 \simeq 0.41$ (μην ξεχνάμε ότι το αρχικό τετράγωνο το θεωρήσαμε πλευράς 1).

Αφού έχουμε δείξει ότι ένας δίσκος, που του λείπει ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ισοδύναμος μέσω διάσπασης με ολόκληρο τον δίσκο, το συμπέρασμα αυτό θα το εκμεταλλευτούμε στο τετράγωνο που μας ενδιαφέρει ως εξής. Θα αφαιρέσουμε εξ αρχής από το αρχικό τετράγωνο το σύνολο των σημείων που απαρτίζουν ευθύγραμμο τμήμα επί της δ_2 μήκους $\sqrt{2} - 1$ (δηλαδή αυτό ακριβώς που μας λείπει στο τέλος) δημιουργώντας ένα, ας το χαρακτηρίσουμε προσωρινό “κενό” αφού μπορούμε να το γεμίσουμε μέσω της διαδικασίας που προηγουμένως περιγράψαμε.

2.3. ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ

★ Πώς θα το πετύχουμε αυτό;

Θα το πετύχουμε εγγράφοντας στο τετράγωνο πλευράς 1 έναν κύκλο ακτίνας $R = 1$ και αφαιρώντας ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\sqrt{2} - 1$ οπότε θα έχουμε ένα τετράγωνο από το οποίο θα ξεκινήσουμε σαν αυτό του



αφού είναι ισοδύναμο μέσω διάσπασης.

Τώρα πια δεν λείπει τίποτα, διότι το αρχικά αφαιρεθέν σημειοσύνολο-ευθύγραμμο τμήμα, μήκους $\sqrt{2} - 1$, μπορεί να συμπληρώσει το κενό της δ_2 μήκους $\sqrt{2} - 1$ και έτσι να έχουμε ότι ένα τετράγωνο είναι ισοδύναμο μέσω διάσπασης με ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο.

Παρατηρώντας όσα προηγήθηκαν και συνοψίζοντας αρχίζει να διαφαίνεται, ότι κάποιο “κομμάτι” ενός συνόλου σημείων – σχήματος δεν παίζει κανέναν ρόλο σε κάποιες περιπτώσεις. Ένα σπουδαίο ερώτημα που τίθεται είναι το εξής:

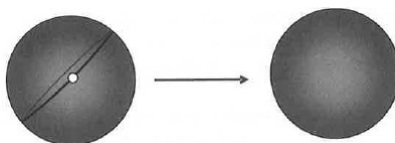
★ Ποιο κομμάτι;

★ Και σε ποιές περιπτώσεις;

Ένα επίσης σπουδαίο συμπέρασμα είναι το εξής: *Η ισοδυναμία κατάτμησης συνεπάγεται ισοδυναμία διάσπασης χωρίς να ισχύει το αντίστροφο* (προς επιβεβαίωση της μη ισχύος του αντιστρόφου θυμηθείτε ότι: ο κυκλικός δίσκος είναι ισοδύναμος μέσω διάσπασης με ένα τετράγωνο ίσου εμβαδού αλλά τα δύο σύνολα δεν είναι ισοδύναμα μέσω κατάτμησης.) □

2.3.4 Σφαίρα από την οποία έχει “αφαιρεθεί” ένα σημείο είναι ισοδύναμη μέσω διάσπασης με μια πλήρη σφαίρα

★ Πρόκειται για το πιο σημαντικό συστατικό της απόδειξης Banach-Tarski.



Επιλέγουμε τον μέγιστο κύκλο που διέρχεται από αυτό το αφαιρεθέν σημείο της σφαίρας, μια περιφέρεια στην οποία το σημείο δεν ανήκει και δημιουργούμε επιπλέον σημεία στην περιφέρεια προχωρώντας μια απόσταση η οποία είναι ίση με κάποιο άρρητο πολλαπλάσιο του μήκους της περιφέρειας του κύκλου (αυτό μπορεί να γίνει με υπεραριθμήσιμο πλήθος τρόπων, αφού υπεραριθμήσιμοι είναι και οι άρρητοι).

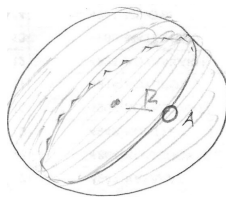
Με την ίδια τεχνική δείχνουμε ότι η επιφάνεια σφαίρας από την οποία λείπει αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων είναι πάλι ισοδύναμη με μια πλήρη σφαίρα.

Επιλέγουμε έναν άξονα περιστροφής (από τους υπεραριθμήσιμους τρόπους) ο οποίος δεν περνά από καμία από τις τρύπες. Επειδή οι τρύπες-σημεία είναι αριθμήσιμο πλήθος υπάρχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος κύκλων που διαγράφονται από αριθμήσιμο πλήθος σημείων που λείπουν.

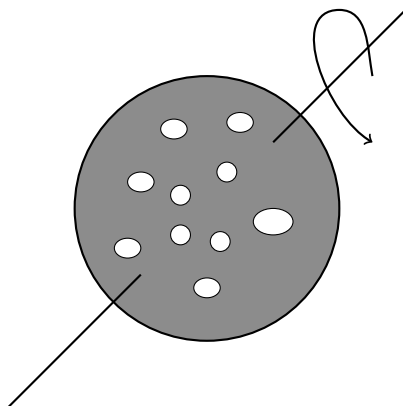
Θέλουμε να επιλέγουμε γωνία θ τέτοια ώστε κανένα πολλαπλάσιο της να μη στέλνει κάποιο από τα σημεία που λείπουν στον εαυτό του ή σε κάποιο άλλο σημείο που λείπει. Ο αριθμός των σημείων που λείπουν είναι αριθμήσιμος και μόνο μία μπορούμε να διαλέξουμε από υπεραριθμήσιμους πλήθους γωνίες. Άς την ονομάσουμε θ την γωνία με αυτή την ιδιότητα που απαιτήσαμε. Όλες οι τρύπες θα κλείσουν ταυτόχρονα.

Η δυνατότητα να κλείσουμε τις τρύπες είναι καίριο σημείο στην απόδειξη προς το τέλος του Banach-Tarski ώστε να μας επιτρέψει να δημιουργήσουμε δύο σφαίρες (επιφάνειες μπάλας) από μια.

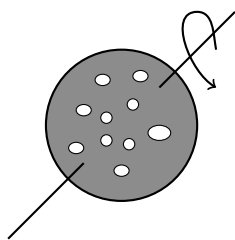
Η συνέχεια είναι απλή, της επέκτασης από σφαιρικές επιφάνειες σε συμπαγείς μπάλες.



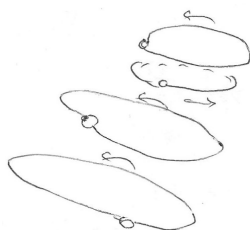
Αυτή την τρυπούλα A μπορούμε να την κλείσουμε με ΥΠΕΡΑΡΙΘΜΗΣΙΜΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΡΟΠΩΝ (αφού υπεραριθμήσιμους πλήθους είναι οι άρρητοι αριθμοί και το $S = aL$ με a να είναι άρρητος).



Αν λείπουν αριθμήσιμους πλήθους τρύπες από την σφαίρα, τότε αυτές μπορούν να βολευτούν κι έτσι η σφαίρα καταλήγει να είναι ισοδύναμη με την πλήρη σφαίρα.

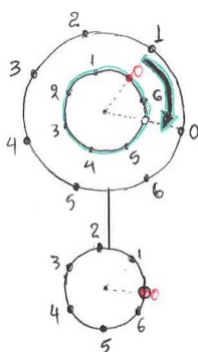


Αν λείπουν το πολύ αριθμήσιμου πλήθους σύνολο σημείων. Υπάρχουν υπεραριθμήσιμοι τρόποι επιλογής του άξονα. Άρα διαγράφονται το πολύ αριθμήσιμοι κύκλοι από τα σημεία που λείπουν καθώς περιστρέφεται η σφαίρα (υπεραριθμήσιμοι τρόποι).



Δεν θέλουμε κατά την περιστροφή ($\theta = ??$) καμία τρύπα να πέσει στον εαυτό της για οποιοδήποτε πολλαπλάσιο του θ . Ο αριθμός του πλήθους των γωνιών είναι υπεραριθμήσιμος. Έστω θ μια τέτοια γωνία.

Μετατοπίζουμε το $A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ προς το ∞ κατά ένα βήμα μήκους 1 αφήνοντας το $B = C \setminus A$ αναλλοίωτο (όπως προηγουμένως $B = \{4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$ και $A = \{1, 2, 3\}$) και αδειάζει μόνο το σημείο που εκπροσωπούσε το 0.



Όλα τα άλλα θα αδειάζουν προς στιγμήν αλλά θα γεμίζουν με το προηγούμενο δηλαδή το 1 με το 0, το 2 με το 1, το 3 με το 2, το 4 με το 3, το 5 με το 4, το 6 με το 6 αλλά το 0 με κανένα (αφού $L = 2\pi$ και το βήμα έχει μήκος 1).



2.3.5 Ερώτημα του Tarski το 1925 (τετραγωνισμός του κύκλου)



Είναι δυνατό να κόψουμε το εσωτερικό ενός κύκλου δηλαδή τον κυκλικό δίσκο, σε πεπερασμένο αριθμό κομματιών και να τα ανασυναρμολογήσουμε μέσω ισομετριών ώστε να σχηματίσουμε τετράγωνο ίσου εμβαδού;

Alfred Tarski

Είναι τελείως διαφορετικό το πρόβλημα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών περί τετραγωνισμού του κύκλου. Αυτό απαιτεί κατασκευή, με κανόνα και διαβήτη, τετραγώνου με εμβαδό ίσο με αυτό του δοσμένου κύκλου.

Ο Ferdinand Lindemann (1852–1939) απέδειξε ότι ο π είναι υπερβατικός αριθμός (μη αλγεβρικός) δείχνοντας έμμεσα ότι ο τετραγωνισμός του κύκλου ήταν αδύνατο να συμβεί, αφού έπρεπε να κατασκευαστεί (με κανόνα και διαβήτη) ξεκινώντας από ευθύγραμμο τμήμα μήκους 1, ευθύγραμμο τμήμα υπερβατικού μήκους $\sqrt{\pi}$. (Αν ο π είναι υπερβατικός αριθμός τότε και ο $\sqrt{\pi}$ είναι υπερβατικός.

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα έχει ως εξής.

1. Αν η κατάτμηση περιορίζεται σε κατάτμηση σε πολυγωνικά χωρία οι Dubins, Hirsch και Karush έδειξαν (βλέπε [1]) ότι η λύση του προβλήματος είναι αδύνατη.
2. Χρησιμοποιώντας όμως την μέθοδο της ισοδύναμης διάσπασης ο Miklos Laczkovich από την Βουδαπέστη, απέδειξε το 1990 (βλέπε [2]) ότι μπορούσε να επιτευχθεί μια λύση, κάνοντας χρήση του Αξιώματος της Επιλογής, μέσω παράλληλων μεταφορών και μόνο. (Λόγω της χρήσης του Αξιώματος Επιλογής τα κομμάτια δεν ορίζονται με αυστηρό τρόπο το πλήθος των οποίων ο Laczkovich εκτιμά περίπου στα 10^{50}).



Παρατήρηση: Αν επιτραπούν ως σύνορα καμπύλες (μη ευθείες) στις διδιάστατες κατατμήσεις τότε τα πράγματα γίνονται πιο εύκολα.

Σχολιάζοντας την μετατόπιση από και προς το άπειρο (Χάνουμε ή κερδίζουμε κατά τη μετατόπιση από και προς το άπειρο;)

Είναι σαφές ότι η μετατόπιση από και προς το άπειρο διατηρεί την πληθικότητα (μην ξεχνάμε ότι είναι ισομετρία και συνεπώς $1 - 1$ αντιστοιχία) είτε το πλήθος των σημείων, που χάνονται ή αποδίδονται, είναι αριθμήσιμο είτε υπεραριθμήσιμο.

Σε χώρο διάστασης 1 για παράδειγμα $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \longrightarrow \{3, 4, 5, 6, \dots\}$, τα σημεία 1, 2 «χάνονται» αλλά το πλήθος των σημείων δεν αλλάζει. Δηλαδή $\aleph_0 - 2 = \aleph_0$ ή γενικότερα $\aleph_0 - n = \aleph_0 \forall n \in \mathbb{N}$. Επίσης για παράδειγμα $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \longrightarrow \{3, 4, 5, 6, \dots\}$ τα σημεία 1, 2 αποδίδονται αλλά το πλήθος των σημείων δεν αλλάζει. Δηλαδή $\aleph_0 + 2 = \aleph_0$ ή γενικότερα $\aleph_0 + n = \aleph_0, \forall n \in \mathbb{N}$. Γενικά ισχύει

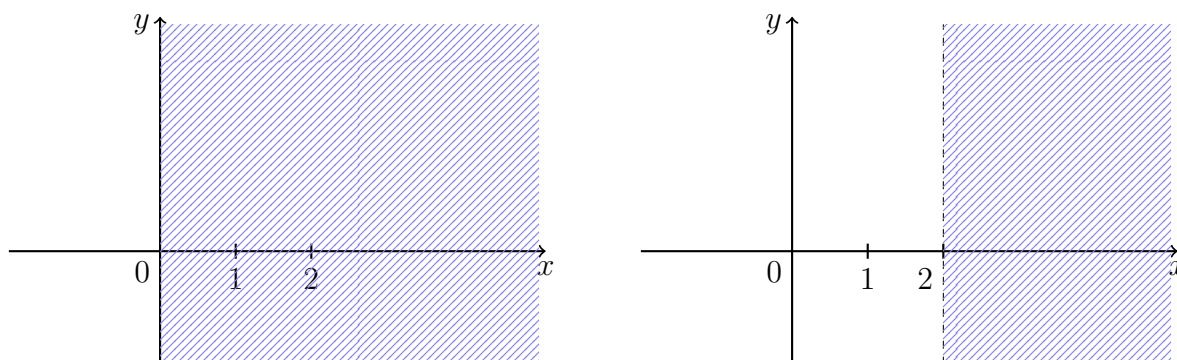
$$\aleph_0 + n = \aleph_0,$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0,$$

$$n\aleph_0 = \aleph_0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σε χώρο διάστασης 2 για παράδειγμα



Έστω το σύνολο $A = \{(x, y) : x > 0, y \in \mathbb{R}\}$ και το σύνολο

$$B := A + 2 = \{(x, y) : x > 2, y \in \mathbb{R}\}$$

Είναι σαφώς $A \subsetneq B$ αλλά έχουμε δείξει ότι είναι ισοπληθικά και το B έχει προκύψει από μια μετατόπιση του A προς το άπειρο. Είναι φανερό ότι η μετατόπιση στο ∞ σχετίζεται με μια παράξενη αριθμητική με ιδιότητες για παράδειγμα του τύπου $\blacktriangle + 2 = \blacktriangle$, με το $\blacktriangle$ να συμβολίζει το πλήθος.

2.4 Επέκταση

Η επέκταση, θα πρέπει να γίνει κατανοητή ως μια δυνατότητα να υπάρχει μετάβαση προς κάθε κατεύθυνση, εντός του ευρύτερου σημειοσυνόλου της ίδιας διάστασης αλλά και προς σημειοσύνολα ανώτερων ή κατώτερων διαστάσεων, με κάποιον φυσικά τρόπο, για κάποιο λόγο και συγκεκριμένα κριτήρια. Εύλογα εγείρεται το ερώτημα που αφορά στην σχέση των δύο καταστάσεων (αρχικής και τελικής). Η επέκταση μπορεί να γίνει με δύο βασικούς τρόπους

- Συνεχώς
- Ασυνεχώς

Υπάρχουν αυστηροί ορισμοί για κάθε περίπτωση, στους οποίους δεν υπάρχει, εν προκειμένω, λόγος να αναφερθούμε. Αυτό όμως που θα επισημάνουμε είναι ότι το “Συνεχώς” μπορεί και πρέπει να νοείται διαισθητικά ως κάτι ανάλογο με το περαιτέρω τέντωμα ή χαλάρωση μιας ήδη τεντωμένης ελαστικής μεμβράνης, χωρίς φυσικά σκισίματα. Όλη αυτή η εξέλιξη, εικονοποιεί, σε πολύ καλό βαθμό, την έννοια της ασυνεχούς μεταβολής αν στην παραπάνω διαδικασία παρεμβαίνουν και σκισίματα, της ελαστικής μεμβράνης. Η επέκταση επίσης θα πρέπει να υπακούει αυστηρά στην 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της αρχικής και τελικής κατάστασης. Τέτοιου είδους μεταβάσεις

- ★ έχουν κάποιο νόημα ;
- ★ απαντούν σε κάποια ερωτήματα ;
- ★ και ποιά είναι αυτά ;

Ως χαρακτηριστικό παράδειγμα ιστορικού ερωτήματος, ας αναφέρουμε την απορία ενός σοβαρού στοχαστή των συνόλων, του Cantor. Ο Cantor αναρωτήθηκε αν υπάρχουν περισσότερα σημεία σε ένα επίπεδο από ότι σε μια ευθεία. Επίσης αναρωτήθηκε, πώς επηρεάζει η διάσταση ενός σημειοσυνόλου την πληθικότητα του σημειοσυνόλου.

Το 1874 ο Cantor σε ένα γράμμα στον (φίλο του και σύμμαχο στις επιθέσεις που δεχόταν) Dedekind, θέτει τις παραπάνω ερωτήσεις και απαντάει συγχρόνως ότι δεν μπορεί να είναι ισοδύναμα σημειοσύνολα, μια ευθεία και ένα επίπεδο.

Προσέξτε ότι ακόμη και ο ιδρυτής της Θεωρίας Συνόλων είναι βαθύτατα επηρεασμένος από την κρατούσα κοινή αντίληψη “το μέρος είναι μικρότερο από το όλον” αν και ο ίδιος έχει εισάγει και στοχάζεται την ισοδυναμία του όλου με γνήσιο μέρος του, χαρακτηρίζοντας τέτοια σύνολα ως απειροσύνολα.

Ένα πιο απλό ερώτημα αναφέρεται στις σχέσεις των πληθικοτήτων διαφόρων συνόλων και για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τα διαστήματα

$$[0, 1], \quad [0, 1), \quad (0, 1], \quad (0, 1), \quad [0, 2], \quad (0, 2), \quad (-\infty, +\infty)$$

ως αντιπροσωπευτικά των δυνατών διαστημάτων του $\mathbb{R}$. (εκτός από αυτά της μορφής

$$(-\infty, a), \quad (-\infty, a], \quad [a, +\infty), \quad (a, +\infty)$$

τα οποία εμπεριέχονται στα παραπάνω).

Είναι φανερό ότι μπορεί να αναζητηθούν διάφορες επεκτάσεις όπως

$$\begin{array}{ll} f_1 : (0, 1) \longrightarrow [0, 1] & f_2 : [0, 1] \longrightarrow (-\infty, +\infty) \\ f_3 : [0, 1] \longrightarrow (0, 1) & f_4 : [0, 1] \longrightarrow [0, 2] \end{array}$$

με απαίτηση διάφορων ιδιοτήτων για τις απεικονίσεις $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$. Εμείς θα εστιάσουμε, στην $1 - 1$ και επί ιδιότητα των $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$, προκειμένου να απαντήσουμε στην σχέση των πληθικοτήτων των εμπλεκόμενων διαστημάτων καθώς και στην συνέχεια ή ασυνέχεια των $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$.

Η ιδιάζουσα φύση άπειρων συλλογών

Γαλιλαίος (1564-1642) Πρώτος μελέτησε την ιδιάζουσα φύση άπειρων συλλογών με όρους κατάλληλων υποσυνόλων.

Στον κατ' οίκον περιορισμό του, το 1638, έγραψε το *Συζητήσεις και μαθηματικές αποδείξεις περί των δύο νέων επιστημών* σαφώς υπαινικτικό για τους Ιεροεξεταστές, και όρισε μια $1 - 1$ αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, \dots$ και των τετραγώνων τους $1^2, 2^2, 3^2, \dots$, δηλαδή του συνόλου με στοιχεία τα $1, 4, 9, \dots$ χαρακτηρίζοντας τα δύο σύνολα ισοπληθή.

Bernard Bolzano (1781-1848) Στο έργο, του [Paradoxien des Unendlichen] το οποίο ολοκλήρωσε 18 μέρες πριν το θάνατο του και δημοσιεύτηκε το 1850, επισήμανε το γεγονός ότι, μονοδιάστατα σημειοσύνολα μπορούν να αποτελούνται από τον ίδιο ακριβώς αριθμό σημείων, παρά την ανισότητά τους σε σχέση με το μήκος τους.

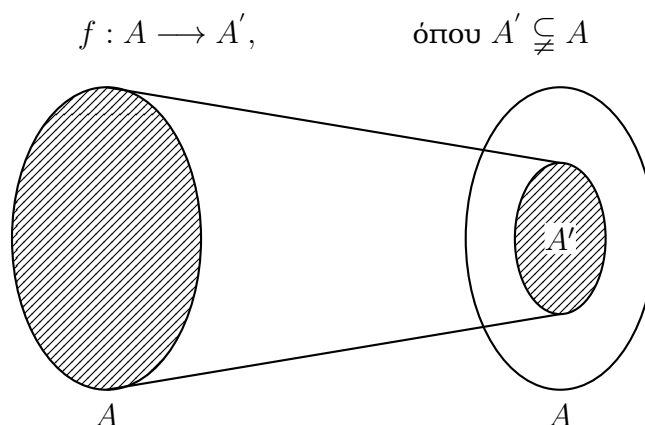
Χρησιμοποιώντας ως εργαλείο την συνάρτηση $f(x) = 2x$ (η οποία είναι $1-1$) έδειξε ότι τα διαστήματα $[0, 1]$ και $[0, 2]$ είναι ισοδύναμα όσον αφορά στο πλήθος “του περιεχομένου” τους παρά την εμφανή ανισότητα τους σε σχέση με το μήκος τους

Richard Dedekind (1831-1916) Τελευταίος μαθητής του Gauss γνωρίζεται με τον Cantor το 1874 στο Interlaken της Ελβετίας όταν ήταν σε διακοπές. Είναι γνωστός για τον ορισμό των άρρητων ως τομές ρητών. Συνεισέφερε στη θεωρία αριθμών και στη θεωρία συνόλων.

Αναφέρουμε τον ορισμό του άπειρου συνόλου κατά Dedekind (τον οποίο υιοθέτησε και ο Cantor) αλλά και τον εναλλακτικό ορισμό του άπειρου συνόλου επισημαίνοντας την ισοδυναμία τους.

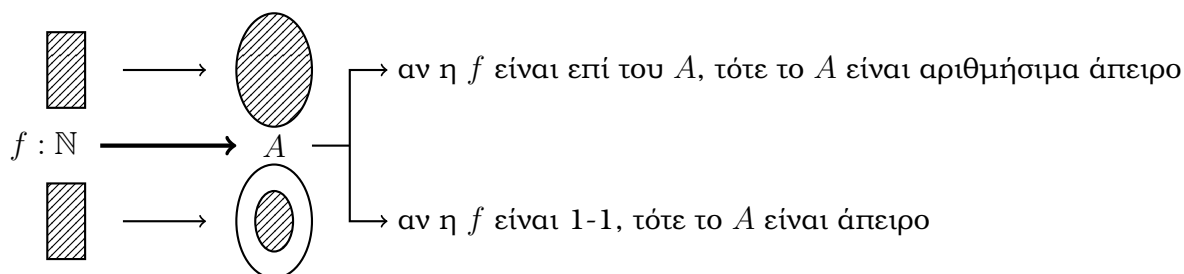
1. Πρώτος ορισμός του άπειρου συνόλου (Dedekind-Cantor)

Ένα σύνολο A είναι άπειρο αν υπάρχει μια $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του και των στοιχείων γνήσιου υποσυνόλου του, έστω A'



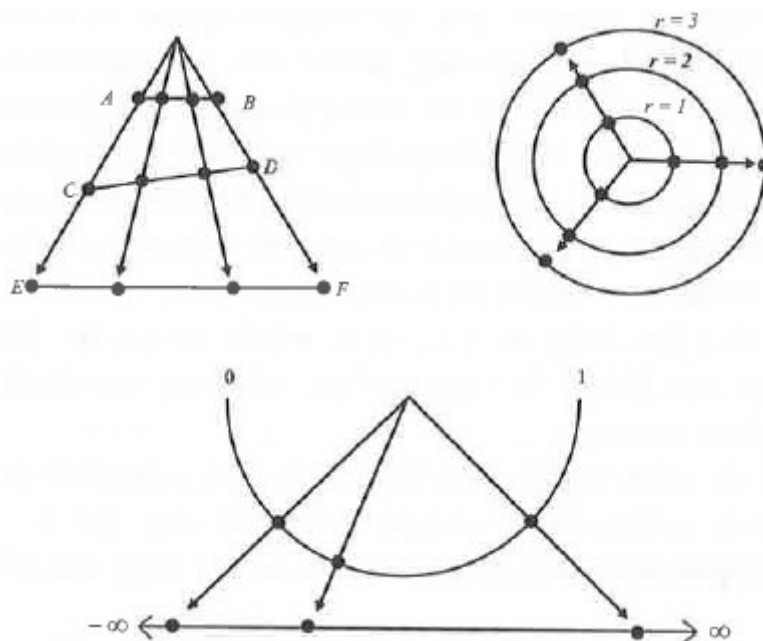
2. Δεύτερος ορισμός του άπειρου συνόλου (εναλλακτικός).

Ένα σύνολο A είναι άπειρο αν υπάρχει $1-1$ αντιστοιχία από το σύνολο $\mathbb{N}$, των φυσικών αριθμών, εντός του δοσμένου συνόλου A . (Ειδικά αν η απεικόνιση είναι και επί του A στο σύνολο A χαρακτηρίζεται αριθμήσιμα άπειρο)



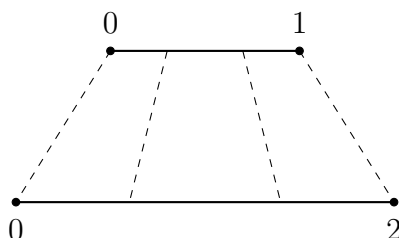
Πέρα από τις γεωμετρικές ενοπτείες και διαισθήσεις, **εγγύηση** της ισοπληθικότητας δύο συνόλων αποτελεί η ύπαρξη ισομορφισμού (μονομορφισμός και επιμορφισμός) μεταξύ των δύο συνόλων. [Ισομορφισμός λέγεται μια απεικόνιση $1-1$ (μονομορφισμός) και

επί (επιμορφισμός)). Δεν είναι σε κάθε περίπτωση εύκολος ο εντοπισμός ενός ισομορφισμού. Πολλές φορές (τις περισσότερες) απαιτείται “ευφυής” επινοήση. Τα παρακάτω σχήματα (επιβεβαιώνουν) εποπτικά την ισοπληθικότητα των αντίστοιχων σημειοσυνόλων, όπως των ευθύγραμμων τμημάτων $AB, \Gamma\Delta, EZ$, των τριών ομόκεντρων κύκλων και του τόξου μήκους $\frac{\pi}{2}$ με την ευθεία των πραγματικών αριθμών, αλλά αυτό όπως αναφέραμε δεν είναι αρκετό.



Εκτός από την σχηματική “απόδειξη” όπως αναφέραμε ο ακριβέστερος τρόπος εγγύησης της ισοπληθικότητας είναι η παρουσίαση ενός ισομορφισμού. Αρχικά θα ασχοληθούμε με απεικονίσεις οι οποίες είναι συνεχείς, δηλαδή με συνεχείς επεκτάσεις.

Παράδειγμα 2.2. Επαναλαμβάνουμε τον ισομορφισμό f με τύπο $f(x) = 2x$ με την βοήθεια του οποίου ο Bolzano έδειξε την ισοπληθικότητα του σημειοσυνόλου $[0, 1]$ με το σημειοσύνολο $[0, 2]$. Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι δεν υπάρχουν περισσότερες “θέσεις” σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους ένα 1 από ότι σε ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους 2



Είναι εκπληκτικό ότι τα σημεία του $[0, 1]$ αναδιατάσσονται για να δώσουν το $[0, 2]$ χωρίς αύξηση της πληθικότητας.

Είναι ένα παράδοξο για το οποίο όμως ευθύνεται η εμπειρία μας. Το παράδοξο λύνεται αν αποδεχθούμε ως γεγονός ότι ένα σημείο έχει μηδενικό μέτρο και είναι θέση και όχι αντικείμενο σε αντίθεση με τον πραγματικό κόσμο στον οποίο τα σημεία θεωρούνται “τελείες”, “κόκκοι άμμου”, κ.λ.π.. $\dashv$

2.5 Σημαντικό διευκρινιστικό σχόλιο

Χρειάζεται μεγάλη προσοχή και διευκρίνιση του νοήματος των φράσεων- ορολογιών

- i) Μετατόπιση προς και από το άπειρο
- ii) Επέκταση ή Μετάβαση

για την σωστή χρήση τους και την κατανόηση της λειτουργικότητάς τους.

- i) Μετατόπιση προς και από το άπειρο σημαίνει, μια άκαμπτη κίνηση - ισομετρική μεταφορά, δηλαδή οι αποστάσεις διατηρούνται (απαγορεύεται μεγέθυνση ή σμίκρυνση).
- ii) Επέκταση ή μετάβαση σημαίνει σμίκρυνση ή μεγέθυνση χωρίς βέβαια διατήρηση των αποστάσεων.

Προκειμένου να γίνουμε πιο σαφείς και για την συνέχεια, αναφέρουμε ότι για παράδειγμα, η συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ με τύπο $f(x) = 2x$ είναι συνεχής ισομορφισμός.

Θα την χαρακτηρίσουμε με την προηγούμενη ορολογία ως μετάβαση και συγκεκριμένα μεγέθυνση. Είναι σαφές ότι δεν είναι ισομετρία οπότε οι αποστάσεις δεν διατηρούνται.

Δηλαδή η f “γεννάει”, με έναν ενσωματωμένο “μαγικό” τρόπο από το διάστημα $[0, 1]$ το διάστημα $[0, 2]$.

Σε καμία περίπτωση όμως μια συνάρτηση g η οποία είναι ισομετρία δεν θα μπορούσε από το διάστημα $[0, 1]$ να δημιουργήσει το $[0, 2]$ μεταφέροντας “κομμάτια” του $[0, 1]$ με κατάλληλη συναρμολόγηση.

Αν κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί με κάποιο τρόπο θα είναι εκπληκτικό και συγχρόνως παράδοξο.

2.6 (1-2-3)-διάστατα “σύνολα Cantor”

Σχετικά με το μέτρο Lebesgue ενός συνόλου

Η πληθικότητα (πεπερασμένη ή άπειρη) μετράει το περιεχόμενο του συνόλου και όχι την έκτασή του, το μέγεθός του. Την έκταση ή μέγεθος ενός συνόλου (σημειοσυνόλου) την μετράει το λεγόμενο μέτρο Lebesgue. Για ένα n -διάστατο ($n > 1$) σημειοσύνολο A συμβολίζουμε με $\mu(A)$ το μέτρο Lebesgue αυτού του συνόλου και πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

- 1) ο n -διάστατος κύβος έχει μέτρο ένα.

- 2) Ισομετρικά ισόμορφα σύνολα έχουν το ίδιο μέτρο (δηλαδή το μ είναι αναλλοίωτο ως προς ισομετρία).
- 3) Το μέτρο Lebesgue είναι αθροίσιμο και με πεπερασμένο και με αριθμήσιμο τρόπο. Δηλαδή αν A, B ξένα μεταξύ τους τότε $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ και $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ όπου $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ αριθμήσιμη συλλογή ανά δύο ξένων μεταξύ τους σημειοσυνόλων.

Το μέτρο ευθύγραμμου τμήματος $[a, b]$ είναι $b - a$ και για όλα τα συνήθη δισδιάστατα και τρισδιάστατα σημειοσύνολα ισχύουν οι γνωστοί τύποι εμβαδών και όγκων. Το μέτρο ενός σημείου είναι μηδέν. Το σύνολο των ρητών αριθμών του $[0, 1]$ έχει μέτρο 0 (ως συλλογή αριθμήσιμου πλήθους μεμονωμένων σημείων που το καθένα έχει μέτρο 0). Επομένως το σύνολο των άρρητων αριθμών του $[0, 1]$ πρέπει να έχει μέτρο ένα.

2.6.1 Το σύνολο του Cantor (η σκόνη του Cantor)

Όταν από ένα κομμάτι (σημειοσύνολο) μήκους a αφαιρεθεί ένα κομμάτι μήκους b φανερά μένει ένα κομμάτι (σημειοσύνολο) μήκους $b - a$. Με την πληθικότητα όμως του εναπομείναντος κομματιού τι συμβαίνει;

Πώς σχετίζεται με την πληθικότητα του αρχικού κομματιού(σημειοσυνόλου); Σίγουρα θα ήταν αναμενόμενο, αν από σημειοσύνολο μήκους 1 για παράδειγμα, αφαιρέσουμε ένα σημειοσύνολο επίσης μήκους 1 το μέτρο του εναπομείναντος (αν έμεινε κάτι) σημειοσυνόλου να είναι 0.

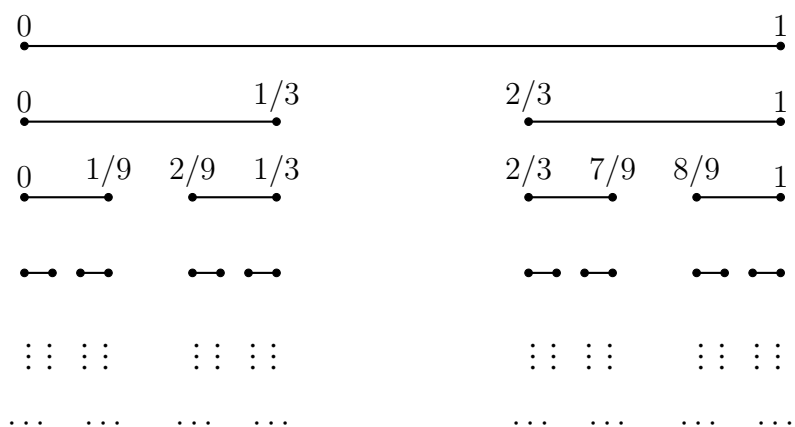
Δεν θα ήταν όμως καθόλου αναμενόμενο το εναπομείναν σημειοσύνολο να έχει την ίδια πληθικότητα με το αρχικό. Αυτό θα προκαλούσε έκπληξη!

Συμβαίνει πράγματι κάτι τέτοιο; Η απάντηση είναι “ναι” και το παράδειγμα είναι το περιβόητο σύνολο του Cantor.

Σύνολο (σκόνη) του Cantor

Συνοπτικά και σχηματικά περισσότερο, επεξηγούμε το πώς προκύπτει το σύνολο του Cantor (για λόγους οικονομίας χώρου και χρόνου). Αρχίζουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα μοναδιαίου μήκους και αφαιρούμε το ένα τρίτο του από την μέση. Δηλαδή από το $[0, 1]$ αφαιρούμε ακριβώς όλα τα σημεία μεταξύ του $\frac{1}{3}$ και του $\frac{2}{3}$ και συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για άπειρα βήματα. Αυτό που θα “απομείνει” είναι το σύνολο του Cantor.

2.6. (1-2-3)-ΔΙΑΣΤΑΤΑ “ΣΥΝΟΛΑ CANTOR”



Το συνολικό μήκος των διαστημάτων που αφαιρείται είναι

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{21} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j = 1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 1$$

Άρα το μήκος (μέτρο) του “εναπομείναντος” σημειοσυνόλου, δηλαδή του σύνολου του Cantor είναι 0. Η πιθανότητα ένα τυχαίο σημείο του $[0, 1]$ να ανήκει στο σύνολο Cantor είναι και αυτή 0. Από ποιά ή τουλάχιστον πόσα σημεία αποτελείται αυτό το εναπομείναν σύνολο, αυτή η “σκόνη του Cantor” όπως συχνά λέγεται;

Η απάντηση εκπλήσσει και απαιτεί σοβαρή εξήγηση για να γίνει πιστευτή. “Αυτό που μένει είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο σημείων όχι λιγότερα από τον αριθμό των σημείων τον οποίο αρχίσαμε”.

Να σημειώσουμε ότι κάθε αριθμός μεταξύ του 0 και του 1 (και αυτών συμπεριλαμβανομένων) παριστάνεται από τα σημεία ενός ευθύγραμμου τμήματος μήκους 1 και ότι κάθε τέτοιος αριθμός μπορεί να παρασταθεί από ένα ατέρμονο δεκαδικό κλάσμα. Σε περίπτωση που η δεκαδική αναπαράσταση τερματίζει μπορεί να αντικατασταθεί με μια ισοδύναμη ατέρμονη παράσταση π.χ.

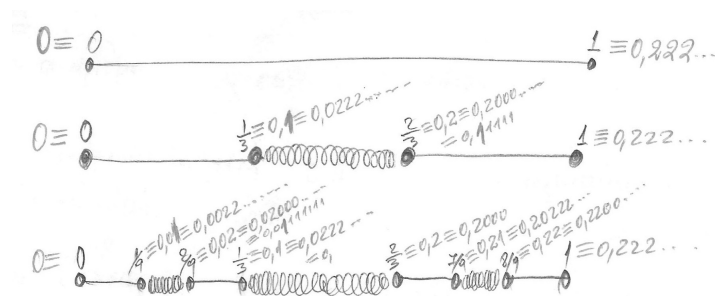
$$\text{ο αριθμός } \frac{4}{10} = 0,4 \equiv 0,39999\dots$$

$$\text{ο αριθμός } 0 \equiv 0,00000\dots$$

$$\text{και ο αριθμός } 1 \equiv 0,99999\dots$$

Αυτή η διαδικασία αφαίρεσης μας υποδεικνύει ότι

- Όλοι οι αριθμοί του διαστήματος $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, που αφαιρούνται, είχαν στην τριαδική γραφή τους αναγκαστικά το 1 ως πρώτο ψηφίο μετά την υποδιαστολή δηλαδή $0,1xxx\dots$
- Όλοι οι αριθμοί των διαστημάτων $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ και $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, που αφαιρούνται, έχουν στην τριαδική γραφή τους αναγκαστικά το 1 ως δεύτερο ψηφίο μετά την υποδιαστολή δηλαδή $0,x1xxx\dots$



Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να συμπεράνουμε πώς το σύνολο του Cantor αποτελείται από εκείνους τους αριθμούς (σημεία) που σε τριαδική αναπαράσταση έχουν ως ψηφία μετά την υποδιαστολή το 0 και το 2 αποκλειστικά. Είναι γνωστό δε ότι οι αριθμοί του διαστήματος $[0, 1]$, σε δυαδική αναπαράσταση, περιγράφονται αποκλειστικά από τα ψηφία 0, 1 και μας είναι επίσης γνωστό (από το διαγώνιο επιχείρημα του Cantor) ότι το πλήθος τους είναι υπεραριθμήσιμο. Η $1 - 1$ αντιστοιχία πλέον που εγκαθίσταται μεταξύ των στοιχείων του συνόλου του Cantor και των στοιχείων του διαστήματος $[0, 1]$ είναι ολοφάνερη. Αντιστοιχούμε το 0 με το 0 και το 2 με το 1 στις αντίστοιχες αναπαραστάσεις, και έτσι προκύπτει ότι το σύνολο του Cantor ως ισοδύναμο του διαστήματος $[0, 1]$ είναι υπεραριθμήσιμο (έχει την δύναμη του συνεχούς).

2.7 Το παράδοξο των Sierpinski-Mazurkiewicz (1=2!!!)

Θυμηθείτε, ότι μια τεχνική της ισοδυναμίας διάσπασης, αυτή της μετατόπισης από το άπειρο, μας έδωσε την δυνατότητα το σύνολο $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ να μπορεί να διασπαστεί σε δύο υποσύνολά του, τα $T_2 = \{1, 2\}$ και $\mathbb{N}_1 - \{1, 2\} = \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ με το $\mathbb{N}_1 - \{1, 2\}$ να είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{N}_1$ και το T_2 να μπορεί να παραβλεφθεί.

Σχετικής φύσεως ήταν το ερώτημα που έθεσε ο Wactaw Sierpinski (1882-1969), Πολωνός μαθηματικός, αν ένα σύνολο μπορεί να διασπαστεί σε δύο ξένα υποσύνολα του καθένα από τα οποία να είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύνολο.

Η απάντηση, καταφατική δόθηκε από τον Stefan Mazurkiewicz (1888-1945) μαθητή του Sierpinski, ορίζοντας ένα τέτοιο σύνολο στο επίπεδο, χωρίς την χρήση του Αξιώματος της Επιλογής.

Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί ως προάγγελος του παραδόξου Banach-Tarski, το θεώρημα των οποίων δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Fundamental Mathematicae* του οποίου αξίζει να σημειωθεί ότι, συνιδρυτές ήταν οι Sierpinski και Mazurkiewicz.



Wactaw Sierpinski



Stefan Mazurkiewicz

Θεώρημα 2.3. “Ένα σύνολο E (μη φραγμένο) μπορεί να διασπαστεί σε δύο ξένα υποσύνολα E_1, E_2 με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε υποσύνολό του να είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύνολο E .”

Δηλαδή δεδομένου του E υπάρχουν υποσύνολα E_1 και E_2 ώστε

$$E = E_1 \cup E_2, \quad E_1 \cap E_2 = \emptyset, \quad E_1 \simeq E_2 \simeq E$$

Απόδειξη. Το απέδειξε ορίζοντας ένα σύνολο στο επίπεδο χωρίς το Αξίωμα Επιλογής (A.C.).

Θεωρούμε στο επίπεδο xOy το σημείο $O(0, 0)$ ως αφετηρία. Επίσης θεωρούμε τις εξής δύο πράξεις επί του συνόλου των σημείων του xOy .

- Μεταφορά κατά μία μονάδα προς τα δεξιά. (σύμβ. M).
- Περιστροφή (αριστεροστροφή) γύρω από το σημείο O κατά ένα ακτίνιο (rad) (σύμβ. Π).

Κάθε πεπερασμένος συνδυασμός των παραπάνω πράξεων με αφετηρία το O έχει ως αποτέλεσμα τον προσδιορισμό σημείων του xOy . Το σύνολο αυτών των σημείων συμβολίζουμε με E .

Μας είναι γνωστό ότι κάθε σημείο έστω $M(a, b)$ του επιπέδου xOy μπορεί να θεωρηθεί ως εικόνα $M(z)$ ενός μιγαδικού $z = a + bi$.

Ορίζουμε λοιπόν το σύνολο

$$E = \{M(z) : z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

όπου z ο μιγαδικός με εικόνα σημείο του xOy που προκύπτει με την προηγούμενη περιγραφείσα διαδικασία.

Επίσης γνωρίζουμε ότι κάθε μιγαδικός εμφανίζεται με τρεις μορφές

$$z = a + bi \quad (\text{κανονική μορφή})$$

$$z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\text{τριγωνομετρική μορφή})$$

$$z = \rho e^{i\theta} \quad (\text{εκθετική μορφή})$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $i^2 = -1$.

Θα αναγάγουμε την “δράση” επί των σημείων σε δράση επί των αντίστοιχων μιγαδικών. Οι δύο πράξεις που προαναφέραμε έχουν τις εξής επιπτώσεις στον μιγαδικό $z = a + bi$, $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$, $z = \rho e^{i\theta}$.

- η M “αυξάνει” τον μιγαδικό z στον μιγαδικό $z + 1$.
- η Π “πολλαπλασιάζει” τον μιγαδικό z επί e^i .

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στα εξής:

- Κάθε στοιχείο-σημείο $M(z)$ του συνόλου E μπορούμε να το θεωρούμε ως εικόνα ενός μιγαδικού z ο οποίος παριστάνεται ως πολυώνυμο του e^i , δηλαδή

$$z = a_n(e^i)^n + a_{n-1}(e^i)^{n-1} + \dots + a_2(e^i)^2 + a_1(e^i)^1 + a_0$$

ή

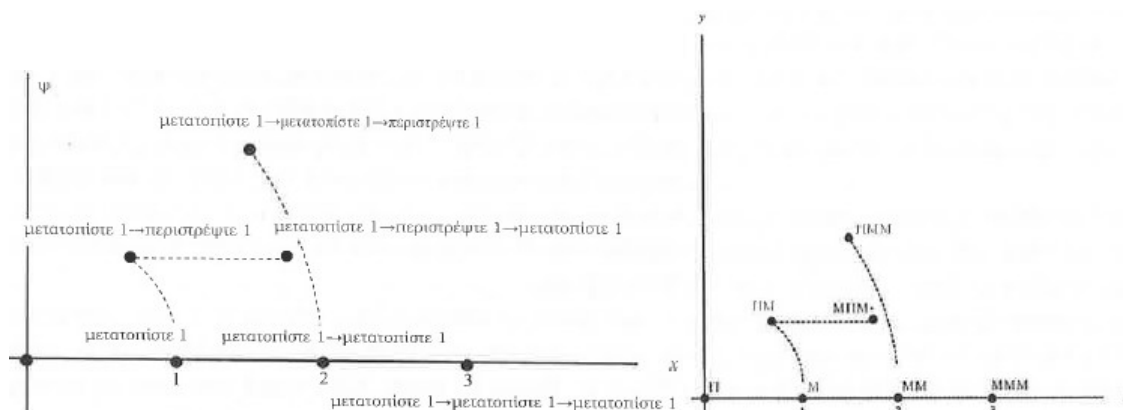
$$z = a_n e^{ni} + a_{n-1} e^{(n-1)i} + \dots + a_2 e^{2i} + a_1 e^i + a_0$$

για $n \in \mathbb{N}$. Είναι φανερό ότι για τα a_j , $j = 1, 2, 3, \dots, n$ πρέπει να ισχύει $a_j \geq 0$ και a_j ακέραιοι.

- Η παραπάνω αναπαράσταση είναι μοναδική.

Ορίζουμε τα σύνολα E_1 και E_2 ως υποσύνολα του E . Το μεν E_1 περιέχει τα σημεία του E που έχουν αναπαραστάσεις με $a_0 > 0$ θεωρούμενα ως εικόνες μιγαδικών και E_2 εκείνα για τα οποία είναι $a_0 = 0$. Είναι προφανές ότι $E = E_1 \cup E_2$, $E \simeq E_1$, $E \simeq E_2$. Επίσης ισχύει $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ διότι αν $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ τότε κάποιο στοιχείο του E θα ήταν εικόνα κάποιου μιγαδικού, έστω z_0 , ο οποίος θα είχε δύο αναπαραστάσεις υπό μορφή πολυωνύμων του e^i .

Αυτό όμως είναι αδύνατο να συμβεί διότι τότε ο e^i δεν θα ήταν υπερβατικός, θα ήταν δηλαδή λύση πολυωνυμικής εξίσωσης. $\square$



2.7. ΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ ΤΩΝ SIERPINSKI-MAZURKIEWICZ (1=2!!!)

Ερώτημα: Είναι δυνατόν να συμβεί κάτι τέτοιο σε φραγμένο υποσύνολο του επιπέδου;

Απάντηση: Αυτό δεν μπορεί να συμβεί με δύο μόνο κομμάτια. Μπορεί όμως στον τρισδιάστατο χώρο.

Προσοχή!!!: Η παραπάνω δυνατότητα δεν υπάρχει για φραγμένο σύνολο, υποσύνολο του επιπέδου, δηλαδή δεν μπορεί να διαμεριστεί σε ξένα υποσύνολα καθένα από τα οποία είναι ισοδύναμο με το αρχικό αν χρησιμοποιήσουμε μόνο δύο κομμάτια.

Αυτό όμως θα το δούμε να μπορεί να συμβεί για ορισμένα φραγμένα σημειοσύνολα στον τρισδιάστατο χώρο (αποτελεί μέρος της απόδειξης του περιβόητου παραδόξου-θεωρήματος Banach-Tarski).

Προσοχή!!!: Ως μέρος της απόδειξης του παραδόξου Banach-Tarski, αποδεικνύεται ότι υπάρχουν φραγμένα σημειοσύνολα στον τρισδιάστατο χώρο με την παραπάνω παράδοξη ιδιότητα.

II Συνολοθεωρητικά παράδοξα (με χρήση του A.C.)

2.8 Περί του Αξιώματος της Επιλογής (A.C.)

Ο G.Cantor εισηγητής της Θεωρίας συνόλων στα Μαθηματικά στην προσπάθεια του να αποδείξει την περίφημη υπόθεση του συνεχούς ($\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$) (πρώτο στο κατάλογο των προβλημάτων που έθεσε ο D. Hilbert στο παγκόσμιο συνέδριο των Μαθηματικών στο Παρίσι 1900) θεώρησε σαν αναγκαίο πρώτο βήμα, προϋπόθεση, να αποδείξει την αρχή της καλής διάταξης (ότι δηλαδή κάθε σύνολο δύναται να διαταχθεί καλώς, δηλαδή, να ορισθεί μια διάταξη ώστε, κάθε μη-κενό υποσύνολο να έχει πρώτο στοιχείο π.χ. όπως οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}$ με την συνηθισμένη διάταξη). Αυτό ο ίδιος δεν το πέτυχε, το πέτυχε όμως αργότερα ο E. Zermelo (αφού διατύπωσε και διευκρίνησε το Αξίωμα της Επιλογής A.C.) το οποίο και χρησιμοποίησε στην απόδειξη.

Αξίωμα Επιλογής. Εάν $A_i, i \in I$ είναι μια μη-κενή οικογένεια μη-κενών συνόλων μπορούμε να επιλέξουμε ένα στοιχείο x_i από κάθε σύνολο A_i όπου $i \in I$ έτσι ώστε αυτά τα x_i , να αποτελούν στοιχεία ενός καινούργιου συνόλου, το οποίο ονομάζουμε σύνολο επιλογής.

Παρά το γεγονός ότι το Αξίωμα Επιλογής φαίνεται εκ πρώτης όψεως προφανές μια προσεκτική “εστίαση” στη χρήση του ήγειρε αμέσως αμφιβολίες και ερωτηματικά στο επιστημονικό κατεστημένο. Μεταξύ των επικριτών του βρίσκονταν ονόματα όπως του Borel, Baire, Lebesgue (κορυφαίων Γάλλων μαθηματικών). Είναι αξιοσημείωτο ότι στο έργο και των τριών παραπάνω Γάλλων μαθηματικών, είχε γίνει ήδη χρήση του Αξιώματος της Επιλογής χωρίς αυτό να έχει συνειδητοποιηθεί (δεδομένου του προφανούς του Αξιώματος).

Εδώ να σημειώσουμε ότι κορυφαίοι Μαθηματικοί όπως οι Poincaré, Weyl είχαν εκφραστεί ιδιαίτερα απαξιωτικά εν γένει για τη Θεωρία Συνόλων, μάλιστα ο Poincaré την είχε χαρακτηρίσει ασθένεια των Μαθηματικών από την οποία ήλπιζε να απαλλαγούν γρήγορα (αυτό δεν είναι περίεργο δεδομένης της προτίμησης του Poincaré στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.)

Όλα αυτά συνέβαιναν στη μαθηματική κοινότητα και οι αντιπαραθέσεις γίνονταν περισσότερο σε φιλοσοφικό επίπεδο. Εντούτοις οι Πολωνοί Μαθηματικοί Banach και Tarski (κατά την διάρκεια του μεσοπολέμου) πέτυχαν, χρησιμοποιώντας το Αξίωμα της Επιλογής να οδηγηθούν σε ένα μαθηματικό αποτέλεσμα το οποίο παραβιάζει βάνανυσα την κοινή εμπειρία. Το αποτέλεσμα αναφέρει το εξής.

Μια συμπαγής μπάλα μπορεί να χωριστεί σε πεπερασμένο αριθμό κομματιών (συνόλων) και να ανασυναρμολογηθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργήσει δύο συμπαγείς μπάλες, καθεμία ολλόidia σε σχήμα και όγκο με την αρχική.

Το παραπάνω συμπέρασμα σαφώς προκαλεί έκπληξη, λόγω της παραδοξότητας στον καθένα. Να σημειώσουμε ότι το παραπάνω παράδοξο τράβηξε την προσοχή πολλών μαθηματικών μεταξύ αυτών και του Von Neumann και οδήγησε στην έννοια της “amenability”, αναφορικά σε ομάδες δράσης, μια έννοια καταλυτικής σημασίας για ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών όπως Θεωρία Τελεστών, Εργοδική Θεωρία, Αφηρημένη Αρμονική Ανάλυση, Θεωρία Ομάδων. Εν προκειμένω να σημειώσουμε, ότι το παράδοξο Banach-Tarski στο οποίο θα αναφερθούμε διεξοδικά στο κεφάλαιο 6 εμφανίζεται επειδή η δράση της ομάδας των ισομετριών στον $\mathbb{R}^3$ δεν είναι amenable.

Θα δείξουμε πλήρως ότι ένα παράδοξο εμφανίζεται με την ύπαρξη του συνόλου Vitali στη θεωρία μέτρου Lebesgue (ενός μη μετρήσιμου συνόλου για το μέτρο Lebesgue), μια κατασκευή οικεία από το μάθημα της Θεωρίας μέτρου (μέτρο Lebesgue).

2.9 Κατασκευή Vitali



Τα παράδοξα έχουν συνέχεια. Το 1905 ο Giuseppe Vitali (1875–1932) απέδειξε ότι υπάρχουν φραγμένα σημειοσύνολα στα οποία δεν μπορούμε αν αντιστοιχίσουμε μέτρο Lebesgue. Δηλαδή *υπάρχουν μη-μετρήσιμα σύνολα (κατά Lebesgue)*. Αυτό είναι ενδιαφέρον και συνάμα παράξενο.

2.9.1 Σύνολο Vitali

Θεωρούμε το μετρήσιμο και φραγμένο σύνολο A , θετικού μέτρου. Τότε είναι $A \subset [-a, a]$, για κάποιο $a > 0$. Θα λέμε ότι δύο σημεία $x, y \in A$ είναι **ισοδύναμα** και θα γράφουμε $x \sim y$, ακριβώς τότε όταν $x - y \in \mathbb{Q}$. Η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας που οδηγεί σε μια διαμέριση του A . Εάν $x \in A$, τότε η κλάση ισοδυναμίας του x είναι το σύνολο

$$A_x = \{x + r : x + r \in A, r \in \mathbb{Q}\}$$

Όλοι οι ρητοί που προκύπτουν σαν διαφορές σημείων του A περιέχονται στο διάστημα $[-2a, 2a]$. Είναι φανερό ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας είναι αριθμήσιμο σύνολο και επειδή το A είναι υπεραριθμήσιμο (αφού είναι $m(A) > 0$), έπεται ότι υπάρχουν υπεραριθμήσιμους πλήθος, ξένες μεταξύ τους, κλάσεις ισοδυναμίας. Σύμφωνα με το Αξίωμα Επιλογής (A.C.) το πλέον επίμαχο αξίωμα της Συνολοθεωρίας, υπάρχει τότε ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο, έστω P , που περιέχει ακριβώς έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση ισοδυναμίας.

Θεώρημα 2.4. Το σύνολο P που κατασκευάστηκε προηγουμένως είναι μη-μετρήσιμο.

Απόδειξη. Έστω $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$ μία αρίθμηση όλων των ρητών του διαστήματος $[-2a, 2a]$. Θέτουμε $P_i = P + r_i$, $i = 1, 2, 3, \dots$, όπου $P + r_i$ είναι η μεταφορά του συνόλου P κατά τον ρητό αριθμό r_i . Τα P_i είναι ξένα μεταξύ τους και ισχύει

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} P_i \subset [-3a, 3a] \quad (2.1)$$

Έστω ότι το P είναι μετρήσιμο. Τότε σύμφωνα με γνωστό θεώρημα ότι το μέτρο είναι αναλλοίωτο ως προς τη μεταφορά, ισχύει ότι $m(P_i) = m(P)$ και λόγω της αριθμήσιμης προσθετικότητας και μονοτονίας του μέτρου προκύπτει (από την (2.1)) ότι

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m(P_i) \leq 6a$$

και επειδή $m(P_i) = m(P)$ έχουμε ότι

$$m(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} m(P) \leq 6a$$

- Αν τώρα $m(P) = 0$, προκύπτει ότι $m(A) = 0$, άτοπο (αφού έχουμε υποθέσει ότι $m(A) > 0$).
- Αν πάλι $m(P) > 0$, προκύπτει ότι $\sum_{i=1}^{+\infty} m(P) = +\infty$ οπότε θα ισχύει $\infty \leq 6a$, που είναι άτοπο (αφού ο a είναι πεπερασμένος αριθμός).

Άρα, το P είναι ένα μη-μετρήσιμο υποσύνολο του A . □

Μια άλλη προσέγγιση στον ορισμό του συνόλου Vitali

Θεωρούμε τους αριθμούς a και b του $[0, 1]$. Ορίζουμε να είναι οι αριθμοί a, b **ισοδύναμοι** και να γράφουμε $a \sim b$ αν και μόνον αν ο $(a - b)$ είναι ρητός αριθμός. Είναι φανερό ότι με τον ορισμό αυτό οι ρητοί του διαστήματος $[0, 1]$ είναι ισοδύναμοι.

Το διάστημα $[0, 1]$ χωρίζεται σε κλάσεις, με κάθε κλάση να αποτελείται από ισοδύναμους μεταξύ τους αριθμούς, και αριθμοί δύο διαφορετικών κλάσεων διαφέρουν κατά κάποιον άρρητο. Άρα συμπεραίνουμε ότι έχουμε πετύχει μια διαμέριση του $[0, 1]$ σε υπεραριθμήσιμο πλήθος κλάσεων, κάθε μία αριθμήσιμου πλήθους στοιχείων (μελών). Με χρήση του Αξιώματος Επιλογής (Α.Σ.) μπορούμε να σχηματίσουμε ένα υποσύνολο του $[0, 1]$ επιλέγοντας ένα μόνο αριθμό από κάθε κλάση ισοδυναμίας. Το σύνολο αυτό είναι το γνωστό **σύνολο Vitali** το οποίο ας συμβολίσουμε με M .

Θεώρημα 2.5. Το σύνολο M όπως ορίστηκε παραπάνω είναι μη-μετρήσιμο.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $M_q = M + q = \{x + q : x \in M, \text{ όπου } q \text{ ρητός αριθμός}\}$. Αν είναι $q < 0$, τότε το M_q είναι το σύνολο M μετατοπισμένο κατά q μονάδες αριστερά, ενώ αν είναι $q > 0$, τότε το M_q είναι το σύνολο M μετατοπισμένο κατά q μονάδες δεξιά. Το M_q ονομάζεται **μεταφορά** του M . Είναι $\mathbb{R} = (-\infty, \infty) = \bigcup_{q \text{ ρητός}} M_q$, δηλαδή έχουμε διαμερίσει το σύνολο όλων των πραγματικών σε μια αριθμήσιμη συλλογή ξένων ισοδύναμων συνόλων.

Έστω ότι το σύνολο M είναι μετρήσιμο. Γενικά ισχύει $m(M) \geq 0$. Είναι φανερό ότι $m(M_q) = m(M)$ και $m(\mathbb{R}) = \sum_{q \text{ ρητός}} m(M_q)$.

- Εάν $m(M) = 0$, τότε και $m(M_q) = 0$, οπότε $m(\mathbb{R}) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.
- Εάν $m(M) > 0$, τότε επειδή π.χ. το σύνολο $\bigcup_{q \text{ ρητός}} \{M_q : q \text{ είναι ρητός με } 0 \leq 1 \leq 1\} \subseteq [0, 2]$, είναι

$$2 = m([0, 2]) = m\left(\bigcup \{M_q : q \text{ είναι ρητός με } 0 \leq q \leq 1\}\right) = \sum_{\substack{0 \leq q \leq 1 \\ q \text{ ρητός}}} m(M_q) = +\infty$$

το οποίο είναι επίσης άτοπο.

Οπότε το σύνολο M και κάθε M_q δεν είναι μετρήσιμο κατά Lebesgue. □

Παρατήρηση. Ομοιολογουμένως είναι ένα παράδοξο αποτέλεσμα αν αναλογιστεί κάποιος πως ορίστηκε το μέτρο ενός συνόλου και τι προσδοκούμε να εκφράζει (την έκταση)

Υπεραριθμήσιμο και μη-μετρήσιμο $\equiv$ Σύνολο χωρίς έκταση !!!

Τα δύο Θεωρήματα που ακολουθούν εκφράζουν ισοδύναμα συμπεράσματα και προκύπτουν έμμεσα από το συμπέρασμα του Θεωρήματος 2.4 ή του Θεωρήματος 2.5.

Θεώρημα 2.6. Κάθε σύνολο A με $m^*(A) > 0$ περιέχει ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο.

Θεώρημα 2.7. Αν όλα τα υποσύνολα ενός συνόλου A είναι μετρήσιμα, τότε $m(A) = 0$.

Να τονίσουμε ότι δεν έχει κατασκευαστεί ακόμη μη μετρήσιμο σύνολο χωρίς τη χρήση του Αξιώματος Επιλογής (A.C.) και να σημειώσουμε επιπλέον ότι το σύνολο των μη μετρησίμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ δεν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις των συνόλων (ένωση, τομή, διαφορά κ.λ.π.).

2.9.2 Παράδοξα σχετιζόμενα με την κατασκευή Vitali

Αναφέρουμε κάποια δραματικά παράδοξα που σχετίζονται με την κατασκευή Vitali χαρακτηρίζοντάς τα ως Προ₁BT, Προ₂BT, με κορυφαίο το παράδοξο Banach-Tarski.

Προ₁BT. Ένα υποσύνολο του $[0, 2]$ μπορεί να διαμεριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε τα κομμάτια να μπορούν να μετατοπιστούν έτσι ώστε η ένωσή τους να είναι ολόκληρη η ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Απόδειξη. Έστω Σ ένα υποσύνολο του $[0, 2]$ τέτοιο ώστε αν θεωρήσουμε ως $M_q = M + q = \{x + q : x \in M \text{ και } q \text{ ρητός του } [0, 1]\}$, όπου M το γνωστό σύνολο Vitali (υποσύνολο του $[0, 1]$), να είναι η $\bigcup \{M_q : q \text{ ρητός και } q \in [0, 1]\}$ ως διαμέριση του Σ . Το σύνολο των ρητών του $[0, 1]$ είναι αριθμήσιμο όπως επίσης αριθμήσιμο είναι το σύνολο όλων των ρητών. Θεωρούμε, λοιπόν, μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των ρητών του $[0, 1]$ και του συνόλου των ρητών τέτοια ώστε $f(q) = r$, όπου ο q είναι ρητός του $[0, 1]$ και r τυχαίος ρητός αριθμός. Για κάθε q , τώρα, μετατοπίζουμε το M_q στο $M_{f(q)}$. Παρατηρούμε ότι $\bigcup_r \{M_r : r \text{ είναι ρητός}\} = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. Επομένως, τα υποσύνολα της αρχικής διαμέρισης έχουν αντίστοιχα μετατοπιστεί έτσι ώστε να σχηματίσουν ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών αριθμών. $\square$

Προ₂ΒΤ (Δύο κύκλοι από έναν). Ένας κύκλος οποιασδήποτε ακτίνας μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα με τέτοιο τρόπο ώστε καθένα από αυτά να μπορεί να διασπαστεί και να ανασυναρμολογηθεί για να σχηματίσει ολόκληρο τον αρχικό κύκλο.

Απόδειξη. Έστω $S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ ο μοναδιαίος κύκλος.

Θεωρούμε στην ομάδα S^1 την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας

$$x \sim y \iff x - y \text{ είναι ρητό πολλαπλάσιο του } 2\pi$$

Από την παραπάνω (προφανώς) σχέση ισοδυναμίας ο S^1 “διαμερίζεται” σε κλάσεις ισοδυναμίας. Από κάθε κλάση επιλέγουμε ένα ακριβώς στοιχείο και δημιουργούμε ένα σύνολο, το λεγόμενο σύνολο Vitali (το οποίο αποδεικνύεται ότι δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο), και το συμβολίζουμε στη συνέχεια με V .

Το παράδοξο που συνδέεται με το σύνολο Vitali

Αριθμούμε το σύνολο των ρητών πολλαπλασίων του 2π , έστω $\{r_n, r_n \neq r_m, n, m \in \mathbb{N}\}$.

Εν συνεχεία θεωρούμε τα σύνολα

$$V \dot{+} r_n, n \in \mathbb{N} \quad (\text{με } \dot{+} \text{ συμβολίζουμε την πράξη της πρόσθεσης στην ομάδα } S^1)$$

Σχετικά με τα παραπάνω σύνολα έχουμε να παρατηρήσουμε τα εξής

$$1. \bigcup V \dot{+} r_n = S^1.$$

Πράγματι, για $x \in S^1$ το x θα ανήκει αναγκαστικά σε κάποια κλάση ισοδυναμίας οπότε η διαφορά του από το συγκεκριμένο αντιπρόσωπο της κλάσης που επιλέξαμε για να θεωρήσουμε το σύνολο Vitali είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π οπότε αναγκαστικά θα ανήκει σε κάποιο $V \dot{+} r_{n_0}, n \in \mathbb{N}$.

$$2. \text{ Τα σύνολα } V \dot{+} r_n, n_0 \in \mathbb{N} \text{ αποτελούν διαμέριση της } S^1.$$

Πράγματι, έστω $x \in S^1$ και $x \in (V \dot{+} r_{n_1}), x \in (V \dot{+} r_{n_2}), n_1 = n_2 (r_{n_1} \neq r_{n_2})$. Τότε $x = \bar{y} \dot{+} r_{n_1}$ όπου $\bar{y}$ ο αντιπρόσωπος μιας κλάσης (που επιλέξαμε) και $x = \bar{z} \dot{+} r_{n_2}$ όπου $\bar{z}$ επίσης ένας άλλος αντιπρόσωπος διότι προφανώς $\bar{y} \neq \bar{z}$.

Όμως τότε οι αντιπρόσωποι $\bar{y}$ και $\bar{z}$ θα διέφεραν κατά ρητό πολλαπλάσιο του 2π το οποίο είναι άτοπο.

3. Μια τρίτη παρατήρηση είναι ότι, στρέφοντας κατά μια γωνία έστω θ η οποία είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π μπορούμε να φέρουμε καθένα από τα σύνολα της διαμέρισης στη θέση του άλλου ώστε να συμπίσει ακριβώς (congruent under translation).

Εν συνεχεία χωρίζουμε τον S^1 σε δύο ξένα σύνολα ως εξής:

$$A = \bigcup_{n-\acute{\alpha}\rho\tau\iota\omicron\varsigma} V \dot{+} r_n, \quad B = \bigcup_{n-\pi\epsilon\rho\iota\pi\tau\omicron\varsigma} V \dot{+} r_n$$

Λαμβάνοντας το σύνολο A , το οποίο είναι γνήσιο υποσύνολο του S^1 και περιστρέφοντας καθένα (από τα ξένα μεταξύ τους σύνολα $V \dot{+} r_n$, n -άρτιος) κατά μια στροφή με γωνία ρητό πολλαπλάσιο του 2π όπως φαίνεται στη συνέχεια

$$\begin{aligned} V \dot{+} r_2 &\longrightarrow V \dot{+} r_1 \\ V \dot{+} r_4 &\longrightarrow V \dot{+} r_2 \\ V \dot{+} r_6 &\longrightarrow V \dot{+} r_3 \\ &\vdots \\ V \dot{+} r_{2n} &\longrightarrow V \dot{+} r_n \end{aligned}$$

μπορούμε να συνθέσουμε ολόκληρο το κύκλο S^1 .

Εν συνεχεία λαμβάνοντας το άλλο τμήμα του S^1 , δηλαδή το σύνολο B , κατά ανάλογο τρόπο

$$\begin{aligned} V \dot{+} r_1 &\longrightarrow V \dot{+} r_1 \\ V \dot{+} r_3 &\longrightarrow V \dot{+} r_2 \\ V \dot{+} r_5 &\longrightarrow V \dot{+} r_3 \\ &\vdots \\ V \dot{+} r_{2n-1} &\longrightarrow V \dot{+} r_n \end{aligned}$$

λαμβάνουμε ένα καινούργιο, ολόκληρο κύκλο S^1 .

□

Σχόλιο

Σαφώς το παραπάνω παραβιάζει την κοινή εμπειρία αν υποθέσουμε ότι ο S^1 αποτελείται από ένα φυσικό υλικό. Βέβαια, το ανωτέρω παράδοξο προϋποθέτει άπειρο πλήθος στροφών, πράγμα το οποίο δεν είναι σε συμφωνία με τον φυσικό κόσμο. Στο αυθεντικό παράδοξο Banach-Tarski το πλήθος των διαμερίσεων είναι πεπερασμένο.

Υπενθυμίζουμε το παράδοξο του Ζήνωνα για τον “Αχιλλέα με την χελώνα”, ένα παράδοξο που αφορά κριτική στη χρήση άπειρων διαδικασιών το οποίο “φαίνεται” επίσης να παραβιάζει “τουλάχιστον για τα δεδομένα της αρχαιότητας” την εμπειρία. Σήμερα ένας πρωτοετής φοιτητής αντιλαμβάνεται ότι ο Ζήνωνας στο παράδοξό του “αθροίζει” χρονικά διαστήματα τα οποία αποτελούν γεωμετρική σειρά με λόγο μικρότερο του ένα, οπότε με

τη σύγχρονη “γλώσσα” του απειροστικού λογισμού η σειρά αθροίζεται “αυτόματα” με την χρήση των ορίων. Στην αρχαιότητα όμως (πιθανόν και σήμερα) ο κοινός νους για να αθροίσει άπειρες φορές χρειάζεται άπειρο χρόνο, δεδομένου ότι η πρακτική εμπειρία για κάθε επιμέρους άθροιση απαιτεί κάποιο ελάχιστο χρονικό διάστημα.

Τέλος, να σημειώσουμε ότι υπάρχει “μοντέλο” (θεωρία συνόλων) η οποία αρνείται το Αξίωμα Επιλογής και στη θεωρία αυτή δεν υπάρχει σύνολο Vitali, η οποία θεωρία όμως είναι πιο “κοντά” στη φυσική πραγματικότητα όπως τουλάχιστον την αντιλαμβανόμαστε.

Οι κατασκευές που γίνονται με τη χρήση του Αξιώματος Επιλογής δεν έχουν φυσική υπόσταση στον πραγματικό φυσικό κόσμο π.χ. Εάν από μια 3-διάστατη συμπαγή μπάλα B αφαιρεθεί ένα σημείο x_0 (δηλαδή $B \setminus \{x_0\}$) το οποίο (κατά τον Ευκλείδη) δεν έχει χώρο (δεν πιάνει τόπο), σε φυσικούς όρους παραμένει η ίδια η B . Άρα κατά μια έννοια δεν είναι παράδοξο να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα τα οποία αντιβαίνουν στη φυσική εμπειρία.

Κεφάλαιο 3

Το ΠΑΡΑΔΟΞΟ των Banach-Tarski (με χρήση A.C.) με ενσωματωμένο το παράδοξο του Hausdorff



Felix Hausdorff
(1868–1942)



Stefan Banach
(1892–1945)



Alfred Tarski
(1902–1983)



3.1 Α' Μέρος (απαραίτητα εργαλεία της απόδειξης του Θεωρήματος)

Απαραίτητα εργαλεία ανά ΒΗΜΑ για την απόδειξη του παραδόξου-θεωρήματος Banach-Tarski

1. Μια συγκεκριμένη ομάδα περιστροφών της μοναδιαίας σφαίρας έστω G
2. Η μοναδικότητα αναπαράστασης της απλουστευμένης μορφής η οποία εξασφαλίζεται από το

Θεώρημα 3.1 (Μοναδικότητας). Κάθε περιστροφή της G έχει μοναδική αναπαράσταση απλουστευμένης μορφής. Δηλαδή, αν δύο περιστροφές απλουστευμένης μορφής φαίνονται διαφορετικές, τότε αναπαριστούν, πράγματι, διαφορετικές φυσικές περιστροφές.

3. Εξισώσεις περιστροφών (απόδειξη της 1ης)

4. Θεώρημα Banach-Schröder-Bernstein

5. ΠΑΡΑΔΟΞΟ Hausdorff (δίλημμα “μισού-τρίτου”/ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$).

Ακολουθεί μια “θαυμαστή” ιδιότητα ως συμπέρασμα του παρακάτω θεωρήματος, η οποία είναι γνωστή ως “δίλημμα μισού-τρίτου” και εμφανίστηκε σε άρθρο του Hausdorff το 1914 πυροδοτώντας την συνεργασία Banach-Tarski το 1924.

Θεώρημα 3.2 (Hausdorff). Η σφαίρα S (επιφάνεια μιας μπάλας) εκτός ενός σχετικά μικρού αριθμού σημείων της, μπορεί να διαμεριστεί σε τρία ξένα μεταξύ τους σύνολα σημείων - A και B και Γ - με τέτοιο τρόπο ώστε τα A, B, Γ και η ένωση των B και Γ να είναι ίσα μεταξύ τους, δηλαδή

$$A = B = \Gamma = B \cup \Gamma$$

$$A \cup B \cup \Gamma = S$$

$$A \cap B \cap \Gamma = \emptyset$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βρίσκεται εντός της αποδείξεως του παραδόξου Banach-Tarski. $\square$

3.2 Β' Μέρος (εκδοχή διπλασιασμού)

Το θεώρημα, γνωστό πλέον ως *Θεώρημα Banach-Tarski* ή *παράδοξο Banach-Tarski*, δηλώνει ότι

“μια συμπαγής σφαίρα (μπάλα) μπορεί να διασπαστεί σε πεπερασμένο αριθμό κομματιών (όχι μικρότερο από πέντε) και να ανασυναρμολογηθεί με τέτοιο τρόπο, ώστε να σχηματίσει δύο συμπαγείς σφαίρες (μπάλες), καθεμιά ολόιδια σε μέγεθος με την αρχική”.

Αυτή η μορφή του θεωρήματος αναφέρεται ως η *εκδοχή του διπλασιασμού*. Η έκφραση του θεωρήματος με μορφή τύπων έχει ως εξής:

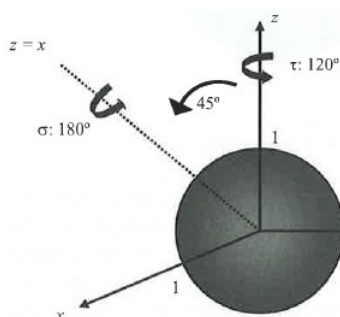
“Η μοναδιαία μπάλα $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα B_1 και B_2 ώστε $B \sim B_1$ και $B \sim B_2$ ”.

Το “ $\sim$ ” σημαίνει “ισοδύναμο κατά τμήματα με” ή “ισοδύναμο μέσω διάσπαση με”. Η απόδειξη του Θεωρήματος Banach-Tarski περιλαμβάνει σημειοσύνολα και σύνολα περιστροφών.

Απόδειξη

Βήμα I. [δημιουργούμε μια ομάδα περιστροφών της μοναδιαίας σφαίρας (θα εννοείται ως μοναδιαία σφαίρα η “επιφάνεια-κέλυφος” της μοναδιαίας “μπάλας”)].

Θυμίζουμε ότι *Περιστροφή ενός σημειοσυνόλου (σχήματος) γύρω από έναν άξονα στο τρισδιάστατο χώρο* είναι μία άκαμπτη κίνηση τέτοια ώστε κάθε σημείο του σχήματος να κινείται σ' ένα κυκλικό μονοπάτι γύρω από τον άξονα και σε επίπεδο κάθετο στον άξονα περιστροφής.



σ : περιστροφή γύρω από τον $z = x$ κατά 180°

τ : περιστροφή γύρω από τον $z'z$ κατά 120°

σ^2 : περιστροφή κατά 360° γύρω από τον $z = x$

(περιστροφή της σφαίρας στην αρχική θέση I)
(ταυτοτική περιστροφή)

τ^2 : περιστροφή κατά 240° γύρω από τον $z'z$

(επιστροφή της σφαίρας στην αρχική θέση I)
(ταυτοτική περιστροφή)

τ^3 : περιστροφή κατά 360° γύρω από τον $z'z$

(επιστροφή της σφαίρας στην αρχική θέση I)
(ταυτοτική περιστροφή)

3.2. Β ΜΕΡΟΣ (ΕΚΔΟΧΗ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ)

Κάνουμε την εξής σύμβαση γραφής μιας διαδοχής περιστροφών.

Η γραφή π.χ. $\tau\sigma\tau$ σημαίνει εφαρμογή περιστροφών ξεκινώντας από το τέλος και ισχύει $\sigma^2 = \tau^3 = I$.

Κάθε περιστροφή που ακολουθείται από μια ακολουθία βασικών περιστροφών μπορεί να γραφτεί σε απλουστευμένη μορφή ως σειρά συμβόλων καθένα από τα οποία είναι της μορφής σ, τ, τ^2 .

Μήκος της περιστροφής είναι ο αριθμός των συμβόλων που χρησιμοποιούμε στην απλουστευμένη μορφή.

Αναφέρουμε κάποια παραδείγματα ακολουθιών, βασικών περιστροφών, και τι εκφράζουν

π.χ.

- $\sigma\tau^2\sigma\tau$ είναι μια ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ-αποτέλεσμα της περιστροφής τ (με ότι εκφράζει) ακολουθούμενη από την περιστροφή σ , στην συνέχεια από την τ^2 και τέλος από την σ .

Είναι γραμμένη σε απλουστευμένη μορφή (αφού είναι μία ακολουθία των βασικών περιστροφών σ, τ, τ^2 και έχει μήκος 4

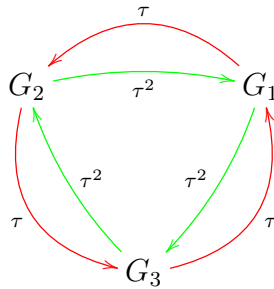
- η $\tau^3\sigma\tau^4\sigma^5\tau$ όμως είναι μια ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ γραμμένη όχι σε απλουστευμένη μορφή η οποία είναι $\tau^3\sigma\tau^4\sigma^5\tau^3\sigma\tau^3\tau^1\sigma^2\sigma^2\sigma^1\tau = \sigma\tau\sigma\tau$ μήκους 4.

Το άπειρο αλλά αριθμήσιμο πλήθος δυνατών περιστροφών που σχηματίζονται από τις σ, τ, τ^2 εφοδιασμένο με την πράξη “κατά σειρά εφαρμογή (ή διαδοχικά)” αποτελεί ομάδα την οποία ονομάζουμε **ομάδα περιστροφών** και συμβολίζουμε G . (Η περιστροφή είναι ισομετρία). Η εν λόγω ομάδα θα παίζει τον ρόλο που παίζει η ομάδα “στροφές κατά ρητό πολλαπλάσιο του 2π ” που χρησιμοποιήσαμε στο παράδοξο που προκύπτει από το σύνολο Vitali, με την διαφορά ότι η εν λόγω ομάδα στον $\mathbb{R}^3$ έχει πολλούς βαθμούς ελευθερίας με αποτέλεσμα να είναι πολύ πιο πλούσια και περίπλοκη.

Θεώρημα 3.3. Κάθε Περιστροφή της G έχει μοναδική αναπαράσταση απλουστευμένης μορφής ϖ , δηλαδή εάν δύο περιστροφές απλουστευμένης μορφής ϖ_1, ϖ_2 φαίνονται διαφορετικές τότε αναπαριστούν πράγματι, δύο διαφορετικές φυσικές περιστροφές Π_1, Π_2 αντίστοιχα

Το παραπάνω θεώρημα της μοναδικής αναπαράστασης απλουστευμένης μορφής ϖ έχει ως συνέπεια την ταξινόμηση όλων των αριθμήσιμων άπειρων περιστροφών της G .

Αν το τελευταίο γράμμα αριστερά είναι $\square \sigma \dots$ και η επιπλέον περιστροφή



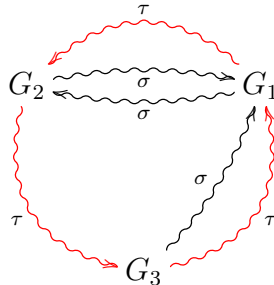
- είναι τ (βλέπε **κόκκινο**).
- είναι τ^2 (βλέπε **πράσινο**).

Προσοχή: Η επέμβαση με σ αποκλείεται διότι

$$\sigma\sigma\dots = \sigma^2\dots = I\dots$$

η οποία έχει ήδη τοποθετηθεί.

.....
Αν το τελευταίο αριστερά είναι $\square \tau \dots$ και η επιπλέον περιστροφή



- είναι τ (βλέπε **κόκκινο**).
- είναι σ (βλέπε **μαύρο**).

Προσοχή: Η επέμβαση με τ^2 αποκλείεται διότι

$$\tau^2\tau\dots = \tau^3\dots = I\dots$$

η οποία έχει ήδη τοποθετηθεί.

Ο περίεργος, αλλά αξιοσημείωτος, τρόπος συσχέτισης των τριών υποσυνόλων G_1, G_2, G_3 της G .

$$\tau G_1 = G_2$$

$$\tau^2 G_1 = G_3$$

$$\sigma G_1 = G_2 \cup G_3$$

Σχέσεις “αθώες” που θα οδηγήσουν σε μια θαυμαστή διαμέριση της μοναδιαίας σφαίρας (σύνορο-κέλυφος της μπάλας). Παρακάτω γίνεται προσπάθεια κυρίως μέσω των παραπάνω σχημάτων, να γίνει κατανοητό, το κριτήριο και ο τρόπος που χρησιμοποιείται στην ταξινόμηση κάθε μιας από τις αριθμήσιμες άπειρες περιστροφές-στοιχεία της ομάδας G στις κατηγορίες G_1, G_2, G_3 .

Η ταξινόμηση μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια αναδρομική διαδικασία με την έννοια ότι η κατάταξη κάθε περιστροφής στηρίζεται στην κατάταξη της προηγούμενης καθώς και στο τελευταίο γράμμα της ήδη καταταχθείσας, όπως επίσης επηρεάζεται και από το γράμμα της επόμενης. Συνοψίζουμε, στο τι επηρεάζει την ταξινόμηση.

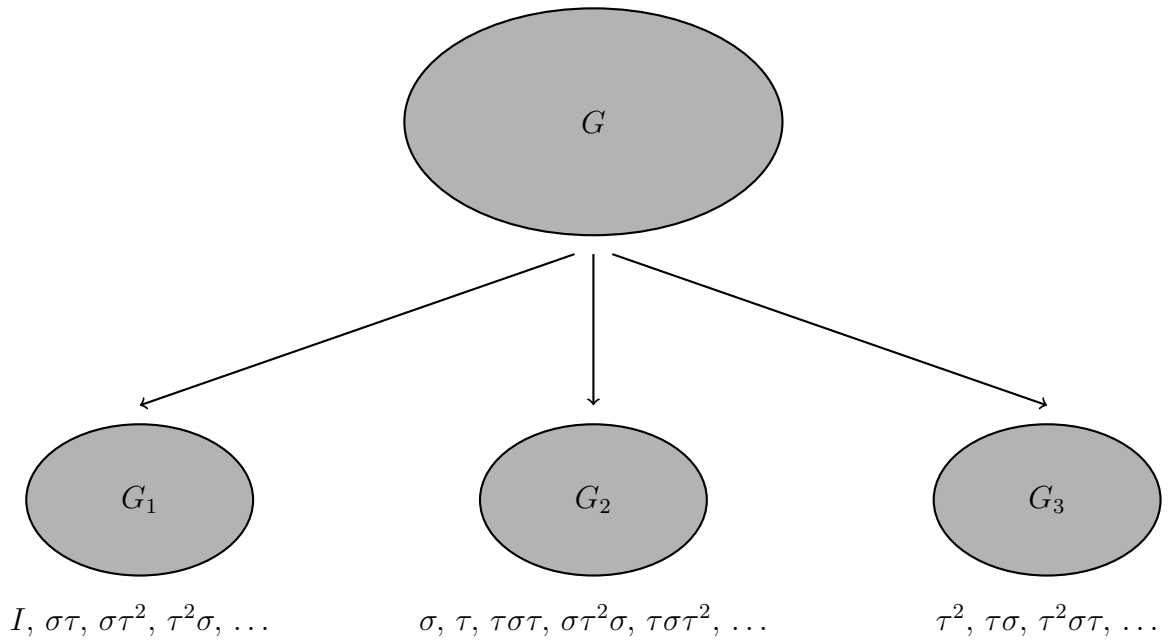
- Το προτελευταίο γράμμα της περιστροφής π.χ. στην $\sigma\tau^2\sigma\tau$ το γράμμα τ (αυτό που είναι τονισμένο).
- το σε ποιά κατηγορία (G_1, G_2, G_3) βρίσκεται η $\tau^2\sigma\tau$

3.2. Β ΜΕΡΟΣ (ΕΚΔΟΧΗ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ)

iii) Ποιό είναι το γράμμα που συμβολίζει την τελευταία περιστροφή; π.χ. στην $\underline{\sigma}\tau^2\sigma\tau$ ή $\underline{\tau}\tau^2\sigma\tau$ είναι τα υπογραμμισμένα δηλαδή τα σ και τ αντίστοιχα..

Έχουμε εξ' αρχής ορίσει

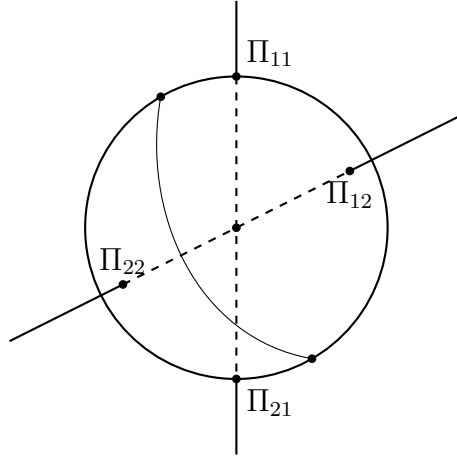
- η ταυτοτική περιστροφή I να ανήκει στο υποσύνολο G_1 της G .
- οι σ, τ περιστροφές να ανήκουν στο υποσύνολο G_2 της G .
- η τ^2 περιστροφή να ανήκει στο υποσύνολο G_3 της G .



Στο παραπάνω σχήμα αναγνωρίζουμε αρκετές περιστροφές ως μέλη των υποσυνόλων G_1, G_2, G_3 .

Βήμα II. Χρησιμοποιούμε αυτές τις περιστροφές για να διαμερίσουμε την σφαίρα σε υποσύνολα που κατέχουν την θαυμαστή ιδιότητα του παραδόξου του Hausdorff.

1. Κάθε περιστροφή έχει δύο πόλους.(δύο σταθερά σημεία).
2. Το πλήθος των περιστροφών είναι αριθμήσιμο οπότε και το πλήθος των πόλων είναι τέτοιο (και ασφαλώς αυτοί οι πόλοι σχετίζονται (!) με την G) το οποίο ας συμβολίζουμε με P και $S \setminus P$ να δηλώνει τα υπόλοιπα σημεία της μοναδιαίας σφαίρας S που δεν είναι πόλοι. Είναι φανερό ότι $S = P \cup S \setminus P$
3. Το “κλασματικό μέρος” της σφαίρας που αντιστοιχεί στο P είναι απειροστά μικρά.



4. Κατά αναλογία με το σύνολο Vitali θεωρούμε στο $S \setminus P$ την εξής σχέση ισοδυναμίας

$$x \sim y \iff (\exists g \in G)[g(x) = y]$$

(Στο σύνολο Vitali εάν υπάρχει στροφή η οποία είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π ώστε να στέλνει το x στο y). Η παραπάνω σχέση ισοδυναμίας χωρίς το $S \setminus P$ σε κλάσεις ισοδυναμίας και χρησιμοποιώντας το αξίωμα επιλογής επιλέγουμε από κάθε κλάση ένα στοιχείο σχηματίζοντας ένα σύνολο C .

Τροχιά θα λέμε το σύνολο των σημείων του $S \setminus P$ τα οποία τα “συνδέει” μια περιστροφή. Δύο τέτοια σημεία θα λέμε ότι ανήκουν στην ίδια τροχιά. Οι περιστροφές είναι αριθμήσιμου πλήθους, με την κάθε μία να συνδέει-συσχετίζει υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων του $S \setminus P$.

5. Οι τροχιές όπως τις περιγράψαμε, δεν έχουν καμία “χειροπιαστή” ιδιότητα που θα μας επέτρεπε να επιλέξουμε-καθορίσουμε ένα μέλος από την καθεμία.
6. Το ΑΞΙΩΜΑ της ΕΠΙΛΟΓΗΣ (Α.Σ.) είναι η μοναδική (θεωρητική) διέξοδος.

Υποθέτουμε λοιπόν, όπως το (Α.Σ.) εξασφαλίζει, την δυνατότητα επιλογής, ακριβώς ενός σημείου από κάθε μία από τις παραπάνω τροχιές, και τον σχηματισμό ενός συνόλου επιλογής το οποίο συμβολίζουμε με C .

Ισχύουν λοιπόν τα εξής όσον αφορά, στις περιστροφές της G , το σύνολο επιλογής C , το σύνολο P , το σύνολο $S \setminus P$.

1. Κανένα σημείο του συνόλου C δεν μπορεί να περιστραφεί ώστε να πέσει πάνω σε κάποιο άλλο σημείο του C μέσω μιας περιστροφής από την G .
2. Αν κάθε σημείο του C περιστρεφόταν μέσω κάθε περιστροφής από την G , θα παίρναμε τελικά κάθε σημείο του $S \setminus P$.
3. Τα σύνολα C και P δεν έχουν κοινά σημεία.
4. Το σύνολο C είναι υπεραριθμήσιμο.

Θα συμβολίσουμε με $K_1 = G_1 C$ το σημειοσύνολο της σφαίρας S το οποίο προκύπτει από την εφαρμογή κάθε περιστροφής του G_1 στο C . Ακριβώς ίδια συμβολίζουμε

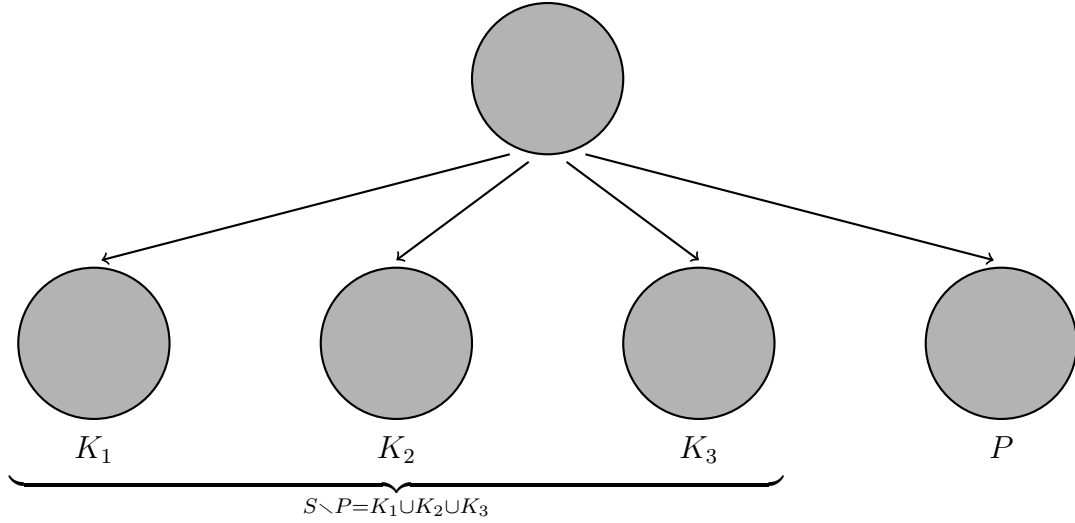
3.2. Β ΜΕΡΟΣ (ΕΚΔΟΧΗ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ)

με $K_2 = G_2C$, $K_3 = G_3C$ τα σημειosύνολα που προκύπτουν με ανάλογο τρόπο εφαρμογής των περιστροφών των G_2, G_3 στο C .

Η σφαίρα S είναι διαμερισμένη κατά αυτόν τον τρόπο σε τέσσερα ξένα μεταξύ τους σημειosύνολα K_1, K_2, K_3, P , οπότε

$$S = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup P$$

Η μοναδιαία σφαίρα S



Θυμίζουμε τις “αθώες” σχέσεις

$$\begin{aligned}\tau G_1 &= G_2 \\ \tau^2 G_1 &= G_3 \\ \sigma G_1 &= G_2 \cup G_3\end{aligned}$$

Ανάλογες “αθώες” σχέσεις ισχύουν για τα K_1, K_2, K_3 , δηλαδή

$$\begin{aligned}\tau K_1 &= K_2 \\ \tau^2 K_1 &= K_3 \\ \sigma K_1 &= K_2 \cup K_3\end{aligned}$$

και με τον συμβολισμό $\cong$ να σημαίνει ισοδύναμο ή ίσα (με την έννοια ότι αντιστοιχίζονται μέσω ισομετρίας) έχουμε

$$K_1 \cong K_2, \quad K_1 \cong K_3, \quad K_1 \cong K_2 \cup K_3$$

οπότε είναι

$$K_1 \cong K_2 \cong K_3 \cong K_2 \cup K_3$$

Αυτή η πρόταση είναι το γνωστό παράδοξο του Hausdorff το οποίο αναφέρεται και ως δίλημμα “μισού-τρίτου”.

Εξηγούμε τον χαρακτηρισμό “μισού-τρίτου”.

Με τους συμβολισμούς που έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει είναι

$$S = P \cup S \setminus P \quad (3.1)$$

$$S \setminus P = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \quad (3.2)$$

$$K_1 \cong K_2 \cong K_3 \cong K_2 \cup K_3 \quad (3.3)$$

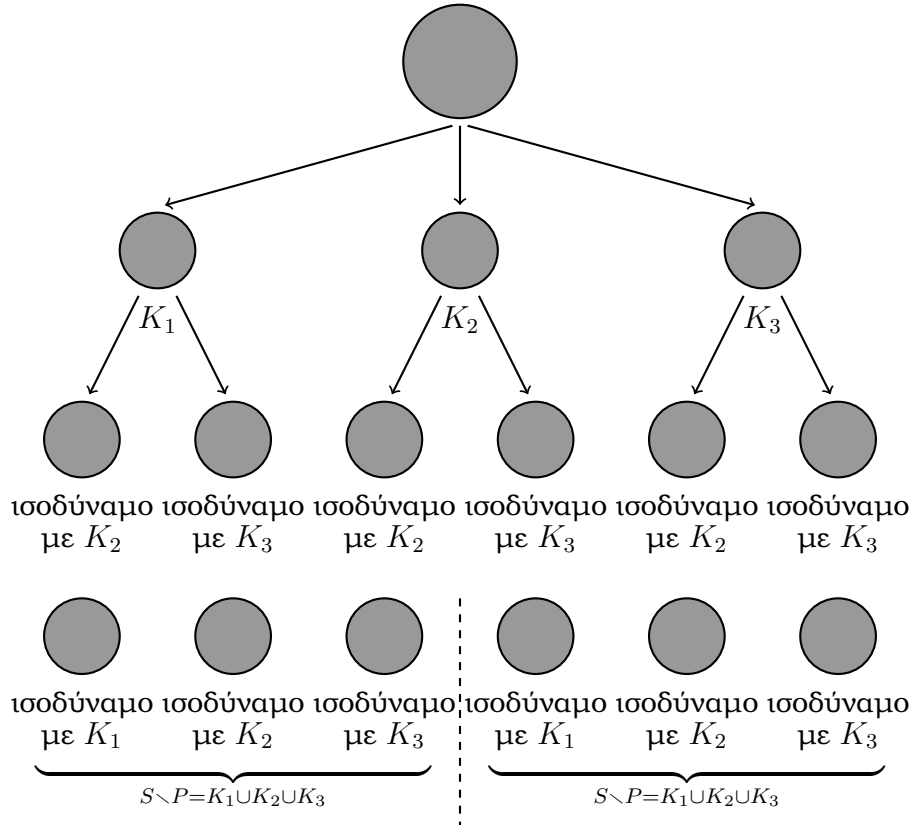
οπότε αναλυτικότερα ισχύει

$$K_1 \cong K_2 \cup K_3 \quad (3.4)$$

$$K_2 \cong K_2 \cup K_3 \quad (3.5)$$

$$K_3 \cong K_2 \cup K_3 \quad (3.6)$$

$$S \setminus P = K_1 \cup K_2 \cup K_3$$



Εξαιτίας των (3.2) και (3.3) μπορεί να θεωρηθεί ότι καθένα από τα K_1, K_2, K_3 αποτελούν το $\frac{1}{3}$ του $S \setminus P = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ και με πολύ μικρή διαφορά περίπου το $\frac{1}{3}$ της σφαίρας $S = P \cup S \setminus P$ εξαιτίας των (3.1) και (3.2).

Όμως εξαιτίας των (3.4), (3.5), (3.6), (3.3), (3.1), (3.2) είναι δυνατόν να συμπεράνουμε ότι αποτελούν περίπου και το $\frac{1}{2}$ της σφαίρας $S = P \cup S \setminus P$.

3.2. Β ΜΕΡΟΣ (ΕΚΔΟΧΗ ΔΙΠΛΑΣΙΑΣΜΟΥ)

Το παράδοξο του Hausdorff μας ανοίγει τον δρόμο ώστε να χωρίσουμε την σφαίρα σε πεπερασμένο αριθμό κομματιών, τα οποία μπορούν να ανασυναρμολογηθούν για να σχηματίσουν δύο σφαίρες κάθε μια ολόδια σε μορφή με την αρχική, όπως φαίνεται στο προηγούμενο σχήμα.

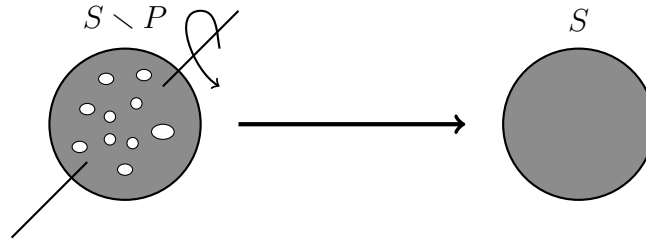
Κατάφεραμε να διαμερίσουμε προς το παρόν την $S \setminus P$ (σχεδόν την σφαίρα δηλαδή εκτός από ένα αριθμήσιμο, σχετικά μικρό υποσύνολο) σε έξι μεταξύ τους υποσύνολα, καθένα από τα οποία όπως είδαμε είναι ισοδύναμο είτε με το K_1 είτε με το K_2 είτε με το K_3 , τα οποία ενούμενα ανά τρία σχηματίζουν δύο αντίγραφα της $S \setminus P$.

Την $S \setminus P$ ας την φανταζόμαστε σαν μια διάτρητη σφαίρα από αριθμήσιμο πλήθος “τρυπών” (οπών), δηλαδή τους πόλους των περιστροφών. Υπάρχει λοιπόν μια εκκρεμότητα, όσον αφορά στα στοιχεία του συνόλου P (δηλαδή από πόλους), τα οποία πρέπει να τοποθετηθούν ώστε να ολοκληρωθεί η απόδειξη (ισοδυναμία διάσπασης).

Είναι εύκολο να “μεταφέρουμε”-“αντιστοιχίσουμε” τα στοιχεία του συνόλου P με τις τρύπες πάνω στη σφαίρα $S \setminus P$ οπότε να πάρουμε ένα πλήρες - ολόδιο αντίγραφο της αρχικής σφαίρας S .

Αυτό που πρέπει να απαντηθεί τελειώνοντας είναι το πώς καλύπτονται οι τρύπες του δεύτερου αντιγράφου της $S \setminus P$.

Είναι γεγονός ότι είναι αριθμήσιμα σε πλήθος τα σημεία P και μπορούμε να τα φανταστούμε σαν τρύπες πάνω στην σφαίρα όπως προαναφέραμε. Αυτή η εικόνα μας παραπέμπει στην παράγραφο της ισοδυναμίας μέσω διάσπασης και τις διάφορες τεχνικές της.



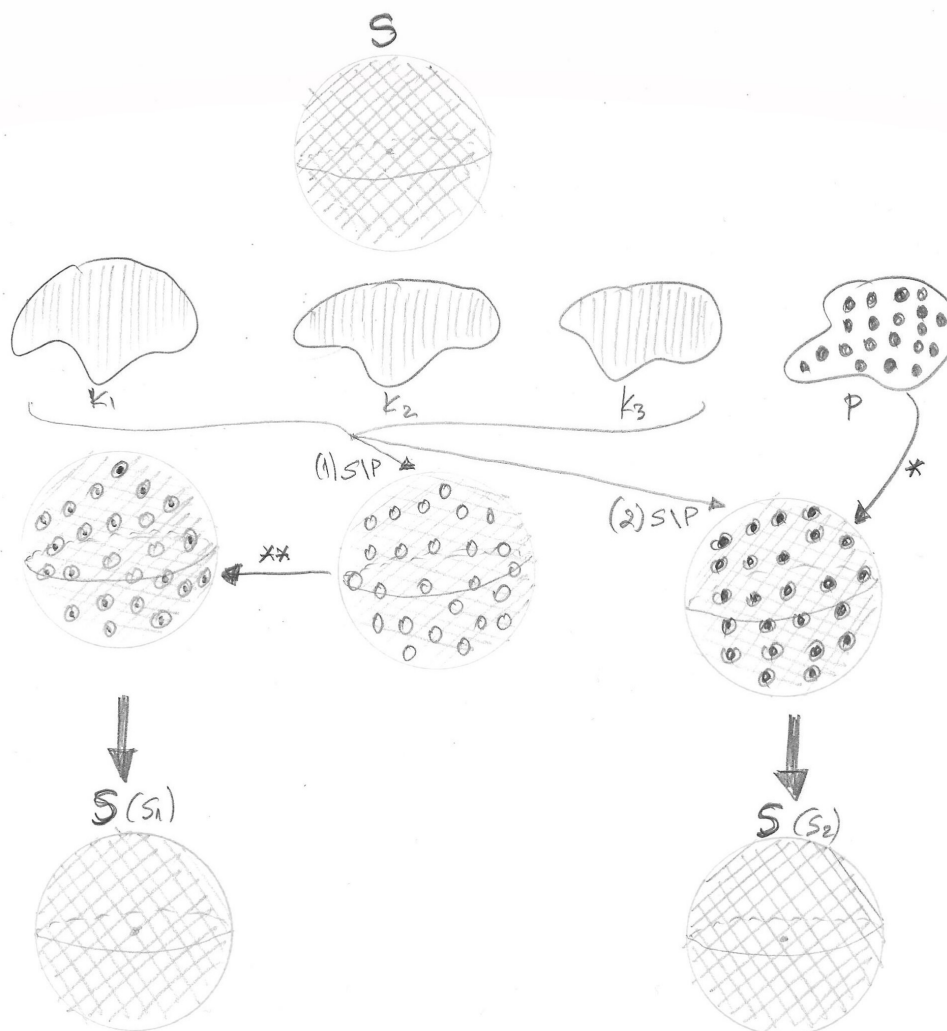
Κλείνοντας το δεύτερο αντίγραφο της σφαίρας S θα το πάρουμε λοιπόν με εφαρμογή της τεχνικής της μετατόπισης από το άπειρο στο σημειοσύνολο $S \setminus P$. Ακολουθεί σχηματική περιγραφή-σύνοψη των προηγούμενων στο σχήμα της σελίδας 59.

Βήμα III. Επεκτείνουμε την προαναφερθείσα ιδιότητα από την σφαιρική επιφάνεια στη συμπαγή μπάλα.

Σε κάθε υποσύνολο της σφαίρας $S(K_1, K_2, K_3, P)$ προσαρτούμε ένα σύνολο σημείων (υποσύνολο της μπάλας B) τέτοιο ώστε, η ακτινική προβολή των σημείων τους, εκτός φυσικά του κέντρου $O(0, 0, 0)$ της μπάλας B πάνω στη σφαίρα να είναι τα K_1, K_2, K_3, P αντίστοιχα. Τα σύνολα αυτά, τα αντίστοιχα των K_1, K_2, K_3, P , συμβολίζουμε με $\bar{K}_1, \bar{K}_2, \bar{K}_3, \bar{P}$.

Το ίδιο κάνουμε και με τα αντίγραφα S_1, S_2 της S δημιουργώντας τα $\bar{S}_1, \bar{S}_2$ αντίστοιχα.

Συνήθικα οι αφαίρες ως σφαίρες ($1=2/1$)



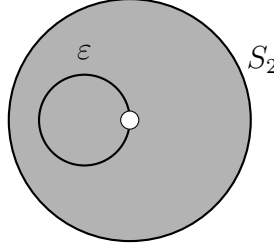
Ισχυριζόμαστε ότι $\overline{K_1} \cong \overline{K_2} \cong \overline{K_3} \cong \overline{K_2 \cup K_3}$ και ότι η $\overline{S}$ μπορεί να χωριστεί και να αναδιαταχθεί σε $\overline{S_1}$ και $\overline{S_2}$ καθένα από τα οποία είναι ισοδύναμα κατά τμήματα (ισοδύναμα μέσω διάσπασης) με την $\overline{S}$.

Η $\overline{S}$ είναι η διάτρητη μοναδιαία μπάλα και αναπαριστά όλα τα σημεία, εκτός του κέντρου, της μοναδιαίας μπάλας B .

Το θεώρημα Banach-Tarski έχει δείχθει με το σημείο του κέντρου $O(0,0,0)$ να αποτελεί την τελευταία εκκρεμότητα. Όπως και πριν το “κέντρο” της τρύπιας μπάλας $\overline{S_1}$ μπορούμε να το συμπληρώσουμε με το κέντρο της αρχικής μπάλας B , οπότε το αντίγραφο $\overline{S_1}$ γίνεται $B(B_1)$, το δε “κέντρο” της τρύπιας μπάλας $\overline{S_2}$ με την γνωστή τεχνική της μετατόπισης από το άπειρο.

Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε το “κέντρο” της τρύπιας $\overline{S_2}$ ως ένα από τα αριθμήσιμα

σε πλήθος, προσεκτικά επιλεγμένα σημεία σε ένα κύκλο ε που περιέχεται ολοκληρωτικά στην $\bar{S}_2$ (κάτοψη).



Μετατοπίζοντας τα σημεία από το άπειρο στον κύκλο ε γεμίζει η τρύπα αυτού που αποτελεί το κέντρο της $\bar{S}_2$ πλέον και την μετατρέπει σε $B(B_2)$. Έτσι ολοκληρώθηκε η απόδειξη του θεωρήματος Banach-Tarski.

Σχόλιο. Η περιπλοκότητα της ομάδας των στροφών στον $\mathbb{R}^3$ με άξονα που διέρχεται από το $O(0,0,0)$ και συγκεκριμένα οι “αθώες” σχέσεις μας δίνουν την δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε πεπερασμένα κομμάτια αντί για άπειρα που χρησιμοποιήσαμε του Vitali.

3.3 Γ΄ Μέρος (Εκδοχή μεγεθυντική ή Ισχυρή μορφή)

Θεώρημα 3.4. Ένα στερεό οποιουδήποτε σχήματος και όγκου μπορεί να διασπαστεί και να ανασυναρμολογηθεί ώστε να σχηματίσει ένα άλλο στερεό οποιουδήποτε ορισμένου σχήματος και όγκου. (παράδοξο του μπιζελιού και του ήλιου).

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για δύο (οποιαδήποτε) φραγμένα τρισδιάστατα σύνολα A και B με μη κενά εσωτερικά ισχύει $A \preceq B$ και $B \preceq A$ οπότε θα είναι $A \sim B$. Ενδιαφέρουσα είναι η εκδοχή αυτή του θεωρήματος διότι δεν απαιτεί τα A, B να έχουν σφαιρικό σχήμα. Στην πραγματικότητα δεν χρειάζεται να είναι ολόidia.

Μέσω Banach-Tarski (Διπλασιασμός), δημιουργούμε n αντίγραφα της W τα οποία καλύπτουν εξ ολοκλήρου την V (βλέπε το σχήμα που ακολουθεί).

Άρα,

$$\begin{aligned} A \subseteq V \subseteq [n\text{-επικαλύπτοντα αντίγραφα της } w] \\ \subseteq [n\text{-ξένα μεταξύ τους αντίγραφα της } w] \subseteq W \subseteq B \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

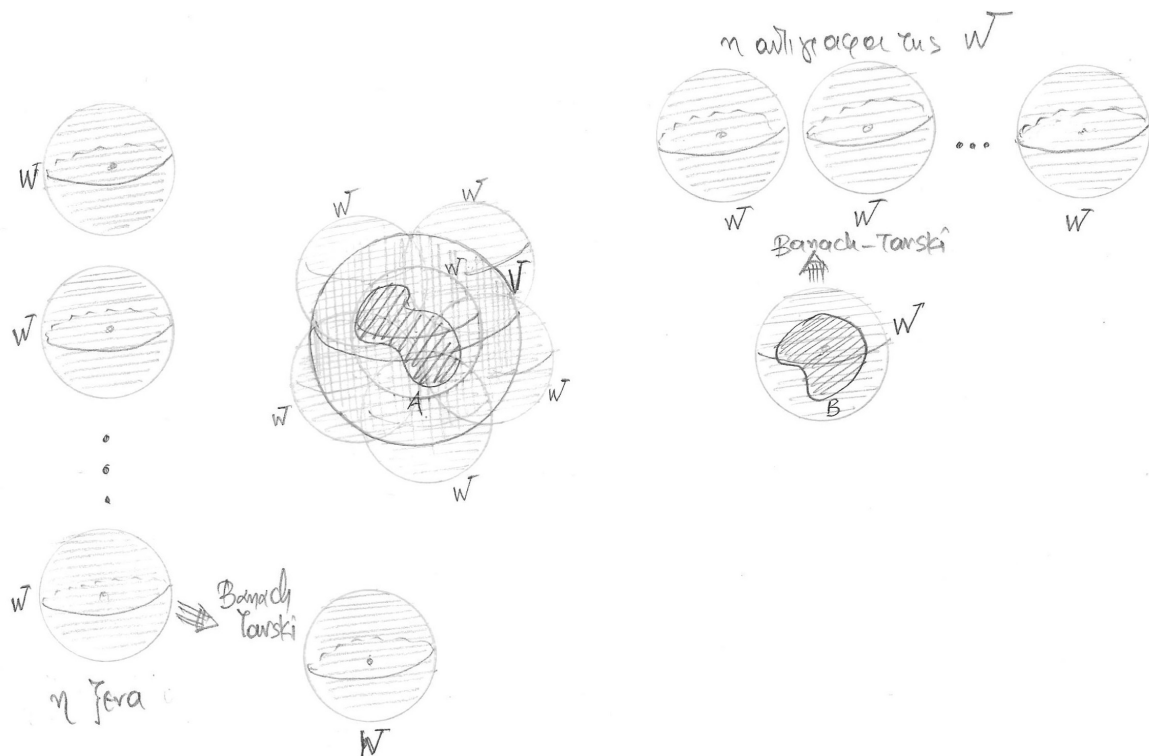
$$A \preceq B \tag{3.7}$$

και με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι

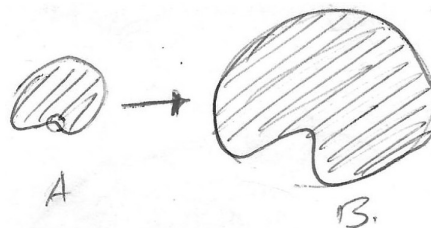
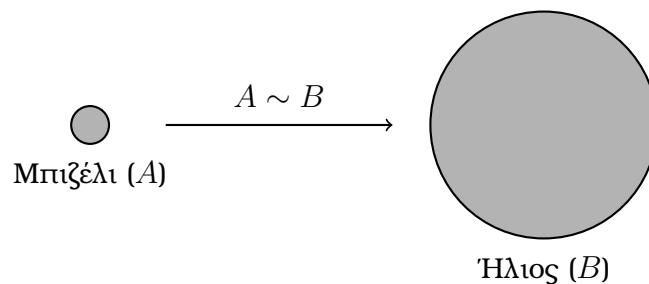
$$B \preceq A \tag{3.8}$$

Από (3.7) και (3.8), με χρήση του συμπεράσματος του θεωρήματος Banach-Schröder-Bernstein, ισχύει ότι

$$A \sim B$$

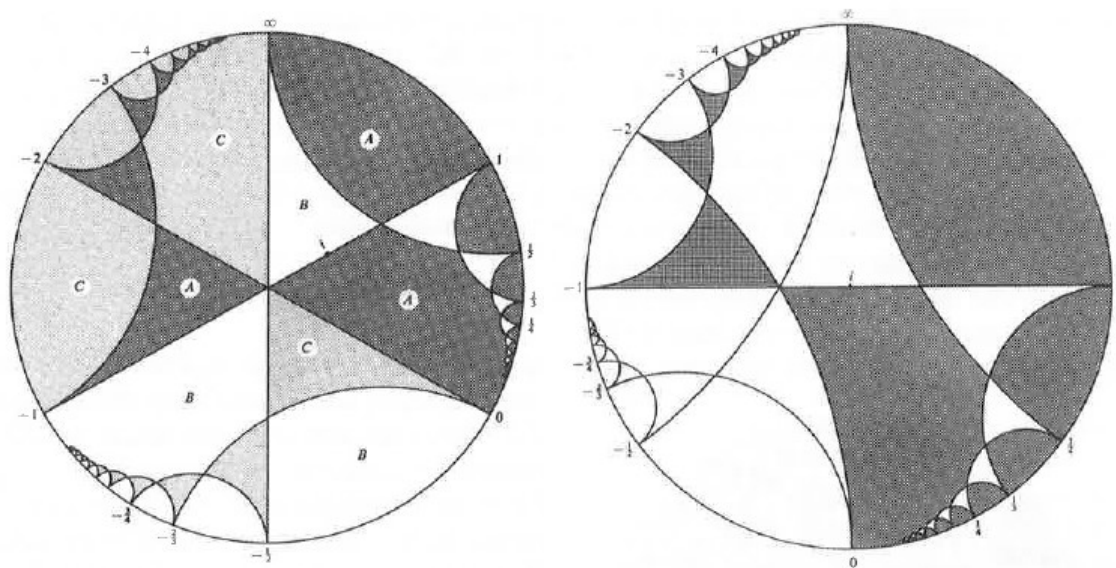


Μια ισοδύναμη, και ενδεχομένως πιο εντυπωσιακή, εκδοχή υποστηρίζει ότι ένα στερεό οποιουδήποτε μεγέθους και σχήματος, ας πούμε ενός μικρού μπιζελιού, μπορεί να διασπαστεί σε πεπερασμένο αριθμό κομματιών και να ανασυναρμολογηθεί για να σχηματίσει ένα στερεό οποιουδήποτε άλλου μεγέθους και σχήματος, ας πούμε αυτό του Ήλιου. Αυτή η εκδοχή, γνωστή ως *ισχυρή μορφή* ή *μεγεθυντική εκδοχή* του θεωρήματος, είναι επίσης γνωστή ως *εκδοχή του μπιζελλιού και του ήλιου*. $\square$

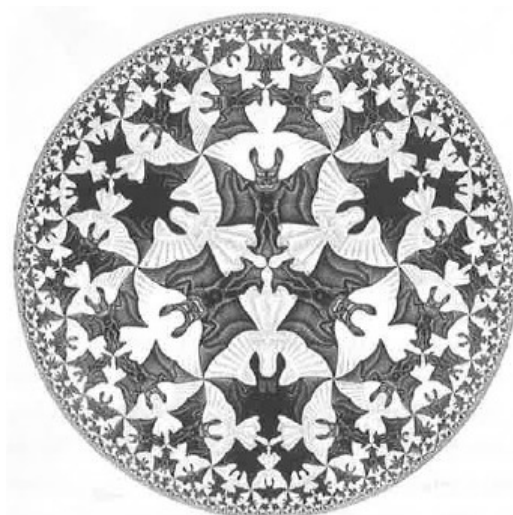


3.4 Ένα μη-ευκλείδειο μοντέλο του παραδόξου Hausdorff

Ακολουθεί μια γεωμετρική ερμηνεία του παραδόξου Hausdorff σε μη-Ευκλείδειο χώρο (υπερβολικό), αν και το Θεώρημα των Banach-Tarski απαιτεί χώρο τουλάχιστον 3 διαστάσεων. Τα σύνολα είναι κατασκευάσιμα και το πιο εκπληκτικό είναι ότι **δεν είναι απαραίτητο το Αξίωμα Επιλογής**. Οι Wagon και Mycielski το 1984 χρησιμοποιούν ως μοντέλο του υπερβολικού επιπέδου τον δίσκο του Poincaré.



Ακολουθεί καλλιτεχνική απεικόνιση του παραδόξου σε έργο του Escher. Τον δίσκο του Poincaré χρησιμοποιεί ο Escher σε τέσσερα έργα του.



Σχήμα 3.1: Απόσπασμα από την εργασία των Banach-Tarski

Sur la décomposition des ensemble de points en parties respectivement congruentes.

Par

St. Banach (Lwów) et **A. Tarski** (Varsovie)

Nous étudions dans cette Note les notions de *l'équivalence des ensembles de points par décomposition finie*, resp. *dénombrable*. Deux ensembles de points situés dans un espace métrique sont dits équivalents par décomposition finie (ou dénombrable), lorsqu'ils peuvent être décomposés en un nombre fini et égal (ou une infinité dénombrable) de parties disjointes respectivement congruentes.

Les principaux résultats contenus dans le présent article sont les suivants:

Dans un espace euclidien à $n \geq 3$ dimensions deux ensembles arbitraires, bornés et contenant des points intérieurs (p. ex. deux sphères à rayons différents), sont équivalents par décomposition finie.

Un théorème analogue subsiste pour les ensembles situés sur la surface d'une sphère; mais le théorème correspondant concernant l'espace euclidien à 1 ou 2 dimensions est faux.

D'autre part:

Dans un espace euclidien à $n \geq 1$ dimensions deux ensembles arbitraires (bornés ou non), contenant des points intérieurs, sont équivalents par décomposition dénombrable.

La démonstration des théorèmes précédents s'appuie sur les résultats de MM. Hausdorff, Vitali et Banach^a, qui concernent le problème général de mesure; elle fait donc usage de *l'axiome*

^aF. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 401 et 469.

G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologna 1905.

St. Banach, *Sur le problème de mesure*, *Fund. Math.* IV, 1923, p. 30–31.)

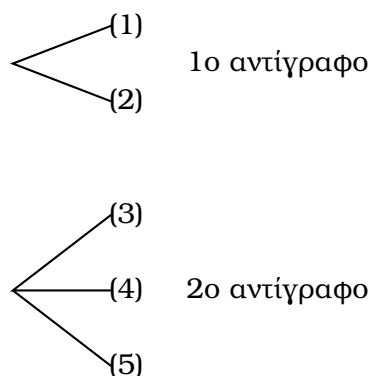
3.5 Συλλογισμοί τύπου Banach-Tarski (ιδιότητα Baire)

Συλλογισμοί τύπου Banach-Tarski συναντώνται σε διάφορες περιοχές των μαθηματικών. Καθώς και αρκετά ανοιχτά προβλήματα ενδέχεται να απαιτούν συλλογισμούς τύπου Banach-Tarski.

3.5.1 Robinson

Να θυμίσουμε ότι το Θεώρημα Banach-Tarski επιτρέπει τον διπλασιασμό της συμπαγούς σφαίρας χρησιμοποιώντας μια πεπερασμένη διάσπαση χωρίς να καθορίζει τον απαιτούμενο αριθμό κομματιών.

Το 1947 ο R.M Robinson αποδεικνύει ότι ο διπλασιασμός Banach-Tarski μπορεί να επιτευχθεί με ελάχιστο αριθμό κομματιών το 5 (βλέπε [40]).

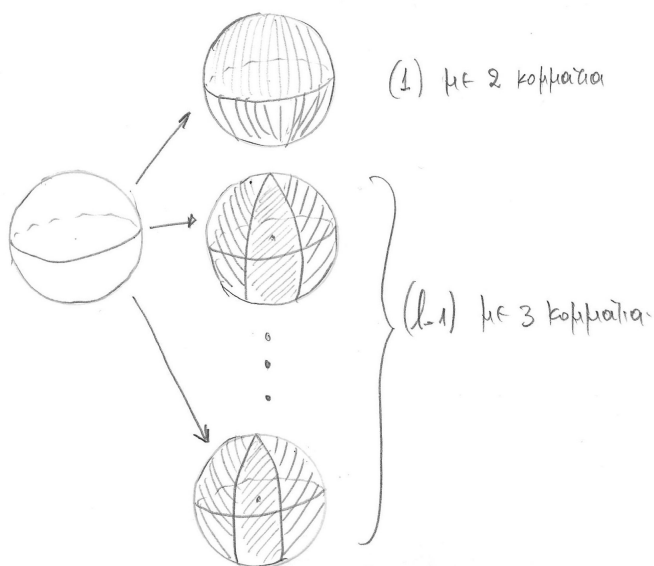


3.5.2 J. Mycielski

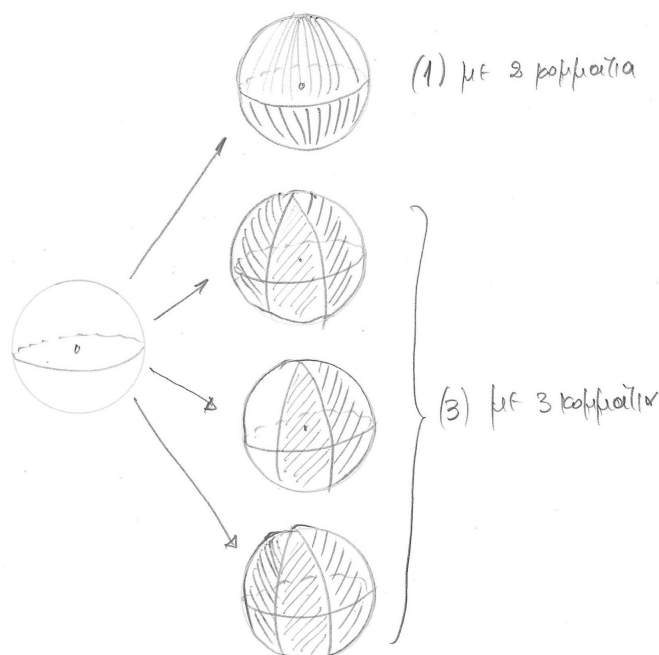
“On the Paradox of the Sphere” *Fundamental Mathematicae* 43 (1955).

Μια συμπαγής σφαίρα μπορεί να κοπεί σε $2 + 3(l + 1)$ κομμάτια και να ανασυναρμολογηθεί ώστε να σχηματίσει αντίγραφα που συντίθενται από διαφορετικά κομμάτια.

- 1 αντίγραφο 2 κομματιών.
- $l - 1$ αντίγραφα 3 κομματιών.



Για $l = 4$ έχουμε διάσπαση της σφαίρας σε $2 + 3(4 - 1) = 11$ κομμάτια



3.5.3 Randal Dougherty και Matthew Foreman

Οι Randal Dougherty και Matthew Foreman το 1991 δημοσίευσαν αρκετά συμπεράσματα με κυριότερο συμπέρασμα τους ότι το παράδοξο Banach-Tarski μπορούσε να εκτελεστεί χρησιμοποιώντας σημειοσύνολα (κομμάτια) που είχαν όμως την ιδιότητα Baire. Αυτό το πέτυχαν χωρίς χρήση του Α.Σ, οπότε η μη κατασκευασιμότητα δεν αποτελεί πλέον θέμα, επαναφέροντας το ερώτημα των πιθανών φυσικών εφαρμογών.

Σημειοσύνολα (κομμάτια) που έχουν την ιδιότητα Baire

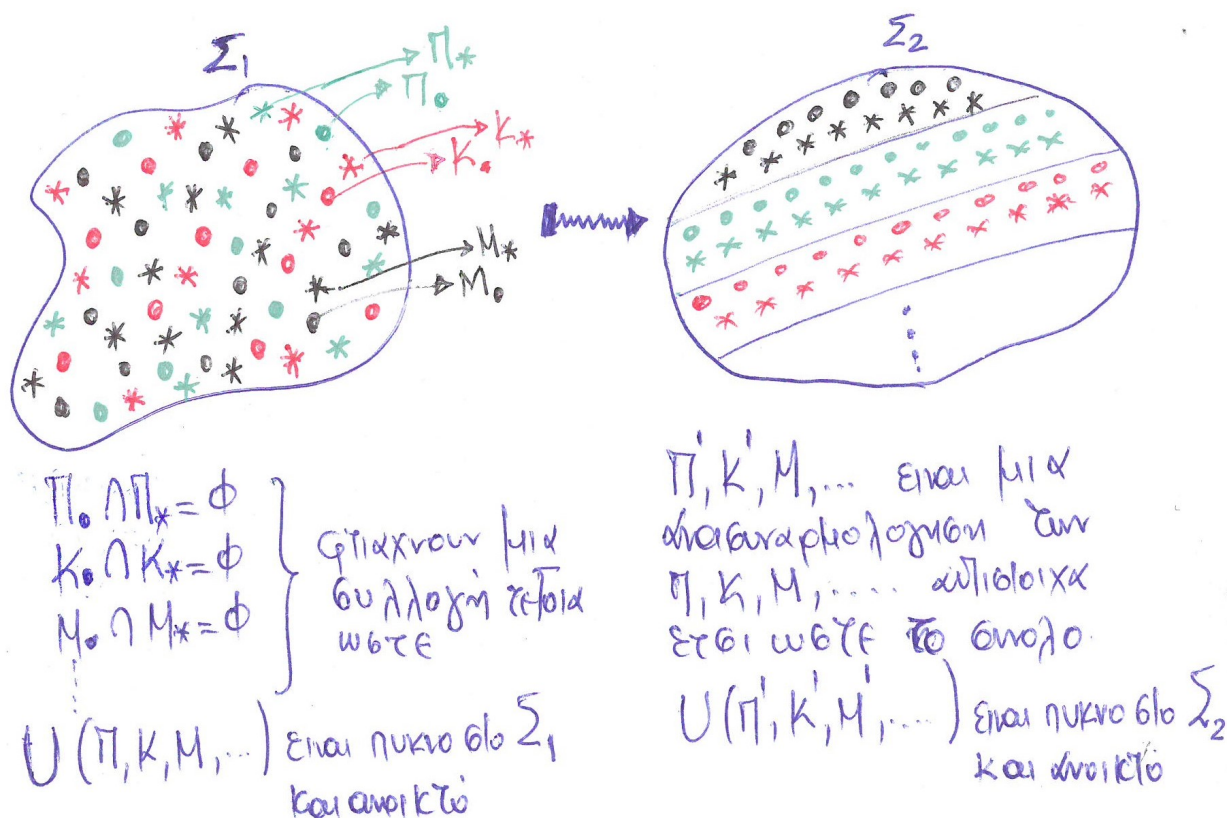
Αναφέρουμε κάποιους ορισμούς για διευκόλυνση

- Ένα σύνολο A λέγεται “ανοιχτό” αν κάθε σημείο του A περιέχεται αυστηρά εντός μιας γειτονιάς (μπάλας) σημείων που όλα τους ανήκουν επίσης στο A .
- Ένα σύνολο A σε ένα χώρο X λέγεται “πυκνό” στον X αν κάθε γειτονιά (μπάλα) του X περιέχει σημείο του A .

3.5. ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΙ ΤΥΠΟΥ BANACH-TARSKI (ΙΔΙΟΤΗΤΑ BAIRE)

Ακολουθεί το αποτέλεσμα των Dougherty και Foreman

Θεώρημα 3.5. Έστω ο n -διάστατος χώρος X ($n \geq 3$) και δύο υποσύνολά του, Σ_1 και Σ_2 . Υπάρχει μια συλλογή ζευγών ανοικτών και ξένων μεταξύ τους υποσυνόλων του Σ_1 (ανά ζεύγη), των οποίων η ένωση είναι πυκνή στο Σ_1 , τέτοια ώστε να μπορούν να ανασυναρμολογηθούν για να σχηματίσουν ένα ανοικτό σύνολο πυκνό στο Σ_2 .



Το παραπάνω συμπέρασμα είναι αρκετά παράδοξο διότι η μοναδική απαίτηση για τα σύνολα Σ_1, Σ_2 είναι, να είναι μη κενά φραγμένα.

Οι Dougherty και Foreman έδειξαν ότι ένα πυκνό (όχι τυχαίο βέβαια) υποσύνολο στο Σ_1 μπορεί να χωριστεί σε πεπερασμένο αριθμό ανοικτών υποσυνόλων του και ανασυναρμολογώντας τα, να σχηματιστεί ένα ανοικτό και πυκνό υποσύνολο στο Σ_2 .

Απόδειξη. Βλέπε [34]. □

Βιβλιογραφία

- [1] Dubins,L., Hirsch, M. Wand Karush, J. “Scissors Conguerence” Israel Journal of Mathematics 1 (1963),239-247
- [2] Laczkovich M., “Equidecomposability and Descrepancy: A Solution to Tarskis Circle-Squaring Problem”, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik 404 (1990), 77-117.
- [3] Burris , S and Sankappanavar H.P *A course in Universal Algebra*. Springer-Verlag,1981
- [4] Crawley, P. and Dilworth, R.P *Algebraic Theory of Lattices*. Prentice-Hall,Englewood Cliffs, 1973
- [5] Davis, P. and Herse, R. *The mathematical experience*. Houghton Mifflin Company , 1981.
- [6] Enderton, H.B *Elements of Set Theory*. Academic Press,1977
- [7] Fraenkel, A., Bar-Hiller, Y., Levy,A. *A Foundations of Set Theory*. North Holland, 1973
- [8] Gratzer,G. *Universal Algebra* Springer-Verlag,1979
- [9] Halmos, P. *Naive Set Theory* Springer-Verlag,1970
- [10] Hamilton,A.G. *Numbers,Sets and Axioms* Cambridge University Press, 1982
- [11] Hrbacek, K. and Jech, T. *Introduction to Set Theory*. Marcel Dekker,1984
- [12] Λάκκη,Κ. *Άλγεβρα Π.Ζήτη και ΣΙΑ*, Θεσσαλονίκη,1984
- [13] Lipschitz,S. *Set Theory* Schaum’s McGraw-Hill, 1979.
- [14] Malitz,J. *Introduction to Mathematical Logic*, Springer-Verlag,1979
- [15] Mendelson,E. *Boolean Algebra and Switching Circuits*, Shaum’s, Mc Graw-Hill,1970
- [16] Mendelson,E. *Number Systems and the Foundations of Analysis*, Academic Press. 1973.

- [17] Μητακίδης, Γ. *Θεωρία Συνόλων, Σημειώσεις*, Πάτρα, 1980
- [18] Rubin H. Rubin J. *Equivalents of the Axiom of Choice*, North Holland, 1963
- [19] Rudin, J. *Set Theory*, Holden-Day, 1968
- [20] Stoll, R. *Set Theory and Logic*, W.H Freeman and Co, 1964.
- [21] Alexander S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 156, Springer { Verlag, New York, 1995
- [22] Falconer K.J., *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985
- [23] Schneider R., *Convex Bodies: The Brunn { Minkowski Theory*, Cambridge University Press., 1993
- [24] Chern, S.S., *A simple intrinsic proof of Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds*, Annals of Math. 45, 1944
- [25] Figueiredo, D., *A simplified proof of the divergence theorem*, American Math. Monthly 71, 1964
- [26] Preissmann, A., *Quelques Proprietes Globales des Espaces de Riemann*, Comm. Math. Helv. 15, 1943
- [27] J. Garfunkel, *The Triangle Reinvestigated* American Mathematical Monthly, Vol. 72, 1965.
- [28] William R. Ransom, *One Hundred Mathematical Curiosities*, Walch, 1955.
- [29] Augenstein, B., *Hadron Physics and Transfinite Set Theory*, International Journal of Theoretical Physics 23 (12) (1984)
- [30] Augenstein, B., *Speculative Model of Some Elementary Particle Phenomena*, Speculations in Science and Technology 17 (1) (1994)
- [31] Augenstein, B., *Links Between Physics and Set Theory*, Chaos, Solitons and Fractals 7 (11) (1996)
- [32] Casti, J. L., *Five Golden Rules: Great Theories of 20th Century Mathematics - and Why They Matter*, Νέα Υόρκη: John Wiley and Sons, Inc., 1996
- [33] Davis, P. and Hersh, R., *The Mathematical Experience*, Βοστώνη: Houghton Mifflin Company, 1981. Ελληνική έκδοση: "Η Μαθηματική Εμπειρία", Αθήνα: Τροχαλία
- [34] Dougherty, R., and Foreman, M., *Banach-Tarski Decompositions Using Sets with the Property of Baire*, Journal of the American Mathematical Society 7 (1) 1994
- [35] El Naschie, *Banach-Tarski Theorem and Cantorian Micro Space-Time*, Chaos, Solitons and Fractals 5(8) (1995)

- [36] Gribbin J., *Schrodinger's Kittens and the Search for Reality*, Βοστώνη: Little, Brown and Company, 1995
- [37] Jones, R., *Physics as Metaphor*, Μινεάπολη: University of Minnesota Press, 1982.
- [38] Lorenz, E., *The Essence of Chaos*, Σιάτλ: University of Washington Press, 1993
- [39] Mycielski, J., *On the Paradox of the Sphere*, Fundamenta Mathematicae 43 (1955)
- [40] Robinson, R. M., *On the Decomposition of Spheres*, Fundamenta Mathematicae 34 (1947)
- [41] Svozil, K., *Randomness and Undecidability in Physics*, Σινγκαπούρη: Word Scientific, 1993
- [42] Svozil, K., *Linear' Chaos Via Paradoxical Set Decompositions*, Chaos, Solitons and Fractals 7(5) (1996)
- [43] Verner E. Hoggatt, Jr. Houghton Mifflin, *Fibonacci and Lucas Numbers*, 1969
- [44] A.M. Turing, *Computing Machinery and Intelligence*, Mind, Vol. 59, 1950 Alan Ross Anderson, *Minds and Machines*, Prentice-Hall, 1964
- [45] Sidney Hook, *Dimensions of Mind*, New York University Press, 1960
- [46] Leonard M. Wapner, *Το Μπιζέλι και ο 'Ηλιος, Ένα Μαθηματικό Παράδοξο*
- [47] Μόρφω Ιακώβου, *Από την διαίσθηση του Συνεχούς στη Θεμελίωση των Πραγματικών Αριθμών*, Διπλωματική εργασία στα πλαίσια του διαπανεπιστημιακού-διατμηματικού προγράμματος μεταπτυχιακών σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών", Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- [48] Martin Gardner, *Mathematics, Magic and Mystery*, Dover, 1956
- [49] William Simon, *Mathematical Magic*, Scribner's, 1964
- [50] *The Wheel Paradox Controversy*, Scientific American, Vol. 16, 1866
- [51] B.A. Read, *Fibonacci-Series in the Solar System*, Fibonacci Quarterly, Vol. 8, 1970
- [52] John Leech, *Some Sphere Packing in Higher Space*, Canadian Journal of Mathematics, Vo. 16, 1964
- [53] Fowler, D.H., *An Invitation to Read Book X of Euclid's Elements*, Historia Mathematica 19, 1992
- [54] Knorr W.R., *La Crois des mathematiciens: The Euclidean Theory of Irrational Lines*, Bulletin of the American Mathematical Society (New Series), 9, 1983a.
- [55] Knorr W.R., *The ancient Tradition of Geometric Problems*, Birkhauser, 1985

- [56] Epstein L., *Εικόνες της Σχευικότητας*, Κάτοπτρο, 1990
- [57] Hoyle F., *The nature of the Universe*, Harper Collins, 1950
- [58] Reeves H., *Προσμονή μέσα στο άπειρο, Η κοσμική εξέλιξη*, Κέδρος 1988
- [59] Grattan-Guinness, I., *Landmark Writings in Western Mathematics*, Amsterdam, Elsevier, 2005
- [60] Aaboe, Asger, *Episodes from the Early History of Mathematics*, New York, Random House, 1964
- [61] Euclid (Μτφ. Heiberg), *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, New York, 1956
- [62] Barbu V., *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff, 1976