

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η ΣΥΖΕΥΞΗ ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πετροπούλου Κυριακή

A.M. : Δ 2014 25

Επιβλέπουσα Συμβουλευτικής Επιτροπής

Πόταρη Δέσποινα

Καθηγήτρια

Αθήνα, Ιούνιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 1^η Ιουνίου 2018 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την
καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δ. Πόταρη (Επιβλέπουσα)	Καθηγήτρια
▪ Θ. Ζαχαριάδη	Καθηγητή
▪ Π. Σπύρου	τ. Αναπλ. Καθηγητή

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αισθάνομαι την ανάγκη να ευχαριστήσω από βάθους καρδιάς τα σεβαστά μέλη της Εξεταστικής και Συμβουλευτικής Επιτροπής, που μου συμπαραστάθηκαν και με καθοδήγησαν στο διάστημα εκπόνησης της Διπλωματικής μου Εργασίας:

Την Καθηγήτρια κ. Πόταρη Δέσποινα για την πολλαπλή υποστήριξη της, τις υποδείξεις της, τη συνεχή ενισχυτική επικοινωνία και κυρίως την έμπνευση από τη δική της πολυσχιδή δραστηριότητα.

Τον Καθηγητή κ. Ζαχαριάδη Θεοδόσιο για τις καίριες παρατηρήσεις του και την πολύτιμη εμπειρία από την παρακολούθηση της Διδακτικής του Απειροστικού Λογισμού.

Τον τ. Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Σπύρου Παναγιώτη για τη θετική του διάθεση, την ευγένεια, και τις πολύτιμες βεβαιότητες που ανακτήθηκαν μετά τις διαδρομές της αμφισβήτησης στην περιοχή της Επιστημολογίας που είχα την τύχη να παρακολουθήσω.

Τις εξαιρετικές, κ. Κλη Ελένη και κ. Μπακογιάννη Διονυσία οι οποίες με κάθε δυνατή ευγένεια και προθυμία ανταποκρίθηκαν στα θέματα της επικοινωνίας με την Γραμματεία του ΠΜΣ.

Ευχαριστώ την οικογένεια μου, τους φίλους μου, ιδιαίτερα την κ. Αντωνίου Ν. για την αγάπη και την πίστη τους, που με εμψύχωνε σε στιγμές καταπόνησης και άγχους.

Ευχαριστώ τους εξαιρετικούς συναδέλφους που συνάντησα στο ΠΜΣ για την ευγενική αλληλεγγύη ανταπόκρισης που χαρακτήρισε τη συνεργασία και τη συνύπαρξη μας.

Τέλος ευχαριστώ τους μαθητές μου για την ανατροφοδότηση και την αμοιβαιότητα στα θετικά συναισθήματα της σχέσης μας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Κατά τη διδασκαλία των Μαθηματικών Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών στη Β τάξη Γενικού Λυκείου παρατηρήθηκε ιδιαίτερη δυσκολία στην αντιμετώπιση ασκήσεων Αναλυτικής Γεωμετρίας. Βασική αιτία ήταν η απουσία σχήματος που να αποδίδει τα γεωμετρικά δεδομένα, ώστε να ακολουθήσει η έκφραση των ζητούμενων αλγεβρικά.

Στην περιοχή της Αναλυτικής Γεωμετρίας εμφανίζονται δύο αναπαραστατικά συστήματα: η Γεωμετρία και η Άλγεβρα. Κάθε σύστημα είναι εφοδιασμένο με μία συντακτική δομή. Αν η αποδεικτέα πρόταση αντιμετωπισθεί εντός του συστήματος διατύπωσης της, έχουμε μια συντακτική στρατηγική απόδειξης. Αν επιστρατευθεί ένα άλλο αναπαραστατικό σύστημα με κατάλληλες αντιστοιχίες χαρακτήρων και η πρόταση επιλυθεί σε αυτό, αυτή η στρατηγική απόδειξης χαρακτηρίζεται σημασιολογική.

Η σημασιολογική στρατηγική μπορεί μέσα από ποικίλες εκφράσεις της να λειτουργήσει διαφωτιστικά στην αντιμετώπιση της αποδεικτέας πρότασης. Σε αυτό το πλαίσιο σχεδιάστηκε και πραγματοποιήθηκε μια παρέμβαση μέσα στην τάξη, κατά την οποία επιχειρήθηκε να απαντηθούν προτάσεις με τη μορφή εικασίας, διατυπωμένες ώστε οι μαθητές να υποχρεωθούν να χρησιμοποιήσουν και τα δύο αναπαραστατικά συστήματα (Άλγεβρας-Γεωμετρίας) και να συσχετίσουν με παραλληλισμούς την αιτιολόγηση των απαντήσεων τους.

Παρουσιάζονται τα ευρήματα και τα συμπεράσματα από την προσπάθεια σύζευξης της συντακτικής και σημασιολογικής αιτιολόγησης μέσα από την συγκεκριμένη παρέμβαση.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Αναπαραστατικό Σύστημα Απόδειξης, Συντακτική Στρατηγική Αιτιολόγησης, Σημασιολογική Στρατηγική Αιτιολόγησης.

ABSTRACT

During the teaching of specialized mathematics in grade 11 of General high school, students seem to have a significant difficulty in solving exercises of Analytical geometry. This difficulty is mostly attributed to the lack of students' familiarization with geometrical shapes on the basis of which they could express their solutions algebraically. In Analytical Geometry there are two Representation Systems of Proof: Geometry and Algebra and each one has its own structure and characters. In a syntactic proof, reasoning works entirely within the representation system of algebra while in a semantic proof the individual works, at least in part, within a different representation system (e.g. the geometrical). The use of a semantic strategy through the variety of its expressions can support the proving process. In this study, we designed and carried out a teaching intervention in a classroom during which, conjectures were used as a starting point for justification. Students were encouraged to use both representation systems (Geometry and Algebra) and to link them in their justifications. Findings and conclusions focus on if and how the students combined the methods of syntactic and semantic reasoning during this particular teaching intervention.

Key-Words : Representation System Proof, Syntactic Strategy Reasoning, Semantic Strategy Reasoning.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγή	7
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ	
2.1 Χρήση δυο αναπαραστατικών συστημάτων στη διδασκαλία μαθηματικών Β Λυκείου	12
2.2 Συντακτική και Σημασιολογική στρατηγική απόδειξης	13
2.3 Χαρακτηριστικές εκφράσεις της Σημασιολογικής στρατηγικής	15
2.4 Γνωρίσματα της Σημασιολογικής στρατηγικής	17
2.5 Ένας άλλος ορισμός της Σημασιολογικής στρατηγικής απόδειξης	20
2.6 Αντιπαράβολή Συντακτικής και Σημασιολογικής στρατηγικής	20
2.7 Συντακτική ή Σημασιολογική στάση στη διδασκαλία;	24
2.8 Επιφυλάξεις στη χρήση οπτικών αναπαραστάσεων	27
3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ	
3.1 Στόχος και άξονες προβληματισμού	27
3.2 Συμμετέχοντες	28
3.3 Διαμόρφωση πλαισίου υλοποίησης	29
3.4 Εικασίες	29
3.5 Οργάνωση διαδικασίας	31
3.6 Επεξεργασία απαντήσεων	32
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	
4.1 Διαδικασίες ανάγνωσης της εικασίας	33
4.2 Παραδείγματα που προκύπτουν από τα δεδομένα	35
4.3 Μεταφορά των αλγεβρικών εξισώσεων στο αναπαραστατικό σύστημα της γεωμετρίας	40
4.4 Εκτίμηση της εικασίας	47
5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	61
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	67

Η ΣΥΖΕΥΞΗ ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην ύλη της Αναλυτικής Γεωμετρίας της Β Λυκείου, μετά την παρουσίαση της θεωρίας της ευθείας που αποτελείται από τα ακόλουθα μέρη : Συντελεστής εξίσωσης ευθείας Συνθήκες παραλληλίας και καθετότητας ευθειών, Γενική εξίσωση ευθείας ακολουθούν βασικές ασκήσεις προκειμένου να εμπεδωθεί η θεωρία .Στόχος είναι να αναγνωσθούν τα δεδομένα εντός ενός Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων ,και να μεταφερθούν στην κατάλληλη αλγεβρική έκφραση.

Στο πνεύμα αυτό δόθηκε η ακόλουθη άσκηση του βιβλίου.

Άσκηση 4/σελ. 64.

Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-1,0)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(-3,4)$. Να βρείτε:

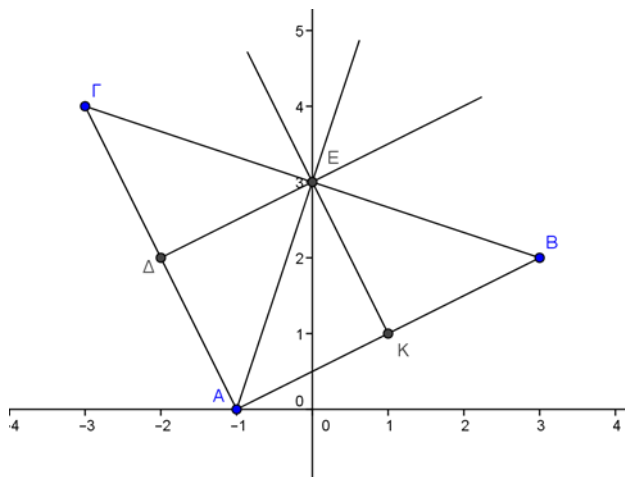
A) Τις εξισώσεις των υψών του.

B) Τις εξισώσεις των μεσοκαθέτων των πλευρών.

Στο επόμενο μάθημα υπήρχε γενική απροθυμία να λύσει κάποιος την άσκηση και διάχυτο το κλίμα της επιφύλαξης που προκαλεί μια απωθητική πρόκληση.

Στην ερώτηση αν σχεδιάσθηκε η άσκηση σύμφωνα με την περιγραφή των δεδομένων, η απάντηση ήταν συνολικά αρνητική. Ακριβώς τότε συνειδητοποίησα ότι οι μαθητές μου είχαν ένα μαθηματικό κείμενο που τους είχε δοθεί στη «γλώσσα» της Γεωμετρίας, και χωρίς να είναι σε θέση να το αναγνώσουν στη φυσική του γλωσσική διατύπωση, έπρεπε να αναλάβουν την μετάφραση του σε ένα άλλο εκφραστικό ιδίωμα: την Άλγεβρα.

Ο δικός μου ρόλος ευθύνης ήταν να σχεδιάσω προσεκτικά την άσκηση στον πίνακα και να αποκαλύψω το μήνυμα που περιείχε η αρχική μορφή του κειμένου, με τη συνεπή στα δεδομένα εικόνα.



Αμέσως ένας μαθητής μου ρώτησε αν η A ήταν ορθή. Του ζήτησα την αντίστοιχη συνθήκη από την θεωρία και επιβεβαίωσε χωρίς άλλη βοήθεια ότι $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = 0$.

Στη συνέχεια ήταν απλό, να αναγνωρίσουν τα ύψη και να εφαρμόσουν την θεωρία που δίνει τις εξισώσεις τους, με πρόθυμη πλέον διάθεση συμμετοχής. Κάθε νέο βήμα της πορείας επίλυσης, πρόβαλε σαν εύλογη επίκληση της αντίστοιχης θεωρίας, αφού το ερώτημα μεταφραζόταν άμεσα από το σχήμα. Ήταν επίσης προφανές ότι είχαν διαβάσει την τυπική διατύπωση των προτάσεων της θεωρίας.

Στο δεύτερο ερώτημα σχηματίστηκαν οι εξισώσεις των μεσοκαθέτων :

$$\Psi = -2\chi + 3, \quad \psi = 0,5\chi + 3, \quad \psi = 3\chi + 3.$$

Αυθόρμητα ένας μαθητής παρατήρησε ότι έχουν κοινή λύση για $\chi = 0$ και $\psi = 3$. Με την αφορμή αυτή ρώτησα ποιο είναι το γεωμετρικό νόημα αυτής της κοινής λύσης, οπότε ο ίδιος απάντησε ότι πρόκειται για ένα κοινό σημείο των τριών ευθειών. Η τελευταία ερώτηση ήταν αν στην περυσινή Γεωμετρία, υπήρχε κάποιο τέτοιο σημείο, κοινό για τις τρεις μεσοκαθέτους κατονομασμένο για κάθε τρίγωνο. Η απάντηση δόθηκε σχεδόν αυθόρμητα με βεβαιότητα : το περίκεντρο.

Πρόκειται για ένα απλό καθημερινό περιστατικό, που διαδραματίστηκε μέσα στην τάξη μου, και επιβεβαίωσε ότι η αποστροφή των μαθητών για τη λειτουργική συνύπαρξη σχήματος και θεωρίας τους αποθαρρύνει να σχηματίσουν στέρεους δεσμούς αντιστοιχίας μεταξύ τους, και να επιτύχουν να δώσουν νόημα στην εφαρμογή των τύπων που απομνημονεύουν.

Ανακάλεσα μια εξαιρετική φράση του Henry David Thoreau :

« Τα αντικείμενα κρύβονται από τη θέα μας, όχι τόσο γιατί είναι εκτός της πορείας της οπτικής μας ακτίνας, όσο γιατί δεν οδηγούμε το μυαλό και τα μάτια μας να αφεθούν σε αυτά».

Στην ύλη της Γεωμετρίας προσανατολισμού Β Λυκείου το αντικείμενο που πρέπει να «δουν» οι μαθητές είναι τα διανύσματα, οι ευθείες, οι κωνικές τομές. Πρέπει να «οδηγήσουν το μυαλό τους» στις αντίστοιχες εξισώσεις και να συσχετίσουν την οπτική αναπαράσταση με την ομόλογη αλγεβρική έκφραση.

Σε κάθε περίπτωση, θα πρέπει να επιλέγουν μια στρατηγική επίλυσης της άσκησης ή στην περίπτωση που ερώτημα θέτει προς εξέταση μια εικασία, να επιλέγουν την στρατηγική διερεύνησης της εντός εκείνων των περιοχών που διαφωτίζουν το νόημα της.

Κεντρικό θέμα της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι οι στρατηγικές επιλογές στην πορεία της αιτιολόγησης.

Ο Boero (2006) αποδίδει φιλοσοφικό βάθος στην αξία της αιτιολόγησης στα Μαθηματικά αποδεχόμενος ότι με σκοπό να μεταφερθεί με ορθούς πολιτισμικούς όρους το φάσμα της απόδειξης, δεν επιτρέπεται να διαχωρίζεται η αιτιολόγηση από τη δυναμική της εικασίας, γιατί το να αποδεικνύεις και να εικάζεις σε μια εξελικτική προοπτική, είναι διασχετιζόμενοι κρίσιμοι μηχανισμοί γένεσης της μαθηματικής σκέψης, και αυτό οφείλεται στους δεσμούς που υπάρχουν μεταξύ αυτών των δύο διαδικασιών.

Ο Balacheff (1988) εστιάζει σε ένα κρίσιμο σημείο της αιτιολόγησης : τον βαθμό της αφαίρεσης που την χαρακτηρίζει.

Με αντιστοιχία στα κριτήρια Balacheff , ο Bergqvist με συνεχόμενες έρευνες (2000 - 2005) εξετάζει τους τρόπους με τους οποίους οι σπουδαστές της ανώτερης βαθμίδας επαληθεύουν εικασίες.

Πληθώρα ερευνών έχει στραφεί στους τρόπους επικύρωσης ή διάψευσης ψευδών ισχυρισμών, αλλά και στη μελέτη παραδειγμάτων ή αντιπαραδειγμάτων, που λειτουργούν αποκαλυπτικά σε κρίσιμες πτυχές της διαδικασίας αιτιολόγησης.

Στη διάρκεια συνεντεύξεων σε μια έρευνα μελέτης για την επίδραση του μαθησιακού περιβάλλοντος στην κατανόηση της Πραγματικής Ανάλυσης, οι Alcock και Simpson (2001, The Warwick analysis project –Practice and Theory) παρατήρησαν ότι κάποιοι φοιτητές χρησιμοποιούσαν πλούσιες οπτικά αναπαραστάσεις ώστε να οδηγηθούν σε τυπικά εκφρασμένες αποδείξεις, ενώ κάποιοι άλλοι χειρίζονταν με καθαρά τυπικό τρόπο τη δόμηση αποδείξεων.

Η παρατήρηση αυτή ήταν το έναυσμα για μια σειρά έρευνες με αντικείμενο τις αιτιολογήσεις που περιορίζονται στο αρχικό σύστημα αναπαράστασης, σε σύγκριση με εκείνες που προσφεύγουν στη διαφωτιστική βοήθεια ενός άλλου αναπαραστατικού συστήματος.

Στο πνεύμα της διάκρισης του είδους της στρατηγικής αιτιολόγησης έχουν καταθέσει τα ευρήματα τους ,μέσα από μια σειρά ερευνητικές εργασίες, στις οποίες δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην αξιοποίηση των συνοδών οπτικών αναπαραστάσεων.

Ένας γενικότερος όρος που χρησιμοποιείται είναι η «οπτικοποίηση» και με αυτόν αποδίδονται πολλές αλληλεπικαλυπτόμενες έννοιες. Θα μπορούσε να λεχθεί ότι στον όρο «οπτικοποίηση» συμπεριλαμβάνονται οι οπτικές εικόνες που δημιουργούνται στη φαντασία ή σχεδιάζονται σε χαρτί ή δημιουργούνται με όργανα τεχνολογίας.

Εργασίες με αυτή την εστίαση είναι :

1. Convergence of sequences and series- interaction between visual reasoning and the learner s beliefs about their role (Alcock & Simpson, 2004) Μελέτη σε πρωτοετείς φοιτητές, στο πεδίο της σύγκλισης ακολουθιών.
2. Doctoral student s use of examples in evaluating and proving conjectures (Alcock & Inglis, 2008). Σε υψηλότερο επίπεδο, σε διδακτορικούς φοιτητές, διερευνώνται οι παραλλαγές στην επιλογή στρατηγικής αιτιολόγησης σε σχέση με την κατακτημένη εμπειρία τους.
3. Semantic and syntactic proof production (Weber & Alcock, 2004).

Η θεωρητική πλοήγηση στην παραγωγή σημασιολογικής και συντακτικής απόδειξης διεξάγεται σε δύο ομάδες φοιτητών-διδακτορικών στο Πανεπιστήμιο, και αφορά προτάσεις ισομορφισμών μεταξύ ομάδων στην Άλγεβρα , τις εικόνες και τις τεχνικές που επιστρατεύουν στην αντιμετώπιση εικασιών.

Το κυρίως μέρος των ερευνών που ενδιαφέρονται για την προτίμηση είδους αιτιολόγησης προϋποθέτει άτομα , με μαθηματική γνώση και εμπειρία , ώστε να έχουν την ευχέρεια επιλογής αποτελεσματικής στρατηγικής για τις ζητούμενες αποδείξεις.

Είναι ευρέως αποδεκτό, ότι η κατανόηση στη συμπεριφορά επιτυχημένων στη μελέτη ανώτερων μαθηματικών, συνδέεται άμεσα με τον σχεδιασμό και την κατάρτιση οδηγιών, τουλάχιστον στο επίπεδο της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (Stylianou 2002, Weber & Alcock 2008).

Η παρούσα έρευνα εστιάζει, στο χαμηλότερο επίπεδο - σε σχέση με τις προ υπάρχουσες έρευνες- της Β Λυκείου , στη μελέτη των μέσων αιτιολόγησης εικασιών, σε μαθητές που διαμορφώνουν την μαθηματική τους ταυτότητα και έχουν ήδη προσανατολιστεί σε θετικές σπουδές.

Η έρευνα έχει δείξει ότι σε διαφορετικές περιοχές των Μαθηματικών εντοπίζονται ειδικές μορφές αστοχίας, στη συσχέτιση μιας αναπαράστασης με την αντίστοιχη συντακτική έκφραση.

Παρά τις εύλογες επιφυλάξεις, που προκύπτουν από την αμηχανία αξιοποίησης της Γεωμετρίας από τους μαθητές, η ύλη της Αναλυτικής Γεωμετρίας της Β Λυκείου, είναι το πεδίο εγγενούς χρήσης δύο αναπαραστατικών συστημάτων, η περιοχή που επιβάλλει να μορφοποιείς τις εξισώσεις με γραμμές και αντιστρόφως.

Οι μαθητές εφοδιάζονται με καίριες γνώσεις και δεξιότητες προκειμένου να αντιμετωπίσουν στην Γ Λυκείου τα θέματα του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού. Ελάχιστες είναι οι αποδείξεις στην ύλη της Γ Λυκείου που μπορεί να προσφερθούν στους μαθητές με αυστηρό - συντακτικό τρόπο στις έννοιες των ορίων, της παραγώγου, του ολοκληρώματος.

Τα κεντρικά Θεωρήματα που θεμελιώνουν την Θεωρία και από την ικανότητα εφαρμογής τους εξαρτάται ένας βαθμός που καθορίζει τις σπουδές και την επαγγελματική εξέλιξη των μαθητών-υποψήφιων φοιτητών, δεν αποδεικνύονται με συντακτικό τρόπο στο βιβλίο.

Το θεώρημα Bolzano ,το θεώρημα Rolle , το θεώρημα Μέσης Τιμής, ο ορισμός της παράγουσας συνεχούς συνάρτησης, βασίζονται σε σχηματικές αναπαραστάσεις προκειμένου να δώσουν σκιωδώς πειστικά επιχειρήματα για την ισχύ τους.

Είναι αναγκαίο οι μαθητές της Β Λυκείου να έχουν διαπραγματευθεί συνειδητά την ύλη τους σε δύο αναπαραστατικά συστήματα, να αποκτήσουν εμπειρίες διαχείρισης μιας οπτικής αναπαράστασης εν γνώσει της επικουρικής δυναμικής της, αλλά και των κινδύνων παράφρασης της.

Οι Davis και Hersh στο βιβλίο τους «Η Μαθηματική εμπειρία» (1981) σημειώνουν: «Τα Μαθηματικά χτίζουν πάνω στον εαυτό τους.. Είναι συσσωρευτικά. Η Άλγεβρα χτίζει πάνω στην Αριθμητική. Η Γεωμετρία χτίζει πάνω στην Αριθμητική και την Άλγεβρα. Ο Απειροστικός χτίζει και στα τρία» (σελ.39)

Παρόμοια οι μαθητές στη Γ Λυκείου χτίζουν συσσωρευτικά, πάνω στις γνώσεις και την εμπειρία που θεμελιώθηκαν στις προηγούμενες τάξεις.

Είναι υπόθεση δικής μας ευθύνης, όσων διδάσκουμε, να εργασθούμε με επίγνωση της επιρροής μας, και οι μαθητές που με προσδοκίες τελειώνουν την πορεία τους στη Γ Λυκείου, να αναγνωρίσουν στα εφόδια τους και την ακρίβεια της συντακτικής διατύπωσης στους τυπικούς ορισμούς των συναρτήσεων, αλλά και την ευελιξία χρήσης των εικόνων που τις συνδέουν με γραφικές παραστάσεις.

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1 ΧΡΗΣΗ ΔΥΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΗΣ Β ΛΥΚΕΙΟΥ

Οι οδηγίες διδασκαλίας για το βιβλίο Προσανατολισμού Θετικών σπουδών της Β Τάξης Ημερησίου Γενικού Λυκείου, που αφορούν την διδασκαλία του Κεφαλαίου 2 αναφέρουν: «Στη Β Λυκείου σκοπεύουμε σε περαιτέρω εμβάθυνση θεμελιωδών ζητημάτων της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Τα θέματα που σχετίζονται με την ευθεία παρουσιάζονται συστηματικότερα και με μεγαλύτερη πληρότητα και ακρίβεια...επιδιώκεται οι μαθητές να εξοικειωθούν με τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας καθώς και να κατανοήσουν τις δυνατότητες που παρέχει ως μαθηματικό εργαλείο στη διερεύνηση και απόδειξη προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά και σε περιοχές άλλων επιστημών». (2017)

Στην Α Λυκείου η μελέτη της ευθείας έχει παρουσιαστεί και στα δύο μαθήματα που συναποτελούν την ύλη των Μαθηματικών:

Στην Άλγεβρα Α Λυκείου η ευθεία έχει παρουσιαστεί σαν γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax+\beta$, με τις αντίστοιχες οδηγίες να τονίζουν: «να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων α , β στη γραφική παράσταση της $f(x)=ax+\beta$, ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις των ευθειών στο επίπεδο».

Στη Γεωμετρία της Α Λυκείου, μετά την αρχική αναφορά της έννοιας της ευθείας ως «πρωταρχικής έννοιας» στο πλαίσιο της αξιωματικής θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας αναδεικνύεται η κεντρική σημασία του « αιτήματος της παραλληλίας» στον καθορισμό της φύσης της Γεωμετρίας.

Αν επικαλεστούμε την εμβληματική στην Διδακτική των Μαθηματικών φράση του Poincare (όπως αναφέρεται στον Lakatos, 1996) : «Οι ζωολόγοι ισχυρίζονται ότι η εμβρυική ανάπτυξη ενός ζώου συγκεφαλαιώνει εν συντομία την όλη ιστορία των προγόνων του, στον γεωλογικό χρόνο. Κάτι παρόμοιο φαίνεται να ισχύει και στην περίπτωση της νοητικής ανάπτυξης...Γι' αυτόν τον λόγο πρέπει να έχουμε ως κύριο οδηγό την ιστορία της επιστήμης» θα τολμούσαμε να πούμε ότι η προσέγγιση της έννοιας της ευθείας για τους μαθητές της Α και Β Λυκείου, τους θέτει νοητικά, ταυτόχρονα στο ιστορικό πλαίσιο του 3^{ου} αιώνα π. Χ για την Ευκλείδεια και του 17^{ου} αιώνα μ. Χ για την αλγεβρική της παρουσίαση.

Ο Katz (2013) αναφέρει σχετικά « Η εισαγωγή του Fermat και η Γεωμετρία του Descartes εκθέτουν τις ίδιες βασικές τεχνικές συσχετισμού της άλγεβρας με τη γεωμετρία, τεχνικές των οποίων η κατοπινή ανάπτυξη ολοκληρώθηκε στο σύγχρονο γνωστικό αντικείμενο της αναλυτικής γεωμετρίας» (σελ. 494).

Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές είναι εκτεθειμένοι στη χρήση δύο αναπαραστατικών συστημάτων: Άλγεβρα και Γεωμετρία, με τα οποία θεωρούν και διαχειρίζονται τα ίδια μαθηματικά αντικείμενα, βάσει των ορισμών και των κανόνων που διέπουν κάθε ένα από τα δύο συστήματα.

Με την ορολογία του Goldin (1998): ένα αναπαραστατικό σύστημα αποτελείται από πρωτογενείς χαρακτήρες (γράμματα, λέξεις, ψηφία) εφοδιασμένο με μία συντακτική δομή, που συμπεριλαμβάνει κανόνες για τον συνδυασμό χαρακτήρων σε επιτρεπόμενους μετασχηματισμούς, και επίσης κανόνες για την μεταφορά από έναν επιτρεπόμενο μετασχηματισμό σε έναν άλλο (Goldin & Karut, 1996).

Οι μαθητές της Β Λυκείου έχουν μια ικανοποιητική εμπειρία από την διαχείριση θεμάτων τα οποία επιλύονται διαχωρισμένα εντός κάθε ενός από τα δύο αναπαραστατικά συστήματα Άλγεβρας - Γεωμετρίας. Η εμπειρία προέρχεται από τις γενικές αποδείξεις της θεωρίας, τις εφαρμογές τα παραδείγματα και τις ασκήσεις εμπέδωσης και αφομοίωσης της ύλης.

2.2 ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Με τον ορισμό των Weber και Alcock (2008)

«Ένα αναπαραστατικό σύστημα απόδειξης RSP (Representation System Proof), αποτελείται από γενικευμένες συμβολικές προτάσεις, που μπορούν να συνδυαστούν σε επιτρεπόμενους μετασχηματισμούς μέσω κανόνων όπως επί παραδείγματι, κατηγορηματικού λογισμού, προτασιακής λογικής και εν γένει αποδεκτών πλαισίων απόδειξης».

Με βάση αυτή την θεώρηση μία πρόταση διατυπώνεται εντός ενός RSP και η απάντηση αναμένεται να εκφρασθεί εντός του ιδίου συστήματος. Στο Κεφάλαιο « Γραμμικά Συστήματα» της Β Λυκείου δίνεται το ακόλουθο παράδειγμα :

$$x-2\psi=6 \quad \Sigma 1$$

$$3x+4\psi=8$$

Το σύστημα αρχικά επιλύεται με την μέθοδο της αντικατάστασης και εναλλακτικά με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Το παράδειγμα διατυπώνεται με όρους Άλγεβρας και επιλύεται μέσω μετασχηματισμών που είναι επιτρεπτοί όπως « πολλαπλασιάζουμε τα μέλη των δύο εξισώσεων με κατάλληλους αριθμούς» και «προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις». Η απάντηση ομοίως εκφράζεται

αλγεβρικά: $\chi=4$ και $\psi=-1$ ενώ η επαλήθευση επιβεβαιώνει το αποτέλεσμα με αντικατάσταση και πράξεις στις αρχικές εξισώσεις.

Η επίλυση υποστηρίζεται αλγοριθμικά με μια σειρά βημάτων που διατυπώνονται και επεξηγούνται ώστε να είναι συνεπή με τις γενικές ιδιότητες των πράξεων.

Η διαδικασία επίλυσης ή απόδειξης διενεργούμενη εντός του αναπαραστατικού συστήματος (RSP) στο οποίο διατυπώθηκε το πρόβλημα αντιστοιχεί σε μία ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ.

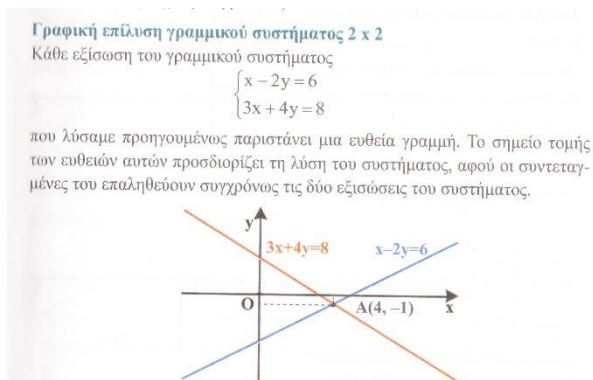
Κατά τους Alcock και Weber (2004, 2008) με την συντακτική στρατηγική: « αναπτύσσεται η κατανόηση των εννοιών που εμπλέκονται με την αποδεικτέα πρόταση, συνδέοντας τους σχετικούς ορισμούς με γνωστούς μετασχηματισμούς και κανόνες εντός του αναπαραστατικού συστήματος της απόδειξης, και με τον τρόπο αυτό παράγεται η αιτιολόγηση κατά την οποία κινείται κάποιος μεταξύ συμφωνημένων μετασχηματισμών, όπως ορισμοί και θεωρήματα, με την εφαρμογή κανόνων λογικής και καθορισμένων αποδεικτικών πλαισίων και ούτω καθεξής ».

Η παραγωγή μιας συντακτικής απόδειξης δεν περιλαμβάνει τη χρήση διαγραμμάτων ή άλλων διαισθητικών άτυπων αναπαραστάσεων μαθηματικών εννοιών. Σε μια ελεύθερη απόδοση η συντακτική απόδειξη κατά τους ιδίους «αποσυσκευάζει ορισμούς» και «εισάγει σύμβολα».

Στη συνέχεια το ίδιο σύστημα Σ1 , προτείνεται στο σχολικό βιβλίο να αντιμετωπισθεί σε ένα άλλο αναπαραστατικό σύστημα .

Σημειώνεται ακριβώς: «Κάθε εξίσωση του γραμμικού συστήματος που λύσαμε προηγουμένως παριστάνει μια ευθεία γραμμή. Το σημείο τομής των ευθειών αυτών προσδιορίζει τη λύση του συστήματος, αφού οι συντεταγμένες του επαληθεύουν συγχρόνως τις δύο εξισώσεις του συστήματος» (σελ.13)

Οι Goldin και Karut (1996 , σελ. 400) επισημαίνουν ότι: «απεικονίζοντας με ένα γράφημα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες επί παραδείγματι την εξίσωση $\psi+3\chi-6=0$, οι χαρακτήρες ή οι μετασχηματισμοί σε ένα αναπαραστατικό σύστημα είναι ενίοτε αντιπροσωπευτικοί των χαρακτήρων ή μετασχηματισμών ενός άλλου συστήματος, και είναι συχνή η περίπτωση που ένα γράμμα ή μια λέξη χρησιμοποιείται για να αντιπροσωπεύσει μια ολόκληρη τάξη αντικειμένων».



Στην περίπτωση του συστήματος Σ1

οι εξισώσεις $\chi-2\psi=6$, $3\chi+2\psi=8$
αναπαρίστανται γεωμετρικά με τις
αντίστοιχες ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 .

Κατά την διαδικασία αυτή ενώ το αρχικό πρόβλημα εκφράσθηκε με όρους Άλγεβρας, επιλύθηκε εντός ενός διαφορετικού αναπαραστατικού - της Γεωμετρίας- και ακριβώς η μερική ή ολική επίλυση εντός ενός άλλου αναπαραστατικού συστήματος, συνιστά μια ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ.

2.3 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΕΚΦΡΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ

Η Σημασιολογική στρατηγική επίλυσης επιστρατεύεται με στόχο να κατακτηθεί το βαθύτερο νόημα των ζητούμενων και να κινητοποιηθούν οι κατάλληλοι μηχανισμοί αποδοτικής αντιμετώπισης τους. Έχουν καταχωρηθεί στο πεδίο της σημασιολογικής διαχείρισης τα εξής μέσα:

A) ΧΡΗΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Η χρήση παραδειγμάτων στοχεύει στην ουσιαστική κατανόηση της αποδεικτέας πρότασης. Η αρχική πρόταση έχει διατυπωθεί με γενικό τρόπο. Ο λογιζόμενος επιχειρεί να εξοικειωθεί με το νόημα των ζητούμενων και παράγει ειδικά (specific) ή γενικά (generic) παραδείγματα. Μέσω των παραδειγμάτων αναζητά την ύπαρξη κοινών ιδιοτήτων που τα διέπουν, ή χαρακτηριστικών σχεδίων.

Οι Alcock και Inglis (2008) περιγράφουν πολύ κατατοπιστικά το λειτουργικό μέρος της σημασιολογικής κατανόησης μέσω της χρήσης παραδειγμάτων:

1. Μέσω της διερεύνησης ειδικών ή γενικής χρήσης παραδειγμάτων εντός της δεδομένης θεωρίας , επιχειρείται η συναγωγή συμπερασμάτων , που αφορούν κοινές ιδιότητες ή κοινά χαρακτηριστικά. Αξιοποιείται η εφαρμογή της παρατήρησης Mason και Pimm (1980) και Watson και Mason (2005), σύμφωνα με τους οποίους στην καρδιά του ιδανικού παραδείγματος υπάρχει η ικανότητα να διαβλέπεις το γενικό μέσω του ειδικού.
2. Εν συνεχεία απαιτείται η ακριβής μετάφραση των πτυχών της αποδεικτέας πρότασης και των συναφών εννοιών στο νέο αναπαραστατικό σύστημα, και η παραγωγική αιτιολόγηση εντός του νέου αναπαραστατικού συστήματος. Όταν ένα σύμβολο αναπαριστά μια ολόκληρη τάξη αντικειμένων ,τα ειδικά παραδείγματα αυτής της τάξης θα πρέπει να είναι συνεπή με τις ιδιότητες των δεδομένων προϋποθέσεων . Εφίσταται ιδιαίτερα η προσοχή ,ώστε να μην αποδοθούν στην γενική τάξη των αντικειμένων, άλλες επιμέρους ιδιότητες, που πιθανόν παρατηρούνται στα ειδικά παραδείγματα. Η Rowland (2001) επισημαίνει ότι δεν είναι τετριμμένης δυσκολίας η προσπάθεια να διευθετήσεις εύστοχα τη γενική σημειογραφία κατά την τελική μετάβαση από ένα επιχείρημα βασισμένο σε παράδειγμα γενικής χρήσης, έστω και αν αντανακλά άμεσα τη δομή της απόδειξης

του ειδικού παραδείγματος. Η δυσκολία επιτείνεται αν παραστεί ανάγκη να επιβληθεί ένα επιχείρημα γραμμικής δομής σε μια ολιστική παρατήρηση που αφορά συγκεκριμένες ιδιότητες του παραδείγματος.

3. Ένα παράδειγμα « γενικής χρήσης» σύμφωνα με τη θεώρηση Rowland (2001) μπορεί να διαφωτίζει εναργέστερα τους μαθητές από μια γενική απόδειξη. Τότε επιτελεί σημασιολογικό έργο. Θέτει και τους όρους που πρέπει να πληρούν τα παραδείγματα γενικής χρήσης :

- Η ειδική περίπτωση να μην είναι ούτε πολύπλοκη ούτε τετριμμένη.
- Να είναι δυνατή η « φόρτιση» με μεταβλητές στη διάρκεια της απόδειξης.
- Να δοθεί έμφαση στα αναλλοίωτα στοιχεία που υπάρχουν στο παράδειγμα.
- Η αιτιολόγηση να είναι κατασκευαστική υπό την έννοια ότι ένα επαρκώς αντικείμενο είναι ταυτοποιήσιμο.
- Η δια-κλιμάκωση (scaffolding) θα απαιτηθεί, ώστε να ενεργοποιηθεί η σταδιακή μετάβαση σε τυπικό γενικευμένο επιχείρημα.

Η σημασιολογική αιτιολόγηση εντός του χώρου των παραδειγμάτων ,εκτός από τα παραδείγματα γενικής χρήσης μπορεί να περιέχει αποδεικτικές απόπειρες μιας εικασίας με τις ακόλουθες μορφές:

- 1) Κρίσιμο πείραμα (crucial experiment)
- 2) Απλοϊκός εμπειρισμός (naïve empiricism)
- 3) Αντιπαραδείγματα.

Η αναφορά στους όρους Απλοϊκός εμπειρισμός και Κρίσιμο πείραμα ,αντιστοιχεί στα δύο πρώτα ιεράρχησης κατά Balacheff (όπως αναφέρεται στον Bergqvist, 2005) που κατασκεύασε και αναφέρει τα ακόλουθα τέσσερα επίπεδα ιεράρχησης απόδειξης :

- 1) Απλοϊκός εμπειρισμός (Naïve empiricism): Είναι το πρώτο επίπεδο απόδειξης , κατά το οποίο η ισχύς μιας εικασίας πιστοποιείται με την επαλήθευση της σε κάποιες απλές περιπτώσεις εφαρμογής της.
- 2) Κρίσιμο πείραμα (The crucial experiment) : Είναι το δεύτερο επίπεδο. Η εικασία δοκιμάζεται σε ειδική τρόπον τινά ακραία εκδοχή της, οπότε αν «δουλεύει» εκεί , ακόμη και για αυτήν, τότε θα «δουλεύει» για πάντα. Η διαφοροποίηση ως προς το πρώτο επίπεδο του απλοϊκού εμπειρισμού, είναι ότι υπάρχει εγρήγορση για το ζήτημα της γενίκευσης.
- 3) Παράδειγμα γενικής χρήσης (The generic example) : Η αλήθεια μιας πρότασης επιβεβαιώνεται μέσω της διαχείρισης ενός παραδείγματος που θεωρείται αντιπροσωπευτικό μιας ομάδας αντικειμένων.
- 4) Το πείραμα σκέψης (The thought experiment) : Στο τέταρτο επίπεδο η συζήτηση επικεντρώνεται στην αφηρημένη γενική μορφή των αντικειμένων μιας

τάξης. Η επαλήθευση απορρέει από την ουσία των ιδιοτήτων των αντικειμένων και όχι από την χρήση πράξεων που εφαρμόζονται σε αυτά.

B) ΤΑ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος η σημασιολογική οδός στην περίπτωση απόδειξης με αντιπαράδειγμα.

Ενώ θεωρητικά, κάποιος θα μπορούσε να δώσει τις περισσότερες αποδείξεις με εντελώς συντακτικό τρόπο, στις ανασκευές συχνά εξετάζονται οι συνθήκες των γενικών προτάσεων, και το αντιπαράδειγμα προκύπτει από αυτές.

Έτσι καθώς η αποδεικτέα πρόταση είναι σε διαφορετικό σύστημα αναπαράστασης από εκείνο στο οποίο θα λάμβανε χώρα η έρευνα του κύριου όγκου των αντιπαραδειγμάτων, η αναίρεση μιας πρότασης με τον τρόπο που έχει περιγραφεί πριν, μπορεί να χρειάζεται σημασιολογική επεξεργασία.

Υπάρχει διαφοροποίηση ως προς τις προηγούμενες περιγραφές, κυρίως γιατί όποιος αιτιολογεί δεν υποχρεώνεται να αναλάβει την δεύτερη μετάφραση μεταξύ των συστημάτων αναπαράστασης, να επανέλθει δηλαδή στο αναπαραστατικό σύστημα της απόδειξης, όπως επιβάλλεται να συμβεί στην περίπτωση της γενικής απόδειξης. (Alcock & Inglis, 2008).

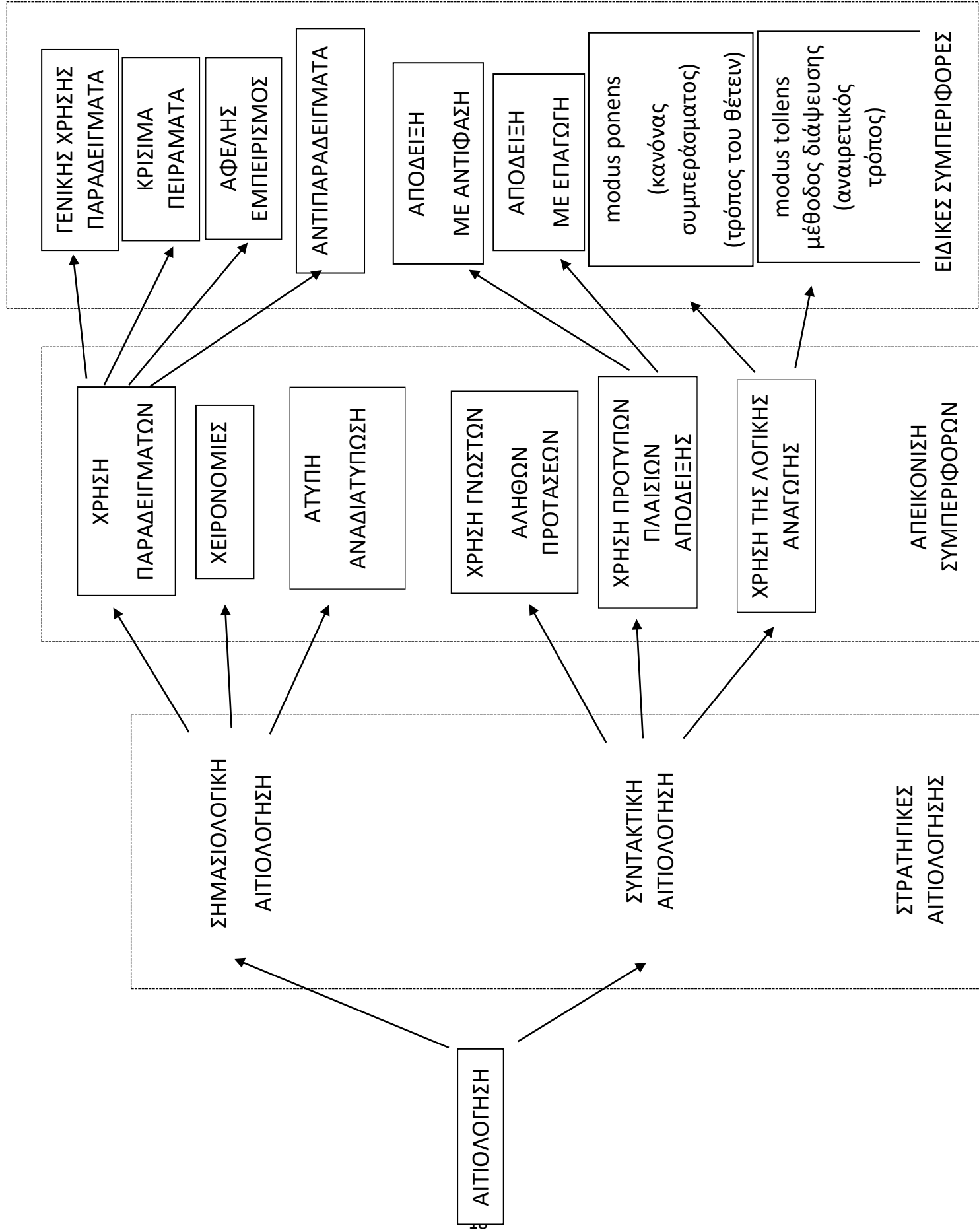
Γ) ΑΛΛΑ ΜΕΣΑ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ

Δεν είναι υποχρεωτικό, η σημασιολογική αιτιολόγηση να εμπλέκει την χρήση παραδειγμάτων. Έχει υποστηριχθεί ότι οι άτυπες αναδιατυπώσεις μαθηματικών ιδεών, αλλά ακόμη και οι φυσικές χειρονομίες, εφόσον εμπλέκουν εξωτερικά συστήματα με το αρχικό σύστημα αναπαράστασης της απόδειξης, εκλαμβάνονται σαν σημασιολογικές πράξεις σύμφωνα με τους Cook, Mitchel & Goldin, Meadow Greiffenhagen and Sharrock (όπως αναφέρεται στους Alcock & Inglis 2008)

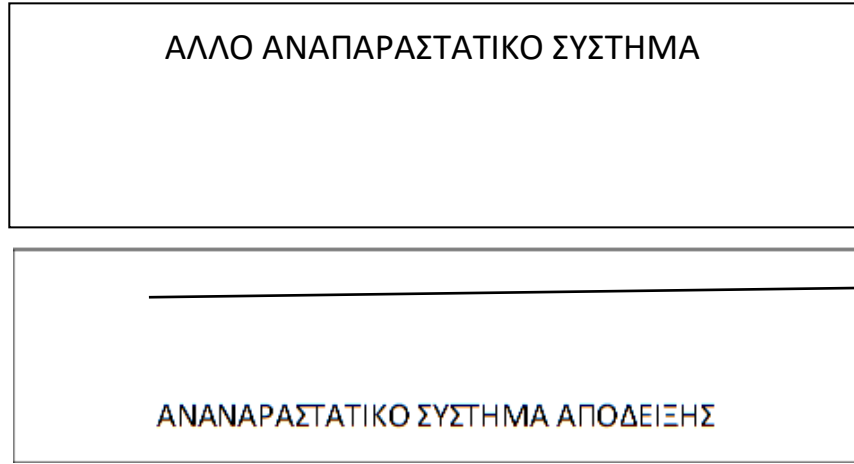
2.4 ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΤΗΣ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ

Κύριο γνώρισμα της σημασιολογικής στρατηγικής είναι η χρήση εκφάνσεων-μορφοποιήσεων των μαθηματικών αντικειμένων (instantiation). Μέσω αυτών προσδίδεται εσωτερικό νόημα στα μαθηματικά αντικείμενα και ακριβώς αυτή η δυναμική της ενδόμυχης νοητικής τους απεικόνισης κατευθύνει και καθοδηγεί την αιτιολογική πορεία.

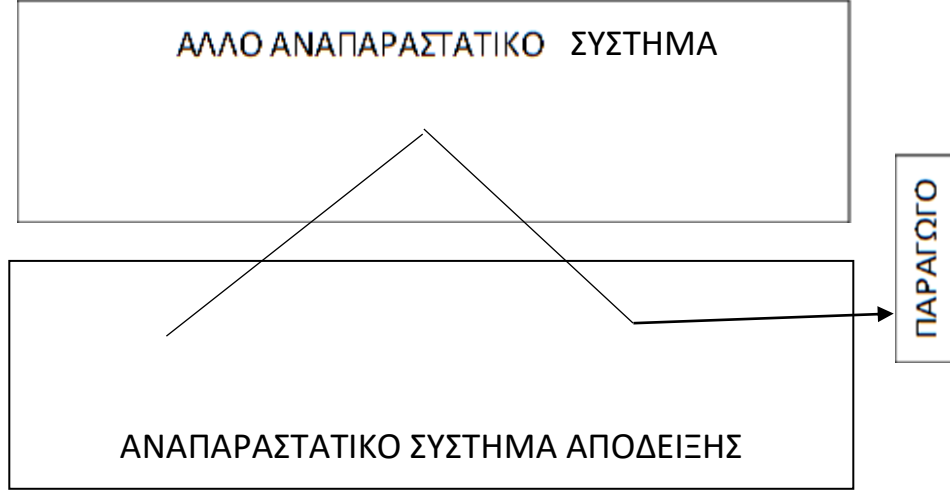
Είναι κρίσιμο αυτό ακριβώς το σημείο: οι νοητικές ενδόμυχες εικόνες, τα διαγράμματα, οι εικονικές αναπαραστάσεις, οι άτυπες αναδιατυπώσεις ακόμη και οι χειρονομίες συνεισφέρουν στον εμπλουτισμό της αίσθησης μιας έννοιας με ένα ισχυρό εσωτερικό νόημα, που υποβάλλει την τεχνική της τυπικής τους διαχείρισης σύμφωνα με τα ζητούμενα της απόδειξης.



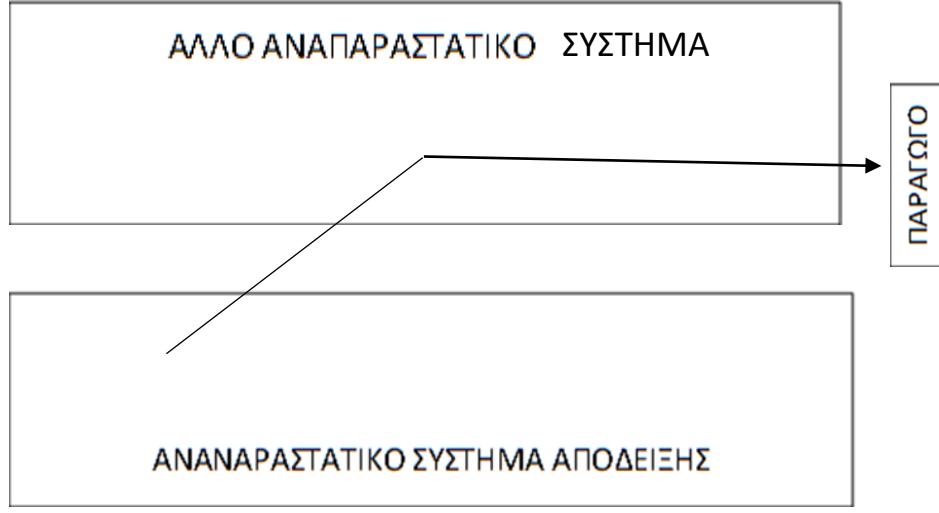
ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ
ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ



ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ
ΚΑΙ ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ



ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ
ΚΑΙ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΟ ΠΑΡΑΓΩΓΟ



ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ ΣΕ ΣΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ ΜΕ ΤΟΥΣ ΟΡΟΥΣ ΧΡΗΣΗΣ ΤΟΥ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
ΤΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ(ΑΛΟΥ) ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ (ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΩΝ)

2.5 ΕΝΑΣ ΑΛΛΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ

Ο Weber (2009) διαφοροποιήθηκε από τον ορισμό διάκρισης μεταξύ συντακτικής και σημασιολογικής παραγωγής απόδειξης κατά τον οποίο η συντακτική επέρχεται αποκλειστικά εντός του συστήματος αναπαράστασης της αποδεικτέας πρότασης, ενώ η σημασιολογική εάν έστω εν μέρει χρησιμοποιηθεί ένα διαφορετικό σύστημα αναπαράστασης (Alcock & Inglis, 2008).

Κατά την εκδοχή του Weber (2009) η παραγωγή συντακτικής απόδειξης προκύπτει όταν κάποιος εργάζεται κατά κύριο λόγο εντός του αναπαραστατικού συστήματος της αποδεικτέας πρότασης, ενώ η σημασιολογική απόδειξη προκύπτει όταν το μεγαλύτερο μέρος της αποδεικτικής εργασίας λαμβάνει χώρα εκτός του αναπαραστατικού συστήματος της αποδεικτέας πρότασης.

Η εύλογη απόκρουση του αναθεωρημένου ορισμού διάκρισης συντακτικής – σημασιολογικής παραγωγής απόδειξης κατά Weber εδράζεται σε δύο ισχυρές αντιρρήσεις ως προς την λειτουργικότητα εφαρμογής του:

A) Δεν υπάρχει ασφαλής μέθοδος ποσοτικοποίησης –μέτρησης του όγκου της αποδεικτικής εργασίας, που εκτελείται εντός ή εκτός του αναπαραστατικού συστήματος, εφόσον αυτή διεξάγεται με σύνθετες τεχνικές μεταξύ διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης με αδιαβάθμητη την έκταση και αστάθμητη τη σημασία τους στην εξέλιξη και πρόοδο του όλου έργου.

B) Για διαφορετικές βαθμίδες εκπαίδευσης και μαθηματικής εμπειρίας, υφίσταται θεμελιώδης ασυμμετρία μεταξύ των αναπαραστατικών συστημάτων που εμπλέκονται σε αποδεικτικές διαδικασίες (Alcock & Inglis, 2009).

Εν τέλει ως κριτήριο παραγωγής σημασιολογικής απόδειξης θα ισχύει η θεώρηση η σύμφωνη με Alcock και Inglis (2008) και είναι η εν μέρει χρήση άλλου αναπαραστατικού συστήματος

2.6 ΑΝΤΙΠΑΡΑΒΟΛΗ ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ

Ο William Thurston κάτοχος του Fields Medal δηλώνει, ότι το να μαθαίνεις για ένα μαθηματικό θέμα συνίσταται στην οικοδόμηση χρήσιμων άτυπων νοητικών μοντέλων, και αυτό δεν είναι εφικτό με μόνη τη μελέτη ορισμών και τυπικών αποδείξεων.

Σε επίρρωση αυτής της άποψης ο Fishbein (1982) επιχειρηματολογεί ότι το να αφαιρέσεις τις διαισθητικές αναπαραστάσεις από την τυπική μαθηματική σκέψη, δεν είναι ούτε δυνατό ούτε επιθυμητό, καθώς αυτή είναι αναγκαίο συμπλήρωμα της παραγωγικής μαθηματικής σκέψης.

Με τους όρους της παρούσας εργασίας η χρήση ορισμών και τυπικών αποδείξεων αντιστοιχεί σε συντακτική επιλογή, ενώ η αξιοποίηση των διαισθητικών αναπαραστάσεων είναι η μετάβαση σε διαφορετικό σύστημα που καθορίζει τη σημασιολογική επιλογή.

Οι όροι προτίμησης τυπικής-συντακτικής ή διαισθητικής-σημασιολογικής τεχνικής αφορούν όλους όσους ασχολούνται με τα μαθηματικά. Ο μικρός μαθητής που αναμετρίεται με τους αλγοριθμικούς κανόνες της αριθμητικής ,αναζητά την υποστήριξη της εκφραστικής κίνησης και χειρονομίας ,που πλαισιώνει με άδηλο τρόπο τις κρίσιμες συνδέσεις σημασιολογικά. Αλλά και ο φοιτητής υψηλής στάθμης παιδείας ,εμπλέκεται στην αλληλεπίδραση διαισθητικής και αυστηρά τυπικής σκέψης. Ο Hadamard (1995) , στο βιβλίο του « Ψυχολογία της επινόησης στα Μαθηματικά» αναφέρεται με έμφαση στην κεφαλαιώδη διάκριση, που αφορά επιφανείς μαθηματικούς σε «λογικιστές» και «ενορατικούς». Ο Poincare περιγράφει για τους λογικιστές: « έχουν προχωρήσει βήμα-βήμα ,με τον τρόπο που ο Vauban ανέσκαπτε τα ορύγματα του ,προσεγγίζοντας βαθμιαία την πολιορκούμενη περιοχή χωρίς να αφήνει τίποτα στην τύχη» ενώ για τους διαισθητικούς σημειώνει «καθοδηγούνται από την ενόραση , και με την πρώτη επίθεση επιτυγχάνουν αιφνίδιες αλλά ενίοτε επισφαλείς κατακτήσεις ...»(σελ.109)

Ποια είναι τα βασικά γνωρίσματα και οι απαιτούμενες δεξιότητες για την παραγωγή συντακτικής απόδειξης;

1) Η στέρεα γνώση των ορισμών ,των θεωρημάτων ,των προτάσεων που άπτονται του θέματος της απόδειξης, αλλά και η ικανότητα εντοπισμού της κατάλληλης θεωρίας.

2) Η ευελιξία να συνδέει παραγωγικά τις κατάλληλες προτάσεις και να λογίζεται έγκυρα βάσει των γενικών αρχών κανόνων και ρυθμίσεων.

Η χρήση της συντακτικής απόδειξης είναι πολύτιμο μέσο στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1) Κατοχυρώνει αποτελέσματα, τα οποία αντέκρουε η προσκόλληση σε μια απατηλή διαίσθηση (Pinto & Tall, 1999).

2) Συστηματοποιεί μια μαθηματική θεωρία (de Villiers, 1990).

3) Επικυρώνει και επαληθεύει, ότι ένας ορισμός έχει συλλάβει την ουσία μιας μαθηματικής έννοιας (Weber, 2002).

Θα μπορούσε η συντακτική στρατηγική απόδειξης να είναι ο μοναδικός και αποκλειστικός τρόπος απόδειξης;

Εμφανίζονται δύο τουλάχιστον άμεσα μειονεκτήματα στη μονομερή συντακτική απόδειξη:

A) Σε δεδομένη περιοχή χωρίς αναφορά ή μεταφορά σε ένα άλλο αναπαραστατικό σύστημα ,ο σκοπός της αποδεικτέας πρότασης εμφανίζεται περιορισμένης αξίας.

B) Η διαχείριση με έγκυρο λογικά τρόπο ορισμών ,προτάσεων ρυθμίσεων για την παραγωγή του ζητούμενου αποτελέσματος ,αποδίδει μικρότερη ικανοποίηση σε μια αδιαφανή αναπαραστατικά πορεία επίλυσης (Weber, Alcock ,2004).

Είναι πιο σύνθετος ο χαρακτήρας των απαιτούμενων εφοδίων για την παραγωγή μιας σημασιολογικής απόδειξης. Προϋποθέτει ένα σύνολο δεξιοτήτων, για τον αποπειρώμενο να αιτιολογήσει μέσω αυτής της στρατηγικής όπως :

1) Να υπάρχει η δυνατότητα απόδοσης μιας έννοιας με μια κατάλληλη νοητική εικόνα. Παράδειγμα τέτοιο είναι η εικόνα μιας «ανηφόρας» με φορά οριζόντιας κίνησης από αριστερά προς δεξιά για να αποδοθεί η έννοια της αύξουσας συνάρτησης.

2) Η οπτικοποίηση της έννοιας θα πρέπει να είναι με τέτοιον τρόπο εμπλουτισμένη, ώστε να υποδεικνύει και άλλες ιδιότητες που απορρέουν από την εύστοχη έκφραση της. Οι γραφικές παραστάσεις για τις συναρτήσεις έχουν τη δυναμική να υποδηλώνουν πολλές θεωρητικές παρατηρήσεις για τα αλγεβρικά και αναλυτικά γνωρίσματα τους.

3) Οι οπτικές αναπαραστάσεις πρέπει να αντανakλούν με ακρίβεια τις ιδιότητες των εννοιών και των αντικειμένων που αντιπροσωπεύουν. Μια άστοχη οπτικοποίηση μπορεί να παρασύρει σε υποδηλώσεις ιδιοτήτων που αντιφάσκουν με το τυπικό μέρος της αντίστοιχης θεωρίας. Οι Tall και Vinner (1981) εκφράζουν τον σκεπτικισμό τους με την ακόλουθη παρατήρηση: οι σπουδαστές με τη διαισθητική κατανόηση προχωρημένων μαθηματικών εννοιών έχουν ενοχοποιηθεί για λάθη που διαπράττουν (σε σχέση με την τυπική θεωρία) κατά τον λογισμό τους με αυτές τις έννοιες.

4) Πρέπει να είναι άμεση η δυνατότητα συσχέτισης του τυπικού ορισμού και της οπτικής αναπαράστασης του.

Η συνύπαρξη αυτών των δεξιοτήτων και της γνώσης ορθής εφαρμογής τους , προσιδιάζει σε κάποιον που διαθέτει σημασιολογική κατανόηση ή μια αποτελεσματική διαισθητική κατανόηση αυτής της έννοιας (Weber & Alcock, 2004).

Αρκετά συχνά σε προβληματισμούς που αφορούν τα Μαθηματικά οι αποδείξεις διακρίνονται σε εκείνες «που πείθουν» και εκείνες «που εξηγούν» σύμφωνα με τους Davis και Hersh, Hanna, Weber (όπως αναφέρεται στους Weber & Alcock, 2004).

Οι αποδείξεις που πείθουν έχουν επιχειρήματα που θεμελιώνουν την αλήθεια μιας πρότασης με άψογες τυπικά εκφράσεις, με στόχο να αποσείσουν οποιαδήποτε αμφιβολία για την ισχύ της. Οι αποδείξεις που εξηγούν περιέχουν επιχειρήματα που δικαιολογούν και σε ένα διαισθητικό επίπεδο αποκαλύπτουν γιατί ισχύουν τα αποτελέσματα τους. Η συντακτική στρατηγική απόδειξης υπηρετεί τη λογική της απόδειξης που πείθει. Η εύστοχη σημασιολογική απόδειξη ,μπορεί να οδηγήσει σε μια επιτυχημένη συνύπαρξη τυπικών επιχειρημάτων με παράλληλες και κατάλληλες οπτικοποιήσεις και να καταλήξει σε διπλό στόχο : να πείσει και να εξηγήσει.

Ο Fishbein (1982) αναφέρεται στη διάκριση μεταξύ «τυπικής εξωγενούς πειθούς» (formal extrinsic conviction) και « ενδογενούς διαισθητικής πειθούς» (internal intuitive conviction).

Ο πρώτος όρος αντιστοιχεί στην επιβολή της αλήθειας μιας πρότασης μέσω τυπικής επιχειρηματολογίας και μπορεί να θεωρηθεί ομολογος με τη συντακτική διαχείριση.

Ο δεύτερος όρος συνδέεται με την ικανότητα αξιοποίησης οπτικών αναπαραστάσεων αντίστοιχων με τις αναφερόμενες έννοιες ,ικανότητα που χαρακτηρίζει την παραγωγή σημασιολογικής απόδειξης.

Ο Skemp (1976,1987) ορίζει με ανάλογο τρόπο τη διάκριση μεταξύ «εργαλειακής» (instrumental) και «σχεσιακής» (relational) κατανόησης.

Στην «εργαλειακή» -συντακτική κατανόηση κάποιος κατανοεί «τι κάνει», ενώ στην «σχεσιακή»-σημασιολογική θα πρέπει να κατανοεί και το «τι» και το «γιατί» το κάνει. Η συστοιχία «τι»- «γιατί» περιλαμβάνει και τη δυνατότητα να εξηγήσεις τον τρόπο , με τον οποίο οι συνδεόμενοι τυπικοί μετασχηματισμοί αντανakλώνται στη δομή της μορφοποίησης των αντικειμένων και των συσχετίσεων τους.

Ο Skemp περιέγραψε θαυμάσια τις δυνατότητες και το βαθύτερο νόημα αυτών των τεχνικών μέσα από μια εμπνευσμένη αλληγορική ιστορία.

Ένας άνθρωπος επισκέπτεται μια άγνωστη πόλη .Μπορεί να απευθυνθεί για οδηγίες και υποδείξεις από δύο διαφορετικούς ανθρώπους. Ο πρώτος άνθρωπος έχει έναν κατάλογο με όλους τους δρόμους της πόλης, γνωρίζει άριστα τους κανόνες κυκλοφορίας, κάθε μέρος που ορίζει η τομή δύο δρόμων ,και τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα κάθε δρόμου (για παράδειγμα, αν είναι μονόδρομος ή διπλής κατεύθυνσης, αν είναι επιτρεπτή μια αριστερή στροφή, σε μια συγκεκριμένη γωνία κλπ.). Ο δεύτερος άνθρωπος κατέχει απλώς έναν χάρτη της πόλης. Ας υποθέσουμε ότι ο ανοίκειος με την πόλη επισκέπτης ζητά οδηγίες για την μετάβαση του από ένα σημείο Α της πόλης σε ένα σημείο Β.

Ο πρώτος άνθρωπος θα χρειαζόταν κάποιον χρόνο για να ανταποκριθεί με επιτυχία στις οδηγίες που του ζητήθηκαν. Θα εξέταζε τα δρομολόγια με αφετηρία το σημείο Α και θα δοκίμαζε όλους τους συνδυασμούς συνάντησης τους με δρόμους που καταλήγουν στο σημείο Β. Πιθανόν θα υπήρχαν και πιο εξεζητημένες στρατηγικές για την επίτευξη του έργου του, αλλά ακόμη και σε μια πόλη μετρίου μεγέθους υπάρχουν δεκάδες δρόμοι και εκατοντάδες γωνίες από τεμνόμενους δρόμους. Μια αναζήτηση ακαθοδήγητη από έναν κατάλογο με ένα σύμπλεγμα από δρόμους και τομές δρόμων, θα παρήγαγε ένα πολύπλοκο σύνολο από οδηγίες ώστε να κατευθυνθεί κάποιος μέσω αυτών από το σημείο Α στο Β.

Αν απευθυνόταν για βοήθεια στον δεύτερο άνθρωπο, που έχει τον χάρτη της περιοχής, τα πράγματα θα ήταν απλούστερα. Θα αρκούσε να εντοπίσει το σημείο Α και το σημείο Β στον χάρτη, ώστε να δει την πορεία που συνδέει τα δύο σημεία. Θα μπορούσε τότε να μεταφράσει την διαδρομή του χάρτη σε ακριβείς οδηγίες κατεύθυνσης...

Στην ευφάνταστη αυτή ιστορία αντιπαραβάλλονται μεταφορικά η σύνθετη συντακτική διαδρομή που βασίζεται στη γνώση δρομολογίων και κανόνων έναντι της προφανούς πρόσβασης που παρέχει η εποπτεία του χάρτη κατά την επιλογή της σημασιολογικής προσέγγισης...

Καίρια επισήμανση στην αλληγορική ιστορία του Skemp, είναι ότι η προσέγγιση στα άγνωστα σημεία μιας περιοχής στα μαθηματικά δρομολογείται από το είδος των οδηγιών που παρέχει ο εξοικειωμένος με την μορφή και την έκταση της άγνωστης ύλης διδάσκων.

2.7 ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ Η ΣΗΜΑΣΙΟΛΟΓΙΚΗ ΣΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Ο Ernest (1988) διακρίνει μεταξύ πολλών θεωρήσεων που αφορούν τα Μαθηματικά , τις ακόλουθες τρεις τάσεις συνοπτικά :

- 1) Η εργαλειακή άποψη (instrumental view): Τα Μαθηματικά είναι μια συσσώρευση αλγοριθμικών πρακτικών, κανόνων και δεξιοτήτων που επιδιώκουν να πραγματοποιήσουν κάποιους εξωτερικούς στόχους. Οι κανόνες δεν διασυνδέονται απαραίτητα μεταξύ τους και επιτυγχάνουν πρακτικά και λειτουργικά οφέλη.
- 2) Η Πλατωνική άποψη (Platonist view): Τα Μαθηματικά συγκροτούν ένα ομοιογενές σώμα αδιαμφισβήτητης γνώσης. Τα ανακαλύπτουμε δεν τα δημιουργούμε.
- 3) Η Επιλυτική προβλημάτων άποψη (Problem solving view): Τα Μαθηματικά είναι ένα δυναμικό ,διαρκώς επεκτεινόμενο πεδίο ανθρώπινης δημιουργικότητας , ένα πολιτισμικό παράγωγο. Είναι μια πορεία από το ερώτημα στη γνώση που επάγεται με αυτό ,δεν έχει λάβει οριστική κατάληξη σαν εξελισσόμενο είδος, αλλά τα αποτελέσματα του παραμένουν ανοιχτά σε αναθεωρήσεις.

Σε άμεση αντιστοίχιση με την αξία και τον σκοπό των Μαθηματικών ο Ernest συντάσσει και συνάπτει τους τρεις ρόλους που επιφυλάσσονται στον φορέα της γνώσης τους διδάσκοντα:

Α) Εκπαιδεύει (Instructor : Κατέχει δεξιότητες ορθής εφαρμογής μετασχηματισμών.

Β) Εξηγεί (Explainer) : Έχει τη θεωρητική κατάρτιση μιας ενιαίας γνώσης.

Γ) Μεσολαβεί (Facilitator): Θέτει και επιλύει προβλήματα μέσα από βαθιά εδραιωμένες πεποιθήσεις θεωρητικής κατανόησης.

Στην πραγματικότητα της διδασκαλίας στην τάξη είναι πρακτικά αδύνατον να εφαρμοστεί με μονομέρεια μία από τις προηγούμενες απόψεις που περιγράφει ο Ernest (1988). Στην περίπτωση της συντακτικής στρατηγικής υπερτερούν οι απόψεις της Εργαλειακής και Πλατωνικής αντίληψης. Η σημασιολογική προσέγγιση συνάδει με τη θεώρηση της επίλυσης των προβλημάτων με έναν διδάσκοντα που μεσολαβεί και διευκολύνει την προσέγγιση στο εξελισσόμενο σώμα της μαθηματικής γνώσης. Κατά πόσον δεσμεύεται ένας δάσκαλος ως φορέας μιας συγκεκριμένης νοοτροπίας για τα Μαθηματικά στη διδασκαλία του;

Οι Wilson και Cooney (όπως αναφέρεται στον Bergqvist, 2005) έχουν την εξής τοποθέτηση :

Σαν τέτοιες (οι δεσμευτικές αντιλήψεις –πεποιθήσεις) μπορεί να μας παρέχουν ένα σημαντικό τεκμήριο για το τι θα μπορούσε ένας δάσκαλος να πράξει στην τάξη του, αλλά δεν εξασφαλίζουν την βεβαιότητα για το τι πραγματικά κάνει στην τάξη του.

Οι θεωρήσεις του Ernest (1988) καταχωρούνται στην εναρκτήρια φάση, ενός πολύ γόνιμου και δημιουργικού διαλόγου, που εξελίσσεται για δεκαετίες πλέον στην περιοχή της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Η αφετηρία αυτού του κινήματος διερεύνησης της διδακτικής των Μαθηματικών, πιστώνεται στο κείμενο της διδακτορικής διατριβής του Imre Lakatos με τίτλο : Proofs and Refutations (Αποδείξεις και ανασκευές), που δημοσιεύεται ολοκληρωμένη σε βιβλίο το 1976.

Το θέμα της είναι η απόδειξη του ισχυρισμού των Euler (1752) - Descartes (1635) ότι σε κάθε πολύεδρο ισχύει ο τύπος $K+E=A+2$, όπου K, E, A είναι αντίστοιχα ο αριθμός των κορυφών, εδρών, ακμών του πολυέδρου.

Η παρουσίαση του προβλήματος παίρνει μια ριζοσπαστική μορφή . Ο Lakatos δηλώνει στην εισαγωγή του έργου του ότι η διαλεκτική μορφή του κειμένου αντανakλά τη διαλεκτική της ιστορίας και θέλει να περιέχει ένα είδος ορθολογικά ανακατασκευασμένης ή «αποσταγμένης ιστορίας». Το υπό διερεύνηση πρόβλημα δεν παρουσιάζεται ως αδιαμφισβήτητη πρόταση , αλλά ως εικασία που τίθεται σε έλεγχο σε μια υποθετική αίθουσα διδασκαλίας, από ένα δάσκαλο και τους μαθητές του. Ο δάσκαλος παρουσιάζει μια απόδειξη υπό μορφή «νοητικού πειράματος». Οι μαθητές προσβάλλουν την ισχύ της με αντεπιχειρήματα, τα οποία εμφανίζονται σαν αντιπαράδειγμα. Αν το αντιπαράδειγμα ανασκευάζει ένα λήμμα, χωρίς κατ' ανάγκην να θίγεται η κύρια εικασία ,θα αποκαλείται «τοπικό αντιπαράδειγμα» και αποτελεί κριτική της απόδειξης αλλά όχι της εικασίας, οπότε η απόδειξη βελτιώνεται με την εισαγωγή ενός τροποποιημένου λήμματος.

Αν το αντιπαράδειγμα ανασκευάζει την ίδια την κύρια εικασία, θα αποκαλείται «καθολικό αντιπαράδειγμα», και συνέπεια του είναι η «παραγωγή τεράτων». Τα

«τέρατα» είναι οι οπτικοποιήσεις ανοίκειων και προβληματικών πολυέδρων. Αντίδοτο στα τέρατα του καθολικού αντιπαραδείγματος είναι ένας νέος ορισμός , τροποποιημένος κατάλληλα ώστε να τα αντικρούσει. Κεντρικό ζήτημα στην περίπτωση αυτή είναι η απόδοση νοήματος στους εμπλεκόμενους όρους , και η εισαγωγή και εξέταση νέων ορισμών. Ο Lakatos μέσα στο κείμενο του αναφέρει ότι το Θεώρημα και η απόδειξη μπορεί να επαναδιατυπωθούν ,οπότε η χαοτική συνύπαρξη θεωρημάτων και εξαιρέσεων καταργείται, ενώ αυτή η μέθοδος εκδίωξης τεράτων είναι αποδεκτή μόνο στο μέτρο που εξυπηρετεί την οριοθέτηση της περιοχής εγκυρότητας της αρχικής εικασίας.

Η μορφή και η δομή του κειμένου « Αποδείξεις και Ανασκευές» ήταν αναπάντεχα ανατρεπτικές και όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν οι Davis και Hersh (1981) παρουσιάζουν μια φιλοσοφική εικόνα των Μαθηματικών εντελώς διαφορετική, « μια εικόνα ζωντανών και αναπτυσσόμενων Μαθηματικών που δεν απολιθώνονται σε τυπικά αξιώματα» (σελ.341).

Ο ίδιος ο Lakatos έχει απόλυτη επίγνωση των επιδιώξεων και των μέσων του ,καθώς δηλώνει ότι η δική του μέθοδος βελτίωσης της εικασίας θα αποδειχθεί προτιμότερη επειδή αποκαθιστά μια ενότητα και μια πραγματική αλληλεπίδραση μεταξύ αποδείξεων και αντιπαραδειγμάτων.

Ακόμη και αν δεν υπάρχει ασφαλής χάραξη στον καθορισμό του πεδίου των πεποιθήσεων των καθηγητών των Μαθηματικών, με την ιδανική λειτουργικότητα στην διδασκαλία τους, η παρατήρηση της ιστορικής διαδρομής της επιστήμης μας βεβαιώνει μεταξύ πολλών άλλων, ότι οι γραφικές παραστάσεις στην Πραγματική Ανάλυση ήταν το έναυσμα για πολλές θεωρητικές κατακτήσεις.

Ο Davis (1993) εισηγείται να δοθεί ισχυρότερη υπόσταση στα οπτικά επιχειρήματα . Ο Dreyfus (1991) υποστηρίζει ότι η ανισομέρεια αποδοχής μεταξύ οπτικοποιημένων και αλγεβρικά συντεταγμένων επιχειρημάτων είναι ανώφελα μεγάλη.

Η δυναμική της οπτικοποίησης δεν αναγνωρίζεται μόνο σαν συμπληρωματική προσθήκη σε μια διαδικασία τυπικής αιτιολόγησης αλλά σαν « παράγοντας- κλειδί» στην αιτιολόγηση (Arcavi , 2003).

Η ανερχόμενη τάση εφαρμογής λογισμικού σχεδιάζει να αναδείξει «οπτικές αναπαραστάσεις» σε πεδία όπως ο Απειροστικός Λογισμός. (Tall 1997). Ένα τέτοιο κίνημα στη Βόρεια Αμερική επιχειρεί να λειτουργήσει σαν ένας προοδευτικός ανασχηματισμός απόψεων, αφού αναγνωρίζει τη σημασία της μετάφρασης ,μεταξύ αριθμητικών, αλγεβρικών και γραφικών παραστάσεων των μαθηματικών ιδεών κατά τις θεωρήσεις των Hughes ,Hallet, Tall (όπως αναφέρεται από Alcock & Simpson, 2004).

Η συζήτηση επικεντρώνεται στον τρόπο μέσω του οποίου κάποιες προσεκτικές τροποποιήσεις σε μια εικόνα μπορεί να αποφέρουν τη διάκριση λεπτών αποχρώσεων σε τυπικές έννοιες της Ανάλυσης (Pinto & Tall 2002, Tall 1991).

2. 8 ΕΠΙΦΥΛΑΞΕΙΣ ΣΤΗ ΧΡΗΣΗ ΟΠΤΙΚΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Υπάρχουν επιφυλάξεις και επισημάνσεις κινδύνων στην άκριτη αξιοποίηση μιας έννοιας οπτικοποιημένης, σε σχέση με την τυπική και θεωρητική της διατύπωση. Προβληματικές επιπτώσεις αναγνωρίζονται οι ακόλουθες:

- 1) Η αμεσότητα της επιβεβαίωσης, με την χρήση αναπαράστασης δρα σαν αντικίνητρο, για την ανάπτυξη και εμβάθυνση της κατανόησης των τυπικών ορισμών . (Fishbein,1987).
- 2) Η επικύρωση μιας μαθηματικής εικασίας από τη γενίκευση μιας απλής εικόνας, αποτυγχάνει να αναγνωρίσει την ανάγκη για ένα επιχείρημα βασισμένο σε λογικές προτάσεις και ιδιότητες.

(Alcock & Simpson 2002, Chazan 1993, Harel & Sowder, 1998)

- 3) Εάν εμπλέκονται τυπικοί ορισμοί ,τα συμπεράσματα που προκύπτουν από τις νοητικές εικόνες εννοιών ,πιθανόν να είναι αντικρουόμενά με αυτούς. (Davis & Vinner 1986, Tall & Vinner 1981, Vinner 1992).
- 4) Ειδικότερα η χρήση μιας απλής στατικής εικόνας πιθανόν να οδηγεί στην εστίαση άσχετων ιδιοτήτων (Harel & Sowder 1998, Presmeg 1986), ή οδηγεί σε ακατάλληλη γενίκευση συμπερασμάτων , γιατί η εικόνα είναι πρωτοτυπική μόνο για ένα υποσύνολο των αντικειμένων που θεωρεί.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1 ΣΤΟΧΟΣ ΚΑΙ ΑΞΟΝΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΥ

Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να ελέγξει αν στο πεδίο εφαρμογής της Αναλυτικής Γεωμετρίας της Β Λυκείου, οι μαθητές είναι σε θέση να αναγνωρίσουν, ότι διαθέτουν δύο αλληλοσυμπληρούμενα και αμοιβαία συνεργαζόμενα αναπαραστατικά συστήματα : το αναπαραστατικό σύστημα στο οποίο χρησιμοποιούνται αλγεβρικές εκφράσεις και το Καρτεσιανό επίπεδο, στο οποίο αυτές οι εκφράσεις αντιπροσωπεύονται από γραμμές.

Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο που προηγήθηκε, έχουν τεθεί οι ακόλουθοι άξονες προβληματισμού προκειμένου να εκτιμήσουν τα ακόλουθα στοιχεία ανταπόκρισης και αντίδρασης από τους μαθητές:

- 1) Η ανάγνωση της εξεταζόμενης εικασίας εμπλέκει υποχρεωτικά τον μαθητή στο αναπαραστατικό σύστημα διατύπωσης της και αποτελεί μια συντακτική πράξη, καθώς παραμένει εντός του δεδομένου συστήματος. Ελέγχεται αν οι μαθητές έχουν την δυνατότητα να αντιληφθούν το μαθηματικό νόημα της πρότασης που διατυπώνεται.
- 2) Η αναγνώριση του συντακτικού τρόπου γραφής των δεδομένων απαιτεί τη χρήση των χαρακτήρων και των συμβόλων, που είναι αποδεκτοί εντός του συγκεκριμένου αναπαραστατικού συστήματος. Μπορούν να ανταποκριθούν με συνέπεια στις τυπικές εκφράσεις που αντιστοιχούν στα δεδομένα;
- 3) Η δυνατότητα να δώσουν παραδείγματα με αντικατάσταση τιμών στις παραμέτρους, επιτρέπει να προσεγγίσουν διαδικαστικά, την μετατροπή ενός γενικού παραδείγματος (λόγω της αοριστίας της παραμέτρου) σε ειδικό, «φορτίζοντας» την παράμετρο με τιμές. Η παραγωγή συγκεκριμένων παραδειγμάτων συνιστά μια πράξη διερεύνησης εκτός του αρχικού αναπαραστατικού συστήματος της γενικής παραμετρικής περιγραφής, και έχει σημασιολογικό περιεχόμενο. Είναι σε θέση να προσδιορίσουν τις παραμέτρους, να παράγουν παραδείγματα και να διερευνούν τα κοινά τους γνωρίσματα;
- 4) Η σχεδίαση των παραδειγμάτων υλοποιεί την μεταφορά τους στο αναπαραστατικό σύστημα του Καρτεσιανού επιπέδου, και απαιτεί τη γνώση και την ικανότητα της ακριβούς αντιστοιχίας μεταξύ των εξισώσεων και των γραμμών που τις αναπαριστούν. Επειδή το κεντρικό ζητούμενο είναι η συσχέτιση των αλγεβρικών εκφράσεων με τις γεωμετρικές εικόνες έχουν την εγγήγορη στον έλεγχο της συνέπειας των αντιστοιχίσεων που έχουν προκύψει κατά τη διαδικασία μεταφοράς από το ένα σύστημα στο άλλο;
- 5) Δίνεται η προτροπή να δικαιολογήσουν με δύο διαφορετικούς τρόπους την ορθότητα της εικασίας, αν εκτιμήσουν σαν «σωστό» το περιεχόμενο της πρότασης ή την διάψευση της αν καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η πρόταση είναι «Λάθος». Στην περίπτωση που ακολουθήσουν την προτροπή να δικαιολογήσουν με δύο διαφορετικούς τρόπους, θα φανεί αν μπορούν να τεκμηριώνουν με παράλληλη μεταφραστική αντιστοιχία μεταξύ των δύο συστημάτων.
- 6) Αν η τεκμηρίωση της αποτίμησης «σωστό» ή «λάθος» για μία εικασία, περιορισθεί στην έκφραση και τα μέσα με τα οποία είναι εφοδιασμένο το ένα από τα δύο αναπαραστατικά συστήματα, θα εκτιμηθεί ποιο από τα δύο συστήματα έδωσε την πιο πειστική απάντηση, η οποία λειτούργησε σαν «ενδογενής πειθώ».
- 7) Κατά την παραγωγή των παραδειγμάτων που προκύπτουν βάσει των δεδομένων και κατά την αιτιολόγηση της εικασίας, είναι ενδιαφέρον να παρατηρηθεί η πτυχή της ιεράρχησης των τεσσάρων επιπέδων κατά Balacheff (1988).

3.2 ΣΥΜΜΕΤΕΧΟΝΤΕΣ

Επειδή ακριβώς η αρχική αφόρμηση για την επιλογή της εργασίας, προέκυψε όπως ακριβώς περιγράφεται, στην διάρκεια του μαθήματος των Μαθηματικών

Προσανατολισμού της Β Λυκείου, η έρευνα πραγματοποιήθηκε με τους συγκεκριμένους μαθητές, σε ένα Δημόσιο, Γενικό Ημερήσιο Λύκειο της Αθήνας.

Οι μαθητές δεν επιλέχθηκαν με κάποια κριτήρια, αλλά στο πλαίσιο της άδειας από το ΥΠ.Π.Ε.Θ με τις προδιαγραφές της ανωνυμίας των συμμετεχόντων και με τον όρο να δοθούν ερωτήματα προσομοίωσης με τις ασκήσεις του βιβλίου, διατέθηκαν τέσσερις ώρες από το κανονικό πρόγραμμα διδασκαλίας του μαθήματος.

Καταβλήθηκε προσπάθεια να τηρηθούν οι περιορισμοί που τέθηκαν από τη σχετική άδεια, και ταυτόχρονα να ικανοποιηθούν οι συνθήκες υπό τις οποίες τα επτά προαναφερθέντα στοιχεία ανταπόκρισης και αντίδρασης από την πλευρά των μαθητών, θα ήταν διακριτά και αξιολογήσιμα.

3.3 ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στους μαθητές δόθηκαν τέσσερις εικασίες με την μορφή προτάσεων, για τις οποίες έπρεπε να αποφανθούν, και να τις χαρακτηρίσουν σαν « Σωστό» ή «Λάθος» . Η παρουσίαση αυτή κρίθηκε πρόσφορη για τους σκοπούς της έρευνας, γιατί αφενός εμπλέκει τους μαθητές με οδηγίες σε συγκεκριμένα βήματα προς μια κατεύθυνση αιτιολόγησης, αφετέρου κάνει χρήση των ερωτημάτων τύπου «Σωστό» ,«Λάθος», που είναι αρκετά συμπαθή στα θέματα των διαγωνισμάτων.

Οι εικασίες δόθηκαν με την ίδια τυπολογία στα επιμέρους ερωτήματα, ώστε να λειτουργήσουν δεσμευτικά ει δυνατόν, στην αναμέτρηση και με τα δύο αναπαραστατικά συστήματα.

3.4 ΕΙΚΑΣΙΕΣ

Οι δύο πρώτες εικασίες δόθηκαν μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των παραγράφων 2.1, 2.2 του Κεφαλαίου 2 και αφορούσαν την εξίσωση της ευθείας.

ΕΙΚΑΣΙΑ 1^Η

Δίνονται οι ευθείες ε_1 , ε_2 με αντίστοιχους συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1=2$, $\lambda_2 =3$. Οι ευθείες αυτές τέμνονται πάντοτε. Σωστό ή Λάθος;

α) Μπορείτε να δώσετε 2 διαφορετικά παραδείγματα των ευθειών όπως περιγράφονται;

β) Μπορείτε να σχεδιάσετε τα παραδείγματα σας;

γ) Μπορείτε να δικαιολογήσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους την απάντηση σας;

ΕΙΚΑΣΙΑ 2^Η

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \chi = \alpha$ και $\varepsilon_2 : \psi = \alpha$ ($\alpha > 0$). Υπάρχει πάντοτε μια συγκεκριμένη ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το κοινό τους σημείο. Σωστό ή Λάθος;

α) Μπορείτε να δώσετε δύο διαφορετικά παραδείγματα των ευθειών όπως περιγράφονται;

β) Μπορείτε να σχεδιάσετε τα παραδείγματα σας;

γ) Μπορείτε να δικαιολογήσετε με δύο διαφορετικούς τρόπους την απάντησή σας;

Οι επόμενες δύο εικασίες αφορούσαν την εξίσωση του κύκλου και δόθηκαν μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας της παραγράφου 3.1 του Κεφαλαίου 3.

ΕΙΚΑΣΙΑ 3^Η

Δίνεται κύκλος C με κέντρο $K(\alpha, \alpha)$ και $\rho = \alpha$, $\alpha > 0$. Η αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ μπορεί να είναι σημείο ενός τέτοιου κύκλου, Σωστό ή Λάθος;

α) Μπορείτε να δώσετε 2 παραδείγματα κύκλων αυτού του τύπου και να γράψετε τις αντίστοιχες εξισώσεις τους;

β) Μπορείτε να σχεδιάσετε τα παραδείγματα σας;

γ) Μπορείτε να ελέγξετε με τη βοήθεια των δύο προηγούμενων ερωτήσεων αν ισχύει το ερώτημα που τέθηκε στην αρχή;

ΕΙΚΑΣΙΑ 4^Η

Δίνονται δύο ίσοι κύκλοι C_1, C_2 με $\rho = 2$ και αντίστοιχα κέντρα $K(\alpha, 2), \Lambda(\alpha, -2)$. Δύο τέτοιοι κύκλοι μπορεί να έχουν 2 κοινά σημεία, Σωστό ή Λάθος;

α) Μπορείτε να δώσετε δύο παραδείγματα, καθένα με δύο κύκλους όπως περιγράφονται, και στη συνέχεια να γράψετε τις αντίστοιχες εξισώσεις τους;

β) Μπορείτε να σχεδιάσετε τα παραδείγματα σας;

γ) Μπορείτε να ελέγξετε με τη βοήθεια των δύο ερωτήσεων αν ισχύει το ερώτημα που τέθηκε στην αρχή;

Οι εικασίες δόθηκαν σε δύο φυλλάδια, ομαδοποιημένες 1^η, 2^η (στο θέμα της ευθείας) και 3^η, 4^η (στο θέμα κύκλος).

Ένα άλλο κριτήριο για τον διαχωρισμό σε ομάδες ήταν ότι για τις 1,2 εικασίες οι προτάσεις ίσχυαν και η απάντηση ήταν «Σωστό», ενώ οι 3,4 έπρεπε να διαψευσθούν και η απάντηση ήταν «Λάθος».

3. 5 ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑΣ

Οι μαθητές δεν είχαν προειδοποιηθεί και δεν υπήρξε σκόπιμη και ιδιαίτερη προετοιμασία στα στοιχεία της θεωρίας, που ήταν αναγκαία για την αντιμετώπιση των ερωτημάτων, πέραν της προβλεπόμενης παράδοσης της οικείας ύλης και της επίλυσης των ασκήσεων του βιβλίου.

Για το πρώτο Φυλλάδιο που περιείχε τις εικασίες Ε1,Ε2 διατέθηκαν 2 ώρες και συμμετείχαν 20 παρόντες μαθητές, ενώ για το δεύτερο Φυλλάδιο που περιείχε τις εικασίες 3 και 4 διατέθηκαν ομοίως 2 ώρες και συμμετείχαν αντίστοιχα 18 μαθητές.

Η προηγούμενη εμπειρία μου από την προφορική και γραπτή εξέταση των μαθητών μου, υποδείκνυε ότι δεν είχαν την δυνατότητα να ανταποκριθούν κάποιοι, αλλά θεώρησα ότι δεν είχα το ηθικό δικαίωμα να τους αποκλείσω εκ των προτέρων. Επίσης εξήγησα τον ιδιαίτερο λόγο, που με ενδιέφερε να απαντήσουν στα θέματα του Φυλλαδίου, από την απάντηση των οποίων δεν θα είχαν κάποια θετική ή αρνητική επίπτωση στη βαθμολογία τους.

Επειδή οι μαθητές δεν είχαν κάποια παρόμοια προηγούμενη εμπειρία, διέθεσα τον απαραίτητο χρόνο να απαντήσω στις ερωτήσεις τους ώστε να δημιουργηθεί κλίμα εμπιστοσύνης και να αντιμετωπίσουν με άνεση αλλά και υπευθυνότητα την διαδικασία.

Ενημέρωσα επίσης ότι ήταν σημαντικό να καταγράψω με μαγνητόφωνο τις ερωτήσεις ή τις απαντήσεις που θα προέκυπταν, ώστε να συνδυαστούν με τις γραπτές απαντήσεις του Φυλλαδίου και να έχω μια όσο το δυνατόν πλήρη εικόνα.

Σε κάθε ένα από τα δώρα, μετά τις αναγκαίες εξηγήσεις που παρέθεσα προηγουμένως, έδωσα σε κάθε μαθητή ένα Φυλλάδιο.

Στο Φυλλάδιο άλλοι συμπλήρωσαν το όνομα τους και άλλοι τα αρχικά τους. Ήταν σαφές κατά την επεξεργασία των απαντήσεων ποιος μαθητής αντιστοιχούσε σε κάθε απάντηση αλλά και ποιος είχε μαγνητοφωνηθεί.

Παρακίνησα να διαβάσουν προσεκτικά την εκφώνηση, για όσο χρόνο τους ήταν απαραίτητος προκειμένου να εννοήσουν με ακρίβεια την διατύπωση και τις συνθήκες των δεδομένων.

Υπήρξαν πολλές ερωτήσεις που αφορούσαν το νόημα της περιγραφής των δεδομένων. Οι ερωτήσεις μαγνητοφωνήθηκαν.

Στη συνέχεια συμπλήρωσαν στο Φυλλάδιο τις απαντήσεις τους.

Σε αρκετές περιπτώσεις δημιουργήθηκαν απορίες κατά την επεξεργασία των επιμέρους ερωτημάτων, τις οποίες και πάλι μαγνητοφώνησα.

Η παρέμβαση μου περιορίστηκε στην προτροπή να προσέξουν τι ακριβώς ζητείται στα ερωτήματα.

Στο τέλος του χρόνου μου παρέδωσαν το Φυλλάδιο με τις απαντήσεις.

3.6 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Μετά την κάθε μαγνητοφώνηση κατέγραψα τους διαλόγους που προέκυψαν.

Στα μαγνητοφωνημένα μέρη η δική μου απάντηση σημειώνεται με το γράμμα « Κ». Στους μαθητές που συμμετείχαν δίνονται κωδικοί M1, M2, ...

Δεν ήταν όλοι πρόθυμοι να συζητήσουν τις απορίες τους και να μαγνητοφωνηθούν.

Το μεγαλύτερο μέρος των ηχογραφημένων συνομιλιών αφορά απορίες για τον ρόλο των παραμέτρων στην περιγραφή των δεδομένων. Για τους μαθητές που αρνήθηκαν την προφορική συμμετοχή αξιολογώ τις απαντήσεις τους μόνο από το γραπτό τεκμήριο του Φυλλαδίου.

Τέσσερα κύρια ερωτήματα κατεύθυναν τη δόμηση του υλικού στις ενότητες Α,Β,Γ,Δ στις οποίες παρουσιάζονται τα αποτελέσματα. Τα ερωτήματα είναι τα ακόλουθα:

Ερώτημα 1^ο

Είναι σε θέση οι μαθητές να αναγνώσουν συντακτικά την πρόταση ; (υπό την έννοια ότι στην ανάγνωση της εμπλέκονται υποχρεωτικά με το αναπαραστατικό σύστημα που χρησιμοποιείται στην διατύπωση της).

Ερώτημα 2^ο

Ποια χαρακτηριστικά παρατηρούνται στις απαντήσεις των μαθητών, όταν ζητείται να δώσουν παραδείγματα που ανταποκρίνονται στα δεδομένα διατύπωσης της εικασίας;

Ερώτημα 3^ο

Το σχέδιο που αντιστοιχεί στην αλγεβρική έκφραση των εξισώσεων των ευθειών και των κύκλων είναι συνεπές;

Ερώτημα 4^ο

Έχουν εκτιμήσει την ορθότητα ή το λάθος της εικασίας με συσχετίσεις – μεταφραστικούς παραλληλισμούς- μεταξύ των δύο αναπαραστατικών συστημάτων ή προτιμήθηκε το ένα εξ αυτών προκειμένου να τεκμηριωθεί η πιο πειστική απάντηση;

Οι εικασίες κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων θα αναφέρονται με τους κωδικούς E1, E2, E3 ,E4 αντίστοιχα.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΑΝΑΓΝΩΣΗΣ ΤΗΣ ΕΙΚΑΣΙΑΣ (Α)

Στην ενότητα αυτή συγκεντρώνονται τα στοιχεία που απαντούν στο 1^ο ερώτημα : Είναι ο μαθητής σε θέση να κάνει συντακτική ανάγνωση δεδομένων;

Κατά την ανάγνωση της αποδεικτέας πρότασης ο μαθητής εμπλέκεται υποχρεωτικά με το αναπαραστατικό σύστημα διατύπωσης της, επομένως η κατανόηση της θα προκύψει εντός του δεδομένου αναπαραστατικού συστήματος και κατ' αυτήν την έννοια η ανάγνωση της πρότασης αποτελεί ήδη συντακτική πράξη.

Αφού δόθηκε το Φυλλάδιο με τις εικασίες οι μαθητές έχουν παρακινηθεί να το διαβάσουν προσεκτικά. Στη συνέχεια ζητούν διευκρινήσεις ως προς την περιγραφή των δεδομένων. Αυτή η εναρκτήρια διαδικασία αναμέτρησης με την εικασία έχει μαγνητοφωνηθεί και σε αυτήν αποκαλύπτονται οι όποιες δυσκολίες συντακτικής ανάγνωσης.

Καταγράφονται οι ερωτήσεις ανά εικασία και σχολιάζονται τα προβληματικά σημεία στην κατανόηση των δεδομένων.

ΕΙΚΑΣΙΑ 1^η

Στην Ε1 η διατύπωση έχει ως εξής: Δίνονται οι ευθείες ε_1 , ε_2 με αντίστοιχους συντελεστές $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$. Οι ευθείες αυτές τέμνονται πάντοτε. Σωστό ή λάθος;

Καταγράφεται ο εξής διάλογος.

M1 : Επειδή δεν είναι παράλληλες τέμνονται. Το τέμνονται πάντοτε εννοείτε να ταυτίζονται;

K : Όχι, προφανώς όχι. Αλλά αυτό σου ζητάω να εκτιμήσεις και μετά να μου πεις με ποιόν τρόπο το δικαιολογείς. Έχεις κάποια θεωρία;

M1 : Ναι...

M1 : Εννοείτε παραδείγματα με ευθείες που τέμνονται πάντα;

K : Που τέμνονται όπως τις περιγράφω, δηλαδή με τους συντελεστές αυτούς.

Ο μαθητής M1 δεν διακρίνει τη διαφορά του τέμνονται σε ένα σημείο πάντοτε από την ταύτιση σε όλα τα σημεία. Δεν προσέχει ότι οι ευθείες έχουν $\lambda_1=2$ και

$\lambda_2=3$. Δεν αντιλαμβάνεται ότι οι συντελεστές που δίνονται καθορίζουν την διεύθυνση των ευθειών και επομένως τη σχέση τους.

ΕΙΚΑΣΙΑ 2^η

Στην εκφώνηση δίνονται δύο πολύ απλές εξισώσεις : $\chi=\alpha$, $\psi=\alpha$, $\alpha>0$. Η συντακτική γλώσσα γραφής τους είναι η άλγεβρα. Δεν προκύπτουν ερωτήσεις επεξήγησης. Από τις απαντήσεις που έχουν καταχωρηθεί στην ενότητα Β (παραδείγματα τύπου $\chi=1, \psi=1$, $\chi=3$ και $\psi=3$ και άλλα) διαφαίνεται η συντακτική τους κατανόηση, ενώ δεν υπήρξαν ιδιαίτερες επεξηγηματικές ερωτήσεις.

ΕΙΚΑΣΙΑ 3^η

Στην Ε3 δίνεται κύκλος C με κέντρο $K(\alpha, \alpha)$ και $\rho=\alpha$, $\alpha>0$. Η ερώτηση είναι αν η αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ μπορεί να είναι σημείο ενός τέτοιου κύκλου.

Υπάρχουν αρκετές ερωτήσεις που αφορούν την περιγραφή του κύκλου $K(\alpha, \alpha)$ και $\rho=\alpha$, $\alpha>0$. Δημιουργείται παρανόηση για τη θέση της αρχής των αξόνων $O(0,0)$ την οποία αναγνωρίζουν μόνο σαν κέντρο κύκλου, από την αντίστοιχη θεωρία και εξίσωση που δίνεται στο βιβλίο. Χρειάζεται να αναδιατυπώσω προφορικά αρκετές φορές την περιγραφή των δεδομένων, ήδη αυτό είναι μια σημασιολογική βοήθεια, όπως αναφέρεται θεωρητικά. Σε κάποιες απαντήσεις στη συνέχεια φαίνεται ότι η παρανόηση για τη θέση του $O(0,0)$ παραμένει.

M11 : Θα μπορούσε το κέντρο K να είναι $O(0,0)$;

K : Τι σου έχω πει; Σου έχω βάλει περιορισμό;

M11 : Α, ότι είναι α μεγαλύτερο του μηδενός. Οπότε ναι δεν γίνεται....

M11 : Θα μπορούσαμε να τη λύσουμε θεωρητικά;

Η θεωρητική λύση που προτείνεται είναι μια υπεκφυγή για την αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου στον προσδιορισμό αυτής της συγκεκριμένης κατηγορίας κύκλων, αλλά στη συνέχεια οι δοκιμές με διαφορετικές θετικές τιμές για την παράμετρο α οδηγούν στην κατανόηση της περιγραφής των δεδομένων.

ΕΙΚΑΣΙΑ 4^η

Στην Ε4 δίνονται δύο ίσοι κύκλοι C_1, C_2 με $\rho=2$ και αντίστοιχα κέντρα $K(\alpha,2)$ και $\Lambda(\alpha,-2)$. Η ερώτηση είναι αν δύο τέτοιοι κύκλοι μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία.

Προηγείται αρκετή συζήτηση σχετικά με την περιγραφή των κύκλων $K(\alpha, 2)$ και $\Lambda(\alpha, -2)$. Υπάρχει μια αμηχανία να βρεθούν τα παραδείγματα. Χρειάζεται να επαναλάβω αρκετές φορές την περιγραφή τονίζοντας την ισότητα τους και να δώσω έμφαση στην τοποθέτηση που προκύπτει βάσει των δεδομένων για τα κέντρα τους.

K : Αυτοί οι δύο κύκλοι όπως τους περιγράψω-κάντε τη δοκιμή με το σχήμα, είναι το δεύτερο βήμα - μπορούν να έχουν δύο κοινά σημεία;

$M10$: Μπορούμε να δώσουμε όσες τιμές θέλουμε;... Θέλετε να το καταλάβουμε κάνοντας πρώτα αυτό έτσι;

Η δυσκολία εντοπίζεται στον ρόλο της παραμέτρου α , στις τιμές που μπορεί να πάρει για τις οποίες δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός, και τη συνειδητοποίηση ότι τα κέντρα των κύκλων είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα $\chi\chi'$.

Σε αρκετές απαντήσεις φαίνεται ότι οι δύο κύκλοι εννοούνται διακεκριμένοι, ακόμη και όταν σχεδιάζονται υπάρχουν δύο ανεξάρτητα σχήματα, ένα για κάθε κύκλο και αυτό θα συζητηθεί στο αντίστοιχο ερώτημα.

4.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΟΥ ΠΡΟΚΥΠΤΟΥΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ (B)

Στην ενότητα παρουσιάζεται όλο το φάσμα της ανταπόκρισης των μαθητών σε σχέση με το 2^ο ερώτημα :

Ποια χαρακτηριστικά παρατηρούνται στις απαντήσεις των μαθητών, όταν καλούνται στο ερώτημα α να δώσουν παραδείγματα που να ανταποκρίνονται στα δεδομένα της διατύπωσης της εικασίας ;

Η πρώτη παρατήρηση αφορά τη στοιχειώδη γνώση και χρήση της θεωρίας όπως δίνεται στο σχολικό βιβλίο. Για τις εικασίες $E1, E2$ απαιτείται η εφαρμογή των τύπων της ευθείας, ενώ για τις εικασίες $E3, E4$ η εφαρμογή των τύπων αλγεβρικής έκφρασης του κύκλου.

Φαίνεται ότι γενικά υπάρχει η δυνατότητα εμπλοκής με το αναπαραστατικό σύστημα της αλγεβρικής έκφρασης ευθείας και κύκλου και η στοχευμένη επιλογή αντίστοιχου τύπου.

Η μορφή κάθε εικασίας επιτρέπει να αξιοποιήσουν συντακτικά το αναπαραστατικό σύστημα της Άλγεβρας με δύο τρόπους:

- 1) Να διαχειριστούν την αοριστία των παραμέτρων με την ενσωμάτωση τους σε έναν γενικό τύπο, από όπου με κατάλληλες αντικαταστάσεις προκύπτουν ειδικά παραδείγματα.
- 2) Να δώσουν διαμιάς τα ειδικά παραδείγματα με άμεση αντικατάσταση στις τιμές της παραμέτρου.

Στην υποενότητα B1 παρουσιάζονται τα παραδείγματα στα οποία εμφανίζεται η γενική έκφραση που περιέχει την παράμετρο α , για κάθε μία από τις E1, E2, E3, E4.

ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ B1

Στην υποενότητα B1 εμφανίζονται τα είδη των σωστών απαντήσεων με χρήση γενικού τύπου.

A) Εικασία : Δίνεται ο γενικός τύπος $\psi=2\chi+\kappa$, $\psi=3\chi+\lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

B) Εικασία 3: Γράφεται η γενική παραμετρική έκφραση της εξίσωσης του περιγραφόμενου κύκλου, και σε αυτήν γίνονται οι αντικαταστάσεις των τιμών των παραμέτρων: $(\chi-\alpha)^2+(\psi-\alpha)^2=\alpha^2$. Σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει ακριβής και διαφανής αντίληψη των στοιχείων που προσδιορίζονται και του ρόλου τους, τόσο στο αλγεβρικό όσο και στο γεωμετρικό επίπεδο.

Γ) Εικασία 4 : Δίνεται ο γενικός τύπος με χρήση της παραμέτρου

$$\alpha: (\chi-\alpha)^2+(\psi-2)^2=2^2 \quad \text{και} \quad (\chi-\alpha)^2+(\psi+2)^2=2^2.$$

Κατά την διαχείριση της αλγεβρικής έκφρασης μιας εικασίας προκύπτουν αστοχίες ή ελλείψεις που επιδρούν στην έκβαση της πορείας επικύρωσης ή αναίρεσης της με διαφορετικό συντελεστή βαρύτητας.

Στην υποενότητα B2 παρουσιάζονται οι λανθασμένες ή ατελείς εκφράσεις που αφορούν τον γενικό τύπο της αλγεβρικής έκφρασης που περιέχει την παράμετρο α .

ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ Β2

A) Εικασία 1:

α) Θεωρούν ότι η ευθεία με $\lambda_1 = 2$ μπορεί να διέρχεται από οποιοδήποτε σημείο $\pi\chi$ $A(2,3)$ η ευθεία με συντελεστή $\lambda_2 = 3$, αντίστοιχα μπορεί να διέρχεται από το $B(4,5)$, έχει την αίσθηση ότι έχουν προσδιορισθεί, αλλά δεν δίνει τον συντακτικό τους τύπο αλγεβρικά. Επίσης δικαιολογεί ότι τέμνονται «γιατί ο συντελεστής διεύθυνσης καθορίζει την κλίση της ευθείας σε σχέση με τον άξονα $\chi\chi'$ »

Η οπτική αντίληψη της θέσης και της σχέσης των ευθειών κυριαρχεί σε τέτοιον βαθμό ώστε να θεωρεί περιττή τη συντακτική έκφραση με τη μορφή εξίσωσης.

Θεωρεί ότι έχει εκφράσει τη γενική μορφή με το σχόλιο ότι « το ίδιο θα συμβεί με οποιαδήποτε τυχαία σημεία ».

β) Ο μαθητής M5, γράφει την εξίσωση της ευθείας με λάθος τύπο :

$\psi - \psi_0 = \lambda_1(\chi + \chi_0)$ και με αντικατάσταση καταλήγει σε λανθασμένο τύπο ευθείας. Δεν είναι σε θέση να κρίνει τη σχέση των δύο ευθειών. Δεν φαίνεται να έχει επίγνωση του ρόλου κάθε παραμέτρου στον καθορισμό της ευθείας, παρά σαν απλές πράξεις στις οποίες αντικαθιστούμε τιμές του χ και του ψ .

γ) Ο μαθητής M6 έχει γράψει μια ευθεία τύπου $\psi = 2\chi + \dots$, - δεν έχει συμπληρώσει τον σταθερό όρο - και με ρωτάει, δείχνοντας τη θέση του σταθερού όρου :

M6 : Να βάλω το ∞ ;

K : Άπειρο; Θες να μου πεις ότι έχει άπειρες τιμές ;

M6 : Ναι.

K: Αλλά αυτές τις άπειρες τιμές θα τις βάλεις με το σύμβολο του απείρου;

M6 : Όχι.

K : Τι μπορείς να βάλεις για να μου δηλώσεις ότι...

M6 : Όλο το R .

K : Και το R με τι θα το αντιπροσωπεύσεις για να δείξεις ότι εκεί είναι ένας πραγματικός αριθμός, τι θα βάλεις;...

M6 : κ ;

K : Αυτό!

M6 : Δεν ξέρω αν είναι σωστό, αλλά το καταλαβαίνω.

B) Εικασία 2 : Δεν εμφανίσθηκαν λανθασμένες ή ελλιπείς εκφράσεις.

Γ) Εικασία 3:

Από τον μαθητή M5, παρατηρείται η ίδια αδυναμία - με σύγχυση ρόλου παραμέτρου που προσδιορίζει κέντρο και ακτίνα- σε σχέση με τις συντεταγμένες των σημείων χ, ψ στην εξίσωση. Δίνει τον ακόλουθο λάθος τύπο με αντικατάσταση στη γενική εξίσωση κύκλου: $\alpha^2 + \alpha^2 + A\alpha + B\alpha + \Gamma = 0$.

Δ) Εικασία 4:

Και πάλι ο μαθητής M5 επαναλαμβάνει το λάθος της E3, με την ίδια παρανόηση : $2^2 + 2^2 + A2 + B2 + \Gamma = 0$.

Στην υποενότητα B2 ανιχνεύονται βαθύτερες δυσκολίες αντίληψης του συμβολικού ρόλου που αποδίδεται με τη χρήση κατάλληλων χαρακτήρων για τις έννοιες μεταβλητής-παραμέτρου.

Ο μαθητής M5 φαίνεται να συγχέει τις έννοιες παραμέτρου-μεταβλητής και αντικαθιστά απλώς τιμές σε κάποια γράμματα.

Ο μαθητής M6 προβληματίζεται για τον τρόπο έκφρασης και χρήσης της παραμέτρου (παρατίθεται το αντίστοιχο απόσπασμα από τη μαγνητοφωνημένη συζήτηση στην τάξη), ενώ ο M4 αρκείται σε μια οπτική περιγραφή της αοριστίας της θέσης της ευθείας χωρίς να δίνει την εξίσωση της.

ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ B3

Στην υποενότητα B3 παρουσιάζονται τα παραδείγματα στα οποία αντικαταστάθηκε εξ αρχής η τιμή της παραμέτρου α και προέκυψαν συγκεκριμένες ευθείες ή κύκλοι, πάλι για κάθε μία από τις E1, E2, E3, E4.

A Εικασία 1

α) Η μαθήτρια M3 σημειώνει : $-\frac{A}{B} = 2$ και γράφει: $-6\chi + 3\psi + 1 = 0$ οπότε η συντακτική ανταπόκριση στον γενικό τύπο $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$ της ευθείας, είναι ορθή.

β) Δίνονται συγκεκριμένα παραδείγματα : $\psi = 2\chi + 3$, $\Psi = 3\chi + 5$ με αντικατάσταση τιμών στη θέση του σταθερού όρου.

γ) Παίρνουν ένα αυθαίρετο σημείο $A(1,2)$ και κατασκευάζουν συντακτικά την ευθεία ε_1 με συντελεστή $\lambda_1=2$. Καταλήγουν στην $\psi=2\chi$. Ομοίως και για την ε_2 . Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούν τον τύπο:

$$\psi - \psi_0 = \lambda(\chi - \chi_0).$$

δ) Θεωρούν ήδη ότι οι δύο ευθείες τέμνονται στο $O(0,0)$ και κατασκευάζουν με την παραδοχή αυτή τις ευθείες με τύπους:

$$\psi = 2\chi \text{ και } \psi = 3\chi.$$

B) Εικασία 2 :

α) Κυρίως εμφανίζεται το παράδειγμα : $\chi=1, \psi=1$.

β) Ένα μοναδικό παράδειγμα : $\chi = \sqrt{5}, \psi = \sqrt{5}$.

Γ) Εικασία 3 :

α) Ακολουθείται η περιγραφή, και συντάσσονται ορθά οι αντίστοιχες εξισώσεις. Αρχικά δίνεται τιμή στην παράμετρο και το παράδειγμα συγκεκριμενοποιείται όπως φαίνεται στις περιπτώσεις ;

$$(\chi-1)^2 + (\psi-1)^2 = 1, (\chi-3)^2 + (\psi-3)^2 = 9 \dots$$

Δ) Εικασία 4:

Γράφονται οι συντεταγμένες των κέντρων $K(3,2)$ και $\Lambda(3,-2)$ και στη συνέχεια οι εξισώσεις των δύο κύκλων :

$$(\chi-3)^2 + (\psi-2)^2 = 4, (\chi-3)^2 + (\psi+2)^2 = 4 \dots$$

ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ B4

Στην υποενότητα B4 καταχωρούνται και σχολιάζονται κάποιες αστοχίες και αβλεψίες που αφορούν τα ειδικά παραδείγματα όταν αντικαταστάθηκαν συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους.

A) Εικασία 1 :

α) Ο μαθητής M2 παραβλέπει την αναφορά της θεωρίας, να σχηματισθεί το παράλληλο διάνυσμα $(B, -A)$ όταν $B \neq 0$ με $\lambda = \frac{-A}{B}$ στην περίπτωση του γενικού τύπου

της ευθείας $A\chi + B\psi + \Gamma = 0$, οπότε δίνει σαν ειδικούς τύπους τους :

$$3\chi + \psi + 2 = 0, 4\chi + 2\psi + 1 = 0.$$

β) Ο μαθητής M4 δίνει ένα παράδειγμα σωστό: $\psi=2\chi+3$, και ένα παράδειγμα λάθος με εναλλακτική χρήση της γενικής μορφής $\psi+2\chi+8=0$ χωρίς να συνειδητοποιεί ότι ο συντελεστής του χ στη γενική μορφή εξίσωσης ευθείας δεν αντιστοιχεί στην κλίση της ευθείας.

B) Εικασία 2:

Δεν υπάρχουν λάθος ειδικά παραδείγματα. Το δικαιολογώ από την απλότητα της περιγραφής δεδομένων.

Γ) Εικασία 3 :

α) Γράφεται σωστά η γενική εξίσωση : $(\chi-\chi_0)^2+(\psi-\psi_0)^2=\rho^2$ με $K(\alpha, \alpha) \rho=\alpha, \alpha>0$ και δίνει λάθος ειδικό παράδειγμα : $(\chi-3)^2+(\psi-2)^2=3^2$. Το εκτιμώ ως λάθος αβλεψίας.

β) Η εξίσωση του κύκλου, γράφεται σωστά. Δεν αναγνωρίζεται η δέσμευση για την παράμετρο $\alpha, \alpha>0$ και δίνεται το λάθος ειδικό παράδειγμα : $(\chi+1)^2+(\psi+1)^2=1$.

Δ) Εικασία 4:

Ενώ έχει γραφτεί σωστά για κάθε κύκλο η γενική εξίσωση :

$(\chi-\alpha)^2+(\psi-2)^2=4, (\chi-\alpha)^2+(\psi+2)^2=4$ αντικαθιστούν διαφορετική τιμή της παραμέτρου για κάθε κύκλο και τους εμφανίζουν σαν δύο μεμονωμένα παραδείγματα. Παρά τη συζήτηση που προηγήθηκε δεν συνειδητοποίησαν ότι με αντικατάσταση του α προκύπτει ένα σύστημα με δύο κύκλους.

Τα λάθη που εμφανίζονται είναι εντός του πλαισίου αναμενόμενης απροσεξίας και αβλεψίας, ωστόσο επιδρούν στο σχήμα που αντιπροσωπεύουν και κατ' επέκταση στην εκτίμηση της εικασίας.

4.3 ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΤΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (Γ)

Στην ενότητα εξετάζεται η ανταπόκριση στο 3^ο Ερώτημα : Το σχέδιο που αντιστοιχεί στην αλγεβρική έκφραση των εξισώσεων των ευθειών και των κύκλων είναι συνεπές; Στην ενότητα αυτή πραγματοποιείται η αλλαγή του αναπαραστατικού συστήματος και οι αλγεβρικές περιγραφές των εξισώσεων αποδίδονται με κατάλληλα σχήματα ευθειών και κύκλων στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Ακριβώς αυτή η

αλλαγή αναπαραστατικού συστήματος αποτελεί μια σημασιολογική στρατηγική προσέγγισης της εικασίας. Η δυνατότητα της μετάφρασης σε οπτικές αναπαραστάσεις περιέχει πολλές προκλήσεις με την αμεσότητα της εικόνας που προσφέρει.

Στην υποενότητα Γ1 παρουσιάζονται οι συνεπείς γεωμετρικές αποδόσεις των αλγεβρικών εκφράσεων. Οι μαθητές επιβεβαιώνουν την ορθότητα των εξισώσεων που έδωσαν.

ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ Γ1

Στην υποενότητα Γ1 καταγράφονται οι απαντήσεις με τα συνεπή προς την περιγραφή σχήματα και αντίστοιχη ορθή σχεδίαση :

A) Εικασία 1

α) Ο μαθητής M2 έχει δώσει λανθασμένα παραδείγματα :

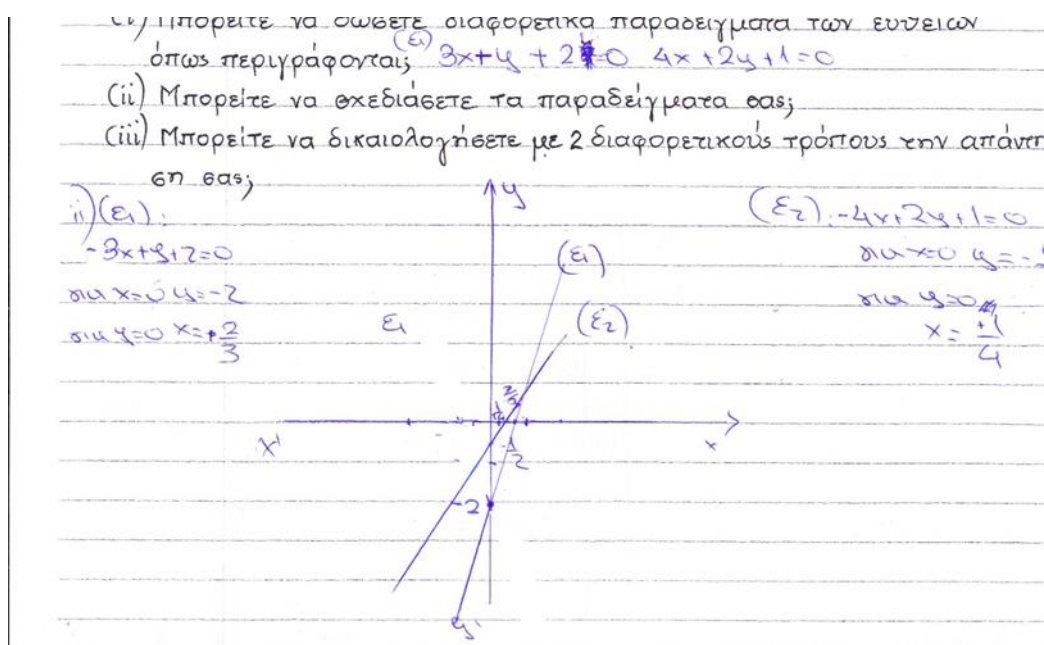
$$3\chi+\psi+2=0 \quad \text{και} \quad 4\chi+2\psi+1=0 \text{ αρχικά.}$$

Όταν φτάνει στο ερώτημα β, να σχεδιάσει τα παραδείγματα του, κάνει την ακόλουθη ερώτηση:

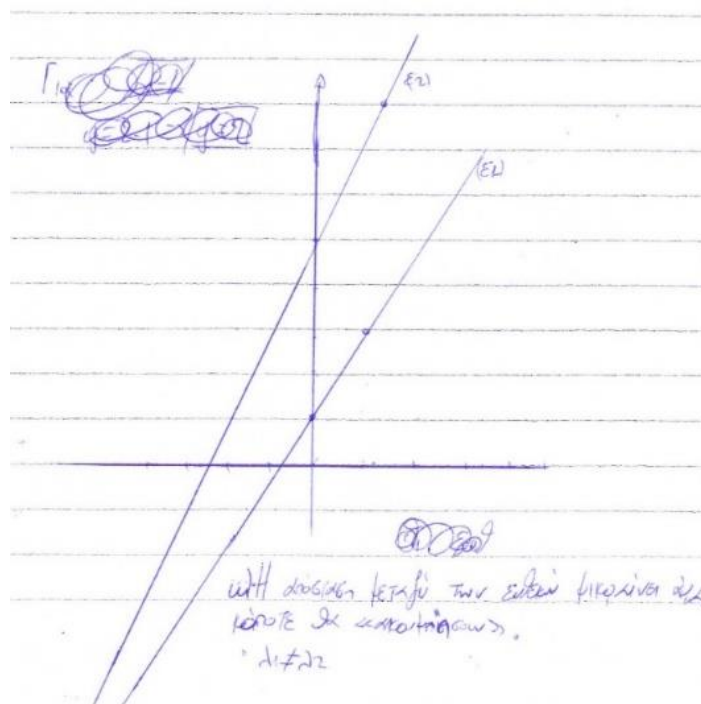
M2 : 'Ηθελα να βγάλω συντελεστή 3. Μπερδεύτηκα με το πρόσημο και μου βγαίνει -3. Και βλέπω ότι η ευθεία αυτή περνάει από το 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο οπότε πρέπει να έχει κανονικά αρνητικό συντελεστή, ενώ εσείς δίνετε θετικό συντελεστή, άρα πρέπει να είναι κάπως έτσι...(δείχνει ότι η ζητούμενη ευθεία με συντελεστή 3, σχηματίζει οξεία γωνία).

K : Μπορείς να το διορθώσεις; Την έκφραση την αλγεβρική;

M2 : Ναι.

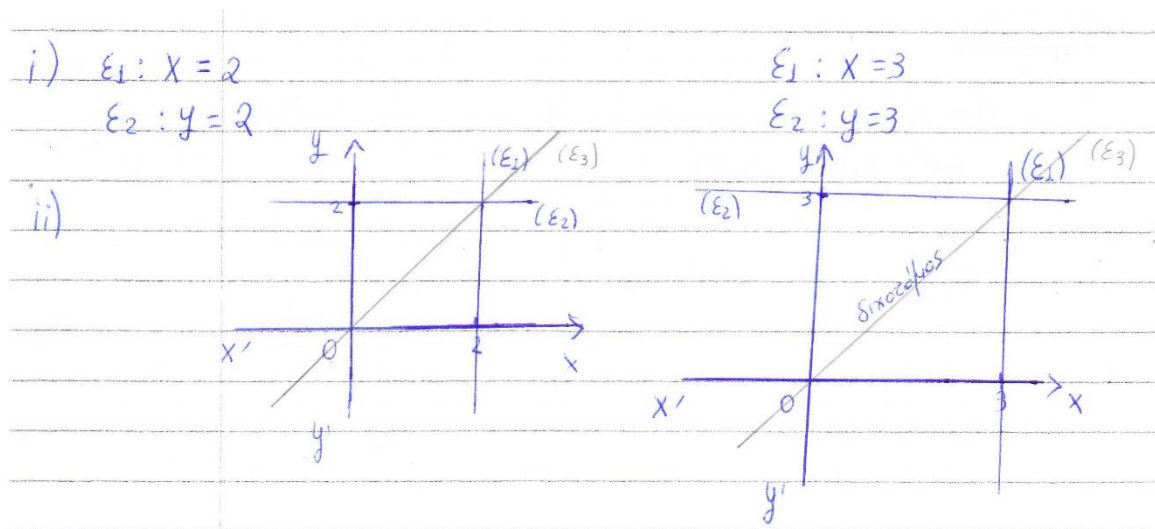


β) Σωστός σχεδιασμός και επιβεβαίωση της εικασίας άμεση σε όλα τα συνεπή σχήματα με ορθές αλγεβρικές εξισώσεις . γ) Η τομή των ευθειών δεν «χωράει» μέσα στο χαρτί του Φυλλαδίου, οπότε ο μαθητής M8 σημειώνει : « Η απόσταση των δύο ευθειών μικραίνει άρα κάποτε θα ακουμπήσουν». Και αμέσως μετά : $\lambda_1 \neq \lambda_2$.



B) Εικασία 2

Η εικασία 2 αποδείχτηκε πολύ απλή σχεδιαστικά και η σχεδίαση είναι συνεπής με τα παραδείγματα. Υπάρχει η επίγνωση της μορφής της ευθείας $\chi=\alpha$ ως κάθετης στον $\chi\chi'$ και της $\psi=\alpha$, ως ευθείας κάθετης στον $\psi\psi'$. Αυτή η γνώση είναι επαρκής για την σχεδίαση τους.



Γ) Εικασία 3

α) Οι σωστές αλγεβρικές εξισώσεις αποδίδονται με αντίστοιχα ορθά και συνεπή σχήματα.

Δ) Εικασία 4

α) Σχεδιάζονται σε πλήρη αντιστοιχία με τον συντακτικό τύπο της αντίστοιχης αλγεβρικής εξίσωσης.

β) Υπάρχει ένα σχήμα σύμφωνα με την περιγραφή, και ένα άσχετο. Στην εκτίμηση της εικασίας, χρησιμοποιείται το σωστό.

γ) Σχεδιάζονται σωστά χωρίς να έχει δοθεί η αλγεβρική εξίσωση του κύκλου.

δ) Σχεδιάζονται σωστά, παρά τον λανθασμένο τύπο της αλγεβρικής εξίσωσης.

Στην ενότητα αυτή είναι πολύ χαρακτηριστική η περίπτωση όπου η χάραξη των ευθειών στην E1 αποκαλύπτουν μια απροσεξία στους αλγεβρικούς τύπους που είχαν δοθεί προηγουμένως. Ο μαθητής M2 στο μαγνητοφωνημένο απόσπασμα το αντιλαμβάνεται και χωρίς καμία υπόδειξη είναι σε θέση να διορθώσει το συντακτικό λάθος της εξίσωσης. Οι μαθητές που πραγματοποιούν τη σημασιολογική προσέγγιση με το κατάλληλο σχέδιο είναι σε θέση να παρατηρήσουν εύστοχα τα χαρακτηριστικά των γραμμών και να απαντήσουν με βεβαιότητα αν η εικασία είναι σωστή ή λάθος. Αξιοπαρατήρητη είναι η απόδοση με σχήμα του κύκλου για τον οποίο δεν έχει δοθεί αλγεβρική εξίσωση. Η απλή γεωμετρική αντίληψη ότι το κέντρο και η ακτίνα είναι

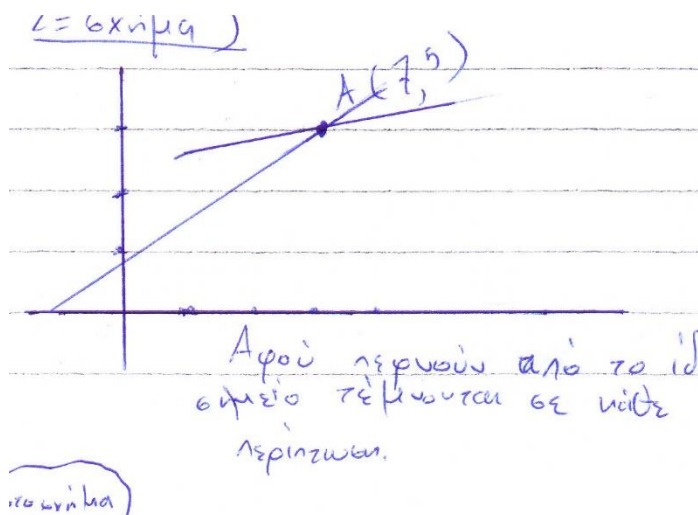
επαρκή στοιχεία για τον προσδιορισμό της θέσης του κύκλου δρα χωρίς το υπόβαθρο της άλγεβρας.

ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ Γ2

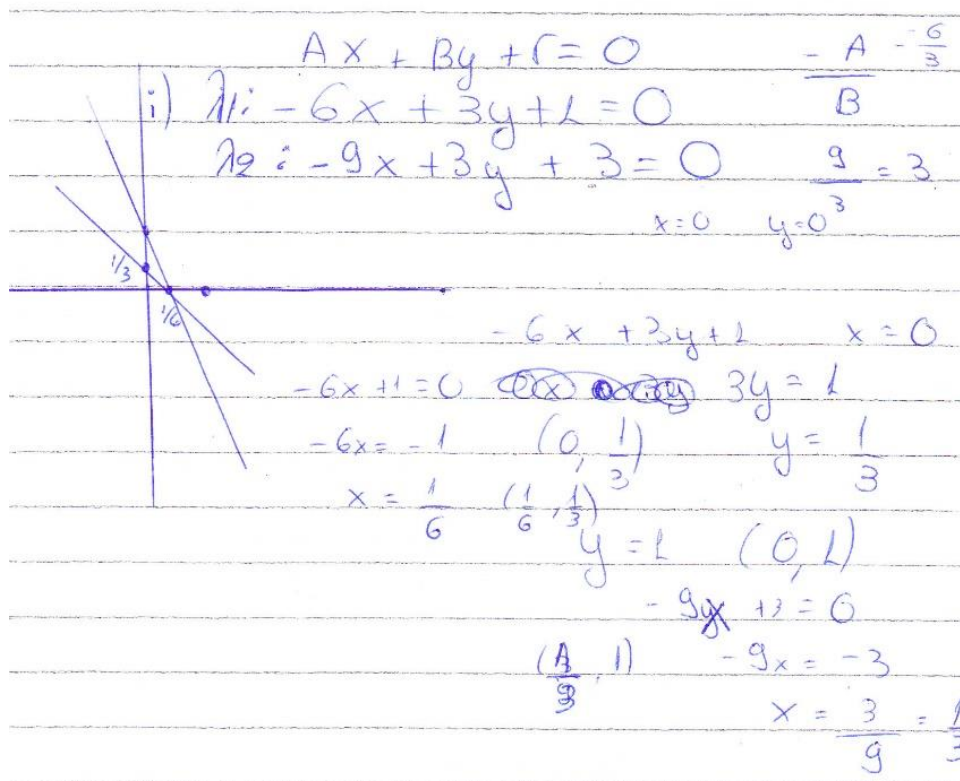
Στην υποενότητα Γ2 σχολιάζονται οι γραφικές παραστάσεις που ήταν ασυνεπείς προς τα δεδομένα ή τις αλγεβρικές εξισώσεις που είχαν δοθεί.

A) Εικασία 1

α) Στη συντακτική – αλγεβρική διατύπωση της ευθείας έχει ήδη εννοηθεί ότι οποιοδήποτε σημείο μπορεί να είναι κοινό σημείο δύο ευθειών με διαφορετικούς συντελεστές, από τον μαθητή M7. Στη σχεδίαση κυριαρχεί αυτό το στοιχείο, δεν ενδιαφέρεται για την αντιστοιχία των συντελεστών, ώστε να ισχύει $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=3$.



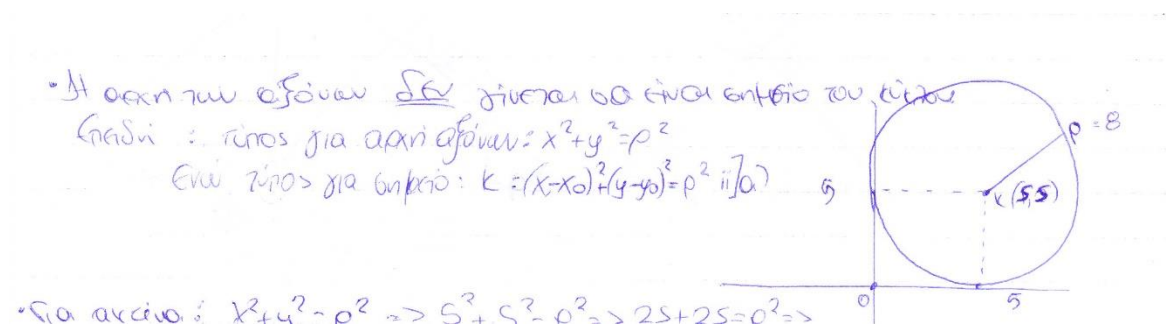
β) Η μαθήτρια M3 ενώ έχει δώσει ορθή αλγεβρική έκφραση στους τύπους των ευθειών, αστοχεί σχεδιαστικά, εξ αιτίας αριθμητικών λαθών στις εξισώσεις με τις οποίες προσδιορίζει τα δύο σημεία κάθε ευθείας.



B) Εικασία 3

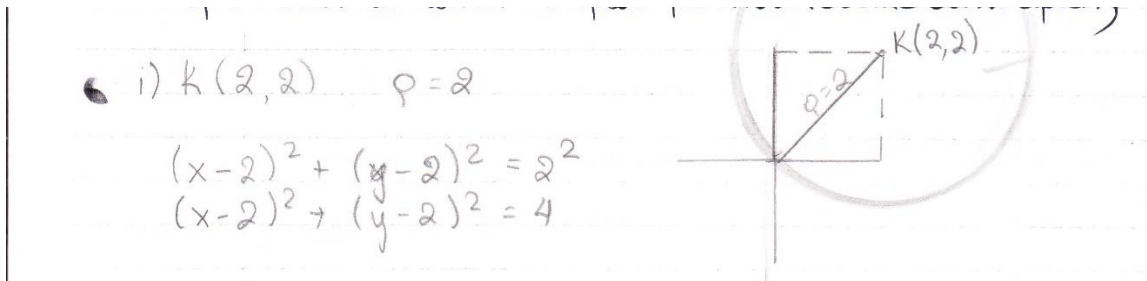
α) Λάθος σχήμα το οποίο προκύπτει από την αγνόηση του δεδομένου ότι το κέντρο είναι $K(\alpha, \alpha)$ και η ακτίνα $\rho=\alpha$. Αυτό το σημείο έχει αγνοηθεί επίσης και στην κατάρτιση της αντίστοιχης εξίσωσης.

β) Η λανθασμένη αρχική εξίσωση ,μεταφέρεται με τα αντίστοιχα λάθη και στο σχήμα, του οποίου η πρόχειρη απόδοση συμβιβάζει αντιφατικά στοιχεία



γ) Δίνεται ένα σωστό σχήμα βάσει της γενικής παραμετρικής περιγραφής , και ένα λανθασμένο ,όταν αντικαθιστά συγκεκριμένη τιμή στην παράμετρο.(!)

δ) Οι αλγεβρικές εξισώσεις αποδίδονται σωστά, στο σχήμα έχει επιδράσει η λανθασμένη πρόβλεψη ότι η εικασία είναι σωστή, και ενώ έχει τοποθετηθεί σωστά το κέντρο $K(2, 2)$, σαν ακτίνα παίρνει $\rho=OK$ και σημειώνει $\rho=2$, ενώ $(OK)= 2\sqrt{2}$.



Γ) Εικασία 4

α) Δεν έχει κατανοηθεί ότι η περιγραφή αφορά δύο κύκλους με την ίδια τετμημένη κέντρου. Σχεδιάζονται διαχωρισμένοι σε δύο ανεξάρτητα σχήματα.

Συνοπτικά σε κάποιες περιπτώσεις λάθη στην αλγεβρική εξίσωση του κύκλου μεταφέρθηκαν και στο σχήμα το οποίο εμφανίζεται παραμορφωμένο με πρόχειρη ελεύθερη απόδοση. Υπάρχει και μια λανθασμένη εκτίμηση για την εικασία E4 ότι είναι σωστή, το σχήμα προσαρμόζεται να συμφωνεί με αυτήν και όχι με την περιγραφή των δεδομένων. Αξιοπερίεργη είναι η περίπτωση όπου στην ίδια εικασία E4 καταχωρούνται δύο σχήματα ένα συνεπές και ένα ασυνεπές προς την περιγραφή του κύκλου ως παραδείγματα.

ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ Γ3

Στην υποενότητα Γ3 εντοπίζονται οι περιπτώσεις στις οποίες δεν αποδόθηκε κανένα σχέδιο, όπως ρητά ζητούσε το β ερώτημα κάθε εικασίας.

A) Εικασία 1

α) Μόνο η εξίσωση της ευθείας, κανένα σχήμα, καμία εκτίμηση για την εικασία.

β) Ο μαθητής M5 που έδωσε λανθασμένο συντακτικό τύπο ευθείας, δεν είναι σε θέση να σχεδιάσει, ούτε να κρίνει την εικασία, αποδέχεται ότι: « οι ευθείες μπορεί να μην τέμνονται πάντοτε και αυτό γιατί υπάρχει περίπτωση να είναι και παράλληλες...»

B) Εικασία 4

Δεν υπάρχει σχέδιο, και επίσης δεν υπάρχουν εξισώσεις κύκλων παρά το ότι δίνεται μια γενική και αόριστη εκτίμηση της εικασίας.

Οι περιπτώσεις που αγνοήθηκε η οδηγία να δοθεί σχήμα αφορούν κυρίως την εικασία E1. Ερμηνεύεται από το ότι με τη χρήση των εξισώσεων των ευθειών αποδεικνύεται με απλές πράξεις η ύπαρξη λύσης του συστήματος (χ , ψ). Η σημασιολογική μετάφραση της λύσης σε μοναδικό σημείο είναι αποτυπωμένη ως κάτι τόσο προφανές ώστε η επιβεβαίωση μέσω σχήματος να περιττεύει. Η ανυπαρξία εξισώσεων αλλά και σχημάτων κύκλων στην E4 δεν παρέχει εργαλεία ερμηνείας της εικασίας σε κανένα σύστημα, και τότε μόνο η Γεωμετρία επιτρέπει μια γενικόλογη προσέγγιση για τη σχετική θέση των δύο κύκλων.

4.4 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΕΙΚΑΣΙΑΣ (Δ)

Στην τελευταία ενότητα εξετάζεται η ανταπόκριση στο 4^ο ερώτημα :

Έχουν εκτιμήσει την ορθότητα ή το λάθος της εικασίας με συσχετίσεις – μεταφραστικούς παραλληλισμούς-μεταξύ των δύο αναπαραστατικών συστημάτων ή προτιμήθηκε το ένα εξ αυτών προκειμένου να τεκμηριωθεί η πιο πειστική απάντηση; Η προτροπή είναι να χρησιμοποιήσουν τις απαντήσεις που προηγήθηκαν προκειμένου να ελέγξουν την ισχύ της εικασίας. Ο σκοπός είναι να εμπλακούν τα δύο αναπαραστατικά συστήματα ώστε οι απαντήσεις να τεκμηριώνονται με δύο τρόπους και να αποκαλυφθούν συσχετισμοί μεταξύ τους.

Όπως πριν οι απαντήσεις έχουν επιμεριστεί σε υποενότητες, βάσει των κοινών χαρακτηριστικών που παρατηρούνται σε κάθε ομάδα ταξινόμησης.

ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ Δ1

Στην υποενότητα Δ1 παρουσιάζονται οι αιτιολογήσεις των εικασιών που λειτούργησαν μέσω της αξιοποίησης των αλγεβρικών εκφράσεων.

A) Εικασία 1

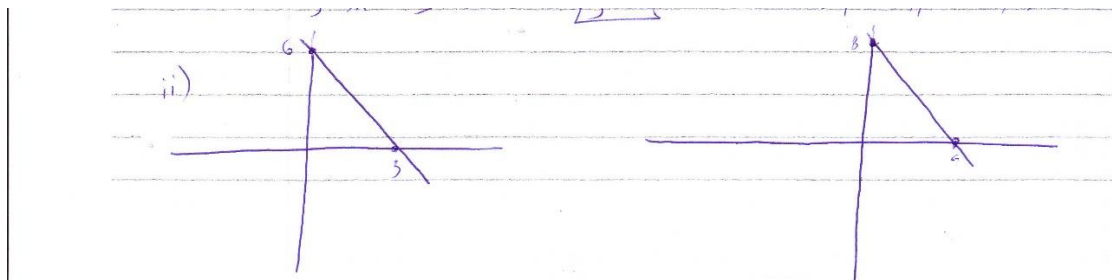
α) Κανένα σχήμα, μόνο αλγεβρική αιτιολόγηση, από το σύστημα των εξισώσεων (με συγκεκριμένες τιμές στα παραδείγματα) ότι έχουν λύση, και η λύση προσδιορίζεται με πράξεις σωστά, οπότε η λύση αντιπροσωπεύει το σημείο τομής.

$\Sigma\delta\omega: (x_1, y_1) = (1, 2)$ $\Sigma\delta\omega: (x_2, y_2) = (2, 3)$
 i, iii) $E_1: y - y_0 = 2(x - x_0)$ $E_2: y - y_0 = 3(x - x_0)$
 $E_1: y - 2 = 2(x - 1)$ $E_2: y - 3 = 3(x - 2)$
 $E_1: y - 2 = 2x - 2$ $E_2: y - 3 = 3x - 6$
 $E_1: y = 2x$ $E_2: y = 3x - 3$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3x - 3 \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x = 3}$$

Σημείο τομής $A(3, 6)$

β) Λύνεται με αλγεβρικό τρόπο το σύστημα, υπολογίζεται η λύση $x=4$, $y=8$ αλλά η λύση δεν αντιπροσωπεύει ένα σημείο, αλλά σε παρανόηση αντιστοίχισης ένα ευθύγραμμο τμήμα.



γ) Μόνο αλγεβρική επαλήθευση: Αρχικά δημιουργούνται οι εξισώσεις με συντελεστές 2,3 αντίστοιχα $\psi=2x$, $\psi=3x$ και λαμβάνεται ήδη δεδομένο ότι διέρχονται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και οι δύο, οπότε η προφανής επιβεβαίωση είναι ότι τέμνονται στο προκαθορισμένο σημείο, χωρίς σχόλια για τη γενίκευση του σε άλλη περίπτωση.

δ) Δίνονται οι γενικές εκφράσεις των ευθειών: $\psi = 2x + \gamma$, $\psi = 3x + \delta$,

$\gamma, \delta \in \mathbb{R}$, και λύνεται το σύστημα με τις παραμέτρους γ, δ , η δε λύση του συστήματος εκφράζεται παραμετρικά

iii) $\lambda_1=2, \lambda_2=3$

Έστω ότι δεν τελειώνει ποτέ άρα

$\exists \varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ άτοπο άρα

$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ άρα τελειώνει πάντα

2^{ος} Έστω ότι τελειώνεται * στο $A(x_A, y_A)$

άρα θα ισχύει $y_{A, \varepsilon_1} = y_{A, \varepsilon_2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2x_A + \gamma = 3x_A + \delta \Leftrightarrow x_A = \gamma - \delta$$

$$\Rightarrow y_A = 2(\gamma - \delta) + \gamma = 3\gamma - 2\delta$$

άρα υπάρχει σημείο που τελειώνεται γι

* n $\varepsilon_1: y = 2x + \gamma, \gamma \in \mathbb{R}$
 $\varepsilon_2: y = 3x + \delta, \delta \in \mathbb{R}$

κάθε $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$

B) Εικασία 2

α) Ο μαθητής M11

στο σχήμα σημειώνει $\lambda=1, \lambda_e = \text{εφ}45^\circ$, γράφει $\psi=\chi$ και συμπληρώνει «δεν υπάρχει άλλη ευθεία»

β) Η δικαιολόγηση γίνεται αλγεβρικά ως εξής : «επειδή $\chi=\alpha, \psi=\alpha \Leftrightarrow \psi=\chi$

γ) Με δεδομένο ότι υπάρχει η ευθεία και αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχει τύπο $\psi=\lambda\chi$, το σημείο $A(\alpha, \alpha)$ την επαληθεύει οπότε $\lambda=1$ και η ευθεία είναι $\psi=\chi$.

Γ) Εικασία 3

α) Αλγεβρική αιτιολόγηση με αντικατάσταση στην παραμετρική εξίσωση του κύκλου:

« πρέπει το σημείο να επαληθεύει τον κύκλο $C: (\chi-\alpha)^2 + (\psi-\alpha)^2 = \alpha^2$.

Έστω $O \in C: (0-\alpha)^2 + (0-\alpha)^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow 2=1$ άτοπο άρα $O \notin C$ ».

Το $O(0,0)$ δεν μπορεί να είναι κέντρο άρα $\chi_k \neq 0$ και $\psi_k \neq 0$ άρα το k δεν είναι ποτέ το $O(0,0)$, ωστόσο πρέπει και το σημείο να επαληθεύει τον κύκλο $C: (\chi-\alpha)^2 + (\psi-\alpha)^2 = \alpha^2$
 έστω $O \in C: \Rightarrow (\alpha-\alpha)^2 + (\alpha-\alpha)^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 = \alpha^2 \Leftrightarrow 2=1$ άτοπο άρα $O \notin C$

β) Όμοια αλγεβρική αιτιολόγηση με αντικατάσταση $\chi=0, \psi=0$ σε παράδειγμα συγκεκριμένο $(0-1)^2+(0-1)^2=1, 2=1$ και απαγωγή εις άτοπο ή κατάληξη σε κάτι «αδύνατο».

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad & (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ & (0-1)^2 + (0-2)^2 = 1 \\ & (-1)^2 + (-1)^2 = 1 \\ & 2 = 1 \text{ αδύνατο} \end{aligned}$$

γ) Με ορθή απόδοση του σχήματος του κύκλου και ακριβή αίσθηση του ρόλου της παραμέτρου α ($\alpha > 0$), αιτιολογεί : «αυτός ο κύκλος δεν μπορεί να έχει σημείο του την αρχή των αξόνων...μπορεί να επιτευχθεί αυτό και συγκεκριμένα αν $\alpha=0$. Επομένως δεν θα είναι κύκλος αλλά σημείο».

δ) Από το ειδικό παράδειγμα κύκλου με $K(2,2)$ και $\rho=2$ η αιτιολόγηση επικαλείται τη σχέση : «αν η αρχή των αξόνων ήταν σημείο του θα έπρεπε $(OK)=\sqrt{8} = \rho=2$, δεν ισχύει».

Δ) Εικασία 4

α) Το σύστημα των δύο εξισώσεων επιλύεται στη γενική παραμετρική μορφή αλγεβρικά, σχολιάζεται η διπλή λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης και το κοινό σημείο δίνεται : $(\alpha, 0)$.

$$C_1: K(a, 2) \quad \rho=2$$

$$(x-a)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(x-a)^2 = 4 - (y-2)^2 \quad (1)$$

$$\downarrow$$

$$(x-a)^2 = 4 - (0-2)^2$$

$$(x-a)^2 = 0$$

$x=a$ (διπλή).
Το κοινό σημείο
είναι το $(a, 0)$

Για $a=1$

$$C_1: K(1, 2) \quad \rho=2$$

$$C_2: K(1, -2) \quad \rho=2$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$(2) \Rightarrow x=1$$

$$C_2: K(a, -2) \quad \rho=2$$

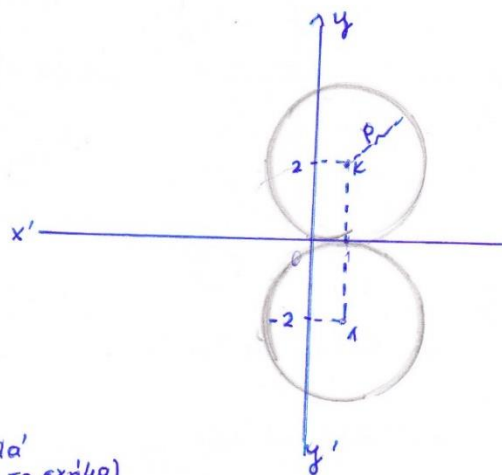
$$(x-a)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$(1) \Rightarrow 4 - (y-2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$4 - (y^2 - 4y + 4) + (y^2 + 4y + 4) = 4$$

$$4 - y^2 + 4y - 4 + y^2 + 4y + 4 = 4$$

$$8y = 0 \Rightarrow y=0$$



καλά
(δε φαίνεται με το σχήμα)

β) Το σύστημα των δύο εξισώσεων λύνεται σε παράδειγμα ειδικό για συγκεκριμένη τιμή $a=3$. Προκύπτει η λύση $(3,0)$ και σημειώνεται «ένα κοινό σημείο».

Οι αλγεβρικές εκφράσεις χρησιμοποιήθηκαν κυρίως στην Ε1 επειδή η πρακτική επίλυσης γραμμικών συστημάτων με δύο αγνώστους είναι οικεία διαδικασία από την ύλη προηγούμενων τάξεων και με διαρκή εφαρμογή στη Φυσική και τη Χημεία. Στην αιτιολόγηση της Ε3 χρησιμοποιείται αλγεβρικά η απαγωγή εις άτοπο ή πιο απλά η κατάληξη σε κάτι αδύνατο. Αξιόλογη είναι η αλγεβρική αιτιολόγηση της Ε4 ότι το κοινό σημείο των δύο κύκλων προκύπτει μέσω της επίλυσης παραμετρικού συστήματος δύο δευτεροβάθμιων εξισώσεων στο οποίο η λύση $x=a$ χαρακτηρίζεται διπλή και το σημείο επαφής $(a,0)$ μοναδικό.

ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ Δ2

Στην υποενότητα Δ2 παρουσιάζονται οι αιτιολογήσεις που απορρέουν από τη γεωμετρική αντίληψη του σχήματος και με αυτή την έννοια αξιοποιείται η

σημασιολογική στρατηγική. Η αναλυτική παρουσίαση ανά εικασία αποκαλύπτει τις ακόλουθες πτυχές:

A) Εικασία 1

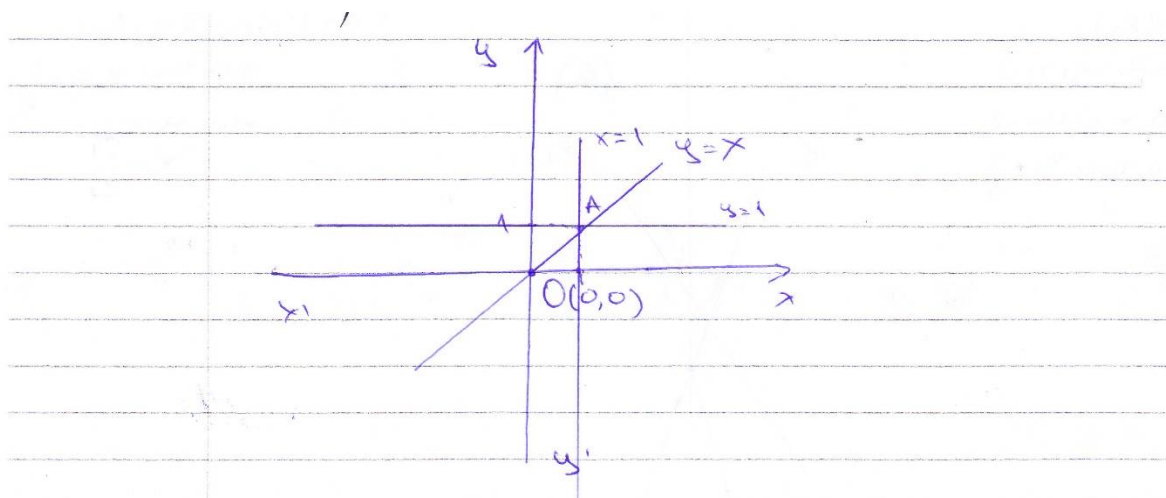
α) Ο μαθητής M2 σχεδιάζει με εγγήγορση στην αντιστοιχία εικόνας ευθείας και συντακτικού τύπου, το παράδειγμα του και επικαλείται την θεωρία με χρήση της απαγωγής εις άτοπο: «δύο ευθείες για να είναι παράλληλες πρέπει $\lambda_1 = \lambda_2$, $2=3$, άτοπο». Προσθέτει όμως ότι « παρατηρούμε πως αν σχεδιάσουμε δύο ευθείες με τους παραπάνω συντελεστές τέμνονται».

Σε προφορική ενίσχυση της γραπτής του απάντησης, λέει « Το έχω δει από το σχήμα, εποπτικά εντελώς, και μετά με διανύσματα».

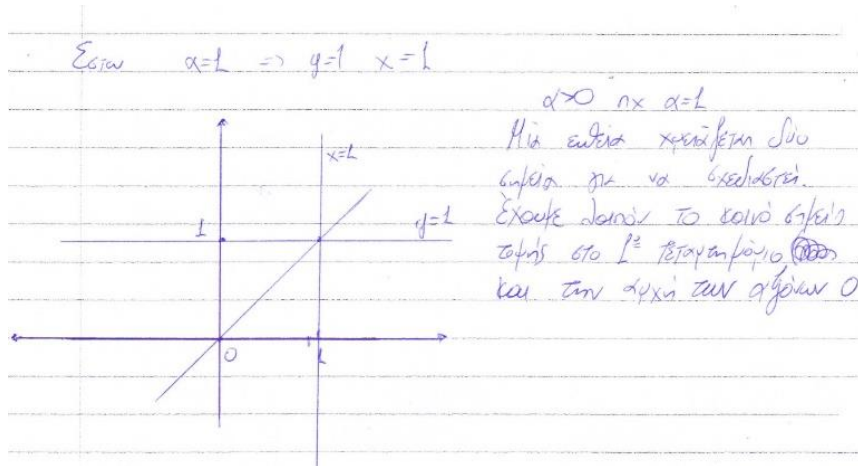
β) Κύριο επιχείρημα στις σωστές απαντήσεις: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, άρα οι ευθείες τέμνονται πάντοτε. Ο Μαθητής M8 σημειώνει υπερθεματίζοντας: «αυτό σημαίνει ότι όταν προεκτείνουμε στο άπειρο τις δύο ευθείες θα έχουν ένα σημείο τομής»

B) Εικασία 2

α) Η γεωμετρική αίσθηση: ο μαθητής M2 γράφει «αρχικά παρατηρώ ότι από το σημείο O και το A διέρχεται μόνο μια ευθεία και ως γνωστό από το αξίωμα του Ευκλείδη, από δύο σημεία διέρχεται μια μοναδική ευθεία...ακόμη παρατηρώ ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η ευθεία που θα δημιουργείται πάντα θα είναι η $\psi = \chi$ »



... αρχικά παρατηρώ ότι από το σημείο O και το A διέρχεται μόνο μια ευθεία και ως γνωστό από το αξίωμα του Ευκλείδη από δύο σημεία διέρχεται μόνο μια μοναδική ευθεία.



β) Ο μαθητής M8 εξηγεί με παρόμοιο, πιο πρακτικό τρόπο: « Η ευθεία χρειάζεται δύο σημεία για να σχεδιαστεί. Έχουμε λοιπόν το κοινό σημείο τομής στο 1° τεταρτημόριο, και την αρχή των αξόνων».

Γ) Εικασία 3

α) Ορθή αιτιολόγηση με βάση το σωστό σχήμα και ένα οπτικού χαρακτήρα επιχείρημα « Δεν γίνεται, διότι και οι δύο κύκλοι ανήκουν στο πρώτο τεταρτημόριο».

β) Οπτική αιτιολόγηση βασισμένη σε δύο σωστά σχήματα :

« Παρατηρώντας και τα δύο παραπάνω παραδείγματα, καταλαβαίνουμε πως η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ δεν μπορεί να είναι σημείο του κύκλου».

γ) « Άρα δεν γίνεται η αρχή των αξόνων να είναι σημείο του κύκλου και αυτό το βλέπουμε από τα σχήματα».

δ) Ορθή εκτίμηση με απάντηση τύπου «όπως καταλαβαίνουμε από τα δύο παραπάνω παραδείγματα, οι κύκλοι δεν μπορούν να έχουν δύο κοινά σημεία, παρά μόνο 1», με σχήματα σύμφωνα με την περιγραφή.

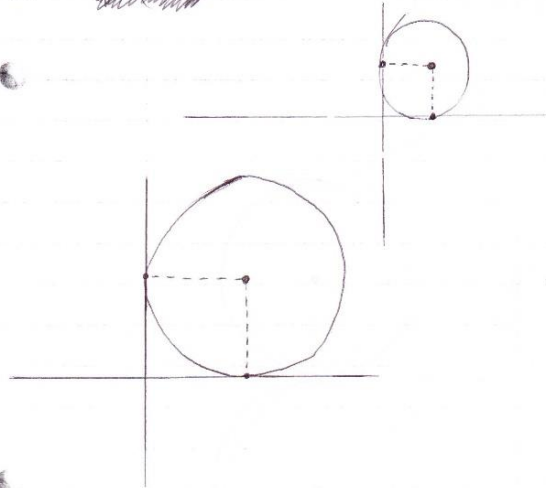
(i) Έστω $C(p, r)$ και $p=1$

$$C_1: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

Έστω $C(-2, -2)$ και $p=-2$

$$C_2: (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4$$

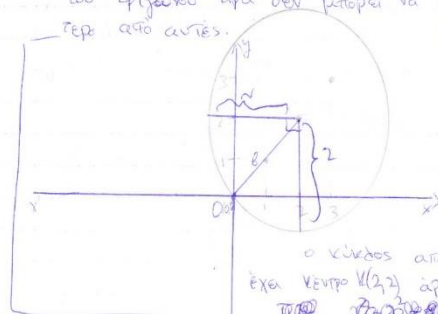
ii)



iii) Παρατηρώντας και τα δύο παραπάνω παραδείγματα, καταλαβαίνουμε πως η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ δεν μπορεί να είναι σημείο του κύκλου.

ε) Δικαιολογείται γεωμετρικά ότι « η αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ δεν γίνεται να είναι σημείο του κύκλου, διότι αν ήταν η ακτίνα θα ήταν η υποτείνουσα του τριγώνου που δημιουργείται ενώ τώρα η ακτίνα είναι ίση με τις κάθετες πλευρές του τριγώνου, άρα δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από αυτές».

iii) Η αρχή των αξόνων $O(0,0)$ δεν γίνεται να είναι σημείο του κύκλου, διότι αν ήταν η ακτίνα θα ήταν η υποτείνουσα του τριγώνου που δημιουργείται ενώ τώρα η ακτίνα είναι ίση με τις κάθετες πλευρές του τριγώνου, άρα δεν μπορεί να έχει μήκος μεγαλύτερο από αυτές.



ο κύκλος από παραπάνω έχει
 έχει κέντρο $K(2,2)$ άρα $p=2$
 $r=2$
 $r=2$ είναι μεγαλύτερη η
 υποτείνουσα θ από την ακτίνα
 του κύκλου, άρα δεν ισχύει.

Δ) Εικασία 4

α) Τεκμηριώνεται η εξωτερική επαφή των δύο κύκλων με τον έλεγχο της συνθήκης από τη Γεωμετρία της Α Λυκείου, ότι $\delta = r_1 + r_2$, με αντικατάσταση των τιμών τους από τα δεδομένα

iii) Οι κύκλοι C_1, C_2 έχουν 1 κοινό σημείο, καθώς εφάπτονται εξωτερικά.

Πχ1: Η απόσταση (KL) είναι : $(KL) = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{(2+2)^2} = \sqrt{4^2} = 4$

$(KL) = 4$ Όμως:

$(KL) = \delta = r_1 + r_2$, άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά

β) Η απάντηση βασίζεται σε σχήματα πιστά στη γενική περιγραφή και το επιχείρημα είναι «όπως καταλαβαίνουμε από τα δύο παραπάνω παραδείγματα, οι κύκλοι δεν μπορούν να έχουν δύο κοινά σημεία, παρά μόνο 1».

Υπάρχουν δύο είδη γεωμετρικών αιτιολογήσεων:

Στο πρώτο είδος αναγνωρίζεται η εφαρμογή μιας βασικής θεωρίας από την ύλη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και τα επιχειρήματα είναι διατυπωμένα με βεβαιότητα για την ισχύ τους, αντλώντας το κύρος τους με την ακριβή απόδοση των θεωρητικών αναφορών από τα εδάφη της.

Στο δεύτερο είδος το σχήμα προσφέρει μια άμεση απάντηση οπτικά, ενώ η συνδρομή της άλγεβρας απουσιάζει. Η εικόνα χρησιμοποιείται ως αποδεικτικό μέσο και είναι χαρακτηριστικές οι συνοδευτικές εκφράσεις : «όπως βλέπουμε», ή «παρατηρούμε ότι», «καταλαβαίνουμε από το σχήμα».

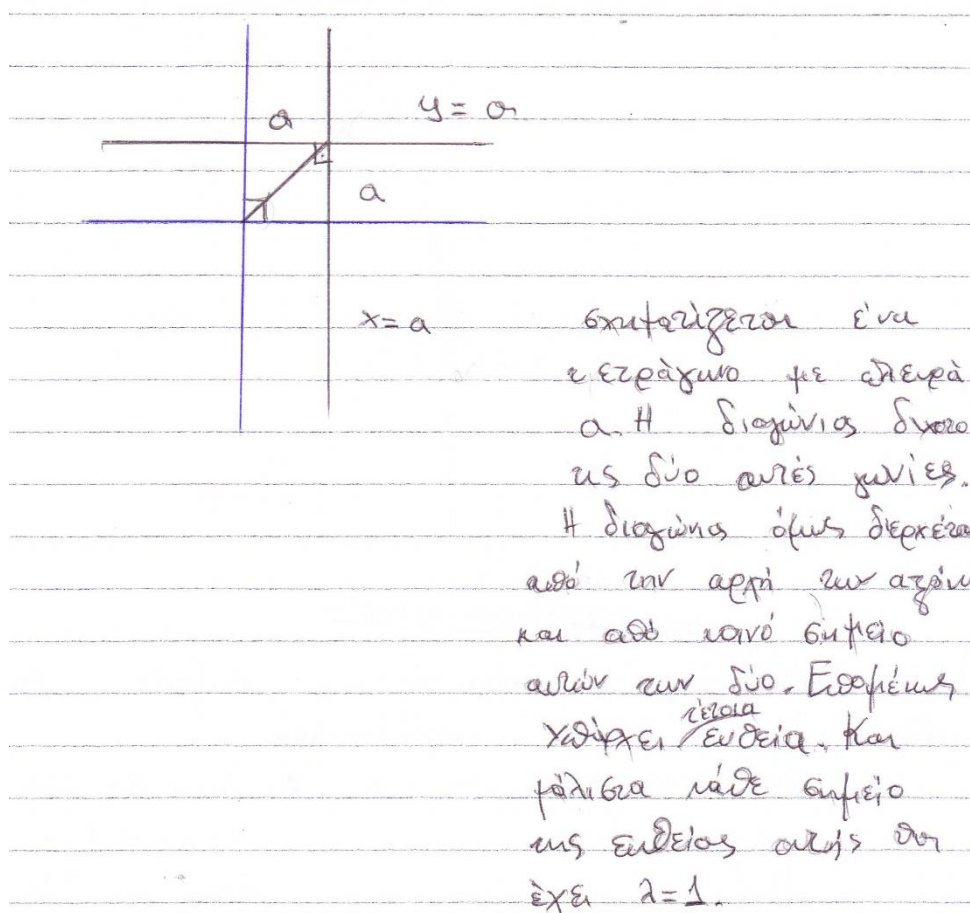
ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ Δ3

Στην υποενότητα Δ3 εντάσσονται κάποια επιχειρήματα που λειτουργούν με μεικτά επιχειρήματα από την άλγεβρα και τη γεωμετρία και δείχνουν μια πλούσια

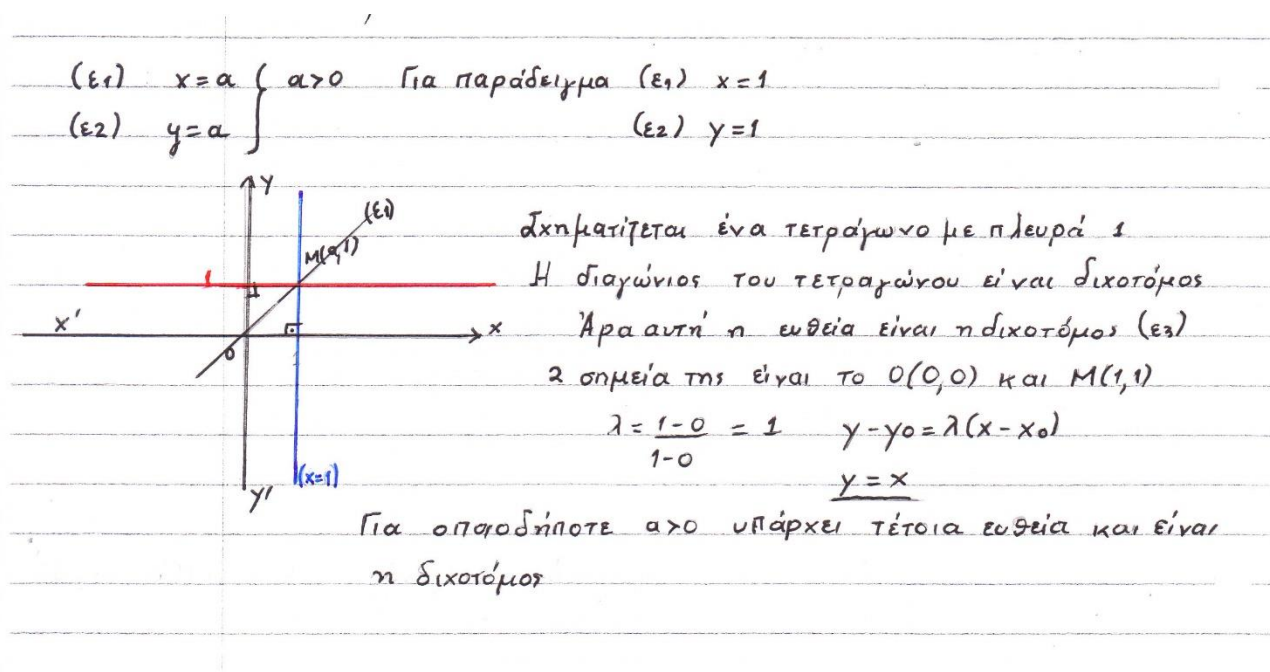
κατανόηση των εννοιών που διαπραγματεύονται. Η χρήση τριγωνομετρικών εννοιών είναι φυσικό επακόλουθο της επιμειξίας τους.

A) Εικασία 2

α) Επιβεβαιώνεται αλγεβρικά ότι υπάρχει κοινό σημείο των ευθειών $\chi=a$, $\psi=a$ το $A(a, a)$ και εν συνεχεία με γεωμετρική διαχείριση, καταλήγει ότι υπάρχει πάντα ευθεία ε , ώστε $A(a, a)$ και $O(0,0) \in \varepsilon$.



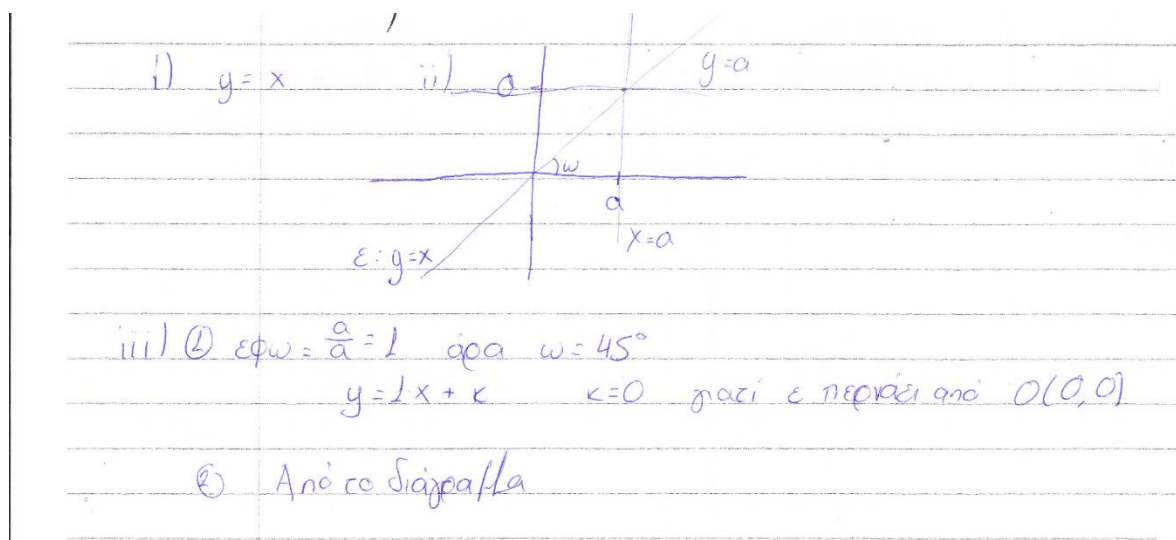
ή εναλλακτικά προηγείται η γεωμετρική αντίληψη σχηματισμού του τετραγώνου, και ακολουθεί το αλγεβρικό συμπέρασμα : « Και μάλιστα κάθε σημείο της ευθείας αυτής θα έχει $\lambda=1$ »



β) Η τριγωνομετρική αίσθηση :

M10 : « Η γωνία είναι 45° ...γιατί το σημείο τομής του $x=a$ και $y=a$,...αφού είναι απέναντι κάθετη προς προσκείμενη κάθετη, η εφαπτομένη είναι 1. Το σχεδιάζω κιόλας» Και γράφει στο Φυλλάδιο:

$\Psi = 1x + k, k=0$, γιατί η ε περνάει από το $O(0, 0)$.



ΥΠΟΕΝΟΤΗΤΑ Δ4

Στην τελευταία Υποενότητα σχολιάζονται ατελή σχήματα ή αναπαραστατικές αστοχίες που δεν διαφώτισαν σημασιολογικά την ορθότητα της εξεταζόμενης εικασίας. Εξετάζονται και πάλι ανά εικασία.

A) Εικασία 1

α) Στο ερώτημα γ που ζητείται να αιτιολογηθεί με δύο τρόπους η εικασία, ο μαθητής M9 ζητάει διευκρινήσεις:

M9: Την έχω κάνει εδώ. Θέλω να την γράψω πιο αναλυτικά...Πάνω στο σχήμα.

K: Απαντάω. Το σωστό ή το λάθος με κάποιον τρόπο το έχεις εξηγήσει;

M9 : Στο μυαλό μου.

K: Μπορείς να μου το γράψεις;

M9 : Οκ.

Τελικά δεν γράφει κάποια αιτιολόγηση.

β) Η εικασία δεν χαρακτηρίζεται. Δεν υπάρχει σχήμα παρά μόνο οι εξισώσεις των ευθειών.

B) Εικασία 2

α) Σχεδιάζονται τα παραδείγματα, αλλά δεν χαρακτηρίζεται η εικασία.

β) Η εικασία χαρακτηρίζεται σωστή χωρίς σχήμα ή άλλη εξήγηση.

Γ) Εικασία 3

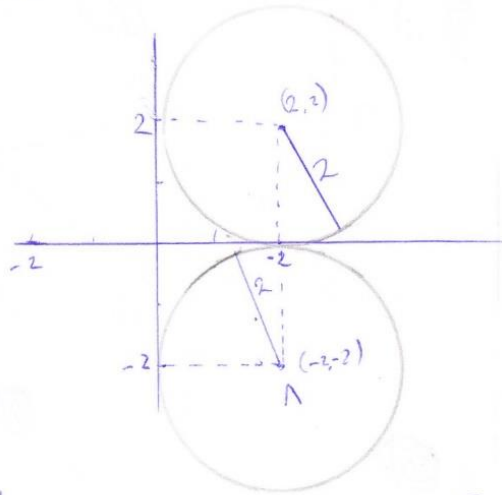
α) Ορθή εκτίμηση του λάθους της πρότασης, αλλά με το λάθος επιχείρημα που συγχέει το $O(0, 0)$ σαν σημείο του κύκλου, με τη θέση του σαν κέντρο του κύκλου, οπότε διαφοροποιούνται αλγεβρικά οι αντίστοιχες εξισώσεις, και με αυτόν τον τρόπο παράγεται η αιτιολόγηση του λάθους.

β) Ορθή εκτίμηση ότι η εικασία είναι λάθος, αλλά χωρίς να αξιοποιηθούν το σχήμα ή η αλγεβρική εξίσωση.

γ) Ορθή εκτίμηση ότι η εικασία είναι λανθασμένη, με λάθος εξίσωση και σχήμα.

Δ) Εικασία 4

α) Το ένα από τα δύο σχήματα που είναι σωστό δίνει την ορθή απάντηση ότι οι κύκλοι εφάπτονται ,και το λάθος την απάντηση ότι μπορεί να μην έχουν κοινά σημεία. Και τα δύο αναιρούν τον ισχυρισμό της.



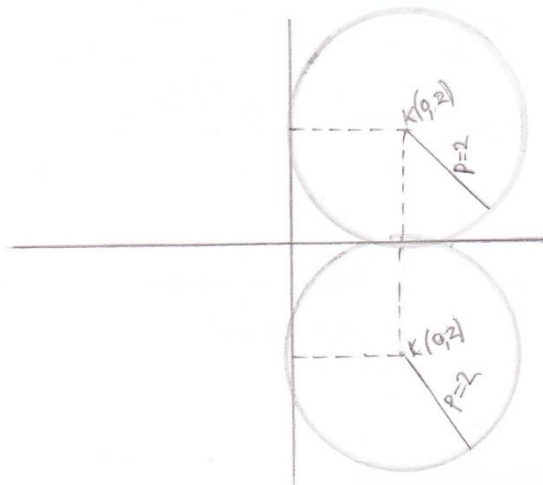
Δεν μπορούν να έχουν δύο κοινά σημεία, παρά μόνο να εφάπτονται ή να μην έχουν κοινό σημείο ⊕

β) Δύο κύκλοι που σχεδιάζονται διαχωρισμένοι, εκτιμάται ότι δεν τέμνονται.

δ) Επιχειρείται να απαντηθεί αλγεβρικά με επίλυση του συστήματος των δύο εξισώσεων και αναζήτηση της κοινής τους λύσης. Όταν οδηγείται στη σχέση $\psi = -\psi$, εγκαταλείπεται η προσπάθεια και η εκτίμηση είναι ότι εφάπτονται ή δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

ε) Σωστή αναίρεση της εικασίας, αλλά με λανθασμένο σχήμα.

στ) Εκτίμηση ότι μπορούν να έχουν ένα κοινό σημείο, με ένα σωστό σχήμα που δεν συνοδεύεται από εξισώσεις κύκλων.



Υπάρχει να έχουν 1 κοινό σημείο μόνο

Είναι σχεδόν αξιοθαύμαστο ότι στις E3,E4 εικασίες έχει εκτιμηθεί σωστά ότι δεν ισχύουν είτε χωρίς εξισώσεις είτε με λάθος εξισώσεις. Θα έλεγα ότι σε ένα επίπεδο απρόσιτο στη συνειδητή έκφραση συντελείται μια άρρητη σημασιολογική μετάφραση. Σε κάποιες περιπτώσεις τα λάθη συνεργάζονται για να οδηγήσουν στην ορθή εκτίμηση. Επίσης όπου δόθηκαν σωστά σχήματα ακόμη και χωρίς γεωμετρική ή αλγεβρική αιτιολόγηση η αναίρεση της εικασίας ήταν προφανής.

Στην περίπτωση που η E4 επιχειρήθηκε να απαντηθεί με το σύστημα των δύο δευτεροβάθμιων εξισώσεων που αντιπροσωπεύουν αλγεβρικά τους δύο κύκλους, η αμφιβολία για το νόημα της εξίσωσης $\psi = -\psi$ ανέκοψε την προσπάθεια και απέτρεψε την εναλλακτική λύση της γεωμετρικής προσέγγισης στην οποία συνυπήρχαν ένα σωστό και ένα λάθος σχήμα.

Η αιτιολόγηση των E3,E4 είχε περισσότερο ενδιαφέρον γιατί τα θέματα με τις ευθείες είναι πολυσυζητημένα στη σχολική ύλη. Η δυσχέρεια εκτίμησης των E1,E2 εντοπίζεται σε μη αφομοιωμένη θεωρία από την στοιχειώδη ύλη του βιβλίου.

Τέλος όπου δεν υπήρξε ούτε αλγεβρική έκφραση ούτε και κατάλληλο σχήμα η αμηχανία της προσέγγισης συντακτικά ή σημασιολογικά προσφέρει συμβιβαστικές λύσεις του τύπου άλλοτε ισχύει (η εικασία) αλλά όχι πάντα...

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται να εξετασθεί κατά πόσον οι μαθητές της Β Λυκείου, υποχρεωμένοι από τον τρόπο διαπραγμάτευσης των εννοιών της Ύλης τους στα Μαθηματικά Προσανατολισμού, έχουν καταφέρει να συζεύξουν εποικοδομητικά τη Συντακτική και την Σημασιολογική αιτιολόγηση. Έχει ήδη περιγραφεί η μορφή της δοκιμασίας, και ο τρόπος με τον οποίο οργανώθηκε η διαμόρφωση των αποτελεσμάτων. Σε σχέση με το κεντρικό ζήτημα διερεύνησης της σύζευξης, υπάρχουν αξιοσημείωτες παρατηρήσεις προς συζήτηση.

- Ζητήθηκαν αρκετές διευκρινήσεις ως προς την περιγραφή των δεδομένων στην εκφώνηση. Χρειάστηκε να διαβάσω και να τονίσω με έμφαση πώς η παράμετρος που δόθηκε, επιδρά στη σύνταξη του κατάλληλου τύπου. Χρειάστηκε να επισημάνω τους περιορισμούς για τις τιμές της παραμέτρου. Αναφέρεται από τους Alcock και Inglis (2008) , ότι η άτυπη αναδιατύπωση είναι ήδη μια σημασιολογική βοήθεια. Θα ήταν θετικό προς αυτή την κατεύθυνση να ενθαρρύνουμε την ελεύθερη απόδοση της εκφώνησης ,να στρέφουμε την προσοχή στην περιγραφή των παραμέτρων με ερωτήσεις που τις διευκρινίζουν και με τη συνείδηση ότι είναι το πρώτο και αναγκαίο μέρος οποιασδήποτε επεξεργασίας ακολουθήσει.
- Στον έλεγχο της επιλογής του αλγεβρικού τύπου που αντιστοιχεί είτε στην ευθεία είτε στον κύκλο, διαπίστωσα στην περίπτωση του μαθητή M5, ότι είναι συγκεχυμένη η αντίληψη του ρόλου των γραμμάτων που χρησιμοποιούνται. Δεν έχει συνειδητοποιηθεί ότι τα χ , ψ είναι οι συντεταγμένες των σημείων του τόπου, ενώ τα α , β , λ , χ_0 , ψ_0 , ρ είναι οι παράμετροι που τον προσδιορίζουν στο επίπεδο. Η αντικατάσταση των παραμέτρων στη θέση των χ , ψ οδηγούσε σε εκφράσεις χωρίς μαθηματικό νόημα και πλήρη αδυναμία διαχείρισης των ερωτήσεων. Είναι αναγκαίο κατά την παρουσίαση του γενικού τύπου, να τονίζεται ο ρόλος του συμβολισμού των γραμμάτων ώστε να εμπεδώνεται η συντακτική αντίληψη του νοήματος του.
- Οι μαθητές με ακριβή αίσθηση του γενικού τύπου της αλγεβρικής εξίσωσης ευθείας ή κύκλου, έδωσαν επιτυχημένα ειδικά παραδείγματα με αντικατάσταση τιμών στις παραμέτρους και στην πλειονότητα τους τα σχεδίασαν με συνέπεια προς τον τύπο τους στη συνέχεια. Οι ίδιοι μαθητές ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν με δύο τρόπους όπως ζητήθηκε. Οι μαθητές που έχουν εμπεδώσει εις βάθος τους τυπικούς ορισμούς και έχουν κατακτήσει το νόημα του συμβολικού ρόλου των χαρακτήρων του συστήματος έχουν ευελιξία στη σημασιολογική προσέγγιση είτε εξειδικεύουν τα γενικά παραδείγματα είτε τα μεταφέρουν στη γεωμετρική τους αναπαράσταση.

- Οι μαθητές που έδωσαν τα ειδικά παραδείγματα στις ευθείες χωρίς τη χρήση γενικού τύπου και χωρίς να τις σχεδιάσουν αιτιολόγησαν την ύπαρξη κοινού σημείου στην E1 με την επίλυση διαφορετικών συστημάτων εξισώσεων και εύρεση των τιμών των χ , ψ που τις επαληθεύουν. Έκαναν χρήση της αφομοιωμένης τεχνικής επίλυσης γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων. Στις εικασίες E3, E4 δεν προσπάθησαν να επιλύσουν αλγεβρικά το σύστημα των εξισώσεων 2^{ου} βαθμού που προέκυπτε κάθε φορά και απαιτούσε περισσότερες αλγεβρικές πράξεις καθώς δεν είχαν τον ανάλογο βαθμό εξοικείωσης όπως με τα συστήματα πρωτοβάθμιων εξισώσεων. Στην αιτιολόγηση επικαλέστηκαν το σωστό αντίστοιχο σχήμα τους και τα επιχειρήματα τους περιλάμβαναν φράσεις όπως: «βλέπουμε ότι...», «καταλαβαίνουμε από το σχήμα...», ή «παρατηρούμε ότι...». Η εκτίμηση μου είναι ότι αναζητείται μια στρατηγική με τη «μικρότερη δαπάνη» μέσων τεκμηρίωσης και με την πεποίθηση «ότι αρκεί με κάποιον τρόπο να απαντήσω, ανεξάρτητα από τις οδηγίες για δύο τρόπους». Σε κάθε περίπτωση επέλεξαν μια μόνο κατεύθυνση αιτιολόγησης και έδειξαν αδυναμία να χρησιμοποιήσουν αντιστοιχίες μεταξύ των δύο συστημάτων. Παράλληλα όμως είχαν μια εναλλακτική επιλογή συντακτική ή σημασιολογική για κάθε περίπτωση που ήταν δυσχερής στην αντιμετώπιση της.
- Στις εικασίες E3, E4 εμφανίστηκαν περιπτώσεις με λανθασμένο αλγεβρικό τύπο για την εξίσωση του κύκλου αλλά σωστό σχήμα με ανταπόκριση στην περιγραφή που είχε δοθεί. Στην περίπτωση αυτή η αλγεβρική εξίσωση του κύκλου εμφάνιζε δυσανάλογη πολυπλοκότητα συγκριτικά με την απλή κατασκευή του σχεδίου του κύκλου όταν δίνεται το κέντρο και η ακτίνα. Οι εικασίες εκτιμήθηκαν σωστά , με επιχειρήματα οπτικού χαρακτήρα – βλέπουμε-καταλαβαίνουμε- με τα οποία η απάντηση εξέφραζε απόλυτη βεβαιότητα για το λάθος της εικασίας. Θα έλεγα πρόκειται για την πειστική δυναμική της εικόνας, την «ενδογενή πειθώ».
- Ο μαθητής M2 στην E1 δίνει αρχικά για τις ευθείες με συντελεστές $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=3$ βάσει της γενικής εξίσωσης ευθείας τους τύπους : $3\chi+\psi+2=0$, $4\chi+2\psi+1=0$. Έχει παραβλέψει την αναφορά της θεωρίας ότι πρέπει να σχηματισθεί το παράλληλο διάνυσμα οπότε οι αντίστοιχοι συντελεστές θα προκύψουν -2 και -3 αντίστοιχα. Όταν επιχειρεί να σχεδιάσει τις ευθείες αντιλαμβάνεται ότι «περνούν από το 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο, οπότε πρέπει να έχει κανονικά αρνητικό συντελεστή, ενώ εσείς δίνετε θετικό συντελεστή, άρα πρέπει να είναι κάπως έτσι...» και δείχνει να σχηματίζει οξεία γωνία η ευθεία με συντελεστή 3 στο γραπτό του. Διορθώνει τον τύπο του επιβεβαιώνοντας ότι συμφωνεί με το σχήμα του. Ο μαθητής M2 έχει ακριβή γνώση των αντιστοιχιών μεταξύ των χαρακτήρων που χρησιμοποιούνται στα δύο συστήματα και επαγρύπνηση για τη συνέπεια που οφείλουν να έχουν οι

εκφράσεις τους. Είναι η ιδανική επαλήθευση της αξίας και του νοήματος της σημασιολογικής αιτιολόγησης με χρήση της αναπαράστασης με σχήμα, αφού επιτυγχάνει τον έλεγχο της ορθότητας του αλγεβρικού τύπου αλλά και την επίγνωση του λάθους το οποίο είναι σε θέση να εντοπίσει και να διορθώσει.

- Ένας άξονας προβληματισμού που αναφέρθηκε είναι να ελέγξω τα επίπεδα ιεράρχησης κατά Balacheff (1988). Στη διατύπωση των εικασιών E1, E2, στο α ερώτημα ζητείται να δοθούν δύο παραδείγματα σύμφωνα με την περιγραφή των δεδομένων, και στο γ ζητείται να δικαιολογηθεί η απάντηση με δύο διαφορετικούς τρόπους. Είναι άμεση, αν και δεν διατυπώνεται ρητά, η υπόδειξη να αξιοποιήσουν τα παραδείγματα ώστε να επαληθευθούν οι εικασίες, σε μια εφαρμογή του Naïve empiricism. Εκ των αποτελεσμάτων λειτούργησε η τακτική της επαλήθευσης σε κάποια απλά παραδείγματα και η επιβεβαίωση της ορθότητας της εικασίας γενικά, σύμφωνα με το επίπεδο 1 ιεράρχησης κατά Balacheff. Στην E2 η μαθήτρια M14 για τις ευθείες $\chi=\alpha$, $\psi=\alpha$ δίνει τα παραδείγματα $\chi=\sqrt{5}$, $\psi=\sqrt{5}$. Χρησιμοποιεί άρρητους αριθμούς για την αιτιολόγηση της E2, εκτός της περιοχής των τετριμμένων ακέραιων, που κατά την γνώμη μου αντιστοιχεί στο επίπεδο ιεράρχησης 2 (The crucial experiment). Στο ίδιο επίπεδο θα μπορούσε ίσως να θεωρηθεί ότι ανήκει η αμήχανη προσπάθεια του μαθητή M6 να δώσει παράδειγμα ευθείας με $\lambda_1=2$. Έχει γράψει $\psi=2\chi+\dots$. Δεν έχει συμπληρώσει τον σταθερό όρο και με ρωτάει δείχνοντας τον : Να βάλω το ∞ ;... Στη συζήτηση μαζί του αντιλαμβάνομαι ότι έχει εννοήσει ότι οποιοσδήποτε αριθμός θα μπορούσε να είναι στη θέση του σταθερού όρου, οσοδήποτε μεγάλος.
- Η μαθήτρια M14 στην E1 δίνει τις γενικές εξισώσεις $\psi=2\chi+\gamma$, $\psi=3\chi+\delta$ και λύνει το παραμετρικό σύστημα στη γενική του έκφραση προσδιορίζοντας τη λύση του κοινού σημείου $A : A(\chi_A, \psi_A) = (\gamma-\delta, 3\gamma-2\delta)$ και συμπεραίνει: «άρα υπάρχει σημείο που τέμνονται για κάθε $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ». Είναι χωρίς αμφιβολία το Generic example του επιπέδου ιεράρχησης 3 σύμφωνα με τον Balacheff (1988) στο οποίο η επιβεβαίωση προκύπτει από τη λειτουργικότητα των πράξεων και η γενικότητα της διαχείρισης του παραδείγματος αντιπροσωπεύει όλες τις περιπτώσεις ευθειών που περιγράφονται στην εξεταζόμενη πρόταση.
- Με εξέπληξε η χρήση της απαγωγής εις άτοπο, ειδικά στις E3, E4 που θα έπρεπε να διαψευσθούν. Είναι μία αποδεικτική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε κυρίως στη Γεωμετρία της Α Λυκείου, εδώ εμφανίσθηκε και στην αιτιολόγηση με αλγεβρικά επιχειρήματα. Στην περίπτωση της εικασίας E3 μια μαθήτρια προτάσσει το επιχειρήμα ότι η απόσταση του $O(0,0)$ από το $K(\alpha, \alpha)$ είναι υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου του οποίου οι κάθετες πλευρές έχουν μήκος $\alpha=\rho$, αν ήταν ακτίνα θα είχε μήκος μεγαλύτερο από αυτές. Γράφει χαρακτηριστικά «δεν μπορεί». Έχει συλλάβει σημασιολογικά το κεντρικό

σημείο του άτοπου της εικασίας. Αμέσως μετά το ίδιο άτοπο το εκφράζει με αλγεβρική σχέση. Είχε την ευχέρεια να μεταφράσει το άτοπο και για το αρχικό σύστημα της άλγεβρας. Στη θεώρηση Alcock και Inglis (2008) επισημαίνεται ότι η αναίρεση μιας πρότασης σημασιολογικά δεν απαιτεί την επιστροφή στο αρχικό αναπαραστατικό σύστημα (έχουμε σημασιολογική αιτιολόγηση και σημασιολογικό παράγωγο). Η γεωμετρική πειθώ του επιχειρήματος μεταφέρεται και στην άλγεβρα με ισχυρή αίσθηση της μεταφραστικής αντιστοιχίας μεταξύ των δύο συστημάτων. Η ίδια στην αιτιολόγηση της E4 επιχειρεί να λύσει το σύστημα των δύο δευτεροβάθμιων εξισώσεων που αντιπροσωπεύουν τους δύο κύκλους, και προβληματίζεται στη (σωστή) σχέση $\psi = -\psi$. Δεν ολοκληρώνεται η αλγεβρική απάντηση και δεν είναι σε θέση να εκτιμήσει σημασιολογικά την εικασία. Φαίνεται ότι η σημασιολογική προσέγγιση δια της Γεωμετρίας είναι πιο αποκαλυπτική στον χειρισμό και την αξιοποίηση της προς την κατεύθυνση της άλγεβρας παρά το αντίστροφο.

- Υπάρχουν δύο διαφορετικές περιπτώσεις με ένα κοινό χαρακτηριστικό: παρά το ότι η εικασία διατυπώνεται σε μια μορφή που χρήζει επικύρωσης ή διάψευσης, έχει εξ αρχής αποδοθεί –με ανεξερεύνητες διαδικασίες– στη συνείδηση των μαθητών ο τελικός χαρακτηρισμός της. Η διαφορά των περιπτώσεων έγκειται στο ότι στη μεν E1 έχουν ορθά διαισθανθεί ότι είναι σωστή, στη δε E3 έχουν παρανοήσει ότι είναι και αυτή σωστή. Για την E1 που άμεσα, χωρίς τα προτεινόμενα βήματα έχουν αποδεχθεί την ορθότητα της, κατασκευάζουν τις ζητούμενες ευθείες με συντελεστές $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=3$ ώστε να έχουν ένα κοινό σημείο που προεπιλέγουν. Η απάντηση στα ερωτήματα απλώς επαληθεύει την ορθή αρχική διαίσθηση. Τα ερωτήματα πλέον έχουν απωλέσει το λειτουργικό τους ρόλο ως μέσα αναζήτησης της αλήθειας της πρότασης. Ωστόσο υπάρχει μια ωραία πτυχή συντακτικής δημιουργικότητας στην κατασκευαστική επιβεβαίωση της εικασίας. Στην E3 υπάρχει η λανθασμένη πεποίθηση ότι είναι η εικασία σωστή. Η γεωμετρική απόδοση του σχεδίου αγνοεί τα δεδομένα και προσαρμόζεται στην προκατασκευασμένη αντίληψη της ορθότητας και γράφεται ο κύκλος (K, KO) , όπου $O(0,0)$. Η άλγεβρα θα μπορούσε να αξιοποιηθεί για να αποκαλυφθεί ότι η ακτίνα $\rho = \sqrt{2} \cdot \alpha$ και όχι $\rho = \alpha$ όπως περιγράφεται στα δεδομένα. Εδώ φαίνεται η ασφάλεια που παρέχει η συνδυαστική χρήση των δύο αναπαραστατικών συστημάτων μέσω των αντιστοιχίσεων των χαρακτήρων και των μετασχηματισμών. Στην περίπτωση αυτή το λάθος σχήμα λειτουργεί σαν άλλοθι για την άκυρη εκτίμηση της ορθότητας της εικασίας, χωρίς την ασφαλιστική δικλείδα της άλγεβρας που θα επεσήμαινε τις αντιφάσεις.

Οφείλω να καταθέσω κάποιες παρατηρήσεις , απρόβλεπτες για μένα στη φάση προετοιμασίας και αναζήτησης των κατάλληλων συνθηκών διεξαγωγής της δοκιμασίας ελέγχου των εικασιών.

Οι μαθητές μου ήταν απόλυτα συνειδητοποιημένοι, ως προς το νόημα και την αξία της προσπάθειας, στην οποία τους υπέβαλα χωρίς να είναι τυπικά υποχρεωμένοι να συμμετάσχουν σε αυτήν. Η συνθήκη απουσίας βαθμολόγησης θα τολμούσα να πω, ότι κατά κάποιον τρόπο τους απελευθέρωσε να απαντήσουν εξατομικευμένα βασισμένοι στην κρίση τους και στις γνώσεις τους. Παρά τις ερωτήσεις και τη συζήτηση που διενεργείτο εις κοινόν επήκοον, οι απαντήσεις είχαν προσωπικά στοιχεία από την συγκρότηση κάθε μαθητή, τα οποία αναγνώριζα στο γραπτό τους.

Ακριβώς αυτή η προσωποποιημένη απάντηση σε αβίαστες συνθήκες θετικής διάθεσης, μου επέτρεψε να δω ένα ευρύ φάσμα απαντήσεων, με ποικιλία προσεγγίσεων, παρά τον περιορισμένο αριθμό συμμετεχόντων και τον στοιχειώδη χρόνο που διατέθηκε για την διεκπεραίωση του εγχειρήματος.

Η επόμενη συνέπεια ήταν, να απελευθερωθώ και εγώ από τον δυσμενή ρόλο της βαθμολογήτριας, και να στοχαστώ για την ποιότητα των απαντήσεων που δόθηκαν, να προσεγγίσω τα προσωπικά χαρακτηριστικά του μαθητή, στα οποία διαφαίνεται η γνώση, η εμπειρία, οι επιρροές και η προσπάθεια που έχει επενδύσει διαχρονικά στα Μαθηματικά. Αν επιτρέπεται ας σχολιάσω την απουσία της ποιοτικής προσωποποιημένης αξιολόγησης στο εκπαιδευτικό μας σύστημα.

Παραθέτω ένα μικρό απόσπασμα διαλόγου, από το δεύτερο δίωρο με το Φυλλάδιο E3, E4 Εικασιών:

Η μαθήτρια M13, δείχνει την απάντηση της στην E3 και λέει: «δεν είναι σωστά λυμένη, αλλά...(περιμένει τη γνώμη μου)

K: Δεν μετρώ τα σωστά. Αυτή τη στιγμή δεν γράφουμε διαγώνισμα. Κάνουμε ένα πείραμα μαθηματικών.

M13: Κι αν δεν μας αρέσουν τα πειράματα;

K: Εν τάξει τα Μαθηματικά έχουν πειραματικό πνεύμα.

M13: Εκ φύσεως!!!

Εν τέλει η μαθήτρια M13 έδωσε την εκτίμηση της ορθά για τον χαρακτηρισμό της E3, και με αυτό το καλό κλίμα συνέχισαν να εργάζονται όλοι οι μαθητές για τις απαντήσεις E3,E4.

Τα αποθέματα μαθηματικών γνώσεων από προηγούμενες τάξεις όπως ο έλεγχος στις αριθμητικές πράξεις , οι κατακτημένες δεξιότητες σε αλγεβρικές τεχνικές, η συνειδητή μέσω της αντίστοιχης θεωρίας γεωμετρική κατασκευή σχημάτων

συνυπάρχουν, συνδυάζονται, συλλειτουργούν στην αποτίμηση μιας πρότασης που εξετάζεται με τη μορφή εικασίας. Η αμφιβολία για την ορθότητα της ,δημιουργεί τις συνθήκες του νοητικού πειράματος που επιχείρησε ο Lakatos, σε μια απλουστευμένη έκφανση εφαρμογής της στο πλαίσιο της σχολικής πραγματικότητας. Η συνέργεια της συντακτικής και της σημασιολογικής στρατηγικής στις απόπειρες εξακρίβωσης της αληθείας της, διεγείρει την ένταση των επιχειρημάτων και ζωηρεύει την ατμόσφαιρα της αναζήτησης και της συζήτησης. Είναι απελευθερωτική εμπειρία να εναρμονίζονται οι αποταμιευμένες γνώσεις σε απρόβλεπτους και δημιουργικούς συνδυασμούς απέναντι σε ένα μαθηματικό θέμα που διατυπώνεται σαν πρόκληση ανοιχτή σε δοκιμασία.

Καθώς απομαγνητοφωνούσα την ηχητική καταγραφή της επεξεργασίας των εικασιών στην τάξη, με συνεσταλμένες αρχικά συζητήσεις και ζωηρότερες στο τέλος, συνειδητοποίησα ότι πέρα από τις απορίες και τις διευκρινήσεις είχα καταγράψει κάτι εξαιρετικά πολύτιμο για τις συνθήκες οποιουδήποτε πειθαρχημένου περιβάλλοντος επιδιώκει την κατάκτηση της γνώσης: πνευματώδεις διαλόγους μιας ομάδας μαθητών που δείχνουν να ενδιαφέρονται για το θέμα που συζητούν.

Διαπιστώθηκαν βέβαια και αδυναμίες, κάποιες χρόνιες ελλείψεις, αποσπασματικές και ασύνδετες γνώσεις , αμηχανίες στον παραλληλισμό αποτελεσμάτων μεταξύ άλγεβρας και γεωμετρίας.

Οι εκτιμήσεις αυτές με καθοδήγησαν να επιμείνω ιδιαίτερα στις αντιστοιχίες μεταξύ των δύο αναπαραστατικών συστημάτων στα μαθήματα που ακολούθησαν και να προκαλώ τη συμμετοχή των μαθητών στους συσχετισμούς τους. Στα σημεία που εντόπισα ιδιαίτερες αστοχίες επανήλθα με εστιασμένες ερωτήσεις και παραδείγματα. Η περιορισμένη αυτή διαδικασία επεξεργασίας εικασιών με τη συντονισμένη χρήση δύο αναπαραστατικών συστημάτων, μου επέτρεψε να διαγνώσω ουσιαστικά χαρακτηριστικά για τις γνώσεις και τις δυνατότητες των μαθητών μου. Η συμβατική αναγκαιότητα των γραπτών δοκιμασιών δεν μου είχε αποκαλύψει τόσο αναλυτικά το φάσμα τους.

Σε μελλοντικές ερευνητικές εργασίες ίσως θα έπρεπε να σχεδιασθεί μια διαχρονική παρακολούθηση της δυνατότητας συνδυαστικής χρήσης συντακτικής και σημασιολογικής αιτιολόγησης με θέματα ανοιχτά σε ερμηνείες όπως οι εικασίες.

Σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσαν να απαντηθούν ερωτήματα όπως αν η επαναλαμβανόμενη και συστηματική αξιοποίηση των δύο συστημάτων βελτιώνει την απόδοση των μαθητών και συντελεί σε βαθύτερη αφομοίωση της προσφερόμενης ύλης.

Να τεθεί επίσης ως ένα άλλο σημαντικό ερώτημα, το αν η χαρτογράφηση των γνώσεων των μαθητών που αποκαλύπτει αυτή η συνδυαστική χρήση τους, καθοδηγεί την διδακτική δραστηριότητα σε καίριες παρεμβάσεις που ενισχύουν την αναγνώριση του ενιαίου χαρακτήρα διαφορετικών περιοχών της Μαθηματικής παιδείας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. (2016). *Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Alcock, L., & Inglis, M. (2009). Representation systems and undergraduate proof production: A comment on Weber. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(4), 209-211.

Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 111-129.

Alcock, L., & Simpson, A. (2004). Convergence of sequences and series: Interactions between visual reasoning and the learner's beliefs about their own role. *Educational Studies in Mathematics*, 57(1), 1-32.

Alcock, L., & Simpson, A. (2001). The Warwick analysis project: Practice and theory. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 99-111). Springer, Dordrecht.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52(3), 215-241.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. (2017). *ΑΛΓΕΒΡΑ Β Λυκείου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. *Mathematics, teachers and children*, 216, 235.

Bergqvist, T. (2005). How students verify conjectures: Teachers' expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(2), 171-191.

Boero, P. (2006, July). Habermas' theory of rationality as a comprehensive frame for conjecturing and proving in school. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 185-192).

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational studies in mathematics*, 24(4), 359-387.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 333-344.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *Η Μαθηματική Εμπειρία*. Αθήνα: Τροχαλία.

Davis, R. B., & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The journal of mathematical behavior*.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

Dreyfus, T. (1991, June). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In *Proc. 15th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 33-48).

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics teaching: The state of the art*, 249, 254.

Fischbein, H. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the learning of mathematics*, 3(2), 9-24.

Giannakoulis, E., Mastorides, E., Potari, D., & Zachariades, T. (2010). Studying teachers' mathematical argumentation in the context of refuting students' invalid claims. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(3), 160-168.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 137-165.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. *Theories of mathematical learning*, 397-430.

Goldin, G. A. (2000). Affective pathways and representation in mathematical problem solving. *Mathematical thinking and learning*, 2(3), 209-219.

- Hadamard, J. (1995). *Η Ψυχολογία της Επινόησης στα Μαθηματικά*. Αθήνα: Κάτοπτρο.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education III*, 234-283.
- Katz, V. (2013). *Ιστορία των Μαθηματικών. Μια εισαγωγή*. Ηράκλειο: ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΡΗΤΗΣ.
- Lakatos, I. (1996). *Αποδείξεις και Ανασκευές. Η λογική της Μαθηματικής Ανακάλυψης*. Αθήνα: Τροχαλία.
- Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15(3), 277-289.
- Pinto, M., & Tall, D. (2002). Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory. *For the learning of mathematics*, 22(1), 2-10.
- Pinto, M. F., & Tall, D. (1999). Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. In *PME CONFERENCE*(Vol. 4, pp. 4-65).
- Potari, D., Zachariades, T., & Zaslavsky, O. (2010). Mathematics teachers' reasoning for refuting students' invalid claims. *Proceedings of CERME6*, 281-290.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational studies in mathematics*, 17(3), 297-311.
- Rowland, T. (2001). Generic proofs in number theory. In S. Campbell, & R. Zazkis (Eds). *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (pp. 157-183). Westport, CT: Ablex.
- Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Psychology Press.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1), 20-26.
- Stylianou, D. A. (2002). On the interaction of visualization and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. *The Journal of Mathematical Behavior*, 21(3), 303-317.

Tall, D. O. (1997). Functions and calculus, in A.J Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer, Dordrecht, pp. 289-325.

Tall, D. (1991). Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus. *Visualization in teaching and learning mathematics*, 19, 105-119.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12(2), 151-169.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Springer, Dordrecht.

Watson, A., & Mason, J. (2005). Mathematics as a constructive activity: The role of learner generated examples.

Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 200-208.

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the learning of Mathematics*, 22(3), 14-17.

Weber, K., & Alcock, L. (2008). Syntactic and semantic reasoning processes in Advanced mathematics. In M. Blanton, D. Stylianou, and E. Knuth (Eds.) *A proof story across the grades* (in press).

Weber, K. (2009). How syntactic reasoners can develop understanding, evaluate conjectures, and generate counterexamples in advanced mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 200-208.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, 56(2-3), 209-234.