



# Τέλεια μεταβίβαση καταστάσεων σε κβαντικά καλώδια με τοπικές συμμετρίες

Νίνα Γεωργουλέα



# Ανάγκη για την κβαντική διαχείριση της πληροφορίας

## Κλασσικό bit

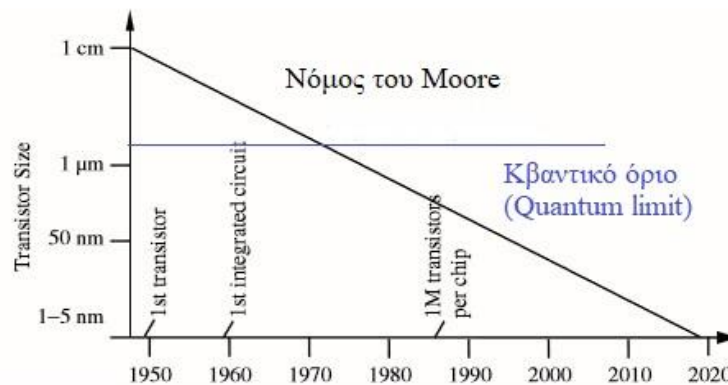
Τιμές  $\{0,1\}$

0 → Κορώνα

1 → Κεφαλή



## Νόμος του Moore (Moore's law)



Συνεχής σμίκρυνση

# Σύγκριση κβαντικών επεξεργαστών (quantum processors) σε σχέση με τους κλασσικούς (classical processors)

- i) Έχουν μικρότερο μέγεθος
- ii) Εφικτή η προσομοίωση κβαντικών συστημάτων
- iii) Καταναλώνουν λιγότερη ενέργεια

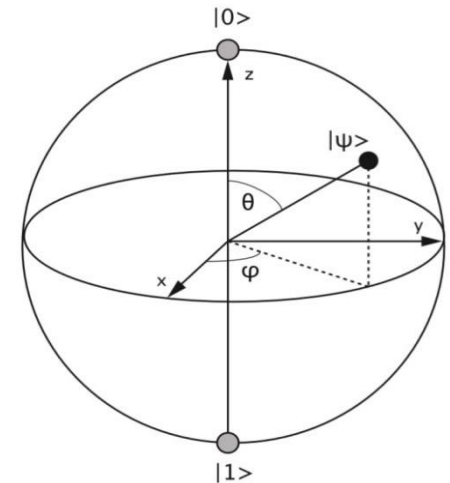
## Qubit (Quantum bit)

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \text{ όπου } |a|^2 + |b|^2 = 1 \text{ και } a, b \in \mathbb{C}$$

$$\text{Ορίζονται τα εξής: } |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Σφαίρα του Bloch: } a = \cos\frac{\theta}{2}, b = e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2},$$

$$\text{με } \theta \in [0, \pi] \text{ και } \varphi \in [0, 2\pi)$$



## Φυσικά συστήματα που μπορούν να περιγραφούν από qubits

i) Ιόντα με δύο ενεργειακά επίπεδα

ii) Πολωμένα φωτόνια

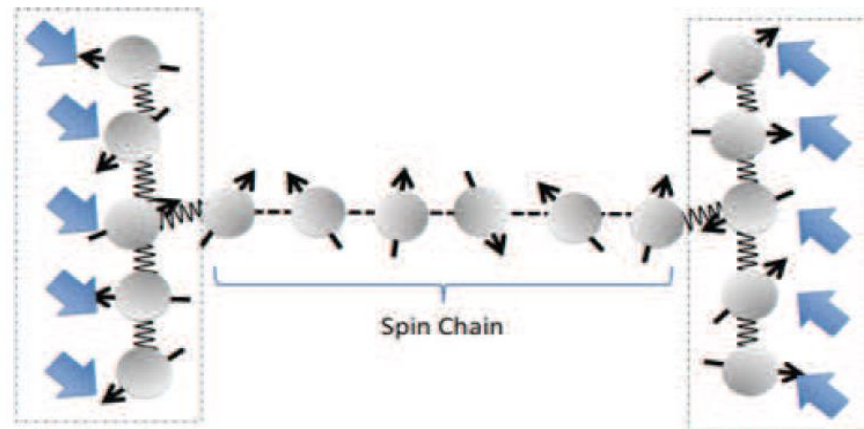
iii) Κβαντικές τελείες

iv) Πολωμένα σωματίδια με  $\text{spin } \frac{1}{2}$  (πχ. σε αλυσίδες spin)

## Αλυσίδες spin (Spin chains)

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{spin πάνω}$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{spin κάτω}$$



$$\mathbf{H}_{\text{XXZ}} = \sum_{i=1}^{N-1} [J(\mathbf{S}_i^x \mathbf{S}_{i+1}^x + \mathbf{S}_i^y \mathbf{S}_{i+1}^y) + J\Delta \mathbf{S}_i^z \mathbf{S}_{i+1}^z], \Delta \neq 1 \text{ (ανοικτή αλυσίδα),}$$

$$\text{με } \mathbf{S}^j = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^j, j = x, y, z, \boldsymbol{\sigma}^j = \text{πίνακες του Pauli}$$

$a_i, b_i = 0, 1 \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix}$ : Βάση στο  $2^N$ -διάστατο χώρο Hilbert

### Παράδειγμα πίνακα αλυσίδας με N=4 spins (Block diagonal μορφή)

|                 | $ 0000\rangle$       | $ 0001\rangle$       | $ 0010\rangle$       | $ 0100\rangle$       | $ 1000\rangle$       | $ 0011\rangle$       | $ 0101\rangle$        | $ 0110\rangle$       | $ 1001\rangle$       | $ 1010\rangle$        | $ 1100\rangle$      | $ 1110\rangle$       | $ 1101\rangle$       | $ 1011\rangle$       | $ 0111\rangle$       | $ 1111\rangle$       |
|-----------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|---------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\langle 0000 $ | $\frac{3J\Delta}{4}$ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 0001 $ | 0                    | $+\frac{J\Delta}{4}$ | $\frac{J}{2}$        | 0                    | 0                    | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 0010 $ | 0                    | $\frac{J}{2}$        | $-\frac{J\Delta}{4}$ | $\frac{J}{2}$        | 0                    | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 0100 $ | 0                    | 0                    | $\frac{J}{2}$        | $-\frac{J\Delta}{4}$ | $\frac{J}{2}$        | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 1000 $ | 0                    | 0                    | 0                    | $+\frac{J}{2}$       | $+\frac{J\Delta}{4}$ | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 0011 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | $+\frac{J\Delta}{4}$ | $\frac{J}{2}$         | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 0101 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | $\frac{J}{2}$        | $-\frac{3J\Delta}{4}$ | $\frac{J}{2}$        | $\frac{J}{2}$        | 0                     | 0                   | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 0110 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | $\frac{J}{2}$         | $-\frac{J\Delta}{4}$ | 0                    | $\frac{J}{2}$         | 0                   | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 1001 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | $\frac{J}{2}$         | 0                    | $-\frac{J\Delta}{4}$ | $\frac{J}{2}$         | 0                   | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 1010 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                     | $\frac{J}{2}$        | $\frac{J}{2}$        | $-\frac{3J\Delta}{4}$ | $\frac{J}{2}$       | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 1100 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                     | 0                    | $\frac{J}{2}$        | $\frac{J\Delta}{4}$   | $\frac{J\Delta}{4}$ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 1110 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | $+\frac{J\Delta}{4}$ | $\frac{J}{2}$        | 0                    | 0                    | 0                    |
| $\langle 1101 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | $\frac{J}{2}$        | $-\frac{J\Delta}{4}$ | $\frac{J}{2}$        | 0                    | 0                    |
| $\langle 1011 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | 0                    | $\frac{J}{2}$        | $-\frac{J\Delta}{4}$ | $\frac{J}{2}$        | 0                    |
| $\langle 0111 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | 0                    | 0                    | $\frac{J}{2}$        | $+\frac{J\Delta}{4}$ | 0                    |
| $\langle 1111 $ | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | 0                     | 0                    | 0                    | 0                     | 0                   | 0                    | 0                    | 0                    | 0                    | $\frac{3J\Delta}{4}$ |

## Ορισμός πιστότητας (fidelity) για τη μετάβαση $|\psi_{\text{in}}\rangle \rightarrow |\psi_{\text{out}}\rangle$ για καθαρές καταστάσεις

$$F \equiv | \langle \psi_{\text{out}} | e^{-iHt} | \psi_{\text{in}} \rangle |^2,$$

Με τοπική βάση:  $\{|\mathbf{0}\rangle \equiv |1111\dots 1\rangle, |\mathbf{1}\rangle \equiv |0111\dots 1\rangle, |\mathbf{2}\rangle \equiv |1011\dots 1\rangle, \dots, |\mathbf{N}\rangle \equiv |1111\dots 0\rangle\}$

## Παράδειγμα πλήρους μεταβίβασης καταστάσεων (Θέση 1 $\rightarrow$ Θέση N)

Αρχική κατάσταση (Initial state):

$$|\psi_{\text{in}}\rangle = a|\mathbf{0}\rangle + b|\mathbf{1}\rangle, \text{ με } |a|^2 + |b|^2 = 1$$

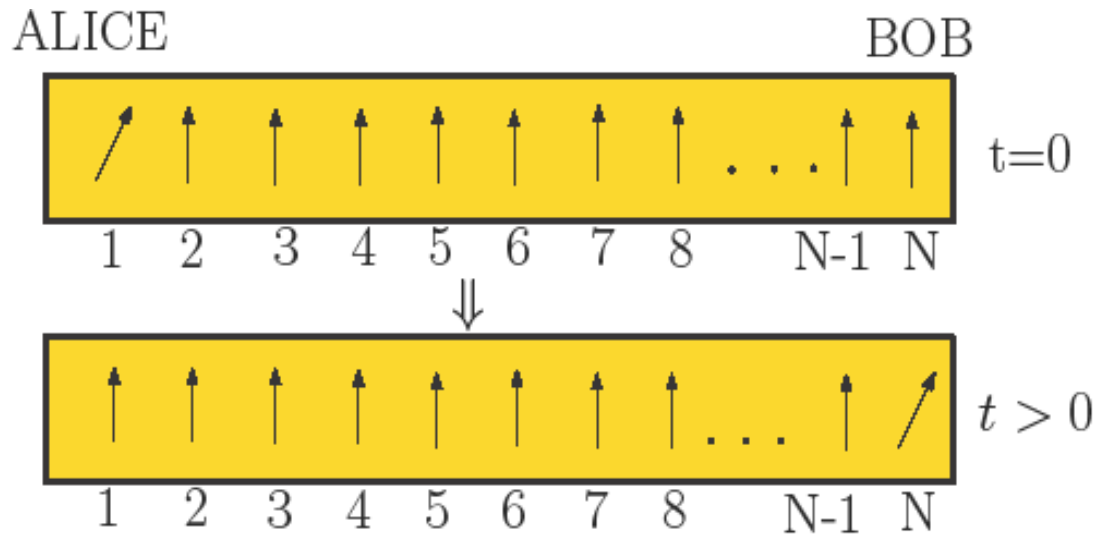
Τελεστής χρονικής εξέλιξης (Time evolution operator):  $\mathbf{U} = e^{-iHt}$ , ώστε

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U} |\psi_{\text{in}}\rangle$$

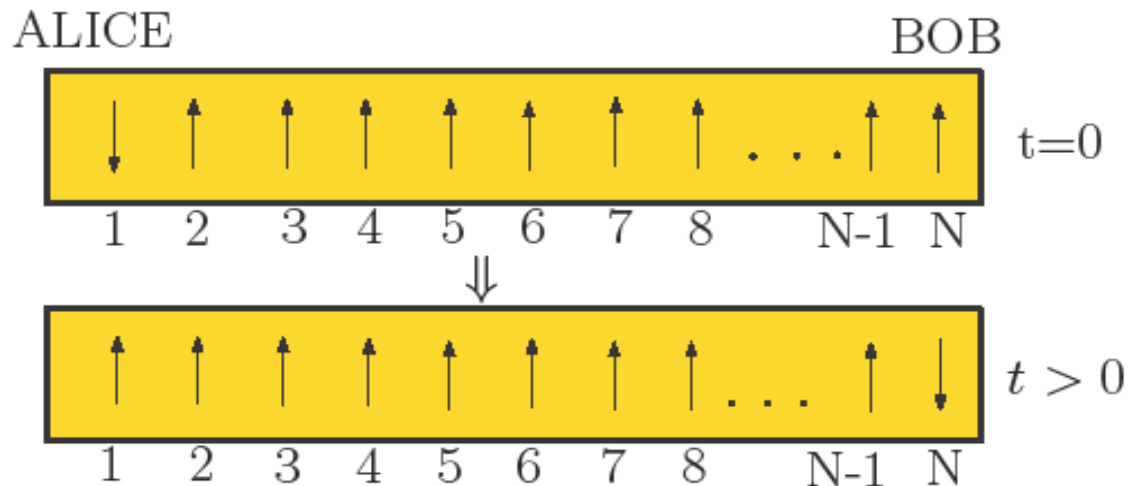
Κατάσταση στόχος (Target state):

$$|\psi_{\text{T}}\rangle = a|\mathbf{0}\rangle + b|\mathbf{N}\rangle$$

## Μεταβίβαση καταστάσεων (state transfer) σε αλυσίδες spin



Το πρόβλημα απλοποιείται στο εξής:



## Μεταβίβαση καταστάσεων $|1\rangle \rightarrow |N\rangle$

### Μοντέλο του Bose



$$\mathbf{H}_B = -\frac{J}{2} \sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z)$$

(Physical Review Letters, “Quantum communication through an unmodulated spin chain”, Sougato Bose, 2003, 1154 citations)

### Κατοπτρικά συμμετρικές αλυσίδες (Mirror Symmetric Chains)

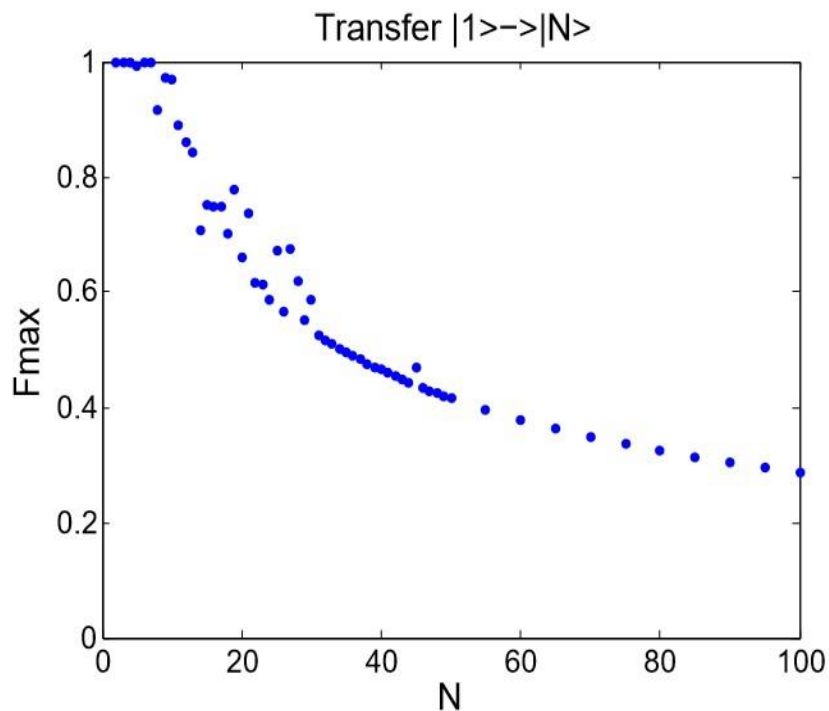


$$\mathbf{H}_{ms} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} J_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} J_i \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y, \quad \mu\epsilon \quad J_i = J_{N-i}$$

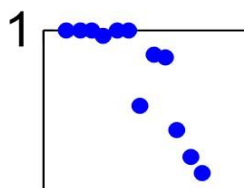
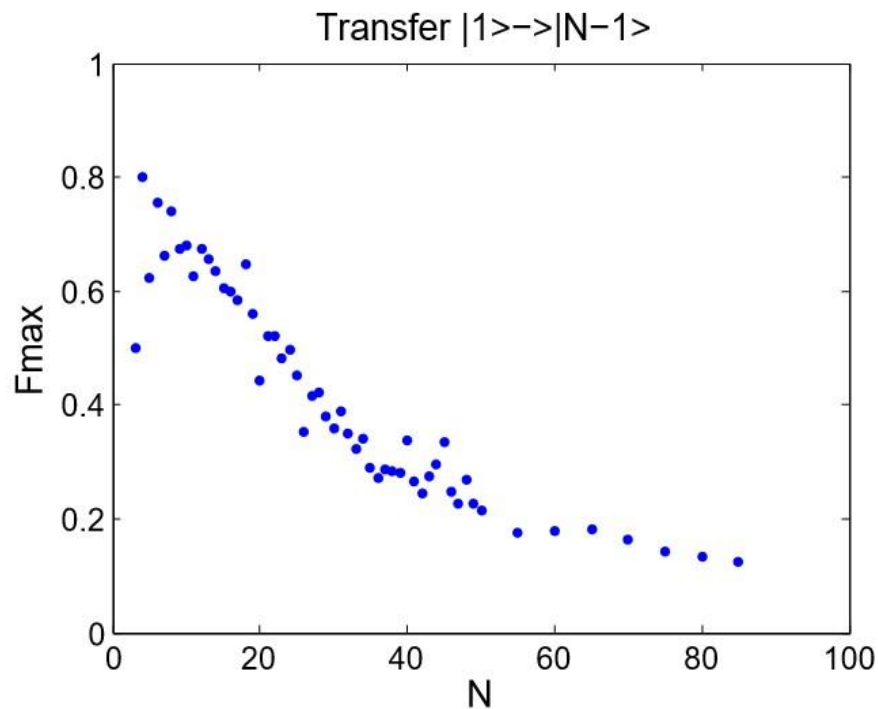
(International Journal of Quantum Information, “Perfect, efficient, state transfer and its application as a constructive tool”, Alastair Kay, 2010)

## Γραφικές παραστάσεις που αφορούν τη μεταβίβαση καταστάσεων

Μετάβαση  $|1\rangle \rightarrow |N\rangle$  με  $J=1$

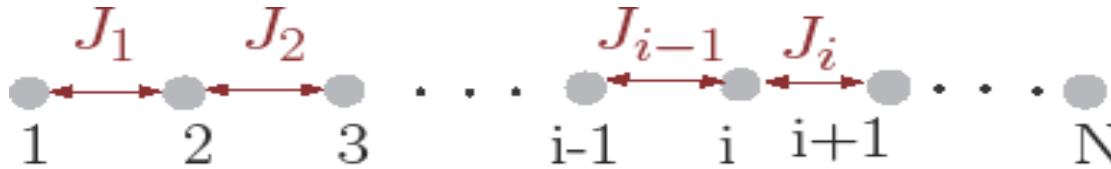


Μετάβαση  $|1\rangle \rightarrow |N-1\rangle$  με  $J=1$



Μεγέθυνση

## Μεταβίβαση καταστάσεων σε τυχαίες θέσεις σε ανοικτές αλυσίδες (open chains)



$$\mathbf{H}_{\text{op}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} J_i \boldsymbol{\sigma}_i^x \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} J_i \boldsymbol{\sigma}_i^y \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^y$$

Μεταβίβαση καταστάσεων  $|\mathbf{m}\rangle \rightarrow |\mathbf{n}\rangle$ :

$$\langle \mathbf{n} | \mathbf{m}(t) \rangle = u_{m1} u_{n1} e^{-iE_1 t} + u_{m2} u_{n2} e^{-iE_2 t} + \dots + u_{m,N-1} u_{n,N-1} e^{-iE_{N-1} t} + u_{mN} u_{nN} e^{-iE_N t}$$

$E_1 = -E_N$ 
 $E_2 = -E_{N-1}$

όπου  $|u_i\rangle = (u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{Ni})^T$

**Συνθήκες για Τέλεια Μετάβαση (Perfect State Transfer):** i)  $|u_{mi}| = |u_{ni}|$ ,

ii)  $|u_{m1} u_{n1}| = |u_{mN} u_{nN}|$ ,  $|u_{m2} u_{n2}| = |u_{m,N-1} u_{n,N-1}|$ , iii)  $E_i t^* = k\pi \rightarrow \frac{E_n}{E_m} = q \in \mathbb{Q}$ , όπου  $k$  ακέραιος ή ημιακέραιος και  $t^* = \text{βέλτιστος χρόνος (optimal time)}$

Μονάδες  $t^*$ :  $\text{eV}^{-1}$  (Σύστημα με  $\hbar=1$ )

Αναζήτηση λύσης μέσω βελτιστοποίησης  $\rightarrow$  Μέθοδος Nelder - Mead

## Μέθοδος Nelder - Mead

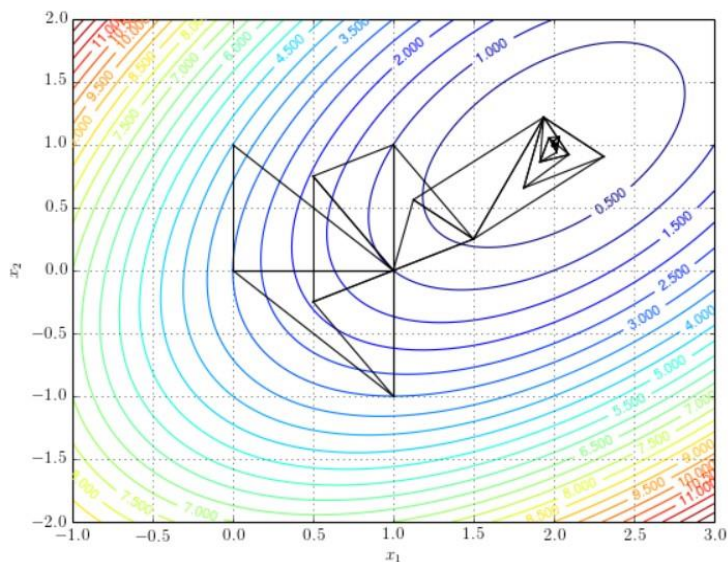
Ζητείται να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση κόστους:  $F(J_1, J_2, \dots, J_{N-1}, t)$  ( $N$  παράμετροι)

i) Simplex  $\rightarrow$  Πολύεδρο με  $N+1$  κορυφές

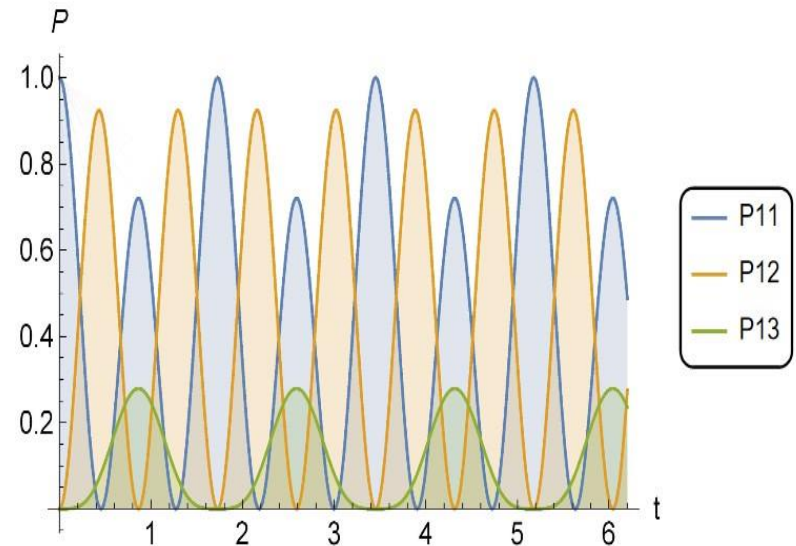
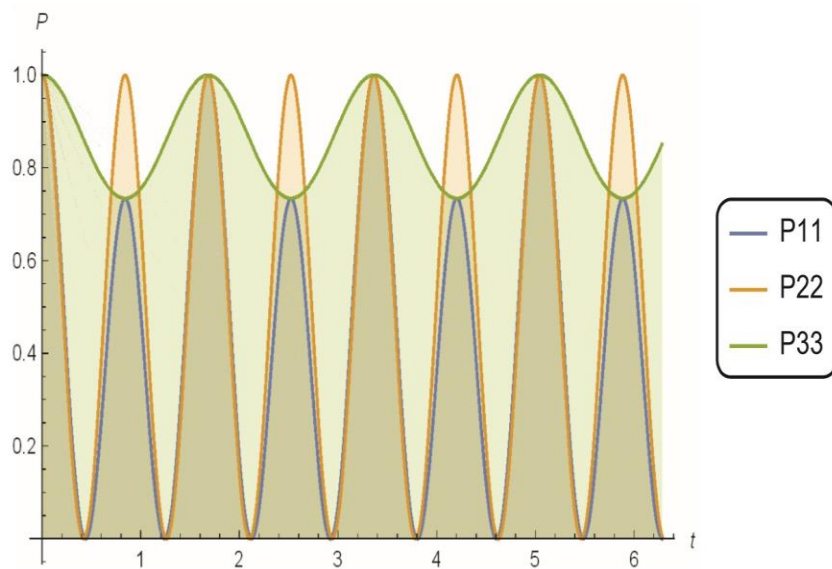
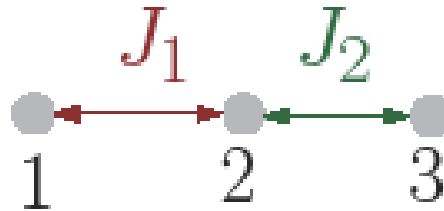
ii) Μέσο:  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i \neq \min} x_i$ , όπου  $x_1 = J_1, x_2 = J_2, \dots, x_{N-1} = J_{N-1}, x_N = t$

iii) Μετασχηματισμός

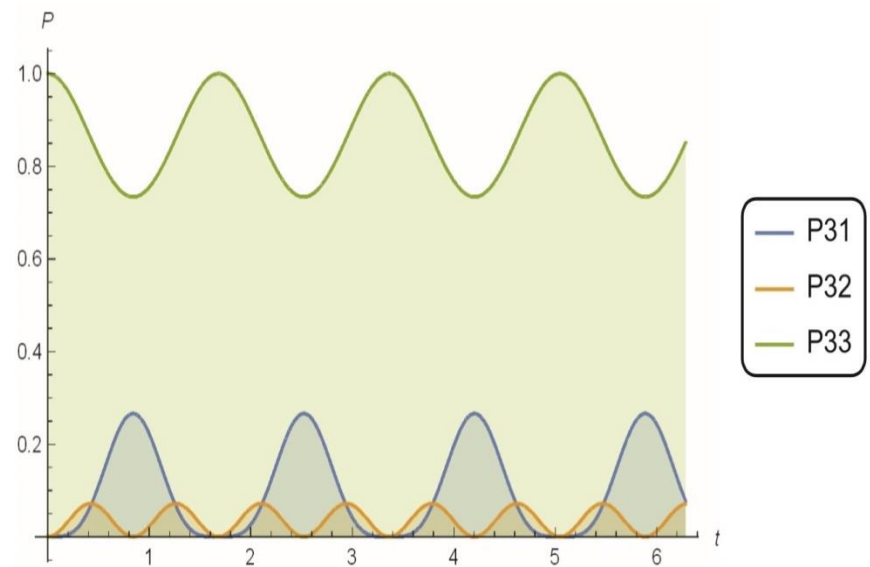
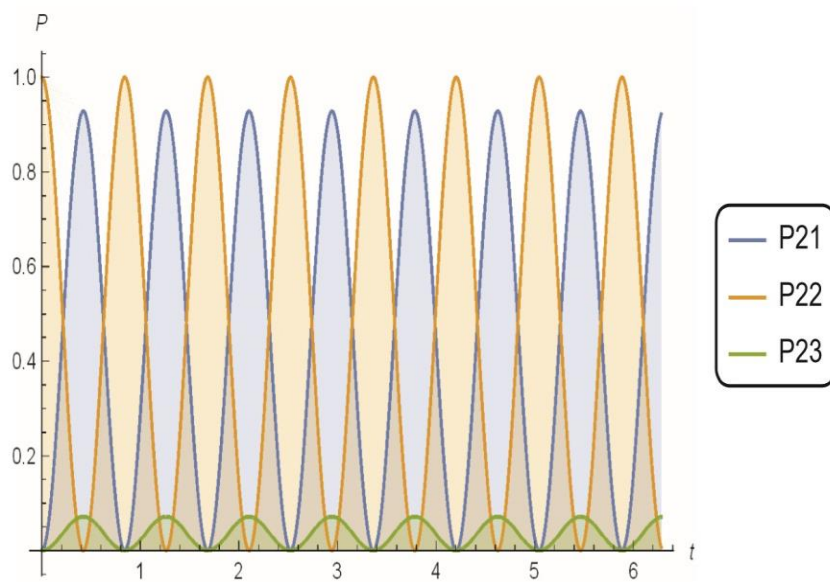
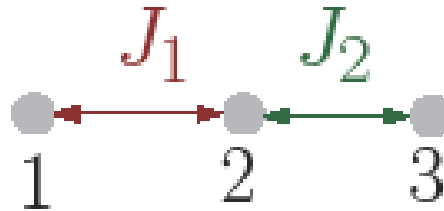
Για παράδειγμα για  $N=2$  (3 κορυφές) το simplex μετασχηματίζεται ως εξής:



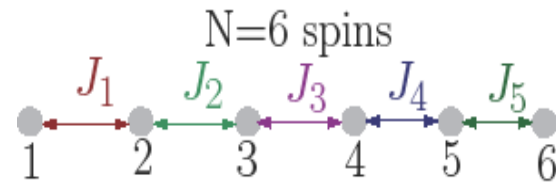
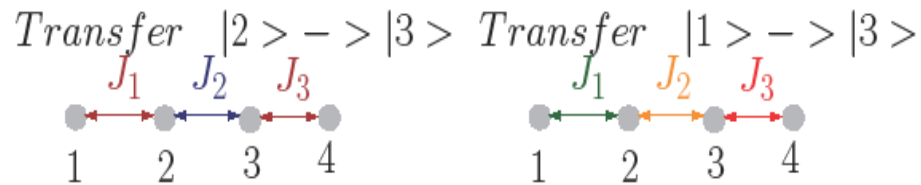
## Δυνατές μεταβάσεις για τυχαία $J_i$ για $N=3$



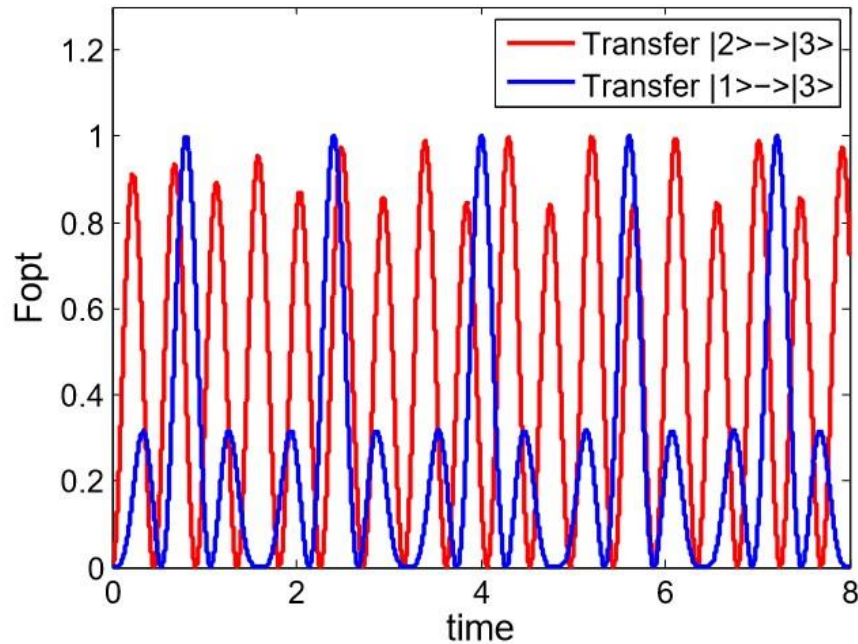
## Δυνατές μεταβάσεις για τυχαία $J_i$ για $N=3$



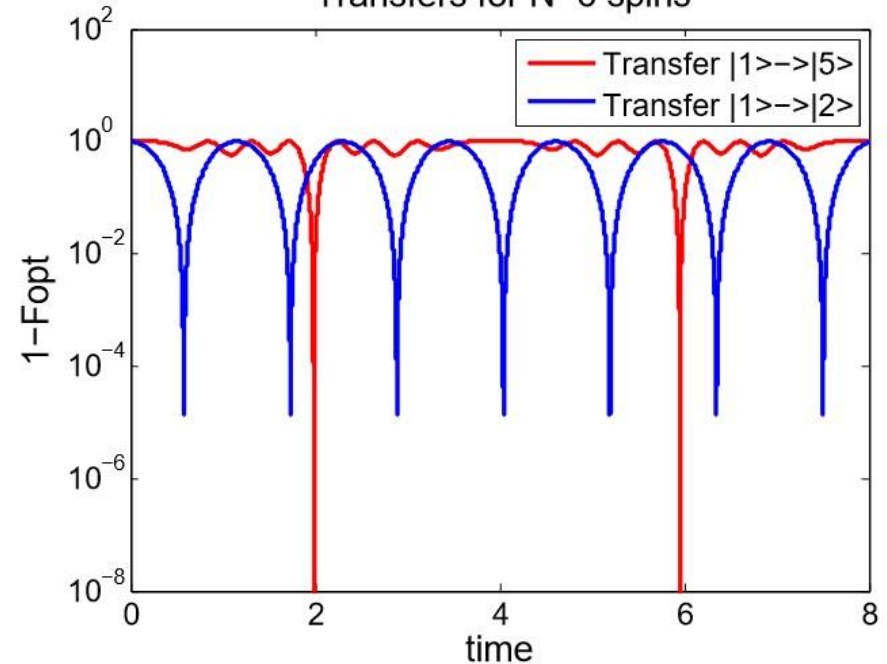
## Βελτιστοποίηση (optimization)



Transfers for N=4 spins

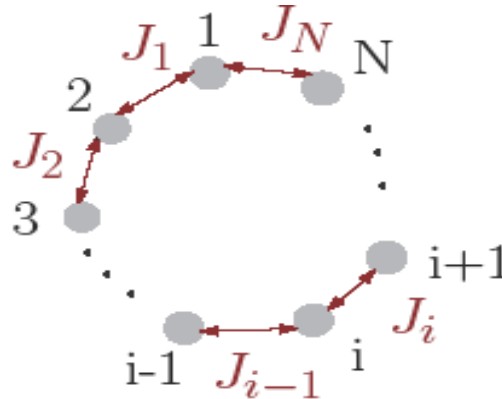


Transfers for N=6 spins



Τοπικά συμμετρικές λύσεις ( $J_1=J_3$  για τη μετάβαση  $|2\rangle \rightarrow |3\rangle$  για N=3 spins)  $\rightarrow$   
Τοπικές συμμετρίες

## Μεταβίβαση καταστάσεων σε τυχαίες θέσεις σε κλειστές αλυσίδες (closed chains)



$$H_{cl} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N J_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N J_i \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y$$

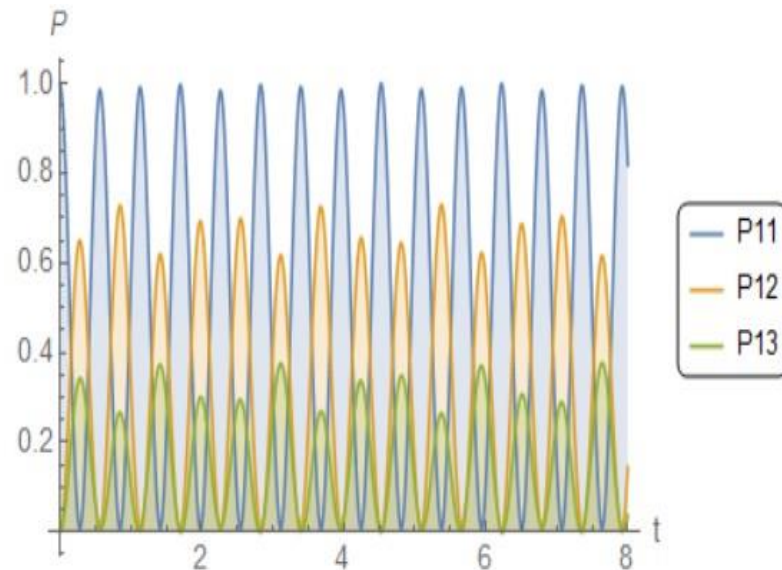
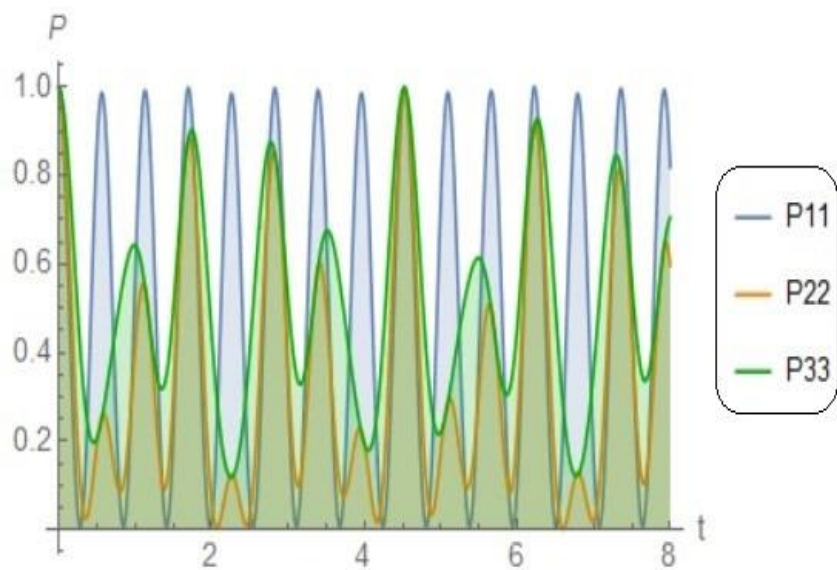
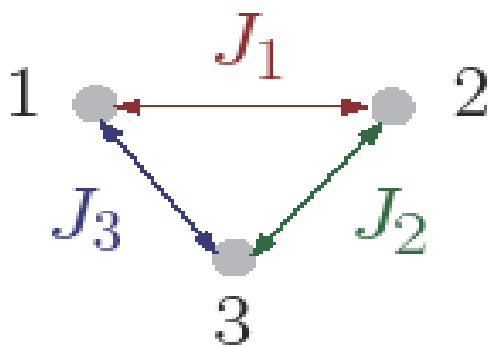
**Μετάβαση  $|m\rangle \rightarrow |n\rangle$ :**

$E_i = -E_{N-i+1}$ , για  $N$  άρτιο

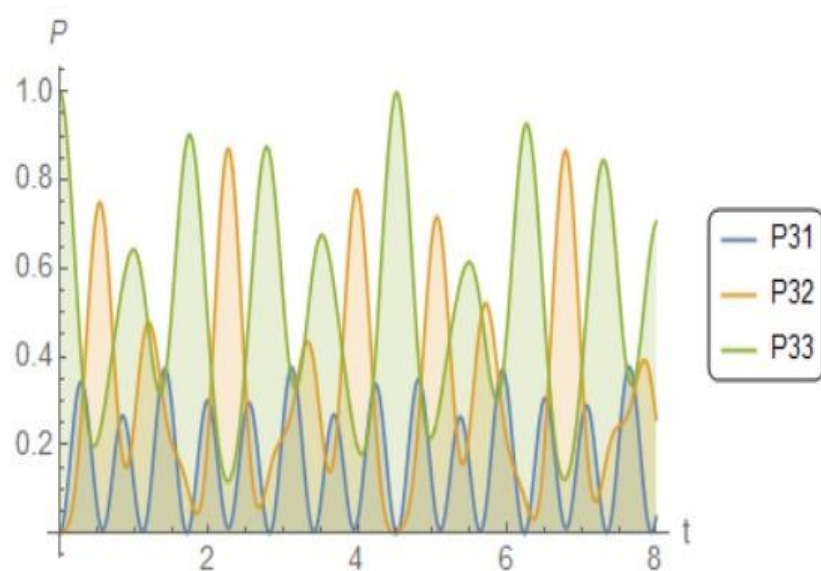
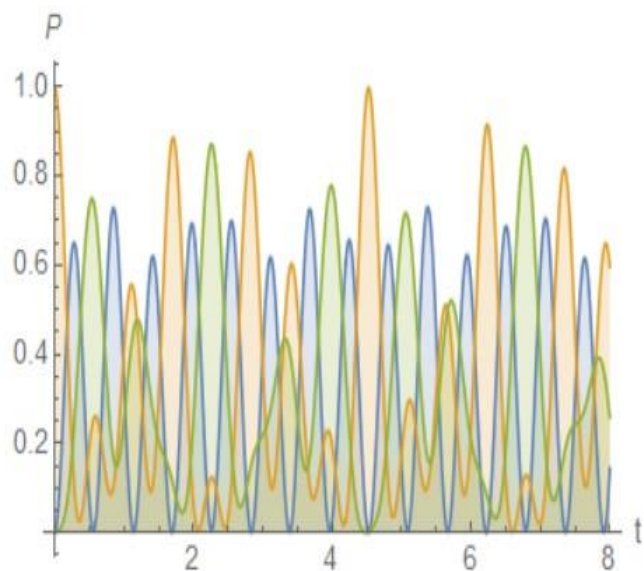
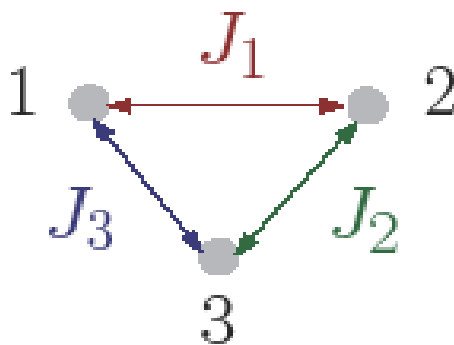
**Συνθήκες για τέλεια μετάβαση: i)  $|u_{mi}| = |u_{ni}|$**

ii)  $E_i t^* = k\pi \rightarrow \frac{E_n}{E_m} = q \in \mathbb{Q}$ , όπου  $k$  ακέραιος ή ρητός

## Δυνατές μεταβάσεις για τυχαία $J_i$ για $N=3$

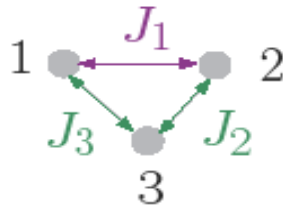


## Δυνατές μεταβάσεις για τυχαία $J_i$ για $N=3$

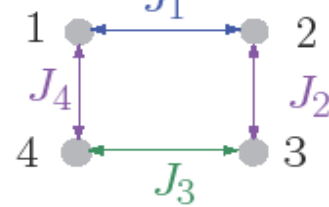


## Βελτιστοποίηση

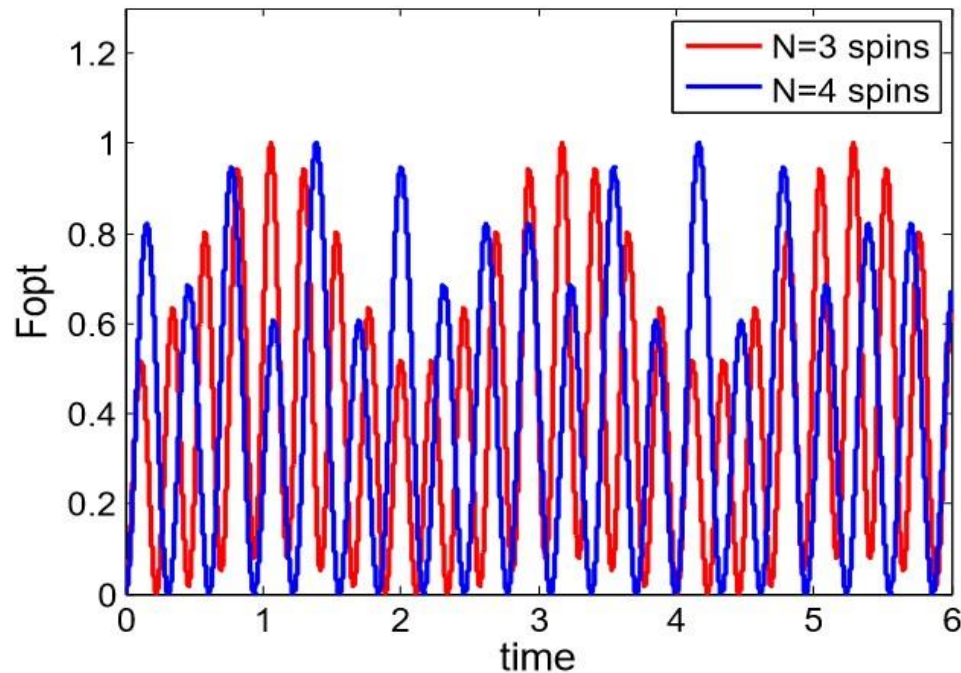
$N = 3$  spins



$N = 4$  spins



Transfer  $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$  for  $N=3$  and  $N=4$  spins respectively



Τοπικά συμμετρικές λύσεις ( $J_2=J_3$  για  $N=3$ ,  $J_2=J_4$  για  $N=4$ )  $\rightarrow$   
Τοπικές συμμετρίες

## Ποιες μεταβάσεις μπορούν να γίνουν τέλεια ( $N \leq 10$ )

| Ανοικτές Αλυσίδες                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Κλειστές Αλυσίδες                                                                                                                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ 1\rangle \rightarrow  N\rangle,  2\rangle \rightarrow  N-1\rangle,$<br>$ 3\rangle \rightarrow  N-2\rangle, \dots$ (συμμετρικές μεταβάσεις)<br>$ 1\rangle \rightarrow  N-1\rangle$ για $N$ άρτιο<br>$ 1\rangle \rightarrow  6\rangle$ για $N=8$<br>$\text{Όλες οι μεταβάσεις }  i\rangle \rightarrow  i\rangle \text{ (revivals)}$ | $\text{Όλες οι μεταβάσεις για } N=3$<br>$\text{Όλες οι μεταβάσεις για } N \text{ άρτιο}$<br>$\text{Όλες οι μεταβάσεις }  i\rangle \rightarrow  i\rangle \text{ (revivals)}$ |

## Προτάσεις για το μέλλον

i) Μερική μεταβίβαση: Μεταβίβαση από τη μία θέση σε δύο άλλες  $\rightarrow$   
πχ.  $|1\rangle \rightarrow c |2\rangle + d |3\rangle$  για  $N=3$ , με  $|c|^2 + |d|^2 = 1$

ii) Αλληλεπίδραση με το περιβάλλον  $\rightarrow$  πχ. Αλληλεπίδραση των spins με ένα θερμικό σύστημα

*Ευχαριστώ για την προσοχή σας!*