Οι τύποι Area και Coarea στη Γεωμετρική Θεωρία Μέτρου

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης

στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Αλέξιος Γκέγκιος

Επιβλέπων Καθηγητής:

Τηλέμαχος Χατζηαφράτης

Τμήμα Μαθηματικών

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

2018

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον καθηγητή κ. Τηλέμαχο Χατζηαφράτη, επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, για τη συνεχή και πάντα πρόθυμη παρουσία του σε όλη τη διάρκεια της «εξερεύνησης» του θέματος και για την πολύτιμη βοήθεια που τόσο γενναιόδωρα μου προσέφερε.

Ευχαριστώ επίσης τον καθηγητή κ. Απόστολο Γιαννόπουλο και τον καθηγητή κ. Νικόλαο Αλικάκο που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής της παρούσης εργασίας.

Αθήνα, Ιούνιος 2018

Αλέξιος Γκέγκιος

Περιεχόμενα

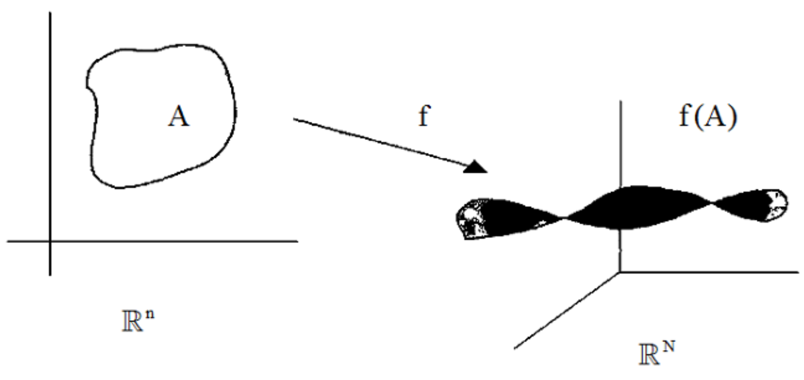
1 Εισαγωγή

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η παρουσίαση και η απόδειξη των τύπων Area και Coarea. Ακολουθούμε το βιβλίο «Measure Theory and Fine Properties of Functions» των Lawrence C. Evans και Ronald F. Gariepy (βλ. [1] και [2]). Παρακάτω εισάγουμε τα σχετικά Θεωρήματα και περιγράφουμε ορισμένες εφαρμογές. Οι ορισμοί των εννοιών και οι αποδείξεις των Θεωρημάτων περιγράφονται αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια.

1.1 Ο τύπος Area και εφαρμογές

Θεώρημα 1.1.1 (Τύπος Area). *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ συνάρτηση Lipschitz και $n \leq N$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\int_A Jf\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n(y).$$



Σχήμα 1: Τύπος Area

Γενικότερα ισχύει ο επόμενος τύπος:

Θεώρημα 1.1.2 (Τύπος αλλαγής μεταβλητών). *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ συνάρτηση Lipschitz και $n \leq N$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$ - αθροίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\ Jf(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] d\mathcal{H}^n(y).$$

Παρατήρηση 1.1.3. *Ο ανωτέρω τύπος γενικεύει το κάτωθι Θεώρημα (τύπος αλλαγής μεταβλητών σε πολλαπλά ολοκληρώματα).*

Θεώρημα 1.1.4. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}^n$ 1-1, συνεχώς διαφορίσιμη με $Jf(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$ - αθροίσιμη συνάρτηση $g : f(A) \to \mathbb{R}$,*

$$\int_{f(A)} g(x)\ dx = \int_A (g \circ f)(x)\ Jf(x)\ dx.$$

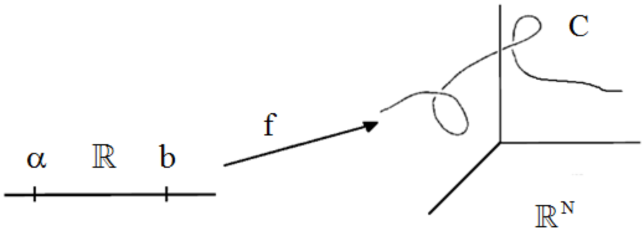
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε αντιπροσωπευτικές εφαρμογές του τύπου Area.

Εφαρμογή 1.1.5. *Μήκος καμπύλης* $(n = 1, N \geq 1)$.
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ συνάρτηση Lipschitz και 1-1. Γράφοντας $f = (f^1, \ldots, f^N)$, έχουμε

$$Df = \left(\frac{df^1}{dt}, \ldots, \frac{df^N}{dt} \right) \text{ και } Jf = |Df| = \left| \frac{df}{dt} \right|.$$

Για $-\infty < a < b < \infty$ ορίζουμε την καμπύλη $C \equiv f([a,b]) \subset \mathbb{R}^N$. Τότε

$$\mathcal{H}^1(C) = \text{ το «μήκος» της } C = \int_a^b \left| \frac{df}{dt} \right|\ dt.$$



Σχήμα 2: Μήκος καμπύλης

Εφαρμογή 1.1.6.

Εμβαδόν επιφάνειας γραφήματος $(\boldsymbol{n \geq 1, N = n+1})$**.**

Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *συνάρτηση Lipschitz. Ορίζουμε* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *με* $f(x) \equiv (x, g(x))$. *Τότε*

$$Df = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(n+1)\times n} .$$

Άρα

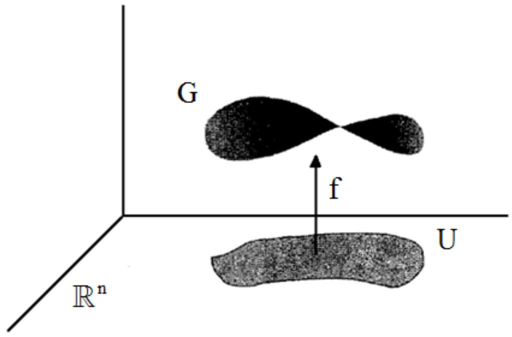
$$\begin{aligned} (Jf)^2 &= \text{ άθροισμα των τετραγώνων των } (n \times n) \text{ - υποοριζουσών του } Df \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 . \end{aligned}$$

Για κάθε ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$, *ορίζουμε το γράφημα της* g *ως προς το* U:

$$G = G(g, U) \equiv \{(x, g(x)) \mid x \in U\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Τότε

$$\mathcal{H}^n(G) = \text{«εμβαδόν επιφάνειας» του } G = \int_U \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2} \, dx.$$



Σχήμα 3: Εμβαδόν επιφάνειας γραφήματος

Εφαρμογή 1.1.7.

Εμβαδόν παραμετρικής υπερεπιφάνειας $(\boldsymbol{n \geq 1, N = n+1})$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ *συνάρτηση Lipschitz και 1-1. Γράφοντας*

$$f = (f^1, \dots, f^{n+1}),$$

έχουμε

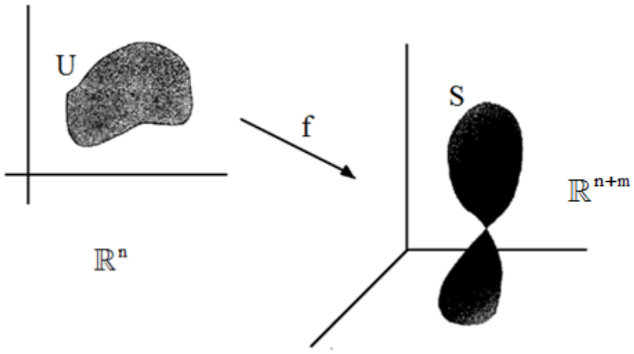
$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^{n+1}}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(n+1)\times n} .$$

Τότε

$$\begin{aligned}(Jf)^2 &= \text{ άθροισμα των τετραγώνων των } (n \times n) \text{ - υποοριζουσών του } Df \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left[\frac{\partial(f^1, \dots, f^{k-1}, f^{k+1}, \dots, f^{n+1})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right]^2 .\end{aligned}$$

Για κάθε ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$ *ορίζουμε* $S \equiv f(U) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. *Τότε*

$$\mathcal{H}^n(S) = \int_U \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} \left[\frac{\partial(f^1, \dots, f^{k-1}, f^{k+1}, \dots, f^{n+1})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right]^2} \, dx.$$



Σχήμα 4: Εμβαδόν παραμετρικής επιφάνειας

Εφαρμογή 1.1.8.

Εμβαδόν παραμετρικής επιφάνειας ($n \geq 1, N = n + m$).

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ συνάρτηση Lipschitz και 1-1. Γράφοντας

$$f = (f^1, \dots, f^{n+m}),$$

έχουμε

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^{n+m}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^{n+m}}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(n+m)\times n}.$$

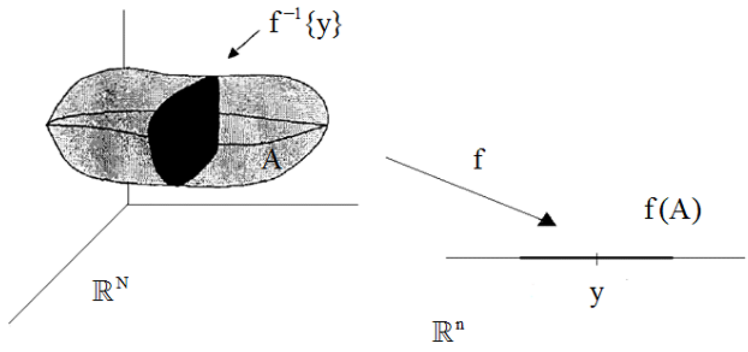
Τότε

$$\begin{aligned} (Jf)^2 &= \text{ άθροισμα των τετραγώνων των } (n \times n) \text{ - υποοριζουσών του } Df \\ &= \sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_m \leq n+m} \left[\frac{\partial(f^1, \dots, f^{\hat{k}_1}, \dots, f^{\hat{k}_m}, \dots, f^{n+m})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right]^2. \end{aligned}$$

Για κάθε ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$ ορίζουμε $S \equiv f(U) \subset \mathbb{R}^{n+m}$. Τότε

$$\mathcal{H}^n(S) = \int\limits_U \sqrt{\sum_{1 \leq k_1 < \cdots < k_m \leq n+m} \left[\frac{\partial(f^1, \dots, f^{\hat{k}_1}, \dots, f^{\hat{k}_m}, \dots, f^{n+m})}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right]^2}\, dx.$$

1.2 Ο τύπος Coarea και εφαρμογές



Σχήμα 5: Τύπος Coarea

Θεώρημα 1.2.1 (Τύπος Coarea). *Έστω $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση Lipschitz και $n \leq N$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^N$ - μετρήσιμο $A \subset \mathbb{R}^N$,*

$$\int_A Jf \; dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \; dy.$$

Παρατήρηση 1.2.2. *Ο τύπος Coarea αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος του Fubini (βλ. ενότητα 2.4).*

Γενικότερα ισχύει ο επόμενος τύπος:

Θεώρημα 1.2.3 (Τύπος αλλαγής μεταβλητών). *Έστω $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση Lipschitz και $n \leq N$. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^N$ - αθροίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,*

$$\eta \;\; g|_{f^{-1}\{y\}} \text{ είναι } \mathcal{H}^{N-n} \text{ αθροίσιμη για } \mathcal{L}^n \text{ - σχεδόν κάθε } y$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x) \; Jf(x) \; dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g \; d\mathcal{H}^{N-n} \right] dy.$$

Παρατήρηση 1.2.4. *Ο προηγούμενος τύπος, όπως και το Θεώρημα 1.1.2, αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 1.1.4 (τύπος αλλαγής μεταβλητών σε πολλαπλά ολοκληρώματα).*

Ακολουθούν εφαρμογές των δύο προηγούμενων Θεωρημάτων.

Εφαρμογή 1.2.5. ***Ολοκλήρωση σε μπάλες***

Πρόταση 1.2.5.1 (Πολικές Συντεταγμένες). *Έστω $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^N$ - αθροίσιμη συνάρτηση. Τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^N} g\ dx = \int_0^{\infty} \Bigg(\int_{\partial B(0,r)} g\ d\mathcal{H}^{N-1} \Bigg)\ dr.$$

Ιδιαιτέρως

$$\frac{d}{dr}\Bigg(\int_{B(0,r)} g\ dx \Bigg) = \int_{\partial B(0,r)} g\ d\mathcal{H}^{N-1} \text{ για } \mathcal{L}^1 \text{ - σχεδόν κάθε } r > 0.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $f(x) = |x|$. Τότε $Df(x) = \frac{x}{|x|}$ και συνεπώς $Jf(x) = 1$ για κάθε $x \neq 0$. ■

Εφαρμογή 1.2.6. ***Ολοκλήρωση σε σύνολα στάθμης***

Πρόταση 1.2.6.1. *Έστω $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz. Τότε:*

(i) $\int\limits_{\mathbb{R}^N} |Df|\ dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}^{N-1}(\{f = t\})\ dt.$

(ii) *Αν υποθέσουμε ότι* $ess \inf |Df| > 0$, *τότε για κάθε* $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^N$ *- αθροίσιμη συνάρτηση,*

$$\int_{\{f>t\}} g\ dx = \int_t^{\infty} \Bigg(\int_{\{f=s\}} \frac{g}{|Df|}\ d\mathcal{H}^{N-1} \Bigg)\ ds.$$

(iii) *Ιδιαιτέρως*

$$\frac{d}{dt}\Bigg(\int_{\{f>t\}} g\ dx \Bigg) = - \int_{\{f=t\}} \frac{g}{|Df|}\ d\mathcal{H}^{N-1} \text{ για } \mathcal{L}^1 \text{ - σχεδόν κάθε } t.$$

Απόδειξη. (i) $Jf = |Df|$.

(ii) Έχουμε $Jf = |Df|$. Θέτουμε $E_t \equiv \{f > t\}$ και υπολογίζουμε

$$\int_{\{f>t\}} g\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{E_t}\ \frac{g}{|Df|}\ Jf\ dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\partial E_s} \frac{g}{|Df|}\ \chi_{E_t}\ d\mathcal{H}^{N-1} \right) ds$$
$$= \int_{t}^{\infty} \left(\int_{\partial E_s} \frac{g}{|Df|}\ d\mathcal{H}^{N-1} \right) ds.$$

(iii) Έπεται άμεσα από το (ii). ■

Εφαρμογή 1.2.7. *Συναρτήσεις απόστασης*

Πρόταση 1.2.7.1 (Σύνολα στάθμης των συναρτήσεων απόστασης).
Έστω $K \subset \mathbb{R}^N$ μη κενό συμπαγές σύνολο. Αν $d(x) \equiv dist(x, K)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$, τότε για κάθε $0 < a < b$ έχουμε

$$\int_a^b \mathcal{H}^{N-1}(\{d = t\})\ dt = \mathcal{L}^N(\{a \le d \le b\}).$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}^N$. Επιλέγουμε $c \in K$ ώστε $d(x) = |x - c|$. Τότε για κάθε $y \in \mathbb{R}^N$ έχουμε

$$|d(y) - d(x)| \le |y - c| - |x - c| \le |x - y|.$$

Συνεπώς $\mathrm{Lip}(d) \le 1$. Από το Θεώρημα του Rademacher έπεται ότι η συνάρτηση απόστασης είναι διαφορίσιμη $\mathcal{L}^N$ - σχεδόν παντού. Επιλέγουμε $x \in \mathbb{R}^N \setminus K$ ώστε να υπάρχει η παράγωγος $Dd(x)$. Τότε, αφού $\mathrm{Lip}(d) \le 1$, έχουμε $|Dd(x)| \le 1$. Επιλέγουμε ξανά $c \in K$ ώστε $d(x) = |x - c|$. Τότε

$$d(tx + (1 - t)c) = t|x - c|$$

για κάθε $0 \leq t \leq 1$. Ως εκ τούτου έχουμε

$$|x - c| = Dd(x) \cdot (x - c) \leq |Dd(x)|\ |x - c|.$$

Δηλαδή $|Dd(x)| \geq 1$. Έπεται ότι $|Dd| = 1$ $\mathcal{L}^N$ - σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^N \setminus K$. Από την Πρόταση 1.2.5.1 έχουμε το ζητούμενο. ■

2 Γενική Θεωρία Μέτρου

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μια συνοπτική ανασκόπηση της Γενικής Θεωρίας Μέτρου. Στις ενότητες 2.1 έως 2.3 ορίζουμε τις θεμελιώδεις έννοιες και παρουσιάζουμε βασικά αποτελέσματα ολοκλήρωσης μετρήσιμων συναρτήσεων. Στην ενότητα 2.4 ορίζουμε τα μέτρα γινόμενο, διατυπώνουμε το Θεώρημα του Fubini και ορίζουμε το μέτρο Lebesgue. Στην ενότητα 1.5 αναφερόμαστε στη διαφόριση των μέτρων Radon και διατυπώνουμε τρία βασικά Θεωρήματα: το Θεώρημα Radon - Nikodym, το Θεώρημα διαφόρισης του Lebesgue και το Θεώρημα πυκνότητας του Lebesgue. Στην ενότητα 2.5 παρουσιάζουμε το Λήμμα του Vitali και ένα σχετικό Θεώρημα «εξάντλησης» ανοικτών συνόλων με μπάλες.

2.1 Μέτρα και μετρήσιμα σύνολα

Έστω σύνολο X και 2^X η οικογένεια όλων των υποσυνόλων του X.

Ορισμός 2.1.1. *Μια απεικόνιση $\mu : 2^X \to [0, \infty]$ καλείται μέτρο στο X εάν*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$ *και*

(ii) $\mu(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ *όταν* $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

Παρατήρηση 2.1.2. *Υπάρχει διαφοροποίηση από τα περισσότερα μαθηματικά κείμενα, όπου η παραπάνω συνάρτηση ορίζεται ως εξωτερικό μέτρο, ενώ μέτρο κοινώς θεωρείται ο περιορισμός αυτής σε κατάλληλα (μ - μετρήσιμα) σύνολα.*

Ορισμός 2.1.3. *Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται μ - μετρήσιμο εάν για κάθε σύνολο $B \subset X$,*

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Θεώρημα 2.1.4 (Βασικές ιδιότητες του μέτρου). *Έστω μ μέτρο στο X. Τότε:*

(i) *Εάν $A \subset B \subset X$, τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$.*

(ii) *Ένα σύνολο $A \subset X$ είναι μ - μετρήσιμο εάν και μόνο αν το $X \setminus A$ είναι μ - μετρήσιμο.*

(iii) *Τα σύνολα X και $\emptyset$ είναι μ - μετρήσιμα. Γενικότερα, εάν $\mu(A) = 0$ τότε το A είναι μ - μετρήσιμο.*

Θεώρημα 2.1.5 (Ακολουθίες μετρήσιμων συνόλων). *Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία μ - μετρήσιμων συνόλων. Τότε:*

(i) *Τα σύνολα $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ και $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ είναι μ - μετρήσιμα.*

(ii) *Εάν τα σύνολα $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι ξένα, τότε*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

(iii) *Εάν $A_1 \subset \cdots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \ldots$, τότε*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

(iv) *Εάν $A_1 \supset \cdots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \ldots$ και $\mu(A_1) < \infty$, τότε*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Ορισμός 2.1.6. *Έστω X μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{A}$ οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ λέγεται σ - άλγεβρα στο X, όταν*

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) $A_k \in \mathcal{A}$ $(k = 1, 2, \dots) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα 2.1.7 (Μετρήσιμα σύνολα ως σ - άλγεβρα). *Έστω μ μέτρο σε μη κενό σύνολο X. Τότε η οικογένεια των μ - μετρήσιμων υποσυνόλων του X είναι μια σ - άλγεβρα.*

Ορισμός 2.1.8. *Η μικρότερη σ - άλγεβρα που περιέχει τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ λέγεται Borel σ - άλγεβρα στο $\mathbb{R}^n$. Καλούμε τα στοιχεία της ως Borel ή Borel - μετρήσιμα σύνολα.*

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε συγκεκριμένους τύπους μέτρων που εμφανίζουν ορισμένες «καλές» ιδιότητες.

Ορισμοί 2.1.9. (i) *Έστω X μη κενό σύνολο και μ μέτρο στο X. Το μ λέγεται κανονικό εάν για κάθε σύνολο $A \subset X$ υπάρχει μ - μετρήσιμο σύνολο B ώστε $A \subset B$ και $\mu(A) = \mu(B)$.*

(ii) *Έστω μ μέτρο στο $\mathbb{R}^n$. Το μ λέγεται Borel εάν κάθε Borel σύνολο είναι μ - μετρήσιμο.*

(iii) *Έστω μ μέτρο στο $\mathbb{R}^n$. Το μ λέγεται Borel κανονικό εάν το μ είναι Borel και για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ υπάρχει Borel σύνολο B ώστε $A \subset B$ και $\mu(A) = \mu(B)$.*

(iv) *Έστω μ μέτρο στο $\mathbb{R}^n$. Το μ λέγεται Radon εάν το μ είναι Borel κανονικό και $\mu(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Θεώρημα 2.1.10. *Έστω X μη κενό σύνολο και μ κανονικό μέτρο στο X. Εάν $A_1 \subset \cdots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \dots$, τότε*

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Παρατήρηση 2.1.11. *Παρατηρούμε ότι τα σύνολα $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ δεν είναι κατ΄ ανάγκη μ - μετρήσιμα.*

Θεώρημα 2.1.12. *Έστω μ Borel μέτρο στο $\mathbb{R}^n$ και B σύνολο Borel.*

(*i*) *Εάν $\mu(B) < \infty$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο C ώστε $C \subset B$ και $\mu(B \setminus C) < \varepsilon$.*

(*ii*) *Εάν το μ είναι Radon μέτρο, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο U ώστε $B \subset U$ και $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$.*

Θεώρημα 2.1.13. *Έστω μ Radon μέτρο στο $\mathbb{R}^n$. Τότε*

(*i*) *για κάθε σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) \mid A \subset U,\ U \text{ ανοικτό}\},$$

και

(*ii*) *για κάθε μ - μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(K) \mid K \subset A,\ K \text{ συμπαγές}\}.$$

Θεώρημα 2.1.14 (Κριτήριο του Καραθεοδωρή). *Έστω μ μέτρο στο $\mathbb{R}^n$. Εάν $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ για κάθε $A, B \subset \mathbb{R}^n$ με $dist(A, B) > 0$, τότε το μ είναι Borel μέτρο.*

2.2 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Επεκτείνουμε την έννοια της μετρησιμότητας σε συναρτήσεις. Έστω X σύνολο και Y τοπολογικός χώρος. Υποθέτουμε ότι το μ είναι μέτρο στο X.

Ορισμοί 2.2.1. *(i) Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ καλείται μ - μετρήσιμη εάν για κάθε ανοικτό $U \subset Y$, το $f^{-1}(U)$ είναι μ - μετρήσιμο.*

(ii) Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ καλείται Borel - μετρήσιμη εάν για κάθε ανοικτό $U \subset Y$, το $f^{-1}(U)$ είναι Borel - μετρήσιμο.

Θεώρημα 2.2.2 (Αντίστροφες εικόνες). *Έστω μ Borel μέτρο στο $\mathbb{R}^n$ και B σύνολο Borel.*

(i) Αν $f : X \to Y$ είναι μ - μετρήσιμη συνάρτηση, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι μ - μετρήσιμο για κάθε Borel $B \subset Y$.

(ii) Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$ είναι μ - μετρήσιμη εάν και μόνο αν το $f^{-1}([-\infty, a))$ είναι μ - μετρήσιμο για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 2.2.3 (Ιδιότητες μετρήσιμων συναρτήσεων).

(i) Έστω $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ μ - μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε οι $f+g$, fg, $|f|$, $\min(f, g)$, $\max(f, g)$ είναι μ - μετρήσιμες συναρτήσεις. Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι επίσης μ - μετρήσιμη για $g \neq 0$ στο X.

(ii) Εάν οι συναρτήσεις $f_k : X \to [-\infty, \infty]$ είναι μ - μετρήσιμες $(k = 1, 2, \dots)$, τότε οι $\inf_{k\geq 1} f_k$, $\sup_{k\geq 1} f_k$, $\liminf_{k\to\infty} f_k$ και $\limsup_{k\to\infty} f_k$ είναι επίσης μ - μετρήσιμες.

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω $f : X \to [0,\infty]$ μ - μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το σύνολο*

$$A_1 \equiv \{x \in X \mid f(x) \geq 1\}$$

και επαγωγικά ορίζουμε τα

$$A_k \equiv \left\{x \in X \mid f(x) \geq \frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}\chi_{A_j}\right\}$$

για $k = 2, 3, \ldots$. Τότε υπάρχει ακολουθία μ - μετρήσιμων συνόλων $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ στο X ώστε

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\, \chi_{A_k}.$$

2.3 Ολοκληρώματα και Οριακά Θεωρήματα

Σε αυτήν την ενότητα ορίζουμε βασικές έννοιες της ολοκλήρωσης ως προς μέτρο και διατυπώνουμε κάποια βασικά θεωρήματα.

Συμβολισμός. $f^+ = \max(f, 0)$, $f^- = \max(-f, 0)$, $f = f^+ - f^-$.

Έστω μ μέτρο σε μη κενό σύνολο X.

Ορισμός 2.3.1. *Μια συνάρτηση $g : X \to [-\infty, \infty]$ καλείται απλή συνάρτηση εάν η εικόνα της είναι αριθμήσιμο σύνολο.*

Ορισμοί 2.3.2. (*i*) *Έστω $g : X \to [0,\infty]$ απλή και μ - μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το ολοκλήρωμά της,*

$$\int g\; d\mu \equiv \sum_{0\leq y\leq\infty} y\; \mu(g^{-1}\{y\}).$$

(*ii*) *Έστω $g : X \to [-\infty, \infty]$ απλή και μ - μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $\int g^+\, d\mu < \infty$ ή $\int g^-\, d\mu < \infty$. Τότε καλούμε την g ως μ - ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση και ορίζουμε*

$$\int g\; d\mu \equiv \int g^+\; d\mu - \int g^-\; d\mu.$$

Δηλαδή εάν η g είναι μ - ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση,

$$\int g\ d\mu \equiv \sum_{-\infty\leq y\leq\infty} y\ \mu(g^{-1}\{y\}).$$

Συμβολισμός. *Η έκφραση «μ - σχεδόν παντού» σημαίνει: σε κάθε στοιχείο του χώρου εκτός πιθανόν από ένα σύνολο A με $\mu(A) = 0$.*

Ορισμοί 2.3.3.

(*i*) *Έστω $f : X \to [-\infty, \infty]$. Ορίζουμε το άνω ολοκλήρωμα της f,*

$$\int^{\star} f\ d\mu \equiv \inf\left\{ \int g\ d\mu \mid g\ \mu \text{ - ολοκληρώσιμη, απλή, με } g \geq f\ \mu \text{ - σ.π.}\right\}$$

και το κάτω ολοκλήρωμα της f,

$$\int_{\star} f\ d\mu \equiv \sup\left\{ \int g\ d\mu \mid g\ \mu \text{ - ολοκληρώσιμη, απλή, με } g \leq f\ \mu \text{ - σ.π.}\right\}.$$

(*ii*) *Έστω μ - μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$. Η f καλείται μ - ολοκληρώσιμη εάν $\int^{\star} f\ d\mu = \int_{\star} f\ d\mu$ και τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα της f είναι*

$$\int f\ d\mu \equiv \int^{\star} f\ d\mu = \int_{\star} f\ d\mu.$$

Παρατηρήσεις 2.3.4. (*i*) *Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση ενδέχεται να έχει ολοκλήρωμα ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$.*

(*ii*) *Μια μη αρνητική και μ - μετρήσιμη συνάρτηση είναι μ - ολοκληρώσιμη (βλ. [4, Ενότητα 2.4]).*

Ορισμοί 2.3.5. (*i*) *Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$ λέμε ότι είναι μ - αθροίσιμη εάν είναι μ - ολοκληρώσιμη και $\int |f|\ d\mu < \infty$.*

(*ii*) *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ λέμε ότι είναι τοπικά μ - αθροίσιμη εάν η $f|_K$ είναι μ - αθροίσιμη για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$.*

Θεώρημα 2.3.6 (Λήμμα του Fatou). *Έστω $f_k : X \to [0,\infty]$ ακολουθία μ - μετρήσιμων συναρτήσεων $(k = 1, 2, \dots)$. Τότε*

$$\int \liminf_{k\to\infty} f_k \; d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int f_k \; d\mu.$$

Θεώρημα 2.3.7 (Μονότονης σύγκλισης).
Έστω $f_k : X \to [0,\infty]$ ακολουθία μ - μετρήσιμων συναρτήσεων $(k = 1, 2, \dots)$, με $f_1 \leq \dots \leq f_k \leq f_{k+1} \leq \dots$. Τότε

$$\int \lim_{k\to\infty} f_k \; d\mu \; = \lim_{k\to\infty} \int f_k \; d\mu.$$

Θεώρημα 2.3.8 (Κυριαρχημένης σύγκλισης).
Έστω f, $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ μ - μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ μ - σχεδόν παντού. Αν g μ - αθροίσιμη συνάρτηση ώστε $g \geq 0$ και $|f_k| \leq g$ $(k = 1, 2, \dots)$, τότε

$$\lim_{k\to\infty} \int |f_k - f| \; d\mu = 0.$$

2.4 Μέτρα γινόμενο, το Θεώρημα του Fubini, το μέτρο Lebesgue

Έστω μη κενά σύνολα X, Y.

Ορισμός 2.4.1. *Έστω μ μέτρο στο X και ν μέτρο στο Y. Ορίζουμε το μέτρο $\mu \times \nu : 2^{X\times Y} \to [0,\infty]$ θέτοντας για κάθε $S \subset X \times Y$:*

$$(\mu \times \nu)(S) \equiv \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \; \nu(B_i) \right\},$$

για κάθε μ - μετρήσιμο $A_i \subset X$ και για κάθε ν - μετρήσιμο $B_i \subset Y$, όπου $i = 1, 2, \dots,$ με

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i).$$

Το μέτρο $\mu \times \nu$ καλείται μέτρο γινόμενο των μ και ν.

Ορισμοί 2.4.2. *Έστω X μη κενό σύνολο και μ μέτρο στο X.*

(i) *Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται σ - πεπερασμένο ως προς το μέτρο μ, εάν υπάρχει ακολουθία μ - μετρήσιμων συνόλων $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ ώστε $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ και $\mu(B_k) < \infty$ για $k = 1, 2, \ldots$.*

(ii) *Μια συνάρτηση $f : X \to [-\infty, \infty]$ λέγεται σ - πεπερασμένη ως προς το μέτρο μ, εάν είναι μ - μετρήσιμη και το $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ είναι σ - πεπερασμένο ως προς το μ.*

Θεώρημα 2.4.3 (Fubini). *Έστω μ μέτρο στο X και ν μέτρο στο Y.*

(i) *Το $\mu \times \nu$ είναι κανονικό μέτρο στο $X \times Y$.*

(ii) *Εάν $A \subset X$ είναι μ - μετρήσιμο και $B \subset Y$ είναι ν - μετρήσιμο, τότε το $A \times B$ είναι $(\mu \times \nu)$ - μετρήσιμο και $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\ \nu(B)$.*

(iii) *Εάν $S \subset X \times Y$ είναι σ - πεπερασμένο ως προς το $\mu \times \nu$, τότε το $S_y \equiv \{x \mid (x,y) \in S\}$ είναι μ - μετρήσιμο για ν - σχεδόν κάθε y, το $S_x \equiv \{y \mid (x,y) \in S\}$ είναι ν - μετρήσιμο για μ - σχεδόν κάθε x, η $\mu(S_y)$ είναι ν - ολοκληρώσιμη και η $\nu(S_y)$ είναι μ - ολοκληρώσιμη. Επιπλέον*

$$(\mu \times \nu)(S) = \int\limits_Y \mu(S_y)\ d\nu(y) = \int\limits_X \mu(S_x)\ d\mu(x).$$

(iv) *Εάν f είναι $(\mu \times \nu)$ - ολοκληρώσιμη συνάρτηση και σ - πεπερασμένη ως προς το $\mu \times \nu$ (ειδικότερα εάν η f είναι $(\mu \times \nu)$ - αθροίσιμη), τότε η απεικόνιση*

$$y \mapsto \int\limits_X f(x,y)\ d\mu(x) \text{ είναι } \nu \text{ - ολοκληρώσιμη,}$$

η απεικόνιση

$$x \mapsto \int\limits_Y f(x,y)\ d\nu(y) \text{ είναι } \mu \text{ - ολοκληρώσιμη}$$

και

$$\int\limits_{X\times Y} f\ d(\mu\times\nu) = \int\limits_{Y}\left[\int\limits_{X} f(x,y)\ d\mu(x)\right] d\nu(y)$$
$$= \int\limits_{X}\left[\int\limits_{Y} f(x,y)\ d\nu(y)\right] d\mu(x).$$

Ορισμοί 2.4.4. (*i*) *Το μέτρο Lebesgue* $\mathcal{L}^1$ *στο* $\mathbb{R}^1$ *ορίζεται ως εξής:*

$$\mathcal{L}^1(A) \equiv \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} diam\ C_i \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i,\ C_i \subset \mathbb{R}\right\}$$

για κάθε $A \subset \mathbb{R}$.

(*ii*) *Επαγωγικά ορίζεται το* n *- διάστατο μέτρο Lebesgue* $\mathcal{L}^n$ *στο* $\mathbb{R}^n$ *ως:*

$$\mathcal{L}^n \equiv \mathcal{L}^{n-1}\times\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1\times\cdots\times\mathcal{L}^1\ (n\ \text{φορές}).$$

Ισοδύναμα $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^{n-k}\times\mathcal{L}^k$ *για κάθε* $k \in \{1,\ldots,n-1\}$.

Συμβολισμός. *Θα γράφουμε «dx», «dy» κτλ αντί για «$d\mathcal{L}^n$» στα ολοκληρώματα ως προς* $\mathcal{L}^n$.

2.5 Διαφόριση μέτρων

Ορισμός 2.5.1. *Έστω* μ *μέτρο Radon στο* $\mathbb{R}^n$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ *ορίζουμε*

$$\overline{D}_{\mathcal{L}^n}\mu(x) \equiv \begin{cases} \limsup\limits_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} & \text{εάν } \mathcal{L}^n(B(x,r))>0 \text{ για κάθε } r>0 \\ +\infty & \text{εάν } \mathcal{L}^n(B(x,r))=0 \text{ για κάποιο } r>0 \end{cases}$$

και

$$\underline{D}_{\,\mathcal{L}^n}\mu(x) \equiv \begin{cases} \liminf\limits_{r\to 0}\frac{\mu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} & \text{εάν } \mathcal{L}^n(B(x,r))>0 \text{ για κάθε } r>0 \\ +\infty & \text{εάν } \mathcal{L}^n(B(x,r))=0 \text{ για κάποιο } r>0. \end{cases}$$

Εάν $\overline{D}_{\mathcal{L}^n}\mu(x) = \underline{D}_{\,\mathcal{L}^n}\mu(x) < +\infty$, *λέμε ότι το* μ *είναι διαφορίσιμο ως προς το* $\mathcal{L}^n$ *στο* x *και γράφουμε* $D_{\mathcal{L}^n}\mu(x) = \overline{D}_{\mathcal{L}^n}\mu(x) = \underline{D}_{\,\mathcal{L}^n}\mu(x)$.
Καλούμε την $D_{\mathcal{L}^n}\mu$ *παράγωγο του* μ *ως προς το* $\mathcal{L}^n$.

Ορισμός 2.5.2. *Έστω μ, ν μέτρα στο $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς το μ και γράφουμε $\nu \ll \mu$, εάν η $\mu(A) = 0$ συνεπάγεται ότι $\nu(A) = 0$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$.*

Θεώρημα 2.5.3 (Radon - Nikodym). *Έστω μ μέτρο Radon στο $\mathbb{R}^n$. Τότε*

(i) *η παράγωγος $D_{\mathcal{L}^n}\mu$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού,*

(ii) *η παράγωγος $D_{\mathcal{L}^n}\mu$ είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμη,*

(iii) *εάν $\mu \ll \mathcal{L}^n$, τότε*
$$\mu(A) = \int_A D_{\mathcal{L}^n}\mu \, d\mathcal{L}^n$$
για κάθε μ - μετρήσιμο $A \subset \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.5.4 (Διαφόρισης του Lebesgue). *Έστω f τοπικά $\mathcal{L}^n$ - αθροίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n$. Τότε*
$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy = f(x)$$
$\mathcal{L}^n$ - σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.5.5 (Πυκνότητας του Lebesgue).
Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο. Τότε
$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap A)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 1 \quad \mathcal{L}^n \text{ - σχεδόν σε κάθε } x \in A$$
και
$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap A)}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 0 \quad \mathcal{L}^n \text{ - σχεδόν σε κάθε } x \in \mathbb{R}^n \setminus A.$$

2.6 Το Λήμμα του Vitali

Ορισμός 2.6.1. *Μια οικογένεια $\mathcal{C}$ συνόλων στο $\mathbb{R}^n$ λέγεται κάλυμμα ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$ εάν*
$$A \subseteq \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C.$$

Συμβολισμός. *Εάν B κλειστή μπάλα στο $\mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $\hat{B}$ την ομόκεντρη της B μπάλα της οποίας η ακτίνα είναι πενταπλάσια από την ακτίνα της B.*

Θεώρημα 2.6.2 (Λήμμα του Vitali). *Έστω $\mathcal{F}$ οικογένεια συνόλων αποτελούμενη από μη εκφυλισμένες κλειστές μπάλες στο $\mathbb{R}^n$ ώστε*

$$\sup\{diam\ B \mid B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

Τότε υπάρχει $\mathcal{G}$ αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων αποτελούμενη από ξένες μπάλες της $\mathcal{F}$ ώστε

$$\bigcup_{B\in\mathcal{F}} B \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{G}} \hat{B}.$$

Θεώρημα 2.6.3 («Εξάντληση» ανοικτών συνόλων με μπάλες). *Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\delta > 0$. Τότε υπάρχει G αριθμήσιμη οικογένεια συνόλων αποτελούμενη από ξένες κλειστές μπάλες στο U ώστε $diam\ B \leq \delta$ για κάθε $B \in \mathcal{G}$ και*

$$\mathcal{L}^n\left(U \setminus \bigcup_{B\in\mathcal{G}} B\right) = 0.$$

3 Μέτρα Hausdorff

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τα μέτρα Hausdorff, τα οποία μας επιτρέπουν να αποδίδουμε μέγεθος σε σύνολα κατώτερης του n διάστασης στο $\mathbb{R}^n$. Στην ενότητα 3.1 διατυπώνουμε ορισμούς και αποδεικνύουμε στοιχειώδεις ιδιότητες των μέτρων Hausdorff. Στην ενότητα 3.2 περιγράφουμε τη συμμετρικοποίηση Steiner και αποδεικνύουμε την ισοδιαμετρική ανισότητα, ένα βασικό εργαλείο που θα μας χρησιμεύσει για να αποδείξουμε στη συνέχεια ότι $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ στο $\mathbb{R}^n$.

3.1 Ορισμοί και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$ και $0 < \delta \leq \infty$. Ορίζουμε*

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{diam\ C_j}{2} \right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta \right\},$$

όπου $\alpha(s) \equiv \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ και $\Gamma(s) \equiv \int\limits_0^\infty e^{-x}\ x^{s-1}\ dx$ για $0 < s < \infty$ (η συνάρτηση Γάμμα).

Καλούμε το

$$\mathcal{H}^s(A) \equiv \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

s - διάστατο μέτρο Hausdorff του A στο $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις 3.1.2. *(i) Η απαίτηση για το $\delta \to 0$ αναγκάζει τα καλύμματα να «ακολουθήσουν την τοπική γεωμετρία» του συνόλου A.*

(ii) Η $\mathcal{H}_\delta^s$ είναι φθίνουσα ως προς το δ.

(iii) Παρατηρούμε ότι $\mathcal{L}^n(B(x,r)) = \alpha(n)\ r^n$ για κάθε μπάλα $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\alpha(n)$ είναι ο όγκος της μοναδιαίας μπάλας στο $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 3.1.3. *Το $\mathcal{H}^s$ είναι Borel κανονικό μέτρο $(0 \le s < \infty)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα 1ο: Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{H}^s_\delta$ είναι μέτρο για κάθε $0 < \delta \le \infty$.

Έστω $0 < \delta \le \infty$. Είναι προφανές ότι $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$.

Έστω $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ και $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^\infty A_k$. Για $\varepsilon > 0$ και $k = 1, 2, \dots$ θεωρούμε ακολουθία $\{C_j^k\}_{j=1}^\infty$ με

$$A_k \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j^k, \text{ diam } C_j^k \le \delta \text{ και } \mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \ge \sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j^k}{2} \right)^s.$$

Τότε

$$\sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \varepsilon = \sum_{k=1}^\infty \left(\mathcal{H}^s_\delta(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) \ge \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j^k}{2} \right)^s \ge \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Για $\varepsilon \to 0$ έχουμε

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k).$$

Βήμα 2ο: Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{H}^s$ είναι μέτρο.

Είναι προφανές ότι $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.

Έστω $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ και $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^\infty A_k$. Τότε για κάθε $0 < \delta \le \infty$,

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s_\delta(A_k) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_k).$$

Για $\delta \to 0$, έχουμε

$$\mathcal{H}^s(A) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_k).$$

Βήμα 3ο: Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{H}^s$ είναι Borel μέτρο.

Έστω $A, B \subset \mathbb{R}^n$ με $\text{dist}(A, B) > 0$ και δ ώστε $0 < \delta < \frac{1}{4} \text{dist}(A, B)$. Θεωρούμε ακολουθία $\{C_k\}_{k=1}^\infty$ με $A \cup B \subset \bigcup\limits_{k=1}^\infty C_k$ και $\text{diam } C_k \le \delta$ για κάθε $k = 1, 2, \dots$. Θέτουμε

$$\mathcal{A} \equiv \{C_j \mid C_j \cap A \ne \emptyset\} \text{ και } \mathcal{B} \equiv \{C_j \mid C_j \cap B \ne \emptyset\}.$$

Τότε $A \subset \bigcup\limits_{C_j \in \mathcal{A}} C_j$, $B \subset \bigcup\limits_{C_j \in \mathcal{B}} C_j$, ενώ $C_i \cap C_j = \emptyset$ για $C_i \in \mathcal{A}$ και $C_j \in \mathcal{B}$. Άρα έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s &\geq \sum_{C_j \in \mathcal{A}} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s + \sum_{C_j \in \mathcal{B}} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \\ &\geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).\end{aligned}$$

Παίρνοντας infimum ως προς τα $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ έχουμε $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$, όπου $0 < 4\delta < \text{dist}(A, B)$. Για $\delta \to 0$, έχουμε

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

Η αντίστροφη ανισότητα

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$$

έπεται από την υποπροσθετικότητα του $\mathcal{H}^s$. Συνεπώς, έχουμε ότι

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

Από το Κριτήριο του Καραθεοδωρή το $\mathcal{H}^s$ είναι Borel μέτρο.

Βήμα 4ο: Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{H}^s$ είναι Borel κανονικό μέτρο.

Γνωρίζουμε ότι diam $\overline{C} =$ diam C για κάθε $C \subset \mathbb{R}^n$. Συνεπώς

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \text{diam } C_j \leq \delta,\ C_j \text{ κλειστά} \right\}$$

για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, $A \subset \mathbb{R}^n$ με $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Τότε $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty$ για κάθε $\delta > 0$. Για κάθε $k \geq 1$ επιλέγουμε κλειστά σύνολα $\{C_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ ώστε

$$\text{diam } C_j^k \leq \frac{1}{k},\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j^k \text{ και } \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j^k}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Θέτουμε $A_k \equiv \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} C_j^k$. Τότε το $B \equiv \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ είναι Borel. Επίσης για κάθε $k \geq 1$ έχουμε $A \subset A_k$ και άρα $A \subset B$. Τότε

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j^k}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k}.$$

Για $k \to \infty$, έχουμε

$$\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A).$$

Η αντίστροφη ανισότητα

$$\mathcal{H}^s(B) \geq \mathcal{H}^s(A)$$

προκύπτει από την $B \supset A$. Συνεπώς

$$\mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A). \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση 3.1.4. *Το $\mathcal{H}^s$ δεν είναι Radon μέτρο εάν $0 \leq s < n$.*

Θεώρημα 3.1.5 (Ιδιότητες του μέτρου Hausdorff).

(i) *Το $\mathcal{H}^0$ είναι το αριθμητικό μέτρο.*

(ii) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ *στο* $\mathbb{R}^1$.

(iii) $\mathcal{H}^s \equiv 0$ *στο* $\mathbb{R}^n$ *για κάθε* $s > n$.

(iv) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \, \mathcal{H}^s(A)$ *για κάθε* $\lambda > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

(v) $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ *για κάθε αφφινική ισομετρία* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. *(i)* Έπεται άμεσα, αφού $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$ για κάθε $a \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Έστω $A \subset \mathbb{R}^1$ και $\delta > 0$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(A) &= \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam} C_j \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\} \\
&\leq \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam} C_j \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \operatorname{diam} C_j \leq \delta \right\} \\
&= \mathcal{H}^1_\delta(A).
\end{aligned}$$

Από την άλλη, αν για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θέσουμε $I_k \equiv [k\delta, (k+1)\delta]$, έχουμε

$$\operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \delta \text{ και } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \operatorname{diam} C_j.$$

Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(A) &= \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \text{diam } C_j \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right\}\\ &\geq \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{diam}(C_j \cap I_k) \mid A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right\}\\ &\geq \mathcal{H}^1_\delta(A).\end{aligned}$$

Συνεπώς $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1_\delta$ για κάθε $\delta > 0$ κι επομένως $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ στο $\mathbb{R}^1$.

(iii) Έστω ακέραιος $m \geq 1$. Ο μοναδιαίος κύβος Q στο $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αναλυθεί σε m^n κύβους πλευράς $\frac{1}{m}$ και διαμέτρου $\frac{\sqrt{n}}{m}$. Τότε

$$\mathcal{H}^s_{\frac{\sqrt{n}}{m}}(Q) \leq \sum_{i=1}^{m^n} \alpha(s)\left(\frac{\sqrt{n}}{m}\right)^s = \alpha(s)\ n^{\frac{s}{2}}\ m^{n-s}.$$

Όμως για $s > n$, ο τελευταίος όρος τείνει στο 0 καθώς το $m \to \infty$. Άρα για $s > n$, έχουμε $\mathcal{H}^s(Q) = 0$ κι επομένως $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$.

Οι (iv) και (v) είναι εύκολες. ■

Λήμμα 3.1.6. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $0 \leq s < t < \infty$.*

(i) *Εάν $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, τότε $\mathcal{H}^t(A) = 0$.*

(ii) *Εάν $\mathcal{H}^t(A) > 0$, τότε $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$.*

Απόδειξη. (i) Έστω $\delta > 0$. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Τότε υπάρχουν $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ ώστε $\text{diam } C_j \leq \delta,\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ και

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\le \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(t) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^t \\
&= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)}\, 2^{s-t} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam } C_j}{2}\right)^s (\text{diam } C_j)^{t-s} \\
&\le \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)}\, 2^{s-t}\, \delta^{t-s}\, (\mathcal{H}^s(A) + 1).
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\delta \to 0$, έχουμε $\mathcal{H}^t(A) = 0$.

(ii) Έπεται από το (i). ■

3.2 Η ισοδιαμετρική ανισότητα, $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$

Στόχος μας σε αυτήν την ενότητα είναι να αποδείξουμε ότι $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ στο $\mathbb{R}^n$. Αυτό δεν είναι προφανές, καθώς ενώ το $\mathcal{L}^n$ ορίζεται ως το γινόμενο των n μονοδιάστατων μέτρων Lebesgue $\mathcal{L}^1$ ώστε

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \mid Q_i \text{ κύβοι},\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right\},$$

το $\mathcal{H}^n(A)$ υπολογίζεται συναρτήσει τυχόντων καλυμμάτων μικρής διαμέτρου.

Παρατήρηση 3.2.1. *Στον ορισμό του $\mathcal{L}^n$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα καλύμματα είναι ορθογώνια, κύβοι ή ακόμα και μπάλες (βλ. [7, Ενότητα 1.2]).*

Λήμμα 3.2.2. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε η περιοχή «κάτω από το γράφημα της f»,*

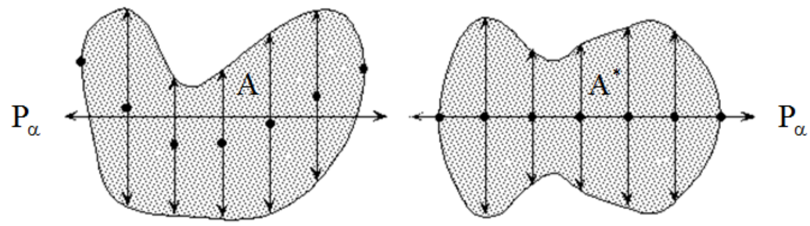
$$A \equiv \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R},\ 0 \le y \le f(x)\},$$

είναι $\mathcal{L}^{n+1}$ - μετρήσιμο σύνολο.

Απόδειξη. Έστω $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to [0, \infty]$ με $g(x, y) = f(x) - y$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}$. Τότε η g είναι $\mathcal{L}^{n+1}$ - μετρήσιμη και συνεπώς το

$$A = \{(x, y) \mid y \ge 0\} \cap \{(x, y) \mid g(x, y) \ge 0\}$$

είναι $\mathcal{L}^{n+1}$ - μετρήσιμο. ■



Σχήμα 6: Συμμετρικοποίηση Steiner

Συμβολισμός. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$. Συμβολίζουμε με*

$L_b^a \equiv \{b+ta \mid t \in \mathbb{R}\}$ *την ευθεία που περνάει από το b και έχει τη διεύθυνση του a,*

$P_a \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \cdot a = 0\}$ *το επίπεδο που επαληθεύεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο a.*

Ορισμός 3.2.3. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}^n$ με $|a| = 1$. Ορίζουμε τη συμμετρικοποίηση Steiner του A ως προς το επίπεδο P_a να είναι το σύνολο*

$$S_a(A) \equiv \bigcup_{\substack{b \in P_a \\ A \cap L_b^a \neq \emptyset}} \Big\{ b + ta \mid |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) \Big\}.$$

Λήμμα 3.2.4 (Ιδιότητες της συμμετρικοποίησης Steiner).
Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}^n$ με $|a| = 1$. Τότε

(i) *diam $S_a(A) \leq$ diam A.*

(ii) *Εάν το A είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο τότε και το $S_a(A)$ είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο και μάλιστα $\mathcal{L}^n(S(A)) = \mathcal{L}^n(A)$.*

Απόδειξη. (*i*) Εάν diam $A = \infty$, η ανισότητα ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι diam $A < \infty$. Υποθέτουμε επιπλέον, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι το A είναι κλειστό.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $x, y \in S_a(A)$ ώστε $\operatorname{diam} S_a(A) \le |x-y| + \varepsilon$. Γράφουμε $b \equiv x - (x \cdot a)a$ και $c \equiv y - (y \cdot a)a$. Τότε $b, c \in P_a$. Θέτουμε $r \equiv \inf\{t \mid b+ta \in A\}$, $s \equiv \sup\{t \mid b+ta \in A\}$, $u \equiv \inf\{t \mid c+ta \in A\}$, $\upsilon \equiv \sup\{t \mid c+ta \in A\}$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\upsilon - r \ge s - u$. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned} \upsilon - r &\ge \frac{1}{2}(\upsilon - r) + \frac{1}{2}(s-u) \\ &= \frac{1}{2}(s-r) + \frac{1}{2}(\upsilon - u) \\ &\ge \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_c^a) \\ &\ge |x \cdot a| + |y \cdot a| \\ &\ge |x \cdot a - y \cdot a|. \end{aligned}$$

Δηλαδή $\upsilon - r \ge |x \cdot a - y \cdot a|$. Επομένως υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (\operatorname{diam} S_a(A) - \varepsilon)^2 &\le |x-y|^2 \\ &= |b-c|^2 + |x \cdot a - y \cdot a|^2 \\ &\le |b-c|^2 + (\upsilon - r)^2 \\ &= |(b+ra) - (c+\upsilon a)|^2 \\ &\le (\operatorname{diam} A)^2. \end{aligned}$$

Το ε τυχόν, άρα $\operatorname{diam} S_a(A) \le \operatorname{diam} A$.

(ii) Υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $a = e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Τότε $P_a = P_{e_n} = \mathbb{R}^{n-1}$. Αφού $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ στο $\mathbb{R}^1$, από το Θεώρημα του Fubini έπεται ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ με $f(b) = \mathcal{H}^1(A \cap L_b^a)$ είναι $\mathcal{L}^{n-1}$ - μετρήσιμη και $\mathcal{L}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)\, db$. Άρα το

$$S_a(A) \equiv \left\{(b, y) \mid \frac{-f(b)}{2} \le y \le \frac{f(b)}{2}\right\} \setminus \left\{(b, 0) \mid L_b^a \cap A = \emptyset\right\}$$

είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο από το Λήμμα 3.2.2, και ισχύει

$$\mathcal{L}^n(S(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b)\, db = \mathcal{L}^n(A). \quad \blacksquare$$

Παρατήρηση 3.2.5. *Παρακάτω που θα αποδείξουμε ότι $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ στο $\mathbb{R}^n$, θα χρησιμοποιήσουμε το (ii) του Λήμματος 3.2.4 στην ειδική περίπτωση που το a είναι το κανονικό διάνυσμα. Αφού το $\mathcal{H}^n$ είναι προφανώς αναλλοίωτο στις περιστροφές, ουσιαστικά θα αποδείξουμε ότι και το $\mathcal{L}^n$ είναι αναλλοίωτο στις περιστροφές.*

Θεώρημα 3.2.6 (Ισοδιαμετρική ανισότητα). *Για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left(\frac{diam\ A}{2} \right)^n .$$

Παρατήρηση 3.2.7. *Η ισοδιαμετρική ανισότητα παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, καθώς το σύνολο A δεν περιέχεται κατ' ανάγκη σε μπάλα διαμέτρου $diam\ A$.*

Απόδειξη. Εάν $\operatorname{diam} A = \infty$, η ανισότητα ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\operatorname{diam} A < \infty$. Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $A_1 \equiv S_{e_1}(A)$, $A_2 \equiv S_{e_2}(A_1)$, $\dots$, $A_n \equiv S_{e_n}(A_{n-1})$. Γράφουμε $A^\star \equiv A_n$.

Ισχυρισμός 1: Το $A^\star$ είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Προφανώς το A_1 είναι συμμετρικό ως προς το P_{e_1}. Έστω $1 \leq k < n$. Υποθέτουμε ότι το A_k είναι συμμετρικό ως προς τα P_{e_1}, $\dots$, P_{e_k}. Προφανώς το $A_{k+1} = S_{e_{k+1}}(A_k)$ είναι συμμετρικό ως προς το $P_{e_{k+1}}$. Σταθεροποιούμε $1 \leq j \leq k$ και θεωρούμε την $S_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ανάκλαση ως προς το P_{e_j}. Έστω $b \in P_{e_{k+1}}$. Αφού $S_j(A_k) = A_k$,

$$\mathcal{H}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{H}^1(A_k \cap L_{S_j b}^{e_{k+1}}).$$

Συνεπώς

$$\{t \mid b + te_{k+1} \in A_{k+1}\} = \{t \mid S_j b + te_{k+1} \in A_{k+1}\}.$$

Δηλαδή $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$, που σημαίνει ότι το A_{k+1} είναι συμμετρικό ως προς το P_{e_j}. Έπεται ότι το $A^\star = A_n$ είναι συμμετρικό ως προς τα $P_{e_1}, \dots, P_{e_n}$, άρα και ως προς την αρχή των αξόνων. $\square$

Ισχυρισμός 2: $\mathcal{L}^n(A^\star) \leq \alpha(n) \left(\frac{\text{diam } A^\star}{2}\right)^n$.
Απόδειξη Ισχυρισμού 2: Έστω $x \in A^\star$. Τότε από τον Ισχυρισμό 1, $-x \in A^\star$ κι επομένως diam $A^\star \geq 2|x|$. Έχουμε δηλαδή ότι $A^\star \subset B\Big(0, \frac{\text{diam } A^\star}{2}\Big)$ και συνεπώς

$$\mathcal{L}^n(A^\star) \leq \mathcal{L}^n\left(B\left(0, \frac{\text{diam } A^\star}{2}\right)\right) = \alpha(n) \left(\frac{\text{diam } A^\star}{2}\right)^n. \ \square$$

Ισχυρισμός 3: $\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n)\Big(\frac{\text{diam } A}{2}\Big)^n$.
Απόδειξη Ισχυρισμού 3: Το $\bar{A}$ είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο, άρα από το Λήμμα 3.2.4 έχουμε

$$\mathcal{L}^n((\bar{A})^\star) = \mathcal{L}^n(\bar{A}) \text{ και diam } (\bar{A})^\star \leq \text{diam } \bar{A}.$$

Υπολογίζουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(A) &\leq \mathcal{L}^n(\bar{A}) \\ &= \mathcal{L}^n((\bar{A})^\star) \\ &\leq \alpha(n) \left(\frac{\text{diam } (\bar{A})^\star}{2}\right)^n \text{ από τον Ισχυρισμό 2} \\ &\leq \alpha(n) \left(\frac{\text{diam } \bar{A}}{2}\right)^n \\ &= \alpha(n) \left(\frac{\text{diam } A}{2}\right)^n. \ \square \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.2.8. *$\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ στο $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. *Ισχυρισμός 1:* $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Έστω $\delta > 0$. Επιλέγουμε σύνολα $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ ώστε $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ και $\operatorname{diam} C_j \leq \delta$. Τότε, από την ισοδιαμετρική ανισότητα, έχουμε

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(C_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam} C_j}{2} \right)^n.$$

Παίρνοντας infimum ως προς τα $\{C_j\}_{j=1}^{\infty}$ έχουμε $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n_\delta(A)$, άρα και

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A). \quad \square$$

Από τον ορισμό του $\mathcal{L}^n$ ως $\mathcal{L}^1 \times \cdots \times \mathcal{L}^1$, παρατηρούμε ότι για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ και $\delta > 0$,

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \mid Q_i \text{ κύβοι}, \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \ \operatorname{diam} Q_i \leq \delta \right\}.$$

Στο εξής θα θεωρούμε ότι οι κύβοι είναι παράλληλοι στους άξονες συντεταγμένων του $\mathbb{R}^n$.

Ισχυρισμός 2: Το $\mathcal{H}^n$ είναι απόλυτα συνεχές ως προς το $\mathcal{L}^n$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2: Θέτουμε $C_n \equiv \alpha(n) \left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^n$. Τότε για κάθε κύβο $Q \subset \mathbb{R}^n$ έχουμε $\alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam} Q}{2}\right)^n = C_n \, \mathcal{L}^n(Q)$. Άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^n_\delta(A) &\leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam} Q_i}{2} \right)^n \mid \ Q_i \text{ κύβοι}, \ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \ \operatorname{diam} Q_i \leq \delta \right\} \\ &= C_n \, \mathcal{L}^n(A). \end{aligned}$$

Για $\delta \to 0$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Ισχυρισμός 3: $\mathcal{H}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(A)$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 3: Έστω $\delta > 0$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε κύβους $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$

ώστε

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i, \ \operatorname{diam} Q_i \leq \delta \text{ και } \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.$$

Από το Θεώρημα 2.6.3, για κάθε i υπάρχει αριθμήσιμη ακολουθία ξένων συνόλων $\{B_k^i\}_{k=1}^{\infty}$ στο Q_i^o ώστε

$$\operatorname{diam} B_k^i \leq \delta \text{ και } \mathcal{L}^n\Big(Q_i \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\Big) = \mathcal{L}^n\Big(Q_i^o \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\Big) = 0.$$

Τότε από τον Ισχυρισμό 2 έχουμε

$$\mathcal{H}^n\Big(Q_i \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\Big) = 0.$$

Άρα υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_\delta^n(A) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(Q_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(B_k^i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam} B_k^i}{2}\right)^n = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_k^i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Το ε τυχόν, άρα έχουμε το ζητούμενο. □ ■

4 Συναρτήσεις Lipschitz

Στην ενότητα 4.1 ορίζουμε τις συναρτήσεις Lipschitz και αποδεικνύουμε ένα Θεώρημα επέκτασης αυτών. Εν συνεχεία, στην ενότητα 4.2 αποδεικνύουμε ένα βασικό Θεώρημα που συνδέει τις Lipschitz συναρτήσεις με τα μέτρα Hausdorff. Ολοκληρώνουμε το κεφάλαιο με την απόδειξη του Θεωρήματος του Rademacher στην ενότητα 4.3.

4.1 Ορισμοί, Θεώρημα επέκτασης

Ορισμοί 4.1.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^m$.*

(i) *Η f λέγεται Lipschitz εάν υπάρχει σταθερά C ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq C\ |x - y| \tag{4.1.1}$$

για κάθε $x,\ y \in A$. Η μικρότερη σταθερά C που ικανοποιεί την (4.1.1) *για κάθε $x,\ y \in A$ συμβολίζεται ως:*

$$Lip(f) \equiv \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}\ \mid\ x,\ y \in A,\ x \neq y\right\}.$$

(ii) *Η f λέγεται τοπικά Lipschitz εάν για κάθε συμπαγές $K \subset A$ υπάρχει σταθερά C_K ώστε*

$$|f(x) - f(y)| \leq C_K\ |x - y|$$

για κάθε $x,\ y \in K$.

Θεώρημα 4.1.2 (Επέκταση των Lipschitz συναρτήσεων).
Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^m$ συνάρτηση Lipschitz. Τότε υπάρχει συνάρτηση Lipschitz $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ώστε

(i) $\bar{f} = f$ *στο* A,

(ii) $Lip(\bar{f}) \leq \sqrt{m}\ Lip(f)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε αρχικά ότι $f : A \to \mathbb{R}$.
Ορίζουμε $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\bar{f}(x) \equiv \inf_{a\in A}\{f(a) + \mathrm{Lip}(f)\ |x-a|\}$. Η $\bar{f}$ είναι Lipschitz: Πράγματι, για x, $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\bar{f}(x) \leq \inf_{a\in A}\{f(a) + \mathrm{Lip}(f)\ (|y-a| + |x-y|)\} = \bar{f}(y) + \mathrm{Lip}(f)\ |x-y| \quad (4.1.2)$$

και

$$\bar{f}(y) \leq \inf_{a\in A}\{f(a) + \mathrm{Lip}(f)\ (|x-a| + |x-y|)\} = \bar{f}(x) + \mathrm{Lip}(f)\ |x-y|. \quad (4.1.3)$$

Από τις (4.1.2) και (4.1.3) προκύπτει ότι

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| \leq \mathrm{Lip}(f)\ |x-y|.$$

Θα δείξουμε ότι $\bar{f} = f$ στο A: Έστω $b \in A$. Τότε για κάθε $a \in A$,

$$f(a) + \mathrm{Lip}(f)\ |b-a| \geq f(b).$$

Συνεπώς $\bar{f}(b) \geq f(b)$. Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρούμε ότι για $a = b$, έχουμε

$$f(b) + \mathrm{Lip}(f)\ |b-b| \leq f(b).$$

Συνεπώς και

$$\bar{f}(b) = \inf_{a\in A}\{f(a) + \mathrm{Lip}(f)\ |b-a|\} \leq f(b).$$

Στη γενική περίπτωση που $f : A \to \mathbb{R}^m$, θεωρούμε $f = (f^1, ..., f^m)$ και ορίζουμε $\bar{f} \equiv (\bar{f^1}, ..., \bar{f^m})$. Τότε

$$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\bar{f}^i(x) - \bar{f}^i(y)|^2 \leq m\ (\mathrm{Lip}(f))^2\ |x-y|^2. \quad \blacksquare$$

4.2 Συναρτήσεις Lipschitz και μέτρο Hausdorff

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ συνάρτηση Lipschitz, $A \subset \mathbb{R}^n$ και $0 \leq s < \infty$. Τότε*

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq (Lip(f))^s \ \mathcal{H}^s(A).$$

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Επιλέγουμε σύνολα $\{C_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\operatorname{diam} C_i \leq \delta \text{ και } A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Τότε

$$\operatorname{diam} f(C_i) \leq \operatorname{Lip}(f) \operatorname{diam} C_i \leq \operatorname{Lip}(f)\ \delta$$

και

$$f(A) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} f(C_i).$$

Άρα

$$\mathcal{H}^s_{\operatorname{Lip}(f)\ \delta}(f(A)) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} f(C_i)}{2}\right)^s \leq (\operatorname{Lip}(f))^s \ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam} C_i}{2}\right)^s.$$

Παίρνοντας infimum ως προς τα $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$, έχουμε

$$\mathcal{H}^s_{\operatorname{Lip}(f)\ \delta}(f(A)) \leq (\operatorname{Lip}(f))^s \ \mathcal{H}^s_{\delta}(A).$$

Για $\delta \to 0$, παίρνουμε το ζητούμενο. ■

Πόρισμα 4.2.2. *Έστω $n > k$ και $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ η συνήθης προβολή. Τότε για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$ και $0 \leq s < \infty$,*

$$\mathcal{H}^s(P(A)) \leq \mathcal{H}^s(A).$$

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από το Θεώρημα 4.2.1, καθώς $\operatorname{Lip}(P) = 1$. ■

4.3 Το Θεώρημα του Rademacher

Ορισμός 4.3.1. *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται διαφορίσιμη στο $x \in \mathbb{R}^n$ εάν υπάρχει γραμμική απεικόνιση*

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

ώστε

$$\lim_{y \to x} \frac{|f(y) - f(x) - L(y-x)|}{|x-y|} = 0$$

ή ισοδύναμα

$$f(y) = f(x) + L(y-x) + o(|y-x|) \text{ καθώς } y \to x.$$

Συμβολισμός. *Εάν υπάρχει γραμμική απεικόνιση L που να ικανοποιεί τα παραπάνω, τότε αυτή είναι μοναδική και τη συμβολίζουμε ως $Df(x)$.*
Λέμε ότι η $Df(x)$ είναι η παράγωγος της f στο x.

Θεώρημα 4.3.2 (Rademacher). *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τοπικά Lipschitz συνάρτηση. Τότε η f είναι διαφορίσιμη $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι η f είναι Lipschitz και $m = 1$. Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα 1ο: Έστω $u \in \partial B(0,1) \equiv \{v \in \mathbb{R}^n \text{ με } |v| = 1\}$. Για κάθε $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ορίζουμε $g_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$g_t(x) \equiv \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

και

$$D_u f(x) \equiv \lim_{t \to 0} g_t(x),$$

εφόσον αυτό υφίσταται. Θα δείξουμε ότι το $D_u f(x)$ υπάρχει $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε $t \neq 0$, η g_t είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμη ως Lipschitz. Έπεται ότι για κάθε $t \neq 0$, και οι $\underline{g} \equiv \liminf_{t\to 0} g_t$, $\overline{g} \equiv \limsup_{t\to 0} g_t$ είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμες. Συνεπώς το

$$A_u \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{δεν υπάρχει το } D_u f(x)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underline{g}(x) < \overline{g}(x)\}$$

είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathcal{L}^n(A_u) = 0$.
Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\varphi(\lambda) = f(x + \lambda u).$$

Τότε η f είναι Lipschitz και άρα διαφορίσιμη $\mathcal{H}^1$ - σχεδόν παντού. Επομένως υπάρχει η

$$\begin{aligned}
\varphi'(\lambda) &= \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\lambda+h) - \varphi(\lambda)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + (\lambda+h)u) - f(x+\lambda u)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f((x+\lambda u) + hu) - f(x+\lambda u)}{h} \\
&= D_u f(x+\lambda u)
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}^1$ - σχεδόν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, το $D_u f(y)$ υπάρχει $\mathcal{H}^1$ - σχεδόν για κάθε y στην ευθεία $\{x + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ και αφού το x τυχόν, το συμπέρασμα έπεται για κάθε ευθεία L παράλληλη στο u. Δηλαδή έχουμε ότι

$$\mathcal{H}^1(A_u \cap L) = 0$$

για κάθε ευθεία L παράλληλη στο u. Από το Θεώρημα του Fubini έπεται ότι

$$\mathcal{L}^n(A_u) = 0.$$

Άμεση συνέπεια αυτού είναι ότι το $gradf(x) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ υπάρχει $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού.

Βήμα 2ο: Θα δείξουμε ότι για κάθε $u \in \partial B(0,1)$ ισχύει $D_u f(x) = u \cdot gradf(x)$. Πράγματι, έστω $u = (u_1, \dots, u_n) \in \partial B(0,1)$. Θεωρούμε τυχούσα C^∞ - συνάρτηση $\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα. Τότε για κάθε $t = \frac{1}{k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ και $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\left| \frac{f(x + \frac{1}{k}u) - f(x)}{\frac{1}{k}} \right| \leq \text{Lip } (f) \text{ και } |\zeta(x)| \leq \sup\{|\zeta(x)| \mid x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Άρα από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και αλλαγή μεταβλητών,

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_u f(x) \cdot \zeta(x)\, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot D_u \zeta(x)\, dx. \tag{4.3.1}$$

Από το Θεώρημα του Fubini και ολοκληρώνοντας κατά μέρη στο $\mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot D_u \zeta(x)\, dx &= - \sum_{i=1}^{n} u_i \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x_i}(x)\, dx \\ &= \sum_{i=1}^{n} u_i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \zeta(x)\, dx \qquad (4.3.2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u \cdot gradf(x))\, \zeta(x)\, dx. \end{aligned}$$

Από (4.3.1), (4.3.2) και το γεγονός ότι η ζ τυχούσα, έπεται ότι

$$D_u f(x) = u \cdot gradf(x) \;\; \mathcal{L}^n \text{ - σχεδόν παντού.}$$

Βήμα 3ο: Θα δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού.
Έστω $\Delta = \{u_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $\partial B(0,1)$.

Ισχυρισμός 1: Για κάθε $\eta > 0$ υπάρχει πεπερασμένο $\Delta_\eta \subset \Delta$ το οποίο είναι η - πυκνό στον $\partial B(0,1)$.
Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Έστω $\eta > 0$. Ο $\partial B(0,1)$ είναι ολικά φραγμένος, επομένως υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \dots, x_m \in \partial B(0,1)$ ώστε

$$\partial B(0,1) = B\Big(x_1, \frac{\eta}{2}\Big) \cup \cdots \cup B\Big(x_m, \frac{\eta}{2}\Big).$$

Αφού το Δ είναι πυκνό, για κάθε $i = 1, \ldots, m$ μπορούμε να βρούμε $z_i \in \Delta$ ώστε $|x_i - z_i| < \frac{\eta}{2}$. Ορίζουμε $\Delta_\eta \equiv \{z_1, \ldots, z_m\}$. Τότε το Δ_η είναι πεπερασμένο υποσύνολο του Δ και για κάθε $x \in \partial B(0,1)$ υπάρχει $i \leq m$ ώστε $x \in B(x_i, \frac{\eta}{2})$. Δηλαδή $|x - z_i| \leq |x - x_i| + |x_i - z_i| < \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta$. Συνεπώς το Δ_η είναι η - πυκνό στον $\partial B(0,1)$. $\square$

Θέτουμε

$$A_k \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{υπάρχουν οι } D_{u_k} f(x) \text{ και } gradf(x),\ D_{u_k} f(x) = u_k \cdot gradf(x)\}$$

για $k \in \mathbb{N}$ και θεωρούμε την τομή $A \equiv \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Τότε

$$\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο A.

Πράγματι, έστω $x \in A$. Για κάθε $u \in \partial B(0,1)$ και $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ γράφουμε

$$Q(x,u,t) \equiv \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} - u \cdot gradf(x).$$

Εάν $v, w \in \partial B(0,1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} |Q(x,v,t) - Q(x,w,t)| &\leq \left| \frac{f(x+tv) - f(x+tw)}{t} \right| + |(v-w) \cdot gradf(x)| \\ &\leq \mathrm{Lip}(f)\ |v-w| + |gradf(x)|\ |v-w| \\ &\leq (\sqrt{n}+1) \cdot \mathrm{Lip}(f)\ |v-w|. \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον Ισχυρισμό 1 συνάγουμε ότι για κάθε $u \in \partial B(0,1)$ υπάρχει $u_k \in \Delta_\eta$ $(k = 1, \ldots, m(\eta))$ ώστε $|u - u_k| < \eta$.

Θέτουμε

$$\eta = \frac{\varepsilon}{2\ (1+\sqrt{n})\ \mathrm{Lip}(f)}.$$

Τότε από την (4.3.3), για κάθε $u \in \partial B(0,1)$ μπορούμε να βρούμε $u_k \in \Delta_\eta$ $(k = 1, \ldots, m)$ ώστε

$$|Q(x,u,t) - Q(x,u_k,t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.3.4}$$

Επιπλέον, αφού $x \in A$, έχουμε ότι $\lim_{t\to 0} Q(x,u_k,t) = 0$ $(k = 1,\dots,m)$. Δηλαδή για κάθε $u_k \in \Delta_\eta$ υπάρχει $\delta_k > 0$ ώστε αν $0 < |t| < \delta_k$, τότε

$$|Q(x,u_k,t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.3.5}$$

Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_k \mid u_k \in \Delta_\eta\}$. Τότε από τις (4.3.4) και (4.3.5) για κάθε $u \in \partial B(0,1)$ και $0 < |t| < \delta$ υπάρχει $k \in \{1,\dots,m\}$ ώστε

$$|Q(x,u,t)| \leq |Q(x,u_k,t)| + |Q(x,u,t) - Q(x,u_k,t)| < \varepsilon.$$

Επιλέγοντας $y \in \mathbb{R}^n$ με $y \neq x$, μπορούμε να γράψουμε $u \equiv \frac{y-x}{|y-x|}$ ώστε $y = x + tu$, όπου $t \equiv |x-y|$. Τότε, έχουμε

$$f(y) - f(x) - gradf(x)\ (y-x) = f(x+tu) - f(x) - tu \cdot gradf(x) = o(|x-y|)$$

καθώς $y \to x$. Συνεπώς η f είναι διαφορίσιμη στο x με $Df(x) = gradf(x)$. Το x τυχόν, άρα το συμπερασμα έπεται για κάθε $x \in A$. ■

Πόρισμα 4.3.3. *(i) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ τοπικά Lipschitz συνάρτηση και*

$$Z \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}.$$

Τότε $Df(x) = 0$ για $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν κάθε $x \in Z$.

(ii) Έστω $f,\ g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz συναρτήσεις και

$$Y \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(f(x)) = x\}.$$

Τότε $Dg(f(x))\ Df(x) = I$ για $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν κάθε $x \in Y$.

Απόδειξη. (i) Υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $m = 1$.

Επιλέγουμε $x \in Z$ τέτοιο ώστε να υπάρχει η $Df(x)$ και επιπλέον

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(Z \cap B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = 1 \tag{4.3.6}$$

(από το Θεώρημα 2.5.5 το εξασφαλίζουμε για $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν κάθε $x \in Z$). Τότε

$$f(y) = Df(x) \cdot (y-x) + o(|y-x|) \text{ καθώς } y \to x. \tag{4.3.7}$$

Έστω ότι $Df(x) \equiv a \neq 0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$S \equiv \{u \mid |u| = 1 \text{ και } a \cdot u \geq \frac{1}{2}|a|\}.$$

Τότε για κάθε $u \in S$ και $t > 0$, εάν θέσουμε $y = x + tu$ στην (4.3.7), έχουμε

$$f(x + tu) = a \cdot tu + o(|tu|) \geq \frac{t|a|}{2} + o(t)$$

καθώς $t \to 0$. Δηλαδή υπάρχει $t_0 > 0$ ώστε $f(x+tu) > 0$ για $0 < t < t_0$, $u \in S$. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την (4.3.6). Άρα $Df(x) = 0$.

(ii) Ορίζουμε:

dmn$Df \equiv \{x \mid$ υπάρχει η $Df(x)\}$ και dmn$Dg \equiv \{x \mid$ υπάρχει η $Dg(x)\}$.

Εάν

$$X \equiv Y \cap \mathrm{dmn}Df \cap f^{-1}(\mathrm{dmn}Dg),$$

τότε

$$Y \setminus X \subset (\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{dmn}Df) \cup g(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{dmn}Dg). \tag{4.3.8}$$

Αυτό έπεται από το γεγονός του ότι εάν

$$x \in Y \setminus f^{-1}(\mathrm{dmn}Dg),$$

τότε

$$f(x) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{dmn}Dg,$$

και άρα

$$x = g(f(x)) \in g(\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{dmn}Dg).$$

Όμως από την (4.3.8) και το Θεώρημα του Rademacher έπεται ότι

$$\mathcal{L}^n(Y \setminus X) = 0.$$

Τώρα εάν $x \in X$, οι $Dg(f(x))$ και $Df(x)$ υπάρχουν κι επομένως η

$$Dg(f(x))\ Df(x) = D(g \circ f)(x)$$

υπάρχει. Αφού $(g \circ f)(x) - x = 0$ στο Y, από το (i) έπεται ότι

$$D(g \circ f) = I \quad \mathcal{L}^n \text{ - σχεδόν παντού στο } Y. \quad \blacksquare$$

5 Γραμμικές απεικονίσεις και Ιακωβιανές

Ξεκινάμε το κεφάλαιο διατυπώνοντας κάποιους ορισμούς και βασικές ιδιότητες των γραμμικών απεικονίσεων στην ενότητα 5.1. Στην ενότητα 5.2 ορίζουμε τις Ιακωβιανές και διατυπώνουμε το Θεώρημα των Binet - Cauchy.

5.1 Γραμμικές απεικονίσεις, Πολική αποσύνθεση

Ορισμοί 5.1.1. (*i*) *Μια γραμμική απεικόνιση* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *λέγεται ορθογώνια εάν* $(Ox) \cdot (Oy) = x \cdot y$ *για κάθε* $x,\, y \in \mathbb{R}^n$.

(*ii*) *Μια γραμμική απεικόνιση* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *λέγεται συμμετρική εάν* $x \cdot (Sy) = (Sx) \cdot y$ *για κάθε* $x,\, y \in \mathbb{R}^n$.

(*iii*) *Μια γραμμική απεικόνιση* $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *λέγεται διαγώνια εάν υπάρχουν* $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ *ώστε* $Dx = (d_1x_1, \ldots, d_nx_n)$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$.

(*iv*) *Έστω γραμμική απεικόνιση* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Η γραμμική απεικόνιση* $A^\star : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *που ορίζεται από τη σχέση* $x \cdot (A^\star y) = (Ax) \cdot y$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, *λέγεται συζυγής της* A.

Θεώρημα 5.1.2 (Γραμμική άλγεβρα).

(*i*) *Αν* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *γραμμική απεικόνιση, τότε*

$$A^{\star\star} = A.$$

(*ii*) *Αν* $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *και* $B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *γραμμικές απεικονίσεις, τότε*

$$(A \circ B)^\star = B^\star \circ A^\star.$$

(*iii*) *Αν* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ορθογώνια, τότε*

$$O^\star = O^{-1}.$$

(*iv*) *Αν* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *συμμετρική, τότε*

$$S^\star = S.$$

(*v*) *Έστω* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *συμμετρική. Τότε υπάρχουν* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *ορθογώνια και* $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *διαγώνια, ώστε*

$$S = O \circ D \circ O^{-1}.$$

(*vi*) *Αν* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ορθογώνια, τότε* $n \leq m$ *και*

$$O^\star \circ O = I \text{ στο } \mathbb{R}^n,$$

$$O \circ O^\star = I \text{ στο } O(\mathbb{R}^n).$$

Θεώρημα 5.1.3 (Πολική αποσύνθεση). *Έστω* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *γραμμική απεικόνιση.*

(*i*) *Εάν* $n \leq m$*, τότε υπάρχουν συμμετρική* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *και ορθογώνια* $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ώστε*

$$L = O \circ S.$$

(*ii*) *Εάν* $n \geq m$*, τότε υπάρχουν συμμετρική* $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *και ορθογώνια* $O : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *ώστε*

$$L = S \circ O^\star.$$

Απόδειξη. (*i*) Έστω $n \leq m$. Θέτουμε $C \equiv L^\star \circ L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Τότε

$$(Cx) \cdot y = (L^\star \circ Lx) \cdot y = Lx \cdot Ly = x \cdot L^\star \circ Ly = x \cdot Cy.$$

Επιπλέον

$$(Cx) \cdot x = Lx \cdot Lx \geq 0.$$

Δηλαδή η C είναι συμμετρική και μη αρνητική. Επομένως υπάρχουν μη αρνητικοί $\mu_1, \ldots, \mu_n$ και $\{x_k\}_{k=1}^n$ ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^n$ ώστε

$$Cx_k = \mu_k \cdot x_k \ (k = 1, \ldots, n).$$

Γράφουμε $\mu_k \equiv {\lambda_k}^2$, όπου $\lambda_k \geq 0$, και ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $\{z_k\}_{k=1}^n$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^m$ ώστε $Lx_k = \lambda_k \cdot x_k$. Πράγματι, εάν $\lambda_k \neq 0$, ορίζουμε $z_k \equiv \frac{1}{\lambda_k} Lx_k$ και τότε για $\lambda_k, \lambda_l \neq 0$ έχουμε

$$z_k \cdot z_l = \frac{1}{\lambda_k \cdot \lambda_l} Lx_k \cdot Lx_l = \frac{1}{\lambda_k \cdot \lambda_l} (Cx_k) \cdot x_l = \frac{{\lambda_k}^2}{\lambda_k \cdot \lambda_l} x_k \cdot x_l = \frac{\lambda_k}{\lambda_l} \delta_{kl}.$$

Δηλαδή το σύνολο $\{z_k \mid \lambda_k \neq 0\}$ είναι ορθοκανονικό. Στην περίπτωση που $\lambda_k = 0$, ορίζουμε ως z_k οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα ώστε η $\{z_k\}_{k=1}^n$ να είναι ορθοκανονική.

Πλέον μπορούμε να ορίσουμε τις $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$Sx_k = \lambda_k \cdot x_k \ (k = 1, \ldots, n)$$

και $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με

$$Ox_k = z_k \ (k = 1, \ldots, n).$$

Τότε

$$O \circ Sx_k = \lambda_k \cdot Ox_k = \lambda_k \cdot z_k = Lx_k$$

και συνεπώς

$$L = O \circ S.$$

Η απεικόνιση S είναι προφανώς συμμετρική και η O είναι ορθογώνια αφού

$$Ox_k \cdot Ox_l = z_k \cdot z_l = \delta_{kl}.$$

(ii) Έπεται άμεσα από το (i) εάν εφαρμοστεί για την $L^\star : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. ■

5.2 Ιακωβιανές, το Θεώρημα των Binet - Cauchy

Ορισμός 5.2.1. *Έστω* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *γραμμική απεικόνιση.*

(*i*) *Εάν* $n \leq m$, *γράφουμε* $L = O \circ S$ *(Θεώρημα 5.1.3) και ορίζουμε την Ιακωβιανή της* L *να είναι*

$$[\![L]\!] = |det\ S|.$$

(*ii*) *Εάν* $n \geq m$, *γράφουμε* $L = S \circ O^\star$ *(Θεώρημα 5.1.3) και ορίζουμε την Ιακωβιανή της* L *να είναι*

$$[\![L]\!] = |det\ S|.$$

Παρατηρήσεις 5.2.2. (*i*) *Παρατηρούμε ότι* $[\![L]\!] = [\![L^\star]\!]$.

(*ii*) *Από το Θεώρημα 5.2.3 προκύπτει ότι ο ορισμός του* $[\![L]\!]$ *είναι ανεξάρτητος από την επιλογή των απεικονίσεων* O *και* S.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *γραμμική απεικόνιση.*

(*i*) *Εάν* $n \leq m$,

$$[\![L]\!]^2 = det(L^\star \circ L).$$

(*ii*) *Εάν* $n \geq m$,

$$[\![L]\!]^2 = det(L \circ L^\star).$$

Απόδειξη. (*i*) Από το Θεώρημα 5.1.3 μπορούμε να γράψουμε $L = O \circ S$, όπου $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρική και $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ορθογώνια. Τότε $L^\star = S^\star \circ O^\star = S \circ O^\star$. Άρα $L^\star \circ L = S \circ O^\star \circ O \circ S = S^2$. Συνεπώς $\det(L^\star \circ L) = (\det\ S)^2 = [\![L]\!]^2$.

(*ii*) Αποδεικνύεται με την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε στο (*i*). ■

Ορισμοί 5.2.4. *(i) Εάν $n \leq m$, ορίζουμε*

$$\Lambda(m,n) = \{\lambda : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,m\} \mid \lambda \text{ αύξουσα}\}.$$

(ii) Για κάθε $\lambda \in \Lambda(m,n)$ ορίζουμε $P_\lambda : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ με

$$P_\lambda(x_1,\dots,x_m) \equiv (x_{\lambda(1)},\dots,x_{\lambda(n)}).$$

Θεώρημα 5.2.5 (Binet - Cauchy). *Έστω $n \leq m$ και $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση. Τότε*

$$[\![L]\!]^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda(m,n)} (det(P_\lambda \circ L))^2.$$

Παρατήρηση 5.2.6. *Το Θεώρημα των Binet - Cauchy μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το $[\![L]\!]^2$, υπολογίζοντας τα τετράγωνα των οριζουσών των $(n\times n)$ - υποπινακών του $(m \times n)$ - πίνακα που αντιστοιχεί στην L (ως προς τις κανονικές βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$). Κατά κάποιον τρόπο αποτελεί μια μεγαλύτερης διάστασης εκδοχή του Πυθαγορείου Θεωρήματος.*

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ συνάρτηση Lipschitz. Από το Θεώρημα του Rademacher η f είναι διαφορίσιμη $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού. Επομένως η $Df(x)$ υπάρχει $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και μπορεί να θεωρηθεί ως μια γραμμική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^m$.

Συμβολισμός. *Εάν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $f = (f^1,\dots,f^m)$, γράφουμε τον πίνακα κλίσης*

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

σε κάθε σημείο που υπάρχει η Df.

Ορισμός 5.2.7. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ συνάρτηση Lipschitz. Για $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν κάθε x ορίζουμε την Ιακωβιανή της f να είναι*

$$Jf(x) \equiv [\![Df(x)]\!].$$

6 Οι τύποι Area και Coarea

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε τους τύπους Area και Coarea. Θεωρούμε στο εξής ότι οι n, N είναι φυσικοί αριθμοί με $n \leq N$.

6.1 Ο τύπος Area

Λήμμα 6.1.1. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ και $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ ορθογώνια απεικόνιση. Τότε*

$$\mathcal{H}^n(O(A)) = \mathcal{H}^n(A).$$

Απόδειξη. Η $O : \mathbb{R}^n \to O(\mathbb{R}^n)$ είναι ισομετρία, επομένως ο $O(\mathbb{R}^n)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^N$ διάστασης n. Αφού το μέτρο Hausdorff είναι αναλλοίωτο στις ισομετρίες, έχουμε $\mathcal{H}^n(O(A)) = \mathcal{H}^n(A)$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$. ■

Λήμμα 6.1.2. *Έστω $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ γραμμική απεικόνιση, με $[\![L]\!] > 0$. Θεωρούμε το $\nu(A) \equiv \mathcal{H}^n(L(A))$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$. Τότε το ν είναι Radon μέτρο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε βήματα.

Βήμα 1ο: Θα δείξουμε ότι το ν είναι μέτρο.

Πράγματι έχουμε

$$\nu(\emptyset) = \mathcal{H}^n(L(\emptyset)) = \mathcal{H}^n(\emptyset) = 0$$

και αν $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$, τότε

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathcal{H}^n\left(L\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = \mathcal{H}^n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} L(A_i)\right) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(L(A_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i).\end{aligned}$$

Βήμα 2ο: Θα δείξουμε ότι το ν είναι Borel μέτρο.

Από το Θεώρημα 5.1.3 μπορούμε να γράψουμε

$$L = O \circ S$$

για $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ ορθογώνια και $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρική. Τότε

$$[\![L]\!] = |\det S| > 0.$$

Έστω $B \subset \mathbb{R}^n$ σύνολο Borel. Τότε για κάθε $X \subset \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
&\nu(X \cap B) + \nu(X \setminus B) \\
&= \mathcal{H}^n(L(X \cap B)) + \mathcal{H}^n(L(X \setminus B)) \\
&= \mathcal{H}^n(O \circ S(X \cap B)) + \mathcal{H}^n(O \circ S(X \setminus B)) \\
&= \mathcal{H}^n(S(X \cap B)) + \mathcal{H}^n(S(X \setminus B)) \text{ από το Λήμμα 6.1.1} \\
&= \mathcal{L}^n(S(X \cap B)) + \mathcal{L}^n(S(X \setminus B)) \text{ από το Θεώρημα 3.2.8} \\
&= \mathcal{L}^n(S(X) \cap S(B)) + \mathcal{L}^n(S(X) \setminus S(B)) \\
&= \mathcal{L}^n(S(X)) \text{ αφού το } S(B) \text{ είναι Borel} \\
&= \mathcal{L}^n(O \circ S(X)) \text{ από το Λήμμα 6.1.1} \\
&= \mathcal{L}^n(L(X)) = \nu(X).
\end{aligned}$$

Βήμα 3ο: Θα δείξουμε ότι το ν είναι Borel κανονικό μέτρο.

Θεωρούμε ότι $L = O \circ S$ ως ανωτέρω. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^n$ σύνολο Borel ώστε $S(A) \subset \tilde{B}$ και $\mathcal{L}^n(\tilde{B}) = \mathcal{L}^n(S(A))$. Θέτουμε $B \equiv S^{-1}(\tilde{B})$. Τότε το B είναι Borel, $A \subset B$ και

$$\nu(A) = \mathcal{H}^n(L(A)) = \mathcal{H}^n(O \circ S(A)) = \mathcal{L}^n(S(A)) = \mathcal{L}^n(\tilde{B}) = \mathcal{L}^n(S(B)) = \nu(B).$$

Βήμα 4ο: Θα δείξουμε ότι το ν είναι Radon μέτρο.

Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε

$$\nu(K) = \mathcal{H}^n(L(K)) = \mathcal{H}^n(O \circ S(K)) = \mathcal{L}^n(S(K)) < \infty. \quad \blacksquare$$

Λήμμα 6.1.3. *Έστω $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ γραμμική απεικόνιση. Τότε*

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = [\![L]\!]\ \mathcal{L}^n(A)$$

για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 6.1.4. *Παρατηρούμε ότι το Λήμμα 6.1.3 αποτελεί, κατά κάποιον τρόπο, τον τύπο Area για γραμμικές απεικονίσεις (εδώ το A δεν είναι κατ' ανάγκη $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο).*

Απόδειξη. Γράφουμε $L = O \circ S$, όπου $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ ορθογώνια και $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρική (Θεώρημα 5.1.3), και διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Περίπτωση 1: $[\![L]\!] = 0$.

  Τότε $|\det S| = [\![L]\!] = 0$. Έπεται ότι $\dim S(\mathbb{R}^n) \leq n-1$ κι επομένως $\dim L(\mathbb{R}^n) \leq n-1$. Τότε έχουμε $\mathcal{H}^n(L(\mathbb{R}^n)) = 0$.

- Περίπτωση 2: $[\![L]\!] > 0$.

  Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{H}^n(L(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} &= \frac{\mathcal{H}^n(O \circ S(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n((B(x,r)))} \\
&= \frac{\mathcal{H}^n(S(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \text{ από το Λήμμα 6.1.1} \\
&= \frac{\mathcal{L}^n(S(B(x,r)))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \text{ από το Θεώρημα 3.2.8} \\
&= \frac{\mathcal{L}^n(S(B(0,1)))}{\alpha(n)} = |\det S| = [\![L]\!].
\end{aligned}$$

  Θεωρούμε το $\nu(A) \equiv \mathcal{H}^n(L(A))$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$. Από το Λήμμα 6.1.2 το ν είναι Radon μέτρο. Επιπλέον $\nu \ll \mathcal{L}^n$ και

$$D_{\mathcal{L}^n}\nu(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} = [\![L]\!]$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Από το Θεώρημα 2.5.3 έχουμε ότι

$$\mathcal{H}^n(L(B)) = [\![L]\!]\ \mathcal{L}^n(B)$$

για κάθε Borel $B \subset \mathbb{R}^n$. Τα ν, $\mathcal{L}^n$ είναι Radon μέτρα, συνεπώς η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$. ■

Παρατήρηση 6.1.5. *Στο τελευταίο επιχείρημα της απόδειξης χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι δύο Borel κανονικά μέτρα ταυτίζονται στο $\mathbb{R}^n$ εάν ταυτίζονται στα Borel σύνολα του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, έστω μ_1 και μ_2 Borel κανονικά μέτρα στο $\mathbb{R}^n$ και $A \subset \mathbb{R}^n$. Υπάρχει Borel σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ ώστε $A \subset B$ και $\mu_1(A) = \mu_1(B)$. Τότε $\mu_1(A) = \mu_1(B) = \mu_2(B) \geq \mu_2(A)$. Ομοίως υπάρχει Borel σύνολο $\tilde{B} \subset \mathbb{R}^n$ ώστε $A \subset \tilde{B}$ και $\mu_2(A) = \mu_2(\tilde{B})$. Τότε $\mu_2(A) = \mu_2(\tilde{B}) = \mu_1(\tilde{B}) \geq \mu_1(A)$. Έπεται ότι $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ για κάθε $A \subset \mathbb{R}^n$.*

Λήμμα 6.1.6. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ συνάρτηση Lipschitz και $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο. Τότε*

(i) *το $f(A)$ είναι $\mathcal{H}^n$ - μετρήσιμο,*

(ii) *η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{H}^n$ - μετρήσιμη στο $\mathbb{R}^N$,*

(iii) $\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^n \leq (Lip(f))^n\ \mathcal{L}^n(A)$.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι το A είναι φραγμένο.

(i) Επιλέγουμε συμπαγή σύνολα $K_i \subset A$ ώστε

$$\mathcal{L}^n(K_i) \geq \mathcal{L}^n(A) - \frac{1}{i}\ (i = 1, 2, \dots).$$

Αφού το A είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο και $\mathcal{L}^n(A) < \infty$, τότε $\mathcal{L}^n(A \setminus K_i) < \frac{1}{i}$ $(i = 1, 2, \dots)$, δηλαδή

$$\mathcal{L}^n\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) = 0. \tag{6.1.1}$$

Η f είναι συνεχής, άρα τα $f(K_i)$ είναι συμπαγή κι επομένως είναι $\mathcal{H}^n$ - μετρήσιμα. Δηλαδή το $f\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i\Big) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} f(K_i)$ είναι $\mathcal{H}^n$ - μετρήσιμο. Επιπλέον

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}^n\left(f(A) \setminus f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right)\\
&\leq \mathcal{H}^n\left(f\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right)\right)\\
&\leq (\mathrm{Lip}(f))^n\ \mathcal{L}^n\left(A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i\right) \text{ από το Θεώρημα 4.2.1}\\
&= 0 \text{ από την (6.1.1).}
\end{aligned}
$$

Έπεται ότι το $f(A)$ είναι $\mathcal{H}^n$ - μετρήσιμο.

(ii) Για κάθε $k = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε

$$
\mathcal{B}_k \equiv \Bigg\{ Q \mid Q = (a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n],\quad a_i = \frac{c_i}{k},\ b_i = \frac{c_i + 1}{k},\ c_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, 2, \ldots \Bigg\}.
$$

Παρατηρούμε ότι

$$
\mathbb{R}^n = \bigcup_{Q \in \mathcal{B}_k} Q.
$$

Ας θεωρήσουμε τις $g_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ με

$$
g_k \equiv \sum_{Q \in \mathcal{B}_k} \chi_{f(A \cap Q)}\ (k = 1, 2, \ldots).
$$

Από το (i) οι g_k είναι $\mathcal{H}^n$ - μετρήσιμες, ενώ είναι φανερό ότι το $g_k(y)$ εκφράζει το πλήθος των κύβων $Q \in \mathcal{B}_k$ ώστε $f^{-1}\{y\} \cap (A \cap Q) \neq 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^N$ και $k = 1, 2, \ldots$. Συνεπώς, έχουμε

$$
\lim_{k \to \infty} g_k(y) = \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})
$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^N$ (το διαπιστώνουμε εξετάζοντας ξεχωριστά την περίπτωση που το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι πεπερασμένο, οπότε η ακολουθία των

g_k είναι τελικά σταθερή, και την περίπτωση που το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι άπειρο, οπότε το όριο της ακολουθίας των g_k τείνει στο άπειρο). Άρα η $y \mapsto \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{H}^n$ - μετρήσιμη στο $\mathbb{R}^N$, ως όριο $\mathcal{H}^n$ - μετρήσιμων συναρτήσεων.

(iii) Θεωρούμε τις g_k που ορίσαμε στο (ii) και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^n \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_k \, d\mathcal{H}^n \text{ από το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης} \\
&= \lim_{k\to\infty} \sum_{Q\in\mathcal{B}_k} \mathcal{H}^n(f(A\cap Q)) \\
&\le \limsup_{k\to\infty} \sum_{Q\in\mathcal{B}_k} (\mathrm{Lip}(f))^n\, \mathcal{L}^n(A\cap Q) \text{ από το Θεώρημα 4.2.1} \\
&= (\mathrm{Lip}(f))^n\, \mathcal{L}^n(A). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 6.1.7. *Από το (iii) έπεται ότι το $f^{-1}\{y\}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο για $\mathcal{H}^n$ - σχεδόν κάθε $y \in \mathbb{R}^N$.*

Λήμμα 6.1.8. *Έστω $t > 1$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ συνάρτηση Lipschitz. Αν*

$$B \equiv \{x \mid \eta\ Df(x) \text{ υπάρχει και } Jf(x) > 0\},$$

τότε υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ αποτελούμενη από Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ ώστε

(i) $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$,

(ii) *η $f|_{E_k}$ είναι 1-1 $(k = 1, 2, \dots)$,*

(iii) *για κάθε $k = 1, 2, \dots$, υπάρχει συμμετρικός αυτομορφισμός $T_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ώστε*

$$Lip((f|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \le t,\ Lip(T_k \circ (f|_{E_k})^{-1}) \le t,$$

$$t^{-n}\, |det\ T_k| \le Jf|_{E_k} \le t^n\, |det\ T_k|.$$

Απόδειξη. (i) Έστω $\mathcal{C}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του B και $\mathcal{S}$ αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο των συμμετρικών αυτομορφισμών του $\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ ώστε

$$\frac{1}{t} + \varepsilon < 1 < t - \varepsilon.$$

Τότε για κάθε $c \in \mathcal{C}$, $T \in \mathcal{S}$ και $i = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε το $E(c, T, i)$ να είναι το σύνολο των $b \in B \cap B(c, \frac{1}{i})$ ώστε

$$\left(\frac{1}{t} + \varepsilon\right) |Tu| \leq |Df(b)\ u| \leq (t - \varepsilon)\ |Tu| \tag{6.1.2}$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$ και

$$|f(a) - f(b) - Df(b)\ (a - b)| \leq \varepsilon\ |T(a - b)| \tag{6.1.3}$$

για κάθε $a \in B(b, \frac{2}{i})$. Η Df είναι Borel - μετρήσιμη, άρα και το $E(C, T, i)$ είναι Borel - μετρήσιμο για κάθε $i = 1, 2, \ldots$.

Έστω $b \in B$. Θα δείξουμε ότι το b ανήκει στην ένωση της οικογένειας συνόλων $\{E(c, T, i) \mid c \in \mathcal{C},\ T \in \mathcal{S},\ i = 1, 2, \ldots\}$. Πράγματι, από το Θεώρημα 5.1.3, γράφουμε $Df(b) = O \circ S$, όπου $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ ορθογώνια και $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρική. Τότε, λόγω της πυκνότητας του $\mathcal{S}$, μπορούμε να βρούμε $T \in \mathcal{S}$ ώστε

$$\operatorname{Lip}(T \circ S^{-1}) \leq \left(\frac{1}{t} + \varepsilon\right)^{-1}$$

και

$$\operatorname{Lip}(S \circ T^{-1}) \leq t - \varepsilon.$$

Χρησιμοποιώντας και το Λήμμα 6.1.1, γράφουμε ισοδύναμα

$$\left(\frac{1}{t} + \varepsilon\right) |Tu| \leq |Su| = |(O \circ S)u| = |Df(b)\ u| \leq (t - \varepsilon)\ |Tu|$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$. Επιλέγουμε κατάλληλα μεγάλο $i \in \{1, 2, \ldots\}$ και $c \in \mathcal{C}$ ώστε

$$|b - c| < \frac{1}{i}$$

και

$$|f(a) - f(b) - Df(b)\ (a-b)| \le \frac{\varepsilon}{\mathrm{Lip}(T^{-1})}\ |a-b| \le \varepsilon\ |T(a-b)|$$

για κάθε $a \in B\Big(b, \frac{2}{i}\Big)$. Τότε είναι φανερό ότι $b \in E(c,T,i)$.
Προσδίδοντας την αρίθμηση $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ στην αριθμήσιμη οικογένεια $\{E(c,T,i) \mid c \in \mathcal{C},\ T \in \mathcal{S},\ i = 1,2,\dots\}$ μπορούμε να γράψουμε ότι

$$B \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

Ο αντίστροφος εγκλεισμός $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k \subseteq B$ προκύπτει από τον ορισμό των E_k.

(ii) *Ισχυρισμός 1:* $\frac{1}{t}\ |T(a-b)| \le |f(a) - f(b)| \le t\ |T(a-b)|$ για κάθε $b \in E(c,T,i)$ και $a \in B\Big(b, \frac{2}{i}\Big)$.
Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα στην (6.1.3) και παίρνουμε

$$|f(a) - f(b)| - |Df(b)\ (a-b)| \le \varepsilon\ |T(a-b)|. \tag{6.1.4}$$

Για $u = a - b$ στην (6.1.2) προκύπτει η

$$|Df(b)\ (a-b)| \le (t-\varepsilon)\ |T(a-b)|. \tag{6.1.5}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (6.1.4) και (6.1.5) έχουμε την

$$|f(a) - f(b)| \le t\ |T(a-b)|. \tag{6.1.6}$$

Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στην (6.1.3) μπορούμε να έχουμε και την

$$|Df(b)\ (a-b)| - |f(a) - f(b)| \le \varepsilon\ |T(a-b)|. \tag{6.1.7}$$

Για $u = a - b$ στην (6.1.2) προκύπτει η

$$-|Df(b)\ (a-b)| \le -\left(\frac{1}{t} + \varepsilon\right)\ |T(a-b)|. \tag{6.1.8}$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (6.1.7) και (6.1.8) και παίρνουμε την

$$\frac{1}{t}\ |T(a-b)| \le |f(a)-f(b)|. \tag{6.1.9}$$

Από τις (6.1.6) και (6.1.9) προκύπτει ο Ισχυρισμός 1. $\square$

Ας θεωρήσουμε τυχόν σύνολο E_k της μορφής $E(c,T,i)$ για $c \in \mathcal{C}$, $T \in \mathcal{S}$ και $i = 1, 2, \ldots$. (βλ. απόδειξη του (i)). Θέτουμε $T_k = T$ και θα δείξουμε ότι η $f|_{E_k}$ είναι 1-1. Πράγματι, σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 1,

$$\frac{1}{t}\ |T_k(a-b)| \le |f(a)-f(b)| \le t\ |T_k(a-b)|$$

για κάθε $b \in E_k$ και $a \in B\Big(b, \frac{2}{i}\Big)$. Αφού $E_k \subset B\Big(c, \frac{1}{i}\Big) \subset B\Big(b, \frac{2}{i}\Big)$ έχουμε

$$\frac{1}{t}\ |T_k(a-b)| \le |f(a)-f(b)| \le t\ |T_k(a-b)| \tag{6.1.10}$$

για κάθε $a, b \in E_k$. Από την (6.1.10) προκύπτει ότι για $x,\ y \in E_k$ με $f(x) = f(y)$ έχουμε ότι $x = y$. Επομένως η $f|_{E_k}$ είναι 1-1.

(iii) *Ισχυρισμός 2:* $\left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)^n\ |\det T| \le Jf(b) \le (t-\varepsilon)^n\ |\det T|$ για κάθε $b \in E(c,T,i)$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2: Γράφουμε $Df(b) = O \circ S$ ως ανωτέρω. Τότε

$$Jf(b) = [\![Df(b)]\!] = |\det S|.$$

Από την (6.1.2) έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)\ |Tu| &\le |(O\circ S)u| \\ &= |Su| \text{ από το Λήμμα 6.1.1} \\ &\le (t-\varepsilon)\ |Tu|\end{aligned}$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, έχουμε

$$\left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)\ |u| \le |(S\circ T^{-1})u| \le (t-\varepsilon)\ |u| \tag{6.1.11}$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$. Δηλαδή

$$(S \circ T^{-1})(B(0,1)) \subset B(0, t-\varepsilon)$$

και άρα

$$|\det(S \circ T^{-1})| \ \alpha(n) \leq \mathcal{L}^n(B(0,t-\varepsilon)) = \alpha(n) \ (t-\varepsilon)^n$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$Jf(b) = |\det S| \leq (t-\varepsilon)^n \ |\det T|. \tag{6.1.12}$$

Από την (6.1.11) έπεται ότι

$$B\left(0, \frac{1}{t}+\varepsilon\right) \subset (S \circ T^{-1})(B(0,1))$$

και άρα

$$\alpha(n) \ \left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)^n = \mathcal{L}^n\left(B\left(0, \frac{1}{t}+\varepsilon\right)\right) \leq |\det(S \circ T^{-1})| \ \alpha(n),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\alpha(n) \ \left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)^n \ |\det T| \leq |\det S| = Jf(b). \tag{6.1.13}$$

Οι (6.1.12) και (6.1.13) μας δίνουν το ζητούμενο. □

Υιοθετούμε την αρίθμηση $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ για τα σύνολα

$$\{E(c,T,i) \mid c \in \mathcal{C}, \ T \in \mathcal{S}, \ i = 1, 2, \dots\}.$$

Τότε για $T = T_k$ να αντιστοιχεί σε κάθε E_k ($k = 1, 2, \dots$), ο Ισχυρισμός 2 μας δίνει την

$$t^{-n} \ |\det T_k| \leq Jf|_{E_k} \leq t^n \ |\det T_k|.$$

Οι $\mathrm{Lip}((f|_{E_k}) \circ T_k^{-1}) \leq t$ και $\mathrm{Lip}(T_k \circ (f|_{E_k})^{-1}) \leq t$ προκύπτουν άμεσα από την (6.1.10). ■

Θεώρημα 6.1.9 (Τύπος Area). *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ συνάρτηση Lipschitz. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμο $A \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\int_A Jf\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n(y).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα του Rademacher η f είναι $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού διαφορίσιμη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη για κάθε $x \in A$ και ότι $\mathcal{L}^n(A) < \infty$. Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Περίπτωση 1: $Jf(x) > 0$ για κάθε $x \in A$.

  Έστω $t > 1$. Θεωρούμε τα σύνολα $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ που ικανοποιούν τις ιδιότητες του Λήμματος 6.1.8 και επιπλέον είναι ξένα μεταξύ τους (διαφορετικά επιλέγουμε τα E_1, $E_2 \setminus E_1$, $E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)$, κ.ο.κ.). Θεωρούμε επίσης το σύνολο $\mathcal{B}_k$ όπως ορίζεται στο Λήμμα 6.1.6 και θέτουμε

  $$F_{i,j}^k = E_j \cap Q_i \cap A\ (Q_i \in \mathcal{B}_k \text{ και } j = 1, 2, \dots).$$

  Τότε τα $F_{i,j}^k$ είναι ξένα και $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} F_{i,j}^k$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.1.8 και το Θεώρημα 4.2.1 μπορούμε να γράψουμε τις σχέσεις:

  $$\mathcal{H}^n(f(F_{i,j}^k)) = \mathcal{H}^n(f|_{E_j} \circ T_j^{-1} \circ T_j(F_{i,j}^k)) \le t^n\ \mathcal{L}^n(T_j(F_{i,j}^k)) \quad (6.1.14)$$

  και

  $$\mathcal{L}^n(T_j(F_{i,j}^k)) = \mathcal{H}^n(T_j \circ (f|_{E_j})^{-1} \circ f(F_{i,j}^k)) \le t^n\ \mathcal{H}^n(f(F_{i,j}^k)). \quad (6.1.15)$$

  Άρα υπολογίζουμε

  $$\begin{aligned} & t^{-2n}\ \mathcal{H}^n(f(F_{i,j}^k)) \\ & \le t^{-n}\ \mathcal{L}^n(T_j(F_{i,j}^k)) \text{ από την (6.1.14)} \\ & = t^{-n}\ |\det T_j|\ \mathcal{L}^n(F_{i,j}^k) \text{ από το Λήμμα 6.1.3} \\ & \le \int_{F_{i,j}^k} Jf\ dx \text{ από το Λήμμα 6.1.8} \\ & \le t^n\ |\det T_j|\ \mathcal{L}^n(F_{i,j}^k) \text{ από το Λήμμα 6.1.8} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= t^n\ \mathcal{L}^n(T_j(F^k_{i,j})) \text{ από το Λήμμα 6.1.3} \\
&\le t^{2n}\ \mathcal{H}^n(f(F^k_{i,j})) \text{ από την (6.1.15).}
\end{aligned}
$$

Δηλαδή $t^{-2n}\ \mathcal{H}^n(f(F^k_{i,j})) \le \int\limits_{F^k_{i,j}} Jf\ dx \le t^{2n}\ \mathcal{H}^n(f(F^k_{i,j}))$.
Αθροίζοντας στα i, j έχουμε

$$
t^{-2n} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F^k_{i,j})) \le \int\limits_A Jf\ dx \le t^{2n} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F^k_{i,j})). \tag{6.1.16}
$$

Ισχυρισμός 1:

$$
\lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F^k_{i,j})) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n. \tag{6.1.17}
$$

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Ας θεωρήσουμε τις $g_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$
g_k \equiv \sum_{i,j=1}^{\infty} \chi_{f(F^k_{i,j})}\ (k = 1, 2, \dots).
$$

Τότε, από το Λήμμα 6.1.6, οι g_k είναι $\mathcal{H}^n$ - μετρήσιμες και το $g_k(y)$ εκφράζει το πλήθος των συνόλων $\{F^k_{i,j}\}$ ώστε $F^k_{i,j} \cap f^{-1}\{y\} \neq \emptyset$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^N$ και $k = 1, 2, \dots$. Άρα, έχουμε

$$
\lim_{k\to\infty} g_k(y) = \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}).
$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης στις g_k ως προς το $\mathcal{H}^n$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \sum_{i,j=1}^{\infty} \mathcal{H}^n(f(F^k_{i,j})) &= \lim_{k\to\infty} \int \sum_{i,j=1}^{\infty} \chi_{f(F^k_{i,j})}\ d\mathcal{H}^n \\
&= \lim_{k\to\infty} \int g_k\ d\mathcal{H}^n \\
&= \int \lim_{k\to\infty} g_k\ d\mathcal{H}^n \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n. \ \square
\end{aligned}
$$

Συνδυάζοντας λοιπόν τον Ισχυρισμό 1 με την (6.1.16) έχουμε για $k \to \infty$:

$$t^{-2n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^n \leq \int\limits_A Jf\, dx \leq t^{2n} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\, d\mathcal{H}^n.$$

Για $t \to 1^+$ παίρνουμε το ζητούμενο.

- Περίπτωση 2: $Jf(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

  Έστω $0 < \varepsilon \leq 1$. Γράφουμε $f = p \circ g$, όπου $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$ με $g(x) \equiv (f(x), \varepsilon x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ με $p(y, z) = y$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^N$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Ισχυρισμός 2: Υπάρχει σταθερά C ώστε $0 < Jg(x) < C\varepsilon$ για κάθε $x \in A$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2: Αν $g = (f^1, \ldots, f^m, \varepsilon x_1, \ldots, \varepsilon x_n)$, τότε

$$Dg(x) = \begin{pmatrix} Df(x) \\ \\ \varepsilon I \end{pmatrix}_{(n+m)\times n}$$

και σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2.5, το $Jg(x)^2$ ισούται με το άθροισμα τετραγώνων των $(n \times n)$ - υποοριζουσών της $Dg(x)$. Συνεπώς έχουμε

$$Jg(x)^2 \geq \varepsilon^{2n} > 0.$$

Επιπλέον, αφού $|Df| \leq \text{Lip } (f) < \infty$, από το Θεώρημα 5.2.5 έχουμε

$$Jg(x)^2 = Jf(x)^2 + \left\{ \begin{matrix} \text{άθροισμα τετραγώνων όρων στους} \\ \text{οποίους περιέχεται τουλάχιστον ένα } \varepsilon \end{matrix} \right\} \leq C\varepsilon^2$$

για κάθε $x \in A$. $\square$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n(f(A)) &\leq \mathcal{H}^n(g(A)) \text{ από το Πόρισμα 4.2.2} \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^{n+N}} \mathcal{H}^0(A \cap g^{-1}\{y,z\})\ d\mathcal{H}^n(y,z) \\
&= \int\limits_A Jg(x)\ dx \text{ από την Περίπτωση 1} \\
&\leq \varepsilon\ \sqrt{C}\ \mathcal{L}^n(A) < \infty.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$, προκύπτει ότι $\mathcal{H}^n(f(A)) = 0$, και αφού ισχύει $\operatorname{spt} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) \subset f(A)$, έπεται ότι

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n = 0.$$

Δηλαδή

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n = 0 = \int\limits_A Jf\ dx.$$

- Περίπτωση 3: $Jf(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$.

  Γράφουμε $A = A_1 \cup A_2$, όπου $A_1 \subset \{Jf > 0\}$ και $A_2 \subset \{Jf = 0\}$ και εφαρμόζουμε τις προηγούμενες περιπτώσεις στα A_1 και A_2 αντίστοιχα. ■

Θεώρημα 6.1.10 (Τύπος αλλαγής μεταβλητών).
Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ συνάρτηση Lipschitz. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^n$ - αθροίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\ Jf(x)\ dx = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] d\mathcal{H}^n(y).$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Περίπτωση 1: $g \geq 0$.

  Από το Θεώρημα 2.2.4 μπορούμε να γράψουμε ότι $g = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\ \chi_{A_i}$ για κατάλληλα $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμα σύνολα $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. Τότε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης και το Θεώρημα Area, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} g\ Jf\ dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{A_i}\ Jf\ dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int\limits_{A_i} Jf\ dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{H}^0(A_i \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \chi_{A_i}(x)\ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \sum_{x \in f^{-1}\{y\}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\ \chi_{A_i}(x)\ d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\sum_{x \in f^{-1}\{y\}} g(x) \right] d\mathcal{H}^n(y). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- Περίπτωση 2: g οποιαδήποτε $\mathcal{L}^N$ - αθροίσιμη συνάρτηση.

  Γράφουμε $g = g^+ - g^-$ και χρησιμοποιούμε την Περίπτωση 1.

6.2 Ο τύπος Coarea

Λήμμα 6.2.1. *Εστω $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση και $A \subset \mathbb{R}^N$ $\mathcal{L}^N$ - μετρήσιμο. Τότε*

(i) η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^{N-n}(A \cap L^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμη,

(ii) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap L^{-1}\{y\})\ dy = [\![L]\!]\ \mathcal{L}^N(A)$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του Λήμματος θα διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Περίπτωση 1: $\dim\ L(\mathbb{R}^N) < n$.

  Τότε $A \cap L^{-1}\{y\} = \emptyset$ $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού, άρα $\mathcal{H}^{N-n}(A \cap L^{-1}\{y\}) = 0$

$\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού. Άρα η $y \mapsto \mathcal{H}^{N-n}(A \cap L^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμη. Γράφουμε $L = S \circ O^\star$, όπου $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρική και $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ ορθογώνια (Θεώρημα 5.1.3). Τότε έχουμε $L(\mathbb{R}^N) = S(\mathbb{R}^n)$. Δηλαδή $\dim S(\mathbb{R}^n) < n$ κι επομένως $[\![L]\!] = |\det S| = 0$. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap L^{-1}\{y\})\, dy = [\![L]\!]\ \mathcal{L}^N(A)$$

ικανοποιείται.

- Περίπτωση 2: $L = P =$ ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^N$ στο $\mathbb{R}^n$.

  Από το Θεώρημα του Fubini έπεται ότι η

  $$y \mapsto \mathcal{H}^{N-n}(A \cap P^{-1}\{y\})$$

  είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμη και

  $$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap P^{-1}\{y\})\, dy = \mathcal{L}^N(A).$$

- Περίπτωση 3: $\dim L(\mathbb{R}^N) = n$.

  Από το Θεώρημα 5.1.3 μπορούμε να γράψουμε

  $$L = S \circ O^\star,$$

  όπου $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρική και $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ ορθογώνια. Τότε έχουμε $[\![L]\!] = |\det S| > 0$.

Ισχυρισμός 1: $O^\star = P \circ Q$, όπου $P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ορθογώνια προβολή και $Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ορθογώνια.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Πράγματι, έστω $Q : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ορθογώνια απεικόνιση ώστε

$$Q^\star(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = O(x_1, \dots, x_n)$$

για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε, για $P : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ ορθογώνια προβολή με

$$P^\star(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0),$$

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, έχουμε ότι

$$O = Q^\star \circ P^\star,$$

δηλαδή

$$O^\star = P \circ Q. \ \square$$

Από το Θεώρημα του Fubini έπεται ότι η $y \mapsto \mathcal{H}^{N-n}(A \cap L^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμη. Λαμβάνοντας υπόψιν και τον Ισχυρισμό 1, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^N(A) &= \mathcal{L}^N(Q(A)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(Q(A) \cap P^{-1}\{y\})\, dy \quad \text{από τη 2η περίπτωση} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap Q^{-1} \circ P^{-1}\{y\})\, dy. \end{aligned}$$

Θέτοντας $z = Sy$ έχουμε

$$|\det S|\ \mathcal{L}^N(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap Q^{-1} \circ P^{-1} \circ S^{-1}\{z\})\, dz.$$

Όμως $L = S \circ O^\star = S \circ P \circ Q$, συνεπώς

$$[\![L]\!]\ \mathcal{L}^N(A) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap L^{-1}\{z\})\, dz. \quad \blacksquare$$

Λήμμα 6.2.2. *Έστω $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση Lipschitz και $A \subset \mathbb{R}^N$ $\mathcal{L}^N$ - μετρήσιμο. Τότε*

(i) το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι $\mathcal{H}^{N-n}$ - μετρήσιμο για $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,

(ii) η απεικόνιση $y \mapsto \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμη,

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})\, dy \leq \dfrac{\alpha(N-n)\ \alpha(n)}{\alpha(N)}\ (Lip(f))^n\ \mathcal{L}^N(A).$

Απόδειξη. Για κάθε $j = 1, 2, \ldots$ υπάρχουν κλειστές μπάλες $\{B_i^j\}_{i=1}^{\infty}$ ώστε

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i^j, \ \text{diam } B_i^j \leq \frac{1}{j} \text{ και } \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_i^j) \leq \mathcal{L}^n(A) + \frac{1}{j}.$$

Ορίζουμε λοιπόν $g_i^j : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ με

$$g_i^j \equiv \alpha(N-n) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^{N-n} \chi_{f(B_i^j)}.$$

Τότε η g_i^j είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμη. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{j}}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j(y) \tag{6.2.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Υπολογίζουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}^{\star} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}^{\star} \lim_{j \to \infty} \mathcal{H}_{\frac{1}{j}}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j \, dy \text{ από την (6.2.1)} \\
&\leq \liminf_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_i^j \, dy \text{ από το Λήμμα του Fatou} \\
&= \liminf_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(N-n) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^{N-n} \mathcal{L}^n(f(B_i^j)) \\
&\leq \liminf_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(N-n) \left(\frac{\text{diam } B_i^j}{2} \right)^{N-n} \alpha(n) \left(\frac{\text{diam } f(B_i^j)}{2} \right)^{n} \\
&\leq \frac{\alpha(N-n) \ \alpha(n)}{\alpha(N)} \ (\text{Lip}(f))^n \ \liminf_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^N(B_i^j) \\
&\leq \frac{\alpha(N-n) \ \alpha(n)}{\alpha(N)} \ (\text{Lip}(f))^n \ \mathcal{L}^N(A).
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{\star} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \, dy \leq \frac{\alpha(N-n) \ \alpha(n)}{\alpha(N)} \ (\text{Lip}(f))^n \ \mathcal{L}^N(A). \tag{6.2.2}$$

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Περίπτωση 1: Το A είναι συμπαγές.

  Τότε το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι $\mathcal{H}^{N-n}$ - μετρήσιμο. Έστω $t \geq 0$. Για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ ορίζουμε U_i να είναι το σύνολο των $y \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία υπάρχουν πεπερασμένα στο πλήθος ανοιχτά σύνολα $S_1, \ldots, S_l$ ώστε:

  1. $A \cap f^{-1}\{y\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} S_j$
  2. $\text{diam } S_j \leq \frac{1}{i} \quad (j = 1, 2, \ldots, l)$
  3. $\sum\limits_{j=1}^{l} \alpha(N-n) \left(\frac{\text{diam } S_j}{2}\right)^{N-n} \leq t + \frac{1}{i}$.

Ισχυρισμός 1: Για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ το U_i είναι ανοικτό.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Έστω $y \in U_i$ για κάποιο $i = 1, 2, \ldots$. Τότε υπάρχουν $S_1, \ldots, S_l$ ανοικτά ώστε $A \cap f^{-1}\{y\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} S_j$. Αφού η f είναι συνεχής και το A συμπαγές, έχουμε

$$A \cap f^{-1}\{z\} \subset \bigcup_{j=1}^{l} S_j$$

για z αρκετά κοντά στο y. Δηλαδή το U_i είναι ανοικτό. $\square$

Ισχυρισμός 2: $\{y \mid \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} U_i$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 2: Έστω $y \in \{y \mid \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\}$. Τότε για κάθε $\delta > 0$, έχουμε $\mathcal{H}_\delta^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t$. Δοθέντος i, επιλέγουμε $0 < \delta < \frac{1}{i}$. Τότε υπάρχουν $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ ώστε:

1. $A \cap f^{-1}\{y\} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} S_j$
2. $\text{diam } S_j \leq \delta < \frac{1}{i}$
3. $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha(N-n) \left(\frac{\text{diam } S_j}{2}\right)^{N-n} < t + \frac{1}{i}$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα S_j είναι ανοικτά. Αφού το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{S_1, \ldots, S_l\}$ που το καλύπτει. Έπεται ότι $y \in U_i$. Άρα

$$\{y \mid \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Από την άλλη, εάν $y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, τότε για κάθε $i = 1, 2, \ldots$

$$\mathcal{H}_{\frac{1}{i}}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t + \frac{1}{i}$$

κι επομένως

$$\mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t.$$

Δείξαμε συνεπώς ότι

$$\{y \mid \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq t\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i. \ \square$$

Από τον Ισχυρισμό 2 έπεται ότι η $y \mapsto \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι Borel - μετρήσιμη. Από την (6.2.2) παίρνουμε την

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy \leq \frac{\alpha(N-n)\ \alpha(n)}{\alpha(N)}\ (\mathrm{Lip}(f))^n\ \mathcal{L}^N(A).$$

- Περίπτωση 2: Το A είναι ανοικτό.

  Τότε το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι $\mathcal{H}^{N-n}$ - μετρήσιμο. Επιπλέον, μπορούμε να βρούμε συμπαγή $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset A$ ώστε

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i.$$

Δηλαδή για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) = \lim_{i \to \infty} \mathcal{H}^{N-n}(K_i \cap f^{-1}\{y\})$$

και άρα από την Περίπτωση 1, η απεικόνιση

$$y \mapsto \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})$$

είναι Borel - μετρήσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy \leq \frac{\alpha(N-n)\ \alpha(n)}{\alpha(N)}\ (\mathrm{Lip}(f))^n\ \mathcal{L}^N(A).$$

- Περίπτωση 3: $\mathcal{L}^N(A) < \infty$.

  Υπάρχουν ανοικτά $V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset A$ ώστε

$$\mathcal{L}^N(V_1) < \infty \text{ και } \lim_{i\to\infty} \mathcal{L}^N(V_i \setminus A) = 0.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας την (6.2.2) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}&\limsup_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n}^{\star} \mathcal{H}^{N-n}((V_i \setminus A) \cap f^{-1}\{y\})\, dy \\ &\le \limsup_{i\to\infty} \frac{\alpha(N-n)\ \alpha(n)}{\alpha(N)}\ (\mathrm{Lip}(f))^n\ \mathcal{L}^N(V_i \setminus A) = 0.\end{aligned}$$

Δηλαδή, για $i \to \infty$, έχουμε

$$\mathcal{H}^{N-n}((V_i \setminus A) \cap f^{-1}\{y\}) \to 0$$

$\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού. Έπεται ότι το $A \cap f^{-1}\{y\}$ είναι $\mathcal{H}^{N-n}$ - μετρήσιμο $\mathcal{L}^n$ - σχεδόν παντού, αφού μπορούμε να γράψουμε

$$A \cap f^{-1}\{y\} = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i\right) \cap f^{-1}\{y\} \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} [(V_i \setminus A) \cap f^{-1}\{y\}].$$

Έστω τώρα συμπαγή $K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset A$ ώστε

$$\mathcal{L}^n(V_i \setminus K_i) < \frac{1}{i}$$

για $i = 1, 2, \ldots$. Λαμβάνοντας υπόψιν τις προηγούμενες περιπτώσεις γράφουμε

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} [\mathcal{H}^{N-n}(V_i \cap f^{-1}\{y\}) - \mathcal{H}^{N-n}(K_i \cap f^{-1}\{y\})]\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}((V_i \setminus K_i) \cap f^{-1}\{y\})\, dy \\ &\le \frac{\alpha(N-n)\ \alpha(n)}{\alpha(N)}\ (\mathrm{Lip}(f))^n\ \mathcal{L}^N(V_i \setminus K_i) \to 0, \text{ καθώς } i \to \infty.\end{aligned}$$

Όμως

$$\mathcal{H}^{N-n}(K_i \cap f^{-1}\{y\}) \le \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\}) \le \mathcal{H}^{N-n}(V_i \cap f^{-1}\{y\})$$

για $i = 1, 2, \ldots$. Έπεται ότι η $y \mapsto \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})$ είναι $\mathcal{L}^n$ - μετρήσιμη και άρα από την (6.2.2) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy \leq \frac{\alpha(N-n)\ \alpha(n)}{\alpha(N)}\ (\mathrm{Lip}(f))^n\ \mathcal{L}^N(A).$$

- Περίπτωση 4: $\mathcal{L}^N(A) = \infty$.
  Γράφουμε $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, όπου A_i είναι $\mathcal{L}^N$ - μετρήσιμο $(i = 1, 2, \ldots)$ και $\mathcal{L}^N(A) < \infty$. Με αναγωγή στην Περίπτωση 3, έχουμε τα ζητούμενα. ■

Παρατήρηση 6.2.3. *Τροποποιώντας την απόδειξη του (iii) προκύπτει η*

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{\star} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^l \leq \frac{\alpha(k)\ \alpha(l)}{\alpha(k+l)}\ (Lip(f))^l\ \mathcal{H}^{k+l}(A)$$

για $A \subset \mathbb{R}^N$. Πράγματι, για κάθε $j = 1, 2, \ldots$ υπάρχουν $\{C_i^j\}_{i=1}^{\infty}$ ώστε

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i^j,\ diam\ C_i^j \leq \frac{1}{j}\ \textit{και}\ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(k+l) \left(\frac{diam\ C_i^j}{2}\right)^{k+l} \leq \mathcal{H}^{k+l}(A) + \frac{1}{j}.$$

Ορίζουμε $g_i^j \equiv \alpha(k) \left(\frac{diam\ C_i^j}{2}\right)^k \chi_{f(C_i^j)}$ όπου $i, j = 1, 2, \ldots$. Τότε

$$\mathcal{H}^k_{\frac{1}{j}}(A \cap f^{-1}\{y\}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j(y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα του Fatou και την ισοδιαμετρική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}^{\star} \mathcal{H}^k(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^l &= \int_{\mathbb{R}^n}^{\star} \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^k_{\frac{1}{j}}(A \cap f^{-1}\{y\})\ d\mathcal{H}^l \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} g_i^j\ d\mathcal{H}^l \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_i^j\ d\mathcal{H}^l \\
&= \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\frac{diam\ C_i^j}{2}\right)^k\ \mathcal{H}^l(\tilde{C}_i^j) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(k) \left(\frac{diam\ C_i^j}{2}\right)^k\ \alpha(l) \left(\frac{diam\ f(C_i^j)}{2}\right)^l
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\alpha(k)\ \alpha(l)}{\alpha(k+l)}\ (Lip(f))^l\ \liminf_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}^{k+l}(C_i^j)$$
$$\leq \frac{\alpha(k)\ \alpha(l)}{\alpha(k+l)}\ (Lip(f))^l\ \mathcal{H}^{k+l}(A).$$

Για να εφαρμόσουμε το Λήμμα του Fatou επικαλεστήκαμε την Borel κανονικότητα του $\mathcal{H}^l$: για κάθε $i, j = 1, 2, \dots$ υπάρχει Borel $\tilde{C}_i^j \subset \mathbb{R}^n$ με $f(C_i^j) \subset \tilde{C}_i^j$ και $\mathcal{H}^l(f(C_i^j)) = \mathcal{H}^l(\tilde{C}_i^j)$.

Λήμμα 6.2.4. *Έστω $t > 1$ και $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ συνάρτηση Lipschitz. Αν*

$$B = \{x \mid \eta\ Dh(x)\ \text{υπάρχει και}\ Jh(x) > 0\},$$

τότε υπάρχει αριθμήσιμη οικογένεια $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ αποτελούμενη από Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^N$ ώστε

(i) $\mathcal{L}^N(B \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k) = 0,$

(ii) *η* $h|_{D_k}$ *είναι 1-1* $(k = 1, 2, \dots),$

(iii) *για κάθε* $k = 1, 2, \dots$ *υπάρχει συμμετρικός αυτομορφισμός* $S_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *ώστε*

$$Lip(S_k^{-1} \circ (h|_{D_k})) \leq t,\ Lip((h|_{D_k})^{-1} \circ S_k) \leq t,$$

$$t^{-N}\ |det\ S_k| \leq Jh|_{D_k} \leq t^N\ |det\ S_k|.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.1.8 για την h και βρίσκουμε Borel σύνολα $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ και συμμετρικούς αυτομορφισμούς $T_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ώστε

(α) $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$

(β) η $h|_{E_k}$ είναι 1-1,

(γ) για $k = 1, 2, \dots$

$$\mathrm{Lip}((h|_{E_k}) \circ {T_k}^{-1}) \leq t,\ \mathrm{Lip}(T_k \circ (h|_{E_k})^{-1}) \leq t,$$

$$t^{-N}\ |\det\ T_k| \leq Jh|_{E_k} \leq t^N\ |\det\ T_k|.$$

Από το (γ) έπεται ότι η $(h|_{E_k})^{-1}$ είναι Lipschitz, επομένως υπάρχει Lipschitz συνάρτηση $h_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, ώστε $h_k = (h|_{E_k})^{-1}$ στο $h(E_k)$ (Θεώρημα 4.1.2).

Ισχυρισμός 1: $J_{h_k} > 0$ $\mathcal{L}^N$ - σχεδόν παντού στο $h(E_k)$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Αφού $h_k \circ h(x) = x$ για $x \in E_k$, από το Πόρισμα 4.3.3 έπεται ότι

$$D_{h_k}(h(x)) \circ Dh(x) = I \quad \mathcal{L}^N \text{ - σχεδόν παντού στο } E_k.$$

Συνεπώς

$$J_{h_k}(h(x)) \circ Jh(x) = 1 \quad \mathcal{L}^N \text{ - σχεδόν παντού στο } E_k. \tag{6.2.3}$$

Από το (γ) έπεται ότι $J_{h_k}(h(x)) > 0$ για $\mathcal{L}^N$ - σχεδόν κάθε $x \in E_k$. Η h όμως είναι Lipschitz, άρα $J_{h_k} > 0$ $\mathcal{L}^N$ - σχεδόν παντού στο $h(E_k)$. $\square$

Εφαρμόζουμε τώρα το Λήμμα 6.1.8 στην h_k $(k = 1, 2, \dots)$ και παίρνουμε Borel σύνολα $\{F_j^k\}_{j=1}^{\infty}$ και συμμετρικούς αυτομορφισμούς $R_j^k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ώστε

(δ) $\mathcal{L}^N(h(E_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j^k) = 0$,

(ϵ) η $h_k|_{F_j^k}$ είναι 1-1,

(στ) για $k = 1, 2, \dots$

$$\mathrm{Lip}((h_k|_{F_j^k}) \circ (R_j^k)^{-1}) \leq t,\ \mathrm{Lip}(R_j^k \circ (h_k|_{F_j^k})^{-1}) \leq t,$$

$$t^{-N}\ |\det R_j^k| \leq Jh_k|_{F_j^k} \leq t^N\ |\det R_j^k|.$$

Θέτουμε

$$D_j^k \equiv E_k \cap h^{-1}(F_j^k) \text{ και } S_j^k \equiv (R_j^k)^{-1}\ (k = 1, 2, \dots).$$

Ισχυρισμός 2: $\mathcal{L}^N\Big(B \setminus \bigcup\limits_{k,j=1}^{\infty} D_j^k\Big) = 0.$
Απόδειξη Ισχυρισμού 2: Έχουμε

$$h_k\Big(h(E_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j^k\Big) = h^{-1}\Big(h(E_k) \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j^k\Big) = E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j^k.$$

Από το (δ) έπεται ότι

$$\mathcal{L}^N\Big(E_k \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j^k\Big) = 0 \ (k = 1, 2, \dots).$$

Λαμβάνοντας υπόψιν και το (α) έχουμε

$$\mathcal{L}^N\Big(B \setminus \bigcup_{k,j=1}^{\infty} D_j^k\Big) = 0. \ \Box$$

Παρατηρούμε ότι η $h|_{D_j^k}$ είναι 1-1. Από το (στ), για $k, j = 1, 2, \dots$, έχουμε

$$\begin{aligned}\operatorname{Lip}((S_j^k)^{-1} \circ (h|_{D_j^k})) &= \operatorname{Lip}(R_j^k \circ (h|_{D_j^k})) \\ &\leq \operatorname{Lip}(R_j^k \circ (h_k|_{F_j^k})^{-1}) \\ &\leq t\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\operatorname{Lip}((h|_{D_j^k})^{-1} \circ S_j^k) &= \operatorname{Lip}((h|_{D_j^k})^{-1} \circ (R_j^k)^{-1}) \\ &\leq \operatorname{Lip}((h_k|_{F_j^k}) \circ (R_j^k)^{-1}) \\ &\leq t.\end{aligned}$$

Επιπλέον, από την (6.2.3) έχουμε

$$J_{h_k}(h(x)) \ J(h(x)) = 1 \quad \mathcal{L}^N \text{ - σχεδόν παντού στο } D_j^k$$

και συνεπώς από το (στ) έχουμε

$$t^{-N} \ |\det S_j^k| = t^{-N} \ |\det R_j^k|^{-1} \leq Jh|_{D_j^k} \leq t^N \ |\det R_j^k|^{-1} = t^N \ |\det S_j^k| \tag{6.2.4}$$

$\mathcal{L}^N$ - σχεδόν παντού. Τα $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ του Λήμματος προκύπτουν από την εκ νέου απαρίθμηση των $\{D_j^k\}_{k,j=1}^{\infty}$ και την αφαίρεση των «λιγοστών» σημείων που δεν ικανοποιούν την (6.2.4). ■

Θεώρημα 6.2.5 (Τύπος Coarea). *Έστω $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση Lipschitz. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^N$ - μετρήσιμο $A \subset \mathbb{R}^N$,*

$$\int_A Jf\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 6.2.2 και το Θεώρημα του Rademacher, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $Df(x)$ και $Jf(x)$ υπάρχουν για κάθε $x \in A$. Υποθέτουμε επιπλέον, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $\mathcal{L}^N(A) < \infty$. Έπειτα, διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Περίπτωση 1: $Jf(x) > 0$ για κάθε $x \in A$.

  Για κάθε $\lambda \in \Lambda(N, N-n)$ γράφουμε

  $$f = q \circ h_\lambda,$$

  όπου

  $$h_\lambda : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} \text{ με } h_\lambda(x) \equiv (f(x), P_\lambda(x))$$

  $$q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n} \to \mathbb{R}^n \text{ με } q(y,z) \equiv y$$

  και P_λ η προβολή που ορίζεται στην ενότητα 5.2. Θέτουμε

  $$A_\lambda \equiv \{x \in A \mid \det Dh_\lambda(x) \neq 0\}$$

  $$= \{x \in A \mid Jh_\lambda(x) > 0\}.$$

  Επειδή $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(N,N-n)} A_\lambda$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A = A_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \Lambda(N, N-n)$. Σταθεροποιούμε $t > 1$ και εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.2.4 στην $h = h_\lambda$ για να πάρουμε Borel σύνολα $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ και συμμετρικούς αυτομορφισμούς $\{S_k\}_{k=1}^\infty$ που ικανοποιούν τις (i) - (iii) του Λήμματος 6.2.4. Θεωρούμε επιπλέον, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι τα $\{D_k\}_{k=1}^\infty$ είναι ξένα. Θέτουμε $G_k \equiv A \cap D_k$.

Ισχυρισμός 1: $t^{-N} \llbracket q \circ S_k \rrbracket \leq Jf|_{G_k} \leq t^N \llbracket q \circ S_k \rrbracket$.

Απόδειξη Ισχυρισμού 1: Αφού $f = q \circ h$, έχουμε $\mathcal{L}^N$ - σχεδόν παντού:

$$\begin{aligned} Df &= q \circ Dh \\ &= q \circ S_k \circ {S_k}^{-1} \circ Dh \\ &= q \circ S_k \circ D({S_k}^{-1} \circ h) \\ &= q \circ S_k \circ C, \end{aligned}$$

όπου $C \equiv D({S_k}^{-1} \circ h)$. Από το Λήμμα 6.2.4 έχουμε

$$t^{-1} \leq \mathrm{Lip}({S_k}^{-1} \circ h) = \mathrm{Lip}(C) \leq t \text{ στο } G_k. \tag{6.2.5}$$

Από το Θεώρημα 5.1.3 μπορούμε να γράψουμε ότι

$$Df = S \circ O^\star \text{ και } q \circ S_k = T \circ P^\star$$

για $S, T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ συμμετρικές και $O, P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ ορθογώνιες. Τότε έχουμε

$$S \circ O^\star = T \circ P^\star \circ C. \tag{6.2.6}$$

Συνεπώς

$$S = T \circ P^\star \circ C \circ O.$$

Επειδή $G_k \subset A \subset \{Jf > 0\}$, έχουμε $\det S \neq 0$, άρα και $\det T \neq 0$. Δηλαδή, εάν $u \in \mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\begin{aligned} |T^{-1} \circ Su| &= |P^\star \circ C \circ Ou| \\ &\leq |C \circ Ou| \\ &\leq t\ |Ou| \text{ από την (6.2.5)} \\ &\leq t\ |u|. \end{aligned}$$

Άρα

$$(T^{-1} \circ S)(B(0,1)) \subset B(0,t)$$

κι επομένως

$$Jf = |\det S| \le t^N \ |\det T| = t^N \ [\![q \circ S_k]\!].$$

Όμοια, εάν $u \in \mathbb{R}^n$, έχουμε από την (6.2.6):

$$\begin{aligned} |S^{-1} \circ Tu| &= |O^\star \circ C^{-1} \circ Pu| \\ &\le |C^{-1} \circ Pu| \\ &\le t \ |Pu| \text{ από την (6.2.5)} \\ &\le t \ |u|. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$[\![q \circ S_k]\!] = |\det T| \le t^N \ |\det S| = t^N \ Jf. \ \square$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} & t^{-3N+n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(G_k \cap f^{-1}\{y\}) \ dy \\ &= t^{-3N+n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) \ dy \\ &\le t^{-2N} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(S_k^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\})) \ dy \text{ από το Λήμμα 6.2.4} \\ &= t^{-2N} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(S_k^{-1} \circ h(G_k) \cap (q \circ S_k)^{-1}\{y\}) \ dy \\ &= t^{-2N} \ [\![q \circ S_k]\!] \ \mathcal{L}^N(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \text{ από το Λήμμα 6.2.1} \\ &\le t^{-N} \ [\![q \circ S_k]\!] \ \mathcal{L}^N(G_k) \text{ από το Λήμμα 6.2.4} \\ &\le \int_{G_k} Jf \ dx \text{ από τον Ισχυρισμό 1} \\ &\le t^N \ [\![q \circ S_k]\!] \ \mathcal{L}^N(G_k) \text{ από τον Ισχυρισμό 1} \\ &\le t^{2N} \ [\![q \circ S_k]\!] \ \mathcal{L}^N(S_k^{-1} \circ h(G_k)) \text{ από το Λήμμα 6.2.4} \end{aligned}$$

$$= t^{2N} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(S_k^{-1} \circ h(G_k) \cap (q \circ S_k)^{-1}\{y\})\ dy \text{ από το Λήμμα 6.2.1}$$

$$\leq t^{3N-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(h^{-1}(h(G_k) \cap q^{-1}\{y\}))\ dy \text{ από το Λήμμα 6.2.4}$$

$$= t^{3N-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(G_k \cap f^{-1}\{y\})\ dy.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν το Λήμμα 6.2.2 και το ότι $\mathcal{L}^N\left(A \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k\right) = 0$, μπορούμε να αθροίσουμε τις παραπάνω σχέσεις στα k και να αφήσουμε το $t \to 1^+$. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην

$$\int\limits_A Jf\ dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy.$$

- Περίπτωση 2: $Jf(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

  Σταθεροποιούμε $0 < \varepsilon \leq 1$ και ορίζουμε

$$g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ με } g(x,y) \equiv f(x) + \varepsilon y$$

και

$$p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ με } p(x,y) \equiv y.$$

Τότε $Dg = (Df, \varepsilon I)_{n\times(N+n)}$ και $\varepsilon^n \leq Jg = [\![Dg]\!] = [\![Dg^\star]\!] \leq C\varepsilon$.

Ισχυρισμός 2: Έστω $y \in \mathbb{R}^n,\ w \in \mathbb{R}^n$ και $B \equiv A \times B(0,1) \subset \mathbb{R}^{N+n}$. Τότε

$$B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\} = \begin{cases} \emptyset & \text{αν } w \notin B(0,1) \\ (A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) \times \{w\} & \text{αν } w \in B(0,1) \end{cases}.$$

Απόδειξη Ισχυρισμού 2: Έχουμε

$$(x,z) \in B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\}$$

αν και μόνο αν $x \in A,\ z \in B(0,1),\ f(x) + \varepsilon z = y$ και $z = w$

$$\text{αν και μόνο αν } x \in A,\ z = w \in B(0,1),\ f(x) = y - \varepsilon w$$

$$\text{αν και μόνο αν } w \in B(0,1),\ (x,z) \in (A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\}) \times \{w\}.\ \square$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψιν τον Ισχυρισμό 2 και την Παρατήρηση 6.2.3, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\})\ dy \text{ για κάθε } w \in \mathbb{R}^n \\
&= \frac{1}{\alpha(n)} \int_{B(0,1)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y - \varepsilon w\})\ dy\ dw \\
&= \frac{1}{\alpha(n)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(B \cap g^{-1}\{y\} \cap p^{-1}\{w\}) dw\ dy \\
&\leq \frac{\alpha(N-n)}{\alpha(N)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N}(B \cap g^{-1}\{y\})\ dy \\
&\leq \frac{\alpha(N-n)}{\alpha(N)} \int_{B} Jg\ dx\ dz \\
&\leq \frac{\alpha(N-n)\ \alpha(n)}{\alpha(N)}\ \mathcal{L}^N(A)\ \sup_B Jg \\
&\leq C\ \mathcal{L}^N(A)\ \varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A \cap f^{-1}\{y\})\ dy = 0 = \int_A Jf\ dx.$$

- Περίπτωση 3: $Jf(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A$.

  Γράφουμε $A = A_1 \cup A_2$, όπου $A_1 \subset \{Jf > 0\}$ και $A_2 \subset \{Jf = 0\}$ και εφαρμόζουμε τις προηγούμενες περιπτώσεις στα A_1 και A_2 αντίστοιχα. ■

Θεώρημα 6.2.6 (Τύπος αλλαγής μεταβλητών). *Έστω $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ συνάρτηση Lipschitz. Τότε για κάθε $\mathcal{L}^N$ - αθροίσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,*

$$\text{η } g|_{f^{-1}\{y\}} \text{ είναι } \mathcal{H}^{N-n} \text{ - αθροίσιμη για } \mathcal{L}^n \text{ - σχεδόν κάθε } y$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x)\ Jf(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g\ d\mathcal{H}^{N-n} \right] dy.$$

Παρατήρηση 6.2.7. *Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ το $f^{-1}\{y\}$ είναι κλειστό και συνεπώς $\mathcal{H}^{N-n}$ - μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του Θεωρήματος θα διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Περίπτωση 1: $g \geq 0$.

  Από το Θεώρημα 2.2.4 μπορούμε να γράψουμε ότι $g = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}\ \chi_{A_i}$ για κατάλληλα $\mathcal{L}^N$ - μετρήσιμα σύνολα $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} g\ Jf\ dx &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{A_i} Jf\ dx \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{N-n}(A_i \cap f^{-1}\{y\})\ dy \text{ από το Θεώρημα 6.2.5} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \mathcal{H}^{N-n}(A_i \cap f^{-1}\{y\})\ dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{f^{-1}\{y\}} g\ d\mathcal{H}^{N-n} \right] dy. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

- Περίπτωση 2: g οποιαδήποτε $\mathcal{L}^N$ - αθροίσιμη συνάρτηση.

  Γράφουμε $g = g^+ - g^-$ και χρησιμοποιούμε την Περίπτωση 1.

Βιβλιογραφία

[1] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, Florida, 1992.

[2] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions - Revised Edition.* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2015.

[3] Lin Fanghua and Yang Xiaoping. *Geometric Measure Theory - An Introduction.* Science Press, CRC Press, Beijing, China, 2002. International Press, CRC Press, Cambridge, U.S.A., 2002.

[4] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory.* Springer - Verlag, New York, 1969.

[5] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis.* Third Edition, McGraw - Hill Book Company, Singapore, 1987.

[6] Michael Spivak. *Calculus on Manifolds.* A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus, Addison - Wesley Publishing Company, U.S.A., 1965.

[7] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Real Analysis - Measure Theory, Integration, Hilbert Spaces.* Princeton Lecture in Analysis III, Princeton University Press, U.S.A., 2005.

[8] Andrejs Treibergs. *Steiner Symmetrization and Applications.* Lecture slides, University of Utah, Utah, 2008.

[9] Νικόλαος Μουρδουκούτας. *Το Θεώρημα του Rademacher.* Εργασία Προπτυχιακού Μαθήματος, Ε.Κ.Π.Α., Αθήνα, 2014.