

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Διπλωματική Εργασία Ειδίκευσης Στα Θεωρητικά Μαθηματικά

Εκτιμήσεις Πυκνότητας και Ισομεταβλητές Λύσεις Ελλειπτικών Συστημάτων Τύπου Αλλαγής Φάσης

Νικολούζος Μιχάλης

Ευχαριστίες

Στον κύριο Νικόλαο Αλικάκο. Τον καθηγητή και τον άνθρωπο.

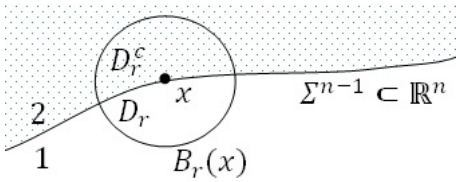
Περίληψη

Θα μελετήσουμε λύσεις του συστήματος $\Delta u - W_u(u) = 0$ όπου u συμμετρική, ελαχιστική και με την ιδιότητα της θετικότητας, επεκτείνοντας το βασικό Θεώρημα Πυκνότητας και τελικά, θα δείξουμε οτι μια τέτοια λύση έχει ιεραρχική δομή, με την έννοια ότι σε κατάλληλες διεύθυνσεις τείνει ασυμπτωτικά σε ελαχιστική λύση μικρότερης διάστασης.

1 Εισαγωγή

Η ιδέα

Θα ξεκινήσουμε, παρουσιάζοντας την πιο απλή ιδέα, χωρίς να είμαστε αυστηροί, που κρύβεται πίσω το θεώρημα πυκνότητας που θέλουμε να αποδείξουμε.
Έστω $\Sigma^{n-1} = \partial D$ μια ελαχιστική επιφάνεια ορισμένη στο επίπεδο R^n, όπου διαχωρίζει τις φάσεις 1 και 2.



$$D_r = D \cap B_r,\ D_r^c = D^c \cap B_r$$

Έστω $x \in \Sigma^{n-1}$. Η επιφάνεια διαμερίζει την $B_r(x)$ σε δύο μέρη D_r, και D_r^c. Έστω $V(r) = \mathcal{H}^n(D_r)$, ο όγκος της μπάλλας που περιέχεται στην φάση 1, $A(r) = \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma^{n-1} \cap B_r)$, το εμβαδό της διεπιφάνειας μέσα στην $B_r(x)$ και S_r η σφαιρική επιφάνεια που φράσσει το D_r. Υπολογίζουμε :

$$\begin{aligned} V(r) &\leq C[\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma^{n-1} \cap B_r) + \mathcal{H}^{n-1}(S_r)]^{\frac{n}{n-1}}, \text{ από ισοπεριμετρική ανισότητα,} \\ &\leq C[2\mathcal{H}^{n-1}(S_r)]^{\frac{n}{n-1}}, \text{ απο ελαχιστικότητα, αφού } \partial(\Sigma^{n-1} \cap \partial B_r) = \partial S_r, \\ &\leq C[V'(r)]^{\frac{n}{n-1}}, \text{από τύπο συνεμβαδού.} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Από (1.1), λύνοντας την διαφορική ανισότητα, έχουμε

$$V(r) \geq Cr^n,\ C = C(n),\ \forall r > 0. \tag{1.2}$$

Δημιουργώντας το κατάλληλο πλαίσιο και ακολουθώντας την παραπάνω διαδικασία θα κατάληξουμε σε ένα ανάλογο της σχέσης (1.2) στο πρώτο μέρος της εργασίας, προσαρμόζοντας τον όγκο $V(r)$ και το εμβαδό $A(r)$ στις ανάγκες του προβλήματος.

2 Το Θεώρημα Πυκνότητας για συνδέουσες τροχιές

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε το θεώρημα στο απλούστερο, δυνατόν, πλαισιο.

1 Οι υποθέσεις του θεωρήματος

Έστω $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λύση του συστήματος $\Delta u - W_u(u) = 0$ με $u \epsilon\, W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Υποθέτουμε για την u οτι είναι ελαχιστική λύση, δηλαδή ελαχιστοποιεί την ενέργεια,

$$\mathcal{J}_\Omega(u) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + W(u))dx \tag{2.1}$$

$\forall\, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, φραγμένο και με Lipschitz σύνορο. Δηλαδή, κάτω από τις ίδιες Dirichlet συνθήκες, για $v\, \epsilon \mathcal{W}^{1,2}_0(\Omega;\mathbb{R}^m) \cap \mathcal{L}^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ ισχύει ότι

$$\mathcal{J}_\Omega(u) \le \mathcal{J}_\Omega(u+v). \tag{2.2}$$

Παρατήρηση: Το σύστημα $\Delta u - W_u(u) = 0$ είναι η Euler–Lagrange του συναρτησιακού $\mathcal{J}_\Omega(v) = \int_\Omega (\frac{1}{2}|\nabla v|^2 + W(v))dx$.
Ορίζουμε τώρα, το σύνολο των συναρτήσεων με την ιδιότητα της θετικότητας, στη κλάση των συμμετρικών Sobolev συναρτήσεων, ως εξής:

$$\mathcal{A} := \big\{u \in W^{1,2}_{\mathsf{s}}(F;\mathbb{R}^n) : u(\overline{F}) \subset \overline{F}\big\}, \tag{2.3}$$

όπου F η θεμελιώδες περιοχή της αντίστοιχης ομάδας συμμετριών. Πιο αναλυτικά ένα υποσύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται θεμελιώδης περιοχή εάν

(i) F έιναι ανοικτό και κυρτό,

(ii) $F \cap gF = \varnothing$, για $I \neq g \in G$, με G κάποια ομάδα συμμετριών και I το ταυτοτικό στοιχείο της G,

(iii) $\mathbb{R}^n = \cup\{g\overline{F} : g \in G\}$.

Για την λύση u, ισχύει η βασική εκθετική εκτίμηση :

$$|u(x) - a^+| + |\nabla u(x)| \le Ke^{-kx_1} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.4}$$

Το δυναμικό έχει δύο ελάχιστα, α^+ και α^-, με $W(\alpha^+) = W(\alpha^-) = 0$, $W(u) > 0$ για $u \in \mathbb{R}^m \setminus \{\alpha^+, \alpha^-\}$, τα οποία είναι μη εκφυλισμένα:

$$\nu^\top \partial^2 W(u)\nu \ge 2c^2|\nu|^2$$

για $\nu \in \mathbb{R}^n$ και $|u - \alpha^i| \leq \bar{q}$ για κάποια $c, \bar{q} > 0$ (που θα οριστούν παρακάτω) και $i = 1, 2$.
Μοντελοποιούμε το δυναμίκο γύρω από τα ελάχιστα ως

$$W \sim |u - \alpha|^2$$

(και άρα το W είναι τοπικά κυρτό σε μια περιοχή του ελαχίστου) και επιπρόσθετα υποθέτουμε ότι $W : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ είναι $\mathcal{C}^3$ και συμμετρικό ως πρός την ανάκλαση της πρώτης μεταβλητής:
εάν $z \in \mathbb{R}^d$ με $z = (z_1, ..., z_d)$, συμβολίζουμε με $\tilde{z} = (-z_1, ..., z_d)$ την ανάκλαση του z ως πρός το επίπεδο $z_1 = 0$. Υποθέτουμε, δηλαδή, ότι $W(u) = W(\tilde{u})$.
Στην περίπτωση που μελετάμε

$$F = \{z \in \mathbb{R}^d : z_1 > 0\}$$

Οι υποθέσεις για το W έχουν ως συνέπεια την ύπαρξη μιας συνδέουσας τροχιάς $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ που ελαχιστοποιέι την αντίστοιχη ενέργεια, για συναρτήσεις $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ με $\lim_{s\to\infty} v(s) = \pm\alpha$. Μπορούμε, επιπλέον, να υποθέσουμε οτι η e είναι συμμετρική, θετική (με την έννοια της σχέσης (2.3)) και ικανοποιεί τη σχέση

$$|e(s) - a^+| + |e_s| \leq Ke^{-ks} \quad s \geq 0 \tag{2.5}$$

Τέλος, υποθέτουμε, ότι η τροχιά ειναι υπερβολική, δηλαδή

$$\langle Tv, v\rangle \geq \eta||v||_2^2, \quad v \in W_s^{1,2}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m), \quad \eta > 0 \tag{2.6}$$

Όπου, $Tv = -v_{ss} + W_{uu}(e)v$ ο γραμμικοποιημένος τελεστής
$\tilde{T}v = -v_{ss} + W_u(v)$ σε μια περιοχή του e, $W_s^{1,2}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m) \subset W_{loc}^{1,2}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ το υποσύνολο των συμμετρικών απεικονίσεων και $\langle\ ,\ \rangle$ το σύνηθες L^2 εσωτερικό γινόμενο με την αντίστοιχη νόρμα.
Συμβολίζουμε με $E^{xp} \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ των χώρο συμμετρικών συναρτήσεων όπου ικανοποιούν την εκτίμηση :

$$|v(s) - a^+| + |v_s| \leq Ke^{-ks} \quad s \geq 0$$

Παρατήρηση: Τα k, K παραπάνω είναι ακριβώς τα ίδια με αυτά στις σχέσεις (2.5) και (2.6)

2 Το Θεώρημα

Πολική μορφή
Ορίζουμε την πολική μορφή μιας απεικόνισης $u \epsilon W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cap \mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, ως προς τη συνδέουσα τροχιά e.

$$u(s,y) = e(s) + q^u(y)\mathbf{n}^u(s,y), \quad (s,y) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, ...y_{n-1}) \tag{2.7}$$

όπου

$$q^u(y) := ||u(\cdot,y) - e(\cdot)||_2 \tag{2.8}$$

και

$$\mathbf{n}^u(s,y) = \begin{cases} \frac{u(\cdot,y)-e(\cdot)}{\|u(\cdot,y)-e(\cdot)\|_2} & \text{αν } \ q^u(y) \neq 0, \\ 0, & \text{αλλού .} \end{cases} \tag{2.9}$$

Θεωρούμε τους (άπειρους) οριζόντιους κυλίνδρους $C_r(y^0) = \mathbb{R} \times B^{n-1}_r(y_0)$, με διατομή $B^{n-1}_r(y_0)$, την ανοικτή σφαίρα στον $\mathbb{R}^{n-1}$ με κέντρο το y^0 και ακτίνα r

Παρατηρώντας πως

$$\frac{\partial u}{\partial y_i} = \frac{\partial q^u}{\partial y_i}\mathbf{n}^u + q^u\frac{\partial \mathbf{n}^u}{\partial y_i}.$$

και

$$\|\mathbf{n}^u(\cdot,y)\| = 1, \quad \langle \mathbf{n}^u(\cdot,y), \frac{\partial \mathbf{n}^u}{\partial y_i}(\cdot,y)\rangle = 0, \quad i = 1,\dots,n-1,$$

εξάγουμε την πολική αναπαράσταση της ενέργειας

$$J_{C_r(y^0)}(u) = \int_{C_r(y^0)} (\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + W(u))dx =$$

$$\int_{B^{n-1}_r(y^0)} (\frac{1}{2}|\nabla_y q^u|^2 + (q^u)^2 \sum_{i=1}^{n-1} \|\frac{\partial \mathbf{n}^u}{\partial y_i}\|^2) + \mathcal{W}(u) + J_{\mathbb{R}}(e))dy.$$

όπου ορίζουμε

$$\mathcal{W}(u) := J_{\mathbb{R}}(u) - J_{\mathbb{R}}(e)$$

το effective δυναμικό.
'Ομως η $J_{\mathbb{R}}(e)$ είναι σταθέρη και φραγμένη συνεπώς μπόρουμε (για ευκόλια) να αντικαταστήσουμε την προηγούμενη έκφραση της ενέργειας με την "προσαρμοσμένη" της μορφή:

$$\tilde{J}_{C_r(y^0)}(u) = \int_{B^{n-1}_r(y^0)} (\frac{1}{2}|\nabla_y q^u|^2 + (q^u)^2 \sum_{i=1}^{n-1} \|\frac{\partial \mathbf{n}^u}{\partial y_i}\|^2) + \mathcal{W}(u))dy. \tag{2.10}$$

Παρατηρούμε ότι $\mathcal{W}(u) \geq 0$ και $\tilde{J}_{C_r(y^0)}(e) = 0$.
Πριν προχωρήσουμε, θα μελετήσουμε την συμπεριφορά του $\mathcal{W}$ τοπικά γύρω από την τρόχια e:

Λήμμα 1 Κάτω από την υπόθεση οτι η e είναι υπερβολική τροχιά, υπάρχει $\bar{q} > 0$ τέτοιο ώστε

$$D_{qq}\mathcal{W}(e+q\nu) \geq \frac{\eta}{2}, \text{ για } q \in [0,\bar{q}],\ \nu \in \mathcal{S}^1, \tag{2.11}$$

όπου $\mathcal{S}^1 = W^{1,2}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m) \cap \{\|v\|_2 = 1\}$, για κάθε $v(s) = e(s) + q\nu(s) \in \mathsf{E}^{\mathsf{xp}}$.

Απόδειξη: Καταρχήν, παρατηρούμε οτι $\|v - e\|_{W^{1,2}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)} \leq M_1$, για $v \in \mathsf{E}^{\mathsf{xp}}$ και για κάποιο $M_1 > 0$. Παραγωγίζουμε δύο φόρες την $\mathcal{W}(e+q\nu)$ ως προς q και έχουμε

$$\begin{aligned} D_{qq}\mathcal{W}(e+q\nu) &= \|\nu_s\|_2^2 + \int_{\mathbb{R}} W_{uu}(e+q\nu)\nu\cdot\nu\, ds \\ &= D_{qq}\mathcal{W}(e+q\nu)|_{q=0} + \int_{\mathbb{R}} (W_{uu}(e+q\nu) - W_{uu}(e))\nu\cdot\nu\, ds. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα παρεμβολής έχουμε:

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)} &\leq \sqrt{2}\|f\|_2^{\frac{1}{2}}\|f_s\|_2^{\frac{1}{2}} \ (f \in W^{1,2}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)) \\ &\leq \sqrt{2}\|f\|_{W^{1,2}(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)}, \end{aligned}$$

την εφαρμόζουμε στην $q\nu$ και έχουμε από την δεύτερη ανισότητα

$$\|q\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)} \leq \sqrt{2}M_1,$$

και από την πρώτη

$$\|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}^m)} \leq \sqrt{2}M_1^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}},$$

εφόσον $\|q\nu\|_2 = q$ και $\|q\nu_s\|_2 \leq M_1$. Συνεπώς

$$|W_{u_iu_j}(e(s)+q\nu(s)) - W_{u_iu_j}(e(s))| \leq \sqrt{2}M_1^{\frac{1}{2}}\overline{W}'''q^{\frac{1}{2}},$$

όπου

$$\overline{W}''' := \max_{\substack{1\leq i,j,k\leq m \\ s\in\mathbb{R},|\tau|\leq 1}} W_{u_iu_ju_k}(e(s)+\tau\sqrt{2}M_1).$$

Οπότε έχουμε

$$\Big|\int_{\mathbb{R}} (W_{uu}(e+q\nu) - W_{uu}(e))\nu\cdot\nu\, ds\Big| \leq C_1 q^{\frac{1}{2}}\langle\nu,\nu\rangle = C_1 q^{\frac{1}{2}},$$

με $C_1 > 0$ σταθερά που εξαρτάται από το M_1. Από τη σχέση (2.4) έχουμε

$$D_{qq}\mathcal{W}(e+q\nu)|_{q=0} = \langle T\nu,\nu\rangle \geq \eta\|\nu\|_2^2 = \eta,$$

Άρα έχουμε το ζητούμενο:

$$D_{qq}\mathcal{W}(e+q\nu) \geq c_0 := \frac{\eta}{2}, \quad \text{for } q \in [0, \bar{q}],$$

όπου $\bar{q} = \frac{1}{4}\frac{\eta^2}{C_1^2}$.

□

Άμεσο συμπέρασμα του λήμματος είναι πως η τροχιά e είναι απομονωμένο στοιχειό του συνόλου

$$\{\mathcal{W} = 0\} \cap E^{xp}$$

συνεπώς

$$\hat{d}_0 := \inf_v \{\|e - v\|_2 : v \neq e, \{\mathcal{W}(v) = 0\} \cap E^{xp}\} > 0. \tag{2.12}$$

Είμαστε, πλέον, σε θέση να παρουσιάσουμε το βασικό θεώρημα αυτής της ενότητας:

Θεώρημα 1 Κάτω απο τις παραπάνω υποθέσεις και για $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$. Για κάθε $\mu_0 > 0$ και για κάθε $\lambda \in (0, \hat{d}_0)$, η συνθήκη

$$\mathcal{L}^{n-1}(B_{R_0}^{n-1}(y^0) \cap \{y : \|u(\cdot, y) - e(\cdot)\|_2 \geq \lambda\}) \geq \mu_0 > 0$$

συνεπάγεται

$$\mathcal{L}^{n-1}(B_R^{n-1}(y^0) \cap \{y : \|u(\cdot, y) - e(\cdot)\|_2 \geq \lambda\}) \geq CR^{n-1}, \text{ για } R \geq R_0,$$

όπου $C = C(W, \mu_0, \lambda, R_0, K, k)$, σταθερά ανεξάρτητη των y^0 ,u και όπου $\hat{d}_0$ η σταθερά της σχέσης (2.12)

Απόδειξη
Παρατήρηση: Το ανάλογο των ποσοτήτων $V(r)$ και $A(r)$ σε αυτό το πλαίσιο είναι

$$A(r) = \int_{B_r^{n-1}(y^0) \cap \{y : \|u(\cdot,y) - e(\cdot)\| \leq \lambda\}} \mathcal{W}(u(\cdot, y))dy,$$

$$V(r) = \mathcal{L}^{n-1}(B_r^{n-1}(y^0) \cap \{y : \|u(\cdot, y) - e(\cdot)\| > \lambda\}).$$

Θα χρησιμοποιηθούν οι παρακάτω συναρτήσεις σύγκρισης

$$\begin{aligned} h &= e + q^h \mathbf{n}^u, \quad q^h = \varphi q_M, \\ \sigma &= e + q^\sigma \mathbf{n}^u, \quad q^\sigma = \min\{q^u, q^h\}, \\ \beta &= \min\{q^u - q^\sigma, \lambda'\}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

όπου $\lambda' \in (0, \lambda)$, $q_M = sup_{y \in \mathbb{R}^{n-1}} \|u(\cdot, y) - e(\cdot)\|_2$ και
$h,\ \sigma,\ q^\sigma : B_R^{n-1} \to E^{xp}$.
Θεωρούμε ότι $\varphi : B_R^{n-1} \to \mathbb{R}$ λύνει το εξής πρόβλημα:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = c_1^2\varphi, & \text{στη } B_R^{n-1}, \\ \varphi = 1, & \text{στο } \partial B_R^{n-1}, \end{cases} \tag{2.14}$$

όπου c_1 θετική σταθερά και $\varphi(y) = \Phi(|y|, r)$, ακτινικά συμμετρική συνάρτηση με

$$\Phi(r, R) \leq e^{-c_2(R-r)}, \text{ για } r \in [0, R],\ R \geq 1, \tag{2.15}$$

για κάποιο $c_2 > 0$. Η ύπαρξη μιας τέτοιας λύσης θα παρουσιαστεί στο παράρτημα.
Από τους ορισμούς έπεται οτι

$$0 \leq q^\sigma \leq q^u \text{ στη } B_R^{n-1}$$
$$q^\sigma = q^u \text{ στο } \partial B_R^{n-1}$$

.

Για να μπορέσουμε να κάνουμε εκτιμήσεις της ενέργειας, θα πρέπει να επεκτείνουμε την ιδιότητα της ελαχιστικότητας της λύσης από συμπαγή συνόλα σε άπειρους κυλίνδρους:

Λήμμα 2 Υποθέτουμε πως $O \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ανοικτό,φραγμένο. Τότε

$$\hat{J}_{\mathbb{R}\times O}(u) = \min_{v \in u + W_{0S}^{1,2}(\mathbb{R}\times O;\mathbb{R})} \hat{J}_{\mathbb{R}\times O}(v), \tag{2.16}$$

όπου $W_{0S}^{1,2}(\mathbb{R} \times O; \mathbb{R}^m)$ ειναι η κλειστότητα στον $W_S^{1,2}(\mathbb{R} \times O; \mathbb{R}^m)$ των λείων απεικονείσεων v που ικανοποιούν $v = 0$ στο $\mathbb{R} \times \partial O$.

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε το λήμμα με άτοπο:
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ και $v \in u + W_{0S}^{1,2}(\mathbb{R} \times O; \mathbb{R}^m)$ τέτοιο ώστε

$$\hat{J}_{\mathbb{R}\times O}(u) - \hat{J}_{\mathbb{R}\times O}(v) \geq \delta. \tag{2.17}$$

Για κάθε $l > 0$ ορίζουμε $\tilde{v} \in u + W_{0S}^{1,2}(\mathbb{R} \times O; \mathbb{R}^m)$ ως εξής :

$$\tilde{v} = \begin{cases} v, & \text{για } s \in [0, l],\ y \in O, \\ (1 + l - s)v + (s - l)u, & \text{για } s \in [l, l + 1],\ y \in O, \\ u, & \text{για } s \in [l + 1, +\infty),\ y \in O. \end{cases}$$

Χρησιμοποιούμε το γεγονός οτι η u είναι ελαχιστική και ότι οι u και $v \in E^{\text{xp}}$ και έχουμε

$$0 \geq \hat{J}_{[-l-1,l+1]\times O}(u) - \hat{J}_{[-l-1,l+1]\times O}(\tilde{v}) = \hat{J}_{[-l-1,l+1]\times O}(u) - \hat{J}_{[-l,l]\times O}(v) + \mathsf{O}(e^{-kl}),.$$

Στο όριο καθώς $l \to +\infty$ έχουμε

$$0 \geq \hat{J}_{\mathbb{R}\times O}(u) - \hat{J}_{\mathbb{R}\times O}(v),$$

σε αντίθεση με (2.17). □

Το Λήμμα 1 και η σχέση (2.9) έπονται:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{B_R^{n-1}}(|\nabla q^u|^2 - |\nabla q^{\sigma|^2})dy &= \hat{J}_{C_R}(u) - \hat{J}_{C_R}(\sigma) + \int_{B_R^{n-1}}(\mathcal{W}(\sigma) - \mathcal{W}(u))dy \\ &+ \frac{1}{2}\int_{B_R^{n-1}}\Big((q^\sigma)^2 - (q^u)^2\Big)\sum_i^{n-1}\Big\|\frac{\partial \mathbf{n}^u}{\partial y_i}\Big\|^2 dy \\ &\leq \int_{B_R^{n-1}}(\mathcal{W}(\sigma) - \mathcal{W}(u))dy. \qquad (2.18)\end{aligned}$$

Το επόμενο βήμα είναι να εφαρμόσουμε στη συνάρτηση β^2 την ανισότητα Sobolev και αφού παρατηρήσουμε ότι $\nabla\beta = 0$ σ.π. στο σύνολο όπου $q^u - q^\sigma > \lambda'$ θα εφαρμόσουμε την ανισότητα Young και έχουμε :

$$\begin{aligned}\Big(\int_{B_R^{n-1}}\beta^{\frac{2(n-1)}{n-2}}dy\Big)^{\frac{n-2}{n-1}} &= \Big(\int_{B_R^{n-1}}(\beta^2)^{\frac{n-1}{n-2}}dy\Big)^{\frac{n-2}{n-1}} \\ &\leq C\int_{B_R^{n-1}}|\nabla(\beta^2)|dy \qquad (\beta = 0, \text{ on } \partial B_R^{n-1}) \\ &\leq 2C\int_{B_R^{n-1}\cap\{q^u - q^\sigma \leq \lambda'\}}|\nabla\beta||\beta|dy \\ &\leq CA\int_{B_R^{n-1}}|\nabla(q^u - q^{\sigma)}|^2dy + \frac{C}{A}\int_{B_R^{n-1}\cap\{q^u-q^\sigma\}\leq\lambda'\}}(q^u - q^\sigma)^2dy \\ &= CA\Big(\int_{B_R^{n-1}}(|\nabla q^u|^2 - |\nabla q^\sigma|^2)dy - 2\int_{B_R^{n-1}}\nabla q^\sigma\cdot\nabla(q^u - q^\sigma)dy\Big) \\ &+ \frac{C}{A}\int_{B_R^{n-1}\cap\{q^u-q^\sigma\leq\lambda'\}}(q^u - q^\sigma)^2dy\end{aligned}$$

Από τη σχέση (2.18) έχουμε

$$\begin{aligned}\Big(\int_{B_R^{n-1}}\beta^{\frac{2(n-1)}{n-2}}dy\Big)^{\frac{n-2}{n-1}} &\leq \frac{C}{A}\int_{B_R^{n-1}\cap\{q^u-q^\sigma\leq\lambda'\}}(q^u - q^\sigma)^2dy \\ &+ 2CA\Big(\int_{B_R^{n-1}}(\mathcal{W}(\sigma) - \mathcal{W}(u))dy - \int_{B_R^{n-1}}\nabla q^\sigma\cdot\nabla(q^u - q^\sigma)dy\Big). \qquad (2.19)\end{aligned}$$

Από τους ορισμούς της σχέσης (2.13) και για $T > 0$ έχουμε ότι

$$q^\sigma \leq q^h \leq q_M e^{-c_1 T}, \quad \text{για} \quad x \in B_{R-T}^{n-1},\ R > R_0 + T.$$

,
οπότε, εάν το T είναι τέτοιο ώστε

$$q_M e^{-c_1 T} \leq \lambda - \lambda' \tag{2.20}$$

έχουμε

$$q^u - q^\sigma = q^u - q^h > \lambda', \quad \text{για} \quad x \in B_{R-T}^{n-1} \cap \{q^u > \lambda\}.$$

Συνεπώς

$$B_{R-T}^{n-1} \cap \{q^u > \lambda\} \cap \{q^u - q^h \leq \lambda'\} = \emptyset \tag{2.21}$$

και

$$(\lambda')^2 \Big(\mathcal{L}^{n-1}(B_{R-T}^{n-1} \cap \{q^u > \lambda\}) \Big)^{\frac{n-1}{n}} \leq \Big(\int_{B_R^{n-1}} \beta^{\frac{2n}{n-1}} dy \Big)^{\frac{n-1}{n}}. \tag{2.22}$$

Από τον ορισμό του q^σ έχουμε

$$B_R^{n-1} = \{q^\sigma < q^u\} \cup (B_R^{n-1} \cap \{q^\sigma = q^u\}), \text{ και } \{q^\sigma < q^u\} = \{q^h < q^u\}$$

Τέλος εξ ορισμού $\Delta q^h = c_0 q^h$ στην B_R^{n-1}

Άρα για τα τρία ολοκληρώματα της (2.19) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{B_R^{n-1}} (\mathcal{W}(\sigma) - \mathcal{W}(u)) dy &= \int_{\{q^h < q^u\}} (\mathcal{W}(h) - \mathcal{W}(u)) dy, \\ \int_{B_R^{n-1}} \Delta q^\sigma (q^u - q^\sigma) dy &= \int_{\{q^h < q^u\}} c_0 q^h (q^u - q^h) dy, \\ \int_{B_R^{n-1} \cap \{q^u - q^\sigma \leq \lambda'\}} (q^u - q^\sigma)^2 dy &= \int_{\{0 < q^u - q^h \leq \lambda'\}} (q^u - q^h)^2 dy \end{aligned} \tag{2.23}$$

Από τις ιδιότητες του $\mathcal{W}$ και για $x \in \{q^h < q^u\} \cap \{q^u \leq \lambda\}$ έχουμε

$$\mathcal{W}(u) - \mathcal{W}(h) = \int_{q^h}^{q^u} q \int_0^1 D_{qq} \mathcal{W}(a + q\mathbf{n}^u) ds dq \geq \frac{c_0}{2} ((q^u)^2 - (q^h)^2).$$

Εάν θέσουμε $A = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$, στο σύνολο $\{q^h < q^u\} \cap \{q^u \leq \lambda\}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 2A \Big(\mathcal{W}(h) - \mathcal{W}(u) + c_0 q^h (q^u - q^h) \Big) + \frac{1}{A} (q^u - q^h)^2 \\ \leq \Big(\frac{2}{\sqrt{c_0}} (-\frac{c_0}{2} (q^u + q^h) + c_0 q^h) + \sqrt{c_0} (q^u - q^h) \Big) (q^u - q^h) = 0. \end{aligned}$$

Απο αυτό,τη σχεση (2.19) και τη σχέση (2.23) παίρνουμε

$$\Big(\int_{B_R^{n-1}} \beta^{\frac{2(n-1)}{n-2}} dy\Big)^{\frac{n-2}{n-1}} \leq \frac{2C}{\sqrt{c_0}} \int_{B_R^{n-1}\cap\{q^h<q^u\}\cap\{q^u>\lambda\}} \Big(\mathcal{W}(h) - \mathcal{W}(u) + c_0 q^h (q^u - q^h)\Big) dy + C\sqrt{c_0} \int_{B_R^{n-1}\cap\{0<q^u-q^h\leq\lambda'\}\cap\{q^u>\lambda\}} (q^u - q^h)^2 dy. \tag{2.24}$$

Τώρα θέτουμε $R = R_0 + pT$ with $T > 0$ και $B_0 = B_{R_0}^{n-1}$, $B_j = B_{R_0+jT}^{n-1}$, $j = 1, \ldots, p$ και

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \mathcal{L}^{n-1}(B_0 \cap \{q^u > \lambda\}), \\ \omega_j &= \mathcal{L}^{n-1}((B_j \setminus B_{j-1}) \cap \{q^u > \lambda\}). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Λήμμα 3 Υπάρχει σταθερά $C^\circ > 0$, $C^\circ = C^\circ(W, M, \lambda, r_0)$, τέτοια ώστε

$$C^\circ (\sum_{j=0}^{p-1} \omega_j)^{\frac{n-2}{n-1}} \leq \sum_{j=1}^{p} \epsilon^j \omega_{p-j} + \omega_p \tag{2.26}$$

με $\epsilon := e^{-c_1 T}$.

Απόδειξη: Από τη σχέση (2.25) έχουμε

$$\sum_{j=0}^{p-1} \omega_j = \mathcal{L}^{n-1}(B_{R-T}^{n-1} \cap \{q^u > \lambda\})$$

οπότε από τη σχέση (2.21) παίρνουμε

$$(\lambda')^2 (\sum_{j=0}^{p-1} \omega_j)^{\frac{n-2}{n-1}} \leq \Big(\int_{B_R^{n-1}} \beta^{\frac{2n}{n-1}} dx\Big)^{\frac{n-2}{n-1}}. \tag{2.27}$$

Θέτουμε:

$$\mathcal{A}^1 = B_R^{n-1} \cap \{q^h < q^u\} \cap \{q^u > \lambda\}$$

,

$$\mathcal{A}^2 = B_R^{n-1} \cap \{0 < q^u - q^h \leq \lambda'\} \cap \{q^u > \lambda\}$$

και έστω

$$I^1 = \frac{2C}{\sqrt{c_0}} \int_{B_R^{n-1}\cap\{q^h<q^u\}\cap\{q^u>\lambda\}} \Big(\mathcal{W}(h) - \mathcal{W}(u) + c_0 q^h (q^u - q^h)\Big) dy$$

$$I^2 = C\sqrt{c_0}\int_{B_R^{n-1}\cap\{0<q^u-q^h\le\lambda'\}\cap\{q^u>\lambda\}}(q^u-q^h)^2dy$$

τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (2.24).
Συμβολίζουμε με $I^i_{p-j},\ j=0,\dots,p-1,\ i=1,2$ το I^i στη $(B_{p-j}\setminus B_{p-j-1})\cap\mathcal{A}^i$ και επίσης I^i_0 το I^i στη $B_0\cap\mathcal{A}^i$ και έχουμε

$$\frac{2}{\sqrt{c_0}}I^1_p+\sqrt{c_0}I^2_p\le\Big(\frac{2}{\sqrt{c_0}}(W_M+c_0M^2)+\sqrt{c_0}(\lambda')^2\Big)\omega_p. \tag{2.28}$$

Αυτό προκύπτει ως εξής:

$$x\in(B_p\setminus B_{p-1})\cap\{q^h<q^u\}\cap\{q^u>\lambda\}$$
$$\Rightarrow \mathcal{W}(h)-\mathcal{W}(u)+c_0q^h(q^u-q^h)\le\mathcal{W}(h)+c_0(q^u)^2\le W_M+c_0M^2,$$

$$x\in(B_p\setminus B_{p-1})\cap\{0<q^u-q^h\le\lambda'\}\cap\{q^u>\lambda\}\Rightarrow(q^u-q^h)^2\le(\lambda')^2.$$

Παρατηρούμε, από τη σχέση (2.21) και από το γεγονός ότι $B_{p-1}=B_{R-T}$, πως

$$I^2_{p-j}=0,\quad j=1,\dots,p. \tag{2.29}$$

Επιπρόσθετα, ο ορισμός της q^h και οι ιδιότητες του $\mathcal{W}$ δίνουν

$$q^h\le q_Me^{-c_1T}\le q_0,\quad \text{and}\quad \mathcal{W}(h)\le\frac{c_0'}{2}(q^h)^2,$$

και για $x\in(B_{p-j}\setminus B_{p-j-1})\cap\{q^h<q^u\}\cap\{q^u>\lambda\}$, $j=1,\dots,p-1$:

$$\mathcal{W}(h)-\mathcal{W}(u)+c_0q^h(q^u-q^h)\le\mathcal{W}(h)+c_0q^hq^u\le(c_0+\frac{c_0'}{2})q^hq_M\le(c_0+\frac{c_0'}{2})q_M^2\epsilon^j,$$

με αποτέλεσμα

$$\frac{2}{\sqrt{c_0}}I^1_{p-j}\le\frac{2}{\sqrt{c_0}}(c_0+\frac{c_0'}{2})M^2\epsilon^j\omega_{p-j},\ j=1,\dots,p, \tag{2.30}$$

(παρατηρούμε πως ο υπολογισμός ισχύει και για $j=p$.) Άρα αυτό,μαζι με τη (2.28) και τη (2.29) έχουν ως αποτέλεσμα το δεξί μέλος της (2.23) να είναι φραγμένο από μια σταθερά $\tilde{C}=C\Big(\frac{2}{\sqrt{c_0}}(W_0+(c_0+\frac{c_0'}{2})q_M^2)+\sqrt{c_0}(\lambda')^2\Big)$ επί το δεξί μέλος της (2.26). Οπότε απο την (2.27), η σχέση (2.26) προκύπτει εάν θέσουμε $C^\circ=\frac{(\lambda')^2}{\tilde{C}}$. □

Κλείνοντας την απόδειξη, εάν $\epsilon=e^{-c_1T}$ είναι αρκετά μικρό, τότε υπάρχει σταθερά $c^*>0$, $c^*=c^*(W,M,\lambda,r_0)$ τετοια ώστε

$$\omega_{p-1}\ge c^*p^{n-2},\quad \text{για}\quad p=1,\dots \tag{2.31}$$

Απο τις υποθέσεις του θεωρήματος αυτό ισχύει για $p=1$ για κάθε $c^* \in (0,\mu_0]$. Συνεχίζουμε με επαγωγή: εάν η (2.31) ισχύει για $j=1,\dots,p$, τότε θα ισχύει και για $p+1$. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{c^*}{n-1}p^{n-1} = c^*\int_0^p s^{n-2}ds \le c^*\sum_{j=1}^{p} j^{n-2} \le \sum_{j=0}^{p-1}\omega_j \Rightarrow \\ \Big(\frac{c^*}{n-1}\Big)^{\frac{n-2}{n-1}}p^{n-2} \le (\sum_{j=0}^{p-1}\omega_j)^{\frac{n-2}{n-1}}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

Παράλληλα εάν $T \ge R_0$, τότε

$$\omega_j \le \gamma_n(r_0+jT)^{n-2}T \le \gamma_n T^{n-1}p^{n-2}, \text{ for } j=0,\dots,p-1;\ p\ge 1,$$

όπου γ_n είναι το μέτρο της μοναδιαίας σφαίρας στον $\mathbb{R}^{n-1}$, και παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{p}\epsilon^j\omega_{p-j} \le \gamma_n T^{n-1}p^{n-2}\sum_{j=1}^{p}\epsilon^j \le \gamma_n T^{n-1}\frac{e^{-c_1T}}{1-e^{-c_1T}}p^{n-2} \le \frac{C^\circ}{2}\Big(\frac{c^*}{n-1}\Big)^{\frac{n-2}{n-1}}p^{n-2} \tag{2.33}$$

Από αυτό,τη σχέση (2.32) και το Λήμμα 3 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{C^\circ}{2^{n-1}}\Big(\frac{c^*}{n-1}\Big)^{\frac{n-2}{n-1}}(p+1)^{n-2} &\le \frac{C^\circ}{2}\Big(\frac{c^*}{n-1}\Big)^{\frac{n-2}{n-1}}(\frac{p}{p+1})^{n-2}(p+1)^{n-2} \\ &\le \frac{C^\circ}{2}\Big(\frac{c^*}{n-1}\Big)^{\frac{n-2}{n-1}}p^{n-2} \le \omega_p\end{aligned} \tag{2.34}$$

και εάν $c^*>0$ τέτοιο ώστε $c^* \le \frac{C^\circ}{2^n}\Big(\frac{c^*}{n-1}\Big)^{\frac{n-2}{n-1}}$, έχουμε τελικα

$$\omega_p \ge c^*(p+1)^{n-2}$$

και παίρνουμε τη σχεση (2.31). Έστω $[\frac{r-r_0}{T}]$ το ακέραιο μέρος του $\frac{r-r_0}{T}$. Τότε, εάν $C=\min\{\frac{c^*}{(n-1)T^{n-1}},\frac{\mu_0}{r_0^n}\}$, η σχέση (2.31) συνεπάγεται την άμεση απόδειξη του θεωρήματος

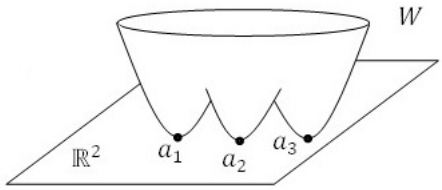
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{n-1}(B_r^{n-1}\cap\{q^u>\lambda\}) &\ge \mathcal{L}^{n-1}\Big(B_{r_0+[\frac{r-r_0}{T}]T}\cap\{q^u>\lambda\}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{[\frac{r-r_0}{T}]+1}\omega_{j-1} \ge c^*\sum_{j=1}^{[\frac{r-r_0}{T}]+1} j^{n-2} \\ &\ge \frac{c^*}{n-1}\Big(\Big[\frac{r-r_0}{T}\Big]+1\Big)^n = \frac{c^*}{(n-1)T^{(n-1)}}\Big(\Big[\frac{r-r_0}{T}\Big]T+T\Big)^{n-1} \\ &\ge \frac{c^*}{(n-1)T^{n-1}}r^{n-1}\end{aligned} \tag{2.35}$$

3 Η ιεραρχική δομη ελαχιστικών λύσεων – Στρωματοποίηση

Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε μια τοπικοποιημένη μορφή του θεωρήματος πυκνότητας και η ανάγκη για αυτό, είναι αποτέλεσμα της πιο σύνθετης διαμέρισης του $\mathbb{R}^n$ που οφείλεται σε πιο σύνθετη συμμετρία του W. Τα υποσύνολα που σχηματίζονται δεν θα είναι ημιεπίπεδα αλλά τομές ημιεπιπέδων (κώνοι) οπότε οι αντίστοιχοι κύλινδροι θα έχουν πεπερασμένο ύψος, με συνέπεια την εμφάνιση συνοριακών όρων οπου θα πρέπει να διαχειριστούμε.
Στη συνέχεια θα εξάγουμε το άνω και το κάτω φράγμα της ενέργειας και συνθέτοντας όλα τα παραπάνω, θα δείξουμε την ιεραρχική δομή της ελαχιστικής λύσης.

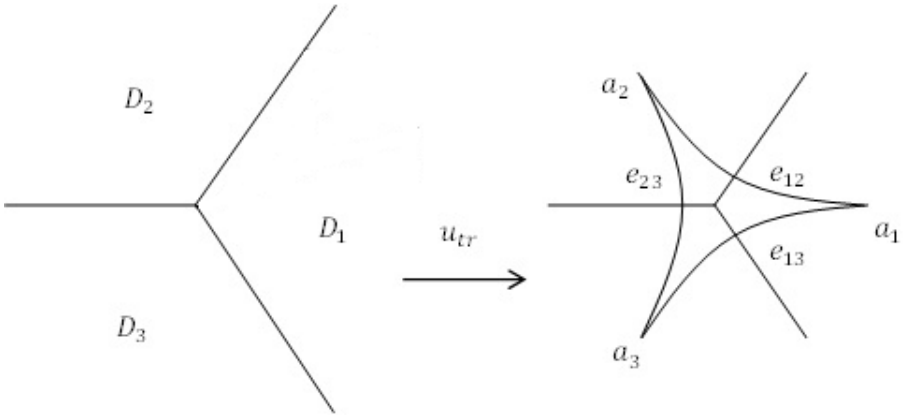
1 Το πλαίσιο

Η ουσιαστική διαφορά στην περίπτωση που μελετάμε σε σχέση με την προηγούμενη ενότητα είναι πως το W έχει τρία ελάχιστα και τις συμμετρίες του ισόπλευρου τριγώνου, δηλαδή, συμμετρία ως προς τους άξονες $z_1 = 0$, $z_2 = \pm\sqrt{3}z_1$ και θεμελιώδης περιοχή την $F = \{z \in \mathbb{R}^d : 0 < z_2 < \sqrt{3}z_1\}$



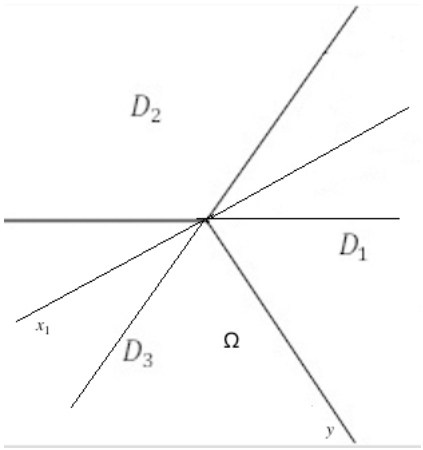
Το δυναμικό W.

Αντίστοιχα θεωρούμε u ελαχιστική, συμμετρική και θετική λυση του συστήματος $\Delta u - W_u(u) = 0$ που συνδέει και τα τρία ελάχιστα.



$u_{\text{tr}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Σε αντίθεση με το Θεώρημα 1 της προηγούμενης παραγράφου όπου $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,σε αυτήν την περίπτωση η λύση θα περιοριστεί σε ένα κατάλληλο Ω

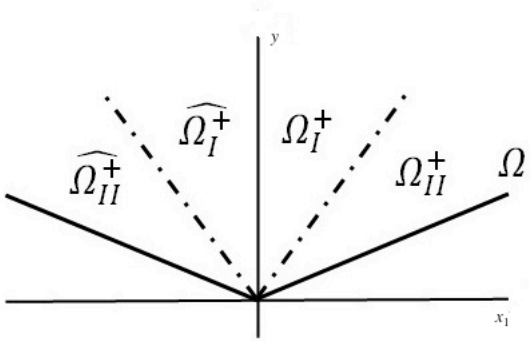


Πιο αναλυτικά θέτουμε $\Omega = (D_1 \cup D_3) \cap \{y_{n-1} \geq K|x_1|\}$, $\Omega^+ = (D_1 \cup D_3) \cap \{y_{n-1} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}|x_1|\} \cap \{s \geq 0\}$ και αντίστοιχα για το Ω^-, όπου με $y_{n-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3}|x_1|$ η εξίσωση του επιπέδου που διαχωρίζει τις φάσεις 2 και 3 για $x_1 > 0$ και αντίστοιχα τις 1 και 3 για $x < 0$ (συμμετρία).

Για την λύση u, ισχύει η βασική εκθετική εκτίμηση :

$$|u(x) - a^+| + |\nabla u(x)| \leq Ke^{-kd(x,\partial\Omega^+)},\ x \in \Omega^+. \tag{3.1}$$

Διχοτομούμε εκ νέου το Ω με το επίπεδο $s = \Lambda y_{n-1}$ για $n \geq 3$, σε Ω_I^+ και Ω_{II}^+ με $\Omega_I = \Omega_I^+ \cup \widehat{\Omega_I^+}$ όπως στο παρακάτω σχήμα:



Είναι άμεσο απο τη σχέση (3.1) ότι

$$|u(x) - a^+| + |\nabla u(x)| \leq Ke^{-ks},\ x \in \Omega_I^+. \tag{3.2}$$

Οι υποθέσεις για το W (για $m \geq 2$) έχουν ως αποτέλεσμα την ύπαρξη και των τριών τροχιών $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, που συνδέουν ανα δύο τα ελάχιστα και ελαχιστοποιούν την ενέργεια, στην κλάση των συναρτήσεων που ικανοποιούν

$$\lim_{s\to\pm\infty} v(s) = a^{\pm}.$$

Υποθέτουμε παράλληλα ότι κάθε τροχιά e είναι θετική, συμμετρική, και ισχύει

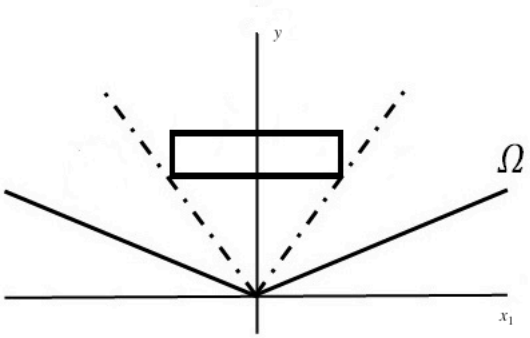
$$|e(s) - a^+| + |e_s(s)| \leq Ke^{-ks},\ s \geq 0. \tag{3.3}$$

Επιπρόσθετα κάθε τροχιά είναι υπερβολική στην κλάση των θετικών συμμετρικών διαταραχών:

$$\langle Tv, v\rangle \geq \eta \|v\|^2,\ v \in W_s^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m),\ \text{για κάποιο } \eta > 0,$$

όπου $Tv = -v_{ss} + W_{uu}(e)v$, $W_s^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \subset W_{\text{loc}}^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ το υποσύνολο των συμμετρικών συναρτήσεων, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\|$ η αντίστοιχη νόρμα.
Συμβολίζουμε με $\mathsf{E}_l^{\mathsf{xp}} \subset C^1([-l, l]; \mathbb{R}^m)$, τις συμμετρικές συναρτήσεις $v : [-l, l] \to \mathbb{R}^m$ για τις οποίες ισχύει $|v(s) - a^+| + |v_s(s)| \leq Ke^{-ks}$, $\forall s \in [0, l]$, με k, K όπως στη σχέση (3.3). Για $l \in (0, \infty]$, συμβολίζουμε $\langle v, w \rangle_l = \int_{-l}^{l} v(s)w(s)ds$, $\|v\|_l = (\langle v, v \rangle_l)^{1/2}$, $\|v\| := \|v\|_\infty$, και $\mathsf{E}^{\mathsf{xp}} := \mathsf{E}_\infty^{\mathsf{xp}}$.

Για $x = (s, y)$, $y = (y_1, \ldots, y_{n-1})$, ορίζουμε τους κυλίνδρους $C_R^l(y^0) = (-l, l) \times B_R^{n-1}(y^0)$ με διατομή $B_R^{n-1}(y^0)$, και ύψος $2l$, και πιο συγκεκριμένα στο Ω_I αυτοί που εφάπτονται στη διχοτόμο $s = \Lambda x_n$ όπως στο σχήμα:



Το ύψος του κυλίνδρου,η ακτίνα και το κέντρο του συνδέονται από τη σχέση $l_R^{y^0} = \Lambda(y_{n-1}^0 - R)$.

2 Το τοπικοποιημένο θεώρημα πυκνότητας

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε το αντίστοιχο θεώρημα πυκνότητας.Η απόδειξη του, ακολουθεί ακριβώς τα ίδια βήματα με το θεώρημα στην προηγούμενη ενότητα οπότε θα την παραλείψουμε και θα τονίσουμε μόνο τις ουσιαστικές διαφοροποιήσεις.

Θεώρημα 2 Κάτω από τις παραπάνω υποθέσεις για $u : \Omega_I \to \mathbb{R}^m$, $n \geq 2$, υπάρχει $\lambda^* > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα K, k της σχέσης (3.1), ετσί ώστε για οποιοδήποτε $\mu_0 > 0$ και $\lambda \in (0, \lambda^*)$, υπάρχει $l^* = l^*(\lambda)$ τέτοιο ώστε η συνθήκη

$$\mathcal{L}^{n-1}(B_1^{n-1}(y^0) \cap \{y : \|u(\cdot, y) - e(\cdot)\|_{l_1^{y^0}} \geq \lambda\}) \geq \mu_0 > 0,$$

συνεπάγεται

$$\mathcal{L}^{n-1}(B_R^{n-1}(y^0) \cap \{y : \|u(\cdot, y) - e(\cdot)\|_{l_R^{y^0}} \geq \lambda\}) \geq CR^{n-1},$$

για $l_R^{y^0} > l_1^{y^0} \geq l^*$, όπου $C = C(\mu_0, \lambda, k, K)$ σταθερά ανεξάρτητη των y^0 , u.

Απόδειξη: Οι διαφορές στην απόδειξη είναι:
1. Η πολική αναπαράσταση σε αυτό το πλαίσιο ορίζεται ως

$$u(s, y) = e(s) + q_R^u(y) n_R^u(s, y),$$
$$q_R^u(y) = \|u(\cdot, y) - e(\cdot)\|_{l_R^{y^0}},$$
$$\mathbf{n}_R^u(\cdot, y) = \begin{cases} \frac{u(\cdot,y)-e(\cdot)}{\|u(\cdot,y)-e(\cdot)\|_{l_R^{y^0}}} & \text{για } q_R^u(y) \neq 0, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

και η ενέργεια

$$\hat{J}_{C_R(y^0)}(u) = \int_{B_R^{n-1}(y^0)} \Big[\frac{1}{2} \|\nabla_y u(\cdot, y)\|_{l_R^{y^0}}^2 + \mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(u(\cdot, y))\Big] dy.$$

2. Στη σχέση (2.17), πλέον, δεν ισχύει ότι $\hat{J}_{C_R}(u) - \hat{J}_{C_R}(\sigma) \leq 0$ αλλά

$$\frac{1}{2} \int_{B_R^{n-1}(y^0)} \Big[|\nabla q_R^u|^2 - |\nabla q_R^\sigma|^2\Big] dy \leq \tilde{C} e^{-k l_R^{y^0}} + \int_{B_R^{n-1}(y^0)} (\mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(\sigma) - \mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(u)) dy,$$

όπου $q_R^\sigma = \min_{C_R(y^0)}\{q_R^h, q_R^u\}$, $q_R^\sigma = q_R^u$ στο $\partial B_R^{n-1}(y^0)$.
3.Η σχέση (2.18) γίνεται

$$\Big(\int_{B_R^{n-1}} \beta^{\frac{2(n-1)}{n-2}} dy\Big)^{\frac{n-2}{n-1}} \leq 2\tilde{C} C A e^{-k l_R^{y^0}} + \frac{C}{A} \int_{B_R^{n-1} \cap \{q_R^u - q_R^\sigma \leq \lambda'\}} (q_R^u - q_r^\sigma)^2 dy$$
$$+ 2CA\Big(\int_{B_R^{n-1}} (\mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(\sigma) - \mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(u)) dy + \int_{B_R^{n-1}} \Delta q_r^\sigma (q_R^u - q_r^\sigma) dy\Big).$$

4. Από το Λήμμα 1 της προηγούμενης ενότητας έχουμε

$$D_{qq}\mathcal{W}_l(e+q\nu) \geq c_0, \forall l \geq l^*, q \in [0,\bar{q}],$$
$$\nu \in S = W^{1,2}((-l,l);\mathbb{R}^m) \cap \{\|v\|_l = 1\}.$$

και ανάλογα

$$\mathcal{W}_l(u) \geq -\frac{C}{k}e^{-kl}$$

5. Η ανισότητα που προκύπτει μετά τα τρία ολοκληρώματα γινεται

$$\mathcal{W}_{l_r}(u) - \mathcal{W}_{l_r}(h) \geq \frac{c_0}{2}((q_R^u)^2 - (q_R^h)^2) + O(e^{-2kl_R}),\ 0 < q_R^h \leq q_R^u \leq \bar{q}.$$

6. Η συνάρτηση σύγκρισης φ :

$$\begin{cases} \Delta\varphi = c_0^2\varphi, & \text{στη } B_R^{n-1}, \\ \varphi = 1, & \text{στο } \partial B_R^{n-1}, \end{cases} \tag{3.4}$$

με

$$q_M = \sup_{y,\,l} \|u(\cdot,y) - e(\cdot)\|_l,\ l \geq l^*,$$

$$q_R^h = \begin{cases} \varphi q_M & \text{στη } B_R^{n-1} \\ q_M & \text{στο } \mathcal{O} \setminus B_R^{n-1}, \end{cases}$$

$q_R^\sigma = \min\{q_R^u, q_R^h\}$, $h = e + q_R^h\nu$, $u = e + q_R^u\nu$,$q^\sigma \leq q^h \leq q_M e^{-c_1\tau}$.

7. Η σχέση (2.23) γίνεται

$$\Big(\int_{B_R^{n-1}} \beta^{\frac{2(n-1)}{n-2}}dy\Big)^{\frac{n-2}{n-1}} \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{c_0}}e^{-kl_R^{y^0}} + C\sqrt{c_0}\int_{(\{0<q_R^u-q_R^h\leq\lambda'\}\cap\{q_R^u>\lambda\})\cap B_R^{n-1}}(q_R^u - q_R^h)^2dy$$
$$+ 2\frac{C}{\sqrt{c_0}}\int_{(\{q_R^h<q_R^u\}\cap\{q_R^u>\lambda\})\cap B_R^{n-1}}(\mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(h) - \mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(u) + c_0 q_R^h(q_R^u - q_R^h))dy.$$

8. Το ανάλογο του λήμματος 3:
Θέτουμε

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \mathcal{L}^{n-1}(B_0 \cap \{q^u > \lambda\}), \\ \omega_j &= \mathcal{L}^{n-1}((B_j \setminus B_{j-1}) \cap \{q^u > \lambda\}), \end{aligned} \tag{3.5}$$

με $B_0 := B_{R_0}^{n-1}$, $B_j := B_{R_0+j\tau}^{n-1}$, $r = r_0 + p\tau$, $j = 1,\ldots,p$. Επιπλέον, χρειαζόμαστε την εκτίμηση

$$\mathcal{W}_{l_R}(h) \leq \frac{C(\lambda)}{2}(q_r^h)^2 + O(e^{-2kl_r}),\ \text{στο } (B_{p-j}\setminus B_{p-j-1})\cap\{q^h < q^u\}\cap\{q^u > \lambda\},$$

για $j = 1, \ldots, p$, που συνεπάγεται

$$\mathcal{W}_{l_r}(h) - \mathcal{W}_{l_r}(u) + c_0 q_r^h (q_r^u - q_r^h) \leq 2e^{-kl_r} + \Big(c_0 + \frac{c_0'}{2}\Big) q_r^h M. \tag{3.6}$$

Θέτουμε $l_\nu = \frac{1}{\Lambda}(y_{n-1}^0 - r_\nu)$, $r_\nu = r_0 + \nu\tau$, $\nu = p - j$, και παρατηρούμε οτι

$$e^{-\frac{k}{\Lambda}(y_{n-1}^0 - r_{p-j})} = e^{-\frac{k}{\Lambda}(y_{n-1}^0 - [r_0 + (p-j)\tau])} \leq e^{-\frac{k}{\Lambda}(R^* + j\tau)},\ j = 1, \ldots, p,$$

Από τη σχέση (3.6) έχουμε

$$e^{-\frac{k}{\Lambda}(R^* + j\tau)} + \Big(c_0 + \frac{c_0'}{2}\Big) M^2 e^{-c_1 j\tau},$$

'Αρα η σχέση (2.30) γίνεται αντίστοιχα:

$$\frac{2}{\sqrt{c_0}} I_{p-j}^1 \leq \Big[\frac{2}{\sqrt{c_0}} e^{-\frac{k}{\Lambda}(R^* + j\tau)} + \frac{2}{\sqrt{c_0}}\Big(c_0 + \frac{c_0'}{2}\Big) M^2 e^{-c_1 j\tau}\Big] \omega_{p-j},\ j = 1, \ldots, p.$$

Για $\bar{c}_1 = \min\{k/\Lambda, c_1\}$, $\epsilon = e^{-\bar{c}_1\tau}$, παίρνουμε την αντίστοιχη σχέση της (2.26). Η απόδειξη του θεωρήματος 1, βασίζεται στη σχέση (2.30), που αποδεικνύεται μέσω του λήμματος 3. Οπότε, ακολουθώντας τον ίδιο δρόμο καταλήγουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 2 □

3 Άνω φράγμα

Η εκτίμηση του άνω φράγματος δεν προϋποθέτει το θεώρημα πυκνότητας αλλά θα υπολογιστεί με ένα επιχείρημα σύγκρισης της ενέργειας της u με μια κατάλληλη συνάρτηση σύγκρισης.

Λήμμα 4 Για κυλίνδρους $C_R(y^0)$ in Ω_I που εφάπτονται στο $\partial\Omega_I$, κάτω από τις υποθέσεις συμμετρίας και ελαχιστικότητας της λύσης, ισχύει ότι

$$\int_{B_R^{n-1}(y^0)} \Big[\frac{1}{2}\,\|\nabla_y u(\cdot,y)\|^2_{l_R^{y^0}} + \mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(u(\cdot,y))\Big]dy \le C_1 R^{n-2} + C_2 e^{-k(l_R^{y^0}-1)} R^{n-1}, \tag{3.7}$$

$\forall l_R^{y^0} \in [l^*,\infty]$, με $C_i = C_i(l^*,k,K)$και l^* η σταθερά του θεωρήματος 2.

Απόδειξη: Έστω $v(\cdot,y) =$

$$\begin{cases} e(\cdot) & \text{στο } (-l_R^{y^0}, l_R^{y^0}) \times B_{R-1}^{n-1}(y^0), \\ e(\cdot) + (|y-y^0| - (R-1)))q_R^u(y)\mathbf{n}_R^u & \text{στο } (-l_R^{y^0}, l_R^{y^0}) \times \big(B_R^{n-1}(y^0) \setminus B_{R-1}^{n-1}(y^0)\big). \end{cases}$$

$z(\cdot,y) = \chi(s)(v(s,y) - u(s,y)) + u(s,y)$ στον $C_R(y^0) = (-l_R^{y^0}, l_R^{y^0}) \times B_R^{n-1}(y^0)$,

όπου χ συνάρτηση αποκοπής για $|s| \le l_R^{y^0}$:

$$\chi(s) = \begin{cases} 0 & \text{για } |s| = l_R^{y^0}, \\ 1 & \text{για } |s| \le l_R^{y^0} - 1, \end{cases}$$

για την οποία ισχύει επίσης $0 \le \chi(s) \le 1$, και $|\chi'(s)| \le 2$. Παρατηρούμε ότι $z = u$ στο $\partial C_R(y^0)$, οπότε από την ελαχιστικότητα της λύσης, αρκεί να εκτιμήσουμε την ενέργεια της z :

$$\int_{B_R^{n-1}(y^0)} \Big[\frac{1}{2}\,\|\nabla_y z(\cdot,y)\|^2_{l_R^{y^0}} + \mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(z(\cdot,y))\Big]dy.$$

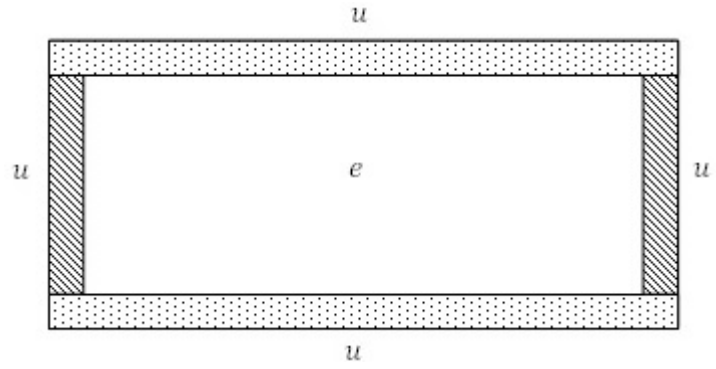
με

$$\nabla_y z(\cdot,y) = \chi(s)(\nabla_y v(\cdot,y) - \nabla_y u(\cdot,y)) + \nabla_y u(\cdot,y)$$

Το κινητικό μέρος. Η ολοκλήρωση χωρίζεται σε τρείς περιοχές, όπως στο σχήμα παραπάνω. Στο εσωτερικό έχουμε $\nabla_y z = 0$. Στην "άνω" και "κάτω" περιοχή από (3.2) και (3.3) έχουμε:

$$\int_{B_R^{n-1}\setminus B_{R-1}^{n-1}} \|\nabla_y z(\cdot,y)\|^2_{l_R^{y^0}}\,dy \le C_1 R^{n-2},\ C_1 = C_1(k,K).$$

Τέλος, η "δεξιά" και η "αριστερή" περιοχή μπορεί έυκολα να εκτιμηθεί από τις σχέσεις (3.2), (3.3), από τον δεύτερο όρο της (3.7).



Το δυναμικό μέρος:"Άνω" και "κάτω" έχουμε

$$\int_{B_R^{n-1}\setminus B_{R-1}^{n-1}} \mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(z(\cdot,y))dy \leq C_1 R^{n-2},.$$

Στο εσωτερικό $\mathcal{W}_{l_R^{y^0}}(z(\cdot,y)) = 0$, Τέλος, όπως ακριβώς στο κινητικό μέρος, η "δεξιά" και η "αριστερή" περιοχή μπορεί να εκτιμηθεί από τις σχέσεις (3.2), (3.3), από τον δεύτερο όρο της (3.7) □

4 Κάτω φράγμα

Λήμμα 5 Κάτω από τις υποθέσεις συμμετρίας ελαχιστικότητας, υπερβολικότητας και μοναδικότητας της τροχιάς e, υπάρχει $l^{**} > 0$, κατάλληλα μεγάλο και σταθερά $C_3 := C_3(l^{**}, k, K) > 0$, έτσι ώστε

$$\mathcal{W}_l(v) \geq C_3 \|v - e\|_l^2 + O(e^{-kl}), \forall l \in [l^{**}, \infty] \forall v \in \mathsf{E}_l^{\mathsf{xp}}. \tag{3.8}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι πιο πέριπλοκη από ότι στο προηγούμενο λήμμα και θα πρέπει να χωριστεί σε βήματα.

Βήμα 1
Ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες :

$$\|u\|_{L^3} \leq 2^{1/6} \|u'\|_{L^2}^{1/6} \|u\|_{L^2}^{5/6}, \, u \in W^{1,2}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m), \tag{3.9}$$

$$\|v\|_{L^3(-l,l)} \leq C \|v\|_l^{5/6}, \, v \in \mathsf{E}_l^{\mathsf{xp}}, \text{ για } l > 1, \, C = C(k, K). \tag{3.10}$$

Η (3.9) προκύπτει από την ανισότητα παρεμβολής Nirenberg–Gagliardo για $u = |v|^2$, $v \in C_0^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, και έχουμε

$$\|v\|_{L^4} \leq 2^{1/4} \|v\|_{L^2}^{3/4} \|v'\|_{L^2}^{1/4}, \tag{3.11}$$

παρεμβάλουμε

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^3} &\leq \|u\|_{L^2}^{1/3} \|u\|_{L^4}^{2/3} \text{ από Hölder} \\ &\leq 2^{1/6} \|u\|_{L^2}^{5/6} \|u'\|_{L^2}^{1/6} \text{ από (3.11).} \end{aligned}$$

Η (3.10) προκύπτει ως εξής :
Πρώτα επεκτείνουμε την $v \in \mathsf{E}_l^{\mathsf{xp}}$ στο διάστημα $(-3l, 3l)$ με ανάκλαση περί τον άξονα $s = l$ και $s = -l$ ($f(s) = f(l - (s - l))$, $s > l$ και τη συμβολίζουμε με v_{ext}.
Έστω $\chi(s)$ μια λεία συνάρτηση αποκοπής ώστε $\chi = 0$ για $|s| \geq l + 1$, $\chi = 1$ για $|s| \leq l$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(-s) = \chi(s)$, και εφαρμόζουμε την (3.9) στην $u = \chi v_{\mathsf{ext}}$.
Πιο αναλυτικά

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^3(-l,l)} &\leq \|\chi v_{\mathsf{ext}}\|_{L^3} \\ &\leq 2^{1/6} \|(\chi v_{\mathsf{ext}})'\|_{L^2}^{1/6} \|\chi v_{\mathsf{ext}}\|_{L^2}^{5/6} \\ &\leq C \|\chi v_{\mathsf{ext}}\|_{L^2(-l-1,l+1)}^{5/6} \\ &\leq C \|v_{\mathsf{ext}}\|_{L^2(-l-1,l+1)}^{5/6} \\ &\leq C \|v\|_{L^2(-l,l)}^{5/6} \text{ όπου } C = C(k, K). \end{aligned}$$

(θεωρούμε τη σύμβαση πως η σταθερα C είναι διαφορετική απο γραμμή σε γραμμή) Η απόδειξη των (3.9), (3.10) είναι πλήρης. □

Βήμα 2

Για $v \in \mathsf{E}_l^{\mathsf{xp}}$, ισχύει η εκτίμηση

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_l(v) &= J_l(v) - J_l(e)\\ &= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\big[|v_s - e_s|^2 + W_{uu}(e)(v-e)^2\big]ds + O(1)\,\|v-e\|^3_{L^3(-l,l)} + O(e^{-2kl}).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Σμβ: $\langle W_{uu}(e)(v-e),(v-e)\rangle =: W_{uu}(e)(v-e)^2$, με $\langle\cdot,\cdot\rangle$ το Ευκλείδιο εσωτερικο γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$.

Η απόδειξη της (3.12) βασίζεται στο ανάπτυγμα Taylor και τον έλεγχο των συνοριακών όρων– που προκύπτουν απο την ολοκλήρωση κατά μέρη– μέσω της ομοιόμορφης εκτίμησης που ισχύει στον χώρο $\mathsf{E}_l^{\mathsf{xp}}$.

$$J_l(v) - J_l(e) = \int_0^1 \frac{d}{dt} J_l(tv + (1-t)e)dt$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_l(tv+(1-t)e) &= t\int_{-l}^{l}|v_s-e_s|^2ds + \int_{-l}^{l}W_u(tv+(1-t)e)\cdot(v-e)ds\\ &\quad + \int_{-l}^{l}\big([e_s\cdot(v-e)]_s - e_{ss}(v-e)\big)ds\\ &= t\int_{-l}^{l}|v_s-e_s|^2ds - \int_{-l}^{l}\big(e_{ss} - W_u(tv+(1-t)e)\big)\cdot(v-e)ds\\ &\quad + O(e^{-kl}).\end{aligned}$$

Συνεχίζουμε την ανάλυση

$$W_u(tv+(1-t)e)\cdot(v-e) = W_u(e)\cdot(v-e) + \int_0^t W_{uu}(\tau v+(1-\tau)e)(v-e)d\tau,$$

και εφόσον η τροχιά e είναι λύση της εξίσωσης, έχουμε

$$\begin{aligned}J_l(v) - J_l(e) &= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}|v_s-e_s|^2ds\\ &\quad + \int_{-l}^{l}\int_0^1\int_0^t W_{uu}(\tau v+(1-\tau)e)(v-e)^2d\tau\,dt\,ds + O(e^{-kl}).\end{aligned}$$

Θέτουμε $\xi(\tau) = W_{uu}(\tau v+(1-\tau)e)(v-e)^2$ και $\xi(\tau) = \xi(0) + \int_0^\tau \xi'(\sigma)d\sigma$, και παρατηρούμε ότι η ποσότητα

$$W_{uuu}(\sigma v+(1-\sigma)e)(v-e,v-e,v-e)$$

είναι φραγμένη, γιατί από υπόθεση το W είναι C^3, με v, e στον $\mathsf{E}_l^{\mathsf{xp}}$. Συνεπώς έχουμε την εκτίμηση

$$|W_{uuu}(\sigma v+(1-\sigma)e)(v-e,v-e,v-e)| \le C|v-e|^3.$$

Η απόδειξη της (3.12) ολοκληρώθηκε.

Βήμα 3

Για μεγάλα $l^* > 0$ και για $v \in \mathsf{E}_l^{\mathsf{xp}}$, $l \geq l^*$ ισχύει

$$\int_{-l}^{l} \left[|v_s - e_s|^2 + W_{uu}(e)(v-e)^2\right] ds \geq \frac{\eta}{2} \|v-e\|_l^2 - O(e^{-kl}). \tag{3.13}$$

Βήμα 4

Είμαστε στο σημείο :

$$\mathcal{W}_l(v) \geq C \|v-e\|_l^2 \left(1 + O(1) \frac{\|v-e\|_{L^3(-l,l)}^2}{\|v-e\|_l^2}\right) + O(e^{-kl}), \tag{3.14}$$

(από (3.12), (3.13)), οπότε για

$$\|v-e\|_l < \hat{q}, \tag{3.15}$$

με $\hat{q}$ μικρή σταθερά παίρνουμε

$$\mathcal{W}_l(v) \geq \frac{C}{2} \|v-e\|_l^2 + O(e^{-kl}),\ l > l^*,\ v \in \mathsf{E}_l^{\mathsf{xp}}. \tag{3.16}$$

(από (3.10), εφόσον $3\left(\frac{5}{6}\right) > 2$). Θα αποδείξουμε την ύπαρξη μιας σταθεράς $C_3 > 0$ όπως στη (3.8) με άτοπο.Έστω $C_3 = \frac{1}{n}$, και υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει l_0 ώστε για $l \geq l_0$, η (3.8) να ισχύει. Πιο συγκεκριμένα, για $l_0 = n$, πρέπει να υπάρχει $l_n \geq n$, και $v = v_n$ ώστε να ισχύει

$$\mathcal{W}_{l_n}(v_n) < \frac{1}{n^2} \|v_n - e\|_{l_n}^2 + O(e^{-kl_n}),\ l_n \geq n. \tag{3.17}$$

Από την εκτίμηση

$$|v_n(s) - e(s)| + \left|\frac{dv_n}{ds}(s) - e_s(s)\right| \leq Ke^{-k|s|},\ s \in (-l_n, l_n), \tag{3.18}$$

και μέσω του θεωρήματος Ascoli–Arzela μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία $\{v_j\}$, της $\{v_n\}$, ώστε $v_j(s) \to v(s)$ κατά σημείο, με $v \in \mathsf{E}^{\mathsf{xp}}$. Θα δείξουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{W}_{l_n}(v_n) \geq \mathcal{W}(v). \tag{3.19}$$

Για το δυναμικό μέρος έχουμε ότι $W(v_n) \leq C|v_n - a^{\pm}|^2$, οπότε από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-l_n}^{l_n} W(v_n) ds = \int_{\mathbb{R}} W(v) ds.$$

Για το κινητικό μέρος και για $L > 0$ έχουμε ότι

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{-l_n}^{l_n} \left|\frac{dv_n}{ds}\right|^2 ds \geq \liminf_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} \left|\frac{dv_n}{ds}\right|^2 ds \geq \int_{-L}^{L} |v_s|^2 ds$$

Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει ως εξής:
Εάν

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} \left|\frac{dv_n}{ds}\right|^2 ds = \infty$$

τότε η ανισότητα ισχύει.
Αλλιώς, εάν

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} \left|\frac{dv_n}{ds}\right|^2 ds = C$$

τότε υπάρχει υπακολουθία $\{v_j^{'}\}$ με $||v_j^{'}||_l < C$ και

$$v_j^{'} \rightharpoonup \xi$$

με $||\xi||_l < \infty$ Από την ιδιότητα της κάτω ημισυνέχειας έχουμε

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{-L}^{L} \left|\frac{dv_n}{ds}\right|^2 ds \geq \int_{-L}^{L} |\xi|^2 ds$$

Αρκεί να δείξουμε οτι $\xi = v^{'}$. Λόγω ασθενούς σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int_{-L}^{L} v_j^{'} \varphi ds \to \int_{-L}^{L} \xi\varphi ds.$$

για κάθε φ κατάλληλη συνάρτηση σύγκρισης. Από την άλλη μεριά

$$\int_{-L}^{L} v_j^{'} \varphi ds = -\int_{-L}^{L} v_j \varphi^{'} ds \to -\int_{-L}^{L} v\varphi^{'} ds.$$

Αυτό προκύπτει απο τη σημειακή σύγκλιση της υπακολουθίας $\{v_j\}$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue.
Τελικά, έχουμε ότι

$$\int_{-L}^{L} \xi\varphi ds = \int_{-L}^{L} v^{'} \varphi ds$$

και άρα

$$\xi = v'$$

Από (3.17), (3.19)

$$\mathcal{W}(v) = 0,\ v \in \mathsf{E}^{\mathsf{xp}}, \tag{3.20}$$

και άρα από μοναδικότητα της ελαχιστικής τροχίας $v = e$. Οπότε, $v_n \to e$, το οποίο είναι άτοπο απο (3.16), (3.17). Συνεπώς η σχέση (3.8) ισχύει για κατάλληλο $C_3 > 0$, και $l \geq l^{**}$. Η απόδειξη του κάτω φράγματος ολοκληρώθηκε

5 Η ιεραρχική δομή της λύσης

Έχοντας εκτιμήση το άνω και κάτω φράγμα της ενέργειας είμαστε σε θέση να δείξουμε :

Λήμμα 6 Έστω $\Omega = \mathbb{R}^n \cap \{y_{n-1} \geq 0\}$, κάτω από τις υποθέσεις του θεωρήματος 2 και με την προϋπόθεση ότι η τροχιά e είναι μοναδική, τότε υπάρχουν $\bar{k}$, $\bar{K}$, θετικές σταθερές, έτσι ώστε

$$|u(x) - e(s)| \leq \bar{K} e^{-\bar{k} d(x,\partial\Omega)}, \quad x = (s, y_1, ..., y_{n-1}). \tag{3.21}$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι εαν $x \in \Omega^+_{II}$ τότε ισχύει $d(x, \partial\Omega) = d(x, \partial\Omega^+)$. Κατά συνέπεια από τη σχέση (3.1) έχουμε:

$$\begin{aligned} |u(s,y) - e(s)| &\leq |u(s,y) - a^+| + |a^+ - e(s)| \\ &\leq K e^{-k d(x,\partial\Omega^+)} + K e^{-ks} \\ &\leq K e^{-k d(x,\partial\Omega)} + K e^{-k d(x,\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Η (3.21) ισχύει για $x \in \Omega^+_{II}$. Τώρα, για $x \in \Omega^+_I$, όπου ισχύει η σχέση (3.2) το πρώτο και πιο ουσιαστικό βήμα είναι να αποδείξουμε ότι:

$$\forall \bar{q} \ll 1, \exists d_0 > 0 : \ d(x, \partial\Omega_I) \geq d_0 \Rightarrow |u(s,y) - e(s)| \leq \bar{q}, \ x = (s,y) \in \Omega_I. \tag{3.22}$$

Έστω με άτοπο πως υπάρχει $\bar{q}_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$|u(s_\nu, y_\nu) - e(s_\nu)| > \bar{q}_0, \, d(x_\nu, \partial\Omega_I) \to \infty \text{ καθώς } \nu \to \infty, \ x_\nu = (s_\nu, y_\nu) \in \Omega_I.$$

Όμως, από (3.2), (3.3), προκύπτει ότι $|s_\nu| \leq C$ όπου η σταθερά εξαρτάται από τα k, K. Συνεπώς $|y_\nu| \to \infty$. Άρα, (από ομοιόμορφη συνέχεια), υπάρχει $0 < \delta_0 < 1$, ανεξάρτητο του ν, ώστε $|u(s,y) - e(s)| \geq \frac{1}{2}\bar{q}_0$, για $|y - y_\nu| < \delta_0$, $|s - s_\nu| < \delta_0$. Αφού, $l_1^{y_\nu} \to \infty$, έχουμε

$$\int_{-l_1^{y_\nu}}^{l_1^{y_\nu}} |u(s,y) - e(s)|^2 ds \geq \Big(\frac{\bar{q}_0}{2}\Big)^2 (2\delta_0),$$

για $|y - y_\nu| < \delta_0$, και για ν μεγάλο. Άρα,

$$\mathcal{L}^{n-1}\big(B_1^{n-1}(y_\nu) \cap \{y : \|u(\cdot,y) - e(\cdot)\|_{l_1^{y_\nu}} \geq \lambda := (q_0/2)(2\delta_0)^{1/2}\}\big) \geq \mu_0,$$

με $\mu_0 := (\delta_0)^{n-1}|S^{n-1}|$, και από θεώρημα 2

$$\mathcal{L}^{n-1}(B_{R_\nu}^{n-1}(y_\nu) \cap \{y : \|u(\cdot,y) - e(\cdot)\|_{l_{R_\nu}^{y_\nu}} \geq \lambda\}) \geq C R_\nu^{n-1}. \tag{3.23}$$

για $|y_\nu| \geq R_\nu + R^*$.
Καθώς $|y_\nu| \to \infty$, μπορούμε να επιλέξουμε $R_\nu \to \infty$ με $e^{-k l_{R_\nu}^{y_\nu}} R_\nu^{n-1} \to 0$. Από (3.8), (3.23), έχουμε

$$\int_{B_{R_\nu}^{n-1}(y_\nu)} \mathcal{W}_{l_{R_\nu}^{y_\nu}}(u(\cdot,y))dy \geq [C_3\lambda^2 - O(e^{-k l_{R_\nu}^{y_\nu}})] C R_\nu^{n-1}. \tag{3.24}$$

Όμως συνδυάζοντας το άνω και κάτω φράγμα παρατηρούμε ότι για μεγάλα R_ν η ανισότητα

$$[C_3\lambda^2 - O(e^{-kl^{y_\nu}_{R_\nu}})]CR_\nu^{n-1} \leq \int_{B^{n-1}_{R_\nu}(y^0)} \Big[\frac{1}{2}\|\nabla_y u(\cdot,y)\|^2_{l^{y^0}_{R_\nu}} + \mathcal{W}_{l^{y^0}_{R_\nu}}(u(\cdot,y))\Big]dy$$
$$\leq C_1 R_\nu^{n-2} + C_2 e^{-k(l^{y^0}_{R_\nu}-1)}R_\nu^{n-1}$$

δεν ισχύει.
Θα δείξουμε, τέλος, ότι η σχέση (3.22) συνεπάγεται

$$|u(s,y) - e(s)| \leq \bar{K}e^{-\bar{k}d(x,\partial\Omega_I)},\ x \in \Omega_I.$$

Αναλυτικά έχουμε

$$u_{ss} + \Delta_y u - W_u(u) = 0,$$
$$e_{ss} - W_u(e) = 0.$$

Αφαιρούμε

$$(u-e)_{ss} + \Delta_y u - (W_u(u) - W_u(e)) = 0.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $(u-e)$ και ολοκληρώνουμε

$$\int_{-l}^{l}(u-e)_{ss}\cdot(u-e)ds + \int_{-l}^{l}\Delta_y u\cdot(u-e)ds - \int_{-l}^{l}(W_u(u)-W_u(e))(u-e)ds = 0.$$

Η ολοκλήρωση κατά μέρη και οι βασικές εκτιμήσεις (3.2), (3.3) δίνουν

$$\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\Delta_y(|u-e|^2)ds - \int_{-l}^{l}|\nabla_y u|^2 ds - \int_{-l}^{l}|u_s - e_s|^2 ds$$
$$- \int_{-l}^{l}(W_u(u)-W_u(e))(u-e)ds = O(e^{-kl}).$$

Παρατηρώντας ότι η $l = l(y)$ είναι γραμμική συνάρτηση του y, ο τύπος ολοκλήρωσης του Leibniz και οι εκτιμήσεις (3.2), (3.3) δίνουν

$$\int_{-l}^{l}\Delta_y(|u-e|^2)ds = \Delta_y\int_{-l}^{l}|u-e|^2 ds + O(e^{-kl}).$$

Για $\bar{q}$ κατάλληλα μικρό στην σχέση (3.22), το θεώρημα μέσης τιμής $(W_u(u) - W_u(e))(u-e) = W_{uu}(\cdot)(u-e)^2$ και η (3.13) δίνουν

$$\int_{-l}^{l}[|u_s - e_s|^2 + W_{uu}(\cdot)(u-e)^2]ds \geq \frac{\eta}{4}\|u-e\|_l^2 + O(e^{-kl}).$$

Θέτουμε $\varphi(y) = \|u-e\|_l^2$ και όλα τα παραπάνω συνεπάγονται ότι

$$\Delta_y\varphi \geq c^2\varphi - Ce^{-kl} \text{ στην } B_R^{n-1}(y^0),$$

όπου $c^2 = \frac{\eta}{2}$, και C σταθερά ανεξάρτητη του l.
Έστω φ_h η λύση του προβλήματος (5.1) στο παράρτημα. Στην $B_R^{n-1}(y^0)$ ($R = r$), έχουμε $\varphi_h = \Phi_h(|y|; R)$, και έστω $\Psi = \Phi_h + \frac{C}{c^2}e^{-kl}$. Παρατηρούμε ότι

$$\Delta_y \Psi - c^2 \Psi = -Ce^{-kl} \text{ στην } B_R^{n-1}(y^0),$$

$$\Psi = 1 + \frac{C}{c^2}e^{-kl} \text{ στο } \partial B_R^{n-1}(y^0),$$

$$\Psi'(0) = 1.$$

Εφόσον η φ είναι φραγμένη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(\varphi - \Psi) \leq 0$ στο $\partial B_R^{n-1}(y^0)$. Άρα από αρχή μεγίστου έχουμε

$$\|u(\cdot, y^0) - e\|_l^2 \leq \Phi_h(0) + \frac{C}{c^2}e^{-kl} \leq e^{-h(R)R} + \frac{C}{c^2}e^{-kl} \text{ (από (5.3), (5.4))}.$$

Για $R = \frac{|y^0|}{2}$, έχουμε αρχικά μια L^2 εκτίμηση και για να εξάγουμε την αντίστοιχη L^∞ μπορούμε να συνεχίσουμε ως εξής:

$$\Delta(u - e) = W_u(u) - W_u(e) = W_{uu}(\cdot)(u - e) \tag{3.25}$$

Ξέρουμε ότι η $\|u - e\|_{L^\infty}$ είναι φραγμένη άρα

$$\|u(\cdot, y^0) - e\|_{L^p(-l,l)} = O(e^{-kl}), \forall p < \infty. \tag{3.26}$$

Το δεξί μέλος της (3.25) ειναι φραγμένο και άρα $\Delta(u - e) \in L^2(-l, l)$. Κατά συνέπεια $(u - e) \in W^{2,2}(-l, l)$ Εάν $n < 4$ (για την ακρίβεια $n = 3$ εφόσον αρχικά έχουμε υποθέσει πως $n > 2$) από το θεώρημα εμφύτευσης του Sobolev έχουμε

$$W^{2,2}(-\tilde{l}, \tilde{l}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(-\tilde{l}, \tilde{l})$$

αλλιώς, από το ίδιο θεώρημα έχουμε

$$W^{2,2}(-\tilde{l}, \tilde{l}) \hookrightarrow L^{p^*}(-\tilde{l}, \tilde{l})$$

με $p^* > 2$ ο Sobolev συζυγης του 2 και για $\tilde{l} < l$.
Από τη σχέση (3.26) έχουμε $(u - e) \in L^{p^*}$ και παρατηρούμε ότι οι ποσότητες $\nabla(u - e)^{p^*}, \Delta(u - e)^{p^*}$ είναι φραγμένες (και πάλι λόγο της (3.26)), συνεπώς $(u - e) \in W^{2,p^*}(-\tilde{l}, \tilde{l})$.
Εάν $n < 2p^*$ τότε έχουμε τελειώσει αλλιώς συνεχίζουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία και σε πεπερασμένα βήματα θα έχουμε, για κάποιο κατάλληλα μεγάλο p^{**}

$$W^{2,p^{**}}(-\tilde{l}, \tilde{l}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(-\tilde{l}, \tilde{l})$$

Το κλείσιμο του επιχειρήματος έχει ως εξής:
από (3.2) έχουμε

$$|u(s, y) - e(s)| \leq Ke^{-ks},\ x \in \Omega_I^+.$$

οπότε

$$\begin{aligned}
|u(s,y)-e(s)|^2 &\leq K\bar{K}e^{-ks}e^{-\bar{k}d(x,\partial\Omega_I)} \\
&\leq K\bar{K}e^{-k_{\min}(s+d(x,\partial\Omega_I))} \ (k_{\min}=\min(k,\bar{k})) \\
&= K\bar{K}e^{-k_{\min}(s+\overline{xP}\cos\theta)} \\
&\leq K\bar{K}e^{-k_{\min}\cos\theta d(x,\partial\Omega)}.
\end{aligned}$$

Η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώθηκε. □

4 Βιβλιογραφία

1. N. Αλικακος, G. Fusco, Π. Σμυρνέλης Elliptic Systems of Phase Transition Type
2. D. Gilbarg, N. Trudinger Elliptic Partial Differential Equations of Second Order
3. L. Evans, R. Gariepy Measure Theory and Fine Properties of Functions

5 Παραρτήμα

Θα δείξουμε ότι για ακτινικές λύσεις του προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta\varphi = c^2\varphi, & x \in B_r = B(0;r), \\ \varphi = 1, & x \in \partial B_r, \end{cases} \tag{5.1}$$

με $\varphi = \varphi(x;r) = \Phi(|x|;r) = \Phi(s;r)$.
ισχύει :

Λήμμα 7 Έστω Φ λύση του παραπάνω προβλήματος. Τότε η $r \to \frac{\partial\Phi}{\partial s}(r;r)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ και ισχύει ότι

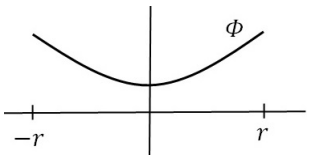
$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\partial\Phi}{\partial s}(r;r) = c. \tag{5.2}$$

Επιπρόσθετα, υπάρχει γνησίως αύξουσα συνάρτηση $h : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ τέτοια ώστε

$$\Phi(s;r) \le e^{h(r)(s-r)}, \quad s \in [0,r], \tag{5.3}$$

και

$$\lim_{r\to\infty} h(r) = c. \tag{5.4}$$



Απόδειξη: Σταθεροποιούμε μια ακτίνα r και αντιμετωπίζουμε την $\Phi(s;r)$ ως συνάρτηση μιας μεταβλητής $\Phi(s;r) = \Phi(s)$. Θέτουμε $w(s) = \Phi'(s)/\Phi(s)$ και μετατρέπουμε την (5.1) σε μια εξίσωση Riccati:

$$\begin{cases} w' = c^2 - \dfrac{n-1}{s}w - w^2, \\ w(0) = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

Θέτουμε το δεξί μέλος της (5.5) ως $g(s,w)$ και παρατηρούμε ότι έχει μια θετική λύση:

$$z(s) = \frac{1-n}{2s} + \sqrt{\left(\frac{n-1}{2s}\right)^2 + c^2} \tag{5.6}$$

και

$$sgn\, g(s,w) = sgn\,(z(s) - w). \tag{5.7}$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\lim_{s\to 0^+} z(s) = 0 \quad \text{και} \lim_{s\to 0^+} z'(s) = \frac{c^2}{n-1},$$

ενώ η σχέση (5.1)

$$\Delta\varphi(0) = n\Phi''(0) = c^2\Phi(0).$$

Οπότε

$$w'(0) = \frac{c^2}{n}.$$

Ως αποτέλεσμα έχουμε,

$$\begin{cases} w(0) = z(0) = 0, \\ w'(0) < z'(0), \end{cases} \tag{5.8}$$

το οποίο δείχνει ότι η καμπύλη $s \to w(s)$ ξεκινάει κάτω από την καμπύλη $s \to z(s)$, συνεπώς ισχύει

$$w(s) < z(s), \quad s \in (0, +\infty). \tag{5.9}$$

Πράγματι, οι καμπύλες $s \to w(s)$ και $s \to z(s)$ δεν μπορούν να τέμνονται διότι $z(s)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και $g(s, z(s)) = 0$ από τη σχέση (5.6). Οι ανισότητες (5.9) και (5.7) δίνουν

$$\begin{cases} w'(s) > 0, \quad s \in (0, +\infty), \\ \lim\limits_{s\to+\infty} w(s) = \lim\limits_{s\to+\infty} z(s) = c. \end{cases} \tag{5.10}$$

Από τη σχέση (5.10) συνεπάγεται ότι η $\Phi'(r) = w(r)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και ότι η σχέση (5.2) ισχύει.

Για να αποδείξουμε τη σχέση (5.3) θέτουμε

$$h(r) = \frac{1}{r}\int_0^r w(s)ds\,. \tag{5.11}$$

Τότε, από (5.10), h είναι αύξουσα και ικανοποιεί τη σχέση (5.4). Έστω $\tilde{\Phi}(s)$ το δεξί μέλος της σχέσης (5.3). Τότε,

$$\frac{\Phi(s)}{\tilde{\Phi}(s)} = e^{\int_r^s [w(\tau)-h(r)]d\tau} \le 1, \quad s \in [0, r]. \tag{5.12}$$

Πράγματι, η σχέση (5.11) και το γεγονός ότι $h'(r) > 0$, δίνουν

$$\begin{aligned} \int_r^s [w(\tau) - h(r)]d\tau &= \int_r^s w(\tau)d\tau - \frac{s-r}{r}\int_0^r w(\tau)d\tau \\ &= \int_0^s w(\tau)d\tau - \frac{s}{r}\int_0^r w(\tau)d\tau = s[h(s) - h(r)] \le 0, \quad s \in [0, r]. \end{aligned}$$

□

Τελος, τονίζουμε

$$r_1 < r_2,\, t \in (0, r_1] \Rightarrow \Phi(r_1 - t; r_1) > \Phi(r_2 - t; r_2).$$

Θέτουμε

$$\theta(x) = \begin{cases} \Phi(|x| - r_2 + r_1; r_1) & \text{για } r_2 - r_1 \leq |x| \leq r_2 \\ \Phi(0; r_1) & \text{για } |x| \leq r_2 - r_1 \end{cases}$$

βλέπουμε ότι η θ ικανοποιεί $\Delta\theta \leq c^2\theta$ ασθενώς στην B_{r_2}. Οπότε από αρχή μεγίστου $\theta(x) > \varphi(x; r_2)$, $\forall x : |x| > r_2$.