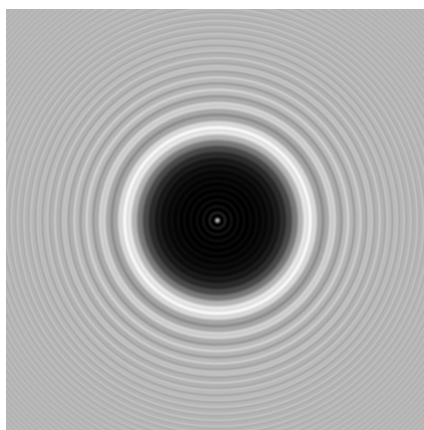




ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Περίθλαση κοντινού και μακρινού πεδίου και εφαρμογές στην Αστροφυσική

Καραμπότσιου Ευσεβία
ΑΜ: 201632



Διπλωματική εργασία για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης

Επιβλέπων

Γαζέας Κοσμάς, Λέκτορας

Ιούνιος 2018



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

Περίθλαση κοντινού και μακρινού πεδίου και εφαρμογές στην Αστροφυσική

Καραμπότσου Ευσεβία
ΑΜ: 201632

Διπλωματική εργασία για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Γαζέας Κοσμάς, Λέκτορας (Κύριος επιβλέπων)
Χατζηδημητρίου Δέσποινα, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Αποστολάτος Θεοχάρης, Αναπληρωτής Καθηγητής

Ιούνιος 2018

When it is dark enough, you can see the stars.

Ralph Waldo Emerson

Ευχαριστίες

Για την ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας θα ήθελα πρωτίστως να ευχαριστήσω τον κ. Κοσμά Γαζέα, Λέκτορα Παρατηρησιακής Αστροφυσικής, που ήταν δίπλα μου και με υποστήριξε καθ' όλη τη διάρκεια αυτού του έργου. Με βοήθησε σε οτιδήποτε χρειάστηκα για την εργασία και αποτέλεσε πηγή έμπνευσης ήδη από την αρχή του μεταπτυχιακού με ενδιαφέρουσες και εποικοδομητικές συζητήσεις πάνω σε θέματα αστροφυσικής και οπτικής. Τον ευχαριστώ επίσης που με εμπιστεύτηκε και μου έδωσε την ευκαιρία να βοηθήσω στη διδασκαλία του μαθήματος της Εφαρμοσμένης Οπτικής. Τέλος, τον ευχαριστώ από καρδιάς για όσα μου έμαθε και κυρίως που δουλεύοντας μαζί του έμαθα πως είναι ένας Αστροφυσικός αλλά και Δάσκαλος.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, την κα. Χατζηδημητρίου Δέσποινα, Αναπληρώτρια καθηγήτρια, με την οποία έμαθα και αγάπησα την οπτική, όσο ήμουν ακόμα προπτυχιακή φοιτήτρια, και τον κ. Αποστολάτο Θεοχάρη, Αναπληρωτή Καθηγητή, από τον οποίο έμαθα να χρησιμοποιώ τη φυσική σκέψη και πώς να αντιμετωπίζω φυσικά προβλήματα χρησιμοποιώντας τον υπολογιστή.

Θα ήθελα ακόμη να ευχαριστήσω τους γονείς μου, Χάρη και Δώρα, και την αδερφή μου, Μαρία, που με υποστήριξαν ολόψυχα και με υποστήριξαν κατά τη διάρκεια του μεταπτυχιακού. Ευχαριστώ τη Μαρία, τη Δήμητρα, τη Στεφάνια και το Χρήστο για την όμορφη χρονιά που περάσαμε σαν συμφοιτητές. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω τη Λιλή, την Ιωάννα και την Αναστασία για τη στήριξη που μου παρείχαν.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω το Θοδωρή, που στάθηκε στο πλευρό μου, έδειξε υπομονή και με βοήθησε να προχωρήσω όταν τίποτα δεν πήγαινε όπως ήθελα.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	1
1 Θεωρία της περίθλασης	3
1.1 Εισαγωγή	3
1.2 Ιστορική αναδρομή	4
1.3 Μαθηματική αναπαράσταση της περίθλασης	6
1.3.1 Κυματική εξίσωση	6
1.3.2 Θεώρημα Green	8
1.3.3 Ολοκληρωτικό θεώρημα Helmholtz και Kirchhoff	9
1.3.4 Διατύπωση Kirchhoff	11
1.4 Διατύπωση Rayleigh - Sommerfeld	15
1.5 Σύγκριση των δύο θεωριών	18
1.6 Αρχή Huygens - Fresnel	19
1.7 Μη μονοχρωματικά κύματα	20
1.8 Αρχή Babinet	21
2 Περίθλαση Fresnel	23
2.1 Προσέγγιση Fresnel	23
2.2 Κυκλική συμμετρία	25
2.2.1 Ζώνες Fresnel	25
2.2.2 Vibrational Curve	30
2.2.3 Μαθηματική αναπαράσταση με συναρτήσεις Lommel	33
2.2.4 Περίθλαση από κυκλικό εμπόδιο	36
2.3 Ορθογώνια συμμετρία	40
2.3.1 Σπείρα του Cornu	40
2.3.2 Υπολογισμός της έντασης	44
2.4 Περίθλαση από χείλος	45
2.5 Περίθλαση από σχισμή	48
2.6 Αριθμητική μέθοδος των Roques et al. (1987)	52
2.7 Περίθλαση με μετασχηματισμό Fourier	53

3	Περίθλαση Fraunhofer	59
3.1	Προσέγγιση Fraunhofer	59
3.2	Ορθογώνιο διάφραγμα	59
3.3	Κυκλικό διάφραγμα	62
4	Εκτέλεση πειραμάτων	69
4.1	Πειραματική διάταξη	69
4.2	Περίθλαση Fresnel	70
5	Δημιουργία μοντέλου προσομοίωσης	77
5.1	Ανάπτυξη λογισμικού για τη μελέτη της περίθλασης Fresnel	77
5.1.1	Επιλογή διαφράγματος	78
5.1.2	Εισαγωγή παραμέτρων	82
5.1.3	Επιλογή ανάλυσης	87
5.1.4	Διάγραμμα έντασης φωτός	88
5.2	Προσαρμογή θεωρητικού μοντέλου στα πειραματικά δεδομένα	91
5.2.1	Περιγραφή διάταξης	91
5.3	Εισαγωγή παραμέτρων	95
6	Εφαρμογές της περίθλασης	99
6.1	Εφαρμογές της περίθλασης ακτίνων Χ	99
6.2	Εφαρμογές της περίθλασης στη φασματοσκοπία	100
6.3	Εφαρμογές της περίθλασης στην ολογραφία	101
6.4	Εφαρμογή της περίθλασης στη μελέτη εξωπλανητών	102
6.5	Εφαρμογή της περίθλασης Fresnel στις επιπροσθήσεις	106
6.5.1	Επιπροσθήσεις αστέρων από τη Σελήνη	106
6.5.2	Επιπροσθήσεις αστέρων από πλανήτες και αστεροειδείς	110
7	Συμπεράσματα	125
	Βιβλιογραφία	131

Πρόλογος

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της περίθλασης κοντινού και μακρινού πεδίου και πώς χρησιμοποιούμε τις παρατηρήσεις των φαινομένων αυτών για την εξαγωγή συμπερασμάτων στην Αστροφυσική. Για το σκοπό αυτό εκτελέστηκαν πειράματα με στόχο τη δημιουργία ενός θεωρητικού μοντέλου το οποίο θα προσαρμόζεται στα πειραματικά δεδομένα και θα εξάγονται οι παράμετροι που υπεισέρχονται στο πείραμα. Στη συνέχεια ως εφαρμογές της περίθλασης μελετήθηκαν οι επιπροσθήσεις αστεριών από σώματα του Ηλιακού μας Συστήματος.

Στο πρώτο κεφάλαιο αναπτύσσεται η θεωρία της περίθλασης. Γίνεται μία ιστορική αναδρομή με τους σημαντικότερους επιστήμονες που ασχολήθηκαν με την περίθλαση και στη συνέχεια αναφέρεται συνοπτικά η εξαγωγή του ολοκληρώματος της περίθλασης, ξεκινώντας από τις εξισώσεις του Maxwell.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάται το ολοκλήρωμα περίθλασης εφαρμόζοντας την προσέγγιση κοντινού πεδίου και πώς αυτό μετατρέπεται όταν η διάταξη έχει κυκλική ή ορθογώνια συμμετρία. Στο τέλος του δεύτερου κεφαλαίου αναφέρονται κάποιες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα περίθλασης δεν έχει αναλυτική λύση.

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετάται η περίθλαση μακρινού πεδίου, εφαρμόζοντας στο ολοκλήρωμα περίθλασης την προσέγγιση Fraunhofer. Αναπτύσσονται λεπτομερώς οι περιπτώσεις ορθογώνιου και κυκλικού διαφράγματος

Στο τέταρτο κεφάλαιο περιγράφεται η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε στο Εργαστήριο Αστρονομίας και Εφαρμοσμένης Οπτικής στο Τμήμα Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα πειράματα και οι εικόνες που προέκυψαν.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται δύο κώδικες που δημιουργήθηκαν στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας. Ο πρώτος κώδικας χρησιμοποιήθηκε στη μελέτη της εξάρτησης των διάφορων παραμέτρων που υπεισέρχονται στο φαινόμενο της περίθλασης. Ο δεύτερος κώδικας δημιουργήθηκε με σκοπό την προσαρμογή ενός θεωρητικού μοντέλου στα πειραματικά δεδομένα για την περίθλαση Fresnel από κυκλικό εμπόδιο. Από τον κώδικα αυτό εξάγονται οι παράμετροι που υπεισέρχονται στην πειραματική διάταξη και δεν είναι δυνατό να μετρηθούν με μεγάλη ακρίβεια.

Στο έκτο κεφάλαιο μελετώνται οι εφαρμογές του φαινομένου της περίθλασης στη Φυσική και στην Αστροφυσική. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο φαινόμενο των επιπροσθήσεων αστερών από σώματα του Ηλιακού μας Συστήματος. Οι επιπροσθήσεις παρατηρούνται όταν ένα ουράνιο σώμα, όπως η Σελήνη, οι πλανήτες ή οι αστεροειδείς αποκρύπτουν το αστρικό φως. Τόσο στις επιπροσθήσεις από τη Σελήνη όσο και στις επιπροσθήσεις από αστεροειδείς και μικρά σώματα του Ηλιακού μας Συστήματος, η περίθλαση κοντινού πεδίου είναι κυρίαρχο φαινόμενο. Στην

παρούσα εργασία μελετήθηκαν οι επιπροσθήσεις από τη Σελήνη και πώς αυτές συντελούν στην εξαγωγή συμπερασμάτων για το γωνιακό μέγεθος των αστεριών και στην ανακάλυψη αστρικών συστημάτων. Τέλος, μελετήθηκαν οι επιπροσθήσεις από μικρούς αστεροειδείς στη Ζώνη των Αστεροειδών. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier και τριδιάστατα μοντέλα των αστεροειδών, παρουσιάζεται ο περιθλαστικός σχηματισμός και το διάγραμμα έντασης συναρτήσει του χρόνου, όπως θα αναμενόταν από την παρατήρηση αυτού το φαινομένου.

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας. Συγκρίνονται τα ολόκληρώματα περίθλασης Fresnel - Kirchhoff και Rayleigh - Sommerfeld και εφαρμόζονται στην περίπτωση της περίθλασης από κυκλικό εμπόδιο. Στη συνέχεια συγκρίνονται οι τρεις μέθοδοι που μελετήθηκαν για τον υπολογισμό του περιθλαστικού σχηματισμού, δηλαδή η αναλυτική λύση με όρους συναρτήσεων Lommel ή με τα ολοκληρώματα Fresnel, η μέθοδος των Roques et al. (1987) και ο μετασχηματισμός Fourier. Μελετήθηκε επίσης η μορφή του φωτεινού σημείου στο κέντρο της γεωμετρικής σκιάς όταν το εμπόδιο που τοποθετείται μεταξύ πηγής και πετάσματος παρατήρησης είναι ελλειπτικό. Τέλος, μελετάται το φαινόμενο των επιπροσθήσεων αστέρων από μικρά σώματα του Ηλιακού μας Συστήματος, δηλαδή αντικείμενα της Ζώνης Kuiper (Kuiper Belt Objects) και Μετα-ποσειδώνια αντικείμενα (Trans-Neptunian Objects), των οποίων τα φυσικά και τροχιακά χαρακτηριστικά είναι μέχρι σήμερα άγνωστα.

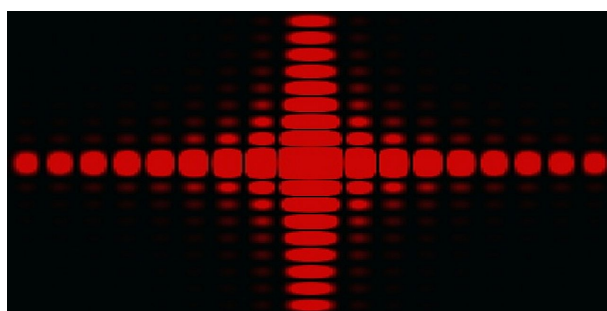
Κεφάλαιο 1

Θεωρία της περίθλασης

1.1 Εισαγωγή

Οι νόμοι της γεωμετρικής οπτικής εφαρμόζονται μόνο στην ιδανική περίπτωση που το μήκος κύματος μπορεί να θεωρηθεί απειροστικά μικρό. Όσο λιγότερο ισχύει αυτή η συνθήκη, τόσο μεγαλύτερες είναι οι αποκλίσεις που παρατηρούνται από τη γεωμετρική οπτική, δηλαδή τόσο λιγότερο καθορισμένη είναι η γεωμετρική σκιά ενός αντικειμένου. Το φαινόμενο που προκύπτει από τέτοιες αποκλίσεις ονομάζεται περίθλαση.

Φαινόμενα περίθλασης παρατηρούνται όταν στην πορεία ενός κυματικού μετώπου παρεμβάλλεται μία «ασυνέχεια». Αυτή η ασυνέχεια μπορεί να είναι είτε ένα διάφραγμα σε ένα αδιαφανές πέτασμα είτε ένα εμπόδιο. Αν πίσω από την ασυνέχεια υπάρχει ένα πέτασμα παρατήρησης θα σχηματιστεί πάνω σε αυτό μια εικόνα με εναλλαγές φωτεινών και σκοτεινών περιοχών. Ο περιθλαστικός σχηματισμός εξαρτάται από τις φυσικές διαστάσεις της ασυνέχειας σε σχέση με το μήκος κύματος, από τη γεωμετρία της ασυνέχειας και του προσπίπτοντος μετώπου κύματος στην περιοχή της ασυνέχειας και από την απόσταση πετάσματος παρατήρησης - ασυνέχειας.



Εικόνα 1.1: Σχηματισμός κροσσών περίθλασης από ορθογώνιο διάφραγμα (Πηγή: Wikiwand).

Όταν η πηγή του φωτός και το πέτασμα παρατήρησης βρίσκονται κοντά διαχωριστική επιφάνεια που δημιουργεί την ασυνέχεια, έτσι ώστε να έχουμε μη επίπεδο κύμα στην ασυνέχεια και στο πέτασμα παρατήρησης η εικόνα χαρακτηρίζεται γενικά ως περίθλαση Fresnel (κοντινού πεδίου). Στην ειδική περίπτωση που οι αποστάσεις πηγής – πετάσματος και πετάσματος – οθό-

νης γίνονται τόσο μεγάλες ώστε τα αντίστοιχα μέτωπα μπορούν να θεωρηθούν επίπεδα η εικόνα χαρακτηρίζεται ως περίθλαση Fraunhofer (μακρινού πεδίου).

1.2 Ιστορική αναδρομή



Εικόνα 1.2: *Francisco Maria Grimaldi (1452-1519)* (Πηγή: Wikipedia)

Η πρώτη αναφορά σε φαινόμενα περίθλασης εμφανίζεται στο έργο του Leonardo da Vinci (1452-1519). Αυτά τα φαινόμενα ωστόσο περιγράφηκαν λεπτομερώς από τον Francisco Maria Grimaldi (1618-1663) (Εικόνα 1.2), έναν Ιησουίτη καθηγητή μαθηματικών στη Bologna. Στο δίτομο έργο του, το οποίο δημοσιεύτηκε δύο χρόνια μετά το θάνατό του, το 1665, ο Grimaldi χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματά του από ένα σύνολο πειραμάτων που εκτέλεσε, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι εκτός από ευθύγραμμη διάδοση, ανάκλαση και διάθλαση του φωτός, υπάρχει και τέταρτος τρόπος διάδοσης, τον οποίο ονόμασε περίθλαση.

Ο όρος diffraction (περίθλαση) προέρχεται από τη λατινική λέξη *diffringere*, η οποία είναι σύνθετη από τις λέξεις *dis* και *frangere* και σημαίνει «χωρίζεται σε διαφορετικές διευθύνσεις». Παρόλο που αργότερα ο Hooke και ο Νεύτωνας χρησιμοποίησαν τον όρο «*inflection*» για το ίδιο φαινόμενο, επικράτησε ο όρος *diffraction* (περίθλαση) του Grimaldi. Ο ελληνικός όρος περίθλαση προέρχεται από τις λέξεις *περί* και *θλάση* και σημαίνει ότι το φως εκτρέπεται γύρω από ένα εμπόδιο.

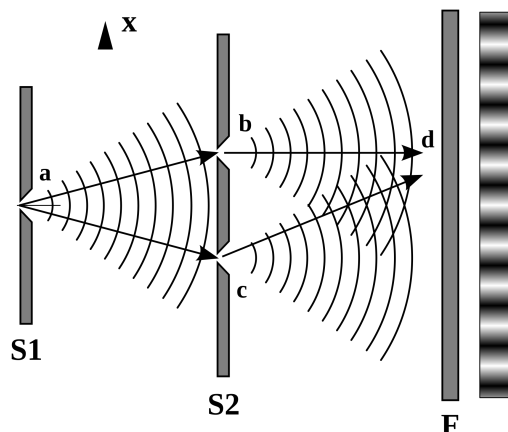
Το 17ο αιώνα ο Christiaan Huygens (1629-1695) (Εικόνα 1.3) στην Ολλανδία ανέπτυξε μια μορφή κυματικής θεωρίας, γνωστή σήμερα ως αρχή του Huygens. Στο έργο του ο Huygens μελέτησε τη διάδοση του φωτός και τη δημιουργία δευτερευόντων κυμάτων. «Κάθε σημείο ενός φωτεινού σώματος, όπως ο Ήλιος, ένα κερί ή ένα κομμάτι αναμμένο κάρβουνο, δημιουργεί δικά του κύματα και είναι το κέντρο τέτοιων κυμάτων. Έτσι αν θεωρήσουμε διαφορετικά σημεία στη φλόγα ενός κεριού, ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο καθένα από αυτά τα σημεία αναπαριστούν τα κύματα τα οποία δημιουργούνται. Το ίδιο ισχύει για όλα τα σημεία πάνω στην επιφάνεια και μέσα στη φλόγα.» Η πρώτη επιστημονική λύση του προβλήματος της περίθλασης βασίστηκε στο έργο του Huygens το 1678, η οποία δημοσιεύτηκε το 1690.



Εικόνα 1.3: *Christiaan Huygens (1629-1695)* (Πηγή: Wikipedia)

Σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη της θεωρίας της περίθλασης προσέφερε ο Thomas Young (1773-1829) με το πείραμά του (Εικόνα 1.4) το 1801 με το οποίο απέδειξε το νόμο της συμβολής των κυμάτων. Ένα ακόμη πείραμα που εκτέλεσε ο Young ήταν πολύ απλό και μπορούσε να επαναληφθεί «με μεγάλη ευκολία όταν λάμπει ο Ήλιος». Η διάταξη που χρησιμοποιήθηκε από τον Young ήταν μία λωρίδα χαρτιού με πάχος περίπου ένα χιλιοστό (ένα τριακοστό της ίντσας) το οποίο ο Young κρατούσε με την άκρη προς μία μικρή οπή από την οποία διερχόταν το ηλιακό φως. Ο Young παρατήρησε ότι η ίδια σκιά διαιρέθηκε σε όμοιους παράλληλους κροσσούς.

Στο έργο του Huygens βασίστηκε ο Augustin Jean Fresnel (1788-1827) για την πρώτη κυ-



Εικόνα 1.4: Ο Thomas Young (1773 - 1829) και το πείραμα με διπλή σχισμή

ματική αντιμετώπιση του φαινομένου της περίθλασης. Ο Fresnel τροποποίησε την κλασική αρχή του Huygens και πρότεινε ότι τα δευτερεύοντα σφαιρικά κύματα συμβάλλουν μεταξύ τους. Δημοσίευσε κάποια αποτελέσματά του το 1816, αλλά το έργο του αναγνωρίστηκε λίγα χρόνια αργότερα. Το 1819 η Γαλλική Ακαδημία Επιστημών ανακοίνωσε ότι θα δοθεί βραβείο εκείνη τη χρονιά στην καλύτερη εργασία για την περίθλαση, με την ελπίδα ότι οι συμμετέχοντες θα παρείχαν την απόδειξη για μία σωματιδιακή θεωρία του φωτός. Ο Fresnel κέρδισε εύκολα το βραβείο, αφού υπήρχε ακόμη μόνο μία συμμετοχή.



Εικόνα 1.5: Η διαμάχη μεταξύ των Augustin Jean Fresnel (αριστερά) και του Siméon Denis Poisson (κέντρο) για τη θεωρητική πρόβλεψη του φωτεινού σημείου στο κέντρο σκιάς από φωτιζόμενο δίσκο έληξε με την παρατήρηση του σημείου αυτού από τον Francois Arago (δεξιά) (Πηγή: Wikipedia)

Ωστόσο, ένας από τους κριτές ήταν ο Siméon Denis Poisson (1781-1840), ο οποίος υποστήριζε ότι οι θεωρητικοί υπολογισμοί του Fresnel δεν μπορούσαν να είναι σωστοί. Ο Poisson

εκτέλεσε τους δικούς του υπολογισμούς και προέβλεψε το φαινομενικά απίθανο αποτέλεσμα ότι ένα φωτεινό σημείο εμφανίζεται στο κέντρο της σκιάς ενός μικρού φωτιζόμενου δίσκου. Προς έκπληξη του Poisson, το σημείο αυτό παρατηρήθηκε πειραματικά όταν ο Dominique François Jean Arago (1782-1856) εκτέλεσε το πείραμα. Το φωτεινό αυτό σημείο είναι γνωστό με τρία ονόματα, ως Fresnel spot, αφού ο Fresnel πρώτος προέβλεψε την εμφάνισή του, ως Arago spot, αφού ο Arago πρώτος το παρατήρησε και ειρωνικά ως Poisson spot, επειδή ο Poisson πίστευε ότι δεν μπορεί να υπάρξει τέτοιο σημείο (Εικόνα 1.5).

Το μεγαλύτερο βήμα στην ανάπτυξη της θεωρίας της περίθλασης πραγματοποιήθηκε το 1882 από τον Gustav Kirchhoff (1824-1887), ο οποίος βασίστηκε σε μαθηματικό υπόβαθρο από τους Green και Helmholtz. Στην περίπτωση της περίθλασης από διάφραγμα σε ένα επίπεδο πέτασμα, ο Kirchhoff περιέγραψε το πεδίο στην οθόνη με τη μορφή ενός ολοκληρώματος σε όλο το διάφραγμα, δηλαδή σαν αποτέλεσμα της συμβολής των δευτερευόντων πηγών του Huygens.

1.3 Μαθηματική αναπαράσταση της περίθλασης

1.3.1 Κυματική εξίσωση

Οι εξισώσεις Maxwell στο κενό είναι:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\tag{1.1}$$

Υπολογίζουμε το στροβιλισμό του στροβιλισμού για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, οπότε προκύπτει:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Χρησιμοποιούμε τη διανυσματική ταυτότητα:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \cdot \vec{V}\tag{1.3}$$

όπου $\vec{V}$ είναι τυχαία διανυσματική συνάρτηση και

$$\nabla^2 \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{V})\tag{1.4}$$

Αφού

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{1.5}$$

ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{E} &= 0 \\ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{1.6}$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $u(\vec{r}, t)$ η οποία ικανοποιεί την κυματική εξίσωση (Εξίσωση 1.6), δηλαδή:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\vec{r}, t) = 0\tag{1.7}$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών, δηλαδή υποθέτουμε:

$$u(\vec{r}, t) = A(\vec{r})T(t)\tag{1.8}$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη μορφή στην κυματική εξίσωση (Εξίσωση 1.7) προκύπτει:

$$\frac{\nabla^2 A}{A} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}\tag{1.9}$$

Το αριστερό μέλος της Εξίσωσης (1.9) εξαρτάται μόνο από το $\vec{r}$ ενώ το δεξί μέλος εξαρτάται μόνο από το t . Αυτό ισχύει μόνο όταν και τα δύο μέλη είναι ίσα με μία σταθερά, έστω $-k^2$, οπότε προκύπτουν δύο εξισώσεις:

$$\frac{\nabla^2 A}{A} = -k^2\tag{1.10}$$

$$\frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2\tag{1.11}$$

Από την Εξίσωση (1.10) προκύπτει:

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0 \Rightarrow (\nabla^2 + k^2)A = 0\tag{1.12}$$

Αντικαθιστούμε τον ορισμό

$$\omega \equiv kc\tag{1.13}$$

οπότε η Εξίσωση (1.11) γίνεται:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) T = 0\tag{1.14}$$

Για τη βαθμωτή θεωρία περίθλασης απαιτείται η εύρεση μιας λύσης της εξίσωσης Helmholtz για ένα κύμα το οποίο κατά τη διάδοσή του συναντάει ένα διάφραγμα, ένα εμπόδιο ή γενικότερα μια "ασυνέχεια". Η εξίσωση Helmholtz είναι:

$$(\nabla^2 + k^2)U(x, y, z) = 0 \quad (1.15)$$

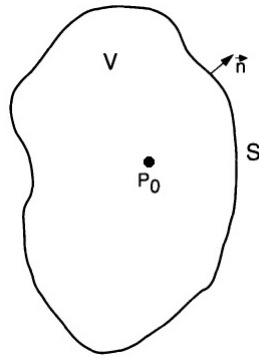
όπου η συνάρτηση U περιγράφει το πλάτος του κύματος και

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.16)$$

ο κυματάριθμος που χαρακτηρίζει το κύμα.

1.3.2 Θεώρημα Green

Για τον υπολογισμό της μιγαδικής διαταραχής U χρησιμοποιούμε το θεώρημα Green. Έστω $U(P)$ και $U'(P)$ δύο μιγαδικές συναρτήσεις της θέσης και έστω S μία κλειστή επιφάνεια που περικλείει όγκο V (Εικόνα 1.6).



Εικόνα 1.6: Επιφάνεια και όγκος ολοκλήρωσης για την εφαρμογή του θεωρήματος Green (Πηγή: *Introduction to Fourier Optics - Goodman*)

Αν οι U και U' καθώς και οι πρώτες και δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι μονότιμες και συνεχείς μέσα και πάνω στην S , έχουμε σύμφωνα με το θεώρημα Green:

$$\iiint_V (U \nabla^2 U' - U' \nabla^2 U) dv = \iint_S \left(U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \quad (1.17)$$

όπου με $\frac{\partial}{\partial n}$ συμβολίζεται η μερική παράγωγος στην προς τα έξω κάθετη διεύθυνση σε κάθε σημείο της S . Αυτό το θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί στο πρόβλημα της περίθλασης με κατάλληλη επιλογή των S και U' .

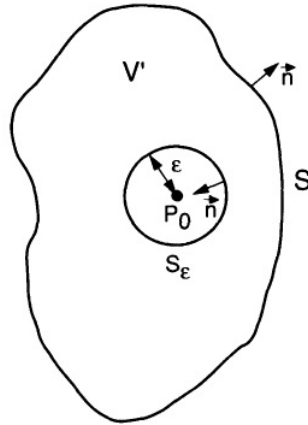
1.3.3 Ολοκληρωτικό θεώρημα Helmholtz και Kirchhoff

Η διατύπωση του Kirchhoff για το πρόβλημα της περίθλασης βασίζεται σε ένα ολοκληρωτικό θεώρημα το οποίο εκφράζει τη λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης σε ένα αυθαίρετο σημείο με όρους των τιμών της λύσης και της πρώτης παραγώγου σε μια τυχαία κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει αυτό το σημείο. Αυτό το θεώρημα είχε εξαχθεί νωρίτερα για την ακουστική από τον Hermann von Helmholtz.

Έστω συμβολίζουμε με P_0 το σημείο παρατήρησης και με S μία αυθαίρετη κλειστή επιφάνεια που περιβάλλει το P_0 . Η δυσκολία υφίσταται στην έκφραση της διαταραχής στο P_0 με όρους της τιμής της στην επιφάνεια S . Σύμφωνα με τον Kirchhoff, εφαρμόζοντας το θεώρημα Green επιλέγουμε σαν συνάρτηση U' ένα σφαιρικό κύμα μοναδιαίου πλάτους που εκτείνεται γύρω από το P_0 (free space Green's function). Άρα η τιμή της U' σε ένα αυθαίρετο σημείο P_1 δίνεται από τη σχέση:

$$U' = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \quad (1.18)$$

όπου r_{01} είναι η απόσταση από το P_0 στο P_1 . Αυτή η συνάρτηση παρουσιάζει ασυνέχεια για $r_{01} = 0$ και αφού η U' έχει υποτεθεί συνεχής και διαφορίσιμη, το P_0 θα πρέπει να εξαιρεθεί από το πεδίο ολοκλήρωσης. Γι' αυτό περιβάλλουμε το P με μία μικρή σφαίρα ακτίνας ε με εμβαδόν S_ε (Εικόνα 1.7). Τότε το θεώρημα Green (Εξίσωση 1.17) εφαρμόζεται στον όγκο ολοκλήρωσης V' που είναι ο όγκος μεταξύ των επιφανειών S και S_ε και η επιφάνεια ολοκλήρωσης είναι η σύνθετη επιφάνεια $S' = S + S_\varepsilon$. Η προς τα έξω κάθετος στη σύνθετη επιφάνεια έχει φορά προς τα έξω με τη συμβατική έννοια στην S αλλά προς τα μέσα (προς το P_0) στην S_ε .



Εικόνα 1.7: Επιφάνεια και όγκος ολοκλήρωσης μετά την εξαίρεση της ασυνέχειας στο 0 (Πηγή: Goodman, Introduction to Fourier Optics)

Εντός του όγκου V' η διαταραχή U' , η οποία παριστάνει διαδιδόμενο σφαιρικό κύμα, ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz (Εξίσωση 1.15):

$$(\nabla^2 + k^2)U' = 0 \quad (1.19)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις Helmholtz για τις U και U' στο αριστερό μέλος του θεωρήματος Green βρίσκουμε:

$$\iiint_{V'} (U \nabla^2 U' - U' \nabla^2 U) dv = - \iiint_{V'} (U U' k^2 - U' U k^2) dv \quad (1.20)$$

Οπότε το θεώρημα Green (Εξίσωση 1.17) γίνεται:

$$\begin{aligned} & \iint_{S'} \left(U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 0 \Rightarrow \\ & - \iint_{S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = \iint_S \left(U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds \end{aligned} \quad (1.21)$$

Για τυχαίο σημείο P_1 στην S' έχουμε:

$$U'(P_1) = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial U'(P_1)}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \quad (1.23)$$

όπου το $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})$ αναπαριστά το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ της προς τα έξω καθέτου $\vec{n}$ και του διανύσματος $\vec{r}_{01}$ που ενώνει τα P_0 και P_1 .

Για την περίπτωση που το P_1 είναι πάνω στην S_ε , $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = -1$ και οι εξισώσεις (1.22) και (1.23) γίνονται:

$$U'(P_1) = \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \quad (1.24)$$

και

$$\frac{\partial U'(P_1)}{\partial n} = \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik \right) \quad (1.25)$$

Έστω το ε είναι αυθαίρετα μικρό οπότε η συνέχεια της U και των παραγώγων της στο P_0 μας επιτρέπει να γράψουμε:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial U'}{\partial n} - U' \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi\varepsilon^2 \left[U(P_0) \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - ik \right) - \frac{\partial U(P_0)}{\partial n} \frac{\exp(ik\varepsilon)}{\varepsilon} \right] = \\ & = 4\pi U(P_0) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (1.21) που προκύπτει από το θεώρημα Green έχουμε:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] - U \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \right] \right\} ds \quad (1.27)$$

Η Εξίσωση (1.27) αποτελεί το ολοκληρωτικό θεώρημα των Helmholtz και Kirchhoff. Το θεώρημα αυτό μας επιτρέπει να εκφράσουμε το πεδίο σε τυχαίο σημείο P_0 με όρους των τιμών του κύματος στο σύνορο οποιασδήποτε κλειστής επιφάνειας περιβάλλει αυτό το σημείο.

Παρατηρούμε ότι όσο $k \rightarrow 0$ η χρονοανεξάρτητη κυματική εξίσωση (εξίσωση Helmholtz) γίνεται η Laplace $\nabla^2 U = 0$ και η μορφή στην οποία καταλήξαμε γίνεται η γνωστή σχέση της θεωρίας δυναμικού:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{s} \right) - \frac{1}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds \quad (1.28)$$

1.3.4 Διατύπωση Kirchhoff

Θεωρούμε ένα μονοχρωματικό κύμα, από μία σημειακή πηγή P_1 , το οποίο διαδίδεται μέσω ενός διαφράγματος σε ένα επίπεδο αδιαφανές πέτασμα και έστω P_0 το σημείο στο οποίο θέλουμε να προσδιορίσουμε τη διαταραχή. Υποθέτουμε ότι οι διαστάσεις του διαφράγματος είναι μεγάλες σε σύγκριση με το μήκος κύματος και μικρές σε σχέση με τις αποστάσεις των P_0 και P_1 από το πέτασμα.

Για να βρούμε το πεδίο στο σημείο P_0 εφαρμόζουμε το ολοκληρωτικό θεώρημα των Helmholtz και Kirchhoff (Εξίσωση 1.27). Η κλειστή επιφάνεια S που επιλέγουμε αποτελείται από τρία τμήματα: το άνοιγμα $\mathcal{A}$, ένα τμήμα $\mathcal{B}$ της πλευράς του πετάσματος που δε φωτίζεται και ένα τμήμα $\mathcal{C}$ μίας μεγάλης σφαίρας ακτίνας R με κέντρο το P τέτοια ώστε μαζί με τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ να σχηματίζεται μία κλειστή επιφάνεια (Εικόνα 1.8).

Το θεώρημα του Kirchhoff δίνει:

$$U(P) = \frac{1}{4\pi} \left[\iint_{\mathcal{A}} + \iint_{\mathcal{B}} + \iint_{\mathcal{C}} \right] \left\{ \frac{e^{iks}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{iks}}{s} \right) \right\} dS \quad (1.29)$$

όπου το s είναι η απόσταση του στοιχείου dS από το P και με $\frac{\partial U}{\partial n}$ συμβολίζεται η παραγωγή κατά μήκος της προς τα έξω καθετού στην επιφάνεια ολοκλήρωσης.

Η δυσκολία έγκειται στο ότι οι τιμές των U και $\frac{\partial}{\partial n}$ πάνω στις επιφάνειες $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ που πρέπει να αντικατασταθούν δεν είναι γνωστές με ακρίβεια. Ωστόσο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι παντού στην $\mathcal{A}$, εκτός από την άμεση γειτονιά του άκρου του ανοίγματος, τα U και $\frac{\partial U}{\partial n}$ δε θα διαφέρουν σημαντικά από τις τιμές που θα είχαν αν δεν υπήρχε το πέτασμα και ότι στην $\mathcal{B}$ αυτές οι ποσότητες θα είναι προσεγγιστικά μηδέν. Ο Kirchhoff έθεσε:

$$\text{στην } \mathcal{A}: \quad U = U^{(i)} \quad \text{και} \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial n} \quad (1.30)$$

$$\text{και στην } \mathcal{B}: \quad U = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0 \quad (1.31)$$

όπου

$$U^{(i)} = \frac{Ae^{ikr}}{r} \quad \text{και} \quad \frac{\partial U^{(i)}}{\partial n} = \frac{Ae^{ikr}}{r} \left[ik - \frac{1}{r} \right] \cos(n, r) \quad (1.32)$$

Η απαίτηση της Εξίσωσης (1.36) είναι γνωστή ως συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld και ικανοποιείται αν η διαταραχή U εξαφανίζεται τουλάχιστον το ίδιο γρήγορα με ένα σφαιρικό κύμα που διαδίδεται. Εγγυάται ότι αντιμετωπίζουμε μόνο κύματα προς τα έξω στη C , αντί για εισερχόμενα κύματα, για τα οποία το ολοκλήρωμα στη C δε θα εξαφανιζόταν όσο $R \rightarrow \infty$

Έχοντας απορρίψει την ολοκλήρωση στην επιφάνεια C , μπορούμε να εκφράσουμε τη διαταραχή στο P_0 με όρους της διαταραχής και της κάθετης παραγώγου στο επίπεδο A ακριβώς πίσω από το πέτασμα, δηλαδή:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{A+B} \left(\frac{\partial U}{\partial n} U' - U \frac{\partial U'}{\partial n} \right) ds \quad (1.37)$$

Το πέτασμα είναι αδιαφανές εκτός από το τμήμα του διαφράγματος A . Η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα προέρχεται από τα σημεία που βρίσκονται στο τμήμα A του διαφράγματος, όπου αναμένεται η ολοκληρωτέα συνάρτηση να είναι μέγιστη. Ο Kirchhoff έκανε τις ακόλουθες υποθέσεις:

1. Σε όλη την επιφάνεια A η κατανομή του πεδίου U και η παράγωγός της $\frac{\partial U}{\partial n}$ είναι η ίδια με την κατανομή και την αντίστοιχη παράγωγο όταν το πέτασμα δεν υπάρχει.
2. Στο τμήμα B που βρίσκεται στη γεωμετρική σκιά του πετάσματος, η κατανομή του πεδίου U και η παράγωγός της $\frac{\partial U}{\partial n}$ είναι μηδέν.

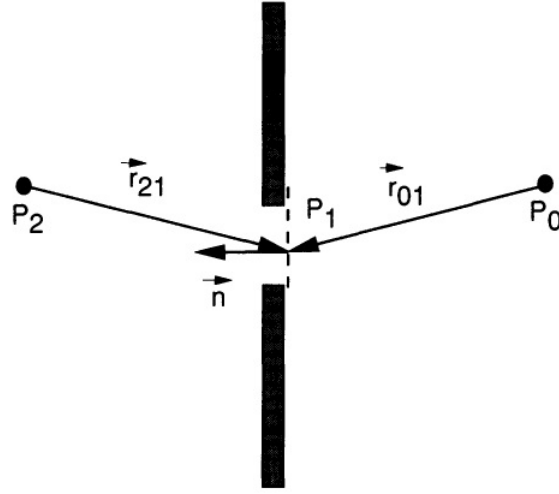
Η πρώτη από τις συνοριακές συνθήκες Kirchhoff (Εξίσωση 1.30) μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε τη διαταραχή που προσπίπτει στο διάφραγμα αγνοώντας την παρουσία του πετάσματος. Η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (Εξίσωση 1.31) μας επιτρέπει να αγνοήσουμε όλη την επιφάνεια ολοκλήρωσης εκτός από το τμήμα που βρίσκεται ακριβώς πίσω από το ίδιο το διάφραγμα. Άρα προκύπτει:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_A \left(\frac{\partial U}{\partial n} U' - U \frac{\partial U'}{\partial n} \right) ds \quad (1.38)$$

Ενώ οι συνοριακές συνθήκες Kirchhoff απλοποιούν σημαντικά τα αποτελέσματα, καμία από αυτές δεν είναι ακριβώς αληθής. Η παρουσία του πετάσματος διαταράσσει τα πεδία στην A σε κάποιο βαθμό, οπότε κατά μήκος του χείλους του διαφράγματος πρέπει να ικανοποιούνται συνοριακές συνθήκες που δε θα απαιτούνταν χωρίς το διάφραγμα. Επιπλέον, η σκιά πίσω από το πέτασμα δεν είναι τέλεια, αφού τα πεδία εκτείνονται πίσω από το πέτασμα για απόσταση μερικών μηκών κύματος. Ωστόσο, αν οι διαστάσεις του διαφράγματος είναι μεγάλες σε σύγκριση με το μήκος κύματος, τα φαινόμενα κροσσών μπορούν να αγνοηθούν και οι δύο συνοριακές συνθήκες συμφωνούν με τα πειραματικά αποτελέσματα.

Μία περαιτέρω απλοποίηση της Εξίσωσης (1.38) για το $U(P_0)$ προκύπτει με την παρατήρηση ότι η απόσταση r_{01} από το διάφραγμα στο σημείο παρατήρησης είναι συνήθως μερικά μήκη κύματος οπότε $k \gg \frac{1}{r_{01}}$ και

$$\begin{aligned} \frac{\partial U'(P_1)}{\partial n} &= \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \\ &\simeq ik \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \end{aligned} \quad (1.39)$$



Εικόνα 1.9: Η γεωμετρία που χρησιμοποιείται για τη διατύπωση Kirchhoff (Πηγή: *Introduction to Fourier Optics - Goodman*)

Αντικαθιστώντας αυτή την προσέγγιση στην έκφραση του U' στην Εξίσωση (1.38) βρίσκουμε:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \left[\frac{\partial U}{\partial n} - ikU \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \right] ds \quad (1.40)$$

Υποθέτουμε ότι το διάφραγμα φωτίζεται από ένα σφαιρικό κύμα που προέρχεται από μία σημειακή πηγή στη P_2 , σε απόσταση r_{21} από το P_1 , άρα:

$$U(P_1) = \frac{A \exp(ikr_{21})}{r_{21}} \quad (1.41)$$

Αν το r_{21} είναι πολλά μήκη κύματος τότε:

$$U(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\exp(ik(r_{21} + r_{01}))}{r_{21}r_{01}} \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right] ds \quad (1.42)$$

Αυτή η σχέση, η οποία ισχύει για φωτισμό που προέρχεται από μία σημειακή πηγή, είναι γνωτό ως σχέση περίθλασης Fresnel - Kirchhoff.

Η Εξίσωση (1.42) είναι συμμετρική ως προς τη σημειακή πηγή στο P_2 και το σημείο παρατήρησης P_0 . Έτσι η σημειακή πηγή στο P_0 θα παράγει στο P_2 το ίδιο φαινόμενο με αυτό που θα παράγει μία σημειακή πηγή ίσης έντασης που βρίσκεται στο P_2 στο σημείο P_0 . Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως το θεώρημα αμοιβαιότητας του Helmholtz.

Η Εξίσωση (1.42) μπορεί να γραφεί ως:

$$U(P_0) = \iint_{\mathcal{A}} U'(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} ds \quad (1.43)$$

όπου

$$U'(P_1) = \frac{1}{i\lambda} \left[\frac{A \exp(ikr_{21})}{r_{21}} \right] \left[\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right] \quad (1.44)$$

Η μορφή της Εξίσωσης (1.43) για το $U(P_0)$ μπορεί να ερμηνευτεί με τον ακόλουθο τρόπο. Το πεδίο στο P_0 προέρχεται από μία απειρία φανταστικών δευτερευόντων σημειακών πηγών που βρίσκονται στο ίδιο το διάφραγμα. Οι δευτερεύουσες πηγές έχουν ορισμένα πλάτη και φάσεις, που περιγράφονται από την $U'(P_1)$, τα οποία σχετίζονται με το μέτωπο κύματος και τις γωνίες της πηγής και του σημείου παρατήρησης. Παρόμοιες υποθέσεις με αυτές έγιναν από τον Fresnel αυθαίρετα όταν συνδύασε την αρχή του Huygens με την αρχή συμβολής του Young. Ο Fresnel υπέθεσε αυτές τις ιδιότητες για να προκύπτουν ακριβή αποτελέσματα. Ο Kirchhoff έδειξε ότι αυτές οι ιδιότητες είναι φυσική συνέπεια της κυματικής φύσης του φωτός.

Οι δυσκολίες στη θεωρία του Kirchhoff προέρχονται από το γεγονός ότι πρέπει να επιβάλλονται συνοριακές συνθήκες τόσο στο πλάτος του πεδίου όσο και στην κάθετη παράγωγο. Όμως, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα από τη θεωρία δυναμικού, αν μία διδιάστατη συνάρτηση δυναμικού και η κάθετη παράγωγός της μηδενίζονται ταυτόχρονα κατά μήκος ενός πεπερασμένου τμήματος καμπύλης, τότε η συνάρτηση δυναμικού μηδενίζεται σε ολόκληρο το επίπεδο. Ομοίως, αν μία λύση της τριδιάστατης κυματικής εξίσωσης μηδενίζεται σε οποιαδήποτε πεπερασμένη στοιχειώδη επιφάνεια, η συνάρτηση δυναμικού μηδενίζεται σε όλο το χώρο.

Έτσι οι δύο συνοριακές συνθήκες Kirchhoff (Εξισώσεις 1.30 και 1.31) σημαίνουν ότι το πεδίο είναι μηδέν παντού πίσω από το διάφραγμα, ένα αποτέλεσμα το οποίο αντιτίθεται στη γνωστή φυσική κατάσταση. Μία επιπλέον ένδειξη αυτών των ασυνεπειών είναι το γεγονός ότι η σχέση περίθλασης Fresnel - Kirchhoff φαίνεται να αποτυγχάνει στην αναπαραγωγή των υποτιθέμενων συνοριακών συνθηκών όσο το σημείο παρατήρησης πλησιάζει το διάφραγμα.

1.4 Διατύπωση Rayleigh - Sommerfeld

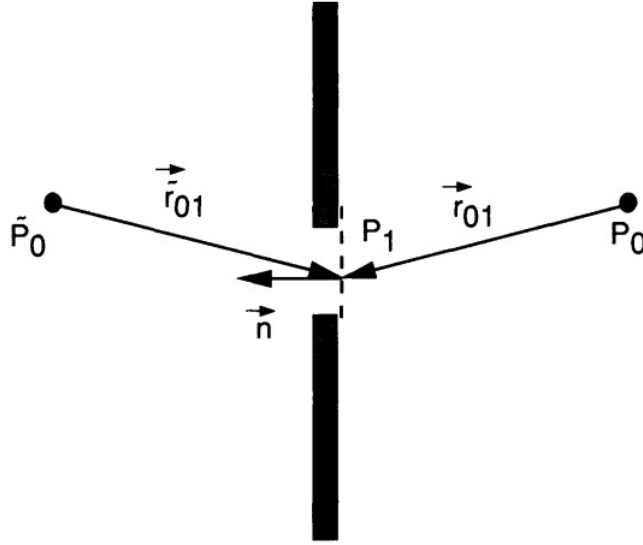
Για να καλύψουν τα κενά στα οποία αποτύγχανε η διατύπωση Fresnel - Kirchhoff, οι Rayleigh και Sommerfeld μελέτησαν ξανά το ολοκλήρωμα της περίθλασης, καταλήγοντας σε μία δεύτερη διατύπωση. Θεωρούμε την Εξίσωση (1.37):

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{A+B} \left(\frac{\partial U}{\partial n} U' - U \frac{\partial U'}{\partial n} \right) ds \quad (1.45)$$

για το παρατηρούμενο πεδίο με όρους του προσπίπτοντος πεδίου και της κάθετης παραγώγου σε όλο το πέτασμα.

Οι προϋποθέσεις υπό τις οποίες ισχύει αυτή η εξίσωση είναι οι ακόλουθες:

1. Ισχύει η βαθμωτή θεωρία.
2. Οι συναρτήσεις U και U' ικανοποιούν την ομογενή βαθμωτή κυματική εξίσωση.
3. Ικανοποιείται η συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (Εξίσωση 1.36).



Εικόνα 1.10: Η γεωμετρία που χρησιμοποιείται για τη διατύπωση Rayleigh - Sommerfeld (Πηγή: *Introduction to Fourier Optics - Goodman*)

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση Green U' της θεωρίας Kirchhoff τροποποιείται με τέτοιο τρόπο ώστε:

$$r_{01} = \tilde{r}_{01} \quad (1.46)$$

$$\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = -\cos(\vec{n}, \vec{\tilde{r}}_{01}) \quad (1.47)$$

ενώ η ανάλυση που οδηγεί στην Εξίσωση (1.45) εξακολουθεί, οπότε σε αυτή την επιφάνεια ισχύει:

$$\frac{\partial U'_-(P_1)}{\partial n} = 2 \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \quad (1.48)$$

Για $r_{01} \gg \lambda$ ο δεύτερος όρος της Εξίσωσης (1.45) μπορεί να αφαιρεθεί οπότε:

$$\frac{\partial U'_-(P_1)}{\partial n} = 2ik \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \quad (1.49)$$

το οποίο είναι το διπλάσιο της κάθετης παραγώγου της συνάρτησης Green U' (Εξίσωση 1.39) που χρησιμοποιήθηκε στη θεωρία Kirchhoff, δηλαδή

$$\frac{\partial U'_-(P_1)}{\partial n} = 2 \frac{\partial U'(P_1)}{\partial n} \quad (1.50)$$

Με αυτό το αποτέλεσμα η πρώτη λύση Rayleigh - Sommerfeld μπορεί να εκφραστεί με όρους της πιο απλής συνάρτησης Green που χρησιμοποιείται από τον Kirchhoff, δηλαδή:

$$U_I(P_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_A U \frac{\partial U'}{\partial n} ds \quad (1.51)$$

Μία εναλλακτική και εξίσου έγκυρη συνάρτηση Green βρίσκεται επιλέγοντας τις δύο σημειακές πηγές να ταλαντώνονται σε φάση, δίνοντας:

$$U'_+(P_1) = \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} + \frac{\exp(ik\tilde{r}_{01})}{\tilde{r}_{01}} \quad (1.52)$$

Η κάθετη παράγωγος αυτής της συνάρτησης (Εξίσωση 1.52) μηδενίζεται σε όλο το πέτασμα και το διάφραγμα, με αποτέλεσμα τη δεύτερη λύση Rayleigh - Sommerfeld:

$$U_{II}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial U}{\partial n} U'_+ ds \quad (1.53)$$

Στην $\mathcal{A}$ και υπό την προϋπόθεση ότι $r_{01} \gg \lambda$, η U'_+ είναι η διπλάσια της συνάρτησης Green του Kirchhoff U' (Εξίσωση 1.39)

$$U'_+ = 2U' \quad (1.54)$$

Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την έκφραση της $U(P_0)$ με όρους της συνάρτησης Green που χρησιμοποιείται από τον Kirchhoff

$$U_{II}(P_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial U}{\partial n} U' ds \quad (1.55)$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση Green U'_- έχουμε:

$$U_I(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\mathcal{A}+\mathcal{B}} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) ds \quad (1.56)$$

όπου έχει υποθεθεί ότι $r_{01} \gg \lambda$. Οι συνοριακές συνθήκες Kirchhoff εφαρμόζονται μόνο στο U , με αποτέλεσμα:

$$U_I(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\mathcal{A}} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) ds \quad (1.57)$$

Οι ασυνέπειες στη θεωρία Kirchhoff αναιρούνται αφού δεν εφαρμόζονται συνοριακές συνθήκες για τη $\frac{\partial U}{\partial n}$.

Αν χρησιμοποιηθεί η εναλλακτική συνάρτηση Green το αποτέλεσμα είναι:

$$U_{II}(P_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial U(P_1)}{\partial n} \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} ds \quad (1.58)$$

Ο φωτισμός από το διάφραγμα σε όλες τις περιπτώσεις είναι ένα σφαιρικό κύμα που αποκλίνει από μία σημειακή πηγή στη θέση P_2 :

$$U(P_1) = A \frac{\exp(ikr_{21})}{r_{21}} \quad (1.59)$$

Χρησιμοποιώντας την U'_- προκύπτει

$$U_I(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\exp(ik(r_{21} + r_{01}))}{r_{21}r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) ds \quad (1.60)$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως η σχέση περίθλασης Rayleigh - Sommerfeld. Χρησιμοποιώντας την U'_+ και υποθέτοντας ότι $r_{21} \gg \lambda$ το αντίστοιχο αποτέλεσμα είναι:

$$U_{II}(P_0) = -\frac{A}{i\lambda} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\exp(ik(r_{21} + r_{01}))}{r_{21}r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21}) ds \quad (1.61)$$

όπου η γωνία μεταξύ των $\vec{n}$ και $\vec{r}_{01}$ είναι μεγαλύτερη από 90° .

1.5 Σύγκριση των δύο θεωριών

Συνοψίζουμε τις ομοιότητες και τις διαφορές της θεωρίας του Kirchhoff με τη θεωρία των Rayleigh - Sommerfeld. Έστω με U'_K αναπαρίσταται η συνάρτηση Green για τη θεωρία Kirchhoff, ενώ U'_- και U'_+ είναι οι συναρτήσεις Green για τις δύο σχέσεις Rayleigh - Sommerfeld. Στην επιφάνεια $\mathcal{A}$

$$U'_+ = 2U' \quad (1.62)$$

και

$$\frac{\partial U'_-}{\partial n} = 2 \frac{\partial U'}{\partial n} \quad (1.63)$$

Για τη θεωρία Kirchhoff ισχύει:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{A}} \left(\frac{\partial U}{\partial n} U'_K - U \frac{\partial U'_K}{\partial n} \right) ds \quad (1.64)$$

για την πρώτη λύση Rayleigh - Sommerfeld:

$$U_I(P_0) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{A}} U \frac{\partial U'_K}{\partial n} ds \quad (1.65)$$

και για τη δεύτερη λύση Rayleigh - Sommerfeld:

$$U_{II}(P_0) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\partial U}{\partial n} U'_K ds \quad (1.66)$$

Η λύση του Kirchhoff είναι ο αριθμητικός μέσος όρος των δύο λύσεων Rayleigh - Sommerfeld.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα από τις τρεις προσεγγίσεις για την περίπτωση φωτισμού από σφαιρικό κύμα, παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τη θεωρία Rayleigh - Sommerfeld διαφέρουν από τη σχέση περίθλασης Fresnel - Kirchhoff μόνο στον συντελεστή λοξότητας (obliquity factor) ψ , ο οποίος είναι η γωνιακή εξάρτηση που υπεισέρχεται με τους όρους συνημιτόνων. Ο παράγοντας αυτός εκφράζει τη μεταβολή με τη διεύθυνση του πλάτους των δευτερευόντων κυμάτων. Για όλες τις περιπτώσεις μπορούμε να γράψουμε:

$$U(P_0) = \frac{A}{i\lambda} \iint_{\mathcal{A}} \frac{\exp(ik(r_{21} + r_{01}))}{r_{21}r_{01}} \psi ds \quad (1.67)$$

όπου

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{2}(\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})) & \text{Θεωρία Kirchhoff} \\ \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) & \text{Πρώτη λύση Rayleigh - Sommerfeld} \\ -\cos(\vec{n}, \vec{r}_{21}) & \text{Δεύτερη λύση Rayleigh - Sommerfeld} \end{cases} \quad (1.68)$$

Στην ειδική περίπτωση μιας απείρως μακρινής σημειακής πηγής που παράγει κάθετα προσπίπτοντα επίπεδα κύματα, οι συντελεστές λοξότητας γίνονται:

$$\psi = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) & \text{Θεωρία Kirchhoff} \\ \cos \theta & \text{Πρώτη λύση Rayleigh - Sommerfeld} \\ 1 & \text{Δεύτερη λύση Rayleigh - Sommerfeld} \end{cases} \quad (1.69)$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{n}$ και $\vec{r}_{01}$.

Όταν οι γωνίες που εμπλέκονται στο πρόβλημα περίθλασης είναι μικρές τότε και οι τρεις λύσεις είναι πανομοιότυπες. Και στις τρεις περιπτώσεις οι συντελεστές πλαγιότητας προσεγγίζουν τη μονάδα όσο οι γωνίες γίνονται μικρές και οι διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων αναιρούνται.

1.6 Αρχή Huygens - Fresnel

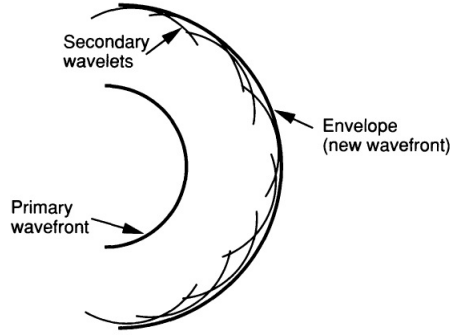
Η αρχή Huygens - Fresnel όπως προβλέπεται από την πρώτη λύση Rayleigh - Sommerfeld μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά ως εξής:

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\mathcal{A}} U(P_1) \frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}} \cos \theta \, ds \quad (1.70)$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{n}$ και $\vec{r}_{01}$.

Το ολοκλήρωμα αυτό εκφράζει το παρατηρούμενο πεδίο $U(P_0)$ σαν υπέρθεση σφαιρικών κυμάτων $\frac{\exp(ikr_{01})}{r_{01}}$ που προέρχονται από δευτερεύουσες πηγές που βρίσκονται σε κάθε ένα σημείο P_1 στο διάφραγμα. Η δευτερεύουσα πηγή στο P_1 έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. έχει μιγαδικό πλάτος το οποίο είναι ανάλογο του πλάτους της διαταραχής $U(P_1)$ στο αντίστοιχο σημείο
2. έχει πλάτος το οποίο είναι αντιστρόφως ανάλογο του λ , ή ισοδύναμα ανάλογο της οπτικής συχνότητας ν
3. έχει φάση η οποία προηγείται της φάσης του προσπίπτοντος κύματος κατά 90° , όπως υποδεικνύεται από τον παράγοντα $\frac{1}{i}$



Εικόνα 1.11: Γεωμετρική αναπαράσταση της αρχής Huygens - Fresnel (Πηγή: *Introduction to Fourier Optics - Goodman*).

4. κάθε δευτερεύουσα πηγή έχει κατευθυντικότητα $\cos \theta$

Η πρώτη από αυτές τις ιδιότητες ερμηνεύεται από το γεγονός ότι το φαινόμενο της κυματικής διάδοσης είναι γραμμικό και το κύμα που διέρχεται μέσω του διαφράγματος θα είναι ανάλογο με το κύμα που προσπίπτει σε αυτό. Η ερμηνεία της δεύτερης και τρίτης ιδιότητας είναι η ακόλουθη. Η κίνηση του κύματος από το διάφραγμα στο σημείο παρατήρησης συμβαίνει μέσω των αλλαγών του πεδίου στο διάφραγμα. Το πεδίο στο P_0 στο οποίο συνεισφέρει μία δευτερεύουσα πηγή στο P_1 εξαρτάται από το ρυθμό μεταβολής του πεδίου στο P_1 . Αφού η βασική διαταραχή μονοχρωματικού πεδίου είναι ένας δεξιόστροφα περιστρεφόμενο διάνυσμα πλάτους (phasor) της μορφής $\exp(-i2\pi\nu t)$, η παράγωγος αυτής της συνάρτησης θα είναι ανάλογη του ν και του $-i = \frac{1}{i}$.

1.7 Μη μονοχρωματικά κύματα

Θεωρούμε τη βαθμωτή διαταραχή $u(P_0, t)$ που παρατηρείται πίσω από ένα διάφραγμα $\mathcal{A}$ σε ένα αδιαφανές πέτασμα όταν μία διαταραχή $u(P_1, t)$ προσπίπτει σε αυτό. Οι χρονικές συναρτήσεις $u(P_0, t)$ και $u(P_1, t)$ μπορούν να εκφραστούν με όρους των αντίστροφων μετασχηματισμών Fourier:

$$u(P_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(P_1, \nu) \exp(i2\pi\nu t) d\nu \quad (1.71)$$

$$u(P_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(P_0, \nu) \exp(i2\pi\nu t) d\nu \quad (1.72)$$

όπου $U(P_0, \nu)$ και $U(P_1, \nu)$ είναι τα φάσματα Fourier των $u(P_0, t)$ και $u(P_1, t)$ αντίστοιχα και το ν αναπαριστά τη συχνότητα.

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $\nu' = -\nu$, οπότε προκύπτει:

$$u(P_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(P_1, -\nu') \exp(-i2\pi\nu' t) d\nu' \quad (1.73)$$

$$u(P_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(P_0, -\nu') \exp(-i2\pi\nu' t) d\nu' \quad (1.74)$$

Οι σχέσεις (1.73) και (1.74) εκφράζουν τις μη μονοχρωματικές χρονικές συναρτήσεις $u(P_1, t)$ και $u(P_0, t)$ σαν γραμμικό συνδυασμό μονοχρωματικών χρονικών συναρτήσεων. Οι μονοχρωματικές στοιχειώδεις συναρτήσεις είναι διάφορων συχνοτήτων ν' με τα μιγαδικά πλάτη των διαταραχών σε συχνότητα ν' να είναι $U(P_1, -\nu')$ και $U(P_0, -\nu')$. Επιβάλλοντας τη γραμμικότητα του φαινομένου της κυματικής διάδοσης, βρίσκουμε το μιγαδικό πλάτος στο P_0 για κάθε μονοχρωματική συνιστώσα της διαταραχής και υπερθέτουμε αυτά τα αποτελέσματα για την εύρεση της γενικής χρονικής συνάρτησης $u(P_0, t)$.

Μπορούμε να γράψουμε:

$$U(P_0, -\nu') = -i \frac{\nu'}{U} \iint_{\mathcal{A}} U(P_1, -\nu') \frac{\exp(i2\pi\nu' r_{01}/v)}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) ds \quad (1.75)$$

όπου v είναι η ταχύτητα διάδοσης της διαταραχής σε ένα μέσο με δείκτη διάθλασης n ($v = \frac{c}{n}$) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση $\nu' \lambda = v$

$$u(P_0, t) = \iint_{\mathcal{A}} \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})}{2\pi\nu r_{01}} \int_{-\infty}^{+\infty} -i2\pi\nu' U(P_1, -\nu') \exp\left[-i2\pi\nu' \left(t - \frac{r_{01}}{v}\right)\right] d\nu' ds \quad (1.76)$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u(P_1, t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} U(P_1, -\nu') \exp(-i2\pi\nu' t) d\nu' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -2\pi\nu' U(P_1, -\nu') \exp(-i2\pi\nu' t) d\nu' \end{aligned} \quad (1.77)$$

και γράφουμε:

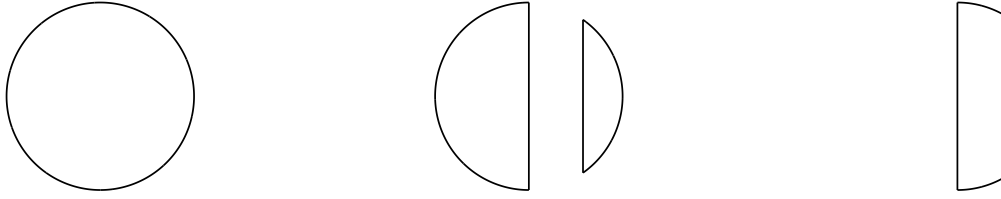
$$u(P_0, t) = \iint_{\mathcal{A}} \frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})}{2\pi\nu r_{01}} \frac{d}{dt} u\left(P_1, t - \frac{r_{01}}{v}\right) ds \quad (1.78)$$

Η κυματική διαταραχή στο P_0 είναι γραμμικά ανάλογη με το χρονική παράγωγο της διαταραχής σε κάθε σημείο P_1 στο διάφραγμα. Αφού η διαταραχή χρειάζεται χρόνο r_{01}/v να διαδοθεί από το P_1 στο P_0 , το παρατηρούμενο κύμα εξαρτάται από την παράγωγο του παρατηρούμενου κύματος στον καθυστερημένο χρόνο $t - \frac{r_{01}}{v}$.

1.8 Αρχή Babinet

Ένα σημαντικό συμπέρασμα προκύπτει από το γεγονός ότι η σχέση περίθλασης εκφράζει το πεδίο U σαν ολοκλήρωμα στο διάφραγμα $\mathcal{A}$. Αν το $\mathcal{A}$ χωριστεί σε δύο μέρη $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ ώστε $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$ (Εικόνα 1.12), το πεδίο στο σημείο P_0 θα είναι το άθροισμα των ολοκληρωμάτων στα $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$.

Το ολοκλήρωμα στην $\mathcal{A}_1$ αναπαριστά το πεδίο στο P_0 αν $\mathcal{A}_1$ είναι το μοναδικό διάφραγμα και αντίστοιχα το ολοκλήρωμα στην $\mathcal{A}_2$ αναπαριστά το πεδίο στο P_0 αν το $\mathcal{A}_2$ είναι το μοναδικό



Εικόνα 1.12: Συμπληρωματικά διαφράγματα και η αρχή του Babinet

διάφραγμα. Αν συμβολίσουμε αυτά τα πεδία με:

$$U_1(P_0) = C \iint_{\mathcal{A}_1} (\dots) ds \quad (1.79)$$

$$U_2(P_0) = C \iint_{\mathcal{A}_2} (\dots) ds \quad (1.80)$$

έχουμε:

$$U = U_1 + U_2 \quad (1.81)$$

Η σχέση (1.81) εκφράζει μία αρχή που οφείλεται στον Babinet. Τα διαφράγματα $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ ονομάζονται συμπληρωματικά. Τα πεδία που παρατηρούνται με συμπληρωματικά διαφράγματα αθροίζονται με αποτέλεσμα το πεδίο που παρατηρείται με το διάφραγμα που προκύπτει από το συνδυασμό αυτών.

Η αρχή αυτή είναι χρήσιμη αν το $\mathcal{A}_1$ είναι ένα σχετικά περίπλοκο διάφραγμα που αποτελείται από τη διαφορά $\mathcal{A} - \mathcal{A}_2$ δύο απλών διαφραγμάτων. Τότε υπολογίζουμε το πεδίο στο P_0 που προκύπτει από τα $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}_2$ ξεχωριστά και αφαιρούμε για να προκύψει το πεδίο που οφείλεται στο $\mathcal{A}_1$.

Η αρχή του Babinet είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν το πεδίο στο P_0 είναι μηδέν (ή πολύ μικρό) με το διάφραγμα $\mathcal{A}$. Αυτό συμβαίνει επειδή οι συνιστώσες που συνεισφέρουν από τα διάφορα μέρη του διαφράγματος αλληλοαναιρούνται. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$U_1 = -U_2 \quad (1.82)$$

Η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου της απόλυτης τιμής αυτών των πεδίων. Άρα σε αυτή την περίπτωση

$$I_1 = I_2 \quad (1.83)$$

Έτσι ένα σημείο που βρίσκεται στη σκιά στο σχηματισμό περίθλασης λόγω του $\mathcal{A}$ θα έχει την ίδια μη μηδενική ένταση όταν το διάφραγμα αντικαθίσταται από κάποιο από τα δύο συμπληρωματικά διαφράγματα $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ όπου

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \quad (1.84)$$

Για παράδειγμα το τετράγωνο διάφραγμα και το τετράγωνο εμπόδιο θεωρούνται συμπληρωματικά και οι εντάσεις λόγω αυτών των διαφραγμάτων συνδέονται με την αρχή του Babinet.

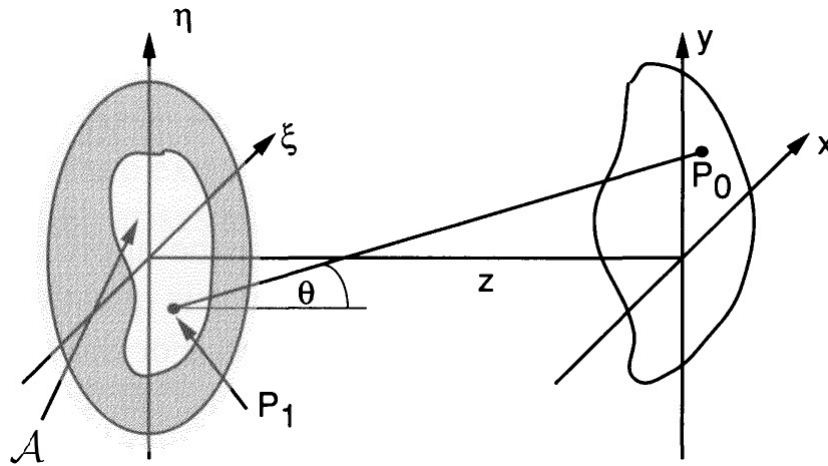
Κεφάλαιο 2

Περίθλαση Fresnel

2.1 Προσέγγιση Fresnel

Το ολοκλήρωμα περίθλασης όπως δίνεται από την διατύπωση Rayleigh - Sommerfeld αποτελεί τη γενική περίπτωση κατά την οποία ένα κύμα που διαδίδεται προσπίπτει σε μια διαχωριστική επιφάνεια. Στην περίθλαση κοντινού πεδίου μπορούμε να θεωρήσουμε μία προσέγγιση για την απόσταση r_{01} μεταξύ των σημείων P_0 και P_1 όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.1, δηλαδή:

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (2.1)$$



Εικόνα 2.1: Η γεωμετρία της περίθλασης από τυχαίο διάφραγμα $\mathcal{A}$ (Πηγή: *Introduction to Fourier Optics - Goodman*)

Η προσέγγιση βασίζεται στο διωνυμικό ανάπτυγμα της τετραγωνικής ρίζας. Έστω b ένας αριθμός μικρότερος της μονάδας και θεωρούμε την έκφραση $\sqrt{1+b}$. Τότε το διωνυμικό ανάπτυγμα της τετραγωνικής ρίζας δίνεται από τη σχέση:

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{1}{2}b - \frac{1}{8}b^2 + \dots \quad (2.2)$$

Για να εφαρμόσουμε αυτό το ανάπτυγμα στην έκφραση του r_{01} βγάζουμε κοινό παράγοντα το z οπότε:

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2} \quad (2.3)$$

Οπότε η ποσότητα b αποτελείται από τον δεύτερο και τρίτο όρο στην υπόρριξη ποσότητα. Κρατώντας μόνο τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος έχουμε:

$$r_{01} \simeq z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2 \right] \quad (2.4)$$

Για το r_{01}^2 που εμφανίζεται στον παρονομαστή του ολοκληρώματος περίθλασης το σφάλμα που υπεισέρχεται κρατώντας μόνο τον πρώτο όρο είναι μικρό. Ωστόσο, για το r_{01} που εμφανίζεται στον εκθέτη, τα σφάλματα είναι σημαντικά. Πρώτον, πολλαπλασιάζονται με έναν πολύ μεγάλο αριθμό k και δεύτερον, αλλαγές φάσης της τάξης του ενός ακτινίου μπορούν να αλλάξουν σημαντικά την τιμή του εκθετικού. Για αυτούς τους λόγους διατηρούμε και τους δύο όρους στο διωνυμικό ανάπτυγμα στο εκθετικό. Άρα το πεδίο στο (x, y) είναι:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta \quad (2.5)$$

όπου έχουμε ενσωματώσει τα πεπερασμένα όρια του διαφράγματος στον ορισμό του $U(\xi, \eta)$ σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες.

Μία ακόμη μορφή του αποτελέσματος βρίσκεται αν ο όρος $\exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right)$ είναι κοινός παράγοντας τότε:

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp\left(\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right) \iint_{-\infty}^{+\infty} \left\{ U(\xi, \eta) \exp\left(\frac{ik}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right) \right\} \cdot \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right) d\xi d\eta \quad (2.6)$$

το οποίο είναι, χωρίς τους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες, ο μετασχηματισμός Fourier του γινομένου του μιγαδικού πλάτους του πεδίου μόλις δεξιά του διαφράγματος και ενός εκθετικού τετραγωνικής φάσης.

Αναφερόμαστε στο αποτέλεσμα της Εξίσωσης (2.6) ως το ολοκλήρωμα περίθλασης Fresnel. Όταν ισχύει αυτή η προσέγγιση, βρίσκουμε στην περιοχή περίθλασης Fresnel, ή αλλιώς περίθλασης κοντινού πεδίου.

Η ισχύς αυτής της προσέγγισης προσδιορίζεται από τα σφάλματα που προκύπτουν όταν όροι τάξης μεγαλύτερης από την πρώτη δε λαμβάνονται υπ' όψιν στο διωνυμικό ανάπτυγμα. Μία επαρκής συνθήκη είναι η μέγιστη μεταβολή φάσης που προκύπτει αφήνοντας τον όρο $\frac{b^2}{8}$ θα είναι πολύ μικρότερη από 1 ακτίνιο. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται αν για την απόσταση z ισχύει:

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]_{max}^2 \quad (2.7)$$

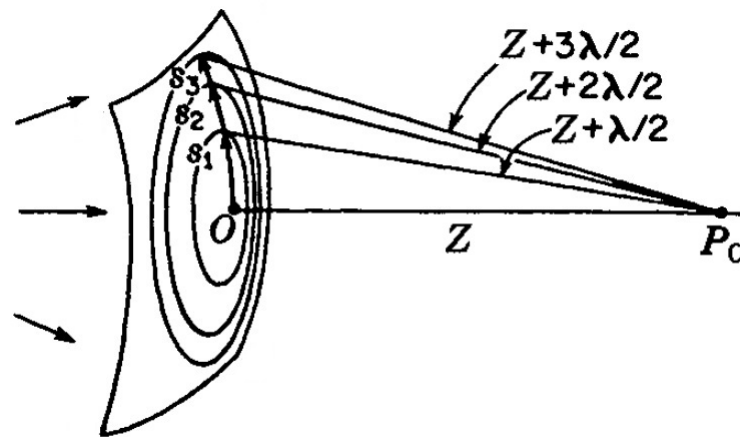
Για να αποδώσει ακριβή αποτελέσματα η προσέγγιση Fresnel, δεν είναι απαραίτητο οι όροι μεγαλύτερης τάξης του αναπτύγματος να είναι μικροί, αρκεί να μην αλλάζουν σημαντικά την τιμή του ολοκληρώματος περίθλασης Fresnel. Αν η κύρια συνεισφορά στο ολοκλήρωμα προέρχεται από σημεία (ξ, η) για τα οποία $\xi \simeq x$ και $\eta \simeq y$, τότε οι τιμές των όρων μεγαλύτερης τάξης του αναπτύγματος είναι ασήμαντες.

2.2 Κυκλική συμμετρία

Εξετάζουμε το ολοκλήρωμα περίθλασης Fresnel στην περίπτωση που παρεμβάλλεται μεταξύ της πηγής και του σημείου παρατήρησης ένα αδιαφανές πέτασμα με κυκλική οπή.

2.2.1 Ζώνες Fresnel

Ο Fresnel για να εκτιμήσει το ολοκλήρωμα περίθλασης εφηύρε μία μαθηματική κατασκευή που παίζει το ρόλο των δευτερεύουσων πηγών Huygens στη διάδοση κύματος. Υποθέτουμε ότι σε χρόνο t ένα σφαιρικό μέτωπο κύματος από μία πηγή στο P_1 έχει ακτίνα R' . Για να προσδιορίσουμε το πεδίο στο σημείο παρατήρησης P_0 που οφείλεται σε αυτό το μέτωπο κύματος, κατασκευάζουμε ένα σύνολο ομόκεντρων σφαιρών με ακτίνες $Z, Z + \frac{\lambda}{2}, Z + 2\frac{\lambda}{2}, \dots, Z + j\frac{\lambda}{2}, \dots$, όπου Z είναι η απόσταση από το μέτωπο κύματος στη σημείο παρατήρησης στην ευθεία που ενώνει τα P_0 και P_1 (Εικόνα 2.2). Αυτές οι σφαίρες διαιρούν το μέτωπο κύματος σε έναν αριθμό ζωνών $s_1, s_2, \dots, s_j, \dots$



Εικόνα 2.2: Αναπαράσταση της κατασκευής των ζωνών Fresnel σε σφαιρικό κύμα (Πηγή: *Fundamentals of Optics - Jenkins, White*).

Από τη γεωμετρία της Εικόνας (2.2) προκύπτει ότι για την ακτίνα R_n της n -οστής ζώνης Fresnel ισχύει:

$$R_n^2 = \left(r_0 + \frac{n\lambda}{2}\right)^2 - r_0^2 = r_0^2 \left[n\left(\frac{\lambda}{r_0}\right) + \frac{n^2}{4}\left(\frac{\lambda}{r_0}\right)^2 \right] \quad (2.8)$$

Εξετάζουμε μόνο τις περιπτώσεις $\frac{\lambda n}{r_0} \ll 1$ οπότε η ακτίνα θα είναι:

$$R_n = \sqrt{nr_0\lambda} \quad (2.9)$$

Αντιμετωπίζουμε κάθε ζώνη σαν ένα κυκλικό διάφραγμα που φωτίζεται από τα αριστερά με ένα σφαιρικό κύμα της μορφής, δηλαδή γράφουμε:

$$U_j(\vec{R}') = \frac{Ae^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}'}}{R'} = \frac{Ae^{ikR'}}{R'} \quad (2.10)$$

όπου R' είναι η ακτίνα του σφαιρικού κύματος. Το πεδίο στο P_0 που οφείλεται στην j ζώνη προκύπτει:

$$U_j(P_0) = \frac{A}{R'} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}'} \iint_{s_j} C(\phi) \frac{e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}}}{R} ds \quad (2.11)$$

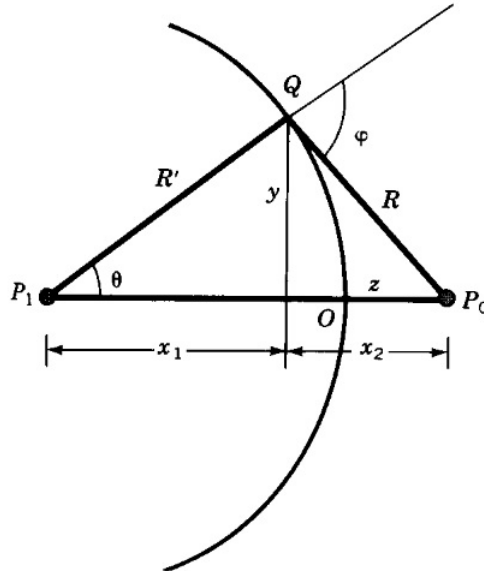
Για την ολοκλήρωση στην j ζώνη το στοιχείο επιφάνειας είναι:

$$ds = R'^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (2.12)$$

Τα όρια της ολοκλήρωσης είναι:

$$Z + (j-1)\frac{\lambda}{2} \leq R \leq Z + j\frac{\lambda}{2} \quad (2.13)$$

Η μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το R , οπότε πρέπει να βρεθεί μία σχέση μεταξύ R και R' .



Εικόνα 2.3: Σχήμα για τον υπολογισμό της απόστασης R (Πηγή: *Modern Optics - Guenther*).

Η απόσταση από το σημείο παρατήρησης στη ζώνη είναι σύμφωνα με τη γεωμετρία της Εικόνας 2.3:

$$\begin{aligned} R^2 &= x_2^2 + y^2 = [(R' + Z) - x_1]^2 + (R' \sin \theta)^2 = \\ &= R'^2 + (R' + Z)^2 - 2R'(R' + Z) \cos \theta \end{aligned} \quad (2.14)$$

Παραγωγίζοντας αυτή την έκφραση έχουμε:

$$RdR = R'(R' + Z) \sin \theta d\theta \quad (2.15)$$

οπότε:

$$ds = \frac{R'}{R' + Z} R dR d\phi \quad (2.16)$$

Μετά την ολοκλήρωση ως προς ϕ από 0 έως 2π έχουμε:

$$U_j(P_0) = \frac{2\pi A}{R' + Z} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}'} \int_{Z+(j-1)\lambda/2}^{Z+j\lambda/2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} C(\phi) dR \quad (2.17)$$

Υποθέτουμε ότι $R', Z \gg \lambda$ οπότε ο συντελεστής πλαγιότητας είναι μία σταθερά σε μία ζώνη Fresnel οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$U_j(P_0) = \frac{2\pi i C_j A}{k(R' + Z)} e^{-ik(R'+Z)} e^{-ikj\lambda/2} (1 - e^{-ikj\lambda/2}) \quad (2.18)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό $k\lambda = 2\pi$ και $D = R' + Z$ η έκφραση απλοποιείται και γράφεται:

$$U_j(P_0) = 2i\lambda(-1)^{j+1} \frac{C_j A}{D} e^{-ikD} \quad (2.19)$$

Η απόσταση από το P_0 σε μία ζώνη αλλάζει μόνο κατά $\frac{\lambda}{2}$ όσο μετακινούμαστε από ζώνη σε ζώνη και το εμβαδόν μίας ζώνης είναι σχεδόν σταθερό και ανεξάρτητο από τον αριθμό ζώνης. Άρα τα πλάτη των δευτερεύοντων κυμάτων για κάθε ζώνη θα είναι προσεγγιστικά ίσα. Η εναλλαγή στο πρόσημο από ζώνη σε ζώνη οφείλεται στην αλλαγή φάσης του κύματος από διαδοχικές ζώνες επειδή το μήκος διάδοσης για διαδοχικές ζώνες διαφέρει κατά $\frac{\lambda}{2}$.

Για να βρεθεί το συνολικό πλάτος στο P_0 που οφείλεται σε N ζώνες, αθροίζονται τα πλάτη των δευτερεύοντων κυμάτων, δηλαδή:

$$U(P_0) = \sum_{j=1}^N E_j(P_0) = \frac{2i\lambda A}{D} e^{-ikD} \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j \quad (2.20)$$

Ονομάζουμε το άθροισμα της Εξίσωσης (2.20) Σ οπότε:

$$\Sigma = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j = C_1 - C_2 + C_3 - \dots + (-1)^{N+1} C_N \quad (2.21)$$

και για τον υπολογισμό του χρησιμοποιούμε την προσέγγιση Schuster και ξαναγράφουμε το άθροισμα:

$$\Sigma = \frac{C_1}{2} + \left(\frac{C_1}{2} - C_2 + \frac{C_3}{2} \right) + \left(\frac{C_3}{2} - C_4 + \frac{C_5}{2} \right) + \dots \quad (2.22)$$

με τον τελευταίο όρο να είναι $\frac{1}{2}C_N$ ή $\frac{1}{2}C_{N-1} - C_N$ ανάλογα με το αν το N είναι περιττός ή άρτιος αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ο νόμος που προσδιορίζει τη μεταβολή με τη διεύθυνση είναι τέτοιος ώστε το C_j να είναι μεγαλύτερο από τον αριθμητικό μέσο των γειτόνων του C_{j-1} και C_{j+1} . Τότε κάθε ένας από τους όρους στις παρενθέσεις είναι αρνητικός και έπεται ότι

$$\begin{cases} \Sigma < \frac{C_1}{2} + \frac{C_N}{2} & \text{όταν το } N \text{ είναι περιττός} \\ \Sigma > \frac{C_1}{2} - \frac{C_N}{2} & \text{όταν το } N \text{ είναι άρτιος} \end{cases} \quad (2.23)$$

Το άθροισμα μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\Sigma = C_1 - \frac{C_2}{2} - \left(\frac{C_2}{2} - C_3 + \frac{C_4}{2} \right) - \left(\frac{C_4}{2} - C_5 + \frac{C_6}{2} \right) \quad (2.24)$$

με τον τελευταίο όρο να είναι $-\frac{1}{2}C_{N-1} + C_N$ όταν το N είναι περιττός και $-\frac{1}{2}C_N$ όταν το N είναι άρτιος. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} \Sigma < \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{2} - \frac{C_{N-1}}{2} + C_N & \text{όταν το } N \text{ είναι περιττός} \\ \Sigma > C_1 - \frac{C_2}{2} - \frac{C_N}{2} & \text{όταν το } N \text{ είναι άρτιος} \end{cases} \quad (2.25)$$

Κάθε C_j διαφέρει ελάχιστα από τις γειτονικές τιμές C_{j-1} και C_{j+1} έτσι ώστε τα δεξιά μέλη των αντίστοιχων σχέσεων είναι πρακτικά ίσα οπότε προσεγγιστικά έχουμε:

$$\begin{cases} \Sigma \simeq \frac{C_1}{2} + \frac{C_N}{2} & \text{όταν το } N \text{ είναι περιττός} \\ \Sigma \simeq \frac{C_1}{2} - \frac{C_N}{2} & \text{όταν το } N \text{ είναι άρτιος} \end{cases} \quad (2.26)$$

Η σχέση αυτή ισχύει όταν κάθε C_j είναι μικρότερο από τον αριθμητικό μέσο των δύο γειτόνων του. Αναμένεται να ισχύει ακόμα και όταν κάποιοι από τους όρους στις παρενθέσεις είναι αρνητικοί ενώ άλλοι είναι θετικοί οπότε το άθροισμα μπορεί να χωριστεί σε δύο μέρη σύμφωνα με το πρόσημο των όρων στις παρενθέσεις και μπορεί να εφαρμοστεί το ίδιο επιχείρημα σε κάθε μέρος. Άρα το άθροισμα της σειράς δίνεται από τη σχέση αυτή εκτός αν οι όροι στις παρενθέσεις αλλάζουν πολύ συχνά πρόσημο, οπότε τα σφάλματα που υπεισέρχονται αθροίζονται σε μία μη αμελητέα ποσότητα. Αν αποκλείσουμε αυτή την περίπτωση, συνεπάγεται ότι:

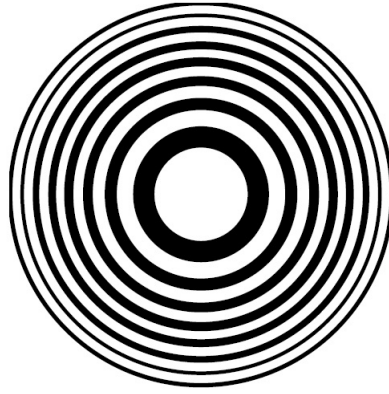
$$U(P_0) = i\lambda(C_1 \pm C_N) \frac{Ae^{-ikD}}{D} \quad (2.27)$$

όπου το θετικό πρόσημο επιλέγεται αν το N είναι περιττός και το αρνητικό αν το N είναι άρτιος.

- Αν το N είναι μικρό $C_1 \simeq C_N$, οπότε για περιττό N το πλάτος είναι πρακτικά ίσο με C_1 , δηλαδή αυτό της πρώτης ζώνης Fresnel.

- Αν το N είναι άρτιος, τότε το πλάτος είναι προσεγγιστικά μηδέν.
- Αν το N είναι πολύ μεγάλο, όπως στην περίπτωση του διαφράγματος με άπειρη διάμετρο, το C_N προσεγγίζει το μηδέν και για N είτε άρτιο ή περιττό, το πλάτος είναι το μισό αυτού που οφείλεται στην πρώτη ζώνη Fresnel, δηλαδή $\frac{C_1}{2}$.

Τοποθετείται μεταξύ της πηγής και του σημείου παρατήρησης ένα κυκλικό διάφραγμα το οποίο έχει διάμετρο ίση με τη διάμετρο της πρώτης ζώνης Fresnel. Τότε το πλάτος που μετράται είναι το πλάτος που οφείλεται μόνο στην πρώτη ζώνη Fresnel. Αυξάνοντας τη διάμετρο του διαφράγματος ώστε να προστεθεί και η συνεισφορά από τη δεύτερη ζώνη Fresnel, το πλάτος θα είναι σχεδόν μηδέν. Αν αφαιρεθεί τελείως το διάφραγμα τότε το πλάτος που μετράται είναι $\frac{C_1}{2}$, δηλαδή το μισό του πλάτους λόγω της πρώτης ζώνης Fresnel. Η ένταση είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους, άρα η ένταση του κύματος λόγω της πρώτης ζώνης Fresnel είναι 4 φορές μεγαλύτερη από την ένταση που μετράται όταν δεν υπάρχει διάφραγμα.



Εικόνα 2.4: Πλάκα ζωνών Fresnel (Fresnel zone plate) (Πηγή: Introduction to Optics - Pedrotti).

Αν αφαιρεθούν από το άθροισμα είτε οι αρνητικοί είτε οι θετικοί όροι, το πλάτος και η ένταση αυξάνονται πολύ. Το διάφραγμα που επιτρέπει τη συνεισφορά κάποιων αρνητικών ή θετικών όρων του αθροίσματος και καλύπτει όλες τις υπόλοιπες ζώνες ονομάζεται πλάκα ζωνών Fresnel (Fresnel zone plate) (Εικόνα 2.4). Αν, για παράδειγμα, συνεισφέρουν οι ζώνες s_1, s_3, s_5, s_7, s_9 και οι υπόλοιπες ζώνες καλύπτονται, το πλάτος θα είναι:

$$U(P_0) = 2i\lambda \frac{Ae^{-ikD}}{D} (C_1 + C_3 + C_5 + C_7 + C_9) = 10 \cdot U(P_0) \quad (2.28)$$

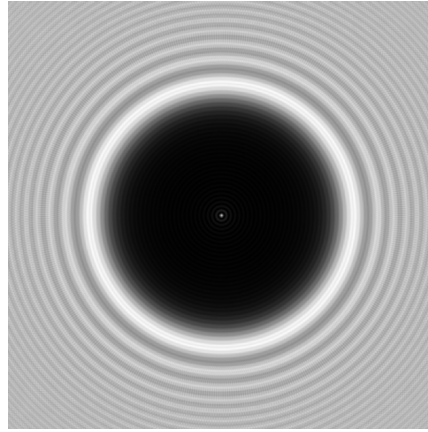
αφού ο συντελεστής πλαγιότητας δε διαφέρει πολύ για μικρά j . Αυτό το πλάτος ισούται με 10 φορές το πλάτος που μετράται όταν δεν υπάρχει διάφραγμα, άρα η ένταση θα είναι $10^2 = 100$ φορές μεγαλύτερη.

Ένα αξιοσημείωτο συμπέρασμα προκύπτει από την τεχνική των ζωνών Fresnel όταν τοποθετείται αντί για διάφραγμα, ένα εμπόδιο με κυκλική διατομή. Αν η διάμετρος του εμποδίου είναι τέτοια ώστε να καλύπτει ακριβώς την πρώτη ζώνη Fresnel, στο πεδίο στο P συνεισφέρουν όλες

οι ζώνες εκτός από την πρώτη. Άρα η πρώτη ζώνη που συνεισφέρει στο άθροισμα θα είναι η δεύτερη ζώνη Fresnel s_2 , άρα το πλάτος του πεδίου θα είναι:

$$E(P_0) = 2i\lambda \frac{Ae^{-ikD}}{D} \frac{C_2}{2} \quad (2.29)$$

Οπότε η ένταση στο κέντρο της σκιάς θα είναι η ίδια με την ένταση αν δεν υπήρχε το εμπόδιο (Εικόνα 2.5).



Εικόνα 2.5: Το φωτεινό σημείο (Arago spot) στο κέντρο της γεωμετρικής σκιάς που δημιουργείται λόγω περίθλασης Fresnel από κυκλικό εμπόδιο (Πηγή: Wikipedia).

2.2.2 Vibrational Curve

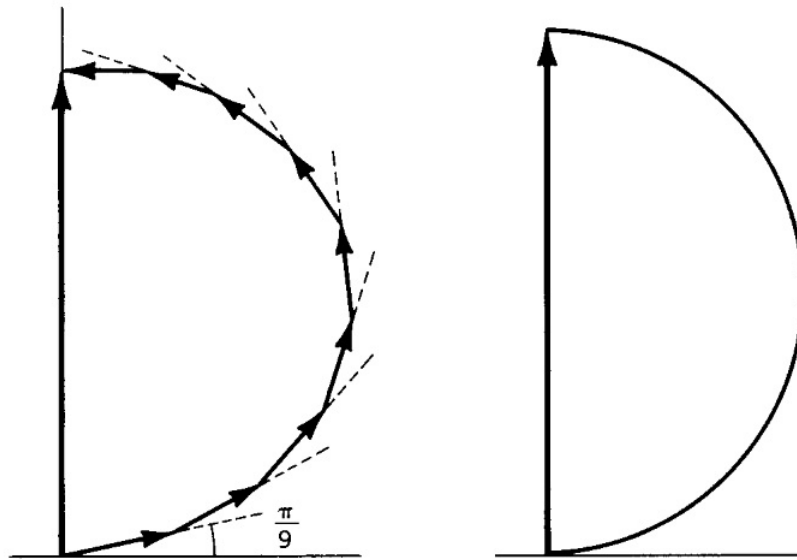
Η τεχνική των ζωνών Fresnel μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά για την ποιοτική μελέτη του φαινομένου που προκαλείται από την περίθλαση από ένα κυκλικό διάφραγμα. Για να προσθέσουμε τα κύματα που προέρχονται από κάθε υποζώνη χρησιμοποιείται η διανυσματική προσέγγιση. Τα μεμονωμένα διανύσματα σχηματίζουν μία καμπύλη που ονομάζεται vibrational curve. Για την περίπτωση ενός κυκλικού διαφράγματος αυτή η καμπύλη είναι μια σπείρα (Εικόνα 2.6).

Εξετάζουμε την περίπτωση στην οποία διαιρούμε τη ζώνη Fresnel σε εννέα υποζώνες. Τότε η vibrational curve είναι ένα τόξο σαν ημικύκλιο. Η ακτίνα καμπυλότητας του τόξου ορίζεται ως:

$$\frac{\Delta s}{\Delta \alpha} = \rho \quad (2.30)$$

όπου s και α ορίζονται ως το μήκος τόξου μεταξύ δύο υποζωνών και η διαφορά φάσης μεταξύ δύο υποζωνών αντίστοιχα. Αφού υπολογιστεί η ακτίνα καμπυλότητας του τόξου προκύπτει ότι είναι μια σταθερά εκτός από τη συνεισφορά από τον συντελεστή λοξότητας:

$$\rho = \frac{\lambda R'}{R' + Z} C(\phi) \quad (2.31)$$

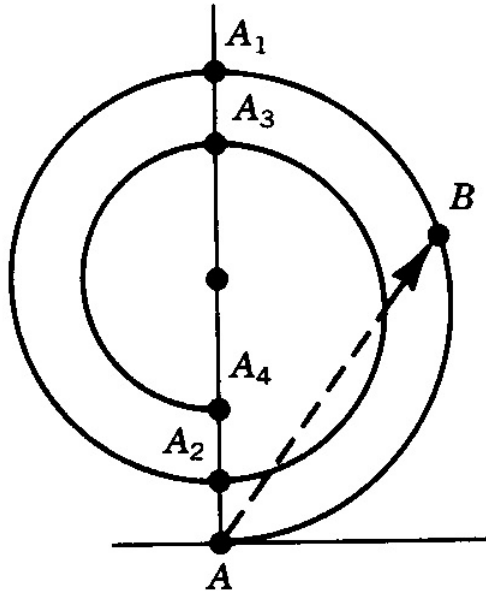


Εικόνα 2.6: Vibrational curve για κυκλική συμμετρία όταν διαιρούμε τη ζώνη Fresnel σε εννέα διακριτές υποζώνες (αριστερά) και σε άπειρες υποζώνες (δεξιά) (Πηγή: Modern Optics - Guenther).

Επειδή ο συντελεστής λοξότητας για μία ζώνη Fresnel έχει υποθεθεί ότι είναι σταθερός, η ακτίνα καμπυλότητας είναι μία σταθερά για μία ζώνη. Αν ο αριθμός των υποζωνών προσεγγίζει το άπειρο, η καμπύλη γίνεται ένα ημικύκλιο η χορδή του οποίου ισούται με το κύμα που παράγεται από την πρώτη ζώνη, E_1 . Αν υποδιαιρέσουμε κι άλλες ζώνες και προσθέσουμε τις συνεισφορές από τις υποζώνες, δημιουργούνται κι άλλα ημικύκλια των οποίων οι ακτίνες μειώνονται με τον ίδιο ρυθμό με το συντελεστή λοξότητας. Η καμπύλη για το συνολικό κύμα είναι μία σπείρα που κατασκευάζεται από ημικύκλια που συγκλίνουν σε ένα σημείο στο κέντρο του πρώτου ημικύκλιου. Το μήκος του διανύσματος από την αρχή ως το τέλος της σπείρας είναι $E = \frac{E_1}{2}$.

Η τεχνική της πρόσθεσης διανυσμάτων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε την περίθλαση Fresnel σε σημείο P_0 από ένα κυκλικό διάφραγμα και παράγει την κατανομή έντασης κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του κυκλικού διαφράγματος. Αυτή η τεχνική επιτρέπει μία ποιοτική περιγραφή της κατανομής του φωτός κάθετα σε αυτό τον άξονα.

Για να υπολογίσουμε την ένταση σε ένα σημείο παρατήρησης στον άξονα συμμετρίας του κυκλικού διαφράγματος κατασκευάζουμε μία σπείρα που αναπαριστά τις ζώνες Fresnel ενός σφαιρικού κύματος που προσπίπτει στο διάφραγμα, όπως φαίνεται στην Εικόνα (2.7). Το σημείο B στη σπείρα αντιστοιχεί στο τμήμα του σφαιρικού κύματος που δεν εμποδίζεται από το διάφραγμα. Το μήκος της χορδής AB αναπαριστά το πλάτος του κύματος στο σημείο παρατήρησης P_0 . Όσο αυξάνεται η διάμετρος του διαφράγματος το B κινείται κατά μήκος της σπείρας αριστερόστροφα μακριά από το A . Το AB γίνεται μέγιστο πρώτη φορά όταν το B φτάνει στο σημείο A_1 . Το διάφραγμα τότε αφήνει μόνο την πρώτη ζώνη Fresnel. Σε αυτό το σημείο το πλάτος είναι διπλάσιο του πλάτους χωρίς διάφραγμα και η αντίστοιχη ένταση 4 φορές μεγαλύτερη της έντασης χωρίς διάφραγμα. Αν η διάμετρος του διαφράγματος συνεχίσει να αυξάνεται, το B φτά-



Εικόνα 2.7: Η χρήση της vibrational curve για τον υπολογισμό σε σημείο στον άξονα της έντασης λόγω περίθλασης από κυκλικό διάφραγμα (Πηγή: Modern Optics - Guenther).

νει στο σημείο A_2 και το πλάτος είναι σχεδόν μηδέν, αφού σε αυτή την περίπτωση επιτρέπονται δύο ζώνες Fresnel από το διάφραγμα.

Κρατάμε σταθερή τη διάμετρο του διαφράγματος και μετακινούμε το σημείο παρατήρησης P_0 κατά μήκος του άξονα συμμετρίας του κυκλικού διαφράγματος. Όσο το P_0 μετακινείται μακριά από το διάφραγμα κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, δηλαδή όσο το Z είναι αρκετά μεγάλο, η ακτίνα του διαφράγματος α θα είναι πολύ μικρότερη από την ακτίνα της πρώτης ζώνης και θα ισχύει:

$$Z_{max} = \frac{\alpha^2}{\lambda} \quad (2.32)$$

Για τιμές του Z που ξεπερνούν την τιμή Z_{max} , παρατηρείται περίθλαση Fraunhofer. Στο Z_{max} η ένταση του φωτός είναι μέγιστη και δίνεται από το μήκος της χορδής από το A στο A_1 .

Αν ξεκινήσουμε από το Z_{max} και κινηθούμε προς το διάφραγμα κατά μήκος του άξονα, όσο το Z μειώνεται, θα φτάσει σε ένα σημείο όπου η ένταση στον άξονα γίνεται ελάχιστη. Η τιμή του Z όταν παρατηρείται το πρώτο ελάχιστο στην ένταση ισούται με:

$$Z_{min} = \frac{\alpha^2}{2\lambda} \quad (2.33)$$

Η χορδή εκτείνεται από το A στο A_2 .

Αν το κυκλικό διάφραγμα ακτίνας α αντικατασταθεί από έναν αδιαφανή δίσκο ίσης ακτίνας, η κατανομή έντασης στον άξονα συμμετρίας πίσω από το δίσκο είναι ίση με την ένταση που θα παρατηρούσαμε αν δεν υπήρχε δίσκος. Κατασκευάζουμε μια σπείρα όμοια με αυτή για το κυκλικό διάφραγμα. Το σημείο B στη σπείρα δε συνεισφέρει επειδή αυτό το τμήμα του κύματος δεν μπορεί να γίνει ορατό από το σημείο παρατήρησης. Το πλάτος στο P_0 είναι το μήκος της χορδής

από το B στο Z . Αν το σημείο παρατήρησης μετακινείται προς το δίσκο, τότε το B κινείται κατά μήκος της σπείρας προς το Z . Πάντα υπάρχει ένταση στον άξονα για αυτή τη διάταξη, αν και μειώνεται αργά μέχρι να φτάσει το μηδέν όταν το σημείο παρατήρησης φτάσει στο δίσκο. Αυτό αντιστοιχεί στο να φτάσει το σημείο B στο σημείο Z της σπείρας. Δεν παρατηρούνται μέγιστα ή ελάχιστα όσο η διάμετρος του δίσκου α αυξάνεται ή η απόσταση παρατήρησης αλλάζει.

2.2.3 Μαθηματική αναπαράσταση με συναρτήσεις Lommel

Θεωρούμε ότι μεταξύ της πηγής και του πετάσματος παρατήρησης παρεμβάλλεται ένα κυκλικό διάφραγμα με ακτίνα α . Τότε η πρώτη λύση Rayleigh - Sommerfeld (Εξίσωση 1.60) γράφεται:

$$U(s, \theta, z) = \frac{-z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha U(\rho, \phi, 0) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] \rho d\rho d\phi \quad (2.34)$$

όπου

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.35)$$

$$U(\rho, \phi, 0) = \frac{\exp(ikr')}{r'} \quad (2.36)$$

$$r' = \sqrt{\rho^2 + d^2} \quad (2.37)$$

$$r = \sqrt{s^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho s \cos(\theta - \phi)} \quad (2.38)$$

και τα όρια της ολοκλήρωσης είναι στην περιοχή του επιπέδου περίθλασης μέσα στα όρια του διαφράγματος.

Θεωρούμε ότι η απόσταση του διαφράγματος από το πέτασμα παρατήρησης είναι πολύ μεγαλύτερη από το μήκος κύματος οπότε ισχύει η προσέγγιση $ik \gg \frac{1}{r}$ άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \simeq \frac{ik \exp(ikr)}{r} \quad (2.39)$$

Οι αποστάσεις r και r' μπορούν να αντικατασταθούν από τα αντίστοιχα αναπτύγματα Taylor σύμφωνα με την προσέγγιση Fresnel, δηλαδή κρατώντας τους δύο πρώτους όρους του αναπτύγματος όταν αυτό εμφανίζεται στον εκθέτη και μόνο τον πρώτο όρο όταν αυτό εμφανίζεται στον παρονομαστή. Το ολοκλήρωμα περίθλασης γίνεται:

$$U(s, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z d} \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \exp(ik(z+d)) \exp \left[ik \left[\frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{d} \right) + \frac{s^2}{2z} - \frac{2s\rho \cos(\theta - \phi)}{2z} \right] \right] \rho d\rho d\phi \quad (2.40)$$

Το ολοκλήρωμα ως προς ϕ υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\int_0^{2\pi} \exp(ix \cos(\theta - \phi)) d\phi = 2\pi J_0(x) \quad (2.41)$$

οπότε

$$U(s, z) = \frac{-ik}{zd} \exp(ik(z+d)) \exp\left(\frac{iks^2}{2z}\right) \int_0^\alpha J_0\left(\frac{ks\rho}{z}\right) \cdot \exp\left(ik\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\left(\frac{z+d}{zd}\right)\right) \rho d\rho \quad (2.42)$$

Ορίζουμε τις μεταβλητές:

$$\rho = \alpha t \quad (2.43)$$

$$u = k\alpha^2 \left(\frac{z+d}{zd}\right) \quad (2.44)$$

$$v = \frac{k\alpha s}{z} \quad (2.45)$$

και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα οπότε προκύπτει:

$$U(s, z) = \frac{-i \exp[ik(z+d)]}{z+d} \exp\left(\frac{iks^2}{2z}\right) \int_0^1 J_0(vt) \exp\left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt \quad (2.46)$$

Για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα αυτό χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις Lommel $U_n(u, v)$ και $V_n(u, v)$. Οι συναρτήσεις Lommel είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών που περιγράφονται με σειρές, που περιέχουν τις συναρτήσεις Bessel πρώτου τύπου και δίνονται από τις σχέσεις:

$$U_n(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{u}{v}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(v) \quad (2.47)$$

$$V_n(u, v) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{v}{u}\right)^{n+2m} J_{n+2m}(v) \quad (2.48)$$

Οι συναρτήσεις $U_n(u, v)$ και $V_n(u, v)$ ορίζονται για όλες τις τιμές των u και v . Ωστόσο ο λόγος $\frac{v}{u}$ παίζει σημαντικό ρόλο στη σύγκλιση αυτών των σειρών. Όταν $v < u$ αυτός ο λόγος είναι μικρότερος της μονάδας και συγκλίνει η σειρά στην έκφραση της $V_n(u, v)$, ενώ όταν $v > u$ συγκλίνει η σειρά στην έκφραση της $U_n(u, v)$. Άρα ο προσδιορισμός της έκφρασης των συναρτήσεων Lommel που θα χρησιμοποιηθούν στη λύση γίνεται από την τιμή του λόγου $\frac{v}{u}$. Εξετάζουμε την έκφραση αυτού του λόγου

$$\frac{v}{u} = \frac{sd}{\alpha z + d} \quad (2.49)$$

όμως από γεωμετρικά επιχειρήματα τα όρια της γεωμετρικής σκιάς είναι:

$$s' = \frac{\alpha(z+d)}{d} \quad (2.50)$$

Άρα ισχύει

$$\frac{v}{u} = \frac{s}{s'} \quad (2.51)$$

Αν το σημείο παρατήρησης βρίσκεται στη γεωμετρική σκιά τότε θα ισχύει $\frac{v}{u} > 1$ ενώ στη φωτισμένη περιοχή θα ισχύει $\frac{v}{u} < 1$.

Στη φωτισμένη περιοχή όπου $\frac{v}{u} < 1$ διαιρούμε το ολοκλήρωμα:

$$U(s, z) = \frac{-i \exp(ik(z+d))}{z+d} u \exp\left(\frac{iks^2}{2z}\right) \cdot \left[\int_0^\infty J_0(vt) \exp\left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt - \int_0^1 J_0(vt) \exp\left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt \right] \quad (2.52)$$

η λύση δίνεται από τις συναρτήσεις $V_0(u, v)$ και $V_1(u, v)$:

$$u \int_1^\infty J_0(vt) \left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt = (V_1(u, v) + iV_0(u, v)) \exp\left(\frac{i u}{2}\right) \quad (2.53)$$

$$u \int_0^\infty J_0(vt) \left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt = \exp\left(-\frac{iv^2}{2u}\right) \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right) \quad (2.54)$$

Συνεπώς το πεδίο είναι:

$$U(s, z) = -i \frac{\exp(ik(z+d))}{z+d} \exp\left(\frac{iks^2}{2z}\right) \left[\exp\left(-\frac{iv^2}{2z}\right) - \exp\left(\frac{i u}{2}\right) (V_1(u, v) + iV_0(u, v)) \right] \quad (2.55)$$

Μας ενδιαφέρει η ένταση του πεδίου. Επειδή είναι δύσκολο να βρεθεί η ακριβής τιμή της έντασης του φωτός, υπολογίζουμε σε κάθε περίπτωση την ένταση του φωτός στην περίπτωση που έχουμε κάποιο διάφραγμα σε σχέση με την ένταση του φωτός στην περίπτωση που δεν έχουμε κανένα διάφραγμα. Άρα η σχετική ένταση είναι:

$$I = \left| -i \frac{\exp(ik(z+d))}{z+d} \exp\left(\frac{iks^2}{2z}\right) \left[\exp\left(-\frac{iv^2}{2z}\right) - \exp\left(\frac{i u}{2}\right) (V_1(u, v) + iV_0(u, v)) \right] \right|^2 \Rightarrow \quad (2.56)$$

$$I = 1 + V_0^2(u, v) + V_1^2(u, v) - 2 \sin\left(\frac{v^2 + u^2}{2u}\right) V_1(u, v) - 2 \cos\left(\frac{v^2 + u^2}{2u}\right) V_0(u, v) \quad (2.57)$$

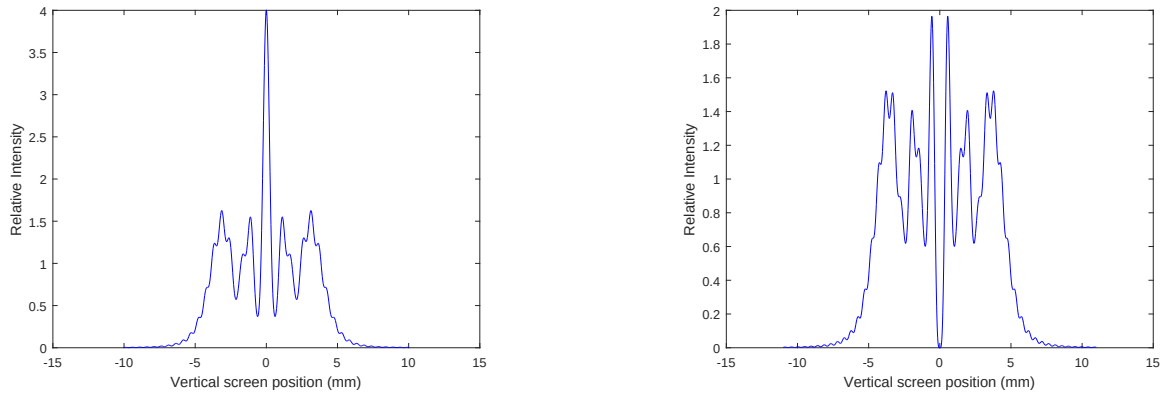
Στη σκιασμένη περιοχή ισχύει $\frac{v}{u} > 1$ το πεδίο γράφεται χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $U_1(u, v)$ και $U_2(u, v)$, δηλαδή:

$$U(s, z) = \frac{\exp[ik(z+d)]}{z+d} \exp\left(\frac{iks^2}{2z}\right) \exp\left(\frac{i u}{2}\right) [U_1(u, v) - iU_2(u, v)] \quad (2.58)$$

άρα η σχετική ένταση είναι

$$I(s, z) = [U_1^2(u, v) + U_2^2(u, v)] \quad (2.59)$$

Στα διαγράμματα της Εικόνας 2.8 παρουσιάζεται η ένταση συναρτήσει της απόστασης πάνω στο πέτασμα παρατήρησης για δύο κυκλικά διαφράγματα, εκ των οποίων το ένα περιέχει περιττό αριθμό ζωνών Fresnel, οπότε αναμένεται ενισχυτική συμβολή στο κέντρο, και το άλλο περιέχει άρτιο αριθμό ζωνών Fresnel οπότε παρουσιάζεται καταστρεπτική συμβολή στο κέντρο.



Εικόνα 2.8: Διάγραμμα της σχετικής έντασης του φωτός συναρτήσει της θέσης του σημείου παρατήρησης στην περίπτωση περίθλασης από κυκλικό διάφραγμα που επιτρέπει περιττό αριθμό ζωνών Fresnel (αριστερά) και άρτιο αριθμό ζωνών Fresnel (δεξιά).

2.2.4 Περίθλαση από κυκλικό εμπόδιο

Στην περίπτωση που η ασυνέχεια που παρεμβάλλεται μεταξύ του μετώπου κύματος και του σημείου παρατήρησης είναι ένα εμπόδιο με κυκλική διατομή (Εικόνα 2.9), η πρώτη λύση Rayleigh - Sommerfeld γράφεται:

$$U(s, \theta, z) = \frac{-z}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} U(\rho, \phi, 0) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] \rho d\rho d\phi \quad (2.60)$$

όπου

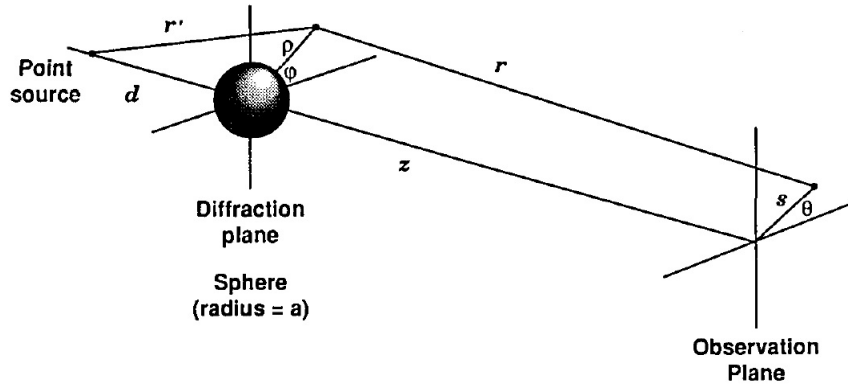
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.61)$$

$$U(\rho, \phi, 0) = \frac{\exp(ikr')}{r'} \quad (2.62)$$

$$r' = \sqrt{\rho^2 + d^2} \quad (2.63)$$

$$r = \sqrt{s^2 + \rho^2 + z^2 - 2\rho s \cos(\theta - \phi)} \quad (2.64)$$

και τα όρια της ολοκλήρωσης είναι στην περιοχή του επιπέδου περίθλασης εκτός του εμποδίου.



Εικόνα 2.9: Γεωμετρία της περίθλασης Fresnel από κυκλικό εμπόδιο (Πηγή: *Diffraction of light by an opaque sphere - Sommargren*).

Όταν το επίπεδο παρατήρησης βρίσκεται μακριά από το επίπεδο περίθλασης κατά μερικά μήκη κύματος τότε έχουμε $ik \gg \frac{1}{r}$ οπότε

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\exp(ikr)}{r} \right] = \left(ik - \frac{1}{r} \right) \frac{\exp(ikr)}{r} \simeq \frac{ik \exp(ikr)}{r} \quad (2.65)$$

Αφού η κύρια συνεισφορά στο περιθλώμενο κύμα προέρχεται από το άκρο της σφαίρας και επειδή ενδιαφερόμαστε για το σχηματισμό περίθλασης από τον άξονα μέχρι έξω από τη γεωμετρική σκιά, τα r και r' μπορούν να προσεγγιστούν από ανάπτυγμα Taylor. Χρησιμοποιώντας τους δύο πρώτους όρους των αναπτυγμάτων όταν βρίσκονται σε ανάπτυγμα και μόνο τον πρώτο όρο όταν εμφανίζονται οπουδήποτε αλλού, η εξίσωση γίνεται:

$$U(s, \theta, z) = \frac{-ik}{2\pi z d} \int_0^{2\pi} \int_{\alpha}^{+\infty} \exp(ik(z+d)) \exp \left[ik \left[\frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{d} \right) + \frac{s^2}{2z} - \frac{2s\rho \cos(\theta - \phi)}{2z} \right] \right] \rho d\rho d\phi \quad (2.66)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα για τη μηδενικής τάξης συνάρτηση Bessel, δηλαδή:

$$\int_0^{2\pi} \exp(ix \cos(\theta - \phi)) d\phi = 2\pi J_0(x) \quad (2.67)$$

προκύπτει:

$$U(s, z) = \frac{-ik}{zd} \exp(ik(z+d)) \exp \left(\frac{iks^2}{2z} \right) \int_{\alpha}^{\infty} J_0 \left(\frac{k\rho s}{z} \right) \cdot \exp \left(ik \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \left(\frac{z+d}{zd} \right) \right) \rho d\rho \quad (2.68)$$

Το προηγούμενο ολοκλήρωμα είναι κανονικοποιημένο και απλοποιείται με την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητής:

$$\rho = \alpha t \quad (2.69)$$

$$u = k\alpha^2 \left(\frac{z+d}{zd} \right) \quad (2.70)$$

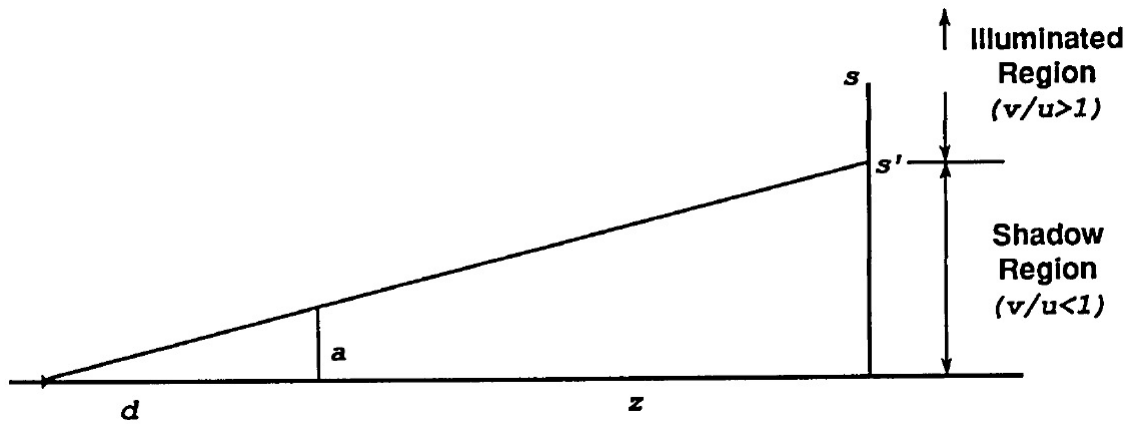
$$v = \frac{k\alpha s}{z} \quad (2.71)$$

και αντικαθιστώντας έχουμε:

$$U(s, z) = \frac{-i \exp[ik(z+d)]}{z+d} u \exp\left(\frac{iks^2}{2z}\right) \int_1^\infty J_0(vt) \exp\left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt \quad (2.72)$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με όρους συναρτήσεων Lommel $U_n(u, v)$ και $V_n(u, v)$ σε δύο διαφορετικές αλλά ισοδύναμες μορφές. Η σύγκλιση υποδεικνύει ποια συγκεκριμένη μορφή χρησιμοποιείται και αυτό εξαρτάται από την τιμή του λόγου $\frac{v}{u}$. Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις για τα u και v προκύπτει:

$$\frac{v}{u} = \frac{sd}{\alpha z + d} \quad (2.73)$$



Εικόνα 2.10: Διδιάστατη αναπαράσταση της γεωμετρίας της περίθλασης από κυκλικό εμπόδιο (Πηγή: *Diffraction of light by an opaque sphere - Sommerfeld*).

Από τη γεωμετρία όμοιων τριγώνων στην Εικόνα (2.10) η ακτινική συντεταγμένη s' της γεωμετρικής σκιάς δίνεται από:

$$s' = \frac{\alpha(z+d)}{d} \quad (2.74)$$

Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις ισχύει:

$$\frac{v}{u} = \frac{s}{s'} \quad (2.75)$$

Στην περιοχή της σκιάς ($s < s'$) ισχύει $\frac{v}{u} < 1$ ενώ στη φωτισμένη περιοχή ($s > s'$) ισχύει $\frac{v}{u} > 1$.

Όταν το σημείο παρατήρησης βρίσκεται στη σκιασμένη περιοχή ($\frac{v}{u} > 1$) το ολοκλήρωμα στην εξίσωση μπορεί να υπολογιστεί με όρους των συναρτήσεων $V_0(u, v)$ και $V_1(u, v)$. Για τις συναρτήσεις Lommel ισχύει:

$$u \exp\left(-\frac{iu}{2}\right) \int_1^\infty J_0(vt) \exp\left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt = V_1(u, v) + iV_0(u, v) \quad (2.76)$$

Αντικαθιστώντας αυτή την εξίσωση προκύπτει το πλάτος του κύματος στη σκιασμένη περιοχή:

$$U(s, z) = \frac{\exp[ik(z+d)]}{z+d} \exp\left(\frac{iks^2}{2z}\right) \exp\left(\frac{iu}{2}\right) [V_0(u, v) - iV_1(u, v)] \quad (2.77)$$

Η σχετική ένταση στην περιοχή της σκιάς είναι:

$$I(s, z) = |U(s, z)|^2 = \frac{1}{(z+d)^2} [V_0^2(u, v) + V_1^2(u, v)] \quad (2.78)$$

Όταν το σημείο παρατήρησης βρίσκεται στη φωτισμένη περιοχή ($\frac{v}{u} > 1$) το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί χωρίζοντάς το σε δύο μέρη:

$$U(s, z) = \frac{-i \exp(ik(z+d))}{z+d} u \exp\left(\frac{iks^2}{2z}\right) \cdot \left[\int_0^\infty J_0(vt) \exp\left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt - \int_0^1 J_0(vt) \exp\left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt \right] \quad (2.79)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\int_0^\infty J_0(vt) \exp\left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt = \frac{i}{u} \exp\left(-\frac{iv^2}{2u}\right) \quad (2.80)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με όρους των συναρτήσεων Lommel $U_1(u, v)$ και $U_2(u, v)$, δηλαδή:

$$u \exp\left(-\frac{iu}{2}\right) \int_0^1 J_0(vt) \exp\left(\frac{iut^2}{2}\right) t dt = U_1(u, v) - iU_2(u, v) \quad (2.81)$$

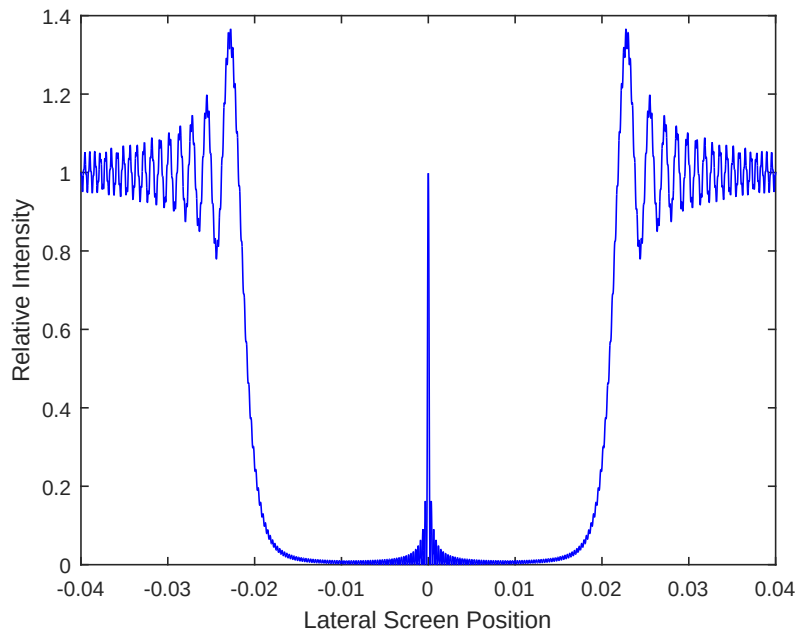
Αντικαθιστώντας αυτές τις εξισώσεις προκύπτει το πλάτος του κύματος στη φωτισμένη περιοχή:

$$U(s, z) = \frac{\exp(ik(z+d))}{z+d} \exp\left(\frac{iks^2}{2z}\right) \left[\exp\left(-\frac{iv^2}{2z}\right) + U_2(u, v) \exp\left(\frac{iu}{2}\right) + iU_1(u, v) \exp\left(\frac{iu}{2}\right) \right] \quad (2.82)$$

Η σχετική ένταση στη φωτισμένη περιοχή δίνεται από τη σχέση:

$$I(s, z) = |U(s, z)|^2 = \frac{1}{(z+d)^2} \left[1 + U_1^2(u, v) + U_2^2(u, v) - 2U_1(u, v) \sin\left(\frac{u^2 + v^2}{2u}\right) + 2U_2(u, v) \cos\left(\frac{u^2 + v^2}{2u}\right) \right] \quad (2.83)$$

Στην Εικόνα (2.11) παρουσιάζεται το διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει της απόστασης στο πέτασμα παρατήρησης όταν τοποθετείται μεταξύ της πηγής και του πετάσματος ένα κυκλικό εμπόδιο. Το μέγιστο στο κέντρο της γεωμετρικής σκιάς είναι το Arago spot και σε αυτό το σημείο η ένταση έχει την τιμή που θα είχε αν δεν υπήρχε καθόλου το εμπόδιο.



Εικόνα 2.11: Διάγραμμα της σχετικής έντασης του φωτός συναρτήσει της θέσης του σημείου παρατήρησης στην περίπτωση περίθλασης από κυκλικό εμπόδιο.

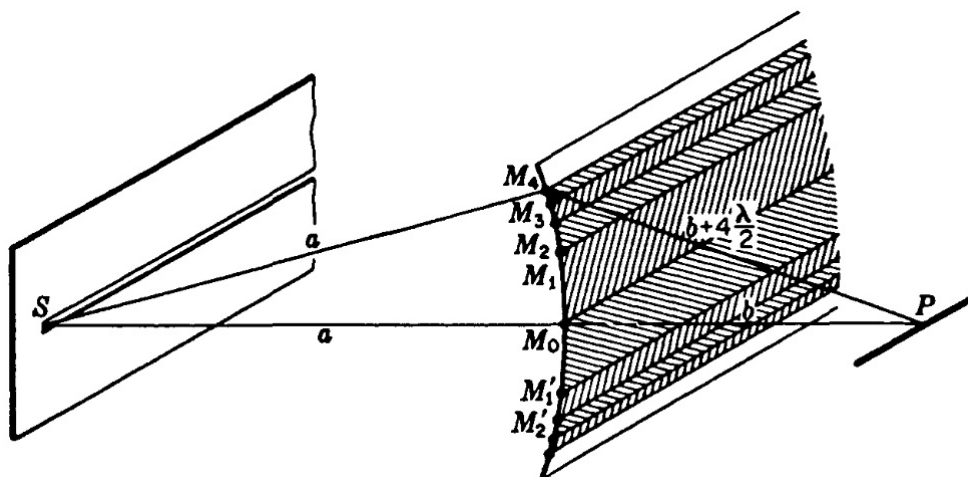
2.3 Ορθογώνια συμμετρία

2.3.1 Σπείρα του Cornu

Αν το σχήμα του πετάσματος περίθλασης περιλαμβάνει ακμές όπως μία σχισμή ή μία ράβδος, χρησιμοποιούμε σαν πηγή μία σχισμή και όχι ένα σημείο. Η σχισμή τοποθετείται παράλληλα σε αυτές τις ακμές, ώστε οι κροσσοί περίθλασης που παράγονται από κάθε στοιχείο να είναι ευθυγραμμισμένοι στο πέτασμα παρατήρησης. Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε το μέτωπο κύματος κυλινδρικό. Για να παραχθεί τέτοιο κυλινδρικό μέτωπο κύματος στα δευτερεύοντα κύματα Huygens που εκπέμπονται από διάφορα σημεία της σχισμής, αυτά θα πρέπει να εκπέμπουν σύμφωνα και στην πράξη αυτό δεν ισχύει πάντα. Ωστόσο όταν προστίθενται οι εντάσεις, όπως απαιτείται για μη σύμφωνη εκπομπή, ο σηματοσμός θα είναι ο ίδιος που θα παραγόταν από ένα σύμφωνο κυλινδρικό κύμα.

Η κατάλληλη μέθοδος για την κατασκευή στοιχείων μισής περιόδου σε ένα κυλινδρικό μέτωπο κύματος αποτελείται από τη διαίρεσή του σε λωρίδες, οι ακμές των οποίων βρίσκονται

διαδοχικά μισό μήκος κύματος μακριά από το P . Έτσι τα σημεία $M_0, M_1, M_2, \dots$ στο κυκλικό τμήμα του κυλινδρικού κύματος είναι σε αποστάσεις $b, b + \frac{\lambda}{2}, b + 2\frac{\lambda}{2}, \dots$ από το P (Εικόνα 2.12). Το M_0 βρίσκεται στην ευθεία SP . Οι ζώνες μισής περιόδου $M_0M_1, M_1M_2, \dots$ εκτείνονται κατά μήκος του μετώπου κύματος παράλληλα στη σχισμή.



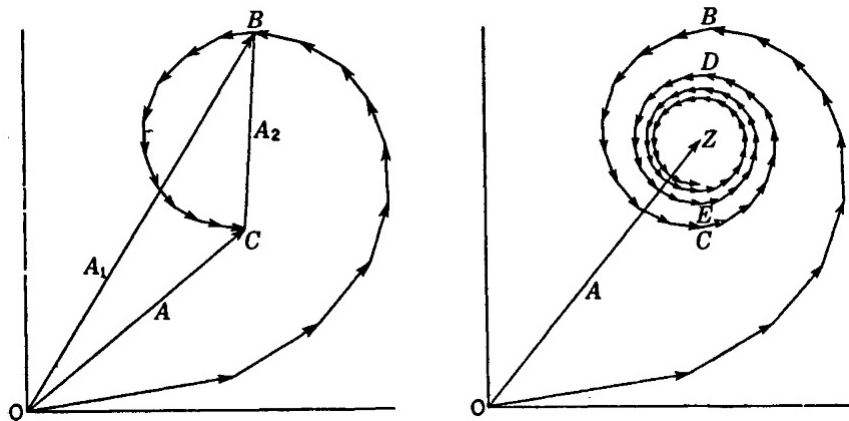
Εικόνα 2.12: Διαίρεση του κυλινδρικού μετώπου κύματος σε ζώνες Fresnel (Πηγή: *Fundamentals of Optics - Jenkins, White*).

Στην περίπτωση που το πέτασμα έχει κυκλική συμμετρία, οι επιφάνειες των ζωνών είναι σχεδόν ίσες. Με αυτή τη διαίρεση του μετώπου κύματος αυτό δεν ισχύει. Οι επιφάνειες των ζωνών μισής περιόδου είναι ανάλογες του πλάτους το οποίο μειώνεται ταχέως όσο μετακινούμαστε κατά μήκος του μετώπου κύματος από το M_0 . Αφού αυτό το φαινόμενο κυριαρχεί σε σχέση με τις μεταβολές του συντελεστή πλαγιότητας, δε λαμβάνουμε υπ' όψιν μας το συντελεστή.

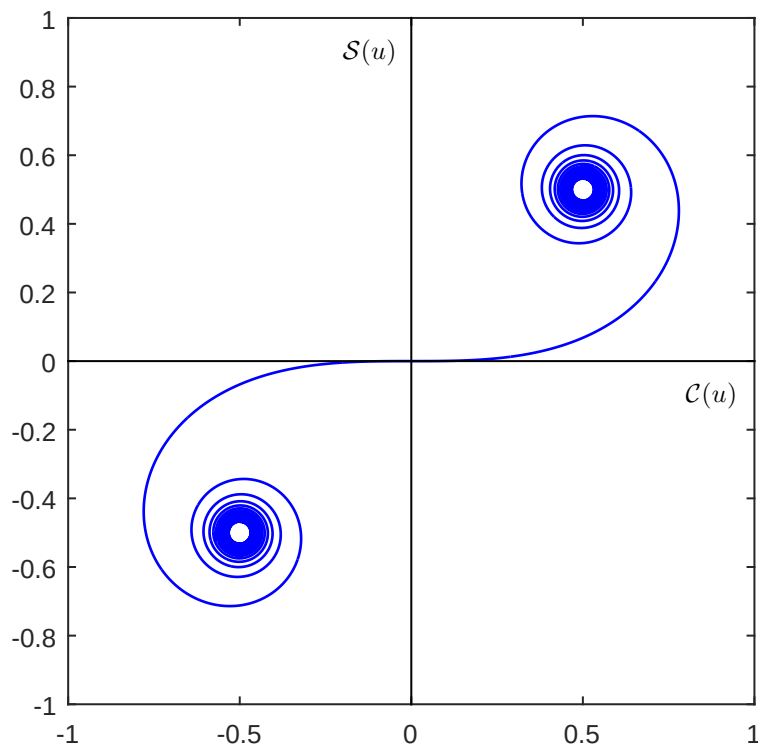
Διαιρούμε την πρώτη ζώνη πάνω από το M_0 σε εννέα τμήματα και βρίσκουμε ότι τα εννέα διανύσματα πλάτους των υποζωνών εκτείνονται από το O στο B , δίνοντας τη συνισταμένη $A_1 = OB$ για την πρώτη ζώνη μισής περιόδου. Από τη δεύτερη ζώνη μισής περιόδου προκύπτουν τα πλάτη μεταξύ B και C με συνισταμένη $A_2 = BC$. Αφού τα πλάτη μειώνονται ταχέως, το A_2 είναι αρκετά μικρότερο από το A_1 και η διαφορά φάσης είναι αισθητά μεγαλύτερη από π . Τα διανύσματα σχηματίζουν σπείρα προς το Z οπότε η συνισταμένη όλων των ζωνών μισής περιόδου πάνω από το M_0 γίνεται το OZ (Εικόνα 2.13).

Όταν εξετάζουμε σπειρώδεις ζώνες απειροστού πλάτους προκύπτει η vibrational curve σαν μία ομαλή σπείρα (Εικόνα 2.14). Η πλήρης καμπύλη που αναπαριστά ολόκληρο το μέτωπο κύματος συγκλίνει στα σημεία Z και στο συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων Z' . Η κατώτερη καμπύλη OZ' προκύπτει από τις συνεισφορές από ζώνες μισής περιόδου κάτω από το M_0 . Αυτή η καμπύλη ονομάζεται σπείρα του Cornu και χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι η γωνία δ που σχηματίζει με τον άξονα x είναι ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης v κατά μήκος της καμπύλης από την αρχή των αξόνων.

Σε μία vibrational curve το δ αναπαριστά την καθυστέρηση φάσης του φωτός από κάθε στοι-



Εικόνα 2.13: Κατασκευή της σπείρας Cornu με εννέα υποζώνες στην κάθε ζώνη Fresnel όταν ληφθούν υπ' όψιν οι δύο πρώτες ζώνες Fresnel (αριστερά) και άπειρες ζώνες Fresnel (δεξιά) (Πηγή: Fundamentals of Optics - Jenkins, White)



Εικόνα 2.14: Η σπείρα του Cornu προκύπτει ως ομαλή καμπύλη όταν η κάθε ζώνη Fresnel διαιρεθεί σε απειροστές υποζώνες

χείο στο μέτωπο κύματος άρα:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{\pi(\alpha + b)}{\alpha b \lambda} s^2 = \frac{\pi}{2} v^2 \quad (2.84)$$

όπου εισήχθη μία νέα μεταβλητή για την κατασκευή της σπείρας του Cornu:

$$v = s\sqrt{\frac{2(\alpha + b)}{\alpha b \lambda}} \quad (2.85)$$

όπου α και b είναι οι αποστάσεις πηγής - διαφράγματος και διαφράγματος - σημείου παρατήρησης, όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.12 και λ το μήκος κύματος. Ορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι αδιάστατη και η ίδια καμπύλη να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε πρόβλημα, ανεξάρτητα από τις τιμές α , b και λ .

Οι x και y συντεταγμένες της σπείρας του Cornu μπορούν να εκφραστούν ποσοτικά με δύο ολοκληρώματα. Αφού η διαφορά φάσης δ είναι η γωνία που προσδιορίζει την κλίση της καμπύλης σε κάθε σημείο, οι μεταβολές των συντεταγμένων για μία δεδομένη μικρή μετατόπιση dv κατά μήκος της σπείρας δίνονται από:

$$\begin{aligned} dx &= dv \cos \delta = \cos \left(\frac{\pi v^2}{2} \right) \\ dy &= dv \sin \delta = \sin \left(\frac{\pi v^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.86)$$

Άρα οι συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου (x, y) στη σπείρα του Cornu γίνονται:

$$\begin{aligned} x &= \int_0^v \cos \left(\frac{\pi v^2}{2} \right) dv \\ y &= \int_0^v \sin \left(\frac{\pi v^2}{2} \right) dv \end{aligned} \quad (2.87)$$

Αυτά τα ολοκληρώματα είναι γνωστά σαν ολοκληρώματα Fresnel και δεν μπορούν να υπολογιστούν σε κλειστή μορφή αλλά προκύπτουν άπειρες σειρές οι οποίες μπορούν να υπολογιστούν.

Για τα ολοκληρώματα Fresnel ισχύει:

$$\mathcal{S}(0) = 0$$

$$\mathcal{C}(0) = 0$$

δηλαδή η σπείρα του Cornu διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(-\infty) &= -\frac{1}{2} & \mathcal{C}(\infty) &= \frac{1}{2} \\ \mathcal{S}(-\infty) &= -\frac{1}{2} & \mathcal{S}(\infty) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

οπότε τα σημεία σύγκλισης της σπείρας είναι τα $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ και $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Τα ολοκληρώματα Fresnel είναι περιττές συναρτήσεις, δηλαδή:

$$\mathcal{C}(-v) = -\mathcal{C}(v)$$

$$\mathcal{S}(-v) = -\mathcal{S}(v)$$

Το πλάτος που οφείλεται σε οποιοδήποτε δεδομένο τμήμα του μετώπου κύματος μπορεί να προκύψει βρίσκοντας το μήκος της χορδής του αντίστοιχου τμήματος της καμπύλης. Το τετράγωνο αυτού του μήκους δίνει την ένταση. Οι αριθμητικές τιμές των εντάσεων που υπολογίζονται με αυτό τον τρόπο είναι σε σχέση με έναν παράγοντα 2 του κύματος χωρίς το διάφραγμα. Αν το A αναπαριστά οποιοδήποτε πλάτος υπολογίζεται από τη σπείρα του Cornu, η ένταση I εκφράζεται σαν κλάσμα αυτής που θα υπολογιζόταν αν δεν υπήρχε το πέτασμα, η οποία ονομάζεται I_0 , είναι:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{1}{2} A^2 \quad (2.88)$$

2.3.2 Υπολογισμός της έντασης

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση (2.5) μετά την εφαρμογή της προσέγγισης Fresnel και γράφουμε:

$$U(P_0) = \frac{iA}{\lambda \rho D} e^{-ikD} \iint_{\Sigma} f(x, y) \exp \left\{ -\frac{ik}{2\rho} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \right\} dx dy \quad (2.89)$$

Αν η συνάρτηση διαφράγματος $f(x, y)$ είναι χωριζομένων μεταβλητών ως προς τις χωρικές συντεταγμένες του διαφράγματος τότε προκύπτει:

$$U(P_0) = \frac{iA}{\lambda \rho D} e^{-ikD} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ig(x)} dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-ig(y)} dy \quad (2.90)$$

$$U(P_0) = A' [C(x) - iS(x)] [C(y) - iS(y)] \quad (2.91)$$

Το σφαιρικό κύμα από την πηγή αναπαρίσταται ως:

$$A' = \frac{iA}{2D} e^{-ikD} \quad (2.92)$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση διαφράγματος σαν μία σταθερά, τα C και S είναι ολοκληρώματα της μορφής:

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_{x_1}^{x_2} \cos [g(x)] dx \\ S(x) &= \int_{x_1}^{x_2} \sin [g(x)] dx \end{aligned} \quad (2.93)$$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται αριθμητικά αφού γραφούν στη μορφή:

$$\begin{aligned} C(w) &= \int_0^w \cos \left(\frac{\pi u^2}{2} \right) du \\ S(w) &= \int_0^w \sin \left(\frac{\pi u^2}{2} \right) du \end{aligned} \quad (2.94)$$

Η μεταβλητή u είναι μία συντεταγμένη του διαφράγματος σε σχέση με το στάσιμο σημείο S σε μονάδες $\sqrt{\frac{\lambda\rho}{2}}$, δηλαδή:

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda\rho}}(x - x_0) \quad (2.95)$$

ή

$$u = \sqrt{\frac{2}{\lambda\rho}}(y - y_0) \quad (2.96)$$

Η παράμετρος w προσδιορίζει τη θέση του άκρου του διαφράγματος σε σχέση με το στάσιμο σημείο S . Η παράμετρος w υπολογίζεται μέσω της u .

Από το πλάτος $U(P_0)$ του κύματος υπολογίζεται η ένταση $I(P_0)$:

$$I(P_0) = \frac{A'^2}{2} \left\{ [C(w_{x_2}) - C(w_{x_1})]^2 + [S(w_{x_2}) - S(w_{x_1})]^2 \right\} \cdot \left\{ [C(w_{y_2}) - C(w_{y_1})]^2 + [S(w_{y_2}) - S(w_{y_1})]^2 \right\} \quad (2.97)$$

Τα όρια w_1 και w_2 του διαφράγματος τοποθετούνται κατά μήκος του τόξου της σπείρας του Cornu. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος από το w_1 στο w_2 δίνει την τμή του ολοκληρώματος. Για παράδειγμα αν δεν υπάρχει διάφραγμα τότε στη διάσταση x $w_1 = -\infty$ και $w_2 = +\infty$. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος από το σημείο $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ στο σημείο $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ θα είναι ίσο με το $U(P_0)$ δηλαδή $\sqrt{2}$. Ίδια τιμή προκύπτει και για την y διάσταση οπότε

$$U(P_0) = 2A' = \frac{Ae^{-ikD}}{D} \quad (2.98)$$

Αυτό δηλαδή είναι το σφαιρικό κύμα που αναμένεται όταν δεν υπάρχει διάφραγμα.

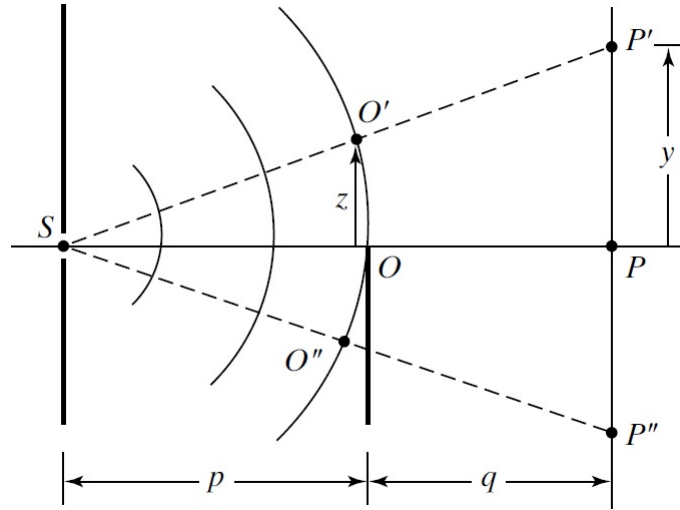
2.4 Περίθλαση από χείλος

Το φαινόμενο περίθλασης από χείλος παρατηρείται όταν στη θέση του διαφράγματος τοποθετείται ένα ημιάπειρο επίπεδο (Εικόνα 2.15). Σε αυτή την περίπτωση συνεισφέρουν στο πεδίο στο σημείο παρατήρησης μόνο οι ζώνες Fresnel που βρίσκονται πάνω από την ακμή του επιπέδου. Στο σημείο P πάνω στον άξονα το άκρο της γεωμετρικής σκιάς για το οποίο $z = v = 0$ συνεισφέρουν οι μισές ζώνες Fresnel (για θετικά y) και χρησιμοποιείται μόνο το ανώτερο τμήμα της σπείρας του Cornu. Τότε η ένταση στο σημείο P είναι ανάλογη του τετραγώνου του μήκους του διανύσματος από το O στο E . Το διάνυσμα αυτό έχει μήκος $\frac{1}{\sqrt{2}}$ οπότε

$$I_P = I_0(\overrightarrow{OE}) = \frac{1}{2}I_0 \quad (2.99)$$

όπου I_0 είναι η ένταση του προσπίπτοντος κύματος.

Για σημείο P' μετατοπισμένο προς τα πάνω σε σχέση με το σημείο P εφαρμόζουμε στην Εικόνα (2.15) τη γεωμετρία όμοιων τριγώνων. Επιπλέον ορίζεται μία σύμβαση προσήμων σύμφωνα με την οποία το v όπως μετράται στον άξονα του πετάσματος παρατήρησης θεωρείται



Εικόνα 2.15: Γεωμετρία της περίθλασης από χείλος (Πηγή: *Introduction to Optics - Pedrotti*).

αρνητικό όταν το σημείο παρατήρησης βρίσκεται κάτω από το P (όπως το P'') και θετικό όταν αυτό βρίσκεται πάνω από το P (όπως το P'). Αντίθετα, το σημείο τομής της ευθείας που ενώνει την πηγή με το σημείο παρατήρησης με τον άξονα του διαφράγματος ορίζει το μηδέν στον άξονα αυτό. Το εκάστοτε σημείο από το οποίο μας ενδιαφέρει να μετρήσουμε το z λαμβάνει θετικό πρόσημο αν βρίσκεται πάνω από το σημείο τομής (όπως το O' σε σχέση με το O) και αρνητικό πρόσημο αν βρίσκεται κάτω από αυτό το σημείο τομής (όπως το O'' σε σχέση με το O). Το διάνυσμα στη σπείρα του Cornu που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της έντασης θα καταλήγει σε κάθε περίπτωση στο E . Για το σημείο P' θα ισχύει:

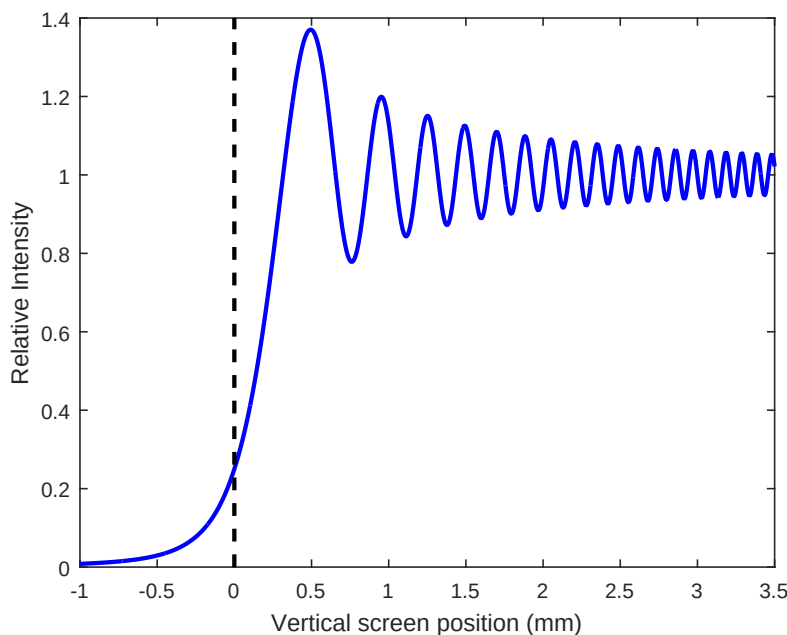
$$z_1 = -y \frac{p}{p+q} \quad (2.100)$$

ενώ για σημείο P'' το οποίο είναι μετατοπισμένο προς τα κάτω σε σχέση με το σημείο P θα ισχύει:

$$z_1 = |y| \frac{p}{p+q} \quad (2.101)$$

Στο διάγραμμα της Εικόνας (2.16) παρουσιάζεται η ένταση του φωτός συναρτήσει της κάθετης μετατόπισης του σημείου παρατήρησης. Το μηδέν αντιστοιχεί στο σημείο P , οι θετικές τιμές του z αντιστοιχούν σε μετατόπιση του σημείου προς τα πάνω ενώ οι αρνητικές τιμές σε μετατόπιση προς τα κάτω.

Για το σημείο παρατήρησης P'' μελετάμε τις ζώνες Fresnel σε σχέση με τον άξονα $SO''P''$ που διέρχεται από το P'' στο μέτωπο κύματος στο διάφραγμα. Για το P'' το σημείο O'' εντοπίζει το κέντρο του μετώπου κύματος, όπως το σημείο O αντιστοιχεί στο κέντρο του μετώπου κύματος σε σχέση με το σημείο P . Πάνω από τον άξονα $SO''P''$ οι ζώνες Fresnel από το O'' στο O φράσσονται από το επίπεδο οπότε δε συνεισφέρουν στην ένταση στο σημείο παρατήρησης P'' . Το μέτωπο κύματος κάτω από αυτό τον άξονα φράσσεται από το επίπεδο. Έτσι οι ζώνες που συνεισφέρουν στο πεδίο σε σχέση με τον άξονα $SO''P''$ ξεκινούν από μία θετική τιμή z_1 και



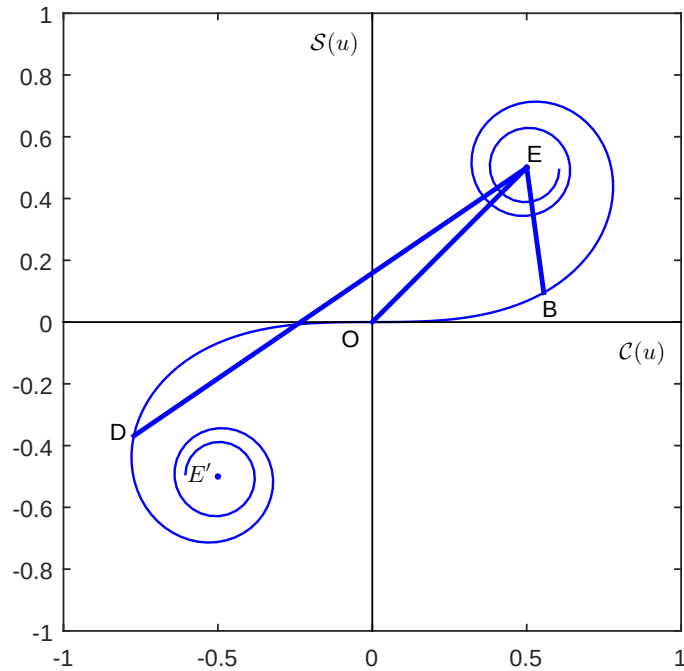
Εικόνα 2.16: Διάγραμμα της σχετικής έντασης του φωτός συναρτήσει της κάθετης μετατόπισης στην περίπτωση της περίθλασης από χείλος.

συνεχίζουν στο $+\infty$. Αυτές οι ζώνες αναπαρίστανται από το πλάτος BE στη σπείρα του Cornu (Εικόνα 2.17). Αφού το $|\vec{BE}|$ είναι μικρότερο από το $|\vec{E}|$, η ένταση στο P'' θα είναι μικρότερη από την ένταση στο P .

Όσο το σημείο παρατήρησης P'' μετατοπίζεται από το P σε χαμηλότερα σημεία στο πέτασμα παρατήρησης, το τελικό σημείο του διανύσματος, B , κινείται κατά μήκος της σπείρας μακριά από το O στο ανώτερο τμήμα της σπείρας του Cornu. Το πλάτος και κατά συνέπεια η ένταση θα μειώνονται μονότονα.

Για ένα σημείο P' πάνω από το P όλες οι ζώνες Fresnel πάνω από τον άξονα $SO'P'$ και οι ζώνες μεταξύ των O και O' συνεισφέρουν στο πλάτος του πεδίου. Σε αυτή την περίπτωση το z μεταβάλλεται από μία αρνητική τιμή στο $+\infty$. Το πλάτος του πεδίου στο P' είναι ανάλογο του $|\vec{DE}| > |\vec{OE}|$ οπότε η ένταση στο P' θα είναι μεγαλύτερη από την ένταση στο P . Όσο το P' μετατοπίζεται προς τα πάνω το D κινείται κατά μήκος της σπείρας του Cornu στο κατώτερο τμήμα της. Σε αυτή την περίπτωση η ένταση στο P' παρουσιάζει μέγιστες και ελάχιστες τιμές.

Το διάνυσμα $\vec{HE}$ αντιστοιχεί στο πλάτος του πρώτου ελαχίστου στη σημείο παρατήρησης. Για σημεία παρατήρησης P' σε πολύ μεγάλες αποστάσεις y η ένταση προσεγγίζει την τιμή της έντασης του μετώπου κύματος χωρίς εμπόδιο.



Εικόνα 2.17: Η σπείρα του Cornu όπως χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της έντασης του φωτός λόγω περίθλασης από χείλος.

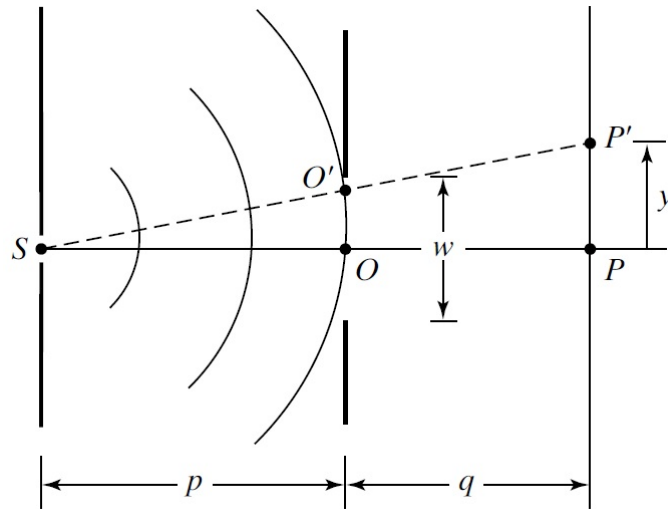
2.5 Περίθλαση από σχισμή

Θεωρούμε ότι ένα πέτασμα περίθλασης με μία σχισμή πάχους w τοποθετείται ενδιάμεσα μίας πηγής και ενός πετάσματος παρατήρησης (Εικόνα 2.18). Σε αυτή την περίπτωση για να υπολογίσουμε το πεδίο στο σημείο P οι ζώνες Fresnel που συνεισφέρουν εκτείνονται για τιμές του z από $-\frac{w}{2}$ σε $\frac{w}{2}$. Για μία σχισμή $\Delta z = w$ ισχύει:

$$\Delta v = \Delta z \sqrt{\frac{2}{L\lambda}} = w \sqrt{\frac{2}{L\lambda}} \quad (2.102)$$

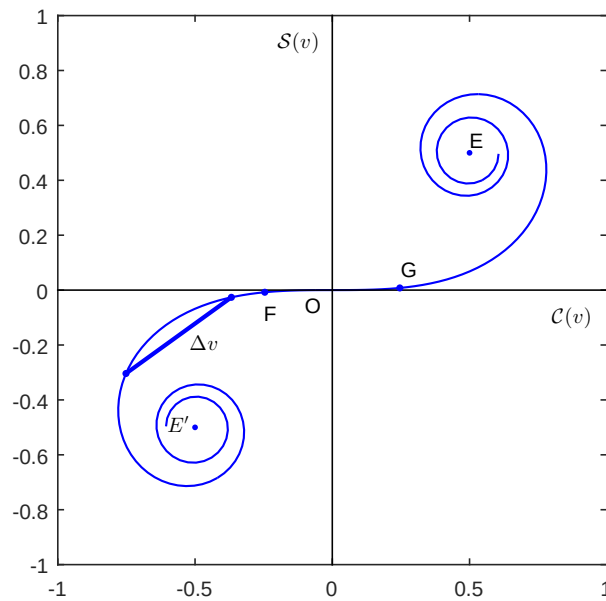
Το μήκος Δv στη σπείρα του Cornu που συνεισφέρει στην ένταση μπορεί να προσδιοριστεί. Το v παίζει το ρόλο μιας παγκόσμιας και αδιάστατης μεταβλητής που επιτρέπει στη σπείρα του Cornu να χρησιμοποιηθεί για διάφορους συνδυασμούς των p , q και λ . Για να υπολογίσουμε την ένταση στο σημείο P τοποθετείται ένα ευθύγραμμο τμήμα Δv , όπως προκύπτει από τους υπολογισμούς, στη σπείρα του Cornu συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων, όπως φαίνεται στην Εικόνα (2.19), οπότε προσδιορίζεται το αρχικό και το τελικό σημείο του διανύσματος $\vec{FG}$ που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της έντασης.

Για ένα σημείο όπως το P' πάνω από το P οι ζώνες Fresnel που συνεισφέρουν χωρίζονται σε δύο μέρη, με λιγότερες ζώνες πάνω από τον άξονα $SO'P'$ (θετικά z και v) και περισσότερες ζώνες κάτω από τον άξονα $SO'P'$ (αρνητικά z και v). Έτσι οι τιμές των z και v για το κέντρο



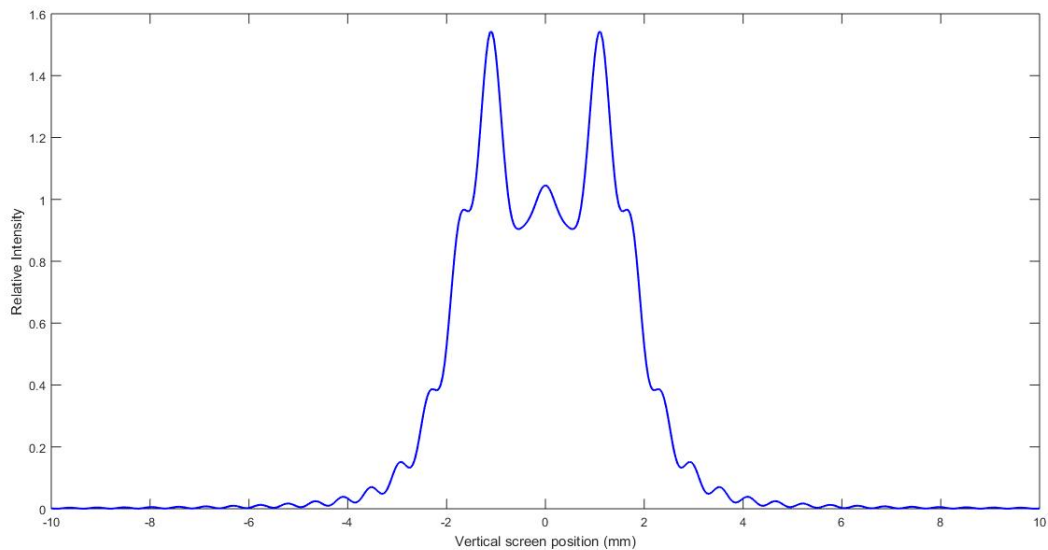
Εικόνα 2.18: Γεωμετρία της περίθλασης από σχισμή

του μήκους Δv γίνεται αυξανόμενα αρνητικό. Συνεπώς όσο το P' μετακινείται πάνω από το P , το Δv ολισθαίνει κατά μήκος της σπείρας του Cornu, προς το κατώτερο σημείο σύγκλισης της σπείρας.



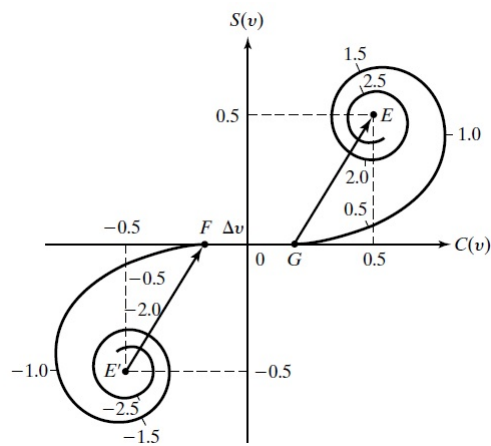
Εικόνα 2.19: Η σπείρα του Cornu για την περίπτωση περίθλασης από σχισμή.

Αν και το μήκος Δv παραμένει καθορισμένο, η τοποθέτησή του σε διάφορες θέσεις κατά μήκος της σπείρας προσδιορίζει ένα διαφορετικό μήκος τόξου και κατά συνέπεια μία διαφορετική



Εικόνα 2.20: Διάγραμμα της σχετικής έντασης του φωτός συναρτήσει της κάθετης μετατόπισης στην περίπτωση της περίθλασης από σχισμή.

ένταση. Όταν το σημείο παρατήρησης βρίσκεται κάτω από τον άξονα, το Δv τοποθετείται κατά μήκος του ανώτερου τμήματος της σπείρας. Με αυτή την προσέγγιση προκύπτει ότι ο περιθλαστικός σχηματισμός από σχισμή είναι συμμετρικός ως προς το κέντρο και η ένταση, παρόλο που ταλαντώνεται, δε μηδενίζεται ποτέ.



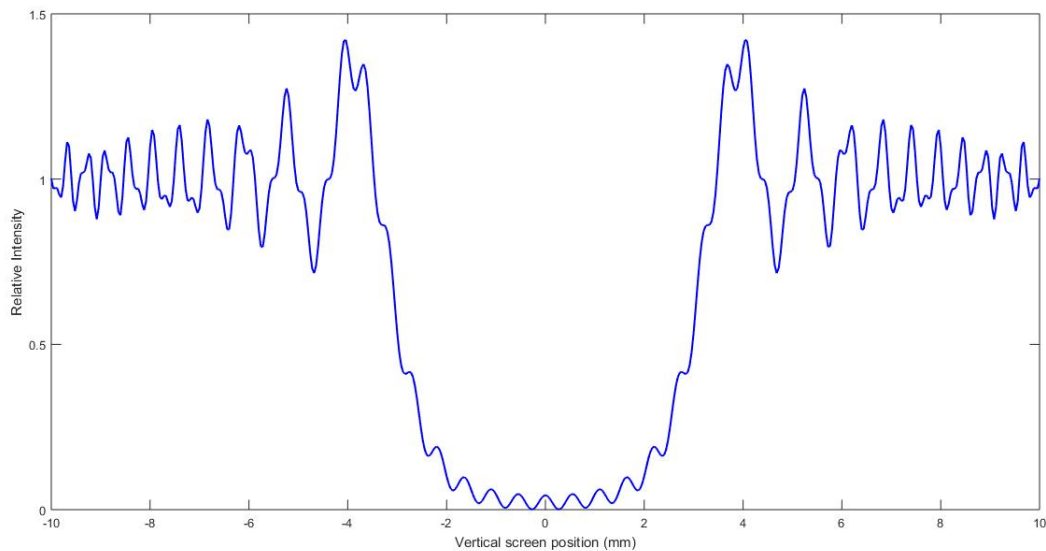
Εικόνα 2.21: Η σπείρα του Cornu για της περίπτωση περίθλασης από σύρμα (Πηγή: Introduction to Optics - Pedrotti).

Αντικαθιστούμε τη σχισμή με ένα αδιαφανές εμπόδιο όπως ένα σύρμα. Αν το πάχος w της σχισμής και του σύρματος είναι ίδιο, τότε υπάρχει μία ακριβής αντιστροφή των διάφανων και αδιάφανων ζωνών του μετώπου κύματος. Σε αυτή την περίπτωση λαμβάνονται υπ' όψιν στον

υπολογισμό της έντασης στο σημείο P όλα τα τμήματα της σπείρας του Cornu εκτός από το τμήμα Δv στη σπείρα της Εικόνας (2.21).

Οπότε προκύπτουν δύο διανύσματα $\vec{E'F}$ και $\vec{GE}$ τα οποία συνεισφέρουν στο συνολικό πλάτος του πεδίου στο P . Η ένταση στο σημείο P είναι ανάλογη του τετραγώνου του μήκους του αθροίσματος των διανυσμάτων $\vec{E'F} + \vec{GE}$. Η ένταση στο σημείο P είναι:

$$I_P = I_0 \left[\vec{E'F} + \vec{GE} \right]^2 \quad (2.103)$$



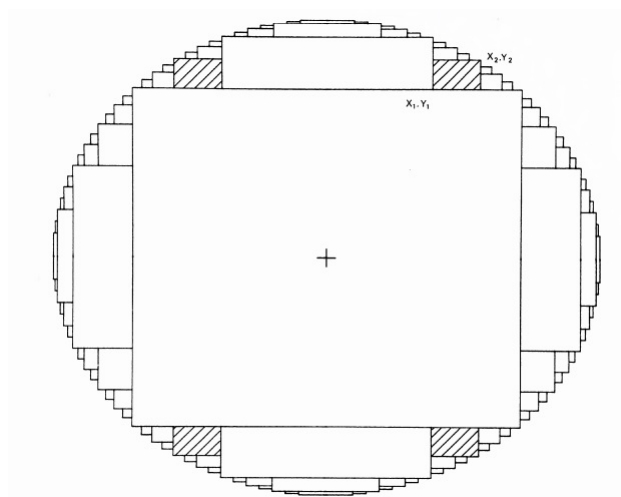
Εικόνα 2.22: Διάγραμμα της σχετικής έντασης του φωτός συναρτήσει της κάθετης μετατόπισης στην περίπτωση της περίθλασης από σύρμα.

Όταν εξετάζονται διαφορετικά σημεία P' το τμήμα της σπείρας Δv που παραλείπεται ολισθαίνει κατά μήκος της σπείρας όπως αντίστοιχα το διάστημα Δv για την περίπτωση της περίθλασης από σχισμή.

Στην περίπτωση που το διάφραγμα που τοποθετείται μεταξύ της πηγής και του πετάσματος παρατήρησης έχει ορθογώνιο ή τετράγωνο σχήμα, ο υπολογισμός της έντασης του φωτός γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως και στην περίπτωση της σχισμής με τη διαφορά ότι εφαρμόζεται για τις δύο διαστάσεις του διαφράγματος.

2.6 Αριθμητική μέθοδος των Roques et al. (1987)

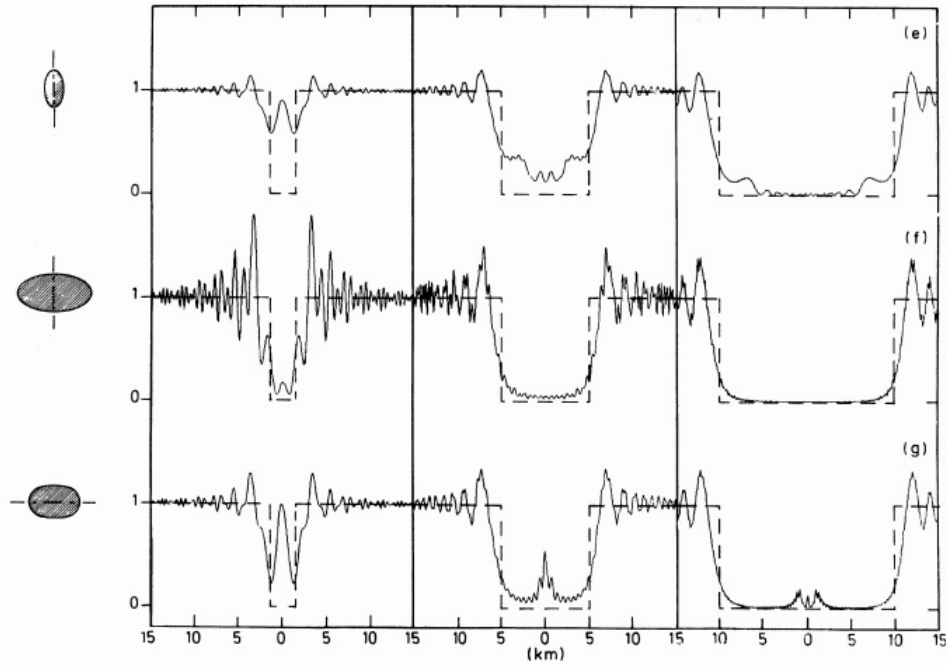
Μία ακόμη μέθοδος, η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σε περιπτώσεις στις οποίες δεν υπάρχει αναλυτική λύση του ολοκληρώματος περίθλασης, περιγράφεται στη δημοσίευση των Roques, F., Moncuquet, M., Sicardy, B., et al. (1987). Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται για τη μελέτη επιπροσθήσεων αστέρων από μικρά σώματα του Ηλιακού μας Συστήματος, οπότε αναφέρεται στην περίθλαση Fresnel από κυκλικό ή ελλειπτικό εμπόδιο.



Εικόνα 2.23: Κατασκευή ενός εμποδίου με ελλειπτικό σχήμα από μικρότερα ορθογώνια εμπόδια (Πηγή: Roques et al. (1987)).

Αν το εμπόδιο είναι κυκλικό, το ολοκλήρωμα περίθλασης έχει αναλυτική λύση, η οποία περιγράφεται από τις συναρτήσεις Lommel, όπως εξηγείται στην παράγραφο 2.2.4. Ωστόσο, η μέθοδος των Roques et al. μελετά αριθμητικά την περίθλαση Fresnel από κυκλικό ή ελλειπτικό εμπόδιο γενικότερα. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην κατασκευή του ελλειπτικού εμποδίου από ορθογώνια των οποίων οι πλευρές είναι παράλληλες στους άξονες του συστήματος αναφοράς, όπως φαίνεται στην Εικόνα (2.23) και στην περίθλαση Fresnel από ορθογώνιο εμπόδιο, όπως αυτή δίνεται από τη θεωρία με τη μορφή των ολοκληρωμάτων Fresnel.

Αφού κατασκευαστεί το εμπόδιο από έναν ικανοποιητικό αριθμό ορθογωνίων, υπολογίζεται η συνεισφορά από κάθε ορθογώνιο, όπως δίνεται με τη μορφή των ολοκληρωμάτων Fresnel και τη σπείρα Cornu, που περιγράφονται στην παράγραφο 2.3.2. Η μέθοδος αυτή συγκλίνει με την αναλυτική λύση για την περίπτωση του κυκλικού εμποδίου, όμως παρουσιάζει το πλεονέκτημα ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εμπόδιο οποιουδήποτε σχήματος (Εικόνα (2.24)). Η εφαρμογή της μεθόδου αυτή βασίζεται στην αρχή του Babinet, όπως περιγράφεται στην Παράγραφο 1.8.



Εικόνα 2.24: Διαγράμματα έντασης για διαφορετικά ελλειπτικά εμπόδια. Αριστερά φαίνεται το σχήμα του εμποδίου και τα τρία διαγράμματα έντασης αντιστοιχούν στο ίδιο σχήμα εμποδίου, αλλά σε διαφορετικό μέγεθος (Πηγή: Roques et al. (1987)).

2.7 Περίθλαση με μετασχηματισμό Fourier

Ο διδιάστατος μετασχηματισμός Fourier είναι ένα μαθηματικό εργαλείο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση της διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Ο μετασχηματισμός Fourier μίας τυχαίας μιγαδικής συνάρτησης δύο μεταβλητών $g(x, y)$ συμβολίζεται με:

$$\mathcal{F}\{g(x, y)\} = G(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp(-2i\pi(f_X x + f_Y y)) dx dy \quad (2.104)$$

Οι δύο μεταβλητές f_X και f_Y μπορούν, χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρηθούν συχνότητες. Η $\mathcal{F}\{g(x, y)\}$ είναι μία μιγαδική συνάρτηση δύο μεταβλητών την οποία συμβολίζουμε με $G(f_X, f_Y)$ και ονομάζεται φάσμα της αρχικής συνάρτησης $g(x, y)$.

Αντίστοιχα ορίζεται ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $G(f_X, f_Y)$ ο οποίος γράφεται:

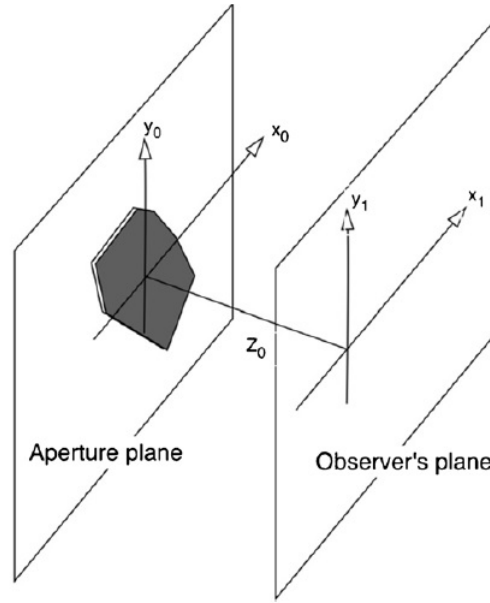
$$\mathcal{F}^{-1}\{G(f_X, f_Y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(f_X, f_Y) \exp(2i\pi(f_X x + f_Y y)) df_X df_Y \quad (2.105)$$

Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να εφαρμοστεί ο μετασχηματισμός Fourier είναι:

- η $g(x, y)$ πρέπει να είναι ολοκληρώσιμη σε όλο το επίπεδο xy

- η $g(x, y)$ πρέπει να έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών και πεπερασμένο αριθμό ακρότατων σε κάθε ορθογώνιο με πεπερασμένο εμβαδόν
- η $g(x, y)$ δεν μπορεί να έχει άπειρες ασυνέχειες

Για τη γενική περίπτωση της περίθλασης μπορούμε να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Fourier. Έστω ένα τυχαίο διάφραγμα σε απόσταση z_0 από το επίπεδο παρατήρησης στο οποίο προσπίπτουν επίπεδα κύματα από μία μακρινή πηγή. Οι συντεταγμένες (x_0, y_0) αναφέρονται σε σημείο στο επίπεδο του διαφράγματος και οι (x_1, y_1) περιγράφουν σημείο του επιπέδου παρατήρησης, όπως φαίνεται στην Εικόνα (2.25)



Εικόνα 2.25: Διάταξη του διαφράγματος και του επιπέδου παρατήρησης και τα αντίστοιχα συστήματα αναφοράς (Πηγή: Young, 2012).

Το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση:

$$E_{obs}(x_1, y_1) = \left(-\frac{i}{\lambda} \right) \iint_{-\infty}^{+\infty} E_{inc}(x_0, y_0) Ap(x_0, y_0) \frac{e^{ikr}}{r} dx_0 dy_0 \quad (2.106)$$

όπου E_{inc} είναι το ηλεκτρικό πεδίο που προσπίπτει στο διάφραγμα και Ap είναι η συνάρτηση του διαφράγματος. Η σχέση αυτή δεν επιδέχεται αναλυτική λύση, εκτός αν η συνάρτηση διαφράγματος έχει απλή μορφή, αναπαριστά δηλαδή κυκλικό ή ορθογώνιο άνοιγμα ή εμπόδιο.

Ο υπολογισμός της εξίσωσης (2.106) δεν είναι τετριμμένος στο χώρο των θέσεων, όμως είναι πολύ απλός στο χώρο των συχνοτήτων. Μπορεί να οριστεί μία συνάρτηση μεταφοράς που μετατρέπει το μετασχηματισμό Fourier του ηλεκτρικού πεδίου αμέσως μετά το διάφραγμα στο μετασχηματισμό Fourier του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο παρατήρησης. Το φαινόμενο διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα γραμμικό χωρο-ανεξάρτητο σύστημα και μπορεί να χαρακτηριστεί από μία σχετικά απλή συνάρτηση μεταφοράς.

Για να υπολογίσουμε τον περιθλαστικό μετασχηματισμό που προκαλείται από ένα τυχαίο διάφραγμα το οποίο περιγράφεται από τον πίνακα $Ap(x_0, y_0)$ ακολουθούμε την εξής διαδικασία. Η συνάρτηση διαφράγματος $Ap(x_0, y_0)$ μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν πίνακα του οποίου τα στοιχεία έχουν τιμή από 0 έως 1. Η τιμή αυτή είναι το κλάσμα του προσπίπτοντος πεδίου που διέρχεται σε κάθε σημείο του διαφράγματος. Στα σημεία που το πέτασμα είναι αδιαφανές, ο πίνακας του διαφράγματος είναι $Ap(x_0, y_0) = 0$, ενώ στα σημεία που το πέτασμα είναι διαφανές, $Ap(x_0, y_0) = 1$. Υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Fourier του γινομένου του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου και της συνάρτησης διαφράγματος:

$$A_{inc}(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\{E_{inc}(x_0, y_0)Ap(x_0, y_0)\} \quad (2.107)$$

όπου f_X και f_Y είναι οι συντεταγμένες στο χώρο των συχνοτήτων, $\mathcal{F}$ ο τελεστής του μετασχηματισμού Fourier και $A(f_X, f_Y)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του ηλεκτρικού πεδίου $E(x, y)$ που διέρχεται μέσω της συνάρτησης διαφράγματος $Ap(x, y)$. Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$H(f_X, f_Y) = \exp(ikz) \cdot \exp[-i\pi\lambda z(f_X^2 + f_Y^2)] \quad (2.108)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο παρατήρησης είναι το γινόμενο της συνάρτησης μεταφοράς επί το μετασχηματισμό Fourier του ηλεκτρικού πεδίου αμέσως μετά το διάφραγμα:

$$A_{obs}(f_X, f_Y) = H(f_X, f_Y)A_{inc}(f_X, f_Y) \quad (2.109)$$

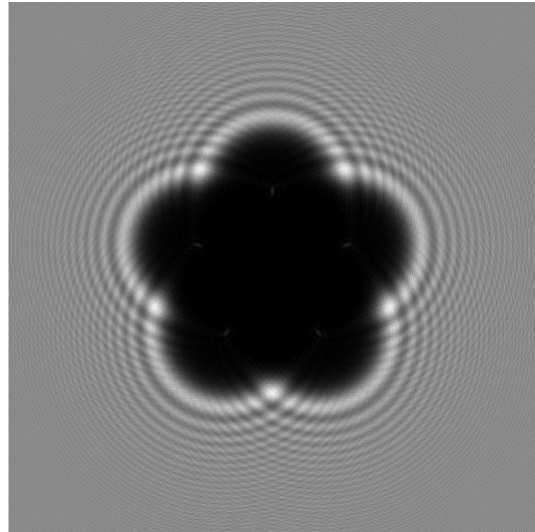
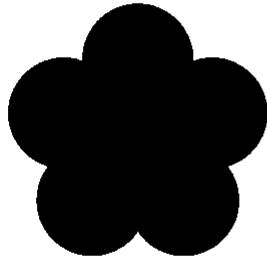
Το ηλεκτρικό πεδίο στο επίπεδο παρατήρησης δίνεται από τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης A_{obs} :

$$E_{obs}(x_1, y_1) = \mathcal{F}^{-1}\{A_{obs}(f_X, f_Y)\} \quad (2.110)$$

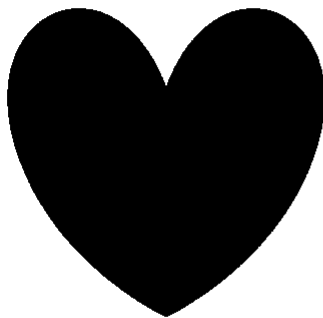
Οπότε η σχετική ένταση που μας ενδιαφέρει για τον περιθλαστικό σχηματισμό δίνεται από τη σχέση:

$$I(x_1, y_1) = |E_{obs}|^2 \quad (2.111)$$

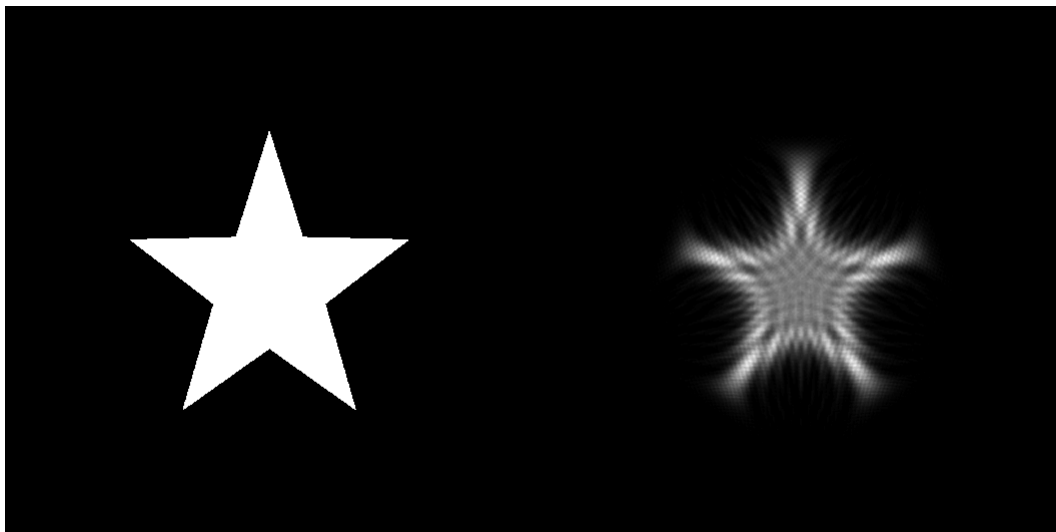
Η μέθοδος αυτή μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον περιθλαστικό σχηματισμό και τη σχετική ένταση για οποιοδήποτε αυθαίρετο σχήμα διαφράγματος τοποθετηθεί μεταξύ της πηγής και του πετάσματος παρατήρησης, όπως φαίνεται στις Εικόνες 2.26, 2.27 και 2.28



Εικόνα 2.26: Αριστερά: Εμπόδιο με σχήμα λουλουδιού. Δεξιά: Περιθλαστικός σχηματισμός από το εμπόδιο αριστερά υπολογισμένος με χρήση της μεθόδου Fourier.

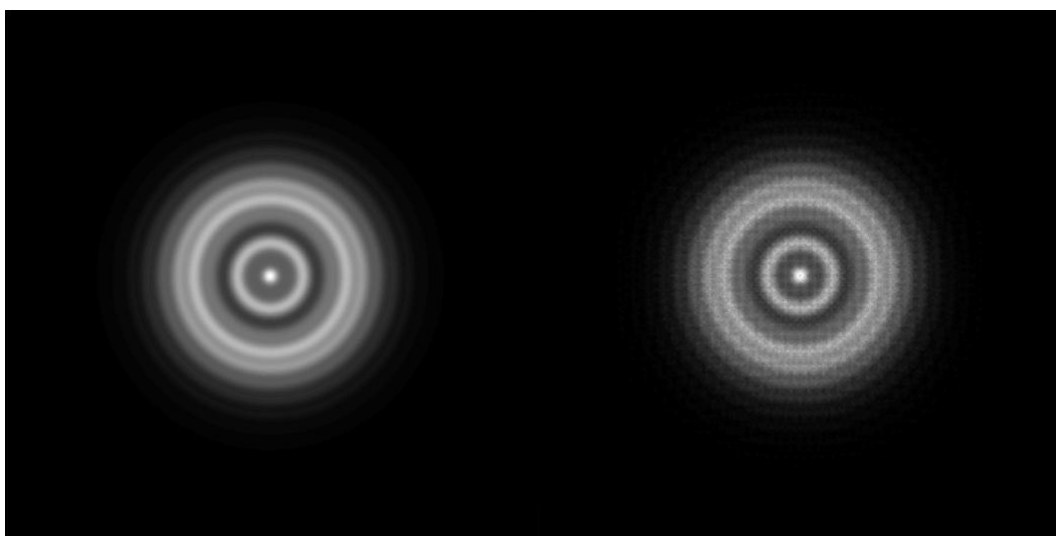


Εικόνα 2.27: Αριστερά: Εμπόδιο με σχήμα καρδιάς. Δεξιά: Περιθλαστικός σχηματισμός από το εμπόδιο αριστερά υπολογισμένος με χρήση της μεθόδου Fourier.



Εικόνα 2.28: Αριστερά: Εμπόδιο με σχήμα αστεριού. Δεξιά: Περιθλαστικός σχηματισμός από το εμπόδιο αριστερά υπολογισμένος με χρήση της μεθόδου Fourier.

Η μέθοδος Fourier συντελεί στον πιο γρήγορο υπολογισμό του περιθλαστικού σχηματισμού σε σχέση με τον υπολογισμό χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές λύσεις. Το αποτέλεσμα προκύπτει το ίδιο και από τις δύο μεθόδους όπως φαίνεται στην Εικόνα 2.29.



Εικόνα 2.29: Περιθλαστικός σχηματισμός από κυκλικό διάφραγμα όπως προκύπτει από τον υπολογισμό με χρήση των αναλυτικών λύσεων (αριστερά) και με χρήση της μεθόδου Fourier (δεξιά).

Κεφάλαιο 3

Περίθλαση Fraunhofer

3.1 Προσέγγιση Fraunhofer

Στην περιοχή της περίθλασης Fresnel, το παρατηρούμενο πεδίο $U(x, y)$ μπορεί να βρεθεί από έναν μετασχηματισμό Fourier του γινομένου της διαταραχής του διαφράγματος $U(\xi, \eta)$ και μία συνάρτηση τετραγωνικής φάσης $\exp\left[i\frac{k}{2z}(\xi^2 + \eta^2)\right]$. Αν εφαρμοστεί επιπροσθέτως η προσέγγιση Fraunhofer:

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{2} \quad (3.1)$$

τότε ο παράγοντας τετραγωνικής φάσης στο ολοκλήρωμα της περίθλασης είναι προσεγγιστικά μονάδα σε ολόκληρο το διάφραγμα και το παρατηρούμενο πεδίο μπορεί να βρεθεί (μεχρι έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα στο (x, y) άμεσα από έναν μετασχηματισμό Fourier της κατανομής του διαφράγματος.

Στην περιοχή της περίθλασης Fraunhofer (ή μακρινού πεδίου):

$$U(x, y) = \frac{e^{ikz} \exp(i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2))}{i\lambda z} \iint_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta \quad (3.2)$$

Εκτός από τους πολλαπλασιαστικούς παράγοντες μπροστά από το ολοκλήρωμα, αυτή η έκφραση είναι απλώς ο μετασχηματισμός Fourier της κατανομής του διαφράγματος, υπολογισμένο στις συχνότητες:

$$f_X = \frac{x}{\lambda z} \quad (3.3)$$

$$f_Y = \frac{y}{\lambda z} \quad (3.4)$$

3.2 Ορθογώνιο διάφραγμα

Θεωρούμε ορθογώνιο διάφραγμα με πλευρές $2a$ και $2b$. Με αρχή O το κέντρο του διαφράγματος και με τους άξονες $O\xi$ και $O\eta$ παράλληλους στις πλευρές του, το ολοκλήρωμα περίθλασης Fraunhofer (Εξίσωση 3.2) γράφεται:

$$U(P) = C \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{-b}^b e^{-ik(p\xi+q\eta)} d\xi d\eta = C \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ikp\xi} d\xi \int_{-b}^b e^{-ikq\eta} d\eta \quad (3.5)$$

Υπολογίζουμε τα επιμέρους ολοκληρώματα στην Εξίσωση (3.5):

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-ikp\xi} d\xi = -\frac{1}{ikp} [e^{-ikp\alpha} - e^{ikp\alpha}] = 2 \frac{\sin(kp\alpha)}{kp} \quad (3.6)$$

και αντίστοιχα:

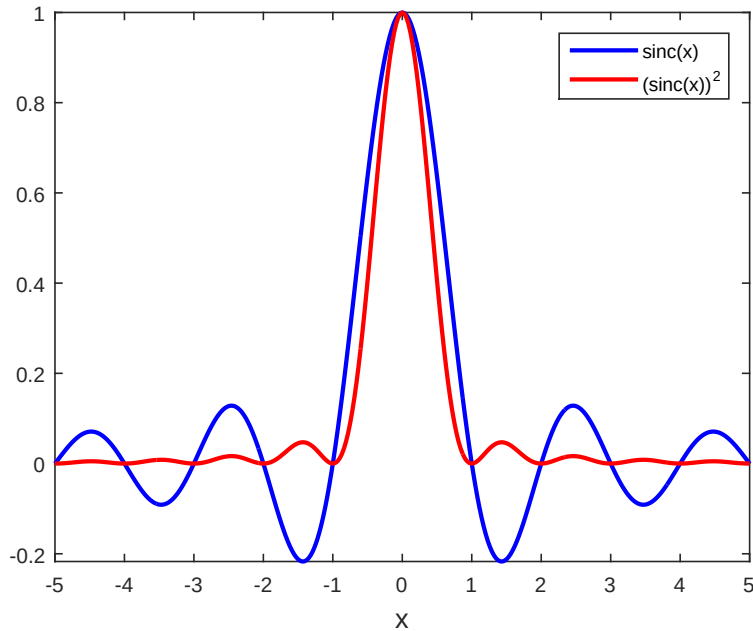
$$\int_{-b}^b e^{-ikq\eta} d\eta = -\frac{1}{ikq} [e^{-ikqb} - e^{ikqb}] = 2 \frac{\sin(kqb)}{kq} \quad (3.7)$$

οπότε η ένταση δίνεται από τη σχέση:

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left(\frac{\sin kp\alpha}{kp\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin kpb}{kpb} \right)^2 I_0 \quad (3.8)$$

όπου I_0 η ένταση στο κέντρο του σχηματισμού.

Η συνάρτηση $y = \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \text{sinc}(x)$ παρουσιάζει ένα κύριο μέγιστο $y = 1$ στο $x = 0$ και μηδενικά ελάχιστα στις θέσεις $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$, όπως φαίνεται στην Εικόνα (3.1). Τα ελάχιστα διαχωρίζουν τα δευτερεύοντα μέγιστα των οποίων οι θέσεις δίνονται από τις ρίζες της εξίσωσης $\tan x - x = 0$. Οι ρίζες αυτές προσεγγίζουν τις τιμές $x = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$, με m ένας ακέραιος.



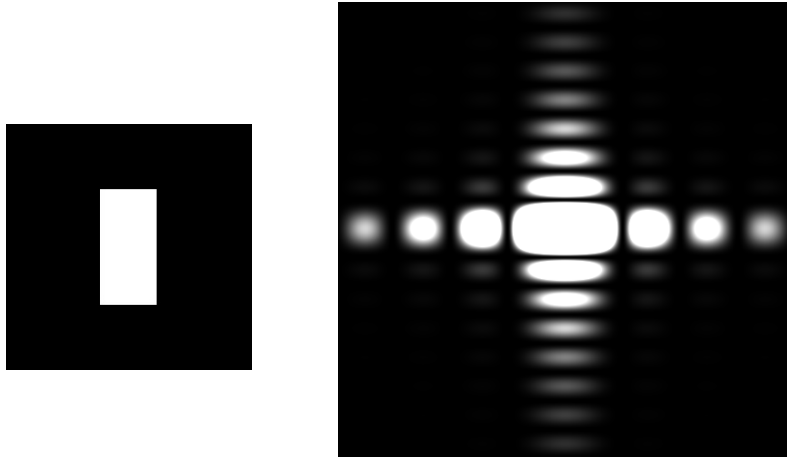
Εικόνα 3.1: Διάγραμμα των συναρτήσεων $\text{sinc}(x)$ και $\text{sinc}(x)^2$.

Η ένταση $I(P)$ είναι μηδέν κατά μήκος δύο συνόλων παράλληλων ευθειών στις ευθείες παράλληλα στις πλευρές του ορθογωνίου, οι οποίες δίνονται από τις εξισώσεις:

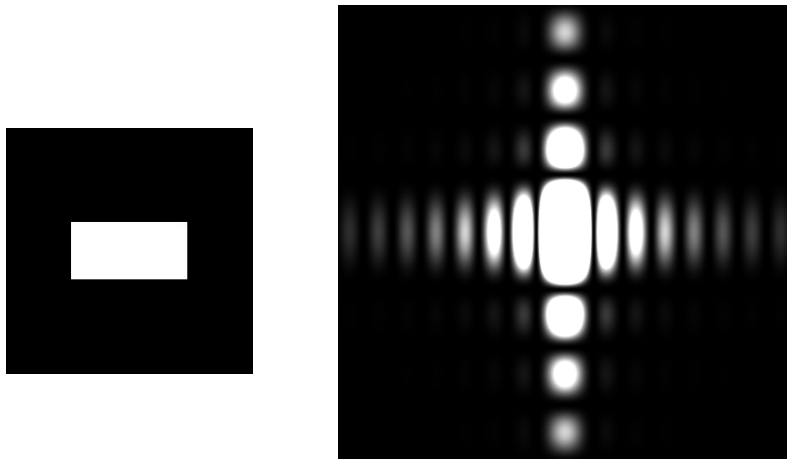
$$kpa = \pm u\pi \quad (3.9)$$

$$kpb = \pm v\pi \quad (3.10)$$

με $(u, v = 1, 2, 3, \dots)$



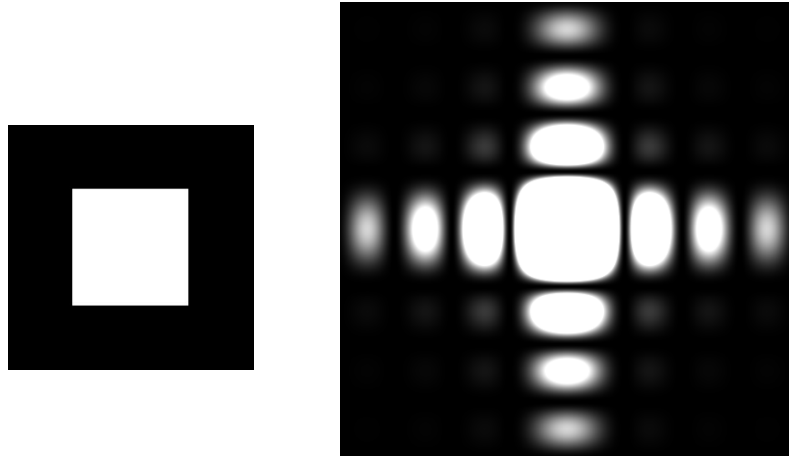
Εικόνα 3.2: Περιθλαστικός σχηματισμός από ορθογώνιο διάφραγμα για το οποίο ισχύει $a/b = 1/2$.



Εικόνα 3.3: Περιθλαστικός σχηματισμός από ορθογώνιο διάφραγμα για το οποίο ισχύει $a/b = 2$.

Σε κάθε ορθογώνιο που σχηματίζεται από ζεύγη διαδοχικών σκοτεινών ευθειών η ένταση φτάνει σε ένα μέγιστο. Όλα τα δευτερεύοντα μέγιστα αποτελούν ένα μικρό κλάσμα του κεντρικού

μεγίστου και μειώνονται ραγδαία καθώς αυξάνεται η απόσταση από το κέντρο. Όσο μεγαλύτερο είναι το διάφραγμα, τόσο μικρότερο είναι το ενεργό μέγεθος του σχηματισμού περίθλασης, όπως φαίνεται από τις Εικόνες (3.2) και (3.3).



Εικόνα 3.4: Περιθλαστικός σχηματισμός από τετράγωνο διάφραγμα για το οποίο ισχύει $\alpha/b = 1$.

Αν οι δύο διαστάσεις του διαφράγματος είναι ίσες, τότε εξετάζουμε τετράγωνο διάφραγμα (Εικόνα 3.4). Αν η μία από τις δύο διαστάσεις του ορθογωνίου είναι πολύ μεγαλύτερη από την άλλη, έστω για παράδειγμα $b \gg \alpha$, προκύπτει ο περιθλαστικός σχηματισμός από μία σχισμή (Εικόνα 3.5).



Εικόνα 3.5: Περιθλαστικός σχηματισμός από σχισμή για την οποία ισχύει $b \gg \alpha$.

3.3 Κυκλικό διάφραγμα

Στην περίπτωση που έχουμε κυκλικό διάφραγμα επιλέγουμε πολικές συντεταγμένες αντί για ορθογώνιες συντεταγμένες. Έστω (γ, θ) οι πολικές συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου στο διάφραγμα οπότε:

$$\rho \cos \theta = \xi \quad (3.11)$$

$$\rho \sin \theta = \eta \quad (3.12)$$

και έστω (w, ψ) οι συντεταγμένες ενός σημείου P στον περιθλαστικό σχηματισμό που αναφέρεται στο γεωμετρικό είδωλο της πηγής, οπότε:

$$w \cos \psi = p \quad (3.13)$$

$$w \sin \psi = q \quad (3.14)$$

Από τους ορισμούς των p και q προκύπτει ότι $w = \sqrt{p^2 + q^2}$ είναι το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζει η διεύθυνση (p, q) με την κεντρική διεύθυνση για την οποία $p = q = 0$. Θεωρώντας α την ακτίνα του κυκλικού διαφράγματος, το ολοκλήρωμα της περίθλασης γράφεται:

$$U(P) = C \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^{2\pi} e^{-ik\rho w \cos(\theta-\psi)} \rho d\rho d\theta \quad (3.15)$$

Χρησιμοποιούμε την ολοκληρωτική αναπαράσταση των συναρτήσεων Bessel $J_n(z)$

$$\frac{i^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix} \cos \alpha e^{in\alpha} d\alpha = J_n(x) \quad (3.16)$$

άρα η εξίσωση γίνεται:

$$U(P) = 2\pi C \int_0^{\alpha} J_0(k\rho w) \rho d\rho \quad (3.17)$$

Έπεται ότι:

$$U(P) = CD \left[\frac{2J_1(k\alpha w)}{k\alpha w} \right] \quad (3.18)$$

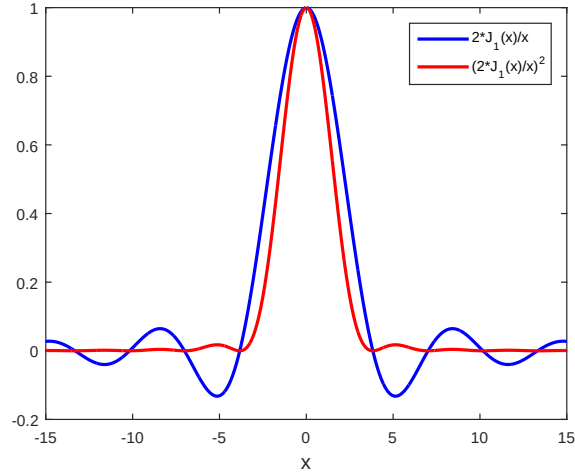
οπότε η ένταση δίνεται από τη σχέση:

$$I(P) = |U(P)|^2 = \left[\frac{2J_1(k\alpha w)}{k\alpha w} \right]^2 I_0 \quad (3.19)$$

όπου I_0 η ένταση του προσπίπτοντος κύματος. Σε μία όμοια μορφή αυτής της εξίσωσης κατέληξε ο Airy το 1835. Σχεδόν την ίδια περίοδο ο Schwerd κατέληξε σε μία προσεγγιστική λύση αντικαθιστώντας τον κύκλο με κανονικό πολύγωνο με 180 πλευρές.

Η κατανομή της έντασης στη γειτονιά της γεωμετρικής σκιάς χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση $y = \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2$. Παρουσιάζει ένα κύριο μέγιστο $y = 1$ στο σημείο $x = 0$ και καθώς αυξάνεται το x ταλαντώνεται με βαθμιαία μειούμενο πλάτος, όπως φαίνεται στο διάγραμμα της Εικόνας (3.6). Η ένταση είναι μηδέν για τιμές του x που δίνονται από την $J_1(x)$. Τα ελάχιστα δεν ισαπέχουν. Οι θέσεις των δευτερευόντων μεγίστων δίνονται από τις τιμές του x που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{J_1(x)}{x} \right] = 0 \quad (3.20)$$



Εικόνα 3.6: Τα διαγράμματα των συναρτήσεων $\frac{2J_1(x)}{x}$ και $\left[\frac{2J_1(x)}{x}\right]^2$.

ή χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (3.21)$$

από τις ρίζες της εξίσωσης $J_2(x) = 0$. Καθώς αυξάνεται το x , το διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικά ελάχιστα ή μέγιστα προσεγγίζει την τιμή π .

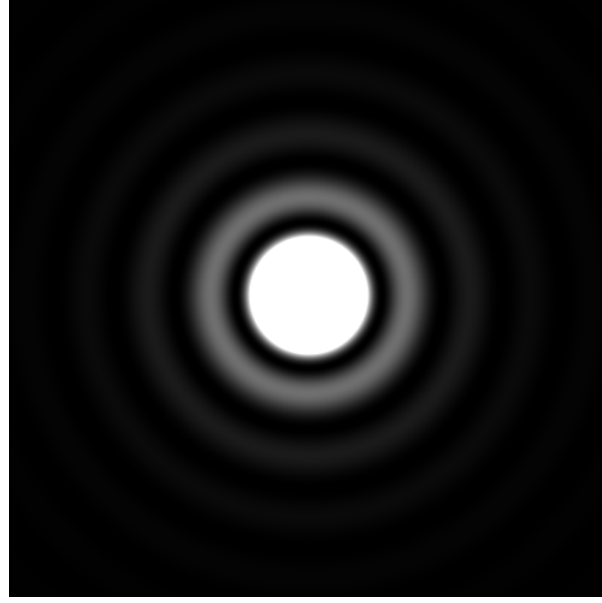
Ο σχηματισμός αποτελείται από έναν φωτεινό δίσκο, ο οποίος ονομάζεται δίσκος του Airy, με κέντρο το γεωμετρικό είδωλο $p = q = 0$ της πηγής ο οποίος περιβάλλεται από ομόκεντρους φωτεινούς και σκοτεινούς δακτυλίους (Εικόνα 3.7). Η ένταση των φωτεινών δακτυλίων μειώνεται ταχέως με την ακτίνα και εν γένει μόνο ο πρώτος ή και ο δεύτερος δακτύλιος είναι αρκετά λαμπροί ώστε να διακρίνονται με γυμνό μάτι. Αφού $x = \frac{2\pi\alpha w}{\lambda}$, οι γωνιακές ακτίνες των σκοτεινών δακτυλίων είναι:

$$w = \sqrt{p^2 + q^2} = 0.610 \frac{\lambda}{\alpha}, \quad 1.116 \frac{\lambda}{\alpha}, \quad 1.619 \frac{\lambda}{\alpha}, \quad \dots$$

Το γωνιακό διάστημα μεταξύ δύο γειτονικών δακτυλίων προσεγγίζει ασυμπτωτικά την τιμή $\frac{\lambda}{2\alpha}$. Το ενεργό μέγεθος του περιθλαστικού σχηματισμού είναι αντιστρόφως ανάλογο των γραμμικών διαστάσεων του διαφράγματος.

Εξετάζουμε το ποσοστό της ολικής προσπίπτουσας ενέργειας που περιέχεται στον κεντρικό λοβό του σχηματισμού περίθλασης. Έστω με $L(w_0)$ συμβολίζεται το ποσοστό της ολικής ενέργειας που περιέχεται μέσα στο δίσκο που σχηματίζεται στο επίπεδο παρατήρησης, με κέντρο το γεωμετρικό είδωλο και με γωνιακή ακτίνα w_0 στο κέντρο του διαφράγματος, οπότε:

$$\begin{aligned} L(w_0) &= \frac{R^2}{\mathcal{P}} \int_0^{w_0} \int_0^{2\pi} I(w) w dw d\psi = \\ &= \frac{D}{\lambda^2} \int_0^{w_0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{J_1(k\alpha w)}{k\alpha w} \right]^2 w dw d\psi = 2 \int_0^{k\alpha w_0} \frac{J_1^2(x)}{x} dx \end{aligned} \quad (3.22)$$



Εικόνα 3.7: Ο περιθλαστικός σχηματισμός από ένα κυκλικό διάφραγμα στην προσέγγιση Fraunhofer, ή όπως ονομάζεται ο δίσκος του Airy.

Αντικαθιστούμε ότι:

$$\frac{J_1^2(x)}{x} = J_0(x)J_1(x) - \frac{dJ_1(x)}{dx}J_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[J_0^2(x) + J_1^2(x)] \quad (3.23)$$

και χρησιμοποιούμε ότι $J_0(0) = 1$ και $J_1(0) = 0$, συνεπώς προκύπτει:

$$L(w_0) = 1 - J_0^2(k\alpha w_0) - J_1^2(k\alpha w_0) \quad (3.24)$$

μία σχέση που οφείλεται στον Rayleigh. Για τους σκοτεινούς δακτυλίους $J_1(k\alpha w_0) = 0$ οπότε το κλάσμα της ολικής ενέργειας έξω από κάθε σκοτεινό δακτύλιο είναι $J_0^2(k\alpha w_0)$. Για τον πρώτο, δεύτερο και τρίτο δακτύλιο το $J_0^2(k\alpha w_0)$ ισούται με 0.162, 0.090 και 0.062 αντίστοιχα. Έτσι περισσότερο από το 90% του φωτός περιέχεται συνολικά στον δίσκο του Airy και στον πρώτο δακτύλιο.

Εξάγεται ένα χρήσιμο θεώρημα το οποίο αφορά στην τροποποίηση του περιθλαστικού σχηματισμού όταν το διάφραγμα διαστέλλεται (ή συστέλλεται) μόνο σε μία διεύθυνση. Έστω $\mathcal{A}_1$ και $\mathcal{A}_2$ δύο διαφράγματα τέτοια ώστε η επέκταση του $\mathcal{A}_2$ σε μία συγκεκριμένη διεύθυνση, έστω $O\xi$, είναι μ φορές το $\mathcal{A}_1$. Για την περίθλαση Fraunhofer στο $\mathcal{A}_1$ έχουμε:

$$U_1(p, q) = C \iint_{\mathcal{A}_1} e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (3.25)$$

Για την περίθλαση Fraunhofer στο $\mathcal{A}_2$ ισχύει αντίστοιχα

$$U_2(p, q) = C \iint_{\mathcal{A}_2} e^{-ik(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta \quad (3.26)$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από (ξ, η) σε (ξ', η') όπου:

$$\xi' = \frac{1}{\mu} \xi \quad (3.27)$$

$$\eta' = \eta \quad (3.28)$$

οπότε

$$U_2(p, q) = \mu C \iint_{\mathcal{A}_1} e^{-ik(\mu p \xi' + q \eta')} d\xi' d\eta' = \mu U_1(p, q) \quad (3.29)$$

Όταν το διάφραγμα εκτείνεται με λόγο $\mu : 1$ σε μία συγκεκριμένη διεύθυνση, ο περιθλαστικός σχηματισμός συστέλλεται στην ίδια διεύθυνση με λόγο $1 : \mu$ και η ένταση στο νέο σχηματισμό είναι μ^2 φορές η ένταση στο αντίστοιχο σημείο του αρχικού σχηματισμού.

Εξετάζουμε την περίπτωση στην οποία ένα πέτασμα περιέχει ένα μεγάλο αριθμό πανομοιότυπων και με όμοιο προσανατολισμό διαφραγμάτων. Σύμφωνα με την αρχή του Babinet, τα αποτελέσματα αυτού του θεωρήματος εφαρμόζονται στη συμπληρωματική κατανομή εμποδίων. Έστω $O_1, O_2, \dots, O_N$ ένα σύνολο όμοια τοποθετημένων σημείων, ένα σε κάθε διάφραγμα, και έστω οι συντεταγμένες αυτών των σημείων που αναφέρονται σε ένα καθορισμένο σύστημα αξόνων στο επίπεδο των διαφραγμάτων είναι $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_N, \eta_N)$. Η κατανομή έντασης στο σχηματισμό περίθλασης Fraunhofer δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} U(p, q) &= C \sum_n \iint_{\mathcal{A}} e^{-ik[(\xi_n + \xi')p + (\eta_n + \eta')q]} d\xi d\eta = \\ &= C \sum_n e^{-ik(p\xi_n + q\eta_n)} \iint_{\mathcal{A}} e^{-ik(p\xi' + q\eta')} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.30)$$

όπου η ολοκλήρωση εκτείνεται σε κάθε άνοιγμα $\mathcal{A}$ του συνόλου. Το ολκλήρωμα εκφράζει την επίδραση από ένα διάφραγμα ενώ το άθροισμα αναπαριστά την υπέρθεση των περιθλαστικών σχηματισμών. Αν $I^{(0)}(p, q)$ είναι η κατανομή έντασης που προέρχεται από ένα διάφραγμα τότε η ολική ένταση δίνεται από:

$$\begin{aligned} I(p, q) &= I^{(0)}(p, q) \left| \sum_n e^{-ik(p\xi_n + q\eta_n)} \right|^2 = \\ &= I^{(0)}(p, q) \sum_n \sum_m e^{-ik[p(\xi_n - \xi_m) + q(\eta_n - \eta_m)]} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Για $N = 2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= I^{(0)} \{ 2 + e^{-ik[p(\xi_1 - \xi_2) + q(\eta_1 - \eta_2)]} + e^{-ik[p(\xi_2 - \xi_1) + q(\eta_2 - \eta_1)]} \} = \\ &= 4I^{(0)} \cos^2 \left(\frac{1}{2} \delta \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

όπου

$$\delta = k[p(\xi_2 - \xi_1) + q(\eta_2 - \eta_1)] \quad (3.33)$$

Για την περίπτωση ενός μεγάλου αριθμού διαφραγμάτων, καταλήγουμε σε διαφορετικά αποτελέσματα ανάλογα με το αν τα διαφράγματα κατανέμονται ομογενώς ή τυχαία επάνω στο πέτασμα.

Όταν τα διαφράγματα κατανέμονται ομογενώς στο πέτασμα, όροι με διαφορετικές τιμές των m και n στο διπλό άθροισμα θα κυμαίνονται με γρήγορο ρυθμό μεταξύ $+1$ και -1 όσο τα m και n λαμβάνουν διαφορετικές τιμές και κατά συνέπεια το άθροισμα τέτοιων όρων θα έχει μηδενική μέση τιμή. Αν εξαιρεθούν οι τοπικές διακυμάνσεις, η ολική ένταση είναι N φορές η ένταση του φωτός που περιθλάται από ένα διάφραγμα

$$I(p, q) \sim NI^{(0)}(p, q) \quad (3.34)$$

Τα αποτελέσματα διαφέρουν αρκετά στην περίπτωση που τα διαφράγματα κατανέμονται τυχαία, αφού οι όροι $m \neq n$ δίνουν υπολογίσιμη συνεισφορά για συγκεκριμένες τιμές των p και q . Αν τα σημεία O_n είναι τοποθετημένα έτσι ώστε για συγκεκριμένες τιμές των p και q οι φάσεις όλων των όρων για τους οποίους $m \neq n$ είναι πολλαπλάσια του 2π , το άθροισμά τους θα είναι ίσο με $N(N-1)$ οπότε για μεγάλα N ο λόγος των δύο εντάσεων θα είναι της τάξης του N^2 .

Για την περίπτωση που τα διαφράγματα είναι σχισμές, αν οι σχισμές είναι διατεταγμένες με σταθερή απόσταση η μία από την άλλη, το τελικό διάφραγμα προκύπτει να είναι ένα φράγμα περίθλασης. Το φράγμα περίθλασης χρησιμοποιείται σε φασματογράφους. Όσο περισσότερες σχισμές περιέχει ένα φράγμα περίθλασης τόσο περισσότερη ανάλυση του φάσματος κάνει, υπό την προϋπόθεση ότι συμμετέχουν όλες οι σχισμές.

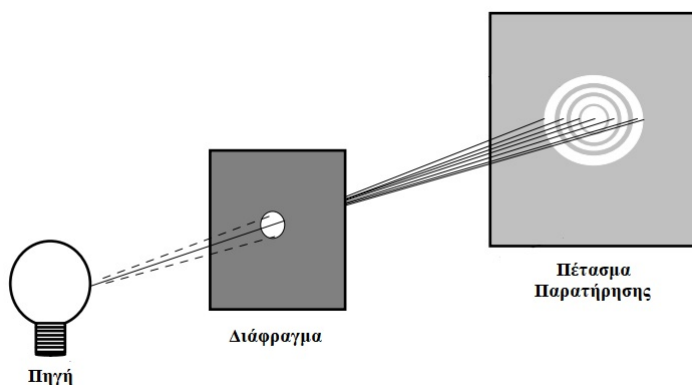
Κεφάλαιο 4

Εκτέλεση πειραμάτων

4.1 Πειραματική διάταξη

Τα πειράματα περίθλασης κοντινού πεδίου για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας εκτελέστηκαν στο Εργαστήριο Αστρονομίας και Εφαρμοσμένης Οπτικής του Τομέα Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής στο Τμήμα Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Το Εργαστήριο είναι εξοπλισμένο με διατάξεις laser που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πραγματοποίηση των πειραμάτων αυτών.

Το laser εκπέμπει παράλληλη δέσμη, δηλαδή επίπεδα κύματα. Μπροστά από την πηγή laser τοποθετείται ένα διαστημικό φίλτρο (spatial filter), το οποίο αποτελείται από μία μικρή οπή. Όταν επίπεδα κύματα από την πηγή laser προσπέσουν σε αυτή την οπή, σύμφωνα με την αρχή των Huygens - Fresnel, εκπέμπονται δευτερογενή κυματικά μέτωπα τα οποία είναι πλέον σφαιρικά. Άρα στο διάφραγμα προσπίπτουν σφαιρικά κύματα και η απόσταση πηγής - διαφράγματος θεωρείται πεπερασμένη. Οι διαστάσεις του διαφράγματος ή του εμποδίου που τοποθετείται μεταξύ της πηγής και του πετάσματος παρατήρησης είναι πολύ μεγαλύτερες από αυτές των διαφραγμάτων στην περίπτωση της περίθλασης Fraunhofer.



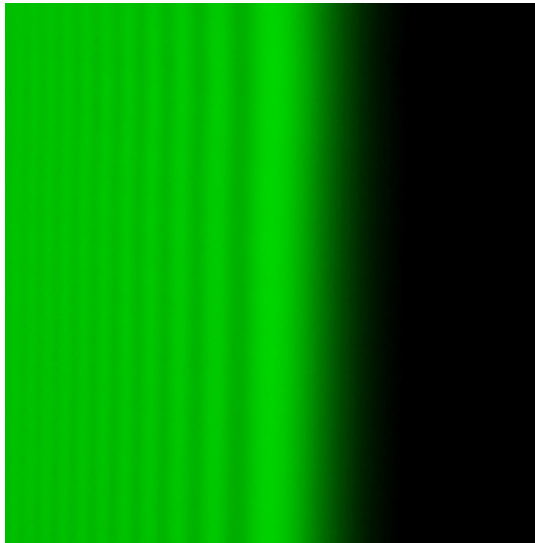
Εικόνα 4.1: Η πειραματική διάταξη που χρησιμοποιήθηκε για την περίπτωση περίθλασης Fresnel (Πηγή: <http://www.iqst.ca/quantech/>).

Η διάταξη που φαίνεται στην Εικόνα 4.1 χρησιμοποιήθηκε στο εργαστήριο για την εκτέλεση πειραμάτων περίθλασης κοντινού πεδίου με τις διαστάσεις των διαφραγμάτων να είναι της τάξης των εκατοστών ($\sim 10^{-2}m$) και τις αποστάσεις διαφράγματος - πετάσματος και πηγής - διαφράγματος να είναι της τάξης των μέτρων. Στη θέση του διαφράγματος της εικόνας τοποθετήθηκαν διαδοχικά τετράγωνο διάφραγμα, ορθογώνιο διάφραγμα, τριγωνικό διάφραγμα, σχισμή, κυκλικό διάφραγμα και κυκλικό εμπόδιο.

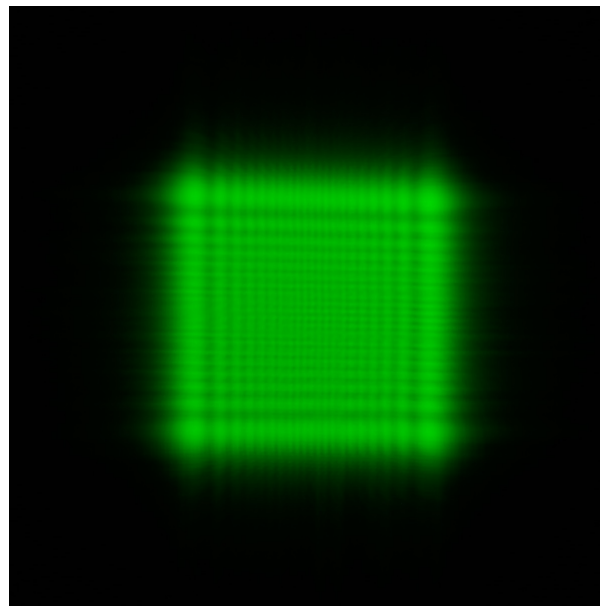
Για την περίθλαση κοντινού πεδίου από κυκλικό εμπόδιο, χρησιμοποιήθηκε ένας φακός προβολής, πάνω στον οποίο τοποθετήθηκε ένα μεταλλικό σφαιρίδιο από ρουλεμάν, η οποία αποτελεί το κυκλικό εμπόδιο. Αυτό το βήμα ήταν απαραίτητο ώστε το κυκλικό εμπόδιο να μην ακουμπάει σε καμία επιφάνεια και η περίθλαση από αυτή την επιφάνεια επηρεάσει τον περιθλαστικό σχηματισμό. Στη θέση του φακού δοκιμάστηκε αρχικά ένα επίπεδο γυαλί, το οποίο προκαλούσε επιπρόσθετα χαρακτηριστικά στο σχηματισμό λόγω ατελειών, οπότε απορρίφθηκε. Ο φακός προβολής, σε αντίθεση με το επίπεδο γυαλί, δεν προκαλούσε παρεμβολές στο σχηματισμό και, εφόσον το εμπόδιο τοποθετήθηκε πάνω στο φακό στη μεριά του πετάσματος παρατήρησης, δεν προκάλεσε αλλοίωση στις αποστάσεις ούτε επηρέασε τον περιθλαστικό σχηματισμό που αναμέναμε με τη συγκεκριμένη διάταξη. Επιπλέον, επιλέχθηκε ως κυκλικό εμπόδιο η μεταλλική σφαίρα, αφού είναι μία τέλεια σφαίρα με λεία επιφάνεια.

4.2 Περίθλαση Fresnel

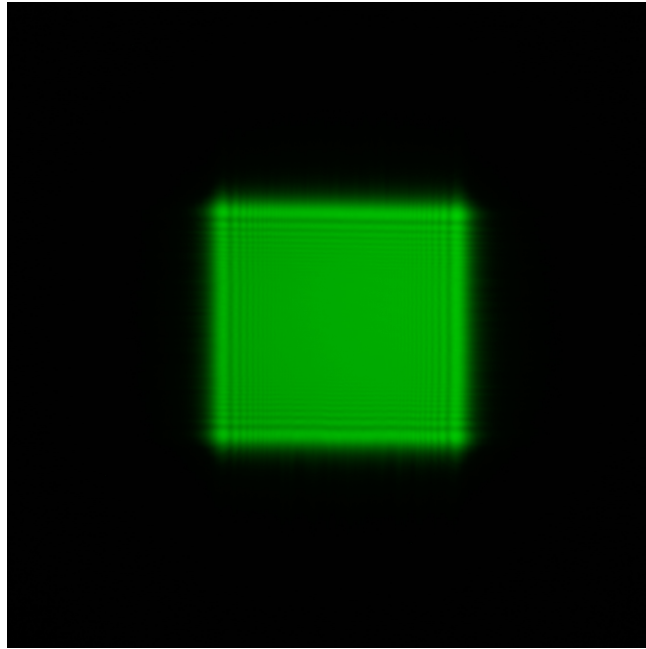
Χρησιμοποιώντας την πειραματική διάταξη που περιγράφεται στην παράγραφο 4.1, φωτογραφίζουμε τον περιθλαστικό σχηματισμό τοποθετώντας την ακμή ενός επιπέδου ώστε να πραγματοποιηθεί η περίθλαση από χείλος, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.2. Στη συνέχεια τοποθετήθηκαν διαδοχικά τετράγωνο, ορθογώνιο και τριγωνικό διάφραγμα (Εικόνες 4.3, 4.4, 4.5, 4.6). Τα διαφράγματα αυτά παρουσιάζουν περισσότερες από δύο ακμές, οπότε ενώ το κυρίαρχο φαινόμενο είναι η περίθλαση χείλους, οι σχηματισμοί από κάθε ακμή του διαφράγματος συμβάλλουν ο ένας με τον άλλον δημιουργώντας έναν πιο περίπλοκο σχηματισμό.



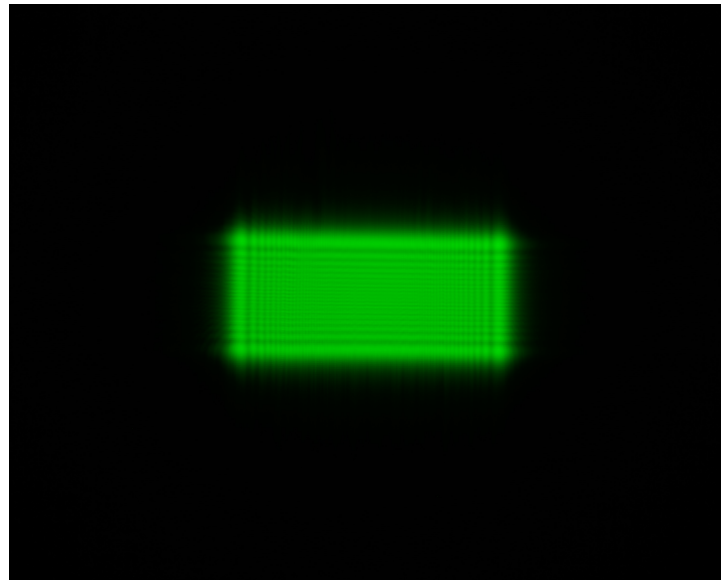
Εικόνα 4.2: Η περίπτωση περίθλασης Fresnel από χείλος.



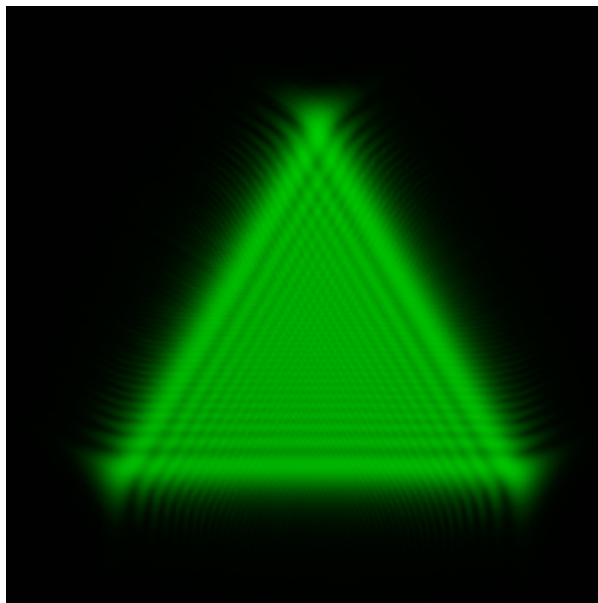
Εικόνα 4.3: Η περίπτωση περίθλασης Fresnel από τετράγωνο διάφραγμα. Το διάφραγμα έχει τέτοιες διαστάσεις ώστε παρατηρούνται κροσσοί περίθλασης σε όλη τη φωτισμένη περιοχή.



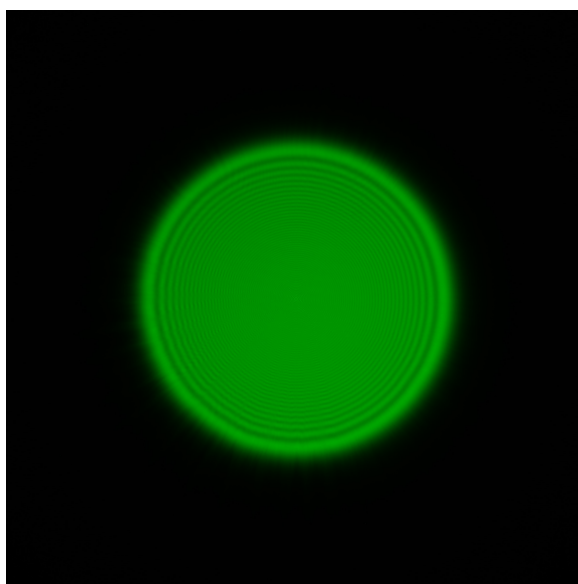
Εικόνα 4.4: Η περίπτωση περίθλασης Fresnel από τετράγωνο διάφραγμα. Το διάφραγμα έχει τέτοιες διαστάσεις ώστε η κεντρική περιοχή είναι ομοιόμορφα φωτισμένη, δηλαδή η διάσταση του διαφράγματος είναι αρκετά μεγάλη ώστε στο κέντρο να επιτυγχάνεται απόσβεση των κροσσών.



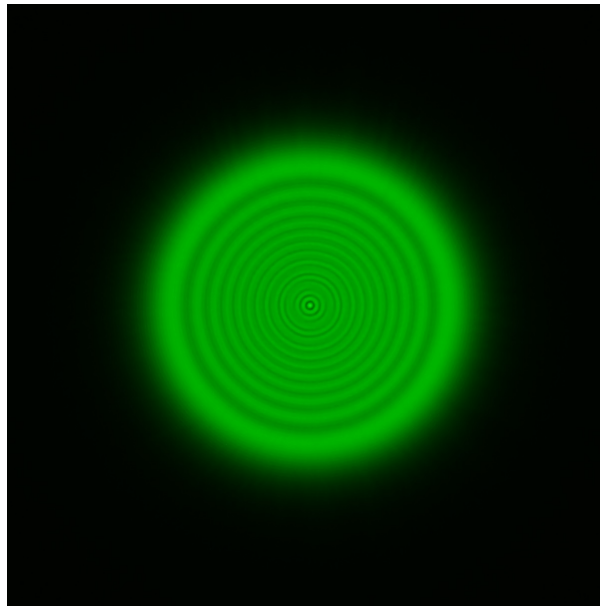
Εικόνα 4.5: Η περίπτωση περίθλασης Fresnel από ορθογώνιο διάφραγμα. Κατά μήκος του οριζόντιου άξονα, που η διάσταση του διαφράγματος είναι μεγαλύτερη, η κεντρική περιοχή είναι ομοιόμορφα φωτισμένη. Κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα η διάσταση του διαφράγματος είναι μικρότερη και οι κροσσοί είναι πιο έντονοι.



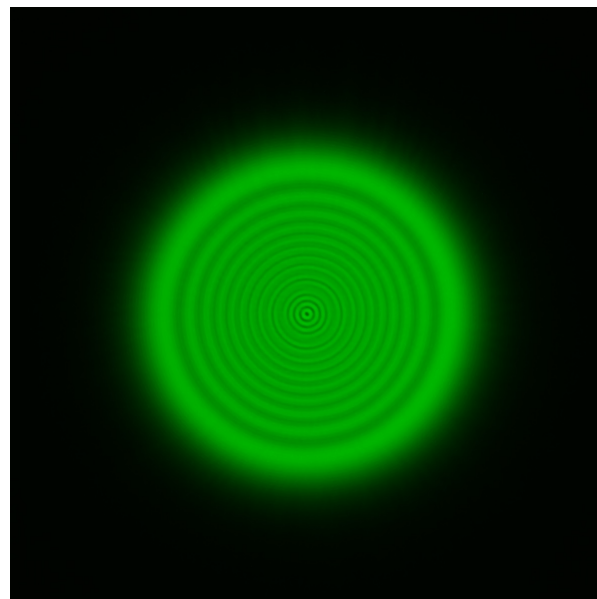
Εικόνα 4.6: Η περίπτωση περίθλασης Fresnel από τριγωνικό διάφραγμα.



Εικόνα 4.7: Η περίπτωση περίθλασης Fresnel από κυκλικό διάφραγμα, όταν το διάφραγμα είναι αρκετά μεγάλο ώστε στο κέντρο να παρατηρείται σχεδόν ομοιόμορφος φωτισμός.



Εικόνα 4.8: Η περίπτωση περίθλασης Fresnel από κυκλικό διάφραγμα, όταν στο κέντρο παρατηρείται ενισχυτική συμβολή.

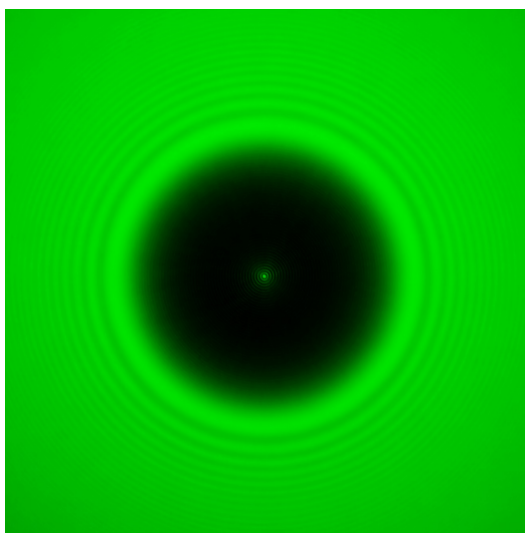


Εικόνα 4.9: Η περίπτωση περίθλασης Fresnel από κυκλικό διάφραγμα, όταν στο κέντρο παρατηρείται καταστρεπτική συμβολή.

Εξετάζουμε, επίσης, την περίθλαση Fresnel από κυκλικό διάφραγμα. Όπως εξηγείται στην Παράγραφο 2.2, όταν η διάμετρος του διαφράγματος στην απόσταση που αυτό τοποθετείται επιτρέπει τη διέλευση περιττού αριθμού ζωνών Fresnel, στο κέντρο παρατηρείται ενισχυτική συμβολή, οπότε είναι φωτεινό, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.8. Αντίθετα, αν η διάμετρος του

διαφράγματος επιτρέπει τη διέλευση άρτιου αριθμού ζωνών, το κέντρο θα είναι σκοτεινό, αφού παρατηρείται καταστρεπτική συμβολή, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.9.

Εκτενή πειράματα εκτελέστηκαν στην περίπτωση περίθλασης κοντινού πεδίου από κυκλικό εμπόδιο. Στην περίπτωση αυτή παρατηρείται το εντυπωσιακό φαινόμενο του φωτεινού σημείου Arago, όπως προβλέπεται από τη θεωρία στην Παράγραφο 2.2.4.



Εικόνα 4.10: Η περίπτωση περίθλασης Fresnel από κυκλικό εμπόδιο, όπου παρατηρείται το φωτεινό σημείο στο κέντρο της γεωμετρικής σκιάς.

Χρησιμοποιώντας τη διάταξη που περιγράφεται στην Παράγραφο 4.1, τοποθετούμε διαδοχικά στο φακό τέσσερα μεταλλικά σφαιρίδια με διαφορετική διάμετρο, ώστε να εξεταστεί η εξάρτηση του περιθλαστικού σχηματισμού από τη διάμετρο. Τα πειράματα έγιναν με τη χρήση τεσσάρων διαφορετικών διατάξεων laser, ώστε να μελετηθεί πειραματικά η επίδραση από το μήκος κύματος. Στον Πίνακα 4.1 φαίνονται οι διαθέσιμες διαμέτροι των κυκλικών εμποδίων ενώ στον Πίνακα 4.2 παρουσιάζονται τα χαρακτηριστικά των laser που χρησιμοποιήθηκαν.

Πίνακας 4.1: Πίνακας με τις διαμέτρους των διαφορετικών εμποδίων που χρησιμοποιήθηκαν στην εκτέλεση του πειράματος

Διάμετρος (mm)
19.8
11.9
6.9
3.96

Πίνακας 4.2: Πίνακας με το μήκος κύματος των διαφορετικών laser που χρησιμοποιήθηκαν στην εκτέλεση του πειράματος

Μήκος κύματος (nm)
632.8 (κόκκινο)
611.9 (πορτοκαλί)
543.5 (πράσινο)
405 (ιώδες)

Κεφάλαιο 5

Δημιουργία μοντέλου προσομοίωσης

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας δημιουργήθηκαν δύο κώδικες με GUI (Graphical User Interface) με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Matlab (2015a). Το πρώτο αφορά στην περίθλαση Fresnel από διαφράγματα με κυκλικό και τετράγωνο άνοιγμα και σχισμή, καθώς και τα αντίστοιχα εμπόδια. Σκοπός του κώδικα αυτού είναι η μελέτη του περιθλαστικού σχηματισμού και της έντασης του φωτός συναρτήσει των παραμέτρων του πειράματος που υπεισέρχονται. Ο δεύτερος κώδικας αφορά στην προσαρμογή του θεωρητικού μοντέλου στα πειράματα που εκτελέστηκαν στο Εργαστήριο Αστρονομίας και Εφαρμοσμένης Οπτικής του Τομέα Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής στο Τμήμα Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Σκοπός αυτού του κώδικα είναι η εξαγωγή των παραμέτρων που υπεισέρχονται στο πείραμα και για τις οποίες δεν μπορούμε να έχουμε ακριβείς μετρήσεις.

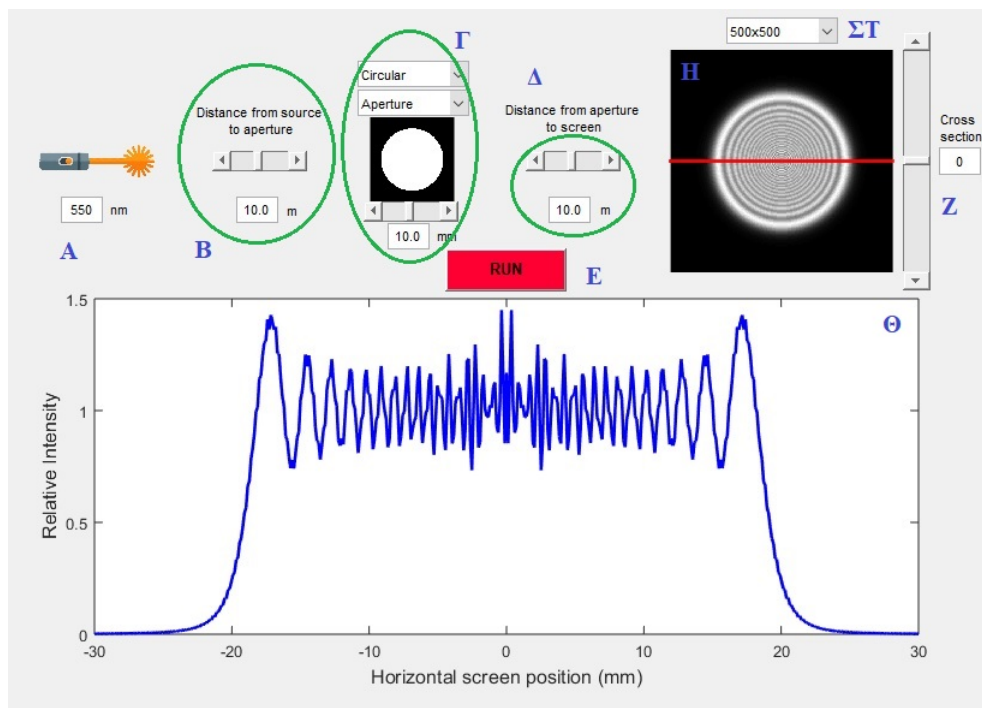
5.1 Ανάπτυξη λογισμικού για τη μελέτη της περίθλασης Fresnel

Στον πρώτο κώδικα που δημιουργήθηκε εξετάζεται η περίπτωση περίθλασης Fresnel από κυκλικό διάφραγμα και εμπόδιο, τετράγωνο διάφραγμα και εμπόδιο και σχισμή και ράβδο. Το GUI του κώδικα αυτού παρουσιάζεται στην Εικόνα 5.1.

Η επάνω σειρά του GUI παρουσιάζει μία πειραματική διάταξη. Στο πεδίο 5.1-A ο χρήστης εισάγει το επιθυμητό μήκος κύματος της πηγής. Το τμήμα 5.1-B αναφέρεται στην απόσταση πηγής - διαφράγματος. Ο χρήστης καθορίζει την απόσταση αυτή είτε εισάγοντας την τιμή της στο πεδίο είτε σύροντας την μπάρα δεξιά ή αριστερά.

Το τμήμα 5.1-Γ αναφέρεται στην επιλογή του διαφράγματος. Οι δύο επιλογές επάνω είναι pop-up menu και αφορούν στο σχήμα του διαφράγματος και στην επιλογή διαφράγματος ή εμπόδιου. Όταν προσδιοριστεί το διάφραγμα, αυτό παρουσιάζεται στην εικόνα στο μέσο του τμήματος 5.1-Γ. Κάτω από την εικόνα του διαφράγματος υπάρχει μία μπάρα και ένα πεδίο από τα οποία ο χρήστης καθορίζει τη διάσταση του διαφράγματος, δηλαδή την ακτίνα του κύκλου, την πλευρά του τετραγώνου και το εύρος της σχισμής.

Το τμήμα 5.1-Δ αναφέρεται στην απόσταση διαφράγματος - πετάσματος παρατήρησης. Όπως στο τμήμα 5.1-B, ο χρήστης προσδιορίζει την τιμή της απόστασης διαφράγματος - πετάσματος παρατήρησης είτε εισάγοντας την τιμή είτε σύροντας την μπάρα.

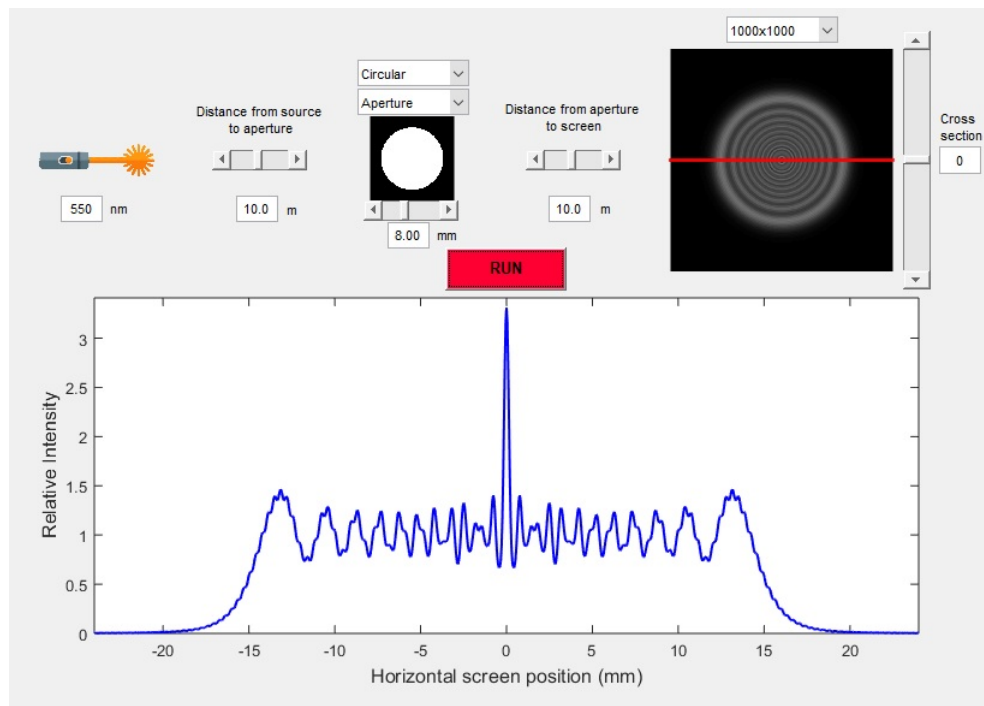


Εικόνα 5.1: Το πρόγραμμα για το θεωρητικό υπολογισμό του περιθλαστικού σχηματισμού από διαφράγματα διαφόρων σχημάτων

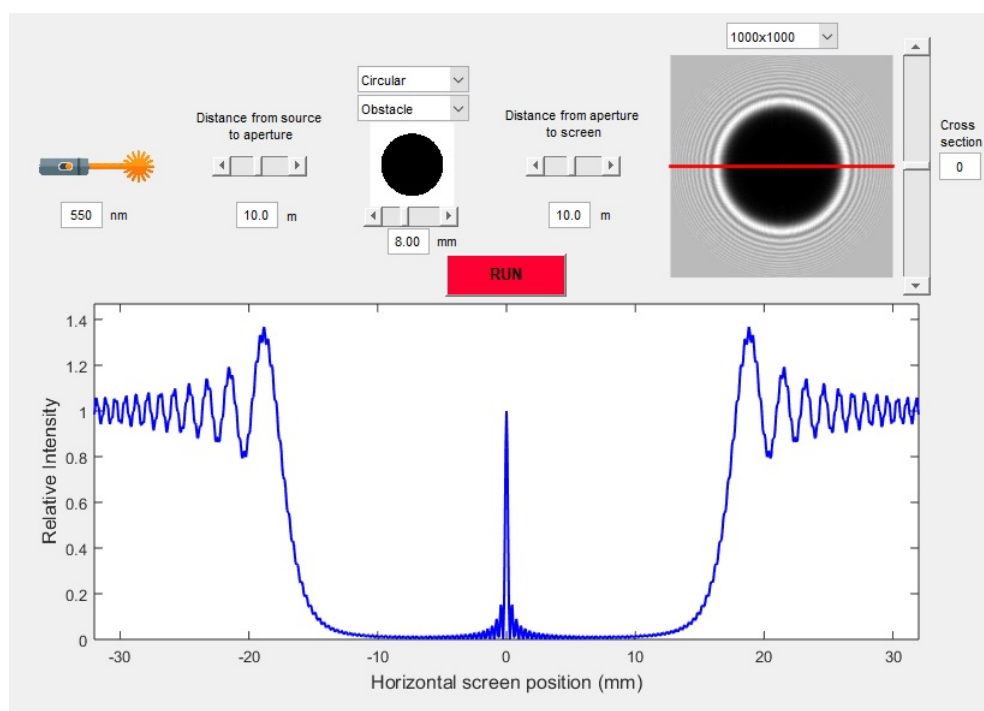
Το κουμπί 5.1-E εκτελεί τον υπολογισμό του περιθλαστικού σχηματισμού το οποίο παρουσιάζεται στην εικόνα 5.1-H. Το pop-up menu 5.1-ΣΤ καθορίζει την ανάλυση που επιθυμεί ο χρήστης. Το τμήμα 5.1-Z καθορίζει την κόκκινη οριζόντια ευθεία που εμφανίζεται στον περιθλαστικό σχηματισμό στην εικόνα 5.1-H. Αν η ανάλυση του περιθλαστικού σχηματισμού είναι 500×500 , τότε η θέση της ευθείας αυτής μπορεί να λάβει τιμές από -250 έως 250 και ούτω καθεξής για τις υπόλοιπες επιλογές. Με επιλεγμένη θέση της ευθείας αυτής, στο παράθυρο 5.1-Θ παρουσιάζεται το διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει της οριζόντιας απόστασης στο πέτασμα παρατήρησης. Η κόκκινη ευθεία μπορεί να μετακινηθεί πάνω ή κάτω, μεταβάλλοντας κάθε φορά το διάγραμμα στο παράθυρο 5.1-Θ.

5.1.1 Επιλογή διαφράγματος

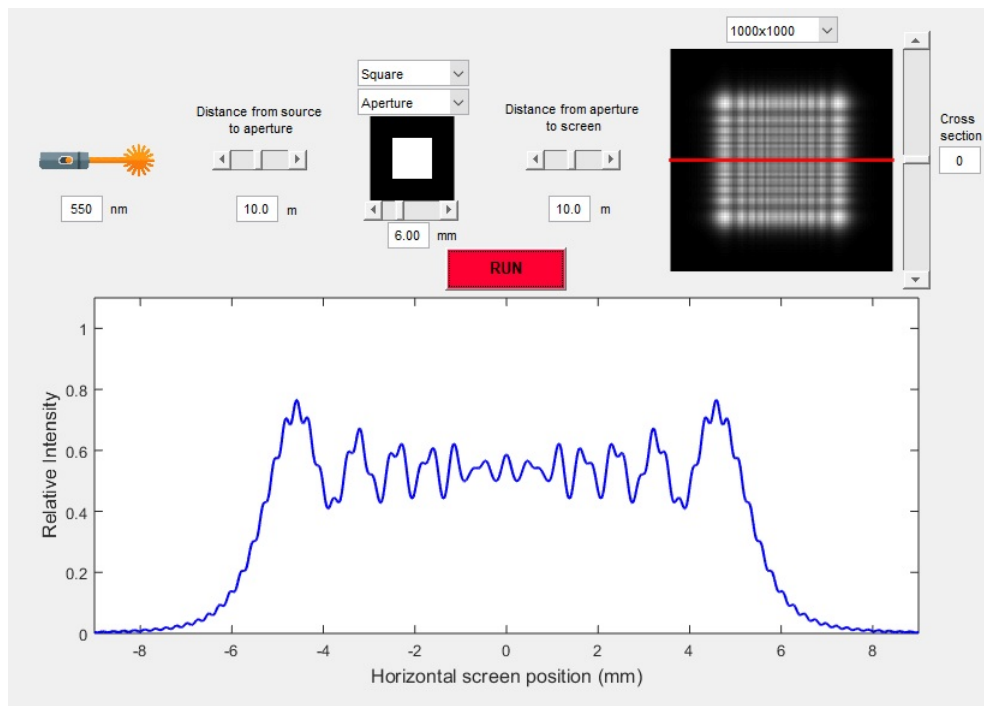
Το πρόγραμμα προσφέρει τρεις επιλογές για το σχήμα του διαφράγματος και την επιλογή αν θα είναι άνοιγμα ή εμπόδιο, δηλαδή συνολικά 6 διαφορετικά διαφράγματα. Στις Εικόνες 5.2, 5.3, 5.4, 5.5, 5.6 και 5.7 παρουσιάζονται όλες οι περιπτώσεις αυτών των διαφραγμάτων.



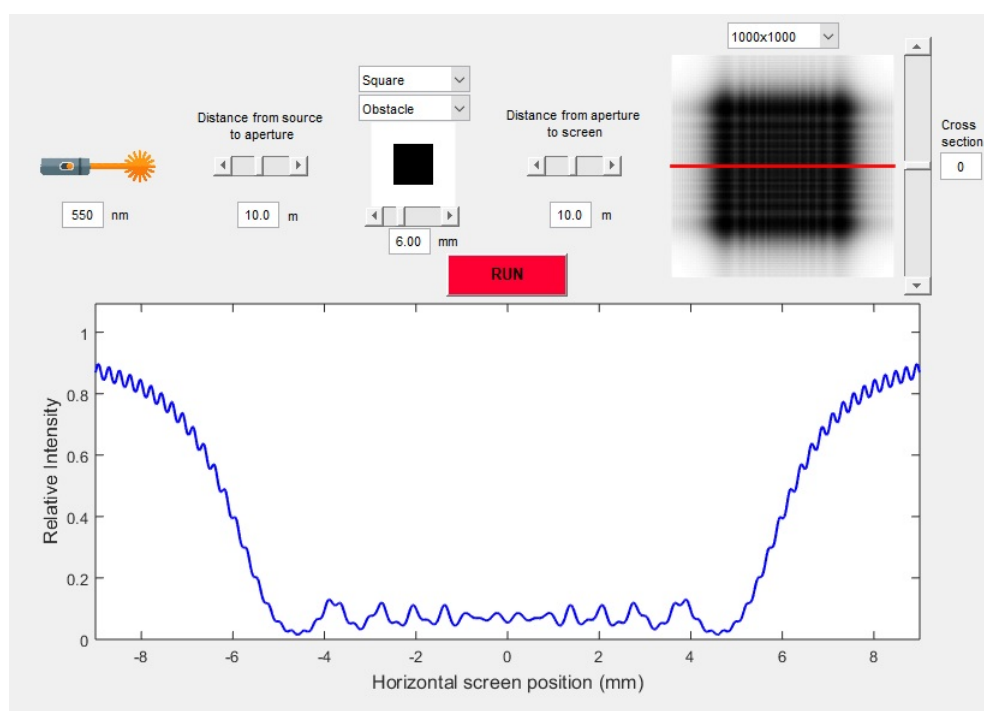
Εικόνα 5.2: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από διάφραγμα με κυκλικό άνοιγμα.



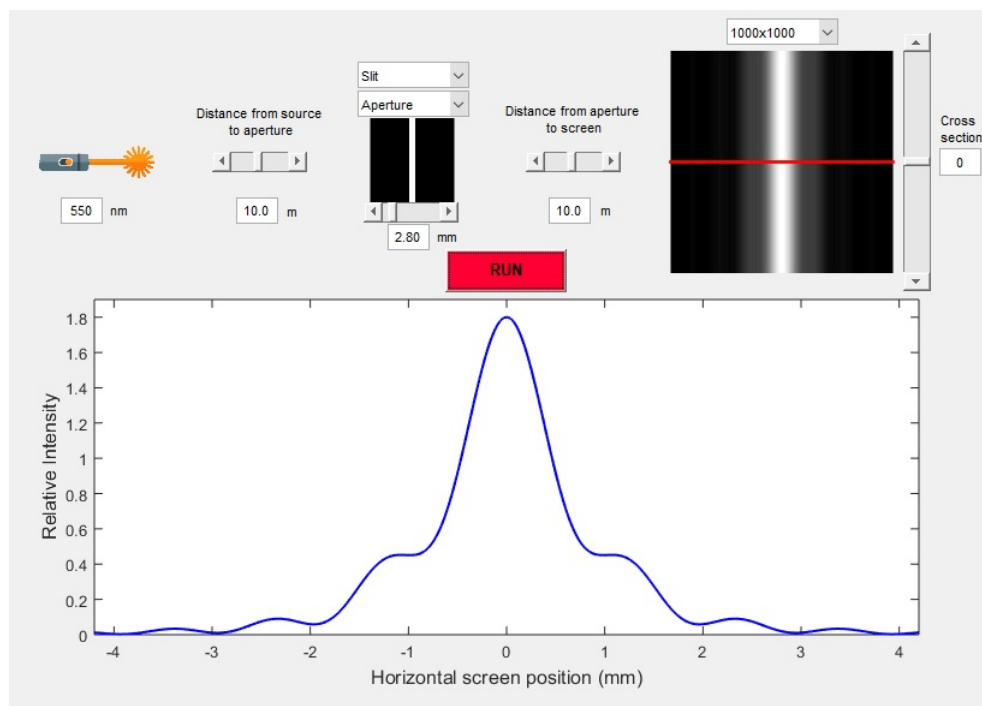
Εικόνα 5.3: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από διάφραγμα με κυκλικό εμπόδιο.



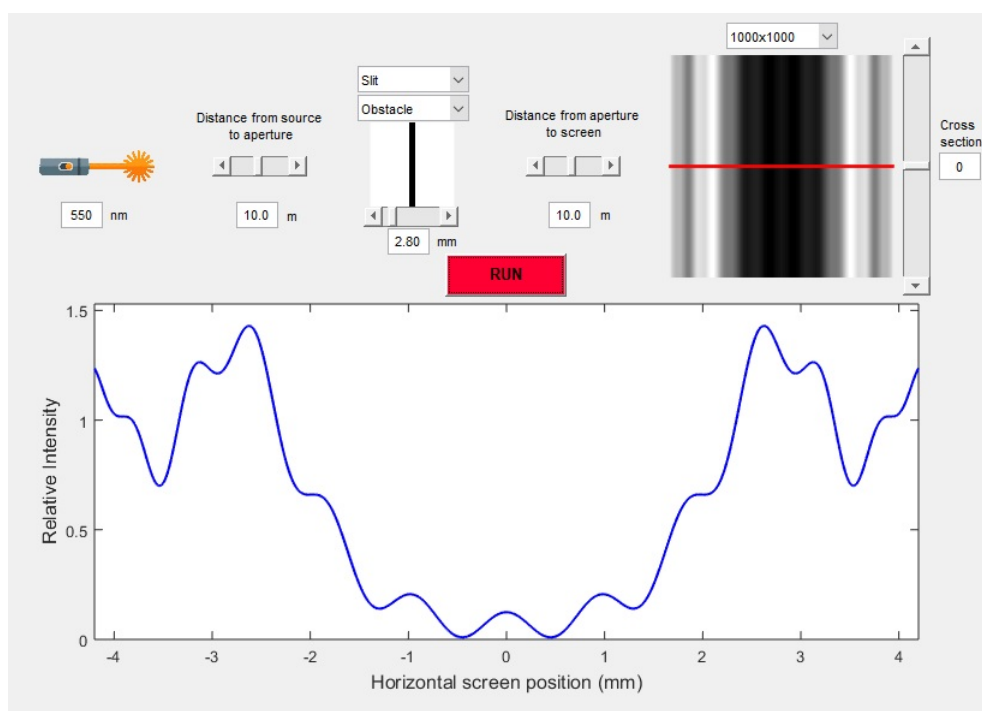
Εικόνα 5.4: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από διάφραγμα με τετραγωνικό άνοιγμα.



Εικόνα 5.5: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από διάφραγμα με τετραγωνικό εμπόδιο.



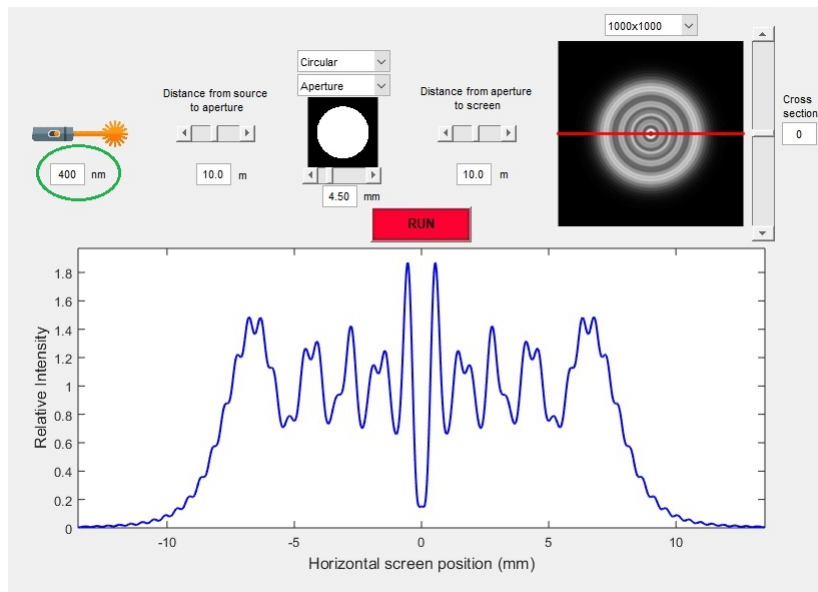
Εικόνα 5.6: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από διάφραγμα με σχισμή



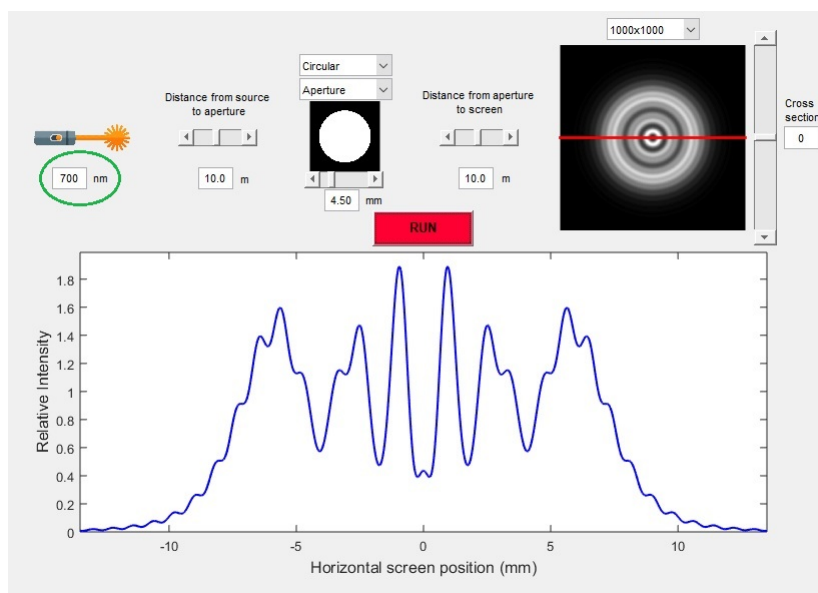
Εικόνα 5.7: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από ράβδο

5.1.2 Εισαγωγή παραμέτρων

Στο πρόγραμμα ο χρήστης μπορεί να εισάγει το μήκος κύματος, την απόσταση πηγής - διαφράγματος και την απόσταση διαφράγματος - πετάσματος παρατήρησης. Τέλος, εισάγεται η διάσταση του διαφράγματος, δηλαδή η ακτίνα του κύκλου, η πλευρά του τετραγώνου ή το πάχος της σχισμής. Εξετάζεται η μεταβολή του περιθλαστικού σχηματισμού για κάθε μία από αυτές τις παραμέτρους θεωρώντας περίθλαση Fresnel από κυκλικό διάφραγμα. Στις Εικόνες 5.8 και 5.9 παρατηρούμε τη διαφορά στον περιθλαστικό σχηματισμό και κατά συνέπεια στο διάγραμμα σχετικής έντασης όταν μεταβάλλεται το μήκος κύματος της πηγής, ενώ η υπόλοιπη διάταξη διατηρείται σταθερή.

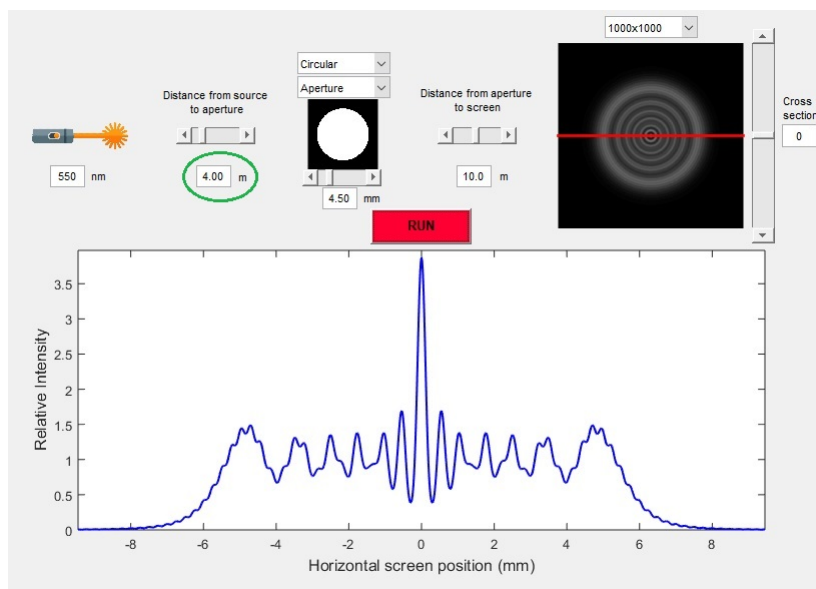


Εικόνα 5.8: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα χρησιμοποιώντας πηγή φωτός με μήκος κύματος 400 nm. Η τιμή αυτή εισάγεται στο αντίστοιχο πεδίο που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο.

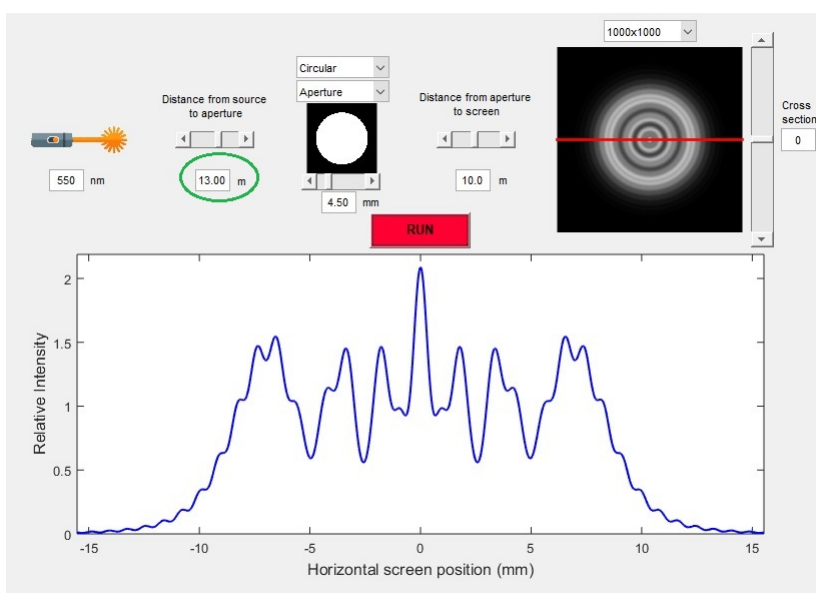


Εικόνα 5.9: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα χρησιμοποιώντας πηγή φωτός με μήκος κύματος 700 nm. Η τιμή αυτή εισάγεται στο αντίστοιχο πεδίο που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο.

Στις Εικόνες 5.10 και 5.11 παρουσιάζεται η μεταβολή στον περιθλαστικό σχηματισμό για διαφορετικές τιμές της απόστασης πηγής - διαφράγματος.

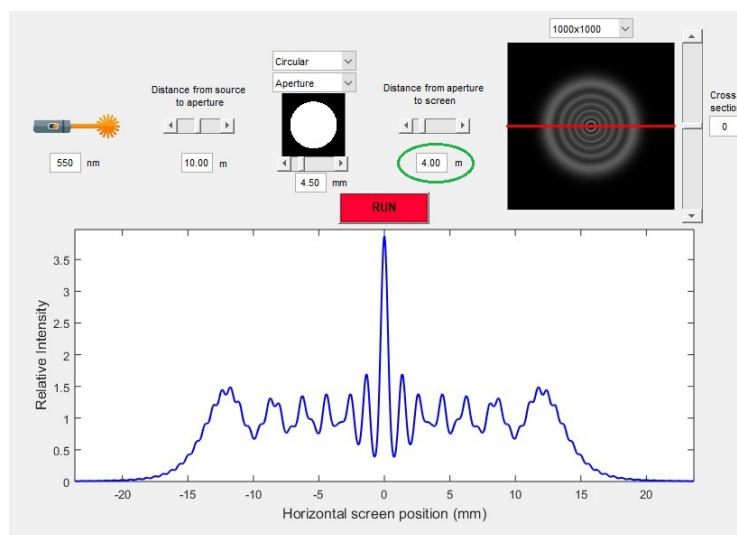


Εικόνα 5.10: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα εισάγοντας τιμή της απόστασης πηγής - διαφράγματος 4 m. Η τιμή αυτή είτε εισάγεται στο αντίστοιχο πεδίο που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο είτε επιλέγεται με την αντίστοιχη μπάρα.

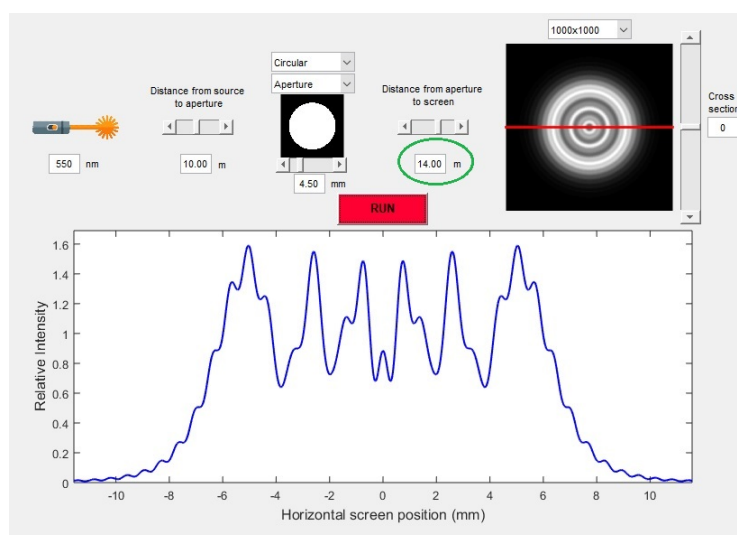


Εικόνα 5.11: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα εισάγοντας τιμή της απόστασης πηγής - διαφράγματος 13 m. Η τιμή αυτή είτε εισάγεται στο αντίστοιχο πεδίο που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο είτε επιλέγεται με την αντίστοιχη μπάρα.

Στις Εικόνες 5.12 και 5.13 παρατηρείται η διαφορά στον περιθλαστικό σχηματισμό και στο διάγραμμα σχετικής έντασης όταν μεταβάλλεται η απόσταση διαφράγματος - πετάσματος παρατήρησης.

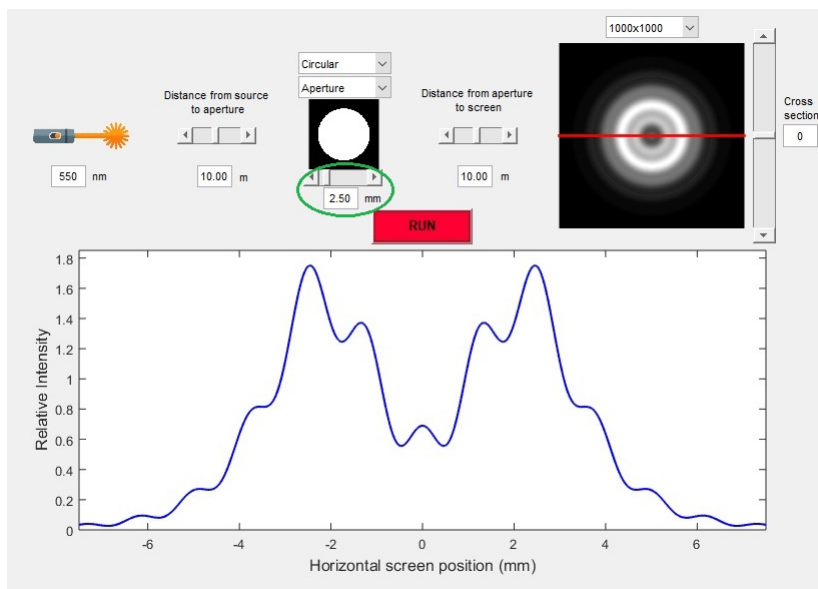


Εικόνα 5.12: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα εισάγοντας τιμή της απόστασης διαφράγματος - πετάσματος 4 m. Η τιμή αυτή είτε εισάγεται στο αντίστοιχο πεδίο που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο είτε επιλέγεται με την αντίστοιχη μπάρα.

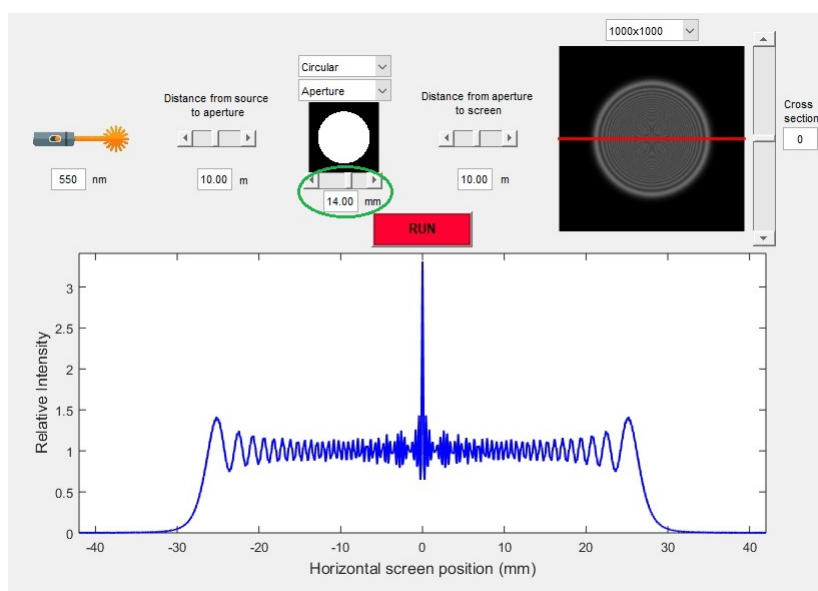


Εικόνα 5.13: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα εισάγοντας τιμή της απόστασης διαφράγματος - πετάσματος 14 m. Η τιμή αυτή είτε εισάγεται στο αντίστοιχο πεδίο που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο είτε επιλέγεται με την αντίστοιχη μπάρα.

Τέλος, εξετάζεται η περίπτωση της μεταβολής της διαμέτρου του διαφράγματος, η οποία παρουσιάζεται στις Εικόνες 5.14 και 5.15



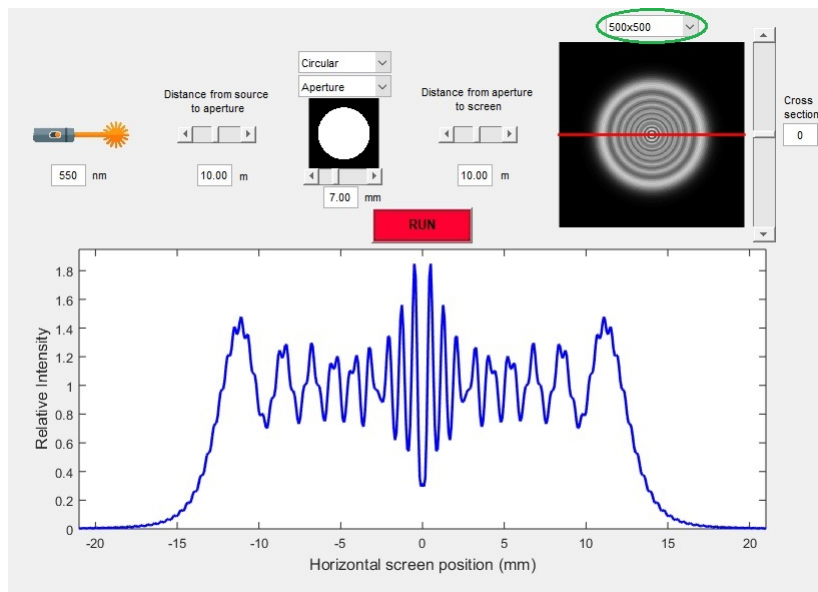
Εικόνα 5.14: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα εισάγοντας τιμή της διαμέτρου του διαφράγματος 2.5 mm. Η τιμή αυτή είτε εισάγεται στο αντίστοιχο πεδίο που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο είτε επιλέγεται με την αντίστοιχη μπάρα.



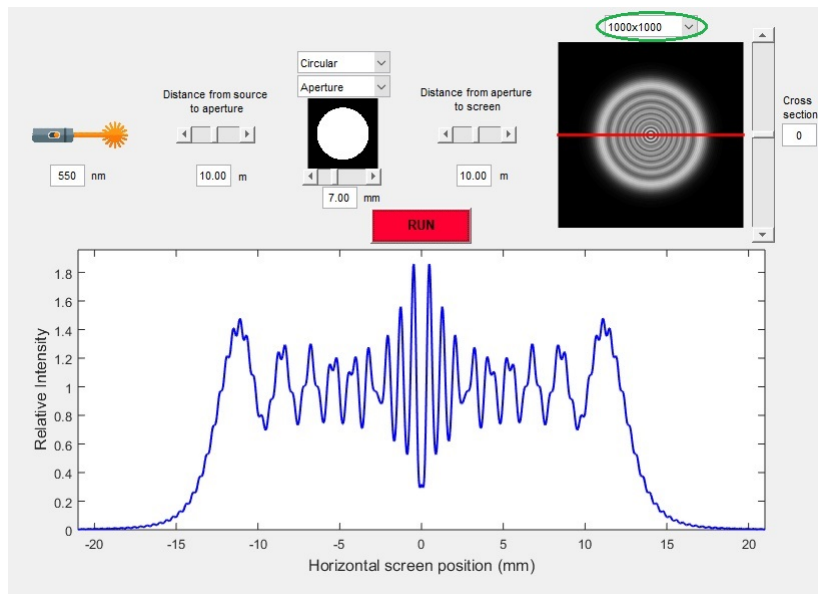
Εικόνα 5.15: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα εισάγοντας τιμή της διαμέτρου του διαφράγματος 14 mm. Η τιμή αυτή είτε εισάγεται στο αντίστοιχο πεδίο που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο είτε επιλέγεται με την αντίστοιχη μπάρα.

5.1.3 Επιλογή ανάλυσης

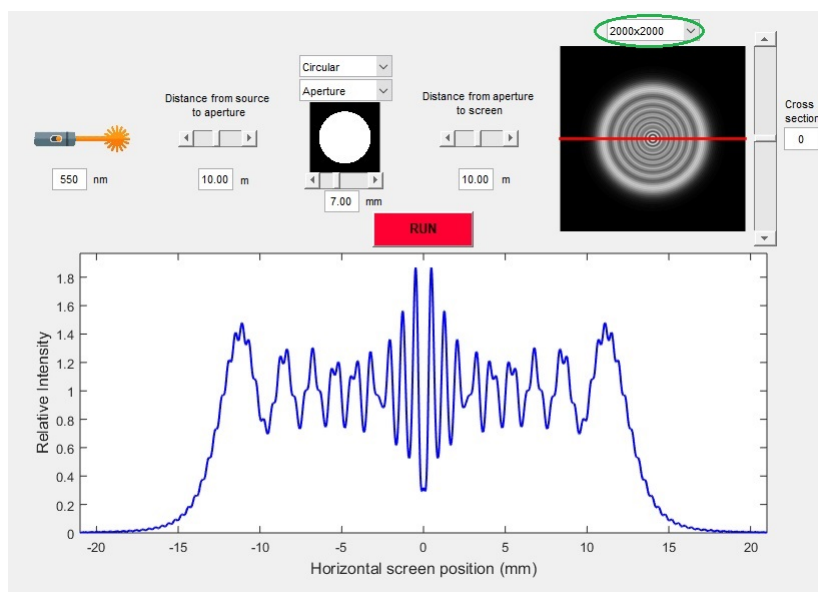
Ο χρήστης μπορεί να επιλέξει την ανάλυση με την οποία θα παρουσιάζεται ο περιθλαστικός σχηματισμός και κατά συνέπεια το διάγραμμα της σχετικής έντασης. Η επιλογή γίνεται με το pop-up menu που εμφανίζεται στο πρόγραμμα και οι δυνατές επιλογές είναι 500×500 , 1000×1000 και 2000×2000 pixel. Όσο πιο καλή είναι η ανάλυση, τόσο περισσότερο χρόνο απαιτεί ο κώδικας για τον υπολογισμό της περίθλασης. Στις Εικόνες 5.16, 5.17 και 5.18 παρουσιάζεται το GUI του κώδικα με επιλεγμένη διαφορετική ανάλυση του περιθλαστικού σχηματισμού. Η διαφορά αυτή φαίνεται πιο έντονη αν παρατηρηθεί το διάγραμμα σχετικής έντασης.



Εικόνα 5.16: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα με ανάλυση 500×500 pixels. Η τιμή αυτή επιλέγεται από το pop-up menu που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο.



Εικόνα 5.17: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα με ανάλυση 1000×1000 pixels. Η τιμή αυτή επιλέγεται από το pop-up menu που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο.

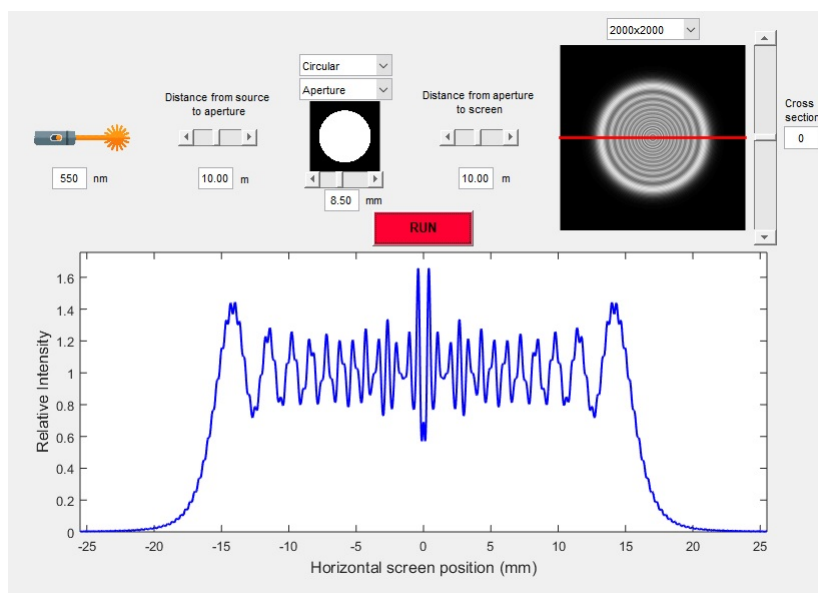


Εικόνα 5.18: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα με ανάλυση 2000×2000 pixels. Η τιμή αυτή επιλέγεται από το pop-up menu που βρίσκεται στο πράσινο οβάλ πλαίσιο.

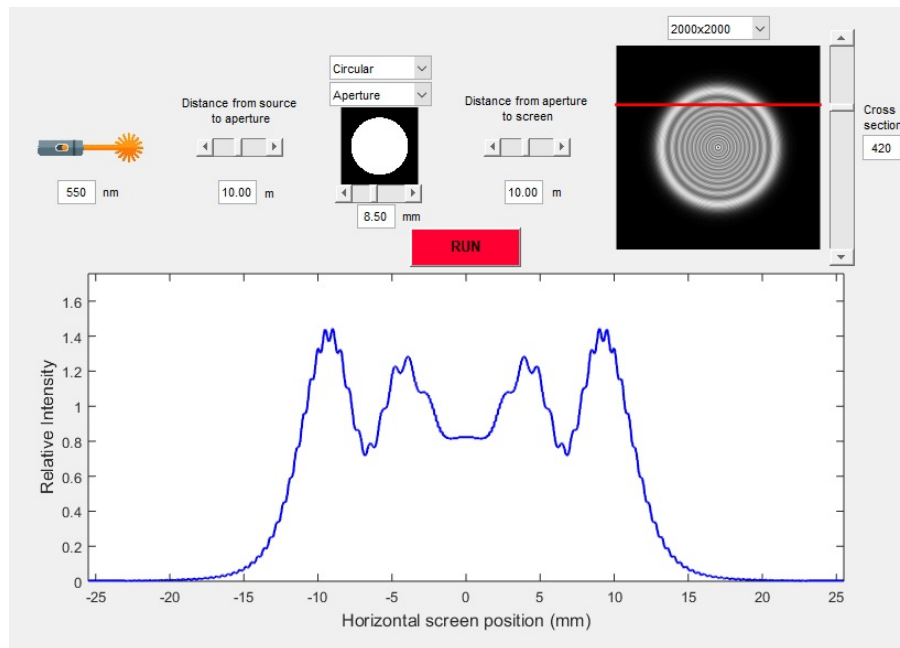
5.1.4 Διάγραμμα έντασης φωτός

Αφού υπολογιστεί ο περιθλαστικός σχηματισμός, ο χρήστης μπορεί να μετακινήσει πάνω ή κάτω την κόκκινη οριζόντια ευθεία που εμφανίζεται στο σχηματισμό. Η ευθεία αυτή σαρώνει τον περιθλαστικό σχηματισμό και παρουσιάζει το διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει της

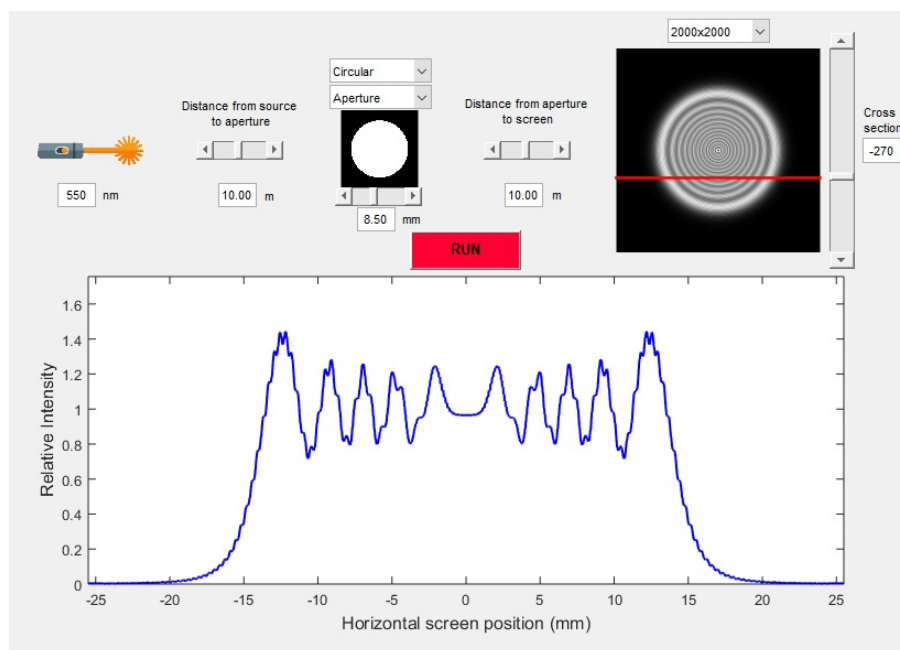
απόστασης πάνω στο πέτασμα κατά μήκος της ευθείας αυτής. Στις εικόνες 5.19, 5.20 και 5.21 παρουσιάζεται το GUI όταν αλλάζει μόνο η θέση της ευθείας πάνω στον περιθλαστικό σχηματισμό, οπότε μεταβάλλεται και το διάγραμμα της σχετικής έντασης.



Εικόνα 5.19: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα και εμφάνιση του διαγράμματος της σχετικής έντασης στο κέντρο του σχηματισμού.



Εικόνα 5.20: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα και εμφάνιση του διαγράμματος της σχετικής έντασης όταν η οριζόντια ευθεία βρίσκεται 420 pixel πάνω από το κέντρο του σχηματισμού.



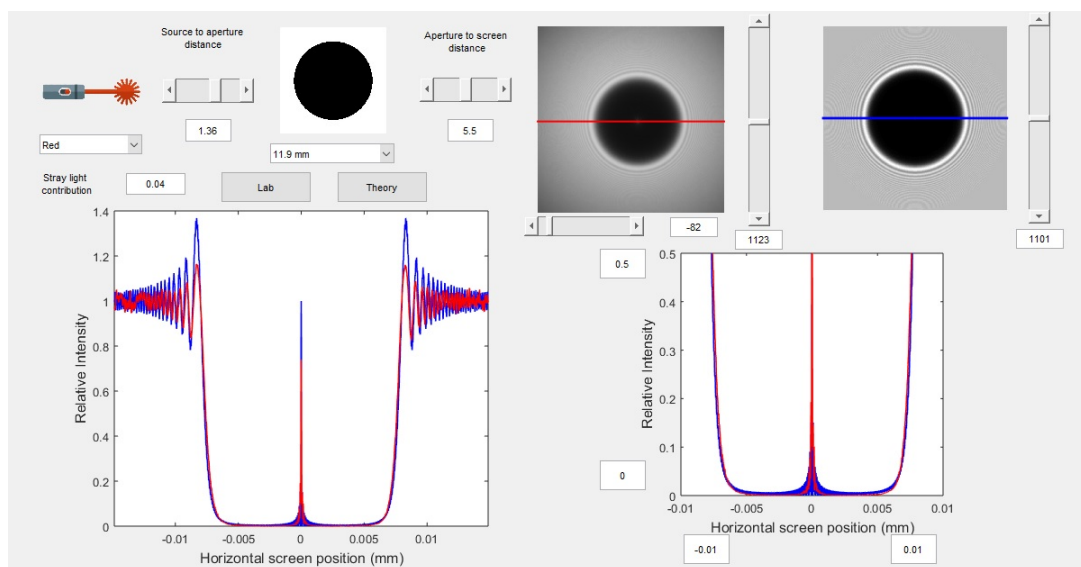
Εικόνα 5.21: Υπολογισμός περιθλαστικού σχηματισμού από κυκλικό διάφραγμα και εμφάνιση του διαγράμματος της σχετικής έντασης όταν η οριζόντια ευθεία βρίσκεται στη θέση -270, δηλαδή 270 pixel κάτω από το κέντρο του σχηματισμού.

5.2 Προσαρμογή θεωρητικού μοντέλου στα πειραματικά δεδομένα

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας δημιουργήθηκε ένας δεύτερος κώδικας ο οποίος προσαρμόζει ένα θεωρητικό μοντέλο στις πειραματικές εικόνες. Ο κώδικας αυτός δημιουργήθηκε με Graphical User Interface (GUI) χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού Matlab2015a.

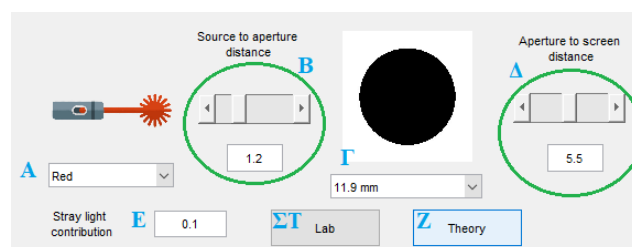
5.2.1 Περιγραφή διάταξης

Το GUI του κώδικα με σκοπό την προσαρμογή θεωρητικού μοντέλου στα πειραματικά δεδομένα παρουσιάζεται στην Εικόνα 5.22.



Εικόνα 5.22: Το GUI του κώδικα που δημιουργήθηκε για την προσαρμογή θεωρητικού μοντέλου στα πειραματικά δεδομένα.

Με σκοπό την εξήγηση των παραμέτρων και της λειτουργίας του GUI του κώδικα, το διαίρουμε σε τρία τμήματα. Το πρώτο τμήμα φαίνεται στην Εικόνα 5.23.

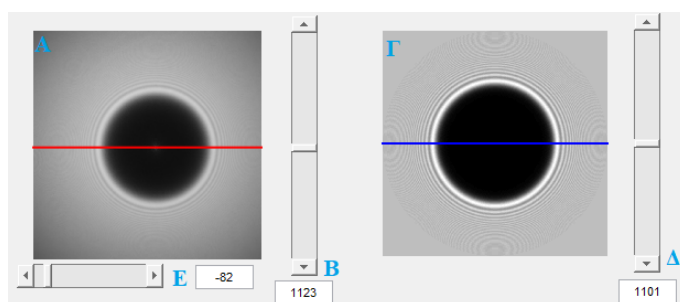


Εικόνα 5.23: Το τμήμα του GUI του κώδικα στο οποίο ο χρήστης εισάγει τις παραμέτρους.

Το pop-up menu 5.23-A περιλαμβάνει τις επιλογές των πηγών laser που χρησιμοποιήθηκαν στα πειράματα. Στο τμήμα 5.23-B ο χρήστης καθορίζει την απόσταση πηγής - εμποδίου είτε σύροντας την μπάρα δεξιά ή αριστερά είτε εισάγοντας την αντίστοιχη τιμή στο πεδίο. Η pop-up menu στο τμήμα 5.23-Γ περιέχει όλες τις επιλογές των διαμέτρων των εμποδίων που χρησιμοποιήθηκαν στο πείραμα. Το τμήμα 5.23-Δ αναφέρεται στην απόσταση εμποδίου - πετάσματος παρατήρησης και, αντίστοιχα με την απόσταση πηγής - εμποδίου στο 5.23-B, είτε εισάγεται η τιμή στο πεδίο είτε επιλέγεται η επιθυμητή απόσταση μετακινώντας την μπάρα δεξιά ή αριστερά.

Το πεδίο στο 5.23-E αναφέρεται στη συνεισφορά του διάχυτου φωτός που υπεισέρχεται στο πείραμα. Ο παράγοντας που εισάγεται στο πεδίο αυτό αφαιρείται από την παρατηρούμενη ένταση. Με το κουμπί 5.23-ΣΤ εκτελείται ο υπολογισμός του περιθλαστικού σχηματισμού με τις παραμέτρους που έχει εισάγει ο χρήστης, ενώ με το κουμπί 5.23-Z υπολογίζεται ο περιθλαστικός σχηματισμός όπως προβλέπεται από τη θεωρία.

Το δεύτερο τμήμα του GUI φαίνεται στην Εικόνα 5.24.

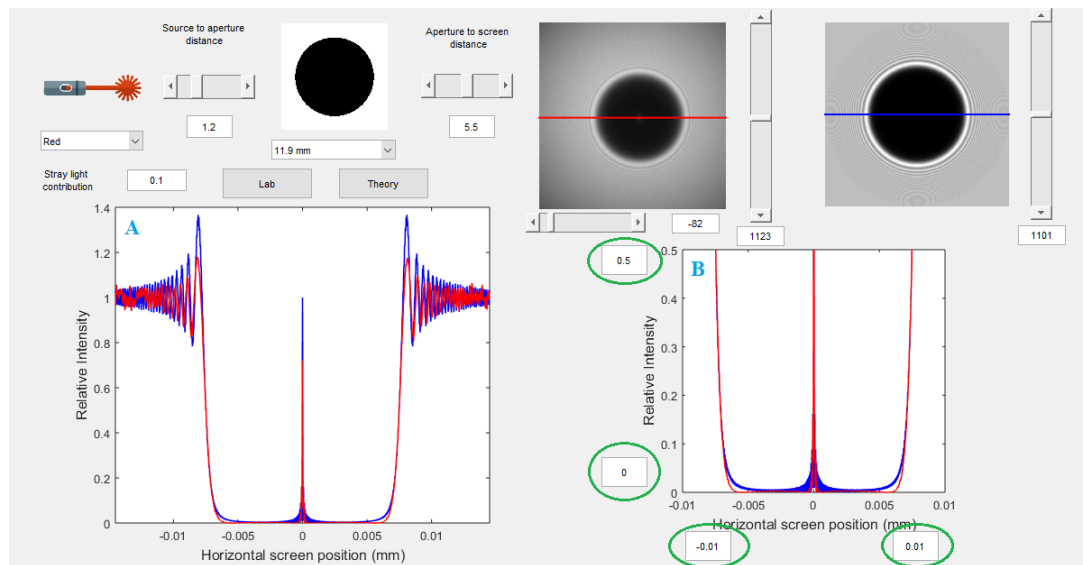


Εικόνα 5.24: Το τμήμα του GUI του κώδικα στο οποίο εμφανίζονται οι περιθλαστικοί σχηματισμοί.

Η εικόνα στο 5.24-A παρουσιάζει τον περιθλαστικό σχηματισμό όπως παρατηρείται στο εργαστήριο ενώ η εικόνα στο 5.24-B παρουσιάζει τον περιθλαστικό σχηματισμό όπως προβλέπεται από τη θεωρία. Στον πειραματικό περιθλαστικό σχηματισμό εμφανίζεται μία κόκκινη οριζόντια ευθεία η οποία μετακινείται με την μπάρα στο 5.24-Γ ή το αντίστοιχο πεδίο που βρίσκεται κάτω από την μπάρα. Ομοίως, στον θεωρητικό περιθλαστικό σχηματισμό εμφανίζεται μία μπλε οριζόντια ευθεία η οποία μετακινείται πάνω ή κάτω μετακινώντας αντίστοιχα την μπάρα στο 5.24-Δ ή εισάγοντας την τιμή στο αντίστοιχο πεδίο. Το πεδίο και η οριζόντια μπάρα στο 5.24-E αναφέρονται στη μετατόπιση σε pixels που χρειάζεται να γίνει ώστε το κέντρο του πειραματικού περιθλαστικού σχηματισμού να συμπίπτει με το κέντρο του θεωρητικού περιθλαστικού σχηματισμού.

Το τελευταίο τμήμα του GUI αναφέρεται στα δύο διαγράμματα σχετικής έντασης που παρουσιάζονται στην Εικόνα 5.25.

Το διάγραμμα 5.25-A είναι το διάγραμμα σχετικής έντασης συναρτήσει της οριζόντιας απόστασης στο πέτασμα παρατήρησης στο οποίο απεικονίζεται με μπλε χρώμα η σχετική ένταση όπως αναμένεται από τη θεωρία και με κόκκινο χρώμα η σχετική ένταση όπως προκύπτει από το πείραμα. Το διάγραμμα αυτό μεταβάλλεται καθώς μετακινούνται οι οριζόντιες ευθείες στους περιθλαστικούς σχηματισμούς. Το διάγραμμα 5.25-B απεικονίζει το διάγραμμα 5.25-A με τη διαφορά ότι ο χρήστης μπορεί να επιλέξει μεγέθυνση εισάγοντας τα όρια που επιθυμεί στον οριζόντιο και τον κατακόρυφο άξονα στα αντίστοιχα πεδία που σημειώνονται στην Εικόνα 5.25 με

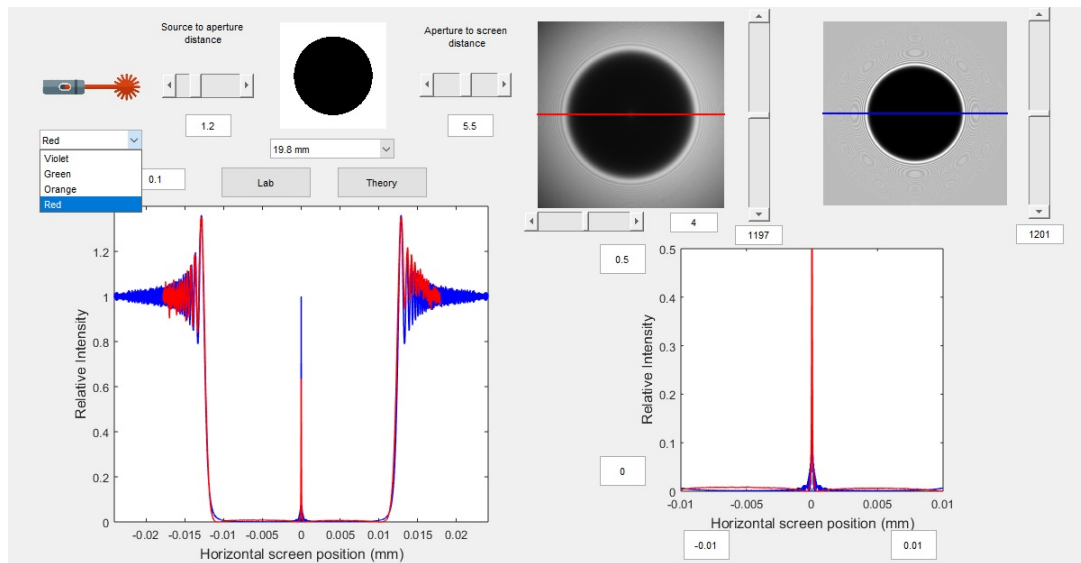


Εικόνα 5.25: Το GUI του κώδικα στο οποίο σημειώνονται με πράσινο οβάλ πλαίσιο τα πεδία στα οποία εισάγονται τα όρια των αξόνων, ώστε να επιτευχθεί μεγέθυνση του διαγράμματος σχετικής έντασης.

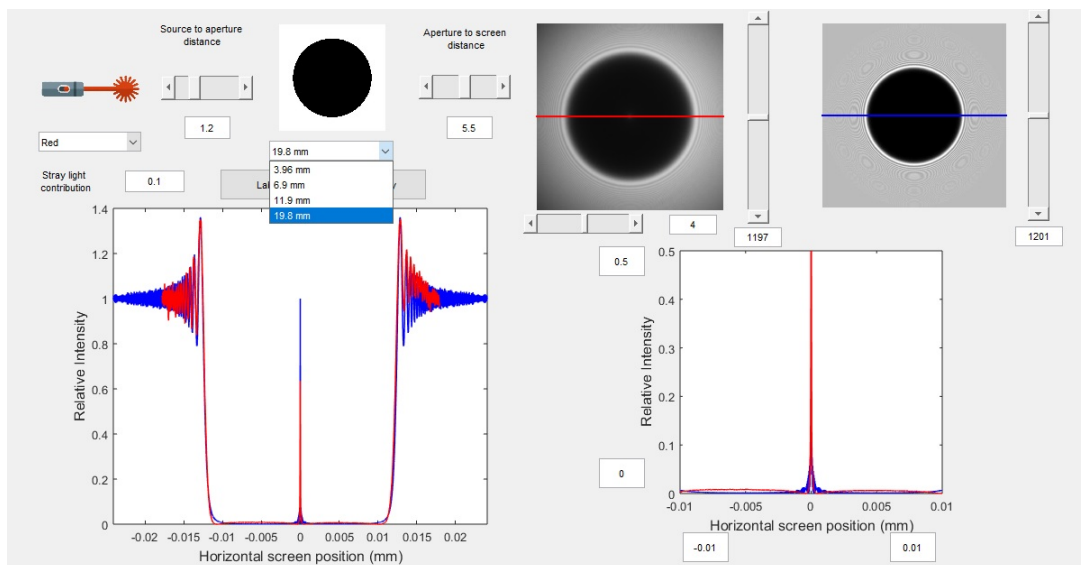
πράσινο οβάλ πλαίσιο.

Όπως αναφέρεται και στην Παράγραφο 4.1, το πείραμα της περίθλασης από κυκλικό εμπόδιο εκτελέστηκε για τέσσερις διαφορετικές διαμέτρους και χρησιμοποιώντας τέσσερις διαφορετικές πηγές laser. Μετά την έναρξη του προγράμματος ο χρήστης επιλέγει το laser και τη διάμετρο του κυκλικού εμποδίου που επιθυμεί χρησιμοποιώντας τα pop-up menus που εμφανίζονται στο πρόγραμμα, όπως φαίνεται στις Εικόνες 5.26 και 5.27.

Αφού ο χρήστης επιλέξει την πειραματική διάταξη που επιθυμεί, το πρόγραμμα υπολογίζει το θεωρητικό μοντέλο χρησιμοποιώντας το κουμπί "Theory" και με το κουμπί "Lab" εμφανίζεται η πειραματική εικόνα.



Εικόνα 5.26: Το παράθυρο του προγράμματος στο οποίο φαίνεται το pop-up menu για την επιλογή της πηγής laser.



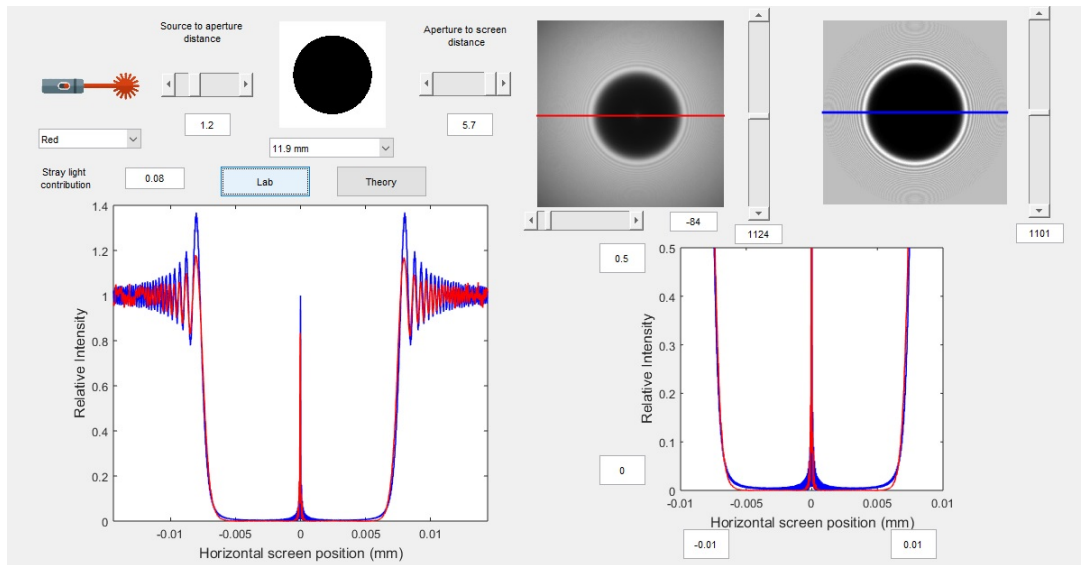
Εικόνα 5.27: Το παράθυρο του προγράμματος στο οποίο φαίνεται το pop-up menu για την επιλογή της διαμέτρου του κυκλικού εμποδίου. Οι επιλογές της διαμέτρου αντιστοιχούν στις διαμέτρους των μεταλλικών σφαιριδίων που ήταν διαθέσιμα για τα πειράματα αυτά.

5.3 Εισαγωγή παραμέτρων

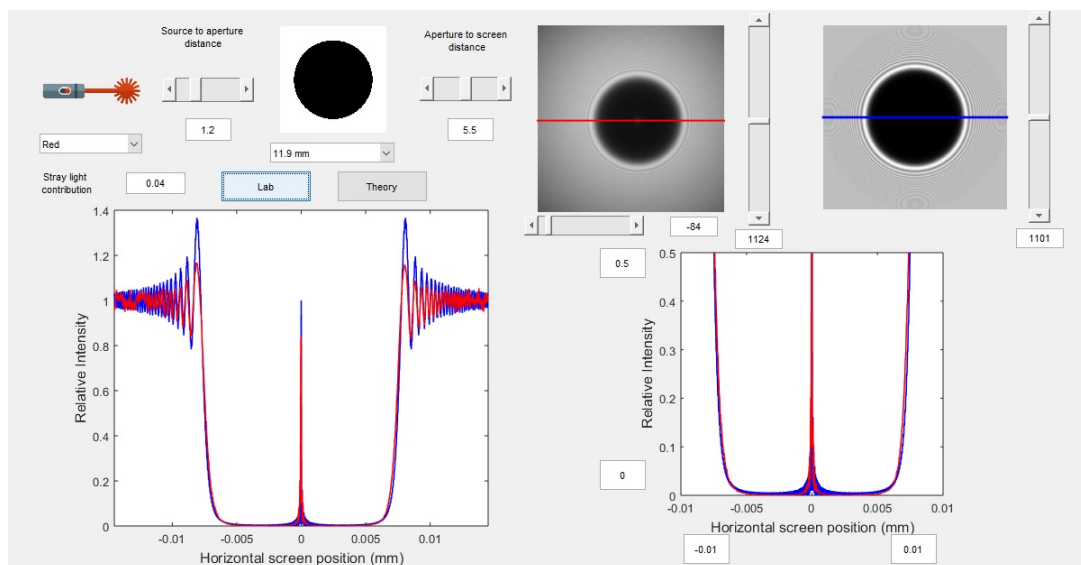
Στη συνέχεια ο χρήστης καθορίζει με ακρίβεια τις παραμέτρους που υπεισέρχονται στο πείραμα. Ανάλογα με την προσαρμογή του θεωρητικού μοντέλου στο πειραματικό, ο χρήστης μπορεί να εισάγει την απόσταση πηγής - εμποδίου και την απόσταση εμποδίου - πετάσματος.

Επιπλέον, στον υπολογισμό αυτό πρέπει να συμπεριληφθεί η συνεισφορά από το διάχυτο φως, η οποία ήταν αναπόφευκτη. Η συνεισφορά αυτή αυξάνεται όσο μειώνεται η διάμετρος του εμποδίου. Αν η διάμετρος του εμποδίου είναι μεγάλη, τότε επιτυγχάνονται συνθήκες σκότους στη γεωμετρική σκιά του εμποδίου, ενώ αν η διάμετρος είναι μικρή, το διάχυτο φως συνεισφέρει σε μεγάλο βαθμό ακόμα και εντός της γεωμετρικής σκιάς του εμποδίου. Στο πρόγραμμα ο χρήστης μπορεί να επιλέξει τον παράγοντα συνεισφοράς του διάχυτου φωτός, προκειμένου να επιτευχθεί κατά το βέλτιστο τρόπο η προσαρμογή του θεωρητικού μοντέλου στον πειραματικό περιθλαστικό σχηματισμό.

Στην Εικόνα 5.28 φαίνεται η λανθασμένη επιλογή των παραμέτρων, μέχρι να καταλήξουμε στην καλύτερη δυνατή προσαρμογή, όπως εμφανίζεται στην Εικόνα 5.29. Σημειώνεται ότι η συνεισφορά από το διάχυτο φως συνεχίζει να υφίσταται, ακόμα και έπειτα από την αφαίρεση του παράγοντα διάχυτου φωτός.

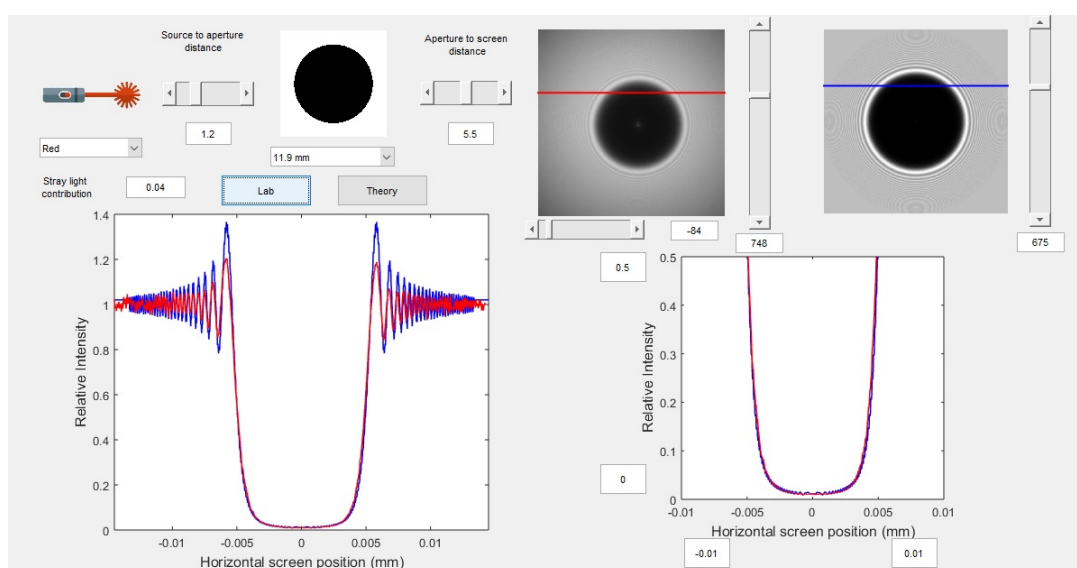


Εικόνα 5.28: Προσαρμογή του θεωρητικού μοντέλου στα πειραματικά δεδομένα. Η προσαρμογή αυτή δεν είναι ικανοποιητική οπότε δοκιμάζονται νέες παράμετροι.



Εικόνα 5.29: Προσαρμογή του θεωρητικού μοντέλου στα πειραματικά δεδομένα με την καλύτερη δυνατή επιλογή παραμέτρων.

Για να μπορεί να ελεγχθεί καλύτερα η προσαρμογή του θεωρητικού μοντέλου, ο χρήστης μπορεί να μεγεθύνει το διάγραμμα σχετικής έντασης εισάγοντας τα όρια των αξόνων στα αντίστοιχα πεδία του GUI (Εικόνα 5.25). Τέλος, ο χρήστης μπορεί να μετακινήσει την πειραματική εικόνα δεξιά ή αριστερά καθώς και να επιλέξει ποια ευθεία του περιθλαστικού σχηματισμού θα σαρώσει κάθε φορά. Αυτό γίνεται γιατί το Arago spot των πειραματικών εικόνων δε βρίσκεται πάντοτε στο κέντρο της εικόνας αλλά μπορεί να διαφέρει λίγο. Ενώ αντίθετα το Arago spot του θεωρητικού περιθλαστικού σχηματισμού βρίσκεται στο κέντρο της εικόνας, αφού υπολογίζεται με αυτό τον τρόπο. Επίσης, με τη μετακίνηση του διαγράμματος σχετικής έντασης πάνω ή κάτω, σαρώνεται ολόκληρος ο περιθλαστικός σχηματισμός και ελέγχεται με αυτό τον τρόπο καλύτερα η προσαρμογή του θεωρητικού μοντέλου στα πειραματικά δεδομένα (Εικόνα 5.30).



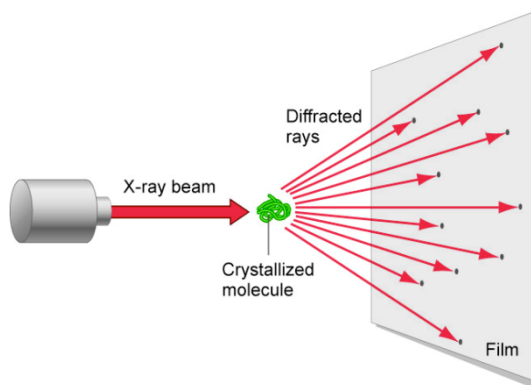
Εικόνα 5.30: Προσαρμογή του θεωρητικού μοντέλου στα πειραματικά δεδομένα όταν επιλέγεται ευθεία που δε διέρχεται από το κέντρο του περιθλαστικού σχηματισμού.

Κεφάλαιο 6

Εφαρμογές της περίθλασης

6.1 Εφαρμογές της περίθλασης ακτίνων X

Η περίθλαση ακτίνων X συναντάει σημαντικές εφαρμογές στη μελέτη των χαρακτηριστικών των κρυστάλλων. Οι κρύσταλλοι είναι οργανωμένες διατάξεις ατόμων και οι ακτίνες X μπορούν να θεωρηθούν σαν κύματα ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Τα άτομα σκεδάζουν τα κύματα ακτίνων X, κυρίως μέσω των ηλεκτρονίων τους. Μία ακτίνα X που προσκρούει σε ένα ηλεκτρόνιο παράγει δευτερεύοντα σφαιρικά κύματα που πηγάζουν από τα ηλεκτρόνια. Αυτό το φαινόμενο είναι γνωστό σαν ελαστική σκέδαση και τότε τα ηλεκτρόνια ονομάζονται σκεδαστές.



Εικόνα 6.1: Απεικόνιση της διάταξης που χρησιμοποιείται για την κρυσταλλογραφία ακτίνων X (Πηγή: wikipedia)

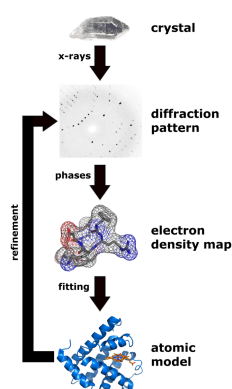
Μία κανονική διάταξη τέτοιων σκεδαστών παράγει μία αντίστοιχη κανονική διάταξη δευτερευόντων σφαιρικών κυμάτων. Παρόλο που τα κύματα αυτά αλληλοαναιρούνται στις περισσότερες διευθύνσεις μέσω αταστρεπτικής συμβολής, προστίθενται ενισχυτικά σε συγκεκριμένες διευθύνσεις, που προσδιορίζονται από το νόμο του Bragg, σύμφωνα με τον οποίο

$$2d \sin \theta = n\lambda$$

όπου d είναι το διάστημα μεταξύ των επιπέδων περίθλασης, θ είναι η γωνία πρόσπτωσης, n είναι

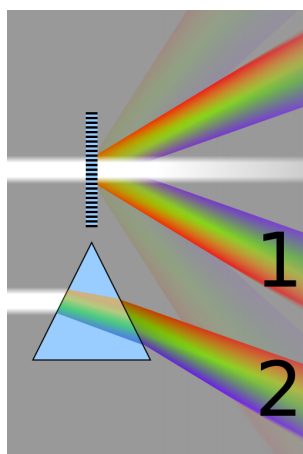
ένας ακέραιος και λ είναι το μήκος κύματος της δέσμης. Αυτές οι συγκεκριμένες διευθύνσεις εμφανίζονται σαν σημεία στον περιθλαστικό σχηματισμό και ονομάζονται ανακλάσεις (reflections).

Οι ακτίνες X επιλέγονται στην περίπτωση της κρυσταλλογραφίας γιατί το μήκος κύματος είναι συγκρίσιμο με την απόσταση μεταξύ των ατόμων στο διατεταγμένο κρύσταλλο. Η τεχνική που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της δομής ενός κρυστάλλου με το φαινόμενο της περίθλασης όπως περιγράφεται από το νόμο του Bragg ονομάζεται κρυσταλλογραφία ακτίνων X. Με την τεχνική αυτή μετρώνται οι γωνίες και οι εντάσεις των περιθλώμενων ακτίνων, με σκοπό να παραχθεί μία τριδιάστατη εικόνα της πυκνότητας των ηλεκτρονίων μέσα στον κρύσταλλο. Από την πυκνότητα των ηλεκτρονίων μπορεί να προσδιοριστεί η μέση θέση του ατόμου στον κρύσταλλο, καθώς επίσης οι χημικοί δεσμοί των ατόμων και η αταξία τους.



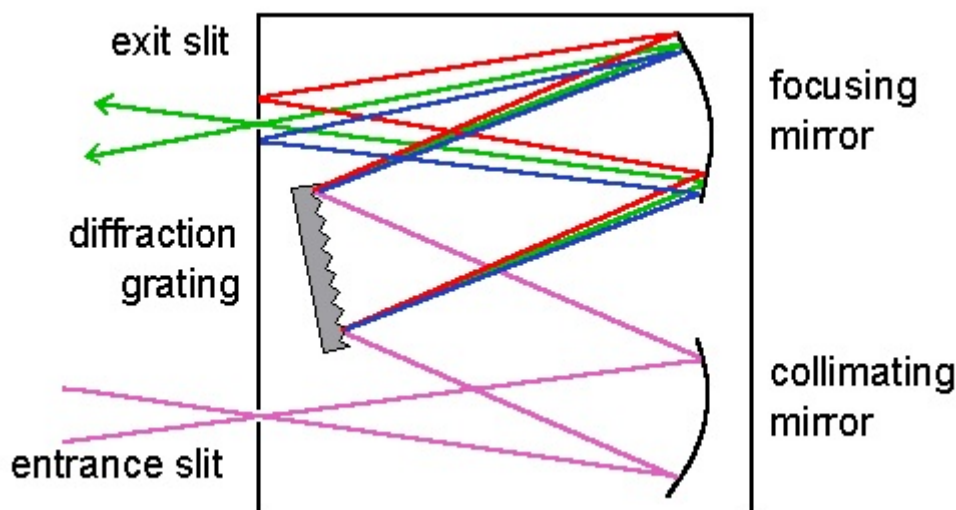
Εικόνα 6.2: Σχεδιασμός των βημάτων της τεχνικής της κρυσταλλογραφίας ακτίνων X (Πηγή: wiki).

6.2 Εφαρμογές της περίθλασης στη φασματοσκοπία



Εικόνα 6.3: Σύγκριση της ανάλυσης του φωτός από (1) φράγμα περίθλασης και (2) πρίσμα (Πηγή: wiki).

Το φράγμα περίθλασης είναι ένα οπτικό στοιχείο το οποίο αποτελείται από χιλιάδες πολύ στενές παράλληλες σχισμές. Σε κάθε μία από αυτές τις σχισμές η δέσμη φωτός περιθλάται, αλλά επειδή οι σχισμές ισαπέχουν μεταξύ τους και έχουν το ίδιο πάχος, τα κύματα που περιθλώνται υφίστανται στη συνέχεια ενισχυτική συμβολή. Ο σχηματισμός αυτός συμβάλλει στην εμφάνιση των συνιστωσών του φάσματος ξεχωριστά. Έτσι το φράγμα περίθλασης χρησιμοποιείται στην κατασκευή αστρικών φασματογράφων για τη λεπτομερή μελέτη της χημικής σύνθεσης των αστέρων.

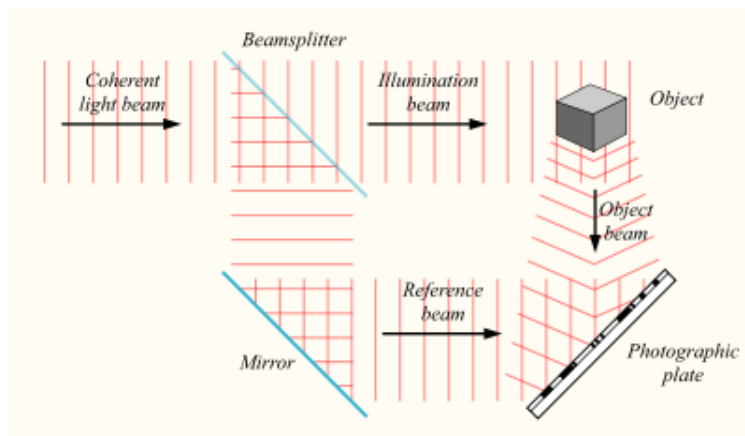


Εικόνα 6.4: Διάταξη φασματογράφου με φράγμα περίθλασης (Πηγή: tissuegroup.chem.vt.edu)

6.3 Εφαρμογές της περίθλασης στην ολογραφία

Το ολόγραμμα είναι η τριδιάστατη αποτύπωση ενός αντικειμένου και η μέθοδος με την οποία παράγονται αυτές οι εικόνες είναι γνωστή ως ολογραφία. Τα ολογράμματα χρησιμοποιούν δέσμες laser οι οποίες συγκλίνουν σε μία γωνία παράγοντας σχηματισμό συμβολής που αποτελείται από εναλλασσόμενους φωτεινούς και σκοτεινούς κροσσούς. Η επιφάνεια του ολογράμματος είναι ένα είδος φράγματος περίθλασης, με εναλλασσόμενες λωρίδες διαφανούς και αδιαφανούς υλικού. Συνδυάζοντας μία δέσμη laser με τον αφεστιασμένο περιθλαστικό σχηματισμό ενός αντικειμένου καταγράφεται μία εικόνα. Μία φωτεινή δέσμη laser περιθλάται σε συγκεκριμένες γωνίες, σύμφωνα με το νόμο του Bragg, στις επιφάνειες του ολογράμματος, οπότε ο παρατηρητής μπορεί να δει μία τριδιάστατη εικόνα.

Τα ολογράμματα δεν πρέπει να συγχέονται με τις συνήθεις τριδιάστατες εικόνες που χρησιμοποιούν μόνο το ορατό φως και παράγονται με μία μέθοδο που είναι γνωστή ως στερεοσκοπία. Η στερεοσκοπία δημιουργεί μία εικόνα από δύο, με την υπέρθεση των εικόνων για την αποτύπωση μιας εικόνας με βάθος. Παρόλο που οι στερεοσκοπικές εικόνες φαίνονται σαν να έχουν βάθος, ένα ολόγραμμα επιτρέπει στον παρατηρητή να δει την εικόνα από οποιαδήποτε γωνία. Έτσι οι στερεοσκοπικές εικόνες μπορούν να συγκριθούν με το κοίταγμα μέσω του παραθύρου



Εικόνα 6.5: Σχεδιασμός της διάταξης που χρησιμοποιείται για την καταγραφή ενός ολογράμματος (Πηγή: wikipedia).

μιας βιτρίνας, ενώ τα ολογράμματα μεταφέρουν την αίσθηση ότι κάποιος έχει πράγματι εισέλθει εντός της βιτρίνας.



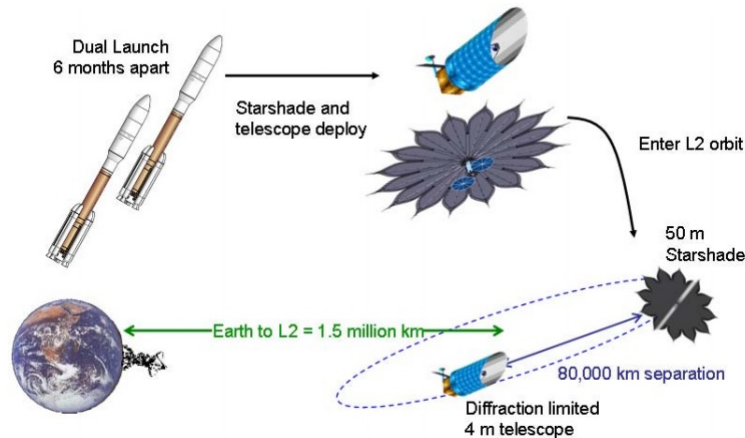
Εικόνα 6.6: Παράδειγμα ολογράμματος (Πηγή: wikipedia).

6.4 Εφαρμογή της περίθλασης στη μελέτη εξωπλανητών

Το φαινόμενο της περίθλασης παρατηρείται στην πλειοψηφία των φαινομένων απόκρυψης (occultation). Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες από την παρατηρούμενη περίθλαση μπορούν να εξαχθούν πολύτιμες πληροφορίες και άλλες στις οποίες το φαινόμενο αυτό επηρεάζει τον ουσιαστικό στόχο της μελέτης.

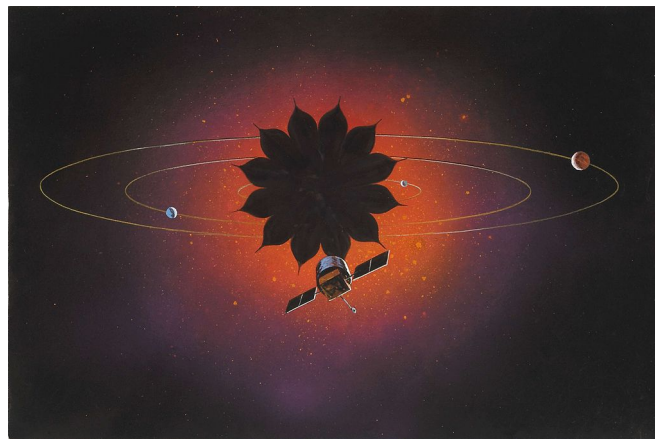
Μία εφαρμογή αποκοπής των κροσσών περίθλασης είναι η μελέτη των εξωπλανητών. Προκειμένου να μελετηθούν λεπτομερώς και άμεσα οι εξωπλανήτες, σχεδιάστηκε από τη NASA (National Aeronautics and Space Administration) μία αποστολή, η οποία ονομάζεται New Worlds Observer. Αυτή η αποστολή έχει σκοπό την άμεση παρατήρηση και μελέτη εξωπλανητών στη

γειτονιά του Ήλιου.



Εικόνα 6.7: Σχεδιασμός της αποστολής New Worlds Observer (Πηγή: NASA).

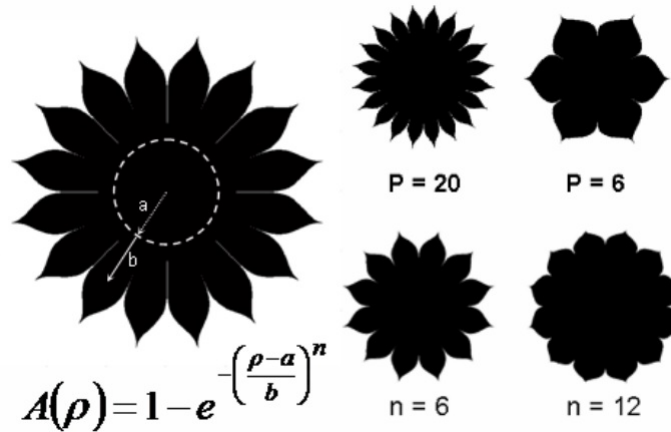
Μία δυσκολία που υφίσταται κατά την άμεση παρατήρηση εξωπλανητών μέσω της απόκρυψης του οικείου αστεριού είναι οι κροσσοί περίθλασης που παρουσιάζονται. Αν αποκρύπταμε το φως που προέρχεται από το αστέρι τοποθετώντας ένα κυκλικό εμπόδιο, τότε θα παρατηρούσαμε κροσσούς περίθλασης Fresnel καθώς επίσης και το Arago spot, με αποτέλεσμα να επηρεάζονται οι μετρήσεις του εξωπλανήτη. Για να λυθεί αυτό το πρόβλημα το εμπόδιο που τοποθετείται έχει σχήμα ηλιοτροπίου (sunflower). Τα πέταλα συμβάλλουν στη μείωση του φαινομένου της περίθλασης και της έντασης του Arago spot.



Εικόνα 6.8: Προσομοίωση της παρατήρησης των εξωπλανητών μέσω της αποστολής New Worlds Observer (Πηγή: NASA).

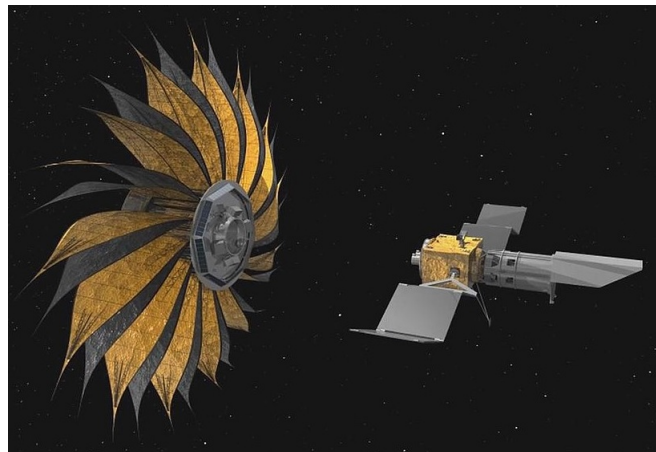
Το σχήμα του ηλιοτροπίου προκύπτει από την τεχνική του αποδισμού (arodization). Ο αποδισμός είναι μία τεχνική που χρησιμοποιείται στην οπτική για την αφαίρεση των δακτυλίων που δημιουργούνται λόγω περίθλασης γύρω από το δίσκο του Airy. Αναφέρεται γενικότερα στην απόσβεση των δευτερευόντων μεγίστων σε έναν περιθλαστικό σχηματισμό. Έχει μελετηθεί ότι για

να επιτευχθεί αυτό, το εμπόδιο ή το διάφραγμα θα πρέπει να παρουσιάζει τα πέταλα που έχει το ηλιοτρόπιο. Για την αποστολή New Worlds Observer, ειδικότερα, επιλέχθηκε η κατάλληλη συνάρτηση αποδισμού και υπολογίστηκε ότι το εμπόδιο θα πρέπει να αποτελείται από 16 πέταλα, ώστε να υπάρχει ισορροπία στη διάμετρο και το βάρος του σκιάστρου.



Εικόνα 6.9: Διαφορετικά σχήματα του εμποδίου σε σχήμα ηλιοτροπίου και η συνάρτηση αποδισμού που επιλέχθηκε για τη συγκεκριμένη αποστολή (Πηγή: NASA).

Η αποστολή περιλαμβάνει ένα διαστημικό τηλεσκόπιο και το σκάφος που θα αποτελεί το σκίαστρο και το οποίο θα κινείται σε σχέση με το τηλεσκόπιο, ώστε να αποκρύπτει το φως των επιθυμητών αστεριών. Η εναλλακτική πρόταση της αποστολής αυτής είναι να χρησιμοποιηθεί το σκίαστρο στο νέο διαστημικό τηλεσκόπιο που αναμένεται να εκτοξευτεί, το James Webb Space Telescope.

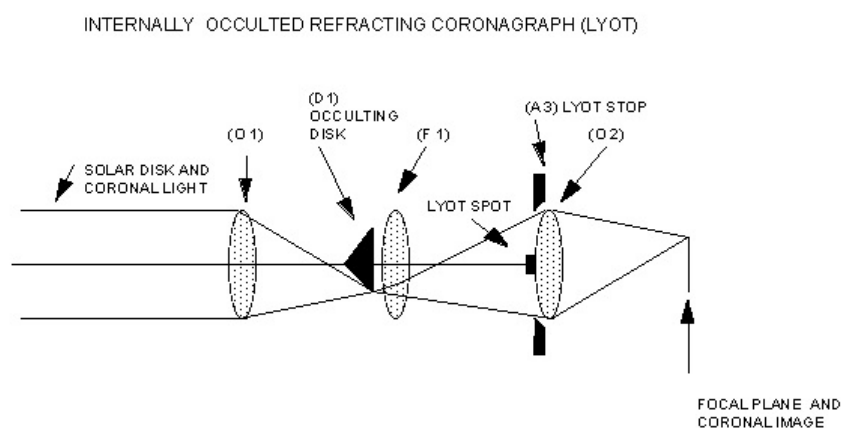


Εικόνα 6.10: Σχηματική αναπαράσταση των δύο διαστημικών σκαφών που περιλαμβάνει η αποστολή New Worlds Observer (Πηγή: NASA).

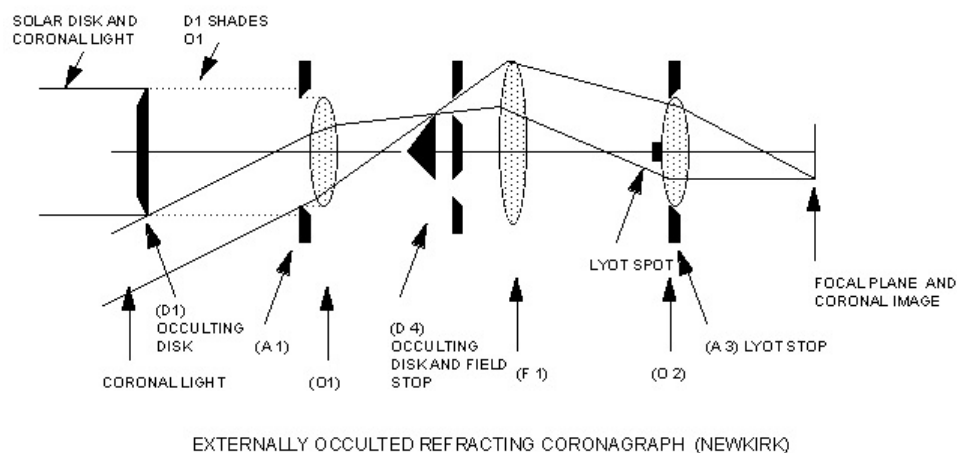
Το σκίαστρο έχει ενεργό διάμετρο 50 μέτρα, στην οποία συμπεριλαμβάνεται η διάσταση των πετάλων, και θα τοποθετηθεί σε απόσταση περίπου 80,000 χιλιομέτρων από ένα τηλεσκόπιο με

διάμετρο 4 μέτρα. Το σκίαστρο με αυτές τις προδιαγραφές θα αποκρύπτει το μεγαλύτερο ποσοστό του αστρικού φωτός μέσα σε 50 mas και θα παρατηρεί σε μήκη κύματος από 0.1 έως 10 μm .

Η τεχνική της απόκρυψης του φωτός με σκοπό την απόκρυψη του κεντρικού αντικειμένου είναι γνωστή ήδη από το 1931, όταν εφευρέθηκε από το Γάλλο αστρονόμο Bernard Lyot ο στεμματογράφος.



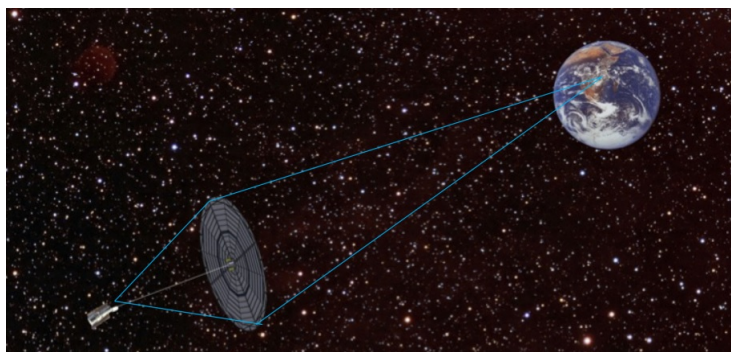
Εικόνα 6.11: Σχεδιασμός της διάταξης ενός στεμματογράφου στον οποίο η απόκρυψη συμβαίνει εσωτερικά στο τηλεσκόπιο (Πηγή: NASA).



Εικόνα 6.12: Σχεδιασμός της διάταξης ενός στεμματογράφου στον οποίο η απόκρυψη συμβαίνει εξωτερικά από το τηλεσκόπιο (Πηγή: NASA).

Ο στεμματογράφος είναι ένα εξάρτημα του τηλεσκοπίου το οποίο είναι σχεδιασμένο ώστε να αποκόπτει το άμεσο φως από ένα αστέρι με σκοπό να μπορούν να μελετηθούν κοντινά αντικείμενα. Οι περισσότεροι στεμματογράφοι χρησιμοποιούνται για τη μελέτη του Ηλιακού Στέμματος, αλλά υπάρχουν και αστρικοί στεμματογράφοι οι οποίοι χρησιμοποιούνται για τη μελέτη εξωηλιακών πλανητών και δίσκων γύρω από κοντινά αστέρια.

Κατά το σχεδιασμό ενός στεμματογράφου πρέπει να συνυπολογίζεται η σκέδαση και η περίθλαση ώστε να μη φτάνει στον τελικό ανιχνευτή διάχυτο φως. Ο Lyot εφηύρε μία διάταξη με φακούς και διαφράγματα (stops), τα οποία ονομάζονται Lyot stops, τέτοια ώστε το φως λόγω σκέδασης και περίθλασης να εστιάζεται σε αυτά και να απορροφάται.



Εικόνα 6.13: Σχηματική απεικόνιση της αποστολής Arago scope (Πηγή: NASA).

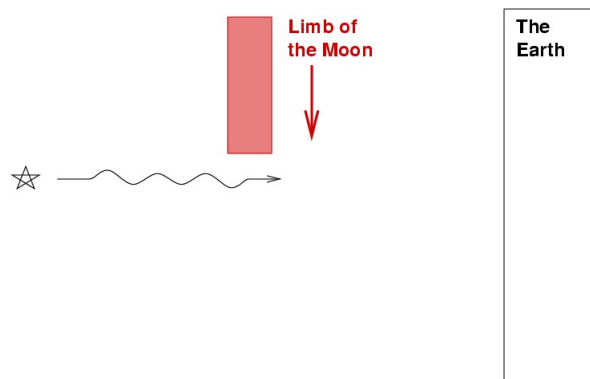
Μία ακόμη εφαρμογή της τεχνικής του αποδισμού είναι το Arago scope. Το Arago scope είναι ένας θεωρητικός σχεδιασμός για ένα τηλεσκόπιο, το οποίο βασίζεται στην περίθλαση γύρω από ένα κυκλικό εμπόδιο. Το φως που περιθλάται γύρω από το χείλος ενός κυκλικού εμποδίου συμβάλλει ενισχυτικά στον κεντρικό άξονα και η ανάλυση σε αυτό το σημείο θα είναι ίδια με την ανάλυση που θα είχαμε με ένα φακό με μέγεθος όσο το εμπόδιο. Η ένταση του φωτός θα είναι χαμηλότερη.

6.5 Εφαρμογή της περίθλασης Fresnel στις επιπροσθήσεις

Η περίθλαση δεν αποτελεί πάντοτε ανεπιθύμητο φαινόμενο στις παρατηρήσεις. Οι περιπτώσεις στις οποίες οι παρατηρούμενοι κροσσοί περίθλασης συμβάλλουν στην εξαγωγή πολύτιμων πληροφοριών είναι οι επιπροσθήσεις. Το φαινόμενο των επιπροσθήσεων παρατηρείται όταν ένα αστέρι αποκρύπτεται από ένα σώμα του Ηλιακού μας Συστήματος. Μέσω αυτού του φαινομένου μελετώνται και τα δύο σώματα που συμμετέχουν, δηλαδή και το αστέρι και το σώμα του Ηλιακού Συστήματος.

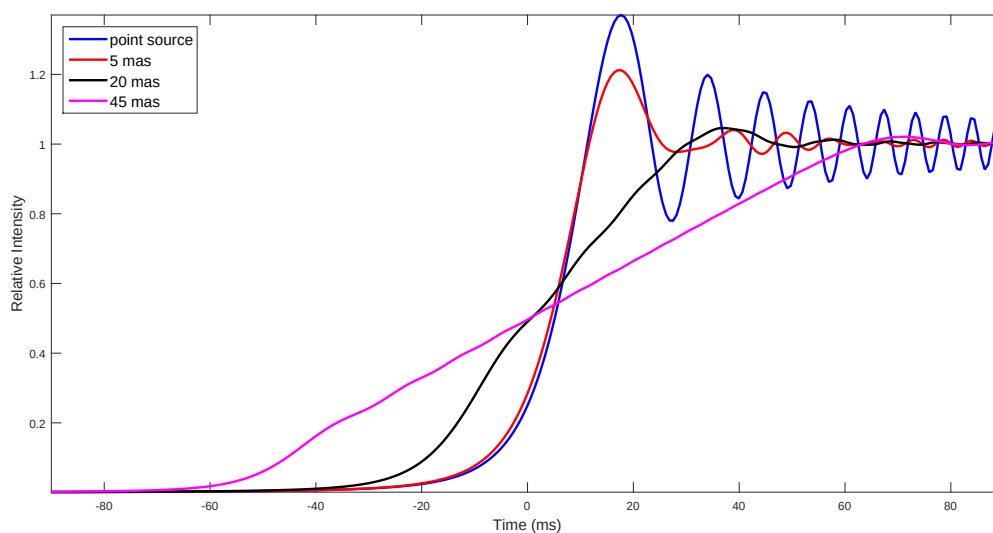
6.5.1 Επιπροσθήσεις αστερών από τη Σελήνη

Μία περίπτωση στην οποία εφαρμόζεται η περίθλαση Fresnel στην αστροφυσική είναι η επιπροσθήσεις αστεριών από τη Σελήνη, δηλαδή το φαινόμενο κατά το οποίο η Σελήνη αποκρύπτει το φως από ένα αστέρι. Το φαινόμενο αυτό έγινε γνωστό το 1908 από τον MacMahon, όμως εκείνος τότε μελέτησε το φαινόμενο χρησιμοποιώντας γνώσεις από τη γεωμετρική οπτική. Αργότερα την ίδια χρονιά ο Eddington μελέτησε το ίδιο φαινόμενο αναφέροντας ότι πρέπει να συμπεριληφθεί η περίθλαση. Πιο ολοκληρωμένα όμως το φαινόμενο μελετήθηκε λίγο πριν το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο, το 1939 από τον Williams, ο οποίος υπολόγισε τη συνεισφορά από την περίθλαση.



Εικόνα 6.14: Η διάταξη που χρησιμοποιείται κατά την επιπρόσθηση αστεριών από τη Σελήνη (πηγή: Michael Richmond).

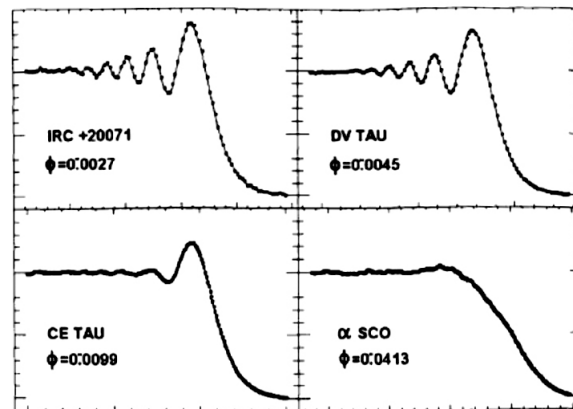
Η Σελήνη έχει πολύ μεγαλύτερη φαινόμενη διάμετρο σε σχέση με το παρατηρούμενο αστέρι, οπότε χρησιμοποιείται η περίθλαση Fresnel από χείλος τόσο κατά την απόκρυψη όσο και κατά την επανεμφάνιση του αστεριού. Σε αυτή την περίπτωση, δηλαδή, μπορεί να αγνοηθεί η καμπυλότητα της επιφάνειας της Σελήνης και το φαινόμενο μελετάται όπως περιγράφεται στην Παράγραφο 4.2. Κατά το φαινόμενο αυτό η πηγή και ο παρατηρητής μένουν σταθεροί και κινείται η Σελήνη, οπότε μπορούμε να μετατρέψουμε τον οριζόντιο άξονα σε χρόνο, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας την ταχύτητα της Σελήνης ως προς τη Γη.



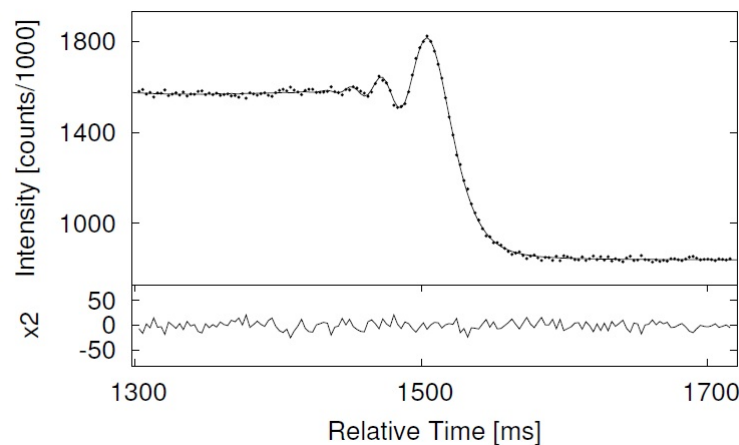
Εικόνα 6.15: Διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου κατά την επιπρόσθηση από τη Σελήνη σημειακής πηγής και αστεριών με γωνιακές διαμέτρους 5, 20 και 45 mas.

Οι επιπροσθήσεις αστερών από τη Σελήνη μελετώνται παγκοσμίως πλέον, αφού μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για τις γωνιακές διαμέτρους των αστεριών. Όταν ένα αστέρι παρατηρεί-

ται από ένα τηλεσκόπιο, η γωνιακή διάμετρος που θα μετρηθεί εξαρτάται κυρίως από τη διάμετρο του τηλεσκοπίου. Υπολογίζοντας τη γωνιακή διάμετρο του αστεριού, όταν αυτό αποκρύπτεται από τη Σελήνη, τα αποτελέσματα δεν εξαρτώνται από το τηλεσκόπιο που χρησιμοποιείται. Δύο παραδείγματα παρατηρήσεων επιπρόσθησεων αστερών από τη Σελήνη παρουσιάζονται στις Εικόνες 6.16 και 6.17



Εικόνα 6.16: Παρατηρήσεις επιπρόσθησης αστεριών από τη Σελήνη (Πηγή: Arceti Lunar Occultations Group, Michael Richmond).

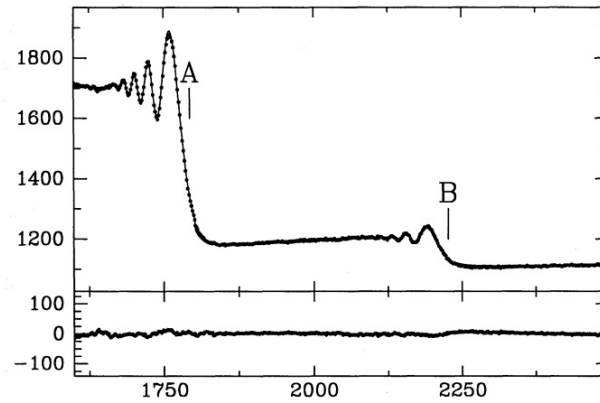


Εικόνα 6.17: Παρατηρήσεις επιπρόσθησης αστεριού από τη Σελήνη (Πηγή: Dyachenko et al., 2018).

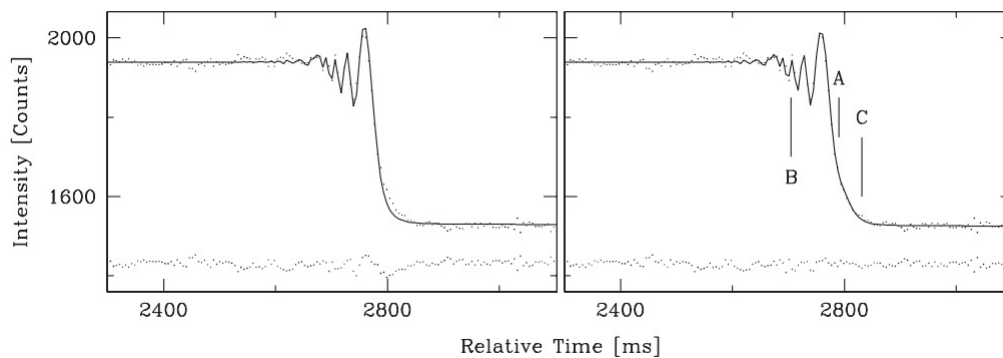
Επιπλέον, οι επιπρόσθησεις από τη Σελήνη εφαρμόζονται σε περιπτώσεις στις οποίες το αστερί που αποκρύπτεται είναι εξελιγμένο και η γωνιακή διάμετρος του δεν μπορεί να μετρηθεί με άλλο τρόπο. Ακόμη, το φαινόμενο αυτό παρατηρείται στα ραδιοκύματα με σκοπό να μελετηθούν οι διαστάσεις ραδιοπηγών.

Τέλος, με την τεχνική των επιπρόσθησεων αστεριών από τη Σελήνη, έχουν ανακαλυφθεί διπλά αστρικά συστήματα. Όταν η Σελήνη αποκρύπτει ένα διπλό αστρικό σύστημα, τότε το φαι-

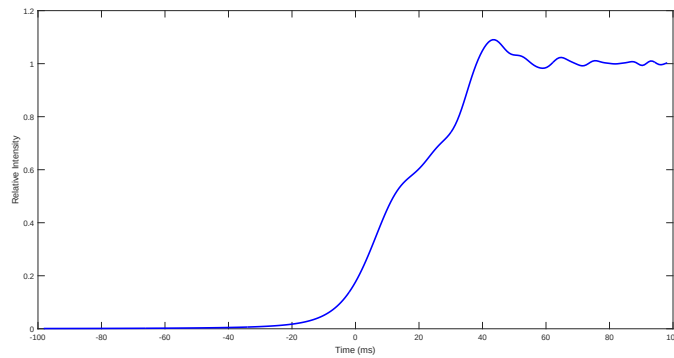
νόμενο που παρατηρούμε οφείλεται στην περίθλαση Fresnel από χείλος, όμως σε αυτή την περίπτωση συνεισφέρουν δύο πηγές. Παρατηρήσεις μίας τέτοιας επιπρόσθησης παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.18. Σε ειδικές περιπτώσεις ο αστέρας που παρατηρείται είναι τριπλό αστρικό σύστημα, όπως παρουσιάζεται στην Εικόνα 6.19.



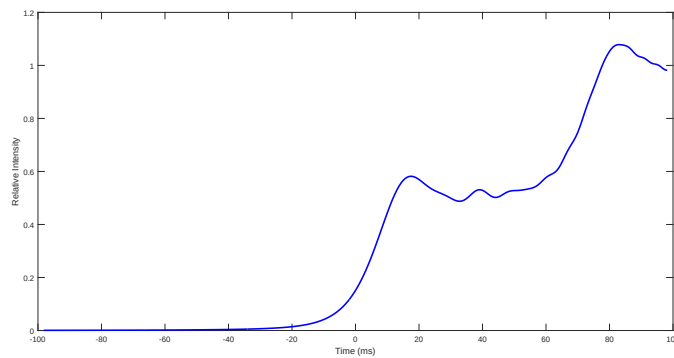
Εικόνα 6.18: Παρατηρήσεις επιπρόσθησης διπλού αστρικού συστήματος από τη Σελήνη (Πηγή: Richichi et al., 1994).



Εικόνα 6.19: Παρατηρήσεις επιπρόσθησης τριπλού αστρικού συστήματος από τη Σελήνη. Το αριστερό διάγραμμα παρουσιάζει τα δεδομένα που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις και ένα μοντέλο για διπλό σύστημα, ενώ το δεξί διάγραμμα παρουσιάζει τα ίδια δεδομένα από τις παρατηρήσεις στα οποία έχει προσαρμοστεί ένα μοντέλο για τριπλό σύστημα. Στο δεξί διάγραμμα σημειώνονται επίσης με A, B και C τα σημεία στα οποία παρατηρείται η απόκρυψη του κάθε αστέρα. (Πηγή: Richichi et al., 2002)



Εικόνα 6.20: Διάγραμμα έντασης του φωτός κατά την επιπρόσθηση διπλού αστρικού συστήματος από τη Σελήνη. Τα αστέρια έχουν θεωρηθεί δίσκοι με γωνιακές διαμέτρους 8 mas και η γωνιακή απόσταση μεταξύ των μελών του συστήματος είναι 20 mas.

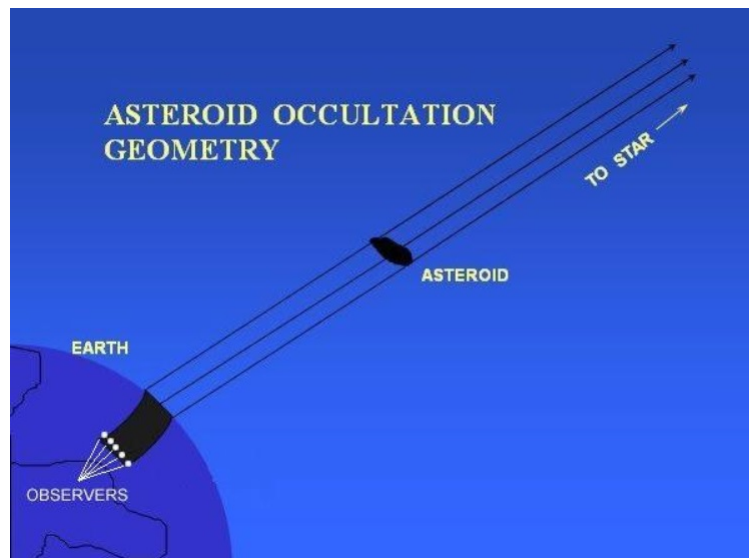


Εικόνα 6.21: Διάγραμμα έντασης του φωτός κατά την επιπρόσθηση διπλού αστρικού συστήματος από τη Σελήνη. Τα αστέρια έχουν θεωρηθεί δίσκοι με γωνιακές διαμέτρους 8 mas και η γωνιακή απόσταση μεταξύ των μελών του συστήματος είναι 50 mas.

6.5.2 Επιπροσθήσεις αστερών από πλανήτες και αστεροειδείς

Εκτός από τη Σελήνη, όλα τα σώματα του Ηλιακού Συστήματος έχουν μεγαλύτερη φαινόμενη διάμετρο από τους αστέρες, οπότε μπορούν να αποκρύψουν το αστρικό φως προκαλώντας έτσι το φαινόμενο της επιπρόσθησης. Αυτά τα σώματα είναι οι πλανήτες του Ηλιακού Συστήματος, οι αστεροειδείς που βρίσκονται στη Ζώνη των Αστεροειδών, οι νάνοι πλανήτες ή αλλιώς μετα-Ποσειδώνια αντικείμενα (Trans-Neptunian Objects) και τα αντικείμενα της Ζώνης Kuiper.

Τα σώματα αυτά έχουν πολύ μικρότερη φαινόμενη διάμετρο σε σχέση με τη Σελήνη, οπότε η επιπρόσθηση αστερών από αστεροειδείς ή πλανήτες μελετάται μέσω της περίθλασης Fresnel από κυκλικό εμπόδιο, όπως περιγράφεται στην Παράγραφο 2.2.4. Για την περίπτωση των αέριων πλανητών του Ηλιακού Συστήματος, όπως ο Δίας, ο Κρόνος, ο Ουρανός και ο Ποσειδώνας, το φαινόμενο των επιπροσθήσεων περιγράφεται κυρίως μέσω της διάθλασης του αστρικού φωτός



Εικόνα 6.22: Σχηματική αναπαράσταση μίας επιπρόσθησης από αστεροειδή (Πηγή: IOTA)

από την ατμόσφαιρά τους, ενώ για τους μικρούς βραχώδεις αστεροειδείς που βρίσκονται μετά την τροχιά του Πλούτωνα, η περίθλαση Fresnel είναι το κυρίαρχο φαινόμενο.

Οι επιπροσθήσεις από αντικείμενα, των οποίων είναι γνωστά τα τροχιακά χαρακτηριστικά και έχουν μελετηθεί επαρκώς, μπορούν να προβλεφθούν με μεγάλη ακρίβεια. Οι παρατηρήσεις τέτοιων φαινομένων συμβάλλουν στη λεπτομερή μελέτη αυτών των αντικειμένων. Για την περίπτωση των πλανητών του Ηλιακού Συστήματος, η τεχνική των επιπροσθήσεων επιτρέπει τη μελέτη των ατμοσφαιρικών χαρακτηριστικών τους. Με την παρατήρηση επιπροσθήσεων αστερών ανακαλύφθηκαν οι δακτύλιοι του Ποσειδώνα και οι δακτύλιοι του Ουρανού, των οποίων οι θέσεις είναι γνωστές με ακρίβεια μερικών εκατοντάδων μέτρων.

Επιπλέον, πραγματοποιούνται προγράμματα από αστροσκοπεία ανά τον κόσμο τα οποία παρατηρούν αστρικά πεδία από τα οποία αναμένεται να παρατηρηθούν επίσης αστεροειδείς αποκρύπτοντας το αστρικό φως. Από τις επιπροσθήσεις που παρατηρούνται με αυτή τη μέθοδο, εξάγονται τα χαρακτηριστικά των αστεροειδών και νάνων πλανητών, τα οποία είναι μέχρι σήμερα άγνωστα. Προκύπτουν, δηλαδή, το σχήμα καθώς και ο καλύτερος προσδιορισμός της τροχιάς των μικρών σωμάτων του Ηλιακού Συστήματος, αφού η αστρομετρία που διατίθεται για τόσο μακρινά και ελάχιστα φωτεινά αντικείμενα περιέχει μεγάλη αβεβαιότητα.

Όταν ένας αστεροειδής αποκρύπτει έναν αστέρα, το φαινόμενο αυτό παρατηρείται από διάφορα σημεία στη Γη. Συνδυάζοντας όλες τις παρατηρήσεις, βρίσκεται ένα διδιάστατο μοντέλο για το σχήμα του και προσδιορίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια η τροχιά του. Αυτή η μέθοδος ονομάζεται μέθοδος των χορδών και εφαρμόζεται από παγκόσμιο δίκτυο αστροσκοπειών, στο οποίο το Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστροσκοπείο Αθηνών είναι μέλος. Το δίκτυο αυτό ονομάζεται International Occultation Timing Association (IOTA).

Στον Πίνακα 6.1 καταγράφονται αντικείμενα της Ζώνης των Αστεροειδών για τα οποία δίνονται τα φυσικά τους χαρακτηριστικά. Η πλειοψηφία αυτών των αντικειμένων παρουσιάζει ιδιαίτερη μορφολογία, οπότε δεν αρκεί η μελέτη τους με εφαρμογή της περίθλασης Fresnel από κυ-

Πίνακας 6.1: Αστεροειδείς από τους οποίους παρατηρούνται φαινόμενα περίθλασης και τα φυσικά και τροχιακά χαρακτηριστικά τους

Όνομα	Αφήλιο (AU)	Περιήλιο (AU)	Τροχιακή περίοδος (yr)	Περίοδος περιστροφής (h)	Μέση διάμετρος (km)
(1620) Geographos	1.6630	0.8276	5.2233	1.390	2.6
(1862) Apollo	2.2931	0.6472	3.0654	1.783	1.5
(4769) Castalia	1.5771	0.5495	4.0950	1.096	1.4
(29075) 1950 DA	2.5619	0.8350	2.1220	2.214	2
(3908) Nyx	2.8110	1.0429	4.4260	2.675	1
(6489) Golevka	4.0172	0.9877	6.0297	3.959	0.53
(25143) Itokawa	1.6951	0.9531	12.1320	1.524	0.33
(101955) Bennu	1.3559	0.8969	4.2975	1.195	0.49
(4660) Nereus	2.0247	0.9528	15.1000	1.817	0.33
(99942) Apophis	1.0988	0.7461	30.4000	0.886	0.33

κλικό εμπόδιο. Για τα αντικείμενα αυτά υπάρχουν σε βάσεις δεδομένων τριδιάστατα μοντέλα, τα οποία χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία για τη μελέτη τους μέσω επιπροσθήσεων αστέρων. Όταν το σχήμα του εμποδίου απέχει κατά πολύ από τη σφαιρικότητα, η πιο αποτελεσματική μέθοδος για τον υπολογισμό του περιθλαστικού σχηματισμού είναι ο μετασχηματισμός Fourier, ο οποίος εφαρμόζεται στη συνέχεια.

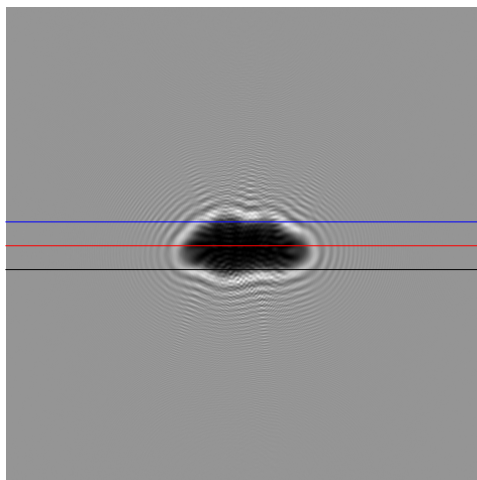
Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας μελετήθηκαν κάποιοι από τους αστεροειδείς που αναφέρονται στον Πίνακα 6.1 και παρουσιάζουν ιδιαιτερότητα στο σχήμα τους. Ένα από τα σώματα που μελετήθηκαν είναι ο αστεροειδής (1620) Geographos. Ο αστεροειδής αυτός ανακαλύφθηκε το 1951 από το Αστεροσκοπείο του Palomar και θεωρείται ένα από τα πιο επιμήκη σώματα του Ηλιακού μας Συστήματος.



Εικόνα 6.23: Τρεις διαφορετικές όψεις του τριδιάστατου μοντέλου για τον αστεροειδή (1620) Geographos (Πηγή: 3D Asteroid Catalogue)

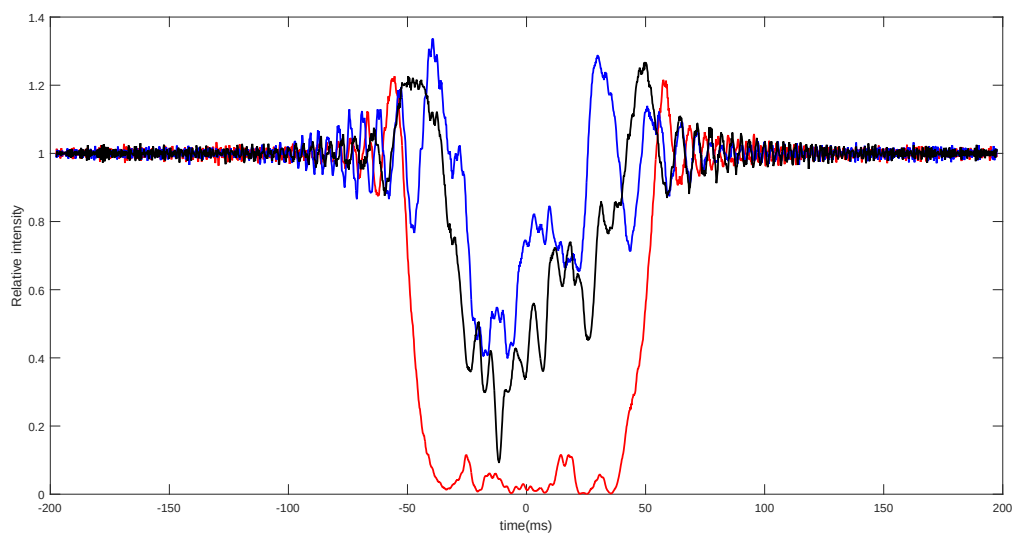
Με την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier και χρησιμοποιώντας τα φυσικά χαρακτηριστικά του αστεροειδούς αυτού, υπολογίστηκε ο περιθλαστικός σχηματισμός που θα προκαλούσε η απόκρυψη ενός αστέρα από τον (1620) Geographos, για τις τρεις όψεις του, όπως αυτές παρουσιάζονται στην Εικόνα 6.23. Τα αστεροσκοπεία κατά τη διάρκεια της επιπρόσθησης ενός αστέρα από αστεροειδή ή άλλο ουράνιο σώμα παρατηρούν τον αστέρα και καταγράφουν τη μεταβολή στη φωτεινότητά του. Ένα αστεροσκοπείο δε δύναται να παρατηρήσει τον περιθλαστικό σχηματισμό, όμως οι καμπύλες φωτός που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις συνδυάζονται ώστε να εξαχθούν συμπεράσματα για το σχήμα του αστεροειδούς καθώς και να προσδιοριστεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η τροχιά του.

Στους περιθλαστικούς σχηματισμούς που θα δημιουργούνταν από την απόκρυψη ενός αστέρα από τις τρεις όψεις του αστεροειδή (1620) Geographos δεν παρατηρείται φωτεινό σημείο στο κέντρο της γεωμετρικής σκιάς. Αυτό συμβαίνει διότι η επιφάνεια των αστεροειδών είναι εξαιρετικά τραχιά και δεν παρουσιάζονται συμμετρίες στη διδιάστατη προβολή του σχήματός τους.

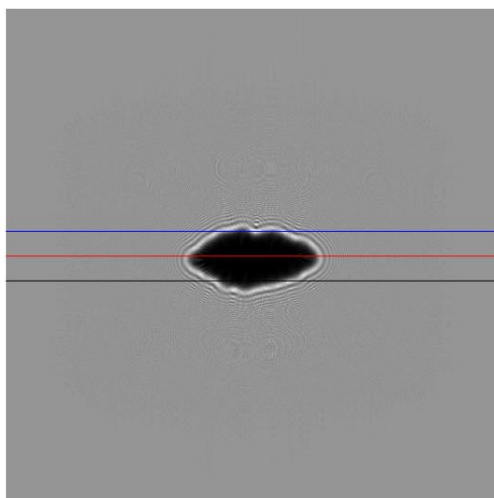


Εικόνα 6.24: Ο περιθλαστικός σχηματισμός που αναμένεται από την απόκρυψη ενός αστεριού από τον αστεροειδή (1620) Geographos, αν από τη Γη είναι ορατή η μία όψη της Εικόνας 6.23

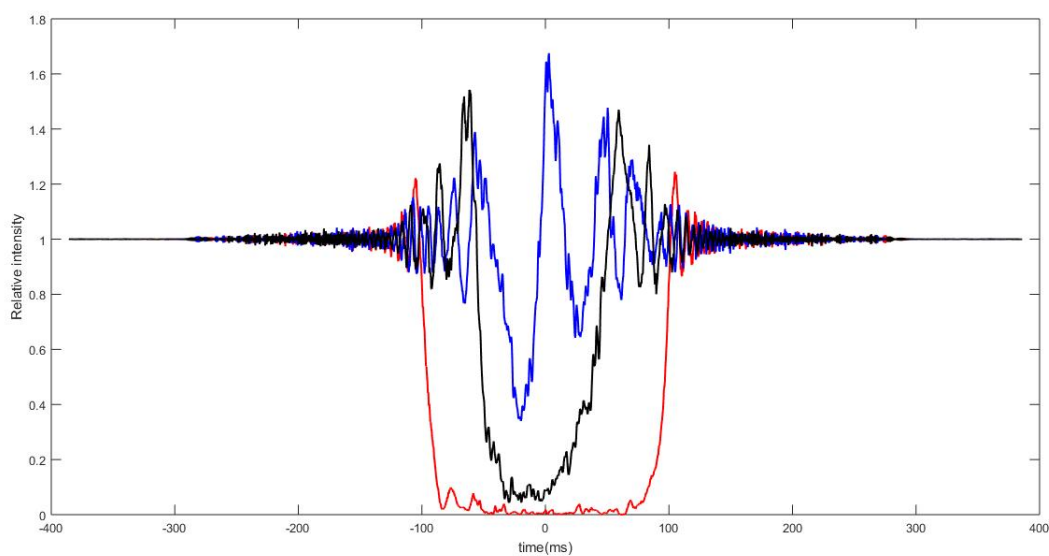
Αφού υπολογιστεί ο περιθλαστικός σχηματισμός από τον αστεροειδή, παρουσιάζεται το διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου για διάφορες θέσεις του παρατηρητή κατά μήκος της σκιάς του αστεροειδούς (Εικόνες 6.25, 6.27 και 6.29).



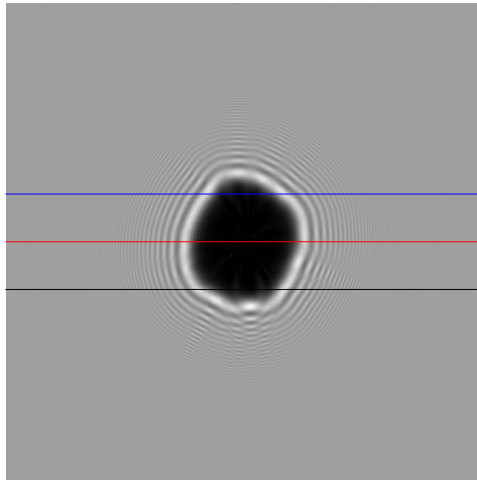
Εικόνα 6.25: Το διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου, όπως θα αναμενόταν παρατηρώντας μία επιπρόσθηση από τον (1620) Geographos, για τρεις διαφορετικές θέσεις του παρατηρητή, σύμφωνα με την Εικόνα 6.24



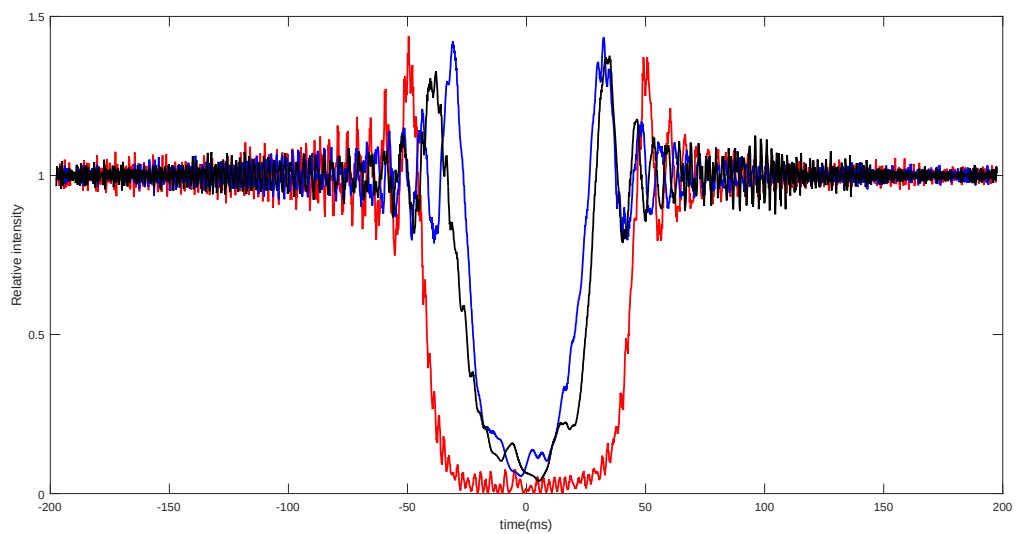
Εικόνα 6.26: Ο περιθλαστικός σχηματισμός που αναμένεται από την απόκρυψη ενός αστέρα από τον αστεροειδή (1620) Geographos, αν από τη Γη είναι ορατή η μία όψη της Εικόνας 6.23



Εικόνα 6.27: Το διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου, όπως θα αναμενόταν παρατηρώντας μία επιπρόσθηση από τον (1620) Geographos, για τρεις διαφορετικές θέσεις του παρατηρητή, σύμφωνα με την Εικόνα 6.26

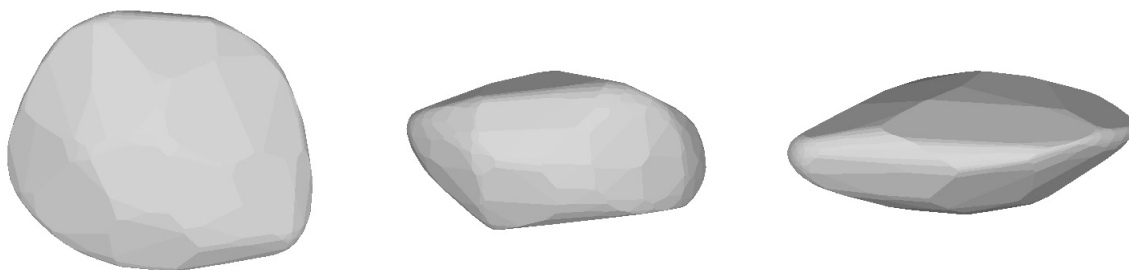


Εικόνα 6.28: Ο περιθλαστικός σχηματισμός που αναμένεται από την απόκρυψη ενός αστέρα από τον αστροειδή (1620) Geographos, αν από τη Γη είναι ορατή η μία όψη της Εικόνας 6.23

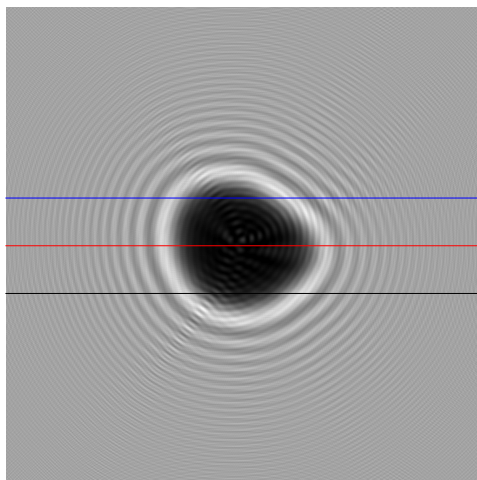


Εικόνα 6.29: Το διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου, όπως θα αναμενόταν παρατηρώντας μία επιπρόσθηση από τον (1620) Geographos, για τρεις διαφορετικές θέσεις του παρατηρητή, σύμφωνα με την Εικόνα 6.28

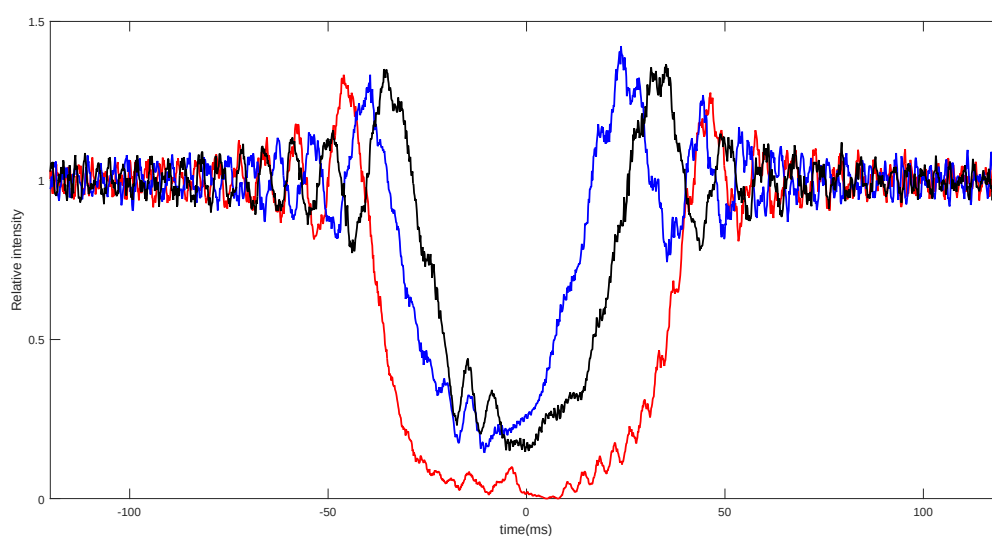
Ο αστεροειδής (1862) Απόλλων ανακαλύφθηκε το 1932 από το Γερμανό Karl Reinmuth στο Αστεροσκοπείο της Χαϊδελβέργης, ενώ το 2005 ανακοινώθηκε ότι έχει και δορυφόρο, όπως παρατηρήθηκε στο Αστεροσκοπείο του Arecibo στο Puerto Rico. Ο αστεροειδής Απόλλων υπήρξε ο πρώτος που πιστοποιήθηκε πως διασχίζει την τροχιά της Γης. Στην Εικόνα ?? παρουσιάζονται τρεις όψεις του αστεροειδούς αυτού όπως προκύπτουν από τριδιάστατο μοντέλο. Στις Εικόνες 6.31, 6.33 και 6.35 παρουσιάζονται οι περιθλαστικοί σχηματισμοί που θα παρατηρούνταν από τη Γη, αν ήταν όρατες οι όψεις αυτές κατά την επιπρόσθηση. Από κάθε περιθλαστικό σχηματισμό παρουσιάζονται τρία διαγράμματα σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου για τρεις διαφορετικές θέσεις του παρατηρητή. (Εικόνες 6.32, 6.34 και 6.36)



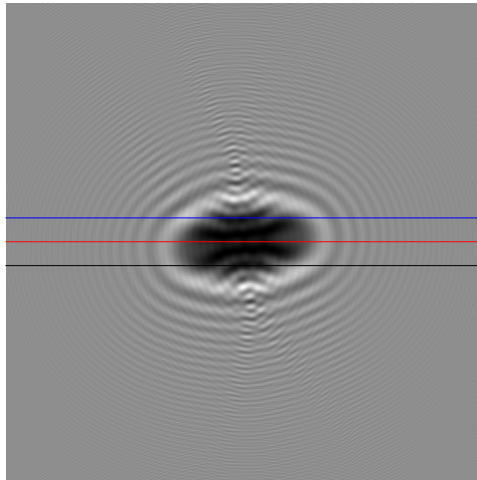
Εικόνα 6.30: Τρεις διαφορετικές όψεις του τριδιάστατου μοντέλου για τον αστεροειδή (1862) Apollo (Πηγή: 3D Asteroid Catalogue)



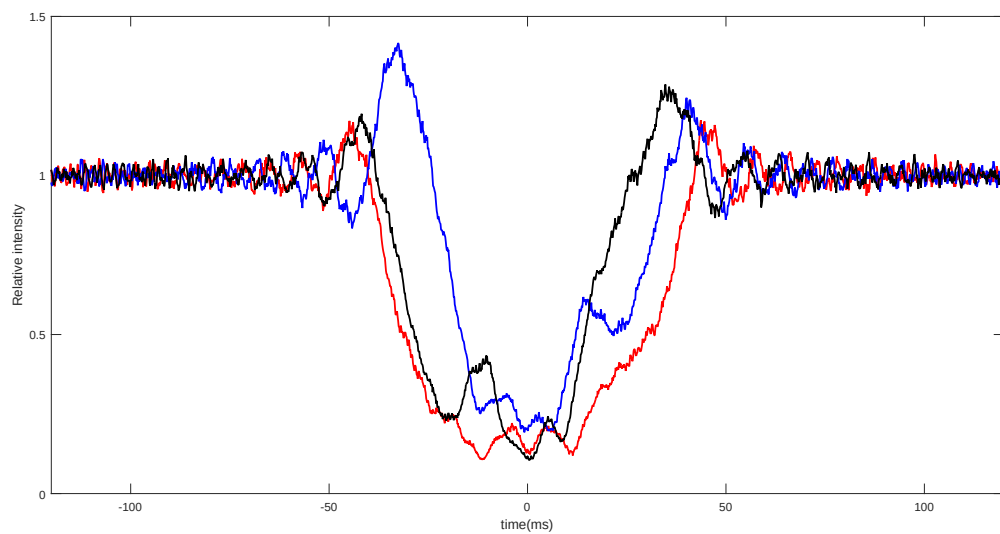
Εικόνα 6.31: Ο περιθλαστικός σχηματισμός που αναμένεται από την απόκρυψη ενός αστέρα από τον αστεροειδή (1862) Apollo, αν από τη Γη είναι ορατή η μία όψη της Εικόνας 6.30



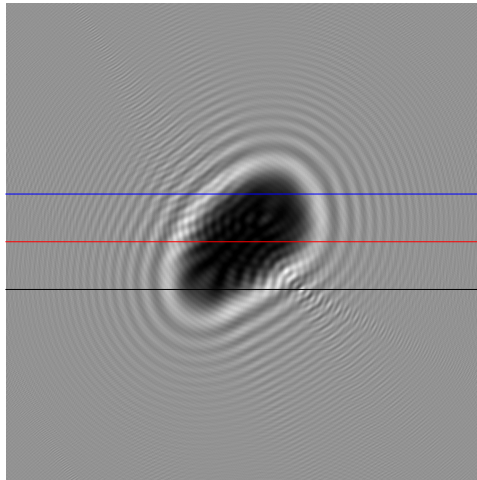
Εικόνα 6.32: Το διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου, όπως θα αναμενόταν παρατηρώντας μία επιπρόσθηση από τον αστεροειδή (1862) Apollo, για τρεις διαφορετικές θέσεις του παρατηρητή, σύμφωνα με την Εικόνα 6.31



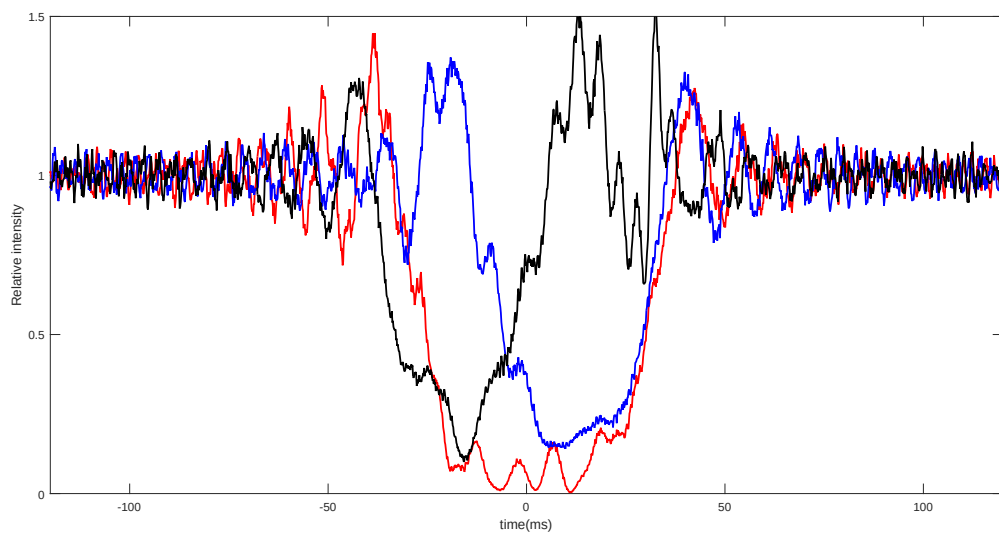
Εικόνα 6.33: Ο περιθλαστικός σχηματισμός που αναμένεται από την απόκρυψη ενός αστέρα από τον αστεροειδή (1862) Apollo, αν από τη Γη είναι ορατή η μία όψη της Εικόνας 6.30



Εικόνα 6.34: Το διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου, όπως θα αναμενόταν παρατηρώντας μία επιπρόσθηση από τον αστεροειδή (1862) Apollo, για τρεις διαφορετικές θέσεις του παρατηρητή, σύμφωνα με την Εικόνα 6.33



Εικόνα 6.35: Ο περιθλαστικός σχηματισμός που αναμένεται από την απόκρυψη ενός αστέρα από τον αστεροειδή (1862) Apollo, αν από τη Γη είναι ορατή η μία όψη της Εικόνας 6.30

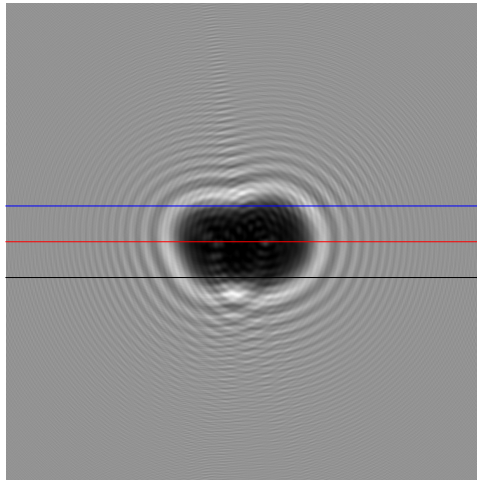


Εικόνα 6.36: Το διάγραμμα της σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου, όπως θα αναμενόταν παρατηρώντας μία επιπρόσθηση από τον αστεροειδή (1862) Apollo, για τρεις διαφορετικές θέσεις του παρατηρητή, σύμφωνα με την Εικόνα 6.35

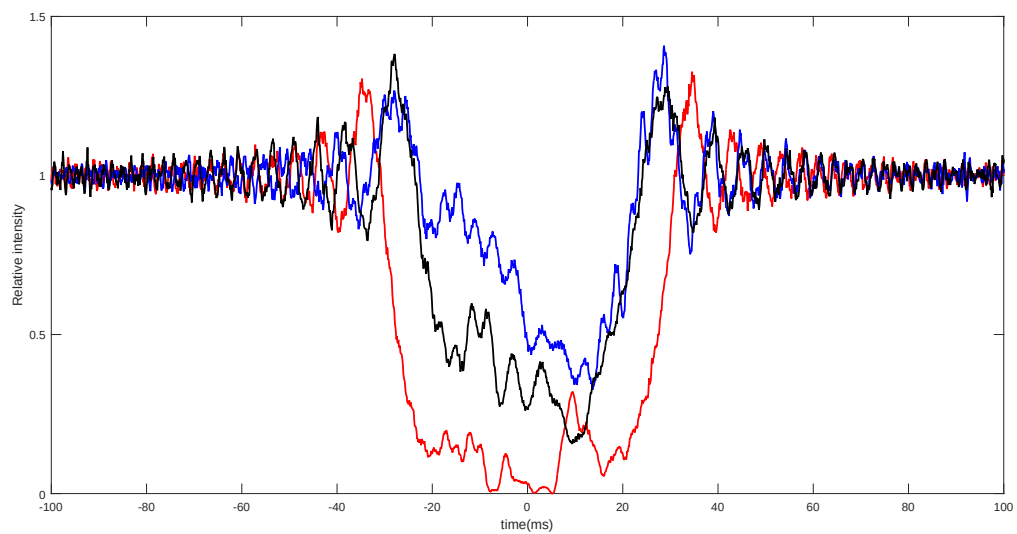
Ο αστεροειδής (4769) Castalia ανακαλύφθηκε το 1989 από την Αμερικανίδα αστρονόμο Eleanor Helin στο Αστεροσκοπείο του Palomar. Ο αστεροειδής αυτός αποτελείται από δύο αστεροειδείς που συγκρατούνται λόγω της βαρύτητάς τους. Στην Εικόνα 6.37 παρουσιάζονται τρεις όψεις του αστεροειδούς (4769) Castalia. Στις Εικόνες 6.38, 6.40 και 6.42 εμφανίζονται οι περιθλαστικοί σχηματισμοί που θα δημιουργούνταν κατά τη διάρκεια μιας επιπρόσθησης αστέρα από τον αστεροειδή αυτό, ενώ οι Εικόνες 6.39, 6.41 και 6.43 παρουσιάζουν τα διαγράμματα της σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου, όπως θα καταγράφονταν από παρατηρητές σε διαφορετικά γεωγραφικά πλάτη.



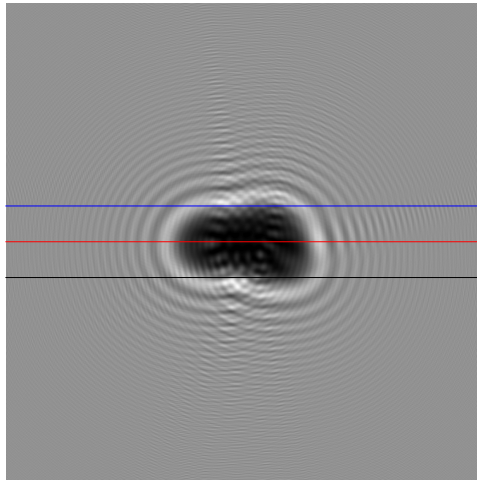
Εικόνα 6.37: Τρεις διαφορετικές όψεις του τριδιάστατου μοντέλου για τον αστεροειδή (4769) Castalia (Πηγή: 3D Asteroid Catalogue)



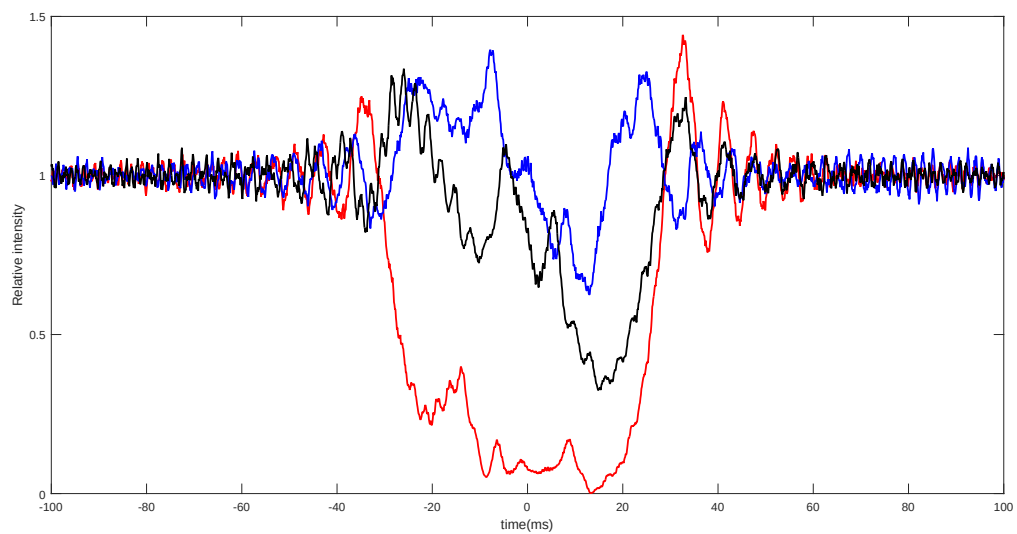
Εικόνα 6.38: Ο περιθλαστικός σχηματισμός που αναμένεται από την απόκρυψη ενός αστεριού από τον αστεροειδή (4769) Castalia, αν από τη Γη είναι ορατή η μία όψη της Εικόνας 6.37



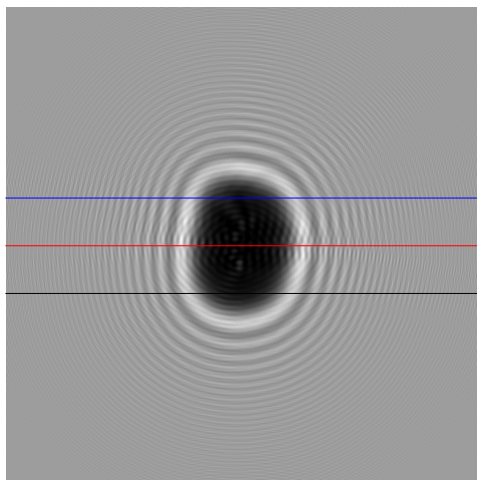
Εικόνα 6.39: Τρεις διαφορετικές όψεις του τριδιάστατου μοντέλου για τον αστεροειδή (4769) Castalia (Πηγή: 3D Astroid Catalogue)



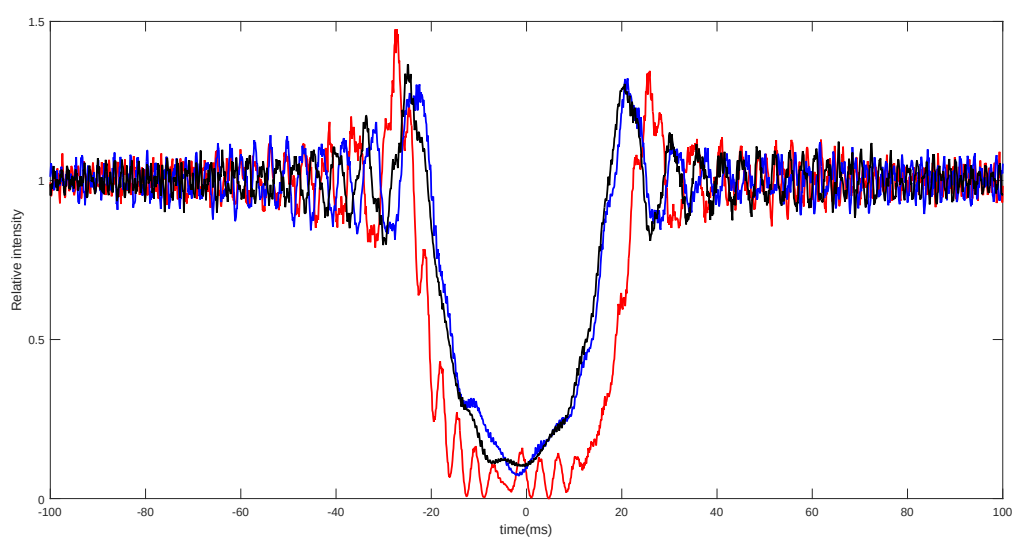
Εικόνα 6.40: Ο περιθλαστικός σχηματισμός που αναμένεται από την απόκρυψη ενός αστεριού από τον αστεροειδή (4769) Castalia, αν από τη Γη είναι ορατή η μία όψη της Εικόνας 6.37



Εικόνα 6.41: Τρεις διαφορετικές όψεις του τριδιάστατου μοντέλου για τον αστεροειδή (4769) Castalia (Πηγή: 3D Astroid Catalogue)



Εικόνα 6.42: Ο περιθλαστικός σχηματισμός που αναμένεται από την απόκρυψη ενός αστεριού από τον αστεροειδή (4769) Castalia, αν από τη Γη είναι ορατή η μία όψη της Εικόνας 6.37



Εικόνα 6.43: Τρεις διαφορετικές όψεις του τριδιάστατου μοντέλου για τον αστεροειδή (4769) Castalia (Πηγή: 3D Astroid Catalogue)

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Στο πρώτο τμήμα της εργασίας αναπτύσσεται λεπτομερώς η θεωρία της περίθλασης. Μελετήθηκαν εκτενώς η διατύπωση Fresnel - Kirchhoff και οι δύο λύσεις Rayleigh - Sommerfeld. Παρόλο που στην πλειοψηφία των εργασιών αναφέρονται οι λανθασμένες συνοριακές συνθήκες που θεωρούνται στην περίπτωση της διατύπωσης Fresnel - Kirchhoff, εντούτοις το ολοκλήρωμα αυτό χρησιμοποιείται για την περίθλαση κοντινού πεδίου και την παραγωγή των αναλυτικών λύσεων, όταν τοποθετείται κυκλικό ή ορθογώνιο διάφραγμα.

Σύμφωνα με τον Heurtley (1973), ο οποίος μελέτησε την περίπτωση περίθλασης από κυκλικό δίσκο, οι τρεις λύσεις συμπίπτουν για προσπίπτοντα αποκλίνοντα σφαιρικά κύματα όταν η πηγή και το σημείο παρατήρησης βρίσκονται σε αποστάσεις μεγάλες σε σχέση με το μήκος κύματος από το δίσκο. Όταν οι αποστάσεις γίνονται συγκρίσιμες με το μήκος κύματος, οι τρεις λύσεις δεν συμπίπτουν και προκύπτουν διαφορετικές λύσεις για τη συμπεριφορά της σχετικής έντασης στον οπτικό άξονα στη γειτονιά του εμποδίου. Η πρώτη λύση Rayleigh - Sommerfeld προβλέπει ότι η σχετική ένταση στον άξονα μηδενίζεται, καθώς το σημείο παρατήρησης μετακινείται πίσω από το δίσκο. Τόσο η δεύτερη λύση Rayleigh - Sommerfeld όσο και η λύση Fresnel - Kirchhoff, προβλέπουν μη μηδενικές τιμές όταν το σημείο παρατήρησης βρίσκεται πίσω από το δίσκο.

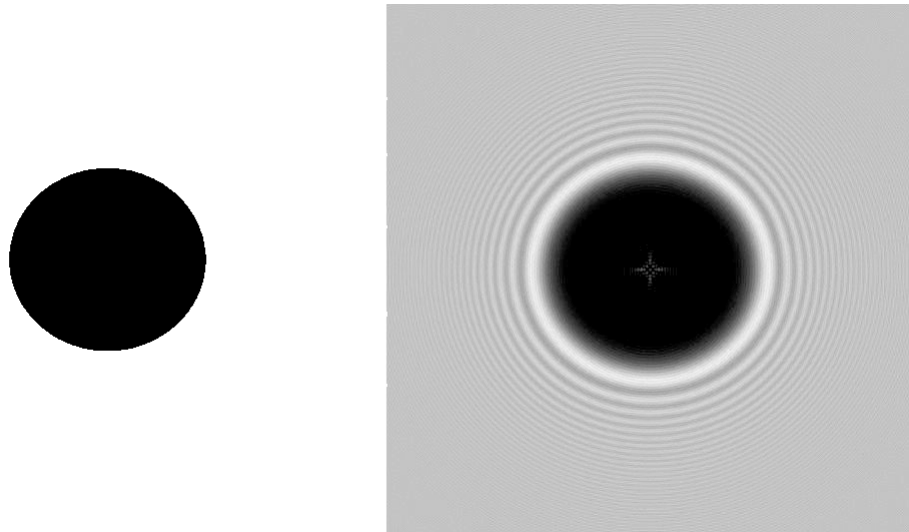
Στο όριο που προσπίπτουν στο εμπόδιο επίπεδα κύματα οι διαφορές των τριών λύσεων γίνονται μέγιστες. Σε αυτή την περίπτωση η δεύτερη λύση Rayleigh - Sommerfeld προβλέπει ότι η ένταση στον άξονα είναι παντού ίση με την ένταση του προσπίπτοντος κύματος, ακόμα και στο σημείο ακριβώς πίσω από το δίσκο. Αντίθετα, από την πρώτη λύση Rayleigh - Sommerfeld προκύπτει ότι η ένταση μεταβάλλεται όπως το τετράγωνο του συνημιτόνου της γωνίας μεταξύ του σημείου παρατήρησης και της ακρης του δίσκου.

Στο πλαίσιο της θεωρητικής μελέτης της θεωρίας της περίθλασης δημιουργήθηκε ένας κώδικας στη γλώσσα προγραμματισμού Matlab (2015a) με γραφικό περιβάλλον. Ο κώδικας αυτός αποσκοπεί στην εξέταση του φαινομένου της περίθλασης κοντινού πεδίου με τη χρήση διάφορων διαφραγμάτων και πώς αυτό επηρεάζεται αλλάζοντας τις διάφορες παραμέτρους που υπεισέρχονται σε αυτό, όπως για παράδειγμα η διάσταση του διαφράγματος, οι αποστάσεις πηγής - διαφράγματος και διαφράγματος - πετάσματος και το μήκος κύματος. Σε μελλοντικές εκδόσεις του κώδικα θα προστεθούν επιπλέον επιλογές διαφραγμάτων, όπως για παράδειγμα ορθογώνιο διάφραγμα, και θα επεκταθούν τα όρια των αποστάσεων ώστε να μπορεί ο κώδικας να χρησιμοποιηθεί και για τη μελέτη της περίθλασης Fraunhofer.

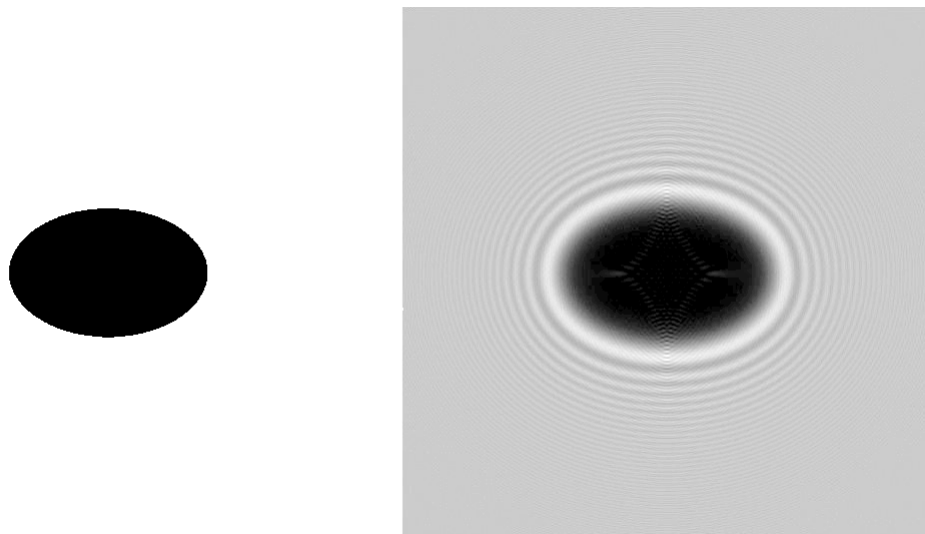
Κατά τη δημιουργία αυτού του κώδικα εξετάστηκαν τρεις μέθοδοι. Η πρώτη μέθοδος είναι η αναλυτική λύση, η οποία δίνεται με όρους των συναρτήσεων Lommel όταν πρόκειται για κυκλικό διάφραγμα και από τα ολοκληρώματα Fresnel και τη σπείρα του Cornu όταν πρόκειται για ορθογώνιο διάφραγμα. Η δεύτερη μέθοδος παρουσιάστηκε στην εργασία των Roques et al. (1987) σύμφωνα με την οποία εμπόδιο οποιουδήποτε σχήματος δύναται να κατασκευαστεί με μικρότερα ορθογώνια εμπόδια. Εφαρμόζοντας την αρχή του Babinet υπολογίζεται η ένταση σε αυτή την περίπτωση. Η τρίτη μέθοδος είναι ο μετασχηματισμός Fourier. Η μέθοδος αυτή επιτρέπει τον υπολογισμό της έντασης και του περιθλαστικού σχηματισμού από οποιοδήποτε διάφραγμα ή εμπόδιο. Η μέθοδος των Roques et al. (1987) όταν δημοσιεύτηκε η εργασία είχε το πλεονέκτημα του πολύ γρήγορου υπολογισμού, έναντι της αναλυτικής λύσης με συναρτήσεις Lommel. Πλέον, με τα σύγχρονα μέσα που διατίθενται ο χρόνος υπολογισμού των δύο μεθόδων δε διαφέρει σημαντικά, άρα από τη μέθοδο των αναλυτικών λύσεων προκύπτουν πιο ακριβείς υπολογισμοί. Τέλος, η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό οποιουδήποτε σχήματος εμποδίου ή διαφράγματος και είναι σημαντικά πιο γρήγορη από τις άλλες μεθόδους.

Στη συνέχεια εκτελέστηκαν πειράματα στο Εργαστήριο Αστρονομίας και Εφαρμοσμένης Οπτικής στο Τμήμα Φυσικής του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Τα πειράματα αυτά έγιναν με τη χρήση διαφραγμάτων διάφορων σχημάτων όμως ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στα πειράματα περίθλασης κοντινού πεδίου από κυκλικό εμπόδιο. Τα πειράματα αυτά προσομοιάζουν επαρκώς τις επιπρόσθησεις αστερών από ουράνια σώματα του Ηλιακού μας Συστήματος στην περίπτωση που έχουν τέλεια σφαιρικό σχήμα. Επιπλέον πειράματα που μπορούν να πραγματοποιηθούν αφορούν την περίθλαση Fresnel από χείλος, όπως συμβαίνει στην περίπτωση της επιπρόσθησης αστερών από τη Σελήνη. Θα μπορούσαν να εκτελεστούν αυτά τα πειράματα με σκοπό τη μελέτη του φαινομένου σε σχέση με το μήκος κύματος και τη γωνιακή διάσταση της πηγής.

Ιδιαίτερη έμφαση δόθηκε στην εμφάνιση του φωτεινού σημείου στο κέντρο της γεωμετρικής σκιάς στον σχηματισμό λόγω περίθλασης από κυκλικό εμπόδιο, ή όπως ονομάζεται στη βιβλιογραφία στο Arago spot. Το φωτεινό αυτό σημείο προκαλείται λόγω της συμβολής των σφαιρικών δευτερευόντων κυμάτων που εκπέμπονται από το χείλος του εμποδίου. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο σχηματισμός στο κέντρο της γεωμετρικής σκιάς ελλειπτικού εμποδίου. Λόγω της διαφοράς της απόστασης από το χείλος στο κέντρο εξαιτίας της έλλειψης, δεν παρατηρείται πια φωτεινό σημείο αλλά ένας περίπλοκος σχηματισμός, όπως φαίνεται στις Εικόνες 7.1 και 7.2. Ο σχηματισμός αυτός για μικρή ελλειπτικότητα του εμποδίου δημιουργεί μία καυστική επιφάνεια η οποία έχει το σχήμα σταυρού ενώ όσο πιο πεπλατυσμένο γίνεται το εμπόδιο, τόσο πιο μεγάλος γίνεται ο σχηματισμός αυτός.



Εικόνα 7.1: Αριστερά: Ελλειπτικό διάφραγμα με μικρή ελλειπτικότητα. Δεξιά: Ο περιθλαστικός σχηματισμός λόγω του ελλειπτικού διαφράγματος αριστερά, στον οποίο παρατηρούμε ότι το Arago spot παίρνει τη μορφή σταυρού.



Εικόνα 7.2: Αριστερά: Ελλειπτικό διάφραγμα με μεγάλη ελλειπτικότητα. Δεξιά: Ο περιθλαστικός σχηματισμός λόγω του ελλειπτικού διαφράγματος αριστερά. Λόγω της μεγάλης ελλειπτικότητας του εμποδίου ο σταυρός που θα αναμενόταν στο κέντρο της γεωμετρικής σκιάς είναι πολύ μεγαλύτερος σε σχέση με αυτόν της Εικόνας (7.1)

Στις πειραματικές εικόνες που προέκυψαν προσαρμόστηκε κατάλληλο θεωρητικό μοντέλο. Για την προσαρμογή αυτή δημιουργήθηκε ένα δεύτερο πρόγραμμα με χρήση της γλώσσας προγραμματισμού Matlab 2015a με γραφικό περιβάλλον στο οποίο ο χρήστης μπορεί να εισάγει τις τιμές των παραμέτρων που υπεισέρχονται στο πείραμα. Από το πρόγραμμα αυτό εξάγονται οι παράμετροι για τις οποίες οι μετρήσεις στην πειραματική διάταξη δεν είναι ακριβείς. Από τα συ-

γκεκριμένα πειράματα αναπόφευκτη ήταν η παρουσία του διάχυτου φωτός, η οποία αφαιρείται εν μέρει μέσω του κώδικα. Παρατηρώντας τα διαγράμματα των σχετικών εντάσεων για όλες τις διαθέσιμες διαμέτρους των μεταλλικών σφαιριδίων, η συνεισφορά του διάχυτου φωτός ήταν πιο έντονη στην γεωμετρική σκιά του σφαιριδίου μικρής διαμέτρου ενώ στη γεωμετρική σκιά του σφαιριδίου μεγάλης διαμέτρου η συνεισφορά αυτή αφαιρούνταν πλήρως από τον παράγοντα διάχυτου φωτός. Σε επόμενη εκδόση του κώδικα αυτού θα προστεθούν επιπλέον παράμετροι όπως είναι η τραχύτητα της επιφάνειας του κυκλικού εμποδίου.

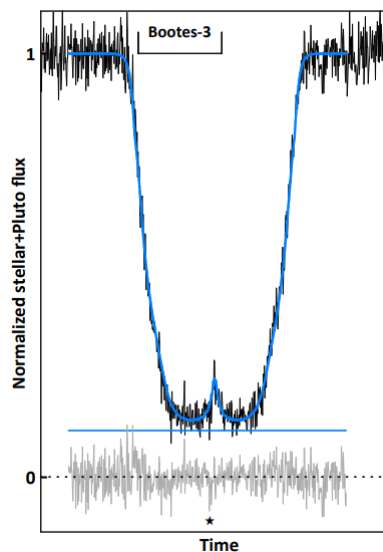
Τέλος, μελετήθηκαν οι εφαρμογές της περίθλασης με ιδιαίτερη έμφαση στα φαινόμενα των επιπροσθήσεων αστέρων από τη Σελήνη και από αστεροειδείς. Οι επιπροσθήσεις από τη Σελήνη παρατηρούνται με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για το γωνιακό μέγεθος των αστέρων ή ακόμη και ραδιοπηγών. Το γωνιακό μέγεθος χρησιμοποιείται στη συνέχεια σε μοντέλα για την ενεργό θερμοκρασία του αστέρα καθώς και το προφίλ λαμπρότητας του αστέρα αν συμπεριληφθεί και το φαινόμενο της αμαύρωσης χείλους στον αστέρα. Επίσης οι επιπροσθήσεις αστέρων από τη Σελήνη έχουν ιδιαίτερη σημασία όταν το αστέρι που συμμετέχει στο φαινόμενο είναι εξελιγμένου τύπου. Τέλος, οι επιπροσθήσεις αστέρων από τη Σελήνη συνετέλεσαν στην ανακάλυψη διπλών ή και τριπλών αστρικών συστημάτων.

Οι επιπροσθήσεις αστέρων από αστεροειδείς είναι ένα αρκετά συχνό φαινόμενο από το οποίο εξάγονται συμπεράσματα για το σχήμα των αστεροειδών, ειδικά όταν συνδυάζονται παρατηρήσεις από διάφορα σημεία στη Γη. Η μέθοδος των χορδών, όπως λέγεται, χρησιμοποιείται για την εξαγωγή συμπερασμάτων τόσο για το σχήμα όσο και για τον καλύτερο προσδιορισμό της τροχιάς του αστεροειδούς. Στην παρούσα εργασία μελετήθηκαν κάποιοι αστεροειδείς που βρίσκονται στη Ζώνη Αστεροειδών για τους οποίους είναι γνωστά τα φυσικά χαρακτηριστικά τους και έχουν σχεδιαστεί τριδιάστατα μοντέλα. Τα μοντέλα αυτά χρησιμοποιήθηκαν για την πρόβλεψη των διαγράμμάτων σχετικής έντασης συναρτήσει του χρόνου.

Σε περαιτέρω μελέτες του φαινομένου επιπροσθήσεων αστέρων από μικρά σώματα του Ηλιακού μας Συστήματος θα προστεθεί το φαινόμενο της διάθλασης το οποίο κυριαρχεί σε περιπτώσεις που τα σώματα που αποκρύπτουν το αστέρι περιβάλλονται από ατμόσφαιρα ή οι διαστάσεις τους είναι αρκετά μεγάλες ώστε το φαινόμενο θεωρείται στο πλαίσιο της γεωμετρικής οπτικής. Η μέθοδος Fourier αποτελεί μία επιτυχημένη μέθοδο που μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση που ένα ουράνιο σώμα περιβάλλεται από ατμόσφαιρα αλλά οι διαστάσεις του και η απόστασή του από τη Γη ικανοποιούν τις συνθήκες περίθλασης.

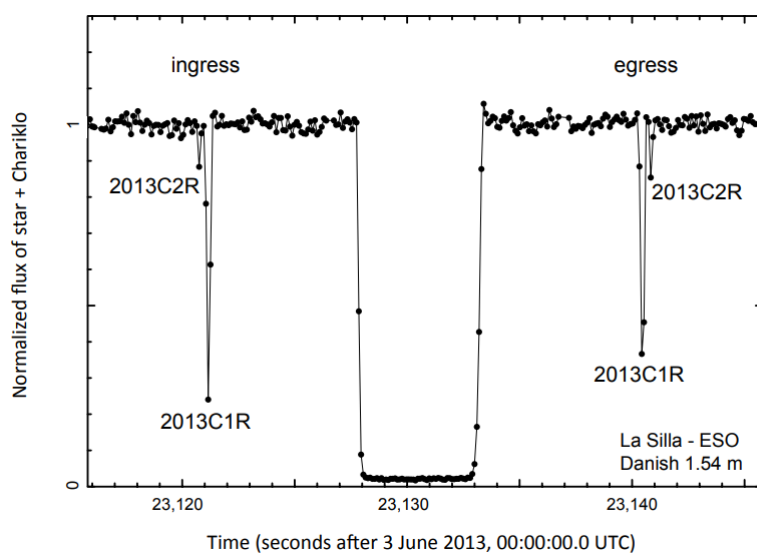
Τα τελευταία χρόνια, λόγω της σπουδαιότητας αυτών των φαινομένων και των συμπερασμάτων που μπορούν να εξαχθούν, έχει δημιουργηθεί ένα παγκόσμιο δίκτυο παρατήρησης επιπροσθήσεων αστέρων από μικρά σώματα του Ηλιακού μας Συστήματος. Από τις παρατηρήσεις των επιπροσθήσεων του Πλούτωνα εξάγονται συμπεράσματα για τη συμπεριφορά της ατμόσφαιράς του και με τη χρήση κατάλληλων μοντέλων προκύπτουν οι συνθήκες πίεσης που επικρατούν σε αυτή. Μία καμπύλη φωτός που προέκυψε από την παρατήρηση μίας επιπρόσθησης του Πλούτωνα παρουσιάζεται στην Εικόνα 7.3.

Το Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο Αθηνών είναι μέλος του Ευρωπαϊκού τμήματος αυτού του παγκοσμίου δικτύου επιπροσθήσεων (International Occultations Timing Association). Μία σημαντική συνεισφορά του Αστεροσκοπείου ήταν η συμμετοχή στις παρατηρήσεις του Μετα-Ποσειδώνιου Αντικειμένου (Trans-Neptunian Object) Haumea. Από το συνδυασμό των παρατηρήσεων του φαινομένου αυτού προέκυψε ότι το μικρό αυτό σώμα του Ηλιακού



Εικόνα 7.3: Καμπύλη φωτός από την παρατήρηση επιπρόσθησης του Πλούτωνα στις 29 Ιουνίου 2015 (Πηγή: Sicardy et al., 2016)

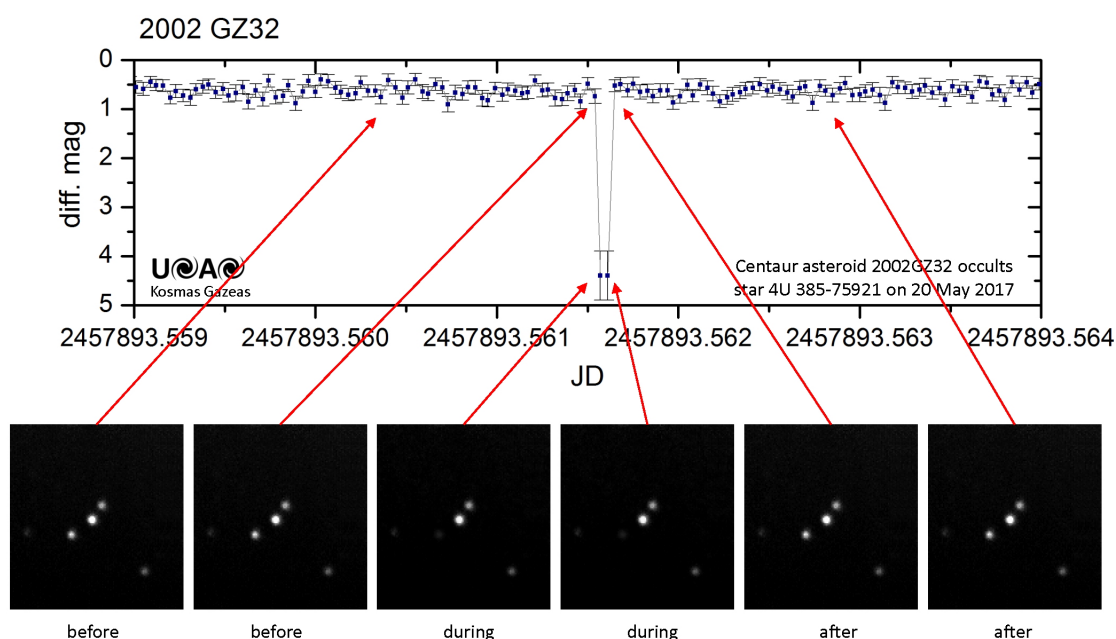
μας Συστήματος συγκρατεί βαρυτικά σύστημα δακτυλίων και δύο δορυφόρους. Αυτό το συμπέρασμα είναι πολύ σημαντικό γιατί εκτός από τους αέριους γιγάντιους πλανήτες του Ηλιακού μας Συστήματος μόνο ένα άλλο μικρό σώμα, η Χαρικλώ, συγκρατεί σύστημα δακτυλίων, όπως προέκυψε από τις παρατηρήσεις της επιπρόσθησης από το διάγραμμα της Εικόνας 7.4.



Εικόνα 7.4: Η καμπύλη φωτός της επιπρόσθησης αστέρα από το μικρό μετα-ποσειδώνιο αντικείμενο Χαρικλώ που παρατηρήθηκε στις 3 Ιουνίου 2013 (Πηγή: Braga-Ribas, F. et al., 2014)

Από το Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο Αθηνών έχουν παρατηρηθεί επιτυχώς αρκετά φαινόμενα επιπροσθήσεων αστερών από αστεροειδείς. Μελλοντικά σχέδια παρα-

τηρήσεων περιλαμβάνουν την εγκατάσταση και χρήση ανιχνευτή CCD ταχείας λήψης, ώστε να είναι δυνατή η καταγραφή των περιθλαστικών φαινομένων κατά τις επιπρόσθσεις των σωμάτων αυτών. Στην Εικόνα 7.5 παρουσιάζεται η καμπύλη φωτός καθώς και στιγμιότυπα από την επιπρόσθηση του αστεροειδούς 2002 GZ32 όπως παρατηρήθηκε από το Γεροσταθοπούλειο Πανεπιστημιακό Αστεροσκοπείο Αθηνών στις 20 Μαΐου 2017.



Εικόνα 7.5: Η καμπύλη φωτός της επιπρόσθησης αστέρα από τον αστεροειδή 2002 GZ32 στις 20 Μαΐου 2017 (Πηγή: UOAO)

Βιβλιογραφία

- [1] Abedin, K. M., Islam, M. R., Haider, A. F. M. Y., 2007, *Computer simulation of Fresnel diffractions from rectangular apertures and obstacles using the Fresnel integrals approach*, Optics & Laser technology, 39, 237-246
- [2] Aime, C, Arisitidi, E., Rabbia, Y., 2013, *The Fresnel diffraction: A story of light and darkness*, EAS Publications series, 59, 37-58
- [3] Akhmanov, S. A., Nikitin, S. Yu., 1997, *Physical Optics*, Oxford University Press, United stated
- [4] Bass, M., Van Styland, E. W., Williams, D. R., Wolfe, W. L., 1994, *Handbook of optics: Fundamentals, Techniques and Design*, McGraw-Hill Inc., United States
- [5] Borghi, R., 2014, *Plane wave Fresnel diffraction by elliptic apertures: A Fourier-based approach*, J. Opt. Soc. Am. A, 31, 10
- [6] Born, M, Wolf, E., 1999, *Principles of Optics, Seventh (Expanded) Edition*, Press Syndicate of the University of Cambridge, United Kingdom
- [7] Bouwkamp, C. J., 1954, *Diffraction theory*, Pep. Prog. Phys., 17, 35
- [8] Braga-Ribas, F., Sicardy, B., Ortiz, J. L. et al., 2014, *A ring system detected around the Centaur (10199) Chariklo* Nature, 508, 72
- [9] Byron, F. W., Fuller, R. W., 1969, *Mathematics of Classical and quantum physics*, Dover publications, Inc., New York
- [10] Cooray, A., 2013, *Kuiper belt object sizes and distances from occultation observations*, ApJL, 589, 2, L97
- [11] Dias-Oliveira, A., Sicardy, B., Lellouch, E. et al., 2015, *Pluto's atmosphere from stellar occultations in 2012 and 2013*, , Apj, 811, 1
- [12] Ditchburn, R. W., 1952, *Light*, Blackie & Son limited, London and Glasgow
- [13] Dubra, A., Ferrari, J. A., 1998, *Diffacted field by an arbitrary aperture*, Am. J. Phys., 67(1)

- [14] Dyachenko, V., Richichi, A., Balega, Yu. et al., 2018, *Lunar occultation observations at the SAO RAS 6-m telescope*, MNRAS, styl427
- [15] Eddington, A. S., 1909, *Note on Major MacMahon's paper "On the determination of the apparent diameter of a fixed star"*, MNRAS, 69, 178
- [16] English, R. E. Jr., George, N., 1988, *Diffraction patterns in the shadows of disks and obstacles*, Applied optics, 27, 8
- [17] Essex, E. A., 1977 *Hertz vector potentials of electromagnetic theory*, Am. J. Phys., 45, 11
- [18] Evans, D. S., 1951, *The occultation of Antares of 1950 June 27-28*, MNRAS, 111, 1
- [19] Freude, W., Grau, G. K., 1995, *Rayleigh - Sommerfeld and Helmholtz - Kirchhoff integrals: Application to the scalar and vectorial theory of wave propagation and diffraction*, Journal of Lightwave technology, 13, 1
- [20] Ghatak, A., 2009, *Optics*, Tata McGraw-Hill Publishing Company limited, New Delhi
- [21] Gibson, S. F., Lanni, F., 1989, *Diffraction by a circular aperture as a model for three-dimensional optical microscopy*, J. Opt. Soc. Am/ A, 6, 9
- [22] Goncharski, A. V., Romanov, S. Yu., Stephanov, V. V., Cherepashuk, A. M., 1986, *Finite-parametric models in inverse problems of astrophysics: Lunar occultations of stars*, Sov. Astron., 30(6)
- [23] Goodman, J. W., 1996, *Introduction to fourier optics*, The McGraw-Hill Companies, Inc., United States of America
- [24] Guenther, R. D., 1990, *Modern optics*, John Wiley & Sons, Inc., United States
- [25] Harvey, J. E., Forgham, J. L., 1984, *The spot of Arago: New relevance for an old phenomenon*, Am. J. Phys., 52(3)
- [26] Harvey, J. E., Forgham, J. L., Von Bieren, K., 1983, *The spot of Arago and its role in wavefront analysis*, Proc. SPIE 0351 Wavefront Sensing
- [27] Hazard, C., 1962, *The method of lunar occultations and its application to a survey of thw radio source $3C_{212}$* , MNRAS, 124, 4
- [28] Hecht, E., 2002, *Optics*, Pearson Education Inc., San Francisco
- [29] Heurtley, J. C., 1973, *Scalar Rayleigh - Sommerfeld and Kirchhoff diffraction integrals: A comparison of exact evaluations for axial points*, J. Opt. Soc. Am., 63, 8
- [30] Hovenac, E. A., 1989, *Fresnel diffraction by spherical obstacles*, Am. J. Phys., 57(1)
- [31] Huang, J. G., Christian, J. M., McDonald, G. S., 2006, *Fresnel diffraction and fractal patterns from polygonal apertures*, J. Opt. Soc. Am. A, 23, 11

- [32] Irodov, E., 1981, *Problems in General Physics*, Mir Publishers, Moscow
- [33] Jenkins, F. A., White, H. E., 2001, *Fundamentals of Optics*, The McGraw-Hill Companies, Inc., United States of America
- [34] Jimenez, J. R., Hita, E., 2001, *Babinet's principle in scalar theory of diffraction*, Optical review, 8, 6, 495-497
- [35] Kathuria, Y. P., 1985, *Fresnel and far-field diffraction due to an elliptical aperture*, J. Opt. Soc. Am. A, 2, 6
- [36] Keating, M. P., 2002, *Geometrical, Physical and Visual optics*, Butterworth-Heinemann, United States of America
- [37] Klein, M. V., Furtak, T. E., 1986 *Optis*, John Wiley & Sons, Inc., United States
- [38] Knoechel, G, von der Heide, K, 1978, *Statistically rigorous reducton of optical lunar occultation measurements*, A&A, 67, 209-220
- [39] Kraus, H. G., 1989, *Huygens - Fresnel - Kirchhoff wave-front diffraction formulation: spherical waves*, J. Opt. Soc. Am. A, 6, 8
- [40] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., 1971, *The Classical theory of fields: Course of theoretical physics volume 2*, Pergamon Press Ltd., Oxford
- [41] Lehtinen, K, Bach, U., Muinonen, K. et al., 2016, *Asteroid sizing by radiogalaxy occultation lightcurves at 5 GHz*, ApJL, 822:L21
- [42] Li, J., Mu, Y., 2009, *An indirect algorithm of Fresnel diffraction*, Optics communications, 282, 455-458
- [43] Li, J., Mu, Y., Li, Y., 2010 *Common diffraction integral calculation based on a Fast Fourier Transform algorithm*, Advances in Imaging and Electron Physics, 164, 257-302
- [44] Li, J., Picart, P., 2012, *Digital holography*, ISTE Ltd. and John Wiley & Sons, Inc., Great Britain and United States
- [45] Lucke, R. L., 2006, *Rayleigh - Sommerfeld diffraction and Poisson's spot*, Eur. J. Phys., 27, 193-204
- [46] MacMAhon, Major P. A., 1908, *On the determination of the apparent diameter of a fixed star*, MNRAS, 69, 126-127
- [47] Marathay, A. S., McCalmont, J. F., 2004, *On the usual approximation used in the Rayleigh - Sommerfeld diffraction theory*, J. Opt. Soc. Am. A, 21, 4
- [48] Mas, D., Garcia, J., Ferreira, C. et al., 1999 *Fast algorithms for free-space diffraction patterns occultation*, Optics communication, 164, 233-245

- [49] Mach, E., 1926, *The principles of physical optics: An historical and philosophical treatment*, Dover publications, Inc., United States of America
- [50] McAlister, H. A., 1985, *High angular resolution measurements of stellar properties*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 23: 59-87
- [51] Mezouari, S., Harvey, A. R., 2003, *Validity of Fresnel and Fraunhofer approximations in scalar diffraction*, J. Opt. A.: Pure Appl. Opt., 5, 586-591
- [52] Mielenz, K. D., 1998, *Algorithms for Fresnel diffraction at rectangular and circular apertures*, J. Res. Natl. Inst. Stans. Technol., 103, 497
- [53] Nather, R. E., McCants, M. M., Evans, D. S., 1970, *The Angular Diameter of Lambda Aquarii*, Astrophysical Journal, vol. 160, p.L181
- [54] Nihei, T. C., Lehner, M.J., Bianco, F.B. et al., 2007, *Detectability of occultation of stars by objects in the Kuiper Belt and Oort Cloud*, AJ, 134, 4
- [55] Ortiz, J. L., Santos-Sanz, P., Sicardy, B. et al., 2017, *The size, shape, density and ring of the dwarf planet Haumea from a stellar occultation* Nature, 550, pages 219–223
- [56] Pedrotti, F. L. S. T., Pedrotti, L. M., Pedrotti L. S., 2006, *Intorduction to optics, Third edition*, Pearson Education Inc., San Francisco
- [57] Reisinger, T., Leufke, P. M., Gleiter, H., Hahn, H., 2017, *On the relative intensity of Poisson's spot*, New J. Phys., 19, 033022
- [58] Richichi, A., 1989, *Model-independent retrieval of brightness profiles from lunar occultation lightcurves in the near infrared domain*, A&A, 226, 366-372
- [59] Richichi, A., Calamai, G., Leinert, Ch., 1994, *New binary stars discovered by lunar occultations*, A&A, 286, 829-837
- [60] Richichi, A., Calamai, G., Stecklum, B., 2002, *New binary stars discovered by lunar occultations VI*, A&A 382, 178-183
- [61] Richichi, A., Glindemann, A., 2012, *Advances in the interpretation and analysis of lunar occultation light curves*, A&A, 538, A56
- [62] Richichi, A., Sharma, S., Pandey, A. K. et al., 2018, *Lunar occultations of Aldebaran and other late-type stars observed from Devasthal*, New Astronomy, 59, 28-32
- [63] Roques, F., Moncuquet, M, 2000, *A detection method for small Kuiper belt objects: The search for stellar occultations*, Icarus, 147, 530-544
- [64] Roques, F., Monuquet, F., Sicardy, B., 1987, *Stellar occultations by small bodies: Diffraction effects*, AJ, 93, 6

- [65] Saleh, B. E. A., Teich, M. C., 2007, *Fundamentals of photonics*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey
- [66] Scheuer, P. A. G., 1962, *On the use of lunar occultations for investigating the angular structure of radio sources*, Australian Journal of Physics, 15(3), 333-343
- [67] Sheppard, C. J. R., Cooper, I. J., 2004, *Fresnel diffraction by a circular aperture with off-axis illumination and its use in deconvolution of microscope images*, J. Opt. Soc. Am. A, 24, 4
- [68] Sheppard, C. J. R., Roberts, P. P, Gu, M., 1992, *Fresnel approximation for off-axis illumination of a circular aperture*, J. Opt. Soc. Am. A, 10, 5
- [69] Sicardy, B., Talbot, J., Meza, E. et al., 2016, *Pluto's atmosphere from the 2015 June 29 ground-based stellar occultation at the time of the new horizons flyby* ApJL, 819, 2
- [70] Sommargren, G. E., Weaver, H. J., 1990 *Diffraction of light by an opaque sphere 1: Description and properties of the diffraction pattern*, Applied Optics, 29, 31
- [71] Sommargren, G. E., Weaver, H. J., 1992 *Diffraction of light by an opaque sphere 2: Image formation and resolution considerations*, Applied Optics, 31, 10
- [72] Sommerfeld, A., 1954, *Optics*, Academix Press Inc., New York
- [73] Trester, S., 1999, *Computer-simulated Fresnel diffraction using the Fourier transform*, Computing in science & engineering, 1, 5
- [74] Van Belle, G. T., 1999, *Predicting stellar angular sizes*, Publications of the Astronomical society of the Pacific, 111, 1515-1523
- [75] Walther, A., 1969, *Lenses, Wave Optics and Eikonal functions*, J. Opt. Soc. Am., 59, 10
- [76] Wasserman, L., Veverka, J, 1973, *On the reduction of occultation light curves*, Icarus, 20, 322-345
- [77] White, N. M., Kreidl, T. J., 1984, *Occultation diameters of Alpha Tauri*, AJ, 89, 424-429
- [78] Williams, J. D., 1939, *A method fro the determination of stellar diameters*, ApJ, 89, 4
- [79] Wilson, R. G., McCreary, S. M., Thompson, J. L., 1991, *Optical transformations in three-space: Simulations with a PC*, Am. J. Phys., 60(1)
- [80] Young, E. F., 2012, *A Fourier optics method for calculating stellar occultation light curves by objects with thin atospheres*, AJ, 144:32
- [81] Young, L. A., 2009, *Rapid computation of occultation lightcurves using Fourier decomposition*, AJ, 137, 3398-3403

- [82] Young, M., 2008, *Οπτική και λέιζερ: οπτικές ίνες και κυματοδηγοί*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα
- [83] Αναστασάκης, Ε., 2002, *Σύγχρονη πειραματική οπτική*, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα
- [84] 3D Asteroid Catalogue
<https://space.frieger.com/asteroids/asteroids/>
- [85] Quantum information technology
<http://www.iqst.ca/quantech/>