Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας & Μηχανικής

Φαινόμενη Κίνηση και Μεταβλητότητα της Παρατηρούμενης Ακτινοβολίας σε Αστροφυσικούς Πίδακες Ενεργών Γαλαξιών

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

Κερασιώτη Στεφανία
Α.Μ: 201633

Επιβλέπων: Νεκτάριος Βλαχάκης
Αναπληρωτής Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Αθήνα 2018

Εθνικό & Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας & Μηχανικής

Φαινόμενη Κίνηση και Μεταβλητότητα της Παρατηρούμενης Ακτινοβολίας σε Αστροφυσικούς Πίδακες Ενεργών Γαλαξιών

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Νεκτάριος Βλαχάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής
Απόστολος Μαστιχιάδης, Καθηγητής
Κοσμάς Γαζέας, Λέκτορας

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Νεκτάριο Βλαχάκη, για τη μετάδοση του τρόπου σκέψης και των γνώσεών του και κυρίως για την υπομονή και ειλικρινή πρόθεσή του να προσφέρει πολύτιμες συμβουλές και βοήθεια σε κάθε πρόβλημα που συνάντησα στη διπλωματική μου εργασία. Θα ήθελα επιπλέον να ευχαριστήσω τον κύριο Απόστολο Μαστιχιάδη για την ουσιαστική και καθοριστική, για την ολοκλήρωση της εργασίας, συνεπίβλεψή του καθώς και τον κύριο Κοσμά Γαζέα για τις πολύτιμες συμβουλές του καθόλη τη διάρκεια. Επίσης ευχαριστώ τους συμφοιτητές μου, με τους οποίους μπορώ να μοιραστώ τον ενθουσιασμό και τους προβληματισμούς μου, για κάθε είδους βοήθεια καθώς και τη κυρία Σοφία Ζαρμπούτη για την μεγάλη συνεισφορά της. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους φίλους μου που βρίσκονται πάντα δίπλα μου και πάνω από όλα, την οικογένειά μου που με την υπομονή και τη στήριξή της, σε όλους τους τομείς, μπορώ και συνεχίζω να ακολουθώ τα όνειρά μου.

Περίληψη

Η μεγάλη διακριτική ικανότητα που προσφέρουν τα σύγχρονα ραδιοπαρατηρητήρια, μέσω της συμβολομετρίας, καθιστούν πλέον δυνατή τη χαρτογράφηση της δομής των πιδάκων των ενεργών γαλαξιακών πυρήνων. Οι συστηματικές παρατηρήσεις των πηγών αυτών δίνουν πληροφορίες τόσο για τη μεταβλητότητα της ακτινοβολίας τους όσο και την κινηματική των διάφορων συνιστωσών που παρουσιάζουν, ενώ μέσω της πολωσιμετρίας προκύπτουν συμπεράσματα για την δομή του μαγνητικού πεδίου. Στην παρούσα εργασία μελετάμε τη φαινόμενη τροχιά και τις ιδιότητες της ακτινοβολίας σύγχροτρον από μη θερμική κατανομή ηλεκτρονίων που περιέχεται σε θύλακα πλάσματος, ο οποίος κινείται σχετικιστικά σε ελικοειδή τροχιά, ακολουθώντας τις γραμμές ροής, όπως προκύπτουν από το μαγνητοϋδροδυναμικό μοντέλο ακτινικής αυτοομοιότητας. Μια τέτοια κίνηση οδηγεί σε αυξομειώσεις της έντασης λόγω ενίσχυσης Doppler και στη συνεχώς μεταβαλλόμενη διεύθυνση του διανύσματος πόλωσης. Παράλληλα, επισημαίνουμε τα βασικά χαρακτηριστικά για τα κάθετα προφίλ της έντασης, της πόλωσης και της στροφής Faraday για την περίπτωση συνεχών πιδάκων, ιδανικής ανάλυσης.

Abstract

Very long baseline interferometry (VLBI), offers high resolution images of parsec scale structures of AGN jets. Systematic observations and polarization measurements provide significant informations on the variability, dynamical evolution of jet components and magnetic field structure. Here we study apparent motion and synchrotron radiation properties from a non thermal particle distribution that propagates along the jet, following dynamical flow lines that correspond to a radial-self similar MHD model. Such a motion can produce a variability in flux due to Doppler boosting, as well as a continuous change of the electric vector position angle (EVPA). In addition, we discuss main aspects of transverse profile of intensity, polarization and rotation measure (RM), for resolved, continuous jets.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

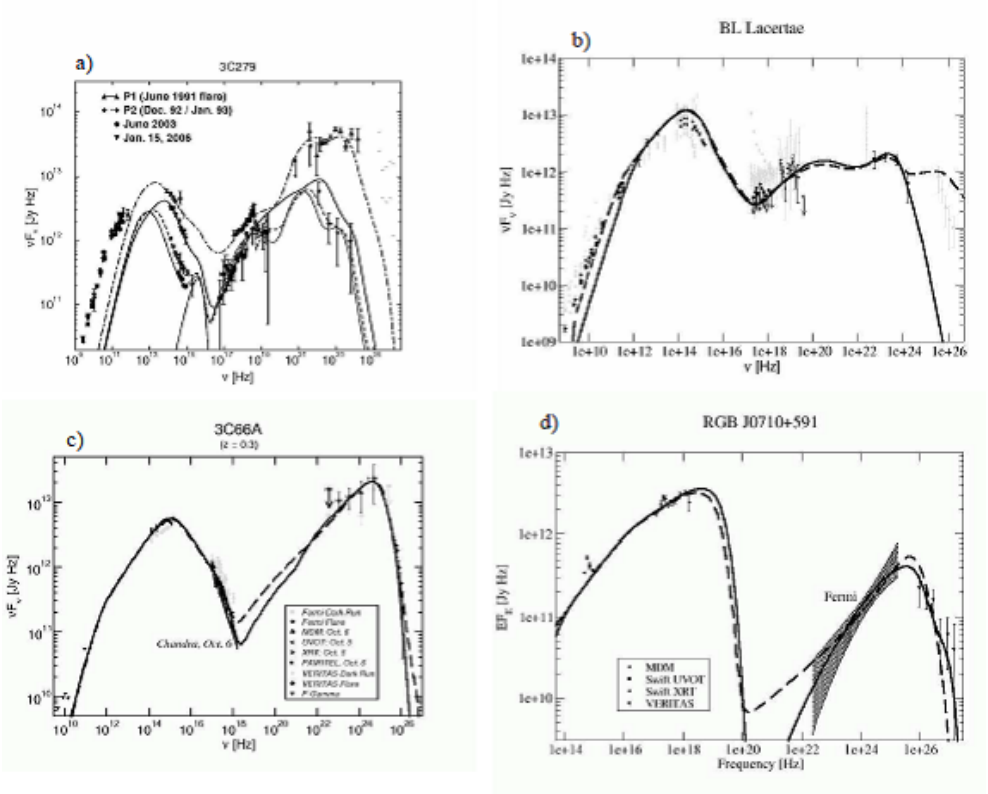
1.1 Ενεργοί Γαλαξιακοί Πυρήνες-AGNs

Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες και μεθοδικά παρατηρούμενες, σε όλο το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα, πηγές ακτινοβολίας στο σύμπαν, είναι οι Ενεργοί Γαλαξιακοί πυρήνες (Active Galactic Nuclei-AGNs). Τα αντικείμενα αυτά, αποτελούν τις κεντρικές περιοχές των ενεργών γαλαξιών και ευθύνονται για το μεγαλύτερο μέρος της ακτινοβολίας τους, καθώς η εκπομπή τους σε όλα τα μήκη κύματος συχνά ξεπερνά αυτήν που προέρχεται από το σύνολο των άστρων και της σκόνης του. Ανάλογα με τη λαμπρότητά τους, χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες, τους Seyfert γαλαξίες και τους quasars (quasi stellar radio sources).

Οι Seyfert γαλαξίες αποτελούν AGNs μικρότερης λαμπρότητας, η οποία είναι συγκρίσιμη με αυτήν του αστρικού συνόλου, με αποτέλεσμα ο γαλαξίας που τους φιλοξενεί να είναι ανιχνεύσιμος. Μορφολογικές μελέτες υποδεικνύουν ότι ανήκουν στους σπειροειδείς. Παράλληλα με αυτό το κριτήριο, η κατηγορία αυτή ταυτοποιείται από την παρουσία ισχυρών, υψηλού ιονισμού, γραμμών εκμπομπής. Οι δύο διαφορετικοί τύποι γραμμών που εμφανίζονται, είναι οι "λεπτές" γραμμές εκμπομπής (narrow lines), το εύρος των οποίων αντιστοιχεί σε ταχύτητες εκατοντάδων χιλιομέτρων το δευτερόλεπτο και αντιστοιχούν σε χαμηλές πυκνότητες ιονισμένου αερίου ($10^3 - 10^6 cm^{-3}$), και οι "πλατιές" γραμμές εκπομπής (broad lines) που αντιστοιχούν σε ταχύτητες μέχρι και $10^4 km/s$ και πυκνότητες $n \gtrsim 10^8 cm^{-3}$. Σύμφωνα με τις γραμμές εκπομπής οι γαλαξίες αυτοί διαχωρίζονται σε δύο υποκατηγορίες, τους Seyfert τύπου I, όπου στο φάσμα τους παρατηρούνται και τα δύο είδη γραμμών και στους τύπου II που παρατηρούνται μόνο 'λεπτές' γραμμές.

Οι quasars αποτελούν τη κατηγορία των πιο ισχυρών AGNs, των οποίων η λαμπρότητα ξεπερνά κατά τάξεις μεγέθους αυτήν του υπόλοιπου γαλαξία, με αποτέλεσμα παρατηρησιακά να μοιάζουν με άστρα που παρουσιάζουν διάφορες τιμές ερυθρομετατοπίσεων z. Η πλειοψηφία αυτών είναι ραδιοήσυχοι (radio-quiet quasars), ωστόσο ένα μικρό ποστοστό ($5 - 10\%$) παρουσιάζει ισχυρή εκπομπή στο ράδιο. Οι βασικές φασματικές διαφορές τους από τους Seyfert, είναι η αμυδρή (συχνά ανύπαρκτη) παρουσία αστρικής απορρόφησης στην ακτινοβολία και η παρουσία ασθενέστερης έντασης των λεπτών από τις πλατιές γραμμές εκπομπής.

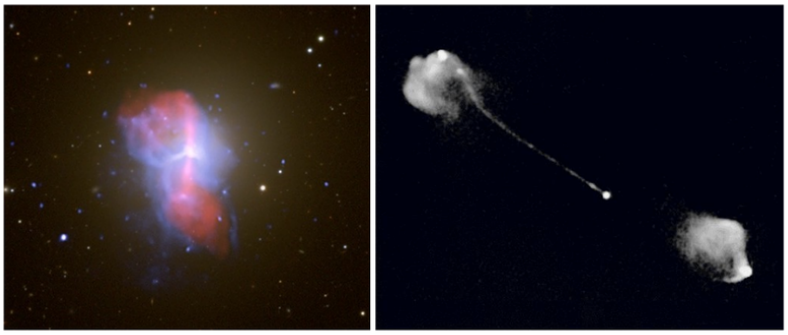
Η μειονότητα των ραδιο-ισχυρών ονομάζονται Blazars και η ακτινοβολία τους χαρακτηρίζεται από έντονη μεταβλητότητα (από εβδομάδες στο ράδιο έως και πρώτα λεπτά της ώρας στις ακτίνες γ) και ισχυρή πόλωση. Το φάσμα τους, που εκτείνεται από το ράδιο μέχρι ακτίνες γ της τάξης των TeV, συνήθως δεν παρουσιάζει γραμμές εκπομπής και κυριαρχείται από μη θερμική εκπομπή η οποία αποτελείται από δύο βασικές συνιστώσες. Τη συνιστώσα στις χαμηλές ενέργειες, που εκτείνεται από το ράδιο μέχρι τις UV ή χ ακτίνες και αποδίδεται στην ακτινοβολία σύγχροτρον και τη συνιστώσα στις υψηλές ενέργειες, από ακτίνες χ μέχρι ακτίνες γ, που συνήθως αποδίδεται στον αντίστροφο σκεδασμό Compton (σχήμα 1.1). Οι Blazars χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες.



Σχήμα 1.1: Ενεργειακή φασματική κατανομή των *a*) FSRQ 3C279 *b*) LBL BL Lacertae *c*) BL Lac 3C66A *d*) HBL RGB J0710+591 [1].

Στους FSRQs (Flat Spectrum Radio Quasars), όπου παρατηρούνται σε μεγάλες ερυθρομετατοπίσεις και παρουσιάζουν αμυδρές γραμμές εκπομπής και ισχυρά πολωμένη ραδιοεκπομπή με το μέγιστο να αντιστοιχεί σε συχνότητα $< 10^{14.5} Hz$ και στα BL Lac αντικείμενα, τα οποία δεν παρουσιάζουν γραμμές εκπομπής και η συχνότητα μεγίστου της σύγχροτρον συνιστώσας μπορεί να βρίσκεται σε όλο το εύρος από το ράδιο μέχρι τις ακτίνες χ. Έχει παρατηρηθεί μια συσχέτιση της θέσης του μεγίστου με την βολομετρική λαμπρότητα και την ενέργεια στις ακτίνες γ, όπου για μικρές συχνότητες μεγίστου η ενέργεια βρίσκεται κυρίως στις ακτίνες γ ενώ για μεγάλες, το φάσμα κυριαρχείται από τη σύγχροτρον συνιστώσα. Η συσχέτιση αυτή συχνά αναφέρεται ως Blazar sequence. Στο σχήμα 1.1 φαίνονται τα φάσματα τεσσάρων Blazars με διαδοχικά αυξανόμενη συχνότητα μεγίστου όπου και φαίνονται οι παραπάνω ιδιότητες.

Στην κατηγορία των ραδιοϊσχυρών AGNs ανήκουν και οι ραδιογαλαξίες. Πρόκειται για ελλειπτικούς γαλαξίες οι οποίοι χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη δύο αντιδιαμετρικών, ως προς τη κεντρική περιοχή, ισχυρά εστιασμένων δομών που εκτείνονται σε αποστάσεις έως και της τάξης των *kiloparsecs*. Οι δομές αυτές ονομάζονται πίδακες και συχνά καταλήγουν σε εκτενείς περιοχές μεγάλης λαμπρότητας που αποτελούν τους ραδιολοβούς. Σε όλη την έκτασή τους εκπέμπουν ισχυρά στο ράδιο, μέσω της ακτινοβολίας σύγχροτρον, ενώ σύμφωνα με τη περιοχή στην οποία εμφανίζουν το κύριο μέρος της ακτινοβολίας τους, διαχωρίστηκαν από τους [Fanaroff and Riley (1974)] σε δύο βασικές κατηγορίες. Οι FRI είναι πιο λαμπροί στην κεντρική περιοχή ενώ αντίθετα οι $FRII$ εμφανίζουν έντονη εκπομπή στις πιο απομακρυσμένες περιοχές του πίδακα και στην περιοχή των ραδιολοβών, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2. Επιπλέον, ανάλογα με το αν παρουσιάζουν μόνο "λεπτές " ή και "πλατιές" γραμμές εκπομπής διακρίνονται στους $NLRD$ και $BLRD$ (Narrow/Broad Line Radio Galaxies.)



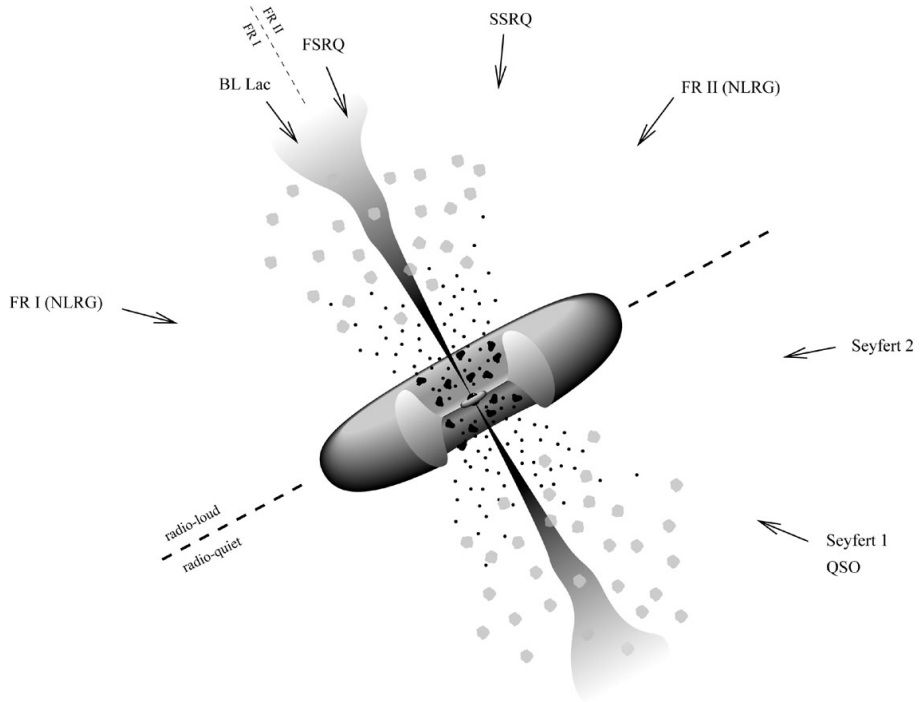
Σχήμα 1.2: Παράδειγμα μορφολογίας των δύο κατηγοριών, με τον FRI ραδιογαλαξία $M84$ αριστερά και την πηγή $3C175$ που ανήκει στους FII, δεξιά [2].

Μοντέλο ενοποίησης

Όλα τα παραπάνω αστροφυσικά αντικείμενα παρά τις φασματικές τους διαφορές, χαρακτηρίζονται από τα κοινά παρατηρησιακά γνωρίσματα των AGNs που συνοψίζονται στην πολύ μεγάλη εκπομπή, το φάσμα της οποίας δεν μπορεί να εξηγηθεί από την υπέρθεση των θερμικών φασμάτων των άστρων, και στην έντονη μεταβλητότητα η οποία λόγω αιτιότητας θέτει ένα άνω όριο στο μέγεθος της πηγής, που καθορίζεται από την ποσότητα $c\Delta t\frac{D}{(1+z)}$, με D τον παράγοντα Doppler της πηγής και z την ερυθρομετατόπιση. Τα χαρακτηριστικά αυτά, καθιστούν τους AGNs τα πλέον ενεργητικά φαινόμενα μεγάλης διάρκειας στο σύμπαν. Αρχικά, λόγω του ορίου Eddington στη λαμπρότητα

$$L_E = \frac{4\pi G M m_p}{\sigma_{Th}} \sim 1.3 \times 10^{46} \left(\frac{M}{10^8 M_\odot}\right) erg\ s^{-1}, \tag{1.1}$$

που καθορίζεται από την ισοδυναμία της πίεσης ακτινοβολίας και της βαρυτικής δύναμης, προκύπτει ότι για τις χαρακτηριστικές λαμπρότητες των AGNs, η μάζα στη περιοχή εκπομπής θα πρέπει να είναι της τάξης των $10^6 - 10^9 M_\odot$, όπου λόγω των μικρών διαστάσεων αποδίδεται σε υπερμαζική μελανή οπή. Παράλληλα, για την παραγωγή τέτοιων ενεργειών απαιτείται ο πλέον αποδοτικός μηχανισμός που αναφέρεται στη μετατροπή βαρυτικής δυναμικής ενέργειας σε θερμότητα κατά την πρόσπτωση ύλης σε σχετικιστικά πηγάδια δυναμικού, όπου για την περίπτωση περιστρεφόμενων μελανών οπών η απόδοση έκλυσης ενέργειας φτάνει το ~ 0.29 της ενέργειας ηρεμίας της ύλης. Συνεπώς η βασική εικόνα που επικρατεί για το μηχανισμό τροφοδοσίας των AGNs είναι η πρόσπτωση ύλης από ένα δίσκο προσαύξησης σε μια υπερμαζική μελανή οπή που βρίσκεται στο κέντρο των γαλαξιών. Από τη διαδικασία αυτή δύναται να δημιουργηθούν εστιασμένες, σχετικιστικές εκροές που αποτελούν τις παρατηρούμενες δομές των πιδάκων (Jets). Την περιοχή γύρω από τη μελανή οπή περιβάλλει ένας τόρος σκόνης και αερίου που φτάνει σε αποστάσεις έως και $100pc$. Τέλος οι γραμμές εκπομπής που παρατηρούνται στα φάσματα, προϋποθέτουν την ύπαρξη νεφών ισχυρά ιονισμένου αερίου. Η περιοχή "πλατιών" γραμμών εκπομπής (Broad line region-BLR) θεωρείται ότι βρίσκεται κοντά στη κεντρική περιοχή, σε αποστάσεις $< 1pc$, και συνεπώς σε ισχυρό βαρυτικό δυναμικό, ενώ τα νέφη των "λεπτών" γραμμών (Narrow line region-NLR) εντοπίζονται σε μεγαλύτερες αποστάσεις μερικών εκατοντάδων pc. Δεδομένης της βασικής εικόνας για τους AGNs θεωρείται, σύμφωνα με το μοντέλο ενοποίησης [Urry & Padovani 1995], ότι τα διαφορετικά παρατηρησιακά χαρακτηριστικά που εμφανίζονται είναι αποτέλεσμα διαφορετικής γωνίας παρατήρησης.

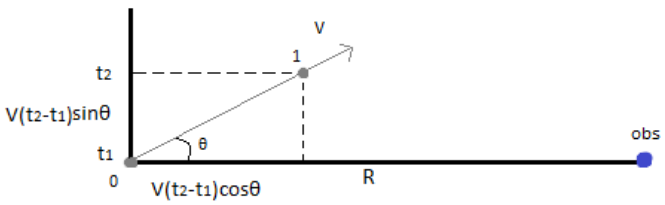


Σχήμα 1.3: Βασική εικόνα για τους AGNs και η εξάρτηση του κάθε είδους από τη γωνία παρατήρησης.

1.1.1 Σχετικιστικά φαινόμενα

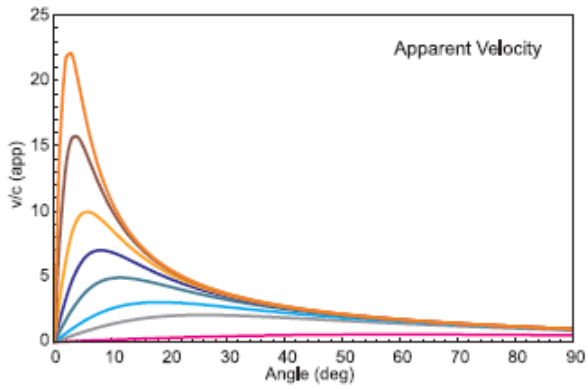
Σε περιπτώσεις όπου ο πίδακας σχηματίζει μικρή γωνία με την ευθεία παρατήρησης, παρουσιάζονται ισχυρά σχετικιστικά φαινόμενα που επιδρούν στην ένταση και τη μεταβλητότητα της ακτινοβολίας, καθώς και στις μετρούμενες φαινόμενες ταχύτητες, οι οποίες σε πολλές περιπτώσεις ξεπερνούν την ταχύτητα του φωτός. Τα φαινόμενα αυτά αποδίδονται στις σχετικιστικές ταχύτητες της ροής και εξηγούνται ως εξής.

Υπέρφωτη κίνηση



Σχήμα 1.4: Φαινόμενο υπέρφωτης κίνησης.

Όλες οι φαινόμενες κινήσεις από μια απομακρισμένη πηγή, αποτελούν την προβολή της πραγματικής κίνησης στο επίπεδο του ουρανού (επίπεδο κάθετο στην ευθεία που συνδέει τον παρατηρητή με την πηγή). Όταν η ταχύτητα $\vec{V}$ της πηγής έχει συνιστώσα παράλληλη στην ευθεία παρατήρησης $\hat{n}$ τότε, στις σχετικιστικές περιπτώσεις όπου $\Gamma >> 1$, με Γ τον παράγοντα Lorentz της πηγής, και για μικρές γωνίες $cos^{-1}\left(\frac{\vec{V}\hat{n}}{V}\right)$, είναι πιθανό να παρατηρηθεί υπέρφωτη κίνηση. Το παραπάνω φαινόμενο εξηγείται ως εξής.



Σχήμα 1.5: Η φαινόμενη ταχύτητα για σταθερό β συναρτήσει της γωνίας Θ_{obs} [3].

Στην απλή περίπτωση όπου η ταχύτητα της πηγής είναι σταθερή και σχηματίζει γωνία θ με την ευθεία παρατήρησης (βλ. σχήμα 1.4), η μετρούμενη χρονική διάρκεια από το σημείο 0 στη προβολή του 1 στο κάθετο επίπεδο, θα διαφέρει από την πραγματική κατά ένα παράγοντα $\frac{\Delta t_{obs}}{\Delta t} = 1 - \beta \cos\theta_{obs}$. Αυτό συμβαίνει καθώς, λόγω της κίνησης ως προς τον παρατηρητή, το σήμα που εκπέμπεται από την πηγή τη χρονική στιγμή t_2 θα καλύψει απόσταση κατά $V\Delta t \cos\theta_{obs}$ μικρότερη από αυτό που εκπέμφθηκε τη στιγμή t_1, με αποτέλεσμα ο χρόνος μεταξύ μετρούμενων σημάτων να είναι μικρότερος από τη χρονική διαφορά της εκπομπής τους

$$\Delta t_{obs} = t_{2_{obs}} - t_{1_{obs}} = t_2 + \frac{R - \beta c \Delta t \cos\Theta_{obs}}{c} - (t_1 + \frac{d}{c}) = \Delta t(1 - \beta\cos\Theta_{obs}).$$

Συνεπώς η φαινόμενη ταχύτητα θα είναι

$$\beta_{app} = \frac{1}{c}\frac{V\Delta t \sin\Theta_{obs}}{\Delta t_{obs}} = \frac{\beta\sin\Theta_{obs}}{1 - \beta\cos\Theta_{obs}}. \tag{1.2}$$

Στο σχήμα 1.5 δίνεται η συνάρτηση $\beta_{app} = \beta_{app}(\Theta_{obs})$ για διάφορα β, όπου εμφανίζει μέγιστο για $\Theta_{obs} = \frac{1}{\Gamma}$. Αναπτύσσοντας τη παραπάνω σχέση για πολύ μεγάλες ταχύτητες ($\beta \sim 1 - \frac{1}{2\Gamma^2}$) και πολύ μικρές γωνίες ($\cos\Theta_{obs} \sim 1 - \frac{\Theta_{obs}^2}{2}$, $\sin\theta_{obs} \sim \Theta_{obs}$) προκύπτει $\beta_{app} \approx \frac{2\Theta_{obs}}{\frac{1}{\Gamma^2} + \Theta_{obs}^2}$, όπου και φάινεται ότι για $\theta_{obs} << \frac{1}{\Gamma} << 1 \Rightarrow \beta_{app} < 2\Gamma$, υπάρχει περίπτωση υπέρφωτης κίνησης ενώ για $\frac{1}{\Gamma} << \Theta_{obs} << 1 \Rightarrow \beta_{app} \sim \frac{2}{\Theta_{obs}} > 1$ το φαινόμενο εμφανίζεται πάντα. Συνεπώς η πραγματική ταχύτητα της πηγής, στη γενική περίπτωση όπου το μέτρο και το διάνυσμά της μεταβάλλονται με το χρόνο, θα αντιστοιχεί σε

$$\beta = \frac{\beta_{app}(t)}{\sin\Theta_{obs}(t) + \beta_{app}(t)\cos\Theta_{obs}(t)}.$$

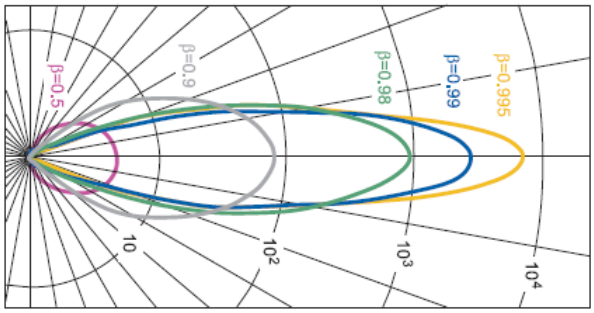
Ενίσχυση Doppler ακρινοβολίας

Παραπάνω παρουσιάστηκε το φαινόμενο μεταβολής ενός χρονικού διαστήματος, που είναι αποτέλεσμα της πεπερασμένης ταχύτητας του φωτός, όταν η μέτρησή του βασίζεται στη λήψη σημάτων ακτινοβολίας από μια σχετικιστικά κινούμενη πηγή. Το φαινόμενο αυτό σε συνδυασμό με την αλλαγή του συστήματος αναφοράς, από το σύστημα της πηγής K' στο οποίο εκπέμπεται η ακτινοβολία, στο σύστημα του εργαστηρίου K, θα έχει επίδραση στα διάφορα μεγέθη της, διαφοροποιώντας τις τιμές που μετρώνται σε σχέση με αυτές που πραγματικά εκπέμπονται.

Αρχικά για τη συχνότητα της ακτινοβολίας ισχύει ότι $\nu \approx \frac{1}{\Delta t}$. Λόγω διαστολής του χρόνου από την αλλαγή συστήματος αναφοράς, προκύπτει $\nu \approx \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{\Gamma \Delta t}$, ενώ λόγω της διαφορετικής άφιξης των χρόνων $\nu = \frac{1}{\Gamma(1-\beta\cos\theta_{obs})\Delta t_{obs}} \Rightarrow \frac{\nu}{\nu_{obs}} = D$, όπου $D = \frac{1}{\Gamma(1-\beta\cos\theta_{obs})}$, ο παράγοντας Doppler. Αντίστοιχα για τα υπόλοιπα βασικά μεγέθη ισχύει [4]

$$\begin{aligned}
&\text{Ενέργεια} && : dW' = DdW \\
&\text{Όγκος} && : dV = DdV' \\
&\text{πυκνότητα} && : n' = \frac{1}{\Gamma} n \\
&\text{Στερεά Γωνία} && : d\Omega' = D^2 d\Omega, \quad \text{καθώς } \cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1-\beta\cos\theta} \text{ και } \frac{d\Omega'}{d\Omega} \overset{d\phi'=d\phi}{=} \frac{d\cos\theta}{d\cos\theta'}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Ο λόγος που ο όγκος δεν μετασχηματίζεται ως $dV = \Gamma dV'$, όπως θα περίμενε κανείς, είναι ότι αυτός καθορίζεται από την ταυτόχρονη άφιξη φωτονίων στον παρατηρητή. Ένας τρόπος να δείξει κανείς το μετασχηματισμό του, είναι να ορίσει ένα σύστημα (s, l, h) [5], όπου το s αναφέρεται στη διεύθυση της προβολής της ταχύτητας της πηγής στο επίπεδο κάθετα στη διεύθυνση παρατήρησης $\hat{n}$, το h είναι κάθετο στο $\hat{n}$ και την ταχύτητα και το l βρίσκεται στην διεύθυνση $\hat{n}$. Αρχικά το h, εφόσον είναι κάθετο στη κίνηση, θα παραμένει αναλλοίωτο $h' = h$. Λόγω της ιδιότητας του αναλλοίωτου της κάθετης απόστασης μεταξύ δύο ακτίνων φωτός που διαδίδονται παράλληλα, το μέτρο του s παραμένει και αυτό αναλλοίωτο καθώς ορίζεται ως μια τέτοια απόσταση. Τέλος, με την προϋπόθεση ότι το οπτικό βάθος τ κατά μήκος του l θα πρέπει να είναι ανεξάρτητο του συστήματος αναφοράς εφόσον δίνει το ποσοστό των φωτονίων που απορροφώνται $e^{-\tau}$, το l θα πρέπει μετασχηματίζεται αντίστροφα από τον συντελεστή απορρόφησης κ. Συνεπώς από το αναλλοίωτο της ποσότητας $\kappa \cdot \nu \quad \Rightarrow \quad l = Dl' \quad \Rightarrow \quad V = s\ h\ l = s'h'Dl' = DV'$.

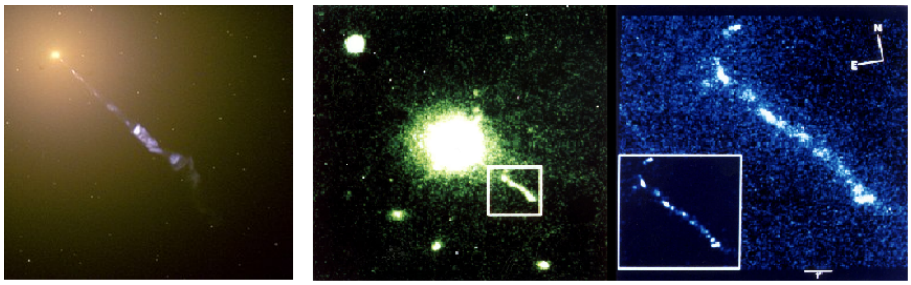


Σχήμα 1.6: Η συνάρτηση D^3 για διάφορα θ_{obs} και β. Οι ακτινικές ευθείες δείχνουν τις γωνίες ανά 10°, ενώ οι κύκλοι την τιμή της συνάρτησης σε λογαριθμική κλίμακα. Για κάθε καμπύλη αναγράφεται η ταχύτητα της ροής [3].

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι διάφορες ενδιαφερόμενες ποσότητες της ακτινοβολίας θα είναι

$$\begin{aligned}
&\text{Συντελεστής εκπομπής} && : j'_{\nu'} = n' \frac{dW'}{dt' d\Omega' d\nu'} = \Gamma^{-1} n \frac{D^{-1} dW}{\Gamma^{-1} dt D^2 d\Omega D^{-1} d\nu} = D^{-2} j_\nu \\
&\text{Ροή} && : F'_{\nu'} = \int I'_{\nu'} d\Omega' = \int I'_{\nu'} \frac{dS'}{R^2} = \frac{1}{R^2} \int j'_{\nu'} dV' = \frac{1}{R^2} \int D^{-2} j_\nu D^{-1} dV = D^{-3} F_\nu \\
&\text{Λαμπρότητα} && : L'_{\nu'} = 4\pi R^2 \int F'_{\nu'} d\nu' = 4\pi R^2 \int D^{-3} F_\nu D^{-1} d\nu = D^{-4} L_\nu.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Εάν η λαμπρότητα έχει εξάρτηση από τη συχνότητα με ένα νόμο δύναμης $L'_{\nu'} \propto (\nu')^{-a}$, τότε $L_\nu = D^{4+a} L'_{\nu'}(\nu)$. Στο σχήμα 1.6 φαίνεται η ενίσχυση Doppler D^n, για $n = 3$ σε πολικές συντεταγμένες, για διάφορες γωνίες θ_{obs} και ταχύτητες β.



Σχήμα 1.7: Ο M87 και ο 3C273 στο οπτικό από το Hubble Space Telescope.

Μια πολύ εμφανής εφαρμογή της παραπάνω ενίσχυσης ή απενίσχυσης λόγω Doppler, είναι η εμφάνιση ανισοτροπίας στους πίδακες ενεργών γαλαξιών όπως ο $M87$ και ο $3C$ 273 [Shklovsky (1964)] (σχήμα 1.7), όπου οι δύο εκροές θεωρείται ότι κινούνται σχετικιστικά με αντίθετες κατευθύνσεις ως προς τον παρατηρητή, με αποτέλεσμα η συνιστώσα που κινείται προς αυτόν να παρουσιάζει έντονη λαμπρότητα σε αντίθεση με την αντιδιαμετρική της, η οποία σε αρκετές περιπτώσεις δεν παρατηρείται.

1.2 Μοντέλα ακτινοβολίας πιδάκων

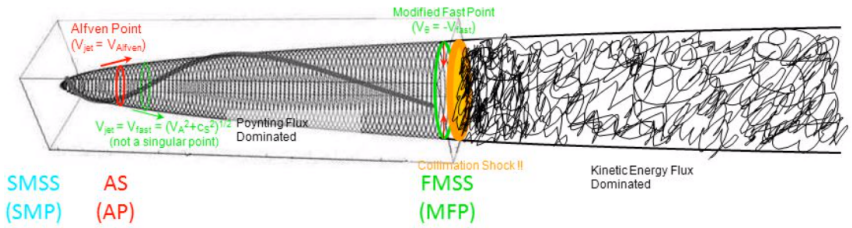
Τα πρώτα μοντέλα για τη περοέλευση της ακτινοβολίας των Blazars, αφορούσαν σχετικιστικούς, σφαιρικά διαστελλόμενους θύλακες πλάσματος (blobs). Τα πλεονεκτήματα μιας τέτοιας γεωμετρίας για την περιοχή εκπομπής, η οποία συμφωνεί με την αναμενόμενη συμπαγή δομή, είναι τόσο η απλότητά της όσο και ο μικρός αριθμός ελεύθερων παραμέτρων που χρειάζονται για την περιγραφή του μοντέλου. Η έντονη, ωστόσο, και χωρίς συνοχή μεταβλητότητα που έδειχναν οι παρατηρήσεις, οδήγησε στην αναζήτηση πολυζωνικών μοντέλων ακτινοβολίας με πιο περίπλοκη γεωμετρία.

Το 1977 οι Blanford & Rees[6] συνέδεσαν την ακτινοβολία από τους Blazars και συγκεκριμένα τις διπλές ραδιο πηγές, με δύο αντιδιαμετρικές εστιασμένες σχετικιστικές εκροές, που σχηματίζονται λόγω της ύπαρξης πολύ πυκνού και θερμού αερίου γύρω από τον πυρήνα. Παράλληλα το 1977 οι Blandford and Znajek[7] πρότειναν ότι τέτοιοι σχετικιστικοί πίδακες είναι δυνατόν να πηγάζουν από περιστρεφόμενες μελανές οπές. Τις ιδιότητες της ακτινοβολίας από τέτοιες σχετικιστικές εκροές, στις οποίες οι περιοχές επιτάχυνσης συνδέονται με διαδιδόμενα ωστικά κύματα, μελέτησαν οι Blandford and Konigl 1979 [8].

Η περίπτωση μαγνητικής επιτάχυνσης της ροής συζητήθηκε από τους Blandford & Payne (1982)[9], οι οποίοι χρησιμοποίησαν την ακτινική αυτοομοιότητα δίνοντας ημιαναλυτικές λύσεις των εξισώσεων για μη σχετικιστική ροή. Ως συνοριακές συνθήκες στη βάση επέλεξαν την κεπλεριανή περιστροφή, ενώ θεώρησαν κρύα ροή και ασυμπτωτικά κυλινδρικό πίδακα με αποτέλεσμα να μην εμφανίζονται στις λύσεις το αργό και γρήγορο μαγνητοακουστικό κρίσιμο σημείο (βλ. κεφάλαιο 2).

Οι Li, Chiueh & Begelman (1992)[10], Contopoulos (1994) [11] ανέπτυξαν την προηγούμενη μελέτη θεωρώντας σχετικιστική ροή. Η εισαγωγή, ωστόσο της χαρακτηριστικής ταχύτητας c, αποκλείει την εισαγωγή της βαρύτητας στο μοντέλο και τη θεώρηση μιας αντίστοιχης περιστροφικής συνθήκης για τη βάση του πίδακα. Ως χαρακτηριστική ακτίνα λαμβάνεται η ακτίνα του κυλίνδρου φωτός και οι ταχύτητες των κρίσιμων σημείων αντικαθίστανται με τις σχετικιστικές τιμές τους.

Γενίκευση των παραπάνω για θερμή ροή έγινε αρχικά από τους Vlahakis et al στη μη σχετικιστική [12] και αργότερα στη σχετικιστική [13] περίπτωση, όπου στις λύσεις τους εμφανίζονταν και



Σχήμα 1.8: Μορφή πιδάκων με τα κρίσημα σημεία όπως εμφανίζονται στο μοντέλο αυτοομοιότητας.

τα τρία κρίσιμα σημεία. (βλ. 2.4). Η δομή των γραμμών ροής για τη γενική περίπτωση ακτινικά αυτοόμοιου μοντέλου, καθώς και οι περιοχές των κρίσιμων σημείων φαίνονται στο σχήμα 1.8.

Ένα βασικό πρόβλημα που εντοπίζεται στα διάφορα μοντέλα που περιγράφουν τις ιδιότητες της ροής, είναι ότι δεν παράγουν αυτοσυνεπώς τον πληθυσμό των σωματιδίων από τον οποίο προέρχεται η μη θερμική ακτινοβολία. Οι βασικοί μηχανισμοί επιτάχυνσης που προτείνονται για την δημιουργία των ενεργειακών αυτών κατανομών είναι, πρώτον η επιτάχυνση Fermi από ωστικά κύματα που εμφανίζονται στη ροή, τα οποία δημιουργούνται είτε λόγω επανεστίασης της ροής (recollimation shock) είτε από αστάθειες του πλάσματος και δεύτερον η μαγνητική επανασύνδεση σε περιπτώσεις μεταβολής της τοπολογίας του μαγνητικού πεδίου. Αστάθειες στο πλάσμα, μπορούν να δημιουργηθούν από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον, όπως στην περίπτωση των Kelvin-Helmoltz ασταθειών που δημιουργούνται λόγω διαφορικής ταχύτητας, δύο στρωμάτων του ρευστού. Σε συνθήκες, ωστόσο μεγάλου παράγοντα Lorentz και ισχυρού μαγνητικού πεδίου, τέτοιες αστάθειες εν μέρει καταπιέζονται, επιτρέποντας στους πίδακες να διατηρούν την κατευθυντικότητά τους.

Λεπτονικό και λεπτο-αδρονικό μοντέλο

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, είναι κοινά αποδεκτό ότι η συνιστώσα του φάσματος στις μικρές ενέργειες οφείλεται στη διαδικασία σύγχροτρον, η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 3.1. Η προέλευση, ωστόσο, της υψηλοενεργειακής συνιστώσας δεν είναι ακόμα ξεκάθαρη και αμφιταλαντεύεται μεταξύ δύο κυρίαρχων μοντέλων, του λεπτονικού και του λεπτο-αδρονικού μοντέλου [1].

Στο λεπτονικό μοντέλο θεωρείται ότι τα πρωτόνια δεν επιταχύνονται σε αρκετά υψηλές ενέργειες ώστε να συνεισφέρουν στην υψηλοενεργειακή συνιστώσα. Συνεπώς θεωρείται ότι και οι δύο συνιστώσες του φάσματος οφείλονται στην ακτινοβολία από υπερσχετικιστικά ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια. Συγκεκριμένα, τα ίδια ηλεκτρόνια που παράγουν τη σύγχροτρον συνιστώσα στις χαμηλές ενέργειες, σκεδάζουν χαμηλοενεργειακά φωτόνια μέσω της διαδικασίας του αντίστροφου σκεδασμού Compton, σε υψηλές ενέργειες. Η πηγή των χαμηλοενεργειακών φωτονίων μπορεί να είναι είτε εξωτερική, όπως φωτόνια που προέρχονται από το δίσκο [Derner et. al 1992], από υλικό γύρω από τον πυρήνα [Sikora 1994] ή από τον τόρο σκόνης [Blazejowski et al.2000], είτε εσωτερική όπου σαν στόχοι χρησιμοποιούνται τα ίδια τα φωτόνια που έχουν παραχθεί από τη διαδικασία σύγχροτρον (μοντέλο Self Synchrotron Compton-SSC) [Marscher & Gear 1985]. Η πιο απλή περίπτωση για την περιγραφή των παρατηρούμενων φασμάτων προκύπτει θεωρώντας ότι τα ηλεκτρόνια έχουν ενεργειακή κατανομή ενός ενιαίου ή σπασμένου νόμου δύναμης που εμφανίζει σπάσιμο στα δύο ακραία όρια της ελάχιστης και μέγιστης ενέργειας. Αυτοσυνεπής περιγραφή της κατανομής των ηλεκτρονίων προκύπτει λύνοντας τις κινητικές εξισώσεις των ηλεκτρονίων και των φωτονίων (που βασίζονται στην εξίσωση Fokker-Planck και συνιστούν στη γενική περίπτωση ένα

μη γραμμικό σύστημα) της μορφής [Mastichiadis & Kirk 1997]

$$\frac{\partial n_{e,\gamma}(\gamma,t)}{\partial t} + \frac{n_{e,\gamma}(\gamma,t)}{t_{esc}} = Q_{e,\gamma}(n_e, n_\gamma, \gamma, t) + L_{e,\gamma}(n_e, n_\gamma, \gamma, t),$$

με L τον όρο που δηλώνει τις ενεργειακές απώλειες και Q τον όρο έγχυσης σωματιδίων.

Στα λεπτο-αδρονικά μοντέλα θεωρείται ότι τα πρωτόνια επιταχύνονται σε ενέργειες που ξεπερνούν την ενέργεια κατωφλίου για τη φωτοαδρονική διαδικασία παραγωγής πιονίων ($E_p \sim 10^{19} eV$), οδηγώντας σε καταιγισμό σωματιδίων και παραγωγή δευτερογενούς ακτινοβολίας. Παράλληλα λόγω του ισχυρού μαγνητικού πεδίου, που απαιτείται προκειμένου η ακτίνα Larmor να είναι μικρότερη από την περιοχή επιτάχυνσης, η συνεισφορά της σύγχροτρον ακτινοβολίας από τα πρωτόνια αλλά και τα δευτερογενή σωμάτια είναι καθοριστική για τη διαμόρφωση της υψηλοενεργειακής συνιστώσας του φάσματος.

Κεφάλαιο 2

Δυναμική των πιδάκων

Δεδομένης της σημασίας και του ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν οι πίδακες στην αστροφυσική, έχει γίνει συστηματική μελέτη για την σωστή περιγραφή της δυναμικής τους. Η δυνατότητα παρατήρησης των δομών αυτών στους AGNs μέσω της συμβολομετρίας στο ράδιο (VLBI), καθιστά τα συστήματα αυτά τις βασικές πηγές για τον έλεγχο διάφορων μοντέλων που περιγράφουν τη δυναμική. Η εμφάνιση, σε ορισμένες περιπτώσεις υπέρφωτης κίνησης υποδεικνύει σχετικιστικές ταχύτητες, ενώ η έντονη εστίαση της ροής που εκτείνεται σε τάξεις έως και $kpcs$ σε συνδυασμό με το υψηλό ποσοστό πόλωσης που παρουσιάζει η ακτινοβολία, προϋποθέτει την ύπαρξη ενός ισχυρού, καλά οργανωμένου σε μεγάλη κλίμακα, μαγνητικού πεδίου. Η δυναμική μιας τέτοιας σχετικιστικής ροής, περιγράφεται από τις εξισώσεις της μαγνητουδροδυναμικής και αποτελεί ένα αρκετά περίπλοκο σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων όπου συχνά υιοθετούνται προσεγγίσεις, όπως η στασιμότητα και η αξισυμμετρία, προκειμένου να γίνει ευκολότερα διαχειρίσιμο.

2.1 Βασικές εξισώσεις

Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν ένα ρευστό εμφανίζονται με τη μορφή εξισώσεων διατήρησης και μπορούν να εξαχθούν από τον τανυστή ενέργειας-ορμής $T^{\mu\nu}$, που περιγράφει την ορμή και την ενέργεια στο χωροχρόνο. Γενικά ο τανυστής ενέργειας-ορμής αποτελείται από τις συνιστώσες της ύλης, της ακτινοβολίας και αυτήν του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Για την ύλη (δείκτης M) και την ακτινοβολία (δείκτης R), τα στοιχεία του τανυστή δίνονται από τη σχέση

$$T^{\kappa\nu}_{M,R} = (\rho_{M,R} + P_{M,R}/c^2)U^\kappa U^\nu + P_{M,R}\eta^{\kappa\nu},$$

όπου $P_R,\ \rho_R c^2$ η πίεση και η πυκνότητα ενέργειας της ακτινοβολίας στο σύστημα του ρευστού, ενώ $P_M,\ \rho_M c^2 = \rho_0 c^2 + \rho_0 e_M$ η πίεση και η πυκνότητα ενέργειας της ύλης, με ρ_0 τη πυκνότητα μάζας ηρεμίας των σωματιδίων και $\rho_0 e_M = \frac{1}{\Gamma-1}P_M$ τη πυκνότητα εσωτερικής ενέργειας για πολυτροπικό ρευστό με δείκτη Γ. $U^\nu = (\gamma c, \gamma\vec{V})$ η τετραταχύτητα του ρευστού, με $\gamma = 1/(1-V^2/c^2)^{1/2}$ τον παράγοντας Lorentz, και $\eta^{\kappa\nu} = diag(-1,1,1,1)$ η μετρική Minkowski. Σε οπτικά πυκνές συνθήκες η ακτινοβολία και η ύλη μπορεί να θεωρηθεί ως ένα κοινό ρευστό με $P = P_M + P_R,\ \ \rho = \rho_M + \rho_R$ και $\rho e = \rho_0 e_M + \rho_R c^2$.

Για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο τα στοιχεία του τανυστή δίνονται από τη σχέση

$$T^{\mu\nu}_{EM} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\mu a}F^{\nu}_{a} - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{a\beta}F^{a\beta}\right), \quad \text{όπου} \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής.

Ορίζεται επιπλέον η ειδική σχετικιστική ενθαλπία

$$\xi = \frac{\rho c^2 + P}{\rho_0 c^2} = \frac{\rho_0 c^2 + \rho_0 e + P}{\rho_0 c^2} = 1 + \frac{1}{\Gamma - 1}\frac{P}{\rho_0 c^2} + \frac{P}{\rho_0 c^2} = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1}\frac{P}{\rho_0 c^2},$$

η οποία επιτρέπει την μελέτη των θερμικών φαινομένων στο μοντέλο. Συνεπώς, οι συνιστώσες του ολικού τανυστής ενέργειας ορμής, $T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_M + T^{\mu\nu}_R + T^{\mu\nu}_{EM}$, είναι

$$\begin{aligned}
T^{00} &= \gamma^2 \xi \rho_0 c^2 - P + \frac{E^2 + B^2}{8\pi}, \quad \text{πυκνότητα ενέργειας} \\
T^{0j} &= T^{j0} = \left(\xi \rho_0 c \gamma^2 \vec{V} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi}\right)\hat{e}_j, \quad \text{ροή ενέργειας}/c \\
T^{ij} &= \xi \rho_0 \gamma^2 V_i V_j - \frac{E_i E_j + B_i B_j}{4\pi} + \left(P + \frac{E^2 + B^2}{8\pi}\right)\eta^{ij}, \quad \text{ροή ορμής.}
\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις διατήρησης του ρευστού προκύπτουν από τα παραπάνω ως εξής

- Η διατήρηση της μάζας, που περιγράφεται με την εξίσωση συνέχειας, δίνεται από

$$\left(\rho_0 U^\nu\right)_{,\nu} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}(\gamma \rho_0) + \vec{\nabla}(\gamma \rho_0 \vec{V}) = 0. \tag{2.1}$$

- Η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας δίνεται από τη σχέση $T^{\mu\nu}_{,\nu}$ για τη $\mu = 0$ συνιστώσα[1]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\gamma^2 \xi \rho_0 c^2 - P + \frac{E^2 + B^2}{\pi}\right] + \vec{\nabla}\left[\gamma^2 \xi \rho_0 c^2 \vec{V} + \frac{c}{4\pi}\vec{E} \times \vec{B}\right] = 0 \tag{2.2}$$

- Η διατήρηση της ορμής, όταν δεν υπάρχει κάποια εξωτερική δύναμη, δίνεται από τις υπόλοιπες τρεις χωρικές συνιστώσες του $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0, \ (\mu = 1, 2, 3)$.

$$\gamma \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\vec{\nabla}\right)(\xi \gamma \vec{V}) = -\vec{\nabla} P + \frac{J^0 \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}}{c}, \tag{2.3}$$

με J^0/c τη πυκνότητα φορτίου ρ_e. Το ηλεκτρομαγνητικό κομμάτι προκύπτει ως εξής

$$T^{\mu\nu}_{,\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[\partial_\nu (F^{\mu a} F^\nu_a) - \frac{1}{4}\partial_\mu (F^{a\beta} F_{a\beta})\right] = \frac{1}{4\pi}\left[\partial_\nu (F^{\mu a} F^\nu_a) - F^{a\beta}\partial_a (F^\nu_\beta)\right] =$$

$$\frac{1}{4\pi} F^{\mu a} \partial_\nu F^\nu_a = \frac{1}{4\pi} F^{\mu a} \frac{4\pi}{c} J_a = \frac{1}{c}[\rho_e c \vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}] = \vec{E}\rho_e + \frac{\vec{J} \times \vec{B}}{c}.$$

Παράλληλα θα πρέπει να ικανοποιούνται οι εξισώσεις του Maxwell, που περιγράφουν την εξέλιξη του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c} J^0, \qquad \text{νόμος } Gauss \tag{2.4α'}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \tag{2.4β'}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \text{νόμος } Faraday \tag{2.4γ'}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \qquad \text{νόμος } Ampére \tag{2.4δ'}$$

[1] Αγνοούνται φαινόμενα θερμικής αγωγιμότητας, ιξώδους και απώλειας ενέργειας λόγω ακτινοβολίας, ώστε η ροή να παρουσιάζει αδιαβατική συμπεριφορά.

και η εξίσωση του Ohm

$$\vec{J} = \sigma\big(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{V} \times \vec{B}\big). \tag{2.5}$$

Στη συνθήκη ιδανικής μαγνητοϋδροδυναμικής, στην οποία θα βασιστεί και η μελέτη, το πλάσμα εμφανίζεται ως ιδανικός αγωγός και το ηλεκτρικό πεδίο εξαφανίζεται στο σύστημα αναφοράς του ρευστού. Ο νόμος του Ohm παίρνει τη μορφή $\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{V} \times \vec{B}$.

Μια από τις βασικές προσεγγίσεις που γίνονται προκειμένου να μειωθεί η πολυπλοκότητα του συστήματος εξισώσεων, είναι η στασιμότητα $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$, με τα μεγέθη που περιγράφουν τη ροή να μην έχουν άμεση εξάρτηση από το χρόνο. Μια τέτοια υπόθεση είναι λογική σε περιπτώσεις όπου οι τυπικές κλίμακες χρόνου στις οποίες αλλάζει η δομή της ροής, που συχνά είναι οι κλίμακες του μέσου $\frac{\text{μέγεθος συστήματος}}{\text{ταχύτητα ήχου } c_S}$, είναι πολύ μεγαλύτερες από το χρόνο που η ροή διασχίζει το σύστημα. Για σχετικιστικές ροές ο χρόνος αυτός ειναι της τάξης $\sim \frac{\text{μέγεθος συστήματος}}{c}$. Παράλληλα θα πρέπει η κατανομή της μαγνητικής ροής στην πηγή είναι κατά προσέγγιση σταθερή στη κλίμακα χρόνου που ενδιαφέρει.

Η άλλη βασική προσέγγιση που εφαρμόζεται σε εστιασμένες δομές όπως οι αστοφυσικοί πίδακες, είναι η αξισυμμετρία $\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right) = 0$. Επιλέγοντας αρχικά για την περιγραφή κυλινδρικές συντεταγμένες (ϖ, z, ϕ), τα διάφορα διανυσματικά φυσικά μεγέθη μπορούν να αναλυθούν στην αζιμουθιακή συνιστώσα $\hat{\phi}$ και στη κάθετη αυτής που βρίσκεται στο πολοειδές επίπεδο. Είναι βολικό, λοιπόν, να ορισθούν δύο βασικά μοναδιαία ανύσματα. Το εφαπτόμενο στις πολοειδείς δυναμικές γραμμές το οποίο σχηματίζει γωνία ψ με το ισημερινό επίπεδο ή αντίστοιχα γωνία ϑ με τον άξονα συμμετρίας, $\hat{b} = \sin\vartheta\hat{\varpi} + \cos\vartheta\hat{z}$, και το κάθετο σε αυτές με κατεύθυνση προς τον άξονα συμμετρίας ,$\hat{n} = -\cos\vartheta\hat{\varpi} + \sin\vartheta\hat{z} = \hat{b} \times \hat{\phi}$.

2.2 Ολοκληρώματα κίνησης

Ολοκληρώνοντας μερικώς το σύστημα των εξισώσεων (Maxwell, Euler και διατήρηση μάζας και εντροπίας) και εφαρμόζοντας τις προσεγγίσεις της αξισυμμετρίας και της στάσιμης ροής, προκύπτουν χαρακτηριστικές σταθερές κατά μήκος των δυναμικών γραμμών [14].

Έχοντας δεχθεί τις προσεγγίσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω, το μαγνητικό πεδίο, καθώς δεν υπάρχει εξάρτηση από την αζιμουθιακή συνιστώσα, μπορεί να γραφεί στις κυλινδρικές συνιστώσες με τη βοήθεια ενός διανυσματικού πεδίου $\vec{A}$ ως

$$\vec{B} = \left(\vec{\nabla} \times \frac{A\hat{\phi}}{\varpi}\right)_p + \vec{B}_\phi \;\Rightarrow\; \vec{B} = \left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial A}{\partial \varpi}, -\frac{1}{\varpi}\frac{\partial A}{\partial z}, B_\phi\right),$$

όπου ο δείκτης p αναφέρεται στη συνιστώσα του πεδίου στο πολοειδές επίπεδο.

Εφόσον $B_p = \vec{\nabla} \times \left(\frac{A\hat{\phi}}{\varpi}\right) = \frac{\vec{\nabla}A \times \hat{\phi}}{\varpi} \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}A = -\varpi\vec{B}_p \times \hat{\phi}$, και συνεπώς τα μοναδιαία $\hat{b}$ και $\hat{n}$ μπορούν να γραφούν ως $\hat{b} = \frac{\vec{B}_p}{|\vec{B}_p|}$, $\hat{n} = -\frac{\vec{\nabla}A}{|\vec{\nabla}A|}$.

Το μέγεθος A είναι σταθερό κατά μήκος των πολοειδών μαγνητικών γραμμών καθώς

$$\frac{d\varpi}{B_\varpi} = \frac{dz}{B_z} \;\Rightarrow\; \frac{d\varpi}{-\partial A/\partial z} = \frac{dz}{\partial A/\partial \varpi} \;\Rightarrow\; \frac{\partial A}{\partial \varpi}d\varpi + \frac{\partial A}{\partial z}dz = 0 \;\Rightarrow\; dA(\varpi, z) = 0,$$

και δίνει τη μαγνητική ροή που περνά από μια επιφάνεια στο εγκάρσιο επίπεδο

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int \left(\vec{\nabla} \times \frac{A\hat{\phi}}{\varpi}\right) \cdot d\vec{S} = \oint \frac{A\hat{\phi}}{\varpi} \cdot d\vec{l} = 2\pi A.$$

Έχοντας συνδέσει το μέγεθος A με τη πολοειδή μαγνητική ροή, μπορεί αντίστοιχα να ορισθεί και το μέγεθος που δίνει την πολοειδή ροή της ύλης $\Psi = \oint_S \gamma\rho\vec{V}_p \cdot d\vec{S}$.

Για στάσιμη ροή η αζιμουθιακή συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδενική

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial \varpi}(\varpi E_\phi) = \frac{\partial E_\phi}{\partial z} = 0 \;\Rightarrow E_\phi = \frac{\mathrm{C}}{\varpi} \overset{\varpi\to 0}{\Longrightarrow} E_\phi \to \infty \;\Rightarrow\; E_\phi = 0.$$

Από το νόμο του Ohm έχουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο μαγνητικό, συνεπώς $\vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \overset{E_\phi=0}{\Longrightarrow} \vec{E}\cdot\vec{B}_p = 0$

Από την μηδενική αζιμουθιακή συνιστώσα του $\vec{E}$ και το νόμο του Ohm προκύπτει ότι οι πολοειδείς συνιστώσες της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου είναι παράλληλες

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}(\vec{V}_p + \vec{V}_\phi) \times (\vec{B}_p + \vec{B}_\phi) \;\Rightarrow\; E_\phi = -\frac{1}{c}(\vec{V}_p \times \vec{B}_p) = 0 \;\; \vec{V}_p \parallel \vec{B}_p$$

Εφόσον τα V_p και B_p είναι παράλληλα, συνδέονται με μια σταθερά αναλογίας

$$\frac{V_p}{B_p} = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho_0} \;\Rightarrow\; \Psi_A = \frac{4\pi\gamma\rho_0 V_p}{B_p}, \tag{2.6}$$

όπου η ποσότητα Ψ_A δίνει τη ροή ύλης προς τη ροή του μαγνητικού πεδίου.

Το $\vec{E}$ είναι κάθετο στις πολοειδείς γραμμές ($\vec{E}\cdot\vec{B}_p = 0$) και άρα θα είναι παράλληλο στο $\vec{\nabla}A$. Ορίζοντας την ποσότητα $\vec{\nabla}\Phi = \frac{1}{c}\Omega\vec{\nabla}A$ το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{1}{c}\Omega\vec{\nabla}A = -\frac{1}{c}\Omega(-B_p\varpi\hat{n}) = \frac{\varpi\Omega}{c}B_p\hat{n}$. Χρησιμοποιώντας το νόμο Faraday

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\times(\Omega\vec{\nabla}A) = -\frac{1}{c}(\vec{\nabla}\Omega\times\vec{\nabla}A + \Omega\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}A) = -\frac{1}{c}\vec{\nabla}\Omega\times\vec{\nabla}A = 0,$$

προκύπτει ότι η ποσότητα Ω είναι σταθερά κατά μήκος των πολοειδών δυναμικών γραμμών καθώς η μεταβολή της είναι παράλληλη στο $\vec{\nabla}A$ και συνεπώς $\Omega = \Omega(A)$. Η τιμή του $\Omega(A)$ προκύπτει αναλυτικά ως εξής

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{B} = -\vec{\nabla}\Phi \;\Rightarrow\; (\vec{V}_p+\vec{V}_\phi)\times(\vec{B}_p+\vec{B}_\phi) = c\vec{\nabla}\Phi \;\Rightarrow\; \vec{V}_p\times\vec{B}_\phi + \vec{V}_\phi\times\vec{B}_p = c\vec{\nabla}\Phi \;\Rightarrow$$

$$\frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho}\vec{B}_p\times\vec{B}_\phi - \vec{B}_p\times\vec{V}_\phi = c\vec{\nabla}\Phi = \underbrace{c\frac{\partial\Phi}{\partial A}}_{\Omega(A)}\vec{\nabla}A \;\overset{\vec{B}_p=\frac{\vec{\nabla}A\times\hat{\phi}}{\varpi}}{\Longrightarrow}\; -\frac{\Psi_A}{4\pi\rho\gamma}\frac{\vec{\nabla}A}{\varpi}B_\phi + \frac{\vec{\nabla}}{\varpi}V_\phi = \Omega(A)\vec{\nabla}A \;\Rightarrow$$

$$\Omega = \frac{V_\phi}{\varpi} - \frac{V_p}{\varpi}\frac{B_\phi}{B_p} \tag{2.7}$$

και αντιπροσωπεύει τη γωνιακή ταχύτητα των μαγνητικών δυναμικών γραμμών.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις, η ταχύτητα ως συνάρτηση των ολοκληρωμάτων είναι

$$\vec{V} = \vec{V}_p + \vec{V}_\phi = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho}\vec{B}_p + \left(\frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho}B_\phi + \varpi\Omega\right)\hat{\phi} = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho}\vec{B} + \varpi\Omega\hat{\phi},$$

όπου και φαίνεται ότι η κίνηση της ροής είναι συνδυασμός μιας ομοιόμορφης περιστροφής στην μαγνητική επιφάνεια, με το πλάσμα να παρασύρεται από τις μαγνητικές γραμμές και να περιστρέφεται με αυτές (Ferraro's isorotation law), και της κίνησης κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου όπου το πλάσμα ολισθαίνει πάνω στις δυναμικές γραμμές. Ο νόμος αυτός υπονοεί ότι η επιφάνεια ροής

(που ορίζεται από το πολοειδές πεδίο ταχύτητας) συμπίπτει με τη μαγνητική επιφάνεια (ύλη που ρέει μεταξύ δύο μαγνητικών επιφανειών θα παραμένει ανάμεσά τους).

Ο καθορισμός του Ω εξαρτάται από τις συνθήκες στο ίχνος των μαγνητικών γραμμών. Για παράδειγμα σε περιπτώσεις πιδάκων που προέρχονται από δίσκους προσαύξησης το Ω δεν είναι ακτινικά σταθερό και μπορεί σε πρώτη προσέγγιση να θεωρηθεί ότι ισούται με τη κεπλεριανή ταχύτητα περιστροφής που αντιστοιχεί στο ίχνος κάθε γραμμής $\Omega = \Omega_k$. Αν η γωνιακή ταχύτητα παρέμενε σταθερή κατά μήκος των γραμμών ροής, καθώς αυξάνεται το ϖ, για μια συγκεκριμένη απόσταση η περιστροφική ταχύτητα θα γινόταν μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός, $\Omega\varpi \geq c$. Συνεπώς η ροή δεν μπορεί να περιστρέφεται σα στερεό σώμα. Με την εμφάνιση της ϕ συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου, η οποία και έχει αντίθετο πρόσημο, ο όρος $\vec{B}_\phi \frac{\Psi_A}{4\pi\rho_0\gamma}$ μειώνει την V_ϕ έτσι ώστε να μην υπερβαίνει την τιμή c.

Ένα ακόμα ολοκλήρωμα της κίνησης προκύπτει προβάλλοντας την εξίσωση ορμής στη $\hat{\phi}$ κατεύθυνση $\Rightarrow$

$$\gamma\rho_0(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma\vec{V})\hat{\phi} = -\vec{\nabla}P\hat{\phi} + \frac{J_0}{c}\vec{E}\hat{\phi} + \frac{(\vec{J}\times\vec{B})\hat{\phi}}{c}.$$

Οι όροι της πίεσης και του ηλεκτρικού πεδίου μηδενίζονται ενώ ο μαγνητικός όρος δίνει

$$(\vec{J}\times\vec{B})\hat{\phi} = (\vec{J}_p\times\vec{B}_p)\hat{\phi} = \left[(\vec{J}_b+\vec{J}_n)\times\vec{B}_p\right]\hat{\phi} = J_nB_p(\hat{n}\times\hat{b})\hat{\phi} = J_nB_p = \frac{cB_p}{4\pi\varpi V_p}(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi),$$

καθώς

$$\vec{J}_n = \hat{n}(\hat{n}\vec{J}_p) = \hat{n}\left[\frac{-B_z\hat{\varpi}+B_\varpi\hat{z}}{B_p}\cdot\frac{c}{4\pi}\left(-\hat{\varpi}\frac{\partial B_\phi}{\partial z}+\hat{z}\frac{1}{\varpi}\frac{\partial(\varpi B_\phi)}{\partial\varpi}\right)\right] =$$

$$\hat{n}\frac{c}{4\pi B_p\varpi}\left[\varpi B_z\frac{\partial B_\phi}{\partial z}+B_\varpi\frac{\partial(\varpi B_\phi)}{\partial\varpi}\right] = -\hat{n}\frac{c}{4\pi B_p\varpi}\left[B_z\frac{\partial}{\partial z}+B_\varpi\frac{\partial}{\partial\varpi}\right](\varpi B_\phi) =$$

$$\hat{n}\frac{c}{4\pi B_p\varpi}(\vec{B}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi) = \hat{n}\frac{c}{4\pi V_p\varpi}(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi)$$

Ο αδρανειακός όρος γράφεται

$$\gamma\rho(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma\vec{V})\hat{\phi} \overset{\frac{\partial\hat{\varpi}}{\partial\phi}=\hat{\phi}}{=} \left[V_\varpi\frac{\partial(\xi\gamma V_\phi)}{\partial\varpi}+V_z\frac{\partial(\xi\gamma V_\phi)}{\partial z}\gamma\rho_0+\frac{\xi\gamma V_\phi V_\varpi}{\varpi}\right] =$$

$$\left[\frac{V_z}{\varpi}\frac{\partial(\xi\gamma V_\phi\varpi)}{\partial z}+\frac{V_\varpi}{\varpi}\frac{\partial\xi\gamma V_\phi\varpi}{\partial\varpi}\right]\gamma\rho_0 = \gamma\rho_0\frac{1}{\varpi}(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma V_\phi\varpi)$$

Συνεπώς από την εξίσωση ορμής προκύπτει

$$\gamma\rho_0\frac{1}{\varpi}(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma V_\phi\varpi) = \frac{B_p}{4\pi\varpi V_p}(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi) \;\Rightarrow$$

$$(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma V_\phi\varpi) = \frac{B_p}{4\pi\gamma\rho_0V_p}(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi) = \frac{1}{\Psi_A}(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi) = (\vec{V}\vec{\nabla})\left(\frac{\varpi B_\phi}{\Psi_A}\right) \;\Rightarrow$$

$$(\vec{V}\vec{\nabla})\left(\xi\gamma V_\phi\varpi-\frac{\varpi B_\phi}{\Psi_A}\right) = 0 \;\Rightarrow\; (\vec{V}_p\vec{\nabla})\left(\xi\gamma V_\phi\varpi-\frac{\varpi B_\phi}{\Psi_A}\right) \;\Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = \xi\gamma V_\phi\varpi - \frac{\varpi B_\phi}{\Psi_A} = const \tag{2.8}$$

Το $\mathcal{L}$ δίνει τη στροφορμή προς τη ροή μάζας, με τον πρώτο όρο να αναφέρεται στην ύλη και τον δεύτερο στο μαγνητικό πεδίο.

Αντίστοιχα το ολοκλήρωμα της ενέργειας προκύπτει προβάλλοντας αντίστοιχα την εξίσωση ορμής στην κατεύθυνση της ταχύτητας

$$\gamma\rho_0\vec{V}(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma\vec{V}) = -(\vec{V}\vec{\nabla})P + \underbrace{\frac{J_0}{c}\vec{E}\vec{V}}_{=0} + \frac{1}{c}\vec{V}(\vec{J}\times\vec{B}).$$

Για τον αδρανειακό όρο

$$\gamma\rho_0\vec{V}(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma\vec{V}) = \gamma\rho_0 V^2(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma) + \gamma^2\rho_0\xi(\vec{V}\vec{\nabla})\left(\frac{V^2}{2}\right) \overset{\pm\gamma\rho_0 c^2(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma)}{=\!=}$$

$$= \gamma\rho_0 c^2(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma) - \gamma\rho_0(c^2 - V^2)\vec{V}\vec{\nabla}(\xi\gamma) + \gamma^2\rho_0\xi(\vec{V}\vec{\nabla})\frac{V^2}{2} =$$

$$\gamma\rho_0 c^2(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma) - \rho_0 c^2(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma) \underbrace{-\rho_0 c^2\xi\frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}}_{-\gamma^2\frac{\rho_0\xi}{2}(\vec{V}\vec{\nabla})V^2} + \gamma^2\frac{\rho_0\xi}{2}(\vec{V}\vec{\nabla})V^2 = \gamma\rho_0 c^2(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma) - \rho c^2(\vec{V}\vec{\nabla})\xi.$$

Ο όρος της πίεσης είναι

$$-\vec{\nabla}P\cdot\vec{V} = -\rho_0 c^2(\vec{V}\vec{\nabla})\xi, \text{ καθώς } \xi = 1 + \int\frac{dP}{\rho c^2} \overset{\cdot\vec{\nabla}}{\Rightarrow} \vec{\nabla}\xi = \frac{\partial}{\partial P}\int\frac{dP}{\rho c^2}\vec{\nabla}P \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}P = \rho c^2\vec{\nabla}\xi.$$

Τέλος ο μαγνητικός όρος είναι

$$\vec{V}(\vec{J}\times\vec{B}) = \vec{V}(\vec{J}_\phi\times\vec{B}_p + \vec{J}_p\times\vec{B}_\phi + \vec{J}_n\times\vec{B}_p + \vec{J}_n\times\vec{B}_\phi) = \vec{V}(\vec{J}_n\times\vec{B}_p) + \vec{V}(\vec{J}_n\times\vec{B}_\phi) =$$

$$\vec{V}(J_n B_p \underbrace{\hat{n}\times\hat{b}}_{\hat{\phi}}) + \vec{v}(J_n B_\phi \underbrace{\hat{n}\times\hat{\phi}}_{-\hat{b}}) = J_n B_p V_\phi + J_n B_\phi V_p \overset{J_n = \frac{c}{4\pi\varpi V_p}(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi)}{=\!=}$$

$$\frac{c}{4\pi\varpi V_p}\left(-\frac{B_\phi V_p}{V_p} + \frac{B_p V_\phi}{V_p}\right)(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi) = \frac{c}{4\pi}\frac{B_p}{V_p}\left(\frac{V_\phi}{\varpi} - \frac{B_\phi}{B_\varpi}\frac{V_p}{\varpi} - \frac{B_\phi V_p}{B_p\varpi}\right)(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi) = \frac{c}{4\pi}\frac{B_p}{V_p}\Omega(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi).$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση τους παραπάνω όρους προκύπτει

$$\gamma\rho_0 c^2(\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma) = \frac{c}{4\pi}\frac{B_p}{V_p}\Omega(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi) \;\Rightarrow\; (\vec{V}\vec{\nabla})(\xi\gamma) - \frac{\Omega}{\Psi_A c^2}(\vec{V}\vec{\nabla})(\varpi B_\phi) = 0 \;\Rightarrow$$

$$(\vec{V}\vec{\nabla})\left(\xi\gamma - \frac{\Omega}{\Psi_A c^2}\varpi B_\phi\right) \;\Rightarrow\; \mu = \xi\gamma - \frac{\Omega\varpi B_\phi}{\Psi_A c^2} = \xi\gamma(1+\sigma) = const, \tag{2.9}$$

που δείχνει τη ροή ενέργειας ανά ροή μάζας και πάλι με τον πρώτο όρο να αναφέρεται στην ύλη και τον δεύτερο στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η ποσότητα σ ονομάζεται παράμετρος μαγνήτισης και ορίζεται σαν τη ροή Poynting στο πολοειδές επίπεδο προς τη συνολική ροή ενέργειας, $\sigma = -\frac{\varpi\Omega B_\phi}{\Psi_A\xi\gamma c^2}$. Η ποσότητα αυτή δείχνει τη μαγνητική ενέργεια που είναι διαθέσιμη σε μια ροή, η οποία και καθορίζει την επιτάχυνσή της.

Το τελευταίο ολοκλήρωμα προκύπτει από τη διατήρηση της εντροπίας

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho^\Gamma}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \mathcal{Q} = \frac{P}{\rho^\Gamma} = const \tag{2.10}$$

Τα $\Psi_A,\ \Omega,\ L,\ \mu,\ Q$ είναι το μέγιστο δυνατό πλήθος γραμμικών ανεξάρτητων ποσοτήτων, με τις άγνωστες φυσικές ποσότητες, ωστόσο, να είναι εννέα ($\vec{E}(2),\ \vec{B}(3),\ \vec{V}(3),\ \rho,\ P$). Ο νόμος

του Ohm δίνει το ηλεκτρικό πεδίο συναρτήσει του $\vec{V}$ και του $\vec{B}$ και συνεπώς οι άγνωστοι μειώνονται σε οχτώ, ενώ $\vec{\nabla}\vec{B} = 0$ δίνει τη μια συνιστώσα συναρτήσει των άλλων δύο $\Rightarrow$ 7 άγνωστοι. Συνεπώς υπάρχουν 7 άγνωστοι και πέντε ολοκληρώματα της κίνησης. Οι άλλες δύο εξισώσεις που χρειάζονται για να κλείσει το σύστημα, επιλέγονται συνήθως να είναι η transfield και η Bernoulli.

Πριν προρδιοριστούν οι παραπάνω εξισώσεις, είναι χρήσιμο κανείς να ορίσει τις παρακάτω αδιάστατες ποσότητες. Ως αλφενικός αριθμός Mach ορίζεται η πολοειδής ταχύτητα της ροής προς τη πολοειδή συνιστώσα της ταχύτητας Alfvén $V_{A_p} = \frac{B_p}{\sqrt{4\pi\rho\xi\gamma}}$, $M^2 = \frac{4\pi\rho\xi\gamma^2 V_p^2}{B_p^2} = \Psi_A\left(\frac{\xi}{4\pi\rho}\right)$. Όταν υπάρχει και B_ϕ η V_{A_p} δεν ισούται με την ολική Alfvén . Το σημείο Alfvén ορίζεται στην απόσταση $\varpi = \varpi_A$, με $\varpi_A = \sqrt{\frac{L}{\mu\Omega}}$. Ως κυλινδρική ακτίνα φωτός ορίζεται η ακτίνα στην οποία, αν η ροή περιστρεφόταν σαν κυλινδρικό σώμα, θα είχε τη ταχύτητα του φωτός, $\varpi_L = \frac{c}{\Omega}$. Μπορεί, λοιπόν, να οριστεί το αδιάστατο μέγεθος $x = \frac{\varpi\Omega}{c}$, που μετράει τη κυλινδρική απόσταση σε μοναδες κυλίνδρου φωτός και συνεπώς το σημείο Alfvén αντιστοιχεί στη τιμή $x_A = \sqrt{\frac{\mathcal{L}\Omega}{\mu c^2}}$. Το σημείο Alfvén χρησιμοποιείται για να καθορίσει την κλίμακα των αποστάσεων μέσω της ποσότητας $G = \frac{\varpi}{\varpi_A} = \frac{x}{x_A}$.

2.3 Εξισώσεις transfield και Bernoulli

Η transfield εξίσωση προκύπτει από την προβολή της εξίσωσης ορμής (2.3) στην κατεύθυνση $\hat{n}$.
Ο αδρανειακός όρος της εξίσωσης θα δώσει [2]

$$\gamma\rho[(\vec{V}\vec{\nabla})(\gamma\xi\vec{V})]\hat{n} = \gamma\rho_0\left[V_\varpi\frac{\partial(\gamma\xi\vec{V}_p)}{\partial\varpi} - \gamma\xi\frac{V_\phi^2}{\varpi}\hat{\varpi} + V_z\frac{\partial(\gamma\xi\vec{V}_p)}{\partial z}\right]\hat{n} = \gamma\rho_0\left[(\vec{V}_p\vec{\nabla}_p)(\gamma\xi\vec{V}_p)\cdot\hat{n} - \xi\gamma\frac{V_\phi^2}{\varpi}\hat{\varpi}\hat{n}\right] =$$

$$\gamma^2\rho\xi V_p^2\frac{1}{R} - \frac{\gamma^2\rho\xi V_\phi^2}{\varpi}\hat{n}\cdot\hat{\varpi}.$$

Οι παραπάνω ποσότητες ορίζουν την πυκνότητα δύναμης κάθετα στις πολοειδείς γραμμές με τον πρώτο όρο να δίνει $F_{I\perp} = -\frac{\gamma\rho\xi V_p^2}{R} \underset{M=V_p/V_A}{\overset{V_A=\frac{B_p}{\gamma\sqrt{4\pi\rho\xi}}}{=\!=}} -\frac{M^2B_p^2}{4\pi R}$ και τον δεύτερο, που αποτελεί τον φυγοκεντρικό όρο, $F_{C\perp} = \frac{\gamma^2\rho\xi V_\phi^2}{\varpi}\hat{n}\cdot\hat{\varpi} = \frac{B_p^2}{4\pi\varpi}\left(M\frac{V_\phi}{V_p}\right)^2\hat{n}\cdot\hat{\varpi}$
Ο όρος της πίεσης γράφεται

$$F_{P\perp} = -\vec{\nabla}P\cdot\hat{n},$$

ενώ για τον ηλεκτρομαγνητικό όρο ισχύει

$$F_{E\perp} = \rho_e\vec{E}\cdot\hat{n}, \quad F_{B\perp} = \frac{1}{c}(\vec{J}\times\vec{B})\cdot\hat{n}.$$

[2] Η κλίση του κάθετου μοναδιαίου ανύσματος είναι

$$\vec{\nabla}\hat{n} = -\left[\frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial\varpi}(\varpi\cos\vartheta) + \frac{\partial}{\partial z}(-\sin\vartheta)\right] = -\frac{1}{\varpi}\left(\cos\vartheta + \varpi(-\sin\vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial\varpi}\right) + \cos\theta\frac{\partial\vartheta}{\partial z} =$$

$$\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial\varpi} + \cos\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial z} + \frac{\hat{n\varpi}}{\varpi} = \hat{b}\vec{\nabla}\vartheta + \hat{n}\cdot\hat{\varpi} \overset{\hat{b}\vec{\nabla}\vartheta=\frac{\partial\vartheta}{\partial l}}{=\!=} -\frac{1}{R} + \frac{\hat{n}\cdot\hat{\varpi}}{\varpi},$$

με R την ακτίνα καμπυλότητας.

Ο όρος της ηλεκτρικής δύναμης από τον νόμο του Gauss ($\vec{\nabla}\vec{E} = 4\pi\rho_e$) και λαμβάνοντας υπόψιν ότι το $\vec{E}$ είναι στην κατεύθυνση $\hat{n}$, γράφεται

$$F_{E\perp} = \frac{1}{4\pi}[(\vec{\nabla}\vec{E})\vec{E}]\cdot\hat{n} = \frac{1}{4\pi}\big(\vec{\nabla}(E\hat{n})\big)E = \frac{E}{4\pi}[\hat{n}(\vec{\nabla}\vec{E})+E(\vec{\nabla}\hat{n})] = \frac{E}{4\pi}\left[\hat{n}(\vec{\nabla}\vec{E})+E\left(-\frac{1}{R}+\frac{\hat{\varpi}\hat{n}}{\varpi}\right)\right] =$$

$$\frac{E}{4\pi}\left[-\cos\vartheta\frac{\partial E}{\partial\varpi}+\sin\vartheta\frac{\partial E}{\partial z}+\frac{E\cos\vartheta}{\varpi}-\frac{E}{R}\right] = \frac{E}{4\pi}\left[\cos\vartheta\left(\frac{E}{\varpi}-\frac{\partial E}{\partial\varpi}\right)+\sin\vartheta\frac{\partial E}{\partial z}-\frac{E}{R}\right] =$$

$$\frac{E}{4\pi}\left[\cos\vartheta\left(\frac{E}{\varpi}-\frac{1}{\varpi}\frac{\partial(E\varpi)}{\partial\varpi}-\frac{E}{\varpi}\right)+\frac{\sin\vartheta}{\varpi}\frac{\partial(E\varpi)}{\partial z}-\frac{E}{R}\right] =$$

$$\frac{E}{4\pi}\left[\frac{1}{\varpi}(\hat{n}\vec{\nabla})(E\varpi)-\frac{E}{R}\right] = \frac{E\varpi}{4\pi\varpi^2}(\hat{n}\vec{\nabla})(E\varpi)-\frac{E^2}{4\pi R} = \frac{1}{8\pi\varpi^2}(\hat{n}\vec{\nabla})(E^2\varpi^2)-\frac{E^2}{4\pi R}.$$

Ο όρος της μαγνητικής δύναμης, από τον νόμο Ampere, γράφεται

$$F_{B\perp} = \frac{1}{4\pi}[(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}]\hat{n} = \frac{1}{4\pi}[(\vec{B}\vec{\nabla})\vec{B}]\hat{n}-\vec{\nabla}\left(\frac{B^2}{8\pi}\right)\hat{n} =$$

$$\frac{B_p^2}{4\pi}\frac{1}{R}-\frac{B_\phi^2}{4\pi\varpi}\hat{\varpi}\hat{n}-\left[\frac{1}{\varpi^2}\vec{\nabla}\left(\frac{B^2\varpi^2}{8\pi}\right)\hat{n}-\frac{B^2}{4\pi\varpi}\hat{\varpi}\hat{n}\right] = \frac{B_p^2}{4\pi R}-\frac{\vec{\nabla}(B^2\varpi^2)}{8\pi\varpi^2}\hat{n}+\frac{B_p^2}{4\pi\varpi}\cos\vartheta.$$

Συνεπώς η κάθετη στις πολοειδείς γραμμές εξίσωση ορμής γράφεται

$$\frac{B_p^2}{4\pi R}(M^2+x^2-1) = -\hat{n}\cdot\vec{\nabla}P-\frac{1}{8\pi\varpi^2}\hat{n}\vec{\nabla}[\varpi^2(B^2-E^2)]-\frac{B_p^2}{4\pi\varpi}\cos\vartheta-\frac{B_p^2}{4\pi\varpi}\left(\frac{MV_\phi}{V_p}\right)^2\cos\vartheta. \tag{2.11}$$

Η τελευταία εξίσωση του συστήματος είναι η εξίσωση Bernoulli η οποία προκύπτει από την ταυτότητα $\gamma^2 = 1+V_p^2/c^2+V_\phi^2/c^2$ [10]

$$\frac{1}{\xi^2}\left[\frac{e}{c^2}-\frac{\frac{L\Omega}{c^2}\left(1-\frac{\varpi^2\Omega e}{Lc^2}\right)}{1-\frac{\Psi_A^2\xi}{4\pi\rho}-\frac{\varpi^2\Omega^2}{c^2}}\right]^2 = 1+\left(\frac{\Psi_A B_p}{4\pi\rho c}\right)^2+\left(\frac{L}{\xi\varpi c}\right)^2\left[1-\frac{1-\frac{\varpi^2\Omega e}{ec^2}}{1-\frac{\Psi_A^2\xi}{4\pi\rho}-\frac{\varpi^2\Omega^2}{c^2}}\right]^2 \tag{2.12}$$

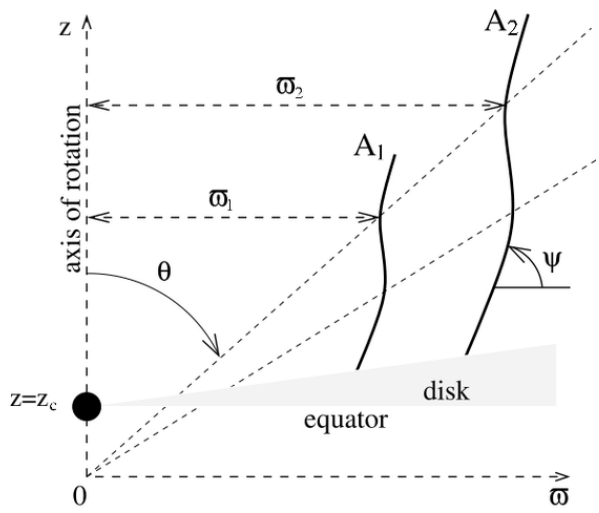
Επειδή το ξ είναι συνάρτηση του ρ ($\xi = 1+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho c^2}$) με $P\propto\rho^\Gamma$, η εξίσωση Bernoulli σχετίζει την πυκνότητα ρ με το πολοειδές πεδίο B_p κατά μήκος μιας γραμμής ροής. Συνεπώς, εφόσον το $V_p = V_p(B_p,\rho_0)$, η επιτάχυνση της ροής μπορεί να προσδιοριστεί κατευθείαν εάν η γεωμετρία του πεδίου είναι γνωστή.

Έχοντας ορίσει τα ολοκληρώματα κίνησης, οι τιμές των οποίων αλλάζουν ανάλογα με την πηγή καθώς εξαρτώνται από τις συνοριακές συνθήκες στην αρχή της ροής (όπως η κατανομή του μαγνητικού πεδίου και της γωνιακής ταχύτητας και το φορτίο μάζας), τα φυσικά μεγέθη μπορούν να γραφούν συναρτήσει των ολοκληρωμάτων και των αδιάστατων μεγεθών M, G, x ως εξής [13]

$$\vec{B} = \frac{\vec{\nabla}A\times\hat{\phi}}{\varpi}-\frac{\mu c\Psi_A x_A^2}{x}\frac{1-G^2}{1-M^2-x^2}\hat{\phi},\quad \vec{E} = -\frac{\Omega}{c}\vec{\nabla}A,$$

$$\vec{V} = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho_0}\vec{B}+\varpi\omega\hat{\phi} = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho_0}\frac{\vec{\nabla}A\times\hat{\phi}}{\varpi}+\frac{\varpi_A\Omega}{G}\frac{G^2-M^2-x^2}{1-M^2-x_A^2}\hat{\phi},\quad \gamma = \frac{\mu}{\xi}\frac{1-M^2-x_A^2}{1-M^2-x^2}, \tag{2.13}$$

$$\rho_0 = \frac{\xi\Psi_A^2}{4\pi M^2},\quad P = \mathcal{Q}\rho_0^\Gamma,\quad \xi = 1+\frac{\Gamma}{\Gamma-1}\frac{P}{\rho_0 c^2}$$



Σχήμα 2.1: Για κάθε δύο δυναμικές γραμμές A_1 και A_2, ο λόγος της κυλινδρικής απόστασης των δύο σημείων που αντιστοιχούν σε μια γωνία θ είναι ίδιος για κάθε κώνο σταθερής γωνίας [13]].

2.4 Μοντέλο Αυτοομοιότητας

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις Bernoulli και transfield, προκύπτει ένα μη γραμμικό σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων, το οποίο δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Για το λόγο αυτό αναπτύχθηκαν μοντέλα αυτοομοιότητας [9] τα οποία δίνουν αυτοσυνεπώς ημιαναλυτικές λύσεις του συστήματος πάνω σε μια δυναμική γραμμή και μέσω των αυτοόμοιων υποθέσεων μπορούν να προσδιορισθούν τα φυσικά μεγέθη σε κάθε γραμμή A. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε συνοπτικά το μοντέλο ακτινικής αυτοομοιότητας για τη γενική περίπτωση θερμής σχετικιστικής ροής, όπως αναπτύχθηκε από τους [13], τις λύσεις του οποίου, για το όριο της κρύας ροής, θα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Η βασική εικόνα δίνεται από την υπόθεση ότι οι αδιάστατες ποσότητες $M,\ x,\ G$ εξαρτώνται από μια μόνο κοινή μεταβλητή, η οποία λαμβάνεται να είναι η πολική γωνία θ, ικανοποιώντας συγχρόνως την υπόθεση ακτινικής αυτοομοιότητας της μορφής $r = \mathcal{F}_1(A)\mathcal{F}_2(\theta)$ [15] (σχήμα 2.1). Επιπλέον το A εξαρτάται από το $\varpi_A = \frac{\varpi}{G}$ και συνεπώς οι σχέσεις 2.13 είναι συναρτήσεις των $\varpi_A,\ \theta$. Από τα παραπάνω, προκειμένου να διαχωριστούν οι μεταβλητές A και θ έτσι ώστε το σύστημα των μερικών διαφορικών εξισώσεων να δώσει συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες θα μπορούν να λυθούν αριθμητικά, θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις [15]

$$\mathcal{F}_1(A) \propto A^{1/F},\ \mathcal{L}(A) \propto A^{1/F},\ \Omega(A) \propto A^{-1/F},\ \mathcal{Q} \propto A^{-2(F-2)/3},\ \mu(A) = const,\ \sigma_M(A) = const.$$

Συγκεκριμένα, ορίζοντας την αδιάστατη ποσότητα $a = \frac{\varpi_a^2}{\varpi_o^2}$, με ϖ_o^2 ένα μήκος αναφοράς, και θέτοντας $\sigma_M = \sigma_0\left[1 - \left(\frac{a_0}{a}\right)^{F/2}\right]$, με $a_0,\ \sigma_0 = const$, για το A θα ισχύει $A = \frac{B_o\varpi_o^2}{F}(a^{F/2} - a_0^{F/2})$, ενώ οι σταθερές ολοκλήρωσης δίνονται, για $x_A,\ \mu,\ q = const$, από

$$\Psi_A = \frac{B_0 x_A^2}{F\sigma_0 c}a^{(F-2)/2},\quad \Omega = \frac{x_A c}{\varpi_0 a^{1/2}},\quad \mathcal{L} = c\varpi_0 x_A \mu a^{1/2},\quad \mathcal{Q} = c^2\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\left(\frac{4\pi c^2 F^2\sigma_M^2 q}{x_A^2 B_0^2 a^{F-2}}\right)^{\Gamma-1}.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω οι φυσικές ποσότητες (σχέσεις (2.13)) μπορούν να γραφούν ως

$$\frac{\vec{B}}{B_0 a^{(F-2)/2}} = \frac{sin\theta}{G^2\sin(\theta-\vartheta)}\hat{b} - \frac{\mu x_A^4(1-G^2)}{F\sigma_M x(1-M^2-x^2)}\hat{\phi},\quad \frac{\vec{E}}{B_0 a^{(F-2)/2}} = \frac{x_A\sin\theta}{G\sin(\theta-\vartheta)}\hat{n},$$

$$\frac{\vec{V}}{c} = \frac{F\sigma_M M^2 \sin\theta}{\gamma\xi x^2 \sin(\theta-\vartheta)}\hat{b} + \frac{x_A\mu(G^2-M^2-x^2)}{\gamma\xi G(1-M^2-x^2)}\hat{\phi}, \quad \gamma = \frac{\mu}{\xi}\frac{1-M^2-x_A^2}{1-M^2-x^2}, \tag{2.14}$$

$$\rho_0 = \frac{B_0 x_A^4 \xi}{4\pi c^2 F^2 \sigma_M^2 M^2} a^{F-2}, \quad P = \frac{B_0^2}{4\pi}\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{x_A^4}{F^2\sigma_M^2}\frac{\xi(\xi-1)}{M^2}a^{F-2}.$$

Ή παράμετρος F ελέγχει την κατανομή του πολοειδούς ρεύματος $\vec{J}_p = \frac{c}{4\pi}(\vec{\nabla}\times\vec{B}_\phi) \Rightarrow 2|I|/c = \varpi|B_\phi| = A^{1-1/F}\mathcal{F}(\theta)$. Το $F > 1$ αντιστοιχεί σε αντιπαράλληλη με το μαγνητικό πεδίο πυκνότητα ρεύματος ($J_p < 0$) και συνήθως επιλέγεται για μικρές ακτίνες καθώς το ρεύμα τείνει στο μηδέν για $\varpi \to 0$ (θεωρώντας $a_0 = 0$). Το $F < 1$ αντιστοιχεί σε $J_p > 0$ και περιγράφει καλύτερα τη ροή σε μεγαλύτερες κυλινδρικές ακτίνες. Στην περίπτωση αυτή η εστίαση του πίδακα είναι ασθενέστερη (οδηγεί σε ασυμπτωτικά κωνική γεωμετρία), με την τελική ταχύτητα, ωστόσο, να φτάνει σε μεγαλύτερους παράγοντες Lorentz.

Για να βρει, λοιπόν, κανείς τα διάφορα φυσικά μεγέθη κατά μήκος μιας γραμμής ροής, και προφανώς λόγω αυτοομοιότητας και αξισυμμετρίας σε κάθε σημείο του χώρου, καλείται να λύσει ένα σύστημα τριών αλγεβρικών και δύο διαφορικών εξισώσεων που δίνουν τα μεγέθη x, ψ, G, M, ξ

$$x = x_A G \tag{2.15}$$

$$M^2 = q\frac{\xi}{(\xi-1)^{1/(\Gamma-1)}} \tag{2.16}$$

$$\frac{\mu^2}{\xi^2}\frac{G^4(1-M^2-x_A^2)^2 - x^2(G^2-M^2-x^2)^2}{G^4(1-M^2-x^2)^2} = 1 + \frac{F^2\sigma_M^2\sin^2\theta}{\xi^2 x^4\cos^2(\psi+\theta)} \tag{2.17}$$

$$\frac{dG^2}{d\theta} = \frac{2G^2\cos^2\psi}{\sin\theta\cos(\psi+\theta)} \tag{2.18}$$

$$G\sin^2\theta\frac{d}{d\theta}\left[\tan(\psi+\theta)\frac{1-M^2-x^2}{G}\right] = (F-1)\frac{x_A^4\mu^2x^2}{F^2\sigma_M^2}\left(\frac{1-G^2}{1-M^2-x^2}\right)^2$$
$$-\sin^2\theta\frac{M^2+Fx^2-F+1}{\cos^2(\psi+\theta)} - \frac{x_A^4\mu^2x^2}{F^2\sigma_M^2M^2}\left(\frac{G^2-M^2-x^2}{1-M^2-x^2}\right)^2 + 2\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{F-2}{F^2\sigma_M^2}\frac{\xi(\xi-1)x^4}{M^2}, \tag{2.19}$$

με την τρίτη και την πέμπτη εξίσωση να αναφέρονται στην Bernoulli και transfield αντίστοιχα. Είναι βολικό όλα τα μεγέθη, με τη βοήθεια των παραπάνω εξισώσεων, να περιγραφούν ως σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων [3] , η ταυτόχρονη αριθμητική ολοκλήρωση των οποίων θα δώσει, ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες, τις λύσεις για τη ροή.

[3] Αρχικά παραγωγίζοντας την (2.16)

$$\frac{dM^2}{d\theta} = \left[q\frac{(\xi-1)^{1/(\Gamma-1)} - \xi\frac{1}{\Gamma-1}(\xi-1)^{1/(\Gamma-1)-1}}{(\xi-1)^{2/(\Gamma-1)}}\right]\frac{d\xi}{d\theta} = \left[q\frac{(\xi-1)^{1/(\Gamma-1)} - \frac{\xi}{\Gamma-1}(\xi-1)^{(2-\Gamma)/(\Gamma-1)}}{(\xi-1)^{2/(\Gamma-1)}}\right]\frac{d\xi}{d\theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{dM^2}{d\theta} = q\left[(\xi-1)^{-1/(\Gamma-1)} - \frac{\xi}{\Gamma-1}(\xi-1)^{-\Gamma/(\Gamma-1)}\right]\frac{d\xi}{d\theta}} \tag{2.20}$$

Ενώ από την Bernoulli (2.17)

$$\cos^2(\psi+\theta) = \left[\frac{\mu^2}{\xi^2}\frac{G^4(1-M^2-x_A^2)^2 - x^2(G^2-M^2-x^2)^2}{G^4(1-M^2-x^2)^2} - 1\right]^{-1}\frac{F^2\sigma_M^2M^4\sin^2\theta}{\xi^2x^4} = f_1 \Rightarrow$$

$$\frac{d\cos^2(\psi+\theta)}{d\theta} = \frac{df_1}{d\theta} = \frac{\partial f_1}{\partial\theta} + \frac{\partial f_1}{\partial G^2}\frac{dG^2}{d\theta} + \frac{\partial f_1}{\partial M^2}\frac{dM^2}{d\theta} + \frac{\partial f_1}{\partial\xi}\frac{d\xi}{d\theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left[\frac{d\psi}{d\theta} + 1\right] = D_0 + D_1\frac{dG^2}{d\theta} + D_2\frac{dM^2}{d\theta} + D_3\frac{d\xi}{d\theta},} \tag{2.21}$$

με

$$D_0 = \frac{1}{-2\cos(\psi+\theta)\sin(\psi+\theta)}\left[.....\right]^{-1}\frac{F^2\sigma_M^2M^4 2\sin\theta\cos\theta}{\xi^2x^4},$$

Στις μαγνητοϋδροδυναμικές ροές, υπάρχουν τρία κρίσιμα σημεία τα οποία αντιστοιχούν σε απροσδιοριστίες που εμφανίζονται στις παραπάνω εξισώσεις από μηδενισμούς στους παρονομαστές και προκύπτουν ύστερα από την απαίτηση ταυτόχρονου μηδενισμού του αριθμητή. Στα σημεία αυτά η ταχύτητα της ροής ισούται με τη ταχύτητα διάδοσης κυμάτων που μεταφέρουν πληροφορίες για διαταραχές στην ύλη και το μαγνητικό πεδίο και αναφέρονται στο αργό μαγνητοακουστικό, στο Alfvén και στο γρήγορο μαγνητοακουστικό κύμα. Στις αξισυμμετρικές ροές οι διαταραχές δεν μπορούν να μεταφέρονται στην αζιμουθιακή συνιστώσα με αποτέλεσμα η ταχύτητα διάδοσης να ισούται με τη πολοειδή συνιστώσα της ταχύτητας της ροής (π.χ στο σημείο όπου η δυναμική γραμμή τέμνει την επιφάνεια Alfvén θα ισχύει $V_p = V_A$). Αντίστοιχο με την αξισυμμετρία περιορισμό, θέτει και η υπόθεση της ακτινικής αυτοομοιότητας, η οποία προϋποθέτει ότι κατά μήκος μιας ακτίνας οι ιδιότητες της ροής θα είναι ίδιες και οι διαταραχές θα μπορούν να διαδίδονται στην

$$
\begin{aligned}
D_1 = \frac{1}{-2\cos(\psi+\theta)\sin(\psi+\theta)}\Big\{ & -2\frac{F^2\sigma_M^2 M^4\sin^2\theta}{\xi^2 x_A^4 (G^2)^3}\Big[.....\Big]^{-1} - \frac{F^2\sigma_M^2 M^4\sin^2\theta}{\xi^2 x_A^4 (G^2)^2}\Big[.....\Big]^{-2}\Big[2\frac{\mu^2}{\xi^2}\frac{x_A^2(1-M^2-x_A^2)^2}{(1-M^2-x^2)^3} - \\
& -\frac{\mu^2}{\xi^2}\frac{2x_A^2(G^2-M^2-x^2)(1-x_A^2)G^2(1-M^2-x^2)}{[G^2(1-M^2-x^2)^2]^2} \\
& +\frac{\mu^2}{\xi^2}\frac{x_A^2(G^2-M^2-x^2)^2((1-M^2-x^2)^2 - x_A^2 2G^2(1-M^2-x^2))}{[G^2(1-M^2-x^2)^2]^2}\Big]\Big\}, \\
D_2 = \frac{1}{-2\cos(\psi+\theta)\sin(\psi+\theta)}\Big\{ & \frac{2F^2\sigma_M^2 M^2\sin^2\theta}{\xi^2 x^4}\Big[.....\Big]^{-1} - \frac{F^2\sigma_M^2 M^4\sin^2\theta}{\xi^2 x^4}\Big[.....\Big]^{-2}\Big[\\
& \frac{\mu^2}{\xi^2}\frac{1}{[G^4(1-M^2-x^2)^2]^2}\Big[(x^2 2(G^2-M^2-x^2) - G^4 2(1-M^2-x_A^2))G^4(1-M^2-x^2)^2 \\
& +G^4 2(1-M^2-x^2)(G^4(1-M^2-x_A^2)^2 - x^2(G^2-M^2-x^2)^2)\Big]\Big]\Big\}, \\
D_3 = \frac{1}{-2\cos(\psi+\theta)\sin(\psi+\theta)}\Big\{ & -2\frac{F^2\sigma_M^2 M^4\sin^2\theta}{x^4\xi^3}\Big[.....\Big]^{-1} \\
& -\frac{F^2\sigma_M^2 M^4\sin^2\theta}{\xi^2 x^4}\Big[.....\Big]^{-2}\Big[-2\frac{\mu^2}{\xi^3}\frac{G^4(1-M^2-x_A^2)^2 - x^2(G^2-M^2-x^2)^2}{G^4(1-M^2-x^2)^2}\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

Από την εξίσωση transfield (2.19)

$$
G\sin^2\theta\Big\{\frac{1}{\cos^2(\psi+\theta)}\Big[\frac{d\psi}{d\theta}+1\Big]\frac{1-M^2-x^2}{G} + \tan(\psi+\theta)\Big[\frac{-x_A^2}{G}\frac{dG^2}{d\theta} + -\frac{1-M^2-x^2}{G^2}\frac{dG}{d\theta}\Big] - \tan(\psi+\theta)\frac{1}{G}\frac{dM^2}{d\theta} = \mathcal{L}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = (F-1)\frac{x_A^4\mu^2x^2}{F^2\sigma_M^2}\Big(\frac{1-G^2}{1-M^2-x^2}\Big)^2 - \sin^2\theta\frac{M^2+Fx^2-F+1}{\cos^2(\psi+\theta)} - \frac{x_A^2\mu^2x^2}{F^2\sigma_M^2M^2}\Big(\frac{G^2-M^2-x^2}{1-M^2-x^2}\Big)^2 \\
+2\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{F-2}{F^2\sigma_M^2}\frac{\xi(\xi-1)x^4}{M^2} \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}\Big[\frac{dy}{d\theta}+1\Big] - \tan(\psi+\theta)\Big(x_A^2 + \frac{1-M^2-x^2}{2G^2}\Big)\frac{dG^2}{d\theta} - \tan(\psi+\theta)\frac{dM^2}{d\theta} = \frac{\mathcal{L}}{\sin^2(\theta)} \quad \overset{(2.21)}{\Rightarrow}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}D_0 + \frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}D_3\frac{d\xi}{d\theta} + \Big[\frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}D_1 - \tan(\psi+\theta)\Big(x_A^2+\frac{1-M^2-x^2}{2G^2}\Big)\Big]\frac{dG^2}{d\theta} \\
+\Big[\frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}D_2 - \tan(\psi+\theta)\Big]\frac{dM^2}{d\theta} = \mathcal{L}/\sin^2(\theta) \quad \overset{(2.20)}{\Rightarrow}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Big[\Big(\frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}D_2 - \tan(\psi+\theta)\Big)q\Big((\xi-1)^{-1/(\Gamma-1)} - \frac{\xi}{\Gamma-1}(\xi-1)^{-\Gamma/(\Gamma-1)}\Big) + \frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}\Big]\frac{d\xi}{d\theta} = \\
\mathcal{L}/\sin^2(\theta) - \frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}D_0 - \Big[\frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}D_1 - \tan(\psi+\theta)\Big(x_A^2+\frac{1-M^2-x^2}{2G^2}\Big)\Big]\frac{dG^2}{d\theta} \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{\mathcal{L}/\sin^2(\theta) - \frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}D_0 - \Big[\frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}D_1 - \tan(\psi+\theta)\Big(x_A^2+\frac{1-M^2-x^2}{2G^2}\Big)\Big]\frac{dG^2}{d\theta}}{\Big(\frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}D_2 - \tan(\psi+\theta)\Big)q\Big((\xi-1)^{-1/(\Gamma-1)} - \frac{\xi}{\Gamma-1}(\xi-1)^{-\Gamma/(\Gamma-1)}\Big) + \frac{1-M^2-x^2}{\cos^2(\psi+\theta)}} \tag{2.22}
$$

Η μορφή, ωστόσο, που επιλέγεται συνήθως είναι ένα σύστημα

$$
a_1\frac{dM}{d\theta} + b_1\frac{d\psi}{d\theta} = c_1, \quad a_2\frac{dM}{d\theta} + b_2\frac{d\psi}{d\theta} = c_2,
$$

που προκύπτει από τις Bernoulli και transfield, το οποίο λύνεται και ολοκληρώνεται ως προς θ ($\frac{dM}{d\theta} = \frac{N}{D} = \frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ όπου εφαρμόζεται η συνθήκη $N = 0$ κάθε φορά που $D = 0$).

πολική διεύθυνση. Συνεπώς το κρίσιμο γρήγορο μαγνητοακουστικό σημείο στη περίπτωση αυτή ονομάζεται τροποποιημένο (διαφέρει από το κλασικό) και αντιστοιχεί στο σημείο όπου η ταχύτητα V_θ (και όχι η ολική) της ροής ισούται με την V_{fast} για κυματαριθμό στη θ κατεύθυνση. Η τιμή της ταχύτητας αυτής δίνεται από τη λύση της [13]

$$\mathcal{D} = \left(\gamma\frac{V_\theta}{c}\right)^4 - \left(\gamma\frac{V_\theta}{c}\right)^2\left(\frac{U_s^2}{c^2} + \frac{B^2 - E^2}{4\pi\rho_0\xi c^2}\right) + \frac{U_s^2}{c^2}\frac{B_\theta^2(1-x^2)}{4\pi\rho_0^2} = 0, \tag{2.23}$$

όπου το $\mathcal{D}$ αναφέρεται στο $\frac{dM^2}{d\theta} = \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}}$ (βλ. υποσημείωση 3) και το $U_s^2 = c^2\frac{(\Gamma-1)(\xi-1)}{(2-\Gamma)\xi+\Gamma-1} = \frac{c_s^2}{1-c_s^2/c^2}$, $c_s^2 = \Gamma\frac{P}{\rho_0\xi}$.

Σε περιπτώσεις κρύας ροής η λύση δεν συναντά το αργό μαγνητοσκουστικό σημείο (καθώς αγνοείται η θερμική πίεση [10]) και η ολοκλήρωση μπορεί να συνεχιστεί εσωτερικά του σημείου Aflven μέχρι τη βάση του πίδακα. Εξωτερικά του σημείου, ωστόσο, για πολλές λύσεις, ανάλογα με την επιλογή της ενέργειας μ το τροποποιημένο γρήγορο σημείο θα εντοπίζεται σε πεπερασμένη ύψος οδηγώντας τη λύση σε απροσδιοριστία. Ένας τρόπος να παρακαμφθεί πρακτικά το παραπάνω πρόβλημα, είναι η τιμή μ να επιλεγεί τέτοια, ώστε το γρήγορο σημείο να πάει στο άπειρο.

Στο σημείο Alfvén τα μεγέθη παίρνουν τις τιμές

$$x = x_A, \quad G^2 = 1, \quad M^2 = 1 - x_A^2, \quad \psi = \psi_A \ \text{ και } \ \theta = \theta_A.$$

Πρακτικά μπορεί κανείς να αρχίσει την ολοκλήρωση από πολύ κοντά στο σημείο Alfvén όπου θα ισχύει

$$\theta = \theta_A + d\theta, \quad \psi = \psi_A, \quad G^2 = 1 - \frac{2\cos\psi_A}{\sin\theta_A\cos(\psi_A+\theta_A)}d\theta, \quad M^2 = (1-x_A^2) + p_A d\theta. \tag{2.24}$$

Η παράμετρος μαγνήτισης είναι $\sigma = \frac{-\varpi\Omega B_\phi/\Psi_A c^2}{\xi\gamma} = \frac{x_A^2 - x^2}{1-M^2-x_A^2}$. Για να βρεθεί η τιμή του σ και των ποσοτήτων που εμφανίζονται στις εξισώσεις Bernoulli και transfield στο όριο όπου $x \to x_A$, γίνεται χρήση του κανόνα *Del'Hospital* [4] και συνεπώς οι εξισώσεις παίρνουν τη μορφή

$$\mu^2 = \underbrace{\frac{(\sigma_A+1)^2}{x_A^2 - [x_A^2 - \sigma_A(1-x_A^2)]^2}}_{o_1}\left[x_A^2\xi_A^2 + \sigma_M^2\underbrace{\frac{F^2(1-x_A^2)^2\sin^2\theta_A}{x_A^2\cos^2(\psi_A+\theta_A)}}_{o_2}\right] \tag{2.25}$$

και

$$\frac{\sigma_M^2}{\mu^2}\underbrace{\frac{F^2(1-x_A^2)(\sigma_A+1)^2\sin\theta_A}{\cos^2(\theta_A+\psi_A)}}_{o_3}\left\{\underbrace{-2\frac{\Gamma-1}{\Gamma}\frac{(F-2)(\xi_A-1)(1-x_A^2)}{\xi_A x_A^2}\sin\theta_A + 2\cos\psi_A\sin(\theta_A+\psi_A)\frac{\sigma_A+1}{\sigma_A}}\right.$$

4

$$\sigma_A = \lim_{x\to x_A}\frac{x_A^2 - x^2}{1-M^2-x_A^2} = \lim_{x\to x_A}\frac{-2x}{\frac{dM^2}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}}\overset{\frac{d\theta}{dx}=\frac{d\theta}{dG^2}\frac{dG^2}{dx}}{=} \lim_{x\to x_A}\frac{2x_A}{-\frac{dM^2}{d\theta}2x/x_A^2}\frac{dG^2}{d\theta}\overset{\frac{dM^2}{d\theta}|_A=p_A}{=}\frac{x_A^2}{p_A}\frac{2cos\psi_A}{\sin\theta_A\cos(\psi_A+\theta_A)}.$$

$$\lim_{x\to x_A}\frac{1-M^2-x_A^2}{1-M^2-x^2} = \lim_{x\to x_A}\frac{1-M^2-x_A^2}{1-M^2-x^2+x_A^2-x_A^2} = \lim_{x\to x_A}\left(\frac{x_A^2-x^2}{1-M^2-x_A^2}+1\right)^{-1} = \lim_{x\to x_A}\frac{1}{\sigma+1} = \frac{1}{\sigma_A+1},$$

$$\lim_{x\to x_A}\frac{1-G^2}{1-M^2-x^2} = \lim_{x\to x_A}\frac{\frac{1-G^2}{1-M^2-x_A^2}}{\frac{1-M^2-x^2}{1-M^2-x_A^2}} = \frac{1}{\sigma_A+1}\lim_{x\to x_A}\frac{(x_A^2-x^2)/x_A^2}{1-M^2-x_A^2} = \frac{\sigma/x_A^2}{\sigma_A+1},$$

$$\lim_{x\to x_A}\frac{G^2-M^2-x^2}{1-M^2-x^2} = \lim_{x\to x_A}\frac{-(1-G^2)}{1-M^2-x^2}+1 = 1-\frac{\sigma/x_A^2}{\sigma_A+1} = \frac{x_A^2-(1-x_A^2)\sigma_A}{x_A^2(\sigma_A+1)}.$$

$$\underbrace{+\frac{\sin\theta_A}{x_A^2}[(F-1)(1-x_A^2)-1]}_{o_4}\Bigg\}$$

$$=\underbrace{[x_A^2-\sigma_A(1-x_A^2)]^2-(F-1)\sigma_A^2(1-x_A^2)-2\frac{\Gamma-1}{\Gamma}(F-2)\frac{\xi_A-1}{\xi_A}\{x_A^2-[x_A^2-\sigma_A(1-x_A^2)]^2\}}_{o_5} \tag{2.26}$$

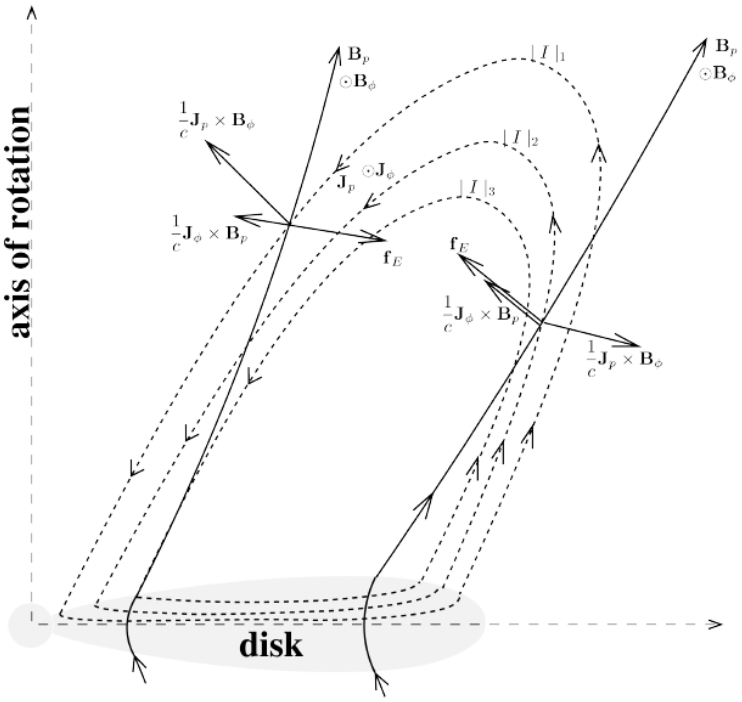
αντίστοιχα.

Επιλέγοντας αυθαίρετα ως αρχικές συνθήκες τα μεγέθη θ_A, ψ_A, x_A^2 και p_A $(= dM^2/d\theta|_A)$, μπορεί να υπολογισθεί η ποσότητα σ_A, ενώ η παράμετρος μαγνήτισης σ_M και η ολική ροή ενέργειας ανά ροή μάζας μ που εμφανίζονται στις εξισώσεις Bernoulli και transfield, υπολογίζονται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι εξισώσεις στο κρίσιμο σημείο Alfvén (2.26) $\overset{(2.25)}{\Rightarrow}$

$$\frac{\sigma_M^2}{o_1(x_A^2\xi_A^2+\sigma_M^2 o_2)}o_3o_4=o_5 \;\Rightarrow\; \sigma_M=\sqrt{\frac{o_1o_5x_A^2\xi_A^2}{o_3o_4-o_5o_2o_1}},$$

και με τη παράμετρο μ να ικανοποιεί τη σχέση (2.25).

Εφαρμογή λύσης σε κρύα ροή για πίδακες σε AGNs



Σχήμα 2.2: Οι δυνάμεις και τα ρεύματα στο πολοειδές επίπεδο για περιπτώσεις όπου $F<1$ $(J_\parallel>0)$ και $F>1$ $(J_\parallel<0)$ [16].

Παρακάτω παρουσιάζονται οι βασικές ιδιότητες για κρύα ροή [17], της οποίας οι παράμετροι έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να περιγράφουν τυπικές περιπτώσεις πιδάκων σε AGNs [5] και οι λύσεις

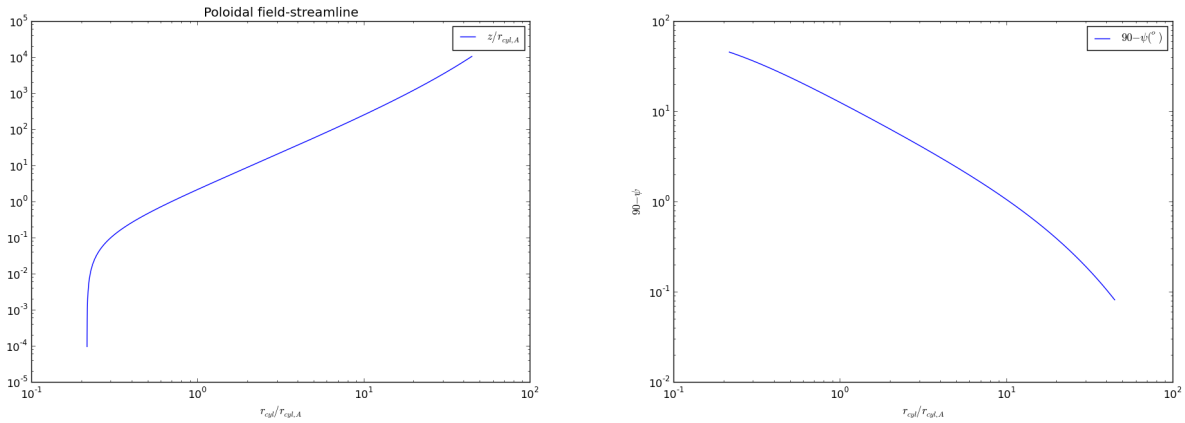
[5] Οι παράμετροι και οι συνοριακές συνθήκες που επιλέγονται για τη συγκεκριμένη ροή είναι $F=0.99$, $x_A^2=0.986567$, $q=0$, $\sigma_M=36.4948$, $\mu=75.$, ενώ οι γωνίες στην επιφάνεια Alfvén $\theta_A=25^o$, $\psi_A=77.4^o$

της οποίας θα χρησιμοποιηθούν σε εφαρμογές επόμενου κεφαλαίου. Στο σχήμα 2.2 φαίνονται οι βασικές δυνάμεις στο πολοειδές επίπεδο οι οποίες είναι καθοριστικές για τη διαμόρφωση της ροής και εξηγούν τις ιδιότητες των λύσεων. Οι συνιστώσες των δυνάμεων αυτών στις οποίες οφείλεται η επιτάχυνση και η εστίαση της ροής, προκύπτουν προβάλλοντας την εξίσωση ορμής κατά μήκος της πολοειδούς γραμμής A και της κάθετης σε αυτήν διεύθυνσης (στο πολοειδές επίπεδο) αντίστοιχα.

Αρχικά στο σχήμα 2.3 φαίνεται η μορφή της πολοειδούς δυναμικής γραμμής για μια δεδομένη τιμή ϖ_A καθώς και η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη σε κάθε σημείο, με τον άξονα συμμετρίας. Η μορφή αυτή, που στο μεγαλύτερο τμήμα της ροής ακολουθεί παραβολοειδές σχήμα $z \propto \varpi^2$, είναι κοινή για κάθε γραμμή A η οποία θα αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη ακτίνα Alfvén $\varpi_A \propto A^{1/F}$. Λόγω του ότι η παράμετρος F που έχει επιλεγεί για να περιγράψει τη συγκεκριμένη ροή είναι μικρότερη της μονάδας ($\rightarrow J_\parallel > 0$), ασυμπτωτικά η ροή δεν τείνει σε κυλινδρική, όπως αναμένεται για $F > 1$, αλλά αποεστιάζεται μερικώς από την $\hat{n}$ συνιστώσα $J_\parallel B_\phi/c$, του όρου $1/c(\vec{J}_p \times \vec{B}_\phi)$ της μαγνητική δύναμης στο πολοειδές επίπεδο[6]. Η τελική εστίαση, ωστόσο, επιτυγχάνεται από την ηλεκτρική δύναμη η οποία για μεγάλα γ έχει το πρόσημο του $J_\parallel$, καθώς [13]

$$J^0 = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}(\vec{V} \times \vec{B}) = \frac{V_p}{c}J_\parallel + \frac{V_\phi}{c}J_\phi - \frac{1}{4\pi}\vec{B}_\phi \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}_p) - \frac{1}{4}\vec{B}_p \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}_\phi) \approx J_\parallel$$

και συνεπώς τείνει να εστιάσει τη ροή (σχήμα 2.2).

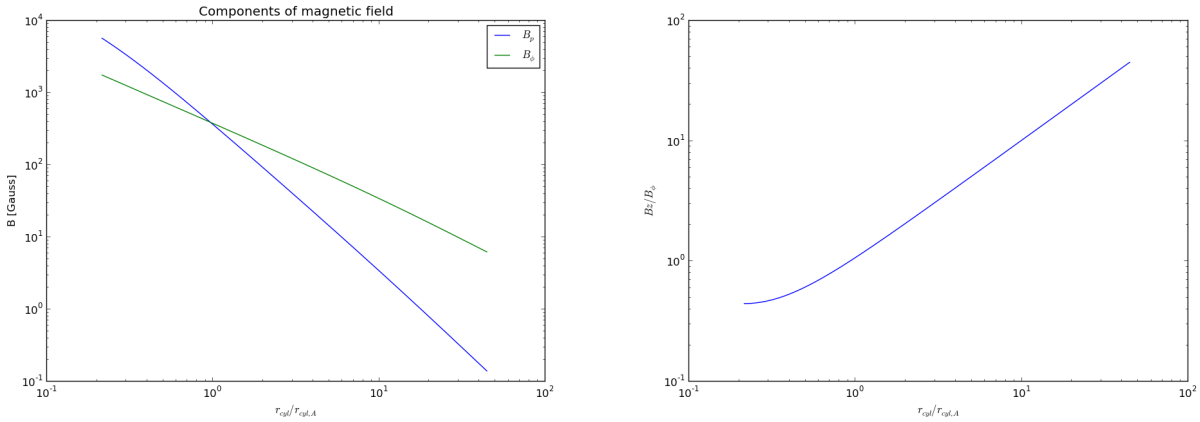


Σχήμα 2.3: Το σχήμα των γραμμών ροής στο πολοειδές επίπεδο σε λογαριθμική κλίμακα(αριστερά) και η γωνία ϑ (δεξιά).

Στο σχήμα 2.4 φαίνονται οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου και ο λόγος B_z/B συναρτήσει της κυλινδρικής απόστασης, όπου και φαίνεται ότι η πολοειδής συνιστώσα μεταβάλλεται σαν $B_p \propto 1/\varpi^2$ ενώ η αζιμουθιακή ως $-B_\phi \propto 1/\varpi$. Συνεπώς η πολοειδής συνιστώσα, που κυριαρχεί στην υποαλφενική περιοχή (κοντά στη βάση), φθίνει γρηγορότερα και γίνεται συγκρίσιμη με την αζιμουθιακή κοντά στην επιφάνεια Alfvén , ενώ σε μεγάλες αποστάσεις το πεδίο γίνεται σχεδόν τοροειδές.

Οι συνιστώσες της ενέργειας φαίνονται στο σχήμα 2.6, με τον όρο γ να περιγράφει τον όρο της ύλης και τον $\frac{\varpi\Omega B_\phi}{\Psi_A c^2}$ να δίνει τον ηλεκτρομαγνητικό όρο (ροή poynting προς τη ροή μάζας). Όπως φαίνεται ο μόνος μη σταθερός όρος του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι το ϖB_ϕ. Συνεπώς η μικρή απόκλιση της αναλογίας $-B_\phi \propto 1/\varpi$ συνδέεται με την επιτάχυνση και τη μετατροπή της μαγνητικής ενέργειας σε κινητική. Η Poynting-κυριαρχούμενη ροή στη βάση ($\sim \mu$) γίνεται ασυμπτωτικά $\sim \mu/2 \;\Rightarrow\; \gamma \rightarrow \mu/2$. Η επιτάχυνση για μέτρια σχετικιστική,

[6] Ο δείκτης $\parallel$ υποδηλώνει τη συνιστώσα κατά μήκος της πολοειδούς δυναμικής γραμμής.

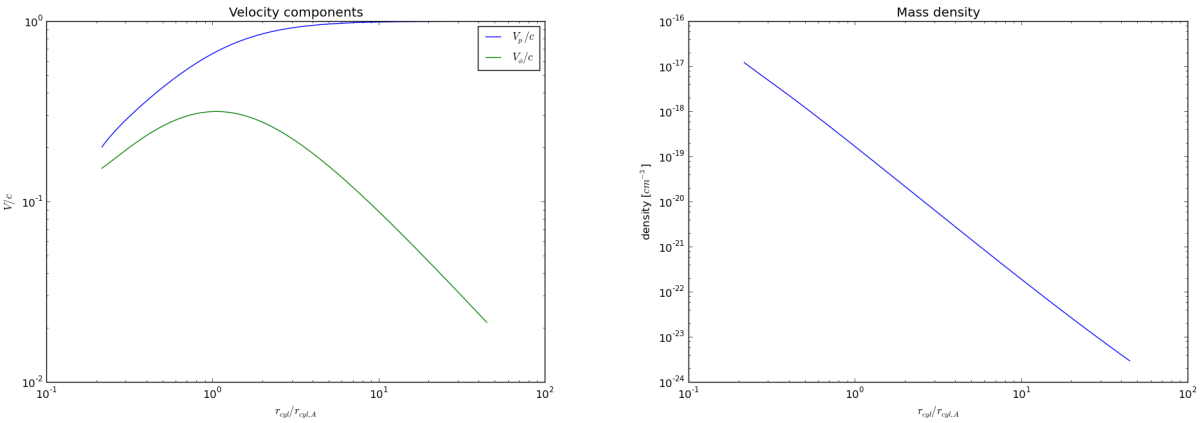


Σχήμα 2.4: Η πολοειδής και αζιμουθιακή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου (αριστερά) και ο λόγος B_z/B δεξιά συναρτήσει της κανονικοποιημένης κυλινδρικής ακτίνας.

κρύα ροή αποδίδεται κυρίως στους όρους της μαγνητο-φυγοκεντρικής και μαγνητικής δύναμης $f_{C\|} = \gamma^2 \rho_0 \frac{V_\phi^2}{\varpi} \cos\psi$, $f_{B\|} = -\frac{B_\phi}{4\pi\varpi}\frac{\partial(\varpi B_\phi)}{\partial l}$ αντίστοιχα, οι οποίοι συνδέονται μέσω της

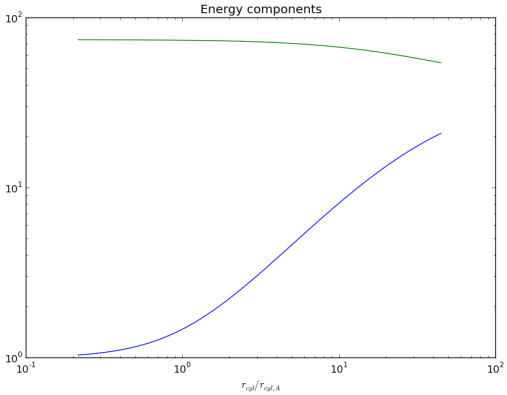
$$f_{C\|} = -\frac{\rho_0\gamma^2}{2}\frac{\partial V_\phi^2}{\partial l} + \frac{(1-x_A^2)(1-M^2-x^2)}{(1-M^2-x_a^2)}\frac{V_\phi}{V_p}\frac{B_p}{(-B_\phi)}f_{B\|}$$

[15]. Ο πρώτος όρος της παραπάνω σχέσης δίνει επιτάχυνση όταν το V_ϕ μειώνεται ενώ από τον δεύτερο όρο φαίνεται ότι πολύ κοντά στη βάση της ροής όπου $M,\ x << 1$ και $B_p > |B_\phi|$, $V_\phi > V_p$ η φυγοκεντρική δύναμη υπερισχύει έναντι της $f_{B\|}$. Στις περιοχές αυτές από τον ορισμό του γ για $V_p \approx 0$ και $V_\phi \approx \varpi\Omega$ ισχύει $\gamma \approx 1/(1-x^2)^{1/2}$ και συνεπώς ο παράγοντας Lorentz θα αυξάνεται ως $\propto (1+x^2)^{1/2}$. Παράλληλα για το μ από τη σχέση σχέση 2.14 θα ισχύει $\mu(1-x_A^2) \approx 1$. Ωστόσο, σε μεγαλύτερες αποστάσεις η μαγνητική δύναμη τελικά κυριαρχεί και επιταχύνει τη ροή σε μεγάλα γ, με τον παράγοντα να μεταβάλλεται ως $\gamma \propto \varpi$.



Σχήμα 2.5: Η πολοειδής και αζιμουθιακή συνιστώσα της ταχύτητας (αριστερά) και η πυκνότητας ροής στο σύστημα του ρευστού (δεξιά).

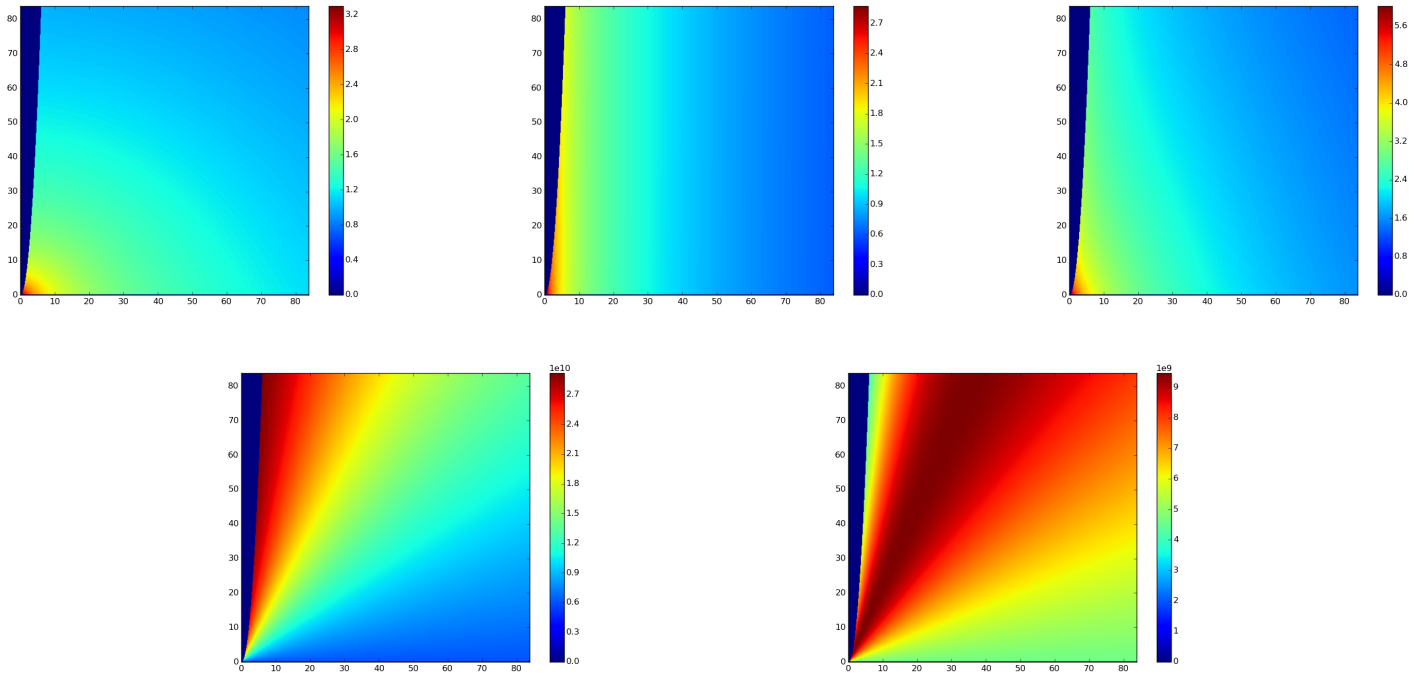
Στο σχήμα 2.5 δίνονται οι συνιστώσες της ταχύτητας όπου και φαίνεται ότι η V_ϕ στην υπο-αλφενική περιοχή ακολουθεί τη σχέση $\varpi\Omega$ ενώ για μεγαλύτερες αποστάσεις ισχύει $V_\phi \propto 1/\varpi\gamma$ προκειμένου να διατηρείται η στροφορμή. Τέλος στο δεξί διάγραμμα του ίδιου σχήματος φαίνεται η



Σχήμα 2.6: Ο παράγοντας Lorentz γ (μπλε καμπύλη) και η ροή poynting προς τη ροή μάζας.

πυκνότητα μάζας του ρευστού, η οποία από τη σταθερά Ψ_A (διατήρηση ροής της ύλης) προκύπτει ότι σε μεγάλες αποστάσεις θα μεταβάλλεται ως $\rho_0 \propto \frac{B_p}{V_p \gamma} \sim \frac{B_p}{\gamma} \propto 1/\varpi^3$.

Έχοντας, λοιπόν, βρεί πώς μεταβάλλονται οι φυσικές ποσότητες κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής, μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες αυτές σε όλο το χώρο χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της ακτινικής αυτοομοιότητας (βλ. σχέσεις 5.1). Η κατανομή των φυσικών μεγεθών στο πολοειδές επίπεδο πέραν της πολοειδούς γραμμής ροής, δίνεται στις εικόνες του σχήματος 2.7.



Σχήμα 2.7: Η πολοειδής και αζιμουθιακή συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου (πάνω αριστερή και μεσαία εικόνα), η πυκνότητα ρ_0 (πάνω δεξιά εικόνα) καθώς και η πολοειδής και αζιμουθιακή συνιστώσα της ταχύτητας (κάτω αριστερά και δεξιά αντίστοιχα), όπως κατανέμεται το μέτρο τους στο πολοειδές επίπεδο. Οι άξονες δίνονται σε αυθαίρετες κανονικοποιημένες μονάδες.

Κεφάλαιο 3

Ακτινοβολία

3.1 Ακτινοβολία σύγχροτρον

Όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 1, ένα μεγάλο μέρος της ακτινοβολίας των AGNs και κυρίως των πιδάκων τους, αποδίδεται στην διαδικασία σύγχροτρον, η οποία και δίνει τη χαμηλοενεργειακή συνιστώσα του φάσματος. Ο μηχανισμός παραγωγής της αφορά την κίνηση σχετικιστικών φορτίων παρουσία μαγνητικού πεδίου. Η κάθετη, στην ταχύτητα, επιτάχυνση που προκαλείται σε κινούμενο σωματίδιο μάζας m και φορτίου q από ένα μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ μέσω της δύναμης Lorentz, $\frac{d(m\gamma\vec{v})}{dt} = \frac{q}{c}\vec{v} \times \vec{B}$, το αναγκάζει να ακτινοβολήσει παράγοντας ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που εξαρτάται από τη διεύθυνση παρατήρησης $\hat{n}$ και την απόσταση R φορτίου-παρατηρητή, της μορφής [18]

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},t) = \frac{q}{c}\left[\frac{\hat{n} \times \left\{(\hat{n} - \vec{\beta}') \times \dot{\vec{\beta}}'\right\}}{(1 - \hat{n}\vec{\beta}')^3 R}\right], \quad \vec{b}_{rad}(\vec{r},t) = \hat{n} \times \vec{E}_{rad}. \tag{3.1}$$

Θεωρώντας ότι $\vec{B} = B\hat{k}$ και ότι η διαδικασία στη διάρκεια μιας περιόδου $T = 2\pi/\omega_B$ είναι αδιαβατική διατηρώντας το γ σταθερό, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σωματιδίου, γράφονται

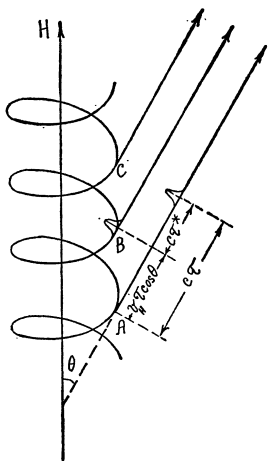
$$\vec{\beta}' = \beta \sin a(\sin \omega_B t'\hat{i} + \cos \omega_B t'\hat{j}) + \beta \cos a\hat{z} \;\; \text{και} \;\; \dot{\vec{\beta}}' = \beta\omega_B \sin a(\cos \omega_B t'\hat{i} - \sin \omega_B t'\hat{j}),$$

με a τη γωνία μεταξύ του μαγνητικού πεδίου και της ταχύτητας , $\arccos(\frac{\vec{B}\vec{\beta}'}{B\beta})$, και ω_B τη γυροσυχνότητα $\omega_B = \frac{qB}{\gamma mc}$. Οι τονούμενες ποσότητες απαιτούνται λόγω πεπερασμένης ταχύτητας του φωτός και αναφέρονται στον χρόνο $t' = t - \frac{R(t')}{c}$, στον οποίο αντιστοιχούν οι συνθήκες που βλέπει ο παρατηρητής.

Η γωνιακή κατανομή της ενέργειας ακτινοβολίας ανά μονάδα χρόνου, συνδέεται με τη ροή Poynting S και συνεπώς με το πεδίο ως εξής

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dE}{dt\ dA}R^2 = S\ R^2 = \frac{c}{4\pi}|\vec{E}_{rad}|^2 R^2 = \frac{q^2}{4\pi c}\frac{[\hat{n} \times \left\{(\hat{n} - \vec{\beta}') \times \dot{\vec{\beta}}'\right\}]^2}{(1 - \hat{n}\vec{\beta}')^6}. \tag{3.2}$$

Από τη σχέση (3.2) φαίνεται ότι στο στιγμιαίο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου ($\beta = 0$), η ακτινοβολία έχει διπολική κατανομή με μέγιστο στο $\hat{n} \perp \dot{\vec{\beta}}$. Αντίστοιχα για σωματίδιο κινούμενο μη σχετικιστικά (περίπτωση κύκλοτρον), $v << c$, η ακτινοβολία έχει επίσης διπολική κατανομή, καθώς η ένταση των μεγαλύτερων όρων του πολυπολικού αναπτύγματος είναι της τάξης $(v/c)^{2n}$, όπου το $n = 1$ αναφέρεται στον τετραπολικό όρο κ.ο.κ και η ακτινοβολία εκπέμπεται κατά βάση σε συχνότητα ίση με ω_B.



Σχήμα 3.1: Περιγραφή της διαφοράς της μετρούμενης περιόδου των παλμών [19].

Το ίδιο, ωστόσο, δεν συμβαίνει και στη σχετικιστική περίπτωση. Μετασχηματίζοντας τις γωνίες στο σύστημα του εργαστηρίου, $\cos(\theta) = \frac{\cos\theta'+\beta}{1+\beta\cos\theta'}$, προκύπτει ότι σχεδόν όλη η ακτινοβολία εκπέμπεται σε έναν κώνο γωνίας $\sim 1/\gamma \;\; \Rightarrow \theta \sim \mathcal{O}(1/\gamma)$, γύρω από το στιγμιαίο διάνυσμα της ταχύτητας. Παράλληλα το πεδίο της ακτινοβολίας γίνεται σημαντικό όταν ο παρονομαστής $(1-\hat{n}\vec{\beta})$, είναι μικρός, δηλαδή για

$$\beta\cos\theta \sim 1 \;\; \Rightarrow \;\; \beta \approx 1-\frac{1}{2\gamma^2}+\mathcal{O}(\gamma^{-4}), \;\; cos\theta \approx 1-\frac{1}{2}\theta^2+\mathcal{O}(\theta^4) \;\; \Rightarrow \;\; 1-\beta\cos\theta \overset{\xi=\frac{1}{\gamma}}{\approx} \frac{1}{2}(\xi^2+\theta^2)+\mathcal{O}(\xi^4).$$

Συνεπώς η συχνότητα εκπομπής λόγω φαινομένου Doppler γίνεται $\omega = \frac{\omega_B}{\gamma(1-\beta\hat{n})} \approx \frac{\omega_B}{\frac{\gamma}{2}\left(\xi^2+\theta^2\right)}$, όπου για $\theta << \xi \;\; \Rightarrow \;\; \omega \approx 2\gamma\omega_B$, ενώ για $\theta >> \xi$ η συχνότητα μειώνεται.

Το διάνυσμα της ταχύτητας κατά τη διάρκεια μιας περιόδου, διαγράφει έναν κώνο ημιγωνίας a γύρω από το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου. Στην ειδική περίπτωση όπου $a = \frac{\pi}{2}$, ένας παρατηρητής στο επίπεδο της τροχιάς του σωματιδίου θα λαμβάνει παλμούς που απέχουν μεταξύ τους διάστημα μιας περιόδου T_B, καθώς θα εκπέμπονται από το ίδιο σημείο και θα καλύπτουν την ίδια απόσταση μέχρι να φτάσουν σε αυτόν. Ωστόσο, όταν υπάρχει συνιστώσα της ταχύτητας παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο, και θεωρώντας ότι η ευθεία παρατήρησης βρίσκεται στην επιφάνεια του κώνου που διαγράφει η ταχύτητα, κατά τη διάρκεια μιας περιόδου T_B το σωματίδιο θα έχει μετακινηθεί ως προς τον παρατηρητή κατά απόσταση $T_B v_\parallel \cos a$ (σχήμα 3.1). Συνεπώς το χρονικό διάστημα μεταξύ των παλμών που θα λαμβάνει ο παρατηρητής θα είναι

$$T_{B,obs} = T_B\left(1-\frac{v_\parallel}{c}\cos a\right) = T_B\left(1-\beta\cos^2 a\right) \approx T_B\left(sin^2 a + \frac{\cos^2 a}{2\gamma^2}\right) \approx T_B sin^2 a.$$

Η αλλαγή στη μετρούμενη περίοδο συνεπάγεται και την διαφορά μεταξύ της εκπεμπόμενης και της παρατηρούμενης ισχύος καθώς διατηρώντας την ενέργεια που εκπέμπεται σε έναν κύκλο $\Rightarrow$

$$\Delta E_{em} = \Delta E_{rec} \;\; \Rightarrow \;\; \langle P\rangle_{rec} T_{B,obs} = \langle P\rangle_{em} T_B \;\; \Rightarrow \;\; \langle P\rangle_{rec} = \frac{\langle P\rangle_{em}}{\sin^2 a}.$$

Η διάρκεια των παλμών αυτών καθορίζεται από το χρόνο που ο παρατηρητής βρίσκεται στον κώνο εκπομπής, ο οποίος μπορεί να βρεθεί από τη εξίσωση κίνησης

$$\gamma m\frac{\Delta v}{\Delta t'} = \frac{q}{c}vB\sin \;\; a \overset{\Delta v = v\Delta\theta}{\underset{\Delta\theta\sim\frac{2}{\gamma}}{\Longrightarrow}} \;\; \Delta t' \approx \frac{2}{\gamma\omega_B \sin a}.$$

Η διάρκεια ωστόσο, που θα μετρήσει λόγω της σχετικής κίνησης του σωματιδίου κατά την ευθεία παρατήρησης θα είναι $\Delta t = \Delta t'(1-\beta) \approx \frac{\Delta t'}{2\gamma^2}$.

Το φάσμα, συνεπώς, της ακτινοβολίας που λαμβάνει ο παρατηρητής, παράγεται από την περιοδική επανάληψη των παλμών θα είναι υπέρθεση των αρμονικών της βασικής συχνότητας $\omega_{B,_{obs}} = \omega = \frac{\omega_B}{\sin^2 a}$, ενώ η συχνότητα στην οποία αντιστοιχεί η μέγιστη ένταση θα είναι $\omega_{max} = \Delta t^{-1} \approx \gamma^3 \omega_B \sin a$.

Το εκπεμπόμενο πεδίο, λόγω περιοδικότητας με περίοδο παλμών T_B, μπορεί να γραφεί ως ανάπτυγμα fourier σε συχνότητες πολλαπλάσιες της βασικής ω_B,

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r},t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_n e^{-in\omega_B t}, \quad \text{με} \quad \vec{E}_n(\vec{r}) = \frac{\omega_B}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega_B} \vec{E}_{rad} e^{in\omega_B t} dt.$$

Λαμβάνοντας την αρχή των αξόνων στη γειτονιά που κινείται το φορτίο έτσι ώστε να ισχύει $r >> r_1$, όπου $\vec{r}$ και $\vec{r}_1$ η θέση του παρατηρητή και του φορτίου αντίστοιχα, το ανάπτυγμα του μέτρου της απόστασης φορτίου-παρατηρητή γίνεται

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_1(t')| = r\left(1 + \frac{r_1^2(t')}{r^2} - \frac{2\hat{n}\vec{r}_1(t')}{r}\right)^{1/2} \approx r\left(1 - \frac{\hat{n}\vec{r}_1(t')}{r}\right) = r - \hat{n}\vec{r}_1(t').$$

Με χρήση της (3.1) και της παραπάνω προσέγγισης, το πλάτος κάθε αρμονικής μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{E}_n(\vec{r}) = \frac{\omega_B}{2\pi c} e^{in\omega_B \frac{r}{c}} \int_0^{2\pi/\omega_B} \vec{E}_{rad} e^{in\omega_B (t' - \hat{n}\vec{r}_1/c)} \underbrace{\frac{dt}{dt'}}_{(1-\hat{n}\vec{\beta}')} dt' =$$

$$\frac{q\omega_B}{2\pi c r} e^{in\omega_B \frac{r}{c}} \int_0^{2\pi/\omega_B} \frac{\hat{n} \times \left[(\hat{n} - \vec{\beta}') \times \dot{\vec{\beta}}'\right]}{(1-\hat{n}\vec{\beta}')^2} e^{in\omega_B (t' - \hat{n}\vec{r}_1/c)} dt'. \tag{3.3}$$

Το μέτρο $\vec{E}_{rad}$ στο ολοκλήρωμα, για $\theta \sim 1/\gamma$, είναι της τάξης του $\mathcal{O}(\gamma^4)$, ενώ για $\theta >> 1/\gamma$ της τάξης $\mathcal{O}(1)$ [18], με αποτέλεσμα η συνεισφορά των μεγάλων γωνιών στο ολοκλήρωμα να είναι αμελητέα. Ένας παρατηρητής λοιπόν, θα λαμβάνει ακτινοβολία κατά κύριο λόγο από τα $\sim 2/\gamma$ ακτίνια της τροχιάς του σωματιδίου και συνεπώς για χρόνο πολύ μικρότερο της περιόδου, ώστε τα όρια του ολοκληρώματος να μπορούν να αντικατασταθούν με $\pm\infty$.

Το διανυσματικό κομμάτι του ολοκληρώματος μπορεί να γραφεί σαν τέλειο διαφορικό [20]

$$\frac{\hat{n} \times [(\hat{n} - \vec{\beta}') \times \dot{\vec{\beta}}']}{(1-\hat{n}\vec{\beta}')^2} = \frac{d}{dt'}\left[\frac{\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}')}{(1-\hat{n}\vec{\beta}')}\right].$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη και έχοντας ότι $\frac{d}{dt'}[in\omega_B(t' - \hat{n}\vec{r}_1/c)] = in\omega_B(1-\hat{n}\vec{\beta}) \overset{(3.3)}{\Rightarrow}$

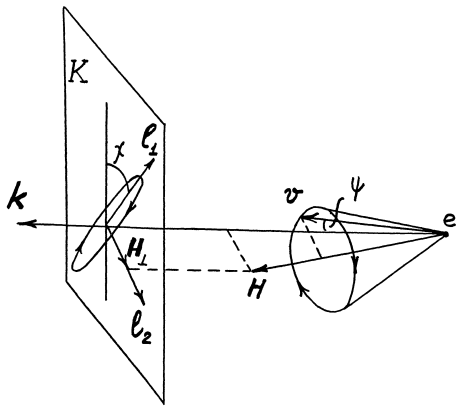
$$\vec{E}_n(\vec{r}) = \frac{inq\omega_B^2}{2\pi c r} e^{in\omega_B \frac{r}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} -\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}') e^{in\omega_B (t' - \hat{n}\vec{r}_1/c)} dt', \tag{3.4}$$

όπου φαίνεται ότι το $\vec{E}_n$ περιλαμβάνει μόνο τη συνιστώσα της ταχύτητας κάθετα στη διεύθυνση παρατήρησης. [1]

Προκύπτει, λοιπόν, ότι το πλάτος της $n_{\text{οστής}}$ αρμονικής του πεδίου είναι

$$\vec{E}_n = -\frac{e\omega_B}{\sqrt{3}\pi c r}\frac{n}{\sin a} e^{in\omega_B \frac{r}{c}} \left\{(\xi^2+\psi^2)K_{2/3}(g_n)\hat{l}_1 - i\psi(\xi^2+\psi^2)^{1/2}K_{1/3}(g_n)\hat{l}_2\right\}, \tag{3.5}$$

[1] Θεωρώντας ότι το $\hat{n}$ βρίσκεται στο επίπεδο $y-z \quad \Rightarrow \quad \hat{n} = (0, n_2, n_3)$, τότε από το διανυσματικό τριπλό



Σχήμα 3.2: Οι διευθύνσεις πόλωσης στο επίπεδο του ουρανού [21].

όπου $\hat{l}_1 = \hat{i}$ και $\hat{l}_2 = -\hat{n} \times \hat{l}_1 = n_2\hat{k} - n_3\hat{j}$ (όπου έχουμε θεωρήσει ότι το $\hat{n}$ βρίσκεται στο επίπεδο $y-z \;\Rightarrow\; \hat{n} = (0, n_2, n_3)$). Το μοναδιαίο $\hat{l}_2$ βρίσκεται στη διεύθυνση της προβολής του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ στο επίπεδο του ουρανού (επίπεδο κάθετο στη διεύθυνση παρατήρησης), $\hat{k} - (\hat{k}\hat{n})\hat{n}$. Το ψ είναι η μικρότερη γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα με τη διεύθυνση παρατήρησης, δηλαδή όταν είναι συνεπίπεδα με το μαγνητικό πεδίο και το $\xi = 1/\gamma$, όπως έχει ορισθεί παραπάνω. Όπως φαίνεται και από τη σχέση (3.5), το πεδίο εμφανίζεται στις δύο κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις $\hat{l}_1$ και $\hat{l}_2$. Λόγω του μιγαδικού i οι γραμμικές πολώσεις έχουν διαφορά φάσης $\frac{\pi}{2}$ και συνεπώς το πεδίο παρουσιάζει συνολικά ελλειπτική πόλωση, με τον μεγάλο άξονα να βρίσκεται στη διεύθυνση του $\hat{l}_1$. Για $\psi > 0$ η ελλειψη διαγράφεται δεξιόστροφα ως προς τον παρατηρητή, για $\psi < 0$ αριστερόστροφα, ενώ στην περίπτωση όπου $\psi = 0$, η πόλωση είναι γραμμική.
Οι συναρτήσεις $K_{2/3}(g_n)$ και $K_{1/2}(g_n)$ είναι συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους, με $g_n = \frac{n}{3\sin a}(\xi^2 + \psi^2)^{3/2}$.

γινόμενο, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \quad \Rightarrow$

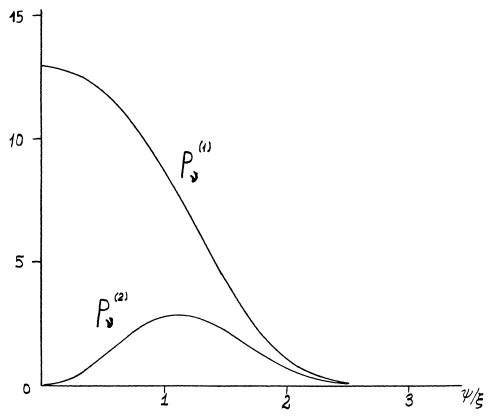
$$-\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{\beta}') = \vec{\beta} - (\vec{\beta}\hat{n})\hat{n} \overset{t' \to t}{=} \beta_\perp \sin\omega_B t\hat{i} + \beta_\perp \cos\omega_B t\hat{j} + \beta_\parallel \hat{k} - (\beta_\perp \cos(\omega_B t)n_2 + \beta_\parallel n_3)(n_2\hat{j} + n_3\hat{k}) =$$

$$\beta_\perp \sin\omega_B t\hat{i} + (\beta_\perp \cos\omega t \underbrace{(1 - n_2^2)}_{n_3^2} - \beta_\parallel n_3 n_2)\hat{j} - (\beta_\perp \cos(\omega t)n_2 n_3 - \beta_\parallel \underbrace{(1 - n_3^2)}_{n_2^2})\hat{k} =$$

$$\beta_\perp \sin\omega_B t\hat{i} + (\beta_\perp \cos(\omega t)n_3 - \beta_\parallel n_2)n_3\hat{j} - (\beta \cos(\omega t)n_3 - \beta_\parallel n_2)n_2\hat{k} =$$

$$\beta_\perp \sin\omega_B t\hat{i} + (\beta_\perp \cos(\omega t)n_3 - \beta_\parallel n_2)(n_3\hat{j} - n_2\hat{k}) = \beta_\perp \sin\omega_B t\hat{l}_1 - (\beta_\perp \cos(\omega_B t)n_3 - \beta_\parallel n_2)\hat{l}_2,$$

όπου $\hat{l}_1 = \hat{i}$ και $\hat{l}_2 = -\hat{n} \times \hat{l}_1 = n_2\hat{k} - n_3\hat{j}$.
Παράλληλα για το εκθετικό, εφόσον $\vec{r}_1 = \frac{\beta_\perp c}{\omega_B}(-\cos\omega_B t\hat{i} + \sin\omega_B t\hat{j}) + \beta_\parallel t\hat{z}$, έχουμε $in\omega(t - \hat{n}\vec{r}_1/c) = in\omega_B(t - n_2\frac{\beta_\perp}{\omega_B}\sin\omega_B t - n_3\beta_\parallel t) = in\omega_B t(1 - n_3\beta_\parallel) - inn_2\beta_\perp \sin\omega_B t$.



Σχήμα 3.3: Η εξάρτηση της ροής στις δύο διευθύνσεις από τη γωνία ψ (για $\nu/\nu_c = 0.29$) [22].

Η συχνότητα στην οποία αντιστοιχεί το $\vec{E}_n$ είναι $\nu = \frac{n\omega_B}{2\pi}$. Επειδή τα σωματίδια είναι υπερσχετικιστικά $\xi << 1$, η ενέργεια συγκεντρώνεται στις αρμονικές μεγάλης τάξης όπου το φάσμα είναι πρακτικά συνεχές. Συνεπώς για το πλάτος ισχύει $|\vec{E}_\nu|^2 = |\vec{E}_n|^2 \frac{dn}{d\nu} = |\vec{E}_n|^2 \frac{2\pi}{\omega_B}$. Ορίζοντας την κρίσιμη συχνότητα $\nu_c = \frac{3}{2}\nu_m = \frac{3\omega_B \sin a}{4\pi\xi^3}$, η μέση διαφορική ροή ακτινοβολίας για τις δύο διευθύνσεις της πόλωσης δίνεται από το θεώρημα Parseval

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{2\pi}\hat{n}\left(\frac{E_0^2}{2} + \sum_1^\infty |E_n|^2\right) \quad \Rightarrow \langle S_\nu^{(1,2)} \rangle = \frac{c}{2\pi}|\vec{E}_\nu|^2 \quad \Rightarrow$$

$$\langle S_\nu^{(1)} \rangle = \frac{3q^3 B\gamma}{4\pi^2 r^2 mc^2}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2 \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^2 K_{2/3}^2(g_\nu) \tag{3.6}$$

$$\langle S_\nu^{(2)} \rangle = \frac{3q^3 B\gamma}{4\pi^2 r^2 mc^2}\psi^2\gamma^2 \left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)^2 \left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^2 K_{1/3}^2(g_\nu), \tag{3.7}$$

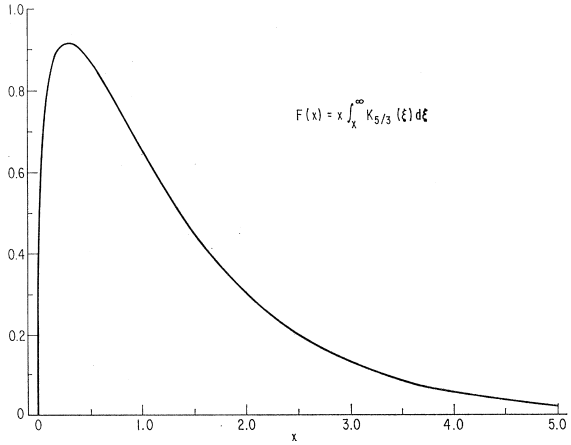
με $g_\nu = \frac{\nu}{2\nu_c}\left(1 + \frac{\psi^2}{\xi^2}\right)^{3/2}$. Η εξάρτηση της ροής ακτινοβολίας από τη γωνία ψ, για $\frac{\nu}{\nu_c} = 0.29$, δίνεται στο σχήμα 3.3, όπου και φαίνεται ότι για $\psi <<$, η συνεισφορά στην ακτινοβολία είναι κυρίως από τη συνιστώσα στη διεύθυνση $\hat{l}_1$.

Προκειμένου να βρεθεί η φασματική κατανομή της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα σχετικιστικό φορτίο ως προς όλες τις διευθύνσεις, οι σχέσει (3.6), (3.7) πρέπει να ολοκληρωθούν ως προς τη στερεά γωνία. Εφόσον για $\psi > \frac{1}{\gamma}$ οι ροές γίνονται αμελητέες, η βασική συνειφορά στο ολοκλήρωμα δίνεται από τη στερεά γωνία $d\Omega = \sin(a - \psi)d\phi d\psi \approx 2\pi \sin a d\psi$ και η ολοκλήρωση ως προς ψ μπορεί με μικρό σφάλμα να επεκταθεί στο $\pm\infty$. Η ολική ισχύς ανά συχνότητα θα είναι $P_\nu^{(1,2)} = \int r^2 \langle S_\nu^{(1,2)} \rangle d\Omega = 2\pi r^2 \sin a \int_{-\infty}^{\infty} \langle S_\nu^{(1,2)} \rangle d\psi$, όπου [18]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle S_\nu^{(1)} \rangle d\psi = \frac{\sqrt{3}q^3 B}{4\pi mc^2 r^2}\frac{\nu}{\nu_c}\left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)d\eta + K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right] \tag{3.8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle S_\nu^{(2)} \rangle d\psi = \frac{\sqrt{3}q^3 B}{4\pi mc^2 r^2}\frac{\nu}{\nu_c}\left[\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)d\eta - K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\right] \Rightarrow \tag{3.9}$$

$$P_\nu = 2\pi r^2 \sin a \int_{-\infty}^{\infty} \left(\langle S_\nu^{(1)} \rangle + \langle S_\nu^{(2)} \rangle\right) d\psi = \frac{\sqrt{3}q^3 B \sin a}{mc^2}\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta)d\eta. \tag{3.10}$$

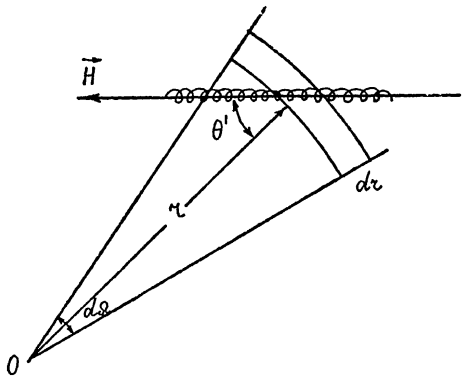


Σχήμα 3.4: Η συνάρτηση $F(x) = x\int_x^\infty K_{5/3}(\eta)d\eta$ [22]

Η μορφή της συνάρτησης $F(x) = x\int_x^\infty K_{5/3}(\eta)d\eta$ δίνεται στο σχήμα 3.4, όπου και φαίνεται ότι η ισχύς παρουσιάζει μέγιστο για $\nu_{max} \sim 0.29\nu_c$.

Η σχέση (3.10) δίνει την εκπεμπόμενη ισχύ από ένα σχετικιστικό φορτίο και όπως έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω συνδέεται με την παρατηρούμενη σύμφωνα με τη σχέση $P_{\nu,rec} = \frac{P_{\nu,em}}{\sin^2 a}$. Ωστόσο, για να γίνει σύγκριση κάποιου παρατηρούμενου φάσματος με το προβλεπόμενο από τη θεωρία, για κάποια αστροφυσική πηγή, η παραπάνω ανάλυση θα πρέπει να γίνει για μια κατανομή σωματιδίων που βρίσκονται σε ένα δεδομένο όγκο στην πηγή.

Έστω λοιπόν, σωματίδια στο στοιχείο του όγκου $r^2drd\Omega$ σε απόσταση r από τον παρατηρητή (σχήμα 3.5). Κάθε φορτίο θα κινείται κατά μήκος της δυναμικής γραμμής με ταχύτητα $v_\parallel = v\cos a$, ενώ η προβολή της ταχύτητας αυτής στη διεύθυνση παρατήρησης $v_r = v_\parallel \cos(a-\theta) = v\cos a\cos(a-\theta)$, δίνει το χρόνο στον οποίο θα βρίσκεται στον όγκο dV, $dt' = \frac{dr}{v_r}$. Ο μετρούμενος χρόνος ωστόσο, που θα παρατηρείται το φορτίο να ακτινοβολεί στον όγκο αυτόν θα είναι $dt = dt'\left(1-\frac{v_r}{c}\right) = dt'(1-\beta\cos a\cos(a-\theta)) \approx dt'\sin^2 a$. Λαμβλάνοντας υπόψιν τα παραπάνω προκύπτει [22] ότι αν $N_{obs}(E,\vec{r},\hat{\tau},t)dEd\Omega_\tau dV$ ο αριθμός των σωματιδίων τη χρονική στιγμή t που βρίσκονται στο στοιχείο του όγκου $dV = r^2drd\Omega$ με ενέργειες στο διάστημα $(E, E+dE)$ και ταχύτητες με κατεύθυνση μέσα στη στερεά γωνία $d\Omega_\tau$ γύρω από τη διεύθυνση $\hat{\tau}$, τότε $N_{obs}(E,\vec{r},\hat{\tau},t) = \sin^2 aN(E,\vec{r},\hat{\tau},t-r/c)$.



Σχήμα 3.5: Κίνηση σωματιδίου σε όγκο dV [19].

Συνεπώς, η ολική ροή και ένταση της παρατηρούμενης ακτινοβολίας θα είναι

$$\begin{aligned} F_\nu &= \int \langle S_\nu \rangle N\left(E, \vec{r}, \hat{\tau}, t - \frac{r}{t}\right) r^2 dr d\Omega dE d\Omega_\tau \\ I_\nu &= \frac{dF}{d\Omega} = \int \langle S_\nu \rangle N\left(E, \vec{r}, \hat{\tau}, t - \frac{r}{t}\right) r^2 dr dE d\Omega_\tau \end{aligned} \tag{3.11}$$

με $\langle S_\nu \rangle = \langle S_\nu^{(2)} \rangle + \langle S_\nu^{(1)} \rangle$. Όπως έχει αναφερθεί και πρωτύτερα, η κύρια συνεισφορά των $\langle S_\nu^{(1,2)} \rangle$ στο ολοκλήρωμα ως προς $d\Omega_\tau$ δίνεται από τη στερεά γωνία $\Delta\Omega_\tau = 2\pi \sin a \Delta\psi$, με $\Delta\psi \leq \frac{1}{\gamma}$. Από τις σχέσεις (3.8), (3.9) προκύπτει

$$I_\nu = \int N(E, \vec{r}, \hat{\tau}) P_\nu dE dr = \frac{\sqrt{3} q^3 B \sin a}{mc^2} \int dE dr N(E, \vec{r}, \hat{\tau}) \frac{\nu}{\nu_c} \int_{\nu/\nu_c}^{\infty} K_{5/3}(\eta) d\eta, \tag{3.12}$$

όπου έχει θεωρηθεί ότι η κατανομή των σωματιδίων με ταχύτητες στο πολύ μικρό εύρος γωνιών $\psi \sim \frac{1}{\gamma}$, παραμένει πρακτικά σταθερή. Με την παραπάνω υπόθεση, θεωρώντας δηλαδή ότι η κατανομή θα είναι ίδια για $\pm\psi$, και δεδομένου ότι το πρόσημο της γωνίας ψ καθορίζει τη φορά διαγραφής της έλλειψης και όχι την ένταση κάθε συνιστώσας, λόγω αλληλοαναίρεσης η πόλωση από ελλειπτική που είναι για ένα φορτίο θα γίνει γραμμική. Άρση του παραπάνω χαρακτηριστικού θα συμβαίνει για πολύ έντονη ανισοτροπία της κατανομής στα όρια της διεύθυνσης του παρατηρητή.

Μια από τις πιο συχνές κατανομές που συναντώνται σε μοντέλα για διάφορα αστροφυσικά περιβάλλοντα και κυρίως σε περιπτώσεις επιτάχυνσης σωματιδίων τα οποία αναμένεται να δώσουν χαρακτηριστικές ακτινοβολίες (όπως σύγχροτρον και Compton), είναι η κατανομή νόμου δύναμης ως προς την ενέργεια των σωματιδίων. Οι κατανομές αυτές συνήθως οριοθετούνται από κάποια ενεργειακά όρια, $E_1 \leq E \leq E_2$, και περιγράφονται από τη σχέση $\tilde{N}(E, \hat{n}) dE = \tilde{K}(\hat{n}) E^{-p} dE d\Omega_n$, όπου $\tilde{N}(E, \hat{n})$ είναι ο αριθμός των σωματιδίων ανά στερεά γωνία και ανά ενέργεια, που κινούνται στη διεύθυνση του παρατηρητή και p ο φασματικός δείκτης της κατανομής.

3.1.1 Παράμετροι Stokes

Πέρα από την έντασή της, για να περιγραφεί παρατηρησιακά πλήρως μια ακτινοβολία απαιτούνται μεγέθη που χαρακτηρίζουν την πόλωσή της, όπως η θέση και η ένταση των αξόνων της ελλειπτικής πόλωσης καθώς και φορά διαγραφής της. Οι πιο συχνές παράμετροι που χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν τα μεγέθη αυτά είναι οι παράμετροι Stokes.

Θεωρώντας $\hat{s}_1$ και $\hat{s}_2$ τα δύο κάθετα μεταξύ τους διανύσματα που ορίζουν το επίπεδο του ουρανού, οι συνιστώσες του πεδίου ακτινοβολίας στις διευθύνσεις αυτές θα είναι [21]

$$\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{E}_1 \cos(\omega t + \phi), \qquad \mathcal{E}_2(t) = \mathcal{E}_2 \cos(\omega t + \phi - \psi), \tag{3.13}$$

όπου $\mathcal{E}$ το πλάτος και ψ η διαφορά φάσης των ταλαντώσεων κατα μήκος των αξόνων. Έστω λοιπόν, ότι η ακτινοβολία μετράται σε μια κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία δ από τον άξονα s_1. Η συνολική ένταση θα είναι $\vec{\mathcal{E}}(t) = \vec{\mathcal{E}}_1(t) \cos\delta + \vec{\mathcal{E}}_2(t) \sin\delta$. Η ποσότητα ωστόσο, που μετράται πειραματικά είναι η μέση τιμή της ακτινοβολούμενης ροής $\Rightarrow$

$$\langle S \rangle = \langle \frac{c}{4\pi} \mathcal{E}^2(t) \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \mathcal{E}_1^2(t) \cos^2\delta + \mathcal{E}_2^2(t) \sin^2\delta + 2\mathcal{E}_1(t)\mathcal{E}_2(t) \cos\delta \sin\delta \rangle.$$

Από τον ορισμό των $\mathcal{E}_{1,2}(t)$ η μέση τιμή των τετραγώνων τους θα ισούται με $\mathcal{E}_{1,2}^2 \frac{1}{2}$, ενώ η μέση τιμή του γινομένου τους, προσθέτοντας μια ακόμα φάση στο $\mathcal{E}_2(t)$ μπορεί να γραφεί

$$\langle \mathcal{E}_1(t)\mathcal{E}_2(t) \rangle = \mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \langle \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t + \phi - \psi - \epsilon) \rangle =$$

$$\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2 \underbrace{\langle\cos^2(\omega t+\phi)\rangle}_{1/2}\cos(\psi+\epsilon)+\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\underbrace{\langle\cos(\omega t+\phi)\sin(\omega t+\phi)\rangle}_{0}\sin(\psi+\epsilon)=$$

$$\frac{1}{2}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\cos\psi\cos\epsilon-\frac{1}{2}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\sin\psi\sin\epsilon.$$

Από τα παραπάνω είναι δυνατόν να οριστούν οι παράμετροι

$$I = \langle\mathcal{S}_1\rangle+\langle\mathcal{S}_2\rangle=\frac{c}{4\pi}\langle\mathcal{E}_1^2(t)+\mathcal{E}_2^2(t)\rangle=\frac{c}{8\pi}(\mathcal{E}_1^2+\mathcal{E}_2^2) \tag{3.14}$$

$$Q = \frac{c}{4\pi}\langle\mathcal{E}_1^2(t)-\mathcal{E}_2^2(t)\rangle=\frac{c}{8\pi}(\mathcal{E}_1^2-\mathcal{E}_2^2) \tag{3.15}$$

$$U = \frac{c}{4\pi}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\cos\psi \tag{3.16}$$

$$V = \frac{c}{4\pi}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\sin\psi. \tag{3.17}$$

Συνεπώς η μετρούμενη ποσότητα $\langle S\rangle$, μπορεί να γραφεί συναρτήσει των παραμέτρων Stokes ως

$$\langle S\rangle=\frac{c}{4\pi}\left[\frac{\mathcal{E}_1^2}{2}\cos^2\delta+\frac{\mathcal{E}_2^2}{2}\sin^2\delta+\sin 2\delta(\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\cos\psi\cos\epsilon-\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\sin\psi\sin\epsilon)\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{c}{8\pi}\left(\mathcal{E}_1^2-\mathcal{E}_1^2\sin^2\delta+\mathcal{E}_2^2-\mathcal{E}_2^2\cos^2\delta+\mathcal{E}_1^2\cos^2\delta+\mathcal{E}_2^2\sin^2\delta\right)+\sin 2\delta(U\cos\epsilon-V\sin\epsilon)\right]\quad\Rightarrow$$

$$\langle\mathcal{S}\rangle=\frac{1}{2}\left[I+Q\cos 2\delta+(U\cos\epsilon-V\sin\epsilon)\sin 2\delta\right]. \tag{3.18}$$

Το διάνυσμα του πεδίου ακτινοβολίας για ένα σωματίδιο που εκπέμπει ακτινοβολία σύγχροτρον μπορεί να γραφεί ως $\vec{E}=E_1\hat{l}+iE_2\hat{l}_2$. Ορίζοντας ως $\tan\beta=\frac{E_2}{E_1}$, το λόγο του μικρού προς το μεγάλο ημιάξονα της έλλειψης που διαγράφει το πεδίο, τα πλάτη μπορούν να γραφούν ως $E_2=E_0\sin\beta,\quad E_1=E_0\cos\beta$. Συνεπώς το ταλαντούμενο πεδίο θα είναι

$$\vec{E}(t)=E_0\cos\omega t\cos\beta\hat{l}_1+E_0\sin\omega t\sin\beta\hat{l}_2. \tag{3.19}$$

Αν οι άξονες l_1 και l_2 σχηματίζουν γωνία χ $(0\le\chi\le\pi)$ με τους άξονες s_1 και s_2 αντίστοιχα, τότε οι ταλαντώσεις των συνιστωσών του πεδίου στους άξονες του επιπέδου του ουρανού θα είναι

$$\mathcal{E}_1(t) = E_0\cos\omega t\cos\beta\cos\chi-E_0\sin\omega t\sin\beta\sin\chi=\mathcal{E}_1\cos(\omega t+\psi_1) \tag{3.20}$$

$$\mathcal{E}_2(t) = E_0\cos\omega t\cos\beta\sin\chi-E_0\sin\omega t\sin\beta\cos\chi=\mathcal{E}_2\cos(\omega t-\psi_2) \tag{3.21}$$

Η διαφορά φάσης τους $\psi=\psi_1+\psi_2$ και τα πλάτη τους $\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2$, καθορίζονται από τις σχέσεις

$$\mathcal{E}_1^2+\mathcal{E}_2^2=E_0^2 \tag{3.22}$$

$$\mathcal{E}_1^2-\mathcal{E}_2^2=E_0^2\cos 2\beta\cos 2\chi \tag{3.23}$$

$$2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\cos\psi=E_0^2\cos 2\beta\sin 2\chi \tag{3.24}$$

$$2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\sin\psi=E_0^2\sin 2\beta. \tag{3.25}$$

Από τη σχέση (3.19) $\Rightarrow$

$$\langle S_1\rangle = \frac{c}{4\pi}\langle E_1^2(t)\rangle=\frac{c}{8\pi}E_0^2\cos^2\beta \tag{3.26}$$

$$\langle S_2\rangle = \frac{c}{4\pi}\langle E_2^2(t)\rangle=\frac{c}{8\pi}E_0^2\sin^2\beta \tag{3.27}$$

και οι παράμετροι θα είναι

$$I = \frac{c}{8\pi}(\mathcal{E}_1^2+\mathcal{E}_2^2) = \frac{c}{8\pi}E_0^2 = \langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle \tag{3.28}$$

$$Q = \frac{c}{8\pi}(\mathcal{E}_1^2-\mathcal{E}_2^2) = \frac{c}{8\pi}E_0\cos 2\beta\cos 2\chi = (\langle S_1\rangle - \langle S_2\rangle)\cos 2\chi \tag{3.29}$$

$$U = \frac{c}{4\pi}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\cos\psi = \frac{c}{8\pi}E_0^2\cos 2\beta\sin 2\chi = (\langle S_1\rangle - \langle S_2\rangle)\sin 2\chi \tag{3.30}$$

$$V = \frac{c}{4\pi}\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\sin\psi = \frac{c}{8\pi}E_0^2\sin 2\beta\frac{\cos 2\beta}{\cos 2\beta} = (\langle S_1\rangle - \langle S_2\rangle)\tan 2\beta. \tag{3.31}$$

Ο βαθμός πόλωσης δίνεται από τη σχέση $\Pi - \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I}$, ενώ η γωνία χ μπορεί ναβρεθεί από τη σχέση $\tan 2\chi = \frac{U}{Q}$. Από τις δύο γωνίες που προκύπτουν, αν $U > 0$ τότε η χ θα ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο ενώ αν $U < 0$ στο δεύτερο. Η γωνία β χαρακτηρίζει την ελλειπτικότητα, $\sin 2\beta = \frac{V}{I}$ με $-\pi/2 \le \beta \le \pi/2$. Αν $\beta > 0$, τότε η έλλειψη διαγράφεται δεξιόστροφα, ενώ αν $\beta < 0$ αριστερόστροφα (σχέση (3.19)).

Για ένα πλήθος ανεξάρτητων ακτινοβολιών, οι ολικές παράμετροι Stokes θα είναι γραμμική υπέρθεση των επιμέρους. Έστω λοιπόν, κατανομή σωματιδίων πυκνότητας $N(E,\vec{r},\hat{\tau})$, όπου το καθένα ακτινοβολεί ανεξάρτητα. Η συνολική ένταση θα δίνεται από

$$I_\nu = \int I_e(\nu,E,r,a,\psi)N(E,\vec{r},\hat{\tau})r^2drd\Omega_\tau dE, \quad \text{όπου } I_e = \langle S_1\rangle + \langle S_2\rangle \;\Rightarrow$$

$$I_\nu = \int(\langle S_1\rangle+\langle S_2\rangle)N(E,\vec{r},\hat{\tau})dE2\pi\sin a d\psi r^2dr \overset{(3.10)}{=} \frac{\sqrt{3}q^3}{mc^2}\int drdEN(E,\vec{r},\hat{\tau})B\sin a\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(\eta)d\eta.$$

Οι υπόλοιπες παράμετροι θα είναι

$$Q_\nu = \int Q_eN(E,\vec{r},\hat{\tau})r^2drd\Omega_\tau dE = \int_{-\infty}^{\infty}2\pi\sin a d\psi\int dEr^2dr(\langle S_1\rangle - \langle S_2\rangle)N(E,\vec{r},\hat{\tau})\cos 2\chi =$$

$$\frac{\sqrt{3}q^3}{mc^2}\int dEdr)N(E,\vec{r},\hat{\tau})B\sin a\frac{\nu}{\nu_c}K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\cos 2\chi\right),$$

Αντίστοιχα

$$U_\nu = \frac{\sqrt{3}q^3}{mc^2}\int dEdr)N(E,\vec{r},\hat{\tau})B\sin a\frac{\nu}{\nu_c}K_{2/3}\left(\frac{\nu}{\nu_c}\right)\sin 2\chi.$$

Τα $\sin 2\chi,\ \cos 2\chi$ είναι σταθερά ως προς τις ολοκληρώσεις, καθώς το $\vec{B}$ έχει θεωρηθεί ομογενές. Τέλος $V = 0$, καθώς η γωνία β είναι αντισυμμετρική ως προς το ψ. Από τις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι ενώ οι παράμετροι Stokes για ένα σωματίδιο έχουν μονάδες διαφορικής ροής ενέργειας, για κατατονή σωματιδίων έχουν μονάδες διαφορικής έντασης. Αν λοιπόν η ενέργεια ακολουθεί κατανομή νόμου δύναμης, $N(E,\vec{r},\hat{\tau}) = k(\vec{r},\hat{\tau})E^{-p}dE$, στα όρια $E_1 \le E \le E_2$, η ένταση θα γίνει

$$I_\nu = \frac{\sqrt{3}q^3}{mc^2}\int drB\sin ak(\vec{r},\hat{\tau})\int_{E_1}^{E_2}E^{-p}\int_{\nu/\nu_c}^{\infty}K_{5/3}(\eta)d\eta,$$

ενώ αντίστοιχα προκύπτουν τα $Q,\ U$.

Λαμβάνοντας τα όρια έτσι ώστε η ακτινοβολία που προέρχεται από ηλεκτρόνια με ενέργειες $E < E_1$ και $E > E_2$, να είναι αμελητέα, τα όρια του ολοκληρώματος μπορούν να αντικατασταθούν με 0 και ∞. Μια τέτοια προσέγγιση θεωρείται ικανοποιητική αν για μια συχνότητα ν, στην

οποία μετράται η ένταση τα όρια E_1, E_2 βρίσκονται έξω από τις τιμές της ενέργειας που θα αντιστοιχούσαν στην κρίσιμη συχνότητα $\nu_c = \nu$, και περιγράφονται από τις σχέσεις [21]

$$E_1 \leq mc^2\left(\frac{4\pi mc\nu}{3By_1(p)}\right)^{1/2} = 2.5\cdot 10^2\left[\frac{\nu}{y_1(p)B}\right]^{1/2} eV \tag{3.32}$$

$$E_2 \leq mc^2\left(\frac{4\pi mc\nu}{3By_2(p)}\right)^{1/2} = 2.5\cdot 10^2\left[\frac{\nu}{y_2(p)B}\right]^{1/2} eV, \tag{3.33}$$

όπου $y_1(p)$, $y_2(p)$ αριθμητικοί παράγοντες για κάθε όριο που εξαρτώνται από τον φασματικό εκθέτη p. Αν ο φασματικός δείκτης είναι $p \geq 1.5$, τότε η κύρια συνεισφορά της ακτινοβολίας σε κάποια συχνότητα, δίνεται από ένα εύρος ενεργειών με το πολύ μια τάξη μεγέθους διαφορά. Για $p \leq 1.5$ το έυρος αυτό αυξάνεται γρήγορα και για $p \to 1/3$ γίνεται άπειρο.

Υιοθετώντας λοιπόν τις παραπάνω προσεγγίσεις και δεδομένων των σχέσεων [23]

$$\int_0^\infty x^\mu F(x)dx = \frac{2^{\mu+1}}{\mu+2}\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{7}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{2}{3}\right), \quad \text{με } F(x) = x\int_x^\infty K_{5/3}(\eta)d\eta \tag{3.34}$$

$$\int_0^\infty x^\mu G(x)dx = 2^\mu\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\frac{2}{3}\right), \qquad \text{με } G(x) = xK_{2/3}(x)d\eta, \tag{3.35}$$

όπου $\mu = \frac{p-3}{2}$, καθώς $\nu_c \propto E^2 \quad \Rightarrow$

$$\int_0^\infty dE\cdot E^{-p}\frac{\nu}{\nu_c}\int_{\nu/\nu_c}^\infty K_{5/3}(\eta)d\eta = \frac{1}{4}\frac{p+7/3}{p+1}\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+7}{12}\right)\left[\frac{3eB\sin a}{2\pi m^3c^5\nu}\right]^{\frac{p-1}{2}} \tag{3.36}$$

$$\int_0^\infty dE\cdot E^{-p}\frac{\nu}{\nu_c}K_{2/3}(\frac{\nu}{\nu_c}) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+7}{12}\right)\left[\frac{3eB\sin a}{2\pi m^3c^5\nu}\right]^{\frac{p-1}{2}} \tag{3.37}$$

Συνεπώς οι παράμετροι Stokes θα γίνουν

$$\begin{pmatrix} I_\nu \\ Q_\nu \\ U_\nu \\ V_\nu \end{pmatrix} = C(\nu)\int dr(B\sin a)^{\frac{p+1}{2}}k(\vec{r},\hat{\tau})\begin{pmatrix} \frac{p+7/3}{p+1} \\ \cos 2\chi \\ \sin 2\chi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.38}$$

με

$$C(\nu) = \frac{\sqrt{3}}{4}\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+7}{12}\right)\left(\frac{e^3}{mc^2}\right)\left[\frac{3e}{2\pi m^3c^5}\right]^{\frac{p-1}{2}}\nu^{-\frac{p-1}{2}}.$$

Ο βαθμός πόλωσης θα είναι $\Pi = \frac{\sqrt{Q^2+U^2+V^2}}{I} = \frac{p+1}{p+7/3}$.

3.1.2 Αυτοαπορρόφηση Σύγχροτρον

Όταν ο αριθμός των σωματιδίων σε μια πηγή είναι μεγάλος, τότε φαινόμενα απορρόφησης και εξαναγκασμένης εκπομπής των σύγχροτρον φωτονίων από τον ίδιο πληθυσμό σωματιδίων, ενδέχεται να παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της έντασης και της πόλωσης της ακτινοβολίας.

Έστω λοιπόν $N(\vec{p})$ η κατανομή των ηλεκτρονίων στο χώρο των φάσεων. Αν I_ν η ένταση της ακτινοβολίας σε κάποια συχνότητα ν, τότε η μείωση στη πυκνότητα των φωτονίων ενέργειας $h\nu$, λόγω της απορρόφησής τους από ηλεκτρόνια τα οποία μεταβαίνουν από μια κατάσταση με ενέργεια $E - h\nu$ σε κατάσταση ενέργειας E, θα είναι $B_{12}N(\vec{p}-\hbar\vec{k})I_\nu$, όπου $\hbar\vec{k}$ η ορμή του φωτονίου και

B_{12} ο συντελεστής απορρόφησης Einstein. Παράλληλα λόγω εξαναγκασμένης εκπομπής, φωτόνια ενέργειας $h\nu$ θα εκπέμπονται με ρυθμό $B_{21}N(\vec{p})I_\nu$. Συνεπώς ο ρυθμός μεταβολής των φωτονίων ανά μονάδα όγκου θα είναι $B_{21}N(\vec{p})I_\nu - B_{12}N(\vec{p}-\hbar\vec{k})I_\nu$.

Αθροίζοντας σε όλες τις πιθανές μεταβάσεις, ο συντελεστής αυτοαπορρόφησης θα είναι [21]

$$\mu_\nu = \int [B_{12}N(\vec{p}-\hbar\vec{k}) - B_{21}N(\vec{p})]h\nu p^2 dp d\Omega_p. \tag{3.39}$$

Από τη σχέση που συνδέει τους συντελεστές Einstein $\Rightarrow$ $B_{12} = B_{21} = \frac{A_{21}c^2}{2h\nu^3}$, όπου A_{21} ο συντελεστής αυθόρμητης εκπομπής με $[A_{21}] = \#/dt \cdot d\Omega$ $\Rightarrow$ $A_{21}d\Omega = \frac{P_\nu}{h\nu}$, όπου το P_ν δίνεται από τη σχέση (3.10). Θεωρώντας υπερσχετικιστικά ηλεκτρόνια, η ακτινοβολία θα περιορίζεται στη διεύθυνση κίνησής τους και οι διευθύνσεις $\vec{p}$ και $\vec{k}$ θα συμπίπτουν $\Rightarrow$ $N(\vec{p}-\hbar\vec{k}) = N(p-\hbar k) = N(p-h\nu/c)$. Επιπλέον, υποθέτοντας ισοτροπική κατανομή και ότι $h\nu << pv$ ώστε $N(p) - N(p-h\nu/c) = \frac{h\nu}{c}\frac{dN}{dp}$, ο συντελεστής αυτοαπορρόφησης τελικά γράφεται

$$\mu_\nu = \frac{c}{2\nu^2}\int \frac{dN}{dp}P(\nu,E)p^2 dp \qquad \underset{N(p)4\pi p^2 dp = N(E)dE}{\overset{E=pc}{\Longrightarrow}}$$

$$\mu_\nu = \frac{c}{8\pi\nu^2}\int dE E^2 \frac{d}{dE}\left(\frac{N(E)}{E^2}\right)P(\nu,E)$$

όπου για νόμο δύναμης $N(E) = kE^{-p}$ $\Rightarrow$ $-E^2\frac{d}{dE}\left(\frac{N(E)}{E^2}\right) = (p+2)kE^{-(p+1)}$ $\Rightarrow$

$$\mu_\nu = \frac{\sqrt{3}}{4}\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\frac{e^3}{2\pi m}\left(\frac{3e}{2\pi m^3c^5}\right)^{p/2} kB_\perp^{\frac{p+2}{2}}\nu^{-\frac{p+4}{2}}.$$

Η εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας θα δίνεται από

$$\frac{dI_\nu}{dr} = j_\nu - \mu I_\nu. \tag{3.40}$$

Προκειμένου να μελετηθεί πως μεταβάλεται η πόλωση, ορίζονται οι ποσότητες $\mu_\perp = \mu + \lambda$ και $\mu_\parallel = \mu - \lambda$ των οποίων η μέση τιμή δίνει τον ολικό συντελεστή απορόφησης (βλ. 3.1.4).

3.1.3 Στροφή Faraday

Η γραμμικά πολωμένη ακτινοβολία μπορεί να θεωρηθεί ως υπέρθεση δύο κυκλικά πολωμένων κυμάτων αντίθετης φοράς. Κατά τη διέλευση μιας τέτοιας ακτινοβολίας από μέσο με μαγνητικό πεδίο παρατηρείται αλλαγή στη διεύθυνση της πόλωσης, που οφείλεται στη προστιθέμενη διαφορά φάσης μεταξύ των δύο καταστάσεων πόλωσης. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται στοφή Faraday.

Έστω λοιπόν, ότι τα ηλεκτρόνια του μέσου δέχονται μια ηλεκτρομαγνητική δύναμη της μορφής $\vec{F} = -e\big(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}\big)$. Η δύναμη που ασκεί το μαγνητικό πεδίο του κύματος όταν τα ηλεκτρόνια δεν είναι σχετικιστικά, είναι πρακτικά αμελητέα (καθώς $v << c$ και $E_{\text{κυμ}} = B_{\text{κυμ}}$) και δεν επηρεάζει την κίνηση των ηλεκτρονίων. Η μαγνητική συνιστώσα της δύναμης, συνεπώς, γίνεται σημαντική μόνο κατά την ύπαρξη εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η εξίσωση κίνησης σε αυτή την περίπτωση δίνεται από

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{B}\right). \tag{3.41}$$

Θεωρώντας ότι $\vec{B} = B\hat{z}$ και ότι η συχνότητα του κύματος είναι ω, αντικαθιστώντας στην εξίσωση (3.41) λύσεις αντίστοιχης μορφής με το πεδίο του κύματος, $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{i(\vec{k}\vec{z}-\omega t)}$,προκύπτει

$$-\omega^2\vec{r}_0 = -\frac{e}{m}\vec{E}_0 + \frac{i\omega e B_0}{mc}\vec{r}\times\hat{z}. \tag{3.42}$$

Εφόσον το $\vec{E}$ και το $\vec{r}$ βρίσκονται στο $x-y$ επίπεδο (εξίσωση (3.41)), μπορούν να γραφούν στη βάση των κυκλικά πολωμένων κυμάτων αντίθετης φοράς $(\hat{e}_+, \hat{e}_-) = \left(\frac{\hat{x}+i\hat{y}}{\sqrt{2}}, \frac{\hat{x}-i\hat{y}}{\sqrt{2}}\right)$. Για το ηλεκτρικό πεδίο θα ισχύει $\vec{E} = E_-\hat{e}_+ + E_+\hat{e}_-$, όπου $E_\pm = \frac{E_x \pm iE_y}{\sqrt{2}}$. Από την εξίσωση (3.42), θέτοντας $\omega_B = \frac{eB}{mc}$ προκύπτει

$$r_{0\pm}(-\omega^2 \mp \omega\omega_B)\hat{e}_\mp = -\frac{e}{m}E_\pm\hat{e}_\mp \quad\Rightarrow\quad r_{0\pm} = \frac{e}{m}\frac{E_\pm}{\omega^2 \pm \omega\omega_B}.$$

Συνεπώς τα ηλεκτρόνια έχουν ελαφρώς διαφορετική απόκριση στις δύο πολώσεις, παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου. Η διπολική ροπή ανά μονάδα όγκου θα είναι $P_\pm = n_e e r_{0\pm} = \frac{n_e e^2}{m}\frac{E_\pm}{\omega^2 \pm \omega\omega_B}$ και συνεπώς η διηλεκτρική σταθερά

$$D_\pm = \epsilon E_\pm = E_\pm + 4\pi P_\pm \quad\Rightarrow\quad \epsilon_\pm = 1 + 4\pi\frac{P_\pm}{E_\pm} = 1 + \frac{4\pi n_e e^2}{m}\frac{1}{\omega^2 \pm \omega\omega_B} = 1 + \frac{\omega_p}{\omega^2 \pm \omega\omega_B}, \tag{3.43}$$

όπου ω_p η συχνότητα πλάσματος. Η φασική ταχύτητα σε διηλεκτρικό μέσο θα είναι $v_p = c/\sqrt{\epsilon} = \frac{\omega}{k} \quad\Rightarrow\quad \omega^2 = \frac{c^2 k_\pm^2}{\epsilon_\pm}$. Από την (3.43) $\Rightarrow$

$$k_\pm^2 c^2 = \omega^2\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 \pm \omega\omega_B}\right]. \tag{3.44}$$

Συνεπώς σε ένα μαγνητισμένο πλάσμα, κυκλικά πολωμένα κύματα ίδιας συχνότητας και αντίθετης φοράς, θα έχουν διαφορετικούς κυματάριθμους $\Rightarrow \vec{E} = E_- e^{i(k_- + \omega t)}\hat{e}_+ + E_+ e^{i(k_+ + \omega t)}\hat{e}_-$. Για $\omega >> \omega_p, \omega_B \;\Rightarrow$

$$k_\pm^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2/\omega^2}{(1 \pm \omega_B\omega)}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 \pm \omega_B/\omega\right)^{-1}\right] = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \pm \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\omega_B}{\omega}\right) \;\Rightarrow$$

$$k_\pm = \frac{\omega}{c}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \pm \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\omega_B}{\omega}\right]^{1/2} \approx \frac{\omega}{c}\left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \pm \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\frac{\omega_B}{\omega}\right] = \underbrace{\frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}_{k} \pm \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\frac{\omega_B}{c}}_{\Delta k}.$$

Εφόσον οι συνιστώσες του $\vec{E}$ στις δύο κυκλικές πολώσεις θα έχουν το ίδιο πλάτος, μπορεί να γραφεί ως $\vec{E} = E_0(e^{i(k_+ z - \omega t)}\hat{e}_+ + e^{i(k_- z - \omega t)}\hat{e}_-) \;\Rightarrow$

$$E_x = E_0\frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(k_+ z - \omega t) + \cos(k_- z - \omega t)], \quad E_y = E_0\frac{1}{\sqrt{2}}[-\sin(k_+ z - \omega t) + \sin(k_- z - \omega t)] \overset{k_\pm = k \pm \Delta k}{\Longrightarrow}$$

$$E_x = E_0\sqrt{2}\cos(kz - \omega t)\cos(\Delta k z)], \quad E_y = E_0\sqrt{2}\cos(kz - \omega t)\sin(\Delta k z)].$$

Η γωνία του ηλεκτρικού διανύσματος θα είναι $\chi = \tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) = \Delta k z \quad\Rightarrow$

$$\frac{d\chi}{dz} = \Delta k = \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2\omega_B}{\omega^2 c} = \frac{1}{2}\frac{4\pi n_e e^2}{mc}\frac{\omega_B}{\omega^2} = \frac{2\pi n_e e^2}{mc}\frac{eB}{mc}\frac{1}{\omega^2} = \frac{2\pi n_e e^3}{m^2 c^2}B\frac{1}{\omega^2}$$

Συνεπώς κατά τη διάδοση γραμμικά πολωμένου κύματος σε μέσο με μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, η διεύθυνση της πόλωσης αλλάζει κατά γωνία

$$\Delta\chi = \chi - \chi_0 = \frac{2\pi n_e e^3}{m^2 c^2}\frac{1}{\omega^2}\int_{los} n_e(z) B_{\parallel}(z) dz,$$

με $B_{\parallel}$ τη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου παράλληλα στην ευθεία παρατήρησης. Στην περίπτωση που το πλάσμα αποτελούταν από ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια η επίδραση του φαινομένου στη διεύθυνση της πόλωσης θα ήταν μηδενική λόγω της αλληλοεξουδετέρωσης της ίσου μέτρου και αντίθετης φοράς, στροφής από τους δύο πληθυσμούς (εξάρτηση e^3). Για την περίπτωση ηλεκτρονίων-πρωτονίων, ωστόσο, η συνεισφορά των πρωτονίων στη αλλαγή φάσης των δύο κυμάτων, θα είναι αμελητέα λόγω της μεγάλης αδρανειακής τους μάζας.

Αντικαθιστώντας $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \Delta\chi = \frac{e^3\lambda^2}{2\pi(mc^2)^2}\int_{los} n_e(z) B_{\parallel}(z) dz$. Από την παραπάνω σχέση ορίζεται το μέτρο στροφής (Rotation Measure-RM) ως

$$\Delta\chi = RM\ \lambda^2 \ \Rightarrow\ RM \sim 2.64 \cdot 10^{-17}\int_{los} n_e(z) B_{\parallel}(z) dz \ \ (cgs). \tag{3.45}$$

3.1.4 Διάδοση ακτινοβολίας

Όπως διαπιστώθηκε και στα προηγούμενα υποκεφάλαια, η ακτινοβολία μεταβάλεται κατά τη διάδοσή της, τόσο ως προς την έντασή της, μέσω των διαδικασιών εκπομπής και απορρόφησης, όσο και ως προς τις ιδιότητες της πόλωσής της μέσω του φαινομένου της στροφής Faraday και της μεταπτροπής της κατάστασης πόλωσης από γραμμική σε κυκλική και αντίστροφα. Συνεπώς η τελική μορφή της ακτινοβολίας που παρατηρείται, διαμορφώνεται από τις ιδιότητες της πηγής και του μέσου στο οποίο διαδίδεται. Η μεταβολή αυτή στην ακτινοβολία κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης, μπορεί να περιγραφεί μέσω του συστήματος των εξισώσεων διάδοσης για τις παραμέτρους stokes, με γενική μορφή [24]

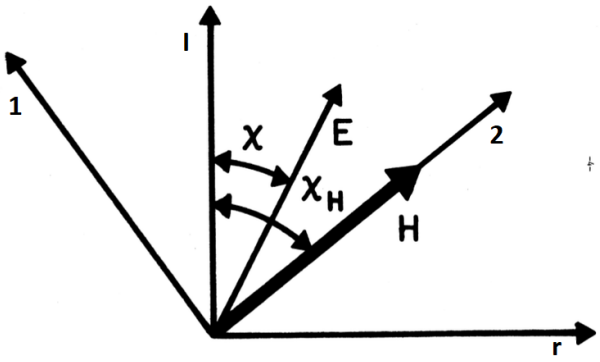
$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dl}+k_I & k_Q & k_U & k_V \\ k_Q & \frac{d}{dl}+k_I & k_V^* & -k_U^* \\ k_U & -k_V^* & \frac{d}{dl}+k_I & k_Q^* \\ k_V & k_V^* & -k_Q^* & \frac{d}{dl}+k_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_\nu \\ Q_\nu \\ U_\nu \\ V_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_I \\ \epsilon_Q \\ \epsilon_U \\ \epsilon_V \end{bmatrix}, \tag{3.46}$$

όπου οι ποσότητες $\epsilon_{I,Q,U,V}$ αναφέρονται στους συντελεστές εκπομπής, οι $k_{I,Q,U,V}$ στους συντελεστές απορρόφησης, οι $k^*_{Q,U}$ στην μετατροπή μεταξύ γραμμικής και κυκλικής πόλωσης και η ποσότητα k^*_V, στη στροφή Faraday.

Στην παρακάτω ανάλυση, και στο υπόλοιπο της εργασίας, θεωρείται ότι δεν υπάρχει μετατροπή της κατάστασης πόλωσης και συνεπώς $V = 0$. Ισοδύναμα με τις συμβατικές παραμέτρους I, Q, U, μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι παράμετροι I_l, I_r, U_{lr} [26] όπου οι δείκτες l, r αναφέρονται στο σύστημα που επιλέγει ο παρατηρητής στο επίπεδο του ουρανού και συνδέονται μεταξύ τους σύμφωνα με τις σχέσεις $I = I_l + I_r$, $Q = I_l - I_r$, $U = U_{lr}$. Αν ως σύστημα αναφοράς επιλεγεί το ορθογώνιο σύστημα που ο ένας του άξονας (b) ταυτίζεται με τη προβολή του μαγνητικού πεδίου στο επίπεδο του ουρανού και συνεπώς ο άλλος (e) με την διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου της ακτινοβολίας, $\hat{e} = \hat{B} \times \hat{n}$, τότε η μεταβολή των παραμέτρων Stokes στο σύστημα αυτό κατά τη διάδοσή τους θα είναι

$$\frac{dI_e}{ds} = \epsilon_e - k_e I_e, \quad \frac{dI_b}{ds} = \epsilon_b - k_b I_b, \quad \frac{dU}{ds} = -\frac{1}{2}(k_e + k_b)U = -kU,$$

όπου $k_{e,b}$, $\epsilon_{e,b}$ οι συντελεστές απορρόφησης και εκπομπής για τις δύο κάθετες πολώσεις. Ο συντελεστής εκπομπής για το U είναι μηδέν καθώς η διεύθυνση πόλωσης του φωτός που εκπέμπεται είναι



Σχήμα 3.6: Οι γωνίες που σχηματίζουν η προβολή του μαγνητικού πεδίου (άξονας 2), χ_H, και το διάνυσμα της ακτινοβολίας ($\vec{E}$), χ, με τον άξονα l στο επίπεδο του ουρανού που ικανοποιεί το τρισορθογώνιο σύστημα $\hat{n} = l \times r$ [25].

παράλληλη στον άξονα e, ενώ ο συντελεστής απορρόφησης προκύπτει ύστερα από τη διαφόριση της ισότητας $U^2 = 4I_eI_b$ που προκύπτει από τη σχέση $I^2 = Q^2 + U^2$.

Η περιγραφή των εξισώσεων διάδοσης των εντάσεων σε ένα αυθαίρετο σύστημα που σχηματίζει γωνία χ_B με τους άξονες (e, b) όπως ορίζεται στο σχήμα 3.6, δεδομένων των παραπάνω σχέσεων, μπορεί να δωθεί στρέφοντας το σύστημα (e, b) κατά γωνία $90 - \chi_B$. Σύμφωνα με τον πίνακα στροφής Chandrasekhar προκύπτει $L(90 - \chi_B) \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} dI_l \\ dI_r \\ dU_{lr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\chi_B & \cos^2\chi_B & \frac{1}{2}\sin 2\chi_B \\ \cos^2\chi_B & \sin^2\chi_B & -\frac{1}{2}\sin 2\chi_B \\ -\sin 2\chi_B & \sin 2\chi & -\cos 2\chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dI_e \\ dI_b \\ dU_{eb} \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για τη μεταβολή των $I_e,\ I_b,\ U_{eb}$ λόγω εκπομπής και απορρόφησης προκύπτει

$$\begin{aligned} \frac{dI_l}{ds} &= \epsilon_e \sin^2\chi + \epsilon_b \cos^2\chi - k_eI_e \sin^2\chi - k_bI_b \cos^2\chi - \frac{1}{4}(k_e + k_b)U_{eb} \sin 2\chi_B \\ \frac{dI_r}{ds} &= \epsilon_e \cos^2\chi + \epsilon_b \sin^2\chi - k_eI_e \cos^2\chi + k_bI_b \sin^2\chi + \frac{1}{4}(k_e + k_b)U_{eb} \sin 2\chi_B \\ \frac{dU_{lr}}{ds} &= -\epsilon_e \sin 2\chi + \epsilon_b \sin 2\chi + k_eI_e \sin 2\chi + k_bI_b \sin 2\chi + \frac{1}{2}(k_e + k_b)U_{eb} \cos 2\chi_B. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Οι ποσότητες $I_e,\ I_b,\ U_{eb}$ μπορούν να γραφούν και πάλι συναρτήσει των $I_l,\ I_r,\ U_{lr}$ μέσω του πίνακα στροφής για γωνία $\chi_B - 90^o$, . Επιπλέον για τη στροφή Faraday, με θετική τη φορά των δεικτών του ρολογιού, θα ισχύει

$$\begin{bmatrix} I_l + dI_l \\ I_r + dI_r \\ U_{lr} + dU_{lr} \end{bmatrix} = L(d\chi_F) \begin{bmatrix} I_l \\ I_r \\ U_{lr} \end{bmatrix}. \tag{3.49}$$

Αναπτύσσοντας κατα Taylor το δεξί μέλος που προκύπτει από την (3.49) ως προς $d\chi$, και κρατώντας μόνο τους όρους πρώτης τάξης, η μεταβολή των παραμέτρων θα είναι

$$dI_l = U_{rl}d\chi_F, \quad dI_r = -U_{rl}d\chi_F, \quad dU_{rl} = -2I_ld\chi_F + 2I_rd\chi_F. \tag{3.50}$$

Συνεπώς γράφοντας τις εξισώσεις (3.48) συναρτήσει των $I_l,\ I_r,\ U_{rl}$ και προσθέτοντας τη μεταβολή

λόγω στροφής Faraday, οι εξισώσεις διάδοσης παίρνουν την τελική μορφή

$$\begin{aligned}
\frac{dI_l}{ds} &= \epsilon_e \sin^2\chi_B + \epsilon_b \cos^2\chi_B + I_l\Big[-k_e \sin^4\chi_B - k_b\cos^4\chi_B - \frac{1}{2}k\sin^2 2\chi_B\Big] \\
&\quad + U_{lr}\left[\frac{1}{4}(k_e - k_b)\sin 2\chi_B + \frac{d\chi_F}{ds}\right] \\
\frac{dI_r}{ds} &= \epsilon_e \cos^2\chi_B + \epsilon_b \sin^2\chi_B + I_l\Big[-k_e \cos^4\chi_B - k_b\sin^4\chi_B - \frac{1}{2}k\sin^2 2\chi_B\Big] \\
&\quad + U_{lr}\left[\frac{1}{4}(k_e - k_b)\sin 2\chi_B - \frac{d\chi_F}{ds}\right] \qquad (3.51) \\
\frac{dU_{lr}}{ds} &= I_l\left[\frac{1}{2}(k_e - k_b)\sin 2\chi_B - 2\frac{d\chi_F}{ds}\right] + I_r\left[\frac{1}{2}(k_e - k_b)\sin 2\chi_B + 2\frac{d\chi_F}{ds}\right] \\
&\quad -(\epsilon_e - \epsilon_b)\sin 2\chi_B - kU_{lr}.
\end{aligned}$$

Η μορφή των συντελεστών εκπομπής και απορρόφησης για τις δύο πολώσεις δίνεται από [27]

$$\epsilon_{e,b} = \frac{1}{2}c_5(a)N_0(B\sin\theta)^{a+1}\left(\frac{\nu}{2c_1}\right)^{-a}\left[1 \pm \frac{2a+2}{2a+10/3}\right] \qquad (3.52)$$

$$k_{e,b} = c_6(a)N_0(B\sin\theta)^{a+3/2}\left(\frac{\nu}{2c_1}\right)^{-a-5/2}\left[1 \pm \frac{2a+3}{2a+13/3}\right], \qquad (3.53)$$

όπου a ο φασματικός δείκτης της ακτινοβολίας $a = \frac{p-1}{2}$ και με τις σταθερές να δίνονται από τις σχέσεις

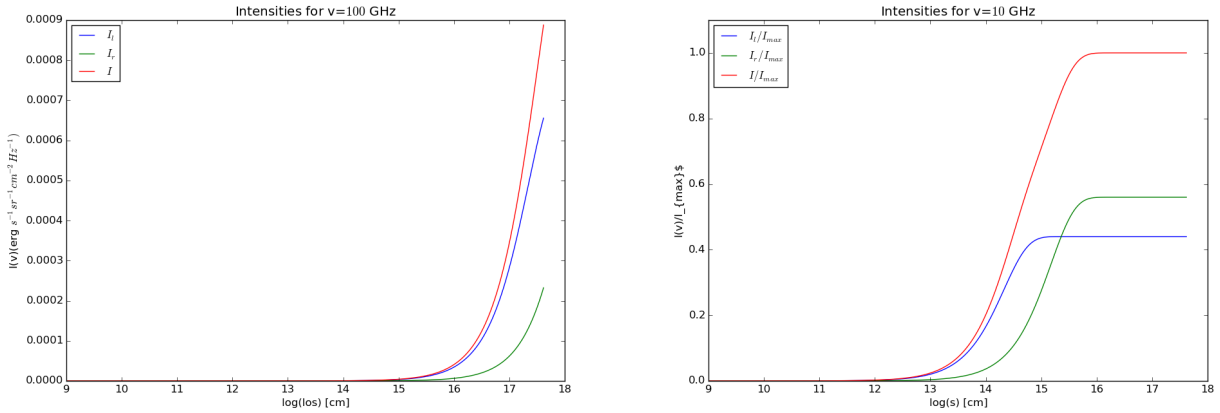
$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{3e}{4\pi m^3 c^5} \sim 6.27\times 10^{18} cm^{-7/2} g^{-5/2} s^4 \\
c_3 &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\frac{e^3}{mc^2} \sim 1.87\times 10^{-23} cm^{5/2} g^{1/2} s^{-1} \\
c_5(a) &= \frac{1}{4}c_3\Gamma\left(\frac{6a+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{6a+10}{12}\right)\left(\frac{2a+10/3}{2a+2}\right) \to 1.37\times 10^{-23} cm^{5/2} g^{1/2} s^{-1} (a\to 0.5) \\
c_6(a) &= \frac{1}{32}\left(\frac{c}{c_1}\right)^2 c_3(2a+13/3)\Gamma\left(\frac{6a+5}{12}\right)\Gamma\left(\frac{6a+13}{12}\right) \to 8.61\times 10^{-41} g^{1/2} s^{-1} (a\to 0.5).
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας, λοιπόν, τις παραπάνω εξισώσεις, καθορίζουμε τις ιδιότητες της ακτινοβολίας, τόσο με τον υπολογισμό των εντάσεων των παραμέτρων Stokes όσο και με τον προσδιορισμό του βαθμού και της διεύθυνσης πόλωσης χ . Ο βαθμός πόλωσης της ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση $\Pi = \frac{\sqrt{Q^2+U^2}}{I}$, ενώ η γωνία χ προσδιορίζεται από $\chi = \frac{1}{2}\tan^-1\left(\frac{U}{Q}\right)$, όπου $Q = (I_l - I_r)$, $U = (I_l - I_r)\tan 2\chi$ [2].

Περίπτωση μηδενικού συντελεστή στροφής

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε, σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, να στρέψουμε το σύστημα αναφοράς, έτσι ώστε $\chi_b = 90^o$. Στην περίπτωση αυτή, αν θεωρήσουμε ότι δεν έχουμε

[2] Συγκεκριμένα για τον προσδιορισμό του χ μέσω του arctan θα πρέπει κανείς να λάβει υπόψιν του το πρόσημο του Q ώστε να προσδιορίσει από ποιόν άξονα μετριέται η γωνία, καθώς και το πρόσημο του $tan2\chi$ που προκύπτει από κάθε δεύτερο των τεταρτημορίων.



Σχήμα 3.7: Εντάσεις I_l, I_r και η ολική I συναρτήσει του μήκους διάδοσης για δύο διαφορετικές συχνότητες. Για τη μεγαλύτερη (αριστερά) το μέσο διατηρείται οπτικά αραιό, ενώ για τη μικρότερη (δεξιά) γίνεται οπτικά αδιαφανές. Οι τιμές του μαγνητικού πεδίου (σε $[Gauss]$) και της πυκνότητας (cm^{-2}) έχουν επιλεγεί αυθαίρετα ώστε να ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες αδιαφάνειας.

στροφή Faraday $\frac{d\chi_F}{ds} = 0$, οι εξισώσεις (3.51), παίρνουν τη μορφή

$$\frac{dI_{l,r}}{ds} = \epsilon_{e,b} - \kappa_{e,b} I_{l,r} \underset{d\tau=\kappa_{e,b}ds}{\overset{S_{e,b}=\epsilon_{e,b}/\kappa_{e,b}}{\Longrightarrow}} \frac{dI_{l,r}}{d\tau_{e,b}} = S_{e,b} - I_{l,r} \overset{\cdot e^{\tau}}{\Rightarrow} \frac{d(I_{l,r}e^{\tau_{e,b}})}{d\tau_{e,b}} = S_{e,b}e^{\tau_{e,b}}, \qquad \frac{dU_{lr}}{ds} = -\kappa U_{lr} \tag{3.54}$$

Η λύση αυτών, εφόσον θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές είναι σταθεροί κατά μήκος της ολοκλήρωσης (ομογενές πεδίο και πυκνότητα), θα είναι

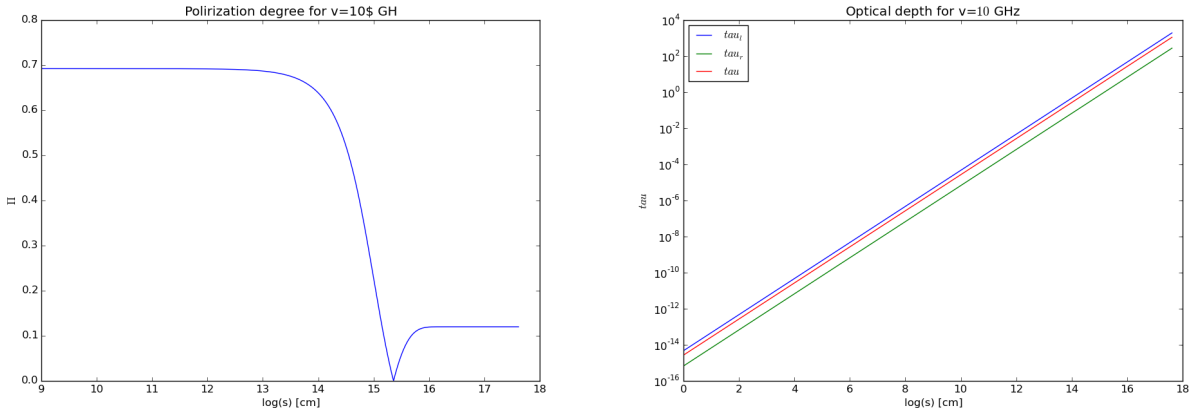
$$\Rightarrow I_{l,r}(\tau_{e,b}) = I_{0\ l,r}e^{\tau_{e,b}} + \int_0^{\tau_{e,b}} e^{-(\tau_{e,b}-\tau'_{e,b})} S_{e,b} d\tau'_{e,b} = I_{0\ l,r}e^{-\tau_{e,b}} + S_{e,b}(1-e^{-\tau_{e,b}}), \quad U_{l,r} = U_{0\ lr}e^{-\tilde{\kappa}s}.$$

και συνεπώς για μηδενικές αρχικές συνθήκες $I_{0\ l,r}$, $U_{0\ lr}$, γίνονται $I_l = \frac{\epsilon_e}{k_e}(1-e^{-k_e s})$, $I_r = \frac{\epsilon_b}{k_b}(1-e^{-k_b s})$, $U_{rl} = 0$. Η συνολική ένταση δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς στο επίπεδο του ουρανού και δίνεται από $I = I_e + I_b = I_l + I_r$. Εφόσον η εκπομπή είναι μόνο στις δύο κάθετες πολώσεις, η τιμή του U θα παραμένει μηδέν και συνεπώς η γωνία του διανύσματος πόλωσης δεν θα αλλάζει. Στο σχήμα (3.7) δίνονται τα I_l, I_r και I κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης, από κατανομή ηλεκτρονίων με δείκτη $p = 2$ και $1 \leq \gamma \leq 10^6$ σε ομογενείς συνθήκες πίεσης και μαγνητικού πεδίου, ως συνάρτηση του μήκους διάδοσης. Για τις δύο αναγραφόμενες συχνότητες το μέσο καταλήγει οπτικά αραιό και οπτικά πυκνό αντίστοιχα. Στη πρώτη περίπτωση φαίνεται ότι η ένταση ακτινοβολίας ακολουθεί την αναλογία $\epsilon \cdot s$ ενώ στη δεύτερη τείνει στη συνάρτηση πηγής $S = \frac{\epsilon}{\kappa}$.

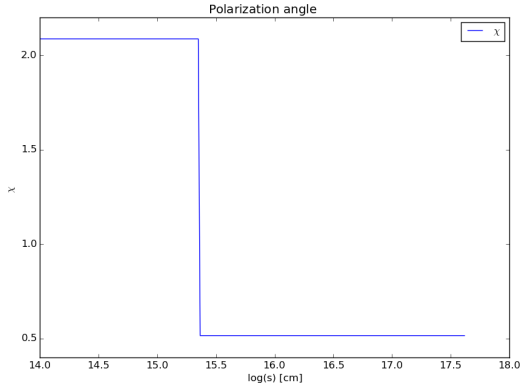
Αντίστοιχα ο βαθμός πόλωσης θα είναι

$$\Pi = \left|\frac{\sqrt{U^2+Q^2}}{I}\right| = \left|\frac{(I_l - I_r)}{I}\right| = \left|\frac{\frac{\epsilon_e k_b}{\epsilon_b k_e}\left(\frac{1-e^{-k_e s}}{1-e^{-k_b s}}\right) - 1}{\frac{\epsilon_e k_b}{\epsilon_b k_e}\left(\frac{1-e^{-k_e s}}{1-e^{-k_b s}}\right) + 1}\right|. \tag{3.55}$$

Για οπτικά αραιή περιοχή ($k_{e,b}s << 1$) αναπτύσσοντας κατά Taylor την ποσότητα $e^{-k_{e,b}s} \sim 1 + k_{e,b}$, ο βαθμός πόλωσης γίνεται $\Pi \rightarrow \left|\frac{\epsilon_b - \epsilon_e}{\epsilon_b + \epsilon_e}\right| \underset{(3.52)}{\overset{a=\frac{p-1}{2}}{=}} \frac{p+1}{p+7/3} \overset{p=2}{\simeq} 0.69$. Για την οπτικά πυκνή περιοχή ($k_{e,b}s >> 1$), εφόσον $e^{-k_{e,b}s} << 1 \quad \Rightarrow \Pi \rightarrow \left|\frac{\epsilon_b k_e - \epsilon_e k_b}{\epsilon_b k_e + \epsilon_e k_b}\right| \underset{3.53)}{\overset{(3.52)}{=}} \frac{1}{2p+13/3} \simeq 0.12$. Στο σχήμα 3.8



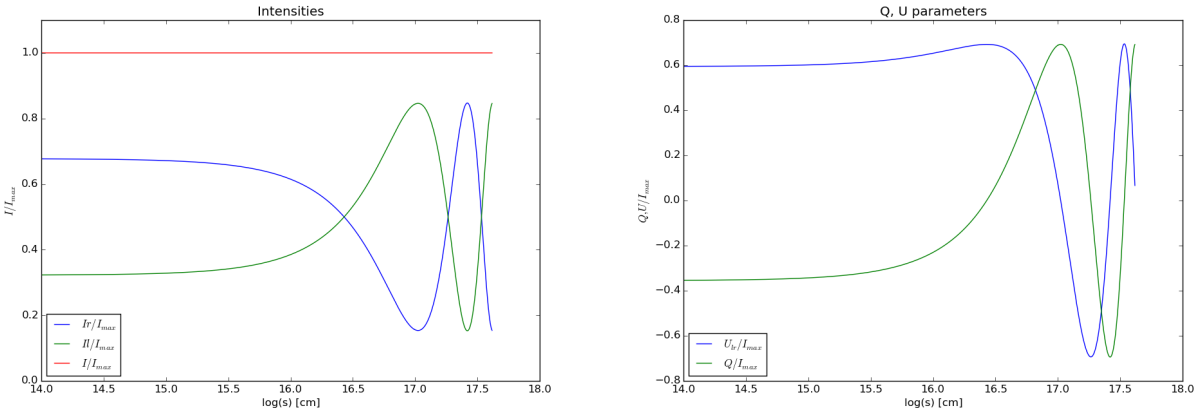
Σχήμα 3.8: Ο βαθμός πόλωσης (αριστερά) και το οπτικό βάθος (δεξιά), της ακτινοβολίας ως συνάρτηση του μήκους διάδοσης.



Σχήμα 3.9: Γωνία του διανύσματος πόλωσης ως συνάρτηση του μήκους διάδοσης. Το χ μετράται σε $[rads]$.

φαίνεται ο βαθμός πόλωσης (αριστερά) και το οπτικό βάθος (δεξιά) της ακτινοβολίας, ως συνάρτηση του μήκους διάδοσης για τις ίδιες συνθήκες με το προηγούμενο σχήμα. Το Π ξεκινά από τιμή 0.69 και καταλήγει στην 0.12 για $\tau > 1$, όπως προβλέπεται για $p = 2$ και ομογενές μαγνητικό πεδίο. Εφόσον ο συντελεστής κ_e είναι μεγαλύτερος, η ένταση στον άξονα l σταθεροποιείται γρηγορότερα με αποτέλεσμα η διαφορά τους $I_l - I_r$ σταδιακά να μειώνεται. Στο σημείο που τέμνονται $(Q = 0)$ η πόλωση μηδενίζεται για να αυξηθεί ξανά μέχρι την ασυμπτωτική τιμή της.

Τέλος όσον αφορά τη γωνία πόλωσης, εφόσον το U_{rl} παραμένει ίσο με το μηδέν, εξαρτάται μόνο από την παράμετρο Q. Η ποσότητα αυτή, όπως είδαμε, σταδιακά μικραίνει και για $\tau > 1$, αφού περάσει από το μηδέν, αλλάζει τελικά πρόσημο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή της γωνίας πόλωσης κατά 90°, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.9.



Σχήμα 3.10: Εντάσεις I, I_l, I_r (αριστερά) και U, Q (δεξιά) συναρτήσει του μήκους διάδοσης, κανονικοποιημένες στη μέγιστη τιμή.

Περίπτωση μη μηδενικού συντελεστή στροφής

Αρχικά θέτοντας τους συντελεστές εκπομπής και απορρόφησης μηδέν και αντικαθιστώντας το $I_l - I_r$ με την παράμετρο Q, οι εξισώσεις διάδοσης γίνονται

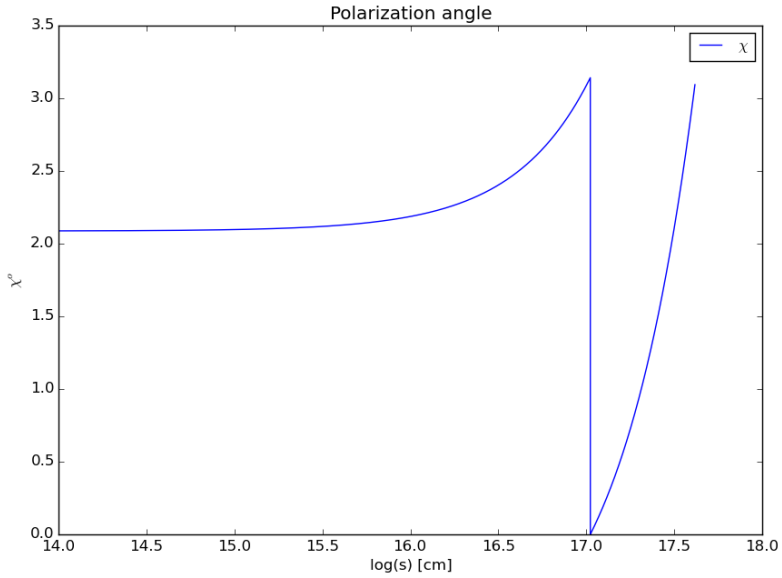
$$\frac{dI_l}{ds} = \frac{d\chi_f}{ds}U_{rl}, \quad \frac{dI_r}{ds} = -\frac{d\chi_f}{ds}U_{rl} \qquad \frac{dU_{rl}}{ds} = -2\frac{d\chi_f}{ds}I_l + 2\frac{d\chi_f}{ds}I_r.$$

Συνεπώς για τα Q, I θα ισχύει $\frac{dQ}{ds} = \frac{d(I_l - I_r)}{ds} = 2\frac{d\chi_f}{ds}U_{rl}$, $\frac{dI}{ds} = \frac{d(I_l + I_r)}{ds} = 0$. Παραγωγίζοντας την $\frac{dU_{rl}}{ds}$ και αντικαθιστώντας στο δεξί μέλος την τιμή του $\frac{dQ}{ds}$, έχουμε $\frac{d^2U_{rl}}{ds^2} = -4\left(\frac{d\chi_f}{ds}\right)^2 U_{rl}$. Σε περίπτωση ομογενών φυσικών παραμέτρων (B, V, ρ_0) και θεωρώντας τις αρχικές εντάσεις Q_0, $U_{rl,0}$, I_0, η λύση των παραπάνω εξισώσεων θα είναι

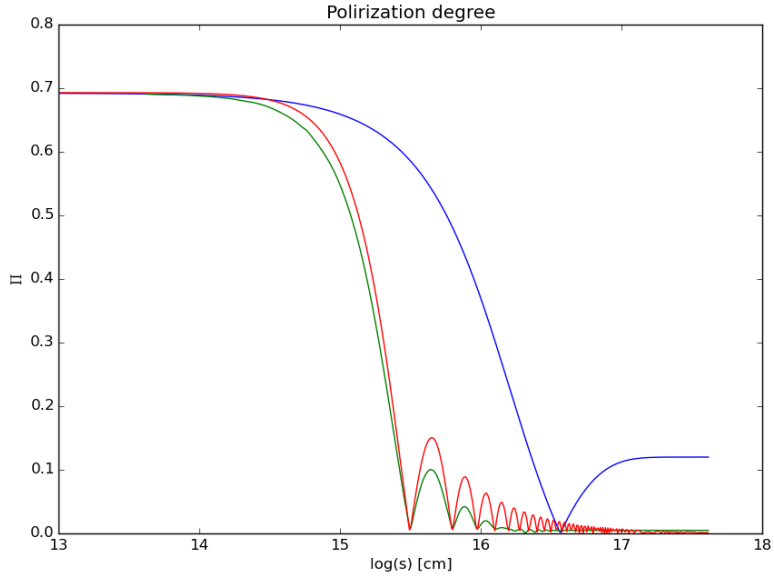
$$Q = Q_0 \cos\left(2\frac{d\chi_f}{ds}ds\right) + U_{rl,0}\sin\left(2\frac{d\chi_f}{ds}ds\right), \quad U_{rl} = U_{rl,0}\cos\left(2\frac{d\chi_f}{ds}ds\right) - Q_0\sin\left(2\frac{d\chi_f}{ds}ds\right), \tag{3.56}$$

ενώ η ολική ένταση θα παραμένει σταθερή $I = I_0$. Από τις σχέσεις αυτές φαίνεται ότι στην εξωτερική στροφή η ολική ένταση I και ο βαθμός πόλωσης $\Pi = \frac{\sqrt{Q^2+U_{rl}^2}}{I} = \frac{\sqrt{Q_0^2+U_{rl,0}^2}}{I_0}$, παραμένουν σταθερά. Στο σχήμα 3.10 δίνονται οι αντίθετα μεταβαλλόμενες εντάσεις I_l, I_r (αριστερά) και οι παράμετροι U, Q (δεξιά), συναρτήσει του μήκους διάδοσης. Παράλληλα, εφόσον ο συντελεστής είναι σταθερός, η γωνία θα μεταβληθεί κατά $\Delta\chi = \frac{d\chi_f}{ds}\Delta s = RM\lambda^2$. Στο σχήμα 3.11 φαίνεται η στροφή της γωνίας συνολικά κατά $\sim 4\ rad$, με αυτή να ορίζεται προσφανώς στο διάστημα $[0, \pi]$.

Στην περίπτωση όπου κανένας συντελεστής δεν είναι μηδενικός τότε η γενική λύση είναι πιο περίπλοκη και δίνεται από τους [Pacholczyk 1970] [26]. Ένα από τα βασικότερα χαρακτηριστικά ωστόσο, της εσωτερικής στροφής είναι η αποπόλωση. Σε οπτικά αραιό μέσο, ο βαθμός πόλωσης εξαρτάται από μήκος διάδοσης σύμφωνα με τη σχέση $\Pi = \Pi_0\left|\frac{\sin(\frac{d\chi_f}{ds}s)}{\frac{d\chi_f}{ds}s}\right|$, όπου Π_0 η μέγιστη τιμή που αναμένεται στη περίπτωση χωρίς στροφή. Στο σχήμα 3.12 φαίνονται οι περιπτώσεις του βαθμού πόλωσης για οπτικά αραιή περιοχή με $\frac{d\chi_f}{ds} >> \kappa$ (κόκκινη καμπύλη), όπου και εμφανώς ακολουθείται η παραπάνω σχέση, για $\frac{d\chi_f}{ds} << \kappa$, όπου σε μια μέση ελεύθερη διαδρομή η στροφή είναι αμελητέα και ο βαθμός πόλωσης ακολουθεί την οπτικά πυκνή περίπτωση και τέλος για συγκρίσιμους συντελεστές απορρόφησης και στροφής όπου η αποπόλωση γίνεται ισχυρότερη (πράσινη καμπύλη).



Σχήμα 3.11: Γωνία του διανύσματος πόλωσης ως συνάρτηση του μήκους διάδοσης. κάτω από την επίδραση του φαινομένου Faraday.



Σχήμα 3.12: Ο βαθμός πόλωσης στην ίδια συχνότητα, για $d\chi_f/ds << \kappa$ (μπλέ καμπύλη), για $d\kappa <<$ (οπτική διαφάνεια) (κόκκινη καμπύλη) και στην περίπτωση που οι δύο συντελεστές είναι συγκρίσιμοι (πράσινη καμπύλη).

3.1.5 Σχετικιστικές διορθώσεις

Στη γενική περίπτωση μη πολωμένου φωτός, η μεταβολή της έντασης ακτινοβολίας λόγω εκπομπής και απορόφησης στο σύστημα του παρατηρητή, είναι $\frac{dI}{ds} = -\kappa I + \epsilon$. Οι συντελεστές, ωστόσο, εκπομπής και απορρόφησης, όπως υπολογίζονται από τη θεωρία σύγχροτρον, αφορούν το σύστημα όπου η πηγή είναι ακίνητη (τονούμενο σύστημα). Όπως δείξαμε στο κεφάλαιο 1.1.1, ο συντελεστής εκπομπής μετασχηματίζεται ως $\epsilon = D^2\epsilon'$. Η εξάρτηση της ποσότητας ϵ' από τη συχνότητα θα είναι $\epsilon'(\nu') \propto \nu'^{-a} \overset{\nu=D\nu'}{\Rightarrow} \epsilon'(\nu) \propto D^a\nu^{-a}$, συνεπώς $\epsilon(\nu) = D^{2+a}\epsilon'(\nu)$. Αντίστοιχα, για τον συντελεστή απορρόφησης, εφόσον έχει μονάδες αντίστροφου μήκους, θα ισχύει $\overset{ds=Dds'}{\Rightarrow}$ $\kappa(\nu) = D^{-1}\kappa'(\nu')$, επίσης $\kappa'(\nu') \propto \nu'^{-a-5/2} \Rightarrow \kappa'(\nu) \propto D^{a+5/2}\nu^{-a-5/2} \Rightarrow \kappa(\nu) = D^{a+3/2}\kappa'(\nu)$. Συνεπώς η εξίσωση διάδοσης, λαμβάνοντας υπόψιν και τη διόρθωση λόγω ερυθρομετατόπισης, θα είναι

$$\frac{dI}{ds} = -\frac{1}{(z+1)^{a+3/2}}D^{a+3/2}\kappa'(\nu) + \frac{1}{(z+1)^{a+2}}D^{a+2}\epsilon'(\nu).$$

Θεωρώντας και πάλι τη περίπτωση πολωμένης ατινοβολίας και χρησιμοποιώντας τη σύμβαση που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 3.1.4, εάν θεωρήσουμε ότι ο όρος της στροφής Faraday $d\chi_F/ds$ δίνεται στο σύστημα του παρατηρητή τότε το σύστημα των εξισώσεων διάδοσης μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{d\mathbb{I}}{ds} = \mathbb{E} - \mathbb{A}\mathbb{I} = \frac{1}{(z+1)^{a+2}}D^{2+a}\begin{pmatrix}\epsilon'_e\sin^2\chi_B + \epsilon'_b\cos^2\chi_B \\ \epsilon'_e\cos^2\chi_B + \epsilon'_b\sin^2\chi_B \\ -(\epsilon'_e - \epsilon'_b)\sin 2\chi_B\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{23} & 2a_{13} & a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_l \\ I_r \\ U_{lr}\end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

όπου

$$a_{11} = \frac{D^{a+3/2}}{(z+1)^{a+3/2}}\left[\kappa'_e\sin^4\chi_B + \kappa'_b\cos^4\chi_B + \frac{1}{2}\kappa'\sin^2 2\chi_B\right],$$

$$a_{22} = \frac{D^{a+3/2}}{(z+1)^{a+3/2}}\left[\kappa'_e\cos^4\chi_B + \kappa'_b\sin^4\chi_B + \frac{1}{2}\kappa'\sin^2 2\chi_B\right],$$

$$a_{33} = \frac{D^{a+3/2}}{(z+1)^{a+3/2}}\kappa', \quad a_{13} = -\left[\frac{1}{4}\frac{D^{a+3/2}}{(z+1)^{a+3/2}}(\kappa'_e - \kappa'_b)\sin 2\chi_B + \frac{d\chi_F}{ds}\right],$$

$$a_{23} = -\left[\frac{1}{4}\frac{D^{a+3/2}}{(z+1)^{a+3/2}}(\kappa'_e - \kappa'_b)\sin 2\chi_B - \frac{d\chi_F}{ds}\right].$$

Σε περιπτώσεις λοιπόν που θέλουμε να εξετάσουμε ποια θα ήταν η ακτινοβολία που θα λάμβανε ο παρατηρητής από μια δεδομένη σχετικιστική ροή η οποία θα μπορούσε να περιγάφει τους πίδακες των AGNs, θα πρέπει να γνωρίζουμε τις φυσικές παραμέτρους στο σύτημα της πηγής, N'_0 και $B'_\perp$, ώστε να υπολογισθούν οι παραπάνω συντελεστές. Μια λογική υπόθεση για το συντελεστή κανονικοποίησης N_0 είναι να θεωρήσουμε ότι συνδέεται με ένα ποσοστό της πυκνότητα της ροής στο κινούμενο σύστημα, N_e, που έστω ότι καθορίζεται από τον συντελεστή C. Αν θεωρήσουμε επιπλέον ότι το ενεργειακό φάσμα των ηλεκτρονίων εκτείνεται από $E_1 = \gamma_1 mc^2$ έως $E_2 = \gamma_2 mc^2$, τότε ο συντελεστής $N'_0 = N_0$ θα δίνεται από $N_0 = CN_e(1-p)\frac{1}{E_2^{1-p} - E_1^{1-p}}$. Όσον αφορά το μαγνητικό πεδίο, σε περιπτώσεις όπου κανείς γνωρίζει το μαγνητικό πεδίο στο σύστημα του εργαστηρίου, για τον προσδιορισμό της ακτινοβολίας είναι απαραίτητος ο προσδιορισμός της κάθετης συνιστώσας του πεδίου $B'_\perp = |\hat{n}' \times \vec{B}'|$ στο συγκινούμενο σύστημα. Η διάδοση των φωτονίων στο σύστημα του παρατηρητή γίνεται στην κατεύθυνση $\hat{n}$. Συνεπώς λόγω αποπλάνησης

του φωτός, η ακτινοβολία στο κινούμενο σύστημα θα εκπέμπεται στην κατεύθυνση $\hat{n}'$ που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{n}' = \frac{\hat{n} + \frac{\Gamma^2}{\Gamma+1}(\hat{n}\frac{\vec{V}}{c})\frac{\vec{V}}{c} - \Gamma\frac{\vec{V}}{c}}{\Gamma(1-\hat{n}\vec{\beta})} = D\hat{n} - \frac{\Gamma(D+1)}{\Gamma+1}\frac{\vec{V}}{c}, \tag{3.58}$$

με τα $\vec{n}$, $\vec{n}'$ και $\frac{\vec{V}}{c}$, να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Για τον μετασχηματισμό του μαγνητικού πεδίου, εφαρμόζοντας τους μετασχηματισμούς Lorentz, στο σύστημα της πηγής θα ισχύει

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} = \frac{(\vec{B}\vec{V})\vec{V}}{V^2}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \Gamma(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{E}_{\perp}), \text{ με } \vec{B}_{\perp} = \vec{B} - \frac{(\vec{B}\vec{V})\vec{V}}{V^2}.$$

Θεωρώντας ιδανική ροή, θα ισχύει $\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{V}\times\vec{B}$ και συνεπώς το $\vec{E}$ θα είναι κάθετο στην ταχύτητα $\vec{E} = \vec{E}_{\perp} \Rightarrow$

$$\vec{B}' = \vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp} = \frac{(\vec{B}\vec{V})\vec{V}}{V^2} + \Gamma\left(\vec{B} - \frac{(\vec{B}\vec{V})\vec{V}}{V^2} + \frac{1}{c^2}\vec{V}\times(\vec{V}\times\vec{B})\right) \Rightarrow$$

$$\vec{B}' = \frac{B}{\Gamma} + \frac{\Gamma}{\Gamma+1}\left(\frac{\vec{V}\vec{B}}{c}\right)\left(\frac{\vec{V}}{c}\right). \tag{3.59}$$

Η γωνία χ_B δεν ταυτίζεται πλέον με τη προβολή του μαγνητικού πεδίου, ωστόσο συνεχίζει να αναφέρεται στη διεύθυνση που σχηματίζουν οι δύο κάθετοι άξονες στους οποίου εκπέμπεται η γραμμικά πολωμένη ακτινοβολία στο σύστημα του παρατηρητή, με το αυθαίρετο σύστημα που έχει επιλεγεί στο επίπεδο του ουρανού. Για να προσδιορίσουμε τη διεύθυνση αυτή, χρειάζεται να υπολογίσουμε τη διεύθυνση του μαγνητικού $\hat{b}$ και ηλεκτρικού $\hat{e}$ πεδίου της ακτινοβολίας που εκπέμπεται, στο σύστημα παρατήρησης.

Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο της ακτινοβολίας στο σύστημα της πηγής θα είναι $\hat{e}' = \hat{B}'\times\hat{n}'$ και $\hat{b}' = \hat{n}'\times\hat{e}'$. Αντικαθιστώντας με τις σχέσεις που δείξαμε παραπάνω και ακολουθώντας την ανάλυση των [28] προκύπτει

$$\vec{e}' = D\hat{B}'\times\hat{n}' - \frac{\Gamma(D+1)}{\Gamma+1}\hat{B}'\times\frac{\vec{V}}{c}, \tag{3.60}$$

$$\vec{b}' = \hat{B}' + \left[-D^2(\hat{n}\hat{B}') + \frac{\Gamma D(D+1)}{\Gamma+1}\left(\frac{\vec{V}}{c}\hat{B}'\right)\right]\hat{n} + \left[\frac{\Gamma D(D+1)}{\Gamma+1}(\hat{n}\hat{B}') - \frac{\Gamma^2(D+1)^2}{(\Gamma+1)^2}\left(\frac{\vec{V}}{c}\hat{B}'\right)\right]\frac{\vec{V}}{c} \tag{3.61}$$

Μετασχηματίζοντας κατά Lorentz το ηλεκτρικό πεδίο της ακτινοβολίας θα ισχύει

$$\vec{e} = \Gamma\left[\vec{e}' - \frac{\Gamma}{\Gamma+1}\frac{\vec{V}}{c}\left(\frac{\vec{V}}{c}\vec{e}'\right) - \frac{\vec{V}}{c}\times\vec{b}'\right] \Rightarrow \hat{e} = \frac{\vec{q}'\times\hat{n}}{\sqrt{q'^2 - (\hat{n}\vec{q}')^2}}, \tag{3.62}$$

$$\text{με } \vec{q}' = \hat{B}' + \hat{n}\times\left(\frac{\vec{V}}{c}\times\hat{B}'\right) - \frac{\Gamma}{1+\Gamma}\left(\hat{B}'\frac{\vec{V}}{c}\right)\frac{\vec{V}}{c},$$

αντικαθιστώντας το $\vec{B}'$, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο γίνεται

$$\hat{e} = \frac{\hat{q}\times\hat{n}}{\sqrt{q^2 - (\hat{n}\vec{q})^2}}, \text{ με } \vec{q} = \hat{B} + \hat{n}\times(\vec{\beta}\times\hat{B}), \quad \hat{b} = \hat{n}\times\hat{e}. \tag{3.63}$$

και η γωνία χ_B μπορεί να βρεθεί απευθείας μέσω των γνωστών ανυσμάτων στο σύστημα παρατήρησης, $\hat{n}$, $\hat{B}$. Συνεπώς, παρόλο που όταν η πηγή είναι ακίνητη ή κινείται μη σχετικιστικά και

απουσιάζει το φαινομένο της στροφής Faraday, η διεύθυνση του παρατηρούμενου μαγνητικού πεδίου της ακτινοβολίας έχει άμεση αντιστοιχία με την κατανομή του μαγνητικού πεδίου στην πηγή και ταυτίζεται με την προβολή αυτού στο επίπεδο του ουρανού $\hat{b} = \hat{n} \times \hat{e} = \hat{n} \times \frac{\hat{B} \times \hat{n}}{|\hat{n} \times \hat{B}|} = \frac{\hat{B} - (\hat{B}\hat{n})\hat{n}}{|\hat{n} \times \hat{B}|}$, το ίδο δεν συμβαίνει σε περίπτωση σχετικιστικών ταχυτήτων. Το διανύσμα $\hat{e}$ παρουσιάζει μεταβολή στη διευθυνσή του και δεν είναι πλέον κάθετο στο $\vec{B}$. Από τη σχέση (3.63) έχουμε

$$\vec{e} = \vec{B} \times \hat{n} - (\hat{n} \times \vec{E}) \times \hat{n} = \hat{B}_{\perp,los} \times \vec{n} - \vec{E}_{\perp,los},$$

όπου $\vec{B}_{\perp los}$, $\vec{E}_{\perp los}$, οι προβολές στο επίπεδο του ουρανού, όπου και φαίνεται ότι η μεταβολή της διεύθυνσης δίνεται από την προβολή του ηλεκτρικού πεδίου της ροής στο επίπεδο του ουρανού. Το πεδίο $\vec{E}$ που υπάρχει στο σύστημα του παρατηρητή αλλά εξαφανίζεται στο σύστημα του πίδακα κάτω από την υπόθεση της ιδανικής ροής, αλλάζει την επιτάχυνση του πάσματος στα δύο συστήματα και συνεπώς τη διεύθυσνη στην οποία θα ακτινοβολίσει.

Καθορίζοντας, λοιπόν, ένα τρισορθογώνιο σύστημα $\hat{n} = \hat{l} \times \hat{r}$, όπου η κατεύθυνση $\hat{n}$ δείχνει τον παρατηρητή (δηλαδή προς τα έξω) και οι άξονες l, r καθορίζουν το επίπεδο του ουρανού με τη διεύθυνση $\hat{l}$ να ταυτίζεται συνήθως με τη προβολή του άξονα του πίδακα, τότε οι τριγωνομετρικές σχέσεις του συστήματος ορίζονται ως, $\cos\chi_B = \hat{l} \cdot \hat{b}$, $\sin\chi_B = \hat{n} \cdot (\hat{l} \times \hat{b})$ και η γωνία πόλωσης χ έχει θετική φορά, αντίστροφη της φοράς των δεικτών του ρολογιού.

Στο κεφάλαιο 3.1.3 δείξαμε ότι σε περιβάλλον με μαγνητισμένο πλάσμα, η μεταβολή της γωνίας του ηλεκτρικού διανύσματος κατά μήκος της ευθείας διάδοσης $\hat{n}$, δίνεται από $d\chi_F{}' = \frac{2\pi n_e e^3}{m^2c^2}\frac{1}{\omega'^2}n_e'(n)\vec{B}'(n) \cdot \vec{ds}'$. Η παραπάνω σχέση, αναφέρεται στο σύστημα ηρεμίας του πλάσματος και θα ίσχυε για μικρές ταχύτητες, όπως περιπτώσεις εξωτερικών νεφών ιονισμένου αερίου. Στην περίπτωση, ωστόσο που η στροφή οφείλεται σε σχετικιστικά κινούμενο πλάσμα, όπως αυτό του ίδιου του πίδακα, η παραπάνω σχέση θα πρέπει να μετασχηματιστεί στο σύστημα του παρατηρητή πρωτού αντικατασταθεί στις εξισώσεις διάδοσης.

Η πιο άμεση μετατροπή μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το ότι η επίκτητη γωνία $d\chi_f$ παραμένει αναλλοίωτη και συνεπώς αρκεί απλά να μετασχηματίσουμε τις ποσότητες του δεξιού μέλους στο σύστημα του παρατηρητή. Ακολουθώντας την ανάλυση των [29], με τη βοήθεια του τετρανύσματος της ταχύτητας του πλάσματος $\beta^\mu = \Gamma(1, \vec{\beta})$, του κάθετου σε αυτό τετράνυσμα που αντιστοιχεί στο μαγνητικό πεδίο στο σύστημα του ρευστού $b^\mu = (b^t, \vec{b})$ (με $b^t = \vec{\beta} \cdot \vec{b}$), και του κυματανύσματος $n^\mu = 2\pi\nu(1, \hat{n})$ που αντιστοιχεί στη τροχιά διάδοσης του κύματος $dx^\mu/d\eta = n^\mu$, με η μια παράμετρο ολοκλήρωσης, υπολογίζεται το γινόμενο $\vec{B}' \cdot ds'$. Το $\vec{b}$ στο σύστημα του ρευστού δίνει τη χωρική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου. Για να μηδενίζεται το ηλεκτρικό πεδίο στο σύστημα αυτό (δεδομένης ιδανικής ροής), θα πρέπει να ισχύει $F^{\mu\nu}u_\nu = 0$ και συνεπώς ο ηλεκτρομαγνητικός τανυστής θα έχει τη μορφή $F^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu a\beta}\beta_a b_\beta/2$. Συγκρίνοντας με τη κλασική γραφή του $F^{\mu\nu}$ στο σύστημα του εργαστηρίου που αντιστοιχεί σε μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$, παρατηρούμε ότι τα $\vec{b}$ και $\vec{B}$ συνδέονται με τις σχέσεις

$$\vec{B} = \Gamma\vec{b} - \Gamma(\vec{\beta}\vec{b})\vec{\beta}, \qquad \vec{b} = \frac{\vec{B}}{\Gamma} + \Gamma(\vec{\beta}\vec{B})\vec{\beta}. \tag{3.64}$$

Στο σύστημα του πλάσματος θα ισχύει $ds'^\mu = dx^\mu + \beta_\nu dx^\nu \beta^\mu = (n^\mu + \beta_\nu n^\nu \beta^\mu)d\eta$ και άρα $ds' = -\beta_\mu n^\mu d\eta$. Αντίστοιχα $ds = n^t d\eta$. Συνεπώς $\vec{B}' \cdot \vec{ds}' = b_\mu ds'^\mu = (\hat{n} - \vec{\beta})\vec{b}ds \quad \Rightarrow$

$$\frac{d\chi_F}{ds} = \frac{e^3}{2\pi m_e^2 c^2}\frac{n_e D^2}{\nu^2}(\hat{n} - \vec{\beta})\vec{b}. \tag{3.65}$$

Κεφάλαιο 4

Παρατηρήσεις

Ο μόνος τρόπος να ελεγθούν τα μοντέλα δυναμικής και ακτινοβολίας που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι μέσω των παρατηρήσεων. Η μεγάλη διακριτική ικανότητα που προσφέρουν τα σύγχρονα ραδιοπαρατηρητήρια, μέσω της συμβολομετρίας, καθιστά ικανή πλέον τη χαρτογράφηση της δομής των πιδάκων με μεγάλη ακρίβεια. Από το 1993 μέσω του VLBA, δόθηκε η δυνατότητα παρατηρήσεων σε κλίμακες των milliarcseconds (-mas), που αντιστοιχούν, ανάλογα με την ερυθρομετατόπιση z της πηγής, σε κλίμακες από $parsec$ έως $kiloparsec$. Παράλληλα από το 2005 ξεκίνησαν να δημοσιεύονται τα αποτελέσματα του προγράμματος Mojave (-Monitoring of Jets in Active Galactic Nuclei with VLBA experiments) που έχει ως στόχο τη μελέτη των χαρακτηριστικών ενός μεγάλου δείγματος ενεργών γαλαξιακών πυρήνων, κυρίως από μετρήσεις στα 15 GHz. Συστηματικές παρατηρήσεις που έχουν πραγματοποιηθεί σε ορισμένες πηγές τόσο στο ράδιο όσο και σε άλλα μήκη κύματος, στη διάρκεια των χρόνων αυτών, επιτρέπουν τη μελέτη της μεταβλητότητας της έντασής τους καθώς και της δυναμικής εξέλιξης διάφορων δομών που παρουσιάζονται στους πίδακες, δίνοντας έτσι σημαντικά στοιχεία για την τροχιά τους. Παράλληλα, το υψηλό ποσοστό γραμμικής πόλωσης που παρουσιάζει η ακτινοβολία δίνει τη δυνατότητα μελέτης του βαθμού πόλωσης και της γωνίας θέσης του ηλεκτρικού διανύσματος (EVPA-electror vector position angle). Τα μεγέθη αυτά σε συνδυασμό με τον καθορισμό της στροφής Faraday, δίνουν σημαντικές πληροφορίες για την εκτίμηση του μεγέθους και της δομής του μαγνητικού πεδίου στην πηγή καθώς και για τις ιδιότητες (πυκνότητα, μαγνητικό πεδίο) του μέσου διάδοσης.

4.0.1 Κινηματική και ακτινοβολία

Σε πηγές της τάξης των mas, η κύρια συνιστώσα της ακτινοβολίας εντοπίζεται στην κεντρική περιοχή που ονομάζεται ραδιοπυρήνας και χαρακτηρίζεται από οπτική αδιαφάνεια σε μήκη κύματος της τάξης των cm. Η υπόλοιπη δομή, της οποίας η πυκνότητα ροής είναι αρκετά ασθενέστερη, αποτελεί τη συνιστώσα του πίδακα.

Οι συνθήκες οπτικής αδιαφάνειας μπορούν να αποτυπωθούν στους φασματικούς δείκτες a της ακτινοβολίας, όπου στην περιοχή του ραδιοπυρήνα παρατηρούνται επίπεδοι ή και ανάστροφοι νόμοι δύναμης, σε αντίθεση με τις πιο απομακρυσμένες περιοχές του πίδακα όπου το φάσμα εμφανίζεται πιο απότομο ($a \leq -0.5$), καθώς η απορρόφηση είναι μικρή. Μια τέτοια διαπίστωση έγινε και από τους O'Sullivan και Gabuzda [30] οι οποίοι προσδιόρισαν τους φασματικούς δείκτες σε έξι AGNs (σχήμα 4.1). Η παραπάνω αδιαφάνεια μπορεί να οδηγήσει σε μετατοπίσεις της φαινόμενης θέσης του πυρήνα ανάλογα με τη συχνότητα καθώς σε μεγαλύτερες συχνότητες η επιφάνεια μοναδιαίου οπτικού βάθους εισχωρεί σε πιο κεντρικές περιοχές.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της ακτινοβολίας των AGNs είναι η μεταβλητότητα που παρατηρείται στη ροή σε όλα τα μήκη κύματος. Οι αυξομειώσεις αυτές εμφανίζονται σε διάφορες χρονικές

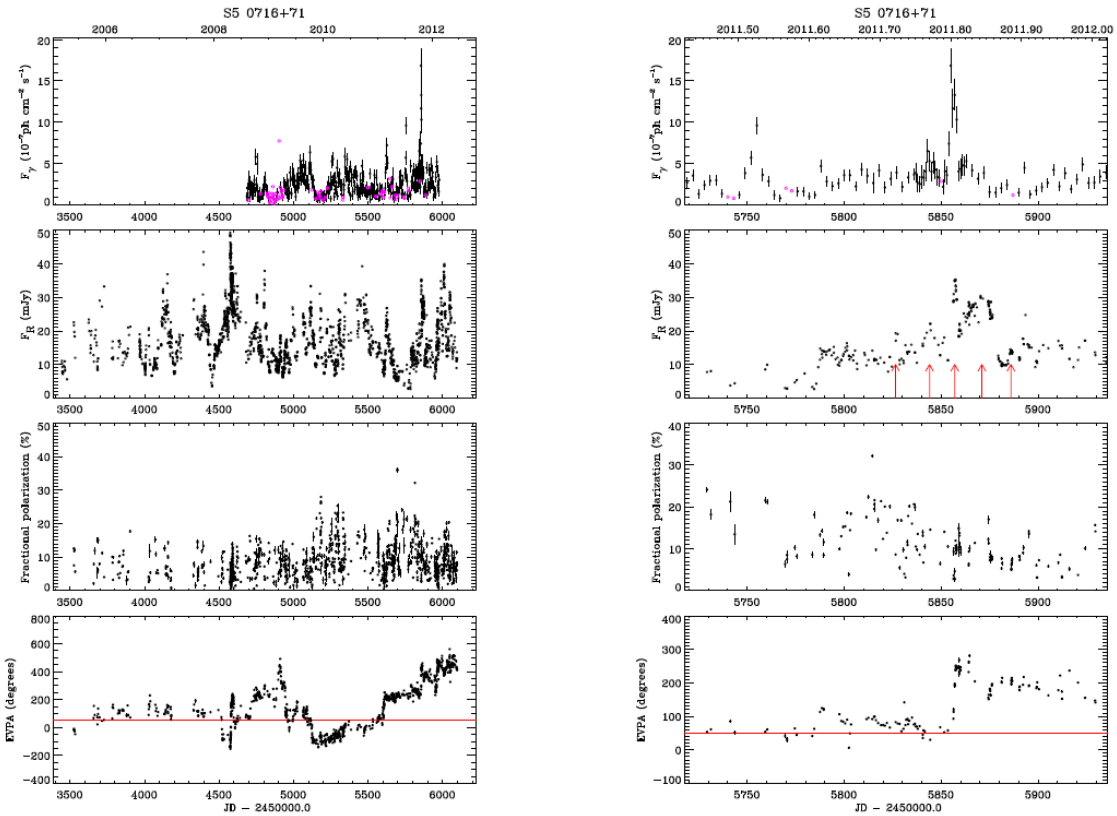
Source	$\alpha_{\rm core}$ Low ν range	$\alpha_{\rm core}$ Mid ν range	$\alpha_{\rm core}$ High ν range	$\alpha_{\rm jet}$ Low ν range	$\alpha_{\rm jet}$ Mid ν range	$\alpha_{\rm jet}$ High ν range
0954+658	0.3	0.2	0.2	−0.5	−0.6	−0.5
1156+295	1.3	0.5	0.0	−0.8	–	–
1418+546	0.4	0.3	–	−0.2	−0.8	–
1749+096	0.8	0.0	−0.1	–	–	–
2007+777	0.6	0.3	0.2	−0.4	−0.6	−0.6
2200+420	0.7	0.5	0.5	−0.5	−0.7	−0.5

Σχήμα 4.1: Φασματικοί δείκτες σε τρία εύρη συχνοτήτων, για τον ραδιοπυρήνα και τον πίδακα της πηγής [30].

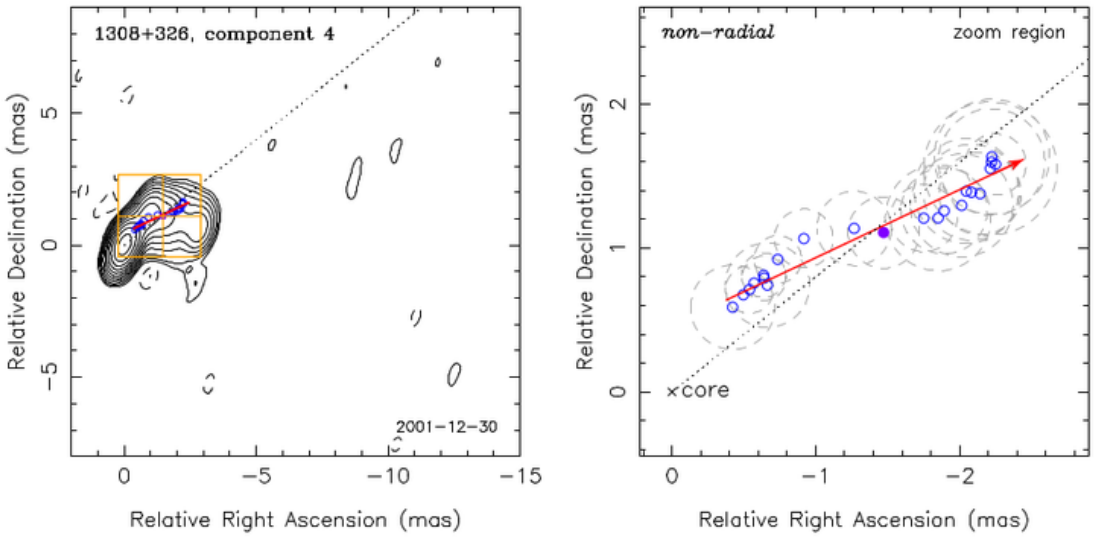
κλίμακες, από μερικά λεπτά της ώρας στις υψηλότερες συχνότητες μέχρι και έτη στο οπτικό και το ράδιο. Το φαινόμενο, αν και είναι πολυπαραγοντικό, είναι δυνατό να επιχειρηματολογηθεί με βάση δυο διαφορετικούς άξονες, όσον αφορά την ακτινοβολία synchrotron. Ο πρώτος αφορά εν γένει το απόθεμα της ακτινοβολούμενης ενέργειας, τόσο μέσω μεταβολών στο μαγνητικό πεδίο που επιδρούν στην εκλυόμενη ενέργεια της συγκεκριμένης διαδικασίας, όσο και μέσω της κατανομής, όπου απότομες μεταβολές στην πυκνότητα ή την ενέργεια των σωματιδίων, μπορεί να οδηγήσει σε έντονες εκλάμψεις. Τέτοιες συνθήκες μπορούν να δημιουργηθούν από μη συνεχόμενη παροχή ύλης από την κεντρική περιοχή, είτε από επαναεπιτάχυσνη των σωματιδίων κατά μήκος του πίδακα. Το δεύτερο είδος μεταβολής αναφέρεται σε καθαρά γεωμετρικά φαινόμενα, όπου η διεύθυνση κίνησης της κατανομής που ακτινοβολεί, επιδρά σηματνικά στην παρατηρούμενη ένταση μέσω της ενίσχυσης Doppler. Συνεπώς για μη ακτινικές τροχιές η ένταση ενδέχεται να παρουσιάζει μεταβολές στην εξέλιξη του χρόνου και συγκεκριμένα για ελικοειδείς κινήσεις θα εμφανίζονται επαναλαμβανόμενα μέγιστα προκαλώντας το φαινόμενο του "φάρου" που προτάθηκε από τους Camenzind & Krockenberger (1992) [31]. Η ιδέα αυτή εφαρμόστηκε σε αρκετές μελέτες από τους [Marscher et.al], οι οποίοι, προκειμένου να εξηγήσουν την παρατηρούμενη μεταβλητότητα σε διάφορες πηγές, θεώρησαν ένα ωστικό κύμα που κινείται σε ελικοειδή τροχιά κατά μήκος του πίδακα. Αντίστοιχη περίπτωση θα μελετήσουμε και στο κεφάλαιο ;;. Ένα επιπλέον γεωμετρικό φαινόμενο που χρησιμοποιείται, για να περιγράψει την τακτική εμφάνιση μεγίστων είναι η μετάπτωση του άξονα του πίδακα, όπως για παράδειγμα στη μελέτη των [Carponi & Abraham 2004] [31] για την πηγή $3C345$. Το φαινόμενο αυτό οι ίδιοι το αποδίδουν σε διπλό σύστημα υπερμαζικών μελανών οπών.

Αν και στα λεπτονικά μοντέλα, η ακτινοβολία σύγχροτρον αφορά το οπτικό και το ράδιο, σε αρκετές περιπτώσεις παρατηρείται συσχέτιση με τη μεταβλητότητα στις ακτίνες γ, ενώ παράλληλα με τη ροή, συχνά παρατηρείται και μεταβολή στη διεύθυνση του διανύσματος πόλωσης. Στο σχήμα 4.2 δίνεται η ροή στις ακτίνες γ και το οπτικό, καθώς και ο βαθμός πόλωσης και το $EVPA$ (επίσης για το οπτικό) για την πηγή $S50716+71$, σε χρονική κλίμακα ετών, ενώ δεξιά του ίδιου σχήματος δίνονται οι ίδιες ποσότητες για το έτος 2011. Τη χρονιά αυτή παρατηρήθηκε έντονη έκλαμψη στις ακτίνες γ, η οποία όπως φαίνεται συνοδεύεται από αύξηση της ροής στο οπτικό. Με κόκκινα βέλη επισημαίνονται οι χρόνοι στους οποίους εμφανίζονται ημιπεριοδικές εκλάμψεις.

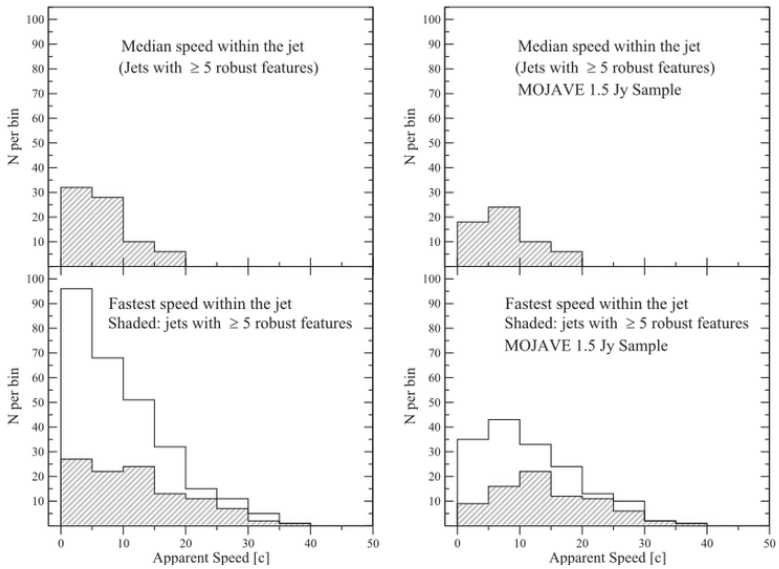
Σε αρκετές περιπτώσεις, όπου επιτρέπεται η παρατήρηση των δομικών στοιχείων, παρουσιάζονται διάκριτες συμπαγείς συνιστώσες κατά μήκος του πίδακα, οι οποίες μπορεί να εμφανίζουν υπέρφωτες κινήσεις. Συχνά παρουσιάζουν αλλαγή στην ταχύτητα και τη διεύθυνσή τους, αποκλίνοντας από τη ακτινική κίνηση ως προς τον ραδιοπυρήνα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.3, οι οποίες μπορούν να συνδεθούν με τις ελικοειδείς τροχιές που αναφέρθηκαν παραπάνω. Ενδεικτικές τιμές για τις φαινόμενες ταχύτητες που μετρώνται στις συνιστώσες αυτές δίνονται στην κατανομή ταχυτήτων που φαίνεται στο σχήμα 1.2 και αφορά ένα μεγάλο δείγμα ενεργών γαλαξιών από το πρόγραμμα mojave. Η πλειοψηφία των πηγών παρουσιάζει μικρές μέσες υπέρφωτες ταχύτητες $< 10c$, με ορισμένες περιπτώσεις, ωστόσο, που φτάνουν τα $40c$. Οι πηγές που παρουσιάζουν υψηλές ταχύτητες, ανιχνεύονται συνήθως και στις ακτίνες γάμμα (Fermi), υποδεικνύοντας τη πιθανή



Σχήμα 4.2: Αριστερά, πυκνότητα ροής για τις ακτίνες γ και τη μπάντα-R, καθώς και ο βαθμός και το διάνυσμα πόλωσης για την πηγή $S50716+71$, στο διάστημα των ετών (2005-2011) [32]. Δεξιά οι ίδιες ποσότητες στο χρονικό διάστημα που εμφανίζεται έκλαμψη στις ακτίνες γ.

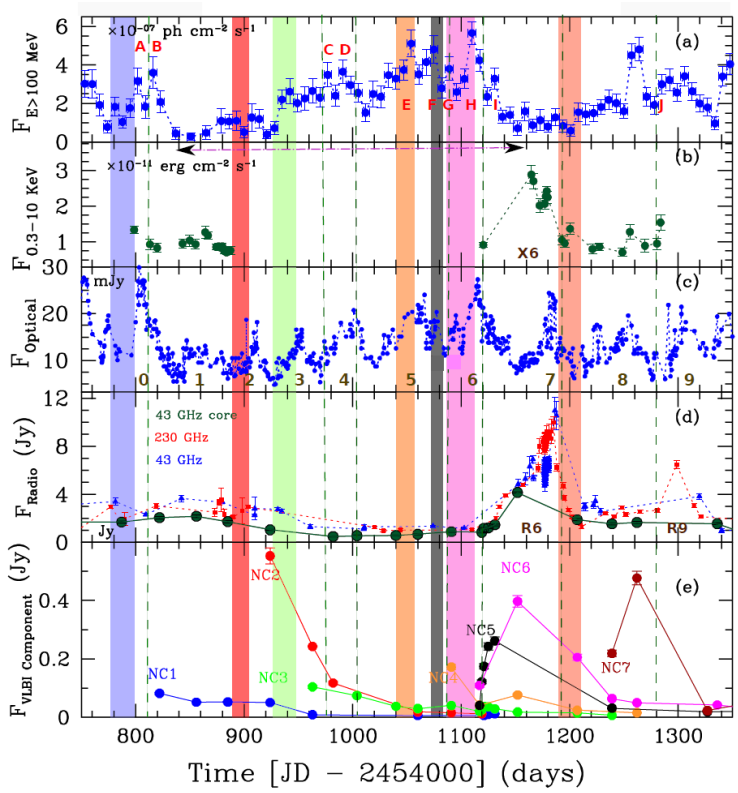


Σχήμα 4.3: Παράδειγμα μη ακτινικής κίνησης, για συνιστώσα της πηγής 1308-326 [33].

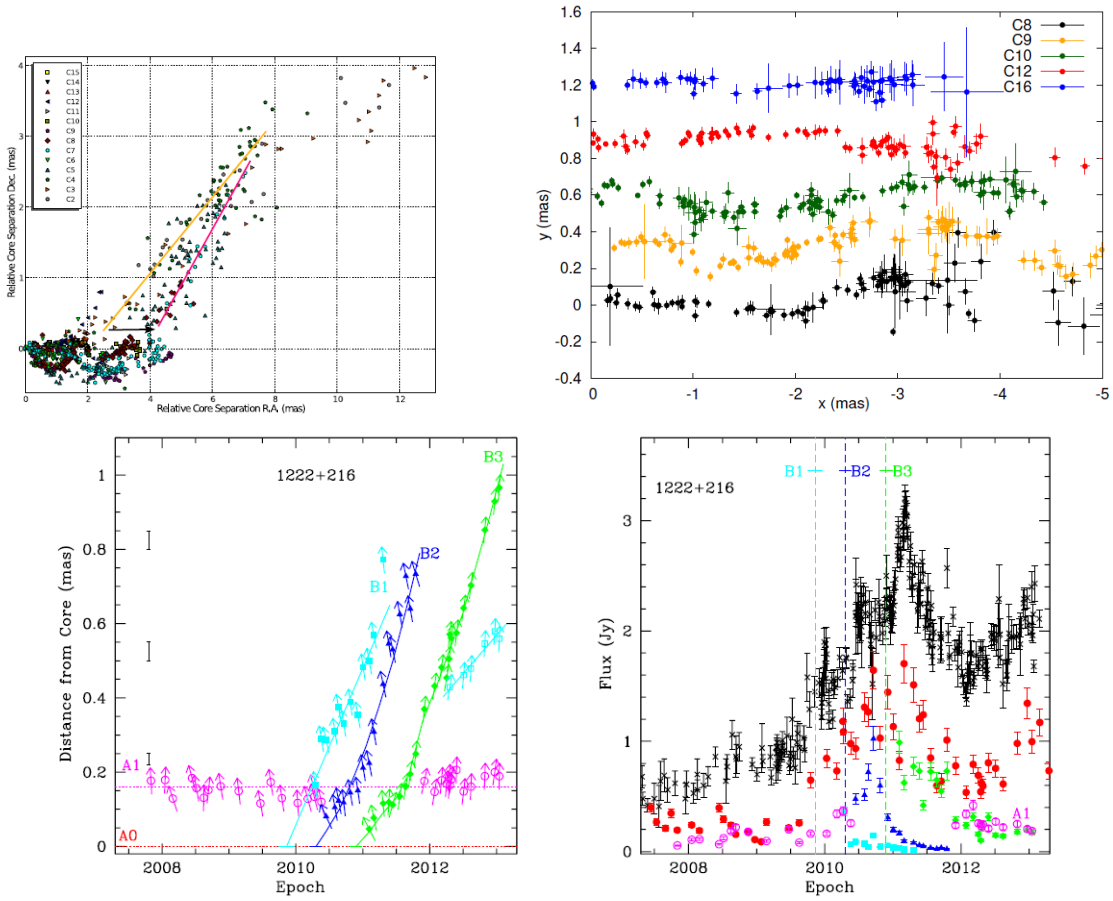


Σχήμα 4.4: Κατανομή των μέσων και των πιο γρήγορων μετρούμενων ταχυτήτων [34]. Η σκιαγραφημένη κατανομή αναφέρεται σε δείγμα όπου υπάρχουν τουλάχιστον πέντε συνιστώσες στον πίδακα. Οι κατανομές δεξιά συνιστούν δείγμα που περιορίζεται σε πυκνότητα ροής $1.5Jy$.

ενίσχυση λόγω Doppler, στις συχνότητες αυτές.



Σχήμα 4.5: Οι καμπύλες φωτός σε διάφορες μπάντες του φάσματος για την πηγή $S5\ 0716{+}714$ καθώς και η πυκνότητα ροής για τις διάφορες συνιστώσες. Οι σκιασμένες περιοχές αναφέρονται στο χρόνο εμφάνισης των αντίστοιχων συνιστωσών, ενώ οι διακεκομμένες πράσινες αντιστοιχούν στις περιόδους όπου αυτές περνούν από την στάσιμη συνιστώσα που παρατηρείται σε απόσταση $0.15mas$ από τον πυρήνα [35].



Σχήμα 4.6: Πάνω εικόνα: Αριστερά οι τροχιές των συνιστωσών $C2 - C15$ [36] και δεξιά οι τροχιές για τις αναγραφόμενες συνιστώσες, μετατοπισμένες κατά 0.3, 0.6, 0.9, 1.2 mas για τις $C9$, $C10$, $C12$ και $C16$ αντίστοιχα [36]. Κάτω εικόνα: Αριστερά, η απόσταση των διάφορων διακριτών δομών της πηγής $1222 + 216$ του δείγματος $VLBA - BU - BLAZAR$ ($3C345$), σε σχέση με τον πυρήνα, όπου τα βέλη υποδεικνύουν την κατεύθυνση κίνησης. Με A χαρακτηρίζονται οι στάσιμες συνιστώσες, ενώ με B οι κινούμενες. Δεξιά, η πυκνότητα ροής για τις αντίστοιχες συνιστώσες, καθώς και η ολική ροή (μαύροι σταυροί). Με διακεκομένες ευθείες δίνονται οι αντίστοιχοι χρόνοι εμφάνισης [37].

Παράλληλα η εμφάνιση μιας νέας συνιστώσας στον πίδακα συχνά συνοδεύεται από εκλάμψεις ακτίνων γάμμα και έντονη μεταβολή στη διεύθυνση πόλωσης στο οπτικό. Ένα παράδειγμα σύνδεσης της κινηματικής του πίδακα και της εκπομπής σε διάφορες φασματικές μπάντες δίνεται στο σχήμα 4.5, για την πηγή $S5\ 0716 + 714$ [35]. Στο διάστημα των παρατηρήσεων εμφανίστηκαν εφτά νέες συνιστώσες οι οποίες πιθανώς να συνδέονται με εκλάμψεις σε όλες το ηλεκτομαγνητικό φάσμα. Παρατηρούμε ότι μερικές από τις πιο έντονες εκλάμψεις που εμφανίζονται στις ακτίνες γ συνδέονται με το πέρασμα των συνιστωσών από μια στάσιμη δομή που εμφανίζεται σε απόσταση 0.15 mas από τον πυρήνα (πράσινη διακεκκομένη γραμμή) και συχνά αποδίδεται σε στάσιμα ωστικά κύματα. Εκτός από την εξάρτηση από την περίοδο εμφάνισης, στη συγκεκριμένη μελέτη οι επαναλαμβανόμενες εκλάμψεις στο οπτικό και τις ακτίνες γ, σε συνδυασμό με τις μη ακτινικές κινήσεις που εμφανίζουν οι δομές, προτάθηκαν ως αποτέλεσμα ελικοειδούς κίνησης. Για την ίδια πηγή, μελέτη από τους [Rani et al. 2014] έδειξε σημαντική συσχέτιση της ροής ακτίνων γ με τη μεταβολή της διεύθυνσης του εσωτερικού πίδακα, υποδεικνύοντας την έντονη εξάρτηση της ροής από γεωμετρικά φαινόμενα μέσω του παράγοντα Doppler.

Ένα ακόμα χαρακτηριστικό παράδειγμα πηγής που εμφανίζει μη ακτινικές τροχιές είναι ο quasar $3C345$, στον οποίο εμφανίζονται 16 διάκριτες λαμπρές δομές με ονομασίες $C1 - C16$, ανάλογα

το χρόνο εμφάνισή τους. Οι τροχιές των συνιστωσών αυτών δίνονται στο σχήμα 4.6, ενώ η μη ακτινική κίνηση φαίνεται πιο ξεκάθαρα στην δεξιά εικόνα του ίδιου σχήματος. Στην κάτω εικόνα, δίνονται πιο πρόσφατες παρατηρήσεις, στα έτη 2007 − 2012 [37], όπου αριστερά φαίνεται η απόκλιση των συνιστωσών σε σχέση με τον πυρήνα $A0$ μέχρι και $2mas$, ενώ δεξιά η αντίστοιχη πυκνότητα ροής. Πέρα από τις κινούμενες δομές παρατηρείται και μια στάσιμη λαμπρή περιοχή σε απόσταση $\sim 0.15mas$ $(0.7\ pc)$ από τον πυρήνα.

4.0.2 Πολωσιμετρία

Ποσοστό γραμμικής πόλωσης

Η γραμμική πόλωση που παρατηρείται στις πηγές αυτές είναι της τάξης του $1 - 10\%$ [38]. Παρόλο που οι ραδιοπυρήνες είναι συνήθως λαμπρότεροι και συνεπώς η μετρούμενη πολωμένη πυκνότητα ροής, μεγαλύτερη, το ποσοστό πόλωσης εμφανίζεται εντονότερο στη συνιστώσα του πίδακα. Στον πίνακα 4.1 παρουσιάζονται ενδεικτικές τιμές των ποσοστών πόλωσης για τη συνιστώσα του πυρήνα και του πίδακα, για quasars, BL Lac αντικείμενα και κανονικούς γαλαξίες. Η συνιστώσα των πιδάκων παρουσιάζει μια συστηματική αύξηση της πόλωσης σε υψηλότερες συχνότητες, πιθανώς λόγω μεγαλύτερης διαφάνειας, ενώ παράλληλα έχει παρατηρηθεί και αύξηση με την προβαλλόμενη απόσταση από τον πυρήνα, φαινόμενο ωστόσο, που ίσως να οφείλεται στη δυνατότητα παρατήρησης μόνο ισχυρών πολώσεων λόγω της ασθενέστερης επιφανειακής λαμπρότητας.

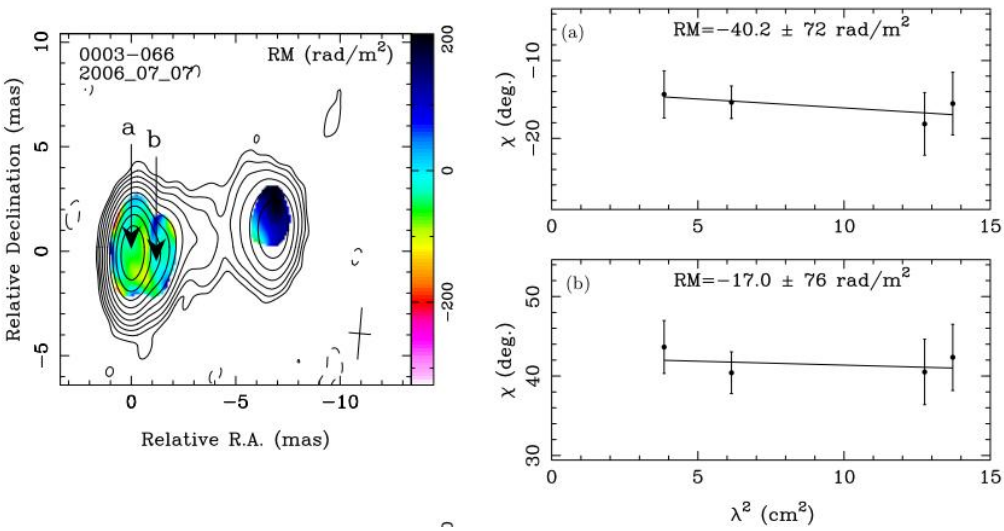
Optical ID	Cores	Jets
BL lacs(N=22)	4.3%	10.0%
Quasars(N=95)	1.7%	3.5%
Galaxies(N=7)	$< 0.3\%$	2.0%

Πίνακας 4.1: Ενδεικτικά ποσοστά πόλωσης για τα αναφερόμενα είδη πηγών, σε συχνότητα 15 GHz [39].

Σε συχνότητες της τάξης των δεκάδων GHz, οι πίδακες παρουσιάζουν οπτική διαφάνεια και μικρό ποσοστό στροφής, με αποτέλεσμα ο βαθμός πόλωσης να μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη της δομής του μαγνητικού πεδίου. Εάν το πεδίο στην πηγή ήταν ομογενές σε όλη την έκταση, ο προβλεπόμενος βαθμός πόλωσης για την οπτικά αραιή περιοχή, όταν δεν εμφανίζονται φαινόμενα αποπόλωσης, θα ήταν (βλ. κεφάλαιο 3.1) $\Pi_0 = (3a + 3)/(3a + 5)$, με a το φασματικό δείκτη της ακτινοβολίας. Για μια τυπική τιμή $a = 0.5$ η τιμή αυτή θα είναι ~ 0.69. Η απουσία παρατηρήσεων τόσο μεγάλων ποσοστών αποδίδεται στην έλλειψη ενός τέλεια ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Για παράδειγμα, αν στο ομογενές πεδίο (έστω ότι αυτό βρίσκεται στην κατεύθυνση του άξονα του πίδακα) προστεθεί μία ισοτροπική τυχαία συνιστώσα B_r τότε το ποσοστό πόλωσης θα είναι $\frac{\Pi}{\Pi_0} = \frac{3\xi^2 \sin^2\theta'}{2+3\xi^2 \sin^2\theta'}$, όπου $\xi = B_{un}/B_r$ και θ' η γωνία μεταξύ του άξονα του πίδακα και του παρατηρητή στο σύστημα ηρεμίας της ροής [39]. Προφανώς όταν στο σύστημα υπάρχουν συνθήκες οπτικής (όπου για $\tau >> 1 \overset{a\sim 0.5}{\Rightarrow} \Pi \simeq 0.1 - 0.12$) και Faraday αδιαφάνειας, τότε η αποπόλωση αναμένεται να είναι ισχυρότερη.

Μετρήσεις της στροφής Faraday

Στο κεφάλαιο 3.1.3 παρουσιάστηκε αναλυτικά το φαινόμενο Faraday, το οποίο προκαλείται από την παρουσία μαγνητισμένου πλάσματος και στην κλασική περίπτωση εξαρτάται από την πυκνότητα, την παράλληλη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου στην ευθεία διάδοσης και την απόσταση που έχει διανύσει το φως στο μέσο (σχέση 3.45). Στην περίπτωση των αστροφυσικών πιδάκων των AGNs, το πλάσμα αυτό μπορεί να αναφέρεται είτε στο ίδιο το υλικό του πίδακα, είτε σε



Σχήμα 4.7: Ο χάρτης RM (δεξιά) για την πηγή 0003-066 και τα διαγράμματα $\chi - \lambda^2$ για τις δύο θέσεις a και b [40].

εξωτερικές πηγές κοντά ή μακριά από αυτόν. Η ποσότητα που χρησιμοποιείται σε παρατηρησιακές μελέτες προκειμένου να περιγράψει τη μεταβολή της διεύθυνσης πόλωσης είναι το μέτρο στροφής (RM), $\chi_{obs} = \chi_0 + RM\lambda^2$, με τη γραμμική εξάρτηση της γωνίας από το λ^2 να αποτελεί χαρακτηριστική υπογραφή του φαινομένου. Ο προσδιορισμός του μέτρου στροφής πραγματοποιείται με την ταυτόχρονη παρατήρηση του διανύσματος πόλωσης σε πολλές συχνότητες, όπου σε ένα διάγραμμα $\chi = \chi(\lambda^2)$ προσδιορίζεται από την κλίση της ευθείας που περιγράφει τα σημεία των μετρήσεων. Ένα τέτοιο παράδειγμα προσδιορισμού του RM φαίνεται στο σχήμα 4.7, που υπολογίζεται για τα δύο σημεία που υποδεικνύονται στο χάρτη της πηγής $0003 - 006$. Οι συστηματικές μετρήσεις του RM ξεκίνησαν από τους Zavala και Taylor, ενώ μέσω του προγράμματος mojave μελετήθηκε για ένα μεγάλο δείγμα πηγών, η επίδραση της στροφής Faraday στο ηλεκτρικό διάνυσμα που παρατηρείται στα 15 GHz.

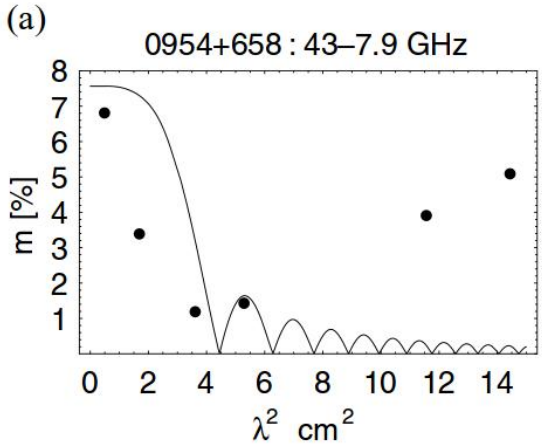
Πιθανές εξωτερικές πηγές στροφής, αποτελούν περιοχές ιονισμένου αερίου κοντά στον πίδακα, όπως οι περιοχές "πλατιών" και "λεπτών" γραμμών εκπομπής, καθώς και πιο απομακρισμένες από τη ραδιοπηγή, περιοχές, όπως το ενδογαλαξιακό μέσο και το ενδοαστρικό μέσο του Γαλαξία. Η επίδραση στην διεύθυνση της ακτινοβολίας των απομακρυσμένων περιοχών, αναμένεται να παρουσιάζει ομογένεια σε όλη την προβαλλόμενη έκταση της πηγής στο επίπεδο του ουρανού [Pushkarev 2001]. Συνεπώς, μεγάλες χωρικές αποκλίσεις στις τιμές των RM υποδεικνύουν ότι το φαινόμενο λαμβάνει χώρα κοντά στην πηγή. Τέτοιες μεγάλες διαφορές, από 1000 $rad\ m^{-2}$ σε λίγες εκατοντάδες, παρατηρούνται μεταξύ των ραδιοπυρήνων και των πιδάκων δηλαδή σε απόσταση μερικών mas.

Σημαντική επίδραση, ωστόσο, στην τελική διεύθυνση του παρατηρούμενου ηλεκτρικού πεδίου, μπορεί να έχει και το πλάσμα του ίδιου του πίδακα. Στην περίπτωση αυτή, το φαινόμενο μπορεί να λαμβάνει χώρα στις ίδιες περιοχές όπου η ακτινοβολία παράγεται και απορροφάται, προκαλώντας εσωτερική στροφή Faraday. Η συνθήκη αυτή προϋποθέτει είτε την ύπαρξη μιας θερμικής συνιστώσας στην ίδια περιοχή με το πλάσμα που εκπέμπει, είτε ότι το μη θερμικό σχετικιστικό πλάσμα εκτείνεται σε αρκετά χαμηλές ενέργειες, που μπορούν να προκαλέσουν σημαντική στροφή στην παραγόμενη ακτινοβολία. Ένα βασικό χαρακτηριστικό της παραπάνω περίπτωσης, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως διαγνωστικό μέσο, είναι η αποπόλωση (βλ. κεφάλαιο 3.1.4). Συγκεκριμένα για στροφές μεγαλύτερες από 45°, η προκαλούμενη μείωση του βαθμού πόλωσης θα ήταν ιδιαίτερα έντονη. Έλλειψη παρατηρήσεων μιας τέτοιας μείωσης, μπορεί να υποδεικνύει ότι η στροφή γίνεται

εκτός της περιοχής εκπομπής και σχετίζεται με τα εξωτερικά, λιγότερο σχετικιστικά, στρώματα του πίδακα.

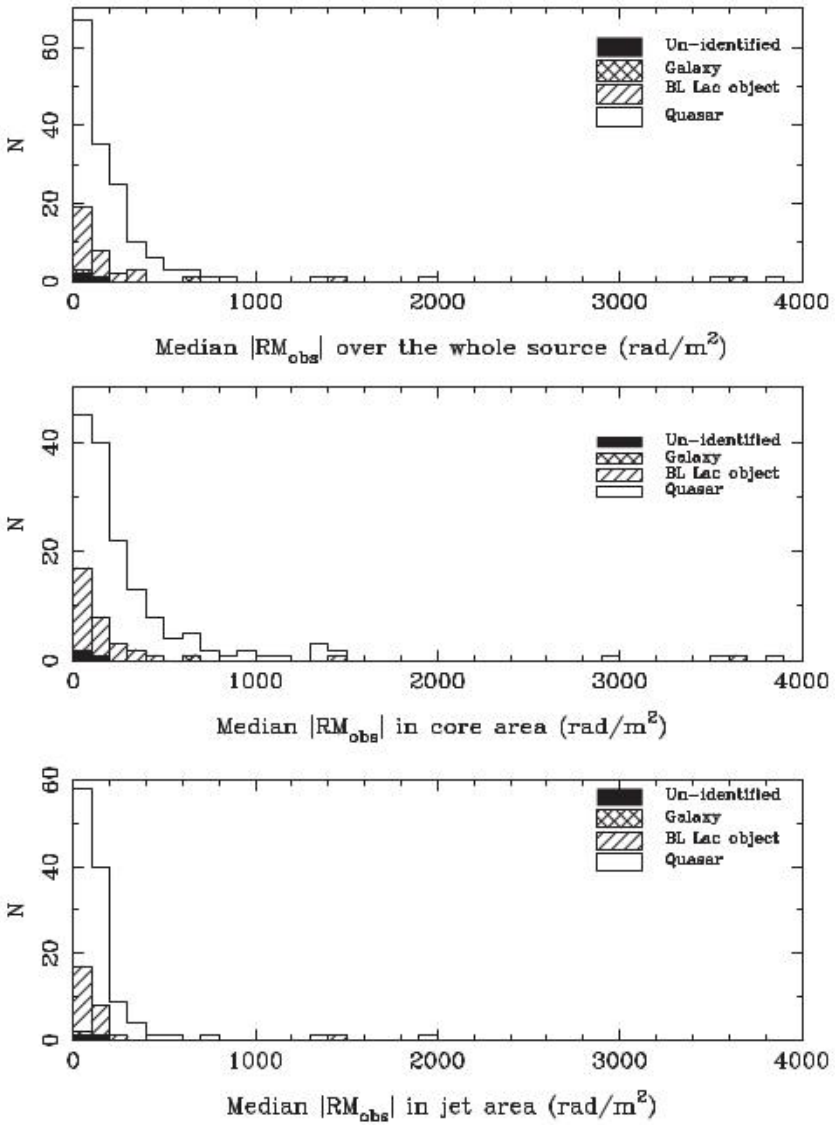
Γενικά χαρακτηριστικά του RM

Στα ιστογράμματα του σχήματος 4.8, δίνεται η διάμεσος των τιμών RM για ένα δείγμα 159 πηγών, στις οποίες η πόλωση ήταν αρκετά ισχυρή ώστε να μετρηθεί η στροφή. Η πλειοψηφία των πηγών έχει τιμές RM μικρότερες από 1000 $rad\ m^{-2}$, ωστόσο υπάρχουν περιπτώσεις που φτάνουν τα $\sim 6000\ rad\ m^{-2}$, με την υψηλότερη αλλά αβέβαιη μέτρηση να φτάνει τα $\sim 6457\ rad\ m^{-2}$ για την πηγή $2008-159$. Είναι εμφανές επίσης, ότι η πλειοψηφία των πυρήνων παραουσιάζει γενικά μεγαλύτερες τιμές ($\sim 187\ rad\ m^{-2}$) από αυτή των πιδάκων ($\sim 102\ rad\ m^{-2}$), ενώ η κατανομή τους εκτείνεται αριστερότερα. Ως προς το είδος των πηγών, τα RM των quasars είναι μεγαλύτερα ($\sim 144\ rad\ m^{-2}$) σε σχέση με αυτά των BL Lac αντικειμένων ($\sim 79\ rad\ m^{-2}$), με τις πηγές τους να είναι αυτές που καταλαμβάνουν τις ακραίες τιμές της κατανομής. Στο σύστημα των πηγών, λόγω της μεγαλύτερης ερυθρομετατόπισης που έχουν οι quasars του δείγματος σε σχέσει με τα BL Lac αντικείμενα, η διαφορά αυτή θα είναι μεγαλύτερη καθώς η διόρθωση του RM δίνεται από $RM_{int} = (1+z)^2 RM_{obs}$.



Σχήμα 4.9: Το ποσοστό πόλωσης για την αναγραφόμενη πηγή συναρτήσει της συχνότητας [30].

Επιπλέον, η τιμή του RM των πυρήνων φαίνεται ότι μεγαλώνει με την αύξηση των συχνοτήτων. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να εξηγηθεί μέσω της αδιαφάνειας του ραδιοπυρήνα. Όσο αυξάνεται η συχνότητα και μειώνεται ο συντελεστής απορρόφησης, τόσο οι παρατηρήσεις εισχωρούν σε πιο εσωτερικές περιοχές καθώς μετακινείται η επιφάνεια μοναδιαίου οπτικού βάθους ($\tau \sim 1$). Στις πιο κεντρικές περιοχές η πυκνότητα και το μαγνητικό πεδίο αναμένεται να είναι ισχυρότερα και συνεπώς το φαινόμενο Faraday πιο έντονο, οδηγώντας σε μεγάλες τιμές RM. Η εξάρτησή του από την συχνότητα δίνεται από την σχέση $|RM_{core} \propto \nu^a|$ [Jorstad et al. 2007], με τον εκθέτη a να περιγράφει την εξάρτηση της πυκνότητας από την απόσταση $n_e \propto r^{-a}$. Στον πίνακα 4.10 παρουσιάζονται τα μέτρα στροφής του ραδιοπυρήνα για έξι AGNs [30], σε τρία διαστήματα συχνοτήτων όπου και φαίνεται έντονα η παραπάνω αύξηση, ενώ υπολογίζεται και ο δείκτης a. Στον πίνακα αναγράφεται επίσης ο μετρούμενος βαθμός πόλωσης, όπου και φαίνεται ότι παρουσιάζει μειώση με την αύξηση της συχνότητας για μερικές πηγές, ενώ σε ορισμένες περιπτώσεις η τιμή που έχει στις υψηλές συχνότητες, μειώνεται στο εύρος των μεσαίων συχνοτήτων για να αυξηθεί ξανά στις χαμηλές. Μια πρώτη προσπάθεια για την εξήγηση της συμπεριφοράς αυτής είναι η σύγκριση με την προβλεπόμενη συμπεριφορά λόγω αποπόλωσης. Στο σχήμα (4.9), φαίνονται οι μετρήσεις



Σχήμα 4.8: Κατανομή της διαμέσου του $|RM|$ για ένα δείγμα 159 πηγών, συνολικά για την πηγή (πάνω εικόνα), για τη συνιστώσα του πυρήνα (μεσαία εικόνα) και για τη συνιστώσα του πίδακα (κάτω εικόνα). Από την κατανομή έχουν παραληφθεί οι δύο ακραίες τιμές ($> 6457\ rad\ m^{-2}$) [40]].

Source	RM_{core} (Low ν range)	m_{core} (4.6 GHz) (per cent)	RM_{core} (Mid ν range)	m_{core} (7.9 GHz) (per cent)	RM_{core} (High ν range)	m_{core} (15.4 GHz) (per cent)	a ($\lvert RM_{core}\rvert \propto \nu^a$)
0954+658	$+33 \pm 14$	7.2	-88 ± 23	5.1	-1591 ± 265	1.2	3.84 ± 1.34
1156+295	$+170 \pm 5$	2.6	$+618 \pm 91$	2.8	$+1667 \pm 159$	1.3	2.22 ± 0.05
1418+546	$+83 \pm 11$	4.3	-501 ± 48	3.4	–	1.8	3.32 ± 0.60
1749+096	–	3.3	–	2.9	–	3.3	–
2007+777	$+638 \pm 39$	2.8	–	1.4	$+1630 \pm 201$	5.7	0.91 ± 0.62
2200+420	-193 ± 29	1.3	$+240 \pm 90$	0.9	-1008 ± 43	3.6	1.40 ± 0.18

Σχήμα 4.10: Τα μέτρα στροφής RM του ραδιοπυρήνα σε τρία διαστήματα συχνοτήτων, $4.6 - 8.9GHz$, $7.9 - 15.4GHz$ και $15.4 - 43GHz$ αντίστοιχα. Το m_{core} αναφέρεται στο βαθμό πόλωσης στην αναγραφόμενη συχνότητα και ο δείκτης a στην εξάρτηση της μορφής νόμου δύναμης του RM από τη συχνότητα [30].

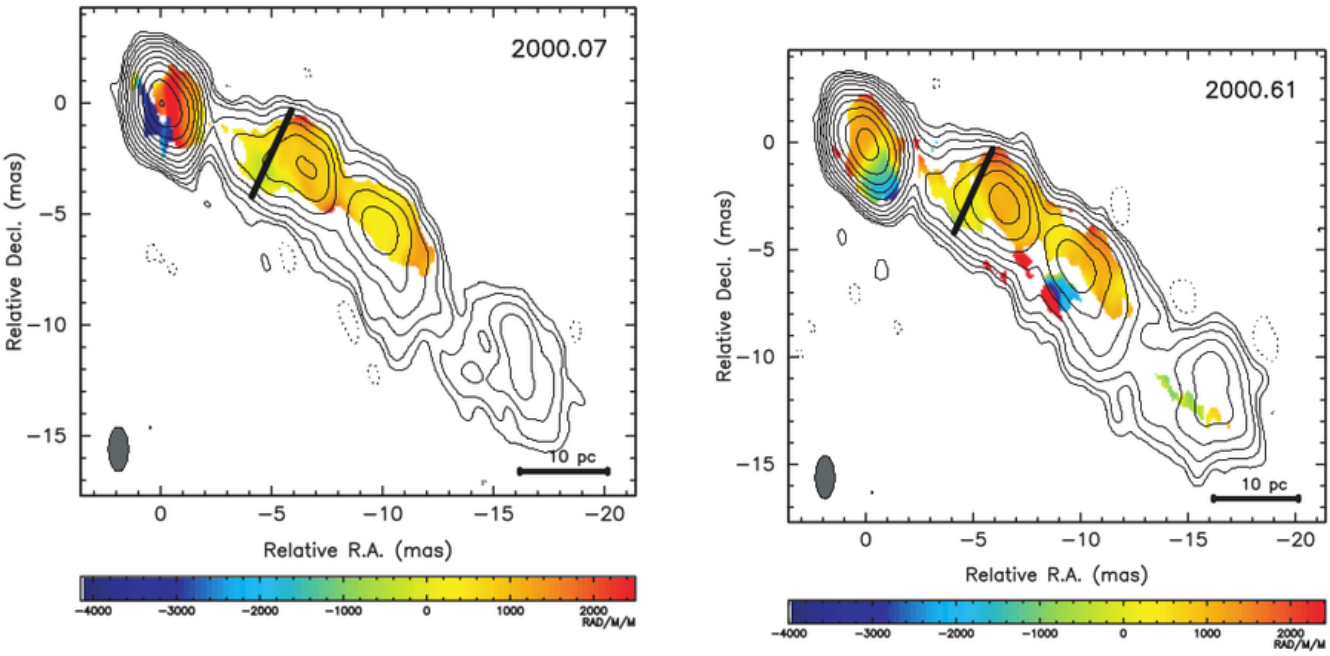
του βαθμού πόλωσης για τον blazar 0954+658, ενώ η καμπύλη δίνει τη σχέση $m = m_{max}\left|\frac{\sin(RM^2)}{RM^2}\right|$ που περιγράφει την αποπόλωση (βλ. 3.1.4). Αν και η πρώτη αύξηση ακολουθεί την καμπύλη, οι μετρήσεις στις μικρότερες συχνότητες αποκλίνουν σημαντικά. Η παραπάνω σχέση προϋποθέτει ομογενείς συνθήκες ενώ ισχύει για οπτικά αραιό μέσο που δεν αναποκρίνεται στην περίπτωση του ραδιοπυρήνα για μικρές συχνότητες.

Ένα, επίσης, χαρακτηριστηκό που παρατηρήθηκε σε μελέτες πηγών της κλίμακας των mas, για οποίες υπήρχαν διαθέσιμες παρατηρήσεις σε διάφορες χρονικές περιόδους, ήταν η παρουσία μεταβλητότητας σε χρονικές κλίμακες απο μήνες μέχρι έτη. Για παράδειγμα, ανάλυση των παρατηρήσεων που έγινε από τους Zavala & Taylor [41]] για το BL Lac αντικείμενο $3C273$, έδειξε σημαντικές μεταβολές στο RM του πυρήνα σε διάστημα έξι μηνών (σχήμα 4.11). Μια πιθανή εξήγηση που προτάθηκε ήταν η κίνηση σχετικιστικά κινούμενης συνιστώσας, της οποίας η πολωμένη ακτινοβολία περνά από ένα ανομοιογενές, εξωτερικό, ανεξάρτητο του πίδακα, μέσο που προκαλεί στροφή, όπως η περιοχή NLR. Αργότερα σε μελέτη των [Asada et. al.] [42], από παρατηρήσεις του VLBA το 2002, διαπιστώθηκε μεταβλητότητα της τάξης των ετών (7 έτη) στις τιμές RM για τη συνιστώσα του πίδακα, με το μέτρο να παρουσιάζει μείωση σε σχέση με παλαιότερες μετρήσεις. Οι ισόφωτες σε συνδυασμό με το χάρτη του RM για τις δύο εποχές φαίνονται στο σχήμα 4.12. Αντίθετα με πριν η χρονική αυτή μεταβλητότητα, που αφορά τον πίδακα, επιχειρηματολογήθηκε από τους παραπάνω, υπέρ της περίπτωσης όπου η στροφή οφείλεται σε πλάσμα που σχετίζεται με τον πίδακα. Αυτό καθώς, η χρονική κλίμακα των μεταβολών είναι πολύ μικρή σε σχέση με αυτή που θα παρουσίαζαν απομακρυσμένες πηγές μαγνητισμένου πλάσματος (όπως οι NLR). Χαρακτηριστικές ταχύτητες τέτοιων πηγών ($10^3 km\ s^{-1}$) δίνουν αμελητέες χωρικές αποκλίσεις ($\sim 0.004\ mas$) συγκριτικά με την έκταση του πίδακα για το χρονικό διάστημα των εφτά ετών που απέχουν οι παρατηρήσεις. Αντίστοιχα, οι χρόνοι διάδοσης πιθανών διαταραχών στην πυκνότητα και το μαγνητικό πεδίο, για χαρακτηριστικές συνθήκες πίεσης και ακτινοβολίας, θα ήταν πολύ μεγαλύτεροι.

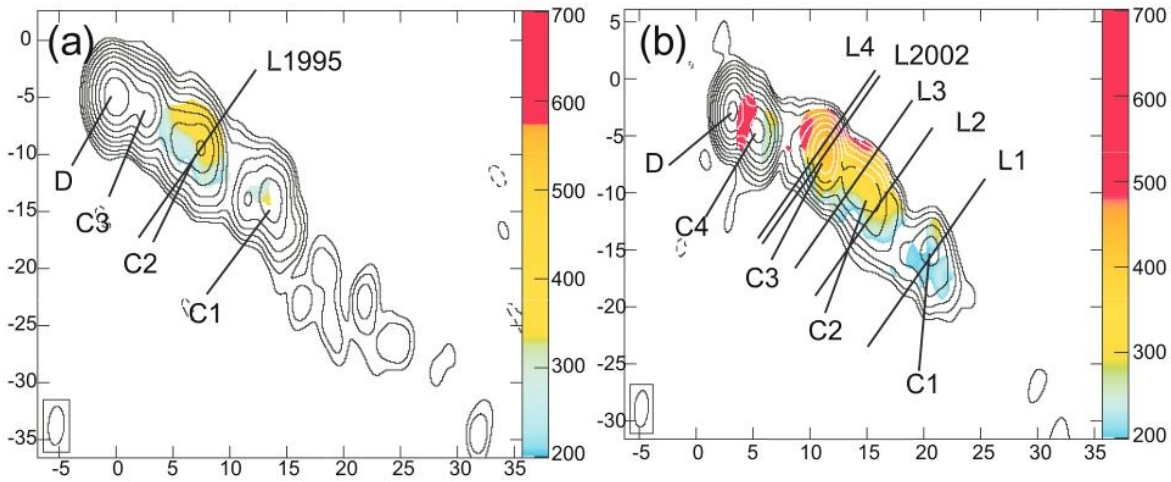
Διεύθυνση πόλωσης και μαγνητικό πεδίο

Για να μπορέσει να συνδεθεί η παρατηρούμενη διεύθυνση πόλωσης με την ακτινοβολία σύγχροτρον και μέσω αυτής με τη μαγνητική δομή του πίδακα θα πρέπει πρώτα να αφαιρεθεί οποιαδήποτε επίκτητη στροφή, είτε λόγω φαινομένου Faraday είτε ακόμα λόγω σχετικιστικών παραγόντων. Στην μελέτη των Hovatta et al. 2012 [40], το 80% των πηγών του δείγματος, παρουσίαζαν τιμές RM μικρότερες από 400 $rad\ m^{-2}$ με αποτέλεσμα η στροφή του $EVPA$ να είναι μικρότερη από 10°. Μια τέτοια αλλαγή δεν επηρεάζει πολύ το αποτέλεσμα. Σε περιπτώσεις ωστόσο, όπου το μέτρο στροφής είναι της τάξης των χιλιάδων $rad\ m^{-2}$, τότε η στροφή θα πρέπει να ληφθεί υπόψιν στο τελικό αποτέλεσμα.

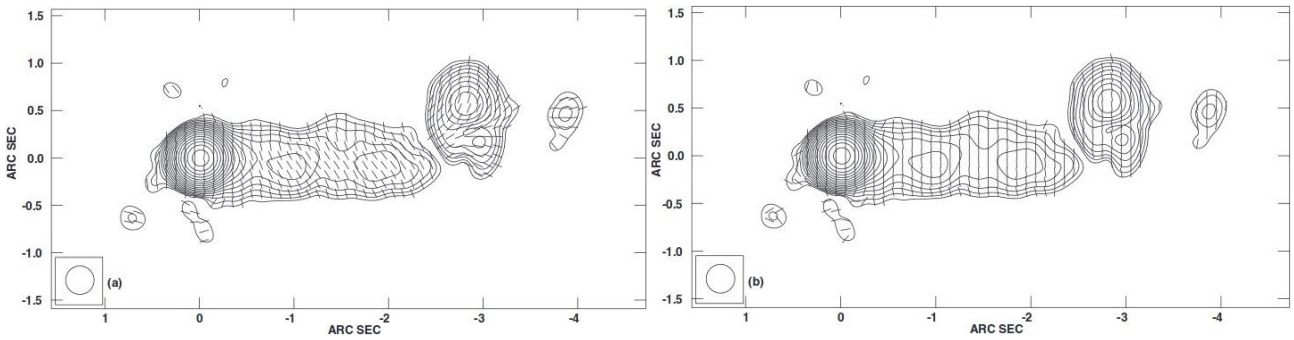
Μια γενική τάση που παρατηρείται ύστερα από τη διόρθωση Faraday είναι ότι τα διανύσματα



Σχήμα 4.11: Η εικόνα του RM (χρωματική κλίμακα) σε συνδυασμό με τις ισόφωτες της ολικής έντασης στα 12.1 GHz της πηγής $3C273$, για τις δύο εποχές 2000.07 και 2000.61 [41].



Σχήμα 4.12: Κατανομή της ολικής έντασης (ισόφωτες καμπύλες) σε συχνότητα 4.76 GHz για την πρώτη εποχή (αριστερή εικόνα) και $4,648$ GHz για τη δεύτερη (δεξιά εικόνα) καθώς και του μέτρου στροφής (χρωματικός δείκτης), για το BL Lac αντικείμενο $3C$ 273, όπως προβάλλεται στο επίπεδο του ουρανού [42].



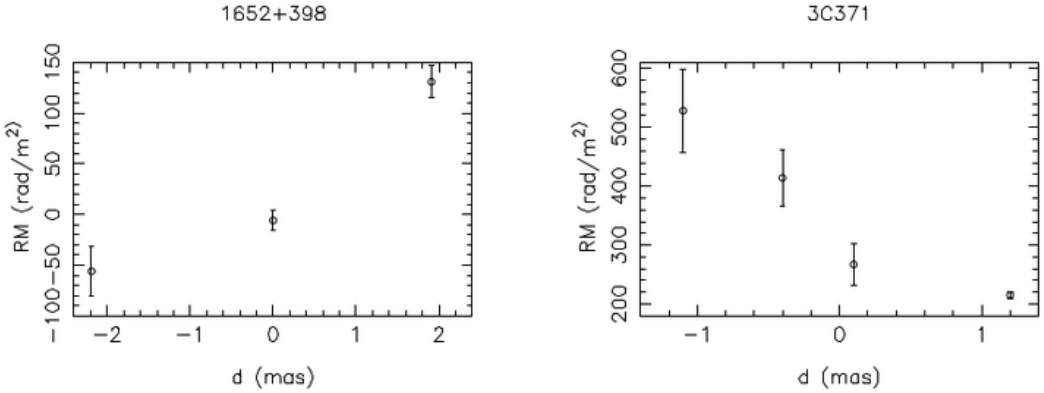
Σχήμα 4.13: Αριστερά ο χάρτης πόλωσης του quasar $3C345$ διορθωμένως από το RM και δεξιά η διαφορά στη διεύθυνση πόλωσης μεταξύ των 5 και $8GHz$, όπου οι κάθετες ευθείες υποδεικνύουν ότι δεν υπάρχει στοφή Faraday [44].

πόλωσης εμφανίζονται είτε ευθυγραμμισμένα είτε κάθετα στην προβολή του άξονα του πίδακα, με τη πρώτη περίπτωση να εντοπίζεται κυρίως στα BL Lac αντικείμενα και τη δεύτερη στους quasars. Η παρουσία παράλληλων $EVPA$ στη συνιστώσα των πιδάκων, εφόσον η εκπομπή στις κλίμακες αυτές ($\sim parsec$) είναι οπτικά αραιή, συνδέεται με ένα κάθετο, στον άξονα, μαγνητικό πεδίο. Οι δύο βασικές εικόνες [43] για την ύπαρξη της κυρίαρχης αυτής κάθετης συνιστώσας είναι πρώτον η ενίσχυση του μαγνητικού πεδίου, λόγω διάδοσης ωστικών κυμάτων, στο επίπεδο συμπίεσης και δεύτερον η ύπαρξη ελικοειδούς μαγνητικής δομής. Στην πιο απλή περίπτωση μαγνητικής δομής, με κυλινδρική συμμετρία, ο προσανατολισμός του $EVPA$ αναμένεται να είναι είτε κατά μήκος του άξονα είτε κάθετα σε αυτόν, ακολουθώντας την προηγούμενη τάση. Γεωμετρικές και σχετικιστικές εξαρτήσεις στο παραπάνω μοντέλο μπορούν να οδηγήσουν στην ονομαζόμενη spine-sheath δομή, όπου το $EVPA$ εμφανίζεται κατά μήκος του άξονα στις κεντρικές περιοχές και κάθετα σε αυτόν στις εξωτερικές[1] (βλ. κεφάλαιο 5.2.1). Παράλληλα, η πλειοψηφία των σύγχρονων μοντέλων για τη δημιουργία των πιδάκων προβλέπει τη συνθήκη ενός καλά οργανωμένου μαγνητικού πεδίου, που διατηρεί τη δομή του σε μεγάλες κλίμακες κατά μήκος του πίδακα. Συνεπώς η εμφάνιση διατήρησης της ευθυγράμμισης σε όλη την έκταση του πίδακα, θα μπορούσε να ενισχύσει την υπόθεση μιας τέτοιας δομής [43]. Υπάρχουν, ωστόσο, περιπτώσεις στις οποίες ο χάρτης πόλωσης παρουσιάζει μεγαλύτερη πολυπλοκότητα. Μια τέτοια πηγή αποτελεί και ο kpc quasar $3C345$ στον οποίο η διορθωμένη, από το φαινόμενο Faraday, πόλωση φαίνεται ¨τυλίγεται' γύρω από τον άξονα. Ο χάρτης πόλωσης και η διαφορά μεταξύ των διευθύνσεων στα 5 και $8GHz$ δίνεται στο σχήμα 4.13.

Μια ακόμη ένδειξη για ελικοειδή μαγνητική δομή, με την προϋπόθεση ότι το φαινόμενο Faraday συμβαίνει στη δομή του πίδακα, είναι η ύπαρξη βαθμίδας RM κατά μήκος της διατομής του, η οποία αναμένεται λόγω της συστηματικής μεταβολής της συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου στην ευθεία παρατήρησης[2]. Ένα παράδειγμα εύρεσης του RM και της μεταβολής του κάθετα στον άξονα δίνεται στο σχήμα 4.15. Η θεωρητική αυτή σύνδεση δόθηκε από τον [Blandford 1993], οδηγώντας σε μια σειρά από μελέτες αφιερωμένες στην εύρεση τέτοιων βαθμίδων, σε ορισμένες από τις οποίες έχει δωθεί ιδιαίτερη έμφαση στις επιδράσεις των σφαλμάτων μέτρησης [40]. Στην απλή περίπτωση της αξισυμμετρίας, το κάθετο προφίλ του RM αναμένεται να είναι συμμετρικό και γραμμικό. Παράλληλα, η τιμή του μπορεί να αλλάζει ή όχι πρόσημο ανάλογα με τη σχέση μεταξύ της γωνίας παρατήρησης και της γωνίας της έλικας (βλ. κεφάλαιο 5.2.1). Δύο παραδείγματα περι-

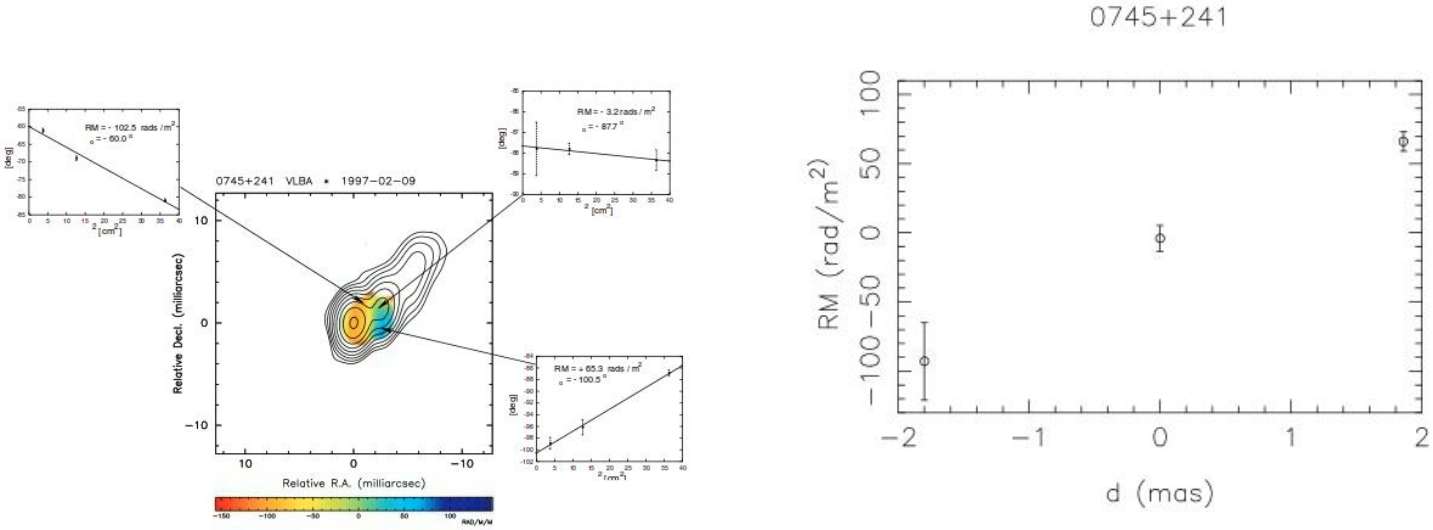
[1] Το φαινόμενο αυτό έχει προταθεί και με την περίπτωση πολλαπλών ωστικών κυμάτων κατά μήκος του πίδακα σε συνδυασμό με αλληλεπίδραση με το περιβάλλον μέσο.

[2] Παρουσία, ωστόσο, τέτοιων μεταβολών στο RM κέθετα στον πίδακα είναι πιθανόν να προκαλούνται τυχαία και από πλάσμα που δεν σχετίζεται με αυτόν.



Σχήμα 4.14: Μετρούμενη βαθμίδα για τις πηγές $1652+398$ και $3C271$ αντίστοιχα [43].

πτώσεων που εμφανίζουν τις παραπάνω συμπεριφορές δίνονται στο σχήμα 4.14. Με την εισαγωγή των σχετικιστικών διορθώσεων για την κίνηση του πλάσματος, η παραπάνω εικόνα μεταβάλλεται, τόσο με τη μείωση του RM στο σύστημα του παρατηρητή για την περίπτωση κίνησης κατά μήκος του άξονα [45] όσο και με την εμφάνιση ασυμμετριών στα προφίλ των RM, σε περιπτώσεις ελικοειδούς κίνησης[29].



Σχήμα 4.15: Αριστερά: Οι χάρτες της έντασης I και του RM, σε κλίμακες parsec, στα 6 cm από το VLBI για το BL Lac αντικείμενο $0745+241$. Οι μικρές εικόνες δείχνουν τα διαγράμματα της γωνίας χ συναρτήσει του λ^2, στις θέσεις που υποδεικνύουν τα βέλη [43]. Δεξιά: Οι παρατηρούμενες τιμές του RM κατά μήκος της διατομής του πίδακα με τα υπολογιζόμενα σφάλματα.

Κεφάλαιο 5

Προσεγγιστικά μοντέλα ακτινοβολίας από σχετικιστικούς πίδακες

Έχοντας, λοιπόν, κανείς τα θεωρητικά εργαλεία και τις παρατηρήσεις, μπορεί να κατασκευάσει μοντέλα ακτινοβολίας πιδάκων προκειμένου να εξηγήσει τα βασικά χαρακτηριστικά που εμφανίζονται. Η πρώτη υπόθεση που καλούμαστε να κάνουμε για το εκάστοτε μοντέλο είναι το πλαίσιο στο οποίο θα επιλέξουμε να μελετήσουμε την πηγή. Οι δύο βασικές θεωρήσεις αναφέρονται πρώτον στην εικόνα του πίδακα ως μια συνεχή ροή με τη μελέτη να γίνεται σε καθορισμένα όρια στο επίπεδο του ουρανού που δεν εξαρτώνται από την ταχύτητα της ροής και δεύτερον στη μελέτη θυλάκων πλάσματος των οποίων τα όρια ορίζονται στο σύστημα του ρευστού και συνεπώς το μέγεθός τους στο σύστημα του παρατηρητή εξαρτάται από σχετικιστικούς παράγοντες. Παρακάτω θα μελετήσουμε τις περιπτώσεις αυτές υιοθετώντας συγχρόνως την εικόνα μιας καλά οργανωμένης σε μεγάλη κλίμακα μαγνητικής δομής.

5.1 Φαινόμενη τροχιά και ακτινοβολία από κινούμενο θύλακα πλάσματος

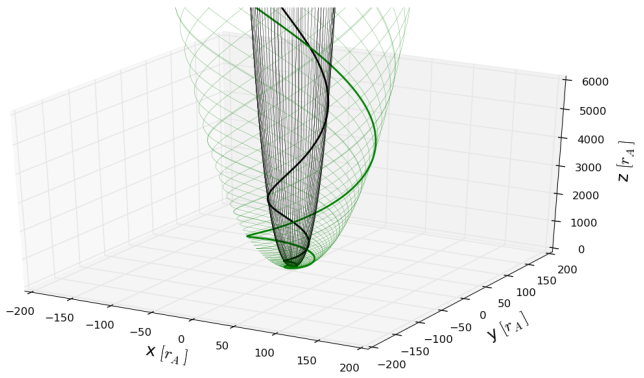
Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάστηκαν περιπτώσεις πηγών που εμφανίζουν διάκριτες συνιστώσες οι οποίες φαίνεται να κινούνται σχετικιστικά κατά μήκος ελικοειδών τροχιών, με χαρακτηριστικό παράδειγμα τον Blazar 3C345. Στο υποκεφάλαιο αυτό αποδίδουμε τη συμπεριφορά αυτή σε θύλακα πλάσματος που κινείται κατά μήκος των γραμμών ροής που προκύπτουν από το μοντέλο ακτινικής αυτοομοιότητας. Οι αρχικές συνθήκες που έχουν επιλεγεί για τις λύσεις δίνονται στο κεφάλαιο 2.4, όπου παρατίθενται και τα διαγράμματα των φυσικών ποσοτήτων κατά μήκος της δεδομένης δυναμικής γραμμής A.

5.1.1 Φαινόμενη κίνηση

Από την ολοκλήρωση των εξισώσεων 2.15-2.19, προκύπτει η κυλινδρική ακτίνα συναρτήσει της πολικής γωνίας θ. Ο προσδιορισμός των συντεταγμένων, ωστόσο, για την πλήρη περιγραφή της τροχιάς κατά μήκος μιας γραμμής ροής, απαιτεί τον υπολογισμό της γωνίας ϕ. Εξ ορισμού

$$V_\phi = r\sin\theta\frac{d\phi}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{V_\phi}{V_\theta} = \frac{r\sin\theta}{r}\frac{d\phi/dt}{d\theta/dt} \;\Rightarrow\; \frac{d\phi}{d\theta} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{V_\phi}{V_\theta},$$

όπου οι συνιστώσες της ταχύτητας δίνονται από τη σχέση 2.14, με τη V_θ να είναι $V_\theta = -V_p\sin(\theta - \vartheta)$, καθώς $\hat{b} = \frac{\vec{B}_p}{B_p} = \hat{r}\cos(\theta-\vartheta) - \hat{\theta}\sin(\theta-\vartheta)$. Ολοκληρώνοντας τη σχέση $\frac{d\phi}{d\theta}$, παράλληλα με



Σχήμα 5.1: Η τροχιά που ακολουθεί ο θύλακας (μαύρη καμύλη), σε κανονικοποιημένες αποστάσεις ακτίνας Alfvén . Η πράσινη καμπύλη αναφέρεται στη γραμμή ροής που προκύπτει από τις ίδιες αρχικές συνθήκες, σε πενταπλάσια ακτινική κλίμακα.

το προηγούμενο σύστημα, για κάθε αρχική συνθήκη ϕ_0, προκύπτουν οι αζιμουθιακές γωνίες ϕ συναρτήσει της γωνίας θ. Στο σχήμα 5.1 φαίνεται η φυσική τροχιά σε μονάδες ακτίνας Alfvén $[r_a]$ (εσωτερική τροχιά). Η εξωτερική τροχιά αναφέρεται στις ίδιες συνθήκες για μεγαλύτερη κλίμακα, η οποία λόγω αυτοομοιότητας θα έχει την ίδια μορφή.

Η παρατηρούμενη τροχιά, στην περίπτωση ιδανικής διακριτικής ικανότητας, προκύπτει από την προβολή της φυσικής τροχιάς στο επίπεδο του ουρανού. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ταυτίζουμε τον άξονα z με τον άξονα συμμετρίας του πίδακα και θεωρούμε ότι ο παρατηρητής βρίσκεται στο $x-z$ επίπδο. Αν Θ_{obs}, η γωνία που σχηματίζει ο άξονας του πίδακα με την ευθεία παρατήρησης $\hat{n}$, τότε το μοναδιαίο άνυσμα στην ευθεία παρατήρησης θα είναι $\hat{n} = \sin\Theta_{obs}\hat{x} + 0\hat{y} + \cos\Theta_{obs}\hat{z}$. Ως σύστημα αναφοράς στο επίπεδο του ουρανού ορίζουμε τη διεύθυνση της προβολής του άξονα του πίδακα, $\hat{n}_l = -\cos\Theta_{obs}\hat{x} + 0\hat{y} + \sin\Theta_{obs}\hat{z}$ και την κάθετη σε αυτήν και στο $\hat{n}$, $\hat{n}_r = \hat{n}_l \times \hat{n} = \hat{y}$. Λόγω αξισυμμετρίας του μοντέλου, κάθε γραμμή ροής θα είναι ισοδύναμη ανεξάρτητα της αρχικής γωνίας ϕ_0. Η μορφή της προβαλλόμενης τροχιάς, ωστόσο, θα εξαρτάται σημαντικά τόσο από την ϕ_0 όσο και από τη γωνία παρατήρησης Θ_{obs}.

Για $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{l} \approx \vec{R}_0$, όπου R_0 και l η θέση του παρατηρητή και του θύλακα αντίστοιχα από την αρχή των αξόνων, η γωνία μεταξύ της ταχύτητας και της ευθείας παρατήρησης θα είναι

$$\hat{n}\vec{V} = V\cos\theta_{obs} \;\Rightarrow\; \theta_{obs} = \cos^{-1}\left(\sin\Theta_{obs}\frac{V_x}{V} + \cos\Theta_{obs}\frac{V_z}{V}\right),$$

με $Vx = V_p\cos\psi\cos\phi$ και $V_z = V_p\sin\psi$. Συνεπώς για κάθε πολική γωνία θ της τροχιάς, μπορεί να υπολογιστεί ο παράγοντας Doppler μέσω της αλγεβρικής σχέσης

$$D = \frac{1}{\Gamma(1-\hat{n}\vec{\beta})} = \frac{1}{\Gamma[1-(\sin\Theta_{obs}\frac{V_x}{c} + \cos\Theta_{obs}\frac{V_z}{c})]}.$$

Καθώς οι λύσεις που παίρνουμε δίνονται συναρτήσει της πολικής γωνίας, μπορούμε να συνδέσουμε τη θέση του θύλακα με τη χρονική εξέλιξη της κίνησης μέσω της σχέσης

$$V_\theta = r\frac{d\theta}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dt}{d\theta} = \frac{\varpi}{\sin\theta}\frac{1}{V_\theta} = \frac{G}{\sin\theta}\frac{1}{V_\theta}$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στη μελέτη της υπέρφωτης κίνησης (βλ. κεφ. 1.1.1), λόγω σχετικιστικής ταχύτητας, ο χρόνος άφιξης της ακτινοβολίας από δύο θέσεις του θύλακα, σε ένα μακρινό

παρατηρητή θα διαφέρει από τον χρόνο εκπομπής . Αν θεωρήσουμε επίσης, ότι η πηγή βρίσκεται σε ερυθρομετατόπιση z, τότε ο χρόνος στο σύστημα του παρατηρητή συναρτήσει της θέσης στη τροχιά μπορεί να βρεθεί από

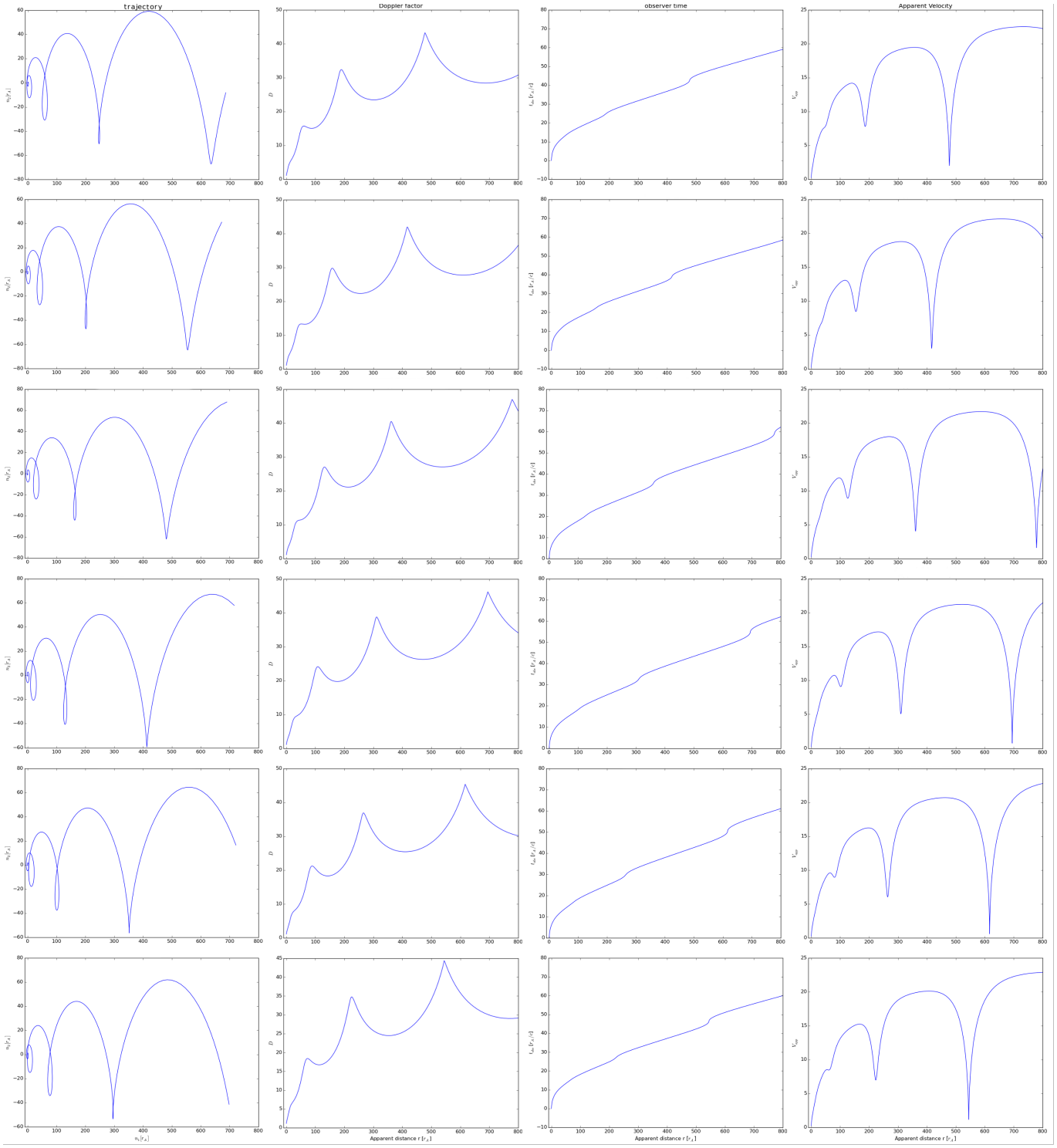
$$dt_{obs} = (1+z)(1-\beta\cos(\vec{V}\hat{n}))dt \;\Rightarrow\; \frac{dt_{obs}}{d\theta} = (1+z)\Gamma^{-1}D^{-1}\frac{dt}{d\theta} = (1+z)\Gamma^{-1}D^{-1}\frac{\varpi}{\sin\theta}\frac{1}{V_\theta}.$$

Λόγω της διαφοράς αυτής του χρόνου, η ταχύτητα που μετράται δεν ταυτίζεται με τη πραγματική. Η φαινόμενη ταχύτητα υπολογίζεται σύμφωνα με τη σχέση $V_{app} = \frac{1}{1+z}\Gamma DV\sin(\vec{V}\hat{n})$.

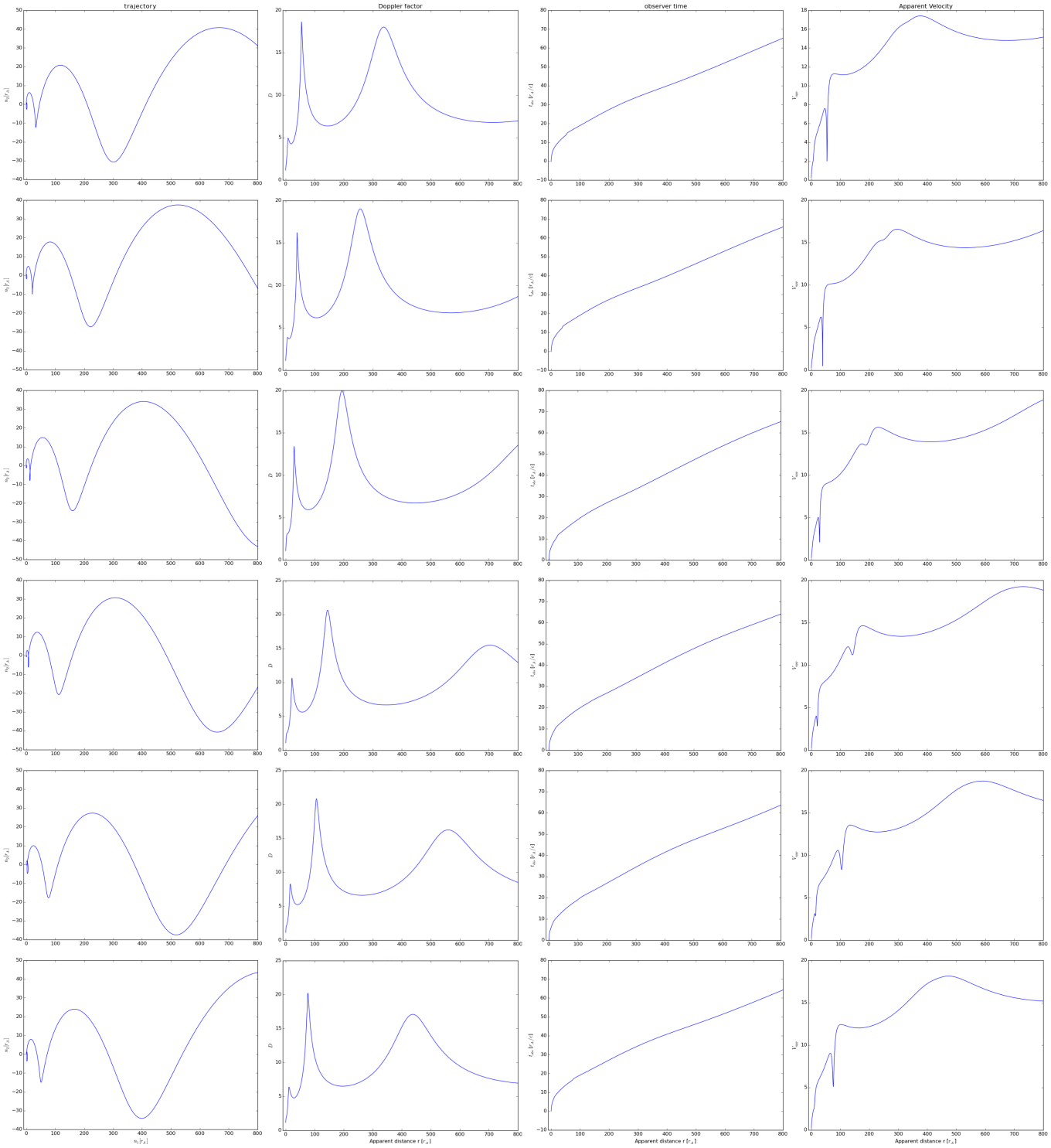
Στα σχήματα 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 , δίνονται οι φαινόμενες τροχιές σε μονάδες $[\varpi_A]$, ο παράγοντας Doppler, η φαινόμενη ταχύτητα σε μονάδες c και ο χρόνος που αντιστοιχεί στον παρατηρητή σε $[t] = \frac{\varpi_A}{c}$, συναρτήσει της προβαλλόμενης απόστασης, για διάφορες γωνίες Θ_{obs} και ϕ_0. Οι παραπάνω μονάδες απόστασης και χρόνου, για μια δεδομένη ακτίνα Alfven και γνωρίζοντας την απόσταση της πηγής [1] d_L , μπορούν να αντιστοιχηθούν σε milliarsecods. και πραγματικό παρατηρούμενο χρόνο, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι ο παράγοντας Doppler διαφέρει σημαντικά ανάλογα με την τροχιά και τη γωνία παρατήρησης. Η απόσταση των μεγίστων εξαρτάται από τη σχέση μεταξύ της πολοειδούς και αζιμουθιακής ταχύτητας. Σε μικρές αποστάσεις όπου αυτές είναι συγκρίσιμες τα μέγιστα, που παρουσιάζονται σε κάθε περιστροφή, θα εμφανίζονται πιο κοντά καθώς καλύπτεται μικρότερη προβαλλόμενη απόσταση από οτι σε υψηλότερα z όπου κυριαρχεί η πολοειδής συνιστώσα. Η παραπάνω σχέση των ταχυτήτων σε συνδυασμό με τη Θ_{obs} καθορίζει και τη μορφή των μεγίστων, όπου στα μικρά z οι μεταβολές στη γωνία μεταξύ της ταχύτητας και της ευθείας παρατήρησης είναι πιο έντονες (ειδικά για τα μεγαλύτερα Θ_{obs}), όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.6 , οδηγώντας σε απότομες αυξήσεις του παράγοντα, με το πλάτος να εξαρτάται από την Θ_{obs}. Σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις ($V_p >> V_\phi$) η διεύθυνση της ταχύτητας θα ταυτίζεται με την πολοειδή συνιστώσα. Συνεπώς, λόγω μεγάλης εστίασης, όπως φαίνεται και από το διάγραμμα της γωνίας ϑ, στις μεγάλες γωνίες παρατήρησης η γωνία θ_{obs} πλησιάζει τη γωνία Θ_{obs}. Στην περίπτωση $\Theta_{obs} = 1^o$, η σχετική γωνία είναι αρκετά μικρή σε όλο το μήκος το πίδακα και ο παράγοντας doppler μπορεί να φτάσει σε πολύ μεγάλες τιμές (ειδικά σε μεγάλες αποστάσεις που η διεύθυνση της ταχύτητας είναι προς στον άξονα και ο παράγοντας Lorentz έχει φτάσει σε μεγάλες τιμές).

Κανείς θα μπορούσε, έχοντας τα παραπάνω, να μελετήσει τις φαινόμενες τροχιές για συγκεκριμένες πηγές στις οποίες γνωρίζει την απόσταση λαμπρότητας d_L. Για παράδειγμα, στη γνωστή πηγή $3C345$ ($z = 0.593$), της οποίας η απόσταση υπολογίζεται $d_L = 3.47\ Gpc$ (για κοσμολογία $H_0 = 71\ km^{-1}Mpc^{-1},\ \Omega_M = 0.27$) με αντιστοιχία $6.64\ pc/mas$, μπορούμε εν μέρη να προσεγγίσουμε τη τροχιά της συνιστώσας $C10$, με $\Theta_{obs} = 10^o$ και $\phi_0 = 240^o$, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7.

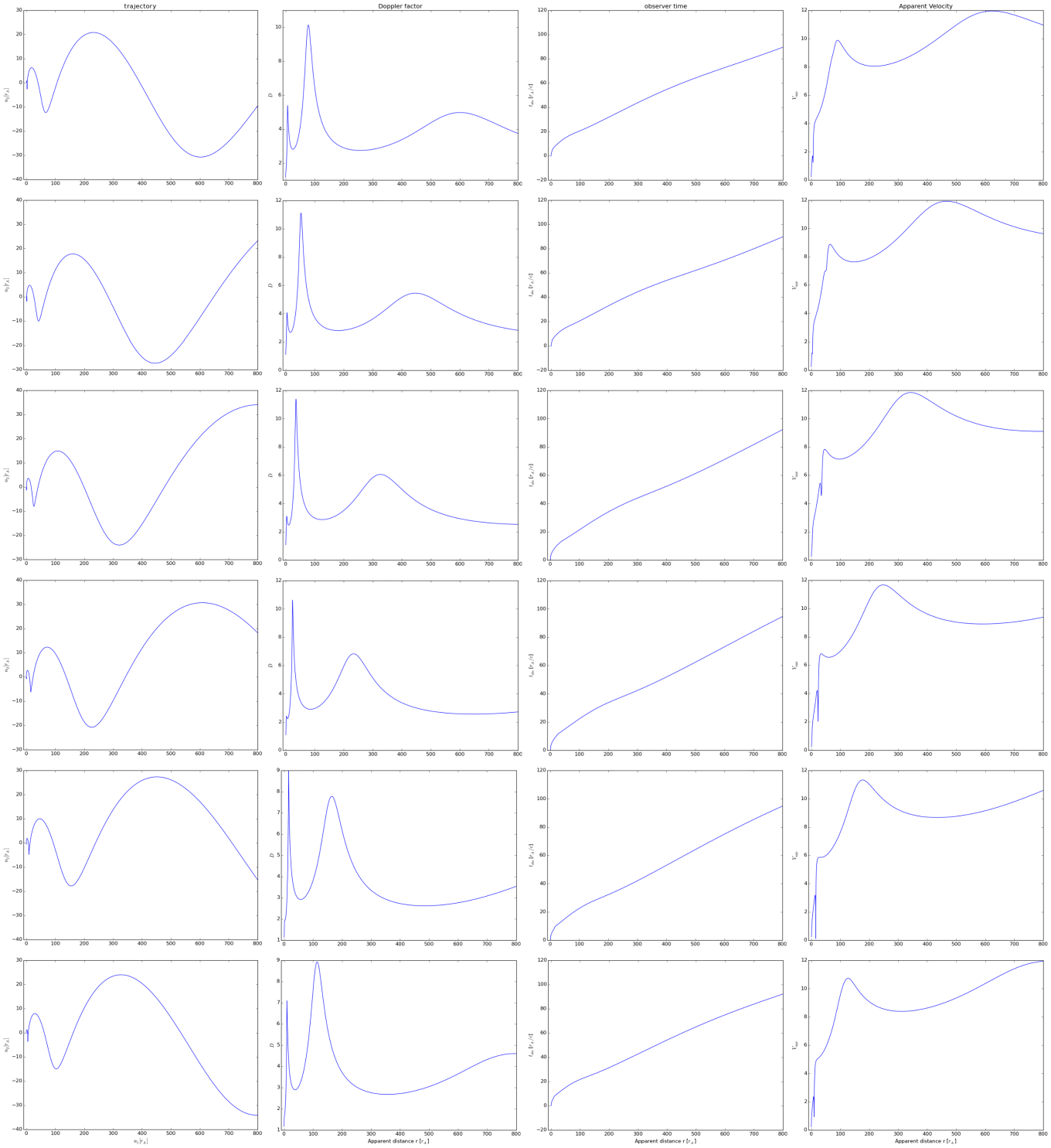
[1] Η απόσταση αυτή εξαρτάται από το κοσμολογικό μοντέλο. Παραδείγματος χάρη για μηδενική κοσμολογική σταθερά και σταθερά Hubble $H_0 = 75\ h\ km\ s^{-1}Mpc^{-1}$, προκύπτει $d_L = 2c[z+1-(z+1)^{1/2}]/H_0$ [Dermer 1997].



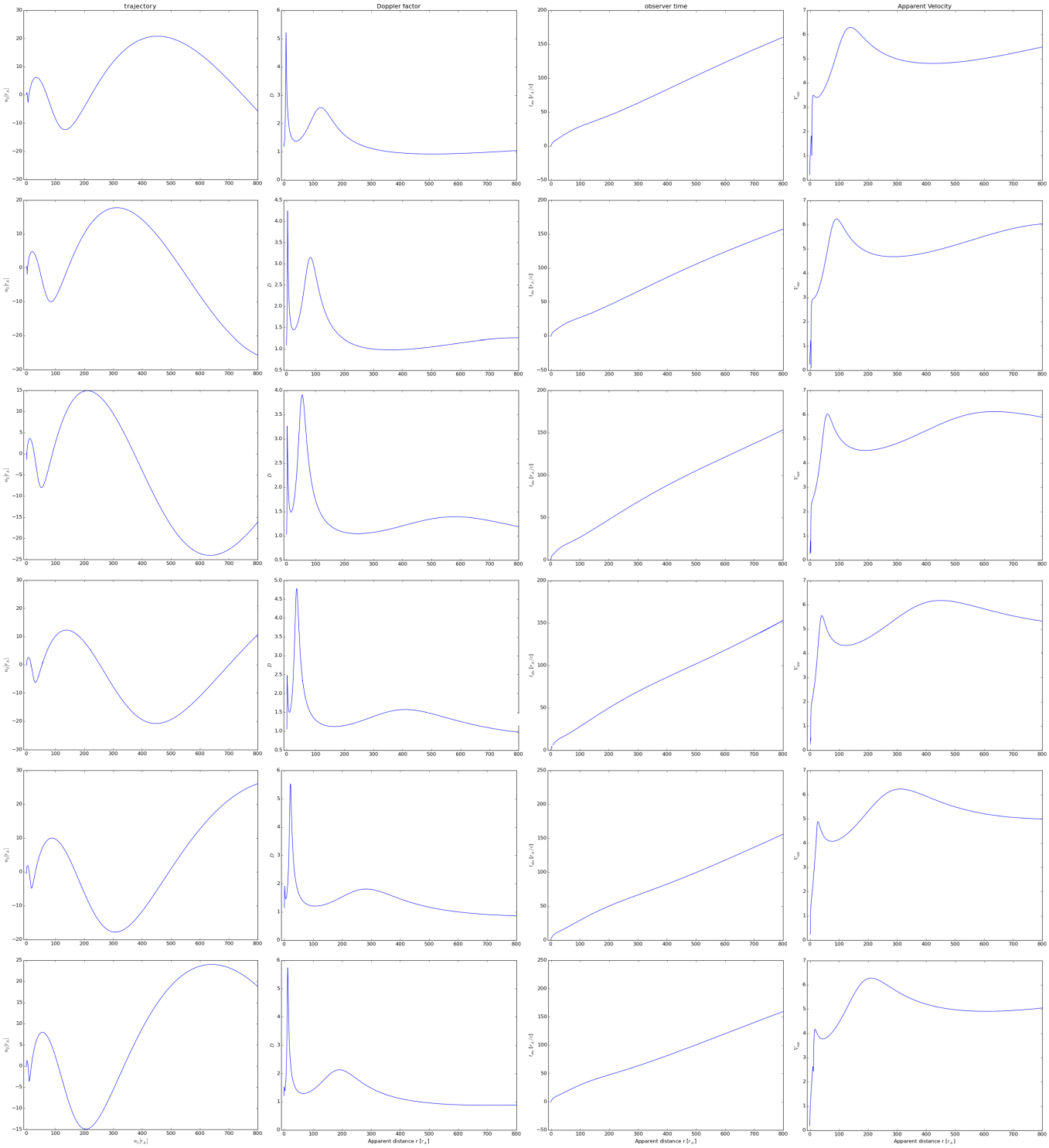
Σχήμα 5.2: Η φαινόμενη τροχιά, ο παράγοντας Doppler, ο παρατηρούμενος χρόνος και η φαινόμενη ταχύτητα στις αναγραφόμενες μονάδες, για $\Theta_{obs} = 1^o$ και γωνίες $\phi_0 = 0,\ 60,\ 120,\ 180,\ 240,\ 300^o$ από πάνω προς τα κάτω.



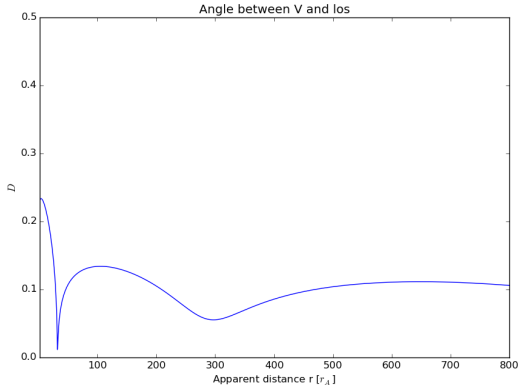
Σχήμα 5.3: Το ίδιο με πριν για $\Theta_{obs} = 5^o$



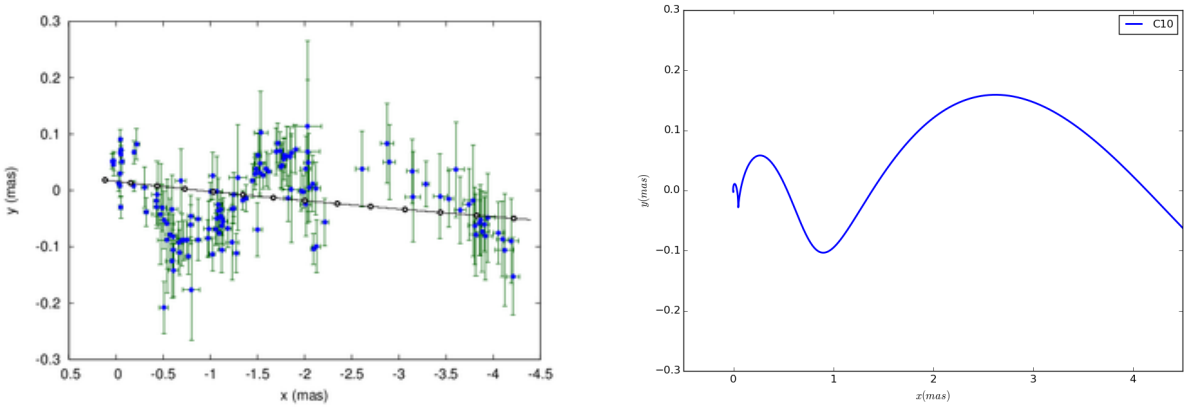
Σχήμα 5.4: Το ίδιο για $\Theta_{obs} = 10^o$



Σχήμα 5.5: Το ίδιο για $\Theta_{obs} = 20^o$



Σχήμα 5.6: ̂Γωνία μεταξύ της ταχύτητας και της ευθείας παρατήρησης για $\Theta_{obs} = 5^o$ και $\phi_0 = 0$.



Σχήμα 5.7: Προσέγγιση της τροχιάς της συνιστώσας $C10$ για $\Theta_{obs} = 5^o$ και $\phi_0 = 0^o$.

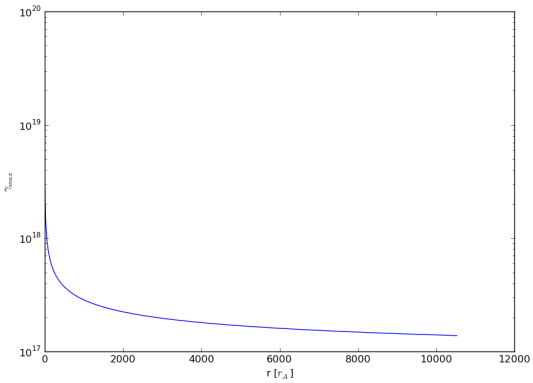
5.1.2 Ιδιότητες της ακτινοβολίας

Θεωρούμε ότι ο προηγούμενος θύλακας περιέχει μια ομογενή και ισοτροπική κατανομή ηλεκτρονίων, η οποία επιταχύνεται σε υψηλές ενέργειες από ανεξάρτητους μηχανισμούς, όπως αυτούς που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 1. Το τελικό ενεργειακό της φάσμα περιγράφεται από νόμο δύναμης της μορφής $N_E dE = N_0 E^{-p} dE$, που εκτείνεται μεταξύ των $E_1 < E < E_{max}$, και η οποία για λόγους απλότητας, θεωρούμε ότι διατηρείται σε όλη την κίνηση του θύλακα καθώς αγνοούμε την επίδραση των φαινομένων απώλειας ενέργειας[2]. Ο συντελεστής κανονικοποίησης N_0 υπολογίζεται θεωρώντας ότι η πυκνότητα της κατανομής αποτελεί ένα ποσοστό της πυκνότητας ροής που προβλέπεται από το μοντέλο του πίδακα[3], $C\rho_0 = m_p \int_{E_1}^{E_{max}} N_0 E^{-p} dE$. Αλλιώς, δεχόμενοι ότι η ενέργεια μιας αρχικά Poynting κυριαρχούμενης ροής μεταφέρεται στην ύλη οδηγώντας σε μια κατάσταση ισοκατανομής της ενέργειας, το N_0 θα μπορούσε να καθοριστεί με βάση την ενεργειακή και όχι αριθμητική πυκνότητα της ροής. Υποθέτουμε, επίσης, ότι στο κινούμενο σύστημα, ο θύλακας έχει σφαιρικό σχήμα και ότι η ακτίνα του R_{blob} , μεταβάλεται ανάλογα του $\rho_0^{-1/3}$ έτσι ώστε ο

[2]Μια πλήρης αντιμετώπιση της εξέλιξης της κατανομής, συμπεριλαμβανομένων των ενεργειακών απωλειών λόγω σύγχροτρον και αδιαβατικής εκτόνωσης, θα απαιτούσε τη χρήση κινητικών εξισώσεων, όπου η εξέλιξη στο χρόνο θα αντιστοιχούσε στη δυναμική εξέλιξη της κίνησης του θύλακα, γεγονός που περιπλέκει τους υπολογισμούς.

[3]Συγκεκριμένα για την κατανομή θεωρούμε την παράμετρο $C = 0.1$, τον φασματικό δείκτη $p = 2$ και τα ενεργειακά όρια της κατανομής να αντιστοιχούν σε παράγοντα Lorentz $\gamma_1 = 1$, $\gamma_{max} = 10^6$.

ολικός αριθμός των σωματιδίων να παραμένει σταθερός. Το γεγονός ότι δεν επιτρέπουμε τη διαφυγή σωματιδίων θέτει ένα άνω όριο στην ενέργεια των ηλεκτρονίων, προκειμένου η ακτίνα Larmor να είναι μικρότερη από της διαστάσεις του θύλακα $\Rightarrow$ $R_L = \frac{\gamma m_e v_\perp}{|e|B'} < R_{blob}$. Συνεπώς η μέγιστη ενέργεια των ηλεκτρονίων θα αντιστοιχεί περίπου ($v_\perp \simeq c$) σε $p\left(\frac{MeV}{c}\right) \approx 3 \times 10^{-4} B' R_{blob}(Gauss\ cm)$, δηλαδή σε παράγοντα Lorentz $\gamma \approx 5.87 \times 10^{-10} B' R_{blob}(Gauss\ cm)$. Η μεταβολή του γ_{max} κατά την κίνηση, για αρχική ακτίνα του θύλακα 1/50 της κυλινδρικής ακτίνας του πίδακα[4], δίνεται στο σχήμα 5.8. Επιπλέον, ως πρώτη προσέγγιση θεωρούμε ότι οι συνθήκες στην έκταση του θύλακα είναι ομογενείς. Αυτό προϋποθέτει ότι η ακτίνα του θα πρέπει να είναι αρκετά μικρή σε σχέση με την ακτίνα του πίδακα, ώστε να μπορεί να γίνει η υπόθεση ότι οι φυσικές ποσότητες (ταχύτητα, πυκνότητα, μαγνητικό πεδίο) της ροής δεν μεταβάλλονται σημαντικά. Θεωρούμε λοιπόν, μια αρχική ακτίνα $R_{blob,0}$ που ικανοποιεί την προσέγγιση αυτή, η οποία θα μεταβάλλεται ως $\rho_0^{-1/3}$ (στο σύστημα της ροής). Παράλληλα, η κυλινδρική ακτίνα της τροχιάς αλλάζει επίσης σαν $\rho_0^{-1/3}$ (βλ. κεφ. 2.4). Λόγω συστολής του μήκους η ακτίνα R_{blob} θα μειώνεται κατά $1/\Gamma$ παράλληλα στη ταχύτητα[5], με αποτέλεσμα να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η προσέγγιση ικανοποιείται καθόλη την τροχιά.



Σχήμα 5.8: Το όριο του γ_{max} της κατανομής, αν θεωρήσουμε ότι ο θύλακας εκτονώνεται σαν $\rho_0^{-1/3}$.

Η παραπάνω κατανομή, λόγω του μαγνητικού, πεδίου θα παράγει ακτινοβολία σύγχροτρον, τις ιδιότητες της οποίας θα μελετήσουμε χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις διάδοσης που παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 3. Λόγω της ελικοειδούς αυτής κίνησης και συνεπώς της μεταβολής του παράγοντα doppler, η ακτινοβολία θα εμφανίζεται έντονα ενισχυμένη όταν η ταχύτητα του θύλακα σχηματίζει μικρή γωνία με την ευθεία παρατήρησης και με μειωμένη ένταση όταν αυτός κινείται προς αντίθετη κατεύθυνση. Οι αυξομειώσεις αυτές θα μπορούσαν να παρατηρηθούν ως εκλάμψεις, οι οποίες στην ιδανική περίπτωση που η γεωμετρία του πίδακα ήταν κυλινδρική/κωνική και η ταχύτητα της ροής σταθερή, θα παρουσίαζαν περιοδικότητα/ημιπεριοδικότητα, οδηγώντας στο φαινόμενο "φάρου" (lighthouse effect) που προτάθηκε από τους [Camenzind 1992] . Στην πιο ρεαλιστική περίπτωση, ωστόσο, της δεδομένης τροχιάς το χρονικό προφίλ της εμφάνισης των μεγίστων δεν μπορεί να προβλεφθεί εύκολα και εξαρτάται τόσο από το σχήμα του πίδακα (παραβολοειδές αρχικά και ασυμπτωτικά κωνικό) και την ταχύτητα της ροής, όσο και από τις γωνίες ϕ_0 και Θ_{obs}. Η χρονική κλίμακα, ωστόσο, μπορεί να καθοριστεί από την ελεύθερη παράμετρο ϖ_A, έτσι ώστε να

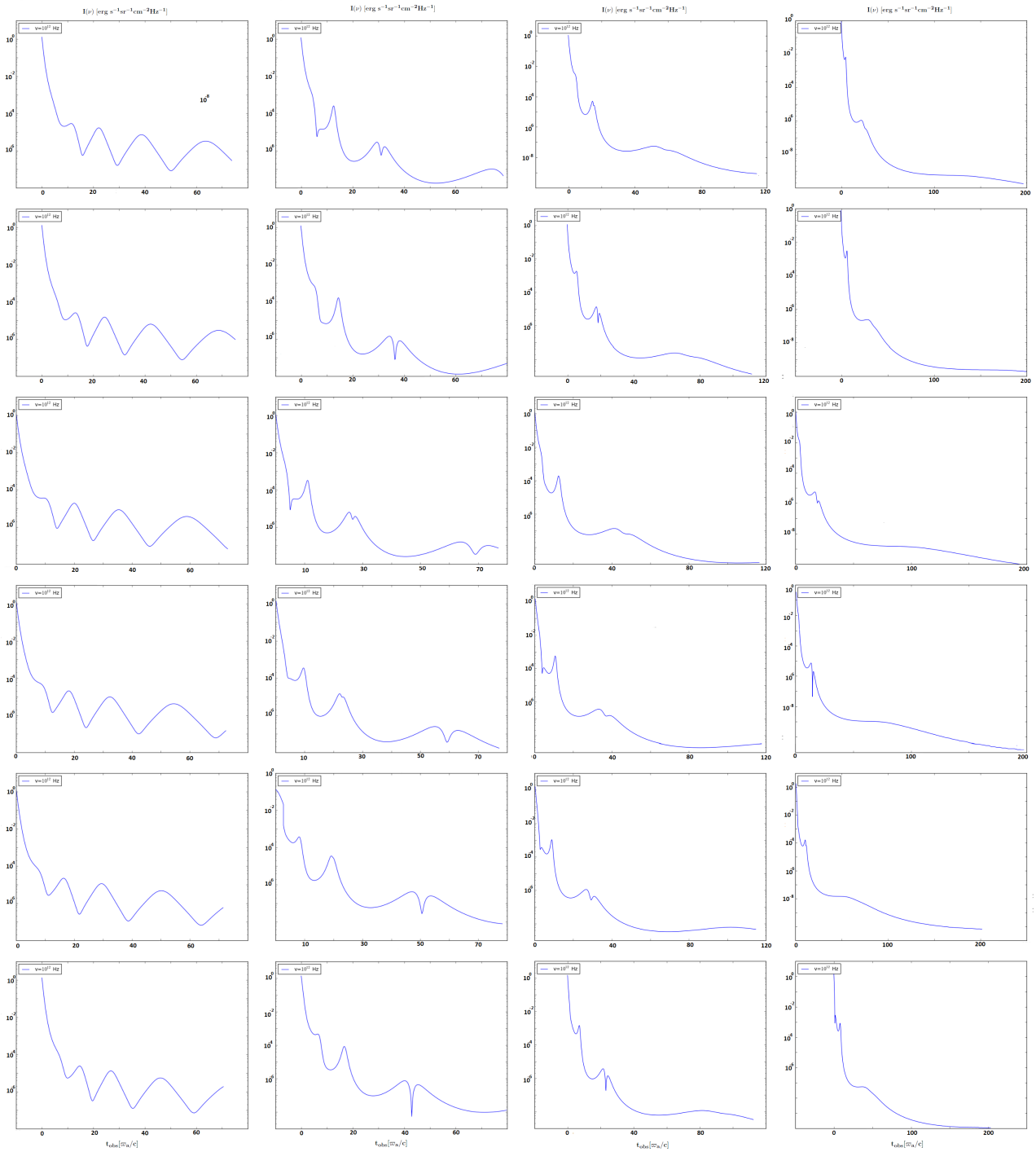
[4]Η αναλογία αυτή έχει επιλεγεί αυθαίρετα, χωρίς να ληφθεί υπόψιν η σχετική θέση του θύλακα σε σχέση με τη μελανανή οπή καθώς αρχικά μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε απλά τη μεταβολή της έντασης σχετικά με την ελικοειδή κίνηση. Επιπλέον η συγκεκριμένη τροχιά αντιστοιχεί σε $\varpi_A = 1.19 \cdot 10^{17} cm$.

[5]Στη περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι ο όγκος δεν μεταβάλεται κατά D καθώς μας ενδιαφέρει ο φυσικός όγκος της σφαίρας στο ακίνητο σύστημα και όχι η μέτρηση αυτού σύμφωνα με την ταυτόχρονη άφιξη των φωτονίων.

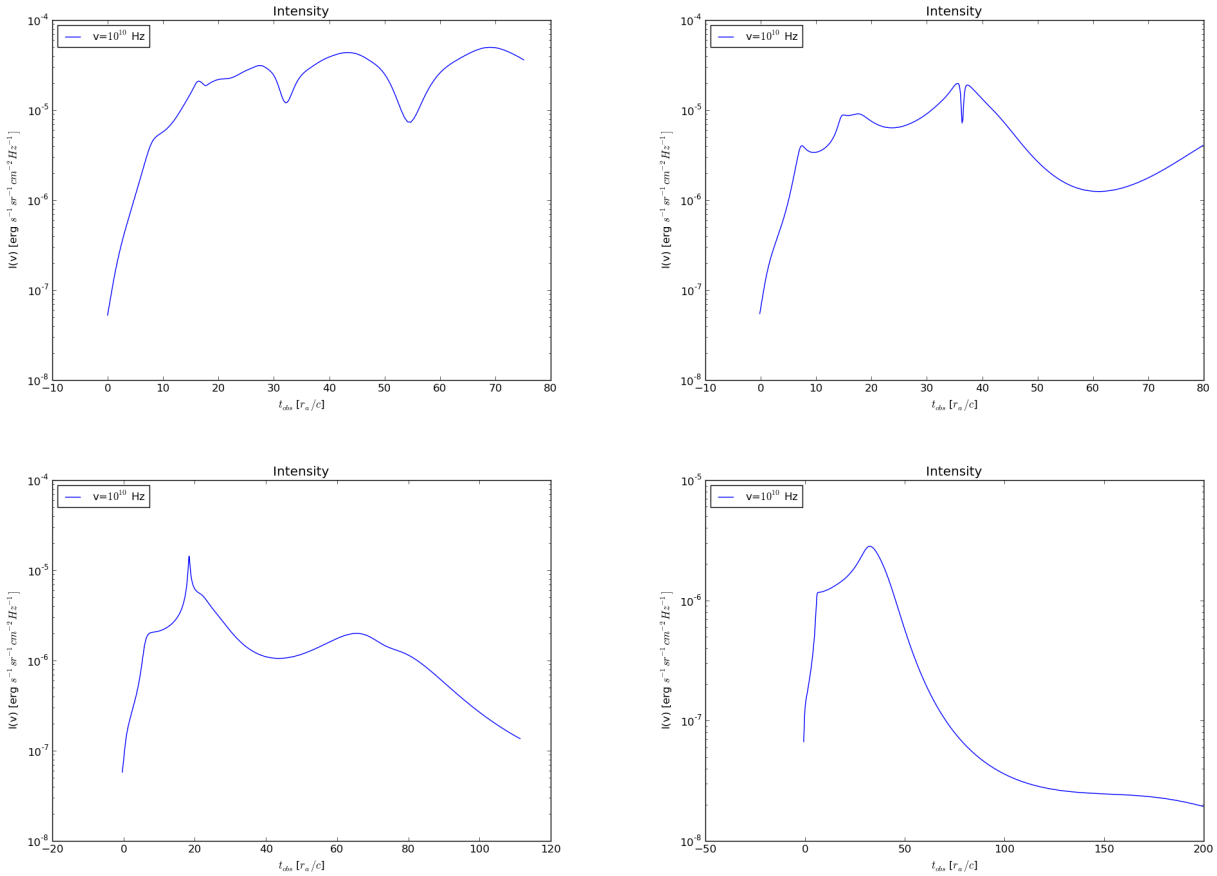
ταιριάζει με την παρατηρούμενη κλίμακα της μεταβλητότητας.

Στο σχήμα 5.9 δίνεται η ένταση ακτινοβολίας για τις προηγούμενες γωνίες Θ_{obs}, ϕ_0 συναρτήσει του χρόνου παρατήρησης, όπως προκύπτει για τις συνθήκες του θύλακα που αναφέρθηκαν παραπάνω. Σε κάθε σημείο της τροχιάς θεωρούμε ότι η ευθεία πατατήρησης περνάει από το κέντρο του θύλακα και η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος της διαμέτρου όπως αυτή μετράται στο σύστημα παρατήρησης, δηλαδή $2DR_{blob}$. Η συχνότητα έχει επιλεγεί έτσι ώστε η ακτινοβολία να παρουσιάζει διαφάνεια. Αν τα φυσικά μεγέθη διατηρούνταν σταθερά, τότε η ένταση θα ακολουθούσε ακριβώς τη μορφή του παράγοντα Doppler. Η εξάρτηση αυτή διατηρείται προφανώς και στην περίπτωσή μας, με έντονη μείωση, ωστόσο, λόγω πτώσης της έντασης της πυκνότητας και του μαγνητικού πεδίου. Παρατηρούμε, επιπλέον, ότι εκεί που αναμένουμε τα μέγιστα της έντασης, παρουσιάζεται μια απότομη μείωση. Η μείωση αυτή οφείλεται στην εξάρτηση από την κάθετη συνιστώσα του συγκινούμενου μαγνητικού πεδίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.11, για την περίπτωση $\Theta_{obs} = 5^o$ και $\phi_0 = 0^o$. Ένα χαρακτηριστικό που εμφανίζεται στις μεγαλύτερες γωνίες Θ_{obs} για συνθήκες καθολικής οπτικής διαφάνειας είναι ότι η ένταση των διαδοχικών μεγίστων πέφτει αρκετές τάξεις μεγέθους, με αποτέλεσμα σε γραμμική κλίμακα τα μέγιστα που έπονται του ενός σύμφωνα με το οποίο κανονικοποιείται η ένταση, να μην είναι εμφανή ώστε να δίνουν την εικόνα διαδοχικών εκλάμψεων ίδιας κλίμακας (πέραν βέβαια των δύο διαδοχικών μεγίστων που εμφανίζονται λόγω μαγνητικού πεδίου). Αντίθετα, στην περίπτωση της γωνίας $\Theta_{obs} = 1^o$, εμφανίζονται διαδοχικά μέγιστα συγκρίσιμου χρονικού εύρους και πλάτους, που θα μπορούσαν να αποτυπωθούν ως περιοδικές εκλάμψεις. Για μικρότερες συχνότητες, όπου στις πιο κεντρικές περιοχές το μέσο εμφανίζεται οπτικά πυκνό, η ένταση των μεγίστων, όπως φαίνεται από το σχήμα 5.10 , έχει μικρότερη απόκλιση και συνεπώς η αυξομείωση θα είναι εμφανής.

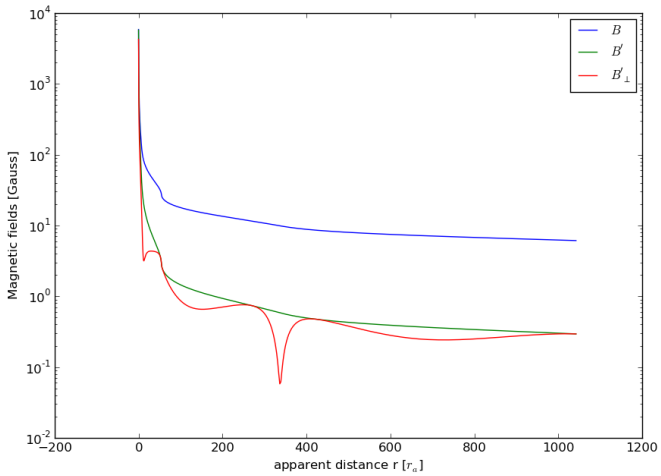
Για το ίδιο ζεύγος γωνιών δίνεται και το φάσμα της παραγώμενης έντασης ακτινοβολίας, για διάφορες τιμές της προβαλλόμενης απόστασης, σχήμα 5.12. Παρατηρούμε ότι ακολουθεί την την κλασική κατανομή της σύγχροτρον ακτινοβολίας με αυτοαπορρόφηση, όπου στην οπτικά αραιή περιοχή ακολουθεί νόμο δύναμης $\nu^{-\frac{p-1}{2}}$, ενώ στην οπτικά πυκνή $\nu^{5/2}$. Με την αύξηση της απόστασης πέφτει το μέγιστο λόγω μείωσης της πυκνότητας και του μαγνητικού πεδίου ενώ παράλληλα μετατοπίζεται προς μικρότερες συχνότητες καθώς το μέσο γίνεται οπτικά αραιό σε μεγαλύτερα μήκη κύματος. Στο ίδιο σχήμα (δεξιά) δίνεται η μεταβολή του βαθμού πόλωσης με τη θέση του θύλακα, για τις αναγραφόμενες συχνότητες. Γενικά σε μεγαλύτερα ν, όπου η οπτική αδιαφάνεια είναι μικρότερη, το ποσοστό πόλωσης θα είναι μεγαλύτερο, ενώ ξανά λόγω αδιαφάνειας θα αυξάνεται και με την απόσταση. Ωστόσο μέσω της σχέσης 3.55 φαίνεται ότι εξαρτάται από τον παράγοντα Doppler και το $\vec{B}'_\perp$ μέσω του οπτικού βάθους $d\tau = \kappa_\nu ds$, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται οι παρατηρούμενες διακυμάνσεις στην τιμή του.



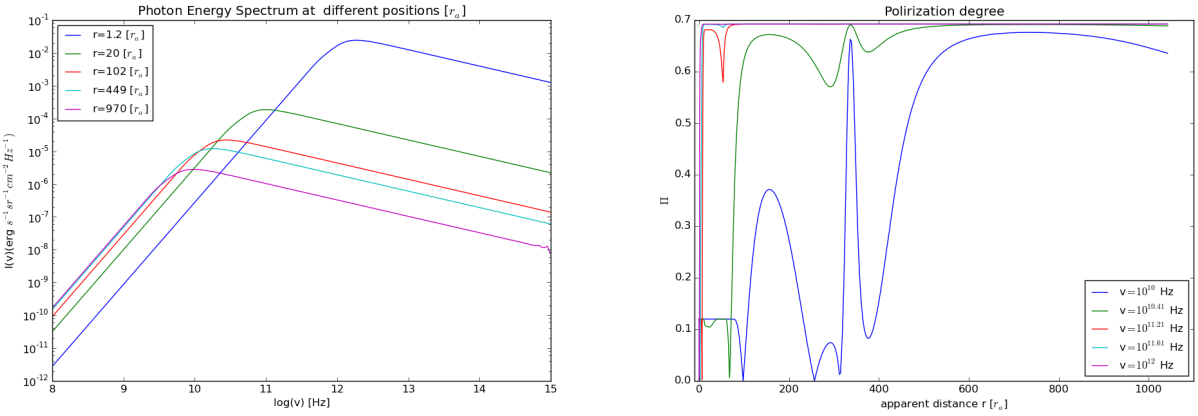
Σχήμα 5.9: Η ένταση μετρούμενη σε συχνότητα $10^{14}Hz$. Οι στήλες αναφέρονται σε γωνίες $\Theta_{obs} = 1, 5, 10, 20^o$ από δεξιά προς τα αριστερά, ενώ οι γωνίες ϕ_0 είναι αντίστοιχες με τα προηγούμενα διαγράμματα των φαινόμενων παραμέτρων.



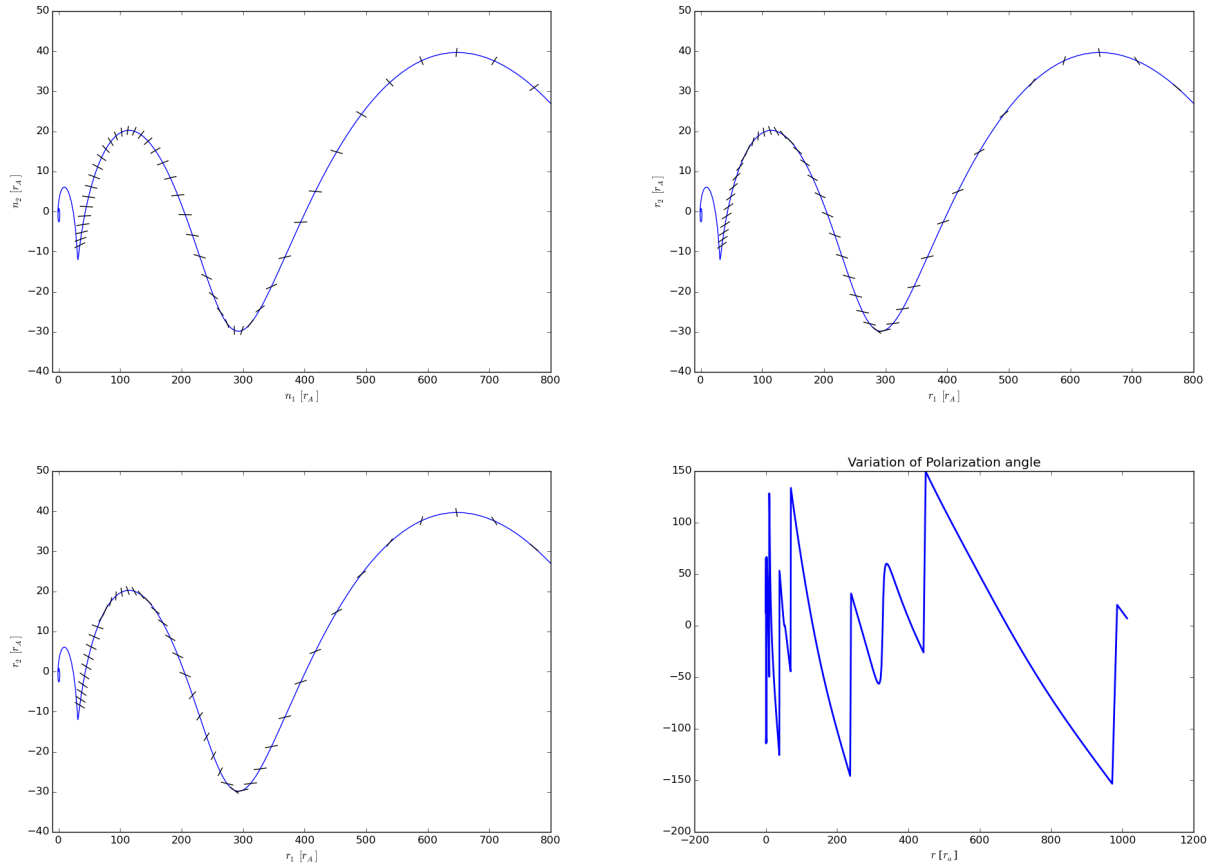
Σχήμα 5.10: Η ολική ένταση για συχνότητα $\nu = 10\ GHz$, γωνία $\phi_0 = 0^o$ και για γωνίες $\Theta_{obs} = 1, 5, 10, 20^o$ ξεκινώντας από πάνω αριστερά.



Σχήμα 5.11: Το μαγνητικό πεδίο όπως μετράται στο σύστημα του εργαστηρίου και του ρευστού καθώς και η κάθετη συνιστώσα $|\vec{B}' \times \hat{n}'|$.

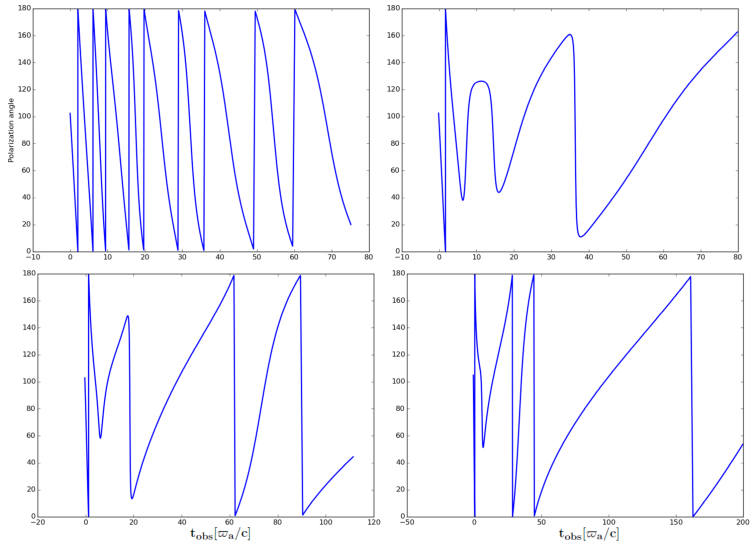


Σχήμα 5.12: Αριστερά το φάσμα της κατανομής σε διάφορες προβαλλόμενες αποστάσεις, όπως προκύπτει για εκπομπή και απορρόφηση σύγχροτρον. Δεξιά ο βαθμός πόλωσης για διάφορες συχνότητες κατά μήκος της τροχιάς. Αναφέρονται στη τροχιά $\Theta_{obs} = 5^o$ και $\phi_0 = 0^o$.



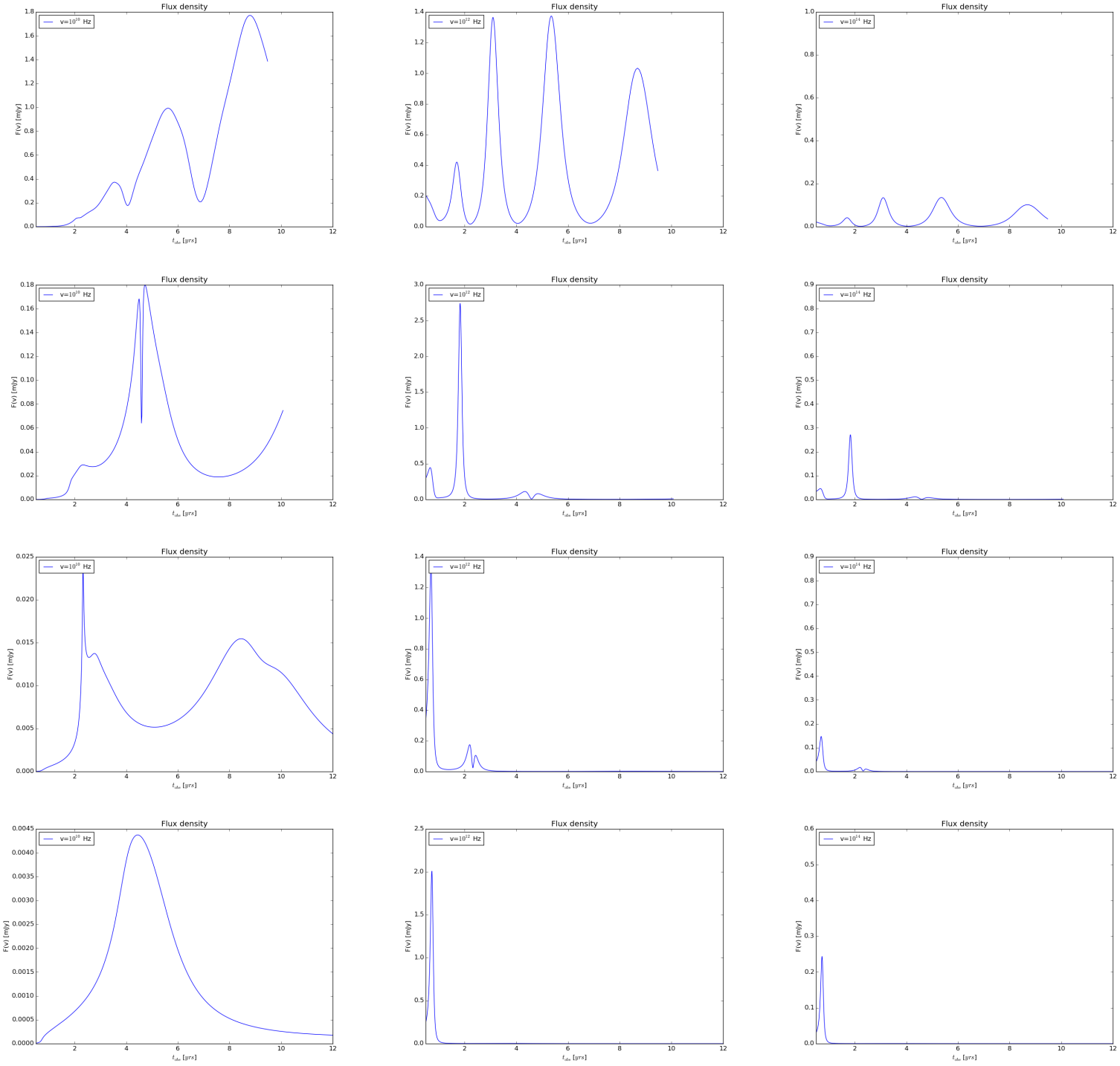
Σχήμα 5.13: Το διάνυσμα πόλωσης κατά μήκος της τροχιάς για την κλασική (αριστερά) και σχετικιστική (δεξιά) περίπτωση, για συχνότητα που αντιστοιχεί σε οπτική διαφάνεια. Η κάτω αριστερή εικόνα αντιστοιχεί σε μικρότερη συχνότητα (για τη σχετικιστική κίνηση) ενώ η κάτω δεξιά εικόνα δείχνει τη μεταβολή του $EVPA$ λόγω σχετικιστικών διορθώσεων.

Όσον αφορά το EVPA, ακόμα και στην κλασική περίπτωση θα μεταβάλλεται λόγω της ελικοειδούς δομής του μαγνητικού πεδίου, όπως φαίνεται στην αριστερή εικόνα του σχήματος 5.13,



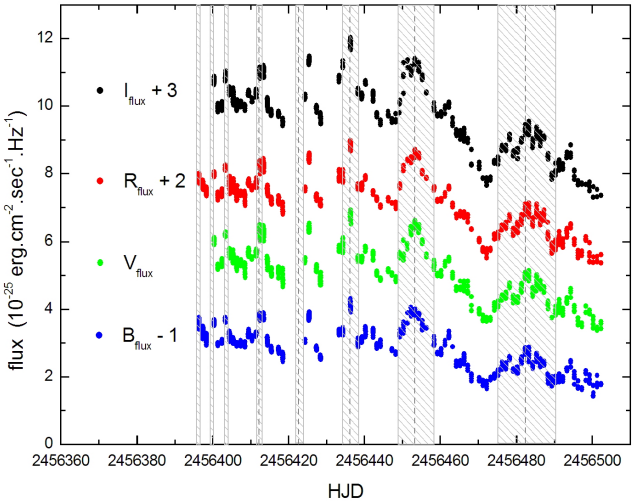
Σχήμα 5.14: Η γωνία του διανύσματος πόλωσης $\chi\epsilon[0,\pi]$ (μετρούμενη δεξιόστροφα ως προς τον άξονα l) ως προς τον χρόνο παρατήρησης , για $\phi_0 = 0^o$ και $\Theta_{obs} = 1^o$ (πάνω δεξιά), $\Theta_{obs} = 5^o$ (πάνω αριστερά), $\Theta_{obs} = 10^o$ (κάτω δεξιά), $\Theta_{obs} = 20^o$ (κάτω αριστερά) .

καθώς αντιστοιχεί απευθείας στην κάθετη στην προβολή αυτού, διεύθυνση. Όταν όμως η ταχύτητα γίνεται σχετικιστική εμφανίζεται, όπως δείξαμε, μεταβολή στη διεύθυνση του, η οποία συνδέεται με τη προβολή του ηλεκτρικού πεδίου στο επίπεδο του ουρανού. Η μεταβολή αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.13. Οι μηδενικές τιμές της διαφοράς των γωνιών θα αντιστοιχούν στα σημεία της τροχιάς όπου οι συνιστώσες $\hat{B}_\perp \times \hat{n}$ και $\hat{E}_\perp$ είναι παράλληλες. Στο ίδιο σχήμα δίνεται και η πόλωση για μικρότερη συχνότητα, όπου στις περιοχές που το μέσο είναι οπτικά πυκνό ο προσανατολισμός του διανύσματος θα διαρέρει κατά 90°. Παρατηρησιακά, σε πολλές περιπτώσεις η μεταβλητότητα στη ροή συνοδεύεται από έντονη μεταβολή του $EVPA$. Συνεπώς έχει ενδιαφέρον να δείξουμε τη γωνία πόλωσης συναρτήσει του χρόνου και πως αυτή συνδέεται με τις μεταβολές στην ένταση. Η χρονική της εξέλιξη, για τις διάφορες τιμές Θ_{obs}, ϕ_0, δίνεται στο σχήμα 5.14. Αρχικά, οι απότομες πτώσεις και αυξήσεις που παρατηρούνται οφείλονται στο ότι έχουμε επιλέξει το έυρος γωνιών μεταξύ του 0 και π, και πρακτικά αντιστοιχούν σε πλήρεις περιστροφές. Οι αυξομειώσεις, ωστόσο, που δεν αλλάζουν από 0 σε π και αντίστροφα, δείχνουν ταλαντώσεις του διανύσματος πόλωσης (polarization swing).



Σχήμα 5.15: Η μετρούμενη ροή σε $[mJy]$ ως προς το χρόνο παρατήρησης (σε $[\varpi_A/c]$) για γωνίες $\Theta_{obs} = 1,\ 5,\ 10,\ 20^o$ (από πάνω προς τα κάτω) και συχνότητες $\nu = 10^{10},\ 10^{12},\ 10^{14}\ Hz$ (από δεξιά προς τα αριστερά), για τον $3C345$.

Η παραπάνω μελέτη αποτελεί ιδανική περίπτωση άπειρης ανάλυσης. Πρακτικά ωστόσο, τα παρατηρησιακά όργανα έχουν πεπερασμένη διακριτική ικανότητα με αποτέλεσμα οι παρατηρήσεις να προκύπτουν ως υπέρθεση της ακτινοβολίας από όλη την περιοχή εκπομπής. Για να εξάγουμε συνεπώς την ολική πυκνότητα ροής, στην οποία αναφέρονται οι παρατηρήσεις, εφόσον έχουμε θεωρήσει ομογενείς συνθήκες, θα πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς όλη την επιφάνεια του θύλακα, όπως αυτή προκύπτει από την προβολή του στο επίπεδο του ουρανού, λαμβάνοντας υπόψιν τη σχετικιστι-



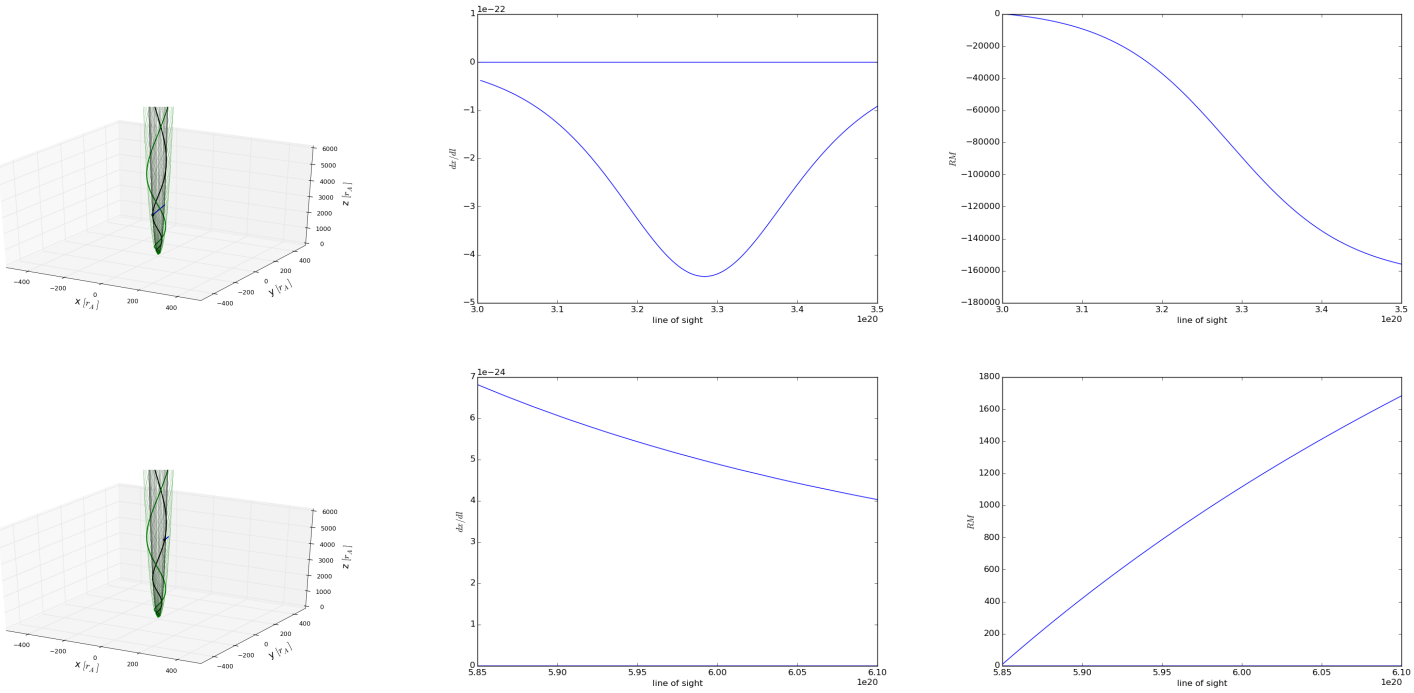
Σχήμα 5.16: Οι φωτομετρικές καμπύλες του Mpx421 σε όλες τις οπτικές φωτομετρικές περιοχές [boss project UOAO].

κή κίνηση, $\Rightarrow$ $\mathbf{F}_{\nu,obs} = \frac{1}{d_L^2} I_\nu dA$. [6] Εφαρμόζοντας ξανά για το παράδειγμα του $3C345$, η παρατηρούμενη ροή συναρτήσει του χρόνου (σε χρόνια), μετρούμενη σε τρεις συχνότητες 10^{10}, 10^{12}, 10^{14}, δίνεται στο σχήμα 5.15[7]. Παρατηρούμε ότι στις μεγάλες γωνίες και για υψηλές συχνότητες οι εκλάμψεις εμφανίζονται ως απότομες κορυφές ("spikes"), χωρίς έντονη επαναληψιμότητα, με τη ροή να φθίνει απότομα. Στις χαμηλές συχνότητες, το εύρος των μεγίστων είναι μεγαλύτερο, δίνοντας την εικόνα μεγάλης κλίμακας έκλαμψη, με αργούς ρυθμούς ανόδου και καθόδου. Η πιο ενδιαφέρουσα εικόνα είναι αυτή που αντιστοιχεί σε blazars, όπου η γωνία παρατήρησης είναι πολύ μικρή, καθώς, όπως αναφέρθηκε και πριν, εμφανίζει περιοδική μορφή συγκρίσιμων διαδοχικών μεγίστων. Ειδικά στις υψηλές συχνότητες, το πλάτος των μεγίστων εμφανίζει σταδιακή μείωση που συνοδεύεται από αύξηση του ρυθμού ανόδου/καθόδου (χρονικού εύρους). Μια τέτοια εικόνα εμφανίζεται για παράδειγμα στον blazar Mrk421, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.16.

Επιλέγοντας, συνεπώς, τη κλίμακα της γραμμής ροής στην οποία κινείται ο θύλακας, η οποία ακολουθεί γραμμική αναλογία με το χρόνο παρατήρησης, μπορούμε να καθορίσουμε τη χρονική κλίμακα. Παράλληλα, αλλάζοντας το μέγεθος του θύλακα καθορίζουμε και το πλάτος της ροής, καθώς και τη διαφάνεια για τις διάφορες συχνότητες, η οποία εξαρτάται και από τη δυναμική γραμμή αναφοράς που έχουμε επιλέξει (καθώς αντιστοιχεί σε διαφορετικές τιμές μαγνητικού πεδίου και πυκνότητας).

[6] Εν γένει η φαινόμενη επιφάνεια ενός σχετικιστικά κινούμενου σώματος στο επίπεδο παρατήρησης είναι αποτέλεσμα γεωμετρικών φαινομένων αποπλάνησης του φωτός και εξαρτάται από διεύθυνση της ταχύτητάς και το γωνιακό του μέγεθός, ως προς τον παρατηρητή. Στην περίπτωση, ωστόσο, ενός σφαιρικού σώματος, η μορφή της προβολής του θα είναι πάντα κυκλική ανεξαρτήτα των παραπάνω παραμέτρων. Όπως γνωρίζουμε ο όγκος μεταβάλεται κατά $dV = DdV'$. Ωστόσο η μεταβολή αναφέρεται μόνο κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης με τη σφαίρα να παίρνει τελικά ελλειψοειδές σχήμα με όγκο $V = \frac{4}{3}\pi abc = \frac{4}{3}\pi DnR_{blob}^2$, η προβαλλόμενη επιφάνεια του οποίου θα είναι $dA_{obs} = \pi R_{blob}^2$.

[7] Στα διαγράμματα έχουμε αγνοήσει τη ροή σε πολύ μικρούς χρόνους, που αντιστοιχεί σε πολύ μικρή προβαλλόμενη απόσταση, έτσι ώστε, ειδικά για τις μεγάλες συχνότητες, να εμφανίζετονται τα διαδοχικά μέγιστα των μεγαλύτερων χρόνων (σε γραμμική κλίμακα).



Σχήμα 5.17: Η θέση του θύλακα, ο παράγοντας στροφής $\frac{d\chi_f}{ds}$ και το μέτρο στροφής RM σε μονάδες $[rad\ cm^{-2}]$ (από αριστερά προς τα δεξιά). Και πάλι τα αποτελέσματα αφορούν την περίπτωση $\Theta_{obs} = 5^o$ και $\phi_0 = 0$

5.1.3 Στροφή Faraday

Για την ίδια εικόνα του θύλακα μπορούμε να μελετήσουμε επίδραση της στροφής Faraday, στο προφίλ της πόλωσης. Θεωρούμε λοιπόν, ότι η ακτινοβολία που παράγεται στο θύλακα, καθώς διαδίδεται στα εξωτερικά στρώματα του πίδακα, στέφεται από το ίδιο το σχετικιστικό υλικό της ροής, το οποίο ωστόσο δε συνεισφέρει στην εκπομπή[8]. Αν θεωρήσουμε ότι το εξωτερικό στρώμα εκτείνεται σε διπλάσια κλίμακα σε σχέση με τη δεδομένη μας τροχιάς, για τον υπολογισμό της στροφής ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις διάδοσης, κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης μέχρι το πέρας του πίδακα, που καθορίζεται από την κυλινδρική ακτίνα της εξωτερικής δυναμικής γραμμής στο εκάστοτε ύψος. Ο υπολογισμός των φυσικών μεγεθών και της παραμέτρου Doppler σε κάθε σημείο της διάδοσης περιγράφεται στο κεφάλαιο 5.2.2. Στα σχήματα 5.17, δίνεται ο παράγοντας στροφής $\frac{d\chi_f}{ds}$, το μέτρο στροφής RM και η ολική στροφή για συχνότητα $10^{14}Hz$, κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης, για δύο θέσεις του θύλακα, με την πρώτη περίπτωση η ακτινοβολία να διασχίζει μεγαλύτερη απόσταση στο μέσο του πίδακα. Παρατηρούμε ότι το μέτρο στροφής προκύπτει πολύ μεγάλο και εφόσον η συνολική στροφή εξαρτάται τεταγωνικά από τη συχνότητα, για $\nu \sim GHz$ το διάνυσμα πόλωσης θα περιστέφεται πολλές φορές κατά μήκος της διάδοσης, με αποτέλεσμα να χάνεται η πληροφορία για τη σωστή παρατηρούμενη μέτρησή του. Οι μεγάλες αυτές τιμές, οφείλονται κυρίως στο μαγνητικό πεδίου και την πυκνότητα που έχει προκύψει από το μοντέλο.

[8]Θεωρούμε ότι η εκπομπή οφείλεται μόνο στη μη θερμική κατανομή ηλεκτρονίων τα οποία έχουν επιταχυνθεί σε κάποιο σημείο κατά μήκος του πίδακα δημιουργώντας τον κινούμενο θύλακα. Μια τέτοια υπόθεση μπορεί να αντιστοιχηθεί σε αλληλεπίδραση της ροής με τα στάσιμα σημεία του πίδακα που εμφανίζονται στις παρατηρήσεις και συχνά συνδέονται με περιοχές επιτάχυνσης, όπως στάσιμα κύματα.

5.2 Βασικές ιδιότητες συνεχών πιδάκων

Παρακάτω θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες συνεχών πιδάκων ιδανικής ανάλυσης, εξάγοντας τα κάθετα προφίλ για την ένταση και την πόλωση, καθώς και την επίδραση της στοφής Faraday στα μεγέθη αυτά. Συγκεκριμένα θα μελετήσουμε την απλή περίπτωση ομογενούς κυλίνδρου και στη συνέχεια θα θεωρήσουμε τη περίπτωση συνεχούς πίδακα, όπως αυτός προκύπτει από το μοντέλο της αυτοομοιότητας.

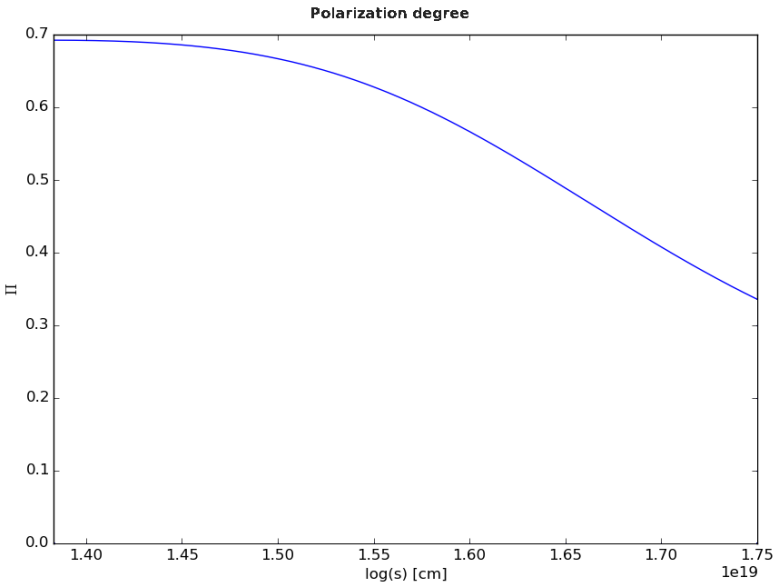
5.2.1 Κυλινδρικός πίδακας

Η πιο απλή περίπτωση που μπορεί να θεωρήσει κανείς για να μελετήσει την παρατηρούμενη πόλωση, είναι η κυλινδρική συμμετρία. Μια τέτοια μελέτη έγινε από τους [Luytikov Pavier Gabuzda 2005], οι οποίοι εξήγαγαν αναλυτικά τις ιδιότητες της πολωμένης ακτινοβολίας σύγχροτρον, από ένα κυλινδικά συμμετρικό μαγνητικό πεδίο, σε ένα οπτικά αραιό αξισυμμετρικό κέλυφος με ομογενή σχετικιστική ταχύτητα παράλληλη στον άξονα. Μια τέτοια μελέτη, όπως προκύπτει από τις εξισώσεις διάδοσης, παρουσιάζεται παρακάτω.

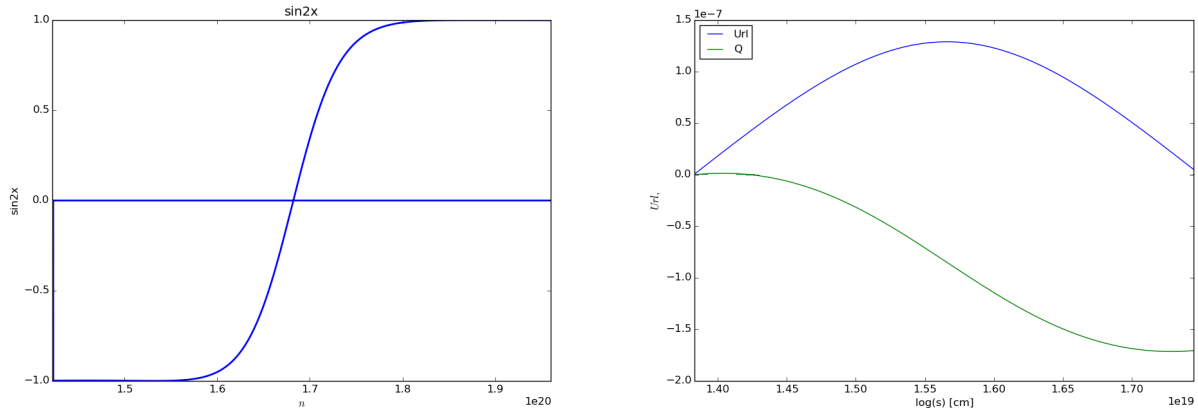
Θεωρούμε αρχικά την απλή περίπτωση ροής με ομογενή πυκνότητα $n_0 \sim 1cm^{-3}$ και ταχύτητα $\vec{V} = V\hat{z}$ (ο άξονας z ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του πίδακα) που αντιστοιχεί σε παράγοντα Lorenzt $\Gamma = 10$. Το μαγνητικό πεδίο στο σύστημα της ροής έχει ελικοειδή δομή με σταθερό μέτρο $B' = 1\ G$ και γωνία έλικας $\tan\alpha = \frac{B'_z}{B'_\phi}$, με τις συνιστώσες του να δίνονται από $\vec{B}' = B'(-\sin\alpha \cdot \sin\phi, \sin\alpha\cos\phi, \cos\alpha)$. Ο παρατηρητής βρίσκεται στο $x - z$ επίπεδο σε γωνία Θ_{obs} από τον άξονα $z \Rightarrow \hat{n} = (\sin\Theta_{obs}, 0, \cos\Theta_{obs})$, που αντιστοιχεί σε $\hat{n}' = D(\sin\Theta_{obs}, 0, \Gamma(\cos\Theta_{obs} - \beta))$. Η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα του παρατηρητή δίνεται από $\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{1-(\hat{B}'\times\vec{\beta})^2}}\big[\hat{B}' - \frac{\gamma}{\Gamma+1}(\hat{B}' \times \vec{\beta})\vec{\beta}\big]$, όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση παίρνει τη μορφή $\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2\cos^2 a}}\big(-\sin a\sin\phi, \sin a\cos\phi, \frac{\cos a}{\Gamma}\big)$ [Luytikov 2005].

Προφίλ της έντασης ακτινοβολίας και του διανύσματος πόλωσης

Αρχικά λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας το $EVPA$ αναμένεται να είναι είτε παράλληλο είτε κάθετο στην προβολή του άξονα στο επίπεδο του ουρανού, μέσω της αλληλεξουδετέρωσης των αντιδιαμετρικών περιοχών πάνω στην ευθεία παρατήρησης. Η ευθεία αυτή τέμνει τον κύλινδρο στα σημεία με γωνία ϕ και $\pi - \phi$ αντίστοιχα, με αποτέλεσμα η προβολή του $\hat{e}$ στον άξονα r (ο κάθετος στον l άξονας στο επίπεδο του ουρανού) για όλα τα σημεία αντίθετου x που την ορίζουν, να έχει αντίθετη κατεύθυνση και το $\sin 2x_B$ αντίθετο πρόσημο, ανεξάρτητα των σχετικιστικών διορθώσεων. Παράλληλα λόγω κυλινδρικής συμμετρίας οι συντελεστές εκπομπής ϵ_e, ϵ_b θα είναι ίδιοι σε κάθε ύψος z και συνεπώς η εκπομπή από τις αντιδιαμετρικές περιοχές θα είναι ίδια πάνω στην ευθεία. Από τον ορισμό του U_{rl}, συνεπώς, αναμένουμε πως η τιμή του ύστερα ότι την ολοκλήρωση κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης θα είναι μηδέν και συνεπώς η γωνία πόλωσης θα εξαρτάται μόνο από το Q, παίρνοντας τιμές $\frac{\pi}{2}$ και μηδέν. Στο σχήμα 5.18 παρουσιάζεται η μεταβολή του $\sin 2\chi$ και του U_{rl}, με το δεύτερο όντως τελικά να μηδενίζεται. Η απόλυτη τιμή του βαθμού πόλωσης κατά μήκος της διάδοσης δίνεται στο σχήμα 5.19, όπου και φαίνεται η αναμενόμενη μείωση της πόλωσης, από την τιμή που αντιστοιχεί σε οπτικά αραιό μέσο για $p = 2$, λόγω της ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου.



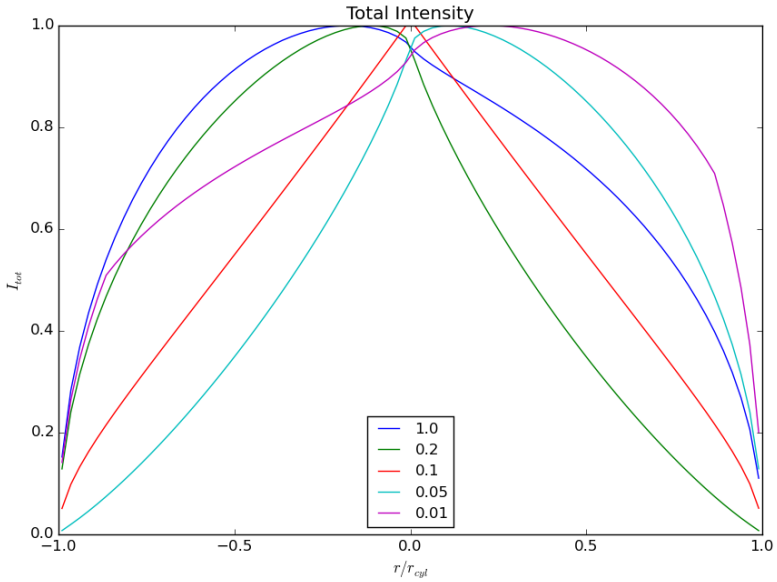
Σχήμα 5.19: Ο βαθμός πόλωσης κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης.



Σχήμα 5.18: Το $\sin 2\chi$ (αριστερά) και το U_{rl} (δεξιά) κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης, για γωνία $\Theta_{obs} = 20^o$ και γωνία έλικας $\alpha = 78^o$. Το μήκος παρατήρησης αναφέρεται στην απόσταση n από το επίπεδο του ουρανού.

Έχει ενδιαφέρον να μελετήσουμε επιπλέον, τις ιδιότητες της ακτινοβολίας κατά μήκος της διατομής του πίδακα[9]. Στην τετριμμένη περίπτωση όπου η ροή δεν κινείται σχετικιστικά και η γωνία παρατήρησης είναι 90°, το προφίλ της έντασης θα εμφανίζεται συμμετρικό ως προς την προβολή του άξονα του πίδακα με μέγιστο πάνω σε αυτήν (καθώς το $\vec{B} \perp \hat{n}$ και η απόσταση διάδοσης μεγαλύτερη). Αυτό είναι εμφανές καθώς η κάθετη στο $\hat{n}$ συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου θα βρίσκεται στο $y - z$ επίπεδο, με τις αντίστοιχες συνιστώσες του $\vec{B}$ να έχουν ίδιο μέτρο για τα κατοπτρικά σημεία ως προς το $x - z$ επίπεδο ($|\sin\phi| = |\sin(2\pi - \phi)|$). Αλλάζοντας τη γωνία παρατήρησης σπάει η συμμετρία στο μέτρο της κάθετης συνιστώσας (λόγω αντισυμμετρικού B_x) και η ένταση διαφέρει πλέον στα δύο μέρη του πίδακα. Αντίστοιχη ασυμμετρία παρουσιάζεται και στην περίπτωση που η ροή κινείται σχετικιστικά, παράλληλα στον άξονα z. Λόγω αποπλάνησης

[9] Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας τα αποτελέσματα δεν εξαρτώνται από την απόσταση πάνω στην προβολή.



Σχήμα 5.20: Το προφίλ της κανονικοποιημένης ολικής έντασης κατά μήκος της διατομής του πίδακα, όπως προκύπτει για $\Gamma = 10$ και γωνία $a = 60^o$, για τις αναγραφόμενες γωνίες παρατήρησης.

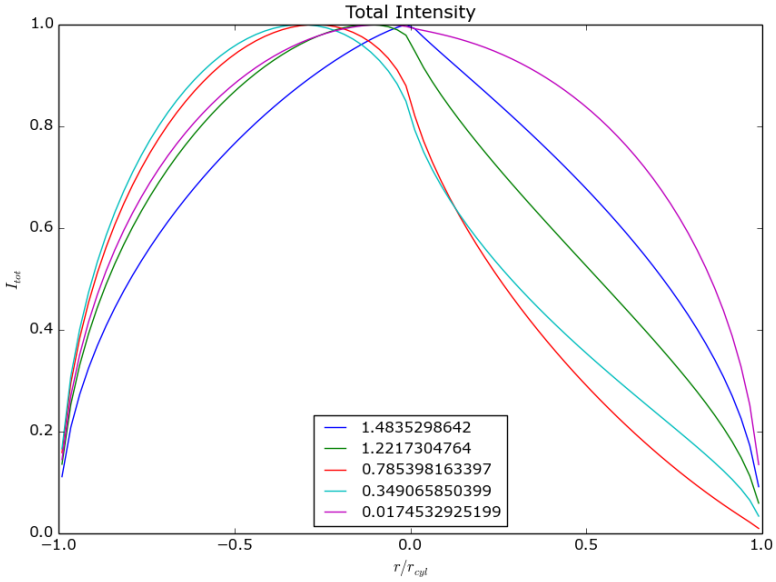
του φωτός (σχέση 3.58) η διεύθυνση εκπομπής στο σύστημα του ρευστού δεν ταυτίζεται πλέον με αυτήν του παρατηρητή ($\theta_{obs} = 90^o$) και σε περίπτωση ελικοειδούς $\vec{B}'$ το $|\hat{n}' \times \hat{B}'|$ δεν είναι ίδιο για ϕ και $2\pi - \phi$. Συνεπώς για ομογενή σχετικιστική κίνηση, συμμετρία θα εντοπίζεται μόνο όταν γωνία παρατήρησης θ' στο σύστημα του ρευστού είναι 90° που αντιστοιχεί (από τη γνωστή σχέση $\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \beta}{1+\beta\cos\theta'}$) σε $\Theta_{obs} \sim 1/\Gamma$. Επιπλέον για γωνίες $\Theta_{obs} = N/\Gamma$ και $\Theta_{obs} = 1/N\Gamma$, με N ένα τυχαίο αριθμό, που αντιστοιχούν σε $\theta' \approx \pi/2 \pm \delta\theta$, το προφίλ των εντάσεων θα εμφανίζεται κατοπτρικό ως προς την προβολή του άξονα. Στο σχήμα 5.20 δίνεται η ολική ένταση για διάφορες γωνίες Θ_{obs}, για ροή με $\Gamma = 10$ και γωνία $a = 60^o$, όπου και φαίνονται οι παραπάνω ιδιότητες με τη ασυμμετρία να άρεται για $\Theta_{obs} = 1/\Gamma$. Η μεριά όπου η ένταση είναι πιο έντονη, αντιστοιχεί σε περιοχές όπου το B'_x είναι αρνητικό, για $\Theta_{obs} < 1/\Gamma$ [10] και θετικό για $\Theta_{obs} > 1/\Gamma$, εξηγώντας και την κατοπτρική συμπεριφορά που παρατηρείται. Η μεριά αυτή εξαρτάται από τη φορά διαγραφής της έλικας.

Η ένταση της ακτινοβολίας θα εξαρτάται προφανώς και από την γωνία της έλικας. Όταν οι συνιστώσες του πεδίου είναι συγκρίσιμες $B'_z/B'_\phi \sim 1$, τότε δείξαμε ότι υπο συνθήκες παρουσιάζεται η παραπάνω ασυμμετρία. Σε περιπτώσεις ωστόσο, όπου το πεδίο είναι σχεδόν τοροειδές ή πολοειδές (δηλαδή για πολύ μεγάλες ή πολύ μικρές γωνίες a αντίστοιχα) η ασυμμετρία αυτή παύει να είναι εμφανής καθώς το $|\hat{n}' \times \vec{B}'|$ είναι σχεδόν ίσο στις δύο μεριές[11]. Στο σχήμα 5.21 δίνεται η εξάρτηση του προφίλ της έντασης, από την γωνία a για σταθερό $\Theta_{obs} = 20^o$, όπου και πατατηρούμε ότι όντως για ακραίες γωνίες το προφίλ εμφανίζεται συμμετρικό, ενώ οι ασυμμετρικές περιπτώσεις εξηγούνται σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση.

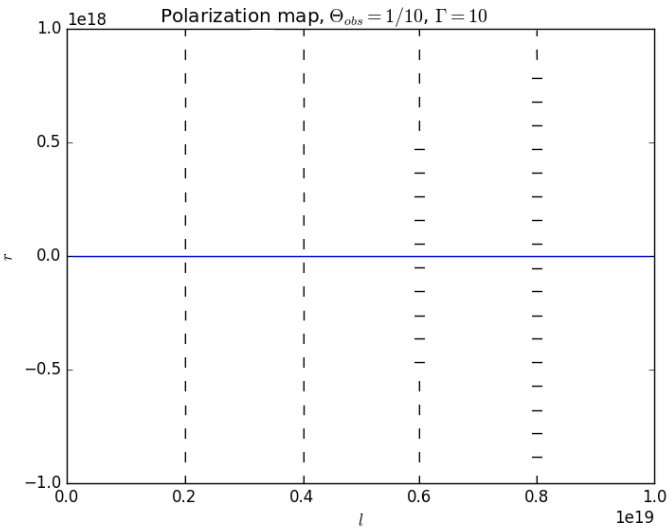
Όσον αφορά τη γωνία πόλωσης, όπως αναφέρθηκε και πριν, το $EVPA$ θα βρίσκεται είτε κάθετα είτε παράλληλα στην προβολή του άξονα. Αναμένουμε ότι στα εξωτερικά σημεία του πίδακα το διάνυσμα πόλωσης θα βρίσκεται πάντα κάθετα στον άξονα. Αυτό καθώς η $\hat{y}$ συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου μηδενίζεται για $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ και συνεπώς από τη σχέση 3.63 προκύπτει ότι

[10] καθώς εκεί το n_z είναι θετικό και συνεπώς ο όρος $(n'_z B'_x - n'_x B'_z)$ του εξωτερικού γινομένου θα είναι μεγαλύτερος για $B'_x < 0$.

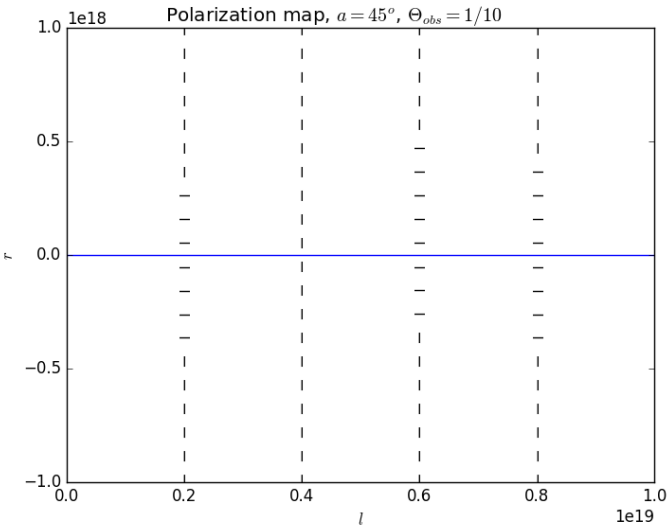
[11] Για $a = 0,\ 90^o$ το προφίλ προφανώς θα είναι απόλυτα συμμετρικό (μπορεί εύκολα να δειχθεί από το $|\hat{n}' \times \vec{B}'|$).



Σχήμα 5.21: Το προφίλ της κανονικοποιημένης ολικής έντασης κατά μήκος της διατομής του πίδακα, όπως προκύπτει για $\Gamma = 10$ και γωνία $\theta_{obs} = 20^o$, για τις αναγραφόμενες γωνίες a.

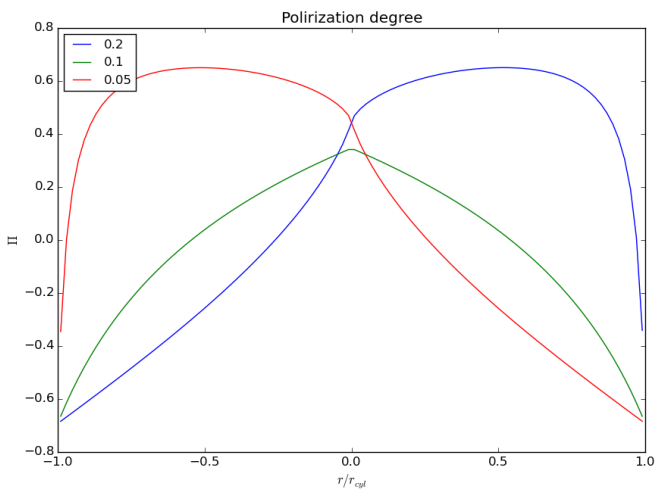


Σχήμα 5.22: Το EVPA κατά μήκος της διατομής για $\Theta_{obs} = 1/\Gamma$, $\Gamma = 10$ και γωνίες $a = 20, 45, 60, 75^o$ από αριστερά προς τα δεξιά, όπου και φαίνεται ότι το τμήμα της κεντρικής περιοχής στο οποίο η πόλωση είναι κάθετη μεγαλώνει όσο το πεδίο στο σύστημα του ρευστού γίνεται πιο τοροειδές.



Σχήμα 5.23: Το $EVPA$ για $\theta = 1/10,\ a = 45^o$ και $\Gamma = 1, 10, 10^2, 10^3$ από αριστερά προς τα δεξιά.

το διάνυσμα πόλωσης θα είναι ορθογώνιο στην προβολή του άξονα. Στις κεντρικές περιοχές η διεύθυνση θα εξαρτάται από τις γωνίες $a,\ \ \Theta_{obs}$. Στην περίπτωση όπου $\Theta_{obs} \sim 1/\Gamma$, η πόλωση θα είναι συμμετρική, με το $EVPA$ στην κεντρική περιοχή να είναι κάθετο στον άξονα αν $a < 45^o$ και παράλληλο για $a > 45^o$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.30. Μια τετοια εικόνα παράλληλου στο κέντρο και κάθετου στα άκρα $EVPA$ ταιριάζει στην "spine-sheath" κατανομή που εμφανίζεται σε ορισμένους $AGNs$. Στη περίτωση όπου $B'_z/B'_\phi \sim 1$, αν κρατήσουμε την ίδια Θ_{obs} με πριν, τότε στο σύστημα του παρατηρητή με την αύξηση του παράγοντα Lorentz το πεδίο εμφανίζεται πιο τοροειδές ενώ παύει πλέον υπάρχει συμμετρία, με αυτήν να αποκαθίσταται ξανά για $\Gamma >>$ (που αντιστοιχεί σε $\Theta_{obs} >> 1/\Gamma$), (σχήμα 5.23). Ισοδύναμη περίπτωση ασυμμετρίας δίνει και η αλλαγή του $\Theta_{obs} \ \Rightarrow\ \Theta_{obs} >$ ή $< 1/\Gamma$ για σταθερό Γ όπου και εμφανίζεται κατοπτρική συμπεριφορά σε σχέση με τις γωνίες, αντίστοιχη με αυτή που εμφανίζεται στις εντάσεις.



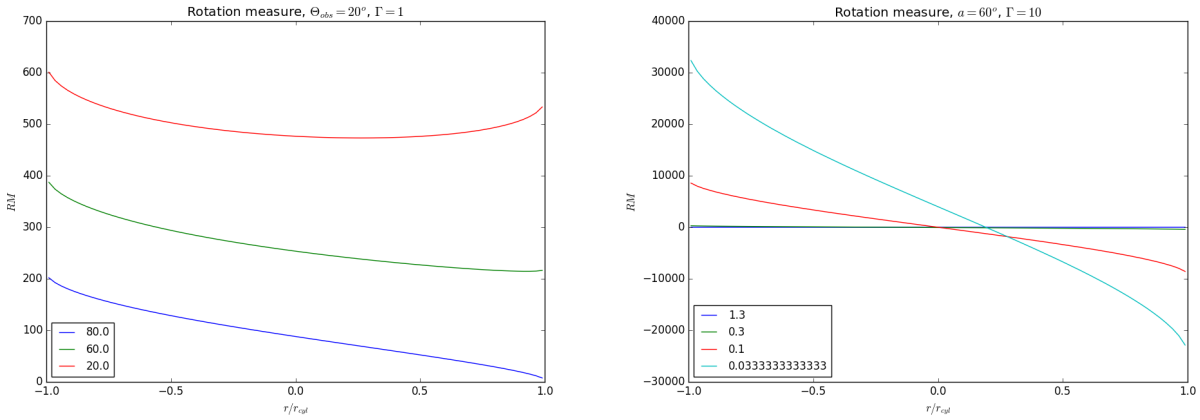
Σχήμα 5.24: Το Q/I κατά μήκος της διατομής του πίδακα για $\Gamma = 10$ και $\Theta = 2/\Gamma,\ 1/\Gamma,\ 1/2\Gamma$.

Δείξαμε πριν ότι ο βαθμός πόλωσης μειώνεται με τη διάδοση λόγω ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου. Η ανομοιογένεια αυτή είναι εντονότερη στις κεντρικές περιοχές από ότι στις

άκρες του πίδακα, όπου η διεύθυνση του πεδίου δεν προλαβαίνει να αλλάξει υπερβολικά. Αυτό έχει αποτέλεσμα να περιμένει κανείς σε γωνία $\Theta_{obs} \sim 1/\Gamma$ η τιμή του Π στις εξωτερικές περιοχές να είναι μεγαλύτερη από αυτή στο κέντρο. Στο σχήμα 5.24 δίνεται η ποσότητα $\frac{Q}{I}$, η απόλυτη τιμή της οποίας δίνει τον βαθμό πόλωσης ($U = 0$) ενώ το πρόσημό της καθορίζει και τον προσανατολισμό του $EVPA$ (θετικό Q αντιστοιχεί σε παράλληλο διάνυσμα, ενώ το αρνητικό σε κάθετο). Στις περιπτώσεις ασυμμετρίας παρατηρούμε επιπλέον ότι η τιμή της πόλωσης στη μια ακραία μεριά του πίδακα φτάνει σε μεγαλύτερες τιμές την άλλη.

Προφίλ μέτρου στροφής RM

Κρατώντας την ίδια γεωμετρία για το μαγνητικό πεδίο, θεωρούμε ένα στρώμα με ομογενή πυκνότητα που περιβάλλει την περιοχή εκπομπής, στο οποίο λαμβάνει χώρα η στροφή. Στη μη σχετικιστική περίπτωση το προφίλ του μέτρου στροφής θα εξαρτάται άμεσα από την παράλληλη συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου. Το κάθετο προφίλ του RM μπορεί εμφανίζει φθίνουσα (ή αύξουσα ανάλογα με τη φορά της έλικας) συμπεριφορά η οποία ενδέχεται να γίνει αύξουσα ανάλογα με τη σχέση των γωνιών Θ_{obs}, a, η οποία καθορίζει και το μέτρο του. Το προφίλ του RM για διάφορες γωνίες της έλικας, στη μη σχετικιστική περίπτωση, φαίνεται στην αριστερή εικόνα του σχήματος 5.25, όπου για μεγάλη διαφορά των γωνιών φθίνει συνεχώς και το μέτρο του παίρνει γενικά μικρές τιμές, ένω για μικρή παρουσιάζεται ξανά αύξηση προς την άκρη του πίδακα (καθώς μειώνεται ξανά η σχετική γωνία) και το μέγεθος παίρνει μεγαλύτερες τιμές. Επιπλέον το RM δεν προβλέπεται να αλλάζει πρόσημο καθώς η προβολή δεν θα αλλάζει φορά. Η μορφή του RM για διάφορες γωνίες a δίνεται στο σχήμα 5.25. Για σχετικιστική κίνηση και $\Theta_{obs} = 1/\Gamma$, το προφίλ θα παρουσιάζεται αντισυμμετρικό ως προς τον άξονα[12], με τη μέγιστη απόλυτη τιμή να εμφανίζεται πάντα στα άκρα. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση η μορφή παύει να είναι αντισυμμετρική, όπως φαίνεται στη δεξιά εικόνα του σχήματος. Παρατηρούμε επίσης, ότι στις μεγαλύτερες γωνίες, αν και η γενική συμπεριφορά μένει ίδια, οι τιμές είναι πολύ μικρές ενώ ενδέχεται για κατάλληλο συνδυασμό γωνιών, το πρόσημο να παραμένει ίδιο.



Σχήμα 5.25: Αριστερά, το μέτρο στροφής στη μη σχετικιστική περίπτωση για τις αναγραφόμενες γωνίες a. Δεξιά, το μέτρο στροφής RM για $a = 60^o$, $\Gamma = 10$ και για διαφορετικές γωνίες Θ_{obs}.

5.2.2 Συνεχής πίδακας ακτινικά αυτοόμοιας κρύας ροής

Έχοντας υπόψιν τις βασικές ιδιότητες που περιμένει κανείς από τις περιπτώσεις ομογένειας και κυλινδρικής συμμετρίας, θα μελετήσουμε τις ιδιότητες της ακτινοβολίας από την πιο ρεαλιστική

[12] Αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου η ταχύτητα είναι ομογενής και συνεπώς το $(\hat{n} - \vec{\beta})$ σταθερό.

περίπτωση πίδακα, που ακολουθεί το μοντέλο ακτινικής αυτοομοιότητας. Όπως και πριν θεωρούμε συνεχή ροή, αγνοώντας για πρακτικούς λόγους τις περιπτώσεις όπου η γωνία παρατήρησης είναι μικρότερη από την ημιγωνία του πίδακα. Θεωρούμε ότι κάτι τέτοιο ισχύει καθώς οι πηγές που μελετάμε έχουν δομή που περιλαμβάνει τις συνιστώσες του πυρήνα και του πίδακα υποδεικνύοντας ότι παρατηρείται από μεγαλύτερες γωνίες[13].

Η διάδοση κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης γίνεται (αντίστοιχα με την περίπτωση του κυλίνδρου) ως εξής. Το ίχνος κάθε ευθείας (σε έναν άπειρης ανάλυσης πίδακα) πάνω στο επίπεδο του ουρανού θα αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος σημείων (n_l, n_r) το οποίο με την κάθετη, στο επίπεδο, απόσταση $n = \sqrt{(x \sin\Theta_{obs})^2 + (z \sin\Theta_{obs})^2}$, ορίζουν ένα τρισορθογώνιο σύστημα. Η ολοκλήρωση των εξισώσεων διάδοσης ξεκινά από την εξωτερική τομή της ευθείας με τον πίδακα και συνεχίζεται κατά μήκος του παρατηρητή, μέχρι το πέρας αυτού, που εξαρτάται από την επιλογή της ακτινικής του κλίμακας. Σε κάθε σημείο η ακτινική απόσταση θα είναι $r = \sqrt{n^2 + n_l^2 + n_r^2}$, και οι συνιστώσες στο καρτεσιανό σύστημα αντιστοιχούν σε $x = n \sin\Theta_{obs} - n_l \cos\Theta_{obs}$, $y = n_r$, $z = n \cos\Theta_{obs} + n_l \sin\Theta_{obs}$. Μποούμε να υπολογίσουμε την αντίστοιχη πολική γωνία θ, ως $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{n_z}{r}\right)$ καθώς και την αζιμουθιακή ϕ, όπου $\phi = \cos^{-1}\left(\frac{n_x}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}}\right)$, για $n_y > 0$ και $\phi = 2\pi - \cos^{-1}\left(\frac{n_x}{\sqrt{n_x^2+n_y^2}}\right)$, για $n_y < 0$. Εφόσον κατά τη διάδοση το μαγνητικό πεδίο, η ταχύτητα και η πυκνότητα θα αλλάζουν, ορίζουμε ένα βήμα Δn , αρκετά μικρό ώστε οι φυσικές παράμετροι να θεωρούνται ομογενείς, και τις υπολογίζουμε μέσω των ιδιοτήτων των αυτοόμοιων λύσεων [14],

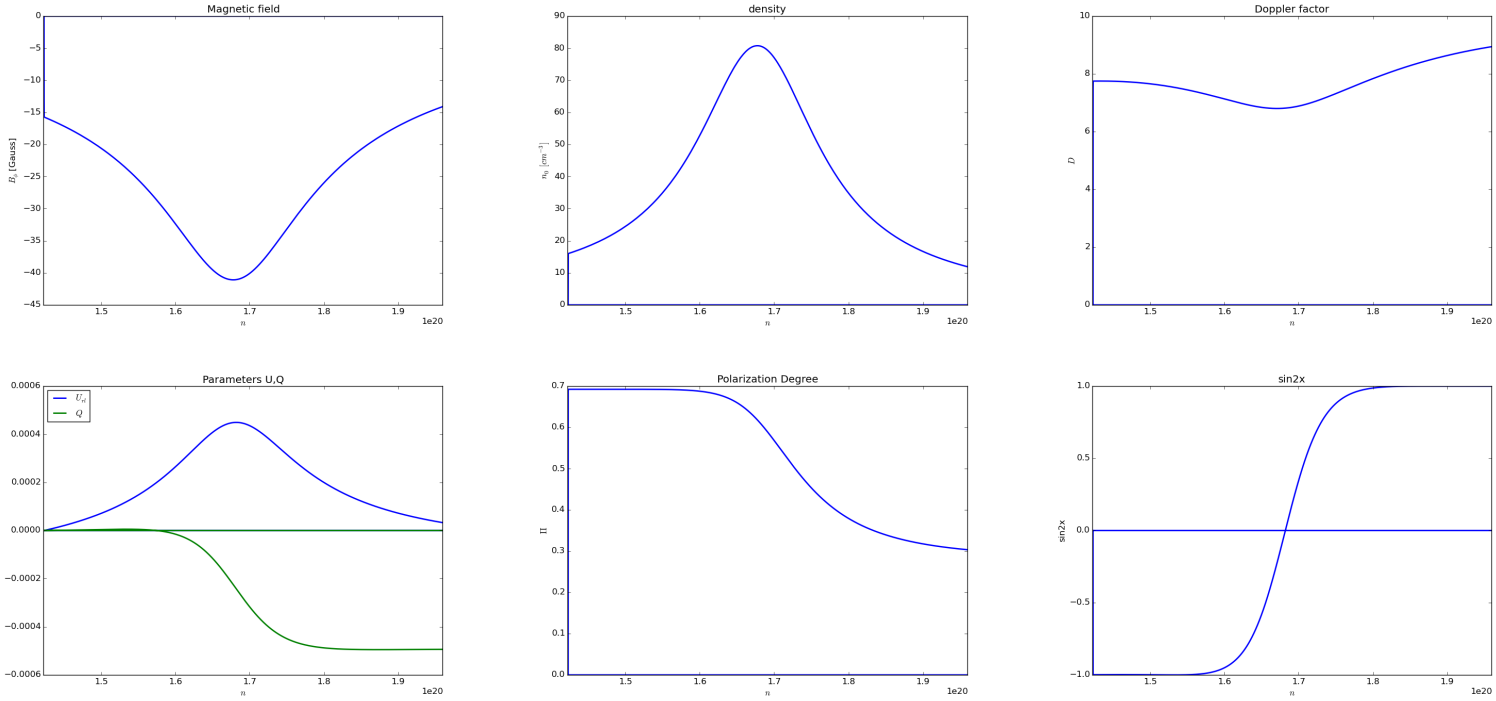
$$B_p(n) = B_p(\theta)\left(\frac{r_n}{r(\theta)}\right)^{F-2},\ B_\phi(n) = B_\phi(\theta)\left(\frac{r_n}{r(\theta)}\right)^{F-2},$$

$$\rho_0(n) = \rho_0(\theta)\left(\frac{r_n}{r(\theta)}\right)^{2(F-2)},\ V_p(n) = V_p(\theta),\ V_\phi(n) = V_\phi(\theta). \tag{5.1}$$

Οι λύσεις του μαγνητικού πεδίου που δίνονται από το μοντέλο αναφέρονται στο σύστημα του εργαστηρίου. Γνωρίζοντας τις V_ϕ, V_p και έχοντας υπολογίσει τη γωνία ϕ μπορούμε να βρούμε τους παράγοντες Lorentz και Doppler και μέσω αυτών προσδιορίζουμε το μαγνητικό πεδίο στο σύστημα της ροής καθώς και το ρυθμό μεταβολής της γωνίας, $d\chi/ds$ (βλ. κεφάλαιο 3.1.5).

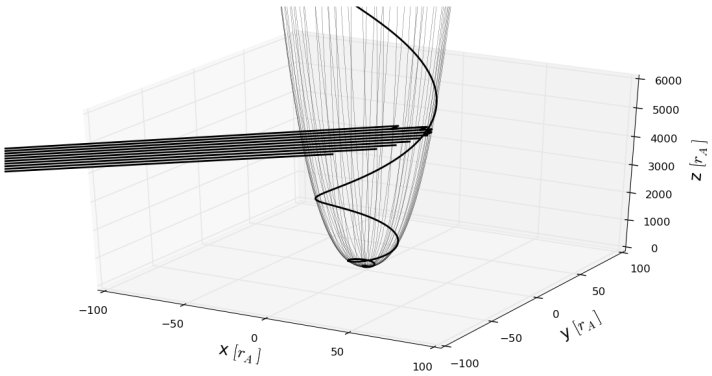
[13]Σε αντίθετη περίπτωση η κίνηση των περιοχών εκπομπής δεν θα ακολουθούσε μια συγκεκριμένη διεύθυνση, αυτή του πίδακα, αλλά θα εμφανίζονταν προς κάθε κατεύθυνση στο επίπεδο του ουρανού.

[14]Για την περιγραφή της γραμμής αναφοράς A από την οποία προκύπτουν οι φυσικές ποσότητες, έχουν επιλεγεί και πάλι οι παράμετροι και αρχικές συνθήκες που χρησιμοποιήθηκαν και στην περίπτωση του κινούμενου θύλακα. Στη περίπτωση, ωστόσο, συνεχούς πίδακα η επιλογή της τιμής $F < 1$ δεν είναι καλή προσέγγιση για μικρές κυλινδρικές αποστάσεις καθώς πάνω στον άξονα συμμετρίας το ρεύμα απειρίζεται. Συνεπώς για πολύ μικρές πολικές γωνίες θεωρούμε ότι ο πίδακας είναι κενός.

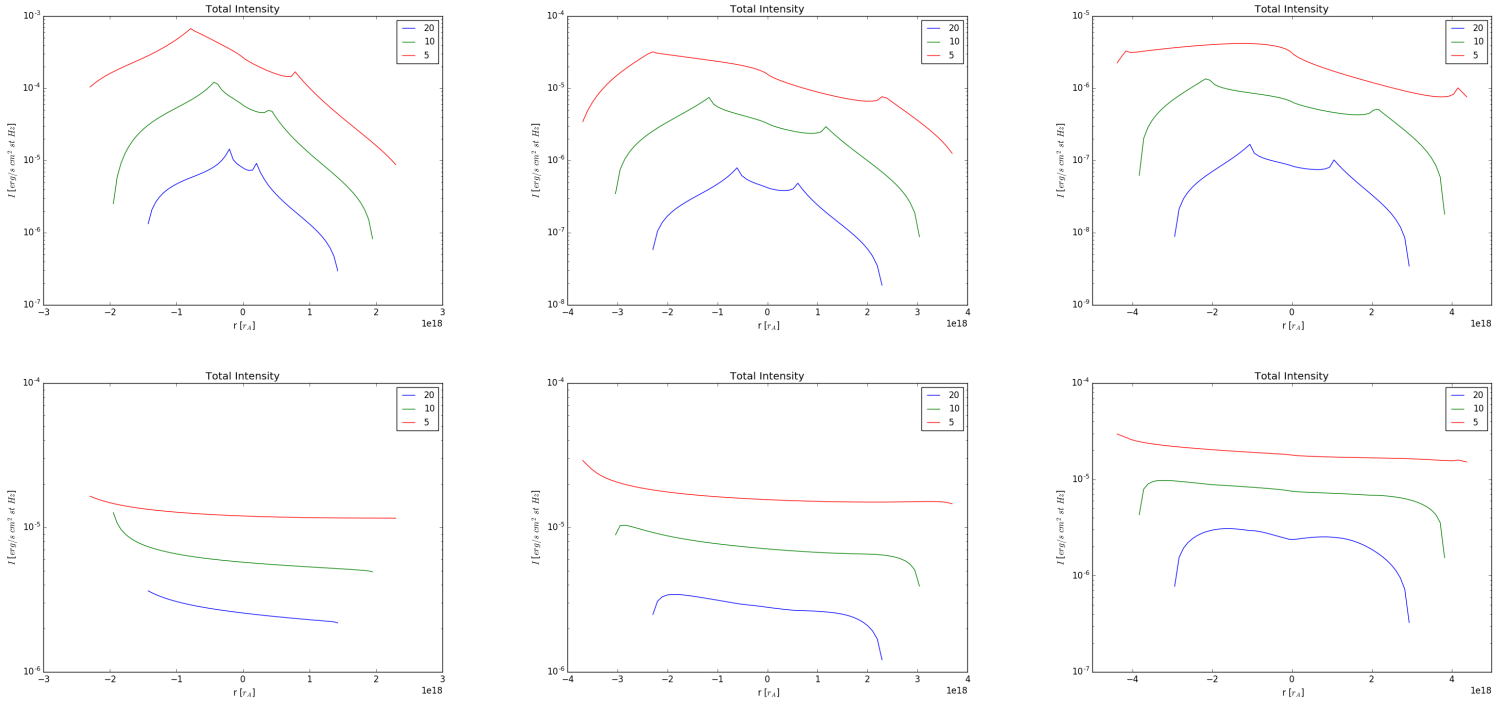


Σχήμα 5.26: Οι διάφορες φυσικές ποσότητες και τα μεγέθη της ακτινοβολίας κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης, από ένα σημείο (n_1, n_2) και για γωνία παρατήρησης $\Theta_{obs} = 5^o$.

Αντίθετα με πριν, στην προσέγγιση αυτή, οι τιμές των φυσικών μεγεθών εξαρτώνται προφανώς τόσο από την κυλινδρική απόσταση όσο και από το ύψος z. Παράλληλα, το πεδίο ταχυτήτων της ροής δεν προκύπτει ομογενές και παράλληλο στον άξονα, αλλά εμφανίζει αντίστοιχη με το μαγνητικό πεδίο, ελικοειδή μορφή. Οι παραπάνω γεωμετρικές εξαρτήσεις συνεπώς, θα επηρεάσουν τα διάφορα προφίλ που παρουστιάστηκαν παραπάνω. Ένα παράδειγμα της μεταβολής των διάφορων ποσοτήτων κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης για γωνία $\Theta_{obs} = 5^o$, δίνεται στα σχήματα 5.26. Παρατηρούμε ότι τα φυσικά μεγέθη (μαγνητικό πεδίο, πυκνότητα) εμφανίζονται αρκετά συμμετρικά, ενώ υπάρχει αύξηση της τιμής τους στην κεντρική περιοχή. Γενικά, το μέτρο τους εξαρτάται από την πολική γωνία και την ακτίνα r και η κατανομή τους στο χώρο φαίνεται καλύτερα στα σχήματα 2.7, αν σκεφτούμε την τρισδιάστατη μορφή τους. Η συμμετρικότητα σε σχέση με το επίπεδο yz εξαρτάται προφανώς από τη γωνία παρατήρησης, με μεγαλύτερη απόκλιση για μικρές γωνίες Θ_{obs}.



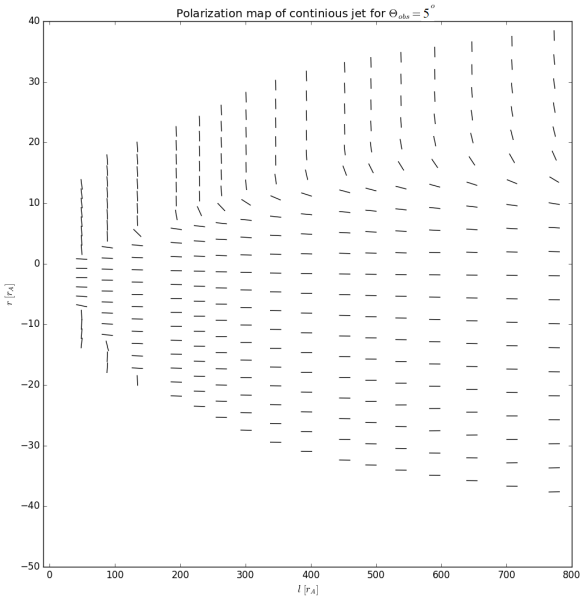
Σχήμα 5.27: Ευθείες διάδοσης κατά μήκος της διατομής, για πίδακα άπειρης ανάλυσης.



Σχήμα 5.28: Η ολική ένταση I σε $[egr\ s^{-1}st^{-1}cm^{-2}Hz^{-1}]$ για συχνότητα $10^{14}Hz$ (πάνω) και $10^{10}Hz$ (κάτω), στις προβαλλόμενες θέσεις 169, 449, 777 $[\varpi_A]$ στον άξονα l (από αριστερά προς τα δεξιά). Οι τρεις καμπύλες διαφορετικού χρώματος αναφέρονται στη γωνία παρατήρησης που αναγράφεται (^{o}).

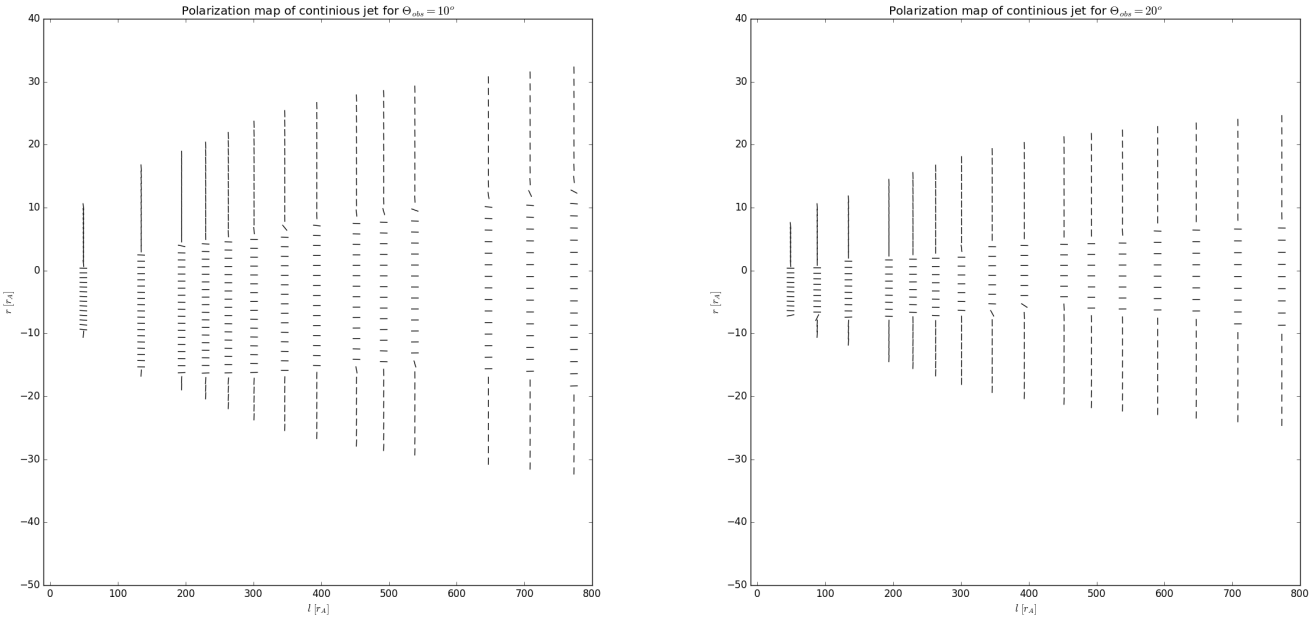
Για δεδομένο σημείο n_l στην προβολή του άξονα, βρίσκουμε τα κάθετα προφίλ (βλ. σχήμα 5.27) της ένταση και του διανύσματος πόλωσης. Στα σχήματα 5.28, φαίνεται η ολική ένταση γωνίες[15] κατά μήκος της διατομής,για δύο συχνότητες και σε τρία σημεία στις μικρότεες γωνίες του άξονα l. Παρατηρούμε ότι και πάλι εμφανίζεται ανομοιογένεια στις δύο μεριές του πίδακα, με αυτήν να είναι εντονότερη για τη μικρή γωνία παρατήρησης ενώ παρατηρούνται (στην οπτικά αραιή περιοχή) και δύο μέγιστα εκατέρωθεν του άξονα. Οι κορυφές αυτές πιθανόν να οφείλονται στο ότι ο πίδακας, για σημεία που αντιστοιχούν σε μικρότερη, από μια δεδομένη πολική ακτίνα, θεωρείται κενός. Στη μικρότερη γωνία $\Theta_{obs} = 5^o$, που αντιστοιχεί σε μεγαλύτερα ύψη, οι κορυφές τείνουν προς τις άκρες του πίδακα, δίνοντας την εικόνα των λαμπρών ακραίων σημείων, που εμφανίζεται στην περίπτωση φλοιού.

[15] Η διαφορά στο μέγεθος της προβαλλόμενης διατομής για τις διαφορετικές γωνίες, οφείλεται στο ότι η απόσταση l στο επίπεδο του ουρανού αντιστοιχεί σε διαφορετικά ύψη του πίδακα ανάλογα με τη θ_{obs} και συνεπώς σε διαφορετικές κυλινδρικές ακτίνες.



Σχήμα 5.29: Ο χάρτης πόλωσης για συνεχή πίδακα, όπως παρατηρείται από γωνία $\Theta_{obs} = 5^o$.

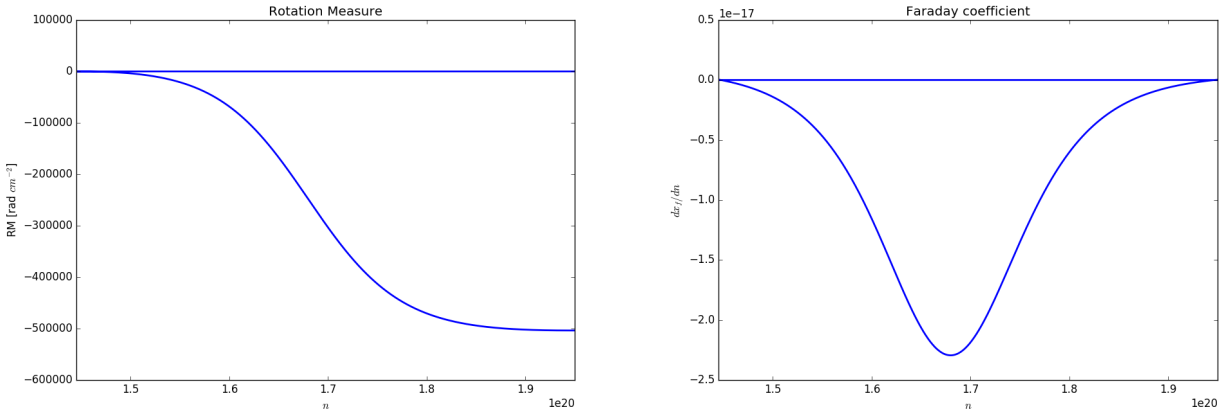
Στο σχήματα 5.29, 5.30 δίνεται ο χάρτης πόλωσης για γωνίες $\Theta_{obs} = 5,\ 10,\ 20^o$. Παρατηρούμε ότι η πλειοψηφία των διανυσμάτων πόλωσης, εμφανίζεται ξανά κάθετα ή παράλληλα στην προβολή του άξονα. Η σχεδόν συμμετρία που εμφανίζεται στα μεγέθη κατά μήκος της ευθείας διάδοσης, ειδικά για τις μεγάλες γωνίες, οδηγεί σε πολύ μικρές τελικές τιμές για την παράμετρο U_{rl} και συνεπώς, σε παρόμοια εικόνα με αυτήν της κυλινδρικής περίπτωσης. Συγκεκριμένα στις περιπτώσεις $\Theta = 20,\ 10^o$ εμφανίζεται η "spine -sheath" κατανομή, με την κεντρική περιοχή των παράλληλων διανυσμάτων να αυξάνεται καθώς πηγαίνουμε σε μεγαλύτερες αποστάσεις, όπου το πεδίο γίνεται πιο τοροειδές. Παράλληλα, με την αύξηση της απόστασης παρατηρείται μεγαλύτερη συμμετρία στα προφίλ. Εφόσον, ο παράγοντας Lorentz μεγαλώνει και η διεύθυνση της ταχύτητας τείνει προς τον άξονα, θα μπορούσαμε να αποδώσουμε τη συμμετρία αυτή στο ότι η γωνίες Θ_{obs} γίνονται $>> 1/\Gamma$ (αντίστοιχα με την κυλινδρική περίπτωση). Αντίθετα, για $\Theta = 5^o$, παρατηρούμε ότι η αρχική συμμετρία χάνεται και το προφίλ της πόλωσης γίνεται κάθετο από τη μια μεριά και παράλληλο στην άλλη. Η διαφορά αυτή, όπως και στα προφίλ των εντάσεων, ίσως να οφείλεται στο ότι ταιριάζει περισσότερο στην εικόνα φλοιού.



Σχήμα 5.30: Ο χάρτης πόλωσης για συνεχή πίδακα, όπως παρατηρείται από γωνία $\Theta_{obs} = 10^o$ (αριστερά) και 20° (δεξιά).

Εσωτερική στροφή Faraday

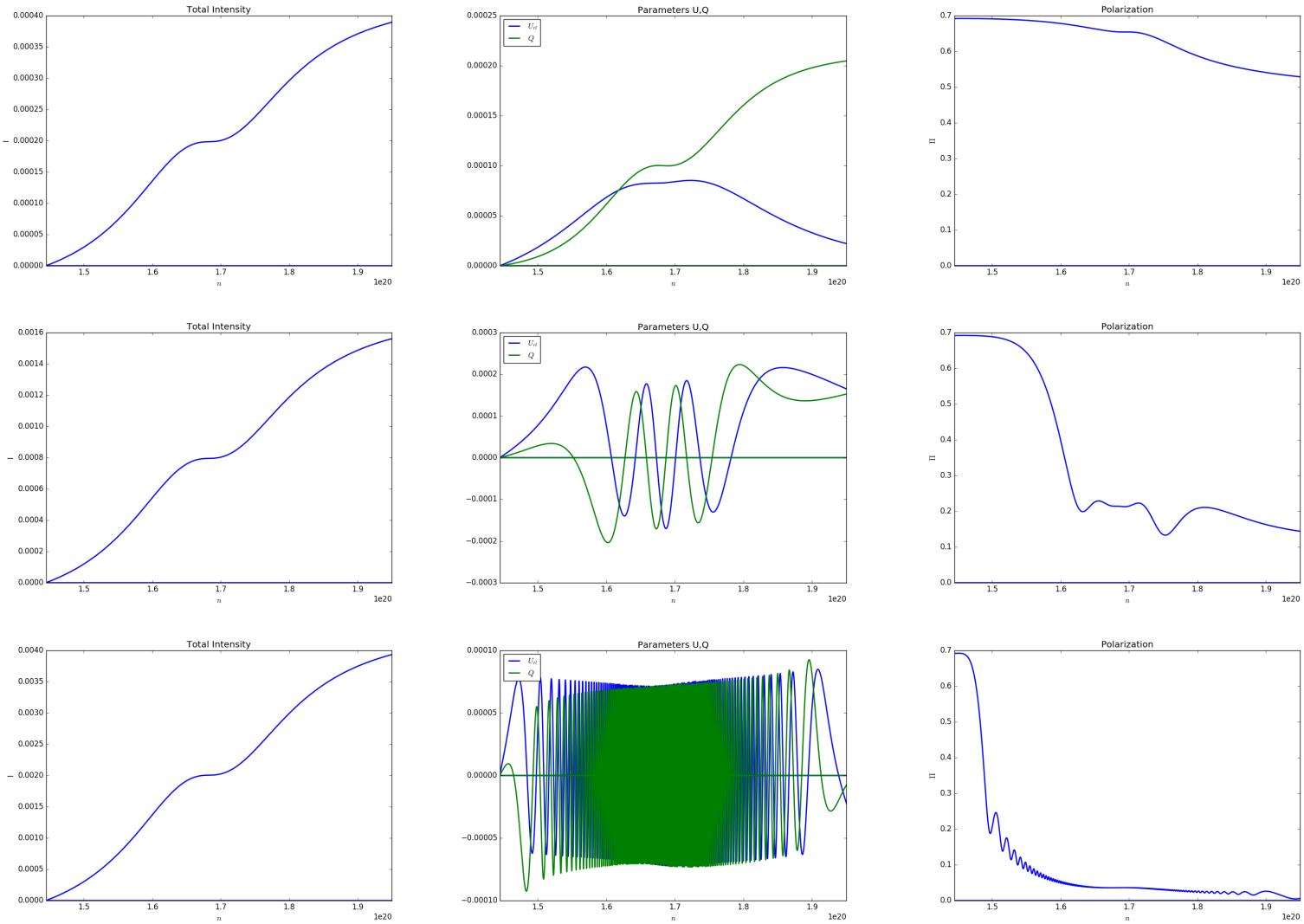
Θεωρούμε αρχικά, ότι όλη η ροή του πίδακα συμβάλει στη στροφή της παραγόμενης ακτινοβολίας. Το μέτρο και ο συντελεστής στροφής, κατά μήκος μιας ευθείας διάδοσης που αντιστοιχεί σε ένα τυχαίο σημείο του επιπέδου, δίνονται στο σχήμα 5.31. Η συμμετρικότητα του συντελεστή είναι λογική αν σκεφτούμε την εξάρτησή του από την ποσότητα $(\hat{n} - \vec{\beta})\vec{b}$ [16].



Σχήμα 5.31: Το μέτρο στροφής RM (αριστερά) και ο συντελεστής Faraday (δεξιά), για συχνότητα $10^{12} Hz$, κατά μήκος της ευθείας διάδοσης.

[16] Οι προβολές των $\vec{B}$, $\vec{\beta}$ στο $\hat{n}$ και το γινόμενο $\vec{B}\vec{\beta}$, που προκύπτουν από την ανάλυση της σχέσης, στη περίπτωση που δεν αλλάζει υπερβολικά η απόσταση στον άξονα z, είναι σχεδόν ίδια για τα αντικατοπτρικά σημεία του επιπέδου xz. Παράλληλα η μεγάλη εστίαση οδηγεί σε συγκρίσιμο μήκος διάδοσης σε σχέση με το επίπεδο αυτό, με αποτέλεσμα να μην παρουσιάζεται εμφανώς μεγαλύτερη "δυρά" στη μια πλευρά της καμπύλης.

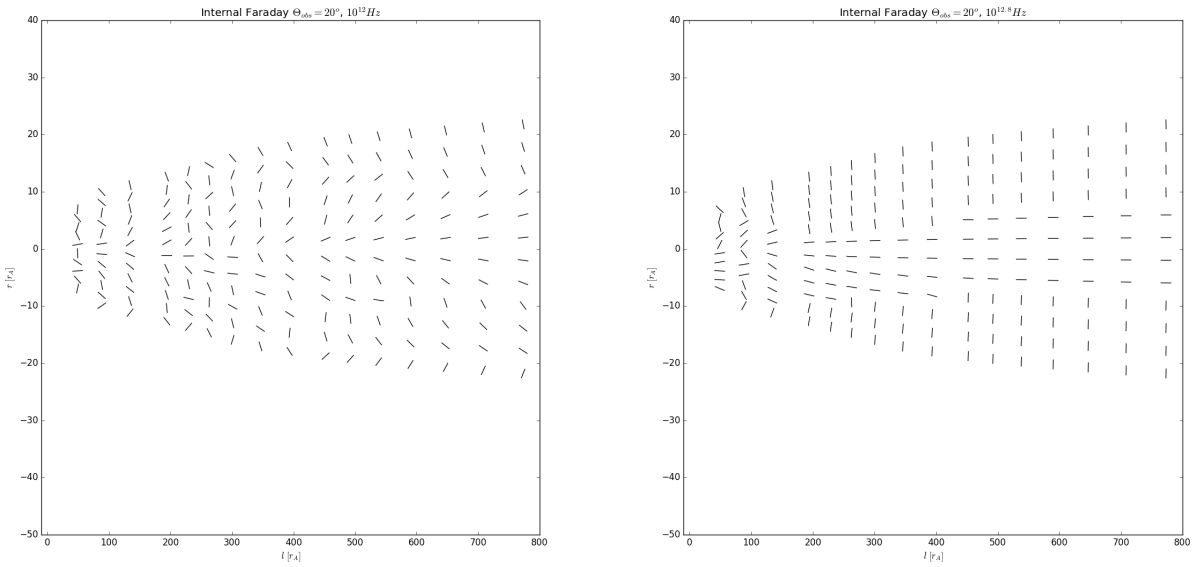
Στις εικόνες του σχήματος 5.32, δίνονται οι παράμετροι Stokes και ο βαθμός πόλωσης κατά μήκος της ευθείας παρατήρησης για τρεις διαφορετικές συχνότητες. Όπως είναι αναμενόμενο η μορφή της ολικής ένταασης δεν μεταβάλλεται, παραμόνο το μέτρο της που εξαρτάται από τη συχνότητα. Όσον αφορά τις παραμέτρους U, Q όσο αυξάνεται ο συντελεστής στροφής τόσο αυξάνεται και η συχνότητα των ταλαντώσεων, ενώ προφανώς μειώνεαι σημαντικά και ο βαθμός πόλωσης (πέραν της μείωσης λόγω ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου), λόγω έντονης αποπόλωσης.



Σχήμα 5.32: Η ολική ένταση I, οι παράμετροι U, Q και ο βαθμός πόλωσης, για συχνότητες $10^{14}, 10^{12.8}, 10^{12}$ Hz (από πάνω προς τα κάτω).

Ο χάρτης πόλωσης, για $\Theta = 20^o$, όπως προκύπτει από συνθήκες εσωτερικής στροφής για συχότητες $\nu = 10^{12}$ και $\nu = 10^{12.8}$, φαίνεται στο σχήμα 5.33. Παρατηρούμε ότι στις κεντρικές περιοχές όπου οι συνθήκες Faraday αδιαφάνειας είναι ιδαίτερα ισχυρές, εμφανίζεται έντονη τυχαιότητα στα διανύσματα πόλωσης. Αυτό μπορεί να οφείλεται εν γένει στο φαινόμενο της στροφής όπου λόγω πολλαπλών περιστροφών, η τελική διεύθυνση θα εξαρτάται έντονα από την απόσταση διάδοσης και τις φυσικές παραμέτρους, ενώ εφόσον η ακτινοβολία υπόκειται σε πολλαπλές στροφές, κατά μήκος της διατομής πιθανώς το $EVPA$ να μην μεταβάλλεται ομαλά αλλά να παρουσιάζει τυχαίες τιμές. Ωστόσο, σε περιπτώσεις πολύ μεγάλων συντελεστών, ενδέχεται να υπάρχουν υ-

πολογιστικά σφάλματα λόγω πεπερασμένης ακρίβειας του κώδικα. Οι εσωτερικές αυτές περιοχές, σε πραγματικές συνθήκες, δεν είναι παρατηρήσιμες λόγω μεγάλης οπτικής αδιαφάνειας. Ένα, ωστόσο, χαρακτηριστικό που θα προέκυπτε από την υπέρθεση της ακτινοβολίας σε μια τέτοια περιοχή, είναι ότι αυτή δεν θα εμφανιζόταν πολωμένη, λόγω της αλληλοεξουδετέρωσης των τυχαίων διανυσμάτων. Όσο κατευθυνόμαστε προς μεγαλύτερες αποστάσεις όπου μειώνται ο συντελεστής, το προφίλ της στροφής παρουσιάζεται πιο ομαλό. Όσο μεγαλώνει η συχνότητα παρατήρησης και συνεπώς μειώνεται ο συντελεστής στροφής, το προφίλ θα εμφανίζεται αντίστοιχο με τη περίπτωση όπου δεν υπάρχει το φαινόμενο Faraday.

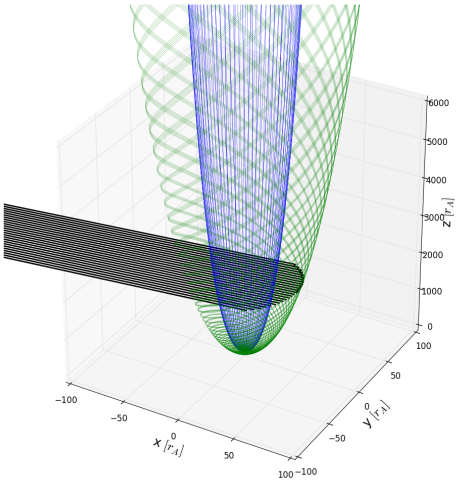


Σχήμα 5.33: Ο χάρτης πόλωσης για συνεχή πίδακα, όπως προκύπτει ύστερα από το φαινόμενο εσωτερικής στροφής Faraday για $\Theta_{obs} = 20^o$ και συχνότητες $\nu = 10^{12}$ (αριστερά) και $\nu = 10^{12.8}$ (δεξιά), αντίστοιχα.

Εξωτερική στροφή Faraday

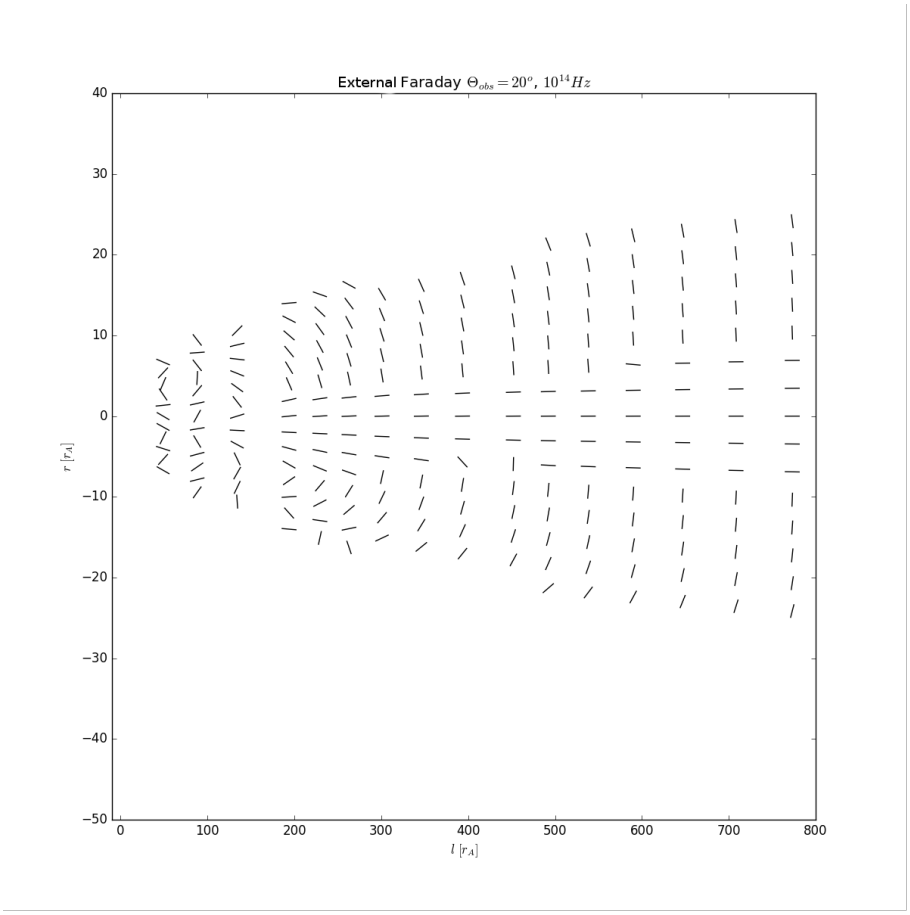
Στην υποπερίπτωση αυτή μελετάμε την επίδραση της εξωτερικής στροφής στη διαμόρφωση της ακτινοβολίας. Το έναυσμα για την υπόθεση αυτή είναι, όπως παρουσιάστηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, η έλλειψη έντονης αποπόλωσης στις παρατηρήσεις. Ωστόσο, το παρατηρούμενο προφίλ ενός ομαλά μεταβαλλόμενου μέτρου στροφής RM κατά μήκος της διατομής του πίδακα συνάδει με την υπόθεση ενός, μεγάλης κλίμακας οργανωμένου μαγνητικού πεδίου, με αποτέλεσμα να αποδίδεται σε πλάσμα που σχετίζεται με τη δομή του πίδακα (έναντι των περιοχών BLR και NLR). Συνεπώς, θεωρούμε ένα εξωτερικό στρώμα, το οποίο εκτείνεται σε ένα πολλαπλάσιο της κλίμακας της περιοχής που μελετήσαμε προηγουμένως (βλ. σχήμα 5.34) και το οποίο δεν συμμετέχει στην εκπομπή (αντίστοιχα με την περίπτωση του κινούμενου θύλακα).

Στο σχήμα 5.35 δίνεται ο χάρτης πόλωσης για γωνία $\Theta_{obs} = 20^o$ και συχνότητα $\nu = 10^{12} Hz$, όπου φαίνεται η επίδραση του στρώματος. Αν και σε μεγαλύτερα l η διάδοση στο μέσο θα είναι μεγαλύτερη, λόγω της ασθενούς έντασης των φυσικών μεγεθών το φαινόμενο εμφανίζεται αρκετά ασθενές. Παράλληλα, η μεταβολή της γωνίας πόλωσης, τόσο κατά μήκος της προβολής τού άξονα όσο και κάθετα σε αυτόν, που αντιπροσοπεύει μήκος διάδοσης, παρουσιάζεται ομαλή, που σημαίνει ότι το διάνυσμα πόλωσης δεν περιστρέφεται πάνω από μία φορά. Προφανώς, η ένταση της επίδρασης του φαινομένου εξαρτάται εκτός από τη συχνότητα, και από τη γωνία παρατήρησης Θ_{obs} αλλά και από τη κλίμακα της εξωτερικής ακτίνας, την οποία μπορούμε να επιλέξουμε αυθαίρετα προκειμένου



Σχήμα 5.34: Περίπτωση εξωτερικού στρώματος.

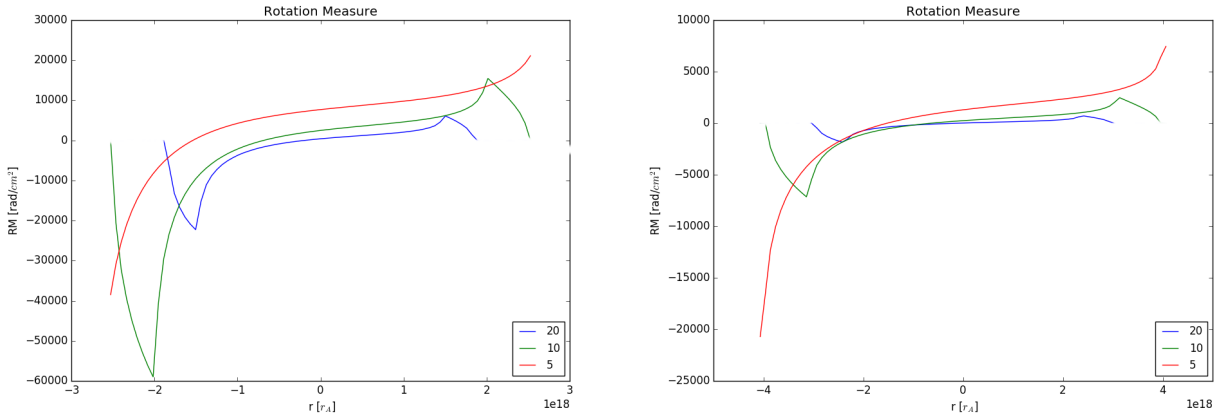
να καθορίσουμε την ένταση του μέτρου στροφής RM.



Σχήμα 5.35: Χάρτης πόλωσης για $\Theta_{obs} = 20^o$ και συχνότητα $\nu = 10^{12} Hz$, για εξωτερικό στρώμα.

Το προφίλ του RM κατά μήκος της διατομής, για δύο διαφορετικές θέσεις πάνω στη προβολή

του άξονα, δίνεται στο σχήμα 5.36. Παρατηρούμε ότι η μορφή, ειδικά για τη μικρή γωνία παρατήρησης, παρουσιάζει τελείως αντίστοιχη συμπεριφορά με αυτήν που μελετήσαμε στον κύλινδρο. Η μεταβολή αυτή είναι ομολή, αλλά όχι τελείως συμμετρική ως προς την προβολή του άξονα (το μηδενικό σημείο δεν συμπίπτει με τον άξονα). Η αντιστοιχία αυτή μπορεί να αποδοθεί στο ότι η ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί προσεγγιστικά στη διεύθυνση του άξονα, για μεγάλες αποστάσεις, και στο ότι η γωνία παρατήρησης είναι συγκρίσιμη αλλά δεν ταυτίζεται με την τιμή $1/\Gamma$ που αντιστοιχεί στην περιοχή αυτή.



Σχήμα 5.36: Το κάθετο προφίλ του μέτρου στροφής για αποστάσεις $n_1 = 169\ \varpi_A$ (αριστερά) και $448\ \varpi_A$ (δεξιά), για τις γωνίες παρατήρησης που αναγράφονται στις καμπύλες κάθε σχήματος.

5.2.3 Σχόλια-Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε πιθανές συνθήκες στους πίδακες των ενεργών γαλαξιών, στις οποίες θα μπορούσαν να αποδωθούν κάποια από τα χαρακτηριστικά της παρατηρούμενης ακτινοβολίας. Συγκεκριμένα από την ανάλυση του κινούμενου θύλακα προέκυψαν μεταβολές στην ένταση λόγω ενίσχυσης doppler, οι οποίες θα μπορούσαν να συνδεθούν με εκλάμψεις. Η χρονική τους διάρκεια μπορεί να καθοριστεί αλλάζοντας την κλίμακα της τροχιάς, ενώ το παρατηρούμενο μέγεθος της ροής, για τις συγκεκριμένες φυσικές παραμέτρους που προκύπτουν από το μοντέλο, θα εξαρτάται από το μέγεθος του θύλακα. Αν και από το μοντέλο προκύπτουν διαδοχικά μέγιστα, το πλήθος αυτών δεν είναι αρκετό ώστε να εξηγήσει τη γρήγορη συνεχόμενη μεταβλητότητα που εμφανίζεται στις πηγές, ενώ η έντονη πτώση του πλάτους δυσχεραίνει ακόμα περισσότερο την εικόνα αυτή. Συνεπώς, τέτοιου είδους αυξήσεις της έντασης, θεωρώντας το παραπάνω μονοζωνικό μοντέλο, θα μπορούσαν να αποτυπωθούν ίσως σε αυξομειώσεις μεγάλης χονικής κλίμακας, στις οποίες επιπροστίθενται μικρότερης διάρκειας και πλάτους μεταβολές της έντασης, από διαφορετικούς μηχανισμούς που αφορούν τις συνθήκες της κατανομής και του μαγνητικού πεδίου. Μια άλλη ωστόσο, θεώρηση θα μπορούσε να αφορά την υπέρθεση της ατινοβολίας από πλήθος τέτοιων θυλάκων, διαφορετικών μεγεθών, που κινούνται σε διάφορες τροχιές, δίνοντας μια πιο ρεαλιστική εικόνα μεταβλητότητας. Παράλληλα, προέκυψε η εικόνα ενός μεταβαλλόμενου $EVPA$, στη διάρκεια του χρόνου, η εξέλιξη του οποίου χρήζει μελέτης προκειμένου να διαπιστωθεί εάν υπάρχει σύνδεση μεταξύ τυχόν έντονων μεταβολών του, με εκλάμψεις που προκύπτουν για την ίδια χρονική περίοδο. Όσον αφορά την χωρική αποτύπωση των διανυσμάτων πόλωσης κατά μήκος της τροχιάς (χάρτης πόλωσης), παρατηρούμε ότι απέχει από τη κατανομή των κάθετων και παράλληλων διανυσμάτων που συναντάται σε πολλές πηγές, και την οποία αποδώσαμε σε αξισυμμετρικές συνεχείς δομές. Η εξέλιξη του διανύσματος πάνω στην προβαλλόμενη απόσταση, ωστόσο, ταιριάζει με την εικόνα που δίνουν ορισμένες πηγές, όπως αυτή του $3C345$, όπου οι γραμμές πόλωσης φαίνεται

να "τυλίγονται" γύρω από τον άξονα. Προφανώς μια μόνο πηγή δεν μπορεί να δώσει μια τέτοια εικόνα, η οποία ωστόσο δεν αποκλείεται στην περίπτωση ενώς πολυζωνικού μοντέλου θυλάκων.

Μελετήσαμε, επιπλέον, την επίδραση του φαινομένου Faraday στην ακτινοβολία, από το οποίο προέκυψαν υπερβολικά μεγάλες τιμές για το RM και συνεπώς πρακτικά δεν θα μπορούσε να ληθφεί καμία πληροφορία για την πηγή, λόγω των επαναλαμβανόμενων περιστροφών του διανύσματος. Τόσο μεγάλες τιμές, προφανώς, δεν συνάδουν με τα παρατηρούμενα μεγέθη για τους πίδακες, που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το αποτέλεσμα αυτό, αποτελεί μειονέκτημα του μοντέλου καθώς είναι πιθανόν να έχει γίνει υπερεκτίμηση του μαγνητικού πεδίου και της πυκνότητας. Η υπόθεση αυτή ενισχύεται και από την πολύ έντονη οπτική αδιαφάνεια που προκύπτει για τις παρατηρούμενες ραδιοσυχνότητες, αν και αυτό μπορεί εν μέρη να ελεγχθεί αλλάζοντας το μέγεθος του θύλακα. Ωστόσο, το μοντέλο της κινούμενης πηγής μικρών διαστάσεων, παρουσιάζει εν γένει ακόμα ένα μειονέκτημα σε σχέση με τη τιμή RM που προκύπτει. Αυτό καθώς στα διάφορα σημεία της τροχιάς, η απόσταση διάδοσης θα μεταβάλλεται σημαντικά, με αποτέλεσμα κανείς να μην μπορεί να ελέγξει με το μοντέλο αυτό τη τιμή του RM, απλά μεταβάλλοντας την κλίμακα του μέσου.

Όσον αφορά τους συνεχείς πίδακες, ακόμα και με το απλοϊκό μοντέλο της κυλινδρικής συμμετρίας, μπορούν να εξαχθούν αποιτελέσματα που συμπίπτουν με τα παρατηρησιακά δεδομένα. Τέτοια είναι, η ανομοιογένεια της έντασης της ακτινοβολίας εκατέρωθεν του άξονα, καθώς η συχνά εμφανιζόμενη δομή των κάθετων και παράλληλων διανυσμάτων πόλωσης, ή συνδυασμό αυτών όπως στην περίπτωση της spine -sheath κατανομής. Δείξαμε ότι οι παραπάνω περιπτώσεις εξαρτώνται τόσο από τη γωνία παρατήρησης και το σχετικό μέγεθος του αζιμουθιακού μαγνητικού πεδίου, όσο και από τον παράγοντα Lorentz. Επιπλέον, η διαχείρηση του μέσου όπου συμβαίνει η στροφή, ως ένα εξωτερικό στρώμα που περιβάλλει την περιοχή εκπομής, δίνει ομαλά μεταβαλλόμενα κάθετα προφίλ RM, τα οποία συνανώνται συχνά σε πηγές, ενισχύοντας την υπόθεση αυτή. Τέλος, μελετήσαμε την περίπτωση μαγνητοϋδροδυναμικού, ακτινικά αυτοόμοιου, συνεχούς πίδακα, η συμπεριφορά του οποίου, ταιριάζει αρκετά με αυτήν του κυλίνδρου, τόσο στη μορφή του χάρτη πόλωσης, όσο και στα προφίλ έντασης και μέτρου στροφής. Η κοινή αυτή συμπεριφορά οφείλεται στις όμοιες συνθήκες ενός ελικοειδούς μαγνητικού πεδίου (η τιμή του οποίου δεν μεταβάλλεται σημαντικά κατά μήκος της ευθείας διάδοσης) και μιας ταχύτητας η οποία κυριαρχείται από την πολοειδή συνιστώσα.

Βιβλιογραφία

[1] M. Boettcher. Models for the Spectral Energy Distributions and Variability of Blazars. *ArXiv e-prints*, June 2010.

[2] H. Krawczynski and E.Treister. Active galactic nuclei the physics of individual sources and the cosmic history of formation and evolution. *Frontiers of Physics*, 8:609–629, December 2013.

[3] K. I. Kellermann, Y. Y. Kovalev, M. L. Lister, D. C. Homan, M. Kadler, M. H. Cohen, E. Ros, J. A. Zensus, R. C. Vermeulen, M. F. Aller, and H. D.Aller. Doppler boosting, superluminal motion, and the kinematics of AGN jets. , 311:231–239, October 2007.

[4] A. Mastichiadis Radiative Processes in Relativistic Outflows. Relativistic Flows in Astrophysics, volume 589 of Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag,2002.

[5] S.Jester. Retardation magnification and the appearance of relativistic jets. , 389:1507–1520, October 2008.

[6] R. D. Blandford and M. J.Rees. 'twin-exhaust' model for double radio sources. , 169:395–415, December 1974.

[7] R. D. Blandford and R. L.Znajek. Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes. , 179:433–456, May 1977.

[8] Blandford, R. D. and Königl, A. Relativistic jets as compact radio sources. , 232:34–48, August 1979.

[9] R. D. Blandford and D. G.Payne. Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets. , 199:883–903, June 1982.

[10] Z.-Y. Li, T. Chiueh, and M. C.Begelman. driven relativistic jets - A class of self-similar solutions. , 394:459–471, August 1992.

[11] J.Contopoulos. Magnetically driven relativistic jets and winds: Exact solutions. , 432:508–517, September 1994.

[12] N. Vlahakis, K. Tsinganos, C. Sauty, and E.Trussoni. A disc-wind model with correct crossing of all magnetohydrodynamic critical surfaces. , 318:417–428, October 2000.

[13] N. Vlahakis and A. Königl. Relativistic Magnetohydrodynamics with Application to Gamma-Ray Burst Outflows. I. Theory and Semianalytic Trans-Alfvénic Solutions. , 596:1080–1103, October 2003.

[14] R. V. E. Lovelace, C. Mehanian, C. M. Mobarry, and M. E.Sulkanen. of axisymmetric magneto-hydrodynamic flows. In R. I. Epstein and W. C.Feldman, editors, *Magnetospheric Phenomena in Astrophysics*, volume 144 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 291–312, 1986.

[15] N. Vlahakis and A.Königl. Magnetic Driving of Relativistic Outflows in Active Galactic Nuclei. I. Interpretation of Parsec-Scale Accelerations. , 605:656–661, April 2004.

[16] Μαστιχιάδης Απόστολος, Βλαχάκης Νεκτάριος. Αστροφυσική Υψηλών Ενεργειών. Ε.Κ.Π.Α, 2010..

[17] N.Vlahakis. Output from MHD Models. 793, 2010.

[18] K. C.Westfold. The Polarization of Synchrotron Radiation.. , 130:241, July 1959.

[19] V. L. Ginzburg and S. I.Syrovatskii. Developments in the Theory of Synchrotron Radiation and its Reabsorption. , 7:375, 1969.

[20] J. D.Jackson. *Classical Electrodynamics, 3rd Edition.* July 1998.

[21] V. L. Ginzburg and S. I.Syrovatskii. Cosmic Magnetobremsstrahlung (synchrotron Radiation). , 3:297, 1965.

[22] G. R. Blumenthal and R. J.Gould. Bremsstrahlung, Synchrotron Radiation, and Compton Scattering of High-Energy Electrons Traversing Dilute Gases. *Reviews of Modern Physics*, 42:237–271, 1970.

[23] G. B. Rybicki and A. P.Lightman. *Radiative processes in astrophysics.* 1979.

[24] T. W. Jones and S. L.Odell. Transfer of polarized radiation in self-absorbed synchrotron sources. I. Results for a homogeneous source. , 214:522–539, June 1977.

[25] A. G. Pacholczyk and T. L.Swihart. Polarization of Radio Sources. I. Homogeneous Source of Arbitrary Optical Thickness. , 150:647, November 1967.

[26] A. G.Pacholczyk. *Radio astrophysics. Nonthermal processes in galactic and extragalactic sources.* 1970.

[27] O. Porth, C. Fendt, Z. Meliani, and B.Vaidya. Synchrotron Radiation of Self-collimating Relativistic Magnetohydrodynamic Jets. , 737:42, August 2011.

[28] M. Lyutikov, V. I. Pariev, and R. D.Blandford. Polarization of Prompt Gamma-Ray Burst Emission: Evidence for Electromagnetically Dominated Outflow. , 597:998–1009, November 2003.

[29] A. E. Broderick and A.Loeb. Signatures of Relativistic Helical Motion in the Rotation Measures of Active Galactic Nucleus Jets. , 703:104–L108, October 2009.

[30] S. P. O'Sullivan and D. C.Gabuzda. Three-dimensional magnetic field structure of six parsec-scale active galactic nuclei jets. , 393:429–456, February 2009.

[31] M. Camenzind and M.Krockenberger. The lighthouse effect of relativistic jets in blazars - A geometric origin of intraday variability. , 255:59–62, February 1992.

[32] V. M. Larionov, S. G. Jorstad, A. P. Marscher, D. A. Morozova, D. A. Blinov, V. A. Hagen-Thorn, T. S. Konstantinova, E. N. Kopatskaya, L. V. Larionova, E. G. Larionova, and I. S.Troitsky. The Outburst of the Blazar S5 0716+71 in 2011 October: Shock in a Helical Jet. , 768:40, May 2013.

[33] M. L. Lister, M. F. Aller, H. D. Aller, D. C. Homan, K. I. Kellermann, Y. Y. Kovalev, A. B. Pushkarev, J. L. Richards, E. Ros, and T.Savolainen. MOJAVE. X. Parsec-scale Jet Orientation Variations and Superluminal Motion in Active Galactic Nuclei. , 146:120, November 2013.

[34] M. L. Lister, M. F. Aller, H. D. Aller, D. C. Homan, K. I. Kellermann, Y. Y. Kovalev, A. B. Pushkarev, J. L. Richards, E. Ros, and T.Savolainen. MOJAVE: XIII. Parsec-scale AGN Jet Kinematics Analysis Based on 19 years of VLBA Observations at 15 GHz. , 152:12, July 2016.

[35] B. Rani, T. P. Krichbaum, A. P. Marscher, J. A. Hodgson, L. Fuhrmann, E. Angelakis, S. Britzen, and J. A.Zensus. Connection between inner jet kinematics and broadband flux variability in the BL Lacertae object S5 0716+714. , 578:A123, June 2015.

[36] F. K. Schinzel, A. P. Lobanov, and J. A.Zensus. Three Decades of Very Long Baseline Interferometry Monitoring of the Parsec-Scale Jet in 3C 345. In L. Maraschi, G. Ghisellini, R. Della Ceca, and F.Tavecchio, editors, *Accretion and Ejection in AGN: a Global View*, volume 427 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 153, October 2010.

[37] S. G. Jorstad, A. P. Marscher, D. A. Morozova, I. S. Troitsky, I. Agudo, C. Casadio, A. Foord, J. L. Gómez, N. R. MacDonald, S. N. Molina, A. Lähteenmäki, J. Tammi, and M. Tornikoski. Kinematics of Parsec-scale Jets of Gamma-Ray Blazars at 43 GHz within the VLBA-BU-BLAZAR Program. , 846:98, September 2017.

[38] R. T. Zavala and G. B.Taylor. Time-Variable Faraday Rotation Measures of 3C 273 and 3C 279. , 550:147–L150, April 2001.

[39] John F. C. Wardle1. Magnetic fields and polarization in AGN jets. *EPJ Web of Conferences 61.06001*, 2013.

[40] T. Hovatta, M. L. Lister, M. F. Aller, H. D. Aller, D. C. Homan, Y. Y. Kovalev, A. B. Pushkarev, and T.Savolainen. MOJAVE: Monitoring of Jets in Active Galactic Nuclei with VLBA Experiments. VIII. Faraday Rotation in Parsec-scale AGN Jets. , 144:105, October 2012.

[41] R. T. Zavala and G. B.Taylor. Faraday Rotation Measure Gradients from a Helical Magnetic Field in 3C 273. , 626:L73–L76, June 2005.

[42] K. Asada, M. Inoue, S. Kameno, and H.Nagai. Time Variation of the Rotation Measure Gradient in the 3C 273 Jet. , 675:79–82, March 2008.

[43] D. C. Gabuzda, É. Murray, and P.Cronin. Helical magnetic fields associated with the relativistic jets of four BL Lac objects. , 351:L89–L93, July 2004.

[44] D. H. Roberts and J. F. C.Wardle. Evidence for Highly Relativistic Velocities in the Kiloparsec-scale Jet of the Quasar 3C 345. , 759:L35, November 2012.

[45] Ericson D. Lopez. THE FARADAY ROTATION EFFECT IN QUASAR JETS. *The Astrophysical Journal*, 2006.

[46] G. E. Romero, M. Boettcher, S. Markoff, and F.Tavecchio. Relativistic Jets in Active Galactic Nuclei and Microquasars. , 207:5–61, July 2017.

[47] P. Padovani, D. M. Alexander, R. J. Assef, B. De Marco, P. Giommi, R. C. Hickox, G. T. Richards, V. Smolčić, E. Hatziminaoglou, V. Mainieri, and M.Salvato. Active galactic nuclei: what's in a name?. , 25:2, August 2017.

[48] A. Marscher. Variability of Blazars and Blazar Models over 38 Years. *Galaxies*, 4:37, September 2016.

[49] C.Fendt. Collimated jet magnetospheres around rotating black holes. General relativistic force-free 2D equilibrium.. , 319:1025–1035, March 1997.

[50] C. Ceccobello, Y. Cavecchi, M. H. M. Heemskerk, S. Markoff, P. Polko, and D.Meier. A new method for extending solutions to the self-similar relativistic magnetohydrodynamic equations for black hole outflows. , 473:4417–4435, February 2018.

[51] J.Contopoulos. Force-free Self-similar Magnetically Driven Relativistic Jets. , 446:67, June 1995.

[52] S. S. Komissarov, N. Vlahakis, A. Königl, and M. V.Barkov. Magnetic acceleration of ultrarelativistic jets in gamma-ray burst sources. , 394:1182–1212, April 2009.

[53] W. J. Potter and G.Cotter. Synchrotron and inverse-Compton emission from blazar jets - I. A uniform conical jet model. , 423:756–765, June 2012.

[54] J. L. Gómez, A. P. Marscher, S. G. Jorstad, I. Agudo, and M.Roca-Sogorb. Faraday Rotation and Polarization Gradients in the Jet of 3C 120: Interaction with the External Medium and a Helical Magnetic Field?. , 681:L69, July 2008.

[55] H. Zhang, X. Chen, and M.Böttcher. Synchrotron Polarization in Blazars. , 789:66, July 2014.

[56] A. P. Marscher, S. G. Jorstad, F. D. D'Arcangelo, D. Bhattarai, B. Taylor, A. R. Olmstead, E. Manne-Nicholas, V. M. Larionov, V. A. Hagen-Thorn, T. S. Konstantinova, E. G. Larionova, L. V. Larionova, D. A. Melnichuk, D. A. Blinov, E. N. Kopatskaya, I. S. Troitsky, I. Agudo, J. L. Gómez, M. Roca-Sogorb, P. S. Smith, G. D. Schmidt, O. Kurtanidze, M. G. Nikolashvili, G. N. Kimeridze, and L. A.Sigua. The Inner Jet of the Quasar PKS 1510−089 as Revealed by Multi-waveband Monitoring. *ArXiv e-prints*, February 2010.

[57] E. Clausen-Brown, M. Lyutikov, and P.Kharb. Signatures of large-scale magnetic fields in active galactic nuclei jets: transverse asymmetries. , 415:2081–2092, August 2011.