



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

Νικόλαος Ι. Πουλίδης

Επιβλέπων: Σταύρος Κολλιόπουλος, Καθηγητής

**ΑΘΗΝΑ
ΜΑΪΟΣ 2018**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

Νικόλαος Ι. Πουλίδης
A.M.: 1115200000111

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: Σταύρος Κολλιόπουλος, Καθηγητής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία είναι μια εισαγωγή στην θεωρία συνόλων η οποία συνδυάζει την απλότητα με την ακρίβεια διατηρώντας παράλληλα την δέουσα μαθηματική αυστηρότητα. Τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων έχουν τεχνηέντως αντικατασταθεί από διαισθητικά προφανείς παραδοχές και κάθε νέα έννοια ορίζεται βάσει προηγούμενων εννοιών ενώ υπάρχει απόδειξη για κάθε νέο μαθηματικό αποτέλεσμα. Αρχικά παρουσιάζονται οι τρόποι ορισμού συνόλων οι οποίοι στην συνέχεια χρησιμοποιούνται για τον ορισμό νέων συνόλων από ήδη καθορισμένα σύνολα ενώ αποδεικνύονται ιδιότητες για κάθε σύνολο που ορίζεται. Ακολουθούν οι συνολοθεωρητικοί ορισμοί των μαθηματικών εννοιών της σχέσης και της συνάρτησης που πλαισιώνονται από ορισμούς νέων εννοιών και αποδείξεις ιδιοτήτων κάθε έννοιας. Τέλος ορίζονται οι φυσικοί αριθμοί, οι πράξεις και η διάταξη τους χρησιμοποιώντας την αρχή της μαθηματικής επαγωγής και το θεώρημα αναδρομής.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Θεωρητική Πληροφορική

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: σύνολα, σχέσεις, συναρτήσεις, μαθηματική επαγωγή, φυσικοί αριθμοί

ABSTRACT

This thesis is an introduction to set theory that combines simplicity with precision while maintaining the appropriate mathematical rigor. The axioms of set theory have been proficiently replaced by intuitively obvious assumptions and every new concept is defined by previous concepts while there is proof of every new mathematical result. Initially the ways of defining sets are presented which are then used to define new sets of already defined sets while proving properties for every set that is defined. Following are the set-theoretic definitions of the mathematical concepts of relation and function which are framed by definitions of new concepts and proofs of properties for every concept. Finally the natural numbers, their operations and their order are defined using the principle of mathematical induction and the recursion theorem.

SUBJECT AREA: Theoretical Informatics

KEYWORDS: sets, relations, functions, mathematical induction, natural numbers

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Για την διεκπεραίωση της παρούσας πτυχιακής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ Δημήτριο Θηλυκό και τον επιβλέποντα καθηγητή Σταύρο Κολλιόπουλο για την συνεργασία τους στην ολοκλήρωσή της.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	7
1. ΣΥΝΟΛΑ	8
1.1 Ορισμοί Συνόλων	8
1.2 Κανονικές Παραστάσεις Συνόλων	20
1.3 Καρτεσιανό Γινόμενο Συνόλων	24
2. ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	27
2.1 Σχέσεις	27
2.2 Συναρτήσεις.....	35
3. ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.....	46
3.1 Ορισμός Φυσικών Αριθμών	46
3.2 Πράξεις Φυσικών Αριθμών	51
3.3 Διάταξη Φυσικών Αριθμών	54
4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	57
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	58

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η θεωρία συνόλων είναι μια μαθηματική θεωρία η οποία έχει επηρεάσει καταλυτικά όλους τους κλάδους των μαθηματικών και της θεωρητικής πληροφορικής σε τέτοιο βαθμό ώστε να θεωρείται αδιανόητο να μελετά κανείς προχωρημένα θέματα μαθηματικών ή θεωρητικής πληροφορικής χωρίς να έχει κάποιες γνώσεις θεωρίας συνόλων. Θεωρείται επίσης η θεωρία στην οποία βασίζεται η θεμελίωση των μαθηματικών διότι

εικάζεται ότι όλα τα μαθηματικά αντικείμενα είναι πράγματι σύνολα, και ότι οι ιδιοτητές τους είναι πορίσματα των λιτών, κομψών αξιωμάτων για τα σύνολα.
[Μοσχοβάκης 2007, ν]

Το αν κάτι τόσο απλοϊκό αποτελεί την πλήρη αλήθεια είναι ένα ενδιαφέρον θέμα το οποίο όμως δεν θα μας απασχολήσει στην παρούσα πτυχιακή εργασία η οποία φιλοδοξεί να αποτελέσει μια εναλλακτική πηγή γνώσης για όσους επιθυμούν μια απλή αλλά ταυτόχρονα αυστηρή και περιεκτική εισαγωγή στην θεωρία συνόλων.

1. ΣΥΝΟΛΑ

1.1 Ορισμοί Συνόλων

Για την μελέτη της θεωρίας συνόλων θα χρησιμοποιήσουμε καθιερωμένες μαθηματικές έννοιες, εκφράσεις, τεχνικές και συντομογραφίες για τις οποίες ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Οι λέξεις «ένα», «δύο», «τρία» δεν αναφέρονται στις μαθηματικές έννοιες που φέρουν αυτά τα ονόματα και οι οποίες θα οριστούν αργότερα αλλά προς το παρόν είναι απλώς οι συνήθεις γλωσσικές συντομεύσεις των φράσεων «κάποιο», «κάποιο και κατόπιν κάποιο άλλο», «κάποιο και κατόπιν κάποιο άλλο και κατόπιν κάποιο άλλο» αντίστοιχα.
2. Η έκφραση « $x = y$ » σημαίνει ότι τα x και y είναι το ίδιο αντικείμενο δηλαδή το σύμβολο « x » στα αριστερά του συμβόλου « $=$ » (ίσον) είναι ένα όνομα για το ίδιο αντικείμενο που ονοματίζει και το σύμβολο « y » στα δεξιά του συμβόλου « $=$ ».
3. Ο συμβολιστικός «μηχανισμός» μέσω του οποίου η έκφραση « $x \neq y$ » νοείται ως άρνηση της έκφρασης « $x = y$ » επεκτείνεται και σε άλλες περιπτώσεις.
4. Μεταβλητή είναι ένα σύμβολο το οποίο χρησιμοποιείται για να ονοματίζει διαφορετικά αντικείμενα ενώ όταν μια μεταβλητή ονοματίζει κάποιο συγκεκριμένο αντικείμενο λέμε ότι η μεταβλητή λαμβάνει ως τιμή το αντικείμενο αυτό.
5. Πρόταση είναι μια δηλωτική έκφραση η οποία για κάθε τιμή κάθε μεταβλητής την οποία περιλαμβάνει είναι αληθής ή ψευδής αλλά όχι και τα δύο.
6. Αν a, b είναι προτάσεις τότε η έκφραση « a αν και μόνο αν b » είναι πρόταση η οποία είναι αληθής όταν οι a, b είναι αληθείς ή όταν οι a, b είναι ψευδείς ενώ είναι ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση.
7. Μια έκφραση η οποία αποτελείται από προτάσεις που συνδέονται μόνο με τον σύνδεσμο «ή» είναι πρόταση η οποία είναι αληθής αν και μόνο αν τουλάχιστον μία εκ των προτάσεων από τις οποίες αποτελείται είναι αληθής.
8. Μια έκφραση η οποία αποτελείται από προτάσεις που συνδέονται μόνο με τον σύνδεσμο «και» είναι πρόταση η οποία είναι αληθής αν και μόνο αν κάθε μία εκ των προτάσεων από τις οποίες αποτελείται είναι αληθής.
9. Μια έκφραση η οποία αποτελείται από προτάσεις που συνδέονται μόνο με τον σύνδεσμο «είτε» είναι πρόταση η οποία είναι αληθής αν και μόνο αν ακριβώς μία εκ των προτάσεων από τις οποίες αποτελείται είναι αληθής.
10. Αν a, b είναι προτάσεις τότε η έκφραση « a συνεπάγεται b » είναι πρόταση η οποία σημαίνει ότι αν η πρόταση a είναι αληθής τότε η πρόταση b είναι αληθής δηλαδή η πρόταση « a συνεπάγεται b » είναι ψευδής αν και μόνο αν η πρόταση a είναι αληθής και η πρόταση b είναι ψευδής.
11. Αν υποθέτοντας ότι η πρόταση a είναι ψευδής προκύπτει ότι η πρόταση b είναι ψευδής τότε η πρόταση « b συνεπάγεται a » είναι αληθής διότι είναι αδύνατον η πρόταση b να είναι αληθής και η πρόταση a να είναι ψευδής.

12. Αν οι προτάσεις « a συνεπάγεται b » και « b συνεπάγεται c » είναι αληθείς τότε η πρόταση « a συνεπάγεται c » είναι αληθής διότι αν η πρόταση a είναι αληθής τότε επειδή η πρόταση b είναι αληθής προκύπτει ότι η πρόταση c είναι αληθής.
13. Αν οι προτάσεις « a συνεπάγεται b » και « c συνεπάγεται d » είναι αληθείς τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
 - (α') Η πρόταση « a ή c συνεπάγεται b ή d » είναι αληθής διότι αν η πρόταση « a ή c » είναι αληθής τότε η πρόταση a είναι αληθής ή η πρόταση c είναι αληθής άρα η πρόταση b είναι αληθής ή η πρόταση d είναι αληθής αντίστοιχα επομένως αν η πρόταση « a ή c » είναι αληθής τότε η πρόταση « b ή d » είναι αληθής.
 - (β') Η πρόταση « a και c συνεπάγεται b και d » είναι αληθής διότι αν η πρόταση « a και c » είναι αληθής τότε η πρόταση a είναι αληθής και η πρόταση c είναι αληθής άρα η πρόταση b είναι αληθής και η πρόταση d είναι αληθής αντίστοιχα επομένως αν η πρόταση « a και c » είναι αληθής τότε η πρόταση « b και d » είναι αληθής.
 - (γ') Η πρόταση «είτε a είτε c συνεπάγεται είτε b είτε d » είναι αληθής διότι αν η πρόταση «είτε a είτε c » είναι αληθής τότε είτε η πρόταση a είναι αληθής είτε η πρόταση c είναι αληθής άρα είτε η πρόταση b είναι αληθής είτε η πρόταση d είναι αληθής αντίστοιχα επομένως αν η πρόταση «είτε a είτε c » είναι αληθής τότε η πρόταση «είτε b είτε d » είναι αληθής.
14. Οι προτάσεις a, b είναι ισοδύναμες αν και μόνο αν οι προτάσεις « a συνεπάγεται b », « b συνεπάγεται a » είναι αληθείς δηλαδή αν και μόνο αν η πρόταση « a αν και μόνο αν b » είναι αληθής.
15. Αν οι προτάσεις a, b είναι ισοδύναμες και οι προτάσεις b, c είναι ισοδύναμες τότε οι προτάσεις a, c είναι ισοδύναμες διότι οι προτάσεις « a συνεπάγεται b », « b συνεπάγεται c » είναι αληθείς άρα η πρόταση « a συνεπάγεται c » είναι αληθής και οι προτάσεις « c συνεπάγεται b », « b συνεπάγεται a » είναι αληθείς επομένως η πρόταση « c συνεπάγεται a » είναι αληθής.
16. Μια πρόταση a η οποία αποτελείται από προτάσεις που συνδέονται με τον ίδιο σύνδεσμο («ή», «και», «είτε») είναι ισοδύναμη με κάθε πρόταση b που προκύπτει από την πρόταση a αν αλλάξουμε την σειρά παράθεσης των προτάσεων από τις οποίες αποτελείται διατηρώντας τον ίδιο σύνδεσμο.
17. Για τον υπολογισμό μιας μαθηματικής παράστασης η οποία περιλαμβάνει παρενθέσεις υπολογίζονται πρώτα τα τμήματα της που βρίσκονται μεταξύ των εξωτερων παρενθέσεων.
18. Τα αντικείμενα τα οποία γίνονται αντιληπτά διαισθητικά λόγω κάποιας κανονικότητας που παρουσιάζουν μπορούμε να τα συμβολίσουμε με τρεις τελείες τοποθετημένες η μία δίπλα στην άλλη σε σχηματισμό ευθύγραμμου τμήματος.
19. Το σύμβολο « $\Leftrightarrow$ » αναπαριστά την έκφραση «αν και μόνο αν».
20. Το σύμβολο « $\square$ » σηματοδοτεί το τέλος μιας απόδειξης.

Η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική και κατά συνέπεια δεν ορίζεται. Αυτή γίνεται αντιληπτή διαισθητικά και είναι συνώνυμη με την έννοια συλλογή. Ο George Cantor (1845-1918) περιέγραψε την έννοια του συνόλου ως εξής: «Σύνολο είναι μια συλλογή από αντικείμενα διακεκριμένα και σαφώς καθορισμένα, της άμεσης αντίληψης ή της σκέψης μας, τα οποία θεωρούμε ως μια ολότητα».

Τα σύνολα συνήθως συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα της αλφαβήτου. Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο ονομάζονται μέλη ή στοιχεία του συνόλου και μπορεί να είναι σύνολα ενώ λέμε ότι ένα σύνολο περιέχει τα μέλη ή στοιχεία του. Τα στοιχεία ενός συνόλου δεν είναι απαραίτητο να σχετίζονται με κάποιο τρόπο (άλλον εκτός από το να συμβαίνει να είναι στοιχεία του ίδιου συνόλου) και είναι διακεκριμένα άρα κανένα αντικείμενο δεν επαναλαμβάνεται σε ένα σύνολο. Αν A είναι σύνολο και x είναι στοιχείο του A τότε συμβολίζουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A » ενώ αν το x δεν είναι στοιχείο του A τότε συμβολίζουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A ». Για κάθε σύνολο A και για κάθε x ακριβώς μία από τις προτάσεις « $x \in A$ », « $x \notin A$ » είναι αληθής.

Κάθε σύνολο είναι πλήρως καθορισμένο από τα στοιχεία που περιέχει άρα δύο σύνολα A, B είναι ίσα αν και μόνο αν αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία και στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε $A = B$. Από τον ορισμό της ισότητας δύο συνόλων A, B προκύπτει ότι $A \neq B$ αν και μόνο αν υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B$ ή υπάρχει y με $y \in B$ και $y \notin A$. Ένα σύνολο A είναι υποσύνολο ενός συνόλου B ή ισοδύναμα ένα σύνολο B είναι υπεрсύνολο ενός συνόλου A αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B και στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε $A \subseteq B$ ή ισοδύναμα $B \supseteq A$. Από τους ορισμούς του υποσυνόλου και υπεрсυνόλου ενός συνόλου προκύπτει ότι A, B είναι σύνολα έτσι ώστε $A \not\subseteq B$ ή ισοδύναμα $B \not\supseteq A$ αν και μόνο αν υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B$. Αντί των προτάσεων «το A είναι υποσύνολο του B », «το B είναι υπεрсύνολο του A » χρησιμοποιούνται και οι ισοδύναμες προτάσεις «το A εγκλείεται στο B », «το B εγκλείει το A ». Ένα σύνολο A είναι γνήσιο υποσύνολο ενός συνόλου B ή ισοδύναμα ένα σύνολο B είναι γνήσιο υπεрсύνολο ενός συνόλου A αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$ και στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε $A \subset B$ ή ισοδύναμα $B \supset A$ δηλαδή $A \subset B$ αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B και υπάρχει x με $x \in B$ και $x \notin A$. Από τους ορισμούς του γνήσιου υποσυνόλου και γνήσιου υπεрсυνόλου ενός συνόλου προκύπτει ότι A, B είναι σύνολα έτσι ώστε $A \not\subset B$ ή ισοδύναμα $B \not\supset A$ αν και μόνο αν $A \not\subseteq B$ ή $A = B$ δηλαδή $A \not\subset B$ αν και μόνο αν υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B$ ή τα A, B είναι ίσα.

Πρόταση 1.1.1. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A = B$ αν και μόνο αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$.

Απόδειξη. Αν $A = B$ τότε τα σύνολα A, B αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία άρα αν $x \in A$ τότε $x \in B$ επομένως $A \subseteq B$ και αν $y \in B$ τότε $y \in A$ συνεπώς $B \subseteq A$. Έστω $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$. Αν $A \neq B$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B$ το οποίο είναι άτοπο διότι $A \subseteq B$ ή υπάρχει y με $y \in B$ και $y \notin A$ το οποίο είναι άτοπο διότι $B \subseteq A$ άρα $A = B$. $\square$

Πρόταση 1.1.2. Αν A είναι σύνολο τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \subseteq A$.
2. $A \not\subset A$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Αν $A \not\subseteq A$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin A$ το οποίο είναι άτοπο άρα $A \subseteq A$.
2. Αν $A \subset A$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin A$ το οποίο είναι άτοπο άρα $A \not\subset A$.

$\square$

Πρόταση 1.1.3. Αν A, B, Γ είναι σύνολα με $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \subseteq \Gamma$.
2. $A \subset \Gamma$ αν και μόνο αν $A \neq B$ ή $B \neq \Gamma$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ άρα αν $x \in A$ τότε $x \in B$ και αν $x \in B$ τότε $x \in \Gamma$ επομένως αν $x \in A$ τότε $x \in \Gamma$ συνεπώς $A \subseteq \Gamma$.
2. Έστω $A \subset \Gamma$. Αν $A = B$ και $B = \Gamma$ τότε $A = \Gamma$ το οποίο είναι άτοπο άρα $A \neq B$ ή $B \neq \Gamma$.
Αν $A \neq B$ τότε $A \subset B$ άρα υπάρχει x με $x \in B$ και $x \notin A$ ενώ επειδή $B \subseteq \Gamma$ προκύπτει ότι $x \in \Gamma$ επομένως $x \notin A$ και $x \in \Gamma$ συνεπώς $A \neq \Gamma$ οπότε $A \subset \Gamma$. Αν $B \neq \Gamma$ τότε $B \subset \Gamma$ άρα υπάρχει y με $y \in \Gamma$ και $y \notin B$ ενώ επειδή $B \supseteq A$ προκύπτει ότι $y \notin A$ διότι αν $y \in A$ τότε $B \not\supseteq A$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $y \in \Gamma$ και $y \notin A$ συνεπώς $A \neq \Gamma$ οπότε $A \subset \Gamma$.

□

Ο ορισμός ενός συνόλου γίνεται με την μέθοδο της παράθεσης των στοιχείων συνόλου ή με την μέθοδο της περιγραφής των στοιχείων συνόλου. Στην μέθοδο της παράθεσης των στοιχείων συνόλου ορίζουμε ένα σύνολο A παραθέτοντας τα στοιχεία του ενώ ο ορισμός αυτός είναι έγκυρος αν και μόνο αν καθένα εκ των στοιχείων του A είναι καθορισμένο αντικείμενο. Στην μέθοδο της περιγραφής των στοιχείων συνόλου ορίζουμε ένα σύνολο A περιγράφοντας τα στοιχεία του με μια έκφραση a ενώ ο ορισμός αυτός είναι έγκυρος αν και μόνο αν από την έκφραση a προκύπτει κάποιο από τα ακόλουθα:

1. Υπάρχουν σύνολο B και πρόταση b που περιλαμβάνει μεταβλητή x για κάθε τιμή της οποίας η πρόταση b είναι είτε αληθής είτε ψευδής έτσι ώστε η πρόταση b να είναι αληθής όταν η μεταβλητή x λαμβάνει ως τιμή ένα αντικείμενο που ανήκει στο B αν και μόνο αν το αντικείμενο αυτό ανήκει στο A .
2. Υπάρχει σύνολο Γ του οποίου κάθε στοιχείο είναι σύνολο έτσι ώστε ένα αντικείμενο να ανήκει σε τουλάχιστον ένα εκ των στοιχείων του Γ αν και μόνο αν το αντικείμενο αυτό ανήκει στο A .
3. Υπάρχει σύνολο Δ έτσι ώστε $X \subseteq \Delta \Leftrightarrow X \in A$.

Επισημαίνουμε ότι αν ο ορισμός ενός συνόλου A δεν είναι έγκυρος τότε το A δεν ορίζεται μονοσήμαντα ή δεν υπάρχει. Κάθε τρόπος ορισμού συνόλου που προκύπτει συνδυάζοντας δύο σύνολα με την μέθοδο της περιγραφής των στοιχείων συνόλου ονομάζεται πράξη συνόλων. Η έκφραση που χρησιμοποιούμε για να συμβολίσουμε τον ορισμό ενός συνόλου A αρχίζει με το σύμβολο «{» (αριστερό άγκιστρο) και τελειώνει με το σύμβολο «}» (δεξιό άγκιστρο). Πιο συγκεκριμένα στην μέθοδο της παράθεσης των στοιχείων συνόλου παραθέτουμε μεταξύ των άγκιστρων τα σύμβολα που ονοματίζουν τα στοιχεία του A χωρισμένα με κόμματα (δεν έχει σημασία η σειρά παράθεσης των συμβόλων διότι κάθε σύνολο καθορίζεται πλήρως μόνο από τα στοιχεία που περιέχει) υπό την προϋπόθεση ότι καθένα εκ των συμβόλων αυτών ονοματίζει καθορισμένο αντικείμενο ενώ στην μέθοδο της περιγραφής των στοιχείων συνόλου περιγράφουμε μεταξύ των άγκιστρων τα στοιχεία του A συμβολίζοντας ένα στοιχείο του A ως παράσταση είτε μίας μεταβλητής είτε περισσότερων μεταβλητών η οποία ακολουθείται από μια έκφραση a έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η έκφραση a αρχίζει με το σύμβολο «:» (άνω και κάτω τελεία).
2. Η έκφραση a είναι ένας έγκυρος ορισμός του A ο οποίος περιλαμβάνει κάθε μεταβλητή της παράστασης η οποία συμβολίζει ένα στοιχείο του A .

Πρόταση 1.1.4. Δεν υπάρχει σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα αντικείμενα.

Απόδειξη. Για κάθε σύνολο A ορίζουμε το σύνολο $B_A = \{x : x \in A \text{ και } x \notin x\}$. Έστω $B_A \in A$. Αν $B_A \in B_A$ (όχι εύλογο αλλά όχι κατ' αρχήν αδύνατον) τότε από τον ορισμό του B_A προκύπτει ότι $B_A \notin B_A$ το οποίο είναι άτοπο άρα η πρόταση $B_A \in B_A$ είναι ψευδής ενώ αν $B_A \notin B_A$ τότε από τον ορισμό του B_A προκύπτει ότι $B_A \in B_A$ το οποίο είναι άτοπο επομένως η πρόταση $B_A \notin B_A$ είναι ψευδής δηλαδή κάθε μία εκ των προτάσεων $B_A \in B_A, B_A \notin B_A$ είναι ψευδής το οποίο είναι αδύνατον συνεπώς $B_A \notin A$ δηλαδή δεν υπάρχει σύνολο A που περιέχει το B_A οπότε δεν υπάρχει σύνολο που περιέχει όλα τα αντικείμενα. $\square$

Ένα παράδειγμα μη έγκυρου ορισμού συνόλου με την μέθοδο της περιγραφής των στοιχείων συνόλου είναι ο ορισμός του συνόλου $O = \{x : x \text{ είναι αντικείμενο}\}$ το οποίο περιέχει όλα τα αντικείμενα αλλά όπως αποδείξαμε δεν υπάρχει. Ένα ακόμα παράδειγμα μη έγκυρου ορισμού συνόλου με την μέθοδο της περιγραφής των στοιχείων συνόλου παρουσιάζεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.1.5. Δεν υπάρχει σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα σύνολα που δεν περιέχουν τον εαυτό τους.

Απόδειξη. Έστω σύνολο $A = \{x : x \notin x\}$ το οποίο περιέχει όλα τα σύνολα που δεν περιέχουν τον εαυτό τους. Αν $A \in A$ τότε από τον ορισμό του A προκύπτει ότι $A \notin A$ το οποίο είναι άτοπο άρα η πρόταση $A \in A$ είναι ψευδής ενώ αν $A \notin A$ τότε από τον ορισμό του A προκύπτει ότι $A \in A$ το οποίο είναι άτοπο επομένως η πρόταση $A \notin A$ είναι ψευδής δηλαδή κάθε μία εκ των προτάσεων $A \in A, A \notin A$ είναι ψευδής το οποίο είναι αδύνατον συνεπώς το A δεν υπάρχει. $\square$

Ένα σύνολο το οποίο περιέχει ένα μοναδικό στοιχείο ονομάζεται μονομελές ή μονοσύνολο ενώ από τον ορισμό του υποσυνόλου ενός συνόλου προκύπτει ότι ένα αντικείμενο x ανήκει σε ένα σύνολο A αν και μόνο αν το μονοσύνολο που περιέχει το x είναι υποσύνολο του A δηλαδή $x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subseteq A$.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της παράθεσης των στοιχείων συνόλου ορίζουμε ως κενό σύνολο το $\emptyset = \{\}$ δηλαδή το σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία ενώ ο ορισμός αυτός είναι έγκυρος διότι δεν υπάρχει στοιχείο του $\emptyset$ το οποίο να μην είναι καθορισμένο αντικείμενο άρα κάθε στοιχείο του $\emptyset$ είναι καθορισμένο αντικείμενο. Κάθε σύνολο A με $A \neq \emptyset$ ονομάζεται μη κενό.

Πρόταση 1.1.6. Ένα σύνολο A είναι ίσο με το $\emptyset$ αν και μόνο αν ισχύει κάποιο από τα ακόλουθα:

1. Κάθε στοιχείο του A είναι σύνολο και κάθε στοιχείο του A δεν είναι σύνολο.
2. $A \subseteq B$ για κάθε σύνολο B .

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Το $\emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία άρα δεν περιέχει στοιχείο που δεν είναι σύνολο και δεν περιέχει στοιχείο που είναι σύνολο επομένως κάθε στοιχείο του $\emptyset$ είναι σύνολο και κάθε στοιχείο του $\emptyset$ δεν είναι σύνολο αντίστοιχα.
Αν κάθε στοιχείο ενός συνόλου $A \neq \emptyset$ είναι σύνολο και κάθε στοιχείο του A δεν είναι σύνολο τότε υπάρχει x με $x \in A$ που είναι σύνολο και δεν είναι σύνολο το οποίο είναι αδύνατον άρα το A δεν περιέχει στοιχεία δηλαδή $A = \emptyset$.
2. Αν υπάρχει σύνολο B έτσι ώστε $\emptyset \not\subseteq B$ τότε υπάρχει x με $x \in \emptyset$ και $x \notin B$ το οποίο είναι άτοπο διότι το $\emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία άρα για κάθε σύνολο B ισχύει ότι $\emptyset \subseteq B$.
Αν A είναι σύνολο έτσι ώστε για κάθε σύνολο B να ισχύει ότι $A \subseteq B$ τότε $A \subseteq \emptyset$ και επειδή $\emptyset \subseteq A$ προκύπτει ότι $A = \emptyset$.

□

Σε κάθε εφαρμογή κάθε σύνολο που χρησιμοποιείται θεωρείται ως υποσύνολο ενός γενικότερου συνόλου Ω το οποίο ονομάζεται καθολικό σύνολο ή σύνολο αναφοράς δηλαδή για κάθε σύνολο A ισχύει ότι $A \subseteq \Omega$ άρα για κάθε x με $x \in A$ ισχύει ότι $x \in \Omega$. Επισημαίνουμε ότι ο ορισμός του Ω εξαρτάται από την εκάστοτε εφαρμογή διότι αν ήταν ανεξάρτητος από οτιδήποτε τότε επειδή για κάθε x ισχύει ότι $x \in \{x\}$ θα ίσχυε ότι $x \in \Omega$ για κάθε x άρα το Ω θα περιείχε όλα τα αντικείμενα το οποίο είναι αδύνατον.

Ορίζουμε ως ένωση δύο συνόλων A, B το σύνολο $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ή } x \in B\}$ δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τα αντικείμενα που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα εκ των στοιχείων του συνόλου $\{A, B\}$. Από τον ορισμό της ένωσης δύο συνόλων A, B προκύπτει ότι $x \notin A \cup B$ αν και μόνο αν $x \notin A$ και $x \notin B$. Για κάθε σύνολο A το σύνολο $A^+ = A \cup \{A\}$ ονομάζεται επόμενο του A άρα $A \in A^+$ ενώ υπάρχει σύνολο S_A έτσι ώστε $A \in S_A$ και για κάθε σύνολο X με $X \in S_A$ ισχύει ότι $X^+ \in S_A$.

Πρόταση 1.1.7. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \cup B = B \cup A$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $x \in A \cup B$ αν και μόνο αν $x \in A$ ή $x \in B$ ενώ $x \in A$ ή $x \in B$ αν και μόνο αν $x \in B$ ή $x \in A$ άρα $x \in A \cup B$ αν και μόνο αν $x \in B \cup A$ δηλαδή $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in B \cup A$ επομένως $A \cup B \subseteq B \cup A$ και $B \cup A \subseteq A \cup B$ δηλαδή $A \cup B = B \cup A$. □

Πρόταση 1.1.8. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \subseteq A \cup B$.

Απόδειξη. Αν $A \not\subseteq A \cup B$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin A \cup B$ δηλαδή $x \in A$ και $x \notin A$ και $x \notin B$ το οποίο είναι άτοπο άρα $A \subseteq A \cup B$. □

Από την Πρόταση 1.1.8 προκύπτει ότι $A \subseteq A^+$ για κάθε σύνολο A .

Πρόταση 1.1.9. Αν A είναι σύνολο τότε $A \cup \emptyset = A$.

Απόδειξη. Αν $A \cup \emptyset \neq A$ τότε επειδή $A \subseteq A \cup \emptyset$ προκύπτει ότι υπάρχει x με $x \notin A$ και $x \in A \cup \emptyset$ δηλαδή $x \notin A$ και ή $x \in A$ ή $x \in \emptyset$ ενώ $x \notin \emptyset$ άρα $x \notin A$ και $x \in A$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $A \cup \emptyset = A$. □

Πρόταση 1.1.10. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq B$. Αν $A \cup B \neq B$ τότε επειδή $B \subseteq A \cup B$ προκύπτει ότι υπάρχει x με $x \notin B$ και $x \in A \cup B$ δηλαδή $x \notin B$ και ή $x \in A$ ή $x \in B$ άρα $x \notin B$ και $x \in A$ επομένως $A \not\subseteq B$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A \cup B = B$.

Έστω $A \cup B = B$. Αν $A \not\subseteq B$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B$ άρα $x \in A \cup B$ και $x \notin B$ επομένως $A \cup B \neq B$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A \subseteq B$. □

Πρόταση 1.1.11. Αν A, B, Γ είναι σύνολα τότε $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Gamma$ αν και μόνο αν $A \cup B \subseteq \Gamma$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Gamma$. Αν $x \in A$ ή $x \in B$ τότε $x \in \Gamma$ δηλαδή αν $x \in A \cup B$ τότε $x \in \Gamma$ άρα $A \cup B \subseteq \Gamma$.

Έστω $A \cup B \subseteq \Gamma$. Αν $A \not\subseteq \Gamma$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin \Gamma$ άρα $x \in A \cup B$ και $x \notin \Gamma$ επομένως $A \cup B \not\subseteq \Gamma$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A \subseteq \Gamma$. Αν $B \not\subseteq \Gamma$ τότε υπάρχει y με $y \in B$ και $y \notin \Gamma$ άρα $y \in A \cup B$ και $y \notin \Gamma$ επομένως $A \cup B \not\subseteq \Gamma$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $B \subseteq \Gamma$. $\square$

Πρόταση 1.1.12. Αν A, B, Γ, Δ είναι σύνολα με $A \subseteq B$ και $\Gamma \subseteq \Delta$ τότε $A \cup \Gamma \subseteq B \cup \Delta$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $A \subseteq B$ και $\Gamma \subseteq \Delta$ άρα αν $x \in A$ ή $x \in \Gamma$ τότε $x \in B$ ή $x \in \Delta$ αντίστοιχα δηλαδή αν $x \in A \cup \Gamma$ τότε $x \in B \cup \Delta$ επομένως $A \cup \Gamma \subseteq B \cup \Delta$. $\square$

Ορίζουμε ως τομή δύο συνόλων A, B το σύνολο $A \cap B = \{x : x \in A \text{ και } x \in B\}$ δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τα αντικείμενα που ανήκουν και στο A και στο B . Από τον ορισμό της τομής δύο συνόλων A, B προκύπτει ότι $x \notin A \cap B$ αν και μόνο αν $x \notin A$ ή $x \notin B$. Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε τα A, B ονομάζονται ξένα.

Πρόταση 1.1.13. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \cap B = B \cap A$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $x \in A \cap B$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \in B$ ενώ $x \in A$ και $x \in B$ αν και μόνο αν $x \in B$ και $x \in A$ άρα $x \in A \cap B$ αν και μόνο αν $x \in B \cap A$ δηλαδή $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in B \cap A$ επομένως $A \cap B \subseteq B \cap A$ και $B \cap A \subseteq A \cap B$ δηλαδή $A \cap B = B \cap A$. $\square$

Πρόταση 1.1.14. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \cap B \subseteq A$.

Απόδειξη. Αν $A \cap B \not\subseteq A$ τότε υπάρχει x με $x \in A \cap B$ και $x \notin A$ δηλαδή $x \in A$ και $x \in B$ και $x \notin A$ το οποίο είναι άτοπο άρα $A \cap B \subseteq A$. $\square$

Πρόταση 1.1.15. Αν A είναι σύνολο τότε $A \cap \Omega = A$.

Απόδειξη. Αν $A \cap \Omega \neq A$ τότε επειδή $A \cap \Omega \subseteq A$ προκύπτει ότι υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin A \cap \Omega$ δηλαδή $x \in A$ και ή $x \notin A$ ή $x \notin \Omega$ ενώ $x \in \Omega$ διότι $x \in A$ άρα $x \in A$ και $x \notin A$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $A \cap \Omega = A$. $\square$

Πρόταση 1.1.16. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq B$. Αν $A \cap B \neq A$ τότε επειδή $A \cap B \subseteq A$ προκύπτει ότι υπάρχει x με $x \in A$ και ή $x \notin A$ ή $x \notin B$ άρα $x \in A$ και $x \notin B$ επομένως $A \not\subseteq B$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A \cap B = A$.

Έστω $A \cap B = A$. Αν $A \not\subseteq B$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B$ άρα $x \in A$ και $x \notin A \cap B$ επομένως $A \cap B \neq A$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A \subseteq B$. $\square$

Πρόταση 1.1.17. Αν A, B, Γ είναι σύνολα τότε $A \subseteq B$ και $A \subseteq \Gamma$ αν και μόνο αν $A \subseteq B \cap \Gamma$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq B$ και $A \subseteq \Gamma$. Αν $x \in A$ τότε $x \in B$ και $x \in \Gamma$ δηλαδή αν $x \in A$ τότε $x \in B \cap \Gamma$ άρα $A \subseteq B \cap \Gamma$.

Έστω $A \subseteq B \cap \Gamma$. Αν $A \not\subseteq B$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B$ άρα $x \in A$ και $x \notin B \cap \Gamma$ επομένως $A \not\subseteq B \cap \Gamma$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A \subseteq B$. Αν $A \not\subseteq \Gamma$ τότε υπάρχει y με $y \in A$ και $y \notin \Gamma$ άρα $y \in A$ και $y \notin B \cap \Gamma$ επομένως $A \not\subseteq B \cap \Gamma$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A \subseteq \Gamma$. $\square$

Πρόταση 1.1.18. Αν A, B, Γ, Δ είναι σύνολα με $A \subseteq B$ και $\Gamma \subseteq \Delta$ τότε $A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Delta$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $A \subseteq B$ και $\Gamma \subseteq \Delta$ άρα αν $x \in A$ και $x \in \Gamma$ τότε $x \in B$ και $x \in \Delta$ αντίστοιχα δηλαδή αν $x \in A \cap \Gamma$ τότε $x \in B \cap \Delta$ επομένως $A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Delta$. $\square$

Πρόταση 1.1.19. Αν A, B, Γ είναι σύνολα τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.
2. $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $x \in A \cap (B \cup \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \in B \cup \Gamma$ δηλαδή $x \in A \cap (B \cup \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και ή $x \in B$ ή $x \in \Gamma$ ενώ $x \in A$ και ή $x \in B$ ή $x \in \Gamma$ αν και μόνο αν ή $x \in A$ και $x \in B$ ή $x \in A$ και $x \in \Gamma$ άρα $x \in A \cap (B \cup \Gamma)$ αν και μόνο αν ή $x \in A$ και $x \in B$ ή $x \in A$ και $x \in \Gamma$ δηλαδή $x \in A \cap (B \cup \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A \cap B$ ή $x \in A \cap \Gamma$ δηλαδή $x \in A \cap (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ επομένως $A \cap (B \cup \Gamma) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$ και $(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) \subseteq A \cap (B \cup \Gamma)$ δηλαδή $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.

2. $A \subseteq A \cup B$ και $A \subseteq A \cup \Gamma$ άρα

$$A \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \quad (1)$$

$B \subseteq A \cup B$ και $\Gamma \subseteq A \cup \Gamma$ άρα

$$B \cap \Gamma \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι

$$A \cup (B \cap \Gamma) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \quad (3)$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) = ((A \cup B) \cap A) \cup ((A \cup B) \cap \Gamma) \Leftrightarrow$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) = ((A \cap A) \cup (B \cap A)) \cup ((A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma)) \quad (4)$$

$A \cap A \subseteq A \subseteq A \cup (B \cap \Gamma)$ και $B \cap A \subseteq A \subseteq A \cup (B \cap \Gamma)$ άρα

$$(A \cap A) \cup (B \cap A) \subseteq A \cup (B \cap \Gamma) \quad (5)$$

$A \cap \Gamma \subseteq A \subseteq A \cup (B \cap \Gamma)$ και $B \cap \Gamma \subseteq A \cup (B \cap \Gamma)$ άρα

$$(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma) \subseteq A \cup (B \cap \Gamma) \quad (6)$$

Από τις εκφράσεις (4),(5),(6) προκύπτει ότι

$$(A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) \subseteq A \cup (B \cap \Gamma) \quad (7)$$

Από τις εκφράσεις (3),(7) προκύπτει ότι $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.

$\square$

Ορίζουμε ως συνολοθεωρητική διαφορά δύο συνόλων A, B ή διαφορά δύο συνόλων A, B το σύνολο $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ και } x \notin B\}$ δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τα αντικείμενα που ανήκουν στο A και δεν ανήκουν στο B . Από τον ορισμό της διαφοράς δύο συνόλων A, B προκύπτει ότι $x \notin A \setminus B$ αν και μόνο αν $x \notin A$ ή $x \in B$.

Πρόταση 1.1.20. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \subseteq B \Leftrightarrow A \setminus B = \emptyset$.

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq B$. Αν $A \setminus B \neq \emptyset$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B$ άρα $A \not\subseteq B$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $A \setminus B = \emptyset$.

Έστω $A \setminus B = \emptyset$. Αν $A \not\subseteq B$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B$ άρα $x \in A \setminus B$ επομένως $A \setminus B \neq \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A \subseteq B$. $\square$

Ορίζουμε ως απόλυτο συμπλήρωμα ενός συνόλου A ή συμπλήρωμα ενός συνόλου A το σύνολο $A^c = \Omega \setminus A = \{x : x \in \Omega \text{ και } x \notin A\}$ δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τα αντικείμενα που ανήκουν στο Ω και δεν ανήκουν στο A . Από τον ορισμό του συμπληρώματος ενός συνόλου A προκύπτει ότι αν $x \in \Omega$ τότε $x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$.

Πρόταση 1.1.21. Αν A είναι σύνολο τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \cup A^c = \Omega$.
2. $A \cap A^c = \emptyset$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $x \in A$ ή $x \notin A$ για κάθε x άρα αν $x \in \Omega$ τότε ή $x \in \Omega$ και $x \in A$ ή $x \in \Omega$ και $x \notin A$ δηλαδή αν $x \in \Omega$ τότε ή $x \in \Omega \cap A$ ή $x \in \Omega \setminus A$ δηλαδή αν $x \in \Omega$ τότε $x \in A$ ή $x \in A^c$ δηλαδή αν $x \in \Omega$ τότε $x \in A \cup A^c$ επομένως $\Omega \subseteq A \cup A^c$ και επειδή $A \cup A^c \subseteq \Omega$ προκύπτει ότι $A \cup A^c = \Omega$.
2. Αν $A \cap A^c \neq \emptyset$ τότε υπάρχει x με $x \in A \cap A^c$ δηλαδή $x \in A$ και $x \in A^c$ δηλαδή $x \in A$ και $x \notin A$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $A \cap A^c = \emptyset$.

$\square$

Πρόταση 1.1.22. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \setminus B = A \cap B^c$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $x \in A \setminus B$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \notin B$ δηλαδή $x \in A \setminus B$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \in \Omega$ και $x \notin B$ δηλαδή $x \in A \setminus B$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \in \Omega \setminus B$ δηλαδή $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \cap B^c$ άρα $A \setminus B \subseteq A \cap B^c$ και $A \cap B^c \subseteq A \setminus B$ δηλαδή $A \setminus B = A \cap B^c$. $\square$

Πρόταση 1.1.23. Αν A, B, Γ είναι σύνολα τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $x \in A$ και $x \notin A \setminus B$ τότε $x \in B$.
2. Αν $A \subseteq B$ τότε $A \setminus \Gamma \subseteq B$.
3. $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$.
4. $A \cup B = \Omega \Leftrightarrow A \supseteq B^c$.
5. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B^c$.

$$6. A \cup B \supseteq (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma^c).$$

$$7. A \cap B \subseteq (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma^c).$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \cap B^c$ δηλαδή $x \notin A \setminus B$ αν και μόνο αν $x \notin A$ ή $x \notin B^c$ ενώ επειδή $x \in A$ προκύπτει ότι $x \notin B^c$ δηλαδή $x \in B$.

$$2. A \setminus \Gamma = A \cap \Gamma^c \subseteq A \subseteq B \text{ άρα } A \setminus \Gamma \subseteq B.$$

3. Έστω $A \subseteq B$. Αν $B^c \not\subseteq A^c$ τότε υπάρχει x με $x \in B^c$ και $x \notin A^c$ δηλαδή $x \notin B$ και $x \in A$ άρα $A \not\subseteq B$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $B^c \subseteq A^c$.

Έστω $B^c \subseteq A^c$. Αν $A \not\subseteq B$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B$ δηλαδή $x \notin A^c$ και $x \in B^c$ άρα $B^c \not\subseteq A^c$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $A \subseteq B$.

4. Έστω $A \cup B = \Omega$. Αν $A \not\supseteq B^c$ τότε υπάρχει x με $x \notin A$ και $x \in B^c$ δηλαδή $x \notin A$ και $x \notin B$ και $x \in \Omega$ δηλαδή $x \notin A \cup B$ και $x \in \Omega$ άρα $A \cup B \neq \Omega$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $A \supseteq B^c$.

Έστω $A \supseteq B^c$. Αν $A \cup B \neq \Omega$ τότε υπάρχει x με $x \notin A \cup B$ και $x \in \Omega$ δηλαδή $x \notin A$ και $x \notin B$ και $x \in \Omega$ δηλαδή $x \notin A$ και $x \in B^c$ άρα $A \not\supseteq B^c$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $A \cup B = \Omega$.

5. Έστω $A \cap B = \emptyset$. Αν $A \not\subseteq B^c$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \notin B^c$ δηλαδή $x \in A$ και $x \in B$ άρα $A \cap B \neq \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $A \subseteq B^c$.

Έστω $A \subseteq B^c$. Αν $A \cap B \neq \emptyset$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ και $x \in B$ δηλαδή $x \in A$ και $x \notin B^c$ άρα $A \not\subseteq B^c$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $A \cap B = \emptyset$.

$$6. (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma^c) = (A \cap (B \cup \Gamma^c)) \cup (\Gamma \cap (B \cup \Gamma^c)) \Leftrightarrow (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma^c) = (A \cap (B \cup \Gamma^c)) \cup ((\Gamma \cap B) \cup (\Gamma \cap \Gamma^c)) \Leftrightarrow (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma^c) = (A \cap (B \cup \Gamma^c)) \cup ((B \cap \Gamma) \cup \emptyset) \Leftrightarrow$$

$$(A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma^c) = (A \cap (B \cup \Gamma^c)) \cup (B \cap \Gamma) \quad (1)$$

$$A \cap (B \cup \Gamma^c) \subseteq A \text{ και } B \cap \Gamma \subseteq B \text{ άρα}$$

$$(A \cap (B \cup \Gamma^c)) \cup (B \cap \Gamma) \subseteq A \cup B \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $A \cup B \supseteq (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma^c)$.

$$7. (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma^c) = (A \cup (B \cap \Gamma^c)) \cap (\Gamma \cup (B \cap \Gamma^c)) \Leftrightarrow (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma^c) = (A \cup (B \cap \Gamma^c)) \cap ((\Gamma \cup B) \cap (\Gamma \cup \Gamma^c)) \Leftrightarrow (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma^c) = (A \cup (B \cap \Gamma^c)) \cap ((B \cup \Gamma) \cap \Omega) \Leftrightarrow$$

$$(A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma^c) = (A \cup (B \cap \Gamma^c)) \cap (B \cup \Gamma) \quad (1)$$

$$A \subseteq A \cup (B \cap \Gamma^c) \text{ και } B \subseteq B \cup \Gamma \text{ άρα}$$

$$A \cap B \subseteq (A \cup (B \cap \Gamma^c)) \cap (B \cup \Gamma) \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $A \cap B \subseteq (A \cap \Gamma) \cup (B \cap \Gamma^c)$.

□

Αν A είναι σύνολο του οποίου κάθε στοιχείο είναι σύνολο τότε ορίζουμε ως ένωση του A το σύνολο $\bigcup A = \{x : \text{υπάρχει } X \text{ με } X \in A \text{ έτσι ώστε } x \in X\}$ δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τα αντικείμενα που ανήκουν σε τουλάχιστον ένα εκ των στοιχείων του A και αν επιπλέον $A \neq \emptyset$ τότε ορίζουμε ως τομή του A το σύνολο $\bigcap A =$

$\{x : \text{για κάθε } X \text{ με } X \in A \text{ ισχύει ότι } x \in X\}$ δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τα αντικείμενα που ανήκουν σε κάθε στοιχείο του A . Στον ορισμό του $\bigcap A$ απαιτούμε $A \neq \emptyset$ για να εξασφαλίσουμε ότι το $\bigcap A$ υπάρχει διότι για το $\bigcap \emptyset$ έχουμε ότι αν υπάρχει x με $x \in \bigcap \emptyset$ τότε υπάρχει X με $X \in \emptyset$ έτσι ώστε $x \in X$ το οποίο είναι άτοπο διότι το $\emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία άρα για κάθε x ισχύει ότι $x \in \bigcap \emptyset$ δηλαδή το $\bigcap \emptyset$ περιέχει όλα τα αντικείμενα το οποίο είναι αδύνατον επομένως το $\bigcap \emptyset$ δεν υπάρχει. Από τους ορισμούς της ένωσης και της τομής συνόλου του οποίου κάθε στοιχείο είναι σύνολο προκύπτει ότι αν A, B είναι σύνολα τότε $\bigcup\{A, B\} = A \cup B$ και $\bigcap\{A, B\} = A \cap B$.

Πρόταση 1.1.24. Αν A είναι σύνολο του οποίου κάθε στοιχείο είναι σύνολο και $X \in A$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\bigcup A \supseteq X$.
2. $\bigcap A \subseteq X$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Αν $\bigcup A \not\supseteq X$ τότε υπάρχει x με $x \in X$ και $x \notin \bigcup A$ το οποίο είναι άτοπο άρα $\bigcup A \supseteq X$.
2. Αν $\bigcap A \not\subseteq X$ τότε υπάρχει x με $x \in \bigcap A$ και $x \notin X$ το οποίο είναι άτοπο άρα $\bigcap A \subseteq X$.

□

Πρόταση 1.1.25. Για κάθε x το σύνολο $A_x = \{X : x \in X\}$ δεν υπάρχει.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει x έτσι ώστε το A_x να υπάρχει. Κάθε στοιχείο του A_x είναι σύνολο άρα ορίζεται το $\bigcup A_x$ και αν υπάρχει y με $y \notin \bigcup A_x$ τότε για κάθε σύνολο X με $X \in A_x$ ισχύει ότι $y \notin X$ ενώ για $Y = \{x, y\}$ έχουμε ότι $Y \in A_x$ και $y \in Y$ το οποίο είναι άτοπο άρα για κάθε y ισχύει ότι $y \in \bigcup A_x$ δηλαδή το $\bigcup A_x$ περιέχει όλα τα αντικείμενα το οποίο είναι αδύνατον επομένως για κάθε x το A_x δεν υπάρχει. □

Για κάθε σύνολο A ορίζουμε ως δυναμοσύνολο του A το σύνολο $\mathbb{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$ δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από όλα τα υποσύνολα του A . Από τον ορισμό του δυναμοσυνόλου ενός συνόλου προκύπτει ότι αν A είναι σύνολο τότε $A \in \mathbb{P}(A)$ και $A \in \mathbb{P}(\Omega)$.

Πρόταση 1.1.26. Αν A, B είναι σύνολα τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\bigcup \mathbb{P}(A) = A$.
2. $\bigcap \mathbb{P}(A) = \emptyset$.
3. $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$.
4. $\mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B) \subseteq \mathbb{P}(A \cup B)$.
5. $\mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Αν $x \in \bigcup \mathbb{P}(A)$ τότε υπάρχει X με $X \in \mathbb{P}(A)$ έτσι ώστε $x \in X \subseteq A$ άρα $x \in A$ επομένως

$$\bigcup \mathbb{P}(A) \subseteq A \quad (1)$$

Αν $y \in A$ τότε $y \in \bigcup \mathbb{P}(A)$ διότι $A \in \mathbb{P}(A)$ άρα

$$A \subseteq \bigcup \mathbb{P}(A) \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $\bigcup \mathbb{P}(A) = A$.

2. Αν $\bigcap \mathbb{P}(A) \neq \emptyset$ τότε υπάρχει x που ανήκει σε όλα τα στοιχεία του $\mathbb{P}(A)$ δηλαδή για κάθε X με $X \subseteq A$ ισχύει ότι $x \in X$ άρα $x \in \bigcap \mathbb{P}(A)$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $\bigcap \mathbb{P}(A) = \emptyset$.
3. Έστω $A \subseteq B$. Αν X είναι σύνολο με $X \subseteq A$ τότε $X \subseteq B$ δηλαδή αν $X \in \mathbb{P}(A)$ τότε $X \in \mathbb{P}(B)$ άρα $\mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$.
Έστω $\mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$. Επειδή $A \in \mathbb{P}(A)$ προκύπτει ότι $A \in \mathbb{P}(B)$ δηλαδή $A \subseteq B$.
4. $X \in \mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B)$ αν και μόνο αν $X \in \mathbb{P}(A)$ ή $X \in \mathbb{P}(B)$ δηλαδή $X \in \mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B)$ αν και μόνο αν $X \subseteq A \subseteq A \cup B$ ή $X \subseteq B \subseteq A \cup B$ άρα αν $X \in \mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B)$ τότε $X \subseteq A \cup B$ δηλαδή αν $X \in \mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B)$ τότε $X \in \mathbb{P}(A \cup B)$ επομένως $\mathbb{P}(A) \cup \mathbb{P}(B) \subseteq \mathbb{P}(A \cup B)$.
5. $X \in \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B)$ αν και μόνο αν $X \in \mathbb{P}(A)$ και $X \in \mathbb{P}(B)$ δηλαδή $X \in \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B)$ αν και μόνο αν $X \subseteq A$ και $X \subseteq B$ ενώ $X \subseteq A$ και $X \subseteq B$ αν και μόνο αν $X \subseteq A \cap B$ άρα $X \in \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow X \subseteq A \cap B$ δηλαδή $X \in \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow X \in \mathbb{P}(A \cap B)$ επομένως $\mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B) \subseteq \mathbb{P}(A \cap B)$ και $\mathbb{P}(A \cap B) \subseteq \mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B)$ δηλαδή $\mathbb{P}(A) \cap \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.

□

Ένα υποσύνολο L του $\mathbb{P}(\Omega)$ ονομάζεται άλγεβρα αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\Omega \in L$.
2. Αν $X \in L$ τότε $X^c \in L$.
3. Αν $X \in L, Y \in L$ τότε $X \cup Y \in L$.

Από τον ορισμό της άλγεβρας προκύπτει ότι το $\mathbb{P}(\Omega)$ είναι άλγεβρα.

Πρόταση 1.1.27. Αν A είναι μη κενό σύνολο του οποίου κάθε στοιχείο είναι άλγεβρα τότε το $\bigcap A$ είναι άλγεβρα.

Απόδειξη. Για κάθε X με $X \in A$ ισχύει ότι $\Omega \in X$ άρα $\Omega \in \bigcap A$. Αν $Y \in \bigcap A$ τότε $Y \in X$ για κάθε X με $X \in A$ άρα $Y^c \in X$ για κάθε X με $X \in A$ επομένως $Y^c \in \bigcap A$. Αν $Y \in \bigcap A, Z \in \bigcap A$ τότε $Y \in X, Z \in X$ για κάθε X με $X \in A$ άρα $Y \cup Z \in X$ για κάθε X με $X \in A$ επομένως $Y \cup Z \in \bigcap A$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $\bigcap A$ είναι άλγεβρα. □

Τέλος ορίζουμε ως διαμέριση ενός μη κενού συνόλου A ένα υποσύνολο P του $\mathbb{P}(A)$ έτσι ώστε το $\emptyset$ να μην είναι στοιχείο του P και κάθε στοιχείο του A να ανήκει σε ένα και μόνο ένα σύνολο του P δηλαδή το P είναι διαμέριση του A αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Κάθε στοιχείο του P είναι μη κενό υποσύνολο του A .
2. Τα στοιχεία του P είναι ανά δύο ξένα.
3. $\bigcup P = A$.

1.2 Κανονικές Παραστάσεις Συνόλων

Με βάση τις πράξεις συνόλων που ορίσαμε στην Ενότητα 1.1 (ένωση, τομή, διαφορά, συμπλήρωμα) ορίζουμε τις Κανονικές Παραστάσεις Συνόλων (συντομογραφικά ΚΠΣ) ως εξής:

1. Κάθε σύμβολο συνόλου είναι ΚΠΣ.
2. Κάθε παράσταση που μπορούμε να κατασκευάσουμε από τουλάχιστον ένα σύμβολο συνόλου εφαρμόζοντας για τουλάχιστον μία φορά τουλάχιστον μία από τις πράξεις της ένωσης, της τομής, της διαφοράς ή του συμπληρώματος συνόλων με παράλληλη χρήση παρενθέσεων όπου απαιτείται έτσι ώστε η παράσταση αυτή να ορίζει μονοσήμαντα σύνολο είναι ΚΠΣ.
3. Καμία έκφραση δεν είναι ΚΠΣ εκτός αν αυτό προκύπτει από κάποιο εκ των 1 ή 2.

Οι Προτάσεις 1.1.7, 1.1.9, 1.1.13, 1.1.15, 1.1.19, 1.1.21, 1.1.22 μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αξιώματα για την απόδειξη εκφράσεων της μορφής $A = B$ όπου A, B είναι ΚΠΣ οπότε τις παραθέτουμε παρακάτω υπό μορφή κανόνων.

Κανόνες μεταθετικότητας: $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$

Κανόνες ταυτότητας: $A \cup \emptyset = A$
 $A \cap \Omega = A$

Κανόνες επιμεριστικότητας: $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
 $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$

Κανόνες συμπληρώματος: $A \cup A^c = \Omega$
 $A \cap A^c = \emptyset$

Κανόνας διαφοράς: $A \setminus B = A \cap B^c$

Η απόδειξη κάθε πρότασης που περιλαμβάνεται στην παρούσα ενότητα θα γίνει με χρήση μόνο των παραπάνω κανόνων.

Πρόταση 1.2.1. Αν A είναι σύνολο τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \cup \Omega = \Omega$.
2. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
3. $A \cup A = A$.
4. $A \cap A = A$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

$$1. A \cup \Omega = (A \cup \Omega) \cap \Omega = (A \cup \Omega) \cap (A \cup A^c) = A \cup (\Omega \cap A^c) = A \cup A^c = \Omega.$$

2. $A \cap \emptyset = (A \cap \emptyset) \cup \emptyset = (A \cap \emptyset) \cup (A \cap A^c) = A \cap (\emptyset \cup A^c) = A \cap A^c = \emptyset.$
3. $A \cup A = (A \cup A) \cap \Omega = (A \cup A) \cap (A \cup A^c) = A \cup (A \cap A^c) = A \cup \emptyset = A.$
4. $A \cap A = (A \cap A) \cup \emptyset = (A \cap A) \cup (A \cap A^c) = A \cap (A \cup A^c) = A \cap \Omega = A.$

□

Πρόταση 1.2.2. Αν A, B είναι σύνολα τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \cup (A \cap B) = A.$
2. $A \cap (A \cup B) = A.$

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $A \cup (A \cap B) = (A \cap \Omega) \cup (A \cap B) = A \cap (\Omega \cup B) = A \cap \Omega = A.$
2. $A \cap (A \cup B) = (A \cup \emptyset) \cap (A \cup B) = A \cup (\emptyset \cap B) = A \cup \emptyset = A.$

□

Πρόταση 1.2.3. Αν A, B, Γ είναι σύνολα τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap \Gamma.$
2. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup \Gamma.$

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1.
$$\begin{aligned} A \cup (B \cap \Gamma) &= (A \cap \Omega) \cup ((\emptyset \cup B) \cap \Gamma) = \\ &= (A \cap (\Omega \cup \Gamma)) \cup (((\emptyset \cap A) \cup B) \cap \Gamma) = \\ &= ((A \cap \Omega) \cup (A \cap \Gamma)) \cup (((\emptyset \cup B) \cap (A \cup B)) \cap \Gamma) = \\ &= (A \cup (A \cap \Gamma)) \cup ((B \cap (A \cup B)) \cap \Gamma) = \\ &= ((A \cup \emptyset) \cup (A \cap \Gamma)) \cup ((B \cap \Gamma) \cap ((A \cup B) \cap \Gamma)) = \\ &= ((A \cup (\emptyset \cap B)) \cup (A \cap \Gamma)) \cup ((B \cap \Gamma) \cap ((A \cup B) \cap \Gamma)) = \\ &= (((A \cup \emptyset) \cap (A \cup B)) \cup (A \cap \Gamma)) \cup ((B \cap \Gamma) \cap ((A \cup B) \cap \Gamma)) = \\ &= ((A \cap (A \cup B)) \cup (A \cap \Gamma)) \cup ((B \cap \Gamma) \cap ((A \cup B) \cap \Gamma)) = \\ &= (A \cap ((A \cup B) \cap \Gamma)) \cup ((B \cap \Gamma) \cap ((A \cup B) \cap \Gamma)) = \\ &= (A \cup (B \cap \Gamma)) \cap ((A \cup B) \cap \Gamma) = \\ &= ((A \cup (B \cap \Gamma)) \cap (A \cup B)) \cup ((A \cup (B \cap \Gamma)) \cap \Gamma) = \\ &= (A \cup ((B \cap \Gamma) \cap B)) \cup ((A \cap \Gamma) \cup ((B \cap \Gamma) \cap \Gamma)) = \\ &= (A \cup ((B \cap \Gamma) \cap (B \cup \emptyset))) \cup ((A \cap \Gamma) \cup ((B \cap \Gamma) \cap (\emptyset \cup \Gamma))) = \\ &= (A \cup (B \cap (\Gamma \cap \emptyset))) \cup ((A \cap \Gamma) \cup ((B \cap \emptyset) \cap \Gamma)) = \\ &= (A \cup (B \cap \emptyset)) \cup ((A \cap \Gamma) \cup (\emptyset \cap \Gamma)) = (A \cup B) \cup ((A \cap \Gamma) \cup (\Omega \cap \Gamma)) = \\ &= (A \cup B) \cup ((A \cap \Omega) \cap \Gamma) = (A \cup B) \cup (\Omega \cap \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma. \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} A \cap (B \cup \Gamma) &= (A \cup \emptyset) \cap ((\Omega \cap B) \cup \Gamma) = \\ &= (A \cup (\emptyset \cap \Gamma)) \cap (((\Omega \cup A) \cap B) \cup \Gamma) = \\ &= ((A \cup \emptyset) \cap (A \cup \Gamma)) \cap (((\Omega \cap B) \cup (A \cap B)) \cap \Gamma) = \\ &= (A \cap (A \cup \Gamma)) \cap ((B \cup (A \cap B)) \cap \Gamma) = \\ &= ((A \cap \Omega) \cap (A \cup \Gamma)) \cap ((B \cap \Gamma) \cup ((A \cap B) \cap \Gamma)) = \\ &= ((A \cap (\Omega \cup B)) \cap (A \cup \Gamma)) \cap ((B \cap \Gamma) \cup ((A \cap B) \cap \Gamma)) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &(((A \cap \Omega) \cup (A \cap B)) \cap (A \cup \Gamma)) \cap ((B \cap \Gamma) \cup ((A \cap B) \cap \Gamma)) = \\
 &((A \cup (A \cap B)) \cap (A \cup \Gamma)) \cap ((B \cap \Gamma) \cup ((A \cap B) \cap \Gamma)) = \\
 &(A \cup ((A \cap B) \cap \Gamma)) \cap ((B \cap \Gamma) \cup ((A \cap B) \cap \Gamma)) = \\
 &(A \cap (B \cap \Gamma)) \cup ((A \cap B) \cap \Gamma) = \\
 &((A \cap (B \cap \Gamma)) \cup (A \cap B)) \cap ((A \cap (B \cap \Gamma)) \cup \Gamma) = \\
 &(A \cap ((B \cap \Gamma) \cup B)) \cap ((A \cup \Gamma) \cap ((B \cap \Gamma) \cup \Gamma)) = \\
 &(A \cap ((B \cap \Gamma) \cup (B \cap \Omega))) \cap ((A \cup \Gamma) \cap ((B \cap \Gamma) \cup (\Omega \cap \Gamma))) = \\
 &(A \cap (B \cap (\Gamma \cup \Omega))) \cap ((A \cup \Gamma) \cap ((B \cup \Omega) \cap \Gamma)) = \\
 &(A \cap (B \cap \Omega)) \cap ((A \cup \Gamma) \cap (\Omega \cap \Gamma)) = (A \cap B) \cap ((A \cup \Gamma) \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap ((A \cup \Gamma) \cap (\emptyset \cup \Gamma)) = \\
 &(A \cap B) \cap ((A \cap \emptyset) \cup \Gamma) = (A \cap B) \cap (\emptyset \cup \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma.
 \end{aligned}$$

□

Από την Πρόταση 1.2.3 προκύπτει ότι αν A, B, Γ είναι σύνολα τότε οι παραστάσεις $A \cup B \cup \Gamma, A \cap B \cap \Gamma$ είναι ΚΠΣ διότι κάθε μία εξ αυτών ορίζει μονοσήμαντα σύνολο.

Πρόταση 1.2.4. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \cup B = \Omega$ και $A \cap B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A^c = B$ και $B^c = A$.

Απόδειξη. Αν $A \cup B = \Omega$ και $A \cap B = \emptyset$ τότε $A^c = A^c \cup \emptyset = A^c \cup (A \cap B) = (A^c \cup A) \cap (A^c \cup B) = \Omega \cap (A^c \cup B) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup B = \emptyset \cup B = B$ ενώ αν $A^c = B$ τότε $A \cup B = A \cup A^c = \Omega$ και $A \cap B = A \cap A^c = \emptyset$ άρα $A \cup B = \Omega$ και $A \cap B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A^c = B$ και επειδή $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$ προκύπτει ότι $A \cup B = \Omega$ και $A \cap B = \emptyset$ αν και μόνο αν $B^c = A$ επομένως $A \cup B = \Omega$ και $A \cap B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A^c = B$ και $B^c = A$. □

Πρόταση 1.2.5. Ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\emptyset^c = \Omega$.
2. $\Omega^c = \emptyset$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $\emptyset \cup \Omega = \Omega$ και $\emptyset \cap \Omega = \emptyset$ άρα $\emptyset^c = \Omega$ και $\Omega^c = \emptyset$. □

Πρόταση 1.2.6. Αν A, B, Γ είναι σύνολα τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \setminus \emptyset = A$.
2. $A \setminus \Omega = \emptyset$.
3. $A \setminus A = \emptyset$.
4. $(A^c)^c = A$.
5. $A \setminus B = B^c \setminus A^c$.
6. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
7. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.
8. $A \setminus (B \setminus \Gamma) = (A \setminus B) \cup (A \cap \Gamma)$.
9. $(A \setminus B) \setminus \Gamma = A \setminus (B \cup \Gamma)$.

10. $A \setminus (B \cup \Gamma) = (A \setminus B) \cap (A \setminus \Gamma).$
11. $(A \cup B) \setminus \Gamma = (A \setminus \Gamma) \cup (B \setminus \Gamma).$
12. $A \setminus (B \cap \Gamma) = (A \setminus B) \cup (A \setminus \Gamma).$
13. $(A \cap B) \setminus \Gamma = (A \setminus \Gamma) \cap (B \setminus \Gamma).$

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $A \setminus \emptyset = A \cap \emptyset^c = A \cap \Omega = A.$
2. $A \setminus \Omega = A \cap \Omega^c = A \cap \emptyset = \emptyset.$
3. $A \setminus A = A \cap A^c = \emptyset.$
4. $A^c \cup A = \Omega$ και $A^c \cap A = \emptyset$ άρα $(A^c)^c = A.$
5. $A \setminus B = A \cap B^c = B^c \cap (A^c)^c = B^c \setminus A^c.$
6. $(A \cup B) \cup (A^c \cap B^c) = ((A \cup B) \cup A^c) \cap ((A \cup B) \cup B^c) =$
 $((B \cup A) \cup A^c) \cap (A \cup (B \cup B^c)) = (B \cup (A \cup A^c)) \cap (A \cup \Omega) = (B \cup \Omega) \cap \Omega = \Omega$ και
 $(A \cup B) \cap (A^c \cap B^c) = (A \cap (A^c \cap B^c)) \cup (B \cap (A^c \cap B^c)) =$
 $((A \cap A^c) \cap B^c) \cup (B \cap (B^c \cap A^c)) = (\emptyset \cap B^c) \cup ((B \cap B^c) \cap A^c) = \emptyset \cup (\emptyset \cap A^c) = \emptyset$ άρα
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$
7. $(A \cap B) \cup (A^c \cup B^c) = (A \cup (A^c \cup B^c)) \cap (B \cup (A^c \cup B^c)) =$
 $((A \cup A^c) \cup B^c) \cap (B \cup (B^c \cup A^c)) = (\Omega \cup B^c) \cap ((B \cup B^c) \cup A^c) = \Omega \cap (\Omega \cup A^c) = \Omega$ και
 $(A \cap B) \cap (A^c \cup B^c) = ((A \cap B) \cap A^c) \cup ((A \cap B) \cap B^c) = ((B \cap A) \cap A^c) \cup (A \cap (B \cap B^c)) =$
 $(B \cap (A \cap A^c)) \cup (A \cap \emptyset) = (B \cap \emptyset) \cup \emptyset = \emptyset$ άρα $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$
8. $A \setminus (B \setminus \Gamma) = A \cap (B \cap \Gamma^c)^c = A \cap (B^c \cup (\Gamma^c)^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap (\Gamma^c)^c) = (A \setminus B) \cup (A \cap \Gamma).$
9. $(A \setminus B) \setminus \Gamma = (A \cap B^c) \cap \Gamma^c = A \cap (B^c \cap \Gamma^c) = A \cap (B \cup \Gamma)^c = A \setminus (B \cup \Gamma).$
10. $A \setminus (B \cup \Gamma) = A \cap (B \cup \Gamma)^c = (A \cap A) \cap (B^c \cap \Gamma^c) = ((A \cap A) \cap B^c) \cap \Gamma^c =$
 $(A \cap (A \cap B^c)) \cap \Gamma^c = ((A \cap B^c) \cap A) \cap \Gamma^c = (A \cap B^c) \cap (A \cap \Gamma^c) = (A \setminus B) \cap (A \setminus \Gamma).$
11. $(A \cup B) \setminus \Gamma = (A \cup B) \cap \Gamma^c = (A \cap \Gamma^c) \cup (B \cap \Gamma^c) = (A \setminus \Gamma) \cup (B \setminus \Gamma).$
12. $A \setminus (B \cap \Gamma) = A \cap (B \cap \Gamma)^c = A \cap (B^c \cup \Gamma^c) = (A \cap B^c) \cup (A \cap \Gamma^c) = (A \setminus B) \cup (A \setminus \Gamma).$
13. $(A \cap B) \setminus \Gamma = (A \cap B) \cap \Gamma^c = (A \cap B) \cap (\Gamma^c \cap \Gamma^c) = ((A \cap B) \cap \Gamma^c) \cap \Gamma^c = (A \cap (B \cap \Gamma^c)) \cap$
 $\Gamma^c = (A \cap (\Gamma^c \cap B)) \cap \Gamma^c = ((A \cap \Gamma^c) \cap B) \cap \Gamma^c = (A \cap \Gamma^c) \cap (B \cap \Gamma^c) = (A \setminus \Gamma) \cap (B \setminus \Gamma).$

□

Πρόταση 1.2.7. Αν A, B, Γ, Δ είναι σύνολα τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $A \cup B = A \cup \Gamma$ και $A \cap B = A \cap \Gamma = \emptyset$ τότε $B = \Gamma.$
2. Αν $A \cup B = \Gamma \cup \Delta$ και $B \cap \Gamma = \Delta \cap A = \emptyset$ τότε $A = \Gamma$ και $B = \Delta.$

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $B = B \cup \emptyset = B \cup (A \cap \Gamma) = (B \cup A) \cap (B \cup \Gamma) = (A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup \Gamma = \emptyset \cup \Gamma = \Gamma.$
2. $A = A \cup \emptyset = A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma) = (\Delta \cup \Gamma) \cap (A \cup \Gamma) = (\Delta \cap A) \cup \Gamma = \emptyset \cup \Gamma = \Gamma$
 άρα $A \cup B = A \cup \Delta$ και $A \cap B = A \cap \Delta = \emptyset$ επομένως $B = \Delta.$

□

1.3 Καρτεσιανό Γινόμενο Συνόλων

Ορίζουμε ως διατεταγμένο ζεύγος δύο αντικειμένων x, y το σύνολο $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$ Τα x, y ονομάζονται στοιχεία ή μέλη ή συντεταγμένες ή συνιστώσες του $(x, y).$

Πρόταση 1.3.1. Αν x, y, z, t είναι αντικείμενα τότε $(x, y) = (z, t)$ αν και μόνο αν $x = z$ και $y = t.$

Απόδειξη. Αν $x = z$ και $y = t$ τότε $(x, y) = (z, t).$

Αν $(x, y) = (z, t)$ τότε

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{z\}, \{z, t\}\} \quad (1)$$

Αν $x = y$ τότε $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, x\}\} = \{\{x\}, \{x\}\} = \{\{x\}\}$ άρα το σύνολο $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ είναι μονοσύνολο επομένως από την έκφραση (1) προκύπτει ότι $z = t$ διότι αν $z \neq t$ τότε $\{z\} \neq \{z, t\}$ συνεπώς το σύνολο $\{\{z\}, \{z, t\}\}$ περιέχει δύο στοιχεία οπότε $\{\{x\}, \{x, y\}\} \neq \{\{z\}, \{z, t\}\}$ το οποίο είναι άτοπο. Έχουμε ότι $\{\{z\}, \{z, t\}\} = \{\{z\}, \{z, z\}\} = \{\{z\}, \{z\}\} = \{\{z\}\} = \{\{x\}\}$ άρα $\{x\} = \{z\}$ επομένως $x = z = y = t.$

Αν $x \neq y$ τότε το σύνολο $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ περιέχει δύο στοιχεία άρα από την έκφραση (1) προκύπτει ότι $z \neq t$ διότι αν $z = t$ τότε $\{\{z\}, \{z, t\}\} = \{\{z\}\}$ επομένως το σύνολο $\{\{z\}, \{z, t\}\}$ είναι μονοσύνολο συνεπώς $\{\{x\}, \{x, y\}\} \neq \{\{z\}, \{z, t\}\}$ το οποίο είναι άτοπο. Έχουμε ότι $x \neq y$ και $z \neq t$ άρα καθένα εκ των συνόλων $\{x, y\}, \{z, t\}$ περιέχει δύο στοιχεία επομένως από την έκφραση (1) προκύπτει ότι $\{x\} = \{z\}$ και $\{x, y\} = \{z, t\}$ συνεπώς $x = z$ και $\{x, y\} = \{x, t\}$ οπότε $x = z$ και $y = t.$ □

Ορίζουμε ως καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων A, B το σύνολο $A \times B =$

$\{(x, y) : x \in A \text{ και } y \in B\}.$ Ο ορισμός του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων A, B είναι έγκυρος διότι αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε $\{x\} \subseteq A \subseteq A \cup B$ και $\{x, y\} \subseteq A \cup B$ άρα αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε $\{x\} \in \mathbb{P}(A \cup B)$ και $\{x, y\} \in \mathbb{P}(A \cup B)$ επομένως αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathbb{P}(A \cup B)$ δηλαδή αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathbb{P}(\mathbb{P}(A \cup B))$ δηλαδή αν $x \in A$ και $y \in B$ τότε $(x, y) \in \mathbb{P}(\mathbb{P}(A \cup B))$ συνεπώς $A \times B = \{z : z \in \mathbb{P}(\mathbb{P}(A \cup B)) \text{ και } z = (x, y) \text{ με } x \in A \text{ και } y \in B\}.$ Από τον ορισμό του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων A, B προκύπτει ότι $(x, y) \notin A \times B$ αν και μόνο αν $x \notin A$ ή $y \notin B.$

Πρόταση 1.3.2. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \times B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset.$

Απόδειξη. Αν $A \times B \neq \emptyset$ τότε υπάρχει (x, y) με $(x, y) \in A \times B$ δηλαδή υπάρχουν x, y με $x \in A$ και $y \in B$ άρα αν $A \times B \neq \emptyset$ τότε $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ επομένως αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ τότε $A \times B = \emptyset.$

Αν $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ τότε υπάρχουν x, y με $x \in A$ και $y \in B$ δηλαδή υπάρχει (x, y) με $(x, y) \in A \times B$ άρα αν $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ τότε $A \times B \neq \emptyset$ επομένως αν $A \times B = \emptyset$ τότε $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset.$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $A \times B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset.$ □

Πρόταση 1.3.3. Αν A, B, Γ, Δ είναι σύνολα με $A \times B \neq \emptyset$ τότε $A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$ αν και μόνο αν $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Delta$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $A \times B \neq \emptyset$ άρα $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ επομένως υπάρχουν x, y με $x \in A$ και $y \in B$.

Έστω $A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$. Αν $A \not\subseteq \Gamma$ τότε υπάρχει z με $z \in A$ και $z \notin \Gamma$ άρα $(z, y) \in A \times B$ και $(z, y) \notin \Gamma \times \Delta$ επομένως $A \times B \not\subseteq \Gamma \times \Delta$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A \subseteq \Gamma$. Αν $B \not\subseteq \Delta$ τότε υπάρχει t με $t \in B$ και $t \notin \Delta$ άρα $(x, t) \in A \times B$ και $(x, t) \notin \Gamma \times \Delta$ επομένως $A \times B \not\subseteq \Gamma \times \Delta$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $B \subseteq \Delta$.

Έστω $A \subseteq \Gamma$ και $B \subseteq \Delta$. Αν $A \times B \not\subseteq \Gamma \times \Delta$ τότε υπάρχει (z, t) με $(z, t) \in A \times B$ και $(z, t) \notin \Gamma \times \Delta$ άρα ή $z \in A$ και $z \notin \Gamma$ ή $t \in B$ και $t \notin \Delta$ επομένως ή $A \not\subseteq \Gamma$ ή $B \not\subseteq \Delta$ αντίστοιχα το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A \times B \subseteq \Gamma \times \Delta$. $\square$

Πρόταση 1.3.4. Αν A, B είναι σύνολα με $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ τότε $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $A \neq \emptyset$ και $B \neq \emptyset$ άρα υπάρχουν x, y με $x \in A$ και $y \in B$.

Αν $A = B$ τότε $A \times B = B \times A$.

Έστω $A \times B = B \times A$. Αν $A \neq B$ τότε υπάρχει z με $z \in A$ και $z \notin B$ ή υπάρχει t με $t \in B$ και $t \notin A$ άρα ή $(z, y) \in A \times B$ και $(z, y) \notin B \times A$ ή $(x, t) \in A \times B$ και $(x, t) \notin B \times A$ αντίστοιχα επομένως $A \times B \neq B \times A$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $A = B$. $\square$

Πρόταση 1.3.5. Αν A, B, Γ, Δ είναι σύνολα τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$.
2. $(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$.
3. $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$.
4. $(A \cap B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Gamma)$.
5. $A \times (B \setminus \Gamma) = (A \times B) \setminus (A \times \Gamma)$.
6. $(A \setminus B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \setminus (B \times \Gamma)$.
7. $(A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta) \subseteq (A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta)$.
8. $(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $(x, y) \in A \times (B \cup \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y \in B \cup \Gamma$ δηλαδή $(x, y) \in A \times (B \cup \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και ή $y \in B$ ή $y \in \Gamma$ ενώ $x \in A$ και ή $y \in B$ ή $y \in \Gamma$ αν και μόνο αν ή $x \in A$ και $y \in B$ ή $x \in A$ και $y \in \Gamma$ άρα $(x, y) \in A \times (B \cup \Gamma)$ αν και μόνο αν ή $x \in A$ και $y \in B$ ή $x \in A$ και $y \in \Gamma$ δηλαδή $(x, y) \in A \times (B \cup \Gamma)$ αν και μόνο αν $(x, y) \in A \times B$ ή $(x, y) \in A \times \Gamma$ δηλαδή $(x, y) \in A \times (B \cup \Gamma) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$ επομένως $A \times (B \cup \Gamma) \subseteq (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$ και $(A \times B) \cup (A \times \Gamma) \subseteq A \times (B \cup \Gamma)$ δηλαδή $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$.
2. Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη.

3. $(x, y) \in A \times (B \cap \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y \in B \cap \Gamma$ δηλαδή $(x, y) \in A \times (B \cap \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y \in B$ και $y \in \Gamma$ ενώ $x \in A$ και $y \in B$ και $y \in \Gamma$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y \in B$ και $x \in A$ και $y \in \Gamma$ άρα $(x, y) \in A \times (B \cap \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y \in B$ και $x \in A$ και $y \in \Gamma$ δηλαδή $(x, y) \in A \times (B \cap \Gamma)$ αν και μόνο αν $(x, y) \in A \times B$ και $(x, y) \in A \times \Gamma$ δηλαδή $(x, y) \in A \times (B \cap \Gamma) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$ επομένως $A \times (B \cap \Gamma) \subseteq (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$ και $(A \times B) \cap (A \times \Gamma) \subseteq A \times (B \cap \Gamma)$ δηλαδή $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$.
4. Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη.
5. $(x, y) \in A \times (B \setminus \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y \in B \setminus \Gamma$ δηλαδή $(x, y) \in A \times (B \setminus \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y \in B$ και $y \notin \Gamma$ ενώ $x \in A$ και $y \in B$ και $y \notin \Gamma$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y \in B$ και $x \in A$ και $y \notin \Gamma$ άρα $(x, y) \in A \times (B \setminus \Gamma)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y \in B$ και $x \in A$ και $y \notin \Gamma$ δηλαδή $(x, y) \in A \times (B \setminus \Gamma)$ αν και μόνο αν $(x, y) \in A \times B$ και $(x, y) \notin A \times \Gamma$ δηλαδή $(x, y) \in A \times (B \setminus \Gamma) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \setminus (A \times \Gamma)$ επομένως $A \times (B \setminus \Gamma) \subseteq (A \times B) \setminus (A \times \Gamma)$ και $(A \times B) \setminus (A \times \Gamma) \subseteq A \times (B \setminus \Gamma)$ δηλαδή $A \times (B \setminus \Gamma) = (A \times B) \setminus (A \times \Gamma)$.
6. Όμοια με την προηγούμενη απόδειξη.
7. $(x, y) \in (A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta)$ αν και μόνο αν $(x, y) \in A \times B$ ή $(x, y) \in \Gamma \times \Delta$ δηλαδή $(x, y) \in (A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta)$ αν και μόνο αν ή $x \in A \subseteq A \cup \Gamma$ και $y \in B \subseteq B \cup \Delta$ ή $x \in \Gamma \subseteq A \cup \Gamma$ και $y \in \Delta \subseteq B \cup \Delta$ άρα αν $(x, y) \in (A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta)$ τότε $x \in A \cup \Gamma$ και $y \in B \cup \Delta$ δηλαδή αν $(x, y) \in (A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta)$ τότε $(x, y) \in (A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta)$ επομένως $(A \times B) \cup (\Gamma \times \Delta) \subseteq (A \cup \Gamma) \times (B \cup \Delta)$.
8. $(x, y) \in (A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta)$ αν και μόνο αν $(x, y) \in A \times B$ και $(x, y) \in \Gamma \times \Delta$ δηλαδή $(x, y) \in (A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta)$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y \in B$ και $x \in \Gamma$ και $y \in \Delta$ ενώ $x \in A$ και $y \in B$ και $x \in \Gamma$ και $y \in \Delta$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \in \Gamma$ και $y \in B$ και $y \in \Delta$ άρα $(x, y) \in (A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta)$ αν και μόνο αν $x \in A \cap \Gamma$ και $y \in B \cap \Delta$ δηλαδή $(x, y) \in (A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$ επομένως $(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) \subseteq (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$ και $(A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta) \subseteq (A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta)$ δηλαδή $(A \times B) \cap (\Gamma \times \Delta) = (A \cap \Gamma) \times (B \cap \Delta)$.

□

2. ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Σχέσεις

Χρησιμοποιώντας τα διατεταγμένα ζεύγη θα διατυπώσουμε την μαθηματική θεωρία των σχέσεων στην γλώσσα της θεωρίας συνόλων. Ορίζουμε ως δυαδική σχέση ή διμελή σχέση ή σχέση ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών άρα ένα σύνολο R είναι σχέση αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του R είναι διατεταγμένο ζεύγος δηλαδή αν $z \in R$ τότε υπάρχουν x, y έτσι ώστε $z = (x, y)$. Από τον ορισμό της σχέσης προκύπτει ότι ένα σύνολο A δεν είναι σχέση αν και μόνο αν περιέχει στοιχείο το οποίο δεν είναι διατεταγμένο ζεύγος. Αν R είναι σχέση τότε μπορούμε να εκφράσουμε το γεγονός ότι $(x, y) \in R$ συμβολίζοντας xRy και λέγοντας ότι το x βρίσκεται στην σχέση R με το y . Επειδή οι σχέσεις είναι σύνολα συμπεραίνουμε ότι όσα αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για τα σύνολα ισχύουν και για τις σχέσεις.

Πρόταση 2.1.1. Το $\emptyset$ είναι σχέση.

Απόδειξη. Αν το $\emptyset$ δεν είναι σχέση τότε υπάρχει στοιχείο του $\emptyset$ που δεν είναι διατεταγμένο ζεύγος το οποίο είναι άτοπο διότι το $\emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία άρα το $\emptyset$ είναι σχέση. $\square$

Πρόταση 2.1.2. Το R είναι σχέση αν και μόνο αν υπάρχουν σύνολα A, B έτσι ώστε $R \subseteq A \times B$.

Απόδειξη. Κάθε υποσύνολο του $A \times B$ είναι σύνολο διατεταγμένων ζευγών άρα αν $R \subseteq A \times B$ τότε το R είναι σχέση.

Αν το R είναι σχέση τότε για κάθε z με $z \in R$ υπάρχουν x, y έτσι ώστε $z = (x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ άρα το R είναι σύνολο του οποίου κάθε στοιχείο είναι σύνολο δηλαδή ορίζεται το $\bigcup R$ και $t \in \bigcup R$ αν και μόνο αν υπάρχει (x, y) με $(x, y) \in R$ έτσι ώστε $t = \{x\}$ ή $t = \{x, y\}$ επομένως κάθε στοιχείο του $\bigcup R$ είναι σύνολο δηλαδή ορίζεται το $\bigcup \bigcup R$ συνεπώς αν $(x, y) \in R$ τότε $x \in \bigcup \bigcup R$ και $y \in \bigcup \bigcup R$ δηλαδή αν $(x, y) \in R$ τότε $(x, y) \in (\bigcup \bigcup R) \times (\bigcup \bigcup R)$ οπότε $R \subseteq (\bigcup \bigcup R) \times (\bigcup \bigcup R)$. $\square$

Αν μια σχέση R είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου δύο συνόλων A, B δηλαδή $R \subseteq A \times B$ τότε λέμε ότι η R είναι μια σχέση από το A στο B ενώ αν $R \subseteq A \times A$ τότε αντί να λέμε ότι η R είναι μια σχέση από το A στο A μπορούμε να λέμε ότι η R είναι μια σχέση στο A άρα κάθε σχέση R από το $A \subseteq A \cup B$ στο $B \subseteq A \cup B$ είναι σχέση στο $A \cup B$. Ορίζουμε ως πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών μιας σχέσης R τα σύνολα $\text{dom}(R) = \{x : \text{υπάρχει } y \text{ έτσι ώστε } (x, y) \in R\}$ και $\text{ran}(R) = \{y : \text{υπάρχει } x \text{ έτσι ώστε } (x, y) \in R\}$ αντίστοιχα άρα $\text{dom}(R) \subseteq \bigcup \bigcup R$ και $\text{ran}(R) \subseteq \bigcup \bigcup R$ ενώ ορίζουμε ως πεδίο της R το σύνολο $\text{fld}(R) = \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R)$ επομένως κάθε σχέση R είναι σχέση από το $\text{dom}(R)$ στο $\text{ran}(R)$ και κάθε σχέση R είναι σχέση στο $\text{fld}(R)$.

Για μια σχέση R στο A ορίζουμε τα ακόλουθα:

1. Η R είναι αυτοπαθής ή ανακλαστική αν και μόνο αν για κάθε x με $x \in A$ ισχύει ότι $(x, x) \in R$.
2. Η R είναι μη αυτοπαθής ή μη ανακλαστική αν και μόνο αν για κάθε x με $x \in A$ ισχύει ότι $(x, x) \notin R$.
3. Η R είναι συμμετρική αν και μόνο αν για κάθε x, y με $(x, y) \in R$ ισχύει ότι $(y, x) \in R$.

4. Η R είναι μη συμμετρική ή ασυμμετρική αν και μόνο αν για κάθε x, y με $(x, y) \in R$ ισχύει ότι $(y, x) \notin R$.
5. Η R είναι αντισυμμετρική αν και μόνο αν για κάθε x, y με $(x, y) \in R$ και $(y, x) \in R$ ισχύει ότι $x = y$.
6. Η R είναι μεταβατική αν και μόνο αν για κάθε x, y, z με $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$ ισχύει ότι $(x, z) \in R$.
7. Η R είναι κυκλική αν και μόνο αν για κάθε x, y, z με $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$ ισχύει ότι $(z, x) \in R$.
8. Η R είναι σχέση ισοδυναμίας αν και μόνο αν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική.
9. Η R είναι σχέση μερικής διάταξης αν και μόνο αν είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική.
10. Η R είναι σχέση ολικής διάταξης ή σχέση γραμμικής διάταξης ή σχέση διάταξης αν και μόνο αν η R είναι σχέση μερικής διάταξης και για κάθε x, y με $(x, y) \in A \times A$ ισχύει ότι $(x, y) \in R$ ή $(y, x) \in R$.

Δύο στοιχεία που σχετίζονται με σχέση ισοδυναμίας ονομάζονται ισοδύναμο (ο ορισμός αυτός έχει νόημα διότι μια σχέση ισοδυναμίας είναι συμμετρική). Μια σχέση ισοδυναμίας είναι αυτοπαθής άρα κάθε στοιχείο της είναι ισοδύναμο με τον εαυτό του ενώ επειδή μια σχέση ισοδυναμίας είναι μεταβατική προκύπτει ότι αν τα x, y είναι ισοδύναμα και τα y, z είναι ισοδύναμα τότε τα x, z είναι ισοδύναμα.

Πρόταση 2.1.3. Μια σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας αν και μόνο αν είναι αυτοπαθής και κυκλική.

Απόδειξη. Έστω R σχέση ισοδυναμίας. Η R είναι μεταβατική άρα αν $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$ τότε $(x, z) \in R$ ενώ επειδή η R είναι συμμετρική προκύπτει ότι αν $(x, z) \in R$ τότε $(z, x) \in R$ επομένως αν $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$ τότε $(z, x) \in R$ συνεπώς η R είναι κυκλική. Έστω σχέση R η οποία είναι αυτοπαθής και κυκλική. Αν $(x, y) \in R$ τότε επειδή $(x, x) \in R$ προκύπτει ότι $(y, x) \in R$ άρα η R είναι συμμετρική επομένως αν $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$ τότε $(z, x) \in R$ και $(x, z) \in R$ συνεπώς η R είναι μεταβατική οπότε η R είναι σχέση ισοδυναμίας. $\square$

Αν A είναι σύνολο τότε ορίζουμε ως ταυτοτική σχέση στο A ή σχέση ισότητας στο A την σχέση $I_A = \{(x, y) : (x, y) \in A \times A \text{ με } x = y\} = \{(x, x) : x \in A\}$. Από τον ορισμό της I_A προκύπτει ότι αν $(x, y) \in A \times A$ τότε $(x, y) \in I_A \Leftrightarrow x = y$.

Πρόταση 2.1.4. Αν A, B είναι σύνολα τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \subseteq B \Leftrightarrow I_A \subseteq I_B$.
2. $A = B \Leftrightarrow I_A = I_B$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Έστω $A \subseteq B$. Αν $x \in A$ τότε $x \in B$ ενώ $x \in A \Leftrightarrow (x, x) \in I_A$ και $x \in B \Leftrightarrow (x, x) \in I_B$ άρα αν $(x, x) \in I_A$ τότε $(x, x) \in I_B$ επομένως $I_A \subseteq I_B$.
Έστω $I_A \subseteq I_B$. Αν $(x, x) \in I_A$ τότε $(x, x) \in I_B$ ενώ $(x, x) \in I_A \Leftrightarrow x \in A$ και $(x, x) \in I_B \Leftrightarrow x \in B$ άρα αν $x \in A$ τότε $x \in B$ επομένως $A \subseteq B$.

2. Αν $A = B$ τότε $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ άρα $I_A \subseteq I_B$ και $I_B \subseteq I_A$ αντίστοιχα επομένως $I_A = I_B$.
 Αν $I_A = I_B$ τότε $I_A \subseteq I_B$ και $I_B \subseteq I_A$ άρα $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ αντίστοιχα επομένως $A = B$.

□

Πρόταση 2.1.5. Αν A είναι σύνολο τότε η I_A είναι σχέση ισοδυναμίας και σχέση μερικής διάταξης.

Απόδειξη. Για κάθε x έχουμε ότι $x = x$ άρα για κάθε x με $x \in A$ έχουμε ότι $(x, x) \in I_A$ δηλαδή η I_A είναι αυτοπαθής. Αν $(x, y) \in I_A$ τότε $x = y$ δηλαδή $y = x$ άρα $(y, x) \in I_A$ δηλαδή η I_A είναι συμμετρική. Αν $(x, y) \in I_A$ και $(y, x) \in I_A$ τότε $x = y$ και $y = x$ αντίστοιχα δηλαδή η I_A είναι αντισυμμετρική. Αν $(x, y) \in I_A$ και $(y, z) \in I_A$ τότε $x = y$ και $y = z$ αντίστοιχα άρα $x = z$ επομένως $(x, z) \in I_A$ δηλαδή η I_A είναι μεταβατική. Επειδή η I_A είναι αυτοπαθής, συμμετρική, αντισυμμετρική και μεταβατική συμπεραίνουμε ότι η I_A είναι σχέση ισοδυναμίας και σχέση μερικής διάταξης. □

Για μια σχέση ισοδυναμίας R στο A και για $x \in A$ ορίζουμε ως κλάση ισοδυναμίας του x το σύνολο $[x/R] = \{y : (x, y) \in R\}$ άρα αν $y \in [x/R]$ τότε $y \in A$ ενώ για κάθε x με $x \in A$ ισχύει ότι $x \in [x/R]$ διότι για κάθε x με $x \in A$ ισχύει ότι $(x, x) \in R$. Κάθε στοιχείο μιας κλάσης ισοδυναμίας ονομάζεται εκπρόσωπος αυτής. Όλες οι κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης ισοδυναμίας R στο A αποτελούν το σύνολο $[A/R] = \{X : X \in \mathbb{P}(A) \text{ και υπάρχει } x \text{ με } x \in A \text{ έτσι ώστε } y \in X \Leftrightarrow (x, y) \in R\}$.

Πρόταση 2.1.6. Αν R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $A \neq \emptyset$ τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ανά δύο ισοδύναμες:

1. $(x, y) \in R$
2. $[x/R] = [y/R]$
3. $[x/R] \cap [y/R] \neq \emptyset$

Απόδειξη. Έστω $(x, y) \in R$. Η R είναι συμμετρική άρα $(y, x) \in R$ ενώ $z \in [x/R] \Leftrightarrow (x, z) \in R$ άρα αν $z \in [x/R]$ τότε επειδή $(y, x) \in R$ και $(x, z) \in R$ προκύπτει ότι $(y, z) \in R$ επομένως αν $z \in [x/R]$ τότε $z \in [y/R]$ συνεπώς

$$[x/R] \subseteq [y/R] \quad (1)$$

$t \in [y/R] \Leftrightarrow (y, t) \in R$ άρα αν $t \in [y/R]$ τότε επειδή $(x, y) \in R$ και $(y, t) \in R$ προκύπτει ότι $(x, t) \in R$ επομένως αν $t \in [y/R]$ τότε $t \in [x/R]$ συνεπώς

$$[y/R] \subseteq [x/R] \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $[x/R] = [y/R]$ άρα η πρόταση 1 συνεπάγεται την πρόταση 2.

Έστω $[x/R] = [y/R]$. Έχουμε ότι $x \in [x/R]$ άρα $[x/R] \cap [y/R] = [x/R] \cap [x/R] = [x/R] \neq \emptyset$ επομένως η πρόταση 2 συνεπάγεται την πρόταση 3.

Έστω $[x/R] \cap [y/R] \neq \emptyset$. Υπάρχει z με $z \in [x/R]$ και $z \in [y/R]$ άρα $(x, z) \in R$ και $(y, z) \in R$ επομένως $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in R$ συνεπώς $(x, y) \in R$ οπότε η πρόταση 3 συνεπάγεται την πρόταση 1.

Επειδή η πρόταση 1 συνεπάγεται την πρόταση 2, η πρόταση 2 συνεπάγεται την πρόταση 3 και η πρόταση 3 συνεπάγεται την πρόταση 1 συμπεραίνουμε ότι οι προτάσεις 1,2,3 είναι ανά δύο ισοδύναμες. □

Πρόταση 2.1.7. Αν R είναι σχέση ισοδυναμίας στο $A \neq \emptyset$ τότε το $\llbracket A/R \rrbracket$ είναι διαμέριση του A .

Απόδειξη. Για κάθε x με $x \in A$ έχουμε ότι $x \in [x/R]$ άρα κάθε στοιχείο του $\llbracket A/R \rrbracket$ είναι μη κενό. Αν $[x/R] \neq [y/R]$ τότε $[x/R] \cap [y/R] = \emptyset$ διότι αν $[x/R] \cap [y/R] \neq \emptyset$ τότε $[x/R] = [y/R]$ το οποίο είναι άτοπο άρα τα στοιχεία του $\llbracket A/R \rrbracket$ είναι ανά δύο ξένα. Έχουμε ότι $\bigcup \llbracket A/R \rrbracket = \{x : \text{υπάρχει } [y/R] \text{ έτσι ώστε } x \in [y/R]\}$ δηλαδή $x \in \bigcup \llbracket A/R \rrbracket$ αν και μόνο αν υπάρχει $[y/R]$ έτσι ώστε $x \in [y/R]$ ενώ αν $x \in [y/R]$ τότε $x \in A$ άρα αν $x \in \bigcup \llbracket A/R \rrbracket$ τότε $x \in A$ επομένως

$$\bigcup \llbracket A/R \rrbracket \subseteq A \quad (1)$$

Για κάθε y με $y \in A$ έχουμε ότι $y \in [y/R]$ άρα αν $y \in A$ τότε $y \in \bigcup \llbracket A/R \rrbracket$ επομένως

$$A \subseteq \bigcup \llbracket A/R \rrbracket \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $\bigcup \llbracket A/R \rrbracket = A$. Επειδή τα στοιχεία του $\llbracket A/R \rrbracket$ είναι μη κενά, ανά δύο ξένα και $\bigcup \llbracket A/R \rrbracket = A$ συμπεραίνουμε ότι το $\llbracket A/R \rrbracket$ είναι διαμέριση του A . $\square$

Πρόταση 2.1.8. Αν P είναι διαμέριση του $A \neq \emptyset$ τότε υπάρχει σχέση ισοδυναμίας R στο A έτσι ώστε $\llbracket A/R \rrbracket = P$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την σχέση $R =$

$\{(x, y) : \text{υπάρχει } Q \text{ με } Q \in P \text{ έτσι ώστε } x \in Q \text{ και } y \in Q\}$. Για κάθε x με $x \in A$ έχουμε ότι $(x, x) \in R$ διότι το x ανήκει σε κάποιο σύνολο το οποίο είναι στοιχείο της P άρα η R είναι αυτοπαθής. Αν $(x, y) \in R$ τότε τα x, y ανήκουν στο ίδιο σύνολο το οποίο είναι στοιχείο της P άρα από τον ορισμό της R προκύπτει ότι $(y, x) \in R$ επομένως η R είναι συμμετρική. Αν $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R$ τότε τα x, y ανήκουν σε κάποιο σύνολο B με $B \in P$ και τα y, z ανήκουν σε κάποιο σύνολο Γ με $\Gamma \in P$ άρα $y \in B$ και $y \in \Gamma$ επομένως $B \cap \Gamma \neq \emptyset$ και επειδή τα στοιχεία της P είναι ανά δύο ξένα έχουμε ότι $B = \Gamma$ διότι αν $B \neq \Gamma$ τότε $B \cap \Gamma = \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα x, z ανήκουν στο ίδιο σύνολο το οποίο είναι στοιχείο της P άρα $(x, z) \in R$ επομένως η R είναι μεταβατική. Επειδή η R είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική συμπεραίνουμε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Έχουμε ότι $[x/R] = \{y : (x, y) \in R\} =$

$\{y : \text{υπάρχει } Q \text{ με } Q \in P \text{ έτσι ώστε } x \in Q \text{ και } y \in Q\}$ δηλαδή $y \in [x/R]$ αν και μόνο αν υπάρχει Q με $Q \in P$ έτσι ώστε $x \in Q$ και $y \in Q$ ενώ $x \in [x/R]$ για κάθε x με $x \in A$ άρα $y \in [x/R]$ αν και μόνο αν υπάρχει Q με $Q \in P$ έτσι ώστε $y \in Q$ επομένως για κάθε κλάση ισοδυναμίας $[x/R]$ υπάρχει Q με $Q \in P$ έτσι ώστε τα $[x/R]$ και Q να αποτελούνται από τα ίδια στοιχεία δηλαδή για κάθε κλάση ισοδυναμίας $[x/R]$ υπάρχει Q με $Q \in P$ έτσι ώστε τα $[x/R]$ και Q να είναι ίσα δηλαδή κάθε κλάση ισοδυναμίας της R είναι στοιχείο της P συνεπώς

$$\llbracket A/R \rrbracket \subseteq P \quad (1)$$

Αν $X \in P$ και $x \in X$ τότε υπάρχει Y με $Y \in P$ έτσι ώστε $[x/R] = Y$ άρα $x \in X$ και $x \in Y$ επομένως $X \cap Y \neq \emptyset$ και επειδή τα στοιχεία της P είναι ανά δύο ξένα προκύπτει ότι $X = Y = [x/R]$ συνεπώς κάθε στοιχείο της P είναι κλάση ισοδυναμίας της R οπότε

$$P \subseteq \llbracket A/R \rrbracket \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $\llbracket A/R \rrbracket = P$. $\square$

Αν R είναι σχέση από το A στο B και S είναι σχέση από το B στο Γ τότε ορίζουμε ως σύνθεση των R και S την σχέση $S \circ R$ από το A στο Γ με $S \circ R = \{(x, y) : \text{υπάρχει } z \text{ με } z \in B \text{ έτσι ώστε } (x, z) \in R \text{ και } (z, y) \in S\}$. Από τον ορισμό της σύνθεσης μιας σχέσης R από το A στο B με μια σχέση S από το B στο Γ προκύπτει ότι αν $(x, y) \in S \circ R$ τότε $x \in A$ και $y \in \Gamma$.

Πρόταση 2.1.9. Αν R είναι σχέση από το A στο B τότε $R \circ I_A = I_B \circ R = R$.

Απόδειξη. Η I_A είναι σχέση από το A στο A και η R είναι σχέση από το A στο B άρα η $R \circ I_A$ είναι σχέση από το A στο B με $(x, y) \in R \circ I_A$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in A$ έτσι ώστε $(x, z) \in I_A$ και $(z, y) \in R$ ενώ $(x, z) \in I_A$ αν και μόνο αν $x = z$ επομένως $(x, y) \in R \circ I_A$ αν και μόνο αν $(x, x) \in I_A$ και $(x, y) \in R$ ενώ $(x, x) \in I_A$ και $(x, y) \in R$ αν και μόνο αν $(x, y) \in R$ συνεπώς $(x, y) \in R \circ I_A \Leftrightarrow (x, y) \in R$ οπότε $R \circ I_A \subseteq R$ και $R \subseteq R \circ I_A$ δηλαδή $R \circ I_A = R$.

Η R είναι σχέση από το A στο B και η I_B είναι σχέση από το B στο B άρα η $I_B \circ R$ είναι σχέση από το A στο B με $(x, y) \in I_B \circ R$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in B$ έτσι ώστε $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in I_B$ ενώ $(z, y) \in I_B$ αν και μόνο αν $z = y$ επομένως $(x, y) \in I_B \circ R$ αν και μόνο αν $(x, y) \in R$ και $(y, y) \in I_B$ ενώ $(x, y) \in R$ και $(y, y) \in I_B$ αν και μόνο αν $(x, y) \in R$ συνεπώς $(x, y) \in I_B \circ R \Leftrightarrow (x, y) \in R$ οπότε $I_B \circ R \subseteq R$ και $R \subseteq I_B \circ R$ δηλαδή $I_B \circ R = R$. $\square$

Πρόταση 2.1.10. Αν R είναι σχέση από το A στο B , S είναι σχέση από το B στο Γ και T είναι σχέση από το Γ στο Δ τότε $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.

Απόδειξη. Η $S \circ R$ είναι σχέση από το A στο Γ και η T είναι σχέση από το Γ στο Δ άρα η $T \circ (S \circ R)$ είναι σχέση από το A στο Δ με $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in \Gamma$ έτσι ώστε $(x, z) \in S \circ R$ και $(z, y) \in T$ ενώ $(x, z) \in S \circ R$ αν και μόνο αν υπάρχει t με $t \in B$ έτσι ώστε $(x, t) \in R$ και $(t, z) \in S$ επομένως $(x, y) \in T \circ (S \circ R)$ αν και μόνο αν υπάρχουν t, z με $(t, z) \in B \times \Gamma$ έτσι ώστε $(x, t) \in R$ και $(t, z) \in S$ και $(z, y) \in T$.

Η R είναι σχέση από το A στο B και η $T \circ S$ είναι σχέση από το B στο Δ άρα η $(T \circ S) \circ R$ είναι σχέση από το A στο Δ με $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$ αν και μόνο αν υπάρχει t με $t \in B$ έτσι ώστε $(x, t) \in R$ και $(t, y) \in T \circ S$ ενώ $(t, y) \in T \circ S$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in \Gamma$ έτσι ώστε $(t, z) \in S$ και $(z, y) \in T$ επομένως $(x, y) \in (T \circ S) \circ R$ αν και μόνο αν υπάρχουν t, z με $(t, z) \in B \times \Gamma$ έτσι ώστε $(x, t) \in R$ και $(t, z) \in S$ και $(z, y) \in T$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $(x, y) \in T \circ (S \circ R) \Leftrightarrow (x, y) \in (T \circ S) \circ R$ άρα $T \circ (S \circ R) \subseteq (T \circ S) \circ R$ και $(T \circ S) \circ R \subseteq T \circ (S \circ R)$ δηλαδή $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$. $\square$

Από την Πρόταση 2.1.10 προκύπτει ότι αν R είναι σχέση από το A στο B , S είναι σχέση από το B στο Γ και T είναι σχέση από το Γ στο Δ τότε η παράσταση $T \circ S \circ R$ ορίζει μονοσήμαντα σχέση.

Ορίζουμε ως αντίστροφη σχέση μιας σχέσης R την σχέση $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$. Από τον ορισμό της αντίστροφης σχέσης προκύπτει ότι $I_A^{-1} = I_A$ για κάθε σύνολο A .

Πρόταση 2.1.11. Αν R είναι σχέση τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\text{dom}(R^{-1}) = \text{ran}(R)$.
2. $\text{ran}(R^{-1}) = \text{dom}(R)$.
3. $\text{fld}(R^{-1}) = \text{fld}(R)$.
4. $(R^{-1})^{-1} = R$.

5. Η $R^{-1} \cup R$ είναι συμμετρική.
6. Η $R^{-1} \cap R$ είναι συμμετρική.
7. Η $R^{-1} \circ R$ είναι συμμετρική.
8. Η $R \circ R^{-1}$ είναι συμμετρική.
9. $R^{-1} \circ R \supseteq I_{\text{dom}(R)}$.
10. $R \circ R^{-1} \supseteq I_{\text{ran}(R)}$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $y \in \text{dom}(R^{-1})$ αν και μόνο αν υπάρχει x έτσι ώστε $(y, x) \in R^{-1}$ ενώ $(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$ άρα $y \in \text{dom}(R^{-1})$ αν και μόνο αν υπάρχει x έτσι ώστε $(x, y) \in R$ δηλαδή $y \in \text{dom}(R^{-1}) \Leftrightarrow y \in \text{ran}(R)$ επομένως $\text{dom}(R^{-1}) \subseteq \text{ran}(R)$ και $\text{ran}(R) \subseteq \text{dom}(R^{-1})$ δηλαδή $\text{dom}(R^{-1}) = \text{ran}(R)$.
2. $x \in \text{ran}(R^{-1})$ αν και μόνο αν υπάρχει y έτσι ώστε $(y, x) \in R^{-1}$ ενώ $(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$ άρα $x \in \text{ran}(R^{-1})$ αν και μόνο αν υπάρχει y έτσι ώστε $(x, y) \in R$ δηλαδή $x \in \text{ran}(R^{-1}) \Leftrightarrow x \in \text{dom}(R)$ επομένως $\text{ran}(R^{-1}) \subseteq \text{dom}(R)$ και $\text{dom}(R) \subseteq \text{ran}(R^{-1})$ δηλαδή $\text{ran}(R^{-1}) = \text{dom}(R)$.
3. $\text{fld}(R^{-1}) = \text{dom}(R^{-1}) \cup \text{ran}(R^{-1}) = \text{ran}(R) \cup \text{dom}(R) = \text{fld}(R)$.
4. $(R^{-1})^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R^{-1}\}$ δηλαδή $(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$ ενώ $(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$ άρα $(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$ επομένως $(R^{-1})^{-1} \subseteq R$ και $R \subseteq (R^{-1})^{-1}$ δηλαδή $(R^{-1})^{-1} = R$.
5. $(x, y) \in R^{-1} \cup R$ αν και μόνο αν $(x, y) \in R^{-1}$ ή $(x, y) \in R$ ενώ $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$ και $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$ άρα $(x, y) \in R^{-1} \cup R$ αν και μόνο αν $(y, x) \in R$ ή $(y, x) \in R^{-1}$ δηλαδή $(x, y) \in R^{-1} \cup R \Leftrightarrow (y, x) \in R \cup R^{-1}$ δηλαδή $(x, y) \in R^{-1} \cup R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \cup R$ επομένως η $R^{-1} \cup R$ είναι συμμετρική.
6. $(x, y) \in R^{-1} \cap R$ αν και μόνο αν $(x, y) \in R^{-1}$ και $(x, y) \in R$ ενώ $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$ και $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$ άρα $(x, y) \in R^{-1} \cap R$ αν και μόνο αν $(y, x) \in R$ και $(y, x) \in R^{-1}$ δηλαδή $(x, y) \in R^{-1} \cap R \Leftrightarrow (y, x) \in R \cap R^{-1}$ δηλαδή $(x, y) \in R^{-1} \cap R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \cap R$ επομένως η $R^{-1} \cap R$ είναι συμμετρική.
7. $(x, y) \in R^{-1} \circ R$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in \text{ran}(R)$ έτσι ώστε $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in R^{-1}$ ενώ $(x, z) \in R \Leftrightarrow (z, x) \in R^{-1}$ και $(z, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, z) \in R$ άρα $(x, y) \in R^{-1} \circ R$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in \text{ran}(R)$ έτσι ώστε $(z, x) \in R^{-1}$ και $(y, z) \in R$ ενώ $(z, x) \in R^{-1}$ και $(y, z) \in R$ αν και μόνο αν $(y, z) \in R$ και $(z, x) \in R^{-1}$ επομένως $(x, y) \in R^{-1} \circ R$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in \text{ran}(R)$ έτσι ώστε $(y, z) \in R$ και $(z, x) \in R^{-1}$ δηλαδή $(x, y) \in R^{-1} \circ R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \circ R$ συνεπώς η $R^{-1} \circ R$ είναι συμμετρική.
8. $R \circ R^{-1} = (R^{-1})^{-1} \circ R^{-1}$ άρα η $R \circ R^{-1}$ είναι συμμετρική.
9. $(x, x) \in I_{\text{dom}(R)} \Leftrightarrow x \in \text{dom}(R)$ ενώ $x \in \text{dom}(R)$ αν και μόνο αν υπάρχει y έτσι ώστε $(x, y) \in R$ άρα $(x, x) \in I_{\text{dom}(R)}$ αν και μόνο αν υπάρχει y έτσι ώστε $(x, y) \in R$ ενώ $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1}$ επομένως $(x, x) \in I_{\text{dom}(R)}$ αν και μόνο αν υπάρχει y έτσι ώστε $(x, y) \in R$ και $(y, x) \in R^{-1}$ δηλαδή $(x, x) \in I_{\text{dom}(R)} \Leftrightarrow (x, x) \in R^{-1} \circ R$ συνεπώς $R^{-1} \circ R \supseteq I_{\text{dom}(R)}$.

$$10. R \circ R^{-1} = (R^{-1})^{-1} \circ R^{-1} \supseteq I_{\text{dom}(R^{-1})} = I_{\text{ran}(R)}.$$

□

Πρόταση 2.1.12. Αν R είναι σχέση από το A στο B και S είναι σχέση από το B στο Γ τότε $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

Απόδειξη. Η $S \circ R$ είναι σχέση από το A στο Γ άρα η $(S \circ R)^{-1}$ είναι σχέση από το Γ στο A με $(y, x) \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in S \circ R$ ενώ $(x, y) \in S \circ R$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in B$ έτσι ώστε $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in S$ άρα $(y, x) \in (S \circ R)^{-1}$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in B$ έτσι ώστε $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in S$.

Η S^{-1} είναι σχέση από το Γ στο B και η R^{-1} είναι σχέση από το B στο A άρα η $R^{-1} \circ S^{-1}$ είναι σχέση από το Γ στο A με $(y, x) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in B$ έτσι ώστε $(y, z) \in S^{-1}$ και $(z, x) \in R^{-1}$ ενώ $(y, z) \in S^{-1} \Leftrightarrow (z, y) \in S$ και $(z, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, z) \in R$ επομένως $(y, x) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in B$ έτσι ώστε $(z, y) \in S$ και $(x, z) \in R$ ενώ $(z, y) \in S$ και $(x, z) \in R$ αν και μόνο αν $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in S$ συνεπώς $(y, x) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in B$ έτσι ώστε $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in S$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $(y, x) \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \circ S^{-1}$ άρα $(S \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1} \circ S^{-1}$ και $R^{-1} \circ S^{-1} \subseteq (S \circ R)^{-1}$ δηλαδή $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$. □

Πρόταση 2.1.13. Αν R είναι σχέση στο A τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η R είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν $R \supseteq I_A$.
2. Η R είναι μη αυτοπαθής αν και μόνο αν $R \cap I_A = \emptyset$.
3. Η R είναι συμμετρική αν και μόνο αν $R = R^{-1}$.
4. Η R είναι ασυμμετρική αν και μόνο αν $R \cap R^{-1} = \emptyset$.
5. Η R είναι αντισυμμετρική αν και μόνο αν $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.
6. Η R είναι μεταβατική αν και μόνο αν $R \circ R \subseteq R$.
7. Η R είναι κυκλική αν και μόνο αν $R \circ R \subseteq R^{-1}$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Έστω R αυτοπαθής. Αν $x \in A$ τότε $(x, x) \in R$ ενώ $x \in A \Leftrightarrow (x, x) \in I_A$ άρα αν $(x, x) \in I_A$ τότε $(x, x) \in R$ επομένως $R \supseteq I_A$.
Έστω $R \supseteq I_A$. Αν $(x, x) \in I_A$ τότε $(x, x) \in R$ ενώ $(x, x) \in I_A \Leftrightarrow x \in A$ άρα αν $x \in A$ τότε $(x, x) \in R$ επομένως η R είναι αυτοπαθής.
2. Έστω R μη αυτοπαθής. Αν $x \in A$ τότε $(x, x) \notin R$ ενώ $x \in A \Leftrightarrow (x, x) \in I_A$ άρα αν $(x, x) \in I_A$ τότε $(x, x) \notin R$ επομένως $R \cap I_A = \emptyset$.
Έστω $R \cap I_A = \emptyset$. Αν $(x, x) \in I_A$ τότε $(x, x) \notin R$ ενώ $(x, x) \in I_A \Leftrightarrow x \in A$ άρα αν $x \in A$ τότε $(x, x) \notin R$ επομένως η R είναι μη αυτοπαθής.
3. Έστω R συμμετρική. Αν $(x, y) \in R$ τότε $(y, x) \in R$ ενώ $(y, x) \in R \Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1}$ άρα αν $(x, y) \in R$ τότε $(x, y) \in R^{-1}$ επομένως

$$R \subseteq R^{-1} \tag{1}$$

$(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$ ενώ αν $(x, y) \in R$ τότε $(y, x) \in R$ άρα αν $(y, x) \in R^{-1}$ τότε $(y, x) \in R$ επομένως

$$R^{-1} \subseteq R \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $R = R^{-1}$.

Έστω $R = R^{-1}$. Επειδή $R \subseteq R^{-1}$ και $R^{-1} \subseteq R$ προκύπτει ότι $(x, y) \in R \Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1}$ ενώ $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$ άρα $(x, y) \in R \Leftrightarrow (y, x) \in R$ επομένως η R είναι συμμετρική.

4. Έστω R ασυμμετρική. Αν υπάρχουν x, y με $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ τότε $(x, y) \in R$ και $(x, y) \in R^{-1}$ ενώ $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$ άρα $(x, y) \in R$ και $(y, x) \in R$ το οποίο είναι άτοπο διότι η R είναι ασυμμετρική επομένως $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

Έστω $R \cap R^{-1} = \emptyset$. Αν υπάρχουν x, y με $(x, y) \in R$ και $(y, x) \in R$ τότε επειδή $(y, x) \in R \Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1}$ προκύπτει ότι $(x, y) \in R$ και $(x, y) \in R^{-1}$ άρα $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ επομένως $R \cap R^{-1} \neq \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς αν $(x, y) \in R$ τότε $(y, x) \notin R$ οπότε η R είναι ασυμμετρική.

5. Έστω R αντισυμμετρική. $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ αν και μόνο αν $(x, y) \in R$ και $(x, y) \in R^{-1}$ ενώ $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$ άρα $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ αν και μόνο αν $(x, y) \in R$ και $(y, x) \in R$ ενώ αν $(x, y) \in R$ και $(y, x) \in R$ τότε $x = y$ επομένως αν $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ τότε $x = y$ ενώ επειδή $(x, y) \in A \times A$ προκύπτει ότι $x = y \Leftrightarrow (x, y) \in I_A$ συνεπώς αν $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ τότε $(x, y) \in I_A$ οπότε $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$.

Έστω $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$. Αν $(x, y) \in R \cap R^{-1}$ τότε $(x, y) \in I_A$ δηλαδή αν $(x, y) \in R$ και $(x, y) \in R^{-1}$ τότε $x = y$ ενώ $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$ άρα αν $(x, y) \in R$ και $(y, x) \in R$ τότε $x = y$ επομένως η R είναι αντισυμμετρική.

6. $R \circ R = \{(x, y) : \text{υπάρχει } z \text{ με } z \in A \text{ έτσι ώστε } (x, z) \in R \text{ και } (z, y) \in R\}$.

Έστω R μεταβατική. Αν υπάρχει z με $z \in A$ έτσι ώστε $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in R$ τότε $(x, y) \in R$ δηλαδή αν $(x, y) \in R \circ R$ τότε $(x, y) \in R$ επομένως $R \circ R \subseteq R$.

Έστω $R \circ R \subseteq R$. Αν $(x, y) \in R \circ R$ τότε $(x, y) \in R$ άρα αν υπάρχει z με $z \in A$ έτσι ώστε $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in R$ τότε $(x, y) \in R$ επομένως η R είναι μεταβατική.

7. $R \circ R = \{(x, y) : \text{υπάρχει } z \text{ με } z \in A \text{ έτσι ώστε } (x, z) \in R \text{ και } (z, y) \in R\}$.

Έστω R κυκλική. Αν υπάρχει z με $z \in A$ έτσι ώστε $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in R$ τότε $(y, x) \in R$ δηλαδή αν $(x, y) \in R \circ R$ τότε $(y, x) \in R$ ενώ $(y, x) \in R \Leftrightarrow (x, y) \in R^{-1}$ άρα αν $(x, y) \in R \circ R$ τότε $(x, y) \in R^{-1}$ επομένως $R \circ R \subseteq R^{-1}$.

Έστω $R \circ R \subseteq R^{-1}$. Αν $(x, y) \in R \circ R$ τότε $(x, y) \in R^{-1}$ δηλαδή αν υπάρχει z με $z \in A$ έτσι ώστε $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in R$ τότε $(x, y) \in R^{-1}$ ενώ $(x, y) \in R^{-1} \Leftrightarrow (y, x) \in R$ άρα αν υπάρχει z με $z \in A$ έτσι ώστε $(x, z) \in R$ και $(z, y) \in R$ τότε $(y, x) \in R$ επομένως η R είναι κυκλική.

□

Από την Πρόταση 2.1.13 προκύπτει ότι μια σχέση R στο A είναι σχέση ισοδυναμίας αν και μόνο αν $R \supseteq I_A$, $R = R^{-1}$ και $R \circ R \subseteq R$ ενώ η R είναι σχέση μερικής διάταξης αν και μόνο αν $R \supseteq I_A$, $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$ και $R \circ R \subseteq R$.

Ορίζουμε ως σχέσεις εγκλεισμού στο $\mathbb{P}(\Omega)$ τις σχέσεις $\subseteq =$

$\{(X, Y) : (X, Y) \in \mathbb{P}(\Omega) \times \mathbb{P}(\Omega) \text{ με } X \subseteq Y\}$ και $\supseteq =$

$\{(X, Y) : (X, Y) \in \mathbb{P}(\Omega) \times \mathbb{P}(\Omega) \text{ με } X \supseteq Y\}$. Από τους ορισμούς των σχέσεων εγκλεισμού στο $\mathbb{P}(\Omega)$ προκύπτει ότι $(X, Y) \in \subseteq \Leftrightarrow (Y, X) \in \supseteq$ άρα $\subseteq^{-1} = \supseteq$ και $\supseteq^{-1} = \subseteq$.

Πρόταση 2.1.14. Οι σχέσεις εγκλεισμού στο $\mathbb{P}(\Omega)$ είναι σχέσεις μερικής διάταξης.

Απόδειξη. Αν A είναι σύνολο τότε $A \subseteq A$ άρα οι $\subseteq$ και $\supseteq$ είναι αυτοπαθείς. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ τότε $A = B$ άρα οι $\subseteq$ και $\supseteq$ είναι αντισυμμετρικές. Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ τότε $A \subseteq \Gamma$ άρα οι $\subseteq$ και $\supseteq$ είναι μεταβατικές. Επειδή οι $\subseteq$ και $\supseteq$ είναι αυτοπαθείς, αντισυμμετρικές και μεταβατικές συμπεραίνουμε ότι οι $\subseteq$ και $\supseteq$ είναι σχέσεις μερικής διάταξης. $\square$

Αν R είναι σχέση μερικής διάταξης στο A τότε λέμε ότι το A είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο ενώ αν η R είναι σχέση διάταξης στο A τότε λέμε ότι το A είναι διατεταγμένο σύνολο ή λέμε ότι το A είναι ολικώς διατεταγμένο σύνολο ή λέμε ότι το A είναι γραμμικώς διατεταγμένο σύνολο ή λέμε ότι το A είναι αλυσίδα. Δύο στοιχεία x, y ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου A ονομάζονται συγκρίσιμα ως προς την σχέση μερικής διάταξης R στο A αν και μόνο αν $(x, y) \in R$ ή $(y, x) \in R$ άρα η R είναι σχέση διάταξης στο A αν και μόνο αν τα στοιχεία του A είναι ανά δύο συγκρίσιμα ως προς την R ενώ αν $(x, y) \notin R$ και $(y, x) \notin R$ τότε τα x, y ονομάζονται μη συγκρίσιμα ως προς την R .

Αν R, S είναι σχέσεις στο A έτσι ώστε $(x, y) \in R$ αν και μόνο αν $(x, y) \in S$ και $x \neq y$ τότε λέμε ότι R είναι η γνήσια σχέση που αντιστοιχεί στην S και S είναι η ασθενής σχέση που αντιστοιχεί στην R . Θα λέμε για μια σχέση R στο A ότι «μερικώς διατάσσει το A » αν και μόνο αν η R είναι μερική διάταξη στο A ή η ασθενής σχέση που αντιστοιχεί στην R είναι μερική διάταξη στο A ενώ θα λέμε ότι η R «διατάσσει το A » ή «ολικώς διατάσσει το A » ή «γραμμικώς διατάσσει το A » αν και μόνο αν η R είναι διάταξη στο A ή η ασθενής σχέση που αντιστοιχεί στην R είναι διάταξη στο A .

Πρόταση 2.1.15. Η σχέση $\subset = \{(X, Y) : (X, Y) \in \mathbb{P}(\Omega) \times \mathbb{P}(\Omega) \text{ με } X \subset Y\}$ είναι η γνήσια σχέση που αντιστοιχεί στην $\subseteq$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $(X, Y) \in \subset$ αν και μόνο αν $(X, Y) \in \mathbb{P}(\Omega) \times \mathbb{P}(\Omega)$ με $X \subset Y$ δηλαδή $(X, Y) \in \subset$ αν και μόνο αν $(X, Y) \in \mathbb{P}(\Omega) \times \mathbb{P}(\Omega)$ με $X \subseteq Y$ και $X \neq Y$ δηλαδή $(X, Y) \in \subset$ αν και μόνο αν $(X, Y) \in \subseteq$ και $X \neq Y$ άρα η $\subset$ είναι η γνήσια σχέση που αντιστοιχεί στην $\subseteq$. $\square$

Πρόταση 2.1.16. Η σχέση $\supset = \{(X, Y) : (X, Y) \in \mathbb{P}(\Omega) \times \mathbb{P}(\Omega) \text{ με } X \supset Y\}$ είναι η γνήσια σχέση που αντιστοιχεί στην $\supseteq$.

Απόδειξη. Όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 2.1.15. $\square$

Τέλος παραθέτουμε την αρχή της διαγωνιοποίησης η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την απόδειξη συγκεκριμένων σημαντικών αποτελεσμάτων στην θεωρία συνόλων.

Πρόταση 2.1.17 (αρχή της διαγωνιοποίησης). Αν R είναι σχέση στο A και $D = \{x : x \in A \text{ και } (x, x) \notin R\}$ ενώ $R_x = \{y : y \in A \text{ και } (x, y) \in R\}$ τότε $D \neq R_x$ για κάθε x με $x \in A$.

Απόδειξη. Για οποιοδήποτε x με $x \in A$ έχουμε ότι αν $(x, x) \in R$ τότε $x \notin D$ και $x \in R_x$ ενώ αν $(x, x) \notin R$ τότε $x \in D$ και $x \notin R_x$ άρα $D \neq R_x$ για κάθε x με $x \in A$. $\square$

2.2 Συναρτήσεις

Αν A, B είναι σύνολα τότε συνάρτηση από το A στο B είναι μια σχέση f από το A στο B έτσι ώστε $\text{dom}(f) = A$ και για κάθε x με $x \in A$ υπάρχει μοναδικό y με $y \in B$ έτσι ώστε $(x, y) \in f$. Από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει ότι μια σχέση R από το A στο B δεν

είναι συνάρτηση από το A στο B αν και μόνο αν υπάρχει x με $x \in A$ έτσι ώστε για κάθε y με $y \in B$ να έχουμε ότι $(x, y) \notin R$ ή υπάρχουν x, y, z με $x \in A$, $(y, z) \in B \times B$ και $y \neq z$ έτσι ώστε $(x, y) \in R$ και $(x, z) \in R$. Επειδή οι συναρτήσεις είναι σχέσεις συμπεραίνουμε ότι όσα αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα για τις σχέσεις ισχύουν και για τις συναρτήσεις.

Πρόταση 2.2.1. Αν A είναι σύνολο τότε το $\emptyset$ είναι η μοναδική συνάρτηση από το $\emptyset$ στο A .

Απόδειξη. Αν υπάρχει σύνολο A έτσι ώστε το $\emptyset$ να μην είναι συνάρτηση από το $\emptyset$ στο A τότε υπάρχει x με $x \in \emptyset$ έτσι ώστε για κάθε y με $y \in A$ να έχουμε ότι $(x, y) \notin \emptyset$ ή υπάρχουν x, y, z με $x \in \emptyset$, $(y, z) \in A \times A$ και $y \neq z$ έτσι ώστε $(x, y) \in \emptyset$ και $(x, z) \in \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο διότι το $\emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία άρα για κάθε σύνολο A το $\emptyset$ είναι συνάρτηση από το $\emptyset$ στο A . Αν $f \neq \emptyset$ είναι συνάρτηση από το $\emptyset$ στο A τότε επειδή η f είναι σχέση υπάρχει (x, y) με $(x, y) \in f$ άρα $x \in \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο επομένως για κάθε σύνολο A το $\emptyset$ είναι η μοναδική συνάρτηση από το $\emptyset$ στο A . $\square$

Πρόταση 2.2.2. Δεν υπάρχει συνάρτηση από το $A \neq \emptyset$ στο $\emptyset$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $A \neq \emptyset$ άρα υπάρχει x με $x \in A$ επομένως αν υπάρχει συνάρτηση f από το $A \neq \emptyset$ στο $\emptyset$ τότε υπάρχει μοναδικό y με $y \in \emptyset$ έτσι ώστε $(x, y) \in f$ το οποίο είναι άτοπο διότι το $\emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία άρα δεν υπάρχει συνάρτηση από το $A \neq \emptyset$ στο $\emptyset$. $\square$

Αν f είναι συνάρτηση από το A στο B τότε για κάθε x με $x \in A$ το μοναδικό y με $y \in B$ έτσι ώστε $(x, y) \in f$ συμβολίζεται με $f(x)$ ενώ αν υπάρχει (z, t) με $(z, t) \in A$ τότε μπορούμε να συμβολίσουμε το $f((z, t))$ με $f(z, t)$ δηλαδή μπορούμε να παραλείψουμε ένα ζεύγος παρενθέσεων. Για τις συναρτήσεις αυτός ο συμβολισμός εκτοπίζει όλους τους άλλους που χρησιμοποιούνται για πιο γενικές σχέσεις έτσι από εδώ και στο εξής αν f είναι συνάρτηση θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $f(x) = y$ αντί του $(x, y) \in f$ ή του xfy . Αν $f(x) = y$ τότε το στοιχείο x ονομάζεται όρισμα της f και το στοιχείο y ονομάζεται η τιμή που η f παίρνει στο x ή ισοδύναμα λέμε ότι η f στέλνει ή απεικονίζει ή μετασχηματίζει το x στο y ενώ το σύμβολο « x » που ονοματίζει οποιοδήποτε στοιχείο του A ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή και το σύμβολο « y » που ονοματίζει το μοναδικό στοιχείο του B έτσι ώστε $y = f(x)$ ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή. Οι λέξεις τελεστής, απεικόνιση και μετασχηματισμός χρησιμοποιούνται ως συνώνυμες της λέξης συνάρτηση και ο συμβολισμός $f : A \mapsto B$ χρησιμοποιείται για να δείξει ότι η f είναι συνάρτηση από το A στο B ενώ για να ορίσουμε την f αρκεί για κάθε x με $x \in A$ να προσδιορίσουμε το $f(x)$. Όλες οι συναρτήσεις από το A στο B αποτελούν το σύνολο $B^A = \{f : f \in \mathbb{P}(A \times B) \text{ και } f : A \mapsto B\}$.

Μια έμφυτη διαίσθηση «δράσης» που έχουμε για την έννοια της συνάρτησης και η οποία αντανακλάται και στη σημασία των συνωνύμων που απαριθμήθηκαν πιο πάνω κάνουν μερικούς μελετητές να μην είναι ευχαριστημένοι με τον ορισμό σύμφωνα με τον οποίο μια συνάρτηση δεν *κάνει* κάτι, αλλά απλώς *είναι*. Αυτή η δυσaréσκεια αντανακλάται στο λεξιλόγιο με τη χρήση διαφορετικών λέξεων: η λέξη *συνάρτηση* κρατείται για το αόριστο αντικείμενο που είναι κατά κάποιο τρόπο ενεργό, και το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που εμείς έχουμε καλέσει συνάρτηση καλείται τότε *γράφημα* της συνάρτησης. [Halmos 2002, 52-53]

Η απουσία κάποιας έννοιας «δράσης» στον ορισμό της συνάρτησης δεν δημιουργεί πρόβλημα αν αναλογιστούμε ότι ο ορισμός αυτός

δεν αντικαθιστά τη διαισθητική έννοια της συνάρτησης αλλά μόνο την απεικονίζει στη *συνολοθεωρία*, πιστά όσον αφορά τις χρήσεις αυτής της έννοιας στη *συνολοθεωρία*. [Μοσχοβάκης 2007, 45]

Πρόταση 2.2.3. Αν A, B είναι σύνολα τότε $A \times B = \bigcup B^A$.

Απόδειξη. Αν $(x, y) \in A \times B$ τότε για την συνάρτηση $f : A \mapsto B$ με $f(z) = y$ για κάθε z με $z \in A$ ισχύει ότι $(x, y) \in f$ άρα $(x, y) \in \bigcup B^A$ επομένως

$$A \times B \subseteq \bigcup B^A \quad (1)$$

Αν $t \in \bigcup B^A$ τότε υπάρχει συνάρτηση $f : A \mapsto B$ έτσι ώστε $t \in f \subseteq A \times B$ άρα $t \in A \times B$ επομένως

$$\bigcup B^A \subseteq A \times B \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $A \times B = \bigcup B^A$. □

Πρόταση 2.2.4. Αν $f : A \mapsto B, g : \Gamma \mapsto \Delta$ τότε $f = g$ αν και μόνο αν $A = \Gamma$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε x με $x \in A$.

Απόδειξη. Αν $f = g$ τότε $f \subseteq g$ και $g \subseteq f$ άρα $(x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in g$ δηλαδή $(x, f(x)) \in f \Leftrightarrow (x, g(x)) \in g$ επομένως $A = \text{dom}(f) = \text{dom}(g) = \Gamma$ και επειδή για κάθε x με $x \in A$ υπάρχουν μοναδικά $f(x), g(x)$ προκύπτει ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε x με $x \in A$.

Έστω $A = \Gamma$ και $f(x) = g(x)$ για κάθε x με $x \in A$. $(x, y) \in f$ αν και μόνο αν $x \in A$ και $y = f(x)$ δηλαδή $(x, y) \in f$ αν και μόνο αν $x \in \Gamma$ και $y = g(x)$ ενώ $x \in \Gamma$ και $y = g(x)$ αν και μόνο αν $(x, y) \in g$ άρα $(x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in g$ επομένως $f \subseteq g$ και $g \subseteq f$ δηλαδή $f = g$. □

Πρόταση 2.2.5. Αν $f : A \mapsto B, g : B \mapsto \Gamma$ τότε η $g \circ f$ είναι συνάρτηση από το A στο Γ με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $g \circ f =$

$\{(x, y) : \text{υπάρχει } z \text{ με } z \in B \text{ έτσι ώστε } f(x) = z \text{ και } g(z) = y\}$ ενώ για κάθε x με $x \in A$ υπάρχει μοναδικό z με $z \in B$ έτσι ώστε $f(x) = z$ και για κάθε z με $z \in B$ υπάρχει μοναδικό y με $y \in \Gamma$ έτσι ώστε $g(z) = y$ άρα για κάθε x με $x \in A$ υπάρχουν μοναδικά z, y με $(z, y) \in B \times \Gamma$ έτσι ώστε $f(x) = z$ και $g(z) = y$ επομένως για κάθε x με $x \in A$ υπάρχει μοναδικό y με $y \in \Gamma$ έτσι ώστε $(x, y) \in g \circ f$ δηλαδή η $g \circ f$ είναι συνάρτηση από το A στο Γ με $(g \circ f)(x) = y = g(z) = g(f(x))$. □

Πρόταση 2.2.6. Αν A είναι σύνολο τότε ισχύει ότι $A^\emptyset = \{\emptyset\}$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2.2.1. □

Πρόταση 2.2.7. Αν $A \neq \emptyset$ τότε $\emptyset^A = \emptyset$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2.2.2. □

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης $f : A \mapsto B$ είναι εξ ορισμού το A αλλά το πεδίο τιμών $\text{ran}(f) = \{y : \text{υπάρχει } x \text{ με } x \in A \text{ έτσι ώστε } f(x) = y\}$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσο με το B το οποίο ονομάζεται σύνολο τιμών της f . Μια συνάρτηση f ονομάζεται επιμορφισμός ή επί και λέμε ότι η f απεικονίζει το πεδίο ορισμού της επί του συνόλου τιμών της αν και μόνο

αν το πεδίο τιμών της f είναι ίσο με το σύνολο τιμών της ενώ η f ονομάζεται σταθερή συνάρτηση αν και μόνο αν το πεδίο τιμών της f είναι μονοσύνολο. Αν $f : A \mapsto B$ και $\Gamma \subseteq A$ τότε ορίζουμε ως εικόνα του Γ μέσω της f το σύνολο $f[\Gamma] = \{y : \text{υπάρχει } x \text{ με } x \in \Gamma \text{ έτσι ώστε } f(x) = y\}$ άρα $f[\Gamma] \subseteq B$ και $f[A] = \text{ran}(f)$ επομένως η f είναι επί αν και μόνο αν $f[A] = B$.

Πρόταση 2.2.8. Αν η $f : A \mapsto B$ είναι επί και η $g : B \mapsto \Gamma$ είναι επί τότε η $g \circ f : A \mapsto \Gamma$ είναι επί.

Απόδειξη. Η g είναι επί άρα για κάθε y με $y \in \Gamma$ υπάρχει z με $z \in B$ έτσι ώστε $y = g(z)$ και η f είναι επί άρα για κάθε z με $z \in B$ υπάρχει x με $x \in A$ έτσι ώστε $z = f(x)$ επομένως για κάθε y με $y \in \Gamma$ υπάρχουν z, x με $(z, x) \in B \times A$ έτσι ώστε $y = g(z)$ και $z = f(x)$ συνεπώς για κάθε y με $y \in \Gamma$ υπάρχει x με $x \in A$ έτσι ώστε $y = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ δηλαδή η $g \circ f$ είναι επί. $\square$

Πρόταση 2.2.9. Αν $f : A \mapsto B$ και $\Gamma \subseteq A, \Delta \subseteq A$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $x \in \Gamma$ τότε $f(x) \in f[\Gamma]$.
2. $f[\Gamma] = \emptyset \Leftrightarrow \Gamma = \emptyset$.
3. Αν $\Gamma \subseteq \Delta$ τότε $f[\Gamma] \subseteq f[\Delta]$.
4. $f[\Gamma \cup \Delta] = f[\Gamma] \cup f[\Delta]$.
5. $f[\Gamma \cap \Delta] \subseteq f[\Gamma] \cap f[\Delta]$.
6. $f[\Gamma \setminus \Delta] \supseteq f[\Gamma] \setminus f[\Delta]$.
7. Αν $x \in A$ τότε $f[\{x\}] = \{f(x)\}$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του $f[\Gamma]$.
2. Έστω $f[\Gamma] = \emptyset$. Αν $\Gamma \neq \emptyset$ τότε υπάρχει x με $x \in \Gamma$ άρα $f(x) \in f[\Gamma]$ δηλαδή $f[\Gamma] \neq \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $\Gamma = \emptyset$.
Έστω $\Gamma = \emptyset$. Αν $f[\Gamma] \neq \emptyset$ τότε υπάρχει y με $y \in f[\Gamma]$ άρα υπάρχει x με $x \in \Gamma$ έτσι ώστε $f(x) = y$ δηλαδή $\Gamma \neq \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $f[\Gamma] = \emptyset$.
3. Αν $y \in f[\Gamma]$ τότε υπάρχει x με $x \in \Gamma \subseteq \Delta$ έτσι ώστε $f(x) = y$ άρα $x \in \Delta$ επομένως $f(x) \in f[\Delta]$ δηλαδή $y \in f[\Delta]$ συνεπώς $f[\Gamma] \subseteq f[\Delta]$.
4. Αν $y \in f[\Gamma \cup \Delta]$ τότε υπάρχει x με $x \in \Gamma \cup \Delta$ έτσι ώστε $f(x) = y$ άρα $x \in \Gamma$ ή $x \in \Delta$ επομένως $f(x) \in f[\Gamma]$ ή $f(x) \in f[\Delta]$ αντίστοιχα δηλαδή $f(x) \in f[\Gamma] \cup f[\Delta]$ δηλαδή $y \in f[\Gamma] \cup f[\Delta]$ συνεπώς

$$f[\Gamma \cup \Delta] \subseteq f[\Gamma] \cup f[\Delta] \quad (1)$$

Αν $y \in f[\Gamma] \cup f[\Delta]$ τότε $y \in f[\Gamma]$ ή $y \in f[\Delta]$ άρα υπάρχει x με $x \in \Gamma \subseteq \Gamma \cup \Delta$ έτσι ώστε $f(x) = y$ ή υπάρχει z με $z \in \Delta \subseteq \Gamma \cup \Delta$ έτσι ώστε $f(z) = y$ αντίστοιχα επομένως $x \in \Gamma \cup \Delta$ και $z \in \Gamma \cup \Delta$ συνεπώς $f(x) \in f[\Gamma \cup \Delta]$ και $f(z) \in f[\Gamma \cup \Delta]$ δηλαδή $y \in f[\Gamma \cup \Delta]$ οπότε

$$f[\Gamma] \cup f[\Delta] \subseteq f[\Gamma \cup \Delta] \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $f[\Gamma \cup \Delta] = f[\Gamma] \cup f[\Delta]$.

5. Αν $y \in f[\Gamma \cap \Delta]$ τότε υπάρχει x με $x \in \Gamma \cap \Delta$ έτσι ώστε $f(x) = y$ άρα $x \in \Gamma$ και $x \in \Delta$ επομένως $f(x) \in f[\Gamma]$ και $f(x) \in f[\Delta]$ αντίστοιχα δηλαδή $f(x) \in f[\Gamma] \cap f[\Delta]$ δηλαδή $y \in f[\Gamma] \cap f[\Delta]$ συνεπώς $f[\Gamma \cap \Delta] \subseteq f[\Gamma] \cap f[\Delta]$.
6. Αν $y \in f[\Gamma] \setminus f[\Delta]$ τότε $y \in f[\Gamma]$ και $y \notin f[\Delta]$ άρα υπάρχει x με $x \in \Gamma$ έτσι ώστε $f(x) = y$ και για κάθε z με $z \in \Delta$ ισχύει ότι $f(z) \neq y$ διότι αν υπάρχει z με $z \in \Delta$ έτσι ώστε $f(z) = y$ τότε $y \in f[\Delta]$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $x \notin \Delta$ δηλαδή $x \in \Gamma \setminus \Delta$ συνεπώς $f(x) \in f[\Gamma \setminus \Delta]$ δηλαδή $y \in f[\Gamma \setminus \Delta]$ οπότε $f[\Gamma \setminus \Delta] \supseteq f[\Gamma] \setminus f[\Delta]$.
7. $y \in f[\{x\}]$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z \in \{x\}$ έτσι ώστε $f(z) = y$ ενώ $z \in \{x\} \Leftrightarrow z = x$ άρα $y \in f[\{x\}]$ αν και μόνο αν υπάρχει z με $z = x$ έτσι ώστε $f(z) = y$ δηλαδή $y \in f[\{x\}] \Leftrightarrow y = f(x)$ ενώ $y = f(x) \Leftrightarrow y \in \{f(x)\}$ επομένως $y \in f[\{x\}] \Leftrightarrow y \in \{f(x)\}$ συνεπώς $f[\{x\}] \subseteq \{f(x)\}$ και $\{f(x)\} \subseteq f[\{x\}]$ δηλαδή $f[\{x\}] = \{f(x)\}$.

□

Αν $f : A \mapsto B$ και $g : \Gamma \mapsto B$ με $\Gamma \subseteq A$ τότε θα λέμε ότι η f είναι η επέκταση της g στο A ή η g είναι ο περιορισμός της f στο Γ και θα συμβολίζουμε την g με $f \upharpoonright \Gamma$ αν και μόνο αν για κάθε x με $x \in \Gamma$ ισχύει ότι $f(x) = g(x)$ άρα $\text{ran}(f \upharpoonright \Gamma) = \{y : \text{υπάρχει } x \text{ με } x \in \Gamma \text{ έτσι ώστε } (f \upharpoonright \Gamma)(x) = y\} = \{y : \text{υπάρχει } x \text{ με } x \in \Gamma \text{ έτσι ώστε } f(x) = y\} = f[\Gamma]$.

Πρόταση 2.2.10. Αν $f : A \mapsto B$ και $\Gamma \subseteq A$ τότε ο περιορισμός της f στο Γ είναι μοναδικός.

Απόδειξη. Έστω $g : \Gamma \mapsto B, h : \Gamma \mapsto B$ περιορισμοί της f στο Γ . Για κάθε x με $x \in \Gamma$ έχουμε ότι $g(x) = f(x)$ και $h(x) = f(x)$ άρα $g(x) = h(x)$ για κάθε x με $x \in \Gamma$ επομένως $g = h$ συνεπώς ο περιορισμός της f στο Γ είναι μοναδικός. □

Αν $f : A \mapsto B$ και $\Gamma \subseteq B$ τότε ορίζουμε ως αντίστροφη εικόνα του Γ μέσω της f το σύνολο $f^{-1}[\Gamma] = \{x : \text{υπάρχει } y \text{ με } y \in \Gamma \text{ έτσι ώστε } y = f(x)\}$ άρα $f^{-1}[\Gamma] \subseteq A$ και $x \in f^{-1}[\Gamma] \Leftrightarrow f(x) \in \Gamma$.

Πρόταση 2.2.11. Αν $f : A \mapsto B$ και $\Gamma \subseteq A, \Delta \subseteq B, E \subseteq B$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.
2. $f^{-1}[B] = A$ και $f[f^{-1}[B]] = f[A]$.
3. $f^{-1}[f[A]] = A$.
4. $f^{-1}[f[\Gamma]] \supseteq \Gamma$.
5. $f[f^{-1}[\Delta]] \subseteq \Delta$.
6. Αν $\Delta \subseteq f[A]$ τότε $f[f^{-1}[\Delta]] = \Delta$.
7. Αν $\Delta \subseteq B \setminus f[A]$ τότε $f^{-1}[\Delta] = \emptyset$.
8. Αν $\Delta \subseteq E$ τότε $f^{-1}[\Delta] \subseteq f^{-1}[E]$.
9. Αν $\Delta \subseteq f[A]$ τότε $\Delta \subseteq E \Leftrightarrow f^{-1}[\Delta] \subseteq f^{-1}[E]$.
10. $f^{-1}[\Delta \cup E] = f^{-1}[\Delta] \cup f^{-1}[E]$.
11. $f^{-1}[\Delta \cap E] = f^{-1}[\Delta] \cap f^{-1}[E]$.

$$12. f^{-1}[\Delta \setminus E] = f^{-1}[\Delta] \setminus f^{-1}[E].$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Αν $f^{-1}[\emptyset] \neq \emptyset$ τότε υπάρχει x με $x \in f^{-1}[\emptyset]$ έτσι ώστε $f(x) \in \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο διότι το $\emptyset$ δεν περιέχει στοιχεία άρα $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.
2. Αν $x \in A$ τότε $f(x) \in B$ ενώ $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}[B]$ άρα αν $x \in A$ τότε $x \in f^{-1}[B]$ επομένως $A \subseteq f^{-1}[B]$ και επειδή $f^{-1}[B] \subseteq A$ προκύπτει ότι $f^{-1}[B] = A$ συνεπώς $f[f^{-1}[B]] = f[A]$.
3. Αν $x \in A$ τότε $f(x) \in f[A]$ ενώ $f(x) \in f[A] \Leftrightarrow x \in f^{-1}[f[A]]$ άρα αν $x \in A$ τότε $x \in f^{-1}[f[A]]$ επομένως $A \subseteq f^{-1}[f[A]]$ και επειδή $f^{-1}[f[A]] \subseteq A$ προκύπτει ότι $f^{-1}[f[A]] = A$.
4. Αν $x \in \Gamma$ τότε $f(x) \in f[\Gamma]$ ενώ $f(x) \in f[\Gamma] \Leftrightarrow x \in f^{-1}[f[\Gamma]]$ άρα αν $x \in \Gamma$ τότε $x \in f^{-1}[f[\Gamma]]$ επομένως $f^{-1}[f[\Gamma]] \supseteq \Gamma$.
5. Αν $y \in f[f^{-1}[\Delta]]$ τότε υπάρχει x με $x \in f^{-1}[\Delta]$ έτσι ώστε $f(x) = y$ ενώ $x \in f^{-1}[\Delta] \Leftrightarrow f(x) \in \Delta$ άρα αν $y \in f[f^{-1}[\Delta]]$ τότε $y \in \Delta$ επομένως $f[f^{-1}[\Delta]] \subseteq \Delta$.
6. Αν $y \in \Delta$ τότε $y \in f[A]$ άρα υπάρχει x με $x \in A$ έτσι ώστε $f(x) = y$ δηλαδή $f(x) \in \Delta$ ενώ $f(x) \in \Delta \Leftrightarrow x \in f^{-1}[\Delta]$ επομένως αν $y \in \Delta$ τότε υπάρχει x με $x \in f^{-1}[\Delta]$ έτσι ώστε $f(x) = y$ δηλαδή αν $y \in \Delta$ τότε $y \in f[f^{-1}[\Delta]]$ συνεπώς $\Delta \subseteq f[f^{-1}[\Delta]]$ και επειδή $f[f^{-1}[\Delta]] \subseteq \Delta$ προκύπτει ότι $f[f^{-1}[\Delta]] = \Delta$.
7. Αν $f^{-1}[\Delta] \neq \emptyset$ τότε υπάρχει x με $x \in A$ έτσι ώστε $x \in f^{-1}[\Delta]$ ενώ $x \in f^{-1}[\Delta] \Leftrightarrow f(x) \in \Delta$ άρα $f(x) \in \Delta$ επομένως $x \in A$ και $f(x) \notin f[A]$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $f^{-1}[\Delta] = \emptyset$.
8. Αν $x \in f^{-1}[\Delta]$ τότε υπάρχει y με $y \in \Delta \subseteq E$ έτσι ώστε $y = f(x)$ άρα $f(x) \in E$ ενώ $f(x) \in E \Leftrightarrow x \in f^{-1}[E]$ επομένως αν $x \in f^{-1}[\Delta]$ τότε $x \in f^{-1}[E]$ συνεπώς $f^{-1}[\Delta] \subseteq f^{-1}[E]$.
9. Έστω $f^{-1}[\Delta] \subseteq f^{-1}[E]$. Αν $y \in \Delta \subseteq f[A]$ τότε $y \in f[A]$ άρα υπάρχει x με $x \in A$ έτσι ώστε $y = f(x)$ δηλαδή $f(x) \in \Delta$ ενώ $f(x) \in \Delta \Leftrightarrow x \in f^{-1}[\Delta]$ δηλαδή $x \in f^{-1}[\Delta]$ επομένως $x \in f^{-1}[E]$ ενώ $x \in f^{-1}[E] \Leftrightarrow f(x) \in E$ δηλαδή $y \in E$ συνεπώς αν $y \in \Delta \subseteq f[A]$ τότε $y \in E$ οπότε $\Delta \subseteq E$ δηλαδή αν $\Delta \subseteq f[A]$ και $f^{-1}[\Delta] \subseteq f^{-1}[E]$ τότε $\Delta \subseteq E$ και επειδή αν $\Delta \subseteq E$ τότε $f^{-1}[\Delta] \subseteq f^{-1}[E]$ προκύπτει ότι αν $\Delta \subseteq f[A]$ τότε $\Delta \subseteq E \Leftrightarrow f^{-1}[\Delta] \subseteq f^{-1}[E]$.
10. $x \in f^{-1}[\Delta \cup E] \Leftrightarrow f(x) \in \Delta \cup E$ ενώ $f(x) \in \Delta \cup E$ αν και μόνο αν $f(x) \in \Delta$ ή $f(x) \in E$ άρα $x \in f^{-1}[\Delta \cup E]$ αν και μόνο αν $f(x) \in \Delta$ ή $f(x) \in E$ ενώ $f(x) \in \Delta$ ή $f(x) \in E$ αν και μόνο αν $x \in f^{-1}[\Delta]$ ή $x \in f^{-1}[E]$ αντίστοιχα επομένως $x \in f^{-1}[\Delta \cup E]$ αν και μόνο αν $x \in f^{-1}[\Delta]$ ή $x \in f^{-1}[E]$ δηλαδή $x \in f^{-1}[\Delta \cup E] \Leftrightarrow x \in f^{-1}[\Delta] \cup f^{-1}[E]$ συνεπώς $f^{-1}[\Delta \cup E] \subseteq f^{-1}[\Delta] \cup f^{-1}[E]$ και $f^{-1}[\Delta] \cup f^{-1}[E] \subseteq f^{-1}[\Delta \cup E]$ δηλαδή $f^{-1}[\Delta \cup E] = f^{-1}[\Delta] \cup f^{-1}[E]$.
11. $x \in f^{-1}[\Delta \cap E] \Leftrightarrow f(x) \in \Delta \cap E$ ενώ $f(x) \in \Delta \cap E$ αν και μόνο αν $f(x) \in \Delta$ και $f(x) \in E$ άρα $x \in f^{-1}[\Delta \cap E]$ αν και μόνο αν $f(x) \in \Delta$ και $f(x) \in E$ ενώ $f(x) \in \Delta$ και $f(x) \in E$ αν και μόνο αν $x \in f^{-1}[\Delta]$ και $x \in f^{-1}[E]$ αντίστοιχα επομένως $x \in f^{-1}[\Delta \cap E]$ αν και μόνο αν $x \in f^{-1}[\Delta]$ και $x \in f^{-1}[E]$ δηλαδή $x \in f^{-1}[\Delta \cap E] \Leftrightarrow x \in f^{-1}[\Delta] \cap f^{-1}[E]$ συνεπώς $f^{-1}[\Delta \cap E] \subseteq f^{-1}[\Delta] \cap f^{-1}[E]$ και $f^{-1}[\Delta] \cap f^{-1}[E] \subseteq f^{-1}[\Delta \cap E]$ δηλαδή $f^{-1}[\Delta \cap E] = f^{-1}[\Delta] \cap f^{-1}[E]$.

12. $x \in f^{-1}[\Delta \setminus E] \Leftrightarrow f(x) \in \Delta \setminus E$ ενώ $f(x) \in \Delta \setminus E$ αν και μόνο αν $f(x) \in \Delta$ και $f(x) \notin E$ άρα $x \in f^{-1}[\Delta \setminus E]$ αν και μόνο αν $f(x) \in \Delta$ και $f(x) \notin E$ ενώ $f(x) \in \Delta$ και $f(x) \notin E$ αν και μόνο αν $x \in f^{-1}[\Delta]$ και $x \notin f^{-1}[E]$ αντίστοιχα επομένως $x \in f^{-1}[\Delta \setminus E]$ αν και μόνο αν $x \in f^{-1}[\Delta]$ και $x \notin f^{-1}[E]$ δηλαδή $x \in f^{-1}[\Delta \setminus E] \Leftrightarrow x \in f^{-1}[\Delta] \setminus f^{-1}[E]$ συνεπώς $f^{-1}[\Delta \setminus E] \subseteq f^{-1}[\Delta] \setminus f^{-1}[E]$ και $f^{-1}[\Delta] \setminus f^{-1}[E] \subseteq f^{-1}[\Delta \setminus E]$ δηλαδή $f^{-1}[\Delta \setminus E] = f^{-1}[\Delta] \setminus f^{-1}[E]$.

□

Πρόταση 2.2.12. Μια συνάρτηση $f : A \mapsto B$ είναι επί αν και μόνο αν ισχύει κάποιο από τα ακόλουθα:

1. $f[A \setminus \Gamma] \supseteq B \setminus f[\Gamma]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$.
2. $f^{-1}[\Delta] \neq \emptyset$ για κάθε σύνολο Δ με $\emptyset \neq \Delta \subseteq B$.
3. $f[f^{-1}[E]] = E$ για κάθε σύνολο E με $E \subseteq B$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Αν η f είναι επί τότε $f[A] = B$ ενώ $f[A \setminus \Gamma] \supseteq f[A] \setminus f[\Gamma]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ δηλαδή $f[A \setminus \Gamma] \supseteq B \setminus f[\Gamma]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$. Έστω $f[A \setminus \Gamma] \supseteq B \setminus f[\Gamma]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$. Αν η f δεν είναι επί τότε $f[A] \subset B = B \setminus \emptyset = B \setminus f[\emptyset] \subseteq f[A \setminus \emptyset] = f[A]$ άρα $f[A] \subset f[A]$ το οποίο είναι άτοπο επομένως η f είναι επί.
2. Έστω f επί. Αν υπάρχει σύνολο Δ με $\emptyset \neq \Delta \subseteq B$ έτσι ώστε $f^{-1}[\Delta] = \emptyset$ τότε για κάθε x με $x \in A$ ισχύει ότι $f(x) \notin \Delta$ άρα $f[A] \cap \Delta = \emptyset$ επομένως υπάρχει y με $y \in \Delta \subseteq B$ έτσι ώστε $y \notin f[A]$ συνεπώς $f[A] \subset B$ το οποίο είναι άτοπο διότι η f είναι επί οπότε $f^{-1}[\Delta] \neq \emptyset$ για κάθε σύνολο Δ με $\emptyset \neq \Delta \subseteq B$. Έστω $f^{-1}[\Delta] \neq \emptyset$ για κάθε σύνολο Δ με $\emptyset \neq \Delta \subseteq B$. Αν η f δεν είναι επί τότε υπάρχει y με $y \in B$ έτσι ώστε $y \neq f(x)$ για κάθε x με $x \in A$ δηλαδή $f(x) \notin \{y\} \subseteq B$ για κάθε x με $x \in A$ άρα $f^{-1}[\{y\}] = \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο επομένως η f είναι επί.
3. Έστω f επί. Αν υπάρχει σύνολο E με $E \subseteq B$ έτσι ώστε $f[f^{-1}[E]] \neq E$ τότε επειδή $f[f^{-1}[E]] \subseteq E$ προκύπτει ότι υπάρχει y με $y \in E$ και $y \notin f[f^{-1}[E]]$ άρα για κάθε x με $x \in f^{-1}[E]$ ισχύει ότι $f(x) \neq y$ ενώ $x \in f^{-1}[E] \Leftrightarrow f(x) \in E$ επομένως αν υπήρχε x με $x \in A$ έτσι ώστε $f(x) = y$ τότε θα ίσχυε ότι $x \in f^{-1}[E]$ το οποίο είναι αδύνατον συνεπώς $f(x) \neq y$ για κάθε x με $x \in A$ το οποίο είναι άτοπο διότι η f είναι επί οπότε $f[f^{-1}[E]] = E$ για κάθε σύνολο E με $E \subseteq B$. Έστω $f[f^{-1}[E]] = E$ για κάθε σύνολο E με $E \subseteq B$. Αν η f δεν είναι επί τότε υπάρχει y με $y \in B$ έτσι ώστε $y \neq f(x)$ για κάθε x με $x \in A$ ενώ $f[f^{-1}[\{y\}]] = \{y\}$ άρα υπάρχει x με $x \in f^{-1}[\{y\}] \subseteq A$ έτσι ώστε $f(x) = y$ το οποίο είναι άτοπο επομένως η f είναι επί.

□

Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f : A \mapsto B$ είναι μονομορφισμός ή ένα προς ένα (συμβολικά 1-1) αν και μόνο αν για κάθε x, z με $(x, z) \in A \times A$ και $x \neq z$ ισχύει ότι $f(x) \neq f(z)$ ή ισοδύναμα αν $f(x) = f(z)$ τότε $x = z$. Από τον ορισμό του μονομορφισμού προκύπτει ότι μια συνάρτηση $f : A \mapsto B$ δεν είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν υπάρχουν x, z με $(x, z) \in A \times A$ και $x \neq z$ έτσι ώστε $f(x) = f(z)$.

Πρόταση 2.2.13. Αν η $f : A \mapsto B$ είναι 1-1 και η $g : B \mapsto \Gamma$ είναι 1-1 τότε η $g \circ f : A \mapsto \Gamma$ είναι 1-1.

Απόδειξη. Αν $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(z)$ τότε $g(f(x)) = g(f(z))$ και επειδή η g είναι 1-1 προκύπτει ότι $f(x) = f(z)$ και επειδή η f είναι 1-1 προκύπτει ότι $x = z$ άρα η $g \circ f$ είναι 1-1. $\square$

Πρόταση 2.2.14. Μια συνάρτηση $f : A \mapsto B$ είναι 1-1 αν και μόνο αν ισχύει κάποιο από τα ακόλουθα:

1. $x \in \Gamma \Leftrightarrow f(x) \in f[\Gamma]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$.
2. $f[A \setminus \Gamma] \subseteq B \setminus f[\Gamma]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$.
3. $f[\Gamma \cap \Delta] = f[\Gamma] \cap f[\Delta]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ και για κάθε σύνολο Δ με $\Delta \subseteq A$.
4. $f[\Gamma \setminus \Delta] = f[\Gamma] \setminus f[\Delta]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ και για κάθε σύνολο Δ με $\Delta \subseteq A$.
5. Το $f^{-1}[\{y\}]$ είναι μονοσύνολο για κάθε y με $y \in f[A]$.
6. $f^{-1}[f[\Gamma]] = \Gamma$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Έστω f 1-1. Για οποιοδήποτε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ αν $f(x) \in f[\Gamma]$ τότε υπάρχει z με $z \in \Gamma$ έτσι ώστε $f(x) = f(z)$ και επειδή η f είναι 1-1 προκύπτει ότι $x = z$ άρα $x \in \Gamma$ και επειδή αν $x \in \Gamma$ τότε $f(x) \in f[\Gamma]$ προκύπτει ότι $x \in \Gamma \Leftrightarrow f(x) \in f[\Gamma]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$.
Έστω $x \in \Gamma \Leftrightarrow f(x) \in f[\Gamma]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$. $f(x) = f(z) \Leftrightarrow f(x) \in \{f(z)\} \Leftrightarrow f(x) \in f[\{z\}] \Leftrightarrow x \in \{z\} \Leftrightarrow x = z$ άρα η f είναι 1-1.
2. Έστω f 1-1. Για οποιοδήποτε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ αν $y \in f[A \setminus \Gamma]$ τότε υπάρχει x με $x \in A \setminus \Gamma$ έτσι ώστε $f(x) = y$ άρα $x \in A$ και $x \notin \Gamma$ επομένως $f(x) \in f[A]$ και επειδή αν η f είναι 1-1 τότε $x \in \Gamma \Leftrightarrow f(x) \in f[\Gamma]$ προκύπτει ότι $f(x) \notin f[\Gamma]$ δηλαδή αν $y \in f[A \setminus \Gamma]$ τότε $y \in f[A] \subseteq B$ και $y \notin f[\Gamma]$ συνεπώς αν $y \in f[A \setminus \Gamma]$ τότε $y \in B$ και $y \notin f[\Gamma]$ δηλαδή αν $y \in f[A \setminus \Gamma]$ τότε $y \in B \setminus f[\Gamma]$ οπότε $f[A \setminus \Gamma] \subseteq B \setminus f[\Gamma]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$.
Έστω $f[A \setminus \Gamma] \subseteq B \setminus f[\Gamma]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$. Αν η f δεν είναι 1-1 τότε υπάρχουν x, z με $(x, z) \in A \times A$ και $x \neq z$ έτσι ώστε $f(x) = f(z)$ άρα $x \in A \setminus \{z\}$ επομένως $f(x) \in f[A \setminus \{z\}]$ δηλαδή $f(z) \in f[A \setminus \{z\}]$ ενώ $f(z) \notin B \setminus \{f(z)\}$ δηλαδή $f(z) \notin B \setminus f[\{z\}]$ συνεπώς $f[A \setminus \{z\}] \not\subseteq B \setminus f[\{z\}]$ το οποίο είναι άτοπο οπότε η f είναι 1-1.
3. Έστω f 1-1. Για οποιοδήποτε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ και για οποιοδήποτε σύνολο Δ με $\Delta \subseteq A$ αν $y \in f[\Gamma] \cap f[\Delta]$ τότε $y \in f[\Gamma]$ και $y \in f[\Delta]$ άρα υπάρχει x με $x \in \Gamma$ έτσι ώστε $f(x) = y$ και υπάρχει z με $z \in \Delta$ έτσι ώστε $f(z) = y$ αντίστοιχα επομένως $f(x) = f(z)$ και επειδή η f είναι 1-1 προκύπτει ότι $x = z$ συνεπώς $x \in \Gamma$ και $x \in \Delta$ δηλαδή $x \in \Gamma \cap \Delta$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν $y \in f[\Gamma] \cap f[\Delta]$ τότε υπάρχει x με $x \in \Gamma \cap \Delta$ έτσι ώστε $f(x) = y$ άρα $f(x) \in f[\Gamma \cap \Delta]$ δηλαδή $y \in f[\Gamma \cap \Delta]$ επομένως $f[\Gamma] \cap f[\Delta] \subseteq f[\Gamma \cap \Delta]$ και επειδή $f[\Gamma \cap \Delta] \subseteq f[\Gamma] \cap f[\Delta]$ προκύπτει ότι $f[\Gamma \cap \Delta] = f[\Gamma] \cap f[\Delta]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ και για κάθε σύνολο Δ με $\Delta \subseteq A$.
Έστω $f[\Gamma \cap \Delta] = f[\Gamma] \cap f[\Delta]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ και για κάθε σύνολο Δ με $\Delta \subseteq A$. Αν η f δεν είναι 1-1 τότε υπάρχουν x, z με $(x, z) \in A \times A$ και $x \neq z$ έτσι

ώστε $f(x) = f(z)$ άρα $\{f(x)\} = \{f(z)\}$ και $\{x\} \cap \{z\} = \emptyset$ επομένως $f[\{x\} \cap \{z\}] = f[\emptyset] = \emptyset \neq \{f(x)\} = \{f(x)\} \cap \{f(x)\} = \{f(x)\} \cap \{f(z)\} = f[\{x\}] \cap f[\{z\}]$ συνεπώς $f[\{x\} \cap \{z\}] \neq f[\{x\}] \cap f[\{z\}]$ το οποίο είναι άτοπο οπότε η f είναι 1-1.

4. Έστω f 1-1. Για οποιοδήποτε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ και για οποιοδήποτε σύνολο Δ με $\Delta \subseteq A$ αν $y \in f[\Gamma \setminus \Delta]$ τότε υπάρχει x με $x \in \Gamma \setminus \Delta$ έτσι ώστε $f(x) = y$ άρα $x \in \Gamma$ και $x \notin \Delta$ επομένως $f(x) \in f[\Gamma]$ και επειδή αν η f είναι 1-1 τότε $x \in \Delta \Leftrightarrow f(x) \in f[\Delta]$ προκύπτει ότι $f(x) \notin f[\Delta]$ δηλαδή αν $y \in f[\Gamma \setminus \Delta]$ τότε $y \in f[\Gamma]$ και $y \notin f[\Delta]$ δηλαδή αν $y \in f[\Gamma \setminus \Delta]$ τότε $y \in f[\Gamma] \setminus f[\Delta]$ συνεπώς $f[\Gamma \setminus \Delta] \subseteq f[\Gamma] \setminus f[\Delta]$ και επειδή $f[\Gamma] \setminus f[\Delta] \subseteq f[\Gamma \setminus \Delta]$ προκύπτει ότι $f[\Gamma \setminus \Delta] = f[\Gamma] \setminus f[\Delta]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ και για κάθε σύνολο Δ με $\Delta \subseteq A$.

Έστω $f[\Gamma \setminus \Delta] = f[\Gamma] \setminus f[\Delta]$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ και για κάθε σύνολο Δ με $\Delta \subseteq A$. Αν η f δεν είναι 1-1 τότε υπάρχουν x, z με $(x, z) \in A \times A$ και $x \neq z$ έτσι ώστε $f(x) = f(z)$ άρα $\{f(x)\} = \{f(z)\}$ και $\{x\} \setminus \{z\} = \{x\}$ επομένως $f[\{x\} \setminus \{z\}] = f[\{x\}] = \{f(x)\} \neq \emptyset = \{f(x)\} \setminus \{f(x)\} = \{f(x)\} \setminus \{f(z)\} = f[\{x\}] \setminus f[\{z\}]$ συνεπώς $f[\{x\} \setminus \{z\}] \neq f[\{x\}] \setminus f[\{z\}]$ το οποίο είναι άτοπο οπότε η f είναι 1-1.

5. Έστω f 1-1. Για οποιοδήποτε y με $y \in f[A]$ υπάρχει x με $x \in A$ έτσι ώστε $f(x) = y$ άρα $x \in f^{-1}[\{y\}]$ ενώ $z \in f^{-1}[\{y\}] \Leftrightarrow f(z) \in \{y\}$ και $f(z) \in \{y\} \Leftrightarrow f(z) = y = f(x)$ επομένως $z \in f^{-1}[\{y\}] \Leftrightarrow f(z) = f(x)$ και επειδή η f είναι 1-1 προκύπτει ότι $f(z) = f(x) \Leftrightarrow z = x$ συνεπώς $z \in f^{-1}[\{y\}] \Leftrightarrow z = x$ οπότε το $f^{-1}[\{y\}]$ είναι μονοσύνολο για κάθε y με $y \in f[A]$.

Έστω $f^{-1}[\{y\}]$ μονοσύνολο για κάθε y με $y \in f[A]$. $f(x) = f(z) \Leftrightarrow f(x) \in \{f(z)\} \Leftrightarrow x \in f^{-1}[\{f(z)\}]$ και επειδή $f(z) \in \{f(z)\}$ προκύπτει ότι $z \in f^{-1}[\{f(z)\}]$ ενώ το $f^{-1}[\{f(z)\}]$ είναι μονοσύνολο άρα $x = z$ επομένως η f είναι 1-1.

6. Έστω f 1-1. Αν υπάρχει σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$ έτσι ώστε $f^{-1}[f[\Gamma]] \neq \Gamma$ τότε επειδή $f^{-1}[f[\Gamma]] \supseteq \Gamma$ προκύπτει ότι υπάρχει x με $x \in f^{-1}[f[\Gamma]]$ και $x \notin \Gamma$ δηλαδή $f(x) \in f[\Gamma]$ και επειδή αν η f είναι 1-1 τότε $x \in \Gamma \Leftrightarrow f(x) \in f[\Gamma]$ προκύπτει ότι $f(x) \notin f[\Gamma]$ το οποίο είναι άτοπο άρα $f^{-1}[f[\Gamma]] = \Gamma$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$.

Έστω $f^{-1}[f[\Gamma]] = \Gamma$ για κάθε σύνολο Γ με $\Gamma \subseteq A$. $f(x) = f(z) \Leftrightarrow f(x) \in \{f(z)\} \Leftrightarrow f(x) \in f[\{z\}] \Leftrightarrow x \in f^{-1}[f[\{z\}]] \Leftrightarrow x \in \{z\} \Leftrightarrow x = z$ άρα η f είναι 1-1.

□

Μια συνάρτηση η οποία είναι 1-1 και επί ονομάζεται αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ή αντιστοιχία.

Πρόταση 2.2.15. Αν η $f : A \mapsto B$ είναι αντιστοιχία και η $g : B \mapsto \Gamma$ είναι αντιστοιχία τότε η $g \circ f : A \mapsto \Gamma$ είναι αντιστοιχία.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 2.2.8 και 2.2.13. □

Πρόταση 2.2.16. Αν $f : A \mapsto B$ τότε οι ακόλουθες προτάσεις είναι ανά δύο ισοδύναμες:

1. Η f είναι αντιστοιχία.
2. Η f^{-1} είναι συνάρτηση από το B στο A .
3. Η f^{-1} είναι αντιστοιχία από το B στο A και για κάθε x, y με $(x, y) \in A \times B$ ισχύει ότι $f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(y)) = y$.

Απόδειξη. Έστω f αντιστοιχία. Η f είναι επί άρα για κάθε y με $y \in B$ υπάρχει x με $x \in A$ έτσι ώστε $f(x) = y$ ενώ $f(x) = y \Leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$ επομένως για κάθε y με $y \in B$ υπάρχει x με $x \in A$ έτσι ώστε $(y, x) \in f^{-1}$ συνεπώς $\text{dom}(f^{-1}) = B$. Η f είναι 1-1 άρα για κάθε x, z με $(x, z) \in A \times A$ και $x \neq z$ ισχύει ότι $f(x) \neq f(z)$ επομένως για κάθε y με $y = f(x)$ δεν υπάρχει z με $z \neq x$ έτσι ώστε $y = f(z)$ δηλαδή για κάθε y με $(y, x) \in f^{-1}$ δεν υπάρχει z με $z \neq x$ έτσι ώστε $(y, z) \in f^{-1}$. Επειδή $\text{dom}(f^{-1}) = B$ και για κάθε y με $y \in B$ υπάρχει μοναδικό x με $x \in A$ έτσι ώστε $(y, x) \in f^{-1}$ συμπεραίνουμε ότι η f^{-1} είναι συνάρτηση από το B στο A άρα η πρόταση 1 συνεπάγεται την πρόταση 2.

Έστω f^{-1} συνάρτηση από το B στο A . Για κάθε x με $x \in A$ υπάρχει μοναδικό y με $y \in B$ έτσι ώστε $f(x) = y$ ενώ $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$ άρα η f^{-1} είναι επί και αν $f(x) = y$ τότε $f(x) \neq t$ για κάθε t με $t \in B$ και $t \neq y$ επομένως αν $f^{-1}(y) = x$ τότε $f^{-1}(t) \neq x$ για κάθε t με $t \in B$ και $t \neq y$ συνεπώς $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(t)$ για κάθε y, t με $(y, t) \in B \times B$ και $y \neq t$ δηλαδή η f^{-1} είναι 1-1. Επειδή η f^{-1} είναι επί και 1-1 συμπεραίνουμε ότι η f^{-1} είναι αντιστοιχία και για κάθε x, y με $(x, y) \in A \times B$ ισχύει ότι $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ άρα $f^{-1}(f(x)) = x, f(f^{-1}(y)) = y$ επομένως η πρόταση 2 συνεπάγεται την πρόταση 3.

Έστω f^{-1} αντιστοιχία από το B στο A . Για κάθε y με $y \in B$ υπάρχει μοναδικό x με $x \in A$ έτσι ώστε $f^{-1}(y) = x$ ενώ $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ άρα η f είναι επί και αν $f^{-1}(y) = x$ τότε $f^{-1}(y) \neq z$ για κάθε z με $z \in A$ και $z \neq x$ επομένως αν $f(x) = y$ τότε $f(z) \neq y$ για κάθε z με $z \in A$ και $z \neq x$ συνεπώς $f(x) \neq f(z)$ για κάθε x, z με $(x, z) \in A \times A$ και $x \neq z$ δηλαδή η f είναι 1-1. Επειδή η f είναι επί και 1-1 συμπεραίνουμε ότι η f είναι αντιστοιχία άρα η πρόταση 3 συνεπάγεται την πρόταση 1.

Επειδή η πρόταση 1 συνεπάγεται την πρόταση 2, η πρόταση 2 συνεπάγεται την πρόταση 3 και η πρόταση 3 συνεπάγεται την πρόταση 1 συμπεραίνουμε ότι οι προτάσεις 1,2,3 είναι ανά δύο ισοδύναμες. $\square$

Πρόταση 2.2.17. Για κάθε σύνολο A η I_A είναι αντιστοιχία από το A στο A με $I_A(x) = x$ για κάθε x με $x \in A$.

Απόδειξη. Για κάθε x με $x \in A$ το x είναι το μοναδικό αντικείμενο έτσι ώστε $x = x$ άρα η I_A είναι συνάρτηση από το A στο A με $I_A(x) = x$ η οποία είναι επί ενώ $I_A(x) = I_A(z) \Leftrightarrow x = z$ επομένως η I_A είναι 1-1 συνεπώς η I_A είναι αντιστοιχία. $\square$

Πρόταση 2.2.18. Αν $f : A \mapsto B$ είναι αντιστοιχία τότε $f^{-1} \circ f = I_A$ και $f \circ f^{-1} = I_B$.

Απόδειξη. Η f είναι συνάρτηση από το A στο B και η f^{-1} είναι συνάρτηση από το B στο A άρα η $f^{-1} \circ f$ είναι συνάρτηση από το A στο A με $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = I_A(x)$ και η $f \circ f^{-1}$ είναι συνάρτηση από το B στο B με $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = y = I_B(y)$ άρα $f^{-1} \circ f = I_A$ και $f \circ f^{-1} = I_B$. $\square$

Πρόταση 2.2.19. Αν $f : A \mapsto B, g : B \mapsto A$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $g \circ f = I_A$ τότε η f είναι 1-1 και η g είναι επί.
2. Αν $g \circ f = I_A$ και $f \circ g = I_B$ τότε $f = g^{-1}$ και $g = f^{-1}$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Αν $f(x) = f(z)$ τότε $g(f(x)) = g(f(z)) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = (g \circ f)(z) \Leftrightarrow I_A(x) = I_A(z) \Leftrightarrow x = z$ άρα η f είναι 1-1 ενώ για κάθε x με $x \in A$ υπάρχει y με $y \in B$ έτσι ώστε $f(x) = y$ επομένως για κάθε x με $x \in A$ υπάρχει y με $y \in B$ έτσι ώστε $g(f(x)) = g(y) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = g(y) \Leftrightarrow I_A(x) = g(y) \Leftrightarrow g(y) = x$ συνεπώς η g είναι επί.

2. Οι f, g είναι 1-1 και επί δηλαδή οι f, g είναι αντιστοιχίες άρα $f = f \circ I_A = f \circ (g \circ g^{-1}) = (f \circ g) \circ g^{-1} = I_B \circ g^{-1} = g^{-1}$ και $g = (g^{-1})^{-1} = f^{-1}$.

□

Μια συνάρτηση $f : A \mapsto B$ ονομάζεται οικογένεια στοιχείων του B με σύνολο δεικτών το A ή οικογένεια αν και μόνο αν η ανεξάρτητη μεταβλητή της είναι δείκτης της εξαρτημένης μεταβλητής της δηλαδή αν και μόνο αν $f(x) = y_x$ με $y_x \in B$ για κάθε x με $x \in A$ και θα την συμβολίζουμε με $(y_x)_{x \in A}$ όπου το x ονομάζεται δείκτης και το y_x ονομάζεται όρος της οικογένειας. Από τον ορισμό της οικογένειας προκύπτει ότι ο χαρακτηρισμός μιας συνάρτησης ως οικογένειας είναι καθαρά θέμα συμβολισμού.

Αν $(Y_x)_{x \in A}$ είναι οικογένεια συνόλων δηλαδή για κάθε x με $x \in A$ το Y_x είναι σύνολο τότε ορίζουμε ως ένωση της $(Y_x)_{x \in A}$ το σύνολο $\bigcup_{x \in A} Y_x =$

$\{y : \text{υπάρχει } x \text{ με } x \in A \text{ έτσι ώστε } y \in Y_x\}$ δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από τα αντικείμενα για καθένα εκ των οποίων υπάρχει δείκτης x με $x \in A$ έτσι ώστε κάθε αντικείμενο να ανήκει σε κάποιο Y_x και αν επιπλέον $A \neq \emptyset$ τότε ορίζουμε ως τομή της $(Y_x)_{x \in A}$ το σύνολο $\bigcap_{x \in A} Y_x = \{y : \text{για κάθε } x \text{ με } x \in A \text{ ισχύει ότι } y \in Y_x\}$ δηλαδή το σύνολο που αποτε-

λείται από τα αντικείμενα που για κάθε δείκτη x με $x \in A$ ανήκουν στο Y_x . Στον ορισμό του $\bigcap_{x \in A} Y_x$ απαιτούμε $A \neq \emptyset$ διότι αν $A = \emptyset$ τότε $(Y_x)_{x \in A} = \emptyset$ άρα $\bigcap_{x \in A} Y_x = \bigcap \emptyset$ το οποίο όπως

αποδείξαμε στην Ενότητα 1.1 δεν υπάρχει. Επίσης ορίζουμε ως γινόμενο μιας οικογένειας συνόλων $(Y_x)_{x \in A}$ το σύνολο $\prod_{x \in A} Y_x =$

$\{f : f \in (\bigcup_{x \in A} Y_x)^A \text{ και για κάθε } x \text{ με } x \in A \text{ ισχύει ότι } f(x) \in Y_x\}$ δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις από το A στο $\bigcup_{x \in A} Y_x$ που για κάθε δείκτη x με $x \in A$

παίρνουν ως τιμή ένα στοιχείο του Y_x . Τέλος για το γινόμενο μιας οικογένειας συνόλων $(Y_x)_{x \in A}$ ισχύει ότι αν $A \neq \emptyset$ και $Y_x \neq \emptyset$ για κάθε x με $x \in A$ τότε $\prod_{x \in A} Y_x \neq \emptyset$.

3. ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

3.1 Ορισμός Φυσικών Αριθμών

Από την Ενότητα 1.1 γνωρίζουμε ότι για κάθε σύνολο A υπάρχει σύνολο S_A έτσι ώστε $A \in S_A$ και για κάθε σύνολο X με $X \in S_A$ ισχύει ότι $X^+ \in S_A$ όπου $X^+ = X \cup \{X\}$. Ορίζουμε το σύνολο $N_A = \{X : X \in \mathbb{P}(S_A) \text{ με } A \in X \text{ και αν } Y \text{ είναι σύνολο με } Y \in X \text{ τότε } Y^+ \in X\}$ άρα $S_A \in N_A$ και θέτουμε $\mathbb{N}_A = \bigcap N_A$ επομένως $\mathbb{N}_A \subseteq S_A$.

Πρόταση 3.1.1. Αν A είναι σύνολο τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $A \in \mathbb{N}_A$ και για κάθε σύνολο Y με $Y \in \mathbb{N}_A$ ισχύει ότι $Y^+ \in \mathbb{N}_A$.
2. $\mathbb{N}_A \in N_A$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Αν $A \notin \mathbb{N}_A$ τότε υπάρχει σύνολο X με $X \in N_A$ έτσι ώστε $A \notin X$ το οποίο είναι άτοπο άρα $A \in \mathbb{N}_A$. Αν υπάρχει σύνολο Z με $Z \in \mathbb{N}_A$ και $Z^+ \notin \mathbb{N}_A$ τότε υπάρχει σύνολο X με $X \in N_A$ έτσι ώστε $Z \in X$ και $Z^+ \notin X$ το οποίο είναι άτοπο άρα για κάθε σύνολο Y με $Y \in \mathbb{N}_A$ ισχύει ότι $Y^+ \in \mathbb{N}_A$.
2. $\mathbb{N}_A \subseteq S_A$ δηλαδή $\mathbb{N}_A \in \mathbb{P}(S_A)$ ενώ $A \in \mathbb{N}_A$ και για κάθε σύνολο Y με $Y \in \mathbb{N}_A$ ισχύει ότι $Y^+ \in \mathbb{N}_A$ άρα $\mathbb{N}_A \in N_A$.

□

Πρόταση 3.1.2. Αν A είναι σύνολο και x δεν είναι σύνολο τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν B είναι σύνολο έτσι ώστε $A \in B, x \in B$ και για κάθε σύνολο X με $X \in B$ ισχύει ότι $X^+ \in B$ τότε $A \in B \setminus \{x\}$ και για κάθε σύνολο X με $X \in B \setminus \{x\}$ ισχύει ότι $X^+ \in B \setminus \{x\}$.
2. $x \notin \mathbb{N}_A$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $A \in B$ και $A \notin \{x\}$ άρα $A \in B \setminus \{x\}$. Έστω ότι υπάρχει σύνολο Y με $Y \in B \setminus \{x\}$ και $Y^+ \notin B \setminus \{x\}$. Επειδή $Y^+ \in B$ και $Y^+ \notin B \setminus \{x\}$ προκύπτει ότι $Y^+ \in \{x\}$ δηλαδή $Y^+ = x$ το οποίο είναι άτοπο άρα για κάθε σύνολο X με $X \in B \setminus \{x\}$ ισχύει ότι $X^+ \in B \setminus \{x\}$.
2. Αν $x \in \mathbb{N}_A$ τότε $\mathbb{N}_A \setminus \{x\} \in \mathbb{P}(S_A)$, $A \in \mathbb{N}_A \setminus \{x\}$ και για κάθε σύνολο X με $X \in \mathbb{N}_A \setminus \{x\}$ ισχύει ότι $X^+ \in \mathbb{N}_A \setminus \{x\}$ άρα $\mathbb{N}_A \setminus \{x\} \in N_A$ ενώ $x \notin \mathbb{N}_A \setminus \{x\}$ το οποίο είναι άτοπο επομένως $x \notin \mathbb{N}_A$.

□

Από την Πρόταση 3.1.2 προκύπτει ότι αν A είναι σύνολο τότε κάθε στοιχείο του $\mathbb{N}_A$ είναι σύνολο. Η ακόλουθη πρόταση που είναι γνωστή ως αρχή της μαθηματικής επαγωγής χρησιμοποιείται συχνά για την απόδειξη αποτελεσμάτων στην θεωρία συνόλων.

Πρόταση 3.1.3 (αρχή της μαθηματικής επαγωγής). Αν A, B είναι σύνολα με $B \subseteq \mathbb{N}_A$, $A \in B$ και για κάθε σύνολο X με $X \in B$ ισχύει ότι $X^+ \in B$ τότε $B = \mathbb{N}_A$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $A \in S_A$ και $A \in B$ δηλαδή $A \in S_A \cap B$ ενώ αν $X \in S_A \cap B$ τότε $X \in S_A$ και $X \in B$ άρα αν $X \in S_A \cap B$ τότε $X^+ \in S_A$ και $X^+ \in B$ δηλαδή αν $X \in S_A \cap B$ τότε $X^+ \in S_A \cap B$ ενώ $S_A \cap B \subseteq S_A$ επομένως $S_A \cap B \in \mathbb{N}_A$ συνεπώς $\mathbb{N}_A \subseteq S_A \cap B \subseteq B$ οπότε $\mathbb{N}_A \subseteq B$ και επειδή $B \subseteq \mathbb{N}_A$ προκύπτει ότι $B = \mathbb{N}_A$. $\square$

Πρόταση 3.1.4. Αν A είναι σύνολο τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $X \supseteq A$ για κάθε X με $X \in \mathbb{N}_A$.
2. Για κάθε X με $X \in \mathbb{N}_{A^+}$ υπάρχει Y με $Y \in \mathbb{N}_A$ έτσι ώστε $X = Y^+$.
3. $\mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\} = \mathbb{N}_A$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Ορίζουμε το σύνολο $B = \{X : X \in \mathbb{N}_A \text{ και } X \supseteq A\} \subseteq \mathbb{N}_A$. Αν $X = A$ τότε $A \supseteq A$ άρα $A \in B$. Αν $X \in B$ τότε $X \supseteq A$ ενώ $X \subseteq X^+$ άρα αν $X \in B$ τότε $X^+ \supseteq A$ επομένως αν $X \in B$ τότε $X^+ \in B$ συνεπώς από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $B = \mathbb{N}_A$ δηλαδή $X \supseteq A$ για κάθε X με $X \in \mathbb{N}_A$.
2. Ορίζουμε το σύνολο $B = \{X : X \in \mathbb{N}_{A^+} \text{ και υπάρχει } Y \text{ με } Y \in \mathbb{N}_A \text{ έτσι ώστε } X = Y^+\} \subseteq \mathbb{N}_{A^+}$ άρα $A^+ \in B$ διότι $A \in \mathbb{N}_A$ ενώ αν $X \in B$ δηλαδή αν υπάρχει Y με $Y \in \mathbb{N}_A$ έτσι ώστε $X = Y^+$ τότε $X^+ = X \cup \{X\} = Y^+ \cup \{Y^+\} = (Y^+)^+$ επομένως αν $X \in B$ τότε $X^+ \in B$ συνεπώς από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $B = \mathbb{N}_{A^+}$ οπότε για κάθε X με $X \in \mathbb{N}_{A^+}$ υπάρχει Y με $Y \in \mathbb{N}_A$ έτσι ώστε $X = Y^+$.
3. $A \in \mathbb{N}_A$ ενώ αν $X \in \mathbb{N}_{A^+}$ τότε υπάρχει Y με $Y \in \mathbb{N}_A$ έτσι ώστε $X = Y^+$ άρα αν $X \in \mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\}$ τότε $X \in \mathbb{N}_A$ επομένως

$$\mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\} \subseteq \mathbb{N}_A \quad (1)$$

$\mathbb{N}_A \cap (\mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\}) \subseteq \mathbb{N}_A$ ενώ $A \in \mathbb{N}_A$ και $A \in \mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\}$ άρα $A \in \mathbb{N}_A \cap (\mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\})$. Έστω $X \in \mathbb{N}_A \cap (\mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\})$. Αν $X = A$ τότε $A^+ \in \mathbb{N}_A$ και $A^+ \in \mathbb{N}_{A^+}$ άρα $A^+ \in \mathbb{N}_A \cap \mathbb{N}_{A^+}$ επομένως $A^+ \in \mathbb{N}_A \cap (\mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\})$ δηλαδή $X^+ \in \mathbb{N}_A \cap (\mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\})$. Αν $X \neq A$ τότε $X \in \mathbb{N}_A$ και $X \in \mathbb{N}_{A^+}$ άρα $X^+ \in \mathbb{N}_A$ και $X^+ \in \mathbb{N}_{A^+}$ επομένως $X^+ \in \mathbb{N}_A \cap \mathbb{N}_{A^+}$ συνεπώς $X^+ \in \mathbb{N}_A \cap (\mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\})$ οπότε από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $\mathbb{N}_A \cap (\mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\}) = \mathbb{N}_A$ δηλαδή

$$\mathbb{N}_A \subseteq \mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\} \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $\mathbb{N}_{A^+} \cup \{A\} = \mathbb{N}_A$.

$\square$

Θέτουμε $0 = \emptyset, 1 = 0^+, 2 = 1^+, 3 = 2^+, 4 = 3^+, 5 = 4^+, 6 = 5^+, 7 = 6^+, 8 = 7^+, 9 = 8^+$ και ορίζουμε ως σύνολο των φυσικών αριθμών το $\mathbb{N} = \mathbb{N}_1 = \{1, 2, \dots\}$ άρα το 0 όπου $0 \subset \{0\} = 0 \cup \{0\} = 0^+ = 1$ δεν είναι φυσικός αριθμός ενώ για να συμβολίσουμε φυσικούς αριθμούς που δεν ανήκουν στο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ χρησιμοποιούμε τον κανόνα συμβολισμού που γνωρίζουμε από το δημοτικό σχολείο. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}$ ονομάζεται

ακολουθία ενώ για τις μεταβλητές που μπορούν να λάβουν ως τιμές το 0 ή ένα οποιοδήποτε φυσικό αριθμό χρησιμοποιούμε συνήθως μικρά γράμματα της αλφαβήτου.

Ένα υποσύνολο L του $\mathbb{P}(\Omega)$ ονομάζεται σ-άλγεβρα αν και μόνο αν ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $\Omega \in L$.
2. Αν $X \in L$ τότε $X^c \in L$.
3. Αν υπάρχει ακολουθία $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $X_n \in L$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}$ τότε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \in L$.

Από τον ορισμό της σ-άλγεβρας προκύπτει ότι το $\mathbb{P}(\Omega)$ είναι σ-άλγεβρα και το $\Omega^c = \emptyset$ ανήκει σε κάθε σ-άλγεβρα.

Πρόταση 3.1.5. Αν A είναι μη κενό σύνολο του οποίου κάθε στοιχείο είναι σ-άλγεβρα τότε το $\bigcap A$ είναι σ-άλγεβρα.

Απόδειξη. Για κάθε X με $X \in A$ ισχύει ότι $\Omega \in X$ άρα $\Omega \in \bigcap A$. Αν $Y \in \bigcap A$ τότε $Y \in X$ για κάθε X με $X \in A$ άρα $Y^c \in X$ για κάθε X με $X \in A$ επομένως $Y^c \in \bigcap A$. Αν υπάρχει ακολουθία $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $Y_n \in \bigcap A$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}$ τότε $Y_n \in X$ για κάθε n, X με $(n, X) \in \mathbb{N} \times \bigcap A$ άρα $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \in X$ για κάθε X με $X \in \bigcap A$ επομένως $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \in \bigcap A$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το $\bigcap A$ είναι σ-άλγεβρα. $\square$

Πρόταση 3.1.6. Κάθε σ-άλγεβρα είναι άλγεβρα.

Απόδειξη. Έστω L σ-άλγεβρα με $X \in L, Y \in L$. Αρκεί να δείξουμε ότι $X \cup Y \in L$. Ορίζουμε την ακολουθία $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $X_1 = X, X_2 = Y$ και $X_n = \emptyset$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ άρα $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X \cup Y$ επομένως $X \cup Y \in L$ συνεπώς το L είναι άλγεβρα. $\square$

Πρόταση 3.1.7. Αν A είναι υποσύνολο του $\mathbb{P}(\Omega)$ τότε υπάρχει μοναδική σ-άλγεβρα L έτσι ώστε $L \supseteq A$ και για κάθε σ-άλγεβρα M με $M \supseteq A$ ισχύει ότι $L \subseteq M$.

Απόδειξη. Ορίζουμε το σύνολο $B =$

$\{X : X \in \mathbb{P}(\mathbb{P}(\Omega)) \text{ με } X \supseteq A \text{ και το } X \text{ είναι σ-άλγεβρα}\}$ άρα $\mathbb{P}(\Omega) \in B$ και θέτουμε $L = \bigcap B$ επομένως το L είναι σ-άλγεβρα. Αν $L \not\supseteq A$ τότε υπάρχει σύνολο Y με $Y \in A$ και $Y \notin L$ άρα υπάρχει σύνολο X με $X \in B$ έτσι ώστε $Y \notin X$ το οποίο είναι άτοπο διότι $X \supseteq A$ επομένως $L \supseteq A$. Αν M είναι σ-άλγεβρα με $M \supseteq A$ τότε το $\mathbb{P}(\Omega) \cap M$ είναι σ-άλγεβρα με $\mathbb{P}(\Omega) \cap M \supseteq A \cap A = A$ και $\mathbb{P}(\Omega) \cap M \subseteq \mathbb{P}(\Omega)$ άρα $\mathbb{P}(\Omega) \cap M \in B$ επομένως $L \subseteq \mathbb{P}(\Omega) \cap M \subseteq M$ συνεπώς $L \subseteq M$. Αν υπάρχει σ-άλγεβρα N έτσι ώστε $N \supseteq A$ και για κάθε σ-άλγεβρα M με $M \supseteq A$ ισχύει ότι $N \subseteq M$ τότε $L \subseteq N$ και $N \subseteq L$ δηλαδή $L = N$ άρα το L είναι η μοναδική σ-άλγεβρα έτσι ώστε $L \supseteq A$ και για κάθε σ-άλγεβρα M με $M \supseteq A$ ισχύει ότι $L \subseteq M$. $\square$

Πρόταση 3.1.8. Για κάθε n με $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει m με $m \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $n = m^+$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 3.1.4(2). $\square$

Πρόταση 3.1.9. Για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει ότι $n^+ \supset 0$.

Απόδειξη. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ με } n^+ \supset 0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $n = 0$ τότε $0^+ \supset 0$ άρα $0 \in A$. Αν $n \in A$ τότε $n^+ \supset 0$ ενώ $n^+ \cup \{n^+\} \supseteq n^+$ άρα αν $n \in A$ τότε $n^+ \cup \{n^+\} \supset 0$ δηλαδή αν $n \in A$ τότε $n^+ \in A$ επομένως από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή $n^+ \supset 0$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Πρόταση 3.1.10. Για κάθε n με $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $n \supset 0$.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τις Προτάσεις 3.1.8 και 3.1.9. □

Πρόταση 3.1.11. Για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε m με $m \in n$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $m \subseteq n$.
2. $m^+ \in n$ ή $m^+ = n$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ και αν } m \in n \text{ τότε } m \subseteq n\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $n = 0$ τότε δεν υπάρχει m με $m \in 0$ έτσι ώστε $m \not\subseteq 0$ άρα για κάθε m με $m \in 0$ ισχύει ότι $m \subseteq 0$ επομένως $0 \in A$. Αν $n \in A$ τότε για κάθε m με $m \in n$ ισχύει ότι $m \subseteq n$ ενώ $n^+ = n \cup \{n\}$ άρα $m \in n^+$ αν και μόνο αν $m \in n$ ή $m = n$.
Έστω $n \in A$. Αν $m \in n$ τότε $m \subseteq n \subseteq n^+$ άρα αν $m \in n$ τότε $m \subseteq n^+$ ενώ αν $m = n$ τότε $m \subseteq n^+$ επομένως αν $m \in n$ ή $m = n$ τότε $m \subseteq n^+$ δηλαδή αν $m \in n^+$ τότε $m \subseteq n^+$ δηλαδή $n^+ \in A$ συνεπώς από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή $m \subseteq n$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε m με $m \in n$.
2. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ και αν } m \in n \text{ τότε } m^+ \in n \text{ ή } m^+ = n\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $n = 0$ τότε δεν υπάρχει m με $m \in 0$ έτσι ώστε $m^+ \notin n$ και $m^+ \neq n$ άρα για κάθε m με $m \in 0$ ισχύει ότι $m^+ \in 0$ ή $m^+ = n$ επομένως $0 \in A$. Αν $n \in A$ τότε για κάθε m με $m \in n$ ισχύει ότι $m^+ \in n$ ή $m^+ = n$ ενώ $n^+ = n \cup \{n\}$ άρα $m \in n^+$ αν και μόνο αν $m \in n$ ή $m = n$.
Έστω $n \in A$. Αν $m \in n$ τότε $m^+ \in n$ ή $m^+ = n$ ενώ $n \subseteq n^+$ και $n \in n^+$ άρα αν $m \in n$ τότε $m^+ \in n^+$ ενώ αν $m = n$ τότε $m^+ = n^+$ επομένως αν $m \in n$ ή $m = n$ τότε $m^+ \in n^+$ ή $m^+ = n^+$ δηλαδή αν $m \in n^+$ τότε $m^+ \in n^+$ ή $m^+ = n^+$ δηλαδή $n^+ \in A$ συνεπώς από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή $m^+ \in n$ ή $m^+ = n$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε m με $m \in n$.

□

Πρόταση 3.1.12. Για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει ότι $n \neq n^+$.

Απόδειξη. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ και } n \neq n^+\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $n = 0$ τότε $n^+ = 0^+ \neq 0$ άρα $0 \in A$. Αν $n \in A$ τότε $n \neq n^+$ ενώ $n \subseteq n^+$ άρα αν $n \in A$ τότε $n \subset n^+$.
Έστω $n \in A$. Αν $n^+ = n^+ \cup \{n^+\}$ δηλαδή αν $n \cup \{n\} = n^+ \cup \{n^+\}$ τότε $n^+ \in n$ διότι $n^+ \neq n$ άρα $n^+ \subseteq n \subset n^+$ επομένως $n^+ \subset n^+$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $n^+ \neq n^+ \cup \{n^+\}$ δηλαδή $n^+ \in A$ οπότε από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή $n \neq n^+$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$. □

Πρόταση 3.1.13. Για κάθε n, m με $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ισχύει ότι $n = m \Leftrightarrow n^+ = m^+$.

Απόδειξη. Αν $n = m$ τότε $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$ δηλαδή $n^+ = m^+$.

Έστω $n^+ = m^+$ δηλαδή

$$n \cup \{n\} = m \cup \{m\} \quad (1)$$

Αν $n \cap \{m\} \neq \emptyset$ τότε $m \in n$ άρα $m^+ \in n$ ή $m^+ = n$ επομένως $m^+ \subseteq n \subset n^+$ ή $m^+ \subset n^+$ αντίστοιχα συνεπώς $m^+ \subset n^+$ το οποίο είναι άτοπο οπότε

$$n \cap \{m\} = \emptyset \quad (2)$$

Όμοια με προηγουμένως αποδεικνύεται ότι

$$m \cap \{n\} = \emptyset \quad (3)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2),(3) προκύπτει ότι $n = m$. $\square$

Η ακόλουθη πρόταση που είναι γνωστή ως θεώρημα αναδρομής χρησιμοποιείται για τον αναδρομικό ορισμό συναρτήσεων.

Πρόταση 3.1.14 (θεώρημα αναδρομής). Αν A είναι σύνολο με $a \in A$ και $f : A \mapsto A$ τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $g : \mathbb{N}_0 \mapsto A$ έτσι ώστε $g(0) = a$ και $g(n^+) = f(g(n))$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$.

Απόδειξη. Ορίζουμε το σύνολο $B =$

$\{X : X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_0 \times A) \text{ με } (0, a) \in X \text{ και αν } (n, x) \in X \text{ τότε } (n^+, f(x)) \in X\}$ άρα $\mathbb{N}_0 \times A \in B$ ενώ για την σχέση $\cap B$ ισχύει ότι $\cap B \subseteq \mathbb{N}_0 \times A$ με $(0, a) \in \cap B$ και αν $(n, x) \in \cap B$ τότε $(n^+, f(x)) \in \cap B$ επομένως $\cap B \in B$. Ορίζουμε το σύνολο $\Gamma =$

$\{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ και υπάρχει μοναδικό } x \text{ με } x \in A \text{ έτσι ώστε } (n, x) \in \cap B\} \subseteq \mathbb{N}_0$.

Αν υπάρχει b με $b \in A$ και $b \neq a$ έτσι ώστε $(0, b) \in \cap B$ τότε $(0, a) \in (\cap B) \setminus \{(0, b)\}$ διότι $(0, a) \neq (0, b)$ ενώ αν υπάρχει (m, y) με $(m, y) \in (\cap B) \setminus \{(0, b)\}$ και $(m^+, f(y)) \notin (\cap B) \setminus \{(0, b)\}$ τότε επειδή $(m^+, f(y)) \in \cap B$ και $(m^+, f(y)) \notin (\cap B) \setminus \{(0, b)\}$ προκύπτει ότι $(m^+, f(y)) \in \{(0, b)\}$ δηλαδή $(m^+, f(y)) = (0, b)$ άρα $m^+ = 0$ το οποίο είναι άτοπο επομένως για κάθε (n, x) με $(n, x) \in (\cap B) \setminus \{(0, b)\}$ ισχύει ότι $(n^+, f(x)) \in (\cap B) \setminus \{(0, b)\}$ συνεπώς $(\cap B) \setminus \{(0, b)\} \in B$ ενώ $(0, b) \notin (\cap B) \setminus \{(0, b)\}$ το οποίο είναι άτοπο οπότε το a είναι το μοναδικό στοιχείο του A έτσι ώστε $(0, a) \in \cap B$ δηλαδή $0 \in \Gamma$.

Έστω $n \in \Gamma$ δηλαδή υπάρχει μοναδικό x με $x \in A$ έτσι ώστε $(n, x) \in \cap B$. Αν υπάρχει z με $z \in A$ και $z \neq f(x)$ έτσι ώστε $(n^+, z) \in \cap B$ τότε $(0, a) \in (\cap B) \setminus \{(n^+, z)\}$ διότι $(0, a) \neq (n^+, z)$ ενώ αν υπάρχει (m, y) με $(m, y) \in (\cap B) \setminus \{(n^+, z)\}$ και $(m^+, f(y)) \notin (\cap B) \setminus \{(n^+, z)\}$ τότε επειδή $(m^+, f(y)) \in \cap B$ και $(m^+, f(y)) \notin (\cap B) \setminus \{(n^+, z)\}$ προκύπτει ότι $(m^+, f(y)) \in \{(n^+, z)\}$ δηλαδή

$$(m^+, f(y)) = (n^+, z) \quad (1)$$

Από την έκφραση (1) προκύπτει ότι $m^+ = n^+$ δηλαδή $m = n$ άρα $(m, y) = (n, y)$ επομένως $(n, y) \in \cap B$ και επειδή το x είναι το μοναδικό στοιχείο του A έτσι ώστε $(n, x) \in \cap B$ προκύπτει ότι

$$y = x \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $(n^+, f(x)) = (n^+, z)$ άρα $f(x) = z$ το οποίο είναι άτοπο επομένως το $f(x)$ είναι το μοναδικό στοιχείο του A έτσι ώστε $(n^+, f(x)) \in \cap B$ δηλαδή $n^+ \in \Gamma$ συνεπώς από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $\Gamma = \mathbb{N}_0$ οπότε η σχέση $\cap B$ είναι συνάρτηση $g : \mathbb{N}_0 \mapsto A$. Έστω συνάρτηση $h : \mathbb{N}_0 \mapsto A$ με $h(0) = a$ και $h(n^+) = f(h(n))$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$. Ορίζουμε το σύνολο $\Delta =$

$\{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ και } g(n) = h(n)\} \subseteq \mathbb{N}_0$ άρα $0 \in \Delta$ διότι $g(0) = a = h(0)$ ενώ αν $n \in \Delta$ δηλαδή αν $g(n) = h(n)$ τότε $g(n^+) = f(g(n)) = f(h(n)) = h(n^+)$ δηλαδή αν $n \in \Delta$ τότε $n^+ \in \Delta$ επομένως από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $\Delta = \mathbb{N}_0$ δηλαδή $g(n) = h(n)$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$ δηλαδή $g = h$ συνεπώς η g είναι η μοναδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $g(0) = a$ και $g(n^+) = f(g(n))$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Μια εναλλακτική μορφή του θεωρήματος αναδρομής αναφέρεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.15 (αναδρομή με παραμέτρους). Αν A, B είναι σύνολα και $f : A \mapsto B, g : A \times B \mapsto B$ τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση $h : A \times \mathbb{N}_0 \mapsto B$ έτσι ώστε $h(x, 0) = f(x)$ και $h(x, n^+) = g(x, h(x, n))$ για κάθε (x, n) με $(x, n) \in A \times \mathbb{N}_0$.

Απόδειξη. Για κάθε x με $x \in A$ ορίζουμε την συνάρτηση $g_x : B \mapsto B$ με $g_x(y) = g(x, y)$ και από το θεώρημα αναδρομής προκύπτει ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση $h_x : \mathbb{N}_0 \mapsto B$ έτσι ώστε $h_x(0) = f(x)$ και $h_x(n^+) = g_x(h_x(n)) = g(x, h_x(n))$ άρα η συνάρτηση $h : A \times \mathbb{N}_0 \mapsto B$ με $h(x, n) = h_x(n)$ για κάθε (x, n) με $(x, n) \in A \times \mathbb{N}_0$ είναι η μοναδική συνάρτηση έτσι ώστε $h(x, 0) = h_x(0) = f(x)$ και $h(x, n^+) = h_x(n^+) = g(x, h_x(n)) = g(x, h(x, n))$ για κάθε (x, n) με $(x, n) \in A \times \mathbb{N}_0$. $\square$

3.2 Πράξεις Φυσικών Αριθμών

Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε αυστηρά τις γνωστές πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της δύναμης. Ορίζουμε ως πρόσθεση στο $\mathbb{N}_0$ την μοναδική συνάρτηση $s : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ με $s(n, 0) = n$ και $s(n, m^+) = (s(n, m))^+$ για κάθε (n, m) με $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ενώ η τιμή που η πρόσθεση παίρνει στο οποιοδήποτε (n, m) με $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ονομάζεται άθροισμα και θέτουμε $n + m = s(n, m)$ άρα $n + 0 = s(n, 0) = n$ ενώ $n + m^+ = s(n, m^+) = (s(n, m))^+ = (n + m)^+ = (n + 0)^+ = n^+$.

Πρόταση 3.2.1. Αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε για κάθε l με $l \in \mathbb{N}_0$ ισχύει ότι $n + (m + l) = (n + m) + l$.

Απόδειξη. Ορίζουμε το σύνολο $A =$

$\{l : l \in \mathbb{N}_0 \text{ και } n + (m + l) = (n + m) + l \text{ όπου } (n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $l = 0$ τότε $n + (m + l) = n + (m + 0) = n + m = (n + m) + 0 = (n + m) + l$ άρα $0 \in A$. Αν $l \in A$ τότε $n + (m + l) = (n + m) + l$ ενώ $n + (m + l^+) = n + (m + l)^+ = (n + (m + l))^+ = ((n + m) + l)^+ = (n + m) + l^+$ δηλαδή αν $l \in A$ τότε $l^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε $n + (m + l) = (n + m) + l$ για κάθε l με $l \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Πρόταση 3.2.2. Για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει ότι $0 + n = n$.

Απόδειξη. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ και } 0 + n = n\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $n = 0$ τότε $0 + n = 0 + 0 = 0 = n$ άρα $0 \in A$. Αν $n \in A$ τότε $0 + n = n$ ενώ $0 + n^+ = (0 + n)^+ = n^+$ δηλαδή αν $n \in A$ τότε $n^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή $0 + n = n$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Πρόταση 3.2.3. Αν $n \in \mathbb{N}_0$ τότε για κάθε m με $m \in \mathbb{N}_0$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $n + m^+ = n^+ + m$.
2. $n + m = m + n$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{m : m \in \mathbb{N}_0 \text{ και } n + m^+ = n^+ + m \text{ όπου } n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $m = 0$ τότε $n + m^+ = n + 0^+ = n^+ = n^+ + 0 = n^+ + m$ άρα $0 \in A$. Αν $m \in A$ τότε $n + m^+ = n^+ + m$ ενώ $n + (m^+)^+ = (n + m^+)^+ = (n^+ + m)^+ = n^+ + m^+$ δηλαδή αν $m \in A$ τότε $m^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή αν $n \in \mathbb{N}_0$ τότε $n + m^+ = n^+ + m$ για κάθε m με $m \in \mathbb{N}_0$.

2. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{m : m \in \mathbb{N}_0 \text{ και } n + m = m + n \text{ όπου } n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $m = 0$ τότε $n + m = n + 0 = n = 0 + n = m + n$ άρα $0 \in A$. Αν $m \in A$ τότε $n + m = m + n$ ενώ $n + m^+ = (n + m)^+ = (m + n)^+ = m + n^+ = m^+ + n$ δηλαδή αν $n \in A$ τότε $n^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή αν $n \in \mathbb{N}_0$ τότε $n + m = m + n$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$.

□

Ορίζουμε ως πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{N}_0$ την μοναδική συνάρτηση $p : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ με $p(n, 0) = 0$ και $p(n, m^+) = p(n, m) + n$ για κάθε (n, m) με $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ενώ η τιμή που ο πολλαπλασιασμός παίρνει στο οποιοδήποτε (n, m) με $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ονομάζεται γινόμενο και θέτουμε $n \cdot m = nm = p(n, m)$ άρα $n \cdot 0 = n0 = p(n, 0) = 0$ ενώ $n \cdot m^+ = nm^+ = p(n, m^+) = p(n, m) + n = (nm) + n = nm + n$. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού έχει προτεραιότητα έναντι της πράξης της πρόσθεσης και $n1 = n0^+ = n0 + n = 0 + n = n$.

Πρόταση 3.2.4. Αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε για κάθε l με $l \in \mathbb{N}_0$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $n(m + l) = nm + nl$.
2. $(n + m)l = nl + ml$.
3. $n(ml) = (nm)l$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{l : l \in \mathbb{N}_0 \text{ και } n(m + l) = nm + nl \text{ όπου } (n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $l = 0$ τότε $n(m + l) = n(m + 0) = nm = nm + 0 = nm + n0 = nm + nl$ άρα $0 \in A$. Αν $l \in A$ τότε $n(m + l) = nm + nl$ ενώ $n(m + l^+) = n(m + l)^+ = n(m + l) + n = (nm + nl) + n = nm + (nl + n) = nm + nl^+$ δηλαδή αν $l \in A$ τότε $l^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε $n(m + l) = nm + nl$ για κάθε $l \in \mathbb{N}_0$.
2. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{l : l \in \mathbb{N}_0 \text{ και } (n + m)l = nl + ml \text{ όπου } (n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $l = 0$ τότε $(n + m)l = (n + m)0 = 0 = 0 + 0 = n0 + m0 = nl + ml$ άρα $0 \in A$. Αν $l \in A$ τότε $(n + m)l = nl + ml$ ενώ $(n + m)l^+ = (n + m)l + (n + m) = (nl + ml) + (n + m) = nl + (ml + (n + m)) = nl + ((n + m) + ml) = nl + (n + (m + ml)) = (nl + n) + (m + ml) = nl^+ + ml^+$ δηλαδή αν $l \in A$ τότε $l^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε $(n + m)l = nl + ml$ για κάθε $l \in \mathbb{N}_0$.
3. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{l : l \in \mathbb{N}_0 \text{ και } n(ml) = (nm)l \text{ όπου } (n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $l = 0$ τότε $n(ml) = n(m0) = n0 = 0 = (nm)0 = (nm)l$ άρα $0 \in A$. Αν $l \in A$ τότε $n(ml) = (nm)l$ ενώ $n(ml^+) = n(ml + m) = n(ml) + nm = (nm)l + nm = (nm)l^+$ δηλαδή αν $l \in A$ τότε $l^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε $n(ml) = (nm)l$ για κάθε $l \in \mathbb{N}_0$.

□

Πρόταση 3.2.5. Για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $0n = 0$.
2. $1n = n$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ και } 0n = 0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $n = 0$ τότε $0n = 0 \cdot 0 = 0$ άρα $0 \in A$. Αν $n \in A$ τότε $0n = 0$ ενώ $0n^+ = 0n + 0 = 0n = 0$ δηλαδή αν $n \in A$ τότε $n^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή $0n = 0$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$.
2. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ και } 1n = n\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $n = 0$ τότε $1n = 1 \cdot 0 = 0 = n$ άρα $0 \in A$. Αν $n \in A$ τότε $1n = n$ ενώ $1n^+ = 1n + 1 = n + 1 = n^+$ δηλαδή αν $n \in A$ τότε $n^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή $1n = n$ για κάθε n με $n \in \mathbb{N}_0$.

□

Πρόταση 3.2.6. Αν $n \in \mathbb{N}_0$ τότε για κάθε m με $m \in \mathbb{N}_0$ ισχύει ότι $nm = mn$.

Απόδειξη. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{m : m \in \mathbb{N}_0 \text{ και } nm = mn \text{ όπου } n \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $m = 0$ τότε $nm = n0 = 0 = 0n = mn$ άρα $0 \in A$. Αν $m \in A$ τότε $nm = mn$ ενώ $nm^+ = nm + n = mn + n = mn + 1n = (m + 1)n = m^+n$ δηλαδή αν $m \in A$ τότε $m^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή $nm = mn$ για κάθε m με $m \in \mathbb{N}_0$. □

Ορίζουμε ως δύναμη στο $\mathbb{N}_0$ την μοναδική συνάρτηση $r : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mapsto \mathbb{N}_0$ με $r(n, 0) = 1$ και $r(n, m^+) = r(n, m)n$ για κάθε (n, m) με $(n, m) \in \mathbb{N}_0$ ενώ η τιμή που η δύναμη παίρνει στο οποιοδήποτε (n, m) με $(n, m) \in \mathbb{N}_0$ ονομάζεται ύψωση σε δύναμη και θέτουμε $n^m = r(n, m)$ άρα $n^0 = r(n, 0) = 1$ ενώ $n^{m^+} = r(n, m^+) = r(n, m)n = n^m n$ επομένως $n^1 = n^{0^+} = n^0 n = 1n = n$.

Πρόταση 3.2.7. Αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε για κάθε l με $l \in \mathbb{N}_0$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $n^{m+l} = n^m n^l$.
2. $n^{ml} = (n^m)^l$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{l : l \in \mathbb{N}_0 \text{ και } n^{m+l} = n^m n^l \text{ όπου } (n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $l = 0$ τότε $n^{m+l} = n^{m+0} = n^m = n^m 1 = n^m n^0 = n^m n^l$ άρα $0 \in A$. Αν $l \in A$ τότε $n^{m+l} = n^m n^l$ ενώ $n^{m+l^+} = n^{(m+l)^+} = n^{m+l} n = (n^m n^l) n = n^m (n^l n) = n^m n^{l^+}$ δηλαδή αν $l \in A$ τότε $l^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε $n^{m+l} = n^m n^l$ για κάθε l με $l \in \mathbb{N}_0$.
2. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{l : l \in \mathbb{N}_0 \text{ και } n^{ml} = (n^m)^l \text{ όπου } (n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $l = 0$ τότε $n^{ml} = n^{m0} = n^0 = 1 = (n^m)^0 = (n^m)^l$ άρα $0 \in A$. Αν $l \in A$ τότε $n^{ml} = (n^m)^l$ ενώ $n^{ml^+} = n^{m(l^+)} = n^{ml} n^m = (n^m)^l n^m = (n^m)^{l^+}$ δηλαδή αν $l \in A$ τότε $l^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε $n^{ml} = (n^m)^l$ για κάθε l με $l \in \mathbb{N}_0$.

□

3.3 Διάταξη Φυσικών Αριθμών

Η διάταξη στο $\mathbb{N}_0$ ορίζεται χρησιμοποιώντας την πράξη της πρόσθεσης οπότε πριν ορίσουμε την σχέση διάταξης στο $\mathbb{N}_0$ κρίνεται σκόπιμο να παραθέσουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.1. Αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $n + m = 0 \Leftrightarrow n = m = 0$.
2. $n + l = m + l \Leftrightarrow n = m$ για κάθε l με $l \in \mathbb{N}_0$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Αν $n = m = 0$ τότε $n + m = 0 + 0 = 0$.
Έστω $n + m = 0$. Αν $n \neq 0$ τότε $n \in \mathbb{N}$ άρα υπάρχει l με $l \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $n = l^+$ επομένως $n + m = l^+ + m = m + l^+ = (m + l)^+ \supset 0$ το οποίο είναι άτοπο συνεπώς $n = 0$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $m = 0$.
2. Ορίζουμε το σύνολο $A = \{l : l \in \mathbb{N}_0 \text{ και } n + l = m + l \Leftrightarrow n = m \text{ όπου } (n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Αν $l = 0$ τότε $n + l = m + l \Leftrightarrow n + 0 = m + 0 \Leftrightarrow n = m$ άρα $0 \in A$. Αν $l \in A$ τότε $n + l = m + l \Leftrightarrow n = m$ ενώ $n + l^+ = m + l^+ \Leftrightarrow (n + l)^+ = (m + l)^+ \Leftrightarrow n + l = m + l \Leftrightarrow n = m$ δηλαδή αν $l \in A$ τότε $l^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ δηλαδή αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε $n + l = m + l \Leftrightarrow n = m$ για κάθε l με $l \in \mathbb{N}_0$.

□

Ορίζουμε στο $\mathbb{N}_0$ την σχέση $\leq =$

$\{(n, m) : (n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \text{ και υπάρχει } l \text{ με } l \in \mathbb{N}_0 \text{ έτσι ώστε } n + l = m\}$. Από τον ορισμό της $\leq$ προκύπτει ότι αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε $n \not\leq m$ αν και μόνο αν $n + l \neq m$ για κάθε l με $l \in \mathbb{N}_0$.

Πρόταση 3.3.2. Αν $n \in \mathbb{N}_0$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $0 \leq n$.
2. $n \leq n$.
3. $n \leq n^+$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. $0 + n = n$ άρα $0 \leq n$.
2. $n + 0 = n$ άρα $n \leq n$.
3. $n + 1 = n^+$ άρα $n \leq n^+$.

□

Πρόταση 3.3.3. Αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Αν $n \leq m$ τότε $n^+ \leq m$ ή $n^+ = m^+$.
2. Αν $n \leq m^+$ τότε $n \leq m$ ή $n = m^+$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

1. Αν $n \leq m$ τότε υπάρχει l με $l \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $n + l = m$. Αν $l = 0$ τότε $n = m$ άρα $n^+ = m^+$ ενώ αν $l \neq 0$ τότε υπάρχει k με $k \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $l = k^+$ επομένως $n + l = n + k^+ = n^+ + k = m$ συνεπώς $n^+ \leq m$.
2. Αν $n \leq m^+$ τότε υπάρχει l με $l \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $n + l = m^+$. Αν $l = 0$ τότε $n = m^+$ ενώ αν $l \neq 0$ τότε υπάρχει k με $k \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $l = k^+$ επομένως $n + l = n + k^+ = (n + k)^+ = m^+$ συνεπώς $n + k = m$ οπότε $n \leq m$.

□

Πρόταση 3.3.4. $\leq$ είναι σχέση διάταξης.

Απόδειξη. Έχουμε ότι $n \leq n$ άρα $\leq$ είναι αυτοπαθής. Αν $n \leq m$ και $m \leq n$ τότε υπάρχουν l, k με $(l, k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $n + l = m$ και $m + k = n$ άρα $(n + l) + k = n$ δηλαδή $n + (l + k) = n + 0$ δηλαδή $l + k = 0$ δηλαδή $l = k = 0$ επομένως $n = m$ συνεπώς $\leq$ είναι αντισυμμετρική. Αν $n \leq m$ και $m \leq l$ τότε υπάρχουν k, s με $(k, s) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $n + k = m$ και $m + s = l$ άρα $(n + k) + s = l$ δηλαδή $n + (k + s) = l$ επομένως $n \leq l$ συνεπώς $\leq$ είναι μεταβατική. Επειδή $\leq$ είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική συμπεραίνουμε ότι $\leq$ είναι σχέση μερικής διάταξης.

Ορίζουμε το σύνολο $A = \{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ με } n \leq m \text{ ή } m \leq n \text{ όπου } m \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0$ και επειδή $0 \leq m$ προκύπτει ότι $0 \in A$. Έστω $n \in A$ δηλαδή $n \leq m$ ή $m \leq n$. Αν $n \leq m$ τότε $n^+ \leq m$ ή $n^+ = m^+$ ενώ $m \leq m^+$ άρα αν $n \leq m$ τότε $n^+ \leq m$ ή $m \leq n^+$. Αν $m \leq n$ τότε επειδή $n \leq n^+$ προκύπτει ότι $m \leq n^+$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι αν $n \in A$ τότε $n^+ \in A$ άρα από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι $A = \mathbb{N}_0$ επομένως τα στοιχεία του $\mathbb{N}_0$ είναι ανά δύο συγκρίσιμα ως προς την $\leq$ συνεπώς $\leq$ είναι σχέση διάταξης. □

Για να παραστήσουμε τα στοιχεία του $\mathbb{N}_0$ διατεταγμένα ως προς την $\leq$ συμβολίζουμε $0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots$.

Πρόταση 3.3.5. Αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε $n \leq m \Leftrightarrow n + l \leq m + l$ όπου $l \in \mathbb{N}_0$.

Απόδειξη. Αν $n \leq m$ τότε υπάρχει k με $k \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $n + k = m$ άρα $(n + k) + l = m + l$ δηλαδή $n + (k + l) = m + l$ δηλαδή $n + (l + k) = m + l$ δηλαδή $(n + l) + k = m + l$ επομένως $n + l \leq m + l$.

Αν $n + l \leq m + l$ τότε υπάρχει k με $k \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $(n + l) + k = m + l$ δηλαδή $n + (l + k) = m + l$ δηλαδή $n + (k + l) = m + l$ δηλαδή $(n + k) + l = m + l$ δηλαδή $n + k = m$ άρα $n \leq m$. □

Ένα στοιχείο a ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{N}_0$ ονομάζεται ελάχιστο στοιχείο του A αν και μόνο αν $a \leq x$ για κάθε x με $x \in A$ ενώ ονομάζεται μέγιστο στοιχείο του A αν και μόνο αν $x \leq a$ για κάθε x με $x \in A$.

Πρόταση 3.3.6. Αν ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}_0$ περιέχει ελάχιστο ή μέγιστο στοιχείο τότε αυτά είναι μοναδικά.

Απόδειξη. Αν a, b είναι ελάχιστα στοιχεία του A τότε $a \leq b$ και $b \leq a$ άρα $a = b$ επομένως αν το A περιέχει ελάχιστο στοιχείο τότε αυτό είναι μοναδικό. Ομοια αποδεικνύεται ότι αν το A περιέχει μέγιστο στοιχείο τότε αυτό είναι μοναδικό. □

Το ελάχιστο και το μέγιστο στοιχείο ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{N}_0$ συμβολίζονται με $\min(A)$ και $\max(A)$ αντίστοιχα.

Πρόταση 3.3.7 (αρχή της καλής διάταξης). Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}_0$ περιέχει ελάχιστο στοιχείο.

Απόδειξη. Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N}_0$ και το A δεν περιέχει ελάχιστο στοιχείο. Ορίζουμε το σύνολο $B = \{n : n \in \mathbb{N}_0 \text{ και για κάθε } m \text{ με } m \leq n \text{ ισχύει ότι } m \notin A\} \subseteq \mathbb{N}_0$ άρα

$$A \cap B = \emptyset \quad (1)$$

Αν $0 \notin B$ τότε υπάρχει m με $m \leq 0$ έτσι ώστε $m \in A$ άρα $0 \in A$ επομένως $\min(A) = 0$ το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το A δεν περιέχει ελάχιστο στοιχείο συνεπώς $0 \in B$.

Έστω $n \in B$ δηλαδή για κάθε m με $m \leq n$ ισχύει ότι $m \notin A$. Αν $n^+ \notin B$ τότε υπάρχει m με $m \leq n^+$ έτσι ώστε $m \in A$ δηλαδή υπάρχει m με $m \leq n$ ή $m = n^+$ έτσι ώστε $m \in A$ άρα $n^+ \in A$ επομένως $\min(A) = n^+$ το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το A δεν περιέχει ελάχιστο στοιχείο συνεπώς $n^+ \in B$ οπότε από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής προκύπτει ότι

$$B = \mathbb{N}_0 \quad (2)$$

Από τις εκφράσεις (1),(2) προκύπτει ότι $A \subseteq \mathbb{N}_0^c$ ενώ $A \subseteq \mathbb{N}_0$ άρα $A \subseteq \mathbb{N}_0^c \cap \mathbb{N}_0 = \emptyset$ δηλαδή $A = \emptyset$ το οποίο είναι άτοπο επομένως κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{N}_0$ περιέχει ελάχιστο στοιχείο. $\square$

Τέλος ορίζουμε στο $\mathbb{N}_0$ την σχέση $\leq = \{(n, m) : (n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \text{ με } n \leq m \text{ και } n \neq m\}$ άρα η $<$ είναι η γνήσια σχέση που αντιστοιχεί στην $\leq$ και θέτουμε $\geq = \leq^{-1}$, $> = <^{-1}$ επομένως αν $(n, m) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ τότε $n \geq m \Leftrightarrow m \leq n$ ενώ $n > m \Leftrightarrow m < n$.

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Για τον ορισμό της έννοιας του συνόλου χρησιμοποιήθηκε ο όρος αντικείμενο χωρίς να προσδιοριστεί τι είναι αντικείμενο. Αυτή η περιγραφή συνόλου ως συλλογή αντικειμένων με βάση την διαισθητική έννοια του αντικειμένου αναφέρθηκε για πρώτη φορά από τον George Cantor το 1895. Στα μαθηματικά μπορούμε να δεχθούμε την λεγόμενη αρχή της αγνότητας δηλαδή ότι δεν υπάρχουν αντικείμενα που δεν είναι σύνολα.

Έχει μια ελκυστική απλότητα η ιδέα ενός τέτοιου μαθηματικού κόσμου όπου τα πάντα είναι σύνολα. [Μοσχοβάκης 2007, 32]

Παρόλα αυτά επιτρέψαμε την ύπαρξη αντικειμένων που δεν είναι σύνολα(χωρίς να την απαιτήσουμε) διότι με αυτό τον τρόπο η θεωρία συνόλων εδραιώνεται ως μια πανίσχυρη γενική θεωρία η οποία μπορεί να συμπεριλάβει οτιδήποτε δεν θεωρείται σύνολο από άλλες επιστήμες-αλλά αποτελεί αντικείμενο μελέτης τους-γεγονός που την καθιστά εφαρμόσιμη σχεδόν σε κάθε επιστήμη.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Γιάννης Ν. Μοσχοβάκης, Σημειώσεις στη Συνολοθεωρία, Ηλεκτρονική 2η Έκδοση, 2007.
- [2] Paul R. Halmos, Αφελής Συνολοθεωρία, Εκδόσεις Εκκρεμές, 2002.
- [3] Herbert B. Enderton, Μια μαθηματική εισαγωγή στη λογική, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2013.
- [4] Harry R. Lewis, Χρίστος Χ. Παπαδημητρίου, Στοιχεία θεωρίας υπολογισμού, Εκδόσεις Κριτική, 2005.
- [5] Kenneth H. Rosen, Διακριτά Μαθηματικά και Εφαρμογές τους, 5η Έκδοση, Εκδόσεις Τζιόλα, 2008.
- [6] C. L. Liu, Στοιχεία Διακριτών Μαθηματικών, 4η Έκδοση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002.
- [7] Γ. Ν. Παντελίδης, Μαθηματική Ανάλυση, Τόμος I & II, Εκδόσεις Ζήτη, 1996.
- [8] Αθανασιάδης Χ.Ε., Γιαννακούλιας Ε.Μ, Γιωτόπουλος Σ.Χ., Γενικά Μαθηματικά, Απειροστικός Λογισμός-τόμος 1, Εκδόσεις Συμμετρία, 2009.
- [9] Λεωνίδας Ν. Τσίτσας, Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός, 2η Έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, 2003.
- [10] Χαράλαμπος Α. Χαραλαμπίδης, Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, Τεύχος 1, Εκδόσεις Συμμετρία, 2000.