Αλέξανδρος Καλογήρου

Εκδοχές του Riemann-Roch

Μεταπτυχιακή Εργασία

Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Αθήνα 27 Σεπτεμβρίου 2018

Εισηγητής: Αριστείδης Κοντογεώργης

Επιτροπή

Αριστείδης Κοντογεώργης

Μιχάλης Μαλιάκας

Ιωάννης Εμμανουήλ

Στους γονείς μου

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

0.1 Ιστορικά στοιχεία

Το κλασικό θεώρημα Riemman-Roch είναι ένα βασικό αποτέλεσμα στην μιγαδική ανάλυση και στην αλγεβρική Γεωμετρία. Η αρχική μορφή του αφορούσε τις συμπαγείς επιφάνειες Riemann και συσχετίζει αναλυτικές και τοπολογικές ιδιότητες αυτών και αναπτύχθηκε από τον Bernhard Riemann και τον μαθητή του Gustav Roch. Περισσότερο συγκεκριμένα ο Riemann παρατήρησε ότι αν κάποιος θέλει να ορίσει μερόμορφες συναρτήσεις με συγκεκριμένους πόλλους και ρίζες πάνω σε μια συμπαγή επιφάνεια Riemann, τότε τα διαφορικά της επιφάνειας Riemann επάγουν μη τετριμμένες σχέσεις πάνω στις δυνατές συναρτήσεις, αφού σύμφωνα με τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων θα πρέπει να είναι 0. Για περισσότερες πληροφορίες πάνω στην ιδέα αυτή παραπέμπουμε στο [12].

Την δεκαετία του 1930 ο F. K. Schmidt απέδειξε ότι το θεώρημα μπορεί να αποδειχτεί με ένα πλήρως αλγεβρικό επιχείρημα για ομαλές προβολικές καμπύλες ορισμένες πάνω αλγεβρικά κλειστά σώματα. Για μια σύγχρονη θεώρηση σε αυτή την κατεύθυνση κάνοντας χρήση της θεωρίας των adèle παραπέμπουμε στα [15], [16]. Σε σύγχρονη μορφή το θεώρημα των Riemann-Roch διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 0.1.1 (Riemann-Roch)**.** *Έστω X μια ομαλή προβολική καμπύλη ορισμένη πάνω από ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα k. Τότε για κάθε divisor D στο X έχουμε*

$$\ell(D) - \ell(K_X - D) = \deg(D) - g(X) + 1,$$

όπου K_X είναι ο κανονικός divisor στο X, $g(X)$ είναι το γένος της X και $\ell(D) = \dim_k H^0(X, \mathcal{L}(D))$ είναι η διάσταση του αντίστοιχου χώρου Riemann-Roch.

Την δεκαετία του 1950 ο F. Hirzebruch [11] γενικεύει το παραπάνω αποτέλεσμα σε ψηλότερης διάστασης μιγαδικές αλγεβρικές πολλάπλότητες και σε τυχαία vector bundles. Έστω E ένα vector bundle επί ομαλής προβολικής μιγαδικής πολλαπλότητας X και έστω $\mathcal{E}$ το τοπικά ελεύθερο sheaf που αντιστοιχεί στο E. Η χαρακτηριστική Euler-Poincaré του E ορίζεται η

$$\chi(X, E) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{E}).$$

Το θεώρημα δίνεται από την παρακάτω σχέση

Θεώρημα 0.1.2 (Hirzebruch-Riemann-Roch)**.**

$$\chi(X, E) = \int_X \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{td}(T_X)$$

όπου ch *είναι ο χαρακτήρας του Chern,* $\mathrm{td}(\cdot)$ *είναι η κλάση Todd και* T_X *είναι η εφαπτόμενη δέσμη του* X *(θα τα ορίσουμε στην συνέχεια).*

Το θεώρημα του Hirtzebruch εκφράζει μια συνομολογική αναλλοίωτη του $\mathcal{E}$ σε όρους χαρακτηριστικών κλάσεων του X.

0.2 Το θεώρημα του Grothendieck

Για να περιγράψουμε την γενίκευση του παραπάνω θεωρήματος όπως την έδωσε ο A. Grothendieck θα πρέπει να εισαγάγουμε μερικές έννοιες. Στην παρουσίαση μας χρησιμοποιούμε την (προ)πτυχιακή (!) εργασία του P. J.R. Ryan [14] όπως και το [7].

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Grothendieck απέδειξε μια «σχετική έκδοση» του θεωρήματος η οποία όχι απλά γενικεύει το θεώρημα του Hirtzebruch αλλά έχει μια απλούστερη και φυσική απόδειξη όπως σημειώνει ο R. Bott στην επισκόπησή του για τα Mathematical Reviews [4]. Επιπλέον βρήκε την κατάλληλη γλώσσα για να εκφράσει το θεώρημα αναπτύσοντας νέες έννοιες όπως η K-θεωρία και οι λ-δακτύλιοι και δίνοντας μια νέα οπτική στην θεωρία τομής (intersection theory) και τις χαρακτηριστηκές κλάσεις.

0.2α΄ Δακτύλιοι Chow

Ας υποθέσουμε ότι το X είναι μία ομαλή προβολική αλγεβρική πολλαπλότητα πάνω σε ένα αλγεβρικά κλειστό σώμα. Ένας κύκλος συνδιάστασης k είναι ένα στοιχείο της ελεύθερης αβελιανής ομάδας που παράγεται από τις κλειστές ανάγωγες υποπολλαπλότητες συνδιάστασης k του X, δηλαδή ένα στοιχείο της μορφής $\sum n_i Y_i$, όπου τα $n_i \in \mathbb{Z}$ και τα Y_i έχουν συνδιάσταση k. Σε κάθε υποσχήμα $Z \subset X$ γνήσιας συνδιάστασης k μπορούμε να συσχετίσουμε ένα κύκλο θεωρόντας τους ανάγωγους παράγοντες Y_i συνδιάστασης k και θεωρόντας ως n_i το μήκος του τοπικού δακτυλίου του generic point του Y_i στο Z (πολλαπλότητα εμφάνισης στο non-recuded σχήμα).

Στους κύκλους μπορούμε να δώσουμε συναρτησιακές ιδιότητες. Αν $X \to Y$ είναι ένας μορφισμός από varieties και Z είναι μία αλγεβρική υποπολλαπλότητα του X τότε θέτουμε $f_*[Z] = 0$ αν $\dim f(Z) < \dim Z$ και $f_*[Z] = nf(Z)$ αν η διάσταση δεν πέφτει, το n είναι ο βαθμός της συνάρτησης περιορισμένης στο Z.

Στις παραπάνω ομάδες θεωρούμε την σχέση της ρητής ισοδυναμίας: δύο κύκλοι Z, Z' συνδιάστασης k θα λέγονται ρητά ισοδύναμοι αν υπάρχει ένας κύκλος V στο $X \times \mathbb{P}^1$ ώστε $V \cap X \times 0 = Z$ και $V \cap X \times \infty = Z'$. Αποδεικνύεται ότι αυτή είναι μια σχέση ισοδύναμίας και ορίζουμε το πηλίκο με $A^k(X)$. Με αυτό τον τρόπο σχηματίζουμε μια graded group, την ομάδα του Chow

$$A(X) = \bigoplus A^r(X),$$

όπου $A^0(X) = \mathbb{Z}$ και $A^r(X) = 0$ για $r > \dim(X)$. Υπάρχει ένας ομομορφισμός ομάδων $A^{\dim(X)}(X) \to \mathbb{Z}$, συνάρτηση βαθμού, η οποία στέλνει το $\sum n_i P_i$ στο $\sum n_i$ και η οποία είναι καλά ορισμένη στην κλάσης ισοδυναμίας.

Οι παραπάνω ομάδες δέχονται μια θεωρία *τομής*, δηλαδή μία συνάρτηση (που ικανοποιεί καθορισμένες ιδιότητες)

$$A^k(X) \times A^r(X) \to A^{k+r}(X).$$

Διαισθητικά, η παραπάνω συνάρτηση παίρνει δύο κύκλους συνδιάστασης k και r και υπολογίζει την τομή τους. Όταν οι κύκλοι τέμνονται εγκάρσια, η τομή είναι καλά ορισμένη. Αν οι κύκλοι όμως δεν τέμνονται εγκάρσια, τότε χρησιμοποιούμε την ρητή ισοδυναμία για να τους μεταφέρουμε σε εγκάρσια τεμνόμενους και να ορίσουμε την τομή τους. Η παραπάνω θεωρία είναι μεταφορά στην αλγεβρική γεωμετρία κατασκευών από την αλγεβρική τοπολογία. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο του Fulton [10] για ακριβείς ορισμούς και διατυπώσεις.

Η θεωρία τομών στους κύκλους ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

(i) Η ομάδα $A(X)$ γίνεται αντιμεταθετικός δακτύλιος, ο δακτύλιος του Chow.

(ii) Για συναρτήσεις $f : X \to Y$, μπορούμε να ορίσουμε το pull back κύκλων με τον παρακάτω τρόπο: Για μία υποπολλαπλότητα $Z \subset Y$, ορίζουμε $f^*(Z) = p_{1*}(\Gamma_f \cdot p_2^{-1}(Z))$, όπου p_i είναι οι συναρτήσεις προβολής και Γ_f είναι το γράφημα του μορφισμού θεωρούμενο ως κύκλος στο γινόμενο. Με αυτό τον τρόπο επάγεται ομομορφισμός δακτυλίων
$$f^* : A(Y) \to A(X).$$

(iii) Τα push forwards για proper μορφισμούς είναι συμβατά με την ρητή ισοδυναμία και δίνουν ομομορφισμούς ομάδας
$$f_* A(X) \to A(Y).$$

(iv) Αν και τα push forwards δεν είναι ομομορφισμοί δακτυλίων, για proper μορφισμούς $f : X \to Y$ έχουμε
$$f_*(x \cdot f^* y) = f_* x \cdot y$$
για κύκλους στα X και Y αντίστοιχα.

(v) Ισχύει
$$A(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[h]/h^{n+1},$$
όπου h είναι η κλάση ενός υπερεπιπέδου. Ισχύει ότι αν E είναι ένα τοπικά ελεύθερο sheaf rank r στον και έστω $z \in A^1(\mathbb{P}(E)$ η κλάση του $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$. Η προβολή
$$\pi : \mathbb{P}(E) \to X$$
κάνει το $A(\mathbb{P}(E))$ ένα ελεύθερο $A(X)$ module που παράγεται από τα $1, z, \ldots, z^{r-1}$.

0.2β΄ Κλάσεις Chern

Έστω E ένα τοπικά ελεύθερο sheaf rank r στο X. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (v) ορίζουμε την i-οστη κλάση Chern class $c_i(E)$ του E με $c_0(E) = 1$ και
$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^r \pi^*(c_i(E)) \cdot z^{r-i} = 0.$$
Πολλές φορές είναι χρήσιμο να συμπυκνώσουμε την παραπάνω πληροφορία στο πολυώνυμο Chern του E
$$c_t(E) = c_0(E) + c_1(E)t + \ldots + c_r(E)t^r.$$
Ισχύουν τα παρακάτω:

(i) Αν $E = \mathcal{O}(D)$, τότε $c_1(E) = D$.

(ii) Αν $f : X \to Y$ είναι ένας μορφισμός και E είναι ένα τοπικά ελεύθερο sheaf στο Y, τότε $c_i(f^*E) = f^*(c_i(E))$.

(iii) Αν $0 \to E \to F \to G \to 0$ είναι μια μικρή ακριβής ακολουθία από τοπικά ελεύθερα sheaves στο X τότε έχουμε την σχέση

$$c_t(F) = c_t(E) \cdot c_t(G).$$

(iv) Αν το E διασπάται σε ευθύ άθροισμα από line bundles L_i, τότε

$$c_t(E) = \prod c_t(L_i).$$

Στην πραγματικότητα ακόμα και αν το E δεν διασπάται στο X, μας είναι χρήσιμο να «προσποιηθούμε» ότι διασπάται. Δηλαδή παραγοντοποιούμε τυπικά

$$c_t(E) = \prod (1 + a_i t)$$

και παρατηρούμε ότι οι κλάσεις Chern μπορούν να εκφραστούν σε όρους των τυπικών στοιχείων a_i τα οποία ονομάζονται οι ρίζες Chern του E). Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε δύο στοιχεία του $A(X) \otimes \mathbb{Q}$ την χρησιμότητα των οποίων θα εξηγήσουμε στην συνέχεια:

Ο χαρακτήρας Chern του E ορίζεται ως

$$\mathrm{ch}(E) = \sum e^{a_i} \tag{1}$$

όπου η εκθετική συνάρτηση ορίζεται μέσω της τυπικής δυναμοσειράς. Η κλάση Todd του E ορίζεται ως

$$\mathrm{td}(E) = \prod a_i/(1 - e^{-a_i}). \tag{2}$$

Τα παραπάνω είναι συμμετρικές συναρτήσεις στα στοιχεία a_i και συνεπώς μπορούν να γραφούν ως συναρτήσεις των κλάσεων Chern. Ο χαρακτήρας Chern ικανοποιεί την σχέση

$$\mathrm{ch}(E \oplus F) = \mathrm{ch}(E) + \mathrm{ch}(F) \text{ και } \mathrm{ch}(E \otimes F) = \mathrm{ch}(E) \cdot \mathrm{ch}(F).$$

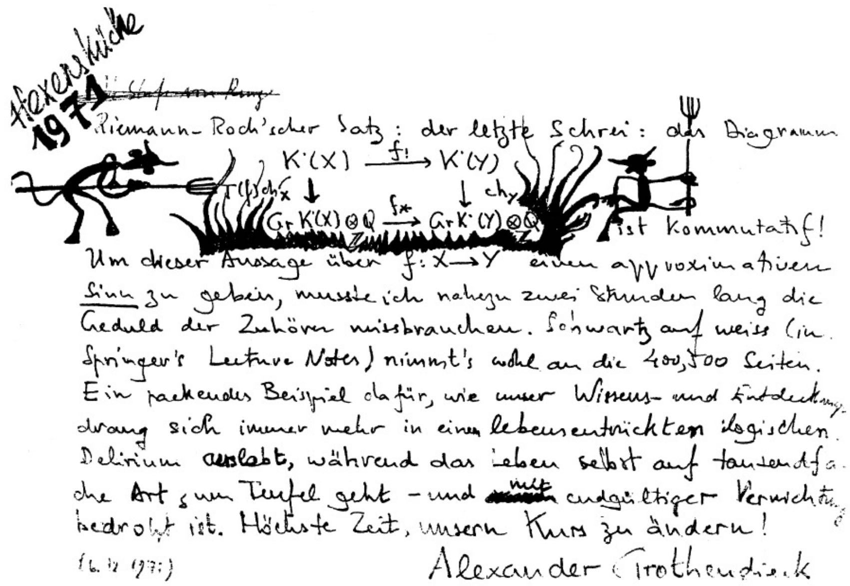
Ας δούμε δύο παραδείγματα. Έστω X μια ομαλή καμπύλη και έστω E ένα line bundle on X, το οποίο το γράφουμε ως $\mathcal{O}(D)$. Τότε $\mathrm{ch}(E) = 1 + D$ και $\mathrm{td}(E) = 1 + (1/2)D$. Παρατηρήστε ότι μια καμπύλη δεν έχει $A^2(X)$.

Αν το X είναι μια ομαλή επιφάνεια και $E = \mathcal{O}(D)$. Τώρα έχουμε $\mathrm{ch}(E) = 1 + D + (1/2)D \cdot D$ και $\mathrm{td}(E) = 1 + (1/2)D + (1/2)D \cdot D$ Παρατηρήστε ότι ένα line bundle δεν έχει δεύτερες κλάσεις Chern.

Στην συνέχεια θεωρούμε τον δακτύλιο $K^0(X)$ που παράγεται από κλάσεις ισοδυναμίας από τοπικά ελεύθερα sheaves, και $K_0(X)$ την ομάδα που παράγεραι από κλάσεις ισοδυναμίας από coherent sheaves. Για μία ομαλή προβολική πολλαπλότητα X υπάρχει ένας ισομορφισμός ομάδων $K^0(X) \cong K_0(X)$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε στο $K_0(X) = K(X)$ την δομή ενός αντιμεταθετικού δακτυλίου. Ο χαρακτήρας του Chern επάγει ένα ομομορφισμό δακτυλίων

$$K(X) \longrightarrow A^*(X).$$

το θεώρημα γίνεται:



Σχήμα 1: Το θεώρημα των Grothendieck Riemann Roch βασανίζεται στο *το πυρ το εξώτερον*... Χειρόγραφες σημειώσεις Του.

Θεώρημα 0.2.1 (Grothendieck-Riemann-Roch). *Έστω $f : X \to Y$ ένας proper μορφισμός, όπου X, Y είναι quasi-projective ομαλές προβολικές πολλαπλότητες ορισμένες υπέρ του αλγεβρικά κλειστού σώματος k. Έστω $x \in K(X)$. Τότε το παρακάτω διάγραμμα είναι αντιμεταθετικό:*

$$\begin{array}{ccc} K(X) & \xrightarrow{\mathrm{ch}(\cdot)\mathrm{td}(T_X)} & A^*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \\ \downarrow{\scriptstyle f_*} & & \downarrow{\scriptstyle f_*} \\ K(Y) & \xrightarrow[\mathrm{ch}(\cdot)\mathrm{td}(T_Y)]{} & A^*(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα του Hirtzebruch προκύπτει από το θεώρημα του Grothendick θεωρώντας την συνάρτηση $f : X \to \{\text{point}\}$ οπότε έχουμε

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim R^* f_* \mathcal{E} = f_*(\mathcal{E} \cdot \mathrm{td}(T_X)).$$

Παραδείγματα:

Υποθέτουμε και πάλι ότι το Y είναι ένα σημείο, το X είναι μια proper καμπύλη και $F = \mathcal{L}(D)$ είναι ένα line bundle στο X. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\mathrm{ch}(F) = 1 + D$ και $T_X = \mathcal{L}(-K)$ είναι η εφαπτόμενη δέσμη ώστε $\mathrm{td}(X) = 1 - (K)/2$. Τότε το θεώρημα του Grothendieck δίνει

$$\chi(X, F) = deg((1 + D) \cdot (1 - K/2))_1 = deg(D - K/2) = deg(D) + 1 - g,$$

δηλαδή το συνηθισμένο θεώρημα Riemann Roch για καμπύλες.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι είναι μία proper ομαλή επιφάνεια και ότι Y είναι ένα σημείο. Το $F = \mathcal{L}(D)$ είναι ένα line bundle. Αφού το T_X είναι το δυϊκό του Ω_X, έχουμε και πάλι $c_1(T_X) = -K$. Θα αναφερόμαστε στο $c_2(T_X)$ ως c_2. Τότε

$$\mathrm{td}(X) = 1 - (1/2)K + (1/12)(K^2 + c_2).$$

Πολλαπλασιάζουμε με $\mathrm{ch}(F) = 1 + D + (1/2)D^2$ και θεωρούμε βαθμούς για να καταλήξουμε στο

$$\chi(X, F) = (1/2)D \cdot (D - K) + (1/12)(K^2 + c_2).$$

Στην περίπτωση που $D = 0$, έχουμε

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = (1/12)(K^2 + c_2)$$

το οποίο αναγνωρίζουμε ως το συνηθισμένο τύπο Riemann-Roch για επιφάνειες [3, I.12].

0.3 Η οπτική του Arakelov

Ο S. Arakelov [2], [1] όρισε μια θεωρία τομών πάνω σε αριθμητικές επιφάνειες που σχετίζονται με ομαλές προβολικές καμπύλες πάνω από σώματα αριθμών οδηγούμενος από ανάλογα αποτελέσματα σε σώματα συναρτήσεων. Μια αριθμητική επιφάνεια είναι ένα σχήμα

$$\mathcal{X} \to \mathrm{Spec}\mathcal{O},$$

όπου το $\mathcal{O}$ είναι ο δακτύλιος των ακεραίων ενός σώματος αριθμών K, ώστε η γενική ίνα $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}} K$ να είναι αλγεβρική καμπύλη. Η ιδέα του Arakelov ήταν επεκτείνει το σώμα της γενικής ίνας από μία αλγεβρική καμπύλη ορισμένη πάνω από ένα σώμα αριθμών, σε μία επιφάνεια Riemann και να χρησιμοποιήσει αναλυτικά εργαλεία επί αυτής.

Ο Gerd Faltings [9] επέκτεινε τα αποτελέσματα του Arakelov, αποδεικνύοντας αποτελέσματα όπως το θεώρημα των Riemann-Roch για αριθμητικές επιφάνειες. Γενικότερα η γεωμετρία του Arakelov εξετάζει σχήματα πάνω από δακτύλιους ακεραίων σωμάτων αριθμών, τοποθετώντας Ερμηρειανές μετρικές στα ολόμορφα bundles πάνω από τα μιγαδικά σημεία $X(\mathbb{C})$. Αυτή η επιπλέον δομή υποκαθιστά την αποτυχία των $\mathrm{Spec}(\mathcal{O})$ να είναι complete πολλαπλότητες. Αυτή είναι μία παλιά ιδέα στην οποία το σύνολο των πρώτων ιδεωδών ενώς δακτυλίου ακεραίων αλγεβρικών δίνει τα «σημεία» που αντιστοιχούν στις μη-αρχιμήδιες απόλυτες τιμές και πρέπει να συμπληρωθεί και με τις αρχιμήδεις απόλυτες τιμές για να δώσει «όλα τα σημεία» ώστε το σώμα αριθμών K να συμπεριφέρεται ως σώμα συναρτήσεων μιας «συμπαγούς καμπύλης». Η «πλήρωση» αυτή χρειάζεται τόσο στην θεωρία τομής αλλά εμφανίζεται και στην θεωρία των ζήτα συναρτήσεων, όπου στα άπειρα σημεία πρέπει να προσθέσουμε κατάλληλους Γ-παράγοντες για να ισχύει η συναρτησιακή εξίσωση.

Στην πτυχιακή αυτή θα μελετήσουμε με την θεώρηση του Arakelov τα σώματα αριθμών, ορίζοντας τοπολογικό γένος (βασισμένο στην θεωρία του Minkowski) αλλά ένα θεώρημα Riemann-Roch ακολουθθόντας την φιλοσοφία των Grothendieck και Arakelov. Στην παρουσίαση ακολουθούμε το βιβλίο του J. Neukirch, [13].

Στην ουσία το εγχείρημα μας θα είναι η γεωμετρική προσέγγιση της θεωρίας αριθμών. Ο ρόλος του θεωρήματος Riemann-Roch σε αυτό, έτσι όπως τον παρουσιάζουμε, είναι κλιμακούμενος.

Στην ενότητα 1.1 εμπλουτίζουμε την ομάδα των ιδεωδών με την προσθήκη επιπλέον γεννητόρων οι οποίοι αντιστοιχούν στους «άπειρους» πρώτους, ερμηνεύοντας τους πρώτους σε επίπεδο θεωρίας εκτιμήσεων με τους άπειρους να παριστάνουν τις αρχιμήδειες εκτιμήσεις για ένα σώμα αλγεβρικών αριθμών K. Τα ιδεώδη που προκύπτουν τα ονομάζουμε **πλήρη ιδεώδη**. Αυτό μας επιτρέπει την μεταφορά της θεωρίας των ιδεωδών σε δακτυλίους του Dedekind στην θεωρία των divisors, δημιουργώντας έτσι το κατάλληλο πλαίσιο για την μετέπειτα διατύπωση των θεωρημάτων Riemann-Roch μέσω της αναλογίας που εμφανίζεται τώρα πια με την περίπτωση των function fields. Εκεί οι divisors είναι η ελεύθερη ομάδα με γεννήτορες τα **places** ή αλλιώς **primes**, των γεωμετρικών σημείων δηλαδή που αντιστοιχούν στις εκτιμήσεις ενός function field.

Ο ρόλος της ενότητας 1.2 είναι μεταβατικός και θα μπορούσε να ενταχθεί στην κλασσική θεωρία αριθμών. Περιλαμβάνει την εκτενή περιγραφή των ιδεωδών της διαφορίζουσας και της διακρίνουσας και των ιδιοτήτων τους όσων αφορά τις διακλαδώσεις μιας επέκτασης σωμάτων, πολλές από τις οποίες χρησιμοποιούνται επικουρικά στην συνέχεια.

Κεντρικό ρόλο στη θεωρία που αναπτύσσουμε διαδραματίζει η χαρακτηριστική Euler-Minkowski ενός σώματος K, που παρουσιάζουμε στην 1.3. Επικαλούμενοι την θεωρία Minkowski, αρχικά «μεταφράζουμε» το χώρο Minkowki $K_{\mathbb{R}}$ (ο οποίος έχει οριστεί στο παράρτημα) στο γινόμενο των πληρώσεων του K ως προς τις αρχιμήδειες νόρμες $\prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_{\mathfrak{p}}$ καθώς είναι και οι δύο ισομορφικοί με τον πραγματικό διανυσματικό χώρο $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. Στη συνέχεια ορίζοντας κατάλληλες εμφυτεύσεις

$$ja \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_{\mathfrak{p}}$$

των πλήρων ιδεωδών σε πλήρη πλέγματα του $K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, ορίζουμε την **χαρακτηριστική Euler-Minkowski** του ιδεώδους a ως

$$\chi(a) = -\log \mathrm{vol}(a),$$

όπου $\mathrm{vol}(a)$ ο όγκος του προηγούμενου πλέγματος.

Στη συνέχεια περιγράφουμε την συμπεριφορά της χαρακτηριστικής Euler-Minkowski σε παραβολή με την χαρακτηριστική Euler-Poincaré για λείες προβολικές καμπύλες. Καταλήγουμε αρχικά στον τύπο 1.4, ο οποίος διεκδικεί τον χαρακτηρισμό Riemann-Roch. Το θεώρημα του Lang (1.6) που παρουσιάζουμε δίνει μια καλή αναλογία με τις ομολογιακές σταθερές που ορίζονται για τις προβολικές καμπύλες. Επίσης για το γένος που ορίζεται στην 1.3 καταλήγουμε στον τύπο Riemann-Hurwitz, ο οποίος συμφωνεί με τον κατά Hilbert ιδεωδο-θεωρητικό χαρακτηρισμό των διακλαδώσεων που αναλύσαμε στην 1.2.

Η ενότητα 1.4 έχει προπαρασκευαστικό χαρακτήρα, εισάγει την έννοια των μετρικοποιημένων προτύπων και αναλύει τη θεωρία τους. Τα πλήρη ιδεώδη ενσωματόνονται στα μετρικοποιημένα πρότυπα, ενώ παράλληλα διευρύνεται η κλάση των υπό μελέτη προτύπων σε τυχαία πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα πάνω από έναν δακτύλιο ακεραίων $\mathcal{O}$, δημιουργώντας το κατάλληλο αντικείμενο για την υλοποίηση τηςπροσέγγισης «τύπου» Grothendieck-Riemann-Roch που θα επακολουθήσει.

Στην 1.5 ορίζονται οι ομάδες Grothendieck για τα μετρικοποιημένα πρότυπα παρόμοια με του παραπάνω μέρους της εισαγωγής, αποδεικνύεται ότι ο ομομορφισμός Poincaré είναι ισομορφισμός και το σημαντικότερο περιγράφεται η δακτυλοδομή που επάγει το τανυστικό γινόμενο στην $K_0(\bar{\mathcal{O}})$. Στην 1.6 ορίζουμε την **χαρακτηριστική Chern**

$$\mathrm{ch} : K_0(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{O}}).$$

Αποδεικνύεται ότι είναι ισομορφισμός και μέσω της αντιστοιχίας

$$\mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{O}}) \xrightarrow{\sim} CH^1(\bar{\mathcal{O}})$$

πλήρων ιδεωδών και divisors που έχει δωθεί στην 1.1, (την οποία καθώς οι αποδείξεις γίνονται σε όρους προτύπων δεν αναφέρουμε ρητά μέσα στο κυρίως κείμενο, κάθε φορά που αυτή ανακύπτει) απότελεί την υλοποίηση της αντιστοιχίας δατυλίων Grothedieck και Chow, που πραγματεύεται το θεώρημα Grothendieck-Riemann-Roch, για την μονοδιάστατη περίπτωση. Το πρώτο μέρος της ενότητας 1.7 καταπιάνεται ακριβώς με τις συναρτητικές ιδιότητες της κατασκευής των δακτυλίων Grothendieck, καθώς αυτές των «δακτυλιων Chow» είναι ιδιέταιρα απλές και στην ουσία έχουν ήδη καλυφθεί στην 1.1., τις ωστόσο συνοψίζουμε στην περιγραφή της απεικόνισης Gysin.

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε ξεχωριστά στο θεώρημα που επονομάζουμε «Grothendieck-Riemann-Roch» στην 1.7 και θα επεξηγήσουμε. Το θεώρημα δεν είναι εφαρμογή του GRR στην περίπτωση των μονοδιάστατων αφινικών σχημάτων (λόγω των άπειρων σημείων). Η επωνυμία αιτιολογείται όμορφα στο πλαίσιο των συναρτητών τύπου Riemann-Roch όπως αυτοί παρουσιάζονται ενδεικτικά στην εργασία του Patrick Ryan. Παραθέτουμε τους ορισμούς όπως εμφανίζονται.

Έστω $\mathcal{G}$ μία κατηγορία και συναρτητές H στη $\mathcal{H}$. Για κάθε $X \in \mathrm{ob}\mathcal{G}$, $H(X)$ δακτύλιος, και για κάθε μορφισμό $f : X \to Y$ έστω ομομορφισμοί

$$f^H : H(Y) \to H(X), \quad f_H : H(X) \to H(Y),$$

που ικανοποιούν τα παρακάτω αξιώματα:

(i) $X \longmapsto H(X)$ είναι contravariant συναρτητής από την $\mathcal{G}$ στους δακτυλίους με την f^H.

(ii) $X \longmapsto H(X)$ είναι covariant συναρτητής από την $\mathcal{G}$ στις ομάδες με την f_H.

(iii) Για κάθε μορφισμό $f : X \to Y$ και κάθε $x \in H(X), y \in H(Y)$ ισχύει

$$f_H(x\dot{f}^H(y)) = f_H(x)y.$$

Ορισμός 0.3.1. *Συναρτητής Riemann-Roch* (K, ϕ, A) *είναι μια τριπλέτα όπου* K, A *συναρτητές που ικανοποιούν τα παραπάνω αξιώματα και* $\phi : K \to A$ *φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των contravariant συναρτητών* K *και* A*.*

Αν για έναν μορφισμό f υπάρχει $\tau_f \in A(X)$ για το οποίο το ακόλουθο διάγραμμα είναι μεταθετικό

$$\begin{tikzcd} K(X) \arrow[r, "\tau_f\dot{\phi}"] \arrow[d, "f_K"'] & A(X) \arrow[d, "f_A"] \\ K(Y) \arrow[r, "\phi"] & A(Y) \end{tikzcd}$$

θα λέμε ότι ισχύει το θεώρημα Riemann-Roch.

Στην δική μας περίπτωση οι f^H, f_H είναι οι i^*, i_* αντίστοιχα και ο ϕ είναι η χαρακτηριστική Chern. Η δική μας διαπραγμάτευση περιορίζεται στην περίπτωση των pullbacks και pushforwards που επάγονται από εγκλεισμούς επεκτάσεων Dedekind. Το θεώρημα 1.7.6 είναι ακριβώς ένα θεώρημα της παραπάνω μορφής.

Η τελευταία ενότητα είναι αφιερωμένη στην χαρακτηριστική Euler-Minkowski της 1.3 και την εντάσσει στην παραπάνω θεώρηση. Ακολουθούν παραρτήματα με τα απολύτως απαραίτητα από τη θεωρία Minkowski και την θεωρία των εκτιμήσεων. Ολοκληρώνοντας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Αριστείδη Κοντογεώργη για την ευκαιρία που μου πρόσφερε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα, για το ερέθισμα που καταφέρνει να προσφέρει σαν δάσκαλος, την συνεργασία και την υποστήριξη κατά την υλοποίηση κάτω από όχι ιδανικές συνθήκες. Επίσης τον καθηγητή Παναγή Καραζέρη για την υπομονή του κατά την άκαρπη άλλα προσωπικά χρήσιμη συνεργασία μας στο πανεπιστήμιο Πατρών. Και ακόμη πολλούς την στήριξη των οποίων δεν μπορώ να ιεραρχήσω, μεταξύ αυτών και την οικογένεια μου.

Αλέξανδρος Καλογήρου,
Αθήνα 2018.

Κεφάλαιο 1

Riemann-Roch for number fields

1.1 Μερικά στοιχεία θεωρίας Arakelov

Ορισμός 1.1.1. ***Πρώτος*** *τον οποίο θα συμβολίζουμε με* $\mathfrak{p}$ *για ένα αλγεβρικό αριθμητικό σώμα* K *θα ονομάζεται μια κλάση ισοδυναμίας από εκτιμήσεις (* ***valuations*** *). Οι μη-αρχιμήδειες κλάσεις θα ονομάζονται* ***πεπερασμένοι*** *πρώτοι ενώ οι αρχιμήδειες* ***άπειροι*** *πρώτοι.*

Σύμφωνα με τη θεωρία του κεφαλαίου 2 του Neukirch [13] οι άπειροι πρώτοι αντιστοιχούν σε εμφυτεύσεις $\tau : K \to \mathbb{C}$. Αυτοί με τη σειρά τους διακρίνονται σε **πραγματικούς** αν η εμφύτευση είναι πραγματική και **μιγαδικούς** για μιγαδικές εμφυτεύσεις. Η κάθε περίπτωση αντιστοιχεί σε πλήρωση $K_\mathfrak{p}$ ίση με $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ αντίστοιχα. Τυπικά θα γράφουμε $\mathfrak{p} \mid \infty$ για τους άπειρους πρώτους και $\mathfrak{p} \nmid \infty$ για τους πεπερασμένους. Στην πεπερασμένη περίπτωση το σύμβολο $\mathfrak{p}$ έχει πολλαπλές σημασίες: χρησιμοποιείται για το αντίστοιχο πρώτο ιδεώδεστου δακτυλίου των ακεραίων $\mathcal{O}$, ή για το μέγιστο ιδεώδες του δακτυλίου εκτίμησης καθώς και για το μέγιστο ιδεώδες της πλήρωσης. Γράφουμε $\mathfrak{p} \mid p$ για την χαρακτηριστική του σώματος υπολοίπων $\kappa(\mathfrak{p})$ ενός πεπερασμένου πρώτου $\mathfrak{p}$. Στην περίπτωση των άπειρων πρώτων ορίζουμε για σώμα υπολοίπων

$$\kappa(\mathfrak{p}) := K_\mathfrak{p}$$

Σε κάθε πρώτο $\mathfrak{p}$ τώρα αντιστοιχεί ένας κανονικός ομομορφισμός

$$\upsilon_\mathfrak{p} : K^* \to \mathbb{R}$$

για την πολλαπλασιαστική ομάδα K^*. Αν ο $\mathfrak{p}$ είναι πεπερασμένος η $\upsilon_\mathfrak{p}$ είναι η $\mathfrak{p}$-αδική εκθετική εκτίμηση κανονικοποιημένη έτσι ώστε $\upsilon_\mathfrak{p}(K^*) = \mathbb{Z}$. Αν $\mathfrak{p}$ άπειρος

$$\upsilon_\mathfrak{p}(a) = -\log|\tau a|$$

όπου $\tau : K \to \mathbb{C}$ η αντίστοιχη εμφύτευση.
Για τυχαίο πρώτο $\mathfrak{p} \mid p$ (όπου p πρώτος ή ∞) θέτουμε ακόμα

$$f_\mathfrak{p} = [\kappa(\mathfrak{p}) : \kappa(p)]$$

έτσι $f_{\mathfrak{p}} = [k_{\mathfrak{p}} : \mathbb{R}]$ όταν $\mathfrak{p} \mid \infty$ και επιπλέον ορίζουμε νόρμα

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = \begin{cases} p^{f_{\mathfrak{p}}} & \text{αν } \mathfrak{p} \nmid \infty \\ e^{f_{\mathfrak{p}}} & \text{αν } \mathfrak{p} \mid \infty \end{cases}$$

Έτσι ο e θεωρείται άπειρος πρώτος και η επέκταση $\mathbb{C} \mid \mathbb{R}$ αδιακλάδωτη με βαθμό αδρανείας 2. Ορίζουμε την απόλυτη τιμή $\|\|_{\mathfrak{p}} : K \to \mathbb{R}$ ως

$$\|a\|_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\upsilon_{\mathfrak{p}}(a)}$$

για $a \neq 0$ και $\|0\|_{\mathfrak{p}} = 0$.
Για πεπερασμένες επεκτάσεις $L \mid K$ θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{P}$ τους πρώτους του L και θα γράφουμε $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ όταν ο περιορισμός της κλάσης $\mathfrak{P}$ στο K δίνει $\mathfrak{p}$. Για τους άπειρους πρώτους $\mathfrak{P}$ ορίζουμε βαθμούς αδρανείας και δείκτες διακλάδωσης ως

$$f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}], \quad e_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = 1$$

αντίστοιχα. Ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1.1.2. (i) $\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}] = [L : K]$,

(ii) $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}}$,

(iii) $\upsilon_{\mathfrak{P}}(a) = e_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \upsilon_{\mathfrak{p}}(a)$ *για* $a \in K^*$,

(iv) $\upsilon_{\mathfrak{p}}(N_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}(a)) = f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \upsilon_{\mathfrak{P}}(a)$ *για* $a \in L^*$,

(v) $\|a\|_{\mathfrak{P}} = \|N_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}(a)\|_{\mathfrak{p}}$*για* $a \in L$.

Οι κανονικοποιημένες εκτιμήσεις $\|\|_{\mathfrak{p}}$ ικανοποιούν επιπλέον τον παρακάτω τύπο

$$\prod_{\mathfrak{p}} \|a\|_{\mathfrak{p}} = 1 \tag{1.1}$$

όπου $\|a\|_{\mathfrak{p}} = 1$ για σχεδόν κάθε $\mathfrak{p}$ και κάθε $a \in K^*$.
Θα συμβολίζουμε με J($\mathcal{O}$) την ομάδα των κλασματικών ιδεωδών του K και με P($\mathcal{O}$) την υποομάδα των κύριων κλασματικών ιδεωδών, τέλος με

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{O}) = \mathrm{J}(\mathcal{O})/\mathrm{P}(\mathcal{O})$$

την ομάδα κλάσεων ιδεωδών του K.
Θα επεκτείνουμε την έννοια του κλασματικού ιδεώδους ενσωματώνοντας τα σημεία στο άπειρο.

Ορισμός 1.1.3. ***Πλήρες*** *ιδεώδες ονομάζουμε ένα στοιχείο της ομάδας*

$$\mathrm{J}(\bar{\mathcal{O}}) := \mathrm{J}(\mathcal{O}) \times \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}_+^*$$

Για περισσότερη ενότητα στον συμβολισμό για έναν άπειρο πρώτο $\mathfrak{p}$ και για έναν πραγματικό αριθμό $v \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\mathfrak{p}^v := e^v \in \mathbb{R}_+^*$$

Για ένα σύνολο πραγματικών αριθμών $v_\mathfrak{p}, \mathfrak{p} \mid \infty$ με $\prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}}$ θα συμβολίζουμε το διάνυσμα

$$\prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}} = (..., e^{v_\mathfrak{p}}, ...) \in \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}_+^*$$

και όχι το πραγματικό γινόμενο. Τότε κάθε πλήρες ιδεώδες $a \in \mathrm{J}(\bar{\mathcal{O}})$ διασπάται σε

$$a = \prod_{\mathfrak{p}\nmid\infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}}$$

όπου $v_\mathfrak{p}$ ακέραιοι για το πεπερασμένο κομμάτι και πραγματικοί για το άπειρο, τα οποία και θα συμβολίζουμε ως a_f και a_∞ αντίστοιχα.
Σε κάθε στοιχείο $a \in K^*$ αντιστοιχούμε το πλήρες κύριο ιδεώδες

$$[a] = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(a)} = (a) \times \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}(a)}$$

το σύνολο των οποίων συμβολίζουμε με $\mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}})$ και η ομάδα πηλίκο

$$\mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{O}}) = \mathrm{J}(\bar{\mathcal{O}})/\mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}})$$

ονομάζεται **πλήρης ομάδα κλάσεων** ή **πλήρης ομάδα Picard**.

Ορισμός 1.1.4. *Η* ***απόλυτη νόρμα*** *ενός πλήρους ιδεώδους* $a = \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}}$ *ορίζεται να είναι ο θετικός πραγματικός αριθμός*

$$\mathfrak{N}(a) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_\mathfrak{p}}.$$

Η απόλυτη νόρμα είναι πολλαπλασιαστική και επάγει επιμορφισμό $\mathfrak{N} : \mathrm{J}(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathbb{R}_+^*$. Από τον τύπο (1 . 3) για ένα κύριο ιδεώδες έχουμε ότι $\mathfrak{N}([a]) = 1$ οπότε επάγεται επιμορφισμός

$$\mathfrak{N} : \mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathbb{R}_+^*$$

Απομένει να ορίσουμε ομομορφισμούς των ομάδων πλήρων ιδεωδών για επεκτάσεις σωμάτων $L \mid K$.

$$J(\bar{\mathcal{O}}_K) \underset{N_{L|K}}{\overset{i_{L|K}}{\rightleftarrows}} J(\bar{\mathcal{O}}_L)$$

ως εξής

$$i_{L|K}(\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}}) = \prod_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} v_\mathfrak{p}}$$
$$N_{L|K}(\prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{v_\mathfrak{P}}) = \prod_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} v_\mathfrak{P}}$$

Ικανοποιείται η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1.1.5. (i) *Για μια αλυσίδα σωμάτων* $K \subset L \subset M$ *ισχύει ότι* $N_{M|K} = N_{L|K} \circ N_{M|L}$ *και* $i_{M|K} = i_{M|L} \circ i_{L|K}$.

(ii) $N_{L|K}(i_{L|K}a) = a^{[L:K]}, a \in J(\bar{\mathcal{O}}_K)$.

(iii) $\mathfrak{N}(N_{L|K}(\mathfrak{U})) = \mathfrak{N}(\mathfrak{U}), \mathfrak{U} \in J(\bar{\mathcal{O}}_L)$.

(iv) *Αν $L \mid K$ Galois με ομάδα G τότε για κάθε πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{P}$ ισχύει $N_{L|K}(\mathfrak{P})\mathcal{O}_L = \prod_{\sigma\in G}\sigma\mathfrak{P}$.*

(v) *Για ένα πλήρες κύριο ιδεώδες $[a]$ του K , αντίστ . L ισχύει*

$$i_{L|K}([a]) = [a], \textit{αντίστ.} N_{L|K}([a]) = [N_{L|K}(a)].$$

.

(vi) $N_{L|K}(\mathfrak{U}_f) = N_{L|K}(\mathfrak{U})_f$ *είναι το ιδεώδες του K που παράγεται από όλες τις νόρμες $N_{L|K}(a), a \in \mathfrak{U}_f$.*

Απόδειξη. (i) Απλή συνέπεια των αντίστοιχων πολλαπλασσιστικών τύπων για τους βαθμούς αδρανείας και δείκτες διακλάδωσης.
(ii) Προκύπτει από την προηγούμενη πρόταση σε συνδυασμό με τη θεμελιώδη ταυτότητα $\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = [L:K]$.
(iii) Πάλι από προηγούμενη πρόταση αληθεύει στους γεννήτορες $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{N}(N_{L|K}(\mathfrak{P})) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}} = \mathfrak{N}(\mathfrak{P}),$$

συνεπώς για κάθε ιδεώδες.
(iv) Το πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ υπό του $\mathfrak{P}$ παραγοντοποιείται στον δακτύλιο ακεραίων του L ως $\mathfrak{p} = (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r)^e$, όπου $\mathfrak{P}_i = \sigma_i\mathfrak{P}, \sigma_i \in G/G_{\mathfrak{P}}$, συνεπώς

$$N_{L|K}(\mathfrak{P})\mathcal{O}_L = \mathfrak{p}^f\mathcal{O}_L = \prod_{i=1}^{r}\mathfrak{P}^{ef}{}_i = \prod_{i=1}^{r}\prod_{\tau\in G_{\mathfrak{P}}}\sigma_i\tau\mathfrak{P} = \prod_{\sigma\in G}\sigma\mathfrak{P}$$

ο τύπος ικανοποιείται για κάθε ιδεώδες.
(v) Για κάθε $a \in K^*$ η ίδια πρόταση μας δίνει ότι $v_{\mathfrak{P}}(a) = e_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}v_{\mathfrak{p}}(a)$. Συνεπώς

$$i_{L|K}([a]) = i_{L|K}(\prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(a)}) = \prod_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}^{v_{\mathfrak{P}}(a)} = [a]$$

Για $a \in L^*$ η πρόταση σε συνδυασμό με την πρόταση 2.3.5 του παραρτήματος δίνει $v_{\mathfrak{p}}(N_{L|K}(a)) = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}v_{\mathfrak{P}}(a)$ άρα

$$N_{L|K}([a]) = N_{L|K}(\prod_{\mathfrak{P}}\mathfrak{P}^{v_{\mathfrak{P}}(a)}) = \prod_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(N_{L|K}(a)} = [N_{L|K}].$$

(vi) Έστω a_f το ιδεώδες του K που παράγεται από τα $N_{L|K}(a), a \in \mathfrak{U}_f$. Αν $\mathfrak{U}_f$ κύριο τότε από το προηγούμενο $a_f = (N_{L|K}(a))$. Εφαρμόζουμε την ίδια επιχειρηματολογία στις τοπικοποιήσεις $\mathcal{O}_{L\mathfrak{P}} \mid \mathcal{O}_{K\mathfrak{p}}$, οι οποίοι δακτύλιοι από γνωστή θεωρία είναι κυρίων ιδεωδών. Κατά συνέπεια

$$(a_f)_{\mathfrak{p}} = N_{L|K}((\mathfrak{U})_{\mathfrak{p}}) = N_{L|K}(\mathfrak{U}_f)_{\mathfrak{p}}$$

για κάθε $\mathfrak{p}$ οπότε $a_f = N_{L|K}(\mathfrak{U}_f)$. □

Εφόσον οι ομομορφισμοί $i_{L|K}$ και $N_{L|K}$ αντιστοιχούν κύρια ιδεώδη σε κύρια επάγουν ομομορφισμούς στις ομάδες Picard. Μάλιστα ικανοποιείται η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.1.6. *Για κάθε πεπερασμένη επέκταση $L \mid K$ το παρακάτω (διπλό) διάγραμμα είναι μεταθετικό.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{O}}_L) \arrow[r, "\mathfrak{N}"] \arrow[d, shift left, "N_{L|K}"] & \mathbb{R}^*{}_+ \arrow[d, shift left, "id"] \\ \mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{O}}_K) \arrow[r, "\mathfrak{N}"] \arrow[u, shift left, "i_{L|K}"] & \mathbb{R}^*{}_+ \arrow[u, shift left, "{[L:K]}"] \end{tikzcd}$$

Απομένει να μεταφέρουμε τα μέχρι στιγμής στη γλώσσα των divisors. Η ομάδα των divisors στο εξής $\mathrm{Div}(\mathcal{O})$ αποτελείται από όλα τα αθροίσματα

$$D = \sum_{\mathfrak{p}\nmid\infty} v_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p},$$

με $v_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ και $v_{\mathfrak{p}} = 0$ για σχεδόν κάθε $\mathfrak{p}$. Αντίστοιχα έχουμε την υποομάδα των κύριων divisors $\mathrm{P}(\mathcal{O})$ με στοιχεία $\mathrm{div}(f) = \sum_{\mathfrak{p}\nmid\infty} v_{\mathfrak{p}}(f)\mathfrak{p}$ και την ομάδα κλάσεων

$$CH^1(\mathcal{O}) = \mathrm{Div}(\mathcal{O})/\mathrm{P}(\mathcal{O})$$

η οποία ξέρουμε ήδη ([13]) ότι είναι ισόμορφη με την ομάδα κλάσεων ιδεωδών Cl_K και πεπερασμένη. Υλοποιούμε την αντίστοιχη γενίκευση με την προσθήκη των άπειρων σημείων.

Ορισμός 1.1.7. ***Πλήρη divisor*** *ή* ***divisor του Arakelov*** *του K ονομάζουμε ένα τυπικό άθροισμα*

$$D = \sum_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p},$$

όπου $v_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z},$ αν $\mathfrak{p} \nmid \infty$ και $v_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{R},$ αν $\mathfrak{p} \mid \infty$ σχεδόν όλα μηδέν.

Την ομάδα που σχηματίζουν θα τη συμβολίζουμε με $\mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})$. Παρατηρούμε ότι παραγοντοποιείται σε

$$\mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}}) \simeq \mathrm{Div}(\mathcal{O}) \times \oplus_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}\mathfrak{p}.$$

Θεωρώντας στο δεξί μέλος τη συνήθη τοπολογία στο αριστερό τη διακριτή και εφοδιάζοντας την ομάδα με την τοπολογία γινόμενο η $\mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})$ αποκτά δομή τοπικά συμπαγούς ομάδας.
Περνάμε στην μελέτη του ομομορφισμού

$$\mathrm{div} : K^* \to \mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}}), \quad \mathrm{div}(f) = \sum_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}}(f)\mathfrak{p}.$$

Τα στοιχεία της εικόνας τα ονομάζουμε **πλήρεις κύριους divisors**. Η σύνθεση της συνάρτησης $\mathrm{div} : K^* \to \mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})$ με την απεικόνιση

$$\mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}}) \to \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}, \quad \sum_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p} \longmapsto (v_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}|\infty}$$

είναι μέχρι προσήμου ίση με τον λογάριθμο

$$\lambda : K^* \to \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}, \quad \lambda(f) = (\cdots, \log|f|_{\mathfrak{p}}, \cdots),$$

της θεωρίας Minkowski (βλέπε παράρτημα). Απεικονίζει τις μονάδες $\mathcal{O}^*$ σε ένα πλήρες πλέγμα $\Gamma = \lambda(\mathcal{O}^*)$ στο υπερεπίπεδο μηδενικού ίχνους $H = \{(x_{\mathfrak{p}}) \in \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R} | \sum_{\mathfrak{p}|\infty} x_{\mathfrak{p}} = 0\}$.

Πρόταση 1.1.8. *Ο πυρήνας της απεικόνισης* div : $K^* \to \mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})$ *είναι η ομάδα των μονάδων* $\mu(K)$ *και η εικόνα* $\mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}})$ *είναι διακριτή υποομάδα της* $\mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})$.

Απόδειξη. Όπως προαναφέραμε η σύνθεση της div με $\mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}}) \to \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}$ δίνει τον ομομορφισμό $\lambda : K^* \to \prod_{\mathfrak{p}|\infty}$ ο οποίος εντάσσεται στην ακριβή ακολουθία

$$1 \to \mu(K) \to \mathcal{O}^* \xrightarrow{\lambda} \Gamma \to 0,$$

άρα $\mu(K)$ είναι ο πηρύνας της div . Εφόσον το Γ είναι πλέγμα υπάρχει γειτονιά U του 0 στο $\prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}$ που δεν περιέχει άλλα στοιχεία του Γ. Θεωρώντας τον ισομορφισμό $a : \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \to \oplus_{\mathfrak{p}|\infty}\mathbb{R}\mathfrak{p},\ (v_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}|\infty} \longmapsto \sum_{\mathfrak{p}|\infty} \frac{v_{\mathfrak{p}}}{f_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{p}$ το σύνολο $\{0\} \times aU \subset \mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})$ είναι μια γειτονιά του 0 στην $\mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})$ πυ δεν περιλαμβάνει άλλον κύριο πλήρη divisor εκτός του 0. Άρα $\mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}})$ είναι διακριτή υποομάδα της $\mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})$. □

Ορισμός 1.1.9.

$$\text{Η ομάδα } CH^1(\bar{\mathcal{O}}) = \mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})/\mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}})$$

ονομάζεται ***ομάδα κλάσεων των πλήρων divisors*** *ή* ***ομάδα κλάσεων Arakelov*** .

Εφόσον η $\mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}})$ είναι διακριτή και ιδιέταιρα κλειστή, η $\mathrm{CH}^1(\bar{\mathcal{O}})$ είναι συμπαγής και Hausdorff τοπολογική ομάδα με την τοπολογία πηλίκο. Σε αυτήν εισάγουμε την **απεικόνιση βαθμίδας** με τιμές στο $\mathbb{R}$. Επάγεται από τον συνεχή ομοιμορφισμό

$$\deg : \mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathbb{R},$$

που απεικονίζει έναν divisor $D = \sum_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$ στον αριθμό

$$\deg(D) = \sum_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}} \log \mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = \log(\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}}).$$

Από τον τύπο για τα γινόμενα εκτιμήσεων διαπιστώνουμε ότι για ένα κύριο πλήρη divisor ισχύει

$$\deg(\mathrm{div}(f)) = \sum_{\mathfrak{p}} \log \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}(f)} = \log(\prod_{\mathfrak{p}} |f|_{\mathfrak{p}}^{-1}) = 0.$$

Δηλαδή υπάρχει καλά ορισμένη απεικόνιση

$$\deg : CH^1(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathbb{R}.$$

Ο πηρύνας της $CH^1(\bar{\mathcal{O}})^0$ σχετίζεται με τις μοναδες $\mathcal{O}^*$ και την ομάδα κλάσεων ιδεωδών σύμφωνα με την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.1.10. *Εστω* $\Gamma = \lambda(\mathcal{O}^*)$ *το πλήρες πλέγμα της θεωρίας Minkowski στο υπερεπίπεδο* $= \{(x_{\mathfrak{p}}) \in \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R} | \sum_{\mathfrak{p}|\infty} x_{\mathfrak{p}} = 0\}$. *Η παρακάτω ακολουθία είναι ακριβής*

$$0 \to H/\Gamma \to CH^1(\bar{\mathcal{O}})^0 \to CH^1(\mathcal{O}) \to 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})^0$ ο πηρύνας της $\deg : \mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathbb{R}$. Θεωρώντας την ακριβή ακολουθία

$$0 \to \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R} \xrightarrow{a} \mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathrm{Div}(\mathcal{O}) \to 0,$$

όπου $a((v_\mathfrak{p})) = \sum_{\mathfrak{p}|\infty} \frac{v_\mathfrak{p}}{f_\mathfrak{p}}\mathfrak{p}$ και περιορίζοντας στην $\mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})^0$ προκύπτει το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \lambda(\mathcal{O}^*) \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{P}(\mathcal{O}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H \arrow[r, "a"] & \mathrm{Div}(\bar{\mathcal{O}})^0 \arrow[r] & \mathrm{Div}(\mathcal{O}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Από το λήμμα του φιδιού ([6]) προκύπτει λοιπόν η ζητούμενη ακριβής ακολουθία

$$0 \to H/\lambda(\mathcal{O}^*) \to CH^1(\bar{\mathcal{O}})^0 \to CH^1(\mathcal{O}) \to 0.$$

□

Παρατήρηση 1.1.11. *Εύκολα διαπιστώνει κανείς κοιτώντας την παραπάνω ακολουθία ότι τα θεμελιώδη θεωρήματα της αλγεβρικής θεωρίας αριθμών, δηλαδή το πεπερασμένο της ομάδας κλάσεων και το θεώρημα μονάδων του Dirichlet, και το ότι η $CH^1(\bar{\mathcal{O}})^0$ είναι συμπαγής ομάδα, είναι ισοδύναμα σαν προτάσεις.*

Υπάρχει πλήρης αντιστοιχία των πλήρων divisors και ιδεωδών, που δίνεται από τις αμοιβαία αντίστροφες απεικονίσεις

$$\begin{aligned}
\mathrm{div} : \mathrm{J}(\bar{o}) \to \mathrm{Div}(\bar{o}), &\quad \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}} \longmapsto \sum_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}\mathfrak{p}, \\
\mathrm{Div}(\bar{o}) \to \mathrm{J}(\bar{o}), &\quad \sum_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}\mathfrak{p} \longmapsto \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}}
\end{aligned}.$$

Πρόταση 1.1.12. *Η απεικόνιση* $\mathrm{div} : \mathrm{J}(\bar{o}) \to \mathrm{Div}(\bar{o})$ *επάγει ισομορφισμούς (τοπολογικούς)*

$$\mathrm{div} : \mathrm{Pic}(\bar{o}) \xrightarrow{\sim} CH^1(\bar{o}).$$

Απόδειξη. Προφανής. □

Η σχέση των ομομορφισμών $\mathfrak{N} : \mathrm{J}(\bar{o}) \to \mathbb{R}_+^*$ και $\deg : \mathrm{Div}(\bar{o}) \to \mathbb{R}$ περιγράφεται από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\bar{o})^0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Pic}(\bar{o})^0 \arrow[r, "\mathfrak{N}"] \arrow[d, "\mathrm{div}"', "\cong"] & \mathbb{R}_+^* \arrow[r] \arrow[d, "-\log"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & CH^1(\bar{o})^0 \arrow[r] & CH^1(\bar{o}) \arrow[r, "\deg"] & \mathbb{R} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

1.2 Διαφορίζουσα και διακρίνουσα

Έστω $L \mid K$ πεπερασμένη διαχωρίσιμη επέκταση σωμάτων όπου $\mathcal{o} \subset K$ δακτύλιος Dedekind με σώμα κλασμάτων K και $\mathcal{O} \subset L$ η αλγεβρική του κλειστότητα στο σώμα L. Στο εξής υποθέτουμε ότι οι επεκτάσεις των σωμάτων υπολοίπων $\lambda \mid \kappa$ είναι διαχωρίσιμες.
Σε κάθε κλασματικό ιδεώσες $\mathfrak{U}$ του L αντιστοιχούμε το δυικό $\mathcal{O}$ πρότυπο

$$^*\mathfrak{U} = \{x \in L | \mathrm{Tr}(x\mathfrak{U}) \subset \mathcal{o}\},$$

το οποίο είναι επίσης κλασματικό ιδεώδες. Πράγματι αν $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{O}$ βάση της $L \mid K$ και $d = \det(\mathrm{Tr}(a_i a_j))$ τότε $\alpha d^*\mathfrak{U} \subset \mathcal{O}$ για κάθε μη μηδενικό $\alpha \in \mathfrak{U} \cap \mathcal{o}$. Αν $x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \in^* \mathfrak{U}, x_i \in K$ τότε τα αx_i ικανοποιούν τις γραμμικές εξισώσεις $\sum_{i=1}^n \alpha x_i \mathrm{Tr}(a_i a_j) = \mathrm{Tr}(a_i a_j) \in \mathcal{o}$ απ'όπου συμπεραίνουμε ότι $d\alpha x_i \in \mathcal{o}$ άρα και $d\alpha x \in \mathcal{o}$.

Ορισμός 1.2.1. *Το κλασματικό ιδεώδες*

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}} =^* \mathcal{O} = \{x \in L | Tr(x\mathcal{O}) \subset \mathcal{o}\}$$

ονομάζεται ***συμπληρωματικό Dedekind πρότυπο*** *ή* ***αντίστροφη διαφορίζουσα****. Το αντίστροφο*

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}} = \mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}{}^{-1}$$

πρότυπο ονομάζεται ***διαφορίζουσα*** *της επέκτασης.*

'Οταν είναι ξεκάθαρο σε ποιους δακτύλιους $\mathcal{o}$ και $\mathcal{O}$ αναφερόμαστε αντί για $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ θα γράφουμε $\mathfrak{D}_{L|K}$. Σχετικά με την διαφορίζουσα έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1.2.2. (i) *Για πύργο σωμάτων $K \subset L \subset M$ ισχύει $\mathfrak{D}_{M|K} = \mathfrak{D}_{M|L}\mathfrak{D}_{L|K}$.*

(ii) *Για τυχαίο πολλαπλασιστικό σύνολο $S \subset \mathcal{o}$ ισχύει $\mathfrak{D}_{S^{-1}\mathcal{O}|S^{-1}\mathcal{o}} = S^{-1}\mathfrak{D}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$.*

(iii) *Αν $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ πρώτα ιδεώδη με αντίστοιχες πληρώσεις $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} \mid \mathcal{o}_{\mathfrak{p}}$ τότε*

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{D}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}|\mathcal{o}_{\mathfrak{p}}}.$$

Απόδειξη. i) Έστω A, B, C οι δακτύλιοι ακεραίων των K, L, M αντίστοιχα. Αρκεί να δειχθεί ότι

$$\mathfrak{C}_{C|A} = \mathfrak{C}_{C|B}\mathfrak{C}_{B|A}.$$

Για το σκέλος $\supset$ ειναι φανερό ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{M|K}(\mathfrak{C}_{C|B}\mathfrak{C}_{B|A}C) &= \mathrm{Tr}_{L|K}\mathrm{Tr}_{M|L}(\mathfrak{C}_{C|B}\mathfrak{C}_{B|A}C)\\ &= \mathrm{Tr}_{L|K}(\mathfrak{C}_{B|A}\mathrm{Tr}_{M|L}(\mathfrak{C}_{C|B}C)) \subset A\end{aligned}$$

Για την περίπτωση $\subset$ κάνουμε μια σειρά από παρατηρήσεις. Αρχικά $BC = C$ και

$$\mathrm{Tr}_{M|K}(\mathfrak{C}_{C|A}C) = \mathrm{Tr}_{L|K}(B\mathrm{Tr}_{M|L}(\mathfrak{C}_{C|A}C)) \subset A$$

άρα $\mathrm{Tr}_{M|L}(\mathfrak{C}_{C|A}C) \subset \mathfrak{C}_{B|A}$ και κατά συνέπεια (με την επιπλέον παρατήρηση ότι $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ ακέραιο ιδεώδες)

$$\mathrm{Tr}_{M|L}(\mathfrak{C}_{B|A}{}^{-1}\mathfrak{C}_{C|A}C) = \mathfrak{C}_{B|A}{}^{-1}\mathrm{Tr}_{M|L}(\mathfrak{C}_{C|A}C) \subset B.$$

Άρα τελικά ${\mathfrak{C}_{C|A}}^{-1}\mathfrak{C}_{C|A} \subset \mathfrak{C}_{C|B}$ και $\mathfrak{C}_{C|A} \subset \mathfrak{C}_{C|B}\mathfrak{C}_{B|A}$.
ii) Τετριμμένο.
iii) Από το δεύτερο μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{o}$ είναι δακτύλιος διακριτής εκτίμησης. Στόχος είναι να δείξουμε ότι το $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}|\mathcal{o}_{\mathfrak{p}}}$. Υπενθυμίζουμε τον τύπο

$$\mathrm{Tr}_{L|K} = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathrm{Tr}_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}.$$

Έστω $x \in \mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ και $y \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$. Το θεώρημα προσέγγισης μας επιτρέπει να βρούμε ένα $\eta \in \mathcal{O}$ κοντά στο y με την $v_{\mathfrak{P}}$ και κοντά στο 0 σχετικά με την $v_{\mathfrak{P}'}$, όπου $\mathfrak{P}' \mid \mathfrak{p}, \mathfrak{P}' \neq \mathfrak{P}$. Το αριστερό σκέλος της εξίσωσης

$$\mathrm{Tr}_{L|K}(x\eta) = \mathrm{Tr}_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}(x\eta) + \sum_{\mathfrak{P}' \neq \mathfrak{P}} \mathrm{Tr}_{L_{\mathfrak{P}'}|K_{\mathfrak{p}}}(x\eta)$$

ανήκει στο $\mathcal{o}_{\mathfrak{p}}$, εφόσον $\mathrm{Tr}_{L|K}(x\eta) \in \mathcal{o} \subset \mathcal{o}_{\mathfrak{p}}$, καθώς και τα στοιχεία $\mathrm{Tr}_{L_{\mathfrak{P}'}|K_{\mathfrak{p}}}(x\eta)$ διότι είναι κοντά στο 0 με τη νόρμα $v_{\mathfrak{p}}$. Άρα και $\mathrm{Tr}_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}(xy) \in \mathcal{o}_{\mathfrak{p}}$ και $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}} \subset \mathfrak{C}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}|\mathcal{o}_{\mathfrak{p}}}$. Αν τώρα $x \in \mathfrak{C}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}|\mathcal{o}_{\mathfrak{p}}}$ και $\xi \in L$ αρκετά κοντά στο x σε σχέση με τη $v_{\mathfrak{P}}$ και αρκετά κοντά στο 0 σε σχέση με τις $v_{\mathfrak{P}'}$ τότε $\xi \in \mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$. Για $y \in \mathcal{O}$, $\mathrm{Tr}_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}(\xi y) \in \mathcal{o}_{\mathfrak{p}}$ επίσης $\mathrm{Tr}_{L_{\mathfrak{P}'}|K_{\mathfrak{p}}}(xy) \in \mathcal{o}_{\mathfrak{p}}$ για $\mathfrak{P}' \neq \mathfrak{p}$ διότι αυτά τα στοιχεία είναι κοντά στο 0. Άρα $\mathrm{Tr}_{L|K}(\xi y) \in \mathcal{o}_{\mathfrak{p}} \cap K = \mathcal{o}$ άρα $\xi \in \mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ δηλαδή το ζητούμενο. □

Αν θέσουμε $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_{L|K}$ και $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{D}_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}$, θεωρώντας συγχρόνως το $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}$ σαν ιδεώδες του $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O} \cap \mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}$), τότε από το τρίτο σκέλος της προηγούμενης πρότασης έχουμε σαν απλή συνέπεια:

Συνέπεια 1.2.3. $\mathfrak{D} = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}$

Ο όρος "διαφορίζουσα" δικαιολογείται από την παρακάτω περιγραφή. Για $a \in \mathcal{O}$ με ελάχιστο πολυώνυμο $f(x) \in \mathcal{O}[x]$ ορίζουμε

$$\delta_{L|K}(a) = \begin{cases} f'(a) & \text{αν } L = K(a) \\ 0 & \text{αν } L \neq K(a) \end{cases}$$

τη **διαφορίζουσα του στοιχείου α**.

Πρόταση 1.2.4. *Αν $\mathcal{O} = \mathcal{o}[\alpha]$ τότε η διαφορίζουσα είναι το κύριο ιδεώδες*

$$\mathfrak{D}_{L|K} = (\delta_{L|K}(\alpha)).$$

Απόδειξη. Έστω $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ το ελάχιστο πολυώνυμο του α και

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}.$$

Η δυική βάση του $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ σε σχέση με την απεικόνιση $\mathrm{Tr}(xy)$ είναι η

$$\frac{b_0}{f'(\alpha)}, \ldots, \frac{b_{n-1}}{f'(\alpha)}.$$

Διότι αν $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ οι ρίζες του πολυωνύμου τότε

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{x-\alpha_i} \frac{\alpha_i^r}{f'(\alpha_i)} = x^r,\ 0 \leq r \leq n-1,$$

καθώς η διαφορά τους είναι πολυώνυμου βαθμού $\leq n-1$ με ρίζες $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, οπότε είναι μηδενικό. Η παραπάνω εξίσωση δεν είναι άλλη από την

$$\mathrm{Tr}[\frac{f(x)}{x-\alpha_i}\frac{\alpha_i^r}{f^{'}(\alpha_i)}] = x^r.$$

Συγκρίνοντας δυνάμεις του x παίρνουμε το ζητούμενο. Οπότε και εφόσον $\mathcal{O} = \mathcal{o} + \mathcal{o}\,\alpha + \cdots + \mathcal{o}\,\alpha^{n-1}$ παίρνουμε

$$\mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}} = f^{'}(\alpha)^{-1}(\,\mathcal{o}b_0 + \cdots + \,\mathcal{o}b_{n-1}).$$

Μέσω της αναδρομής

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= 1 \\ b_{n-2} - \alpha b_{n-1} &= a_{n-1} \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

προκύπτει ότι

$$b_{n-i} = \alpha^{i-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_{n-i+1}.$$

Άρα $\mathcal{o}b_0 + \cdots + \,\mathcal{o}b_{n-1} = \mathcal{o}[\alpha] = \mathcal{O}$ οπότε $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}} = f^{'}(\alpha)^{-1}\mathcal{O}$. □

Για τη γενική περίπτωση έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Θεώρημα 1.2.5. *Το $\mathfrak{D}_{L|K}$ είναι το ιδεώδες που παράγεται από όλες τις διαφορίζουσες $\delta_{L|K}(a)$ για $a \in \mathcal{O}$.*

Απόδειξη. Έστω $a \in \mathcal{O}$ τέτοιο ώστε $L = K(a)$ και $f(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο αυτού του στοιχείου. Για να δειχθεί ότι $f^{'}(a) \in \mathfrak{D}_{L|K}$ θεωρούμε τον «οδηγό» $h = h_{\mathcal{o}[a]} = \{x \in L | x\mathcal{O} \subset \mathcal{o}[a]\}$. Θέτοντας $b = f^{'}(a)$ έχουμε για $x \in L$:

$$\begin{aligned} x \in h \Leftrightarrow x\mathcal{O} \subset \mathcal{o}[a] \Leftrightarrow b^{-1}x\mathcal{O} \subset b^{-1}\mathcal{o}[a] =^{*} \mathcal{o}[a] \\ \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(b^{-1}x\mathcal{O}) \subset \mathcal{o} \Leftrightarrow b^{-1}x \in \mathfrak{D}_{L|K}{}^{-1} \Leftrightarrow x \in b\mathfrak{D}_{L|K}{}^{-1} \end{aligned}$$

Συνεπώς $(f^{'}(a)) = h\mathfrak{D}_{L|K}$. Ειδικότερα $f^{'}(a) \in \mathfrak{D}_{L|K}$.
Άρα το $\mathfrak{D}_{L|K}$ διαιρεί όλες τις διαφορίζουσες $\delta_{L|K}(a)$. Μένει να δείξουμε ότι είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης για το οποίο αρκεί για κάθε πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{P}$ να βρούμε ένα $a \in \mathcal{O}$ τέτοιο ώστε $L = K(a)$ και $v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{L|K}) = v_{\mathfrak{P}}(f^{'}(a))$.
Θεωρούμε το σώμα L εμφυτευμένο στην διαχωρίσιμη κλειστότητα $\bar{K}_{\mathfrak{p}}$ του$K_{\mathfrak{p}}$, έτσι ώστε η απόλυτη νόρμα του $\bar{K}$ να καθορίζει τον πρώτο $\mathfrak{P}$. Από την πρόταση 2.3.5 υπάρχει στοιχείο $\beta \in \mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$ για το οποίο $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} = \mathcal{o}[\beta]$ και μάλιστα η ίδια σχέση ικανοποιείται και για τυχαίο a αρκετά κοντινό στο β. Από τα προηγούμενα έχουμε

$$v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{L|K}) = v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}) = v_{\mathfrak{P}}(\delta_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}(a)).$$

Αρκεί λοιπόν να βρεθεί στοιχείο $a \in \mathcal{O}$ με $L = K(a)$ και

$$v_{\mathfrak{P}}(\delta_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}(a)) = v_{\mathfrak{P}}(\delta_{L|K}(a)).$$

Έστω λοιπόν $\sigma_2, \ldots, \sigma_r : L \to \bar{K}_{\mathfrak{p}}$ οι εμφυτεύσεις που δίνουν τους υπόλοιπους διαιρέτες $\mathfrak{P}_i \mid \mathfrak{p}, \mathfrak{P}_i \neq \mathfrak{P}$. Έστω τώρα $\alpha \in \mathcal{o}_{\mathfrak{p}}$ τέτοιο ώστε

$$\|\tau\beta - \alpha\| = 1, \forall \tau \in G_{\mathfrak{p}} = G(\bar{K}_{\mathfrak{p}}|K_{\mathfrak{p}}) \qquad (1.2)$$

(Π.χ $\alpha = 1$ αντιστ. $\alpha = 0$ για $\tau\beta \pmod{\mathfrak{P}} = 0$, αντιστ $\alpha = 0$ για $\tau\beta \pmod{\mathfrak{P}} \neq 0$). Από κινεζικό θεώρημα υπάρχει $\gamma \in \mathcal{O}$ με $\|\gamma - \beta\|, \|\sigma_i\gamma - \alpha\|$ πολύ μικρά. Μπορούμε ακόμη να υποθέσουμε ότι $L = K(\gamma)$(πράγματι για στοιχείο y με $L = K(y)$ και π πρωταρχικό στοιχείο του ιδεώδους $\mathfrak{p}$ και εφόσον υπάρχουν πεπερασμένα ενδιάμεσα σώματα μεταξύ L και K για κάποια αρκετά μεγάλα $n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m$ θα έχουμε $K(\gamma + \pi^n y) = K(\gamma + \pi^m y) = \ldots = K(y)$.). Εφόσον γ κοντά στο β έχουμε $\mathcal{O}_{\mathfrak{P}} = \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}[\gamma]$ και

$$\delta_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}(\gamma) = \prod_{\tau \neq 1}(\gamma - \tau\gamma),$$

όπου τ $K_{\mathfrak{p}}$ εμφύτευση $L_{\mathfrak{P}} \to \bar{K}_{\mathfrak{p}}$. Επιπλέον

$$\delta_{L|K}(\gamma) = \prod_{\sigma \neq 1}(\gamma - \sigma\gamma) = \prod_{\tau \neq 1}(\gamma - \tau\gamma)\prod_{i=2}^{r}\prod_{j}(\gamma - \tau_{ij}\sigma_i\gamma),$$

όπου σ διατρέχει τις K εμφυτεύσεις διάφορες της μονάδας και $\tau_{ij} \in G_{\mathfrak{p}}$. Όμως

$$\|\gamma - \tau_{ij}\sigma_i\gamma\| = \|\tau_{ij}^{-1}\gamma - \sigma_i\gamma\| = \|\tau_{ij}^{-1}\gamma - \gamma + \gamma - \sigma_i\gamma\| = 1,$$

αφού $\|\gamma - \sigma_i\gamma\|$ μικρό και $\tau_{ij}^{-1}\gamma$ κοντά σε $\tau_{ij}^{-1}\beta$ από 1.2 . Συνεπώς $v_{\mathfrak{P}}(\delta_{L|K}(\gamma)) = v_{\mathfrak{P}}(\prod_{\tau \neq 1}(\gamma - \tau\gamma)) = v_{\mathfrak{P}}(\delta_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}(\gamma))$ δηλαδή το ζητούμενο. □

Το ιδεώδες της διαφορίζουσας καθορίζει τη συμπεριφορά ως προς την διακλάδωση της επέκτασης $L \mid K$ σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.6. *Ένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{P}$ διακλαδίζεται πάνω από το K ανν $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{D}_{L|K}$. Έστω $\mathfrak{P}^s$ η μέγιστη δύναμη στο $\mathfrak{D}_{L|K}$ και e ο δείκτης διακλάδωσης του $\mathfrak{P}$. Τότε έχουμε*

$$s = e - 1 \text{ για ήπια διακλάδωση}$$
$$e \leq s \leq e - 1 + v_{\mathfrak{P}}(e) \text{ για ακραία διακλάδωση} .$$

Απόδειξη. Neukirch [13] , θεώρημα 2.6 .σελ 199. □

Ο επόμενος χαρακτηρισμός της διαφορίζουσας δίνει τη σύνδεση του με την αλγεβρική γεωμετρία. Για επέκταση αντιμεταθετικών δακτυλίων δακτυλίων $B \mid A$ θεωρούμε τον ομομορφισμό

$$\mu : B \otimes_A B \to B, x \otimes y \longmapsto xy,$$

με πυρήνα I και το $B \otimes B$ πρότυπο

$$\Omega^1_{B|A} := I/I^2 = I \otimes_{B\otimes B} B,$$

το οποίο μέσω της εμφύτευσης $B \to B \otimes B, b \longmapsto b \otimes 1$ θεωρούμε σαν B πρότυπο και το ονομάζουμε **πρότυπο των διαφορικών μορφών** της επέκτασης. Θέτοντας

$$dx = x \otimes 1 - 1 \otimes x \mod I^2$$

προκύπτει μια **διαφόριση**

$$d : B \to \Omega^1_{B|A},$$

δηλαδή μια απεικόνιση που να ικανοποιεί

$$d(xy) = xdy + ydx$$
$$da = 0, a \in A.$$

Κάθε στοιχείο στο $\Omega^1_{B|A}$ γράφεται σαν συνδυασμός $\sum y_i dx_i$ και ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 1.2.7. *Το $\mathfrak{D}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ είναι ο μηδενιστής του προτύπου $\Omega^1_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$.*

Απόδειξη. Εύκολα επαληθεύεται ότι για οποιουσδήποτε δακτυλίους A, B και $A^{'}$ αντιμεταθετική A άλγεβρα και $B^{'} = B \otimes_A A^{'}$ ότι $\Omega^1_{B^{'}|A^{'}} = \Omega^1_{B|A} \otimes_A A^{'}$ ([8] σελ. 393) . Συνεπώς το πρότυπο των διαφορικών διατηρείται σε τοπικοποιήσεις και πληρώσεις. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\mathcal{o}$ είναι πλήρης δακτύλιος διακριτής εκτίμησης. Από την 2.3.5 $\mathcal{O} = \mathcal{o}[x]$ για κατάλληλο x και το $\Omega^1_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ παράγεται από το dx. Έχουμε ήδη δει ότι $\mathfrak{D}_{B|A} = (f^{'}(x))$ ακριβώς ο μηδενιστής του dx.

□

Για την ακρίβεια ισχύει κάτι ισχυρότερο, το πρότυπο $\Omega^1_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ είναι κυκλικό. Έστω dx ο γεννήτορας του, η προηγούμενη πρόταση δίνει την παρακάτω ακριβή ακολουθία $\mathcal{O}$-προτύπων

$$0 \to \mathfrak{D}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}} \to \mathcal{O} \to \Omega^1_{\mathcal{O}|\mathcal{o}} \to 0.$$

Η απόδειξη της κυκλικότητας διαφωτίζει τον ισχυρισμό ότι το πρότυπο των διαφορικών διατηρείται σε τοπικοποιήσεις και πληρώσεις. Συγκεκριμένα από το θεώρημα δομής των πεπερασμένα παραγόμενων προτύπων δακτυλίων Dedekind, η κυκλικότητα του $\Omega^1_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ προκύπτει από την κυκλικότητα του στις τοπικοποιήσεις. Για τον χαρακτηρισμό αυτών των των τοπικοποιήσεων επικαλούμαστε την παρακάτω πρόταση από το βιβλίο του Eisenbud:95 ([8] σελ.397).

Πρόταση 1.2.8. *Για S μία R-άλγεβρα και U πολλαπλαστικό σύνολο του S, έχουμε*

$$\Omega^1_{S[U^{-1}]|R} \cong S[U^{-1}] \otimes_S \Omega^1_{S|R}.$$

Οι τοπικοποιήσεις τις οποίες συμβολίζουμε με $\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}$ και $\mathfrak{p}^{-1}\mathcal{o}$, είναι οι δακτύλιοι εκτίμησης των εκτιμήσεων που αντιστοιχούν στα ιδεώδη $\mathfrak{P}$ και $\mathfrak{p}$ αντίστοιχα. Στόχος λοιπόν είναι να δείξουμε την κυκλικότητα των προτύπων $\Omega^1_{\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}|\mathfrak{p}^{-1}\mathcal{o}}$. Όμως το $\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}$ είναι περερασμένα παριστώμενο $\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{o}$-πρότυπο και οι πληρώσεις ικανοποιούν (βλέπε παράρτημα)

$$[\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}]_{\mathfrak{P}} = \varprojlim \mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}/\mathfrak{P}^n$$
$$[\mathfrak{p}^{-1}\mathcal{o}]_{\mathfrak{p}} = \varprojlim \mathfrak{p}^{-1}\mathcal{o}/\mathfrak{p}^n.$$

Η μεταθετικότητα του ορίου με το τανυστικό γινόμενο και ιδιότητα flatness του $\mathfrak{p}^{-1}\mathcal{o}$-προτύπου $\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}$ δίνει

$$\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O} \otimes_{\mathfrak{p}^{-1}\mathcal{o}} \varprojlim \mathfrak{p}^{-1}\mathcal{o}/\mathfrak{p}^n = \varprojlim \mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n\mathcal{O} = \varprojlim \mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}/\mathfrak{P}^{e_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}}n} \cong \varprojlim \mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}/\mathfrak{P}^n.$$

Συνεπώς η σχέση που προαναφέραμε

$$\Omega^1_{B'|A'} = \Omega_{B|A} \otimes_A A',$$

στην περίπτωση $A = \mathfrak{p}^{-1}\mathcal{o}, B = \mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}, A' = [\mathfrak{p}^{-1}\mathcal{o}]_{\mathfrak{p}}$ και $B = [\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}]_{\mathfrak{P}}$, δίνει την αλλαγή των συντελεστών των στοιχείων dx κατά την μετάβαση στις πληρώσεις. Ειδικότερα προκύπτει η κυκλικότητα του προτύπου $\Omega^1_{\mathfrak{P}^{-1}\mathcal{O}|\mathfrak{p}^{-1}\mathcal{o}}$.
Ένα συναφές πρότυπο με τη διαφορίζουσα είναι η διακρίνουσα η οποία ορίζεται παρακάτω.

Ορισμός 1.2.9. ***Διακρίνουσα*** *$\mathfrak{d}_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ ονομάζουμε το ιδεώδες του $\mathcal{o}$ που παράγεται από τις διακρίνουσες $d(a_1, \ldots, a_n)$ όλων των βάσεων $a_1, \ldots, a_n$ της επέκτασης $L \mid K$ που περιέχονται στο $\mathcal{O}$.*

Όπου ειναι φανερό σε ποιους δακτύλιους ακεραίων αναφερόμαστε θα χρησιμοιούμε επίσης το σύμβολο $\mathfrak{d}_{L|K}$. Η σύνδεση περιγράφεται από το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.10.

$$\mathfrak{d}_{L|K} = N_{L|K}(\mathfrak{D}_{L|K})$$

Απόδειξη. Για πολλαπλασιαστικό σύνολο S του $\mathcal{O}$ έχουμε $\mathfrak{d}_{S^{-1}\mathcal{O}|S^{-1}\mathcal{O}} = S^{-1}\mathfrak{d}_{\mathcal{O}|\mathcal{O}}$ και $\mathfrak{D}_{S^{-1}\mathcal{O}|S^{-1}\mathcal{O}} = S^{-1}\mathfrak{D}_{\mathcal{O}|\mathcal{O}}$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\mathcal{O}$ είναι δακτύλιος διακριτής εκτίμησης. Τότε και ο $\mathcal{O}$ θα είναι δακτύλιος κυρίων ιδεωδών και υπάρχει βάση ακεραιότητας $a_1, \ldots, a_n$ πάνω από το $\mathcal{O}$ και εφόσον η διακρίνουσα κάθε βάσης είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της διακ. της βάσης ακεραιότητας έχουμε $\mathfrak{d}_{L|K} = (d(a_1, \ldots, a_n))$. Το πρότυπο του Dedekind $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{O}}$ παράγεται από τη δυική βάση $b_1, \ldots, b_n$ ως προς το ίχνος. Αν τώρα ονομάσουμε $\mathfrak{C}_{\mathcal{O}|\mathcal{O}} = (\gamma)$ έχουμε

$$d(\gamma a_1, \ldots, \gamma a_n) = N_{L|K}(\gamma) d(a_1, \ldots, a_n) = N_{L|K}(\mathfrak{D}_{L|K})^{-2} d(a_1, \ldots, a_n).$$

Από τη σχέση $d(a_1, \ldots, a_n) \times d(b_1, \ldots, b_n) = 1$ προκύπτει

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_{L|K}{}^{-1} &= (d(a_1, \ldots, a_n)^{-1}) = (d(b_1, \ldots, b_n)) = (d(\gamma a_1, \ldots, \gamma a_n)) \\ &= N_{L|K}(\mathfrak{D}_{L|K})^{-2}\mathfrak{d}_{L|K}\end{aligned},$$

άρα $\mathfrak{d}_{L|K} = N_{L|K}(\mathfrak{D}_{L|K})$. □

Αν θυμηθούμε τη σχέση $N_{M|K} = N_{L|K} \circ N_{M|L}$ παίρνουμε εύκολα το παρακάτω πόρισμα:

Συνέπεια 1.2.11. *Για έναν πύργο σωμάτων $K \subset L \subset M$ ισχύει*

$$\mathfrak{d}_{M|K} = \mathfrak{d}_{L|K}{}^{[M:L]} N_{L|K}(\mathfrak{d}_{M|L}).$$

Θέτοντας για ευκολία $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_{L|K}$ και $\mathfrak{d}_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{d}_{L_{\mathfrak{P}}|K_{\mathfrak{p}}}$ ο αντίστοιχος τύπος για τη διαφορίζουσα σε συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα δίνει

$$\mathfrak{d} = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{d}_{\mathfrak{P}}$$

Χαρακτηρίζουμε μια επέκταση $L \mid K$ αδιακλάδωτη αν κανένα πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ του K δεν διακλαδίζεται. Έχοντας ορίσει τους άπειρους πρώτους ως αδιακλάδιστους εύκολα διαπιστώνουμε από τα προηγούμενα ότι ένα ιδεώδες διακλαδίζεται ανν διαιρεί την διακρίνουσα. Σε συνδυασμό τώρα με την θεωρία Minkowski προκύπτει μια σειρά από σημαντικά αποτελέσματα τα οποία παραθέτουμε.

Θεώρημα 1.2.12. *Έστω K αλγεβρικό σώμα αριθμών και T πεπερασμένο σύνολο πρώτων. Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος επεκτάσεων $L \mid K$ βαθμού n αδιακλάδωτες εκτός του T.*

Απόδειξη. [13] σελ.203. □

Εστιάζοντας στην περίπτωση $K = \mathbb{Q}$ έχουμε

Πρόταση 1.2.13.

$$|d_K|^{1/2} \geq \frac{n^n}{n!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n/2}.$$

Απόδειξη. [13] σελ.204. □

Η πρόταση δείχνει ότι η διακρίνουσα απειρίζεται με τον βαθμό και το αρχικό θεώρημα μπορεί να βελτιωθεί στο:

Θεώρημα 1.2.14 (Hermite)**.** *Υπάρχουν πεπερεσμένα σε πλήθος αλγεβρικά σώματα αριθμών με φραγμένη διακρίνουσα.*

Επίσης έχουμε το παρακάτω θεώρημα από το οποίο συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει αδιακλάδωτη επέκταση των ρητών

Θεώρημα 1.2.15 (Minkowski)**.** *Η διακρίνουσα ενός σώματος $K \neq \mathbb{Q}$ είναι διάφορη του ± 1 .*

Απόδειξη. [13] σελ.207. □

1.3 Riemann-Roch

Σε μια επιφάνεια Riemann X υπάρχει μια αντιστοίχιση divisors $D = \sum_{P \in X} v_P P$ και line bundles $\mathcal{O}(D)$. Τα τμήματα (*sections*) της $\mathcal{O}(D)$ περιγράφονται από

$$\mathcal{O}(D)(U) = \{f \in K(U) | \mathrm{ord}_P(f) \geq -v_P, \forall P \in U\}$$

με K το δράγμα των μερόμορφων συναρτήσεων.
Τίθεται το ζήτημα του υπολογισμού της διάστασης $l(D)$ του $H^0(X, \mathcal{O}(D)) = \mathcal{O}(D)(X)$.
Αυτό που επιτυγχάνεται είναι ο υπολογισμός της χαρακτηριστικής Euler- Poincaré:

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \dim H^0(X, \mathcal{O}(D)) - \dim H^1(X, \mathcal{O}(D))$$

με τύπο

$$\chi(\mathcal{O}(D)) = \mathrm{deg}(D) + 1 - g$$

όπου g το **γένος** της επιφάνειας. Με χρήση της Serre duality ($H^1(X, \mathcal{O}(D))$ δυικό του $H^0(X, \omega \otimes \mathcal{O}(-D))$ όπου $\omega = \Omega_X^1$ το λεγόμενο **κανονικό πρότυπο** της X και θέτοντας $K = \mathrm{div}(\omega)$ προκύπτει

$$l(D) - l(K - D) = \mathrm{deg}(D) + 1 - g,$$

Αποδίδοντας το ρόλο των μερόμορφων συναρτήσεων στα $f \in K^*$ και έχοντας προσδιορίσει τις απεικονίσεις div εξετάζουμε κατά αναλογία το σύνολο

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{O}(D)) &= \{f \in K^* | \mathrm{div}(f) \geq -D\} \\ &= \{f \in \mathcal{O}(D)_{\text{finite}} | 0 \neq \|f\|_{\mathfrak{p}} \leq \mathcal{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}} \textbf{ για } \mathfrak{p} \mid \infty\} \end{aligned}$$

(Η ανισότητα των divisors σημαίνει ανισότητα κατά παράγοντα). Για μελλοντική διευκόλυνση θα περιγράψουμε τη σχέση μεταξύ του χώρου Minkowski (παράρτημα) $K_{\mathbb{R}} = [\prod_\tau \mathbb{C}]^+$ με $\tau \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$, και του γινομένου $\prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_{\mathfrak{p}}$.Έχουμε την αντιστοιχία:

$$\begin{array}{l} \rho : K \to \mathbb{R} \longmapsto \mathfrak{p} \text{ για πραγματικούς πρώτους }, \rho = \rho_{\mathfrak{p}} : K_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R} \\ \sigma, \bar{\sigma} : K \to \mathbb{C} \longmapsto \mathfrak{p} \text{ για μιγαδικούς πρώτους }, \sigma = \sigma_{\mathfrak{p}} : K_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \end{array} .$$

Μέσω των ισομορφισμών

$$\begin{aligned} K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} &\xrightarrow{\sim} K_{\mathbb{R}}, \quad a \otimes x \longmapsto ((\tau a)x)_\tau, \\ K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} &\xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_{\mathfrak{p}}, \quad a \otimes x \longmapsto ((\tau_{\mathfrak{p}} a)x)_{\mathfrak{p}|\infty}, \end{aligned}$$

προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα και στο εξής ταυτίζουμε τα$K_{\mathbb{R}}$ και $\prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_{\mathfrak{p}}$.

$$\begin{tikzcd}
K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, equal] & K_{\mathbb{R}} \arrow[r, phantom, "="] & \prod_{\rho} \mathbb{R} \arrow[r, phantom, "\times"] & P\prod_{\sigma}[\mathbb{C} \times \mathbb{C}]^{+} \\
K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \arrow[r, phantom, "\cong"] & \prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[r, phantom, "="] & \prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ \text{real}}} K_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "\wr"', "\prod \rho_{\mathfrak{p}}"] \arrow[r, phantom, "\times"] & \prod_{\substack{\mathfrak{p} \\ \text{complex}}} K_{\mathfrak{p}} \arrow[u, "\wr"', "{\prod[\sigma_{\mathfrak{p}} \bar{\times} \sigma_{\mathfrak{p}}]}"]
\end{tikzcd}$$

Οι αντίστοιχες εκφράσεις για το εσωτερικό γινόμενο και το μέτρο Haar δίνονται από

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ \text{real}}} x_{\mathfrak{p}} y_{\mathfrak{p}} + \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ \text{complex}}} (x_{\mathfrak{p}} \bar{y}_{\mathfrak{p}} + \bar{x}_{\mathfrak{p}} y_{\mathfrak{p}})$$

και

$$\mu = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mu_{\mathfrak{p}},$$

όπου

$$\begin{cases} \mu_{\mathfrak{p}} = \text{μέτρο Lebesgue στο } \mathbb{R} & \text{αν } \mathfrak{p} \text{ πραγματικός,} \\ \mu_{\mathfrak{p}} = 2 \times \text{ μέτρο Lebesgue στο } \mathbb{C} & \text{αν } \mathfrak{p} \text{ μιγαδικός.} \end{cases}$$

Ενώ για τον λογάριθμο

$$l : [\prod_{\tau} \mathbb{C}^*]^+ \to [\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+, x \longmapsto (\log \|x_\tau\|_\tau),$$

έχουμε τη μεταφορά

$$l : \prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_{\mathfrak{p}}^* \to \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}, x \longmapsto (\log \|x_{\mathfrak{p}}\|_{\mathfrak{p}}),$$

που κάνει το παρακάτω διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
K_{\mathbb{R}}^* \arrow[r, "l"] \arrow[d] & {[\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+} \arrow[d, "!"] \\
\prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_{\mathfrak{p}}^* \arrow[r, dash, "l"] & \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

όπου $!(x) = x$ για πραγματικούς πρώτους και $!(x, x) = 2x$ για μιγαδικούς. Τέλος το ίχνος $x \longmapsto \sum_{\tau} x_{\tau}$ στο $[\prod_{\tau} \mathbb{R}]^+$ μεταφέρεται στο ίχνος $x \longmapsto \sum_{\mathfrak{p}|\infty}$ στο $\prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}$, μεταφέροντας έτσι και τα αντίστοιχα υπερεπίπεδα που δίνονται από το μηδενικό ίχνος. Μπορούμε λοιπόν να ταυτίσουμε πλήρως το $K_{\mathbb{R}}$ με το $\prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_{\mathfrak{p}}$.

Ορίζουμε στη συνέχεια κατάλληλη εμφύτευση για ένα πλήρες ιδεώδες a στο $K_{\mathbb{R}}$. Η διάσπαση $a = a_f \times a_{\infty}$ και η εμφύτευση $j : K \to K_{\mathbb{R}}$ μας δίνουν τη ζητούμενη εμφύτευση

$$ja = a_{\infty} j a_f, \tag{1.3}$$

για την οποία λαμβάνοντας υπ' όψη ότι

$$\det(a_\infty) = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} e^{v_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_\mathfrak{p}} = \mathfrak{N}(a_\infty)$$

για την απεικόνιση $a_\infty : K_\mathbb{R} \to K_\mathbb{R}, (x_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty} \longmapsto (e^{v_\mathfrak{p}} x_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty}$, ο υπολογισμός του όγκου του θεμελιώδους πλέγματος του lattice ja δίνει

$$\mathrm{vol}(a) = \mathfrak{N}(a_\infty)\mathrm{vol}(a_f).$$

Ορισμός 1.3.1. *Για a πλήρες ιδεώδες όπως πριν ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό*

$$\chi(a) = -\log \mathrm{vol}(a)$$

χαρακτηριστική Euler-Minkowski *του a.*

Πρόταση 1.3.2. *Η χαρακτηριστική Euler-Minkowski εξαρτάται μονάχα απο την κλάση του a στην* $\mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{O}})$.

Απόδειξη. Έστω $[b] = [b]_f \times [b]_\infty = (b) \times [b]_\infty$ πλήρες κύριο ιδεώδες. Τότε προφανώς ισχύει η παρακάτω διάσπαση

$$[b]a = ba_f \times [b]_\infty a_\infty.$$

Το πλέγμα $j(ba_f)$ είναι εικόνα του ja_f μέσω της γραμμικής απεικόνισης $b : K_\mathbb{R} \to K_\mathbb{R}, (x_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty} \longmapsto (bx_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty}$ της οποίας η διακρίνουσα ικανοποιεί

$$|\det(b)| = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \|b\|_\mathfrak{p} = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-v_\mathfrak{p}(b)} = \mathfrak{N}([b]_\infty)^{-1}.$$

Κατά συνέπεια

$$\mathrm{vol}(ba_f) = \mathfrak{N}([b]_\infty)^{-1}\mathrm{vol}(a_f),$$

και άρα

$$\mathrm{vol}([b]a) = \mathfrak{N}([b]_\infty a_\infty)\mathrm{vol}(ba_f) = \mathfrak{N}(a_\infty)\mathrm{vol}(a_f) = \mathrm{vol}(a)$$

οπότε $\chi([b]a) = \chi(a)$. □

Πρόταση 1.3.3. *Για κάθε πλήρες ιδεώδες a,* $\mathrm{vol}(a) = \sqrt{|d_K|}\mathfrak{N}(a)$.

Απόδειξη. Προηγουμένως δείξαμε ότι ο όγκος ενός ιδεώδους εξαρτάται μονάχα από την κλάση του στην ομάδα Picard. Το ίδιο και η νόρμα όπως έχουμε δει (από την πολλαπλασιστικότητα και την εξίσωση $\prod_\mathfrak{p} \|a\| = 1$ (1.1). Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση όπου a_f ακέραιο ιδεώδες οπότε γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{vol}(a_f) = \sqrt{|d_K|}(\mathcal{O} : a_f). \tag{1.4}$$

Συνεπώς

$$\mathrm{vol}(a) = \mathfrak{N}(a_\infty)\mathrm{vol}(a_f) = \mathfrak{N}(a_\infty \sqrt{|d_K|}\mathfrak{N}(a_f) = \sqrt{|d_K|}\mathfrak{N}(a).$$

□

Ορισμός 1.3.4. ***Βαθμό*** *ενός πλήρους ιδεώδους a ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό*

$$\deg(a) = -\log \mathfrak{N}(a) = \deg(\operatorname{div}(a))$$

Αν παρατηρήσουμε ότι $\chi(\mathcal{O}) = -\log\sqrt{|d_K|}$ καταλήγουμε στην πρώτη εκδοχή του Riemann-Roch

$$\chi(a) = \deg(a) + \chi(\mathcal{O}). \tag{1.5}$$

Για το $a = \prod \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}}$ ορίζουμε στη συνέχεια το σύνολο

$$H^0(a) = \{f \in K^* | v_\mathfrak{p}(f) \geq v_\mathfrak{p}\}.$$

Το σύνολο αυτό είναι πεπερασμένο διότι το ισοπληθικό του $jH^0(a)$ είναι το υποσύνολο του πλέγματος $ja_f \subset K_\mathbb{R}$ που φράσσεται από τις συνθήκες $|f|_\mathfrak{p} \leq e^{-v_\mathfrak{p} f_\mathfrak{p}}, \mathfrak{p} \mid \infty$. Ορίζουμε για διάσταση τον αριθμό

$$l(a) := \log \frac{\#H^0(a)}{\operatorname{vol}(W)}$$

και $l(a) = 0$ αν $\#H^0(a) = 0$ με

$$W = \{(z_\tau \in K_\mathbb{R} = [\prod_\tau \mathbb{C}]^+ || z_\tau| \leq 1\}.$$

Οπότε τελικά

$$\operatorname{vol}(W) = 2^r(2\pi)^s.$$

Ειδικά έχουμε

$$H^0(\mathcal{O}) = \mu(K), \quad \text{άρα } l(\mathcal{O}) = \log \frac{\#\mu(K)}{2^r(2\pi)^s},$$

εφόσον η συνθήκη $|f|_\mathfrak{p} \leq 1 \forall \mathfrak{p}$, σε συνδυασμό με $\prod_\mathfrak{p} |f|_\mathfrak{p} = 1$ δίνει $|f|_\mathfrak{p} = 1$ δηλαδή η $H^0(\mathcal{O})$ είναι πεπερασμένη υποομάδα του K^* άρα τελικά είναι όλες οι ρίζες της μονάδας. (Ήδη γνωρίζουμε ότι τις περιέχει).

Ορισμός 1.3.5. ***Γένος*** *του σώματος K ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό*

$$g = l(\mathcal{O}) - \chi(\mathcal{O}) = \log \frac{\#\mu(K)\sqrt{|d_K|}}{2^r(2\pi)^s}.$$

Καταγράφουμε λοιπόν μια παραλλαγή του πρώτου μας Riemann-Roch τύπου

$$\chi(a) = \deg(a) + l(\mathcal{O}) - g.$$

Ένα πρώτο βήμα για την περεταίρω εξέλιξη της θεωρίας είναι το θεώρημα του Serge Lang.

Θεώρημα 1.3.6 (Lang). *Για ένα πλήρες ιδεώδες $a = \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}}$ ενός σώματος K ισχύει*

$$\#H^0(a^{-1}) = \frac{2^r(2\pi)^s}{\sqrt{|d_K|}}\mathfrak{N}(a) + O(\mathfrak{N}(a)^{1-\frac{1}{n}}).$$

καθώς $\mathfrak{N}(a) \to \infty$. $O(t)$ δηλώνει μια συνάρτηση για την οποία η ποσότητα $O(t)/t$ παραμένει φραγμένη όταν $t \to \infty$ και $n = [K : \mathbb{Q}]$.

Αποδεικνύουμε πρώτα το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 1.3.7. *Έστω* $a_1, \ldots, a_h$ *αντιπρόσωποι των κλάσεων της πεπερασμένης* $\mathrm{Pic}(\mathcal{O})$. *Μπορούμε να βρούμε κατάλληλη τιμή της θετικής σταθεράς* c *έτσι ώστε για τα σύνολα*

$$U_i = \{a = \prod \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}} | a_f = a_i, \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_\mathfrak{p}} \leq c\mathfrak{N}(a))^{f_\mathfrak{p}/n} \textit{για } \mathfrak{p} \mid \infty\},$$

να ισχύει

$$\mathrm{J}(\bar{\mathcal{O}}) = \bigcup_{i=1}^{h} U_i \mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}}).$$

Απόδειξη. Πρέπει να βρεθεί τιμή της σταθεράς έτσι ώστε για κάθε $B_i = \{a \in J(\bar{\mathcal{O}}) | a_f = a_i\}$ (εφόσον $\mathrm{J}(\bar{\mathcal{O}}) = \cup_{i=1}^{h} B_i \mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}})$) να ισχύει $B_i \subset U_i \mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}})$. Έστω $a = a_i a_\infty \in B_i, a_\infty = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}_+^*$. Τότε το ιδεώδες

$$\bar{a}_\infty = a_\infty \mathfrak{N}(a_\infty) = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{\bar{v}_\mathfrak{p}}$$

με $\bar{v}_\mathfrak{p} = v_\mathfrak{p} - \frac{1}{n} \sum_{\mathfrak{p}|\infty}$ έχει $\mathfrak{N}(\bar{a}_\infty) = 1$, και συνεπώς $\sum_{\mathfrak{p}|\infty} f_\mathfrak{p} \bar{v}_\mathfrak{p} = 0$. Δηλαδή το διάνυσμα

$$(\ldots, f_\mathfrak{p} \bar{v}_\mathfrak{p}, \ldots) \in \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}$$

βρίσκεται στο υπερεπίπεδο H μηδενικού ίχνους.
Το $j\mathcal{O}^*$ είναι πλήρες πλέγμα του H συνεπώς μπορούμε να βρούμε ένα $u \in \mathcal{O}^*$ τέτοιο ώστε

$$|f_\mathfrak{p} \bar{v}_\mathfrak{p} - f_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p}(u)| \leq f_\mathfrak{p} c_0.$$

Προκύπτει ότι

$$v_\mathfrak{p} - v_\mathfrak{p}(u) = \bar{v}_\mathfrak{p} + \frac{1}{n} \sum \mathfrak{p} \mid \infty f_\mathfrak{p} v_\mathfrak{p} - v_\mathfrak{p}(u) \leq \frac{1}{n} \log \mathfrak{N}(a_\infty) + c_0 = \frac{1}{n} \log \mathfrak{N}(a) + c_1$$

με $c_1 = c_0 - \frac{1}{n} \log \mathfrak{N}(a_i)$. Θέτοντας $b = a[u^{-1}] = \prod \mathfrak{p}^{k_\mathfrak{p}}$ βλέπουμε ότι $b_f = a_f$ διότι $[u]_f = (u) = (1)$ και

$$f_\mathfrak{p} k_\mathfrak{p} = f_\mathfrak{p}(v_\mathfrak{p} - v_\mathfrak{p}(u)) \leq \frac{f_\mathfrak{p}}{n} \log \mathfrak{N}(a) + f_\mathfrak{p} c_1,$$

οπότε $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{k_\mathfrak{p}} \leq e^{f_\mathfrak{p} c_1} \mathfrak{N}(a)^{f_\mathfrak{p}/n}, \forall \mathfrak{p} \mid \infty$ και $b \in B_i$. Τελικά για σταθερά $c = e^{f_\mathfrak{p} c_1}$ το $a = b[u] \in U_i \mathrm{P}(\bar{\mathcal{O}})$. □

Ακολουθεί η απόδειξη του θεωρήματος.

Απόδειξη. Αφού $O(t) = O(t) - 1$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $H^0(a^{-1})$ με το $\bar{H}^0(a^{-1}) = H^0(a^{-1}) \cup \{0\}$. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν σταθερές A, B για τις οποίες

$$|\#\bar{H}^0(a^{-1}) - \frac{2^r(2\pi)^s}{\sqrt{|d_K|}} \mathfrak{N}(a)| \leq A\mathfrak{N}(a)^{1-\frac{1}{n}}, \tag{1.6}$$

για κάθε $a \in J(\bar{\mathcal{O}})$, με $\mathfrak{N}(a) \geq B$. Ο αριθμός $\#\bar{H}^0(a^{-1})$ εξαρτάται μονάχα από τη κλάση του a στην ομάδα Picard, αρκεί να δείξουμε την 1.6 για $a \in U_i$ (του λήμματος

1.3.7).
Έχουμε
$$\bar{H}^0(a^{-1}) = \{f \in a_i^{-1} | |f|_{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}} \text{ για } \mathfrak{p} \mid \infty\}.$$
Ονομάζουμε D το χωρίο
$$D = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} D_{\mathfrak{p}}$$
όπου $D_{\mathfrak{p}} = \{x \in K_{\mathfrak{p}} | \|x\|_{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}}$. Στοχεύουμε στον υπολογισμό του πλήθους των στοιχείων του ja^{-1}, με θεμελιώδες πλέγμα M, εντός του D.
Θεωρούμε τα παρακάτω σύνολα:
$$X = \{x \in ja_i^{-1} | (M + x) \cap D \neq \emptyset\},$$
$$Y = \{x \in ja_i^{-1} | M + x \subset \mathring{D}\},$$
$$X \setminus Y = \{x \in ja_i^{-1} | (M + x) \cap \partial D \neq \emptyset\}.$$
Ισχύει $Y \subset X = \bar{H}^0(a^{-1}) \subset X$ και $\cup_{x\in Y}(M + x) \subset D \subset \cup_{x\in X}(M + x)$, άρα
$$\#Y \leq \#H^0(a^{-1}) \leq \#X$$
και
$$\#Y \mathrm{vol}(M) \leq \mathrm{vol}(D) \leq \#X \mathrm{vol}(M).$$
Τελικά
$$|\#\bar{H}^0(a^{-1}) - \frac{\mathrm{vol}(D)}{\mathrm{vol}(M)}| \leq \#X - \#Y = \#(X \setminus Y).$$
Τώρα
$$\mathrm{vol}(D) = \prod_{\substack{\mathfrak{p}\\ \text{real}}} 2\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}} \prod_{\substack{\mathfrak{p}\\ \text{complex}}} (\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}} = 2^r(2\pi)^s \mathfrak{N}(a_\infty),$$
και $\mathrm{vol}(M) = \sqrt{|d_K|}\mathfrak{N}(a_f^{-1})$. Απ' όπου παίρνουμε
$$|\#\bar{H}^0(a^{-1}) - \frac{2^r(2\pi)^s}{\sqrt{|d_K|}}\mathfrak{N}(a)| \leq \#(X \setminus Y).$$
Αρκεί λοιπόν να βρόυμε σταθερές A , B για τις οποίες
$$\#(X \setminus Y) \leq A\mathfrak{N}(a)^{1-\frac{1}{n}},$$
όταν $\mathfrak{N}(a) \geq B$. Θέτοντας B=1, θα μας απασχολήσει μονάχα η αναζήτηση της A. Δίνουμε μια παραμέτρηση του D:
$$f : I^n \to D, I = [0, 1],$$
η οποία δίνεται από:
$$\begin{cases} I \to D_{\mathfrak{p}}, t \longmapsto 2\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}}(t - \frac{1}{2}), & \text{αν } \mathfrak{p} \text{ πραγματικός} \\ I^2 \to D_{\mathfrak{p}}, (\rho, \theta) \longmapsto \sqrt{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}}}(\rho\cos 2\pi\theta, \rho\sin 2\pi\theta) & \text{αν } \mathfrak{p} \text{ μιγαδικός} \end{cases}.$$
Φράσσουμε την νόρμα του διαφορικού $\|df(x)\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Αν $df(x) = (a_{ik})$, τότε $\|df(x)\| \leq n\mathrm{max}\|a_{ik}\|$. Κάθε μερική παράγωγος φράσεται από το $2\pi\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}}$. Εφόσον $a \in U_i$, έχουμε ότι $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}} \leq c\mathfrak{N}(a)^{f_{\mathfrak{p}}/n}$, για κάθε $\mathfrak{p} \mid \infty$. Άρα
$$\|df(x)\| \leq 2\pi n \mathrm{max}\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{v_{\mathfrak{p}}\,1/f_{\mathfrak{p}}} \leq c_1\mathfrak{N}(a)^{1/n}.$$

Το θεώρημα μέσης τιμής μας εξασφαλίζει ότι

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c_1 \mathfrak{N}(a)^{1/n} \|x - y\|, \tag{1.7}$$

όπου εδώ η ανισότητα είναι εκφρασμένη στην ευκλείδεια νόρμα. Το σύνορο

$$\partial D = \bigcup_{\mathfrak{p}} [\partial D_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}} D_{\mathfrak{q}}]$$

παραμετρικοποιείται από τις όψεις I^{n-1} του I^n. Υποδιαιρούμε κάθε ακμή του I^{n-1} σε $m = [\mathfrak{N}(a)^{1/n}] \geq 1$ ισομήκη τμήματα, και προκύπτει μια διάσπαση του I^{n-1} σε m^{n-1} κύβους με διάμετρο $\leq (n-1)^{1/2}/m$. Από την 1.7 οι εικόνες αυτών των κύβων έχουν διάμετρο $\leq \frac{(n-1)^{1/2}}{m} c_1 \mathfrak{N}(a)^{1/n} \leq (n-1)^{1/2} c_1 \frac{m+1}{m} \leq (n-1)^{1/2} c_1 2 =: c_2$. Ο αριθμός των μεταθέσεων $M + x, x \in \Gamma$ που τέμνουν ένα χωρίο διαμέτρου $\leq c_2$ φράσσεται από σταθερά c_3, η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από το c_2 και το M.Υπάρχουν $m^{n-1} = [\mathfrak{N}(a)^{1/n}]^{n-1}$, τέτοιοι κύβοι στο $f(I^{n-1})$, άρα κάθε ένα από τα το πολύ $2n$ $f(I^{n-1})$ τέμνει το πολύ $c_3 [\mathfrak{N}(a)^{1/n}]^{n-1} =\leq \mathfrak{N}(a)^{1-\frac{1}{n}}$ μεταθέσεις, δίνοντας

$$\#\{x \in \Gamma | (M + x) \cap \partial D \neq \emptyset\} \leq 2nc_3 \mathfrak{N}(a)^{1-\frac{1}{n}}$$

για κάθε $a \in U_i$, με $\mathfrak{N}(a) \geq 1$, και σταθερά $2nc_3$ ανεξάρτητη του $a \in U_i$, δηλαδή το ζητούμενο. □

Από το θεώρημα παραπάνω προκύπτει μια ισχυρότερη εκδοχή του Riemann-Roch. Για λόγους αναλογίας με την γεωμετρική κατασταση η διατύπωση του θα γίνει με όρους divisors. Οπότε έστω $D = \sum_{\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ ένας πλήρης divisor και

$$H^0(D) = H^0(\mathcal{O}(D)) = \{f \in K^* | v_{\mathfrak{p}} \geq -v_{\mathfrak{p}}\},$$

$$l(D) = l(\mathcal{O}D) = \log \frac{\#H^0(D)}{\mathrm{vol}(W)}, \quad \chi(D) = \chi(\mathcal{O}D).$$

Ονομάζουμε **ειδικό δείκτη** τον αριθμό $i(D) = l(D) - \chi(D)$.

Θεώρημα 1.3.8 (Riemann-Roch). *Για κάθε πλήρη divisor D ισχύει*

$$l(D) = \deg(D) + l(\mathcal{O}) - g + i(D)$$

όπου ο δείκτης είναι της μορφής

$$i(D) = O(e^{-\frac{1}{n}\deg(D)}),$$

ειδικότερα $i(D) \to 0$ *όταν* $\deg(D) \to \infty$.

Απόδειξη. Ο τύπος προκύπτει από τον $\chi(D) = \deg(D) + l(D) - g$ προσθέτοντας $i(D)$. Θέτοντας $a^{-1} = \mathcal{O}(D)$ στον τύπο του θεωρήματος Lang

$$\frac{\#H^0(a^{-1})}{2^r(2\pi)^s} = \frac{\mathfrak{N}(a)}{\sqrt{|d_K|}}(1 + f(a)\mathfrak{N}(a)^{-\frac{1}{n}})$$

και λογαριθμίζοντας παίρνουμε

$$\begin{aligned} l(D) = l(a^{-1}) &= -\log(\sqrt{|d_K|}\mathfrak{N}(a^{-1})) + O(\mathfrak{N}(a)^{-1/n}) \\ &= \chi(D) + O(e^{-\frac{1}{n}\deg D}). \end{aligned}$$

Όπου στο πρώτο βήμα χρησιμοποιούμε ότι $\log(1 + O(t)) = O(t)$ και στο δεύτερο ότι $\mathfrak{N}(a)^{-1/n} = e^{(-\frac{1}{n} degD)}$. Τέλος παρατηρούμε ότι καθώς $\mathfrak{N}(a) \to \infty$, $\deg(D) = -\log \mathfrak{N}(a^{-1}) = \log \mathfrak{N}(a) \to \infty$. □

Εξετάζουμε τέλος την μεταβολή της σταθεράς Euler-Minkowski στην περίπτωση πεπερασμένης επέκτασης $L \mid K$. Σημειώνουμε με $\mathcal{O}$ τον δακτύλιο ακεραίων του L και υπενθυμίζουμε το πρότυπο

$$\mathfrak{C}_{L|K} = \{x \in L | \mathrm{Tr}(x\mathcal{O}) \subset \mathcal{o}\} \cong (\mathcal{O}, \mathcal{o}).$$

Ορισμός 1.3.9. ***Κανονικό πρότυπο*** *του σώματος K ονομάζουμε το κλασματικό ιδεώδες*

$$\omega_K = \mathfrak{C}_{K|\mathbb{Q}} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{o}, \mathbb{Z}).$$

Από την πρόταση 1.2.2 έχουμε την παρακάτω συνέπεια:

Συνέπεια 1.3.10. *Τα κανονικά πρότυπα των L και K έχουν τη σχέση:*

$$\omega_L = \mathfrak{C}_{L|K}\omega_K.$$

Επίσης ισχύει:

Πρόταση 1.3.11. $\mathrm{deg}\omega_K = -2\chi(\mathcal{o}) = 2g - 2l(\mathcal{o})$.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $N_{K|\mathbb{Q}}(\mathfrak{D}_{K|\mathbb{Q}}) = \mathfrak{d}_{K|\mathbb{Q}} = (d_K)$ οπότε έχουμε

$$\mathfrak{N}(\omega_K) = \mathfrak{N}(\mathfrak{D}_{K|\mathbb{Q}})^{-1} = \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{K|\mathbb{Q}})^{-1} = |d_K|^{-1},$$

και πράγματι

$$\mathrm{deg}\omega_K = -\log \mathfrak{N}(\omega_K) = \log |d_K| = 2 \log \mathrm{vol}(\mathcal{o}) = -2\chi(\mathcal{o}).$$

□

Προκύπτει επιπλέον τύπος ανάλογος του Riemann-Hurwitz για το γένος g.

Πρόταση 1.3.12. *Για επέκταση $L \mid K$ ισχύει :*

$$g_L - l(\mathcal{o}_L) = [L : K](g_K - l(\mathcal{o}_K)) + \frac{1}{2}\mathrm{deg}\mathfrak{C}_{L|K}.$$

Στην περίπτωση αδιακλάδωτης επέκτασης έχουμε:

$$\chi(\mathcal{o}_L) = [L : K]\chi(\mathcal{o}_K).$$

Απόδειξη. Από $\omega_L = \mathfrak{C}_{L|K}\omega_K$ προκύπτει

$$\mathfrak{N}(\omega_L) = \mathfrak{N}(i_{L|K}\omega_K)\mathfrak{N}(\mathfrak{C}_{L|K}) = \mathfrak{N}(\omega_K)^{[L:K]}\mathfrak{N}(\mathfrak{C}_{L|K}),$$

οπότε

$$\mathrm{deg}\omega_L = [L : K]\mathrm{deg}\omega_K + \mathrm{deg}\mathfrak{C}_{L|K}.$$

□

Το ιδεώδες $\mathfrak{C}_{L|K}$ έχει οριστεί έτσι ώστε να περιλαμβάνει ακριβώς τα σημεία διακλάδωσης. Φαίνεται αναπόφευκτο το να θεωρήσουμε τα άπειρα σημεία $\mathfrak{P}$ του L ως αδιακλάδωτα. Η εικόνα αυτή αλλάζει όταν τροποποιήσουμε την μετρική του χώρου Minkowski $K_{\mathbb{R}} = [\prod_\tau \mathbb{C}]^+$ από εκείνη που είχαμε προεπιλέξει ως «κανονική» στην μετρική Minkowski:

$$\langle x, y \rangle = \sum_\tau a_\tau x_\tau y_\tau,$$

με $a_\tau = 1$ αν $\tau = \bar{\tau}$ και $a_\tau = \frac{1}{2}$ αν $\tau \neq \bar{\tau}$. Ισχύει η παρακάτω σχέση ανάμεσα στα μέτρα Haar:

$$\mathrm{vol}_{\mathrm{canonical}}(X) = 2^s \mathrm{vol}_{\mathrm{Minkowski}}(X),$$

οπότε οι αναλλοίωτες της θεωρίας Riemann-Roch αλλάζουν σε :

$$\bar{\chi}(a) = \chi(a) + \log 2^s, \bar{l}(a) = l(a) + \log 2^s$$

και το γένος παραμένει αναλλοίωτο. Στο ιδεώδες $\mathfrak{C}_{L|K}$ προστίθενται όλοι οι πρώτοι $\mathfrak{P}$ για του οποίους $L_{\mathfrak{P}} \neq K_{\mathfrak{p}}$. Άρα η επέκταση $\mathbb{C} \mid \mathbb{R}$ θεωρείται με διακλάδωση και συνεπώς ορίζουμε $\bar{e}_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}], \bar{f}_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = 1$. Ειδικά

$$\bar{e}_{\mathfrak{p}} = [K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{R}], \bar{f}_{\mathfrak{p}} = 1.$$

Ακολουθούν οι ορισμοί:

$$\bar{v}_{\mathfrak{p}}(a) = -\bar{e}_{\mathfrak{p}} \log |\tau a|, \mathfrak{p}^v = e^{v/\bar{e}_{\mathfrak{p}}}, \bar{\mathfrak{N}}(\mathfrak{p}) = e.$$

Με τις αλλαγές αυτές η νόρμα και ο βαθμός παραμένουν αναλλοίωτα. Για να ικανοποιείται η σχέση

$$\mathrm{deg}\bar{\omega}_K = -2\bar{\chi}(\mathcal{O}) = 2g - 2\bar{l}(\mathcal{O}).$$

το κανονικό πρότυπο αλλάζει σε

$$\bar{\omega}_K = \omega_K \prod_{\mathfrak{p}\ \mathrm{complex}} \mathfrak{p}^{2\log 2}.$$

Η αντικατάσταση του $\mathfrak{C}_{L|K}$ από το πλήρες ιδεώδες

$$\bar{\mathfrak{C}}_{L|K} = \mathfrak{C}_{L|K} \prod_{\substack{\mathfrak{P}|\infty \\ \bar{e}_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \neq 1}} \mathfrak{P}^{2\log 2},$$

δίνει ότι

$$\bar{\omega}_L = \bar{\mathfrak{C}}_{L|K}\, i_{L|K}(\bar{\omega}_K),$$

άρα και τον τύπο Riemann-Hurwitz.

Αυτή η ευασθησία που εμφανίζεται στην μετρική έχει οδηγήσει στην ακόλουθη τροποποίηση. Τα σώματα K θεωρούμε ότι είναι εφοδιαμένα με μια μετρική $\langle x, y \rangle = \sum_\tau a_\tau x_\tau \bar{y}_\tau, a_\tau > 0, a_\tau = a_{\bar{\tau}}$ στο $K_{\mathbb{R}}$ και τα αποκαλλούμε **μετρικοποιημένα αριθμητικά σώματα** (συμβολίζουμε για λόγους διάκρισης $\bar{K}$). Επισυνάπτουμε τις ακόλουθες αναλλοίωτες. Σε έναν άπειρο πρώτο $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\tau$ όπου $\tau : K \to \mathbb{C}$ αντιστοιχούμε τον πραγματικό αριθμό e^{a_τ} και το πλήρες ιδεώδες

$$\mathfrak{p} = (1) \times (1, \ldots, e^{a_\tau}, \ldots 1).$$

Θέτουμε $e_{\mathfrak{p}} = 1/a_\tau, f_{\mathfrak{p}} = a_\tau[K_{\mathfrak{p}} : \mathbb{R}]$ και την αντίστοιχη εκτίμηση

$$v_{\mathfrak{p}}(a) = -e_{\mathfrak{p}} \log |\tau a|.$$

Για την νόρμα του ιδεώδους από την οποία προκύπτει ως συνήθως και η «απόλυτη» εκτίμηση ορίζουμε

$$\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = e^{f_{\mathfrak{p}}} \text{ και } \|a\|_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-v_{\mathfrak{p}}(a)}.$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των απολύτων τιμών είναι ίδιες με πριν. Δίνουμε τους ίδιους ορισμούς με πριν για την νόρμα και το βαθμό ιδεώδους. Για κανονικό πρότυπο θεωρούμε το ακόλουθο

$$\omega_{\bar{K}} = \omega_K \omega_\infty,$$

με ω_K το Dedekind πρότυπο και $\omega_\infty = (a_{\mathfrak{p}}^{-1})_{\mathfrak{p}|\infty} \in \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathbb{R}_+^*$.
Προφανής σχέση για όγκους:

$$\mathrm{vol}_{\bar{K}}(X) = \prod_\tau \sqrt{a_\tau}\mathrm{vol}(X).$$

Συνεπώς ισχύουν τα παρακάτω

$$\chi_{\bar{K}}(\mathcal{O}_K) = -\log \mathrm{vol}_{\bar{K}}(\mathcal{O}_K) = \chi(\mathcal{O}_K) - \log \prod_\tau \sqrt{a_\tau}$$

$$l_{\bar{K}}(\mathcal{O}_K) = \log \frac{\#H^0(\mathcal{O}_K)}{vol_{\bar{K}}(W)} = l(\mathcal{O}_K) \log \prod_\tau \sqrt{a_\tau}$$

Το γένος δεν επιρρεάζεται από την αλλαγή της μετρικής.

Πρόταση 1.3.13. *Τα μετρικοποιημένα σώματα* $(\mathbb{Q}, axy)$*(a θετική σταθερά) είναι τα μοναδικά μηδενικού γένους.*

Απόδειξη. πρόταση 3.14 [13] □

Τέλος θα χαρακτηρίσουμε τις επεκτάσεις μετρικοποιημένων σωμάτων $\bar{K} = (K, \langle , \rangle_K)$ και $\bar{L} = (L, \langle , \rangle_L)$ των οποίων οι μετρικές

$$\langle x, y\rangle_K = \sum_\tau a_\tau x_\tau \bar{y}_\tau, \quad \langle x, y\rangle_L = \sum_\sigma b_\sigma x_\sigma \bar{y}_\sigma,$$

ικανοποιούν $a_\tau \geq b_\sigma$ όποτε $\tau = \sigma|_K$. Όταν $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ ορίζουμε δείκτη διακλάδωσης και βαθμό αδρανείας:

$$e_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = a_\tau / b_\sigma \text{ και } f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = b_\sigma / a_\tau [L_{\mathfrak{P}} : K_{\mathfrak{p}}].$$

Διαπιστώνουμε και πάλι ότι

$$\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} = [L : K].$$

Για τη διαφορίζουσα της επέκτασης $\bar{L} \mid \bar{K}$ ορίζουμε

$$\mathfrak{D}_{\bar{L}|\bar{K}} = \mathfrak{D}_{L|K} \cdot \mathfrak{D}_\infty \in J(\bar{\mathcal{O}}_L),$$

όπου

$$\mathfrak{D}_\infty = (b_{\mathfrak{P}} / a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{P}|\infty}.$$

Διατηρείται κατά αυτόν τον τρόπο ο τύπος Riemann-Hurwitz:

$$g_{\bar{L}} - l_{\bar{L}}(\mathcal{O}_L) = [L : K](g_{\bar{K}} - l_{\bar{K}}(\mathcal{O}_K)) - \frac{1}{2}\mathrm{deg}\mathfrak{D}_{\bar{L}|\bar{K}}.$$

1.4 Μετρικοποιημένα πρότυπα

Με σκοπό να γενικούσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα για την περίπτωση των πλήρων ιδεωδών στα πεπερασμένα παραγόμενα $\mathcal{O}$ -πρότυπα, θα πορευτούμε υιοθετώντας τον φορμαλισμό του Grothendieck όπως αυτός παρουσιάζεται στον NeuEn [13]. Για το σώμα K ορίζουμε το δακτύλιο $K_{\mathbb{C}} \equiv K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, τον οποίο και ερμηνεύουμε είτε ως $K_{\mathbb{C}} = \oplus_{\sigma \in X(\mathbb{C})} \mathbb{C}$ όπου $X(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$, είτε ως $\mathbb{C}^{X(\mathbb{C})} = \mathrm{Hom}(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. Για την πρώτη ερμηνεία η εμφύτευση ενός στοιχείου $a \in K, a \longmapsto a \otimes 1$ είναι το διάνυσμα $\oplus_{\sigma} \sigma a$, για την δεύτερη η συνάρτηση $x(\sigma) = \sigma a$.
Στον $K_{\mathbb{C}}$ ορίζονται φυσιολογικά οι δύο παρακάτω αυτομορφισμοί:

$$F : K_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}}, \quad F(x)(\sigma) = \overline{x(\bar{\sigma})}.$$

$$\textbf{Συζυγία} : x \longmapsto \bar{x} \quad \bar{x}(\sigma) = \overline{x(\sigma)}.$$

Αντίστοιχα για πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}$ -πρότυπο M ορίζουμε

$$M_{\mathbb{C}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C},$$

το οποίο και είναι $K_{\mathbb{C}} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$-πρότυπο. Μια ισοδύναμη γραφή του που θα εμφανιστεί στην συνέχεια είναι $M_{\mathbb{C}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = M \otimes_{\mathcal{O}} K_{\mathbb{C}}$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε

$$F(a \otimes x) = a \otimes Fx.$$

Μάλιστα για την γραφή $M_{\mathbb{C}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ έχουμε $F(a \otimes x) = a \otimes \bar{x}$.

Ορισμός 1.4.1. ***Ερμιτιανή μετρική*** *στο $K_{\mathbb{C}}$ πρότυπο $M_{\mathbb{C}}$ ονομάζουμε μια απεικόνιση*

$$\langle , \rangle_M : M_{\mathbb{C}} \times M_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}},$$

$K_{\mathbb{C}}$-γραμμική που ικανοποιεί $\overline{\langle x, y \rangle}_M = \langle y, x \rangle_M$. ***F αναλλοίωτη*** *ονομάζουμε τη μετρική που ικανοποιεί την επιπλέον σχέση*

$$F\langle x, y \rangle_M = \langle Fx, Fy \rangle_M.$$

Μέσω της ερμηνείας $K_{\mathbb{C}} = \oplus_{\sigma \in X(\mathbb{C})}$ ο ορισμός που δώσαμε για την ερμητιανή μετρική ανάγεται στη σύνηθη έννοια του ερμιτιανού γινομένου. Το πρότυπο $M_{\mathbb{C}}$ διασπάται σε ευθύ άθροισμα $\mathbb{C}$ διανυσματικών χώρων

$$M_{\mathbb{C}} = M \otimes_{\mathcal{O}} K_{\mathbb{C}} = \oplus_{\sigma \in X(\mathbb{C})} M_{\sigma}, \text{όπου } M_{\sigma} = M \otimes_{\mathcal{O}, \sigma} \mathbb{C},$$

και η μετρική είναι το ευθύ άθροισμα των ερμιτιανών γινομένων σε αυτούς τους χώρους, δηλαδή

$$\langle x, y \rangle_M = \oplus_{\sigma \in X(\mathbb{C})} \langle x_{\sigma}, y_{\sigma} \rangle_{M_{\sigma}}.$$

Το να είναι η μετρική F αναλλοίωτη εκφράζεται από τη μεταθετικότητα των παρακάτω διαγραμμάτων.

$$\begin{tikzcd}
M_{\sigma} \times M_{\sigma} \arrow[r, "\langle , \rangle_{M_{\sigma}}"] \arrow[d, "F \times F"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "F"] \\
M_{\bar{\sigma}} \times M_{\bar{\sigma}} \arrow[r, dash, "\langle , \rangle_{M_{\bar{\sigma}}}"'] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Ορισμός 1.4.2. ***Μετρικοποιημένο $\mathcal{O}$ -πρότυπο*** *ονομάζουμε ένα πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}$ -πρότυπο μαζί με μια F αναλλοίωτη μετρική στο $M_{\mathbb{C}}$.*

Ειδικά κάθε κλασματικό ιδεώδες a μπορεί να θεωρηθεί μετρικοποιημένο πρότυπο με την **τετριμμένη μετρική**

$$\langle x, y\rangle = x\bar{y} = \oplus_{\sigma\in X(\mathbb{C})} x_\sigma \bar{y}_\sigma.$$

Να σημειωθεί ότι $a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} = K_{\mathbb{C}}$ και ότι όλες οι F αναλλοίωτες μετρικές στο πρότυπο είναι της μορφής

$$\alpha\langle x, y\rangle = x\bar{y} = \oplus_\sigma \alpha(\sigma) x_\sigma \bar{y}_\sigma$$

με $\alpha \in K_{\mathbb{C}}$ συνάρτηση $\alpha : X(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+^*$ για την οποία $\alpha(\bar{\sigma}) = \alpha(\sigma)$.
Παρακάτω θα μας απασχολήσει η περίπτωση μιας επέκτασης $L \mid K$ και ενός κλασματικού ιδεώδους $\mathfrak{U}$ του L ιδωμένου σαν $\mathcal{O}$ πρότυπο M. Ονομάζουμε $Y(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{C})$ και γράφουμε για $\tau \mid \sigma, \tau \in Y(\mathbb{C}), \sigma \in X(\mathbb{C})$ όποτε $\sigma = \tau|_K$. Το πρότυπο $M_{\mathbb{C}} = \mathfrak{U} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = L_{\mathbb{C}}$ διασπάται σε

$$M_{\mathbb{C}} = \oplus_{\tau\in Y(\mathbb{C})} \mathbb{C} = \oplus_{\sigma\in X(\mathbb{C})} M_\sigma.$$

Τα $M_\sigma = \oplus_{\tau|\sigma} \mathbb{C}$ εφοδιάζονται με τις μετρικές

$$\langle x, y\rangle = \sum_{\tau|\sigma} x_\tau \bar{y}_\tau.$$

Για μετρικοποημένα πρότυπα M και M' επάγεται δομή μετρικοποιημένου προτύπου στα $M \oplus M'$, $M \otimes M'$, $\check{M} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(M, \mathcal{O})$ και $\wedge^n M$. Συγκεκριμένα

$$(M \oplus M')_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}} \oplus M'_{\mathbb{C}}, \quad (M \otimes_{\mathcal{O}} M')_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}} \otimes_{K_{\mathbb{C}}} M'_{\mathbb{C}}$$
$$\check{M}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Hom}_{K_{\mathbb{C}}}(M_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}), \quad (\wedge^n M)_{\mathbb{C}} = \wedge^n_{K_{\mathbb{C}}} M_{\mathbb{C}}$$

και οι μετρικές είναι οι ακόλουθες

$$\begin{aligned}
\langle x \oplus x', y \oplus y'\rangle_{M\oplus M'} &= \langle x, y\rangle_M + \langle x', y'\rangle_{M'}\\
\langle x \otimes x', y \otimes y'\rangle_{M\otimes M'} &= \langle x, y\rangle_M \cdot \langle x', y'\rangle_{M'}\\
\langle \check{x}, \check{y}\rangle_{\check{M}} &= \overline{\langle x, y\rangle}_M\\
\langle x_1 \wedge \cdots x_n, y_1 \wedge y_n\rangle_{\wedge^n M} &= \det(\langle x_i, y_j\rangle_M)
\end{aligned}$$

Με $\check{x}$ συμβολίζουμε το στοιχείο του προτύπου $\check{M}_{\mathbb{C}}, \check{x} \equiv \langle *, x\rangle_M : M_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}}$.

Υπενθυμίζουμε κάποια στοιχεία για τα προβολικά πρότυπα τα οποία θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια, για την απόδειξη των οποίων παραπέμπουμε στο [5].

Πρόταση 1.4.3. *Για πεπερασμένα παραγόμενο πρότυπο M, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το M είναι προβολικό.*

(ii) *Το M είναι ευθύς προσθετέος ελεύθερου προτύπου.*

(iii) *Το M είναι τοπικά ελεύθερο.*

(iv) *Το M δεν έχει στρέψη.*

(v) $M \cong a \oplus \mathcal{O}^n, n \in \mathbb{Z}_+^*$ *για κάποιο ιδεώδες a του $\mathcal{O}$.*

Παρατήρηση 1.4.4. *Διευκρινίζουμε ότι θα μας απασχολήσουν μόνο πεπερασμένα παραγόμενα πρότυπα και για λόγους συντομίας θα αναφερόμαστε σε αυτά απλώς ως πρότυπα.*

Ορισμός 1.4.5. ***Rank*** *ενός προτύπου M ονομάζουμε τον αριθμό*

$$\mathrm{rk}(M) = \dim_K(M \otimes_{\mathcal{O}} K).$$

Ονομάζουμε **αντιστρέψιμα** τα προβολικά πρότυπα L με rank 1 διότι

$$L \otimes_{\mathcal{O}} \overset{\vee}{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}, \quad a \otimes \overset{\vee}{a} \longmapsto \bar{a}(a)$$

ισομορφισμός. Τα αντιστρέψιμα πρότυπα είναι ισομορφικά με κλασματικά ιδεώδη. Πράγματι έστω $a \in L$. Η απεικόνιση

$$L \to L \otimes_{\mathcal{O}} K = K(a \otimes 1), \quad x \longmapsto f(x)(a \otimes 1)$$

λόγω της μηδενικής στρέψης δίνει μονομορφισμό του L μέσω του $x \longmapsto f(x)$ σε ιδεώδες του K.
Σκοπός μας είναι αντιστοιχίσουμε τα πλήρη ιδεώδη σε αντιστρέψιμα μετρικοποιημένα πρότυπα. Έστω λοιπόν πλήρες ιδεώδες

$$a = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{p} | \infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}} = a_f a_\infty$$

Το άπειρο μέρος a_∞ ορίζει συνάρτηση

$$\alpha : X(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+, \quad \alpha(\sigma) = e^{2v_{\mathfrak{p}_\sigma}},$$

όπου $\mathfrak{p}_\sigma$ υποδηλώνει τον πρώτο $\sigma : K \to \mathbb{C}$, η οποία μετρικοποιεί το $a_{f_\mathbb{C}} = a_f \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C} = K_\mathbb{C}$ ορίζοντας

$$\langle x, y \rangle_a = \alpha x \bar{y} = \oplus_{\sigma \in X(\mathbb{C})} e^{2v_{\mathfrak{p}_\sigma}} x_\sigma \bar{y}_\sigma.$$

Θα συμβολίζουμε με $L(a)$ το μετρικοποιημένο πρότυπο που αντιστοιχεί στο πλήρες ιδεώδες a.

Ορισμός 1.4.6. ***Ισομετρικά*** *ονομάζονται δύο πρότυπα M και $M^{'}$ όταν υπάρχει ισομορφισμός $f : M \to M^{'}$ $\mathcal{O}$ -προτύπων που επάγει ισομετρία $f_\mathbb{C} : M_\mathbb{C} \to M^{'}_\mathbb{C}$.*

Πρόταση 1.4.7. (i) *Δύο πλήρη ιδεώδη a, b ορίζουν ισομετρικά μετρικοποιημένα πρότυπα $L(a), L(b)$ ανν διαφέρουν κατά ένα κύριο πλήρες ιδεώδες.*

(ii) *Κάθε αντιστρέψιμο μετρικοποιημένο ιδεώδες L είναι ισομετρικό με κάποιο $L(a)$.*

(iii) $L(ab) \cong L(a) \otimes_{\mathcal{O}} L(b)$.

(iv) $L(a^{-1}) \cong \overset{\vee}{L}(a)$.

Απόδειξη. i) Έστω $a = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}}, b = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}, [c] = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(c)}$. Οι αντίστοιχοι συντελεστές για την μετρική στα πρότυπα είναι

$$\alpha(\sigma) = e^{2v_{\mathfrak{p}_\sigma}}, \quad \beta(\sigma) = e^{2m_{\mathfrak{p}_\sigma}}, \quad \gamma(\sigma) = e^{2v_{\mathfrak{p}_\sigma}(c)}.$$

Αν $a = b[c]$ τότε $\alpha = \beta\gamma$ και $a_f = b_f(c)$. Ο ισομορφισμός προτύπων $b_f \to a_f, x \longmapsto cx$ μεταφέρει τη μετρική $\langle , \rangle_b$ στην $\langle , \rangle_a$. Πράγματι για την εμφύτευση του c στο $K_{\mathbb{C}}$, $c = \oplus_\sigma \sigma c$ έχουμε

$$c\bar{c} = \oplus_\sigma \|\sigma c\|^2 = \oplus_\sigma e^{2\log\|\sigma c\|} = \oplus_\sigma e^{-2v_{\mathfrak{p}_\sigma}(c)} = \gamma^{-1}.$$

Αυτό δίνει

$$\langle cx, cy\rangle_a = \alpha\langle cx, cy\rangle = \alpha\gamma^{-1}\langle x, y\rangle = \beta\langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle_b.$$

Αντίστροφα έστω $f : L(b) \to L(b)$ ισομετρία. Ο ισομορφισμός $\mathcal{O}$ προτύπων $f : b_f \to a_f$ δίνεται από πολλαπλασιασμό με στοιχείο $c \in b_f^{-1}a_f \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(b_f, a_f)$. Ισχύει:

$$\beta\langle x, y\rangle = \rangle x, y\rangle_b = \langle f(x), f(y)\rangle_a = \alpha\langle cx, cy\rangle = \alpha\gamma^{-1}\langle x, y\rangle.$$

Δηλαδή $\alpha = \beta\gamma$.
ii) Όπως έχουμε δει υπάρχει ισομορφισμός $f : L \to a_f$. Ο ισομορφισμός $f_{\mathbb{C}} : L_{\mathbb{C}} \to a_{f_{\mathbb{C}}} = K_{\mathbb{C}}$ επάγει την F αναλλοίωτη μετρική $\langle f_{\mathbb{C}}^{-1}(x), f_{\mathbb{C}}^{-1}(y)\rangle_L$ στο $K_{\mathbb{C}}$. Οι μετρικές στο $K_{\mathbb{C}}$ είναι της της μορφής $\alpha x\bar{y}$ για συνάρτηση $\alpha : X(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+^*$ (με $\alpha(\sigma) = \alpha(\bar{\sigma})$) . Αν τώρα γράψουμε $\alpha(\sigma) = e^{2v_{\mathfrak{p}_\sigma}}$ έχουμε ότι το L είναι ισομετρικό με το $L(a_f \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}_\sigma}})$.
iii) Έστω $a, b, \alpha(\sigma), \beta(\sigma)$ όπως στο i) . Έστω επιπλέον ο ισομορφισμός $\mathcal{O}$ προτύπων:

$$a_f \otimes_{\mathcal{O}} b_f \to a_f b_f, x \otimes y \longmapsto xy,$$

για τα υποκείμενα πρότυπα. Δίνει

$$\langle xy, x'y'\rangle_{ab} = \alpha\beta xy\bar{x}'\bar{y}' = \alpha\langle x, x'\rangle\beta\langle y, y'\rangle = \langle x, x'\rangle_a\langle y, y'\rangle_b.$$

Δηλαδή $L(ab) \cong L(a) \otimes_{\mathcal{O}} L(b)$.
iv) Έχουμε τον ισομορφισμό

$$f : a_f^{-1} \to \mathrm{hom}_{\mathcal{O}}(a_f, \mathcal{O}), \quad \alpha \longmapsto (f(\alpha) : x \mapsto \alpha x).$$

Για τον $f_{\mathbb{C}} : K_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Hom}_{K_{\mathbb{C}}}(K_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$ έχουμε

$$f_{\mathbb{C}}(x)(y) = xy = \alpha^{-1}\alpha xy = \alpha^{-1}\langle y, \bar{x}\rangle_{L(a)}.$$

Άρα $f_{\mathbb{C}}(x) = \alpha^{-1}\overset{\vee}{\bar{x}}$ και συνεπώς

$$\langle f_{\mathbb{C}}(x), f_{\mathbb{C}}(y)\rangle_{\overset{\vee}{L(a)}} = \alpha^{-2}\langle\overset{\vee}{\bar{x}}, \overset{\vee}{\bar{y}}\rangle_{\overset{\vee}{L(a)}} = \alpha^{-2}\langle\overline{\bar{x}, \bar{y}}\rangle_{L(a)} = \alpha^{-1}x\bar{y} = \langle x, y\rangle_{L(a^{-1})}.$$

□

Ορισμός 1.4.8. ***Βραχεία ακριβή ακολουθία*** *μετρικοποιημένων προτύπων*

$$0 \to M' \overset{\alpha}{\to} M \overset{\beta}{\to} M'' \to 0,$$

ονομάζουμε μια ακριβή ακολουθία η οποία διασπάται ισομετρικά, δηλαδη στην ακολουθία

$$0 \to M'_{\mathbb{C}} \overset{\alpha_{\mathbb{C}}}{\to} M_{\mathbb{C}} \overset{\beta_{\mathbb{C}}}{\to} M''_{\mathbb{C}} \to 0$$

το $M'_{\mathbb{C}}$ απεικονίζεται ισομετρικά στο $\alpha_{\mathbb{C}}M'_{\mathbb{C}}$ και το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $(\alpha_{\mathbb{C}}M'_{\mathbb{C}})^\perp$ ισομετρικά στο $M''_{\mathbb{C}}$.

Ομομορφισμοί σαν τους α, β που ανήκουν σε κάποια βραχεία ακριβή ακολουθία ονομάζονται **επιτρεπτοί μονομορφισμοί** αντισ. **επιτρεπτοί επιμορφισμοί**.

Ορισμός 1.4.9. ***Διακρίνουσα*** *ενός προβολικού μετρικοποιημένου* $\mathcal{O}$ *προτύπου ονομάζουμε το αντιστρέψιμο μετρικοποιημένο πρότυπο:*

$$\det M = \wedge^n M, \quad n = \mathrm{rk}(M).$$

Πρόταση 1.4.10. *Για βραχεία ακριβή ακολουθία* $0 \to M^{'} \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M^{''} \to 0$ *μετρικοποιημένων προτύπων έχουμε ότι*

$$\det M \cong \det M^{'} \otimes_{\mathcal{O}} \det M^{''}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε $n' = \mathrm{rk}(M^{'})$ και $n'' = \mathrm{rk}(M^{''})$. Η απεικόνιση

$$f : \det M^{'} \otimes_{\mathcal{O}} \det M^{''} \to \det M$$

με τύπο $(m_1' \wedge \cdots \wedge m_{n'}') \otimes (m_1'' \wedge \cdots \wedge m_{n''}'') \longmapsto \alpha m_1' \wedge \cdots \wedge \alpha m_{n'}' \wedge \beta^{-1} m_1'' \wedge \cdots \wedge \beta^{-1} m_{n''}''$ είναι καλά ορισμένη (δηλ. ανεξάρτητη του αντιπροσώπου της προεικόνας) και επί, άρα και 1 - 1 από τη στιγμή που και τα δύο πρότυπα έχουν διάσταση 1, δηλαδή ισομορφισμός. Μένει να δειχθεί ότι είναι και ισομετρία.
Έστω λοιπόν ο ισομορφισμός (όπως εύκολα διαπιστώνεται):

$$f_{\mathbb{C}} : \det M_{\mathbb{C}}^{'} \otimes_{\mathcal{O}} \det M_{\mathbb{C}}^{''} \to \det M_{\mathbb{C}}$$

και τα στοιχεία των προτύπων $x_i', y_i' \in M_{\mathbb{C}}^{'}, i = 1, \ldots, n'$ και $x_j, y_j \in \alpha M_{\mathbb{C}}^{'\perp} i = 1, \ldots n''$ και τέλος

$$x' = \wedge_i x_i', \quad y' = \wedge_i y_i', \quad x = \wedge_j x_j, \quad y = \wedge_j y_j.$$

Αυτό μας δίνει

$$\begin{aligned}
\langle f(x' \otimes \beta x), f(y' \otimes \beta y)\rangle_{\det M} &= \langle \alpha x' \wedge x, \alpha y' \wedge y\rangle_{\det M} \\
&= \det \left(\begin{array}{c|c} \langle x_i', y_k'\rangle_{M'} & 0 \\ \hline 0 & \langle \beta x_j, \beta y_l\rangle_{M''} \end{array} \right) \\
&= \det(\langle x_i', y_k'\rangle_{M'}) \det(\langle \beta x_j, \beta y_l\rangle_{M''}) \\
&= \langle x', y'\rangle_{\det M'} \langle \beta x, \beta y\rangle_{\det M''} \\
&= \langle x' \otimes \beta x, y' \otimes \beta y\rangle_{\det M' \otimes \det M''}
\end{aligned}$$

Άρα f ισομετρία. ☐

1.5 Ομάδες Grothendieck

Ορίζουμε τις παρακάτω ομάδες

$$F_0(\bar{\mathcal{O}}) = \oplus_{\{M\}} \mathbb{Z}\{M\}, \quad \text{αντίσ.} \quad F^0(\bar{\mathcal{O}}) = \oplus_{\{M\}} \mathbb{Z}\{M\}$$

όπου στην πρώτη περίπτωση το $\{M\}$ υποδηλώνει την κλάση ισομετρίας με αντιπρόσωπο ένα προβολικό μετρικοποιημένο πρότυπο M, ενώ στην δεύτερη διατρέχει τις κλάσεις ισομετρίας για τυχαία πεπερασμένα παραγόμενα μετρικοποιημένα πρότυπα.
Εντός αυτών των ομάδων ορίζουμε υποομάδες $R_0(\mathcal{O})$ αντίστ. $R^0(\bar{\mathcal{O}})$ οι οποίες παράγονται από τα στοιχεία $\{M^{'}\} - \{M\} + \{M^{''}\}$ τα οποία προέρχονται από ακριβείς ακολουθίες

$$0 \to M^{'} \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M^{''} \to 0.$$

Ορισμός 1.5.1. *Τα πηλίκα $K_0(\bar{\mathcal{O}}) = F_0(\bar{\mathcal{O}})/R_0(\bar{\mathcal{O}})$ και $K^0(\bar{\mathcal{O}}) = F^0(\bar{\mathcal{O}})/R^0(\bar{\mathcal{O}})$ ονομάζονται* ***ομάδες Grothendieck*** *του $\mathcal{O}$. Με $[M]$ θα συμβολίζουμε την κλάση που ορίζει σε αυτές το πρότυπο M.*

Μέσω του τανυστικού γινομένου ορίζουμε δομή μεταθετικού δακτυλίου στην $F^0(\bar{\mathcal{O}})$ όπου $\{M\}\{N\} := \{M \otimes_{\mathcal{O}} N\}$ και επεκτείνοντας γραμμικά. Προσαιτεριστικότητα και αντιμεταθετικότητα προκύπτουν από τις σχέσεις $(M \otimes N) \otimes L \cong M \otimes (N \otimes L), M \otimes N \cong N \otimes M$. Προκύπτει ότι τα σύνολα $R_0(\bar{\mathcal{O}}), R^0(\bar{\mathcal{O}})$ είναι $F_0(\bar{\mathcal{O}})$ υποπρότυπα διότι το τανυστικό γινόμενο με προβολικό πρότυπο είναι ακριβής συναρτητής. Από αυτά συμπεραίνουμε ότι η $K_0(\bar{\mathcal{O}})$ αποκτά δομή δακτυλίου και ότι το $K^0(\bar{\mathcal{O}})$ είναι $K_0(\bar{\mathcal{O}})$ πρότυπο.
Μεταφέροντας το $[M]$ από κλάση της $K_0(\bar{\mathcal{O}})$ στην $K^0(\bar{\mathcal{O}})$ καταλήγουμε στον **ομομορφισμό Poincaré**

$$K_0(\bar{\mathcal{O}}) \to K^0(\bar{\mathcal{O}}),$$

ο οποίος αναπάντεχα είναι ισομορφισμός. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε δύο λήμματα.

Λήμμα 1.5.2. *Κάθε μετρικοποιημένο $\mathcal{O}$ πρότυπο M επιδέχεται μια προβολική ανάλυση. Δηλαδή υπάρχει ακριβής ακολουθία*

$$0 \to E \to F \to M \to 0$$

με E, F προβολικά.

Απόδειξη. Έστω $a_1, \dots a_n$ σύνολο γεννητόρων του M και $F = \mathcal{O}^n$. Επιπλέον έστω E ο πυρήνας του επιμορφισμού:

$$F \to M, \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i a_i.$$

Ο E είναι torsion free άρα είναι προβολικό πρότυπο. Για την ακολουθία

$$0 \to E_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}} \to M_{\mathbb{C}} \to 0$$

επιλέγουμε τομή $s : M_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}$ έτσι ώστε $F_{\mathbb{C}} = E_{\mathbb{C}} \oplus M_{\mathbb{C}}$. Το $F_{\mathbb{C}}$ αποκτά έτσι μετρική μεταφέροντας την μετρική του $M_{\mathbb{C}}$ στο $sM_{\mathbb{C}}$ και για αυθαίρετη μετρική στο $E_{\mathbb{C}}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & F' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Για δύο προβολικές αναλύσεις σαν του παραπάνω διαγράμματος θα λέμε ότι αυτή της πάνω γραμμής **επικρατεί** της δεύτερης.

Λήμμα 1.5.3. *Έστω δύο προβολικές αναλύσεις του μετρικοποιημένου $\mathcal{O}$ προτύπου M.*

$$0 \to E^{'} \to F^{'} \xrightarrow{f'} M \to 0, \quad 0 \to E^{''} \to F^{''} \xrightarrow{f''} M \to 0.$$

Ορίζοντας το $\mathcal{O}$ -πρότυπο

$$F = F^{'} \times_M F^{''} = \{(x', x'') \in F^{'} \times F^{''} | f'(x') = f''(x'')\},$$

και την απεικόνιση $f : F \to M, (x', x'') \longmapsto f'(x') = f''(x'')$ προκύπτει μια τρίτη προβολική ανάλυση που επικρατεί και των δύο προηγούμενων.

Απόδειξη. Το F είναι υποπρότυπο του προβολικού προτύπου $F^{'} \oplus F^{''}$ άρα είναι προβολικό. Θεωρούμε το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E^{'}_{\mathbb{C}} \arrow[r] & F^{'}_{\mathbb{C}} \arrow[r, shift left, "f'"] & M_{\mathbb{C}} \arrow[l, shift left, "s'"] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & E_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & F_{\mathbb{C}} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[u, "\pi'"] \arrow[d, "\pi''"'] & M_{\mathbb{C}} \arrow[l, shift left, "s"] \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & E^{''}_{\mathbb{C}} \arrow[r] & F^{''}_{\mathbb{C}} \arrow[r, shift left, "f''"] & M_{\mathbb{C}} \arrow[l, shift left, "s''"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

όπου π', π'' οι επαγώμενες των προβολών. Οι ισομετρίες $s' : M_{\mathbb{C}} \to s'M_{\mathbb{C}}, s'' : M_{\mathbb{C}} \to s''M_{\mathbb{C}}$ ορίζουν την τομή

$$s : M_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}, \quad sx = (s'x, s''x),$$

που επάγει μετρική στο $sM_{\mathbb{C}}$. Το $E_{\mathbb{C}} = E'_{\mathbb{C}} \times E''_{\mathbb{C}}$ φέρει το άθροισμα των μετρικών των $E'_{\mathbb{C}}, E''_{\mathbb{C}}$ άρα η διάσπαση $F_{\mathbb{C}} = E_{\mathbb{C}} \oplus sM_{\mathbb{C}}$ ορίζει μετρική στο $F_{\mathbb{C}}$ για την οποία η ακολουθία

$$0 \to E \to F \to M \to 0$$

είναι ακριβής.
Μένει να δείξουμε ότι οι προβολές είναι επιτρεπτοί επιμορφισμοί. Έχουμε την παρακάτω ακριβή ακολουθία $\mathcal{O}$ -προτύπων για την οποία θα δείξουμε ότι είναι μετρικοποιημένη.

$$0 \to E'' \xrightarrow{i} F' \xrightarrow{\pi'} F' \to 0$$

όπου $ix'' = (0, x'')$ και εφόσον έχουμε εφοδιάσει το E με το άθροισμα των μετρικών των E' και E'' διαπιστώνουμε ότι η εμφύτευση $i : E_{\mathbb{C}} \to iE_{\mathbb{C}}$ είναι ισομετρία. Θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$F'_{\mathbb{C}} \times_{M_{\mathbb{C}}} s''M_{\mathbb{C}} = \{(x', s''a) \in F_{\mathbb{C}} \times s''M_{\mathbb{C}} | f'(x') = a\},$$

το οποίο αρχικά παρατηρούμε ότι απεικονίζεται με 1 - 1 και επί τρόπο στο $F'_{\mathbb{C}}$, είναι ορθογώνιο στο $iE''_{\mathbb{C}}$ και ισομετρικό με το $F'_{\mathbb{C}}$. Γράφοντας $x' = s'a+e', e' \in E'_{\mathbb{C}}$ έχουμε

$$\langle ix'', (x', s''a)\rangle_F = \langle(0, x''), sa+(e', 0)\rangle_F = \langle(0, x''), sa\rangle_F + \langle(0, x''), (e', 0)\rangle_F = 0.$$

Για την ισομετρία γράφοντας όπως πριν $x' = s'a + e', y = s'b + d', x', y' \in F'_{\mathbb{C}}$ και $(x', s''a) = sa + (e', 0), \quad (y', s''b) = sb + (d', 0)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\langle (x', s''a), (y', s''b)\rangle_F &= \langle sa, sb\rangle_F + \langle sa, (d', 0)\rangle_F + \langle (e', 0), sb\rangle_F \\ &+ \langle (e', 0), (d', 0)\rangle_F \\ &= \langle a, b\rangle_M + \langle e', d'\rangle_{E'} = \langle s'a, s'b\rangle_{F'} + \langle e', d'\rangle_{E'} \\ &= \langle s'a + e', s'b + d'\rangle_{F'} = \langle x', y'\rangle_{F'}.\end{aligned}$$

□

Είμαστε έτοιμοι για την απόδειξη του θεωρήματος:

Θεώρημα 1.5.4. *Ο ομομορφισμός $p : K_0(\bar{\sigma}) \to K^0(\bar{\sigma})$ είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Ορίζουμε απεικόνιση $\pi : F^0(\bar{\sigma}) \to K_0(\bar{\sigma})$ επιλέγοντας για μετρικοποιημένο πρότυπο M μια προβολική ανάλυση

$$0 \to E \to F \to M \to 0,$$

και απεικονίζοντας $\{M\} \longmapsto [F] - [E]$. Για το καλά ορισμένο έχουμε από το προηγούμενο λήμμα ότι κάθε δύο προβολικές αναλύσεις ορίζουν μία που επικρατεί και των δύο, συνεπώς αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση όπου μια ανάλυση επικρατεί μιας άλλης όπως στο παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & F' \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Παρατηρούμε ότι το βέλος $E \to F$ επάγει ισόμετρια $\ker(\alpha) \to \ker(\beta)$ κατά συνέπεια

$$[F] - [E] = [F'] + [\ker(\beta)] - [E'] - [\ker(\alpha)] = [F'] - [E'].$$

Μένει να δείξουμε ότι παραγοντοποιείται από την πρόβολη $F^0(\bar{\sigma}) \to K^0(\bar{\sigma})$ και ότι είναι ο αντίστροφος του ομομορφισμού Poincaré. Έστω

$$0 \to M' \to M \xrightarrow{\alpha} M'' \to 0$$

ακριβής ακολουθία μετρικοποιημένων προτύπων και προβολική ανάλυση

$$0 \to E \to F \xrightarrow{f} M \to 0.$$

Τότε και η $0 \to E'' \to F \xrightarrow{f''} M \to 0$ με $f'' = a \circ f, E'' = \ker(f'')$ είναι ακριβής ακολουθία μετρικοποιημένων προτύπων και το λήμμα του φιδιού για το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & E'' \arrow[r] & F \arrow[r, "f''"] & M'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

δίνει $M' \cong \mathrm{coker}(E \to E'')$ ή

$$0 \to E \to E'' \xrightarrow{f} M' \to 0.$$

Πρόκειται όμως για ακριβή ακολουθία μετρικοποιημένων προτύπων διότι το $E_{\mathbb{C}}^{\perp}$ αντιστοιχίζεται ισομετρικά από την f στο M και το $E''^{\perp}_{\mathbb{C}} \subset E_{\mathbb{C}}^{\perp}$ στο $M''_{\mathbb{C}}$. Διαπιστώνουμε ότι

$$\pi\{M'\} - \pi\{M\} + \pi\{M''\} = [E''] - [E] - ([F] - [E]) + [F] - [E''] = 0.$$

Εύκολα τώρα επαληθεύει κανείς τις σχέσεις $p \circ \pi = \mathrm{id}, \pi \circ p = \mathrm{id}$.

□

Η ισομορφία των $K^0(\bar{\mathcal{O}})$ και $K_0(\bar{\mathcal{O}})$ μας εξυπηρετεί καθώς ο δακτύλιος $K_0(\bar{\mathcal{O}})$ επιδέχεται λεπτομερέστερη περίγραφη την οποία αναπτύσσουμε παρακάτω. Αρχικά παρατηρούμε ότι η αντιστοιχία $a \longmapsto L(a)$ για ένα πλήρες ιδεώδες a εξαρτάται σύμφωνα με την πρόταση 1.3.6 αποκλειστικά από την κλάση $[a] \in \mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{O}})$ με εικόνα που ανήκει στις μονάδες του δακτυλίου $K_0(\bar{\mathcal{O}})$.
Έχουμε λοιπόν την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 1.5.5. *Υπάρχει ομομορφισμός*

$$\mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{O}}) \to K_0(\bar{\mathcal{O}})^*, \quad [a] \longmapsto [L(a)].$$

Για απλοποίηση του συμβολισμού στα επόμενα για το αντιστρέψιμο μετρικοποιημένο πρότυπο $L(a)$ θα γράφουμε a. Ειδικά θα συμβολίζουμε το ιδεώδες $\mathcal{O}$ με την τετριμμένη μετρική με **1**.

Πρόταση 1.5.6. *Ο $K_0(\bar{\mathcal{O}})$ παράγεται σαν προσθετική ομάδα από τα στοιχεία $[a]$.*

Απόδειξη. Η βασική πρόταση 1.4.3 μας εξασφαλίζει την ύπαρξη για το τυχαίο μετρικοποιημένο προβολικό πρότυπο M ακριβούς ακολουθίας

$$0 \to N \to M \to a_f \to 0$$

για κάποιο κλασματικό ιδεώδες a_f. Γίνεται ακριβής ακολουθία μετρικοποιημένων προτύπων υπό τον περιορισμό της μετρικής του M στο N και τη μεταφορά της μετρικής μέσω του ισομορφισμού $N_{\mathbb{C}}^{\perp} \cong a_{f\mathbb{C}}$. Έτσι έχουμε $[M] = [N] + [a]$ στον $K_0(\bar{\mathcal{O}})$ και η πρόταση αποδεικνύεται με επαγωγή στο rank. □

Πρόταση 1.5.7. *Για οποιαδήποτε δύο πλήρη ιδεώδη a, b του σώματος K έχουμε την παρακάτω σχέση στο $K_0(\bar{\mathcal{O}})$:*

$$([a] - 1)([b] - 1) = 0.$$

Απόδειξη. Για συνάρτηση $\alpha : X(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ θεωρούμε στο $K_{\mathbb{C}} = \oplus_{\sigma \in X(\mathbb{C})} \mathbb{C}$ τη μορφή

$$\alpha x \bar{y} = \oplus_{\sigma} \alpha(\sigma) x_{\sigma} \bar{y}_{\sigma}.$$

Και για κάθε πίνακα $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \beta \end{pmatrix}$ τέτοιων συναρτήσεων θεωρούμε στο $K_{\mathbb{C}}$-πρότυπο $K_{\mathbb{C}} \oplus K_{\mathbb{C}}$ τη μορφή:

$$\langle x \oplus y, x' \oplus y' \rangle_A = \alpha x \bar{x}' + \gamma x \bar{y}' + \delta y \bar{x}' + \beta y \bar{y}'.$$

Η πρώτη μορφή είναι F αναλλοίωτη μετρική ανν η α είναι F αναλλοίωτη, δηλαδή $\overline{\alpha(\sigma)}= \alpha(\bar{\sigma})$ και επιπλέον $\alpha(\sigma) \in \mathbb{R}_{+}^{*}$. Για την δεύτερη περίπτωση ανν οι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι F αναλλοίωτες, $\alpha(\sigma), \beta(\sigma) \in \mathbb{R}_{+}^{*}, \delta = \bar{\gamma}$ και $\det A = \alpha\beta - \gamma\delta > 0$. Αρκεί δείξουμε τον τύπο

$$[a] + [b] = [ab] + 1,$$

στην περίπτωση που τα πεπερασμένα μέρη a_f, b_f είναι ακέραια ιδεώδη πρώτα μεταξύ τους καθώς μπορούμε πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλο στοιχείο να βρεθούμε σε αυτήν την περίπτωση διατηρώντας τις κλάσεις στον $K_0(\bar{\mathcal{O}})$. Για τις μετρικές που ορίσαμε παραπάνω θα γράφουμε (a_f, α), για το μετρικοποιημένο πρότυπο που προκύπτει, ενώ η προσθήκη της δεύτερης μετρικής στο $a_f \oplus b_f$ καταλήγει σε μετρικοποιημένο πρότυπο που θα συμβολίζουμε με $(a_f \oplus b_f, A)$. Για δύο πίνακες γράφουμε $A \sim A'$ όταν $[(a_f \oplus b_f), A] = [(a_f \oplus b_f), A']$ στον $K_0(\bar{\mathcal{O}})$.
Θεωρούμε στη συνέχεια την ακριβή ακολουθία:

$$0 \to a_f \to a_f \oplus b_f \to b_f \to 0.$$

Δείχνουμε ότι η

$$0 \to (a_f, \alpha) \to (a_f \oplus b_f, A) \to (b_f, \beta - \frac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha}) \to 0$$

είναι ακριβής ακολουθία μετρικοποιημένων προτύπων. Πράγματι στην ακολουθία

$$0 \to K_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}} \oplus K_{\mathbb{C}} \to K_{\mathbb{C}} \to 0$$

ο περιορισμός της μετρικής στον πρώτο όρο δίνει την $\alpha x\bar{y}$.Το ορθογώνιο συμπλήρωμα V του $K_{\mathbb{C}} \oplus 0$ είναι εκείνα τα στοιχεία $y \oplus z$ για τα οποία $\langle x \oplus 0, y \oplus z\rangle = \alpha x\bar{y} + \gamma x\bar{z} = 0, \forall x \in K_{\mathbb{C}}$. Συνεπώς $V = \{(-\bar{\gamma}/\alpha z \oplus z | z \in K_{\mathbb{C}}\}$. Ο ισομορφισμός $V \xrightarrow{g} K_{\mathbb{C}}, (-\gamma/\alpha)z \oplus z \longmapsto z$ δίνει την μετρική δ η οποία καθορίζεται από την σχέση

$$\begin{aligned}\delta =&\langle g^{-1}(1), g_{-1}(1)\rangle_A = \langle(-\bar{\gamma}/\alpha)1 \oplus 1, (-\bar{\gamma}/\alpha)1 \oplus 1\rangle_A \\ =&\alpha\frac{\bar{\gamma}\gamma}{\alpha^2} - \gamma\frac{\gamma}{\alpha} - \bar{\gamma}\frac{\gamma}{\alpha} + \beta = \beta - \frac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha}\end{aligned}.$$

Έχουμε δείξει λοιπόν τη σχέση

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \bar{\gamma} & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta - \dfrac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Με την αντικατάσταση $\beta = \beta + \frac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha}$ παίρνουμε επιπλέον

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \bar{\gamma} & \beta + \dfrac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Η ίδια διαδικασία για την ακολουθία

$$0 \to b_f \to a_f \oplus b_f \to a_f \to 0$$

με τη μετρική $\begin{pmatrix} \alpha' & \gamma \\ \bar{\gamma} & \beta' \end{pmatrix}$ δίνει

$$\begin{pmatrix} \alpha' + \dfrac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha} & \gamma \\ \bar{\gamma} & \beta' \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}.$$

Θέτοντας $\beta' = \beta + \frac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha}, \alpha' = \frac{\alpha\beta}{\beta + \frac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha}}$ από μεταβατικότητα παίρνουμε

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\beta}{\beta + \frac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\alpha\beta}{\beta + \frac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

Θέτουμε $\delta = \frac{\alpha\beta}{\beta + \frac{\gamma\bar{\gamma}}{\alpha}}$ και καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\beta}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

με τον περιορισμό $\delta \geq \beta$. Τελικά ισχύει

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\beta}{\epsilon} & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\beta}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix},$$

όπως διαπιστώνουμε συγκρίνοντας με κάποια συνάρτηση $\kappa \geq \delta, \kappa \geq \epsilon$ δηλαδή από τις σχέσεις

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\beta}{\epsilon} & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\beta}{\kappa} & 0 \\ 0 & \kappa \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha\beta}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας $\delta = \beta, \epsilon = 1$ στην τελευταία σχέση βρίσκουμε

$$[(a_f, \alpha)] + [(b_f, \beta)] = [(a_f, \alpha\beta)] + [b_f].$$

Ορίζοντας πλήρη ιδεώδη $a = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}}, b = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{v'_{\mathfrak{p}}}$ έτσι ώστε $\alpha(\sigma) = e^{2v_{\mathfrak{p}\sigma}}, \beta(\sigma) = e^{2v'_{\mathfrak{p}\sigma}}$ έχουμε

$$L(a) = (a_f, \alpha), \quad L(b) = (b_f, \beta), \quad L(ab_\infty) = (a_f, \alpha\beta)$$

όποτε καταλήγουμε σε

$$[a] + [b] = [ab_\infty] + [b_f]. \tag{1.8}$$

Ο τύπος

$$[a] + [b_f] = [ab_f] + 1 \tag{1.9}$$

προκύπτει από τις ακριβείς ακολουθίες μετρικοποιημένων προτύπων (όχι προβολικών)

$$\begin{aligned} &0 \to (a_f b_f, \alpha) \to (a_f, \alpha) \to a_f / a_f b_f \to 0, \\ &0 \to (b_f, 1) \to (\mathcal{O}, 1) \to \mathcal{O}/b_f \to 0. \end{aligned}$$

Λόγω του ότι τα a_f, b_f είναι σχετικά πρώτα και $a_f + b_f = \mathcal{O}$ ισχύει $a_f/a_f b_f \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}/b_f$, άρα η ισότητα $[(a_f/a_f b_f)] = [\mathcal{O}/b_f]$ και άρα

$$\begin{aligned} [(a_f, \alpha)] - [(a_f b_f, \alpha)] &= [(\mathcal{O}, 1)] - [(b_f, 1)] \\ [a] - [ab_f] &= 1 - [b_f]. \end{aligned}$$

Οι 1.8 και 1.9 δίνουν

$$[a] + [b] = [ab_\infty] + [b_f] = [ab_\infty b_f] + 1 = [ab] + 1.$$

Λόγω του ισομορφισμού $K^0(\bar{\mathcal{O}}) \cong K_0(\bar{\mathcal{O}})$ η ταυτότητα μεταφέρεται στον $K_0(\bar{\mathcal{O}})$. $\square$

1.6 Χαρακτηριστική Chern

Ο δακτύλιος Grothendieck εφοδιάζεται με έναν επιμορφισμό rk : $K_0(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathbb{Z}$. Η απεικόνιση $\{M\} \longmapsto \text{rk}M = \dim_K(M \otimes_{\mathcal{O}} K)$ επεκτείνεται γραμμικά στον $F_0(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathbb{Z}$ και γνωρίζουμε ότι μηδενίζεται στο $R_0(\bar{\mathcal{O}})$ επάγει συνεπώς ομομορφισμό rk : $K_0(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathbb{Z}$ που ονομάζουμε **augmentation** και τον πυρήνα **augmentation ideal** το οποίο συμβολίζουμε με I.

Πρόταση 1.6.1. *Το ιδεώδες I παράγεται σαν προσθετική ομάδα από τα στοιχεία $[a] - 1$ όπου a πλήρες ιδεώδες του K. Από τη τελευταία πρόταση της προηγούμενης ενότητας $I^2 = 0$.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δεί ότι το τυχαίο στοιχείο $x \in K_0(\bar{\mathcal{O}})$ είναι της μορφής $x = \sum_{i=1}^{k} n_i[a_i]$. Αν $x \in I$ τότε $\sum_{i=1}^{k} n_i = 0$ και άρα $x = \sum_{i=1}^{k} n_i[a_i] - \sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{i=1}^{k} n_i([a_i] - 1)$. □

Ορίζουμε δομή δακτυλίου στην προσθετική ομάδα

$$\text{gr}K_0(\bar{\mathcal{O}}) = \mathbb{Z} \oplus I$$

θέτοντας $xy = 0, \forall x, y \in I$.

Ορισμός 1.6.2. *Ο ομομορφισμός*

$$c_1 : K_0(\bar{\mathcal{O}}) \to I, \quad c_1(x) = x - \text{rk}(x)$$

*ονομάζεται **πρώτη κλάση Chern**. Η απεικόνιση*

$$\text{ch} : K_0(\bar{\mathcal{O}}) \to \text{gr}K_0(\bar{\mathcal{O}}), \quad \text{ch}(x) = \text{rk}(x) + c_1(x),$$

*ονομάζεται **χαρακτηριστική Chern**.*

Πρόταση 1.6.3. *Η χαρακτηριστική Chern είναι ισομορφισμός δακτυλίων.*

Απόδειξη. Οι απεικονίσεις rk, c_1 είναι ομομορφισμοί στις προσθετικές ομάδες. Το rk είναι επίσης πολλαπλασιστικό και για να δείξουμε το ίδιο για το ch αρκεί η σχέση στους γεννήτορες $[a], [b]$.

$$c_1([a \otimes b]) = [a \otimes b] - 1 = ([a] - 1) + ([b] - 1) + ([a] - 1)([b] - 1) = c_1([a]) + c_1([b]).$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η απεικόνιση

$$\mathbb{Z} \oplus I \to K_0(\bar{\mathcal{O}}), \quad n \oplus x \longmapsto n + x,$$

είναι ο αντίστροφος ομομορφιμός δακτυλίων. □

Ολοκρηρώνοντας αυτήν την ενότητα δίνουμε μια πλήρη περιγραφή της χαρακτηριστικής Chern η οποία επιτυγχάνεται σε συνδυασμό του rk με τον ομομορφισμό

$$\det : K_0(\bar{\mathcal{O}}) \to \text{Pic}(\bar{\mathcal{O}})$$

Επάγεται από την απεικόνιση για ένα προβολικό μετρικοποιημένο $\mathcal{O}$-πρότυπο M στο $M \longmapsto \det M$ το οποίο είναι αντιστρέψιμο μετρικοποιημένο πρότυπο, άρα της μορφής $L(a)$ για κάποιο πλήρες ιδεώδες a καλά ορισμένο μέχρι πολλαπλασιασμό με κύριο πλήρες ιδεώδες όπως έχουμε δει σε προηγούμενη πρόταση. Συμβολίζοντας με $[\det M]$ την κλάση του a στην $\mathrm{Pic}(\bar{o})$ η γραμμική επέκταση δίνει ομομορφισμό

$$\det : F_0(\bar{o}) \to \mathrm{Pic}(\bar{o}).$$

Έχουμε επίσης αποδείξει ότι για μια ακριβή ακολουθία μετρικοποιημένων προτύπων

$$0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0,$$

ότι ισχύει

$$\det\{M\} = [\det M] = [\det M^{'} \otimes \det M^{''}] = [\det M^{'}][\det M^{''}] = \det\{M^{'}\}\det\{M^{''}\}.$$

Δηλαδή $\det R_0(\bar{o}) = 1$ και έτσι επάγεται τελικά ο ζητούμενος ομομορφισμός $\det : K_0(\bar{o}) \to \mathrm{Pic}(\bar{o})$.

Πρόταση 1.6.4. (i) *Ο ομορφισμός* $\mathrm{Pic}(\bar{o}) \to K_0(\bar{o})^*$ *είναι μονομορφισμός.*

(ii) *Ο περιορισμός* $\det : I \to \mathrm{Pic}(\bar{o})$ *είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. i) Η σύθεση $\mathrm{Pic}(\bar{o}) \to K_0(\bar{o})^* \stackrel{\det}{\to} \mathrm{Pic}(\bar{o})$ δίνει την ταυτοτική απεικόνιση καθώς για κάθε αντιστρέψιμο πρότυπο έχουμε $\det M = M$.
ii) Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$\delta : \mathrm{Pic}(\bar{o}) \to I, \quad \delta(x) = x - 1$$

είναι η αντίστροφη της $\det : I \to \mathrm{Pic}(\bar{o})$. Λόγω του ότι $\det([a] - 1) = \det[a] = [a]$ έχουμε την κατεύθυνση $\det \circ \delta = \mathrm{id}$. Για τη $\delta \circ \det = \mathrm{id}$ και τους γεννήτορες $[a]-1$ του I έχουμε $\delta(\det([a]-1)) = \delta(\det[a]) = \delta([a]) = [a]-1$. Η απόδειξη είναι πλήρης. ☐

Ο ισομορφισμός $\det : I \to \mathrm{Pic}(\bar{o})$ δίνει τον ισομορφισμό ομάδων

$$\mathrm{gr}K_0(\bar{o}) \stackrel{\sim}{\to} \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(\bar{o})$$

και η σύνθεση τον ισομορφισμό

$$K_0(\bar{o}) \stackrel{\mathrm{ch}}{\to} \mathrm{gr}K_0(\bar{o}) \stackrel{\mathrm{id}\oplus\det}{\longrightarrow} \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(\bar{o}),$$

ο οποίος δίνει την περιγραφή της ομάδας $K_0(\bar{o})$ τον οποίο επίσης θα ονομάζουμε χαρακτηριστική Chern.

1.7 Grothendieck-Riemann-Roch

Θεωρούμε πεπερασμένη επέκταση $L \mid K$ (σωμάτων αριθμών) και αναζητούμε σχέσεις μεταξύ των ομάδων Grothendieck των σωμάτων. Γράφουμε $X(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$, $Y(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{C})$. Ο εγκλεισμός $i : o \to \mathcal{O}$ και ο επιμορφισμός $Y(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C}), \sigma \longmapsto \sigma|_K$ ορίζουν δύο ομομορφισμούς

$$i^* : K_0(\bar{o}) \to K_0(\bar{\mathcal{O}}), \quad i_* : K_0(\bar{\mathcal{O}}) \to K_0(\bar{o})$$

ως εξής:
Αν το M είναι προβολικό μετρικοποιημένο o -πρότυπο τότε το $M \otimes_o \mathcal{O}$ είναι προβολικό $\mathcal{O}$-πρότυπο και

$$(M \otimes_o \mathcal{O})_{\mathbb{C}} = M \otimes_o \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = M_{\mathbb{C}} \otimes_{K_{\mathbb{C}}} L_{\mathbb{C}}.$$

Συνεπώς η ερμιτιανή μετρική στο $K_{\mathbb{C}}$-πρότυπο $M_{\mathbb{C}}$ επεκτείνεται σε F αναλλοίωτη μετρική στο $L_{\mathbb{C}}$-πρότυπο $(M \otimes_{\mathfrak{o}} \mathcal{O})_{\mathbb{C}}$. Θα το συμβολίζουμε με i^*M. Αν

$$0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$$

ακριβής ακολουθία προβολικών μετρικοποιημένων $\mathfrak{o}$ -προτύπων, τότε η

$$0 \to M^{'} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathcal{O} \to M \otimes_{\mathfrak{o}} \mathcal{O} \to M^{''} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathcal{O} \to 0$$

είναι ακριβής ακολουθία μετρικοποιημένων $\mathcal{O}$-προτύπων λόγω προβολικότητας του $\mathfrak{o}$ -προτύπου $\mathcal{O}$ και της $L_{\mathbb{C}}$-επεκτασιμότητας των μετρικών από την ακολουθία

$$0 \to M^{'}_{\mathbb{C}} \to M_{\mathbb{C}} \to M^{''}_{\mathbb{C}} \to 0,$$

στην

$$0 \to M^{'}_{\mathbb{C}} \otimes_{K_{\mathbb{C}}} L_{\mathbb{C}} \to M_{\mathbb{C}} \otimes_{K_{\mathbb{C}}} L_{\mathbb{C}} \to M^{''}_{\mathbb{C}} \otimes_{K_{\mathbb{C}}} L_{\mathbb{C}} \to 0.$$

Αυτά μας δίνουν έναν καλά ορισμένο ομομορφισμό $i^* : K_0(\bar{\mathfrak{o}}) \to K_0(\bar{\mathcal{O}})$.
Τώρα ένα μετρικοποιημένο προβολικό $\mathcal{O}$-πρότυπο M είναι αυτόματα προβολικό $\mathfrak{o}$ -πρότυπο και για τον χώρο $M_{\mathbb{C}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ έχουμε την διάσπαση

$$M_{\mathbb{C}} = \oplus_{\tau \in Y(\mathbb{C})} M_\tau = \oplus_{\sigma \in X(\mathbb{C})} \oplus_{\tau|\sigma} M_\tau = \oplus_{\sigma \in X(\mathbb{C})} M_\sigma,$$

όπου $M_\tau = M \otimes_{\mathcal{O},\tau} \mathbb{C}$ και $_\sigma = M \otimes_{\mathfrak{o},\sigma} \mathbb{C} = \oplus_{\tau|\sigma} M_\tau$. Οι $\mathbb{C}$ διανυσματικοί χώροι M_τ είναι εφοδιασμένοι με ερμιτιανές μετρικές $\langle , \rangle_{M_\tau}$ και ορίζουμε την μετρική στον χώρο M_σ να είναι το άθροισμα

$$\langle x, y \rangle_{M_\sigma} = \sum_{\tau|\sigma} \langle x_\tau, y_\tau \rangle_{M_\tau}$$

κατασκευάζοντας έτσι μια F αναλλοίωτη μετρική στο $K_{\mathbb{C}}$ πρότυπο $M_{\mathbb{C}}$ από την F αναλλοίωτη $\langle , \rangle_M$. Συμβολίζουμε το πρότυπο που προκύπτει με i_*M. Αυτή η αντιστοίχιση προφανώς και διατηρεί τις ακριβείς ακολουθίες άρα επάγει μορφισμό

$$i_* : K_0(\bar{\mathcal{O}}) \to K_0(\bar{\mathfrak{o}}).$$

Πρόταση 1.7.1. *Το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd}
K_0(\bar{\mathcal{O}}) \arrow[d, "i_*"'] & \times & K_0(\bar{\mathcal{O}}) \arrow[r, "\cdot"] & K_0(\bar{\mathcal{O}}) \arrow[d, "i_*"] \\
K_0(\bar{\mathfrak{o}}) & \times & K_0(\bar{\mathfrak{o}}) \arrow[u, "i^*"'] \arrow[r, "\cdot"] & K_0(\bar{\mathfrak{o}})
\end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Έχουμε να δείξουμε για $\mathfrak{o}$ μετρικοποιημένο πρότυπο N , αντίστοιχα M $\mathcal{O}$-πρότυπο την ισομετρία

$$i_*(M \otimes_{\mathcal{O}} i^*N \cong i_*M \otimes \mathfrak{o}N.$$

Η απεικόνιση

$$f : M \otimes_{\mathcal{O}} (N \otimes_{\mathcal{o}} \mathcal{O}), x \otimes (y \otimes z) \longmapsto zx \otimes y$$

είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός για τα υποκείμενα πρότυπα, ενώ πολλαπλασιάζοντας τανυστικά με $\mathbb{C}$ έχουμε τον ισομορφισμό

$$M_{\mathbb{C}} \otimes_{L_{\mathbb{C}}} (N_{\mathbb{C}} \otimes_{K_{\mathbb{C}}} L_{\mathbb{C}}) \cong M_{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{C}} N_{\mathbb{C}},$$

ο οποίος επάγει ισομετρία όπως προκύπτει από την επιμεριστικότητα

$$\sum_{\tau|\sigma} \langle , \rangle_{M_\tau} \langle , \rangle_{N_\sigma} = (\sum_{\tau|\sigma} \langle , \rangle_{M_\tau}) \langle , \rangle_{N_\sigma}.$$

□

Θα ερμηνεύσουμε στα επόμενα το πρόβλημα Riemann-Roch σαν τον υπολογισμό της χαρακτηριστικής Chern $\mathrm{ch}(i_* M)$ για προβολικό $\mathcal{O}$ πρότυπο M σε όρους της $\mathrm{ch}(M)$. Αυτό ανάγεται στον υπολογισμό του προτύπου $\det(i_* M)$ συναρτήσει του $\det M$. Υπάρχει όπως γνωρίζουμε πλήρες ιδεώδες $\mathfrak{U}$ τέτοιο ώστε $\det M \cong L(\mathfrak{U})$. Θέτουμε

$$N_{L|K}(\det M) := L(N_{L|K}(\mathfrak{U})),$$

πλήρες ιδεώδες του K, καλά ορισμένο μέσω του M μέχρι ισομετρία.

Πρόταση 1.7.2. *Για τυχαίο προβολικό μετρικοποιημένο $\mathcal{O}$ πρότυπο M ισχύει:*

(i) $\mathrm{rk}(i_* M) = \mathrm{rk}(M)\mathrm{rk}(\mathcal{O})$.

(ii) $\det(i_* M) \cong N_{L|K}(\det M) \otimes_{\mathcal{o}} (\det i_* \mathcal{O})^{\mathrm{rk}(M)}$.

$$\mathrm{rk}(\mathcal{O}) = [L : K]$$

Απόδειξη. i) $M_K := M \otimes_{\mathcal{o}} K = M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{o}} K = M \otimes_{\mathcal{O}} L =: M_L$. Άρα

$$\mathrm{rk}(i_* M) = \dim_K(M_K) = \dim_K(M_L) = \dim_L(M_L)[L : K] = \mathrm{rk}(M)\mathrm{rk}(\mathcal{O}).$$

ii) Αρχικά δείχνουμε ότι αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $M = L(\mathfrak{U})$ χρησιμοποιώντας επαγωγή στο rank. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\lambda(M) = \det(i_* M) \quad \text{και } \rho(M) = N_{L|K}(\det M) \otimes_{\mathcal{o}} (\det i_* \mathcal{O})^{\mathrm{rk}(M)},$$

με την ιδιότητα για κάθε ακριβή ακολουθία προβολικών μετρικοποιημένων $\mathcal{O}$ προτύπων $0 \to M^{'} \to M \to M^{''} \to 0$ να ισχύει:

$$\lambda(M) \cong \lambda(M^{'}) \otimes_{\mathcal{o}} \lambda(M^{''}) \quad \text{και } \rho(M) \cong \rho(M^{'}) \otimes_{\mathcal{o}} \rho(M^{''}).$$

Ο πρώτος ισομορφισμός προέρχεται από την ακριβή ακολουθία $0 \to i_* M^{'} \to i_* M \to i_* M^{''} \to 0$ και την πρόταση 1.4.10. Ο δεύτερος είναι προφανής καθώς η $N_{L|K}$ είναι ομομορφισμός και το rk αθροιστικό στις ακολουθίες.
Έστω λοιπόν ότι $M = L(\mathfrak{U})$ και $\mathrm{rk}(M) = 1$. Θα δείξουμε ότι

$$\det(i_* L(\mathfrak{U})) = L(N_{L|K}(\mathfrak{U})) \otimes_{\mathcal{o}} \det_{\mathcal{o}} \mathcal{O}.$$

Για τα υποκείμενα $\mathcal{o}$ πρότυπα η σχέση γράφεται:

$$\det_{\mathcal{o}} \mathfrak{U}_f = N_{L|K}(\mathfrak{U}_f) \det_{\mathcal{o}} \mathcal{O}. \tag{1.10}$$

Αν οι δακτύλιοι $\mathcal{O}, \mathcal{o}$ ήταν κυρίων ιδεωδών θα υπήρχε βάση ακεραιότητας $x_1, \dots, x_n$ του $\mathcal{O}$ πάνω από τον $\mathcal{o}$ και γεννήτορας a του ιδεώδους $\mathfrak{U}_f$. Τότε εφόσον $N_{L|K}(a)$ είναι εξ ορισμού η διακρίνουσα του μετασχηματισμού $T_a : L \to L, x \longmapsto ax$ θα είχαμε

$$ax_1 \wedge \cdots \wedge ax_n = N_{L|K}(a)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n),$$

δηλαδή ισότητα στους γεννήτορες των δύο μελών της (1.10). Κάτι τέτοιο όμως συμβαίνει περνώντας στις τοπικοποιήσεις $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \mid \mathcal{o}_\mathfrak{p}$ όπου ισχύει

$$(\det_{\mathcal{o}} \mathfrak{U}_f)_\mathfrak{p} = \det_{\mathcal{o}_\mathfrak{p}} \mathfrak{U}_{f_\mathfrak{p}} = N_{L|K}(\mathfrak{U}_{f_\mathfrak{p}}) \det_{\mathcal{o}_\mathfrak{p}} \mathcal{O}_\mathfrak{p} = (N_{L|K}(\mathfrak{U}_f) \det_{\mathcal{o}} \mathcal{O})_\mathfrak{p}$$

για κάθε πρώτο ιδεώδες $\mathfrak{p}$ άρα έχουμε την (1.10).
Απομένει να δείξουμε την ισότητα στις μετρικές στα δύο σκέλη της 1.10 , οπότε θέτουμε $M = L(\mathfrak{U}), N = L(\mathcal{O}), a = N_{L|K}(\mathfrak{U})$ και τα θεωρούμε μετρικοποιημένα $\mathcal{o}$ πρότυπα. Έχουμε $M_\mathbb{C} = N_\mathbb{C} = L_\mathbb{C}$ και $a_\mathbb{C} = K_\mathbb{C}$. Θα αποδείξουμε την ισότητα σε κάθε συνιστώσα

$$M_\sigma = \oplus_{\tau|\sigma} \mathbb{C}, \quad N_\sigma = \oplus_{\tau|\sigma} \mathbb{C}, \quad a_\sigma = \mathbb{C}.$$

Ισοδύναμα για $x, y \in \det_\mathbb{C} M_\sigma$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ την ταυτότητα

$$\langle \alpha x, \beta y \rangle_{\det M_\sigma} = \langle \alpha, \beta \rangle_{a_\sigma} \langle x, y \rangle_{\det N_\sigma}.$$

Έστω $\mathfrak{U}_\infty = \prod_{\mathfrak{P}|\infty} \mathfrak{P}^{v_\mathfrak{P}}$ το οποίο δίνει

$$a_\infty = N_{L|K}(\mathfrak{U}_\infty) = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}},$$

όπου $v_\mathfrak{p} = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} v_\mathfrak{P} = v_{\mathfrak{p}_\sigma}$ για την αντίστοιχη εμφύτευση σ. Συνοψίζοντας

$$\langle x, y \rangle_{N_\sigma} = \sum_{\tau|\sigma} x_\tau \bar{y}_\tau, \quad \langle x, y \rangle_{M_\sigma} = \sum_{\tau|\sigma} e^{2v_{\mathfrak{P}_\tau}} x_\tau \bar{y}_\tau$$
$$\langle \alpha, \beta \rangle_{a_\sigma} = e^{2v_{\mathfrak{p}_\sigma}} \alpha\bar{\beta} \quad v_{\mathfrak{p}_\sigma} = \sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}_\sigma} f_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}_\sigma} = \sum_{\tau|\sigma} v_{\mathfrak{P}_\tau}.$$

Έστω τώρα $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n, y = y_1 \wedge \cdots \wedge y_n$ και $\tau_1, \dots \tau_n$ μια αρίθμηση των εμφυτεύσεων $\tau \mid \sigma$. Γράφουμε επιπλέον $v_k = v_{\mathfrak{P}_{\tau_k}}$ και σχηματίζουμε τους πίνακες

$$A = (x_{i\tau_k}), \quad B = (\bar{y}_{i\tau_k}), \quad D = \begin{bmatrix} e^{v_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{v_n} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρώντας ότι $\det(D) = \prod_\tau e^{v_{\mathfrak{P}_\tau}} = e^{v_{\mathfrak{p}_\sigma}}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \langle \alpha x, \beta y \rangle_{\det M_\sigma} &= \alpha\bar{\beta} \langle x, y \rangle_{\det M_\sigma} \\ &= \alpha\bar{\beta} \det((AD)(BD)^t)) = \alpha\bar{\beta} (\det D)^2 \det(AB^t). \\ &= e^{2v_{\mathfrak{p}_\sigma}} \alpha\bar{\beta} \langle x, y \rangle_{\det N_\sigma} = \langle \alpha, \beta \rangle_{a_\sigma} \langle x, y \rangle_{\det N_\sigma} \end{aligned}$$

□

Επεκτείνοντας γραμμικά στην ομάδα $F_0(\bar{\mathcal{O}})$ και περνώντας στο πηλίκο $K_0(\bar{\mathcal{O}})$ έχουμε την ακόλουθη συνέπεια.

Συνέπεια 1.7.3. *Για κάθε κλάση $x \in K_0(\bar{\mathcal{O}}$ ισχύουν οι τύποι*

$$\begin{aligned}\mathrm{rk}(i_*x) &= [L:K]\mathrm{rk}(x)\\ \det(i_*x) &= [\det i_*\mathcal{O}]^{\mathrm{rk}(x)} N_{L|K}(\det x).\end{aligned}$$

Πρόταση 1.7.4.

$$(\det i_*\mathcal{O})^{\otimes^2} \cong \mathfrak{d}_{L|K}$$

Απόδειξη. Θεωρώντας στον $\mathcal{O}$ τη διγραμμική συνάρτηση

$$T : \mathcal{O}\times\mathcal{O} \to, \quad (x,y) \longmapsto \mathrm{Tr}_{L|K}(xy)$$

προκύπτει ένας ομομορφισμός $\mathcal{o}$ -προτύπων

$$T : \det\mathcal{O}\otimes\det\mathcal{O} \to \mathcal{o},$$

ο οποίος δίνεται από

$$T((a_1\wedge\cdots\wedge a_n)\otimes(b_1\wedge\cdots\wedge b_n)) = \det(\mathrm{Tr}_{L|K}(a_ib_j)).$$

Για την ισότητα των υποκείμενων προτύπων ταυτίζουμε τις τοπικοποιήσεις τους σε κάθε πρώτο $\mathfrak{p}$, $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \mid \mathcal{o}_\mathfrak{p}$. Λόγω της ύπαρξης βάσης ακεραιότητας η εικόνα της απεικόνισης

$$T_\mathfrak{p} : \det\mathcal{O}_\mathfrak{p}\otimes\det\mathcal{O}_\mathfrak{p} \to \mathcal{o}_\mathfrak{p}$$

είναι συγχρόνως η τοπικοποίηση της εικόνας του T και η διακρίνουσα της επέκτασης $\mathcal{O}_\mathfrak{p} \mid \mathcal{o}_\mathfrak{p} = (\mathfrak{d}_{L|K})_\mathfrak{p}$. Τέλος εφόσον το $(\det i_*\mathcal{O})^{\otimes^2}$ είναι αντιστρέψιμο η T είναι μονομορφισμός.
Απομένει να δείξουμε ότι η

$$T_\mathbb{C} : (\det(i_*\mathcal{O})^{\otimes^2})_\mathbb{C} \to (\mathfrak{d}_{L|K})_\mathbb{C}$$

είναι ισομετρία. Το πρότυπο $\mathcal{O}_\mathbb{C} = \mathcal{O}\otimes_\mathbb{Z}\mathbb{C}$ διασπάται σαν $K_\mathbb{C}$-πρότυπο στη μορφή $\oplus_\sigma\mathcal{O}_\sigma$ όπου $\mathcal{O}_\sigma = \oplus_{\tau|\sigma}\mathbb{C}$. Ο χάρτης του ίχνους $\mathrm{Tr} : \mathcal{O}_\mathbb{C} \to K_\mathbb{C}$ για το στοιχείο $x = \oplus_\sigma x_\sigma, x_\sigma \in \mathcal{O}_\sigma$ δίνεται από την αντιστοιχία

$$\mathrm{Tr}(x) = \sum_\sigma \mathrm{Tr}_\sigma(x_\sigma), \quad \mathrm{Tr}_\sigma(x_\sigma) = \sum_{\tau|\sigma} x_{\sigma,\tau}.$$

Η μετρική του προτύπου $(i_*\mathcal{O})_\mathbb{C} = \mathcal{O}_\mathbb{C}$ είναι το ορθογώνιο άθροισμα των μετρικών

$$\langle x,y\rangle_\sigma = \sum_{\tau|\sigma} x_\tau\bar{y}_\tau = \mathrm{Tr}_\sigma(x\bar{y}).$$

Έστω $x_i, y_i \in \mathcal{O}_\sigma, i = 1,\ldots,n$ και $x = x_1\wedge\cdots\wedge x_n, y = y_1\wedge\cdots\wedge y_n \in \det(\mathcal{O}_\sigma)$. Ο $T_\mathbb{C}$ με τη σειρά του διασπάται σε $T_\mathbb{C} = \oplus_\sigma T_\sigma$ όπου

$$\begin{aligned}T_\sigma : \det(\mathcal{O}_\sigma)\otimes_\mathbb{C}\det(\mathcal{O}_\sigma) &\to (\mathfrak{d}_{L|K})_\sigma = \mathbb{C}\\ T_\sigma(x\otimes y) &= \det(\mathrm{Tr}_\sigma(x_i,y_j)).\end{aligned}$$

Τέλος για n-αδες $x_i', y_i' \in \mathcal{O}_\sigma$ σχηματίζουμε τους πίνακες

$$A = (\mathrm{Tr}_\sigma(x_iy_j)), A' = (\mathrm{Tr}_\sigma(\bar{x}_i'\bar{y}_j')), B = (\mathrm{Tr}_\sigma(x_i\bar{x}_j')), B' = (\mathrm{Tr}_\sigma(y_i\bar{y}_j)).$$

Έχουμε $AA' = BB'$ και καταλήγουμε

$$
\begin{aligned}
\langle T_\sigma(x \otimes y), T_\sigma(x' \otimes y')\rangle_{(\mathfrak{d}_{L|K})_\sigma} &= T_\sigma(x \otimes y)\ T_\sigma\overline{(x' \otimes y')} \\
&= \det(\mathrm{Tr}_\sigma(x_i y_j)) \det(\mathrm{Tr}_\sigma(\bar{x}'_i \bar{y}'_j) = \det(AA') = \det(BB') \\
&= \det(\mathrm{Tr}_\sigma(x_i \bar{x}'_j)) \det(\mathrm{Tr}_\sigma(y_i \bar{y}'_j)) = \det(\langle x_i x'_j\rangle_\sigma) \det(\langle\langle y_i \bar{y}'_j) \\
&= \langle x, x'\rangle_{\det \mathcal{O}_\sigma} \langle y, y'\rangle_{\det \mathcal{O}_\sigma} = \langle x \otimes y, x' \otimes y'\rangle_{(\det \mathcal{O}_\sigma)^{\otimes 2}}
\end{aligned}.
$$

□

Στη συνέχεια αυτής της ενότητας ανακεφαλαιώνουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα υπό τη σκοπιά των συμπερασμάτων που προκύπτουν για τις χαρακτηριστικές Chern. Η μεταθετικότητα του παρακάτω διαγράμματος

$$
\begin{tikzcd}
K_0(\bar{\mathcal{O}}) \arrow[r, "\mathrm{rk}"] \arrow[d, "i_*"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "{[L:K]}"] \\
K_0(\bar{\mathcal{o}}) \arrow[r, "\mathrm{rk}"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}
$$

δίνει έναν ομομορφισμό

$$i_* : I(\bar{\mathcal{O}}) \to I(\bar{\mathcal{o}})$$

και κατ' επέκταση έναν ομομορφισμό

$$i_* : \mathrm{gr}K_0(\bar{\mathcal{O}}) \to \mathrm{gr}K_0(\bar{\mathcal{o}}),$$

τον οποίο αποκαλλούμε **απεικόνιση Gysin**. Άμεσα από την 1.7.3 έχουμε την περιγραφή του μέσω του μεταθετικού διαγράμματος

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{gr}K_0(\bar{\mathcal{O}}) \arrow[r, "\mathrm{id} \oplus \det"] \arrow[d, "i_*"'] & \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{O}}) \arrow[d, "{[L:K] \oplus N_{L|K}}"] \\
\mathrm{gr}K_0(\bar{\mathcal{o}}) \arrow[r, "\mathrm{id} \oplus \det"] & \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(\bar{\mathcal{o}})
\end{tikzcd}
.
$$

Στην περιγραφή των σχέσεων για τις χαρακτηριστικές Chern μιας επέκτασης παρεμβάλλεται το πρότυπο των διαφορικών $\Omega^1_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}$ το οποίο όμως δεν είναι προβολικό. Θεωρούμε λοιπόν την εικόνα του μέσω του ισομορφισμού Poincaré. Ισχύει $\mathrm{rk}_{\mathcal{o}}(\Omega^1_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}) = 0$ άρα ανήκει στο $I(\bar{\mathcal{O}})$.

Ορισμός 1.7.5. *Ονομάζουμε* ***κλάση Todd*** *της $\mathcal{O} \mid \mathcal{o}$ το στοιχείο*

$$\mathrm{Td}(\mathcal{O} \mid \mathcal{o}) = 1 - \frac{1}{2}c_1([\Omega^1_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}]) = 1 - \frac{1}{2}[\Omega^1_{\mathcal{O}|\mathcal{o}}] \in K_0(\bar{\mathcal{O}}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}].$$

Παρατηρούμε ότι η ακριβής ακολουθία μετρικοποιημένων προτύπων με τετριμμένες μετρικές

$$0 \to \mathfrak{D}_{L|K} \to \mathcal{O} \to \Omega^1_{\mathcal{O}|o} \to 0$$

μας δίνει μια περιγραφή της κλάσης Todd μέσω της διακρίνουσας. Έχουμε αναπτύξει ότι χρειάζεται για το τελικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.7.6 (Grothendieck-Riemann-Roch)**.** *Το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} K_0(\bar{\mathcal{O}}) \arrow[r, "\mathrm{Td}(\mathcal{O} \mid o)\mathrm{ch}"] \arrow[d, "i_*"'] & \mathrm{gr}K_0(\bar{\mathcal{O}}) \arrow[d, "i_*"] \\ K_0(\bar{o}) \arrow[r, "\mathrm{ch}"] & \mathrm{gr}K_0(\bar{o}) \end{tikzcd}$$

μετατίθεται.

Απόδειξη. Για τυχαίο $x \in K_0(\bar{\mathcal{O}}$ έχουμε να δείξουμε ότι

$$\mathrm{ch}(i_*x) = i_*(\mathrm{Td}(\mathcal{O} \mid o)ch(x)).$$

Διασπώντας σε $\mathrm{ch}(i_*x) = \mathrm{rk}(i_*x) \oplus c_1(i_*x)$ και $\mathrm{ch}(x) = \mathrm{rk}(x) \oplus c_1(x)$ και εφόσον

$$\mathrm{Td}(\mathcal{O} \mid o)\mathrm{ch}(x) = \mathrm{rk}(x) + [c_1(x) + \frac{1}{2}\mathrm{rk}(x)([\mathfrak{D}_{L|K}] - 1)],$$

αρκεί να ελέγξει κανείς τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \mathrm{rk}(i_*x) &= \mathrm{rk}(x)\mathrm{rk}(i_*[\mathcal{O}]), \\ c_1(i_*x) &= i_*(c_1(x)) + \mathrm{rk}(x)c_1(i_*[\mathcal{O}]), \\ \mathrm{rk}(i_*[\mathcal{O}]) &= i_*(1), \\ 2c_1(i_*[\mathcal{O}]) &= i_*([\mathfrak{D}_{L|K}] - 1). \end{aligned}$$

Η πρώτη και η τρίτη είναι προφανείς από $\mathrm{rk}(i_*[\mathcal{O}]) = \mathrm{rk}(i_*\mathcal{O}) = [L : K]$. Με εφαρμογή του det (ισο.) στις άλλες δύο καταλήγουμε στις γνωστές σχέσεις

$$\begin{aligned} \det(i_*x) &= N_{L:K}((\det x))[\det i_*\mathcal{O}]^{\mathrm{rk}(x)}, \\ (\det i_*\mathcal{O})^{\otimes^2} &= N_{L|K}(\det \mathfrak{D}_{L|K}). \end{aligned}$$

□

1.8 Χαρακτηριστική Euler-Minkowski

Τα προηγούμενα εφαρμοσμένα στην περίπτωση της επέκτασης $K \mid \mathbb{Q}$ έχουν ως πόρισμα τον χαρακτηρισμό του Riemann-Roch για την χαρακτηριστική Euler-Minkowski

$$\chi(a) = -\log \mathrm{vol}(a)$$

για ένα πλήρες ιδεώδες a του K. Θυμίζουμε ότι το $\mathrm{vol}(a)$ παριστάνει τον όγκο του θεμελιώδους πλέγματος του ιδεώδους στον χώρο Minkowski $K_{\mathbb{R}} = a \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα η σωστή κατεύθυνση είναι να θεωρήσουμε το a σαν μετρικοποιημένο $\mathbb{Z}$-πρότυπο με rank $[K : \mathbb{Q}]$.

Πρόταση 1.8.1. *Η απεικόνιση*

$$\deg_K : \mathrm{Pic}(\bar{o}) \to \mathbb{R}, \quad \deg_K([a]) = -\log \mathfrak{N}(a)$$

επεκτείνεται μοναδικά σε ομομορφισμό

$$\chi_K : K_0(\bar{o}) \to \mathbb{R}$$

στην $K_0(\bar{o})$ και συνεπώς και στην $K^0(\bar{o})$. Δίνεται από τον τύπο

$$\chi_K = \deg \circ \det$$

*και ονομάζεται **χαρακτηριστική Euler- Minkowski** του K.*

Απόδειξη. Τα στοιχεία $[a]$ έχουμε δει ότι παράγουν προσθετικά την ομάδα $K_0(\bar{o})$ άρα από αυτά προκύπτει μοναδική επέκταση, και καθώς για την ακολουθία

$$\mathrm{Pic}(\bar{o}) \hookrightarrow K_0(\bar{o}) \overset{\det}{\to} \mathrm{Pic}(\bar{o}) \overset{\deg}{\to} \mathbb{R}$$

η σύθεση $\mathrm{Pic}(\bar{o}) \hookrightarrow K_0(\bar{o}) \overset{\det}{\to} \mathrm{Pic}(\bar{o})$ είναι η ταυτότητα έχουμε $\chi_K = \deg \circ \det$. □

Για επέκταση $L \mid K$ η εφαρμογή του $\deg_K$ στα δύο μέλη της 1.7.2 με χρήση του

$$\deg_L(\mathfrak{U}) = -\log \mathfrak{N}(\mathfrak{U}) = -\log \mathfrak{N}(N_{L|K}(\mathfrak{U})) = \deg_K(N_{L|K}(\mathfrak{U})),$$

δίνει

Θεώρημα 1.8.2. *Για κάθε $\mathcal{O}$ πρότυπο ισχύει*

$$\chi_K(i_* M) = \deg_L(\det M) + \mathrm{rk}(M)\chi_K(i_*\mathcal{O}).$$

Περιγράφουμε τώρα την συμπεριφορά της χαρακτηριστικής Euler-Minkowski για την περίπτωση $K = \mathbb{Q}$. Αυτή σε συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα και την πρόταση 1.8.4 που αποδεικνύουμε στην συνέχεια, επανακτά τον αρχικό τύπο Riemann-Roch 1.5 :

$$\chi(a) = \deg(a) + \chi(o).$$

Αρχικά ένα μετρικοποιημένο $\mathbb{Z}$ πρότυπο M περιγράφεται πλήρως από την δομή της υποκείμενης αβελιανής ομάδας με την επιπλέον προσθήκη μιας ευκλείδειας μετρικής στον πραγματικό διανυσματικό χώρο

$$M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Αυτό αιτιολογείται από το ότι υπάρχει μοναδική εμφύτευση του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{C}$, άρα η μετρική του M είναι απλά ένα ερμιτιανό γινόμενο στο $\mathbb{C}$ διανυσματικό χώρο $M_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, η οποία καθορίζεται μονασήμαντα από τον περιορισμό της στην ευκλείδια μετρική του $M_{\mathbb{R}}$.
Το αμέσως επόμενο βήμα είναι η αντιστοίχιση για την περίπτωση ενός προβολικού προτύπου, της χαρακτηριστικής EM με τους όγκους των πλεγμάτων της θεωρίας Minkowski. Αυτό θα αρκούσε για την πλήρη περιγραφή καθώς η επέκταση της χαρακτηριστικής στην ομάδα $K^0(\bar{\mathbb{Z}})$ γίνεται υποθέτοντας την γραμμικότητα της σε μια προβολική ανάλυση. Σημειώνουμε ότι τα προβολικά $\mathbb{Z}$ πρότυπα είναι ελεύθερα από το θεμελιώδες θεώρημα αβελιανών ομάδων. Η εμφύτευση $M \to M \otimes \mathbb{R}, a \longmapsto a \otimes 1$ έχει για εικόνα

το πλήρες πλέγμα που έχει για γεννήτορες τις εικόνες των γεννητόρων $a_1, \ldots, a_n$ του M. Το σύνολο λοιπόν

$$\Phi = \{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n | x_i \in \mathbb{R}, 0 \leq x_i < 1\}$$

είναι ένα θεμελιώδες πλέγμα του M. Το εσωτερικό γινόμενο επάγει ένα μέτρο Haar, το οποίο ύστερα από επιλογή ορθοκανονικής βάσης $e_1, \ldots, e_n$ ταυτίζουμε με το μέτρο Lebesque μέσω της ισομετρίας $M_{\mathbb{R}} \Rightarrow \mathbb{R}^n, x_1 e_1 + \cdots x_n e_n \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)$. Η ποσότητα

$$\text{vol}(\Phi) = |\det(\langle a_i, a_j \rangle)|^{\frac{1}{2}}$$

που προκύπτει είναι τελικά ανεξάρτητη της επιλογής βάσης διοτί δύο οποιεσδήποτε βάσεις A, B συνδέονται με ακέραιους πίνακες (A $\rightarrow$ B και B $\rightarrow$ A) οι οποίοι αναγκαστικά έχουν ορίζουσες απόλυτα ίσες με 1. Την συμβολίζουμε λοιπόν με vol(M).
Να παρατηρήσουμε ότι στο καινούργιο πλαίσιο που έχουμε αναπτύξει ισοδύναμος ορισμός για την vol(M) είναι ο εξής: για το αντιστρέψιμο $\mathbb{Z}$-πρότυπο $\det M$ το $\det M_{\mathbb{R}}$ είναι μονοδιάστατος $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος με μετρική $\langle , \rangle_{\det M}$ και περιέχει το ισόμορφο με το $\mathbb{Z}$-πλέγμα $\det M$ με γεννήτορα έστω x. Ορίζουμε

$$\text{vol}(M) = \|x\|_{\det M} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\det M}}.$$

Θα δώσουμε αυτή την στιγμή μια περιγραφή της απεικόνισης deg : Pic$(\bar{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι είναι ισομορφισμός και ότι ταυτίζεται με την συνάρτηση $\log \circ$vol, για την συνάρτηση vol που ορίσαμε προηγουμένως. Κάθε πλήρες ιδεώδες του $\mathbb{Q}$ είναι της μορφής $a = (q) \times a_\infty$, όπου a_∞ απλά ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Η τιμή της deg εξαρτάται μονάχα από την κλάση του ιδεώδους a στην Pic όπως έχουμε δει, άρα πολλαπλασιάζοντας με το κύριο ιδεώδες $[q^{-1}]$ βρίσκουμε $(1) \times \mathfrak{N}(a)$ και vol$(a) = \|1\|_{(1) \times \mathfrak{N}(a)} = \mathfrak{N}(a)$. Δείξαμε λοιπόν την ταύτιση των δύο συναρτήσεων.
Επίσης έτσι φαίνεται ότι η συνάρτηση $\mathfrak{N}$: Pic$(\bar{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ είναι 1 - 1, αφού παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\mathfrak{N}(a)$ προσδιορίζει πλήρως το μετρικοποιημένο πρότυπο $L(a)$ και έχουμε δει στα προηγούμενα ότι η L είναι 1 - 1 απεικόνιση της ομάδας Picard.
Έχουμε παρουσιάσει ότι χρειάζεται για την παρακάτω πρόταση που αφορά τον υπολογισμό της χαρακτηριστικής ΕΜ

$$\chi = \text{deg} \circ \det : K^0(\bar{\mathbb{Z}})$$

στην περίπτωση $K = \mathbb{Q}$, την οποία και θα συμβολίζουμε απλά με το γράμμα χ.

Πρόταση 1.8.3. *Για (πεπερασμένα παραγόμενο) $\mathbb{Z}$ πρότυπο M έχουμε*

$$\chi(M) = \log \# M_{\text{tor}} - \log \text{vol}(M/M_{\text{tor}}).$$

M_{tor} υποδηλώνει το κομμάτι της στρέψης του προτύπου M και το ελεύθερο πρότυπο M/M_{tor} αποκτά μετρική από την ισότητα $M \otimes \mathbb{R} = M/M_{\text{tor}} \otimes \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Διακρίνουμε περιπτώσεις για περασμένα = κομμάτι στρέψης και ελεύθερα πρότυπα. Έστω ελεύθερη ανάλυση

$$0 \rightarrow E \rightarrow F \xrightarrow{a} M \rightarrow 0$$

του πεπερασμένου προτύπου M, με $F = \mathbb{Z}^n$ και $E = \ker a \cong \mathbb{Z}^n$. Εφοδιάζοντας το $F \otimes \mathbb{R} = E \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ με τη συνήθη μετρική η ακολουθία μπορεί να θεωρηθεί ακριβής για τα μετρικοποιημένα πρότυπα, εφόσον $M \otimes \mathbb{R} = 0$. Συμπεραίνουμε ότι στην $K^0(\bar{\mathbb{Z}})$ έχουμε:

$$[M] = [F] - [E].$$

Έστω A ο πίνακας που εκφράζει τη $\mathbb{Z}$ βάση $y_1, \ldots, y_n$ του E σε συνδυασμό της βάσης $x_1, \ldots, x_n$ του F. Τότε για τους γεννήτορες $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ και $y = y_1 \wedge \cdots \wedge y_n$ των $\det F$ και $\det E$ αντίστοιχα ισχύει:

$$y = \det A \cdot x = (F : E) \cdot x = \#M \cdot x$$

το οποίο δίνει

$$\chi(E) = \deg(\det E) = -\log \|y\| = -\log(\#M \|x\|) = -\log \#M + \chi(F).$$

Τελικά

$$\chi(M) = \chi([F] - [E]) = \chi(F) - \chi(E) = \log \#M.$$

Θεωρώντας στη συνέχεια τη διάσπαση

$$M = M_{\text{tor}} \oplus M/M_{\text{tor}}$$

αρκεί να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική για το ελεύθερο πρότυπο M/M_{tor} με γεννήτορες έστω $x_1, \ldots, x_n$. Τότε $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_n$ γεννήτορας του $\det M/M_{\text{tor}}$ και $\chi(M/M_{\text{tor}}) = \deg(\det M/M_{\text{tor}}) = -\log \|x\| = -\log \operatorname{vol}(M/M_{\text{tor}})$. □

Ο αρχικός ορισμός της χαρακτηριστικής ΕΜ ενός πλήρους ιδεώδους a ως

$$\chi(a) = -\log \operatorname{vol}(a)$$

με $\operatorname{vol}(a)$ τον όγκο του πλέγματος Minkowski, τώρα εμφανίζεται μέσα από την περιγραφή της χαρακτηριστικής για την περίπτωση των μετρικοποιημένων $\mathbb{Z}$-προτύπων. Συγκεκριμένα αντιστοιχίζοντας στο αντιστρέψιμο $\mathcal{O}$ -πρότυπο $L(a)$ το μετρικοποιημένο $\mathbb{Z}$-πρότυπο $i_*L(a)$ με rank $[K : \mathbb{Q}]$ έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.8.4. $\chi(a) = \chi(i_*L(a)).'$
Εννοώντας για το αριστερό μέλος την χαρακτηριστική της θεωρίας Minkowski και για το δεξί την επέκταση της deg *στην* $K^0(\mathbb{Z})$*, που ορίστηκε σε αυτήν την ενότητα.*

Απόδειξη. Έστω $a = a_f a_\infty = a_f \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mathfrak{p}^{v_\mathfrak{p}}$. Η μετρική $\langle , \rangle_{i_*L(a)}$ στον $\mathbb{C}$-διανυσματικό χώρο $K_\mathbb{C} = \prod_{\tau \in X(\mathbb{C})}$ είναι η

$$\langle x, y \rangle_{i_*L(a)} = \sum_\tau e^{2v_{\mathfrak{p}_\tau}} x_\tau y_\tau,$$

με $\mathfrak{p}_\tau$ τον άπειρο πρώτο που προκύπτει από την εμφύτευση $\tau : K \to \mathbb{C}$. Εναλλακτικά εκφράζεται από την συνήθη μετρική του $K_\mathbb{C}$ μέσω της απεικόνισης

$$T : K_\mathbb{C} \to K_\mathbb{C}, \quad (x_\tau)_{\tau \in X(\mathbb{C})} \longmapsto (e^{v_{\mathfrak{p}_\tau}} x_\tau)_{\tau \in X(\mathbb{C})},$$

δηλαδή

$$\langle x, y \rangle_{i_*L(a)} = \langle Tx, Ty \rangle.$$

Άρα αντί για τον υπολογισμό του $\operatorname{vol}(i_*L(a))$ του θεμελιώδους πλέγματος του a_f για το μέτρο Haar που καθορίζει η μετρική στο $K_\mathbb{R}$ υπολογίζουμε τον Lebesque όγκο του Ta_f. Για την αναπαράσταση $K_\mathbb{R} = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} K_\mathfrak{p}$, η κανονική εμφύτευση

$$K_\mathbb{R} = K \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \to K_\mathbb{C} = K \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}$$

απεικονίζει το στοιχείο $(x_\mathfrak{p})_{\mathfrak{p}|\infty}$ στο $(x_\tau)_{\tau\in X(\mathbb{C})}$ με $x_\tau = \tau x_{\mathfrak{p}_\tau}$, όπου έχουμε επεκτείνει την τ στο $K_{\mathfrak{p}_\tau}$. Ο περιορισμός του μετασχηματισμού Τ στο $K_\mathbb{R}$ δίνεται από $(x_\mathfrak{p}) \longmapsto (e^{v_\mathfrak{p}} x_\mathfrak{p})$ και δίνει το ίδιο πλέγμα Ta_f με εκείνο της ενότητας 3 1.3. Δηλαδή

$$\mathrm{vol}(i_* L(a)) = \mathrm{vol}(a)$$

και συνεπώς $\chi(a) = \chi(i_* L(a))$. □

Εύκολα τώρα διαπιστώνουμε ότι ο τύπος

$$\chi(a) = \deg(a) + \chi(\mathcal{O})$$

προκύπτει σαν ειδική περίπτωση του θεωρήματος 1.8.2.

Κεφάλαιο 2

Παράρτημα

2.1 Εκτιμήσεις

Στόχος αυτής της σύντομης έκθεσης είναι ο ορισμός των εκτιμήσεων ενός αλγεβρικού αριθμητικού σώματος K, ο πλήρης προσδιορισμός τους μέχρι κατάλληλης ισοδυναμίας, η αναφορά σε ιδιότητες της πλήρωσης ενός σώματος ως προς τη μετρική που προκύπτει από μία εκτίμηση και τέλος η περιγραφή των «νόμων» που αξιοποιεί η αλγεβρική θεωρία αριθμών μεταβαίνοντας στα localizations.

Ορισμός 2.1.1. ***Εκτίμηση*** *ενός σώματος K ονομάζουμε μια συνάρτηση*

$$\|\| : K \to \mathbb{R}$$

με τις ιδιότητες

(i) $\|x\| \geq 0$, *και* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(ii) $\|xy\| = \|x\|\|y\|$,

(iii) *τριγωνική ανισότητα :* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Μια εκτίμηση επάγει μετρική ορίζοντας ως απόσταση των $x, y \in K$

$$\mathrm{d}(x, y) = \|x - y\|.$$

Δύο εκτιμήσεις $\|\|_1, \|\|_2$ λέγονται **ισοδύναμες** αν επάγουν την ίδια τοπολογία στο K μέσω της μετρικής ή ισοδύναμα όπως αποδεικνύεται ([13]) ανν υπάρχει $s > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\|_1 = \|x\|_2^s, \forall x \in K$. Πιό πρακτικός χαρακτηρισμός για την ισοδυμία δύο εκτιμήσεων είναι η συνθήκη $\|x\|_1 < 1 \Longrightarrow \|x\|_2 < 1$. Αυτόν επικαλούμαστε στην απόδειξη της παρακάτω παραλλαγής (όπως θα δικαιολογηθεί αργότερα) του κινεζικού θεωρήματος.

Θεώρημα 2.1.2 (Θεώρημα προσέγγισης)**.** *Έστω $\|\|_1, \dots, \|\|_n$ ανά δύο μη ισοδύναμες εκτιμήσεις του σώματος K και τα στοιχεία $a_1, \dots, a_n \in K$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $x \in K$ για το οποίο*

$$\|x - a_i\| < \epsilon, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Απόδειξη. Εφόσον οι $\|\|_1, \|\|n$ είναι μη ισοδύναμες υπάρχει $a \in K$, τέτοιο ώστε $\|a\|_1 < 1$ και $\|a\| \geq 1$. Αν επιπλέον θεωρήσουμε στοιχείο $b \in K$ με $\|b\|_n < 1$ και $\|b\|_1 \geq 1$, για το $y = b/a$ βρίσκουμε $\|y\|_1 > 1$ και $\|y\|_n < 1$.
Αποδεικνύουμε στη συνέχεια με επαγωγή στο n την ύπαρξη $z \in K$ τέτοιου ώστε

$$\|z\|_1 > 1 \quad \text{και} \quad \|z\|_i < 1, \quad i = 2, \dots, n$$

έχοντας ήδη αποδείξει την περίπτωση $n = 2$. Έστω λοιπόν $z \in K$ που ικανοποιεί

$$\|z\|_1 > 1 \quad \text{και} \quad \|z\|_i < 1, \quad i = 2, \dots, n-1.$$

Αν $\|z\|_n \leq 1$ τότε το $z^m y$ εξυπηρετεί για μεγάλο m. Αν $\|z\|_n > 1$ η ακολουθία $t_m = z^m/(1+z^m)$ συγκλίνει στο 1 για τις μετρικές των $\|\|_1$ και $\|\|_n$ και στο 0 σε σχέση με τις $\|\|_2, \dots, \|\|_{n-1}$, άρα για μεγάλο m το στοιχείο $t_m y$ ικανοποιεί την ζητούμενη σχέση.
Τώρα η ακολουθία $z^m/(1+z^m)$ συκλίνει στο 1 για την $\|\|_1$ και στο 0 για τις υπόλοιπες. Επιλέγοντας αρκετά μεγάλο ως προς την αρίθμηση όρο, κατασκευάζουμε κατά αυτόν τον τρόπο ένα στοιχείο z_i πολύ κοντά στο 1 για την $\|\|_i$ και στο 0 για τις υπόλοιπες, για κάθε εκτίμηση $\|\|_i$. Διαπιστώνουμε ότι το στοιχείο

$$x = a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n$$

ικανοποιεί την συνθήκη του θεωρήματος. □

Διακρίνουμε τις εκτιμήσεις σε **αρχιμήδειες** και **μη-αρχιμήδειες**. Ισοδύναμοι μεταξύ τους ορισμοί για τις μη-αρχιμήδειες εκτιμήσεις είναι

(i) Οι όροι $\|n\|$ είναι φραγμένοι,

(ii) Ικανοποιείται η ισχυρή τριγωνική ανισότητα $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$.

Αρχιμήδειες ονομάζουμε τις υπόλοιπες.Να σημειωθεί η παρακάτω συνέπεια της ισχυρής τριγωνικής ανισότητας

$$\|x\| \neq \|y\| \Longrightarrow \|x + y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}. \tag{2.1}$$

Αν στο σώμα $\mathbb{Q}$ συμβολίσουμε με $\|\|_\infty$ την συνήθη απόλυτη τιμή έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.3. *Κάθε εκτίμηση του $\mathbb{Q}$ είναι ισοδύναμη με μία από τις $\|\|_p$ ή $\|\|_\infty$.*

Οι εκτιμήσεις $\|\|_p$ αντιστοιχούν σε πρώτους p είναι μη-αρχιμήδειες και ορίζονται ως εξής: για κάθε ρητό a/b με $a, b \in \mathbb{Z}$, γράφουμε $a/b = p^k c/d$, με $k, c, d \in \mathbb{Z}$ όπου $(p, c) = (p, d) = 1$ και ορίζουμε

$$\left\| \frac{a}{b} \right\|_p = p^{-k}.$$

Θέτοντας για μια μη-αρχιμήδεια εκτίμηση $\|\|$

$$v(x) = -\log \|x\| \quad \text{για } x \neq 0, \quad \text{και } v(0) = \infty$$

προκύπτει συνάρτηση

$$v : K \to \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

με τις ιδιότητες

(i) $v(x) = \infty \Longleftrightarrow x = 0$,

(ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$,

(iii) $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$

και τις ακόλουθες συμβάσεις για $a \in \mathbb{R}$ και ∞: $a < \infty, a + \infty = \infty, \infty + \infty = \infty$. Οποιαδήποτε συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται **εκθετική εκτίμηση**. Τα πολλαπλάσια αυτής (μη μηδενικά) θεωρούνται **ισοδύναμες** εκθετικές εκτιμήσεις. Θέτοντας για κάθε $x \in K$,

$$\|x\| = e^{-v(x)}$$

προκύπτει μια εκτίμηση $\|\|$ σύμφωνα με τον αρχικό ορισμό που έχουμε δώσει, στην οποία, όπου υπάρχει ανάγκη διακρισης από την v, αποδίδουμε το όνομα **πολλαπλασιαστική εκτίμηση** ή **απόλυτη τιμή**.
Στοιχειωδώς προκύπτει ότι το σύνολο

$$\mathcal{O} = \{x \in K | v(x) \geq 0\} = \{x \in K | \|x\| \leq 1\}$$

είναι δακτύλιος με την ιδιότητα για κάθε $x \in K$ είτε $x \in \mathcal{O}$ είτε $x^{-1} \in \mathcal{O}$. Εύκολα επίσης αποδεικνύεται ότι είναι ακέραια κλειστός και τοπικός. Τα σύνολα

$$\mathcal{O}^* = \{x \in K | v(x) = 0\} = \{x \in K | \|x\| = 1\}$$

και

$$\mathfrak{p} = \{x \in K | v(x) > 0\} = \{x \in K | \|x\| < 1\}$$

είναι οι μονάδες και το μέγιστο ιδεώδες του $\mathcal{O}$ αντίστοιχα.
Διακριτή ονομάζουμε μια εκθετική εκτίμηση v για την οποία

$$v(K^*) = s\mathbb{Z}$$

όπου $s \in \mathbb{R}^*$. Ονομάζεται **κανονικοποιημένη** όταν $s = 1$. Διαιρώντας με s προκύπτει μια ισοδύναμη κανονικοποιημένη. Ένα στοιχείο π ονομάζεται **πρώταρχικό** όταν $v(\pi) = 1$ για κανονικοποιημένη v. Κάθε στοιχείο $x \in K^*$ γράφεται σαν

$$x = u\pi^m$$

όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $u \in \mathcal{O}^*$.

Πρόταση 2.1.4. *Αν η v είναι διακριτή εκθετική εκτίμηση του K, ο $\mathcal{O}$ είναι κυρίων ιδεωδών, άρα διακριτής εκτίμησης ([17]). Αν είναι κανονικοποιημένη για τα ιδεώδη*

$$\mathfrak{p}^n = \pi^n \mathcal{O} = \{x \in K | v(x) \geq n\}$$

ισχύει

$$\mathfrak{p}^n / \mathfrak{p}^{n+1} \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p}.$$

Απόδειξη. Ο ισομορφισμός που ζητείται δίνεται από την αντιστοίχιση $a\pi^n \longmapsto a \bmod \mathfrak{p}$. □

2.2 Πληρώσεις

Ορισμός 2.2.1. *Ένα σώμα K θα λέγεται **πλήρες** ως προς μία εκτίμηση $\|\|$, αν κάθε ακολουθία $Cauchy$ ως προς την αντίστοιχη μετρική του K συγκλίνει.*

Για κάθε σώμα με εκτίμηση $(K, \|\|)$ μεταβαίνουμε σε ένα πλήρες σώμα $(\bar{K}, \|\|)$ με τη διαδικασία της **πλήρωσης**. Θεωρώντας το δακτύλιο R όλων των ακολουθιών Cauchy και διαιρώντας με το μέγιστο ιδεώδες όλων των ακολουθιών που συγκλίνουν στο 0, έστω m, ορίζουμε

$$\bar{K} = R/m.$$

Η απεικόνιση για $a \in K, a \longmapsto (a, a, a, \ldots) \in \bar{K}$, εμφυτεύει ισομετρικά το K στο $\bar{K}$ όταν το τελευταίο εφοδιαστεί με την παρακάτω μετρική: για ένα στοιχείο $a \in \bar{K}$ και ακολουθία $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in a$, η συνάρτηση

$$\|a\| = \lim_{n\to\infty} \|a_n\|$$

είναι καλά ορισμένη και επάγει μετρική στο σώμα $\bar{K}$. Η πληρότητα του $\bar{K}$ για αυτή την μετρική και η πυκνότητα του K στο $\bar{K}$ αποδεικνύονται όπως και στην γνωστή κατασκευή των πραγματικών αριθμών. Επίσης όμοια αποδεικνύεται η μοναδικότητα μέχρι ισομορφισμού ενός σώματος με τις δύο παραπάνω χαρακτηριστικές ιδιότητες.
Το παρακάτω θεώρημα απαντά μερικώς στο ζήτημα του προσδιορισμού όλων των κλάσεων για τις εκτιμήσεις ενός αλγεβρικού αριθμητικού σώματος που θα μας απασχολήσει.

Θεώρημα 2.2.2 (Ostrowski.)**.** *Έστω K πλήρες σώμα ως προς μία αρχιμήδεια εκτίμηση $\|\|$. Υπάρχει ισομορφισμός σ από το K προς το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$ που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\|a\| = \|\sigma a\|^s \quad \text{για κάθε } a \in K,$$

για κάποιο $s \in (0, 1]$.

Απόδειξη. Θεώρημα 4.2 . σελ. 124 [13]. □

Το παραπάνω θεώρημα μας πληροφορεί ότι λόγω της $K \hookrightarrow \bar{K}$, όλες οι αρχιμήδειες εκτιμήσεις βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τις εμφυτεύσεις $K \hookrightarrow \mathbb{C}$.
Απομένει η περίπτωση των μη-αρχιμήδειων εκτιμήσεων τις οποίες θα εξετάσουμε μέσω των εκθετικών εκτιμήσεων. Μία εκθετική εκτίμηση v στο K επεκτείνεται σε εκθετική εκτίμηση $\bar{v}$ του $\bar{K}$ θέτοντας όπως πριν

$$\bar{v}(a) = \lim_{n\to\infty} v(a_n).$$

Εδώ παρατηρούμε ότι η ακολουθία $v(a_n)$ για $a \neq 0$ σταθεροποιείται καθώς για μεγάλα n ισχύει $\bar{v}(a - a_n) > \bar{v}(a)$ και η σχέση 2.1 δίνει

$$v(a_n) = \bar{v}(a_n - a + a) = \min\{\bar{v}(a_n - a), \bar{v}(a)\} = \bar{v}(a).$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$v(K^*) = \bar{v}(\bar{K}^*).$$

Ειδικά αν η v είναι διακριτή (και κανονικοποιημένη) το ίδιο ισχύει και για την $\bar{v}$. Ισχύει επίσης η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.2.3. *Έστω $\mathcal{O} \subset K$ ο δακτύλιος εκτίμησης της v με μέγιστο ιδεώδες $\mathfrak{p}$. Αντίστοιχα $\bar{\mathcal{O}} \subset \bar{K}$ ο δακτύλιος εκτίμησης της $\bar{v}$ με μέγιστο ιδεώδες $\bar{\mathfrak{p}}$. Ισχύει*

$$\bar{\mathcal{O}}/\bar{\mathfrak{p}} \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p}.$$

Αν επιπλέον η v είναι διακριτή ισχύει και

$$\bar{\mathcal{O}}/\bar{\mathfrak{p}}^n \cong \mathcal{O}/\mathfrak{p} \quad \text{για} \quad n \geq 1.$$

Σαν συνέπεια προκύπτει ότι για επιλογή αντιπροσώπων $R \subset \mathcal{O}$ του σώματος $\kappa = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ που περιέχει το 0 και επιλογή πρωταρχικού στοιχείου π, για κάθε στοιχείο $x \neq 0$ της πλήρωσης $\bar{K}$ μιας διακριτής εκτίμησης υπάρχει μοναδική αναπαράσταση σε συγκλίνουσα σειρά

$$x = \pi^m(a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \cdots),$$

όπου $a_i \in R, a_0 \neq 0, m \in \mathbb{Z}$.
Απλή συνέπεια των προηγούμενων είναι η παρακάτω περιγραφή του δακτυλίου μιας πλήρους εκτίμησης.

Πρόταση 2.2.4. *Η απεικόνιση*

$$\mathcal{O} \to \varprojlim_n \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n$$

που επάγουν οι προβολές $\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathfrak{p}^n$, είναι ισομορφισμός και ομομορφισμός, όπου στο όριο θεωρούμε την τοπολογία του υπόχωρου του γινομένου των διακριτών τοπολογιών στους δακτυλίους $\mathcal{O}/\mathfrak{p}^n$.

Τα όσα θα συζητηθούν παρακάτω αφορούν τις πεπερασμένες επεκτάσεις $L \mid K$ ενός πλήρους σώματος K. Η καθοριστικής σημασίας ιδιότητα δίνεται από το **λήμμα του Hensel** για την παραγοντοποίηση ενός πολυωνύμου

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Για την διατύπωση του δίνουμε αρχικά τον ορισμό της έννοιας του **πρωταρχικού** πολυωνύμου. Έστω λοιπόν $\mathcal{O}$ ο δακτύλιος εκτίμησης, $\mathfrak{p}$ το μέγιστο ιδεώδες και $\kappa = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ το σώμα υπολοίπων ενός σώματος K πλήρους ως προς μία μη-αρχιμήδεια εκτίμηση $\|\|$. Ένα πολυώνυμο $f(x) \in \mathcal{O}[x]$ ονομάζεται πρωταρχικό αν $f(x) \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$.

Λήμμα 2.2.5 (Λήμμα του Hensel)**.** *Αν ένα πρωταρχικό πολυώνυμο $f(x) \in \mathcal{O}[x]$ επιδέχεται* $\bmod \mathfrak{p}$ *την παραγοντοποίηση*

$$f(x) \equiv \bar{g}(x)\bar{h}(x) \bmod \mathfrak{p}$$

σε σχετικά πρώτα πολυώνυμα $\bar{g}, \bar{h} \in \kappa[x]$, τότε το $f(x)$ παραγοντοποιείται σε

$$f(x) = g(x)h(x)$$

όπου $g, h \in \mathcal{O}[x]$ τέτοια ώστε $\deg(g) = \deg(\bar{g})$ *κα ι*

$$g(x) \equiv \bar{g}(x) \bmod \mathfrak{p} \quad \text{και} \quad h(x) \equiv \bar{h}(x) \bmod \mathfrak{p}$$

Απόδειξη. [13] σελ.129. □

Βασική απόρροια του λήμματος (και ισοδύναμη πρόταση) είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω K πλήρες σώμα για την εκτίμηση $\|\|$. Η $\|\|$ επεκτείνεται μοναδικά σε εκτίμηση κάθε αλγεβρικής επέκτασης $L \mid K$. Η επέκταση δίνεται από τον τύπο*

$$\|a\| = \sqrt[n]{\|N_{L|K}(a)\|},$$

όταν $[L : K] = n$. Προφανώς η αντίστοιχη επέκταση w της εκθετικής εκτίμησης v δίνεται από τον τύπο $w(a) = \frac{1}{n}v(N_{L|K}(a))$. Επιπλέον στην περίπτωση της πεπερασμένης επέκτασης το σώμα L είναι και αυτό πλήρες.

Απόδειξη. [13].σελ.131 □

2.3 Επεκτάσεις των εκτιμήσεων

Σε αυτό το μέρος έχοντας δεί ότι οι επεκτάσεις μιας εκτίμησης που ικανοποιεί το λήμμα του Hensel (στις οποίες αναφερόμαστε και σαν εκτιμήσεις του Hensel) επεκτείνονται μοναδικά σε αλγεβρικές επεκτάσεις, θα μελετήσουμε τις επεκτάσεις για μια τυχαία εκτίμηση. Επειδή θα αναφερόμαστε συγχρόνως στην αλγεβρική κλειστότητα της πλήρωσης θα υιοθετήσουμε έναν πιο πρακτικό συμβολισμό σε σχέση με τα προηγούμενα και κάθε εκτίμηση ενός σώματος K θα την αποδίδουμε με v, γράφοντας $\|\|_v$ για την αντίστοιχη απόλυτη τιμή, K_v για την πλήρωση και $\bar{K}_v$ για την αλγεβρική κλειστότητα του K_v. Η επέκταση της v στο K_v θα γράφεται επίσης v, ενώ με $\bar{v}$ συμβολίζουμε την μοναδική της επέκταση στο $\bar{K}_v$.
Έστω λοιπόν $L \mid K$ μια αλγεβρική επέκταση. Μία K εμφύτευση

$$\tau : L \to \bar{K}_v$$

ορίζει επέκταση

$$w = \bar{v} \circ \tau$$

της v στο L, για την οποία προφανώς η $\tau : L \to \bar{K}_v$ είναι συνεχής.Επεκτείνεται μοναδικά σε συνεχή K-εμφύτευση

$$\tau : L_w \to \bar{K}_v.$$

Παρατήρηση 2.3.1. *Στην περίπτωση άπειρης επέκτασης $L \mid K$, με L_w υποδηλώνουμε όχι την πλήρωσης του L ως προς την w, αλλά την ένωση $L_w = \cup_i L_{i_w}$ των πληρώσεων όλων των πεπερασμένων ενδιάμεσων επεκτάσεων $L_i \mid K$ της $L \mid K$.*

Το σώμα L_w θα ονομάζεται **localization** του L ως προς την w. Στην πεπερασμένη περίπτωση $[L : K]$ η επέκταση τ δίνεται από την αντιστοιχία

$$x = w - \lim_{n\to\infty} x_n \quad \longmapsto \tau x := \bar{v} - \lim_{n\to\infty} \tau x_n,$$

όπου $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w-Cauchy ακολουθία του L και $\{\tau x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\bar{v}$ - Cauchy ακολουθία στην πεπερασμένη (άρα πλήρη) επέκταση $\tau L \cdot K_v \mid K_v$. Η διαδικασία αυτή σχηματοποιείται από το παρακάτω διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] & L_w \arrow[d] \\ L \arrow[ur] \arrow[d] & K_v \\ K \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad . \tag{2.2}$$

Η επέκταση της w από το L στο L_w συμπίπτει με τη μοναδική επέκταση της v του K_v στην $L_w \mid K_v$ και επιπλέον

$$L_w = L \cdot K_v.$$

Το θεώρημα 2.2.6 μας δίνει ότι για την περίπτωση $[L_w : K_v] = n < \infty$ οι απόλυτες τιμές των v και w συνδέονται από τη σχέση

$$\|a\| = \sqrt[n]{\|N_{L_w|K_v}(a)\|}.$$

Η ομάδα Galois $G(\bar{K}_v \mid K_v)$ δρα στις εμφυτεύσεις $\tau : L \to \bar{K}_v$ μέσω της σύνθεσης για $\sigma \in G$, $\tau \longmapsto \sigma \circ \tau$, ορίζοντας τροχιές τις οποίες ονομάζουμε *κλάσεις συζηγίας*. Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει την περιγραφή των επεκτάσεων της v στο L.

Θεώρημα 2.3.2 (Θεώρημα επέκτασης)**.** *Έστω $L \mid K$ αλγεβρική επέκταση και v μια εκτίμηση του K. Τότε*

(i) *Κάθε επέκταση w της v προκύπτει μέσω σύνθεσης $w = \bar{v} \circ \tau$ με εμφύτευση $\tau : L \to \bar{K}_v$.*

(ii) *Δύο επεκτάσεις $\bar{v} \circ \tau$, $\bar{v} \circ \tau'$ είναι ίσες ανν οι τ και τ' είναι συζηγείς πάνω από το K_v.*

Απόδειξη. i) Ονομάζουμε επίσης w την επέκταση της w στο localization L_w, η οποία σαν μοναδική επέκταση της v του K_v, ταυτίζεται με την επαγώμενη οποιασδήποτε K_v ένθεσης $\tau : L_w \to \bar{K}_v$. Συνεπώς και ο περιορισμός της τ στο L δίνει K-ένθεση τέτοια ώστε $w = \bar{v} \circ \tau$.
ii) Έστω τ και $\sigma \circ \tau$ δύο εμφυτεύσεις του L συζηγείς πάνω από το K_v. Εφόσον η $\bar{v}$ είναι η μοναδική επέκταση της v από το K_v στο $\bar{K}_v$, έχουμε $\bar{v} = \bar{v} \circ \sigma$. Συνεπώς $\bar{v} \circ \tau = \bar{v} \circ (\sigma \circ \tau)$, δηλαδή οι τ και $\sigma \circ \tau$ επάγουν τις ίδιες επεκτάσεις στο L.
Αντίστροφα έστω $\tau, \tau' : L \to \bar{K}_v$ δύο K-εμφυτεύσεις για τις οποίες $\bar{v} \circ \tau = \bar{v} \circ \tau'$. Έστω $\sigma : \tau L \to \tau' L$ ο K-ισομορφισμός $\sigma = \tau' \circ \tau^{-1}$. Αρκεί να επεκτείνουμε τον σ σε K_v ισομορφισμό:

$$\sigma : \tau L \cdot K_v \to \tau' L \cdot K_v.$$

Κάθε στοιχείο $x \in \tau L \cdot K_v$ σαν όριο

$$x = \lim_{n \to \infty} \tau x_n$$

για κάποια ακολουθία x_n που ανήκει σε πεπερασμένη υποεπέκταση του L. Εφόσον $\bar{v} \circ \tau = \bar{v} \circ \tau'$, η ακολουθία $\tau' x_n = \sigma \tau x_n$ συγκλίνει σε

$$\sigma x := \lim_{n \to \infty} \sigma \tau x_n$$

εντός του $\tau' L \cdot K_v$. Ο ισομορφισμός $\sigma : \tau L \cdot K_v \to \tau' L \cdot K_v$ που προκύπτει είναι καλά ορισμένος ισομορφισμός που αφήνει σταθερό το K_v, άρα επεκτείνεται σε $\bar{\sigma} \in G(\bar{K}_v \mid K_v)$, δίνοντας $\tau' = \bar{\sigma}\tau$. □

Στην περίπτωση όπου $L = K(a)$ έχουμε την παρακάτω περιγραφή για το σύνολο των δυνατών επεκτάσεων,όπως προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα. Έστω $f(x) \in K[x]$ το ελάχιστο πολυώνυμο του a και η παρακάτω ανάγωγη παραγοντοποίηση του στον δακτύλιο $K_v[x]$:

$$f(x) = f_1(x)^{m_1} \cdots f_r(x)^{m_r}.$$

Να σημειωθεί ότι η χαρακτηριστική 0 των αλγεβρικών αριθμητικών σωμάτων συνεπάγεται την διαχωρισιμότητα του f, συνεπώς οι εκθέτες m_i είναι ίσοι με 1. Οι εμφυτεύσεις $\tau : L \to \bar{K}_v$ καθορίζονται πλήρως από την τιμή $\tau(a) = b$, όπου b ρίζα του f στο $\bar{K}_v$. Δύο εμφυτεύσεις είναι συζηγείς ανν απεικονίζουν το a σε ρίζες του ίδιου όρου στην παραγοντοπίηση του f. Άρα οι επεκτάσεις της εκτίμησης είναι ακριβώς r.
Γράφουμε $w \mid v$ όταν η w επεκτείνει την v στο L. Οι ενθέσεις $L \hookrightarrow L_w$ επάγουν ομομορφισμούς $L \otimes_K K_v \to L_w$ μέσω της $a \otimes b \longmapsto ab$, ορίζοντας κανονικό ομομορφισμό K_v αλγεβρών

$$\phi : L \otimes_K K_v \to \prod_{w|v} L_w.$$

Πρόταση 2.3.3. *Αν η $L \mid K$ είναι διαχωρίσιμη, τότε $L \otimes_K K_v \cong \prod_{w|v} L_w$.*

Απόδειξη. Έστω λοιπόν a με $L = K(a)$ με ελάχιστο πολυώνυμο $f(x) \in K[x]$.Η διαχωρισιμότητα δίνει την παραγοντοποίηση $f(x) = \prod_{w|v} f_w(x)$. Θεωρούμε τα L_w ως υποσύνολα του $\bar{K}_v$ και παρατηρούμε ότι για την εικόνα a_w του a μέσω της $L \to L_w$, έχουμε $L_w = K_v(a_w)$ με ελάχιστο πολυώνυμο f_w. Προκύπτει έτσι το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} K_v[x]/(f) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{w|v} K_v[x]/(f_w) \arrow[d] \\ L \otimes_K K_v \arrow[r] & \prod_{w|v} L_w \end{tikzcd}$$

όπου το κορυφαίο βέλος είναι ο ισομορφισμός του κινεζικού θεωρήματος, το αριστερά βέλος είναι ο πολλαπλασιασμός με $\otimes_K K_v$ του ισομορφισμού $K[x]/(f) \to K(a) = L$, ενώ το δεξί είναι το γινόμενο των ισομορφισμών $K_v[x]/(f_w) \cong K_v(a_w) = L_w$. Όλα τα παραπάνω βέλη είναι ισομορφισμοί άρα και το κάτω βέλος είναι ο ζητούμενος ισομορφισμός. □

Από τον προηγούμενο ισομορφισμό προκύπτει μια σειρά από σχέσεις. Αρχικά ο υπολογισμός της διανυσματικής διάστασης των αλγεβρών στα δύο μέλη πάνω από το K_v δίνει

$$[L : K] = \sum_{w|v} [L_w : K_v].$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του a στον K_v διανυσματικό χώρο $L \otimes_K K_v$ είναι το ίδιο με εκείνο του K χώρου L, δίνοντας

$$\text{χαρ. πολυώνυμο}_{L|K}(a) = \prod_{w|v} \text{χαρ.πολυώνυμο}_{L_w|K_v}(a).$$

Σαν συνέπεια

$$N_{L|K}(a) = \prod_{w|v} N_{L_w|K_v}(a) \quad \text{και} \quad \mathrm{Tr}_{L|K}(a) = \sum_{w|v} \mathrm{Tr}_{L_w|K_v}(a).$$

Για μία μη αρχιμήδεια επέκταση v ορίζουμε ως **δείκτη διακλάδωσης** μιας επέκτασης $w \mid v$:

$$e_w = (w(L^*) : v(K^*))$$

και **βαθμό αδρανείας**:

$$f_w = [\lambda_w : \kappa]$$

όπου λ_w, κ τα σώματα υπολοίπων των εκτιμήσεων w, v.
Τέλος παρουσιάζουμε δύο προτάσεις που αφορούν τους παραπάνω αριθμούς και τους δακτυλίους εκτίμησης των επεκτάσεων στην περίπτωση μιας πλήρους εκτίμησης.

Πρόταση 2.3.4. *Για διακριτή v και διαχωρίσιμη $L \mid K$ ισχύει:*

$$[L : K] = ef.$$

Απόδειξη. Έστω $\omega_1, \ldots, \omega_f \in \mathcal{O}_L$ αντιπρόσωποι μιας βάσης του $\lambda \mid \kappa$ και ακόμη $\Pi^0, \ldots, \Pi^{e-1} \in L^*$, όπου Π πρωταρχικό στοιχείο της w, στοιχεία των οποίων οι εκτιμήσεις είναι αντιπρόσωποι των συμπλόκων της $w(L^*)/v(K^*)$. Στόχος είναι δείξουμε ότι τα στοιχεία

$$\omega_i \Pi^j, \quad i = 1, \ldots, f, \quad j = 0, \ldots, e-1$$

είναι μια βάση της $L \mid K$. Έστω λοιπόν

$$\sum_1^f \sum_0^{e-1} a_{ij} \omega_i \Pi^j = 0$$

K-γραμμικός συνδυασμός μη τετριμμένος. Κατά συνέπεια υπάρχουν μη μηδενικοί συνδυασμοί $s_j = \sum_{i=1}^f a_{ij}\omega_i$, και διαπιστώνουμε ότι όταν $s_j \neq 0$ ισχύει $w(s_j) \in v(K^*)$. Πράγματι αρκεί να διαιρέσουμε με τον συντελεστή a_{vj} με την μικρότερη τιμή γιατί τότε έχουμε έναν συνδυασμό των $\omega_1, \ldots, \omega_f$ με συντελεστές στον δακτύλιο εκτίμησης $\mathcal{O} \subset K$, ο ένας εκ τωκ οποίων είναι 1, άρα το άθροισμα είναι $\neq 0 \operatorname{mod} \mathfrak{P}$, δηλαδή μονάδα. Καταλήγουμε ότι $w(s_j) = w(a_{vj}) \in v(K^*)$.
Λόγω της 2.1 δύο τουλάχιστον όροι του αθροίσματος $\sum_{j=0}^{e-1} s_j \Pi^j$ πρέπει να έχουν την ίδια τιμή, έστω $w(s_i\Pi^i) = w(s_j\Pi^j), i \neq j$. Αυτό όμως θα έδινε

$$w(\Pi^i) = w(\Pi^j) + w(s_j) - w(s_i) \equiv w(\Pi^j) \operatorname{mod} v(K^*),$$

άτοπο. Αυτό αποδεικνύει την γραμμική τους ανεξαρτησία.
Θεωρούμε στη συνέχεια το $\mathcal{O}$ πρότυπο

$$M = \sum_1^f \sum_0^{e-1} \mathcal{O}\omega_i \Pi^j = 0$$

και δείχνουμε ότι $M = \mathcal{O}_L$. Θέτουμε

$$N = \sum_{i=1}^f \mathcal{O}\omega_j$$

οπότε $M = N + \Pi N + \cdots \Pi^{e-1} N$. Επίσης προφανώς

$$\mathcal{O}_L = N + \Pi \mathcal{O}_L$$

Αυτό δίνει

$$\mathcal{O}_L = N + \Pi(N + \Pi\mathcal{O}_L) = \cdots = N + \Pi N + \cdots \Pi^{e-1} N + \Pi^e \mathcal{O}_L,$$

άρα $\mathcal{O}_L = M + \mathfrak{P}^e = M + \mathfrak{p}\mathcal{O}_L$. Η διαχωρισιμότητα της $L \mid K$ δίνει ότι ο $\mathcal{O}_L$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο $\mathcal{O}$ πρότυπο και η ισότητα $\mathcal{O}_L = M$ προκύπτει από το λήμμα του Nakayama. □

Πρόταση 2.3.5. *Αν η επέκταση $\lambda \mid \kappa$ των σωμάτων υπολοίπων, για επέκταση $w \mid v$, είναι διαχωρίσιμη, τότε η επέκταση $\mathcal{O}_L \mid \mathcal{o}$ είναι της μορφής $\mathcal{O}_L = \mathcal{o}[x]$ για κατάλληλο $x \in \mathcal{O}_L$.*

Απόδειξη. Εφόσον η $\lambda \mid \kappa$ είναι διαχωρίσιμη, υπάρχει για αυτήν στοιχείο $\bar{x}$, για το οποίο $\lambda = \kappa(\bar{x})$. Έστω $f(x) \in \mathcal{o}[x]$ ανύψωση του ελαχίστου πολυωνύμου $\bar{f}(x)$ του $\bar{x}$. Υπάρχει αντιπρόσωπος $x \in \mathcal{O}_L$ του $\bar{x}$, τέτοιος ώστε το $\pi = f(x)$ να είναι πρωταρχικό στοιχείο του $\mathcal{O}_L$ (με την έννοια ότι $w(f(x)) = 1$). Πράγματι λόγω του ότι $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ έχουμε $w(f(x)) \geq 1$. Αν $w(f(x)) \geq 2$ ο αντιπρόσωπος $x + \Pi$ είναι ο κατάλληλος όπως φαίνεται από τον τύπο του Taylor

$$f(x+\Pi) = f(x) + f'(x)\Pi + b\Pi^2, \quad b \in \mathcal{O}_L$$

με την παρατήρηση ότι $f'(x) \in \mathcal{O}^*$ ($\bar{f}'(\bar{x}) \neq 0$).Έχοντας δεί από την προηγούμενη πρόταση ότι οι όροι

$$x^j \pi^i = x^j f(x)^i, \quad j = 0, \dots f-1, \quad i = 0, \dots, e-1,$$

αποτελούν βάση ακεραιότητας του $\mathcal{O}_L$ πάνω από το $\mathcal{o}$, προκύπτει ότι $\mathcal{O}_L = \mathcal{o}[x]$. $\square$

Καταλήγουμε έτσι στην σχέση για διακριτή v και διαχωρίσιμη $L \mid K$:

$$\sum_{w|v} e_w f_w = [L : K].$$

Στην περίπτωση τώρα όπου K πεπερασμένη αλγεβρική επέκταση του $\mathbb{Q}$ καταλήγουμε για τις μη αρχιμήδειες εκτιμήσεις ότι είναι επεκτάσεις των p-αδικών εκτιμήσεων στο $\mathbb{Q}$, οι οποίες καθορίζονται από την παραγοντοποιήση

$$p\mathcal{o} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$$

των ιδεωδών στον Dedekind δακτύλιο $\mathcal{o}$ του K. Συγκεκριμένα όλες οι δυνατές επεκτάσεις είναι οι $v_i = \frac{1}{e_i} v_{\mathfrak{p}_i}$, όπου $v_\mathfrak{p}$ ορίζονται ως εξής: αν $(a) = \prod_\mathfrak{p} \mathfrak{p}^{t_\mathfrak{p}}$, $v_\mathfrak{p}(a) = t_\mathfrak{p}$. Οι δείκτες διακλάδωσης είναι e_i και οι βαθμοί αδρανείας $f_i = [\mathcal{O}_L/\mathfrak{P} : \mathcal{o}/\mathfrak{p}]$. Η ίδια συμπεριφορά εμφανίζεται λέξη προς λέξη για σχετικές επεκτάσεις αλγεβρικών σωμάτων $L \mid K$.

Κεφάλαιο 3

Θεωρία Minkowski

Αυτή η ενότητα συνοψίζει τους ορισμούς και στοιχειώδεις προτάσεις της θεωρίας Minkowski που αναφέρονται στα υπόλοιπα. Το σύνολο που έχουμε ονομάσει $X(\mathbb{C}) = \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$, για ένα αλγεβρικό σώμα K με $[K : \mathbb{Q}] = n$, ορίζει εμφύτευση του K σε n-διάστατο διανυσματικό χώρο μέσω της

$$j : K \to K_{\mathbb{C}} := \prod_{\tau \in X(\mathbb{C})} \mathbb{C}, \quad a \longmapsto ja = (\tau a).$$

Ο χώρος αυτός εφοδιάζεται με το ερμιτιανό γινόμενο

$$\langle x, y \rangle = \sum_{\tau} x_\tau \bar{y}_\tau.$$

Επιπλέον ορίζουμε αυτομορφισμό F του χώρου γινόμενο κατ' επέκταση της μιγαδικής συζηγίας $F : z \to \bar{z}$, ως εξής:

$$(Fz)_\tau = \bar{z}_{\bar{\tau}}$$

όπου $\bar{\tau}$ υποδηλώνει τη μιγαδικά συζηγή της τ. Παρατηρούμε ότι το ερμιτιανό γινόμενο είναι F-αναλοίωτο, δηλαδή

$$\langle Fx, Fy \rangle = F\langle x, y \rangle.$$

Ορίζουμε ακόμη την συνάρτηση

$$\mathrm{Tr} : K_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}, \quad \mathrm{Tr}((z_\tau)) = \sum_{\tau} z_\tau$$

και παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{Tr}_{K|\mathbb{Q}}(a) = \mathrm{Tr}(ja).$$

Τα F αναλοίωτα στοιχεία του αποτελούν έναν $\mathbb{R}$-διανυσματικό χώρο τον οποίο συμβολίζουμε με

$$K_{\mathbb{R}} = K_{\mathbb{C}}^{*} = [\prod_{\tau} \mathbb{C}]^{+}.$$

Η εικόνα του K μέσω της $j : K \to K_{\mathbb{C}}$ βρίσκεται εντός του $K_{\mathbb{R}}$.

Ορισμός 3.0.1. *Ο χώρος $K_{\mathbb{R}}$ με το εσωτερικό γινόμενο που επάγει ο περιορισμός του ερμιτιανού γινομένου του $K_{\mathbb{C}}$ ονομάζεται **χώρος Minkowski**. Η μετρική που επάγεται στον χώρο Minkowski αποκαλλείται **κανονική** και το μέτρο Haar που προκύπτει επίσης ονομάζεται **κανονικό μέτρο**.*

Υπενθυμίζουμε ότι ο $K_{\mathbb{R}}$ είναι συγχρόνως ερμηνεία του τανυστικού γινομένου $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, όπως φαίνεται από την απεικόνιση

$$K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} K_{\mathbb{R}}, \quad a \otimes x \longmapsto (ja)x.$$

Αντίστοιχα $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} K_{\mathbb{C}}$. Για την F έχουμε $F(a \otimes z) = a \otimes \bar{z}$.
Διαχωρίζοντας τις εμφυτεύσεις $\tau : K \to \mathbb{C}$ σε πλήρως πραγματικές και μιγαδικές, και απαριθμώντας τες ως

$$\rho_1, \ldots, \rho_r : K \to \mathbb{R}$$

για τις πραγματικές και σε ζεύγη

$$\sigma_1, \bar{\sigma}_1, \ldots \sigma_s, \bar{\sigma}_s : K \to \mathbb{C}$$

για τις μιγαδικές, έχουμε την παρακάτω περιγραφή του χώρου $K_{\mathbb{R}}$.

Πρόταση 3.0.2. *Υπάρχει ισομορφισμός*

$$f : K_{\mathbb{R}} \to \prod_{\tau} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{r+2s}$$

που δίνεται από τον κανόνα $(z_\tau) \longmapsto (x_\tau)$ *όπου*

$$x_\rho = z_\rho, \quad x_\sigma = \mathrm{Re}(z_\sigma), \quad x_{\bar{\sigma}} = \mathrm{Im}(z_\sigma).$$

Ο ισομορφισμός μεταφέρει το κανονικό γινόμενο $\langle , \rangle$ *στο*

$$(x, y) = \sum_{\tau} a_\tau x_\tau y_\tau$$

όπου $a_\tau = 1$, *αντίσ.* $a_\tau = 2$, *αν* τ *πραγματική, αντίσ. μιγαδική.*

Απόδειξη. Πρόταση 5.1. σελ.30 [13] □

Το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο με τη μεταφορά του κανονικού μέτρου του $K_{\mathbb{R}}$ στον $\mathbb{R}^{r+2s}$, επιτρέπει την παρακάτω σύγκριση:

$$\mathrm{vol}_{\text{canonical}}(X) = 2^s \mathrm{vol}_{\text{Lebesque}}(f(X)).$$

Διατηρώντας το μέτρο Lebesque στον $\mathbb{R}^{r+2s}$, μεταβάλλουμε το αντίστοιχο μέτρο του $K_{\mathbb{R}}$, το οποίο πλέον επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$(x, y) = \sum_{\tau} \frac{1}{a_\tau} x_\tau \bar{y}_\tau$$

και η μετρική που ορίζει ονομάζεται **μετρική Minkowski**. Τα αποτελέσματα που θα αναφέρουμε παρακάτω είναι διατυπωμένα για το κανονικό μέτρο.

Πρόταση 3.0.3. *Αν* $a \neq 0$ *είναι ιδεώδες του* $\mathcal{O}_K$, *τότε το* $\Gamma = ja$ *είναι πλήρες πλέγμα του* $K_{\mathbb{R}}$ *και ο όγκος του θεμελιώδους πλέγματος του, δίνεται από τον τύπο:*

$$\mathrm{vol}(\Gamma) = \sqrt{|d_K|}(\mathcal{O}_K : a).$$

Απόδειξη. Έστω $a_1, \ldots, a_n$ μία $\mathbb{Z}$-βάση του a, οπότε $\Gamma = \mathbb{Z}ja_1 + \cdots + \mathbb{Z}ja_n$. Απαριθμώντας τις $\tau : K \to \mathbb{C}, \tau_1, \ldots, \tau_n$, και σχηματίζοντας τον πίνακα $A = (\tau_i a_j)$, βρίσκουμε:

$$d(a) = d(a_1, \ldots, a_n) = (\det A)^2 = (\mathcal{O}_K : a)d_K.$$

Επίσης

$$(\langle ja_i, ja_j \rangle) = (\sum_{l=1}^{n} \tau_l a_i \bar{\tau}_l a_j = A\bar{A}^t.$$

Άρα

$$\mathrm{vol}(\Gamma) = |\det(\langle ja_i, ja_j \rangle)|^{1/2} = |\det A| = \sqrt{|d_K|}(\mathcal{O}_K : a).$$

□

Τέλος παρουσιάζουμε την **πολλαπλασιαστική εκδοχή** για τη θεωρία Minkowski. Έχουμε την εμφύτευση

$$j : K^* \to K^*_{\mathbb{C}} = \prod_{\tau} \mathbb{C}^*,$$

και στη θέση του Tr, τον ομομορφισμό

$$N : K^*_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^*$$

που ορίζει το γινόμενο των συνταταγμένων. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$N_{K|\mathbb{Q}}(a) = N(ja).$$

Ορίζουμε επιπλέον τον λογάριθμο

$$l : K^*_{\mathbb{C}} \to \prod_{\tau} \mathbb{R},$$

σαν το γινόμενο των επιμορφισμών

$$l_\tau : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}, \quad z_\tau \longmapsto \log |z_\tau|.$$

Προκύπτει έτσι το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
K^* \arrow[r, "j"] \arrow[d, "N_{K|\mathbb{Q}}"'] & K^*_{\mathbb{R}} \arrow[r, "l"] \arrow[d, "N"] & \prod_\tau \mathbb{R} \arrow[d, "\mathrm{Tr}"] \\
\mathbb{Q}^* \arrow[r] & \mathbb{C}^* \arrow[r, "l"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}.$$

Θεωρώντας τώρα την τετριμμένη δράση της F στο K^*, και στο $\prod_\tau \mathbb{R}$, να ορίζεται ως $(Fx)_\tau = x_{\bar{\tau}}$, προκύπτει λόγω των σχέσεων:

$$F \circ j = j, \quad F \circ l = l \circ F, \quad N \circ F = F \circ N, \quad \mathrm{Tr} \circ F = \mathrm{Tr},$$

το παρακάτω διάγραμμα του περιορισμού του προηγούμενου στις F-αναλλοίωτες υποομάδες:

$$\begin{tikzcd}
K^* \arrow[r, "j"] \arrow[d, "N_{K|\mathbb{Q}}"'] & K_{\mathbb{R}}^* \arrow[r, "l"] \arrow[d, "N"] & {[\prod_\tau \mathbb{R}]^+} \arrow[d, "\mathrm{Tr}"] \\
\mathbb{Q}^* \arrow[r] & \mathbb{R}^* \arrow[r, "l"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}.$$

Ο πραγματικός διανυσματικός χώρος $[\prod_\tau \mathbb{R}]^+$ αναλύεται σε

$$[\prod_\tau \mathbb{R}]^+ = \prod_{rho} \mathbb{R} \times \prod_\sigma [\mathbb{R} \times \mathbb{R}]^+.$$

Ο όρος $[\mathbb{R} \times \mathbb{R}]^+$ αποτελείται από σημεία της μορφής (x, x), δηλαδή από s αντίτυπα του $\mathbb{R}$, (με ισομορφισμό $(x, x) \longmapsto 2x$). Άρα

$$[\prod_\tau \mathbb{R}]^+ \cong \mathbb{R}^{r+s}.$$

Ο ομορφισμός

$$l : K_{\mathbb{R}}^* \to \mathbb{R}^{r+s}$$

δίνεται από

$$l(x) = (\log |x_{\rho_1}|, \ldots, \log |x_{\rho_r}|, \log |x_{\sigma_1}|^2, \ldots, \log |x_{\sigma_s}|^2).$$

Βιβλιογραφία

[1] S. J. Arakelov. Theory of intersections on the arithmetic surface. pages 405–408, 1975.

[2] S. Ju. Arakelov. An intersection theory for divisors on an arithmetic surface. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 38:1179–1192, 1974.

[3] Arnaud Beauville. *Complex algebraic surfaces*, volume 34 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1996. Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid.

[4] Armand Borel and Jean-Pierre Serre. Le théorème de Riemann-Roch. *Bull. Soc. Math. France*, 86:97–136, 1958.

[5] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Algèbre commutative.* Hermann, 1965.

[6] Douglas Bridges and Fred Richman. *Varieties of constructive mathematics*, volume 97 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[7] Matt DeLand. The Chow ring and Chern classes. https://rigtriv.wordpress.com/2009/03/22/the-chow-ring-and-chern-classes/. Accessed: 31-8-2018.

[8] David Eisenbud. *Commutative algebra*. Springer-Verlag, New York, 1995. With a view toward algebraic geometry.

[9] Gerd Faltings. Calculus on arithmetic surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 119(2):387–424, 1984.

[10] William Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[11] Friedrich Hirzebruch. Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic varieties. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 40:110–114, 1954.

[12] V. Kumar Murty. *Introduction to abelian varieties*, volume 3 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[13] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder.

[14] Patrick J.R. Ryan. The Grothendieck-Riemann-Roch theorem, 2015. προπτυχιακή εργασία.

[15] Jean-Pierre Serre. *Algebraic groups and class fields*, volume 117 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1988. Translated from the French.

[16] Henning Stichtenoth. *Algebraic function fields and codes*, volume 254 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2009.

[17] Μαλιάκας Μιχαλης. *Εισαγωγή στην Αντιμεταθετική Άλγεβρα*.