

Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα και Εφαρμογές στην Απειροσυνδυαστική

Χάρις Γανωτάκη

Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Μαθηματικών
Ιούλιος 2018

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	3
1 Δυναμικά Συστήματα και Επαναφορά	6
1.1 Επαναφορά	6
1.2 Παράγοντες και Επεκτάσεις	8
1.3 Ομοιόμορφη Επαναφορά και Minimality	11
1.4 Symbolic Συστήματα	15
1.5 Διοφαντικές Ανισότητες	18
1.6 Συνδυαστικές Εφαρμογές	32
1.7 Μεταβατικότητα και Nonwandering συστήματα	38
2 Πολλαπλή επαναφορά	43
2.1 Ομογενή σύνολα	43
2.2 Πολλαπλή Επαναφορά και Θεώρημα Birkhoff	48
2.3 Το Θεώρημα του Van der Waerden	59
2.4 IP-σύνολα	63
2.5 Συνδυαστικές και Διοφαντικές Εφαρμογές	71
3 Απειροσυνδυαστικές Εφαρμογές	77
3.1 Proximal και distal στοιχεία	77
3.2 Enveloping Semigroup	78
3.3 Κεντρικά Σύνολα και το Θεώρημα του Hindman	83
3.4 IP-συστήματα	86
3.5 IP-συστήματα και επαναφορά Birkhoff	99
3.6 Το θεώρημα των Hales και Jewett	110

Εισαγωγή

Ένα μέρος της Συνδυαστικής Θεωρίας Αριθμών ασχολείται με θεωρήματα της μορφής: για κάθε πεπερασμένη διαμέριση του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$, υπάρχει ένα B_j το οποίο έχει την ιδιότητα P . Οι αποδείξεις τέτοιων θεωρημάτων είναι συνδυαστικές. Η θεωρία των Τοπολογικών Δυναμικών Συστημάτων μας δίνει τη δυνατότητα να αποδείξουμε τέτοια θεωρήματα ανάγοντάς τα σε τοπολογικά προβλήματα.

Το πρώτο αποτέλεσμα αυτού του τύπου οφείλεται στον D. Hilbert, το 1892, ο οποίος χρησιμοποιεί την έννοια του παραλληλεπίπεδου $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$, που είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένων αθροισμάτων $n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_k}$ για $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ και $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Θεώρημα 0.1 (Hilbert). Έστω $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών. Τότε για κάθε $l = 1, 2, \dots$ υπάρχουν φυσικοί $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_l$ ώστε άπειρες μεταφορές του $P(m_1, m_2, \dots, m_l)$ να ανήκουν στο ίδιο B_j για κάποιο j .

Το επόμενο αποτέλεσμα σε αυτήν την σειρά αποτελεσμάτων αποδείχθηκε από τον I. Schur, ο οποίος απέδειξε το 1916 ότι, για κάθε διαμέριση του συνόλου των φυσικών αριθμών, υπάρχουν τρεις x, y, z οι οποίοι ανήκουν στο ίδιο σύνολο και ικανοποιούν την $x + y = z$.

Θεώρημα 0.2 (Schur). Αν $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{N}$, τότε υπάρχει ένα B_j το οποίο περιέχει τρεις φυσικούς x, y, z ώστε $x + y = z$.

Το 1927 ο van der Waerden απέδειξε την ύπαρξη αριθμητικής προόδου μέσα σε μια τέτοια διαμέριση.

Θεώρημα 0.3 (Van der Waerden). Αν διαμερίσουμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων σε πεπερασμένα σύνολα $B_1, B_2, \dots, B_q$, τότε υπάρχει κάποιο B_j το οποίο περιέχει πεπερασμένη αριθμητική πρόοδο αυθαίρετου μήκους l .

Τα αποτελέσματα αυτά επεκτάθηκαν από τους I. Schur, A. Brauer και R. Rado. Το επόμενο αποτέλεσμα συνδυάζει τα δύο προηγούμενα θεωρήματα.

Θεώρημα 0.4 (I. Schur, A. Brauer). Έστω $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ πεπερασμένη διαμέριση. Τότε υπάρχει ένα j , ώστε για κάθε $l = 1, 2, \dots$ να υπάρχουν $d \in B_j$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n + id \in B_j$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, l$.

Το καλύτερο αποτέλεσμα που έχουμε πετύχει σε αυτήν την κατεύθυνση αποδείχθηκε από τον R. Rado, οποίος παρατήρησε ότι σε όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα ουσιαστικά βρίσκουμε λύση του συστήματος $\sum a_{ij}x_j = 0$ σε ένα από τα σύνολα που αποτελούν τη διαμέριση του $\mathbb{N}$. Χαρακτήρισε τα συστήματα αυτά *κανονικά συστήματα* και βρήκε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ένα σύστημα ώστε να ισχύει η μονοχρωματική λύση.

Θεώρημα 0.5 (Rado). Αν για κάποιο l , ο $p \times q$ πίνακας a_{ij} είναι επιπέδου l , τότε για κάθε πεπερασμένη διαμέριση $\mathbb{N} = B_1 \cup \dots \cup B_r$ υπάρχει ένα B_k που περιέχει λύση του συστήματος

$$\sum_{j=1}^q a_{ij}x_j = 0$$

για $i = 1, 2, \dots, p$.

Από την άλλη, ο T. Grünwald (συχνά αναφερόμενος και ως Gallai) επέκτεινε το θεώρημα του van der Waerden σε περισσότερες διαστάσεις.

Θεώρημα 0.6 (Grünwald). Έστω $\mathbb{N}^m = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ μια διαμέριση του $\mathbb{N}^m$ σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα. Τότε κάποιο από τα B_j έχει την ιδιότητα: αν $F \subseteq \mathbb{N}^m$ πεπερασμένο, υπάρχουν $a \in \mathbb{N}^m$ και $b \in \mathbb{N}$ ώστε $bF + a \subseteq B_j$.

Τα παραπάνω αποτελέσματα, εκτός του θεωρήματος του Hilbert, αποδεικνύουν την ύπαρξη πεπερασμένων σχηματισμών μέσα σε ένα στοιχείο μιας διαμέρισης. Πιο πρόσφατα, το 1974, ο N. Hindman απέδειξε ένα αποτέλεσμα το οποίο αφορά στην ύπαρξη άπειρων σχηματισμών και επεκτείνει τόσο το θεώρημα του Hilbert όσο και το θεώρημα του Schur.

Θεώρημα 0.7 (Hindman). Για κάθε διαμέριση του $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$, υπάρχει ένα B_j το οποίο περιέχει μία ακολουθία στοιχείων $p_1, p_2, p_3, \dots$ και όλα τα πεπερασμένα αθροίσματά τους $p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_n}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, $n \in \mathbb{N}$ (δηλαδή κάποιο B_j περιέχει ένα *IP*-σύνολο).

Στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας μελετάμε την έννοια της επαναφοράς σε τοπολογικά δυναμικά συστήματα και δίνουμε κάποιες εφαρμογές σε διοφαντικές ανισότητες, μεταξύ των οποίων και ένα γνωστό αποτέλεσμα των Hardy και Littlewood και μία γενίκευσή του σε πολυώνυμα, κάποιες συνδυαστικές εφαρμογές και αποδεικνύουμε το προαναφερθέν θεώρημα του Hilbert. Στο

δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε την έννοια της πολλαπλής επαναφοράς για ένα πεπερασμένο σύνολο συνεχών μετασχηματισμών σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο, που αντιμετωπίζονται μεταξύ τους, δίνουμε απόδειξη του θεωρήματος του van der Waerden μέσω του θεωρήματος Πολλαπλής Επαναφοράς του Birkhoff και της γενίκευσης του θεωρήματος van der Waerden σε περισσότερες διαστάσεις (θεώρημα Grünwald), εισάγουμε την έννοια των IP-συνόλων και δίνουμε τέλος πάλι κάποιες συνδυαστικές εφαρμογές και εφαρμογές σε διοφαντικές ανισότητες, μεταξύ των οποίων και μία άλλη απόδειξη του προαναφερθέντος θεωρήματος των Hardy και Littlewood. Τέλος, στο τρίτο κεφάλαιο μελετάται η έννοια του proximity σε δυναμικά συστήματα, ορίζονται τα κεντρικά σύνολα και δίνεται μία απόδειξη του θεωρήματος του Hindman. Δίνονται επίσης αποδείξεις του θεωρήματος του Schur, μια άλλη απόδειξη του θεωρήματος van der Waerden, εισάγονται τα IP-συστήματα και αποδεικνύεται η γενίκευση των Schur και Brauer των θεωρημάτων των Schur και van der Waerden. Δίνεται τέλος και μία δυναμική απόδειξη του θεωρήματος των Hales και Jewett, μιας (πολύ ισχυρής) γενίκευσης του θεωρήματος του van der Waerden.

Κεφάλαιο 1

Δυναμικά Συστήματα και Επαναφορά

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δώσουμε κάποιες βασικές έννοιες για τα Τοπολογικά Δυναμικά Συστήματα, για τα σημεία επαναφοράς και τα σημεία ομοιόμορφης επαναφοράς, καθώς και κάποια πρώτα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτές.

1.1 Επαναφορά

Ορισμός 1.1.1. Ένα **Τοπολογικό Δυναμικό Σύστημα** είναι μια δυάδα (X, G) , όπου ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος και η G αβελιανή ομάδα ή ημιομάδα που δρα στον X με συνεχείς μετασχηματισμούς.

Ορισμός 1.1.2. Έστω T συνεχής μετασχηματισμός σε έναν τοπολογικό χώρο X . Ένα $x \in X$ θα λέγεται **σημείο επαναφοράς** (recurrent point) για τον T αν για κάθε περιοχή V του x , υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^n(x) \in V$.

Παρατήρηση. Αν η G είναι είτε η $\mathbb{N}$ είτε η $\mathbb{Z}$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε την G ως κυκλική με γεννήτορα 1 και τη δράση του γεννήτορα 1 ως τον μετασχηματισμό T . Κατά συνέπεια το δυναμικό σύστημα θα συμβολίζεται με (X, T) , και θα το ονομάζουμε **κυκλικό σύστημα**. Αν ο X είναι μετρικός χώρος, το $x \in X$ είναι σημείο επαναφοράς αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $n_k \rightarrow \infty$ ώστε $T^{n_k}(x) \rightarrow x$ (θεωρούμε ως περιοχές V τις ανοιχτές μπάλες με κέντρο το x και ακτίνα $1/k$).

Ορισμός 1.1.3. Ως **τροχιά** ενός σημείου x που ανήκει σε τοπολογικό δυναμικό σύστημα (X, G) , ορίζεται το $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. Αν το δυναμικό σύστημα είναι κυκλικό, δηλαδή (X, T) , τότε η τροχιά του x είναι η $\text{Orb}(x, T) = \{T^n(x), n \geq 1\}$.

Παρατήρηση 1.1.4. Ένα $x \in X$ είναι σημείο επαναφοράς αν και μόνο αν $x \in \overline{\text{Orb}(x, T)}$.

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Αν το $x \in X$ είναι επανερχόμενο, τότε από τον ορισμό 1.1.2, για κάθε περιοχή V του x υπάρχει ένα $T^n(x) \in V$ και άρα το $x \in \overline{\text{Orb}(x, T)}$. ($\Leftarrow$) Αν τώρα $x \in \overline{\text{Orb}(x, T)}$ από τον ορισμό της κλειστής θήκης μπορούμε να βρούμε σε οποιαδήποτε περιοχή του x ένα στοιχείο της τροχιάς, που είναι και ο ορισμός του σημείου επαναφοράς.

Ορισμός 1.1.5. Θα λέμε ένα σύνολο A G -**αναλλοίωτο** αν $GA \subseteq A$ και T -**αναλλοίωτο** αν $T(A) \subseteq A$.

Παρατήρηση 1.1.6. Σε ένα δυναμικό σύστημα (X, T) , αν $A \subseteq X$, τότε από τη συνέχεια της T , $T(\overline{A}) \subseteq \overline{T(A)}$. Άρα αν το A είναι T -αναλλοίωτο, τότε και το $\overline{A}$ είναι T -αναλλοίωτο, αφού $T(\overline{A}) \subseteq \overline{T(A)} \subseteq \overline{A}$. Ειδικότερα κάθε τροχιά $\text{Orb}(x, T)$ είναι φυσικά T -αναλλοίωτη και επομένως και το $\overline{\text{Orb}(x, T)}$ είναι T -αναλλοίωτο. Όμοια σε ένα (X, G) , αν $A \subseteq X$ είναι G -αναλλοίωτο τότε και το $\overline{A}$ είναι, και ειδικότερα η κλειστή θήκη κάθε τροχιάς $\overline{Gx}$ είναι G -αναλλοίωτο σύνολο.

Τα πρώτα ερωτήματα που προκύπτουν είναι αν μπορούμε να βρούμε επανερχόμενα σημεία σε κάποιο δυναμικό σύστημα, και αν μπορούμε, πόσα είναι αυτά. Απάντηση στο πρώτο ερώτημα δίνει το θεώρημα που ακολουθεί, το οποίο είναι γνωστό ως **Θεώρημα Επαναφοράς του Birkhoff** (*Birkhoff's Recurrence Theorem*).

Θεώρημα 1.1.7 (Θεώρημα Επαναφοράς του Birkhoff). *Αν ο X είναι συμπαγής χώρος και T είναι ένας συνεχής μετασχηματισμός στον X , τότε το σύνολο των σημείων επαναφοράς είναι μη κενό.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ κλειστό και μη κενό και } T(Y) \subseteq Y\}$. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{F}$ έχει ελάχιστο στοιχείο και έπειτα ότι κάθε σημείο αυτού είναι σημείο επαναφοράς.

Έστω μια αλυσίδα στην $\mathcal{F}$. Η τομή των συνόλων που ανήκουν στην αλυσίδα είναι μη κενή, διότι η $\mathcal{F}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών και ο X είναι συμπαγής, και μάλιστα ανήκει στην $\mathcal{F}$ (είναι T -αναλλοίωτη). Επιπλέον, αφού ο X ανήκει στην $\mathcal{F}$, η $\mathcal{F}$ είναι μη κενή και άρα από το Λήμμα του Zorn η $\mathcal{F}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, έστω το Y_0 .

Έστω τώρα ένα $x \in Y_0$. Ορίζουμε ως $Y = \overline{\text{Orb}(x, T)}$ και παρατηρούμε ότι (προφανώς λόγω ελαχίστου) $Y_0 \subseteq Y$, αλλά και $Y \subseteq Y_0$ αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $T^n(x) \in Y_0$ (το Y_0 είναι T -αναλλοίωτο), δηλαδή $\text{Orb}(x, T) \subseteq Y_0$, και άρα (λόγω κλειστότητας) $Y \subseteq Y_0$.

Έπεται λοιπόν ότι $Y = Y_0$ και άρα $x \in Y_0 = Y = \overline{\text{Orb}(x, T)}$. Από την Παρατήρηση 1.1.4, το x είναι σημείο επαναφοράς. $\square$

Παράδειγμα 1.1.8. Έστω K μια συμπαγής ομάδα, $a \in K$ και $T: K \rightarrow K$ με $T(x) = ax$. Τότε κάθε στοιχείο στο (K, T) είναι σημείο επαναφοράς.

Απόδειξη. Αφού η K είναι συμπαγής, τότε από το Θεώρημα 1.1.7 υπάρχει ένα x_0 που είναι σημείο επαναφοράς. Έστω τώρα ένα άλλο σημείο x , το οποίο μπορούμε να το γράψουμε ως $x = x_0u$ για κάποιο $u \in K$. Αν V είναι μια περιοχή του x , τότε η Vu^{-1} είναι περιοχή του x_0 και άρα (από τον ορισμό του σημείου επαναφοράς) υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^n(x_0) \in Vu^{-1}$. Ισοδύναμα, $a^n x_0 \in Vu^{-1}$, δηλαδή $a^n x_0 u \in V$ και άρα $a^n x \in V$. Παίρνουμε συνολικά, ότι υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^n(x) \in V$, δηλαδή το x είναι σημείο επαναφοράς. $\square$

Ορισμός 1.1.9. Ένα δυναμικό σύστημα (K, T) λέγεται **Kronecker system** αν K είναι συμπαγής αβελιανή ομάδα με μετριοποιήσιμη τοπολογία, και $T: K \rightarrow K$ ώστε $T(x) = ax$ για κάποιο $a \in K$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι σε ένα Kronecker system κάθε στοιχείο είναι σημείο επαναφοράς. Θα δούμε στη συνέχεια ότι τα συστήματα Kronecker ικανοποιούν πολλές ιδιότητες σχετικές με την επαναφορά.

1.2 Παράγοντες και Επεκτάσεις

Ορισμός 1.2.1. Έστω (X, G) και (Y, G) δύο τοπολογικά δυναμικά συστήματα με την ίδια ομάδα μετασχηματισμών G . Ένας **ομομορφισμός** από το (X, G) στο (Y, G) είναι μια συνεχής απεικόνιση $h: X \rightarrow Y$ με την ιδιότητα

$$h(gx) = gh(x) \quad (1.1)$$

για κάθε $x \in X$ και κάθε $g \in G$.

Ορισμός 1.2.2. Ένα δυναμικό σύστημα (Y, G) λέγεται **παράγοντας** του συστήματος (X, G) αν υπάρχει ένας ομομορφισμός από το X στο Y ο οποίος είναι επί. Συχνά μπορεί να αναφέρουμε τον X ως **επέκταση** του Y .

Ερώτηση: Αν h είναι ομομορφισμός, όπως στον Ορισμό 1.2.1, και αν x είναι ένα σημείο επαναφοράς για τον X , τότε το $h(x)$ θα είναι σημείο επαναφοράς για τον Y ; Ισχύει το αντίστροφο; Η απάντηση στο πρώτο ερώτημα είναι καταφατική για κυκλικά συστήματα.

Πρόταση 1.2.3. Έστω τα κυκλικά συστήματα (X, T) , (Y, T) και $h: X \rightarrow Y$ ομομορφισμός. Αν το $x \in X$ είναι σημείο επαναφοράς, τότε θα είναι και το $h(x) \in Y$.

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ σημείο επαναφοράς και έστω V μια περιοχή του $h(x) \in Y$. Τότε η $h^{-1}(V)$ είναι περιοχή του x και αφού είναι επανερχόμενο υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T^n(x) \in h^{-1}(V)$ και συνεπώς $h(T^n(x)) \in V$. Λόγω της (1.1) η τελευταία σχέση γίνεται $T^n(h(x)) \in V$ και τέλος παίρνουμε ότι το $h(x)$ είναι σημείο επαναφοράς. $\square$

Για παραδείγματα όπου ισχύει το αντίστροφο θα χρειαστούμε την επόμενη έννοια.

Ορισμός 1.2.4. Έστω (Y, T) ένα κυκλικό δυναμικό σύστημα, K μια συμπαγής ομάδα και $\psi: Y \rightarrow K$ μια συνεχής απεικόνιση. Θέτουμε

$$1. \ X = Y \times K$$

$$2. \ T: X \rightarrow X \text{ με } T(y, k) = (T(y), \psi(y)k).$$

Θα λέμε το δυναμικό σύστημα (X, T) **group extension** του (Y, T) . Παρατηρούμε ότι ο X είναι επέκταση του Y .

Ορισμός 1.2.5. Ένας **αυτομορφισμός** σε ένα σύστημα (X, T) είναι ένας ομοιομορφισμός που μετατίθεται με τον T .

Παρατήρηση 1.2.6. Έστω $(X, T) = (Y \times K)$ ένα group extension του (Y, T) . Η απεικόνιση $R_k: X \rightarrow X$ με $R_k(yk') := (y, k'k)$, δηλαδή πολλαπλασιασμός της δεύτερης συντεταγμένης με το στοιχείο k από τα δεξιά, είναι αυτομορφισμός στο (X, T) . Πράγματι, είναι 1-1, αφού $R_k(y_1, k_1) = R_k(y_2, k_2) \Leftrightarrow (y_1, k_1k) = (y_2, k_2k) \Leftrightarrow y_1 = y_2$ και $k_1 = k_2$. Είναι επί, αφού αν πάρουμε ένα $(y', k') \in X$ τότε γράφουμε το k' ως $k' = uk$ και άρα $R_k(y', u) = (y', k')$. Είναι συνεχής, αφού ο πολλαπλασιασμός στην K είναι συνεχής απεικόνιση. Η αντίστροφη είναι συνεχής, αφού η $k \mapsto k^{-1}$ είναι συνεχής. Τέλος, μετατίθεται με τον T , αφού $R_k(T(y', k')) = (T(y'), \psi(y')k'k) = T(y', k'k) = T(R_k(y', k'))$.

Θεώρημα 1.2.7. Αν το y_0 είναι σημείο επαναφοράς για το δυναμικό σύστημα (Y, T) , τότε όλα τα (y_0, k) , $k \in K$, είναι σημεία επαναφοράς για ένα group extension $(X, T) = (Y \times K, T)$ του (Y, T) .

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το (y_0, e) όπου e το ταυτοτικό στοιχείο της K , είναι σημείο επαναφοράς για τον (X, T) και θα το έχουμε και για κάθε (y_0, k) χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 1.2.6 και την Πρόταση 1.2.3.

Έχουμε λοιπόν από την Παρατήρηση 1.1.4, ότι ένα $x \in X$ είναι σημείο επαναφοράς αν και μόνο αν $x \in \text{Orb}(x, T)$. Αφού το y_0 είναι σημείο επαναφοράς για το Y , τότε υπάρχει μια ακολουθία $n_i \rightarrow \infty$ ώστε $T^{n_i}(y_0) \rightarrow y_0$. Έχουμε ότι $T^{n_i}(y_0, e) = (T^{n_i}(y_0), \psi(T^{n_i-1}(y_0)) \cdots \psi(T(y_0))\psi(y_0))$. Όμως η

ακολουθία $\{\psi(T^{n_i-1}(y_0)) \cdots \psi(T(y_0))\psi(y_0) : i \in \mathbb{N}\}$ ανήκει στο K το οποίο είναι συμπαγές και έτσι μπορούμε να βρούμε υποδίκτυο $N: D \rightarrow \mathbb{N}$ της $n_1 < n_2 < \cdots$, όπου D κάποιο κατευθυνόμενο σύνολο, ώστε το υποδίκτυο $\{\psi(T^{n_{N(d)}-1}(y_0)) \cdots \psi(T(y_0))\psi(y_0) : d \in D\}$ να συγχλίνει σε κάποιο $k_1 \in K$. Τότε το $\{(T^{N(d)}(y_0), \psi(T^{n_{N(d)}-1}(y_0)) \cdots \psi(T(y_0))\psi(y_0)) : d \in D\}$ είναι υποδίκτυο της ακολουθίας $T^{n_i}(y_0, e) = (T^{n_i}(y_0), \psi(T^{n_i-1}(y_0)) \cdots \psi(T(y_0))\psi(y_0))$, $i \in \mathbb{N}$, που συγχλίνει στο $(y_0, k_1) \in Y \times K$.

Άρα υπάρχει ένα $k_1 \in K$ ώστε $(y_0, k_1) \in \overline{\text{Orb}((y_0, e), T)}$. Εφαρμόζουμε τον R_{k_1} στο (y_0, k_1) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (y_0, k_1^2) &\in R_{k_1}(\overline{\text{Orb}((y_0, e), T)}) \\ &\subseteq \overline{R_{k_1}(\text{Orb}((y_0, e), T))} \\ &= \overline{\text{Orb}((y_0, k_1), T)} \end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη σχέση χρησιμοποιήσαμε τη συνέχεια του R_{k_1} και στην τελευταία τη μεταθετικότητα του με τον T . Όμως $\text{Orb}((y_0, k_1), T) \subseteq \text{Orb}((y_0, e), T)$ επειδή το $\overline{\text{Orb}((y_0, e), T)}$ είναι T -αναλλοίωτο και κλειστό και επειδή $(y_0, k_1) \in \overline{\text{Orb}((y_0, e), T)}$. Άρα $(y_0, k_1^2) \in \overline{\text{Orb}((y_0, e), T)}$.

Επαγωγικά βρίσκουμε ότι $(y_0, k_1), (y_0, k_1^2), \dots, (y_0, k_1^n) \in \overline{\text{Orb}((y_0, e), T)}$. Το σύστημα όμως (K, τ_{k_1}) , όπου $t_{k_1}: K \rightarrow K$ η απεικόνιση $\tau_{k_1}(k) = k_1 k$, αποτελεί σύστημα Kronecker, και κάθε στοιχείο του είναι σημείο επαναφοράς, δηλαδή υπάρχει ακολουθία $n_k \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε $k_1^{n_k} \rightarrow e$. Επιπλέον το $\overline{\text{Orb}((y_0, e), T)}$ είναι κλειστό σύνολο και άρα το όριο (y_0, e) θα ανήκει στο $\overline{\text{Orb}((y_0, e), T)}$. Από την Παρατήρηση 1.1.4, το (y_0, e) είναι σημείο επαναφοράς. $\square$

Μια άλλη περίπτωση που μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα για τα σημεία επαναφοράς, είναι στην *ισομετρική επέκταση*.

Ορισμός 1.2.8. Έστω K συμπαγής ομάδα ισομετριών ενός συμπαγούς μετρικού χώρου M , με την τοπολογία στην K τέτοια ώστε η απεικόνιση $K \times M \rightarrow M$ που δίνεται από την $(k, u) \mapsto ku$ να είναι συνεχής· εδώ ku συμβολίζει την εικόνα του $u \in M$ κάτω από την ισομετρία k του μετρικού χώρου M . Έστω και (Y, T) δυναμικό σύστημα και $\psi: Y \rightarrow K$ συνεχής απεικόνιση. Θέτουμε

1. $X = Y \times M$
2. $T: X \rightarrow X$ με $T(y, u) = (T(y), \psi(y)u)$.

Τότε το σύστημα (X, T) θα λέγεται **ισομετρική επέκταση** του (Y, T) .

Θεώρημα 1.2.9. Αν ο (X, T) είναι ισομετρική επέκταση ενός (Y, T) , τότε η αντίστροφη εικόνα ενός σημείου επαναφοράς στον (Y, T) θα είναι σημείο επαναφοράς για τον (X, T) .

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι άμεση από το Θεώρημα 1.2.7, την Πρόταση 1.2.3 και την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.2.10. Έστω ότι (X, T) είναι μία ισομετρική επέκταση ενός (Y, T) . Τότε μπορούμε να γράψουμε τον X ως $X = \bigcup X_a$, όπου X_a είναι κλειστά και T -αναλλοίωτα υποσύνολα του X και κάθε σύστημα (X_a, T) είναι παράγοντας ενός group extension του (Y, T) .

Απόδειξη. Έστω $X = Y \times M$ όπως στον Ορισμό 1.2.8. Ορίζουμε ως $Z = Y \times K$ το group extension (Y, T) όπως στον Ορισμό 1.2.4· συγκεκριμένα $T(y, k) = (T(y), \psi(y)k)$. Σταθεροποιούμε ένα $(y_0, u_0) \in X$ και ορίζουμε $\phi_{u_0} : Z \rightarrow X$ με $(y, k) \mapsto (y, ku_0)$.

Η ϕ_{u_0} ορίζει έναν ομομορφισμό από το Z επί ενός υποσυστήματος του (X, T) . Παρατηρούμε τώρα ότι $(y_0, u_0) = \phi_{u_0}(y_0, e)$ και άρα το (y_0, u_0) ανήκει στην εικόνα του ϕ_{u_0} .

Άρα μπορούμε να γράψουμε τον X ως $X = \bigcup X_a$, όπου κάθε X_a είναι της μορφής $\phi_u(Z)$ για κάποιο $u \in M$. Τα $\phi_u(Z)$ είναι κλειστά, επειδή το Z είναι συμπαγές και άρα κάθε $\phi_u(Z)$ είναι συμπαγές και επομένως κλειστό αφού ο $X = Y \times M$ είναι μετρικός χώρος, και T -αναλλοίωτα, επειδή $T(\phi_u(y, k)) = \phi_u(T(y, k))$ για κάθε u, y, k , και είναι παράγοντες του Z επειδή τα ϕ_u είναι ομομορφισμοί. $\square$

1.3 Ομοιόμορφη Επαναφορά και Minimality

Μια πιο ισχυρή έννοια επαναφοράς από την απλή επαναφορά που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, είναι η *ομοιόμορφη επαναφορά*. Χρειαζόμαστε πρώτα έναν ορισμό που καθορίζει το πόσο ισχυρή έννοια επαναφοράς είναι η ομοιόμορφη επαναφορά.

Ορισμός 1.3.1. Θα λέμε ένα σύνολο $A \subseteq G$ **συνδετικό** (syndetic), όπου G αβελιανή τοπολογική ομάδα ή ημιομάδα, αν υπάρχει ένα K συμπαγές $\subseteq G$ ώστε για κάθε $g \in G$ να υπάρχει ένα $k \in K$ τέτοιο ώστε $gk \in A$.

Παρατήρηση 1.3.2. 1. Στην περίπτωση που η G ως τοπολογική ομάδα έχει τη διακριτή τοπολογία, τότε το συμπαγές K είναι πεπερασμένο, και συνεπώς το A είναι συνδετικό αν υπάρχουν πεπερασμένο πλήθος μεταφορών του που καλύπτουν την G . Στην περίπτωση που η G είναι απλά ημιομάδα, ως μεταφορές του A θεωρούμε τα σύνολα $Ag = \{ag \mid a \in A\}$ για $g \in G$, αλλά και τα σύνολα $Ag^{-1} := \{b \in G \mid bg \in A\}$, για $g \in G$.

2. Αν $G = \mathbb{N}$, τότε ένα A είναι συνδετικό αν έχει φραγμένα κενά: για κάποιο $N \in \mathbb{N}$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\{k+1, k+2, \dots, k+N\} \cap A \neq \emptyset$.

Ορισμός 1.3.3. Έστω ένα δυναμικό σύστημα (X, G) . Ένα $x \in X$ θα λέγεται **σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς** για το σύστημα, αν για κάθε περιοχή V του x , το σύνολο $\{g \in G \mid gx \in V\}$ είναι συνδετικό.

Παρατήρηση. Παρατηρούμε ότι ενώ η επαναφορά (όπως την ορίσαμε σε προηγούμενη παράγραφο) αναφερόταν σε κυκλικά συστήματα (X, T) , η ομοιόμορφη επαναφορά ορίζεται γενικά, για ένα δυναμικό σύστημα (X, G) . Μπορούμε να δώσουμε λοιπόν έναν γενικότερο ορισμό (απλής) επαναφοράς: σε ένα δυναμικό σύστημα (X, G) ένα $x \in X$ θα είναι σημείο επαναφοράς αν για κάθε V περιοχή του, υπάρχει ένα $g \in G$ ώστε $gx \in V$.

Ορισμός 1.3.4. Ένα δυναμικό σύστημα (X, G) λέγεται **minimal** αν δεν περιέχει κανένα γνήσιο κλειστό και μη κενό G -αναλλοίωτο υποσύνολο.

Πρόταση 1.3.5. Κάθε δυναμικό σύστημα (X, G) περιέχει ένα *minimal* υποσύστημα.

Απόδειξη. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.7 δίνει ακριβώς ένα minimal υποσύνολο, δηλαδή ένα κλειστό, αναλλοίωτο και μη κενό υποσύνολο που δεν περιέχει άλλο, γνήσιο υποσύνολο, που είναι κλειστό, μη κενό και αναλλοίωτο, στην περίπτωση ενός δυναμικού συστήματος (X, T) . Η ίδια ακριβώς απόδειξη δουλεύει και για γενικότερα συστήματα (X, G) . $\square$

Άμεση συνέπεια του ορισμού, που ταυτοχρόνως είναι ένας χαρακτηρισμός για τα minimal δυναμικά συστήματα, είναι το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.3.6. Το (X, G) είναι *minimal* αν και μόνο αν κάθε τροχιά $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ είναι πυκνή στο X .

Απόδειξη. $(\Rightarrow)$ Το σύνολο $\overline{Gx}$ είναι κλειστό μη κενό G -αναλλοίωτο υποσύνολο του X . Όμως το X είναι minimal, άρα $\overline{Gx} = X$, δηλαδή Gx πυκνό.

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι το (X, G) δεν είναι minimal. Τότε υπάρχει κλειστό και G -αναλλοίωτο γνήσιο και μη κενό υποσύνολο του X , έστω Y , και έστω ένα σημείο του, $x \in Y$. Τότε το $X \setminus Y = V$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του X και αφού Gx πυκνό στο X , θα υπάρχει ένα $g \in G$ ώστε $gx \in V$. Όμως αυτό σημαίνει ότι $gx \notin Y$ το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του Y . $\square$

Ένας άλλος χαρακτηρισμός για ένα minimal σύστημα είναι ο εξής.

Λήμμα 1.3.7. Το (X, G) είναι *minimal* αν και μόνο αν για κάθε $V \subseteq X$ ανοιχτό, υπάρχουν $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$ ώστε $X = \bigcup_{i=1}^n g_i^{-1}V$.

Απόδειξη. ($\Rightarrow$) Έστω ότι το (X, G) είναι minimal. Τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε ότι $\overline{Gx} = X$ και άρα για κάθε V ανοιχτό και μη κενό υποσύνολο του X θα υπάρχει ένα $g \in G$ ώστε $gx \in V$ και άρα $x \in g^{-1}V$. Δηλαδή $X \subseteq \bigcup_{g \in G} g^{-1}V$. Από τη συμπάγεια του X μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος g .

($\Leftarrow$) Έστω ένα $x \in X$ και V ένα ανοιχτό σύνολο. Τότε από την υπόθεση, υπάρχει ένα $g_i \in G$ ώστε $g_i x \in V$. Δηλαδή για το τυχόν $x \in X$ το Gx είναι πυκνό υποσύνολο του X . Από το Λήμμα 1.3.6 το X είναι minimal. $\square$

Μπορούμε να συνδέσουμε την ομοιόμορφη επαναφορά με τα minimal δυναμικά συστήματα. Η σχέση αυτή θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη στο Κεφάλαιο 3.

Θεώρημα 1.3.8. Έστω (X, G) minimal δυναμικό σύστημα. Τότε *κάθε* $x \in X$ είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς.

Απόδειξη. Έστω ένα $x \in X$ και V μια περιοχή του. Από το Λήμμα 1.3.7 υπάρχουν $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$ ώστε $\bigcup_{i=1}^n g_i^{-1}V = X$.

Όμως για κάθε $g \in G$, $gx \in X$ και μπορούμε να βρούμε ένα g_i ώστε $gx \in g_i^{-1}V$, ισοδύναμα $g_i(gx) \in V$. Θέτοντας $K = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, έχουμε ότι για κάθε $g \in G$ υπάρχει ένα $k \in K$ ώστε $(gk)x \in V$. Δηλαδή το $\{g \in G \mid gx \in V\}$ είναι συνδετικό και άρα το x είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς. $\square$

Θεώρημα 1.3.9. Έστω (X, G) δυναμικό σύστημα. Αν $x \in X$ σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς τότε το $\overline{Gx}$ είναι minimal, κλειστό G -αναλλοίωτο.

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$ το $\overline{Gx}$ είναι κλειστό και G -αναλλοίωτο (προφανές). Αρκεί να δείξουμε ότι αν $y \in \overline{Gx}$ τότε $\overline{Gy} = \overline{Gx}$. Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι $x \in \overline{Gy}$.

Έστω (προς άτοπο) ένα $y \in \overline{Gx}$ με $x \notin \overline{Gy}$, και θεωρούμε V μια περιοχή του x ώστε $\overline{V} \cap Gy = \emptyset$ (για την ακρίβεια θεωρούμε μια περιοχή V' ώστε $V' \cap Gy = \emptyset$: αφού ο X είναι μετρικός χώρος, μπορούμε να βρούμε περιοχή V του x ώστε $\overline{V} \subseteq V'$ και τότε $\overline{V} \cap Gy = \emptyset$). Αφού το x είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς, υπάρχουν $g_1, g_2, \dots, g_n$ ώστε, για κάθε $g \in G$, $g_i gx \in V$ για κάποιο i .

Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε $g \in G$, $gx \in g_i^{-1}V$. Ισοδύναμα, $Gx \subseteq \bigcup_{i=1}^n g_i^{-1}V$. Όμως $y \in \overline{Gx} \subseteq \bigcup_{i=1}^n g_i^{-1}\overline{V}$. Άρα $Gy \cap \overline{V} \neq \emptyset$. Άτοπο. $\square$

Παρατήρηση 1.3.10. Γενικά, δεν ισχύει ότι το $\overline{Gx}$ είναι minimal. Ένα παράδειγμα είναι να θεωρήσουμε ως $X = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ και $T: X \rightarrow X$ το shift: $T(x)(n) = x(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, για $x = (x(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Θεωρούμε την ακολουθία $x = (\dots, 0, 0, 1, 1, \dots)$ η οποία έχει 0 μέχρι μια θέση j και από $j+1$ και μετά έχει 1. Παίρνουμε και $G = \mathbb{N}$, θεωρούμε δηλαδή το κυκλικό σύστημα. Τότε η

$\overline{Gx} = \overline{\text{Orb}(x, T)} = \overline{\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}}$ θα περιέχει το στοιχείο $(\dots, 1, 1, 1, \dots)$, του οποίου η κλειστή τροχιά είναι ένα T -αναλλοίωτο μη κενό κλειστό γνήσιο υποσύνολο του $\overline{Gx}$. Δηλαδή το $\overline{Gx}$ δεν είναι minimal.

Έχουμε ήδη δει ότι σε ένα δυναμικό σύστημα, το σύνολο των σημείων επαναφοράς είναι μη κενό. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για τα σημεία ομοιόμορφης επαναφοράς.

Θεώρημα 1.3.11. Σε κάθε δυναμικό σύστημα (X, G) , το σύνολο το σημείων ομοιόμορφης επαναφοράς είναι μη κενό.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.3.5, υπάρχει ένα minimal υποσύστημα. Από το Θεώρημα 1.3.8 υπάρχει ένα σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς. $\square$

Παράδειγμα 1.3.12. Σε ένα σύστημα Kronecker κάθε στοιχείο είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς.

Απόδειξη. Έστω (K, T) δυναμικό σύστημα με K συμπαγή ομάδα και $T(x) = ax$ για κάποιο $a \in K$. Από το Θεώρημα 1.3.11, υπάρχει ένα σημείο x_0 ομοιόμορφης επαναφοράς και αν V είναι μια περιοχή του ταυτοτικού στοιχείου της K , τότε Vx_0 είναι μια περιοχή του x_0 και άρα υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^n(x_0) \in Vx_0$. Άρα για ένα τυχαίο $x \in K$, $T^n x = a^n x = a^n x_0 x_0^{-1} x \in Vx_0 x_0^{-1} x = Vx$. Το σύνολο των $n \in \mathbb{N}$ για το οποίο συμβαίνει αυτό είναι συνδετικό λόγω της ομοιόμορφης επαναφοράς του x_0 . $\square$

Όπως και στην περίπτωση της απλής επαναφοράς, έτσι και στην ομοιόμορφη επαναφορά μπορούμε να βρούμε ομοιόμορφα επανερχόμενα σημεία στις περιπτώσεις του group extension και της ισομετρικής επέκτασης. Τα επόμενα δύο θεωρήματα αποδεικνύουν αυτή την ιδιότητα. Θα αποδείξουμε το πρώτο θεώρημα και η απόδειξη του δεύτερου είναι άμεση, από την Πρόταση 1.2.10 πάλι.

Θεώρημα 1.3.13. Έστω (X, T) group extension του δυναμικού συστήματος (Y, T) και y_0 ένα σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς του (Y, T) . Τότε κάθε (y_0, k) για $k \in K$ είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς για τον (X, T) .

Απόδειξη. Αν y_0 σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς στο (Y, T) , τότε από το Θεώρημα 1.3.9 το $\overline{Gy_0}$ είναι minimal υποσύστημα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλο το σύστημα (Y, T) είναι minimal. Έστω $Z \subseteq X$ minimal ως προς τον $T(y, k) = (T(y), \psi(y)k)$ και θεωρούμε την προβολή του X στον Y , $\pi: X \rightarrow Y$, η οποία είναι επί και ομομορφισμός. Τότε το $\pi(Z)$ είναι κλειστό και T -αναλλοίωτο υποσύνολο του Y και αφού το Y είναι minimal, έχουμε $\pi(Z) = Y$.

Επίσης, αφού γνωρίζουμε ότι κάθε $R_k(y, k') = (y, k'k)$, για $k \in K$, είναι αυτομορφισμός στον X τότε και κάθε $R_k(Z)$ είναι minimal υποσύστημα του X . Γράφουμε:

$$X = Y \times K = \pi^{-1}(Y) = \pi^{-1}(\pi(Z)) = \bigcup_{k \in K} R_k(Z)$$

και αφού τα $R_k(Z)$ είναι minimal, κάθε σημείο τους είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς στον X . $\square$

Θεώρημα 1.3.14. Έστω (X, T) ισομετρική επέκταση του (Y, T) και y_0 ένα σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς για το (Y, T) . Τότε κάθε (y_0, u) για $u \in M$ είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς για τον (X, T) .

Παρατήρηση 1.3.15. 1. Αν (X, T) δυναμικό σύστημα και F_1, F_2 είναι minimal υποσυστήματα του (X, T) , τότε είτε $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ είτε $F_1 = F_2$. Πράγματι, αν $x \in F_1 \cap F_2$, τότε $\overline{\text{Orb}(x, T)} = F_1 = F_2$, επειδή τα F_1, F_2 είναι minimal.

2. Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι αν μπορούμε να γράψουμε κάθε δυναμικό σύστημα ως ένωση ξένων ανά δύο minimal υποσυστημάτων. Η απάντηση είναι όχι, αφού αν θεωρήσουμε το $(X, T) = (\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}, T)$ όπου T είναι ο shift, όπως στην Παρατήρηση 1.3.10, και την κλειστή τροχιά $Y = \overline{\text{Orb}(x, T)}$ του στοιχείου $x = (\dots, 0, 0, 1, 1, \dots)$, τότε $Y = \{(1, 1, \dots)\} \cup \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$, το Y είναι T -αναλλοίωτο και το σύστημα (Y, T) δεν διασπάται σε ένωση minimal υποσυστημάτων.

1.4 Symbolic Συστήματα

Έστω Λ ένα πεπερασμένο σύνολο. Ορίζουμε $X = \Lambda^{\mathbb{N}}$ το σύνολο των ακολουθιών στο Λ και $T: X \rightarrow X$ ώστε $T(x)(n) = x(n+1)$. Θα λέμε το σύνολο Λ **αλφάβητο**, την απεικόνιση T **shift** και το σύστημα (X, T) **symbolic σύστημα**.

Θεωρούμε τη μετρική d στο (X, T) :

$$d(x, y) = \inf\{2^{-m+1} \mid x(i) = y(i) \ \forall i < m\}. \quad (1.2)$$

Τότε ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος με αυτήν τη μετρική, η T συνεχής και το (X, T) είναι ένα δυναμικό σύστημα. Η τοπολογία που επάγει η μετρική d στον X είναι η τοπολογία γινόμενο που προκύπτει όταν κάθε παράγοντας Λ στο γινόμενο είναι εφοδιασμένος με τη διακριτή μετρική.

Θα λέμε **λέξη** μια πεπερασμένη ακολουθία στο X και **μήκος** μιας λέξης το πλήθος των στοιχείων του Λ που έχει η λέξη. Μια λέξη ω μήκους k υπεισέρχεται σε μια λέξη ή ακολουθία ω' αν υπάρχει j ώστε $\omega(1) = \omega'(j+1), \omega(2) = \omega'(j+2), \dots, \omega(k) = \omega'(j+k)$.

Θεώρημα 1.4.1. *Μια ακολουθία ω είναι επανερχόμενο σημείο για το symbolic δυναμικό σύστημα (X, T) αν και μόνο αν κάθε λέξη που υπεισέρχεται στην ω , υπεισέρχεται και δεύτερη φορά.*

Απόδειξη. Προφανής. □

Παρατήρηση 1.4.2. Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι μία λέξη που υπεισέρχεται σε μια ακολουθία που είναι επανερχόμενη, υπεισέρχεται άπειρες φορές. Έτσι μπορούμε να γράψουμε την ω ως εξής:

$$\omega = (((aw_1a)w_2(aw_1a))w_3((aw_1a)w_2(aw_1a)))w_4 \dots, \quad (1.3)$$

όπου $a \in \Lambda$ και $w_1, w_2, \dots$ είναι αυθαίρετες λέξεις.

Θα δώσουμε τώρα μία απόδειξη του Λήμματος του Hilbert που χρησιμοποιεί τα symbolic συστήματα. Χρειαζόμαστε να ορίσουμε την έννοια του παραλληλεπίπεδου $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$. Αν $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_m$ είναι φυσικοί αριθμοί, τότε $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ είναι το σύνολο όλων των πεπερασμένων αθροισμάτων $n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_k}$ για $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ και $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Αν συμπεριλάβει κανείς και το 0, που αντιστοιχεί στο $k = 0$, υπάρχουν 2^m αθροίσματα στο $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$. Ένας άλλος τρόπος να γραφεί το $P(n_1, n_2, \dots, n_m)$ είναι ως το σύνολο όλων των αθροισμάτων $\varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + \dots + \varepsilon_m n_m$ με $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{0, 1\}^m$.

Λήμμα 1.4.3 (Hilbert). *Έστω $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ μια διαμέριση των φυσικών αριθμών. Τότε για κάθε $l = 1, 2, \dots$ υπάρχουν φυσικοί $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_l$ ώστε άπειρες μεταφορές του $P(m_1, m_2, \dots, m_l)$ να ανήκουν στο ίδιο B_j για κάποιο j .*

Απόδειξη. Έστω $\Lambda = \{1, 2, \dots, q\}$, T ο shift και (X, T) το προκύπτον symbolic σύστημα. Τότε η δοθείσα διαμέριση δίνει μια ακολουθία ξ ώστε

$$\xi(n) = i \Leftrightarrow n \in B_i.$$

Έστω $Y = \overline{\text{Orb}(\xi, T)}$. Αφού το (Y, T) είναι ένα (δυναμικό) υποσύστημα, υπάρχει ένα ω που είναι σημείο επαναφοράς και μπορούμε να το γράψουμε στη

μορφή (1.3). Ορίζουμε

$$\begin{aligned} W_0 &= a \\ W_1 &= W_0 w_1 W_0 \\ W_2 &= W_1 w_2 W_1 \\ &\vdots \\ W_n &= W_{n-1} w_n W_{n-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ορίζουμε m_n να είναι το μήκος της λέξης $W_{n-1} w_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζονται τότε για κάθε $l = 1, 2, \dots$ φυσικοί αριθμοί $m_1, m_2, \dots, m_l$. Παρατηρούμε δε ότι

$$\begin{aligned} m_{n+1} &= |W_n w_{n+1}| = |W_n| + |w_{n+1}| \geq |W_n| = |W_{n-1} w_n W_{n-1}| \\ &= |W_{n-1} w_n| + |W_{n-1}| \geq |W_{n-1} w_n| = m_n \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $|w|$ συμβολίζει το μήκος της λέξης w , και άρα $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_l$.

Παρατηρούμε τώρα ότι το αρχικό στοιχείο a της ω βρίσκεται σε όλες τις θέσεις $1 + P(m_1, m_2, \dots, m_l)$ της ω . Πράγματι, η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού μπορεί να γίνει με επαγωγή στο l . Για $l = 0$ ο ισχυρισμός ισχύει αφού για $l = 0$ η l -άδα $(m_1, m_2, \dots, m_l)$ είναι η κενή l -άδα $\emptyset$ και $P(\emptyset) = \{0\}$, εξ' ορισμού, οπότε $1 + P(m_1, m_2, \dots, m_l) = 1 + P(\emptyset) = \{1\}$. Έστω τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει για κάποιο $l = 0, 1, \dots$. Τότε στη λέξη $W_l w_{l+1} W_l$ το a βρίσκεται στις θέσεις $1 + P(m_1, m_2, \dots, m_l)$ στην αρχική λέξη W_l , από την επαγωγική υπόθεση, και επίσης στις θέσεις $m_{l+1} + 1 + P(m_1, m_2, \dots, m_l)$ στην τελική λέξη W_l , δηλαδή τη δεύτερη εμφάνιση της W_l μέσα στην $W_l w_{l+1} W_l$, και

$$\begin{aligned} &(1 + P(m_1, m_2, \dots, m_l)) \cup (1 + P(m_1, m_2, \dots, m_l) + m_{l+1}) \\ &= \left\{ 1 + \sum_{i=1}^l \varepsilon_i m_i : (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l) \in \{0, 1\}^l \right\} \\ &\quad \cup \left\{ 1 + \sum_{i=1}^l \varepsilon_i m_i + m_{l+1} : (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l) \in \{0, 1\}^l \right\} \\ &= \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{l+1} \varepsilon_i m_i : (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_l, \varepsilon_{l+1}) \in \{0, 1\}^{l+1} \right\} \\ &= 1 + P(m_1, m_2, \dots, m_{l+1}). \end{aligned}$$

Από την Παρατήρηση 1.4.2 έπεται ότι, για κάθε $l = 0, 1, \dots$, το a βρίσκεται σε άπειρες μεταφορές του $P(m_1, m_2, \dots, m_l)$ μέσα στην ω , δηλαδή, πιο συγκεκριμένα, το σύνολο $\{p \in \mathbb{N} : \omega(p) = a\}$ περιέχει άπειρες μεταφορές του $P(m_1, m_2, \dots, m_l)$.

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις: 1. Το ω ανήκει στην τροχιά $\text{Orb}(\xi, T)$, οπότε $\omega = T^n(\xi)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε $\omega(p) = a \Leftrightarrow \xi(n+p) = a$ και άρα το πρώτο στοιχείο a του ω , υπεισέρχεται στην ξ σε άπειρες μεταφορές του $P(m_1, m_2, \dots, m_l)$. Πιο συγκεκριμένα,

$$\{p \in \mathbb{N} : p > n, \xi(p) = a\} = n + \{p \in \mathbb{N} : \omega(p) = a\},$$

και αφού το σύνολο $\{p \in \mathbb{N} : \omega(p) = a\}$ περιέχει άπειρες μεταφορές του $P(m_1, m_2, \dots, m_l)$, το ίδιο θα ισχύει και για το αριστερό μέλος $\{p \in \mathbb{N} : p > n, \xi(p) = a\}$ και άρα και για το $\{p \in \mathbb{N} : \xi(p) = a\}$. Επομένως άπειρες μεταφορές του $P(m_1, m_2, \dots, m_l)$ ανήκουν στο B_a .

2. Το ω είναι οριακό σημείο του Y . Τότε υπάρχει ακολουθία $n_k \rightarrow \infty$ ώστε $T^{n_k}(\xi) \rightarrow \omega$. Βρίσκουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $k \geq k_0$, η απόσταση του $T^{n_k}(\xi)$ από το ω να είναι τέτοια που να ταυτίζονται στις πρώτες $1 + m_1 + m_2 + \dots + m_l$ συντεταγμένες· τέτοιο k_0 υπάρχει από τον ορισμό της σύγκλισης $d(T^{n_k}(\xi), \omega) \rightarrow 0$ για οποιοδήποτε $\varepsilon \leq 2^{-m_1-m_2-\dots-m_l}$ και d την μετρική (1.2). Τότε $\xi(n_k + p) = \omega(p) = a$ για όλα τα $p \in 1 + P(m_1, m_2, \dots, m_l)$ και $k \geq k_0$, αφού $1 + P(m_1, m_2, \dots, m_l) \subseteq \{1, 2, \dots, 1 + m_1 + m_2 + \dots + m_l\}$. Ισοδύναμα $\xi(p) = a$ για όλα τα $p \in 1 + n_k + P(m_1, m_2, \dots, m_l)$ με $k \geq k_0$, ισοδύναμα $1 + n_k + P(m_1, m_2, \dots, m_l) \in B_a$ για όλα τα $k \geq k_0$, και άρα άπειρες μεταφορές του $P(m_1, m_2, \dots, m_l)$ είναι στο B_a . $\square$

Συνεχίζοντας με την ομοιόμορφη επαναφορά, η παρακάτω πρόταση αποτελεί έναν (προφανή) χαρακτηρισμό για το πότε ένα σημείο σε ένα symbolic σύστημα είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς.

Πρόταση 1.4.4. Έστω $X = \Lambda^{\mathbb{N}}$. Ένα $\omega \in X$ είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς για το (X, T) αν και μόνο αν κάθε λέξη που υπεισέρχεται στο ω , υπεισέρχεται σε θέσεις που αντιστοιχούν σε ένα συνδετικό σύνολο.

Η απόδειξη είναι άμεση από τους ορισμούς.

1.5 Διοφαντικές Ανισότητες

Πρόταση 1.5.1 (Hardy–Littlewood). Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ακέραιοι $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|an^2 - m| < \varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{T}^2 = \{(t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ και τον μετασχηματισμό $T(t, s) = (t + a, s + 2t + a)$, $t, s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Τότε ο $(\mathbb{T}^2, T)$ είναι δυναμικό σύστημα και μάλιστα είναι το group extension του $(Y, T) = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T)$, όπου $T(t) = t + a$, $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, με $K = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και $\psi: Y \rightarrow K$ την συνάρτηση $\psi(t) = 2t + a$, $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Σημειώνεται ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}$ και

$x - y \in \mathbb{Z}$, δηλαδή αν τα $x + \mathbb{Z}$ και $y + \mathbb{Z}$ ορίζουν το ίδιο σύμπλοκο (δηλαδή στοιχείο) στον $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, τότε $(2x + a) - (2y + a) = 2(x - y) \in \mathbb{Z}$ και άρα τα $2x + a + \mathbb{Z}$ και $2y + a + \mathbb{Z}$ ορίζουν το ίδιο σύμπλοκο στον $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. αυτό δείχνει ότι η απεικόνιση $\psi: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ είναι καλά ορισμένη και μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας οποιονδήποτε αντιπρόσωπο x από το σύμπλοκο $t = x + \mathbb{Z}$ από τον τύπο $\psi(t) = 2x + a + \mathbb{Z}$. Κατά συνέπεια και η $T(t, s) = (t + a, s + 2t + a) = (T(t), s + \psi(t))$, $t, s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, είναι καλά ορισμένη από το $\mathbb{T}^2$ στο $\mathbb{T}^2$.

Από το Θεώρημα 1.2.7 και το γεγονός ότι το σύστημα $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, T)$ είναι ένα σύστημα Kronecker, κάθε στοιχείο του (t, s) είναι σημείο επαναφοράς. Άρα το $(0, 0) = (0 + \mathbb{Z}, 0 + \mathbb{Z})$ είναι σημείο επαναφοράς και επομένως υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών $n_1 < n_2 < \dots \rightarrow \infty$ ώστε $T^{n_k}(0, 0) \rightarrow (0, 0)$. Όμως η τροχιά του $(0, 0)$ είναι η

$$(0, 0) \xrightarrow{T} (a + \mathbb{Z}, a + \mathbb{Z}) \xrightarrow{T} (2a + \mathbb{Z}, 4a + \mathbb{Z}) \xrightarrow{T} \dots \xrightarrow{T} (na + \mathbb{Z}, n^2a + \mathbb{Z}) \xrightarrow{T} \dots,$$

όπως βλέπει κανείς εύκολα επαγωγικά: αν υποθέσουμε ότι

$$T^n(0, 0) = (na + \mathbb{Z}, n^2a + \mathbb{Z}),$$

το οποίο ισχύει προφανώς για $n = 0$, τότε

$$\begin{aligned} T^{n+1}(0, 0) &= T(na + \mathbb{Z}, n^2a + \mathbb{Z}) = ((n+1)a + \mathbb{Z}, n^2a + 2na + a + \mathbb{Z}) \\ &= ((n+1)a + \mathbb{Z}, (n+1)^2a + \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την μετρική

$$d_{\mathbb{T}}(x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) := \min_{m \in \mathbb{Z}} |x - y - m| \quad (1.4)$$

στον $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και την επαγόμενη μετρική γινόμενο $d_{\mathbb{T}^2}((t, s), (t', s')) := \max\{d_{\mathbb{T}}(t, t'), d_{\mathbb{T}}(s, s')\}$ στον $\mathbb{T}^2$, έχει κανείς ότι, δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n = n_k$ για κάποιο k , ώστε $d_{\mathbb{T}^2}((0, 0), T^n(0, 0)) < \varepsilon$, δηλαδή

$$d_{\mathbb{T}^2}((0, 0), (na + \mathbb{Z}, n^2a + \mathbb{Z})) < \varepsilon.$$

Τότε όμως $d_{\mathbb{T}}(0, n^2a + \mathbb{Z}) < \varepsilon$, που από τον ορισμό της μετρικής $d_{\mathbb{T}}$ σημαίνει ότι υπάρχει $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $|n^2a - m| < \varepsilon$. $\square$

Αυτό μπορούμε να το επεκτείνουμε σε αυθαίρετα πολυώνυμα χωρίς σταθερό όρο.

Θεώρημα 1.5.2. Έστω $p(x)$ ένα πραγματικό πολυώνυμο με $p(0) = 0$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $|p(n) - m| < \varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω το πολυώνυμο $p_d(x)$ βαθμού d . Ορίζουμε τα πολυώνυμα:

$$\begin{aligned} p_{d-1}(x) &= p_d(x+1) - p_d(x) \\ p_{d-2}(x) &= p_{d-1}(x+1) - p_{d-1}(x) \\ &\vdots \\ p_1(x) &= p_2(x+1) - p_2(x) \\ p_0(x) &= p_1(x+1) - p_1(x). \end{aligned}$$

Κάθε πολυώνυμο $p_i(x)$ είναι βαθμού το πολύ i , αφού από τον ορισμό τους οι μεγιστοβάθμιοι όροι των $p_{i+1}(x+1)$ και $p_{i+1}(x)$ έχουν ίδιους συντελεστές και διαγράφονται. Θέτουμε $a = p_0(x)$. Θεωρούμε το χώρο $\mathbb{T}^d$ και την απεικόνιση $T: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ με $T(t_1, t_2, \dots, t_d) = (t_1 + a, t_2 + t_1, \dots, t_d + t_{d-1})$ για $t_1, t_2, \dots, t_d \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ο $\mathbb{T}^d$ είναι group extension του $\mathbb{T}^{d-1}$, ο οποίος είναι group extension του $\mathbb{T}^{d-2}$ κ.λπ., φτάνοντας μέχρι τον $\mathbb{T}$, με την απεικόνιση $T(t) = t + a$, το οποίο είναι σύστημα Kronecker, και έτσι έχουμε ότι κάθε σημείο στον $\mathbb{T}^d$ είναι σημείο επαναφοράς. Άρα ειδικότερα, το $(p_1(0) + \mathbb{Z}, p_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z})$ είναι σημείο επαναφοράς. Υπάρχει λοιπόν ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε το $T^n(p_1(0) + \mathbb{Z}, p_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z})$ να είναι ε -κοντά στο $(p_1(0) + \mathbb{Z}, p_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z})$. Όμως

$$\begin{aligned} T(p_1(0) + \mathbb{Z}, p_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z}) \\ &= (p_1(0) + a + \mathbb{Z}, p_2(0) + p_1(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + p_{d-1}(0) + \mathbb{Z}) \\ &= (p_1(0) + p_0(0) + \mathbb{Z}, p_2(0) + p_1(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + p_{d-1}(0) + \mathbb{Z}) \\ &= (p_1(1) + \mathbb{Z}, p_2(1) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(1) + \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

και επαγωγικά

$$\begin{aligned} T^n(p_1(0) + \mathbb{Z}, p_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z}) \\ &= T(T^{n-1}(p_1(0) + \mathbb{Z}, p_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z})) \\ &= T(p_1(n-1) + \mathbb{Z}, p_2(n-1) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n-1) + \mathbb{Z}) \\ &= (p_1(n-1) + a + \mathbb{Z}, p_2(n-1) + p_1(n-1) + \mathbb{Z}, \dots, \\ &\quad \dots, p_d(n-1) + p_{d-1}(n-1) + \mathbb{Z}) \\ &= (p_1(n-1) + p_0(n-1) + \mathbb{Z}, p_2(n-1) + p_1(n-1) + \mathbb{Z}, \dots, \\ &\quad \dots, p_d(n-1) + p_{d-1}(n-1) + \mathbb{Z}) \\ &= (p_1(n) + \mathbb{Z}, p_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n) + \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την μετρική

$$d_{\mathbb{T}^d}((t_1, t_2, \dots, t_d), (s_1, s_2, \dots, s_d)) := \max\{d_{\mathbb{T}}(t_i, s_i) : i \in \{1, 2, \dots, d\}\}$$

στον $\mathbb{T}^d$, όπου πάλι $d_{\mathbb{T}}(x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) := \min_{m \in \mathbb{Z}} |x - y - m|$ στον $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, παίρνει κανείς ότι

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{T}^d}((p_1(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z}), (p_1(n) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n) + \mathbb{Z})) \\ = d_{\mathbb{T}^d}((p_1(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z}), T^n(p_1(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z})) < \varepsilon \end{aligned}$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και άρα και

$$d_{\mathbb{T}}(0, p_d(n) + \mathbb{Z}) = d_{\mathbb{T}}(p_d(0), p_d(n) + \mathbb{Z}) < \varepsilon.$$

Άρα για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$ έχουμε ότι $|p_d(n) - m| < \varepsilon$. $\square$

Μπορούμε να πετύχουμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα αυτού του θεωρήματος, χρησιμοποιώντας την έννοια του minimality.

Θεώρημα 1.5.3. Έστω $p(x)$ ένα πραγματικό πολυώνυμο με τουλάχιστον ένα συντελεστή εκτός του σταθερού άρρητο. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να λύσουμε την ανίσωση $|p(n) - m| < \varepsilon$ ως προς $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα μας χρειαστεί, μεταξύ άλλων, το μεθεπόμενο λήμμα, το οποίο αποδεικνύεται με την βοήθεια του επόμενου γνωστού αποτελέσματος.

Λήμμα 1.5.4 (Kronecker). Αν $r \in [0, 1)$ άρρητος πραγματικός αριθμός, τότε το σύνολο $\{nr \pmod{1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$, όπου $x \pmod{1} := x - \lfloor x \rfloor$, είναι πυκνό στο $[0, 1)$.

Απόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$ ένας φυσικός αριθμός. Από την αρχή του περιστερώνα, υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $n, m \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ με $n \neq m$, τέτοιοι ώστε οι $nr \pmod{1}$ και $mr \pmod{1}$ να ανήκουν στο ίδιο διάστημα $[i/k, (i+1)/k)$ για κάποιο $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, επειδή ο r είναι άρρητος και επομένως οι αριθμοί $jr \pmod{1}$, $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$, είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους. Τότε

$$-1/k < (n-m)r - \lfloor nr \rfloor + \lfloor mr \rfloor < 1/k$$

και είτε $0 < (n-m)r - \lfloor nr \rfloor + \lfloor mr \rfloor < 1/k$, οπότε $(n-m)r \pmod{1} \in (0, 1/k)$, είτε $0 < (m-n)r - \lfloor mr \rfloor + \lfloor nr \rfloor < 1/k$, οπότε $(m-n)r \pmod{1} \in (0, 1/k)$ ($((n-m)r - \lfloor nr \rfloor + \lfloor mr \rfloor) \neq 0$ γιατί αλλιώς ο r θα ήταν ρητός). σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $Nr \pmod{1} \in (0, 1/k)$.

Δοθέντος $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, υπάρχει φυσικός αριθμός m ώστε

$$m[Nr \pmod{1}] = m(Nr - \lfloor Nr \rfloor) \geq i/k,$$

αφού ο Nr δεν μπορεί να είναι ακέραιος και επομένως ο $Nr \pmod{1}$ είναι γνήσια θετικός αριθμός. Έστω m_i ο μικρότερος φυσικός με την ιδιότητα αυτή· ο m_i δηλαδή ορίζεται από τις σχέσεις

$$m_i(Nr - \lfloor Nr \rfloor) \geq \frac{i}{k} \quad \text{και} \quad m(Nr - \lfloor Nr \rfloor) < \frac{i}{k} \quad \forall m \in \{0, 1, \dots, m_i - 1\}.$$

Σημειώνεται ότι, επειδή $Nr \pmod{1} = Nr - \lfloor Nr \rfloor \in (0, 1/k)$, έπεται ότι $m_i \geq i$. Τότε από τις σχέσεις $(m_i - 1)(Nr - \lfloor Nr \rfloor) < i/k$ και $Nr \pmod{1} < 1/k$ έπεται ότι $m_i(Nr - \lfloor Nr \rfloor) < (i + 1)/k$. Άρα

$$\frac{i}{k} \leq m_i(Nr - \lfloor Nr \rfloor) < \frac{i + 1}{k}.$$

Ειδικότερα $0 \leq m_i Nr - m_i \lfloor Nr \rfloor < 1$ και επομένως έχουμε επιπλέον ότι $\lfloor m_i Nr \rfloor = m_i \lfloor Nr \rfloor$ και άρα $(m_i Nr) \pmod{1} = m_i \lfloor Nr \pmod{1} \rfloor$. Επομένως, για κάθε $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$, υπάρχει φυσικός αριθμός m_i τέτοιος ώστε $(m_i Nr) \pmod{1} \in [i/k, (i + 1)/k)$. Έπεται τώρα ότι για κάθε $x \in [0, 1)$ υπάρχει φυσικός αριθμός m ώστε $|x - mNr \pmod{1}| < 1/k$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έπεται ότι το $\{nr \pmod{1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1)$ · μάλιστα δείξαμε ότι ήδη το $\{nr \pmod{1} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1)$. $\square$

Λήμμα 1.5.5. *Αν H είναι μία κλειστή υποομάδα του $\mathbb{T}$ τότε είτε $H = \mathbb{T}$ είτε $H = \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n - 1)/n\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Ταυτίζουμε τον $\mathbb{T}$ με το $[0, 1)$. Αν $r \in [0, 1)$ είναι άρρητος, τότε το σύνολο $\{nr \pmod{1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ είναι πυκνό στο $[0, 1)$. Επειδή τώρα η H υποτίθεται υποομάδα, αν $r \in H$ τότε και $\{nr \pmod{1} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq H$, και επειδή η H υποτίθεται και κλειστή, έχουμε και ότι $\overline{\{nr \pmod{1} \mid n \in \mathbb{Z}\}} \subseteq H$. Αν λοιπόν $r \in H$ με r άρρητο, τότε $H = [0, 1)$. Άρα αν $H \neq \mathbb{T}$, τότε η H περιέχει μόνο ρητούς.

Έστω τώρα ότι η H περιέχει άπειρους ρητούς. Τότε επειδή για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ τα ανάγωγα κλάσματα στο $[0, 1)$ με παρονομαστή $\leq n$ είναι πεπερασμένα το πλήθος, έπεται ότι για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε αρκετά μεγάλο n ώστε $1/n < \epsilon$ και το n να είναι ένας παρονομαστής κάποιου στοιχείου της H σε ανάγωγη μορφή· δηλαδή, κάποιο κλάσμα m/n με $(n, m) = 1$ ανήκει στην H . Τότε η H αναγκαστικά θα περιέχει και όλα τα k/n για $k \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$. Αυτό συμβαίνει διότι υπάρχουν ακέραιοι a, b ώστε $am + bn = 1$ και συνεπώς $a(m/n) + b = 1/n$ · έτσι $1/n = (am/n) \pmod{1}$, αφού $1/n - (am/n) = b \in \mathbb{Z}$, και επομένως $1/n \in H$, αφού $(am/n) \pmod{1} \in H$ επειδή $m/n \in H$, $a \in \mathbb{Z}$ και η H είναι ομάδα (εναλλακτικά $e^{2\pi i(1/n)} = [e^{2\pi i(m/n)}]^a$ και αυτό ανήκει στην $\{e^{2\pi it} : t \in H\}$ επειδή η τελευταία είναι πολλαπλασιαστική ομάδα και το $e^{2\pi i(m/n)}$ ανήκει σε αυτήν). Έπεται τώρα ότι η H , αφού είναι ομάδα και περιέχει το $1/n$,

θα περιέχει και όλα τα k/n για $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ μαζί με το m/n . Άρα κάθε στοιχείο του $[0, 1)$ είναι ε -κοντά σε κάποιο στοιχείο της H και αφού το ε ήταν αυθαίρετο έπεται πάλι ότι η H είναι πυκνή και άρα ίση με το $\mathbb{T}$.

Μένει η περίπτωση που η H είναι πεπερασμένη και περιέχει μόνο ρητούς. Θεωρώντας ως n τον μεγαλύτερο παρονομαστή που συναντάμε αν γράψουμε κάθε στοιχείο της H ως ανάγωγο κλάσμα, προκύπτει ότι $H = \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n\}$. Πράγματι, όπως στην προηγούμενη παράγραφο, η H θα περιέχει κάποιο m/n με $(m, n) = 1$ και τότε θα περιέχει και όλα τα k/n για $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ δηλαδή $\{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n\} \subseteq H$. Από την άλλη, αν $q/p \in H$ με $(q, p) = 1$, τότε πρέπει $p \leq n$. Επιπλέον, η H , όπως και πριν, θα πρέπει να περιέχει και πάλι το $1/p$ και εν τέλει το $1/n + 1/p = (p+n)/(np)$, όταν τουλάχιστον $p+n < np$. Αφού το n είναι ο μεγαλύτερος φυσικός που εμφανίζεται ως παρονομαστής σε ανάγωγο κλάσμα στην H , πρέπει ο p να διαιρεί τον αριθμητή $p+n$ και αφού ο p διαιρεί τον p πρέπει να διαιρεί και τον n τελικά. Άρα

$$\frac{q}{p} = \frac{q(n/p)}{n} \in \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}.$$

Αν πάλι $p+n = np$, τότε αναγκαστικά $p = n = 2$, και αφού $p = n$ τότε προφανώς πάλι $q/p \in \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n\}$. Δείξαμε δηλαδή ότι ισχύει και ο εγκλεισμός $H \subseteq \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n\}$ και άρα τελικά $H = \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n\}$. $\square$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.3 θα μας χρειαστεί και το επόμενο λήμμα. Έστω $\mathbb{T}^d$ ο d -διάστατος τόρος με συντεταγμένες $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$, όπου κάθε θ_i παίρνει τιμές στην προσθετική ομάδα $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Αν $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$ και $(x_1, x_2, \dots, x_d), (y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ με $x_i - y_i \in \mathbb{Z}$ για κάθε i , αν δηλαδή τα $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ και $(y_1, y_2, \dots, y_d)$ ορίζουν το ίδιο σημείο (σύμπλοκο) στον $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$, τότε

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d) - (a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_dy_d) \in \mathbb{Z},$$

δηλαδή τα $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d$ και $a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_dy_d$ ορίζουν επίσης το ίδιο σημείο του $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ και άρα η $f(\theta_1, \dots, \theta_d) = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \dots + a_d\theta_d$ είναι μια καλά ορισμένη συνάρτηση $f: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}$. Παίρνουμε δεδομένο το γνωστό αποτέλεσμα από την Αλγεβρική Τοπολογία, ότι σε κάθε κλάση ομοτοπίας συναρτήσεων από το $\mathbb{T}^d$ στο $\mathbb{T}$ υπάρχει μία μοναδική γραμμική συνάρτηση f αυτής της μορφής, δηλαδή με $f(\theta_1, \dots, \theta_d) = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \dots + a_d\theta_d$, όπου τα $a_i \in \mathbb{Z}$. Ένας συμβολισμός που θα μας φανεί χρήσιμος είναι να θέσουμε ως $A_i[f] = a_i$, $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ · οι συντελεστές $a_1, a_2, \dots, a_d$ καθορίζονται μονοσήμαντα από την κλάση ομοτοπίας της f .

Λήμμα 1.5.6. Έστω $T: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ με

$$T(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) = (\theta_1 + a_1, \theta_2 + f_1(\theta_1), \theta_3 + f_2(\theta_1, \theta_2), \dots, \theta_d + f_{d-1}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1})),$$

όπου ο a_1 είναι άρρητος και κάθε $A_i[f_i] \neq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, d-1\}$. Τότε το σύστημα $(\mathbb{T}^d, T)$ είναι *minimal*.

Απόδειξη. Με επαγωγή στο d . Για $d = 1$ έχουμε το σύστημα $(\mathbb{T}, T)$ με $T(\theta) = \theta + a_1$ και το a_1 άρρητο. Από το Λήμμα 1.5.4 η τροχιά του $\theta = 0 = 0 + \mathbb{Z}$ είναι πυκνή. Έπεται άμεσα ότι κάθε τροχιά είναι πυκνή. Πράγματι, έστω $\theta \in \mathbb{T}$ και $U = (a, b) + \mathbb{Z}$ ένα ανοικτό διάστημα στον $\mathbb{T}$. Από την πυκνότητα της τροχιάς του 0 υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $na_1 + \mathbb{Z} \in U - \theta$, όπου $U - \theta = (a - x, b - x) + \mathbb{Z}$ αν γράψουμε $\theta = x + \mathbb{Z}$, και τότε $T^n(\theta) = \theta + na_1 = x + na_1 + \mathbb{Z} \in (a, b) + \mathbb{Z} = U$. Αφού το U ήταν αυθαίρετο, αυτό δείχνει ότι η τροχιά του θ είναι πυκνή στον $\mathbb{T}$, και αφού το θ ήταν επίσης αυθαίρετο έχουμε ότι κάθε τροχιά είναι πυκνή. Από το Λήμμα 1.3.6 έπεται ότι το σύστημα είναι *minimal*.

Έστω τώρα ότι το Λήμμα ισχύει για κάποιο $d-1$, δηλαδή ότι $(\mathbb{T}^{d-1}, T)$ είναι *minimal*. Θεωρούμε τον $\mathbb{T}^d$ ως $\mathbb{T}^{d-1} \times \mathbb{T}$ γράφοντας τα στοιχεία του ως (u, θ) με $u = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}) \in \mathbb{T}^{d-1}$ και $\theta \in \mathbb{T}$ και τότε η απεικόνιση T στον $\mathbb{T}^d$ γράφεται ως

$$T(u, \theta) = (T(u), \theta + f_{d-1}(u))$$

για $u \in \mathbb{T}^{d-1}$ και $\theta \in \mathbb{T}$. Έτσι έχουμε ότι το σύστημα $(\mathbb{T}^d, T)$ είναι group extension του $(\mathbb{T}^{d-1}, T)$.

Έστω (προς άτοπο) ότι το $(\mathbb{T}^d, T)$ δεν είναι *minimal*, και έστω $Z \subset \mathbb{T}^d$ κλειστό μη κενό T -αναλλοίωτο υποσύνολο που είναι *minimal*. Τότε η προβολή π του Z στον $\mathbb{T}^{d-1}$ είναι T -αναλλοίωτο και συμπαγές (λόγω της συνέχειας της π ως προβολής και της συμπαγείας του Z) και άρα $\pi(Z) = \mathbb{T}^{d-1}$, από την υπόθεση μας ότι το $(\mathbb{T}^{d-1}, T)$ είναι *minimal*. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $Z_u = \{\theta \in \mathbb{T} : (u, \theta) \in Z\}$ είναι μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{T}$, για κάθε $u \in \mathbb{T}^{d-1}$.

Θεωρώντας τώρα τους αυτομορφισμούς $R_\phi: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$, $\phi \in \mathbb{T}$, με $R_\phi(u, \theta) = (u, \theta + \phi)$, παίρνουμε ότι κάθε $R_\phi(Z)$ είναι *minimal* και επομένως είτε θα είναι ξένο προς το Z είτε θα ταυτίζεται με αυτό (βλ. Παρατήρηση 1.3.15, 1). Ορίζουμε λοιπόν $H = \{\phi \in \mathbb{T} : R_\phi(Z) = Z\}$. Είναι προφανές ότι η H είναι υποομάδα του $\mathbb{T}$, αφού $R_{\phi+\phi'} = R_\phi \circ R_{\phi'}$ και άρα $R_{\phi+\phi'}(Z) = R_\phi(R_{\phi'}(Z)) = R_\phi(Z) = Z$ αν $\phi, \phi' \in H$, οπότε $\phi, \phi' \in H \Rightarrow \phi + \phi' \in H$, και $\phi \in H \Rightarrow R_\phi(Z) = Z \Rightarrow Z = R_\phi^{-1}(Z) \Rightarrow Z = R_{-\phi}(Z) \Rightarrow -\phi \in H$, αφού $R_\phi^{-1} = R_{-\phi}$. Επιπλέον η H είναι και κλειστή. Πράγματι, αν $\phi_n \in H$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\phi_n \rightarrow \phi$ στον $\mathbb{T}$, τότε $R_{\phi_n}(u, \theta) \rightarrow R_\phi(u, \theta)$ για κάθε $(u, \theta) \in \mathbb{T}^d$, και αν $(u, \theta) \in Z$,

τότε $R_{\phi_n}(u, \theta) \in R_{\phi_n}(Z) = Z$, οπότε και $R_\phi(u, \theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{\phi_n}(u, \theta) \in Z$, αφού το Z είναι κλειστό. Έχουμε δηλαδή ότι $R_\phi(Z) \subseteq Z$. Όμως $\phi_n \rightarrow \phi$ συνεπάγεται ότι επίσης $-\phi_n \rightarrow -\phi$, οπότε ο ίδιος συλλογισμός οδηγεί στον εγκλεισμό $R_{-\phi}(Z) \subseteq Z$, ή ισοδύναμα ότι $R_\phi^{-1}(Z) \subseteq Z$, που δίνει τον εγκλεισμό $Z \subseteq R_\phi(Z)$. Έχουμε δηλαδή τελικά ότι αν $\phi_n \in H$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\phi_n \rightarrow \phi$ στον $\mathbb{T}$, τότε και $\phi \in H$ και άρα η H είναι κλειστή. Έπεται τώρα από το Λήμμα 1.5.5 ότι $H = \{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n\} + \mathbb{Z}$, αφού έχουμε υποθέσει ότι $Z \neq \mathbb{T}^d$.

Τα Z_u μπορούμε να τα δούμε ως σύμπλοκα της ομάδας πηλίκο $\mathbb{T}/H$. Πράγματι, αν πάρουμε δύο στοιχεία θ, θ' του Z_u , τότε $(u, \theta), (u, \theta') \in Z$ και άρα το στοιχείο $\theta' - \theta \in H$ αφού $Z \ni (u, \theta') = R_{\theta' - \theta}(u, \theta) \in R_{\theta' - \theta}(Z)$ και έτσι η τομή $R_{\theta' - \theta}(Z) \cap Z \neq \emptyset$. Αυτό δείχνει ότι αν $\theta, \theta' \in Z_u$ τότε τα θ, θ' ανήκουν στο ίδιο σύμπλοκο, και άρα το Z_u περιέχεται σε ένα σύμπλοκο. Αντίστροφα, αφού το Z_u είναι μη κενό, υπάρχει ένα θ ώστε $(u, \theta) \in Z$. Σταθεροποιούμε το σύμπλοκο $\theta + H$ και βλέπουμε με το ίδιο επιχείρημα ότι κάθε $\theta' \in \theta + H$ ανήκει στο Z_u , δηλαδή το σύμπλοκο περιέχεται στο Z_u . Συνολικά παίρνουμε ότι το Z_u είναι ένα σύμπλοκο της ομάδας πηλίκο $\mathbb{T}/H$.

Ορίζουμε τώρα, για n όπως στον ορισμό της H , την $T_n: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ ώστε $T_n(u, \theta) = (Tu, \theta + nf_{d-1}(u))$ και την $S_n: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ με $S_n(u, \theta) = (u, n\theta)$ για $u \in \mathbb{T}^{d-1}$ και $\theta \in \mathbb{T}$. Είναι άμεσο ότι $T_n S_n = S_n T$ και επομένως $T_n(S_n(Z)) = S_n(T(Z)) \subseteq S_n(Z)$ και άρα το $S_n(Z)$ είναι ένα T_n -αναλλοίωτο υποσύνολο του $\mathbb{T}^d$. Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $u \in \mathbb{T}^{d-1}$,

$$(S_n(Z))_u = (\{(u, n\theta): (u, \theta) \in Z\})_u = \{n\theta: (u, \theta) \in Z\} = nZ_u$$

και αφού το Z_u είναι σύμπλοκο της H , δηλαδή $Z_u = H + \theta$ για κάποιο $\theta \in \mathbb{T}$, έπεται ότι κάθε $(S_n(Z))_u$ είναι ένα μονοσύνολο στον $\mathbb{T}$:

$$(S_n(Z))_u = nZ_u = n(H + \theta) = n\theta.$$

Άρα μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση $g: \mathbb{T}^{d-1} \rightarrow \mathbb{T}$ ώστε $\{g(u)\} = (S_n(Z))_u$. Τότε το $S_n(Z)$ είναι το γράφημα της g και αφού το $S_n(Z)$ είναι συμπαγές, η g θα είναι συνεχής.

Βλέπουμε τώρα ότι

$$g(T(u)) = g(u) + nf_{d-1}(u). \quad (1.5)$$

Πράγματι, αν $g(u) = n\theta$ τότε $(u, n\theta) \in S_n(Z)$ και αφού το $S_n(Z)$ είναι T_n -αναλλοίωτο, θα έχουμε ότι $T_n(u, n\theta) \in S_n(Z)$, δηλαδή $(T(u), n\theta + nf_{d-1}(u)) \in S_n(Z)$ και άρα $(n\theta + nf_{d-1}(u)) \in (S_n(Z))_{T(u)}$. Το $(S_n(Z))_{T(u)}$ είναι όμως το μονοσύνολο $\{g(T(u))\}$, και έπεται το ζητούμενο.

Σκοπός μας τώρα είναι να δείξουμε ότι η (1.5) δεν μπορεί να ισχύει. Θεωρώντας τις κλάσεις ομοτοπίας, από την (1.5) παίρνουμε

$$A_{d-1}[g \circ T] - A_{d-1}[g] = A_{d-1}[nf_{d-1}] = nA_{d-1}[f_{d-1}] \neq 0. \quad (1.6)$$

Αν τώρα $b_1t_1 + b_2t_2 + \dots + b_{d-1}t_{d-1}$ είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση στην κλάση $[g]$, προκύπτει ότι η μοναδική γραμμική απεικόνιση της κλάσης $[g \circ T]$ είναι η $b_1t_1 + b_2(t_2 + f_1(t_1)) + \dots + b_{d-1}(t_{d-1} + f_{d-1}(t_1, t_2, \dots, t_{d-2}))$. Επομένως $A_{d-1}[g \circ T] = b_{d-1} = A_{d-1}[g]$ και άρα από την (1.6) έχουμε άτοπο, καθώς το δεξί μέρος δεν μπορεί να μηδενιστεί. $\square$

Είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.5.3.

Απόδειξη Θεωρήματος 1.5.3. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση που ο αρχικός συντελεστής του πολυωνύμου είναι άρρητος, δηλαδή γράφουμε

$$p(x) = \frac{\alpha}{d!}x^d + c_1x^{d-1} + \dots + c_d.$$

με τον α άρρητο. Ορίζουμε $T: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ με

$$T(\theta_1, \dots, \theta_d) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \theta_1, \dots, \theta_d + \theta_{d-1}).$$

Οι συνθήκες του Λήμματος 1.5.6 ικανοποιούνται και άρα έχουμε ότι το σύστημα $(\mathbb{T}^d, T)$ είναι minimal. Γράφουμε το $p(x)$ ως $p_d(x)$ και ορίζουμε

$$\begin{aligned} p_{d-1}(x) &= p_d(x+1) - p_d(x) \\ p_{d-2}(x) &= p_{d-1}(x+1) - p_{d-1}(x) \\ &\vdots \\ p_1(x) &= p_2(x+1) - p_2(x). \end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το $p_i(x)$ είναι βαθμού i , με μεγιστοβάθμιο συντελεστή $\alpha/i!$. Πράγματι, ο ισχυρισμός ισχύει για $i = d$. Έστω τώρα ότι ισχύει για κάποιο $i \in \{d, d-1, \dots, 2\}$, δηλαδή

$$p_i(x) = \frac{\alpha}{i!}x^i + c'_1x^{i-1} + \dots + c'_i.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
p_{i-1}(x) &= p_i(x+1) - p_i(x) \\
&= \frac{\alpha}{i!} [(x+1)^i - x^i] + c'_1 [(x+1)^{i-1} - x^{i-1}] + \cdots + c'_{i-1} \\
&= \frac{\alpha}{i!} \left[\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} x^j - x^i \right] + \sum_{k=1}^{i-1} c'_k \left[\sum_{j=0}^{i-k} \binom{i-k}{j} x^j - x^{i-k} \right] \\
&= \frac{\alpha}{i!} \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i}{j} x^j + \sum_{k=1}^{i-1} c'_k \sum_{j=0}^{i-k-1} \binom{i-k}{j} x^j \\
&= \frac{\alpha}{i!} \binom{i}{i-1} x + \frac{\alpha}{i!} \sum_{j=0}^{i-2} \binom{i}{j} x^j + \sum_{j=0}^{i-2} \left[\sum_{k=1}^{i-j-1} c'_k \binom{i-k}{j} \right] x^j \\
&= \frac{\alpha}{(i-1)!} x^{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2} \left[\sum_{k=1}^{i-j-1} c'_k \binom{i-k}{j} + \frac{\alpha}{j!(i-j)!} \right] x^j,
\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το επαγωγικό βήμα και άρα και τον ισχυρισμό. Από τον ισχυρισμό έπεται τώρα ότι

$$p_1(x) = \alpha x + \beta.$$

Είναι άμεση συνέπεια του ορισμού των p_i , για $i \in \{2, 3, \dots, d\}$, και της τελευταίας ισότητας για $i = 1$, ότι

$$\begin{aligned}
T(p_1(n) + \mathbb{Z}, p_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n) + \mathbb{Z}) \\
= (p_1(n+1) + \mathbb{Z}, p_2(n+1) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n+1) + \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ και άρα

$$(p_1(n) + \mathbb{Z}, p_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n) + \mathbb{Z}) = T^n(p_1(0) + \mathbb{Z}, p_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z})$$

για κάθε $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Επιπλέον, αφού το σύστημα είναι minimal, η τροχιά του $(p_1(0) + \mathbb{Z}, p_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(0) + \mathbb{Z})$ είναι πυκνή στον $\mathbb{T}^d$. Επομένως τα $(p_1(n) + \mathbb{Z}, p_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n) + \mathbb{Z})$, $n \in \mathbb{N}$, είναι πυκνά στον $\mathbb{T}^d$ και κατά συνέπεια, δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{T}^d}((p_1(n) + \mathbb{Z}, p_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, p_d(n) + \mathbb{Z}), (0, 0, \dots, 0)) \\
= \max_{i \in \{1, 2, \dots, d\}} d_{\mathbb{T}}(p_i(n) + \mathbb{Z}, 0) < \varepsilon,
\end{aligned}$$

όπου $d_{\mathbb{T}}$ η μετρική (1.4) στον $\mathbb{T}$. Έπεται ότι $d_{\mathbb{T}}(p_d(n), 0) < \varepsilon$. Δηλαδή μπορούμε να βρούμε ακέραιο $m \in \mathbb{Z}$ ώστε $|p(n) - m| < \varepsilon$.

Στη γενική περίπτωση, γράφουμε το πολυώνυμο $p(x) = q(x) + r(x)$ όπου το $r(x)$ είναι πολυώνυμο με αρχικό συντελεστή άρρητο και το $q(x)$ έχει όλους τους συντελεστές ρητούς. Θέτουμε a να είναι ο κοινός παρονομαστής του πολυωνύμου $q(x)$ και ορίζουμε το πολυώνυμο $r(ax)$. Τότε το πολυώνυμο $r(ax)$ έχει ως αρχικό συντελεστή άρρητο και από την προηγούμενη περίπτωση, μπορούμε να βρούμε m, n ώστε $|r(an) - m| < \varepsilon$ · δηλαδή $|p(an) - q(an) - m| < \varepsilon$. Το $q(an) + m$ είναι όμως ακέραιος αριθμός και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Ένα τελευταίο αποτέλεσμα, όμοιο με τα παραπάνω και ειδικότερα με το Θεώρημα 1.5.2, αλλά για περισσότερα πολυώνυμα, είναι το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.5.7. Έστω $p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x)$ πραγματικά πολυώνυμα. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο των ακεραίων n που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις

$$|e^{2\pi i p_1(n)} - e^{2\pi i p_1(0)}| < \varepsilon, \dots, |e^{2\pi i p_k(n)} - e^{2\pi i p_k(0)}| < \varepsilon$$

είναι συνδεδετικό.

Απόδειξη. Η απόδειξη μιμείται την απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.2, αλλά για όλα τα πολυώνυμα $p_1, p_2, \dots, p_k$ μαζί. Συγκεκριμένα, αν d φυσικός αριθμός και

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & b_{d3} & \dots & b_{dd-1} & 1 \end{pmatrix}$$

πίνακας με ακέραιους συντελεστές και $a_1, a_2, \dots, a_d$ πραγματικοί αριθμοί, θεωρούμε καταρχήν τον μετασχηματισμό $\mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ που δίνεται από την

$$T(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{d1} & b_{d2} & b_{d3} & \dots & b_{dd-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{d-1} \\ \theta_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix},$$

δηλαδή τον μετασχηματισμό $T(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) = (\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_d)$ με

$$\theta'_i = \theta_i + b_{i1}\theta_1 + b_{i2}\theta_2 + \dots + b_{i,i-1}\theta_{i-1} + a_i$$

για $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Το σύστημα $(\mathbb{T}^d, T)$ με έναν τέτοιο μετασχηματισμό T είναι το group extension του συστήματος $(\mathbb{T}^{d-1}, T)$ με μετασχηματισμό

$T: \mathbb{T}^{d-1} \rightarrow \mathbb{T}^{d-1}$ τον αντίστοιχο μετασχηματισμό που αντιστοιχεί στον πίνακα διάστασης $(d-1) \times (d-1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{d-11} & b_{d-12} & b_{d-13} & \dots & b_{d-1d-2} & 1 \end{pmatrix}$$

με διαγραμμένη την τελευταία γραμμή και τελευταία στήλη και τους πραγματικούς αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_{d-1}$, δηλαδή τον μετασχηματισμό $\mathbb{T}^{d-1} \rightarrow \mathbb{T}^{d-1}$ που δίνεται από την

$$T(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{d-11} & b_{d-12} & b_{d-13} & \dots & b_{d-1d-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \vdots \\ \theta_{d-2} \\ \theta_{d-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{d-1} \end{pmatrix},$$

ή ισοδύναμα τον $T(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}) = (\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_{d-1})$ με

$$\theta'_i = \theta_i + b_{i1}\theta_1 + b_{i2}\theta_2 + \dots + b_{ii-1}\theta_{i-1} + a_i$$

για $i \in \{1, 2, \dots, d-1\}$, ομάδα $K = \mathbb{T}$ και $\psi: \mathbb{T}^{d-1} \rightarrow \mathbb{T} = K$ την συνεχή απεικόνιση

$$\psi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}) = b_{d1}\theta_1 + b_{d2}\theta_2 + \dots + b_{dd-1}\theta_{d-1} + a_d.$$

πράγματι, γράφοντας $\mathbb{T}^d = \mathbb{T}^{d-1} \times \mathbb{T}$, με συντεταγμένες $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) = ((\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}), \theta_d)$, έχουμε ότι

$$T(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) = (T(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1}), \theta_d + \psi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{d-1})).$$

Όμοια, το σύστημα $(\mathbb{T}^{d-1}, T)$ τώρα είναι group extension του αντίστοιχου συστήματος $(\mathbb{T}^{d-2}, T)$, κ.ο.κ., μέχρι που, όπως στην Πρόταση 1.5.2, το $(\mathbb{T}^2, T)$ είναι group extension του $(\mathbb{T}, T)$ όπου $T(\theta) = \theta + a_1$. Αφού το τελευταίο σύστημα $(\mathbb{T}, T)$ είναι σύστημα Kronecker, κάθε τροχιά του είναι ομοιόμορφα επανερχόμενη (Παράδειγμα 1.3.12), οπότε από το Θεώρημα 1.3.13 κάθε τροχιά του $(\mathbb{T}^2, T)$ είναι ομοιόμορφα επανερχόμενη και επαγωγικά τελικά κάθε τροχιά του αρχικού συστήματος $(\mathbb{T}^d, T)$ είναι ομοιόμορφα επανερχόμενη.

Επιλέγουμε τώρα $d = \deg p_1 + \deg p_2 + \dots + \deg p_k$. Θέτουμε $d_i := \deg p_i$ για $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ και θεωρούμε ένα σύστημα $(\mathbb{T}^d, T)$ όπως πιο πάνω, με τα

a_i και $b_{i,j}$ επιλεγμένα ως εξής. Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ και $j \in \{1, 2, \dots, d_i\}$, ορίζουμε πολυώνυμο $p_{i,d_i}(x) = p_i(x)$ και

$$p_{i,j-1}(x) = p_{i,j}(x+1) - p_{i,j}(x), \quad (1.7)$$

όπως στο Θεώρημα 1.5.2 αλλά για κάθε ένα από τα $p_1, p_2, \dots, p_k$ ξεχωριστά. Τότε, όπως στο Θεώρημα 1.5.2, κάθε πολυώνυμο $p_{i,j}(x)$ είναι βαθμού το πολύ j , αφού από τον ορισμό τους οι μεγιστοβάθμιοι όροι των $p_{i,j+1}(x+1)$ και $p_{i,j+1}(x)$ έχουν ίδιους συντελεστές και διαγράφονται. Ορίζουμε και $d_0 = 0$ και θέτουμε

$$a_{d_0+d_1+\dots+d_{i-1}+1} = p_{i,0}(x)$$

για $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ και $a_i = 0$ για κάθε άλλο i , δηλαδή κάθε $i \in \{1, 2, \dots, d\} \setminus \{1, d_1+1, d_1+d_2+1, \dots, d_1+d_2+\dots+d_{k-1}+1\}$. Ορίζουμε επίσης $b_{i,i-1} = 1$ για $i \in \{1, 2, \dots, d\} \setminus \{1, d_1+1, d_1+d_2+1, \dots, d_1+d_2+\dots+d_{k-1}+1\}$ και $b_{i,j} = 0$ σε κάθε άλλη περίπτωση. Ο μετασχηματισμός $T: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$ που αντιστοιχεί τότε στην παραπάνω επιλογή των a_i και $b_{i,j}$ είναι ο

$$T(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) = (\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_d)$$

με

$$\theta'_i = \theta_i + b_{i,1}\theta_1 + b_{i,2}\theta_2 + \dots + b_{i,i-1}\theta_{i-1} + a_i = \theta_i + \theta_{i-1}$$

για $i \in \{1, 2, \dots, d\} \setminus \{1, d_1+1, d_1+d_2+1, \dots, d_1+d_2+\dots+d_{k-1}+1\}$ και

$$\theta'_i = \theta_i + b_{i,1}\theta_1 + b_{i,2}\theta_2 + \dots + b_{i,i-1}\theta_{i-1} + a_i = \theta_i + a_i$$

για $i \in \{1, d_1+1, d_1+d_2+1, \dots, d_1+d_2+\dots+d_{k-1}+1\}$, δηλαδή

$$\begin{aligned} T(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_d) = & (\theta_1 + a_1, \theta_2 + \theta_1, \theta_3 + \theta_2, \dots, \theta_{d_1} + \theta_{d_1-1}, \\ & \theta_{d_1+1} + a_{d_1+1}, \theta_{d_1+2} + \theta_{d_1+1}, \theta_{d_1+3} + \theta_{d_1+2}, \dots, \theta_{d_1+d_2} + \theta_{d_1+d_2-1}, \dots \\ & \dots, \theta_{d_1+d_2+\dots+d_{k-1}+1} + a_{d_1+d_2+\dots+d_{k-1}+1}, \theta_{d_1+d_2+\dots+d_{k-1}+2} + \theta_{d_1+d_2+\dots+d_{k-1}+1}, \\ & \theta_{d_1+d_2+\dots+d_{k-1}+3} + \theta_{d_1+d_2+\dots+d_{k-1}+2}, \dots, \theta_{d_1+d_2+\dots+d_k} + \theta_{d_1+d_2+\dots+d_{k-1}}) \end{aligned}$$

και από την προηγούμενη παράγραφο έχουμε ότι κάθε σημείο του συστήματος $(\mathbb{T}^d, T)$ είναι ομοιόμορφα επανερχόμενο.

Ορίζουμε τώρα πολυώνυμο $q_1(x), q_2(x), \dots, q_d(x)$ ως εξής.

Για $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ και $j \in \{1, 2, \dots, d_i\}$, ορίζουμε

$$q_{d_0+d_1+\dots+d_{i-1}+j}(x) = p_{i,j}(x).$$

Τότε, για $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ και $d_0 + d_1 + \dots + d_{i-1} + 1 < j \leq d_0 + d_1 + \dots + d_i$,

$$\begin{aligned} q_j(x) + q_{j-1}(x) &= p_{i,j-(d_1+d_2+\dots+d_{i-1})}(x) + p_{i,j-(d_1+d_2+\dots+d_{i-1})-1}(x) \\ &= p_{i,j-(d_1+d_2+\dots+d_{i-1})}(x+1) = q_j(x+1) \end{aligned}$$

και επίσης

$$\begin{aligned} q_{d_0+d_1+\dots+d_{i-1}+1}(x) + a_{d_0+d_1+\dots+d_{i-1}+1} &= p_{i1}(x) + p_{i0}(x) \\ &= p_{i1}(x+1) = q_{d_0+d_1+\dots+d_{i-1}+1}(x+1) \end{aligned}$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Έπεται τώρα ότι

$$\begin{aligned} T(q_1(n) + \mathbb{Z}, q_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, q_d(n) + \mathbb{Z}) \\ = (q_1(n+1) + \mathbb{Z}, q_2(n+1) + \mathbb{Z}, \dots, q_d(n+1) + \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

για κάθε $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ και επομένως

$$T^n(q_1(0) + \mathbb{Z}, q_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, q_d(0) + \mathbb{Z}) = (q_1(n) + \mathbb{Z}, q_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, q_d(n) + \mathbb{Z})$$

για κάθε $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Αφού το $(q_1(0) + \mathbb{Z}, q_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, q_d(0) + \mathbb{Z})$ είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς για το σύστημα $(\mathbb{T}^d, T)$, επειδή κάθε σημείο του $(\mathbb{T}^d, T)$ είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς, για κάθε περιοχή του U στον $\mathbb{T}^d$, το σύνολο

$$\begin{aligned} \{n \in \mathbb{N} \mid (q_1(n) + \mathbb{Z}, q_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, q_d(n) + \mathbb{Z}) \in U\} \\ = \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(q_1(0) + \mathbb{Z}, q_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, q_d(0) + \mathbb{Z}) \in U\} \end{aligned}$$

είναι συνδετικό. Αν, δοθέντος $\delta > 0$, επιλέξουμε σαν U την ανοικτή μπάλα

$$\begin{aligned} U = \{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d) \in \mathbb{T}^d \mid \\ d_{\mathbb{T}^d}((\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d), (q_1(0) + \mathbb{Z}, q_2(0) + \mathbb{Z}, \dots, q_d(0) + \mathbb{Z})) < \delta\}, \end{aligned}$$

όπου, ως συνήθως,

$$d_{\mathbb{T}^d}((\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d), (\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_d)) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, d\}} d_{\mathbb{T}}(\theta_i, \theta'_i)$$

και $d_{\mathbb{T}}$ η μετρική (1.4), τότε παίρνουμε ότι το σύνολο

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^k \{n \in \mathbb{N} \mid d_{\mathbb{T}}(q_{d_1+d_2+\dots+d_i}(n) + \mathbb{Z}, q_{d_1+d_2+\dots+d_i}(0) + \mathbb{Z}) < \delta\} \\ \supseteq \bigcap_{j=1}^d \{n \in \mathbb{N} \mid d_{\mathbb{T}}(q_j(n) + \mathbb{Z}, q_j(0) + \mathbb{Z}) < \delta\} \\ = \{n \in \mathbb{N} \mid (q_1(n) + \mathbb{Z}, q_2(n) + \mathbb{Z}, \dots, q_d(n) + \mathbb{Z}) \in U\} \end{aligned}$$

είναι συνδεδετικό και αφού $q_{d_1+d_2+\dots+d_i} = p_i d_i = p_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, το σύνολο $\bigcap_{i=1}^k \{n \in \mathbb{N} \mid d_{\mathbb{T}}(p_i(n) + \mathbb{Z}, p_i(0) + \mathbb{Z}) < \delta\}$ είναι τελικά συνδεδετικό. Όμως για $x, x' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |e^{2\pi i x} - e^{2\pi i x'}| &= |e^{2\pi i(x-x')} - 1| \\ &= \sqrt{[\cos(2\pi(x-x')) - 1]^2 + \sin^2(2\pi(x-x'))} = 2\sin|\pi(x-x')| \end{aligned}$$

και για $\varepsilon \in (0, 2]$,

$$\begin{aligned} 2\sin|\pi(x-x')| < \varepsilon &\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{Z} \text{ τέτοιο ώστε } |x-x'-m| < \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \min_{m \in \mathbb{Z}} |x-x'-m| < \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Leftrightarrow d_{\mathbb{T}}(x + \mathbb{Z}, x' + \mathbb{Z}) < \arcsin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \end{aligned}$$

Επομένως, δοθέντος $\varepsilon \in (0, 2]$, για U όπως πιο πάνω και με $\delta = \arcsin(\varepsilon/2)$, παίρνουμε ότι το σύνολο

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^k \{n \in \mathbb{N} \mid |e^{2\pi i p_i(n)} - e^{2\pi i p_i(0)}| < \varepsilon\} \\ = \bigcap_{i=1}^k \{n \in \mathbb{N} \mid d_{\mathbb{T}}(q_{d_1+d_2+\dots+d_i}(n) + \mathbb{Z}, q_{d_1+d_2+\dots+d_i}(0) + \mathbb{Z}) < \delta\} \end{aligned}$$

είναι συνδεδετικό. Το αποτέλεσμα ισχύει βέβαια και για $\varepsilon > 2$, αφού τότε $\bigcap_{i=1}^k \{n \in \mathbb{N} \mid |e^{2\pi i p_i(n)} - e^{2\pi i p_i(0)}| < \varepsilon\} = \mathbb{N}$. $\square$

1.6 Συνδυαστικές Εφαρμογές

Ορισμός 1.6.1. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ (ή $\mathbb{Z}$) θα λέγεται **παχύ** (thick) αν περιέχει αυθαίρετου μήκους διαστήματα, δηλαδή για κάθε $l > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ (ή $n \in \mathbb{Z}$, αντίστοιχα) ώστε $\{n+1, n+2, \dots, n+l\} \subset A$.

Θυμίζουμε ότι στην περίπτωση που είμαστε στον $\mathbb{N}$ (ή $\mathbb{Z}$), ένα σύνολο είναι συνδεδετικό αν έχει φραγμένα κενά, δηλαδή για κάποιο $N \in \mathbb{N}$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ (ή κάθε $n \in \mathbb{Z}$, αντίστοιχα) έχουμε $\{k+1, k+2, \dots, k+N\} \cap A \neq \emptyset$.

Ορισμός 1.6.2. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ (ή $\mathbb{Z}$) θα λέγεται **μερικώς συνδεδετικό** αν είναι η τομή ενός παχιού και ενός συνδεδετικού συνόλου.

Παρατήρηση 1.6.3. 1. Από τους ορισμούς του παχιού και του συνδεδετικού συνόλου προκύπτει άμεσα ότι ένα σύνολο A είναι συνδεδετικό αν τέμνει κάθε παχύ σύνολο και ένα σύνολο B είναι παχύ αν τέμνει κάθε συνδεδετικό

σύνολο. Πράγματι, για τον πρώτο ισχυρισμό, αν A δεν είναι συνδεδετικό, τότε για κάθε $N \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_N \in \mathbb{N}$ (ή $k_N \in \mathbb{Z}$, αντίστοιχα) ώστε

$$\{k_N + 1, k_N + 2, \dots, k_N + N\} \cap A = \emptyset.$$

τότε όμως $A \cap \bigcup_{N=1}^{\infty} \{k_N + 1, k_N + 2, \dots, k_N + N\} = \emptyset$, με το

$$T = \bigcup_{N=1}^{\infty} \{k_N + 1, k_N + 2, \dots, k_N + N\}$$

προφανώς παχύ. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, αν B δεν είναι παχύ, τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\{n + 1, n + 2, \dots, n + l\} \setminus B \neq \emptyset,$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (ή κάθε $n \in \mathbb{Z}$, αντίστοιχα). αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (ή κάθε $n \in \mathbb{Z}$, αντίστοιχα) επιλέξουμε ένα

$$k_n \in \{n + 1, n + 2, \dots, n + l\} \setminus B,$$

τότε το σύνολο $\{k_1, k_2, \dots\}$ (ή το $\{k_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, αντίστοιχα) προφανώς δεν τέμνει το B ενώ είναι συνδεδετικό:

$$\{n + 1, n + 2, \dots, n + l\} \cap \{k_1, k_2, \dots\} \neq \emptyset$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (ή $\{n + 1, n + 2, \dots, n + l\} \cap \{k_m \mid m \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, αντίστοιχα).

2. Ένας ισοδύναμος ορισμός για ένα μερικώς συνδεδετικό σύνολο A είναι ο εξής. Για κάποιο $l > 0$, το σύνολο A περιέχει αυθαίρετου μήκους ακολουθίες $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ώστε για κάθε $1 \leq i < n$ να ισχύει ότι $a_{i+1} - a_i \leq l$. Πράγματι, αν A είναι μερικώς συνδεδετικό σύνολο, τότε υπάρχουν ένα συνδεδετικό σύνολο S και ένα παχύ σύνολο T ώστε $A = S \cap T$. Τότε υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\{k + 1, k + 2, \dots, k + l\} \cap S \neq \emptyset \quad (1.8)$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ (ή κάθε $k \in \mathbb{Z}$, αντίστοιχα). Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ (ή $m \in \mathbb{Z}$, αντίστοιχα) ώστε

$$\{m + 1, m + 2, m + 3, \dots, m + ln\} \subset T. \quad (1.9)$$

Τότε όμως $\{m + il + 1, m + il + 2, \dots, m + il + l\} \cap S \neq \emptyset$ για κάθε $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, από την (1.8) για $k = m + il$, και αν επιλέξουμε

$$a_{i+1} \in \{m + il + 1, m + il + 2, \dots, m + il + l\} \cap S$$

για κάθε $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$, τότε $a_i \in S \cap T = A$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, αφού

$$\{m+il+1, m+il+2, \dots, m+il+l\} \subseteq \{m+1, m+2, m+3, \dots, m+ln\} \subset T$$

για $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, από την (1.9). προφανώς επίσης

$$0 < a_{i+1} - a_i < 2l$$

για όλα τα $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, αφού $m+il < a_{i+1} \leq m+(i+1)l$ και $m+(i-1)l < a_i \leq m+il$. Αντίστροφα, αν υπάρχει $l \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχουν $a_{n,1} < a_{n,2} < \dots < a_{n,n}$ στο A με την ιδιότητα ότι $a_{n,i+1} - a_{n,i} \leq l$ για όλα τα $0 < i < n$ και όλα τα $n \in \mathbb{N}$, τότε το σύνολο

$$T = A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_{n,1}, a_{n,1}+1, a_{n,1}+2, \dots, a_{n,2}, a_{n,2}+1, a_{n,2}+2, \dots, a_{n,n}\},$$

δηλαδή το σύνολο που αποτελείται από το A και όλα τα διαστήματα ακεραίων από $a_{n,1}$ έως $a_{n,n}$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, είναι προφανώς παχύ, αφού το διάστημα $[a_{n,1}, a_{n,n}]$ έχει μήκος τουλάχιστον $n-1$ (περιέχει τουλάχιστον n διαδοχικούς ακεραίους). Επίσης, το σύνολο

$$S = A \cup \left\{ jl \mid j \in \mathbb{N}, jl \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_{n,1}, a_{n,n}] \right\}$$

(ή $S = A \cup \{jl \mid j \in \mathbb{Z}, jl \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_{n,1}, a_{n,n}]\}$ στην περίπτωση του $\mathbb{Z}$, αντίστοιχα) είναι συνδετικό αφού έχει κενά που φράσσονται από το l . Επιπλέον $A = S \cap T$, αφού προφανώς $A \subseteq S \cap T$ από τους ορισμούς των S και T και $T \cap S \subseteq A$ επειδή αν $a \in T \setminus A$ τότε αναγκαστικά $a \in [a_{n,1}, a_{n,n}]$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ οπότε $a \notin S$, και αν $a \in S \setminus A$ τότε $a = jl$ για κάποιο $jl \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_{n,1}, a_{n,n}]$ οπότε $a \notin T$.

Θεώρημα 1.6.4. Έστω $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ μια διαμέριση του $\mathbb{N}$. Τότε ένα από τα B_j είναι μερικώς συνδετικό.

Απόδειξη. Έστω $\Lambda = \{1, 2, \dots, q\}$, T το shift $(Tx)(n) = x(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, στον $\Lambda^{\mathbb{N}}$ και ω η ακολουθία που ορίζει η διαμέριση: $\omega(n) = j \Leftrightarrow n \in B_j$, για $j \in \Lambda$. Θεωρούμε το σύστημα $X = \overline{\text{Orb}(\omega, T)}$. Το (X, T) είναι συμπαγές δυναμικό σύστημα και από το Θεώρημα 1.3.11, ο X περιέχει ένα σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς, έστω το ξ . Έστω ότι $\xi(1) = j$. Τότε η τιμή j υπεισέρχεται στο ξ για τιμές του n σε ένα συνδετικό σύνολο, δηλαδή ένα σύνολο με φραγμένα κενά, με κάποιο φράγμα έστω l .

Τώρα, αφού το $\xi \in X$, υπάρχει $T^m(\omega)$ όσο κοντά θέλουμε στο ξ . Δηλαδή, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένα $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$T^m(\omega(1)) = \xi(1), T^m(\omega(2)) = \xi(2), \dots, T^m(\omega(n)) = \xi(n).$$

Αυτό σημαίνει ότι στο σύνολο $\{m+1, m+2, m+3, \dots, m+n\}$, το j υπεισέρχεται στο ω με κενά μήκους το πολύ l . Άρα, από την τελευταία παρατήρηση, το B_j είναι μερικώς συνδετικό. $\square$

Ένα γενικότερο αποτέλεσμα είναι το εξής.

Θεώρημα 1.6.5. Έστω B ένα μερικώς συνδετικό υποσύνολο του $\mathbb{N}$ και $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ μια διαμέρισή του. Τότε ένα από τα B_j είναι μερικώς συνδετικό.

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα τη χαρακτηριστική συνάρτηση χ_B του B : $\chi_B(n) = 1$ αν $n \in B$ και $\chi_B(n) = 0$ αν $n \notin B$. Η χ_B είναι σημείο του συστήματος $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, T)$, όπου T το shift. Επειδή το B είναι μερικώς συνδετικό, μπορούμε να βρούμε ένα B' συνδετικό σύνολο ώστε η $\chi_{B'}$ να είναι στην κλειστή θήκη της τροχιάς του χ_B .

Πράγματι, υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε να υπάρχει, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ακολουθία $a_{n,1} < a_{n,2} < \dots < a_{n,n}$ στο B με $a_{n,i} - a_{n,i-1} \leq M$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, από το 2. της Παρατήρησης 1.6.3. Αν τώρα το σύνολο $\{T^{a_{n,1}}(\chi_B) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχει ακολουθία $n_1 < n_2 < \dots$ φυσικών τέτοια ώστε όλα τα $T^{a_{n_k,1}}(\chi_B)$, $k \in \mathbb{N}$, να ταυτίζονται. Η κοινή τιμή των $T^{a_{n_k,1}}(\chi_B)$, $k \in \mathbb{N}$, είναι ένα στοιχείο του $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ και άρα της μορφής $\chi_{B'}$ για κάποιο $B' \subseteq \mathbb{N}$. Όμως τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\chi_{B'}(a_{n_k,2} - a_{n_k,1}) = \chi_{B'}(a_{n_k,3} - a_{n_k,1}) = \dots = \chi_{B'}(a_{n_k,n_k} - a_{n_k,1}) = 1,$$

αφού $\chi_{B'}(a_{n_k,i} - a_{n_k,1}) = (T^{a_{n_k,1}}\chi_{B'})(a_{n_k,i} - a_{n_k,1}) = \chi_{B'}(a_{n_k,i}) = 1$ για κάθε $i \in \{2, 3, \dots, n_k\}$. δηλαδή το B' περιέχει την πεπερασμένη ακολουθία

$$b_{n_k,1} < b_{n_k,2} < \dots < b_{n_k,n_k-1},$$

όπου $b_{n,i} = a_{n,i+1} - a_{n,1}$ για $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ για αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}$, με

$$b_{n_k,i} - b_{n_k,i-1} = a_{n_k,i+1} - a_{n_k,i} \leq M$$

για κάθε $i \in \{2, 3, \dots, n_k-1\}$. Προφανώς επίσης,

$$b_{n_k,n_k-1} = a_{n_k,n_k} - a_{n_k,1} \geq n_k - 1 \geq k - 1 \rightarrow \infty \quad (1.10)$$

καθώς $k \rightarrow \infty$. άρα δοθέντος $m \in \mathbb{N}$ υπάρχει k ώστε $b_{n_k, n_k-1} > m$, και τότε είτε $b_{n_k, i-1} \leq m < b_{n_k, i}$ για κάποιο $i \in \{2, 3, \dots, n_k - 1\}$, οπότε

$$b_{n_k, i} \in \{m+1, m+2, \dots, m+M\},$$

αφού $0 < b_{n_k, i} - m \leq b_{n_k, i} - b_{n_k, i-1} \leq M$, είτε $m < b_{n_k, 1}$, οπότε

$$b_{n_k, 1} \in \{m+1, m+2, \dots, m+M\},$$

αφού $0 < b_{n_k, 1} - m \leq b_{n_k, 1} = a_{n_k, 2} - a_{n_k, 1} \leq M$. Σε κάθε περίπτωση

$$\{m+1, m+2, \dots, m+M\} \cap B' \neq \emptyset,$$

και αφού αυτό ισχύει για κάθε $m \in \mathbb{N}$ το B' είναι συνδεδετικό.

Στην αντίθετη περίπτωση, το $\{T^{a_{n,1}}(\chi_B) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο. Από τη συμπαγεια του $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, υπάρχει τότε ακολουθία φυσικών αριθμών $n_1 < n_2 < \dots$ ώστε η ακολουθία $T^{a_{n_1,1}}(\chi_B), T^{a_{n_2,1}}(\chi_B), T^{a_{n_3,1}}(\chi_B), \dots$ να συγκλίνει σε ένα στοιχείο $\chi_{B'}$ του $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Θα δείξουμε πάλι ότι το B' είναι συνδεδετικό. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $k_m \in \mathbb{N}$ ώστε $n_{k_m} - 1 > m$. Επίσης, από την σύγκλιση $T^{a_{n_k,1}}(\chi_B) \rightarrow \chi_{B'}$, υπάρχει $k \geq k_m$ ώστε τα $\chi_{B'}$ και $T^{a_{n_k,1}}(\chi_B)$ να συμπίπτουν στις πρώτες $m+M$ συντεταγμένες. Τότε, με $b_{n,i} = a_{n,i+1} - a_{n,1}$ για $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ και αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}$, όπως έχει οριστεί παραπάνω, $b_{n_k, n_k-1} \geq n_k - 1 \geq n_{k_m} - 1 > m$, από την (1.10) και την επιλογή του k_m , και άρα πάλι, είτε $b_{n_k, i-1} \leq m < b_{n_k, i}$ για κάποιο $i \in \{2, 3, \dots, n_k - 1\}$, οπότε

$$b_{n_k, i} \in \{m+1, m+2, \dots, m+M\},$$

είτε $m < b_{n_k, 1}$, οπότε

$$b_{n_k, 1} \in \{m+1, m+2, \dots, m+M\}.$$

υπάρχει δηλαδή πάλι $i \in \{1, 2, \dots, n_k - 1\}$ τέτοιο ώστε

$$b_{n_k, i} \in \{m+1, m+2, \dots, m+M\}.$$

Όμως $b_{n_k, i} \leq m+M$ για ένα τέτοιο i και άρα οι ακολουθίες $\chi_{B'}$ και $T^{a_{n_k,1}}(\chi_B)$ ταυτίζονται στην συντεταγμένη $b_{n_k, i}$, αφού αυτές οι δύο ακολουθίες ταυτίζονται μέχρι και την $m+M$ συντεταγμένη. Έπεται ότι

$$x_{B'}(b_{n_k, i}) = x_{B'}(a_{n_k, i} - a_{n_k, 1}) = (T^{a_{n_k,1}}\chi_B)(a_{n_k, i} - a_{n_k, 1}) = \chi_B(a_{n_k, i}) = 1$$

και άρα $b_{n_k, i} \in B'$. Έχουμε δηλαδή ότι

$$b_{n_k, i} \in \{m+1, m+2, \dots, m+M\} \cap B'$$

και άρα $\{m+1, m+2, \dots, m+M\} \cap B' \neq \emptyset$. Αφού το m ήταν αυθαίρετο, έπεται ότι το B' είναι συνδετικό.

Θέτουμε τώρα $\Lambda = \{0, 1, 2, \dots, q\}$, T να είναι το shift στο $\Lambda^{\mathbb{N}}$ και ω η ακολουθία στο $\Lambda^{\mathbb{N}}$ που προκύπτει από την διαμέριση του B αν την επεκτείνουμε σε όλο το $\mathbb{N}$ βάζοντας 0 στα σημεία έξω από το B : δηλαδή $\omega(n) = j$ αν $n \in B_j$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ και $\omega(n) = 0$ αλλιώς, δηλαδή αν $n \notin B$.

Από τα προηγούμενα, υπάρχει $B' \subseteq \mathbb{N}$ συνδετικό για το οποίο $\chi_{B'} \in \overline{\text{Orb}(\chi_B, T)}$. Άρα υπάρχει υπακολουθία $n_1 < n_2 < \dots$ της $\{T^n(\chi_B)\}_{n \in \mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει στην $\chi_{B'}$. Από την συμπάγεια του $\Lambda^{\mathbb{N}}$ τώρα, υπάρχει περαιτέρω υπακολουθία $n_{k_1} < n_{k_2} < \dots$ τέτοια ώστε η υπακολουθία $\{T^{n_{k_j}}(\omega)\}_{j \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει προς κάποιο $\omega' \in \Lambda^{\mathbb{N}}$. Επειδή οι τοπολογίες στα $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ και $\Lambda^{\mathbb{N}}$ είναι τοπολογίες γινόμενο, και άρα σύγκλιση μιας ακολουθίας ακολουθιών ισοδυναμεί με σύγκλιση κάθε συντεταγμένης, και επειδή $\omega(n) = 0 \Leftrightarrow n \notin B \Leftrightarrow \chi_B(n) = 0$, έπεται ότι $\omega'(n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{j \rightarrow \infty} (T^{n_{k_j}}\omega)(n) = 0$ και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν υπάρχει $j_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\omega(n + n_{k_j}) = 0$ για όλα τα $j \geq j_0$, και άρα αν και μόνο αν υπάρχει $j_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\chi_B(n + n_{k_j}) = 0$ για όλα τα $j \geq j_0$ και εν τέλει αν και μόνο αν $\chi_{B'}(n) = \lim_{j \rightarrow \infty} (T^{n_{k_j}}\chi_B)(n) = 0$. Επομένως για την οριακή ακολουθία ω' έχουμε ότι $\omega'(n) \geq 1 \Leftrightarrow n \in B'$.

Βρίσκουμε υπακολουθία $m_1 < m_2 < \dots$ ώστε η $\{T^{m_k}(\omega')\}_{k \in \mathbb{N}}$ να συγκλίνει σε κάποιο ομοιόμορφα επανερχόμενο σημείο ξ , εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.3.11 στο σύστημα $(\overline{\text{Orb}(\omega', T)}, T)$. Αφού $\omega' \geq \chi_{B'}$ κατά συντεταγμένη και το B' είναι συνδετικό, παίρνουμε ότι κανένα όριο της τροχιάς του ω' δεν μπορεί να είναι ταυτοτικά μηδέν. Συνεπώς ούτε το ξ μπορεί να είναι το τριτομμένο στοιχείο, ταυτοτικά ίσο με μηδέν. Έστω j μία μη μηδενική τιμή που εμφανίζεται στο ξ . Αφού το ξ είναι σημείο ομοιόμορφης επαναφοράς, το j θα εμφανίζεται συνδετικά μέσα στο ξ . Όμως $\xi \in \overline{\text{Orb}(\omega', T)}$ και $\omega' \in \overline{\text{Orb}(\omega, T)}$: από την Παρατήρηση 1.1.6 το $\overline{\text{Orb}(\omega, T)}$ είναι T -αναλλοίωτο οπότε $\text{Orb}(\omega', T) \subseteq \overline{\text{Orb}(\omega, T)}$ και άρα τελικά $\overline{\text{Orb}(\omega', T)} \subseteq \overline{\text{Orb}(\omega, T)}$. Επομένως το ξ είναι όριο μεταφορών του ω και άρα το j εμφανίζεται στο ω σε αλυσίδες $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ αυθαίρετου μήκους με $n_i - n_{i-1} \leq l$ για κάποιο l . Δηλαδή το B_j είναι μερικώς συνδετικό. $\square$

Παρατήρηση. Τα Θεωρήματα 1.6.4 και 1.6.5 επεκτείνονται εύκολα στο $\mathbb{Z}$. Αν $\mathbb{Z} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ είναι διαμέριση του $\mathbb{Z}$ τότε κάποιο από τα B_j είναι μερικώς συνδετικό και όμοια αν το $\mathbb{Z}$ αντικατασταθεί από κάποιο μερικώς συνδετικό υποσύνολό του.

1.7 Μεταβατικότητα και Nonwandering συστήματα

Ορισμός 1.7.1. Ένα δυναμικό σύστημα (X, T) λέγεται **μεταβατικό** αν υπάρχει ένα $x \in X$ με πυκνή τροχιά, δηλαδή $\overline{\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}} = X$. Ένα x για το οποίο $\overline{\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}} = X$, θα λέγεται και αυτό **μεταβατικό**.

Θεώρημα 1.7.2. Έστω (X, T) δυναμικό σύστημα ώστε $T(X) = X$. Τα εξής είναι ισοδύναμα.

1. Το (X, T) είναι μεταβατικό.
2. Για κάθε E κλειστό με $T(E) \subseteq E$, είτε $E = X$ είτε E πουθενά πυκνό.
3. Για κάθε $U, V \subseteq X$ ανοιχτά και μη κενά, υπάρχει κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.
4. Το σύνολο των μεταβατικών σημείων $\{x \in X \mid \overline{\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}} = X\}$ είναι πυκνό και G_δ .

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2) Έστω X μεταβατικό και $x \in X$ τέτοιο ώστε

$$\overline{\{T^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}} = X.$$

Έστω E κλειστό και T -αναλλοίωτο και έστω ότι για κάποιο $U \neq \emptyset$ ανοιχτό, $U \subseteq E$. Τότε υπάρχει ένα $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $T^{n_0}(x) \in U$. Επειδή όμως $T(E) \subseteq E$ έπεται ότι για κάθε $n \geq n_0$, $T^n(x) \in E$ και άρα το σύνολο $\{T^n(x) \mid n \geq n_0\}$ περιέχεται στο E . Έπεται ότι

$$X = E \cup \{x, T(x), \dots, T^{n_0-1}(x)\}.$$

Άρα $T^{n_0}(X) \subseteq T^{n_0}(E \cup \{x, T(x), \dots, T^{n_0-1}(x)\}) \subseteq E$. Αφού ο T είναι επί έπεται ότι $X = T^{n_0}(X)$ και άρα $X \subseteq E$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Το (2) μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως εξής. Για κάθε $U \subseteq X$ ανοιχτό με $T^{-1}(U) \subseteq U$ ισχύει ότι ή $U = \emptyset$ ή $\bar{U} = X$. Έστω τώρα U, V ανοιχτά και μη κενά. Τότε το $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}(U)$ είναι ανοιχτό, μη κενό και $T^{-1}(A) = \bigcup_{n=2}^{\infty} T^{-n}(U) \subseteq A$. Άρα το A πρέπει να είναι πυκνό και συνεπώς τέμνει κάθε ανοιχτό V . Δηλαδή υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$.

(3) $\Rightarrow$ (4) Αφού ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος έχει αριθμήσιμη βάση, δηλαδή υπάρχουν ανοιχτά U_n , $n \in \mathbb{N}$, ώστε για κάθε $V \subseteq X$ ανοιχτό και κάθε $x \in V$ υπάρχει ένα U_n ώστε $x \in U_n \subseteq V$. Γράφουμε

$$\{x \in X \mid \overline{\{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}} = X\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T^{-k}(U_n) \quad (1.11)$$

και παρατηρούμε ότι το $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} T^{-k}(U_n)$ είναι ανοιχτό και πυκνό αφού τέμνει κάθε ανοιχτό από την υπόθεση. Από το Θεώρημα Baire η τομή είναι G_δ πυκνό. Για την επαλήθευση της (1.11) αρχικά παρατηρεί κανείς ότι, αν x ανήκει στο αριστερό μέλος, είναι δηλαδή μεταβατικό σημείο, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\text{Orb}(x, T) \cap U_n \neq \emptyset$, αφού η τροχιά του x είναι πυκνή και το U_n ανοιχτό και άρα $T^k(x) \in U_n$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και αντιστρόφως, αν $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T^{-k}(U_n)$ και $V \subseteq X$ ανοιχτό και μη κενό, τότε $U_n \subseteq V$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, και τότε $T^k(x) \in U_n \subseteq V$ για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, αφού $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} T^{-k}(U_n)$ για αυτό το n και $U_n \subseteq V$, και άρα $\text{Orb}(x, T) \cap V \neq \emptyset$.
(4) $\Rightarrow$ (1) Προφανές. $\square$

Ορισμός 1.7.3. Ένα σύστημα (X, T) λέγεται **nonwandering** αν για κάθε $A \subseteq X$ μη κενό και ανοιχτό, υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^{-n}(A) \cap A \neq \emptyset$.

Υπενθυμίζουμε τις παρακάτω έννοιες.

Ορισμός 1.7.4. Ένα σύνολο R σε έναν τοπολογικό χώρο X λέγεται **residual** αν είναι συμπλήρωμα μιας αριθμήσιμης ένωσης πουθενά πυκνών συνόλων, ή ισοδύναμα, αν είναι αριθμήσιμη τομή συνόλων με πυκνά εσωτερικά.

Παρατήρηση. Ένα σύνολο M σε έναν τοπολογικό χώρο X λέγεται **ισχνό** (meager) αν γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων. Επομένως ένα σύνολο R είναι residual αν το συμπλήρωμά του είναι ισχνό. Αν $M \subseteq M'$ είναι υποσύνολο ενός ισχνού συνόλου M' και $M' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, με κάθε E_n πουθενά πυκνό, δηλαδή με $(\overline{E_n})^\circ = \emptyset$ για κάθε n , τότε $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \cap E_n)$ και $(\overline{M \cap E_n})^\circ \subseteq (\overline{E_n})^\circ = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή κάθε $M \cap E_n$ είναι πουθενά πυκνό. Επομένως κάθε υποσύνολο ισχνού συνόλου είναι επίσης ισχνό. Άρα και κάθε υπερσύνολο residual συνόλου είναι επίσης residual.

Ορισμός 1.7.5. Σε έναν τοπολογικό χώρο X , μια συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **άνω ημισυνεχής** αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ είναι ανοιχτό.

Παρατήρηση. Ένας ισοδύναμος τρόπος για να ορίσει κανείς την άνω ημισυνέχεια σε μετρικούς χώρους είναι οι εξής. Μία συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ σε έναν μετρικό χώρο (X, d) λέγεται άνω ημισυνεχής σε ένα σημείο $x \in X$ αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την ιδιότητα ότι $f(y) < f(x) + \varepsilon$ για κάθε $y \in X$ με $d(x, y) < \delta$. Η f είναι άνω ημισυνεχής αν είναι άνω ημισυνεχής σε κάθε $x \in X$.

Λήμμα 1.7.6. Αν f είναι μία άνω ημισυνεχής συνάρτηση σε έναν πλήρη μετρικό χώρο, τότε είναι συνεχής σε ένα residual σύνολο.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι τα σημεία ασυνέχειας της f είναι αριθμήσιμη ένωση πουνθενά πυκνών συνόλων. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_\epsilon = \{x \in X \mid \text{υπάρχουν ακολουθίες } x'_n \rightarrow x, x''_n \rightarrow x \text{ με } F(x'_n) - F(x''_n) > \epsilon \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.$$

Το A_ϵ είναι κλειστό. Πράγματι έστω ακολουθία $x_n \in A_\epsilon$ με $x_n \rightarrow x$. Αν $x_n = x$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε προφανώς $x \in A_\epsilon$. Έστω λοιπόν $x_n \neq x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν ακολουθίες $x'_{n,m} \rightarrow x_n$ και $x''_{n,m} \rightarrow x_n$ με $F(x'_{n,m}) - F(x''_{n,m}) > \epsilon$. Για κάθε n λοιπόν, επιλέγουμε m_n ώστε $d(x'_{n,m_n}, x_n) \leq d(x_n, x)$ και $d(x''_{n,m_n}, x_n) \leq d(x_n, x)$. αυτό γίνεται επειδή έχουμε υποθέσει ότι $d(x_n, x) > 0$ για κάθε n . Τότε ορίζουμε $x'_n = x'_{n,m_n}$ και $x''_n = x''_{n,m_n}$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(x'_n, x) &\leq d(x'_n, x_n) + d(x_n, x) \leq 2d(x_n, x) \rightarrow 0 \\ d(x''_n, x) &\leq d(x''_n, x_n) + d(x_n, x) \leq 2d(x_n, x) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

δηλαδή $x'_n \rightarrow x$ και $x''_n \rightarrow x$, και από τον ορισμό των x'_n, x''_n έχουμε και ότι $F(x'_n) - F(x''_n) > \epsilon$. Άρα $x \in A_\epsilon$ και το A_ϵ είναι πράγματι κλειστό.

Θα δείξουμε τώρα ότι το A_ϵ είναι πουνθενά πυκνό, δηλαδή ότι έχει κενό εσωτερικό. Υποθέτουμε καταρχήν επιπλέον ότι η F είναι φραγμένη από κάτω. Έστω ότι x είναι εσωτερικό σημείο του A_ϵ . Έστω και $x'_n \rightarrow x$, $x''_n \rightarrow x$ ακολουθίες με $F(x'_n) - F(x''_n) > \epsilon$. Από την άνω ημισυνέχεια της F υπάρχει n , όσο μεγάλο θέλουμε, ώστε $F(x'_n) \leq F(x) + \epsilon/2$, αφού το $F^{-1}((-\infty, \epsilon/2))$ είναι ανοιχτό και άρα περιέχει όλα τα x'_n από κάποιο n_0 και μετά, επειδή $x'_n \rightarrow x$. Τότε αναγκαστικά $F(x''_n) < F(x) - \epsilon/2$, αφού $F(x'_n) - F(x''_n) > \epsilon$. Αν όμως το n είναι αρκούντως μεγάλο, το x''_n είναι εσωτερικό σημείο του A_ϵ γιατί το εσωτερικό του A_ϵ είναι ανοιχτό σύνολο που περιέχει το όριο x των x''_n και άρα όλα τα x''_n από κάποιο n_1 και μετά. Αυτό όμως το επιχείρημα μπορούμε να το επαναλάβουμε με το x''_n στην θέση του x και τότε θα βρούμε κάποιο εσωτερικό σημείο x'''_m του A_ϵ με $F(x'''_m) < F(x''_n) - \epsilon/2 < F(x) - \epsilon$, και συνεχίζοντας επαγωγικά, θα μπορούμε να βρούμε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ένα x_k που θα ικανοποιεί την ανισότητα $F(x_k) < F(x) - k\epsilon/2$. Αυτό όμως αντίκειται στο γεγονός ότι η F είναι κάτω φραγμένη και άρα το A_ϵ θα πρέπει τελικά να έχει κενό εσωτερικό.

Τέλος το σύνολο $A(F)$ των σημείων ασυνέχειας της F γράφεται ως $A(F) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{1/k}$ και ο ισχυρισμός αυτός αποδεικνύει το Λήμμα στην περίπτωση που η F είναι κάτω φραγμένη. Για την απόδειξη του ισχυρισμού έστω πρώτα $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{1/k}$. Τότε προφανώς $x \in A_\epsilon$ για κάποιο $\epsilon = 1/k > 0$ και άρα υπάρχουν ακολουθίες $x'_n \rightarrow x$ και $x''_n \rightarrow x$ με $F(x'_n) - F(x''_n) > \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε όμως δεν μπορεί να έχουμε ότι $F(x'_n) \rightarrow F(x)$ και $F(x''_n) \rightarrow F(x)$, όπως θα έπρεπε αν η F ήταν συνεχής στο x . Έστω, αντίστροφα τώρα, ότι το x

είναι σημείο ασυνέχειας της F . Τότε υπάρχει ακολουθία x_n ώστε $x_n \rightarrow x$ αλλά $F(x_n) \not\rightarrow F(x)$. Έπεται ότι για κάποιο $\epsilon > 0$, υπάρχει υπακολουθία $\{x_{k_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ της $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $|F(x_{k_n}) - F(x)| > \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε προφανώς είτε υπάρχει περαιτέρω υπακολουθία $\{x_{k_{j_n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $F(x_{k_{j_n}}) - F(x) > \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ είτε υπάρχει υπακολουθία $\{x_{k_{j_n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $F(x_{k_{j_n}}) - F(x) < -\epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην πρώτη περίπτωση θέτουμε $x'_n = x_{k_{j_n}}$ και $x''_n = x$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και στην δεύτερη $x'_n = x$ και $x''_n = x_{k_{j_n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι $x'_n \rightarrow x$, $x''_n \rightarrow x$ και $F(x'_n) - F(x''_n) > \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή $x \in A_\epsilon$. Έπεται φυσικά τώρα ότι επίσης $x \in A_{1/k}$ για οποιοδήποτε $k \geq 1/\epsilon$.

Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα στην περίπτωση που η F είναι κάτω φραγμένη. Στην περίπτωση τώρα που η F δεν είναι κάτω φραγμένη, θεωρούμε την συνάρτηση $x \mapsto e^{F(x)}$. Όταν η F είναι άνω ημισυνεχής, το σύνολο $\{x \in X \mid e^{F(x)} < a\} = \{x \in X \mid F(x) < \ln a\}$, για $a > 0$, είναι ανοιχτό και για $a \leq 0$, $\{x \in X \mid e^{F(x)} < a\} = \emptyset$ είναι πάλι ανοιχτό, άρα η $x \mapsto e^{F(x)}$ είναι επίσης άνω ημισυνεχής. Η συνάρτηση αυτή είναι επίσης κάτω φραγμένη, άρα από τα προηγούμενα το σύνολο $A(e^F)$ των σημείων ασυνέχειας της e^F είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών και πουθενά πυκνών συνόλων. Όμως $A(F) = A(e^F)$, αφού ένα σημείο $x \in X$ είναι σημείο συνέχειας της F αν και μόνο αν είναι σημείο συνέχειας της e^F , από την συνέχεια των συναρτήσεων $x \mapsto e^x$ στο $\mathbb{R}$ και $x \mapsto \ln x$ στο $(0, \infty)$. $\square$

Παρατήρηση. Μια συνάρτηση $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **κάτω ημισυνεχής** αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in X \mid f(x) > a\}$ είναι ανοιχτό, ισοδύναμα το $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ είναι κλειστό για κάθε a . Βλέπει κανείς εύκολα ότι το Λήμμα 1.7.6 ισχύει και για κάτω ημισυνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.7.7. *Αν (X, T) nonwandering, τότε το σύνολο των μη επανερχόμενων σημείων είναι residual.*

Απόδειξη. Αν d είναι η μετρική του χώρου X , ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \inf_{n \geq 1} d(x, T^n(x)).$$

Από τον ορισμό του infimum έχουμε ότι, αν $F(x_0) = u$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x_0, T^n(x_0)) < u + \epsilon$. Λόγω της συνέχειας τώρα, για κάθε x που ανήκει σε μια περιοχή του x_0 ισχύει πάλι $d(x, T^n(x)) < u + \epsilon$. Πράγματι, αν $\epsilon' := u + \epsilon - d(x_0, T^n(x_0))$, που είναι > 0 , από την συνέχεια της T^n υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε $d(T^n(x), T^n(x_0)) < \epsilon'/2$ για όλα τα x με $d(x, x_0) < \delta'$, και τότε

$$\begin{aligned} d(x, T^n(x)) &\leq d(x, x_0) + d(x_0, T^n(x_0)) + d(T^n(x), T^n(x_0)) \\ &< \delta' + d(x_0, T^n(x_0)) + \frac{\epsilon'}{2} \end{aligned}$$

για όλα τα x με $d(x, x_0) < \delta'$, οπότε αν πάρουμε $\delta := \min\{\delta', \epsilon'/2\}$, τότε $d(x, T^n(x)) < u + \epsilon$ για όλα τα x με $d(x, x_0) < \delta$. Άρα $F(x) < F(x_0) + \epsilon$ για όλα τα x σε μια περιοχή του x_0 , και επομένως η F είναι άνω ημισυνεχής συνάρτηση. Γνωρίζουμε λοιπόν από το Λήμμα 1.7.6 ότι το σύνολο των σημείων που είναι συνεχής είναι residual.

Έστω x_0 ένα σημείο συνέχειας της F . Αν $F(x_0) = 0$ τότε το x_0 είναι επανερχόμενο σημείο, από τον ορισμό της F . Αν $F(x_0) > 0$, τότε υπάρχει ένα $\epsilon > 0$ και μια γειτονιά V του x_0 ώστε $F(x) > \epsilon$ για κάθε $x \in V$. Μπορούμε να θεωρήσουμε την V να έχει διάμετρο $\text{diam}(V) < \epsilon$. Τότε η V είναι ένα nonwandering σύνολο (αφού το σύστημα είναι nonwandering) και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^{-n}(V) \cap V \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχει κάποιο $x \in V$ ώστε $T^n(x) \in V$. Όμως αφού η διάμετρος του V είναι μικρότερη από ϵ , έπεται ότι $F(x) < \epsilon$, άτοπο.

Αναγκαστικά λοιπόν, για τα σημεία συνέχειας της F ισχύει ότι $F(x) = 0$ και άρα είναι επανερχόμενα σημεία. Δηλαδή το σύνολο των σημείων επαναφοράς περιέχει ένα residual σύνολο και άρα είναι και το ίδιο residual. $\square$

Κεφάλαιο 2

Πολλαπλή επαναφορά

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε την επαναφορά ενός σημείου σε ένα δυναμικό σύστημα ως προς μια απεικόνιση T . Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την επαναφορά ως προς περισσότερες απεικονίσεις. Θα δείξουμε ότι ένας συμπαγής χώρος μαζί με πεπερασμένο πλήθος συνεχών απεικονίσεων που μετατίθενται μεταξύ τους, έχει σημεία *πολλαπλής επαναφοράς* (Θεώρημα Πολλαπλής Επαναφοράς του Birkhoff (MBR)). Μέσω αυτού του θεωρήματος, προκύπτουν σημαντικά αποτελέσματα στη συνδυαστική θεωρία αριθμών, όπως το θεώρημα του van der Waerden και κάποιες διοφαντικές ανισότητες.

2.1 Ομογενή σύνολα

Ορισμός 2.1.1. • Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και T μια συνεχής απεικόνιση από τον X στον X . Ένα κλειστό σύνολο $A \subseteq X$ λέγεται **ομογενές** (homogeneous) ως προς τον T , αν υπάρχει ομάδα G ομοιομορφισμών του X της οποίας κάθε στοιχείο μετατίθεται με τον T , αφήνει το A αναλλοίωτο και κάνει το δυναμικό σύστημα (A, G) να είναι minimal. Συχνά το A θα το αναφέρεται και ως T -ομογενές.

- Πιο γενικά, ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι ομογενές ως προς μία ομάδα ή ημιομάδα μετασχηματισμών G από τον X στον X , αν υπάρχει ομάδα G' ομοιομορφισμών του X της οποίας κάθε στοιχείο μετατίθεται με τα στοιχεία της G , αφήνει το A αναλλοίωτο και κάνει το δυναμικό σύστημα (A, G') να είναι minimal.

Παρατήρηση 2.1.2. Υπενθυμίζεται ότι, σε ένα δυναμικό σύστημα (X, T) , ένας ομοιομορφισμός που μετατίθεται με τον T είναι αυτομορφισμός του συστήματος (Ορισμός 1.2.5). Υπενθυμίζεται επίσης ότι, αν για κάποιο A το σύστημα (A, G) είναι minimal, τότε κάθε G -τροχιά στο A είναι πυκνή στο A (Λήμμα 1.3.6).

Δηλαδή, αν ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι T -ομογενές, αφού κάθε G -τροχιά του είναι πυκνή, θα έχουμε ότι οι αυτομορφισμοί του συστήματος (X, T) πηγαίνουν κάθε στοιχείο του A οσοδήποτε κοντά θέλουμε σε οποιοδήποτε άλλο στοιχείο του.

Ορισμός 2.1.3. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και A ένα κλειστό υποσύνολο του X . Θα λέμε το A **επανερχόμενο** (recurrent) για τον μετασχηματισμό $T: X \rightarrow X$, αν για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $x \in A$, υπάρχουν $y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^n(y), x) < \epsilon$.

Λήμμα 2.1.4. Αν A είναι ένα T -ομογενές υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X , τέτοιο ώστε, για κάθε $\epsilon > 0$ να υπάρχουν $x, y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $d(T^n(y), x) < \epsilon$, τότε το A είναι επανερχόμενο.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$ και $z \in A$. Αφού το A είναι ομογενές, υπάρχει ομάδα G ομοιομορφισμών του X ώστε $gT = Tg$ και $g(A) \subseteq A$ για κάθε $g \in G$, και επιπλέον το σύστημα είναι (A, G) είναι minimal.

Ισχυρισμός. Για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο $G_0 \subseteq G$ ώστε για κάθε $x, y \in A$ να ισχύει: $\min_{g \in G_0} d(gx, y) < \epsilon$. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$ και έστω ένα ανοικτό κάλυμμα του A από σύνολα V_i με $\text{diam}(V_i) < \epsilon$. Τότε αφού το A είναι κλειστό, θα είναι συμπαγές και συνεπώς μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος V_i ώστε $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_i$. Επιπλέον, αφού το (A, G) είναι minimal, από το Λήμμα 1.3.7, για κάθε V_i υπάρχει ένα πεπερασμένο $\{g_{i1}, \dots, g_{im_i}\} \subseteq G$ τέτοιο ώστε $A \subseteq \bigcup_j g_{ij}^{-1} V_i$. Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε $x, y \in A$, το y θα ανήκει σε κάποιο V_i και για το x μπορούμε να βρούμε ένα j ώστε $g_{ij}x \in V_i$ και άρα $\min_{i,j} d(g_{ij}x, y) < \epsilon$. Δηλαδή το σύνολο $G_0 = \{g_{ij} \mid i \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2, \dots, m_i\}\}$ ικανοποιεί τον ισχυρισμό.

Για το G_0 μπορούμε να βρούμε ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $d(x_1, x_2) < \delta$, να προκύπτει ότι $d(gx_1, gx_2) < \epsilon$ για κάθε $g \in G_0$. Πράγματι, αφού κάθε g είναι συνεχής σε συμπαγή μετρικό χώρο, είναι ομοιόμορφα συνεχής και μπορούμε να βρούμε για κάθε g ένα $\delta_g > 0$ ώστε $d(x_1, x_2) < \delta_g$ να συνεπάγεται ότι $d(gx_1, gx_2) < \epsilon$. Ορίζουμε λοιπόν $\delta = \min_{g \in G_0} \delta_g$ και αφού το G_0 είναι πεπερασμένο έχουμε ότι $\delta > 0$ και φυσικά $d(gx_1, gx_2) < \epsilon$ για κάθε $g \in G_0$ αν $d(x_1, x_2) < \delta$.

Βάζοντας στην υπόθεσή μας για $\epsilon = \delta$ παίρνουμε ότι

$$\text{υπάρχουν } x, y \in A \text{ και } n \in \mathbb{N} \text{ ώστε } d(x, T^n(y)) < \delta. \quad (2.1)$$

Δοθέντος $z \in A$, από τον ισχυρισμό, υπάρχει $g \in G_0$ ώστε

$$d(gx, z) < \epsilon. \quad (2.2)$$

Από την (2.1) έχουμε ότι $d(x, T^n(y)) < \delta$ και συνεπώς $d(gx, gT^n(y)) < \epsilon$. Όμως αφού $g \in G$, ο g μετατίθεται με τον T και έτσι η τελευταία ανισότητα μπορεί να γραφεί και ως $d(gx, T^n(gy)) < \epsilon$. Από την (2.2) τώρα παίρνουμε ότι

$$d(T^n(gy), z) \leq d(T^n(gy), gx) + d(gx, z) < 2\epsilon.$$

Δηλαδή για τα τυχόντα $\epsilon > 0$ και $z \in A$, βρήκαμε $y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^n(gy), z) < 2\epsilon$. Συνεπώς το A είναι επανερχόμενο. $\square$

Θα δούμε τώρα ένα λήμμα του οποίου η απόδειξη που παρατίθεται οφείλεται στον Rufus Bowen και το οποίο αν και δε χρησιμοποιεί τη θεωρία των ομογενών συνόλων, παίζει καταλυτικό ρόλο τόσο σε αυτήν την παράγραφο, όσο και στην απόδειξη του Θεωρήματος Πολλαπλής Επαναφοράς του Birkhoff (MBR) που θα δούμε στη συνέχεια.

Λήμμα 2.1.5. Έστω T μια συνεχής απεικόνιση από έναν συμπαγή μετρικό χώρο X στον εαυτό του και $A \subseteq X$ επανερχόμενο. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $z \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^n(z), z) < \epsilon$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Θα ορίσουμε επαγωγικά μία ακολουθία σημείων $z_0, z_1, z_2, \dots$ στο A κάποιο από τα οποία θα ικανοποιεί την $d(T^n(z), z) < \epsilon$.

Θέτουμε $\epsilon_1 = \epsilon/2$. Τότε από την υπόθεση, για ένα τυχόν $z_0 \in A$, υπάρχει $z_1 \in A$ και $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $d(T^{n_1}(z_1), z_0) < \epsilon_1$.

Ορίζουμε το ϵ_2 έτσι ώστε $0 < \epsilon_2 \leq \epsilon/2$ και αν $d(z, z_1) < \epsilon_2$ για $z \in X$ τότε

$$d(T^{n_1}(z), z_0) < \epsilon_1.$$

Μπορούμε να βρούμε τέτοιο ϵ_2 αφού από τη συνέχεια του T έχουμε ότι για το ϵ_1 υπάρχει ένα ϵ_2 ώστε, αν $d(z, z_1) < \epsilon_2$ για κάποιο $z \in X$, τότε

$$d(T^{n_1}(z), T^{n_1}(z_1)) < \epsilon_1 - d(T^{n_1}(z_1), z_0),$$

και τότε από την τριγωνική παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} d(T^{n_1}(z), z_0) &\leq d(T^{n_1}(z), T^{n_1}(z_1)) + d(T^{n_1}(z_1), z_0) \\ &< \epsilon_1 - d(T^{n_1}(z_1), z_0) + d(T^{n_1}(z_1), z_0) = \epsilon_1. \end{aligned}$$

Από την υπόθεση μας πάλι, για αυτό το ϵ_2 υπάρχει $z_2 \in A$ και $n_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^{n_2}(z_2), z_1) < \epsilon_2$.

Γενικά, αν έχουν οριστεί $z_0, z_1, z_2, \dots, z_k \in A$, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k \in (0, \epsilon/2]$ και $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε

$$d(T^{n_j}(z_j), z_{j-1}) < \epsilon_j$$

και

$$z \in X, d(z, z_{j-1}) < \epsilon_j \Rightarrow d(T^{n_{j-1}}(z), z_{j-2}) < \epsilon_{j-1},$$

για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, ορίζουμε $\epsilon_{k+1} \in (0, \epsilon/2]$ έτσι ώστε,

$$z \in X, d(z, z_k) < \epsilon_{k+1} \Rightarrow d(T^{n_k}(z), z_{k-1}) < \epsilon_k.$$

τέτοιο ϵ_{k+1} βρίσκουμε, όπως πιο πάνω, επιλέγοντάς το, από την συνέχεια της T^{n_k} , έτσι ώστε $d(z, z_k) < \epsilon_{k+1}$ για κάποιο $z \in X$ να συνεπάγεται ότι

$$d(T^{n_k}(z), T^{n_k}(z_k)) < \epsilon_k - d(T^{n_k}(z_k), z_{k-1}).$$

Από την υπόθεση του Λήμματος, για αυτό το ϵ_{k+1} βρίσκουμε και $z_{k+1} \in A$ και $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d(T^{n_{k+1}} z_{k+1}, z_k) < \epsilon_{k+1}.$$

Βρίσκουμε έτσι άπειρες ακολουθίες $z_0, z_1, z_2, \dots \in A$, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots \in (0, \epsilon/2]$ και $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε

$$d(T^{n_j}(z_j), z_{j-1}) < \epsilon_j$$

και

$$z \in X, d(z, z_{j-1}) < \epsilon_j \Rightarrow d(T^{n_{j-1}}(z), z_{j-2}) < \epsilon_{j-1},$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Τότε, από την επιλογή των ϵ_j ,

$$\begin{aligned} d(T^{n_j}(z_j), z_{j-1}) < \epsilon_j &\Rightarrow d(T^{n_{j-1}+n_j}(z_j), z_{j-2}) < \epsilon_{j-1} \\ &\Rightarrow d(T^{n_{j-2}+n_{j-1}+n_j}(z_j), z_{j-3}) < \epsilon_{j-2} \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

και διαδοχικά, για κάθε ζευγάρι $i, j \in \mathbb{N}$ με $i < j$ θα έχουμε ότι

$$d(T^{n_{i+1}+\dots+n_j} z_j, z_i) < \epsilon_{i+1} \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.3)$$

Όμως αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία της $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει. Δηλαδή μπορούμε να βρούμε ένα ζευγάρι $i, j \in \mathbb{N}$ με $i < j$ ώστε

$$d(z_i, z_j) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.4)$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις (2.3) και (2.4) έχουμε ότι

$$d(T^{n_{i+1}+\dots+n_j} z_j, z_j) \leq d(T^{n_{i+1}+\dots+n_j} z_j, z_i) + d(z_i, z_j) < \epsilon. \quad \square$$

Λήμμα 2.1.6. Έστω A ένα επανερχόμενο και T -ομογενές υποσύνολο του X . Τότε το A περιέχει ένα σημείο επαναφοράς.

Απόδειξη. Έστω $F(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} d(T^n(x), x)$. Όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 1.7.7, η F είναι άνω ημισυνεχής συνάρτηση. Αφού το A είναι επανερχόμενο, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.1.5 και παίρνουμε ότι μπορούμε να βρούμε ένα $x \in A$ και ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε τα $T^n(x)$ και x να είναι όσο κοντά θέλουμε. Ισοδύναμα, υπάρχει $x \in A$ ώστε το $F(x)$ να είναι όσο κοντά θέλουμε στο 0.

Έστω τώρα x_0 ένα σημείο συνέχειας της $F|_A$. Τέτοιο σημείο υπάρχει, από το Λήμμα 1.7.6. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $F(x_0) = 0$, οπότε το x_0 θα είναι σημείο επαναφοράς. Έστω, προς άτοπο, ότι $F(x_0) > 0$. Τότε υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε $F(x) > \delta$ για όλα τα x σε μια περιοχή $V \subseteq A$ του x_0 στο A . Το A όμως είναι ομογενές και από το Λήμμα 1.3.7 έχουμε

$$A \subseteq \bigcup_{g \in G_0} g^{-1}V \quad (2.5)$$

για κάποιο πεπερασμένο υποσύνολο G_0 της ομάδας G .

Έστω $\eta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(x_1, x_2) < \eta$ τότε $d(gx_1, gx_2) < \delta$ για κάθε $g \in G_0$ (μπορούμε να βρούμε τέτοιο η από την ομοιόμορφη συνέχεια των g και το γεγονός ότι το G_0 είναι πεπερασμένο—βλ. απόδειξη Λήμματος 2.1.4). Τότε για κάθε $x \in A$ έχουμε $F(x) \geq \eta$. Διότι αν υπήρχε ένα x ώστε $F(x) < \eta$, τότε θα υπήρχε ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^n(x), x) < \eta$. Από τον τρόπο επιλογής του η παίρνουμε ότι $d(gT^n(x), gx) < \delta$ για κάθε $g \in G_0$, και λόγω της μεταθετικότητας, η τελευταία μπορεί να γραφεί ως $d(T^n(gx), gx) < \delta$ για κάθε $g \in G_0$, οπότε $F(gx) < \delta$ για κάθε $g \in G_0$. Όμως αφού $x \in A$, από την (2.5) υπάρχει ένα $g \in G_0$ ώστε $gx \in V$ και άρα $F(gx) > \delta$, και οδηγούμαστε σε άτοπο.

Άρα για κάθε $x \in A$ έχουμε ότι $F(x) \geq \eta$. Όπως όμως εξηγήθηκε στην πρώτη παράγραφο αυτής της απόδειξης, αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει λόγω του Λήμματος 2.1.5. Επομένως δεν μπορεί να έχουμε $F(x_0) > 0$ για ένα σημείο συνέχειας x_0 της $F|_A$ και άρα $F(x_0) = 0$ και το x_0 είναι σημείο επαναφοράς. $\square$

Παράδειγμα 2.1.7. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση του group extension που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έχουμε λοιπόν ένα δυναμικό σύστημα (Y, T) και μια συμπαγή ομάδα G μαζί με μία συνεχή απεικόνιση $\psi: Y \rightarrow G$ και θεωρούμε το group extension (X, T) που προκύπτει: $X = Y \times G$ και $T(y, g) = (T(y), \psi(y)g)$. Εδώ η ομάδα G δρα στον X μέσω των αυτομορφισμών $R_g: X \rightarrow X$ με $R_g(y, g') = (y, g'g)$. Τότε εύκολα βλέπουμε ότι κάθε νήμα $\{y\} \times G$ είναι ομογενές, αφού κάθε R_g μετατίθεται με τον T , είναι G -αναλλοίωτο και το σύστημα $(\{y\} \times G, G)$ είναι minimal. Πράγματι, αν $x = (y, g) \in \{y\} \times G$, τότε $Gx = \{R_{g'}(y, g) \mid g' \in G\} = \{y\} \times G$, δηλαδή κάθε τροχιά Gx ισούται με το $\{y\} \times G$ και άρα είναι και πυκνή.

Τώρα, αν διαλέξουμε το y να είναι σημείο επαναφοράς του (Y, T) , τότε το ομογενές σύνολο $\{y\} \times G$ ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος 2.1.4 και άρα

είναι επανερχόμενο. Πράγματι, δοθέντων $x = (y, g) \in \{y\} \times G$ και $\epsilon > 0$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(T^n(y), y) < \epsilon$ και τότε το στοιχείο $x' = (y, g_n) \in \{y\} \times G$, όπου $g_n := \psi(y)^{-1}\psi(T(y))^{-1} \cdots \psi(T^{n-1}(y))^{-1}g$, έχει

$$T^n(x') = (T^n(y), \psi(T^{n-1}(y)) \cdots \psi(T(y))\psi(y)g_n) = (T^n(y), g),$$

οπότε η απόσταση των $T^n(x')$ και x ως προς την μετρική $d_{Y \times G} = \max\{d_Y, d_G\}$ ισούται με $d(T^n(y), y)$ και άρα είναι μικρότερη από ϵ . Εδώ $d_Y = d$ είναι η μετρική στον Y και d_G η μετρική στην G^1 .

Για y σημείο επαναφοράς του (Y, T) επομένως, το ομογενές σύνολο $\{y\} \times G$ είναι επανερχόμενο, και άρα από το Λήμμα 2.1.6 περιέχει ένα σημείο επαναφοράς του συστήματος (X, T) . Έπεται τώρα άμεσα ότι κάθε στοιχείο του $\{y\} \times G$ είναι σημείο επαναφοράς του (X, T) . Πράγματι, αν $(y, g) \in \{y\} \times G$ είναι σημείο επαναφοράς για το (X, T) , τότε για κάθε περιοχή U του (y, g) υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^n(y, g) \in U$. Αν (y, g') ένα άλλο σημείο του $\{y\} \times G$ και V μία περιοχή του, τότε η $U = R_{g^{-1}g'}^{-1}(V)$ είναι περιοχή του (y, g) , από συνέχεια της $R_{g^{-1}g'}$ και επειδή $R_{g^{-1}g'}(y, g) = (y, g')$, και άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^n(y, g) \in U$, και τότε $T^n(y, g') = T^n(R_{g^{-1}g'}(y, g)) = R_{g^{-1}g'}(T^n(y, g)) \in V$. Αυτή είναι μια άλλη απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.7.

Τα Λήμματα 2.1.4 και 2.1.6 συνοψίζονται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.8. Έστω T συνεχής απεικόνιση από έναν συμπαγή μετρικό χώρο X στον εαυτό του και A κλειστό T -ομογενές υποσύνολο του X . Τότε αν επιπλέον για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχουν $x, y \in A$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^n(y), x) < \epsilon$, τότε το A περιέχει επανερχόμενο σημείο.

2.2 Πολλαπλή Επαναφορά και Θεώρημα Birkhoff

Ορισμός 2.2.1. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, T_2, \dots, T_l$ απεικονίσεις από τον X στον εαυτό του. Ένα $x_0 \in X$ θα λέγεται **σημείο πολλαπλής επαναφοράς** (multiply recurrent point) (ή πολλαπλά επανερχόμενο) για τις παραπάνω απεικονίσεις, αν υπάρχει ακολουθία $n_k \rightarrow \infty$ ώστε

$$T_1^{n_k}(x_0) \rightarrow x_0, T_2^{n_k}(x_0) \rightarrow x_0, \dots, T_l^{n_k}(x_0) \rightarrow x_0 \quad \text{καθώς } k \rightarrow \infty.$$

¹Πάντα όταν θεωρούμε group extension με μία ομάδα, θεωρούμε ότι η ομάδα είναι μετρική, έτσι ώστε ο υποκείμενος χώρος καρτεσιανό γινόμενο του group extension να είναι συμπαγής μετρικός χώρος και άρα το group extension να ορίζει δυναμικό σύστημα με την έννοια που το έχουμε ορίσει.

Παρατήρηση 2.2.2. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, T_2, \dots, T_l$ απεικονίσεις από τον X στον εαυτό του. Ένα $x \in X$ είναι πολλαπλά επανερχόμενο για τις $T_1, T_2, \dots, T_l$ αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x, T_i^n(x)) < \varepsilon$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Πράγματι, έστω πρώτα ότι ένα x είναι πολλαπλά επανερχόμενο για τις $T_1, T_2, \dots, T_l$. Τότε υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $n_1 < n_2 < \dots$ τέτοιοι ώστε $T_i^{n_k}(x) \rightarrow x$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. επομένως αν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x, T_i^{n_k}(x)) < \varepsilon$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, για κάθε $k \geq k_\varepsilon$ και άρα $d(x, T_i^n(x)) < \varepsilon$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(x, T_i^n(x)) < \varepsilon$. Αν $\max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(x, T_i^n(x)) = 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε $x = T_i^{nk}(x)$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε $T_i^{n_k}(x) \rightarrow x$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ καθώς $k \rightarrow \infty$ για την ακολουθία $n_k := kn$, $k \in \mathbb{N}$, και άρα το x είναι πολλαπλά επανερχόμενο για τις $T_1, T_2, \dots, T_l$. Έστω τώρα ότι

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(x, T_i^n(x)) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Τότε, για $\varepsilon = 1$ υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x, T_i^{n_1}(x)) < 1$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ και αν έχουμε επιλέξει φυσικούς αριθμούς $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ έτσι ώστε

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(x, T_i^{n_j}(x)) < \frac{1}{j} \quad \text{για } j \in \{1, 2, \dots, k\},$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, επιλέγουμε $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(x, T_i^{n_{k+1}}(x)) < \varepsilon$$

για

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{k+1}, \min_{n \in \{1, 2, \dots, n_k\}} \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(x, T_i^n(x)) \right\}.$$

Τέτοιο n_{k+1} υπάρχει από την υπόθεση μας και επειδή το συγκεκριμένο ε είναι > 0 , από την υπόθεση (2.6). Τότε αναγκαστικά $n_{k+1} \notin \{1, 2, \dots, n_k\}$, αφού από την επιλογή του ε

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(x, T_i^{n_{k+1}}(x)) < \varepsilon \leq \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(x, T_i^n(x)) \quad \forall n \in \{1, 2, \dots, n_k\},$$

και άρα $n_{k+1} > n_k$, και

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(x, T_i^{n_{k+1}}(x)) < \frac{1}{k+1}.$$

Επαγωγικά δηλαδή κατασκευάζουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $\max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(x, T_i^{n_k}(x)) < 1/k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, οπότε $T_i^{n_k}(x) \rightarrow x$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ και το x είναι πολλαπλά επανερχόμενο.

Μια ασθενής μορφή του θεωρήματος πολλαπλής επαναφοράς του Birkhoff είναι η ακόλουθη.

Πρόταση 2.2.3. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, T_2, \dots, T_l$ ομοιομορφισμοί στον X που μετατίθενται μεταξύ τους. Τότε υπάρχει ένα $x \in X$ που είναι πολλαπλά επανερχόμενο.

Απόδειξη. Θεωρούμε G να είναι η ομάδα ομοιομορφισμών που παράγεται από τους $T_1, T_2, \dots, T_l$. Παρατηρούμε ότι είναι αρκετό να βρούμε ένα σημείο πολλαπλής επαναφοράς σε ένα G -αναλλοίωτο υποσύνολο του X . Αφού κάθε δυναμικό σύστημα περιέχει minimal υποσύστημα, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε εξ αρχής να υποθέσουμε ότι το ίδιο το (X, G) είναι minimal.

Η απόδειξη θα είναι με επαγωγή στο l . Για $l = 1$ ο ισχυρισμός της Πρότασης ισχύει από το Θεώρημα 1.3.8. Έστω ότι ισχύει για οποιουσδήποτε $l - 1$ ομοιομορφισμούς στον X που μετατίθενται μεταξύ τους, για κάποιο $l > 1$, και θεωρούμε τους ομοιομορφισμούς $T_1, T_2, \dots, T_l$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned} X^l &= X \times X \times \dots \times X \\ T &= T_1 \times T_2 \times \dots \times T_l \\ \Delta^{(l)} &= \{(x, x, \dots, x) : x \in X\}, \end{aligned}$$

όπου $T_1 \times T_2 \times \dots \times T_l : X^l \rightarrow X^l$ η απεικόνιση

$$(T_1 \times T_2 \times \dots \times T_l)(x_1, x_2, \dots, x_l) = (T_1(x_1), T_2(x_2), \dots, T_l(x_l)).$$

Η ομάδα G δρα στον X^l αν ταυτίσουμε κάθε ομοιομορφισμό $S \in G$ με την απεικόνιση $(S, S, \dots, S)$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι το $\Delta^{(l)}$ είναι T -ομογενές υποσύνολο του (X^l, T) αφού είναι κλειστό² και G -αναλλοίωτο, κάθε στοιχείο της G μετατίθεται με τον T και επιπλέον το $(\Delta^{(l)}, G)$ είναι minimal γιατί το (X, G) είναι minimal. Πράγματι, αν C ένα κλειστό, μη κενό και G -αναλλοίωτο υποσύνολο του $\Delta^{(l)}$, το σύνολο $C' := \{x \in X \mid (x, x, \dots, x) \in C\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του X , αφού αν $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μία ακολουθία στο C' και $x_n \rightarrow x$ για κάποιο $x \in X$, τότε $(x_n, x_n, \dots, x_n) \rightarrow (x, x, \dots, x)$, και επειδή το C είναι κλειστό και $(x_n, x_n, \dots, x_n) \in C$, αφού $x_n \in C'$, έπεται ότι $(x, x, \dots, x) \in C$ οπότε $x \in C'$, εξ' ορισμού του C' . Το C' είναι επίσης μη κενό, αφού $C \neq \emptyset$, και αναλλοίωτο υπό την δράση της G , αφού αν $S \in G$ και $x \in C'$, τότε $(x, x, \dots, x) \in C$ και άρα $(S \times S \times \dots \times S)(x, x, \dots, x) \in C$, αφού το C είναι αναλλοίωτο υπό την δράση της G , δηλαδή $(S(x), S(x), \dots, S(x)) \in C$ και επομένως $S(x) \in C'$. Αφού τώρα το C' είναι κλειστό, μη κενό, G -αναλλοίωτο και το (X, G) είναι

² Αν Z τοπολογικός χώρος, η διαγώνιος του $Z \times Z \times \dots \times Z$ είναι κλειστό σύνολο στην τοπολογία γινόμενο αν και μόνο αν ο Z είναι Hausdorff.

minimal, έπεται ότι $C' = X$ και άρα $C = \Delta^{(l)}$. Αυτό δείχνει ότι το $(\Delta^{(l)}, G)$ όντως είναι minimal.

Το $\Delta^{(l)}$ ικανοποιεί επίσης και την άλλη υπόθεση της Πρότασης 2.1.8. Αν θεωρήσουμε τους ομοιομορφισμούς $R_i = T_i T_l^{-1}$ για $i = 1, 2, \dots, l-1$, τότε από την επαγωγική υπόθεση μπορούμε να βρούμε $y \in X$ και $n_k \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε $R_i^{n_k}(y) \rightarrow y$, καθώς $k \rightarrow \infty$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, l-1$. Ορίζοντας $x^* = (y, y, \dots, y) \in X^l$ και $y_k^* = (T_l^{-n_k}(y), T_l^{-n_k}(y), \dots, T_l^{-n_k}(y))$, μπορούμε να βρούμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε το στοιχείο $T^{n_k}(y_k^*) = (R_1^{n_k}(y), R_2^{n_k}(y), \dots, R_{l-1}^{n_k}(y), y)$ να είναι όσο κοντά θέλουμε στο x^* , με τα $x^*, y_k^* \in \Delta^{(l)}$.

Από την Πρόταση 2.1.8, το $\Delta^{(l)}$ περιέχει T -επανερχόμενο σημείο. $\square$

Ένα λήμμα που θα μας χρειαστεί για την απόδειξη του θεωρήματος του van der Waerden και είναι άμεση συνέπεια της πρότασης που είδαμε μόλις είναι το ακόλουθο.

Λήμμα 2.2.4. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, T ομοιομορφισμός στον X και x_0 ένα σημείο του X . Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $l \geq 1$, υπάρχει ένα $y \in \text{Orb}(x_0, T)$ τέτοιο ώστε, για κάποιο $n \geq 1$, τα $y, T^n(y), T^{2n}(y), \dots, T^{ln}(y)$ να είναι ϵ -κοντά μεταξύ τους.

Απόδειξη. Ορίζουμε $Y = \overline{\text{Orb}(x_0, T)}$. Έστω $l \geq 1$ και $\epsilon > 0$.

Ο Y είναι T -αναλλοίωτος και οι $T, T^2, \dots, T^l$ είναι ομοιομορφισμοί στον Y που μετατίθενται. Από την Πρόταση 2.2.3 για $T_1 = T, T_2 = T^2, \dots, T_l = T^l$ παίρνουμε ότι υπάρχει ένα $y' \in Y$ και μια ακολουθία $n_k \rightarrow \infty$ ώστε

$$T^{n_k}(y') \rightarrow y', \quad T^{2n_k}(y') \rightarrow y', \quad \dots \quad T^{ln_k}(y') \rightarrow y'.$$

Άρα μπορούμε να βρούμε ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d(y', T^{in}(y')) < \frac{\epsilon}{4} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, l\}. \quad (2.7)$$

Αφού $y' \in Y = \overline{\text{Orb}(x_0, T)}$, τότε θα υπάρχει ένα $y \in \text{Orb}(x_0, T)$, με $y = T^m(x_0)$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε τα y και y' να είναι όσο κοντά θέλουμε. Θέλουμε να έχουμε $d(y, T^{in}(y)) < \epsilon/2$ για όλα τα $i = 1, 2, \dots, l$. Έτσι γράφουμε

$$d(y, T^{in}(y)) \leq d(y, y') + d(y', T^{in}(y')) + d(T^{in}(y'), T^{in}(y))$$

και παρατηρούμε ότι $d(y', T^{in}(y')) < \epsilon/4$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$, από την (2.7). Επιπλέον, αφού ο T είναι συνεχής, από τον ορισμό της συνέχειας έχουμε ότι για κάθε $\epsilon' > 0$, και για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, υπάρχει ένα $\delta_i > 0$ ώστε, αν $z, z' \in X$ και $d(z, z') < \delta_i$, τότε $d(T^{in}(z'), T^{in}(z)) < \epsilon'$. Για $\epsilon' = \epsilon/8$, ορίζουμε

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l, \epsilon'\}$ και τότε έχουμε ότι, αν πάρουμε το $y \in \text{Orb}(x_0, T)$ έτσι ώστε $d(y, y') < \delta$, τότε $d(T^{in}(y'), T^{in}(y)) < \epsilon/8$ και συνολικά

$$d(y, T^{in}(y)) < \delta + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{8} \leq \frac{\epsilon}{2},$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. □

Θεώρημα 2.2.5 (Multiple Birkhoff Recurrence). *Έστω X ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, T_2, \dots, T_l$ συνεχείς απεικονίσεις στον X που μετατίθενται. Τότε υπάρχει ένα $x \in X$ το οποίο είναι πολλαπλά επανερχόμενο.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε μία γνωστή κατασκευή που μας επιτρέπει να περάσουμε από την δράση μιας ημιομάδας στην δράση μιας ομάδας. Η κατασκευή αυτή στην περίπτωση μιας μόνο απεικόνισης T καλείται **αντιστρέψιμη επέκταση** (invertible extension).

Έστω $\Omega = X^{\mathbb{Z}^l}$ και $S_i: \Omega \rightarrow \Omega$ οι ομοιομορφισμοί

$$S_i(\omega)(n_1, \dots, n_i, \dots, n_l) = \omega(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_l)$$

για $i = 1, 2, \dots, l$. Θεωρούμε το σύνολο $\tilde{X} \subseteq \Omega$ όλων των $\omega \in \Omega$ για τα οποία ισχύει

$$S_i(\omega)(n_1, n_2, \dots, n_l) = T_i(\omega(n_1, n_2, \dots, n_l)), \quad (2.8)$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$ και κάθε $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$. Το $\tilde{X}$ είναι μη κενό. Πράγματι, αν πάρουμε ένα τυχόν $x \in X$ και ένα $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε το στοιχείο ω_n του Ω με

$$\omega_n(n_1, \dots, n_l) = T_1^{n_1+n} T_2^{n_2+n} \dots T_l^{n_l+n}(x)$$

αν $n_1 \geq -n, \dots, n_l \geq -n$ και $\omega_n(n_1, n_2, \dots, n_l)$ ορισμένο αυθαίρετα για όλα τα άλλα $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$. Τότε εύκολα επαληθεύουμε ότι το ω_n ικανοποιεί την (2.8) για τα $(n_1, n_2, \dots, n_l)$ με $n_i \geq -n$ για κάθε $i \in \{1, \dots, l\}$. πράγματι, αν $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$ με $n_i \geq -n$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, τότε

$$\begin{aligned} T_i(\omega_n(n_1, \dots, n_i, \dots, n_l)) &= T_i(T_1^{n_1+n} \dots T_i^{n_i+n} \dots T_l^{n_l+n}(x)) \\ &= T_1^{n_1+n} \dots T_i^{n_i+n+1} \dots T_l^{n_l+n}(x) \\ &= \omega_n(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_l) \\ &= S_i(\omega_n)(n_1, \dots, n_i, \dots, n_l) \end{aligned}$$

για κάθε $i \in \{1, \dots, l\}$, η δεύτερη ισότητα επειδή οι $T_1, T_2, \dots, T_l$ μετατίθενται μεταξύ τους. Από συμπάγεια του μετρικού χώρου Ω , ως χώρου γινόμενου

συμπαγών μετρικών χώρων, η ακολουθία $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία³ $\{\omega_{k(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, όπου $k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση, και έστω $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{k(n)}$. Τότε $\omega_{k(n)}(n_1, n_2, \dots, n_l) \rightarrow \omega(n_1, n_2, \dots, n_l)$ για κάθε $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$, καθώς $n \rightarrow \infty$, άρα, από την συνέχεια των S_i και T_i ,

$$T_i(\omega_{k(n)}(n_1, n_2, \dots, n_l)) \rightarrow T_i(\omega(n_1, n_2, \dots, n_l))$$

και

$$S_i(\omega_{k(n)}) \rightarrow S_i(\omega),$$

οπότε

$$S_i(\omega_{k(n)})(n_1, n_2, \dots, n_l) \rightarrow S_i(\omega)(n_1, n_2, \dots, n_l),$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, και κάθε $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$, $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Όμως για σταθερό $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$ η $\omega_{k(n)}$ ικανοποιεί τις σχέσεις (2.8) για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ με $-k(n) \leq \min\{n_1, n_2, \dots, n_l\}$ και άρα πρέπει τελικά

$$\begin{aligned} T_i(\omega(n_1, n_2, \dots, n_l)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T_i(\omega_{k(n)}(n_1, n_2, \dots, n_l)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_i(\omega_{k(n)})(n_1, n_2, \dots, n_l) = S_i(\omega)(n_1, n_2, \dots, n_l), \end{aligned}$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Επομένως $\omega \in \tilde{X}$ και το $\tilde{X}$ είναι μη κενό.

Το $\tilde{X}$ είναι S_i -αναλλοίωτο για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, από τον τρόπο ορισμού του. Πράγματι, έστω $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Αν $\omega \in \tilde{X}$, τότε το ω ικανοποιεί τις (2.8) για κάθε $(n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$. Τότε

$$\begin{aligned} S_j(S_i(\omega))(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_l) &= \omega(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j + 1, \dots, n_l) \\ &= S_j(\omega)(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j, \dots, n_l) \\ &= T_j(\omega(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j, \dots, n_l)) \\ &= T_j(S_i(\omega)(n_1, \dots, n_i, \dots, n_j, \dots, n_l)) \end{aligned}$$

για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ με $j > i$, έχοντας εφαρμόσει τις (2.8) για το $(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_j, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$, και ανάλογα όταν $j < i$ ενώ όταν $j = i$,

$$\begin{aligned} S_i(S_i(\omega))(n_1, \dots, n_i, \dots, n_l) &= \omega(n_1, \dots, n_i + 2, \dots, n_l) \\ &= S_i(\omega)(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_l) \\ &= T_i(\omega(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_l)) \\ &= T_i(S_i(\omega)(n_1, \dots, n_i, \dots, n_l)), \end{aligned}$$

³ Αν ο Ω δεν υποτεθεί μετρικός χώρος, το ίδιο επιχείρημα δουλεύει θεωρώντας ένα συγκλίνων υποδίκτυο $\{\omega_{k(d)}\}_{d \in D}$ της ακολουθίας $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, όπου D ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο και $k: D \rightarrow \mathbb{N}$ αύξουσα συνάρτηση με την ιδιότητα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $d_n \in D$ με $k(d_n) \geq n$.

για κάθε $(n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$. Αυτό δείχνει ότι $S_i(\tilde{X}) \subseteq \tilde{X}$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, δηλαδή το $\tilde{X}$ είναι όντως S_i -αναλλοίωτο για κάθε i .

Επίσης, κάθε S_i είναι ομοιομορφισμός του Ω στον εαυτό του, με

$$S_i^{-1}(\omega)(n_1, \dots, n_i, \dots, n_l) = \omega(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_l)$$

για $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$, $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, και το ακριβώς ίδιο επιχείρημα όπως για τον S_i δείχνει ότι $S_i^{-1}(\tilde{X}) \subseteq \tilde{X}$, για κάθε i . Έπεται ότι κάθε S_i είναι ομοιομορφισμός του $\tilde{X}$ στον εαυτό του.

Τέλος το $\tilde{X}$ είναι επίσης κλειστό. Πράγματι αν $\omega_i \rightarrow \omega$ και κάθε ω_i ικανοποιεί τις (2.8), τότε

$$\omega_i(n_1, n_2, \dots, n_l) \rightarrow \omega(n_1, n_2, \dots, n_l)$$

$(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$ για κάθε $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$ και άρα

$$\begin{aligned} S_j(\omega)(n_1, n_2, \dots, n_l) &= \lim_i S_j(\omega_i)(n_1, n_2, \dots, n_l) \\ &= \lim_i T_j(\omega(n_1, n_2, \dots, n_l)) \\ &= T_j(\omega(n_1, n_2, \dots, n_l)) \end{aligned}$$

για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ και $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$, από την συνέχεια των $S_1, S_2, \dots, S_l$ και $T_1, T_2, \dots, T_l$.

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.2.3 στο $\tilde{X}$ για να συμπεράνουμε ότι υπάρχει ένα $\tilde{x} \in \tilde{X}$ που είναι πολλαπλά επανερχόμενο για τους $S_1, S_2, \dots, S_l$. Δηλαδή, υπάρχει ακολουθία $m_1 < m_2 < \dots$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $S_i^{m_k}(\tilde{x}) \rightarrow \tilde{x}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, καθώς $k \rightarrow \infty$, που συνεπάγεται ότι $S_i^{m_k}(\tilde{x})(n_1, n_2, \dots, n_l) \rightarrow \tilde{x}(n_1, n_2, \dots, n_l)$ για κάθε $(n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, καθώς $k \rightarrow \infty$. Από την (2.8) αυτό σημαίνει ότι

$$T_i^{m_k}(\tilde{x}(n_1, n_2, \dots, n_l)) \rightarrow \tilde{x}(n_1, n_2, \dots, n_l)$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, για κάθε $(n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$, καθώς $k \rightarrow \infty$. Δηλαδή, κάθε $\tilde{x}(n_1, n_2, \dots, n_l) \in X$, $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}$, είναι πολλαπλά επανερχόμενο για τους $T_1, T_2, \dots, T_l$. $\square$

Παρατήρηση. Η υπόθεση της μεταθετικότητας στο Θεώρημα 2.2.5 δεν μπορεί να παραλειφθεί. Για παράδειγμα, αν πάρουμε $X = [0, 1]$ και τις συνεχείς απεικονίσεις $T, S: X \rightarrow X$ με $T(x) = x/2$ και $S(x) = (x+1)/2$, τότε οι T και S δεν μετατίθενται. Το μοναδικό σημείο επαναφοράς για την T είναι το 0, ενώ για την S είναι το 1 και άρα δεν υπάρχει σημείο πολλαπλής επαναφοράς για τις T, S , αφού κάθε τέτοιο σημείο θα ήταν και σημείο επαναφοράς και για την T και για την S .

Θεώρημα 2.2.6 (Θεώρημα Πολλαπλής Επαναφοράς II). *Αν (X, G) είναι ομογενές δυναμικό σύστημα και $T_1, \dots, T_l \in G$ συνεχείς απεικονίσεις που μετατίθενται, τότε για κάθε U μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του X , υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$T_1^{-n}U \cap T_2^{-n}U \cap \dots \cap T_l^{-n}U \neq \emptyset$$

και μάλιστα

$$U \cap T_1^{-n}U \cap T_2^{-n}U \cap \dots \cap T_l^{-n}U \neq \emptyset.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα U όπως στην εκφώνηση. Από το Θεώρημα 2.2.5 υπάρχει ένα $x \in X$ το οποίο είναι πολλαπλά επανερχόμενο για τους $T_1, T_2, \dots, T_l$. Επομένως υπάρχουν $n_1 < n_2 < \dots$ στο $\mathbb{N}$ ώστε

$$T_i^{n_k}(x) \rightarrow x \quad \text{για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, l\}, \quad (2.9)$$

καθώς $k \rightarrow \infty$. Λόγω της ομογένειας του συστήματος, υπάρχει ομάδα ομοιομορφισμών G' του X τέτοια ώστε το (X, G') να είναι minimal και κάθε στοιχείο της G' να μετατίθεται με κάθε στοιχείο της G , άρα και με κάθε T_i , $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Αφού το (X, G') είναι minimal, υπάρχει, από το Λήμμα 1.3.7, ένα $g \in G'$ ώστε $gx \in U$. Από την (2.9) και την συνέχεια του g έχουμε τότε ότι

$$T_i^{n_k}(gx) = gT_i^{n_k}(x) \rightarrow gx$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, καθώς $k \rightarrow \infty$. Επομένως υπάρχει k_0 ώστε $T_i^{n_k}(gx) \in U$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$, για $k \geq k_0$, αφού το U είναι ανοικτό. Μπορούμε να βρούμε λοιπόν ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$T_1^{-n}U \cap T_2^{-n}U \cap \dots \cap T_l^{-n}U \neq \emptyset$$

και μάλιστα

$$U \cap T_1^{-n}U \cap T_2^{-n}U \cap \dots \cap T_l^{-n}U \neq \emptyset. \quad \square$$

Το ίδιο αποτέλεσμα έχουμε αν θεωρήσουμε έναν τυχόν δυναμικό σύστημα (X, T) για το οποίο υπάρχει ομάδα ομοιομορφισμών του X κάθε στοιχείο της οποίας μετατίθεται με τον T και όλη η ομάδα κάνει το σύστημα minimal. Ένα πόρισμα αυτού του θεωρήματος είναι αν το εφαρμόσουμε σε ένα minimal δυναμικό σύστημα (X, T) .

Θεώρημα 2.2.7. *Έστω ότι το δυναμικό σύστημα (X, T) είναι minimal. Τότε για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και για κάθε U μη κενό και ανοικτό υποσύνολο του X , υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε*

$$U \cap T^{-n}U \cap T^{-2n}U \cap \dots \cap T^{-ln}U \neq \emptyset.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση που ο $T: X \rightarrow X$ είναι ομοιομορφισμός. Θεωρούμε ως G την (κυκλική) ομάδα που παράγει ο T και θέτουμε $T_1 := T, T_2 := T^2, \dots, T_l := T^l$. Τότε το σύστημα (X, G) είναι minimal εξ' υποθέσεως και κάθε στοιχείο της G μετατίθεται με κάθε ένα από τα $T_1, T_2, \dots, T_l$, οπότε το (X, G) είναι ομογενές. Το Θεώρημα τότε είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.2.6.

Για την γενική περίπτωση όπου η T δεν είναι κατ' ανάγκην ομοιομορφισμός, παρατηρούμε πρώτα ότι, αν U είναι ένα ανοικτό μη κενό υποσύνολο ενός συστήματος (X, T) που όπως εδώ είναι minimal, τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ώστε $X = \bigcup_{n=0}^N T^{-n}(U)$. Γιατί αν το U είναι μη κενό και ανοικτό, τότε το $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ είναι μη κενό και ανοικτό, άρα το συμπλήρωμά του $C := X \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ είναι κλειστό και όχι όλος ο χώρος X αφού το C είναι επίσης T -αναλλοίωτο, γιατί $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(X \setminus U)$ και άρα

$$T(C) = T\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(X \setminus U)\right) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n+1}(X \setminus U) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} T^{-n}(X \setminus U) = C$$

και το σύστημα είναι minimal, έπεται ότι $C = \emptyset$. Επειδή δε ο X είναι συμπαγής, το ανοικτό κάλυμμα $U, T^{-1}(U), T^{-2}(U), \dots$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Τώρα μπορεί κανείς να επαναλάβει την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.6 για

$$T_1 = T, T_2 = T^2, \dots, T_l = T^l,$$

για δοθέν $l \in \mathbb{N}$, χωρίς να χρειάζεται την ομάδα G' της απόδειξης. Υπάρχει ένα πολλαπλά επανερχόμενο σημείο $x \in X$ για τους $T_1 = T, T_2 = T^2, \dots, T_l = T^l$ και άρα υπάρχουν φυσικοί αριθμοί $n_1 < n_2 < \dots$ τέτοιοι ώστε

$$T^{in_k}(x) \rightarrow x \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, l\}, \quad (2.10)$$

καθώς $k \rightarrow \infty$. Αν U ανοικτό υποσύνολο του X , από τα παραπάνω υπάρχει $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ώστε $T^m(x) \in U$ για το πολλαπλά επανερχόμενο σημείο x . Από την συνέχεια της T και τις (2.10) παίρνουμε ότι

$$T^{in_k}(T^m(x)) = T^m(T^{in_k}(x)) \rightarrow T^m(x) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, l\},$$

καθώς $k \rightarrow \infty$, και αφού το U είναι ανοικτό και $T^m(x) \in U$ υπάρχει k_0 ώστε

$$T^{in_k}(T^m(x)) \in U \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, l\} \quad \forall k \geq k_0.$$

Δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^m(x) \in T^{-in}(U)$ για κάθε $i \in \{0, 1, 2, \dots, l\}$ και άρα

$$U \cap T^{-n}(U) \cap T^{-2n}(U) \cap \dots \cap T^{-ln}(U) \neq \emptyset. \quad \square$$

Ορισμός 2.2.8. Ένα σημείο x σε ένα δυναμικό σύστημα (X, T) λέγεται **πολλαπλά επανερχόμενο** αν είναι πολλαπλά επανερχόμενο για τις απεικονίσεις $T, T^2, \dots, T^l$, για κάθε $l \in \mathbb{N}$.

Ένα ερώτημα που φυσιολογικά προκύπτει είναι το πόσα είναι τα πολλαπλά επανερχόμενα σημεία σε ένα δυναμικό σύστημα (X, T) .

Λήμμα 2.2.9. Έστω (X, T) δυναμικό σύστημα. Τότε:

- (1) Το σύνολο των πολλαπλά επανερχόμενων σημείων του (X, T) είναι G_δ .
- (2) Αν (X, T) *minimal*, τότε το σύνολο των πολλαπλά επανερχόμενων σημείων είναι *residual* στο X .

Απόδειξη. (1) Έστω $l \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το σύνολο

$$R_l = \{y \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } d(y, T^{in}(y)) < 1/l \ \forall i \in \{0, 1, \dots, l\}\}$$

και παρατηρούμε ότι το R_l είναι ανοικτό, αφού αν $y \in R_l$ τότε υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(y, T^{in}(y)) < 1/l$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. Ορίζουμε

$$\epsilon = \frac{1}{l} - \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(y, T^{in}(y))$$

και παρατηρούμε ότι $\epsilon > 0$. Για το ϵ αυτό, λόγω συνέχειας του T , υπάρχει ένα $\delta > 0$ ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $d(T^{in}(x), T^{in}(y)) < \epsilon/2$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. Αν θέσουμε $\delta' = \min\{\delta, \epsilon/2\}$, τότε για κάθε $y' \in B(y, \delta)$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(y', T^{in}(y')) &\leq d(y', y) + d(y, T^{in}(y)) + d(T^{in}(y), T^{in}(y')) \\ &< \delta' + d(y, T^{in}(y)) + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \frac{1}{l}, \end{aligned}$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Έπεται λοιπόν ότι η τομή $R = \bigcap_{l=1}^{\infty} R_l$ είναι G_δ υποσύνολο του X .

Εύκολα βλέπουμε ότι το R αποτελείται ακριβώς από τα σημεία πολλαπλής επαναφοράς του (X, T) . Πράγματι, αν $x \in R$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} d(T^{in_k}(x), x) < \frac{1}{k}.$$

Αν $n_k \rightarrow \infty$, τότε για κάθε $l \in \mathbb{N}$,

$$\max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(T^{in_k}(x), x) < \frac{1}{k} \quad \text{για κάθε } k \geq l$$

και άρα

$$T^{n_k}(x) \rightarrow x, \quad T^{2n_k}(x) \rightarrow x, \quad \dots, \quad T^{ln_k}(x) \rightarrow x$$

καθώς $k \rightarrow \infty$, και επομένως το x είναι πολλαπλά επανερχόμενο. Διαφορετικά υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n_k = n$ για άπειρα το πλήθος $k \in \mathbb{N}$ και άρα $d(x, T^n(x)) < 1/k$ για άπειρα $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή $d(x, T^n(x)) = 0$. Τότε $x = T^{in}(x)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και άρα αν θέσουμε $m_j := nj$, $j \in \mathbb{N}$, τότε, για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $T^{im_j}(x) = x$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και άρα φυσικά

$$T^{m_j}(x) \rightarrow x, \quad T^{2m_j}(x) \rightarrow x, \dots \quad T^{lm_j}(x) \rightarrow x,$$

καθώς $j \rightarrow \infty$, και επομένως το x είναι και πάλι πολλαπλά επανερχόμενο. Αντίστροφα, αν $x \in X$ είναι πολλαπλά επανερχόμενο, τότε, για κάθε $l \in \mathbb{N}$, υπάρχει ακολουθία φυσικών $n_k \rightarrow \infty$ ώστε

$$T^{n_k}(x) \rightarrow x, \quad T^{2n_k}(x) \rightarrow x, \quad \dots \quad T^{ln_k}(x) \rightarrow x.$$

δηλαδή μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d(T^n(x), x) < \frac{1}{l}, \quad d(T^{2n}(x), x) < \frac{1}{l}, \quad \dots \quad d(T^{ln}(x), x) < \frac{1}{l}$$

και επομένως $x \in R_l$.

(2) Αν το (X, T) είναι minimal τότε το R_l είναι πυκνό για κάθε l . Πράγματι, έστω $l \in \mathbb{N}$. Για να είναι το R_l πυκνό, πρέπει για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\epsilon > 0$, να μπορούμε να βρούμε ένα $y \in R_l$ ώστε $d(x, y) < \epsilon$. Έστω λοιπόν ένα $x \in X$ και ένα $\epsilon > 0$. Θεωρούμε την ανοικτή μπάλα $B(x, r)$ με κέντρο x και ακτίνα r , όπου $r = \min\{\epsilon, 1/(2l)\}$. Τότε αφού η $B(x, r)$ είναι ανοικτό σύνολο, από το Θεώρημα Πολλαπλής Επαναφοράς II (Θεώρημα 2.2.7) υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $y, T^n(y), T^{2n}(y), \dots, T^{ln}(y) \in B(x, r)$. Τότε, από τον ορισμό του r , $d(y, T^{in}(y)) < 1/l$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. Άρα το y ανήκει στο R_l ενώ, από τον ορισμό του r και πάλι, είναι και ϵ -κοντά στο x . Επομένως το R_l είναι όντως πυκνό και άρα το R είναι residual. $\square$

Ορισμός 2.2.10. Ένα δυναμικό σύστημα (X, T) θα λέγεται **ομοιόμορφα άκαμπτο** (uniformly rigid) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x, T^n x) < \epsilon$ για κάθε $x \in X$.

Λήμμα 2.2.11. Αν το δυναμικό σύστημα (X, T) είναι ομοιόμορφα άκαμπτο, τότε κάθε $x \in X$ είναι πολλαπλά επανερχόμενο.

Απόδειξη. Έστω $l \in \mathbb{N}$. Έστω και ένα $\epsilon > 0$. Αφού το σύστημα είναι ομοιόμορφα άκαμπτο, υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(x, T^n(x)) < \epsilon/l$ για κάθε $x \in X$. Δηλαδή για κάθε x ,

$$d(x, T^n(x)) < \frac{\epsilon}{l}, \quad d(T^n(x), T^{2n}(x)) < \frac{\epsilon}{l}, \quad \dots \quad d(T^{(l-1)n}(x), T^{ln}(x)) < \frac{\epsilon}{l}$$

και άρα $d(x, T^{in}(x)) < \epsilon$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. Αυτό δείχνει ότι το x είναι πολλαπλά επανερχόμενο για τους $T, T^2, \dots, T^l$ (Παρατήρηση 2.2.2), για κάθε $x \in X$ και αφού το l ήταν αυθαίρετο, κάθε $x \in X$ είναι πολλαπλά επανερχόμενο. $\square$

2.3 Το Θεώρημα του Van der Waerden

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε μία απόδειξη του θεωρήματος του van der Waerden μέσω του θεωρήματος πολλαπλής επαναφοράς του Birkhoff.

Μία έννοια που θα μας χρειαστεί είναι τα symbolic συστήματα, τα οποία εισήχθησαν στην Παράγραφο 1.4. Θεωρούμε ένα σύνολο $\Lambda = \{a, b, c, \dots\}$ και το σύνολο των ακολουθιών (συναρτήσεων) από το $\mathbb{Z}$ στο Λ , το οποίο συμβολίζουμε με $X = \Lambda^{\mathbb{Z}}$. Ορίζουμε αυτομορφισμό $T: X \rightarrow X$ με

$$T(x)(n) = x(n+1) \quad n \in \mathbb{Z},$$

το shift, και μετρική

$$d(x, x') = \inf \left\{ \frac{1}{k+1} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x(i) = x'(i) \text{ για κάθε } |i| < k \right\}. \quad (2.11)$$

Με αυτόν τον τρόπο ο X γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος. Η μετρική αυτή δίνει, όπως και η μετρική που ορίστηκε στην Παράγραφο 1.4, την τοπολογία γινόμενο που προκύπτει αν σε κάθε παράγοντα Λ του γινομένου θεωρήσουμε την διακριτή τοπολογία. Παρατηρούμε ότι

$$d(x, x') < 1 \Leftrightarrow x(0) = x'(0). \quad (2.12)$$

Θεώρημα 2.3.1 (Van der Waerden). *Αν διαμερίσουμε το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων σε πεπερασμένα σύνολα $B_1, B_2, \dots, B_q$, τότε υπάρχει κάποιο B_j το οποίο περιέχει πεπερασμένη αριθμητική πρόοδο αυθαίρετου μήκους l .*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $l = 2, 3, \dots$ υπάρχει κάποιο B_j το οποίο περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους $l+1$. γιατί τότε κάποιο B_j θα περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους l για άπειρα το πλήθος l .

Σταθεροποιούμε ένα l . Ορίζουμε $\Lambda = \{1, 2, \dots, q\}$ και $X = \Lambda^{\mathbb{Z}}$ με την συνεχή απεικόνιση $T(x)(n) = x(n+1)$, φτιάχνοντας ένα symbolic σύστημα. Παρατηρούμε τώρα ότι κάθε ακολουθία στο X ορίζει μια διαμέριση του $\mathbb{Z}$ σε σύνολα $B_i = \{n \in \mathbb{Z} \mid x(n) = i\}$, για $i = 1, 2, \dots, q$. Ισχύει όμως και το αντίστροφο, ότι κάθε διαμέριση των ακεραίων ορίζει μια ακολουθία στον X μέσω της $x(n) = i \Leftrightarrow n \in B_i, n \in \mathbb{Z}, i \in \{1, 2, \dots, q\}$.

Με αυτήν την αναγωγή, το πρόβλημά μας διαμορφώνεται ως εξής: αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $l = 2, 3, \dots$ και για κάθε ακολουθία x στο X , υπάρχουν $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x(m) = x(m+n) = x(m+2n) = \dots = x(m+ln)$.

Από το Λήμμα 2.2.4, για $\epsilon = 1$ και το δοθέν $l \in \mathbb{N}$, υπάρχει ένα $y = T^m(x)$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ ώστε $d(y, T^{in}(y)) < 1$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Ισοδύναμα, $d(T^m(x), T^{in+m}(x)) < 1$, για κάποια $m, n \in \mathbb{N}$ και όλα τα $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Από την (2.12) τώρα έχουμε ότι $T^m(x(0)) = T^{in+m}(x(0))$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, ισοδύναμα ότι

$$x(m) = x(m+n) = x(m+2n) = \dots = x(m+ln). \quad \square$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα, και μέσω του Θεωρήματος 2.2.5 βλέπουμε ότι το θεώρημα του van der Waerden ισχύει και για διαμερίσεις του $\mathbb{N}$. Έχουμε δηλαδή το εξής.

Θεώρημα 2.3.2 (Van der Waerden). *Αν διαμερίσουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών σε πεπερασμένα σύνολα $B_1, B_2, \dots, B_q$, τότε υπάρχει κάποιο B_j το οποίο να περιέχει πεπερασμένη αριθμητική πρόοδο αυθαίρετου μήκους l .*

Απόδειξη. Το Λήμμα 2.2.4 ισχύει και χωρίς την υπόθεση ότι ο T είναι ομοιομορφισμός, με την ίδια ακριβώς απόδειξη εκτός του ότι επικαλούμαστε το Θεώρημα 2.2.5 στην θέση της Πρότασης 2.2.3 στην απόδειξή του. Επομένως η παραπάνω απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1 μπορεί να εφαρμοστεί και στον χώρο $X = \Lambda^{\mathbb{N}}$ με την μετρική

$$d(x, x') = \inf \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x(i) = x'(i) \text{ για κάθε } i < k \right\} \quad (2.13)$$

και $T: X \rightarrow X$ το shift $T(x)(n) = x(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, που δεν είναι πια ομοιομορφισμός.

Εναλλακτικά μπορούμε να επαναλάβουμε την παραπάνω απόδειξη με $X = \mathbb{Z}^{\Lambda}$ και την παραπάνω μετρική (2.11), όπως ακριβώς στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1, αντιστοιχώντας σε κάθε διαμέριση $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ των φυσικών μία ακολουθία που ορίζεται πάλι από την $x(n) = i \Leftrightarrow n \in B_i$, για $n \in \mathbb{N}$ και $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, και ορίζεται αυθαίρετα για $n \leq 0$, π.χ. $x(n) = 1$ για κάθε $n \leq 0$. Βρίσκουμε και πάλι $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$x(m) = x(m+n) = x(m+2n) = \dots = x(m+ln),$$

και αφού $m, m+n, m+2n, \dots, m+ln \in \mathbb{N}$, αυτό δείχνει ότι

$$m, m+n, m+2n, \dots, m+ln \in B_j$$

για κάποιο $j \in \{1, 2, \dots, q\}$. □

Μια άλλη μορφή του θεωρήματος του van der Waerden είναι η ακόλουθη πεπερασμένη εκδοχή του.

Θεώρημα 2.3.3 (Van der Waerden II). Έστω $q, l \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει ένα $N \in \mathbb{N}$ (που εξαρτάται από τα q, l) ώστε για κάθε διαμέριση του $\{1, 2, \dots, N\}$ σε q το πλήθος σύνολα, να υπάρχει ένα που να περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους $l + 1$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι το Van der Waerden II είναι ισοδύναμο με το Van der Waerden στην εκδοχή του για το $\mathbb{N}$, δηλαδή το Θεώρημα 2.3.2.

($\Rightarrow$) Αν είχαμε μια διαμέριση του $\mathbb{Z}$ σε σύνολα B_i ώστε κανένα να μην περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους $l + 1$, τότε θεωρώντας τα σύνολα $B'_i = B_i \cap \{1, 2, \dots, N\}$ παρατηρούμε ότι αυτά αποτελούν διαμέριση του $\{1, 2, \dots, N\}$ και κανένα από αυτά δεν μπορεί να περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους $l + 1$, το οποίο όμως είναι σε αντίφαση με το Van der Waerden II.

($\Leftarrow$) Έστω $q, l \in \mathbb{N}$. Έστω (προς άτοπο) ότι για κάθε φυσικό αριθμό N μπορούμε να βρούμε διαμέριση $\{1, 2, \dots, N\} = B_1^N \cup B_2^N \cup \dots \cup B_q^N$ τέτοια ώστε κανένα B_i^N , $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, να μην περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους $l + 1$. Κάθε διαμέριση $\{1, 2, \dots, N\} = B_1^N \cup B_2^N \cup \dots \cup B_q^N$ ορίζει ένα στοιχείο του $\{1, 2, \dots, q\}^{\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$x_N(j) = \begin{cases} i & \text{αν } j \in B_i^N, i \in \{1, 2, \dots, q\} \\ \text{αυθαίρετο στοιχείο του } \{1, 2, \dots, q\} & \text{αν } j \notin \{1, 2, \dots, N\}. \end{cases}$$

Τότε η ακολουθία $\{x_N\}_{N \in \mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στο $\{1, 2, \dots, q\}^{\mathbb{N}}$, το οποίο είναι συμπαγής μετρικός χώρος, και άρα υπάρχει υπακολουθία $\{x_{N_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει σε ένα $x \in \{1, 2, \dots, q\}^{\mathbb{N}}$. Το x όμως ορίζει μια διαμέριση στο $\mathbb{N}$ σε σύνολα B_i , $i = 1, 2, \dots, q$, οπότε ένα από αυτά θα περιέχει αριθμητική πρόοδο μήκους $l + 1$, από Van der Waerden. Συγκεκριμένα, υπάρχουν $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε $x(m) = x(m + n) = \dots = x(m + ln)$.

Λόγω της σύγκλισης τώρα μπορούμε, για κάθε $p \in \mathbb{N}$, να βρούμε $k_p \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $k \geq k_p$, να έχουμε $d(x_{N_k}, x) < 1/p$, όπου d η μετρική (2.13) στο $X = \{1, 2, \dots, q\}^{\mathbb{N}}$, δηλαδή οι ακολουθίες x_{N_k} και x να ταυτίζονται στις πρώτες p συντεταγμένες. Παίρνουμε $p = m + ln$ και έχουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία x_N που ταυτίζεται με την x στις πρώτες $m + ln$ συντεταγμένες, και συνεπώς θα περιέχει και αυτή αριθμητική πρόοδο μήκους $l + 1$, το οποίο είναι άτοπο, αφού καμία διαμέριση του $\{1, 2, \dots, N\}$ δεν μπορεί να περιέχει τέτοια αριθμητική πρόοδο από την υπόθεσή μας. $\square$

Μια γενίκευση του θεωρήματος του van der Waerden σε περισσότερες διαστάσεις έγινε από τον Grünwald.

Θεώρημα 2.3.4 (Grünwald). Έστω $\mathbb{N}^m = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ μια διαμέριση του $\mathbb{N}^m$ σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα. Τότε κάποιο από τα B_j έχει την εξής ιδιότητα: αν $F \subseteq \mathbb{N}^m$ πεπερασμένο, υπάρχουν $a \in \mathbb{N}^m$ και $b \in \mathbb{N}$ ώστε $bF + a \subseteq B_j$.

Απόδειξη. Έστω μια διαμέριση όπως στην υπόθεση και $F = \{e_1, e_2, \dots, e_l\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}^m$. Ορίζουμε $\Omega = \Lambda^{\mathbb{N}^m}$ για $\Lambda = \{1, 2, \dots, q\}$ και μετρική στον Ω ως εξής:

$$d(\omega, \omega') = \inf \left\{ \frac{1}{k} \mid \omega(i_1, i_2, \dots, i_m) = \omega'(i_1, i_2, \dots, i_m) \right. \\ \left. \text{για } i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, k-1\} \right\} \quad (2.14)$$

και βλέπουμε ότι ο Ω γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος.

Ορίζουμε τώρα για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$, $T_i: \Omega \rightarrow \Omega$ με

$$T_i(\omega)(n) = \omega(n + e_i),$$

όπου $e_i \in F$ όπως πιο πάνω και $n \in \mathbb{N}^m$. Οι T_i είναι συνεχείς απεικονίσεις και μετατίθενται. Έστω ω το στοιχείο που προκύπτει από τη δοθείσα διαμέριση, δηλαδή η ω ορίζεται από την

$$\omega(n_1, n_2, \dots, n_m) = i \Leftrightarrow (n_1, n_2, \dots, n_m) \in B_i,$$

και ορίζουμε X να είναι το μικρότερο κλειστό υποσύνολο του $\Omega = \Lambda^{\mathbb{N}^m}$ που περιέχει το ω και είναι αναλλοίωτο ως προς κάθε T_i , $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.2.5, και έχουμε ότι υπάρχει ένα $\xi \in X$ και ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$d(T_1^n(\xi), \xi) < 1, \quad d(T_2^n(\xi), \xi) < 1, \quad \dots \quad d(T_l^n(\xi), \xi) < 1. \quad (2.15)$$

Αν θέσουμε $e = (1, 1, \dots, 1)$, οι (2.15) ισοδυναμούν με ότι

$$\xi(e) = \xi(e + ne_1) = \dots = \xi(e + ne_l). \quad (2.16)$$

Όμως είτε $\xi = T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_l^{n_l}(\omega)$ για κάποια $n_1, n_2, \dots, n_l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, είτε το ξ είναι οριακό σημείο τέτοιων ακολουθιών. Στην πρώτη περίπτωση η (2.16) μας δίνει ότι

$$\omega(a) = \omega(a + ne_1) = \dots = \omega(a + ne_l) \quad (2.17)$$

για $a = e + n_1 e_1 + n_2 e_2 + \dots + n_l e_l$ για κάποια $n_1, n_2, \dots, n_l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, από όπου έπεται ότι $a + nF \subseteq B_{\omega(a)}$. Στην δεύτερη περίπτωση, που το ξ είναι οριακό σημείο ακολουθιών της μορφής $T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_l^{n_l}(\omega)$ με $n_1, n_2, \dots, n_l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

μιμούμενοι την απόδειξη του Λήμματος 2.2.4, έχουμε ότι πάλι η (2.16) δίνει την (2.17) για κατάλληλο $a \in \mathbb{N}^m$. Ή πιο άμεσα εδώ, υπάρχουν $n_1, n_2, \dots, n_l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ώστε

$$d(\xi, T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_l^{n_l}(\omega)) < \frac{1}{1 + nN}, \quad (2.18)$$

όπου $N \in \mathbb{N}$ ο ελάχιστος φυσικός αριθμός ώστε $F \subseteq [1, N]^m$. Τότε $e_i \in [1, N]^m$ και άρα $e + ne_i \in [1 + n, 1 + nN]^m$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, και αφού από την (2.18)

$$\begin{aligned} \xi(i_1, i_2, \dots, i_m) &= T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_l^{n_l}(\omega)(i_1, i_2, \dots, i_m) \\ &\quad \forall (i_1, i_2, \dots, i_m) \in [1, 1 + nN]^m, \end{aligned}$$

έπεται πάλι η (2.17) από την (2.16), και άρα και πάλι έχουμε ότι $a + nF \subseteq B_{\omega(a)}$, με το a και πάλι $a = e + n_1 e_1 + n_2 e_2 + \dots + n_l e_l$. $\square$

2.4 IP-σύνολα

Το φαινόμενο της επαναφοράς $T^{n_k}(x) \rightarrow x$, όπως και της πολλαπλής επαναφοράς $T_i^{n_k}(x) \rightarrow x$, $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, εμφανίζονται και όταν ακόμη θέσουμε κάποιους περιορισμούς στους χρόνους n_k που παρατηρούμε το σύστημα. Η βασική ιδέα για να πάρουμε μία τέτοια εκλέπτυνση είναι να συνδυάσουμε ένα σύστημα (X, T) με ένα άλλο (Z, S) το οποίο περιέχει ένα επανερχόμενο σημείο z_0 για το οποίο θεωρούμε γνωστούς τους χρόνους που επανέρχεται. Θεωρούμε το σύστημα $(X \times Z, T \times S)$ και ψάχνουμε για σημεία επαναφοράς του συστήματος μέσα στο $X \times \{z_0\}$. Οι χρόνοι επαναφοράς ενός τέτοιου σημείου θα περιέχονται προφανώς στο σύνολο των χρόνων που το z_0 επανέρχεται. Η έννοια ενός IP-συνόλου προκύπτει φυσιολογικά όταν μελετάμε την δομή συνόλων ακεραίων που προκύπτουν ως χρόνοι επαναφοράς ενός σημείου σε ένα δυναμικό σύστημα (Z, S) . Θα δούμε ότι τα θεωρήματα επαναφοράς που έχουμε αποδείξει εξακολουθούν να ισχύουν όταν η ακολουθία ακεραίων n_k περιοριστεί σε ένα IP σύνολο.

Σταθεροποιούμε ένα δυναμικό σύστημα (Z, S) , ένα επανερχόμενο $z_0 \in Z$ και ένα $\delta > 0$ και ορίζουμε $R = \{n \in \mathbb{N} \mid d(S^n(z_0), z_0) < \delta\}$.

Πρόταση 2.4.1. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και T ομοιομορφισμός στον X . Έστω και (Z, S) δυναμικό σύστημα, z_0 επανερχόμενο σημείο του (Z, S) , $\delta > 0$ και $R = \{n \in \mathbb{N} \mid d(S^n(z_0), z_0) < \delta\}$. Τότε υπάρχει ένα επανερχόμενο σημείο $x \in X$ και ακολουθία $n_k \rightarrow \infty$ στο R ώστε $T^{n_k}(x) \rightarrow x$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να πάρουμε το (X, T) να είναι minimal. Θεωρούμε το χώρο $\tilde{X} = X \times Z$ και $\tilde{T}(x, z) = (T(x), S(z))$. Το

σύνολο $X \times \{z_0\}$ είναι επανερχόμενο, αφού, για κάθε $\epsilon > 0$ και κάθε (x, z_0) , υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε τα z_0 και $S^n(z_0)$ να είναι ϵ -κοντά στο Z , επειδή το z_0 είναι σημείο επαναφοράς του (Z, S) , και τότε $(T^{-n}(x), z_0) \in X \times \{z_0\}$ και $d(\tilde{T}^n(T^{-n}x, z_0), (x, z_0)) = d((x, S^n(z_0)), (x, z_0)) < \epsilon$, αν η μετρική που θεωρούμε στο καρτεσιανό γινόμενο $X \times Z$ είναι η μετρική $d_{X \times Z} = \max\{d_X, d_Z\}$.

Επιπλέον, το $X \times \{z_0\}$ είναι $\tilde{T}$ -ομογενές, αφού η $H: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ με $H(x, z) = (T(x), z)$ είναι ομοιομορφισμός, μετατίθεται με τον $\tilde{T}$, αφήνει το $X \times \{z_0\}$ αναλλοίωτο και κάνει το δυναμικό σύστημα $(X \times \{z_0\}, H)$ minimal, αφού το (X, T) είναι minimal. Πράγματι, αν A είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times \{z_0\}$, τότε το A είναι της μορφής $A = B \times \{z_0\}$ για κάποιο $B \subseteq X$. Το B είναι αναγκαστικά κλειστό στον X , αφού αν $x_n \rightarrow x$ με κάθε $x_n \in B$, τότε $(x_n, z_0) \rightarrow (x, z_0)$ και $(x_n, z_0) \in B \times \{z_0\} = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $(x, z_0) \in A = B \times \{z_0\}$, αφού το A είναι κλειστό, και άρα $x \in B$. Επιπλέον $H(A) \subseteq A$ αν και μόνο αν $T(B) \subseteq B$, οπότε $B = X$ ή $B = \emptyset$, από το minimality του (X, T) , οπότε αναγκαστικά $A = X \times \{z_0\}$ ή $A = \emptyset$.

Έπεται τώρα από το Λήμμα 2.1.6 ότι το $(\tilde{X}, \tilde{T})$ έχει ένα επανερχόμενο σημείο στο $X \times \{z_0\}$, έστω το (x_0, z_0) . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακολουθία φυσικών αριθμών $n_k \rightarrow \infty$, τέτοια ώστε $\tilde{T}^{n_k}(x_0, z_0) \rightarrow (x_0, z_0)$, δηλαδή $(T^{n_k}x_0, S^{n_k}z_0) \rightarrow (x_0, z_0)$. Επομένως υπάρχει $n'_k = n_{k+k_0} \rightarrow \infty$, για κάποιο $k_0 \in \mathbb{N}$, με $n'_k \in R$ για κάθε k και $T^{n'_k}x_0 \rightarrow x_0$. $\square$

Πρόταση 2.4.2. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $T_1, T_2, \dots, T_l$ ομοιομορφισμοί στον X που μετατίθενται μεταξύ τους. Έστω πάλι (Z, S) ένα δυναμικό σύστημα, z_0 επανερχόμενο σημείο του (Z, S) , $\delta > 0$ και $R = \{n \in \mathbb{N} \mid d(S^n(z_0), z_0) < \delta\}$. Τότε υπάρχει ένα $x \in X$ πολλαπλά επανερχόμενο και με $T_i^{n_k}(x) \rightarrow x$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ για κάποια $n_k \rightarrow \infty$ με $n_k \in R$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ουσιαστικά μία επανάληψη της απόδειξης της Πρότασης 2.2.3, με τον χώρο $\tilde{X} = X^l \times Z$ στην θέση του X^l και το υποσύνολό του $\Delta^{(l)} \times \{z_0\}$ στην θέση του $\Delta^{(l)}$, όπου $\Delta^{(l)} = \{(x, x, \dots, x) \mid x \in X\}$ η διαγώνιος του X^l . Αν θέσουμε ως G να είναι η ομάδα ομοιομορφισμών του X που παράγεται από τους $T_1, T_2, \dots, T_l$, τότε η G δρα στον $\tilde{X}$ ως εξής: $g(x_1, x_2, \dots, x_l, z) = (gx_1, gx_2, \dots, gx_l, z)$. Μπορούμε πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θεωρήσουμε ότι το (X, G) είναι minimal και άρα όπως στις αποδείξεις της Πρότασης 2.2.3 και της προηγούμενης πρότασης, το $\Delta^{(l)} \times \{z_0\}$ είναι ομογενές για το δυναμικό σύστημα $(\tilde{X}, \tilde{T})$, όπου $\tilde{T} = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_l \times S$.

Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.3, η απόδειξη της Πρότασης θα γίνει με επαγωγή στο l . Για $l = 1$ η Πρόταση έπεται από την (είναι η) προηγούμενη πρόταση. Έστω τώρα ότι η Πρόταση ισχύει για οποιουσδήποτε $l - 1$ ομοιομορφισμούς που μετατίθενται μεταξύ τους, για κάποιο $l > 1$, και αυθαίρετο $\delta > 0$.

Προκειμένου να βρούμε ένα επανερχόμενο σημείο στο $\Delta^{(l)} \times \{z_0\}$, αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιείται η υπόθεση της Πρότασης 2.1.8, δηλαδή ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $x, y \in \Delta^{(l)} \times \{z_0\}$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $d(\tilde{T}^n(y), x) < \epsilon$.

Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε τους ομοιομορφισμούς $R_i = T_i T_l^{-1}$ για $i = 1, \dots, l-1$. Από την επαγωγική υπόθεση, και με $\delta = \epsilon$, υπάρχει ένα $x \in X$ και ακολουθία φυσικών αριθμών $n_k \rightarrow \infty$ και με $d(z_0, S^{n_k}(z_0)) < \epsilon$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $R_i^{n_k}(x) \rightarrow x$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$. Ορίζουμε $\tilde{x} = (x, \dots, x, z_0) \in \Delta^{(l)} \times \{z_0\}$ και $\tilde{y} = (T_l^{-n}x, \dots, T_l^{-n}x, z_0) \in \Delta^{(l)} \times \{z_0\}$ και παρατηρούμε ότι $\tilde{T}^n(\tilde{y}) = (R_1^n(x), R_2^n(x), \dots, R_{l-1}^n(x), x, S^n(z_0))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θεωρώντας, ως συνήθως και χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η μετρική στον χώρο γινόμενο $\tilde{X}$ είναι η

$$\begin{aligned} d_{\tilde{X}}((x_1, x_2, \dots, x_l, z), (x'_1, x'_2, \dots, x'_l, z')) \\ = \max\{d_X(x_1, x'_1), d_X(x_2, x'_2), \dots, d_X(x_l, x'_l), d_Z(z, z')\}, \end{aligned}$$

έχουμε τότε ότι για $n = n_k$, για αρκούντως μεγάλο $k \in \mathbb{N}$, $d(\tilde{x}, \tilde{T}^n(\tilde{y})) < \epsilon$. $\square$

Γενικεύοντας αυτήν την πρόταση για συνεχείς απεικονίσεις, παίρνουμε αντίστοιχο θεώρημα με το Θεώρημα Πολλαπλής Επαναφοράς του Birkhoff.

Θεώρημα 2.4.3. Έστω X, Z συμπαγείς μετρικοί χώροι, $T_1, T_2, \dots, T_l$ συνεχείς απεικονίσεις από τον X στον X που μετατίθενται μεταξύ τους και S συνεχής απεικόνιση από τον Z στον Z . Αν z_0 είναι επανερχόμενο σημείο στο (Z, S) , $\delta > 0$ και $R = \{n \in \mathbb{N} \mid d(S^n(z_0), z_0) < \delta\}$, τότε υπάρχουν $x \in X$ και ακολουθία φυσικών αριθμών $n_k \rightarrow \infty$ με $n_k \in R$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ώστε $T_i^{n_k}x \rightarrow x$ ταυτόχρονα για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$.

Απόδειξη. Το Θεώρημα έπεται από την προηγούμενη πρόταση όπως ακριβώς το Θεώρημα 2.2.5 έπεται από την Πρόταση 2.2.3, θεωρώντας δηλαδή την αντιστρέψιμη επέκταση του συστήματος.

Έστω $\Omega = X^{\mathbb{Z}^l}$ και $S_i: \Omega \rightarrow \Omega$ οι ομοιομορφισμοί

$$S_i(\omega)(n_1, \dots, n_i, \dots, n_l) = \omega(n_1, \dots, n_i + 1, \dots, n_l)$$

για $i = 1, 2, \dots, l$. Θεωρούμε το σύνολο $\tilde{X} \subseteq \Omega$ όλων των $\omega \in \Omega$ για τα οποία ισχύει

$$S_i(\omega)(n_1, n_2, \dots, n_l) = T_i(\omega(n_1, n_2, \dots, n_l)),$$

για κάθε $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$ και κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. Όπως έχει αποδειχθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5, το $\tilde{X}$ είναι κλειστό και μη κενό και κάθε S_i είναι ομοιομορφισμός του $\tilde{X}$ στον εαυτό του, με

$$S_i^{-1}(\omega)(n_1, \dots, n_i, \dots, n_l) = \omega(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_l)$$

για $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$, $i \in \{1, 2, \dots, l\}$.

Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.4.2 στο $\tilde{X}$ για να συμπεράνουμε ότι υπάρχει ένα $\tilde{x} \in \tilde{X}$ που είναι πολλαπλά επανερχόμενο για τους $S_1, S_2, \dots, S_l$ πάνω σε μία ακολουθία $m_k \rightarrow \infty$ στο R . Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει ακολουθία $m_1 < m_2 < \dots$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε $S_i^{m_k}(\tilde{x}) \rightarrow \tilde{x}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, καθώς $k \rightarrow \infty$, με $m_k \in R$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε $S_i^{m_k}(\tilde{x})(n_1, n_2, \dots, n_l) \rightarrow \tilde{x}(n_1, n_2, \dots, n_l)$ για κάθε $(n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, καθώς $k \rightarrow \infty$, και άρα, αφού $x \in \tilde{X}$, από την σχέση που καθορίζει το $\tilde{X}$, αυτό δίνει ότι

$$T_i^{m_k}(\tilde{x}(n_1, n_2, \dots, n_l)) \rightarrow \tilde{x}(n_1, n_2, \dots, n_l)$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, για κάθε $(n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}^l$, καθώς $k \rightarrow \infty$, με $m_k \in R$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, κάθε $\tilde{x}(n_1, n_2, \dots, n_l) \in X$, $(n_1, n_2, \dots, n_l) \in \mathbb{Z}$, ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος. $\square$

Ορισμός 2.4.4. Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{N}$ θα λέγεται **IP-σύνολο**, αν υπάρχει μία ακολουθία $p_1, p_2, p_3, \dots \in \mathbb{N}$ ώστε το A να αποτελείται από όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα $p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Τα $p_1, p_2, p_3, \dots$ στον παραπάνω ορισμό δεν απαιτείται να είναι διακεκριμένα, οι δείκτες $i_1, i_2, \dots, i_k$ όμως στα πεπερασμένα αθροίσματα $p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$ πρέπει να είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους. Κάθε ημιομάδα στο $\mathbb{N}$ είναι IP-σύνολο, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει: ένα IP-σύνολο δεν είναι κατ' ανάγκην ημιομάδα. Σημειώνεται επίσης ότι αν τα $p_1, p_2, \dots, p_n$ συμβολίζουν διανύσματα σε έναν διανυσματικό χώρο, τότε τα αθροίσματα $p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, μαζί με το 0, δηλαδή τα αθροίσματα $\{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n\}$, σχηματίζουν τις κορυφές ενός n -διάστατου (πιθανώς τετριμμένου) παραλληλεπίπεδου. Ένα IP-σύνολο μπορεί να θεωρηθεί λοιπόν ως ένα απειροδιάστατο παραλληλεπίπεδο.

Θεώρημα 2.4.5. Έστω (Z, S) δυναμικό σύστημα και z_0 ένα σημείο επαναφοράς του. Τότε για κάθε $\delta > 0$ το σύνολο $R_\delta = \{n \in \mathbb{N} \mid d(S^n(z_0), z_0) < \delta\}$ περιέχει ένα IP-σύνολο.

Απόδειξη. Έστω z_0 επανερχόμενο σημείο του (Z, S) και $\delta > 0$. Τότε υπάρχει $p_1 \in \mathbb{N}$ ώστε $d(S^{p_1}(z_0), z_0) < \delta$ και άρα $p_1 \in R_\delta$. Μπορούμε να βρούμε $\delta_2 \leq \delta$ ώστε αν $d(z, z_0) < \delta_2$ τότε $d(S^{p_1}(z), z_0) < \delta$. Πράγματι, για $\epsilon = \delta - d(S^{p_1}(z_0), z_0)$, από τη συνέχεια της S υπάρχει $\delta' > 0$ ώστε αν $d(z, z_0) < \delta'$ τότε $d(S^{p_1}(z), S^{p_1}(z_0)) < \epsilon$ και άρα αν θέσουμε $\delta_2 = \min\{\delta', \delta\} \leq \delta$, τότε για $z \in Z$ με $d(z, z_0) < \delta_2$ έχουμε ότι

$$d(S^{p_1}(z), z_0) \leq d(S^{p_1}(z), S^{p_1}(z_0)) + d(S^{p_1}(z_0), z_0) < \delta.$$

Για το δ_2 τώρα βρίσκουμε $p_2 \in \mathbb{N}$ με $p_2 > p_1$ ώστε $d(S^{p_2}(z_0), z_0) < \delta_2$. Τότε

$$d(S^m(z_0), z_0) < \delta \quad (2.19)$$

για $m \in \{p_1, p_2, p_1 + p_2\}$, αφού $d(S^{p_1}(z_0), z_0) < \delta$, $d(S^{p_2}(z_0), z_0) < \delta_2 \leq \delta$ και $d(S^{p_1+p_2}(z_0), z_0) = d(S^{p_1}(S^{p_2}(z_0)), z_0) < \delta$ από την επιλογή του δ_2 και το γεγονός ότι $d(S^{p_2}(z_0), z_0) < \delta_2$. Επαγωγικά, έστω ότι, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ορίσει $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{N}$, με $p_1 < p_2 < \dots < p_n$, έτσι ώστε κάθε πεπερασμένο άθροισμα $m = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, να ικανοποιεί την (2.19), δηλαδή να ισχύει η (2.19) για κάθε $m \in \{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n\}$. Για ευκολία γράφουμε και A_n για όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα

$$\begin{aligned} A_n &= \{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n, k \in \{1, 2, \dots, n\}\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \setminus (0, 0, \dots, 0) \right\}. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τότε πρώτα $\delta_{n+1} \leq \delta$ τέτοιο ώστε

$$z \in Z, \quad d(z, z_0) < \delta_{n+1} \quad \Rightarrow \quad d(S^m(z), z_0) < \delta \quad \text{για κάθε } m \in A_n \quad (2.20)$$

και κατόπιν βρίσκουμε $p_{n+1} \in \mathbb{N}$ με $p_{n+1} > p_n$ ώστε

$$d(S^{p_{n+1}}(z_0), z_0) < \delta_{n+1}. \quad (2.21)$$

Τέτοιο $\delta_{n+1} > 0$ μπορεί να βρεθεί, πάλι όπως για το δ_2 , επιλέγοντας

$$\epsilon = \delta - \max_{m \in A_n} d(S^m(z_0), z_0),$$

το οποίο είναι > 0 , και κατόπιν $\delta'' > 0$ τέτοιο ώστε

$$z \in Z, \quad d(z, z_0) < \delta'' \quad \Rightarrow \quad d(S^m(z), S^m(z_0)) < \epsilon \quad \text{για κάθε } m \in A_n.$$

τότε, αν θέσουμε $\delta_{n+1} = \min\{\delta'', \delta\}$, έχουμε ότι όντως

$$\begin{aligned} z \in Z, \quad d(z, z_0) < \delta_{n+1} &\Rightarrow \\ d(S^m(z), z_0) &\leq d(S^m(z), S^m(z_0)) + d(S^m(z_0), z_0) < \delta \end{aligned}$$

για κάθε $m \in A_n$. Έπεται τώρα από την επιλογή των δ_{n+1} και p_{n+1} ότι η (2.19) ισχύει για όλα τα

$$\begin{aligned} m \in A_{n+1} &= \{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+1, \\ &\quad k \in \{1, 2, \dots, n+1\}\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon_i p_i \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1} \setminus (0, 0, \dots, 0) \right\}, \end{aligned}$$

αφού

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \setminus (0, 0, \dots, 0) \right\} \\ &\quad \cup \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i p_i + p_{n+1} \mid (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \right\} \\ &= A_n \cup [p_{n+1} + (A_n \cup \{0\})], \end{aligned}$$

και η (2.19) ισχύει για $m \in A_n$ από την επαγωγική υπόθεση, για $m = p_{n+1}$ από την επιλογή των p_{n+1} και δ_{n+1} έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (2.21) και $\delta \leq \delta_{n+1}$ ανισότητες και για $m \in p_{n+1} + A_m$ από τον συνδυασμό των (2.20) και (2.21). Επαγωγικά ορίζονται λοιπόν $p_1, p_2, p_3, \dots \in \mathbb{N}$ με $p_1 < p_2 < \dots$, τέτοια ώστε το R_δ να περιέχει το IP-σύνολο

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\}. \quad \square$$

Ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 2.4.6. *Αν $R \subseteq \mathbb{N}$ είναι ένα IP-σύνολο, τότε υπάρχει ένα δυναμικό σύστημα (Z, S) και ένα επανερχόμενο $z_0 \in Z$ ώστε*

$$R_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid d(S^n(z_0), z_0) < 1\} \subseteq R.$$

Απόδειξη. Έστω R ένα IP-σύνολο. Τότε, εζ' ορισμού, υπάρχει μία ακολουθία φυσικών αριθμών $p_1, p_2, p_3, \dots$ ώστε το R να αποτελείται όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα

$$R = \{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $H_1, H_2, \dots$ είναι μια ακολουθία ξένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, και αν ορίσουμε

$$p'_n = \sum_{i \in H_n} p_i \quad n \in \mathbb{N},$$

τότε τα p'_n μαζί με τα πεπερασμένα αθροίσματα τους $p'_{i_1} + p'_{i_2} + \dots + p'_{i_k}$ για $i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}$, φτιάχνουν ένα IP-σύνολο R' το οποίο περιέχεται στο R · πράγματι, κάθε

$$p'_{i_1} + p'_{i_2} + \dots + p'_{i_k} = \sum_{i \in H_{i_1}} p_i + \sum_{i \in H_{i_2}} p_i + \dots + \sum_{i \in H_{i_k}} p_i,$$

όπου $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k \in \mathbb{N}$, είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα της μορφής

$$p_{j_{i_1}(1)} + p_{j_{i_1}(2)} + \dots + p_{j_{i_1}(m_{i_1})} + p_{j_{i_2}(1)} + p_{j_{i_2}(2)} + \dots + p_{j_{i_2}(m_{i_2})} + \dots \\ \dots + p_{j_{i_k}(1)} + p_{j_{i_k}(2)} + \dots + p_{j_{i_k}(m_{i_k})}$$

με όλους τους δείκτες $j_{i_p}(l)$ διαφορετικούς μεταξύ τους αφού τα H_n , $n \in \mathbb{N}$, είναι ξένα μεταξύ τους, και όπου $H_n = \{j_n(1), j_n(2), \dots, j_n(m_n)\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και άρα κάθε πεπερασμένο άθροισμα $p'_{i_1} + p'_{i_2} + \dots + p'_{i_k}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k \in \mathbb{N}$, περιέχεται στο R .

Τα $H_1, H_2, \dots$ μπορούν να επιλεγούν, επαγωγικά, έτσι ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να έχουμε ότι

$$p'_{n+1} > p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n. \quad (2.22)$$

Πράγματι, αφού $p_n \geq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$p_{k+1} + p_{k+2} + \dots + p_{k+n} \geq n \rightarrow \infty \quad (2.23)$$

για κάθε $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. μπορούμε λοιπόν, για παράδειγμα, να επιλέξουμε $H_1 = \{1\}$ και αν τα $H_1, H_2, \dots, H_m$ έχουν επιλεγεί, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε να ισχύει η (2.22) για κάθε $n \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ αν $m > 1$, και έτσι ώστε $H_n = \{m_{n-1} + 1, m_{n-1} + 2, \dots, m_n\}$ για κάποιους ακераίους $0 = m_0 < m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_n$, επιλέγουμε $m_{n+1} \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε

$$pm_{n+1} + p_{m_{n+2}} + \dots + p_{m_{n+1}} > p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n,$$

όπως μπορούμε από την (2.23), και θέτουμε $H_{n+1} = \{m_{n+1}, m_{n+2}, \dots, m_{n+1}\}$. Θα δείξουμε ότι αν ισχύει η (2.22) τότε υπάρχουν δυναμικό σύστημα (Z, S) και $z_0 \in Z$ επανερχόμενο ώστε $R' = \{n \mid d(S^n(z_0), z_0) < 1\}$ και άρα $R_1 = R' \subseteq R$.

Ορίζουμε τώρα $Z = \{0, 1\}^{\mathbb{N} \cup \{0\}}$ με την μετρική

$$d(z, z') = \inf \left\{ \frac{1}{k+1} \mid z(n) = z'(n) \text{ για } n \in \{0, 1, \dots, k-1\} \right\},$$

S το shift $S(z)(n) = z(n+1)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, και σημείο z_0 με $z_0(n) = 1$ αν και μόνο αν $n \in R' \cup \{0\}$.

Ισχυριζόμαστε ότι το z_0 είναι επανερχόμενο σημείο. Πράγματι, δοθέντος $\epsilon > 0$, υπάρχει $j \in \mathbb{N}$ ώστε $1/(p'_1 + p'_2 + \dots + p'_j) \leq \epsilon$.

Ορίζουμε $m = p'_{j+1}$ και παρατηρούμε ότι, αν $n \leq p'_1 + p'_2 + \dots + p'_j$, τότε $m+n \in R' \Leftrightarrow n \in R' \cup \{0\}$. Πράγματι, αν $n = 0$, τότε $m+n = m = p'_{j+1} \in R'$. Αν $n \leq p'_1 + p'_2 + \dots + p'_j$ και $n \in R'$, τότε $n = p'_{i_1} + p'_{i_2} + \dots + p'_{i_k}$ για κάποια $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k \in \mathbb{N}$, και αναγκαστικά $i_k < j+1$, γιατί αν ήταν $i_k \geq j+1$, τότε από την (2.22) θα είχαμε ότι

$$n = p'_{i_1} + p'_{i_2} + \dots + p'_{i_k} \geq p'_{i_k} \geq p'_{j+1} > p'_j + p'_{j-1} + \dots + p'_1 \geq n.$$

Έπεται ότι $n + m = p'_{i_1} + p'_{i_2} + \dots + p'_{i_k} + p'_{j+1}$ με $i_1 < i_2 < \dots < i_k < j + 1$ και άρα $m + n \in R'$. Και αντίστροφα, αν $n \leq p'_1 + p'_2 + \dots + p'_j$ και $m + n \in R'$, τότε $m + n = p'_{i_1} + p'_{i_2} + \dots + p'_{i_k}$ για κάποια $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $k \in \mathbb{N}$. αν ήταν $i_k < j + 1$, από την (2.22) θα είχαμε ότι

$$m + n = p'_{i_1} + p'_{i_2} + \dots + p'_{i_k} < p'_{j+1} \leq p'_{j+1} + n = m + n,$$

αφού θα είχαμε $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, 3, \dots, j\}$ σε αυτήν την περίπτωση αν πάλι ήταν $i_k > j + 1$, τότε πάλι από την (2.22) θα είχαμε ότι

$$\begin{aligned} m + n &= p'_{j+1} + n \leq p'_{j+1} + p'_j + p'_{j-1} + \dots + p'_1 \\ &< p'_{j+2} \leq p'_{i_k} \leq p'_{i_1} + p'_{i_2} + \dots + p'_{i_k} = m + n, \end{aligned}$$

αφού τώρα $i_k \geq j + 2$. Άρα αναγκαστικά πρέπει $i_k = j + 1$ και τότε είτε $n = 0$, αν $k = 1$, είτε $k > 1$ και $n = p'_{i_1} + p'_{i_2} + \dots + p'_{i_{k-1}} \in R'$.

Έπεται τώρα ότι, αν $n \leq p'_1 + p'_2 + \dots + p'_j$, τότε

$$\begin{aligned} S^m(z_0)(n) = 1 &\Leftrightarrow z_0(m + n) = 1 \Leftrightarrow m + n \in R' \cup \{0\} \\ &\Leftrightarrow m + n \in R' \Leftrightarrow n \in R' \cup \{0\} \Leftrightarrow z_0(n) = 1, \end{aligned}$$

και άρα $S^m(z_0)(n) = z_0(n)$ για όλα τα $n \leq p'_1 + p'_2 + \dots + p'_j$. Επομένως

$$d(S^m(z_0), z_0) \leq \frac{1}{p'_1 + p'_2 + \dots + p'_{j+2}} < \epsilon.$$

Αφού το ϵ ήταν αυθαίρετο, αυτό δείχνει ότι όντως το z_0 είναι επανερχόμενο σημείο στο (Z, S) .

Τέλος, βλέπουμε ότι

$$d(S^n(z_0), z_0) < 1 \Leftrightarrow S^n(z_0)(0) = 1 \Leftrightarrow z_0(n) = 1 \Leftrightarrow n \in R',$$

δηλαδή $R' = R_1$. □

Έχοντας δείξει αυτό το θεώρημα, μπορούμε να το συνδυάσουμε με το Θεώρημα 2.4.3 και να πάρουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.4.7. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος, $T_1, T_2, \dots, T_l$ συνεχείς απεικονίσεις από τον X στον X που μετατίθενται μεταξύ τους και R ένα $\mathbb{IP}$ -σύνολο. Τότε υπάρχει $x \in X$ και ακολουθία $n_k \rightarrow \infty$ με $n_k \in R$ ώστε $T_i^{n_k} x \rightarrow x$ ταυτόχρονα για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$.

Από αυτό το θεώρημα τώρα, έπεται μια ισχυρότερη εκδοχή του θεωρήματος Grünwald.

Θεώρημα 2.4.8. Έστω $\mathbb{N}^m = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ μια διαμέριση του $\mathbb{N}^m$ σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα και $R \subseteq \mathbb{N}$ ένα IP-σύνολο. Τότε κάποιο από τα B_j έχει την ιδιότητα: αν $F \subseteq \mathbb{N}^m$ πεπερασμένο, υπάρχουν $a \in \mathbb{N}^m$ και $b \in R$ ώστε $bF + a \subseteq B_j$.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι ίδια με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.4 του Grünwald, μόνο που αντί να επικαλεστούμε το θεώρημα του Birkhoff 2.2.5, επικαλούμαστε στην θέση του το προηγούμενο θεώρημα. $\square$

2.5 Συνδυαστικές Εφαρμογές και Διοφαντικές Ανισότητες

Ορισμός 2.5.1. Ένα σύνολο $B \subseteq \mathbb{Z}^m$ λέγεται **VDW-σύνολο** αν για κάθε $F \subseteq \mathbb{Z}^m$ πεπερασμένο, υπάρχουν $a \in \mathbb{Z}^m$ και $b \in \mathbb{N}$ ώστε $bF + a \subseteq B$.

Πρόταση 2.5.2. Αν S είναι συνδετικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^m$ ή του $\mathbb{Z}^m$ τότε είναι VDW-σύνολο.

Απόδειξη. Έστω S συνδετικό υποσύνολο του $\mathbb{N}^m$. Τότε υπάρχει πεπερασμένο $K \subseteq \mathbb{N}^m$ ώστε για κάθε $g \in \mathbb{N}^m$ υπάρχει $k \in K$ ώστε $g + k \in S$: δηλαδή $\mathbb{N}^m \subseteq \bigcup_{k \in K} (S - k)$, βλ. και Παρατήρηση 1.3.2. Από το θεώρημα Grünwald υπάρχει ένα $S - k$ που είναι VDW-σύνολο: συγκεκριμένα, για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq \mathbb{N}^m$ υπάρχουν $b \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{N}^m$ ώστε $bF + a \subseteq S - k$, και άρα $bF + (a + k) \subseteq S$, δηλαδή το S είναι VDW-σύνολο. $\square$

Από το θεώρημα του Grünwald προκύπτει ότι αν F είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}^m$, τότε κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{N}^m \rightarrow \Lambda$, όπου Λ πεπερασμένο σύνολο, είναι σταθερή σε κάποιο $bF + a$, $a \in \mathbb{N}^m$, $b \in \mathbb{N}$. Αυτό μπορούμε να το γενικεύουμε σε συναρτήσεις με τιμές σε συμπαγείς χώρους.

Θεώρημα 2.5.3. Έστω Λ ένας συμπαγής μετρικός χώρος και συνάρτηση $f: \mathbb{N}^m \rightarrow \Lambda$. Για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε F πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}^m$, υπάρχουν $a \in \mathbb{N}^m$ και $b \in \mathbb{N}$ ώστε το $f(bF + a)$ να έχει διάμετρο μικρότερη από ϵ .

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$. Θεωρούμε ανοικτή κάλυψη του Λ με μπάλες (έστω) διαμέτρου $< \epsilon$. Αφού το Λ είναι συμπαγές, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $V_1, V_2, \dots, V_q$: δηλαδή υπάρχουν, εν τέλει, $V_1, V_2, \dots, V_q$ που καλύπτουν το Λ και έχουν $\text{diam}(V_i) < \epsilon$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, q\}$. Θεωρούμε οποιαδήποτε διαμέριση $\mathbb{N}^m = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ του $\mathbb{N}^m$ σε σύνολα B_i με $f(B_i) \subseteq V_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, q\}$. Από το θεώρημα του Grünwald υπάρχει $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ τέτοιο ώστε $bF + a \subseteq B_j$ για κάποια $a \in \mathbb{N}^m$, $b \in \mathbb{N}$, δηλαδή $f(bF + a) \subseteq V_j$, και γνωρίζουμε ότι $\text{diam}(V_j) < \epsilon$. $\square$

Ένα ακόμα πόρισμα του θεωρήματος Grünwald είναι το ακόλουθο. Ορίζουμε με N_n^m να είναι το σύνολο που περιέχει όλα τα διανύσματα του $\mathbb{N}^m$ των οποίων οι συντεταγμένες είναι $\leq n$.

Θεώρημα 2.5.4. Έστω F πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}^m$ και $q \geq 1$. Τότε υπάρχει αριθμός $n_0 = n_0(F, m, q)$ ώστε, για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε διαμέριση του $N_n^m = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ σε q σύνολα, υπάρχουν $a \in \mathbb{N}^m$ και $b \in \mathbb{N}$ ώστε ένα από τα B_j να περιέχει το $bF + a$.

Απόδειξη. Έστω F πεπερασμένο και $q \geq 1$. Έστω προς άτοπο, ότι δεν υπάρχει τέτοιο n_0 και άρα μπορούμε να βρούμε όσο μεγάλα n θέλουμε ώστε καμία διαμέριση του N_n^m σε q σύνολα να μην περιέχει κάποιο $bF + a$. Για κάθε n , η διαμέριση του N_n^m ορίζει συνάρτηση $f_n: N_n^m \rightarrow \Lambda = \{1, 2, \dots, q\}$. Επεκτείνοντας τις σε όλο το $\mathbb{N}^m$, με αυθαίρετο τρόπο, ορίζουμε στοιχεία $f_n \in \Lambda^{\mathbb{N}^m}$. Τότε λόγω συμπίεσης η f_n έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, με όριο κάποιο στοιχείο f , έστω, το οποίο ορίζει μια διαμέριση $\mathbb{N}^m = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_q$ του $\mathbb{N}^m$ σε q σύνολα. Από το θεώρημα Grünwald, υπάρχει ένα σύνολο A_i της διαμέρισης του $\mathbb{N}^m$ και $a \in \mathbb{N}^m$ και $b \in \mathbb{N}$ ώστε $bF + a \in A_i$, δηλαδή η f είναι σταθερή στο $bF + a$. Επειδή το F είναι πεπερασμένο και $f_n \rightarrow f$, αν να διαλέξουμε το n αρκούντως μεγάλο μπορούμε να πετύχουμε να ισχύουν ταυτόχρονα ότι $bF + a \in N_n^m$ και η αντίστοιχη f_n να ταυτίζεται με την f στο N_n^m . η μετρική στο $\Lambda^{\mathbb{N}^m}$ που θεωρούμε εδώ για την σύγκλιση $f_n \rightarrow f$ είναι η μετρική (2.14). Έπεται ότι η f_n είναι σταθερή στο $bF + a \subseteq N_n^m$, το οποίο όμως είναι άτοπο. $\square$

Παρατήρηση. Έστω $f: \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$, Λ συμπαγές, $\epsilon > 0$ και $F = \{0, 1, 2\}$. Τότε από το Θεώρημα 2.5.3 υπάρχουν $n, h \in \mathbb{N}$ ώστε το $f(n + hF)$ να έχει διάμετρο μικρότερη από ϵ . Δηλαδή

$$|f(n) - f(n + h)| < \epsilon \quad \text{και} \quad |f(n) - f(n + 2h)| < \epsilon.$$

Εφαρμογή (Πρόταση 1.5.1 των Hardy–Littlewood). Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχουν ακέραιοι m και n ώστε $|an^2 - m| < \epsilon$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(n) = e^{\pi i n^2 a}$. Από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι, για κάθε $\epsilon' > 0$, υπάρχουν $n, h \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} |e^{\pi i n^2 a} - e^{\pi i (n+h)^2 a}| &< \epsilon' \\ |e^{\pi i n^2 a} - e^{\pi i (n+2h)^2 a}| &< \epsilon' \end{aligned}$$

από τις οποίες παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \epsilon' &> |e^{\pi i n^2 a} - e^{\pi i (n+h)^2 a}| = |e^{\pi i n^2 a} (1 - e^{\pi i (2nh+h^2)a})| = |1 - e^{\pi i (2nh+h^2)a}| \\ \epsilon' &> |e^{\pi i n^2 a} - e^{\pi i (n+2h)^2 a}| = |e^{\pi i n^2 a} (1 - e^{\pi i (4nh+4h^2)a})| = |1 - e^{\pi i (4nh+4h^2)a}|. \end{aligned}$$

Επίσης εν γένει ισχύει ότι

$$|1 - e^{2i\theta}| = |1 + e^{i\theta}| |1 - e^{i\theta}| \leq (1 + |e^{i\theta}|) |1 - e^{i\theta}| = 2|1 - e^{i\theta}|.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} |1 - e^{\pi i 2h^2 a}| &\leq |1 - e^{\pi i (4nh + 4h^2)a}| + |e^{\pi i (4nh + 4h^2)a} - e^{\pi i 2h^2 a}| \\ &= |1 - e^{\pi i (4nh + 4h^2)a}| + |(e^{\pi i (4nh + 2h^2)a} - 1) e^{\pi i 2h^2 a}| \\ &= |1 - e^{\pi i (4nh + 4h^2)a}| + |e^{\pi i (4nh + 2h^2)a} - 1| \\ &\leq |1 - e^{\pi i (4nh + 4h^2)a}| + 2|e^{\pi i (2nh + h^2)a} - 1| < \epsilon' + 2\epsilon' = 3\epsilon'. \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} |1 - e^{\pi i 2h^2 a}| &= \sqrt{[1 - \cos(\pi 2h^2 a)]^2 + \sin^2(\pi 2h^2 a)} \\ &= \sqrt{2 - 2\cos(\pi 2h^2 a)} \\ &= 2|\sin(\pi h^2 a)| \end{aligned}$$

και άρα

$$|\sin(\pi h^2 a)| < \frac{3\epsilon'}{2}.$$

Για $\epsilon' < 2/3$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακέραιος $m \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε

$$|h^2 a - m| < \frac{1}{\pi} \arcsin(3\epsilon'/2).$$

Δοθέντος λοιπόν $\epsilon > 0$ με $\epsilon < 1/2$, επιλέγουμε $\epsilon' = 2\sin(\epsilon\pi)/3$ και παίρνουμε το ζητούμενο. Τέλος, αφού ο ισχυρισμός ισχύει για όλα τα θετικά $\epsilon < 1/2$, ισχύει προφανώς και για κάθε $\epsilon > 0$.

Εναλλακτικά, για $\epsilon \geq 1/2$ είναι προφανές ότι, για οποιοδήποτε $h \in \mathbb{N}$, $|h^2 a - m| \leq 1/2$ για m ο κοντινότερος ακέραιος στο $h^2 a$. $\square$

Μπορεί κανείς επίσης να δώσει και μία δεύτερη απόδειξη της γενίκευσης της Πρότασης 1.5.1 των Hardy και Littlewood για πολυώνυμα $p(n)$ χωρίς σταθερό όρο, του Θεωρήματος 1.5.2 δηλαδή, χρησιμοποιώντας όπως πιο πάνω το Θεώρημα van der Waerden· δεν θα το κάνουμε σε αυτήν την εργασία όμως.

Για μία άλλη εφαρμογή εισάγουμε τον συμβολισμό

$$\|x\| = \inf_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$$

για $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση αυτή είναι καλά ορισμένη και στο $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, αφού για $x, y \in \mathbb{R}$ με $x + \mathbb{Z} = y + \mathbb{Z}$, δηλαδή όταν $x - y \in \mathbb{Z}$, προφανώς $\|x\| = \|y\|$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$, γιατί αν $\|x_1\| = |x_1 - n_1|$ και $\|x_2\| = |x_2 - n_2|$, για κάποια $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, τότε προφανώς

$$\|x_1 + x_2\| \leq |(x_1 + x_2) - (n_1 + n_2)| \leq |x_1 - n_1| + |x_2 - n_2| = \|x_1\| + \|x_2\|.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι για την μετρική (1.4) στον $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ έχει κανείς ότι $d_{\mathbb{T}}(x + \mathbb{Z}, y + \mathbb{Z}) = \|x - y\|$.

Θεώρημα 2.5.5. Έστω θ_n ακολουθία στο $\mathbb{T}$ και $\epsilon > 0$. Υπάρχουν m, n με $m \neq n$ ώστε

$$\|(n - m)\theta_n\| < \epsilon \quad \text{και} \quad \|(n - m)\theta_m\| < \epsilon.$$

Απόδειξη. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{T}$ με τύπο $f(n, m) = n\theta_m$. Έστω $F = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. Τότε κάθε $bF + a$ αποτελείται από τέσσερα σημεία

$$bF + a = \{(b, b) + (k, l), (b, 2b) + (k, l), (2b, b) + (k, l), (2b, 2b) + (k, l)\},$$

όπου $a = (k, l) \in \mathbb{Z}^2$, τα οποία μπορούμε να γράψουμε ως

$$bF + a = \{(p + m, m), (p + m, n), (p + n, m), (p + n, n)\},$$

για $p = k - l$ και $m = b + l$, $n = 2b + l$. Από το Θεώρημα 2.5.3, μπορούμε να επιλέξουμε τα a, b έτσι ώστε οι εικόνες αυτών των στοιχείων μέσω της f να απέχουν λιγότερο από ϵ μεταξύ τους, δηλαδή για κάποια επιλογή από b, k, l θα έχουμε ότι

$$\|(p + m)\theta_m - (p + n)\theta_m\| < \epsilon \quad \text{και} \quad \|(p + m)\theta_n - (p + n)\theta_n\| < \epsilon. \quad \square$$

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με την ακόλουθη εφαρμογή του θεωρήματος του van der Waerden.

Θεώρημα 2.5.6. Έστω X αυθαίρετος χώρος, $T_1, T_2, \dots, T_l$ μετασχηματισμοί από τον X στον X που μετατίθενται μεταξύ τους και έστω $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l$ συναρτήσεις από τον X στον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή $\phi_i: X \rightarrow \mathbb{C}$ με $|\phi_i(x)| = 1$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ και $x \in X$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $x \in X$ και $n \geq 1$ που ικανοποιούν τις ανισότητες

$$|\phi_1(T_1^n(x))^n - 1| < \epsilon, \quad |\phi_1(T_2^n(x))^n - 1| < \epsilon, \quad \dots \quad |\phi_l(T_l^n(x))^n - 1| < \epsilon.$$

Απόδειξη. Έστω x_0 αυθαίρετο σημείο στον X . Ορίζουμε τη συνάρτηση, με διανυσματικές τιμές, $\Phi: \mathbb{N}^{l+1} \rightarrow \mathbb{C}^l$ από τον τύπο

$$\Phi(n_0, n_1, \dots, n_l) = \begin{pmatrix} \phi_1(T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_l^{n_l}(x_0))^{n_0} \\ \phi_2(T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_l^{n_l}(x_0))^{n_0} \\ \vdots \\ \phi_l(T_1^{n_1} T_2^{n_2} \dots T_l^{n_l}(x_0))^{n_0} \end{pmatrix}.$$

Επιλέγουμε μετρική στον $\mathbb{C}^l$ έτσι ώστε αν δύο διανύσματα έχουν απόσταση μικρότερη από ϵ τότε όλες οι αντίστοιχες συντεταγμένες τους έχουν απόσταση μικρότερη από ϵ στο $\mathbb{C}$. για παράδειγμα μια τέτοια μετρική είναι η

$$d((z_1, z_2, \dots, z_l), (z'_1, z'_2, \dots, z'_l)) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} |z_i - z'_i|.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.5.3 και παίρνουμε ότι για το F που αποτελείται από τις κορυφές του κύβου ακμής ένα

$$F = \{(m_0, m_1, m_2, \dots, m_l) \in \mathbb{N}^{l+1} \mid m_0, m_1, m_2, \dots, m_l \in \{1, 2\}\}$$

στον $\mathbb{N}^{l+1}$, υπάρχουν $a = (n_0, n_1, \dots, n_l) \in \mathbb{N}^{l+1}$ και $b = n \in \mathbb{N}$ ώστε το $\Phi(bF + a)$ να έχει διάμετρο μικρότερη από ϵ .

Τώρα παρατηρούμε ότι ο κύβος $bF + a$ περιέχει τις κορυφές

$$(n_0, n_1, n_2, \dots, n_l) + n(1, 2, 1, \dots, 1) \quad \text{και} \quad (n_0, n_1, n_2, \dots, n_l) + n(2, 2, 1, \dots, 1),$$

τις

$$(n_0, n_1, n_2, \dots, n_l) + n(1, 1, 2, \dots, 1) \quad \text{και} \quad (n_0, n_1, n_2, \dots, n_l) + n(2, 1, 2, \dots, 1)$$

και εν γένει, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, τις κορυφές

$$(n_0, n_1, n_2, \dots, n_l) + nu_i \quad \text{και} \quad (n_0, n_1, n_2, \dots, n_l) + nv_i,$$

όπου $u_i = (u_i(0), u_i(1), u_i(2), \dots, u_i(l))$ το διάνυσμα στον $\mathbb{N}^{l+1}$ που έχει όλες τις συντεταγμένες $u_i(j)$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, l\} \setminus \{i\}$ ίσες με ένα εκτός της συντεταγμένης $u_i(i)$ όπου έχει $u_i(i) = 2$ και $v_i = (v_i(0), v_i(1), v_i(2), \dots, v_i(l))$ το διάνυσμα στον $\mathbb{N}^{l+1}$ που έχει όλες τις συντεταγμένες $v_i(j)$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, l\} \setminus \{0, i\}$ ίσες με ένα εκτός των συντεταγμένων $v_i(0)$ και $v_i(i)$ όπου έχει $v_i(0) = v_i(i) = 2$. Αν θέσουμε $(m_0, m_1, m_2, \dots, m_l) = (n_0 + n, n_1 + n, n_2 + n, \dots, n_l + n)$, τότε ο κύβος $bF + a$ περιέχει τις κορυφές

$$(m_0, m_1, m_2, \dots, m_l) + n(0, 1, 0, \dots, 0) \quad \text{και} \quad (m_0, m_1, m_2, \dots, m_l) + n(1, 1, 0, \dots, 0),$$

τις

$$(m_0, m_1, m_2, \dots, m_l) + n(0, 0, 1, \dots, 0) \quad \text{και} \quad (m_0, m_1, m_2, \dots, m_l) + n(1, 0, 1, \dots, 0)$$

και εν γένει, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, τις κορυφές

$$(m_0, m_1, m_2, \dots, m_l) + ne_i \quad \text{και} \quad (m_0, m_1, m_2, \dots, m_l) + nf_i,$$

όπου $e_i = (e_i(0), e_i(1), e_i(2), \dots, e_i(l))$ το διάνυσμα στον $\mathbb{N}^{l+1}$ που έχει όλες τις συντεταγμένες $e_i(j)$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, l\} \setminus \{i\}$ μηδέν εκτός της συντεταγμένης

$e_i(i)$ όπου έχει $e_i(i) = 1$ και $f_i = (f_i(0), f_i(1), f_i(2), \dots, f_i(l))$ το διάνυσμα στον $\mathbb{N}^{l+1}$ που έχει όλες τις συντεταγμένες $f_i(j)$, $j \in \{0, 1, 2, \dots, l\} \setminus \{0, i\}$ μηδέν εκτός των συντεταγμένων $f_i(0)$ και $f_i(i)$ όπου έχει $f_i(0) = f_i(i) = 1$. Άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} d(\Phi(m_0, m_1 + n, m_2, \dots, m_l), \Phi(m_0 + n, m_1 + n, m_2, \dots, m_l)) &< \epsilon \\ d(\Phi(m_0, m_1, m_2 + n, \dots, m_l), \Phi(m_0 + n, m_1, m_2 + n, \dots, m_l)) &< \epsilon \\ &\vdots \\ d(\Phi(m_0, m_1, m_2, \dots, m_l + n), \Phi(m_0 + n, m_1, m_2, \dots, m_l + n)) &< \epsilon. \end{aligned}$$

Έπεται από τον τρόπο που έχουμε επιλέξει την μετρική d στον $\mathbb{C}^l$ ότι όλες οι αντίστοιχες συντεταγμένες των διανυσμάτων $\Phi((m_0, m_1, m_2, \dots, m_l) + ne_i)$ και $\Phi((m_0, m_1, m_2, \dots, m_l) + nf_i)$ απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από ϵ · ειδικότερα

$$\begin{aligned} |\phi_1(T_1^{m_1+n} T_2^{m_2} \dots T_l^{m_l}(x_0))^{m_0+n} - \phi_1(T_1^{m_1} T_2^{m_2+n} \dots T_l^{m_l}(x_0))^{m_0}| &< \epsilon \\ |\phi_2(T_1^{m_1} T_2^{m_2+n} \dots T_l^{m_l}(x_0))^{m_0+n} - \phi_2(T_1^{m_1} T_2^{m_2} \dots T_l^{m_l+n}(x_0))^{m_0}| &< \epsilon \\ &\vdots \\ |\phi_l(T_1^{m_1} T_2^{m_2} \dots T_l^{m_l+n}(x_0))^{m_0+n} - \phi_l(T_1^{m_1} T_2^{m_2} \dots T_l^{m_l}(x_0))^{m_0}| &< \epsilon \end{aligned}$$

Ορίζουμε $x = T_1^{m_1} T_2^{m_2} \dots T_l^{m_l}(x_0)$ · τότε

$$\begin{aligned} \phi_i(T_i^n(x)) &= \phi_i(T_i^n T_1^{m_1} T_2^{m_2} \dots T_i^{m_i} \dots T_l^{m_l}(x_0)) \\ &= \phi_i(T_1^{m_1} T_2^{m_2} \dots T_i^{m_i+n} \dots T_l^{m_l}(x_0)) \end{aligned}$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, επειδή οι $T_1, T_2, \dots, T_l$ μετατίθενται μεταξύ τους. Οι παραπάνω ανισότητες τότε γίνονται

$$|\phi_i(T_i^n(x))^{m_0+n} - \phi_i(T_i^n(x))^{m_0}| < \epsilon$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, και εν τέλει

$$\begin{aligned} \epsilon &> |\phi_i(T_i^n(x))^{m_0+n} - \phi_i(T_i^n(x))^{m_0}| \\ &= |\phi_i(T_i^n(x))^{m_0} (\phi_i(T_i^n(x))^n - 1)| \\ &= |\phi_i(T_i^n(x))^n - 1| \end{aligned}$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. □

Κεφάλαιο 3

Απειροσυνδυαστικές Εφαρμογές

3.1 Proximal και distal στοιχεία

Ορισμός 3.1.1. Έστω (X, G) δυναμικό σύστημα και $x_1, x_2 \in X$ δύο στοιχεία του. Τα x_1, x_2 λέγονται **proximal** αν υπάρχει ακολουθία $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στην G ώστε $d(g_n x_1, g_n x_2) \rightarrow 0$. Τα x_1, x_2 λέγονται **distal**, αν δεν είναι proximal.

Παρατήρηση. Αν (X, T) είναι κυκλικό δυναμικό σύστημα, τότε τα x_1, x_2 είναι proximal αν υπάρχει ακολουθία $n_k \rightarrow \infty$ ώστε $d(T^{n_k} x_1, T^{n_k} x_2) \rightarrow 0$.

Λήμμα 3.1.2. Αν τα x_1, x_2 είναι proximal στο δυναμικό σύστημα (X, T) , τότε για κάθε $\epsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \mid d(T^n(x_1), T^n(x_2)) < \epsilon\}$ είναι παχύ.

Απόδειξη. Έστω $l \in \mathbb{N}$ και $\epsilon > 0$. Από τη συνέχεια του T , υπάρχει $\delta = \delta(l, \epsilon) > 0$ ώστε αν $d(x_1, x_2) < \delta$ τότε $d(T^i(x_1), T^i(x_2)) < \epsilon$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. Αφού τα x_1, x_2 είναι proximal, υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^k(x_1), T^k(x_2)) < \delta$ και άρα από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$d(T^{k+i}(x_1), T^{k+i}(x_2)) < \epsilon, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, l.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\{k+1, k+2, \dots, k+l\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid d(T^n(x_1), T^n(x_2)) < \epsilon\},$$

και αφού το l ήταν αυθαίρετο το τελευταίο σύνολο είναι παχύ. $\square$

Εφαρμογή. Έστω το symbolic δυναμικό σύστημα $(\Lambda^{\mathbb{N}}, T)$, όπου Λ ένα πεπερασμένο σύνολο και T το shift $T(\omega)(n) = \omega(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω και ω_1, ω_2 δύο στοιχεία του. Τότε, τα ω_1, ω_2 είναι proximal αν και μόνο αν το $\{n \in \mathbb{N} \mid \omega_1(n) = \omega_2(n)\}$ είναι παχύ.

Απόδειξη. Το ευθύ είναι άμεσο από το προηγούμενο λήμμα φυσικά. Για το αντίστροφο, έστω ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \mid \omega_1(n) = \omega_2(n)\}$ είναι παχύ. Τότε, για κάθε $l \in \mathbb{N}$ υπάρχει $k_l \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\omega_1(k_l + i) = \omega_2(k_l + i) \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, 2l.$$

ειδικότερα, $\omega_1(k_l + i) = \omega_2(k_l + i)$ για $i = l + 1, l + 2, \dots, 2l$ και άρα

$$\omega_1(m_l + i) = \omega_2(m_l + i) \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, l,$$

όπου $m_l = k_l + l$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι $T^{m_l}(\omega_1)(i) = T^{m_l}(\omega_2)(i)$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ και άρα η απόσταση $d(T^{m_l}(\omega_1), T^{m_l}(\omega_2))$ είναι το πολύ $1/(l + 1)$ και άρα μικρότερη από $1/l$, αν ως συνήθως χρησιμοποιήσουμε την μετρική (2.13) για το $\Lambda^{\mathbb{N}}$. Φτιάξαμε λοιπόν μία ακολουθία $m_l \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε $d(T^{m_l}(\omega_1), T^{m_l}(\omega_2)) < 1/l \rightarrow 0$. Δηλαδή τα ω_1, ω_2 είναι proximal. $\square$

3.2 Enveloping Semigroup

Προκειμένου να κατανοήσουμε καλύτερα τις έννοιες που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα μελετήσουμε το *enveloping semigroup* ενός δυναμικού συστήματος (X, G) . Η έννοια αυτή αναπτύχθηκε από τον R. Ellis.

Έστω δυναμικό σύστημα (X, G) , όπου η G είναι είτε ομάδα είτε ημιομάδα. Θεωρούμε το χώρο X^X , ο οποίος περιέχει όλες τις απεικονίσεις $f: X \rightarrow X$, συνεχείς και μη, και τον εφοδιάζουμε με την τοπολογία γινόμενο· από το Θεώρημα Tychonoff έχουμε ότι ο X^X είναι συμπαγής χώρος. Τα σύνολα

$$A(x_1, \dots, x_n; U_1, \dots, U_n) = \{f \in X^X \mid f(x_1) \in U_1, \dots, f(x_n) \in U_n\}, \quad (3.1)$$

όπου $x_1, \dots, x_n \in X$, $U_1, \dots, U_n$ ανοικτά υποσύνολα του X και $n \in \mathbb{N}$, είναι ανοικτά σύνολα στην τοπολογία γινόμενο στον X^X και αποτελούν βάση για την τοπολογία αυτή. Επιπλέον, ο X^X είναι πολλαπλασιαστική ημιομάδα με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων. Κάθε πολλαπλασιασμός $f \mapsto ff_0$ με ένα στοιχείο $f_0 \in X^X$ από δεξιά είναι συνεχής, ενώ ο πολλαπλασιασμός $f \mapsto f_0f$ με f_0 από αριστερά είναι συνεχής μόνο αν η απεικόνιση f_0 με την οποία πολλαπλασιάζουμε είναι συνεχής. Πιο συγκεκριμένα, αν $f, g \in X^X$ και $f_i \rightarrow f$ για κάποιο δίκτυο f_i στον X^X , τότε για ένα τυχόν $x \in X$ έχουμε ότι πάντα $f_i(g(x)) \rightarrow f(g(x))$, αφού σύγκλιση στην τοπολογία γινόμενο σημαίνει σύγκλιση κατά σημείο (δηλαδή σύγκλιση κάθε συντεταγμένης), αλλά μόνο αν η g συνεχής στο $f(x)$ έχουμε ότι $g(f_i(x)) \rightarrow g(f(x))$.

Ορισμός 3.2.1. Έστω (X, G) δυναμικό σύστημα. Το **enveloping semigroup** του (X, G) είναι το $E(X) = \overline{G}$, ως υποσύνολο της ημιομάδας X^X με την τοπολογία γινόμενο. Συμβολίζουμε το $E(X)$ με E όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης χώρων.

Πρόταση 3.2.2. *Το enveloping semigroup E του (X, G) είναι συμπαγές και υπο-ημιομάδα του X^X .*

Απόδειξη. Το E είναι συμπαγές αφού είναι κλειστό υποσύνολο συμπαγούς χώρου. Για να δείξουμε ότι είναι ημιομάδα, αρκεί να δείξουμε ότι $E \cdot E \subseteq E$. Αν $g \in G$, τότε η $f \mapsto gf$ είναι συνεχής και άρα έχουμε ότι $g\overline{G} \subseteq \overline{gG}$. Όμως $gG = G$, αφού η G είναι ημιομάδα ή ομάδα και $g \in G$, και άρα $gE \subseteq E$. Αυτό δείχνει ότι $GE \subseteq E$. Αν $f \in E$, τότε $f' \mapsto f'f$ είναι συνεχής, από το οποίο παίρνουμε ότι $Ef = \overline{Gf} \subseteq \overline{Gf} \subseteq \overline{E} = E$, και συνεπώς $E \cdot E \subseteq E$. $\square$

Το enveloping semigroup E ενός δυναμικού συστήματος (X, G) είναι πάντα μία δεξιά τοπολογική ημιομάδα, που σημαίνει ότι ο πολλαπλασιασμός $f \mapsto ff_0$ με ένα στοιχείο f_0 από δεξιά είναι συνεχής απεικόνιση, για κάθε $f_0 \in E$. Ο πολλαπλασιασμός $f \mapsto f_0f$ με ένα στοιχείο από αριστερά είναι συνεχής όταν το στοιχείο f_0 είναι συνεχής σαν απεικόνιση από τον X στον X . Αναφέρουμε επίσης και τον πολλαπλασιασμό $E \times X \rightarrow X$, όπου η απεικόνιση $f \mapsto fx$ είναι συνεχής για κάθε $x \in X$ αλλά ο πολλαπλασιασμός $x \mapsto fx$ είναι συνεχής πάλι μόνο όταν η f είναι συνεχής απεικόνιση από τον X στον X .

Ορισμός 3.2.3. Ένα στοιχείο u μιας ημιομάδας καλείται **ταυτοδύναμο** (idempotent) αν $u^2 = u$.

Το παρακάτω λήμμα παίζει καθοριστικό ρόλο στην παρακάτω ανάλυση. Μοιάζει να έχει αποδειχτεί για πρώτη φορά από τον Namakura [14].

Λήμμα 3.2.4. *Αν $A \neq \emptyset$ είναι συμπαγής ημιομάδα στην οποία ο πολλαπλασιασμός $x \mapsto xx_0$ από δεξιά είναι συνεχής για κάθε $x_0 \in A$, τότε η A περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω $B \subseteq A$ ένα ελαχιστικό μη κενό υποσύνολο του A το οποίο ικανοποιεί τις (1) $B \cdot B \subseteq B$ και (2) είναι συμπαγές. Υπάρχει τουλάχιστον ένα τέτοιο σύνολο από το λήμμα του Zorn. Πράγματι, οι παραπάνω συνθήκες (1) και (2) ισχύουν για την ίδια την A και αν έχουμε μία αλυσίδα μη κενών υποσυνόλων του A που ικανοποιούν τις (1) και (2), δηλαδή ένα ολικά διατεταγμένο ως προς την σχέση του εγκλεισμού σύνολο υποσυνόλων της A που είναι μη κενά και ικανοποιούν τις (1) και (2), τότε η τομή τους είναι επίσης μη κενή, από συμπαγεία, και συμπαγές υποσύνολο της A που ικανοποιεί και την ιδιότητα (1). Άρα από το λήμμα του Zorn μπορούμε να βρούμε ένα ελαχιστικό στοιχείο. Έστω τώρα ένα $u \in B$. Τότε το Bu είναι συμπαγές, αφού είναι εικόνα του συμπαγούς συνόλου B μέσω της συνεχούς απεικόνισης $b \mapsto bu$, και $Bu \cdot Bu \subseteq Bu$, αφού αν bu και $b'u$ δύο στοιχεία στο Bu , τότε $bub'u = (bub')u \in Bu$, και συνεπώς λόγω της ελαχιστικότητας του B έχουμε $Bu = B$. Άρα για κάποιο $b \in B$ έχουμε $bu = u$. Έστω τώρα $B' = \{b \in B \mid bu = u\}$. Τότε το B' είναι μη

κενό, συμπαγές, αφού αν πάρουμε ένα δίκτυο $b_i \rightarrow b$ με $b_i \in B'$ για κάθε i τότε $b_i u = u$ για κάθε i και συνεπώς $bu = \lim_i b_i u = u$ από την συνέχεια του πολλαπλασιασμού με u από δεξιά, δηλαδή $b \in B'$, και το B' είναι επίσης και ημιομάδα. Από την ελαχιστικότητα του B και πάλι έπεται ότι $B = B'$, οπότε $u \in B'$ και συνεπώς $u^2 = u$. $\square$

Άμεσα από αυτό παίρνουμε ότι το enveloping semigroup ενός δυναμικού συστήματος περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο. Συνδέουμε τώρα το enveloping semigroup με τα proximal σημεία.

Πρόταση 3.2.5. Έστω (X, G) δυναμικό σύστημα και E το enveloping semigroup του. Αν u είναι ταυτοδύναμο στοιχείο του E , τότε για κάθε $x \in X$ τα x και $u(x)$ είναι proximal.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$ και $x \in X$. Θα βρούμε $g \in G$ τέτοιο ώστε

$$d(g(x), g(u(x))) < \epsilon.$$

Θεωρούμε την ανοικτή μπάλα $B_\epsilon = B(u(x), \epsilon/2)$ με κέντρο $u(x)$ και ακτίνα $\epsilon/2$ και ορίζουμε το σύνολο $U = \{f \in X^X \mid f(x) \in B \text{ και } f(u(x)) \in B\}$. Το U είναι ανοικτό σύνολο στον X^X , αφού είναι σύνολο της μορφής (3.1) και συγκεκριμένα το $A(x, u(x); B, B)$. Επίσης, το u ανήκει στο U αφού $u(x) \in B$ και $u(u(x)) = u^2(x) = u(x) \in B$. Αφού $u \in E$, έπεται ότι $U \cap \bar{G} \neq \emptyset$, αφού $u \in U \cap E = U \cap \bar{G}$, από όπου παίρνουμε ότι $U \cap G \neq \emptyset$. Υπάρχει λοιπόν ένα $g \in G$ ώστε $g \in U$, δηλαδή με $d(g(x), u(x)) < \epsilon/2$ και $d(g(u(x)), u(x)) < \epsilon/2$. Τότε από την τριγωνική ανισότητα, παρεμβάλλοντας τον όρο $u(x)$, έχουμε ότι $d(g(x), g(u(x))) < \epsilon$. $\square$

Αν επιπλέον το σύστημα είναι minimal, ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 3.2.6. Έστω (X, G) minimal σύστημα. Αν τα $x_1, x_2 \in X$ είναι proximal, τότε υπάρχει ένα u ταυτοδύναμο ώστε $x_2 = u(x_1)$.

Απόδειξη. Έστω $x_1, x_2 \in X$ proximal. Αρχικά παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $E \rightarrow X \times X$ με $f \mapsto (f(x_1), f(x_2))$ είναι συνεχής και άρα η εικόνα της είναι ένα συμπαγές σύνολο $E(x_1, x_2)$, το οποίο είναι και G -αναλλοίωτο υποσύνολο του $X \times X$, αν θεωρήσουμε τη δράση $(x', x'') \mapsto (gx', gx'')$ της G στο $X \times X$.

Επίσης το $E(x_1, x_2)$ περιέχει τα στοιχεία της διαγωνίου του $X \times X$. Πράγματι, αφού τα x_1, x_2 είναι proximal, υπάρχει ακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στην G ώστε $d(f_n(x_1), f_n(x_2)) \rightarrow 0$. Λόγω συμπαγείας, υπάρχει υποακολουθία $f_{k_n}(x_1) \rightarrow a$, για κάποιο $a \in X$, και τότε αναγκαστικά θα ισχύει και ότι $f_{k_n}(x_2) \rightarrow a$. Επομένως $(f_{k_n}(x_1), f_{k_n}(x_2)) \rightarrow (a, a)$ με $(f_{k_n}(x_1), f_{k_n}(x_2)) \in E(x_1, x_2)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αφού το $E(x_1, x_2)$ είναι κλειστό έπεται ότι $(a, a) \in E(x_1, x_2)$ και

άρα το $E(x_1, x_2)$ περιέχει στοιχεία της διαγωνίου του $X \times X$. Το σύνολο τώρα $A = \{y \in X \mid (y, y) \in E(x_1, x_2)\}$ είναι μη κενό και κλειστό, αφού αν $y_i \rightarrow y$ και $y_i \in A$ για κάθε i , τότε $(y_i, y_i) \in E(x_1, x_2)$ για κάθε i και $(y_i, y_i) \rightarrow (y, y)$ και αφού το $E(x_1, x_2)$ είναι κλειστό έχουμε ότι $(y, y) \in E(x_1, x_2)$ και επομένως $y \in A$. Το A είναι επίσης G -αναλλοίωτο, αφού αν $y \in A$ τότε $(y, y) \in E(x_1, x_2)$ και επομένως και $(gy, gy) \in E(x_1, x_2)$, για κάθε $g \in G$, αφού το $E(x_1, x_2)$ είναι G -αναλλοίωτο, και επομένως $gy \in A$, για κάθε $g \in G$. Αφού το σύστημα (X, G) είναι minimal και A κλειστό μη κενό και G -αναλλοίωτο υποσύνολο του X , πρέπει να έχουμε ότι $A = X$. Άρα το $E(x_1, x_2)$ περιέχει την διαγώνιο του $X \times X$.

Θεωρούμε τώρα το σύνολο $J = \{f \in E \mid (f(x_1), f(x_2)) = (x_2, x_2)\}$. Αφού το $E(x_1, x_2)$ περιέχει την διαγώνιο του $X \times X$, και άρα και το (x_2, x_2) , το σύνολο αυτό είναι μη κενό υποσύνολο του E . Είναι επίσης κλειστό και άρα συμπαγές, και είναι ημιομάδα αφού $J \cdot J \subseteq J$. Επομένως περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο u , δηλαδή υπάρχει u με $u^2 = u$ και $(u(x_1), u(x_2)) = (x_2, x_2)$, οπότε $x_2 = u(x_1)$. $\square$

Ορισμός 3.2.7. Έστω (X, G) δυναμικό σύστημα, A ένα κλειστό υποσύνολο του X και ένα σημείο $x \in X$. Τα x και A λέγονται **proximal** αν για κάποια ακολουθία $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στην G έχουμε $d(g_n x, g_n A) \rightarrow 0$, όπου, για ένα αυθαίρετο $B \subseteq X$, $d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$.

Εν γένει δεν ισχύει ότι αν ένα x είναι proximal με ένα σύνολο A , τότε θα υπάρχει ένα στοιχείο $y \in A$ που να είναι proximal με το x .

Πρόταση 3.2.8. Έστω (X, G) δυναμικό σύστημα και A ένα G -αναλλοίωτο κλειστό υποσύνολο του X . Αν το $x \in X$ είναι proximal στο A τότε υπάρχει ένα $y \in A$ ώστε τα x, y να είναι proximal.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι το $Ex = \{f(x) \mid f \in E\}$ είναι κλειστό αφού είναι εικόνα του συμπαγούς E κάτω από την συνεχή απεικόνιση $f \mapsto f(x)$. Επίσης, αφού τα x και A είναι proximal, υπάρχει ακολουθία $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στην G ώστε $d(g_n x, g_n A) \rightarrow 0$. Όμως το A είναι G -αναλλοίωτο και επομένως $g_n A \subseteq A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$: έπεται ότι $d(g_n x, A) \leq d(g_n x, g_n A) \rightarrow 0$. Από συμπάγεια υπάρχει υπακολουθία $k_1 < k_2 < \dots$ ώστε $g_{k_n} x \rightarrow a$ για κάποιο $a \in X$ και αφού το Ex είναι κλειστό και $g_n x \in Ex$ για κάθε n έπεται ότι $a \in Ex$. Όμως επίσης $d(a, A) \leq d(a, g_{k_n} x) + d(g_{k_n} x, A) \rightarrow 0$, και αφού το A είναι κλειστό έπεται ότι $a \in A$ επίσης. Επομένως έχουμε ότι $A \cap Ex \neq \emptyset$.

Έστω $F = \{f \in E \mid f(x) \in A\}$. Το F είναι η τομή του κλειστού E με την αντίστροφη εικόνα του κλειστού A κάτω από την συνεχή απεικόνιση $f \mapsto f(x)$ και άρα είναι κλειστό. Επίσης, επειδή $A \cap Ex \neq \emptyset$, έχουμε ότι $F \neq \emptyset$. Αφού το A είναι G -αναλλοίωτο, έχουμε ότι $GF \subseteq F$ από την

συνέχεια τώρα του πολλαπλασιασμού $g \mapsto gf$ για αυθαίρετη $f \in X^X$, έχουμε ότι $Ef = \overline{Gf} \subseteq \overline{GF} = F$ για $f \in F$, ο τελευταίος εγκλεισμός από τον $GF \subseteq F$. Επομένως $EF \subseteq F$, που δείχνει ότι το F είναι ημιομάδα. Το F συνεπώς είναι συμπαγές, ημιομάδα και ο πολλαπλασιασμός με ένα στοιχείο από δεξιά είναι συνεχής απεικόνιση, συνεπώς περιέχει ένα ταυτοδύναμο στοιχείο u , από το Λήμμα 3.2.4. Αν θέσουμε $y = u(x)$, τότε $y \in A$ και τα x και y είναι proximal από την Πρόταση 3.2.5. $\square$

Το επόμενο Θεώρημα οφείλεται στους Auslander [1] και Ellis [7].

Θεώρημα 3.2.9. *Σε ένα δυναμικό σύστημα (X, G) , κάθε $x \in X$ είναι proximal με ένα $y \in \overline{Gx}$ το οποίο είναι ομοιόμορφα επανερχόμενο σημείο.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ και έστω A ένα minimal υποσύνολο του $\overline{Gx}$. Αφού το A είναι minimal, έχουμε ότι $gA = A$ για κάθε $g \in G$. Πράγματι, $gA \subseteq A$ για κάθε $g \in G$, από τον ορισμό του minimality, και αν gA ήταν γνήσιο υποσύνολο του A για κάποιο $g \in G$, τότε το gA θα ήταν G -αναλλοίωτο, αφού $g'(gA) = g(g'A) \subseteq g(A)$ για κάθε $g' \in G$, μη κενό και γνήσιο υποσύνολο του A , που φυσικά αντίκειται στο minimality του (A, G) . Αν τώρα $a \in A$, τότε υπάρχει ακολουθία $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στην G τέτοια ώστε $g_n x \rightarrow a$, αφού $A \subseteq \overline{Gx}$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $y_n \in A$ ώστε $g_n y_n = a$, οπότε $d(g_n x, g_n A) \leq d(g_n x, g_n y_n) = d(g_n x, a) \rightarrow 0$: δηλαδή, τα x και A είναι proximal. Από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει $y \in A$ το οποίο είναι proximal με το x , και αφού το A είναι minimal κάθε στοιχείο του, και άρα και το y , είναι ομοιόμορφα επανερχόμενο, από το Θεώρημα 1.3.8. $\square$

Ορισμός 3.2.10. Ένα σημείο x ενός δυναμικού συστήματος (X, G) λέγεται **distal**, αν είναι proximal μόνο με τον εαυτό του. Θα λέμε το δυναμικό σύστημα **distal**, αν κάθε στοιχείο του είναι distal.

Έχοντας αυτόν τον ορισμό, παίρνουμε το εξής σαν πόρισμα του τελευταίου θεωρήματος.

Πόρισμα 3.2.11. Ένα distal σημείο ενός δυναμικού συστήματος είναι ομοιόμορφα επανερχόμενο. Συνεπώς, σε ένα distal δυναμικό σύστημα, κάθε σημείο του είναι ομοιόμορφα επανερχόμενο, και όλος ο χώρος γράφεται σαν ένωση minimal υποσυστημάτων.

Απόδειξη. Οι δύο πρώτοι ισχυρισμοί έπονται άμεσα από τον ορισμό των distal σημείου και distal συνόλου και το προηγούμενο θεώρημα. Για τον τελευταίο, γράφουμε $X = \bigcup_x \overline{Gx}$ και αφού κάθε x είναι ομοιόμορφα επανερχόμενο, τότε το $\overline{Gx}$ είναι minimal, από το Θεώρημα 1.3.9. $\square$

Ορισμός 3.2.12. Ένα δυναμικό σύστημα (X, G) λέγεται **ημιαπλό** (semi-simple), αν κάθε $x \in X$ ανήκει σε ένα minimal υποσύστημα.

Προφανώς κάθε minimal σύστημα είναι ημιαπλό. Επίσης από το τελευταίο πόρισμα, κάθε distal σύστημα είναι ημιαπλό.

3.3 Κεντρικά Σύνολα και το Θεώρημα του Hindman

Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε ότι σε κάθε πεπερασμένη διαμέριση των φυσικών αριθμών, υπάρχει ένα σύνολο το οποίο περιέχει ένα IP-σύνολο. Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως το θεώρημα του Hindman. Προκειμένου να το προσεγγίσουμε, αρχικά θα δείξουμε ότι σε ένα από τα σύνολα της διαμέρισης μπορούμε να βρούμε ένα **κεντρικό** σύνολο.

Ορισμός 3.3.1. Ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{N}$ λέγεται **κεντρικό** (central), αν υπάρχει ένα δυναμικό σύστημα (X, T) , ένα σημείο $x \in X$, ένα y που είναι ομοιόμορφα επανερχόμενο και proximal με το x και μια περιοχή U_y του y , ώστε $S = N(x, U_y) = \{n \in \mathbb{N} \mid T^n x \in U_y\}$.

Θεώρημα 3.3.2. Για κάθε διαμέριση $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ του $\mathbb{N}$ υπάρχει ένα B_j το οποίο περιέχει ένα κεντρικό σύνολο.

Απόδειξη. Θεωρούμε το δυναμικό σύστημα (Ω, T) όπου $\Omega = \{1, 2, \dots, q\}^{\mathbb{Z}}$ και $T: \Omega \rightarrow \Omega$ το shift $T(\omega)(n) = \omega(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και έστω $\xi \in \Omega$ ένα στοιχείο με $\xi(n) = i \Leftrightarrow n \in B_i$, για $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ και $n \in \mathbb{N}$ και $\xi(n)$ ορισμένο αυθαίρετα για τα υπόλοιπα $n \in \mathbb{Z}$. Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3.2.9 ότι υπάρχει ένα ω ομοιόμορφα επανερχόμενο και proximal με το ξ . Έστω $j = \omega(0)$. Ορίζουμε την περιοχή

$$U_\omega = \{\omega' \in \Omega \mid \omega'(0) = j\} = \{\omega' \in \Omega \mid d(\omega', \omega) < 1\},$$

όπου d η μετρική (2.11) στο Ω , και $S = \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(\xi) \in U_\omega\}$. Το S είναι κεντρικό από τον τρόπο κατασκευής του και επιπλέον βλέπουμε ότι αν $n \in S$, τότε $T^n(\xi)(0) = j$, δηλαδή $\xi(n) = j$ και άρα $n \in B_j$. Επομένως $S \subseteq B_j$. $\square$

Λήμμα 3.3.3. Έστω (X, T) δυναμικό σύστημα και x, y δύο proximal σημεία του με το y ομοιόμορφα επανερχόμενο. Αν U είναι μια περιοχή του y , τότε υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^n(x), T^n(y) \in U$.

Απόδειξη. Αφού το U είναι περιοχή του y , υπάρχουν V περιοχή του y με $V \subseteq U$ και $\epsilon > 0$ ώστε κάθε $z \in X$ με $d(z, V) \leq \epsilon$ να ανήκει στο U . για παράδειγμα,

μπορούμε να διαλέξουμε $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε η κλειστή μπάλα με κέντρο y και ακτίνα 2ϵ να περιέχεται στο U και να πάρουμε V να είναι η ανοικτή μπάλα με κέντρο y και ακτίνα ϵ . Αφού το y είναι ομοιόμορφα επανερχόμενο, από το Θεώρημα 1.3.9 και το Λήμμα 1.3.7, αν $Y = \overline{\text{Orb}(y, T)}$, τότε υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$Y \subseteq \bigcup_{i=1}^N T^{-i}V. \quad (3.2)$$

Έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(z, z') < \delta$ τότε $d(T^i(z), T^i(z')) < \epsilon$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$. Τότε, αφού τα x, y είναι proximal, υπάρχει ένα $m \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^m(x), T^m(y)) < \delta$ και άρα $d(T^{i+m}(x), T^{i+m}(y)) < \epsilon$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$. Από την (3.2), υπάρχει ένα $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ τέτοιο ώστε $T^{j+m}(y) \in V$ και άρα $d(T^{j+m}(x), V) \leq \epsilon$. Θέτοντας $n = j + m$, από τον ορισμό του ϵ παίρνουμε ότι $T^n(x) \in U$. Τέλος, $T^n(y) \in V \subseteq U$. $\square$

Πρόταση 3.3.4. Κάθε κεντρικό σύνολο περιέχει ένα IP-σύνολο.

Απόδειξη. Έστω το κεντρικό σύνολο $S = N(x, U) = \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in U\}$, με τα $x, y \in X$ proximal σημεία ενός δυναμικού συστήματος (X, T) και με το y ομοιόμορφα επανερχόμενο και U μια περιοχή του y . Ορίζουμε $Y = \overline{\text{Orb}(y, T)}$. Από το Λήμμα 3.3.3, υπάρχει ένα $n \in \mathbb{N}$ ώστε $T^n(x), T^n(y) \in U$. Θέτουμε $U_1 = U$ και $p_1 = n$. Ορίζουμε $U_2 = U_1 \cap T^{-p_1}(U_1)$, το οποίο είναι μη κενό αφού το y ανήκει στην τομή $U_1 \cap T^{-p_1}(U_1)$. Τότε πάλι από το Λήμμα 3.3.3, υπάρχει $p_2 \in \mathbb{N}$ ώστε $T^{p_2}(x), T^{p_2}(y) \in U_2$ και ορίζουμε $U_3 = U_2 \cap T^{-p_2}U_2$, το οποίο είναι πάλι μη κενό αφού περιέχει το y και πάλι. Επαγωγικά, αν για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ορίσει ανοικτά και μη κενά σύνολα $U_1, U_2, \dots, U_k$ και $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ με $U_{j+1} = U_j \cap T^{p_j}(U_j)$ για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ και $T^{p_j}(x), T^{p_j}(y) \in U_j$ για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, θέτουμε

$$U_{k+1} = U_k \cap T^{-p_k}(U_k).$$

Το U_{k+1} είναι ανοικτό και μη κενό αφού περιέχει το y · πράγματι, από την επαγωγική μας υπόθεση, $y \in U_1 = U$ και αν $y \in U_j$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ τότε $y \in U_{j+1} = U_j \cap T^{-p_j}(U_j)$, αφού $T^{p_j}(y) \in U_j$ για όλα τα $j \in \{1, 2, \dots, k\}$, οπότε επαγωγικά έπεται ότι $y \in U_{k+1}$ τελικά. Αφού το U_{k+1} είναι μη κενό και ανοικτό, έπεται από το Λήμμα 3.3.3 ότι υπάρχει $p_{k+1} \in \mathbb{N}$ ώστε $T^{p_{k+1}}(x), T^{p_{k+1}}(y) \in U_{k+1}$. Η επαγωγή δηλαδή μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον και παίρνουμε έτσι μια άπειρη ακολουθία $p_1, p_2, \dots \in \mathbb{N}$ και ανοικτά σύνολα $U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots$ με $U_{k+1} = U_k \cap T^{-p_k}(U_k)$ και $T^{p_k}(x), T^{p_k}(y) \in U_k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε, για οποιαδήποτε $k \in \mathbb{N}$ και $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $T^{p_{i_1}}(x) \in U_{i_1} \subseteq U_1 = U$ αν $k = 1$

και αν $k > 1$,

$$\begin{aligned}
 T^{p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_k}}(x) &\in T^{p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_{k-1}}}(U_{i_k}) \\
 &= T^{p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_{k-2}}}(T^{p_{i_{k-1}}}(U_{i_k})) \\
 &\subseteq T^{p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_{k-2}}}(T^{p_{i_{k-1}}}(U_{i_{k-1}+1})) \\
 &\subseteq T^{p_{i_1}+p_{i_2}+\dots+p_{i_{k-2}}}(U_{i_{k-1}}) \\
 &\subseteq \dots \\
 &\subseteq T^{p_{i_1}}(U_{i_2}) \subseteq T^{p_{i_1}}(U_{i_1+1}) \subseteq U_{i_1} \subseteq U_1 = U.
 \end{aligned}$$

Έπεται ότι κάθε πεπερασμένο άθροισμα των p_k ανήκει στο S και άρα το S περιέχει το IP-σύνολο $\{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\}$. $\square$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω παίρνουμε το ακόλουθο θεώρημα του Hindman.

Θεώρημα 3.3.5 (Hindman). *Για κάθε διαμέριση $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ του $\mathbb{N}$ υπάρχει ένα B_j το οποίο περιέχει ένα IP-σύνολο.*

Ένα άμεσο πόρισμα του θεωρήματος του Hindman είναι το θεώρημα του Schur.

Θεώρημα 3.3.6 (Schur). *Αν $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ πεπερασμένη διαμέριση του $\mathbb{N}$, τότε υπάρχει ένα B_j το οποίο περιέχει τρεις φυσικούς x, y, z ώστε $x + y = z$.*

Μια ακόμη ιδιότητα των κεντρικών συνόλων είναι ότι περιέχουν αριθμητική πρόοδο αυθαίρετου μήκους. Από αυτό και το Θεώρημα 3.3.2 προκύπτει διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος van der Waerden.

Πρόταση 3.3.7. *Κάθε κεντρικό σύνολο περιέχει αυθαίρετου μήκους αριθμητική πρόοδο.*

Απόδειξη. Έστω $S = \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(x) \in U_y\}$ κεντρικό σύνολο, με τα $x, y \in X$ proximal σημεία ενός δυναμικού συστήματος (X, T) και με το y ομοιόμορφα επανερχόμενο και U_y μια περιοχή του y . θεωρούμε την U_y ανοικτή περιοχή στα παρακάτω, διαφορετικά αντικαθιστούμε την U_y με το εσωτερικό της σε όσα ακολουθούν. Ορίζουμε $Y = \overline{\text{Orb}(y, T)}$, το οποίο είναι minimal από το Θεώρημα 1.3.9, και συνεπώς από το Λήμμα 1.3.7 υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^N T^{-i}U_y$. Έστω $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε κάθε υποσύνολο του Y με διάμετρο μικρότερη από ϵ να περιέχεται σε κάποιο $T^{-i}U_y$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. μπορούμε να βρούμε τέτοιο ϵ από το λήμμα του Lebesgue.

Έστω τώρα $l \in \mathbb{N}$. Όπως έχει ήδη αναφερθεί προηγουμένως, το Λήμμα 2.2.4 ισχύει και χωρίς την υπόθεση ότι ο T είναι ομοιομορφισμός, με την ίδια ακριβώς απόδειξη εκτός του ότι επικαλούμαστε το Θεώρημα 2.2.5 στην θέση της Πρότασης 2.2.3 στην απόδειξή του. Υπάρχει λοιπόν ένα $n \in \mathbb{N}$ και ένα $y' \in Y$ ώστε τα $T^n(y'), T^{2n}(y'), \dots, T^{ln}(y')$ να είναι ϵ -κοντά μεταξύ τους. Έτσι παίρνουμε ότι για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, τα $T^{i+n}(y'), T^{i+2n}(y'), \dots, T^{i+ln}(y')$ ανήκουν στο U_y . Επίσης, αφού τα x και y είναι proximal, υπάρχει $n_k \rightarrow \infty$ ώστε $d(T^{n_k}(x), T^{n_k}(y)) \rightarrow 0$, δηλαδή το Y και το $\overline{\text{Orb}(x, T)}$ τέμνονται. Πράγματι, παρόμοιο επιχείρημα έχει ξαναχρησιμοποιηθεί. Λόγω συμπίεσης, υπάρχει υπακολουθία τέτοια ώστε $T_{n_{k_j}}(x) \rightarrow a$ για κάποιο a που αναγκαστικά θα ανήκει στο $\overline{\text{Orb}(x, T)}$. Τότε αναγκαστικά και πάλι $T_{n_{k_j}}(y) \rightarrow a$ και άρα $a \in Y \cap \overline{\text{Orb}(x, T)}$. Λόγω της ελαχιστικότητας τώρα του Y , αναγκαστικά $Y \subseteq \overline{\text{Orb}(x, T)}$, γιατί αλλιώς η τομή θα ήταν κλειστό, μη κενό, αναλλοίωτο, γνήσιο υποσύνολο του Y . Έτσι υπάρχει ένα $T^j(x)$ όσο κοντά θέλουμε στο $y' \in Y$ και άρα τα $T^{i+n+j}(x), T^{i+2n+j}(x), \dots, T^{i+ln+j}(x)$ ανήκουν στο U_y . Πιο συγκεκριμένα, επιλέγουμε πρώτα $\delta > 0$ ώστε $d(z, z') < \delta$ να συνεπάγεται ότι $d(T^{i+kn}(z), T^{i+kn}(z')) < \epsilon'$ για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, l\}$, όπου $\epsilon' > 0$ είναι τέτοιο ώστε η ανοικτή μπάλα κέντρου $T^{i+kn}(y')$ και ακτίνας ϵ' να περιέχεται στην U_y , για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, l\}$. τέτοιο $\epsilon' > 0$ υπάρχει γιατί υποθέτουμε την U_y ανοικτό σύνολο και επειδή $T^{i+kn}(y') \in U_y$ για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, l\}$. Κατόπιν επιλέγουμε $j \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T^j(x), y') < \delta$, που είναι εφικτό επειδή $\delta > 0$ και $y' \in Y \subseteq \overline{\text{Orb}(T, x)}$. Τότε $d(T^{i+kn+j}(x), T^{i+kn}(y')) < \epsilon'$ και άρα $T^{i+kn+j}(x) \in U_y$ για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, l\}$. Από αυτό παίρνουμε ότι

$$(i+j) + n, (i+j) + 2n, \dots, (i+j) + ln \in S. \quad \square$$

3.4 IP-συστήματα

Μπορεί κανείς να ορίσει IP-σύνολα σε οποιαδήποτε ημιομάδα και να έχει ένα θεώρημα Hindman για ημιομάδες. Μάλιστα μπορούμε να γενικεύσουμε αντικαθιστώντας ημιομάδες από IP-σύνολα, τα οποία είναι κατά προσέγγιση ημιομάδες, και να έχουμε ένα θεώρημα Hindman για IP-σύνολα: αν ένα IP-σύνολο διαμεριστεί σε πεπερασμένα το πλήθος υποσύνολα τότε κάποιο από τα υποσύνολα που διαμερίζουν περιέχει IP-σύνολο. Όλα αυτά προκύπτουν από μία άλλη εκδοχή του θεωρήματος του Hindman, η οποία οφείλεται επίσης στον Hindman, και την οποία θα αποδείξουμε σε αυτήν την παράγραφο.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{F} = \{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ την οικογένεια όλων των μη κενών πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$. Η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις και μη κενές τομές και θα θεωρήσουμε lattice ισομορφισμούς

από την $\mathcal{F}$ στον εαυτό της, τους οποίους καλούμε ομομορφισμούς. Συγκεκριμένα, ένας **ομομορφισμός** $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι μία απεικόνιση η οποία ικανοποιεί τις (1) $\phi(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha) \cup \phi(\beta)$ και (2) $\alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \phi(\alpha) \cap \phi(\beta) = \emptyset$. Μία τέτοια απεικόνιση ϕ , αν επεκταθεί σε μία απεικόνιση $\tilde{\phi}: \mathcal{F} \cup \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ από τον σύνδεσμο (lattice) $\mathcal{F} \cup \{\emptyset\}$ στον εαυτό του θέτοντας $\tilde{\phi}(\emptyset) = \emptyset$, ικανοποιεί τις (1') $\tilde{\phi}(\alpha \cup \beta) = \tilde{\phi}(\alpha) \cup \tilde{\phi}(\beta)$, (2') $\tilde{\phi}(\alpha \cap \beta) = \tilde{\phi}(\alpha) \cap \tilde{\phi}(\beta)$, δηλαδή είναι ένας lattice-ομομορφισμός, που είναι επιπλέον ένα προς ένα. Πράγματι, αν η $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ικανοποιεί την (1), τότε η $\tilde{\phi}$ προφανώς ικανοποιεί την (1'), αφού $\tilde{\phi}(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha \cup \beta) = \phi(\alpha) \cup \phi(\beta) = \tilde{\phi}(\alpha) \cup \tilde{\phi}(\beta)$ αν $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, δηλαδή όταν $\alpha \neq \emptyset$ και $\beta \neq \emptyset$ και $\tilde{\phi}(\alpha \cup \beta) = \tilde{\phi}(\alpha) = \tilde{\phi}(\alpha) \cup \tilde{\phi}(\emptyset) = \tilde{\phi}(\alpha) \cup \tilde{\phi}(\beta)$ αν $\beta = \emptyset$. Επίσης, αν η ϕ ικανοποιεί και την (2) τότε η $\tilde{\phi}$ ικανοποιεί την (2'), αφού οι εγκλεισμοί

$$\tilde{\phi}(\alpha) = \tilde{\phi}((\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \setminus \beta)) = \tilde{\phi}(\alpha \cap \beta) \cup \tilde{\phi}(\alpha \setminus \beta) \supseteq \tilde{\phi}(\alpha \cap \beta)$$

και

$$\tilde{\phi}(\beta) = \tilde{\phi}((\alpha \cap \beta) \cup (\beta \setminus \alpha)) = \tilde{\phi}(\alpha \cap \beta) \cup \tilde{\phi}(\beta \setminus \alpha) \supseteq \tilde{\phi}(\alpha \cap \beta)$$

δίνουν καταρχήν ότι

$$\tilde{\phi}(\alpha \cap \beta) \subseteq \tilde{\phi}(\alpha) \cap \tilde{\phi}(\beta).$$

επίσης, αν $\alpha \cap \beta = \emptyset$, τότε $\tilde{\phi}(\alpha) \cap \tilde{\phi}(\beta) = \emptyset$, επειδή αν $\alpha \neq \emptyset$ και $\beta \neq \emptyset$ τότε $\tilde{\phi}(\alpha) \cap \tilde{\phi}(\beta) = \phi(\alpha) \cap \phi(\beta) = \emptyset$ από την (2) και αν κάποιο από τα α, β είναι το $\emptyset$ τότε το αντίστοιχο $\tilde{\phi}(\alpha), \tilde{\phi}(\beta)$ είναι το $\emptyset$ και άρα και η τομή $\tilde{\phi}(\alpha) \cap \tilde{\phi}(\beta) = \emptyset$. τότε, από την παραπάνω ισότητα $\tilde{\phi}(\alpha) = \tilde{\phi}(\alpha \cap \beta) \cup \tilde{\phi}(\alpha \setminus \beta)$ έχουμε ότι

$$\tilde{\phi}(\alpha) \cap \tilde{\phi}(\beta) \subseteq \tilde{\phi}(\alpha) = \tilde{\phi}(\alpha \cap \beta) \cup \tilde{\phi}(\alpha \setminus \beta), \quad (3.3)$$

και επειδή $\beta \cap (\alpha \setminus \beta) = \emptyset \Rightarrow \tilde{\phi}(\beta) \cap \tilde{\phi}(\alpha \setminus \beta) = \emptyset$, έχουμε φυσικά και ότι

$$[\tilde{\phi}(\alpha) \cap \tilde{\phi}(\beta)] \cap \tilde{\phi}(\alpha \setminus \beta) \subseteq \tilde{\phi}(\beta) \cap \tilde{\phi}(\alpha \setminus \beta) = \emptyset, \quad (3.4)$$

οπότε αναγκαστικά $\tilde{\phi}(\alpha) \cap \tilde{\phi}(\beta) \subseteq \tilde{\phi}(\alpha \cap \beta)$, από τις (3.3) και (3.4). Τέλος, αν η ϕ ικανοποιεί τις (1) και (2) τότε η $\tilde{\phi}$ είναι ένα προς ένα, αφού $\phi(\alpha) = \emptyset \Leftrightarrow \alpha = \emptyset$, και

$$\begin{aligned} & \tilde{\phi}(\alpha) = \tilde{\phi}(\beta) \neq \emptyset \\ \Rightarrow & \tilde{\phi}(\alpha) = \tilde{\phi}(\alpha) \cup \tilde{\phi}(\beta) = \tilde{\phi}(\alpha \cup \beta) = \tilde{\phi}(\alpha \cup (\beta \setminus \alpha)) = \tilde{\phi}(\alpha) \cup \tilde{\phi}(\beta \setminus \alpha) \\ \Rightarrow & \tilde{\phi}(\beta \setminus \alpha) \subseteq \tilde{\phi}(\alpha) \\ \Rightarrow & \tilde{\phi}(\beta \setminus \alpha) = \emptyset \quad (\text{αφού } \alpha \cap (\beta \setminus \alpha) = \emptyset \text{ και άρα } \tilde{\phi}(\beta \setminus \alpha) \cap \tilde{\phi}(\alpha) = \emptyset) \\ \Rightarrow & \beta \setminus \alpha = \emptyset, \end{aligned}$$

και όμοια $\alpha \setminus \beta = \emptyset$.

Παρατήρηση 3.4.1. Κάθε ομομορφισμός $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ προφανώς καθορίζεται από τις τιμές του στα μονοσύνολα, $\alpha_i = \phi(\{i\})$ για κάθε φυσικό αριθμό $i \in \mathbb{N}$, με την οικογένεια $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ να μπορεί να είναι οποιαδήποτε οικογένεια ξένων ανά δύο πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, καθώς τότε για κάθε πεπερασμένο σύνολο $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in \mathcal{F}$ έχουμε ότι

$$\phi(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) = \phi(\{i_1\}) \cup \phi(\{i_2\}) \cup \dots \cup \phi(\{i_n\}) = \alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cup \dots \cup \alpha_{i_n}. \quad (3.5)$$

Και αντίστροφα, κάθε οικογένεια $\{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ξένων ανά δύο μη κενών πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ καθορίζει μέσω της (3.5) έναν ομομορφισμό $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$: αν $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ και $\{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ είναι ξένα σύνολα στο $\mathcal{F}$, τότε $i_r \neq j_l$ για κάθε δύο $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ και $l \in \{1, 2, \dots, m\}$ και άρα

$$\begin{aligned} & \phi(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) \cap \phi(\{j_1, j_2, \dots, j_m\}) \\ &= [\alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cup \dots \cup \alpha_{i_n}] \cap [\alpha_{j_1} \cup \alpha_{j_2} \cup \dots \cup \alpha_{j_m}] = \bigcup_{r=1}^n \bigcup_{l=1}^m (\alpha_{i_r} \cap \alpha_{j_l}) = \emptyset. \end{aligned}$$

και για αυθαίρετα $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha \cup \beta) &= \phi\left(\bigcup_{i \in \alpha} \{i\} \cup \bigcup_{j \in \beta \setminus \alpha} \{j\}\right) = \bigcup_{i \in \alpha} \phi(\{i\}) \cup \bigcup_{j \in \beta \setminus \alpha} \phi(\{j\}) \\ &= \bigcup_{i \in \alpha} \phi(\{i\}) \cup \bigcup_{j \in \beta} \phi(\{j\}) = \phi(\alpha) \cup \phi(\beta) \end{aligned}$$

(όπου $\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$ για αυθαίρετα σύνολα A_i).

Ορίζουμε επίσης μερική διάταξη ($<$) στην $\mathcal{F}$ από την $\alpha < \beta$ αν και μόνο αν $\max \alpha < \min \beta$.

Ορισμός 3.4.2. Ένα $A \subseteq \mathcal{F}$ είναι **IP-σύνολο** στην $\mathcal{F}$ αν είναι εικόνα ομομορφισμού, δηλαδή αν υπάρχει ομομορφισμός $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ώστε $A = \phi(\mathcal{F})$.

Έχουμε ίδιο αποτέλεσμα με το θεώρημα του Hindman για την οικογένεια $\mathcal{F}$ των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$.

Θεώρημα 3.4.3. Αν $\mathcal{F} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$, τότε κάποιο B_j περιέχει IP-σύνολο.

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ με

$$f(\alpha) = \sum_{i \in \alpha} 2^{i-1}. \quad (3.6)$$

Παρατηρούμε καταρχήν ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη (δηλαδή ένα προς ένα). Πράγματι, αν $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ και $\alpha \neq \beta$, έστω $n \in \mathbb{N}$ ο μεγαλύτερος φυσικός που ανήκει στην συμμετρική διαφορά $\alpha \Delta \beta = (\alpha \setminus \beta) \cup (\beta \setminus \alpha)$. Έστω, χωρίς φυσικά βλάβη της γενικότητας, ότι $n \in \alpha \setminus \beta$. Τότε $\sum_{i \in \alpha, i > n} 2^{i-1} = \sum_{i \in \beta, i > n} 2^{i-1}$, ενώ

$$\sum_{i \in \alpha, i \leq n} 2^{i-1} \geq 2^{n-1} > \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} \geq \sum_{i \in \beta, i < n} 2^{i-1} = \sum_{i \in \beta, i \leq n} 2^{i-1}$$

και άρα συνολικά

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sum_{i \in \alpha} 2^{i-1} = \sum_{i \in \alpha, i > n} 2^{i-1} + \sum_{i \in \alpha, i \leq n} 2^{i-1} \\ &> \sum_{i \in \beta, i > n} 2^{i-1} + \sum_{i \in \beta, i \leq n} 2^{i-1} = \sum_{i \in \beta} 2^{i-1} = f(\beta). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η f είναι και επί του $\mathbb{N}$. Πράγματι, κάθε φυσικός αριθμός n έχει δυαδικό ανάπτυγμα $n = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n) 2^i$ με $x_i(n) \in \{0, 1\}$ για κάθε $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ¹ και προφανώς $x_i(n) = 0$ για κάθε i με $2^i > n$, αφού αλλιώς θα είχαμε $n = \sum_{j=1}^{\infty} x_j(n) 2^j \geq x_i(n) 2^i = 2^i > n$. Επομένως $n = \sum_{i \in \alpha'} 2^i$, όπου $\alpha' \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$ είναι το πεπερασμένο σύνολο $\alpha' = \{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x_i(n) = 1\}$, ή ισοδύναμα $n = f(\alpha) = \sum_{i \in \alpha} 2^{i-1}$ όπου

$$\alpha = \alpha' + 1 = \{i + 1 \mid i \in \alpha'\} = \{i \in \mathbb{N} \mid x_{i-1}(n) = 1\}.$$

Ορίζουμε τα σύνολα $C_i = \{\sum_{i \in \alpha} 2^{i-1} \mid \alpha \in B_i\} = f(B_i)$ για $i = 1, 2, \dots, q$. Τότε τα $C_1, C_2, \dots, C_q$ αποτελούν διαμέριση του $\mathbb{N}$, επειδή τα $B_1, B_2, \dots, B_q$ αποτελούν διαμέριση του $\mathcal{F}$ και η $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{N}$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q \\ \Rightarrow \mathbb{N} &= f(\mathcal{F}) = f(B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q) = f(B_1) \cup f(B_2) \cup \dots \cup f(B_q) \end{aligned}$$

¹Το δυαδικό ανάπτυγμα $n = \sum_{i=0}^{\infty} x_i(n) 2^i$ με $x_i(n) \in \{0, 1\}$ για κάθε $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ προκύπτει ως εξής. Διαιρούμε τον n με 2 και θέτουμε $x_0(n) \in \{0, 1\}$ να είναι το υπόλοιπο $x_0(n) = n - 2\lfloor n/2 \rfloor$ της διαίρεσης· δηλαδή $x_0(n) = 0$ αν n είναι άρτιος και $x_0(n) = 1$ αλλιώς. Κατόπιν διαιρούμε το πηλίκο $\pi_1(n) := \lfloor n/2 \rfloor$ δια 2 και θέτουμε $x_1(n) \in \{0, 1\}$ να είναι το υπόλοιπο $x_1(n) = \lfloor n/2 \rfloor - 2\lfloor \lfloor n/2 \rfloor / 2 \rfloor = \pi_1(n) - 2\lfloor \pi_1(n)/2 \rfloor$ της διαίρεσης· συνολικά τότε έχουμε ότι $n = 2\lfloor n/2 \rfloor + x_0(n) = 2\pi_1(n) + x_0(n) = 2^2\lfloor \pi_1(n)/2 \rfloor + 2x_1(n) + x_0(n)$. Θέτουμε $\pi_2(n)$ να είναι το πηλίκο $\pi_1(n) - 2\lfloor \pi_1(n)/2 \rfloor$ της διαίρεσης του $\pi_1(n)$ με το 2 και συνεχίζουμε επαγωγικά, θέτοντας κάθε φορά $x_i(n)$ να είναι το υπόλοιπο $x_i(n) = \pi_i(n) - 2\lfloor \pi_i(n)/2 \rfloor$ της διαίρεσης $\pi_i(n)$ δια 2 και $\pi_{i+1}(n) = \lfloor \pi_i(n)/2 \rfloor$ να είναι το πηλίκο αυτής της διαίρεσης. Τότε $n = x_0(n) + 2\pi_1(n)$ και $\pi_i(n) = x_i(n) + 2\pi_{i+1}(n)$ για κάθε i , οπότε επαγωγικά $n = x_0(n) + 2x_1(n) + 2^2x_2(n) + \dots + 2^i x_i(n) + 2^{i+1} \pi_{i+1}(n)$ για κάθε $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Παρατηρούμε επίσης ότι $\pi_{i+1}(n) = \lfloor \pi_i(n)/2 \rfloor \leq \pi_i(n)/2$ για κάθε i και επαγωγικά παίρνουμε ότι $\pi_{i+1}(n) \leq \pi_i(n)/2 \leq \pi_{i-1}(n)/2^2 \leq \dots \leq \pi_1(n)/2^i \leq n/2^{i+1}$ για κάθε $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Αφού κάθε πηλίκο $\pi_i(n)$ είναι αχέραιος, έπεται ότι $\pi_{i+1}(n) = 0$ για κάθε i με $2^{i+1} > n$, οπότε $n = x_0(n) + 2x_1(n) + 2^2x_2(n) + \dots + 2^i x_i(n)$ με το i να καθορίζεται μονοσήμαντα από την $2^i \leq n < 2^{i+1}$, ή $n = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(n) 2^j$ με $x_j(n) = 0$ για κάθε $j > i$.

και

$$B_i \cap B_j = \emptyset \Rightarrow f(B_i) \cap f(B_j) = f(B_i \cap B_j) = \emptyset$$

για $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, q\}$. Επομένως, από το θεώρημα Hindman υπάρχει ένα $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ ώστε το C_j να περιέχει IP-σύνολο· δηλαδή υπάρχουν $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ και ακολουθία $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\mathbb{N}$ ώστε

$$\{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\} \subseteq C_j.$$

Γράφουμε καταρχήν $p_\alpha = \sum_{i \in \alpha} p_i$ για κάθε πεπερασμένο σύνολο $\alpha \in \mathcal{F}$. τότε το IP-σύνολο $\{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\}$ γράφεται ως

$$\{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\} = \{p_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{F}\}.$$

Σε κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$ αντιστοιχούμε το σύνολο των εκθετών στο δυαδικό ανάπτυγμα του p_α , μεταφερόμενο κατά 1 ώστε να πάρουμε ένα σύνολο $\psi(\alpha) \in \mathcal{F}$. πιο συγκεκριμένα, ορίζουμε το $\psi(\alpha)$ από την

$$p_\alpha = \sum_{i \in \psi(\alpha)} 2^{i-1}, \quad (3.7)$$

ή ισοδύναμα ως $\psi(\alpha) = f^{-1}(p_\alpha)$. Παρατηρούμε ότι

$$\psi(\alpha) \in B_j \Leftrightarrow f(\psi(\alpha)) \in C_j \Leftrightarrow p_\alpha \in C_j$$

και αν είχαμε ότι $\alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \psi(\alpha) \cap \psi(\beta) = \emptyset$, η $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ θα ήταν ομομορφισμός και το $\psi(\mathcal{F})$ το ζητούμενο IP-σύνολο στο B_j . Δυστυχώς όμως αυτό δεν ισχύει απαραίτητα· θα ορίσουμε όμως ομομορφισμό $\psi': \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ που θα ικανοποιεί την $\alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \psi(\psi'(\alpha)) \cap \psi(\psi'(\beta)) = \emptyset$ και τότε ο $\psi \circ \psi'$ θα είναι ο ζητούμενος ομομορφισμός που θα μας δώσει το το ζητούμενο IP-σύνολο $\psi(\psi'(\mathcal{F}))$ στο B_j .

Για να ορίσουμε την ψ' θα ορίσουμε τα $\alpha_1 = \psi'(\{1\})$, $\alpha_2 = \psi'(\{2\})$, ... επαγωγικά και θα επεκτείνουμε σε όλο το $\mathcal{F}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ιδιότητα των IP-συνόλων στο $\mathbb{N}$.

Ισχυρισμός. Αν $S \subseteq \mathbb{N}$ ένα IP-σύνολο στο $\mathbb{N}$, τότε για κάθε θετικό ακέραιο m υπάρχει $s \in S$ ώστε $m \mid s$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Υπάρχει ακολουθία $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στο $\mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$S = \{q_{i_1} + q_{i_2} + \dots + q_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Επειδή το σύνολο των δυνατών υπολοίπων της διαίρεσης ενός φυσικού αριθμού με m είναι πεπερασμένο, υπάρχουν άπειροι δείκτες $i_1 < i_2 < \dots$ στο $\mathbb{N}$ ώστε τα $q_{i_1}, q_{i_2}, \dots$ να αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με m , δηλαδή

$$q_{i_j} \equiv k \pmod{m} \quad \text{για κάθε } j \in \mathbb{N},$$

για κάποιο $k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$. Τότε $s = q_{i_1} + q_{i_2} + \dots + q_{i_m} \in S$ και $m \mid s$, αφού κάθε q_{i_j} γράφεται ως $q_{i_j} = ml_{i_j} + k$ για κάποιο ακέραιο $l_{i_j} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ και άρα $s = q_{i_1} + q_{i_2} + \dots + q_{i_m} = m(l_{i_1} + l_{i_2} + \dots + l_{i_m}) + km$. $\square$

Για την κατασκευή της ψ' ξεκινάμε επιλέγοντας ένα $\alpha_1 \in \mathcal{F}$ αυθαίρετα και κατόπιν $m_1 \in \mathbb{N}$ με $2^{m_1} > p_{\alpha_1}$. Από τον Ισχυρισμό υπάρχει α_2 ώστε $2^{m_1} \mid p_{\alpha_2}$. μάλιστα αν εφαρμόσουμε τον Ισχυρισμό όχι στο αρχικό IP-σύνολο $S_0 := \{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\}$ που προκύπτει από όλη την ακολουθία $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ αλλά στο IP-σύνολο

$$S_1 := \{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_1, i_2, \dots, i_k \notin \alpha_1, k \in \mathbb{N}\}$$

που προκύπτει αν θεωρήσουμε την υπακολουθία $\{p_n^{(1)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ της $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ η οποία προκύπτει αν διαγράψουμε τους όρους p_i με $i \in \alpha_1$, τότε εξασφαλίζουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε το α_2 ξένο προς το α_1 . Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε να ορίσουμε την γνησίως αύξουσα και επί απεικόνιση $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \alpha_1$ με $h(i) = i + l_i$, $i \in \mathbb{N}$, όπου αν $\alpha_1 = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ με τα $i_1, i_2, \dots, i_k$ αριθμημένα με αύξουσα σειρά $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, τότε l_i είναι ο μοναδικός ακέραιος στο $\{0, 1, \dots, k\}$ για τον οποίο $i_{l_i} \leq i < i_{l_i+1}$ και όπου $i_0 = 0$ και $i_{k+1} = \infty$. Τότε $p_n^{(1)} = p_{h(n)}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν εφαρμόσουμε τον Ισχυρισμό στο IP-σύνολο

$$\begin{aligned} S_1 &= \{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, i_1, i_2, \dots, i_k \notin \alpha_1, k \in \mathbb{N}\} \\ &= \{p_{i_1}^{(1)} + p_{i_2}^{(1)} + \dots + p_{i_k}^{(1)} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

παίρνουμε ότι υπάρχει $\alpha'_2 \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε

$$2^{m_1} \mid p_{\alpha'_2}^{(1)} = \sum_{i \in \alpha'_2} p_i^{(1)} = \sum_{i \in \alpha'_2} p_{h(i)} = \sum_{i \in h(\alpha'_2)} p_i$$

και άρα αν θέσουμε $\alpha_2 = h(\alpha'_2)$, τότε έχουμε ότι $2^{m_1} \mid p_{\alpha_2}$ και $\alpha_2 = h(\alpha'_2) \subseteq h(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \alpha_1$.

Έχοντας κατασκευάσει τα α_1, α_2 και m_1 με αυτόν τον τρόπο, παρατηρούμε τώρα ότι $\psi(\alpha_1) \cap \psi(\alpha_2) = \emptyset$. Πράγματι, έχουμε ότι $\min \psi(\alpha_2) > m_1$, γιατί $2^{m_1} \mid p_{\alpha_2}$ και άρα το δυαδικό ανάπτυγμα του p_{α_2} δεν μπορεί να περιέχει όρους 2^m με $m < m_1$, γιατί αν $p_{\alpha_2} = \sum_{m=0}^{\infty} x_m(p_{\alpha_2}) 2^m$ με $x_m(p_{\alpha_2}) \in \{0, 1\}$ για κάθε $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ είναι το δυαδικό ανάπτυγμα του p_{α_2} , τότε επειδή $2^{m_1} \mid p_{\alpha_2} = \sum_{m=0}^{\infty} x_m(p_{\alpha_2}) 2^m$ και $2^{m_1} \mid \sum_{m \geq m_1} x_m(p_{\alpha_2}) 2^m$, θα πρέπει

$2^{m_1} \mid \sum_{m=0}^{m_1-1} x_m(p_{\alpha_2})2^m$ επίσης, που όμως γίνεται μόνο αν το τελευταίο άθροισμα είναι μηδέν, δηλαδή $x_m(p_{\alpha_2}) = 0$ για κάθε $m \in \{0, 1, 2, \dots, m_1 - 1\}$, αφού $\sum_{m=0}^{m_1-1} x_m(p_{\alpha_2})2^m \leq \sum_{m=0}^{m_1-1} 2^m = 2^{m_1} - 1 < 2^{m_1}$. Όμως επίσης $p_{\alpha_1} < 2^{m_1}$ και άρα το δυαδικό ανάπτυγμα του p_{α_1} δεν μπορεί να περιέχει όρους 2^m με $m \geq m_1$ και επομένως $\max \psi(\alpha_1) \leq m_1$. Οι ανισότητες $\min \psi(\alpha_2) > m_1$ και $\max \psi(\alpha_1) \leq m_1$ δίνουν φυσικά ότι όντως $\psi(\alpha_1) \cap \psi(\alpha_2) = \emptyset$.

Για την κατασκευή της ψ' τώρα συνεχίζουμε επαγωγικά. Αν έχουμε ορίσει ξένα ανά δύο $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathcal{F}$ και $m_1, m_2, \dots, m_{k-1} \in \mathbb{N}$, για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, έτσι ώστε $2^{m_i} > p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + \dots + p_{\alpha_i}$ και $2^{m_i} \mid p_{\alpha_{i+1}}$ για όλα τα $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, ορίζουμε $m_k \in \mathbb{N}$ αυθαίρετα αλλά έτσι ώστε $2^{m_k} > p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + \dots + p_{\alpha_k}$ και κατόπιν χρησιμοποιούμε τον Ισχυρισμό για να βρούμε $\alpha_{k+1} \in \mathcal{F}$ ξένο προς το $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k$ και τέτοιο ώστε $2^{m_k} \mid p_{\alpha_{k+1}}$. Αυτό το τελευταίο μπορεί να γίνει όπως ακριβώς και για το α_2 πιο πάνω. Συγκεκριμένα, ορίζουμε την γνησίως αύξουσα και επί απεικόνιση $h_k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k)$ με $h_k(i) = i + l_i$, $i \in \mathbb{N}$, όπου αν $\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k = \{i_1, i_2, \dots, i_r\}$ με τα $i_1, i_2, \dots, i_r$ αριθμημένα με αύξουσα σειρά $i_1 < i_2 < \dots < i_r$, τότε l_i είναι ο μοναδικός ακέραιος στο $\{0, 1, \dots, r\}$ για τον οποίο $i_{l_i} \leq i < i_{l_i+1}$ και όπου $i_0 = 0$ και $i_{r+1} = \infty$. Θεωρούμε και την υπακολουθία $p_n^{(k)} = p_{h_k(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, της $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Αν εφαρμόσουμε τον Ισχυρισμό στο IP-σύνολο

$$\begin{aligned} S_k &= \{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_j} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_j, j \in \mathbb{N}, \\ &\quad i_1, i_2, \dots, i_j \notin \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k\} \\ &= \{p_{i_1}^{(k)} + p_{i_2}^{(k)} + \dots + p_{i_j}^{(k)} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_j, j \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

παίρνουμε ότι υπάρχει $\alpha'_{k+1} \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε

$$2^{m_k} \mid p_{\alpha'_{k+1}}^{(k)} = \sum_{i \in \alpha'_{k+1}} p_i^{(k)} = \sum_{i \in \alpha'_{k+1}} p_{h_k(i)} = \sum_{i \in h_k(\alpha'_{k+1})} p_i$$

και άρα αν θέσουμε $\alpha_{k+1} = h_k(\alpha'_{k+1})$, τότε έχουμε ότι $2^{m_k} \mid p_{\alpha_{k+1}}$ και $\alpha_{k+1} = h_k(\alpha'_{k+1}) \subseteq h_k(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus (\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k)$.

Επαγωγικά ορίζεται έτσι μια άπειρη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ στο $\mathcal{F}$ και φυσικοί αριθμοί $m_1, m_2, \dots$, έτσι ώστε

$$2^{m_k} > p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + \dots + p_{\alpha_k}$$

και

$$2^{m_k} \mid p_{\alpha_{k+1}},$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και από αυτές τις ιδιότητες παίρνουμε ότι

$$\psi(\alpha_i) \cap \psi(\alpha_j) = \emptyset \quad \text{αν } i \neq j. \quad (3.8)$$

Πράγματι, για κάθε $i \in \mathbb{N}$, και με $m_0 = 0$, έχουμε ότι $2^{m_{i-1}} \mid p_{\alpha_i}$ και άρα το δυαδικό ανάπτυγμα του p_{α_i} δεν μπορεί να περιέχει όρους 2^m με $m < m_{i-1}$. Αυτό αποδεικνύεται όπως και για την περίπτωση του α_2 πιο πάνω. Έπεται ότι $\min \psi(\alpha_i) > m_{i-1}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Από την $2^{m_i} > p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + \dots + p_{\alpha_i} \geq p_{\alpha_i}$ έχουμε επίσης ότι το δυαδικό ανάπτυγμα του p_{α_i} δεν μπορεί να περιέχει όρους 2^m με $m \geq m_i$ και άρα $\max \psi(\alpha_i) \leq m_i$. Επομένως έχουμε ότι $\psi(\alpha_i) \cap \psi(\alpha_j) = \emptyset$ για $i \neq j$.

Ορίζουμε τώρα απεικόνιση $\psi': \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ από την

$$\psi'(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) = \alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cup \dots \cup \alpha_{i_k}, \quad (3.9)$$

$k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}$, η οποία είναι ομομορφισμός από την Παρατήρηση 3.4.1. Επιπλέον όμως έχουμε ότι η $\phi := \psi \circ \psi': \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι ομομορφισμός. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\phi(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) = \psi(\alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cup \dots \cup \alpha_{i_n}) \quad (3.10)$$

για κάθε $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in \mathcal{F}$. Επίσης, αν τα $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ είναι διακεκριμένα, τότε από τον ορισμό (3.7) της ψ έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \psi(\alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cup \dots \cup \alpha_{i_n})} 2^{i-1} &= p_{\alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cup \dots \cup \alpha_{i_n}} \\ &= p_{\alpha_{i_1}} + p_{\alpha_{i_2}} + \dots + p_{\alpha_{i_n}} \\ &= \sum_{i \in \psi(\alpha_{i_1})} 2^{i-1} + \sum_{i \in \psi(\alpha_{i_2})} 2^{i-1} + \dots + \sum_{i \in \psi(\alpha_{i_n})} 2^{i-1} \\ &= \sum_{i \in \psi(\alpha_{i_1}) \cup \psi(\alpha_{i_2}) \cup \dots \cup \psi(\alpha_{i_n})} 2^{i-1}, \end{aligned}$$

η δεύτερη ισότητα επειδή τα $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}$ είναι ξένα ανά δύο, η τελευταία επειδή από την (3.8) τα $\psi(\alpha_{i_1}), \psi(\alpha_{i_2}), \dots, \psi(\alpha_{i_n})$ είναι ξένα ανά δύο. Από αυτήν την ισότητα, και το γεγονός ότι η απεικόνιση f ορισμένη από την (3.6) είναι αμφιμονοσήμαντη, έπεται τώρα ότι

$$\psi(\alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cup \dots \cup \alpha_{i_n}) = \psi(\alpha_{i_1}) \cup \dots \cup \psi(\alpha_{i_n}).$$

Από την τελευταία ισότητα και τις (3.10) και (3.9), παίρνουμε τελικά ότι

$$\phi(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) = \phi(\{i_1\}) \cup \phi(\{i_2\}) \cup \dots \cup \phi(\{i_n\}) \quad (3.11)$$

για κάθε $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \in \mathcal{F}$. Από αυτήν την ισότητα, την

$$\phi(\{i\}) \cap \phi(\{j\}) = \psi(\alpha_i) \cap \psi(\alpha_j) = \emptyset \quad (3.12)$$

για $i \neq j$ και την Παρατήρηση 3.4.1, έπεται άμεσα ότι η ϕ είναι ομομορφισμός.

Δείξαμε ότι η $\phi = \psi \circ \psi': \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ είναι ομομορφισμός και άρα το $\phi(\mathcal{F})$ είναι IP-σύνολο στο $\mathcal{F}$. Επίσης, $\phi(\mathcal{F}) \subseteq B_j$, αφού $\phi(\mathcal{F}) \subseteq \psi(\mathcal{F})$ και έχουμε δείξει ότι $\psi(\mathcal{F}) \subseteq B_j$. $\square$

Το παραπάνω θεώρημα δίνει ένα ανάλογο θεώρημα για αυθαίρετες ημιομάδες. Ορίζουμε πρώτα τις έννοιες των IP-συνόλων και IP-συστημάτων για αυθαίρετες ημιομάδες.

Ορισμός 3.4.4. Μια $\mathcal{F}$ -ακολουθία σε έναν αυθαίρετο χώρο X είναι μία ακολουθία $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ με δείκτες στο $\mathcal{F}$, δηλαδή μία απεικόνιση $x: \mathcal{F} \rightarrow X$.

Παρατήρηση. Μια $\mathcal{F}$ -ακολουθία σε έναν χώρο X είναι προφανώς ένα δίκτυο στον X , αφού το $\mathcal{F}$ με διάταξη αυτήν του περιέχεται, $\alpha \subseteq \beta$, αποτελεί κατευθυνόμενο σύνολο. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε όμως καθόλου αυτή την ιδιότητα των $\mathcal{F}$ -ακολουθιών. Ειδικότερα, σύγκλιση παρακάτω δεν θα σημαίνει ποτέ την σύγκλιση μιας $\mathcal{F}$ -ακολουθίας ως δίκτυο με αυτή την διάταξη $\alpha \subseteq \beta$ στο $\mathcal{F}$.

Ορισμός 3.4.5. Αν X είναι ημιομάδα λέμε ότι μία $\mathcal{F}$ -ακολουθία $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ στην X ορίζει ένα **IP-σύστημα** αν $x_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}} = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ για όλα τα $i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, με $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$. Τότε το σύνολο $\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{F}\}$ θα λέγεται **IP-σύνολο** της ημιομάδας X .

Παρατήρηση 3.4.6. Οι ημιομάδες X που θα θεωρούμε θα είναι αβελιανές και τότε για ένα IP-σύστημα $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ έχουμε ότι $x_{\alpha \cup \beta} = x_\alpha x_\beta$ για αυθαίρετα ξένα σύνολα $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$. Στην γενική, όχι κατ' ανάγκη μεταθετική περίπτωση, αυτό θα ισχύει όταν $\alpha < \beta$.

Μπορούμε να πετύχουμε το αποτέλεσμα του θεωρήματος του Hindman για κάθε πεπερασμένη διαμέριση ενός IP-συνόλου σε μια ημιομάδα.

Πρόταση 3.4.7. Έστω Σ ένα IP-σύνολο σε μία ημιομάδα. Αν το Σ είναι ένωση πεπερασμένων στο πλήθος υποσυνόλων, τότε ένα από αυτά πάλι περιέχει IP-σύνολο.

Απόδειξη. Έστω $\Sigma = \{\sigma(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{F}\} = \sigma(\mathcal{F})$ το εν λόγω IP-σύνολο και έστω ότι $\Sigma = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_q$. Τότε

$$\mathcal{F} = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_q,$$

όπου $C_i = \sigma^{-1}(B_i) = \{\alpha \in \mathcal{F} \mid \sigma(\alpha) \in B_i\}$, $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, και από το Θεώρημα 3.4.3 υπάρχει κάποιο C_j που περιέχει ένα IP-σύνολο στο $\mathcal{F}$. δηλαδή, υπάρχουν ένα $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ και ένας ομομορφισμός $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $\phi(\mathcal{F}) \subseteq C_j$. Θέτουμε $\alpha_i = \phi(\{i\})$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε τα α_n , $n \in \mathbb{N}$, είναι ξένα ανά δύο επειδή η ϕ είναι ομομορφισμός: αν $n \neq m$, τότε $\{n\} \cap \{m\} = \emptyset \Rightarrow \alpha_n \cap \alpha_m = \phi(\{n\}) \cap \phi(\{m\}) = \emptyset$. Βρίσκουμε τώρα μια αύξουσα υπακολουθία $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \cdots$ της ακολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής. Θέτουμε $\alpha'_1 = \alpha_1$. Αφού τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ είναι ξένα ανά δύο και μη κενά, υπάρχει $j \in \mathbb{N}$ ώστε $\min \alpha_j > \max \alpha_1$. Πράγματι, αλλιώς θα

είχαμε ότι $\min \alpha_j \leq \max \alpha_1$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και τότε αναγκαστικά θα έπρεπε για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, \max \alpha_1\}$ να είχαμε ότι $\min \alpha_j = k$ για άπειρα το πλήθος $j \in \mathbb{N}$, που αντίκειται στο ότι τα α_j είναι ξένα ανά δύο. Επιλέγουμε λοιπόν ένα τέτοιο j και θέτουμε $\alpha'_2 = \alpha_j$. Επαγωγικά, αν έχουμε επιλέξει τα $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \dots < \alpha'_n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με $\alpha'_i \in \{\alpha_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, υπάρχει $j \in \mathbb{N}$ ώστε $\min \alpha_j > \max \alpha_n$, γιατί αλλιώς θα είχαμε ότι $\min \alpha_j \leq \alpha_n$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ και τότε αναγκαστικά και πάλι θα έπρεπε για κάποιο $k \in \{1, 2, \dots, \max \alpha_n\}$ να είχαμε ότι $\min \alpha_j = k$ για άπειρα το πλήθος $j \in \mathbb{N}$, που αντίκειται πάλι στο ότι τα α_j είναι ξένα ανά δύο. Επιλέγουμε λοιπόν ένα $j \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\min \alpha_j > \max \alpha_n$ και θέτουμε $\alpha_{n+1} = \alpha_j$.

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη μιας υπακολουθίας $\alpha'_1 < \alpha'_2 < \dots$ της $\alpha_1, \alpha_2, \dots$, έχουμε ότι, αν $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, τότε

$$\sigma(\alpha'_{i_1} \cup \alpha'_{i_2} \cup \dots \cup \alpha'_{i_n}) = \sigma(\alpha'_{i_1})\sigma(\alpha'_{i_2}) \cdots \sigma(\alpha'_{i_n}), \quad (3.13)$$

από την Παρατήρηση 3.4.6. Ορίζουμε μία απεικόνιση τ από το $\mathcal{F}$ στην ημιομάδα μας από την

$$\tau(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) = \sigma(\alpha'_{i_1} \cup \alpha'_{i_2} \cup \dots \cup \alpha'_{i_n}), \quad (3.14)$$

για $n, i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$. Τότε

$$\begin{aligned} \tau(\{i_1, i_2, \dots, i_n\}) &= \sigma(\alpha'_{i_1} \cup \alpha'_{i_2} \cup \dots \cup \alpha'_{i_k}) \\ &= \sigma(\alpha'_{i_1})\sigma(\alpha'_{i_2}) \cdots \sigma(\alpha'_{i_k}) = \tau(\{i_1\})\tau(\{i_2\}) \cdots \tau(\{i_n\}) \end{aligned}$$

όταν $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, από την (3.13) και επομένως η τ ορίζει IP-σύστημα και το $\tau(\mathcal{F}) = \{\tau(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{F}\}$ αποτελεί IP-σύνολο. Επιπλέον,

$$\alpha'_i \in \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \phi(\mathcal{F}) \quad \text{για κάθε } i \in \mathbb{N}.$$

επειδή το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό ως προς πεπερασμένες ενώσεις στοιχείων του και η ϕ ομομορφισμός, έπεται ότι και το $\phi(\mathcal{F})$ είναι κλειστό ως προς πεπερασμένες ενώσεις στοιχείων του και άρα

$$\alpha'_{i_1} \cup \alpha'_{i_2} \cup \dots \cup \alpha'_{i_n} \in \phi(\mathcal{F}) \quad (3.15)$$

για αυθαίρετα $n, i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$. Όμως από την επιλογή της ϕ , $\phi(\mathcal{F}) \subseteq C_j$. Έπεται τώρα από τις (3.14) και (3.15) ότι $\tau(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\phi(\mathcal{F})) \subseteq \sigma(C_j) \subseteq B_j$. $\square$

Ορισμός 3.4.8. Έστω μία $\mathcal{F}$ -ακολουθία $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ σε έναν τοπολογικό χώρο X και $x \in X$ ένα σημείο του. Θα λέμε ότι η $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ **συγκλίνει** στο x ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία, και θα γράφουμε $x_\alpha \rightarrow x$, αν για κάθε περιοχή V του x υπάρχει ένα σύνολο $\alpha_V \in \mathcal{F}$ ώστε $x_\alpha \in V$ για κάθε $\alpha > \alpha_V$.

Παρατήρηση. Όταν $x_\alpha \rightarrow x$ ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία για κάποια $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ σε κάποιον τοπολογικό χώρο X και V μία περιοχή του ορίου x , το σύνολο των $\alpha \in \mathcal{F}$ για τα οποία $x_\alpha \notin \mathcal{F}$ δεν είναι πεπερασμένο.

Ορισμός 3.4.9. Μια $\mathcal{F}$ -υπακολουθία μιας $\mathcal{F}$ -ακολουθίας $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ είναι μια $\mathcal{F}$ -ακολουθία $\{y_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ της μορφής $y_\alpha = x_{\phi(\alpha)}$, $\alpha \in \mathcal{F}$, όπου $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ομομορφισμός.

Με αυτή την ορολογία, το Θεώρημα 3.4.3 μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής. Αν $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ είναι μια $\mathcal{F}$ -ακολουθία σε έναν πεπερασμένο χώρο, τότε υπάρχει μία $\mathcal{F}$ -υπακολουθία της η οποία είναι σταθερή. Αυτό γενικεύεται ως εξής.

Θεώρημα 3.4.10. Αν $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ είναι $\mathcal{F}$ -ακολουθία σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο X , τότε υπάρχει $\mathcal{F}$ -υπακολουθία η οποία συγκλίνει ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία.

Απόδειξη. Θεωρούμε πεπερασμένη κάλυψη $X = V_1^{(1)} \cup V_2^{(1)} \cup \dots \cup V_{q_1}^{(1)}$ του X από σύνολα με διάμετρο μικρότερη από 1. Αυτή επάγει πεπερασμένη κάλυψη $\mathcal{F} = B_1^{(1)} \cup B_2^{(1)} \cup \dots \cup B_{q_1}^{(1)}$ του $\mathcal{F}$, όπου $B_i^{(1)} = \{\alpha \in \mathcal{F} \mid x_\alpha \in V_i^{(1)}\}$ για $i \in \{1, 2, \dots, q_1\}$. Από το Θεώρημα 3.4.3 υπάρχει ομομορφισμός $\phi_1: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ώστε $\phi_1(\mathcal{F}) \subseteq B_{j_1}^{(1)}$ για κάποιο $j_1 \in \{1, 2, \dots, q_1\}$, και συνεπώς παίρνουμε ότι $x_{\phi_1(\alpha)} \in V_{j_1}^{(1)}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$, δηλαδή βρήκαμε $\mathcal{F}$ -υπακολουθία της $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ της οποίας όλα τα στοιχεία απέχουν απόσταση μικρότερη από 1 μεταξύ τους.

Θεωρούμε τώρα κάλυψη $X = V_1^{(2)} \cup V_2^{(2)} \cup \dots \cup V_{q_2}^{(2)}$ του X σε σύνολα με διάμετρο μικρότερη από $1/2$ και την κάλυψη $\mathcal{F} = B_1^{(2)} \cup B_2^{(2)} \cup \dots \cup B_{q_2}^{(2)}$ του $\mathcal{F}$ με $B_i^{(2)} = \{\alpha \in \mathcal{F} \mid x_{\phi_1(\alpha)} \in V_i^{(2)}\}$, $i \in \{1, 2, \dots, q_2\}$. Πάλι από το Θεώρημα 3.4.3, υπάρχει ομομορφισμός $\psi_2: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ώστε $\psi_2(\mathcal{F}) \subseteq B_{j_2}^{(2)}$ για κάποιο $j_2 \in \{1, 2, \dots, q_2\}$, και συνεπώς για $\phi_2 := \phi_1 \circ \psi_2$, που είναι ομομορφισμός ως σύνθεση ομομορφισμών, παίρνουμε ότι $x_{\phi_2(\alpha)} \in V_{j_2}^{(2)}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$, δηλαδή βρήκαμε $\mathcal{F}$ -υπακολουθία $\{x_{\phi_2(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ της $\{x_{\phi_1(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ της οποίας όλα τα στοιχεία απέχουν απόσταση μικρότερη από $1/2$ μεταξύ τους.

Επαγωγικά, έστω ότι έχουμε ορίσει $\mathcal{F}$ -υπακολουθίες

$$\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}} \supseteq \{x_{\phi_1(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}} \supseteq \{x_{\phi_2(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}} \supseteq \{x_{\phi_k(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}},$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, με $\phi_{i+1} = \phi_i \circ \psi_{i+1}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ και τα $\psi_2, \psi_3, \dots, \psi_k: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ και $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ομομορφισμοί, με την $\{x_{\phi_i(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ δηλαδή $\mathcal{F}$ -υπακολουθία της $\{x_{\phi_{i-1}(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $\phi_0: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ η ταυτοτική απεικόνιση, έτσι ώστε

$$\text{diam}\{x_{\phi_i(\alpha)} \mid \alpha \in \mathcal{F}\} < \frac{1}{i} \quad \text{για κάθε } i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Θεωρούμε τότε πεπερασμένη κάλυψη $X = V_1^{(k+1)} \cup V_2^{(k+1)} \cup \dots \cup V_{q_{k+1}}^{(k+1)}$ του X σε σύνολα με διάμετρο μικρότερη από $1/(k+1)$ και την κάλυψη $\mathcal{F} = B_1^{(k+1)} \cup B_2^{(k+1)} \cup \dots \cup B_{q_{k+1}}^{(k+1)}$ του $\mathcal{F}$ με $B_i^{(k+1)} = \{\alpha \in \mathcal{F} \mid x_{\phi_k(\alpha)} \in V_i^{(k+1)}\}$, $i \in \{1, 2, \dots, q_{k+1}\}$, και από το Θεώρημα 3.4.3 και πάλι, υπάρχει ομομορφισμός $\psi_{k+1}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ώστε $\psi_{k+1}(\mathcal{F}) \subseteq B_{j_{k+1}}^{(k+1)}$ για κάποιο $j_{k+1} \in \{1, 2, \dots, q_{k+1}\}$. Συνεπώς, για $\phi_{k+1} := \phi_k \circ \psi_{k+1}$, που είναι ομομορφισμός πάλι ως σύνθεση ομομορφισμών, παίρνουμε ότι $x_{\phi_{k+1}(\alpha)} \in V_{j_{k+1}}^{(k+1)}$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$. Η $\{x_{\phi_{k+1}(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ είναι τότε $\mathcal{F}$ -υπακολουθία της $\{x_{\phi_k(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ με $\text{diam}\{x_{\phi_{k+1}(\alpha)} \mid \alpha \in \mathcal{F}\} < 1/(k+1)$.

Ορίζουμε τώρα επαγωγικά σύνολα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots \in \mathcal{F}$ έτσι ώστε $\alpha_k \in \phi_k(\mathcal{F})$ και το α_{k+1} να είναι ξένο προς τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το εξής.

Ισχυρισμός. Δοθέντων $\alpha \in \mathcal{F}$ και ομομορφισμού $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, υπάρχει $\beta \in \mathcal{F}$ με $\alpha \cap \psi(\beta) = \emptyset$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Για κάθε $i \in \alpha$ επιλέγουμε ένα $\beta_i \in \mathcal{F}$ με $i \in \psi(\beta_i)$, αν υπάρχει τέτοιο β_i , και θέτουμε $\beta_i = \emptyset$ αλλιώς. Το $\bigcup_{i \in \alpha} \beta_i$ είναι πεπερασμένο σύνολο και έστω $\beta \in \mathcal{F}$ με $\beta \cap \bigcup_{i \in \alpha} \beta_i = \emptyset$. Τότε $\alpha \cap \psi(\beta) = \emptyset$, γιατί αν $i \in \alpha \cap \psi(\beta)$, τότε $\beta_i \neq \emptyset$, αφού $i \in \psi(\beta)$ και άρα υπάρχει $\beta_i \in \mathcal{F}$ με $i \in \psi(\beta_i)$, και $\beta \cap \beta_i \neq \emptyset$, αφού αν ήταν $\beta \cap \beta_i = \emptyset$ θα έπρεπε να είχαμε ότι $\psi(\beta) \cap \psi(\beta_i) = \emptyset$, ενώ έχουμε ότι $i \in \psi(\beta) \cap \psi(\beta_i)$. δηλαδή δείξαμε ότι $i \in \alpha \cap \psi(\beta) \Rightarrow \beta \cap \beta_i \neq \emptyset$, που φυσικά είναι άτοπο, από την επιλογή του β . $\square$

Ορίζουμε $\beta_1 \in \mathcal{F}$ αυθαίρετα και $\alpha_1 = \phi_1(\beta_1) \in \phi_1(\mathcal{F})$. Από τον Ισχυρισμό υπάρχει $\beta_2 \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\beta_1 \cap \psi_2(\beta_2) = \emptyset$ και τότε το $\alpha_2 := \phi_2(\beta_2)$ ικανοποιεί τις $\alpha_2 \in \phi_2(\mathcal{F})$ και $\alpha_2 \cap \alpha_1 = \emptyset$ γιατί $\beta_1 \cap \psi_2(\beta_2) = \emptyset$ και άρα $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \phi_1(\beta_1) \cap \phi_2(\beta_2) = \phi_1(\beta_1) \cap \phi_1(\psi_2(\beta_2)) = \emptyset$. Επαγωγικά, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιούμε τον Ισχυρισμό για

$$\alpha = \beta_1 \cup \psi_2(\beta_2) \cup \psi_2 \circ \psi_3(\beta_3) \cup \dots \cup \psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_k(\beta_k)$$

και

$$\psi = \psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_{k+1},$$

για να βρούμε $\beta_{k+1} \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε

$$[\beta_1 \cup \psi_2(\beta_2) \cup \psi_2 \circ \psi_3(\beta_3) \cup \dots \cup \psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_k(\beta_k)] \cap \psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_{k+1}(\beta_{k+1}) = \emptyset.$$

Τότε αν θέσουμε $\alpha_k = \phi_k(\beta_k)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\alpha_k \in \phi_k(\mathcal{F})$, προφανώς, και $\alpha_{k+1} \cap [\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_k] = \emptyset$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αφού

$$[\beta_1 \cup \psi_2(\beta_2) \cup \psi_2 \circ \psi_3(\beta_3) \cup \dots \cup \psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_k(\beta_k)] \cap \psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_{k+1}(\beta_{k+1}) = \emptyset$$

$\Rightarrow \psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_i(\beta_i) \cap \psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_{k+1}(\beta_{k+1}) = \emptyset$ για κάθε $i \in \{2, 3, \dots, k\}$

και επίσης $\beta_1 \cap \psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_{k+1}(\beta_{k+1}) = \emptyset$ και άρα

$$\alpha_i \cap \alpha_{k+1} = \phi_1(\psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \phi_i(\beta_i)) \cap \phi_1(\psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_{k+1}(\beta_{k+1})) = \emptyset$$

για κάθε $i \in \{2, 3, \dots, k\}$ και επίσης

$$\alpha_1 \cap \alpha_{k+1} = \phi_1(\beta_1) \cap \phi_1(\psi_2 \circ \psi_3 \circ \dots \circ \psi_{k+1}(\beta_{k+1})) = \emptyset.$$

Ορίζουμε τώρα $\mathcal{F}$ -υπακολουθία της $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ ορίζοντας $\phi(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) = \alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cap \dots \cup \alpha_{i_k}$, για $k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}$. Από την Παρατήρηση 3.4.1, η ϕ είναι ομομορφισμός γιατί τα α_{i_j} , $j \in \mathbb{N}$, είναι ξένα ανά δύο. Άρα η $\{x_{\phi(\alpha)} \mid \alpha \in \mathcal{F}\}$ είναι $\mathcal{F}$ -υπακολουθία της $\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{F}\}$. Θα δείξουμε ότι η $\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{F}\}$ τείνει σε κάποιο x ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία.

Θέτουμε $F_k = \overline{\{x_{\phi_k(\alpha)} \mid \alpha \in \mathcal{F}\}}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τα $F_1, F_2, \dots$ είναι κλειστά και μη κενά υποσύνολα του συμπαγούς χώρου X , με $F_k \supseteq F_{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αφού $\phi_{k+1} = \phi_k \circ \psi_{k+1}$ και άρα $\phi_{k+1}(\mathcal{F}) \subseteq \phi_k(\mathcal{F})$, επειδή $\psi_{k+1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}$, και άρα $\{x_{\phi_{k+1}(\alpha)} \mid \alpha \in \mathcal{F}\} \subseteq \{x_{\phi_k(\alpha)} \mid \alpha \in \mathcal{F}\}$. Επομένως $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$ και αφού επίσης $\text{diam}(F_k) \leq 1/k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έπεται ότι το $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$ είναι μονοσύνολο και έστω x το μοναδικό του στοιχείο.

Έστω U περιοχή του x στον X . Υπάρχει $k_U \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η κλειστή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα $1/k$ να περιέχεται στο εσωτερικό της U , για κάθε $k \geq k_U$. Τότε για $\alpha_U = \{k_U\} \in \mathcal{F}$ έχουμε ότι, αν $\alpha = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} > \alpha_U$, τότε $i_j > k_U$ για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ και άρα $\alpha_{i_j} \in \phi_{i_j}(\mathcal{F}) \subseteq \phi_{k_U}(\mathcal{F})$ για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, αφού όπως είδαμε και πιο πάνω,

$$\phi_{k+1}(\mathcal{F}) = \phi_k(\psi_{k+1}(\mathcal{F})) \subseteq \phi_k(\mathcal{F}) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Αφού το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό ως προς πεπερασμένες ενώσεις και η ϕ_{k_U} ομομορφισμός, το $\phi_{k_U}(\mathcal{F})$ είναι κλειστό ως προς πεπερασμένες ενώσεις και άρα

$$\phi(\alpha) = \alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cup \dots \cup \alpha_{i_n} \in \phi_{k_U}(\mathcal{F}).$$

Έπεται ότι $x_{\phi(\alpha)} \in \{x_{\phi_{k_U}(\alpha)} \mid \alpha \in \mathcal{F}\} \subseteq F_{k_U}$. Όμως επίσης $x \in F_{k_U}$ και $\text{diam } F_{k_U} \leq 1/k_U$, άρα $d(x, x_{\phi(\alpha)}) \leq 1/k_U$ και άρα $x_{\phi(\alpha)} \in U$.

Αυτό δείχνει ότι $x_{\phi(\alpha)} \rightarrow x$. □

Μπορούμε να θεωρήσουμε ένα IP-σύστημα $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ μετασχηματισμών ενός χώρου X στον εαυτό του, ως IP-σύστημα στην ημιομάδα X^X με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων. Αυτό σημαίνει ότι $\{T^\alpha \mid \alpha \in \mathcal{F}\}$ είναι είναι μια οικογένεια μετασχηματισμών $T^\alpha: X \rightarrow X$, $\alpha \in \mathcal{F}$, που ικανοποιούν τις $T^{\alpha \cup \beta} = T^\alpha T^\beta$ για $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ με $\alpha < \beta$, και όπου $T^\alpha T^\beta = T^\alpha \circ T^\beta$. Οι συνεχείς μετασχηματισμοί ενός τοπολογικού χώρου X στον εαυτό του αποτελούν επίσης ημιομάδα

με πράξη την σύνθεση απεικονίσεων, αποτελούν δηλαδή υπο-ημιομάδα της X^X , και μπορούμε να μιλάμε επίσης για IP-συστήματα συνεχών μετασχηματισμών ενός τοπολογικού χώρου στον εαυτό του.

Λήμμα 3.4.11. *Αν $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ είναι ένα IP-σύστημα συνεχών μετασχηματισμών ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X στον εαυτό του και $x \in X$ ένα σημείο του, τότε υπάρχει ένα υποσύστημα $\{T^{\phi(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ τέτοιο ώστε η $\{T^{\phi(\alpha)}(x)\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ να συγκλίνει σαν $\mathcal{F}$ -ακολουθία σε κάποιο σημείο $y \in X$, και επιπλέον $T^{\phi(\alpha)}(y) \rightarrow y$ σαν $\mathcal{F}$ -ακολουθία.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχει $\mathcal{F}$ -υπακολουθία $\{T^{\phi(\alpha)}(x)\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ που συγκλίνει ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία σε κάποιο $y \in X$. Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει ένα α_ϵ τέτοιο ώστε $d(T^{\phi(\alpha)}(x), y) < \epsilon/2$ για κάθε $\alpha > \alpha_\epsilon$. Από τη συνέχεια των T^α , $\alpha \in \mathcal{F}$, αν σταθεροποιήσουμε ένα α , μπορούμε να βρούμε $\delta_\alpha > 0$ ώστε αν $x', x'' \in X$ και $d(x', x'') < \delta_\alpha$, τότε $d(T^{\phi(\alpha)}(x'), T^{\phi(\alpha)}(x'')) < \epsilon/2$. Διαλέγουμε και $\beta = \beta(\alpha) > \alpha_\epsilon$ ώστε $d(T^{\phi(\beta)}(x), y) < \delta_\alpha$ · τέτοιο β υπάρχει από την σύγκλιση $T^{\phi(\beta)}(x) \rightarrow y$ και πάλι. Τότε $d(T^{\phi(\alpha \cup \beta)}(x), T^{\phi(\alpha)}(y)) < \epsilon/2$. Τέλος, αν $\alpha > \alpha_\epsilon$, τότε $\alpha \cup \beta > \alpha_\epsilon$, και άρα $d(T^{\phi(\alpha \cup \beta)}(x), y) < \epsilon/2$. Επομένως έχουμε ότι

$$d(T^{\phi(\alpha)}(y), y) \leq d(T^{\phi(\alpha)}(y), T^{\phi(\alpha \cup \beta)}(x)) + d(T^{\phi(\alpha \cup \beta)}(x), y) < \epsilon$$

για $\alpha > \alpha_\epsilon$. □

3.5 IP-συστήματα μετασχηματισμών και επαναφορά Birkhoff

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να εξάγουμε αποτελέσματα επαναφοράς ανάλογα με αυτά του Κεφαλαίου 2 για IP-συστήματα μετασχηματισμών. Το πρώτο αποτέλεσμα είναι η ύπαρξη σημείου επαναφοράς.

Πρόταση 3.5.1. *Έστω $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ ένα IP-σύστημα συνεχών μετασχηματισμών $T^\alpha: X \rightarrow X$, $\alpha \in \mathcal{F}$, ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X στον εαυτό του. Τότε υπάρχει ένα IP-υποσύστημα $\{T^{\phi(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ και ένα σημείο $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε $T^{\phi(\alpha)}(x_0) \rightarrow x_0$ ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$ τυχόν σημείο. Από το Λήμμα 3.4.11, αν θέσουμε $x_0 = \lim_\alpha T^{\phi(\alpha)}(x)$, όπου ϕ ο ομομορφισμός που δίνει το Λήμμα, έχουμε $T^{\phi(\alpha)}(x_0) \rightarrow x_0$ ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία. □

Από την πρόταση αυτή, μπορούμε να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος Επαναφοράς του Birkhoff. Έστω $T: X \rightarrow X$ συνεχής μετασχηματισμός ενός συμπαγούς μετρικού χώρου στον εαυτό του. Θεωρούμε αυθαίρετη ακολουθία $n_i \in \mathbb{N}$ και το IP-σύστημα $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ που προκύπτει θέτοντας

$T^{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}} = T^{n_{i_1} + n_{i_2} + \dots + n_{i_k}}$, $k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}$. Τότε από την προηγούμενη πρόταση υπάρχει ένα $x_0 \in X$ ώστε $T^{\phi(\alpha)}(x_0) \rightarrow x_0$ ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία, για κάποιο ομομορφισμό ϕ . Δηλαδή, για κάθε περιοχή U του x στον X μπορούμε να βρούμε $\alpha \in \mathcal{F}$ με $T^{\phi(\alpha)}(x_0) \in U$ και τότε $T^n(x_0) \in U$, όπου $n := \sum_{i \in \phi(\alpha)} n_i$.

Σκοπός μας τώρα είναι να δείξουμε ένα Θεώρημα Πολλαπλής Επαναφοράς Birkhoff για IP-συστήματα μετασχηματισμών. Θα δούμε πρώτα το αντίστοιχο του Λήμματος 2.1.5 για IP-συστήματα μετασχηματισμών.

Λήμμα 3.5.2. Έστω $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ IP-σύστημα συνεχών μετασχηματισμών ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X στον εαυτό του, $A \subseteq X$, και έστω ότι για κάθε $y \in A$ και $\beta \in \mathcal{F}$ και για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχουν $x \in A$ και $\alpha \in \mathcal{F}$ με $\alpha > \beta$, ώστε $d(T^\alpha(x), y) < \epsilon$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ και $\beta \in \mathcal{F}$ υπάρχουν $z \in A$ και $\alpha \in \mathcal{F}$ με $\alpha > \beta$ ώστε $d(T^\alpha(z), z) < \epsilon$.

Απόδειξη. Έστω $\epsilon > 0$ και $\beta \in \mathcal{F}$. Θέτουμε $\epsilon_1 = \epsilon/2$ και διαλέγουμε αυθαίρετα στοιχείο $z_0 \in A$. Τότε από την υπόθεσή μας για το A , υπάρχει $z_1 \in A$ και $\alpha_1 > \beta$ ώστε

$$d(T^{\alpha_1}(z_1), z_0) < \epsilon_1.$$

Έστω τώρα ϵ_2 , με $0 < \epsilon_2 \leq \epsilon/2$, τέτοιο ώστε, αν $z \in X$ και $d(z, z_1) < \epsilon_2$, τότε

$$d(T^{\alpha_1}(z), z_0) < \epsilon_1.$$

τέτοιο ϵ_2 μπορούμε να βρούμε χρησιμοποιώντας, όπως στο Λήμμα 2.1.5, την συνέχεια του T^{α_1} : επιλέγουμε το $\epsilon_2 \in (0, \epsilon/2]$, από την συνέχεια του T^{α_1} στο z_1 , έτσι ώστε $z \in X$ και $d(z, z_1) < \epsilon_2$ να συνεπάγονται ότι

$$d(T^{\alpha_1}(z), T^{\alpha_1}(z_1)) < \epsilon_1 - d(T^{\alpha_1}(z_1), z_0),$$

που είναι εφικτό γιατί $\epsilon_1 - d(T^{\alpha_1}(z_1), z_0) > 0$, και τότε για κάθε $z \in X$ με $d(z, z_1) < \epsilon_2$ έχουμε ότι

$$d(T^{\alpha_1}(z), z_0) \leq d(T^{\alpha_1}(z), T^{\alpha_1}(z_1)) + d(T^{\alpha_1}(z_1), z_0) < \epsilon_1.$$

Από την υπόθεσή μας για το A υπάρχουν τότε $\alpha_2 > \alpha_1$ και $z_2 \in A$ ώστε

$$d(T^{\alpha_2}(z_2), z_1) < \epsilon_2.$$

Γενικά, αν έχουμε ορίσει $z_1, z_2, \dots, z_k \in A$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ στο $\mathcal{F}$ και $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k \in (0, \epsilon/2]$ έτσι ώστε

$$d(T^{\alpha_i}(z_i), z_{i-1}) < \epsilon_i \tag{3.16}$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ και

$$z \in X, d(z, z_{i-1}) < \epsilon_i \Rightarrow d(T^{\alpha_{i-1}}(z), z_{i-2}) < \epsilon_{i-1} \tag{3.17}$$

για κάθε $i \in \{2, 3, \dots, k\}$, βρίσκουμε πρώτα $\epsilon_{k+1} \in (0, \epsilon/2]$ τέτοιο ώστε

$$z \in X, \quad d(z, z_k) < \epsilon_{k+1} \quad \Rightarrow \quad d(T^{\alpha_k}(z), z_{k-1}) < \epsilon_k,$$

και κατόπιν χρησιμοποιώντας την υπόθεσή μας για το σύνολο A βρίσκουμε $\alpha_{k+1} > \alpha_k$ στο $\mathcal{F}$ και $z_{k+1} \in A$ ώστε

$$d(T^{\alpha_{k+1}}(z_{k+1}), z_k) < \epsilon_{k+1}.$$

Για την εύρεση του ϵ_{k+1} χρησιμοποιούμε, όπως και για το ϵ_2 , την συνέχεια του T^{α_k} στο z_k : επειδή $\epsilon_k - d(T^{\alpha_k}(z_k), z_{k-1}) > 0$, υπάρχει $\epsilon_{k+1} \in (0, \epsilon/2]$ τέτοιο ώστε $d(T^{\alpha_k}(z), T^{\alpha_k}(z_k)) < \epsilon_k - d(T^{\alpha_k}(z_k), z_{k-1})$ για $z \in Z$ με $d(z, z_k) < \epsilon_{k+1}$, και τότε για τέτοια z έχουμε ότι

$$d(T^{\alpha_k}(z), z_{k-1}) \leq d(T^{\alpha_k}(z), T^{\alpha_k}(z_k)) + d(T^{\alpha_k}(z_k), z_{k-1}) < \epsilon_k.$$

Επαγωγικά λοιπόν ορίζονται άπειρες ακολουθίες $z_1, z_2, \dots \in A$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots$ στο $\mathcal{F}$ και $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots \in (0, \epsilon/2]$, οι οποίες ικανοποιούν τις (3.16) για κάθε $i \in \mathbb{N}$ και (3.17) για κάθε $i \in \{2, 3, \dots\}$. Έπεται ότι για $i < j$ έχουμε τότε ότι

$$d(T^{\alpha_{i+1} \cup \alpha_{i+2} \cup \dots \cup \alpha_j}(z_j), z_i) = d(T^{\alpha_{i+1}} T^{\alpha_{i+2}} \dots T^{\alpha_j}(z_j), z_i) < \epsilon_{i+1} \leq \frac{\epsilon}{2},$$

αφού

$$d(T^{\alpha_j}(z_j), z_{j-1}) < \epsilon_j \Rightarrow d(T^{\alpha_{j-1}}(T^{\alpha_j}(z_j)), z_{j-2}) < \epsilon_{j-1},$$

με την πρώτη ανισότητα να είναι η (3.16) και η συνεπαγωγή να έπεται από την (3.17), και επαγωγικά, με επαναλαμβανόμενη χρήση της (3.17),

$$\begin{aligned} d(T^{\alpha_j}(z_j), z_{j-1}) < \epsilon_j &\Rightarrow d(T^{\alpha_{j-1}} T^{\alpha_j}(z_j), z_{j-2}) < \epsilon_{j-1} \\ &\Rightarrow d(T^{\alpha_{j-2}}(T^{\alpha_{j-1}} T^{\alpha_j}(z_j)), z_{j-3}) < \epsilon_{j-2} \\ &\dots \\ &\Rightarrow d(T^{\alpha_{i+1}}(T^{\alpha_{i+2}} \dots T^{\alpha_{j-1}} T^{\alpha_j}(z_j)), z_i) < \epsilon_{i+1}. \end{aligned}$$

Όμως, μπορούμε να βρούμε ένα ζευγάρι i, j με $i < j$ και $d(z_i, z_j) < \epsilon/2$, λόγω της συμπαγείας του X . Τότε αν θέσουμε $\alpha = \alpha_{i+1} \cup \alpha_{i+2} \cup \dots \cup \alpha_j$ παίρνουμε ότι

$$d(T^\alpha(z_j), z_j) \leq d(T^\alpha(z_j), z_i) + d(z_i, z_j) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \quad \square$$

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του T -ομογενούς συνόλου για σύνολα μετασχηματισμών ενός χώρου.

Ορισμός 3.5.3. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $\{T_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ ένα σύνολο μετασχηματισμών του X στον εαυτό του. Ένα κλειστό σύνολο $A \subseteq X$ θα λέγεται $\{T_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ -**ομογενές**, αν υπάρχει μια ομάδα G ομοιομορφισμών του X της οποίας τα στοιχεία μετατίθενται με κάθε T_α , $\alpha \in \mathcal{A}$, αφήνουν το A αναλλοίωτο και κάνουν το δυναμικό σύστημα (A, G) minimal.

Λήμμα 3.5.4. Έστω $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ IP-σύστημα μετασχηματισμών ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X στον εαυτό του και έστω ότι το A είναι ένα $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ -ομογενές υποσύνολο του X με την ιδιότητα ότι, για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $\beta \in \mathcal{F}$, υπάρχουν $x, y \in A$ και $\alpha > \beta$ τέτοια ώστε $d(T^\alpha(x), y) < \epsilon$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, κάθε $y \in X$ και κάθε $\beta \in \mathcal{F}$, υπάρχουν $x \in X$ και $\alpha > \beta$ τέτοια ώστε $d(T^\alpha(x), y) < \epsilon$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του λήμματος ακολουθεί τα ίδια βήματα με την απόδειξη του Λήμματος 2.1.4. Έστω G μια ομάδα ομοιομορφισμών του X που μετατίθενται με όλα τα T^α , $\alpha \in \mathcal{F}$, αφήνουν το A αναλλοίωτο και για την οποία το σύστημα (A, G) είναι minimal. Ισχυριζόμαστε ότι, για κάθε $\epsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο υποσύνολο $G_0 \subseteq G$ τέτοιο ώστε για κάθε δύο $x, y \in A$ να έχουμε ότι

$$\min_{g \in G_0} d(gx, y) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.18)$$

Πράγματι, έστω $V_1, V_2, \dots, V_n$ μία κάλυψη του A από ανοικτά σύνολα διαμέτρου $< \epsilon/2$ το καθένα. Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ υπάρχουν $g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{im_i} \in G$ τέτοια ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{m_i} g_{ij}^{-1} V_i,$$

από το Λήμμα (1.3.7) και επειδή το (A, G) είναι minimal. Είναι προφανές ότι η (3.18) ικανοποιείται αν θέσουμε $G_0 := \bigcup_{i=1}^n \{g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{im_i}\}$: αν $x, y \in A$, επιλέγουμε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ώστε $y \in V_i$ και κατόπιν $j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$ ώστε $x \in g_{ij}^{-1} V_i$.

Έστω τώρα $y \in A$, $\epsilon > 0$ και $\beta \in \mathcal{F}$. Δοθέντος του G_0 για αυτό το ϵ , υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $x', x'' \in A$ και $d(x', x'') < \delta$ να συνεπάγονται ότι $\max_{g \in G_0} d(gx', gx'') < \epsilon/2$, από την συνέχεια των στοιχείων της G . Εφαρμόζοντας την υπόθεση του Λήμματος για το σύνολο A με το δ στην θέση του ϵ , συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\alpha > \beta$ και $z, x' \in A$ τέτοια ώστε $d(T^\alpha(x'), z) < \delta$. Από την (3.18), υπάρχει και $g \in G_0$ τέτοιο ώστε

$$d(gz, y) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.19)$$

Αφού τα στοιχεία της G μετατίθενται με όλα τα $T^{\alpha'}$, $\alpha' \in \mathcal{F}$, έχουμε ότι

$$d(T^\alpha(gx'), gz) = d(gT^\alpha(x'), gz) < \frac{\epsilon}{2},$$

αφού $d(T^\alpha(x'), z) < \delta$, και η ανισότητα αυτή σε συνδυασμό με την (3.19) δίνει ότι $d(T^\alpha(gx'), y) < \epsilon$. Έχουμε δηλαδή ότι $d(T^\alpha(x), y) < \epsilon$ για $x = gx'$. $\square$

Λήμμα 3.5.5. Έστω $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ ένα IP-σύστημα συνεχών μετασχηματισμών ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X στον εαυτό του και έστω ότι το A είναι ένα $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ -ομογενές υποσύνολο του X με την ιδιότητα ότι, για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $\beta \in \mathcal{F}$, υπάρχουν $x, y \in A$ και $\alpha > \beta$ τέτοια ώστε $d(T^\alpha(x), y) < \epsilon$. Τότε υπάρχει ένα $z \in A$ και ένα IP-υποσύστημα $\{T^{\phi(\alpha)}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ ώστε $T^{\phi(\alpha)}z \rightarrow z$ ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία.

Απόδειξη. Έστω V ανοικτό υποσύνολο του X τέτοιο ώστε $A \cap V \neq \emptyset$. Θεωρούμε ένα μικρότερο ανοικτό $V' \subseteq V$ που εξακολουθεί να τέμνει το A και επιπλέον έχει την ιδιότητα ότι, για κάποιο $\delta > 0$, $\{x \in X \mid d(x, V') \leq \delta\} \subseteq V$. Μπορούμε να βρούμε τέτοια V' και δ , αφού αν πάρουμε ένα $x \in A \cap V$, τότε υπάρχει ένα $\delta' > 0$ ώστε $B(x, \delta') \subseteq V$, όπου $B(x, \delta') \subseteq V$ η ανοικτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας δ' , και αν πάρουμε ένα οποιοδήποτε $\delta \in (0, \delta'/2)$ και $V' = B(x, \delta)$ την ανοικτή μπάλα κέντρου x και ακτίνας δ , τότε έχουμε ότι $V' \subseteq V$, $x \in V' \cap A$ και άρα $V' \cap A \neq \emptyset$, και αν $d(y, V') \leq \delta$ για κάποιο $y \in X$, τότε $d(y, x) \leq 2\delta < \delta'$ και άρα $y \in B(x, \delta') \subseteq V$. Αφού το (A, G) είναι minimal, από το Λήμμα 1.3.7, υπάρχει πεπερασμένο $G_0 \subseteq G$ ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{g \in G_0} g^{-1}V'. \quad (3.20)$$

Από την ομοιόμορφη συνέχεια των $g \in G$ μπορούμε να βρούμε ένα $\epsilon > 0$ ώστε αν $d(x', x'') < \epsilon$ για κάποια $x', x'' \in X$ τότε $d(gx', gx'') < \delta$ για κάθε $g \in G_0$.

Οι συνθήκες μας για το A μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε πρώτα το Λήμμα 3.5.4 και κατόπιν το Λήμμα 3.5.2 για να βρούμε ένα $z' \in A$ και $\alpha \in \mathcal{F}$ με $\alpha > \beta$, τέτοια ώστε $d(T^\alpha(z'), z') < \epsilon$. Υπάρχει όμως από την (3.20) κάποιο $g \in G_0$ ώστε $gz' \in V'$ και από την επιλογή του ϵ , $d(T^\alpha(gz'), gz') < \delta$. Από την επιλογή του δ τώρα, $T^\alpha(gz') \in V$. Συνολικά δείξαμε δηλαδή ότι, για οποιοδήποτε $\beta \in \mathcal{F}$, κάθε ανοικτό σύνολο V που τέμνει το A περιέχει ένα $z'' \in A$ ώστε $T^\alpha(z'') \in V$ για κάποιο $\alpha > \beta$, $\alpha \in \mathcal{F}$. Μπορούμε να συμπεράνουμε τώρα ότι, για κάθε ανοικτό σύνολο V που τέμνει το A , υπάρχει ένα ανοικτό $V'' \subseteq V$ που τέμνει το A και ικανοποιεί την $T^\alpha(V'') \subseteq V$ για κάποιο $\alpha > \beta$, όπου $\beta \in \mathcal{F}$ προκαθορισμένο, αυθαίρετο. Πράγματι, δοθέντων $\beta \in \mathcal{F}$ και V ανοικτού συνόλου που τέμνει το A , υπάρχουν καταρχήν $z'' \in A \cap V$ και $\alpha \in \mathcal{F}$ με $\alpha > \beta$, τέτοια ώστε $T^\alpha(z'') \in V$. τότε το σύνολο $V'' := V \cap (T^\alpha)^{-1}(V)$ τέμνει το A , αφού περιέχει το $z'' \in A$, είναι ανοικτό, αφού ο T^α είναι συνεχής και το V ανοικτό, και προφανώς $V'' \subseteq V$ και $T^\alpha(V'') \subseteq V$.

Κατασκευάζουμε τώρα επαγωγικά μία ακολουθία ανοικτών υποσυνόλων

$$V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \dots$$

του X , καθένα από τα οποία τέμνει το A , και μία ακολουθία

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots$$

πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$T^{\alpha_{n+1}}(V_{n+1}) \subseteq V_n \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

και με

$$\text{diam}(V_n) \rightarrow 0.$$

Πράγματι, επιλέγουμε τα $\alpha_1 \in \mathcal{F}$ και V_1 αυθαίρετα, με το V_1 ανοικτό, να τέμνει το A και με διάμετρο ≤ 1 και κατόπιν, αν έχουν επιλεγεί ανοικτά υποσύνολα $V_1 \supseteq V_2 \supseteq \dots \supseteq V_n$ του X , καθένα από τα οποία τέμνει το A , και πεπερασμένα υποσύνολα $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$ του $\mathbb{N}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε $T^{\alpha_{i+1}}(V_{i+1}) \subseteq V_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ αν $n > 1$ και με $\text{diam}(V_i) \leq 1/i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, επιλέγουμε καταρχήν $z_n \in V_n \cap A$ και κατόπιν ανοικτό σύνολο $V_{n+1} \subseteq V_n \cap B(z_n, 1/(2n+2))$, όπου $B(z_n, 1/(2n+2))$ η ανοικτή μπάλα με κέντρο το z_n και ακτίνα $1/(2n+2)$, ώστε V_{n+1} να τέμνει το A , και να ισχύει $T^{\alpha_{n+1}}(V_{n+1})$ για κάποιο $\alpha_{n+1} > \alpha_n$: αυτό, σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο αυτής της απόδειξης, μπορούμε να το επιτύχουμε επειδή το $V_n \cap B(z_n, 1/(2n+2))$ είναι ανοικτό σύνολο που τέμνει το A .

Τα σύνολα $\overline{V_n} \cap A$, $n \in \mathbb{N}$, αποτελούν φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών συνόλων στον συμπαγή χώρο X , άρα η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\overline{V_n} \cap A)$ είναι μη κενή, και επειδή επιπλέον $\text{diam}(\overline{V_n}) \rightarrow 0$, η τομή αυτή είναι μονοσύνολο, έστω $\{z\}$. Ορίζουμε τον ομομορφισμό $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ με

$$\phi(\{i_1, i_2, \dots, i_k\}) = \alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cup \dots \cup \alpha_{i_k}$$

για $k, i_1, i_2, \dots, i_k \in \mathbb{N}$: ο ϕ είναι ο ομομορφισμός από την Παρατήρηση 3.4.1. Τότε αν $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, θα έχουμε ότι

$$T^{\alpha_{i_1} \cup \alpha_{i_2} \cup \dots \cup \alpha_{i_k}}(V_{i_k}) = T^{\alpha_{i_1}} T^{\alpha_{i_2}} \dots T^{\alpha_{i_k}}(V_{i_k}) \subseteq V_{i_1-1}.$$

Έπεται ότι $T^{\phi(\alpha)}(z) \in V_i$ για κάθε $\alpha > \{1, 2, \dots, i\}$. Αν U αυθαίρετη περιοχή του z υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε η ανοικτή μπάλα $B(z, \epsilon)$ με κέντρο το z και ακτίνα ϵ να περιέχεται στην U . Αν επιλέξουμε $i \in \mathbb{N}$ με $1/i < \epsilon$, τότε $V_i \subseteq B(z, \epsilon)$, αφού $z \in \overline{V_i}$ και $\text{diam}(\overline{V_i}) \leq 1/i < \epsilon$, και άρα $T^{\phi(\alpha)}(z) \in V_i$ για κάθε $\alpha > \{1, 2, \dots, i\}$. Αυτό δείχνει ότι $T^{\phi(\alpha)}(z) \rightarrow z$ ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία. $\square$

Θεώρημα 3.5.6. Έστω $\{S_1^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \{S_2^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \dots, \{S_l^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ IP-συστήματα μετασχηματισμών ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X στον εαυτό του, που περιέχονται όλα σε μία μεταθετική ομάδα ομοιομορφισμών του X . Τότε υπάρχει ένα $x_0 \in X$ και ένας ομομορφισμός $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ώστε

$$S_1^{\phi(\alpha)}(x_0) \rightarrow x_0, S_2^{\phi(\alpha)} x_0 \rightarrow x_0, \dots, S_l^{\phi(\alpha)} x_0 \rightarrow x_0,$$

ως $\mathcal{F}$ -ακολουθίες.

Απόδειξη. Έστω G η μεταθετική ομάδα που περιέχει όλα τα S_i^α , $\alpha \in \mathcal{F}$, $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύστημα (X, G) είναι minimal, αλλιώς θεωρούμε ένα minimal υποσύστημα και βρίσκουμε τότε ένα x_0 όπως ζητείται στο Θεώρημα μέσα στο minimal υποσύστημα. Θα δείξουμε το Θεώρημα με επαγωγή στο l , για (X, G) minimal. Για $l = 1$ ισχύει από το προηγούμενο λήμμα με $A = X$ και $T^\alpha = S_1^\alpha$, $\alpha \in \mathcal{F}$. πράγματι, αφού υποθέτουμε το (X, G) minimal, το $A = X$ είναι $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ -ομογενές και επιπλέον ικανοποιείται η άλλη συνθήκη του λήμματος, αφού δοθέντων $\epsilon > 0$ και $\beta \in \mathcal{F}$, μπορούμε να πάρουμε αυθαίρετο $\alpha > \beta$, αυθαίρετο $x \in X$ και $y = T^\alpha(x)$ και θα έχουμε ότι $d(T^\alpha(x), y) = 0 < \epsilon$.

Έστω τώρα ότι ο ισχυρισμός του Θεωρήματος ισχύει για οποιαδήποτε l IP-συστήματα $\{S_1^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \{S_2^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \dots, \{S_l^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ μετασχηματισμών ενός συμπαγούς μετρικού χώρου στον εαυτό του που περιέχονται όλα σε μία μεταθετική ομάδα ομοιομορφισμών του χώρου, για κάποιο $l \in \mathbb{N}$, και θεωρούμε $l + 1$ IP-συστήματα $\{S_1^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \{S_2^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \dots, \{S_l^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \{S_{l+1}^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ του X στον εαυτό του που περιέχονται όλα σε μία μεταθετική ομάδα ομοιομορφισμών G του X , με το (X, G) minimal. Ορίζουμε τις απεικονίσεις $T_i^\alpha = S_i^\alpha (S_{l+1}^\alpha)^{-1}$ για $i = 1, 2, \dots, l$ και $\alpha \in \mathcal{F}$. Αν $\alpha < \beta$, τότε για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$,

$$\begin{aligned} T_i^{\alpha \cup \beta} &= S_i^{\alpha \cup \beta} (S_{l+1}^{\alpha \cup \beta})^{-1} = S_i^\alpha S_i^\beta (S_{l+1}^\alpha S_{l+1}^\beta)^{-1} \\ &= S_i^\alpha S_i^\beta (S_{l+1}^\beta)^{-1} (S_{l+1}^\alpha)^{-1} = T_i^\alpha T_i^\beta, \end{aligned}$$

η δεύτερη ισότητα επειδή τα $\{S_i^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ και $\{S_{l+1}^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ είναι IP-συστήματα μετασχηματισμών και $\alpha < \beta$ και η τελευταία επειδή όλα τα S_j^γ , $j \in \{1, 2, \dots, l+1\}$, $\gamma \in \mathcal{F}$, μετατίθενται μεταξύ τους. Έπεται ότι κάθε $\{T_i^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$, $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, είναι IP-σύστημα μετασχηματισμών του X και προφανώς κάθε $\{T_i^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ περιέχεται στην G . Από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχουν λοιπόν ένα $z \in X$ και ομομορφισμός $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ώστε $T_i^{\phi(\alpha)}(z) \rightarrow z$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$, ως $\mathcal{F}$ -ακολουθίες.

Θεωρούμε τώρα το χώρο X^{l+1} και τους $T^\alpha = S_1^\alpha \times S_2^\alpha \times \dots \times S_{l+1}^\alpha$, $\alpha \in \mathcal{F}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η διαγώνιος $\Delta^{(l+1)}$ περιέχει ένα σημείο $x_0^* = (x_0, x_0, \dots, x_0)$ τέτοιο ώστε $T^\alpha(x_0^*) = S_1^\alpha \times S_2^\alpha \times \dots \times S_{l+1}^\alpha(x_0, x_0, \dots, x_0) \rightarrow x_0^*$, ως $\mathcal{F}$ -ακολουθία.

Η διαγώνιος $\Delta^{(l+1)}$ είναι $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ -ομογενές σύνολο. Πράγματι, θεωρούμε, ως συνήθως, την δράση της G επί του X^{l+1} που δίνεται από την

$$(x_1, x_2, \dots, x_{l+1}) \xrightarrow{g} (gx_1, gx_2, \dots, gx_{l+1}),$$

$g \in G$. Η διαγώνιος $\Delta^{(l+1)}$ είναι G -αναλλοίωτη ως προς αυτήν την δράση, αφού $\Delta^{(l+1)} \ni (x, x, \dots, x) \xrightarrow{g} (gx, gx, \dots, gx) \in \Delta^{(l+1)}$ για κάθε $g \in G$, η δράση

κάθε $g \in G$ στον X^{l+1} μετατίθεται με κάθε T^α , $\alpha \in \mathcal{F}$, αφού

$$\begin{aligned} gT^\alpha(x_1, x_2, \dots, x_{l+1}) &= g(S_1^\alpha(x_1), S_2^\alpha(x_2), \dots, S_{l+1}^\alpha(x_{l+1})) \\ &= (gS_1^\alpha(x_1), gS_2^\alpha(x_2), \dots, gS_{l+1}^\alpha(x_{l+1})) \\ &= (S_1^\alpha(gx_1), S_2^\alpha(gx_2), \dots, S_{l+1}^\alpha(gx_{l+1})) \\ &= T^\alpha(gx_1, gx_2, \dots, gx_{l+1}) \\ &= T^\alpha g(x_1, x_2, \dots, x_{l+1}) \end{aligned}$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$ και $g \in G$, $(x_1, x_2, \dots, x_{l+1}) \in X^{l+1}$, επειδή κάθε S_i^α , $\alpha \in \mathcal{F}$, $i \in \{1, 2, \dots, l+1\}$, μετατίθεται με κάθε $g \in G$, και τέλος το σύστημα $(\Delta^{(l+1)}, G)$ είναι minimal, επειδή η δράση της G επί του X είναι minimal. η απόδειξη αυτού του τελευταίου ισχυρισμού, του minimality δηλαδή του συστήματος $(\Delta^{(l+1)}, G)$, όταν η G δρα με τον παραπάνω τρόπο στο $X^{(l+1)}$, όταν το (X, G) είναι minimal, έχει δοθεί στην απόδειξη της Πρότασης 2.2.3.

Από το προηγούμενο λήμμα τώρα, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και για κάθε $\beta \in \mathcal{F}$, υπάρχουν $x^*, y^* \in \Delta^{(l+1)}$ ώστε για κάποιο $\alpha > \beta$ να έχουμε $d_{X^{l+1}}(T^\alpha(x^*), y^*) < \epsilon$, όπου $d_{X^{l+1}}$ η μετρική στον χώρο γινόμενο X^{l+1} . Ορίζουμε τα σημεία

$$x_\alpha = \left((S_{l+1}^\alpha)^{-1}(z), (S_{l+1}^\alpha)^{-1}(z), \dots, (S_{l+1}^\alpha)^{-1}(z) \right) \in \Delta^{(l+1)},$$

$\alpha \in \mathcal{F}$, και

$$y^* = (z, z, \dots, z) \in \Delta^{l+1}.$$

τότε

$$T^\alpha(x_\alpha) = (T_1^\alpha(z), T_2^\alpha(z), \dots, T_l^\alpha(z), z),$$

για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$. Αφού $T_i^{\phi(\alpha)}(z) \rightarrow z$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$, ως $\mathcal{F}$ -ακολουθίες, από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι, για δοθέν $\epsilon > 0$, υπάρχουν $\alpha_1(\epsilon), \alpha_2(\epsilon), \dots, \alpha_l(\epsilon) \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $d(T_i^{\phi(\alpha)}(z), z) < \epsilon$ για $\alpha > \alpha_i(\epsilon)$, για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$. Αν θέσουμε $\alpha(\epsilon) = \alpha_1(\epsilon) \cup \alpha_2(\epsilon) \cup \dots \cup \alpha_l(\epsilon)$, τότε προφανώς $d(T_i^{\phi(\alpha)}(z), z) < \epsilon$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$, για $\alpha > \alpha(\epsilon)$. Όμως

$$\begin{aligned} d_{X^{l+1}}(T^{\phi(\alpha)}(x_{\phi(\alpha)}), y^*) \\ = d_{X^{l+1}}((T_1^{\phi(\alpha)}(z), T_2^{\phi(\alpha)}(z), \dots, T_l^{\phi(\alpha)}(z), z), (z, z, \dots, z)), \end{aligned}$$

και αν, όπως έχουμε δικαίωμα, επιλέξουμε την μετρική $d_{X^{l+1}}$ στο χώρο γινόμενο να είναι η

$$d_{X^{l+1}}((x'_1, x'_2, \dots, x'_{l+1}), (x''_1, x''_2, \dots, x''_{l+1})) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, l+1\}} d(x'_i, x''_i),$$

τότε έχουμε ότι

$$d_{X^{l+1}}(T^{\phi(\alpha)}(x_{\phi(\alpha)}), y^*) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, l\}} d(T_i^{\phi(\alpha)}(z), z) < \epsilon \quad (3.21)$$

για κάθε $\alpha > \alpha(\epsilon)$. Τέλος, επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του Ισχυρισμού της σελίδας 97 στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.10, για να βρούμε $\alpha > \alpha(\epsilon)$ με $\phi(\alpha) > \beta$ για δοθέν $\beta \in \mathcal{F}$. Για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, \max \beta\}$, επιλέγουμε ένα $\beta_i \in \mathcal{F}$ με $i \in \phi(\beta_i)$, αν υπάρχει τέτοιο β_i , και θέτουμε $\beta_i = \emptyset$ αλλιώς. Το $\alpha(\epsilon) \cup \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, \max \beta\}} \beta_i$ είναι πεπερασμένο σύνολο και έστω $\alpha' \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\alpha' > \alpha(\epsilon) \cup \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, \max \beta\}} \beta_i$. Τότε $\phi(\alpha') \cap \{1, 2, \dots, \max \beta\} = \emptyset$, γιατί αν $i \in \phi(\alpha') \cap \{1, 2, \dots, \max \beta\}$, τότε $\beta_i \neq \emptyset$, αφού $i \in \phi(\alpha')$ και άρα υπάρχει $\beta_i \in \mathcal{F}$ με $i \in \phi(\beta_i)$, και $\alpha' \cap \beta_i \neq \emptyset$, αφού αν ήταν $\alpha' \cap \beta_i = \emptyset$ θα έπρεπε να είχαμε ότι $\phi(\alpha') \cap \phi(\beta_i) = \emptyset$, ενώ έχουμε ότι $i \in \phi(\alpha') \cap \phi(\beta_i)$. δηλαδή δείξαμε ότι $i \in \phi(\alpha') \cap \{1, 2, \dots, \max \beta\} \Rightarrow \alpha' \cap \beta_i \neq \emptyset$, που φυσικά είναι άτοπο, από την επιλογή του α' . Για δοθέν $\beta \in \mathcal{F}$, έχουμε βρει λοιπόν ένα $\alpha' \in \mathcal{F}$ με $\alpha' > \alpha(\epsilon)$ και $\phi(\alpha') > \beta$. Για αυτό το α' συνεπώς ισχύει ότι $d_{X^{l+1}}(T^{\phi(\alpha')}(x_{\phi(\alpha')}), y^*) < \epsilon$, από την (3.21), και επομένως αν θέσουμε $\alpha = \phi(\alpha')$ και $x^* = x_\alpha$, έχουμε ότι $\alpha > \beta$ και $d_{X^{l+1}}(T^\alpha(x^*), y^*) < \epsilon$. $\square$

Σαν συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος παίρνουμε το εξής.

Πρόταση 3.5.7. Έστω $\{S_1^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \{S_2^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \dots, \{S_l^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ IP-συστήματα μετασχηματισμών ενός συμπαγούς μετρικού χώρου X στον εαυτό του, που περιέχονται όλα σε μία μεταθετική ομάδα G ομοιομορφισμών του X η οποία κάνει το δυναμικό σύστημα (X, G) *minimal*. Τότε για κάθε U ανοικτό υποσύνολο του X , υπάρχει ένα IP-υποσύνολο $\{\phi(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{F}\}$ του $\mathcal{F}$ ώστε $\bigcap_{i=1}^l (S_i^{\phi(\alpha)})^{-1}(U) \neq \emptyset$, για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$.

Απόδειξη. Αφού το (X, G) είναι *minimal*, υπάρχει, για κάθε ανοικτό $U \subseteq X$, ένα πεπερασμένο $G_0 \subseteq G$ ώστε να ισχύει $X = \bigcup_{g \in G_0} g^{-1}U$ (Λήμμα 1.3.7). Το $\{g^{-1}U \mid g \in G_0\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς X , άρα υπάρχει $\delta > 0$, ένας αριθμός Lebesgue του καλύμματος, ώστε κάθε σύνολο διαμέτρου μικρότερης από δ να περιέχεται σε κάποιο $g^{-1}U$ για κάποιο $g \in G_0$.

Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει ένα σημείο x_0 και ένας ομομορφισμός $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ώστε $S_i^{\psi(\alpha)}(x_0) \rightarrow x_0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$, ως $\mathcal{F}$ -ακολουθίες. Επομένως υπάρχει ένα $\alpha_0 \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε για κάθε $\alpha > \alpha_0$ να έχουμε $d(S_i^{\psi(\alpha)}(x_0), x_0) < \delta/2$ για όλα τα $i = 1, 2, \dots, l$. Ορίζουμε $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ως

$$\phi(\alpha) = \phi(\{i_1, \dots, i_k\}) = \psi(\{i_1 + i_0, \dots, i_k + i_0\}) = \psi(\alpha + i_0), \quad (3.22)$$

για $\alpha = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \in \mathcal{F}$, όπου $i_0 = \max \alpha_0$. Τότε $d(S_i^{\phi(\alpha)}(x_0), x_0) < \delta/2$ για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$ και κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. Επομένως για κάθε $a \in \mathcal{F}$, τα

$S_1^{\phi(\alpha)}(x_0), S_2^{\phi(\alpha)}(x_0), \dots, S_l^{\phi(\alpha)}(x_0)$ απέχουν το πολύ δ μεταξύ τους, και άρα, από την επιλογή του δ , ανήκουν όλα σε κάποιο $g^{-1}U$ με $g \in G_0$. Όμως

$$S_i^{\phi(\alpha)}(x_0) \in g^{-1}U \Leftrightarrow gS_i^{\phi(\alpha)}(x_0) \in U \Leftrightarrow S_i^{\phi(\alpha)}(gx_0) \in U$$

για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ και $\alpha \in \mathcal{F}$, αφού $S_i^{\phi(\alpha)} \in G$ για κάθε $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ και $\alpha \in \mathcal{F}$ και η G είναι μεταθετική, οπότε

$$gx_0 \in \bigcap_{i=1}^l (S_i^{\phi(\alpha)})^{-1}(U)$$

και το τελευταίο σύνολο είναι μη κενό, για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$.

Μένει μόνο να δείξουμε ότι η (3.22) ορίζει ομομορφισμό στο $\mathcal{F}$. Αυτό όμως είναι άμεσο. Αν $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ με $\alpha \cap \beta = \emptyset$, τότε

$$(\alpha + i_0) \cap (\beta + i_0) = \{i + i_0 \mid i \in \alpha\} \cap \{j + i_0 \mid j \in \beta\} = \emptyset,$$

αφού $i + i_0 = j + i_0$ για κάποια $i \in \alpha$ και $j \in \beta$ αν και μόνο αν $i = j$, δηλαδή $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$. Έπεται ότι

$$\alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \phi(\alpha) \cap \phi(\beta) = \psi(\alpha + i_0) \cap \psi(\beta + i_0) = \emptyset,$$

αφού ο ψ είναι ομομορφισμός. Επίσης, για $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$,

$$(\alpha \cup \beta) + i_0 = (\alpha + i_0) \cup (\beta + i_0),$$

αφού $n \in (\alpha \cup \beta) + i_0$ αν και μόνο αν υπάρχει $i \in \alpha \cup \beta$ ώστε $n = i + i_0$ και τότε είτε $n \in \alpha + i_0$ είτε $n \in \beta + i_0$ και αντιστρόφως, αν $n \in (\alpha + i_0) \cup (\beta + i_0)$ τότε είτε υπάρχει $i \in \alpha$ ώστε $n = i + i_0$ είτε υπάρχει $j \in \beta$ ώστε $n = j + i_0$, οπότε σε κάθε περίπτωση, υπάρχει $k \in \alpha \cup \beta$ ώστε $n = k + i_0$, δηλαδή $n \in (\alpha \cup \beta) + i_0$. Έπεται τώρα και ότι

$$\begin{aligned} \phi(\alpha \cup \beta) &= \psi((\alpha \cup \beta) + i_0) = \psi((\alpha + i_0) \cup (\beta + i_0)) \\ &= \psi(\alpha + i_0) \cup \psi(\beta + i_0) = \phi(\alpha) \cup \phi(\beta) \end{aligned}$$

για αυθαίρετα $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$, αφού ο ψ είναι ομομορφισμός. □

Μπορεί κανείς τώρα να χρησιμοποιήσει αυτήν την πρόταση, και μάλιστα μια ασθενέστερη μορφή της, για να δώσει μία απόδειξη του θεωρήματος των I. Schur και A. Brauer, το οποίο αποτελεί γενίκευση των Θεωρημάτων van der Waerden και Schur.

Θεώρημα 3.5.8 (Schur–Brauer). Έστω $\mathbb{N} = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_q$ πεπερασμένη διαμέριση των φυσικών αριθμών. Τότε υπάρχει ένα j ώστε, για κάθε $l \in \mathbb{N}$ να υπάρχουν $d \in B_j$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $n + id \in B_j$ για κάθε $i = 1, \dots, l$.

Απόδειξη. Έστω $\Lambda = \{1, 2, \dots, q\}$, $\Omega = \Lambda^{\mathbb{Z}}$ και $T: \Omega \rightarrow \Omega$ το shift $T(\omega)(n) = \omega(n+1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε, ως συνήθως, $\xi \in \Omega$ από τις

$$\xi(n) = \begin{cases} j & \text{αν } n \in B_j, j \in \{1, 2, \dots, q\} \\ 1 & \text{αν } n \leq 0. \end{cases}$$

Από το Θεώρημα 3.2.9, υπάρχει ένα ομοιόμορφα επανερχόμενο σημείο $\omega \in \overline{\text{Orb}(\xi, T)}$ που είναι proximal με το ξ , και μάλιστα από την απόδειξη του θεωρήματος έχουμε ότι το ω ανήκει σε ένα minimal υποσύνολο της κλειστής θήκης της τροχιάς $A \subseteq \overline{\text{Orb}(\xi, T)}$ του ξ . εναλλακτικά, $\omega \in \overline{\text{Orb}(\omega, T)}$, από την Παρατήρηση 1.1.4, και το $A := \overline{\text{Orb}(\omega, T)}$ είναι minimal γιατί το ω είναι ομοιόμορφα επανερχόμενο (Θεώρημα 1.3.9). Έστω $j = \omega(0)$. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.2, το B_j περιέχει κεντρικό σύνολο, το $S = \{n \in \mathbb{N} \mid T^n(\xi) \in U_\omega\}$ όπου U_ω η περιοχή

$$U_\omega = \{\omega' \in \Omega \mid \omega'(0) = j\} = \{\omega' \in \Omega \mid d(\omega', \omega) < 1\}$$

του ω , όπου d η μετρική (2.11) στο Ω , αφού για $n \in \mathbb{N}$, $T^n(\xi) \in U_\omega \Leftrightarrow \xi(n) = j \Leftrightarrow n \in B_j$ και επομένως από την Πρόταση 3.3.4 το B_j περιέχει ένα IP-σύνολο. Δηλαδή για κάποια ακολουθία $p_1, p_2, \dots$ φυσικών αριθμών, το B_j περιέχει όλα τα πεπερασμένα αθροίσματα $\{p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}, i_1 < i_2 < \dots < i_k\}$. ή, γράφοντας $n_\alpha = \sum_{i \in \alpha} p_i$, $\alpha \in \mathcal{F}$, το B_j περιέχει το IP-σύνολο $\{n_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$.

Έστω ένα $l \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε το σύνολο

$$U = \{x \in A \mid x(0) = j\} = U_\omega \cap A,$$

το οποίο είναι ανοικτό στο A . Έστω $S = T|_A$ ο περιορισμός του T στο A . επειδή το A είναι minimal για τον T , έχουμε ότι $T(A) = A$ και ο S είναι ομοιομορφισμός του A στον εαυτό του. Αν θεωρήσουμε τα IP-συστήματα μετασχηματισμών $\{S^{n_\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \{S^{2n_\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}, \dots, \{S^{ln_\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{F}}$ του A , τα οποία περιέχονται όλα στην αβελιανή ομάδα $G = \{S^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ομοιομορφισμών του A , τότε από την Πρόταση 3.5.7 για τον χώρο A και το ανοικτό στον A σύνολο U , υπάρχει ένα $\alpha \in \mathcal{F}$ ώστε

$$\bigcap_{i=1}^l S^{-in_\alpha}(U) \neq \emptyset.$$

Δηλαδή υπάρχει ένα $x \in A$ ώστε $T^{in_\alpha}(x)(0) = j$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. Αν τώρα $x = T^n(\xi)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε $T^{in_\alpha}(x)(0) = T^{n+in_\alpha}(\xi)(0) = j$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$, που σημαίνει ότι βρήκαμε ένα $n \in \mathbb{N}$ και ένα $d = n_\alpha \in B_j$ ώστε $\xi(n+id) = j$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. Στην γενική περίπτωση υπάρχει $k_n \rightarrow \infty$ ώστε $T^{k_n}(\xi) \rightarrow x$, αφού $x \in A \subseteq \overline{\text{Orb}(\xi, T)}$. Τότε υπάρχει

$n \in \mathbb{N}$ ώστε η απόσταση των $T^n(\xi)$ και x να είναι τόσο μικρή ώστε να έχουμε $T^n(\xi)(0) = x(0), T^n(\xi)(1) = x(1), \dots, T^n(\xi)(ln_\alpha) = x(ln_\alpha)$, και συνεπώς βρήκαμε πάλι $n \in \mathbb{N}$ και ένα $d = n_\alpha \in B_j$ ώστε $\xi(n + id) = j$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. Από τον ορισμό του ξ , βρήκαμε $n \in \mathbb{N}$ και $d \in B_j$ τέτοια ώστε $n + id \in B_j$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, l$. $\square$

3.6 Το θεώρημα των Hales και Jewett

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μια δυναμική απόδειξη του θεωρήματος Hales–Jewett. Για ένα πεπερασμένο αλφάβητο Λ θα συμβολίζουμε με $W_n(\Lambda)$ τις λέξεις μήκους n . Έστω πεπερασμένο αλφάβητο Λ . Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό ενός **combinatorial line** του $W_n(\Lambda)$. Έστω $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \{t\}$ όπου $t \notin \Lambda$ και έστω λέξη $w(t) \in W_n(\bar{\Lambda})$ ή οποία περιέχει το γράμμα t . Για $a \in \Lambda$, συμβολίζουμε $w(a)$ την λέξη που προκύπτει αν στην $w(t)$ αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση του t με a . Τότε το σύνολο $\{w(a) \mid a \in \Lambda\}$ είναι ένα combinatorial line. Για ένα παράδειγμα θεωρούμε το αλφάβητο $\Lambda = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Αν πάρουμε τη λέξη $w(t) = 1t1$, μήκους 3, τότε αυτή ορίζει ένα combinatorial line, το σύνολο $\{111, 121, 131, 141, 151\}$, ενώ η λέξη $w(t) = t1t$ ορίζει το combinatorial line $\{111, 212, 313, 414, 515\}$.

Θεώρημα 3.6.1 (Hales–Jewett). Έστω $r \in \mathbb{N}$ και πεπερασμένο αλφάβητο Λ . Υπάρχει φυσικός αριθμός $c = c(|\Lambda|, r)$ ώστε, αν $n \geq c$, τότε για κάθε r -διαμέριση του συνόλου $W_n(\Lambda) = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r$ υπάρχει ένα B_j το οποίο περιέχει μια combinatorial line.

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο της απλής αφαίρεσης ‘ $-$ ’ και για τη συνολοθεωρητική διαφορά $A \setminus B$ όταν $B \subseteq A$, το σύμβολο της απλής πρόσθεσης ‘ $+$ ’ και για μία ξένη ένωση συνόλων $A \cup B$ και το σύμβολο του πολλαπλασιασμού ‘ $\cdot$ ’ και για το καρτεσιανό γινόμενο $A \times B$. Αν S είναι ένα σύνολο, θα συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(S)$ το σύνολο των πεπερασμένων υποσυνόλων του S , συμπεριλαμβανομένου και του $\emptyset$. Τέλος, για $q \in \mathbb{N}$, $p_q := \{1, 2, \dots, q\}$.

Πρόταση 3.6.2. Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος και $q \in \mathbb{N}$. Έστω και S ένα άπειρο σύνολο, θέτουμε $V = \{1, 2, \dots, q\} \times S$ και έστω $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}(V)}$ ένα σύστημα συνεχών μετασχηματισμών του X στον εαυτό του που ικανοποιούν την $T^{\alpha \cup \beta} = T^\alpha T^\beta$, ή ισοδύναμα $T^{\alpha + \beta} = T^\alpha T^\beta$ με τον προαναφερθέντα συμβολισμό, για $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(V)$ με $\alpha \cap \beta = \emptyset$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathcal{F}(S)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$ να υπάρχουν $n \subseteq N$, $n \neq \emptyset$, και $\alpha \subseteq p_q \cdot (N - n)$, τέτοια ώστε για κάθε $p \in A = \{p_1, p_2, \dots, p_q\}$ να ισχύει

$$d(T^{\alpha + p \cdot n}(x), T^\alpha(x)) < \epsilon. \quad (3.23)$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο q . Για $q = 1$ η Πρόταση ανάγεται στο εξής. Δίνονται συμπαγής μετρικός χώρος X , ένα άπειρο σύνολο S και ένα σύστημα συνεχών μετασχηματισμών $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}(S)}$ που ικανοποιούν την $T^{\alpha \cup \beta} = T^\alpha T^\beta$ για $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(S)$ με $\alpha \cap \beta = \emptyset$ και πρέπει να αποδείξουμε ότι, για αυθαίρετο $\epsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathcal{F}(S)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $n \subseteq N$, με $n \neq \emptyset$, και $\alpha \subseteq N - n$, τέτοια ώστε $d(T^{\alpha+n}(x), T^\alpha(x)) < \epsilon$.

Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα ότι για οποιαδήποτε $k + 1$ στοιχεία του X υπάρχουν πάντα δύο που απέχουν απόσταση μικρότερη από ϵ . Μπορούμε να βρούμε τέτοιο k αν θεωρήσουμε ανοικτό κάλυμμα του X από σύνολα διαμέτρου μικρότερης από ϵ : τότε λόγω συμπαγείας θα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, του οποίου ο πληθύνισμος είναι το ζητούμενο k . Θεωρούμε τώρα $k + 1$ ξένα ανά δύο μη κενά σύνολα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1} \in \mathcal{F}(S)$, $k + 1$ διακεκριμένα μονοσύνολα για παράδειγμα, και θέτουμε

$$N = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k+1} = \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \dots \cup \alpha_{k+1}.$$

Τότε, αν $x \in X$, από την επιλογή του k , κάποια δύο από τα $k + 1$ σημεία $T^{\alpha_1}(x), T^{\alpha_1+\alpha_2}(x), \dots, T^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_{k+1}}(x)$ του X απέχουν απόσταση μικρότερη από ϵ μεταξύ τους. Έστω ότι αυτά είναι τα $T^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_i}(x)$ και $T^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_j}(x)$, και έστω ότι $i < j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$. Θέτουμε τότε

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i \quad \text{και} \quad n = \alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \dots + \alpha_j$$

και έχουμε ότι $n \subseteq N$, $\alpha \subseteq N$ και $\alpha \cap n = \emptyset$, οπότε $\alpha \subseteq N - n$, και

$$d(T^{\alpha+n}(x), T^\alpha(x)) = d(T^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_j}(x), T^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_i}(x)) < \epsilon.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η Πρόταση ισχύει για οποιονδήποτε συμπαγή μετρικό χώρο X και τον φυσικό αριθμό $q - 1$, με $q > 1$, και οποιοδήποτε άπειρο σύνολο S και σύστημα συνεχών μετασχηματισμών $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}(\{1, 2, \dots, q-1\} \times S)}$ του X στον εαυτό του και θεωρούμε έναν συμπαγή μετρικό χώρο X και ένα άπειρο σύνολο S και σύστημα συνεχών μετασχηματισμών $\{T^\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{F}(V)}$ του X στον εαυτό του, όπου $V = \{1, 2, \dots, q\} \times S$. Ορίζουμε το σύνολο

$$B = \{p_2 - p_1, p_3 - p_1, \dots, p_q - p_1\},$$

το οποίο περιέχει $q - 1$ το πλήθος στοιχεία. Από την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε ότι, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα $N \in \mathcal{F}(S)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $n \subseteq N$, $n \neq \emptyset$, και $\alpha \subseteq (p_q - p_1) \cdot (N - n)$ ώστε για κάθε $r \in B$ να ισχύει ότι $d(T^{\alpha+r \cdot n}(x), T^\alpha(x)) < \epsilon$. Πράγματι, θεωρούμε τον χώρο $V' := \{1, 2, \dots, q - 1\} \times S$ και σε κάθε $\alpha' \in \mathcal{F}(V')$ αντιστοιχούμε ένα $\alpha \in \mathcal{F}(\{2, 3, \dots, q\} \times S) \subseteq \mathcal{F}(V)$ ως εξής

$$\begin{aligned} \alpha' &= \{(i_1, s_1), (i_2, s_2), \dots, (i_l, s_l)\} \\ &\mapsto \alpha = \{(i_1 + 1, s_1), (i_2 + 1, s_2), \dots, (i_l + 1, s_l)\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Θεωρούμε και το σύστημα συνεχών μετασχηματισμών $\{S^{\alpha'}\}_{\alpha' \in V'}$ με $S^{\alpha'} := T^{\alpha}$, $\alpha' \in \mathcal{F}(V')$. Παρατηρούμε ότι αν $\alpha', \beta' \in \mathcal{F}(V')$ με

$$\alpha' = \{(i_1, s_1), (i_2, s_2), \dots, (i_l, s_l)\} \quad \text{και} \quad \beta' = \{(j_1, t_1), (j_2, t_2), \dots, (j_m, t_m)\}$$

ικανοποιούν την $\alpha' \cap \beta' = \emptyset$, τότε $\alpha \cap \beta = \emptyset$, όπου τα $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(V)$ προκύπτουν από τα α', β' όπως στην (3.24), αφού $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$ αν και μόνο αν $(i_k + 1, s_k) = (j_{k'} + 1, t_{k'})$ για κάποια $k \in \{1, 2, \dots, l\}$ και $k' \in \{1, 2, \dots, m\}$, οπότε $(i_k, s_k) = (j_{k'}, t_{k'})$ για αυτά τα k και k' και άρα $\alpha' \cap \beta' \neq \emptyset$. Επίσης, στην περίπτωση αυτή, η (3.24) στέλνει το

$$\alpha' \cup \beta' = \{(i_1, s_1), (i_2, s_2), \dots, (i_l, s_l), (j_1, t_1), (j_2, t_2), \dots, (j_m, t_m)\}$$

στο

$$\{(i_1 + 1, s_1), (i_2 + 1, s_2), \dots, (i_l + 1, s_l), (j_1 + 1, t_1), (j_2 + 1, t_2), \dots, (j_m + 1, t_m)\} = \alpha \cup \beta$$

και επομένως έχουμε ότι

$$S^{\alpha' \cup \beta'} = T^{\alpha \cup \beta} = T^{\alpha} T^{\beta} = S^{\alpha'} S^{\beta'},$$

ή ισοδύναμα $S^{\alpha' + \beta'} = S^{\alpha'} S^{\beta'}$. Από την επαγωγική υπόθεση λοιπόν παίρνουμε ότι, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα $N \in \mathcal{F}(S)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $n \subseteq N$, $n \neq \emptyset$, και $\alpha' \subseteq \{1, 2, \dots, q-1\} \times (N-n)$, ώστε για κάθε $r \in \{p_1, p_2, \dots, p_{q-1}\}$ να ισχύει ότι

$$d(S^{\alpha' + r \cdot n}(x), S^{\alpha'}(x)) < \epsilon. \quad (3.25)$$

Όμως αν $\alpha' = \{(i_1, s_1), (i_2, s_2), \dots, (i_l, s_l)\} \in \{1, 2, \dots, q-1\} \times (N-n)$ και $r = p_i$ για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, q-1\}$, τότε η (3.24) αντιστοιχεί το

$$\alpha' + r \cdot n = \{(i_1, s_1), (i_2, s_2), \dots, (i_l, s_l)\} \cup (\{1, 2, \dots, i\} \times n)$$

στο

$$\begin{aligned} & \{(i_1 + 1, s_1), (i_2 + 1, s_2), \dots, (i_l + 1, s_l)\} \cup (\{2, 3, \dots, i+1\} \times n) \\ & = \alpha + (\{2, 3, \dots, i+1\} \times n) = \alpha + (p_{i+1} - p_1) \cdot n \end{aligned}$$

και η (3.25) γίνεται

$$d(T^{\alpha + r \cdot n}(x), T^{\alpha}(x))$$

για κάθε $r \in B$, με $\alpha \in \{2, 3, \dots, q\} \times (N-n) = (p_q - p_1) \cdot (N-n)$.

Έστω $\epsilon > 0$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε $k+1$ στοιχεία του X να υπάρχουν πάντα δύο που απέχουν απόσταση μικρότερη από $\epsilon/2$. Μπορούμε να βρούμε τέτοιο k , όπως παραπάνω, αν θεωρήσουμε ανοικτό κάλυμμα του X από σύνολα διαμέτρου μικρότερης από $\epsilon/2$: τότε λόγω συμπαγείας θα υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα, του οποίου ο πληθάνριθμος είναι το ζητούμενο k .

Θέτουμε $\epsilon_0 = \epsilon/(2k)$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα $N_0 \in \mathcal{F}(S)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in X$, να υπάρχουν $n \subseteq N_0$, με $n \neq \emptyset$, και $\alpha \subseteq (p_q - p_1) \cdot (N_0 - n)$ ώστε για κάθε $r \in B$ να ισχύει ότι $d(T^{\alpha+r \cdot n}(x), T^\alpha(x)) < \epsilon_0$.

Έστω $\epsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε, αν $d(y_1, y_2) < \epsilon_1$, $y_1, y_2 \in X$, τότε

$$d(T^\beta(y_1), T^\beta(y_2)) < \epsilon_0$$

για κάθε $\beta \subseteq p_q \cdot N_0$: υπάρχει τέτοιο ϵ_1 από την ομοιόμορφη συνέχεια των T^β και το γεγονός ότι τα υποσύνολα του $p_q \cdot N_0$ είναι πεπερασμένα το πλήθος. Για αυτό το ϵ_1 , από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει $N_1 \in \mathcal{F}(S)$, το οποίο μπορούμε να το διαλέξουμε ξένο από το N_0 αν σε αυτό το βήμα εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση με $S - N_0$ στη θέση του S , το οποίο παραμένει άπειρο σύνολο, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχουν $n \subseteq N_1$, $n \neq \emptyset$, και $\alpha \subseteq (p_q - p_1) \cdot (N_1 - n)$ ώστε για κάθε $r \in B$ να ισχύει ότι $d(T^{\alpha+r \cdot n}(x), T^\alpha(x)) < \epsilon_1$.

Έστω ότι έχουν οριστεί $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_i$ και $N_0, N_1, \dots, N_i \in \mathcal{F}$. Βρίσκουμε $\epsilon_{i+1} > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(y_1, y_2) < \epsilon_{i+1}$, $y_1, y_2 \in X$, τότε $d(T^\beta(y_1), T^\beta(y_2)) < \epsilon_0$ για κάθε $\beta \subseteq p_q \cdot (N_0 + N_1 + \dots + N_i)$. Τότε, από την επαγωγική υπόθεση, υπάρχει $N_{i+1} \in \mathcal{F}$ ξένο προς τα $N_0, N_1, \dots, N_i$, τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχουν $n \subseteq N_{i+1}$, με $n \neq \emptyset$, και $\alpha \subseteq (p_q - p_1) \cdot (N_{i+1} - n)$ ώστε για κάθε $r \in B$ να ισχύει ότι $d(T^{\alpha+r \cdot n}(x), T^\alpha(x)) < \epsilon_{i+1}$.

Μπορούμε να ορίσουμε λοιπόν ϵ_i και N_i μέχρι $i = k$, όπου το k έχει επιλεγεί παραπάνω, και τελικά θέτουμε $N = N_0 + N_1 + \dots + N_k$.

Σταθεροποιούμε ένα $x \in X$. Θέτουμε $y_k = T^{p_1 \cdot N_k}(x)$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό του N_k για το y_k : υπάρχουν $n_k \subseteq N_k$ και $\alpha_k \subseteq (p_q - p_1) \cdot (N_k - n_k)$ ώστε για κάθε $r \in B$ να ισχύει

$$d(T^{\alpha_k+r \cdot n_k}(y_k), T^{\alpha_k}(y_k)) < \epsilon_k.$$

Κατόπιν θέτουμε $y_{k-1} = T^{\alpha_k+p_1 \cdot (N_{k-1}+N_k)}(x)$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό του N_{k-1} για το y_{k-1} : υπάρχουν $n_{k-1} \subseteq N_{k-1}$ και $\alpha_{k-1} \subseteq (p_q - p_1) \cdot (N_{k-1} - n_{k-1})$ ώστε για κάθε $r \in B$ να ισχύει

$$d(T^{\alpha_{k-1}+r \cdot n_{k-1}}(y_{k-1}), T^{\alpha_{k-1}}(y_{k-1})) < \epsilon_{k-1}.$$

Έστω ότι έχουν οριστεί $n_k, n_{k-1}, \dots, n_i$ και $\alpha_k, \alpha_{k-1}, \dots, \alpha_i$. Θέτουμε

$$y_{i-1} = T^{\alpha_i+\dots+\alpha_{k-1}+\alpha_k+p_1 \cdot (N_{i-1}+\dots+N_{k-1}+N_k)}(x)$$

και εφαρμόζουμε τον ορισμό του N_{i-1} για το y_{i-1} : υπάρχουν $n_{i-1} \subseteq N_{i-1}$ και $\alpha_{i-1} \subseteq (p_q - p_1) \cdot (N_{i-1} - n_{i-1})$ ώστε για κάθε $r \in B$ να ισχύει

$$d(T^{\alpha_{i-1}+r \cdot n_{i-1}}(y_{i-1}), T^{\alpha_{i-1}}(y_{i-1})) < \epsilon_{i-1}.$$

Συνεχίζουμε αυτή την επαγωγική διαδικασία μέχρι $i = 0$. Ορίζονται τότε, για κάθε $0 \leq i \leq k$, $\emptyset \neq n_i \subseteq N_i$ και $\alpha_i \subseteq (p_q - p_1) \cdot (N_i - n_i)$. Επιπλέον, αφού τα $N_0, N_1, \dots, N_k$ είναι ξένα ανά δύο, για κάθε $0 \leq i \leq j \leq k$ και $p \in A = \{p_1, p_2, \dots, p_q\}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} [p \cdot (n_j + \dots + n_i) + (\alpha_j + \dots + \alpha_0) + p_1 \cdot (N_j + \dots + N_0 - n_j - \dots - n_0)] \\ \cap [\alpha_{j+1} + (p - p_1) \cdot n_{j+1}] = \emptyset. \end{aligned} \quad (3.26)$$

πράγματι, αφού τα $N_0, N_1, \dots, N_k$ είναι ξένα ανά δύο, τα $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ είναι ξένα ανά δύο, τα $n_0, n_1, n_2, \dots, n_k$ είναι ξένα ανά δύο και επίσης κάθε n_i είναι ξένο προς κάθε α_j , $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, k\}$. τέλος ακόμη κάθε $p_i - p_1$ είναι ξένο προς το p_1 . Επίσης για κάθε $0 \leq j \leq k$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \alpha_k + \dots + \alpha_0 + p_1 \cdot (N_k + \dots + N_0 - n_j - \dots - n_0) \\ \subseteq (p_q - p_1) \cdot (N_k - n_k + \dots + N_0 - n_0) + p_1 \cdot (N_k + \dots + N_0 - n_j - \dots - n_0) \\ \subseteq p_q \cdot (N_k + \dots + N_0 - n_j - \dots - n_0). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ορίζουμε, για $i = 0, 1, \dots, k$,

$$x_i = T^{\alpha_k + \dots + \alpha_0 + p_1 \cdot (N_k + \dots + N_0 - n_j - \dots - n_0)}(x).$$

Θα δείξουμε ότι για κάθε $0 \leq i < j \leq k$ και κάθε $p \in A$,

$$d(T^{p \cdot (n_j + \dots + n_{i+1})}(x_j), x_i) \leq \frac{\epsilon}{2k}(j - i). \quad (3.28)$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $(j - i)$.

Σταθεροποιούμε ένα $i \in \{0, 1, \dots, k - 1\}$ και θεωρούμε ότι η (3.28) ισχύει για το ζευγάρι $(i, j - 1)$, δηλαδή θεωρούμε ότι

$$d(T^{p \cdot (n_{j-1} + \dots + n_{i+1})}(x_{j-1}), x_i) \leq \frac{\epsilon}{2k}(j - i - 1),$$

αν $j - 1 > i$. Ξεκινάμε δε την επαγωγή από την τετριμμένη

$$d(x_i, x_i) \leq \frac{\epsilon}{2k}(j - i - 1) = 0,$$

που αντιστοιχεί στην περίπτωση $j - 1 = i$. Από τον ορισμό του n_j έχουμε ότι

$$d(T^{\alpha_j + (p - p_1) \cdot n_j}(y_j), T^{\alpha_j}(y_j)) < \epsilon_j,$$

όπου $y_j = T^{\alpha_{j+1}+\dots+\alpha_{k-1}+\alpha_k+p_1 \cdot (N_j+\dots+N_{k-1}+N_k)}(x)$ για $j \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ και $y_k = T^{p_1 \cdot N_k}(x)$, όπως ορίστηκε παραπάνω. Από τον ορισμό τώρα του ϵ_j , για

$$\begin{aligned} \beta &= p \cdot (n_{j-1} + \dots + n_{i+1}) + \alpha_{j-1} + \dots + \alpha_0 \\ &\quad + p_1 \cdot (N_{j-1} + \dots + N_0 - n_{j-1} - \dots - n_0) \subseteq p_q \cdot (N_0 + \dots + N_{j-1}) \end{aligned}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} d(T^{p \cdot (n_{j-1}+\dots+n_{i+1})+\alpha_{j-1}+\dots+\alpha_0+p_1 \cdot (N_{j-1}+\dots+N_0-n_{j-1}-\dots-n_0)} T^{\alpha_j+(p-p_1) \cdot n_j}(y_j), \\ T^{p \cdot (n_{j-1}+\dots+n_{i+1})+\alpha_{j-1}+\dots+\alpha_0+p_1 \cdot (N_{j-1}+\dots+N_0-n_{j-1}-\dots-n_0)} T^{\alpha_j}(y_j)) < \frac{\epsilon}{2k}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των y_j , x_j και την (3.26) παίρνουμε

$$\begin{aligned} T^{p \cdot (n_{j-1}+\dots+n_{i+1})+\alpha_{j-1}+\dots+\alpha_0+p_1 \cdot (N_{j-1}+\dots+N_0-n_{j-1}-\dots-n_0)} T^{\alpha_j+(p-p_1) \cdot n_j}(y_j) \\ = T^{p \cdot (n_j+\dots+n_{i+1})+\alpha_k+\dots+\alpha_0+p_1 \cdot (N_k+\dots+N_0-n_j-\dots-n_0)}(x) \\ = T^{p \cdot (n_j+\dots+n_{i+1})}(x_j) \end{aligned}$$

και επίσης

$$\begin{aligned} T^{p \cdot (n_{j-1}+\dots+n_{i+1})+\alpha_{j-1}+\dots+\alpha_0+p_1 \cdot (N_{j-1}+\dots+N_0-n_{j-1}-\dots-n_0)} T^{\alpha_j}(y_j) \\ = T^{p \cdot (n_{j-1}+\dots+n_{i+1})+\alpha_k+\dots+\alpha_0+p_1 \cdot (N_k+\dots+N_0-n_{j-1}-\dots-n_0)}(x)x \\ = T^{p \cdot (n_{j-1}+\dots+n_{i+1})}(x_{j-1}). \end{aligned}$$

Από την τριγωνική ανισότητα και την επαγωγική υπόθεση έχουμε τότε ότι, για κάθε $p \in A$,

$$\begin{aligned} d(T^{p \cdot (n_j+\dots+n_{i+1})}(x_j), x_i) \\ \leq d(T^{p \cdot (n_j+\dots+n_{i+1})}(x_j), T^{p \cdot (n_{j-1}+\dots+n_{i+1})}(x_{j-1})) + d(T^{p \cdot (n_{j-1}+\dots+n_{i+1})}(x_{j-1}), x_i) \\ \leq \frac{\epsilon}{2k} + \frac{\epsilon}{2k}(j-i-1) \\ = \frac{\epsilon}{2k}(j-i). \end{aligned}$$

Όμως από την επιλογή του k , από τα $x_0, \dots, x_k$ υπάρχουν δύο, έστω τα x_i, x_j με $i < j$, τα οποία απέχουν απόσταση μικρότερη από $\epsilon/2$. Θέτουμε

$$n = n_j + \dots + n_{i+1}$$

και

$$\alpha = \alpha_k + \dots + \alpha_0 + p_1 \cdot (N_k + \dots + N_0 - n_j - \dots - n_0).$$

Τότε $x_j = T^\alpha(x)$ και από την (3.28) παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(T^{\alpha+p \cdot n}(x), T^\alpha(x)) &= d(T^{p \cdot n}(x_j), x_j) \leq d(T^{p \cdot n}(x_j), x_i) + d(x_j, x_i) \\ &< \frac{\epsilon}{2k}(j-i) + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Τέλος, επαληθεύουμε ότι πράγματι $n \subseteq N$, $n \neq \emptyset$ και ότι, λόγω της (3.27), $\alpha \subseteq p_q \cdot (N - n)$. $\square$

Για την απόδειξη του θεωρήματος Hales–Jewett θα χρειαστούμε την συνδυαστική διατύπωση της παραπάνω πρότασης. Έστω ένα $r \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τον χώρο γινόμενο $X = \{1, 2, \dots, r\}^{\mathcal{F}(V)}$, όπου $V = \{1, 2, \dots, q\} \times \mathbb{N}$, ο οποίος είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος. Ως συνήθως, τα στοιχεία του X είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τις διαμερίσεις του $\mathcal{F}(V)$ σε r σύνολα: μία διαμέριση $\mathcal{F}(V) = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r$ του $\mathcal{F}(V)$ σε r σύνολα αντιστοιχεί στο στοιχείο x του X με $x(\alpha) = i \Leftrightarrow \alpha \in B_i$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Μία μετρική συμβατή με την τοπολογία γινόμενο στον X είναι η

$$d(x, x') := \inf \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x(\alpha) = x'(\alpha) \text{ για κάθε } |\alpha| < n \right\},$$

και όπου $|\alpha|$ συμβολίζει τον πληθύνειο του $\alpha \in \mathcal{F}(V)$. Η δράση του $\mathcal{F}(V)$ στο X ορίζουμε να είναι η

$$(T^\alpha(x))(\beta) = x(\alpha \cup \beta).$$

Προφανώς ικανοποιείται η $T^{\alpha \cup \beta} = T^\alpha T^\beta$, και μάλιστα για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(V)$, ανεξάρτητα από το αν $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ή όχι, αφού $(T^{\alpha \cup \beta}(x))(\gamma) = x(\alpha \cup \beta \cup \gamma)$ και αν $y = T^\beta(x)$, τότε $(T^\alpha T^\beta(x))(\gamma) = (T^\alpha(y))(\gamma) = y(\alpha \cup \gamma) = x(\beta \cup \alpha \cup \gamma)$, για όλα τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}(V)$. Κάθε T^α , $\alpha \in \mathcal{F}(V)$, είναι επίσης συνεχής. Πράγματι, δοθέντων $\alpha \in \mathcal{F}(V)$ και $\epsilon > 0$, έστω $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_\epsilon \leq \epsilon$ και έστω $\delta := 1/(|\alpha| + n_\epsilon)$. τότε αν $d(x, y) < \delta$, τότε $x(\gamma) = y(\gamma)$ για κάθε $\gamma \in \mathcal{F}(V)$ με $|\gamma| < \alpha + n_\epsilon$, οπότε $x(\alpha \cup \beta) = y(\alpha \cup \beta)$ για κάθε $\beta \in \mathcal{F}(V)$ με $|\beta| < n_\epsilon$, αφού $|\alpha \cup \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ και άρα $|\beta| < n_\epsilon \Rightarrow |\alpha \cup \beta| < |\alpha| + n_\epsilon$. Δηλαδή $d(x, y) < \delta$ συνεπάγεται ότι $(T^\alpha(x))(\beta) = (T^\alpha(y))(\beta)$ για κάθε $\beta \in \mathcal{F}(V)$ με $|\beta| < n_\epsilon$, και επομένως ότι $d(T^\alpha(x), T^\alpha(y)) \leq 1/(n_\epsilon + 1) < \epsilon$.

Από την Πρόταση 3.6.2, δοθέντος $\epsilon > 0$, υπάρχει ένα $N \subseteq \mathcal{F}$ ώστε, για κάθε διαμέριση $\mathcal{F}(V) = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r$ του $\mathcal{F}(V)$, δηλαδή για κάθε $x \in X$, να υπάρχουν $\emptyset \neq n \subseteq N$ και $\alpha \subseteq p_q \cdot (N - n)$ ώστε, τα $T^{\alpha+p \cdot n}(x), T^\alpha(x)$ να είναι ϵ κοντά, για κάθε $p \in A$. Αν επιλέξουμε $\epsilon = 1$, παίρνουμε ότι $(T^{\alpha+p \cdot n}(x))(\emptyset) = (T^\alpha(x))(\emptyset)$, δηλαδή $x(\alpha + p \cdot n) = x(\alpha)$, για κάθε $p \in A$. Έπεται ότι, τα σύνολα $\alpha + p \cdot n$, $p \in A$, ανήκουν όλα στο ίδιο σύνολο $B_{x(\alpha)}$ της διαμέρισης. Δείξαμε δηλαδή το ακόλουθο.

Πρόταση 3.6.3. Έστω $q, r \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε $V = \{1, 2, \dots, q\} \times \mathbb{N}$ και συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(V)$ τα πεπερασμένα υποσύνολά του. Τότε υπάρχει $N \in \mathcal{F}$ ώστε, για κάθε διαμέριση $\mathcal{F}(V) = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r$ του $\mathcal{F}(V)$ σε r σύνολα, υπάρχουν $n \subseteq N$ με $n \neq \emptyset$ και $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (N - n)$ τέτοια ώστε το σύνολο

$$L = \{\alpha \cup (\{1\} \times n), \alpha \cup (\{1, 2\} \times n), \dots, \alpha \cup (\{1, 2, \dots, q\} \times n)\}$$

να είναι μονοχρωματικό, δηλαδή να περιέχεται σε ένα άτομο B_i της διαμέρισης.

Υπάρχει ένα $M \in \mathbb{N}$ ώστε η παραπάνω πρόταση να ισχύει και για το $V = \{1, 2, \dots, q\} \times \{1, 2, \dots, M\}$. Έχουμε δηλαδή το εξής.

Πρόταση 3.6.4. Έστω $q, r \in \mathbb{N}$. Υπάρχει ένα $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, αν $V_M = \{1, 2, \dots, q\} \times \{1, 2, \dots, M\}$ και $\mathcal{F}(V_M)$ τα πεπερασμένα υποσύνολά του, τότε για κάθε διαμέριση του $\mathcal{F}(V_M)$ σε r σύνολα $B_1, B_2, \dots, B_r$, υπάρχουν $n \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$ με $n \neq \emptyset$ και $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (\{1, 2, \dots, M\} - n)$ τέτοια ώστε, το σύνολο

$$L = \{\alpha \cup (\{1\} \times n), \alpha \cup (\{1, 2\} \times n), \dots, \alpha \cup (\{1, 2, \dots, q\} \times n)\} \quad (3.29)$$

να είναι μονοχρωματικό, δηλαδή να περιέχεται σε ένα άτομο B_i της διαμέρισης $B_1, B_2, \dots, B_r$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η Πρόταση 3.6.3 συνεπάγεται την Πρόταση 3.6.4. Έστω, προς άτοπο, ότι για κάθε $M \in \mathbb{N}$ υπάρχει διαμέριση $B_1^{(M)}, B_2^{(M)}, \dots, B_r^{(M)}$ του $\mathcal{F}(V_M)$ τέτοια ώστε, για κάθε μη κενό $n \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$ και κάθε $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (\{1, 2, \dots, M\} - n)$, το σύνολο L της (3.29) να μην περιέχεται σε ένα μόνο άτομο $B_i^{(M)}$ της διαμέρισης $B_1^{(M)}, B_2^{(M)}, \dots, B_r^{(M)}$. Ορίζουμε επίσης ένα στοιχείο x_M του $X = \{1, 2, \dots, r\}^{\mathcal{F}(\{1, 2, \dots, q\} \times \mathbb{N})}$ ορίζοντας $x_M(\alpha) = i$ αν $\alpha \in \mathcal{F}(V_M) = \mathcal{F}(\{1, 2, \dots, q\} \times \{1, 2, \dots, M\})$ και $\alpha \in B_i^{(M)}$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, και ορίζοντας το $x_M(\alpha)$ αυθαίρετα, με $x_M(\alpha) \in \{1, 2, \dots, r\}$ πάντα, για όλα τα υπόλοιπα $\alpha \in \mathcal{F}(\{1, 2, \dots, q\} \times \mathbb{N})$ δηλαδή τα $\alpha \in \mathcal{F}(\{1, 2, \dots, q\} \times \mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}(\{1, 2, \dots, q\} \times \{1, 2, \dots, M\})$.

Από συμπάγεια, η ακολουθία $(x_M)_{M \in \mathbb{N}}$ έχει υπακολουθία $(x_{M_k})_{k \in \mathbb{N}}$, όπου $M_1 < M_2 < \dots$, που συγκλίνει σε κάποιο $x \in X = \{1, 2, \dots, r\}^{\mathcal{F}(\{1, 2, \dots, q\} \times \mathbb{N})}$. Το x ορίζει μία διαμέριση του X σε r σύνολα $B_1, B_2, \dots, B_r$ μέσω της $\alpha \in B_i \Leftrightarrow x(\alpha) = i$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Από την Πρόταση (3.6.3), υπάρχει ένα σύνολο $N \in \mathcal{F}$ με την ιδιότητα ότι υπάρχουν σύνολα $\emptyset \neq n \subseteq N$ και $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (N - n)$ τέτοια ώστε το σύνολο L της (3.29) να περιέχεται σε ένα άτομο B_i της διαμέρισης $B_1, B_2, \dots, B_r$ του X , να είναι δηλαδή μονοχρωματικό.

Από την σύγκλιση $x_{M_k} \rightarrow x$, και για $\epsilon = 1/(q|N| + 1)$, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(x_{M_k}, x) < \epsilon$ για κάθε $k \geq k_0$. Τότε, για $k \geq k_0$, $x_{M_k}(\beta) = x(\beta)$ για κάθε $\beta \in \mathcal{F}(\{1, 2, \dots, q\} \times \mathbb{N})$ με $|\beta| \leq q|N|$. Όμως

$$\begin{aligned} \alpha \cup (\{1, 2, \dots, j\} \times n) &\subseteq \alpha \cup (\{1, 2, \dots, q\} \times n) \\ &\subseteq (\{1, 2, \dots, q\} \times (N - n)) \cup (\{1, 2, \dots, q\} \times n) \\ &= \{1, 2, \dots, q\} \times N \end{aligned}$$

για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, q\}$. επομένως $|\alpha \cup (\{1, 2, \dots, j\} \times n)| \leq q|N|$ και άρα $x(\alpha \cup (\{1, 2, \dots, j\} \times n)) = x_{M_k}(\alpha \cup (\{1, 2, \dots, j\} \times n))$ για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ και κάθε $k \geq k_0$. Έπεται ότι υπάρχει $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ τέτοιο ώστε

$$x_{M_k}(\alpha \cup (\{1, 2, \dots, j\} \times n)) = i \quad \text{για κάθε } j \in \{1, 2, \dots, q\} \text{ και κάθε } k \geq k_0. \quad (3.30)$$

Έστω τώρα k με $k \geq k_0$ και τέτοιο ώστε $N \subseteq \{1, 2, \dots, M_k\}$. Τότε $n \subseteq N \subseteq \{1, 2, \dots, M_k\}$ και

$$\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (N - n) \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (\{1, 2, \dots, M_k\} - n).$$

Επίσης, το σύνολο

$$L = \{\alpha \cup (\{1\} \times n), \alpha \cup (\{1, 2\} \times n), \dots, \alpha \cup (\{1, 2, \dots, q\} \times n)\}$$

περιέχεται στο $\mathcal{F}(V_{M_k})$, αφού $\alpha \cup (\{1, 2, \dots, j\} \times n) \subseteq V_{M_k}$ για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, και είναι μονοχρωματικό, από την (3.30), περιέχεται δηλαδή σε ένα άτομο $B_i^{(M_k)}$ της διαμέρισης $B_1^{(M_k)}, B_2^{(M_k)}, \dots, B_r^{(M_k)}$. Αυτό όμως αντίκειται στον τρόπο που επιλέχθηκαν οι διαμερίσεις $B_1^{(M)}, B_2^{(M)}, \dots, B_r^{(M)}$ των $\mathcal{F}(V_M)$, $M \in \mathbb{N}$. $\square$

Πόρισμα 3.6.5. Έστω $q, r \in \mathbb{N}$. Υπάρχει ένα $M_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε η Πρόταση 3.6.4 να ισχύει για κάθε $M \geq M_0$. Δηλαδή, για κάθε $M \geq M_0$, αν $V_M = \{1, 2, \dots, q\} \times \{1, 2, \dots, M\}$ και $\mathcal{F}(V_M)$ τα πεπερασμένα υποσύνολά του, τότε για κάθε διαμέριση του $\mathcal{F}(V_M)$ σε r σύνολα $B_1, B_2, \dots, B_r$, υπάρχουν $n \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$ με $n \neq \emptyset$ και $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (\{1, 2, \dots, M\} - n)$ τέτοια ώστε, το σύνολο

$$L = \{\alpha \cup (\{1\} \times n), \alpha \cup (\{1, 2\} \times n), \dots, \alpha \cup (\{1, 2, \dots, q\} \times n)\}$$

να είναι μονοχρωματικό, δηλαδή να περιέχεται σε ένα άτομο B_i της διαμέρισης $B_1, B_2, \dots, B_r$.

Απόδειξη. Η απόδειξη συνίσταται στην παρατήρηση ότι αν η Πρόταση 3.6.4 ισχύει για κάποιο M , για δεδομένα q και r , τότε ισχύει και για κάθε $M' \geq M$,

για τα ίδια q και r . Πράγματι, έστω $q, r \in \mathbb{N}$ και $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε διαμέριση του $\mathcal{F}(V_M)$ σε r σύνολα $B_1, B_2, \dots, B_r$, υπάρχουν $n \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$ με $n \neq \emptyset$ και $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (\{1, 2, \dots, M\} - n)$ τέτοια ώστε, το σύνολο L της (3.29) να είναι μονοχρωματικό, δηλαδή να περιέχεται σε ένα άτομο B_i της διαμέρισης $B_1, B_2, \dots, B_r$. Έστω $M' > M$ και $B_1, B_2, \dots, B_r$ διαμέριση του $\mathcal{F}(V_{M'})$ σε r σύνολα. Επειδή $V_M \subset V_{M'}$, έχουμε ότι $\mathcal{F}(V_M) \subset \mathcal{F}(V_{M'})$ και τα $B_1 \cap \mathcal{F}(V_M), B_2 \cap \mathcal{F}(V_M), \dots, B_r \cap \mathcal{F}(V_M)$ αποτελούν διαμέριση του $\mathcal{F}(V_M)$. Υπάρχουν λοιπόν ένα μη κενό $n \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$ και $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (\{1, 2, \dots, M\} - n)$ τέτοια ώστε το σύνολο L της (3.29) να περιέχεται σε ένα άτομο $B_i \cap \mathcal{F}(V_M)$ της διαμέρισης $B_1 \cap \mathcal{F}(V_M), B_2 \cap \mathcal{F}(V_M), \dots, B_r \cap \mathcal{F}(V_M)$. Τότε προφανώς $n \subseteq \{1, 2, \dots, M'\}$, $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (\{1, 2, \dots, M'\} - n)$ και $L \subseteq B_i$. $\square$

Θα δείξουμε τώρα πώς η παραπάνω πρόταση συνεπάγεται το θεώρημα Hales–Jewett.

Απόδειξη του Hales–Jewett. Έστω $r \in \mathbb{N}$ και Λ ένα πεπερασμένο αλφάβητο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να το θεωρήσουμε ότι $\Lambda = \{1, 2, \dots, q\}$ για κάποιο $q \in \mathbb{N}$. Από την Πρόταση 3.6.4 για το ζευγάρι $r, q \in \mathbb{N}$, υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, αν $V = \{1, 2, \dots, q\} \times \{1, 2, \dots, M\}$, τότε για κάθε διαμέριση του $\mathcal{F}(V)$ σε r σύνολα $B_1, B_2, \dots, B_r$, υπάρχουν $n \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$ με $n \neq \emptyset$ και $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (\{1, 2, \dots, M\} - n)$ τέτοια ώστε, το σύνολο

$$L = \{\alpha \cup (\{1\} \times n), \alpha \cup (\{1, 2\} \times n), \dots, \alpha \cup (\{1, 2, \dots, q\} \times n)\} \quad (3.31)$$

να είναι μονοχρωματικό, δηλαδή να περιέχεται σε ένα άτομο B_i της διαμέρισης $B_1, B_2, \dots, B_r$.

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση $\varphi: \mathcal{F}(V) \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}^M$ με

$$\varphi(\beta) = (|\beta_1| \vee 1, |\beta_2| \vee 1, \dots, |\beta_M| \vee 1),$$

όπου για $\beta \in \mathcal{F}(V)$ θέτουμε

$$\beta_j := \{i \in \{1, 2, \dots, q\} : (i, j) \in \beta\},$$

$j \in \{1, 2, \dots, M\}$, $|\gamma|$ συμβολίζει τον πληθάρημο ενός πεπερασμένου συνόλου γ και $a \vee b = \max\{a, b\}$ για πραγματικούς αριθμούς a και b . Κάθε διαμέριση $B_1, B_2, \dots, B_r$ του $\{1, 2, \dots, q\}^M$ επάγει, μέσω της φ , την διαμέριση $\varphi^{-1}(B_1), \varphi^{-1}(B_2), \dots, \varphi^{-1}(B_r)$ του $\mathcal{F}(V)$. Το μονοχρωματικό υποσύνολο L του $\mathcal{F}(V)$ της (3.31), με n και α αυτά που αντιστοιχούν σε αυτήν την διαμέριση $\varphi^{-1}(B_1), \varphi^{-1}(B_2), \dots, \varphi^{-1}(B_r)$, αντιστοιχεί τότε σε μονοχρωματικό σύνολο στο $\{1, 2, \dots, q\}^M$. πιο συγκεκριμένα, υπάρχει $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ τέτοιο ώστε $L \subseteq \varphi^{-1}(B_i)$, οπότε $\varphi(L) \subseteq B_i$.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το $\varphi(L)$ είναι cominatorial line για το αλφάβητο $\Lambda = \{1, 2, \dots, q\}$. Πράγματι, για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, q\}$, και με τον συμβολισμό $p_j = \{1, 2, \dots, j\}$, έχουμε ότι

$$\varphi(\alpha \cup (p_j \times n)) = (|(\alpha \cup (p_j \times n))_1| \vee 1, |(\alpha \cup (p_j \times n))_2| \vee 1, \dots, |(\alpha \cup (p_j \times n))_M| \vee 1),$$

όπου

$$\begin{aligned} & |(\alpha \cup (p_j \times n))_k| \\ &= |\{m \in \{1, 2, \dots, q\} : (m, k) \in \alpha \cup (p_j \times n)\}| \\ &= |\{m \in \{1, 2, \dots, q\} : (m, k) \in \alpha\} \cup \{m \in \{1, 2, \dots, q\} : (m, k) \in p_j \times n\}| \\ &= \begin{cases} j & \text{αν } k \in n \\ |\alpha_k| & \text{αν } k \in \{1, 2, \dots, M\} - n, \end{cases} \end{aligned}$$

η τελευταία ισότητα επειδή $\alpha \subseteq \{1, 2, \dots, q\} \times (\{1, 2, \dots, M\} - n)$ και επομένως, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, M\}$, μόνο ένα από τα

$$\{m \in \{1, 2, \dots, q\} : (m, k) \in \alpha\} \quad \text{και} \quad \{m \in \{1, 2, \dots, q\} : (m, k) \in p_j \times n\}$$

μπορεί να είναι μη κενό. Επομένως, αν συμβολίσουμε με $w(t) = (w_1, w_2, \dots, w_M)$ την λέξη μήκους M στο $\bar{\Lambda}^M = (\{1, 2, \dots, q\} \cup \{t\})^M$ με

$$w_k := \begin{cases} t & \text{αν } k \in n \\ |\alpha_k| \vee 1 & \text{αν } k \in \{1, 2, \dots, M\} - n, \end{cases}$$

τότε το $\varphi(L)$ είναι το combinatorial line $\{w(j) \mid j \in \{1, 2, \dots, q\}\}$, και σύμφωνα με τα παραπάνω περιέχεται στο άτομο B_i της διαμέρισης $B_1, B_2, \dots, B_r$.

Τέλος, μπορούμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα για κάθε $M \geq M_0$, όπου M_0 όπως στο Πρόσλημα 3.6.5 για το ζευγάρι q και r , και η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης. $\square$

Βιβλιογραφία

- [1] J. Auslander. On the proximal relation in topological dynamics. *Proc. Amer. Math. Soc.* **11** (1960), 890–895.
- [2] M. Beiglböck, V. Bergelson, T. Downarowicz, A. Fish. Solvability of Rado systems in D-sets. *Topology and its Applications* **156** (2009), 2565–2571.
- [3] V. Bergelson. Ultrafilters, IP sets, Dynamics, and Combinatorial Number Theory. *Contemporary Mathematics* **530** (2010), 23–47.
- [4] V. Bergelson, A. Leibman. Set-polynomials and polynomial extension of the Hales–Jewett theorem. *Ann. of Math.* **150** (1999), 33–75.
- [5] V. Bergelson. Combinatorial and Diophantine applications of ergodic theory. Appendix A by A. Leibman and Appendix B by Anthony Quas and Máté Wierdl. *Handbook of dynamical systems. Vol. 1B*. Elsevier B. V., Amsterdam, 2006, pp. 746–869.
- [6] A. Brauer. Über Sequenzen von Potenzresten. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.* (1928), 9–16.
- [7] R. Ellis. A semigroup associated with a transformation group. *Trans. Amer. Math. Soc.* **94** (1960), 272–281.
- [8] H. Furstenberg. *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981.
- [9] H. Furstenberg, B. Weiss. Topological dynamics and combinatorial number theory. *J. Anal. Math.* **34** (1978) 61—85.
- [10] A. W. Hales, R. I. Jewett. Regularity and positional games. *Trans. Amer. Math. Soc.* **106** (1963), 222–229.
- [11] G. H. Hardy, J. E. Littlewood. The fractional part of $n^k\theta$. *Acta Math.* **37** (1914), 155–191.

- [12] D. Hilbert. Über die Irreduzibilität ganzer rationaler Funktionen mit ganzzahligen Koeffizienten. *J. Math.* **110** (1892), 104–129.
- [13] N. Hindman. Finite sums from sequences within cells of a partition of $\mathbb{N}$. *J. Combinatorial Theory* (A) **17** (1974), 1–11.
- [14] K. Namakura. On bicomact semigroups. *Math. J. Okayama University* **1** (1952), 99–108.
- [15] R. Rado. Studien zur Kombinatorik. *Math. Z.* **36** (1933), 424–480.
- [16] I. Schur. Über die Kongruenz $x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$. *Jahresbericht der Deutschen Math.-Ver.* **25** (1916), 114–117.
- [17] L. B. van der Waerden. Beweis einer Baudetschen Vermutung. *Nieuw. Arch. Wisk.* **15** (1927), 212–216.

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση αυτής της μεταπτυχιακής διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όσους συνέβαλαν στην εκπόνησή της.

Πρωτίστως θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή, κ. Δημήτρη Γατζούρα, για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε, τόσο στην επιλογή του θέματος όσο και στην συμπεριληφθείσα ύλη της διπλωματικής εργασίας, την επιστημονική του καθοδήγηση, τις υποδείξεις του, την υπομονή του και το αμείωτο ενδιαφέρον που έδειξε από την αρχή έως και το τέλος.

Επίσης θέλω να απευθύνω ευχαριστίες στην κ. Βασιλική Φαρμάκη και στον κ. Παντελή Δοδό για τη βοήθειά τους ως μέλη της τριμελούς επιτροπής. Επιπλέον ευχαριστίες θέλω να απευθύνω στον κ. Αριστείδη Κατάβολο για τις χρήσιμες υποδείξεις του.

Θέλω να ευχαριστήσω τους φίλους και συμφοιτητές, Μαριάννα Σπυράκου και Άρη Πετρόπουλο, καθώς και τον Νίκο Παπαγεωργίου για την υπέρμετρη υπομονή.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου και την οικογένειά μου για όλη τη στήριξη και την κατανόηση που έδειξαν καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Αυτή η εργασία είναι αφιερωμένη σε αυτούς.