



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αλγοριθμικές Τεχνικές για προβλήματα μέτρησης σε γραφήματα

Διπλωματική εργασία

Μαρία Καλογιάννη

Τριμελής Επιτροπή:

Θηλυκός Δημήτριος, Καθηγητής, Τμήμα
Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

Κολλιόπουλος Σταύρος, Καθηγητής, Τμήμα
Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών, ΕΚΠΑ.

Δρακόπουλος Μιχάλης, Επίκουρος Καθηγητής,
Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ.

Επιβλέπων:

Θηλυκός Δημήτριος, Καθηγητής,
Τμήμα Μαθηματικών,
ΕΚΠΑ.

Τμήμα Μαθηματικών
Ιανουάριος 2019, Αθήνα

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
«Θεωρητικά Μαθηματικά»
που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών
του
Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών

Εγκρίθηκε την από Εξεταστική Επιτροπή
αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο

Βαθμίδα

Υπογραφή

1.

2.

3.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της καταμέτρησης του πλήθους των εναγόμενων υπογραφημάτων με k κορυφές, ενός δοσμένου γραφήματος G , που έχουν άρτια ποσότητα ακμών, και αυτά τα υπογραφήματα τα καλούμε άρτια υπογραφήματα. Αρχικά, θα διερευνήσουμε τα δομικά χαρακτηριστικά που πρέπει να έχει ένα γράφημα ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη, ή όχι, τουλάχιστον ενός άρτιου εναγόμενου υπογραφήματος k κορυφών. Με την βοήθεια φράγματος της θεωρίας Ramsey, θα καταλήξουμε ότι, για γραφήματα με μεγάλο πλήθος ακμών, η ύπαρξη τουλάχιστον ενός άρτιου εναγόμενου γραφήματος k κορυφών μπορεί πολύ εύκολα να αποφασιστεί, ελέγχοντας αν το γράφημα G ανήκει σε κάποιες συγκεκριμένες οικογένειες γραφημάτων, το πλήθος των οποίων είναι πολύ μικρό, και εξετάζοντας κάποιες απλές αριθμητικές σχέσεις για το k . Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω δεδομένα, θα κατασκευάσουμε έναν παραμετρικό αλγόριθμο, με παράμετρο το k , που θα αποφασίζει αν ένα γράφημα περιέχει ένα τέτοιο υπογράφημα με k κορυφές. Επιπλέον, συναντάμε ένα απροσδόκητο αποτέλεσμα, που μας εξασφαλίζει ότι αν ένα γράφημα n κορυφών έχει τουλάχιστον ένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών, όπου το n είναι αρκετά πιο μεγάλο από το k , τότε θα έχει ένα μεγάλο πλήθος τέτοιων υπογραφημάτων. Μάλιστα το πλήθος αυτών των υπογραφημάτων είναι επαρκώς μεγάλο ώστε η μέθοδος της τυχαίας δειγματοληψίας να παρέχει μια καλή εκτίμηση του συνολικού πλήθους τέτοιων υπογραφημάτων χωρίς απαιτούνται υπερβολικά πολλές δοκιμές. Αντίστοιχη μελέτη γίνεται για το πρόβλημα απόφασης ύπαρξης περιττών εναγόμενων υπογραφημάτων k κορυφών, δηλαδή υπογραφημάτων έχουν περιττό πλήθος ακμών, όπως και για το αντίστοιχο πρόβλημα καταμέτρησης.

ABSTRACT

Given a graph G , we study the problem of counting the number of even induced subgraphs with k vertices. As even graph, we call a graph that has even number of vertices. Firstly, we will present the structural results that a graph should satisfy in order to have at least one even induced subgraph with k vertices. Using a lower bound from Ramsey theory, we will conclude that, for graphs with enough large number of vertices, the existence of at least one even induced subgraph k vertices can be easily decided by checking if the graph G belongs in a certain and small group of graph families, and checking some simple arithmetic relations for k . Using the above, we design a parameterized algorithm, with k as parameter, that decides whether there is an even subgraph in the given graph in k vertices. Moreover, we find an unexpected result, which shows that if a graph G with n vertices (where n is efficiently larger than k) has at least one even subgraph, then the G will have a large number of these subgraphs. Actually the number of these subgraphs is large enough in order the method of random sampling to give a good approximation of the total number of these subgraphs without demanding too many repetitions. Accordingly, we study the same aspects for the odd induced subgraphs with k vertices, i.e., those which have odd number of edges.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια της ολοκλήρωσης των σπουδών μου στο *Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Θεωρητικά Μαθηματικά, του Τμήματος Μαθηματικών του ΕΚΠΑ*.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επιβλέποντα Καθηγητή μου, κ. Δημήτριο Θηλυκό. Ο τρόπος διδασκαλίας του στα μαθήματα που παρακολούθησα μαζί του, τόσο στο προπτυχιακό όσο και στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών, μου εμφύσησε την αγάπη για τον όμορφο κλάδο της Θεωρίας Γραφημάτων. Η συμβολή του για την ολοκλήρωση των μεταπτυχιακών μου σπουδών υπήρξε καθοριστική. Εκτιμώ ιδιαίτερω την υπομονή και την κατανόηση που έδειξε σε κάθε στάδιο της πορείας της εκπόνησης αυτής της εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά και τα άλλα δυο μέλη της τριμελούς μου επιτροπής: τον Καθηγητή κ. Σταύρο Κολλιόπουλο, και τον Επίκουρο Καθηγητή κ. Μιχάλη Δρακόπουλο, για τιμή που μου κάνουν.

Επιπλέον, Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς του συντελεστές του μεταπτυχιακού των Θεωρητικών Μαθηματικών, για την ευκαιρία που μου πρόσφεραν ώστε να φοιτήσω στο πρόγραμμα αυτό. Το κενό των χρόνων που μεσολάβησε, μεταξύ της περάτωσης των προπτυχιακών μου σπουδών και της έναρξης της μεταπτυχιακής μου επανένταξης, με έκανε να εκτιμήσω ξανά την ευκαιρία να συμμετέχω σε τόσα πολλά και ενδιαφέροντα μαθήματα, τα οποία διεύρυναν την μαθηματική μου αντίληψη και με βοήθησαν σε πολλές περιπτώσεις να επαναπροσδιορίσω τα όρια μου.

Θα ήθελα ακόμα να ευχαριστήσω ιδιαίτερω την γραμματέα του μεταπτυχιακού τομέα, την κα Νταή Άλκηστις, για την ευγένεια όπως και την άμεση βοήθεια της προς κάθε ζήτημα που πρόκυπτε.

Επίσης, θα ήθελα να συμπεριλάβω στις ευχαριστίες μου τους συμφοιτητές μου, η συνύπαρξη με τους οποίους πρόσθετε πάντα μια ευχάριστη νότα και η ανταλλαγή σκέψεων με βοήθησε να συνειδητοποιήσω πώς η ουσιαστική και αμοιβαία επικοινωνία μπορεί να αποτελέσει γόνιμο έδαφος για περαιτέρω ατομική και συνολικότερη εξέλιξη.

Τέλος, ευχαριστώ από καρδιάς τους γονείς μου, τα αδέρφια μου, τις φίλες και τους φίλους μου για τις συζητήσεις μας και την ηθική υποστήριξη, που απλόχερα μου προσφέρουν.

Μαρία Καλογιάννη
Αθηνά, 9 Ιανουαρίου 2019

1	Εισαγωγή	1
2	Βασικές έννοιες	9
2.1	Βασικοί ορισμοί και Συμβολισμοί	9
2.1.1	Γραφήματα	9
2.1.2	Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας	13
3	Θεωρία Ramsey για Γραφήματα	17
3.1	Αριθμοί Ramsey και φράγματα τους	17
3.2	Απαριθμητικό αποτέλεσμα των αριθμών Ramsey	22
4	Γραφοθεωρητικά Δομικά αποτελέσματα	25
5	Πολυπλοκότητα	47
5.1	Παραμετρική πολυπλοκότητα	47
5.2	Προσεγγιστική καταμέτρηση	51
5.2.1	Τυχαιοκρατικά Σχήματα Προσέγγισης	51
5.2.2	Τυχαία Δειγματοληψία	53
6	Αλγόριθμοι	59
6.1	Αλγόριθμικά αποτελέσματα απόφασης	59
6.2	Αλγόριθμικά αποτελέσματα καταμέτρησης	66
7	Συμπεράσματα και Ανοιχτά Προβλήματα	69
	Βιβλιογραφία	71

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε σε ένα κέντρο διασκέδασης. Αν κοιτάζουμε το σύνολο ανθρώπων που βρίσκονται εκεί, κάποιοι από αυτούς θα γνωρίζονται και κάποιοι θα είναι μεταξύ τους άγνωστοι. Η κατάσταση αυτή μπορεί να μοντελοποιηθεί μέσα από την Θεωρία Γραφημάτων, λαμβάνοντας ως κορυφές κάθε άτομο και ως ακμές την σχέση γνωριμίας μεταξύ δυο ατόμων.

Αν τώρα θέλουμε να επιλέξουμε μια οποιαδήποτε 6-άδα θαμώνων για ένα ιδιωτικό πάρτι, τότε σίγουρα είτε θα υπάρχει ανάμεσα σου τους μια κλίκα 3 ατόμων που όλοι θα γνωρίζονται μεταξύ τους ή θα υπάρχει ένα γκρουπ από 3 άτομα παντελώς άγνωστα μεταξύ τους. Αυτό το γεγονός σχετίζεται με τους Θεωρία Ramsey. Συγκεκριμένα, ο αριθμός Ramsey $r(k, l)$ είναι ο μικρότερος αριθμός θαμώνων που θα έπρεπε να καλέσω στο πάρτι ώστε να εξασφαλίσω ότι k άνθρωποι γνωρίζονται μεταξύ τους ή l άτομα είναι άγνωστα μεταξύ τους. Επομένως, σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα $r(3, 3) = 6$. Γενικά, όμως, ο υπολογισμός των αριθμών Ramsey δεν είναι τόσο εύκολη υπόθεση.

Ωστόσο γνωρίζουμε ότι μέσα στο κέντρο αυτό βρίσκονται και ευέξαπτοι πελάτες που κατά καιρούς δημιουργούν φασαρίες μέσα στο μαγαζί, και αποφασίζουμε να πάρουμε κάποια μέτρα ώστε να αποτρέψουμε ενδεχόμενους καβγάδες πριν προκληθούν. Αναθέτουμε, λοιπόν, στον υπεύθυνο της εισόδου να μην αφήνει να μπαίνουν άτομα που ξέρουμε ότι έχουν εχθρικές σχέσεις. Αν είχαμε $n = 100$ πελάτες, και ο υπεύθυνος επέλεγε να ελέγξει αν κάθε δύο άτομα έχουν εχθρικές σχέσεις ή όχι, θα έπρεπε να κάνει $2^{1000} \approx 1.072 \cdot 10^{301}$ υπολογισμούς, γεγονός που είναι ακατόρθωτο σε κάποιο λογικό χρονικό διάστημα. Για να τον διευκολύνουμε, του δίνουμε την επιπλέον πληροφορία ότι θα διώξει το πολύ k πελάτες και αρχίζουμε

να μελετάμε δράσεις επίλυσης προβλήματος ώστε να εξετάσουμε αν υπάρχει λύση του προβλήματος αυτού σε πρακτικό χρόνο. Αυτή η διερεύνηση και η προσπάθεια βελτιστοποίηση χρονικά δύσκολων προβλημάτων, προσθέτοντας πέρα από το μέγεθος εισόδου n και μια παράμετρο k , έδωσε το έναυσμα της δημιουργίας και ανάπτυξης της Θεωρίας της Παραμετρικής πολυπλοκότητας.

Στην εργασία αυτή θα συνδυάσουμε τους παραπάνω τομείς. Ξεκινώντας από την Θεωρία γραφημάτων θα αναπτύξουμε ένα ολόκληρο πλαίσιο που θα μας επιτρέψει να δούμε τα δομικά χαρακτηριστικά των γραφημάτων που περιέχουν έστω ένα άρτιο (ή περιττό) εναγόμενο υπογράφημα και μάλιστα θα μπορέσουμε να ορίσουμε και ένα κάτω φράγμα του πλήθους τέτοιων υπογραφημάτων. Στα επιχειρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε σημαντικό ρόλο θα παίζει και η θεωρία Ramsey. Στην συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τα δομικά αποτελέσματα που βρήκαμε για να κατασκευάσουμε αλγορίθμους σύμφωνα την Θεωρία της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας οι οποίοι θα μας απαντούν στο πρόβλημα της απόφασης και με τυχαioκρατική προσέγγιση στο πρόβλημα της καταμέτρησης.

Θεωρία Γραφημάτων

Οι απαρχές της Θεωρίας Γραφημάτων τοποθετούνται πίσω στο 1736 όταν ο Leonhard Euler θέλησε, με εργασία του, να δώσει απάντηση στο πρόβλημα των Επτά Γεφυρών του Königsberg (Seven Bridges of Königsberg). [19]

Η πόλη του Königsberg είχε ακριβώς 7 γέφυρες που ένωναν τα μέρη της πόλης που χωρίζονταν από έναν ποταμό που την διαπερνούσε και το ερώτημα ήταν αν υπάρχει περίπατος στην πόλη που να περνά από κάθε γέφυρα ακριβώς μια φορά, και να επιστρέφει στο σημείο από όπου ξεκίνησε. Ουσιαστικά, αυτό που έκανε, σύμφωνα με την σημερινή ορολογία, ήταν να θέσει κάθε ενιαίο χωρίο γης ως κορυφή και κάθε γέφυρα ως ακμή, θέτοντας το ερώτημα αν υπάρχει διαδρομή που να περνάει από κάθε ακμή και τελειώνει στη κορυφή από την οποία ξεκίνησε. Η απάντηση που έδωσε ο Euler ήταν ότι δεν υπάρχει τέτοια διαδρομή και κατασκεύασε ένα θεώρημα αποδεικνύοντας ποιες οι συνθήκες ώστε να υπάρχει.

Μετά από παραπάνω από ένα αιώνα, ο Cayley ασχολείται με τις δομές της Θεωρίας γραφημάτων που καλούμε δέντρα (trees), δηλαδή συνεκτικά γραφήματα που δεν έχουν κύκλους. [20] Η εργασία του κυρίως κινήθηκε στην καταμέτρηση γραφημάτων με συγκεκριμένες ιδιότητες. Επομένως, παρατηρούμε να γεννιέται η Απαριθμητική Θεωρία Γραφημάτων (Enumerative Graph Theory) από εργασίες του Cayley όπως επίσης και του Pólya (1935-1937).

Η πρώτη φορά εμφάνισης του όρου «γράφημα» τοποθετείται το 1878 σε εργασία του Sylvester. Επίσης, το πρώτο βιβλίο της Θεωρίας Γραφημάτων γράφεται

από τον Dénes Kőnig (1960) [22]. Από συγγράμματα που ακολούθησαν ξεχωρίζουν αυτά του Frank Harary. Πέρα από την θεμελίωση της Θεωρίας Γραφημάτων ασχολήθηκε και με το μέρος της καταμέτρησης γραφημάτων που έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες.

Το 20ο αιώνα είχαμε ιδιαίτερα αναπτυξη στην Θεωρία Γραφημάτων, όπως επίσης συνεχίζεται μέχρι και σήμερα. Μαθηματικοί, όπως οι Ramsey, Hamilton, Petersen, Kőnig, Turán, Kuratowski, Erdős, Robertson, Seymour, ασχολούνται με τον αυτόν τον μαθηματικά τομέα, αφήνουν το στίγμα τους και ανοίγουν νέους ορίζοντες εξέλιξης.

Παραμετρική πολυπλοκότητα

Η Θεωρία της Παραμετρικής Πολυπλοκότητας είναι ένα σχετικά νέος κλάδος της Θεωρίας Πολυπλοκότητας. Η ανάπτυξη της ξεκίνησε από τους Downey και Fellows στις αρχές του 1990 και μια άρτια εικόνα των εργασιών τους, εξελιγμένη μέσα από γόνιμες αλληλεπιδράσεις, παρουσιάστηκε στο βιβλίο τους [4] (1999). Ορίσαν τους FPT αλγορίθμους, κατάλληλες αναγωγές, σημαντικές κλάσεις πολυπλοκότητας και απέδειξαν θεμελιώδη αποτελέσματα πληρότητας.

Η Θεωρία Παραμετρικής Πολυπλοκότητας παρέχει ένα πλαίσιο εκλεπτυσμένης ανάλυσης δύσκολων αλγοριθμικών αποτελεσμάτων. Η κλασική Θεωρία Πολυπλοκότητας αναλύει και κατανέμει τα προβλήματα σε κλάσεις ανάλογα με τον χρόνο που απαιτείται για την επίλυση τους συναρτήσει, συνήθως, του χρόνου ή του χώρου που απαιτούν. Η βασική ιδέα ήταν η μέτρηση αυτή να γίνεται συναρτήσει του μεγέθους της είσοδο, ιδέα που παρουσιάστηκε από τους Hartmanis και Stearns το 1963 [24]. Παρόλο που αυτή η επιλογή λειτουργεί καλά, δομώντας την κλασική Θεωρία Πολυπλοκότητας, το γεγονός ότι λαμβάνουμε υπόψιν μόνο το μέγεθος της εισόδου, αγνοώντας δομικές πληροφορίες για το στιγμιότυπο εισόδου, κάποιες φορές οδηγεί στο γεγονός ότι ορισμένα προβλήματα φαίνονται δυσκολότερα από ότι τυπικά είναι.

Η Θεωρία Παραμετρικής πολυπλοκότητας έρχεται να διαχειριστεί αυτό το θέμα, υπολογίζοντας την πολυπλοκότητα, όχι μόνο συναρτήσει του μεγέθους της εισόδου, αλλά και συναρτήσει και μιας παραμέτρου, η οποία είναι ένας αριθμός που μπορεί να εξαρτάται από την είσοδο με έναν διαφορετικό τρόπο σε κάθε πρόβλημα. Ο κύριος σκοπός είναι να προσδιορίσουμε την πολυπλοκότητα σε περιπτώσεις όπου γνωρίζουμε ότι η τιμή της παραμέτρου είναι μικρή, συγκριτικά με το μέγεθος της εισόδου.

Η κεντρική έννοια της Θεωρίας Παραμετρικής Πολυπλοκότητας είναι η ευεπιλυσιμότητα ως προς σταθερή-παραμέτρο (fixed-parameter tractability). Περιλα-

βάνει προβλήματα που το άνω φράγμα της πολυπλοκότητας τους εξαρτάται πολυωνυμικά από το μέγεθος της εισόδου αλλά όχι απαραίτητα πολυωνυμικά από το μέγεθος της παραμέτρου. Δεν μας δημιουργεί ιδιαίτερο πρόβλημα η μη-πολυωνυμική συμπεριφορά της παραμέτρου, εξαιτίας του γεγονότος ότι η τιμή της είναι μικρή.

Παραμετρική πολυπλοκότητα σε προβλήματα απαρίθμησης

Ο τομέας της παραμετρικής πολυπλοκότητας σε προβλήματα καταμέτρησης, παρόλο που έχει ξεκινήσει τυπικά γύρω στο 2004, έχει τύχει ιδιαίτερη προσοχής και μελέτης από την κοινότητα της Θεωρητικής Πληροφορικής. Οι λόγοι είναι και καθαρά θεωρητικού ενδιαφέροντος αλλά και πρακτικών εφαρμογών.

Τα παραμετροποιημένα προβλήματα καταμέτρησης υπογραφημάτων ανήκουν στα θέματα που έχουν μελετηθεί ιδιαίτερος στην θεωρία της παραμετροποιημένης καταμέτρησης. Ο τομέας της παραμετρικής πολυπλοκότητας σε προβλήματα καταμέτρησης αρχικά εισάχθηκε από τους Flum και Globe [7] και ανεξάρτητα από την McArtin [18], και έλαβε ιδιαίτερο ενδιαφέρον από την κοινότητα της Θεωρητικής Πληροφορικής. Τα πιο εκτενώς μελετημένα προβλήματα του τομέας αποτελούν τα προβλήματα καταμέτρησης υπογραφημάτων, τα οποία μπορούν να εκφραστούν γενικά ως εξής:

Πρόβλημα καταμέτρησης υπογραφημάτων
Είσοδος: Ένα γράφημα $G = (V, E)$ με $ V = n$ και $k \in \mathbb{N}$.
Παράμετρος: k
Έξοδος: Πόσα (ετικετωμένα) υποσύνολα k κορυφών του V ενάγουν γράφηματα που έχουν μια δοσμένη ιδιότητα;

Παρόλο που η παραπάνω περιγραφή να αναφέρεται σε εναγόμενα υπογραφήματα, υπάρχουν και προβλήματα που αναζητούν την καταμέτρηση γενικά υπογραφημάτων που ικανοποιούν κάποια δοσμένη ιδιότητα.

Επίσης, παρά το γεγονός ότι τα προβλήματα καταμέτρησης έχουν ενδιαφέρον για πολλούς καθαρά θεωρητικούς λόγους, εμφανίζονται και σε αρκετές εφαρμογές. Μια τέτοια εφαρμογή προέκυψε από την μελέτη προβλημάτων αξιοπιστίας δικτύου (*network reliability*): παίρνουμε ως δεδομένο ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$, μαζί με μια πιθανότητα αποτυχίας p_e για κάθε ακμή $e \in E$ και ενδιαφερόμαστε για ερωτήματα όπως το εξής «ποια η πιθανότητα να παραμείνει το γράφημα G συνεκτικό, δεδομένου ότι κάθε ακμή e αποτυγχάνει ανεξάρτητα με πιθανότητα p_e ». Μια δεύτερη εφαρμογή έρχεται από την στατιστική φυσική,

όπου χρειάζονται να υπολογίσουν το πλήθος των τέλειων ταιριασμάτων (perfect matchings) σε ένα διμερές γράφημα.

Αναδρομή σε εργασίες σχετικές με τα προβλήματα μελέτης

Γενικά, ο τομέας των παραμετρικών προβλημάτων απαρίθμησης, όπως προαναφέρθηκε, εισάχθηκε από τους Flum και Globe [7] (2004) και ανεξάρτητα από την McArtin [18] (2006). Ειδικά, όμως, οι Flum και Globe ανέπτυξαν την παραμετρική θεωρία πολυπλοκότητας για προβλήματα καταμέτρησης, εισάγοντας την ιεραρχία των κλάσεων $\#W[t]$, που είναι ανάλογες με την W -ιεραρχία των Downey και Fellows [4]. Το βασικό τους αποτέλεσμα είναι ότι απέδειξαν πως τα προβλήματα της απαρίθμησης κύκλων και μονοπατιών μήκους k είναι $\#W[1]$ -πλήρη.

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί ένα γράφημα ώστε να περιέχει ένα υπογράφημα k -κορυφών με άρτιο (ή αντίστοιχα, περιττό) πλήθος ακμών, όπως επίσης και με το πλήθος τέτοιων υπογραφήματων. Θα αναφερόμαστε στα εναγόμενα υπογραφήματα που έχουν άρτιο (ή αντίστοιχα, περιττό) πλήθος ακμών ως άρτια (περιττά) υπογραφήματα. Το πρόβλημα της απαρίθμησης όλων αυτών των υπογραφήματων έχει αποδειχθεί ότι είναι $\#W[1]$ -πλήρες στην εργασία [3] των Jerrum και Meeks, 2015.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα ως προς το πρόβλημα της καταμέτρησης όλων των άρτιων υπογραφήματων ενός γραφήματος G δόθηκε στην εργασία [23] των Goldberg, Grohe, Jerrum, και Thurley, το 2010, στην οποία αποδείχθηκε ότι μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Μια τεχνική στην οποία στηρίχθηκαν για το πετύχουν αυτό, ήταν να κωδικοποιήσουν τα γραφήματα μέσω δευτεροβάθμιων πολυωνύμων στο $\mathbb{F}_2$. Αντιστοίχισαν τις κορυφές του γραφήματος G στο σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$, εισήγαγαν τις μεταβλητές $X_1, \dots, X_n$ και κωδικοποίησαν κάθε ακμή $\{i, j\}$ του G με το μονώνυμο $X_i X_j$. Έτσι, αντιστοίχησαν σε κάθε γράφημα G το πολυώνυμο $p_G(X_1, \dots, X_n) = \sum_{\{i,j\} \in E(G)} X_i X_j$ και το σύνολο των άρτιων υπογραφήματων είναι ίσο με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $p_G(X_1, \dots, X_n) = 0$. Για το υπολογισμό των λύσεων δευτεροβάθμιων πολυωνύμων στο $\mathbb{F}_2$ έχειδειχθεί ότι υπάρχει πολυωνυμικός αλγόριθμος ($O(n^3)$) στην εργασία [27], 2010.

Τα παραπάνω αποτελέσματα δεν μπορούν να εφαρμοστούν στα προβλήματα καταμέτρησης που προσδιορίζεται ακριβώς το πλήθος των κορυφών k που θέλουμε να έχουν τα ζητούμενα άρτια (ή περιττά) υπογραφήματα. Μάλιστα το πρόβλημα αυτό, όπως αναφέραμε και παραπάνω, είναι $\#W[1]$ -πλήρες, δηλαδή δεν μπορεί να λυθεί σε χρόνο $f(k)n^{O(1)}$, όπου n το πλήθος των κορυφών του γραφήματος G . Ωστόσο, θα αποδείξουμε ότι θα μπορούμε να τα προσεγγίσουμε επακρώς από την πλευρά της παραμετρικής πολυπλοκότητας με FPTRAS.

Παρόμοια συλλογιστική, ως προς την διαχείριση της παραμετρικής πολυπλοκότητας και των αριθμών Ramsey, ακολουθήθηκε από τους Khot και Raman [29] (2001), οι οποίοι μελέτησαν το εξής πρόβλημα: δοσμένου ενός γραφήματος G , μιας ακέραιας παραμέτρου k και μιας μη τετριμμένης (δεν είναι κενή ούτε περιέχει όλα τα γραφήματα) κληρονομικής (για κάθε $G \in \Pi$ τότε για κάθε $H \in \Pi$ ισχύει $H \in \Pi$) ιδιότητας Π , υπάρχει εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών που να έχει την ιδιότητα Π ; Το πρόβλημα είχε αποδειχθεί NP-δύσκολο από τους Lewis και Yannakakis [30] (1980). Με ανάλογη παραμετροποιημένη εκδοχή είχε ασχοληθεί ο Cai [31] (1996), ο οποίος απέδειξε ότι αν η Π είναι μια κληρονομική ιδιότητα η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί από ένα πεπερασμένο σύνολο παρεμβόδισης, τότε το πρόβλημα εύρεσης υπογραφήματος να ανήκει στην Π , αφαιρώντας/προσθέτοντας k ακμές/κορυφές ανήκει στο FPT. Οι Khot και Raman έδειξαν, χρησιμοποιώντας στοιχεία των αριθμών Ramsey, ότι αν η Π περιλαμβάνει όλα τα τετριμμένα γραφήματα (δηλ. γραφήματα χωρίς ακμές) και όχι όλα τα πλήρη γραφήματα, ή αντιστρόφως, τότε το πρόβλημα είναι W[1]-πλήρες, διαφορετικά είναι FPT.

Οι Cai και Yang, επίσης, στην εργασία τους [32] (2011), μελετάνε NP-πλήρη προβλήματα υπογραφημάτων που ανήκουν σε συγκεκριμένες οικογένειες, υπό την οπτική της παραμετρικής πολυπλοκότητας, χρησιμοποιώντας στις αποδείξεις τους στοιχεία από τους αριθμούς Ramsey. Εξετάζουν αν υπάρχει ένα υπογράφημα k ακμών (ή ένα εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών) που να έχει την ιδιότητα Π , όπου Π είναι μια από τις ακόλουθες κλάσεις γραφημάτων: γραφήματα Euler, «άρτια» γραφήματα, «περιττά» γραφήματα και συνεκτικά «περιττά» γραφήματα. Με το όρο «άρτια» (ή «περιττά») γραφήματα ορίζουν τα γραφήματα όπου ο βαθμός κάθε κορυφής είναι άρτιος (ή περιττός), συνεπώς ο ορισμός αυτός είναι διαφορετικός από αυτόν που ορίσαμε στην αρχή της εργασίας και θα χρησιμοποιήσουμε και στην συνέχεια.

Ως προς τους προσεγγιστικούς αλγορίθμους, η διαδικασία που ακολουθείται στην εργασία αυτή είναι παρόμοια με αυτήν που παρουσιάστηκε από τους Arvind και Raman στην [5] (2002), όπου έδωσαν ένα τυχαιοκρατικό FPT αλγόριθμο, ο οποίος υπολογίζει προσεγγιστικά το πλήθος υπογραφημάτων με k κορυφές που έχουν φραγμένο δεντροπλάτος. Ο σχεδιασμός του αλγορίθμου αυτού βασίζεται στη μέθοδο δειγματοληψίας Monte-Carlo των Karp και Luby ([33] 1983, [34] 1989). Στην εργασία τους, οι Arvind και Raman, επίσης, προσαρμόζουν κατάλληλα την έννοια FPTRAS (fully polynomial randomized approximation schemes) και ορίζουν, με ένα ελαφρώς διαφορετικό τρόπο από τους Flum και Grohe [7], την έννοια FPTRAS (fixed parameter tractable randomized approximation schemes). Δείχνουν, επίσης, ότι τα προβλήματα απαρίθμησης του πλήθους των κλικών και

των ανεξάρτητων συνόλων με k κορυφές είναι $W[1]$ -δύσκολο.

Τέλος, οι Jerrum και Meeks, εκτός από την εργασία [3], ασχολήθηκαν και με άλλα ανάλογα θέματα, καταλήγοντας σε αντίστοιχα αποτελέσματα ως προς την $\#W[1]$ -πληρότητας και την ύπαρξη FPTAS. Παραδείγματα τέτοιων εργασιών αποτελούν οι [9], [13]. Επίσης, παράλληλα το 2015, στην [28], ασχολήθηκαν με την γενίκευση παραμετροποιημένων προβλημάτων καταμέτρησης εναγόμενων υπογραφημάτων που έχουν μια ιδιότητα Φ , των οποίων τα ελαχιστικά-ως προς τις ακμές-γραφήματα έχουν φραγμένο δεντροπλάτος, περιλαμβάνοντας και την ειδική περίπτωση που η Φ περιγράφει την συνεκτικότητα.

Διάρθρωση της διπλωματικής εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 θα εισάγουμε τους ορισμούς και συμβολισμούς από την Θεωρία Γραφημάτων και από την Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας, που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια της εργασίας.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε στοιχεία που θα μας φανούν χρήσιμα από την Θεωρία Ramsey. Δείχνουμε ότι το 2^{2k} είναι άνω φράγμα για τον αριθμό Ramsey $r(k, k)$, γεγονός που μας εξασφαλίζει ότι κάθε γράφημα με τουλάχιστον 2^{2k} κορυφές θα είχε είτε μια k -κλίκα ή ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών. Στην πληροφορία αυτή θα βασιστούμε κατά κόρον για τα αποτελέσματα του επόμενου κεφαλαίου. Θα αποδείξουμε, επίσης, ένα σημαντικό συνδυαστικό αποτέλεσμα των αριθμών Ramsey. Θα δείξουμε ότι αν έχουμε ένα γράφημα με τουλάχιστον $n \geq 2^{2k}$ κορυφές τότε το πλήθος των εναγόμενων υπογραφημάτων k κορυφών που είτε είναι κλίκες είτε ανεξάρτητα σύνολα θα είναι μεγαλύτερο από μια συγκεκριμένη ποσότητα που εξαρτάται από τα n και k . Το αποτέλεσμα αυτό στο Κεφάλαιο 4 θα το χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε ένα κάτω φράγμα του πλήθους των άρτιων, ή αντίστοιχα περιττών, εναγόμενων υπογραφημάτων k κορυφών.

Στο Κεφάλαιο 4 βρίσκεται ο πυρήνας της εργασίας. Θα αποδείξουμε τα βασικά αποτελέσματα από την Θεωρία Γραφημάτων, που θα χρησιμοποιήσουμε για να φτιάξουμε αλγορίθμους στο Κεφάλαιο 6. Αρχικά θα αποδείξουμε, για αρκετά μεγάλα γραφήματα, ότι αυτά που δεν περιέχουν κανένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών ανήκουν σε μια οικογένεια γραφημάτων από ένα μικρό πλήθος οικογενειών, οι οποίες μάλιστα είναι και εύκολα αναγνωρίσιμες. Σε αντίστοιχο αποτέλεσμα θα καταλήξουμε και για τα περιττά γραφήματα. Επίσης, θα δείξουμε ότι αν ένα αρκετά μεγάλο γράφημα έχει τουλάχιστον ένα άρτιο, ή αντίστοιχα περιττό, εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών τότε θα περιέχει ένα μεγάλο αριθμό τέτοιων υπογραφημάτων.

Στο Κεφάλαιο 5 θα παρουσιάσουμε ορισμούς της παραμετρικής πολυπλοκότητας

τητας που θα χρειαστούμε και θα αναφερθούμε στην μέθοδο της προσεγγιστικής καταμέτρησης. Μας ενδιαφέρει κυρίως ο ορισμός για το τυχαιοκρατικό σχήμα προσέγγισης FPTRAS. Επιπλέον θα αποδείξουμε ένα σημαντικό λήμμα που μας δίνει μια γενική επαρκή συνθήκη για το πλήθος των διατεταγμένων k -άδων κορυφών σε ένα γράφημα, που ικανοποιούν μια δοσμένη ιδιότητα, ώστε να εξασφαλίσουμε ότι μπορούμε με μεγάλη πιθανότητα μια καλή προσέγγιση με μια μέθοδο τυχαίες δειγματοληψίας.

Στο Κεφάλαιο 6 θα γίνει η σύνθεση των προηγούμενων κεφαλαίων. Θα φτιάξουμε αλγόριθμους οι οποίοι θα παίρνουν ως είσοδο ένα γράφημα G και μια παράμετρο k και θα αποφασίζουν αν υπάρχει άρτιο, ή αντίστοιχα περιττό, εναγόμενο υπογράφημα του G με k κορυφές. Επίσης, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει FPTRAS για το πρόβλημα καταμέτρησης όλων αυτών των υπογραφημάτων. Οι αλγόριθμοι αυτοί χρησιμοποιούν τα δομικά γραφοθεωρητικά αποτελέσματα που αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 4.

Τέλος, στο κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται κάποια ανοιχτά προβλήματα προς ανάλογες κατευθύνσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

2.1 Βασικοί ορισμοί και Συμβολισμοί

Δοσμένου ενός συνόλου S , θα συμβολίζουμε με $S^{(k)}$ το σύνολο όλων των υπο-συνόλων του S που έχουν μέγεθος ακριβώς k , και με S^k το σύνολο των διατεταγμένων k -άδων $(s_1, s_2, \dots, s_k) \in S^k$ τέτοιες ώστε τα στοιχεία $s_1, s_2, \dots, s_k$ να είναι όλα διακριτά.

2.1.1 Γραφήματα

Με το όρο *γράφημα* (*graph*) ονομάζουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, E)$, όπου το V είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, το οποίο ονομάζουμε το *σύνολο κορυφών* (*vertex set*) του γραφήματος G , και το E είναι υποσύνολο του συνόλου των δισυνόλων του V , δηλαδή $E \subseteq V^{(2)}$, το οποίο ονομάζουμε το *σύνολο ακμών* (*edge set*) του γραφήματος G . Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, τα γραφήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε είναι τα *απλά* (*simple*), δηλαδή δεν έχουν πολλαπλές ακμές (ακμές που έχουν τα ίδια άκρα) και ανακυκλώσεις (ακμές που έχουν ως άκρα την ίδια κορυφή).

Για κάθε ακμή $e = \{v, u\} \in E$ ονομάζουμε τις κορυφές v και u άκρα της e και λέμε ότι οι κορυφές v και u συνδέονται ή είναι *γειρονικές* στο G . Επίσης, για κάθε ακμή e και για κάθε κορυφή v λέμε ότι η ακμή είναι *προσπίπτουσα* (*incident*) ή *προσπίπτει* στην κορυφή v , αν η v είναι άκρο της ακμής e , δηλαδή $v \in e$.

Δεδομένου ενός γραφήματος G , συμβολίζουμε το σύνολο των κορυφών του με $V(G)$ και το πλήθος των κορυφών με $\mathbf{n}(G)$, δηλαδή $\mathbf{n}(G) = |V(G)|$, όπως, επίσης, το σύνολο των ακμών του με $E(G)$ και το πλήθος των ακμών με $\mathbf{m}(G)$, δηλαδή

$$\mathbf{m}(G) = |E(G)|.$$

Για κάθε κορυφή v στο G καλούμε *γειτονιά* (*neighborhood*) της v στο G , το σύνολο $N_G(v) = \{u \in V(G) | \{v, u\} \in E(G)\}$, δηλαδή το σύνολο όλων των γειτόνων της, όλων των κορυφών που συνδέονται με ακμή με την v στο G , και την συμβολίζουμε με $N_G(v)$. Ο ορισμός αυτός γενικεύεται και για ένα οποιοδήποτε σύνολο κορυφών $S \subseteq V(G)$ ως τον ακόλουθο τρόπο:

$N_G(S) = \{u \in V(G) \setminus S | \exists v \in S : \{v, u\} \in E(G)\}$, δηλαδή το σύνολο των κορυφών που δεν ανήκουν στο S αλλά συνδέονται με ακμή με κάποια κορυφή του συνόλου S . Μια κορυφή $v \in V(G)$ θα την λέμε *απομονωμένη* αν ισχύει ότι $N_G(v) = \emptyset$, δηλαδή αν δεν συνδέεται με ακμή με κάποια άλλη κορυφή του G . Επίσης, το μέγεθος της γειτονιάς της κορυφής v στο G το ονομάζουμε *βαθμό* (*degree*) της κορυφής v στο G και τον συμβολίζουμε με $\deg_G(v)$, δηλαδή $\deg_G(v) = |N_G(v)|$.

Ένα γράφημα καλείται *ετικετωμένο γράφημα* ή *γράφημα με ετικέτες* (*labelled graph*) όταν κάθε κορυφή του συμβολίζεται με διαφορετική ετικέτα, δηλαδή όταν όλες οι κορυφές του θεωρούνται διακεκριμένες. Μια συνήθης χρήση των ετικετωμένων γραφημάτων είναι σε θέματα καταμέτρησης.

Ένας *ισομορφισμός* (*isomorphism*) μεταξύ δυο γραφημάτων G και H καλείται μια 1-1 και επί αντιστοιχία σ μεταξύ των συνόλων των κορυφών των G και H , τέτοια ώστε δυο κορυφές v και u στο G είναι γειτονικές αν και μόνο αν οι αντίστοιχες κορυφές $\sigma(v)$ και $\sigma(u)$ είναι γειτονικές στο H . Δηλαδή για την $\sigma : V(G) \rightarrow V(H)$ ισχύει ότι $\forall v, \forall u \in V(G)$ ισχύει ότι $\{v, u\} \in E(G) \Leftrightarrow \{\sigma(v), \sigma(u)\} \in E(H)$. Αν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ δυο γραφημάτων G και H , τότε λέμε ότι τα γραφήματα G και H είναι *ισόμορφα* (*isomorphic*) και χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $G \simeq H$.

Επειδή η σχέση του ισομορφισμού είναι μια σχέση ισοδυναμίας, ένα γράφημα μπορεί να είναι ισόμορφο με άπειρα στο πλήθος γραφήματα τα οποία ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας. Για τον λόγο αυτό ορίζουμε κάποιο γράφημα αντιπρόσωπο της κλάσης στην οποία ανήκει. Στην συνέχεια βλέπουμε τους ορισμούς των αντιπροσώπων για τις κυριότερες κλάσεις γραφημάτων που θα συναντήσουμε.

Για κάθε φυσικό αριθμό $r \geq 0$, ορίζουμε το γράφημα K_r να είναι το γράφημα με r κορυφές του οποίου όλες οι κορυφές ανά δύο είναι γειτονικές, δηλαδή $|V(K_r)| = r$ και $E(K_r) = V(K_r)^{(2)}$, και το ονομάζουμε *κλίκα* (*clique*) με r κορυφές, *r-κλίκα* ή απλά *κλίκα*. Επίσης, ονομάζουμε ένα γράφημα G *πλήρες* (*complete*) αν $G \simeq K_{n(G)}$.

Το γράφημα G για το οποίο ισχύει ότι $\mathbf{m}(G) = \mathbf{n}(G) = 0$, δηλαδή $G \simeq K_0$, ονομάζεται *κενό γράφημα*,

Ένα γράφημα G καλείται *διμερές* (*bipartite*) αν το σύνολο κορυφών $V(G)$ μπο-

ρεί να διαμεριστεί σε δυο σύνολα A και B τέτοια ώστε κάθε ακμή του G να έχει το ένα της άκρο στο A και το άλλο άκρο στο B . Ονομάζουμε τα σύνολο A και B *μέρη* (*parts*) της διαμέριση. Ένα διμερές γράφημα G λέγεται *πλήρες διμερές* (*complete bipartite*) αν για κάθε κορυφή a στο A και για κάθε κορυφή b στο B , έχουμε ότι η ακμή $\{a, b\} \in E(G)$, δηλαδή υπάρχουν όλες οι δυνατές ακμές που έχουν ως ένα άκρο μια κορυφή από το σύνολο A και ως άλλο άκρο μια κορυφή από το B .

Για κάθε ζεύγος φυσικών $q, r \geq 0$ ορίζουμε το γράφημα $K_{q,r} = (A \cup B, E)$ έτσι ώστε το σύνολο των κορυφών διαμερίζεται στα υποσύνολα $A = \{a_1, \dots, a_q\}$ και $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ και το σύνολο ακμών αποτελείται ακριβώς από όλες τις δυνατές ακμές που έχουν ως ένα άκρο στο σύνολο A και άλλο άκρο στο σύνολο B , δηλαδή $E = \{\{a_i, b_j\} | 1 \leq i \leq q \text{ και } 1 \leq j \leq r\}$. Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό, ένα γράφημα G είναι πλήρες διμερές, αν υπάρχουν φυσικοί $q, r \geq 0$ τέτοιοι ώστε $G \simeq K_{q,r}$. Επίσης, όταν το $q = 1$, τότε καλούμε το γράφημα $K_{1,r}$ (για $r \geq 0$) *r-άστρο* (*r-star*), το οποίο το συμβολίζουμε και ως S_r , δηλαδή $S_r \simeq K_{1,r}$.

Για κάθε φυσικό $r \geq 3$, ονομάζουμε *κύκλο* (*cycle*) (με r κορυφές) το γράφημα που έχει σύνολο κορυφών μεγέθους r : $V = \{v_1, \dots, v_r\}$ και σύνολο ακμών της μορφής $E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{r-1}, v_r\}, \{v_r, v_1\}\}$, και το συμβολίζουμε με C_r . Ορίζουμε ως *μήκος* (*length*) του κύκλου ως το πλήθος των ακμών (ή των κορυφών) του γραφήματος.

Πράξεις σε γραφήματα

Έστω ένα γράφημα G , το *συμπλήρωμα* (*complement*) $\overline{G}$ του G ορίζουμε να είναι το γράφημα που έχει το ίδιο σύνολο ακμών με το G , δηλαδή $V(G) = V(\overline{G})$, και περιλαμβάνει ακριβώς τις ακμές που δεν έχει το G , με άλλα λόγια ισχύει η σχέση $E(\overline{G}) = V(G)^{(2)} \setminus E(G)$. Συνεπώς, έχουμε ότι δυο κορυφές v και u είναι γειτονικές στο $\overline{G}$, δηλαδή $\{v, u\} \in E(\overline{G})$ αν και μόνο αν δεν είναι γειτονικές στο G , δηλαδή $\{v, u\} \notin E(G)$. Επίσης, δυο γραφήματα G και H καλούνται *συμπληρωματικά* όταν το ένα είναι συμπλήρωμα του άλλου.

Έστω G και H γραφήματα. Ορίζουμε την *ένωση* (*union*) των G και H ως το γράφημα που έχει σύνολο κορυφών την ένωση $V(G) \cup V(H)$ και σύνολο ακμών την ένωση $E(G) \cup E(H)$, δηλαδή $G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$. Η πράξη της ένωσης είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.

Μετασχηματισμός γραφημάτων

Έστω ένα γράφημα G και μια κορυφή $v \in V(G)$. Τότε συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό της *αφαίρεσης κορυφής* (*vertex deletion*) με $G \setminus v$ και ορίζουμε ως

αποτέλεσμα της δράσης του το γράφημα που έχει σύνολο κορυφών το $V(G \setminus v) = V(G) \setminus \{v\}$ και σύνολο ακμών το $E(G \setminus v) = \{e \in E(G) \mid e \cap \{v\} = \emptyset\}$, δηλαδή αφαιρούμε την κορυφή v από το γράφημα και όσες ακμές του γραφήματος προσπίπτουν σε αυτήν. Ο μετασχηματισμός της αφαίρεσης κορυφής γενικεύεται και σε αφαίρεση συνόλου κορυφών $S \subseteq V(G)$ και εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό $G \setminus S$ προκύπτει το γράφημα με σύνολο κορυφών $V(G \setminus S) = V(G) \setminus S$ και σύνολο ακμών $E(G \setminus S) = \{e \in E(G) \mid e \cap S = \emptyset\}$.

Έστω μια ακμή e ενός γραφήματος G , τότε συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό της αφαίρεσης ακμής (*edge deletion*) με $G \setminus e$ και ορίζουμε ως αποτέλεσμα της δράσης του το γράφημα $G \setminus e = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$, δηλαδή το προκύπτον γράφημα έχει το ίδιο σύνολο κορυφών με το αρχικό και αφαιρείται μόνο από το σύνολο των ακμών η ακμή e . Ανάλογα, γενικεύεται ο μετασχηματισμός αυτό για ένα σύνολο ακμών $D \subseteq E(G)$ ως εξής $G \setminus D = (V(G), E(G) \setminus D)$.

Σχέσεις μερικής διάταξης γραφημάτων

Για ένα γράφημα H λέμε ότι είναι *υπόγραφο* (*subgraph*) ενός γραφήματος G αν προκύπτει από το G εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς αφαίρεσης κορυφής ή/και αφαίρεσης ακμής και γράφουμε $H \subseteq_{\text{υπ}} G$. Επίσης, καλούμε το H *εναγόμενο υπόγραφο* (*induced subgraph*) ενός γραφήματος G αν προκύπτει από το G εφαρμόζοντας μόνο μετασχηματισμούς αφαίρεσης κορυφής και το συμβολίζουμε με $H \subseteq_{\text{εν}} G$. Τέλος, λέμε ότι το H είναι *παραγόμενο υπογράφημα* (*spanning subgraph*) ενός γραφήματος G αν προκύπτει από το G εφαρμόζοντας μόνο μετασχηματισμούς αφαίρεσης ακμής και το συμβολίζουμε με $H \subseteq_{\text{πα}} G$.

Όταν τα γραφήματα H και G , που συγκρίνουμε, δεν είναι ισόμορφα, μπορούμε να ορίσουμε την γνήσια μορφή $\subset$ σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις.

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$, ένα υπογράφημα $H \subseteq_{\text{υπ}} G$ και ένα υποσύνολο του συνόλου κορυφών $S \subseteq V(G)$. Λέμε ότι το S *ενάγει* (*induces or spans*) το H στο G όταν γράφημα H έχει ως σύνολο κορυφών το S και το σύνολο ακμών που περιέχει ακριβώς εκείνες τις ακμές του G που έχουν και τα δύο άκρα τους στο S και το συμβολίζουμε με $H := G[S]$, δηλαδή $G[S] = (S, \{e \in E(G) \mid |e \cap S| = 2\})$.

Κλίκες και ανεξάρτητα σύνολα

Σε ένα γράφημα G καλούμε *αριθμό κλίκας* (*clique number*) το πλήθος των κορυφών της μέγιστης κλίκας που περιέχεται στο G και την ποσότητα αυτήν την συμβολίζουμε με $\omega(G)$. Δηλαδή, $\omega(G) = \max\{r \mid K_r \subseteq_{\text{υπ}} G\}$.

Έστω ένα γράφημα $G = (V, E)$ και ένα υποσύνολο του συνόλου κορυφών

$S \subseteq V(G)$, λέμε ότι το S είναι *ανεξάρτητο σύνολο* (*independent set*) αν ισχύει ότι $\mathbf{m}(G[S]) = 0$, δηλαδή κάθε ζεύγος κορυφών του S δεν είναι γειτονικές στο G . Ως *μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο* (*maximum independent set*) ορίζουμε το ανεξάρτητο σύνολο που έχει το μέγιστο δυνατό πλήθος κορυφών στο G . Το μέγεθος του μέγιστου ανεξάρτητου συνόλου ενός γραφήματος G το καλούμε *αριθμό ανεξαρτησίας* (*independence number*) και το συμβολίζουμε με $\alpha(G)$.

2.1.2 Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητας

Τα θεμελιώδη δομικά στοιχεία στην επιστήμη υπολογιστών είναι οι ακολουθίες (τυπογραφικών) χαρακτήρων. Ανάλογα με τις απαιτήσεις μιας εφαρμογής επιλέγεται το κατάλληλο αλφάβητο από το οποίο ορίζονται οι ακολουθίες αυτές. Ως *αλφάβητο* καλούμε κάθε μη κενό πεπερασμένο σύνολο Σ και τα στοιχεία του Σ αποτελούν τα *σύμβολα* του αλφαβήτου. Κάθε πεπερασμένη ακολουθία w συμβόλων του αλφαβήτου Σ ονομάζεται *λέξη* ή *συμβολοσειρά* (*string*) και το Σ^* αποτελεί το σύνολο όλων των λέξεων του αλφαβήτου, συνεπώς $w \in \Sigma^*$. Ως *γλώσσα* (*language*) L ορίζουμε οποιοδήποτε σύνολο λέξεων, δηλαδή $L \subseteq \Sigma^*$.

Παρατηρούμε ότι κάθε γλώσσα L μπορεί να ορίσει ένα αντίστοιχο πρόβλημα Π_L όπως μπορούμε να δούμε παρακάτω:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Π_L
Είσοδος: Μια λέξη $w \in \Sigma^*$
Έξοδος: Ανήκει η λέξη w στην γλώσσα L , δηλαδή $w \in L$;

Την είσοδο ενός προβλήματος την καλούμε και ως *στιγμιότυπο* (*instance*) του προβλήματος. Επίσης, τις εισόδους για τις οποίες το πρόβλημα επιστρέφει απάντηση «ΝΑΙ», δηλαδή τα στοιχεία της γλώσσας L , τα ονομάζουμε *λύσεις* του προβλήματος ή *ναι-στιγμιότυπα* (*yes-instance*). Αντίστοιχα, ορίζουμε ως *όχι-στιγμιότυπο* (*no-instance*) ένα στιγμιότυπο που δεν αποτελεί λύση του προβλήματος.

Τα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε θα παίρνουν ως είσοδο ένα γράφημα G και μια θετική παράμετρο k . Για να έρθουμε σε συμφωνία με τους παράνω ορισμούς, επιλέγουμε ένα κατάλληλο αλφάβητο Σ και εκφράζουμε κατάλληλα την είσοδο (G, k) ως μια λέξη του Σ^* και την κωδικοποίηση αυτήν την συμβολίζουμε ως $\langle G, k \rangle$. Επίσης, θεωρούμε ότι ο αλγόριθμος αρχικά ελέγχει εάν η είσοδος κωδικοποιεί ορθά κάποιο γράφημα και την αντίστοιχη παράμετρο, και εάν αυτό δεν ισχύει, απορρίπτεται. Συνεπώς, οι λύσεις ενός αλγορίθμου αποτελούν μια γλώσσα L , άρα το πρόβλημα μας έχει την μορφή:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Π_L
Είσοδος: Μια λέξη $\langle G, k \rangle \in \Sigma^*$
Έξοδος: Ανήκει η λέξη $\langle G, k \rangle$ στην γλώσσα L , δηλαδή $\langle G, k \rangle \in L$;

Για λόγους απλότητας, θα αποφύγουμε την χρήση γλωσσών για τον ορισμό των προβλημάτων και θα χρησιμοποιήσουμε μια πιο «φυσική» διατύπωση. Αν μια ιδιότητα I_k αποτελεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα στοιχείο (G, k) να ανήκει στην γλώσσα L , τότε μπορούμε το ορίσουμε ισοδύναμα το αντίστοιχο πρόβλημα ως εξής:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Π_L
Είσοδος: Ένα γράφημα G και μια παράμετρος k .
Έξοδος: Το γράφημα G έχει την ιδιότητα I_k ;

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι στα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε η χαρακτηριστική ιδιότητα των γραφημάτων εξαρτάται από την παράμετρο k .

Για τον χρόνο εκτέλεσης ενός προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό από την Θεωρία Υπολογισμού. Έστω M μια αιτιοκρατική μηχανή Turing η οποία αποφασίζει για το αν μια λέξη w ανήκει σε μια γλώσσα L , δηλαδή τερματίζει για κάθε είσοδο, επιστρέφοντας θετική απάντηση αν ανήκει και αρνητική απάντηση διαφορετικά. Η χρονική πολυπλοκότητα της M είναι μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ που παίρνει ο είσοδος το μήκος της εισόδου και επιστρέφει το μέγιστο πλήθος βημάτων που απαιτούνται ώστε η M να δώσει απάντηση. Στα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε, θα θεωρούμε ως μέγεθος της εισόδου το πλήθος των κορυφών του γραφήματος που θα δίνεται. Επιπλέον, επειδή ο στόχος μας είναι να κατανοήσουμε τον χρόνο που απαιτεί ο αλγόριθμος όταν εκτελείται για εισόδους μεγάλου μεγέθους, θα περιοριστούμε στην ασυμπτωτική ανάλυση της χρονικής πολυπλοκότητας, δηλαδή σε κάποιο άνω φράγμα της.

Θα ονομάζουμε μια συνάρτηση $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ υπολογίσιμη (computable) εάν υπάρχει μια μηχανή Turing που την υπολογίζει, δηλαδή που, για κάθε είσοδο w , τερματίζει και έχει στην ταινία της μόνο την λέξη $f(w)$.

Επιπλέον, συναντάμε και δυο σημαντικούς ορισμούς της θεωρίας πολυπλοκότητας, τις κλάσεις προβλημάτων P και NP. Με το όρο P αναφερόμαστε στην κλάση των προβλημάτων για τα οποία υπάρχει ένας αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που τα επιλύει. Επίσης, θα λέμε ότι ένα πρόβλημα απόφασης Π ανήκει στο NP αν για κάθε ναι-στιγμιότυπο I του Π, υπάρχει μια απόδειξη ότι το I είναι ένα ΝΑΙ-στιγμιότυπο που μπορεί να επαληθευτεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Δηλαδή με το όρο

NP ορίζουμε τα προβλήματα απόφασης για τα οποία υπάρχει πολωνυμικός επαληθευτής/πιστοποιητής, όπου επαληθευτή μιας γλώσσας L ονομάζουμε οποιαδήποτε αλγόριθμο A τέτοιο ώστε

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \exists t : \text{ο } A \text{ αποδέχεται την λέξη } \langle w, t \rangle\},$$

και οποίος έχει χρόνο εκτέλεσης πολωνυμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου. Δηλαδή, αν στον αλγόριθμο δοθεί η περιγραφή μιας πιθανής λύσης τότε μπορεί σε πολωνυμικό χρόνο να αποφασίσει αν πράγματι είναι λύση.

Μια άλλη κλάση προβλημάτων είναι η BPP η οποία περιλαμβάνει ακριβώς εκείνα τα προβλήματα απόφασης για τα οποία υπάρχει μια πιθανοτική μηχανή Turing M (probabilistic Turing machine) τέτοια ώστε για κάθε ναι-στιγμιότυπο αποδέχεται με πιθανότητα μεγαλύτερη ή ίση του $2/3$ και για κάθε όχι-στιγμιότυπο αποδέχεται με πιθανότητα μικρότερη ή ίση του $1/3$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΘΕΩΡΙΑ RAMSEY ΓΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ

Η Θεωρία Ramsey μελετά αναπόφευκτους σχηματισμούς μέσα σε οικογένειες γραφημάτων. Για παράδειγμα, δεδομένου ενός θετικού ακεραίου r , τίθεται το ερώτημα αν κάθε αρκετά μεγάλο γράφημα περιέχει ως εναγόμενο υπογράφημα είτε μια κλίκα K_r είτε το συμπλήρωμα της $\overline{K_r}$, δηλαδή ένα ανεξάρτητο σύνολο r κορυφών. Ένα άλλο τυπικό πρόβλημα είναι να δείξουμε ότι όταν οι ακμές ενός πλήρους γραφήματος, με αρκετές κορυφές, χρωματιστούν με 2 χρώματα, είναι αδύνατον να μην βρεις κάποιο συγκεκριμένο μονοχρωματικό υπογράφημα. Κατά μία έννοια, η Θεωρία Ramsey αποτελεί μια γενίκευση της Αρχής του Περιστεριώνα. Την αναλογία αυτήν μπορούμε να την παρατηρούσε στο εξής παράδειγμα, χρωματίζουμε με 2 χρώματα τις ακμές του αστεριού S_{2n+1} , το οποίο έχει $2n + 1$ κορυφές, και συμπεραίνουμε ότι σε κάθε δυνατό χρωματισμό μπορούμε πάντα να βρούμε ένα μονοχρωματικό S_{n+1} .

3.1 Αριθμοί Ramsey και φράγματα τους

Πριν ασχοληθούμε με τους αριθμούς Ramsey ξεκινάμε με μια παρατήρηση που θα μας βοηθήσει στις ακόλουθες αποδείξεις.

Παρατήρηση 3.1. Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Απόδειξη. Πράγματι, αν η μέγιστη κλίκα που περιέχεται ως υπογράφημα στο G έχει μέγεθος $k = \omega(G)$, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $S \subseteq V(G)$ με $|S| = k$ ώστε $G[S] \simeq K_k$, τότε το υπογράφημα που ενάγεται από το S στο συμπλήρωμα $\overline{G}$ είναι ανεξάρτητο σύνολο καθώς ισχύει ότι $\mathbf{m}(\overline{G}[S]) = 0$. Άρα, έχουμε $\omega(G) \leq \alpha(\overline{G})$.

Αντιστρόφως, αν το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο του $\overline{G}$ έχει μέγεθος $k = \alpha(\overline{G})$, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $S \subseteq V(\overline{G})$ με $|S| = k$ ώστε $\mathbf{m}(\overline{G}[S]) = 0$, τότε το υπογράφημα που ενάγεται από το S στο G είναι k -κλίκα, άρα, έχουμε ότι ισχύει $\omega(G) \geq \alpha(\overline{G})$. Από τις δυο ανισώσεις έπεται το ζητούμενο. $\square$

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι υπάρχει μια δυική σχέση μεταξύ των κλικών και των ανεξάρτητων συνόλων ανάμεσα σε ένα γράφημα G και το συμπλήρωμα του $\overline{G}$. Εισάγουμε, τώρα, τον βασικό ορισμό των αριθμών Ramsey.

Ορισμός 3.2. Για κάθε θετικούς ακεραίους k και l ορίζουμε τον αριθμό Ramsey $r(k, l)$ των k και l ως το μικρότερο n για το οποίο κάθε γράφημα G με n κορυφές, είτε $\omega(G) \geq k$ ή $\alpha(G) \geq l$.

Υφίσταται και ο εξής ισοδύναμος ορισμός:

Για κάθε θετικούς ακεραίους k και l ορίζουμε τον αριθμό Ramsey $r(k, l)$ των k και l ως το μικρότερο n για το οποίο κάθε πλήρες γράφημα G με n κορυφές του οποίου οι ακμές έχουν χρωματιστεί με 2 χρώματα, είτε περιέχει μια μονοχρωματική κλίκα K_k είτε μια μονοχρωματική κλίκα K_l .

Η ύπαρξη του αριθμού Ramsey, δηλαδή η πληρότητα του Ορισμού 3.2, αποδεικνύεται από το ακόλουθο Θεώρημα Ramsey.

Θεώρημα 3.3. (Θεώρημα Ramsey). Για κάθε θετικούς ακεραίους k και l , υπάρχει $r(k, l) < \infty$, τέτοιος ώστε για κάθε γράφημα με τουλάχιστον $r(k, l)$ κορυφές είτε περιέχει μια κλίκα μεγέθους k είτε περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο με l κορυφές, δηλαδή είτε $\omega(G) \geq k$ ή $\alpha(G) \geq l$. Συγκεκριμένα:

$$r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}. \quad (3.1)$$

Σημείωση: το παραπάνω άνω φράγμα είναι ισχυρότερο από αρχικό άνω φράγμα του Ramsey.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στις ποσότητες k και l . Αρχικά, παρατηρούμε ότι $r(1, l) = r(k, 1) = 1$. Πράγματι αυτό ισχύει, καθώς το ελάχιστο πλήθος κορυφών που απαιτούνται για να έχουμε ως υπογράφημα την κλίκα K_1 είναι $|V(G)| = 1$. Αντίστοιχα, ακριβώς το ίδιο ισχύει για να έχουμε ένα ανεξάρτητο σύνολο με ακριβώς 1 κορυφή. Άρα, $r(1, l) = r(k, 1) < \infty$. Υποθέτουμε ότι ισχύει $r(s, t) < \infty$ για κάθε $0 < s < k$ και $0 < t < l$. Θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

$$r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1). \quad (3.2)$$

Απόδειξη ισχυρισμού: Ορίζουμε $n = r(k-1, l) + r(k, l-1)$, το οποίο είναι καλά ορισμένο από επαγωγική υπόθεση. Έστω γράφημα G που έχει $n(G) = n$ κορυφές και έστω v μια οποιαδήποτε κορυφή του G . Θέτουμε $k_1 = |N_G(v)|$ (δηλ. το πλήθος των γειτονικών κορυφών της v στο G) και $k_2 = |N_{\overline{G}}(v)|$ (δηλ. το πλήθος των μη γειτονικών κορυφών της v στο G). Παρατηρούμε ότι:

$$k_1 + k_2 = n(G) - 1 = r(k-1, l) + r(k, l-1) - 1 \quad (3.3)$$

καθώς ο βαθμός κάθε κορυφής σε ένα πλήρες γράφημα είναι $n(G)-1$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- αν $k_1 \geq r(k-1, l)$, δηλαδή αν η κορυφή v έχει τουλάχιστον $r(k-1, l)$ γείτονες, τότε για το γράφημα που ενάγεται από την γειτονιάς της v , το $G_1 = G[N_G(v)]$ έχουμε ότι περιέχει μια κλίκα με $k-1$ κορυφές είτε περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο με l κορυφές, δηλ. $\omega(G_1) \geq k-1$ ή $\alpha(G_1) \geq l$. Στην πρώτη περίπτωση, προσθέτοντας την κορυφή v στην κλίκα με τις $k-1$ κορυφές, εφόσον η v είναι γειτονική με όλες, προκύπτει μια κλίκα με k κορυφές, άρα $\omega(G) \geq k$. Στην δεύτερη περίπτωση, έχουμε ότι $\alpha(G_1) \geq l$, καθώς το ανεξάρτητο σύνολο διατηρείται καθώς στο μεγαλύτερο γράφημα δεν προστίθενται νέες ακμές μεταξύ των κορυφών του ανεξάρτητου συνόλου. Επομένως, ο ισχυρισμός ισχύει.

- αν $k_1 < r(k-1, l)$, τότε από την σχέση 3.3 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} k_1 &\leq r(k-1, l) - 1 \Rightarrow -k_1 \geq -r(k-1, l) + 1 \\ \Rightarrow k_1 + k_2 - k_1 &\geq r(k-1, l) + r(k, l-1) - 1 - r(k-1, l) + 1 \\ \Rightarrow k_2 &\geq r(k, l-1). \end{aligned}$$

Ορίζουμε $G_2 = G[N_{\overline{G}}(v)]$, δηλαδή το γράφημα που ενάγεται από τις μη γειτονικές κορυφές της v στο G και έχουμε ότι, εφόσον $k_2 \geq r(k, l-1)$, το G_2 περιέχει μια κλίκα με k κορυφές είτε περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο με $l-1$ κορυφές, δηλ. $\omega(G_2) \geq k$ ή $\alpha(G_2) \geq l-1$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε άμεσα ότι και το G περιέχει μια κλίκα με k κορυφές, δηλ. $\omega(G) \geq k$. Στην δεύτερη περίπτωση, προσθέτοντας την κορυφή v στο ανεξάρτητο σύνολο με τις $l-1$ κορυφές, παίρνω ένα ανεξάρτητο σύνολο με l κορυφές, καθώς $l-1$ κορυφές είναι μη γειτονικές με την v , άρα $\alpha(G) \geq l$. Επομένως, ο ισχυρισμός ισχύει, και εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του.

Τώρα θα αποδείξουμε την πρώτη ανισότητα με επαγωγή στην ποσότητα $k + l$. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η ανισότητα $r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$ ισχύει για την βάση της επαγωγής, δηλαδή για $k = 1$ ή $l = 1$, καθώς, όπως αιτιολογήσαμε παραπάνω $r(1, l) = r(k, 1) = 1$ και $\binom{1+l-2}{1-1} = \binom{l-1}{0} = 1$ όπως επίσης και $\binom{k+1-2}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} = 1$. Επομένως, εφόσον $(k-1) + l < k + 1$ και επίσης, $k + (l-1) < k + l$, από επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} r(k, l) &\leq r(k-1, l) + r(k, l-1) \\ &\leq \binom{(k-1)+l-2}{(k-1)-1} + \binom{k+(l-1)-2}{k-1} \\ &\leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} \\ &\leq \binom{k+l-2}{k-1}. \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 3.4. $r(3, 3) = 6$

Απόδειξη. Από την σχέση 3.2 έχουμε ότι $r(3, 3) \leq r(2, 3) + r(3, 2) = 3 + 3 = 6$. Αρχικά, θα δούμε γιατί $r(2, 3) = r(3, 2) = 3$. Ισχύει ότι $r(2, 3) > 2$ καθώς το γράφημα με 2 κουφές και καμία ακμή δεν περιέχει ούτε μια 2-κλίκα ούτε ένα ανεξάρτητο σύνολο με 3 κορυφές. Επίσης, αν έχουμε ένα γράφημα με τουλάχιστον 3 κορυφές, είτε θα περιέχει τουλάχιστον μια ακμή, είτε δεν θα έχει καμία ακμή. Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι είτε το γράφημα περιέχει ως υπογράφημα μια 2-κλίκα είτε είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο με τουλάχιστον 3 κορυφές, άρα περιέχει ανεξάρτητο σύνολο 3 κορυφών. Εφόσον $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$, έχουμε ότι $r(k, l) = r(l, k)$ και συνεπώς, $r(2, 3) = r(3, 2) = 3$.

Επίσης, εφόσον ο κύκλος C_5 έχει $\alpha(C_5) = \omega(C_5) = 2$, έχουμε ότι $r(3, 3) \geq 5$. Συνδυάζοντας τις δυο ανισότητες παίρνουμε ότι $r(3, 3) = 6$. □

Σχόλιο 3.5. Ο ακριβής υπολογισμός των αριθμών Ramsey $r(k, l)$ ακόμα και για πολύ μικρές τιμές των k και l παραμένει ένα ανοιχτό και πολύ δύσκολο ¹ πρόβλημα.

¹Για την δυσκολία εύρεσης των αριθμών Ramsey προσθέτουμε φράση του Paul Erdős για τον υπολογισμό των $(5, 5)$ και $(6, 6)$ όπως παρατίθεται στο [17] :

"Suppose aliens invade the earth and threaten to obliterate it in a year's time unless human beings can find the Ramsey number for red five and blue five. We could marshal the world's best minds and fastest computers, and within a year we could

Σύμφωνα με τις εργασίες [14] και [15], οι μόνες τιμές που έχουν υπολογιστεί ακριβώς και δεν είναι τετριμμένες είναι οι $r(3, l)$ για $l \in \{3, 4, \dots, 9\}$ και $r(4, l)$ για $l \in \{4, 5\}$. Επίσης, έχει αποδειχθεί ότι $r(5, 5) \in \{43, \dots, 49\}$ και μάλιστα υπήρξε πρόσφατα (2017) η βελτιστοποίηση στο άνω φράγμα ότι $R(5, 5) \leq 48$, όπως παρουσιάστηκε στην εργασία [16].

Το πρώτο φράγμα για τους αριθμούς Ramsey δόθηκε από τον Paul Erdős (1947) και εκφράζεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.6. Για κάθε θετικό ακέραιο k , ισχύει ότι $r(k, k) \geq 2^{k/2}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για $k \in \{1, 2\}$ το ζητούμενο έπεται άμεσα, όπως έχουμε δει παραπάνω. Εξετάζουμε, λοιπόν, την περίπτωση $k \geq 3$. Έστω ένα σύνολο V με μέγεθος $|V| = n$. Ορίζουμε $\mathfrak{G}_n$ να είναι το σύνολο των γραφημάτων που έχουν ως σύνολο κορυφών του V και $\mathfrak{G}_n^k$ το σύνολο των γραφημάτων που ανήκουν στο $\mathfrak{G}_n$ και περιέχουν μια κλίκα k κορυφών. Παρατηρούμε ότι, εφόσον το πλήθος των ακμών ενός πλήρους γραφήματος n κορυφών είναι $\binom{n}{2}$, και για κάθε ακμή έχω τις επιλογές να την επιλέξω ή όχι για την σύσταση γραφημάτων, έχουμε $|\mathfrak{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$. Επίσης, για δεδομένο σύνολο $S \subseteq V$ με $|S| = k$ έχουμε ότι, αν αφαιρέσουμε τις ακμές που σίγουρα θα επιλέξουμε για την k -κλίκα, απομένουν $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ ακμές διαθέσιμες προς επιλογή, και άρα υπάρχουν $2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}}$ γραφήματα στο $\mathfrak{G}_n$, στα οποία το S ενάγει μια k -κλίκα. Εφόσον υπάρχουν $\binom{n}{k}$ υποσύνολα του V με ακριβώς k στοιχεία έχουμε ότι

$$|\mathfrak{G}_n^k| \leq \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2} - \binom{k}{2}} = \binom{n}{k} |\mathfrak{G}_n| 2^{-\binom{k}{2}} \Rightarrow \frac{|\mathfrak{G}_n^k|}{|\mathfrak{G}_n|} \leq \binom{n}{k} 2^{-\binom{k}{2}} < \frac{n^k \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!}$$

Αν $n < 2^{k/2}$, τότε έχουμε

$$\frac{|\mathfrak{G}_n^k|}{|\mathfrak{G}_n|} < \frac{2^{k^2/2} \cdot 2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k^2}{2} \cdot 2^{-\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}}}}{k!} = \frac{2^{k/2}}{k!} < 1/2.$$

Συνεπώς, τα γραφήματα που περιέχουν μια k -κλίκα είναι λιγότερα από τα μισά γραφήματα στο $\mathfrak{G}_n$. Εφόσον το σύνολο $\mathfrak{G}_n$ για κάθε γράφημα G περιλαμβάνει και το συμπλήρωμα $\overline{G}$, έχουμε επίσης ότι τα γραφήματα που περιέχουν ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών είναι και αυτά λιγότερα από τα μισά. Αυτά τα δύο δεδομένα μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα γράφημα G στο $\mathfrak{G}_n$ που δεν περιέχει ούτε μια k -κλίκα, ούτε ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών. Συνεπώς,

probably calculate the value. If the aliens demanded the Ramsey number for red six and blue six, however, we would have no choice but to launch a preemptive attack.”

έχουμε ότι $\alpha(G) < k$ και $\omega(G) < k$, και άρα δεν μπορεί να ισχύει ότι $r(k, k) < 2^{k/2}$, επομένως, παίρνουμε ότι $r(k, k) \geq 2^{k/2}$ $\square$

Στην συνέχεια, χρειαζόμαστε το ακόλουθο φράγμα στους αριθμούς Ramsey το οποίο προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.3.

Θεώρημα 3.7. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει $R(k) = r(k, k) < 2^{2k}$ τέτοιο ώστε κάθε γράφημα G με $n \geq R(k)$ κορυφές περιέχει είτε με μια κλίκα ή ένα ανεξάρτητο σύνολο με k κορυφές, δηλαδή $\omega(G) \geq k$ ή $\alpha(G) \geq k$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.3 για να βρούμε άνω φράγμα για τον αριθμό Ramsey $r(k, k)$ έχουμε ότι

$$r(k, k) = \binom{k+k-2}{k-1} = \binom{2k-2}{k-1}$$

και εφαρμόζοντας την προσέγγιση *Stirling* $n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \binom{2k-2}{k-1} &= \frac{(2k-2)!}{(k-1)!(k-1)!} \\ &= \frac{(2k-2)!}{((k-1)!)^2} \\ &\approx \frac{(2k-2)^{2k-2} e^{-(2k-2)} \sqrt{2\pi(2k-2)}}{((k-1)^{k-1} e^{-(k-1)} \sqrt{2\pi(k-1)})^2} \\ &\approx \frac{(2(k-1))^{2k-2} e^{-(2k-2)} \sqrt{2\pi(2(k-1))}}{(k-1)^{2k-2} e^{-(2k-2)} 2\pi(k-1)} \\ &\approx \frac{2^{2k-2}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{k-1}} \\ &\approx \frac{2^{2k-2}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{k-1}}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι $\frac{2^{2k-2}}{2\sqrt{\pi} \sqrt{k-1}} < 2^{2k-2} < 2^{2k}$. Επομένως, συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα έχουμε τελικά ότι

$$r(k, k) < 2^{2k}.$$

$\square$

3.2 Απαριθμητικό αποτέλεσμα των αριθμών Ramsey

Τώρα, θα δούμε ένα σημαντικό συνδυαστικό αποτέλεσμα των αριθμών Ramsey, που μας δείχνει ότι αν ένα αρκετά μεγάλο γράφημα περιέχει είτε μια k -κλίκα είτε

ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών, τότε η συνολική ποσότητα των k -κλίκα είτε των ανεξαρτήτων συνόλων k κορυφών θα έχει ως κάτω φράγμα μια συγκεκριμένη ποσότητα. Μάλιστα η ποσότητα αυτή για μεγάλες τιμές του n και μικρές τιμές του k είναι «αρκετά» μεγάλη.

Πόρισμα 3.8. Έστω γράφημα $G = (V, E)$ με $|V| = n$ κορυφές, όπου $n \geq 2^{2k}$. Τότε, το πλήθος των υποσυνόλων $U \subseteq V$ με k κορυφές τέτοια ώστε το U να ενάγει είτε μια κλίκα είτε ένα ανεξάρτητο σύνολο στο G είναι τουλάχιστον

$$\frac{(2^{2k} - k)!}{2^{2k}} \cdot \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Απόδειξη. Θα ονομάσουμε ενδιαφέρον ένα υποσύνολο X του V μεγέθους k , δηλαδή $X \in V^{(k)}$ αν το X ενάγει είτε μια κλίκα ή ένα ανεξάρτητο σύνολο στο γράφημα G . Από θεώρημα *Ramsey* γνωρίζουμε ότι κάθε υποσύνολο $U \subseteq V$ με $|U| = 2^{2k}$ πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα ενδιαφέρον υποσύνολο.

Το πλήθος των υποσυνόλων του V μεγέθους ακριβώς 2^{2k} είναι $\binom{n}{2^{2k}}$. Επιπλέον, το πλήθος τέτοιων συνόλων για τα οποία ένα δοσμένο υποσύνολο k κορυφών μπορεί να περιέχεται σε αυτά είναι $\binom{n-k}{2^{2k}-k}$, καθώς οι k κορυφές πρέπει να περιέχονται στο σύνολο, άρα αφαιρούμε αυτές τις k κορυφές από τις n δυνατές επιλογές και επιπλέον, εφόσον έχουμε καλύψει με αυτές τις k θέσεις, για να συμπληρώσουμε το μέγεθος 2^{2k} υπολείπονται $2^{2k} - k$ επιλογές. Επομένως, προκειμένου κάθε $U \in V^{(2^{2k})}$ να περιέχει τουλάχιστον ένα ενδιαφέρον υποσύνολο, ο αριθμός των ενδιαφερόντων υποσυνόλων πρέπει να είναι τουλάχιστον :

$$\frac{\binom{n}{2^{2k}}}{\binom{n-k}{2^{2k}-k}} = \frac{\frac{n!}{(2^{2k})!(n-2^{2k})!}}{\frac{(n-k)!}{(2^{2k}-k)!(n-2^{2k})!}} = \frac{(2^{2k} - k)!}{(2^{2k})!} \cdot \frac{n!}{(n - k)!}$$

όπως ζητείται. $\square$

Παράδειγμα 3.9. Για τις τιμές $n = 10^4$ και $k = 5$ παρατηρούμε ότι ισχύει $n = 10^4 > 2^{2 \cdot 5} = 1.024$ και επομένως κάθε γράφημα με τουλάχιστον 10.000 κορυφές θα έχει τουλάχιστον $\frac{(2^{2 \cdot 5} - 5)!}{2^{2 \cdot 5}} \cdot \frac{(10^4)!}{(10^4 - 5)!} \simeq 89601$.

Παρατήρηση 3.10. Για αν απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς στην επόμενη ενότητα, θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα φράγματα στους διωνυμικούς συντελεστές:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k \quad (3.4)$$

Συγκεκριμένα για $k \geq 3$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{(2^{2k} - k)!}{2^{2k}} \cdot \frac{n!}{(n - k)!} &= \frac{(2^{2k} - k)!k!}{2^{2k}} \cdot \frac{n!}{k!(n - k)!} \\
 &= \frac{(2^{2k} - k)!k!}{2^{2k}} \binom{n}{k} \\
 &= \frac{1}{\binom{2^{2k}}{k}} \binom{n}{k} \\
 &\geq \frac{1}{\left(\frac{e2^{2k}}{k}\right)^k} \binom{n}{k} \\
 &= \frac{k^k}{e^k 2^{2k^2}} \binom{n}{k} \\
 &> \frac{1}{2^{2k^2}} \binom{n}{k}.
 \end{aligned}$$

δηλαδή, δείξαμε ότι :

$$\frac{(2^{2k} - k)!}{2^{2k}} \cdot \frac{n!}{(n - k)!} > \frac{1}{2^{2k^2}} \binom{n}{k}. \quad (3.5)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΓΡΑΦΟΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΔΟΜΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποδείξουμε τα βασικά δομικά αποτελέσματα που θα ορίσουν και την κατασκευή των αλγορίθμων που θα περιγράφουν στο Κεφάλαιο 5. Το αποτέλεσμα-κλειδί από αυτήν την ενότητα είναι ότι *τα γραφήματα (με επαρκώς πολλές κορυφές) που δεν περιέχουν κανένα άρτιο γράφημα με k κορυφές πρέπει να ανήκουν σε μια από ένα μικρό πλήθος οικογενειών γραφημάτων, οι οποίες είναι εύκολα αναγνωρίσιμες*. Ένα ανάλογο αποτέλεσμα προκύπτει και για τα γραφήματα που δεν περιέχουν κανένα περιττό γράφημα με k κορυφές. Επίσης, ένα αναλόγως σημαντικό αποτέλεσμα είναι ότι *κάθε επαρκώς μεγάλο γράφημα το οποίο περιέχει τουλάχιστον ένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές (αντίστοιχα, ένα περιττό) πρέπει τελικά να περιέχει ένα μεγάλο αριθμό τέτοιων υπογραφημάτων*.

Ξεκινάμε με μια εύκολη συνθήκη η οποία εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός εναγόμενου υπογραφήματος με k κορυφές το οποίο μοιράζεται όλες τις κορυφές του εκτός από μια με μια k -κλίκα αλλά του οποίου το πλήθος των ακμών διαφέρει στο $\mathbb{Z}_2$ από το πλήθος των ακμών της k -κλίκας.

Πρόταση 4.1. Έστω G ένα γράφημα που περιέχει μια k -κλίκα H (όπου $k \geq 3$), και υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κορυφή $v \in V(G)$ τέτοια ώστε

$$\emptyset \neq N(v) \cap V(H) \neq V(H).$$

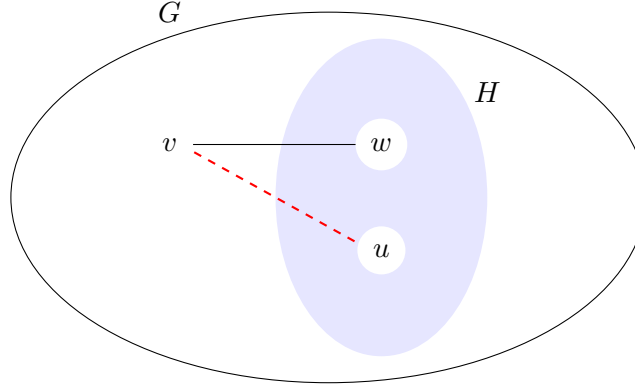
Τότε, το G περιέχει ένα εναγόμενο υπογράφημα $\tilde{H}$ με k κορυφές και

$$|V(H) \cap V(\tilde{H})| = k - 1,$$

τέτοιο ώστε

$$\mathbf{m}(H) \not\equiv \mathbf{m}(\tilde{H}) \pmod{2}.$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με r το πλήθος των γειτόνων της v στο H , δηλαδή έχουμε ότι $r = |V(H) \cap N(v)|$ και από υπόθεση προκύπτει ότι ισχύει $0 < r < k$, εφόσον $\emptyset \neq N(v) \cap V(H) \neq V(H)$ και $V(H) = k$. Επομένως, υπάρχει μια κορυφή $u \in (V(H) \setminus N(v))$ και επίσης, υπάρχει μια κορυφή $w \in (V(H) \cap N(v))$ (βλ. Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Το γράφημα G , το υπογράφημα H , και οι κορυφές v , w , και u .

Θέτουμε $H_u = G[(V(H) \setminus u) \cup \{v\}]$ και $H_w = G[(V(H) \setminus w) \cup \{v\}]$ και παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{m}(H_u) = \mathbf{m}(H) - \deg_H(u) + |V(H) \cap N(v)| = \binom{k}{2} - (k-1) + r$$

$$\mathbf{m}(H_w) = \mathbf{m}(H) - \deg_H(w) + |(V(H) \cap N(v) \setminus w)| = \binom{k}{2} - (k-1) + (r-1).$$

Επομένως, έχουμε ότι $\mathbf{m}(H_u) = \mathbf{m}(H_w) + 1$, που σημαίνει ότι

$$\mathbf{m}(H_u) \not\equiv \mathbf{m}(H_w) \pmod{2}.$$

Επίσης, ισχύει ότι $|V(H_u)| = |V(H_w)| = k$, άρα, ακριβώς ένα από τα H_u και H_w είναι το ζητούμενο εναγόμενο υπογράφημα $\tilde{H}$. $\square$

Με την επιπλέον συνθήκη ότι το k είναι άρτιος, μπορούμε να πάρουμε ένα ισχυρότερο πόρισμα.

Πόρισμα 4.2. Έστω G ένα γράφημα που περιέχει μια k -κλίκια H , όπου k άρτιος και $k \geq 4$, και υποθέτουμε ότι υπάρχει μια κορυφή $v \in V(G)$ τέτοια ώστε

$$N(v) \cap V(H) \neq V(H).$$

Τότε, το G περιέχει ένα εναγόμενο υπογράφημα $\tilde{H}$ με k κορυφές και

$$|V(H) \cap V(\tilde{H})| = k - 1,$$

τέτοιο ώστε

$$\mathbf{m}(H) \not\equiv \mathbf{m}(\tilde{H}) \pmod{2}.$$

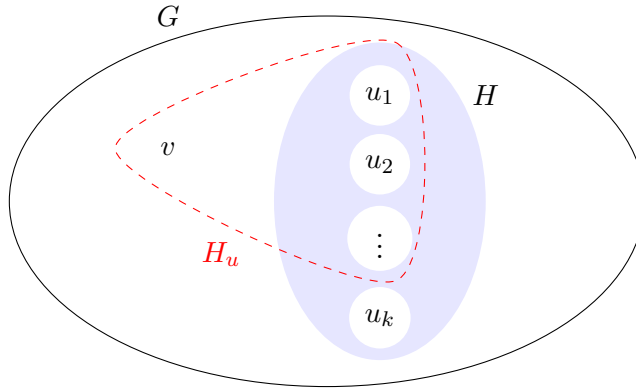
Απόδειξη. Αν $N(v) \cap V(H) \neq \emptyset$, τότε το ζητούμενο έπεται άμεσα από την προηγούμενη πρόταση. Στην περίπτωση που $N(v) \cap V(H) = \emptyset$, τότε, για κάθε κορυφή $v \in V(H)$, το $H_u = G[(V(H) \setminus u) \cup \{v\}]$ (βλ. Σχήμα 4.2) έχει

$$\mathbf{m}(H_u) = \binom{k}{2} - (k - 1)$$

ακμές και εφόσον το k είναι άρτιος, τότε το $k - 1$ είναι περιττός και άρα

$$\binom{k}{2} - (k - 1) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2},$$

δηλαδή $\mathbf{m}(H) \not\equiv \mathbf{m}(H_u) \pmod{2}$. □



Σχήμα 4.2: Το γράφημα G , το υπογράφημα H , και μέσα στο κόκκινο πλαίσιο είναι το υπογράφημα H_u όπου $u = u_k$.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτά τα στοιχεία για να προσδιορίσουμε σε ποιες περιπτώσεις ένα γράφημα G , το οποίο περιέχει μια k -κλίκα K_k , δεν περιέχει κανένα εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές του οποίου το πλήθος των ακμών διαφέρει στο 2 από το πλήθος των ακμών της k -κλίκας.

Λήμμα 4.3. Έστω G ένα γράφημα που περιέχει μια k -κλίκα K_k , όπου $k \geq 2$. Τότε το G επίσης περιέχει ένα εναγόμενο υπογράφημα H με k κορυφές τέτοιο ώστε $\binom{k}{2} \not\equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$, εκτός αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. το G είναι κλίκα ή
2. το k είναι περιττός και το G είναι ξένη ένωση δύο κλικών

Αν οποιαδήποτε από τις δύο συνθήκες ισχύει, τότε κάθε εναγόμενο υπογράφημα H με k κορυφές ικανοποιεί την σχέση $\binom{k}{2} \equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$.

Ισοδύναμη διατύπωση του Λήμματος 4.3. Έστω G ένα γράφημα που περιέχει μια k -κλίκα K_k , όπου $k \geq 2$. Τότε κάθε εναγόμενο υπογράφημα του G με k κορυφές ικανοποιεί την σχέση $\binom{k}{2} \equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$ αν και μόνο αν ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1. το G είναι κλίκα
2. το k είναι περιττός και το G είναι ξένη ένωση δύο κλικών.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το ζητούμενο προκύπτει άμεσα για $k = 2$.

Πράγματι, έστω κάθε εναγόμενο υπογράφημα του G με $k = 2$ κορυφές ικανοποιεί την σχέση $\binom{2}{2} \equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$, όπου $\binom{2}{2} \equiv 1 \pmod{2}$. Αυτό σημαίνει για κάθε δυο κορυφές $x, y \in V(G)$ θα ισχύει $\{x, y\} \in E(G)$, άρα το G είναι κλίκα. Αντίστροφα, εφόσον το $k = 2$ άρτιος, έχουμε μόνο την υπόθεση ότι το G είναι κλίκα, άρα για κάθε δυο κορυφές $x, y \in V(G)$ θα ισχύει $\{x, y\} \in E(G)$, συνεπώς κάθε εναγόμενο υπογράφημα του G με $k = 2$ κορυφές θα έχει $\mathbf{m}() = 1$ ακμή και άρα θα ικανοποιεί την σχέση $\binom{2}{2} \equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$.

Εξετάζουμε τώρα για $k \geq 3$. Υποθέτουμε ότι κάθε εναγόμενο υπογράφημα του G με k κορυφές ικανοποιεί την σχέση $\binom{k}{2} \equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$. Έστω H' μια μέγιστη κλίκα στο G , επομένως, $|V(H')| \geq k$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 : Αν $H' = G$, τότε τελειώσαμε και έχουμε το (1).

Περίπτωση 2 : Αν $H' \subsetneq G$, από την μεγιστικότητα της κλικας H' , για κάθε κορυφή $v \in V(G) \setminus V(H')$ υπάρχει κορυφή $u_v \in V(H')$ με $\{v, u_v\} \notin E(G)$, δηλαδή $N(v) \cap V(H') \neq V(H')$ (καθώς, διαφορετικά θα πρόκυπτε μεγαλύτερη κλίκα, άτοπο).

Υποπερίπτωση 2.1 : Αν το k είναι άρτιος, αν εφαρμόσουμε το Πόρισμα 4.2 στην κορυφή v και σε ένα οποιοδήποτε εναγόμενο υπογράφημα H'' του H' με k κορυφές που να περιέχει την u_v (αφού το k είναι άρτιος και $H'' = K_k$, τότε υπάρχει $v \in V(G) : N(v) \cap V(H'') \neq V(H')$ αφού $u_v \in V(H'')$), έχουμε ότι το G περιέχει εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές τέτοιο ώστε $\binom{k}{2} \not\equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$. Ατοπο.

Υποπερίπτωση 2.2 : Αν το k είναι περιττός.

Υποπερίπτωση 2.2.1 : Αν υπάρχει κορυφή $v \in V(G) \setminus V(H')$ και κορυφή $w \in V(H')$ τέτοιες ώστε $\{v, w\} \in E(G)$, τότε εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.1 στην κορυφή v και σε ένα οποιοδήποτε εναγόμενο υπογράφημα H'' του H' με k κορυφές που να περιέχει την u_v και την w (καθώς $H'' = K_k, \exists v \in V(G)$ τέτοιο ώστε: $\emptyset \neq N(v) \cap V(H'') \neq V(H')$) αφού $w, u_v \in V(H'')$ και $\{v, w\} \in (G)$ ενώ $\{v, u_v\} \notin (G)$), έχουμε ότι το G περιέχει εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές τέτοιο ώστε $\binom{k}{2} \not\equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$. Ατοπο.

Υποπερίπτωση 2.2.2 : Για κάθε κορυφή $v \in V(G) \setminus V(H') : N(v) \cap V(H') = \emptyset$. Σε αυτήν την περίπτωση θα δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη (2) με τον παρακάτω ισχυρισμό:

Ισχυρισμός: για κάθε $v_1, v_2 \in V(G) \setminus V(H')$ με $v_1 \neq v_2; \{v_1, v_2\} \in E(G)$.

(Ο ισχυρισμός αυτός μας δείχνει ότι το $G[V(G) \setminus V(H')]$ είναι κλίκια, επίσης γνωρίζουμε ότι το $G[V(H')]$ είναι κλίκια και εφόσον $\forall v \in V(G) \setminus V(H') : N(v) \cap V(H') = \emptyset$, έχουμε ότι το G είναι η ξένη ένωση δυο κλικών, των $G[V(G) \setminus V(H')]$ και $G[V(H')]$).

Απόδειξη ισχυρισμού: Υποθέτω, με σκοπό το άτοπο, ότι υπάρχουν δυο διαφορετικές κορυφές $v_1, v_2 \in V(G) \setminus V(H')$ τέτοιες ώστε $\{v_1, v_2\} \notin E(G)$. Τότε, το εναγόμενο υπογράφημα H'' που αποτελείται από τις v_1, v_2 και από $k - 2$ οποιεσδήποτε κορυφές του H' θα έχει :

$$\binom{k}{2} - (k - 1) - (k - 2) = \binom{k}{2} - (2k - 3) \text{ ακμές,}$$

και εφόσον το $(2k - 3) = 2(k - 1) - 1$ είναι περιττός, θα έχουμε ότι

$$\mathbf{m}(H'') = \binom{k}{2} - (2k - 3) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2},$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του: «Αν κάθε εναγόμενο υπογράφημα H του G με k κορυφές ικανοποιεί την σχέση $\binom{k}{2} = \mathbf{m}(H) \pmod{2}$, τότε μια από τις συνθήκες (1) ή (2) πρέπει να ισχύει», ή ισοδύναμα, «Το G δεν περιέχει εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές τέτοιο ώστε $\binom{k}{2} \not\equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$ εκτός αν μια από τις συνθήκες (1) ή (2) πρέπει να ισχύει».

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε, τώρα, ότι μια από τις συνθήκες (1) ή (2) ισχύει. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 : Έστω ότι το G είναι κλίκια, τότε είναι προφανές ότι κάθε εναγόμενο υπογράφημα του G με k κορυφές θα είναι και αυτό κλίκια, επομένως, θα έχει ακριβώς $\binom{k}{2}$ ακμές και άρα $\binom{k}{2} \equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$.

Περίπτωση 2 : Έστω ότι το k είναι περιττός και το G είναι η ξένη ένωση δύο κλικών, των G_1 και G_2 . Έστω ένα αυθαίρετο εναγόμενο υπογράφημα του G με k κορυφές και $|V(H) \cap V(G_1)| = i$, όπου $0 \leq i \leq k$. Τότε, το πλήθος των ακμών του H είναι ακριβώς: $\mathbf{m}(H) = \binom{k}{2} - i(k-i)$. Μεταξύ των $V(H) \cap V(G_1)$ και $V(H) \cap V(G_2)$ δεν υπάρχουν ακμές και $|V(H) \cap V(G_1)| = k-i$. Παρατηρούμε ότι καθώς το k είναι περιττός, ακριβώς ένα από τα i και $k-i$ πρέπει να είναι άρτιος, επομένως, το γινόμενο $i(k-i)$ είναι άρτιος και έτσι $\binom{k}{2} \equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$. $\square$

Από αυτό το Λήμμα 4.3 συνεπάγεται ένας χαρακτηρισμός των επαρκώς μεγάλων γραφημάτων που δεν περιέχουν κανένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές.

Πόρισμα 4.4. Έστω G γράφημα με $n \geq 2^{2k}$ κορυφές, όπου $k \geq 2$. Τότε, το G δεν περιέχει κανένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές αν και μόνο αν το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός και είτε

1. το G είναι κλίκια, είτε
2. $k \equiv 3 \pmod{4}$ και το G είναι ξένη ένωση δυο κλικών.

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι από το Θεώρημα 3.7, το G πρέπει να περιέχει είτε με k -κλίκια είτε ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών.

Περίπτωση 1 : Αν το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος, τότε μπορούμε να δούμε άμεσα ότι υπάρχει ένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές. Πράγματι :

- Αν $K_k \subseteq_{\text{εν}} G$, τότε το K_k είναι το ζητούμενο άρτιο υπογράφημα.
- Αν S ανεξάρτητο σύνολο του G με $|S| = k$, τότε το $G[S]$ έχει 0 ακμές, άρα είναι το ζητούμενο άρτιο υπογράφημα.

Περίπτωση 2 : Αν το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός, τότε $k \equiv 2 \pmod{4}$ ή $k \equiv 3 \pmod{4}$, καθώς για κάποιον φυσικό m έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \binom{k}{2} = 2m + 1 &\Leftrightarrow \frac{k(k-1)}{2} = 2m + 1 \\ &\Leftrightarrow k(k-1) = 4m + 2 \\ &\Leftrightarrow k(k-1) \equiv 2 \pmod{4} \\ &\Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{ή} \quad k \equiv 3 \pmod{4} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Σε αυτήν την περίπτωση το G δεν περιέχει ένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές αν και μόνο αν το G δεν περιέχει ένα εναγόμενο υπογράφημα H με k κορυφές τέτοιο ώστε $\binom{k}{2} \not\equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$.

Από το Λήμμα 4.3 είδαμε ότι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν είτε

1. το G είναι κλίκα, είτε
2. το k είναι περιττός και το G είναι ξένη ένωση δυο κλικών.

Από τις δυο δυνατές επιλογές από την σχέση 4.1 : $k \equiv 2 \pmod{4}$ ή $k \equiv 3 \pmod{4}$, ο περιττός είναι ο $k \equiv 3 \pmod{4}$. Άρα,

1. είτε το G είναι κλίκα,
2. είτε $k \equiv 3 \pmod{4}$ και το G είναι ξένη ένωση δυο κλικών.

□

Ανάλογα, μπορούμε να δώσουμε ένα πλήρη χαρακτηρισμό των επαρκώς μεγάλων γραφημάτων που δεν περιέχουν κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές.

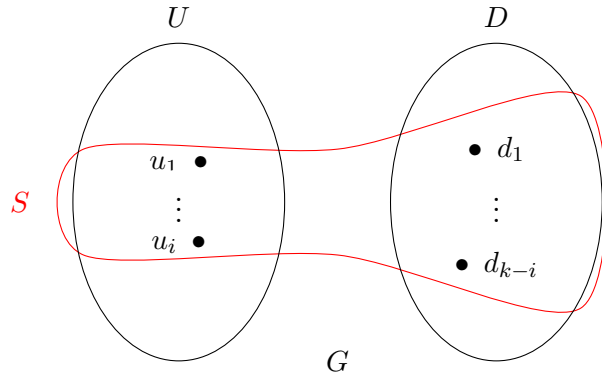
Πόρισμα 4.5. Έστω G γράφημα με $n \geq 2^{2k}$ κορυφές, όπου $k \geq 2$. Τότε, το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές αν και μόνο αν μια από τις ακόλουθες συνθήκες ισχύει:

1. το G είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο.

-
2. το k είναι περιττός και το G είναι ένα πλήρες διμερές γράφημα.
 3. το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος και το G είναι κλίκια.
 4. $k \equiv 1 \pmod{4}$ και το G είναι η ξένη ένωση δυο κλικών.

Απόδειξη. («αν») Παρατηρούμε ότι άμεσα μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε μια από τις τέσσερις αυτές συνθήκες είναι επαρκής για να μας εξασφαλίσει ότι το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές. Αναλυτικά, εξετάζοντας κάθε συνθήκη ξεχωριστά, έχουμε:

1. Το G είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο.
Άρα, για κάθε $S \subseteq V(G)$ με $|S| = k$, το $G[S]$ έχει 0 ακμές. Συνεπώς, το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές.
2. Το k είναι περιττός και το G είναι ένα πλήρες διμερές γράφημα.
Έστω U και D τα μέρη κορυφών του, τότε, για κάθε $S \subseteq V(G)$ με $|S| = k$ ισχύει ότι $|S \cap U| = i$ όπου $i = 0, \dots, k$ και επομένως, $|S \cap D| = k - i$. Συνεπώς, το $G[S]$ έχει $i(k - i)$ ακμές (βλ. Σχήμα 4.3). Παρατηρούμε ότι καθώς το k είναι περιττός, ακριβώς ένα από τα i και $k - i$ πρέπει να είναι άρτιος, επομένως, το γινόμενο $i(k - i)$ είναι άρτιος. Επομένως, το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές.



Σχήμα 4.3: Το διμερές γράφημα G με U και D τα μέρη κορυφών του. Τότε για κάθε $S \subseteq V(G)$ με $|S| = k$ έχουμε $S \cap U = \{u_1, \dots, u_i\}$ όπως επίσης $S \cap D = \{d_1, \dots, d_{k-i}\}$, άρα $\mathbf{m}(G[S]) = i(k - i)$.

3. Το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος και το G είναι κλίκια.
Από το Λήμμα 4.3, εφόσον το G είναι κλίκια, για κάθε εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές ισχύει $\binom{k}{2} \equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$ και εφόσον το $\binom{k}{2}$ είναι

άρτιος, έχουμε ότι το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές.

4. $k \equiv 1 \pmod{4}$ και το G είναι η ξένη ένωση δυο κλικών.

Από το Λήμμα 4.3, εφόσον το k είναι περιττός και το G είναι ξένη ένωση κλικών, για κάθε εναγόμενο υπογράφημα του G με k κορυφές ισχύει ότι $\binom{k}{2} \equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$ και εφόσον ισχύει ότι $k \equiv 1 \pmod{4}$ έχουμε ότι το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος, συνεπώς το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές.

(«μόνο αν») Έχουμε ως υπόθεση ότι το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές. Παρατηρούμε αρχικά ότι από το Θεώρημα 3.7, το G πρέπει να περιέχει είτε με k -κλικά είτε ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 : Το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός, επομένως $k \equiv 2 \pmod{4}$ ή $k \equiv 3 \pmod{4}$. Σε αυτήν την περίπτωση, διακρίνω τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση 1.1 : Το G περιέχει μια k -κλικά, δηλαδή $H \subseteq_{\text{en}} G$ και $\simeq K_k$. Τότε το γράφημα είναι περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές, άτοπο.

Υποπερίπτωση 1.2 : Το G περιέχει ένα ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών. Επομένως, το $\overline{G}$, το συμπλήρωμα του G , περιέχει μια k -κλικά. Επιπλέον, εφόσον το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός, παρατηρούμε ότι το $\overline{G}$ περιέχει άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές αν και μόνο αν το G περιέχει περιττό υπογράφημα με k κορυφές. Επομένως, εφόσον το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές, τότε το $\overline{G}$ δεν περιέχει κανένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές και τότε, από το Λήμμα 4.3 :

- είτε το $\overline{G}$ είναι κλικά, άρα το G είναι ανεξάρτητο σύνολο, δηλαδή ισχύει η συνθήκη (1).
- είτε $k \equiv 3 \pmod{4}$ και το $\overline{G}$ είναι ξένη ένωση δυο κλικών, άρα το G είναι πλήρες διμερές, δηλαδή ισχύει η συνθήκη (2).

Περίπτωση 2 : Το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος, επομένως $k \equiv 0 \pmod{4}$ ή $k \equiv 1 \pmod{4}$. Σε αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι το $\overline{G}$ περιέχει περιττό εναγόμενο υπο-

γράφημα με k κορυφές αν και μόνο αν το G περιέχει περιττό υπογράφημα με k κορυφές. Από θεώρημα 3.7, γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα G και $\overline{G}$ πρέπει να περιέχει μια k -κλίκα και επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το λήμμα 4.3 στο κατάλληλο γράφημα. Διακρίνουμε, λοιπόν, τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις.

Υποπερίπτωση 2.1 : Το G περιέχει μια k -κλίκα. Τότε, το Λήμμα 4.3 αναφέρει πως, εφόσον το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές, δηλαδή $\binom{k}{2} \not\equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$, αφού $\binom{k}{2}$ άρτιος και $\mathbf{m}(H)$ περιττός, τότε ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- είτε το G είναι κλίκα και εφόσον έχουμε ότι το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος, τότε παρατηρούμε ότι ισχύει η συνθήκη (3),
- είτε το k είναι περιττός και το G είναι η ξένη ένωση κλικών. Από τις δυνατές επιλογές για το $k : k \equiv 0 \pmod{4}$ ή $k \equiv 1 \pmod{4}$, ο περιττός αριθμός είναι το $k \equiv 1 \pmod{4}$. Συνεπώς, $k \equiv 1 \pmod{4}$ και το G είναι η ξένη ένωση κλικών, δηλαδή ισχύει η συνθήκη (4).

Υποπερίπτωση 2.2 : Το $\overline{G}$ περιέχει μια k -κλίκα. Εφόσον, το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές, τότε και το $\overline{G}$ δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές και άρα, από το λήμμα 4.3, εφόσον περιέχει k -κλίκα, έχουμε ότι :

- είτε το $\overline{G}$ είναι κλίκα και άρα το G είναι ανεξάρτητο σύνολο, δηλαδή παρατηρούμε ότι ισχύει η συνθήκη (1),
- είτε το k είναι περιττός και το $\overline{G}$ είναι η ξένη ένωση κλικών. Άρα, το k είναι περιττός και το G είναι πλήρες διμερές γράφημα,, δηλαδή ισχύει η συνθήκη (2).

□

Τώρα, θα αποδείξουμε ένα λήμμα-κλειδί αυτής της ενότητας, το οποίο μας δείχνει ότι κάθε γράφημα που περιέχει έναν μεγάλο αριθμό k -κλικών και τουλάχιστον ένα εναγόμενο υπογράφημα H με k κορυφές και με $\binom{k}{2} \not\equiv \mathbf{m}(H) \pmod{2}$, τότε περιέχει μεγάλο πλήθος τέτοιων υπογραφημάτων.

Λήμμα 4.6. Έστω $k \geq 3$ και $n \geq 6(k-2)$ (γενικά $n \gg k$), και έστω G γράφημα με n κορυφές που περιέχει τουλάχιστον

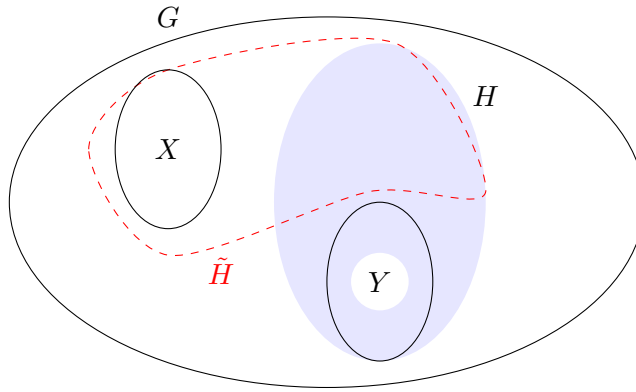
$$\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{k}{2} \quad k - \text{κλίκες}.$$

Τότε, ισχύει μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

1. είτε το G δεν περιέχει κανένα εναγόμενο υπογράφημα $\tilde{H}$ με k κορυφές και $\binom{k}{2} \not\equiv \mathbf{m}(\tilde{H}) \pmod{2}$,
2. είτε το G περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}k^2n^2} \binom{k}{2}$ τέτοια υπογραφήματα.

Πριν ξεκινήσουμε την απόδειξη του Λήμματος, θα δώσουμε έναν ορισμό, που θα μας βοηθήσει στην οικονομία διατύπωσης της απόδειξης.

Ορισμός 4.7. Για κάθε σύνολο $A \subseteq [k]$, λέμε ότι μια k -κλίκα H στο G είναι **A -αντικαταστάσιμη** αν υπάρχουν σύνολα κορυφών $X \subseteq V(G) \setminus V(H)$ και $Y \subseteq V(H)$ τέτοια ώστε $|X| = |Y| \in A$ και το $(V(H) \setminus Y) \cup X$ ενάγει ένα υπογράφημα $\tilde{H} = G[(V(H) \setminus Y) \cup X]$ (βλ. σχήμα 4.4) με $\mathbf{m}(\tilde{H}) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$. Αναφερόμαστε σε αυτό το νέο υπογράφημα $\tilde{H}$ ως μια **A -αντικατάσταση** του H .



Σχήμα 4.4: Το γράφημα G , η k -κλίκα H , τα σύνολα κορυφών $X \subseteq V(G) \setminus V(H)$ και $Y \subseteq V(H)$ τέτοια ώστε $|X| = |Y|$ και μέσα στο κόκκινο πλαίσιο είναι το υπογράφημα $\tilde{H}$ που ενάγεται από το σύνολο κορυφών $(V(H) \setminus Y) \cup X$.

Απόδειξη. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1 : Υποθέτουμε ότι κάθε k -κλίκας στο G είναι $\{1, 2\}$ -αντικαταστάσιμη σύμφωνα με τον ορισμό 4.7. Παρατηρούμε ότι κάθε εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές μπορεί να είναι μια $\{1, 2\}$ -αντικατάσταση σε το πολύ

$$k(n - k) + \binom{k}{2} \binom{n - k}{2}$$

διακριτές k -κλίκες, καθώς

- κάθε εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές μπορεί να είναι μια $\{1\}$ -αντικατάσταση σε το πολύ $k(n - k)$ διακριτές k -κλίκες, αφού για κάθε μια από τις k κορυφές του υπάρχουν $n - k$ επιλογές για να την αντικαταστήσουν, που είναι οι υπόλοιπες κορυφές του γραφήματος εκτός της k -κλίκας.
- κάθε εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές μπορεί να είναι μια $\{2\}$ -αντικατάσταση σε το πολύ $\binom{k}{2} \binom{n - k}{2}$ διακριτές k -κλίκες, αφού για κάθε ένα από τα $\binom{k}{2}$ ζεύγη κορυφών της k -κλίκας υπάρχουν $\binom{n - k}{2}$ ζεύγη κορυφών εκτός της k -κλίκας για να την αντικαταστήσουν.
- και από τον κανόνα του αθροίσματος προκύπτει το ζητούμενο.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι :

$$k(n - k) + \binom{k}{2} \binom{n - k}{2} < k^2 n^2$$

καθώς

$$\begin{aligned} k(n - k) + \binom{k}{2} \binom{n - k}{2} &= nk - k^2 + \frac{k(k - 1)}{2} \frac{(n - k)(n - k - 1)}{2} \\ &< nk + \frac{k^2}{2} \frac{n^2}{2} \\ &\leq n^2 k^2 \end{aligned}$$

για $n \geq 2$ και $k \geq 2$,

άρα το $k^2 n^2$ είναι ένα άνω φράγμα για το πλήθος των εναγόμενων υπογραφημάτων με k κορυφές μπορούν να είναι μια $\{1, 2\}$ -αντικατάσταση.

Επίσης, το συνολικό πλήθος των υπογραφημάτων $\tilde{H}$ με k κορυφές στο G για τα οποία ισχύει ότι $\mathbf{m}(\tilde{H}) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$ πρέπει να είναι τουλάχιστον

$$\frac{1}{2^{2k^2+1}k^2n^2} \binom{k}{2},$$

αφού το G περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{k}{2}$ k -κλίκες και διαιρώντας με άνω φράγμα του πλήθους των διακριτών k -κλικών, που είναι k^2n^2 , προκύπτει το παραπάνω κάτω φράγμα. Επομένως, δείξαμε το ζητούμενο στην περίπτωση αυτή.

Περίπτωση 2 : Υποθέτουμε υπάρχει τουλάχιστον μια k -κλίκα στο G που δεν είναι $\{1, 2\}$ -αντικαταστάσιμη. Θα διακρίνουμε δυο υποπεριπτώσεις, ανάλογα με το αν το k είναι άρτιος ή περιττός.

Υποπερίπτωση 2.1 : Αν το k είναι άρτιος. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση 2.1.1 : Αν υπάρχει κάποια κορυφή $v \in V(G) \setminus V(H)$ τέτοια ώστε να ισχύει $(N(v) \cap V(H)) \subsetneq V(H)$, τότε από το Πόρισμα 4.2, το G περιέχει εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές ώστε $|V(H) \cap V(\cdot)| = k - 1$ και $\mathbf{m}(H) \not\equiv \mathbf{m}(\tilde{H}) \pmod{2}$. όπου $\mathbf{m}(H) = \binom{k}{2}$, δηλαδή τότε η k -κλίκα είναι $\{1\}$ -αντικαταστάσιμη, άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι η δεν είναι $\{1, 2\}$ -αντικαταστάσιμη.

Υποπερίπτωση 2.1.2 : Για κάθε κορυφή $v \in V(G) \setminus V(H)$ ισχύει $N(v) \cap V(H) = V(H)$, δηλαδή κάθε κορυφή $v \in V(G) \setminus V(H)$ είναι γειτονική με κάθε κορυφή του. Τότε, παρατηρούμε ότι υπάρχουν δυο δυνατές υποπεριπτώσεις που μπορεί να συμβούν.

Υποπερίπτωση 2.1.2.1 : Αν υπάρχουν δυο κορυφές $u, w \in V(G) \setminus V(H)$ με $u \neq w$ τέτοιες ώστε $\{u, w\} \notin E(G)$, τότε το υπογράφημα του G που ενάγεται από τις u και w μαζί με οποιοσδήποτε $k - 2$ κορυφές του θα έχει ακριβώς $\binom{k}{2} - 1$ ακμές, συνεπώς, η k -κλίκα είναι $\{2\}$ -αντικαταστάσιμη, άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι η δεν είναι $\{1, 2\}$ -αντικαταστάσιμη.

Υποπερίπτωση 2.1.2.2 : Για κάθε δυο κορυφές $u, w \in V(G) \setminus V(H)$ με $u \neq w$ ισχύει ότι $\{u, w\} \in E(G)$, δηλαδή το G τότε είναι κλίκα. Επομένως, δεν περιέχει υπογράφημα $\tilde{H}$ με k κορυφές ώστε $\mathbf{m}(\tilde{H}) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$, και άρα καταλήξαμε

στο (i) ζητούμενο.

Υποπερίπτωση 2.2 : Αν το k είναι περιττός. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες υποπερίπτώσεις:

Υποπερίπτωση 2.2.1 : Αν υπάρχει κορυφή $v \in V(G) \setminus V(H)$ τέτοια ώστε να ισχύει $\emptyset \neq N(v) \cap V(H) \neq V(H)$, τότε, από την πρόταση 4.1, το G περιέχει ένα εναγόμενο υπογράφημα $\tilde{H}$ με k κορυφές και $|V(H) \cap V(\tilde{H})| = k - 1$, τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $\mathbf{m}(H) \not\equiv \mathbf{m}(\tilde{H}) \pmod{2}$, άρα η k -κλίκα H είναι $\{1\}$ -αντικατάστιμη, άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι η H δεν είναι $\{1, 2\}$ -αντικαταστάσιμη.

Υποπερίπτωση 2.2.2 : Κάθε κορυφή $v \in V(G) \setminus V(H)$ είτε είναι γειτονική με κάθε κορυφή της είτε δεν είναι γειτονική με καμία κορυφή της. Έστω:

- U : το σύνολο των κορυφών στο $V(G) \setminus V(H)$ που είναι γειτονικές με $\forall x \in V(H)$
- W : το σύνολο των κορυφών στο $V(G) \setminus V(H)$ που δεν έχουν κανένα γείτονα στο H .

Παρατηρούμε ότι τα U και W αποτελούν μια διαμέριση του $V(G) \setminus V(H)$. Ο ακόλουθος ισχυρισμός θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε ότι βρισκόμαστε στην 2η περίπτωση του Λήμματος 4.6.

Ισχυρισμός 1 Κάθε ένα από τα σύνολα κορυφών U και W ενάγει κλίκα στο G .

Απόδειξη ισχυρισμού (1) για το σύνολο U : Υποθέτω, προς άτοπο, ότι υπάρχουν κορυφές $u_1, u_2 \in U$ με $\{u_1, u_2\} \notin E(G)$. Τότε, το υπογράφημα $\tilde{H}$ που ενάγεται από τις u_1, u_2 και οποιεσδήποτε $k - 2$ κορυφές του H θα έχει ακριβώς $\binom{k}{2} - 1$ ακμές, άρα $\mathbf{m}(\tilde{H}) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$, συνεπώς, η k -κλίκα είναι $\{2\}$ -αντικαταστάσιμη, άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι η H δεν είναι $\{1, 2\}$ -αντικαταστάσιμη.

Απόδειξη ισχυρισμού (1) για το σύνολο W : Ομοίως, υποθέτω, προς άτοπο, ότι υπάρχουν κορυφές $w_1, w_2 \in W$ με $\{w_1, w_2\} \notin E(G)$. Τότε, το υπογράφημα $\tilde{H}$ που ενάγεται από τις w_1, w_2 και οποιεσδήποτε $k - 2$ κορυφές του H θα έχει ακριβώς

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(\tilde{H}) &= \binom{k}{2} - (k - 1) - (k - 2) \\ &= \binom{k}{2} - (2k - 3) \end{aligned}$$

ακμές, επομένως, $\mathbf{m}(\tilde{H}) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$, άρα η k -κλίκα είναι $\{2\}$ -αντικαταστάσιμη, άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι η H δεν είναι $\{1, 2\}$ -αντικαταστάσιμη.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού (1).

Αρα, πράγματι συμπεραίνουμε ότι κάθε ένα από τα U και W ενάγει κλίκα στο G .

Θέτουμε $U' = U \cup V(H)$, και παρατηρούμε ότι επίσης το U' ενάγει κλίκα στο G , καθώς τα $G[U]$ και $G[V(H)]$ είναι κλίκες και κάθε κορυφή του U είναι γειτονική με κάθε κορυφή του $V(H)$. Τότε παρατηρούμε ότι έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 2.2.2.1 : Αν το G δεν περιέχει κανένα εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές και $\mathbf{m}(\tilde{H}) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$, έχουμε τελειώσει, παίρνοντας το (i).

Περίπτωση 2.2.2.2 : Αν το G περιέχει ένα εναγόμενο υπογράφημα $(\tilde{H})$ με k κορυφές και $\mathbf{m}(\tilde{H}) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$, τότε σε αυτήν την περίπτωση κάνουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

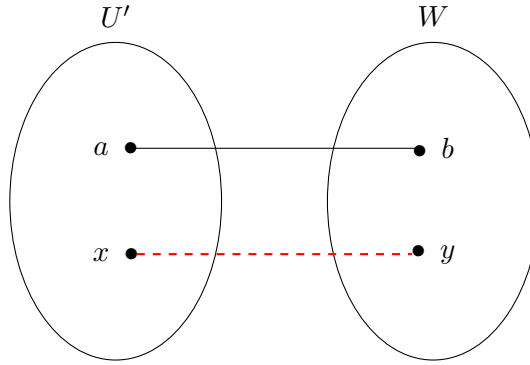
Ισχυρισμός 2 : Αν το G περιέχει ένα εναγόμενο υπογράφημα $\tilde{H}$ που έχει k κορυφές και $\mathbf{m}(\tilde{H}) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$, τότε το G πρέπει να έχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}k^2n^2} \binom{k}{2}$ τέτοια υπογραφήματα.

Απόδειξη ισχυρισμού (2): Γνωρίζουμε από το Λήμμα 4.3, ότι εφόσον το k είναι περιττός, το G δεν μπορεί να είτε ούτε κλίκα ούτε η ξένη ένωση δυο κλικών (καθώς τότε δεν θα περιείχε εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές τέτοιο ώστε να ισχύει $\mathbf{m}(\tilde{H}) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$).

Αυτό σημαίνει ότι:

- υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή $\{a, b\} \in E(G)$ με $a \in U'$ και $b \in W$ και
- υπάρχει τουλάχιστον μια μη-ακμή $\{x, y\} \notin E(G)$ με $x \in U'$ και $y \in W$.

Αυτή η κατάσταση παριστάνεται στο ακόλουθο σχήμα 4.5:



Σχήμα 4.5: Μεταξύ των συνόλων κορυφών U' και W πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή, δηλαδή έστω $\{a, b\} \in E(G)$, και θα πρέπει να μην υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή, δηλαδή έστω $\{x, y\} \notin E(G)$.

Στα ακόλουθα επιχειρήματα θα χειριστούμε τα U' και W συμμετρικά, και καθώς τα U' και W αποτελούν μια διαμέριση του $V(G)$, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $|W| \geq n/2$. Θέτουμε :

$$W_a = N(a) \cap W, \quad W_x = N(x) \cap W, \quad \overline{W}_a = W \setminus W_a, \quad \overline{W}_x = W \setminus W_x.$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 : $|W_x| \geq n/6$.

Στην περίπτωση αυτή το γράφημα που ενάγεται από τις κορυφές x και y μαζί με $k - 2$ κορυφές του W_x ($|W_x| \geq k - 2$ καθώς $n \geq 6(k - 2) \Leftrightarrow (n/6) \geq k - 2$, άλλωστε το n είναι «αρκετά» πιο μεγάλο από το k) περιέχει όλες τις δυνατές ακμές μεταξύ αυτών των κορυφών εκτός από την ακμή $\{x, y\}$, και επομένως έχει ακριβώς $\binom{k}{2} - 1$ ακμές και άρα το πλήθος των ακμών του διαφέρει από το $\binom{k}{2}$ στο $\mathbb{Z}_2$. Επομένως, χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα φράγματα στους διωνυμικούς συντελεστές:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$$

προκύπτει ότι το G έχει τουλάχιστον

$$\begin{aligned}
 \binom{\frac{n}{6}}{k-2} &= \frac{\binom{\frac{n}{6}}{k-2}}{\binom{n}{k}} \binom{n}{k} \\
 &\geq \frac{\left(\frac{n}{6(k-2)}\right)^{k-2}}{\left(\frac{en}{k}\right)^k} \binom{n}{k} \quad (\text{από 3.4}) \\
 &= \frac{n^{k-2}}{6^{k-2}(k-2)^{k-2}} \frac{k^k}{e^k n^k} \binom{n}{k} \\
 &= \frac{k^k}{e^k 6^{k-2}(k-2)^{k-2} n^2} \binom{n}{k} \\
 &> \frac{1}{(6e)^k n^2} \binom{n}{k} \\
 &> \frac{1}{2^{2k^2+1} k^2 n^2} \binom{n}{k}
 \end{aligned}$$

εναγόμενα υπογραφήματα με k κορυφές και των οποίων το πλήθος των ακμών διαφέρει από το $\binom{k}{2}$ στο $\mathbb{Z}_2$.

Η τελευταία ανίσωση στην παραπάνω σχέση προέκυψε από την ανίσωση:

$$(6e)^k < 2^{2k^2+1} k^2$$

την οποία μπορούμε να αποδείξουμε με επαγωγή για $k \geq 2$.

Πράγματι για $k = 2$, έχουμε $(6e)^2 < 2^{2 \cdot 2^2+1} 2^2$, καθώς αναλυτικά ισχύει ότι $(6e)^2 = 36e^2$ και $2^{2 \cdot 2^2+1} 2^2 = 2^9 2^2 = 2^{11}$. Έστω ότι ισχύει για $k \geq 2$. Παρατηρούμε ότι για $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 (6e)^{k+1} &= 6e(6e)^k < 6e \cdot 2^{2k^2+1} k^2 \\
 &< 2^{4+2} \cdot 2^{2k^2+1} k^2 \\
 &= 2^{2(2+2+1)+1} k^2 \\
 &= 2^{2(k+1)^2+1} k^2 \\
 &< 2^{2(k+1)^2+1} (k+1)^2
 \end{aligned}$$

Περίπτωση 2 : $|\overline{W}_a| \geq n/6$.

Στην περίπτωση αυτή το γράφημα που ενάγεται από το τις κορυφές και b μαζί με $k-2$ κορυφές του $\overline{W}_a$ περιέχει όλες τις δυνατές ακμές μεταξύ αυτών των κορυφών εκτός από τις ακμές που έχουν ως ένα άκρο την κορυφή b , οι οποίες είναι

ακριβώς $(k - 2)$, και επομένως έχει ακριβώς $\binom{k}{2} - (k - 2)$ ακμές. Εφόσον το k είναι περιττός, τότε το $k - 2$ είναι περιττός και άρα το πλήθος των ακμών του διαφέρει από το $\binom{k}{2}$ στο $\mathbb{Z}_2$. Επομένως, ομοίως καταλήγουμε στο ότι το G έχει τουλάχιστον

$$\binom{\frac{n}{6}}{k-2} > \frac{1}{2^{2k^2+1}k^2n^2} \binom{n}{k}$$

εναγόμενα υπογραφήματα με k κορυφές και των οποίων το πλήθος των ακμών διαφέρει από το $\binom{k}{2}$ στο $\mathbb{Z}_2$.

Περίπτωση 3 : $|\overline{W}_x \cap W_a| \geq n/6$.

Η 3η αυτή περίπτωση προκύπτει από το γεγονός ότι στην 1η και στην 2η περίπτωση είχαμε τις εξής συνθήκες

$$|W_x| \geq n/6 \text{ και } |\overline{W}_a| \geq n/6,$$

και παίρνοντας τα συμπληρωματικά των συνθηκών αυτών έχουμε:

$$\begin{aligned} |W_x| < n/6 \text{ και } |\overline{W}_a| < n/6 &\Leftrightarrow \\ |\overline{W}_x| \geq |W| - n/6 \text{ και } |W_a| \geq |W| - n/6 \end{aligned}$$

και εφόσον $\overline{W}_x, W_a \subseteq W$ έχουμε ότι $|\overline{W}_x \cup W_a| \leq |W|$ και έτσι προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} |W| &\geq |\overline{W}_x \cup W_a| \\ &= |\overline{W}_x| + |W_a| - |\overline{W}_x \cap W_a| \\ &\geq |W| - n/6 + |W| - n/6 - |\overline{W}_x \cap W_a| \\ &= 2|W| - \frac{2n}{6} - |\overline{W}_x \cap W_a| \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε ότι :

$$|\overline{W}_x \cap W_a| \geq |W| - \frac{2n}{6} \geq \frac{n}{2} - \frac{2n}{6} = \frac{n}{6}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι για την 3η περίπτωση θα ισχύει ότι $|\overline{W}_x \cap W_a| \geq n/6$.

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $a \neq x$, καθώς διαφορετικά θα ίσχυε ότι $\overline{W}_x \cap W_a = \emptyset$ και τότε θα είχαμε ότι ισχύει ότι $|\overline{W}_x \cap W_a| = 0$, που είναι άτοπο.

Σε αυτήν την περίπτωση, το υπογράφημα που ενάγεται από τις κορυφές a και x και από $k - 2$ κορυφές του $\overline{W}_x \cap W_a$ περιέχει όλες τις δυνατές ακμές μεταξύ

αυτών των κορυφών εκτός από τις ακμές που έχουν ως ένα άκρο την κορυφή x και το άλλο άκρο στο $\overline{W}_x \cap W_a$ οι οποίες είναι ακριβώς $(k-2)$ ακμές, καθώς οι και x είναι γειτονικές, αφού ανήκουν και οι δύο στην κλίκα U' . Επομένως, το εναγόμενο αυτό υπογράφημα έχει ακριβώς $\binom{k}{2} - (k-2)$ ακμές. Εφόσον το k είναι περιττός, τότε το $k-2$ είναι περιττός και άρα το πλήθος των ακμών του διαφέρει από το $\binom{k}{2}$ στο $\mathbb{Z}_2$ δηλαδή $\binom{k}{2} - (k-2) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$.

Επομένως, ομοίως καταλήγουμε στο ότι το G έχει τουλάχιστον

$$\binom{\frac{n}{6}}{k-2} > \frac{1}{2^{2k^2+1}k^2n^2} \binom{n}{k}$$

εναγόμενα υπογραφήματα με k κορυφές και των οποίων το πλήθος των ακμών διαφέρει από το $\binom{k}{2}$ στο $\mathbb{Z}_2$.

Συνοψίζοντας, είδαμε ότι αν το G περιέχει τουλάχιστον ένα εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές του οποίου το πλήθος των ακμών διαφέρει από το $\binom{k}{2}$ στο $\mathbb{Z}_2$, τότε το G πρέπει να περιέχει ένα μεγάλο αριθμό από τέτοια εναγόμενα υπογραφήματα με k κορυφές. $\square$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να αποδείξουμε ότι κάθε επαρκώς μεγάλο γράφημα είτε δεν θα περιέχει κανένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές είτε πρέπει να περιέχει ένα μεγάλο αριθμό από άρτια εναγόμενα υπογραφήματα με k κορυφές.

Θεώρημα 4.8. Έστω $k \geq 3$ και έστω G γράφημα με $n \geq 2^{2k}$ κορυφές. Τότε,

- είτε το G δεν περιέχει κανένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές
- είτε το G περιέχει τουλάχιστον

$$\frac{1}{2^{2k^2+1}k^2n^2} \binom{n}{k}$$

άρτια εναγόμενα υπογραφήματα με k κορυφές.

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά από το Πόρισμα 3.8 και την σχέση 3.5 έχουμε ότι το G πρέπει να περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2}} \binom{k}{2}$ υποσύνολα k κορυφών τα οποία είτε ενάγουν κλίκες είτε ανεξάρτητα σύνολα. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 : Αν το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος, τότε κάθε τέτοιο σύνολο θα ενάγει ένα άρτιο υπογράφημα k κορυφών. Πράγματι, αν ενάγει κλίκα θα έχουμε $\binom{k}{2}$ ακμές και αν ενάγει ανεξάρτητο σύνολο, θα έχουμε 0 ακμές, άρα σε κάθε περίπτωση θα έχουμε άρτιο πλήθος ακμών.

Περίπτωση 2 : Αν το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός, δηλαδή $k \equiv 2 \pmod{4}$ ή $k \equiv 3 \pmod{4}$. Εδώ υπάρχουν δυο υποπεριπτώσεις:

Υποπερίπτωση 2.1 : Υπάρχουν τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{k}{2}$ ανεξάρτητα υποσύνολα k κορυφών. Κάθε ανεξάρτητο σύνολο k κορυφών θα ενάγει υπογράφημα με 0 ακμές, άρα θα έχουμε άρτιο πλήθος ακμών, επομένως προκύπτει το ζητούμενο.

Υποπερίπτωση 2.2 : Υπάρχουν τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{k}{2}$ k -κλίκες. Τότε το ζητούμενο προκύπτει από το Λήμμα 4.6, (καθώς για να ισχύει $\mathbf{m}(H) \not\equiv \binom{k}{2} \pmod{2}$, θα πρέπει το H να είναι άρτιο υπογράφημα). $\square$

Μπορούμε να αποδείξουμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για την περίπτωση των περιττών εναγόμενων υπογραφήματων με k κορυφές.

Θεώρημα 4.9. Έστω $k \geq 3$ και έστω G γράφημα με $n \geq 2^{2k}$ κορυφές. Τότε,

- είτε το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές
- είτε το G περιέχει τουλάχιστον

$$\frac{1}{2^{2k^2+1} k^2 n^2} \binom{n}{k}$$

περιττά εναγόμενα υπογραφήματα με k κορυφές.

Απόδειξη. Ομοίως με την προηγούμενη απόδειξη, παρατηρούμε ότι από το Πρόσ-
σμα 3.8 και την σχέση 3.5 έχουμε ότι το G πρέπει να περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2}} \binom{k}{2}$
υποσύνολα k κορυφών τα οποία είτε ενάγουν κλίκες είτε ανεξάρτητα σύνολα. Συ-
γκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι τουλάχιστον ένα από τα γραφήματα G και $\overline{G}$ πρέπει
να περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{k}{2}$ k -κλίκες, καθώς

- είτε το G περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{k}{2}$ k -κλίκες,
- είτε το G περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{k}{2}$ ανεξάρτητα σύνολα k κορυφών,
άρα, το $\overline{G}$ περιέχει τουλάχιστον k -κλίκες

Διακρίνουμε, λοιπόν, τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1 : Το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος. Σε αυτή την περίπτωση, είναι εμφανές ότι κάθε υποσύνολο $U \subseteq V^{(k)}$ ενάγει ένα περιττό υπογράφημα στο G αν και μόνο αν το U επίσης ενάγει ένα περιττό υπογράφημα στο $\overline{G}$. Επομένως, το πλήθος των περιττών εναγόμενων υπογραφημάτων στο G είναι ίσο με το αντίστοιχο πλήθος στο $\overline{G}$. Γνωρίζουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα γραφήματα G και $\overline{G}$ πρέπει να περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{n}{k}$ k -κλίκες. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό είναι το G και τότε το αποτέλεσμα έπεται άμεσα από το Λήμμα 4.6.

Περίπτωση 2 : Το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός. Τότε, διακρίνουμε τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις.

Υποπερίπτωση 2.1 : Αν το G περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{n}{k}$ k -κλίκες, τότε προκύπτει το ζητούμενο, καθώς $\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{n}{k} > \frac{1}{2^{2k^2+1} k^2 n^2} \binom{n}{k}$.

Υποπερίπτωση 2.2 : Αν το $\overline{G}$ περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}} \binom{n}{k}$ k -κλίκες, τότε από το Λήμμα 4.6 έχουμε ότι το $\overline{G}$:

- είτε δεν περιέχει κανένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών.
- είτε περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1} k^2 n^2} \binom{n}{k}$ άρτια εναγόμενα υπογραφήματα k κορυφών.

Παρατηρούμε ότι, εφόσον το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός, υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ:

- των άρτιων εναγόμενων υπογραφημάτων k κορυφών στο $\overline{G}$ και
- των περιττών εναγόμενων υπογραφημάτων k κορυφών στο G .

Επομένως, αυτό συνεπάγεται ότι :

-
- είτε το G δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών.
 - είτε το G περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}k^2n^2} \binom{n}{k}$ περιττά εναγόμενα υπογράφημα k κορυφών.

Και με αυτόν τον τρόπο καταλήξαμε στο ζητούμενο. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑ

Στην κεφαλαίο αυτό, αναφερόμαστε σε βασικούς ορισμούς της παραμετρικής πολυπλοκότητας και προσεγγιστικών σχημάτων για προβλήματα καταμέτρησης, που θα χρειαστούμε στην συνέχεια.

5.1 Παραμετρική πολυπλοκότητα

Η δυσκολία των NP-πλήρων προβλημάτων οδήγησαν πολλούς ερευνητές, λίγο πριν το 2000, να χωρίσουμε την πολυπλοκότητα σε δυο τμήματα, από τα οποία το ένα τμήμα θα εξαρτάται καθαρά από το μέγεθος της εισόδου και το άλλο θα εξαρτάται από κάποια παράμετρο του προβλήματος, το μέγεθος της οποίας θα είναι συνήθως πολύ πιο μικρό από αυτό της είσοδο. Με την διάκριση αυτή κατασκευάζονται αλγόριθμοι που εκτελούνται σε εκθετικό χρόνο ως το μέγεθος της παραμέτρου και σε πολυωνμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου, αλλά ο χρόνος αυτός δεν είναι πάντα απαγορευτικός για πρακτικές εφαρμογές. Το πιο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αυτής της κίνησης αποτελούν οι *αποδοτικοί αλγόριθμοι σταθερής-παραμέτρου* (*fixed-parameter tractable algorithms*). Η πρώτη συστηματική εργασία στην παραμετρική πολυπλοκότητα έγινε από τους Downey και Fellows (1999) [4].

Ξεκινάμε με τους βασικούς ορισμούς της παραμετρικής πολυπλοκότητας. Για τους ακόλουθους ορισμούς θεωρούμε Σ ένα πεπερασμένο αλφάβητο.

Ορισμός 5.1. Ένα πρόβλημα που αντιστοιχεί σε μια γλώσσα $L \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ ονομάζεται *παραμετροποιημένο πρόβλημα* (*parameterized problem*). Για κάθε στιγμιότυπο $I = (x, k) \in \Sigma^* \times \mathbb{N}$, το k ονομάζεται *παράμετρος* (*parameter*).

Για παράδειγμα, ένα στιγμιότυπο του προβλήματος ΑΡΤΙΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ παραμετροποιημένο ως προς το μέγεθος της λύσης είναι ένα ζεύγος (G, k) , όπου το G περιμένουμε να είναι ένα γράφημα σε κωδικοποιημένη μορφή ως μια συμβολοσειρά στο Σ^* , και το k είναι ένας θετικός ακέραιος. Έχουμε ότι ένα ζεύγος (G, k) ανήκει στο ΑΡΤΙΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ παραμετροποιημένη γλώσσα αν και μόνο αν η συμβολοσειρά G αποτελεί πράγματι κωδικοποίηση κάποιου γραφήματος, το οποίο θα συμβολίζουμε επίσης με G , και το γράφημα G περιέχει ένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών.

Για λόγους απλότητας θα αποφύγουμε την χρήση γλωσσών για τον ορισμό των προβλημάτων, και θα χρησιμοποιήσουμε μια πιο «φυσική» διατύπωση. Στο παραπάνω παράδειγμα, θεωρώντας ως στιγμιότυπο εισόδου το γράφημα G και τον ακέραιο k , και ως παράμετρο που αντιστοιχεί σε αυτό το στιγμιότυπο το k , μπορούμε να εκφράσουμε την παραμετροποιημένη μορφή του ως εξής:

p -ΑΡΤΙΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ
Είσοδος: Ένα γράφημα G και μια παράμετρος k .
Παράμετρος: k
Έξοδος: Το γράφημα G έχει άρτιο εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών ;

Ορίζουμε το μέγεθος ενός στιγμιότυπου (x, k) ενός παραμετρικού προβλήματος να είναι $n+k$, όπου $n = |x|$. Στα περισσότερα παραμετρικά προβλήματα, το μέγεθος της παραμέτρου k είναι ουσιαστικά μικρότερο από το μέγεθος n . Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι το $k \ll n$ και για αυτό έχει νόημα να σχεδιάσουμε εκθετικούς αλγορίθμους στους οποίους ο χρόνος εκτέλεσης εξαρτάται εκθετικά από την παράμετρο, αλλά πολυωνμικά από το n , το μέγεθος της εισόδου, γιατί για μικρές τιμές του k μπορούν πρακτικά να εφαρμοστούν.

Ορισμός 5.2. Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα Π ονομάζεται *ευεπίλυτο ως προς σταθερή-παράμετρο* (*fixed-parameter tractable*) (FPT) αν υπάρχει αλγόριθμος $\mathcal{A}$, μια υπολογίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, και μια σταθερά c τέτοια ώστε, δεδομένου ενός στιγμιότυπου (x, k) , ο αλγόριθμος $\mathcal{A}$ σωστά αποφασίζει αν το (x, k) είναι λύση του προβλήματος Π σε χρόνο άνω φραγμένο από $f(k) \cdot |x|^c$, όπου $n = |x|$ το μέγεθος της εισόδου x . Ο $\mathcal{A}$ ονομάζεται *αλγόριθμος σταθερής-παραμέτρου* (*fixed-parameter algorithm*) και θα γράφουμε ότι ο $\mathcal{A}$ είναι FPT-αλγόριθμος. Η κλάση πολυπλοκότητας όλων των ευεπίλυτων ως προς σταθερή-παράμετρο αλγορίθμων καλείται FPT.

Αντίστοιχα, βλέπουμε τον αντίστοιχο ορισμό για προβλήματα καταμέτρησης.

Ορισμός 5.3. Ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα καταμέτρησης (*parameterised counting problem*) είναι ένα ζεύγος (Π, κ) τέτοιο ώστε η $\Pi : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}_0$ είναι μια συνάρτηση και $\kappa : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ είναι μια παραμετροποίηση (*parameterisation*) (μια πολωνυμικού χρόνου υπολογίσιμη απεικόνιση).

Ανάλογα έχουμε ότι, ένας αλγόριθμος $\mathcal{A}$ για ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα καταμέτρησης (Π, κ) καλείται FPT-αλγόριθμος, αν υπάρχει μια υπολογίσιμη συνάρτηση f και μια σταθερά c τέτοια ώστε ο χρόνος εκτέλεσης του $\mathcal{A}$ με είσοδο I είναι φραγμένος από την ποσότητα $f(k(I))|I|^c$.

Για να μπορούμε να συγκρίνουμε σχέση πολυπλοκότητας δυο παραμετρικών προβλημάτων χρειαζόμαστε μια ανάλογη έννοια της παραμετρικής αναγωγής.

Ορισμός 5.4. Παραμετρική αναγωγή (Parameterized reduction) Έστω (Π, κ) και (Π', κ') δυο παραμετροποιημένα προβλήματα. Ονομάζουμε παραμετρική αναγωγή (*parameterized reduction*) ή FPT-αναγωγή από το (Π, κ) στο (Π', κ') έναν αλγόριθμο A , ο οποίος για ένα στιγμιότυπο (x, k) του (Π, κ) , επιστρέφει ως έξοδο ένα στιγμιότυπο (x', k') του (Π', κ') , έτσι ώστε

1. το (x, k) είναι ένα ναι-στιγμιότυπο του (Π, κ) αν και μόνο αν το (x', k') είναι ναι-στιγμιότυπο του (Π', κ') ,
2. $k' \leq g(k)$ για κάποια υπολογίσιμη συνάρτηση g
3. ο χρόνος εκτέλεσης του είναι $f(k) \cdot |x|^{O(1)}$ για κάποια υπολογίσιμη συνάρτηση f .

και γράφουμε $(\Pi, \kappa) \leq^{fpt} (\Pi', \kappa')$.

W-ιεραρχία

Ορισμός 5.5. Ένα *Boolean κύκλωμα* (Boolean circuit) είναι ένα κατευθυνόμενο ακυκλικό γράφημα όπου οι κόμβοι κατηγοριοποιούνται ως εξής:

- κάθε κορυφή με έσω βαθμό 0 είναι ένας κόμβος εισαγωγής (input node)
- κάθε κορυφή με έσω βαθμό 1 είναι ένας κόμβος άρνησης (negation node)
- κάθε κορυφή με έσω βαθμό ≥ 2 είναι είτε ένας και-κόμβος (and-node) είτε ένας ή-κόμβος (or-node).

Επιπλέον, ακριβώς ένας από τους κόμβους με έξω βαθμό 0 χαρακτηρίζεται ως κόμβος εξόδου (output node). Το βάθος (depth) του κυκλώματος είναι το μήκος του

μέγιστου μονοπατιού από έναν κόμβο εισόδου σε έναν κόμβο εξόδου. Κάθε ανάθεση τιμών 0 (ψέμα) και 1 (αλήθεια) καθορίζει την αξία της εξόδου. Λέμε ότι μια αποτίμηση ικανοποιεί το κύκλωμα, αν η τιμή του κόμβου εξόδου είναι 1.

Το πρόβλημα απόφασης αν ένα κύκλωμα έχει αποτίμηση που το ικανοποιεί είναι NP-πλήρες. Μπορούμε να ορίσουμε μια παραμετροποιημένη εκδοχή του προβλήματος. Ονομάζουμε βάρος (weight) μιας αποτίμησης το πλήθος των κόμβων εισόδου που λαμβάνουν την τιμή 1. Στο πρόβλημα ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΒΕΒΑΡΗΜΕΝΟΥ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ WCS (WEIGHTED CIRCUIT SATISFIABILITY), παίρνουμε ως είσοδο ένα κύκλωμα C και ένα ακέραιο k και εξετάζουμε αν το C έχει αποτίμηση που να το ικανοποιεί με βάρος ακριβώς k .

Αν C είναι μια κλάση κυκλωμάτων, τότε ορίζουμε το $WCS[C]$ να είναι ο περιορισμός του προβλήματος του οποίου το κύκλωμα που δίνεται ως είσοδος ανήκει στην κλάση C . Ορίζουμε ως μικρούς κόμβους (small nodes) αυτούς που έχουν έστω βαθμό το πολύ 2, και μεγάλους κόμβους (large nodes) εκείνους που έχουν έστω βαθμό μεγαλύτερο του 2. Επίσης, ονομάζουμε weft (υφαντό) ενός κυκλώματος είναι το μέγιστο πλήθος μεγάλων κόμβων που βρίσκονται σε ένα μονοπάτι το οποίο ξεκινά από κορυφή εισόδου και καταλήγει σε κορυφή εξόδου. Συμβολίζουμε με $C_{t,d}$ την κλάση των κυκλωμάτων με weft το πολύ t και βάθος το πολύ d .

Ορισμός 5.6. (W-ιεραρχία) Για $t \geq 1$, ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα (Π, κ) ανήκει στην κλάση $W[t]$ αν υπάρχει μια παραμετροποιημένη αναγωγή από το (Π, κ) στο $p\text{-}WCS[C_{t,d}]$ για κάποιο $d \geq 1$, δηλαδή αν $(\Pi, \kappa) \leq^{fpt} p - WCS[C_{t,d}]$.

Παρατήρηση 5.7. $FPT = W[0] \subseteq W[1] \subseteq W[2] \subseteq \dots$

Ορισμός 5.8. Έστω Σ_1, Σ_2 πεπερασμένα αλφάβητα και $F : \Sigma_1^* \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $G : \Sigma_2^* \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ παραμετροποιημένα προβλήματα καταμέτρησης. Ονομάζουμε φειδωλή παραμετρική αναγωγή (parameterized parsimonious reduction) από το F στο G ένα αλγόριθμο που υπολογίζει για κάθε στιγμιότυπο (x, k) του F ένα στιγμιότυπο (y, l) του G σε χρόνο $f(k) \cdot |x|^c$ έτσι ώστε $l \leq g(k)$ και επίσης $F(x, k) = G(y, l)$, για υπολογίσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ και σταθερά $c \in \mathbb{N}$ και γράφουμε ότι $F \leq_{pars}^{fpt} G$.

Για μια κλάση C κυκλωμάτων, θέτουμε $\#WCS[C]$ να είναι η απαριθμητική εκδοχή του προβλήματος ΙΚΑΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΒΕΒΑΡΗΜΕΝΟΥ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ, δηλαδή μας ενδιαφέρει το πλήθος των αποτιμήσεων με βάρος ακριβώς k που ικανοποιούν το κύκλωμα. Ανάλογα, λοιπόν, ορίζουμε την απαριθμητική ανάλογη ως προς την W-ιεραρχία.

Ορισμός 5.9. (#W-ιεραρχία) Για $t \geq 1$, ένα παραμετροποιημένο πρόβλημα καταμέτρησης (Π, κ) ανήκει στην κλάση $\#W[t]$ αν υπάρχει μια παραμετροποιημένη φειδωλή αναγωγή από το (Π, κ) στο $\#WCS[C_{t,d}]$ για κάποιο $d \geq 0$, δηλαδή αν $(\Pi, \kappa) \leq_{pars}^{fpt} \#WCS[C_{t,d}]$.

5.2 Προσεγγιστική καταμέτρηση

Στην ενότητα αυτή αναφερόμαστε σε εισαγωγικά στοιχεία της μεθόδου τυχαιοποίησης (radomization) που χρησιμοποιείται για δύσκολα προβλήματα καταμέτρησης.

Λέμε ότι ένα πρόβλημα απόφασης Π είναι στο NP αν για κάθε ναι-στιγμιότυπο I του Π , υπάρχει ένα πιστοποιητικό (proof) ότι το I είναι ναι-στιγμιότυπο το οποίο μπορεί να επαληθευτεί σε πολωνυμικό χρόνο. Ισοδύναμα, μπορούμε να δούμε το πρόβλημα απόφασης ως ένα πρόβλημα αναγνώρισης γλώσσας, η οποία γλώσσα αποτελείται από κατάλληλες κωδικοποιήσεις όλων των ναι-στιγμιότυπων του Π . Το πιστοποιητικό επαληθεύει αν ένα κωδικοποιημένο στιγμιότυπο του προβλήματος ανήκει στην γλώσσα.

Ένας αλγόριθμος για ένα πρόβλημα καταμέτρησης παίρνει ως είσοδο ένα στιγμιότυπο από το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης Π , και επιστρέφει ως έξοδο ένα μη αρνητικό ακέραιο που είναι το πλήθος των λύσεων για το στιγμιότυπο I . Προφανώς, ένα πρόβλημα καταμέτρησης θα είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης.

Η κλάση των προβλημάτων καταμέτρησης που το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης ανήκει στο NP θα την συμβολίζουμε με $\#P$. Τυπικά, ένα πρόβλημα Π ανήκει στο $\#P$ αν υπάρχει μια μη-αιτιοκρατική μηχανή Turing πολωνυμικού χρόνου, η οποία, για κάθε στιγμιότυπο I , έχει ένα πλήθος των υπολογισμών αποδοχής που είναι ακριβώς ίσο με το πλήθος των διακριτών λύσεων για το στιγμιότυπο I . Λέμε ότι το Π είναι $\#P$ -πλήρες ($\#P$ -complete) αν για κάθε πρόβλημα Π' στο $\#P$, το Π' μπορεί να αναχθεί (be reduced) στο Π από κάποια μηχανή Turing πολωνυμικού χρόνου.

5.2.1 Τυχαιοκρατικά Σχήματα Προσέγγισης

Θεωρούμε ένα πρόβλημα καταμέτρησης Π και με τον συμβολισμό $\Pi(I)$ ορίζουμε να είναι ο αριθμός των διακριτών λύσεων για ένα στιγμιότυπο I του Π . Για παράδειγμα, όταν το Π είναι το πρόβλημα εύρεσης του πλήθους των άρτιων εναγόμενων υπογραφημάτων k κορυφών, τότε για ένα στιγμιότυπο εισόδου $I = (G, k)$

ορίζουμε με $\Pi(I)$ το πλήθος τέτοιων υπογραφημάτων στο γράφημα G . Ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος $\mathcal{A}$ παίρνει ως είσοδο ένα στιγμιότυπο I και επιστρέφει ως έξοδο έναν ακέραιο $A(I)$, ο οποίος θέλουμε να είναι να κοντά στο $\Pi(I)$.

Ορισμός 5.10. Ένα πολωνυμικό σχήμα προσέγγισης (*polynomial approximation scheme*), που το συμβολίζουμε με PAS, για ένα πρόβλημα καταμέτρησης Π είναι ένας αλγόριθμος $\mathcal{A}$ που παίρνει ως είσοδο ένα στιγμιότυπο I και ένα πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$ και σε χρόνο πολωνυμικό ως προς μέγεθος της εισόδου, δηλαδή ως προς $n = |I|$ επιστρέφει ως έξοδο $A(I)$ τέτοιο ώστε:

$$(1 - \varepsilon)\Pi(I) \leq A(I) \leq (1 + \varepsilon)\Pi(I)$$

Καλούμε πλήρως πολωνυμικό σχήμα προσέγγισης (*fully polynomial approximation scheme*) ένα πολωνυμικό σχήμα προσέγγισης του οποίου ο χρόνος εκτέλεσης είναι πολωνυμικά φραγμένος και από το n και από το $1/\varepsilon$ και το συμβολίζουμε με FPAS. Η έξοδος $A(I)$ καλείται μια ε -προσέγγιση (ε -approximation) του $\Pi(I)$.

Εφόσον το σφάλμα συνδέεται με την πράξη του πολλαπλασιασμού με το $\Pi(I)$, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διακρίνει τις περιπτώσεις $\Pi(I) = 0$ και $\Pi(I) > 0$, και αυτό δηλώνει ότι προκύπτει ένας πολωνυμικού χρόνου αλγόριθμος για το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης. Επομένως, τέτοιου είδους σχήματα μπορούν να σχεδιαστούν μόνο για προβλήματα καταμέτρησης που το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης βρίσκεται στο P. Εκτός αν $P=NP$, είναι απαραίτητο να χαλαρώσει ο ορισμός ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί και σε για προβλήματα καταμέτρησης που το αρχικό πρόβλημα απόφασης ανήκει στο NP.

Ορισμός 5.11. Ένα πολωνυμικό τυχαιοκρατικό σχήμα προσέγγισης (*polynomial randomized approximation scheme*), που το συμβολίζουμε με PRAS, για ένα πρόβλημα καταμέτρησης Π είναι ένας τυχαιοκρατικός αλγόριθμος $\mathcal{A}$ που παίρνει ως είσοδο ένα στιγμιότυπο I και ένα πραγματικό αριθμό $\varepsilon > 0$ και σε χρόνο πολωνυμο ως προς μέγεθος της εισόδου, δηλαδή ως προς $n = |I|$ επιστρέφει ως έξοδο $A(I)$ τέτοιο ώστε:

$$\mathbb{P}[(1 - \varepsilon)\Pi(I) \leq A(I) \leq (1 + \varepsilon)\Pi(I)] \geq \frac{3}{4}.$$

Καλούμε πλήρως πολωνυμικό τυχαιοκρατικό σχήμα προσέγγισης (*fully polynomial randomized approximation scheme*) ένα πολωνυμικό τυχαιοκρατικό σχήμα προσέγγισης του οποίου ο χρόνος εκτέλεσης είναι πολωνυμικά φραγμένος και από το n και από το $1/\varepsilon$ και το συμβολίζουμε με FPRAS.

Η πιθανότητα προκύπτει από τις τυχαίες επιλογές του αλγορίθμου. Παρατηρούμε ότι όταν το $\Pi(I)$ δεν ανήκει στο διάστημα $[A(I)(1 - \varepsilon), A(I)(1 + \varepsilon)]$, γεγονός που συμβαίνει με πιθανότητα το πολύ $1/4$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε για το πόσο είναι το σφάλμα προσέγγισης του $A(I)$ από το $\Pi(I)$.

Ένα τυχαιοκρατικό σχήμα προσέγγισης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διακρίνει τις περιπτώσεις $\Pi(I) = 0$ και $\Pi(I) > 0$, και αυτό δηλώνει ότι προκύπτει ένας τυχαιοκρατικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου για το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης. Επομένως, τέτοιου είδους σχήματα μπορούν να σχεδιαστούν μόνο για προβλήματα καταμέτρησης που το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης βρίσκεται στο BPP. Εκτός αν $NP \subseteq BPP$, δεν περιμένουμε να βρούμε τέτοια σχήματα για προβλήματα καταμέτρησης του το αντίστοιχο πρόβλημα απόφασης είναι NP-πλήρες.

Παραθέτουμε, τέλος, τον ορισμό FPTRAS (fixed parameter tractable randomised approximation scheme) όπως παρουσιάστηκε από τους Arvind και Raman [5].

Ορισμός 5.12. Ένα FPTRAS για ένα παραμετρικό πρόβλημα καταμέτρησης (Π, κ) είναι ένα τυχαιοκρατικό σχήμα προσέγγισης (*randomised approximation scheme*) που παίρνει ως είσοδο ένα στιγμιότυπο I του Π (με $|I| = n$), και πραγματικούς αριθμούς $\varepsilon > 0$ και $0 < \delta < 1$ και σε χρόνο $f(k) \cdot g(n, 1/\varepsilon, \log(1/\delta))$ (όπου f είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, και g είναι ένα πολώνυμο των $n, 1/\varepsilon$ και $\log(1/\delta)$) επιστρέφει ως έξοδο ένα πραγματικό αριθμό $A(I)$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}[(1 - \varepsilon)\Pi(I) \leq A(I) \leq (1 + \varepsilon)\Pi(I)] \geq 1 - \delta.$$

Η προσεγγιστική καταμέτρηση είναι μια περιοχή που η τυχαιοποίηση κάνει την διαφορά στην δυνατότητα να μπορούμε να λύσουμε προβλήματα με προσεγγιστικό τρόπο. Υπάρχουν περιπτώσεις που η τυχαιοποίηση μας δίνει καλούς αλγορίθμους σε προβλήματα που δεν είναι δυνατόν να έχουν καλούς αιτιοκρατικούς αλγορίθμους.

5.2.2 Τυχαία Δειγματοληψία

Μια από τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της πολυπλοκότητας σε προβλήματα καταμέτρησης υπογραφημάτων και των συσχετιζόμενων προβλημάτων απόφασης είναι η μέθοδος της τυχαίας δειγματοληψίας (Random sampling). Η ιδέα βασίζεται στην εκτίμηση του συνολικού πλήθους των διατεταγμένων k -άδων κορυφών, οι οποίες ενάγουν υπογραφήματα που ικανοποιούν μια συγκεκριμένη ιδιότητα φ_k , μέσω της ομοιόμορφης (δηλαδή κάθε στοιχείο είναι ισοπίθανο) και τυχαίας επιλογής κάποιου αριθμού τέτοιων k -άδων και της καταμέτρησης του πλήθους των επιλεγμένων k -άδων που είναι "καλές", δηλαδή που

ικανοποιούν την ιδιότητα φ_k . Ωστόσο, για να λειτουργήσει μια τέτοια μέθοδος, χρειάζεται να γνωρίζουμε ότι στο δοσμένο γράφημα, το συνολικό πλήθος των «καλών» διατεταγμένων k -άδων ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες. Για παράδειγμα, υποθέτουμε ότι το γράφημα G περιέχει μόνο μια καλή διατεταγμένη k -άδα: προκειμένου να έχουμε μια λογική πιθανότητα να βρούμε αυτήν την διατεταγμένη k -άδα (και έτσι διακρίνοντας μεταξύ αυτής της κατάστασης και της περίπτωσης στην οποία το γράφημα G δεν περιέχει καμία καλή διατεταγμένη k -άδα), θα πρέπει να πάρουμε ως δείγμα $O(n^k)$ διατεταγμένες k -άδες, απαιτώντας περισσότερο χρόνο από αυτόν που επιτρέπεται από τον ορισμό των FPTRAS.

Θα δώσουμε μια γενική επαρκή συνθήκη για το πλήθος των καλών διατεταγμένων k -άδων σε ένα γράφημα, η οποία θα μας εξασφαλίσει ότι μπορούμε να έχουμε μια καλή προσέγγιση με μια μέθοδο τυχαίας δειγματοληψίας.

Λήμμα 5.13. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με n κορυφές και φ_k μια απεικόνιση που λαμβάνει ως πεδίο ορισμού το σύνολο των γραφημάτων k κορυφών με ετικέτες (labelled graphs) και ως σύνολο τιμών το $\{0, 1\}$, και θέτουμε $N_k(G)$ να είναι το πλήθος των διατεταγμένων k -άδων κορυφών $(v_1, \dots, v_k) \in V^k$ που ικανοποιούν την σχέση $\varphi_k(G[v_1, \dots, v_k]) = 1$. Αν υπάρχει ένα πολυώνυμο $g(n)$ και μια υπολογίσιμη συνάρτηση $g(k)$ τέτοια ώστε είτε $N_k(G) = 0$ είτε $N_k(G) \geq \frac{1}{g(k)g(n)} \frac{n!}{(n-k)!}$, τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\delta \in (0, 1)$ υπάρχει ένας συγκεκριμένος τυχαιοκρατικός αλγόριθμος ο οποίος επιστρέφει ως έξοδο έναν ακέραιο α τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}[|\alpha - N_k(G)| \leq \varepsilon \cdot N_k(G)] \geq 1 - \delta$$

και τρέχει σε χρόνο το πολύ $g(k)\tilde{q}(n, \varepsilon^{-1}, \log(\delta^{-1}))$, όπου g είναι μια υπολογίσιμη συνάρτηση και $\tilde{q}$ είναι ένα πολυώνυμο.

Απόδειξη. Μια τυχαιοκρατική προσέγγιση για να εκτιμήσουμε το $N_k(G)$ είναι να χρησιμοποιήσουμε την κλασική μέθοδο Monte Carlo. Θα πάρουμε, λοιπόν, μια προσέγγιση του $N_k(G)$ χρησιμοποιώντας έναν αλγόριθμο απλής τυχαίας δειγματοληψίας (simple random sample algorithm). Σε κάθε βήμα, επιλέγεται μια διατεταγμένη k -άδα κορυφών $(v_1, \dots, v_k)$ με τυχαίο και ομοιόμορφο τρόπο από όλα τα στοιχεία του συνόλου V^k , και στην συνέχεια ελέγχουμε αν $\varphi_k(G[v_1, \dots, v_k]) = 1$. Αυτό το βήμα δειγματοληψίας και ελέγχου μπορεί να πραγματοποιηθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Για να πάρουμε μια καλή εκτίμηση του συνολικού πλήθους των k -άδων που ικανοποιούν την φ_k , επαναλαμβάνουμε αυτήν την διαδικασία δειγματοληψίας t φορές (για κάποια τιμή του t που θα προσδιοριστεί στην συνέχεια), και μετά υπολογίζουμε το ποσοστό q από τις k -άδες, που εξετάσαμε, που ικανοποιούν την φ_k .

Τότε, εξάγουμε την εκτίμηση α του $N_k(G)$ η οποία είναι ίση με $\alpha = q \frac{n!}{(n-k)!}$, καθώς το σύνολο των διατεταγμένων k -άδων είναι $P(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Εδώ μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που $N_k(G) = 0$, δηλαδή όταν καμία k -άδα κορυφών $(v_1, \dots, v_k)$ δεν ικανοποιεί την σχέση $\phi_k(G[v_1, \dots, v_k]) = 1$, τότε ο αλγόριθμος αυτός επιστρέφει ως αποτέλεσμα $\alpha = 0$, όπως απαιτείται, και την γνώση ότι $N_k(G) = 0$ την παίρνει πριν τρέξει τον αλγόριθμο, από υπόθεση. Συνοψίζοντας, τα παραπάνω, ο αλγόριθμος για $N_k(G) > 0$ είναι ο εξής:

Αλγόριθμος Εκτίμησης του $N_k(G)$

1. $c = 0$.
 2. **Επανάλαβε για t φορές τα εξής:**
 - Επέλεξε τυχαία μια k -άδα κορυφών $(v_1, \dots, v_k)$ από το V^k .
 - **Εαν $\phi_k(G[v_1, \dots, v_k]) = 1$, τότε $c = c + 1$.**
 3. Επέστρεψε $\alpha = \frac{c}{t} P(n, k)$.
-

Η τιμή του t που θα επιλεγεί θα πρέπει να είναι μεγάλη αρκετά ώστε να ισχύει $\mathbb{P}[|\alpha - N_k(G)| \leq \varepsilon \cdot N_k(G)] \geq 1 - \delta$. Έστω $s_1, \dots, s_t$ τα ανεξάρτητα δείγματα k -άδων κορυφών που επιλέχθηκαν τυχαία από τον παραπάνω αλγόριθμο, δηλαδή $s_i = (v_{i,1}, \dots, v_{i,k})$. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $Y_1, \dots, Y_t$ ως εξής:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{εαν } \phi_k(G[v_{i,1}, \dots, v_{i,k}]) = 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές Y_i ακολουθούν την κατανομή Bernoulli, καθώς έχουν μόνο δύο, αμοιβαίως αποκλειόμενα, δυνατά αποτελέσματα, με παράμετρο $p = \frac{N_k}{P(n, k)}$ και μέση τιμή $E(Y_i) = p$. Θέτουμε $Y = \sum_{i=1}^t Y_i$ και παρατηρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την διωνυμική κατανομή με παραμέτρους t και p , δηλαδή $Y \sim B(t, p)$, με μέση τιμή $E(Y) = tp$.

Ορίζουμε, επίσης, την τυχαία μεταβλητή του εκτιμητή

$$Z = P(n, k) \sum_{i=1}^t \frac{Y_i}{t} = P(n, k) \frac{Y}{t} = \frac{P(n, k)}{t} Y.$$

Μπορούμε να δούμε ότι $E[Z] = N$ καθώς

$$E(Z) = E\left(\frac{P(n, k)}{t}Y\right) = \frac{P(n, k)}{t}E(Y) = \frac{P(n, k)}{t}tp = P(n, k)\frac{N}{P(n, k)} = N.$$

Θέλουμε να δούμε ποιο είναι ένα κατάλληλο κάτω φράγμα του t ώστε με μεγάλη πιθανότητα η τιμή της Z να είναι μια ε -προσέγγιση του N , δηλαδή να ισχύει ότι

$$\mathbb{P}[(1 - \varepsilon)N_k(G) \leq Z \leq (1 + \varepsilon)N_k(G)] \geq 1 - \delta, \quad 0 < \delta < 1.$$

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το φράγμα αυτό θα χρειαστούμε το ακόλουθο πόρισμα για τα φράγματα Chernoff :

Θεώρημα 5.14. [6] Έστω $X_1, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Poisson με πιθανότητα $\mathbb{P}(X_i = 1) = p_i$. Έστω $X = \sum_{i=1}^n X_i$ και $\mu = E(X)$. Τότε έχουμε ότι για $0 < \delta < 1$ ισχύουν τα ακόλουθα Chernoff φράγματα:

$$\mathbb{P}(X \geq (1 + \delta)\mu) \leq e^{-\mu\delta^2/3}. \quad (5.1)$$

$$\mathbb{P}(X \leq (1 - \delta)\mu) \leq e^{-\mu\delta^2/2}. \quad (5.2)$$

Παρατήρηση: Τα παραπάνω φράγματα Chernoff ισχύουν και για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την διωνυμική κατανομή.

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^* &= \mathbb{P}[(1 - \varepsilon)N_k(G) \leq Z \leq (1 + \varepsilon)N_k(G)] \\ &= \mathbb{P}\left[(1 - \varepsilon)N_k(G)\frac{t}{P(n, k)} \leq Z \frac{t}{P(n, k)} \leq (1 + \varepsilon)N_k(G)\frac{t}{P(n, k)}\right] \\ &= \mathbb{P}[(1 - \varepsilon)pt \leq Y \leq (1 + \varepsilon)pt] \\ &= \mathbb{P}[Y \leq (1 + \varepsilon)pt] - \mathbb{P}[Y < (1 - \varepsilon)pt] \\ &= 1 - \mathbb{P}[Y > (1 + \varepsilon)pt] - \mathbb{P}[Y < (1 - \varepsilon)pt] \\ &\geq 1 - \mathbb{P}[Y \geq (1 + \varepsilon)pt] - \mathbb{P}[Y \leq (1 - \varepsilon)pt] \\ &\geq 1 - e^{-tp\varepsilon^2/3} - e^{-tp\varepsilon^2/2} \quad \text{από σχέσεις (5.1) και (5.2)} \\ &\geq 1 - e^{-tp\varepsilon^2/3} - e^{-tp\varepsilon^2/3} \\ &= 1 - 2e^{-tp\varepsilon^2/3} \end{aligned}$$

Θέλουμε από το άνω φράγμα να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από την ποσότητα $(1 - \delta)$,

δηλαδή ζητάμε κατάλληλο t ώστε:

$$\begin{aligned}
 1 - 2e^{-tp\varepsilon^2/3} \geq 1 - \delta &\Leftrightarrow 2e^{-tp\varepsilon^2/3} \leq \delta \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{tp\varepsilon^2/3} \geq \delta \\
 &\Leftrightarrow e^{tp\varepsilon^2/3} \geq \frac{2}{\delta} \\
 &\Leftrightarrow tp\varepsilon^2/3 \geq \log\left(\frac{2}{\delta}\right) \\
 &\Leftrightarrow t \geq 3\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{1}{p}\log\left(\frac{2}{\delta}\right) \\
 &\Leftrightarrow t \geq 3\varepsilon^{-2}\frac{P(n,k)}{N_k(G)}\log\left(\frac{2}{\delta}\right)
 \end{aligned}$$

Εφόσον, ασχολούμαστε με την περίπτωση $N_k(G) > 0$, καθώς η άλλη προκύπτει άμεσα και τετριμμένα, από υπόθεση έχουμε ότι

$$N_k(G) \geq \frac{1}{g(k)q(n)} \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{P(n,k)}{g(k)q(n)}$$

και παρατηρούμε ότι:

$$3\varepsilon^{-2}\frac{P(n,k)}{N_k(G)}\log\left(\frac{2}{\delta}\right) \leq 3\varepsilon^{-2}P(n,k)\frac{g(k)q(n)}{P(n,k)}\log\left(\frac{2}{\delta}\right) = 3\varepsilon^{-2}g(k)q(n)\log\left(\frac{2}{\delta}\right).$$

Συνεπώς, επιλέγοντας το t να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το $3\varepsilon^{-2}g(k)q(n)\log\left(\frac{2}{\delta}\right)$ εξασφαλίσουμε ότι θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο από την ποσότητα $3\varepsilon^{-2}\frac{P(n,k)}{N_k(G)}\log\left(\frac{2}{\delta}\right)$, δηλαδή:

$$t \geq 3\varepsilon^{-2}g(k)q(n)\log\left(\frac{2}{\delta}\right) \geq 3\varepsilon^{-2}\frac{P(n,k)}{N_k(G)}\log\left(\frac{2}{\delta}\right).$$

Κάνουμε κάποιες επιπλέον απλοποιήσεις:

$$\begin{aligned}
 3\varepsilon^{-2}g(k)q(n)\log\left(\frac{2}{\delta}\right) &= 3\varepsilon^{-2}g(k)q(n)(\log(2) - \log(\delta)) \\
 &= 3\varepsilon^{-2}g(k)q(n)(\log(2) + \log(\delta^{-1})).
 \end{aligned}$$

και εφόσον το $q(n)$ είναι πολυώνυμο, μπορούμε να ορίσουμε και το νέο πολυώνυμο $\tilde{q}(n, \varepsilon^{-1}, \log(\delta^{-1}))$ να είναι το εξής:

$$\tilde{q}(n, \varepsilon^{-1}, \log(\delta^{-1})) = 3\varepsilon^{-2}q(n)(\log(2) + \log(\delta^{-1})).$$

Συνεπώς, το χειρότερο πλήθος βημάτων t που απαιτούνται για να πάρουμε την ζητούμενη πιθανότητα:

$$\mathbb{P}[(1 - \varepsilon)N_k(G) \leq Z \leq (1 + \varepsilon)N_k(G)] \geq 1 - \delta, \quad 0 < \delta < 1.$$

θα ορίζεται από το $\tilde{q}(n, \varepsilon^{-1}, \log(\delta^{-1}))$. Ισοδύναμα για την μορφή της πιθανότητας, παρατηρούμε ότι έχουμε, για $0 < \delta < 1$, :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(1 - \varepsilon)N_k(G) \leq Z \leq (1 + \varepsilon)N_k(G)] &\geq 1 - \delta \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}[(1 - \varepsilon)N_k(G) \leq \alpha \leq (1 + \varepsilon)N_k(G)] &\geq 1 - \delta \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}[N_k(G) - \varepsilon \cdot N_k(G) \leq \alpha \leq N_k(G) + \varepsilon \cdot N_k(G)] &\geq 1 - \delta \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}[-\varepsilon \cdot N_k(G) \leq \alpha - N_k(G) \leq \varepsilon \cdot N_k(G)] &\geq 1 - \delta \\ \Leftrightarrow \mathbb{P}[|\alpha - N_k(G)| \leq \varepsilon \cdot N_k(G)] &\geq 1 - \delta \end{aligned}$$

Επομένως, αποδείξαμε ότι συγκεκριμένος τυχαιοκρατικός αλγόριθμος εξάγει έναν ακέραιο α τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}[|\alpha - N_k(G)| \leq \varepsilon \cdot N_k(G)] \geq 1 - \delta$$

και θα χρειαστεί το πολύ $\tilde{q}(n, \varepsilon^{-1}, \log(\delta^{-1}))$ βήματα, όπου g μια υπολογίσιμη συνάρτηση και $\tilde{q}$ ένα πολυώνυμο. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τα συμπεράσματα της ενότητας των δομικών αποτελεσμάτων για να κατασκευάσουμε αλγόριθμους που με είσοδο ένα γράφημα G και μια θετική παράμετρο k αποφασίζουν αν το γράφημα G έχει άρτιο (ή αντίστοιχα περιττό) εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών και θα αποδείξουμε ότι οι αλγόριθμοι αυτοί είναι FPT (*Fixed-Parameter Tractable*). Και τέλος, θα αποδείξουμε ότι υπάρχει αλγόριθμος που να μας δίνει μια προσέγγιση του πλήθους τέτοιων υπογραφημάτων που υπάρχουν στο γράφημα G .

6.1 Αλγόριθμικά αποτελέσματα απόφασης

Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ότι το πρόβλημα εύρεσης ενός άρτιου εναγόμενου υπογραφήματος k κορυφών είναι FPT.

Θεώρημα 6.1. Ο αλγόριθμος p -ΑΡΤΙΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ μπορεί να λυθεί σε χρόνο $O\left(\binom{2^k}{k} \binom{k}{2} + n^2\right)$.

Απόδειξη. Το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε είναι το ακόλουθο:

p -ΑΡΤΙΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ
Είσοδος: Ένα γράφημα G και μια παράμετρος k .
Παράμετρος: k
Έξοδος: Το γράφημα G έχει άρτιο εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών ;

Θεωρούμε τον ακόλουθο αλγόριθμο που θα αποφασίζει αν ένα γράφημα G με n κορυφές περιέχει ένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές.

Αλγόριθμος p -ΑΡΤΙΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ

1. **Εαν** $k = 1$, **τότε** επέστρεψε «ΝΑΙ».
 2. **Εαν** $n < 2^{2k}$, **τότε** εκτέλεσε μια εξαντλητική έρευνα για να καθορίσεις αν το G περιέχει ένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές, και επέστρεψε την απάντηση.
 3. **Εαν** $k \equiv 0 \pmod{4}$ ή $k \equiv 1 \pmod{4}$, **τότε** επέστρεψε «ΝΑΙ».
 4. **Εαν** το G είναι κλικά, **τότε** επέστρεψε «ΟΧΙ».
 5. **Εαν** $k \equiv 2 \pmod{4}$, **τότε** επέστρεψε «ΝΑΙ».
 6. **Εαν** το G είναι ξένη ένωση δυο κλικών, **τότε** επέστρεψε «ΟΧΙ».
 7. Επέστρεψε «ΝΑΙ».
-

Η ορθότητα αυτού του αλγορίθμου προκύπτει από το Πόρισμα 4.4.

Απόδειξη ορθότητας του αλγορίθμου :

Γενικά, για την ορθότητα του αλγορίθμου θέλουμε να δείξουμε ότι ο αλγόριθμος τερματίζει πάντα και όταν τερματίζει έχει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Αρχικά, ο αλγόριθμος εξετάζει αν το $k = 1$, δηλαδή την πιο απλή περίπτωση όπου διερευνούμε αν υπάρχει άρτιο εναγόμενο υπογράφημα που αποτελείται μόνο από μια κορυφή. Σε αυτήν την περίπτωση επιστρέφει «ΝΑΙ». καθώς κάθε τετριμμένο υπογράφημα με 1 κορυφή περιέχει 0 ακμές, άρα πράγματι είναι άρτιο.

Στη συνέχεια, επειδή τα αποτελέσματα που αποδείξαμε στο Πόρισμα 4.4 κλ περιορίζονται σε γραφήματα με τουλάχιστον 2^{2k} κορυφές, στην 2η εντολή εξετάζουμε αν το δοσμένο γράφημα έχει λιγότερες από 2^{2k} κορυφές. Στην περίπτωση αυτή, αν η απάντηση είναι θετική, θα κάνουμε εξαντλητική έρευνα για να καθορίσουμε αν το δοσμένο γράφημα G περιέχει κάποιο άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές, καθώς δεν έχουμε κατάλληλα εργαλεία για να μπορούμε να αποφανθούμε με συντομότερο τρόπο.

Αν το γράφημα μας έχει τουλάχιστον 2^{2k} κορυφές, ο αλγόριθμος περνάει στις εντολές 3-7, όπου στηρίζονται στο Πόρισμα 4.4. Σύμφωνα, λοιπόν, με το Πόρισμα

4.4, το G δεν περιέχει κανένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές αν και μόνο αν το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός και είτε το G είναι κλίκια, είτε $k \equiv 3 \pmod{4}$ και το G είναι ξένη ένωση δυο κλικών. Επομένως, άμεση απόρροια είναι ότι αν το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος, τότε άμεσα έχουμε ότι το G περιέχει κάποιο άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές. Σε αυτό το αποτέλεσμα βασίζεται και η εντολή 3, εξετάζοντας αν το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος, το οποίο ισοδυναμεί με το να εξετάσει αν $k \equiv 0 \pmod{4}$ ή $k \equiv 1 \pmod{4}$. Αν πράγματι ο έλεγχος βγει θετικός, τότε αυτό σημαίνει ότι το γράφημα περιέχει κάποιο άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές και επομένως, σωστά ο αλγόριθμος επιστρέφει «ΝΑΙ».

Φτάνοντας στην εντολή 4, και ομοίως και στις υπόλοιπες εντολές, σημαίνει ότι το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός. Συγκεκριμένα στην εντολή 4, ο αλγόριθμος εξετάζει αν το γράφημα ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη του Πορίσματος 4.4, η οποία δεν απαιτεί κάποια επιπλέον ισοδυναμία για το k . Η συνθήκη ότι το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός και το G είναι κλίκια εξασφαλίζει ότι το γράφημα δεν περιέχει κανένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές. Για αυτόν τον λόγο αν ο έλεγχος έχει καταφατική απάντηση, ο αλγόριθμος επιστρέφει «ΟΧΙ».

Η 3η συνθήκη του Πορίσματος 4.4 απαιτεί το $\binom{k}{2}$ να είναι περιττός και επίσης να ισχύει ότι $k \equiv 3 \pmod{4}$. Όμως, όταν το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός, τότε $k \equiv 2 \pmod{4}$ ή $k \equiv 3 \pmod{4}$. Άρα, αν ισχύει ότι $k \equiv 2 \pmod{4}$, τότε από το Πόρισμα 4.4 έχουμε ότι το γράφημα περιέχει άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές και για αυτό τον λόγο, αν ο έλεγχος της 5ης εντολής βγει θετικός, ο αλγόριθμος ορθά επιστρέφει «ΝΑΙ».

Φτάνοντας στην 6η εντολή, ισχύει ότι $k \equiv 3 \pmod{4}$ και όπως προαναφέραμε, έχουμε, επίσης, ότι το $\binom{k}{2}$ είναι περιττός. Σύμφωνα με το Πόρισμα 4.4 μένει να ελέγξουμε αν το G είναι ξένη ένωση δυο κλικών. Αν η απάντηση είναι θετική, τότε από Πόρισμα 4.4 το γράφημα δεν περιέχει κανένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές και έτσι σωστά ο αλγόριθμος επιστρέφει «ΟΧΙ». Διαφορετικά, δεν ικανοποιούνται οι αναγκαίες συνθήκες του Πορίσματος 4.4 και άρα το γράφημα περιέχει κάποιο άρτιο εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές και για το λόγο αυτό ορθά επιστρέφει ο αλγόριθμος «ΝΑΙ» στην εντολή 7.

Στο σημείο αυτό ολοκληρώσαμε την απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου.

Απόδειξη χρονικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου :

Για να αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος εκτελείται σε χρόνο

$$O\left(\binom{2^{2k}}{k} \binom{k}{2} + n^2\right)$$

παρατηρούμε ότι :

- οι γραμμές 1, 3, 5, και 7 εκτελούνται σε χρόνο το πολύ $O(1)$,
- η γραμμή 2 απαιτεί συνολικό χρόνο $O\left(\binom{2^{2k}}{k}\binom{k}{2}\right)$, καθώς ο αλγόριθμος, κατά την διαδικασία της εξαντλητικής αναζήτησης, εξετάζει για κάθε υποσύνολο k κορυφών του γραφήματος G αν το πλήθος ακμών που υπάρχουν στο αντίστοιχο εναγόμενο υπογράφημα είναι άρτιο. Εφόσον το γράφημα, αν περάσει το έλεγχο της εντολής 2, έχει λιγότερες από 2^{2k} κορυφές, τότε το πλήθος των υποσυνόλων k κορυφών είναι $\binom{|V(G)|}{k} < \binom{2^{2k}}{k}$. Επίσης, για την εύρεση του πλήθους των ακμών σε κάθε εναγόμενο γράφημα k κορυφών, θα πρέπει να ελέγξει αν υπάρχουν ή όχι όλες τις δυνατές ακμές, άρα οι έλεγχοι αυτοί θα είσαι όσοι και το πλήθος των ακμών μιας κλίκας k κορυφών, δηλαδή $\binom{k}{2}$. Από πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε το παραπάνω άνω φράγμα του χρόνου.
- οι γραμμές 3 και 6 εκτελούνται σε χρόνο $O(n^2)$, επειδή θα πρέπει να ελεγχούν όλες οι δυνατές ακμές, που είναι $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$, ώστε να μπορεί να δοθεί απάντηση αν το γράφημα είναι κλίκας ή ξένη ένωση δύο κλικών, αντίστοιχα.

Συνθέτοντας όλα τα παραπάνω και εφόσον $k \ll n$, έχουμε ότι ο αλγόριθμος εκτελείται σε χρόνο $O\left(\binom{2^{2k}}{k}\binom{k}{2} + n^2\right)$. $\square$

Παρατηρούμε λοιπόν το πρόβλημα ΑΡΤΙΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ ανήκει στο FPT καθώς ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου είναι εκθετικός ως προς την παράμετρο k αλλά πολυωνυμικός ως προς το n , το πλήθος των κορυφών του γραφήματος εισόδου. Όπως είχαμε αναφέρει και στο Κεφάλαιο 4, στις περισσότερες περιπτώσεις το k είναι ουσιαστικό πιο μικρό από το n , επομένως, ο χρόνος που προέκυψε είναι πρακτικά εφαρμόσιμος όταν $k \ll n$.

Θα αποδείξουμε τώρα το ακριβώς αντίστοιχο αποτέλεσμα για τον αλγόριθμο p -ΠΕΡΙΤΤΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ.

Θεώρημα 6.2. Ο αλγόριθμος p -ΠΕΡΙΤΤΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ μπορεί να λυθεί σε χρόνο $O\left(\binom{2^{2k}}{k}\binom{k}{2} + n^2\right)$

Απόδειξη. Η απόδειξη κινείται στο ίδιο πλαίσιο όπως η απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.

Το πρόβλημα που καλούμαστε να λύσουμε είναι το ακόλουθο:

p -ΠΕΡΙΤΤΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ
Είσοδος: Ένα γράφημα G .
Παράμετρος: k
Έξοδος: Το γράφημα G έχει περιττό εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών ;

Θεωρούμε τον ακόλουθο αλγόριθμο που θα αποφασίζει αν ένα γράφημα G με n κορυφές περιέχει ένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές.

Αλγόριθμος p -ΠΕΡΙΤΤΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ

1. **Εαν** $k = 1$, **τότε** επέστρεψε «ΟΧΙ».
 2. **Εαν** $n < 2^{2k}$, **τότε** εκτέλεσε μια εξαντλητική έρευνα για να καθορίσεις αν το G περιέχει ένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές, και επέστρεψε την απάντηση.
 3. **Εαν** το G είναι ανεξάρτητο σύνολο, **τότε** επέστρεψε «ΟΧΙ»
 4. **Εαν** το k είναι περιττός και το G είναι πλήρες διμερές γράφημα, **τότε** επέστρεψε «ΟΧΙ».
 5. **Εαν** $k \equiv 0 \pmod{4}$ ή $k \equiv 1 \pmod{4}$ και το G είναι κλίκια, **τότε** επέστρεψε «ΟΧΙ»
 6. **Εαν** $k \equiv 1 \pmod{4}$ και το G είναι ξένη ένωση δύο κλικών, **τότε** επέστρεψε «ΟΧΙ».
 7. Επέστρεψε «ΝΑΙ».
-

Η ορθότητα αυτού του αλγορίθμου προκύπτει από το Πόρισμα 4.5.

Απόδειξη ορθότητας του αλγορίθμου :

Γενικά, για την ορθότητα του αλγορίθμου θέλουμε να δείξουμε ότι ο αλγόριθμος τερματίζει πάντα και όταν τερματίζει έχει το επιθυμητό αποτέλεσμα. Αρχικά,

ο αλγόριθμος εξετάζει αν το $k = 1$, δηλαδή την πιο απλή περίπτωση όπου διερευνούμε αν υπάρχει περιττό εναγόμενο υπογράφημα που αποτελείται μόνο από μια κορυφή. Σε αυτήν την περίπτωση επιστρέφει «ΟΧΙ». καθώς κάθε τετριμμένο υπογράφημα με 1 κορυφή περιέχει 0 ακμές, άρα άρτιο πλήθος κορυφών και όχι περιττό.

Στη συνέχεια, επειδή τα αποτελέσματα που αποδείξαμε στο Πρόγραμμα 4.5 περιορίζονται σε γραφήματα με τουλάχιστον 2^{2k} κορυφές, στην 2η εντολή εξετάζουμε αν το δοσμένο γράφημα έχει λιγότερες από 2^{2k} κορυφές. Στην περίπτωση αν η απάντηση είναι θετική, αυτή θα κάνουμε εξαντλητική έρευνα για να καθορίσουμε αν το δοσμένο γράφημα G περιέχει κάποιο περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές, καθώς δεν έχουμε κατάλληλα εργαλεία για να μπορούμε να αποφανθούμε με συντομότερο τρόπο.

Αν το γράφημα μας έχει τουλάχιστον 2^{2k} κορυφές, ο αλγόριθμος περνάει στις εντολές 3-7, όπου στηρίζονται στο Πρόγραμμα 4.5. Σύμφωνα, λοιπόν, με το Πρόγραμμα 4.5, το G (με $|V(G)| \geq 2^{2k}$) δεν περιέχει κανένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές αν και μόνο μια από τις ακόλουθες συνθήκες ισχύει:

1. το G είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο.
2. το k είναι περιττός και το G είναι ένα πλήρες διμερές γράφημα.
3. το $\binom{k}{2}$ είναι άρτιος και το G είναι κλίκια.
4. $k \equiv 1 \pmod{4}$ και το G είναι η ξένη ένωση δυο κλικών.

Επομένως, η εντολή 3 εξετάζει αν το G είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο. Αν πράγματι ο έλεγχος βγει θετικός, τότε αυτό σημαίνει ότι το γράφημα δεν περιέχει κάποιο περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές και επομένως, σωστά ο αλγόριθμος επιστρέφει «ΟΧΙ».

Ανάλογα στην εντολή 4, εξετάζουμε αν ο k είναι περιττός και το G είναι ένα πλήρες διμερές γράφημα. Αν ο έλεγχος έχει καταφατική απάντηση, ο αλγόριθμος ορθά επιστρέφει «ΟΧΙ».

Στην εντολή 5, περνάμε στην 3η συνθήκη του Προγράμματος 4.5, επομένως ο αλγόριθμος ελέγχει αν το $\binom{k}{2}$ και αυτό το κάνει εξετάζοντας αν ισχύει η ισοδύναμη συνθήκη $k \equiv 0 \pmod{4}$ ή $k \equiv 1 \pmod{4}$, Επίσης, από την 3η συνθήκη Προγράμματος 4.5, πρέπει επίσης να ελέγξουμε αν το γράφημα είναι κλίκια. Αν ο συνολικός έλεγχος είναι αληθής, τότε σωστά ο αλγόριθμος επιστρέφει «ΟΧΙ».

Συνεχίζοντας στην 6η εντολή, εξετάζουμε την 4η και τελευταία συνθήκη του Πόρισματος 4.5, δηλαδή εξετάζουμε αν $k \equiv 1 \pmod{4}$ και το G είναι η ξένη ένωση δυο κλικών. Αν η απάντηση είναι θετική, τότε ο αλγόριθμος επιστρέφει «ΟΧΙ», καθώς πράγματι το γράφημα δεν περιέχει κάποιο περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές.

Φτάνοντας στην 7η εντολή, έχουμε ήδη εξετάσει όλες τις περιπτώσεις γραφημάτων που δεν περιέχουν κάποιο περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές. Συνεπώς, οποιοδήποτε γράφημα φτάσει στην εντολή αυτή, ουσιαστικά δίνοντας αρνητική απάντηση στους ελέγχους των προηγούμενων εντολών, θα περιέχει κάποιο περιττό εναγόμενο υπογράφημα με k κορυφές. Επομένως, σωστά ο αλγόριθμος επιστρέφει «ΝΑΙ».

Στο σημείο αυτό ολοκληρώσαμε την απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου.

Απόδειξη χρονικής πολυπλοκότητας του αλγορίθμου :

Για να αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος εκτελείται σε χρόνο

$$O\left(\binom{2^{2k}}{k} \binom{k}{2} + n^2\right)$$

παρατηρούμε ότι :

- η γραμμή 1 εκτελείται σε σταθερό χρόνο, δηλαδή σε (1)
- η γραμμή 2 απαιτεί συνολικό χρόνο $O\left(\binom{2^{2k}}{k} \binom{k}{2}\right)$, καθώς ο αλγόριθμος, κατά την διαδικασία της εξαντλητικής αναζήτησης, εξετάζει για κάθε υποσύνολο k κορυφών του γραφήματος G αν το πλήθος ακμών που υπάρχουν στο αντίστοιχο εναγόμενο υπογράφημα είναι περιττό. Εφόσον το γράφημα, αν περάσει το έλεγχο της εντολής 2, έχει λιγότερες από 2^{2k} κορυφές, τότε το πλήθος των υποσυνόλων k κορυφών είναι $\binom{|V(G)|}{k} < \binom{2^{2k}}{k}$. Επίσης, για την εύρεση του πλήθους των ακμών σε κάθε εναγόμενο γράφημα k κορυφών, θα πρέπει να ελέγξει αν υπάρχουν ή όχι όλες τις δυνατές ακμές, άρα οι έλεγχοι αυτοί θα είσαι όσοι και το πλήθος των ακμών μιας κλίκας k κορυφών, δηλαδή $\binom{k}{2}$. Από πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε το παραπάνω άνω φράγμα του χρόνου.
- οι γραμμές 3, 4,5 και 6 εκτελούνται σε χρόνο $O(n^2)$, επειδή θα πρέπει να ελέγχουν όλες οι δυνατές ακμές, που είναι $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$, ώστε να μπορεί να δοθεί απάντηση αν το γράφημα είναι ανεξάρτητο σύνολο ή πλήρες διμερές ή κλίκας ή ξένη ένωση δύο κλικών, αντίστοιχα για κάθε γραμμή.

Συνθέτοντας όλα τα παραπάνω, έχουμε ότι ο αλγόριθμος εκτελείται σε χρόνο

$$O\left(\binom{2^k}{k} \binom{k}{2} + n^2\right)$$

□

6.2 Αλγόριθμικά αποτελέσματα καταμέτρησης

Τέλος, αναφερόμενοι στα αντίστοιχα προβλήματα καταμέτρησης του πλήθους των άρτιων, και αντίστοιχα περιττών, εναγόμενων υπογραφημάτων k κορυφών, δηλαδή το p -#ΑΡΤΙΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ

p -#ΑΡΤΙΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ
Είσοδος: Ένα γράφημα G και μια παράμετρος k .
Παράμετρος: k
Έξοδος: Το πλήθος των άρτιων εναγόμενων υπογραφημάτων k κορυφών του G .

και p -#ΠΕΡΙΤΤΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ:

p -#ΠΕΡΙΤΤΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ
Είσοδος: Ένα γράφημα G και μια παράμετρος k .
Παράμετρος: k
Έξοδος: Το πλήθος των περιττών εναγόμενων υπογραφημάτων k κορυφών του G .

θα δείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε μια αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση της εξόδου τους.

Θεώρημα 6.3. Υπάρχει FPTRAS για το πρόβλημα καταμέτρησης p -#ΑΡΤΙΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ, όπως και επίσης και για το p -#ΠΕΡΙΤΤΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ.

Απόδειξη. Θέτουμε $N_k(G)$ να είναι το πλήθος των k -άδων κορυφών του G που εναγουν άρτιο εναγόμενο υπογράφημα και φ_k η απεικόνιση που δέχεται ως είσοδο γραφήματα k κορυφών με ετικέτες και επιστρέφει 1 αν το γράφημα έχει άρτιο πλήθος ακμών και 0 αν έχει περιττό πλήθος ακμών. Από το Θεώρημα 4.8 γνωρίζουμε

ότι, αν ένα γράφημα G περιέχει τουλάχιστον ένα άρτιο εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών, τότε το G περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}k^2n^2} \binom{n}{k}$ άρτια εναγόμενα υπογραφήματα k κορυφών. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει πολυώνυμο $q(n) = n^2$ και υπολογίσιμη συνάρτηση $g(k) = 2^{2k^2+1}k^2k!$ τέτοια ώστε να ισχύει μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$\text{είτε } N_k(G) = 0$$

$$\text{ή } N_k(G) \geq \frac{1}{2^{2k^2+1}k^2n^2} \binom{n}{k} = \frac{1}{(2^{2k^2+1}k^2k!)(n^2)} \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1}{g(k)q(n)} \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 5.13, υπάρχει ένας τυχαιοκρατικός αλγόριθμος ο οποίος, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $\delta \in (0, 1)$ επιστρέφει ως έξοδο έναν μη αρνητικό ακέραιο α , τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}[|\alpha - N_k(G)| \leq \varepsilon \cdot N_k(G)] \geq 1 - \delta,$$

και τερματίζει σε χρόνο το πολύ $g(k)\tilde{q}(n, \varepsilon^{-1}, \log(\delta^{-1}))$, όπου $\tilde{q}$ ένα υπολογίσιμο πολυώνυμο.

Η ύπαρξη ενός FPTRAS για το πρόβλημα #Άρτιο Εναγόμενο Υπογράφημα προκύπτει παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned} |\alpha - N_k(G)| \leq \varepsilon \cdot N_k(G) &\Leftrightarrow -\varepsilon \cdot N_k(G) \leq \alpha - N_k(G) \leq \varepsilon \cdot N_k(G) \\ &\Leftrightarrow N_k(G) - \varepsilon \cdot N_k(G) \leq \alpha \leq N_k(G) + \varepsilon \cdot N_k(G) \\ &\Leftrightarrow (1 - \varepsilon)N_k(G) \leq \alpha \leq (1 + \varepsilon)N_k(G). \end{aligned}$$

Άρα, ο τυχαιοκρατικός αλγόριθμος που βρήκαμε είναι FPTRAS, αφού ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του Ορισμού 5.12. Πράγματι, παίρνει ως είσοδο ένα στιγμιότυπο G (με $|V(G)| = n$), και πραγματικούς αριθμούς $\varepsilon > 0$ και $0 < \delta < 1$, και σε χρόνο $g(k) \cdot \tilde{q}(n, 1/\varepsilon, \log(1/\delta))$ (όπου g είναι συνάρτηση, και $\tilde{q}$ είναι ένα πολυώνυμο των $n, 1/\varepsilon$ και $\log(1/\delta)$) επιστρέφει ως έξοδο ένα πραγματικό αριθμό α τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}[(1 - \varepsilon)N_k(G) \leq \alpha \leq (1 + \varepsilon)N_k(G)] \geq 1 - \delta.$$

Αντίστοιχα, για να αποδείξουμε ότι υπάρχει FPTRAS για το πρόβλημα καταμέτρησης p -#ΠΕΡΙΤΤΟ ΕΝΑΓΟΜΕΝΟ ΥΠΟΓΡΑΦΗΜΑ κινούμαστε με ακρίβως ανάλογο τρόπο. Η μόνη διαφορά έγκειται στην χρήση του Θεωρήματος 4.9, αντί του Θεωρήματος 4.8, που μας δίνει το επιχείρημα ότι αν ένα γράφημα G περιέχει τουλάχιστον ένα περιττό εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών, τότε το G περιέχει τουλάχιστον $\frac{1}{2^{2k^2+1}k^2n^2} \binom{n}{k}$ περιττά εναγόμενα υπογραφήματα k κορυφών. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΑΝΟΙΧΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή προσδιορίσαμε τις οικογένειες γραφημάτων σε συνδυασμό με τιμές της παραμέτρου k ώστε κάθε αρκετά μεγάλο γράφημα που ανήκει σε κάποια από αυτές τις οικογένειες, και εφόσον το k ικανοποιεί τις δεδομένες σχέσεις, (το γράφημα αυτό) δεν περιέχει κανένα άρτιο, ή αντίστοιχα περιττό, εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών. Ένα από τα απρόσμενα αποτελέσματα ήταν ότι το πλήθος αυτών των οικογενειών ήταν πολύ μικρό και εύκολα προσδιορίσιμο. Το γεγονός αυτό μας έδωσε την δυνατότητα να κατασκευάσουμε FPT-αλγορίθμους για τα αντίστοιχα προβλήματα απόφασης για το αν ένα δοσμένο γράφημα G περιέχει άρτιο, ή αντίστοιχα περιττό, εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών.

Ένα ακόμα απροσδόκητο αποτέλεσμα που συναντήσαμε, βασιζόμενο και αυτό στην Θεωρία Ramsey, ήταν ότι είτε το γράφημα δεν θα είχε κανένα άρτιο, ή αντίστοιχα περιττό, εναγόμενο υπογράφημα k κορυφών είτε θα είχε ένα αρκετά μεγάλο αριθμό τέτοιων υπογραφημάτων. Μάλιστα, αν $n = \mathbf{n}(G)$, από όλα $\binom{n}{k}$ δυνατά υπογραφήματα του G με k κορυφές, τουλάχιστον $\frac{1}{f(k)n^2}$ αυτών είναι άρτια, ή αντίστοιχα περιττά, όπου f είναι μια συγκεκριμένη υπολογίσιμη συνάρτηση. Το αποτέλεσμα αυτό μας εξασφαλίζει ότι τα προβλήματα καταμέτρησης των άρτιων και αντίστοιχα περιττών, εναγόμενων υπογραφημάτων k κορυφών επιδέχονται FPTRAS, και έτσι μπορούμε να έχουμε μια πολύ καλή προσέγγιση τους πλήθους τους από την σκοπιά της παραμετρικής πολυπλοκότητας.

Μετά από τα αποτελέσματα αυτά, ανακύπτουν διάφορα ερωτήματα ως προς τις κατευθύνσεις που θα μπορούσαμε να τα γενικεύσουμε. Μια άμεση φυσική ερώτηση είναι αν ίδια ή παρόμοια συμπεράσματα μπορούν να ισχύουν και για άλλα προβλήματα καταμέτρησης υπογραφημάτων των οποίων ο προσδιορισμός εξαρτάται από την πληθικότητα των ακμών τους.

Σαν πρώτο βήμα, θα ήταν ενδιαφέρον αν θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε τις οικογένειες γραφημάτων, συναρτήσει με τιμές της παραμέτρου k , που έχουν, ή δεν έχουν, εναγόμενα υπογραφήματα k κορυφών των οποίων το πλήθος ακμών είναι $(x \bmod p)$ όπου p ένας δοσμένος πρώτος αριθμός με $p > 2$ και x φυσικός αριθμός με $0 \leq x < p$. Όπως, επίσης, αν ισχύει κάποιο ανάλογο συνδυαστικό αποτέλεσμα για ένα κάτω φράγμα του πλήθους τέτοιων υπογραφημάτων.

Μια ευκολία του παραπάνω προβλήματος για $p = 2$ είναι ότι αν ένας αριθμός δεν είναι άρτιος, τότε σίγουρα θα είναι περιττός. Αυτή η ευκολία αντιστοιχίζεται στην βασική δυσκολία για περιπτώσεις όπου το $p \geq 3$, καθώς υπάρχουν περισσότερες περιπτώσεις που προκύπτουν.

Αν, για παράδειγμα, επιχειρήσουμε να κάνουμε την ίδια μελέτη για $p = 3$, συναντάμε το πρώτο εμπόδιο από την πρώτη κιάλας δομική Πρόταση 4.1, καθώς χρειάζεται να βρούμε τρία γραφήματα ώστε το πλήθος των ακμών τους να διαφέρουν αν δυο στο $\mathbb{Z}_3$. Το επιχείρημα της Πρότασης 4.1 βασίζεται στο γεγονός ότι σε ένα γράφημα G είχαμε μια k -κλίκα H και μια κορυφή v εκτός αυτή που είχε τουλάχιστον ένα γείτονα w και τουλάχιστον ένα μη-γείτονα u στην κλίκα H , και αντικαθιστώντας την κορυφή v αρχικά με τον γείτονα w και στην συνέχεια με τον μη-γείτονα u , παίρναμε δυο γραφήματα που H_w, H_u με πλήθος ακμών $\mathbf{m}(H_w) = \binom{k}{2} - (k-1) + r - 1$ και $\mathbf{m}(H_u) = \binom{k}{2} - (k-1) + r$, όπου r το πλήθος των γειτόνων της v στην k -κλίκα H με $0 < r < k$. Για μπορούμε να έχουμε τρεις διαφορετικές πληθικότητες στο $\mathbb{Z}_3$ θα έπρεπε να βρούμε τρόπο να φτιάξουμε άλλο ένα γράφημα H' που να είχε πλήθος ακμών είτε $\mathbf{m}(H') = \binom{k}{2} - (k-1) + r - 2$ είτε $\mathbf{m}(H') = \binom{k}{2} - (k-1) + r + 1$. Αυτό, δυστυχώς, δεν μπορεί να επιτευχθεί «ανταλλάσσοντας» την κορυφή v με κάποιες από τις κορυφές την κλίκας H . Αυτό το πρόβλημα θα μπορούσε να ξεπεραστεί αν υπάρχει μια κορυφής x εκτός της κλίκα H , της οποίας το πλήθος των γειτόνων στην H διαφέρει κατά ένα από το πλήθος των γειτόνων της v στο H , δηλαδή $||N(v) \cap V(H)| - |N(x) \cap V(H)|| = 1$. Ωστόσο, αυτήν η προσθήκη δεν θα μας βοηθήσει να γενικεύσουμε το εξίσου σημαντικό Πόρισμα 4.2, καθώς δεν γνωρίζουμε αν ισχύουν ή δεν ισχύουν τα εξής:

- $\binom{k}{2} - (k-1) \equiv (\binom{k}{2} - (k-1) + r) \pmod{3}$
- $\binom{k}{2} - (k-1) \equiv (\binom{k}{2} - (k-1) + r - 1) \pmod{3}$

και το γεγονός αυτό μας δημιουργεί δυσκολίες στις αποδείξεις των πιο σύνθετων αποτελεσμάτων.

Ακόμα, ένα άλλο ερώτημα που αναδύεται είναι αν στοιχεία από την Θεωρία Ramsey μπορούν να χρησιμεύσουν και σε άλλες εφαρμογές σε αλγόριθμους και ειδικότερα σε παραμετρικούς.

- [1] REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, GTM 173, 4th edition 2010, Springer-Verlag, Heidelberg.
- [2] MICHAEL SIPSER, *Introduction to the Theory of Computation*, CENGAGE Learning Custom Publishing, 3rd Edition, 2012.
- [3] MARK JERRUM AND KITTY MEEKS, *The parameterised complexity of counting even and odd induced subgraphs*, arXiv:1410.3375 [math.CO], 2014.
- [4] RODNEY G. DOWNEY AND M.R. FELLOWS, *Parameterized Complexity*, Springer, Monographs in Computer Science, 1999.
- [5] V. ARVIND AND VENKATESH RAMAN, *Approximation algorithms for some parameterized counting problems*, ISAAC 2002 (P. Bose and P. Morin, eds.), LNCS, vol. 2518, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002, pp. 453–464.
- [6] MICHAEL MITZENMACHER AND ELI UPFAL, *Probability and Computing: Randomized Algorithms and Probabilistic Analysis*, Cambridge University Press, 2nd Edition, 2017.
- [7] JÖRG FLUM AND MARTIN GROHE, *The parameterized complexity of counting problems*, SIAM J. Comput. 33 (4) (2004) 892–922.
- [8] JÖRG FLUM AND MARTIN GROHE, *Parameterized Complexity Theory*, Springer, Texts in Theoretical Computer Science, 1st Edition, 2006.
- [9] MARK JERRUM AND KITTY MEEKS, *Some hard families of parameterised counting problems*, ACM Trans. Comput. Theory 7, 2015, no. 3.

- [10] RAJEEV MOTWANI AND PRABHAKAR RAGHAVAN, *Randomized Algorithms*, Cambridge University Press, 1st Edition, 1995.
- [11] MAREK CYGAN, FEDOR V. FOMIN, ŁUKASZ KOWALIK, DANIEL LOKSHTANOV, DÁNIEL MARX, MARCIN PILIPCZUK, MICHAL PILIPCZUK AND SAKET SAURABH, *Parameterized Algorithms*, Springer, 1st Edition, 2015.
- [12] P. ERDŐS AND G. SZEKERES, *Ramsey Theory*, A combinatorial problem in geometry, *Compositio Mathematica*, 2, 464–470, 1935.
- [13] KITTY MEEKS, *The challenges of undounded treewidth in parameterised subgraph counting problems*, *Discrete Applied Mathematics*, 2015, doi:10.1016/j.dam.2015.06.019.
- [14] STANISŁAW RADZISZOWSKI, *Small ramsey numbers*, *The Electronic Journal of Combinatorics*, Dynamic survey ds1, 28pp, 1994.
- [15] BRENDAN D. MCKAY, STANISŁAW P. RADZISZOWSKI, $R(4, 5) = 25$, *Journal of Graph Theory*. 19 (3): 309–322. doi:10.1002/jgt.3190190304, 1995.
- [16] VIGLEIK ANGELTVEIT, BRENDAN D. MCKAY, $R(5, 5) \leq 48$, *Combinatorics*, 2017, arXiv:1703.08768v2.
- [17] RONALD L. GRAHAM AND JOEL H. SPENCER, *Ramsey Theory*, *Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization (Book 20)*, Wiley-Interscience, 2nd edition, 1990.
- [18] CATHERINE MCCARTIN, *Parameterized counting problems*, *Ann. Pure Appl. Log.* 138 (1–3) (2006) 147–182.
- [19] N. BIGGS, E. LLOYD, R. WILSON, *Graph Theory*, Oxford University Press, 1986.
- [20] A. CAYLEY, *On the theory of the analytical forms called trees*, *Philosophical Magazine*, Series IV, 13 (85): 172–176, 1857.

- [21] JAMES JOSEPH SYLVESTER, *Chemistry and Algebra*, Nature. 17: 284,1878.
- [22] W.T. TUTTE, *Graph Theory*, Cambridge University Press, p. 30, 2001.
- [23] L. GOLDBERG, M. GROHE, M. JERRUM, AND M. THURLEY, *A complexity dichotomy for partition functions with mixed signs*, SIAM Journal on Computing 39, no. 7, 2010.
- [24] J. HARTMANIS AND R. E. STEARNS , *On the computational complexity of algorithms*, Journal Transactions of the American Mathematical Society 117, 285-306, 1965.
- [25] R. M. KARP AND M. LUBY, *Monte-Carlo Algorithms for Enumeration and Reliability Problems*, In Proceedings of the 24th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 56-64, 1983.
- [26] R. M. KARP, M. LUBY AND N. MADRAS, *Monte-Carlo Approximation Algorithms for Enumeration Problems*, Journal of Algorithms 10, 429–448, 1989.
- [27] A. EHRENFUCHT AND M. KARPINSKI, *The computational complexity of (XOR,AND)-counting problems*, Technical report TR-90-033, ICSI, Berkeley, 1990.
- [28] MARK JERRUM AND KITTY MEEKS, *The parameterised complexity of counting connected subgraphs and graph motifs*, Journal of Computer and System Sciences 81, 2015.
- [29] SUBHASH KHOT AND VENKATESH RAMAN, *Parameterized complexity of finding subgraphs with hereditary properties*, Theoretical Computer Science, Volume 289, Issue 2, Pages 997-1008, 2002.
- [30] J.M. LEWIS AND M. YANNAKAKIS, *The Node-Deletion Problem for Hereditary Properties is NP-complete*, J. Comput. System Sci. 20,219–230, 1980.

- [31] LEIZHEN CAI, *Fixed parameter tractability of graph modification problem for hereditary properties*, Inform. Process. Lett. 58, 171–176, 1996.
- [32] LEIZHEN CAI, BOTING YANG, *Parameterized complexity of even/odd subgraph problems*, Journal of Discrete Algorithms 9, 231–240, 2011.
- [33] R. M. KARP AND M. LUBY, *Monte-Carlo Algorithms for Enumeration and Reliability Problems*, In Proceedings of the 24th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 56-64, 1983.
- [34] R. M. KARP, M. LUBY AND N. MADRAS, *Monte-Carlo Approximation Algorithms for Enumeration Problems*, Journal of Algorithms 10, 429–448, 1989.