Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Τομέας Μαθηματικής Ανάλυσης

Διπλωματική Εργασία

Εισαγωγή στη Θεωρία Χώρων Τελεστών και Θεωρήματα Επέκτασης

Συγγραφή:

Ευάγγελος Παπαπέτρος

Επιβλέπων:

Καθ. Δημ. Γατζούρας

Φεβρουάριος 2019

Περίληψη

Το αντικείμενο μελέτης της εργασίας αυτής είναι οι τελεστές και ιδιαίτερα οι γραμμικοί και φραγμένοι τελεστές από ένα χώρο Hilbert στον εαυτό του. Μελετούμε επίσης χώρους τελεστών, οι οποίοι ορίζονται ως υπόχωροι μιας $C^\star$ άλγεβρας $\mathcal{A}$. Ειδικότερα, μελετούμε συστήματα τελεστών, δηλαδή, αυτοσυζυγείς υπόχωρους που περιέχουν τη μονάδα της άλγεβρας.

Έπειτα μελετούμε απεικονίσεις από συστήματα τελεστών σε μια τυχούσα $C^\star$ άλγεβρα και ασχολούμαστε με τις θετικές, πλήρως θετικές και πλήρως φραγμένες απεικονίσεις και αποδεικνύουμε βασικά θεωρήματα επέκτασης, όπως αυτά των Stinespring, Arveson και Wittstock.

Στο Κεφάλαιο 1, παρουσιάζονται βασικές έννοιες από τη θεωρία των τανυστικών γινομένων. Ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο γραμμικών χώρων, το προβολικό τανυστικό γινόμενο χώρων Banach, τανυστικό γινόμενο χώρων Hilbert και τανυστικά γινόμενα $C^\star$ αλγεβρών.

Στο Κεφάλαιο 2 της εργασίας, ορίζονται οι $C^\star$ άλγεβρες $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ όπου $\mathcal{A}$ είναι $C^\star$ άλγεβρα, παρουσιάζονται Θεωρήματα Διαστολής γραμμικών και φραγμένων τελεστών σε χώρους Hilbert καθώς επίσης και βασικές έννοιες από θετικές απεικονίσεις.

Στο Κεφάλαιο 3, εισάγεται η έννοια της πλήρως θετικής απεικόνισης από ένα σύστημα τελεστών σε μια $C^\star$ άλγεβρα και αποδεικνύεται το Θεώρημα Choi.

Στο Κεφάλαιο 4, διατυπώνεται και αποδεικνύεται το Θεώρημα Stinespring που χαρακτηρίζει τις πλήρως θετικές απεικονίσεις από μια $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$ στην $C^\star$ άλγεβρα $\mathbb{B}(H)$ ενός χώρου Hilbert H.

Στο Κεφάλαιο 5, ασχολούμαστε ειδικά με πλήρως θετικές απεικονίσεις που παίρνουν τιμές στην άλγεβρα $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ και αποδεικνύουμε ένα Θεώρημα Επέκτασης τύπου Arveson. Το βασικό Θεώρημα Επέκτασης του Arveson παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 6.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7, παρουσιάζονται δύο βασικά θεωρήματα του Wittstock, ένα Θεώρημα Επέκτασης και ένα Θεώρημα Διάσπασης, σύμφωνα με τα οποία συμπεραίνουμε ότι η γραμμική θήκη των πλήρως θετικών απεικονίσεων είναι οι πλήρως φραγμένες απεικονίσεις.

Abstract

The object of study of this thesis is the operators and especially the linear and bounded operators from a Hilbert space to itself. We also study operator spaces which are defined as subspaces of a $C^{\star}$ algebra $\mathcal{A}$. In particular, we study operator systems, that is, selfadjoint subspaces containing the unit of the algebra.

Then we study maps of operator systems to a given $C^{\star}$ algebra and we deal with the positive, completely positive and completely bounded maps. We prove basic theorems such as those of Stinespring, Arveson and Wittstock.

In Chapter 1, we present basic concepts of the theory of tensor products. We define the Algebraic Tensor Product of Linear Spaces, the Projective Tensor Product of Banach Spaces, the tensor product of Hilbert Spaces and tensor products of $C^{\star}$ algebras.

In Chapter 2, we define the $C^{\star}$ algebras $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$, where $\mathcal{A}$ is a $C^{\star}$ algebra, we present dilation theorems of bounded linear operators on Hilbert spaces as well as basic concepts of positive maps.

In Chapter 3, we define completely positive maps of an operator system to a $C^{\star}$ algebra and we prove the theorem of Choi.

In Chapter 4, we state and prove Stinespring's Theorem, which characterizes the completely positive maps of a $C^{\star}$ algebra $\mathcal{A}$ to the $C^{\star}$ algebra $\mathbb{B}(H)$ of a Hilbert space H.

In Chapter 5, we study completely positive maps taking values in the $C^{\star}$ algebra $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ and we prove a theorem of extension. The basic Arveson Extension Theorem is presented in Chapter 6.

Finally, Chapter 7 presents two major theorems of Wittstock, an extension theorem and a decomposition theorem, from which we conclude that the linear span of the set of completely positive maps is the space of completely bounded maps.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την τριμελή επιτροπή όπως επίσης και τον κύριο Αριστείδη Κατάβολο του οποίου η βοήθεια ήταν πολύτιμη και καθοριστική για την περάτωση της εργασίας αυτής. Επίσης, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την ηθική στήριξη καθώς και την κοινότητα του latex για όλες τις συμβουλές και τον ανοικτό κώδικα που παρέχει.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Τανυστικό Γινόμενο Γραμμικών Χώρων

Θεωρούμε δύο μιγαδικούς γραμμικούς χώρους X και Y και το καρτεσιανό τους γινόμενο $X \times Y$ εφοδιασμένο με τη διακριτή τοπολογία. Στην τοπολογία αυτή, τα συμπαγή υποσύνολα είναι ακριβώς τα πεπερασμένα.

Ορισμός 1.1.1 *Μια απεικόνιση $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ θα λέμε ότι είναι συμπαγούς φορέα, αν το σύνολο*

$$\mathrm{supp(f)} := \overline{\{\mathrm{(x, y) \in X \times Y\, , f(x, y) \neq 0}\}}$$

είναι συμπαγές, δηλαδή πεπερασμένο.

Το σύνολο όλων αυτών των απεικονίσεων, που είναι μη κενό, διότι η μηδενική απεικόνιση είναι συμπαγούς φορέα, το συμβολίζουμε με $C_c(X \times Y)$ και εφοδιασμένο με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης απεικονίσεων και βαθμωτού γινομένου μιγαδικού αριθμού με απεικόνιση, είναι μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Στον χώρο αυτό, έχουμε τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις των μονοσυνόλων, δηλαδή για κάθε $(x, y) \in X \times Y$

$$\chi_{(x,y)}(a, b) = \begin{cases} 1 \ , (a, b) = (x, y) \\ 0 \ , (a, b) \neq (x, y) \end{cases}$$

Θεωρούμε τον υπόχωρο

$$K = \operatorname{span}\left\{\begin{array}{c} \chi_{(x_1+x_2,y)} - \chi_{(x_1,y)} - \chi_{(x_2,y)} \ , x_1 \, , x_2 \in X \, , y \in Y \\ \chi_{(x,y_1+y_2)} - \chi_{(x,y_1)} - \chi_{(x,y_2)} \ , x \in X \, , y_1 \, , y_2 \in Y \\ \chi_{(\lambda\, x,y)} - \lambda\, \chi_{(x,y)} \, , \chi_{(x,\lambda\, y)} - \lambda\, \chi_{(x,y)} \, , x \in X \, , y \in Y \, , \lambda \in \mathbb{C} \end{array}\right\}$$

Ορισμός 1.1.2 *Το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο των $X\,,Y$ συμβολίζεται με $X \odot Y$ και ορίζεται ως*

$$X \odot Y := C_c(X \times Y)/K.$$

Αν $\pi : C_c(X \times Y) \to X \odot Y$ είναι η κανονική προβολή, τότε για κάθε $(x, y) \in X \times Y$ το $\pi(\chi_{(x,y)}) = \chi_{(x,y)} + K$ λέγεται στοιχειώδης τανυστής και συμβολίζεται με $x \otimes y$. Προφανώς,

$$X \odot Y = \operatorname{span}\{\mathrm{x} \otimes \mathrm{y} \in \mathrm{X} \odot \mathrm{Y}\ , (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}\}$$

αλλά το σύνολο $\{x \otimes y \in X \odot Y\,, (x, y) \in X \times Y\}$ δεν αποτελεί βάση του $X \odot Y$. Άρα, κάθε στοιχείο $u \in X \odot Y$ είναι της μορφής

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, x_i \otimes y_i$$

για κάποια $\lambda_i \in \mathbb{C}$ και κάποια $(x_i, y_i) \in X \times Y$ και όχι κατά μοναδικό τρόπο. Από τον ορισμό του υποχώρου K προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες

$$\left\{\begin{array}{c} (x_1 + x_2) \otimes y = x_1 \otimes y + x_2 \otimes y \\ x \otimes (y_1 + y_2) = x \otimes y_1 + x \otimes y_2 \\ \lambda\,(x \otimes y) = (\lambda\, x) \otimes y = x \otimes (\lambda\, y) \end{array}\right\}$$

για κάθε $x_1\,, x_2\,, x \in X\ \,, y_1\,, y_2\,, y \in Y\,, \lambda \in \mathbb{C}$. Λόγω της ιδιότητας $\lambda\,(x\otimes y) = (\lambda\, x)\otimes y$, έχουμε ότι το τυχόν στοιχείο $u \in X \odot Y$ γράφεται ως

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

για κάποια $x_i \in X\,, y_i \in Y\,, 1 \le i \le n$. Επίσης, σύμφωνα με αυτές τις ιδιότητες, προκύπτει ότι η απεικόνιση

$$i : X \times Y \to X \odot Y \, , i(x, y) = x \otimes y$$

είναι διγραμμική. Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε την καθολική ιδιότητα του αλγεβρικού τανυστικού γινομένου.

Καθολική Ιδιότητα Τανυστικού Γινομένου

Για κάθε γραμμικό χώρο Z και κάθε διγραμμική απεικόνιση $\sigma : X \times Y \to Z$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\tilde{\sigma} : X \odot Y \to Z$ με την ιδιότητα $\tilde{\sigma} \circ i = \sigma$ δηλαδή, $\tilde{\sigma}(x \otimes y) = \sigma(x, y) \, , \forall \, x \in X \, , \forall \, y \in Y$.

Μοναδικότητα Αλγεβρικού Τανυστικού Γινομένου

Υποθέτουμε ότι W είναι ένα γραμμικός χώρος και $B : X \times Y \to W$ μια διγραμμική απεικόνιση με την ιδιότητα, για κάθε γραμμικό χώρο Z και κάθε διγραμμική απεικόνιση $A : X \times Y \to Z$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $L : W \to Z$ ώστε $A = L \circ B$. Τότε, υπάρχει ισομορφισμός $J : X \odot Y \to W$ που ικανοποιεί τη σχέση $J(x \otimes y) = B(x, y) \, , x \in X \, , y \in Y$.

Απόδειξη: Αρχικά, παρατηρούμε ότι η μοναδικότητα της γραμμικής απεικόνισης L για κάθε διγραμμική απεικόνιση A συνεπάγεται ότι $\mathrm{span}(\mathrm{Im}(\mathrm{B})) = \mathrm{W}$. Εφ'όσον η απεικόνιση $B : X \times Y \to W$ είναι διγραμμική, από την καθολική ιδιότητα του $X \odot Y$ υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $J : X \odot Y \to W$ με την ιδιότητα $J(x \otimes y) = B(x, y) \, , \forall \, x \in X \, , \forall \, y \in Y$. Απ'την άλλη, για $Z = X \odot Y$ και $A = i$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\Phi : W \to X \odot Y$ με $x \otimes y = \Phi(B(x, y)) \, , \forall \, x \in X \, , \forall \, y \in Y$. Για το τυχόν

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \odot Y$$

ισχύει

$$(\Phi \circ J)(u) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(J(x_i \otimes y_i)) = \sum_{i=1}^{n} \Phi(B(x_i, y_i)) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = u$$

Άρα, η $\Phi \circ J$ είναι η ταυτοτική στο $X \odot Y$. 'Εστω τώρα το τυχόν $w \in W$. Εφ' όσον $\mathrm{span(Im(B)) = W}$ γράφουμε

$$w = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i)$$

για κάποια $x_i \in X \,, y_i \in Y \,, 1 \le i \le n$. Έπομένως

$$(J \circ \Phi)(w) = \sum_{i=1}^{n} J(\Phi(B(x_i, y_i))) = \sum_{i=1}^{n} J(x_i \otimes y_i) = \sum_{i=1}^{n} B(x_i, y_i) = w$$

που σημαίνει ότι η $J \circ \Phi$ είναι η ταυτοτική στο W. Τελικά, $J = \Phi^{-1}$ και άρα $X \odot Y \cong W$.

■

Εφαρμογή 1.1.1 *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε γραμμικό χώρο X ισχύει $X \odot \mathbb{C}^n \cong X^n$.*

Απόδειξη: Αν X είναι γραμμικός χώρος και $n \in \mathbb{N}$, τότε ορίζουμε απεικόνιση

$$B : X \times \mathbb{C}^n \to X^n \,, B(x, (z_1, ..., z_n)) = (z_1\, x, ..., z_n\, x).$$

Προφανώς, η B είναι διγραμμική και από καθολική ιδιότητα του αλγεβρικού τανυστικού γινομένου, επάγεται γραμμική απεικόνιση $f : X \odot \mathbb{C}^n \to X^n$ που έχει την ιδιότητα $f(x \otimes (z_1, ..., z_n)) = (z_1\, x, ..., z_n\, x) \,, \forall\, x \in X \,, \forall\, (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$. Απ' την άλλη, ορίζουμε

$$g : X^n \to X \odot \mathbb{C}^n \,, g(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i$$

όπου $\{e_i \,, 1 \le i \le n\}$, η συνήθης βάση του $\mathbb{C}^n$. Η g είναι γραμμική και ικανοποιεί την

$$\begin{aligned}(g \circ f)\ (x \otimes (z_1, ..., z_n)) &= g(z_1\, x, ..., z_n\, x)\\ &= \sum_{i=1}^{n} (z_i\, x) \otimes e_i\\ &= \sum_{i=1}^{n} z_i\, (x \otimes e_i)\\ &= x \otimes \sum_{i=1}^{n} z_i\, e_i\\ &= x \otimes (z_1, ..., z_n)\end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$ και κάθε $(z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$. Λόγω γραμμικότητας των f , g προκύπτει ότι $(g \circ f)(u) = u$, $\forall\, u \in X \odot \mathbb{C}^n$. Επίσης,

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x_1, ..., x_n) &= f(g(x_1, ..., x_n)) \\
&= f(x_1 \otimes e_1 + ... + x_n \otimes e_n) \\
&= f(x_1 \otimes (1, 0, ..., 0)) + ... + f(x_n \otimes (0, 0, ..., 1)) \\
&= (x_1, 0, ..., 0) + ... + (0, 0, ..., x_n) \\
&= (x_1, ..., x_n)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η f είναι ισομορφισμός γραμμικών χώρων και άρα $X \odot \mathbb{C}^n \cong X^n$.

■

Ειδικότερα, αν $X = \mathbb{C}^m$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\mathbb{C}^m \odot \mathbb{C}^n \cong (\mathbb{C}^m)^n \cong \mathbb{C}^{nm}$.

Τανυστικό Γινόμενο Γραμμικών Απεικονίσεων

Αν X , Y , Z , W είναι γραμμικοί χώροι και $\phi : W \to Y$ και $\psi : X \to Z$ είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$\phi \odot \psi : W \odot X \to Y \odot Z$$

με την ιδιότητα $(\phi \odot \psi)(w \otimes x) = \phi(w) \otimes \psi(x)$, $w \in W$, $x \in X$

Απόδειξη: Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi \times \psi : W \times X \to Y \odot Z \,, (\phi \times \psi)(w, x) = \phi(w) \otimes \psi(x)$$

η οποία είναι διγραμμική, διότι

$$\begin{aligned}(\phi \times \psi)(w + a\,w', x) &= \phi(w + a\,w') \otimes \psi(x) \\ &= (\phi(w) + a\,\phi(w')) \otimes \psi(x) \\ &= \phi(w) \otimes \psi(x) + a\,\phi(w') \otimes \psi(x) \\ &= (\phi \times \psi)(w, x) + a\,(\phi \times \psi)(w', x)\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά την γραμμικότητα της ψ προκύπτει ότι $(\phi\times\psi)(w, x+a\,x') = (\phi\times\psi)(w, x)+a\,(\phi\times\psi)(w, x')$ για κάθε $w\,, w' \in W\,, x\,, x' \in X\,, a \in \mathbb{C}$. Από Καθολική Ιδιότητα Αλγεβρικού Τανυστικού Γινομένου, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\phi \odot \psi : W \odot X \to Y \odot Z$ με την ιδιότητα $(\phi \odot \psi)(w \otimes x) = (\phi \times \psi)(w, x) = \phi(w) \otimes \psi(x)\,, w \in W\,, x \in X$.

■

Γραμμική Ανεξαρτησία και Μοναδικότητα Γραφής

Αν $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $\{y_1, ..., y_n\} \subseteq Y$ τυχαίο, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i = 0 \implies y_i = 0\,, \forall\, i = 1, ..., n$$

.

Απόδειξη: Επειδή $x_k \notin span\ \{x_j\,, j \neq k\}\ , \forall\, k = 1, ..., n$, υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $f_k : X \to \mathbb{C}$ ώστε $f_k(x_k) = 1\ , f_k(x_j) = 0\,, \forall\, j \in \{1, ..., n\} \setminus \{k\}$. Ας υποθέσουμε ότι $y_j \neq 0$ για κάποιο $j = 1, ..., n$. Τότε, υπάρχει γραμμική απεικόνιση $g : Y \to \mathbb{C}$ ώστε $g(y_j) = 1 \neq 0$. Για $k \in \{1, ..., n\}$ θεωρούμε το τανυστικό γινόμενο των γραμμικών απεικονίσεων $f_k\,, g$

$$F_k = f_k \odot g : X \odot Y \to \mathbb{C} \odot \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$$

με την ιδιότητα $(f_k \odot g)(x \otimes y) = f_k(x) \otimes g(y)\,, x \in X\,, y \in Y$. Ορίζουμε,

$$F = \sum_{k=1}^{n} F_k : X \odot Y \to \mathbb{C} \odot \mathbb{C}.$$

Ταυτίζουμε το $\mathbb{C} \odot \mathbb{C}$ με το $\mathbb{C}$. (Εφαρμογή 1.1.1) Τότε

$$F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right) = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} F(x_i \otimes y_i) = 0$$

όπου για το τυχόν $i = 1, ..., n$ ισχύει

$$\begin{aligned} F(x_i \otimes y_i) &= \sum_{k=1}^{n} (f_k \odot g)(x_i \otimes y_i) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k(x_i) \otimes g(y_i) \\ &= g(y_i) \end{aligned}$$

οπότε,

$$\sum_{i=1}^{n} g(y_i) = 0 \implies g(y_j) = 0 \implies 1 = 0$$

άτοπο.

■

1.2 Προβολικό Τανυστικό Γινόμενο Χώρων Banach

Θεωρούμε δύο χώρους Banach $(X, ||\cdot||)$ και $(Y, ||\cdot||)$. Θέλουμε να εφοδιάσουμε το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $X \odot Y$ με μια νόρμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια τέτοια νόρμα, $||\cdot||$. Είναι φυσιολογικό να απαιτήσουμε $||x \otimes y|| \leq ||x|| \, ||y||$ για $x \in X$, $y \in Y$. Τότε, για την τυχούσα αναπαράσταση

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

του $u \in X \odot Y$, από τριγωνική ανισότητα, θα έχουμε

$$||u|| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} ||x_i \otimes y_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||x_i|| \, ||y_i||$$

Έπεται ότι

$$||u|| \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} ||x_i|| \, ||y_i|| \ , u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\}$$

.

Ορισμός 1.2.1 *Η προβολική νόρμα στο $X \odot Y$ συμβολίζεται με π και ορίζεται ως*

$$\pi(u) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} ||x_i|| \, ||y_i|| \ , u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \right\} \ , u \in X \odot Y.$$

Θεώρημα 1.2.1 *Η π είναι όντως νόρμα στο $X \odot Y$ και ικανοποιεί*

$$\pi(x \otimes y) = ||x|| \, ||y|| \, , x \in X \, , y \in Y.$$

Απόδειξη: Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, η π είναι καλά ορισμένη και ικανοποιεί $\pi(u) \geq 0 \, , \forall \, u \in X \odot Y$. Θεωρούμε $k \in \mathbb{C} \, , u \in X \odot Y$. Αν

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \odot Y$$

είναι η τυχούσα αναπαράσταση του u, τότε για $k = 0$ προφανώς ισχύει $\pi(k \, u) = \pi(0) = 0 = |0| \, \pi(u)$. Έστω λοιπόν $k \neq 0$. Τότε,

$$k \, u = \sum_{i=1}^{n} (k \, x_i) \otimes y_i$$

είναι μια αναπαράσταση του $k \, u$ και συνεπώς,

$$\pi(k \, u) \leq \sum_{i=1}^{n} ||k \, x_i|| \, ||y_i|| = |k| \, \sum_{i=1}^{n} ||x_i|| \, ||y_i||$$

απ' όπου προκύπτει

$$\sum_{i=1}^{n} ||x_i|| \, ||y_i|| \geq \frac{\pi(k \, u)}{|k|}.$$

Παίρνοντας infimum,

$$\pi(u) \geq \frac{\pi(k\,u)}{|k|} \iff \pi(k\,u) \leq |k|\,\pi(u).$$

Απ' την άλλη, $\pi(u) = \pi(k^{-1}\,k\,u) \leq |k|^{-1}\,\pi(k\,u) \implies \pi(k\,u) \geq |k|\,\pi(u)$ και τελικά $\pi(k\,u) = |k|\,\pi(u)$. Θα αποδείξουμε τώρα και την τριγωνική ανισότητα. Αν $u\,,v \in X \odot Y$ και $\epsilon > 0$, τότε εξ' ορισμού, υπάρχουν αναπαραστάσεις

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \ , v = \sum_{j=1}^{m} w_j \otimes z_j$$

ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} ||x_i||\,||y_i| < \pi(u) + \frac{\epsilon}{2}$$

και

$$\sum_{j=1}^{m} ||w_j||\,||z_j|| < \pi(v) + \frac{\epsilon}{2}$$

Εφ'όσον

$$u + v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \sum_{j=1}^{m} w_j \otimes z_j$$

είναι αναπαράσταση του $u + v$, έπεται

$$\begin{aligned}
\pi(u+v) &\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i + \sum_{j=1}^{m} w_j \otimes z_j \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} ||x_i||\,||y_i|| + \sum_{j=1}^{m} ||w_j||\,||z_j|| \\
&< \pi(u) + \frac{\epsilon}{2} + \pi(v) + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \pi(u) + \pi(v) + \epsilon
\end{aligned}$$

Επομένως, $\pi(u+v) < \pi(u) + \pi(v) + \epsilon\,, \forall\,\epsilon > 0$ που σημαίνει ότι $\pi(u+v) \leq \pi(u) + \pi(v)$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $(\forall\, u \in X \odot Y\,, \pi(u) = 0 \implies u = 0)$. Αρχικά, αν

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \otimes \eta_j \in X \odot Y \setminus \{0\}$$

τότε επιλέγουμε μια βάση $\{x_1, ..., x_n\}$ του $span\,\{\xi_j\,, 1 \leq j \leq m\}$. Τότε γράφουμε

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{n} c_{k\,j}\, x_k\,, 1 \leq j \leq m$$

και άρα

$$u = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{k\,j}\, x_k \right) \otimes \eta_j = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes \left(\sum_{j=1}^{m} c_{k\,j}\, \eta_j \right)$$

Αποδείξαμε λοιπόν, ότι κάθε μη μηδενικό διάνυσμα u του $X \odot Y$ μπορεί να γραφεί ως

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

όπου $x_1\,, ..., x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $y_i \neq 0\,, 1 \leq i \leq n$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το

$$\{\phi \odot f : X \odot Y \to \mathbb{C}\,, \phi \in X^\star\,, f \in Y^\star\}$$

διαχωρίζει τα σημεία του $X \odot Y$. Πράγματι, έστω

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \odot Y \setminus \{0\}$$

όπου τα $x_1, ..., x_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $y_i \neq 0\,, 1 \leq i \leq n$. Ας υποθέσουμε ότι $(\phi \odot f)(u) = 0\,, \forall\, \phi \in X^\star\,, f \in Y^\star$, δηλαδή

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)\, f(y_i).$$

Όμως, λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας των $x_1, ..., x_n$, για κάθε $1 \leq j \leq n$, υπάρχει $\phi_j \in$

$X^\star$, ώστε $\phi_j(x_j) \neq 0\,, \phi_j(x_k) = 0\,, k \neq j$. Τότε, για κάθε $f \in Y^\star$ ισχύει

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \phi_j(x_i)\, f(y_i) = \phi_j(x_j)\, f(y_j)$$

δηλαδή, $f(y_j) = 0$ για κάθε $f \in Y^\star$ και από θεώρημα Hahn-Banach [2] έπεται ότι $y_j = 0$, άτοπο. Έχοντας τους παραπάνω ισχυρισμούς, μπορούμε να αποδείξουμε το ζητούμενο. Έστω λοιπόν $u \in X \odot Y\,, u \neq 0$. Τότε, υπάρχουν $\phi \in X^\star\,, f \in Y^\star$ με $(\phi \odot f)(u) \neq 0$. Τότε, για την τυχούσα αναπαράσταση

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j \otimes \eta_j$$

έχουμε

$$0 \neq |(\phi \odot f)(u)| = \left| \sum_{j=1}^{m} \phi(\xi_j)\, f(\eta_j) \right| \leq ||\phi||\, ||f||\, \sum_{j=1}^{m} ||\xi_j||\, ||\eta_j||$$

οπότε $\pi(u) > 0$. Τέλος, μένει να αποδείξουμε ότι $\pi(x \otimes y) = ||x||\, ||y||\,, x \in X\,, y \in Y$. Για τυχόντα $x \in X\,, y \in Y$, έχουμε από ορισμό της π ότι $\pi(x \otimes y) \leq ||x||\, ||y||$. Από Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχουν μοναδιαία $f \in X^\star\,, g \in Y^\star$ ώστε $f(x) = ||x||\,, g(y) = ||y||$. Ορίζεται η γραμμική απεικόνιση $f \odot g : X \odot Y \to \mathbb{C}$ που έχει την ιδιότητα $(f \odot g)(a \otimes b) = f(a)\, g(b)\,, a \in X\,, b \in Y$. Για την τυχούσα αναπαράσταση

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$$

του τυχόντος $u \in X \odot Y$, έχουμε

$$\begin{aligned}|(f \odot g)(u)| &\leq \sum_{i=1}^{n} |(f \odot g)(a_i \otimes b_i)| \\ &= \sum_{i=1}^{n} |f(a_i)\, g(b_i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} ||f||\, ||a_i||\, ||g||\, ||b_i|| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} ||a_i||\, ||b_i||\end{aligned}$$

και παίρνοντας infimum ως προς όλες τις αναπαραστάσεις του u, συμπεραίνουμε ότι $|(f \odot g)(u)| \leq \pi(u)$ γεγονός που αποδεικνύει ότι η $f \odot g$ είναι φραγμένη ως προς την π νόρμα του $X \odot Y$ και την $|\cdot|$ του $\mathbb{C}$ και μάλιστα $||f \odot g|| \leq 1$. Συνεπώς,

$$||x||\, ||y|| = f(x)\, g(y) = (f \odot g)(x \otimes y) \leq \pi(x \otimes y)$$

και άρα $\pi(x \otimes y) = ||x||\, ||y||$.

■

Θα συμβολίζουμε με $X \otimes_\pi Y$ τον χώρο με νόρμα $(X \odot Y, \pi)$. Αν οι χώροι X, Y δεν είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε ο $(X \odot Y, \pi)$ δεν είναι πάντα πλήρης. [5] Η πλήρωση του χώρου με νόρμα $(X \odot Y, \pi)$ είναι χώρος Banach, συμβολίζεται με $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ και ονομάζεται προβολικό τανυστικό γινόμενο των χώρων Banach $(X, ||\cdot||)\,, (Y, ||\cdot||)$.

Τανυστικό Γινόμενο Τελεστών

Θεωρούμε γραμμικούς και φραγμένους τελεστές $S : X \to W\,, T : Y \to Z$ όπου $X\,, Y\,, Z\,, W$ είναι χώροι Banach. Τότε ορίζεται το τανυστικό γινόμενο των γραμμικών απεικονίσεων $S\,, T$ δηλαδή η απεικόνιση $S \odot T : X \odot Y \to W \odot Z$ που έχει την ιδιότητα

$$(S \odot T)(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y)\,, x \in X\,, y \in Y.$$

Έστω $u \in X \odot Y$ και έστω
$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$
τυχούσα αναπαράσταση του u. Τότε,
$$\begin{aligned}
\pi((S \odot T)(u)) &= \pi\left(\sum_{i=1}^{n} S(x_i) \otimes T(y_i)\right) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \pi(S(x_i) \otimes T(y_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} ||S(x_i)|| \, ||T(y_i)|| \\
&\leq ||S|| \, ||T|| \sum_{i=1}^{n} ||x_i|| \, ||y_i||
\end{aligned}$$
και συνεπώς, $\pi((S \odot T)(u)) \leq ||S|| \, ||T|| \, \pi(u)$. Ως εκ τούτου, ο $S \odot T$ είναι φραγμένος για τις προβολικές νόρμες των $X \odot Y$, $W \odot Z$ και μάλιστα $||S \odot T|| \leq ||S|| \, ||T||$. Πάλι λόγω της σχέσης $(S \odot T)(x \otimes y) = S(x) \otimes T(y) \, , x \in X \, , y \in Y$ έπεται και η $||S \odot T|| \geq ||S|| \, ||T||$. Επομένως, $||S \odot T|| = ||S|| \, ||T||$. Επάγεται μοναδικός γραμμικός και φραγμένος τελεστής $S \otimes T$ στις πληρώσεις $X \widehat{\otimes}_\pi Y$ και $W \widehat{\otimes}_\pi Z$, που επεκτείνει τον $S \odot T$ και ικανοποιεί $||S \otimes T|| = ||S \odot T|| = ||S|| \, ||T||$.

Ο δυϊκός χώρος του προβολικού τανυστικού γινομένου

Ας είναι $(X, ||\cdot||)$, $(Y, ||\cdot||)$ και $(Z, ||\cdot||)$ χώροι Banach. Συμβολίζουμε με $\mathbb{BL}(X \times Y, Z)$ τον χώρο Banach των φραγμένων διγραμμικών απεικονίσεων από το $X \times Y$ στο Z, όπου η νόρμα ορίζεται ως
$$||B|| := \sup \{||B(x,y)|| \, , x \in B_X \, , y \in B_Y\} \; , \forall \, B \in \mathbb{BL}(X \times Y, Z).$$
Αν $Z = \mathbb{C}$, τότε γράφουμε $\mathbb{BL}(X \times Y, \mathbb{C}) = \mathbb{BL}(X \times Y)$.

Θεώρημα 1.2.2 *Για κάθε φραγμένη διγραμμική απεικόνιση $B : X \times Y \to Z$ υπάρχει μοναδικός τελεστής $\hat{B} : X \widehat{\otimes}_\pi Y \to Z$ με $\hat{B}(x \otimes y) = B(x,y) \, , x \in X \, , y \in Y$. Επιπλέον, η αντιστοιχία $B \mapsto \hat{B}$ είναι ένας ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ των χώρων Banach*

$\mathbb{BL}(X \times Y, Z)$, $\mathbb{B}(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z)$.

Απόδειξη: Έστω $B : X \times Y \to Z$ φραγμένη και διγραμμική. Σύμφωνα με την Καθολική Ιδιότητα του Αλγεβρικού Τανυστικού Γινομένου, υπάρχει μοναδικός γραμμικός τελεστής $\hat{B} : X \odot Y \to Z$ με την ιδιότητα $\hat{B}(x \otimes y) = B(x, y)$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, y \in Y$. Για την τυχούσα αναπαράσταση του

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \odot Y$$

έχουμε διαδοχικά,

$$\begin{aligned} ||\hat{B}(u)|| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \hat{B}(x_i \otimes y_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} ||\hat{B}(x_i \otimes y_i)|| \\ &= \sum_{i=1}^{n} ||B(x_i, y_i)|| \\ &\leq ||B|| \sum_{i=1}^{n} ||x_i||\, ||y_i|| \end{aligned}$$

Παίρνοντας infimum ως προς όλες τις αναπαραστάσεις του u προκύπτει η ανισότητα $||\hat{B}(u)|| \leq ||B||\, \pi(u)$ που σημαίνει ότι η $\hat{B}$ είναι φραγμένη και μάλιστα $||\hat{B}|| \leq ||B||$. Απ' την άλλη,

$$\begin{aligned} ||B(x, y)|| &= ||\hat{B}(x \otimes y)|| \\ &\leq ||\hat{B}||\, \pi(x \otimes y) \\ &= ||\hat{B}|| ||x||\, ||y|| \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$, $y \in Y$ οπότε $||B|| \leq ||\hat{B}||$. Τελικά, $||B|| = ||\hat{B}||$. Κατα συνέπεια, ο γραμμικός και φραγμένος τελεστής $\hat{B} : X \otimes_\pi Y \to Z$ επεκτείνεται μοναδικά σε γραμμικό και φραγμένο τελεστή $\hat{B} : X \widehat{\otimes}_\pi Y \to Z$ με την ίδια νόρμα. Ορίζουμε

$$\Phi : \mathbb{BL}(X \times Y, Z) \to \mathbb{B}(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z)\, , \Phi(B) = \hat{B}.$$

Για κάθε $B\,, C \in \mathbb{B}(X \times Y, Z)$ και $a \in \mathbb{C}\,, u \in X \odot Y$ έχουμε εύκολα

$$\Phi(B + a\,C)(u) = (\Phi(B) + a\,\Phi(C))(u)$$

Επειδή οι $\Phi(B + a\,C)$ και $\Phi(B) + a\,\Phi(C)$ συμπίπτουν στο πυκνό $X \otimes_\pi Y$, έπεται ότι $\Phi(B+a\,C) = \Phi(B)+a\,\Phi(C)$ στο $X \widehat{\otimes}_\pi Y$, που σημαίνει ότι η Φ είναι γραμμική. Επίσης, αποδείξαμε ότι $||\Phi(B)|| = ||\hat{B}|| = ||B||\,, \forall\, B \in \mathbb{BL}(X \times Y, Z)$ και κατά συνέπεια η Φ είναι γραμμική ισομετρία. Έστω τώρα $L \in \mathbb{B}(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z)$. Ορίζουμε

$$B_L : X \times Y \to Z\,, B_L(x, y) = L(x \otimes y).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η B_L είναι διγραμμική. Επίσης, για κάθε $x \in X\,, y \in Y$ είναι

$$||B_L(x, y)|| = ||L(x \otimes y)|| \leq ||L||\,\pi(x \otimes y) = ||L||\,||x||\,||y||$$

που σημαίνει ότι η B_L είναι και φραγμένη. Ώστε, $B_L \in \mathbb{B}(X \times Y, Z)$ και για κάθε

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \otimes_\pi Y$$

ισχύει

$$\Phi(B_L)(u) = \hat{B_L}(u) = \sum_{i=1}^{n} L(x_i \otimes y_i) = L(u)$$

που σημαίνει ότι $\Phi(B_L) = L$ στο πυκνό $X \otimes_\pi Y$ και άρα $\Phi(B_L) = L$ στο $X \widehat{\otimes}_\pi Y$. Συνεπώς, η Φ είναι και επί του $\mathbb{B}(X \widehat{\otimes}_\pi Y, Z)$

■

Στην ειδική περίπτωση όπου $Z = \mathbb{C}$, προκύπτει ότι $(X \widehat{\otimes}_\pi Y)^\star \cong \mathbb{BL}(X \times Y)$. Θεωρούμε τώρα και τον χώρο Banach $\mathbb{B}(X, Y^\star)$. Αν $B \in \mathbb{BL}(X \times Y)$, τότε ορίζουμε

$$\phi_B : X \to Y^\star\,, \phi_B(x)(y) = B(x, y)$$

Έστω $x \in X$. Επειδή η B είναι γραμμική ως προς y έπεται ότι η απεικόνιση $\phi_B(x)$ είναι γραμμική. Επίσης, για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$|\phi_B(x)(y)| = |B(x,y)| \leq ||B||\,||x||\,||y||$$

που σημαίνει ότι η $\phi_B(x)$ είναι και φραγμένη με $||\phi_B(x)|| \leq ||B||\,||x||$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\phi_B(x) \in Y^\star$ για κάθε $x \in X$, γεγονός που αποδεικνύει ότι η απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{BL}(X \times Y) \to \mathbb{B}(X, Y^\star)\,, \phi(B) = \phi_B$$

είναι καλώς ορισμένη. Λόγω γραμμικότητας της B ως προς x, η ϕ είναι γραμμική και επειδή $||\phi_B(x)|| \leq ||B||\,||x||$, έχουμε ότι η $||\phi(B)|| \leq ||B||$ άρα η ϕ είναι και φραγμένη με $||\phi|| \leq 1$. Αντίστροφα, αν $f \in \mathbb{B}(X, Y^\star)$, τότε ορίζουμε

$$\psi_f : X \times Y \to \mathbb{C}\,, \psi_f(x,y) = f(x)(y).$$

Για κάθε $x_1\,, x_2 \in X\,, y_1\,, y_2 \in Y\,, k \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\psi_f(x_1 + k\,x_2, y_1) &= f(x_1 + k\,x_2)(y_1) \\
&= f(x_1)(y_1) + k\,f(x_2)(y_1) \\
&= \psi_f(x_1, y_1) + k\,\psi_f(x_2, y_1)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\psi_f(x_1, y_1 + k\,y_2) &= f(x_1)(y_1 + k\,y_2) \\
&= f(x_1)(y_1) + k\,f(x_1)(y_2) \\
&= \psi_f(x_1, y_1) + k\,\psi_f(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

οπότε η ψ_f είναι διγραμμική. Επίσης, για κάθε $x \in X\,, y \in Y$ ισχύει

$$|\psi_f(x,y)| = |f(x)(y)| \leq ||f(x)||\,||y|| \leq ||f||\,||x||\,||y||$$

άρα $\psi_f \in \mathbb{BL}(X \times Y)$ με $||\psi_f|| \leq ||f||$. Έχουμε ορίσει κατά αυτον τον τρόπο και την απεικόνιση

$$\psi : \mathbb{B}(X, Y^\star) \to \mathbb{BL}(X \times Y)\,, \psi(f) = \psi_f$$

Οι απεικονίσεις $\phi\,, \psi$ είναι γραμμικές και φραγμένες με $||\phi(B)|| \leq ||B||\,, ||\psi(f)|| \leq ||f||\,, \forall\, B \in \mathbb{BL}(X \times Y)\,, \forall\, f \in \mathbb{B}(X, Y^\star)$. Θα αποδείξουμε ότι η μια είναι αντίστροφη της άλλης. Πράγματι,

$$(\phi \circ \psi)(f)(x)(y) = \phi(\psi(f)) = \phi(\psi_f(x)(y)) = f(x)(y)$$

και

$$(\psi \circ \phi)(B)(x)(y) = \psi(\phi(B)(x)(y)) = B(x)(y)$$

για κάθε $f \in \mathbb{B}(X, Y^\star)\,, B \in \mathbb{BL}(X \times Y)\,, x \in X\,, y \in Y$. Εν τέλει, οι απεικονίσεις $\phi\,, \psi$ είναι ισομετρικοί ισομορφισμοί και άρα $\mathbb{B}(X, Y^\star) \cong \mathbb{BL}(X \times Y) \cong (X \widehat{\otimes}_\pi Y)^\star$.

1.3 Τανυστικό Γινόμενο Χώρων Hilbert

Στόχος μας στο σημείο αυτό είναι να δώσουμε στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο δύο χώρων Hilbert, δομή χώρου Hilbert. Θεωρούμε λοιπόν $(H, \langle , \rangle)\,, (K, \langle , \rangle)$ δύο χώρους Hilbert. Τότε, στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $H \odot K$ ορίζεται ημι-εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \sum_i h_i \otimes k_i, \sum_j h'_j \otimes k'_j \right\rangle = \sum_{i,j} \langle h_i, h'_j \rangle \langle k_i, k'_j \rangle$$

Η πλήρωση αυτού του χώρου θα συμβολίζεται με $H \otimes K$. Ακολουθεί η απόδειξη του τελευταίου ισχυρισμού.

Απόδειξη: Έστω $(H \odot K)^{*,c}$ ο γραμμικός χώρος των συζυγώς γραμμικών συναρτησοειδών του $H \odot K$. Δηλαδή, μια απεικόνιση $f : H \odot K \to \mathbb{C}$ ανήκει στον $(H \odot K)^{*,c}$, αν $f(u + k\,v) = f(u) + \overline{k}\,f(v)$ για κάθε $u\,, v \in H \odot K$ και κάθε $k \in \mathbb{C}$. Έστω $(h, k) \in H \times K$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\phi : H \times K \to \mathbb{C}\,, \phi(v, w) = \langle v, h \rangle \langle w, k \rangle$$

Εύκολα, η ϕ είναι διγραμμική απεικόνιση. Από την καθολική ιδιότητα του αλγεβρικού τανυστικού γινομένου,επάγεται γραμμική απεικόνιση

$$\hat{\phi} : H \odot K \to \mathbb{C}$$

με την ιδιότητα $\hat{\phi}(v \otimes w) = \phi(v, w)\,, v \in H\,, w \in K$. Θέτοντας

$$f_{(h,k)}(v \otimes w) = \overline{\phi(v, w)}\,, v \in H\,, w \in K$$

και επεκτείνοντας γραμμικά, έχουμε ότι η $f_{(h,k)}$ είναι συζυγώς γραμμική και ικανοποιεί την

$$f_{(h,k)}\left(\sum_i v_i \otimes w_i\right) = \sum_i \langle h, v_i\rangle \langle k, w_i\rangle\,, \forall \sum_i v_i \otimes w_i \in H \odot K.$$

Έστω

$$F : H \times K \to (H \odot K)^{\star,c}\,, (h,k) \mapsto f_{(h,k)}.$$

Αν $h, h' \in H\,, k, k' \in K\,, a \in \mathbb{C}$,τότε

$$\begin{aligned}
F(h + a\,h', k)\left(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i\right) &= f_{(h+a\,h',k)}\left(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \langle h + a\,h', v_i\rangle \langle k, w_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n (\langle h, v_i\rangle + a\,\langle h', v_i\rangle) \langle k, w_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \langle h, v_i\rangle \langle k, w_i\rangle + a\,\sum_{i=1}^n \langle h', v_i\rangle \langle k, w_i\rangle \\
&= (F(h,k) + a\,F(h',k))\left(\sum_{i=1}^n v_i \otimes w_i\right)
\end{aligned}$$

Συνεπώς, $F(h + a\,h', k) = F(h,k) + a\,F(h',k)$ και παρόμοια $F(h, k + a\,k') = F(h,k) + a\,F(h,k')$, που σημαίνει ότι η F είναι διγραμμική. Επάγεται λοιπόν γραμμική απεικόνιση $M : H \odot K \to (H \odot K)^{\star,c}$ μοναδική ως προς την $M(h \otimes k) = F(h,k)\,, h \in H\,, k \in K$.

Ορίζουμε

$$\langle v, w\rangle := M(v)(w)\,, v\,, w \in H \odot K$$

η οποία προφανώς, είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, λόγω γραμμικότητας της M, και οποτεδήποτε $\{e_i \in H\,, i \in I\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων στον H, έχουμε

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes k_i, \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes k_j \right\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle e_i, e_j\rangle \langle k_i, k_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} ||k_i||^2 \geq 0$$

■

Τανυστικό Γινόμενο Τελεστών

Αν $S \in \mathbb{B}(H)$ και $T \in \mathbb{B}(K)$, τότε υπάρχει μοναδικός γραμμικός τελεστής $S \otimes T \in \mathbb{B}(H \otimes K)$, ώστε $(S \otimes T)(v \otimes w) = S(v) \otimes T(w)\,, v \in H\,, w \in K$. Επίσης, $||S \otimes T|| = ||S||\,||T||$. Ας δούμε την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού.

Απόδειξη: Εφ'όσον οι $S : H \to H$ και $T : K \to K$ είναι γραμμικοί, επάγεται γραμμική απεικόνιση $S \times T : H \odot K \to H \odot K$ με την ιδιότητα

$$(S \times T)(v \otimes w) = S(v) \otimes T(w)\,, v \in H\,, w \in K.$$

Θα αποδείξουμε ότι ο $S \times T$ είναι και φραγμένος. Εφ'όσον, $S \times T = (S \times I_K)\,(I_H \times T)$ αρκεί να αποδείξουμε ότι οι τελεστές $S \times I_K$ και $I_H \times T$ είναι φραγμένοι. Κάθε $u \in H \odot K$ μπορεί να γραφεί ως

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$$

όπου $x_i \in H\,, 1 \leq i \leq n$ και τα $y_i \in K\,, 1 \leq i \leq n$ είναι ορθοκανονικά. Τότε, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\langle y_i, y_j\rangle = 0\,, i \neq j\,, \langle y_i, y_i\rangle = 1\,, 1 \leq i\,, j \leq n$ προκύπτει ότι

$$
\begin{aligned}
||u||^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \right\rangle \\
&= \sum_{i\,,j=1}^{n} \langle x_i, x_j \rangle \, \langle y_i, y_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2
\end{aligned}
$$

και κατά συνέπεια

$$
\begin{aligned}
||(S \times I_K)(u)||^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} S(x_i) \otimes y_i \right\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} ||S(x_i)||^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} ||S||^2 \, \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2 \\
&= ||S||^2 \, ||u||^2
\end{aligned}
$$

Άρα, ο $S \times I_K$ είναι φραγμένος και μάλιστα $||S \times I_K|| \leq ||S||$. Απ' την άλλη, αν γράψουμε το τυχόν $u \in H \odot K$ ως

$$
u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i
$$

όπου τώρα τα $x_i \in H\,, 1 \leq i \leq n$ είναι ορθοκανονικά και τα $y_i \in K\,, 1 \leq i \leq n$ θα έχουμε

$$
||u||^2 = \sum_{i=1}^{n} ||y_i||^2
$$

και $||(I_H \times T)(u)|| \leq ||T|| \, ||u||$. Άρα, και ο $I_H \times T$ είναι φραγμένος με $||I_H \times T|| \leq ||T||$. Ώστε, ο $S \times T$ είναι φραγμένος ως σύνθεση τέτοιων και $||S \times T|| \leq ||S \times I_K|| \, ||I_H \times T|| \leq ||S|| \, ||T||$. Επίσης, υπάρχουν μοναδιαίες ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, x_n \in H$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, y_n \in K$ ώστε $\lim ||S(x_n)|| \geq ||S||$ και $\lim ||T(y_n)|| \geq ||T||$. Αν θεωρήσουμε $u_n = x_n \otimes y_n \in$

$H \odot K\,, n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $||u_n|| = 1\,, n \in \mathbb{N}$ και

$$\begin{aligned}\lim ||(S \times T)(u_n)|| &= \lim ||S(x_n) \otimes T(y_n)|| \\ &= \lim ||S(x_n)||\, ||T(y_n)|| \\ &\geq ||S||\, ||T||\end{aligned}$$

οπότε, $||S \times T|| \geq ||S||\, ||T||$. Τελικά, $||S \times T|| = ||S||\, ||T||$. Επειδή, ο $S \times T$ είναι γραμμικός και φραγμένος στο πυκνό υποσύνολο $H \odot K$ του $H \otimes K$, επεκτείνεται σε γραμμικό και φραγμένο τελεστή $S \otimes T : H \otimes K \to H \otimes K$ με $||S \otimes T|| = ||S \times T|| = ||S||\, ||T||$.

■

1.4 Τανυστικά Γινόμενα C^* Άλγεβρών

Θεωρούμε δύο μοναδιαίες $C^\star$ άλγεβρες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$. Το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ έχει μια μοναδική ενέλιξη τέτοια, ώστε $(a \otimes b)^\star = a^\star \otimes b^\star\,, \forall\, a \in \mathcal{A}\,, \forall\, b \in \mathcal{B}$. Ως προς αυτή την ενέλιξη για το τυχόν

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$$

ισχύει ότι

$$u^\star = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \right)^\star = \sum_{i=1}^{n} (a_i \otimes b_i)^\star = \sum_{i=1}^{n} a_i^\star \otimes b_i^\star.$$

Θεώρημα 1.4.1 *Το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ έχει πολλαπλασιασμό που ορίζεται ως εξής*

$$\left(\sum_i a_i \otimes b_i \right) \cdot \left(\sum_j c_j \otimes d_j \right) := \sum_{i\,,j} (a_i\, c_j) \otimes (b_i\, d_j).$$

Απόδειξη: Αν $a \in \mathcal{A}$ και $b \in \mathcal{B}$, τότε θα συμβολίζουμε με $M_a\,, M_b$ τον πολλαπλασιασμό από αριστερά με τα $a\,, b$, αντίστοιχα. Έτσι, για κάθε $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ οι γραμμικές απεικονίσεις $M_a : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\,, M_b : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ ορίζουν τη γραμμική απεικόνιση

$M_a \otimes M_b : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \to \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ για την οποία ισχύει $(M_a \otimes M_b)(x \otimes y) = M_a(x) \otimes M_b(y) = (a\,x) \otimes (b\,y)\,, \forall\, a\,, x \in \mathcal{A}\,, \forall\, b\,, y \in \mathcal{B}$. Έστω

$$F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to L(\mathcal{A} \odot \mathcal{B})$$

η παραπάνω απεικόνιση. Λόγω διγραμμικότητας του τανυστικού γινομένου στο $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$, έπεται ότι η απεικόνιση F είναι διγραμμική. Συνεπώς, επάγεται γραμμική απεικόνιση $\bar{F} : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \to L(\mathcal{A} \odot \mathcal{B})$ που ικανοποιεί την $\bar{F}(a \otimes b) = M_a \otimes M_b\,, \forall\, a \in \mathcal{A}\,, \forall\, b \in \mathcal{B}$ Ορίζεται λοιπόν απεικόνιση $\bar{F} \times \bar{F} : (\mathcal{A} \odot \mathcal{B}) \times (\mathcal{A} \odot \mathcal{B}) \to \mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ μέσω της αντιστοιχίας

$$\left(\sum_i a_i \otimes b_i, \sum_j c_j \otimes d_j \right) \mapsto (\bar{F}(a_i \otimes b_i) \circ \bar{F}(c_j \otimes d_j))(1 \otimes 1)$$

δηλαδή, σύμφωνα με τον ορισμό της $\bar{F}$ έχουμε ότι

$$(\bar{F} \times \bar{F}) \left(\sum_i a_i \otimes b_i, \sum_j c_j \otimes d_j \right) = \sum_{i\,,j} (a_i\, c_j) \otimes (b_i\, d_j)$$

Την απεικόνιση $\bar{F} \times \bar{F}$ την ονομάζουμε πολλαπλασιασμό στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς ότι ο πολλαπλασιασμός αυτός είναι προσεταιριστικός και επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση του $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Παρατηρούμε ότι για $a \in \mathcal{A}\,, b \in \mathcal{B}$ ειναι $(a \otimes b)\,(1 \otimes 1) = \bar{F} \times \bar{F}(a \otimes b, 1 \otimes 1) = a\,1 \otimes b\,1 = a \otimes b$ άρα το $1 \otimes 1$ είναι μονάδα για το $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$. Επίσης, για $a\,, c \in \mathcal{A}\,\,, b\,, d \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$((a \otimes b)\,(c \otimes d))^\star = (a\,c)^\star \otimes (b\,d)^\star = (c^\star\, a^\star) \otimes (d^\star\, b^\star) = (c \otimes d)^\star\,(a \otimes b)^\star$$

Απ'όλα τα παραπάνω, το $\mathcal{A} \odot \mathcal{B}$ είναι μια $\star$ - άλγεβρα.

Αν υποθέσουμε τώρα ότι $\pi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ και $\rho : \mathcal{B} \to \mathbb{B}(K)$ είναι αναπαραστάσεις (δηλαδή μοναδιαίοι $\star$ ομομορφισμοί) των $\mathcal{A}\,, \mathcal{B}$ στους χώρους Hilbert $H\,, K$, αντίστοιχα, τότε για $a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}$ οι τελεστές $\pi(a) \in \mathbb{B}(H)$ και $\rho(b) \in \mathbb{B}(K)$ ορίζουν τελεστή $\pi(a) \otimes \rho(b) \in \mathbb{B}(H \otimes K)$ που ικανοποιεί την

$$(\pi(a) \otimes \rho(b))(x \otimes y) = \pi(a)(x) \otimes \rho(b)(y)\,, x \in H\,, y \in K$$

Έτσι,προκύπτει διγραμμική απεικόνιση

$$g : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathbb{B}(H \otimes K)\,, g(a,b) = \pi(a) \otimes \rho(b)\,, a \in \mathcal{A}\,, b \in \mathcal{B}$$

και από καθολική ιδιότητα του αλγεβρικού τανυστικού γινομένου, επάγεται γραμμική απεικόνιση

$$G : \mathcal{A} \odot \mathcal{B} \to \mathbb{B}(H \otimes K)$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση $G(a \otimes b) = g(a,b) = \pi(a) \otimes \rho(b)\,, a \in \mathcal{A}\,, b \in \mathcal{B}$. Θα αποδείξουμε ότι η G διατηρεί τα γινόμενα και τις ενελίξεις. Λόγω γραμμικότητας, αρκεί να αποδειχθεί για τους στοιχειώδεις τανυστές. Θεωρούμε λοιπόν $a\,, c \in \mathcal{A}\,, b\,, d \in \mathcal{B}$. Είναι,

$$G((a \otimes b)\,(c \otimes d)) = G(a\,c \otimes b\,d) = \pi(a\,c) \otimes \rho(b\,d) = (\pi(a) \circ \pi(c)) \otimes (\rho(b) \circ \rho(d))$$

οπότε εύκολα φαίνεται ότι

$$G((a \otimes b)\,(c \otimes d)) = (\pi(a) \otimes \rho(b)) \circ (\pi(c) \otimes \rho(d)) = G(a \otimes b) \circ G(c \otimes d)$$

Επίσης, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$G((a \otimes b)^\star) = (G(a \otimes b))^\star$$

Για κάθε $h\,,h'\in H\,,k\,,k'\in K$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle h\otimes k,(G(a\otimes b))^{\star}(h'\otimes k')\rangle &= \langle G(a\otimes b)(h\otimes k),h'\otimes k'\rangle \\
&= \langle \pi(a)(h)\otimes\rho(b)(k),h'\otimes k'\rangle \\
&= \langle \pi(a)(h),h'\rangle_H\,\langle \rho(b)(k),k'\rangle_K \\
&= \langle h,(\pi(a))^{\star}(h')\rangle_H\,\langle k,(\rho(b)(k'))^{\star}\rangle_K \\
&= \langle h\otimes k,(\pi(a))^{\star}\otimes(\rho(b))^{\star}(h'\otimes k')\rangle_{H\odot K} \\
&= \langle h\otimes k,\pi(a^{\star})\otimes\rho(b^{\star})(h'\otimes k')\rangle \\
&= \langle h\otimes k,G(a^{\star}\otimes b^{\star})(h'\otimes k')\rangle \\
&= \langle h\otimes k,G((a\otimes b)^{\star})(h'\otimes k')\rangle
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$(G(a\otimes b)^{\star})=(G(a\otimes b))^{\star}$$

Ώστε, η G είναι $\star$ ομομορφισμός της $\star$ άλγεβρας $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ στην $\mathbb{B}(H\otimes K)$ με

$$G(1\otimes 1)=\pi(1)\otimes\rho(1)=Id_H\otimes Id_K=1_{\mathbb{B}(H\otimes K)}$$

Για $a\in\mathcal{A}\,,b\in\mathcal{B}$ και για $h\in H\,,k\in K$ με $||h\otimes k||\leq 1$ έχουμε

$$||G(a\otimes b)(h\otimes k)||=||\pi(a)(h)\otimes\rho(b)(k)||\leq||\pi||\,||\rho||\,||a||\,||b||\,||h||\,||k||$$

και επειδή $||\pi||\leq 1\,,||\rho||\leq 1$, ισχύει ότι

$$||G(a\otimes b)||\leq||a||\,||b||$$

και μπορούμε να αποδείξουμε ότι $||G(a\otimes b)||=||a||\,||b||$. Μπορούμε να ορίσουμε λοιπόν, $||a\otimes b||_{min}=||a||\,||b||$ και τότε για το τυχόν

$$u=\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes b_i\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$$

ισχύει

$$||u|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||a_i \otimes b_i|| = \sum_{i=1}^{n} ||a_i|| \, ||b_i|| = \sum_{i=1}^{n} ||G(a_i \otimes b_i)||.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η παραπάνω κατασκευή είναι ανεξάρτητη από την επιλογή των $\pi\,,\rho$ αφού το μόνο που χρησιμοποιήθηκε ήταν οι αλγεβρικές ιδιότητες αυτών, ιδιότητες που έχει κάθε ομομορφισμός. Αν συμβολίσουμε με $R(\mathcal{A})\,,R(\mathcal{B})$ τις αναπαραστάεις των $\mathcal{A}\,,\mathcal{B}$ αντίστοιχα, τότε ορίζεται νόρμα στο $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$ ως

$$||u||_{min} = \sup\,\{||(\pi\otimes\rho)(u)||\,,\pi\in R(\mathcal{A})\,,\rho\in R(\mathcal{B})\}$$

Για $a\,,c\in\mathcal{A}\,,b\,,d\in\mathcal{B}$ και τυχούσες αναπαραστάσεις $\pi:\mathcal{A}\to\mathbb{B}(H)\,,\rho:\mathcal{B}\to\mathbb{B}(K)$ είναι

$$||(\pi\otimes\rho)[(a\otimes b)\,(c\otimes d)]|| = ||\pi(a\,c)\otimes\rho(b\,d)|| \leq ||a||\,||c||\,||b||\,||d|| = ||a\otimes b||_{min}\,||c\otimes d||_{min}$$

άρα

$$||(a\otimes b)\,(c\otimes d)|| \leq ||a\otimes b||\,||c\otimes d||$$

Επίσης,

$$||\pi\otimes\rho((a\otimes b)\,(a\otimes b)^{\star})|| \leq ||a||^2\,||b||^2 = ||a\otimes b||^2$$

και κατά συνέπεια $||(a\otimes b)\,(a\otimes b)^{\star}|| = ||a\otimes b||^2$ Αν συμβολίσουμε με $\mathcal{A}\otimes_{min}\mathcal{B}$ την πλήρωση του χώρου με νόρμα $(\mathcal{A}\odot\mathcal{B},||\cdot||_{min})$ τότε η $\mathcal{A}\otimes_{min}\mathcal{B}$ γίνεται $C^{\star}$ άλγεβρα. Κάθε άλλη νόρμα στο $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ που ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες λέγεται $C^{\star}$ cross norm. Το όνομα της $||\cdot||_{min}$ δικαιολογείται από το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 1.4.2 (Takesaki) *Αν $\mathcal{A}\,,\mathcal{B}$ είναι μοναδιαίες $C^{\star}$ άλγεβρες και γ είναι μια $C^{\star}$ cross norm στο $\mathcal{A}\odot\mathcal{B}$, τότε*

$||x||_{min} \leq ||x||_{\gamma}\,,\forall\,x\in\mathcal{A}\odot\mathcal{B}.$

Απόδειξη: Για την απόδειξη, δείτε εδώ [4] σελ.160.

■

Κεφάλαιο 2

Θεωρήματα Διαστολής

2.1 Η άλγεβρα $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$

Η βάση αυτής της μελέτης είναι η θεωρία τελεστών και οι βασικές ιδιότητες των $C^\star$ αλγεβρών. Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, μια $C^\star$ άλγεβρα είναι εφοδιασμένη με μια ακολουθία νορμών και γραμμικών διατάξεων πάνω σε ένα σύνολο $C^\star$ αλγεβρών που σχετίζονται φυσικά με την αρχική άλγεβρα. Αυτές οι άλγεβρες είναι οι άλγεβρες πινάκων. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μια $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$ και τη μιγαδική άλγεβρα $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ τότε θέλουμε να ορίσουμε στην $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ μια νόρμα και μια ενέλιξη ώστε να γίνει $C^\star$ άλγεβρα. Η $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ γίνεται $\star$ - άλγεβρα ορίζοντας

$$A^\star := [a_{j\,i}^\star]_{i,j=1}^n \,, \forall\, A = [a_{i\,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$$

Αυτό που δεν είναι προφανές είναι ότι υπάρχει μοναδικός τρόπος να εισάγουμε μια νόρμα ώστε η $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ να γίνει $C^\star$ 'αλγεβρα. Για να το επιτύχουμε αυτό, ας αρχίσουμε με την πιο βασική $C^\star$ άλγεβρα $\mathbb{B}(H)$ ενός χώρου Hilbert $(H, \langle , \rangle)$. Στον $H^n = H \oplus ... \oplus H$ το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (h_1, ..., h_n), (k_1, ..., k_n) \rangle := \langle h_1, k_1, \rangle + ... + \langle h_n, k_n \rangle \,, (h_1, ..., h_n) \,, (k_1, ..., k_n) \in H^n$$

δίνει στον χώρο αυτό δομή χώρου Hilbert. Η νόρμα που προκύπτει είναι

$$||(h_1,...,h_n)||^2 = ||h_1||^2 + ... + ||h_n||^2 \, , (h_1,...,h_n) \in H^n.$$

Έστω $T = [T_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}_n(\mathbb{B}(H))$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$\phi_T : H^n \to H^n \, , \phi_T \begin{bmatrix} h_1 \\ ... \\ h_n \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ ... \\ h_n \end{bmatrix}$$

δηλαδή,για κάθε $(h_1,...,h_n) \in H^n$ έχουμε

$$\phi_T \begin{bmatrix} h_1 \\ ... \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}(h_1) + ... + T_{1n}(h_n) \\ ... \\ T_{n1}(h_1) + ... + T_{nn}(h_n) \end{bmatrix}$$

Προφανώς, η ϕ_T είναι γραμμική και φραγμένη και συνεπώς, $\phi_T \in \mathbb{B}(H^n)$.Η απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{M}_n(\mathbb{B}(H)) \to \mathbb{B}(H^n) \, , T \mapsto \phi_T$$

είναι $\star$ - ισομορφισμός αλγεβρών. Ορίζουμε φυσιολογικά τώρα

$$||T|| := ||\phi_T||_{\mathbb{B}(H^n)} \, , \forall \, T = [T_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{B}(H))$$

Τώρα, αν έχουμε οποιαδήποτε $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$, επιλέγουμε πρώτα μια 1-1 $\star$ - αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ σε κάποιο χώρο Hilbert $(H, \langle,\rangle)$ ώστε αυτή να ταυτιστεί με μια $C^\star$ υποάλγεβρα της $\mathbb{B}(H)$. Άρα, μπορούμε να ταυτίσουμε την $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ με μια $\star$ - υποάλγεβρα της $\mathbb{M}_n(\mathbb{B}(H))$. Εφ'όσον η νόρμα είναι μοναδική σε μια $C^\star$ - άλγεβρα, έχουμε ότι η νόρμα που ορίζεται κατά αυτόν τον τρόπο, είναι ανεξάρτητη της συγκεκριμένης επιλογής αναπαράστασης. Επίσης, οι $\star$ - ισομορφισμοί διατηρούν τα θετικά στοιχεία. Έτσι, τα θετικά στοιχεία της $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ είναι επίσης μοναδικά καθορισμένα.

Εφαρμογή 2.1.1 *Έστω $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$. Θεωρούμε τη $C^\star$ άλγεβρα $\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$. Αν $n \in \mathbb{N}$, τότε* *υπάρχει φυσιολογικός τρόπος να ταυτίσουμε την* $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_k(\mathbb{C}))$ *με την* $\mathbb{M}_{n\,k}(\mathbb{C})$*.Έτσι, εύκολα βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός και η ενέλιξη στην* $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_k(\mathbb{C}))$ *είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός και η πράξη της ενέλιξης στην* $\mathbb{M}_{n\,k}(\mathbb{C})$*.Το ίδιο ισχύει και για τη νόρμα και τα θετικά στοιχεία.*

Εφαρμογή 2.1.2 *Έστω* $(X, \mathcal{T})$ *ένας συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Θεωρούμε τη* $C^\star$ *- άλγεβρα* $\mathcal{A} = C(X)$*.Ένα στοιχείο* $F = [f_{i\,j}]_{i,j=1}^n \in \mathbb{M}_n(C(X))$ *μπορεί να θεωρηθεί ως μια συνεχής απεικόνιση από το* X *στην* $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$*. Αν ορίσουμε*

$$||F|| := \sup \left\{ ||F(x)||_{\mathbb{M}_n(\mathbb{C})} \, , x \in X \right\}$$

τότε έχουμε μια $C^\star$ *νόρμα και είναι η μοναδική νόρμα που κάνει την* $\mathbb{M}_n(C(X))$ *μια* $C^\star$ *άλγεβρα.Τα θετικά στοιχεία αυτής της* $C^\star$ *άλγεβρας είναι εκείνα τα* F *για τα οποία ισχύει* $F(x) \geq 0 \, , \forall \, x \in X$.

Εφαρμογή 2.1.3 *Για κάθε μοναδιαία* $C^\star$ *άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *και κάθε φυσικό αριθμό* n*, ισχύει*

$$\mathbb{M}_n(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

(ισομορφισμός $\star$ *- αλγεβρών).*

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{A}$ μια μοναδιαία $C^\star$ άλγεβρα και έστω $n \in \mathbb{N}$. Αρχικά, για $a \in \mathcal{A}$ και για την συνήθη βάση $\{E_{i\,j} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \, , 1 \leq i \, , j \leq n\}$ θα συμβολίζουμε με $a \odot E_{i\,j}$ τον πίνακα της $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ που στη θέση (i, j) έχει το στοιχείο a και παντού αλλού το 0. Ορίζουμε απεικόνιση

$$f : \mathcal{A} \times \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_n(\mathcal{A}) \, , f(a, [c_{i\,j}]) = [c_{i\,j} \, a].$$

Για κάθε $a \, , b \in \mathcal{A} \, , [c_{i\,j}] \, , [d_{i\,j}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \, , k \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\begin{aligned} f(a + k\,b, [c_{i\,j}]) &= [c_{i\,j}(a + k\,b)] \\ &= [c_{i\,j}\,a + k\,c_{i\,j}\,b] \\ &= [c_{i\,j}\,a] + k\,[c_{i\,j}\,b] \\ &= f(a, [c_{i\,j}]) + k\,f(b, [c_{i\,j}]) \end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
f(a,[c_{ij}]+k\,[d_{ij}]) &= f(a,[c_{ij}+k\,d_{ij}]) \\
&= [(c_{ij}+k\,d_{ij})\,a] \\
&= [c_{ij}\,a]+k\,[d_{ij}\,a] \\
&= f(a,[c_{ij}])+k\,f(a,[d_{ij}])
\end{aligned}
$$

που σημαίνει ότι η f είναι διγραμμική. Από την Καθολική Ιδιότητα του Αλγεβρικού Τανυστικού Γινομένου, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$F : \mathcal{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$$

με την ιδιότητα $F(a\otimes[c_{ij}]) = [c_{ij}\,a]\,,a \in \mathcal{A}\,,[c_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Για $a\,,b \in \mathcal{A}$ και $[c_{ij}]\,,[d_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ ισχύει

$$
\begin{aligned}
F((a\otimes[c_{ij}])\,(b\otimes[d_{ij}])) &= F((a\,b)\otimes([c_{ij}]\,[d_{ij}])) \\
&= F\left((a\,b)\otimes\left[\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\,d_{kj}\right]\right) \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\,d_{kj}\,a\,b\right] \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} (c_{ik}\,a)\,(d_{kj}\,b)\right] \\
&= [c_{ij}\,a]\,[d_{ij}\,b] \\
&= F(a\otimes[c_{ij}])\,F(b\otimes[d_{ij}])
\end{aligned}
$$

και

$$\begin{aligned} F((a \otimes [c_{i\,j}])^\star) &= F(a^\star \otimes [\overline{c_{j\,i}}]) \\ &= [\overline{c_{j\,i}}\, a^\star] \\ &= [(c_{j\,i}\, a)^\star] \\ &= ([c_{i\,j}\, a])^\star \\ &= (F(a \otimes [c_{i\,j}])^\star \end{aligned}$$

Επίσης, $F(1) = F(1_{\mathcal{A}} \otimes I_2) = I_2$. Λόγω γραμμικότητας της F και του ορισμού του πολλαπλασιασμού και της ενέλιξης στο $\mathcal{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, έπεται ότι η F είναι ένας μοναδιαίος $\star$ ομομορφισμός. Ορίζουμε επίσης και την

$$G : \mathbb{M}_n(\mathcal{A}) \to \mathcal{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\,, G\left(\sum_{i\,,j=1}^{n} a_{i\,j} \odot E_{i\,j}\right) = \sum_{i\,,j=1}^{n} a_{i\,j} \otimes E_{i\,j}$$

η οποία είναι προφανώς γραμμική και ικανοποιεί $F \circ G = Id_{\mathbb{M}_n(\mathcal{A})}$ και $G \circ F = Id_{\mathcal{A} \odot \mathbb{M}_n(\mathbb{C})}$

■

2.2 Βασική ιδέα της διαστολής

Έστω ένας χώρος Hilbert $(H, \langle , \rangle)$ και έστω $V : H \to H$ μια ισομετρία. Ορίζουμε την προβολή επί του ορθού συμπληρώματος του $V(H)$, που είναι η $P := I_H - V\,V^\star$. Επειδή $V\,V^\star = \mathrm{proj(V(H))}$ έχουμε ότι $P\,V = 0$. Ορίζουμε

$$U : H \oplus H \to H \oplus H\,, U = \begin{bmatrix} V & P \\ O & V^\star \end{bmatrix}$$

Τότε,

$$U^\star\,U = \begin{bmatrix} V^\star & O \\ P & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V & P \\ O & V^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^\star\,V & V^\star\,P \\ P\,V & I_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_H \end{bmatrix}$$

Επίσης,

$$U\,U^\star = \begin{bmatrix} V & P \\ 0 & V^\star \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^\star & 0 \\ P & V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\,V^\star + P^2 & P\,V \\ V^\star\,P & V^\star\,V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & I_H \end{bmatrix}$$

οπότε ο U είναι unitary τελεστής του $H \oplus H$. Μάλιστα, επειδή ο U είναι άνω τριγωνικός, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$U^n = \begin{bmatrix} V^n & \star \\ 0 & (V^\star)^n \end{bmatrix}$$

Τώρα,ο χώρος Hilbert H είναι ισόμορφος με τον $H \oplus 0 \subseteq H \oplus H$. άρα μπορούμε να θεωρήσουμε την προβολή $Q : H \oplus H \to H \oplus 0\,, V(h,k) = (h,0)$ Έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $h \in H$ έχουμε

$$\begin{aligned}(Q \circ U^n)(h) &= Q\left(\begin{bmatrix} V^n & \star \\ 0 & (V^\star)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= Q(V^n(h), 0) \\ &= V^n(h)\end{aligned}$$

οπότε, $V^n = Q \circ U^n|_{H\oplus 0}$. Συμπεραίνουμε ότι κάθε ισομετρία V μπορεί να θεωρηθεί ως περιορισμός κάποιου unitary τελεστή, σε κάποιον υπόχωρο του, με τέτοιον τρόπο που σέβεται τις δυνάμεις των δυο τελεστών αυτών.

2.3 Ισομετρική διαστολή μιας συστολής

Έστω $T \in \mathbb{B}(H)$ με $||T|| \leq 1$. Επομένως, $||T(x)|| \leq ||x|| \, , x \in H$. Για κάθε $x \in H$ έχουμε,

$$\begin{aligned}\langle (I_H - T^\star T)(x), x\rangle &= \langle x - T^\star(T(x)), x\rangle \\ &= \langle x, x\rangle - \langle T^\star(T(x)), x\rangle \\ &= ||x||^2 - \langle T(x), T(x)\rangle \\ &= ||x||^2 - ||T(x)||^2 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι $I_H - T^\star T \geq 0$. Έτσι, ορίζεται ο $D_T = (I_H - T^\star T)^{1/2}$ με $D_T^\star = D_T \, , D_T^2 = I_H - T^\star T$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}||T(h)||^2 + ||D_T(h)||^2 &= \langle T(h), T(h)\rangle + \langle D_T(h), D_T(h)\rangle \\ &= \langle T(h), T(h)\rangle + \langle D_T^2(h), h\rangle \\ &= \langle T(h), T(h)\rangle + \langle h - T^\star(T(h)), h\rangle \\ &= \langle h, T^\star(T(h))\rangle + \langle h, h\rangle - \langle h, T^\star(T(h))\rangle \\ &= ||h||^2\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\ell^2(H) := \left\{ (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \, , h_n \in H \, , \sum_{n=1}^{\infty} ||h_n||^2 < \infty \right\}$$

Προφανώς, $O = (0, 0, 0, ...) \in \ell^2(H)$. Για $h = (h_1, h_2, ...) \, , k = (k_1, k_2, ...) \in \ell^2(H)$ και $a \in \mathbb{C}$ ορίζουμε

$$h + k := (h_1 + k_1, h_2 + k_2, ...) \ , a\, h := (a\, h_1, a\, h_2, ...)$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$||h_n + k_n||^2 \leq (||h_n|| + ||k_n||)^2 \leq 2\,(||h_n||^2 + ||k_n||^2)$$

και εφ' όσον $h\,, k \in \ell^2(H)$, έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\,(||h_n||^2 + ||k_n||^2) < \infty.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||h_n + k_n||^2 < \infty \implies h + k \in \ell^2(H).$$

Επίσης, $a\,h \in \ell^2(H)$ διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} ||a\,h_n||^2 = |a|^2 \sum_{n=1}^{\infty} ||h_n||^2 < \infty.$$

Με τις πράξεις αυτές, το $\ell^2(H)$ γίνεται γραμμικός χώρος με μηδενικό στοιχείο τη μηδενική ακολουθία O. Ορίζουμε τώρα για $h = (h_1, h_2, ..)\,, k = (k_1, k_2, ...) \in \ell^2(H)$

$$\langle h, k \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \langle h_n, k_n \rangle \in \mathbb{C}$$

Είναι καλά ορισμένο, διότι για τυχόντα $h = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, k = (k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(H)$, η παραπάνω σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα. Πράγματι, από ανισότητα Cauchy-Schwarz

$$|\langle h_n, k_n \rangle| \leq ||h_n||\,||k_n|| \leq \frac{1}{2}\,\left(||h_n||^2 + ||k_n||^2\right)\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

και επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\,\left(||h_n||^2 + ||k_n||^2\right) < \infty$$

έχουμε από κριτήριο σύγκρισης ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h_n, k_n \rangle|$$

συγκλίνει. Εύκολα, ο $(\ell^2(H), \langle , \rangle)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο και με τη νόρμα που προκύπτει

$$||h||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} ||h_n||^2 \, , h = (h_1, h_2, ...) \in \ell^2(H)$$

ο $\ell^2(H)$ είναι χώρος Banach, άρα ο $(\ell^2(H), \langle , \rangle)$ είναι χώρος Hilbert. Μάλιστα, ισχύει ότι $\ell^2(H) \cong \ell^2(\mathbb{N}) \otimes H$ (ως χώροι Hilbert). Ορίζουμε απεικόνιση

$$V : \ell^2(H) \to \ell^2(H) \, , V(h_1, h_2, ...) = (T(h_1), D_T(h_1), h_2, h_3, ...)$$

η οποία είναι καλώς ορισμένη και ισομετρία, αφού για κάθε $h = (h_1, h_2, ...) \in \ell^2(H)$ έχουμε

$$||V(h)||^2 = ||T(h_1)||^2 + ||D_T(h_1)||^2 + ||h_2||^2 + ... = ||h_1||^2 + ||h_2||^2 + ... = ||h||^2$$

Επίσης, η V είναι και γραμμική. Αν ταυτίσουμε τον H με τον κλειστό υπόχωρο

$$\big\{(h, 0, 0, ...) \in \ell^2(H) \, , h \in H\big\}$$

του $\ell^2(H)$ και θεωρήσουμε την προβολή

$$Q : \ell^2(H) \to H \, , Q((h_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (h_1, 0, 0, ..)$$

τότε $T^n = Q \circ (V^n)_H \, , n \in \mathbb{N}$. Είμαστε σε θέση τώρα να διατυπώσουμε το πρώτο θεώρημα διαστολής.

2.4 Sz-Nagy's Dilation Theorem

Θεώρημα 2.4.1 *Έστω $T \in \mathbb{B}(H)$, $||T|| \leq 1$. Τότε, υπάρχουν χώρος Hilbert $(K, \langle , \rangle)$ που περιέχει τον H ως υπόχωρο, και unitary τελεστής U στον K, ώστε $T^n = P_H \circ (U^n)_H$, $n \geq 0$, όπου P_H η προβολή στον H.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τον χώρο Hilbert $K = \ell^2(H) \oplus \ell^2(H)$ και ταυτίζουμε τον H με τον $(H \oplus 0 \oplus 0 \oplus ...) \oplus 0$. Έστω V η ισομετρική διαστολή του T στον $\ell^2(H)$. Έστω U η unitary διαστολή του V στον $K = \ell^2(H) \oplus \ell^2(H)$, δηλαδή $U = \begin{bmatrix} V & P \\ 0 & V^\star \end{bmatrix}$ όπου $P = I_{\ell^2(H)} - V\,V^\star$. Υπολογίζουμε για $h \in H$ και $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(Q \circ U^n)(h) &= Q \left(U^n \begin{bmatrix} (h, 0, 0, ...) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= Q \left(\begin{bmatrix} V^n & \star \\ 0 & (V^\star)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (h, 0, 0, ...) \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
&= Q(V^n(h, 0, 0, ...), 0) \\
&= (Q \circ V^n)(h) \\
&= T^n(h)
\end{aligned}$$

οπότε, $Q \circ U^n = T^n$, $n \in \mathbb{N}$.

■

2.5 Βασικές έννοιες για Θετικές Απεικονίσεις

Πριν ασχοληθούμε με τις πλήρως θετικές ή τις πλήρως φραγμένες απεικονίσεις, θα δούμε κάποια αποτελέσματα στις θετικές απεικονίσεις που θα χρειαστούμε στη συνέχεια. Αν το S είναι υποσύνολο μιας $C^\star$ άλγεβρας $\mathcal{A}$, τότε θέτουμε

$$S^\star := \{a \in \mathcal{A} \,, a^\star \in S\} = \{a^\star \in \mathcal{A} \,, a \in S\}$$

και θα λέμε ότι το S είναι αυτοσυζυγές αν $S = S^\star$.

Ορισμός 2.5.1 *Αν η $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$ έχει μονάδα 1 και το S είναι αυτοσυζυγής υπόχωρος της $\mathcal{A}$ με $1 \in S$, τότε το S λέγεται σύστημα τελεστών.*

Σημειώνουμε ότι αν S είναι σύστημα τελεστών και $h = h^\star \in S$, τότε μπορούμε να γράψουμε το h σαν διαφορά δύο θετικών στοιχείων του S. Πράγματι,

$$h = p_1 - p_2 \ \ , p_1 = \frac{||h||\,1 + h}{2} \ , p_2 = \frac{||h||\,1 - h}{2}$$

και όντως τα στοιχεία $p_1 \, , p_2 \in S$ είναι θετικά. Πράγματι, ας το αποδείξουμε για το p_1 και ομοίως δουλεύουμε για το p_2. Προφανώς, $(p_1)^\star = p_1$ και άρα για το φάσμα του p_1 ισχύει $\sigma(p_1) \subseteq \mathbb{R}$. Έστω $k \in \sigma(p_1)$.Τότε,

$$p_1 - k\,1 \notin Inv(\mathcal{A}) \implies \frac{h - (2\,k - ||h||)\,1}{2} \notin Inv(\mathcal{A})$$

οπότε $2\,k - ||h|| \in \sigma(h)$ και επειδή το h είναι αυτοσυζυγές, έχουχε ότι $\rho(h) = ||h|| = \sup\{|\lambda| \, , \lambda \in \sigma(h)\}$, άρα $2\,k - ||h|| \geq -||h|| \implies k \geq 0$. Συνεπώς, $\sigma(p_1) \subseteq [0, +\infty)$, όπως θέλαμε. Επίσης, για το τυχόν $a \in S$ μπορούμε να γράψουμε $a = h + i\,k$ όπου $h \, , k \in S$ με $h = h^\star \, , k = k^\star$ και $||h|| \, , ||k|| \leq ||a||$. Πράγματι,

$$a = \frac{a + a^\star}{2} + i\,\frac{a - a^\star}{2\,i}$$

Με τις παρατηρήσεις αυτές θα αποδείξουμε μια χρήσιμη εφαρμογή που θα μας χρειαστεί σε επόμενα θεωρήματα ή εφαρμογές.

Ορισμός 2.5.2 *Αν $\mathcal{A} \, , \mathcal{B}$ είναι $C^\star$ άλγεβρες και $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε η ϕ λέγεται θετική, αν $\phi(\mathcal{A}^+) \subseteq \mathcal{B}^+$.*

Εφαρμογή 2.5.1 *Αν $S \subseteq \mathcal{A}$ είναι σύστημα τελεστών, $\mathcal{B}$ είναι $C^\star$ άλγεβρα με μονάδα και $\phi : S \to \mathcal{B}$ μια θετική απεικόνιση, τότε*

$$\phi(x^\star) = (\phi(x))^\star \, , \forall\, x \in S.$$

Απόδειξη: Αρχικά, αν $p \in S \, , p \geq 0$, τότε επειδή η ϕ είναι θετική έχουμε $\phi(p) \geq 0$, άρα $\phi(p) = (\phi(p))^\star$ και επειδή $p = p^\star$ παίρνουμε $\phi(p^\star) = (\phi(p))^\star$. Άρα, η ζητούμενη ισότητα αληθεύει για τα θετικά στοιχεία του S. Θα την αποδείξουμε τώρα για τα αυτοσυζυγή στοιχεία. Πράγματι, έστω $h \in S\,, h = h^\star$. Τότε, όπως είδαμε, γράφουμε $h = p_1 - p_2$ με $p_1\,, p_2 \geq 0$ οπότε

$$
\begin{aligned}
\phi(h^\star) &= \phi(p_1^\star - p_2^\star) \\
&= \phi(p_1^\star) - \phi(p_2^\star) \\
&= (\phi(p_1))^\star - (\phi(p_2))^\star \\
&= (\phi(p_1) - \phi(p_2))^\star \\
&= (\phi(h))^\star
\end{aligned}
$$

όπως θέλαμε. Τέλος, για το τυχόν $x \in S$ γράφουμε $x = h + i\,k$ με $h\,, k \in S\,, h = h^\star\,, k = k^\star$ και έχουμε

$$
\begin{aligned}
\phi(x^\star) &= \phi(h^\star - i\,k^\star) \\
&= \phi(h^\star) - i\,\phi(k^\star) \\
&= (\phi(h))^\star - i\,(\phi(k))^\star \\
&= (\phi(h) + i\,\phi(k))^\star \\
&= (\phi(x))^\star
\end{aligned}
$$

■

Θεώρημα 2.5.1 *Ας είναι $S \subseteq \mathcal{A}$ ένα σύστημα τελεστών, $\mathcal{B}$ μια $C^\star$ - άλγεβρα και $\phi : S \to \mathcal{B}$ μια θετική απεικόνιση. Τότε, η ϕ είναι φραγμένη και $||\phi|| \leq 2\,||\phi(1)||$.*

Απόδειξη: Αν $p \in S^+$, τότε $0 \leq p \leq ||p||\,1$ και άρα $\phi(0) \leq \phi(p) \leq \phi(||p||\,1) \implies 0 \leq \phi(p) \leq ||p||\,\phi(1)$ και συνεπώς, $||\phi(p)|| \leq ||p||\,||\phi(1)||$. Παρατηρούμε επίσης ότι αν $p_1\,, p_2 \in S^+$, τότε $||p_1 - p_2|| \leq \max\,\{||p_1||, ||p_2||\}$. Απ' την άλλη, αν $h \in S\,, h = h^\star$, τότε

$$h = \frac{||h||\,1 + h}{2} - \frac{||h||\,1 - h}{2}$$

όπου τα

$$\frac{||h||\,1+h}{2}\,,\frac{||h|||\,1-h}{2}$$

είναι θετικά στοιχεία του S οπότε

$$||\phi(h)|| \leq \frac{1}{2}\,\max\,\{||\phi(||h||\,1+h)||\,,||\phi(||h||\,1-h)||\} \leq ||h||\,|||\phi(1)||.$$

Τέλος, για το τυχόν $a \in S$, γράφουμε $a = \dfrac{a+a^\star}{2} + i\,\dfrac{a-a^\star}{2\,i}$ και αν θέσουμε

$$h = \frac{a+a^\star}{2} \in S\,, k = \frac{a-a^\star}{2\,i} \in S\;, h = h^\star\,, k = k^\star$$

έχουμε

$$||\phi(a)|| \leq ||\phi(h)|| + ||\phi(k)|| \leq 2\,||a||\,||\phi(1)||$$

όπως θέλαμε.

$\blacksquare$

Εφαρμογή 2.5.2 *Γενικά, η σταθερά 2 είναι βέλτιστη. Πράγματι,έστω $\mathbb{T}$ ο μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο και έστω $C(\mathbb{T})$ η $C^\star$ άλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{T}$. Έστω S ο υπόχωρος που παράγεται από τις $1, z, \overline{z}$, δηλαδή $S = span\,\{f_1, f_2, f_3\}$ όπου $f_1(e^{i\,t}) = 1\,, f_2(e^{i\,t}) = e^{i\,t}\,, f_3(e^{i\,t}) = e^{-i\,t}\,, 0 \leq t \leq 2\,\pi$. Ορίζουμε*

$$\phi : S \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C})\,, \phi(a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3) = \begin{bmatrix} a & 2\,b \\ 2\,c & a \end{bmatrix}$$

η οποία είναι γραμμική. Θεωρούμε τυχόν $f = a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3 \in S^+$. Τότε,

$$(a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3)^\star = a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3 \implies \overline{a}\,f_1 + \overline{b}\,f_3 + \overline{c}\,f_2 = a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3$$

και συνεπώς $a = \overline{a}\,, c = \overline{b}$, οπότε έχουμε

$$f(z) = (a\,f_1 + b\,f_2 + c\,f_3)(z) = a + b\,z + \overline{b}\,\overline{z} = a + 2\,Re(b\,z)$$

και έχουμε $f(z) \geq 0 \,, \forall\, z \in \mathbb{T}$. *Γράφουμε* $b = |b|\, e^{i\,\theta} \,, z = e^{i\,\phi}$ *οπότε* $f(z) = f(e^{i\,\phi}) = a + 2\, Re(|b| e^{i\,(\theta+\phi)}) = a + 2\,|b|\,\cos(\theta + \phi)$. *Θέτοντας* $\phi = \theta + \pi$ *παίρνουμε* $a - 2\,|b| \geq 0 \implies a \geq 2\,|b| \geq 0$. *Με αυτά τα δεδομένα, ο πίνακας*

$$\phi(a\, f_1 + b\, f_2 + c\, f_3) = \phi(a\, f_1 + b\, f_2 + b\, f_3) = \begin{bmatrix} a & 2\,b \\ 2\,\bar{b} & a \end{bmatrix}$$

είναι θετικός διότι τα διαγώνια στοιχεία του είναι θετικά και η ορίζουσα του επίσης. Ώστε, η απεικόνιση ϕ *είναι θετική και σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.1, η* ϕ *είναι φραγμένη με* $||\phi|| \leq 2\,||\phi(1)|| = 2$. *Απ' την άλλη*

$$||\phi(f_2)|| = \left|\left| \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right|\right| = 2 = 2\,||\phi(1)|| \geq ||\phi||$$

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι η ύπαρξη μοναδιαίων και θετικών απεικονίσεων που δεν είναι συστολές, εξαρτάται από δύο παράγοντες. Ο ένας είναι η μη-μεταθετικότητα της εικόνας και ο δεύτερος είναι η έλλειψη αρκετών θετικών στοιχείων στο πεδίο ορισμού. Στην ειδική περίπτωση που το πεδίο ορισμού είναι μια μεταθετική $C^\star$ άλγεβρα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 2.5.2 *Αν* $\mathcal{B}$ *είναι* $C^\star$ *άλγεβρα, και* X *ένας συμπαγής χώρος Hausdorff τότε για κάθε θετική απεικόνιση* $\phi : C(X) \to \mathcal{B}$ *ισχύει* $||\phi|| = ||\phi(1)||$.

Απόδειξη: Για την απόδειξη, δείτε εδώ [4] σελ.11

■

Εφαρμογή 2.5.3 *Αν έχουμε τώρα δύο* $C^\star$ *άλγεβρες* $\mathcal{B}\,,\mathcal{C}$ *με μονάδες,* $\mathcal{A}$ *υπάλγεβρα της* $\mathcal{B}$ *με* $1 \in \mathcal{A}$ *και* $S = \mathcal{A} + \mathcal{A}^\star$ *και* $\phi : S \to \mathcal{C}$ *είναι θετική, τότε το* S *είναι σύστημα τελεστών και σύμφωνα με το πιο πάνω θεώρημα,* $||\phi(a)|| \leq ||\phi(1)||\,||a||\,, \forall\, a \in \mathcal{A}$.

Θεώρημα 2.5.3 *Αν* $\mathcal{A}$ *και* $\mathcal{B}$ *είναι δύο* $C^\star$ *άλγεβρες με μονάδες και* $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *μια θετική απεικόνιση,τότε,* $||\phi|| = ||\phi(1)||$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.0.6, για $\mathcal{B} = \mathcal{A}\,, \mathcal{A} = \mathcal{A}\,, S = \mathcal{A}\,, \mathcal{C} = \mathcal{B}$ έχουμε $||\phi(a)|| \leq ||\phi(1)||\,||a||\,, \forall\, a \in \mathcal{A}$, άρα $||\phi|| \leq ||\phi(1)||$. Εφ' όσον $||1|| = 1$, προκύπτει ότι

$||\phi|| = ||\phi(1)||$.

■

Εφαρμογή 2.5.4 *Θεωρούμε σύστημα τελεστών $S \subseteq \mathcal{A}$ και ένα γραμμικό συναρτησοειδές $f : S \to \mathbb{C}$ με $f(1) = 1\,, ||f|| = 1$. Αν $a \in S$ με $a\,a^\star = a^\star\,a$, τότε $f(a) \in \overline{\mathrm{conv}}(\sigma(a))$.*

Απόδειξη: Υποθέουμε ότι $f(a) \notin \overline{\mathrm{conv}}(\sigma(a))$. Επειδή η κυρτή θήκη ενός συμπαγούς συνόλου είναι η τομή όλων των κλειστών δίσκων που περιέχουν το συμπαγές σύνολο, υπάρχουν $\lambda \in \mathbb{C}\,, r > 0$ ώστε $|f(a) - \lambda| > r$ και το φάσμα $\sigma(a)$ του a ικανοποιεί την $\sigma(a) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\,, |z - \lambda| \leq r\}$ και τότε $\sigma(a - \lambda\,1) \subseteq \{z \in \mathbb{C}\,, |z| \leq r\}$. Το στοιχείο $a - \lambda\,1$ είναι κανονικό διότι

$$\begin{aligned}
(a - \lambda\,1)\,(a - \lambda\,1)^\star &= (a - \lambda\,1)\,(a^\star - \overline{\lambda}\,1)\\
&= a\,a^\star - \overline{\lambda}\,1\,a - \lambda\,a^\star\,1 + \overline{\lambda}\,1\,\lambda\,1\\
&= a^\star\,a - a^\star\,\lambda\,1 - \overline{\lambda}\,1\,a + \overline{\lambda}\,1\,\lambda\,1\\
&= a^\star(a - \lambda\,1) - \overline{\lambda}\,1\,(a - \lambda\,1)\\
&= (a^\star - \overline{\lambda}\,1)\,(a - \lambda\,1)\\
&= (a - \lambda\,1)^\star\,(a - \lambda\,1)
\end{aligned}$$

και εφ'όσον η φασματική ακτίνα και η νόρμα στα κανονικά στοιχεία ταυτίζονται, έχουμε $||a - \lambda\,1|| \leq r \iff \left\|\dfrac{a - \lambda\,1}{r}\right\| \leq 1$ οπότε

$$\left| f\left(\frac{a - \lambda\,1}{r}\right)\right| \leq \left\|\frac{a - \lambda\,1}{r}\right\| \leq 1 \iff |f(a) - \lambda| \leq r$$

άτοπο.

■

Με το συμπέρασμα αυτής της εφαρμογής αποδεικνύουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.4 *Για κάθε σύστημα τελεστών $S \subseteq \mathcal{A}$ και κάθε $C^\star$ άλγεβρα με μονάδα $\mathcal{B}$, κάθε μοναδιαία συστολή $\phi : S \to \mathcal{B}$ είναι θετική.*

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathcal{B} = \mathbb{B}(H)$ για κάποιον χώρο Hilbert $(H, \langle , \rangle)$. Έστω $x \in H$, $||x|| = 1$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$f : S \to \mathbb{C} \, , f(a) = \langle \phi(a)(x), x \rangle$$

η οποία είναι $\mathbb{C}$ - γραμμική με $f(1) = \langle Id(x), x \rangle = \langle x, x \rangle = ||x||^2 = 1$. Για κάθε $a \in S$, η ανισότητα C-S δίνει

$$|f(a)| = |\langle \phi(a)x, x \rangle| \leq ||\phi(a)\, x|| \, ||x|| \leq ||\phi|| \, ||a|| \, ||x||^2 \leq ||a||$$

Συνεπώς, f φραγμένη με $||f|| \leq 1$ και επειδή $f(1) = 1$ είναι $||f|| = 1$. Για να αποδείξουμε ότι η ϕ είναι θετική, θεωρούμε το τυχόν $a \in S^+$. Τότε, $a\, a^\star = a^\star\, a = a^2$ και σύμφωνα με την Εφαρμογη 2.5.4, παίρνουμε $f(a) \in \overline{\text{conv}}(\sigma(a)) \subseteq [0, +\infty)$ οπότε $\langle \phi(a)x, x \rangle \geq 0$. Άρα, αποδείξαμε ότι για κάθε $x \in H$, $||x|| = 1$ ισχύει $\langle \phi(a)x, x \rangle \geq 0$. Έστω το τυχόν $h \in H$. Αν $h = 0$,τότε $\langle \phi(a)\, 0, 0 \rangle = 0 \geq 0$. Αν $h \neq 0$, τότε $\left\| \dfrac{h}{||h||} \right\| = 1$ και άρα

$$\left\langle \phi(a) \left(\frac{h}{||h||} \right), \frac{h}{||h||} \right\rangle \geq 0 \iff \langle \phi(a)(h), h \rangle \geq 0$$

Έτσι, $\langle \phi(a)h, h \rangle \geq 0 \, , \forall\, h \in H$, γεγονός που αποδεικνύει ότι ο τελεστής $\phi(a)$ είναι θετικός και ότι η απεικόνιση ϕ είναι θετική, όπως θέλαμε.

■

Θα διατυπώσουμε τώρα και θα αποδείξουμε ένα θεώρημα που αναφέρεται σε επέκταση συστολής.

Θεώρημα 2.5.5 *Αν $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δύο $C^\star$ άλγεβρες με μονάδες, $\mathcal{M}$ ένας υπόχωρος της $\mathcal{A}$ με $1 \in M$ και $\phi : M \to \mathcal{B}$ μια συστολή με $\phi(1) = 1$, τότε η απεικόνιση*

$$\hat{\phi} : \mathcal{M} + \mathcal{M}^\star \to \mathcal{B} \, , \hat{\phi}(a + b^\star) = \phi(a) + (\phi(b))^\star$$

είναι καλώς ορισμένη,γραμμική και είναι η μοναδική θετική επέκταση της ϕ στο $\mathcal{M} + \mathcal{M}^\star$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η $\hat{\phi}$ είναι καλώς ορισμένη και ότι υπάρχει και άλλη γραμμική και θετική απεικόνιση $\psi : M + M^\star \to B$ που επεκτείνει την ϕ. Τότε, για κάθε $a\,,b \in \mathcal{M}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\psi(a+b^\star) &= \psi(a)+\psi(b^\star)\\ &= \psi(a)+(\psi(b))^\star\\ &= \phi(a)+(\phi(b))^\star\\ &= \phi(a+b^\star)\end{aligned}$$

Μένει να αποδείξουμε ότι η $\hat{\phi}$ είναι καλώς ορισμένη. Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $a\,,a^\star \in M$, τότε $\phi(a^\star) = (\phi(a))^\star$. Θεωρούμε το σύνολο $S_1 = \{a \in \mathcal{A}\,, a\,, a^\star \in M\}$.Έχουμε ότι $0 = 0^\star \in M$ άρα $0 \in S_1$. Επίσης, $1 = 1^\star \in M$ άρα $1 \in S_1$. Για κάθε $a\,,b \in S_1$ και κάθε $k \in \mathbb{C}$,εφ' όσον ο $\mathcal{M}$ είναι υπόχωρος, ισχύει $a + k\,b \in \mathcal{M}$ και

$$(a+k\,b)^\star = a^\star + \overline{k}\,b^\star \in \mathcal{M}$$

διότι $a^\star\,,b^\star \in \mathcal{M}$. Επομένως, $a + k\,b \in S_1$ και έχουμε ότι το S_1 είναι υπόχωρος της $\mathcal{A}$ με $1 \in S_1$. Θα αποδείξουμε επίσης ότι το S_1 είναι αυτοσυζυγές. Πράγματι, αν $a \in S_1$, τότε $a \in \mathcal{M}\,, a^\star \in \mathcal{M}$ ή ισοδύναμα $a^\star \in \mathcal{M}\,,(a^\star)^\star = a \in \mathcal{M}$, οπότε $a^\star \in S_1$. Αντίστροφα, αν $a \in \mathcal{A}$ με $a^\star \in S_1$, τότε $a^\star \in \mathcal{M}$ και $a = (a^\star)^\star \in \mathcal{M}$, που σημαίνει ότι $a \in S_1$. Άρα, το S_1 είναι σύστημα τελεστών για την $\mathcal{A}$. Μάλιστα, η ϕ είναι μια μοναδιαία συστολή στο S_1 και σύμφωνα με το Θεώρημα 2.0.5, είναι θετική στο S_1, οπότε $\phi(a^\star) = (\phi(a))^\star$. Άρα, η $\hat{\phi}$ είναι καλώς ορισμένη. Θα αοδείξουμε ότι είναι και θετική. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\mathcal{B} = \mathbb{B}(H)$ για κάποιον χώρο Hilbert $(H, \langle,\rangle)$. Έστω $x \in H\,, ||x|| = 1$. Θέτουμε $\hat{\rho}(a) = \langle\hat{\phi}(a)(x), x\rangle\,, a \in M + M^\star$. Έστω επίσης

$$\rho : M \to \mathbb{C}\,, \rho(a) = \langle\phi(a)(x), x\rangle.$$

Τότε,

$$|\rho(a)| = |\langle\phi(a)(x), x\rangle \leq ||\phi(a)(x)||\,||x|| \leq ||\phi(a)||||x||^2 \leq ||\phi|| \leq 1$$

και αφού $\rho(1) = 1$, παίρνουμε $||\rho|| = 1$. Από το Θεώρημα Hahn - Banach, η ρ επεκτείνεται σε $\rho_1 : M + M^\star \to \mathbb{C}$ με $||\rho_1|| = 1$. Έπεται από το Θεώρημα 2.5.5 ότι ρ_1 είναι θετική και έτσι

$$\begin{aligned}
\rho_1(a + b^\star) &= \rho(a) + \overline{\rho(b)} \\
&= \langle \phi(a)x, x\rangle + \overline{\langle \phi(b)x, x\rangle} \\
&= \langle \hat{\phi}(a)x, x\rangle + \overline{\langle \hat{\phi}(b)x, x\rangle} \\
&= \hat{\rho}(a) + \overline{\hat{\rho}(b)} \\
&= \hat{\rho}(a + b^\star)
\end{aligned}$$

που σημαίνει ότι και η $\hat{\rho}$ είναι θετική, οπότε και η $\hat{\phi}$.

■

Κεφάλαιο 3

Πλήρως Θετικές απεικονίσεις

3.1 Πλήρως Θετικές Απεικονίσεις σε Συστήματα Τελεστών

Αν $\mathcal{A}$ είναι μια $C^\star$ άλγεβρα και $\mathcal{M}$ είναι ένας υπόχωρος αυτής, τότε θα λέμε ότι το $\mathcal{M}$ είναι ένας χώρος τελεστών. Προφανώς, η $\mathbb{M}_n(\mathcal{M})$ είναι υπόχωρος της $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και έχει τη νόρμα που κληρονομεί ως υπόχωρος της $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$. Προς το παρόν, με έναν χώρο τελεστών $\mathcal{M}$ θα εννοούμε έναν γνήσιο υπόχωρο μιας $C^\star$ άλγεβρας μαζί με την καλά ορισμένη ακολουθία νορμών στον $\mathbb{M}_n(\mathcal{M})$. Παρόμοια, αν $S \subseteq \mathcal{A}$ είναι σύστημα τελεστών, τότε εφοδιάζουμε τον $\mathbb{M}_n(S)$ με την νόρμα και τη διάταξη που κληρονομεί ως υπόχωρος της $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$. Αν $\mathcal{B}$ είναι $C^\star$ άλγεβρα και $\phi : S \to \mathcal{B}$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\phi_n : \mathbb{M}_n(S) \to \mathbb{M}_n(\mathcal{B}) \ , \phi_n \ \left([a_{i\,j}]_{i\,,j=1}^n\right) = [\phi(a_{i\,j})]_{i\,,j=1}^n$$

Ορισμός 3.1.1 *Θα λέμε ότι η ϕ είναι n θετική, αν η ϕ_n είναι θετική και ότι η ϕ είναι πλήρως θετική, αν ϕ_n είναι θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, θα λέμε ότι η ϕ είναι πλήρως φραγμένη, αν $\sup\,\{||\phi_n||\,, n \in \mathbb{N}\} < \infty$. Τότε θέτουμε $||\phi||_{cb} := \sup\,\{||\phi_n||\,, n \in \mathbb{N}\}$. Αν $||\phi||_{cb} \leq 1$, τότε η ϕ λέγεται πλήρης συστολή.*

Περιμένουμε να ισχύει ότι κάθε θετική απεικόνιση είναι πλήρως θετική και κάθε φραγμένη απεικόνιση είναι πλήρως φραγμένη και μάλιστα, $||\phi||_{cb} = ||\phi_n||\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Θα δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου αυτό δεν ισχύει. Θεωρούμε τη μοναδιαία $C^\star$ άλγεβρα $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ και την απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C})\,, A \mapsto A^t$$

η οποία είναι γραμμική και φραγμένη με $||\phi|| = 1$. Έστω $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^2 \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ και έστω $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Απ' τη μια

$$\left\langle A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = a_{11}\,|x|^2 + a_{22}\,|y|^2 + a_{12}\,y\,\overline{x} + a_{21}\,x\,\overline{y}$$

και απ' την άλλη

$$\left\langle \phi(A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle = a_{11}\,|x|^2 + a_{22}\,|y|^2 + a_{21}\,y\,\overline{x} + a_{12}\,x\,\overline{y}$$

Συνεπώς, $\phi(\mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+) = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+$ και άρα η ϕ είναι θετική. Ας δούμε τώρα την

$$\phi_2 : \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(\mathbb{C})) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(\mathbb{C}))$$

Θεωρούμε το στοιχείο $E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{M}_2(\mathbb{C}))$ που το θεωρούμε στην $\mathbb{M}_4(\mathbb{C})$ ως το στοιχείο

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που είναι θετικό, αφού για κάθε $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$ ισχύει

$$\langle E\,(x_1, x_2, x_3, x_4), (x_1, x_2, x_3, x_4)\rangle = |x_1 + x_4|^2 \geq 0$$

Ωστόσο,

$$\phi_2(E) = \begin{bmatrix} \phi(E_{11}) & \phi(E_{12}) \\ \phi(E_{21}) & \phi(E_{22}) \end{bmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\phi_2(E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

που δεν είναι θετικό, διότι για παράδειγμα

$$\langle \phi_2(E)(0, 1, -1, 0), (0, 1, -1, 0)\rangle = -2 < 0$$

■

Εφαρμογή 3.1.1 *Θα ορίσουμε τώρα μια απεικόνιση που δεν είναι πλήρως φραγμένη.Έστω ο χώρος Hilbert* $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle , \rangle)$ *και έστω η αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση* $\{e_n \in \ell^2(\mathbb{N})\,, n \in \mathbb{N}\}$. *Έστω* $T \in \mathbb{B}(H)$. *Για κάθε* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x \in \ell^2(\mathbb{N})$ *έχουμε*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, e_n \implies \langle T(x), e_j\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\, \langle T(e_n), e_j\rangle$$

που σημαίνει ότι ο T *μπορεί να θεωρηθεί ως ένας* $\infty\times\infty$ *πίνακας* A_T *με* $(A_T)_{(i,j)} = \langle T(e_j), e_i\rangle$ *Ορίζουμε απεικόνιση*

$$A_T^t : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\,, A_T^t((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\langle e_n, T^\star((\overline{x_n})_{n\in\mathbb{N}})\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

η οποία είναι γραμμική διότι για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x\,,(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}\,, a \in \mathbb{C}$ *έχουμε*

$$\begin{aligned} A_T^t(x + a\,y) &= (\langle e_n, T^\star((\overline{x_n + a\,y_n}))_{n\in\mathbb{N}}\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\langle e_n, T^\star((\overline{x_n}))_{n\in\mathbb{N}} + \overline{a}\,T^\star((\overline{y_n}))_{n\in\mathbb{N}}\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= (\langle e_n, T^\star((\overline{x_n}))_{n\in\mathbb{N}}\rangle)_{n\in\mathbb{N}} + a\,(\langle e_n, T^\star((\overline{y_n}))_{n\in\mathbb{N}}\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= A_T^t(x) + a\,A_T^t(y) \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η A_T^t *απεικονίζει τον* $\ell^2(\mathbb{N})$ *στον* $\ell^2(\mathbb{N})$. *Έστω το τυχόν* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x \in \ell^2(\mathbb{N})$. *Ισχύει λόγω ανισότητας C-S*

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, T^\star((\overline{x_n}))_{n\in\mathbb{N}}\rangle|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} ||e_n||^2\,||T^\star((\overline{x_n}))_{n\in\mathbb{N}}||^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ||T^\star((\overline{x_n}))_{n\in\mathbb{N}}||^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} ||T^\star||^2\,||(\overline{x_n})_{n\in\mathbb{N}}||^2 \\ &= ||T||^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \\ &= ||T||^2\,||x||_2^2 < \infty \end{aligned}$$

Ώστε, $A_T^t(x) \in \ell^2(\mathbb{N})$ *και μάλιστα* $||A_T^t(x)||_2 \leq ||T||\,||x||_2$. *Αυτό απεδείχθη για το τυχόν* $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, *οπότε* $||A_T^t|| \leq ||T||$. *Ορίζουμε την απεικόνιση*

$$\phi : \mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{N})) \to \mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{N}))\,, \phi(A_T) = A_T^t$$

η οποία είναι γραμμική με $||\phi(T)|| = ||A_T^t|| \leq ||T||$, *άρα η* ϕ *είναι και φραγμένη.Για κάθε* $i\,, j \in \mathbb{N}$ *θεωρούμε τους τελεστές*

$$E_{i\,j} \in \mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{N}))\,, E_{i\,j}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_j\,e_i$$

Για κάθε $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x\,, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = y \in \ell^2(\mathbb{N})$ *ισχύει*

$$\begin{aligned}\langle x, E^\star_{i\,j}(y)\rangle &= \langle E_{i\,j}(x), y\rangle \\ &= x_j\,\overline{y_i} \\ &= \langle x, y_i\,e_j\rangle\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $E^\star_{i\,j}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_i\,e_j$ *Έστω* $n \in \mathbb{N}$. *Θεωρούμε το στοιχείο* $A = [E_{j\,i}]^n_{i,j=1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ *Έστω* $x = (x_1, ..., x_n) \in (\ell^2(\mathbb{N}))^n$, *όπου γράφουμε* $x_j = (x_{j1}, x_{j2}, ...)\,, 1 \le j \le n$. *Τότε,*

$$\begin{aligned}||A(x)||^2 &= ||A(x_1, ..., x_n)||^2 \\ &= ||(E_{11}(x_1) + ... + E_{n1}(x_n), ..., E_{1n}(x_1) + ... + E_{nn}(x_n))||^2 \\ &= ||E_{11}(x_1) + ... + E_{n1}(x_n)||^2 + ... + ||E_{1n}(x_1) + ... + E_{nn}(x_n)||^2 \\ &= ||x_{11}\,e_1 + ... + x_{n1}\,e_n||^2 + ... + ||x_{1n}\,e_1 + ... + x_{nn}\,e_n||^2 \\ &= |x_{11}|^2 + ... + |x_{n1}|^2 + ... + |x_{1n}|^2 + ... + |x_{nn}|^2 \le ||x||^2\end{aligned}$$

και εφ'όσον $||(e_1, 0, ..., 0)|| = 1$ *με* $||A(e_1, 0, ..., 0)|| = 1$ *έπεται ότι* $||A|| = 1$. *Απ' την άλλη,*

$$\begin{aligned}||\phi_n(A)(x)||^2 &= ||(E^t_{11}(x_1) + ... + E^t_{n1}(x_n), ..., E^t_{1n}(x_1) + ... + E^t_{nn}(x_n))||^2 \\ &= ||E^t_{11}(x_1) + ... + E^t_{n1}(x_n)||^2 + ... + ||E^t_{1n}(x_1) + ... + E^t_{nn}(x_n)||^2 \\ &= ||(x_{11}, 0, 0, ...) + (x_{nn}, 0, 0, ...)||^2 + ... + ||(0, ...x_{11}, ...) + ... + (0, ..., x_{nn}, ...)||^2 \\ &= n\,|x_{11} + ... + x_{nn}|^2\end{aligned}$$

και εφαρμόζοντας για το $x = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(e_1, ..., e_n)\,, ||x|| = 1$, *παίρνουμε* $||\phi_n(A)(x)||^2 = n^2$, *οπότε* $||\phi_n(A)|| \ge n$. *Η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και αποδεικνύει ότι η* ϕ *δεν μπορεί να είναι πλήρως φραγμένη.*

Εφαρμογή 3.1.2 *Αν* $\mathcal{A}$ *είναι μια* $C^\star$ *άλγεβρα με μονάδα και* $a \in \mathcal{A}$, *τότε*

$$||a|| \le 1 \iff \begin{bmatrix} 1 & a \\ a^\star & 1 \end{bmatrix} \ge 0$$

Απόδειξη: Έστω $\pi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert $(H, \langle , \rangle)$ και θέτουμε $\pi(a) = A$. Αν $||A|| \leq 1$, τότε

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{bmatrix} I & A \\ A^\star & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle &= \langle (x + A(y), A^\star(x) + y), (x, y) \rangle \\
&= \langle x + A(y), x \rangle + \langle A^\star(x) + y, y \rangle \\
&= ||x||^2 + \langle A(y), x \rangle + \langle A^\star(x), y \rangle + ||y||^2 \\
&\geq ||x||^2 - 2\,||A||\,||x||\,||y|| + ||y||^2 \\
&\geq ||x||^2 - 2\,||x||\,||y|| + ||y||^2 \\
&= (||x|| - ||y||)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

και τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $x\,, y \in H$. οπότε $\begin{bmatrix} I & A \\ A^\star & I \end{bmatrix} \geq 0$. Αντίστροφα, αν $||A|| > 1$, τότε υπάρχουν $x\,, y \in S_H$ ώστε $\langle A(y), x \rangle < -1$. Έτσι,

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{bmatrix} I & A \\ A^\star & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right\rangle &= \langle (x + A(y), A^\star(x) + y), (x, y) \rangle \\
&= \langle x + A(y), x \rangle + \langle A^\star(x) + y, y \rangle \\
&= ||x||^2 + \langle A(y), x \rangle + \langle x, A(y) \rangle + ||y||^2 \\
&< ||x||^2 - 2 + ||y||^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

οπότε ο πίνακας $\begin{bmatrix} I & A \\ A^\star & I \end{bmatrix}$ δεν είναι θετικός.

■

Θεώρημα 3.1.1 *Αν $S \subseteq \mathcal{A}$ είναι σύστημα τελεστών, $\mathcal{B}$ είναι μια $C^\star$ άλγεβρα με μονάδα και $\phi : S \to \mathcal{B}$ μια μοναδιαία και 2 - θετική απεικόνιση, τότε η ϕ είναι συστολή.*

Απόδειξη: Αν $a \in S$ με $||a|| \leq 1$, τότε από την Εφαρμογή 3.1.2 έχουμε ότι $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^\star & 1 \end{bmatrix} \geq 0$ στην $\mathbb{M}_2(S)$. Επειδή η ϕ είναι 2-θετική, άρα η ϕ_2 είναι θετική, ισχύει

$$0 \leq \phi_2 \left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^\star & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \phi(1) & \phi(a) \\ \phi(a^\star) & \phi(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \phi(a) \\ (\phi(a))^\star & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathcal{B})$$

οπότε λόγω της Εφαρμογής 3.1.2 παίρνουμε $||\phi(a)|| \leq 1$.

■

Θεώρημα 3.1.2 *Ας είναι $\mathcal{A}\,,\mathcal{B}$ δύο $C^\star$ άλγεβρες με μονάδα, $\mathcal{M}$ υπόχωρος της $\mathcal{A}$ με $1 \in M$ και $S = M + M^\star$. Αν η γραμμική $\phi : M \to \mathcal{B}$ είναι μοναδιαία και 2 - συστολή, τότε η $\hat{\phi} : S \to \mathcal{B}$ είναι 2 - θετική και συστολή. Γενικά, αν $\phi : M \to \mathcal{B}$ είναι μοναδιαία και πλήρης συστολή, τότε η $\hat{\phi}$ είναι πλήρως θετική και πλήρης συστολή. ($\hat{\phi}_{2n} = (\hat{\phi}_n)_2$).*

Απόδειξη: Για την απόδειξη, δείτε εδώ [4] σελ.28

■

Θεώρημα 3.1.3 *Αν S είναι χώρος τελεστών μιας μοναδιαίας $C^\star$ άλγεβρας $\mathcal{A}$ και $f : S \to \mathbb{C}$ είναι γραμμικό και φραγμένο συναρτησοειδές, τότε $||f||_{cb} = ||f||$. Επί πλέον, αν το S είναι σύστημα τελεστών στην $\mathcal{A}$ και η f είναι θετική, τότε είναι και πλήρως θετική.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόντα $n \in \mathbb{N}$, $[a_{i\,j}] \in \mathbb{M}_n(S)$ και μοναδιαία διανύσματα $x = (x_1, ..., x_n)\,, y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$. Έχουμε ότι

$$|\langle f_n([a_{i\,j}])x, y\rangle| = \left|\sum_{i\,,j=1}^{n} f(a_{i\,j})\, x_j\, \overline{y_i}\right| = \left|f\, \left(\sum_{i\,,j=1}^{n} a_{i\,j}\, x_j\, \overline{y_i}\right)\right| \leq ||f||\, \left|\sum_{i\,,j=1}^{n} a_{i\,j}\, x_j\, \overline{y_i}\right|$$

Το άθροισμα

$$\sum_{i\,,j=1}^{n} x_j\, \overline{y_i}\, a_{i\,j}$$

είναι το $(1,1)$ κελί του παρακάτω πίνακα

$$\begin{bmatrix} \overline{y_1}\,1 & ... & \overline{y_n}\,1 \\ 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\,1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n\,1 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} \overline{y_1}\,1 & ... & \overline{y_n}\,1 \\ 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1\,1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n\,1 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

έχουν νόρμα ίση με 1, οπότε

$$|\,\langle f_n([a_{i\,j}])x, y\rangle\,| \leq ||f||\,||[a_{i\,,j}]||$$

Εφ'όσον $||f_n([a_{i\,j}])|| = \sup\{|\,\langle f_n([a_{i\,j}])x, y\rangle\,| : x\,, y \in \mathbb{C}^n\,, ||x|| = ||y|| = 1\}$ προκύπτει ότι $||f_n([a_{i\,j}])|| \leq ||f||\,||[a_{i\,j}]||$. Επομένως,η f_n είναι φραγμένη με $||f_n|| \leq ||f||$ και αυτό συμβαίνει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή επιπλέον, $||f_1|| = ||f||$, έχουμε ότι $||f||_{cb} = ||f||$. Τώρα, για να αποδείξουμε ότι η f είναι πλήρως θετική όταν το S είναι σύστημα τελεστών και η f είναι θετική, θεωρούμε τυχόντα $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{C}^n\,, ||x|| = 1\,, [a_{i\,j}] \in \mathbb{M}_n(S)^+$ και υπολογίζουμε όπως πιο πάνω

$$\langle f_n([a_{i\,j}])x, x\rangle = f\left(\sum_{i\,,j=1}^{n} x_j\,\overline{x_i}\,a_{i\,j}\right)$$

όπου το τελευταίο άθροισμα είναι το $(1,1)$- κελί του θετικού πίνακα $X^\star\,A\,X$ όπου

$$X = \begin{bmatrix} x_1\,1 & 0... & 0 & \\ x_2\,1 & 0... & 0 & \\ ... & ... & ... & \\ x_n\,1 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

οπότε λόγω θετικότητας της f παίρνουμε $\langle f_n([a_{ij}])x, x\rangle \geq 0$ άρα ο πίνακας $f_n([a_{ij}])$ είναι θετικός, όπως θέλαμε.

■

Θα αναφέρουμε στο σημείο αυτό το Θεώρημα του Krein που θα μας χρειαστεί σε αποδείξεις στο Κεφάλαιο 5.

Θεώρημα 3.1.4 (Krein) *Έστω S ένα σύστημα τελεστών σε μια μοναδιαία $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$ και έστω $\phi : S \to \mathbb{C}$ μια γραμμική και θετική απεικόνιση. Τότε, η ϕ μπορεί να επεκταθεί σε μια θετική απεικόνιση σε όλη την άλγεβρα $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη: Η ϕ ως γραμμική και θετική, είναι και φραγμένη σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.1. Εφ'όσον $||1|| = 1$ και $||\phi|| = \sup\,\{|\phi(a)| : a \in S\,, ||a|| \leq 1\}$ προκύπτει ότι $|\phi(1)| \leq ||\phi||$. Μάλιστα, $1 \in S^+$ και επειδή η ϕ είναι θετική, παίρνουμε $\phi(1) \geq 0$, οπότε $\phi(1) \leq ||\phi||$. Αν $p \in S^+$ τότε έχουμε $0 \leq p \leq ||p||\,1$ και λόγω θετικότητας της ϕ προκύπτει $\phi(p) \leq \phi(1)\,||p||$. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $\phi(1) = 0$, τότε για κάθε $p \in S^+$ θα είχαμε $\phi(p) \leq \phi(1)\,||p|| = 0 \implies \phi(p) = 0$. Επιπλέον, αν $h \in S\,, h = h^\star$, τότε γράφουμε $h = p_1 - p_2$ όπου $p_1\,, p_2 \geq 0$ και τότε $\phi(h) = \phi(p_1) - \phi(p_2) = 0$. Τέλος, για το τυχόν $a \in S$ γράφουμε $a = h + i\,k$ όπου $h\,, k \in S\,, h = h^\star\,, k = k^\star$ και άρα $\phi(a) = \phi(h) + i\phi(k) = 0$. Άρα, $\phi = 0$ και δεν έχουμε κάτι να αποδείξουμε.Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\phi(1) > 0$ και με διαίρεση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\phi(1) = 1$. Από το Θεώρημα 3.1.3 η f είναι και πλήρως θετική. Έστω $a \in S\,, ||a|| \leq 1$. Από την Εφαρμογή 3.1.2, έπεται ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^\star & 1 \end{bmatrix}$ είναι θετικός στην $\mathbb{M}_2(S)$ και λόγω θετικότητας της ϕ_2 παίρνουμε

$$\phi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & a \\ a^\star & 1 \end{bmatrix}\right) \geq 0 \implies \begin{bmatrix} 1 & \phi(a) \\ \bar{\phi(a)} & 1 \end{bmatrix} \geq 0 \implies 1 - \phi(a)\,\bar{\phi(a)} \geq 0 \implies |\phi(a)| \leq 1.$$

Εν τέλει, $||\phi|| = 1$. Από Θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχει γραμμική και φραγμένη επέκταση $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ της απεικόνισης ϕ με $||\psi|| = ||\phi|| = 1$ και $\psi(1) = \phi(1) = 1$. Αν $a \in \mathcal{A}^+$, τότε $a\,a^\star = a^\star\,a$ και σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.5.4, προκύπτει ότι $\psi(a) \in \overline{\mathrm{conv}}(\sigma(a)) \subseteq [0, +\infty)$, άρα $\psi(a) \geq 0$ και αποδείξαμε ότι και η ψ είναι θετική.

■

Πριν δούμε το επόμενο σημαντικό θεώρημα, θα κάνουμε κάποια σχόλια. Αν $(X, \mathcal{T})$ είναι συμπαγής χώρος Hausdorff, τότε κάθε στοιχείο $F = [f_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{M}_n(C(X))$ μπορεί να θεωρηθεί ως συνεχής απεικόνιση από το X στο $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ και ο πολλαπλασιασμός και η $\star$ στην $\mathbb{M}_n(C(X))$ είναι ακριβώς ο πολλαπλασιασμός και η $\star$ των απεικονίσεων που οι τιμές τους είναι μιγαδικοί πίνακες. Μάλιστα, ένας τρόπος να κάνουμε την $\star$ - άλγεβρα $\mathbb{M}_n(C(X))$ μια $C^\star$ άλγεβρα είναι, να ορίσουμε

$$||F|| := \sup \{||F(x)|| \, x \in X\} \ , \forall \, F \in \mathbb{M}_n(C(X))$$

και από τη μοναδικότητα των $C^\star$ νορμών, αυτός είναι ο μοναδικός τρόπος.

Θεώρημα 3.1.5 *Αν $S \subseteq \mathcal{A}$ είναι χώρος τελεστών και $\phi : S \to C(X)$ είναι γραμμική και φραγμένη, τότε $||\phi||_{cb} = ||\phi||$. Επίσης, αν S είναι σύστημα τελεστών και ϕ θετική, τότε η ϕ είναι πλήρως θετική.*

Απόδειξη: Έστω $x \in X$. Ορίζουμε

$$f_x : S \to \mathbb{C} \, , f_x(a) = \phi(a)(x)$$

η οποία είναι γραμμική και για κάθε $a \in S$ ισχύει

$$|f_x(a)| = |\phi(a)(x)| \leq ||\phi(a)|| \, ||x|| \leq ||\phi|| \, ||a|| \, ||x||$$

'Αρα, f_x φραγμένη και σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.3 $||f_x||_{cb} = ||f_x||$. Έτσι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$||\phi_n|| = \sup \{||(\phi_n)_x|| \, , x \in X\} = \sup \{||f_x|| \, , x \in X\} = ||\phi||$$

Όμοια, ο $\phi_n([a_{ij}])$ είναι θετικός αν, και μόνο αν, ο $(\phi_n)_x([a_{ij}])$ είναι θετικός για κάθε $x \in X$.

■

Το επόμενο θέωρημα οφείλεται στον Stinespring.

Θεώρημα 3.1.6 *Έστω $\mathcal{B}$ μια $C^\star$ άλγεβρα και έστω $\phi : C(X) \to \mathcal{B}$ μια θετική απεικόνιση. Τότε η ϕ είναι πλήρως θετική.*

Απόδειξη: Για την απόδειξη, δείτε εδώ [4] σελ.33

■

Για μεταθετικό πεδίο ορισμού ή μεταθετική εικόνα, η θετικότητα συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα. Πρέπει να δούμε τι συμβαίνει αν είτε το πεδίο ορισμού ή εικόνα, δεν είναι μεταθετικές άλγεβρες.

Εφαρμογή 3.1.3 *Έστω $\mathcal{A}$ μια $C^\star$ άλγεβρα. Τότε, κάθε θετικό στοιχείο της $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ είναι άθροισμα n θετικών στοιχείων της μορφής $[a_i^\star\, a_j]_{i,j=1}^n$ για κάποιο $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathcal{A}$.*

Απόδειξη: Αν $R \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ είναι ο πίνακας που η k στήλη του είναι η $a_1, ..., a_n$ και παντού αλλού μηδέν, τότε $R^\star\, R = [a_i^\star\, a_j]$, άρα κάθε τέτοιο στοιχείο είναι θετικό. Έστω τώρα $P \geq 0$, δηλαδή $P = B^\star\, B$ για κάποιον $B \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$. Γράφουμε, $B = R_1 + ... + R_n$, όπου R_k είναι ο πίνακας που στην k στήλη του έχει την k στήλη του B και 0 παντού αλλού. Έχουμε ότι, $P = B^\star\, B = R_1^\star\, R_1 + ... + R_n^\star\, R_n$ αφού $R_i^\star\, R_j = 0$ όταν $i \neq j$.

■

3.2 Θεώρημα Choi

Θεώρημα 3.2.1 (Choi) *Ας είναι $\mathcal{B}$ μια $C^\star$ άλγεβρα και $\phi : \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}$ μια γραμμική απεικόνιση. Αν $\{E_{i\,j}\,, i\,, j = 1, ..., n\}$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, τότε τα ακόλουθα ισοδυναμούν*

i) Η ϕ είναι πλήρως θετική

ii) Η ϕ είναι n - θετική.

iii) Ο πίνακας $[\phi(E_{i\,j})]_{i,j=1}^n$ είναι θετικός στην $\mathbb{M}_n(\mathcal{B})$.

Απόδειξη: Προφανώς, η i) συνεπάγεται την ii). Αν η ϕ είναι n- θετική, τότε η απεικόνιση ϕ_n είναι θετική. Ο πίνακας $[E_{i\,j}]$ της άλγεβρας $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ είναι θετικός, οπότε $\phi_n([E_{i\,j}])$ είναι θετικός στην $\mathbb{M}_n(\mathcal{B})$, δηλαδή ο $[\phi(E_{i\,j})]$ είναι θετικός στην $\mathbb{M}_n(\mathcal{B})$. Μένει να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $iii) \implies i)$. Για τον σκοπό αυτό, είναι αρκετό να υποθέσουμε ότι $\mathcal{B} = \mathbb{B}(H)$ για κάποιον χώρο Hilbert $(H, \langle,\rangle)$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και θα δείξουμε ότι η ϕ είναι k - θετική, δηλαδή αν $B \in \mathbb{M}_k(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))^+$ τότε ισχύει $\phi_k(B)$ θετικός στην $\mathbb{M}_k(\mathcal{B})$. Σύμφωνα, με την εφαρμογή 3.1.3, ο B γράφεται σαν άθροισμα πινάκων της μορφής $[A_i^\star\, A_j]$ όπου $A_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ και άρα αρκεί να αποδειχθεί ότι $\phi_k([A_i^\star\, A_j])$ είναι θετικός στην $\mathbb{M}_k(\mathcal{B})$.Θεωρούμε λοιπόν τυχόντα $x_1, ..., x_k \in H$ και θα αποδείξουμε ότι το άθροισμα

$$\sum_{i\,,j=1}^{n} \langle \phi(A_i^\star\, A_j)x_j, x_i\rangle$$

είναι θετικό. Γράφουμε,

$$A_\ell = \sum_{r\,,s=1}^{n} A_{r\,s\,\ell}\, E_{r\,s}$$

και τότε

$$A_i^\star\, A_j = \sum_{r\,s\,t=1}^{n} \overline{a_{r\,s\,t}}\, a_{r\,t\,j}\, E_{s\,t}$$

Θέτουμε

$$y_{t\,r} = \sum_{j=1}^{k} a_{r\,t\,j}\, x_j$$

και τότε

$$\sum_{i\,,j=1}^{n} \langle \phi(A_i^\star\, A_j)\, x_j, x_i\rangle = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s\,,t=1}^{n} \langle \phi(E_{s\,t})\, y_{t\,r}, y_{s\,r}\rangle = \sum_{r=1}^{n} \langle \phi([E_{s\,t}])y_r, y_r\rangle \geq 0$$

διότι από iii) ο τελεστής $\phi([E_{s\,t}])$ είναι θετικός στην $\mathbb{M}_n(\mathbb{B}(H))$. γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

■

Κεφάλαιο 4

Θεώρημα Stinespring

4.1 Παράδειγμα πλήρως θετικής απεικόνισης

Θεώρημα 4.1.1 *Θεωρούμε δύο μοναδιαίες $C^\star$ άλγεβρες $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ και έναν μοναδιαίο $\star$ ομομορφισμό $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Τότε, ο π είναι πλήρως θετικός.*

Απόδειξη: Έστω $a \in \mathcal{A}^+$. Τότε, υπάρχει $c \in \mathcal{A}$ ώστε $a = c^\star c$, οπότε τώρα έχουμε

$$\pi(a) = \pi(c^\star c) = \pi(c^\star)\,\pi(c) = (\pi(c))^\star\,\pi(c) \geq 0$$

άρα ο π είναι θετικός. Επίσης,για το τυχόν $n \in \mathbb{N}$, η απεικόνιση $\pi_n : \mathbb{M}_n(\mathcal{A}) \to \mathbb{M}_n(\mathcal{B})$ είναι μοναδιαίος $\star$ ομομορφισμός αλγεβρών, άρα είναι θετική.

■

Θεώρημα 4.1.2 *Θεωρούμε μοναδιαία $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$, δύο χώρους Hilbert $(H, \langle , \rangle)$, $(K, \langle , \rangle)$ έναν γραμμικό και φραγμένο τελεστή $V : H \to K$ και έναν μοναδιαίο $\star$ ομομορφισμό $\pi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(K)$. Ορίζουμε την απεικόνιση*

$$\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)\,,\,\phi(a) = V^\star\,\pi(a)\,V.$$

Τότε, η ϕ είναι πλήρως θετική.

Απόδειξη: Για το τυχόν $n \in \mathbb{N}$ θα αποδείξουμε ότι η απεικόνιση ϕ_n είναι θετική. Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε τυχόν $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})^+$ και τυχόντα $x_1, ..., x_n \in H$. Υπολογίζουμε,

$$\begin{aligned}
\left\langle \phi_n([a_{ij}]) \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \right\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \phi(a_{ij})(x_j), x_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle V^\star(\pi(a_{ij}))(V(x_j)), x_i \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \pi(a_{ij})(V(x_j)), V(x_i) \rangle \\
&= \left\langle \pi_n([a_{ij}]) \begin{bmatrix} V(x_1) \\ ... \\ V(x_n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} V(x_1) \\ ... \\ V(x_n) \end{bmatrix} \right\rangle
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία παράσταση είναι θετική διότι ο π_n είναι θετικός στον $\mathbb{B}(K)$ (αφού ο π είναι μοναδιαίος $\star$ ομομορφισμός(Θεώρημα 4.1.1)), ο πίνακας $[a_{ij}]$ είναι θετικός στην $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ και $V(x_i) \in K\,, 1 \leq i \leq n$. Επομένως, ο τελεστής $\phi_n([a_{ij}])$ είναι θετικός, όπως θέλαμε.

■

Το Θεώρημα Stinespring μας λέει ότι κάθε πλήρως θετική απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$, όπου $\mathcal{A}$ είναι μοναδιαία $C^\star$ άλγεβρα και $(H, \langle, \rangle)$ χώρος Hilbert, είναι της παραπάνω μορφής.

4.2 Θεώρημα Stinespring

Θεώρημα 4.2.1 (Stinespring) *Θεωρούμε μια μοναδιαία $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$ και $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ μια πλήρως θετική απεικόνιση. Τότε, υπάρχουν χώρος Hilbert $(K, \langle, \rangle)$, ένας μοναδιαίος $\star$ ομομορφισμός $\pi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(K)$ και ένας γραμμικός και φραγμένος τελεστής $V : H \to K$ με $||\phi(1)|| = ||V||^2$ ώστε*

$$\phi(a) = V^\star\, \pi(a)\, V\,, \forall\, a \in \mathcal{A}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{A} \odot H$. Έστω $(b, y) \in \mathcal{A} \times H$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\rho_{(b,y)} : \mathcal{A} \times H \to \mathbb{C}\,,\, \rho_{(b,y)}(a,x) = \langle \phi(b^\star\, a)(x), y\rangle_H$$

η οποία προφανώς είναι διγραμμική. Σύμφωνα με την Καθολική Ιδιότητα του Αλγεβρικού Τανυστικού Γινομένου υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\hat{\rho}_{(b,y)} : \mathcal{A} \odot H \to \mathbb{C}$ ώστε $\hat{\rho}_{(b,y)}(a \otimes x) = \langle \phi(b^\star\, a)(x), y\rangle_H\,, \forall\, a \in \mathcal{A}\,, \forall\, x \in H$ και συνεπώς για κάθε

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in \mathcal{A} \odot H$$

έχουμε

$$\hat{\rho}_{(b,y)}(u) = \sum_{i=1}^{n} \langle \phi(b^\star\, a_i)(x_i), y\rangle$$

Σταθεροποιούμε $u \in \mathcal{A} \odot H$. Ορίζουμε απεικόνιση

$$f_u : \mathcal{A} \times H \to \mathbb{C}\,,\, f_u(b,y) = \overline{\hat{\rho}_{(b,y)}(u)}$$

δηλαδή για κάθε αναπαράσταση

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i$$

έχουμε

$$f_u(b,y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle \phi(b^\star\, a_i)(x_i), y\rangle} = \sum_{i=1}^{n} \langle y, \phi(b^\star\, a_i)(x_i)\rangle.$$

Προφανώς, η f_u είναι διγραμμική και από την Καθολική Ιδιότητα του Αλγεβρικού Τανυστικού Γινομένου, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\hat{f}_u : \mathcal{A} \odot H \to \mathbb{C}$ με την ιδιότητα

$$\hat{f}_u(b \otimes y) = \sum_{i=1}^{n} \langle y, \phi(b^\star\, a_i)(x_i)\rangle\,, \forall\, b \in \mathcal{A}\,, \forall\, y \in H.$$

Επομένως, για κάθε $u\,, v \in \mathcal{A} \odot H$ και για κάθε αναπαράσταση

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i\,, v = \sum_{j=1}^{m} b_j \otimes y_j$$

έχουμε

$$\hat{f}_u(v) = \sum_{j=1}^{m} f_u(b_j \otimes y_j) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \langle y_j, \phi(b_j^\star a_i)(x_i)\rangle$$

οπότε η απεικόνιση $v \mapsto \hat{f}_u(v) \in \mathbb{C}\,, v \in \mathcal{A} \odot H$ είναι αντιγραμμική και ορίζοντας

$$\langle u, v\rangle := \overline{\hat{f}_u(v)} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \langle \phi(b_j^\star a_i)(x_i), y_j\rangle$$

έχουμε μια καλώς ορισμένη απεικόνιση $\langle , \rangle : (\mathcal{A} \odot H) \times (\mathcal{A} \odot H) \to \mathbb{C}$ η οποία είναι sesquilinear και στους στοιχειώδεις τανυστές έχουμε

$$\langle a \otimes x, b \otimes y\rangle = \langle \phi(b^\star a)(x), y\rangle\,, \forall\, a\,, b \in \mathcal{A}\,, \forall\, x\,, y \in H.$$

Για το τυχόν

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \in \mathcal{A} \odot H$$

υπολογίζουμε,

$$\langle u, u\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \right\rangle = \langle \phi_n([a_i^\star a_j])\,(x_1, ..., x_n), (x_1, ..., x_n)\rangle_{H^n} \geq 0$$

διότι ο πίνακας $[a_i^\star a_j]$ είναι θετικός στην $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ και η ϕ είναι n-θετική ως πλήρως θετική. Επομένως, η $\langle , \rangle$ είναι θετικά ημιορισμένη. Οι θετικά ημιορισμένες sesquilinear μορφές ικανοποιούν την ανισότητα Cauchy-Schwarz, δηλαδή

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leq \langle u, u\rangle\, \langle v, v\rangle\,, \forall\, u\,, v \in \mathcal{A} \odot H$$

Έτσι, έχουμε ότι ο

$$N = \{u \in \mathcal{A} \odot H\,, \langle u, u\rangle = 0\} = \{u \in \mathcal{A} \odot H\,, \langle u, v\rangle = 0\,, \forall\, v \in \mathcal{A} \odot H\}$$

είναι υπόχωρος του $\mathcal{A} \odot H$. Επομένως, η διγραμμική μορφή που επάγεται στον χώρο πηλίκο $(\mathcal{A}\odot H)/N$ που ορίζεται ως

$$\langle u+N, v+N\rangle = \langle u, v\rangle\,, \forall\, u\,, v\in \mathcal{A}\odot H$$

είναι εσωτερικό γινόμενο. Έστω K ο χώρος Hilbert που είναι η πλήρωση του χώρου με εσωτερικό γινόμενο $(\mathcal{A}\odot H)/N$. Αν $a\in\mathcal{A}$, τότε ορίζουμε τη διγραμμική απεικόνιση

$$\pi_0(a):\mathcal{A}\times H\to\mathcal{A}\odot H\ \ ,\pi_0(a)(a',x) = (a\,a')\otimes x$$

και σύμφωνα με την Καθολική Ιδιότητα του Αλγεβρικού Τανυστικού Γινομένου, επάγεται μοναδική γραμμική απεικόνιση $\pi(a):\mathcal{A}\odot H\to\mathcal{A}\odot H$ με την ιδιότητα $\pi(a)(a'\otimes x) = (a\,a')\otimes x$ για κάθε $a'\in\mathcal{A}\,, x\in H$. Επομένως, για κάθε

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i\otimes x_i\in\mathcal{A}\odot H$$

έχουμε

$$\pi(a)(u) = \sum_{i=1}^{n}(a\,a_i)\otimes x_i.$$

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η $\pi(a)$ αφήνει τον N αναλλοίωτο. Έχουμε,

$$\left\langle \pi(a)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\otimes x_j\right), \pi(a)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes x_i\right)\right\rangle = \sum_{i\,,j=1}^{n}\langle\phi(a_i^{\star}\,a^{\star}\,a\,a_j)(x_j), x_i\rangle$$

Ο πίνακας $[a_i^{\star}\,a^{\star}\,a\,a_j]$ της $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ γράφεται ως

$$\begin{bmatrix} a_1^{\star} & 0 & \dots & 0\\ a_2^{\star} & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_n^{\star} & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a^{\star} & 0 & \dots & 0\\ 0 & a^{\star} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a^{\star}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0\\ 0 & a & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}$$

Αν θέσουμε $A = a\, I_n$, $V = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ τότε $[a_i^\star\, a^\star\, a\, a_j] = V^\star\, A^\star\, A\, V$.

Για τον πίνακα αυτόν, έχουμε

$$\langle V^\star\, A^\star\, A\, V\, x, x\rangle = \langle A\, V\, x, A\, V\, x\rangle \leq ||A||^2\, ||V\, x||^2 = ||A||^2\, \langle V^\star\, V\, x, x\rangle$$

Συνεπώς,

$$[a_i^\star\, a^\star\, a\, a_j] \leq ||a||^2\, [a_i^\star\, a_j]$$

και εφαρμόζοντας την θετική ϕ_n ισχύει

$$\phi_n([a_i^\star\, a^\star\, a\, a_j]) \leq ||a||^2\, \phi_n([a_i^\star\, a_j])$$

Μπορούμε τώρα να γράψουμε

$$\begin{aligned} \left\langle \pi(a)\, \left(\sum_{j=1}^n a_j \otimes x_j\right), \pi(a)\, \left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\right)\right\rangle &= \sum_{i\,,j=1}^n \langle \phi(a_i^\star\, a^\star\, a\, a_j)(x_j), x_i\rangle \\ &\leq ||a||^2\, \sum_{i\,,j=1}^n \langle \phi(a_i^\star\, a_j)(x_j), x_i\rangle_H \\ &= ||a||^2\, \left\langle \sum_{j=1}^n a_j \otimes x_j, \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \right\rangle \end{aligned}$$

γεγονός που αποδεικνύει ότι η $\pi(a)$ αφήνει τον N αναλλοίωτο και επομένως επάγει μια γραμμική απεικόνιση στον χώρο πηλίκο $(\mathcal{A} \odot H)/N$ που την συμβολίζουμε ξανά με $\pi(a)$. Μάλιστα, η προηγούμενη σχέση μας έδειξε ότι η $\pi(a)$ είναι φραγμένη με $||\pi(a)|| \leq ||a||$, οπότε η $\pi(a)$ επεκτείνεται σε έναν γραμμικό και φραγμένο τελεστή στον K, που συνεχίζουμε να συμβολίζουμε με $\pi(a)$. Η παραπάνω διαδικασία έγινε για κάθε $a \in \mathcal{A}$, οπότε έχουμε απεικόνιση $\pi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(K)$. Ας είναι τώρα $a\,, b \in \mathcal{A}$ και $k \in \mathbb{C}$. Για κάθε

$$\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i \in \mathcal{A} \odot H$$

έχουμε από ορισμό της π

$$\begin{aligned}
\pi(a + k\, b)\, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i + N \right) &= \pi(a + k\, b)\, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \right) + N \\
&= \sum_{i=1}^{n} [(a + k\, b)\, a_i] \otimes x_i + N \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a\, a_i + k\, b_i) \otimes x_i + N \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a\, a_i) \otimes x_i + k\, \sum_{i=1}^{n} (b\, a_i) \otimes x_i + N \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} (a\, a_i) \otimes x_i + N \right] + k\, \left[\sum_{i=1}^{n} (b\, a_i) \otimes x_i + N \right] \\
&= (\pi(a) + k\, \pi(b))\, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i + N \right)
\end{aligned}$$

άρα η π είναι γραμμική. Έτσι, και λόγω της σχέσης $||\pi(a)|| \leq ||a||\,, \forall\, a \in \mathcal{A}$, έχουμε ότι η π είναι φραγμένη, άρα η γραμμικότητα επεκτείνεται και στην πλήρωση λόγω της συνέχειας. Συνεχίζουμε τους υπολογισμούς

$$\begin{aligned}
\pi(a\, b)\, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i + N \right) &= \pi(a\, b)\, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \right) + N \\
&= \sum_{i=1}^{n} (a\, b\, a_i) \otimes x_i + N \\
&= \sum_{i=1}^{n} a\, (b\, a_i) \otimes x_i + N \\
&= \pi(a)\, \left(\sum_{i=1}^{n} (b\, a_i) \otimes x_i \right) + N \\
&= \pi(a)\, \left[\pi(b)\, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \right) \right] + N \\
&= (\pi(a) \circ \pi(b))\, \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i + N \right)
\end{aligned}$$

άρα η π διατηρεί και τα γινόμενα. Επίσης,

$$\pi(a^\star)\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i + N\right) = \pi(a^\star)\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\right) + N = \sum_{i=1}^n (a^\star a_i) \otimes x_i + N$$

Απ' την άλλη, για κάθε

$$w = \sum_{j=1}^m u_j \otimes v_j + N \in (\mathcal{A} \odot H)/N$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i + N, (\pi(a))^\star(w) \right\rangle &= \left\langle \pi(a)\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i + N\right), w \right\rangle \\
&= \left\langle \pi(a)\left(\sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i\right) + N, w \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n (a\, a_i) \otimes x_i, \sum_{j=1}^m u_j \otimes v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle a\, a_i \otimes x_i, u_j \otimes v_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle \phi(u_j^\star\, a\, a_i)(x_i), v_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle \phi((a^\star u_j)^\star a_i)(x_i), v_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle a_i \otimes x_i, (a^\star u_j) \otimes v_j \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i, \sum_{j=1}^m (a^\star u_j) \otimes v_j \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i + N, \sum_{j=1}^m (a^\star u_j) \otimes v_j + N \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i \otimes x_i + N, \pi(a^\star)(w) \right\rangle
\end{aligned}$$

Απεδείχθη ότι για κάθε

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i + N\,,\sum_{j=1}^{m} u_j \otimes v_j + N \in (A \odot H)/N$$

έχουμε

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i + N, (\pi(a))^{\star}(w) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i + N, \pi(a^{\star})(w) \right\rangle.$$

Άρα, οι τελεστές $(\pi(a))^{\star}$ και $\pi(a^{\star})$ ταυτίζονται στο πυκνό $(A \odot H)/N$ και άρα, λόγω συνέχειας της π, θα ταυτίζονται στον K δηλαδή $\pi(a^{\star}) = (\pi(a))^{\star}$ Τέλος, είναι προφανές ότι $\pi(1) = Id_K$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι η π είναι μοναδιαίος $\star$ ομομορφισμός. Ορίζουμε

$$V : H \to K\,, V(x) = 1 \otimes x + N$$

και για κάθε $x\,, y \in H\,, k \in \mathbb{C}$ υπολογίζουμε

$$V(x + k\,y) = 1 \otimes (x + k\,y) + N = (1 \otimes x + N) + k\,(1 \otimes y + N) = V(x) + k\,V(y)$$

που σημαίνει ότι ο V είναι γραμμικός. Επιπλέον,

$$||V(x)||^2 = \langle V(x), V(x)\rangle = \langle 1 \otimes x, 1 \otimes x\rangle = \langle \phi(1)(x), x\rangle \leq ||\phi(1)||\,||x||^2$$

που σημαίνει ότι η V είναι φραγμένη με $||V||^2 = ||\phi(1)||$ Τέλος, για κάθε $x\,, y \in H$ και κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\langle V^{\star}\,\pi(a)\,V(x), y\rangle = \langle \pi(a)(1 \otimes x), 1 \otimes y\rangle = \langle a \otimes x, 1 \otimes y\rangle = \langle \phi(a)(x), y\rangle$$

δηλαδή, $V^{\star}\,\pi(a)\,V = \phi(a)$.

■

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι αν $\phi(1) = 1$, τότε η V είναι ισομετρία και άρα μπορούμε να ταυτίσουμε τον H με τον $V(H) \subseteq K$. Με αυτή την ταύτιση, ο $V^\star$ γίνεται η προβολή του K επί του H, έστω $V^\star = P_H$, οπότε

$$\phi(a) = P_H\, \pi(a)\, V\,, \forall\, a \in \mathcal{A}$$

Αν $T \in \mathbb{B}(K)$, τότε ο $P|_H\, T|_H \in \mathbb{B}(H)$ λέγεται συμπίεση του T στον H. Αν γράψουμε $K = H \oplus H^\perp$ και θεωρήσουμε τον T ως 2×2 πίνακα τελεστών, τότε η συμπίεση του T στον H είναι το $(1, 1)$ κελί για αυτόν τον τελεστή πίνακα. Μάλιστα, όταν $\phi(1) = 1$, το Θεώρημα του Stinespring δείχνει ότι κάθε πλήρως θετική απεικόνιση στον $\mathbb{B}(H)$ είναι η συμπίεση στον H ενός $\star$ ομομορφισμού σε έναν χώρο Hilbert που περιέχει τον H. Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι το Θεώρημα Stinespring είναι η φυσική γενίκευση του θεωρήματος Gelfand - Naimark - Segal. [3] Πράγματι, έστω $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ένα state της $C^\star$ άλγεβρας $\mathcal{A}$, δηλαδή μια γραμμική, θετική (άρα και πλήρως θετική) μορφή νόρμας $||\phi|| = 1$. Θα ακολουθήσουμε τα βήματα της απόδειξης. Στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{A} \odot \mathbb{C} \cong \mathcal{A}$ ορίζουμε τη sesquilinear μορφή

$$\langle a \otimes 1, b \otimes 1 \rangle := \phi(b^\star\, a)\,, \forall\, a\,, b \in \mathcal{A}$$

που είναι θετικά ημιορισμένη και θεωρούμε τον υπόχωρο

$$N = \{a \in \mathcal{A}\,, \phi(a^\star\, a) = 0\}$$

οπότε ο χώρος πηλίκο εφοδιάζεται με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle a + N, b + N \rangle = \phi(b^\star\, a)\,, \forall\, a\,, b \in \mathcal{A}.$$

Η πλήρωση αυτού του χώρου, είναι χώρος Hilbert, έστω K, και από Θεώρημα Stinespring υπάρχει μοναδιαίος $\star$ ομομορφισμός $\pi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(K)$ και γραμμικός και φραγμένος τελεστής $V : \mathbb{C} \to K$ με $||V|| = ||\phi(1)||^2$ ώστε

$$\phi(a) = V^\star\, \pi(a)\, V\,, \forall\, a \in \mathcal{A}$$

Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ έχουμε $V(z) = V(z \cdot 1) = z\,V(1)$ οπότε για κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\overline{V^\star(x)} = 1 \cdot \overline{V^\star(x)} = \langle 1, V^\star(x) \rangle = \langle V(1), x \rangle$$

Συνεπώς,

$$V^\star(x) = \langle x, V(1) \rangle \,, \forall\, x \in K$$

Άρα, για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \phi(a) &= \phi(a)\,1 \cdot 1 \\ &= (V^\star\, \pi(a)\, V)(1) \\ &= V^\star(\pi(a)(V(1)) \\ &= \langle \pi(a)\, V(1), V(1) \rangle \end{aligned}$$

Αν οι $\mathcal{A}\,, H$ είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}^n\,, H \cong \mathbb{C}^m$ για κάποιους φυσικούς αριθμούς $n\,, m \in \mathbb{N}$, οπότε $\mathcal{A} \odot H \cong \mathbb{C}^n \odot \mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^{n\,m}$ (Εφαρμογή 1.1.1). Άρα, κάθε υπόχωρος του $\mathcal{A} \odot H$ έχει πεπερασμένη διάσταση, οπότε και κάθε πηλίκο του $\mathcal{A} \odot H$ έχει πεπερασμένη διάσταση, άρα και ο χώρος K.

Κεφάλαιο 5

Πλήρως θετικές απεικονίσεις σε χώρους πινάκων

5.1 Πλήρως θετικές απεικονίσεις με τιμές στην $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$

Έστω $\mathcal{M}$ ένας χώρος τελεστών και έστω $\{e_i \in \mathbb{C}^n \,, 1 \leq i \leq n\}$ η ορθοκανονική βάση για τον $\mathbb{C}^n$. Αν $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, θα συμβολίζουμε το κελί (i,j) του πίνακα A με

$$A_{(i,j)} = \langle A(e_j), e_i \rangle \,, \forall\, 1 \leq i \,, j \leq n.$$

Αν $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, τότε ορίζουμε την απεικόνιση

$$s_\phi : \mathbb{M}_n(\mathcal{M}) \to \mathbb{C} \;, s_\phi([a_{i\,j}])) := \frac{1}{n} \sum_{i\,,j=1}^{n} \phi([a_{i\,j}])_{(i,j)}$$

Ισοδύναμος ορισμός είναι ο εξής : Αν $x = e_1 \otimes ... \otimes e_n \in \mathbb{C}^{n^2}$, τότε

$$s_\phi([a_{i\,j}]) = \frac{1}{n} \langle \phi_n([a_{i\,j}])x, x \rangle$$

Η s_ϕ είναι γραμμική διότι για κάθε $[a_{i\,j}] \,, [b_{i\,j}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{M}) \;, k \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$s_\phi([a_{i\,j}] + k\,[b_{i\,j}]) = s_\phi([a_{i\,j} + k\,b_{i\,j}]) = \frac{1}{n} \sum_{i\,,j=1}^{n} \phi(a_{i\,j} + k\,b_{i\,j})_{(i\,j)}$$

και από γραμμικότητα της ϕ παίρνουμε

$$s_\phi([a_{i\,j}] + k\,[b_{i\,j}]) = \frac{1}{n}\ \sum_{i\,,j=1}^{n} (\phi(a_{i\,j}) + k\,\phi(b_{i\,j}))_{(i\,j)} = s_\phi([a_{i\,j}]) + k\,s_\phi([b_{i\,j}])$$

Έτσι, ορίζεται η απεικόνιση

$$L(\mathcal{M}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C})) \to L(\mathbb{M}_n(\mathcal{M}), \mathbb{C})\ , \phi \mapsto s_\phi$$

Είναι προφανές ότι η παραπάνω απεικόνιση είναι γραμμική. Επίσης, αν το $\mathcal{M}$ περιέχει το 1 και $\phi(1) = I_n$, τότε $s_\phi(I_n)) = 1$. Αντίστροφα, αν $s : \mathbb{M}_n(\mathcal{M}) \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε ορίζουμε

$$\phi_s : \mathcal{M} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\ , (\phi_s(a))_{(i,j)} = n\,s(a \otimes E_{i\,j})\,, \forall\,1 \leq i\,, j \leq n$$

όπου $a \otimes E_{i\,j}$ είναι ο πίνακας που έχει παντού 0 και στη θέση (i, j) έχει το a. Η ϕ_s είναι γραμμική διότι για κάθε $a\,, b \in \mathcal{M}\,, k \in \mathbb{C}\ , 1 \leq i\,, j \leq n$ ισχύει

$$\begin{aligned}
(\phi_s(a + k\,b))_{(i\,,j)} &= n\,s((a + k\,b) \otimes E_{i\,,j}) \\
&= n\,s(a \otimes E_{i\,,j}) + k\,n\,s(b \otimes E_{i\,j}) \\
&= (\phi_s(a) + k\,\phi_s(b))_{(i\,,j)}
\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε ορίσει και την απεικόνιση

$$L(\mathbb{M}_n(\mathcal{M}), \mathbb{C}) \to L(\mathcal{M}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))\ , s \mapsto \phi_s$$

η οποία είναι προφανώς γραμμική διότι για κάθε $s\,, t \in L(\mathbb{M}_n(\mathcal{M}), \mathbb{C})\,, k \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}
(\phi_{s+k\,t}(a))_{(i\,,j)} &= n\,(s + k\,t)(a \otimes E_{i\,,j}) \\
&= n\,s(a \otimes E_{i\,,j}) + k\,n\,t(a \otimes E_{i\,,j}) \\
&= ((\phi_s + k\,\phi_t)(a))_{(i\,,j)}
\end{aligned}$$

για κάθε $a \in \mathcal{M}$ $, 1 \leq i\,, j \leq n$. Θα αποδείξουμε ότι οι $\phi \to s_\phi$ και $s \to \phi_s$ είναι η μια αντίστροφη της άλλης. Για τον σκοπό αυτό, έστω $\phi \in L(\mathcal{M}, \mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ και έστω $s \in L(\mathbb{M}_n(\mathcal{M}), \mathbb{C})$ και θα αποδείξουμε ότι $s_{\phi_s} = s$ και $\phi_{s_\phi} = \phi$. Πράγματι, για κάθε $[a_{i\,j}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{M})$ έχουμε

$$s_{\phi_s}([a_{i\,j}]) = \frac{1}{n} \sum_{i\,,j=1}^{n} \phi_s([a_{i\,j}])_{(i,j)} = \frac{1}{n} \sum_{i\,,j=1}^{n} n\, s(a_{i\,j} \otimes E_{i\,j}) = s([a_{i\,j}])$$

και για κάθε $a \in \mathcal{M}$ και κάθε $i\,, j = 1, ..., n$ παίρνουμε

$$(\phi_{s_\phi}(a))_{(i\,j)} = n\, s_\phi(a \otimes E_{i\,j}) = n\, \frac{1}{n}\, (\phi(a))_{(i,j)} = (\phi(a))_{(i,j)}$$

που είναι τα ζητούμενα.

Θεώρημα 5.1.1 *Έστω $S \subseteq \mathcal{A}$ σύστημα τελεστών και έστω $\phi : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ μια γραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

i) Η ϕ είναι πλήρως θετική

ii) Η ϕ είναι n-θετική

iii) Η s_ϕ είναι θετική.

Απόδειξη: Η συνεπαγωγή $i) \implies ii)$ είναι προφανής.Για την συνεπαγωγή $ii) \implies iii)$ αν θεωρήσουμε το τυχόν $[a_{i\,j}]_{i\,,j=1}^n \in \mathbb{M}_n(S)^+$, τότε από τον ισοδύναμο ορισμό της s_ϕ έχουμε ότι

$$s_\phi([a_{i\,j}]) = \frac{1}{n}\, \langle \phi_n([a_{i\,j}])\, x, x\rangle \geq 0$$

διότι ο πίνακας $\phi_n([a_{i\,j}])$ είναι θετικός, αφού $[a_{i\,j}] \in \mathbb{M}_n(S)^+$ και η ϕ_n είνα θετική. Υποθέτουμε τώρα ότι η s_ϕ είναι θετική και θα πρέπει να αποδείξουμε ότι η ϕ είναι πλήρως θετική. Σύμφωνα με το Θεώρημα Krein (Θεώρημα 3.1.4), η s_ϕ επεκτείνεται σε ένα θετικό και γραμμικό συναρτησοειδές $s : \mathbb{M}_n(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$. Εφ' όσον η s επεκτείνει την s_ϕ η απεικόνιση

$$\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})\,, \psi(a)_{(i\,,j)} = n\, s(a \otimes E_{i\,j})$$

που αντιστοιχεί στην s, επεκτείνει τη ϕ. Προφανώς, αν αποδείξουμε ότι η ψ είναι πλήρως θετική, τότε και η ϕ θα είναι πλήρως θετική. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Για να αποδείξουμε ότι η ψ

είναι m - θετική, σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.1.3,είναι αρκετό να θεωρήσουμε ένα θετικό στοιχείο της $\mathbb{M}_m(\mathcal{A})$ της μορφής $[a_i^\star\, a_j]$ και να αποδείξουμε ότι $\psi_m([a_i^\star\, a_j]) \geq 0$ στην $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$. Θεωρούμε λοιπόν τυχόν $x = x_1 \otimes ... \otimes x_m$, όπου

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{j\,k}\, e_k \in \mathbb{C}^n\,, 1 \leq j \leq m$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle \psi_m([a_i^\star\, a_j])x, x\rangle &= \sum_{i\,,j=1}^{m} \langle \psi(a_i^\star\, a_j)\, x_j, x_i\rangle \\
&= \sum_{i\,,j\,,j\,,\ell} \lambda_{j\,k}\, \overline{\lambda_{i\,\ell}}\, \langle \psi(a_i^\star\, a_j)\, e_k, e_\ell\rangle \\
&= \sum_{i\,,j\,,k\,,\ell} \lambda_{j\,k}\, \overline{\lambda_{i\,\ell}}\, s(a_i^\star\, a_j \otimes E_{\ell\,k})
\end{aligned}$$

Έστω A_i ο $n \times n$ ο πίνακας που η πρώτη του στήλη είναι η $(\lambda_{i\,1}, ..., \lambda_{i\,n})$ και οι υπόλοιπες είναι μηδενικές. Τότε,

$$A_i^\star\, A_j = \sum_{k\,,\ell} \overline{\lambda_{i\,\ell}}\, \lambda_{j\,k}\, E_{\ell\,k}$$

οπότε,

$$\begin{aligned}
\langle \psi_m([a_i^\star\, a_j])x, x\rangle &= \sum_{i\,,j\,,k\,,\ell} \lambda_{j\,k}\, \overline{\lambda_{i\,\ell}}\, s(a_i^\star\, a_j \otimes E_{\ell\,k}) \\
&= \sum_{i\,,j} s(a_i^\star\, a_j \otimes A_i^\star\, A_j) \\
&= s\,\left[\left(\sum_i a_i \otimes A_i\right)^\star \left(\sum_j a_j \otimes A_j\right)\right]
\end{aligned}$$

και η τελευταία παράσταση είναι θετική διότι ο πίνακας

$$\left(\sum_i a_i \otimes A_i\right)^\star \left(\sum_j a_j \otimes A_j\right)$$

είναι θετικός στην $\mathbb{M}_n(\mathcal{A})$ και η s είναι θετική.

■

5.2 Θεώρημα Επέκτασης τύπου Arveson

Θεώρημα 5.2.1 *Ας είναι $\mathcal{A}$ μια μοναδιαία $C^\star$ άλγεβρα, $S \subseteq \mathcal{A}$ ένα σύστημα τελεστών και $\phi : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ μια πλήρως θετική απεικόνιση. Τότε, υπάρχει πλήρως θετική απεικόνιση $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ που επεκτείνει τη ϕ.*

Απόδειξη: Έστω s_ϕ το θετικό γραμμικό συναρτησοειδές στον $\mathbb{M}_n(S)$ που προκύπτει από τη ϕ και επεκετείνουμε από Θεώρημα Krein (Θεώρημα 3.1.4) την s_ϕ σε ένα γραμμικό και θετικό συναρτησοειδές $s : \mathbb{M}_n(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα η απεικόνιση ψ που αντιστοιχεί στην s είναι πλήρως θετική και η ψ επεκτείνει τη ϕ.

■

Τα παραπάνω θεωρήματα διατυπώνονται και για χώρους τελεστών $\mathcal{M}$ που περιέχουν τη μονάδα, και για γραμμικές απεικονίσεις $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ με $\phi(1) = I_n$. Υπάρχει μια περίπτωση, όπου η παραπάνω αντιστοιχία μεταξύ των γραμμικών συναρτησοειδών στο $\mathbb{M}_n(S)$ και των γραμμικών απεικονίσεων του S στην $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ δεν συμπεριφέρεται καλά. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $s : \mathbb{M}_n(S) \to \mathbb{C}$ είναι θετική και μοναδιαία, δηλαδή $||s|| = 1$. Τότε, από την s έχουμε την $\phi_s : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ η οποία δεν είναι απαραίτητα μοναδιαία, εκτός αν

$$s(E_{i\,j}) = \begin{cases} 1/n & ,i = j \\ 0 & ,i \neq j \end{cases}$$

Για σύστημα τελεστών S ορίζουμε

$$S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+ := \left\{ \sum_{i=1}^{k} p_i \otimes Q_i \,, p_i \in S^+ \,, Q_i \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+ \,, 1 \leq i \leq k \,, k \in \mathbb{N} \right\}$$

και από τον ορισμό προκύπτει ότι $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+ \subseteq \mathbb{M}_n(S)^+$. Έχουμε αποδείξει ότι αν έχουμε γραμμική απεικόνιση $\phi : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, τότε αυτή είναι πλήρως θετική αν, και μόνο αν, η $s_\phi : \mathbb{M}_n(S) \to \mathbb{C}$ είναι θετική. Το ακόλουθο θεώρημα μας λέει ότι αρκεί η θετικότητα της s_ϕ στο $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$.

Θεώρημα 5.2.2 *Αν $\phi : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ είναι γραμμική, τότε η ϕ είναι θετική αν, και μόνο αν, η s_ϕ λαμβάνει θετικές τιμές στο $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η ϕ είναι θετική. Θεωρούμε $p \in S^+ , Q \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$. Για να αποδείξουμε ότι η s_ϕ λαμβάνει θετικές τιμές στο $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$, είναι αρκετό να αποδείξουμε ότι $s_\phi(p \otimes Q)$ είναι θετικό. Μάλιστα, επειδή ο Q μπορεί να γραφεί σαν πεπερασμένο άθροισμα πινάκων της μορφής $[\bar{a}_i\, a_j]$ (Εφαρμογή 3.1.3) είναι επίσης αρκετό να υποθέσουμε ότι $Q = [\bar{a}_i\, a_j]$. Τότε, $p \otimes Q = [\bar{a}_i\, a_j\, p]$ και

$$n\, s_\phi(p \otimes Q) = \sum_{i\,,j} \phi(\bar{a}_i\, a_j\, p)_{(i,j)} = \langle \phi(p)\, x, x\rangle \geq 0$$

διότι $p \in S^+$, η ϕ είναι θετική, και άρα $\phi(p) \geq 0$ όπου $x = a_1\, e_1 + ... + a_n\, e_n \in \mathbb{C}^n$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η s_ϕ είναι θετική στο $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$. Έστω $p \in S^+$ και έστω $x = a_1\, e_1 + ... + a_n\, e_n \in \mathbb{C}^n$. Υπολογίζουμε

$$\langle \phi(p)\, x, x\rangle = \sum_{i\,,j} \langle \phi(\bar{a}_i\, a_j\, p) e_j, e_i\rangle = n\, s_\phi(\bar{a}_i\, a_j\, p)) \geq 0$$

διότι ο πίνακας $[\bar{a}_i\, a_j\, p]$ ανήκει στο $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ και η s_ϕ είναι θετική στο σύνολο αυτό. Άρα, η ϕ είναι θετική.

∎

Στο σημείο, θα χρειαστεί να αναφέρουμε το Θεώρημα του Krein για κώνους, το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενες αποδείξεις.

Θεώρημα 5.2.3 (Θεώρημα Krein για κώνους) *Έστω $\mathcal{A}$ μια $C^\star$ άλγεβρα και έστω $C \subseteq \mathcal{A}_h$ κλειστός κυρτός κώνος στον πραγματικό γραμμικό χώρο $\mathcal{A}_h = \{a \in \mathcal{A} \,, a^\star = a\}$ που είναι γνήσιος, δηλαδή $C \cap (-C) = \{0\}$. Αν $x \in \mathcal{A} \setminus C$, τότε υπάρχει ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές $s : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ τέτοιο, ώστε $s(C) \subseteq \mathbb{R}^+$ ενώ $s(x) \notin \mathbb{R}^+$.*

Απόδειξη: Εφ'όσον $\mathcal{A} = \mathcal{A}_h + i\,\mathcal{A}_h$, γράφοντας $x = x_1 + i\, x_2$, όπου $x_i \in \mathcal{A}_h \,, 1 \leq i \leq 2$ έχουμε ότι τουλάχιστον ένα εκ των $x_1 \,, x_2$ δεν ανήκει στο C και το συμβολίζουμε με x_0. Το C είναι κλειστός κυρτός κώνος στον $\mathcal{A}_h$ και $x_0 \in \mathcal{A}_h \setminus C$. Από διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχουν (πραγματικό και γραμμικό) φραγμένο συναρτησοειδές $\omega : \mathcal{A}_h \to \mathbb{R}$ και σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $\omega(x_0) < c$ και $\omega(y) \geq c \,, \forall\, y \in C$. Ισχύει ότι $c \leq 0$ διότι $0 = \omega(0) \geq c$ (αφού $0 \in C$). Έστω $z \in C$. Επειδή το C είναι κώνος, έχουμε $n\,z \in C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε λόγω της σχέσης $\omega(y) \geq c\,, \forall\, y \in C$ προκύπτει $n\,\omega(z) = \omega(n\,z) \geq c\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα $\omega(z) \geq \dfrac{c}{n}\,, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Αφήνοντας το n στο άπειρο, προκύπτει $\omega(z) \geq 0$. Συνεπώς, $\omega(C) \subseteq \mathbb{R}^+$. Επεκτείνουμε τώρα την ω σε μια μιγαδική γραμμική απεικόνιση $s : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ορίζοντας $s(x+i\,y) = \omega(x)+i\,\omega(y)\,, x\,, y \in \mathcal{A}_h$. Προφανώς, η s επεκτείνει την ω, οπότε η s είναι θετική στο C και $s(x) \notin \mathbb{R}^+$ διότι $s(x_0) = \omega(x_0) < 0$.

■

Θεώρημα 5.2.4 *Έστω S ένα σύστημα τελεστών. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν*

i) Κάθε θετική απεικόνιση $\phi : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ είναι πλήρως θετική

ii) Κάθε μοναδιαία θετική απεικόνιση $\phi : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ είναι πλήρως θετική

iii) Το $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ είναι πυκνό στον $\mathbb{M}_n(S)^+$.

Απόδειξη: Προφανώς, το $i)$ συνεπάγεται το $ii)$.Για την συνεπαγωγή $ii) \implies i)$ δείτε εδώ [4] σελ.82. Άσκηση 6.2. Θα αποδείξουμε τώρα την ισοδυναμία $i) \iff iii)$. Αν το $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ είναι πυκνό στον $\mathbb{M}_n(S)^+$ και η $\phi : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ είναι θετική, τότε η s_ϕ είναι θετική στο πυκνό $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$, άρα λόγω συνέχειας της s_ϕ έχουμε θετικότητα σε όλο το $\mathbb{M}_n(S)^+$. Έτσι, η ϕ είναι θετική. Για το αντίστροφο, ας υποθέσουμε ότι το $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ δεν είναι πυκνό στον $\mathbb{M}_n(S)^+$. Έστω σταθερό $p \in \mathbb{M}_n(S)^+$ που δεν ανήκει στην κλειστή θήκη του $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$. Από το θεώρημα του Krein για κώνους(Θεώρημα 5.2.3), υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές στον $\mathbb{M}_n(S)$ που είναι θετικό στο $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ αλλά τέτοιο, ώστε $s(p) \notin \mathbb{R}^+$. Τότε, η γραμμική απεικόνιση $\phi_s : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, που επάγεται από την s είναι θετική αλλά όχι πλήρως θετική, άτοπο.

■

Εφαρμογή 5.2.1 *Έστω S ένα σύστημα τελεστών. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν*

i) Για κάθε $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{B}$, κάθε θετική απεικόνιση $\phi : S \to \mathcal{B}$ είναι πλήρως θετική.

ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε θετική απεικόνιση $\phi : S \to \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ είναι πλήρως θετική.

iii) Το $S^+ \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C})^+$ είναι πυκνό στον $\mathbb{M}_n(S)^+$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.2.4 τα $ii)$ και $iii)$ είναι ισοδύναμα. Επίσης, είναι προφανές ότι $i) \implies ii)$. Για να αποδείξουμε ότι $ii) \implies i)$, είναι αρκετό να υποθέσουμε ότι $\mathcal{B} = \mathbb{B}(H)$. Δοθέντος $[a_{ij}] \in \mathbb{M}_n(S)^+$, για να αποδείξουμε ότι το $\phi_n([a_{ij}])$ είναι θετικό, αρκεί να θεωρήσουμε $x_1, ..., x_n \in H$ και να ελέγξουμε ότι

$$\sum_{i,j} \langle \phi(a_{ij}) x_j, x_i \rangle \geq 0.$$

Έστω $\mathcal{F} = span\,\{x_1, ..., x_n\} \subseteq H$ και έστω $\psi : S \to \mathbb{B}(\mathcal{F})$ η συμπίεση της ϕ στον $\mathbb{B}(\mathcal{F})$. Με την ταύτιση $\mathbb{B}(\mathcal{F}) \cong \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$, όπου $k = \dim(\mathcal{F})$, έχουμε από το $ii)$ ότι η ψ είναι πλήρως θετική και συνεπώς,

$$0 \leq \sum_{i,j} \langle \psi(a_{ij})\, x_j, x_i \rangle = \sum_{i,j} \langle \phi(a_{ij})\, x_j, x_i \rangle$$

όπως θέλαμε

■

Ορισμός 5.2.1 *Ας είναι S ένα σύστημα τελεστών και $x \in S$. Θα λέμε ότι το S έχει μια διαμέριση της μονάδας για το x, αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν θετικά στοιχεία $p_1, ..., p_n \in S$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ με*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \leq 1\,, |\lambda_i| \leq ||x||\,, 1 \leq i \leq n$$

και τέτοια, ώστε

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, p_i \right\| < \epsilon$$

Για ένα υποσύνολο $M \subseteq S$ θα λέμε ότι το S έχει μια διαμέριση της μονάδας για το M αν το S έχει μια διαμέρισης της μονάδας για κάθε $x \in M$.

Εφαρμογή 5.2.2 *Ας είναι S ένα σύστημα τελεστών και $x \in S$ με $||x|| \leq 1$. Τα ακόλουθα ισοδυναμούν*

i) Το S έχει διαμέριση της μονάδας για το x

ii) Κάθε θετική απεικόνιση ϕ με πεδίο ορισμού το S ικανοποιεί την $||\phi(x)|| \leq ||\phi(1)||$.

iii) Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^\star & 1 \end{bmatrix}$ ανήκει στην κλειστή θήκη του $S^+ \otimes \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+$.

Απόδειξη: Η συνεπαγωγή $i) \implies ii)$ έχει αποδειχθεί. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει το

$ii)$ και θα αποδείξουμε το $iii)$. Ας υποθέσουμε, προς εις' άτοπον απαγωγή, ότι το $iii)$ δεν ισχύει. Υπάρχει τότε γραμμικό συναρτησοειδές $s : \mathbb{M}_2(S) \to \mathbb{C}$ ώστε

$s\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^\star & 1 \end{bmatrix}\right) < 0$ ενώ η s είναι θετική στο $S^+ \otimes \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+$. Έστω $\phi : S \to \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ η γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί στην s. Η ϕ είναι θετική και εφ' όσον

$$\left\langle \begin{bmatrix} \phi(1) & \phi(x) \\ \phi(x)^\star & \phi(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \right\rangle = 2\, s \left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^\star & 1 \end{bmatrix}\right) < 0$$

προκύπτει ότι ο $\phi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^\star & 1 \end{bmatrix}\right)$ δεν είναι θετικός. Από την ϕ επάγεται μοναδιαία θετική απεικόνιση ϕ' και έχουμε ότι

$$\phi_2\left(\begin{bmatrix} 1 & x \\ x^\star & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \phi'(x) \\ \phi'(x)^\star & 1 \end{bmatrix}$$

δεν είναι θετικός, οπότε $||\phi'(x)|| > 1 = ||\phi'(1)||$, κάτι που αντίκειται στο $ii)$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $iii)$ είναι αληθής και για $\epsilon > 0$, ας θεωρήσουμε $p_i \in S^+$ και $Q_i \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^+ , i = 1, ..., n$ ώστε

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & x \\ x^\star & 1 \end{bmatrix} - \sum_i p_i \otimes Q_i \right\| < \epsilon$$

Οι πίνακες Q_i γράφονται

$$Q_i = \begin{bmatrix} r_i & \lambda_i \\ \overline{\lambda_i} & t_i \end{bmatrix} \, , r_i \geq 0 \, , t_i \geq 0$$

Θέτουμε $s_i = \dfrac{r_i + t_i}{2} \geq 0$ και παρατηρούμε ότι αν $s_i = 0$, τότε $\lambda_i = 0$. Η σχέση

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & x \\ x^\star & 1 \end{pmatrix} - \sum_i p_i \otimes Q_i \right\| < \epsilon$$

συνεπάγεται τις ακόλουθες ανισότητες

$$1-\epsilon < \sum_{i=1}^{n} r_i\, p_i < 1+\epsilon$$

$$1-\epsilon < \sum_{i=1}^{n} t_i\, p_i < 1+\epsilon$$

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, p_i \right\| < \epsilon$$

Μάλιστα,

$$1-\epsilon < \sum_{i=1}^{n} s_i\, p_i < 1+\epsilon$$

Θέτοντας $\lambda_i/s_i = 0$ όταν $s_i = 0$, έχουμε ότι

$$\left\| x - \sum_{i} (\lambda_i/s_i)\, s_i\, p_i \right\| < \epsilon$$

με $|\lambda_i/s_i| \leq 1$ Ώστε, το x διαμερίζεται ως προς το S.

■

Θεώρημα 5.2.5 *Αν S είναι σύστημα τελεστών και $\mathcal{M} \subseteq S$ τότε κάθε θετική απεικόνιση ϕ στο S έχει νόρμα $||\phi(1)||$ όταν περιοριστεί στο $\mathcal{M}$ αν, και μόνο αν το S έχει μια διαμέριση της μονάδας για το $\mathcal{M}$.*

Απόδειξη: Άμεση συνέπεια της Εφαρμογής 5.0.2

■

Θεώρημα 5.2.6 *Ας είναι $\mathcal{B}$ μια $C^\star$ άλγεβρα με μονάδα, $\mathcal{A}$ μια υπάλγεβρα της που περιέχει τη μονάδα και έστω $S = \mathcal{A} + \mathcal{A}^\star$. Τότε το S έχει μια διαμέριση της μονάδας για το $\mathcal{A}$*

Απόδειξη: Κάθε θετική απεικόνιση ϕ στο S ικανοποιεί την $||\phi(a)|| \leq ||\phi(1)||\,||a||\,, \forall\, a \in \mathcal{A}$. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.0.6, το S έχει μια διαμέριση της μονάδας για το $\mathcal{A}$.

■

Κεφάλαιο 6

Θεώρημα Arveson

6.1 Η τοπολογία BW

Θεωρούμε δύο χώρους Banach $(X, ||\cdot||), (Y, ||\cdot||)$. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, ο χώρος Banach $\mathbb{B}(X, Y^\star)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον χώρο Banach $BL(X \times Y)$. Ο τελευταίος με τη σειρά του, είναι ισόμορφος με τον $(X \widehat{\otimes}_\pi Y)^\star$. Επάγεται λοιπόν στον $B(X, Y^\star)$ η ασθενής $\star$ τοπολογία μέσω της παραπάνω ταύτισης [1]. Πράγματι, έστω το τυχόν $L \in \mathbb{B}(X, Y^\star)$. Ορίζουμε

$$B_L : X \times Y \to \mathbb{C}\,, B_L(x, y) = L(x)(y)$$

Η B_L είναι διγραμμική και από Καθολική Ιδιότητα του Αλγεβρικού Τανυστικού Γινομένου, επάγεται γραμμικό συναρτησοειδές στο $X \odot Y$, το οποίο συνεχίζουμε να συμβολίζουμε με B_L. Αν τώρα

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \in X \odot Y$$

τότε

$$\begin{aligned}|B_L(u)| &= \left|\sum_{i=1}^{n} B_L(x_i \otimes y_i)\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |B_L(x_i)(y_i)| \\ &\leq ||L||\, \sum_{i=1}^{n} ||x_i||\, ||y_i||\end{aligned}$$

και παίρνοντας infimum, προκύπτει $|B_L(u)| \leq ||L||\, \pi(u)$. Έτσι, η B_L ως γραμμική και φραγμένη στο πυκνό $X \otimes_\pi Y$ επεκτείνεται σε γραμμικό και φραγμένο συναρτησοειδές στον $X \widehat{\otimes}_\pi Y$, που συνεχίζουμε να συμβολίζουμε με B_L, άρα $B_L \in (X \widehat{\otimes}_\pi Y)^\star$. Θα λέμε λοιπόν ότι ένα δίκτυο $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ του $B(X, Y^\star)$ συγκλίνει σε κάποιο $L \in B(X, Y^\star)$ αν, και μόνο αν,

$$B_{L_\lambda} \to B_L$$

στην ασθενή $\star$ τοπολογία του $(X \widehat{\otimes}_\pi Y)^\star$. Την τοπολογία που επάγεται στον $B(X, Y^\star)$ την καλούμε BW τοπολογία.

Εφαρμογή 6.1.1 *Αν $(E, ||\cdot||)\,, (F, ||\cdot||)$ είναι χώροι Banach, $(T_i)_{i\in I}$ ένα δίκτυο γραμμικών και φραγμένων τελεστών $T_i : E \to F$ ομοιόμορφα φραγμένων από το M, δηλαδή, $||T_i|| \leq M\,, \forall\, i \in I$. Αν το δίκτυο $(T_i)_{i\in I}$ συγκλίνει κατά σημείο στο 0 σε ένα πυκνό υποσύνολο $D \subseteq E$, τότε συγκλίνει κατά σημείο στο 0 σε όλο το E.*

Απόδειξη: Έστω $x \in E$ και έστω $\epsilon > 0$. Λόγω πυκνότητας του D στο E, υπάρχει $d \in D$ ώστε $||x - d|| < \epsilon$. Από υπόθεση, το δίκτυο $(T_i(d))_{i\in I}$ συγκλίνει στο 0, άρα υπάρχει $i_0 \in I$ ώστε $||T_i(d)|| < \epsilon\,, \forall\, i \geq i_0$. Τότε, για κάθε $i \geq i_0$ προκύπτει

$$\begin{aligned}||T_i(x)|| &= ||T_i(x - d) + T_i(d)|| \\ &\leq ||T_i(x - d)|| + ||T_i(d)|| \\ &\leq ||T_i||\, ||x - d|| + \epsilon \\ &\leq (1 + M)\,\epsilon\end{aligned}$$

και άρα το δίκτυο $(T_i(x))_{i\in I}$ συγκλίνει στο 0.

$\blacksquare$

Εφαρμογή 6.1.2 *Έστω $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ένα φραγμένο δίκτυο στον $\mathbb{B}(X,Y^\star)$.Τότε, το L_λ συγκλίνει σε κάποιο $L\in\mathbb{B}(X,Y^\star)$ στην BW τοπολογία αν, και μόνο αν, το δίκτυο $(L_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει ασθενώς $\star$ στο $L(x)$ για κάθε $x\in X$.*

Απόδειξη: Αν το $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $L\in\mathbb{B}(X,Y^\star)$ στην BW τοπολογία, τότε $B_{L_\lambda}\to B_L$ ασθενώς $\star$ δηλαδή, $B_{L_\lambda}(\xi)\to B_L(\xi)\,,\forall\,\xi\in X\widehat{\otimes}_\pi Y$. Για κάθε $x\in X\,,y\in Y$, θεωρούμε το $\xi=x\otimes y$, οπότε $B_{L_\lambda}(x\otimes y)\to B_L(x\otimes y)$ ή ισοδύναμα $L_\lambda(x)(y)\to L(x)(y)$ Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $x\in X$ το δίκτυο $(L_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει ασθενώς $\star$ στο $L(x)$ στον χώρο $Y^\star$, όπως θέλαμε. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το $L_\lambda(x)$ συγκλίνει ασθενώς στο $L(x)$ ασθενώς $\star$ για κάθε $x\in X$, οπότε $L_\lambda(x)(y)\to L(x)(y)$ για κάθε $x\in X\,,y\in Y$ ή $B_{L_\lambda}(x\otimes y)\to B_L(x\otimes y)$ για κάθε $x\in X\,,y\in Y$. Λόγω γραμμικότητας των $B_{L_\lambda}\,,B_L$ έχουμε $B_{L_\lambda}(u)\to B_L(u)$ για κάθε $u\in X\otimes_\pi Y$. Εφ'όσον το $X\otimes_\pi Y$ είναι πυκνό στον $X\widehat{\otimes}_\pi Y$, το δίκτυο $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι φραγμένο, και $B_{L_\lambda}-B_L\to 0$ σημειακά στο πυκνό $X\otimes_\pi Y$ έπεται από Εφαρμογή 6.1.1 ότι $(B_{L_\lambda}-B_L)(\xi)\to 0$ για κάθε $\xi\in X\widehat{\otimes}_\pi Y$, οπότε το δίκτυο $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στη BW τοπολογία στο L.

$\blacksquare$

Αν $(H,\langle,\rangle)$ είναι χώρος Hilbert, τότε $\mathbb{B}(H)=\mathbb{B}(H,H)\cong\mathbb{B}(H,(H^\star)^\star)$ και όπως έχουμε αποδείξει στο Κεφάλαιο 1, $\mathbb{B}(H)\cong\mathbb{B}(H,(H^\star)^\star)\cong(H\widehat{\otimes}_\pi H^\star)^\star$ και στην περίπτωση αυτή, ο ισομορφισμός είναι ο

$$\phi:\mathbb{B}(H)\to(H\widehat{\otimes}_\pi H^\star)^\star\,,\phi(A)(x\otimes y)=\langle A(x),y\rangle\,,x\,,y\in H.$$

Εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει το Θεώρημα Riesz, όπου για κάθε $f\in H^\star$ υπάρχει μοναδικό $y\in H$ τέτοιο, ώστε $f=f_y$ δηλαδή $f(u)=f_y(u)=\langle u,y\rangle\,,\forall\,u\in H$. Μέσω της παραπάνω ταύτισης, επάγεται στον $\mathbb{B}(H)$ η $w^\star$ τοπολογία, δηλαδή θα λέμε ότι ένα δίκτυο $(A_i)_{i\in I}$ στον $\mathbb{B}(H)$ συγκλίνει $w^\star$ σε κάποιον $A\in\mathbb{B}(H)$ αν, και μόνο αν, το δίκτυο $(\phi(A_i))_{i\in I}$ συγκλίνει $w^\star$ στο $\phi(A)$ στον χώρο $(H\widehat{\otimes}_\pi H^\star)^\star$.

Θεώρημα 6.1.1 *Έστω $(X,||\cdot||)$ ένας χώρος Banach και έστω $(H,\langle,\rangle)$ ένας χώρος Hilbert. Τότε, ένα φραγμένο δίκτυο $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στον χώρο $\mathbb{B}(X,\mathbb{B}(H))$ συγκλίνει στην BW τοπολογία* *σε κάποιο L αν, και μόνο αν, το δίκτυο $(\langle L_\lambda(x)\, h, k\rangle)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $\langle L(x)\, h, k\rangle$ για κάθε $h\,, k \in H$ και κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη: Έστω $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ φραγμένο δίκτυο στον $\mathbb{B}(X, \mathbb{B}(H))$ και έστω $L \in \mathbb{B}(X, \mathbb{B}(H))$. Αν το δίκτυο $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο L στην BW τοπολογία, τότε σύμφωνα με την Εφαρμογή 6.1.2, το δίκτυο $(L_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει $w^\star$ στο $L(x)$ για κάθε $x \in X$ και συνεπώς $L_\lambda(x)(\xi) \to L(x)(\xi)\,, \forall\, \xi \in H \widehat{\otimes}_\pi H^\star$. Ιδιαίτερα, για κάθε $h\,, k \in H$ έχουμε

$$\phi(L_\lambda(x))(h \otimes k) \to \phi(L(x))(h \otimes k) \iff \langle L_\lambda(x)(h), k\rangle \to \langle L(x)(h), k\rangle$$

όπως θέλαμε. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το δίκτυο $(\langle L_\lambda(x)(h), k\rangle)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στο $\langle L(x)(h), k\rangle$ για κάθε $x \in X\,, h\,, k \in H$. Επομένως, $\phi(L_\lambda(x))(h \otimes k) \to \phi(L(x))(h \otimes k)$ για κάθε $x \in X\,, h\,, k \in H$. Λόγω γραμμικότητας των τελεστών $L_\lambda(x)\,, L(x)\,, x \in X$ έπεται ότι $\phi(L_\lambda(x))(u) \to \phi(L(x))(u)\,, \forall\, u \in H \otimes_\pi H^\star$. Εφ'όσον το δίκτυο $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι φραγμένο και το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $H \otimes_\pi H^\star$ είναι π-πυκνό στο προβολικό τανυστικό γινόμενο $H \widehat{\otimes}_\pi H^\star$ έχουμε $\phi(L_\lambda(x))(\xi) \to \phi(L(x))(\xi)\,, \forall\, \xi \in H \widehat{\otimes}_\pi H^\star$, που σημαίνει ότι το $(L_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda})$ συγκλίνει $w^\star$ στο $L(x)$ για κάθε $x \in X$. Από την Εφαρμογή 6.1.2, έχουμε ότι το δίκτυο $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ συγκλίνει στην BW τοπολογία στο L.

■

6.2 Θεώρημα Επέκτασης του Arveson

Ορισμός 6.2.1 *Για μια $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$, $S \subseteq \mathcal{A}$ ένα σύστημα τελεστών και $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ έναν υπόχωρο, δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς*

$$B_r(\mathcal{M}, H) = \{L \in \mathbb{B}(\mathcal{M}, \mathbb{B}(H))\,, ||L|| \leq r\} \ \ , r > 0$$

$$CB_r(\mathcal{M}, H) = \{L \in \mathbb{B}(\mathcal{M}, \mathbb{B}(H))\,, ||L||_{cb} \leq r\} \ , r > 0$$

Επίσης συμβολίζουμε με $CP_r(S, H)$ το σύνολο όλων των πλήρως θετικών $L \in \mathbb{B}(S, \mathbb{B}(H))$ με $||L|| \leq r$ και συμβολίζουμε με $CP(S, H, P)$ το σύνολο όλων των πλήρως θετικών απεικονίσεων $L \in \mathbb{B}(S, \mathbb{B}(H))$ με $L(1) = P$.

Θεώρημα 6.2.1 *Για κλειστό σύστημα τελεστών S και κλειστό υπόχωρο $\mathcal{M}$ τα σύνολα στον Ορισμό 6.2.1 είναι συμπαγή στην BW τοπολογία.*

Απόδειξη: Αφού η BW τοπολογία είναι μια ασθενής $\star$ τοπολογία, το σύνολο $B_r(\mathcal{M}, H)$ είναι συμπαγές σύμφωνα με το θεώρημα Banach-Alaoglu. Εφ'όσον τα υπόλοιπα σύνολα είναι υποσύνολα αυτού, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι κλειστά. Ας το αποδείξουμε για το $CB_r(\mathcal{M}, H)$ και για τα υπόλοιπα αποδεικνύεται ομοίως. Έστω λοιπόν ένα δίκτυο $(L_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ στον $CB_r(\mathcal{M}, H)$ που συγκλίνει σε κάποιο $L \in \mathbb{B}(\mathcal{M}, \mathbb{B}(H))$. Επειδή ο $\mathcal{M}$ είναι χώρος Banach, έχουμε από το Θεώρημα 6.1.1 ότι

$$\langle L_\lambda(x)(h), k\rangle \to \langle L(x)(h), k\rangle \,, \forall\, x \in \mathcal{M} \,, \forall\, h \,, k \in H$$

Αν $[a_{i\,j}]$ τυχόν στοιχείο του $\mathbb{M}_n(\mathcal{M})$ και $x = (x_1, ..., x_n)\,, y = (y_1, ..., y_n) \in H^n$, τότε

$$\begin{aligned} \langle (L_\lambda)_n([a_{i\,j}])\, x, y\rangle &= \sum_{i\,,j=1}^{n} \langle L_\lambda(a_{i\,j})\, x_j, y_j\rangle \\ &\to \sum_{i\,,j=1}^{n} \langle L(a_{i\,j})\, x_j, y_j\rangle \\ &= \langle L_n([a_{i\,j}])\, x, y\rangle \end{aligned}$$

Επομένως, $||L_n([a_{i\,j}])|| \leq r\, ||[a_{i\,j}]||$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, γεγονός που αποδεικνύει ότι $||L||_{cb} \leq r \implies L \in CB_r(\mathcal{M}, H)$

∎

Έχουμε τώρα όλα τα εργαλεία για να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 6.2.2 (Επέκτασης του Arveson) *Ας είναι S ένα σύστημα τελεστών σε μια μοναδιαία $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$ και $\phi : S \to \mathbb{B}(H)$ μια πλήρως θετική απεικόνιση. Τότε, υπάρχει πλήρως θετική απεικόνιση $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ που επεκτείνει τη ϕ.*

Απόδειξη: Έστω F ένας πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του H και έστω ϕ_F η συμπίεση της ϕ στον $\mathbb{B}(F)$, δηλαδή $\phi_F(a) = P_F \circ \phi(a)|_F \,, a \in S$, όπου P_F είναι η προβολή επί του F. Εφ' όσον $\mathbb{B}(F) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, όπου $n = \dim(F)$, από το Θεώρημα

5.2.1 υπάρχει πλήρως θετική απεικόνιση $\psi_F : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(F)$ που επεκτείνει τη ϕ_F. Έστω $(\psi_F)' : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ όπου στο τυχόν $a \in \mathcal{A}$ ορίζεται ως $(\psi_F)'(a) = \psi_F(a)$ στον F και $(\psi_F)'(a) = 0$ στον $F^{\perp}$.Η $(\psi_F)'$ είναι πλήρως θετική. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.5.3, ισχύει $||(\psi_F)'|| = ||(\psi_F)'(1)|| = ||\phi(1)||$. Για $a \in \mathcal{A}$, $||a|| \leq 1$ και για $x = x_1 + x_2 \in H$ όπου $x_1 \in F$, $x_2 \in F^{\perp}$, επειδή, $||x||^2 = ||x_1||^2 + ||x_2||^2$, προκύπτει $||x_1|| \leq ||x||$, οπότε υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} ||(\psi_F)'(a)(x)|| &= ||(\psi_F)'(a)(x_1)|| \\ &= ||\psi_F(a)(x_1)|| \\ &\leq ||\psi_F(a)||\,||x_1|| \\ &\leq ||\psi_F||\,||a||\,||x|| \\ &\leq ||\phi(1)||\,||x|| \\ &\leq ||\phi||\,||x|| \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η $(\psi_F)'$ ανήκει στο $CP_r(\mathcal{A}, H)$ όπου $r = ||\phi||$. Το σύνολο όλων των πεπερασμένης διάστασης υπόχωρων του H εφοδιασμένο με τη διάταξη ” $\subseteq$ ” είναι ένα κατευθυνόμενο σύνολο και επομένως το $((\psi_F)')$ είναι ένα δίκτυο στον $CP_r(\mathcal{A}, H)$ όπου $r = ||\phi||$. Εφ'όσον το $CP_r(\mathcal{A}, H)$ είναι συμπαγές, επιλέγουμε ένα υποδίκτυο του $((\psi_{F_i})')$ που συγκλίνει σε κάποιο $\psi \in CP_r(\mathcal{A}, H)$. Ας είναι $a \in S$, x , $y \in H$. Έστω $F = span\ \{x, y\}$. Τότε, για κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο F_i με $F \subseteq F_i$ ισχύει

$$\begin{aligned} \langle (\psi_{F_i})'(a)\, x, y \rangle &= \langle \psi_{F_i}(a)(x), y \rangle \\ &= \langle \phi_{F_i}(a)(x), y \rangle \\ &= \langle (P_{F_i} \circ \phi(a)|_{F_i})(x), y \rangle \\ &= \langle \phi(a)(x), y \rangle \end{aligned}$$

και απ' την άλλη $\langle (\psi_{F_i})'(a)\, x, y \rangle \to \langle \psi(a)\, x, y \rangle$ Επειδή το σύνολο αυτών των F_i είναι ομοτελικό, προκύπτει ότι

$$\langle \phi(a)\, x, y \rangle = \langle \psi(a)\, x, y \rangle$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $\langle \phi(a)x, y\rangle = \langle \psi(a)x, y\rangle\,, \forall a \in S\,, \forall\, x\,, y \in H$ και άρα $\psi|_S = \phi$.

■

Εφαρμογή 6.2.1 *Αν $\mathcal{M}$ είναι υπόχωρος της $\mathcal{A}$ με $1 \in \mathcal{M}$ και $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{B}(H)$ είναι μια μοναδιαία και πλήρης συστολή, τότε υπάρχει πλήρως θετική απεικόνιση $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ που επεκτείνει τη ϕ.*

Απόδειξη: Εφ' όσον η ϕ είναι μοναδιαία συστολή, επεκτείνεται σε θετική απεικόνιση $\hat{\phi} : \mathcal{M} + \mathcal{M}^\star \to \mathbb{B}(H)$ Ισχύει $\mathbb{M}_n(\mathcal{M} + \mathcal{M}^\star) = \mathbb{M}_n(\mathcal{M}) + (\mathbb{M}_n(\mathcal{M}))^\star$ και συνεπώς, για το τυχόν $n \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση $(\hat{\phi})_n : \mathbb{M}_n(\mathcal{M}) + (\mathbb{M}_n(\mathcal{M}))^\star \to \mathbb{M}_n(\mathbb{B}(H))$ είναι θετική ως μοναδιαία συστολή (αφού $||\phi_n|| = 1$) 'Ωστε, η $\hat{\phi}$ είναι πλήρως θετική και από Θεώρημα Επέκτασης του Arveson, υπάρχει πλήρως θετική απεικόνιση $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ που επεκτείνει την $\hat{\phi}$, άρα και τη ϕ.

■

Κεφάλαιο 7

Πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

7.1 Θεώρημα Επέκτασης του Wittstock

Στο κεφάλαιο αυτό θέλουμε να επεκτείνουμε τα αποτελέσματα που αφορούν στις πλήρως θετικές απεικονίσεις στις πλήρως φραγμένες απεικονίσεις. Προς στιγμήν, για μια $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$ ας θεωρήσουμε την $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n(\mathcal{A}))$. Ένα τυπικό στοιχείο αυτής της άλγεβρας είναι της μορφής $A = [A_{i\,j}]$ όπου $A_{i\,j} \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$. Γράφουμε τότε $A_{i\,j} = [a_{i\,j\,k\,\ell}]_{k\,,\ell=1}^n$ με $a_{i\,j\,k\,\ell} \in \mathcal{A}$. Θέτοντας $B = [B_{k\,\ell}]$ όπου $B_{k\,\ell} = [a_{i\,j\,k\,\ell}]$ έχουμε ένα στοιχείο της $\mathbb{M}_m(\mathcal{A})$ και άρα ο πίνακας $B = [B_{k\,\ell}]$ είναι στοιχείο της $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_m(\mathcal{A}))$. Τώρα, κάθε μια από τις άλγεβρες $\mathbb{M}_m(\mathbb{M}_n(\mathcal{A}))\,,\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_m(\mathcal{A}))$ είναι ισόμορφη με την $\mathbb{M}_{n\,m}(\mathcal{A})$ απλά διαγράφοντας τις παρενθέσεις. Με αυτές τις ταυτίσεις, οι πίνακες $A\,,B$ αντιστοιχούν σε unitarily ισοδύναμα στοιχεία της $\mathbb{M}_{n\,m}(\mathcal{A})$ και μάλιστα, ο unitary τελεστής είναι ένας πίνακας μετάθεσης, άρα $\star$ ισομορφισμός. Θα ονομάζουμε αυτόν τον $\star$ ισομορφισμό ως canonical shuffle.

Θεωρούμε μοναδιαίες $C^\star$ άλγεβρες $\mathcal{A}\,,\mathcal{B}$ έναν χώρο τελεστών $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ και μια γραμμική απεικόνιση $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}$. Ορίζουμε σύστημα τελεστών $S_{\mathcal{M}} \subseteq \mathbb{M}_2(\mathcal{A})$ όπου

$$S_{\mathcal{M}} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda\,1 & a \\ b^\star & \mu\,1 \end{bmatrix}\,, a\,,b \in \mathcal{M}\,,\lambda\,,\mu \in \mathbb{C} \right\}.$$

Ορίζουμε απεικόνιση $\Phi : S_{\mathcal{M}} \to \mathbb{M}_2(\mathcal{B})$ μέσω της σχέσης

$$\Phi\left(\begin{bmatrix}\lambda\,1 & a\\ b^\star & \mu\,1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\lambda\,1 & \phi(a)\\ \phi(b)^\star & \mu\,1\end{bmatrix}$$

η οποία είναι γραμμική, διότι

$$\begin{aligned}\Phi\left(\begin{bmatrix}\lambda\,1 & a\\ b^\star & \mu\,1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}s\,1 & u\\ v^\star & t\,1\end{bmatrix}\right) &= \Phi\left(\begin{bmatrix}(\lambda+k\,s)\,1 & a+k\,u\\ b^\star+k\,v^\star & (\mu+k\,t)\,1\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}(\lambda+k\,s)\,1 & \phi(a+u)\\ \phi(b+\overline{k}\,v)^\star & (\mu+k\,t)\,1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\lambda\,1+k\,s\,1 & \phi(a)+\phi(u)\\ \phi(b)^\star+k\,\phi(v)^\star & \mu\,1+k\,t\,1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\lambda\,1 & \phi(a)\\ (\phi(b))^\star & \mu\,1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}s\,1 & \phi(u)\\ (\phi(v))^\star & t\,1\end{bmatrix}\\ &= \Phi\left(\begin{bmatrix}\lambda\,1 & a\\ b^\star & \mu\,1\end{bmatrix}\right)+k\,\Phi\left(\begin{bmatrix}s\,1 & u\\ v^\star & t\,1\end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

για κάθε $\begin{bmatrix}\lambda\,1 & a\\ b^\star & \mu\,1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}s\,1 & u\\ v^\star & t\,1\end{bmatrix}\in S_{\mathcal{M}}\,,k\in\mathbb{C}$.

Θεώρημα 7.1.1 *Αν η ϕ είναι πλήρης συστολή, τότε η Φ είναι πλήρως θετική.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόν $n\in\mathbb{N}$ και τυχόν $[S_{i\,j}]\in\mathbb{M}_n(S_{\mathcal{M}}))$, ας είναι

$$S_{i\,j}=\begin{bmatrix}\lambda_{i\,,j}\,1 & a_{i\,,j}\\ b^\star_{i\,,j} & \mu_{i\,,j}\,1\end{bmatrix}.$$

Εφ' όσον ο $\mathbb{M}_n(S_{\mathcal{M}})$ είναι υπόχωρος της $\mathbb{M}_n(\mathbb{M}_2(\mathcal{A}))$, αν εφαρμόσουμε την canonical shuffle, τότε ο $S_{i\,j}$ γίνεται στοιχείο της $\mathbb{M}_2(\mathbb{M}_n(\mathcal{A}))$. Πράγματι, αν $H=[\lambda_{i\,j}]\,,A=[a_{i\,j}]\,,B=[b_{j\,i}]\,,K=[\mu_{i\,j}]$, τότε η εικόνα του $S_{i\,j}$ υπό την canonical shuffle, είναι ο πίνακας $\begin{bmatrix}H & A\\ B^\star & K\end{bmatrix}$. Έτσι, $\Phi_n([S_{i\,j}])=\begin{bmatrix}H & \phi_n(A)\\ \phi_n(B)^\star & K\end{bmatrix}$. Συνεπώς, για να αποδείξουμε ότι η Φ είναι πλήρως θετική, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\begin{bmatrix} H & A \\ B^\star & K \end{bmatrix} \geq 0 \implies \begin{bmatrix} H & \phi_n(A) \\ \phi_n(B)^\star & K \end{bmatrix} \geq 0$$

Αν $\begin{bmatrix} H & A \\ B^\star & K \end{bmatrix} \geq 0$, τότε, $A = B$ και οι πίνακες $H\,, K$ είναι θετικοί. Για κάθε $\epsilon > 0$ θεωρούμε τους θετικούς και αντιστρέψιμους πίνακες $H_\epsilon = H + \epsilon\, I\,, K_\epsilon = K + \epsilon\, I$. Τότε, ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} I & H_\epsilon^{-1/2}\, A\, K_\epsilon^{-1/2} \\ K_\epsilon^{-1/2}\, A^\star\, H_\epsilon^{-1/2} & I \end{bmatrix}$$

παραγοντοποιείται ως

$$\begin{bmatrix} H_\epsilon^{-1/2} & 0 \\ 0 & K_\epsilon^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_\epsilon & A \\ A^\star & K_\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_\epsilon^{-1/2} & 0 \\ 0 & K_\epsilon^{-1/2} \end{bmatrix}$$

και άρα είναι θετικός, οπότε σύμφωνα με την Εφαρμογή 3.1.2 $||H_\epsilon^{-1/2}\, A\, K_\epsilon^{-1/2}|| \leq 1$. Έστω $H_\epsilon^{-1/2} = [u_{i\,j}]\,, A = [a_{i\,j}]\,, K_\epsilon^{-1/2} = [v_{i\,j}]$. Τότε,

$$H_\epsilon^{-1/2}\, A = \left[\sum_{k=1}^{n} u_{i\,k}\, a_{k\,j}\right]_{i\,,j=1}^{n} = [m_{i\,j}]_{i\,,j=1}^{n}$$

οπότε

$$H_\epsilon^{-1/2}\, A\, K_\epsilon^{-1/2} = \left[\sum_{k=1}^{n} m_{i\,k}\, v_{k\,j}\right]_{i\,,j=1}^{n}$$

και από γραμμικότητα της ϕ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\phi_n(H_\epsilon^{-1/2}\,A\,K_\epsilon^{-1/2}) &= \left[\sum_{k=1}^{n}\phi(m_{i\,k})\,v_{k\,j}\right]_{i\,,j=1}^{n}\\
&= [\phi(m_{i\,j})]\,[v_{i\,j}]\\
&= \left[\phi\,\left(\sum_{k=1}^{n}u_{i\,k}\,a_{k\,j}\right)\right]\,K_\epsilon^{-1/2}\\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}u_{i\,k}\,\phi(a_{k\,j})\right]\,K_\epsilon^{-1/2}\\
&= H_\epsilon^{-1/2}\,\phi_n(A)\,K_\epsilon^{-1/2}
\end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\begin{bmatrix} H_\epsilon & \phi_n(A) \\ \phi_n(A)^\star & K_\epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_\epsilon^{1/2} & 0 \\ 0 & K_\epsilon^{1/2} \end{bmatrix}\,\mathcal{J}\,\begin{bmatrix} H_\epsilon^{-1/2} & 0 \\ 0 & K_\epsilon^{1/2} \end{bmatrix}$$

όπου $\mathcal{J}$ είναι ο πίνακας

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} I & \phi_n(H^{-1/2}\,A\,K^{-1/2}) \\ \phi_n(H^{-1/2}\,A\,K^{-1/2})^\star & I \end{bmatrix}$$

Αφού η ϕ είναι πλήρης συστολή, έχουμε $||\phi_n(H^{-1/2}\,A\,K^{-1/2})|| \leq 1$, δηλαδή ο πίνακας $\mathcal{J}$ είναι θετικός.(Εφαρμογή 3.1.2) και κατά συνέπεια, και ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} H_\epsilon & \phi_n(A) \\ \phi_n(A)^\star & K_\epsilon \end{bmatrix}$$

είναι θετικός. Έχουμε

$$\left\|\begin{bmatrix} H_\epsilon & \phi_n(A) \\ (\phi_n(A))^\star & K_\epsilon \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} H & \phi_n(A) \\ (\phi_n(A))^\star & K \end{bmatrix}\right\| = \left\|\begin{bmatrix} \epsilon\,I & 0 \\ 0 & \epsilon\,I \end{bmatrix}\right\| = \epsilon^2 \to 0$$

καθώς $\epsilon \to 0$, οπότε ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} H & \phi_n(A) \\ (\phi_n(A))^\star & K \end{bmatrix}$$

είναι θετικός ως όριο των θετικών πινάκων

$$\begin{bmatrix} H_\epsilon & \phi_n(A) \\ (\phi_n(A))^\star & K_\epsilon \end{bmatrix}$$

καθώς $\epsilon \to 0$.

■

Θεώρημα 7.1.2 (Επέκτασης του Wittstock) *Ας είναι $\mathcal{M}$ υπόχωρος της μοναδιαίας $C^\star$ άλγεβρας $\mathcal{A}$ και $\phi : \mathcal{M} \to \mathbb{B}(H)$ πλήρως φραγμένη απεικόνιση. Τότε, υπάρχει πλήρως φραγμένη απεικόνιση $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ που επεκτείνει τη ϕ με $||\psi||_{cb} = ||\phi||_{cb}$.*

Απόδειξη: Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $||\phi||_{cb} = 1$. Θεωρούμε το σύστημα τελεστών $S_\mathcal{M}$ και την απεικόνιση Φ όπως πριν και εφ' όσον η Φ είναι πλήρως θετική στο $S_\mathcal{M} \subseteq \mathbb{M}_2(\mathcal{A})$ από το Θεώρημα Επέκτασης του Arveson, υπάρχει πλήρως θετική απεικόνιση $\Psi : \mathbb{M}_2(\mathcal{A}) \to \mathbb{M}_2(\mathbb{B}(H)) \cong \mathbb{B}(H \oplus H)$ που επεκτείνει τη Φ. Ορίζουμε $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ μέσω της σχέσης

$$\Psi\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} * & \psi(a) \\ * & * \end{bmatrix}, a \in \mathcal{A}.$$

Προφανώς η ψ είναι γραμμική και επεκτείνει τη ϕ αφού η Ψ επεκτείνει τη Φ. Επίσης, $||\psi(a)|| \leq \left|\left|\Psi\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right|\right| \leq ||\Psi||\,||a||$ και επειδή $||\Psi|| \leq 1$ έχουμε ότι η ψ είναι συστολή. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και έστω $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{M}_n(\mathcal{A})$. Έχουμε, $\Psi_n\left(\left[\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]\right) = \left[\begin{bmatrix} * & \psi(a_{ij}) \\ * & * \end{bmatrix}\right]$ και μέσω της canonical shuffle, το δεξί μέλος γίνεται

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} * & \psi_n(A) \\ * & * \end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

Συνεπώς, $||\psi_n(A)|| \leq \left\| \begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{bmatrix} \right\|$ όπου μέσω της canonical shuffle, ο πίνακας

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{ij} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\end{bmatrix}$$

γίνεται

$$\begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και άρα $||\psi_n(A)|| \leq ||A||$. Αυτό σημαίνει ότι η ψ είναι πλήρως συστολή.

■

Εφαρμογή 7.1.1 *Αν $\mathcal{M}$ είναι χώρος τελεστών στη $C^\star$ άλγεβρα $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ είναι μια άλλη $C^\star$ άλγεβρα και $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{B}$ είναι γραμμική απεικόνιση, τότε ορίζουμε γραμμική απεικόνιση*

$$\phi^\star : \mathcal{M}^\star \to \mathcal{B}\,, \phi^\star(a) = \phi(a^\star)^\star.$$

***Ορισμός** 7.1.1 Αν $\mathcal{M} = \mathcal{M}^\star$, τότε λέμε ότι η απεικόνιση ϕ είναι αυτοσυζυγής, αν $\phi = \phi^\star$.*

Αν $\mathcal{M} = \mathcal{M}^\star$, τότε θέτουμε

$$Re(\phi) = \frac{\phi + \phi^\star}{2}\ , Im(\phi) = \frac{\phi - \phi^\star}{2\,i}$$

όπου οι $Re(\phi)\,, Im(\phi)$ είναι αυτοσυζυγείς γραμμικές απεικονίσεις διότι για κάθε $a \in \mathcal{M}$

έχουμε

$$\begin{aligned} Re(\phi)(a^\star) &= \frac{\phi(a^\star) + \phi^\star(a^\star)}{2} \\ &= \frac{(\phi^\star)(a)^\star + \phi((a^\star)^\star)^\star}{2} \\ &= \left(\frac{\phi(a) + \phi^\star(a)}{2}\right)^\star \\ &= (Re(\phi)(a))^\star \end{aligned}$$

Ομοίως, $Im(\phi)(a^\star) = (Im(\phi)(a))^\star$ *και επιπλέον* $\phi = Re(\phi) + i\, Im(\phi)$. *Γενικά ισχύει* $(Re(\phi))(a) \neq Re(\phi(a))$ *αλλά όταν* $a = a^\star$ *ισχύει* $(Re(\phi))(a) = (Re(\phi(a))$.

Θεώρημα 7.1.3 *Έστω* $\mathcal{A}$ *μια μοναδιαία* $C^\star$ *άλγεβρα και έστω* $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ *μια πλήρως φραγμένη απεικόνιση. Τότε, υπάρχουν πλήρως θετικές απεικονίσεις* $\phi_i : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ *με* $||\phi_i||_{cb} = ||\phi||_{cb}\, , i = 1, 2$ *και τέτοιες, ώστε η απεικόνιση* $\Phi : \mathbb{M}_2(\mathcal{A}) \to \mathbb{B}(H \oplus H)$ *που ορίζεται από τη σχέση*

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \phi_1(a) & \phi(b) \\ \phi^\star(c) & \phi_2(d) \end{bmatrix}$$

να είναι πλήρως θετική. Επιπλέον, αν $||\phi||_{cb} \leq 1$, *μπορούμε να απαιτήσουμε* $\phi_1(1) = \phi_2(1) = I_H$.

Απόδειξη: Προφανώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $||\phi||_{cb} = 1$. Τότε, κάθε ϕ_n είναι συστολή. Έπάγεται πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : S_{\mathcal{A}} \to \mathbb{B}(H \oplus H)$ όπου $S_{\mathcal{A}} \subseteq \mathbb{M}_2(\mathcal{A})$, με

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \lambda 1 & a \\ b^\star & \mu 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda I & \phi(a) \\ \phi(b)^\star & \mu I \end{bmatrix}, a\, , b \in \mathcal{A}\, , \lambda\, , \mu \in \mathbb{C}$$

(η Φ είναι πλήρως θετική διότι η ϕ είναι πλήρης συστολή και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.1.1). Από το Θεώρημα Επέκτασης του Arveson, η Φ επεκτείνεται σε μια πλήρως θετική απεικόνιση στην $\mathbb{M}_2(\mathcal{A})$ που θα συνεχίσουμε να συμβολίζουμε με Φ. Για $b\, , c \in \mathcal{A}$ έχουμε ότι $\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \in S_{\mathcal{A}}$, οπότε,

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \phi(b) \\ \phi(c^\star)^\star & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \phi(b) \\ \phi^\star(c) & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω $p \in \mathcal{A}^+$ με $p \leq 1$. Επειδή,

$$\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \Phi\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \leq \Phi\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

οπότε ισχύει

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

απ'όπου προκύπτει $b = c^\star$, $d = 0$, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} a & c^\star \\ c & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή, $\begin{bmatrix} a & c^\star \\ c & 0 \end{bmatrix} \geq 0$, γράφουμε

$$\begin{bmatrix} a & c^\star \\ c & 0 \end{bmatrix} = B^\star B$$

για κάποιον πίνακα $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathcal{A})$ οπότε,

$$\begin{bmatrix} a & c^\star \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^\star x + z^\star z & x^\star y + z^\star w \\ y^\star x + w^\star z & y^\star y + w^\star w \end{bmatrix}$$

και προκύπτει $y^\star y + w^\star w = 0 \implies y = w = 0$, δηλαδή

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & c^\star \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^\star x + z^\star z & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και επιπλέον, $a = x^\star x + z^\star z \geq 0$. Επειδή η $\mathcal{A}$ είναι η γραμμική θήκη των θετικών της στοιχείων, υπάρχει θετική γραμμική απεικόνιση $\phi_1 : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ ώστε

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \phi_1(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \forall\, a \in \mathcal{A}$$

και η ϕ_1 είναι πλήρως θετική διότι η Φ είναι πλήρως θετική. Όμοια, ορίζεται πλήρως θετική απεικόνιση $\phi_2 : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ ώστε

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \phi_2(d) \end{bmatrix}$$

Έτσι, για κάθε $a\,, b\,, c\,, d \in \mathcal{A}$ ισχύει

$$\begin{aligned} \Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) &= \Phi\left(\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix}\right) + \Phi\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \phi(b) \\ \phi^\star(c) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1(a) & 0 \\ 0 & \phi_2(d) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \phi_1(a) & \phi(b) \\ \phi^\star(c) & \phi_2(d) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Επειδή, $\phi_1(1) = \phi_2(1) = I_H$, προκύπτει $||\phi_1||_{cb} = ||\phi_2||_{cb} = ||\phi||_{cb}$.

$\blacksquare$

Θεώρημα 7.1.4 *Ας είναι $\mathcal{A}$ μια μοναδιαία $C^\star$ άλγεβρα και έστω $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ μια πλήρως φραγμένη απεικόνιση. Τότε, υπάρχουν ένας χώρος Hilbert $(K, \langle , \rangle)$ και ένας $\star$ ομομορφισμός $\pi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(K)$ και γραμμικοί και φραγμένοι τελεστές $V_i : H \to K\,, i = 1, 2$ με $||\phi||_{cb} = ||V_1||\,||V_2||$ ώστε $\phi(a) = V_1^\star\,\pi(a)\,V_2\,, \forall\, a \in \mathcal{A}$. Επιπλέον, αν $||\phi||_{cb} = 1$, τότε οι $V_1\,, V_2$ μπορούν να επιλεχθούν ισομετρίες.*

Απόδειξη: Προφανώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $||\phi||_{cb} = 1$. Έχουμε την απεικόνιση $\Phi : \mathbb{M}_2(\mathcal{A}) \to \mathbb{B}(H \oplus H)$ η οποία είναι πλήρως θετική(διότι η ϕ είναι πλήρης συστολή (Θεώρημα 7.1.1)) και ορίζεται από τη σχέση

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \phi_1(a) & \phi(b) \\ \phi^\star(c) & \phi_2(d) \end{bmatrix}\,, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathcal{A}).$$

Από το Θεώρημα Stinespring, υπάρχουν χώρος $(K_1, \langle , \rangle)$, ένας μοναδιαίος $\star$ ομομορφισμός $\pi_1 : \mathbb{M}_2(\mathcal{A}) \to \mathbb{B}(K_1)$ και μια ισομετρία (διότι η Φ είναι μοναδιαία)$V : H \oplus H \to K_1$ ώστε

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \phi_1(a) & \phi(b) \\ \phi^\star(c) & \phi_2(d) \end{bmatrix} = V\,\pi_1(A)\,V^\star\,, A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathcal{A}).$$

Οι τελεστές $T = \pi_1(1 \otimes E_{11})\,, S = \pi_1(1 \otimes E_{22})$ είναι γραμμικοί και φραγμένοι, οπότε οι πυρήνες τους $K = \mathrm{Ker(T)}\,, \mathrm{K}' = \mathrm{Ker(S)}$ είναι κλειστοί υπόχωροι του χώρου Hilbert K_1, άρα είναι και αυτοί χώροι Hilbert. Έχουμε $E_{11}^2 = E_{11}\,, E_{22}^2 = E_{22}\,, E_{11}\,E_{22} = E_{22}\,E_{11} = 0\,, E_{11} + E_{22} = I_2$ και επειδή η π_1 είναι μορφισμός θα ισχύει αντίστοιχα $T^2 = T\,, S^2 = S\,, S\,T = T\,S = 0\,, T + S = I_{K_1}$. Απ'τη μια, για κάθε $x \in K_1$ ισχύει ότι $x = (x - T(x)) + T(x)$ όπου $x - T(x) \in K\,, T(x) \in K'$ και απ'την άλλη αν $x \in K \cap K'$, τότε $T(x) = S(x) = 0$ οπότε λόγω της $T + S = I_{K_1}$ έχουμε $x = (T + S)(x) = T(x) + S(x) = 0$. Συνεπώς $K_1 = K \oplus K'$. Θα αποδείξουμε ότι $K \cong K'$. Πράγματι, ορίζουμε

$$f : K \to K'\,, f(x) = \pi_1(1 \otimes E_{12})(x)$$

η οποία είναι καλώς ορισμένη διότι για $x \in K$ είναι

$$\begin{aligned} S(\pi_1(1 \otimes E_{12})(x)) &= \pi_1(1 \otimes E_{22})(\pi_1(1 \otimes E_{12})(x)) \\ &= \pi_1(1 \otimes E_{22}) \circ \pi_1(1 \otimes E_{12})(x) \\ &= \pi_1((1 \otimes E_{22})\,(1 \otimes E_{12}))(x) \\ &= \pi_1(1 \otimes E_{22}\,E_{12})(x) \\ &= \pi_1(0)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

δηλαδή $f(x) = \pi_1(1 \otimes E_{12})(x) \in K' = \mathrm{Ker(S)}$. Επίσης, η f είναι γραμμική και φραγμένη διότι ο $\pi_1(1 \otimes E_{12})$ είναι γραμμικός και φραγμένος. Μάλιστα,

$$\begin{aligned} ||f(x)|| &= ||\pi_1(1 \otimes E_{12})(x)|| \\ &\leq ||\pi_1(1 \otimes E_{12})||\,||x|| \\ &\leq ||\pi_1||\,||1 \otimes E_{12}||\,||x|| \leq ||x||\,, \forall\, x \in K. \end{aligned}$$

Ορίζουμε τώρα την απεικόνιση

$$g : K' \to K\,, g(x) = \pi_1(1 \otimes E_{21})(x)$$

και παρατηρούμε ότι και αυτή είναι καλώς ορισμένη, γραμμική,φραγμένη και ικανοποιεί την $||g(x)|| \leq ||x||\,, \forall\, x \in K'$. Λόγω των σχέσεων αυτών, αν αποδείξουμε ότι οι $f\,, g$ είναι αντίστροφες, θα έχουμε ότι η f είναι ισομετρικός ισομορφισμός, οπότε $K \cong K'$.

Πράγματι,αν $x \in K' = \mathrm{Ker(S)}$ τότε

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(\pi_1(1 \otimes E_{21})(x) \\
&= \pi_1(1 \otimes E_{12})(\pi_1(1 \otimes E_{21})(x)) \\
&= \pi_1(1 \otimes E_{12})\, \pi_1(1 \otimes E_{21})(x) \\
&= \pi_1((1 \otimes E_{12})\,(1 \otimes E_{21}))(x) \\
&= \pi_1(1 \otimes E_{12}\, E_{21})(x) \\
&= \pi_1(1 \otimes E_{11})(x) \\
&= T(x) \\
&= x - S(x) \\
&= x \\
&= I_{K'}(x)
\end{aligned}
$$

και επιπλέον, αν $x \in K = \mathrm{Ker(T)}$ τότε

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= g(\pi_1(1 \otimes E_{12})(x) \\
&= \pi_1(1 \otimes E_{21})(\pi_1(1 \otimes E_{12})(x)) \\
&= \pi_1(1 \otimes E_{21}) \circ \pi_1(1 \otimes E_{12})(x) \\
&= \pi_1((1 \otimes E_{21})\,(1 \otimes E_{12}))(x) \\
&= \pi_1(1 \otimes E_{21}\, E_{12})(x) \\
&= \pi_1(1 \otimes E_{22})(x) \\
&= S(x) \\
&= x - T(x) \\
&= x \\
&= I_K(x)
\end{aligned}
$$

Συνεπώς, $K_1 = K \oplus K' \cong K \oplus K$ και τώρα ορίζουμε

$$\pi(a) = \pi_1(a \otimes E_{22})\,,\, a \in \mathcal{A}$$

και θα αποδείξουμε ότι $\pi(a) \in \mathbb{B}(K)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Έστω $a \in \mathcal{A}$. Αν $x \in K = \mathrm{Ker(T)}$, τότε

$$\begin{aligned} T(\pi(a)(x)) &= \pi_1(1 \otimes E_{11})(\pi_1(a \otimes E_{22})(x)) \\ &= \pi_1(1 \otimes E_{11}) \circ \pi_1(a \otimes E_{22})(x) \\ &= \pi_1((1 \otimes E_{11})\,(a \otimes E_{22}))(x) \\ &= \pi_1(a \otimes E_{11}\,E_{22})(x) \\ &= \pi_1(0)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

οπότε $\pi(a)(x) \in K$, δηλαδή $\pi(a) = \pi_1(a \otimes E_{22}) : K \to K$ και εφ'όσον ο $\pi_1(a \otimes E_{22})$ είναι γραμμικός και φραγμένος, έπεται $\pi(a) \in \mathbb{B}(K)$. Μάλιστα $||\pi(a)|| = ||\pi_1(a \otimes E_{22})|| \leq ||\pi_1||\,||a \otimes E_{22}|| \leq ||a||\,,\, a \in \mathcal{A}$. Για κάθε $a\,,b \in \mathcal{A}\,, k \in \mathbb{C}\,, x \in K$ έχουμε

$$\begin{aligned} \pi(a + k\,b) &= \pi_1((a + k\,b) \otimes E_{22}) \\ &= \pi_1(a \otimes E_{22} + k\,b \otimes E_{22}) \\ &= \pi_1(a \otimes E_{22}) + k\,\pi_1(b \otimes E_{22}) \\ &= \pi(a) + k\,\pi(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi(a\,b) &= \pi_1((a\,b) \otimes E_{22}) \\ &= \pi_1((a\,b) \otimes E_{22}\,E_{22}) \\ &= \pi_1(a \otimes E_{22}) \circ \pi_1(b \otimes E_{22}) \\ &= \pi(a) \circ \pi(b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(a^\star) &= \pi_1(a^\star \otimes E_{22}) \\
&= \pi_1(a^\star \otimes E_{22}^\star) \\
&= \pi_1((a \otimes E_{22})^\star) \\
&= (\pi_1(a \otimes E_{22}))^\star \\
&= (\pi(a))^\star
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(1)(x) &= \pi_1(1 \otimes E_{22})(x) \\
&= S(x) \\
&= x - T(x) \\
&= x \\
&= I_K(x)
\end{aligned}$$

οπότε όλα τα παραπάνω αποδεικνύουν ότι η π είναι μοναδιαίος $\star$ ομομορφισμός. Τώρα εύκολα έχουμε

$$\pi_1(a \otimes E_{11}) = f \circ \pi(a) \circ g \,, \pi_1(b \otimes E_{12}) = f \circ \pi(b) \,, \pi_1(c \otimes E_{21}) = g \circ \pi(c) \,, \pi_1(d \otimes E_{22}) = \pi(d)$$

και άρα

$$\pi_1\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \pi(a) & \pi(b) \\ \pi(c) & \pi(d) \end{bmatrix} \,, a \,, b \,, c \,, d \in \mathcal{A}.$$

Ταυτίζοντας τον K_1 με τον $K \oplus K$ έχουμε ότι η $V : H \oplus H \to K \oplus K$ είναι ισομετρία και

$$\begin{bmatrix} \phi_1(a) & \phi(b) \\ \phi^\star(c) & \phi_2(d) \end{bmatrix} = V^\star \begin{bmatrix} \pi(a) & \pi(b) \\ \pi(c) & \pi(d) \end{bmatrix} V$$

για κάθε $a , b , c , d \in \mathcal{A}$. Τώρα, για $h \in H$ έχουμε

$$(h,0) = \begin{bmatrix} \phi_1(1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (h,0) = V^\star \begin{bmatrix} \pi(1) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V(h,0) = V^\star \begin{bmatrix} 1_K & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V(h,0)$$

Όμως, η V είναι ισομετρία και άρα πρέπει να έχουμε $V(h,0) = (\star, 0) , h \in H$. Συνεπώς, υπάρχει γραμμική και φραγμένη $V_1 : H \to K$ τέτοια, ώστε $V(h,0) = (V_1(h), 0) , h \in H$ και πρέπει η V_1 να είναι επίσης ισομετρία. Ομοίως, υπάρχει $V_2 : H \to K$ ώστε $V(0,h) = (0, V_2(h)) , h \in H$. Συνεπώς,

$$\begin{bmatrix} \phi_1(a) & \phi(b) \\ \phi^\star(c) & \phi_2(d) \end{bmatrix} = V^\star \begin{bmatrix} \pi(a) & \pi(b) \\ \pi(c) & \pi(d) \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} V_1^\star \, \pi(a) \, V_1 & V_1^\star \, \pi(b) \, V_2 \\ V_2^\star \, \pi(c) \, V_1 & V_2^\star \, \pi(d) \, V_2 \end{bmatrix}$$

για κάθε $a , b , c , d \in \mathcal{A}$. Άρα, $\phi(b) = V_1^\star \, \pi(b) \, V_2 , b \in \mathcal{A}$, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη.

■

7.2 Θεώρημα Διάσπασης του Wittstock

Θεώρημα 7.2.1 (Διάσπασης του Wittstock) *Έστω $\mathcal{A}$ μια μοναδιαία $C^\star$ άλγεβρα και έστω $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ μια πλήρως φραγμένη απεικόνιση. Τότε, υπάρχει μια πλήρως θετική απεικόνιση $\psi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(H)$ με $||\psi||_{cb} \leq ||\phi||_{cb}$ ώστε οι απεικονίσεις $\psi \pm Re(\phi) , \psi \pm Im(\phi)$ να είναι πλήρως θετικές. Πιο συγκεκριμμένα, οι πλήρως φραγμένες απεικονίσεις είναι η γραμμική θήκη των πλήρως θετικών απεικονίσεων.*

Απόδειξη: Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχουν χώρος Hilbert $(K, \langle , \rangle)$, ένας $\star$ - ομομορφισμός $\pi : \mathcal{A} \to \mathbb{B}(K)$ και γραμμικοί και φραγμένοι τελεστές

$$V_i : H \to K \, , i = 1, 2 \, , ||V_1|| = ||V_2|| = \sqrt{||\phi||_{cb}}$$

ώστε

$$\phi(a) = V_1^\star \, \pi(a) \, V_2 \, , a \in \mathcal{A}.$$

θέτουμε

$$\psi(a) = \frac{V_1^\star\,\pi(a)\,V_1 + V_2^\star\,\pi(a)\,V_2}{2}\,, a \in \mathcal{A}.$$

Έτσι, η ψ είναι πλήρως θετική και $||\psi||_{cb} = ||\psi(1)|| \leq ||\phi||_{cb}$. Παρατηρούμε ότι

$$\phi^\star(a) = V_2^\star\,\pi(a)\,V_1\,, a \in \mathcal{A}$$

και άρα

$$2\,\psi(a) \pm 2\,Re\phi(a) = (V_1 \pm V_2)^\star\,\pi(a)\,(V_1 \pm V_2)\,, a \in \mathcal{A}$$

Επίσης,

$$2\,\psi(a) + 2\,Im\phi(a) = (V_1 - i\,V_2)^\star\,\pi(a)\,(V_1 - i\,V_2)\,, a \in \mathcal{A}$$

και

$$2\,\psi(a) - 2\,Im\phi(a) = (V_1 + i\,V_2)^\star\,\pi(a)\,(V_1 + i\,V_2)\,, a \in \mathcal{A}$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Stinespring,κάθε μια από τις τέσσερις αυτές απεικονίσεις είναι πλήρως θετική. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$2\,\phi = ((\psi + Re\phi) - (\psi - Re\phi)) + i\,((\psi + Im\phi) - (\psi - Im\phi))$$

που σημαίνει ότι η ϕ ανήκει στη γραμμική θήκη τεσσάρων πλήρως θετικών απεικονίσεων.

■

Βιβλιογραφία

[1] Σ.Νεγρεπόντης, Θ.Ζαχαριάδης, Ν.Καλαμίδας και Β.Φαρμάκη, Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση. Αίθρα, Αθήνα, 1988. 1988.

[2] JB Conway. A course in functional analysis graduate text in mathematics, 96, 1985.

[3] Aristides Katavolos. Operator algebras: an introduction. *Serdica Math. J.*, 41(1):49--82, 2015.

[4] Vern Paulsen. *Completely Bounded Maps and Operator Algebras.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2002.

[5] Raymond A Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces.* Springer Science & Business Media, 2013.