ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η   Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Παρανοήσεις και δυσκολίες των εκπαιδευτικών στην αυξομείωση των ποσοστών και στην έννοια του ποσοστού.

Δημήτριος Ρούτουλας (Α.Μ. 215313)

Επιβλέπουσα: Ανδρονίκη Μπούφη

Συνεπιβλέποντες: Γεώργιος Μπαραλής

Αγγελική Βουδούρη

Αθήνα

Μάρτιος 2019

Στην οικογένειά μου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Τα ποσοστά εμφανίζονται στα αναλυτικά προγράμματα ποικίλων μαθημάτων όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης, καθώς επίσης και σε πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής. Ωστόσο έρευνες έχουν αναδείξει δυσκολίες και παρανοήσεις των ενηλίκων ως προς την έννοια του ποσοστού, καθώς και σε προβλήματα με αυξομειώσεις ποσοστών. Όμως απουσιάζουν έρευνες που εξετάζουν αντίστοιχες παρανοήσεις εκπαιδευτικών που καλούνται να διδάξουν τα ποσοστά. Η παρούσα έρευνα λοιπόν έχει ως σκοπό να εξετάσει τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις των μελλοντικών δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην αυξομείωση των ποσοστών και στην έννοια του ποσοστού γενικότερα. Στην έρευνα συμμετείχαν 100 φοιτητές του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης Αθηνών. Οι φοιτητές απάντησαν σε δύο προβλήματα με ποσοστά. Από τα αποτελέσματα της έρευνας διαπιστώθηκε ότι στην πλειονότητά τους είναι σε θέση να υπολογίζουν σωστά σε ποια ποσότητα αντιστοιχεί το ποσοστό στα 100 μιας ποσότητας αναφοράς με χρήση μηχανιστικών μεθόδων. Όμως στη συντριπτική τους πλειοψηφία οι απαντήσεις των φοιτητών διαπιστώθηκε ότι δεν συνοδεύονται από κατανόηση των βαθύτερων πτυχών των ποσοστών. Σε ερωτήσεις που δεν μπορούν να απαντηθούν με μηχανιστικούς τρόπους, αλλά απαιτείται κατανόηση της έννοιας του ποσοστού οι φοιτητές δεν καταφέρνουν να δώσουν την σωστή απάντηση στον ίδιο βαθμό. Αυξημένες δυσκολίες παρατηρήθηκαν στο πρόβλημα αυξομείωσης ποσοστών λόγω της αδυναμίας των φοιτητών να αντιληφθούν τη σχέση των ποσοστών με μία ποσότητα αναφοράς η οποία αλλάζει.

Λέξεις κλειδιά: ποσοστά, παρανοήσεις, αυξομειώσεις, εκπαιδευτικοί.

ABSTRACT

Teachers' misconceptions and difficulties in increasing and decreasing of percentages and in the concept of percentage.

Percentages can be met in the curriculum of various courses at all levels of education, as well as in many situations of everyday life. However, surveys have highlighted adults' difficulties and misconceptions not only in the concept of the percentage, but also when it comes to increases and decreases in percents. However there is a lack of surveys that examine similar misconceptions of teachers who are asked to teach percentages. Therefore the present study aims to examine the difficulties and misunderstandings of future primary school teachers in situations that include increase and decrease of percentages and in the concept of the percentage in general. 100 undergraduate students of the Department of Primary Education of Athens participated in the survey. The students responded to a questionnaire which consisted of two percent problems. The results of the survey indicate that students can solve problems with standard methods in an adequate way. However, the overwhelming majority of students don't seem to understand the deeper aspects of the percentages. Students had more difficulties when dealing with questions that require a deeper understanding of percentages rather than just the use of standard methods. Increased difficulties have been observed in the problem of increasing and decreasing of percentages due to the inability of students to perceive the relationship of percentages with a reference quantity that changes.

Key words: percentages, misconceptions, increase and decrease, teachers.

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή

Τα ποσοστά χρησιμοποιούνται σε παγκόσμια κλίμακα και δημιουργούν μια γέφυρα μεταξύ καταστάσεων που συναντάει κάποιος στην καθημερινότητά του και μαθηματικών εννοιών. Η αξία τους γίνεται αντιληπτή από την παρουσία τους στα αναλυτικά προγράμματα όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης και από την χρήση τους και σε άλλα μαθήματα, εκτός των μαθηματικών, όπως αυτά της φυσικής και της χημείας (Parker & Leinhardt, 1995).

Αν και η παρουσία των ποσοστών στην εκπαίδευση δεν είναι μικρή οι μαθητές τείνουν να εμφανίζουν δυσκολίες σε προβλήματα με ποσοστά. Τελειώνοντας το σχολείο οι ίδιοι μαθητές θα συνεχίζουν να έχουν ελλιπή επίγνωση των ποσοστών και να δυσκολεύονται σε καθημερινές καταστάσεις που απαιτούν την ερμηνεία αυτών. Τέτοιες καταστάσεις στην ζωή ενός ενήλικου ανθρώπου είναι για παράδειγμα η διαχείριση των οικονομικών του, η κατανόηση στατιστικών πληροφοριών που σχετίζονται με τις οικονομικές και κοινωνικές τάσεις (π.χ. μεταβολή οικονομικών συντελεστών ή επίπεδα ρύπανσης στην ατμόσφαιρα) και η κατανόηση των εκπτώσεων.

Μάλιστα στην αγορά οι έμποροι χρησιμοποιούν τα ποσοστά προς όφελός τους έχοντας επίγνωση ότι οι άνθρωποι πολύ συχνά δεν μπορούν να αξιολογήσουν σωστά τις συνέπειες μιας σειράς ποσοστιαίων αλλαγών. Τέτοια σφάλματα έχουν προφανείς επιπτώσεις για το μάρκετινγκ και τη συμπεριφορά των καταναλωτών. Για παράδειγμα, εάν οι καταναλωτές κρίνουν με λάθος τρόπο μία έκπτωση 40% που ακολουθείται από μια άλλη έκπτωση 40% και νομίζουν ότι η συνολική έκπτωση είναι 80% (Paulos, 1988, σελ. 122 όπ. ανάφ. στο Chen & Rao, 2007), θα μπορούσαν να αγοράσουν περισσότερα αγαθά από αυτά που θα αγόραζαν αν ο έμπορος είχε ένα μεμονωμένο ποσοστό έκπτωσης ίσο με 64%. Οι έμποροι χρησιμοποιούν συχνά τη στρατηγική διπλών εκπτώσεων όταν προωθούν τα προϊόντα τους. Τέτοια λάθη που μπορεί να κάνουν οι αγοραστές καθορίζουν σε πολλές περιπτώσεις τη διαφήμιση, την προώθηση, την τιμολόγηση και την πολιτική μιας εταιρείας.

Δεν πρέπει να παραβλέπουμε όμως ότι ένας ενήλικας που δυσκολεύεται στην κατανόηση των ποσοστών υπήρξε κάποτε ένα παιδί που αντιμετώπιζε αντίστοιχες δυσκολίες. Αυτές οι δυσκολίες ενδέχεται να οφείλονται στο ισχύον εκπαιδευτικό σύστημα και τον τρόπο που αυτό προσεγγίζει τη διδασκαλία των ποσοστών. Μερίδιο ευθύνης φέρουν τόσο τα σχολικά εγχειρίδια όσο και οι διδακτικές προσεγγίσεις των εκπαιδευτικών.

Τα βιβλία συχνά παρουσιάζουν τυποποιημένες γνώσεις, αφού προσφέρουν τον κανόνα και περιορίζουν τον μαθητή στην εφαρμογή του. Αντίθετα σπανίζουν ασκήσεις που φέρνουν στο επίκεντρο την κριτική σκέψη του μαθητή και τον οδηγούν σε εννοιολογική κατανόηση. Για παράδειγμα αν ζητείται από τους μαθητές να υπολογίσουν το 25% του 140 το πιο πιθανό είναι να εφαρμόσουν μία μέθοδο που μόλις έχουν διδαχθεί στο αντίστοιχο κεφάλαιο (π.χ. την απλή μέθοδο των τριών), ενώ θα μπορούσαν να το υπολογίσουν βρίσκοντας αρχικά το μισό της ποσότητας και ύστερα το μισό αυτού.

Επίσης, όπως προαναφέρθηκε οι γνώσεις που θα αποκτήσουν οι μαθητές είναι αλληλένδετες με τις πρακτικές που ακολουθούνται κατά την εκπαιδευτική διαδικασία και κατά συνέπεια με τις γνώσεις που έχουν οι εκπαιδευτικοί οι οποίοι καλούνται να τους διδάξουν. Αν οι εκπαιδευτικοί δεν έχουν κατανοήσει σε βάθος την έννοια του ποσοστού ενδέχεται να επηρεάσουν αρνητικά τα μαθησιακά αποτελέσματα.

Η παρούσα έρευνα στρέφεται στην μελέτη των δυσκολιών που εμφανίζουν οι φοιτητές Παιδαγωγικών τμημάτων, δηλαδή οι αυριανοί δάσκαλοι, στην έννοια του ποσοστού και στις αυξομειώσεις αυτού. Αν οι ίδιοι αντιμετωπίζουν παρανοήσεις το ίδιο ενδέχεται να συμβεί και με τους μαθητές τους και η ισχύουσα κατάσταση θα συνεχίσει να διαιωνίζεται. Καθώς δεν υπάρχουν στην χώρα μας παρόμοιες έρευνες, θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον να εντοπιστούν αυτές οι δυσκολίες και οι παρανοήσεις ώστε να σχεδιαστούν τα κατάλληλα προγράμματα σπουδών που θα οδηγήσουν στην επιτυχή επίλυση του ζητήματος.

Σκοπός λοιπόν της παρούσας εργασίας είναι να εξετάσει τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις των μελλοντικών δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην αυξομείωση των ποσοστών και στην έννοια του ποσοστού γενικότερα.

Στο πρώτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας γίνεται μία ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας με σκοπό να παρουσιαστούν τα ευρήματα από τις μέχρι τώρα έρευνες γύρω από τις παρανοήσεις και τις δυσκολίες πάνω στην έννοια του ποσοστού, καθώς και στις αυξομειώσεις ποσοστών.

Στη συνέχεια γίνεται λόγος για την παρούσα έρευνα και παρουσιάζονται αναλυτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν.

Τέλος, ακολουθεί ένα κεφάλαιο στο οποίο παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας, προτάσεις που απορρέουν από αυτά, καθώς και οι περιορισμοί της.

1. Ανασκόπηση της βιβλιογραφίας

Σε παγκόσμιο επίπεδο τα ποσοστά απαντώνται σε καθημερινές καταστάσεις της ζωής και γι' αυτό δεν απουσιάζουν από τα αναλυτικά προγράμματα διαφόρων μαθημάτων (Parker & Leinhardt, 1995). Ήδη από το παρελθόν ερευνητικές μελέτες έχουν εξετάσει τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τα ποσοστά και κάποιες από αυτές κάνουν λόγο για ελλιπή εννοιολογική κατανόηση και περιορισμένες υπολογιστικές γνώσεις των μαθητών γύρω από τα ποσοστά (Mullis, Dossey, Owen, & Phillips, 1991). Και ενώ πλήθος ερευνών έχουν εξετάσει συχνές παρανοήσεις των ενηλίκων γύρω από τα ποσοστά (Li & Chapman, 2013; Reyna & Brainerd, 2008), αντίστοιχες έρευνες για παρανοήσεις και δυσκολίες των ίδιων των εκπαιδευτικών στον τομέα αυτό σπανίζουν.

Ειδικότερα σε ότι αφορά την πρωτοβάθμια εκπαίδευση στη χώρα μας τα ποσοστά αποτελούν ξεχωριστό κεφάλαιο στην ύλη της ΣΤ΄ τάξης, ενώ η έννοια του ποσοστού παρουσιάζεται ήδη από την Ε΄ τάξη. Έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον λοιπόν να μελετηθούν οι παρανοήσεις των Ελλήνων εκπαιδευτικών που καλούνται να διδάξουν τα ποσοστά. Μάλιστα ανασκόπηση της σχετικής βιβλιογραφίας δεν ανέδειξε τέτοιες έρευνες στην χώρα μας.

Η σωστή κατανόηση της έννοιας του ποσοστού είναι πολύ σημαντική. Έτσι ποικίλες έρευνες έχουν εστιάσει στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν τα παιδιά στην εκμάθηση των ποσοστών ή σπανιότερα στις γνώσεις των ενηλίκων γύρω από αυτά (Ginsburg, Gal, & Schuh, 1995). Αποτελέσματα από την National Assessment of Educational Progress (Mullis et al., 1991) υποδηλώνουν ότι πολλοί μαθητές είναι πιθανό να φύγουν από το σχολείο με ελλιπή εννοιολογική κατανόηση και περιορισμένες υπολογιστικές γνώσεις του ποσοστού και οι γνώσεις τους ενδέχεται να μην επαρκούν για τη χρήση ή την κατανόηση των ποσοστών στον πραγματικό κόσμο. Η υπόθεση αυτή ενισχύεται από τα αποτελέσματα της National Adult Literacy Survey (Kirsch, Jungeblut, Jenkins, & Kolstad, 2002), η οποία έδειξε ότι ένα ποσοστό μεταξύ του 25% - 50% του ενήλικου πληθυσμού στις Ηνωμένες Πολιτείες δυσκολεύεται να ασχοληθεί με πολλά λειτουργικά καθήκοντα που περιλαμβάνουν μαθηματικά στοιχεία, συμπεριλαμβανομένων πολλών δραστηριοτήτων με ποσοστά (Ginsburg et al., 1995).

Το ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες στα ποσοστά δε φαίνεται να είναι κάτι καινούριο, καθώς οι ίδιες δυσκολίες διατηρούνται για πολλές δεκαετίες. Όσες προσπάθειες έχουν προταθεί και δοκιμαστεί δεν εμφανίζουν το αναμενόμενο αποτέλεσμα και υπάρχει η υποψία ότι αυτό συμβαίνει, επειδή η δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τα ποσοστά ενδέχεται να έχει τις ρίζες της σε δυσκολίες που έχουν οι μαθητές σε άλλους τομείς των μαθηματικών (Parker & Leinhardt, 1995).

Οι Baratta, Price, Stacey, Steinle και Gvozdenko (2010) ομαδοποίησαν τα προβλήματα με ποσοστά στα οποία εμφανίζονται σχέσεις μέρους, όλου και ποσοστού σε τρεις κατηγορίες:

α) σε εκείνα που ζητείται το μέρος, το οποίο συνήθως αναφέρεται ως ποσοστό (π.χ. το 25% του 20 είναι x)

β) σε εκείνα που ζητείται το ποσοστό στα 100 (π.χ. το 5 είναι το x% του 20)

γ) σε εκείνα που ζητείται το όλο (π.χ. το 25% του x είναι 5).

Μελέτη της Dole (1997, όπ. αναφ. στο Baratta et al., 2010) και συναδέλφων της έδειξε ότι μαθητές γυμνασίου μπορούσαν να επιλύσουν πιο εύκολα προβλήματα που τους ζητήθηκε να βρουν το μέρος σε σχέση με τους άλλους δύο τύπους προβλημάτων. Επίσης ένα σημαντικό εύρημα τους ήταν ότι μόνο οι μαθητές που μπορούσαν να επιλύσουν και τους τρεις τύπους προβλημάτων μπορούσαν να αναγνωρίσουν σε ποιο τύπο ανήκει το πρόβλημα, να το αναλύσουν με όρους που έχουν σημασία για αυτούς και να επιλέξουν την κατάλληλη διαδικασία που πρέπει να χρησιμοποιηθεί για να το επιλύσουν. Αντίθετα οι μαθητές που ήταν εξοικειωμένοι μόνο με προβλήματα που ζητείται το μέρος, φάνηκε να βασίζονται σε μηχανιστικές μεθόδους που έχουν διδαχτεί για να τα επιλύσουν. Σε περίπτωση που ξεχνούσαν τη μέθοδο που θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν, μπορούσαν να προβλέψουν την αξία της απάντησης, αλλά δεν μπόρεσαν να κατασκευάσουν στρατηγικές για τον υπολογισμό της.

Σε παρόμοια έρευνα η Koey (1998, όπ. αναφ. στο Baratta et al., 2010) ερεύνησε την κατανόηση που έχουν φοιτητές-δάσκαλοι πάνω στα ποσοστά και κατέληξε σε μερικά πολύ ενδιαφέροντα ευρήματα. Το 98% των συμμετεχόντων απάντησε σωστά σε προβλήματα που έπρεπε να βρεθεί το μέρος που αντιστοιχεί σε ένα ποσοστό με την συντριπτική πλειοψηφία να χρησιμοποιεί κλάσματα για να φτάσει στην επίλυση. Όταν έπρεπε να βρουν το ποσοστό στα 100 (π.χ. πόσο % του 28 είναι το 7;) εμφάνισαν δυσκολίες στην επίλυση με πιο κοινό λάθος το ότι εκτελούσαν την πράξη $\frac{7}{100} \times 28$. Το μεγαλύτερο ποσοστό αποτυχίας εμφανίστηκε στα προβλήματα που έπρεπε να βρουν την συνολική ποσότητα. Η έρευνα κατέληξε ότι οι γνώσεις των εκπαιδευτικών πάνω στα ποσοστά ήταν μηχανιστικές, ενώ πάνω από το 1/3 των συμμετεχόντων δεν ήταν σε θέση να προτείνει μια δεύτερη μέθοδο επίλυσης του προβλήματος. Η Koey πρότεινε ότι θα μπορούσε να επιτευχθεί καλύτερη κατανόηση των ποσοστών με χρήση οπτικών μοντέλων και περισσότερων παραδειγμάτων από την καθημερινή ζωή.

Σε έρευνα που πραγματοποιήθηκε ήδη από προηγούμενη δεκαετία, φάνηκε ότι οι μαθητές τείνουν να αγνοούν εντελώς το σύμβολο επί τοις εκατό σε ασκήσεις με ποσοστά, σαν να μην έχει καμιά σημασία. Πολλοί από τους μαθητές δεν γράφουν το σύμβολο % σε μερικά σημεία της λύσης τους, ενώ στη συνέχεια ενδέχεται να το επαναφέρουν κατά βούληση μέσα στο ίδιο πρόβλημα, δηλαδή ταυτίζουν το 110 με το 110%. (Kircher, 1926, όπ. αναφ. στο Parker & Leinhardt, 1995) Οι μαθητές αυτοί δεν δείχνουν να κατανοούν πως, αν και το σύμβολο % ακολουθεί έναν αριθμό, δεν έχει την ίδια σημασία που έχουν οι μονάδες μέτρησης όταν αυτές ακολουθούν έναν αριθμό. Έτσι δεν μπορούν να συνειδητοποιήσουν ότι δε γίνεται να "αποβάλλουν" το σύμβολο του ποσοστού και στη συνέχεια να το επαναφέρουν στο τέλος του προβλήματος, όπως έχουν συνηθίσει να κάνουν με τις μονάδες μέτρησης. Μελέτες αποδεικνύουν ότι όχι μόνο οι μαθητές, αλλά και οι μελλοντικοί δάσκαλοι συνεχίζουν να βλέπουν το σύμβολο επί τοις εκατό ως κάτι που μπορεί να προστεθεί ή να αφαιρεθεί σαν να μην έχει σημασία η χρήση του (Parker & Leinhardt, 1995).

Μία ακόμη έρευνα αποκάλυψε ότι μαθητές που δεν ήταν σίγουροι για την απαιτούμενη διαδικασία που ακολουθείται στα ποσοστά τείνουν να επανέρχονται στις διαδικασίες που είχαν προηγουμένως συναντήσει στη μελέτη των κλασμάτων ή των δεκαδικών. Για παράδειγμα κατά τη συμπλήρωση της πρότασης «Τα 9/9 του Ν ισούται με το _% του Ν», οι μαθητές μπορεί να δώσουν σαν απάντηση τον αριθμό "1". Το λάθος αυτό ονομάζεται αγνόηση του % , γιατί οι απαντήσεις θα ήταν σωστές αν το πρόβλημα δεν είχε στην εκφώνηση το %. Άλλου είδους λάθη φαίνεται να έχουν την αφετηρία τους στους πίνακες της προπαίδειας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα πολλοί άνθρωποι που έχουν χαμηλή ικανότητα στις ασκήσεις με ποσοστά, όταν πρέπει να απαντήσουν σε μία ερώτηση που θα πρέπει να βρουν πόσο τις εκατό ενός αριθμού είναι ένας άλλος αριθμός (π.χ. 4=_% του 8), να κάνουν λάθος. Στο παράδειγμά μας λοιπόν θα μπορούσαν να απαντήσουν με τον αριθμό "2", διαιρώντας το 8 με το 4. Αυτό συμβαίνει επειδή οι άνθρωποι όταν δεν ξέρουν ποια ενέργεια πρέπει να εκτελέσουν επιλέγουν να διαιρέσουν, εάν ο λόγος είναι ακέραιος ή διαφορετικά να πολλαπλασιάσουν. (Edwards, 1930; Parker & Leinhardt, 1995)

Ένα ακόμη συχνό σφάλμα, όταν μιλάμε για ποσοστά είναι ότι τείνουμε πιο εύκολα να βλέπουμε έναν αριθμό ως τμήμα ενός άλλου αριθμού και όχι έναν αριθμό ως πολλαπλάσιο ενός άλλου αριθμού. Έτσι κατά τη συμπλήρωση της ισότητας 60 =_% του 30 κάποιοι έδωσαν την απάντηση 50%. Έχει παρατηρηθεί γενικότερα ότι σε τέτοιου είδους ασκήσεις όπου ζητείται το ποσοστό στα 100 οι δυσκολίες αυξάνονται, όταν το ζητούμενο ποσοστό ξεπερνά το 100%.Αυτό συμβαίνει γιατί οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν αντίστροφα τα νούμερα, όταν διαιρούν και κατά συνέπεια να δημιουργούν ένα ποσοστό μικρότερο του 100%. (Parker & Leinhardt,1995).

Ο Edwards στην έρευνά του παρείχε στοιχεία για ένα ακόμη κοινό σφάλμα που εμφανίζεται κατά τη μετατροπή ποσοστών σε δεκαδικούς ή αντίστροφα, γνωστό και ως "ο κανόνας του αριθμητή". Κάποιος που εφαρμόζει αυτόν τον κανόνα πιστεύει ότι το σύμβολο επί τοις εκατό στα δεξιά του αριθμού μπορεί να αντικατασταθεί από μια υποδιαστολή στα αριστερά του αριθμού και αυτομάτως να μετατραπεί σε δεκαδικό αριθμό. Αυτός ο ελαττωματικός αλγόριθμος θα έχει ως αποτέλεσμα τη σωστή μετατροπή από 55% σε 0,55, αλλά και την εσφαλμένη μετατροπή του 110% σε 0,110 και του 9% σε 0,9 (Edwards, 1930).

Η Baratta και οι συνάδελφοί της (2010) στην έρευνα που διεξήγαγαν κατέληξαν ότι ένας ακόμα παράγοντας που μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένη επιλογή του τρόπου επίλυσης ενός προβλήματος με ποσοστά είναι η λανθασμένη εντύπωση ορισμένων μαθητών ότι ο πολλαπλασιασμός με έναν αριθμό οδηγεί σε μεγαλύτερο αριθμό και αντίστοιχα η διαίρεση οδηγεί σε μικρότερο αριθμό. Βασισμένοι σε αυτή τους την πεποίθηση, οι μαθητές προκειμένου να υπολογίσουν το όλο στην πρόταση «το 11% του x είναι 145», θα απέρριπταν τη λύση $145 \div 0{,}11$.

Η έννοια του ποσοστού είναι αυτή που συχνά είναι πιο δύσκολη για τους μαθητές να κατανοήσουν. Οι γνώσεις που έχουν για το ποσοστό μπορεί να περιορίζονται στο εισαγωγικό μοντέλο του ποσοστού ως μέρος ενός συνόλου, σε έναν αριθμό που μπορεί να γραφτεί ως κλάσμα ή ως δεκαδικός ή σε ένα πρόβλημα που μπορεί συνήθως να λυθεί με πολλαπλασιασμό ή διαίρεση. Αυτές οι περιορισμένες απόψεις του ποσοστού μπορεί να έχουν αναπτυχθεί, επειδή το ποσοστό έχει συχνά διδαχθεί ως μια σειρά μετατροπών και υπολογισμών (Parker, 1997). Τα παιδιά δεν κατανοούν εννοιολογικά το ποσοστό, όταν η άποψη πολλών καθηγητών και σχολικών βιβλίων είναι ότι η μελέτη του ποσοστού είναι μόνο μια επέκταση της μελέτης των κλασμάτων και των δεκαδικών. Αυτή η προσέγγιση οδηγεί στο να δίνεται έμφαση στον μηχανισμό των ποσοστιαίων υπολογισμών και στις μετατροπές από ποσοστά σε κλάσματα ή δεκαδικούς και αντίστροφα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα η διδασκαλία να μη επικεντρώνεται στην εννοιολογική κατανόηση (Ginsburg, et al., 1995).

Η έμφαση στα υπολογιστικά χαρακτηριστικά των ποσοστών μπορεί να καλύψει τη φύση της ίδιας της έννοιας αυτών (Parker & Leinhardt, 1995). Η έννοια του ποσοστού βασίζεται πάνω στη σύγκριση. Για να μπορέσει να γίνει προσδιορισμός του ποιοι αριθμοί θα πρέπει να συγκριθούν, πρέπει να καθοριστεί ο τρόπος με τον οποίο σχετίζονται τα αντικείμενα ενός προβλήματος, έτσι ώστε να δημιουργηθούν οι κατάλληλες συγκρίσεις. Το ποσοστό στη συνέχεια παρέχει ένα βολικό εργαλείο για την έκφραση των αναλογικών συγκρίσεων των μεγεθών ή των ποσοτήτων δύο αντικειμένων. Το ποσοστό επί τοις εκατό παρέχει έναν τρόπο για την τυποποίηση του αριθμητικού δείκτη της σύγκρισης με βάση το 100. Η προσοχή στις συγκρίσεις είναι ένα σημαντικό συστατικό της διδασκαλίας των ποσοστών. Όταν οι μαθητές αγνοούν τη συγκριτική φύση του ποσοστού, συχνά αναπτύσσουν λανθασμένες διαδικασίες επίλυσης, οι οποίες βασίζονται στο μέγεθος των αριθμών και όχι στις σχέσεις που έχουν στο πρόβλημα (Parker, 1997). Ένα ποσοστό στα 100 εκ πρώτης όψεως μπορεί να θεωρηθεί απλά ένας αριθμός, αλλά έχει νόημα μόνο όταν αναφέρεται σε μία ποσότητα. Αυτό συμβαίνει επειδή η ποσότητα στην οποία αναφέρεται το ποσοστό καθορίζει την τιμή του. Για παράδειγμα αν μία επιχείρηση ξοδέψει το 1% του προϋπολογισμού της για να ανακαινίσει τις κτιριακές της εγκαταστάσεις, κάποιος μπορεί να θεωρήσει ότι το 1% είναι "μικρός" αριθμός, όμως αν ο προϋπολογισμός της συγκεκριμένης εταιρείας είναι 150 εκατομμύρια ευρώ τότε το 1% θα αντιστοιχεί σε 1,5 εκατομμύριο ευρώ το οποίο θεωρείται ένα διόλου ευκαταφρόνητο ποσό (Jacobs, 2013).

Σε μία έρευνα των Li και Chapman σε ενήλικες εμφανίστηκε ακόμα μία παρανόηση που υπάρχει σε σχέση με τα ποσοστά. Οι συμμετέχοντες φάνηκε να προτιμούν ένα μεγάλο ποσοστό που αντιστοιχούσε σε μία μικρή ποσότητα αναφοράς σε σχέση με ένα μικρό ποσοστό που αντιστοιχούσε σε μία μεγάλη ποσότητα αναφοράς, ακόμα και όταν η τιμή των δύο ποσοστών και στις δύο περιπτώσεις ήταν ίση. Για παράδειγμα, αν είχαν να επιλέξουν ανάμεσα στο 20% του 100 και στο 40% του 50 θα επέλεγαν το 40% χωρίς να σκεφτούν ότι οι δύο τιμές είναι ίσες. Αυτή η προτίμηση αντικατοπτρίζει τις γνώσεις τους πάνω στο αντικείμενο. Το φαινόμενο αυτό φαίνεται να εντείνεται όταν υπάρχει μεγάλη απόκλιση στα ποσοστά και μπορεί να οφείλεται στη παραμέληση της πληροφορίας της ποσότητας αναφοράς και στον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι αντιλαμβάνονται τα ποσοστά (Li & Chapman, 2013).

Σε αυτή την έρευνα των Li και Chapman, οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να αξιολογήσουν την οργανικότητα διαφόρων ποικιλιών καφέ και βρέθηκε ότι οι άνθρωποι προσελκύονται περισσότερο από τα βιολογικά προϊόντα όταν ένα μεγαλύτερο ποσοστό ενός δευτερεύοντος συστατικού είναι οργανικό, έναντι μικρότερης αναλογίας ενός κύριου συστατικού. Στην αρχή του πειράματος οι συμμετέχοντες διάβασαν ότι θα αξιολογήσουν την οργανικότητα διαφόρων μιγμάτων καφέ, με το κάθε μίγμα να περιλαμβάνει κόκκους καφέ από τρεις διαφορετικές περιοχές: τη Γουατεμάλα, την Αιθιοπία και τη Σουμάτρα. Σε κάθε περίπτωση τα 100 γραμμάρια μίγματος αποτελούνταν από 60 γραμμάρια ποικιλίας από τη Γουατεμάλα, 30 γραμμάρια ποικιλίας από την Αιθιοπία και 10 γραμμάρια ποικιλίας από τη Σουμάτρα. Έπειτα στους συμμετέχοντες δόθηκαν δώδεκα προτάσεις της μορφής «Στο μίγμα οργανικό είναι μόνο το 25% της ποικιλίας Γουατεμάλας» ή «Στο μίγμα οργανικό είναι μόνο το 25% της ποικιλίας Αιθιοπίας». Οι έξι προτάσεις αφορούσα την οργανικότητα της ποικιλίας της Γουατεμάλας και οι υπόλοιπες έξι την οργανικότητα της ποικιλίας της Αιθιοπίας. Το ποσοστό στις διάφορες προτάσεις άλλαζε και εκτός από 25% μπορούσε να είναι 40%, 50%, 80%, 95% ή 100%. Οι συμμετέχοντες έπρεπε να δείξουν πόσο ελκυστικό τους φαίνεται κάθε μίγμα ως προς την οργανικότητά του, επιλέγοντας τον αριθμό που τους εκφράζει σε μία 16βαθμη κλίμακα από το 0 «καθόλου ελκυστικό» έως 15 «πολύ ελκυστικό».

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι όταν τα ποσοστά της οργανικότητας ήταν τα ίδια (π.χ. 25%) οι συμμετέχοντες προτίμησαν ως πιο οργανικά τα μίγματα καφέ στα οποία οργανική ήταν η ποικιλία που βρισκόταν σε μεγαλύτερη ποσότητα μέσα στο μίγμα (ποικιλία της Γουατεμάλας), έναντι των μιγμάτων στα οποία οργανική ήταν η ποικιλία που βρισκόταν σε μικρότερη ποσότητα (ποικιλία της Αιθιοπίας). Περαιτέρω συγκρίσεις όμως των ποικιλιών καφέ σε μεγάλη ποσότητα και με οργανικότητα 25% (ή 40% ή 50%), με τις ποικιλίες καφέ σε μικρή ποσότητα με οργανικότητα 50% (ή 80% ή 100% αντίστοιχα) έφεραν στο φως ενδιαφέροντα στοιχεία. Τα αντίστοιχα μίγματα δεν αξιολογήθηκαν ισάξια ως προς την οργανικότητά τους. Αντίθετα οι συμμετέχοντες φάνηκε να επηρεάζονται περισσότερο από το μέγεθος του ποσοστού, παρά από το αν πρόκειται για ποικιλία σε μεγάλη ή μικρή ποσότητα. Έτσι οι ερευνητές οδηγήθηκαν στο συμπέρασμα ότι οι καταναλωτές προσελκύονται περισσότερο από τα βιολογικά προϊόντα όπου η οργανικότητα υπάρχει σε μεγαλύτερο ποσοστό σε ένα δευτερεύον συστατικό, παρά από τα προϊόντα όπου η οργανικότητα υπάρχει σε μικρότερο ποσοστό σε ένα πρωτεύον συστατικό (Li & Chapman, 2013).

Οι δάσκαλοι, όπως και ένα μεγάλο τμήμα του πληθυσμού αντιμετωπίζουν δυσκολία όταν έρχονται σε επαφή με αυξομειώσεις ποσοστών στην καθημερινή τους ζωή. Αυξομείωση ποσοστών μπορεί να συναντήσει κάποιος με τη μορφή διπλών εκπτώσεων. Οι διπλές εκπτώσεις δημιουργούν περισσότερους αγοραστές, πωλήσεις, έσοδα και κέρδος από μια οικονομικά ισοδύναμη ενιαία έκπτωση. Αυτό συμβαίνει επειδή είναι ευκολότερο να κάνει κάποιος υπολογιστικό σφάλμα. Όταν αντιμετωπίζουν διπλές εκπτώσεις, οι καταναλωτές που χρησιμοποιούν λανθασμένα μια αριθμητική υπολογιστική στρατηγική, πιθανότατα υπερεκτιμούν τον αντίκτυπο της έκπτωσης. Συνεπώς, οι διπλές εκπτώσεις θεωρούνται πιο συμφέρουσες από μία ενιαία έκπτωση της ίδιας οικονομικής αξίας και κατά συνέπεια αυτό θα προκαλέσει περισσότερες αγορές και θα αποφέρει αντίστοιχα οικονομικά οφέλη στην επιχείρηση (Chen & Rao, 2007).

Ειδικότερα μία έρευνα της Jacobs (2010) με θέμα τις αυξομειώσεις ποσοστών έδειξε ότι οι ενήλικες ως επί το πλείστον δυσκολεύονται σε προβλήματα που σχετίζονται με αυτές. Διαπιστώθηκε ότι όταν αντιμετωπίζουν προβλήματα αυξομειώσεων, επιλέγουν να δίνουν λύσεις με προσθέσεις και αφαιρέσεις φυσικών αριθμών, χωρίς να λαμβάνουν υπόψη τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα των ποσοστών στα 100.

Σε έρευνα που έχει γίνει από το University of Nottingham & UC Berkeley (Mathematics Assessment Resource Service, 2015) παρατηρήθηκε ότι ένα μέρος από τους συμμετέχοντες όταν αντιμετώπιζε ένα πρόβλημα με αυξομείωση ποσοστών αφαιρούσε τα ποσοστά μεταξύ τους και χρησιμοποιούσε την μεταξύ τους διαφορά για να απαντήσει. Δηλαδή όταν ζητήθηκε να βρουν την τιμή ενός αντικειμένου που αρχικά αυξήθηκε κατά 25% και ύστερα μειώθηκε κατά 20% εκτελούσαν την πράξη 25-20=5 και απαντούσαν ότι θα σημειωθεί μια αύξηση 5% .

Στην ίδια έρευνα παρατηρήθηκε ένα ακόμα λάθος και το οποίο δείχνει την δυσκολία που είχαν οι συμμετέχοντες να επιλέξουν την σωστή σειρά που πρέπει να γίνουν οι πράξεις, αφού υπήρχαν περιπτώσεις που κάποιοι έκαναν πρώτα την μείωση και μετά την αύξηση, ενώ είχε ζητηθεί το αντίθετο (Mathematics Assessment Resource Service, 2015).

Όμως η μεγαλύτερη ίσως παρανόηση που παρατηρείται είναι η πεποίθηση μίας μεγάλης μερίδας ανθρώπων που πιστεύουν ότι όταν αυξήσω μία τιμή με ένα ποσοστό και στη συνέχεια μειώσω τη νέα τιμή με το ίδιο ποσοστό τότε το αποτέλεσμα είναι η αρχική τιμή. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν ισχύει, αφού το αντίστροφο μιας αύξησης με ένα ποσοστό δεν είναι η μείωση με το ίδιο ποσοστό, επειδή η ποσότητα αναφοράς αλλάζει (Mathematics Assessment Resource Service, 2015).

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι σύμφωνα με την Jacobs (2013) οι συμμετέχοντες της έρευνας της έχουν μειωμένη απόδοση σε προβλήματα αυξομείωσης ποσοστών συγκριτικά με προβλήματα που εμφανίζεται μόνο αύξηση ή μόνο μείωση. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν έχουν κατανοήσει τα ποσοστά και δεν μπορούν να επιλύσουν προβλήματα ποσοστών που απαιτούν μεγαλύτερη εννοιολογική κατανόηση και όχι μόνο χρήση τύπων που έχουν διδαχθεί να χρησιμοποιούν μηχανιστικά.

Από τα παραπάνω λοιπόν βλέπουμε ότι υπάρχουν πολλές και διαφορετικές παρανοήσεις σε σχέση με τα ποσοστά. Το πρόβλημα που υπάρχει μπορεί να οφείλεται στην εκπαίδευση, η οποία δεν λαμβάνει υπόψη τις άτυπες γνώσεις των μαθητών και δεν χρησιμοποιεί τα κατάλληλα μοντέλα που θα προάγουν τη μάθηση. Η διδασκαλία δεν ξεκινάει από τις άτυπες γνώσεις των μαθητών, ούτε τις συνδέει με την τυπική γνώση. Η πληροφόρηση σχετικά με άτυπες ή προηγούμενες γνώσεις για τα ποσοστά που οι μαθητές φέρνουν μαζί τους στις σπουδές τους είναι ουσιαστικής σημασίας για το σχεδιασμό ενός αποτελεσματικού μηχανισμού που βασίζεται στα δυνατά σημεία των μαθητών και προσπαθεί να βελτιώσει τα κενά γνώσης ή όσα δεν έχουν κατανοήσει σωστά (Ginsburg et al., 1995). Κάποιοι υποστηρίζουν ότι οι άνθρωποι κατανοούν τους φυσικούς αριθμούς έμφυτα σε αντίθεση με τους ρητούς αριθμούς που απαιτούν μια εννοιολογική αλλαγή. Θεωρούν ότι η έννοια του αριθμού διαφοροποιείται σε μεγάλο βαθμό με το πέρασμα από τους φυσικούς αριθμούς στους ρητούς. Αναφέρουν ότι το εννοιολογικό πλαίσιο που πρέπει να οικοδομηθεί είναι διαφορετικό από το υπάρχον των φυσικών αριθμών και πρέπει να ενσωματωθεί σε αυτό. Μια τέτοια άποψη θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν την δεχόμαστε, αφού θεωρούμε ότι εφόσον η διδασκαλία έχει σωστές προϋποθέσεις που στηρίζουν το μαθητή να χτίσει με βάση και τις άτυπές του γνώσεις, τότε θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα προβλήματα που εμφανίζονται είναι παρενέργειες ενός εκπαιδευτικού συστήματος που δεν κάνει όσα απαιτούνται για να υπάρξει βελτίωση. Η βελτίωση του προβλήματος και η μελλοντική εξάλειψή του εξαρτάται τόσο από τα σχολικά βιβλία όσο και από τους εκπαιδευτικούς που πρέπει να τα χρησιμοποιήσουν. Ένα βιβλίο το οποίο δεν είναι "καλό", θα είναι δύσκολο να το διαχειριστεί ένας εκπαιδευτικός μέσα στην τάξη, ακόμα και αν έχει τις απαραίτητες γνώσεις. Αντίστοιχα, ένα "καλό" βιβλίο δεν είναι από μόνο του αρκετό, αφού στα χέρια ενός εκπαιδευτικού που δεν έχει τις κατάλληλες γνώσεις δεν θα επιφέρει τα ζητούμενα αποτελέσματα.

Και ενώ πλήθος ερευνών έχουν εξετάσει συχνές παρανοήσεις των ενηλίκων γύρω από τα ποσοστά (Li & Chapman, 2013; Reyna & Brainerd, 2008), αντίστοιχες έρευνες για τις γνώσεις, τις παρανοήσεις και τις δυσκολίες των ίδιων των εκπαιδευτικών στον τομέα αυτό σπανίζουν.

Καταληκτικά, λαμβάνοντας υπόψη και την έρευνα της Jacobs (2010) που έδειξε ότι οι ενήλικες ως επί το πλείστον δυσκολεύονται σε προβλήματα που σχετίζονται με αυξομειώσεις ποσοστών θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον η υλοποίηση μίας έρευνας που θα εξετάζει τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις των Ελλήνων δασκάλων σχετικά με τις αυξομειώσεις ποσοστών, αλλά και την έννοια του ποσοστού γενικότερα.

2. Αποτελέσματα

Τα στοιχεία που συλλέξαμε προέρχονται από δύο ερωτήσεις που δόθηκαν στους τεταρτοετείς φοιτητές του μαθήματος Διδακτική των Μαθηματικών σε δύο διαφορετικές εξετάσεις στους ίδιους φοιτητές. Από τα γραπτά που συλλέχθηκαν επιλέχτηκαν τυχαία 100 γραπτά από κάθε εξέταση.

Δόθηκαν δύο προβλήματα τα οποία είναι τα εξής:

Πρόβλημα 1ο

Ζητάτε από τους μαθητές σας να λύσουν το πρόβλημα: "Ένας μαθητής εξετάστηκε δύο φορές στα Αγγλικά. Στην πρώτη εξέταση απάντησε σε 50 ερωτήσεις και είχε σωστές απαντήσεις στο 20% των ερωτήσεων. Στη δεύτερη εξέταση απάντησε σε 20 ερωτήσεις και είχε σωστές το 40% αυτών.1) Σε ποία εξέταση είχε περισσότερες σωστές απαντήσεις; 2)Σε ποια από τις δύο εξετάσεις σημείωσε μεγαλύτερη επιτυχία;".

Α) Απαντήστε στα δύο ερωτήματα του προβλήματος

Β) Υπάρχει διαφορά στο νόημα με το οποίο χρησιμοποιούνται τα ποσοστά στα εκατό στα δύο ερωτήματα του προβλήματος; Αν ναι, εξηγήστε ποια ακριβώς είναι αυτή η διαφορά.

Πρόβλημα 2ο

Το καλοκαίρι, το κόστος ενός χαλιού σε κάποιο κατάστημα είναι «χ» ευρώ. Στην αρχή του φθινοπώρου το αρχικό του κόστος αυξάνεται κατά 50%. Όμως, στην αρχή της άνοιξης, αυτό το νέο κόστος μειώνεται κατά 50%. Μετά από αυτήν τη μείωση, ποιό θα είναι το κόστος του χαλιού;

Α) Λύστε το πρόβλημα περιγράφοντας τον τρόπο που σκεφτήκατε.

Β) Η λύση και συζήτηση ενός παρόμοιου προβλήματος σε μία τάξη της ΣΤ΄ δημοτικού, ποια ιδέα σχετιζόμενη με τα ποσοστά θα έδινε στους μαθητές την ευκαιρία να συνειδητοποιήσουν;

Πρόβλημα 1ο - Ερώτημα Α1

Σχετικά με το πρώτο πρόβλημα οι σωστές απαντήσεις στο πρώτο ερώτημα θα μπορούσαν να φανερώνουν ότι οι φοιτητές-δάσκαλοι είναι σε θέση να αντιλαμβάνονται τα ποσοστά στα 100 ποσοτήτων στις οποίες αναφέρονται σαν ποσότητες (ποσοστά). Η εύρεση των τιμών των ποσοτήτων των σωστών απαντήσεων στο ερώτημα 1 θα μπορούσε να αποτελεί βάση:

α) για τη συνειδητοποίηση της εξάρτησης του ποσοστού από την ποσότητα αναφοράς, όταν το ποσοστό στα 100 διατηρείται σταθερό.

β) για τη συνειδητοποίηση της εξάρτησης του ποσοστού από το ποσοστό στα 100, όταν η ποσότητα αναφοράς διατηρείται σταθερή.

Και στις δύο περιπτώσεις οι σχέσεις εξάρτησης είναι ανάλογες.

Καθώς αυτές οι σχέσεις γίνονται συνειδητές, μπορούν να οδηγούν σε πολλές στρατηγικές υπολογισμού των ποσοστών. Για παράδειγμα αν ζητηθεί από κάποιον να υπολογίσει το 40% του 400, μία στρατηγική υπολογισμού που θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί είναι ο υπολογισμός του 20% του 400 και έπειτα ο διπλασιασμός αυτής της τιμής. Μια τέτοια διαχείριση των ποσοστών έρχεται σε αντίθεση με τις τυποποιημένες μεθόδους, οι οποίες προωθούνται στα διδακτικά βιβλία, όπως είναι ο πολλαπλασιασμός, η μέθοδος των σταυρωτών γινομένων, ο πίνακας με αναλογίες και η αναγωγή στη μονάδα, τις οποίες οι περισσότεροι μαθητές, όπως σημειώθηκε στην ανασκόπηση της βιβλιογραφίας, αν τις θυμηθούν, τις χρησιμοποιούν αυτούσιες ή λίγο παραλλαγμένες, διότι δεν τις καταλαβαίνουν.

Θα είχε λοιπόν ιδιαίτερο ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ποιον τρόπο χρησιμοποιούν οι φοιτητές-δάσκαλοι για την επίλυση του πρώτου ερωτήματος εφόσον απαντούν σωστά. Αν χρησιμοποιούν τυποποιημένες μεθόδους, θα δημιουργηθούν υπόνοιες κατά πόσο είναι κατανοητές οι σχέσεις οι οποίες υποκρύπτονται στην διαχείριση των ποσοστών στα 100 ποσοτήτων και για την ποιότητα των γνώσεων των δασκάλων, ακόμα και αν έχουν απαντήσει σωστά.

Οι απαντήσεις των φοιτητών συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πρόβλημα 1ο

*Ζητάτε από τους μαθητές σας να λύσουν το πρόβλημα: "Ένας μαθητής εξετάστηκε δύο φορές στα Αγγλικά. Στην πρώτη εξέταση απάντησε σε 50 ερωτήσεις και είχε σωστές απαντήσεις στο 20% των ερωτήσεων. Στη δεύτερη εξέταση απάντησε σε 20 ερωτήσεις και είχε σωστές το 40% αυτών.**1) Σε ποία εξέταση είχε περισσότερες σωστές απαντήσεις;** 2)Σε ποια από τις δύο εξετάσεις σημείωσε μεγαλύτερη επιτυχία;".*

Α) Απαντήστε στα δύο ερωτήματα του προβλήματος

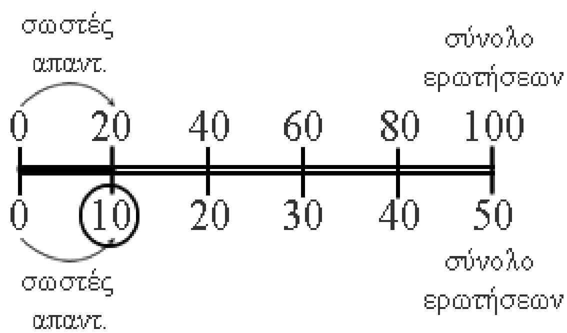
Β) Υπάρχει διαφορά στο νόημα με το οποίο χρησιμοποιούνται τα ποσοστά στα εκατό στα δύο ερωτήματα του προβλήματος; Αν ναι, εξηγήστε ποια ακριβώς είναι αυτή η διαφορά.

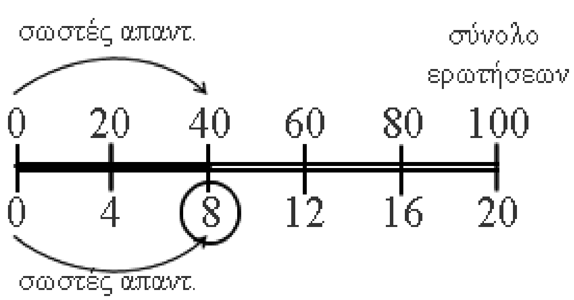
Ερώτημα Α1

Σωστές Απαντήσεις	**Λανθασμένες Απαντήσεις**	**Καμία Απάντηση**
72	23	5

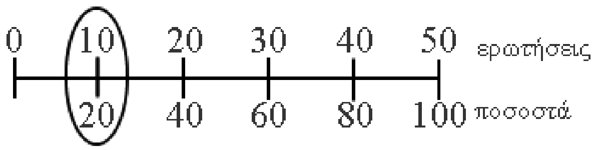
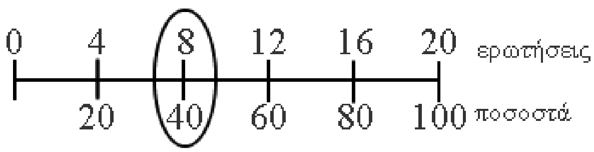
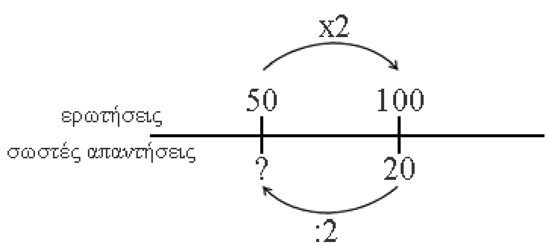
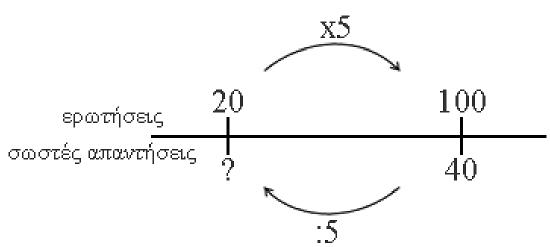
Ενδεικτικοί τρόποι υπολογισμού.

• Το 20% του 50 είναι $50 \times \frac{20}{100} = 10$ σωστές απαντήσεις. Το 40% του 20 είναι $20 \times \frac{40}{100} = 8$ σωστές απαντήσεις. Άρα στην πρώτη εξέταση είχε περισσότερες σωστές απαντήσεις (10>8).	Αριθμητική πράξη πολλαπλασιασμού	32 φοιτητές
• Στις 100 ερωτήσεις απάντησε σωστά στις 20. Στις 50 ερωτήσεις απάντησε σωστά στις x. 100 x= 20·50 100x = 1000 x = 10 Άρα στην πρώτη εξέταση απάντησε σωστά σε 10	Απλή μέθοδος των τριών	9 φοιτητές

<table>
<tr>
<td>
ερωτήσεις από τις 50.
• Στις 100 ερωτήσεις απάντησε σωστά στις 40.
Στις 20 ερωτήσεις απάντησε σωστά στις x.
$100\,x = 20 \cdot 40$
$100x = 800$
$x = 8$
Άρα στη δεύτερη εξέταση απάντησε σωστά σε 8 ερωτήσεις από τις 40.
</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
• Οι αριθμογραμμές που κατασκεύασαν οι φοιτητές για να λύσουν το πρόβλημα είναι οι εξής:
Πρώτη απεικόνιση με αριθμογραμμή:
<u>Πρώτη εξέταση Αγγλικών</u>


<u>Δεύτερη εξέταση Αγγλικών</u>


</td>
<td>Διπλή αριθμογραμμή</td>
<td>3 φοιτητές</td>
</tr>
</table>

Δεύτερη απεικόνιση με αριθμογραμμή: πρώτο τεστ  δεύτερο τεστ  Τρίτη απεικόνιση με αριθμογραμμή: πρώτη εξέταση  δεύτερη εξέταση  		
• $\frac{20}{100} = \frac{x}{50} \rightarrow x = \frac{1000}{100}$= 10 σωστές $\frac{40}{100} = \frac{x}{20} \rightarrow x = \frac{800}{100}$= 8σωστές	σταυρωτά γινόμενα	2 φοιτητές

• 1η εξέταση: Στις 100 ερωτ.→ 20 ήταν σωστές Στις 50 ερωτ.→ 10 ήταν σωστές 2η εξέταση: Στις 100 ερωτ.→ 40 ήταν σωστές Στις 10 ερωτ.→ 4 ήταν σωστές Στις 20 ερωτ.→ 8 ήταν σωστές	Αναγωγή	1 φοιτητής
Σχολιασμός: Πρέπει να αναφερθεί ότι 26 από τους φοιτητές απάντησαν ότι στην πρώτη εξέταση έδωσε 10 σωστές απαντήσεις ενώ στη δεύτερη 8 σωστές, χωρίς να συνοδεύουν την απάντησή τους με πράξεις ή κάποια άλλη εξήγηση. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να ξέρουμε πώς ακριβώς έφτασαν σε αυτό το συμπέρασμα και αν έκαναν υπολογισμούς σε κάποιο άλλο χαρτί ή βρήκαν το αποτέλεσμα με νοερούς υπολογισμούς. Απ' ότι φαίνεται οι φοιτητές στην πλειοψηφία τους απάντησαν σωστά το ερώτημα Α1, χωρίς να αντιμετωπίσουν αυξημένες δυσκολίες. Όμως για να φτάσουν στο αποτέλεσμα η συντριπτική πλειοψηφία τους χρησιμοποίησε τυποποιημένες μεθόδους και γι' αυτό δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν η σωστή απάντηση σημαίνει ταυτόχρονα και κατανόηση των ποσοστών. Οι επόμενες ερωτήσεις θα μας δώσουν περισσότερες ευκαιρίες για να επαληθεύσουμε αν όντως οι φοιτητές έχουν κατανοήσει σε βάθος τα ποσοστά ή αν χρησιμοποιούν με επιτυχία μηχανιστικές μεθόδους τις οποίες έχουν διδαχθεί, ενώ στην πραγματικότητα δεν είναι σε θέση να καταλάβουν ποιες ιδιότητες των ποσοστών υποκρύπτονται πίσω από αυτές.		

Πρόβλημα 1ο - Ερώτημα Α2

Μία πλήρης επεξεργασία της δεύτερης ερώτησης του πρώτου προβλήματος θα μπορούσε να έχει δύο σωστές απαντήσεις. Πρώτον, υποθέτοντας ότι η επιτυχία αφορά στο πλήθος των σωστών απαντήσεων οι φοιτητές θα μπορούσαν να απαντήσουν ότι μεγαλύτερη επιτυχία υπάρχει στην πρώτη εξέταση (10 σωστές έναντι 8 σωστών). Αυτό άλλωστε είναι αναμενόμενο θεωρώντας τα ποσοστά στα 100 ποσοτήτων στις οποίες αναφέρονται ως ποσότητες αυτά καθαυτά. Δεύτερον, υποθέτοντας ότι η επιτυχία είναι σχετική ποσότητα (δηλαδή αναφέρεται στην ποσότητα που δημιουργείται από την συσχέτιση -πολλαπλασιαστική- δύο άλλων ποσοτήτων -του πλήθος σωστών απαντήσεων και του πλήθος συνολικών ερωτήσεων), το ποσοστό στα 100 είναι ανεξάρτητο κάποιας συγκεκριμένης ποσότητας αναφοράς και σε αυτή την περίπτωση μεγαλύτερη επιτυχία υπάρχει στη δεύτερη εξέταση (40% έναντι 20%). Αυτή η δεύτερη περίπτωση (δηλαδή το ποσοστό ως λόγος) στηρίζεται και αποτελεί γενίκευση της κατανόησης που μπορεί να προέρχεται από την ενασχόληση με προβλήματα του τύπου της ερώτησης 1.

Αν εκτός από αυτά τα προβλήματα υπήρχε ενασχόληση και με προβλήματα στα οποία ζητείται να προσδιοριστεί η ποσότητα αναφοράς όταν είναι γνωστά το ποσοστό στα 100 και το ποσοστό ή να υπολογιστεί το ποσοστό στα 100 όταν είναι γνωστό το ποσοστό και η ποσότητα αναφοράς, τότε οι πιθανότητες να οδηγηθεί κάποιος στην αντίληψη του ποσοστού στα 100 ως λόγου (ή μέτρου) μιας ποσότητας έντασης, όπως η επιτυχία θα αυξάνονταν. ΄

Σκοπός αυτής της ερώτησης είναι να εξετάσει κατά πόσο οι φοιτητές μπορούν να κατανοήσουν ότι η επιτυχία μπορεί τόσο να αφορά το πλήθος των σωστών απαντήσεων, όσο και να προκύπτει από την αντίληψη του ποσοστού στα 100 ως λόγου.

Ακολουθεί πίνακας ο οποίος συνοψίζει τις απαντήσεις των φοιτητών.

Πρόβλημα 1ο

Ζητάτε από τους μαθητές σας να λύσουν το πρόβλημα: "Ένας μαθητής εξετάστηκε δύο φορές στα Αγγλικά. Στην πρώτη εξέταση απάντησε σε 50 ερωτήσεις και είχε σωστές απαντήσεις στο 20% των ερωτήσεων. Στη δεύτερη εξέταση απάντησε σε 20 ερωτήσεις και είχε σωστές το 40% αυτών.1) Σε ποία εξέταση είχε περισσότερες σωστές απαντήσεις; ***2) Σε ποια από τις δύο εξετάσεις σημείωσε μεγαλύτερη επιτυχία;****".*

Α) Απαντήστε στα δύο ερωτήματα του προβλήματος

Β) Υπάρχει διαφορά στο νόημα με το οποίο χρησιμοποιούνται τα ποσοστά στα εκατό στα δύο ερωτήματα του προβλήματος; Αν ναι, εξηγήστε ποια ακριβώς είναι αυτή η διαφορά.

<table>
<tr><td colspan="5">Ερώτημα Α2</td></tr>
<tr><th>Πλήρης απάντηση</th><th>Κατανόηση της επιτυχίας σαν πλήθος σωστών απαντήσεων</th><th>Κατανόηση της επιτυχίας σαν σχετική ποσότητα</th><th>Λανθασμένη απάντηση</th><th>Καμία Απάντηση</th></tr>
<tr><td>0</td><td>7</td><td>70</td><td>15</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="5">Ενδεικτικοί τρόποι απάντησης.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Μεγαλύτερη επιτυχία θα έχει ο μαθητής στην δεύτερη εξέταση καθώς απάντησε σωστά στο 40% των ερωτήσεων, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το 20% της πρώτης εξέτασης. (26 φοιτητές)
Το 40% είναι κοντά στο 50%, άρα στη δεύτερη εξέταση ο μαθητής θα έχει μεγαλύτερη επιτυχία επειδή απάντησε σχεδόν στις μισές από ερωτήσεις της συγκεκριμένης εξέτασης σωστά. (9 φοιτητές)
Μεγαλύτερη επιτυχία εμφανίστηκε στη δεύτερη εξέταση, επειδή στην πρώτη εξέταση έχουμε $\frac{10}{50}$ σωστές, ενώ στην δεύτερη $\frac{8}{20}$ σωστές. Αλλά $\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$ και $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$. Κάνοντας την απλοποίηση, τα κλάσματά μας έχουν τον ίδιο παρανομαστή και άρα μπορούμε να τα συγκρίνουμε. $\frac{1}{5} < \frac{2}{5}$ γιατί 1< 2. (5 φοιτητές)

</td><td colspan="2">Κατανόηση της επιτυχίας σαν σχετική ποσότητα</td></tr>
<tr><td colspan="3">

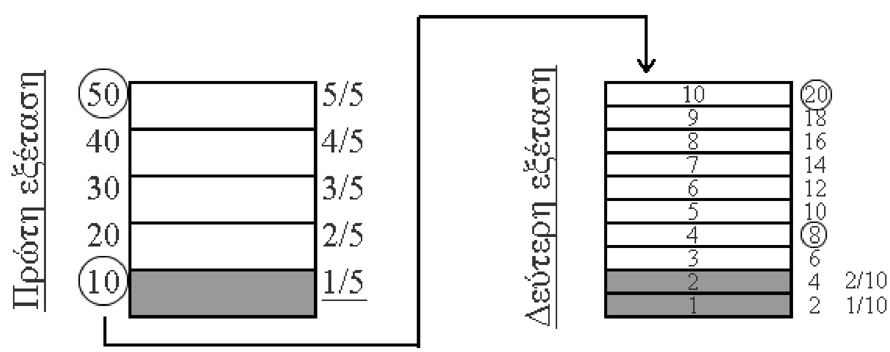
Μεγαλύτερη επιτυχία θα έχει στην πρώτη εξέταση, διότι ο μαθητής απάντησε σε 10 ερωτήσεις σωστά, έναντι 8 σωστών απαντήσεων στη δεύτερη εξέταση. (7 φοιτητές)

</td><td colspan="2">Κατανόηση της επιτυχίας σαν πλήθος σωστών απαντήσεων</td></tr>
</table>

Σχολιασμός:

Εντύπωση προκαλεί το γεγονός ότι δεν υπήρχε ούτε ένας φοιτητής που να έδωσε μία πλήρη απάντηση, αναγνωρίζοντας ότι η επιτυχία μπορεί από τη μία να αφορά το πλήθος των σωστών απαντήσεων, από την άλλη όμως μπορεί να είναι σχετική ποσότητα που προκύπτει από την συσχέτιση του πλήθος των σωστών απαντήσεων και του πλήθος συνολικών ερωτήσεων.

Η συντριπτική πλειοψηφία των φοιτητών ήταν σε θέση να παρατηρήσει την επιτυχία ως σχετική ποσότητα και απάντησε ότι μεγαλύτερη επιτυχία υπάρχει στην εξέταση με το μεγαλύτερο ποσοστό στα 100. Μόλις 7 φοιτητές απάντησαν ότι η επιτυχία αφορά το πλήθος των σωστών απαντήσεων, χωρίς ωστόσο να αναφερθούν και στην επιτυχία σε σχέση με το σύνολο των ερωτήσεων. Πρέπει να τονιστεί ότι υπήρχαν 15 φοιτητές οι οποίοι έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις οι οποίες δεν υπάγονται σε κάποια από τις δύο κατηγορίες. Για παράδειγμα, δύο φοιτητές ανέφεραν ότι και στις δύο εξετάσεις ο μαθητής είχε την ίδια απόδοση και ο ένας από τους δύο έδωσε την εξής απάντηση: «Στην πρώτη εξέταση απάντησε σωστά στο $\frac{1}{5}$ των ερωτήσεων, αφού είχε 10 σωστές απαντήσεις. Στην δεύτερη εξέταση, είχε 8 σωστές απαντήσεις. Οπότε είχε σωστά τα $\frac{2}{10}$ των απαντήσεων. Όμως $\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$. Άρα η επίδοση του ήταν η ίδια και στις δύο προσπάθειες του. Γιατί, το $\frac{1}{5}$ έχει μέσα του δύο δέκατα". Η απάντησή του συνοδεύτηκε με το παρακάτω σχήμα.



Η λανθασμένη απάντηση που εμφανίστηκε τις περισσότερες φορές και συγκεκριμένα από 9 φοιτητές ήταν αυτή που ανέφερε πως μεγαλύτερη επιτυχία εμφανίζεται στη δεύτερη εξέταση, επειδή ο μαθητής έχει λιγότερες λάθος απαντήσεις σε σχέση με την πρώτη εξέταση. Όμως οι φοιτητές απάντησαν σκεπτόμενοι τις λάθος απαντήσεις, χωρίς να τις υπολογίζουν σε σχέση με τον αριθμό των ερωτήσεων, δηλαδή δεν υπολόγισαν ότι η πρώτη εξέταση αποτελούνταν από 50 ερωτήσεις, ενώ η δεύτερη από 20 ερωτήσεις.

Πρόβλημα 1ο - Ερώτημα Β

Η τελευταία ερώτηση του πρώτου προβλήματος είχε σκοπό να ελέγξει κατά πόσο οι παραπάνω διαφορετικές πτυχές του ποσοστού στα 100 είναι ξεκάθαρες και αποσαφηνισμένες από τους φοιτητές. Κάτι τέτοιο θα γινόταν εμφανές, διότι το ερώτημα Β καλούσε τους φοιτητές να διατυπώσουν την άποψή τους γύρω από τη διαφορά στο νόημα με το οποίο χρησιμοποιούνται τα ποσοστά στα 100 στα δύο προβλήματα.

Κάποιος φοιτητής που έχει κατανοήσει τις διαφορετικές πτυχές του ποσοστού, θα ήταν σε θέση να απαντήσει ότι υπάρχει διαφορά στο νόημα, αφού την πρώτη περίπτωση εξετάζουμε τα ποσοστά στα 100 ποσοτήτων στις οποίες αναφέρονται ως ποσότητες, ενώ στη δεύτερη περίπτωση εξετάζουμε τα ποσοστά ως σχετική ποσότητα (δηλαδή το ποσοστό ως λόγος) που προκύπτει από τη συσχέτιση του πλήθος σωστών απαντήσεων με το πλήθος των συνολικών ερωτήσεων.

Οι απαντήσεις των φοιτητών στο εν λόγω ερώτημα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πρόβλημα 1ο

Ζητάτε από τους μαθητές σας να λύσουν το πρόβλημα: "Ένας μαθητής εξετάστηκε δύο φορές στα Αγγλικά. Στην πρώτη εξέταση απάντησε σε 50 ερωτήσεις και είχε σωστές απαντήσεις στο 20% των ερωτήσεων. Στη δεύτερη εξέταση απάντησε σε 20 ερωτήσεις και είχε σωστές το 40% αυτών.1) Σε ποία εξέταση είχε περισσότερες σωστές απαντήσεις; 2)Σε ποια από τις δύο εξετάσεις σημείωσε μεγαλύτερη επιτυχία;".

Α) Απαντήστε στα δύο ερωτήματα του προβλήματος

Β) Υπάρχει διαφορά στο νόημα με το οποίο χρησιμοποιούνται τα ποσοστά στα εκατό στα δύο ερωτήματα του προβλήματος; Αν ναι, εξηγήστε ποια ακριβώς είναι αυτή η διαφορά.

<table>
<tr><td colspan="3">Ερώτημα Β</td></tr>
<tr><td>Σωστές Απαντήσεις</td><td>Λανθασμένες Απαντήσεις</td><td>Καμία Απάντηση</td></tr>
<tr><td>36</td><td>57</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ενδεικτικές απαντήσεις:</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Η μεγαλύτερη επιτυχία δεν είναι απλά οι περισσότερες σωστές απαντήσεις, αλλά οι περισσότερες σωστές απαντήσεις σε σχέση με το σύνολο των ερωτήσεων. Στο πρώτο ερώτημα το ποσοστό στα εκατό εκφράζει απλά το σύνολο των σωστών απαντήσεων, χωρίς ωστόσο να το συσχετίζει με το όλο και έτσι εξηγείται το γεγονός ότι στην πρώτη εξέταση έχει περισσότερες σωστές απαντήσεις, όμως η μεγαλύτερη επιτυχία υπάρχει στην δεύτερη εξέταση. (36 φοιτητές)</td><td>Κατανόηση των διαφορετικών πτυχών του ποσοστού στα 100</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Υπάρχει διαφορά στο νόημα με το οποίο χρησιμοποιούνται τα ποσοστά στα εκατό, γιατί δεν αναφέρονται στον ίδιο αριθμό ερωτήσεων. Η ποσότητα των ερωτήσεων διαφέρει και δεν μπορούμε να κρίνουμε δίκαια τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων.
Θα ήταν πιο εύκολο αν τα ποσοστά αφορούσαν τον ίδιο αριθμό ερωτήσεων, αφού από την στιγμή που οι ποσότητες στις οποίες αναφέρονται είναι διαφορετικές δεν μπορούμε να τα συγκρίνουμε και να πούμε ότι το 40% είναι μεγαλύτερο από το 20% με σιγουριά. (39 φοιτητές)

• Δεν υπάρχει διαφορά στο νόημα, αφού και στις δύο</td><td>Μη κατανόηση των διαφορετικών πτυχών του ποσοστού στα 100</td></tr>
</table>

περιπτώσεις το ποσοστό αφορά τις σωστές απαντήσεις και αυτό που παίζει το σπουδαίο ρόλο και κρίνει το συνολικό αποτέλεσμα είναι η αναλογία συνολικών απαντήσεων και σωστών απαντήσεων. (7 φοιτητές)	

Σχολιασμός

Δεδομένων των απαντήσεών τους στο ερώτημα Α2 του προβλήματος, είναι λογικό οι φοιτητές να δυσκολεύτηκαν να δώσουν μία πλήρη απάντηση στο ερώτημα Β.

Μια μικρή μερίδα φοιτητών παρατήρησε τη διαφορά στο νόημα που μπορούν να έχουν τα ποσοστά στα 100. Πρέπει να τονιστεί όμως ότι ενώ αναγνώρισαν τη μία πτυχή των ποσοστών που παρατηρείται στο ερώτημα Α1, αναφορικά με το ερώτημα Α2 παρατήρησαν μόνο μία από τις δύο πτυχές των ποσοστών, αυτή του ποσοστού ως σχετική ποσότητα.

Περισσότεροι από τους μισούς φοιτητές δεν κατάφεραν να αποσαφηνίσουν αυτή τη διαφορά στο νόημα με το οποίο χρησιμοποιούνται τα ποσοστά στα 100. Οι περισσότεροι εξ αυτών απέδωσαν τη διαφορά στο νόημα στο γεγονός ότι τα ποσοστά στα 100 αναφέρονται σε διαφορετική ποσότητα αναφοράς, δηλαδή διαφορετικό πλήθος ερωτήσεων κάθε φορά. Μερικοί μάλιστα έγραψαν πως αν το πλήθος των ερωτήσεων ήταν ίδιο και στις δύο εξετάσεις θα άλλαζε το ποσοστό επιτυχίας.

Πρόβλημα 2ο - Ερώτημα Α

Οι φοιτητές-δάσκαλοι στην πλειοψηφία τους έλυσαν επιτυχώς με τυποποιημένες μεθόδους το ερώτημα Α1 του πρώτου προβλήματος, όμως δεν μπορούμε να ισχυριστούμε με βεβαιότητα ότι έχουν κατανοήσει πλήρως την έννοια του ποσοστού και την εξάρτησή του από την ποσότητα αναφοράς και ότι εφαρμόζουν τις παραπάνω μεθόδους έχοντας πλήρη επίγνωση των όσων κάνουν. Οι πεποιθήσεις μας αυτές ενισχύονται και από το γεγονός ότι οι απαντήσεις τους στα ερωτήματα Α2 και Β δεν έδειξαν πληρότητα.

Με το δεύτερο πρόβλημα θέλαμε να ελέγξουμε αν οι φοιτητές λειτουργούν μηχανιστικά όταν έχουν να αντιμετωπίσουν προβλήματα με ποσοστά και κατά πόσο οι απαντήσεις τους βασίζονται στην κατανόηση των ποσοστών και της σχέσης τους με την ποσότητα αναφοράς. Αν οι φοιτητές δεν απαντήσουν σωστά στο πρόβλημα αυξομείωσης, επαληθεύεται η υπόθεσή μας ότι χρησιμοποιούν τυποποιημένες μεθόδους που έχουν διδαχθεί, μηχανιστικά χωρίς να κατανοούν τις σχέσεις που κρύβονται πίσω από αυτές.

Αρχικά οι φοιτητές καλούνταν να επιλύσουν ένα πρόβλημα αυξομείωσης ποσοστών και να περιγράψουν τον τρόπο με τον οποίο σκέφτηκαν για να φτάσουν στην επίλυση.

Οι απαντήσεις των φοιτητών στο πρώτο ερώτημα του προβλήματος συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

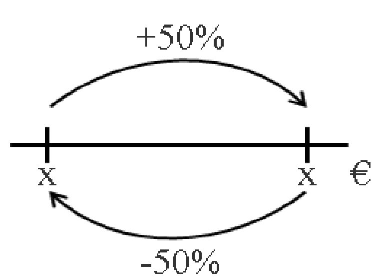
Πρόβλημα 2ο

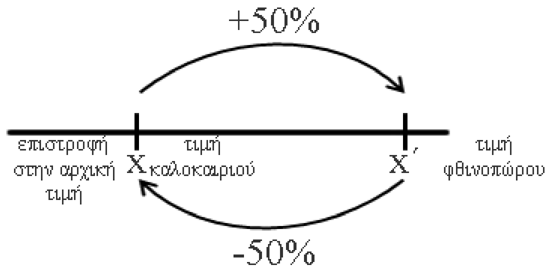
Το καλοκαίρι, το κόστος ενός χαλιού σε κάποιο κατάστημα είναι «χ» ευρώ. Στην αρχή του φθινοπώρου το αρχικό του κόστος αυξάνεται κατά 50%. Όμως, στην αρχή της άνοιξης, αυτό το νέο κόστος μειώνεται κατά 50%. Μετά από αυτήν τη μείωση, ποιό θα είναι το κόστος του χαλιού;

Α) Λύστε το πρόβλημα περιγράφοντας τον τρόπο που σκεφτήκατε.

Β) Η λύση και συζήτηση ενός παρόμοιου προβλήματος σε μία τάξη της ΣΤ΄ δημοτικού, ποια ιδέα σχετιζόμενη με τα ποσοστά θα έδινε στους μαθητές την ευκαιρία να συνειδητοποιήσουν;

Ερώτημα Α		
Σωστές Απαντήσεις	***Λανθασμένες Απαντήσεις***	***Καμία Απάντηση***
38	58	4

Ενδεικτικές απαντήσεις:	
• $X + 50\% - 50\% = X$ (30 φοιτητές)	Πρόσθεση και αφαίρεση του ίδιου ποσοστού από την αρχική τιμή.
• $X + \frac{50}{100} - \frac{50}{100} = X$ (7 φοιτητές)	Πρόσθεση και αφαίρεση του ίδιου κλάσματος από την αρχική τιμή.
• $X + 50 - 50 = X$ (2 φοιτητές)	Πρόσθεση και αφαίρεση του ίδιου αριθμού από την αρχική τιμή.
• «Η αύξηση εξαφανίστηκε», «Το κόστος επιστρέφει στην αρχική του τιμή», «Αλληλοεξουδετερώνονται επειδή είναι όμοιοι αριθμοί με αντίθετο πρόσημο», «Μετά την μείωση θα επανέρθει στην αρχική του τιμή», «Τα ποσοστά αλληλοεξουδετερώθηκαν», «Είναι σαν να μην υπέστη αλλαγή», «Είναι σαν να μην έγινε κάποια αύξηση ή μείωση, αφού το ποσοστό είναι το ίδιο». (17 φοιτητές)	Αιτιολόγηση χωρίς πράξεις
• 	Σχηματική απεικόνιση

 (2 φοιτητές)	
• Οι φοιτητές έδιναν στο χαλί μια αρχική τιμή και μετά από την εκτέλεση των απαραίτητων πράξεων, κατέληγαν στην τελική τιμή και συμπέραιναν ότι αυτή είναι ίση με τα $\frac{3}{4}$ της αρχικής. Η αρχική τιμή που έδωσαν κατά κύριο λόγο οι φοιτητές στο χαλί ήταν 100€. Άλλες αρχικές τιμές που δόθηκαν στο χαλί ήταν 10€, 12€ ή 50€. (21 φοιτητές)	Προσδιορισμός της μεταβλητής Χ με μία υποθετική αρχική τιμή.
• Το καλοκαίρι η τιμή του χαλιού ήταν X. Μετά την αύξηση ήταν $X+\frac{X}{2}=\frac{2X}{2}+\frac{X}{2}=\frac{3X}{2}$ Μετά την μείωση ήταν $\frac{3X}{2}-\frac{1}{2}(\frac{3X}{2})=\frac{3X}{2}-\frac{3X}{4}=\frac{6X}{4}-\frac{3X}{4}=\frac{3X}{4}$. Άρα το κόστος του χαλιού είναι $\frac{3}{4}X$ ή αλλιώς μειωμένο κατά 25% από την αρχική τιμή. (10 φοιτητές)	Αντικατάσταση του ποσοστού 50% με κλάσμα $\frac{X}{2}$.
• Στην αρχή του φθινοπώρου έχουμε $X+50\%X=150\%X$. Στην αρχή της άνοιξης έχουμε $150\%X-50\%(150\%X)=150\%X-75\%X=75\%X$ Οπότε το τελικό κόστος του χαλιού θα είναι το 75%	Χρήση του ποσοστού ως $50\%X$

<table>
<tr>
<td>του αρχικού κόστους.
(4 φοιτητές)

• Έστω Χ η τιμή του χαλιού.
Όταν το κόστος του χαλιού αυξηθεί κατά 50%, θα έχουμε:
$\chi_{1}=\chi+\frac{50}{100}\chi=\frac{100}{100}\chi+\frac{50}{100}\chi=\frac{150}{100}\chi$
Όταν το νέο κόστος του χαλιού μειωθεί κατά 50% θα έχουμε
$\chi_{2}=\chi_1-\frac{50}{100}\chi_1=\frac{100}{100}\chi_1-\frac{50}{100}\chi_1=\frac{50}{100}\chi_1=\frac{1}{2}\chi_1$
Άρα:$\chi_{2}=\frac{1}{2}\frac{150}{100}\chi=\frac{150}{200}\chi=\frac{75}{100}\chi$
(3 φοιτητές)</td>
<td>

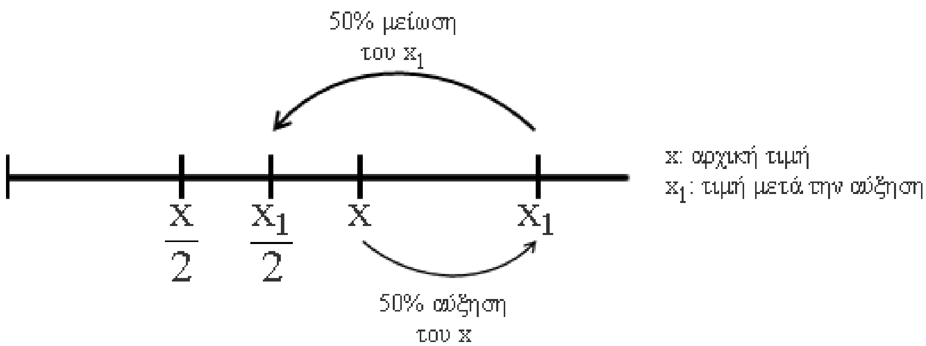
Χρήση του ποσοστού ως $\frac{50}{100}\chi$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Σχολιασμός

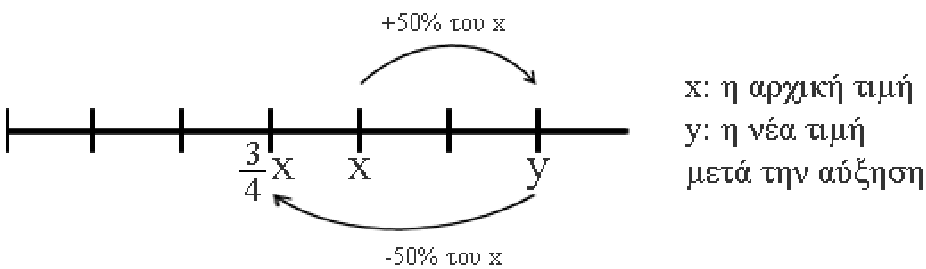
Η πλειοψηφία των φοιτητών και συγκεκριμένα 58 από τους 100 φοιτητές, απάντησαν λανθασμένα ότι μετά την αυξομείωση το κόστος του χαλιού θα παραμείνει το ίδιο με το αρχικό κόστος, έναντι μόλις 38 φοιτητών που επίλυσαν σωστά το πρόβλημα. Στο παραπάνω πρόβλημά το ποσοστό 50% εφαρμόζεται κάθε φορά σε διαφορετικές ποσότητες άρα δεν είναι δυνατόν η τελική τιμή να είναι η ίδια με την αρχική. Επομένως, επαληθεύεται η υπόθεση που είχαμε κάνει ότι οι φοιτητές-δάσκαλοι όταν έχουν να επιλύσουν προβλήματα με ποσοστά χρησιμοποιούν μηχανιστικούς τρόπους υπολογισμού που δε συνοδεύονται από κατανόηση.

Ενδεχομένως αν η αρχική ποσότητα είχε προσδιοριστεί και δεν είχε δοθεί με μια μεταβλητή Χ, περισσότεροι φοιτητές θα έφταναν στη σωστή λύση του προβλήματος. Όμως η κατανόηση του τρόπου με τον οποίο τα ποσοστά στα 100 επηρεάζονται από την ποσότητα αναφοράς, θα μπορούσε να οδηγήσει από μόνη της στη σωστή λύση, χωρίς να είναι απαραίτητο να δοθεί μια αρχική τιμή. Η επιλογή της μεταβλητής Χ έγινε με αφετηρία το γεγονός ότι η ουσιαστική και σε βάθος κατανόηση δεν θα έπρεπε να επηρεάζεται από αυτή τη διαφορά στην αρχική τιμή. Αυτό</td>
</tr>
</table>

όμως δε σημαίνει ότι με δική τους πρωτοβουλία οι φοιτητές δε θα μπορούσαν να δώσουν στην επονομαζόμενη αρχική τιμή Χ, μία αριθμητική τιμή που θα τους βοηθούσε να φτάσουν στη λύση. Κάτι τέτοιο άλλωστε έκαναν 21 φοιτητές, αφού έδωσαν στην μεταβλητή Χ διάφορες τιμές που στη συνέχεια τους βοήθησαν να εξάγουν τα σωστά συμπεράσματα.

Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι δύο από τους φοιτητές που επίλυσαν σωστά το πρόβλημα συνόδεψαν την απάντησή τους με τις παρακάτω απεικονίσεις προκειμένου να στηρίξουν την απάντηση τους.





Πρόβλημα 2ο - Ερώτημα Β

Στη συνέχεια οι φοιτητές στο δεύτερο σκέλος του προβλήματος έπρεπε να σκεφτούν και να αναφέρουν ποια ιδέα σχετιζόμενη με τα ποσοστά θα μπορούσαν να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές που θα αντιμετώπιζαν ένα παρόμοιο πρόβλημα στην τάξη. Δηλαδή καλούνταν να εξηγήσουν ότι κεντρική ιδέα του προβλήματος είναι η εξάρτηση του ποσοστού από μία ποσότητα αναφοράς. Όταν η ποσότητα αναφοράς αλλάζει τότε αλλάζει και το ποσοστό.

Προϋπόθεση για την ορθή απάντηση στο εν λόγω ερώτημα είναι η κατανόηση της συγκεκριμένης ιδέας από τους φοιτητές.

Οι απαντήσεις των φοιτητών αποτελούν ένδειξη εκείνης της μαθηματικής γνώσης των εκπαιδευτικών που είναι αναγκαία για το διδακτικό τους έργο και που ως γνώση είναι κάτι επιπλέον από τη μαθηματική τους γνώση.

Οι απαντήσεις που έδωσαν οι φοιτητές παρουσιάζονται στον πίνακα που ακολουθεί.

<table>
<tr><td colspan="6">Πρόβλημα 2ο
Το καλοκαίρι, το κόστος ενός χαλιού σε κάποιο κατάστημα είναι «χ» ευρώ. Στην αρχή του φθινοπώρου το αρχικό του κόστος αυξάνεται κατά 50%. Όμως, στην αρχή της άνοιξης, αυτό το νέο κόστος μειώνεται κατά 50%. Μετά από αυτήν τη μείωση, ποιό θα είναι το κόστος του χαλιού;
Α) Λύστε το πρόβλημα περιγράφοντας τον τρόπο που σκεφτήκατε.
Β) Η λύση και συζήτηση ενός παρόμοιου προβλήματος σε μία τάξη της ΣΤ΄ δημοτικού, ποια ιδέα σχετιζόμενη με τα ποσοστά θα έδινε στους μαθητές την ευκαιρία να συνειδητοποιήσουν;</td></tr>
<tr><td colspan="6">Ερώτημα Α</td></tr>
<tr><td colspan="2">Σωστές Απαντήσεις</td><td colspan="2">Λανθασμένες Απαντήσεις</td><td colspan="2">Καμία Απάντηση</td></tr>
<tr><td colspan="2">28</td><td colspan="2">59</td><td colspan="2">13</td></tr>
<tr><td colspan="6">Ενδεικτικές απαντήσεις:</td></tr>
<tr><td colspan="3">• Τα ποσοστά αναφέρονται πάντα σε μια ποσότητα και όταν οι αρχικές ποσότητες διαφέρουν μεταξύ τους, τότε διαφέρουν και τα αντίστοιχα ποσοστά τους. Μια ενδεικτική αποτύπωση της παραπάνω ιδέας είναι η ακόλουθη: «το ποσό που αντιπροσωπεύει το ποσοστό μιας ποσότητας εξαρτάται από την ποσότητα». (28 φοιτητές)</td><td colspan="3">Εξάρτηση του ποσοστού από την ποσότητα αναφοράς.</td></tr>
<tr><td colspan="3">• «Με ένα τέτοιο πρόβλημα φαίνεται ότι τα ποσοστά</td><td colspan="3">Σύνδεση ποσοστών με κλάσματα ή</td></tr>
</table>

είναι ή αποτελούν κλάσματα και πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κλάσματα για να λύσουμε προβλήματα ποσοστών». (19 φοιτητές) *«Οι μαθητές θα συνειδητοποιήσουν ότι τα ποσοστά μετατρέπονται σε δεκαδικούς αριθμούς και κλάσματα»*. (1 φοιτητής)	δεκαδικούς
• Αντίστοιχα προβλήματα που σχετίζονται με καταστάσεις της καθημερινότητας θα μπορούσαν να βοηθήσουν ένα μαθητή να εξοικειωθεί με τα ποσοστά ή τις εκπτώσεις: *«μέσω ενός παρόμοιου προβλήματος οι μαθητές μπορεί να κατανοήσουν την έννοια των εκπτώσεων, που ενδέχεται να τους δυσκολεύει και είναι κάτι που θα συναντούν συχνά κατά την διάρκεια της ζωής τους»*. (18 φοιτητές)	Σύνδεση ποσοστών με καθημερινή ζωή.
• Ο λανθασμένος τρόπος με τον οποίο αντιμετώπισαν το Α' ερώτημα του προβλήματος κάποιοι φοιτητές τους οδήγησε να απαντήσουν ότι *«μέσω ενός παρόμοιου προβλήματος ένας μαθητής μπορεί να συνειδητοποιήσει ότι όταν σε ένα αριθμό προσθέσουμε ένα ποσοστό και στη συνέχεια αφαιρέσουμε το ίδιο ποσοστό επανερχόμαστε στον αρχικό αριθμό»*. (12 φοιτητές)	Αγνόηση της εξάρτησης του ποσοστού από την ποσότητα αναφοράς.
• «Με ένα παρόμοιο πρόβλημα κάποιος μαθητής ενδέχεται να εξοικειωθεί με αριθμητικές πράξεις που περιέχουν ποσοστά και να μάθει να λύνει προβλήματα με ποσοστά», «Με παρόμοιο πρόβλημα θα δοθεί στους μαθητές η ευκαιρία να συνειδητοποιήσουν τι διαδραματίζεται κατά την αύξηση και την μείωση ποσοστών και να μάθουν να εκτελούν πράξεις με ποσοστά». (8 φοιτητές)	Εξοικείωση με αριθμητικές πράξεις που περιέχουν ποσοστά

Σχολιασμός

Από τους 38 φοιτητές που απάντησαν σωστά στο πρώτο ερώτημα του προβλήματος, μόνο οι 28 κατάφεραν στο δεύτερο ερώτημα να αποδώσουν την κεντρική ιδέα του προβλήματος, δηλαδή τη σχέση των ποσοστών με την ποσότητα αναφοράς.

Όπως ήταν αναμενόμενο όσοι φοιτητές απάντησαν λανθασμένα στο πρώτο ερώτημα θεωρώντας ότι η τελική τιμή είναι η ίδια με την αρχική σκεπτόμενοι ότι η αύξηση και η μείωση 50% αντιστοιχούν στην ίδια ποσότητα, δεν ήταν σε θέση να εντοπίσουν ποια ιδέα σχετιζόμενη με τα ποσοστά προκύπτει από το πρόβλημα. Στις απαντήσεις τους μερικοί επανέλαβαν αυτό που είχαν γράψει στο πρώτο ερώτημα, ενώ οι υπόλοιποι έδωσαν απαντήσεις οι οποίες ήταν πιο γενικές και αφορούσαν τη σύνδεση των ποσοστών με καταστάσεις της καθημερινής ζωής.

3. Συμπεράσματα

Η παρούσα έρευνα έχει ως σκοπό να εξετάσει τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις των μελλοντικών δασκάλων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στην αυξομείωση των ποσοστών και στην έννοια του ποσοστού γενικότερα. Τα αποτελέσματα αυτής της έρευνας μας έδωσαν την ευκαιρία να μελετήσουμε σε μεγαλύτερο βάθος τις λεπτομέρειες που κρύβονται μέσα στην έννοια του ποσοστού. Άλλοτε τα ποσοστά στα 100 ποσοτήτων στις οποίες αναφέρονται αντιστοιχούν σε μια ποσότητα (ποσοστό), και άλλοτε είναι ανεξάρτητα μιας συγκεκριμένης ποσότητας αναφοράς και λειτουργούν ως λόγος.

Από τα αποτελέσματα της έρευνας διαπιστώθηκε ότι οι φοιτητές-δάσκαλοι στην πλειονότητά τους είναι σε θέση να υπολογίζουν σωστά σε ποια ποσότητα αντιστοιχεί το ποσοστό στα 100 μιας ποσότητας αναφοράς. Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούν κυρίως μηχανιστικές μεθόδους που ενώ συνήθως τους οδηγούν στη σωστή λύση, από τα επόμενα ερωτήματα της έρευνας διαπιστώθηκε ότι σε μεγάλο βαθμό δε συνοδεύονται και από κατανόηση των βαθύτερων πτυχών των ποσοστών. Συγκεκριμένα, σε ερωτήσεις που δεν μπορούν να απαντηθούν με μηχανιστικούς τρόπους, αλλά απαιτείται κατανόηση της έννοιας του ποσοστού και εξήγηση των όσων κάνουν, οι φοιτητές καταφέρνουν να δώσουν την σωστή απάντηση σε μικρότερο βαθμό.

Ελλιπής κατανόηση παρατηρήθηκε καταρχάς ως προς τη διπλή ιδιότητα των ποσοστών στα 100 τόσο ως ποσότητες όσο και ως λόγος. Μία ακόμη ιδέα σχετιζόμενη με τα ποσοστά που φάνηκε να μην κατανοούν πλήρως οι φοιτητές αφορά τη σχέση τους με μία ποσότητα αναφοράς, όταν αυτή δεν παραμένει σταθερή. Αυτό έγινε εμφανές από την αυξημένη δυσκολία των φοιτητών να επιλύσουν το πρόβλημα αυξομείωσης. Συχνά αντιμετωπίζουν τα ποσοστά με πρόσθεση και αφαίρεση παρά σαν ποσότητες που πρέπει να τις πολλαπλασιάσουν. Μερικοί επίσης φαίνεται κάποιες φορές να αγνοούν το σύμβολο %, να κάνουν πράξεις χωρίς αυτό και να το επαναφέρουν στο τέλος, όπως έχουν διδαχθεί να κάνουν με τις μονάδες μέτρησης. Πρόκειται για ένα συχνό λάθος που στη βιβλιογραφία είναι γνωστό με το όνομα «αγνόηση του %».

Το γεγονός ότι στο πρόβλημά μας τόσο η αύξηση όσο και η μείωση ήταν της τάξης του 50% μας έδωσε τη δυνατότητα να παρατηρήσουμε κάτι ακόμα. Οι φοιτητές έδειξαν να πιστεύουν ότι η αύξηση και η μείωση μπορούν να αναιρέσουν η μία την άλλη και ότι η μείωση είναι το αντίθετο της αύξησης. Πίστευαν ότι αν στην αρχική ποσότητα προσθέσουμε έναν αριθμό και στην συνέχεια αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό από την τελική τιμή που είχε προέλθει μετά την αύξηση, το αποτέλεσμα θα είναι η αρχική ποσότητα. Όμως δεν έκαναν στον εαυτό τους την ερώτηση "50% από τι;". Οι αυξομειώσεις ποσοστών είναι σχετικές ποσότητες. Αν έχουμε μια αύξηση 50% και στη συνέχεια μία μείωση 50% δεν θα επιστρέψουμε στην αρχική ποσότητα. Αυτό συμβαίνει επειδή η μείωση δεν γίνεται στην αρχική ποσότητα αλλά σε μια διαφορετική μεγαλύτερη της αρχικής η οποία προέκυψε μετά την αύξηση. Οι μαθητές απέτυχαν στο να κατανοήσουν τη μη συμμετρική φύση της αυξομείωσης ποσοστών.

Αξίζει ακόμη να σημειώσουμε ότι οι φοιτητές χρησιμοποίησαν πλήθος τρόπων για την επίλυση των προβλημάτων με ποσοστά. Ένας από τους τρόπους που εμφανιζόταν πολύ συχνά στις απαντήσεις τους ήταν η μετατροπή των ποσοστών σε δεκαδικά κλάσματα και η εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με αυτά. Η προτίμησή τους αυτή ίσως φανερώνει ότι οι φοιτητές είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τα κλάσματα παρά με τα ποσοστά και συχνά ταυτίζουν τα ποσοστά στα 100 με κλάσματα με παρανομαστή το 100. Οι εκπαιδευτικοί και τα σχολικά βιβλία εμφανίζουν τη μελέτη των ποσοστών απλά σαν μία επέκταση της μελέτης των κλασμάτων και έτσι δίδεται έμφαση περισσότερο σε μηχανισμούς μετατροπής ποσοστών σε κλάσματα και όχι στην εννοιολογική κατανόηση των ποσοστών.

Με βάση τα παραπάνω είναι προφανές ότι χρειάζεται να ληφθούν μέτρα που θα συμβάλουν στην ενίσχυση των γνώσεων των φοιτητών γύρω από τα ποσοστά και στον περιορισμό των παραπάνω παρανοήσεων. Τα μέτρα αυτά χρειάζεται να σχετίζονται καταρχάς με το πρόγραμμα σπουδών στα Παιδαγωγικά Τμήματα Δημοτικής Εκπαίδευσης της χώρας μας. Τα ποσοστά πρέπει να αποτελούν ξεχωριστή ενότητα στα διάφορα μαθήματα Μαθηματικών που προσφέρουν οι Παιδαγωγικές σχολές.

Προκειμένου όμως να περιοριστούν οι παραπάνω αδυναμίες με σκοπό κάποια στιγμή να εξαλειφθούν θα πρέπει να δοθεί η απαραίτητη προσοχή στη διδασκαλία των ποσοστών σε όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης ξεκινώντας από το δημοτικό σχολείο. Αυτό που χρειάζεται είναι η εκπαίδευσή των μαθητών στα ποσοστά να είναι πιο εστιασμένη στις ιδέες που κρύβονται πίσω από τους μηχανιστικούς τρόπους επίλυσης προβλημάτων και να υπάρχουν περισσότερες ευκαιρίες για εμβάθυνση. Αντί να δίνεται στους μαθητές μία μηχανιστική προσέγγιση και στη συνέχεια να τους ζητείται να λύνουν προβλήματα με τη χρήση της, θα ήταν προτιμότερη μία πιο μαθητοκεντρική διδασκαλία με την οποία οι μαθητές θα είχαν την κατάλληλη στήριξη ώστε να οδηγηθούν στην επίλυση και κατανόηση του προβλήματος. Στην επίτευξη του σκοπού αυτού μπορούν να βοηθήσουν ιδιαίτερα οι κατάλληλες απεικονίσεις όπως οι διπλές αριθμογραμμές και οι μπάρες. Ακόμη και στις περιπτώσεις που οι μαθητές προτιμούν να επιλύουν ένα πρόβλημα κάνοντας αριθμητικές πράξεις ο εκπαιδευτικός δε θα πρέπει να παραλείπει να συζητά μαζί τους για τον τρόπο σκέψης τους.

Μία άλλη πρακτική που θα μπορούσε να βοηθήσει στη βαθύτερη κατανόηση των προβλημάτων με ποσοστά είναι ο σχεδιασμός και η κατασκευή προβλημάτων από τους ίδιους τους μαθητές.

Ιδιαίτερα βοηθητική θα ήταν και η χρήση της ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας που στα Μαθηματικά δεν συνηθίζεται όσο στα άλλα διδακτικά αντικείμενα. Θα ήταν προτιμότερο ο εκπαιδευτικός να χωρίσει την τάξη σε ομάδες που αποτελούνται από 2 ή 3 μαθητές, αφού αν οι ομάδες είναι μεγαλύτερες ενδέχεται κάποιοι από τους μαθητές να μην συμμετέχουν έμπρακτα στην επίλυση και να αφήσουν τους υπόλοιπους μαθητές της ομάδας τους να αποφασίσουν γι' αυτούς. Στη συνέχεια θα πρέπει να παρουσιαστεί το πρόβλημα προσεκτικά στους μαθητές ώστε να γίνει κατανοητό. Οι ομάδες θα κληθούν να συζητήσουν και να αναζητήσουν όσους περισσότερους τρόπους επίλυσης του προβλήματος μπορούν, ενώ όσο κάνουν κάτι τέτοιο ο εκπαιδευτικός πρέπει να παρατηρεί τον τρόπο με τον οποίο εργάζονται και να υποστηρίζει την προσπάθειά τους όπου χρειάζεται χωρίς να τους δίνει την λύση. Δεν πρέπει να τους προτείνει κάποιο τρόπο επίλυσης ή να τους κατευθύνει στο τι πρέπει να κάνουν για να λύσουν το πρόβλημα, αλλά να τους κάνει ερωτήσεις που θα τους βοηθήσουν να ξεδιαλύνουν την σκέψη τους και ταυτόχρονα να τους ενθαρρύνει να δουλέψουν σαν ομάδα. Το σημαντικό είναι οι μαθητές να διορθώσουν μόνοι τους κάποιο λάθος που ενδέχεται να κάνουν ή να διορθωθεί με την βοήθεια των υπόλοιπων μαθητών της ομάδας τους. Όταν οι μαθητές τελειώσουν την ομαδική επίλυση του προβλήματος θα παρουσιάσουν τους τρόπους που βρήκαν σε όλη την τάξη και όταν γίνει η παρουσίαση ακολουθεί μια συζήτηση με όλη την τάξη. Σε αυτή την συζήτηση που πρέπει να γίνει στο τέλος του μαθήματος θα πρέπει να καταλήξουμε σε μια γενίκευση όλων όσων έμαθαν οι μαθητές. Η γενίκευση θα πρέπει να περιλαμβάνει τα συμπεράσματα που προέκυψαν από τις λύσεις των μαθητών και την χρήση όλων όσων έμαθαν σε νέα παραδείγματα.

Τέλος θα πρέπει να υπάρχει ένας συνδυασμός ενός καλού βιβλίου και μίας σωστά δομημένης διδασκαλίας. Ένα καλό βιβλίο σε συνδυασμό με μία καλή διδασκαλία θα μπορούσε να βελτιώσει τις γνώσεις των μαθητών και μεταγενέστερα των μελλοντικών φοιτητών-δασκάλων γύρω από τα ποσοστά και να συμβάλει στην βαθύτερη κατανόηση της έννοιας του ποσοστού και της σύνδεσής του με μια ποσότητα αναφοράς.

Η δομή και το περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων τουλάχιστον στα κεφάλαια που διδάσκονται τα ποσοστά μπορούμε να πούμε ότι καθοδηγούν το μαθητή σε μεγάλο βαθμό. Τα βιβλία παραθέτουν στον μαθητή την μεθοδολογία και τους τύπους και στην συνέχεια τον καλούν να εφαρμόσει όλα όσα βλέπει χωρίς να τον προτρέπουν να σκεφτεί και να φτάσει μόνος του στην κατανόηση με αποτέλεσμα στο τέλος της διδακτικής ώρας να είναι σε θέση να επιλύσει σωστά ένα παρόμοιο πρόβλημα με αυτό που είδε κατά την διάρκεια του μαθήματος . Όμως λόγω του ότι δεν έχει κατανοήσει όσα διδάχθηκε ένας μαθητής δεν θα είναι σε θέση να φέρει εις πέρας ένα πρόβλημα με ποσοστά που απαιτεί κάτι διαφορετικό από αυτό που έχει αποστηθίσει και ξέρει να λύνει με μηχανιστικές μεθόδους υπολογισμού. Οι μαθητές, οι οποίοι στην συνέχεια μεγαλώνοντας ενδέχεται να εξελιχθούν και στους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, πιστεύουν ότι τα μαθηματικά είναι αποστήθιση κανόνων και εφαρμογή τύπων, αφού κάτι τέτοιο συναντούν στις σχολικές αίθουσες. Σε πολλές περιπτώσεις πολλοί από αυτούς δεν μαθαίνουν να δουλεύουν ένα πρόβλημα με έναν δικό τους τρόπο, αφού η γνώση παρέχεται σε αυτούς έτοιμη και παραμένει αφηρημένη και καταλήγουν να χάνουν το ενδιαφέρον τους για αυτά.

Πρέπει να τονιστεί ότι η έρευνά μας έχει ορισμένους περιορισμούς και χρειάζεται περισσότερη επέκταση ώστε να μπορούν να προκύψουν ασφαλέστερα συμπεράσματα. Καταρχάς μελλοντικές έρευνες θα μπορούσαν να συλλέξουν δεδομένα από ένα μεγαλύτερο δείγμα φοιτητών και να μην περιοριστούν γεωγραφικά σε συγκεκριμένα μόνο παιδαγωγικά τμήματα της χώρας. Επίσης πιο συγκεκριμένες ερωτήσεις θα παρείχαν τη δυνατότητα να διαπιστωθεί σε μεγαλύτερο βαθμό ο τρόπος που σκέφτονται οι φοιτητές.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

Baratta, W., Price, B., Stacey, K., Steinle, V., & Gvozdenko, E. (2010). Percentages: The effect of problem structure, number complexity and calculation format. *Mathematics Education Research Group of Australasia.*

Chen, H., & Rao, A. R. (2007). When Two Plus Two Is Not Equal to Four: Errors in Processing Multiple Percentage Changes. *Journal of Consumer Research, 34*(3), 327-340.

Edwards, A., (1930). A study of errors in percentage In G. M. Whipple (Ed.), *Twenty-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education* (pp. 621-640). Bloomington, IL: Public Schools Publishing Company. Retrieved from https://archive.org/details/twentyninthyearb012091mbp/page/n645.

Ginsburg, L., Gal, I., & Schuh, A. (1995). *What Does "100% Juice" Mean? Exploring Adult Learners' Informal Knowledge of Percent.* (Publication No.NCM-TR-95-06). National Center on Adult Literacy, Publications.

Jacobs. J. (2013). *Percents are not natural numbers* (Doctoral dissertation, Rutgers University-Graduate School-New Brunswick).

Jacobs. J. (2010). *Undergraduates' (mis) understanding of percentages* (Doctoral dissertation, Rutgers University-Graduate School-New Brunswick).

Kirsch, I. S., Jungeblut, A., Jenkins, L., & Kolstad, A. (2002). *Adult literacy in America: A first look at the results of the National Adult Literacy Survey* (3rd ed.). Washington: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.

Li, M., & Chapman, G. B. (2013). A big fish or a small pond? Framing effects in percentages. *Organizational Behavior and Human Decision Processes, 122*(2), 190-199.

Mathematics Assessment Resource Service. (2015). *Increasing and Decreasing Quantities by a Percent.* Nottingham: University of Nottingham.

Mullis, I. V., Dossey, J. A., Owen, E. H., & Phillips, G. W. (1991). *The state of mathematics achievement: NAEP's 1990 Assessment of the nation and the trial assessment of the* *states.* Washington, DC: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics.

Parker, M. (1997).The Ups and Downs of Percent (and Some Interesting Connections). *School Science and Mathematics*, *97*(8), 406-412.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A Privileged Proportion. *Review of Educational Research,65*(4), 421-481.

Reyna, V. F., & Brainerd, C. J. (2008). Numeracy, ratio bias, and denominator neglect in judgments of risk and probability. *Learning and Individual Differences, 18*(1),89–107.