



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
Τμήμα Μαθηματικών

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στα
Θεωρητικά Μαθηματικά

Περιοδική Συνομολογία Απείρων Ομάδων

Διπλωματική εργασία
του φοιτητή Λεωνίδα Αρτόπουλου

Επιβλέπων: Ιωάννης Εμμανουήλ, Καθηγητής

Αθήνα 2019

Στη μνήμη των γονιών μου,
Πέτρου και Βίβιαν

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	iii
Εισαγωγή	1
1 Ομολογική άλγεβρα	3
1.1 Pushout και Pullback	3
1.2 Επαγόμενα και συνεπαγόμενα πρότυπα	28
2 Διαγώνια δράση	41
2.1 Διαγώνια $\mathbb{Z}G$ -δράση	41
2.2 Σχετικά προβολικά πρότυπα	49
3 Οι αβελιανές ομάδες Ext	53
3.1 Επεκτάσεις προτύπων	53
3.2 Το άθροισμα Baer δύο επεκτάσεων	54
3.3 Οι συναρτητές $\text{ext}(_, B)$ και $\text{ext}(A, _)$	56
3.4 Ext και n -επεκτάσεις	58
3.5 Ext και γινόμενα	60
3.6 Φυσικές ισοδυναμίες μεταξύ Ext^1	67

4	Οι αλγεβρικές αναλλοίωτες $\text{silp } \mathbb{Z}G$, $\text{spli } \mathbb{Z}G$ και $\text{findim } \mathbb{Z}G$	81
5	Περιοδική συνομολογία άπειρων ομάδων	95
5.1	Περιοδική συνομολογία και περιοδική προβολική επίλυση μετά από k -βήματα	95
5.2	Περιοδική συνομολογία μετά από k -βήματα και πλήρεις επιλύσεις	99
5.3	Περιοδικότητα στη συνομολογία μέσω cup product	102
6	Περιοδική συνομολογία μετά από k -βήματα για μία κλάση ομάδων	119

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω θερμά την κ. Ταλέλλη Ολυμπία, ομότιμη καθηγήτρια του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, για τη στήριξη, την υπομονή και την επιμονή που έδειξε ακόμα και όταν εγώ ένιωθα ότι δε θα μπορέσω να ολοκληρώσω αυτή την εργασία, καθώς και για την πληθώρα ωρών που αφιέρωσε από τον προσωπικό της χρόνο για να μου λύσει απορίες και να με καθοδηγήσει. Η κ. Ταλέλλη με σχημάτισε όχι μόνο ως μαθηματικό, αλλά και ως άνθρωπο και θα της είμαι αιώνια ευγνώμων.

Θέλω, επίσης, να ευχαριστήσω τον επιβλέπων καθηγητή της εργασίας κ. Εμμανουήλ Ιωάννη, καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, για τη βοήθεια που μου παρείχε κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Θέλω να τον ευχαριστήσω γιατί με έκανε να αγαπήσω την Άλγεβρα κατά τις προπτυχιακές μου σπουδές και για τη σημαντική συμβολή του στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας κατά τις μεταπτυχιακές μου σπουδές.

Ακόμα, θέλω να ευχαριστήσω τη γραμματέα του Π.Μ.Σ. Θεωρητικών Μαθηματικών, κ. Νταή Άλκηστη, για την υπομονή της και για την πολύτιμη βοήθεια και στήριξη που παρείχε.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω τους κ. Συκιώτη Μιχάλη και κ. Ντόκα Ιωάννη, επίκουρους καθηγητές του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή.

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία μελετάμε την έννοια της περιοδικής συνομολογίας με περίοδο q μετά από k -βήματα στην περίπτωση άπειρων ομάδων.

Το Κεφάλαιο 1 περιέχει κάποια βασικά αποτελέσματα από την Ομολογική Άλγεβρα. Παρουσιάζονται συνοπτικά οι κατηγοριοθεωρητικές έννοιες του pushout και pullback στην κατηγορία ${}_R\text{Mod}$ καθώς και οι έννοιες των επαγόμενων και συνεπαγόμενων R -προτύπων. Τα βασικότερα αποτελέσματα του κεφαλαίου είναι ότι το ζεύγος συναρτητών $(A \otimes_S _, \text{Hom}_R(A, _))$ είναι adjoint ζεύγος και το Λήμμα Eckmann - Shapiro (Πρόταση 1.17), ενώ δίνεται έμφαση στα επαγόμενα και συνεπαγόμενα πρότυπα στην περίπτωση του ακέραιου ομαδοδακτυλίου $\mathbb{Z}G$ μιας ομάδας G .

Στο Κεφάλαιο 2 μελετάται η έννοια της διαγώνιας δράσης ενός ομαδοδακτυλίου $\mathbb{Z}G$ και παρουσιάζεται η σχέση της διαγώνιας δράσης με τα επαγόμενα και συνεπαγόμενα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα (Πρόταση 2.1). Επιπλέον, ορίζεται η έννοια των σχετικά προβολικών $\mathbb{Z}G$ -προτύπων και αποδεικνύεται ότι ένα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P είναι σχετικά προβολικό αν και μόνο αν κάθε $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη $\mathbb{Z}G$ -βραχεία ακριβής ακολουθία που καταλήγει στο P είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη (Πρόταση 2.6).

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε την προσέγγιση του N. Yoneda των αβελιανών ομάδων Ext ως ομάδες επεκτάσεων προτύπων. Ορίζεται η έννοια των ισοδύναμων επεκτάσεων και το άθροισμα Baer δύο επεκτάσεων με το οποίο η ομάδα $\text{Ext}_R^1(A, B)$ καθίσταται αβελιανή ομάδα. Στη συνέχεια, ορίζουμε το γινόμενο Yoneda στο επίπεδο των n -επεκτάσεων και στο επίπεδο των προβολικών επιλύσεων και το cup product. Τέλος, παρουσιάζουμε κάποια βασικά αποτελέσματα από το [1] σχετικά με φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ Ext_R^1 ομάδων. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι κάθε τέτοιος φυσικός μετασχηματισμός επάγεται από έναν ομομορφισμό R -προτύπων (Θεώρημα 3.3) και δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένας τέτοιος φυσικός μετασχηματισμός να είναι επιμορφισμός, μονομορφισμός και ισομορφισμός (Πρόταση 3.5, Πρόταση 3.6 και Θεώρημα 3.7, αντίστοιχα).

Στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε τις αλγεβρικές αναλλοίωτες $\text{spli } \mathbb{Z}G$, $\text{silp } \mathbb{Z}G$ και $\text{findim } \mathbb{Z}G$ μιας

ομάδας G . Η αναλλοίωτες αυτές είναι στενά συνδεδεμένες με τη (συνήθη και γενικευμένη) συνομολογική διάσταση και με την ύπαρξη ή μη πλήρους επίλυσης μιας ομάδας G . Αποδεικνύουμε ότι κάθε ομάδα με πεπερασμένη συνομολογική διάσταση έχει και πεπερασμένη finitistic dimension (Πρόταση 4.1) και ότι για κάθε ομάδα G ισχύει $\text{findim } \mathbb{Z}G \leq \text{silp } \mathbb{Z}G \leq \text{spli } \mathbb{Z}G$ (Πρόταση 4.4 και Θεώρημα 4.5), βασισμένοι σε αποτελέσματα από το [2].

Το κεφάλαιο 5 πραγματεύεται το κυρίως μέρος της παρούσας εργασίας, την έννοια της περιοδικής συνομολογίας με περίοδο q μετά από k -βήματα. Συγκεκριμένα, ακολουθώντας το [3], παρουσιάζουμε με την έννοια της περιοδικής συνομολογίας στην περίπτωση άπειρων ομάδων και δείχνουμε ότι οι έννοιες της περιοδικής συνομολογίας μετά από k -βήματα και η έννοια της περιοδικής προβολικής επίλυσης μετά από k -βήματα είναι ισοδύναμες (Θεώρημα 5.1). Αποδεικνύουμε ότι κάθε ομάδα με περιοδική συνομολογία μετά από k -βήματα έχει πλήρη επίλυση με δείκτη σύμπτωσης k και πεπερασμένη finitistic dimension (Θεώρημα 5.3 και Πρόταση 5.4). Τέλος, δείχνουμε ότι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε η περιοδικότητα στη συνομολογία να δίνεται μέσω cup product είναι συνδεδεμένες με τις συνθήκες $\text{silp } \mathbb{Z}G < \infty$ και $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$. (Πόρισμα 5.11).

Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε μία κλάση ομάδων με περιοδική συνομολογία με περίοδο 2 ή 4 μετά από k -βήματα.

Καθόλη την έκταση της εργασίας και εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, οι ομάδες είναι άπειρες. Εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, τα πρότυπα θα θεωρούνται αριστερά. Θα συμβολίζουμε με Ab την κλάση των αβελιανών ομάδων. Αν R και S είναι δακτύλιοι, συμβολίζουμε με ${}_R\text{Mod}$ την κλάση των αριστερών R -προτύπων, με Mod_R την κλάση των δεξιών R -προτύπων και με ${}_R\text{Mod}_S$ την κλάση των $(R - S)$ -διπροτύπων. Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, θα γράφουμε $A \in {}_R\text{Mod}$ (αντίστοιχα, $A \in \text{Mod}_R$) για ένα αριστερό (αντίστοιχα, δεξιό) R -πρότυπο A , ενώ θα γράφουμε $A \in {}_R\text{Mod}_S$ για ένα $(R - S)$ -διπρότυπο A . Αν $A \in {}_R\text{Mod}$, συμβολίζουμε με $\text{pd}_R A$ την προβολική διάσταση του A , ενώ με $\text{id}_R A$ συμβολίζουμε την εμφυτευτική διάσταση του A . Αν G ομάδα, συμβολίζουμε με $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G$ τη συνομολογική διάσταση της G (δηλαδή, την $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$, όπου $\mathbb{Z}$ τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο). Θα χρησιμοποιούμε τη συντόμευση β.α.α. για μία βραχεία ακολουθία.

1 Ομολογική άλγεβρα

Στο παρόν κεφάλαιο διατυπώνουμε έννοιες και αποτελέσματα από την Ομολογική άλγεβρα που θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

1.1 Pushout και Pullback

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε τις έννοιες του pushout και του pullback. Για ευκολία, περιοριζόμαστε στην κατηγορία ${}_R\text{Mod}$. Ειδικότερα, δείχνουμε τη μοναδικότητα των pushout και pullback καθώς και την ύπαρξή τους για την κατηγορία ${}_R\text{Mod}$. Αποδεικνύουμε κάποιες βασικές ιδιότητες τους και παρουσιάζουμε την έννοια του bicartesian διαγράμματος.

Ορισμός 1.1 Έστω M, N και X R -πρότυπα και $f : X \rightarrow M, g : X \rightarrow N$

R -ομομορφισμοί. Το **pushout** του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \\ N & & \end{array}$$

(ή, απλά, το pushout των f και g) είναι μία τριάδα (P, i_1, i_2) όπου $P \in {}_R\text{Mod}$ και $i_1 : M \rightarrow P, i_2 : N \rightarrow P$ είναι R -ομομορφισμοί ώστε:

(Pt1) Το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \downarrow i_1 \\ N & \xrightarrow{i_2} & P \end{array} \quad (*)$$

είναι μεταθετικό, δηλαδή $i_1 \circ f = i_2 \circ g$

(Pt2) Αν (P', i'_1, i'_2) είναι μια άλλη τριάδα που κάνει το διάγραμμα $(*)$ μεταθετικό, τότε υπάρχει

μοναδικός ομομορφισμός $u : P \rightarrow P'$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & M \\
 g \downarrow & & \downarrow i_1 \\
 N & \xrightarrow{i_2} & P \\
 & \searrow i'_2 & \swarrow \exists! u \\
 & & P'
 \end{array}$$

μεταθετικό, δηλαδή $u \circ i_1 = i'_1$ και $u \circ i_2 = i'_2$

Ιδιαίτέρως, η ιδιότητα (Pt2) καλείται καθολική ιδιότητα του pushout. ■

Στη συνέχεια, ορίζουμε τη δυική έννοια του pushout, αυτήν του pullback.

Ορισμός 1.2 Έστω M, N και X R -πρότυπα και $f : M \rightarrow X, g : N \rightarrow X$

R -ομομορφισμοί. Το **pullback** του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc}
 & M & \\
 & \downarrow f & \\
 N & \xrightarrow{g} & X
 \end{array}$$

(ή, απλά, το pullback των f και g) είναι μία τριάδα (Q, p_1, p_2) όπου $Q \in {}_R\text{Mod}$ και $p_1 : Q \rightarrow M, p_2 : Q \rightarrow N$ είναι R -ομομορφισμοί ώστε:

(Pb1) Το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 Q & \xrightarrow{p_1} & M \\
 p_2 \downarrow & & \downarrow f \\
 N & \xrightarrow{g} & X
 \end{array} \tag{**}$$

είναι μεταθετικό, δηλαδή $f \circ p_1 = g \circ p_2$

(Pb2) Αν (Q', p'_1, p'_2) είναι μια άλλη τριάδα που καθιστά το διάγραμμα (**) μεταθετικό, τότε υπάρχει

μοναδικός ομομορφισμός $v : Q' \rightarrow Q$ που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
 Q' & & & & \\
 \downarrow p'_2 & \searrow \exists! v & & \nearrow p'_1 & \\
 & Q & \xrightarrow{p_1} & M & \\
 & \downarrow p_2 & & \downarrow f & \\
 & N & \xrightarrow{g} & X &
 \end{array}$$

μεταθετικό, δηλαδή $p_1 \circ v = p'_1$ και $p_2 \circ v = p'_2$

Ιδιαίτέρως, η ιδιότητα (Pb2) καλείται καθολική ιδιότητα του pullback. ■

Αν το pushout (αντίστοιχα, pullback) δύο ομομορφισμών υπάρχει, τότε η Πρόταση 1.1 (αντίστοιχα, 1.2) εξασφαλίζει τη μοναδικότητά του. Αν και η απόδειξη αφορά στην κατηγορία ${}_R\text{Mod}$, ισχύει γενικά σε κάθε κατηγορία.

Πρόταση 1.1 Έστω $X, M, N \in {}_R\text{Mod}$ και $f : X \rightarrow M$, $g : X \rightarrow N$.

Αν το pushout των f και g υπάρχει, τότε είναι μοναδικό.

Απόδειξη.

Έστω ότι υπάρχουν $P, P' \in {}_R\text{Mod}$ και $i_1 : M \rightarrow P$, $i'_1 : M \rightarrow P'$, $i_2 : N \rightarrow P$, $i'_2 : N \rightarrow P'$ R -ομομορφισμοί ώστε (P, i_1, i_2) και (P', i'_1, i'_2) να είναι pushout των f, g .

Τότε από ιδιότητα (Pt1) για τις (P, i_1, i_2) και (P', i'_1, i'_2) , έχουμε τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & M \\
 g \downarrow & & \downarrow i_1 \\
 N & \xrightarrow{i_2} & P
 \end{array} \tag{1.1}$$

και

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & M \\
 g \downarrow & & \downarrow i'_1 \\
 N & \xrightarrow{i'_2} & P'
 \end{array} \tag{1.2}$$

Αφού η (P', i'_1, i'_2) καθιστά το (1.1) μεταθετικό, από την καθολική ιδιότητα του pushout (Pt2) για την (P, i_1, i_2) , έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $u : P \rightarrow P'$ ώστε $u \circ i_1 = i'_1$ και $u \circ i_2 = i'_2$.

Αφού η (P, i_1, i_2) καθιστά το (1.2) μεταθετικό, από την καθολική ιδιότητα του pushout (Pt2) για την (P', i'_1, i'_2) , έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $u' : P' \rightarrow P$ ώστε $u' \circ i'_1 = i_1$ και $u' \circ i'_2 = i_2$.

Έτσι, έχουμε $(u \circ u') \circ i'_1 = u \circ (u' \circ i'_1) = u \circ i_1 = i'_1 \implies (u \circ u') \circ i'_1 = i'_1$

και $(u \circ u') \circ i'_2 = u \circ (u' \circ i'_2) = u \circ i_2 = i'_2 \implies (u \circ u') \circ i'_2 = i'_2$

Συνεπώς, ο ομομορφισμός $u \circ u'$ καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & M \\
 g \downarrow & & \downarrow i'_1 \\
 N & \xrightarrow{i'_2} & P' \\
 & \searrow i'_2 & \swarrow u \circ u' \\
 & & P'
 \end{array}
 \quad (1.3)$$

μεταθετικό. Επίσης, ο ομομορφισμός $id_{P'} : P' \rightarrow P'$ καθιστά το (1.3) μεταθετικό. Από τη μοναδικότητα του ομομορφισμού στην ιδιότητα (Pt2) για την (P', i'_1, i'_2) , έχουμε ότι $u \circ u' = id_{P'}$.

Αντίστοιχα, έχουμε $(u' \circ u) \circ i_1 = u' \circ (u \circ i_1) = u' \circ i'_1 = i_1 \implies (u' \circ u) \circ i_1 = i_1$

και $(u' \circ u) \circ i_2 = u' \circ (u \circ i_2) = u' \circ i'_2 = i_2 \implies (u' \circ u) \circ i_2 = i_2$

Συνεπώς, ο ομομορφισμός $u' \circ u$ καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & M \\
 g \downarrow & & \downarrow i_1 \\
 N & \xrightarrow{i_2} & P \\
 & \searrow i_2 & \swarrow u' \circ u \\
 & & P
 \end{array}
 \quad (1.4)$$

μεταθετικό. Επίσης, ο ομομορφισμός $id_P : P \rightarrow P$ καθιστά το (1.4) μεταθετικό. Από τη μοναδικότητα του ομομορφισμού στην ιδιότητα (Pt2) για την (P, i_1, i_2) , έχουμε ότι $u' \circ u = id_P$.

κότητα του ομομορφισμού στην ιδιότητα (Pt2) για την (P, i_1, i_2) , έχουμε ότι $u' \circ u = id_P$.

Έτσι, $u \circ u' = id_{P'}$ και $u' \circ u = id_P$. Συνεπώς u είναι ισομορφισμός και άρα το pushout των f και g είναι μοναδικό. $\square$

Θεώρημα 1.2 Έστω $X, M, N \in {}_R\text{Mod}$ και $f : M \rightarrow X$, $g : N \rightarrow X$.

Αν το pushout των f και g υπάρχει, τότε είναι μοναδικό.

Απόδειξη.

Έστω ότι υπάρχουν $Q, Q' \in {}_R\text{Mod}$ και $p_1 : Q \rightarrow M$, $p'_1 : Q' \rightarrow M$, $p_2 : Q \rightarrow N$, $p'_2 : Q' \rightarrow N$ R -ομομορφισμοί ώστε (Q, p_1, p_2) και (Q', p'_1, p'_2) να είναι pullback των f , g .

Τότε από ιδιότητα (Pb1) για τις (Q, p_1, p_2) και (Q', p'_1, p'_2) , έχουμε τα μεταθετικά διαγράμματα

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{p_1} & M \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{g} & X \end{array} \quad (1.5)$$

και

$$\begin{array}{ccc} Q' & \xrightarrow{p'_1} & M \\ p'_2 \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{g} & X \end{array} \quad (1.6)$$

Αφού η (Q', p'_1, p'_2) καθιστά το (1.5) μεταθετικό, από την καθολική ιδιότητα του pullback (Pb2) για την (Q, p_1, p_2) , έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $v : Q' \rightarrow Q$ ώστε $p_1 \circ v = p'_1$ και $p_2 \circ v = p'_2$.

Αφού η (Q, p_1, p_2) καθιστά το (1.6) μεταθετικό, από την καθολική ιδιότητα του pullback (Pb2) για την (Q', p'_1, p'_2) , έχουμε ότι υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός $v' : Q \rightarrow Q'$ ώστε $p'_1 \circ v' = p_1$ και $p'_2 \circ v' = p_2$.

Έτσι, έχουμε $p_1 \circ (v \circ v') = (p_1 \circ v) \circ v' = p'_1 \circ v' = p_1 \implies p_1 \circ (v \circ v') = p_1$

και $p_2 \circ (v \circ v') = (p_2 \circ v) \circ v' = p'_2 \circ v' = p_2 \implies p_2 \circ (v \circ v') = p_2$

Συνεπώς, ο ομομορφισμός $v \circ v'$ καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
 Q & & & & \\
 & \searrow^{v \circ v'} & & \searrow^{p_1} & \\
 & Q & \xrightarrow{p_1} & M & \\
 & \downarrow p_2 & & \downarrow f & \\
 & N & \xrightarrow{g} & X &
 \end{array}
 \quad (1.7)$$

μεταθετικό. Επίσης, ο ομομορφισμός $id_Q : Q \rightarrow Q$ καθιστά το (1.7) μεταθετικό. Από τη μοναδικότητα του ομομορφισμού στην ιδιότητα (Pb2) για την (Q, p_1, p_2) , έχουμε ότι $v \circ v' = id_Q$.

Αντίστοιχα, $p'_1 \circ (v' \circ v) = (p'_1 \circ v') \circ v = p_1 \circ v = p'_1 \implies p'_1 \circ (v' \circ v) = p'_1$

και $p'_2 \circ (v' \circ v) = (p'_2 \circ v') \circ v = p_2 \circ v = p'_2 \implies p'_2 \circ (v' \circ v) = p'_2$

Συνεπώς, ο ομομορφισμός $v' \circ v$ καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
 Q' & & & & \\
 & \searrow^{v' \circ v} & & \searrow^{p'_1} & \\
 & Q' & \xrightarrow{p'_1} & M & \\
 & \downarrow p'_2 & & \downarrow f & \\
 & N & \xrightarrow{g} & X &
 \end{array}
 \quad (1.8)$$

μεταθετικό. Επίσης, ο ομομορφισμός $id_{Q'} : Q' \rightarrow Q'$ καθιστά το (1.8) μεταθετικό. Από τη μοναδικότητα του ομομορφισμού στην ιδιότητα (Pb2) για την (Q', p'_1, p'_2) , έχουμε ότι $v' \circ v = id_{Q'}$.

Έτσι, $v \circ v' = id_Q$ και $v' \circ v = id_{Q'}$. Συνεπώς v είναι ισομορφισμός και άρα το pullback των f και g είναι μοναδικό. $\square$

Το επόμενο Θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη pushout στην κατηγορία ${}_R\text{Mod}$. Για να διατυπώσουμε το Θεώρημα, έστω R -πρότυπα X, M, N και R -ομομορφισμοί $f : X \rightarrow M, g : X \rightarrow N$.

Ορίζουμε το σύνολο

$$I = \{(m, n) \in M \oplus N : m = f(x) \text{ και } n = -g(x) \text{ για κάποιο } x \in X\} \subseteq M \oplus N$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $I \leq M \oplus N$, αφού f και g είναι R -ομομορφισμοί.

Έχοντας ορίσει το I , διατυπώνουμε το Θεώρημα.

Θεώρημα 1.3 Έστω X, M, N, f, g και I όπως παραπάνω. Ορίζουμε:

$$P = M \oplus N / I, i_1 : M \rightarrow P \text{ με } i_1(m) = (m, 0) + I \text{ και } i_2 : N \rightarrow P \text{ με } i_2(n) = (0, n) + I.$$

Τότε, η τριάδα (P, i_1, i_2) είναι το pushout των f και g .

Απόδειξη.

Για κάθε $x \in X$, είναι $(i_1 \circ f)(x) = i_1(f(x)) = (f(x), 0) + I = (0, g(x)) + I = i_2(g(x)) = (i_2 \circ g)(x)$. Έτσι $i_1 \circ f = i_2 \circ g$ και άρα το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \downarrow i_1 \\ N & \xrightarrow{i_2} & P \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Αν (P', i'_1, i'_2) είναι μία τριάδα που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \downarrow i'_1 \\ N & \xrightarrow{i'_2} & P' \end{array} \tag{1.9}$$

μεταθετικό, τότε ορίζουμε $u : P \rightarrow P'$ με $u((m, n) + I) = i'_1(m) + i'_2(n)$.

Η απεικόνιση u είναι καλά ορισμένη:

Έστω $(m_1, n_1) + I, (m_2, n_2) + I \in P$ με $(m_1, n_1) + I = (m_2, n_2) + I \implies (m_1 - m_2, n_1 - n_2) \in I$.

Τότε, υπάρχει $x \in X$ ώστε $m_1 - m_2 = f(x)$ και $n_1 - n_2 = -g(x)$. Από τη μεταθετικότητα του

διαγράμματος (1.9), έχουμε $i'_1(f(x)) = i'_2(g(x)) \implies i'_1(m_1 - m_2) = i'_2(n_2 - n_1) \implies$

$\implies i'_1(m_1) - i'_1(m_2) = i'_2(n_2) - i'_2(n_1) \implies i'_1(m_1) + i'_2(n_1) = i'_1(m_2) + i'_2(n_2) \implies$

$\implies u((m_1, n_1) + I) = u((m_2, n_2) + I)$. Συνεπώς, η u είναι καλά ορισμένη.

Επίσης, για κάθε $m \in M$ είναι $(u \circ i_1)(m) = u(i_1(m)) = u((m, 0) + I) = i'_1(m) + i'_2(0) = i'_1(m)$,

δηλαδή $u \circ i_1 = i'_1$ και για κάθε $n \in N$, είναι $(u \circ i_2)(n) = u(i_2(n)) = u((0, n) + I) =$

$= i'_1(0) + i'_2(n) = i'_2(n)$, δηλαδή $u \circ i_2 = i'_2$.

Τέλος, αν $u' : P \rightarrow P'$ ομομορφισμός με $u' \circ i_1 = i'_1$ και $u' \circ i_2 = i'_2$ τότε, για κάθε $(m, n) + I \in P$, είναι $u'((m, n) + I) = u'(i_1(m) + i_2(n)) = u'(i_1(m)) + u'(i_2(n)) = (u' \circ i_1)(m) + (u' \circ i_2)(n) = i'_1(m) + i'_2(n) = u((m, n) + I)$, δηλαδή $u' = u$ και άρα ο u είναι μοναδικός. $\square$

Για να διατυπώσουμε το αντίστοιχο Θεώρημα για το pullback, έστω R -πρότυπα M, N, X και

R -ομομορφισμοί $f : M \rightarrow X, g : N \rightarrow X$. Ορίζουμε το σύνολο

$$J = \{(m, n) \in M \oplus N : f(m) = g(n)\} \subseteq M \oplus N.$$

Έχοντας ορίσει το J , διατυπώνουμε το Θεώρημα.

Θεώρημα 1.4 Έστω M, N, X, f, g και J όπως παραπάνω. Ορίζουμε:

$Q = J, p_1 : Q \rightarrow M$ με $p_1(m, n) = m$ και $p_2 : Q \rightarrow N$ με $p_2(m, n) = n$.

Τότε, η τριάδα (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των f και g .

Απόδειξη.

Έστω $(m, n) \in Q$. Τότε $f(m) = g(n)$ και είναι $(f \circ p_1)(m, n) = f(p_1(m, n)) = f(m) = g(n) = g(p_2(m, n)) = (g \circ p_2)(m, n)$. Έτσι, $f \circ p_1 = g \circ p_2$ και άρα το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{p_1} & M \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Αν (Q', p'_1, p'_2) είναι μία τριάδα που καθιστά το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} Q' & \xrightarrow{p'_1} & M \\ p'_2 \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{g} & X \end{array} \tag{1.10}$$

μεταθετικό, τότε ορίζουμε $v : Q' \rightarrow Q$ με $v(x) = (p'_1(x), p'_2(x))$ για κάθε $x \in Q'$.

Η απεικόνιση v είναι καλά ορισμένη:

Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (1.10), είναι $f(p'_1(x)) = g(p'_2(x))$ και άρα

$(p'_1(x), p'_2(x)) \in Q$. Για κάθε $x \in Q'$, είναι $(p_1 \circ v)(x) = p_1(v(x)) = p_1(p'_1(x), p'_2(x)) = p'_1(x)$, δηλαδή $p_1 \circ v = p'_1$ και $(p_2 \circ v)(x) = p_2(v(x)) = p_2(p'_1(x), p'_2(x)) = p'_2(x)$, δηλαδή $p_2 \circ v = p'_2$.

Τέλος, έστω $v' : Q' \rightarrow Q$ ομομορφισμός με $p_1 \circ v' = p'_1$ και $p_2 \circ v' = p'_2$ και έστω ότι $v' = (v'_1, v'_2)$, όπου $v'_1 : Q' \rightarrow M$ και $v'_2 : Q' \rightarrow N$.

Τότε, για κάθε $x \in Q'$, είναι $(p_1 \circ v')(x) = p_1(v'(x)) = p_1((v'_1, v'_2)(x)) = p_1(v'_1(x), v'_2(x)) = v'_1(x)$ και άρα $v'_1(x) = p'_1(x)$. Επίσης, $(p_2 \circ v')(x) = p_2(v'(x)) = p_2((v'_1, v'_2)(x)) = p_2(v'_1(x), v'_2(x)) = v'_2(x)$. Συνεπώς, $v'(x) = (v'_1(x), v'_2(x)) = (p'_1(x), p'_2(x)) = v(x)$ και ο v είναι μοναδικός. $\square$

Οι επόμενες δύο Προτάσεις παρουσιάζουν κάποιες βασικές ιδιότητες των pushout και pullback στην κατηγορία ${}_R\text{Mod}$.

Πρόταση 1.5 Έστω $X, M, N \in {}_R\text{Mod}$ και το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \downarrow i_1 \\ N & \xrightarrow{i_2} & P \end{array}$$

όπου (P, i_1, i_2) είναι το pushout των f και g .

- (i) Αν g είναι μονομορφισμός, τότε i_1 είναι μονομορφισμός
- (ii) Αν f είναι μονομορφισμός, τότε i_2 είναι μονομορφισμός
- (iii) $\text{coker } i_1 \simeq \text{coker } g$. Ιδιαίτερως, η i_1 είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν η g είναι επιμορφισμός
- (iv) $\text{coker } i_2 \simeq \text{coker } f$. Ιδιαίτερως, η i_2 είναι επιμορφισμός αν και μόνο αν η f είναι επιμορφισμός

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα 1.3, είναι $P = M \oplus N / I$

όπου $I = \{(m, n) : m = f(x) \text{ και } n = -g(x) \text{ για κάποιο } x \in X\}$,

$i_1(m) = (m, 0) + I$ και $i_2(n) = (0, n) + I$ για κάθε $m \in M, n \in N$.

(i) Έστω $m \in \ker i_1$. Τότε $i_1(m) = 0 \iff (m, 0) + I = I \iff (m, 0) \in I$. Έτσι $m = f(x)$ και $0 = -g(x)$ για κάποιο $x \in X$. Αλλά g είναι μονομορφισμός και άρα $x = 0$.

Συνεπώς, $m = f(0) = 0$. Άρα $\ker i_1 = 0$ και ο i_1 είναι μονομορφισμός.

(ii) Έστω $n \in \ker i_2$. Τότε $i_2(n) = 0 \iff (0, n) + I = I \iff (0, n) \in I$. Έτσι $0 = f(x)$ και $n = -g(x)$ για κάποιο $x \in X$. Αλλά f είναι μονομορφισμός και άρα $x = 0$.

Συνεπώς, $n = -g(0) = 0$. Άρα $\ker i_2 = 0$ και ο i_2 είναι μονομορφισμός.

(iii) Θέτουμε $(m, n) + I = \overline{(m, n)}$ για κάθε $(m, n) + I \in P$.

Ορίζουμε την $\tilde{i}_2 : \text{coker } g \rightarrow \text{coker } i_1$ με $\tilde{i}_2(n + \text{Im } g) = \overline{(0, n)} + \text{Im } i_1$.

Αν $n_1, n_2 \in N$ ώστε $n_1 + \text{Im } g = n_2 + \text{Im } g$, τότε $n_1 - n_2 \in \text{Im } g$.

Άρα υπάρχει $x \in X$ με $g(x) = n_1 - n_2$. Τότε $i_2(n_1 - n_2) = i_2(g(x)) = i_1(f(x))$, λόγω μεταθετικότητας. Έτσι $i_2(n_1) - i_2(n_2) \in \text{Im } i_1$ και άρα $\overline{(0, n_1)} + \text{Im } i_1 = \overline{(0, n_2)} + \text{Im } i_1$.

Συνεπώς, η $\tilde{i}_2$ είναι καλά ορισμένη.

Αν $n + \text{Im } g \in \ker \tilde{i}_2$, τότε $\tilde{i}_2(n + \text{Im } g) = \overline{(0, n)} + \text{Im } i_1 = \text{Im } i_1$, δηλαδή $\overline{(0, n)} \in \text{Im } i_1$. Άρα, υπάρχει $m \in M$ ώστε $i_1(m) = \overline{(0, n)} \implies \overline{(m, 0)} = \overline{(0, n)}$. Τότε, $(m, -n) \in I$ και έτσι υπάρχει $x \in X$ ώστε $m = f(x)$ και $n = -g(x)$. Συνεπώς, $n = -g(x) = g(-x) \implies n \in \text{Im } g$.

Άρα, $n + \text{Im } g = \text{Im } g$ και ο $\tilde{i}_2$ είναι μονομορφισμός.

Επιπλέον, αν $\overline{(m, n)} + \text{Im } i_1 \in \text{coker } i_1$, τότε $\overline{(m, n)} + \text{Im } i_1 = \overline{(m, 0)} + \overline{(0, n)} + \text{Im } i_1 = i_1(m) + \overline{(0, n)} + \text{Im } i_1 = \overline{(0, n)} + \text{Im } i_1 \implies \overline{(m, n)} + \text{Im } i_1 = \overline{(0, n)} + \text{Im } i_1$.

Τότε, $\tilde{i}_2(n) = \overline{(0, n)} + \text{Im } i_1 = \overline{(m, n)} + \text{Im } i_1$ και η $\tilde{i}_2$ είναι επιμορφισμός.

Άρα, $\tilde{i}_2$ είναι ισομορφισμός και άρα $\text{coker } g \simeq \text{coker } i_1$.

(iv) Ορίζουμε την $\tilde{i}_1 : \text{coker } i_2 \rightarrow \text{coker } f$. Όπως στο (ii), αποδεικνύεται ότι $\tilde{i}_1$ είναι ισομορφισμός και άρα $\text{coker } i_2 \simeq \text{coker } f$. □

Πρόταση 1.6 Έστω $X, M, N \in {}_R\text{Mod}$ και το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{p_1} & M \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

όπου (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των f και g . Τότε:

- (i) Αν g είναι επιμορφισμός, τότε p_1 είναι επιμορφισμός
- (ii) Αν f είναι επιμορφισμός, τότε p_2 είναι επιμορφισμός
- (iii) $\ker p_1 \simeq \ker g$. Ιδιαίτέρως, η p_1 είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν η g είναι μονομορφισμός
- (iv) $\ker p_2 \simeq \ker f$. Ιδιαίτέρως, η p_2 είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν η f είναι μονομορφισμός

Απόδειξη.

Από το Θεώρημα 1.4, είναι $Q = \{(m, n) \in M \oplus N : f(m) = g(n)\}$, $p_1(m, n) = m$ και $p_2(m, n) = n$ για κάθε $(m, n) \in Q$.

(i) Έστω $m \in M$. Τότε $f(m) \in X$ και αφού g είναι επιμορφισμός, υπάρχει $n \in N$ ώστε $g(n) = f(m)$. Τότε $(m, n) \in Q$ και προφανώς, $p_1(m, n) = m$. Άρα $\text{Im } p_1 = M$ και ο p_1 είναι επιμορφισμός.

(ii) Έστω $n \in N$. Τότε $g(n) \in X$ και αφού f είναι επιμορφισμός, υπάρχει $m \in M$ ώστε $f(m) = g(n)$. Τότε $(m, n) \in Q$ και προφανώς, $p_2(m, n) = n$. Άρα $\text{Im } p_2 = N$ και ο p_2 είναι επιμορφισμός.

(iii) Έστω $(m, n) \in \ker p_1$. Τότε $p_1(m, n) = 0 \iff m = 0$ και αφού $\ker p_1 \leq Q$, είναι $\ker p_1 = \{(0, n) : f(0) = g(n)\} = \{(0, n) : g(n) = 0\} = \{(0, n) : n \in \ker g\} \implies \ker p_1 = \{(0, n) : n \in \ker g\}$. Θεωρούμε, τώρα, την $\tilde{p}_2 : \ker p_1 \rightarrow \ker g$. Αν $(0, n) \in \ker \tilde{p}_2$, τότε $\tilde{p}_2(0, n) = 0 \implies n = 0$ και έτσι $\tilde{p}_2$ είναι μονομορφισμός. Επίσης, αν $n \in \ker g$, τότε

$\tilde{p}_2(0, n) = n$ και ο $\tilde{p}_2$ είναι και επιμορφισμός. Συνεπώς, $\tilde{p}_2$ είναι ισομορφισμός και άρα $\ker p_1 \simeq \ker g$.

(iv) Ορίζουμε την $\tilde{p}_1 : \ker p_2 \rightarrow \ker f$. Όπως στο (ii), αποδεικνύεται ότι $\tilde{p}_1$ είναι ισομορφισμός και άρα $\ker p_2 \simeq \ker f$. $\square$

Παρόλο που στις αποδείξεις των Προτάσεων 1.5 και 1.6 χρησιμοποιήθηκε η κατασκευή του pushout και του pullback για την κατηγορία ${}_R\text{Mod}$, οι Προτάσεις αυτές θα μπορούσαν να αποδειχθούν χρησιμοποιώντας μόνο τις καθολικές ιδιότητες του pushout και του pullback.

Ωστόσο, οι συγκεκριμένες κατασκευές είναι σημαντικές για τα επόμενα Θεωρήματα.

Θεώρημα 1.7 Έστω

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{\psi} L \quad (1.11)$$

ακριβής ακολουθία R -προτύπων και $g : X \rightarrow N$ R -ομομορφισμός.

Αν (P, i_1, i_2) είναι το pushout των f και g , τότε υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_2} K \xrightarrow{\chi} K \xrightarrow{\psi} L$$

ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{\varphi} & K \xrightarrow{\psi} L \\ & & \downarrow g & & \downarrow i_1 & & \downarrow id_K \downarrow id_L \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_2} & P & \xrightarrow{\chi} & K \xrightarrow{\psi} L \end{array} \quad (1.12)$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη.

Ορίζουμε $\chi : P \rightarrow K$ με $\chi((m, n) + I) = \varphi(m)$. Η χ είναι καλά ορισμένη.

Πράγματι, έστω $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in M \oplus N$ ώστε $(m_1, n_1) + I = (m_2, n_2) + I$.

Τότε $(m_1 - m_2, n_1 - n_2) \in I$ και άρα υπάρχει $x \in X$ ώστε $m_1 - m_2 = f(x)$ και $n_1 - n_2 = -g(x)$.

Έτσι:

$\chi((m_1, n_1) + I) - \chi((m_2, n_2) + I) = \chi((m_1 - m_2, n_1 - n_2) + I) = \varphi(m_1 - m_2) = \varphi(f(x)) = 0$,
λόγω της ακρίβειας της ακολουθίας (1.11). Συνεπώς, η χ είναι καλά ορισμένη.

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_2} P \xrightarrow{\chi} K \xrightarrow{\psi} L \quad (1.13)$$

είναι ακριβής.

• $\ker i_2 = 0$: Αφού (P, i_1, i_2) είναι το pushout των f, g και f είναι μονομορφισμός, από Πρόταση 1.5(ii) έπεται ότι i_2 είναι μονομορφισμός, δηλαδή $\ker i_2 = 0$

• $\text{Im } i_2 = \ker \chi$: Για κάθε $n \in N$, έχουμε $\chi(i_2(n)) = \chi((0, n) + I) = \varphi(0) = 0$.

Συνεπώς, $\text{Im } i_2 \subseteq \ker \chi$.

Έστω, τώρα, $(m, n) + I \in \ker \chi$. Τότε $\chi((m, n) + I) = 0$ και έτσι $\varphi(m) = 0 \implies m \in \ker \varphi$.

Λόγω ακρίβειας της (1.11), $\ker \varphi = \text{Im } f$. Συνεπώς, υπάρχει κάποιο $x \in X$ ώστε $f(x) = m$. Τότε:

$$(m, n) - (0, n + g(x)) = (m - 0, n - (n + g(x))) = (m, -g(x)) = (f(x), -g(x)) \in I.$$

Άρα, $(m, n) + I = (0, n + g(x)) + I = i_2(n + g(x))$. Δηλαδή, $(m, n) \in \text{Im } i_2$, από όπου έπεται ότι $\ker \chi \subseteq \text{Im } i_2$. Έτσι, έχουμε ότι $\ker \chi = \text{Im } i_2$.

• $\text{Im } \chi = \ker \psi$: Για κάθε $(m, n) + I \in P$, είναι $\psi(\chi((m, n) + I)) = \psi(\varphi(m)) = 0$, λόγω ακρίβειας της (1.11). Έτσι $\text{Im } \chi \subseteq \ker \psi$.

Έστω $k \in \ker \psi$. Λόγω ακρίβειας της (1.11), είναι $k \in \text{Im } \varphi$. Έτσι, υπάρχει κάποιο $m \in M$ ώστε $\varphi(m) = k$. Τότε $\chi((m, 0) + I) = \varphi(m) = k$, δηλαδή $k \in \text{Im } \chi$ και έτσι $\ker \psi \subseteq \text{Im } \chi$.

Συνεπώς, $\text{Im } \chi = \ker \psi$ και η (1.13) είναι ακριβής ακολουθία.

Τέλος, έχουμε ότι $(i_2 \circ g)(x) = (i_1 \circ f)(x)$ για κάθε $x \in X$, λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ \downarrow g & & \downarrow i_1 \\ N & \xrightarrow{i_2} & P \end{array}$$

αφού (P, i_1, i_2) είναι το pushout των f και g .

Επίσης, $(\chi \circ i_1)(m) = \chi(i_1(m)) = \chi((m, 0) + I) = \varphi(m) = (id_K \circ \varphi)(m)$ για κάθε $m \in M$ και προφανώς, $(\psi \circ id_K)(k) = (id_L \circ \psi)(k)$ για κάθε $k \in K$.

Έτσι, το διάγραμμα (1.12) είναι μεταθετικό και η απόδειξη ολοκληρώνεται. $\square$

Θεώρημα 1.8 Έστω

$$L \xrightarrow{\psi} K \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{g} X \longrightarrow 0 \quad (1.14)$$

ακριβής ακολουθία R -προτύπων και $f : M \rightarrow X$ R -ομομορφισμός.

Αν (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των f και g , υπάρχει μια ακριβής ακολουθία

$$L \xrightarrow{\psi} K \xrightarrow{\chi} Q \xrightarrow{p_1} M \longrightarrow 0$$

ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{\psi} & K & \xrightarrow{\chi} & Q & \xrightarrow{p_1} & M \longrightarrow 0 \\ \downarrow id_L & & \downarrow id_K & & \downarrow p_2 & & \downarrow f \\ L & \xrightarrow{\psi} & K & \xrightarrow{\varphi} & N & \xrightarrow{g} & X \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.15)$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη.

Ορίζουμε $\chi : K \rightarrow Q$ με $\chi(k) = (0, \varphi(k))$. Λόγω της ακρίβειας της (1.14) είναι $\text{Im } \varphi = \ker g$.

Έτσι, $g(\varphi(k)) = 0 \implies f(0) = g(\varphi(k)) \implies (0, \varphi(k)) \in Q$. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$L \xrightarrow{\psi} K \xrightarrow{\chi} Q \xrightarrow{p_1} M \longrightarrow 0 \quad (1.16)$$

είναι ακριβής.

- $\text{Im } p_1 = M$: Αφού (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των f, g και g είναι επιμορφισμός, από Πρόταση 1.6(i) έπεται ότι p_1 είναι επιμορφισμός, δηλαδή $\text{Im } p_1 = M$

- $\text{Im } \chi = \ker p_1$: Για κάθε $k \in K$, είναι $p_1(\chi(k)) = p_1((0, \varphi(k))) = 0$. Συνεπώς $\text{Im } \chi \subseteq \ker p_1$.

Έστω, τώρα, $(m, n) \in \ker p_1$. Τότε $p_1(m, n) = 0 \implies m = 0$. Καθώς $(0, n) \in Q$, είναι $0 = g(n)$ και έτσι $n \in \ker g$. Λόγω ακρίβειας της (1.14) είναι $\ker g = \operatorname{Im} \varphi$ και άρα υπάρχει $k \in K$ ώστε $\varphi(k) = n$. Τότε $\chi(k) = (0, \varphi(k)) = (0, n)$ από όπου έπεται ότι $\ker p_1 \subseteq \operatorname{Im} \chi$. Έτσι $\operatorname{Im} \chi = \ker p_1$.

• $\operatorname{Im} \psi = \ker \chi$: Για κάθε $l \in L$, έχουμε $\chi(\psi(l)) = (0, \varphi(\psi(l))) = (0, 0)$, διότι $\operatorname{Im} \psi = \ker \varphi$ από την ακρίβεια της (1.14). Άρα $\operatorname{Im} \psi \subseteq \ker \chi$.

Επιπλέον, αν $k \in \ker \chi$, τότε $\chi(k) = (0, 0) \implies (0, \varphi(k)) = (0, 0)$. Έτσι, $\varphi(k) = 0$ και άρα $k \in \ker \varphi$. Λόγω ακρίβειας της (1.14), όμως, είναι $k \in \operatorname{Im} \psi$ και έτσι $\ker \chi \subseteq \operatorname{Im} \psi$.

Συνεπώς, $\operatorname{Im} \psi = \ker \chi$ και η (1.16) είναι ακριβής.

Τέλος, έχουμε $(id_K \circ \psi)(l) = (\psi \circ id_L)(l)$ για κάθε $l \in L$. Ακόμα, $(p_2 \circ \chi)(k) = p_2(\chi(k)) = p_2(0, \varphi(k)) = \varphi(k) = (\varphi \circ id_K)(k)$ για κάθε $k \in K$ και αν $(m, n) \in Q$, είναι $(f \circ p_1)(m, n) = f(p_1(m, n)) = f(m)$, ενώ $(g \circ p_2)(m, n) = g(p_2(m, n)) = g(n)$.

Καθώς $(m, n) \in Q$, είναι $f(m) = g(n)$ και άρα $(f \circ p_1)(m, n) = (g \circ p_2)(m, n)$.

Έτσι, $(f \circ p_1)(m, n) = (g \circ p_2)(m, n)$ και το διάγραμμα (1.15) είναι μεταθετικό. $\square$

Το επόμενο Πόρισμα είναι άμεσο από τις Προτάσεις 1.7 και 1.8.

Πόρισμα 1.9 (i) Έστω

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} I_0 \xrightarrow{d_0} I_1 \xrightarrow{d_1} \dots \longrightarrow I_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} I_n \longrightarrow 0$$

ακριβής ακολουθία R -προτύπων και $f : M \rightarrow N$ R -ομομορφισμός. Τότε, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_2} P \xrightarrow{\chi} I_1 \xrightarrow{d_1} \dots \longrightarrow I_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} I_n \longrightarrow 0$$

ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\iota} & I_0 & \xrightarrow{d_0} & I_1 & \xrightarrow{d_1} & \dots & \longrightarrow & I_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & I_n & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow i_1 & & \downarrow id_{I_1} & & & & \downarrow id_{I_{n-1}} & & \downarrow id_{I_n} & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_2} & P & \xrightarrow{\chi} & I_1 & \xrightarrow{d_1} & \dots & \longrightarrow & I_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & I_n & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

(ii) Έστω

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\partial_n} E_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\partial_1} E_0 \xrightarrow{\varepsilon} N \longrightarrow 0$$

ακριβής ακολουθία R -προτύπων και $g : M \rightarrow N$ R -ομομορφισμός.

Τότε, υπάρχει μία ακριβής ακολουθία

$$0 \longrightarrow E_n \xrightarrow{\partial_n} E_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\chi} Q \xrightarrow{p_1} M \longrightarrow 0$$

ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_n & \xrightarrow{\partial_n} & E_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\chi} & Q & \xrightarrow{p_1} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow id_{E_n} & & \downarrow id_{E_{n-1}} & & & & \downarrow id_{E_1} & & \downarrow p_2 & & \downarrow g & & \\ 0 & \longrightarrow & E_n & \xrightarrow{\partial_n} & E_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\partial_1} & E_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη.

(i) Έστω $L_1 = \text{Im } d_0 = \ker d_1$ και $a_0 : I_0 \rightarrow L_1$, $\beta_0 : L_1 \rightarrow I_1$ ώστε $\beta_0 \circ a_0 = d_0$.

Έχουμε, τότε, τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\iota} I_0 \xrightarrow{a_0} L_1 \longrightarrow 0$$

και από την Πρόταση 1.7, παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\iota} & I_0 & \xrightarrow{a_0} & L_1 \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow i_1 & & \downarrow id_{L_1} \\ 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_2} & P & \xrightarrow{\chi'} & L_1 \longrightarrow 0 \end{array} \quad (1.17)$$

Συνδυάζοντας το διάγραμμα (1.17) με το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_1 & \xrightarrow{\beta_0} & I_1 & \xrightarrow{d_1} & \dots & \longrightarrow & I_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & I_n \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_{L_1} & & \downarrow id_{I_1} & & & & \downarrow id_{I_{n-1}} & & \downarrow id_{I_n} \\ 0 & \longrightarrow & L_1 & \xrightarrow{\beta_0} & I_1 & \xrightarrow{d_1} & \dots & \longrightarrow & I_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & I_n \longrightarrow 0 \end{array}$$

προκύπτει το ζητούμενο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\iota} & I_0 & \xrightarrow{d_0} & I_1 & \xrightarrow{d_1} & \dots & \longrightarrow & I_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & I_n & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow i_1 & & \downarrow id_{I_1} & & & & \downarrow id_{I_{n-1}} & & \downarrow id_{I_n} & & \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i_2} & P & \xrightarrow{\chi} & I_1 & \xrightarrow{d_1} & \dots & \longrightarrow & I_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & I_n & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

όπου $\chi = \beta_0 \circ \chi'$.

(ii) Έστω $R_1 = \text{Im } \partial_1 = \ker \varepsilon$ και $a'_1 : E_1 \rightarrow R_1$, $\beta'_1 : R_1 \rightarrow E_0$ ώστε $\beta'_1 \circ a'_1 = \partial_1$.

Έχουμε, τότε, τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow R_1 \xrightarrow{\beta'_1} E_0 \xrightarrow{\varepsilon} N \longrightarrow 0$$

και από την Πρόταση 1.8, παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & R_1 & \xrightarrow{\chi'} & Q & \xrightarrow{p_1} & M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow id_{R_1} & & \downarrow p_2 & & \downarrow g \\
0 & \longrightarrow & R_1 & \xrightarrow{\partial_1} & E_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & N \longrightarrow 0
\end{array} \tag{1.18}$$

Συνδυάζοντας το διάγραμμα (1.18) με το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & E_n & \xrightarrow{\partial_n} & E_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\beta'_1} & R_1 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow id_{E_n} & & \downarrow id_{E_{n-1}} & & & & \downarrow id_{E_1} & & \downarrow id_{R_1} \\
0 & \longrightarrow & E_n & \xrightarrow{\partial_n} & E_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\beta'_1} & R_1 \longrightarrow 0
\end{array}$$

προκύπτει το ζητούμενο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & E_n & \xrightarrow{\partial_n} & E_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\chi} & Q & \xrightarrow{p_1} & M \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow id_{E_n} & & \downarrow id_{E_{n-1}} & & & & \downarrow id_{E_1} & & \downarrow p_2 & & \downarrow g \\
0 & \longrightarrow & E_n & \xrightarrow{\partial_n} & E_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\partial_1} & E_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & N \longrightarrow 0
\end{array}$$

όπου $\chi = \chi' \circ \beta'_1$

□

Για τη συνέχεια εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό.

Ορισμός 1.3 Έστω $K, L, M, N \in {}_R\text{Mod}$.

Αν $f : K \rightarrow M$ και $g : K \rightarrow N$ R -ομομορφισμοί, ορίζουμε τον R -ομομορφισμό $(f, g) : K \rightarrow M \oplus N$ με $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ για κάθε $x \in K$.

Αν $\theta : M \rightarrow L$ και $\psi : N \rightarrow L$, ορίζουμε τον R -ομομορφισμό $\langle \theta, \psi \rangle : M \oplus N \rightarrow L$ με $\langle \theta, \psi \rangle(m, n) = \theta(m) + \psi(n)$ για κάθε $(m, n) \in M \oplus N$. ■

Πρόταση 1.10 Έστω $P, M, N, X \in {}_R\text{Mod}$ και $f : X \rightarrow M$, $g : X \rightarrow N$, $i_1 : M \rightarrow P$ και $i_2 : N \rightarrow P$ R -ομομορφισμοί. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Η τριάδα (P, i_1, i_2) είναι το pushout των f και g

(ii) Η ακολουθία

$$X \xrightarrow{(f, g)} M \oplus N \xrightarrow{\langle i_1, -i_2 \rangle} P \longrightarrow 0 \quad (1.19)$$

είναι ακριβής

Απόδειξη.

(i) $\implies$ (ii) Έστω ότι η τριάδα (P, i_1, i_2) είναι το pushout των f και g .

Τότε έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \downarrow i_1 \\ N & \xrightarrow{i_2} & P \end{array} \quad (1.20)$$

Από το Θεώρημα 1.3, είναι $P = M \times N / I$, όπου

$I = \{(m, n) \in M \oplus N : m = f(x) \text{ και } n = -g(x) \text{ για κάποιο } x \in X\}$, $i_1 : M \rightarrow P$ με $i_1(m) = (m, 0) + I$ και $i_2 : N \rightarrow P$ με $i_2(n) = (0, n) + I$ για κάθε $(m, n) \in P$.

Έστω $x \in X$. Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (1.20), έχουμε ότι $i_1(f(x)) = i_2(g(x)) \implies i_1(f(x)) - i_2(g(x)) = 0 \implies \langle i_1, -i_2 \rangle(f(x), g(x)) = 0 \implies \langle i_1, -i_2 \rangle((f, g)(x)) = 0 \implies (\langle i_1, -i_2 \rangle \circ (f, g))(x) = 0$. Συνεπώς, $\text{Im}(f, g) \subseteq \ker \langle i_1, -i_2 \rangle$.

Έστω, τώρα, $(m, n) \in \ker \langle i_1, -i_2 \rangle$. Τότε $\langle i_1, -i_2 \rangle(m, n) = I \implies i_1(m) - i_2(n) = I \implies (m, 0) + I - ((0, n) + I) = I \implies (m, -n) + I = I \implies (m, -n) \in I$.

Έτσι, υπάρχει $x \in X$ ώστε $m = f(x)$ και $-n = -g(x)$, δηλαδή, $m = f(x)$ και $n = g(x)$.

Τότε, $(f, g)(x) = (f(x), g(x)) = (m, n)$. Άρα $\ker \langle i_1, -i_2 \rangle \subseteq \text{Im}(f, g)$.

Κατ' επέκταση, $\text{Im}(f, g) = \ker \langle i_1, -i_2 \rangle$ και η ακολουθία (1.19) είναι ακριβής στο $M \oplus N$.

Τώρα, έστω $(m, n) + I \in P$. Έχουμε ότι $m \in M$ και $n \in N$ και τότε $-n \in N$.

Έτσι $\langle i_1, -i_2 \rangle(m, -n) = i_1(m) - i_2(-n) = i_1(m) + i_2(n) = (m, 0) + I + (0, n) + I = (m, n) + I$.

Άρα, έχουμε ότι $\text{Im} \langle i_1, -i_2 \rangle = P$ και η (1.19) είναι ακριβής.

(ii) $\implies$ (i) Έστω ότι η ακολουθία (1.19) είναι ακριβής. Από την ακρίβεια στο $M \oplus N$, έχουμε ότι $\text{Im}(f, g) \subseteq \ker \langle i_1, -i_2 \rangle$. Έτσι, για κάθε $x \in X$, έχουμε ότι $(\langle i_1, -i_2 \rangle \circ (f, g))(x) = 0 \iff \langle i_1, -i_2 \rangle((f, g)(x)) = 0 \iff \langle i_1, -i_2 \rangle((f(x), g(x))) = 0 \iff i_1(f(x)) - i_2(g(x)) = 0 \iff \sigma(f(x)) = \tau(g(x))$ και άρα το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \downarrow i_1 \\ N & \xrightarrow{i_2} & P \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Έστω, τώρα, μία τριάδα (P', i'_1, i'_2) ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & M \\ g \downarrow & & \downarrow i'_1 \\ N & \xrightarrow{i'_2} & P' \end{array} \tag{1.21}$$

να είναι μεταθετικό. Συνδυάζοντας τα διαγράμματα έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & M \\
g \downarrow & & \downarrow i_1 \\
N & \xrightarrow{i_2} & P
\end{array}
\quad \begin{array}{c}
\searrow i'_1 \\
\downarrow \\
P'
\end{array}
\quad \begin{array}{c}
\searrow i'_2
\end{array}
\quad (1.22)$$

Έστω $x \in P$. Από την ακρίβεια της (1.19) στο P , έχουμε ότι υπάρχει $(m, n) \in M \oplus N$ ώστε $\langle i_1, -i_2 \rangle(m, n) = x$ δηλαδή, $i_1(m) - i_2(n) = x$. Ορίζουμε $u(x) = i'_1(m) - i'_2(n)$.

Η u είναι καλά ορισμένη:

Αν $(m_1, n_1), (m_2, n_2) \in M \oplus N$ με $x_1 = i_1(m_1) - i_2(n_1) = i_1(m_2) - i_2(n_2) = x_2$, τότε

$$i_1(m_1 - m_2) - i_2(n_1 - n_2) = 0 \implies \langle i_1, -i_2 \rangle(m_1 - m_2, n_1 - n_2) = 0 \text{ και άρα}$$

$(m_1 - m_2, n_1 - n_2) \in \ker \langle i_1, -i_2 \rangle$. Από την ακρίβεια της (1.19) στο $M \oplus N$, είναι

$\ker \langle i_1, -i_2 \rangle = \text{Im}(f, g)$. Έτσι, υπάρχει $y \in X$ ώστε $f(y) = m_1 - m_2$ και $g(y) = n_1 - n_2$.

$$\text{Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (1.20), έχουμε } i'_1(f(y)) = i'_2(g(y)) \implies$$

$$\implies i'_1(m_1 - m_2) = i'_2(n_1 - n_2) \implies i'_1(m_1) - i'_2(n_1) = i'_1(m_2) - i'_2(n_2) \implies u(x_1) = u(x_2)$$

Συνεπώς, η u είναι καλά ορισμένη.

Επίσης, $u(i_1(m)) = u(i_1(m) - i_2(0)) = i'_1(m) - i'_2(0) = i'_1(m)$ για κάθε $m \in M$ και

$u(i_2(n)) = u(i_1(0) - i_2(-n)) = i'_1(0) - i'_2(-n) = i'_2(n)$ για κάθε $n \in N$.

Έτσι, $(u \circ i_1)(m) = i'_1(m)$ για κάθε $m \in M$ και $(u \circ i_2)(n) = i'_2(n)$ για κάθε $n \in N$,

δηλαδή $u \circ i_1 = i'_1$ και $u \circ i_2 = i'_2$. Συνεπώς, η u καθιστά το διάγραμμα (1.22) μεταθετικό.

Τέλος, αν $u' : P \rightarrow P'$ με $u' \circ i_1 = i'_1$ και $u' \circ i_2 = i'_2$, τότε, για κάθε $m \in M$ και $n \in N$, είναι

$$\begin{aligned}
u'(i_1(m) - i_2(n)) &= u'(i_1(m)) - u'(i_2(n)) = i'_1(m) - i'_2(n) = u(i_1(m)) - u(i_2(n)) = \\
&= u(i_1(m) - i_2(n)) \implies u'(i_1(m) - i_2(n)) = u(i_1(m) - i_2(n)),
\end{aligned}$$

δηλαδή $u'(x) = u(x)$ για κάθε $x \in P$. Συνεπώς, $u' = u$ και ο ομομορφισμός u είναι μοναδικός. $\square$

Πρόταση 1.11 Έστω $Q, M, N, X \in {}_R\text{Mod}$ και $p_1 : Q \rightarrow M$, $p_2 : Q \rightarrow N$, $f : M \rightarrow X$ και $g : N \rightarrow X$ R -ομομορφισμοί. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Η τριάδα (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των f και g

(ii) Η ακολουθία

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{(p_1, p_2)} M \oplus N \xrightarrow{\langle f, -g \rangle} X \quad (1.23)$$

είναι ακριβής

Απόδειξη.

(i) $\implies$ (ii) Έστω ότι η τριάδα (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των f και g .

Τότε έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{p_1} & M \\ p_2 \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{g} & X \end{array} \quad (1.24)$$

Από το Θεώρημα 1.4, είναι $Q = \{(m, n) \in M \oplus N : f(m) = g(n)\}$, $p_1(m, n) = m$ και $p_2(m, n) = n$ για κάθε $(m, n) \in Q$. Έστω $(m, n) \in \ker(p_1, p_2)$. Τότε $(p_1, p_2)(m, n) = (0, 0) \implies (p_1(m, n), p_2(m, n)) = (0, 0) \implies p_2(m, n) = 0$ και $p_1(m, n) = 0 \implies m = 0$ και $n = 0 \implies (m, n) = (0, 0)$ και άρα $\ker(p_1, p_2) = 0$. Έτσι, η ακολουθία (1.23) είναι ακριβής στο Q .

Έστω $(m, n) \in Q$. Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (1.24), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f(p_1(m, n)) &= g(p_2(m, n)) \implies f(p_1(m, n)) - g(p_2(m, n)) = 0 \implies \\ \implies \langle f, -g \rangle(p_1(m, n), p_2(m, n)) &= 0 \implies \langle f, -g \rangle((p_1, p_2)(m, n)) = 0 \implies \\ \implies (\langle f, -g \rangle \circ (p_1, p_2))(m, n) &= 0. \text{ Έτσι, } \text{Im}(p_1, p_2) \subseteq \ker \langle f, -g \rangle. \end{aligned}$$

Έστω, τώρα, $(m, n) \in \ker \langle f, -g \rangle$. Τότε $\langle f, -g \rangle(m, n) = 0 \implies f(m) - g(n) = 0 \implies f(m) = g(n)$ και άρα $(m, n) \in Q$. Τότε, $(p_1, p_2)(m, n) = (p_1(m, n), p_2(m, n)) = (m, n)$ και έτσι $\ker \langle f, -g \rangle \subseteq \text{Im}(p_1, p_2)$. Άρα $\ker \langle f, -g \rangle = \text{Im}(p_1, p_2)$ και η (1.23) είναι ακριβής.

(ii) $\implies$ (i) Έστω ότι η ακολουθία (1.23) είναι ακριβής. Από την ακρίβεια στο $M \oplus N$, έχουμε

$$\begin{aligned}
& \text{ότι } \text{Im}(p_1, p_2) \subseteq \ker \langle f, -g \rangle. \text{ Έτσι, για κάθε } x \in Q, \text{ έχουμε ότι } (\langle f, -g \rangle \circ (p_1, p_2))(x) = 0 \iff \\
& \iff \langle f, -g \rangle((p_1, p_2)(x)) = 0 \iff \langle f, -g \rangle((p_1(x), p_2(x))) = 0 \iff \\
& \iff f(p_1(x)) - g(p_2(x)) = 0 \iff f(p_1(x)) = g(p_2(x))
\end{aligned}$$

και άρα το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
Q & \xrightarrow{p_1} & M \\
p_2 \downarrow & & \downarrow f \\
N & \xrightarrow{g} & X
\end{array}$$

είναι μεταθετικό. Έστω, τώρα, μία τριάδα (Q', p'_1, p'_2) ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc}
Q' & \xrightarrow{p'_1} & M \\
p'_2 \downarrow & & \downarrow f \\
N & \xrightarrow{g} & X
\end{array} \tag{1.25}$$

να είναι μεταθετικό. Συνδυάζοντας τα διαγράμματα έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc}
Q' & & \xrightarrow{p'_1} & & M \\
& \searrow p'_2 & & \searrow p_1 & \\
& & Q & \xrightarrow{p_1} & M \\
& & p_2 \downarrow & & \downarrow f \\
& & N & \xrightarrow{g} & X
\end{array} \tag{1.26}$$

Έστω $y \in Q'$. Τότε $p'_1(y) \in M$ και $p'_2(y) \in N$. Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (1.25), έχουμε ότι $f(p'_1(y)) = g(p'_2(y)) \implies f(p'_1(y)) - g(p'_2(y)) = 0 \implies \langle f, -g \rangle((p'_1(y), p'_2(y))) = 0 \implies (p'_1(y), p'_2(y)) \in \ker \langle f, -g \rangle$

Από την ακρίβεια της (1.23) στο $M \oplus N$, έχουμε ότι

$\ker \langle f, -g \rangle = \text{Im}(p_1, p_2)$. Έτσι, $(p'_1(y), p'_2(y)) \in \text{Im}(p_1, p_2)$ και άρα υπάρχει $x \in Q$ ώστε

$$\begin{aligned}
(p_1, p_2)(x) &= (p'_1(y), p'_2(y)) \implies (p_1(x), p_2(x)) = (p'_1(y), p'_2(y)) \implies \\
&\implies p_1(x) = p'_1(y) \text{ και } p_2(x) = p'_2(y).
\end{aligned}$$

Ορίζουμε $v(y) = x$. Η v είναι καλά ορισμένη:

Αν $x_1, x_2 \in Q$ με $p_1(x_1) = p_1(x_2) = p'_1(y)$ και $p_2(x_1) = p_2(x_2) = p'_2(y)$, τότε $p_1(x_1 - x_2) = 0$ και $p_2(x_1 - x_2) = 0$. Έτσι, $(p_1(x_1 - x_2), p_2(x_1 - x_2)) = (0, 0) \implies (p_1, p_2)(x_1 - x_2) = (0, 0)$ και

άρα $x_1 - x_2 \in \ker(p_1, p_2)$. Αλλά, από την ακρίβεια της (1.23) στο Q , είναι $\ker(p_1, p_2) = 0$. Έτσι, $x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$. Συνεπώς, η v είναι καλά ορισμένη.

Επίσης, $p_1(v(y)) = p_1(x) = p'_1(y)$ και $p_2(v(y)) = p_2(x) = p'_2(y)$ για κάθε $y \in Q'$, από τον τρόπο κατασκευής της v . Έτσι, $(p_1 \circ v)(y) = p'_1(y)$ και $(p_2 \circ v)(y) = p'_2(y)$ για κάθε $y \in Q'$, δηλαδή $p_1 \circ v = p'_1$ και $p_2 \circ v = p'_2$. Συνεπώς, η v καθιστά το διάγραμμα (1.26) μεταθετικό.

Τέλος, αν $v' : Q' \rightarrow Q$ με $p_1 \circ v' = p'_1$ και $p_2 \circ v' = p'_2$, τότε, για κάθε $y \in Q'$, είναι

$$\begin{aligned} (p_1 \circ v')(y) &= p'_1(y) = (p_1 \circ v)(y) \text{ και } (p_2 \circ v')(y) = p'_2(y) = (p_2 \circ v)(y) \implies \\ \implies p_1(v'(y)) &= p_1(v(y)) \text{ και } p_2(v'(y)) = p_2(v(y)) \implies p_1(v'(y) - v(y)) = 0 \text{ και } \\ p_2(v'(y) - v(y)) &= 0 \implies (p_1(v'(y) - v(y)), p_2(v'(y) - v(y))) = (0, 0) \implies \\ \implies (p_1, p_2)(v'(y) - v(y)) &= (0, 0) \implies v'(y) - v(y) \in \ker(p_1, p_2) = 0. \end{aligned}$$

Έτσι $v'(y) - v(y) = 0 \implies v'(y) = v(y)$. Δηλαδή, $v' = v$ και ο ομομορφισμός v είναι μοναδικός.

Συνεπώς, η τριάδα (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των f και g . □

Ο Ορισμός (1.4) εισάγει την έννοια του bicartesian διαγράμματος.

Ορισμός 1.4 Έστω $P, Q, M, N \in {}_R\text{Mod}$ και $p_1 : Q \rightarrow M$, $p_2 : Q \rightarrow N$, $i_1 : M \rightarrow P$ και $i_2 : N \rightarrow P$ R -ομομορφισμοί.

Το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{p_1} & M \\ p_2 \downarrow & & \downarrow i_1 \\ N & \xrightarrow{i_2} & P \end{array}$$

λέγεται bicartesian αν η τριάδα (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των i_1 και i_2 και η τριάδα (P, i_1, i_2) είναι το pushout των p_1 και p_2 . ■

Πρόταση 1.12 Έστω $P, Q, M, N \in {}_R\text{Mod}$ και $p_1 : Q \rightarrow M$, $p_2 : Q \rightarrow N$, $i_1 : M \rightarrow P$ και $i_2 : N \rightarrow P$ R -ομομορφισμοί.

- (i) Αν η τριάδα (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των i_1 και i_2 και i_1 είναι επιμορφισμός, τότε η τριάδα (P, i_1, i_2) είναι το pushout των p_1 και p_2
- (ii) Αν η τριάδα (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των i_1 και i_2 και i_2 είναι επιμορφισμός, τότε η τριάδα (P, i_1, i_2) είναι το pushout των p_1 και p_2

Απόδειξη.

Αν (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των i_1 και i_2 , από Πρόταση 1.11 έχουμε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{(p_1, p_2)} M \oplus N \xrightarrow{\langle i_1, -i_2 \rangle} P$$

είναι ακριβής. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η $\langle i_1, -i_2 \rangle$ είναι επιμορφισμός. Τότε, από Πρόταση 1.10, θα έχουμε ότι (P, i_1, i_2) είναι το pushout των p_1 και p_2 .

(i) Έστω ότι i_1 είναι επιμορφισμός. Αν $x \in P$, υπάρχει $m \in M$ ώστε $i_1(m) = x$. Τότε $\langle i_1, -i_2 \rangle(m, 0) = i_1(m) - i_2(0) = i_1(m) = x$. Έτσι, η $\langle i_1, -i_2 \rangle$ είναι επιμορφισμός.

(ii) Έστω ότι i_2 είναι επιμορφισμός. Αν $x \in P$, υπάρχει $n \in N$ ώστε $i_2(n) = x$. Τότε $\langle i_1, -i_2 \rangle(0, n) = i_1(0) - i_2(n) = -i_2(n) = -x$. Έτσι, η $\langle i_1, -i_2 \rangle$ είναι επιμορφισμός. $\square$

Πρόταση 1.13 Έστω $P, Q, M, N \in {}_R\text{Mod}$ και $p_1 : Q \rightarrow M$, $p_2 : Q \rightarrow N$, $i_1 : M \rightarrow P$ και $i_2 : N \rightarrow P$ R -ομομορφισμοί.

- (i) Αν η τριάδα (P, i_1, i_2) είναι το pushout των p_1 και p_2 και p_1 είναι μονομορφισμός, τότε η τριάδα (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των i_1 και i_2
- (ii) Αν η τριάδα (P, i_1, i_2) είναι το pushout των p_1 και p_2 και p_2 είναι μονομορφισμός, τότε η τριάδα (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των i_1 και i_2

Απόδειξη.

Αν (P, i_1, i_2) είναι το pushout των p_1 και p_2 , από Πρόταση 1.10 έχουμε ότι η ακολουθία

$$Q \xrightarrow{(p_1, p_2)} M \oplus N \xrightarrow{\langle i_1, -i_2 \rangle} P \longrightarrow 0$$

είναι ακριβής. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η (p_1, p_2) είναι μονομορφισμός. Τότε, από Πρόταση 1.11, θα έχουμε ότι (Q, p_1, p_2) είναι το pullback των i_1 και i_2 .

(i) Έστω ότι p_1 είναι μονομορφισμός. Αν $x \in \ker(p_1, p_2)$, τότε $(p_1, p_2)(x) = 0 \implies (p_1(x), p_2(x)) = (0, 0) \implies p_1(x) = 0 \implies x \in \ker p_1$. Αλλά p_1 είναι μονομορφισμός. Έτσι $x = 0$ και άρα (p_1, p_2) είναι μονομορφισμός.

(ii) Έστω ότι p_2 είναι μονομορφισμός. Αν $x \in \ker(p_1, p_2)$, τότε $(p_1, p_2)(x) = 0 \implies (p_1(x), p_2(x)) = (0, 0) \implies p_2(x) = 0 \implies x \in \ker p_2$. Αλλά p_2 είναι μονομορφισμός. Έτσι $x = 0$ και άρα (p_1, p_2) είναι μονομορφισμός. □

Από τις Προτάσεις 1.10 και 1.11 είναι άμεσο το ακόλουθο Πρόσμημα που δίνει μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα διάγραμμα να είναι bicartesian.

Πρόσμημα 1.14 Έστω $P, Q, M, N \in {}_R\text{Mod}$ και $p_1 : Q \rightarrow M$, $p_2 : Q \rightarrow N$, $i_1 : M \rightarrow P$ και $i_2 : N \rightarrow P$ R -ομομορφισμοί. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{p_1} & M \\ p_2 \downarrow & & \downarrow i_1 \\ N & \xrightarrow{i_2} & P \end{array}$$

είναι bicartesian

(ii) Η ακολουθία

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{(p_1, p_2)} M \oplus N \xrightarrow{\langle i_1, -i_2 \rangle} P \longrightarrow 0$$

είναι β.α.α.

1.2 Επαγόμενα και συνεπαγόμενα πρότυπα

Αν A είναι ένα $(R - S)$ -διπρότυπο, τότε η Πρόταση 1.15 μας εξασφαλίζει ότι οι συναρτητές $A \otimes_S _$ και $\text{Hom}_R(A, _)$ είναι adjoint ζεύγος.

Πρόταση 1.15 Έστω R και S δακτύλιοι και $A \in {}_R\text{Mod}_S$ (δηλαδή, ένα $R - S$ διπρότυπο). Τότε, για κάθε $B \in {}_S\text{Mod}$ και $C \in {}_R\text{Mod}$ έχουμε τον ισομορφισμό αβελιανών ομάδων $\text{Hom}_R(A \otimes_S B, C) \simeq \text{Hom}_S(B, \text{Hom}_R(A, C))$. Ο ισομορφισμός αυτός είναι φυσικός στα B, C .

Απόδειξη.

Ορίζουμε την $\varphi : \text{Hom}_R(A \otimes_S B, C) \rightarrow \text{Hom}_S(B, \text{Hom}_R(A, C))$ ως εξής:

Αν $f \in \text{Hom}_R(A \otimes_S B, C)$ και $b \in B$, ορίζουμε

$$\varphi(f)(b) : A \rightarrow C \text{ με } (\varphi(f)(b))(a) = f(a \otimes b).$$

Η $\varphi(f)(b)$ είναι R -ομομορφισμός για κάθε $b \in B$:

Έστω $a_1, a_2 \in A$ και $r \in R$. Είναι:

$$\begin{aligned} (\varphi(f)(b))(a_1 + a_2) &= f((a_1 + a_2) \otimes b) = f(a_1 \otimes b + a_2 \otimes b) = f(a_1 \otimes b) + f(a_2 \otimes b) = \\ &= (\varphi(f)(b))(a_1) + (\varphi(f)(b))(a_2) \end{aligned}$$

και

$$(\varphi(f)(b))(ra) = f(ra \otimes b) = f(r(a \otimes b)) = rf(a \otimes b) = r((\varphi(f)(b))(a))$$

αφού f είναι R -ομομορφισμός.

Συνεπώς, η $\varphi(f)(b)$ είναι R -ομομορφισμός για κάθε $b \in B$.

Η $\varphi(f)$ είναι S -ομομορφισμός για κάθε $f \in \text{Hom}_R(A \otimes_S B, C)$:

Έστω $b_1, b_2 \in B$ και $s \in S$. Τότε, για κάθε $a \in A$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (\varphi(f)(b_1 + b_2))(a) &= f(a \otimes (b_1 + b_2)) = f(a \otimes b_1 + a \otimes b_2) = f(a \otimes b_1) + f(a \otimes b_2) = \\ &= (\varphi(f)(b_1))(a) + (\varphi(f)(b_2))(a) \end{aligned}$$

και

$$(\varphi(f)(sb))(a) = f(a \otimes (sb)) = f((as) \otimes b) = (\varphi(f)(b))(as) = s((\varphi(f)(b))(a))$$

Συνεπώς, η $\varphi(f)$ είναι S -ομομορφισμός για κάθε $f \in \text{Hom}_R(A \otimes_S B, C)$.

Η φ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων:

Έστω $f, g \in \text{Hom}_R(A \otimes_S B, C)$. Τότε για κάθε $b \in B$ και $a \in A$, έχουμε:

$$(\varphi(f+g)(b))(a) = (f+g)(a \otimes b) = f(a \otimes b) + g(a \otimes b) = (\varphi(f)(b))(a) + (\varphi(g)(b))(a),$$

$$\text{δηλαδή } \varphi(f+g) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

Άρα, η φ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων.

Τώρα, ορίζουμε την $\psi : \text{Hom}_S(B, \text{Hom}_R(A, C)) \rightarrow \text{Hom}_R(A \otimes_S B, C)$ ως εξής:

Αν $f \in \text{Hom}_S(B, \text{Hom}_R(A, C))$, ορίζουμε την $\hat{f} : A \times B \rightarrow C$ με $\hat{f}(a, b) = f(b)(a)$.

Η $\hat{f}$ είναι S -διγραμμική και R -ομομορφισμός:

Έστω $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ και $s \in S$. Τότε:

$$\begin{aligned} \hat{f}(a, b_1 + b_2) &= f(b_1 + b_2)(a) = (f(b_1) + f(b_2))(a) = f(b_1)(a) + f(b_2)(a) = \\ &= \hat{f}(a, b_1) + \hat{f}(a, b_2) \end{aligned}$$

$$\hat{f}(a_1 + a_2, b) = f(b)(a_1 + a_2) = f(b)(a_1) + f(b)(a_2) = \hat{f}(a_1, b) + \hat{f}(a_2, b)$$

$$\hat{f}(as, b) = f(b)(as) = sf(b)(a) = f(sb)(a) = \hat{f}(a, sb)$$

$$\hat{f}(ra, b) = f(b)(ra) = rf(b)(a) = r\hat{f}(a, b) \text{ διότι } f \text{ είναι } S\text{-ομομορφισμός και } f(b) \text{ είναι}$$

R -ομομορφισμός για κάθε $b \in B$.

Συνεπώς, η $\hat{f} : A \times B \rightarrow C$ είναι R -ομομορφισμός και S -διγραμμική. Άρα επεκτείνεται μοναδικά σε ομομορφισμό αβελιανών ομάδων $\bar{f} : A \otimes_S B \rightarrow C$ με $\bar{f}(a \otimes b) = \hat{f}(a, b)$. Ορίζουμε, τότε, $\psi(f) = \bar{f}$.

Η ψ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων:

Έστω $f, g \in \text{Hom}_S(B, \text{Hom}_R(A, C))$.

Τότε $\psi(f+g) = \overline{f+g}$ και αν $a \otimes b \in \text{Hom}_R(A \otimes_S B, C)$, είναι:

$$\begin{aligned} (\overline{f+g})(a \otimes b) &= (f+g)(b)(a) = (f(b) + g(b))(a) = f(b)(a) + g(b)(a) = \bar{f}(a \otimes b) + \bar{g}(a \otimes b) = \\ &= \psi(f) + \psi(g) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η ψ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων.

Έστω $f \in \text{Hom}_S(B, \text{Hom}_R(A, C))$. Τότε:

$$(\varphi \circ \psi)(f) = \varphi(\psi(f)) \text{ και } \varphi(\psi(f)(a \otimes b)) = \varphi(\bar{f}(a \otimes b)) = \varphi(f(b)(a)) = f(a \otimes b),$$

$$\text{δηλαδή, } (\varphi \circ \psi)(f)(a \otimes b) = f(a \otimes b) \text{ για κάθε } a \otimes b \in A \otimes_S B.$$

Συνεπώς, $(\varphi \circ \psi)(f) = f$ για κάθε $f \in \text{Hom}_S(B, \text{Hom}_R(A, C))$ και άρα $\varphi \circ \psi = id_{\text{Hom}_S(B, \text{Hom}_R(A, C))}$.

Επίσης:

Έστω $g \in \text{Hom}_R(A \otimes_S B, C)$. Τότε:

$$(\psi \circ \varphi)(g) = \psi(\varphi(g)) \text{ και } \psi\left(\left(\varphi(g)(b)\right)(a)\right) = \psi\left(g(a \otimes b)\right) = \bar{g}(a \otimes b) = g(b)(a),$$

δηλαδή $(\psi \circ \varphi)(g(b)(a)) = g(b)(a)$ για κάθε $a \in A$ και $b \in B$.

Συνεπώς, $(\psi \circ \varphi)(g) = g$ για κάθε $g \in \text{Hom}_R(A \otimes_S B, C)$ και άρα $\psi \circ \varphi = id_{\text{Hom}_R(A \otimes_S B, C)}$.

Από τα παραπάνω, έχουμε ότι φ και ψ είναι ισομορφισμοί αβελιανών ομάδων και άρα

$$\text{Hom}_R(A \otimes_S B, C) \simeq \text{Hom}_S(B, \text{Hom}_R(A, C)).$$

□

Αν R, S δακτύλιοι και $\varphi : S \rightarrow R$ είναι ομομορφισμός δακτυλίων, τότε κάθε R -πρότυπο A καθίσταται S -πρότυπο μέσω της δράσης που επάγεται από τη φ , δηλαδή $s \cdot a = \varphi(s)a$ για κάθε $a \in A$ και $s \in S$. Επιπλέον, αν A είναι ένα $(R - S)$ -διπρότυπο και B ένα S -πρότυπο, τότε μπορούμε να ορίσουμε την αβελιανή ομάδα $A \otimes_S B$ και εκμεταλλευόμενοι την δομή (αριστερού) R -προτύπου του A , να εφοδιάσουμε την $A \otimes_S B$ με δομή (αριστερού) R -προτύπου. Αντίστοιχα, αν A είναι ένα $(S - R)$ -διπρότυπο, τότε μπορούμε να ορίσουμε την αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_S(A, B)$ και εκμεταλλευόμενοι τη δομή (δεξιού) R -προτύπου του A , να εφοδιάσουμε το $\text{Hom}_S(A, B)$ με δομή (αριστερού) R -προτύπου. Η ιδέα αυτή μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.5 Έστω R δακτύλιος και $S \leq R$ υποδακτύλιος.

Αν $M \in {}_R\text{Mod}$, τότε το M μπορεί να θεωρηθεί S -πρότυπο μέσω του περιορισμού της R -δράσης στο S (δηλαδή, μέσω της δράσης που επάγει η φυσική εμφύτευση $i : S \hookrightarrow R$).

Σε αυτή την περίπτωση, γράφουμε $M|_S$.

Αν, τώρα, $N \in {}_S\text{Mod}$, τότε ορίζεται η αβελιανή ομάδα $R \otimes_S N$. Αφού ${}_R R_S$, δηλαδή το R είναι ένα $(R - S)$ -διπρότυπο, η $R \otimes_S N$ εφοδιάζεται με δομή (αριστερού) R -προτύπου ως $m \cdot (r \otimes n) = (mr) \otimes n$ για $m \in R$ και $r \otimes n \in R \otimes_S N$. Το R -πρότυπο $\tilde{R} \otimes_S N$ καλείται **επαγόμενο από το S στο R πρότυπο** και συμβολίζεται με $N \uparrow_S^R$. Δηλαδή, $N \uparrow_S^R = \tilde{R} \otimes_S N$.

Επίσης, ορίζουμε την αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_S(R, N)$. Αφού ${}_S R_R$, δηλαδή το R είναι $(S - R)$ -διπρότυπο, η $\text{Hom}_S(R, N)$ εφοδιάζεται με δομή (αριστερού) R -προτύπου με

$(m \cdot f)(r) = f(rm)$ για κάθε $r, m \in R$ και για κάθε $f \in \text{Hom}_S(R, N)$. Το R -πρότυπο $\text{Hom}_S(\overset{\vee}{R}, N)$ καλείται **συνεπαγόμενο από το S στο R πρότυπο** και συμβολίζεται με $N \uparrow_S^R$.

Δηλαδή, $N \uparrow_S^R = \text{Hom}_S(\overset{\vee}{R}, N)$.

Αν R, S δακτύλιοι με $S \leq R$, $M \in {}_R\text{Mod}$ και $N \in {}_S\text{Mod}$, τότε από την Πρόταση 1.15 και λαμβάνοντας υπόψη τους ισομορφισμούς $\text{Hom}_R(R, M) \simeq M$ μέσω του $f \mapsto f(1)$ και $R \otimes_R M \simeq M$ μέσω του $r \otimes m \mapsto rm$, κατασκευάζονται φυσικοί ισομορφισμοί αβελιανών ομάδων

$$\text{Hom}_R(\overset{\vee}{R} \otimes_S N, M) \simeq \text{Hom}_S(N, M|_S) \text{ και } \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_S(\overset{\vee}{R}, N)) \simeq \text{Hom}_S(M|_S, N)$$

ή με τους παραπάνω συμβολισμούς,

$$\text{Hom}_R(N \uparrow_S^R, M) \simeq \text{Hom}_S(N, M|_S) \text{ και } \text{Hom}_R(M, N \uparrow_S^R) \simeq \text{Hom}_S(M|_S, N)$$

Συνεπώς, τα $(- \uparrow_S^R, -|_S)$ και $(-|_S, - \uparrow_S^R)$ είναι adjoint ζεύγη συναρτητών.

Ιδιαίτερως, αν G ομάδα, $H \leq G$ υποομάδα της G και $M \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$, θα γράφουμε $M|_H$ για τον περιορισμό της G -δράσης στην H (αντί για $M|_{\mathbb{Z}H}$). Αν $H = \{1_G\}$, θα γράφουμε απλά $M|_{\mathbb{Z}}$.

Σε αυτή την περίπτωση, το M θεωρείται σαν αβελιανή ομάδα ($\mathbb{Z}$ -πρότυπο).

Επίσης, αν $N \in {}_{\mathbb{Z}H}\text{Mod}$, θα γράφουμε $N \uparrow_H^G$ (αντί για $N \uparrow_{\mathbb{Z}H}^{\mathbb{Z}G}$) για το επαγόμενο από το $\mathbb{Z}H$ στο $\mathbb{Z}G$ πρότυπο και θα το καλούμε επαγόμενο από την H στη G πρότυπο. Αν $H = \{1_G\}$, θα γράφουμε απλά $N \uparrow_{\mathbb{Z}}^G$ και θα το καλούμε επαγόμενο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Επιπλέον, θα γράφουμε $N \uparrow_H^G$ (αντί για $N \uparrow_{\mathbb{Z}H}^{\mathbb{Z}G}$) για το συνεπαγόμενο από το $\mathbb{Z}H$ στο $\mathbb{Z}G$ πρότυπο και θα το καλούμε συνεπαγόμενο από την H στη G πρότυπο. Αν $H = \{1_G\}$, θα γράφουμε απλά $N \uparrow_{\mathbb{Z}}^G$ και θα το καλούμε συνεπαγόμενο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. ■

Πρόταση 1.16 Έστω R δακτύλιος και $S \leq R$. Τότε:

- (i) Αν $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$ είναι β.α.α. R -προτύπων,
τότε $0 \longrightarrow M_1|_S \longrightarrow M_2|_S \longrightarrow M_3|_S \longrightarrow 0$ είναι β.α.α. S -προτύπων.
Δηλαδή, ο $—|_S : {}_R\text{Mod} \rightarrow {}_S\text{Mod}$ είναι ακριβής συναρτητής.
- (ii) Αν $P \in {}_S\text{Mod}$ προβολικό S -πρότυπο, τότε $P \uparrow_S^R = \tilde{R} \otimes_S P$ είναι προβολικό R -πρότυπο.
Δηλαδή, ο $— \uparrow_S^R : {}_S\text{Mod} \rightarrow {}_R\text{Mod}$ “στέλνει” προβολικά S -πρότυπα σε προβολικά R -πρότυπα.
- (iii) Αν $I \in {}_S\text{Mod}$ εμφυτευτικό S -πρότυπο, τότε $I \uparrow_S^R = \text{Hom}_S(\tilde{R}, I)$ είναι εμφυτευτικό R -πρότυπο.
Δηλαδή, ο $— \uparrow_S^R : {}_S\text{Mod} \rightarrow {}_R\text{Mod}$ “στέλνει” εμφυτευτικά S -πρότυπα σε εμφυτευτικά R -πρότυπα.
- (iv) Αν $R|_S$ είναι προβολικό S -πρότυπο και $P \in {}_R\text{Mod}$ προβολικό R -πρότυπο, τότε $P|_S$ είναι προβολικό S -πρότυπο.
Δηλαδή, αν $R|_S$ είναι προβολικό S -πρότυπο, ο $—|_S : {}_R\text{Mod} \rightarrow {}_S\text{Mod}$ “στέλνει” προβολικά R -πρότυπα σε προβολικά S -πρότυπα.
- (v) Αν $R|_S$ είναι επίπεδο δεξιό S -πρότυπο και $E \in \text{Mod}_R$ επίπεδο δεξιό R -πρότυπο, τότε $E|_S$ είναι επίπεδο δεξιό S -πρότυπο.
Δηλαδή, αν $R|_S$ είναι επίπεδο δεξιό S -πρότυπο, ο $—|_S : {}_R\text{Mod} \rightarrow {}_S\text{Mod}$ “στέλνει” επίπεδα R -πρότυπα σε επίπεδα S -πρότυπα.
- (vi) Αν $R|_S$ είναι επίπεδο δεξιό S -πρότυπο και $I \in {}_R\text{Mod}$ εμφυτευτικό R -πρότυπο, τότε $I|_S$ είναι εμφυτευτικό S -πρότυπο.
Δηλαδή, αν $R|_S$ είναι επίπεδο δεξιό S -πρότυπο, ο $—|_S : {}_R\text{Mod} \rightarrow {}_S\text{Mod}$ “στέλνει” εμφυτευτικά R -πρότυπα σε εμφυτευτικά S -πρότυπα.

Απόδειξη.

(i) Αν $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ είναι β.α.α. R -προτύπων, τότε $0 \rightarrow M_1|_S \rightarrow M_2|_S \rightarrow M_3|_S \rightarrow 0$ είναι β.α.α. S -προτύπων, αφού η ακρίβεια της ακολουθίας δεν επηρεάζεται από τη δράση.

(ii) Έστω $P \in {}_S\text{Mod}$ προβολικό S -πρότυπο και $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ β.α.α. R -προτύπων. Αφού $—|_S$ είναι ακριβής, έχουμε τη β.α.α. S -προτύπων

$$0 \rightarrow M_1|_S \rightarrow M_2|_S \rightarrow M_3|_S \rightarrow 0 \quad (1.27)$$

Αφού P είναι προβολικό S -πρότυπο, έχουμε τη β.α.α

$$0 \rightarrow \text{Hom}_S(P, M_1|_S) \rightarrow \text{Hom}_S(P, M_2|_S) \rightarrow \text{Hom}_S(P, M_3|_S) \rightarrow 0$$

Επίσης, έχουμε φυσικούς ισομορφισμούς $\text{Hom}_S(P, M_i|_S) \simeq \text{Hom}_R(\overset{\vee}{R} \otimes_S P, M_i)$, δηλαδή $\text{Hom}_S(P, M_i|_S) \simeq \text{Hom}_R(P \uparrow_S^R, M_i)$ για $i = 1, 2, 3$. Συνεπώς, η (1.27) γίνεται

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(P \uparrow_S^R, M_1) \rightarrow \text{Hom}_R(P \uparrow_S^R, M_2) \rightarrow \text{Hom}_R(P \uparrow_S^R, M_3) \rightarrow 0$$

και είναι β.α.α. αβελιανών ομάδων. Έτσι, το $P \uparrow_S^R = \overset{\vee}{R} \otimes_S P$ είναι προβολικό R -πρότυπο.

(iii) Έστω $I \in {}_S\text{Mod}$ εμφυτευτικό S -πρότυπο και $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$ β.α.α. R -προτύπων. Αφού $—|_S$ είναι ακριβής, έχουμε τη β.α.α. S -προτύπων

$$0 \rightarrow M_1|_S \rightarrow M_2|_S \rightarrow M_3|_S \rightarrow 0$$

Αφού I είναι εμφυτευτικό S -πρότυπο, έχουμε τη β.α.α

$$0 \rightarrow \text{Hom}_S(M_3|_S, I) \rightarrow \text{Hom}_S(M_2|_S, I) \rightarrow \text{Hom}_S(M_1|_S, I) \rightarrow 0 \quad (1.28)$$

Επίσης, έχουμε φυσικούς ισομορφισμούς $\text{Hom}_S(M_i|_S, I) \simeq \text{Hom}_R(M_i, \text{Hom}_S(\overset{\vee}{R}, I))$, δηλαδή

$\text{Hom}_S(M_i|_S, I) \simeq \text{Hom}_R(M_i, I \uparrow_S^R)$ για $i = 1, 2, 3$. Συνεπώς, η (1.28) γίνεται

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M_3, I \uparrow_S^R) \longrightarrow \text{Hom}_R(M_2, I \uparrow_S^R) \longrightarrow \text{Hom}_R(M_1, I \uparrow_S^R) \longrightarrow 0$$

και είναι β.α.α. αβελιανών ομάδων. Έτσι, το $I \uparrow_S^R = \text{Hom}_S(\overset{\vee}{R}, I)$ είναι εμφυτευτικό R -πρότυπο.

(iv) Έστω ότι $R|_S$ είναι προβολικό S -πρότυπο, $P \in {}_R\text{Mod}$ προβολικό R -πρότυπο και

$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$ β.α.α. S -προτύπων. Αφού $R|_S$ είναι προβολικό S -πρότυπο, έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_S(R, N_1) \longrightarrow \text{Hom}_S(R, N_2) \longrightarrow \text{Hom}_S(R, N_3) \longrightarrow 0$$

η οποία γράφεται

$$0 \longrightarrow N_1 \uparrow_S^R \longrightarrow N_2 \uparrow_S^R \longrightarrow N_3 \uparrow_S^R \longrightarrow 0$$

και είναι β.α.α. R -προτύπων. Αφού P είναι προβολικό R -πρότυπο, έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P, N_1 \uparrow_S^R) \longrightarrow \text{Hom}_R(P, N_2 \uparrow_S^R) \longrightarrow \text{Hom}_R(P, N_3 \uparrow_S^R) \longrightarrow 0 \quad (1.29)$$

Επίσης, έχουμε φυσικούς ισομορφισμούς $\text{Hom}_R(P, \text{Hom}_S(\overset{\vee}{R}, N_i)) \simeq \text{Hom}_S(P|_S, N_i)$, δηλαδή

$$\text{Hom}_R(P, N_i \uparrow_S^R) \simeq \text{Hom}_S(P|_S, N_i) \text{ για } i = 1, 2, 3.$$

Συνεπώς, η (1.29) γίνεται

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_S(P|_S, N_1) \longrightarrow \text{Hom}_S(P|_S, N_2) \longrightarrow \text{Hom}_S(P|_S, N_3) \longrightarrow 0$$

και είναι β.α.α. αβελιανών ομάδων. Έτσι, το $P|_S$ είναι προβολικό S -πρότυπο.

(v) Έστω ότι $R|_S$ είναι επίπεδο δεξιό S -πρότυπο, $E \in \text{Mod}_R$ επίπεδο δεξιό R -πρότυπο και

$$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0 \text{ β.α.α. } S\text{-προτύπων. Αφού } R|_S \text{ είναι επίπεδο } S\text{-πρότυπο, έχουμε}$$

τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow R \otimes_S N_1 \longrightarrow R \otimes_S N_2 \longrightarrow R \otimes_S N_3 \longrightarrow 0$$

η οποία γράφεται

$$0 \longrightarrow N_1 \uparrow_S^R \longrightarrow N_2 \uparrow_S^R \longrightarrow N_3 \uparrow_S^R \longrightarrow 0$$

και είναι β.α.α. R -προτύπων. Αφού E είναι επίπεδο R -πρότυπο, παίρνουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow E \otimes_R N_1 \uparrow_S^R \longrightarrow E \otimes_R N_2 \uparrow_S^R \longrightarrow E \otimes_R N_3 \uparrow_S^R \longrightarrow 0 \quad (1.30)$$

Αλλά, $E \otimes_R N_i \uparrow_S^R = E \otimes_R (R \otimes_S N_i) = (E \otimes_R R) \otimes_S N_i \simeq E|_S \otimes_S N_i$, μέσω του φυσικού ισομορφισμού $(e \otimes r) \otimes n_i \mapsto er \otimes n_i$ για $i = 1, 2, 3$.

Συνεπώς, η (1.30) γίνεται

$$0 \longrightarrow E|_S \otimes_S N_1 \longrightarrow E|_S \otimes_S N_2 \longrightarrow E|_S \otimes_S N_3 \longrightarrow 0$$

και είναι β.α.α. αβελιανών ομάδων. Έτσι το $E|_S$ είναι επίπεδο S -πρότυπο.

(vi) Έστω ότι $R|_S$ είναι επίπεδο S -πρότυπο, $I \in {}_R\text{Mod}$ εμφυτευτικό R -πρότυπο και

$0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N_2 \longrightarrow N_3 \longrightarrow 0$ β.α.α. S -προτύπων. Αφού $R|_S$ είναι επίπεδο S -πρότυπο, έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow R \otimes_S N_1 \longrightarrow R \otimes_S N_2 \longrightarrow R \otimes_S N_3 \longrightarrow 0$$

η οποία γράφεται

$$0 \longrightarrow N_1 \uparrow_S^R \longrightarrow N_2 \uparrow_S^R \longrightarrow N_3 \uparrow_S^R \longrightarrow 0$$

και είναι β.α.α. R -προτύπων. Αφού I είναι εμφυτευτικό R -πρότυπο, έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(N_3 \uparrow_S^R, I) \longrightarrow \text{Hom}_R(N_2 \uparrow_S^R, I) \longrightarrow \text{Hom}_R(N_1 \uparrow_S^R, I) \longrightarrow 0 \quad (1.31)$$

Επίσης, έχουμε φυσικούς ισομορφισμούς $\text{Hom}_R(\tilde{R} \otimes_S N_i, I) \simeq \text{Hom}_S(N_i, I|_S)$, δηλαδή $\text{Hom}_R(N_i \uparrow_S^R, I) \simeq \text{Hom}_S(N_i, I|_S)$ για $i = 1, 2, 3$.

Συνεπώς, η (1.31) γίνεται

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_S(N_3, I|_S) \longrightarrow \text{Hom}_S(N_2, I|_S) \longrightarrow \text{Hom}_S(N_1, I|_S) \longrightarrow 0$$

και είναι β.α.α. αβελιανών ομάδων. Έτσι, το $I|_S$ είναι εμφυτευτικό S -πρότυπο. $\square$

Πρόταση 1.17 (Λήμμα Eckmann - Shapiro) Έστω R δακτύλιος και $S \leq R$ υποδακτύλιος ώστε $R|_S$ να είναι προβολικό S -πρότυπο. Αν $M \in {}_R\text{Mod}$, $N \in {}_S\text{Mod}$ και $n \in \mathbb{N}$, τότε:

$$(i) \text{Ext}_R^n(N \uparrow_S^R, M) \simeq \text{Ext}_S^n(N, M|_S)$$

$$(ii) \text{Ext}_R^n(M, N \uparrow_S^R) \simeq \text{Ext}_S^n(M|_S, N)$$

.
Απόδειξη.

(i) Έστω

$$\mathbf{P} : \quad \dots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

S -προβολική επίλυση του N . Το $R|_S$ είναι προβολικό, άρα και επίπεδο S -πρότυπο. Έτσι, από την $\mathbf{P}$, προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$\mathbf{P} \uparrow_S^R : \quad \dots \longrightarrow P_n \uparrow_S^R \longrightarrow P_{n-1} \uparrow_S^R \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \uparrow_S^R \longrightarrow P_0 \uparrow_S^R \longrightarrow N \uparrow_S^R \longrightarrow 0$$

Επιπλέον, από Πρόταση 1.16(ii), έχουμε ότι $P_i \uparrow_S^R$ είναι προβολικό R -πρότυπο για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Έτσι, η $\mathbf{P} \uparrow_S^R$ είναι R -προβολική επίλυση του $N \uparrow_S^R$. Παίρνουμε, τότε, το συναλυσωτό σύμπλεγμα

$$\text{Hom}_R(\mathbf{P} \uparrow_S^R, M) : \quad 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P_0 \uparrow_S^R, M) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(P_{n-1} \uparrow_S^R, M) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_n \uparrow_S^R, M) \longrightarrow \dots$$

και λόγω των φυσικών ισομορφισμών $\text{Hom}_R(P_i \uparrow_S^R, M) \simeq \text{Hom}_S(P_i, M|_S)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχουμε

ότι $\text{Hom}_R(\mathbf{P} \uparrow_S^R, M) \simeq \text{Hom}_S(\mathbf{P}, M|_S)$, όπου $\text{Hom}_S(\mathbf{P}, M|_S)$ είναι το συναλυσωτό σύμπλεγμα

$$\text{Hom}_R(\mathbf{P}, M|_S) : 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(P_0, M|_S) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(P_{n-1}, M|_S) \longrightarrow \text{Hom}_R(P_n, M|_S) \longrightarrow \dots$$

Έτσι, έχουμε $\text{Ext}_R^n(N \uparrow_S^R, M) = H^n(\text{Hom}_R(\mathbf{P} \uparrow_S^R, M)) \simeq H^n(\text{Hom}_S(\mathbf{P}, M|_S)) = \text{Ext}_S^n(N, M|_S)$, δηλαδή $\text{Ext}_R^n(N \uparrow_S^R, M) \simeq \text{Ext}_S^n(N, M|_S)$.

(ii) Έστω

$$\mathbf{I} : 0 \dots \longrightarrow N \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_n \longrightarrow \dots$$

S -εμφυτευτική επίλυση του N . Το $R|_S$ είναι προβολικό S -πρότυπο. Έτσι, από την $\mathbf{I}$, προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$\mathbf{I} \uparrow_S^R : 0 \longrightarrow N \uparrow_S^R \longrightarrow I_0 \uparrow_S^R \longrightarrow I_1 \uparrow_S^R \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \uparrow_S^R \longrightarrow I_n \uparrow_S^R \longrightarrow \dots$$

Επιπλέον, από Πρόταση 1.16(iii), έχουμε ότι $I_i \uparrow_S^R$ είναι εμφυτευτικό R -πρότυπο για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Έτσι, η $\mathbf{I} \uparrow_S^R$ είναι R -εμφυτευτική επίλυση του $N \uparrow_S^R$. Παίρνουμε, τότε το συναλυσωτό σύμπλεγμα

$$\text{Hom}_R(M, \mathbf{I} \uparrow_S^R) : 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M, I_0 \uparrow_S^R) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(M, I_{n-1} \uparrow_S^R) \longrightarrow \text{Hom}_R(M, I_n \uparrow_S^R) \longrightarrow \dots$$

και λόγω των φυσικών ισομορφισμών $\text{Hom}_R(M, I_i \uparrow_S^R) \simeq \text{Hom}_S(M|_S, I_i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\text{Hom}_R(M, \mathbf{I} \uparrow_S^R) \simeq \text{Hom}_S(M|_S, \mathbf{I})$, όπου $\text{Hom}_S(M|_S, \mathbf{I})$ είναι το συναλυσωτό σύμπλεγμα

$$\text{Hom}_S(M|_S, \mathbf{I}) : 0 \longrightarrow \text{Hom}_R(M|_S, I_0) \longrightarrow \dots \longrightarrow \text{Hom}_R(M|_S, I_{n-1}) \longrightarrow \text{Hom}_R(M|_S, I_n) \longrightarrow \dots$$

Έτσι, έχουμε $\text{Ext}_R^n(M, N \uparrow_S^R) = H^n(\text{Hom}_R(M, \mathbf{I} \uparrow_S^R)) \simeq H^n(\text{Hom}_S(M|_S, \mathbf{I})) = \text{Ext}_S^n(M|_S, N)$, δηλαδή $\text{Ext}_R^n(M, N \uparrow_S^R) \simeq \text{Ext}_S^n(M|_S, N)$. $\square$

Πρόταση 1.18 Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Τότε το $\mathbb{Z}G$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο.

Απόδειξη.

Η H δρα στη G με $h \cdot g = hg$ για κάθε $h \in H$ και $g \in G$. Η δράση της H στη G επάγει δράση του $\mathbb{Z}H$ στο $\mathbb{Z}G$ και έτσι το $\mathbb{Z}G$ καθίσταται αριστερό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο.

Έχουμε ότι $G = \bigcup_{t \in T} Ht$, όπου T είναι σύνολο αντιπροσώπων των δεξιών συμπλόκων της H στη G .

Τότε $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}\left(\bigcup_{t \in T} Ht\right) \simeq \bigoplus_{t \in T} \mathbb{Z}(Ht)$, διότι η ένωση είναι ξένη και $\bigoplus_{t \in T} \mathbb{Z}(Ht) \simeq \bigoplus_{t \in T} \mathbb{Z}H$.

Έτσι $\mathbb{Z}G \simeq \bigoplus_{t \in T} \mathbb{Z}H$ και άρα το $\mathbb{Z}G$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο. $\square$

Πόρισμα 1.19 Έστω G ομάδα και $H \leq G$.

- (i) Αν $P \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, τότε $P|_H$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο.
- (ii) Αν $I \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, τότε $I|_H$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο.
- (iii) Αν $E \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ επίπεδο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, τότε $E|_H$ είναι επίπεδο $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο.

Απόδειξη.

Από την Πρόταση 1.18, έχουμε ότι το $\mathbb{Z}G$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο. Τότε το $\mathbb{Z}G$ είναι προβολικό και επίπεδο $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο. Τα αποτελέσματα προκύπτουν άμεσα από την Πρόταση 1.16(iv), (v) και (vi), αντίστοιχα. $\square$

Πρόταση 1.20 Έστω G ομάδα και $H \leq G$.

- (i) Αν $M \in {}_{\mathbb{Z}H}\text{Mod}$, τότε το M είναι ευθύς προσθετέος του $(M \uparrow_H^G)|_H$.
- (ii) Αν $N \in {}_{\mathbb{Z}H}\text{Mod}$, τότε το N είναι ευθύς προσθετέος του $(N \uparrow\uparrow_H^G)|_H$.

Απόδειξη.

(i) Ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi : \mathbb{Z}G \times M \rightarrow M$ με $\varphi(g, m) = \begin{cases} gm & \text{αν } g \in H \\ 0 & \text{αν } g \notin H \end{cases}$

Η φ είναι καλά ορισμένη και $\mathbb{Z}H$ -διγγραμμική αφού αν $h \in H$, είναι

$hg \in H \iff g \in H \iff gh \in H$. Συνεπώς, επεκτείνεται σε ομομορφισμό αβελιανών ομάδων

$\varphi : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \rightarrow M$ με $\varphi(g \otimes m) = \begin{cases} gm & \text{αν } g \in H \\ 0 & \text{αν } g \notin H \end{cases}$

Η φ είναι $\mathbb{Z}H$ -ομομορφισμός, αφού αν $h \in H$, είναι

$\varphi(h(g \otimes m)) = \varphi(hg \otimes m) = \begin{cases} hgm & \text{αν } g \in H \\ 0 & \text{αν } g \notin H \end{cases} = h\varphi(g \otimes m)$

και προφανώς, η φ είναι επιμορφισμός.

Συνεπώς, έχουμε τον $\mathbb{Z}H$ -επιμορφισμό $\varphi : (\overset{\vee}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}H} M)|_H \rightarrow M$.

Ορίζουμε, τώρα, την $\tau : M \rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ με $\tau(m) = 1 \otimes m$. Η τ είναι $\mathbb{Z}H$ -ομομορφισμός και έχουμε ότι $(\varphi \circ \tau)(m) = \varphi(\tau(m)) = \varphi(1 \otimes m) = m$. Συνεπώς, η φ είναι $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενος επιμορφισμός και άρα το M είναι ευθύς προσθετός του $(\overset{\vee}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}H} M)|_H = (M \uparrow_H^G)|_H$.

(ii) Ορίζουμε την απεικόνιση $\psi : N \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\overset{\vee}{\mathbb{Z}G}, N)$ με $(\psi(n))(g) = \begin{cases} gn & \text{αν } g \in H \\ 0 & \text{αν } g \notin H \end{cases}$

Η ψ είναι καλά ορισμένη και $\mathbb{Z}H$ -ομομορφισμός αφού αν $h \in H$, είναι

$hg \in H \iff g \in H \iff gh \in H$.

Η ψ είναι $\mathbb{Z}H$ -ομομορφισμός, αφού αν $h \in H$, είναι

$(\psi(hn))(g) = \begin{cases} ghn & \text{αν } g \in H \\ 0 & \text{αν } g \notin H \end{cases} = (h\psi(n))(g)$ για κάθε $g \in G$

και προφανώς, η ψ είναι μονομορφισμός.

Συνεπώς, έχουμε τον $\mathbb{Z}H$ -μονομορφισμό $\psi : N \rightarrow (\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\overset{\vee}{\mathbb{Z}G}, N))|_H$.

Ορίζουμε, τώρα, την $\sigma : \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\overset{\vee}{\mathbb{Z}G}, N) \rightarrow N$ με $\sigma(f) = f(1)$. Η σ είναι $\mathbb{Z}H$ -ομομορφισμός και έχουμε ότι $(\sigma \circ \psi)(n) = \sigma(\psi(n)) = (\psi(n))(1) = n$. Συνεπώς, η ψ είναι $\mathbb{Z}H$ -διασπώμενος μονομορφισμός και άρα το N είναι ευθύς προσθετός του $(\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\overset{\vee}{\mathbb{Z}G}, N))|_H = (N \uparrow_H^G)|_H$. $\square$

Πρόταση 1.21 Έστω $A, B \in {}_R\text{Mod}$. Αν A είναι ευθύς προσθετέος του B , τότε $\text{pd}_R A \leq \text{pd}_R B$ και $\text{id}_R A \leq \text{id}_R B$.

Απόδειξη.

Αν $\text{pd}_R B = \infty$, τότε $\text{pd}_R A \leq \text{pd}_R B$ και αν $\text{id}_R B = \infty$, τότε $\text{id}_R A \leq \text{id}_R B$. Έστω $\text{pd}_R B < \infty$ και $\text{id}_R B < \infty$. Αφού A είναι ευθύς προσθετέος του B , υπάρχει $E \in {}_R\text{Mod}$ ώστε $A \oplus E \simeq B$.

Τότε για $X \in {}_R\text{Mod}$, έχουμε:

$$\text{Ext}_R^i(B, X) \simeq \text{Ext}_R^i(A \oplus E, X) \simeq \text{Ext}_R^i(A, X) \oplus \text{Ext}_R^i(E, X) \text{ και}$$

$$\text{Ext}_R^i(X, B) \simeq \text{Ext}_R^i(X, A \oplus E) \simeq \text{Ext}_R^i(X, A) \oplus \text{Ext}_R^i(X, E) \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}.$$

$$\begin{aligned} \text{Για } i = \text{pd}_R B + 1, \text{ έχουμε } \text{Ext}_R^i(B, X) = 0 &\implies \text{Ext}_R^i(A \oplus E, X) = 0 \implies \\ \implies \text{Ext}_R^i(A, X) = \text{Ext}_R^i(E, X) = 0. &\text{ Συνεπώς, } \text{pd}_R A \leq \text{pd}_R B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Αντίστοιχα, για } i = \text{id}_R B + 1, \text{ έχουμε } \text{Ext}_R^i(X, B) = 0 &\implies \text{Ext}_R^i(X, A \oplus E) = 0 \implies \\ \implies \text{Ext}_R^i(X, A) = \text{Ext}_R^i(X, E) = 0. &\text{ Συνεπώς, } \text{id}_R A \leq \text{id}_R B. \quad \square \end{aligned}$$

Λήμμα 1.22 Έστω $M \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M < \infty$. Τότε υπάρχει $K \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με $K|_{\mathbb{Z}}$ ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο ώστε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(M, -) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(K, -)$ για κάθε $i > 0$.

Απόδειξη.

Έστω F ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, $\varepsilon : F \rightarrow M$ επιμορφισμός και $K = \ker \varepsilon$. Τότε, έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Αφού F είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, έπεται ότι το $F|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (Πόρισμα 1.19(i)). Έτσι, το $K|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο αφού $K|_{\mathbb{Z}} \leq F|_{\mathbb{Z}}$. Έστω $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Παίρνουμε τη μακρά ακριβή $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}(-, A)$ ακολουθία και έχουμε

$$\dots \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(F, A) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(K, A) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(M, A) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(F, A) \longrightarrow \dots$$

Αλλά F είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και έτσι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(F, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(F, A) = 0$ για κάθε $i > 0$. Έτσι, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(M, A) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(K, A)$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. $\square$

2 Διαγώνια δράση

2.1 Διαγώνια $\mathbb{Z}G$ -δράση

Αν $A, B \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε τις αβελιανές ομάδες $A|_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} B|_{\mathbb{Z}}$ και $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A|_{\mathbb{Z}}, B|_{\mathbb{Z}})$ τις οποίες, για απλότητα, θα συμβολίζουμε με $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ και $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$. Οι ομάδες αυτές καθίστανται $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα και η $\mathbb{Z}G$ -δράση καλείται διαγώνια δράση. Στο παρόν κεφάλαιο, ορίζεται η διαγώνια δράση της G επί των ομάδων αυτών και παρουσιάζεται η σύνδεσή της με τα επαγόμενα και τα συνεπαγόμενα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα.

Ορισμός 2.1 Έστω $A, B \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Η αβελιανή ομάδα $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ εφοδιάζεται με δομή αριστερού $\mathbb{Z}G$ -προτύπου που επάγεται από την ακόλουθη δράση της G στους γεννήτορες της $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$:

$$g \cdot (a \otimes b) = ga \otimes gb \text{ για } g \in G \text{ και } a \otimes b \in A \otimes_{\mathbb{Z}} B$$

Η $\cdot$ είναι δράση της G επί της $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$:

- $1_G \cdot (a \otimes b) = 1_G a \otimes 1_G b = a \otimes b$, δηλαδή $1_G \cdot (a \otimes b) = a \otimes b$
- Αν $g_1, g_2 \in G$, τότε $(g_1 g_2) \cdot (a \otimes b) = (g_1 g_2 a) \otimes (g_1 g_2 b) = g_1 \cdot ((g_2 a) \otimes (g_2 b)) = g_1 \cdot (g_2 \cdot (a \otimes b))$, δηλαδή $(g_1 g_2) \cdot (a \otimes b) = g_1 \cdot (g_2 \cdot (a \otimes b))$

Η δράση της G επάγει δράση του $\mathbb{Z}G$ στους γεννήτορες της $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$, η οποία επεκτείνεται σε δράση του $\mathbb{Z}G$ επί της $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ ως εξής:

$$\left(\sum_{g \in G} n_g g \right) \cdot \left(\sum_{i \in I} a_i \otimes b_i \right) = \sum_{i \in I} \sum_{g \in G} n_g (ga_i \otimes gb_i)$$

Η παραπάνω δράση καλείται **διαγώνια δράση** και το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ (εφοδιασμένο με τη διαγώνια δράση) θα συμβολίζεται με $\overset{\circ}{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{B}$.

Επιπλέον, η αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ εφοδιάζεται με δομή αριστερού $\mathbb{Z}G$ -προτύπου με δράση που επάγεται από την ακόλουθη δράση της G επί της $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$:

$$(g \cdot f)(a) = gf(g^{-1}a) \text{ για κάθε } a \in A$$

Η G δρά στην $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$:

- $(1_G \cdot f)(a) = 1_G f(1_G^{-1}a) = f(a)$ για κάθε $a \in A$, δηλαδή $1_G \cdot f = f$
- Αν $g_1, g_2 \in G$, τότε $((g_1 g_2) \cdot f)(a) = g_1 g_2 f((g_1 g_2)^{-1}a) = g_1 g_2 f(g_2^{-1} g_1^{-1}a) =$
 $= g_1 \cdot (g_2 f(g_2^{-1}a)) = (g_1 \cdot (g_2 \cdot f))(a)$ για κάθε $a \in A$, δηλαδή $(g_1 g_2) \cdot f = g_1 \cdot (g_2 \cdot f)$

Η δράση της G επάγει δράση του $\mathbb{Z}G$ επί της $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ ως εξής:

$$\left(\left(\sum_{g \in G} n_g g \right) \cdot f \right)(a) = \sum_{g \in G} n_g g f(g^{-1}a) \text{ για κάθε } a \in A$$

Η παραπάνω δράση καλείται (επίσης) **διαγώνια δράση** και το $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(A, B)$ με τη διαγώνια δράση συμβολίζεται με $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})$. ■

Σχετικά με τη διαγώνια δράση έχουμε την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.1 Έστω G ομάδα, $H \leq G$ και $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Τότε:

$$(i) \quad \mathbb{Z}(\overset{\circ}{G}/H) \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{A} \simeq \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A|_H$$

$$(ii) \quad \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(\overset{\circ}{G}/H), \overset{\circ}{A}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A|_H)$$

Απόδειξη.

$$(i) \quad \text{Ορίζουμε } f : \mathbb{Z}(\overset{\circ}{G}/H) \times A \rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A \text{ με } f(gH, a) = g \otimes g^{-1}a.$$

Η f είναι $\mathbb{Z}$ -διγραμμική:

$$f(g_1 H + g_2 H, a) = g_1 \otimes g_1^{-1}a + g_2 \otimes g_2^{-1}a = f(g_1 H, a) + f(g_2 H, a),$$

$$f(gH, a_1 + a_2) = g \otimes g^{-1}(a_1 + a_2) = g \otimes (g^{-1}a_1 + g^{-1}a_2) = g \otimes g^{-1}a_1 + g \otimes g^{-1}a_2 =$$

$$= f(gH, a_1) + f(gH, a_2)$$

και

$$f(gHr, a) = (g \otimes g^{-1}a)r = g \otimes g^{-1}ar = g \otimes g^{-1}ra = f(gH, ra).$$

Συνεπώς, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\tilde{f} : \mathbb{Z} \left(\overline{G/H} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} A \rightarrow \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A \text{ με } \tilde{f}(gH \otimes a) = g \otimes g^{-1}a$$

$$\text{Ορίζουμε, επίσης, } h : \mathbb{Z}G \times A \rightarrow \mathbb{Z} \left(\overline{G/H} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} A \text{ με } h(g, a) = gH \otimes ga.$$

Η h είναι $\mathbb{Z}H$ -διγραμμική:

$$h(g_1 + g_2, a) = g_1H \otimes g_1a + g_2H \otimes g_2a = h(g_1, a) + h(g_2, a),$$

$$h(g, a_1 + a_2) = gH \otimes g(a_1 + a_2) = gH \otimes (ga_1 + ga_2) = gH \otimes ga_1 + gH \otimes ga_2 = h(g, a_1) + h(g, a_2)$$

και

$$h(gr, a) = (gH \otimes ga)r = gH \otimes gar = gH \otimes gra = h(g, ra).$$

Συνεπώς, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\tilde{h} : \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A \rightarrow \mathbb{Z} \left(\overline{G/H} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} A \text{ με } \tilde{h}(g \otimes a) = gH \otimes ga.$$

Οι $\tilde{f}$ και $\tilde{h}$ είναι $\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμοί:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x \cdot (gH \otimes a)) &= \tilde{f}(xgH \otimes xa) = xg \otimes (xg)^{-1}xa = xg \otimes g^{-1}x^{-1}xa = xg \otimes g^{-1}a = \\ &= x \cdot (g \otimes g^{-1}a) = x \cdot \tilde{f}(gH \otimes a) \text{ για κάθε } x \in G \text{ και } gH \otimes a \in \mathbb{Z} \left(\overline{G/H} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} A \end{aligned}$$

και

$$\tilde{h}(x \cdot (g \otimes a)) = \tilde{h}(xg \otimes a) = xgH \otimes xga = x \cdot (gH \otimes ga) = x \cdot \tilde{h}(g \otimes a)$$

$$\text{για κάθε } x \in G \text{ και } g \otimes a \in \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A|_H.$$

Τέλος:

$$(\tilde{f} \circ \tilde{h})(g \otimes a) = \tilde{f}(\tilde{h}(g \otimes a)) = \tilde{f}(gH \otimes ga) = g \otimes g^{-1}ga = g \otimes a$$

$$\text{για κάθε } g \otimes a \in \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A$$

και

$$(\tilde{h} \circ \tilde{f})(gH \otimes a) = \tilde{h}(\tilde{f}(gH \otimes a)) = \tilde{h}(g \otimes g^{-1}a) = gH \otimes gg^{-1}a = gH \otimes a$$

$$\text{για κάθε } gH \otimes a \in \mathbb{Z} \left(\overline{G/H} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} A.$$

Έτσι $\tilde{f} \circ \tilde{h} = id_{\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A}$ και $\tilde{h} \circ \tilde{f} = id_{\mathbb{Z} \left(\overline{G/H} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} A}$ και άρα η $\tilde{f}$ είναι ισομορφισμός $\mathbb{Z}G$ -προτύπων.

Άρα, έχουμε ότι $\mathbb{Z} \left(\overline{G/H} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} A \simeq \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A|_H$ ως (αριστερά) $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα.

$$(ii) \text{ Ορίζουμε την } \sigma : \text{Hom}_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Z} \left(\overline{G/H} \right), A \right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A)$$

με $\sigma(f) : \mathbb{Z}G \rightarrow A$, $\sigma(f)(g) = gf(g^{-1}H)$.

Η $\sigma(f)$ είναι ομομορφισμός $\mathbb{Z}H$ -προτύπων για κάθε $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H), A)$:

$$\sigma(f)(g+x) = gf(g^{-1}H) + xf(x^{-1}H) = \sigma(f)(g) + \sigma(f)(x)$$

και

$$\sigma(f)(hg) = hgf((hg)^{-1}H) = hgf(g^{-1}h^{-1}H) = hgf(g^{-1}H) = h\sigma(f)$$

για κάθε $x, g \in G$ και $h \in H$.

Ορίζουμε, επίσης, την $\tau : \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H), A)$

$$\text{με } \tau(f) : \mathbb{Z}(G/H) \rightarrow A, \quad (\tau(f))(gH) = gf(g^{-1})$$

Η $\tau(f)$ είναι ομομορφισμός αβελιανών ομάδων για κάθε $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A)$:

$$(\tau(f))(g_1H + g_2H) = g_1f(g_1^{-1}) + g_2f(g_2^{-1}) = (\tau(f))(g_1H) + (\tau(f))(g_2H)$$

για κάθε $g_1H, g_2H \in G/H$.

Οι σ και τ είναι ομομορφισμοί $\mathbb{Z}G$ -προτύπων:

Έστω $x \in \mathbb{Z}G$. Είναι:

$$\begin{aligned} \sigma(g \cdot f)(x) &= x(g \cdot f)(x^{-1}H) = xgf(g^{-1}x^{-1}H) = xgf((xg)^{-1}H) = \sigma(f)(xg) = \\ &= (g \cdot \sigma)(f)(x), \text{ δηλαδή } \sigma(g \cdot f) = g \cdot \sigma(f) \text{ για κάθε } g \in G \text{ και } f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H), A). \end{aligned}$$

Επίσης:

Έστω $xH \in \mathbb{Z}(G/H)$. Είναι:

$$\begin{aligned} \tau(g \cdot f)(xH) &= x(g \cdot f)(x^{-1}) = xf(x^{-1}g) = gg^{-1}xf((g^{-1}x)^{-1}) = g\tau(f)(g^{-1}xH) = \\ &= (g \cdot \tau)(f)(xH), \text{ δηλαδή } \tau(g \cdot f) = g \cdot \tau(f) \text{ για κάθε } g \in G \text{ και } f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A|_H). \end{aligned}$$

Έστω, τώρα, $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A)$. Είναι:

$$(\sigma \circ \tau)(\varphi)(x) = \sigma(\tau(\varphi))(x) = x\tau(\varphi)(x^{-1}H) = xx^{-1}f((x^{-1})^{-1}) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{Z}G$$

και αν $\psi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H), A)$, τότε:

$$(\tau \circ \sigma)(\psi)(xH) = \tau(\sigma(\psi))(xH) = x\sigma(\psi)(x^{-1}) = xx^{-1}\psi((x^{-1})^{-1}H) = \psi(xH)$$

για κάθε $xH \in \mathbb{Z}(G/H)$.

$$\Delta\eta\lambda\alpha\delta\eta, \sigma \circ \tau = id_{\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, A)} \text{ και } \tau \circ \sigma = id_{\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H), A)}.$$

Συνεπώς, η σ είναι ισομορφισμός $\mathbb{Z}G$ -προτύπων και άρα, έχουμε ότι

$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}\left(\vec{G}/_H\right), \vec{A}\right) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, A|_H)$ ως (αριστερά) $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα. $\square$

Πρόταση 2.2 Έστω G ομάδα, $H \leq G$ και $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Τότε:

- (i) Αν $A|_H$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο, τότε το $\mathbb{Z}\left(\vec{G}/_H\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.
- (ii) Αν $A|_H$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο, τότε το $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}\left(\vec{G}/_H\right), \vec{A}\right)$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Απόδειξη.

(i) Από Πρόταση 2.1(i) έχουμε ότι $\mathbb{Z}\left(\vec{G}/_H\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A} \simeq \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} A|_H = (A|_H) \uparrow_H^G$.

Αφού $A|_H$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο, από Πρόταση 1.16(ii), έπεται ότι $(A|_H) \uparrow_H^G$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Συνεπώς, το $\mathbb{Z}\left(\vec{G}/_H\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

(ii) Από Πρόταση 2.1(ii) έχουμε ότι $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}\left(\vec{G}/_H\right), \vec{A}\right) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, A|_H)$.

Αφού $A|_H$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο, από Πρόταση 1.16(iii), έπεται ότι $(A|_H) \uparrow_H^G$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Συνεπώς, το $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\mathbb{Z}\left(\vec{G}/_H\right), \vec{A}\right)$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. $\square$

Πόρισμα 2.3 Έστω G ομάδα και $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Τότε:

- (i) $\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A} \simeq \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}} A|_Z$
- (ii) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G, \vec{A}\right) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, A|_Z)$

Απόδειξη.

Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2.1, θέτοντας $H = \{1_G\}$. $\square$

Πόρισμα 2.4 Έστω G ομάδα και $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Τότε:

- (i) Αν $A|_{\mathbb{Z}}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (δηλαδή ελεύθερη αβελιανή ομάδα), τότε το $\overset{\vee}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\vee}{A}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.
- (ii) Αν $A|_{\mathbb{Z}}$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (δηλαδή διαιρετή αβελιανή ομάδα), τότε το $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\vee}{\mathbb{Z}G}, \overset{\vee}{A})$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Απόδειξη.

Προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 2.2, θέτοντας $H = \{1_G\}$. □

Πρόταση 2.5 Έστω G ομάδα.

- (i) Αν $P, A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και $A|_{\mathbb{Z}}$ ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (δηλαδή, ελεύθερη αβελιανή ομάδα), τότε το $\overset{\vee}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\vee}{A}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.
- (ii) Αν $P, A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και $A|_{\mathbb{Z}}$ εμφυτευτικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (δηλαδή, διαιρετή αβελιανή ομάδα), τότε $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\vee}{P}, \overset{\vee}{A})$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.
- (iii) Έστω $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} A \leq m$, $m \in \mathbb{N}$.

1. Αν $B \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με $B|_{\mathbb{Z}}$ προβολικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, τότε $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\vee}{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\vee}{B} \leq m$.
2. Αν $B \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με $B|_{\mathbb{Z}}$ εμφυτευτικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, τότε $\text{id}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\vee}{A}, \overset{\vee}{B}) \leq m$.

Απόδειξη.

- (i) Αρχικά, υποθέτουμε ότι P είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Τότε $P = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}G_x$, όπου $\mathbb{Z}G_x = \mathbb{Z}G$ για κάθε $x \in X$. Είναι:

$$\overset{\vee}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\vee}{A} \simeq \left(\bigoplus_{x \in X} \overset{\vee}{\mathbb{Z}G_x} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\vee}{A} \simeq \bigoplus_{x \in X} \left(\overset{\vee}{\mathbb{Z}G_x} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\vee}{A} \right)$$

Επειδή $A|_{\mathbb{Z}}$ ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, από το Πόρισμα 2.4(i) έπεται ότι το $\overset{\vee}{\mathbb{Z}G_x} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\vee}{A}$ είναι ελεύθερο

$\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Άρα, το $\bigoplus_{x \in X} \left(\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}G}_x \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A} \right)$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ως ευθύ άθροισμα ελεύθερων $\mathbb{Z}G$ -προτύπων. Συνεπώς, το $\vec{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Τώρα, αν P είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, τότε υπάρχουν $F, Q \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με F ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ώστε $F = P \oplus Q$. Τότε $\vec{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A} \simeq \left(P \oplus Q \right) \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A} \simeq \left(\vec{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A} \right) \oplus \left(\vec{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A} \right)$

Όμως, το F είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, $\vec{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και άρα το $\vec{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{A}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ως ευθύς προσθετός ελεύθερου $\mathbb{Z}G$ -προτύπου.

(ii) Αρχικά, υποθέτουμε ότι P είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Τότε $P = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}G_x$, όπου $\mathbb{Z}G_x = \mathbb{Z}G$ για κάθε $x \in X$.

Είναι $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{P}, \vec{A}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\bigoplus_{x \in X} \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}G}_x, \vec{A}\right) \simeq \prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}G}_x, \vec{A})$

Επειδή $A|_{\mathbb{Z}}$ εμφυτευτικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, από το Πρόσχημα 2.4(ii), έπεται ότι το $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}G}_x, \vec{A})$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Άρα, το $\prod_{x \in X} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}G}_x, A|_{\mathbb{Z}})$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ως ευθύ γινόμενο εμφυτευτικών $\mathbb{Z}G$ -προτύπων. Συνεπώς, το $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{P}, \vec{A})$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Τώρα, αν P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, τότε υπάρχουν $F, Q \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με F ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ώστε $F = P \oplus Q$. Τότε $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{F}, \vec{A}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\vec{P} \oplus \vec{Q}, \vec{A}\right) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{P}, \vec{A}) \oplus \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{Q}, \vec{A})$

Όμως, το F είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Έτσι, σύμφωνα με τα παραπάνω, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{F}, \vec{A})$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και άρα το $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{P}, \vec{A})$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, ως ευθύς προσθετός εμφυτευτικού $\mathbb{Z}G$ -προτύπου.

(iii) Αφού $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} A \leq m$, τότε υπάρχει $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του A μήκους m , δηλαδή μια ακριβής ακολουθία

$$\mathbf{P} : \quad 0 \longrightarrow P_m \xrightarrow{\partial_m} P_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0$$

όπου P_i είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για $i = 0, 1, \dots, m$.

1. Το $B|_{\mathbb{Z}}$ είναι προβολικό, άρα και επίπεδο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

Συνεπώς, από την $\mathbf{P}$, προκύπτει η $\mathbb{Z}G$ -ακριβής ακολουθία

$$\overset{\rightarrow}{\mathbf{P}} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B} : 0 \rightarrow \vec{P}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B} \rightarrow \vec{P}_{m-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B} \rightarrow \dots \rightarrow \vec{P}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B} \rightarrow \vec{P}_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B} \rightarrow \vec{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B} \rightarrow 0$$

όπου, θέτοντας $P_{-1} = A$ και $\partial_0 = \varepsilon$, οι ομομορφισμοί είναι

$$\partial_i \otimes \text{id}_B : P_i \otimes_{\mathbb{Z}} B \rightarrow P_{i-1} \otimes_{\mathbb{Z}} B \text{ με } (\partial_i \otimes \text{id}_B)(x \otimes b) = \partial_i(x) \otimes \text{id}_B(b)$$

για κάθε $x \otimes b \in P_i \otimes_{\mathbb{Z}} B$ και για $i = 0, 1, \dots, m$.

Οι ομομορφισμοί $\partial_i \otimes \text{id}_B$ διατηρούν τη διαγώνια δράση για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$.

Πράγματι, έστω $x \otimes b \in P_i \otimes_{\mathbb{Z}} B$ και $g \in G$. Τότε:

$$\begin{aligned} (\partial_i \otimes \text{id}_B)(g \cdot (x \otimes b)) &= (\partial_i \otimes \text{id}_B)(gx \otimes gb) = \partial_i(gx) \otimes \text{id}_B(gb) = (g\partial_i(x)) \otimes (gb) = \\ &= g \cdot (\partial_i(x) \otimes b) = g \cdot (\partial_i(x) \otimes \text{id}_B(b)), \text{ αφού } \partial_i \text{ είναι } \mathbb{Z}G\text{-ομομορφισμός για } i = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $(\partial_i \otimes \text{id}_B)(g \cdot (x \otimes b)) = g \cdot (\partial_i(x) \otimes \text{id}_B(b))$ για κάθε $x \otimes b \in P_i \otimes_{\mathbb{Z}} B$

και $g \in G$ και για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$.

Έτσι, η $\overset{\rightarrow}{\mathbf{P}} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B}$ είναι ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}G$ -προτύπων.

Αλλά, P_i είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$ και $B|_{\mathbb{Z}}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

Από το (i), έπεται ότι $\vec{P}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$.

Συνεπώς, η ακολουθία $\overset{\rightarrow}{\mathbf{P}} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B}$ είναι $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του $\vec{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B}$ μήκους m .

Άρα, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \vec{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{B} \leq m$.

2. Το $B|_{\mathbb{Z}}$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο. Συνεπώς, από την $\mathbf{P}$, προκύπτει η $\mathbb{Z}G$ -ακριβής ακολουθία

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\rightarrow}{\mathbf{P}}, \vec{B}) : 0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{A}, \vec{B}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{P}_0, \vec{B}) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{P}_m, \vec{B}) \rightarrow 0$$

όπου, θέτοντας $P_{-1} = A$ και $\partial_0 = \varepsilon$, οι ομομορφισμοί είναι

$$\partial_i^* : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_{i-1}, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_i, B) \text{ με } \partial_i^*(f) = f \circ \partial_i$$

για κάθε $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_{i-1}, B)$ και για $i = 0, 1, \dots, m$.

Οι ομομορφισμοί ∂_i^* διατηρούν τη διαγώνια δράση για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$.

Πράγματι, έστω $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_{i-1}, B)$ και $g \in G$. Τότε:

$$\begin{aligned}\partial_i^*(g \cdot f) &= (g \cdot f) \circ \partial_i \text{ και για κάθε } x \in P_{i-1} \text{ είναι } ((g \cdot f) \circ \partial_i)(x) = (g \cdot f)(\partial_i(x)) = \\ &= gf(g^{-1}\partial_i(x)) = gf(\partial_i(g^{-1}x)) = g \cdot (f(\partial_i(x))) = g \cdot ((f \circ \partial_i)(x)),\end{aligned}$$

αφού ∂_i είναι $\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμός για $i = 0, 1, \dots, m$.

$$\text{Δηλαδή, } (g \cdot f) \circ \partial_i = g \cdot (f \circ \partial_i) \text{ ή, ισοδύναμα, } \partial_i^*(g \cdot f) = g \cdot (\partial_i^*(f))$$

Έτσι, έχουμε $\partial_i^*(g \cdot f) = g \cdot (\partial_i^*(f))$ για κάθε $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(P_{i-1}, B)$ και $g \in G$

και για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$.

Άρα, η $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\circ}{P}, \overset{\circ}{B})$ είναι ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}G$ -προτύπων.

Αλλά P_i είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$ και $B|_{\mathbb{Z}}$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

Από το (ii), έπεται ότι $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\circ}{P}_i, \overset{\circ}{B})$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$.

Συνεπώς, η ακολουθία $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\circ}{P}, \overset{\circ}{B})$ είναι $\mathbb{Z}G$ -εμφυτευτική επίλυση του $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B})$ μήκους m .

Άρα, $\text{id}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}) \leq m$. □

2.2 Σχετικά προβολικά πρότυπα

Αν G ομάδα και $H \leq G$, ένα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P καλείται H -σχετικά προβολικό αν είναι ευθύς προσθετέος ενός επαγόμενου από την H στη G προτύπου. Δηλαδή, το P είναι H -σχετικά προβολικό αν $P \oplus Q \simeq N \uparrow_H^G$ για κάποιο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο Q και κάποιο $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο N . Αν η H είναι τετριμμένη, τότε το P καλείται σχετικά προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2 Έστω $P \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Το P θα λέγεται **σχετικά προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο** αν είναι ευθύς προσθετέος ενός επαγόμενου $\mathbb{Z}G$ -προτύπου. Δηλαδή, το P καλείται σχετικά προβολικό αν $P \oplus M \simeq \overset{\circ}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} X$ για κάποιο $M \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ και $X \in {}_{\mathbb{Z}}\text{Mod}$. ■

Η Πρόταση 2.6 δείχνει ότι μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P να είναι σχετικά προβολικό είναι κάθε $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων που καταλήγει στο P να είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη.

Πρόταση 2.6 Έστω $P \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) Το P είναι σχετικά προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

(ii) Αν $0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} P \rightarrow 0$ β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων η οποία είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, τότε είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη.

Απόδειξη.

(i) $\implies$ (ii) Αρχικά, έστω X αβελιανή ομάδα ώστε η

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} \overset{\sim}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} X \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

να είναι $\mathbb{Z}G$ -ακριβής ακολουθία η οποία είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη.

Τότε, υπάρχει $\mathbb{Z}$ -ομομορφισμός $\rho : \overset{\sim}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} X \rightarrow B$ ώστε $\tau \circ \rho = id_{\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X}$.

Ορίζουμε την απεικόνιση $\varphi : \overset{\sim}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} X \rightarrow B$ με $\varphi(w \otimes x) = w\rho(1 \otimes x)$

Η φ είναι $\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμός:

Έστω $g \in G$ και $w \otimes x \in \overset{\sim}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} X$. Τότε:

$$\varphi(g \cdot (w \otimes x)) = \varphi(gw \otimes x) = gw\rho(1 \otimes x) = g(w\rho(1 \otimes x)) = g \cdot \varphi(w \otimes x)$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} (\tau \circ \varphi)(w \otimes x) &= \tau(\varphi(w \otimes x)) = \tau(w\rho(1 \otimes x)) = w \cdot \tau(\rho(1 \otimes x)) = w \cdot ((\tau \circ \rho)(1 \otimes x)) = \\ &= w \cdot (id_{\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X}(1 \otimes x)) = w \cdot (1 \otimes x) = w \otimes x, \text{ καθώς } \tau \text{ είναι } \mathbb{Z}G\text{-ομομορφισμός.} \end{aligned}$$

Έτσι, $(\tau \circ \varphi)(w \otimes x) = w \otimes x$ για κάθε $w \otimes x \in \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X$, δηλαδή, $\tau \circ \varphi = id_{\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X}$

Άρα, η (2.1) είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη ακολουθία.

Έστω, τώρα, ότι το P είναι σχετικά προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Τότε υπάρχει $M \in \mathbb{Z}G\text{Mod}$ και αβελιανή ομάδα X ώστε $P \oplus M \simeq \overset{\sim}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} X$.

Έστω, επίσης,

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} P \rightarrow 0 \quad (2.2)$$

$\mathbb{Z}G$ -ακριβής ακολουθία που είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη.

Τότε, υπάρχει $\mathbb{Z}$ -ομομορφισμός $\rho : P \rightarrow X$ ώστε $\tau \circ \rho = id_P$.

Από τις β.α.α.

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \xrightarrow{\tau} P \rightarrow 0$$

και

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow M \xrightarrow{id_M} M \longrightarrow 0$$

επάγεται η β.α.α.

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \oplus M \xrightarrow{\tau \oplus id_M} P \oplus M \longrightarrow 0 \quad (2.3)$$

Η (2.3) είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη:

Ορίζουμε $\varphi \oplus id_M : P \oplus M \rightarrow B \oplus M$ με $\varphi \oplus id_M = \rho \oplus id_M$. Τότε:

$$\begin{aligned} ((\tau \oplus id_M) \circ (\varphi \oplus id_M))(x, m) &= (\tau \oplus id_M)((\varphi \oplus id_M)(x, m)) = (\tau \oplus id_M)(\varphi(x), id_M(m)) = \\ &= (\tau \oplus id_M)(\varphi(x), m) = (\tau \oplus id_M)(\rho(x), m) = (\tau(\rho(x)), id_M(m)) = ((\tau \circ \rho)(x), id_M(m)) = \\ &= (id_P(x), id_M(m)) = (x, m), \text{ δηλαδή } ((\tau \oplus id_M) \circ (\varphi \oplus id_M))(x, m) = (x, m) \end{aligned}$$

για κάθε $(x, m) \in P \oplus M$

Έτσι $(\tau \oplus id_M) \circ (\varphi \oplus id_M) = id_{P \oplus M}$ και άρα η (2.3) είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη.

Αλλά, $P \oplus M \simeq \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} X$ και η β.α.α. (2.3) γίνεται

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\sigma} B \oplus M \xrightarrow{\tau \oplus id_M} \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} X \longrightarrow 0$$

και λόγω των παραπάνω, είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη. Έτσι, υπάρχει $\tilde{\varphi} : \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} X \rightarrow B \oplus M$

$\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμός με $\tilde{\varphi} = \varphi_1 \oplus \varphi_2$, ώστε $(\tau \oplus id_M) \circ (\phi_1 \oplus \phi_2) = id_{\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} X}$.

Καθώς $\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} X \simeq P \oplus M$, έπεται ότι $(\tau \oplus id_M) \circ (\phi_1 \oplus \phi_2) = id_{P \oplus M}$

και άρα $(\tau \circ \varphi_1) \oplus (id_M \circ \varphi_2) = id_P \oplus id_M$. Συνεπώς, $\tau \circ \varphi_1 = id_P$.

Δηλαδή, υπάρχει $\varphi_1 : P \rightarrow B$ $\mathbb{Z}G$ -ομομορφισμός με $\tau \circ \varphi_1 = id_P$ και έτσι, η β.α.α. (2.2) είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη.

(ii) $\implies$ (i) Θεωρούμε την ακολουθία

$$0 \longrightarrow IG \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

η οποία επάγει τη $\mathbb{Z}G$ -ακριβή, $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη ακολουθία

$$0 \longrightarrow \overset{\smile}{IG} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\smile}{P} \longrightarrow \overset{\smile}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\smile}{P} \longrightarrow \overset{\smile}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\smile}{P} \longrightarrow 0 \quad (2.4)$$

Το $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και άρα $\overset{\smile}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\smile}{P} \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\smile}{P} \simeq P$ και από το Πόρισμα 2.3(i), έχουμε $\overset{\smile}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\smile}{P} \simeq \overset{\smile}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} P|_{\mathbb{Z}}$. Έτσι, η (2.4) γίνεται

$$0 \longrightarrow \overset{\smile}{IG} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\smile}{P} \longrightarrow \overset{\smile}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} P|_{\mathbb{Z}} \longrightarrow P \longrightarrow 0 \quad (2.5)$$

Η (2.5) είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη και άρα, από υπόθεση, είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη.

Συνεπώς, $(\overset{\smile}{IG} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\smile}{P}) \oplus P \simeq \overset{\smile}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} P|_{\mathbb{Z}}$, ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα. Δηλαδή, το P είναι ευθύς προσθετός επαγόμενου $\mathbb{Z}G$ -προτύπου και άρα είναι σχετικά προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. $\square$

3 Οι αβελιανές ομάδες Ext

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε συνοπτικά την προσέγγιση των αβελιανών ομάδων $\text{Ext}_R^n(A, B)$ ως κλάσεις ισοδυναμίας n -επεκτάσεων ενός R -προτύπου A κατά ένα R -πρότυπο B . Η προσέγγιση αυτή έγινε αρχικά από τον R. Baer για τις ομάδες $\text{Ext}_R^1(A, B)$ και στη συνέχεια γενικεύτηκε από τον N. Yoneda. Για τις αποδείξεις των αποτελεσμάτων παραπέμπουμε στα [4] και [5]. Στη συνέχεια, ορίζουμε το γινόμενο Yoneda στο επίπεδο επεκτάσεων και προβολικών επιλύσεων και το cup product. Τέλος, μελετάμε τους φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ των συναρτητών $\text{Ext}_R^1(B, _)$ και $\text{Ext}_R^1(A, _)$ και αποδεικνύουμε ότι κάθε τέτοιος φυσικός μετασχηματισμός επάγεται από έναν ομομορφισμό $\theta : A \rightarrow B$.

3.1 Επεκτάσεις προτύπων

Ορισμός 3.1 Έστω $A, B \in {}_R\text{Mod}$. Μία **επέκταση** α του A κατά B είναι μία β.α.α.

$$\alpha : 0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

για κάποιο $X \in {}_R\text{Mod}$. ■

Συμβολίζουμε με $E_R(A, B)$ το σύνολο των επεκτάσεων του A κατά B . Αν α και β είναι επεκτάσεις του A κατά B με

$$\alpha : 0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

$$\beta : 0 \longrightarrow B \longrightarrow X' \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

θα λέμε ότι οι α και β είναι ισοδύναμες και θα γράφουμε $\alpha \sim \beta$ αν υπάρχει ομομορφισμός $\xi : X \rightarrow X'$ ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \xi \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό.

Σε αυτή την περίπτωση, το 5-Λήμμα [4, I., 3, Lemma 3.1] εξασφαλίζει ότι ξ είναι ομομορφισμός.

Λόγω αυτού, η σχέση $\sim$ είναι συμμετρική, ενώ είναι άμεσο ότι είναι ανακλαστική και μεταβατική. Έτσι, η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας. Θέτουμε $\text{ext}_R(A, B) = E_R(A, B)/\sim$. Αν α είναι μια επέκταση του A κατά B , συμβολίζουμε με $[\alpha]$ την κλάση ισοδυναμίας της α (ως προς τη σχέση $\sim$).

Για κάθε $A, B \in {}_R\text{Mod}$ έχουμε την επέκταση

$$[s_{A,B}] : \quad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{i_B} A \oplus B \xrightarrow{\pi_A} A \longrightarrow 0$$

και έτσι $\text{ext}(A, B) \neq \emptyset$. Ειδικότερα, μια επέκταση $[\alpha] : 0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$ θα λέγεται διασπώμενη αν $\alpha \sim s_{A,B}$, δηλαδή, αν $[\alpha] = [s_{A,B}]$.

Στην περίπτωση αυτή, η $[\alpha]$ είναι R -διασπώμενη β.α.α.

3.2 Το άθροισμα Baer δύο επεκτάσεων

Ορισμός 3.2 Έστω $A, B \in {}_R\text{Mod}$ και

$$[\alpha] : \quad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

$$[\beta] : \quad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{g'} A \longrightarrow 0$$

επεκτάσεις του A κατά B . Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow g & \\ X' & \xrightarrow{g'} & A \end{array}$$

και έστω Q το pullback των g και g' , δηλαδή $Q = \{(x_1, x_2) \in X \oplus X' : g(x_1) = g'(x_2)\}$.

Θεωρούμε το $I = \{(x_1, x_2) \in X \oplus X' : x_1 = f(b) \text{ και } x_2 = -f'(b) \text{ για κάποιο } b \in B\}$ και παρατηρούμε ότι αν $(x_1, x_2) \in I$, έχουμε ότι $x_1 = f(b)$ και $x_2 = -f'(b)$ για κάποιο $b \in B$. Τότε $g(x_1) = g(f(b)) = 0$ και $g'(x_2) = g'(-f'(b)) = -g'(f'(b)) = 0$, λόγω της ακρίβειας των $[\alpha]$ και $[\beta]$. Δηλαδή, $g(x_1) = g'(x_2)$ και άρα $(x_1, x_2) \in Q$. Συνεπώς, $I \leq Q$. Θέτουμε $E = Q/I$ και

θεωρούμε την ακολουθία

$$[\varepsilon] : 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} A \longrightarrow 0$$

όπου $\varphi(b) = (f(b), 0) + I$ και $\psi((x_1, x_2) + I) = g(x_1)$.

Η ψ είναι καλά ορισμένη αφού αν $(x_1, x_2) + I, (y_1, y_2) + I \in E$ με $(x_1, x_2) + I = (y_1, y_2) + I$, είναι $(x_1 - y_1, x_2 - y_2) \in I$. Τότε, υπάρχει $b \in B$ ώστε $x_1 - y_1 = f(b) \implies g(x_1 - y_1) = g(f(b)) = 0$, λόγω της ακρίβειας της $[\alpha]$. Έτσι $g(x_1 - y_1) = 0 \implies g(x_1) = g(y_1)$ και η ψ είναι καλά ορισμένη. Θα αποδείξουμε ότι η $[\varepsilon]$ είναι β.α.α. και άρα ορίζει μία επέκταση του A κατά B .

• $\ker \varphi = 0$: Έστω $b \in \ker \varphi$. Τότε $\varphi(b) = I \implies (f(b), 0) + I = I \implies (f(b), 0) \in I$.

Τότε $-f'(b) = 0$, δηλαδή $b \in \ker f'$. Αλλά f' είναι μονομορφισμός. Έτσι $b = 0$ και άρα $\ker \varphi = 0$.

• $\text{Im } \varphi = \ker \psi$: Έστω $(x_1, x_2) + I \in \text{Im } \varphi$. Τότε υπάρχει $b \in B$ ώστε $\varphi(b) = (x_1, x_2) + I \implies (x_1, x_2) + I = (f(b), 0) + I$. Τότε $\psi((x_1, x_2) + I) = \psi((f(b), 0) + I) = g(f(b)) = 0$, λόγω της ακρίβειας της $[\alpha]$. Έτσι, $\text{Im } \varphi \subseteq \ker \psi$.

Έστω, τώρα, $(x_1, x_2) + I \in \ker \psi$. Έχουμε, τότε, ότι $g(x_1) = g'(x_2)$ και αφού $(x_1, x_2) + I \in \ker \psi$ είναι $\psi((x_1, x_2) + I) = 0 \implies g(x_1) = 0$. Συνεπώς, $g(x_1) = g'(x_2) = 0$. Δηλαδή, $x_1 \in \ker g$ και $x_2 \in \ker g'$. Λόγω ακρίβειας των $[\alpha]$ και $[\beta]$, είναι $\ker g = \text{Im } f$ και $\ker g' = \text{Im } f'$. Έτσι, υπάρχουν $b_1, b_2 \in B$ ώστε $f(b_1) = x_1$ και $f'(b_2) = x_2$. Τότε:

$$\begin{aligned} \varphi(b_1) + \varphi(-b_2) &= ((f(b_1), 0) + I) + ((f(-b_2), 0) + I) = ((f(b_1), 0) + I) + ((-f(b_2), 0) + I) = \\ &= ((f(b_1), 0) + I) + ((0, f(b_2)) + I) = (f(b_1), f(b_2)) + I = (x_1, x_2) + I. \end{aligned}$$

Άρα, $\varphi(b_1) + \varphi(-b_2) = (x_1, x_2) + I \implies \varphi(b_1 - b_2) = (x_1, x_2) + I$ από όπου έπεται ότι

$(x_1, x_2) + I \in \text{Im } \varphi$. Συνεπώς, $\ker \psi \subseteq \text{Im } \varphi$ και άρα $\ker \psi = \text{Im } \varphi$.

• $\text{Im } \psi = A$: Έστω $a \in A$. Από την ακρίβεια της $[\alpha]$, έχουμε ότι $\text{Im } g = A$. Συνεπώς, υπάρχει $x_1 \in X$ ώστε $g(x_1) = a$. Τότε $(x_1, 0) + I \in E$ και $\psi((x_1, 0) + I) = g(x_1) = a$. Έτσι $\text{Im } \psi = A$.

Η επέκταση $[\varepsilon] \in \text{ext}_R(A, B)$ καλείται **άθροισμα Baer** των επεκτάσεων $[\alpha]$ και $[\beta]$ και συμβολίζεται με $[\alpha] + [\beta]$, δηλαδή $[\alpha] + [\beta] := [\varepsilon]$. ■

Αποδεικνύεται ότι το άθροισμα Baer δύο επεκτάσεων $[\alpha]$ και $[\beta]$ είναι καλά ορισμένο (ανεξάρτητο από τους αντιπροσώπους των κλάσεων ισοδυναμίας $[\alpha]$ και $[\beta]$), μεταθετικό και προσεταιριστικό.

Με αυτή την πράξη, το σύνολο $\text{ext}_R(A, B)$ καθίσταται αβελιανή ομάδα. Το ουδέτερο στοιχείο είναι η διασπώμενη επέκταση $[s_{A,B}]$, ενώ αν

$$[\alpha] : 0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

είναι μια επέκταση του A κατά B , το αντίστροφο στοιχείο της $[\alpha]$ ως προς την πράξη $+$, είναι η κλάση ισοδυναμίας της επέκτασης

$$\beta_1 : 0 \longrightarrow B \xrightarrow{-f} X \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

ή της

$$\beta_2 : 0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} X \xrightarrow{-g} A \longrightarrow 0$$

μιας και οι δύο τελευταίες είναι ισοδύναμες. Δηλαδή, είναι $[\alpha] + [\beta_1] = [\alpha] + [\beta_2] = [s_{A,B}]$ και έτσι, θέτουμε $-[\alpha] := [\beta_1] = [\beta_2]$.

3.3 Οι συναρτητές $\text{ext}(_, B)$ και $\text{ext}(A, _)$

Έστω $A, B, B' \in {}_R\text{Mod}$ και $\psi : B \rightarrow B'$ R -ομομορφισμός.

Αν $[\alpha] : 0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$ είναι μια επέκταση του A κατά B , τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μία επέκταση $[\beta']$ του A κατά B' θεωρώντας το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \psi & & & & \\ & & B' & & & & \end{array}$$

Από το Θεώρημα 1.7, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} [\alpha] : & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow A \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow \psi & & \downarrow & \downarrow \\ [\beta'] : & 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & P & \longrightarrow A \longrightarrow 0 \end{array}$$

όπου P είναι το pushout του διαγράμματος

$$\begin{array}{c} B \longrightarrow X \\ \downarrow \psi \\ B' \end{array}$$

Η επέκταση $[\beta']$ θα συμβολίζεται με $[\psi_*(\alpha)]$, δηλαδή $[\psi_*(\alpha)] := [\beta']$.

Έτσι, αν $\psi : B \rightarrow B'$ είναι R -ομομορφισμός, κατασκευάσαμε ομομορφισμό

$$\text{ext}_R(A, \psi) = \psi_* : \text{ext}_R(A, B) \rightarrow \text{ext}_R(A, B').$$

Εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι $\text{ext}_R(A, \varphi \circ \psi) = \text{ext}_R(A, \varphi) \circ \text{ext}_R(A, \psi)$ και ότι

$$\text{ext}_R(A, id_B) = id_{\text{ext}_R(A, B)}.$$

Με αυτό τον τρόπο, ο $\text{ext}_R(A, _): {}_R\text{Mod} \rightarrow \text{Ab}$ καθίσταται

συναλλοιώτος προσθετικός συναρτητής.

Αντίστοιχα, έστω $A, A', B \in {}_R\text{Mod}$ και $\theta : A \rightarrow A'$ R -ομομορφισμός.

Αν $[\alpha'] : 0 \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow A' \rightarrow 0$ είναι μια επέκταση του A' κατά B , τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μία επέκταση $[\beta]$ του A κατά B θεωρώντας το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & A & & \\ & & & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & A' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Από το Θεώρημα 1.8, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} [\beta] : & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & Q & \longrightarrow A \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \varphi \\ [\alpha'] : & 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow A' \longrightarrow 0 \end{array}$$

όπου Q είναι το pullback του διαγράμματος

$$\begin{array}{c} A \\ \downarrow \varphi \\ X \longrightarrow A' \end{array}$$

Η επέκταση $[\beta]$ θα συμβολίζεται με $[\varphi^*(\alpha')]$, δηλαδή $[\varphi^*(\alpha')] := [\beta]$.

Έτσι, αν $\varphi : A \rightarrow A'$ είναι R -ομομορφισμός, κατασκευάσαμε ομομορφισμό

$$\text{ext}_R(\varphi, B) = \varphi^* : \text{ext}_R(A', B) \rightarrow \text{ext}_R(A, B).$$

Εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι $\text{ext}_R(\varphi \circ \psi, B) = \text{ext}_R(\psi, B) \circ \text{ext}(\varphi, B)$ και ότι $\text{ext}_R(\text{id}_A, B) = \text{id}_{\text{ext}_R(A, B)}$. Με αυτό τον τρόπο, ο $\text{ext}_R(—, B) : {}_R\text{Mod} \rightarrow \text{Ab}$ καθίσταται ανταλλοιώτος προσθετικός συναρτητής.

Επιπλέον, έστω

$$[\alpha] : 0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

μια επέκταση του A κατά B .

Αν $f : B \rightarrow B$ R -ομομορφισμός, τότε ορίζεται ένας συνεκτικός ομομορφισμός

$$\delta_B : \text{Hom}_R(B, B) \rightarrow \text{ext}_R(A, B) \text{ με } \delta_B(f) = [f_*(\alpha)].$$

Αποδεικνύεται ότι η $\Phi : \text{ext}_R(A, B) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, B)$ με $\Phi([\alpha]) = \delta_B(\text{id}_B)$ είναι ισομορφισμός αβελιανών ομάδων και ότι αν $\partial_B : \text{Hom}_R(B, B) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, B)$ είναι ο συνεκτικός ομομορφισμός στη μακρά ακριβή $\text{Ext}_R(—, B)$ ακολουθία

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_R(X, B) \longrightarrow \text{Hom}_R(B, B) \xrightarrow{\partial_B} \text{Ext}_R^1(A, B) \longrightarrow \dots$$

τότε $\partial_B(f) = \delta_B(f)$ για κάθε $f \in \text{Hom}_R(B, B)$.

3.4 Ext και n -επεκτάσεις

Τώρα, αν $M, N \in {}_R\text{Mod}$ και $n \in \mathbb{N}^*$, μια n -επέκταση του M κατά N είναι μια ακριβής ακολουθία R -προτύπων

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Συμβολίζουμε με $E_R^n(M, N)$ το σύνολο των n -επεκτάσεων του M κατά N . Αν α και β είναι επεκτάσεις του M κατά N με

$$\alpha : 0 \longrightarrow N \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$\beta: 0 \longrightarrow N \longrightarrow X'_n \longrightarrow X'_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X'_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

θα λέμε ότι οι α και β είναι ισοδύναμες και θα γράφουμε $\alpha \sim \beta$, αν υπάρχουν $f_i: X_i \rightarrow X'_i$ R -ομομορφισμοί για $i = 1, 2, \dots, n$ ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} & & & & \downarrow f_1 & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X'_n & \longrightarrow & X'_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X'_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό. Η σχέση $\sim$ είναι ανακλαστική και μεταβατική αλλά, αν $n > 1$, τότε δεν είναι σχέση ισοδυναμίας (δεν είναι συμμετρική). Μπορούμε, όμως, να θεωρήσουμε τη σχέση ισοδυναμίας που παράγεται από την $\sim$ την οποία - κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού - θα συμβολίζουμε επίσης με $\sim$. Ιδιαίτερως, δύο επεκτάσεις α και β του M κατά N με

$$\alpha: 0 \longrightarrow N \longrightarrow X_n \longrightarrow X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$\beta: 0 \longrightarrow N \longrightarrow X'_n \longrightarrow X'_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X'_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

είναι ισοδύναμες ($\alpha \sim \beta$) αν υπάρχουν R -πρότυπα E_i^j για $i = 1, 2, \dots, n$ και $j = 1, 2, \dots, m$, όπου $m \in \mathbb{N}^*$, και R -ομομορφισμοί ώστε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X_n & \longrightarrow & X_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E_n^1 & \longrightarrow & E_{n-1}^1 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_1^1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \parallel & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \parallel & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & E_n^m & \longrightarrow & E_{n-1}^m & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_1^m & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \updownarrow & & \updownarrow & & & & \updownarrow & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X'_n & \longrightarrow & X'_{n-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & X'_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

να είναι μεταθετικό όπου, σε διαδοχικές σειρές, τα βέλη υποδεικνύουν ότι οι ομομορφισμοί πάνε όλοι προς τα επάνω ή προς τα κάτω.

Θέτουμε $\text{ext}_R^n(M, N) = E_R^n(M, N)/\sim$ και $\text{ext}_R^1(M, N) = \text{ext}_R(M, N)$.

Το άθροισμα Baer ορίζεται με ανάλογο τρόπο και για n -επεκτάσεις και έτσι, για $M, N \in {}_R\text{Mod}$, το $\text{ext}_R^n(M, N)$ καθίσταται αβελιανή ομάδα. Επιπλέον, όπως παραπάνω, ο $\text{ext}_R^n(M, _): {}_R\text{Mod} \rightarrow \text{Ab}$ καθίσταται συναλλοίωτος προσθετικός συναρτητής και ο $\text{ext}_R^n(_, N): {}_R\text{Mod} \rightarrow \text{Ab}$ καθίσταται ανταλλοίωτος προσθετικός συναρτητής.

Αποδεικνύεται ότι $\text{ext}_R^n(M, N) \simeq \text{Ext}_R^n(M, N)$ ως αβελιανές ομάδες για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, αποδεικνύεται ότι οι δισυναρτητές $\text{ext}_R^n(_, _)$ και $\text{Ext}_R^n(_, _)$ είναι φυσικά ισοδύναμοι για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για το υπόλοιπο της εγασίας, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\text{Ext}_R^n(A, B)$ και για τις ομάδες $\text{ext}_R^n(A, B)$ χωρίς ιδιαίτερη επισήμανση.

3.5 Ext και γινόμενα

Έχοντας δείξει την προσέγγιση των ομάδων $\text{Ext}_R^i(M, N)$ ως ομάδες n -επεκτάσεων R -προτύπων, ορίζουμε τα εξής γινόμενα: το γινόμενο Yoneda (ως γινόμενο n -επεκτάσεων και ως γινόμενο στο επίπεδο προβολικών επιλύσεων) και το cup product.

Έστω $K, M, N \in {}_R\text{Mod}$ και $i, j \in \mathbb{N}$. Αν $[\alpha]$ είναι μια i -επέκταση του M κατά K και $[\beta]$ είναι μια j -επέκταση του K κατά N με

$$[\alpha]: 0 \longrightarrow K \longrightarrow A_i \longrightarrow \dots \longrightarrow A_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$[\beta]: 0 \longrightarrow N \longrightarrow B_j \longrightarrow \dots \longrightarrow B_1 \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

μπορούμε να κατασκευάσουμε μια $(i+j)$ -επέκταση του M κατά N “κολλώντας” τις $[\alpha]$ και $[\beta]$ στο K , όπως στο διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & B_j & \longrightarrow & \dots \longrightarrow B_1 & & A_i & \longrightarrow & \dots \longrightarrow A_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \searrow & & \nearrow & & & & & & \\ & & & & & & & K & & & & & & & \\ & & & & & & \nearrow & & \searrow & & & & & & \\ & & & & & & 0 & & & & & & & & 0 \end{array}$$

δηλαδή, κατασκευάζεται η $(i+j)$ -επέκταση του M κατά N

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow B_j \longrightarrow \dots \longrightarrow B_1 \longrightarrow A_i \longrightarrow \dots \longrightarrow A_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Συνεπώς, αν $i > 0$ και $j > 0$ έχουμε ορίσει ένα γινόμενο

$$- \circ - : \text{Ext}_R^i(M, K) \times \text{Ext}_R^j(K, N) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+j}(M, N).$$

Αν $i = 0$, τότε $\text{Ext}_R^i(M, K) = \text{Ext}_R^0(M, K) = \text{Hom}_R(M, K)$. Έτσι, αν $f : M \rightarrow K$, έχουμε

$$[\beta] : \quad 0 \longrightarrow N \longrightarrow B_j \longrightarrow \dots \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_1 \longrightarrow \begin{array}{c} M \\ \downarrow f \\ K \end{array} \longrightarrow 0$$

και ορίζουμε το γινόμενο $f \circ [\beta] \in \text{Ext}_R^j(M, N)$ να είναι η επέκταση

$$[f^*(\beta)] : 0 \longrightarrow N \longrightarrow B_j \longrightarrow \dots \longrightarrow B_2 \longrightarrow Q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου Q είναι το pullback του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} & M & \\ & \downarrow f & \\ B_1 & \longrightarrow & K \end{array}$$

την ύπαρξη της οποίας μας εξασφαλίζει το Πρόγραμμα 1.9(ii).

Αντίστοιχα, αν $j = 0$, τότε $\text{Ext}_R^j(K, N) = \text{Ext}_R^0(K, N) = \text{Hom}_R(K, N)$. Έτσι, αν $g : K \rightarrow N$, έχουμε

$$[\alpha] : \quad 0 \longrightarrow K \longrightarrow A_i \longrightarrow A_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow A_1 \longrightarrow \begin{array}{c} M \\ \downarrow g \\ N \end{array} \longrightarrow 0$$

και ορίζουμε το γινόμενο $[g] \circ [\alpha]$ να είναι η επέκταση

$$[g_*(\alpha)] : 0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow A_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow A_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

όπου P είναι το pushout του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & A_i \\ \downarrow g & & \\ N & & \end{array}$$

την ύπαρξη της οποίας μας εξασφαλίζει το Πόρισμα 1.9(i).

Τέλος, αν $i = j = 0$, τότε $\text{Ext}_R^i(M, K) = \text{Ext}_R^0(M, K) = \text{Hom}_R(M, K)$ και

$\text{Ext}_R^j(K, N) = \text{Ext}_R^0(K, N) = \text{Hom}_R(K, N)$. Έτσι, αν $f \in \text{Hom}_R(M, K)$ και $g \in \text{Hom}_R(K, N)$, ορίζουμε το γινόμενο $f \circ g \in \text{Hom}_R(M, N)$ να είναι η συνήθης σύνθεση $g \circ f$.

Συνεπώς, έχουμε ορίσει ένα γινόμενο $— \circ — : \text{Ext}_R^i(M, K) \times \text{Ext}_R^j(K, N) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+j}(M, N)$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}$. Το γινόμενο αυτό καλείται γινόμενο Yoneda. Αποδεικνύεται ότι το γινόμενο Yoneda είναι καλά ορισμένο (ανεξάρτητο των αντιπροσώπων των κλάσεων των επεκτάσεων) και προσεταιριστικό.

Έστω, τώρα

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & F_i & \xrightarrow{\partial_i} & F_{i-1} & \xrightarrow{\partial_{i-1}} & \dots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \searrow a_i & & \nearrow b_i & & & & & & & & & & \\ & & & & & & R_i & & & & & & & & & & \end{array}$$

R -προβολική επίλυση του M , όπου $R_i = \text{Im } \partial_i = \ker \partial_{i-1}$ και $b_i \circ a_i = \partial_i$, όπου θέτουμε $R_0 = M$ και $\partial_0 = \varepsilon$. Κάθε στοιχείο $[f] \in \text{Ext}_R^i(M, K)$ αντιστοιχεί σε έναν ομομορφισμό $\hat{f} : R_i \rightarrow K$.

Πράγματι, καθώς $\text{Ext}_R^i(M, K) = \ker \partial_{i+1}^* / \text{Im } \partial_i^*$, έχουμε ότι $f \in \ker \partial_{i+1}^*$ και έτσι $f : F_i \rightarrow K$ και $\partial_{i+1}^*(f) = 0 \iff f \circ \partial_{i+1} = 0$. Ορίζεται, τότε, ομομορφισμός $\hat{f} : R_i \rightarrow K$ ως εξής:

Έστω $x \in R_i$. Τότε, υπάρχει $y \in F_i$ ώστε $a_i(y) = x$. Θέτουμε $\hat{f}(x) = f(y)$. Ο $\hat{f}$ είναι καλά ορισμένος αφού αν $y_1, y_2 \in F_i$ ώστε $a_i(y_1) = a_i(y_2)$, έχουμε $a_i(y_1 - y_2) = 0 \implies b_i(a_i(y_1 - y_2)) = 0$, δηλαδή $\partial_i(y_1 - y_2) = 0$. Έτσι, $y_1 - y_2 \in \ker \partial_i = \text{Im } \partial_{i+1}$. Τότε, υπάρχει $z \in F_{i+1}$ ώστε $\partial_{i+1}(z) = y_1 - y_2$. Συνεπώς, $f(\partial_{i+1}(z)) = f(y_1 - y_2) \implies f(y_1) - f(y_2) = 0 \implies f(y_1) = f(y_2)$.

Επιπλέον, κάθε ομομορφισμός $\hat{f} : R_i \rightarrow K$, αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο $[f] \in \text{Ext}_R^i(M, K)$.

Πράγματι ορίζουμε $f : F_i \rightarrow K$ με $f = \hat{f} \circ a_i$.

Είναι $\partial_{i+1}^*(f) = f \circ \partial_{i+1} = \hat{f} \circ a_i \circ \partial_{i+1} = 0$, αφού $a_i \circ \partial_{i+1} = 0$.

Έτσι, $f \in \ker \partial_{i+1}^*$ και άρα $[f] \in \text{Ext}_R^i(M, K)$.

Ακόμα, κάθε στοιχείο $[f] \in \text{Ext}_R^i(M, K)$ αντιστοιχεί σε έναν αλυσωτό ομομορφισμό

$\bar{f} = \{f_k : F_{i+k} \rightarrow P_k\}_{k=0}^\infty$ βαθμού $-i$, όπου

$$\dots \rightarrow F_{n+1} \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

R -προβολική επίλυση του M και

$$\dots \rightarrow P_{n+1} \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow K \rightarrow 0$$

R -προβολική επίλυση του K .

Πράγματι, αν $[f] \in \text{Ext}_R^i(M, K)$, τότε το $[f]$ αντιστοιχεί σε έναν ομομορφισμό $\hat{f} : R_i \rightarrow K$. Ο $\hat{f}$ επεκτείνεται, από το Θεώρημα Σύγκρισης [4, III., 6, Theorem 6.1], σε αλυσωτό ομομορφισμό $\bar{f} = \{f_k : F_{i+k} \rightarrow P_k\}_{k=0}^\infty$ βαθμού $-i$. Τέλος, αν $\bar{f} = \{f_k : F_{i+k} \rightarrow P_k\}_{k=0}^\infty$ αλυσωτός ομομορφισμός βαθμού $-i$, τότε αυτός αντιστοιχεί στον ομομορφισμό $\hat{f} : R_i \rightarrow K$ από τον οποίο και καθορίζεται πλήρως αφού, από το Θεώρημα Σύγκρισης, κάθε δύο αλυσωτοί ομομορφισμοί που επεκτείνουν τον $\hat{f}$ είναι ομοτοπικά ισοδύναμοι.

Υπό αυτή την οπτική, έστω $[f] \in \text{Ext}_R^i(M, K)$, $[g] \in \text{Ext}_R^j(K, N)$ και

$$\dots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

$$\dots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow K \rightarrow 0$$

$$\dots \rightarrow Q_n \rightarrow Q_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_0 \rightarrow N \rightarrow 0$$

R -προβολικές επιλύσεις των M, K και N , αντίστοιχα.

Αφού $[f] \in \text{Ext}_R^i(M, K)$, έχουμε έναν αλυσωτό ομομορφισμό $\bar{f} = \{f_k : F_{i+k} \rightarrow P_k\}_{k=0}^\infty$ βαθμού $-i$ που αντιστοιχεί στο $[f]$ και παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_{i+j+k} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_{i+k} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_{i+1} & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f_{j+k} & & & & \downarrow f_k & & & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & & & & & & & & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & P_{j+k} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Καθώς $[g] \in \text{Ext}_R^j(K, N)$, έχουμε έναν αλυσωτό ομομορφισμό $\bar{g} = \{g_k : P_{j+k} \rightarrow Q_k\}_{k=0}^\infty$ βαθμού $-j$ που αντιστοιχεί στο $[g]$ και παίρνουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & P_{j+k} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{j+1} & \longrightarrow & P_j & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow g_k & & & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & & & & & & & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & Q_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω διαγράμματα, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_{i+j+k} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_{i+j+1} & \longrightarrow & F_{i+j} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow f_{j+k} & & & & \downarrow f_{j+1} & & \downarrow f_j & & & & \downarrow f_0 & & & & & & & & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & P_{j+k} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_{j+1} & \longrightarrow & P_j & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow g_k & & & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_0 & & & & & & & & & & & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & Q_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Ορίζουμε, έτσι, τον αλυσωτό ομομορφισμό $\overline{g \circ f} := \bar{g} \circ \bar{f} = \{g_k \circ f_{j+k} : F_{i+j+k} \rightarrow Q_k\}_{k=0}^\infty$ βαθμού $-(i+j)$ και έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & F_{i+j+k} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_{i+j+1} & \longrightarrow & F_{i+j} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow g_k \circ f_{j+k} & & & & \downarrow g_1 \circ f_{j+1} & & \downarrow g_0 \circ f_j & & & & & & & & & & \\
\cdots & \longrightarrow & Q_k & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Ο αλυσωτός ομομορφισμός $\overline{g \circ f}$ αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του $\text{Ext}_R^{i+j}(M, N)$.

Έτσι, κατασκευάζεται ένα γινόμενο $-\bullet- : \text{Ext}_R^i(M, K) \times \text{Ext}_R^j(K, N) \rightarrow \text{Ext}_R^{i+j}(M, N)$. Αποδεικνύεται ότι το γινόμενο $-\bullet-$ είναι καλά ορισμένο (ανεξάρτητο των προβολικών επιλύσεων των M, K και N) και προσεταιριστικό.

Τώρα, ορίζουμε ένα ακόμα γινόμενο ως εξής:

Έστω Λ μια Hopf άλγεβρα υπεράνω ενός δακτυλίου R ώστε Λ να είναι προβολικό R -πρότυπο.

Έστω, επίσης, $M, N, K, L \in {}_{\Lambda}\text{Mod}$ ώστε $M|_R, N|_R, K|_R$ και $L|_R$ να είναι προβολικά R -πρότυπα.

Έστω

$$\mathbf{P} : \quad \dots \longrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

$$\mathbf{Q} : \quad \dots \longrightarrow Q_n \xrightarrow{\partial'_n} Q_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} \dots \longrightarrow Q_1 \xrightarrow{\partial'_1} Q_0 \xrightarrow{\varepsilon'} N \longrightarrow 0$$

Λ -προβολικές επιλύσεις των M και N , αντίστοιχα.

Ορίζουμε το τανυστικό γινόμενο των $\mathbf{P}$ και $\mathbf{Q}$ να είναι το αλυσωτό σύμπλεγμα

$$(\mathbf{P} \otimes_R \mathbf{Q}, \mathbf{d}) = \{(\mathbf{P} \otimes_R \mathbf{Q})_n, d_n\}_{n=0}^{\infty} \text{ όπου}$$

$$(\mathbf{P} \otimes_R \mathbf{Q})_n = \bigoplus_{k+l=n} (P_k \otimes_R Q_l) \text{ και } d_n(x_k \otimes y_l) = \partial_k(x_k) \otimes y_l + (-1)^k x_k \otimes \partial'_l(y_l) \text{ για κάθε } x_k \in P_k, y_l \in Q_l$$

Το Θεώρημα Künneth [6, Chapter 2, Theorem 2.7.1] εξασφαλίζει ότι το $\mathbf{P} \otimes_R \mathbf{Q}$ αποτελεί Λ -προβολική επίλυση του $\tilde{P} \otimes_R \tilde{Q}$. Αν $[f] \in \text{Ext}_{\Lambda}^i(M, K)$ και $[g] \in \text{Ext}_{\Lambda}^j(N, L)$, τότε υπάρχουν ομομορφισμοί $f : P_i \rightarrow K$ και $g : Q_j \rightarrow L$ που αντιστοιχούν στα $[f]$ και $[g]$. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε τον ομομορφισμό

$$f \otimes g : P_i \otimes_R Q_j \rightarrow K \otimes_R L. \text{ Ο } f \otimes g \text{ επεκτείνεται σε ομομορφισμό } f \otimes g : (\mathbf{P} \otimes_R \mathbf{Q})_{i+j} \rightarrow K \otimes_R L$$

θέτοντας $(f \otimes g)\left(\sum_{k+l=i+j} p_k \otimes q_l\right) = 0$ για $k \neq i$ ή $l \neq j$. Αν

$$\dots \longrightarrow E_n \longrightarrow E_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_0 \longrightarrow K \otimes_{\mathbb{Z}} L \longrightarrow 0$$

είναι μια Λ -προβολική επίλυση του $K \otimes_R L$, τότε ο $f \otimes g$ επεκτείνεται σε αλυσωτό ομομορφισμό $\overline{f \otimes g} = \{(f \otimes g)_r : (\mathbf{P} \otimes_R \mathbf{Q})_{i+j+r} \rightarrow E_r\}_{r=0}^{\infty}$ βαθμού $-(i+j)$ και έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & (\mathbf{P} \otimes_R \mathbf{Q})_{i+j+r} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (\mathbf{P} \otimes_R \mathbf{Q})_{i+j} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & (\mathbf{P} \otimes_R \mathbf{Q})_1 & \longrightarrow & (\mathbf{P} \otimes_R \mathbf{Q})_0 & \longrightarrow & M \otimes_R N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow (f \otimes g)_r & & & & \downarrow (f \otimes g)_0 & & & & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & E_r & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_0 & \longrightarrow & K \otimes_R L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Συνεπώς, ορίζεται έτσι ένα στοιχείο $\text{Ext}_\Lambda^{i+j}(M \otimes_R N, K \otimes_R L)$ το οποίο συμβολίζεται με $f \cup g$.

Έχουμε ορίσει, λοιπόν, ένα γινόμενο $-\cup- : \text{Ext}_\Lambda^i(M, K) \times \text{Ext}_\Lambda^j(N, L) \rightarrow \text{Ext}_\Lambda^{i+j}(M \otimes_R N, K \otimes_R L)$.

Το γινόμενο αυτό καλείται cup product.

Ειδικότερα, αν $\Lambda = \mathbb{Z}G$, $R = \mathbb{Z}$ και $M = N = \mathbb{Z}$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε μια $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο

$$\mathbf{P} : \quad \dots \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Αφού $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ μέσω του $\Delta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ με $\Delta(x) = x \otimes x$, έπεται ότι το $\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P}$ είναι $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$. Έτσι, μπορούμε να επεκτείνουμε τον Δ σε αλυσωτό ομομορφισμό $\bar{\Delta} = \{\Delta_n : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P}\}_{n=0}^\infty$ βαθμού 0 και έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \Delta_n & & \downarrow \Delta_{n-1} & & \downarrow \Delta_0 & \downarrow \Delta \\ \dots & \longrightarrow & (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_n & \longrightarrow & (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_{n-1} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Αν $[f] \in H^i(G, K)$ και $[g] \in H^j(G, L)$, τότε, όπως παραπάνω, κατασκευάζεται αλυσωτός ομομορφισμός $\overline{f \otimes g} = \{(f \otimes g)_r : (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_{i+j+r} \rightarrow E_r\}_{r=0}^\infty$ βαθμού $-(i+j)$ και ένα μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_{i+j+r} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_{i+j} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_1 \longrightarrow (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (f \otimes g)_r & & \downarrow (f \otimes g)_0 & & \\ \dots & \longrightarrow & E_r & \longrightarrow & \dots \longrightarrow E_0 & \longrightarrow & K \otimes_{\mathbb{Z}} L \longrightarrow 0 \end{array}$$

Συνδυάζοντας τα δύο αυτά διαγράμματα, έχουμε το

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & P_{i+j+r} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow P_{i+j} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \Delta_r & & \downarrow \Delta_{i+j} & & \downarrow \Delta_0 & \downarrow \Delta \\ \dots & \longrightarrow & (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_{i+j+r} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_{i+j} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow (\mathbf{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{P})_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (f \otimes g)_r & & \downarrow (f \otimes g)_0 & & \\ \dots & \longrightarrow & E_r & \longrightarrow & \dots \longrightarrow E_0 & \longrightarrow & K \otimes_{\mathbb{Z}} L \longrightarrow 0 \end{array}$$

δηλαδή, κατασκευάζεται ένας αλυσωτός ομομορφισμός $\overline{\Delta \circ (f \otimes g)} = \{P_{i+j+r} \rightarrow E_r\}_{r=0}^\infty$ βαθμού

$-(i+j)$, άρα και ένα στοιχείο $[\Delta \circ (f \otimes g)] \in H^{i+j}(G, K \otimes_{\mathbb{Z}} L)$, το οποίο επίσης συμβολίζεται επίσης με $f \cup g$ και καλείται cup product των f και g .

Αποδεικνύεται ότι το cup product είναι καλά ορισμένο (ανεξάρτητο των προβολικών επιλύσεων των M και N) και προσεταιριστικό.

Το γινόμενο n -επεκτάσεων $— \circ —$ και το γινόμενο $— \bullet —$ που ορίστηκε στο επίπεδο των αλυσωτών ομομορφισμών συμπίπτουν υπό την έννοια ότι αν $\text{ext}_R^n(M, N) \xrightarrow{\Phi} \text{Ext}_R^n(M, N)$, $[\alpha] \in \text{ext}_R^n(M, K)$ και $[\beta] \in \text{ext}_R^n(K, N)$, τότε $\Phi([\alpha] \circ [\beta]) = \Phi([\alpha]) \bullet \Phi([\beta])$. Έτσι, θα καλούμε και τα δύο αυτά γινόμενα ως γινόμενο Yoneda, χωρίς διάκριση. Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι και το cup product, όταν ορίζεται, συμπίπτει με το γινόμενο Yoneda σύμφωνα με το ακόλουθο Θεώρημα που παραθέτουμε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.1 [6, Chapter 3, Proposition 3.2.1] Έστω Λ μια Hopf άλγεβρα υπεράνω ενός δακτυλίου R και

$M, N, K, L \in {}_{\Lambda}\text{Mod}$. Αν $[\eta] \in \text{Ext}_{\Lambda}^i(M, K)$ και $[\zeta] \in \text{Ext}_{\Lambda}^j(N, L)$ τότε το cup product $\eta \cup \zeta \in \text{Ext}_{\Lambda}^{i+j}(M \otimes_R N, K \otimes_R L)$ είναι ίσο με το γινόμενο Yoneda των $\eta \otimes id_L \in \text{Ext}_{\Lambda}^i(M \otimes_R L, K \otimes_R L)$ και $id_M \otimes \zeta \in \text{Ext}_{\Lambda}^j(M \otimes_R N, M \otimes_R L)$, δηλαδή $\eta \cup \zeta = [\eta \otimes id_L] \circ [id_M \otimes \zeta]$.

Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, στη συνέχεια θα γράφουμε $— \cup —$ και για τα τρία γινόμενα που ορίσαμε παραπάνω.

3.6 Φυσικές ισοδυναμίες μεταξύ Ext^1

Στη συνέχεια, μελετάμε φυσικούς μετασχηματισμούς μεταξύ Ext^1 συναρτητών. Αποδεικνύουμε ότι ένας τέτοιος φυσικός μετασχηματισμός επάγεται από έναν ομομορφισμό και δίνουμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένας φυσικός μετασχηματισμός να είναι φυσικός μονομορφισμός και φυσικός επιμορφισμός. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στην παράγραφο αυτή είναι βασισμένα στο [1].

Λήμμα 3.2 Έστω

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\lambda} P \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0 \quad (3.1)$$

β.α.α. R -προτύπων.

Αν ∂_B και ∂_M είναι οι συνεκτικοί ομομορφισμοί στις μακρές ακριβείς $\text{Ext}_R(B, -)$ και $\text{Ext}_R(-, M)$ ακολουθίες

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_R(B, B) \xrightarrow{\partial_B} \text{Ext}_R^1(B, M) \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_R(M, M) \xrightarrow{\partial_M} \text{Ext}_R^1(B, M) \longrightarrow \dots$$

αντίστοιχα, τότε $\partial_B(id_B) + \partial_M(id_M) = 0$.

Απόδειξη.

Έστω $[\varepsilon_1]$ και $[\varepsilon_2]$ επεκτάσεις του B κατά M ώστε $[\varepsilon_1] = \Phi^{-1}(\partial_B(id_B))$ και $[\varepsilon_2] = \Phi^{-1}(\partial_M(id_M))$, όπου Φ είναι ο ισομορφισμός $\text{ext}_R(B, M) \xrightarrow{\Phi} \text{Ext}_R^1(B, M)$.

Σύμφωνα με τα όσα αναπτύξαμε στην παράγραφο 3.3, έχουμε ότι $[\varepsilon_1]$ είναι η κλάση ισοδυναμίας της επέκτασης

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\chi_1} E_1 \xrightarrow{p_1} B \longrightarrow 0$$

όπου E_1 είναι το pullback του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow id_B & \\ P & \xrightarrow{\mu} & B \end{array}$$

Η επέκταση

$$[\varepsilon_1] : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\chi_1} E_1 \xrightarrow{p_1} B \longrightarrow 0$$

είναι ισοδύναμη με την (3.1), αφού από Θεώρημα 1.8 έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\chi_1} & E_1 & \xrightarrow{p_1} & B \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_M & & \downarrow \beta & & \downarrow id_B \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\lambda} & P & \xrightarrow{\mu} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Από την άλλη μεριά, έχουμε ότι η $[\varepsilon_2]$ είναι η κλάση ισοδυναμίας της επέκτασης

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{\chi_2} B \longrightarrow 0$$

όπου E_2 είναι το pushout του διαγράμματος

$$\begin{array}{c} M \xrightarrow{\lambda} P \\ \downarrow id_M \\ M \end{array}$$

Έτσι

$$[\varepsilon_2] : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{\chi_2} B \longrightarrow 0$$

όπου $E_2 = P \oplus M / I$ με $I = \{(x, m) \in P \oplus M : x = \lambda(m_0) \text{ και } m = -m_0 \text{ για κάποιο } m_0 \in M\}$, δηλαδή $I = \{(-\lambda(m), m) \in P \oplus M : m \in M\}$, $i_2(m) = (0, m) + I$ και $\chi_2((x, m) + I) = \mu(x)$.

Θα δείξουμε ότι η $[\varepsilon_2]$ είναι ισοδύναμη με την επέκταση

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{-\lambda} P \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0$$

Πράγματι, ορίζουμε $\gamma : E_2 \rightarrow P$ με $\gamma((x, m) + I) = x - \lambda(m)$. Η γ είναι καλά ορισμένη.

Αν $(x_1, m_1) + I = (x_2, m_2) + I \implies (x_1 - x_2, m_1 - m_2) \in I$. Τότε $x_1 - x_2 = -\lambda(m_1 - m_2) \implies x_1 - x_2 = -\lambda(m_1) + \lambda(m_2) \implies x_1 + \lambda(m_1) = x_2 + \lambda(m_2) \implies \gamma((x_1, m_1) + I) = \gamma((x_2, m_2) + I)$ και η γ είναι καλά ορισμένη.

Τότε:

$$\begin{aligned} (\gamma \circ i_2)(m) &= \gamma(i_2(m)) = \gamma(0, m) = 0 - \lambda(m) = -\lambda(m) \text{ και } ((-\lambda) \circ id_M)(m) = (-\lambda)(id_M(m)) = \\ &= (-\lambda)(m) = -\lambda(m), \text{ δηλαδή } \gamma \circ i_2 = (-\lambda) \circ id_M. \text{ Επίσης:} \\ (id_B \circ \chi_2)((x, m) + I) &= id_B(\chi_2((x, m) + I)) = id_B(\mu(x)) = \mu(x) \text{ και } (\mu \circ \gamma)((x, m) + I) = \\ &= \mu(\gamma((x, m) + I)) = \mu(x - \lambda(m)) = \mu(x) - \mu(\lambda(m)) = \mu(x), \text{ λόγω της ακρίβειας της ακολουθίας} \end{aligned}$$

(3.1). Έτσι, $id_B \circ \chi_2 = \mu \circ \gamma$ και άρα το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{\chi_2} & B \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_M & & \downarrow \gamma & & \downarrow id_B \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{-\lambda} & P & \xrightarrow{\mu} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

είναι μεταθετικό. Συνεπώς, η $[\varepsilon_2]$ είναι ισοδύναμη με την επέκταση $0 \longrightarrow M \xrightarrow{-\lambda} P \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0$

Βάσει των όσων αναφέραμε για το άθροισμα Baer δύο επεκτάσεων, έχουμε ότι $[\varepsilon_1] + [\varepsilon_2] = [s_{A,B}]$ ή, ισοδύναμα, $\partial_B(id_B) + \partial_M(id_M) = 0$. $\square$

Θεώρημα 3.3 [1, Theorem 1.3] Έστω $A, B \in {}_R\text{Mod}$ και $[\text{Ext}_R^1(B, -), \text{Ext}_R^1(A, -)]$ το σύνολο των φυσικών μετασχηματισμών $\tau : \text{Ext}_R^1(B, -) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, -)$.

Τότε, υπάρχει ένας επιμορφισμός $\Psi : \text{Hom}_R(A, B) \rightarrow [\text{Ext}_R^1(B, -), \text{Ext}_R^1(A, -)]$.

Ιδιαίτέρως, αν $\tau : \text{Ext}_R^1(B, -), \text{Ext}_R^1(A, -)$ είναι φυσικός μετασχηματισμός, τότε υπάρχει ομομορφισμός $\eta \in \text{Hom}_R(A, B)$ ώστε $\tau = \eta^*$.

Απόδειξη.

Έστω P προβολικό R -πρότυπο ώστε $P \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0$ ακριβής ακολουθία. Θέτουμε $M = \ker \mu$ και έχουμε τη β.α.α. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\lambda} P \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0$. Έστω $\tau : \text{Ext}_R^1(B, -) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, -)$ φυσικός μετασχηματισμός. Έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Hom}_R(B, B) & \xrightarrow{\partial_B} & \text{Ext}_R^1(B, M) & \xrightarrow{\lambda_*} & \text{Ext}_R^1(B, P) & & \\ & & \downarrow \tau_M & & \downarrow \tau_P & & \\ \text{Hom}_R(A, P) & \longrightarrow & \text{Hom}_R(A, B) & \xrightarrow{\partial_A} & \text{Ext}_R^1(A, M) & \xrightarrow{\lambda_*} & \text{Ext}_R^1(A, P) \end{array} \quad (3.2)$$

Έστω $b = \partial_B(id_B) \in \text{Ext}_R^1(B, M)$.

Αν $x \in \text{Ext}_R^1(B, X)$, τότε $x = \xi_*(b)$ για κάποιο $\xi \in \text{Hom}_R(M, X)$.

Πράγματι, από τη β.α.α. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\lambda} P \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0$, έχουμε τη μακρά ακριβή ακολουθία

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_R(P, X) \xrightarrow{\lambda^*} \text{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{\partial_X} \text{Ext}_R^1(B, X) \xrightarrow{\mu^*} \text{Ext}_R^1(P, X) \longrightarrow \dots$$

Αλλά P είναι προβολικό R -πρότυπο και άρα $\text{Ext}_R^1(P, X) = 0$.

Συνεπώς, $\partial_X : \text{Hom}_R(M, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(B, X)$ είναι επιμορφισμός. Θέτοντας $X = M$, έχουμε, από το Λήμμα 3.2, ότι $\partial_B(id_B) + \partial_M(id_M) = 0 \implies \partial_M(id_M) = -\partial_B(id_B) = -b$.

Αφού $x \in \text{Ext}_R^1(B, X)$, υπάρχει $\theta \in \text{Hom}_R(M, X)$ ώστε $\partial_X(\theta) = x$.

Από το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(M, M) & \xrightarrow{\partial_M} & \text{Ext}_R^1(B, M) \\ \downarrow \theta_* & & \downarrow \theta_* \\ \text{Hom}_R(M, X) & \xrightarrow{\partial_X} & \text{Ext}_R^1(B, X) \end{array}$$

έχουμε $x = \partial_X(\theta) = \partial_X(\theta \circ id_M) = \partial_X(\theta_*(id_M)) = \theta_*(\partial_M(id_M))$.

Έτσι, $x = \theta_*(\partial_M(id_M)) = \theta_*(-b) = -\theta_*(b) = (-\theta)_*(b)$ και άρα, αν $\xi = -\theta$, έχουμε $x = \xi_*(b)$.

Από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος (3.2), έχουμε $(\lambda_* \circ \tau_M)(b) = (\tau_P \circ \lambda_*)(b)$ και

$\lambda_*(b) = \lambda_*(\partial_B(id_B)) = (\lambda_* \circ \partial_B)(id_B) = 0$, λόγω της ακρίβειας της πάνω σειράς του (3.2).

Συνεπώς, $(\tau_P \circ \lambda_*)(b) = \tau_P(\lambda_*(b)) = \tau_P(0) = 0 \implies (\lambda_* \circ \tau_M)(b) = 0 \implies \lambda_*(\tau_M(b)) = 0$.

Άρα, $\tau_M(b) \in \ker \lambda_* = \text{Im } \partial_A$ και έτσι υπάρχει $\eta \in \text{Hom}_R(A, B)$ ώστε $\partial_A(\eta) = \tau_M(b)$.

Επιπλέον, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_R^1(B, M) & \xrightarrow{\xi_*} & \text{Ext}_R^1(B, X) \\ \downarrow \tau_M & & \downarrow \tau_X \\ \text{Ext}_R^1(A, M) & \xrightarrow{\xi_*} & \text{Ext}_R^1(A, X) \end{array}$$

έχουμε $\tau_X \circ \xi_* = \xi_* \circ \tau_M$.

Άρα $\tau_X(x) = \tau_X(\xi_*(b)) = (\tau_X \circ \xi_*)(b) = (\xi_* \circ \tau_M)(b) = \xi_*(\tau_M(b)) \implies \tau_X(x) = \xi_*(\tau_M(b))$.

Τέλος, από τη μεταθετικότητα του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(B, B) & \xrightarrow{\partial_B} & \text{Ext}_R^1(B, M) \\ \downarrow \eta^* & & \downarrow \eta^* \\ \text{Hom}_R(A, B) & \xrightarrow{\partial_A} & \text{Ext}_R^1(A, M) \end{array}$$

έχουμε $\partial_A \circ \eta^* = \eta^* \circ \partial_B$.

Άρα $\tau_M(b) = \partial_A(\eta) = \partial_A(id_B \circ \eta) = \partial_A(\eta^*(id_B)) = (\partial_A \circ \eta^*)(id_B) = (\eta^* \circ \partial_B)(id_B) =$

$$= \eta^*(\partial_B(id_B)) = \eta^*(b).$$

$$\begin{aligned} \text{Συνεπώς, } \tau_X(x) &= \tau_X(\xi_*(b)) = (\tau_X \circ \xi_*)(b) = (\xi_* \circ \tau_M)(b) = \xi_*(\tau_M(b)) = \xi_*(\eta^*(b)) = \\ &= \xi \circ (b \circ \eta) = (\xi \circ b) \circ \eta = x \circ \eta = \eta^*(x) \implies \tau_X(x) = \eta^*(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή, $\tau_X(x) = \eta^*(x)$ για κάθε $x \in \text{Ext}_R^1(B, X)$ και άρα $\tau_X = \eta^*$. □

Σχόλιο 3.4 Από την απόδειξη του Θεωρήματος έπεται ότι $\Psi(\eta)$ είναι ο φυσικός μετασχηματισμός $f \mapsto f \circ \eta$, δηλαδή ο μετασχηματισμός που επάγεται από το γινόμενο Yoneda $-\cup \eta : \text{Ext}_R^1(B, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, X)$.

Το Θεώρημα 3.3 εξασφαλίζει ότι κάθε φυσικός μετασχηματισμός $\tau : \text{Ext}_R^1(B, -) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, -)$ επάγεται από έναν ομομορφισμό $\eta : A \rightarrow B$. Συνεπώς, στη συνέχεια, περιοριζόμαστε σε φυσικούς μετασχηματισμούς της μορφής $\eta^* : \text{Ext}_R^1(B, -) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, -)$ για κάποιον ομομορφισμό $\eta \in \text{Hom}_R(A, B)$.

Πρόταση 3.5 [1, Theorem 2.4] Έστω $A, B \in {}_R\text{Mod}$ και $\theta : A \rightarrow B$ R -ομομορφισμός.

Τότε, η φυσική απεικόνιση $\theta^* : \text{Ext}_R^1(B, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, X)$ είναι μονομορφισμός για κάθε $X \in {}_R\text{Mod}$ αν και μόνο αν υπάρχουν $E, P \in {}_R\text{Mod}$ με P προβολικό R -πρότυπο, μία ακριβής ακολουθία $P \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow 0$ και μία διασπώμενη β.α.α. $0 \rightarrow E \xrightarrow{\iota} A \oplus P \xrightarrow{\langle \theta, \varphi \rangle} B \rightarrow 0$ (ώστε το B είναι ευθύς προσθετός του $A \oplus P$).

Απόδειξη.

Έστω P ένα ελεύθερο R -πρότυπο με $P \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow 0$ ακριβής ακολουθία.

Ορίζουμε τον ομομορφισμό $h : A \oplus P \rightarrow B$ με $h(a, x) = \langle \theta, \varphi \rangle(a, x) = \theta(a) + \varphi(x)$.

Αν $b \in B$, τότε υπάρχει $x \in P$ ώστε $\varphi(x) = b$.

Τότε $h(0, x) = \theta(0) + \varphi(x) = 0 + b = b$, δηλαδή, $h(0, x) = b$.

Συνεπώς, η h είναι επιμορφισμός.

Επίσης, αν $i_A : A \rightarrow A \oplus P$ με $i_A(a) = (a, 0)$ είναι η φυσική εμφύτευση, τότε

$$(h \circ i_A)(a) = h(i_A(a)) = h(a, 0) = \theta(a) + \varphi(0) = \theta(a) + 0 = \theta(a), \text{ δηλαδή, } (h \circ i_A)(a) = \theta(a) \text{ για}$$

κάθε $a \in A$. Έτσι, $h \circ i_A = \theta$ και άρα $(h \circ i_A)^* = \theta^*$ ή, ισοδύναμα, $\theta^* = i_A^* \circ h^*$

Ο i_A^* είναι ισομορφισμός.

Πράγματι έστω $\pi_P : A \oplus P \rightarrow P$ με $\pi_P(a, x) = x$ η φυσική προβολή στο P .

Θεωρούμε τη β.α.α.:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i_A} A \oplus P \xrightarrow{\pi_P} P \longrightarrow 0 \quad (3.3)$$

Το P είναι ελεύθερο και άρα προβολικό R -πρότυπο.

Λόγω αυτού, η (3.3) είναι διασπώμενη. Έστω $Q \in {}_R\text{Mod}$.

Ο συναρτητής $\text{Ext}_R^1(—, Q)$ είναι προσθετικός και έτσι, από την (3.3), παίρνουμε τη διασπώμενη β.α.α.

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^1(P, Q) \xrightarrow{\pi_P^*} \text{Ext}_R^1(A \oplus P, Q) \xrightarrow{i_A^*} \text{Ext}_R^1(A, Q) \longrightarrow 0 \quad (3.4)$$

Αλλά, $\text{Ext}_R^1(P, Q) = 0$ διότι P είναι προβολικό R -πρότυπο και έτσι, από την (3.4) έχουμε ότι ο i_A^* είναι ισομορφισμός.

($\implies$) Έστω ότι ο $\theta^* : \text{Ext}_R^1(B, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, X)$ είναι μονομορφισμός για κάθε $X \in {}_R\text{Mod}$.

Αφού $\theta^* = i_A^* \circ h^*$ και ο i_A^* είναι ισομορφισμός, έπεται ότι $h^* = (i_A^*)^{-1} \circ \theta^*$.

Καθώς $(i_A^*)^{-1}$ μονομορφισμός και θ^* μονομορφισμός, έχουμε ότι και ο h^* είναι μονομορφισμός.

Αφού $h : A \oplus P \rightarrow B$ είναι επιμορφισμός, έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\iota} A \oplus P \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0 \quad (3.5)$$

όπου $E = \ker h$. Έστω $X \in {}_R\text{Mod}$. Θεωρούμε τη μακρά ακριβή $\text{Ext}_R(—, X)$ ακολουθία και έχουμε

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(B, X) \xrightarrow{h^*} \text{Hom}_R(A \oplus P, X) \xrightarrow{\iota^*} \text{Hom}_R(E, X) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_R^1(B, X) \xrightarrow{h^*} \dots$$

Καθώς h^* είναι μονομορφισμός, έχουμε ότι $\ker h^* = 0$. Λόγω ακρίβειας, όμως, $\text{Im } \delta = \ker h^*$ και άρα $\text{Im } \delta = 0$. Συνεπώς, προκύπτει η β.α.α.

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_R(B, X) \xrightarrow{h^*} \text{Hom}_R(A \oplus P, X) \xrightarrow{\iota^*} \text{Hom}_R(E, X) \longrightarrow 0$$

Για $X = E$, έχουμε ότι $\iota^* : \text{Hom}_R(A \oplus P, E) \rightarrow \text{Hom}_R(E, E)$ είναι επιμορφισμός. Έτσι, για την $\text{id}_E \in \text{Hom}_R(E, E)$, υπάρχει $\beta \in \text{Hom}_R(A \oplus P, E)$ ώστε $\iota^*(\beta) = \text{id}_E$ ή, ισοδύναμα, $\beta \circ \iota = \text{id}_E$.

Δηλαδή, υπάρχει $\beta : A \oplus P \rightarrow E$ με $\beta \circ \iota = \text{id}_E$.

Συνεπώς, η (3.5) είναι διασπώμενη και έτσι έχουμε ότι $A \oplus P \simeq B \oplus E$, δηλαδή, το B είναι ευθύς προσθετός του $A \oplus P$.

($\Leftarrow$) Θεωρούμε τη διασπώμενη β.α.α.

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\iota} A \oplus P \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0 \quad (3.6)$$

όπου $h = \langle \theta, \varphi \rangle$.

Αν $X \in {}_R\text{Mod}$, τότε $\text{Ext}_R^1(., X)$ είναι προσθετικός συναρτητής και από την (3.6) προκύπτει η διασπώμενη β.α.α.

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^1(B, X) \xrightarrow{h^*} \text{Ext}_R^1(A \oplus P, X) \xrightarrow{\iota^*} \text{Ext}_R^1(E, X) \longrightarrow 0 \quad (3.7)$$

Από την (3.7) έχουμε ότι h^* είναι μονομορφισμός.

Αφού $\theta^* = i_A^* \circ h^*$ και i_A^* ισομορφισμός, h^* μονομορφισμός, έχουμε ότι θ^* είναι μονομορφισμός. $\square$

Πρόταση 3.6 [1, Theorem 2.5] Έστω $A, B \in {}_R\text{Mod}$ και $\theta : A \rightarrow B$ R -ομομορφισμός.

Τότε, η φυσική απεικόνιση $\theta^* : \text{Ext}_R^1(B, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, X)$ είναι επιμορφισμός για κάθε

$X \in {}_R\text{Mod}$ αν και μόνο αν υπάρχουν $Q, P \in {}_R\text{Mod}$ με Q προβολικό, $\eta : Q \rightarrow P$ R -ομομορφισμός, ακριβείς ακολουθίες $P \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$ και $Q \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$ και μία β.α.α.

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{(g, -\eta)} A \oplus P \xrightarrow{\langle \theta, \varphi \rangle} B \longrightarrow 0$$

Απόδειξη.

($\Rightarrow$): Έστω ότι $\theta^* : \text{Ext}_R^1(B, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, X)$ είναι επιμορφισμός για κάθε $X \in {}_R\text{Mod}$.

Έστω Q ελεύθερο R -πρότυπο με $Q \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$ ακριβής ακολουθία. Τότε, το Q είναι προβολικό

R -πρότυπο. Θεωρούμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0 \quad (3.8)$$

όπου $M = \ker g$. Η (3.8) ορίζει ένα στοιχείο $[\lambda] \in \text{Ext}_R^1(A, M)$.

Εφόσον $\theta^* : \text{Ext}_R^1(B, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, M)$ είναι επιμορφισμός, υπάρχει ένα $[\lambda'] \in \text{Ext}_R^1(B, M)$ ώστε $\theta^*([\lambda']) = [\lambda]$, δηλαδή, $[\lambda'] \circ \theta = [\lambda]$. Αν $[\lambda'] : 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} P \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$, τότε το $[\lambda'] \circ \theta$ ορίζει τη β.α.α. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\chi} K \xrightarrow{p_1} A \longrightarrow 0$, όπου K είναι το pull-back του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow \theta \\ P & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Συνεπώς, προκύπτει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\chi} & K & \xrightarrow{p_1} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_M & & \downarrow p_2 & & \downarrow \theta \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\psi} & P & \xrightarrow{\varphi} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Επειδή $[\lambda'] \circ \theta = [\lambda]$, έχουμε ότι $\lambda' \circ \theta \sim \lambda$ και παίρνουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & Q & \xrightarrow{g} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_M & & \downarrow \beta & & \downarrow id_A \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\chi} & K & \xrightarrow{\sigma} & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

όπου β είναι ισομορφισμός. Έτσι, συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω διαγράμματα, κατασκευάζεται το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & Q & \xrightarrow{g} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow id_M & & \downarrow \eta & & \downarrow \theta \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\psi} & P & \xrightarrow{\varphi} & B \longrightarrow 0 \end{array} \quad (3.9)$$

όπου, ασφαλώς, $\eta = \tau \circ \beta$. Ορίζουμε τους εξής ομομορφισμούς:

$$d : Q \rightarrow A \oplus P \text{ με } d(q) = (g, -\eta)(q) = (g(q), -\eta(q))$$

και

$h : A \oplus P \rightarrow B$ με $h(a, x) = \langle \theta, \varphi \rangle(a, x) = \theta(a) + \varphi(x)$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{d} A \oplus P \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$$

είναι β.α.α. Έχουμε:

• $\text{Im } d \subseteq \ker h$: Έστω $q \in Q$. Τότε:

$$h(d(q)) = h(g(q), -\eta(q)) = \theta(g(q)) + \varphi(-\eta(q)) = (\theta \circ g)(q) - (\varphi \circ \eta)(q)$$

Αλλά, λόγω μεταθετικότητας του διαγράμματος (3.9), έχουμε ότι $(\theta \circ g)(q) = (\varphi \circ \eta)(q) \forall q \in Q$.

Άρα: $h(d(q)) = (\theta \circ g)(q) - (\varphi \circ \eta)(q) = 0$, δηλαδή, $h(d(q)) = 0$ για κάθε $q \in Q$.

Συνεπώς, $\text{Im } d \subseteq \ker h$.

• $\ker h \subseteq \text{Im } d$: Έστω $(a, x) \in \ker h$. Τότε, $h(a, x) = 0 \iff \theta(a) + \varphi(x) = 0 \iff \theta(a) = -\varphi(x)$.

Αφού $a \in A$ και $g : Q \rightarrow A$ επιμορφισμός, υπάρχει $q \in Q$ ώστε $g(q) = a$.

Τότε, $\theta(g(q)) = \theta(a)$ και λόγω της μεταθετικότητας του διαγράμματος (3.9), έχουμε

$$\theta(g(q)) = \varphi(\eta(q)), \text{ δηλαδή, } \varphi(\eta(q)) = \theta(a). \text{ Έτσι, } \varphi(\eta(q)) = \theta(a) = -\varphi(x) \text{ και άρα}$$

$$\varphi(\eta(q)) = -\varphi(x) \implies \varphi(\eta(q)) + \varphi(x) = 0 \implies \varphi(\eta(q) + x) = 0. \text{ Συνεπώς, } \eta(q) + x \in \ker \varphi.$$

Από την ακρίβεια της κάτω γραμμής του διαγράμματος (3.9) έχουμε ότι $\ker \varphi = \text{Im } \psi$ και έτσι $\eta(q) + x \in \text{Im } \psi$.

Δηλαδή, υπάρχει $m \in M$ ώστε $\psi(m) = \eta(q) + x$ ή, ισοδύναμα, $\psi(id_M(m)) = \rho(q) + x$.

Λόγω μεταθετικότητας του διαγράμματος (3.9) είναι $\psi(id_M(m)) = \eta(f(m))$. Άρα:

$$\eta(f(m)) = \eta(q) + x \implies \eta(f(m)) - \eta(q) = x \implies \eta(f(m) - q) = x \implies \eta(q - f(m)) = -x.$$

$$\text{Έτσι, } d(q - f(m)) = (g(q - f(m)), -\eta(q - f(m))) = (g(q) - g(f(m)), -(-x))$$

Λόγω της ακρίβειας της πάνω γραμμής του διαγράμματος (3.9), είναι $\text{Im } f = \ker g$ και άρα

$$g(f(m)) = 0. \text{ Συνεπώς:}$$

$$d(q - f(m)) = (g(q) - g(f(m)), -(-x)) = (g(q), x) = (a, x), \text{ δηλαδή, } d(q - f(m)) = (a, x) \text{ και}$$

έτσι $\ker h \subseteq \text{Im } f$. Επομένως, η ακολουθία είναι ακριβής στο $A \oplus P$.

• $\ker d = 0$: Έστω $q \in \ker d$. Τότε $d(q) = (0, 0) \implies (g(q), -\eta(q)) = (0, 0) \implies$

$\implies g(q) = -\eta(q) = 0$. Έτσι, $q \in \ker g$ και $q \in \ker \eta$. Καθώς $\ker g = \operatorname{Im} f$, έχουμε ότι υπάρχει $m \in M$ ώστε $f(m) = q$ και άρα $\eta(f(m)) = \eta(q) = 0$, δηλαδή, $\eta(f(m)) = 0$.

Λόγω μεταθετικότητας του διαγράμματος (3.9), είναι $\eta(f(m)) = \psi(id_M(m))$ και άρα $\psi(id_M(m)) = 0$.

Συνεπώς, $\psi(m) = 0$ και έτσι, έπεται ότι $m \in \ker \psi$.

Αλλά, ψ είναι μονομορφισμός και άρα $\ker \psi = 0$. Συνεπώς, $m = 0 \implies f(m) = 0 \implies q = 0$ και έτσι προκύπτει ότι $\ker d = 0$.

• $\operatorname{Im} h = B$: Έστω $b \in B$. Τότε, αφού φ είναι επιμορφισμός, υπάρχει $x \in P$ ώστε $\varphi(x) = b$. Είναι: $h(0, x) = \theta(0) + \varphi(x) = 0 + b = b$, δηλαδή, $h(0, x) = b$. Έτσι, $\operatorname{Im} h = B$.

Συνεπώς, έχουμε και τις ακριβείς ακολουθίες

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{(g, -\eta)} A \oplus P \xrightarrow{(\theta, \varphi)} B \longrightarrow 0 \quad \text{και} \quad Q \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0 \quad \text{με } Q \text{ προβολικό } R\text{-πρότυπο.}$$

($\Leftarrow$): Έστω οι ακριβείς ακολουθίες $0 \longrightarrow Q \xrightarrow{d} A \oplus P \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ και $Q \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$ με Q προβολικό R -πρότυπο, όπου $d = (g, -\eta)$ και $h = (\theta, \varphi)$. Έστω $X \in {}_R\text{Mod}$. Θεωρούμε τη μακρά ακριβή $\operatorname{Ext}_R(, X)$ ακολουθία και έχουμε:

$$\dots \xrightarrow{d^*} \operatorname{Hom}_R(Q, X) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Ext}_R^1(B, X) \xrightarrow{h^*} \operatorname{Ext}_R^1(A \oplus P, X) \xrightarrow{d^*} \operatorname{Ext}_R^1(Q, X) \longrightarrow \dots$$

Αλλά, το Q είναι προβολικό R -πρότυπο. Έτσι, $\operatorname{Ext}_R^1(Q, X) = 0$ και άρα ο

$h^* : \operatorname{Ext}_R^1(B, X) \rightarrow \operatorname{Ext}_R^1(A \oplus P, X)$ είναι επιμορφισμός. Επίσης:

$\operatorname{Ext}_R^1(A \oplus P, X) \simeq \operatorname{Ext}_R^1(A, X) \oplus \operatorname{Ext}_R^1(P, X)$, μέσω των ισομορφισμών $u \mapsto (u \circ i_A, u \circ i_P)$ και $(u_1, u_2) \mapsto u_1 \circ \pi_A + u_2 \circ \pi_P$, όπου $i_A : A \rightarrow A \oplus P$ με $i_A(a) = (a, 0)$ και $i_P : P \rightarrow A \oplus P$ με $i_P(x) = (0, x)$ είναι οι φυσικές εμφυτεύσεις και $\pi_A : A \oplus P \rightarrow A$ και $\pi_P : A \oplus P \rightarrow P$ με $\pi_A(a, x) = a$ και $\pi_P(a, x) = x$ είναι οι φυσικές προβολές.

Έστω $\zeta \in \operatorname{Ext}_R^1(A, X)$. Τότε $(\zeta, 0) \in \operatorname{Ext}_R^1(A, X) \oplus \operatorname{Ext}_R^1(P, X) \simeq \operatorname{Ext}_R^1(A \oplus P, X)$.

Η εικόνα του $(\zeta, 0)$ μέσω της τ είναι $\tau(\zeta, 0) = \zeta \circ \pi_A + 0 \circ \pi_P = \zeta \circ \pi_A$. Έτσι, $\zeta \circ \pi_A \in \operatorname{Ext}_R^1(A \oplus P, X)$ και αφού h^* είναι επιμορφισμός, υπάρχει $\xi \in \operatorname{Ext}_R^1(B, X)$ ώστε $h^*(\xi) = \zeta \circ \pi_A$, δηλαδή $\xi \circ h = \zeta \circ \pi_A$.

Για το $(a, 0) \in A \oplus P$ έχουμε $(\xi \circ h)(a, 0) = (\zeta \circ \pi_A)(a, 0) \implies \xi(h(a, 0)) = \zeta(\pi_A(a, 0)) \implies$

$$\implies \xi(\theta(a) + \varphi(0)) = \zeta(a) \implies \xi(\theta(a)) + \xi(0) = \zeta(a) \implies (\xi \circ \theta)(a) = \zeta(a).$$

Έτσι, έχουμε ότι $\xi \circ \theta = \zeta$ και άρα $\theta^*(\xi) = \zeta$. Συνεπώς, ο θ^* είναι επιμορφισμός. $\square$

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 3.5 και 3.6 παίρνουμε την ακόλουθη ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένας φυσικός μετασχηματισμός $\theta^* : \text{Ext}_R^1(B, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, X)$ να είναι φυσική ισοδυναμία.

Θεώρημα 3.7 [1, Theorem 2.6] Έστω $A, B \in {}_R\text{Mod}$ και $\theta : A \rightarrow B$ R -ομομορφισμός.

Τότε, η φυσική απεικόνιση $\theta^* : \text{Ext}_R^1(B, X) \rightarrow \text{Ext}_R^1(A, X)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $X \in {}_R\text{Mod}$ αν και μόνο αν υπάρχουν $P, Q \in {}_R\text{Mod}$ προβολικά R -πρότυπα, $\eta : Q \rightarrow P$ R -ομομορφισμός, ακριβείς ακολουθίες $Q \xrightarrow{g} A \rightarrow 0$ και $P \xrightarrow{\varphi} B \rightarrow 0$ και μία διασπώμενη β.α.α.

$$0 \rightarrow Q \xrightarrow{(g, -\eta)} P \oplus A \xrightarrow{(\theta, \varphi)} B \rightarrow 0 \quad (\text{ώστε } P \oplus A \simeq Q \oplus B).$$

Απόδειξη.

($\implies$): Ο θ^* είναι φυσική ισοδυναμία και άρα είναι ισομορφισμός. Εφόσον ο θ^* είναι επιμορφισμός, όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 3.6, προκύπτει το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & Q & \xrightarrow{g} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id}_M & & \downarrow \eta & & \downarrow \theta \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\psi} & P & \xrightarrow{\varphi} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Αν $X \in {}_R\text{Mod}$, λαμβάνουμε τη μακρά ακριβή $\text{Ext}_R(-, X)$ ακολουθία και έχουμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \text{Hom}_R(M, X) & \xrightarrow{\delta_1} & \text{Ext}_R^1(B, X) & \xrightarrow{\varphi^*} & \text{Ext}_R^1(P, X) \xrightarrow{\psi^*} \text{Ext}_R^1(M, X) \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \text{id}_M^* & & \downarrow \theta^* & & \downarrow \eta^* \\ \dots & \longrightarrow & \text{Hom}_R(M, X) & \xrightarrow{\delta_2} & \text{Ext}_R^1(A, X) & \xrightarrow{g^*} & \text{Ext}_R^1(Q, X) \xrightarrow{f^*} \text{Ext}_R^1(M, X) \longrightarrow \dots \end{array} \quad (3.10)$$

Καθώς Q είναι προβολικό R -πρότυπο, είναι $\text{Ext}_R^1(Q, X) = 0$.

Θα δείξουμε ότι και το P είναι προβολικό R -πρότυπο.

Έστω $x \in \text{Ext}_R^1(P, X)$. Τότε $\eta^*(x) \in \text{Ext}_R^1(Q, X) = 0$ και άρα $\eta^*(x) = 0 \implies f^*(\eta^*(x)) = 0 \implies (f^* \circ \eta^*)(x) = 0$. Λόγω μεταθετικότητας του διαγράμματος (3.10), είναι $f^* \circ \eta^* = \text{id}_M^* \circ \psi^*$.

Έτσι, αφού $(f^* \circ \eta^*)(x) = 0$, έπεται ότι $(id_M^* \circ \psi^*)(x) = 0 \implies id_M^*(\psi^*(x)) = 0 \implies id_M^*(x \circ \psi) = 0 \implies x \circ \psi \circ id_M = 0 \implies x \circ \psi = 0 \implies \psi^*(x) = 0$.

Συνεπώς, $x \in \ker \psi^*$. Λόγω ακρίβειας της πάνω γραμμής του διαγράμματος (3.10), είναι $\ker \psi^* = \text{Im } \varphi^*$ και έτσι, $x \in \text{Im } \varphi^*$. Τότε, υπάρχει $y \in \text{Ext}_R^1(B, X)$ ώστε $\varphi^*(y) = x \implies \eta^*(\varphi^*(y)) = \eta^*(x) = 0$, δηλαδή $(\eta^* \circ \varphi^*)(y) = 0$.

Λόγω μεταθετικότητας του διαγράμματος (3.10), είναι $\eta^* \circ \varphi^* = g^* \circ \theta^*$. Άρα:

$$(g^* \circ \theta^*)(y) = 0 \implies g^*(\theta^*(y)) = 0 \text{ και έτσι, } \theta^*(y) \in \ker g^*.$$

Λόγω ακρίβειας της κάτω γραμμής του διαγράμματος (3.10), είναι $\ker g^* = \text{Im } \delta_2$.

Άρα, $\theta^*(y) \in \text{Im } \delta_2$ και έτσι υπάρχει $z \in \text{Hom}_R(M, X)$ ώστε $\delta_2(z) = \theta^*(y)$.

Συνεπώς, $\delta_2(id_M^*(z)) = \theta^*(y)$ και λόγω μεταθετικότητας του διαγράμματος (5.8), είναι $\delta_2 \circ id_M^* = \theta^* \circ \delta_1$.

Άρα, έχουμε ότι $(\theta^* \circ \delta_1)(z) = \theta^*(y) \implies \theta^*(\delta_1(z)) = \theta^*(y) \implies \theta^*(\delta_1(z) - y) = 0 \implies \delta_1(z) - y \in \ker \theta^*$. Αλλά, ο θ^* είναι μονομορφισμός και άρα $\ker \theta^* = 0$.

Έτσι, $\delta_1(z) - y = 0 \implies \delta_1(z) = y \implies \varphi^*(\delta_1(z)) = \varphi^*(y)$.

Όμως, λόγω ακρίβειας της πάνω γραμμής του διαγράμματος (3.10), έχουμε $\varphi^*(\delta_1(z)) = 0$ και άρα $\varphi^*(y) = 0$. Αλλά, $\varphi^*(y) = x$. Συνεπώς, $x = 0$ και άρα $\text{Ext}_R^1(P, X) = 0$.

Καθώς το X ήταν τυχόν R -πρότυπο, έπεται ότι το P είναι προβολικό R -πρότυπο.

Συνεπώς, έχουμε τις β.α.α. $0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$ και $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\psi} P \xrightarrow{\varphi} B \longrightarrow 0$ και P, Q είναι προβολικά R -πρότυπα.

Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.5, θεωρούμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow Q \xrightarrow{d} A \oplus P \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0 \quad (3.11)$$

όπου $d : Q \rightarrow A \oplus P$ με $d(q) = (g, -\eta)(q) = (g(q), -\eta(q))$ και $h : A \oplus P \rightarrow B$ με $h(a, x) = \langle \theta, \varphi \rangle(a, x) = \theta(a) + \varphi(x)$.

Θα αποδείξουμε ότι η (3.11) είναι διασπώμενη.

Για $X \in {}_R\text{Mod}$, θεωρούμε τη μακρά ακριβή Ext ακολουθία στην 1η μεταβλητή και έχουμε:

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_R(Q, X) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_R^1(B, X) \xrightarrow{h^*} \text{Ext}_R^1(A \oplus P, X) \xrightarrow{d^*} \text{Ext}_R^1(Q, X) \longrightarrow \dots$$

Όμως, Q είναι προβολικό R -πρότυπο. Έτσι, έχουμε ότι $\text{Ext}_R^1(Q, X) = 0$, δηλαδή ο h^* είναι επιμορφισμός. Έστω, τώρα, $\zeta \in \ker h^*$. Τότε $h^*(\zeta) = 0$ ή, ισοδύναμα, $\zeta \circ h = 0$.

Άρα, αν $(a, 0) \in A \oplus P$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} (\zeta \circ h)(a, 0) = 0 &\implies \zeta(h(a, 0)) = \zeta(\theta(a) + \varphi(0)) = 0 \implies \zeta(\theta(a)) + \zeta(\varphi(0)) = 0 \implies \\ &\implies \zeta(\theta(a)) = 0 \end{aligned}$$

για κάθε $a \in A$. Άρα, $\zeta \circ \theta = 0$ και έτσι $\theta^*(\zeta) = 0$. Συνεπώς, $\zeta \in \ker \theta^*$ και αφού θ^* μονομορφισμός, έπεται ότι $\zeta = 0$. Έτσι, προκύπτει ότι $\ker h^* = 0$, δηλαδή ο h^* είναι μονομορφισμός. Τότε, όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.5, έχουμε ότι η ακολουθία $0 \longrightarrow Q \xrightarrow{d} A \oplus P \xrightarrow{h} B \longrightarrow 0$ είναι διασπώμενη. Συνεπώς, προκύπτει ότι $A \oplus P \simeq B \oplus Q$.

($\Leftarrow$): Άμεσο από τις Προτάσεις 3.5 και 3.6. □

4 Οι αλγεβρικές αναλλοίωτες $\text{silp } \mathbb{Z}G$, $\text{spli } \mathbb{Z}G$ και $\text{findim } \mathbb{Z}G$

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε τις αλγεβρικές αναλλοίωτες $\text{silp } \mathbb{Z}G$, $\text{spli } \mathbb{Z}G$ και $\text{findim } \mathbb{Z}G$ για μια ομάδα G . Το $\text{findim } \mathbb{Z}G$, το supremum των προβολικών διαστάσεων των $\mathbb{Z}G$ -προτύπων με πεπερασμένη προβολική διάσταση, ορίστηκε από τους M. Auslander και D. Buchsbaum, ενώ το $\text{spli } \mathbb{Z}G$ ($\text{silp } \mathbb{Z}G$), τα supremum των προβολικών (εμφυτευτικών) διαστάσεων των εμφυτευτικών (προβολικών) $\mathbb{Z}G$ -προτύπων από τους T.V. Gendrich και K.W. Gruenberg. Δίνουμε τους βασικούς ορισμούς, εξετάζουμε τη σχέση των $\text{silp } \mathbb{Z}H$, $\text{spli } \mathbb{Z}H$ και $\text{findim } \mathbb{Z}H$ για μια υποομάδα $H \leq G$ με τα αντίστοιχα $\text{silp } \mathbb{Z}G$, $\text{spli } \mathbb{Z}G$ και $\text{findim } \mathbb{Z}G$ και αποδεικνύουμε ότι για κάθε ομάδα G ισχύει ότι $\text{findim } \mathbb{Z}G \leq \text{silp } \mathbb{Z}G \leq \text{spli } \mathbb{Z}G$.

Ορισμός 4.1 Έστω G ομάδα. Ορίζουμε τις εξής αναλλοίωτες:

$$\text{spli } \mathbb{Z}G = \sup\{n \in \mathbb{N} : \text{pd}_{\mathbb{Z}G} I = n, \text{ όπου } I \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod εμφυτευτικό}\}$$

Το $\text{spli } \mathbb{Z}G$ είναι το supremum των προβολικών διαστάσεων των εμφυτευτικών $\mathbb{Z}G$ -προτύπων.

$$\text{silp } \mathbb{Z}G = \sup\{m \in \mathbb{N} : \text{id}_{\mathbb{Z}G} P = m, \text{ όπου } P \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod προβολικό}\}$$

Το $\text{silp } \mathbb{Z}G$ είναι το supremum των εμφυτευτικών διαστάσεων των προβολικών $\mathbb{Z}G$ -προτύπων.

Είναι προφανές από τον παραπάνω ορισμό ότι:

$$\text{spli } \mathbb{Z}G = n < \infty \iff \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(I, _) = 0, \text{ για κάθε } I \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod εμφυτευτικό}$$

και

$$\text{silp } \mathbb{Z}G = m < \infty \iff \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(_, P) = 0, \text{ για κάθε } P \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod προβολικό} \quad \blacksquare$$

Ορισμός 4.2 Έστω G ομάδα. Ορίζουμε την αναλλοίωτη

$$\text{findim } \mathbb{Z}G = \sup\{\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M : M \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod και } \text{pd}_{\mathbb{Z}G} M < \infty\}$$

Η $\text{findim } \mathbb{Z}G$ είναι το supremum των προβολικών διαστάσεων των $\mathbb{Z}G$ -προτύπων με πεπερασμένη προβολική διάσταση.

Είναι προφανές από τον παραπάνω ορισμό ότι:

$$\text{findim } \mathbb{Z}G = k < \infty \iff \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{k+1}(M, -) = 0, \text{ για κάθε } M \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod με } \text{pd}_{\mathbb{Z}G} M < \infty \quad \blacksquare$$

Πρόταση 4.1 Έστω G ομάδα με $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G < \infty$. Τότε $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G \leq \text{findim } \mathbb{Z}G \leq \text{cd}_{\mathbb{Z}} G + 1$.

Απόδειξη.

Έστω ότι $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G = n < \infty$ και έστω $M \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M < \infty$. Είναι $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G = \text{pd}_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} = n < \infty$ και $\text{findim } \mathbb{Z}G = \sup\{\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M : M \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod και } \text{pd}_{\mathbb{Z}G} M < \infty\}$. Συνεπώς, $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G \leq \text{findim } \mathbb{Z}G$.

Από την άλλη μεριά, από Λήμμα 1.22, υπάρχει $K \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ ώστε $K|_{\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και

$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(M, -) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(K, -)$ για κάθε $i > 0$. Είναι $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G = \text{pd}_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} = n$ και άρα υπάρχει μία $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (4.1)$$

μήκους n . Αφού $K|_{\mathbb{Z}}$ ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, το $K|_{\mathbb{Z}}$ είναι προβολικό, άρα και επίπεδο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

Έτσι, από την (4.1), προκύπτει η ακριβής ακολουθία $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \longrightarrow \tilde{P}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \longrightarrow \tilde{P}_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{P}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \longrightarrow \tilde{P}_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \longrightarrow \overset{\sim}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \longrightarrow 0 \quad (4.2)$$

Αλλά, το $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Έτσι $\overset{\sim}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \simeq K$ και η (4.2) γίνεται

$$0 \longrightarrow \tilde{P}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \longrightarrow \tilde{P}_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \longrightarrow \dots \longrightarrow \tilde{P}_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \longrightarrow \tilde{P}_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K} \longrightarrow K \longrightarrow 0 \quad (4.3)$$

Επειδή P_i είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για κάθε $i = 0, 1, \dots, n$ και $K|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, από Πρόταση 2.5(i) έπεται ότι $\tilde{P}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{K}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για κάθε $i = 0, 1, \dots, n$ και άρα η (4.3) είναι $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του K μήκους n . Συνεπώς, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} K \leq n$ και αφού

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(M, -) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(K, -), \text{ έχουμε ότι } \text{pd}_{\mathbb{Z}G} M \leq n + 1 \implies \text{findim } \mathbb{Z}G \leq \text{cd}_{\mathbb{Z}} G + 1.$$

Έτσι, έχουμε $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G \leq \text{findim } \mathbb{Z}G \leq \text{cd}_{\mathbb{Z}} G + 1$. □

Πρόταση 4.2 Έστω G ομάδα και $H \leq G$. Τότε:

- (i) Αν $M \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$, τότε $\text{pd}_{\mathbb{Z}H} M|_H \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} M$ και $\text{id}_{\mathbb{Z}H} M|_H \leq \text{id}_{\mathbb{Z}G} M$.
- (ii) $\text{findim } \mathbb{Z}H \leq \text{findim } \mathbb{Z}G$
- (iii) $\text{silp } \mathbb{Z}H \leq \text{silp } \mathbb{Z}G$
- (iv) $\text{spli } \mathbb{Z}H \leq \text{spli } \mathbb{Z}G$

Απόδειξη.

- (i) Αν $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M = \infty$, τότε $\text{pd}_{\mathbb{Z}H} M|_H \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} M$.

Έστω ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M = n < \infty$. Τότε υπάρχει μια $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του M μήκους n

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Από Πρόταση 1.18, $\mathbb{Z}G|_H$ είναι ελεύθερο, άρα και προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο. Συνεπώς, από Πρόταση 1.16(iv), έχουμε ότι $P_i|_H$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Έτσι, η

$$0 \longrightarrow P_n|_H \longrightarrow P_{n-1}|_H \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1|_H \longrightarrow P_0|_H \longrightarrow M|_H \longrightarrow 0$$

είναι $\mathbb{Z}H$ -προβολική επίλυση του $M|_H$ μήκους n . Άρα, $\text{pd}_{\mathbb{Z}H} M|_H \leq n \implies \text{pd}_{\mathbb{Z}H} M|_H \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} M$.

Αντίστοιχα, αν $\text{id}_{\mathbb{Z}G} M = \infty$, τότε $\text{id}_{\mathbb{Z}H} M|_H \leq \text{id}_{\mathbb{Z}G} M$.

Έστω ότι $\text{id}_{\mathbb{Z}G} M = n < \infty$. Τότε υπάρχει μια $\mathbb{Z}G$ -εμφυτευτική επίλυση του M μήκους n

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1} \longrightarrow I_n \longrightarrow 0$$

Από Πρόταση 1.18, $\mathbb{Z}G|_H$ είναι ελεύθερο, άρα και επίπεδο δεξιό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο. Συνεπώς, από Πρόταση 1.16(vi), έχουμε ότι $I_i|_H$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Έτσι, η

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0|_H \longrightarrow I_1|_H \longrightarrow \dots \longrightarrow I_{n-1}|_H \longrightarrow I_n|_H \longrightarrow 0$$

είναι $\mathbb{Z}H$ -εμφυτευτική επίλυση του $M|_H$ μήκους n . Άρα, $\text{id}_{\mathbb{Z}H} M|_H \leq n \implies \text{id}_{\mathbb{Z}H} M|_H \leq \text{id}_{\mathbb{Z}G} M$.

(ii) Αν $\text{findim } \mathbb{Z}G = \infty$, τότε $\text{findim } \mathbb{Z}H \leq \text{findim } \mathbb{Z}G$.

Έστω $\text{findim } \mathbb{Z}G = n < \infty$ και M προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο με $\text{pd}_{\mathbb{Z}H} M = m < \infty$. Τότε υπάρχει μία $\mathbb{Z}H$ -προβολική επίλυση του M μήκους m

$$0 \longrightarrow P_m \longrightarrow P_{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Αφού P_i προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο για $i = 0, 1, \dots, m$, από Πρόταση 1.16(ii), έχουμε ότι $\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P_i$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για κάθε $i = 0, 1, \dots, m$. Συνεπώς, η

$$0 \longrightarrow \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P_m \longrightarrow \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P_{m-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P_1 \longrightarrow \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P_0 \longrightarrow \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \longrightarrow 0$$

αποτελεί $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του $\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M$ μήκους m .

Έτσι, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M < \infty$. Αφού $\text{findim } \mathbb{Z}G = n$, έχουμε ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \leq n$.

Αλλά, από Πρόταση 1.20(i), έχουμε ότι M είναι ευθύς προσθετέος του $(\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M)|_H$.

Από Πρόταση 1.21, είναι $\text{pd}_{\mathbb{Z}H} M \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}H} (\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M)|_H$.

Από την άλλη μεριά, από το (i), έχουμε $\text{pd}_{\mathbb{Z}H} (\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M)|_H \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M \leq n$,

δηλαδή $\text{pd}_{\mathbb{Z}H} M \leq n$ και άρα $\text{findim } \mathbb{Z}H \leq \text{findim } \mathbb{Z}G$.

(iii) Αν $\text{silp } \mathbb{Z}G = \infty$, τότε $\text{silp } \mathbb{Z}H \leq \text{silp } \mathbb{Z}G$.

Έστω $\text{silp } \mathbb{Z}G = n < \infty$. Έστω $P \in {}_{\mathbb{Z}H}\text{Mod}$ προβολικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο. Από Πρόταση 1.16(ii)

έχουμε ότι $P \uparrow_H^G = \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Αφού $\text{silp } \mathbb{Z}G = n$, έπεται ότι

$\text{id}_{\mathbb{Z}G} \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P \leq n$. Επίσης, από Πρόταση 1.20(i), P είναι ευθύς προσθετέος του $(\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P)|_H$.

Συνεπώς, από Πρόταση 1.21 και από το (i) έχουμε

$\text{id}_{\mathbb{Z}H} P \leq \text{id}_{\mathbb{Z}H} (\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P)|_H \leq \text{id}_{\mathbb{Z}G} \overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P \leq n$. Έτσι, $\text{id}_{\mathbb{Z}H} P \leq n$ και άρα $\text{silp } \mathbb{Z}H \leq \text{silp } \mathbb{Z}G$.

(iv) Αν $\text{spli } \mathbb{Z}G = \infty$, τότε $\text{spli } \mathbb{Z}H \leq \text{spli } \mathbb{Z}G$.

Έστω $\text{spli } \mathbb{Z}G = n < \infty$. Έστω $I \in {}_{\mathbb{Z}H}\text{Mod}$ εμφυτευτικό $\mathbb{Z}H$ -πρότυπο. Από Πρόταση 1.16(iii)

έχουμε ότι $I \uparrow_H^G = \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, I)$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Αφού $\text{spli } \mathbb{Z}G = n$, έπεται ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, I) \leq n$. Επίσης, από Πρόταση 1.20(ii), I είναι ευθύς προσθετός του $(\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, I))|_H$. Συνεπώς, από Πρόταση 1.21 και από το (i) έχουμε $\text{pd}_{\mathbb{Z}H} I \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}H} (\text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, I))|_H \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, I) \leq n$. Έτσι, $\text{pd}_{\mathbb{Z}H} I \leq n$ και άρα $\text{spli } \mathbb{Z}H \leq \text{spli } \mathbb{Z}G$. $\square$

Λήμμα 4.3 [7, Lemma 2.4] Έστω G ομάδα. Τότε:

- (i) $\text{id}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \leq 1$
- (ii) Αν $\text{spli } \mathbb{Z}G = n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τότε $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \leq n$
- (iii) $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$ αν και μόνο αν $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) < \infty$

Απόδειξη.

(i) Θεωρούμε τη β.α.α. $\mathbb{Z}$ -προτύπων

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Επειδή το $\mathbb{Z}G$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, έπεται ότι το $\mathbb{Z}G$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (Πόρισμα 1.19(i)). Άρα, έχουμε τη β.α.α. $\mathbb{Z}$ -προτύπων

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

η οποία, αφού ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}G_{{}_{\mathbb{Z}}G}$ -διπρότυπο, επάγει τη β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (4.4)$$

Τα $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι εμφυτευτικά $\mathbb{Z}$ -πρότυπα (ως διαιρετές αβελιανές ομάδες). Συνεπώς, από Πρόταση 1.16(iii), τα $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Q})$ και $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι εμφυτευτικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα. Άρα η β.α.α.

(4.4) είναι $\mathbb{Z}G$ -εμφυτευτική επίλυση του $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Z})$, μήκους 1. Έτσι, $\text{id}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Z}) \leq 1$.

(ii) Έστω ότι $\text{spli } \mathbb{Z}G = n$. Τότε, αν I είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, έχουμε ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} I \leq n$ ή, ισοδύναμα, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(I, _) = 0$. Από το (i), έχουμε τη β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Έστω $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή Ext ακολουθία στην πρώτη μεταβλητή, έχουμε

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Q}), A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Z}), A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+2}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), A) \rightarrow \dots$$

Αλλά, όπως στο (i), τα $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Q})$ και $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ είναι εμφυτευτικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα και από υπόθεση έχουμε ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} I \leq n$ για κάθε I εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Έτσι, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Q}), A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+2}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), A) = 0$ και από την ακολουθία προκύπτει ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Z}), A) = 0$. Συνεπώς, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Z}), A) = 0$ για κάθε $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Άρα $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Z}) \leq n$.

(iii) ($\implies$) Άμεσο από το (ii)

($\impliedby$) Έστω ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Z}) = m < \infty$. Θεωρούμε τη $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \longrightarrow IG \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

από την οποία προκύπτει η $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}, \overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{IG}, \overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}) \longrightarrow 0 \quad (4.5)$$

Αλλά $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}, \overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, διότι το $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Επίσης $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Z}|_{\mathbb{Z}}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}G, \mathbb{Z})$, από το Πρόβλημα 2.3(ii).

Έτσι, η (4.5) γίνεται

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}G}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{IG}, \overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}}) \rightarrow 0$$

Θέτουμε $J = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}G}, \mathbb{Z})$ και $K = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{IG}, \overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}})$ και έχουμε, λοιπόν, τη $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

Έστω I εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Τότε, από την (4.6) παίρνουμε τη $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \rightarrow \overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}} \rightarrow \overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \rightarrow \overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{K} \rightarrow 0$$

Αλλά $\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}} \simeq \overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq I$, διότι $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Άρα, η β.α.α. γίνεται

$$0 \rightarrow I \rightarrow \overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \rightarrow \overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{K} \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

Επειδή I είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, η (4.7) είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη και άρα έχουμε ότι $\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \simeq I \oplus (\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{K})$, ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα.

Θα δείξουμε ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} < \infty$. Έστω F ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο με $F \xrightarrow{a} I \rightarrow 0$ και $R = \ker a$. Τότε, έχουμε τη β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \rightarrow R \rightarrow F \xrightarrow{a} I \rightarrow 0 \quad (4.8)$$

Επιπλέον, η αβελιανή ομάδα $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$ είναι ελεύθερη στρέψης.

Πράγματι, έστω $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$ και $r \in \mathbb{Z}$, $r \neq 0$ ώστε $rf = 0$. Τότε, για $x \in \mathbb{Z}G$ έχουμε:

$(rf)(x) = 0 \iff rf(x) = 0 \iff r = 0 \text{ ή } f(x) = 0$, αφού $\mathbb{Z}$ είναι ακέραια περιοχή. Αλλά $r \neq 0$ και άρα $f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{Z}G$. Έτσι, $f = 0$ και άρα η $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$ είναι ελεύθερη στρέψης.

Καθώς $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z})$ είναι ελεύθερη στρέψης, έπεται ότι είναι επίπεδο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο και άρα το

$J = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\leftarrow}{\mathbb{Z}G}, \mathbb{Z})$ είναι επίπεδο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο. Έτσι, από την (4.8), προκύπτει η β.α.α.

$$0 \rightarrow \overset{\leftarrow}{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \rightarrow \overset{\leftarrow}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \rightarrow \overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \rightarrow 0 \quad (4.9)$$

Το F είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και άρα $F|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (Πόρισμα 1.19(i)).

Επίσης, $R|_{\mathbb{Z}} \leq F|_{\mathbb{Z}}$ και άρα το $R|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, ως υποπρότυπο ελευθέρου $\mathbb{Z}$ -προτύπου. Άρα:

$\text{pd}_{\mathbb{Z}G} J = m$ και $F|_{\mathbb{Z}}, R|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερα $\mathbb{Z}$ -πρότυπα. Τότε, από Πρόταση 2.5(iii), έχουμε ότι

$\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\leftarrow}{J} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{R} \leq m$ και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\leftarrow}{J} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{F} \leq m$. Αλλά $\overset{\leftarrow}{J} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{R} \simeq \overset{\leftarrow}{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J}$ και $\overset{\leftarrow}{J} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{F} \simeq \overset{\leftarrow}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J}$.

Συνεπώς, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\leftarrow}{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \leq m$ και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\leftarrow}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \leq m$.

Έτσι, έχουμε ότι η (4.9) είναι β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\leftarrow}{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \leq m$ και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\leftarrow}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \leq m$.

Έστω $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}(-, A)$ ακολουθία, έχουμε την ακολουθία

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(\overset{\leftarrow}{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J}, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J}, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(\overset{\leftarrow}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J}, A) \rightarrow \dots \quad (4.10)$$

Αλλά $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\leftarrow}{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \leq m$ και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\leftarrow}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \leq m$.

Συνεπώς $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(\overset{\leftarrow}{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J}, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(\overset{\leftarrow}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J}, A) = 0$ και έτσι, λόγω της (4.10), έχουμε ότι

$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J}, A) = 0$. Άρα, έχουμε ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \leq m + 1$.

Αλλά, $\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J} \simeq I \oplus (\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{K})$. Επομένως:

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J}, A) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(I \oplus (\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{K}), A) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(I, A) \oplus \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{K}, A)$$

Αφού $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{J}, A) = 0$, έπεται ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(I, A) \oplus \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{K}, A) = 0$ και άρα

$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(I, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(\overset{\leftarrow}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\leftarrow}{K}, A) = 0$. Έτσι, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+2}(I, A) = 0$ για κάθε $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$.

Συνεπώς, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} I \leq m + 1$ για κάθε I εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι $\text{spli } \mathbb{Z}G \leq m + 1$ και έτσι έχουμε ότι $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$. $\square$

Πρόταση 4.4 Έστω G ομάδα. Τότε $\text{findim } \mathbb{Z}G \leq \text{silp } \mathbb{Z}G$.

Απόδειξη.

Έστω $M \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M = m < \infty$. Τότε, υπάρχει κάποιο $X \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ ώστε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(M, X) \neq 0$ (διαφορετικά, θα είχαμε $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M \leq m-1$). Έστω P ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ώστε $P \xrightarrow{\rho} X \rightarrow 0$ ακριβής ακολουθία και $R = \ker \rho$. Τότε, έχουμε ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(M, P) \neq 0$.

Πράγματι, αν $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(M, P) = 0$, τότε από τη β.α.α.

$$0 \rightarrow R \rightarrow P \xrightarrow{\rho} X \rightarrow 0$$

λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή Ext ακολουθία στη δεύτερη μεταβλητή, έχουμε

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(M, R) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(M, P) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(M, X) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(M, R) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(M, P) \rightarrow \dots$$

Τότε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(M, P) = 0$ και αφού $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M = m$, είναι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(M, R) = 0$.

Άρα, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(M, P) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(M, R) = 0$ και από την παραπάνω ακολουθία προκύπτει ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(M, X) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Συνεπώς, υπάρχει προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P ώστε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(M, P) \neq 0$. Αυτό, όμως, σημαίνει ότι $\text{id}_{\mathbb{Z}G} P \geq m$, δηλαδή $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M \leq \text{id}_{\mathbb{Z}G} P$. Έτσι, έχουμε ότι $\text{findim } \mathbb{Z}G \leq \text{silp } \mathbb{Z}G$. $\square$

Θεώρημα 4.5 [7, Theorem 3.2] Έστω G ομάδα. Τότε $\text{silp } \mathbb{Z}G \leq \text{spli } \mathbb{Z}G$.

Απόδειξη.

Αρχικά, θα δείξουμε ότι αν $\text{silp } \mathbb{Z}G < \infty$ και $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$, τότε $\text{silp } \mathbb{Z}G = \text{spli } \mathbb{Z}G$.

Έστω ότι $\text{silp } \mathbb{Z}G = n$ και $\text{spli } \mathbb{Z}G = m$ για κάποια $m, n \in \mathbb{N}$.

Έστω I εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο με $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} I = m$. Τότε, υπάρχει ένα $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ ώστε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, A) \neq 0$ (διαφορετικά, θα είχαμε $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} I \leq m-1$).

Έστω F ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ώστε $F \xrightarrow{a} A \rightarrow 0$ και $R = \ker a$.

Τότε, έχουμε ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, F) \neq 0$.

Πράγματι, αν $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, F) = 0$, τότε από τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{a} A \longrightarrow 0$$

λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή Ext ακολουθία στη δεύτερη μεταβλητή, έχουμε

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, R) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, F) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, A) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(I, R) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(I, F) \rightarrow \dots$$

Τότε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, F) = 0$ και αφού $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} I = m$, είναι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(I, R) = 0$.

Άρα, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, F) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(I, R) = 0$ και από την παραπάνω ακολουθία προκύπτει ότι

$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Έτσι, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, F) \neq 0$. Αλλά, F είναι ελεύθερο και άρα προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Αφού $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^m(I, F) \neq 0$, έπεται ότι $\text{id}_{\mathbb{Z}G} F \geq m$ και άρα $\text{silp } G \geq m$.

Συνεπώς, $n \geq m$.

Έστω, τώρα, P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο με $\text{id}_{\mathbb{Z}G} P = n$.

Τότε, υπάρχει ένα $B \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ ώστε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(B, P) \neq 0$ (διαφορετικά, θα είχαμε $\text{id}_{\mathbb{Z}G} P \leq n - 1$).

Έστω I εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ώστε $0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} I$ και $L = \text{Im } \beta$.

Τότε, έχουμε ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(I, P) \neq 0$.

Πράγματι, αν $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(I, P) = 0$, τότε από τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\beta} I \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή Ext ακολουθία στην πρώτη μεταβλητή, έχουμε

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(L, P) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(I, P) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(B, P) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(L, P) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(B, P) \rightarrow \dots$$

Τότε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(I, P) = 0$ και αφού $\text{id}_{\mathbb{Z}G} I = n$, είναι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(L, P) = 0$.

Άρα, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(I, P) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(L, P) = 0$ και από την παραπάνω ακολουθία προκύπτει ότι

$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(B, P) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Έτσι, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(I, P) \neq 0$. Αλλά, I είναι εμφυτευτικό

$\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Αφού $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(I, P) \neq 0$, έπεται ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} F \geq n$ και άρα $\text{spli } G \geq n$.

Συνεπώς, $m \geq n$.

Άρα, $n \geq m$ και $m \geq n$ και έτσι $m = n$, δηλαδή, $\text{spli } G = \text{silp } G$.

Δείξαμε, λοιπόν, ότι αν $\text{spli } G < \infty$ και $\text{silp } G < \infty$, τότε $\text{silp } G = \text{spli } G$.

Αρκεί, τώρα, να δείξουμε και ότι αν $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$, τότε $\text{silp } \mathbb{Z}G < \infty$.

Προς αυτήν την κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$. Από Λήμμα 4.3(iii), έχουμε ότι η συνθήκη $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$ είναι ισοδύναμη με $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\circ}{\mathbb{Z}G}, \mathbb{Z}) < \infty$.

Έστω P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Τότε, P είναι επίπεδο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και άρα επίπεδο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

Συνεπώς, από τη β.α.α αβελιανών ομάδων

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

επάγεται η β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \rightarrow \overset{\circ}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{\mathbb{Z}} \rightarrow \overset{\circ}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{\mathbb{Q}} \rightarrow \overset{\circ}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{\mathbb{Q}}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

και αφού $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένα $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα, η τελευταία γίνεται

$$0 \rightarrow \overset{\circ}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow \overset{\circ}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \rightarrow \overset{\circ}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

Θα δείξουμε ότι αν D είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (ισοδύναμα, διαιρετή αβελιανή ομάδα), τότε το $\overset{\circ}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} D$ είναι σχετικά προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Πράγματι, το P είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Συνεπώς, υπάρχουν $Q, F \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με Q προβολικό και F ελεύθερο, ώστε $P \oplus Q = F$. Τότε:

$$\overset{\circ}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} D \simeq (\overset{\circ}{P} \oplus \overset{\circ}{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} D \simeq (\overset{\circ}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} D) \oplus (\overset{\circ}{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} D), \text{ δηλαδή } \overset{\circ}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} D \simeq (\overset{\circ}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} D) \oplus (\overset{\circ}{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} D).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το $\overset{\circ}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} D$ είναι επαγόμενο.

Αφού το F είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, είναι $F = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}G$. Άρα:

$$\overset{\smile}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} D \simeq \left(\bigoplus_{x \in X} \overset{\smile}{\mathbb{Z}G} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} D \simeq \bigoplus_{x \in X} (\overset{\smile}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} D) \simeq \overset{\smile}{\mathbb{Z}G} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{x \in X} D \right)$$

Συνεπώς, το $\overset{\smile}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} D$ είναι επαγόμενο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και αφού $\overset{\smile}{F} \otimes_{\mathbb{Z}} D \simeq (\overset{\smile}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} D) \oplus (\overset{\smile}{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} D)$, το $\overset{\smile}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} D$ είναι σχετικά προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, ως ευθύς προσθετός επαγόμενου $\mathbb{Z}G$ -προτύπου.

Έστω $\tilde{P} = \overset{\smile}{P} \otimes_{\mathbb{Z}} D$. Θεωρούμε τη β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \rightarrow IG \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

η οποία είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη. Η ακολουθία αυτή επάγει τη $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη β.α.α $\mathbb{Z}G$ -προτύπων

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{\mathbb{Z}}, \overset{\smile}{\mathbb{Z}}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{\mathbb{Z}G}, \overset{\smile}{\mathbb{Z}}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{IG}, \overset{\smile}{\mathbb{Z}}) \rightarrow 0$$

Όμως, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{\mathbb{Z}}, \overset{\smile}{\mathbb{Z}}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, αφού $\mathbb{Z}$ τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και από Πόρισμα 2.3(ii) έχουμε $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{\mathbb{Z}G}, \overset{\smile}{\mathbb{Z}}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{\mathbb{Z}G}, \mathbb{Z}|_{\mathbb{Z}}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{\mathbb{Z}G}, \mathbb{Z})$. Έτσι, η ακολουθία γίνεται

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{\mathbb{Z}G}, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{IG}, \overset{\smile}{\mathbb{Z}}) \rightarrow 0$$

και είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων.

Θέτουμε $K = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{IG}, \overset{\smile}{\mathbb{Z}})$ και $J = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{\mathbb{Z}G}, \mathbb{Z})$

Έτσι, έχουμε τη $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, $\mathbb{Z}G$ -ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow J \rightarrow K \rightarrow 0$$

η οποία, με τη σειρά της, επάγει τη $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, $\mathbb{Z}G$ -ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{K}, \overset{\smile}{\tilde{P}}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{J}, \overset{\smile}{\tilde{P}}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{\mathbb{Z}}, \overset{\smile}{\tilde{P}}) \rightarrow 0$$

Αλλά, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\smile}{\mathbb{Z}}, \overset{\smile}{\tilde{P}}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \overset{\smile}{\tilde{P}}) \simeq \tilde{P}$, αφού $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Συνεπώς, η ακολουθία γίνεται

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{K}, \overset{\rightarrow}{\tilde{P}}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{J}, \overset{\rightarrow}{\tilde{P}}) \rightarrow \tilde{P} \rightarrow 0 \quad (4.12)$$

Η (4.12) είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη β.α.α.

Καθώς $\tilde{P}$ είναι σχετικά προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, από την Πρόταση 2.6, έπεται ότι η (4.12) είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη και έτσι $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{J}, \overset{\rightarrow}{\tilde{P}}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{K}, \overset{\rightarrow}{\tilde{P}}) \oplus \tilde{P}$ ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα.

Τώρα, $\tilde{P}$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

Πράγματι, το P είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και άρα είναι προβολικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (Πόρισμα 1.19(i)), δηλαδή είναι ελεύθερη αβελιανή ομάδα. Συνεπώς, $P \simeq \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}$. Τότε:

$$\tilde{P} = P \otimes_{\mathbb{Z}} D \simeq \left(\bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} \right) \otimes_{\mathbb{Z}} D \simeq \bigoplus_{x \in X} (\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} D) \simeq \bigoplus_{x \in X} D$$

και $\bigoplus_{x \in X} D$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, ως ευθύ άθροισμα εμφυτευτικών $\mathbb{Z}$ -προτύπων.

Άρα, $\tilde{P}|_{\mathbb{Z}}$ είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο και από υπόθεση έχουμε ότι

$$\text{pd}_{\mathbb{Z}G} J = \text{pd}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}G}, \mathbb{Z}) < \infty. \text{ Από Πρόταση 1.4, έπεται ότι } \text{id}_{\mathbb{Z}G} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{J}, \overset{\rightarrow}{\tilde{P}}) < \infty.$$

Όμως, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{J}, \overset{\rightarrow}{\tilde{P}}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\vec{K}, \overset{\rightarrow}{\tilde{P}}) \oplus \tilde{P}$ και έτσι, έχουμε ότι $\text{id}_{\mathbb{Z}G} \tilde{P} < \infty$, ως ευθύς προσθετός $\mathbb{Z}G$ -πρότυπου με πεπερασμένη εμφυτευτική διάσταση.

Βάσει των παραπάνω, αφού $\mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ είναι εμφυτευτικά $\mathbb{Z}$ -πρότυπα (ως διαιρετές αβελιανές ομάδες), έπεται ότι $\text{id}_{\mathbb{Z}G} \vec{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} < \infty$ και $\text{id}_{\mathbb{Z}G} \vec{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} < \infty$.

Έστω $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Από την (4.11), λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}(A, _)$ ακολουθία έχουμε ότι

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(A, \vec{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(A, \vec{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(A, \vec{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \rightarrow \dots$$

Για $i \geq \max \{ \text{id}_{\mathbb{Z}G} \vec{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} + 1, \text{id}_{\mathbb{Z}G} \vec{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \}$, έχουμε ότι

$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(A, P \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(A, P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = 0$ και από την παραπάνω ακολουθία προκύπτει ότι

$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(A, P) = 0$ για κάθε $i \geq \max \{ \text{id}_{\mathbb{Z}G} P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} + 1, \text{id}_{\mathbb{Z}G} P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \}$ και για κάθε

$A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Έτσι, $\text{id}_{\mathbb{Z}G} P < \infty$ και άρα $\text{silp } \mathbb{Z}G < \infty$.

Συνεπώς, έχουμε ότι $\text{silp } \mathbb{Z}G \leq \text{spli } \mathbb{Z}G$. □

Παρατήρηση 4.6 Έχει αποδειχθεί από τον I. Emmanouil το εξής αποτέλεσμα [8, Corollary 4.5]:

Αν R είναι ένας μεταθετικός $\aleph_0$ -Noetherian δακτύλιος (δηλαδή ένας δακτύλιος στον οποίο κάθε ιδεώδες $I \trianglelefteq R$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενο) με $\text{id}_R R < \infty$ και G είναι ομάδα, τότε $\text{spli } RG = \text{silp } RG$.

Το $\mathbb{Z}$ είναι $\aleph_0$ -Noetherian δακτύλιος (ιδιαίτερος, είναι περιοχή κυρίων ιδεωδών) και $\text{id}_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} = 1$ (αφού η $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$ είναι $\mathbb{Z}$ -εμφυτευτική επίλυση του $\mathbb{Z}$, μήκους 1) από το παραπάνω αποτέλεσμα, προκύπτει ότι για κάθε ομάδα G ισχύει ότι $\text{silp } \mathbb{Z}G = \text{spli } \mathbb{Z}G$.

Πόρισμα 4.7 Έστω G ομάδα.

Αν $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$, τότε $\text{findim } \mathbb{Z}G = \text{silp } \mathbb{Z}G = \text{spli } \mathbb{Z}G$.

Απόδειξη.

Αν $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$, τότε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.5 δείξαμε ότι $\text{spli } \mathbb{Z}G = \text{silp } \mathbb{Z}G$. Από την άλλη μεριά, από την Πρόταση 4.4, έχουμε ότι $\text{findim } \mathbb{Z}G \leq \text{silp } \mathbb{Z}G$.

Έστω, λοιπόν, ότι $\text{spli } \mathbb{Z}G = n < \infty$. Τότε, αν I εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, έχουμε $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} I \leq n$. Έτσι, έπεται ότι $\text{findim } \mathbb{Z}G \geq \text{spli } \mathbb{Z}G$ και άρα $\text{findim } \mathbb{Z}G = \text{silp } \mathbb{Z}G = \text{spli } \mathbb{Z}G$. $\square$

5 Περιοδική συνομολογία άπειρων ομάδων

Μία πεπερασμένη ομάδα G λέγεται ότι έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο $q \in \mathbb{N}^*$ αν $\hat{H}^n(G, A) \simeq \hat{H}^{n+q}(G, A)$ για κάθε $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο A και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\hat{H}^n(G, _)$ είναι η συνομολογία Tate της G . Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε την έννοια της περιοδικής συνομολογίας για άπειρες ομάδες.

5.1 Περιοδική συνομολογία και περιοδική προβολική επίλυση μετά από k -βήματα

Ορισμός 5.1 Έστω G ομάδα. Αν υπάρχουν $k, q \in \mathbb{N}$ ώστε οι συναρτητές $H^n(G, _)$ και $H^{n+q}(G, _)$ να είναι φυσικά ισόμορφοι για κάθε $n \geq k+1$, θα λέμε ότι η G έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα.

Αν $k = 0$, τότε λέμε ότι η G έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο q . ■

Ακολούθως, δίνουμε τον ορισμό της περιοδικής προβολικής επίλυσης με περίοδο q μετά από k -βήματα για μία ομάδα G .

Ορισμός 5.2 Έστω G ομάδα. Αν υπάρχουν $k, q \in \mathbb{N}$ και μια ακολουθία

$$0 \rightarrow R_{k+q} \xrightarrow{\beta} P_{k+q-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_k \xrightarrow{\partial_k} P_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$\begin{array}{ccc} & \searrow a & \nearrow \\ & R_k & \end{array}$

όπου P_i είναι προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα για $i = 0, 1, \dots, k+q-1$, $R_{k+q} = R_k$ και το $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, τότε θα λέμε ότι η G έχει περιοδική προβολική επίλυση με περίοδο q μετά από k -βήματα.

Αν $k = 0$, τότε λέμε ότι η G έχει περίοδο q .

Αν η G έχει περιοδική προβολική επίλυση με περίοδο q μετά από k -βήματα, τότε κατασκευάζεται μια

προβολική επίλυση της G (δηλαδή, μια περιοδική επίλυση του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο)

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{P}' & & \dots \longrightarrow & P'_{i+1} & \xrightarrow{\partial_{i+1}} & P'_i & \xrightarrow{\partial_i} & P'_{i-1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P'_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \searrow a_i & & \nearrow \beta_i & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & R'_i & & & & & & & & & & & \end{array}$$

θέτοντας:

- $P'_i = P_i$ για $i = 0, 1, \dots, k-1$ και $\partial'_i = \partial_i$ για $i = 1, 2, \dots, k$
- $P'_i = P_{k+v_i}$ για $i = k + nq + \lambda_i$, $n \in \mathbb{N}$ και $v_i = 0, 1, \dots, q-1$
- $\partial'_i = \partial_{k+v_i}$ για $i = k + nq + \lambda_i$, $n \in \mathbb{N}$ και $v_i = 1, \dots, q-1$
- $\partial'_{k+nq} = \beta \circ a$ για $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Η επίλυση αυτή λέγεται περιοδική επίλυση της G με περίοδο q μετά από k -βήματα.

Αν η G έχει περίοδο q μετά από k -βήματα, τότε είναι προφανές ότι οι συναρτητές $H^n(G, _)$ και $H^{n+q}(G, _)$ είναι φυσικά ισόμορφοι για κάθε $n \geq k+1$ και συνεπώς, η G έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα.

Πράγματι, είναι:

$$H^n(G, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^n(\mathbb{Z}, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n-k}(R_k, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n-k}(R_{k+q}, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+q}(\mathbb{Z}, A) = H^{n+q}(G, A) \text{ για } n \geq k+1 \text{ και για κάθε } A \in \mathbb{Z}G\text{-Mod.} \quad \blacksquare$$

Βάσει του Ορισμού 5.2 έχουμε ότι αν μια ομάδα G έχει περιοδική προβολική επίλυση με περίοδο q μετά από k -βήματα, τότε έχει και περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα. Το επόμενο Θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 5.1 [3, Proposition 1.8] Έστω G ομάδα και $k, q \in \mathbb{N}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (i) Η G έχει περιοδική προβολική επίλυση με περίοδο q μετά από k -βήματα.
- (ii) Η G έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα.

Απόδειξη.

(i) $\implies$ (ii) Είναι προφανές από τον ορισμό της περιοδικής προβολικής επίλυσης με περίοδο q μετά από k -βήματα της G (Ορισμός 5.2).

(ii) $\implies$ (i) Έστω

$$\mathbf{P} : \quad \dots \rightarrow P_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} P_i \xrightarrow{\partial_i} P_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$\begin{array}{ccc} & \searrow a_i & \nearrow \beta_i \\ & R_i & \end{array}$

μία $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, όπου $R_i = \text{Im } a_i$

(ώστε $\beta_i \circ a_i = \partial_i$) για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$. Τότε, από υπόθεση, έχουμε ότι:

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_k, A) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{k+1}(\mathbb{Z}, A) = H^{k+1}(G, A) \simeq H^{k+q+1}(G, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{k+q+1}(\mathbb{Z}, A) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_{k+q}, A)$$

για κάθε $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$.

Δηλαδή, έχουμε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_k, -) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_{k+q}, -)$ και άρα, οι συναρτητές $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_k, -)$ και $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_{k+q}, -)$ είναι φυσικά ισόμορφοι. Από Θεώρημα 3.7, υπάρχουν $P, Q \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα και ένας ισομορφισμός σ ώστε $R_k \oplus P \xrightarrow{\sigma} R_{k+q} \oplus Q$.

Από την προβολική επίλυση $\mathbf{P}$ προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$0 \rightarrow R_{k+q} \xrightarrow{\beta_{k+q}} P_{k+q-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_k \xrightarrow{\partial_k} P_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (5.1)$$

$\begin{array}{ccc} & \searrow a_k & \nearrow \beta_k \\ & R_k & \end{array}$

Έχουμε, τώρα, τις β.α.α.:

$$0 \rightarrow R_{k+q} \rightarrow P_{k+q-1} \rightarrow R_{k+q-1} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow Q \rightarrow Q \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow R_{k+1} \rightarrow P_k \rightarrow R_k \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow 0 \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow R_k \rightarrow P_{k-1} \rightarrow R_{k-1} \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow P \rightarrow P \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

Συνεπώς, προκύπτουν οι εξής ακριβείς ακολουθίες:

$$0 \rightarrow R_{k+q} \oplus Q \rightarrow P_{k+q-1} \oplus Q \rightarrow R_{k+q-1} \rightarrow 0$$

και

$$0 \rightarrow R_{k+1} \rightarrow P_k \oplus P \rightarrow R_k \oplus P \rightarrow P_{k-1} \oplus P \rightarrow R_{k-1} \rightarrow 0$$

“Κολλώντας” τις παραπάνω ακολουθίες στην (5.1), έχουμε την

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
0 & \rightarrow & R_{k+q} \oplus Q & \rightarrow & P_{k+q-1} \oplus Q & & P_{k+q-2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & P_{k+1} & & P_k \oplus P & & P_{k-1} \oplus P & & P_{k-2} & \rightarrow & \dots \\
& & & & \searrow & & \nearrow & & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\
& & & & & & R_{k+q-1} & & & & & & R_{k+1} & & R_k \oplus P & & R_{k-1} & & & & \\
& & & & \nearrow & & \searrow & & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow \\
& & & & 0 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

Θέτουμε: $R'_{k+q} = R_{k+q} \oplus Q$, $P'_{k+q-1} = P_{k+q-1} \oplus Q$ και $P'_i = P_i$ για $i = k+1, k+2, \dots, k+q-2$.

Θέτουμε, επίσης:

$$P'_k = P_k \oplus P, \quad R'_k = R_k \oplus P, \quad P'_{k-1} = P_{k-1} \oplus P, \quad R'_{k-1} = R_{k-1} \text{ and } P'_j = P_j \text{ for } j = 0, 1, \dots, k-2.$$

Έτσι, προκύπτει η ακριβής ακολουθία

$$0 \rightarrow R'_{k+q} \rightarrow P'_{k+q-1} \rightarrow \dots \rightarrow P'_{k+1} \rightarrow P'_k \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \searrow \quad \nearrow \end{array} \begin{matrix} P'_{k-1} \\ R'_k \end{matrix} \rightarrow P'_k \rightarrow \dots \rightarrow P'_1 \rightarrow P'_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (5.2)$$

Στην (5.2), τα P'_i είναι προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα για κάθε $i = 0, 1, \dots, k + q - 1$ και

$R'_{k+q} = R_{k+q} \oplus Q \stackrel{\sigma}{\simeq} R_k \oplus P = R'_k$. Συνεπώς, η G έχει περιοδική προβολική επίλυση με περίοδο q μετά από k -βήματα. $\square$

Παρατήρηση 5.2 Αποδεικνύεται ότι αν η G είναι άπειρη ομάδα με περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα, τότε $k \geq 1$ [3, Proposition 1.4]. Για τη συνέχεια, όταν αναφερόμαστε σε μία ομάδα G με περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα, θα εννοούμε $k \geq 1$.

5.2 Περιοδική συνομολογία μετά από k -βήματα και πλήρεις επιλύσεις

Ορισμός 5.3 Έστω G ομάδα και $n \in \mathbb{N}^*$. Μία πλήρης επίλυση της G με δείκτη σύμπτωσης n είναι μία διπλά άπειρη ακριβής ακολουθία προβολικών $\mathbb{Z}G$ -προτύπων η οποία συμπίπτει με προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο από ένα σημείο και μετά.

Δηλαδή, πλήρης επίλυση της G με δείκτη σύμπτωσης n είναι μια ακριβής ακολουθία:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & F_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & F_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} F_{-1} \xrightarrow{\partial_{-1}} \dots \\
 & & & \nearrow \partial_n & & & \\
 \dots \rightarrow F_{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & F_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & F_n & & \\
 & & & \searrow d_n & & & \\
 & & & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & P_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

όπου F_i και P_j είναι προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$ και, ασφαλώς, το $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Δηλαδή, έχουμε ότι: $\text{Im } \partial_i = \ker \partial_{i-1}$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, $\text{Im } d_j = \ker d_{j-1}$ για κάθε $j = 2, 3, \dots, n-1$, $\text{Im } d_1 = \ker \varepsilon$ και $\text{Im } \partial_{n+1} = \ker d_n$. ■

Θεώρημα 5.3 [9, Proposition 3.1] Έστω G ομάδα με περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα. Τότε, υπάρχει πλήρης επίλυση της G με δείκτη σύμπτωσης k .

Απόδειξη.

Καθώς η G έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα, από το Θεώρημα 5.1, έπεται ότι υπάρχει περιοδική προβολική επίλυση με περίοδο q μετά από k -βήματα της G , δηλαδή μια ακριβής ακολουθία

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 0 \rightarrow R_{k+q} \rightarrow P_{k+q-1} & \xrightarrow{d_{k+q-1}} & P_{k+q-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \\
 & & & \searrow & \nearrow & & & & \\
 & & & & R_k & & & &
 \end{array}$$

όπου P_i είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για $i = 0, 1, \dots, k+q-1$ και $R_{k+q} \simeq R_k$.

Από την ακολουθία αυτή προκύπτει η

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & P_{k+q-1} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k+q-1} \longrightarrow \dots \\
 & & & & \nearrow & & \uparrow \\
 \dots \longrightarrow P_k & \longrightarrow & P_{k+q-1} & \longrightarrow & \dots \longrightarrow P_k & \longrightarrow & R_k \longrightarrow 0 \\
 & \searrow & \nearrow & & \nearrow & & \searrow \\
 & & R_k \simeq R_{k+q} & & 0 & & P_{k-1} \longrightarrow P_{k-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} F_{-1} \longrightarrow \dots \\
 & & & & \nearrow \partial_k & & \\
 \dots \longrightarrow F_{k+2} & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & & \\
 & & & & \searrow d_k & & \\
 & & & & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

όπου, για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, αν $i = k + rq + v$ με $r \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq v < q$, τότε $F_i = P_{k+v}$ και $\partial_i = d_{k+v}$.

Η τελευταία αποτελεί πλήρη προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο με δείκτη σύμπτωσης k . Συνεπώς, η G έχει πλήρη επίλυση με δείκτη σύμπτωσης k . $\square$

Πρόταση 5.4 [10, Lemma 4.7] Έστω G ομάδα με περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα. Τότε $\text{findim } \mathbb{Z}G \leq k + 1$.

Απόδειξη. Έστω $K \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ με $K|_{\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} K = m < \infty$.

Αφού η G έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα, από το Θεώρημα 5.3, έχουμε ότι υπάρχει πλήρης επίλυση της G με δείκτη σύμπτωσης k . Έστω, λοιπόν, η πλήρης επίλυση

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} F_{-1} \longrightarrow \dots \\
 & & & & \nearrow \partial_k & & \\
 \dots \longrightarrow F_{k+2} & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & & \\
 & & & & \searrow d_k & & \\
 & & & & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο η οποία, ισοδύναμα, γράφεται

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\partial_0} & F_{-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & & & & & & & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (5.3)$$

όπου $d_i = \partial_i$ για κάθε $i \geq k+1$.

Θέτουμε $L_{i+1} = \text{Im } d_{i+1} = \ker d_i$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$, $L_1 = \text{Im } d_1 = \ker \varepsilon$ και $R_{j+1} = \text{Im } \partial_{j+1} = \ker \partial_j$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$. Προφανώς, $L_i = R_i$ για κάθε $i \geq k+1$. Επιπλέον, $L_k = R_k$.

Πράγματι, από την ακρίβεια της (5.3) και το 1ο Θεώρημα ισομορφισμών προτύπων, είναι

$$R_k = \text{Im } \partial_k \simeq F_k / \ker \partial_k = F_k / \text{Im } \partial_{k+1} = F_k / \text{Im } d_{k+1} = F_k / \ker d_k \simeq \text{Im } d_k = L_k \implies R_k = L_k$$

Είναι $L_{i+1} \leq P_i$, $R_{j+1} \leq F_j$ και P_i, F_j είναι προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα για κάθε $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Από Πρόταση 1.16(i), $P_i|_{\mathbb{Z}}$, $F_j|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερα $\mathbb{Z}$ -πρότυπα και έτσι $L_{i+1}|_{\mathbb{Z}}$ και $R_{j+1}|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερα $\mathbb{Z}$ -πρότυπα ως υποπρότυπα ελεύθερων $\mathbb{Z}$ -προτύπων για κάθε $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Αφού $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} K = m$ και L_{i+1} , R_{j+1} ελεύθερα $\mathbb{Z}$ -πρότυπα, από Πρόταση 2.5(iii), έχουμε ότι

$$\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \vec{L}_{i+1} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{K} \leq m \text{ και } \text{pd}_{\mathbb{Z}G} \vec{R}_{j+1} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{K} \leq m \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } j \in \mathbb{Z}.$$

Θέτουμε $F'_j = \vec{F}_j \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{K}$, $\partial'_j = \partial_j \otimes id_K$, $R'_j = \vec{R}_j \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{K}$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$ και $P'_{i-1} = \vec{P}_{i-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{K}$, $d'_i = d_i \otimes id_K$, $L'_i = \vec{L}_i \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{K}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}^*$.

Είναι, λοιπόν, $L'_i = R'_i$ για κάθε $i \geq k$ και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} L'_i \leq m$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Επίσης, το $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και έτσι $\overset{\rightarrow}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{K} \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \vec{K} \simeq K$.

Συνεπώς, η (5.3) γίνεται

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & F'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & F'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & F'_{k-1} & \xrightarrow{\partial'_{k-1}} & F'_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & F'_0 & \xrightarrow{\partial'_0} & F'_{-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & & & & & & & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & F'_{k+1} & \xrightarrow{d'_{k+1}} & F'_k & \xrightarrow{d'_k} & P'_{k-1} & \xrightarrow{d'_{k-1}} & P'_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P'_1 & \xrightarrow{d'_1} & P'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & K & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (5.4)$$

Η κάτω γραμμή της (5.4) αποτελεί $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του K .

Έστω $A \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$. Έχουμε:

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{k+1}(K, A) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(L'_k, A) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R'_k, A) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(R'_{k-m}, A).$$

Καθώς $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} R'_j \leq m$ για κάθε $j \in \mathbb{Z}$, έχουμε ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{m+1}(R'_{k-m}, A) = 0$ και έτσι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{k+1}(K, A) = 0$.

Συνεπώς, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} K \leq k$.

Τώρα, αν $M \in \mathbb{Z}G\text{-Mod}$ με $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M < \infty$, τότε, από το Λήμμα 1.22, υπάρχει $K \in \mathbb{Z}G\text{-Mod}$ με $K|_{\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(M, -) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(K, -)$ για κάθε $i > 0$. Έτσι, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} M \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} K + 1 \leq k + 1$, δηλαδή $\text{findim } \mathbb{Z}G \leq k + 1$. $\square$

Παρατήρηση 5.5 Στην απόδειξη της Πρότασης 5.4, η υπόθεση της περιοδικής συνομολογίας χρησιμοποιήθηκε μόνο για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη πλήρους επίλυσης της G . Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι αν η G έχει πλήρη επίλυση με δείκτη σύμπτωσης n , τότε $\text{findim } \mathbb{Z}G \leq n + 1$.

5.3 Περιοδικότητα στη συνομολογία μέσω cup product

Θεώρημα 5.6 [3, Theorem 1.2] Έστω $A, B \in \mathbb{Z}G\text{-Mod}$, $q \in \mathbb{N}$ και $g \in \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^q(A, B)$.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (i) Υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε το γινόμενο Yoneda $- \cup g : \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(B, -) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+q}(A, -)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $i > k$.
- (ii) Αν X είναι το pushout του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} R_q & \hookrightarrow & P_{q-1} \\ f \downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

όπου R_q είναι ο q -στος πυρήνας μιας προβολικής επίλυσης του A και $[f] = g$, τότε υπάρχει μια q -επέκταση

$$0 \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow P_{q-2} \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

με P_j προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα για $j = 0, 1, \dots, q - 2$ και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$.

Απόδειξη.

Θεωρούμε μία $\mathbb{Z}G$ -προβολική επίλυση του A

$$\dots \rightarrow P_i \xrightarrow{\partial_i} P_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \dots \rightarrow P_q \xrightarrow{\partial_q} P_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0$$

και παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \rightarrow R_q \xrightarrow{\beta_q} P_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} P_{q-2} \xrightarrow{\partial_{q-2}} \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \rightarrow 0 \quad (5.5)$$

όπου $R_q = \text{Im } \partial_q = \ker \partial_{q-1}$. Αφού $g \in \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^q(A, B)$, υπάρχει $f : R_q \rightarrow B$ ώστε $g = [f]$.

Θεωρούμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & R_q & \xrightarrow{\beta_q} & P_{q-1} & \xrightarrow{\partial_{q-1}} & P_{q-2} & \xrightarrow{\partial_{q-2}} & \dots & \rightarrow & P_1 & \xrightarrow{\partial_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & & & & & & & & & & & & & \\ & & B & & & & & & & & & & & & & & \end{array} \quad (5.6)$$

και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\text{Im } f = B$, δηλαδή ότι η f είναι επί.

Πράγματι, αν η f δεν είναι επί, τότε θεωρούμε F ελεύθερο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ώστε $F \xrightarrow{\eta} B \rightarrow 0$ να είναι $\mathbb{Z}G$ -ακριβής ακολουθία. Θεωρούμε τις εξής β.α.α.

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{\text{id}_F} F \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

και

$$0 \rightarrow R_q \xrightarrow{\beta_q} P_{q-1} \xrightarrow{a_q} R_{q-1} \rightarrow 0$$

όπου, $R_q = \ker \partial_{q-1} = \text{Im } \partial_q$ και $R_{q-1} = \ker \partial_{q-2} = \text{Im } \partial_{q-1}$. Αυτές επάγουν τη β.α.α.

$$0 \rightarrow F \oplus R_q \xrightarrow{\text{id}_F \oplus \beta_q} F \oplus P_{q-1} \xrightarrow{a'_q} R_{q-1} \rightarrow 0 \quad (5.7)$$

όπου $(\text{id}_F \oplus \beta_q)(x, y) = (\text{id}_F(x), \beta_q(y)) = (x, \beta_q(y))$ για κάθε $(x, y) \in F \oplus R_q$ και $a'_q(x, y) = a_q(x)$ για κάθε $(x, y) \in F \oplus P_{q-1}$. Αφού $\ker \beta_q = 0$, $\text{Im } \beta_q = \ker a_q$ και $\text{Im } a_q = R_{q-1}$, έχουμε ότι

$$\ker \text{id}_F \oplus \beta_q = 0, \text{ Im } \text{id}_F \oplus \beta_q = \ker a'_q \text{ και } \text{Im } a'_q = R_{q-1}.$$

Συνεπώς, η (5.7) είναι β.α.α. $\mathbb{Z}G$ -προτύπων.

Τώρα, ορίζουμε την $\tilde{f} : F \oplus R_q \rightarrow B$ με $\tilde{f}(x, y) = \eta(x)$ για $(x, y) \in F \oplus R_q$.

Προφανώς, η $\tilde{f}$ είναι επί. Επιπλέον, το F είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, διότι είναι ελεύθερο. Έτσι, το $F \oplus P_{q-1}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, ως ευθύ άθροισμα προβολικών. Συνεπώς, συνδυάζοντας το διάγραμμα (5.6) και τη β.α.α. (5.7), έχουμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & F \oplus R_q & \longrightarrow & F \oplus P_{q-1} & \longrightarrow & P_{q-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tilde{f} & & & & & & & & & & & & & & \\ & & B & & & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

με $F \oplus P_{q-1}, P_{q-2}, \dots, P_1, P_0$ προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα και $\tilde{f}$ επί.

Τώρα, το (5.6), λόγω του Πορίσματος 1.9(i) επάγει το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & R_q & \xrightarrow{\beta_q} & P_{q-1} & \longrightarrow & P_{q-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow \mu & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{i_2} & X & \longrightarrow & P_{q-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (5.8)$$

όπου το X είναι το pushout του διαγράμματος

$$\begin{array}{ccc} R_q & \xrightarrow{\beta_q} & P_{q-1} \\ \downarrow f & & \\ B & & \end{array}$$

Από Πρόταση 1.5(iii), αφού η f είναι επιμορφισμός, έπεται ότι και η μ είναι επιμορφισμός. Αφού (X, μ, i_2) είναι το pushout των β_q, f και β_q είναι μονομορφισμός, από Πρόταση 1.13(i), έπεται ότι η (R_q, β_q, f) είναι το pullback των μ και i_2 . Έτσι, από Πρόταση 1.6(iv), έχουμε ότι αν $K = \ker f$ και $L = \ker \mu$, τότε $K \simeq L$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το διάγραμμα (5.8), προκύπτει το ακόλουθο μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
& & 0 & & 0 & & & & & & & & & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & & & \\
& & K & & L & & & & & & & & & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & & & \\
0 & \longrightarrow & R_q & \longrightarrow & P_{q-1} & \longrightarrow & P_{q-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f & & \downarrow \mu & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & X & \longrightarrow & P_{q-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & & & \\
& & 0 & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array} \tag{5.9}$$

Έχοντας κατασκευάσει το διάγραμμα (5.9), προχωρούμε με την απόδειξη.

(i) $\implies$ (ii): Έστω $E \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ και έστω ότι υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε το γινόμενο Yoneda $-\cup g : \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(B, E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+q}(A, E)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $i > k$.

Από το διάγραμμα (5.9), έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R_q \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0,$$

Λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή Ext ακολουθία στην 1η μεταβλητή, έχουμε την

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(B, E) \xrightarrow{f^*} \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(R_q, E) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+q}(A, E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(K, E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(B, E) \rightarrow \dots$$

Για $i > k$, η f^* είναι ισομορφισμός και έτσι, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(K, E) = 0$ για κάθε $i > k$.

Συνεπώς, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} K < \infty$ και αφού $K \simeq L$, συνάγουμε ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} L < \infty$.

Τότε, από το διάγραμμα (5.9), έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P_{q-1} \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή Ext ακολουθία στην 1η μεταβλητή, παίρνουμε την

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(L, E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(X, E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(P_{q-1}, E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(L, E) \rightarrow \dots \tag{5.10}$$

Για $i > \text{pd}_{\mathbb{Z}G} L$, έχουμε ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(L, E) = 0$. Επίσης, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(P_{q-1}, E) = 0$, διότι P_{q-1} είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Άρα, από την (5.10) προκύπτει ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(X, E) = 0$ και άρα $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$. Έτσι, από το διάγραμμα (5.9), παίρνουμε την q -επέκταση

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow P_{q-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

με P_j προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για $j = 0, 1, \dots, q-2$ και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$.

(ii) $\implies$ (i): Έστω μια q -επέκταση

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow X \longrightarrow P_{q-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

με P_j προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για $j = 0, 1, \dots, q-2$ και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$.

Από το διάγραμμα (5.9), έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P_{q-1} \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

Λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}(_, E)$ ακολουθία, παίρνουμε την

$$\dots \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(X, E) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(P_{q-1}, E) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(L, E) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(X, E) \longrightarrow \dots$$

Αφού P_{q-1} είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, για $i > \text{pd}_{\mathbb{Z}G} X$, είναι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(P_{q-1}, E) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(X, E) = 0$ και έτσι, έπεται ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(L, E) = 0$. Δηλαδή, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} L < \infty$ και αφού $L \simeq K$, προκύπτει ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} K < \infty$. Τότε, από το διάγραμμα (5.9), έχουμε τη β.α.α

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow R_q \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$$

Λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή Ext ακολουθία στην 1η μεταβλητή, έχουμε

$$\dots \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i-1}(K, E) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(B, E) \xrightarrow{f^*} \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(R_q, E) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(K, E) \longrightarrow \dots$$

Για $i \geq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} K + 1$, έχουμε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i-1}(K, E) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(K, E) = 0$.

Συνεπώς, προκύπτει ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(B, E) \xrightarrow{f^*} \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(R_q, E)$, δηλαδή η $f^* : \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(B, E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(R_q, E)$ είναι ισομορφισμός. Αλλά, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(R_q, E) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+q}(A, E)$ και $[f] = g$.

Συνεπώς, το γινόμενο Yoneda $— \cup g : \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(B, E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+q}(A, E)$ είναι ισομορφισμός για κάθε $i > \text{pd}_{\mathbb{Z}G} K$. □

Το Θεώρημα 5.7 μας δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι ισομορφισμοί μεταξύ των συναρτητών $H^i(G, —)$ και $H^{i+q}(G, —)$ να δίνονται μέσω cup product με ένα στοιχείο $g \in H^q(G, \mathbb{Z})$ για μια ομάδα G με περιοδική προβολική επίλυση με περίοδο q μετά από k -βήματα.

Θεώρημα 5.7 [9, Theorem 3.2] Έστω G ομάδα με περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (i) $\text{silp } \mathbb{Z}G < \infty$
- (ii) Υπάρχει μια $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, $\mathbb{Z}G$ -ακριβής ακολουθία $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow X$ με $X|_{\mathbb{Z}}$ ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$.
- (iii) $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$

Απόδειξη.

(i) $\implies$ (ii) Καθώς η G έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα, από Θεώρημα 5.3, έχουμε ότι υπάρχει πλήρης επίλυση της G με δείκτη σύμπτωσης k .

Δηλαδή, υπάρχει μια ακολουθία

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} & \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} F_{-1} \rightarrow \dots \\
 & & \nearrow \partial_k & & & & \\
 \dots \rightarrow F_{k+2} & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & & \\
 & & \searrow d_k & & & & \\
 & & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} & \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

την οποία, θέτοντας $R_i = \ker \partial_{i-1} = \text{Im } \partial_i$ και $\beta_i \circ a_i = \partial_i$ για $i \in \mathbb{Z}$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\partial_0} & F_{-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \searrow a_k & & \nearrow \beta_k & & & & & & & & & & \\ & & & & & & R_k & & & & & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ορίζουμε τον ομομορφισμό $f_{k-1} : R_k \rightarrow P_{k-1}$ ως εξής:

Έστω $x \in R_k = \text{Im } \partial_k$. Τότε υπάρχει $y \in F_k$ ώστε $a_k(y) = x$. Ορίζουμε $f_{k-1}(x) = d_k(y)$.

Η f_{k-1} είναι καλά ορισμένη:

Έστω $y_1, y_2 \in F_k$ με $a_k(y_1) = a_k(y_2)$. Τότε:

$$\begin{aligned} a_k(y_1) - a_k(y_2) = 0 &\iff a_k(y_1 - y_2) = 0 \iff \beta_k(a_k(y_1 - y_2)) = 0 \iff \\ &\iff (\beta_k \circ a_k)(y_1 - y_2) = 0 \iff \partial_k(y_1 - y_2) = 0 \iff y_1 - y_2 \in \ker \partial_k = \text{Im } \partial_{k+1}. \end{aligned}$$

Έτσι, υπάρχει $z \in F_{k+1}$ ώστε $\partial_{k+1}(z) = y_1 - y_2 \implies d_k(\partial_{k+1}(z)) = d_k(y_1 - y_2) \implies d_k(y_1) - d_k(y_2) = 0 \implies d_k(y_1) = d_k(y_2)$. Έτσι, η f_{k-1} είναι καλά ορισμένη.

Επίσης, αν $a_k(y) = x \implies f_{k-1}(a_k(y)) = f_{k-1}(x) = d_k(y) \implies (f_{k-1} \circ a_k)(y) = d_k(y)$,

δηλαδή, $f_{k-1} \circ a_k = d_k$.

Άρα, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} \\ \parallel & & \parallel & \searrow a_k & \nearrow \beta_k \\ & & & R_k & \\ & & & \searrow f_{k-1} & \\ F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} \end{array}$$

Από υπόθεση, $\text{silp } \mathbb{Z}G < \infty$ και άρα η f_{k-1} μπορεί να επεκταθεί σε $\tilde{f}_{k-1} : F_{k-1} \rightarrow P_{k-1}$ ώστε $\tilde{f}_{k-1} \circ \partial_k = d_k$ και $\tilde{f}_{k-1}|_{R_k} = f_{k-1}$ (δηλαδή, $\tilde{f}_{k-1} \circ \beta_k = f_{k-1}$).

Πράγματι, έστω $\text{silp } \mathbb{Z}G = n < \infty$. Θεωρούμε τη β.α.α

$$0 \longrightarrow R_k \xrightarrow{\beta_k} F_{k-1} \xrightarrow{a_{k-1}} R_{k-1} \longrightarrow 0$$

και παίρνουμε τη μακρά ακριβή $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}(-, P_{k-1})$ ακολουθία

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_{k-1}, P_{k-1}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_{k-1}, P_{k-1}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_k, P_{k-1}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_{k-1}, P_{k-1}) \rightarrow \dots$$

Αλλά, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_{k-1}, P_{k-1}) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(R_{k-n-1}, P_{k-1})$ και αφού P_{k-1} είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και $\text{silp } \mathbb{Z}G = n$, έπεται ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{n+1}(R_{k-n-1}, P_{k-1}) = 0$, δηλαδή $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_{k-1}, P_{k-1}) = 0$.

Συνεπώς, η παραπάνω γίνεται

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_{k-1}, P_{k-1}) \xrightarrow{a_{k-1}^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_{k-1}, P_{k-1}) \xrightarrow{\beta_k^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_k, P_{k-1}) \rightarrow 0$$

Δηλαδή, η $\beta_k^* : \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_{k-1}, P_{k-1}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_k, P_{k-1})$ είναι επί. Έτσι, για την $f_{k-1} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_k, P_{k-1})$, υπάρχει $\tilde{f}_{k-1} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_{k-1}, P_{k-1})$ ώστε $\beta_{k-1}^*(\tilde{f}_{k-1}) = f_{k-1} \iff \tilde{f}_{k-1} \circ \beta_{k-1} = f_{k-1}$.

Άρα, η f_{k-1} επεκτείνεται σε $\tilde{f}_{k-1} : F_{k-1} \rightarrow P_{k-1}$ με $\tilde{f}_{k-1}|_{R_k} = f_{k-1}$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι:

$$\tilde{f}_{k-1} \circ \partial_k = \tilde{f}_{k-1} \circ (\beta_k \circ a_k) = (\tilde{f}_{k-1} \circ \beta_k) \circ a_k = f_{k-1} \circ a_k = d_k, \text{ δηλαδή, } \tilde{f}_{k-1} \circ \partial_k = d_k.$$

Έτσι, προκύπτει το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} \\ \parallel & & \parallel & \searrow a_k & \nearrow \beta_k \\ & & & R_k & \\ & & & \searrow f_{k-1} & \downarrow \tilde{f}_{k-1} \\ F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} \end{array}$$

Επιστρέφοντας στην πλήρη επίλυση, αυτή γίνεται:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\partial_0} & F_{-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & \searrow a_k & \nearrow \beta_k & & \downarrow \tilde{f}_{k-1} & & & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Ορίζουμε, τώρα, $f_{k-2} : R_{k-1} \rightarrow P_{k-2}$ ως εξής:

Έστω $x \in R_{k-1} = \text{Im } \partial_{k-1}$. Τότε υπάρχει $y \in F_{k-1}$ ώστε $a_{k-1}(y) = x$.

Ορίζουμε $f_{k-2}(x) = (d_{k-1} \circ \tilde{f}_{k-1})(y)$. Η f_{k-2} είναι καλά ορισμένη:

Έστω $y_1, y_2 \in F_{k-1}$ ώστε $a_{k-1}(y_1) = a_{k-1}(y_2)$. Τότε:

$$\begin{aligned} a_{k-1}(y_1) = a_{k-1}(y_2) &\iff a_{k-1}(y_1 - y_2) = 0 \iff \beta_{k-1}(a_{k-1}(y_1 - y_2)) = 0 \iff \\ &\iff (\beta_{k-1} \circ a_{k-1})(y_1 - y_2) = 0 \iff \partial_{k-1}(y_1 - y_2) = 0 \iff y_1 - y_2 \in \ker \partial_{k-1} = \text{Im } \partial_k. \end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει $z \in F_k$ ώστε $\partial_k(z) = y_1 - y_2 \implies \tilde{f}_{k-1}(\partial_k(z)) = \tilde{f}_{k-1}(y_1 - y_2)$

Λόγω μεταθετικότητας του διαγράμματος, έχουμε $(\tilde{f}_{k-1} \circ \partial_k)(z) = d_k(z)$. Άρα:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{k-1}(\partial_k(z)) &= \tilde{f}_{k-1}(y_1 - y_2) \implies d_k(z) = \tilde{f}_{k-1}(y_1 - y_2) \implies \\ &\implies d_{k-1}(d_k(z)) = d_{k-1}(\tilde{f}_{k-1}(y_1 - y_2)) \implies d_{k-1}(\tilde{f}_{k-1}(y_1 - y_2)) = 0 \implies \\ &\implies d_{k-1}(\tilde{f}_{k-1}(y_1)) - d_{k-1}(\tilde{f}_{k-1}(y_2)) = 0 \implies d_{k-1}(\tilde{f}_{k-1}(y_1)) = d_{k-1}(\tilde{f}_{k-1}(y_2)) \implies \\ &\implies (d_{k-1} \circ \tilde{f}_{k-1})(y_1) = (d_{k-1} \circ \tilde{f}_{k-1})(y_2) \text{ και άρα η } f_{k-2} \text{ είναι καλά ορισμένη.} \end{aligned}$$

Επίσης, αν $a_{k-1}(y) = x \implies f_{k-2}(a_{k-1}(y)) = f_{k-2}(x) = (d_{k-1} \circ \tilde{f}_{k-1})(y) \implies$

$$\implies (f_{k-2} \circ a_{k-1})(y) = (d_{k-1} \circ \tilde{f}_{k-1})(y), \text{ για κάθε } y \in F_{k-1}, \text{ δηλαδή } f_{k-2} \circ a_{k-1} = d_{k-1} \circ \tilde{f}_{k-1}.$$

Άρα, έχουμε το εξής μεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{array}{ccccccc} F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} \\ & \parallel & & \parallel & \searrow \tilde{f}_{k-1} & \nearrow \beta_{k-1} & \\ & & & & & R_{k-1} & \\ & & & & & \nearrow f_{k-2} & \\ F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} \end{array}$$

Από υπόθεση, $\text{silp } G < \infty$ και όπως παραπάνω, η f_{k-2} μπορεί να επεκταθεί σε $\tilde{f}_{k-2} : F_{k-2} \rightarrow P_{k-2}$ ώστε $\tilde{f}_{k-2} \circ \partial_{k-1} = d_{k-1} \circ \tilde{f}_{k-1}$ και $\tilde{f}_{k-2}|_{R_{k-1}} = f_{k-2}$, δηλαδή $\tilde{f}_{k-2} \circ \beta_{k-1} = f_{k-2}$.

Έτσι, η πλήρης επίλυση γίνεται

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\partial_0} & F_{-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \tilde{f}_{k-1} & \searrow a_{k-1} & \nearrow \beta_{k-1} & & & & & & & & \downarrow \tilde{f}_{k-2} & & \\ & & & & & & & & R_{k-1} & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \nearrow f_{k-2} & & & & & & & & & & \\ \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζονται $\tilde{f}_{k-3}, \tilde{f}_{k-4}, \dots, \tilde{f}_1, \tilde{f}_0$ και f και το μεταθετικό

διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\partial_0} & F_{-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \tilde{f}_{k-1} & & \downarrow \tilde{f}_{k-2} & & & & \downarrow \tilde{f}_1 & & \downarrow \tilde{f}_0 & \searrow a_0 & & & \\
 \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & \downarrow f & &
 \end{array}$$

Τότε, $f : R_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ και άρα, $[f] \in \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_{-1}, \mathbb{Z})$. Επίσης, είναι προφανές ότι το cup product $-\cup g : \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, -) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(R_{-1}, -)$, όπου $g = [f]$, είναι ισομορφισμός για κάθε $i > k$.

Από Θεώρημα 5.6, έπεται ότι υπάρχει μια 1-επέκταση $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow X \rightarrow R_{-1} \rightarrow 0$

με $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$. Αλλά $R_{-1} = \text{Im } \partial_{-1} = \ker \partial_{-2} \leq F_{-2}$, δηλαδή $R_{-1} \leq F_{-2}$.

Επιπλέον, F_{-2} είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και άρα το $F_{-2}|_{\mathbb{Z}}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (Πόρισμα 1.19(i)). Αυτό, όμως, σημαίνει ότι $F_{-2}|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο και έτσι, το $R_{-1}|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, ως υποπρότυπο ελεύθερου $\mathbb{Z}$ -προτύπου. Συνεπώς, το $R_{-1}|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο και άρα προβολικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο. Έτσι, έχουμε τη β.α.α.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow X \rightarrow R_{-1} \rightarrow 0 \quad (5.11)$$

και $R_{-1}|_{\mathbb{Z}}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο. Αυτό σημαίνει ότι η (5.11) είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη και έτσι, προκύπτει ότι $X \simeq \mathbb{Z} \oplus R_{-1}$, ως $\mathbb{Z}$ -πρότυπα. Τότε το X είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο ως ευθύ άθροισμα ελεύθερων $\mathbb{Z}$ -προτύπων. Συνεπώς, έχουμε την ακολουθία

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow X$$

η οποία είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, $\mathbb{Z}G$ -ακριβής, με $X|_{\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$.

(ii) $\implies$ (iii) Έστω η ακολουθία $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow X$ που είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, $\mathbb{Z}G$ -ακριβής με $X|_{\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$. Έχουμε, τότε, τη $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη β.α.α.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (5.12)$$

Έστω $I \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ εμφυτευτικό. Από την (5.12) παίρνουμε, τη $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, $\mathbb{Z}G$ -ακριβή β.α.α.

$$0 \longrightarrow \tilde{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\sim}{\mathbb{Z}} \longrightarrow \tilde{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X} \longrightarrow \tilde{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{M} \longrightarrow 0 \quad (5.13)$$

Αλλά, $\tilde{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\sim}{\mathbb{Z}} \simeq \tilde{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \simeq I$, αφού $\mathbb{Z}$ είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Άρα, η (5.13) γίνεται

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \tilde{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X} \longrightarrow \tilde{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{M} \longrightarrow 0 \quad (5.14)$$

και αφού το I είναι εμφυτευτικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, συνάγουμε ότι η (5.14) είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη.

Έστω, τώρα, P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο με $P \longrightarrow I \longrightarrow 0$ ακριβή ακολουθία. Θεωρούμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow I \longrightarrow 0$$

Αφού το $X|_{\mathbb{Z}}$ είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο, έπεται ότι είναι $\mathbb{Z}$ -επίπεδο και έτσι προκύπτει η $\mathbb{Z}G$ -ακριβής β.α.α.

$$0 \longrightarrow \tilde{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X} \longrightarrow \tilde{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X} \longrightarrow \tilde{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X} \longrightarrow 0 \quad (5.15)$$

Επειδή το P είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και το $X|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, από Πρόταση 2.5(i) έπεται ότι το $\tilde{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο. Επίσης, $K \leq P$ και από Πόρισμα 1.19(i), το $P|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (αφού το P είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο). Άρα, το $K|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

Συνεπώς, αφού $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$ και $K|_{\mathbb{Z}}$ είναι $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο, από την Πρόταση 2.5(iii), έχουμε ότι $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \tilde{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X} \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$. Αν $E \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$, τότε, από τη β.α.α. (5.15), θεωρώντας τη μακρά ακριβή $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}(_, E)$ ακολουθία, παίρνουμε την

$$\dots \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\tilde{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X}, E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(\tilde{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X}, E) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(\tilde{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X}, E) \rightarrow \dots$$

Για $i \geq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} \tilde{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X} + 1$, είναι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\tilde{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X}, E) = 0$ και αφού το $\tilde{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, είναι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(\tilde{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X}, E) = 0$. Συνεπώς, από την παραπάνω ακολουθία, προκύπτει ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(\tilde{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X}, E) = 0$ για κάθε $i \geq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} \tilde{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \tilde{X} + 1$.

Άρα, $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\circ}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{X} \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\circ}{K} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{X} + 1 \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} X + 1 < \infty$, δηλαδή $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\circ}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{X} < \infty$.

Επανερχόμαστε, τώρα, στη β.α.α. (5.14), η οποία είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη και $\mathbb{Z}G$ -ακριβής.

Καθώς η (5.14) είναι $\mathbb{Z}G$ -διασπώμενη, έχουμε ότι $\overset{\circ}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{X} \simeq I \oplus (\overset{\circ}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{M})$ ως $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα.

Δηλαδή, το I είναι ευθύς προσθετέος του $\overset{\circ}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{X}$ και από Πρόταση 1.21 έχουμε

$$\text{pd}_{\mathbb{Z}G} I \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} \overset{\circ}{I} \otimes_{\mathbb{Z}} \overset{\circ}{X} \leq \text{pd}_{\mathbb{Z}G} X + 1 < \infty.$$

Συνεπώς, αν $I \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ εμφυτευτικό, τότε $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} I < \infty$ και έτσι έχουμε $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$.

(iii) $\implies$ (i) Έχει αποδειχθεί στο Θεώρημα 4.5. □

Σχόλιο 5.8 Έστω G ομάδα με περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) $\text{silp } \mathbb{Z}G < \infty$

(ii) $H^i(G, P) = 0$ για κάθε $i > k$ και για κάθε P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.

Απόδειξη.

(i) $\implies$ (ii) Έστω ότι $\text{silp } \mathbb{Z}G = n < \infty$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$.

Τότε, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(A, P) = 0$ για κάθε A $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και $i > n$. Για $A = \mathbb{Z}$

και $P \in {}_{\mathbb{Z}G}\text{Mod}$ προβολικό, παίρνουμε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, P) = 0$ για κάθε $i > n$.

Καθώς η G έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα, έχουμε ότι οι συναρτητές

$\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, -)$ και $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+q}(\mathbb{Z}, -)$ είναι φυσικά ισόμορφοι για κάθε $i > k$.

Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, -) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+lq}(\mathbb{Z}, -)$ για κάθε $l \in \mathbb{N}$ και για κάθε $i > k$.

Έστω $l_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $k + l_0q \geq n$. Τότε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+l_0q}(\mathbb{Z}, P) = 0$ για κάθε $i > k$, αφού $k + l_0q \geq n$.

Αλλά $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+l_0q}(\mathbb{Z}, P) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, P)$ και άρα $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, P) = 0$ για κάθε $i > k$.

Συνεπώς, έχουμε ότι $H^i(G, P) = 0$ για κάθε $i > k$ και για κάθε προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο P .

(ii) $\implies$ (i) Έστω ότι $H^i(G, P) = 0$ για κάθε $i > k$. Θεωρούμε την πλήρη επίλυση της G

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\partial_0} & F_{-1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \parallel & & \parallel & & \searrow a_k & & \nearrow \beta_k & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & R_k & & & & & & & & & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

που κατασκευάσαμε στο Θεώρημα 5.3

Αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $R_i = \text{Im } \partial_i = \ker \partial_{i-1}$ και $f_i : R_{i+1} \rightarrow P_i$ ομομορφισμός, τότε υπάρχει ομομορφισμός $\tilde{f}_i : F_i \rightarrow P_i$ ώστε $\tilde{f}_i \circ \partial_{i+1} = d_{i+1}$ για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$. Τότε, η απόδειξη ολοκληρώνεται όπως και στο Θεώρημα 5.7(i) $\implies$ (ii).

Έστω, λοιπόν, $m \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$. Θεωρούμε τη β.α.α

$$0 \longrightarrow R_{m+1} \xrightarrow{\beta_m} F_m \xrightarrow{a_m} R_m \longrightarrow 0$$

και παίρνουμε τη μακρά ακριβή $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}(-, P_m)$ ακολουθία:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_m, P_m) \xrightarrow{a_m^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_m, P_m) \xrightarrow{\beta_m^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_{m+1}, P_m) \xrightarrow{\delta_1} \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_m, P_m) \rightarrow \dots$$

Από τον τρόπο κατασκευής της πλήρους επίλυσης, έχουμε ότι υπάρχουν

$r_m, v_m \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq v_m < q$ ώστε $m = k + r_m q + v_m$ και $F_m = F_{k+v_m}$.

Τότε, έχουμε και $R_m = R_{k+v_m}$.

Είναι $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_m, P_m) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_{k+v_m}, P_m) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{k+v_m+1}(\mathbb{Z}, P_m)$ και προφανώς, $k + v_m + 1 > k$.

Άρα, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{k+v_m+1}(\mathbb{Z}, P_m) = 0$, αφού P_m προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο και $k + v_m + 1 > k$.

Έτσι, έχουμε $\text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^1(R_m, P_m) = 0$ και η ακολουθία γίνεται:

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_m, P_m) \xrightarrow{a_m^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_m, P_m) \xrightarrow{\beta_m^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_{m+1}, P_m) \longrightarrow 0$$

Δηλαδή, για την $f_m \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(R_{m+1}, P_m)$, υπάρχει $\tilde{f}_m \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F_m, P_m)$ ώστε $\beta_m^*(\tilde{f}_m) = f_m$ ή, ισοδύναμα, $\tilde{f}_m \circ \beta_m = f_m$.

Συνεχίζοντας όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.7(i) $\implies$ (ii), κατασκευάζεται μία $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, $\mathbb{Z}G$ -ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow X$ με $X|_{\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$ -ελεύθερο και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$. Από το Θεώρημα 5.7(ii) $\implies$ (iii), και την τελευταία συνθήκη συνάγουμε ότι $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$ και η απόδειξη ολοκληρώνεται από το Θεώρημα 4.5. $\square$

Παρατήρηση 5.9 Το Θεώρημα 5.7 δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση της περιοδικής συνομολογίας μετά από k -βήματα. Πράγματι, έστω G ελεύθερη αβελιανή ομάδα άπειρης διάστασης. Τότε για κάθε P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο ισχύει ότι $H^i(G, P) = 0$ για κάθε $i \geq 0$. Από την άλλη μεριά, η G περιέχει ελεύθερη αβελιανή υποομάδα H αριθμήσιμης διάστασης. Έστω $H = \{x_j\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ μια βάση της H . Θέτουμε $H_j = \langle x_1, x_2, \dots, x_j \rangle$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$. Τότε $\text{cd}_{\mathbb{Z}} H_j = j$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ [11, VIII, 2]. Λόγω της Πρότασης 4.1 έχουμε $j \leq \text{findim } \mathbb{Z}H_j \leq j + 1$. Επιπλέον, $H_j \trianglelefteq H$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ και από το Θεώρημα 4.2(ii), έχουμε ότι $\text{findim } \mathbb{Z}H_j \leq \text{findim } \mathbb{Z}H$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$. Συνάγουμε, έτσι, ότι $\text{findim } \mathbb{Z}H \geq j$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ και άρα $\text{findim } \mathbb{Z}H = \infty$. Ξανά από το Θεώρημα 4.2(ii), αφού $H \leq G$, έπεται ότι $\text{findim } \mathbb{Z}H \leq \text{findim } \mathbb{Z}G$ και άρα $\text{findim } \mathbb{Z}G = \infty$. Το Θεώρημα 4.4 μας εξασφαλίζει ότι $\text{silp } \mathbb{Z}G = \infty$ και άρα $\text{spli } \mathbb{Z}G = \infty$ (Θεώρημα 4.5). Επιπλέον, αφού $\text{findim } \mathbb{Z}G = \infty$, από την Πρόταση 5.4 και την Παρατήρηση 5.5, έχουμε ότι η G δε μπορεί να έχει πλήρη επίλυση. Συνεπώς, αν G ελεύθερη αβελιανή ομάδα άπειρης διάστασης, τότε η G δεν έχει περιοδική συνομολογία μετά από k -βήματα, δεν έχει πλήρη επίλυση, $H^i(G, P) = 0$ για κάθε $i > 0$ και για κάθε προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, αλλά $\text{spli } \mathbb{Z}G = \infty$.

Θεώρημα 5.10 Έστω G ομάδα με περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (i) Υπάρχει ένα $g \in H^q(G, \mathbb{Z})$ ώστε το cup product $— \cup g : H^i(G, —) \rightarrow H^{i+q}(G, —)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $i > k$
- (ii) $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$

Απόδειξη.

(i) $\implies$ (ii) Καθώς $H^q(G, -) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, -)$, από Θεώρημα 5.6, έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $g \in \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ ώστε το cup product $- \cup g : \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, -) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+q}(\mathbb{Z}, -)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $i > k$ αν και μόνο αν υπάρχει μια q -επέκταση

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow X \longrightarrow P_{q-2} \xrightarrow{\partial_{q-2}} \dots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

με P_i προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο για $i = 0, 1, \dots, q-2$ και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$.

Επειδή το P_{q-2} είναι προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, έπεται ότι $P_{q-2}|_{\mathbb{Z}}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο (λόγω του Πορίσματος 1.19(i)).

Έστω $R_{q-2} = \ker \partial_{q-2}$. Τότε $R_{q-2} \leq P_{q-2}$ και έτσι, το $R_{q-2}|_{\mathbb{Z}}$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}$ -πρότυπο.

Συνεπώς, η β.α.α.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow X \longrightarrow R_{q-2} \longrightarrow 0$$

είναι $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη και έτσι, $X \simeq \mathbb{Z} \oplus R_{q-2}$ ως $\mathbb{Z}$ -πρότυπα.

Δηλαδή, το $X|_{\mathbb{Z}}$ είναι ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο, ως ευθύ άθροισμα ελεύθερων $\mathbb{Z}$ -προτύπων.

Έτσι, προκύπτει η $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, $\mathbb{Z}G$ -ακριβής ακολουθία $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow X$ με $X|_{\mathbb{Z}}$ ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$. Από Θεώρημα 5.7, αυτό είναι ισοδύναμο με $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$.

(ii) $\implies$ (i) Έστω ότι $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$. Από Θεώρημα 4.5, η συνθήκη $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$ συνεπάγεται ότι

$\text{silp } \mathbb{Z}G < \infty$ και όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.7(i) $\implies$ (ii), έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc} \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{\partial_k} & F_{k-1} & \xrightarrow{\partial_{k-1}} & F_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 & \xrightarrow{\partial_0} & F_{-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \parallel & & \parallel & & \downarrow \tilde{f}_{k-1} & & \downarrow \tilde{f}_{k-2} & & & & \downarrow \tilde{f}_1 & & \downarrow \tilde{f}_0 & \searrow a_0 & & & \\ \dots & \longrightarrow & F_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & F_k & \xrightarrow{d_k} & P_{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & P_{k-2} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \downarrow f & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

και έχουμε ότι το cup product $g : \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, -) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^{i+1}(R_{-1}, -)$, όπου $g = [f]$, είναι ισομορφισμός

για κάθε $i > k$. Από Θεώρημα 5.6, αυτό είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη μιας 1-επέκτασης

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow X \longrightarrow R_{-1} \longrightarrow 0 \quad (5.16)$$

με $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$.

Από την κατασκευή της πλήρους επίλυσης της G στο Θεώρημα 5.3, έχουμε ότι $R_{-1} = R_{q-1}$.

Πράγματι, αν $-1 = k + r_0q + v_0$ για κάποια $r_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ με $0 \leq v_0 < q$, έχουμε $q-1 = k + (r_0+1)q + v_0$.

Τότε $F_{-1} = F_{q-1} = P_{k+v_0}$ και άρα $R_{-1} = R_{q-1}$.

Συνεπώς, από την πλήρη επίλυση της G έχουμε την ακριβή ακολουθία

$$0 \longrightarrow R_{q-1} \longrightarrow P_{q-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (5.17)$$

και συνδυάζοντας τις (5.16) και (5.17), παίρνουμε την ακριβή ακολουθία

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & X & & P_{q-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & \searrow & & \nearrow \\ & & & & R_{-1} & \simeq & R_{q-1} \\ & & & & \searrow & \nearrow & \\ & & & & 0 & & 0 \end{array}$$

δηλαδή, μια q -επέκταση

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow X \longrightarrow P_{q-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

με P_j προβολικά $\mathbb{Z}G$ -πρότυπα για $j = 0, 1, \dots, q-2$ και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$. □

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα του Θεωρήματος 5.7, του Σχόλιου 5.3 και του Θεωρήματος 5.10, προκύπτει το εξής Πόρισμα.

Πόρισμα 5.11 Έστω G ομάδα με περιοδική συνομολογία με περίοδο q μετά από k -βήματα.

Τα εξής είναι ισοδύναμα:

- (i) Υπάρχει ένα $g \in H^q(G, \mathbb{Z})$ ώστε το cup product $— \cup g : H^i(G, —) \rightarrow H^{i+q}(G, —)$ να είναι ισομορφισμός για κάθε $i > k$
- (ii) $\text{spli } \mathbb{Z}G < \infty$
- (iii) $\text{silp } \mathbb{Z}G < \infty$
- (iv) $H^i(G, P) = 0$ για κάθε $i > k$ και για κάθε P προβολικό $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο.
- (v) Υπάρχει μια $\mathbb{Z}$ -διασπώμενη, $\mathbb{Z}G$ -ακριβής ακολουθία $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow X$ με $X|_{\mathbb{Z}}$ ελεύθερο $\mathbb{Z}$ -πρότυπο και $\text{pd}_{\mathbb{Z}G} X < \infty$.

6 Περιοδική συνομολογία μετά από k -βήματα για μία κλάση ομάδων

Στο κεφάλαιο αυτό αποδεικνύουμε ότι αν G είναι ομάδα με $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G < \infty$ και υπάρχει $x \in G$ ώστε $\langle x \rangle \trianglelefteq G$, τότε η ομάδα $G/\langle x \rangle$ έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο 2 ή 4 μετά από $(\text{cd}_{\mathbb{Z}} G - 1)$ -βήματα. Αρχικά, διατυπώνουμε ένα Λήμμα για τη συνομολογική διάσταση των άπειρων κυκλικών ομάδων.

Λήμμα 6.1 Έστω N άπειρη κυκλική ομάδα με $N = \langle x \rangle$ για κάποιο $x \in N$. Τότε:

(i) $\text{cd}_{\mathbb{Z}} N = 1$

(ii) Αν A τετριμμένο $\mathbb{Z}N$ -πρότυπο, τότε $H^0(N, A) \simeq A$ και $H^1(N, A) \simeq A$, ως αβελιανές ομάδες

Απόδειξη.

(i) Θεωρούμε την ακολουθία $\mathbb{Z}N$ -προτύπων

$$\mathbb{Z}N \xrightarrow{\mu_{x-1}} \mathbb{Z}N \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

όπου $\mu_{x-1} : \mathbb{Z}N \rightarrow \mathbb{Z}N$ με $\mu_{x-1}(\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i) = (x-1) \cdot \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i$ και $\varepsilon : \mathbb{Z}N \rightarrow \mathbb{Z}$ με $\varepsilon(\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι ακριβής.

Προφανώς, η ε είναι επιμορφισμός. Το $\mathbb{Z}N$ -πρότυπο $IN := \ker \varepsilon$ παράγεται από το σύνολο $\{x-1_N\}$, δηλαδή $IN = \langle x-1_N \rangle$ ως $\mathbb{Z}N$ -πρότυπο. Συνεπώς, $\ker \varepsilon = \text{Im } \mu_{x-1}$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι μ_{x-1} είναι μονομορφισμός.

Έστω $\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i \in \mathbb{Z}N$ με $\mu_{x-1}(\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i) = 0$. Τότε $(x-1) \cdot \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i = 0$ και άρα $\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^{i+1} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i$ ή, ισοδύναμα, $\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_{i+1} x^i = \sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i$. Έτσι, $r_{i+1} = r_i$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$. Αλλά, $r_i \neq 0$ μόνο για πεπερασμένο πλήθος $i \in \mathbb{Z}$. Άρα, έχουμε $r_i = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και έτσι $\sum_{i \in \mathbb{Z}} r_i x^i = 0$. Συνεπώς, έπεται ότι $\ker \mu_{x-1} = 0$ και έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}N \xrightarrow{\mu_{x-1}} \mathbb{Z}N \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (6.1)$$

Προφανώς, $\mathbb{Z}N$ είναι προβολικό $\mathbb{Z}N$ -πρότυπο και έτσι η (6.1) είναι προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}N$ -πρότυπο μήκους 1. Άρα $\text{cd}_{\mathbb{Z}} N = 1$.

(ii) Είναι $H^0(N, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^0(\mathbb{Z}, A) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, A)$. Αλλά $\mathbb{Z}$ και A είναι τετριμμένα $\mathbb{Z}N$ -πρότυπα. Έτσι, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, A) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) \simeq A$.

Τώρα, έχουμε τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}N \xrightarrow{\mu_{x-1}} \mathbb{Z}N \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Λαμβάνοντας τη μακρά ακριβή $\text{Ext}_{\mathbb{Z}N}(_, A)$ ακολουθία, έχουμε

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A) \xrightarrow{\mu_{x-1}^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^1(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^1(\mathbb{Z}N, A) \longrightarrow \dots$$

Αλλά, $\mathbb{Z}N$ είναι ελεύθερο (άρα και προβολικό) $\mathbb{Z}N$ -πρότυπο.

Έτσι, $\text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^1(\mathbb{Z}N, A) = 0$ και η παραπάνω ακολουθία γίνεται

$$\dots \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A) \xrightarrow{\mu_{x-1}^*} \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^1(\mathbb{Z}, A) \longrightarrow 0 \quad (6.2)$$

Συνεπώς, $\text{Im } \delta = \text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^1(\mathbb{Z}, A)$.

Άρα, $\text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A) / \ker \delta \simeq \text{Im } \delta$, δηλαδή $\text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A) / \ker \delta \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^1(\mathbb{Z}, A)$

ως αβελιανές ομάδες.

Επίσης, λόγω ακρίβειας της (6.2), έχουμε ότι $\ker \delta = \text{Im } \mu_{x-1}^*$.

Έστω, τώρα, $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A)$. Αν $w \in \mathbb{Z}N$, τότε

$$\begin{aligned} (\mu_{x-1}^*(f))(w) &= (f \circ \mu_{x-1})(w) = f(\mu_{x-1}(w)) = f((x-1)w) = f(xw - w) = \\ &= f(xw) - f(w) = xf(w) - f(w) = f(w) - f(w) = 0, \text{ αφού } xf(w) = f(w) \text{ διότι το } A \text{ είναι} \\ &\text{τετριμμένο } \mathbb{Z}N\text{-πρότυπο.} \end{aligned}$$

Έτσι, αν $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A)$, τότε $\mu_{x-1}^*(f) = 0$ και άρα $\text{Im } \mu_{x-1}^* = 0$.

Άρα, $\ker \delta = \text{Im } \mu_{x-1}^* = 0$ και έτσι έπεται ότι $\text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A) \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^1(\mathbb{Z}, A)$.

Συνεπώς $\text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^1(\mathbb{Z}, A) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A) \simeq A$ και άρα $H^1(N, A) \simeq A$, ως αβελιανές ομάδες. $\square$

Τώρα, έστω G ομάδα, $N \trianglelefteq G$ και $M \in \mathbb{Z}G\text{-Mod}$. Τότε, η ομάδα $H^i(N, M)$ καθίσταται

$\mathbb{Z}(G/N)$ -πρότυπο για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ως εξής:

Έστω $g \in G$ και η απεικόνιση $\varphi_g : N \rightarrow N$ με $\varphi_g(h) = g^{-1}hg$.

Αφού $N \trianglelefteq G$, η φ_g είναι καλά ορισμένη και είναι ομομορφισμός ομάδων.

Έστω

$$\dots \rightarrow P_i \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

μία $\mathbb{Z}N$ -προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}N$ -πρότυπο και

$$\dots \rightarrow P_i|_{\varphi_g} \rightarrow \dots \rightarrow P_1|_{\varphi_g} \rightarrow P_0|_{\varphi_g} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

$\mathbb{Z}N$ -προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}N$ -πρότυπο μέσω της N -δράσης που επάγει η φ_g .

Αν $a_g : M|_{\varphi_g} \rightarrow M$ με $a_g(w) = gw$ και $\bar{\tau} = \{\tau_i : P_i \rightarrow P_i|_{\varphi_g}\}_{i=0}^{\infty}$ είναι αλυσωτός ομομορφισμός που επεκτείνει τον $id_{\mathbb{Z}}$, τότε έχουμε ομομορφισμούς

$a_{g*} : H^i(N, M|_{\varphi_g}) \rightarrow H^i(N, M)$ και $\tau_i^* : H^i(N, M) \rightarrow H^i(N, M|_{\varphi_g})$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Η G/N -δράση $*$ του $gN \in G/N$ επί του $H^i(N, M)$ δίνεται από τον ομομορφισμό

$a_{g*} \circ \tau_i^* : H^i(N, M) \rightarrow H^i(N, M)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Προχωρούμε με το κεντρικό Θεώρημα του κεφαλαίου.

Θεώρημα 6.2 Έστω G ομάδα με $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G = m < \infty$ και $\langle x \rangle \trianglelefteq G$ για κάποιο $x \in G$.

Τότε, η $G/\langle x \rangle$ έχει περιοδική συνομολογία μετά από $(m-1)$ -βήματα και ο ισομορφισμός $H^i(G/\langle x \rangle, -) \simeq H^{i+4}(G/\langle x \rangle, -)$ για κάθε $i > m-1$ δίνεται μέσω cup product.

Απόδειξη.

Έστω $M \in \mathbb{Z}G\text{-Mod}$. Καθώς $\langle x \rangle \trianglelefteq G$, σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε ότι η αβελιανή ομάδα $H^q(\langle x \rangle, A)$ εφοδιάζεται με δομή $\mathbb{Z}(G/\langle x \rangle)$ -προτύπου για κάθε $q \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε τη φασματική

ακολουθία Lyndon-Hochschild-Serre $\{E_r, d_r\}_{r \in \mathbb{Z}}$ [4, XI., 10, Theorem 10.1] και έχουμε ότι

$$E_2^{p,q} \simeq H^p \left(G / \langle x \rangle, H^q(\langle x \rangle, A) \right) \xRightarrow{p} H^{p+q}(G, A).$$

Για $q \geq 2$, έχουμε $H^q(\langle x \rangle, A) = 0$. Άρα, $E_2^{p,q} = 0 \ \forall \ q \geq 2$.

Παρατηρούμε, τότε, ότι $E_r^{p,q} = 0 \ \forall \ q \geq 2$ και $r = 3, 4, \dots$.

Πράγματι, είναι $E_2^{p,q} = 0 \ \forall \ q \geq 2$. Έστω ότι $E_k^{p,q} = 0 \ \forall \ q \geq 2$ και για κάποιο $k \geq 2$.

Θα αποδείξουμε ότι $E_{k+1}^{p,q} = 0 \ \forall \ q \geq 2$.

Είναι $E_{k+1}^{p,q} \simeq \ker d_k^{p,q} / \text{Im } d_k^{p-(k+1), q+k}$. Αλλά, για $q \geq 2$, είναι $E_k^{p,q} = 0$.

Συνεπώς, $d_k^{p,q} = 0$ (αφού $d_k^{p,q} : E_k^{p,q} \rightarrow E_k^{p+k+1, q-k}$), από όπου συνάγεται και ότι $\ker d_k^{p,q} = 0$.

Έτσι, $E_{k+1}^{p,q} \simeq \ker d_k^{p,q} / \text{Im } d_k^{p-(k+1), q+k} = 0$ και επαγωγικά έχουμε ότι

$$E_k^{p,q} = 0 \ \forall \ q \geq 2 \text{ και } r = 2, 3, \dots$$

Τώρα, $E_3^{p,0} \simeq \ker d_2^{p,0} / \text{Im } d_2^{p-2,1}$. Αλλά, $d_2^{p,0} : E_2^{p,0} \rightarrow E_2^{p+2,-1}$ και $E_2^{p+2,-1} = 0$.

Άρα, $\ker d_2^{p,0} = E_2^{p,0}$ και έτσι $E_3^{p,0} \simeq E_2^{p,0} / \text{Im } d_2^{p-2,1}$.

Επίσης, $E_3^{p,1} \simeq \ker d_2^{p,1} / \text{Im } d_2^{p-2,2}$.

Είναι $d_2^{p-2,2} : E_2^{p-2,2} \rightarrow E_2^{p,1}$ και $E_2^{p-2,2} = 0$. Άρα, $\text{Im } d_2^{p-2,2} = 0$.

Έτσι, $E_3^{p,1} \simeq \ker d_2^{p,1}$.

Έστω, τώρα, $i \geq 3$. Τότε:

$E_{i+1}^{p,0} \simeq \ker d_i^{p,0} / \text{Im } d_i^{p-i, 1-i}$ και $d_i^{p,0} : E_i^{p,0} \rightarrow E_i^{p+i, 1-i}$.

Καθώς $i \geq 3$, είναι $E_i^{p+i, 1-i} = 0$ και άρα $\ker d_i^{p,0} \simeq E_i^{p,0}$.

Επίσης, $d_i^{p-i, 1-i} : E_i^{p-i, 1-i} \rightarrow E_i^{p,0}$ και αφού $i \geq 3$, είναι $E_i^{p-i, 1-i} = 0$.

Άρα, $\text{Im } d_i^{p-i, 1-i} = 0$. Συνεπώς, $E_{i+1}^{p,0} = E_i^{p,0}$ για κάθε $i \geq 3$.

Επιπλέον:

$E_{i+1}^{p,1} \simeq \ker d_i^{p,1} / \text{Im } d_i^{p-i, 2-i}$ και $d_i^{p,1} : E_i^{p,1} \rightarrow E_i^{p+i, 2-i}$.

Καθώς $i \geq 3$, είναι $E_i^{p+i, 2-i} = 0$ και άρα $\ker d_i^{p,1} \simeq E_i^{p,1}$.

Επίσης, $d_i^{p-i, 2-i} : E_i^{p-i, 2-i} \rightarrow E_i^{p,1}$ και αφού $i \geq 3$, είναι $E_i^{p-i, 2-i} = 0$.

Άρα, $\text{Im } d_i^{p-i, 2-i} = 0$. Έτσι, $E_{i+1}^{p,1} = E_i^{p,1}$ για κάθε $i \geq 3$.

Συνοψίζοντας, έχουμε:

- $E_i^{p,q} = 0$ για κάθε $q \geq 2$ και $i = 2, 3, \dots$

- $E_3^{p,0} = E_2^{p,0} / \text{Im } d_2^{p-2,1}$ και $E_3^{p,1} = \ker d_2^{p,1}$
- $E_{i+1}^{p,0} = E_i^{p,0}$ για κάθε $i \geq 3$ και $E_{i+1}^{p,1} = E_i^{p,1}$ για κάθε $i \geq 3$, δηλαδή:
 $E_3^{p,0} = E_4^{p,0} = E_5^{p,0} = \dots$ και $E_3^{p,1} = E_4^{p,1} = E_5^{p,1} = \dots$
Συνεπώς, $E_\infty^{p,q} = 0$ για κάθε $q \geq 2$, $E_\infty^{p,0} = E_3^{p,0} = E_2^{p,0} / \text{Im } d_2^{p-2,1}$
και $E_\infty^{p,1} = E_3^{p,1} = \ker d_2^{p,1}$.

Έστω, τώρα, $p + q = n$ και $H^n = H^n(G, A) = H^{p+q}(G, A)$.

Αφού η φασματική ακολουθία $\{E_r, d_r\}_{r \in \mathbb{Z}}$ συγχλίνει στο $H^n(G, A)$, έχουμε ένα πεπερασμένο filtration για το $H^n(G, A)$

$$0 = F^{n+1}H^n \subseteq F^nH^n \subseteq \dots \subseteq F^1H^n \subseteq F^0H^n = H^n \quad (6.3)$$

με $F^pH^n / F^{p+1}H^n \simeq E_\infty^{p,n-p}$ για κάθε $p = 0, 1, \dots, n$.

Αλλά, αν $q \geq 2$, είναι $n - p \geq 2$ ή, ισοδύναμα, $p \leq n - 2$ και τότε $E_\infty^{p,n-p} = 0$.

Έτσι, $F^pH^n / F^{p+1}H^n = 0$ για κάθε $p \leq n - 2$ και άρα, $F^pH^n = F^{p+1}H^n$ για κάθε $p \leq n - 2$.

Συνεπώς, $F^{n-1}H^n = F^{n-2}H^n = F^{n-3}H^n = \dots = F^1H^n = F^0H^n = H^n(G, A)$. Άρα, το filtration (6.3) γίνεται

$$0 \subseteq F^nH^n \subseteq F^{n-1}H^n = H^n(G, A)$$

με $F^nH^n / F^{n+1}H^n = F^nH^n / 0 \simeq E_\infty^{n,0} \simeq E_3^{n,0}$ και $F^{n-1}H^n / F^nH^n \simeq E_\infty^{n-1,1} \simeq E_3^{n-1,1}$.

Έτσι, έχουμε ότι $F^nH^n \simeq E_3^{n,0}$ και $F^{n-1}H^n / F^nH^n \simeq E_3^{n-1,1}$.

Συνεπώς, το αρχικό filtration (6.3) καταρρέει στο

$$E_3^{n,0} \subseteq H^n(G, A) \quad (6.4)$$

και $H^n(G, A) / E_3^{n,0} \simeq E_3^{n-1,1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το (6.4) επάγει τη β.α.α.

$$0 \longrightarrow E_3^{n,0} \longrightarrow H^n(G, A) \longrightarrow E_3^{n-1,1} \longrightarrow 0 \quad (6.5)$$

Από την (6.5) περνάμε στην

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots \rightarrow E_2^{n-2,1} & \xrightarrow{d_2^{n-2,1}} & E_2^{n,0} & & H^n(G, A) & & E_2^{n-1,1} \xrightarrow{d_2^{n-1,1}} E_2^{n+1,0} \rightarrow \dots \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \nearrow \\
 & & E_2^{n,0} / \text{Im } d_2^{n-2,1} & & & & E_3^{n-1,1} \\
 & & \wr & & & & \wr \\
 & & E_3^{n,0} & & & & \ker d_2^{n-1,1}
 \end{array}$$

δηλαδή, έχουμε τη μακρά ακριβή ακολουθία

$$\dots \rightarrow E_2^{n-2,1} \rightarrow E_2^{n,0} \rightarrow H^n(G, A) \rightarrow E_2^{n-1,1} \rightarrow E_2^{n+1,0} \rightarrow H^{n+1}(G, A) \rightarrow E_2^{n,1} \rightarrow \dots \quad (6.6)$$

Επιπλέον, είναι $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G = m < \infty$. Άρα $H^n(G, A) = 0$ για κάθε $n > m$.

Ιδιαίτέρως, $H^n(G, A) = H^{n+1}(G, A) = 0$ για κάθε $n > m$.

Τότε, από την (6.6), έπεται ότι η απεικόνιση $d_2^{n-1,1} : E_2^{n-1,1} \rightarrow E_2^{n+1,0}$ είναι ισομορφισμός και έτσι προκύπτει ότι $E_2^{n-1,1} \simeq E_2^{n+1,0}$ για κάθε $n > m$ ή, ισοδύναμα, $E_2^{n,1} \simeq E_2^{n+2,0}$ για κάθε $n > m-1$ μέσω του ισομορφισμού $d_2^{n,1} : E_2^{n,1} \rightarrow E_2^{n+2,0}$.

Συνεπώς, έχουμε ότι

$$H^n \left(G / \langle x \rangle, H^1(\langle x \rangle, A) \right) \simeq H^{n+2} \left(G / \langle x \rangle, H^0(\langle x \rangle, A) \right) \quad (6.7)$$

για κάθε $n \geq m = \text{cd}_{\mathbb{Z}} G$

Έστω $g \in G$ και $N = \langle x \rangle$. Ορίζουμε τον ομομορφισμό ομάδων $\varphi_g : N \rightarrow N$ με $\varphi_g(x) = g^{-1}xg$.

Θέτουμε $\mathbb{Z}G_1 = \mathbb{Z}N$ και $\mathbb{Z}G_2 = \mathbb{Z}N|_{\varphi_g}$ δηλαδή, $\mathbb{Z}G_2$ είναι το $\mathbb{Z}N$ εφοδιασμένο με την G_1 -δράση που επάγει η φ_g .

Θεωρούμε τη $\mathbb{Z}G_1$ -προβολική επίλυση του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}G_1$ -πρότυπο

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}G_1 \xrightarrow{\mu_{x-1}} \mathbb{Z}G_1 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0 \quad (6.8)$$

όπου $\mu_{x-1}(1_{\mathbb{Z}G_1}) = (x-1) \cdot 1_{\mathbb{Z}G_1}$.

Θεωρούμε και τη $\mathbb{Z}G_1$ -προβολική επίλυση (μέσω της φ_g) του $\mathbb{Z}$ ως τετριμμένο $\mathbb{Z}G_1$ -πρότυπο

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G_2 \xrightarrow{\mu_{x-1}} \mathbb{Z}G_2 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (6.9)$$

όπου $\mu_{x-1}(1_{\mathbb{Z}G_2}) = (x-1) \cdot 1_{\mathbb{Z}G_2}$.

Ορίζουμε τις απεικονίσεις $\tau_0 : \mathbb{Z}G_1 \rightarrow \mathbb{Z}G_2$ με $\tau_0 = id_{\mathbb{Z}\langle x \rangle}$ και $\tau_1 : \mathbb{Z}G_1 \rightarrow \mathbb{Z}G_2$ με

$\tau_1(1_{\mathbb{Z}G_1}) = -x^{-1} \cdot 1_{\mathbb{Z}G_2}$. Συνδυάζοντας τις (6.8), (6.9) και τις απεικονίσεις αυτές, παίρνουμε το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}G_1 & \xrightarrow{\mu_{x-1}} & \mathbb{Z}G_1 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tau_1 & & \downarrow \tau_0 & & \downarrow id_{\mathbb{Z}} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}G_2 & \xrightarrow{\mu_{x-1}} & \mathbb{Z}G_2 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Το διάγραμμα αυτό είναι μεταθετικό:

$$(id_{\mathbb{Z}} \circ \varepsilon)(1_{\mathbb{Z}G_1}) = id_{\mathbb{Z}}(\varepsilon(1_{\mathbb{Z}G_1})) = id_{\mathbb{Z}}(1) = 1 \text{ και } (\varepsilon \circ \tau_0)(1_{\mathbb{Z}G_1}) = \varepsilon(\tau_0(1_{\mathbb{Z}G_1})) =$$

$$= \varepsilon(1_{\mathbb{Z}G_2}) = 1, \text{ δηλαδή } id_{\mathbb{Z}} \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \tau_0. \text{ Επίσης:}$$

$$\begin{aligned} (\mu_{x-1} \circ \tau_1)(1_{\mathbb{Z}G_1}) &= \mu_{x-1}(\tau_1(1_{\mathbb{Z}G_1})) = \mu_{x-1}(-x^{-1} \cdot 1_{\mathbb{Z}G_2}) = (x-1)(-x^{-1} \cdot 1_{\mathbb{Z}G_2}) = \\ &= (x^{-1} - 1) \cdot 1_{\mathbb{Z}G_2} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (\tau_0 \circ \mu_{x-1})(1_{\mathbb{Z}G_1}) &= \tau_0(\mu_{x-1}(1_{\mathbb{Z}G_1})) = \tau_0((x-1) \cdot 1_{\mathbb{Z}G_1}) = \tau_0(x \cdot 1_{\mathbb{Z}G_1} - 1_{\mathbb{Z}G_1}) = \\ &= \tau_0(x \cdot 1_{\mathbb{Z}G_1}) - \tau_0(1_{\mathbb{Z}G_1}) = \varphi_g(x)\tau_0(1_{\mathbb{Z}G_1}) - \tau_0(1_{\mathbb{Z}G_1}) = g^{-1}xg \cdot 1_{\mathbb{Z}G_2} - 1_{\mathbb{Z}G_2} = \\ &= x^{-1} \cdot 1_{\mathbb{Z}G_2} - 1_{\mathbb{Z}G_2} = (x^{-1} - 1) \cdot 1_{\mathbb{Z}G_2}, \text{ δηλαδή } \mu_{x-1} \circ \tau_1 = \tau_0 \circ \mu_{x-1}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε το μεταθετικό διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}G_1 & \xrightarrow{\mu_{x-1}} & \mathbb{Z}G_1 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \tau_1 & & \downarrow \tau_0 & & \downarrow id_{\mathbb{Z}} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}G_2 & \xrightarrow{\mu_{x-1}} & \mathbb{Z}G_2 & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (6.10)$$

Η G/N -δράση ενός gN επί του $H^i(N, A)$ δίνεται μέσω του ομομορφισμού

$$a_{g*} \circ \tau_i^* : H^i(G_2, A) \rightarrow H^i(G_1, A) \text{ για } i = 0, 1.$$

$$\text{Έτσι, αν } f \in H^0(N, A), \text{ η δράση είναι } gN * f = (a_{g*} \circ \tau_0^*)(f) = a_{g*}(\tau_0^*(f)) =$$

$$= a_{g*}(f \circ \tau_0) = a_g \circ f \circ \tau_0 = a_g \circ f \circ id_{\mathbb{Z}N} = a_g \circ f, \text{ ενώ αν } f \in H^1(N, A), \text{ η δράση είναι}$$

$$gN * f = (a_{g*} \circ \tau_1^*)(f) = a_{g*}(\tau_1^*(f)) = a_{g*}(f \circ \tau_1) = a_g \circ f \circ \tau_1.$$

Τώρα, έστω $A \in {}_{\mathbb{Z}(G/N)}\text{Mod}$. Το $A|_\pi$ είναι $\mathbb{Z}G$ -πρότυπο, όπου π είναι ο φυσικός επιμορφισμός $\pi : G \rightarrow Q$ με $\pi(g) = gN$ για $g \in G$. Προφανώς, το $A|_\pi$ είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}N$ -πρότυπο. Χάριν απλότητας, θα συμβολίζουμε το $A|_\pi$ με A .

Από το Λήμμα 6.1, έχουμε ότι

$$H^0(N, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^0(\mathbb{Z}, A) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}, A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) \simeq A \text{ ως αβελιανές ομάδες, μέσω του ισομορφισμού } \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, A) \ni f \mapsto f(1) \in A$$

και

$$H^1(N, A) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}N}^1(\mathbb{Z}, A) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A) \simeq A \text{ ως αβελιανές ομάδες, μέσω του ισομορφισμού } \text{Hom}_{\mathbb{Z}N}(\mathbb{Z}N, A) \ni f \mapsto f(1_{\mathbb{Z}N}) \in A.$$

Θα υπολογίσουμε τη G/N -δράση επί των $H^0(N, A)$ και $H^1(N, A)$.

Έστω $gN \in G/N$ και $f \in H^0(N, A)$. Τότε $gN * f = a_g \circ f$ και αν $f(1) = a$, έχουμε $(a_g \circ f)(1) = a_g(f(1)) = a_g(a) = ga$ και άρα $gN * a = ga = gNa$, αφού A είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}N$ -πρότυπο.

Έτσι, $H^0(N, A) \xrightarrow{id_A} A$ ως $\mathbb{Z}(G/N)$ -πρότυπα.

Έστω $gN \in G/N$ και $f \in H^1(N, A)$. Τότε $gN * f = a_g \circ f \circ \tau_1$ και αν $f(1_{\mathbb{Z}N}) = a$, έχουμε $(a_g \circ f \circ \tau_1)(1_{\mathbb{Z}G_1}) = a_g(f(\tau_1(1_{\mathbb{Z}G_1}))) = a_g(f(-x^{-1} \cdot 1_{\mathbb{Z}G_2})) = a_g(-x^{-1}f(1_{\mathbb{Z}G_2})) = -gx^{-1}f(1_{\mathbb{Z}N}) = -gx^{-1}a = -ga = -gNa$, αφού A είναι τετριμμένο $\mathbb{Z}\langle x \rangle$ -πρότυπο.

Συνεπώς, αν θέσουμε $A^\# = H^1(N, A)$, έχουμε ότι η δράση ενός $gN \in G/N$ επί του $(A^\#)^\#$ είναι $gN * a = -(-ga) = gNa$ και άρα $(A^\#)^\# \xrightarrow{id_A} A$ ως $\mathbb{Z}Q$ -πρότυπα.

Δηλαδή, έχουμε τους ισομορφισμούς $\mathbb{Z}(G/N)$ -προτύπων:

$$H^0(N, A) \simeq A \tag{6.11}$$

και

$$H^1(N, H^1(N, A)) \simeq A \tag{6.12}$$

για κάθε $A \in {}_{\mathbb{Z}(G/N)}\text{Mod}$.

Συνεπώς, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} H^n(G/N, A) &\stackrel{(6.12)}{\simeq} H^n(G/N, H^1(N, H^1(N, A))) \stackrel{(6.7)}{\simeq} H^{n+2}(G/N, H^0(N, H^1(N, A))) \stackrel{(6.11)}{\simeq} \\ &\simeq H^{n+2}(G/N, H^1(N, A)) \stackrel{(6.7)}{\simeq} H^{n+4}(G/N, H^0(N, A)) \stackrel{(6.11)}{\simeq} H^{n+4}(G/N, A), \text{ δηλαδή} \end{aligned}$$

$$H^n(G/N, A) \simeq H^{n+4}(G/N, A) \text{ ως αβελιανές ομάδες}$$

Έτσι:

$$H^n(G/\langle x \rangle, A) \simeq H^{n+4}(G/\langle x \rangle, A) \text{ για κάθε } n \geq \text{cd}_{\mathbb{Z}} G \text{ και για κάθε } A \in {}_{\mathbb{Z}(G/\langle x \rangle)}\text{Mod}.$$

Άρα η $G/\langle x \rangle$ έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο 4 μετά από $m - 1$ βήματα.

Όσον αφορά τον ισομορφισμό $d_2^{m,1} : H^m(G/\langle x \rangle, H^1(\langle x \rangle, A)) \simeq H^{m+2}(G/\langle x \rangle, H^0(\langle x \rangle, A))$, με τους συμβολισμούς $N = \langle x \rangle \simeq \mathbb{Z}$ και $Q = G/N$, έχουμε ότι η επέκταση (ομάδων)

$$[\epsilon] : \quad 1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$$

ορίζει ένα στοιχείο $[\epsilon] \in H^2(Q, \mathbb{Z})$. Αποδεικνύεται, τότε ότι $d_2^{m,1} = _ \cup \epsilon$. □

Παρατήρηση 6.3 Αν το x είναι κεντρικό στοιχείο της G , τότε σύμφωνα με την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2, η $G/\langle x \rangle$ έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο 2 μετά από $(m - 1)$ -βήματα.

Τέλος, δίνουμε ένα παράδειγμα ομάδας που ανήκει στην κλάση ομάδων του Θεωρήματος 6.2.

Μια ομάδα λέγεται πολυκυκλική αν υπάρχει μία σειρά

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq G_n = G \tag{*}$$

με G_{i+1}/G_i να είναι κυκλική ομάδα για κάθε $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Το πλήθος των δεικτών i για τους οποίους $G_{i+1}/G_i \simeq \mathbb{Z}$ δεν εξαρτάται από την σειρά (*), αλλά είναι αναλλοίωτη της G που συμβολίζεται με $h(G)$ και καλείται αριθμός Hirsch της G . Αποδεικνύεται ότι αν G είναι ελεύθερη στρέψης πολυκυκλική ομάδα, τότε $\text{cd}_{\mathbb{Z}} G = h(G)$,

όπου $h(G)$ είναι ο αριθμός Hirsch της G [11, VIII, 2].

Τώρα, μια ομάδα G λέγεται μηδενοδύναμη με κλάση μηδενοδυναμίας n αν υπάρχει μία κατώτερη κεντρική σειρά της G μήκους n , δηλαδή μία σειρά

$$G = \gamma_0 \trianglelefteq \gamma_1 \trianglelefteq \dots \trianglelefteq \gamma_n = 1$$

όπου $\gamma_{i+1} = [\gamma_i, G]$ για $i = 0, 1, \dots, n-1$. Αν η G είναι μηδενοδύναμη, τότε $\gamma_n = 1$ και $\gamma_{n-1} \neq 1$.

Έτσι, $\gamma_n := [\gamma_{n-1}, G] = 1$ και για κάθε $x \in \gamma_{n-1}$ και $g \in G$, έχουμε $x^{-1}g^{-1}xg = 1 \iff$

$$\iff xg = gx \implies \gamma_{n-1} \leq Z(G) \implies Z(G) \neq 1.$$

Επίσης, αποδεικνύεται ότι ότι κάθε πεπερασμένα παραγόμενη μηδενοδύναμη ομάδα είναι πολυκυκλική.

Αν, λοιπόν, η G είναι πεπερασμένα παραγόμενη και ελεύθερη στρέψης μηδενοδύναμη ομάδα με $h(G) = m$, τότε για κάθε $x \in Z(G)$ η ομάδα $G/\langle x \rangle$ έχει περιοδική συνομολογία με περίοδο 2 μετά από $(m-1)$ -βήματα που δίνεται μέσω cup product.

Βιβλιογραφία

- [1] P. J. Hilton and D. Rees, “Natural maps of extension functors and a theorem of R.G. Swan”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 57, pp. 489–502, 3 1961.
- [2] T. V. Gedrich and K. W. Gruenberg, “Complete cohomological functors on groups”, *Topology and its Applications*, vol. 25, pp. 203–223, 2 1987.
- [3] O. Talelli, “On cohomological periodicity of infinite groups”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 55, pp. 178–192, 1980.
- [4] S. Mac Lane, *Homology*. Springer, 1963.
- [5] P. J. Hilton and U. Stammbach, *A Course in Homological Algebra*. New York: Springer-Verlag, 1970.
- [6] D. J. Benson, *Representations and Cohomology*. New York: Cambridge University Press, 1995, vol. I.
- [7] O. Talelli, “On algebraic characterizations for finiteness of the dimension of EG ”, *Iranian Journal Of Numerical Analysis And Optimization*, vol. 1, 2008.
- [8] I. Emmanouil, “On certain cohomological invariants of groups”, *Advances in Mathematics*, vol. 225, pp. 3446–3462, 6 2010.
- [9] O. Talelli, “Periodicity in Group Cohomology and Complete Resolutions”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 37, pp. 547–554, 4 2005.
- [10] G. Mislin and O. Talelli, “On groups which act freely and properly on finite dimensional homotopy spheres”, *Computational and Geometric Aspects of Modern Algebra*, vol. 1, 275 2010.
- [11] K. Brown, *Cohomology of groups*. New York: Springer-Verlag, 1982.
- [12] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological Algebra*. New Jersey: Princeton University Press, 1956.

- [13] C. Weibel, *An introduction to Homological Algebra*. New York: Cambridge University Press, 1994.
- [14] O. Talelli, “A characterization of cohomological dimension for a big class of groups”, *Journal of Algebra*, vol. 326, pp. 238–244, 1 2011.
- [15] F. Dembegioti and O. Talelli, “A note on complete resolutions”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 138, pp. 3815–3820, 11 2010.
- [16] A. Bahlekeh, F. Dembegioti, and O. Talelli, “Gorenstein dimension and proper actions”, *Bulletin of the London Mathematical Society*, vol. 41, 5 2009.
- [17] O. Talelli, “On Periodic (Co)Homology of Groups”, *Communications in Algebra*, vol. 40, pp. 1167–1172, 3 2012.
- [18] B. M. Ikenaga, “Homological Dimension and Farrel Cohomology”, *Journal of Algebra*, vol. 87, p. 422 457, 2 1984.
- [19] J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, 2nd ed. New York: Springer, 2009.
- [20] N. Yoneda, “Note on products in Ext”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 9, pp. 873–875, 6 1958.

