



**ΕΘΝΙΚΟΝ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ
ΑΘΗΝΩΝ**

**ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**«Η ανάπτυξη μιας αρχικής κατανόησης του κλάσματος ως
πολλαπλασιαστικής σχέσης ποσοτήτων-Μελέτη μιας μαθήτριας 3ης
Δημοτικού»**

**Δούκα Βαρβάρα
ΑΜ:215304**

**Επιβλέπουσα καθηγήτρια
Κ. Μπούφη Ανδρονίκη**

**Συνεπιβλέποντες καθηγητές
Κ. Βουδούρη Αγγελική
Κ. Μπαραλής Γεώργιος**

**ΑΘΗΝΑ
Ιούνιος 2019**

Περίληψη

Η παρούσα εργασία περιγράφει την προσπάθεια μιας ομάδας τριών φοιτητών να στηρίξουν μια μαθήτριά τρίτης δημοτικού να διαμορφώσει μία αρχική αντίληψη του κλάσματος ως πολλαπλασιαστική σχέση ποσοτήτων. Μέσω πειράματος σχεδιασμού επιχειρήθηκε να επιλυθούν αρχικές δυσκολίες της μαθήτριας και να διαμορφωθεί ένα κατάλληλο περιβάλλον, ώστε να εκφράσει τις ιδέες της και να προχωρήσει τη σκέψη της. Ταυτόχρονα, πραγματοποιήθηκε ανάλυση της προσπάθειας αναφορικά με τα διδακτικά εμπόδια που προέκυψαν και πώς θα μπορούσαν να έχουν αποφευχθεί. Στην ανάλυση αυτή στηρίχθηκε ο τελικός αναστοχασμός της ομάδας που οργάνωσε την προσέγγιση.

Λέξεις κλειδιά: πολλαπλασιαστική σχέση ποσοτήτων, ισοτεμαχισμός ποσοτήτων, πείραμα σχεδιασμού

Summary

This paper describes the effort of a group of three students to support a third grader to formulate an initial perception of the fraction as multiplicative relation of quantity. Through a design experiment, it was attempted to resolve the initial difficulties of the student and to create a suitable environment to express her ideas and advance her thinking. At the same time, an analysis of the effort was made regarding the educational obstacles that emerged and how they could have been avoided. This analysis was based on the final reflection of the group that organized the approach.

Key words: multiplicative relation of quantities, quantity partitioning, design research

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: ΕΙΣΑΓΩΓΗ	3
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: ΘΕΩΡΙΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ	5
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΣΧΕΤΙΚΗ ΜΕ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.....	10
Α.ΤΑ ΕΜΠΟΔΙΑ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΩΣ ΜΕΡΟΣ ΕΝΟΣ ΟΛΟΥ.....	10
Β.ΕΡΕΥΝΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΩΝ ΔΥΣΚΟΛΙΩΝ ΠΟΥ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ.....	12
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙV: ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ.....	16
Α. ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ.....	16
Β. Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ ΤΗΣ ΜΑΘΗΤΡΙΑΣ.....	18
Γ. Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΝΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΜΑΘΗΤΡΙΑ	27
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	47
ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Παρατηρώντας κανείς τα σχολικά εγχειρίδια μπορεί να διαπιστώσει ότι αυτά εστιάζουν στην παρουσίαση του κλάσματος ως μέρος ενός όλου και δεν ενθαρρύνουν διαφορετικές πτυχές του. Επιπλέον, με βάση μια περιορισμένη αντίληψη του κλάσματος, τα διδακτικά βιβλία δίνουν ιδιαίτερη έμφαση στην εκμάθηση αλγορίθμων για τις πράξεις με κλάσματα. Μέσα από έρευνες έχει βρεθεί ότι με μια τέτοια προσέγγιση των διδακτικών βιβλίων, και κατά συνέπεια της διδασκαλίας, οι μαθητές εμφανίζουν περιορισμένη κατανόηση των κλασμάτων (McCloskey & Norton, 2009). Πώς πρέπει, λοιπόν, να ξεκινήσει η διδασκαλία τους για να τεθούν οι σωστές βάσεις για τη βαθύτερη κατανόηση της έννοιας αυτής; Αυτό το ερώτημα οδήγησε μια ομάδα μεταπτυχιακών φοιτητών, στην οποία συμμετείχα, να πραγματοποιήσει μια σειρά συναντήσεων με μία μαθήτρια τρίτης δημοτικού. Κατά τη διάρκεια των συναντήσεων αυτών, προσπαθήσαμε να ενισχύσουμε τη μαθήτρια, ώστε να σχηματίσει μία αρχική αντίληψη του κλάσματος, ως πολλαπλασιαστική σχέση ποσοτήτων. Θέλαμε η μαθήτρια να αρχίσει να αντιλαμβάνεται ότι τα κλάσματα εκφράζουν αντίστροφες σχέσεις σχετικού μεγέθους ποσοτήτων. Στο ξεκίνημα της προσπάθειάς μας, εστίασαμε σε δυσκολίες που είχαμε εντοπίσει - μέσα από ένα ερωτηματολόγιο που της δώσαμε να συμπληρώσει - ότι η μαθήτρια εμφάνιζε στην αντίληψη της έννοιας «του μισού μιας ποσότητας». Πριν κατακτηθεί, όμως, αυτός ο γενικότερος στόχος, επιδιώξαμε να στηρίξουμε τη μαθήτρια να διαμορφώσει μία ολοκληρωμένη αντίληψη για την έννοια του μισού. Ταυτόχρονα, μέσα από την επαφή μας με τη μαθήτρια, είχαμε την ευκαιρία να αξιολογήσουμε και τον τρόπο με τον οποίο επιχειρήσαμε να τη βοηθήσουμε. Ο αναστοχασμός μας σχετικά με τον τρόπο στήριξης της μαθήτριας μας επιτρέπει να εντοπίσουμε στοιχεία της διδακτικής μας παρέμβασης που επιδέχονται βελτίωση.

Η πορεία μάθησης της μαθήτριας καθώς και ο τρόπος που τη στηρίξαμε αποτελούν τα δύο βασικά θέματα που απασχολούν τη συγκεκριμένη εργασία. Πιο συγκεκριμένα, περιγράφονται και αναλύονται στοιχεία που δείχνουν τον τρόπο σκέψης της μαθήτριας, την εξέλιξή της αλλά και τα εμπόδια που συνάντησε. Παράλληλα, αναλύεται η πρώτη δική μας προσπάθεια κατανόησης της

πολυπλοκότητας της διδασκαλίας του κλάσματος, μέσα από την επαφή μας με τη μαθήτρια και συγκεκριμένα η προσέγγισή μας να τη στηρίζουμε να αντιμετωπίσει τα εμπόδια που συναντούσε.

Ο γενικός προσανατολισμός μας σχετικά με το πώς πρέπει να είναι μία διδασκαλία για να οδηγήσει στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, βασίστηκε στις αρχές της Ρεαλιστικής Θεωρίας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Στοιχεία αυτής της Θεωρίας μαζί με τον τρόπο που επηρέασε την προσπάθειά μας να στηρίζουμε τη μαθήτρια να οικοδομήσει μία κατανόηση του κλάσματος υπάρχουν στο επόμενο κεφάλαιο. Στο επόμενο κεφάλαιο, παρουσιάζονται ευρήματα από διάφορες έρευνες, που ασχολούνται με τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα κλάσματα. Αυτές οι έρευνες μας βοήθησαν, όχι μόνο στο σχεδιασμό της διδακτικής μας παρέμβασης και στην κατανόηση της σκέψης της μαθήτριας, αλλά και στην αξιολόγηση της προσπάθειάς μας.

Το επόμενο κεφάλαιο αναφέρεται στην ανάλυση των στοιχείων που συγκεντρώσαμε από τις συναντήσεις μας με τη μαθήτρια. Ειδικότερα, στο πρώτο μέρος του περιγράφεται ο τρόπος συλλογής κι ανάλυσης των στοιχείων μας. Το δεύτερο μέρος του αναλύει τις απαντήσεις της μαθήτριας σε ένα ερωτηματολόγιο που είχε δοθεί στην τάξη της. Σκοπός αυτής της ανάλυσης είναι να διαμορφώσουμε μια εικόνα των σημείων αφετηρίας της μαθήτριας. Στο τρίτο μέρος, υπάρχει η ανάλυση των συναντήσεών μας με την μαθήτρια. Παρουσιάζονται και σχολιάζονται στοιχεία που φανερώνουν: 1) την εξέλιξη της σκέψης της μαθήτριας και 2) τα χαρακτηριστικά που είχε η προσέγγισή μας, καθώς στηρίζαμε τη μάθησή της. Το πέμπτο κεφάλαιο συνοψίζει τα συμπεράσματα της δουλειά μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ II: ΘΕΩΡΙΑ ΡΕΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Η Θεωρία της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (PME) δίνει έναν γενικό προσανατολισμό στην προσπάθειά μας να εισάγουμε μια μαθήτριά στην έννοια του κλάσματος. Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά, παρουσιάζονται κάποιες γενικές πληροφορίες και οι βασικές αρχές αυτής της θεωρίας. Στη συνέχεια, εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο οι αρχές αυτές επηρέασαν, σε γενικές γραμμές, τον σχεδιασμό της διδακτικής μας παρέμβασης.

Η θεωρία της PME προσπαθεί να επιφέρει αλλαγή στη διδασκαλία των μαθηματικών. Οι ρίζες της τοποθετούνται στις αρχές της δεκαετίας του '70 και δημιουργήθηκαν από ένα ολλανδικό κίνημα. Αν και η επιρροή της PME στον τομέα της έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών μετρά 30 και πλέον έτη, θεωρείται ακόμα ένα έργο υπό κατασκευή, γεγονός το οποίο βασίζεται στην γενικότερή της φιλοσοφία ότι η εκπαιδευτική καινοτομία απαιτεί χρόνο (van den Heuvel – Panhuizen, 2014). Η PME έχει τις απαρχές της στην εργασία της ομάδας Wiskobas (1968, από van den Heuvel – Panhuizen, 2014), αλλά η σημερινή της μορφή έχει διαμορφωθεί κυρίως βάσει της ιδέας του Freudenthal (1977, από van den Heuvel – Panhuizen, 2014) για τα μαθηματικά. Σύμφωνα με αυτή την ιδέα, τα μαθηματικά πρέπει να συνδέονται με την πραγματικότητα και να σχετίζονται με την κοινωνία, ώστε να έχουν αξία για τον άνθρωπο. Θέλοντας να εγκαταλειφθεί η αντιμετώπιση των μαθηματικών ως ένα αντικείμενο γνώσης που μεταβιβάζεται στο άτομο, ο Freudenthal παρουσίασε την ιδέα ότι τα μαθηματικά είναι μία ανθρώπινη δραστηριότητα.

Βάσει της παραπάνω αντίληψης, λοιπόν, τα μαθηματικά δεν θα πρέπει να εκλαμβάνονται ως μία παγιωμένη και ολοκληρωμένη θεωρία, αφού πάντα θα υπεισέρχεται σε αυτά η προσαρμογή που χρειάζεται σε κάθε διδακτική κατάσταση. Σύμφωνα με αυτή την άποψη, λοιπόν, οι δάσκαλοι πρέπει να δίνουν μία ευκαιρία στους μαθητές να «ξανά – ανακαλύπτουν» τα μαθηματικά μέσα από την ενασχόληση τους με αυτά. Ειδικότερα, ο δάσκαλος πρέπει να αξιοποιεί αυτά που φέρνει ο μαθητής, ώστε να προχωρήσει η σκέψη του μαθητή προς την κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας. Έτσι το κεντρικό σημείο των

μαθηματικών θα πρέπει να είναι η δραστηριότητα κατά διαδικασία της μαθηματικοποίησης (Freudenthal, 1968 από van den Heuvel – Panhuizen, 2014).

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, ο Treffers (1987) διαμόρφωσε την ιδέα του Freudenthal και παρουσίασε δύο τύπους μαθηματικοποίησης μέσα σε ένα διδακτικό πλαίσιο. Οι δύο αυτοί τύποι είναι η οριζόντια και η κάθετη μαθηματικοποίηση. Στην οριζόντια μαθηματικοποίηση οι μαθητές αξιοποιούν μαθηματικά εργαλεία, που τους βοηθούν να οργανώσουν και να επιλύσουν προβλήματα από καταστάσεις της πραγματικής ζωής. Η κάθετη μαθηματικοποίηση είναι μία διαδικασία αναδιοργάνωσης της σκέψης του μαθητή μέσα στο μαθηματικό σύστημα. Τα παιδιά εντοπίζουν συνδέσεις ανάμεσα στις έννοιες και στις στρατηγικές που υπάρχουν στο μαθηματικό σύστημα και σε αυτά που γνωρίζουν από την εμπειρία τους, ώστε τελικά να εφαρμόζουν και τις επίσημες μαθηματικές μεθόδους. Ουσιαστικά, οι μαθητές προχωρούν τη σκέψη τους από τις καταστάσεις της καθημερινότητας και την τοποθετούν στον κόσμο των μαθηματικών συμβόλων που εμπεριέχονται στο μαθηματικό σύστημα. Οι μαθητές, λοιπόν, ξεκινούν από καταστάσεις της καθημερινής τους ζωής και έχοντας θέσει τις κατάλληλες βάσεις, προχωρούν. Οι δύο αυτοί τύποι, όπως αναφέρει ο Freudenthal (1991), είναι εξίσου απαραίτητοι και η εμπλοκή των μαθητών σε αυτούς μπορεί να αντανakλά διαφορετικά επίπεδα κατανόησης των εκάστοτε εννοιών και διαδικασιών στις οποίες αναφέρονται.

Η θεωρία της PME σκιαγραφείται μέσα από τις τρεις αρχές της: α) την καθοδηγούμενη επανεφεύρεση, β) τη διδακτική φαινομενολογία και γ) την αναδυόμενη μοντελοποίηση (Gravemeijer, 2008). Η αρχή της επανεφεύρεσης υποδηλώνει ότι για τον σχεδιασμό κάθε διδασκαλίας λαμβάνεται υπόψη η ιστορία των μαθηματικών, πώς, δηλαδή, ορισμένες μαθηματικές πρακτικές αναπτύχθηκαν με την πάροδο του χρόνου. Επιπλέον, λαμβάνονται υπόψη οι ανεπίσημες λύσεις, στρατηγικές και ερμηνείες των μαθητών. Ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να τις κατευθύνει, ώστε να αξιοποιηθούν από τους μαθητές και να γενικευτούν σε ένα επίσημο πλαίσιο.

Η επανεφεύρεση στην οποία αναφερόμαστε είναι τόσο μία ομαδική, όσο και μία ατομική δραστηριότητα, στην οποία ο διάλογος όλης της τάξης, η

επεξήγηση και η αιτιολόγηση παίζουν ένα πολύ σημαντικό ρόλο (Kwon, 2002). Αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι ότι οι μαθητές αναπτύσσουν οι ίδιοι μαθηματικές ιδέες, σε αντίθεση με το να δέχονται έτοιμες μεθόδους επίλυσης (van den Heuvel – Panhuizen, 2014).

Η δεύτερη αρχή της PME αφορά τη διδακτική φαινομενολογία. Ο όρος αυτός αναφέρεται σε μία φαινομενολογία των Μαθηματικών, η οποία εστιάζει στον τρόπο με τον οποίο οργανώνονται οι μαθηματικές έννοιες, οι διαδικασίες και τα εργαλεία (Freudenthal, 1983). Αφετηρία αυτής της προσπάθειας για οργάνωση θεωρούνται οι εμπειρίες που φέρνει το παιδί. Έτσι, ο εκπαιδευτικός προσπαθεί με κατάλληλες δραστηριότητες να δημιουργήσει ένα μονοπάτι μέσα από το οποίο ο μαθητής θα ανακαλύψει τη μαθηματική γνώση.

Η τρίτη αρχή, της αναδυόμενης μοντελοποίησης, μπορεί να περιλαμβάνει την κατασκευή σχεδίων, διαγραμμάτων, πινάκων, τη χρήση ανεπίσημων ή συμβατικών μαθηματικών σημειώσεων. Θεωρείται ότι καθώς οι μαθητές δρουν με τα μοντέλα αυτά, έχουν την ευκαιρία να επανεφεύρουν «επίσημα μαθηματικά». Τα αρχικά μοντέλα πρέπει να επιτρέπουν την εμφάνιση ανεπίσημων στρατηγικών. Στη συνέχεια, ενώ οι μαθητές αποκτούν περισσότερη εμπειρία με παρόμοια προβλήματα, η προσοχή τους μπορεί να μετατοπιστεί προς τις μαθηματικές σχέσεις και στρατηγικές. Αυτό τους βοηθά να αναπτύξουν περαιτέρω αυτές τις μαθηματικές σχέσεις, οι οποίες τους επιτρέπουν να χρησιμοποιούν το μοντέλο με διαφορετικό τρόπο: Το μοντέλο γίνεται πιο σημαντικό ως βάση για τον μαθηματικό συλλογισμό για αυτές τις σχέσεις παρά ως ένας τρόπος αναπαράστασης του πλαισίου του προβλήματος. Με αυτό τον τρόπο, το μοντέλο αρχίζει να γίνεται μέσο υποστήριξης για πιο επίσημα μαθηματικά.

Στο πλαίσιο της θεωρίας της PME, στη δική μας παρέμβαση, ως σημείο αφετηρίας της διδασκαλίας θεωρήσαμε τρία χαρακτηριστικά των προβλημάτων (Cortina, 2015): α) να έχουν ένα πλαίσιο ρεαλιστικό για τους μαθητές, β) να προκαλούν την εμφάνιση άτυπων τρόπων συλλογισμού οι οποίοι θα μπορέσουν να αποτελέσουν μια βάση για την ανάπτυξη πιο εξελιγμένων σκέψεων και γ) να

χρησιμεύουν ως στήριγμα στην ολοένα πιο αφηρημένη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών.

Αναλυτικότερα, τα προβλήματα δεν είναι απαραίτητο να περιέχουν στοιχεία της καθημερινής ζωής, ούτε να προέρχονται από αντίστοιχες εμπειρίες των μαθητών. Θεωρείται βασική προϋπόθεση, όμως, να συνδέονται με ένα πλαίσιο που αφενός είναι κατανοητό στα παιδιά και αφετέρου τα ωθεί να δράσουν και να πάρουν πρωτοβουλίες. Έτσι, μέσα από τη δική τους δράση, προχωρούν τη σκέψη τους πάνω σε μία μαθηματική έννοια. Ακόμα και φανταστικά σενάρια μπορούν να θεωρηθούν ρεαλιστικά, εάν εδραιωθούν σε μια τάξη με τρόπους που έχουν νόημα για τους μαθητές και τους οδηγήσουν να συμμετάσχουν σε μαθηματική δραστηριότητα.

Δεν αρκεί, όμως, να χρησιμοποιούμε ένα πλαίσιο προβλήματος και εργαλεία με τα οποία οι μαθητές παρακινούνται σε σημαντική μαθηματική δραστηριότητα. Αναγκαίο είναι, επίσης, μέσα από την ενασχόληση με το πρόβλημα, να εμφανιστούν άτυποι τρόποι συλλογισμού, στους οποίους μπορούν να στηριχθούν οι μαθητές για να αξιοποιήσουν και να αναπτύξουν πιο εξελιγμένες αντιλήψεις σχετικά με συγκεκριμένες μαθηματικές ιδέες. Με άλλα λόγια, τα προβλήματα πρέπει να είναι ένα μέσο επίτευξης μαθησιακών στόχων βραχυπρόθεσμα.

Τέλος, τα προβλήματα πρέπει να χρησιμεύουν ως στήριγμα για τη συλλογιστική των μαθητών, καθώς η μάθηση εξελίσσεται. Για να συμβεί αυτό, οι αναπαραστάσεις που εμφανίζονται στο μυαλό των μαθητών, καθώς εμπλέκονται στην επίλυση προβλημάτων, θα πρέπει να είναι συμβατές με την ακολουθία των μαθηματικών αντιλήψεων που επιθυμούμε να αναπτύξει ο μαθητής μέσα από το μονοπάτι που έχουμε οργανώσει. Κατά συνέπεια, η αρχική δραστηριότητα των μαθητών αξιοποιείται για την οργάνωση των επόμενων προβλημάτων.

Όπως φαίνεται, λοιπόν, η χρήση προβλημάτων με πλαίσιο είναι πολύ σημαντική για την ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την παραδοσιακή και μηχανιστική προσέγγιση της μαθηματικής εκπαίδευσης, όπου τα προβλήματα που αξιοποιούνται περιέχουν μόνο αριθμούς. Ακόμα και αν χρησιμοποιηθούν προβλήματα που έχουν κάποιο πλαίσιο στη μηχανιστική

προσέγγιση, αυτό θα γίνει για να προωθηθεί μία μεθοδολογία, χωρίς να έχει προωθηθεί η βαθύτερη κατανόηση της από τα παιδιά. Οι μαθητές, δηλαδή, δεν παρακινούνται να δράσουν αλλά να εφαρμόσουν μία μεθοδολογία που τους παρουσιάζεται. Στην ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, τα προβλήματα με πλαίσιο αξιοποιούνται για την ανάπτυξη μαθηματικών εργαλείων που θα οδηγήσουν στην κατανόηση. Αρχικά, οι μαθητές αναπτύσσουν στρατηγικές συνδεδεμένες με το πλαίσιο (οριζόντια μαθηματικοποίηση) και στη συνέχεια, αυτές μπορούν να γενικευτούν και να οδηγήσουν στη διαμόρφωση ενός μοντέλου, που θα υποστηρίζει την αντιμετώπιση αντίστοιχων προβλημάτων (κάθετη μαθηματικοποίηση). Τελικά, η διαμόρφωση μοντέλων δίνει πρόσβαση στα παιδιά σε πιο επίσημες μαθηματικές γνώσεις. Κατασκευάζουν τη γνώση, μέσα από κατάλληλη στήριξη, με τις δικές τους δυνάμεις, δημιουργώντας, διαρκώς, συνδέσεις ανάμεσα στις εμπειρίες και τις γνώσεις τους (van den Heuvel – Panhuizen, 2014).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ ΣΧΕΤΙΚΗ ΜΕ ΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Η αρχή της ρεαλιστικής μάθησης στα μαθηματικά, όπως προαναφέρθηκε, αποτέλεσε οδηγό κατά την οργάνωση αλλά και κατά τον αναστοχασμό της προσπάθειάς μας. Μέσα από την επαφή μας με έρευνες που αφορούν διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης της διδασκαλίας των μαθηματικών, παρατηρήσαμε ότι η έννοια του κλάσματος ενέχει δυσκολίες και παρά την πληθώρα ερευνών που έχουν διεξαχθεί, δεν έχει βελτιωθεί σε ικανοποιητικό βαθμό η κατάσταση (Cortina, 2014). Έχοντας ως κύριο προβληματισμό μας τη δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας του κλάσματος, θεωρήσαμε ότι θα ήταν ιδιαίτερα δημιουργικό για εμάς, η πρώτη μας προσπάθεια να προσεγγίσουμε σύμφωνα με τις αρχές της ρεαλιστικής μάθησης τη διδασκαλία των μαθηματικών, να έχει ως βασικό θέμα την έννοια του κλάσματος. Στο παρακάτω υποκεφάλαιο, παρουσιάζονται τα ευρήματα της βιβλιογραφίας σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά την επαφή τους με την έννοια του κλάσματος και στη συνέχεια προσπάθειες που έχουν πραγματοποιηθεί για να βοηθηθούν τα παιδιά στο να ξεπεράσουν τα εμπόδια που συναντούν.

A. ΤΑ ΕΜΠΟΔΙΑ ΠΟΥ ΔΗΜΙΟΥΡΓΟΥΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ ΩΣ ΜΕΡΟΣ ΕΝΟΣ ΟΛΟΥ.

Σύμφωνα με τον Brousseau (1997), τα εμπόδια που μπορεί να συναντήσουν οι μαθητές κατά την ενασχόληση τους με τα μαθηματικά μπορεί να οφείλονται είτε σε παράγοντες που αφορούν αναπτυξιακούς περιορισμούς είτε σε παράγοντες που προέρχονται από την ίδια τη φύση των μαθηματικών, όταν μία μαθηματική έννοια παρεμβαίνει στην κατανόηση μιας πιο σύνθετης. Τα δύο αυτά είδη εμποδίων δεν μπορούν ούτε θα έπρεπε να αποφεύγονται. Ο εκπαιδευτικός πρέπει να στηρίζει τους μαθητές να τα ξεπεράσουν, μέσα από αναδιοργάνωση της γνώσης, ώστε να «συμφιλιωθούν» ιδέες που φαίνονται ασύνδετες μεταξύ τους, για να επιτευχθούν πιο σύνθετοι μαθηματικοί στόχοι. Ταυτόχρονα, πρέπει να προσπαθεί να αποφύγει την τελευταία κατηγορία εμποδίων που αφορούν τις διδακτικές στρατηγικές, ώστε να μην εμποδίζουν τη μελλοντική μάθηση.

Όσον αφορά την έννοια του κλάσματος, γίνεται προσπάθεια να βρεθεί ποια είναι η βαθύτερη αιτία που οδηγεί στη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι μαθητές. Ο Cortina (2014) εξηγεί ότι μερικές από τις γνώσεις που αναπτύσσουν οι μαθητές, όταν ξεκινούν την ενασχόληση τους με τα κλάσματα, τους εμποδίζουν στη συνέχεια την επίτευξη μίας ώριμη κατανόησης της έννοιας. Πιο συγκεκριμένα, αναφέρει ότι τα εμπόδια που δημιουργούνται οφείλονται στη χρήση του ισοτεμαχισμού, δηλαδή τον τεμαχισμό μιας ποσότητας σε ίσα μέρη, ως κύριο μοντέλο στήριξης των αρχικών κλασματικών γνώσεων. Σε αντίθεση με την παραπάνω άποψη, πολλοί επιστήμονες (Confrey & Maloney, 2010, Kieren, 1993, Mack, 1990, Pientlich & Hunting, 1996, Steffe, 2010) θεωρούν ότι ο ισοτεμαχισμός προωθεί τη διδασκαλία του κλάσματος, αφού τα παιδιά μπορούν να κατανοήσουν πολύ εύκολα διεργασίες όπως το να χωρίσουν, να κόψουν και να διπλώσουν. Επίσης, αυτές οι δραστηριότητες φαίνεται να είναι χρήσιμες για την ανάπτυξη βασικών κλασματικών σχέσεων, όπως είναι το σχετικό μέγεθος κλασμάτων και η ισοδυναμία. Σύμφωνα με τους Freudenthal (1983), Thompspon και Saldanha (2003), υπάρχουν 3 εικόνες αντίληψης του κλάσματος, που δημιουργούνται, όταν ο ισοτεμαχισμός χρησιμοποιείται ως ο μοναδικός τρόπος για την παρουσίαση της έννοιας του κλάσματος. Αυτές οι 3 εικόνες, μπορεί να παρεμποδίσουν την ανάπτυξη μιας ώριμης κατανόησης του κλάσματος.

Σύμφωνα με την πρώτη εικόνα, το όλο γίνεται αντιληπτό σαν ένα ολόκληρο πράγμα (π.χ. σοκολάτα ή πίτσα) και αφού τεμαχιστεί σε ίσου μεγέθους μέρη προκύπτει το μοναδιαίο κλάσμα σαν όνομα ενός από τα ίσα κομμάτια που προκύπτουν. Το όλο δεν εκπροσωπεί μια ιδιότητα (π.χ. το βάρος ή το μήκος μιας σοκολάτας) στην οποία δίνεται η τιμή 1 και το μοναδιαίο κλάσμα δεν ποσοτικοποιεί το μέγεθος του κομματιού ή καλύτερα το σχετικό μέγεθος που αυτό έχει ως προς το όλο από το οποίο προέκυψε. Τα γνήσια κλάσματα με αριθμητή μεγαλύτερο της μονάδας οδηγούν τους μαθητές να διαμορφώσουν μια δεύτερη εικόνα, σύμφωνα με την οποία, ο παρανομαστής δηλώνει το πλήθος των μερών στα οποία έχει κοπεί το όλο και ο αριθμητής τα μέρη που πήραμε. Όπως και με την προηγούμενη εικόνα, οι μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι τα κλάσματα εκφράζουν σχέσεις μεγέθους. Για παράδειγμα, το $\frac{2}{5}$ δεν γίνεται

εύκολα αντιληπτό ως εκφραστής μιας σχέσης ανάμεσα στα μεγέθη των 2 κομματιών που του αντιστοιχούν και των 5 κομματιών που απαρτίζουν το όλο. Είναι δύσκολο για τους μαθητές να κατανοήσουν το $\frac{2}{5}$ ως μία πολλαπλασιαστική σχέση μεγεθών μικρότερη από το μισό, μιας και η επανάληψη του $\frac{2}{5}$ δύο φορές δεν αρκεί για να δώσει το όλο από το οποίο προέκυψε. Η προσοχή των μαθητών εστιάζει μόνο στις προσθετικές σχέσεις. Το $\frac{2}{5}$ χρειάζεται ακόμα $\frac{3}{5}$ για να δώσει το όλο. Η έμφαση στα κομμάτια που προκύπτουν από τον ισοτεμαχισμό παρά στο σχετικό τους μέγεθος συνοδεύεται και από μια τρίτη εικόνα για το κλάσμα η οποία δημιουργεί στους μαθητές την εντύπωση ότι στα κλάσματα τα κομμάτια του αριθμητή πρέπει να περιέχονται στα κομμάτια του παρνομαστή. Συνέπεια αυτής της εικόνας είναι η δυσκολία των μαθητών να κατανοούν τα καταχρηστικά κλάσματα ή κλάσματα που αναφέρονται σε συλλογές που δεν έχουν κοινά στοιχεία μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, το κλάσμα $\frac{5}{2}$ δεν έχει νόημα μιας και δεν είναι δυνατόν να πάρω από 2 μέρη τα 5. Και ακόμη, το $\frac{2}{5}$ μπορεί να είναι το κλάσμα του πλήθους των αγοριών προς το πλήθος των παιδιών μιας παρέας αλλά όχι το κλάσμα του πλήθους των αγοριών προς το πλήθος των κοριτσιών

B. ΕΡΕΥΝΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΣΗ ΤΩΝ ΔΥΣΚΟΛΙΩΝ ΠΟΥ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΟΥΝ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ ΣΧΕΤΙΚΑ ΜΕ ΤΟ ΚΛΑΣΜΑ

Η αναζήτηση των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με την έννοια του κλάσματος, καθώς και η επιθυμία μας να συνεισφέρουμε στην επίλυσή τους, σχεδιάζοντας μία διδακτική προσέγγιση, μας οδήγησε στη μελέτη της παρακάτω βιβλιογραφίας που σχετίζεται με στρατηγικές που έχουν εφαρμοστεί μέχρι σήμερα για την αντιμετώπιση των αρχικών δυσκολιών των μαθητών αναφορικά με την έννοια του κλάσματος. Οι προσεγγίσεις αυτές αποτέλεσαν έμπνευση για τον σχεδιασμό και την ανάλυση της δικής μας διδακτικής παρέμβασης.

Για τις δυσκολίες που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο υπάρχουν τρεις στρατηγικές που εντοπίσαμε στη σχετική βιβλιογραφία.

Η πρώτη στρατηγική που προτείνεται από τους Confrey και Maloney (2010) αλλά και από τον Streefland (1991) αξιοποιεί, για την προσέγγιση των κλασμάτων, τη χρήση πολλαπλών όλων που μοιράζονται δίκαια. Μέσα από δραστηριότητες οι μαθητές καλούνται να προσδιορίζουν το μερίδιο ενός ατόμου, όταν περισσότερα του ενός αγαθά μοιράζονται δίκαια σε διαφορετικά πλήθη ατόμων. Για παράδειγμα, όταν 5 σοκολάτες μοιράζονται δίκαια σε 3 άτομα, οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να παράγουν το κλάσμα $5/3$ ή τον μικτό αριθμό $1 \frac{2}{3}$ ως μερίδιο του κάθε ατόμου. Σε σχέση με τις δυσκολίες που αναφέρθηκαν πιο πάνω, γίνεται κατανοητό ότι μέσα από τέτοιες καταστάσεις, δίνεται στους μαθητές η ευκαιρία να προσεγγίσουν και να κατανοήσουν τα καταχρηστικά κλάσματα. Αξίζει, βέβαια, να σημειωθεί ότι η δυσκολία των μαθητών να αντιληφθούν το κλάσμα ως εκφραστή του σχετικού μεγέθους μιας ποσότητας παραμένει. Στον βαθμό, όμως, που γίνεται κατάλληλη αξιοποίηση του πλαισίου της δίκαιης μοιρασιάς, θεωρούμε ότι οι μαθητές θα έχουν την ευκαιρία να ξεπεράσουν τη συγκεκριμένη δυσκολία. Με ερωτήσεις που διευκολύνουν τον αναστοχασμό των μαθητών πιστεύουμε ότι θα ήταν δυνατόν να συνειδητοποιήσουν τη σχέση που συνδέει το μέγεθος του κλασματικού μεριδίου που προκύπτει από μια δίκαιη μοιρασιά με την αρχική ποσότητα που έπρεπε να μοιραστεί. Για παράδειγμα, αφού οι μαθητές καταλήξουν ότι κάθε παιδί θα πάρει $\frac{3}{4}$ σοκολάτας από τη δίκαιη μοιρασιά 3 σοκολατών σε 4 παιδιά, ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να ζητά από τους μαθητές να βρουν πόσες φορές θα πρέπει να επαναληφθεί για να επανασυσταθεί η αρχική ποσότητα. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές θα μπορούσαν, περαιτέρω, να αρχίσουν να συνειδητοποιούν ότι το μέγεθος του κάθε μεριδίου είναι $\frac{1}{4}$ του μεγέθους της αρχικής ποσότητας.

Η επόμενη στρατηγική, περιλαμβάνει την αρχική εξοικείωση των μαθητών σε καταστάσεις μέρους-όλου και ύστερα την επαφή τους με τις άλλες πτυχές του κλάσματος, για να ξεπεραστούν οι ελαττωματικές αρχικές εικόνες αντίληψης του κλάσματος. Οι τακτικές αυτές εφαρμόστηκαν από τους Kieren (1976, 1980, 1993) και Behr (1992, 1983). Μέσα από αυτές τις προτάσεις, γίνεται προσπάθεια να έρθουν σε επαφή τα παιδιά με το κλάσμα, όχι μόνο ως μέρος ενός όλου, αλλά και ως μέτρο, λόγο, πηλίκο και ως πολλαπλασιαστή μιας ποσότητας.

Θεωρούν ότι με αυτό τον τρόπο θα συμφιλιωθούν οι διαφορετικές χρήσεις των κλασμάτων και θα ξεπεράσουν τις ελαττωματικές εικόνες.

Η κριτική που έχει γίνει για αυτήν τη στρατηγική (Thompson & Saldanha, 2003), αναφέρει ότι ενσωματώνει πολλαπλές έννοιες και αναπαραστάσεις σε μία ιδέα που δεν έχει αναπτυχθεί ακόμα. Επίσης, αναφέρεται ότι είναι πολύ πιθανό να αντιληφθούν τους ρητούς αριθμούς, ως αριθμούς που χρησιμοποιούνται διαφορετικά ανά περίπτωση. Συμφωνούμε ότι η ενοποίηση των διαφορετικών νοημάτων του κλάσματος είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη ως διαδικασία. Πιστεύουμε, όμως, ότι αν η διδασκαλία ενθαρρύνει τους μαθητές σε αυτήν την ενοποίηση με κατάλληλα προβλήματα, υλικά αναπαράστασης και συζητήσεις, θα μπορούσε να μετριάσει την πολυπλοκότητά της.

Η τρίτη τακτική που εφαρμόστηκε από τον Steffe και τους συνεργάτες του, προσπαθεί να στηρίζει τη μάθηση των κλασμάτων μέσα από την αναπαράστασή τους ως ποσότητες που μπορούν να ισοτεμαχίζονται ως μήκη. Η επανάληψη του κομματιού που προκύπτει, χρησιμοποιείται για να βοηθήσει τους μαθητές να σκεφτούν για το μέγεθος του κάθε μέρους που βρίσκεται στο ισοτεμαχισμένο όλο.

Μέσα σε αυτήν τη στρατηγική, εμπλέκεται η ανάπτυξη 5 κλασματικών νοητικών σχημάτων (Norton & Wilkins, 2009; Steffe & Olive, 2010). Αρχικά, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τα κλάσματα ως μέρη ενός όλου. Στη συνέχεια, συνειδητοποιούν ότι κάθε μέρος έχει συγκεκριμένο μέγεθος, ίδιο με τα υπόλοιπα. Έπειτα, το μέγεθος των μερών γίνεται αντιληπτό με ένα τέτοιο τρόπο, ώστε όταν συσσωρεύονται όλα τα κομμάτια σχηματίζουν το όλο. Εν συνεχεία, συνδέουν μέρη για να δημιουργήσουν μία ποσότητα μικρότερη από το όλο, με μέγεθος που αντιλαμβάνονται ότι σχετίζεται με ολόκληρη την ποσότητα. Τέλος, το πέμπτο νοητικό σχήμα σχετίζεται με την αντίληψη ότι το μέρος ενός όλου μπορεί να επαναλαμβάνεται χωρίς περιορισμούς, ακόμα και αν αυτή η επανάληψη οδηγεί σε μία ποσότητα μεγαλύτερη από το όλο.

Τα αποτελέσματα της παραπάνω στρατηγικής δείχνουν ότι ο ισοτεμαχισμός μπορεί να αποτελέσει τη βάση για την ανάπτυξη πιο σύνθετων κλασματικών εννοιών μέσα, όμως, από μία απαιτητική διαδικασία για τα παιδιά.

Πιο συγκεκριμένα, φαίνεται να εντοπίστηκαν δυσκολίες που συνδέονται με τις λανθασμένες εικόνες που αναλύθηκαν στο προηγούμενο υποκεφάλαιο.

Για την αποφυγή αυτών των δυσκολιών, ο Cortina και οι συνεργάτες του (2014), πρότειναν μία διαφορετική προσέγγιση. Σύμφωνα με τους ερευνητές αυτούς, οι δυσκολίες των μαθητών και οι περιοριστικές εικόνες που δημιουργούν για τα κλάσματα οφείλονται στο γεγονός ότι οι διάφορες στρατηγικές αξιοποιούν τον ισοτεμαχισμό ως σημείο αφετηρίας στη διδασκαλία των κλασμάτων. Υποστηρίζουν και τεκμηριώνουν ερευνητικά τις δυνατότητες μιας διδακτικής προσέγγισης κατά την οποία οι μαθητές ξεκινούν την πορεία τους για να κατανοήσουν τα κλάσματα μέσα από καταστάσεις που εστιάζουν στην ακριβή μέτρηση ποσοτήτων. Οι μαθητές ενθαρρύνονται, εξ αρχής, να διαμορφώσουν μία εικόνα για τα κλάσματα ως αριθμούς που συγκρίνουν το μέγεθος ποσοτήτων ίδιου τύπου. Σε μία από τις αρχικές προτεινόμενες δραστηριότητες, οι μαθητές ενθαρρύνονται να προσδιορίσουν τη χωρητικότητα ενός κυπέλλου γάλακτος σε σχέση με τη χωρητικότητα ενός κουτιού γάλακτος. Γνωρίζοντας, για παράδειγμα, ότι 4 χάρτινα κύπελλα χωράνε το περιεχόμενο ενός κουτιού γάλακτος, οι μαθητές καλούνται να φανταστούν ότι αδειάζουν το γάλα από το κουτί και να σημειώσουν μέχρι που θα φτάσει το επίπεδο του γάλακτος στο κουτί. Αυτές οι ενέργειες των μαθητών θεωρούνται ότι εξασφαλίζουν τη διαμόρφωση μιας εικόνας του μοναδιαίου κλάσματος $\frac{1}{4}$ ως αριθμού που αποδίδει τη χωρητικότητα ενός κυπέλλου σε σχέση με το κουτί γάλακτος, επειδή 4 από αυτά γεμίζουν το κουτί. Η ενασχόληση μιας ομάδας μαθητών με μια σειρά δραστηριοτήτων τέτοιου ή παρόμοιου τύπου έδωσε ενθαρρυντικά αποτελέσματα ως προς την ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να συγκρίνουν κλάσματα αλλά και να κατανοούν τα καταχρηστικά κλάσματα.

Όλες οι παραπάνω έρευνες αξιοποιήθηκαν από εμάς κατά τον σχεδιασμό των συναντήσεων με τη μαθήτριά, καθώς και κατά την ανάλυση τους, ως προς αυτά που έκανε και σκεφτόταν η μαθήτριά και ως προς την αξιολόγηση της δικής μας συμβολής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Το κεφάλαιο που ακολουθεί, περιγράφει τον τρόπο συλλογής και ανάλυσης των στοιχείων από τις συναντήσεις που πραγματοποιήσαμε με τη μαθήτρια που συμμετείχε στην προσπάθεια μας να προσεγγίσουμε τη διδασκαλία του κλάσματος, σύμφωνα με τις αρχές της ρεαλιστικής εκπαίδευσης στα μαθηματικά αλλά και τα ευρήματα της σχετικής βιβλιογραφίας για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην αντίληψη της έννοιας του κλάσματος. Παρουσιάζονται γενικά στοιχεία που αφορούν στη μαθήτρια και στους τρόπους συλλογής των δεδομένων. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται στοιχεία που τεκμηριώνουν το σημείο αφετηρίας της μαθήτριας από τις απαντήσεις της σε ένα ερωτηματολόγιο καθώς και μια υποθετική πορεία αρχικής κατανόησης της έννοιας του κλάσματος. Κατόπιν, γίνεται μία ανάλυση των στοιχείων που προέκυψαν από τη διδακτική μας παρέμβαση.

A. ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Η μαθήτρια που μας βοήθησε στην πρώτη μας προσπάθεια να προσεγγίσουμε τη διδασκαλία του κλάσματος συμμετέχοντας στις συναντήσεις, κατά την περίοδο διεξαγωγής τους, φοιτούσε στην Τρίτη δημοτικού σε ένα σχολείο της Αττικής. Λόγω της ηλικίας της, δεν είχε διδαχθεί ποτέ επίσημα τα κλάσματα. Επιλέξαμε την εν λόγω ηλικιακή ομάδα, επειδή θέλαμε να δούμε εξ αρχής πώς πραγματοποιείται η εξέλιξη της αντίληψης του κλάσματος, χωρίς να πρέπει να ξεπεραστούν περαιτέρω δυσκολίες που προκύπτουν μέσα από διδακτικά εμπόδια. Επίσης, όπως παρατηρήσαμε και στη συνέχεια, πρόκειται για ένα ιδιαίτερα συνεργάσιμο παιδί και πρόθυμο να εκφράσει τη σκέψη της. Για τη συμμετοχή της μαθήτριας στο εγχείρημά μας υπήρξε συγκατάθεση των γονέων, καθώς οι συναντήσεις μας μαζί της βιντεοσκοπήθηκαν. Στην εργασία αυτή, δεν αναφέρεται το όνομά της για λόγους προστασίας προσωπικών δεδομένων.

Οι συναντήσεις μας με τη μαθήτρια ήταν συνολικά 14. Οι πρώτες 7 έγιναν από τον Νοέμβριο 2016 έως τον Ιανουάριο 2017 (σ' αυτές θα αναφερθούμε στην παρούσα εργασία), ενώ οι υπόλοιπες έγιναν τον Ιούνιο του 2017. Οι συναντήσεις

γίνονταν κάθε βδομάδα στο σχολείο της μαθήτριας, έτσι ώστε να βρίσκεται σε έναν οικείο της χώρο και να μπορεί να δρα απερίσπαστη. Διαρκούσαν περίπου 20 λεπτά, ώστε να μην υπάρχει πνευματική κόπωση και να μπορεί να προβληματίζεται με δημιουργικό τρόπο. Κατά τη διάρκεια των συναντήσεών μας, η Θ. συνομιλούσε με όλη την ομάδα μεταπτυχιακών φοιτητών στην οποία συμμετείχα και εγώ. Η ομάδα μας αποτελούνταν από 3 άτομα, εκ των οποίων το ένα είχε τον ρόλο του συντονιστή του διαλόγου με τη μαθήτρια, ενώ τα υπόλοιπα 2 ήταν υπεύθυνα για την καταγραφή των δεδομένων. Ταυτόχρονα, πραγματοποιούσαν παρεμβάσεις, όταν κρίνονταν απαραίτητο.

Όπως προαναφέρθηκε, τα δεδομένα από τις συναντήσεις συλλέχθηκαν τόσο μέσω της βιντεοσκόπησης όσο και με σημειώσεις πεδίου που πραγματοποιούνταν από την ομάδα μας κατά τη διάρκεια της συνάντησης. Η ανάγκη για αναστοχασμό μετά από κάθε συνάντηση, οδήγησε στην καταγραφή όλων όσων συνέβαιναν κατά τη διάρκειά τους. Η βιντεοσκόπηση μας έδωσε την ευκαιρία να παρακολουθήσουμε όλη την ανάπτυξη της επικοινωνίας με το παιδί και όχι μόνο αυτά που λέγονταν αλλά και τις κινήσεις του παιδιού, τα σχέδια που έφτιαχνε, στοιχεία που δίνουν, επίσης, πολύτιμες πληροφορίες για την εξέλιξη της σκέψης του παιδιού .

Για να οργανωθεί η προσέγγισή μας και να καθοριστεί το σημείο αφετηρίας, δόθηκε στη μαθήτρια ερωτηματολόγιο, που είχε δημιουργηθεί από εμάς. Μέσα από τις απαντήσεις της σε αυτό το ερωτηματολόγιο επιδιώξαμε να εντοπίσουμε τις δυσκολίες αλλά και τις δυνατότητές της σχετικά με τις κλασματικές έννοιες. Αναλυτική παρουσίαση των στοιχείων από το ερωτηματολόγιο θα γίνει στην επόμενη ενότητα. Μέσα από τα στοιχεία του ερωτηματολογίου, καταφέραμε να οργανώσουμε τις συναντήσεις μας και να θέσουμε τον σκοπό και τους στόχους, μέσα από αυτά που παρατηρήσαμε.

Μετά την κάθε συνάντηση με τη μαθήτρια προσπαθούσαμε να σχεδιάσουμε την επόμενη, βάσει των δεδομένων που καταγράφαμε. Κάναμε δηλαδή, μία στοιχειώδη έρευνα σχεδιασμού (Gravemeijer & Cobb, 2013), προσπαθώντας να εντοπίσουμε τα σημεία που αποτελούσαν εμπόδιο για τη μαθήτρια και εκείνα που μαρτυρούσαν κάποια εξέλιξη στη σκέψη της, ώστε να επαναπροσδιορίσουμε

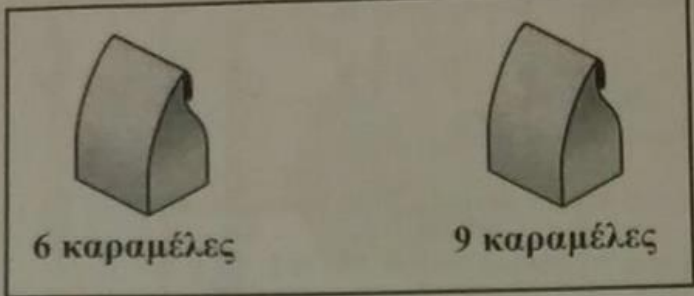
τους στόχους μας για να φτάσουμε στον τελικό σκοπό. Ταυτόχρονα, τα στοιχεία μας επέτρεψαν να αξιολογήσουμε και τη δική μας προσπάθεια στήριξης της μαθήτριας. Τα αποτελέσματα από την ανάλυση αυτή παρουσιάζονται στο τρίτο μέρος του κεφαλαίου αυτού.

B. Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ ΤΗΣ ΜΑΘΗΤΡΙΑΣ

Σε όλους τους συμμαθητές της μαθήτριας με την οποία συνεργαστήκαμε, είχαμε δώσει να συμπληρώσουν ένα ερωτηματολόγιο στα πλαίσια μιας εργασίας μας που είχε σκοπό να εντοπίσουμε αρχικές άτυπες γνώσεις των μαθητών σχετικά με τα κλάσματα. Στη συνέχεια, παρουσιάζονται και αναλύονται οι απαντήσεις της μαθήτριας σε ερωτήματα αυτού του ερωτηματολογίου για να διαπιστωθούν οι δυνατότητές της

Ερώτημα 1

1.



6 καραμέλες 9 καραμέλες

Πόσες καραμέλες έχουν και τα δύο σακουλάκια μαζί;15...καρ...

Πόσες καραμέλες παραπάνω έχει το δεύτερο σακουλάκι; ..3 παραπάνω

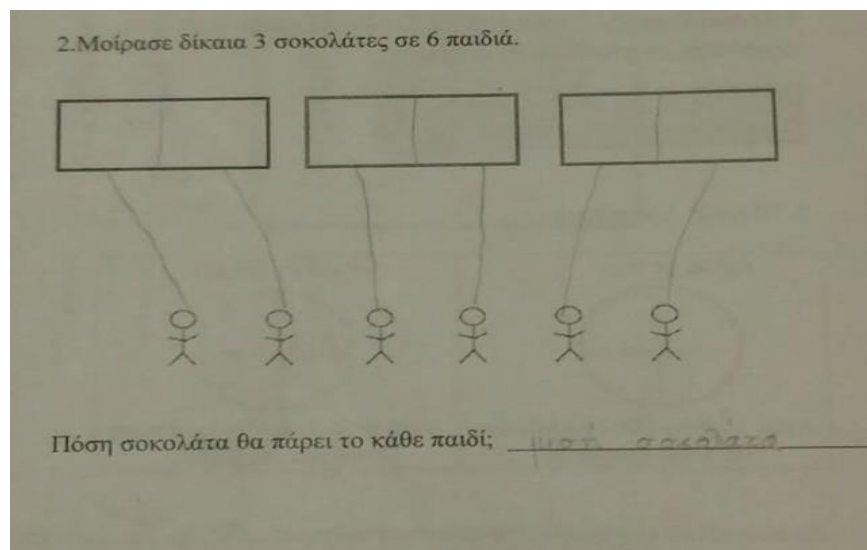
Πόσες φορές περισσότερες είναι οι καραμέλες στο δεύτερο σακουλάκι από το πρώτο;3.....

Στο πρώτο ερώτημα, δόθηκε το σχέδιο που φαίνεται παραπάνω, που παρουσίαζε δύο σακουλάκια εκ των οποίων το ένα περιείχε 6 καραμέλες και το άλλο 9 καραμέλες. Στη συνέχεια, ζητήθηκε να βρεθεί το σύνολο των καραμελών και στα δύο σακουλάκια με την ερώτηση: «Πόσες καραμέλες έχουν και τα δύο σακουλάκια μαζί;», η διαφορά του αριθμού των καραμελών στα δύο σακουλάκια ρωτώντας: «Πόσες καραμέλες παραπάνω έχει το δεύτερο σακουλάκι;» και τέλος να γίνει μία πολλαπλασιαστική σύγκριση ανάμεσα στον αριθμό των καραμελών

στα σακουλάκια με την ερώτηση: «Πόσες φορές περισσότερες είναι οι καραμέλες στο δεύτερο σακουλάκι από το πρώτο;».

Η απάντηση της μαθήτριας στο ερώτημα αυτό μας έδειξε ότι αναγνωρίζει τα πλαίσια των πράξεων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης, αφού έδωσε σωστές απαντήσεις (15 και 3 αντίστοιχα). Όσον αφορά στο 3^ο ερώτημα, θεωρούμε ότι με την παρούσα διατύπωση του ερωτήματος, ίσως χάσαμε την ευκαιρία να δούμε κατά πόσο η μαθήτρια θα μπορούσε να οδηγηθεί στην πολλαπλαστική σύγκριση των ποσοτήτων στα δύο σακουλάκια. Με μια καλύτερη διατύπωση του ερωτήματος ενδεχομένως, η μαθήτρια να είχε απαντήσει σωστά.

Ερώτημα 2



Στο ερώτημα αυτό, ζητήθηκε να μοιραστούν 3 σοκολάτες σε 6 παιδιά και στη συνέχεια να εκφραστεί η ποσότητα που θα πάρει το κάθε παιδί. Μέσα από αυτό το ερώτημα, επιδιώξαμε να δούμε αν τα παιδιά θα μπορέσουν μέσα από το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς να ισοτεμαχίσουν τις σοκολάτες για να βρουν το μερίδιο που αντιστοιχεί στο κάθε παιδί. Αναμέναμε συγκεκριμένα να αναφέρουν ότι το κάθε παιδί θα πάρει μισή σοκολάτα, αφού δε θα ήταν δυνατόν να δώσουν τη συμβολική απάντηση $\frac{1}{2}$ της σοκολάτας, αφού δεν είχαν έρθει σε επαφή με κλάσματα.

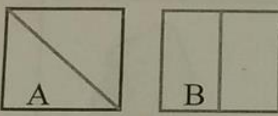
Στο ερώτημα αυτό, η μαθήτρια απάντησε σωστά (βλ. σχήμα) χωρίζοντας κάθε σοκολάτα στη μέση. Το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς φαίνεται να τη βοήθησε να προχωρήσει στον ισοτεμαχισμό των 3 σοκολατών προκειμένου να

φτιάξει 6 ίσα μερίδια. Ίσως να σκέφτηκε ότι το διπλάσιο του 3 εξασφαλίζει τα κομμάτια που χρειάζονται 6 παιδιά. Αυτή η υπόθεση επιβεβαιώνεται και από την απάντησή της στο πρόβλημα 7, όπως θα δούμε παρακάτω. Αν και η απάντησή της στο πρόβλημα 2 μπορούσε να είναι 1 κομμάτι, εκείνη απάντησε «μισή σοκολάτα». Οι εμπειρίες της από την καθημερινή ζωή, της επέτρεψαν να χρησιμοποιήσει την κλασματική αυτή έκφραση για να περιγράψει το μερίδιο κάθε παιδιού. Όμως, το νόημα της λέξης «μισή», που χρησιμοποίησε, είναι περιορισμένο, όπως φάνηκε από το ερώτημα 3.

Η επιτυχία της μαθήτριας στον ισοτεμαχισμό των ποσοτήτων μας έκανε να υποθέσουμε ότι έχει κατεκτημένο το αίσθημα της δίκαιης μοιρασιάς και θα μπορούσαμε να το αξιοποιήσουμε για την εισαγωγή της στην έννοια του κλάσματος. Εξάλλου, καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, όπως είδαμε παραπάνω, προσφέρονται για την εισαγωγή των μαθητών στην έννοια του κλάσματος αρκεί να υπάρχει κατάλληλη αξιοποίησή τους.

Ερώτημα 3

3. Στην εικόνα που βλέπεις είναι δύο ίδια τοστ κομμένα στη μέση.



Κοίταξε την εικόνα και βάλε Χ στο σωστό κουτάκι.

Το κομμάτι Α είναι μεγαλύτερο από το Β. ☒

Το κομμάτι Α είναι ίσο με το Β. ☐

Το κομμάτι Α είναι μικρότερο από το Β. ☐

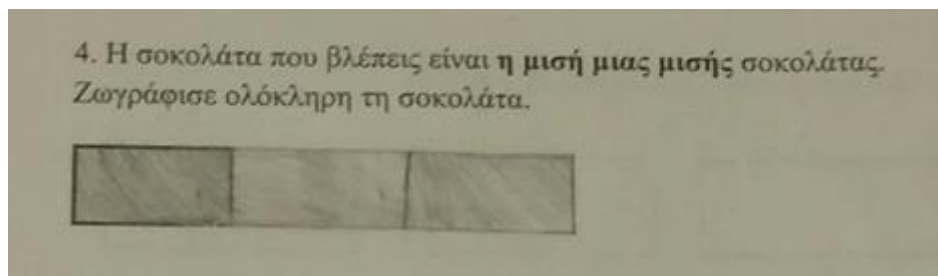
Γιατί: Το κομμάτι Β είναι δύο τμήματα ενώ το Α είναι ένα. Άρα και οι δύο είναι ίσα.

Όπως παρατηρούμε από το παραπάνω σχήμα, δόθηκαν 2 τοστ κομμένα στη μέση αλλά με διαφορετικό τρόπο. Στη συνέχεια, ζητήθηκε να διαλέξουν μία απάντηση σχετική με τη σχέση του μεγέθους των δύο κομματιών που αποτελούσαν το μισό από κάθε ποσότητα. Το ερώτημα αυτό αποσκοπεί στο να διαπιστώσουμε, πόσο σταθερή είναι η έννοια μισό μιας ποσότητας στους μαθητές σε σχέση με το όλο από το οποίο προήλθε. Θέλαμε να δούμε πόσο επηρεάζονται

από τη διάταξη των μισών κομματιών που προκύπτουν. Πιο συγκεκριμένα, με το ερώτημα αυτό θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε κατά πόσον η μαθήτριά θεωρεί το μισό ως το μέγεθος μιας επιφάνειας που όταν επαναλαμβάνεται δύο φορές δίνει το όλο από το οποίο προέρχεται.

Στο ερώτημα 3, η μαθήτριά απαντά ότι το τριγωνικό μισό του τοστ είναι μεγαλύτερο από το ορθογώνιο μισό του ίδιου τοστ. Προσπαθεί οπτικά να συγκρίνει το τρίγωνο με το ορθογώνιο που έχουν προκύψει και οδηγείται σε εσφαλμένα συμπεράσματα. Το μέγεθος των δύο αυτών κλασματικών μερών δεν εμπεριέχεται στην κλασματική λέξη «μισό». Η λέξη «μισό» δεν αντιπροσωπεύει γι' αυτήν μια ποσότητα που όταν επαναληφθεί δυο φορές θα δώσει ολόκληρη την ποσότητα. Το μισό, δηλαδή, δεν αποτελεί κλασματική μονάδα μέτρησης της επιφάνειας του τοστ. Φαίνεται, λοιπόν, ότι δεν αντιλαμβάνεται ότι το μέγεθος ενός κομματιού καθορίζεται από το πλήθος των μερών που ένα όλο έχει ισοτεμαχιστεί. Έτσι, σκεφτήκαμε ότι στην πορεία που θα ακολουθούσαμε θα έπρεπε να δίνουμε ιδιαίτερο βάρος στην ανάπτυξη της έννοιας του μισού, συγκρίνοντας ποσότητες διαφορετικού μεγέθους, ώστε να αρχίσει να αντιλαμβάνεται ότι σε διαφορετικές ποσότητες το μισό αντιστοιχεί σε διαφορετική ποσότητα ενώ σε ίσες ποσότητες, ανεξάρτητα από τον τρόπο που αυτές είναι τεμαχισμένες, αντιστοιχούν στην ίδια εφόσον 2 επαναλήψεις τους θα δώσουν την αρχική ποσότητα.

Ερώτημα 4

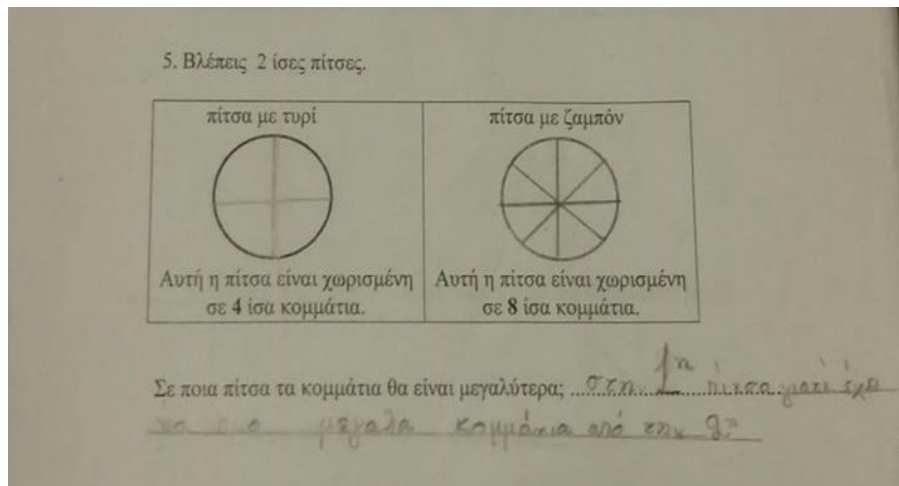


Στο ερώτημα αυτό, τα παιδιά έπρεπε μέσα από τη δοσμένη σχέση μέρους – όλου να επαναλάβουν το αρχικό κομμάτι τρεις επιπλέον φορές, ώστε να αναδημιουργήσουν ολόκληρη την ποσότητα. Μέσα από αυτό, θέλαμε να δούμε αν τα παιδιά θα συσχετίσουν το μέγεθος του κομματιού με ολόκληρη την ποσότητα, όταν τους δίνεται μία κλασματική σχέση. Επίσης, θέλαμε να

διαπιστώσουμε αν αντιλαμβάνονται τη σχέση μισό του μισού μιας ποσότητας, για να μπορέσουμε να την αξιοποιήσουμε και στις παρεμβάσεις μας.

Αυτό που παρατηρήσαμε είναι ότι η μαθήτρια δεν κατάφερε να απαντήσει σωστά. Αυτή η αδυναμία σχετίζεται και με αυτήν που παρατηρήσαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Δεν είναι σε θέση να σχεδιάσει ολόκληρη τη σοκολάτα γνωρίζοντας πόση είναι η μισή μιας μισής σοκολάτας. Όπως και στο πρόβλημα 3, το μισό δεν αντιστοιχεί στο ποσό της σοκολάτας (κομμάτι) που αν επαναληφθεί 2 φορές θα δώσει ολόκληρη τη σοκολάτα έτσι και τώρα το μισό το μισού δεν αποτελεί την ποσότητα που εάν επαναληφθεί 4 φορές θα δώσει ολόκληρη τη σοκολάτα. Αν η μαθήτρια είχε αυτή την κατανόηση, μάλλον θα μπορούσε να την επεκτείνει και θα σχεδίαζε το διπλάσιο του διπλασίου κομματιού, δηλαδή ένα κομμάτι τετραπλάσιο από αυτό που της είχε δοθεί. Φαίνεται, όμως, να μην μπορεί να οδηγηθεί από το μέρος στο όλο όταν της δίνεται η σχέση που τα συνδέει. Στην πορεία που θα ακολουθούσαμε σκεφτήκαμε να ενσωματώσουμε τέτοιου τύπου δραστηριότητες.

Ερώτημα 5

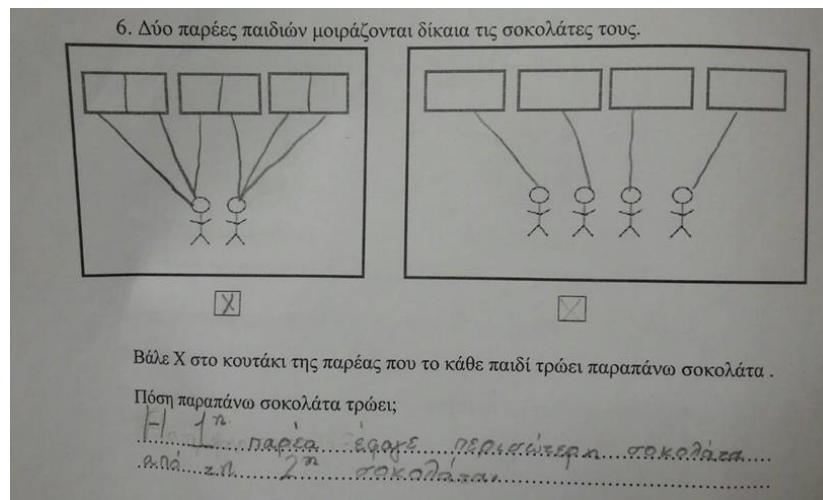


Στο πέμπτο κατά σειρά ερώτημα, δόθηκαν δύο ίδιοι κύκλοι/πίτσες, οι οποίες έμμεσα θα μπορούσαν να χωριστούν σε 4 και 8 κομμάτια αντίστοιχα, προκειμένου να συγκρίνουν το μέγεθος των κομματιών που προκύπτουν.

Από τον τεμαχισμό των πιτσών φάνηκε ότι η μαθήτρια είναι ιδιαίτερα ικανή να ισοτεμαχίζει ποσότητες κάτι το οποίο είχε γίνει αντιληπτό και από το ερώτημα 2. Βεβαίως, η απάντησή της βασίστηκε στην οπτική παρατήρηση του

αποτελέσματος του τεμαχισμού της «Η πρώτη πίτσα γιατί έχει πιο μεγάλα κομμάτια». Όπως είδαμε και παραπάνω, δυσκολεύεται να συσχετίσει το μέγεθος του μέρους με το όλο από το οποίο προήλθε. Έτσι και εδώ, δυσκολεύεται να αντιληφθεί ότι καθώς μια ίδια ποσότητα κόβεται σε περισσότερα κομμάτια, το μέγεθος των κομματιών θα είναι μικρότερο, να συσχετίσει, δηλαδή, το μέγεθος των κομματιών με το πλήθος τους, αλλά απαντά εκ των υστέρων, αφού διαπιστώσει το αποτέλεσμα του ισοτεμαχισμού της. Η ιδέα αυτή, καθώς και η αντίστροφή της, που στηρίζεται στην επανάληψη είναι βασικές για την ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος που εκφράζει σχετικό μέγεθος και θα προσπαθούσαμε να της τις καλλιεργήσουμε μέσα από κατάλληλα ερωτήματα.

Ερώτημα 6

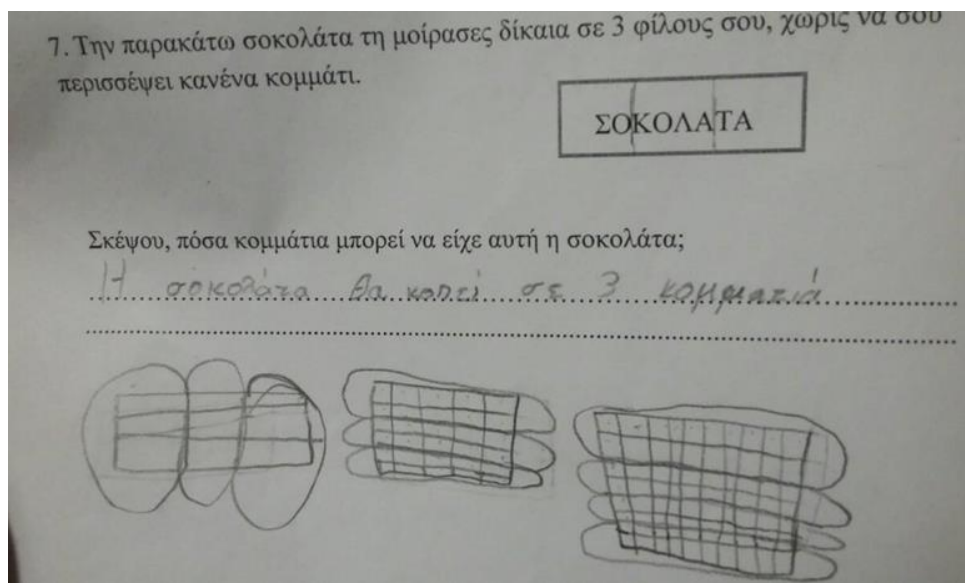


Σε αυτό το ερώτημα, μέσα από δύο καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς χρειαζόταν να καθοριστεί σε ποια παρέα θα προκύψει μεγαλύτερο μερίδιο και πόσο παραπάνω αυτό θα είναι. Θέλαμε, λοιπόν, να δούμε αν τα παιδιά θα κατανοήσουν τη σχέση αναλογίας που προκύπτει μέσα από τη δίκαιη μοιρασιά και αν θα μπορέσουν και σε αυτή την περίπτωση (όπως και στο ερώτημα 1) να εκφράσουν μία εμπειρική κλασματική σχέση για να εκφράσουν τη σχέση δύο ποσοτήτων. Αν τα δύο παιδιά έχουν να μοιραστούν 3 σοκολάτες, τότε, τα διπλάσια παιδιά, τα 4, για να φάνε ίση ποσότητα σοκολάτας, χρειάζονται 6 σοκολάτες. Ξεκινώντας από την δεύτερη περίπτωση, όπου σε κάθε ένα παιδί αντιστοιχεί μία ολόκληρη σοκολάτα, στην πρώτη περίπτωση θα φάνε

περισσότερη σοκολάτα, γιατί τους αντιστοιχεί μια ολόκληρη και ακόμα μία για να τη μοιραστούν δίκαια.

Η μαθήτρια και σε αυτό το ερώτημα απάντησε σωστά ότι η παρέα με τα τρία άτομα θα φάει περισσότερη σοκολάτα, την οποία η μαθήτρια φαίνεται να την εντοπίζει στην παρουσία της δεύτερης σοκολάτας που υπάρχει πάνω από την πρώτη παρέα. Μάλιστα, όπως παρατηρούμε και από το παραπάνω σχήμα, για να οδηγηθεί στην απάντηση της, αξιοποίησε την άτυπη μαθηματικής της δραστηριότητα να μοιράζει δίκαια αγαθά για να καθορίσει πόσο θα πάρει ο καθένας στην κάθε ομάδα. Της ήταν απαραίτητο το σχήμα για να καταλήξει στην απάντηση της. Δεν έλαβε υπόψη της την αναλογία που υπάρχει ανάμεσα στον αριθμό των ατόμων και το μέγεθος του κομματιού που θα πάρει ο καθένας από μία συγκεκριμένη ποσότητα. Όπως φαίνεται, δηλαδή, δε συσχετίζει μεγέθη, ούτε σε αυτό το ερώτημα. Αυτή την ικανότητα θα επιδιώκαμε να αναπτύξουμε μέσα από τη διδακτική πορεία που θα ακολουθούσαμε.

Ερώτημα 7



Σε αυτό το τελευταίο ερώτημα, ζητήθηκε να μοιραστεί μία σοκολάτα σε 3 φίλους δίκαια και στη συνέχεια να αναφερθεί πόσα κομμάτια θα μπορούσε να έχει αυτή η σοκολάτα. Επιδιώκαμε να παρατηρήσουμε αν θα κατανοήσουν τα παιδιά ότι η σοκολάτα για να μοιραστεί ακριβώς σε 3 άτομα θα έπρεπε να έχει αριθμό κομματιών πολλαπλάσιο του 3 και όχι απαραίτητα 3 μόνο κομμάτια.

Ακόμα πιο γενικά, θα μπορούσε να έχει οποιοδήποτε αριθμό κομματιών και ο καθένας παίρνει το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας. Μέσα από αυτό θέλαμε να δούμε κατά πόσο υπήρχε η ιδέα της ισοδυναμίας.

Παρατηρήσαμε ότι η μαθήτρια σε αυτό το ερώτημα, παρόλο που απάντησε λέγοντας ότι θα μπορούσε να έχει μόνο 3 κομμάτια η σοκολάτα, από κάτω έχει σχεδιάσει σοκολάτες με διαφορετικό πλήθος κομματιών τα οποία ομαδοποίησε για να δείξει πόσο θα πάρει ο καθένας από τα τρία άτομα. Φαίνεται να σκέφτηκε ότι για να μοιραστεί δίκαια μία σοκολάτα σε 3 παιδιά θα μπορούσε να έχει 3, 9, 30, ή και 66 κομμάτια! Αρκεί ο αριθμός των κομματιών να είναι πολλαπλάσιο του 3 ώστε το πλήθος τους να διαιρείται με το 3. Αυτό δείχνει ότι αντιλαμβάνεται την ισοδυναμία αλλά η προσκόλληση της σε αυτό που είχε σχεδιάσει αρχικά και η περιορισμένη αντίληψη που φαίνεται να έχει για τις κλασματικές σχέσεις δεν της επέτρεπαν να την αξιοποιήσει.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ήδη από τις απαντήσεις της στο ερωτηματολόγιο, πώς η μαθήτρια παρουσιάζει δυσκολίες που καταγράφονται στη βιβλιογραφία. Πιο συγκεκριμένα, δεν μπορεί να συσχετίσει το μέγεθος των κομματιών που προκύπτουν από τη σχέση μισό σε μία ποσότητα και μάλιστα επηρεάζεται από το σχήμα τους καθώς τα συγκρίνει. Άρα, παρουσιάζει τη δυσκολία που αφορά στην έλλειψη κατανόησης της συσχέτισης του μεγέθους του μέρους και του όλου από το οποίο προκύπτει. Η δυσκολία αυτή, όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, συνδέεται άμεσα με το γεγονός ότι η μαθήτρια δεν συνδέει πολλαπλασιαστικά τις δύο αυτές ποσότητες (μέρος-όλο), όπως φαίνεται ξεκάθαρα από τη δυσκολία που εμφάνισε όταν της ζητήθηκε να αναδημιουργήσει το όλο, όταν της δόθηκε το μισό του μισού μιας ποσότητας.

Συνοψίζοντας, από τις απαντήσεις φαίνεται ότι η μαθήτρια έχει μια πρώτη εξοικείωση με τη δίκαιη μοιρασιά. Η διαδικασία του τεμαχισμού του όλου σε ίσα μέρη που ακολούθησε η μαθήτρια μπορεί να αποτελέσει μία βάση λοιπόν, για την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή την επανάληψη ενός μέρους για να δημιουργηθεί το όλο. Η διαδικασία αυτή, θεωρούσαμε ότι θα μπορούσε να τη διευκολύνει και να προχωρήσει τη σκέψη της σχετικά με τη δυσκολία που παρατηρήσαμε στην αντίληψη του μισού, δηλαδή να κατανοήσει ότι το «μισό μιας συγκεκριμένης

ποσότητας» είναι σταθερό και ανεξάρτητο από τον τρόπο που έχει αυτή τεμαχιστεί. Απώτερος σκοπός των παραπάνω ήταν η αυτοματοποίηση των διαδικασιών αυτών, ώστε να προσεγγιστεί η αντίληψη του κλάσματος ως σχέση μεγέθους ποσοτήτων.

Από τις παραπάνω επισημάνσεις σχετικά με τις αρχικές γνώσεις της μαθήτριας, η διδακτική μας παρέμβαση σκεφτήκαμε να εστιάσει στα εξής σημεία:

1. Καθώς το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς αγαθών φάνηκε να είναι οικείο για τη μαθήτρια, θα μπορούσε να αξιοποιηθεί για να προκύψουν κλάσματα σαν αποτέλεσμα ισοτεμαχισμού. Ξεκινώντας από μονά αντικείμενα, όπως π.χ μία σοκολάτα που θα χρειάζεται να μοιραστεί σε διαφορετικούς αριθμούς παιδιών, διαφορετικά μοναδιαία κλάσματα θα ήταν δυνατόν να προκύπτουν. Αρχικός στόχος είναι μέσω του ισοτεμαχισμού, να κατανοήσει την ισότητα των μερών μιας ποσότητας και τη σημασία της για το μέγεθος αυτών. Αυτό θα μπορούσε να αποτελέσει το πρώτο βήμα για να αντιμετωπίσει τη δυσκολία που παρατηρήσαμε. Στη συνέχεια, τα ονόματά τους και ο μαθηματικός συμβολισμός των κλασμάτων θα μπορούσαν να εισαχθούν και να συνδεθούν με τη δραστηριότητα της μαθήτριας που θα τα τεμαχίζει σε ίσα μερίδια.
2. Ιδιαίτερη έμφαση θα πρέπει να δοθεί όχι μόνο στον ισοτεμαχισμό αλλά και στην αντίστροφη διαδικασία. Αφού η μαθήτρια χωρίσει ένα αντικείμενο σε ίσα μέρη για να το μοιράσει δίκαια σε μια παρέα, θα πρέπει να την ενθαρρύνουμε να συνειδητοποιήσει ότι και η επανάληψη οποιουδήποτε από τα ίσα μερίδια, τόσες φορές όσες το πλήθος τους, αναπαράγει το όλο. Πιο συγκεκριμένα αυτό θα πρέπει να ξεκινήσει επίσης από τη σχέση μισό μιας ποσότητας, ώστε να συνειδητοποιήσει η μαθήτρια πως τα δύο ίσα μέρη που προκύπτουν από σχέση αυτή να συνδέονται πολλαπλασιαστικά με την ποσότητα- όλο. Με αυτόν τον τρόπο, η διδακτική μας παρέμβαση θα έχει τη δυνατότητα να στηρίζει τη μαθήτρια να αρχίσει να προσεγγίζει το μέγεθος των κλασματικών μερών ως προς το όλο. Αυτό στη συνέχεια μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες σχέσεις. Για παράδειγμα, το «ένα τέταρτο» μιας συγκεκριμένης σοκολάτας δεν μπορεί να επαναλαμβάνεται 4 φορές και να δίνει μία σοκολάτα μεγαλύτερη ή μικρότερη από τη συγκεκριμένη.

3. Η σχέση πλήθους μερών στο όλο και μεγέθους τους θα μπορούσε, επίσης, να συζητηθεί και να οδηγήσει τη μαθήτριά να αντιληφθεί ότι είναι αντίστροφη. Όσο περισσότερα είναι τα ίσα κομμάτια στα οποία μοιράζω μια σοκολάτα, τόσο μικρότερο θα είναι το μέγεθός τους.

Γ. Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΝΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗΝ ΜΑΘΗΤΡΙΑ

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, γίνεται η ανάλυση των δεδομένων που συλλέχθηκαν από τις συναντήσεις που πραγματοποιήσαμε με τη μαθήτριά της Τρίτης δημοτικού. Για κάθε δραστηριότητα παρουσιάζεται ο γενικός σκοπός της και οι λόγοι που επιλέχθηκε. Κατά την παρουσίαση των λόγων επιλογής, αναφέρεται και η σύνδεση των δραστηριοτήτων με τις προηγούμενες αλλά και το πώς η καθεμία από αυτές ενισχύει την υπέρβαση της βασικής **δυσκολίας** που παρατηρήσαμε να αντιμετωπίζει η μαθήτριά, αναφορικά με τη σχέση μισό μιας ποσότητας. Στη συνέχεια, για κάθε δραστηριότητα παρουσιάζονται οι πιθανές απαντήσεις που αναμέναμε από τη μαθήτριά, οι οποίες λειτούργησαν ως οδηγός μας, καθώς παρατηρούσαμε πώς δρούσε η μαθήτριά. Οι πιθανές αυτές απαντήσεις είναι απόρροια της ενασχόλησής μας με τη σχετική βιβλιογραφία που αφορούσε στις αντιλήψεις – δυσκολίες των παιδιών στα κλάσματα, όπως αναφέρθηκαν σε παραπάνω κεφάλαιο. Ακολουθεί η παρουσίαση των απαντήσεων της μαθήτριάς είτε με μορφή διαλόγου, όπως αυτός έγινε, είτε με μορφή περιγραφής, ώστε να γίνουν πιο κατανοητά αυτά που συνέβησαν και η ανάλυση-σχολιασμός των απαντήσεών της. Τέλος, γίνεται ένας αναστοχασμός σχετικά με τη δική μας συμβολή κατά τη διαδικασία και πώς αυτή ευνόησε ή παρεμπόδιζε την εξέλιξη της σκέψης της μαθήτριάς.

Δραστηριότητα 1:

«Δείξε μου το μισό της σοκολάτας». Δόθηκε στη μαθήτριά ένα χαρτόνι που έπαιζε τον ρόλο της σοκολάτας και της ζητήθηκε να ενεργήσει πάνω σε αυτό σύμφωνα με τη σχέση που της δινόταν (μισό), ώστε να δείξει το μέρος που προκύπτει.

Λόγοι επιλογής της δραστηριότητας – Σκοπός:

Η δραστηριότητα αυτή επιλέχθηκε ως αφετηρία για τις συναντήσεις μας με τη μαθήτριά. Ένας πρωταρχικός λόγος για την επιλογή αυτή ήταν η παρατήρηση μας από το ερωτηματολόγιό της, που μας έδειξε ότι δεν είχε μια ολοκληρωμένη αντίληψη του μισού μιας ποσότητας (βλ. κεφ. 4B).

Θεωρήσαμε, λοιπόν, ότι είναι πολύ βασικό να ενισχύσουμε τη μαθήτριά σε αυτή τη δυσκολία που παρουσίαζε και ένα πρώτο βήμα γι' αυτό θα ήταν η βαθύτερη κατανόηση της ισότητας των μερών. Επιλέχθηκε το χαρτόνι ως εργαλείο, γιατί θα μπορούσε διπλώνοντάς το να δείξει το μέρος που προκύπτει και ταυτόχρονα να διαπιστώσει και την ισότητα των μερών που προκύπτουν από τον ισοτεμαχισμό. Η αντίληψη αυτή μπορεί να βοηθήσει ως έναν βαθμό την εξέλιξη της σκέψης της μαθήτριάς, ώστε να αντιμετωπίσει τη δυσκολία που παρατηρήθηκε στη δραστηριότητα 3 του ερωτηματολογίου (βλ. κεφ. 4B).

Πιθανές απαντήσεις της μαθήτριάς:

- Ασαφής προσδιορισμός του μισού. Η μαθήτριά, δηλαδή, να δείξει πάνω στο χαρτόνι στο περίπου που βρίσκεται το μέσον του, χωρίς να μπορεί να αιτιολογήσει την απάντησή της.
- Άνισος προσδιορισμός του μισού. Η μαθήτριά θα μπορούσε να διπλώσει ή να κόψει το χαρτόνι σε δύο κομμάτια άνισα μεταξύ τους.
- Δίπλωση του χαρτονιού και υπόδειξη του ενός κομματιού από τα δύο ως μισό. Η μαθήτριά ξεδιπλώνει το χαρτόνι και στη συνέχεια υποδεικνύει μόνο το ένα από τα δύο κομμάτια που προκύπτουν ως μισό, αλλά δεν συνειδητοποιεί το ίδιο και για το άλλο.
- Δίπλωση του χαρτονιού και υπόδειξη και των δύο κομματιών που προκύπτουν ως το μισό της ποσότητας.

- Μέτρηση του χαρτονιού με τη χρήση του χάρακα και βάσει του αποτελέσματος, να υποδείξει το μισό της ποσότητας

Απάντηση της μαθήτριας

B – Αυτή είναι μια σοκολάτα. Αν κάποιος σου έλεγε πόση είναι η μισή, πώς θα του το έδειχνες;

Θ – Θα την έκοβα στη μέση.

B – Με το χεράκι σου; Πώς θα το έδειχνες;

Θ – Με το χέρι στη μέση.

B – Άλλος τρόπος;

Θ – Με χάρακα, να το μετρήσουμε και να πάρουμε το μισό.

B – Πώς δηλαδή;

Θ – Π.χ. 30 εκ. , στη μέση το μετρώ και βρίσκω 15εκ.

B – Αν δεν είχες χάρακα; Πώς θα το έκοβες;

Θ – Θα το έκοβα κομματάκια.

Αν ήταν 15 και 15 θα έπαιρνα τα μισά.

B – *Και τώρα που είναι χαρτάκι;*

Θ – Μπορούμε να το διπλώσουμε.

B – Κάνε το. Πολύ ωραία

Ανάλυση απάντησης

Η μαθήτρια, όπως παρατηρούμε από τον διάλογο που προηγήθηκε, αυθόρμητα, χωρίς κάποια παρακίνηση έδωσε τη γενική απάντηση «Θα την έκοβα στη μέση.» στην αρχική ερώτηση που της τέθηκε, για να δείξει το μισό μιας σοκολάτας. Φαίνεται, λοιπόν, να εμφανίζει μία εξοικείωση με την έκφραση της σχέσης «μισό μιας ποσότητας», γεγονός το οποίο παρατηρήσαμε στις απαντήσεις της στο ερωτηματολόγιο (βλ. κεφ. 4B). Αυτό επιβεβαιώνεται και μέσα από τη βιβλιογραφία, στην οποία εντοπίσαμε ότι τα παιδιά αυτής της ηλικίας, γενικά, εμφανίζουν ιδέες σχετικά με πρωταρχικές κλασματικές σχέσεις όπως είναι «το μισό μιας ποσότητας». Δε λάβαμε υπόψη μας τη γενική αυτή απάντηση της μαθήτριας και συνεχίσαμε να την προτρέπουμε να σκεφτεί κι άλλους τρόπους, επιδιώκοντας να επιτύχουμε τον σκοπό μας, δηλαδή η μαθήτρια να διπλώσει το χαρτόνι στα δύο. Έτσι, προέκυψαν οι παρακάτω διαφορετικοί τρόποι: α)

δείχνοντας με το χέρι τη μέση του χαρτονιού, β) μετρώντας με τον χάρακα το μήκος του χαρτονιού και βρίσκοντας το μισό του και γ) τεμαχίζοντάς το σε ίσα μέρη και παίρνοντας τα μισά.

Αναστοχασμός για την παρέμβασή μας:

Το θετικό στοιχείο της πρώτης μας επαφής με τη μαθήτριά ήταν ότι αναπτύχθηκε αμέσως ένα ευχάριστο κλίμα και η μαθήτριά ένιωσε άνεση, που την ώθησε να δίνει αυθόρμητες απαντήσεις και να θέλει να συζητήσει μαζί μας τη σκέψη της. Παρόλα αυτά, η καθοδήγησή μας σε αυτήν την πρώτη δραστηριότητα ήταν αρκετά μεγάλη. Έχοντας προσανατολίσει τη σκέψη μας στη χρήση της δίπλωσης ως την καταλληλότερη μέθοδο για την κατανόηση της ισότητας των κομματιών, δεν μπορέσαμε να προσαρμόσουμε τη διδασκαλία μας στα λεγόμενα της μαθήτριάς και έτσι χάθηκαν κάποιες ευκαιρίες μάθησης.

Αναλυτικότερα, από τον αναστοχασμό μας διαπιστώνουμε ότι σε όλους τους τρόπους που πρότεινε η μαθήτριά θα μπορούσαμε να θέσουμε ερωτήσεις, για να αναδειχθεί η ισότητα των μερών που επιδιώκαμε. Για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να είχαμε προκαλέσει τη μαθήτριά να ονομάσει/χαρακτηρίσει και το άλλο κομμάτι ως «μισό», για να παρατηρήσει και να εκφράσει η ίδια την ισότητα των δύο μερών. Θεωρούμε ότι η μαθήτριά, άτυπα, από την καθημερινή της ζωή, έχει δημιουργήσει την ιδέα αυτή («Αν ήταν 15 και 15 θα έπαιρνα τα μισά.»), αλλά θα ήταν σημαντικό να εξοικειωθεί μαζί της και να τη χρησιμοποιεί σε ένα μαθηματικό πλαίσιο. Στο πλαίσιο αυτό, μια ευκαιρία που χάθηκε ήταν όταν η μαθήτριά πρότεινε τη χρήση του χάρακα. Η ερώτηση «Πόσα εκατοστά είναι το άλλο μέρος;» θεωρούμε ότι θα βοηθούσε τη μαθήτριά να κάνει ένα πρώτο βήμα προς τη συνειδητοποίηση της ισότητας των μερών. Ενισχυτικά σε αυτή την ερώτηση, για να σταθεροποιήσουμε την ιδέα αυτή, θα μπορούσαμε να τη ρωτήσουμε: «Αν το χαρτόνι ήταν 50 εκατοστά, πόσα εκατοστά θα ήταν το μισό;» και έπειτα «Πόσα εκατοστά θα ήταν το άλλο μέρος;». Ωστόσο, εκ των υστέρων αντιλαμβανόμαστε ότι η δυσκολία της επίτευξης αυτού του στόχου «επιβαρύνθηκε» από το γεγονός ότι δεν ήμαστε εξοικειωμένοι να αξιοποιούμε τη σκέψη της μαθήτριάς.

Δραστηριότητα 2:

«Δείξε μου το μισό του μισού της σοκολάτας». Δόθηκε στη μαθήτριά ένα χαρτόνι που έπαιζε το ρόλο της σοκολάτας και της ζητήθηκε να ενεργήσει πάνω σε αυτό σύμφωνα με τη σχέση που της δινόταν (μισό του μισού), ώστε να δείξει το μέρος που προκύπτει.

Λόγοι επιλογής της δραστηριότητας – Σκοπός:

Ο κύριος λόγος επιλογής της εν λόγω δραστηριότητας ήταν η αντιμετώπιση της δυσκολίας της αντίληψης της βασικής έννοιας «μισό του μισού» που παρατηρήθηκε στο ερωτηματολόγιο (βλ. κεφ. 4B). Οπότε επιδίωξή μας ήταν, μέσα από τη 2^η δραστηριότητα να βοηθήσουμε τη μαθήτριά να αντιμετωπίσει αυτήν τη δυσκολία. Θεωρούσαμε ότι η δίπλωση του χαρτονιού θα βοηθούσε τη μαθήτριά να συνειδητοποιήσει την ισότητα των κομματιών που προκύπτουν στο μισό όταν το μισό χαρτόνι διπλωθεί στη μέση (δηλαδή να επιδράσει η σχέση μισό στο μισό). Επιδιώκαμε, δηλαδή, η μαθήτριά να αντιληφθεί ότι όταν επιδρά σε μια ποσότητα η κλασματική σχέση «το μισό του μισού», τα κομμάτια που θα προκύψουν στην εκάστοτε ποσότητα θα είναι ίσα μεταξύ τους, χωρίς να επηρεάζει κάποιος άλλος παράγοντας το αποτέλεσμα αυτό. Στην ουσία, αποτελούσε συνέχεια της προηγούμενης δραστηριότητας.

Πιθανές απαντήσεις της μαθήτριάς:

- Ασαφής προσδιορισμός του «μισού του μισού». Η μαθήτριά, δηλαδή, να δείξει πάνω στο χαρτόνι στο περίπου πού βρίσκεται το «μισό του μισού», χωρίς να μπορεί να αιτιολογήσει την απάντησή της.
- Ασαφής προσδιορισμός του «μισού του μισού», πάνω στο μισό κομμάτι. Η μαθήτριά, δηλαδή, από την προηγούμενη δραστηριότητα να έχει καταφέρει να προσδιορίσει το μισό του χαρτονιού και πάνω σε αυτό να προσδιορίζει στο περίπου το «μισό του μισού», χωρίς να μπορεί να αιτιολογήσει την απάντησή της.
- Άνισος προσδιορισμός του «μισού του μισού». Η μαθήτριά θα μπορούσε να διπλώσει ή να κόψει το χαρτόνι σε τέσσερα κομμάτια άνισα μεταξύ τους.
- Δίπλωση του χαρτονιού σε 4 ίσα μέρη και υπόδειξη του ενός κομματιού από τα 4 ως το μισό του μισού.

- Δίπλωση του χαρτονιού και υπόδειξη και των 4 κομματιών που προκύπτουν ως το «μισό του μισού» της ποσότητας. Η μαθήτρια συνειδητοποιώντας την ισότητα των 4 κομματιών μέσω της δίπλωσης είναι σε θέση να χαρακτηρίσει καθένα απ' αυτά ως «μισό του μισού» της ποσότητας.
- Δίπλωση μόνο του μισού του χαρτονιού. Η μαθήτρια έχοντας προσδιορίσει από την προηγούμενη δραστηριότητα το μισό του χαρτονιού, το διπλώνει δημιουργώντας έτσι το «μισό του μισού».
- Μέτρηση του χαρτονιού με τη χρήση του χάρακα και βάσει του αποτελέσματος να υποδείξει το «μισό του μισού» της ποσότητας.

Απάντηση μαθήτριας:

B – Θέλω να φάω τη μισή της μισής.

Θ – (Διπλώνει στα 2 το μισό και παίρνει το μισό του μισού).

B – Με τον άλλον τρόπο, με τον χάρακα που είπες;

Θ – Θα δούμε πόσα μέτρα είναι και θα πάρουμε το μισό... Να βρούμε το «μισό του μισού».

Ανάλυση απάντησης:

Η δεύτερη δραστηριότητα ξεκίνησε, ζητώντας από τη μαθήτρια να δείξει το μισό του μισού του χαρτονιού που χρησιμοποίησε νωρίτερα. Πιο εξοικειωμένη, πλέον, με την δίπλωση του χαρτονιού, αξιοποίησε την τακτική αυτή για να δείξει το μισό του μισού της ποσότητας. Εφάρμοσε, αμέσως δηλαδή, την αναδίπλωση και έδειξε το κομμάτι που ζητήθηκε.

Η δίπλωση εφαρμόστηκε μόνο στο κομμάτι που είχε χαρακτηρίσει ως μισό και όχι και στα 2 επιμέρους κομμάτια που είχαν προκύψει από την πρώτη δίπλωση. Το γεγονός αυτό δημιουργεί ερωτήματα για το κατά πόσο η μαθήτρια συνειδητοποιούσε την ισότητα των τεσσάρων μερών και για το κατά πόσο συνέδεσε νοητικά το κομμάτι που προέκυψε από τη δίπλωση, με ολόκληρη την ποσότητα.

Στη συνέχεια, η μαθήτρια κλήθηκε να βρει το «μισό του μισού» της ποσότητας που είχε μπροστά της, εάν τη μετρούσε με χάρακα, ιδέα της ίδιας της μαθήτριας στην 1^η δραστηριότητα. Την επαναφέραμε, λοιπόν, με σκοπό να αξιοποιήσουμε τη σκέψη της. Η μαθήτρια περιέγραψε τη διαδικασία εύρεσης του

συγκεκριμένου μήκους περιγραφικά: «Θα δούμε πόσα μέτρα είναι και θα πάρουμε το μισό... Να βρούμε το μισό του μισού». Δε χρησιμοποίησε, δηλαδή, τον χάρακά της.

Αναστοχασμός για την παρέμβασή μας.

Σε αυτή τη δραστηριότητα, κρίνουμε θετική τη στήριξή μας στη μάθηση της μαθήτριας καθώς λάβαμε υπόψη μας τη σκέψη της και φέραμε ξανά ως θέμα συζήτησης την εύρεση του μισού του μισού με τη χρήση του χάρακα, ιδέα της ίδιας της μαθήτριας. Εν τούτοις, στα παρακάτω σημεία θεωρούμε ότι χάθηκαν κάποιες ευκαιρίες στήριξης της μάθησής της. Αρχικά, δε δόθηκε η ευκαιρία στη μαθήτρια να επισημάνει την ισότητα των μερών, όπως και στην προηγούμενη δραστηριότητα. Ειδικότερα, στην εύρεση του μισού του μισού με τον χάρακα, ερωτήσεις του τύπου: «Αν όλη η σοκολάτα είναι 12 εκ., πόσα εκ. θα είναι το μισό;», « Πόσα εκ. θα είναι το μισό του μισού;» και «Πόσα «μισά του μισού» έχει όλη η σοκολάτα;», θα διευκόλυναν τη συνειδητοποίηση της έννοιας αυτής και τη σύνδεσή της με την έννοια «μισό» της προηγούμενης δραστηριότητας.

Δραστηριότητα 3:

Δόθηκαν στη μαθήτρια δύο χαρτόνια (σοκολάτες), διαφορετικού μεγέθους, όπου το ένα ήταν το μισό του άλλου και ρωτήθηκε το εξής: «Πόσες φορές χωράει αυτή η σοκολάτα (το μικρό χαρτόνι) σε αυτή τη σοκολάτα (το μεγάλο χαρτόνι);».

Λόγοι επιλογής της δραστηριότητας – Σκοπός:

Ο λόγος που επιλέξαμε αυτήν τη δραστηριότητα ήταν πως διαπιστώσαμε με βάση την ανασκόπηση της βιβλιογραφίας ότι για να αρχίσει ένας μαθητής να συνειδητοποιεί ότι το κλάσμα υποδηλώνει το μέγεθος που έχει το μέρος σε σχέση με το όλο και δεν είναι μόνο ένα κομμάτι από το όλο, αυτό μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους: α) Βοηθώντας τον μαθητή κάθε φορά να διαπιστώνει ότι το κάθε κομμάτι που καταλήγει μετά τον ισοτεμαχισμό του όλου είναι ένα από τα ίσα κομμάτια που έχει κοπεί το όλο (ισότητα μερών μετά τον ισοτεμαχισμό) και β) στηρίζοντας τον μαθητή να συνειδητοποιεί ότι το οποιοδήποτε κομμάτι αν επαναληφθεί τόσες φορές, όσες έχει τεμαχιστεί το όλο θα δώσει το όλο (επανάληψη ίσων μερών για τη δημιουργία του όλου). Στις δύο πρώτες

δραστηριότητες έγινε προσπάθεια να προσεγγιστεί η έννοια αυτή μέσω του ισοτεμαχισμού και σ' αυτή τη δραστηριότητα περνάμε στον δεύτερο τρόπο, αυτόν της επανάληψης. Ουσιαστικά, επιθυμούμε, αρχικά, να ελέγξουμε σε ποιον βαθμό η μαθήτρια καταφέρνει να συνδέσει τις ποσότητες πολλαπλασιαστικά, αφού στο ερωτηματολόγιο – όπως αναφέρθηκε παραπάνω (βλ. κεφάλαιο 4B, ερώτημα 1^ο) – είχε χαθεί αυτή η ευκαιρία και επιπλέον, να στηρίζουμε τη μαθήτρια να εξελίξει τον πολλαπλασιαστικό τρόπο σκέψης της.

Πιθανές απαντήσεις της μαθήτριας:

- Αδυναμία έκφρασης πολλαπλασιαστικής σχέσης. Η μαθήτρια, δηλαδή, παρατηρεί ότι η μία ποσότητα είναι μεγαλύτερη από την άλλη, αλλά δεν τις συνδέσει με μια πολλαπλασιαστική σχέση (2 φορές – διπλάσιο).
- Συνειδητοποίηση ότι η μία σοκολάτα είναι μισή της άλλης με δίπλωση της μεγαλύτερης σοκολάτας. Η μαθήτρια διπλώνει το μεγάλο χαρτόνι, το τοποθετεί πάνω στο μικρό και παρατηρεί ότι η μεγάλη σοκολάτα είναι η διπλάσια της μισής.
- Έκφραση της πολλαπλασιαστικής σχέσης μετά από την τοποθέτηση και την επανάληψη της μικρής ποσότητας πάνω στη μεγάλη. Έτσι, αντιλαμβάνεται ότι το μικρό χαρτόνι χωράει 2 φορές στο μεγάλο.
- Έκφραση λανθασμένης πολλαπλασιαστικής σχέσης μετά την τοποθέτηση και την επανάληψη της μικρής ποσότητας πάνω στη μεγάλη περισσότερες ή λιγότερες από 2 φορές.
- Συνειδητοποίηση της σχέσης μέσα από τον τεμαχισμό της μεγάλης ποσότητας. Η μαθήτρια κόβει στη μέση τη μεγάλη ποσότητα και συγκρίνει το κομμάτι που προκύπτει με τη μικρή ποσότητα.

Περιγραφή απάντησης:

Η μαθήτρια δίπλωσε τη μεγάλη ποσότητα και παρατήρησε ότι το κομμάτι που προκύπτει από τη δίπλωση είναι ίσο με το μικρότερο κομμάτι. Άρα, το χαρακτήρισε ως μισό της μεγάλης σοκολάτας. Η μαθήτρια δεν μπόρεσε να αξιοποιήσει με δική της πρωτοβουλία την επανάληψη του μικρού κομματιού πάνω στο μεγάλο, ώστε να τα συγκρίνει μεταξύ τους. Μετά από τη δική μας παρότρυνση: «Πόσες φορές χωράει το μικρό χαρτόνι στο μεγάλο;», παρατήρησε

ότι το μικρό χαρτόνι «είναι 1 από τα δύο κομμάτια» και «χωράει 2 φορές στο μεγάλο». Της ζητήθηκε, επίσης, να σκεφτεί πόσο θα έπαιρνε αν μοιραζόταν με ένα ακόμη άτομο τη σοκολάτα, για να μπορέσει να οδηγηθεί σταδιακά στην έννοια «1 δεύτερο της σοκολάτας».

Ανάλυση απάντησης:

Η μαθήτρια διπλώνοντας στη μέση τη μεγάλη ποσότητα παρατήρησε ότι το κομμάτι που προκύπτει είναι ίσο με το μικρότερο κομμάτι. Άρα, χαρακτήρισε το μικρότερο ως μισό της μεγάλης σοκολάτας. Παρατηρούμε, δηλαδή, ότι αξιοποίησε την τακτική της δίπλωσης, που είχε χρησιμοποιήσει στις προηγούμενες δραστηριότητες και διαπίστωσε ότι χωρίζοντας τη μεγάλη ποσότητα στη μέση, προκύπτουν κομμάτια ίσα με αυτό που της δόθηκε να συγκρίνει. Φαίνεται ότι η σκέψη της έχει αρχίσει να προχωράει σχετικά με την αντίληψη της ισότητας των κομματιών που προέρχονται από μία κλασματική σχέση. Ωστόσο, η μαθήτρια δεν αξιοποίησε την επανάληψη του μικρού κομματιού για να απαντήσει στην ερώτηση που της θέσαμε.

Τέλος, προσπαθήσαμε να βοηθήσουμε τη μαθήτρια να συνδέσει την έννοια «μισό» με την έννοια «1 από τα δύο κομμάτια». Ο λόγος που επιθυμούσαμε να γίνει αυτό, ήταν για να συνδέσει τις δύο αυτές έννοιες με τη διαδικασία της επανάληψης –που ήταν ο στόχος αυτής της δραστηριότητας. Επίσης, αξιοποιήθηκε για πρώτη φορά μία κατάσταση δίκαιης μοιρασιάς καθώς ζητήθηκε από τη μαθήτρια να σκεφτεί πόσο θα έπαιρνε αν μοιραζόταν με ένα ακόμη άτομο τη σοκολάτα για να μπορέσει να οδηγηθεί σταδιακά στην έννοια «1 δεύτερο της σοκολάτας».

Αναστοχασμός για την παρέμβασή μας

Κρίνοντας εκ των υστέρων τη συνάντησή μας με τη μαθήτρια, διαπιστώνουμε ότι η επιλογή του χαρτονιού ως βοηθητικό υλικό για να παρακινηθεί η μαθήτρια να δράσει και να βρει τη σχέση των δύο ποσοτήτων ήταν κατάλληλη καθώς, τελικά, αξιοποίησε το χαρτόνι για να απαντήσει. Ωστόσο, δεν μπορούμε με βεβαιότητα να εξάγουμε συμπεράσματα για την επίτευξη ή μη του στόχου (επανάληψη κομματιού), αφού δεν προσπαθήσαμε με τις ερωτήσεις μας να ελέγξουμε τον τρόπο σκέψης της μαθήτριας. Συγκεκριμένα, δεν ξέρουμε με

ποιον τρόπο κατέληξε η μαθήτρια στην απάντηση: «Το μικρό κομμάτι χωράει 2 φορές στο μεγάλο». Μπορεί να έκανε νοερά επανάληψη του μικρού κομματιού, μπορεί και όχι.

Τέλος, θετική κρίνεται η επιλογή του πλαισίου της δίκαιης μοιρασιάς ως ευκαιρία για να αρχίσουν να αναδύονται οι αντίστροφες πολλαπλασιαστικές σχέσεις των ποσοτήτων (διπλάσιο – μισό).

Δραστηριότητα 4

Σε αντιστοιχία με την πρώτη κατηγορία, για να γίνει εμβάθυνση και στη σχέση «μισό του μισού», αξιοποιήθηκε μια αντίστοιχη δραστηριότητα. Δηλαδή, δόθηκαν στη μαθήτρια δύο χαρτόνια που αναπαριστούσαν τις σοκολάτες και της τέθηκε το ερώτημα: «Πόσες φορές χωράει η μικρή σοκολάτα (το $\frac{1}{4}$ της μεγάλης) στη μεγάλη;».

Λόγοι επιλογής της δραστηριότητας – Σκοπός

Όπως αναφέραμε και στη 2^η δραστηριότητα, είχαμε διαπιστώσει ότι η μαθήτρια δεν είχε εξοικειωθεί με την έννοια «μισό του μισού» όπως φανερώθηκε από την ανάλυση του ερωτηματολογίου της (βλ. κεφ. 4B, ερ.4). Στη 2^η δραστηριότητα επιχειρήθηκε εμβάθυνση σε αυτή μέσω του τεμαχισμού και τώρα μέσω της επανάληψης. Όπως αναφέραμε και στην 3^η δραστηριότητα, ο «τεμαχισμός» και η «επανάληψη» είναι διαδικασίες αλληλένδετες που συμβάλλουν στο να αρχίσει να αντιλαμβάνεται η μαθήτρια ότι το κλάσμα υποδηλώνει το μέγεθος που έχει το μέρος σε σχέση με το όλο, καθώς γίνονται θέμα συζήτησης οι πολλαπλασιαστικές και αντίστροφες πολλαπλασιαστικές σχέσεις των ποσοτήτων.

Σκοπός μας ήταν να αναζητήσει την κλασματική σχέση που συνδέει το όλο με ένα μέρος του. Αυτό θα πραγματοποιούνταν αν η μαθήτρια αξιοποιούσε το μέρος ως μονάδα μέτρησης που με την επανάληψή της δύναται να μετρηθεί το όλο.

Πιθανές απαντήσεις της μαθήτριας:

- Αδυναμία έκφρασης πολλαπλασιαστικής σχέσης. Η μαθήτρια, δηλαδή, να συνειδητοποιεί ότι η μία ποσότητα είναι μεγαλύτερη από την άλλη, αλλά

να μην μπορεί να τις συνδέσει με μία συγκεκριμένη σχέση (4 φορές - τετραπλάσιο).

- Συνειδητοποίηση ότι η μία σοκολάτα είναι μισή της μισής της άλλης με δίπλωση της μεγαλύτερης σοκολάτας. Η μαθήτρια διπλώνει το μεγάλο χαρτόνι, το τοποθετήσει πάνω στο μικρό και παρατηρεί, έτσι, ότι η μικρή σοκολάτα είναι η μισή της μισής της μεγάλης.
- Έκφραση της πολλαπλασιαστικής σχέσης μετά από την τοποθέτηση και την επανάληψη της μικρής ποσότητας πάνω στη μεγάλη. Έτσι, αντιλαμβάνεται ότι το μικρό χαρτόνι χωράει 4 φορές στο μεγάλο.
- Έκφραση λανθασμένης πολλαπλασιαστικής σχέσης μετά την τοποθέτηση και την επανάληψη της μικρής ποσότητας πάνω στη μεγάλη περισσότερες ή λιγότερες από φορές.
- Συνειδητοποίηση της σχέσης μέσα από τον τεμαχισμό της μεγάλης ποσότητας. Η μαθήτρια κόβει στη μέση τη μεγάλη ποσότητα και στη συνέχεια το κομμάτι που προκύπτει πάλι στη μέση. Συγκρίνει το κομμάτι που προκύπτει με τη μικρή ποσότητα. Παρατηρώντας την ισότητα τους, καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η μικρή ποσότητα είναι η μισή της μισής της μεγάλης.

Περιγραφή απάντησης:

Δείχνουμε στη μαθήτρια ένα χαρτόνι και άλλο ένα, που είναι το $\frac{1}{4}$ του πρώτου.

Χωρίς να τεθεί κάποια αρχική ερώτηση πραγματοποιείται ο παρακάτω διάλογος:

Θ – Αυτό είναι το μισό του μισού.

Β – Πόσες φορές η μικρή σοκολάτα ($\frac{1}{4}$) χωράει στη μεγάλη;

Θ – 2.

Β – Πόσα τέτοια κομμάτια χρειάζομαι για να πάρω ολόκληρη τη σοκολάτα;

Θ – 4.

Β – Αν είχαμε 4 παιδάκια, τι κομμάτι θα έπαιρνε το καθένα;

Θ – Θα έπρεπε να τα κόψουμε.

Β – Γιατί; Δεν φτάνει να πάρουν και οι 4;

Θ – ... Θα μπορούσε να πάρει ο καθένας από 1 τέτοιο.

Ανάλυση απάντησης:

Η μαθήτρια, χωρίς να κάνει κάποια επανάληψη του « $\frac{1}{4}$ », παρατήρησε, αμέσως, ότι το κομμάτι που της δόθηκε να συγκρίνει με το μεγάλο χαρτόνι είναι το μισό του μισού. Η άμεση και σωστή αυτή απάντηση της μαθήτριας μας εξέπληξε, αφού δεν στηρίχθηκε στο δοσμένο υλικό. Θεωρήσαμε, λοιπόν, ότι έχει συνδέσει την έννοια «μισό του μισού» με το «μισό». Στη συνέχεια, για να συνδέσουμε το «μισό του μισού» και με το «όλο» τη ρωτήσαμε πόσες φορές χωράει το μικρό χαρτόνι στο μεγάλο, ερώτηση στην οποία, όμως, δεν κατάφερε να απαντήσει σωστά. Με σκοπό τη στήριξη της σκέψης της, τροποποιήσαμε την ερώτηση ως εξής: «Πόσα τέτοια κομμάτια (του $\frac{1}{4}$) χρειάζομαι για να πάρω ολόκληρη τη σοκολάτα;» και η μαθήτρια, χωρίς περαιτέρω βοήθεια, αποκρίθηκε «4». Θεωρώντας ότι η μαθήτρια έκανε νοερή επανάληψη, προχωρήσαμε επιλέγοντας το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς και της ζητήσαμε να μοιράσει τη σοκολάτα σε 4 παιδιά. Θεωρήσαμε ότι η εξοικείωσή της με τη δίκαιη μοιρασιά, που είχε διαπιστωθεί από την ανάλυση του ερωτηματολογίου, ίσως τη βοηθούσε να εκφράσει πολλαπλασιαστικές και αντίστροφες σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων.

Αναστοχασμός για την παρέμβασή μας

Αξιολογήσαμε, εκ των υστέρων, την παρέμβασή μας και εντοπίσαμε θετικά σημεία καθώς και χαμένες ευκαιρίες στήριξης της μάθησης της μαθήτριας. Πιο συγκεκριμένα, διαπιστώσαμε ότι και σε αυτή την δραστηριότητα, όπως και στην προηγούμενη, σταθήκαμε στις σωστές απαντήσεις της μαθήτριας («Το μισό του μισού» και «4») και δεν την πιάσαμε να τις αιτιολογήσει. Έτσι, δεν ξέρουμε αν κατέληξε στις απαντήσεις αυτές μέσω του τεμαχισμού ή της επανάληψης, που ήταν και ο σκοπός της δραστηριότητας. Ερωτήσεις που θα μπορούσαμε να είχαμε θέσει είναι: «Πώς το σκέφτηκες;», «Μπορείς να εξηγήσεις τη σκέψη σου χρησιμοποιώντας τα χαρτόνια;». Ειδικότερα, όταν ρωτήσαμε την μαθήτρια «Πόσα τέτοια κομμάτια χρειάζομαι για να πάρω ολόκληρη τη σοκολάτα;» και η μαθήτρια απάντησε «4», χάσαμε την ευκαιρία να της ζητήσουμε να βρει τη σχέση της μεγάλης σοκολάτας με τη μικρή (τετραπλάσια) αλλά και την αντίστροφή της ($\frac{1}{4}$), ώστε να αναπτυχθεί η πολλαπλασιαστική σκέψη της μαθήτριας.

Τέλος, το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς δεν χρησιμοποιήθηκε κατάλληλα, ώστε να δημιουργήσει στη μαθήτριά την ανάγκη να επαναλάβει τη μικρή σοκολάτα, για να δημιουργήσει τη μεγάλη. Προτεινόμενη δραστηριότητα για τον σκοπό αυτό είναι: «Αν αυτό είναι το κομμάτι της σοκολάτας που τρώει το ένα παιδί από μία παρέα που μοιράζεται δίκαια μία σοκολάτα, πόσα παιδιά έχει η παρέα;». Θεωρούμε ότι, ίσως, με τη δραστηριότητα αυτή τονιζόταν η ισότητα του μεγέθους των κομματιών και δινόταν μια ευκαιρία να οδηγηθεί η μαθήτριά στη διαδικασία της επανάληψης του μέρους για τη δημιουργία του όλου.

Ανάμεσα στην 4^η και 5^η δραστηριότητα, μεσολάβησαν κάποιες ακόμη στις οποίες έγινε εισαγωγή του επίσημου συμβολισμού του κλάσματος.

Δραστηριότητα 5

«Τέσσερις φίλες μοιράστηκαν δίκαια μία σοκολάτα. Αυτό είναι το κομμάτι που θα πάρει η μία. Ζωγράφισε ολόκληρη τη σοκολάτα». Στο χαρτί που δόθηκε στη μαθήτριά ήταν σχεδιασμένο ένα κομμάτι που αποτελούσε το $\frac{1}{4}$ μιας σοκολάτας και της ζητήθηκε να σχεδιάσει ολόκληρη τη σοκολάτα, επαναλαμβάνοντας ουσιαστικά το κομμάτι 4 φορές.

Λόγοι επιλογής της δραστηριότητας – Σκοπός

Στην προηγούμενη δραστηριότητα, με τον τρόπο που τέθηκε το πρόβλημα: «Αν είχαμε 4 παιδάκια, τι κομμάτι θα έπαιρνε το καθένα;» δεν προέκυψε η ανάγκη για επανάληψη ενός μέρους τόσες φορές μέχρι να δημιουργηθεί το όλο. Έτσι, στη δραστηριότητα αυτή, επαναφέραμε το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς, προσανατολισμένο στον παραπάνω στόχο. Συνεπώς, δώσαμε στη μαθήτριά ένα μέρος μιας ποσότητας και την κλασματική σχέση που τη συνδέει με το όλο. Η χρήση του μέρους ως μονάδα μέτρησης και η επανάληψή του, για να αναδημιουργηθεί η ποσότητα – όλο, θα βοηθούσε στην κατανόηση της σχέσης που συνδέει το μέρος με το όλο και θα αποτελούσε βάση για την μετέπειτα γενίκευση. Τέλος, με τις ερωτήσεις μας επιδιώκαμε, επίσης, να συνδέσει και να αρχίσει να σταθεροποιεί νοητικά τις σχέσεις «μισό του μισού»,

«1 από τα τέσσερα», « $\frac{1}{4}$ μιας ποσότητας» καθώς τις συνδέει με το όλο (τετραπλάσιο).

Το πλαίσιο της δίκαιης μοιρασιάς επιλέχθηκε, διότι – όπως αναφέρθηκε παραπάνω – μέσα από την ανάλυση του ερωτηματολογίου της (βλ. κεφάλαιο 4B) είχαμε διαπιστώσει ότι η μαθήτρια ήταν εξοικειωμένη με τη δίκαιη μοιρασιά αγαθών.

Πιθανές απαντήσεις της μαθήτριας:

- Η μαθήτρια σχεδιάζει 2 επιπλέον κομμάτια ίσα μεταξύ τους και με το αρχικό, δίπλα σε αυτό που της δόθηκε, δηλαδή μία σοκολάτα με 3 συνολικά κομμάτια.
- Η μαθήτρια σχεδιάζει ένα επιπλέον κομμάτι δίπλα σε αυτό που της δόθηκε, δηλαδή μία σοκολάτα με 2 συνολικά κομμάτια ίσα μεταξύ τους.
- Η μαθήτρια σχεδιάζει ένα άνισο κομμάτι δίπλα σε αυτό που της δόθηκε.
- Η μαθήτρια σχεδιάζει 3 επιπλέον κομμάτια ίσα μεταξύ τους και με το αρχικό δίπλα σε αυτό που της δόθηκε. Δηλαδή, σχεδιάζει μία σοκολάτα με 4 ίσα κομμάτια.
- Η μαθήτρια σχεδιάζει ένα κομμάτι δίπλα στο αρχικό, το οποίο είναι 3 φορές μεγαλύτερο από αυτό και στη συνέχεια το χωρίζει σε 3 κομμάτια. Άρα, προκύπτει μία σοκολάτα με 4 κομμάτια ίσα μεταξύ τους.
- Η μαθήτρια σχεδιάζει 3 ακόμα κομμάτια ίσα μεταξύ τους αλλά διακριτά. Άρα, προκύπτουν 4 ίσα κομμάτια μεταξύ τους αλλά όχι σε μία συνεχή ποσότητα.

Απάντηση της μαθήτριας

Δείχνουμε στη μαθήτρια ένα χαρτόνι που αναπαριστά ένα κομμάτι σοκολάτας και της εξηγούμε ότι αποτελεί το κομμάτι που πήρε μία από τις 4 φίλες μιας παρέας.

B - Έχουμε 4 φίλες. Μοιράστηκαν δίκαια μια σοκολάτα και η μία πήρε αυτό το κομμάτι.

Θες να μου πεις πώς θα είναι ολόκληρη η σοκολάτα;

Θ – Η καθεμία;

B – Ναι!

Θ – Θα υπήρχαν τότε 4 κομμάτια σ' αυτήν τη σοκολάτα! Γιατί αφού θα ήταν

τέσσερις φίλες δεν θα έπρεπε να πάρουν και οι 4 το ίδιο κομμάτι;

B – E, βέβαια!

Θ – (Σχεδιάζει 4 ίδια κομμάτια για ολόκληρη τη σοκολάτα –με προέκταση του ενός!) Δεν τα έφτιαξα και πολύ ίσια.

B – Δεν πειράζει!

B – **Αυτό το κομματάκι, τι σχέση έχει με ολόκληρη τη σοκολάτα; Πόσες φορές χωράει στη σοκολάτα;**

Θ – 4 φορές, δηλαδή το $\frac{1}{4}$!

B – Μπράβο! Να το γράψουμε!

Αλλιώς πώς θα το λέγαμε;

Θ – Το 1 από τα 4.

B – (Για να βρει και άλλον τρόπο να ονομάσει το μέρος αυτό, τοποθετήσαμε το χέρι μας στη μέση της σοκολάτα, ώστε να δει το μέρος ως μισό του μισού.)



Εδώ αν είχαμε τα δύο κομμάτια, τι θα είχαμε από τη σοκολάτα;

Θ – Το μισό.

B – Άρα, τώρα που έχουμε αυτό εδώ το κομματάκι ($\frac{1}{4}$);

Θ – Το μισό ... από το 1. Όχι...

B – Αυτό τι μου είπες ότι είναι (Δείχνοντας στη μέση της σοκολάτας);

Θ – 2.

B – Και σε σχέση με ολόκληρη τη σοκολάτα;

Θ – Το μισό.

B – Άρα, αυτό εδώ το κομματάκι (το $\frac{1}{4}$);

Θ – Το μισό.

B – Το μισό είναι και αυτό;

Θ – Όχι, το μισό του μισού.

B – Που σαν κλάσμα πώς το λέμε;

Θ – Το $\frac{1}{4}$.

B – Άρα, είναι το ίδιο πράγμα! Πάρα πολύ ωραία!

Ανάλυση της απάντησης.

Η μαθήτρια καταλαβαίνοντας ότι καθεμία φίλη θα πρέπει να πάρει ένα ίσου μεγέθους κομμάτι με αυτό που της έδειξαν κατάφερε να το επαναλάβει 3 φορές, φτιάχνοντας ολόκληρη τη σοκολάτα. Υποθέσαμε πως το πλαίσιο αυτό της δίκαιης μοιρασιάς θα μπορούσε να βοηθήσει τη μαθήτρια να κατανοήσει περισσότερο τη σχέση της ισότητας του μεγέθους των μερών όταν ένα όλο τεμαχίζεται δίκαια. Η απάντηση της μαθήτριας «Αφού θα ήταν τέσσερις φίλες δεν θα έπρεπε να πάρουν και οι 4 το ίδιο (εννοεί ίδιου μεγέθους) κομμάτι;» καθώς και η ανησυχία που εξέφρασε «Δεν τα έφτιαξα και πολύ ίσια...» θεωρούμε πως επιβεβαιώνουν την υπόθεσή μας.

Για να γίνει ακόμα καλύτερη η σύνδεση της σχέσης του μέρους με το όλο, αλλά και του όλου με το μέρος ρωτήσαμε τη μαθήτρια «Τι σχέση έχει το κομματάκι με ολόκληρη τη σοκολάτα;» και «Πόσες φορές χωράει στη σοκολάτα;» αντίστοιχα. Η μαθήτρια χωρίς δυσκολία απάντησε «4 φορές (αφού) είναι το $\frac{1}{4}$. Στη συνέχεια, θελήσαμε να συνδέσει το $\frac{1}{4}$ με όλες τις υπόλοιπες ονομασίες που του είχαμε δώσει στις προηγούμενες δραστηριότητες (το μισό του μισού, 1 από τα τέσσερα).

Αναστοχασμός για την παρέμβασή μας

Κρίνοντας εκ των υστέρων, την παρέμβασή μας, διαπιστώνουμε πως έγινε μια αξιόλογη προσπάθεια να συνδεθεί το μέρος με το όλο και το όλο με το μέρος μέσω της αρχικής μας ερώτησης: «Αυτό το κομματάκι, τι σχέση έχει με ολόκληρη τη σοκολάτα; Πόσες φορές χωράει στη σοκολάτα;», αλλά η σύνδεσή αυτή δεν ολοκληρώθηκε στον βαθμό που θα θέλαμε. Εκτιμούμε ότι ενισχυτική θα ήταν μια επιπλέον ερώτηση του τύπου: «Τι σχέση έχει η σοκολάτα με το κομμάτι αυτό;». Η απάντηση: «Είναι τετραπλάσια!» υποδηλώνει τη σχέση του όλου με το μέρος. Επίσης, οι διάφορες ονομασίες που είχαν δοθεί στο μέρος έγινε προσπάθεια να συνδεθούν μεταξύ τους, ωστόσο δεν συνδέθηκε καθεμία από αυτές με το όλο. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να είχαμε ζητήσει στη μαθήτρια να σχεδιάσει το όλο, όταν της δίνεται το μισό του μισού μιας σοκολάτας, το 1 από τα τέσσερα ή το $\frac{1}{4}$ και να παρατηρήσει η ίδια ότι πρόκειται για ταυτόσημες ονομασίες του ίδιου σχετικού μεγέθους και όχι απλά να εξάγουμε εμείς το

συμπέρασμα: « Άρα, είναι το ίδιο πράγμα! Πάρα πολύ ωραία! ». Επιπλέον, βοηθητικό για την ισότητα των μερών θα ήταν εάν «πιέζαμε» τη μαθήτριά να εκφράσει ότι καθένα μέρος του όλου έχει ίδιο μέγεθος.

Τέλος, όπως διαπιστώσαμε στη δραστηριότητα αυτή, οι ερωτήσεις μας ήταν αρκετά καθοδηγητικές και προσπαθούσαμε να προσανατολίσουμε μ' αυτές τη σκέψη της μαθήτριάς στη σκέψη μας.

Δραστηριότητα 6

Στη μαθήτριά τέθηκε η παρακάτω δραστηριότητα. «Δύο αδερφάκια ανοίγουν το ψυγείο, γιατί πεινούσαν. Στο ψυγείο υπήρχαν δύο διαφορετικές σοκολάτες. Και οι δύο έφαγαν το $\frac{1}{5}$ της κάθε σοκολάτας. Ο ένας από τους δύο παραπονιέται ότι έφαγε λιγότερη σοκολάτα από τον άλλον. Πιστεύεις ότι το παιδάκι που παραπονιόταν έχει δίκιο; Ποιος έφαγε τελικά την περισσότερη σοκολάτα και γιατί;»

Λόγοι επιλογής της δραστηριότητας – Σκοπός:

Καθώς στις προηγούμενες δραστηριότητες είχαμε προσπαθήσει να συνδέσουμε το μέρος με το όλο και το όλο με το μέρος, τώρα θέλαμε να αντιληφθεί η μαθήτριά ότι το μέγεθος του μέρους εξαρτάται από το μέγεθος του όλου στο οποίο αναφέρεται. Θεωρήσαμε ότι τον σκοπό αυτό θα μπορούσαμε να τον επιτύχουμε δίνοντας την ευκαιρία στη μαθήτριά να συγκρίνει μέρη που το μέγεθός τους είναι διαφορετικό, καθώς προήλθαν από διαφορετικά όλα στα οποία έχει επιδράσει η ίδια κλασματική σχέση.

Πιθανές απαντήσεις της μαθήτριάς:

- Η μαθήτριά μπορεί να απαντήσει ότι εφόσον πρόκειται για το $\frac{1}{5}$, τα κομμάτια που έφαγαν τα παιδιά θα είναι ίσα μεταξύ τους.
- Η μαθήτριά μπορεί να ζωγραφίσει δύο ίδιες σοκολάτες, να τις κόψει σε 5 ίσα κομμάτια την καθεμία και έτσι να καταλήξει στο ότι και τα δύο παιδιά έφαγαν το ίδιο.
- Η μαθήτριά σχεδιάζει 2 διαφορετικές σοκολάτες, τις χωρίζει σε 5 ίσα κομμάτια και παρατηρεί ότι το $\frac{1}{5}$ από τη μία σοκολάτα είναι μικρότερο από το $\frac{1}{5}$ της άλλης σοκολάτας.

Απάντηση μαθήτριας:

Η μαθήτρια φτιάχνει πρώτα δύο διαφορετικού μεγέθους σοκολάτες και χωρίζει την καθεμιά σε πέντε ίσα μεταξύ τους κομμάτια.

B – Ο ένας παραπονέθηκε ότι πήρε λιγότερη σοκολάτα. Έχει δίκιο;

Θ – Όχι.

B – Γιατί;

Θ – Σκέφτηκα ότι αφού έλεγε ότι ήταν διαφορετικές μεταξύ τους και οι δύο είχαν 5, απλά η άλλη μπορεί να ήταν λίγο πιο μικρή.

B – Ωραία. Άρα, αφού είναι λίγο πιο μικρή...

Θ – Θα έχει και πιο μικρά κομμάτια.

B – Άρα, έφαγαν το ίδιο τελικά;

Θ – Όχι. Γιατί εάν ήταν να είναι ίσα, αυτό είναι πιο λεπτό από αυτό ...σωστά; Άρα, κανονικά θα έπρεπε να είχε πάρει ένα τέτοιο και να κόψει και λίγο από το δεύτερο κομματάκι, το μισό περίπου...

B – Είμαστε σίγουρες ότι θα είναι το μισό του μισού;

Τις έχουμε φτιάξει έτσι ώστε να βγει το μισό του μισού ή έτσι τυχαία;

Θ – Λίγο πιο τυχαία.

B – Έτυχε τώρα επειδή το ζωγραφίσαμε έτσι. Πόσο έλεγε ότι θα πάρει ο καθένας;

Θ – Έλεγε ότι ο καθένας θα πάρει το $\frac{1}{5}$ της σοκολάτας, δηλαδή το 1 από τα 5.

B – Αλλά δεν είναι ίδιες οι σοκολάτες. Άρα, τελικά, αυτό το $\frac{1}{5}$ είναι το ίδιο στη μία περίπτωση και στην άλλη;

Θ – Ναι...γιατί και τα δύο παιδιά θα φάνε το 1 από τα 5.

B – Άρα, έφαγαν το ίδιο... Και οι δύο έφαγαν το $\frac{1}{5}$. Το $\frac{1}{5}$ δεν είναι το 1 κομματάκι; Άρα, αυτό το $\frac{1}{5}$ είναι ίδιο με αυτό το $\frac{1}{5}$;

Θ – Όχι...

B – Άρα, τελικά φάγανε το ίδιο;

Θ – Όχι.

B – Ποιος έφαγε περισσότερο;

Θ – Αυτός που δεν παραπονέθηκε.

B – Άρα, ποια σοκολάτα που ζωγράφισες εσύ; Ας πούμε σοκ. 1 και σοκ. 2.

Θ - Το παιδάκι που έφαγε τη σοκολάτα 2 παραπονέθηκε ότι έφαγε λιγότερο.

Β – Μπράβο! Για να το δούμε λίγο καλύτερα!

Ανάλυση απάντησης

Η μαθήτρια σχεδίασε δύο σοκολάτες διαφορετικού μεγέθους και αρχικά απάντησε ότι τα κομμάτια που έφαγαν τα παιδιά είναι διαφορετικά. Παρόλο που στη συνέχεια, η μαθήτρια ήταν σε θέση να εξηγή τη σκέψη της απαντώντας σε ερωτήσεις μας, στην επανάληψη της αρχικής ερώτησης της δραστηριότητας «Άρα, τελικά, αυτό το $\frac{1}{5}$ είναι ίδιο στην μία περίπτωση και στην άλλη;», η μαθήτρια απάντησε «Ναι, γιατί και τα δύο παιδιά θα φάνε το 1 από τα 5». Στο σημείο αυτό, φαίνεται ότι η μαθήτρια αντιλαμβάνεται το κλάσμα ως ένα μέρος από το όλο και δεν λαμβάνει καθόλου υπόψη της ότι το μέγεθος του μέρους σχετίζεται με το μέγεθος του όλου από το οποίο προήλθε.

Με σκοπό να στηρίξουμε την μαθήτρια να εστιάσει στο μέγεθος των κομματιών, τη ρωτήσαμε αν τελικά τα δύο αυτά κομμάτια είναι ίδια, δείχνοντάς τα. Έτσι, η μαθήτρια παρατήρησε ότι δεν είναι ίδια και ότι τελικά δεν έφαγαν το ίδιο. Για να δούμε σε ποιον βαθμό έχει κατανοήσει την τελευταία απάντησή της, επειδή παραπάνω είχε δώσει διαφορετική, σταδιακά: α) κάναμε πιο συγκεκριμένο το αρχικά αφηρημένο πλαίσιο (2 σοκολάτες, η μία διπλάσια της άλλης αντί δύο διαφορετικές σοκολάτες), β) δώσαμε βοηθητικό υλικό (χαρτόνια) και γ) τροποποιήσαμε τη σχέση του μέρους με το όλο ($\frac{1}{4}$ αντί του $\frac{1}{5}$). Παρόλα αυτά, η μαθήτρια δυσκολευόταν να ανταποκριθεί στις απαιτήσεις της δραστηριότητας και να χαρακτηρίσει το ένα κομμάτι ως διπλάσιο το άλλου.

Αναστοχασμός για την παρέμβασή μας

Μελετώντας, ξανά, τα στοιχεία από τη συνάντηση με τη μαθήτρια, διαπιστώσαμε ότι δεν είχε σταθεροποιήσει μέσω της επανάληψης και του τεμαχισμού τη σχέση του μέρους με το όλο. Αν είχε γίνει η σταθεροποίηση αυτή, η δραστηριότητα θα έδινε, πράγματι, την ευκαιρία στη μαθήτρια να εστιάσει στη σχέση μεγέθους του μέρους με το όλο.

Επιπλέον προβληματισμοί προκύπτουν και για την δική μας αξιοποίηση της δραστηριότητας. Πιο συγκεκριμένα, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι οι ερωτήσεις μας δεν εστίαζαν την προσοχή της μαθήτριας στη σχέση του μεγέθους

των κομματιών που προέκυπταν από τον ισοτεμαχισμό διαφορετικών όλων. Ενδεικτικές βοηθητικές ερωτήσεις, στο σημείο που ζητήθηκε στη μαθήτριά να συγκρίνει το $\frac{1}{5}$ των διαφορετικών σοκολατών και απάντησε ότι δεν είναι ίδια, θα μπορούσαν να είναι: «Γιατί δεν είναι ίδιο;», «Σε τι διαφέρουν;», «Γιατί διαφέρει το μέγεθός τους;». Θετικό ωστόσο είναι ότι έγινε μια προσπάθεια τροποποίησης των δεδομένων του προβλήματος για να ανταποκρίνεται περισσότερο στο επίπεδο σκέψης της μαθήτριάς, όπως αναφέρθηκε στην ανάλυση της απάντησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Όπως προαναφέρθηκε, η συγκεκριμένη εργασία περιγράφει την πρώτη προσπάθεια που πραγματοποιήσαμε, ώστε να στηρίξουμε μια μαθήτρια Τρίτης δημοτικού να σχηματίσει μία αρχική αντίληψη του κλάσματος, ως πολλαπλασιαστική σχέση ποσοτήτων. Τα αποτελέσματα της, λοιπόν, δεν είναι δυνατόν να γενικευτούν, αλλά παρέχουν πληροφορίες που μπορούν να αποτελέσουν στήριγμα για την οργάνωση μιας αντίστοιχης προσπάθειας, ώστε να υπάρξει η κατάλληλη προετοιμασία και να είναι γνωστά τα σημεία στα οποία πρέπει να δοθεί προσοχή. Οι πληροφορίες αυτές αφορούν τόσο την πορεία της μαθήτριας όσο και τον τρόπο που τη στηρίξαμε εμείς σε αυτή την προσπάθεια.

Όσον αφορά την πορεία της μαθήτριας κατά τη διάρκεια των συναντήσεων μας, υπήρξαν αρκετά θετικά στοιχεία. Πιο συγκεκριμένα, γνώρισε και άρχισε να χρησιμοποιεί κλασματικές εκφράσεις, όπως το ένα δεύτερο ($1/2$) μιας ποσότητας, το ένα τέταρτο ($1/4$) μιας ποσότητας, τις οποίες δεν αξιοποιούσε στην αρχή των συναντήσεων μας, αλλά αργότερα τις συνέδεσε, ως έναν βαθμό, με τη διαδικασία του ισοτεμαχισμού και της επανάληψης. Επίσης, έγινε προσπάθεια να μην προσεγγιστεί το κλάσμα ως ένα κομμάτι από το όλο, αλλά να αναδυθεί η σημαντικότητα των πολλαπλασιαστικών σχέσεων που αυτό εμπεριέχει. Τέλος, εξοικειώθηκε με την αξιοποίηση σχημάτων και γενικότερα δεδομένων για να αιτιολογήσει την απάντησή της, αναπτύχθηκε δηλαδή, μία πρακτική πολύ σημαντική και για τη μελλοντική της ενασχόληση με τα μαθηματικά.

Σχετικά με τα στοιχεία που δεν προχώρησαν σύμφωνα με τους στόχους που είχαμε θέσει, καθώς οργανώσαμε την προσέγγισή μας, το κύριο ήταν ότι δεν επιλύθηκε, πλήρως, η σύγχυση σχετικά με τη σχέση μεγέθους του μέρους και του όλου μιας ποσότητας. Δεν επιλύθηκε, λοιπόν, η βασική δυσκολία που παρατηρήσαμε στο ερωτηματολόγιο της μαθήτριας (βλ. επ. 3 κεφ. 4B). Έγιναν κάποια μικρά βήματα για να αντιληφθεί, ως έναν βαθμό, την ισότητα των κομματιών που προκύπτουν από μία κλασματική σχέση, όταν αυτή επιδρά σε μία ποσότητα, χωρίς να προχωρήσει η σκέψη αυτή βαθύτερα. Ένας βασικός παράγοντας που αποτέλεσε εμπόδιο στην πορεία της μαθήτριας για την επίλυση

αυτής της δυσκολίας ήταν, όπως παρατηρήσαμε, ότι εξοικειώθηκε με τη διαδικασία του τεμαχισμού αλλά όχι με τη διαδικασία της επανάληψης, παρόλο που αποτελούσε στόχο μας.

Σχετικά με τη δική μας μάθηση, είναι αρκετά τα στοιχεία που συνειδητοποιήσαμε, κατά τον αναστοχασμό, ότι θα μπορούσαμε να έχουμε διαχειριστεί με διαφορετικό τρόπο, για να συμβάλουμε πιο αποτελεσματικά στη στήριξη της μάθησης της μαθήτριας. Θα μπορούσαμε να αξιοποιούμε περισσότερο τα λεγόμενα της, ώστε να την ενισχύσουμε σε μεγαλύτερο βαθμό. Αυτό θα ήταν δυνατόν να επιτευχθεί αν υπήρχε λιγότερη προσκόλληση στον αρχικό στόχο και μεγαλύτερη προσαρμοστικότητα κατά τις συναντήσεις μας στη σκέψη της μαθήτριας. Ταυτόχρονα, θα έπρεπε να είχε δοθεί μεγαλύτερη προσοχή, ώστε το πλαίσιο της κάθε δραστηριότητας να είναι προσαρμοσμένο στο επίπεδο της μαθήτριας.

Όσον αφορά τα θετικά στοιχεία που αποκομίσαμε από όλη αυτή την προσπάθεια έχουν τόσο παιδαγωγικό όσο και μαθηματικό περιεχόμενο. Αρχικά, καταφέραμε να δημιουργήσουμε ένα περιβάλλον κατάλληλο για τη μαθήτρια, μέσα στο οποίο εξέφραζε ελεύθερα τις ιδέες της. Βοηθηθήκαμε από έρευνες για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια του κλάσματος αλλά και τον τρόπο σκέψης της μαθήτριας σχετικά με την αντίληψη της έννοιας αυτής. Τέλος, ο εκ των υστέρων αναστοχασμός και η διαπίστωση των ευκαιριών που χάσαμε για να χτίσουμε την πολλαπλασιαστική σχέση του μέρους με το όλο και του όλου με το μέρος αποτέλεσε ευκαιρία μάθησης για εμάς. Η αξιοποίηση της αντίστροφης σχέσης του τεμαχισμού και της επανάληψης του όλου και του μέρους αντίστοιχα με κάθε ευκαιρία θα βοηθούσε στην επίτευξη του αρχικού μας στόχου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. *Acquisition of mathematics concepts and processes*, 91-126.
- Behr, M. J., Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion.
- Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield: Eds. and Trans.)
- Confrey, J., & Maloney, A. (2010, June). The construction, refinement, and early validation of the equipartitioning learning trajectory. In *Proceedings of the 9th International Conference of the Learning Sciences-Volume 1* (pp. 968-975). International Society of the Learning Sciences.
- Cortina, J. L., Visnovska, J., & Zuniga, C. L. A. U. D. I. A. (2014). Equipartition as a didactical obstacle in fraction instruction. *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, 14(1), 1-18.
- Cortina, J. L., Zúñiga, C., & Višňovská, J. (2015). An Alternative Starting Point for Fraction Instruction. *International Journal for Mathematics Teaching & Learning*.
- Freudenthal, H. (1986). *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Vol. 1). Springer Science & Business Media.
- Freudenthal, H. (2006). *Revisiting mathematics education: China lectures* (Vol. 9). Springer Science & Business Media.
- Gravemeijer, K. (2008). RME theory and mathematics teacher education. In *The Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 283-302). Brill Sense.
- Akker, J. J. H., Bannan, B., Cobb, P., Folmer, E., Gravemeijer, K. P. E., Kelly, A. E., & Nieveen, N. M. (2013). *Educational design research*. Slo.

Kieren, T. E. (1976, April). On the mathematical, cognitive and instructional. In *Number and measurement. Papers from a research workshop* (Vol. 7418491, p. 101).

Kieren, T. E. (1980). The rational number construct: Its elements and mechanisms. *Recent research on number learning*, 125-149.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. *Rational numbers: An integration of research*, 49-84.

Kwon, O. N. (2002). Conceptualizing the Realistic Mathematics Education Approach in the Teaching and Learning of Ordinary Differential Equations.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for research in mathematics education*, 16-32.

McCloskey, A. V., & Norton, A. H. (2009). Using Steffe's Advanced Fraction Schemes. *Mathematics teaching in the middle school*, 15(1), 44-50.

Norton, A., & Wilkins, J. L. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *The Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 150-161.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational studies in Mathematics*, 30(1), 5-38.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2009). *Children's fractional knowledge*. Springer Science & Business Media.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research* (Vol. 8). Springer Science & Business Media.

Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. *Research companion to the principles and standards for school mathematics*, 95-113.

Treffers, A. (1987). Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education. Netherlands.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 521-525.