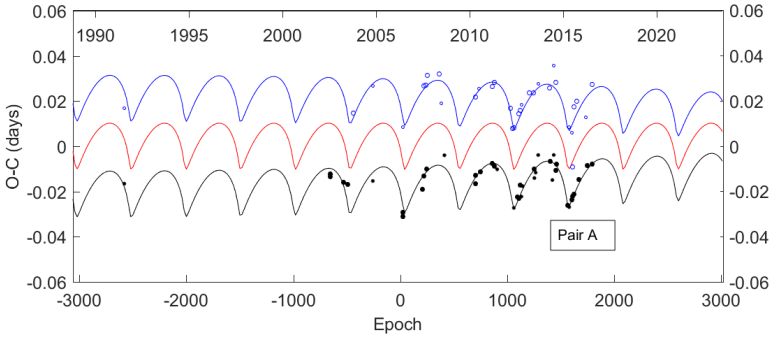
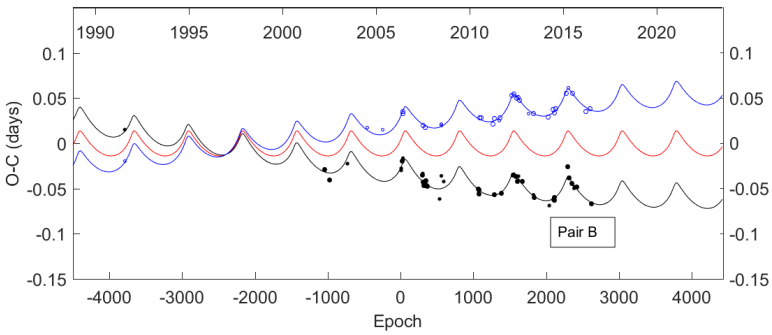
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Μελέτη των φυσικών και τροχιακών χαρακτηριστικών των τετραπλών εκλειπτικών συστημάτων V994 Her και 1SWASP J093010.78+533859.5

Σοφια Παλαφουτα
Α.Μ.: 201736

Διπλωματική εργασία για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης





Επιβλέπων: Κοσμάς Γαζέας
Λέκτορας Παρατηρησιακής Αστροφυσικής

Αθήνα 2019

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Μελέτη των φυσικών και τροχιακών χαρακτηριστικών των τετραπλών εκλειπτικών συστημάτων V994 Her και 1SWASP J093010.78+533859.5

Σοφια Παλαφουτα
Α.Μ.: 201736

Διπλωματική εργασία για το Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης

Τριμελής επιτροπή

Κοσμάς Γαζέας, Λέκτορας (Κύριος επιβλέπων)
Δέσποινα Χατζηδημητρίου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια
Θεοχάρης Απόστολάτος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα 2019

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες **i**

Περίληψη **iii**

1 Εισαγωγή **1**
1.1 Βασικές κατηγορίες αστρικών συστημάτων 1
1.1.1 Ταξινόμηση με βάση την παρατήρηση 1
1.2 Ταξινόμηση με βάση το μοντέλο *Roche* 2
1.2.1 Ταξινόμηση με βάση τη φωτομετρική καμπύλη 4
1.3 Συστήματα με μαγνητική δραστηριότητα και φαινόμενο $O'Connell$ . . . 6
1.4 Τα γνωστά τετραπλά εκλειπτικά συστήματα στο σύμπαν 7
1.4.1 $V994\ Her$ 9
1.4.2 $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$ 9
1.4.3 $KIC\ 4247791$ 11
1.4.4 $BV\ Dra$ - $BW\ Dra$ 12
1.4.5 $OGLE - LMC - ECL - 16549$ 12
1.4.6 $CzeV343$ 13
1.5 Κύκλοι $Kozai$ 13
1.6 Φαινόμενο $LITE$ 14

2 Αστρονομικές παρατηρήσεις και επεξεργασία **17**
2.1 Γεροσταθοπούλειο Αστεροσκοπείο του Πανεπιστημίου Αθηνών ($UOAO$) 17
2.2 Μέθοδος και διαδικασία παρατήρησης 18
2.3 Διαφορική φωτομετρία διαφράγματος 20
2.4 Η διόρθωση του χρόνου 23
2.5 Υπολογισμός ελαχίστων και αστρονομική εφημερίδα 25

3 Μοντελοποίηση των τετραπλών συστημάτων **33**
3.1 Ο κώδικας $Wilson - Devinney$ 33
3.2 Μοντελοποίηση με τις μεθόδους LC και DC 34
3.3 Μοντελοποίηση με τη μέθοδο $Monte\ Carlo$ (MC) 40
3.4 Τα τελικά θεωρητικά μοντέλα 43

4 Διερεύνηση διαγραμμάτων $O-C$ **49**
4.1 Κατασκευή διαγραμμάτων $O-C$ 53
4.1.1 Το σύστημα $V994\ Her$ 53
4.1.2 Το σύστημα $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ 58

5 Μελέτη της Κεπλεριανής κίνησης και των τροχιών **65**

6 Εξελικτική κατάσταση και σύγκριση των τετραπλών συστημάτων **77**

7 Συμπεράσματα **81**

Παράρτημα **83**

Βιβλιογραφία **101**

Ευχαριστίες

Για την ολοκλήρωση της διπλωματικής αυτής εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον επιβλέποντά μου κύριο Κοσμά Γαζέα, Λέκτορα του Τομέα Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής. Η πολύτιμη διδασκαλία του, η εμπιστοσύνη και η κατανόησή του, με βοήθησαν στην εκμάθηση νέων γνώσεων και στην εξέλιξή μου στο χώρο της Αστροφυσικής και της επιστήμης γενικότερα. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για τη συμπαράσταση, την υπομονή και την ψυχολογική υποστήριξη στη μέχρι τώρα πορεία μου σε αυτό το ταξίδι της γνώσης.

Περίληψη

Ο σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη και ο προσδιορισμός των φυσικών και τροχιακών χαρακτηριστικών των συστημάτων $V994\ Her$ και $1SWASP\ J093010.78+533859.5$. Τα συστήματα αυτά χαρακτηρίζονται ως τετραπλά εκλειπτικά, καθώς περιλαμβάνουν δύο διπλά αστρικά συστήματα που εκτελούν εκλείψεις μεταξύ των μελών τους. Το πρώτο αποτελείται από δύο αποχωρισμένα εκλειπτικά ζεύγη, ενώ το δεύτερο από ένα αποχωρισμένο και ένα ζεύγος σε επαφή. Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούνται φωτομετρικά δεδομένα από το αρχείο του Γεροσταθοπούλειου Αστεροσκοπείου του Πανεπιστημίου Αθηνών ($UOAO$) των ετών 2014 και 2013, για τα συστήματα $V994\ Her$ και $1SWASP\ J093010.78+533859.5$, αντίστοιχα. Σε συνδυασμό με τα διαθέσιμα δεδομένα της βιβλιογραφίας, που έχουν ληφθεί κατά την περίοδο μεταξύ των ετών 1997-2015 και 2008-2013, πραγματοποιείται μελέτη αυτών στα οπτικά μήκη κύματος (φίλτρα B, V, R, I) μέσω των διαγραμμάτων φάσης και συγκεκριμένα μέσω των μεταβολών της φωτεινής ροής. Οι μεταβολές αυτές μοντελοποιούνται με την κατάλληλη προσαρμογή των φυσικών και τροχιακών παραμέτρων του κάθε συστήματος, χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους. Η κατασκευή των μοντέλων γίνεται σε τρία στάδια χρησιμοποιώντας ειδικά λογισμικά αριθμητικής προσομοίωσης του κώδικα $Wilson-Devinney$ και συγκεκριμένα τις μεθόδους LC ($Light\ Curve$), DC ($Differential\ Corrections$) και MC ($Monte\ Carlo$). Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε τα διαγράμματα $O-C$ των χρόνων ελαχίστων των συστημάτων και αναλύουμε τις μεταβολές των τροχιακών χαρακτηριστικών, με προσαρμογή θεωρητικών καμπυλών και ερμηνεία των αντίστοιχων φυσικών μηχανισμών. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιείται εξειδικευμένος κώδικας στο περιβάλλον της $Matlab$, που λαμβάνει υπόψη την κίνηση των αψίδων και το φαινόμενο $Light\ Time\ Effect$ ($LITE$). Με την αναλυτική μέθοδο $Newton$ πραγματοποιούμε μια οπτική απεικόνιση των τροχιών του κάθε ζεύγους και των παρατηρούμενων ταχυτήτων, με κατασκευή κατάλληλου κώδικα στο περιβάλλον της $Matlab$. Τέλος, μελετάμε την εξελικτική κατάσταση και πραγματοποιούμε μια συγκριτική μελέτη των φυσικών και τροχιακών χαρακτηριστικών των συνολικά έξι γνωστών τετραπλών εκλειπτικών συστημάτων στο σύμπαν.

Abstract

The current thesis focuses on the study and disentangling of physical and orbital characteristics of the systems V994 Her and 1SWASP J093010.78+533859.5. They are both quadruple stellar systems, consisted of two eclipsing binaries, whose members mutually eclipse each other. The first one includes two detached binaries, while the second one a detached and a contact binary. At the present study we use photometric data from the 2014 and 2013 record of Gerostathopouleio University of Athens Observatory (UOAO) for the systems V994 Her and 1SWASP J093010.78+533859.5, respectively. Combining the above observations with the available bibliographic data between the years 1997-2015 and 2008-2013, we conducted a study at the optical wavelengths (B, V, R, I filters) through phase diagrams and more particularly through their flux variability. With the proper adjustment of the physical and orbital parameters we model the flux variability using numerical methods. This modeling procedure takes place in three stages, using specialized software of numerical simulation of the Wilson-Devinney code and more specifically the methods LC (Light Curve), DC (Differential Corrections) and MC (Monte Carlo). As a following step, we construct the O-C diagrams of the minima timings of each system and we analyze the changes of the orbital parameters by adjusting theoretical curves, while interpreting their physical meaning. For this purpose, a specialized code in Matlab environment is used, that takes into account the Light Time Effect (LITE). With the Newton numerical method we establish an optical presentation of the orbits and observed velocities for each binary, after building an accurate code in Matlab environment. Finally, we study the evolution and we carry out a comparative study of the physical and orbital characteristics of the six in total known quadruple eclipsing systems in the universe.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Βασικές κατηγορίες αστρικών συστημάτων

Ένα μεγάλο ποσοστό των αστέρων στο σύμπαν ανήκει σε διπλά συστήματα, δηλαδή ζεύγη αστέρων που περιστρέφονται το ένα γύρω από το άλλο και αλληλεπιδρούν βαρυτικά. Σε ένα διπλό αστρικό σύστημα πάντα το ένα μέλος ορίζεται ως πρωτεύον και το άλλο ως δευτερεύον, σύμφωνα με φωτομετρικά και φασματοσκοπικά κριτήρια. Τα μέλη ενός συστήματος μπορεί να βρίσκονται κοντά και να ανταλλάσσουν μάζα μέσω της φωτόσφαιράς τους ή να βρίσκονται αρκετά μακριά, ώστε οι επιφάνειές τους να μην αλληλεπιδρούν καθόλου.

Σε γενικές γραμμές, η μελέτη των αστρικών συστημάτων είναι ένα από τα πιο σημαντικά πεδία έρευνας στην αστροφυσική, επειδή παρέχει το μοναδικό τρόπο για να μετρηθούν άμεσα οι απόλυτες διαστάσεις και η μάζα των αστέρων και κυρίως να θεμελιωθούν οι σχετικές αστροφυσικές θεωρίες και απόψεις για το σύμπαν.

1.1.1 Ταξινόμηση με βάση την παρατήρηση

Ανάλογα με τον τρόπο που μπορούμε να δούμε, να παρατηρήσουμε και να μελετήσουμε ένα σύστημα διακρίνουμε τις εξής κατηγορίες:

i **Οπτικά διπλά αστρικά συστήματα.** Τα συστήματα αυτά παρατηρούνται οπτικά μέσω τηλεσκοπίου, δηλαδή χωρίς κάποια επεξεργασία των πληροφοριών που λαμβάνουμε από αυτά. Συγκεκριμένα, τραβώντας απλά μια φωτογραφία του αστρικού πεδίου στο οποίο βρίσκονται μπορούμε να ξεχωρίσουμε ότι αποτελούν διπλό σύστημα.

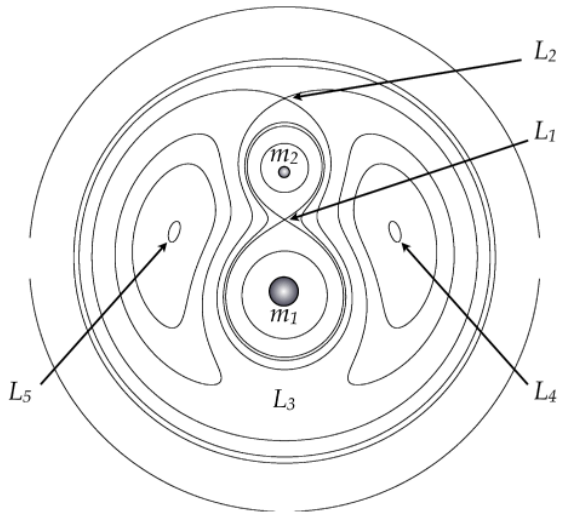
ii **Φασματοσκοπικά διπλά αστρικά συστήματα.** Οι περιοδικές μετατοπίσεις *Doppler* (*Doppler shift*), λόγω της τροχιακής κίνησης των συνοδών, μπορούν να ανιχνευθούν με την εμφάνιση μονών ή διπλών φασματικών γραμμών. Ανάλογα με το αν οι μετατοπίσεις αυτές παρατηρούνται για τον έναν ή και για τους δύο συνοδούς, τα συστήματα αυτά λέγονται $single-lined$ ή $double-lined$ φασματοσκοπικά συστήματα.

iii **Φωτομετρικά διπλά αστρικά συστήματα.** Εάν τα μέλη του συστήματος προκαλούν εκλείψεις το ένα γύρω από το άλλο κατά τη διάρκεια της τροχιάς τους, τότε το σύστημα χαρακτηρίζεται ως εκλειπτικό. Στα συστήματα αυτά μπορούμε να παρατηρήσουμε μια περιοδική μεταβολή της φωτεινής ροής ή του χρώματός τους. Κάτι τέτοιο είναι πολύ σημαντικό γιατί μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε φυσικές παραμέτρους του συστήματος, όπως η ακτίνα και η μάζα, τη μαγνητική δραστηριότητα καθώς και άλλα χαρακτηριστικά.

iv **Αστρομετρικά διπλά αστρικά συστήματα.** Τα συστήματα αυτά δεν μπορούν να παρατηρηθούν ούτε φωτομετρικά ούτε φασματοσκοπικά. Ο πρωτεύων αστέρας διαγράφει μη ευθύγραμμη περιοδική κίνηση στο επίπεδο του ουρανού και ανιχνεύεται με την αστρομετρία. Από αυτό συνάγεται η ενδεχόμενη ύπαρξη συνοδού που περιστρέφεται γύρω από το κοινό κέντρο μάζας.

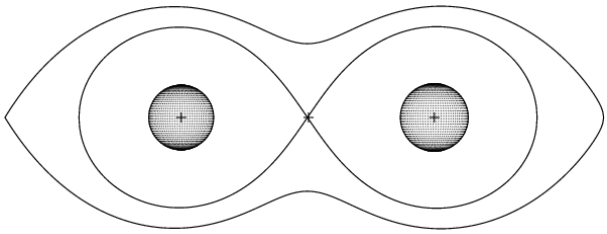
1.2 Ταξινόμηση με βάση το μοντέλο *Roche*

Έστω ένα σύστημα αστέρων με κυκλικές τροχιές το οποίο παρατηρούμε στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας που περιστρέφεται μαζί με τους αστέρες. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε ισοδυναμικές επιφάνειες όπου η ανηγμένη βαρύτητα είναι κάθετη σε αυτές. Με τον όρο ανηγμένη βαρύτητα εννοούμε το αποτέλεσμα της συνισταμένης δύναμης που δέχεται μια στοιχειώδης μάζα από τους δύο αστέρες του συστήματος και εξαιτίας της περιστροφής του συστήματος αναφοράς.

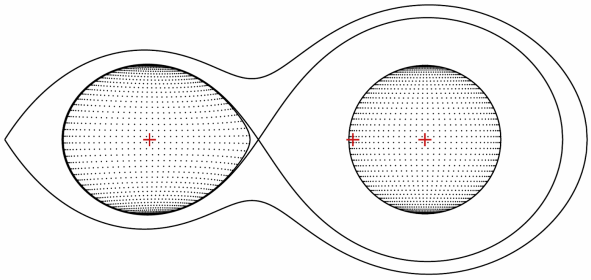


Εικόνα 1.1: Εγκάρσια τομή των ισοδυναμικών επιφανειών διπλού συστήματος με $q = 0.4$ (http://www.emis.de/journals: «Relativistic binaries»).

Κοντά στο κέντρο του κάθε αστέρα οι δυνάμεις που ασκούνται λόγω της παρουσίας του συνοδού και της περιστροφής του συστήματος αναφοράς είναι αμελητέες. Έτσι, οι ισοδυναμικές επιφάνειες κοντά στα δύο αστέρια του συστήματος είναι σφαιρικές.

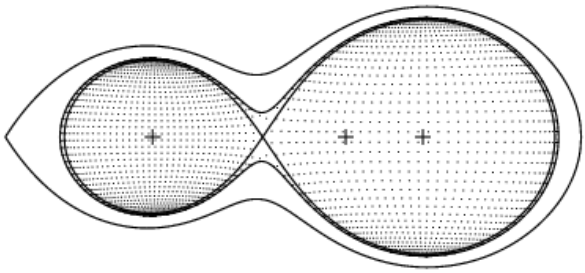


Εικόνα 1.2: Μοντέλο Roche του αποχωρισμένου διπλού συστήματος KP Aql (copyright: Ibanoglu, C. & Gumen, O.).



Εικόνα 1.3: Μοντέλο Roche του ημι-αποχωρισμένου διπλού συστήματος NR Peg (copyright: Erdem A. et al.).

Αντίθετα, μακριά από τα αστέρια, η ανηγμένη βαρύτητα στο ισημερινό επίπεδο κυριαρχείται από τη φυγόκεντρο δύναμη και οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι ελλειψοειδής, με αποτέλεσμα να τέμνουν το ισημερινό επίπεδο. Σε ενδιάμεσες θέσεις το στοιχείο της ύλης επηρεάζεται από τους δύο αστέρες και τη φυγόκεντρο δύναμη.



Εικόνα 1.4: Μοντέλο Roche του συστήματος σε επαφή AE Phe (copyright: Gronbech, B.).

Έτσι, εάν παρατηρήσουμε τις ισοδυναμικές επιφάνειες στο ισημερινό επίπεδο, παρατηρούμε ότι σχηματίζουν ένα «πλάγιο οκτώ»(Εικόνα 1.1). Τα δύο μισά της εσωτερικής επιφάνειας που αντιστοιχούν στους δύο αστέρες, ονομάζονται λοβοί *Roche* και ενώνονται σε ένα μοναδικό σημείο, γνωστό σαν σημείο *Lagrange* L_1, το οποίο εκφράζει τη βαρυτική ισορροπία του συστήματος και είναι ασταθές. Τα σημεία *Lagrange* L_2 και L_3 είναι επίσης ασταθή, ενώ τα L_4 και L_5 είναι ευσταθή. Το σχήμα των ισοδυναμικών επι-

φανειών και οι ακτίνες των λοβών *Roche* (εάν τους δεχτούμε ως κύκλους), εξαρτώνται από το λόγο μαζών των δύο αστέρων του συστήματος ($q = m1/m2$).

Ανάλογα με το βαθμό πλήρωσης ($fill - out\ factor$) των λοβών *Roche* από τους αντίστοιχους αστέρες (δηλαδή ανάλογα με το λόγο των ακτίνων των αστέρων προς τις ακτίνες των αντίστοιχων λοβών τους) τα διπλά συστήματα χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες.

i **Στα αποχωρισμένα** (*detached*), όπου κανένας από τους δύο συνοδούς δεν έχει συμπληρώσει το λοβό *Roche* (Εικόνα 1.2) και η αλληλεπίδραση γίνεται μόνο μέσω βαρυτικής έλξης.

ii **Στα ημι-αποχωρισμένα** ($semi - detached$), όπου ο ένας συνοδός έχει συμπληρώσει το λοβό *Roche* (Εικόνα 1.3) και ο άλλος όχι. Συχνά υπάρχει ανταλλαγή μάζας μεταξύ των μελών, μαγνητική σύζευξη και σχηματισμός αστρικών νεφών.

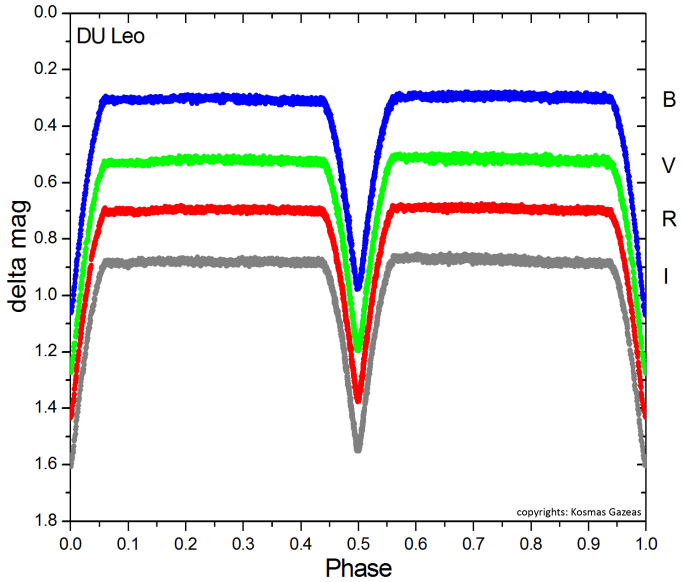
iii **Στα συστήματα σε επαφή** (*contact*), όπου και οι δύο συνοδοί έχουν συμπληρώσει το λοβό *Roche* (Εικόνα 1.4). Τα μέλη μοιράζονται μια κοινή ατμόσφαιρα και φαινόμενα ανταλλαγής μάζας, ενώ κυριαρχούνται από παλιρροϊκές δυνάμεις που επηρεάζουν τη γεωμετρία του συστήματος.

1.2.1 Ταξινόμηση με βάση τη φωτομετρική καμπύλη

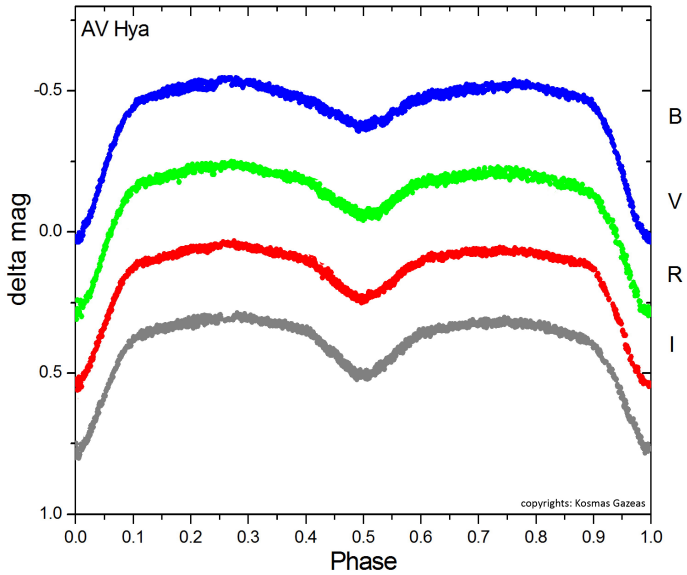
Τα εκλειπτικά αστρικά συστήματα τα χωρίζουμε σε τρεις κατηγορίες ανάλογα τη μορφή της παρατηρούμενης φωτομετρικής καμπύλης. Συγκεκριμένα:

i *Algol* **ή** β *Persei* (*EA*). Η κατηγορία αυτή πήρε το όνομά της από το β *Persei* ή *Algol*, το πρώτο εκλειπτικό σύστημα που παρατηρήθηκε. Τα συστήματα αυτά συνήθως αποτελούνται από έναν αστέρα φασματικού τύπου A ή B και έναν αστέρα φασματικού τύπου G ή K. Ο πρώτος είναι λαμπρότερος και με μεγαλύτερη μάζα, ενώ ο δεύτερος είναι μεγαλύτερος σε διαστάσεις. Η τροχιακή περίοδος των συστημάτων τύπου *Algol* κυμαίνεται από μία ημέρα μέχρι μερικούς μήνες ή και χρόνια. Τα δύο μέλη του συστήματος είναι συνήθως αποχωρισμένα, ενώ έχουν παρατηρηθεί και ημιαποχωρισμένα συστήματα, όπου το ένα μέλος έχει γεμίσει το λοβό *Roche*. Η καμπύλη φωτός (Εικόνα 1.5) των συστημάτων τύπου *Algol* μας δίνει τη δυνατότητα να βρούμε το χρόνο (ή τη φάση) όπου αρχίζει και τελειώνει η έκλειψη. Τα σχεδόν επίπεδα τμήματα της καμπύλης αντιστοιχούν στις φάσεις όπου και οι δύο αστέρες φαίνονται από τον παρατηρητή, ενώ τα ελάχιστα αντιστοιχούν στις φάσεις όπου συμβαίνουν οι εκλείψεις.

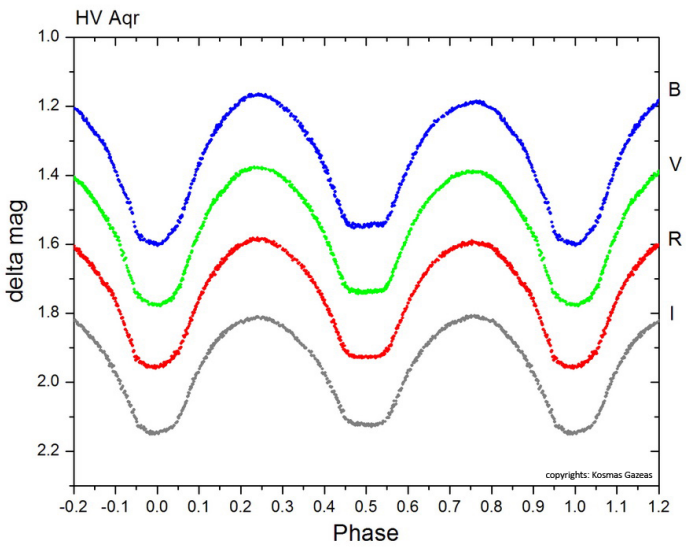
ii β *Lyrae* (*EB*). Στα συστήματα αυτά η μεταβολή του φωτός είναι συνεχής, γιατί και τα δύο μέλη του συστήματος είναι παραμορφωμένα λόγω της αμοιβαίας βαρυτικής έλξης (Εικόνα 1.6). Οι φωτόσφαιρες των δύο μελών του ζεύγους είναι σχεδόν σε επαφή. Τα δύο ελάχιστα σχηματίζονται κατά τον ίδιο τρόπο, όπως στην περίπτωση των συστημάτων *Algol*. Τα δύο μέλη του συστήματος είναι συνήθως προγενέστερων φασματικών τύπων με πολύπλοκα χαρακτηριστικά, που



Εικόνα 1.5: Φωτομετρική καμπύλη του αποχωρισμένου εκλειπτικού συστήματος DU Leo (copyright: Kosmas Gazeas).



Εικόνα 1.6: Φωτομετρική καμπύλη του ημιαποχωρισμένου εκλειπτικού συστήματος AV Hya (copyright: Kosmas Gazeas).



Εικόνα 1.7: Φωτομετρική καμπύλη του εκλειπτικού συστήματος σε επαφή HV Aqr (copyright: Kosmas Gazeas).

δείχνουν ότι υπάρχουν ρεύματα αερίου και κελύφη γύρω από το σύστημα. Οι τροχιακές περίοδοι είναι συνήθως μεγαλύτερες από μια ημέρα, αν και υπάρχουν πολλές περιπτώσεις με περιόδους μικρότερες της μιας ημέρας. Στα συστήματα αυτά το ένα ή και τα δύο μέλη οριακά γεμίζουν τους αντίστοιχους λοβούς του *Roche* ($semi-detached$ ή $near-contact$).

iii *W Ursae Majoris* (*EW*). Τα μέλη των συστημάτων αυτών είναι πολύ παραμορφωμένα λόγω των παλιρροιακών δυνάμεων και έχουν σχεδόν ίσες θερμοκρασίες. Αυτό οφείλεται μάλλον στην ύπαρξη κοινής ατμόσφαιρας που περιβάλλει το σύστημα. Στην πραγματικότητα οι αστέρες βρίσκονται σε επαφή. Ο φασματικός τύπος των συστημάτων αυτών είναι F, G ή K. Η τροχιακή τους περίοδος είναι συνήθως μικρότερη από μια ημέρα και τα δύο μέλη του συστήματος γεμίζουν ή υπερβαίνουν τους λοβούς του *Roche*, ενώ η καμπύλη φωτός είναι συνεχής (Εικόνα 1.7).

1.3 Συστήματα με μαγνητική δραστηριότητα και φαινόμενο *O'Connell*

Γενικά ως κηλίδα ορίζουμε περιοχή στην επιφάνεια ενός αστεριού με σημαντική διαφορά θερμοκρασίας από την υπόλοιπη περιοχή. Αυτές οι κηλίδες ή αλλιώς τα κέντρα δράσης συνδέονται με διάφορα φαινόμενα στο εσωτερικό και στο εξωτερικό αστεριών παρόμοιων με τον Ήλιο και κυρίως με τη μαγνητική δραστηριότητα, όπως δείχνουν πρόσφατες έρευνες (Notsu et al. 2013; Maehara et al. 2017). Μπορεί να προκαλούνται

σε ψυχρά αστέρια επειδή είναι γρήγορα περιστρεφόμενα και έχουν ζώνη μεταφοράς, με αποτέλεσμα η κινητική ενέργεια να μετατρέπεται σε μαγνητική κατά τη μεταφορά στο εξωτερικό στρώμα της επιφάνειας (θεωρία δυναμό). Ειδάλλως, το αστέρι μπορεί να αλληλεπιδρά βαρυτικά με ένα άλλο, προκαλώντας τοπικές παραμορφώσεις του μαγνητικού πεδίου, κάτι που συμβαίνει σε διπλά ή πολλαπλά συστήματα.

Όσον αφορά τα διπλά συστήματα, οι κηλίδες μπορεί να σχηματίζονται λόγω πολύ μικρής απόστασης μεταξύ των μελών και επομένως βαρυτικής τους αλληλεπίδρασης. Αυτά τα κέντρα δράσης συνήθως είναι πιο ψυχρά κατά έναν παράγοντα από την υπόλοιπη επιφάνεια του αστέρα και πολύ μεγάλα για να μπορέσουμε να τα παρατηρήσουμε φωτομετρικά σε τόσο μεγάλες αποστάσεις.

Γενικά, υπάρχουν δύο ειδών κηλίδες. Οι θερμές και οι ψυχρές. Οι ψυχρές κηλίδες εξηγούνται κανονικά από τη θεωρία δυναμό που αναφέραμε παραπάνω και συνδέονται με τη μαγνητική δραστηριότητα του αστεριού, ακόμα και στα συστήματα σε επαφή (Kouzuma 2019). Οι θερμές κηλίδες μπορεί επίσης να συνδέονται με τη μαγνητική δραστηριότητα του αστεριού, αλλά σε ημιαποχωρισμένα ή σε επαφή συστήματα, συνήθως δημιουργούνται λόγω της ανταλλαγής μάζας. Κατά τη φωτομετρική μελέτη ενός διπλού αστρικού συστήματος, οι κηλίδες παρατηρούνται κυρίως μέσω του φαινομένου *O'Connell* (O'Connell 1951) ή μέσω οποιασδήποτε παραμόρφωσης και ασυμμετρίας οδηγεί σε τοπική μείωση ή αύξηση της φωτεινότητας της φωτομετρικής καμπύλης. Συγκεκριμένα, τα βάθη των ελαχίστων σε μια παρατηρούμενη καμπύλη είναι αναμενόμενο να παρουσιάζουν διαφορές λόγω της διαφορετικής θερμοκρασίας των αστέρων. Τα μέγιστα από την άλλη αναμένεται να είναι ίδια, γιατί αφορούν την παρατηρούμενη φωτεινότητα του συστήματος όταν τα μέλη δεν προκαλούν εκλείψεις, όπου αυτή παραμένει σταθερή. Όταν όμως παρουσιάζονται κηλίδες στην επιφάνεια των αστέρων, λόγω της διαφοράς θερμοκρασίας έχουμε τοπική αύξηση ή μείωση της παρατηρούμενης φωτεινότητας, που εξαρτάται από τη φάση του συστήματος. Ως αποτέλεσμα μπορεί έχουμε ασυμμετρία των εκλειπτικών μεγίστων των παρατηρούμενων καμπυλών, την οποία ονομάζουμε φαινόμενο *O'Connell*. Γενικά, το φαινόμενο αυτό πιθανολογείται να προέρχεται και από άλλους παράγοντες, όπως η δύναμη *Coriolis* ή οι πίδακες αερίων στους αστέρες, περιπτώσεις οι οποίες θεωρούνται λιγότερο πιθανές.

1.4 Τα γνωστά τετραπλά εκλειπτικά συστήματα στο σύμπαν

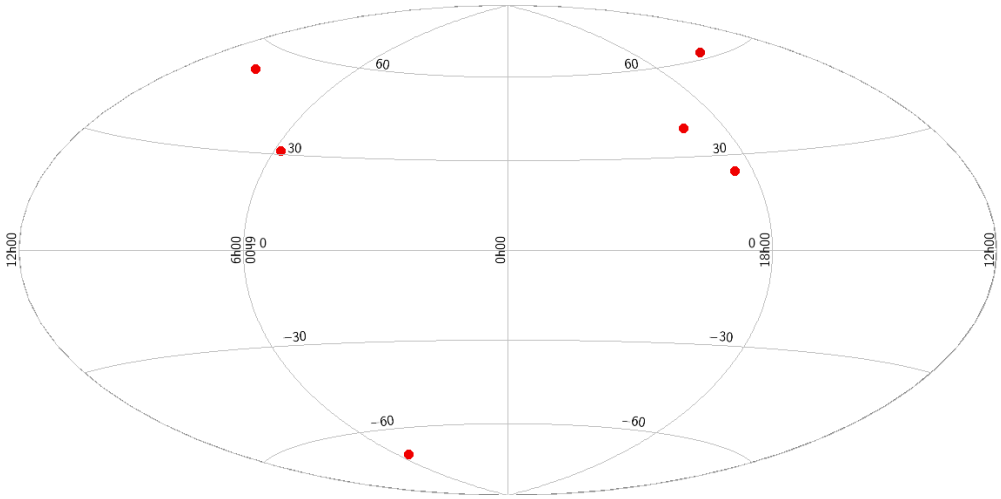
Τα εκλειπτικά συστήματα αποτελούν εδώ και αιώνες τον καλύτερο τρόπο προσδιορισμού της φωτεινότητας, μάζας και ακτίνας των αστέρων. Ως τετραπλά εκλειπτικά συστήματα ορίζουμε αυτά που αποτελούνται από διπλά συστήματα που εκτελούν αμοιβαίες εκλείψεις μεταξύ των μελών τους. Τα συστήματα που γνωρίζουμε μέχρι σήμερα δεν είναι πολύ νεαρά και επομένως είναι ιεραρχικά, δηλαδή τα μέλη τους είναι αρκετά μακριά ώστε οι τροχιές τους να μην εμπλέκονται μεταξύ τους και να μπορούν να μελετηθούν ξεχωριστά σαν διπλά συστήματα. Έτσι, μας βοηθούν να καταλάβουμε τη φύση, την προέλευση, το σχηματισμό και την εξελικτική κατάσταση των αστέρων σε βάθος, συνεισφέροντας στο γενικότερο πλαίσιο της Θεωρητικής και Παρατηρησιακής Α-

Πίνακας 1.1: Τα γνωστά εκλειπτικά συστήματα στο σύμπαν.

Όνομα	*RA J*2000.0	*Dec J*2000.0	Τύπος
$V994\ Her$	18 27 45.89	+24 41 50.66	$EA + EA$
$1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$	09 30 10.75	+53 38 59.80	$EA + EW$
$KIC\ 4247791$	19 08 39.57	+39 22 36.96	$EA + EA$
$BV\ Dra$ - $BW\ Dra$	15 11 50.36 15 11 50.09	+61 51 25.25 +61 51 41.16	$EW + EW$
$OGLE\ LMC - ECL - 16549$	05 28 09.41	−69 45 28.60	$EA + EW$
$CzeV343$	05 48 24.01	+30 57 03.60	$EA + EA$

στροφυσικής. Επιπλέον, μας βοηθούν να κατανοήσουμε την πολυπλοκότητα, τον τρόπο δημιουργίας και τον τρόπο εξέλιξης τέτοιων σχηματισμών μέσω των αντίστοιχων φυσικών και τροχιακών παραμέτρων, οι οποίες φυσικά προσδιορίζονται από τη διαδικασία της παρατήρησης και των διάφορων μεθόδων επεξεργασίας των δεδομένων.

Στην εργασία αυτή μελετάμε αναλυτικά δύο από τα έξι τετραπλά εκλειπτικά συστήματα ($V994\ Her$ και $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$) που είναι γνωστά στο σύμπαν, βασιζόμενοι στις διαθέσιμες παρατηρήσεις και τα βιβλιογραφικά δεδομένα. Χρησιμοποιώντας όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες, στο τέλος της εργασίας πραγματοποιείται μια συγκριτική μελέτη για όλα τα συστήματα. Οι συντεταγμένες των έξι τετραπλών συστημάτων και η θέση τους στην ουράνια σφαίρα φαίνονται αναλυτικά στον Πίνακα 1.1 και στην Εικόνα 1.8.



Εικόνα 1.8: Η θέση των μέχρι τώρα γνωστών τετραπλών εκλειπτικών συστημάτων στην ουράνια σφαίρα.

1.4.1 $V994\ Her$

Το σύστημα $V994\ Her$ παρατηρήθηκε για πρώτη φορά από το δορυφόρο $Hipparcos$ (ESA 1997; Perryman et al. 1997). Από τις παρατηρήσεις αυτές (HIP 90483, B_T=7.01 mag, V_T=7.00 mag, H_P=6.95 mag) η τριγωνομετρική παράλλαξη υπολογίστηκε 4.14±1.16 mas, υποδηλώνοντας μια απόσταση 240 pc. Προσδιορίστηκε ως τύπου $Algol$ από τους Kazarovets et al. (1999), οι οποίοι θεώρησαν το δευτερεύον μέλος του συστήματος ως ενδεχόμενο παλλόμενο αστέρα. Οι Fabricius et al. (2002) από δεδομένα του $Tycho$ ανακάλυψαν ένα οπτικά διπλό σύστημα με μέλη εκ των οποίων το πιο αμυδρό είναι το $V994\ Her$ (B_T=7.14±0.02 mag, V_T=7.14±0.01 mag) και το πιο λαμπρό πιθανό μέλος (B_T=9.17±0.02 mag, V_T=8.90±0.01 mag), σε γωνιακή απόσταση 1.2 $arcsec$ ($\sim$ 300 $A.U.$). Οι Dallaporta and Munari (2005) χρησιμοποιώντας φωτομετρικά δεδομένα πρότειναν ότι το $V994\ Her$ είναι ένα σύστημα τύπου EA, με παλλόμενο μέλος. Το 2008 οι Lee et al. ανακάλυψαν την πραγματική φύση του συστήματος, ότι δηλαδή είναι ένα τετραπλό εκλειπτικό σύστημα και μάλιστα το πρώτο στο είδος του που ανακαλύφθηκε ποτέ στο σύμπαν. Από τότε έχουν παρατηρηθεί και άλλα τέτοια συστήματα, λόγω των παρατηρήσεων της αποστολής $OGLE$ στο νέφος του Μαγγελάνου (για παράδειγμα Pawlak et al. (2013); Cagaš and Pejcha (2012); Lohr et al. (2013)). Οι Lee et al. (2008) υπολόγισαν τις τροχιακές περιόδους των μελών και χρησιμοποιώντας φασματοσκοπικές παρατηρήσεις βρήκαν τις μάζες και τους αντίστοιχους φασματικούς τύπους. Επιπλέον από τις φασματοσκοπικές ακτινικές ταχύτητες και από τις φωτομετρικές καμπύλες υπολόγισαν τις τροχιακές και φυσικές παραμέτρους του συστήματος, αντίστοιχα.

Ο μακρινός συνοδός ανακαλύφθηκε επίσης από τους Mason et al. (2001), στον κατάλογο $Washington\ Double\ Star\ Catalog$ με περίοδο μερικές εκατοντάδες χρόνια και ίδια ιδία κίνηση, κάνοντας το σύστημα πιθανώς πενταπλό. Το 2013 οι Zasche and Uhlař, χρησιμοποιώντας νέες παρατηρήσεις ήταν οι πρώτοι που υπολόγισαν για το τετραπλό σύστημα τα στοιχεία της κίνησης γύρω από το κοινό βαρύκεντρο. Συγκεκριμένα, βρήκαν ότι τα μέλη κινούνται σε έκκεντρη τροχιά (e = 0.747) με περίοδο 6.3 χρόνια. Κατασκευάζοντας το διάγραμμα $O-C$ υπολόγισαν τη συνάρτηση μάζας και προσδιόρισαν την κλίση της κοινής τροχιάς τους (37°). Το 2016 οι Zasche and Uhlař, χρησιμοποιώντας νέες παρατηρήσεις επαναπροσδιόρισαν τις τροχιακές παραμέτρους που δημοσίευσαν το 2013. Επίσης, χρησιμοποιώντας τα φασματοσκοπικά δεδομένα των Lee et al. (2008) υπολόγισαν εκ νέου τις ακτινικές ταχύτητες και τις μάζες των μελών του συστήματος. Το $V994\ Her$ παρατηρήθηκε επίσης από το δορυφόρο $Gaia$ (Gaia Collaboration et al. 2018) δίνοντας νέες τιμές για το φαινόμενο μέγεθος του τετραπλού συστήματος, την ιδία κίνηση και την παράλλαξη. Το ενδιαφέρον του συστήματος αυτού έγκειται στο ότι και τα δύο διπλά συστήματα μπορούν να μελετηθούν και να παρατηρηθούν ως προς την τροχιακή και φυσική τους εξέλιξη.

1.4.2 $1SWASP\ J093010.78+533859.5$

Το σύστημα $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ αποτελείται από ένα αποχωρισμένο και ένα σε επαφή σύστημα. Σύμφωνα με τον κατάλογο $Tycho$ (Fabricius et al. 2002)

και το δορυφόρο *Hipparcos* (ESA 1997; Perryman et al. 1997; Høg et al. 2000) τα μέλη αυτά είναι τα *TYC* 3807-759-1 και *TYC* 3807-759-2 αντίστοιχα, σε μεταξύ τους απόσταση 1.9 *arcsec*. Φωτομετρικά η μεταβλητότητα του συστήματος ανακαλύφθηκε από το πρόγραμμα *SuperWASP* (Pollacco et al. 2006). Αρχικά οι Lohr et al. (2012) αναγνώρισαν το γειτονικό σύστημα $1SWASP\ J093012.84 + 533859.6$ ως πιθανό εκλειπτικό σύστημα περιόδου 19674.550 *sec*, κάτι το οποίο αναίρεσαν στη συνέχεια οι Lohr et al. το 2013, ύστερα από ενδελεχή έρευνα για αντικείμενα με μεταβλητή περίοδο. Συγκεκριμένα, ανακάλυψαν ότι το σύστημα $J093010$ έχει την ίδια περίοδο και φωτομετρική καμπύλη με το γειτονικό $J093012$, αλλά με μεγαλύτερες τιμές και μεταβλητότητα στη μέση ροή. Έτσι συμπέραναν ότι το σύστημα $J093010$ είναι αυτό που στην πραγματικότητα δίνει τις εκλειπτικές καμπύλες, ενώ το $J093012$ είναι απλά ένα πιο αμυδρό εκλειπτικό γειτονικό σύστημα που τυχαίνει να συμπίπτει με το $J093010$, λόγω του φωτομετρικού διαγράγματος που χρησιμοποιήθηκε από το τηλεσκόπιο του *SuperWASP*. Έτσι, συνδύασαν τις παρατηρήσεις των δύο γειτονικών συστημάτων για να μεγιστοποιήσουν την ποσότητα των δεδομένων και ανακάλυψαν την τετραπλή φύση του συστήματος. Υπολόγισαν για το σύστημα σε επαφή περίοδο 19674.574 *sec* και για το αποχωρισμένο σύστημα περίοδο 112799.109 *sec*, ενώ χρησιμοποιώντας τις αστρομετρικές παρατηρήσεις του *Hipparcos* έκαναν μια προσέγγιση της μεταξύ απόστασης των συστημάτων ($66.1AU$) και της τροχιακής τους περιόδου γύρω από το κοινό κέντρο μάζας ($\sim 380\ yrs$). Η βαρυτική αλληλεπίδραση επιβεβαιώθηκε επίσης από τις παρατηρήσεις του *Hipparcos*, όπου τα δύο συστήματα φαίνεται να βρίσκονται σε απόσταση 1.88 *arcsec* και να έχουν παρόμοια μεγέθη (9.851 *mag* και 10.990 *mag*). Οι Koo et al. (2014) χρησιμοποιώντας φωτομετρικά και φασματοσκοπικά δεδομένα υψηλής ανάλυσης, έδωσαν νέες φωτομετρικές καμπύλες και το λόγο μαζών του αποχωρισμένου συστήματος. Από τα δεδομένα αυτά επιβεβαιώθηκε ότι το σύστημα *TYC* 3807-759-1 ($J093010A$) είναι το αποχωρισμένο και το πιο λαμπρό, με μέλη φασματοσκοπικού τύπου $K1V$ και $K5V$, ενώ το *TYC* 3807-759-2 ($J093010B$) είναι το πιο αμυδρό σε επαφή σύστημα με μέλη φασματικού τύπου $K3V$. Επιπλέον, εντόπισαν τις φασματοσκοπικές γραμμές ενός πέμπτου μέλους, να περιφέρεται γύρω από το ζεύγος $J093010A$, το οποίο επίσης φαίνεται να συνδέεται βαρυτικά με τα υπόλοιπα, ορίζοντας το $J093010$ ως πιθανό πενταπλό εκλειπτικό σύστημα. Ο Gazeas (2015) χρησιμοποιώντας φωτομετρικά δεδομένα, μοντελοποίησε τα συστήματα και υπολόγισε εκ νέου τις φυσικές παραμέτρους. Οι Lohr et al. (2015) χρησιμοποιώντας νέα φωτομετρικά και φασματοσκοπικά δεδομένα επαναπροσδιόρισαν τις τροχιακές περιόδους των δύο συστημάτων, επιβεβαιώνοντας ότι δεν υπάρχει κάποια μεταβλητότητα, καθώς και τις τροχιακές, φυσικές και απόλυτες παραμέτρους. Επαναπροσδιόρισαν την απόσταση των μελών στα 78 *pc* και 73 *pc* από τις φασματοσκοπικές ταχύτητες και υπολόγισαν προσεγγιστικά την απόσταση του πέμπτου μέλους στα 83 *pc* επιβεβαιώνοντας τη φυσική σύνδεση με το σύστημα. Τέλος, εκτίμησαν την ηλικία του συστήματος στα 9-10 *Gyr* για όλα τα μέλη. Το $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$ παρατηρήθηκε επίσης από το δορυφόρο *Gaia* (Gaia Collaboration et al. 2018) δίνοντας νέες τιμές για την ιδία κίνηση και την παράλλαξη του κάθε ζεύγους.

1.4.3 *KIC* 4247791

Το σύστημα *KIC* 4247791 παρατηρήθηκε πρώτη φορά στα πλαίσια της αποστολής *Kepler* (Coughlin et al. 2011) ως σύστημα που δεν ανήκει στην Κύρια Ακολουθία και επομένως περιλαμβάνει ένα ή δύο εξελιγμένα αστέρια, με ενεργό θερμοκρασία 4036 K και περίοδο 4.100866 *days*. Λόγω της περιοδικότητας στις 2.02484 *days* που βρήκαν στη φωτομετρική καμπύλη σε μορφή διάβασης, οι Coughlin et al. οδηγήθηκαν σε τέσσερα σενάρια σχετικά με το σύστημα αυτό. Είτε ότι υπάρχει και ένα δεύτερο εκλειπτικό σύστημα με μη ορατό δευτερεύον μέλος και περίοδο 0.49376 φορές της περιόδου του κύριου συστήματος, είτε πάλι ένα δεύτερο εκλειπτικό σύστημα με ίδιο πρωτεύον και δευτερεύον μέλος και περίοδο 0.98752 φορές της περιόδου του κύριου συστήματος, είτε ένα αντικείμενο που περιστρέφεται γύρω από τα δύο μέλη του συστήματος, είτε ένα αντικείμενο γύρω από το ένα μέλος σε συντονισμό 2:1 με το σύστημα.

Πίνακας 1.2: Οι βιβλιογραφικές τροχιακές και φυσικές παράμετροι του συστήματος KIC 4247791.

	A		B	
Παράμετρος	Aα	Aβ	Bα	Bβ
K (km/s)	91.9(4)	101.6(3)	88.6(3)	91.4(4)
γ (km/s)	-16.2(9)	-17.1(8)	-11.8(2)	-11.7(1.7)
χ	0.905(7)		0.970(7)	
T_{MIN} (BJD)	1.1453(1)		1.353(1)	
P (d)	4.100871(4)		4.049732(71)	
i (deg)	79.5(1)		80.0(8)	
$ecos\omega$	0.00012(6)		0.0020(3)	
$esin\omega$	–0.00570(4)		0.0009(4)	
e	0.00570(4)		0.0022(3)	
ω	178.7(6)		65(24)	
R/α	0.1570(4)	0.1503(4)	0.100(9)	0.092(8)
L/L_{AB}	0.576(1)	0.424(1)	0.55(1)	0.45(1)
L_{AB}/L_{I+II}	0.76(2)		0.24(1)	
α (AU)	0.0742(2)		0.0681(2)	
R $(R_\odot)$	2.50(1)	2.40(1)	1.46(13)	1.35(12)
M_{AB} $(M_\odot)$	3.24(3)		2.56(3)	
M $(M_\odot)$	1.70(2)	1.54(1)	1.30(2)	1.26(2)
$log\gamma$ (dex)	3.87(1)	3.87(1)	4.22(8)	4.28(8)
SpT	$F0IV$	$F2IV$	$F7V$	$F8V$

Το *KIC* 4247791 είναι καταχωρημένο στους καταλόγους της αποστολής *Kepler* στην πρώτη έκδοση ως εκλειπτικό σύστημα (Prša et al. 2011) και στη δεύτερη έκδοση ως δύο εκλειπτικά συστήματα (Slawson et al. 2011). Μελετήθηκε πρώτη φορά αναλυτικά από τους Lehmann et al. (2012), οι οποίοι χρησιμοποίησαν 15 φάσματα υψηλής ανάλυσης για να μελετήσουν πού οφείλεται η δεύτερη αυτή περιοδικότητα που είχε παρατηρηθεί στη φωτομετρική καμπύλη. Συγκεκριμένα, ανέλυσαν τα φάσματα, υ-

πολόγισαν τις ακτινικές ταχύτητες και τις τροχιές και συνδύασαν τα αποτελέσματα με την ανάλυση από τα φωτομετρικά δεδομένα της διαστημικής αποστολής του *Kepler*. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 1.2. Η φασματοσκοπική ανάλυση έδειξε ότι το σύστημα αποτελείται από τέσσερα μέλη, δύο διπλά συστήματα. Από τις τιμές του R και του $log\gamma$ συμπέραναν ότι και τα δύο συστήματα είναι ελαφρώς εξελιγμένα και επιβεβαίωσαν ότι δεν ανήκουν στην Κύρια Ακολουθία. Παρ' όλο που απέδειξαν την ύπαρξη τεσσάρων μελών, οι παράμετροι και οι αποστάσεις που υπολόγισαν αποτελούν μόνο ενδείξεις για βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ των συστημάτων. Για την επιβεβαίωσή της χρειάζονται περαιτέρω παρατηρήσεις.

1.4.4 *BV Dra* - *BW Dra*

Τα συστήματα *BV Dra* και *BW Dra* είναι διπλά εκλειπτικά συστήματα σε επαφή (*W UMa type*), των οποίων τα φυσικά και τροχιακά χαρακτηριστικά που γνωρίζουμε μέχρι σήμερα φαίνονται στον Πίνακα 1.3. Συγκεκριμένα, οι ακτινικές ταχύτητες έχουν υπολογιστεί από φασματοσκοπία. Παρατηρήθηκε πρώτη φορά από τους Batten and Hardie (1965). Τα μέλη του *BV Dra* έχουν χαρακτηριστεί ως $F9$ (πρωτεύον) και $F8$ (δευτερεύον), ενώ του *BW Dra* ως $G3$ (πρωτεύον) και $G0$ (δευτερεύον) και ανήκουν όλα στην Κύρια Ακολουθία (Batten and Lu 1986).

Πίνακας 1.3: Οι βιβλιογραφικές τροχιακές και φυσικές παράμετροι του τετραπλού συστήματος BV Dra - BW Dra.

	BV Dra		*BW Dra*	
Παράμετρος	$BV(\alpha)$	$BV(\beta)$	$BW(\alpha)$	$BW(\beta)$
$T_0(HJD)$	2446127.6888		2446135.8067	
$P(d)$	0.350066		0.292166	
K (km/s)	93.9 (1.4)	233.6 (2)	70.5 (1.1)	251.5 (1.7)
$\gamma_0(km/s)$	-65.2 (1.2)	-57.7 (1.7)	-64.2 (0.9)	-57.4 (1.4)
$\alpha sini(10^6 km)$	0.452(7)	1.124 (10)	0.283 (4)	1.010 (7)
$msin^3 i(M_\odot)$	0.911(20)	0.366 (10)	0.791 (15)	0.222 (5)
q	0.402 (7)		0.280 (5)	

1.4.5 $OGLE - LMC - ECL - 16549$

Το εκλειπτικό σύστημα $OGLE - LMC - ECL - 16549$ παρατηρήθηκε πρώτη φορά στα πλαίσια της τρίτης φάσης του *Optical Gravitational Lensing Experiment* (*OGLE III*) στο Μεγάλο Μαγγελανικό Νέφος (Graczyk et al. 2011). Είναι ιεραρχικό και αποτελείται από τουλάχιστον τέσσερα μέλη, δύο εκ των οποίων σχηματίζουν ένα απομακρυσμένο σύστημα μεγάλης περιόδου (164.79 *days*) και δύο ένα σύστημα σε επαφή (0.818033 *days*). Για το σύστημα αυτό δεν υπάρχουν φασματοσκοπικές παρατηρήσεις και δεν έχει μελετηθεί περαιτέρω.

Πίνακας 1.4: Οι βιβλιογραφικές τροχιακές και φυσικές παράμετροι του συστήματος $CzeV343$.

	A		B	
Παράμετρος	Αα	Αβ	Βα	Ββ
T_0 (HJD)	245958.36058(44)		245968.33977(46)	
P (d)	1.209373(18)		0.806931(18)	
i (deg)	90.0(0.6)		67.11(0.45)	
$ecos\omega$	0.0147(10)		0*	
$esin\omega$	0.178(14)		0*	
σ	0.590(12)		0.989(38)	
$r_1 + r_2$	0.4533(56)		0.581(8)	
r_1/r_2	1.267(16)		1.05(13)	

*:$fixed$

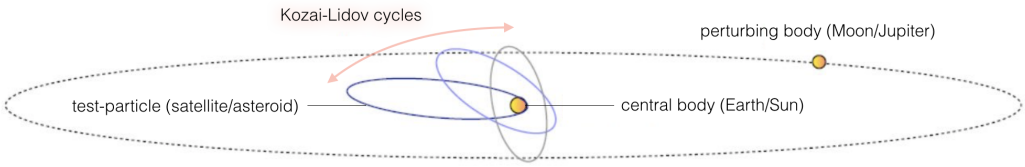
1.4.6 $CzeV343$

Το σύστημα $CzeV343$ αποτελείται από δύο διπλά εκλειπτικά συστήματα σε επαφή και ανακαλύφθηκε το 2012 από τους Cagaš and Pejcha, οι οποίοι το ερμήνευσαν ως τετραπλό εκλειπτικό σύστημα, με κάποια αβεβαιότητα σχετικά με τη φυσική σύνδεση μεταξύ των μελών. Ύστερα από φωτομετρικές παρατηρήσεις και μοντελοποίηση των καμπυλών, οι Cagaš and Pejcha διαμόρφωσαν για το σύστημα τις παραμέτρους του Πίνακα 1.4. Προκειμένου να επιβεβαιωθεί αν πραγματικά το σύστημα αυτό είναι τετραπλό, χρειάζεται ακριβής υπολογισμός αποστάσεων των τεσσάρων μελών, αξιόπιστες φωτομετρικές παρατηρήσεις, ακτινικές ταχύτητες και προσδιορισμός φασματικών τύπων. Ειδάλλως, μπορούν να μελετηθούν οι βαρυτικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ των μελών και να προσδιοριστεί η κοινή τροχιά τους γύρω από το κέντρο μάζας (φαινόμενο $LITE$). Φυσικά τα παραπάνω μπορούν να γίνουν με ακρίβεια μόνο με μακροχρόνιες παρατηρήσεις.

1.5 Κύκλοι $Kozai$

Στην περίπτωση των πολλαπλών συστημάτων είναι πολύ δύσκολο να μελετήσουμε και να κατανοήσουμε το σχηματισμό και την εξέλιξή τους. Όταν όμως αυτά είναι ιεραρχικά τριπλά συστήματα, η παρουσία του εξωτερικού μέλους καθορίζει την εξέλιξη του εσωτερικού συστήματος, μέσω των κύκλων $Kozai$ και των παλιρροικών δυνάμεων.

Ο μηχανισμός $Kozai$ ή οι κύκλοι $Kozai$ (Kozai 1962) αρχικά διατυπώθηκαν για κινήσεις των αστεροειδών γύρω από τον Ήλιο και το Δία, με μεγάλες κλίσεις και εκκεντρότητες. Όμως βρίσκει εφαρμογή και σε αστρικά και πλανητικά συστήματα. Στην περίπτωση των αστρικών συστημάτων είναι το φαινόμενο που προκαλείται όταν η τροχιά ενός διπλού αστρικού συστήματος επηρεάζεται από κάποιο μακρινό συνοδό (Εικόνα 1.9) λόγω βαρυτικής αλληλεπίδρασης, υπό την προϋπόθεση ότι οι τροχιές τους σχηματίζουν γωνία κλίσης μεγαλύτερη των 39.2° (γωνία $Kozai$). Συγκεκριμένα, η παρουσία του συνοδού αυτού επηρεάζει τη θέση του περικέντρου του εσωτερικού συστήματος



Εικόνα 1.9: Κύκλοι Kozai σε ιεραρχικά συστήματα (copyright: Konstantin Batygin).

και επομένως της εκκεντρότητας κάνοντάς τη να ταλαντώνεται γύρω από μια σταθερή τιμή, ενώ ο μεγάλος ημιάξονας και η περίοδος της τροχιάς παραμένουν σταθερά. Όταν όμως η εκκεντρότητα βρίσκεται στη μέγιστη τιμή της, τα παλιρροϊκά φαινόμενα μπορεί να γίνουν υπολογίσιμα μειώνοντας την τροχιακή ενέργεια και άρα την τροχιακή περίοδο με αποτέλεσμα η τροχιά να συρρικνώνεται, έως ότου ξαναγίνει πάλι κυκλική. Πράγματι για τροχιακές περιόδους $P \lesssim 5\ days$, το ποσοστό των διπλών συστημάτων που παρουσιάζουν μακρινό συνοδό φαίνεται να αυξάνεται (Eggleton and Kisseleva-Eggleton 2006).

1.6 Φαινόμενο $LITE$

Οι μεταβολές του παρατηρούμενου χρόνου ελαχίστων των εκλειπτικών συστημάτων μπορεί να είναι είτε περιοδικές είτε ακανόνιστες. Στην πρώτη περίπτωση, αιτία μπορεί να είναι είτε η κίνηση της γραμμής των αψίδων (πιθανό φαινόμενο $Kozai$), είτε η μαγνητική δραστηριότητα του συστήματος (φαινόμενο $O'Connell$), είτε οι παρέλξεις τρίτου σώματος λόγω φαινομένου $LITE$ (Irwin 1959; Frieboes-Conde and Herczeg 1973; Wolf 2014). Το φαινόμενο $LITE$ περιγράφει τη διαφορά των παρατηρούμενων από τους πραγματικούς χρόνους ελαχίστων λόγω της πεπερασμένης ταχύτητας του φωτός, με αποτέλεσμα να αποτελεί κριτήριο για μεταβολές της απόστασης του παρατηρούμενου αντικειμένου. Στην περίπτωση των τετραπλών συστημάτων, οι μεταβολές αυτές λόγω της κίνησης των ζευγών γύρω από το κοινό κέντρο μάζας (Σχέση 1.1), ανιχνεύονται μέσω των διαγραμμάτων $O-C$ των χρόνων ελαχίστου φωτός.

$$O-C = \frac{A}{\sqrt{1-e_3^2 cos^2\omega_3}}[\frac{1-e_3^2}{1+e_3 cosv} sin(v+\omega_3) + e_3 sin\omega_3] \tag{1.1}$$

όπου A το πλάτος της καμπύλης στο διάγραμμα, e_3 η εκκεντρότητα της τροχιάς του τρίτου σώματος, ω_3 η γωνία περιάστρου του τρίτου σώματος και v η μέση ανωμαλία. Το πλάτος A δίνεται από τη σχέση:

$$A = \frac{\alpha_{12} sini_3}{173.15}\sqrt{1-e_3^2 cos^2\omega_3} \tag{1.2}$$

όπου α_{12} ο ημιάξονας της τροχιάς του διπλού συστήματος γύρω από το κοινό κέντρο μάζας σε $A.U.$ και $sini_3$ η γωνία κλίσης της τροχιάς του τρίτου σώματος. Το φαινόμενο $LITE$ σε συνδυασμό με άλλα φαινόμενα, όπως αυτό της μετάπτωσης της γραμμής των

αψίδων και το φαινόμενο $O'Connell$, είναι πολύ χρήσιμο για τη μελέτη πολλαπλών αστρικών συστημάτων και ένα ισχυρό εργαλείο για μελλοντικές διαστημικές αποστολές που σχετίζονται με τη φωτομετρία και την αστρομετρία. Δεν εφαρμόζεται μόνο σε αστρικά συστήματα, αλλά μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε περιοδικό φαινόμενο, όπως παλλόμενους αστέρες και διαβάσεις εξωπλανητών.

Κεφάλαιο 2

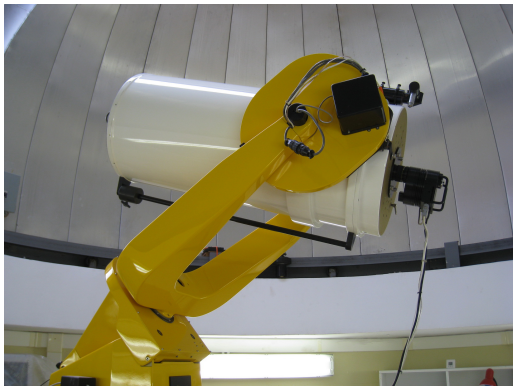
Αστρονομικές παρατηρήσεις και επεξεργασία

Οι παρατηρήσεις του συστήματος $V994\ Her$ πραγματοποιήθηκαν τη χρονιά 2014 και του $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$ τη χρονιά 2013 από το Γεροσταθοπούλειο Αστεροσκοπείο του Πανεπιστημίου Αθηνών.

2.1 Γεροσταθοπούλειο Αστεροσκοπείο του Πανεπιστημίου Αθηνών ($UOAO$)

Το αστεροσκοπείο αυτό (Εικόνα 2.1) εγκαταστάθηκε στην οροφή του Τμήματος Φυσικής ΕΚΠΑ τον Μάρτιο του 1999 εγκαινιάστηκε τον Ιανουάριο του 2000 και αποτελεί εργαστήριο του Τομέα Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής, του τμήματος Φυσικής, του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών (Gazeas 2016).

Στο αστεροσκοπείο αυτό βρίσκεται ένα κατοπτρικό τηλεσκόπιο *Cassegrain* (τύπος $CCT - 16$, $DFMENGINEERING$, $INC.$, ΗΠΑ) διαμέτρου 40 cm με ενεργό εστιακό λόγο $f/8$, όπου το κύριο κάτοπτρο είναι $40cm$ και εστιακού λόγου $f/3$. Το πρωτεύον και δευτερεύον κάτοπτρο έχουν υπόστρωμα από πυρέξ και είναι επαλουμινιωμένα με επίστρωμα μονοξειδίου του πυριτίου. Η ακρίβεια παρακολούθησης είναι ± 20 $arcsec/min$, η ακρίβεια στόχευσης καλύτερη από $1arcmin\ RMS$ και ο ρυθμός περιστροφής 4 deg/sec. Επίσης διατίθεται βάση στήριξης που επιτρέπει ρυθμίσεις ανύψωσης και αζιμούθιου για πολική ευθυγράμμιση. Το τηλεσκόπιο είναι εξοπλισμένο με ένα φασματογράφο φράγματος με διασπορά 61 $\AA/mm$ και ισχύ ακρίβειας $R = 10000$ (κατασκευασμένο από τους Δρ. Δ. Παπαθανάσογλου και Δρ. Κ. Γαζέα στο Εργαστήριο Αστρονομίας και Εφαρμοσμένης Οπτικής του Τομέα Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής, του Πανεπιστημίου Αθηνών), τρεις κάμερες CCD ($SBIG\ ST8$, $SBIG\ ST8\ XMEI$, $SBIG\ ST10\ XME$), οι οποίες διαθέτουν ηλεκτρονικά περιστρεφόμενο τροχό φίλτρων και 5 φωτομετρικά φίλτρα $Bessel\ UBVRI$. Το οπτικό της πεδίο με την παραπάνω διάταξη είναι 10×15 $arcsec$ στην κύρια εστία. Όταν όμως συνδυαστεί με έναν $focal\ reducer$ $f/6.3$, το οπτικό πεδίο γίνεται 26×17 $arcsec$. Το πλεονέκτημα



Εικόνα 2.1: Το Γεροσταθοπούλειο Αστεροσκοπείο του Πανεπιστημίου Αθηνών (UOAO).

του Αστεροσκοπείου είναι ότι διαθέτει περιστρεφόμενο θόλο και δυνατότητα αυτοματοποίησης και τηλεχειρισμού (*remote controlling*). Από το 2012 αποτελεί το μοναδικό τηλεχειριζόμενο ερευνητικό Αστεροσκοπείο στην Ελλάδα.

2.2 Μέθοδος και διαδικασία παρατήρησης

Η παρατήρηση του συστήματος έγινε με το πρόγραμμα $MaxIm\ DL$, ένα λογισμικό CCD απεικόνισης και χειρισμού της κάμερας CCD, που περιλαμβάνει εργαλεία λήψης, επεξεργασίας και ανάλυσης εικόνων τηλεσκοπίου. Οι νύχτες που παρατηρήθηκαν τα δύο συστήματα, τα φίλτρα και οι καιρικές συνθήκες φαίνονται στον Πίνακα 2.1.

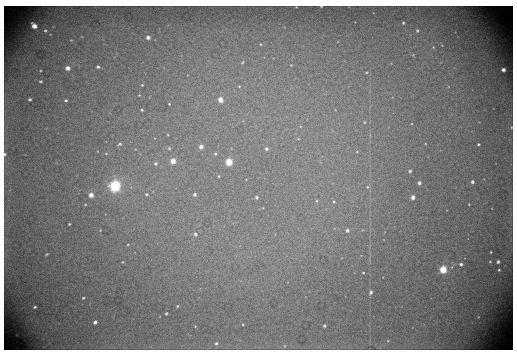
Η διάρκεια έκθεσης για κάθε φίλτρο μεταβάλλεται ανάλογα τις καιρικές συνθήκες, το χρόνο που χρειάζεται για να δώσει κάθε φίλτρο ικανοποιητικό αποτέλεσμα, καθώς και τη φασματική απόκριση της CCD κάμερας. Επίσης, εξαρτάται από το χρόνο που χρειάζεται η εκάστοτε CCD κάμερα και το εκάστοτε τηλεσκόπιο, για να φαίνεται το αστρικό σύστημα χωρίς κορεσμό, λόγω περίσσειας φωτονίων. Επιπλέον, λήφθηκαν φωτογραφίες $Flat$ με διάρκεια 1 sec και $Dark$ με διάρκεια έκθεσης αυτή των φωτογραφιών του αστρικού πεδίου. Κατά τη λήψη των φωτογραφιών αυτών, για να είναι αξιόπιστες, το τηλεσκόπιο στράφηκε σε πεδίο χωρίς φωτεινά αστέρια προς την Ανατολή αντίθετα από τον Ήλιο (συγκεκριμένα για τη $Flat$ απογευματινή ώρα λίγο μετά τη Δύση του Ηλίου). Οι εικόνες λήφθηκαν με χρονική σειρά πρώτα για το B φίλτρο, μετά για το V, το R και το I, αντίστοιχα.

Πίνακας 2.1: Οι συνθήκες παρατήρησης των συστημάτων $V994\ Her$ και $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$.

Νύχτες	Φίλτρο	Καιρικές συνθήκες
10/07/14	$BVRI$	Άριστες
11/07/14	$BVRI$	Άριστες

Πίνακας 2.1 (συνέχεια)

	12/07/14	$BVRI$	Άριστες
	13/07/14	$BVRI$	Άριστες
	16/07/14	$BVRI$	Πολύ καλές
	17/07/14	$BVRI$	Πολύ καλές
	18/07/14	$BVRI$	Πολύ καλές
	19/07/14	$BVRI$	Πολύ καλές
	20/07/14	$BVRI$	Άριστες
	21/07/14	$BVRI$	Άριστες
	31/07/14	$BVRI$	Άριστες
	18/08/14	$BVRI$	Πολύ καλές
	19/08/14	$BVRI$	Άριστες
	20/08/14	$BVRI$	Άριστες
	21/08/14	$BVRI$	Άριστες
$V994\ Her$	13/09/14	$BVRI$	Πολύ καλές
	14/09/14	$BVRI$	Πολύ καλές
	15/09/14	$BVRI$	Καλές
	16/09/14	$BVRI$	Καλές
	29/09/14	$BVRI$	Πολύ καλές
	01/10/14	$BVRI$	Άριστες
	03/10/14	$BVRI$	Καλές
	06/10/14	$BVRI$	Καλές
	07/10/14	$BVRI$	Καλές
	08/10/14	$BVRI$	Πολύ καλές
	09/10/14	$BVRI$	Άριστες
	12/01/13	$BVRI$	Άριστες
	13/01/13	$BVRI$	Άριστες
	14/01/13	$BVRI$	Πολύ καλές
	19/01/13	$BVRI$	Μέτριες
	20/01/13	$BVRI$	Πολύ καλές
	21/01/13	$BVRI$	Καλές
$1SWASP$	22/01/13	$BVRI$	Μέτριες
$J093010$	24/01/13	$BVRI$	Καλές
	29/01/13	$BVRI$	Πολύ καλές
	30/01/13	$BVRI$	Καλές
	31/01/13	$BVRI$	Πολύ καλές
	01/02/13	$BVRI$	Πολύ καλές
	05/02/13	$BVRI$	Άριστες
	06/02/13	$BVRI$	Πολύ καλές



Εικόνα 2.2: Παράδειγμα πρωτότυπης φωτογραφίας του αστρικού πεδίου του $V994\ Her$.

2.3 Διαφορική φωτομετρία διαφράγματος

Η φωτομετρία των φωτογραφιών του τηλεσκοπίου έγινε με το λογισμικό $AIP4WIN$, με φωτομετρία διαφράγματος. Το πρόγραμμα αυτό επεξεργάζεται αστρονομικές εικόνες με κατάλληλη επιλογή παραμέτρων επεξεργασίας. Κατά τη διάρκεια της φωτομετρίας το πρόγραμμα μετράει τα *counts* σε κάθε φωτογραφία, δηλαδή τα φωτόνια των αστέρων που μετατράπηκαν σε ηλεκτρόνια. Η μέτρηση αυτή μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Είτε μετρώντας κάθε μέγεθος ξεχωριστά (*ensembled photometry*), είτε μετρώντας τις διαφορές τους (διαφορική φωτομετρία/ *differential photometry*).

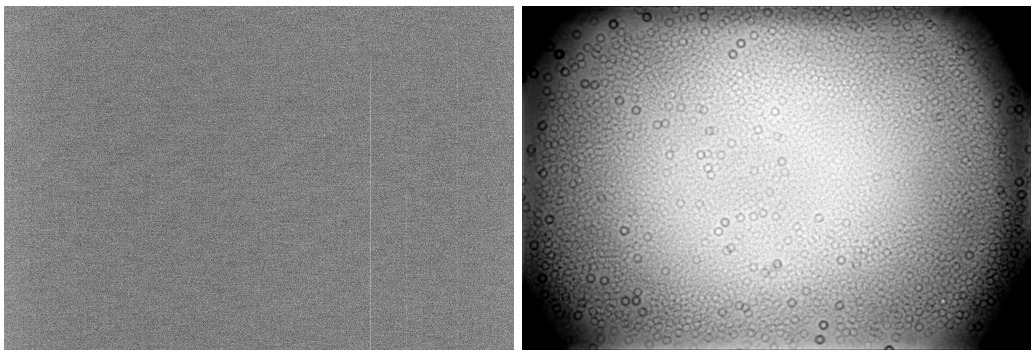
Όσον αφορά τη διαφορική φωτομετρία μετατρέπει την ροή F της ακτινοβολίας σε φαινόμενο μέγεθος του αστέρα βάσει της σχέσης:

$$m = C - 2.5logF \tag{2.1}$$

όπου η σταθερά C προκύπτει από τους πρότυπους αστέρες. Το πρόγραμμα υπολογίζει την διαφορά ροών από δύο επιλεγμένους αστέρες και τη μετατρέπει σε διαφορά φαινόμενου μεγέθους απαλείφοντας τη σταθερά C, σύμφωνα με τη σχέση:

$$m_1 - m_2 = 2.5log\frac{F_2}{F_1} \tag{2.2}$$

Όσον αφορά τη διόρθωση των εικόνων που λήφθηκαν (Εικόνα 2.2), αυτή έγινε με την αφαίρεση των φωτογραφιών *Dark Field* και τη διαίρεση με τις φωτογραφίες *Flat Field* (Εικόνα 2.3). Μία *Dark Field* εικόνα απεικονίζει το θόρυβο του πεδίου που προκαλείται από σφάλματα της CCD κάμερας που έχουν να κάνουν με τη θερμοκρασία της και είναι σταθερά, όπως για παράδειγμα τα «*hot pixels*». Για το λόγο αυτό λαμβάνεται με κλειστό τηλεσκόπιο, με ίδιο χρόνο έκθεσης και θερμοκρασία με αυτή που λήφθηκε η εικόνα του πεδίου, από την οποία και πρέπει να αφαιρείται. Αντίθετα, μια *Flat Field* εικόνα σχετίζεται με μεταβαλλόμενα σφάλματα της CCD κάμερας, όπως η ανομοιογένεια στον φωτισμό (π.χ. *vignetting*) που έχει να κάνει με τα οπτικά μέρη του συστήματος, τα σκουπίδια και η απόκριση των *pixels*. Λαμβάνεται σε λευκό φόντο, με έκθεση ελάχιστα δευτερόλεπτα και πρέπει να διαιρείται με τη φωτογραφία του πεδίου.



Εικόνα 2.3: Παράδειγμα dark field (αριστερά) και flat field (δεξιά) φωτογραφιών του αστρικού πεδίου του $V994\ Her$.

Συγκεκριμένα, με τη βοήθεια του λογισμικού $AIP4WIN$, από το σύνολο των εικόνων $Dark$ που λήφθηκαν, προέκυψε με μια στατιστική κατανομή η διάμεσος εικόνα $Dark\ D(x,y)$, την αποία αφαιρέσαμε από την εικόνα του αστρικού πεδίου. Ο λόγος που αφαιρέσαμε τη διάμεσο και όχι το μέσο όρο είναι για να είμαστε σίγουροι ότι έχουμε αποκλείσει τυχόν ακραίες τιμές ροής και επομένως ο θόρυβος της κάμερας είναι αντιπροσωπευτικός. Στη συνέχεια, επιλέξαμε το σύνολο των εικόνων $Flat\ Field$ με διάρκεια έκθεσης $1sec$ και διαιρέσαμε όλες τις φωτογραφίες του πεδίου $I(x,y)$ με την κανονικοποιημένη εικόνα $Flat\ Field\ F(x,y)$. Η πράξη από την οποία προκύπτει η τελική και ζητούμενη εικόνα (Εικόνα 2.4) $i(x,y)$ είναι:

$$i(x,y) = \frac{I(x,y) - D(x,y)}{F(x,y)} \tag{2.3}$$

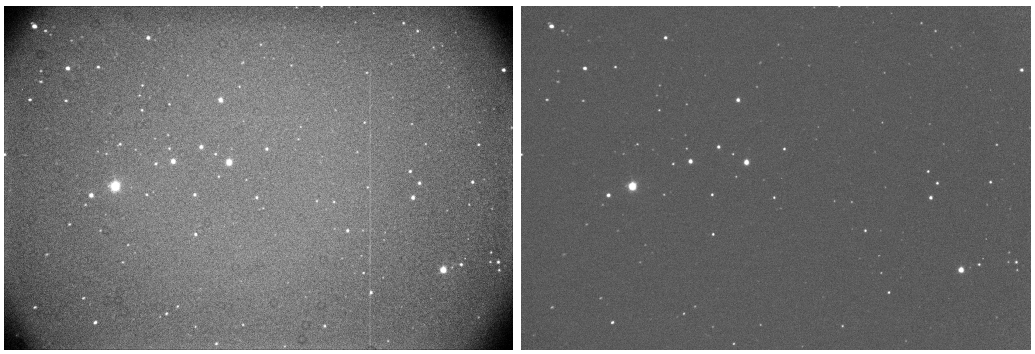
Από όλες τις εικόνες πρέπει να αφαιρεθεί και η εικόνα $Bias$. Η CCD κάμερα που χρησιμοποιούμε στις παρατηρήσεις μας δεν έχει την δυνατότητα λήψης φωτογραφίας με μηδενικό χρόνο έκθεσης που απαιτείται για να ληφθεί μια εικόνα $Bias$. Ως εναλλακτική πήραμε εικόνες $Dark$ με χρόνο έκθεσης ίσο με αυτόν που λαμβάνονται και οι εικόνες του αστρικού πεδίου, ώστε η εικόνα $Dark$ να εμπεριέχει και την εικόνα $Bias$ για την ταυτόχρονη αφαίρεση και των δύο κατά τη διόρθωση των εικόνων του πεδίου.

Μετά τη διόρθωση των εικόνων, στην εικόνα του αστρικού πεδίου επιλέξαμε τους αστέρες τους οποίους θέλουμε να φωτομετρήσουμε (Εικόνα 2.5), στους οποίους περιλαμβάνονται οι αστέρες σύγκρισης και ο αρχικός στόχος. Στον κύκλο V θέτουμε τον μεταβλητό αστέρα, στον κύκλο C τον αστέρα σύγκρισης του οποίου η λαμπρότητα είναι σταθερή και συγκρίσιμη με εκείνη του μεταβλητού και στον κύκλο K τον αστέρα ελέγχου, ο οποίος χρησιμοποιείται για να ελεγχθεί η σταθερότητα της λαμπρότητας του αστέρα σύγκρισης.

Έτσι, οι διαφορές φαινόμενου μεγέθους $V - C$ και $K - C$ δίνουν τις σχέσεις:

$$V - C = m_V - m_C = 2.5log\frac{F_C}{F_V} \tag{2.4}$$

$$K - C = m_K - m_C = 2.5log\frac{F_C}{F_K} \tag{2.5}$$



Εικόνα 2.4: Η εικόνα του αστρικού πεδίου του $V994\ Her$ πριν (αριστερά) και μετά (δεξιά) την εφαρμογή των διορθώσεων.

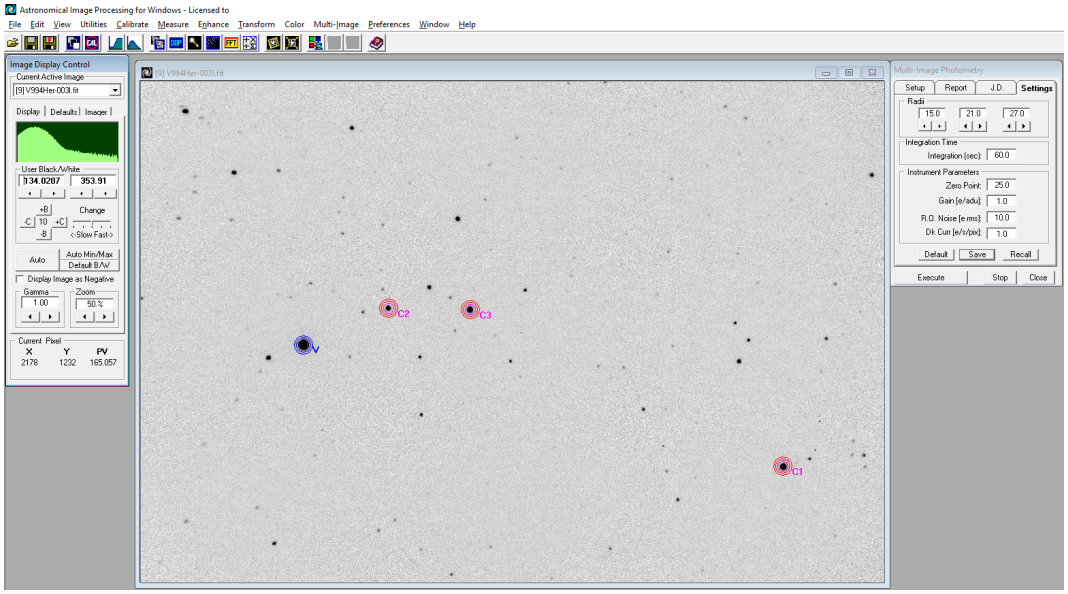
Όπως είπαμε, η διαφορά $K - C$ είναι η επιβεβαίωση ότι ο C αστέρας έχει σταθερή λαμπρότητα. Επομένως, σε όλες τις φωτογραφίες κυμαίνεται γύρω από μία σταθερή τιμή, και η μορφή της καμπύλης που προκύπτει είναι ευθεία. Αντίθετα η διαφορά $V - C$ δίνει την καμπύλη φωτός του παρατηρούμενου αστέρα.

Οι αστέρες σύγκρισης C και K πρέπει να είναι περίπου ίδιου φασματικού τύπου με τον μεταβλητό (ίδιο χρώμα) με σταθερή και παρόμοια λαμπρότητα. Επίσης, όταν το επιτρέπει το πεδίο θα πρέπει να απέχουν απόσταση μικρότερη από 1° από τον μεταβλητό, ώστε να υπόκεινται στην ίδια περίπου ατμοσφαιρική εξασθένιση. Τέλος, θα πρέπει να μην είναι ερυθροί αστέρες, αφού αυτοί συνήθως παρουσιάζουν έντονη μαγνητική δραστηριότητα με εκρηκτικά φαινόμενα και άρα είναι ακατάλληλοι για σύγκριση.

Όσον αφορά τα διαφράγματα που χρησιμοποιούμε για τη φωτομετρία, η επιλογή τους γίνεται με σκοπό τη μέτρηση μόνο του μεταβλητού αστέρα και όχι του υποβάθρου. Το πρώτο διάφραγμα (*star aperture*) πρέπει να περιλαμβάνει ολόκληρο και μόνο τον αστέρα που επιθυμούμε. Το δεύτερο διάφραγμα (*sky annulus in*) και το πρώτο ορίζουν ένα δακτύλιο γύρω από τον αστέρα, στον οποίο τα *counts* που καταγράφονται δεν πρέπει να προστίθενται στα *counts* του αστέρα. Η δυνατότητα που μας δίνει το λογισμικό να απομονώσουμε τα *counts* από τον προαναφερόμενο δακτύλιο είναι σημαντική, διότι μπορεί κοντά στον αστέρα που θέλουμε να φωτομετρήσουμε να υπάρχει και άλλος αστέρας με κίνδυνο να καταμετρούμε φωτόνια και από τους δύο. Με αυτόν τον τρόπο κρατάμε μόνο τα *counts* του αστέρα που μας ενδιαφέρει, τοποθετώντας τον κοντινό αστέρα στη «νεκρή»αυτή περιοχή. Το τρίτο διάφραγμα (*sky annulus out*) και το δεύτερο ορίζουν έναν εξωτερικό δακτύλιο μέσα στον οποίο δεν πρέπει να περιέχονται αστέρες, καθώς τα *counts* (FS) αυτού το πρόγραμμα τα αντιλαμβάνεται ως το φωτεινό υπόβαθρο του ουρανού (διάχυτο φως που προέρχεται από κάθε φωτεινή πηγή του ουρανού) και τα αφαιρεί από τα *counts* του φωτομετρούμενου αστέρα. Επομένως, οι Σχέσεις 2.4 και 2.5 της διαφορικής φωτομετρίας μετασχηματίζονται ως εξής:

$$V - C = m_V - m_C = 2.5log\frac{F_C - F_S}{F_V - F_S} \tag{2.6}$$

$$K - C = m_K - m_C = 2.5log\frac{F_C - F_S}{F_K - F_S} \tag{2.7}$$



Εικόνα 2.5: Παράδειγμα φωτομετρίας με το AIP4WIN του συστήματος V994 Her με τη βοήθεια δακτυλίων.

Μερικές άλλες παράμετροι του προγράμματος αφορούν περισσότερο την οδήγηση του τηλεσκοπίου. Με την ρύθμιση «*automatic*»επιλέγουμε στην πρώτη εικόνα τα διαφράγματα γύρω από τους αστέρες που επιθυμούμε και με βάση αυτή την επιλογή το πρόγραμμα συνεχίζει αυτόματα τη φωτομετρία στις υπόλοιπες εικόνες. Όμως, κατά την παρατήρηση η οδήγηση του τηλεσκοπίου χρειάζεται πάντα διορθωτικές κινήσεις, ώστε το αστρικό πεδίο να μένει σταθερό. Κατά συνέπεια οι δακτύλιοι φωτομετρίας γύρω από τους αστέρες μπορεί να μετατοπιστούν πάνω στο πεδίο της φωτογραφίας. Αυτό διορθώνεται με τη ρύθμιση «*track*»που μπορούμε να κάνουμε φωτομετρία σε καθεμία εικόνα ξεχωριστά λύνοντας το πρόβλημα της μετατόπισης των αστέρων. Ρυθμίζοντας την παράμετρο «*target finding radius*», μπορούμε να επιλέξουμε την επιτρεπόμενη ακτίνα μετατόπισης των κύκλων για την εύρεση των αστέρων σε ενδεχόμενη μετατόπιση που προαναφέραμε. Με την επιλογή «*output Julian Day*», μετατρέπεται ο ακριβής χρόνος λήψης της φωτογραφίας από UT σε JD. Όλη η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται σε όλα τα φίλτρα που χρησιμοποιήσαμε. Για το κάθε φίλτρο αντιστοιχούν εικόνες *Dark* και *Flat Field*, βάσει των οποίων γίνονται οι διορθώσεις των αντίστοιχων φωτογραφιών.

2.4 Η διόρθωση του χρόνου

Κατά την ολοκλήρωση της φωτομετρίας για κάθε φίλτρο, τα αποτελέσματα εξάγονται από το πρόγραμμα σε μορφή $ASCII$ (txt) για κάθε νύχτα λήψης δεδομένων. Τα δεδομένα αυτά των txt τοποθετήθηκαν σε *excel* με σκοπό την επεξεργασία τους για την κατασκευή των φωτομετρικών καμπυλών. Ως πρώτο βήμα από την Ιουλιανή ημερομηνία (JD) υπολογίσαμε την Ηλιοκεντρική Ιουλιανή ημερομηνία (HJD). Η αναγωγή του

χρόνου σε ηλιοκεντρικό βασίζεται στις παρακάτω μαθηματικές σχέσεις:

$$T\odot = T \oplus -\Delta t \tag{2.8}$$

$$T\odot = T \oplus -\Delta t \tag{2.9}$$

$$\Delta t(days) = 0.00578cosu \tag{2.10}$$

$$cosu = sin\delta sinl_{\odot}sinz + cos\delta cosl_{\odot}cos\alpha + cos\delta sinl_{\odot}sin\alpha cos\epsilon \tag{2.11}$$

$$l_{\odot} = L + (1.915^{\circ} - 0.0048^{\circ}T)sinM + 0.020^{\circ}sin2M \tag{2.12}$$

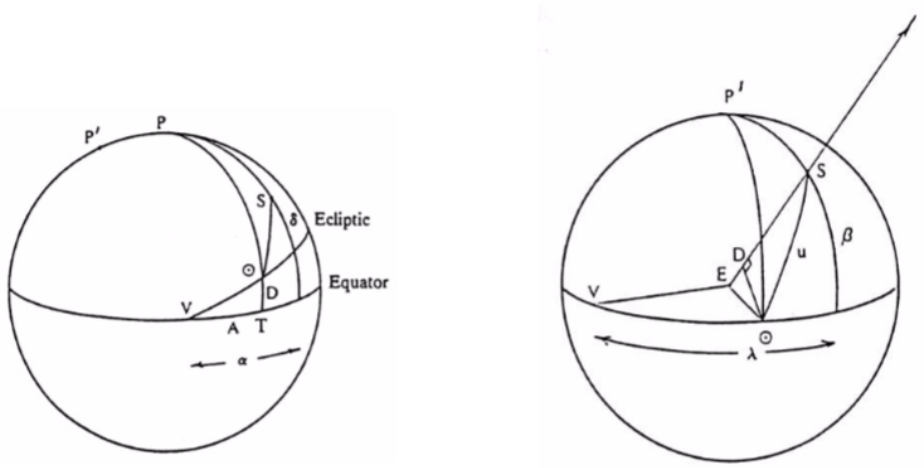
$$T = \frac{JD - 2451545}{36525} \tag{2.13}$$

$$L = 280.460^{\circ} + 36000.722^{\circ}T \tag{2.14}$$

$$M = 357.528^{\circ} + 35999.050^{\circ}T \tag{2.15}$$

Όπου:

- $T\oplus$ ο ακριβής χρόνος κάποιου ουράνιου φαινομένου που καταγράφεται στη Γη
- $T\odot$ ο ακριβής χρόνος του ίδιου ουράνιου φαινομένου που θα κατέγραφε ένας παρατηρητής αν βρισκόταν στον Ήλιο
- Δt η διαφορά των $T\oplus$ και $T\odot$, που υπολογίζεται από τη σφαιρική τριγωνομετρία (Εικόνα 2.6)
- u η γωνία που σχηματίζει η νοητή ευθεία Γης – Ήλιου με την ευθεία Ήλου – αστέρα, με αρχή μέτρησης πάνω στην οπτική ευθεία αστέρα – Ήλιου κατά την ανάδρομη φορά
- (α, δ) οι ουρανογραφικές συντεταγμένες του αστέρα
- ε η κλίση του άξονα της Γης ως προς το επίπεδο της τροχιάς της
- $l_{\odot}$ το ηλιογραφικό μήκος
- T_o Ιουλιανός αιώνας
- L το ηλιογραφικό μήκος σε εκλειπτικές συντεταγμένες
- M το ηλιογραφικό πλάτος σε εκλειπτικές συντεταγμένες



Εικόνα 2.6: Σφαιρικά τρίγωνα επίλυσης για την Ηλιοκεντρική Ιουλιανή Ημερομηνία.

2.5 Υπολογισμός ελαχίστων και αστρονομική εφημερίδα

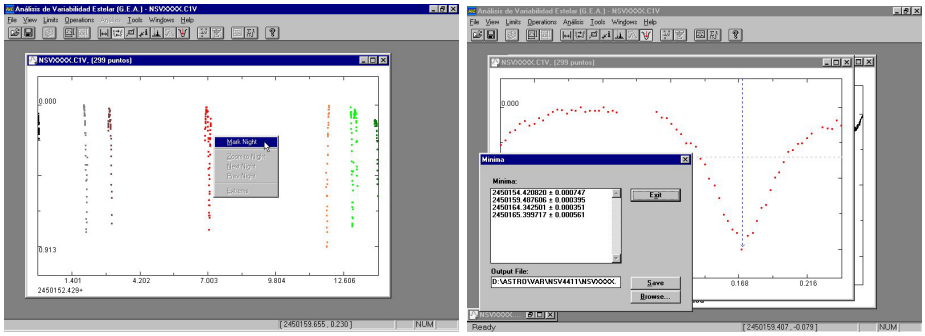
Μετά τη διόρθωση του χρόνου κατασκευάσαμε τις φωτομετρικές καμπύλες των τετραπλών συστημάτων, δηλαδή τη διαφορά μεγεθών των μεταβλητών με τους σταθερούς αστέρες (όπως προέκυψαν από τη διαφορική φωτομετρία) συναρτήσει της φάσης για κάθε φίλτρο. Η φάση υπολογίστηκε χρησιμοποιώντας τις θεωρητικές εφημερίδες των Zasche and Uhlař (2016) για το σύστημα $V994\ Her$ και των Koo et al. (2014) για το σύστημα $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$ από τη σχέση:

$$\phi = \frac{T - T_0}{P} - INT(\frac{T - T_0}{P}) \tag{2.16}$$

Για την καλύτερη εποπτεία της ποιότητας της κάθε νύχτας παρατήρησης, κατασκευάσαμε και τη διαφορά μεγεθών συναρτήσει της Ιουλιανής Ημερομηνίας, προκειμένου να έχουμε μια εικόνα για το ποιες νύχτες δεν παρατηρήθηκε το σύστημα, ποιες νύχτες δεν είχαμε καλές μετρήσεις και επομένως ποια σημεία της φωτομετρικής μας καμπύλης εμφανίζουν περισσότερη αβεβαιότητα. Αυτή η διαδικασία βοήθησε αργότερα και στον καθαρισμό των φωτομετρικών καμπυλών από σημεία-τμήματα των παρατηρήσεων, τα οποία είχαν προβλήματα κατά τη φωτομετρία, είτε λόγω κακών καιρικών συνθηκών, είτε λόγω κάποιου άλλου προβλήματος (διέλευση κάποιου δορυφόρου από το πεδίο κτλ).

Για τον υπολογισμό των ελαχίστων στην εργασία αυτή χρησιμοποιήσαμε το λογισμικό AVE. Το λογισμικό αυτό δημιουργήθηκε από τον $Rafael\ Barbera$ για την εξυπηρέτηση ενός προγράμματος της GEA ($Grup\ d'Estudis\ Astronomics$) που μελετούσε νέους μεταβλητούς αστέρες και χρειαζόταν ένα εργαλείο για τη διαχείριση όλων αυτών των δεδομένων. Το AVE διαβάζει αρχεία $ASCII$ που περιλαμβάνουν Ιουλιανές ημερομηνίες και διαφορές φωτομετρικών μεγεθών. Εισάγοντας τα αρχεία αυτά στο

πρόγραμμα, εμφανίζεται ένα παράθυρο με τα αντίστοιχα σημεία για κάθε νύχτα παρατήρησης, η οποία παρουσιάζεται με διαφορετικό χρώμα (Εικόνα 2.7 αριστερά). Οι κλίμακες ρυθμίζονται αυτόματα ώστε οι φωτομετρικές καμπύλες να εμφανίζονται σε πλήρες πλάτος. Κάνοντας δεξί κλικ στην οθόνη εμφανίζεται ένα μενού, το οποίο επιτρέπει τη διαμόρφωση διαφόρων στοιχείων της φωτομετρικής καμπύλης, όπως την επιλογή σημείων και διαστημάτων, την εστίαση προς τα μέσα και προς τα έξω σε κάθε νύχτα και την επιλογή αυτής. Για να προσδιορίσουμε τα ελάχιστα της κάθε νύχτας και την ακριβή χρονική στιγμή που συνέβησαν, εστιάζουμε στην επιθυμητή νύχτα, ενεργοποιούμε το εργαλείο εύρεσης ελαχίστων και με δεξί κλικ επιλέγουμε ένα οριζόντιο κατώφλι που θα μας βοηθήσει στην αναζήτηση. Με δεξί κλικ ορίζουμε ένα σημείο έναρξης αριστερά από το ελάχιστο και ένα αντίστοιχο σημείο τέλους δεξιά από αυτό. Στην ενδιάμεση περιοχή το πρόγραμμα εντοπίζει το ελάχιστο με ένα μπλε βέλος (Εικόνα 2.7 δεξιά), χρησιμοποιώντας τη μέθοδο *Kwee & van Woerden* (Kwee and van Woerden 1956). Σύμφωνα με αυτή, λαμβάνονται τα κατοπτρικά σημεία δεξιά και αριστερά του ελαχίστου και υπολογίζεται η κλίση της καμπύλης, δηλαδή η παράγωγος μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων, η οποία πρέπει να είναι ίση για τα κατοπτρικά σημεία. Με το κριτήριο αυτό επιλέγεται ο κάθετος άξονας συμμετρίας, που οδηγεί στην ισότητα αυτή των κλίσεων και ο οποίος διέρχεται από το ελάχιστο. Στη συνέχεια, το *AVE* αποθηκεύει τους ακριβείς χρόνους ελαχίστου και το σφάλμα τους σε έναν πίνακα, οι οποίοι μπορούν να εξαχθούν σε ένα αρχείο *txt*.



Εικόνα 2.7: Υπολογισμός χρόνων ελαχίστου με το AVE (http://astrogea.org/soft/ave/aveint.htm).

Για να έχει μεγαλύτερη ακρίβεια ο προσδιορισμός των ελαχίστων, επαναλάβαμε τη διαδικασία τρεις φορές έχοντας έτσι για κάθε ελάχιστο τρεις τιμές με τα σφάλματά τους, από τις οποίες υπολογίσαμε τους μέσους όρους για κάθε φίλτρο. Η τελική τιμή των ελαχίστων προέκυψε από το μέσο όρο των παραπάνω τιμών κάθε φίλτρου. Έπειτα, κατηγοριοποιήσαμε τα ελάχιστα σε πρωτεύοντα και δευτερεύοντα και υπολογίσαμε τον αριθμό των τροχιακών κύκλων (ή εποχής) E του κάθε μετρούμενου ελαχίστου, χρησιμοποιώντας ως αρχικές θεωρητικές εφημερίδες αυτές που χρησιμοποιήσαμε και στα διαγράμματα φάσης. Η νέα τροχιακή περίοδος για κάθε σύστημα προέκυψε από την κλίση της ευθείας που σχηματίζουν τα μεγέθη HJD και E, δηλαδή από τη σχέση:

$$T = T_0 + P \cdot E \tag{2.17}$$

Πίνακας 2.2: Η αστρονομική εφημερίδα για τα συστήματα V994 Her και 1SWASP J093010.78 + 533859.5.

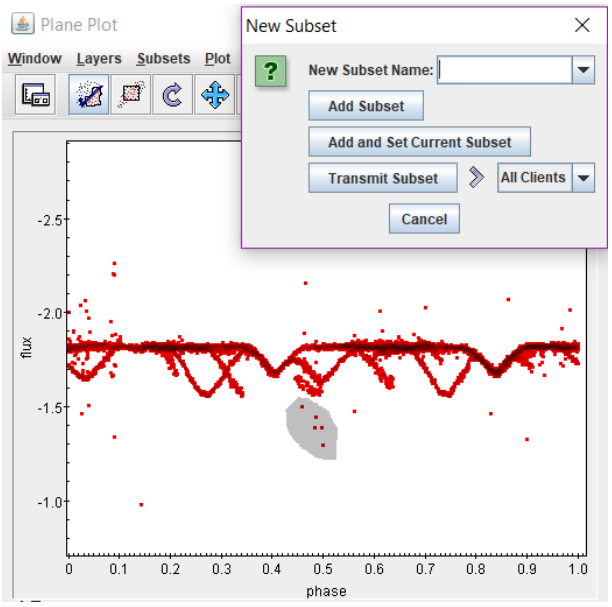
	$V994\ Her$		$1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$	
Παράμετρος	A	B	A	B
T_0 (HJD)	2456888.3566(3)	2456859.3375(4)	2456346.7849(15)	2456267.92908(22)
P (d)	2.0832645(28)	1.4200409(37)	1.305502(41)	0.2277135(16)

όπου T_0 είναι το ελάχιστο με το μικρότερο σφάλμα. Για τον υπολογισμό αυτό των νέων αστρονομικών εφημερίδων (Πίνακας 2.2) χρησιμοποιήθηκαν και τα βιβλιογραφικά ελάχιστα για μεγαλύτερη αξιοπιστία (Πίνακες A.1 και A.2 του Παραρτήματος).

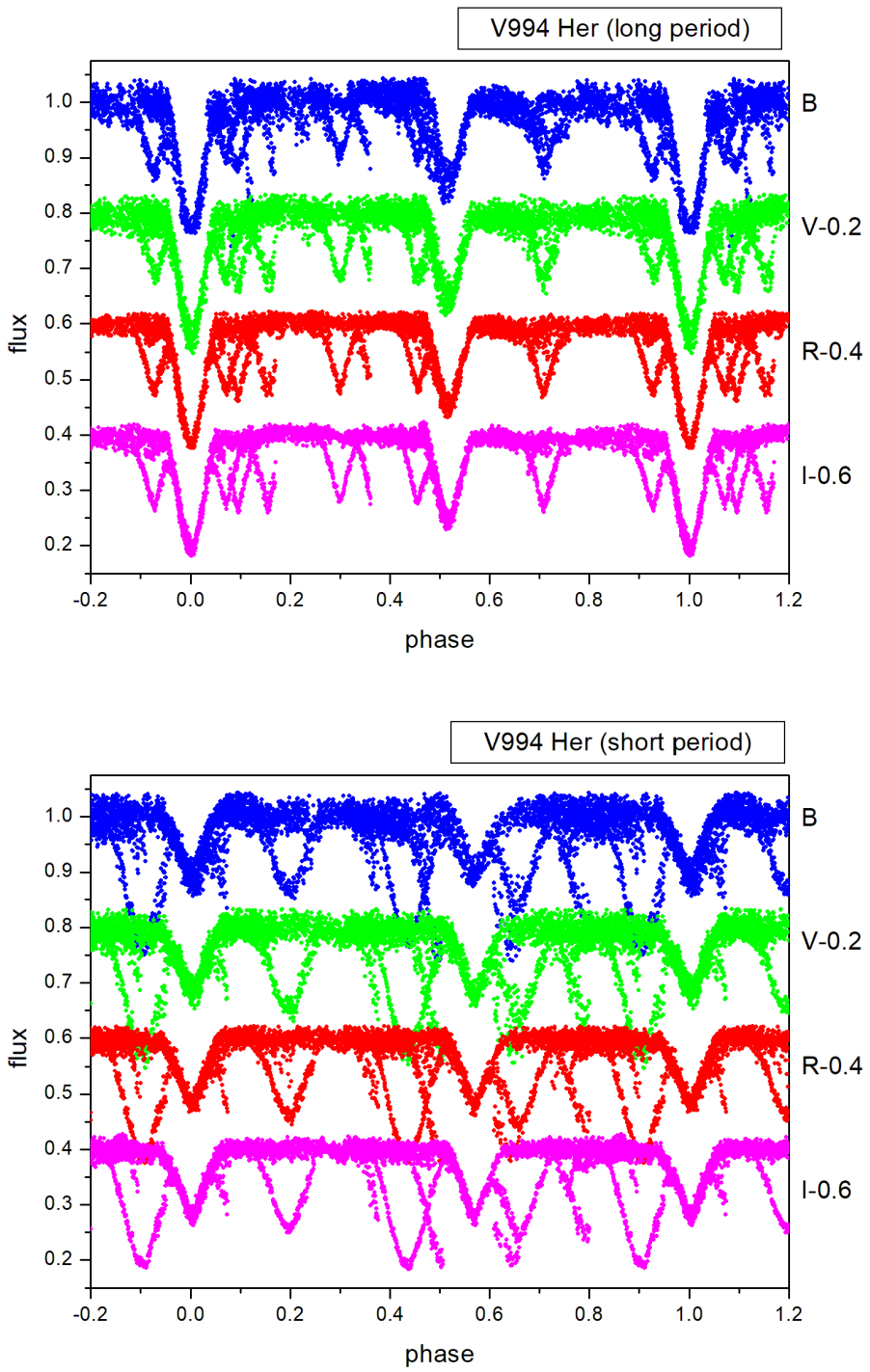
Στη συνέχεια, υπολογίσαμε τη ροή του συστήματος από τη σχέση:

$$Flux = 10^{-0.4(m-c)} \tag{2.18}$$

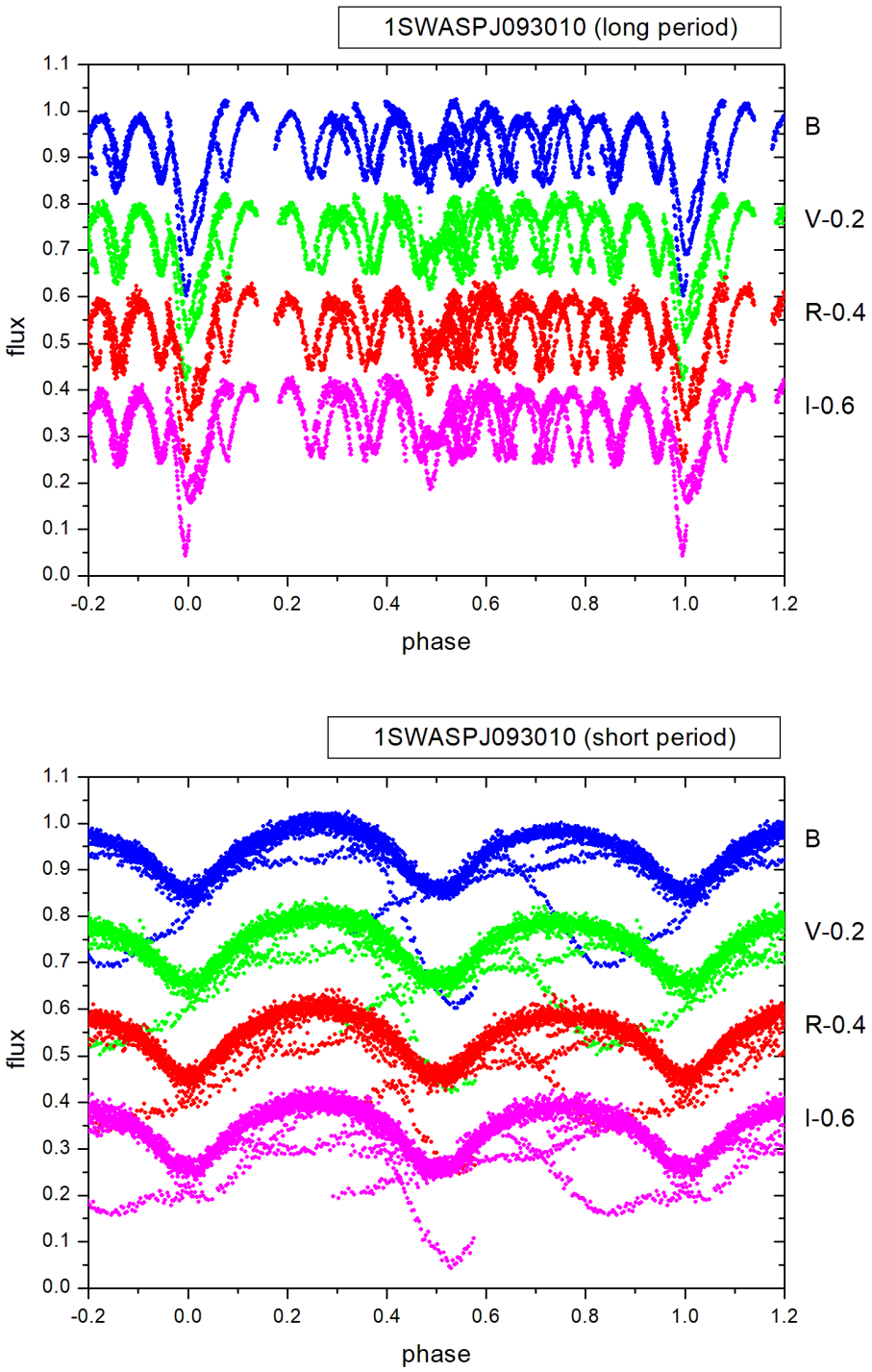
όπου c μια σταθερά που προσαρμόσαμε κατάλληλα για να είναι τα μέγιστα των καμπυλών κανονικοποιημένα στο 1. Λόγω του ότι τα συστήματα είναι τετραπλά με δύο διαφορετικές τροχιακές περιόδους, χρειάστηκε να κατασκευάσουμε δύο διαγράμματα φάσης σε κάθε φίλτρο που αντιστοιχούν στις δύο διαφορετικές περιόδους (Εικόνες 2.9 και 2.10). Όπως φαίνεται και στις αντίστοιχες εικόνες, τα δύο συστήματα έχουν φωτομετρικές καμπύλες που είναι χαρακτηριστική η ύπαρξη πολλαπλών εκλείψεων. Δηλαδή φαίνεται να υπάρχουν παρεμβολές και επιπλέον ελάχιστα που αντιστοιχούν στο συνοδό σύστημα και πρέπει να αφαιρεθούν.



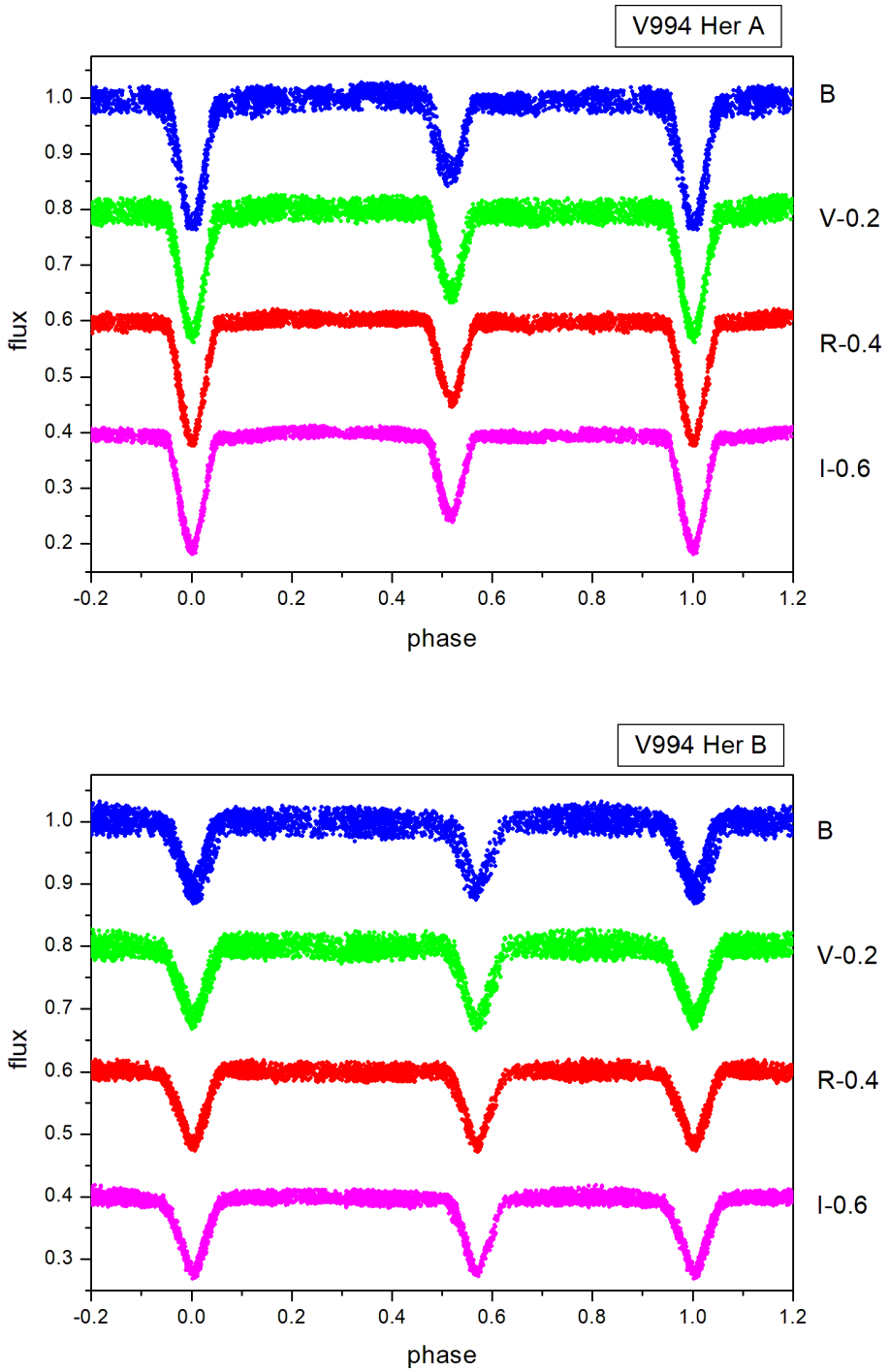
Εικόνα 2.8: Καθαρισμός φωτομετρικών καμπυλών με το Topcat.



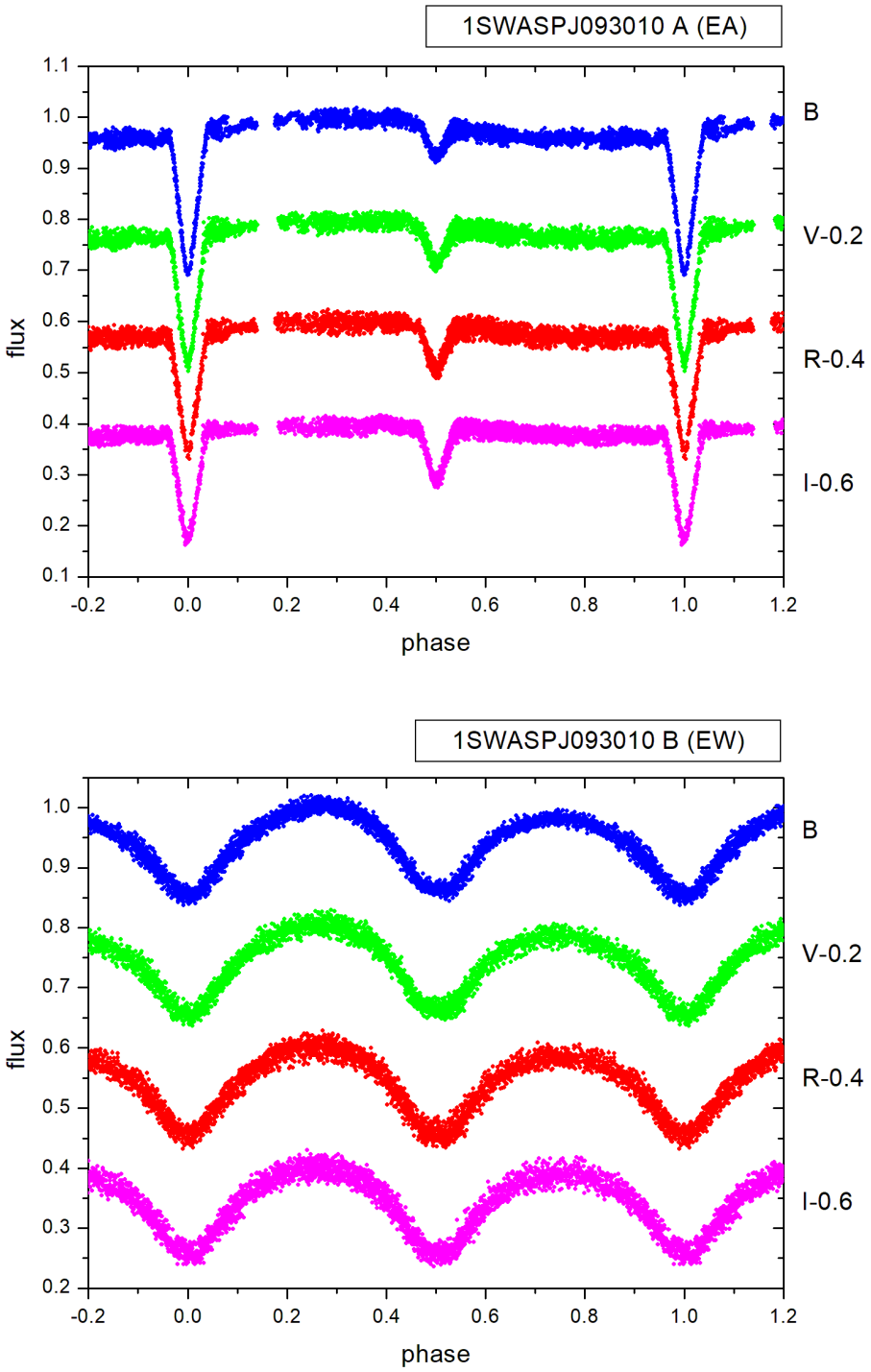
Εικόνα 2.9: Σύνολο φωτομετρικών δεδομένων του συστήματος V994 Her στα φίλτρα BVRI. Πάνω χρησιμοποιείται η εφημερίδα του ζεύγους A (long period) και κάτω του ζεύγους B (short period).



Εικόνα 2.10: Σύνολο φωτομετρικών δεδομένων του συστήματος 1SWASP J093010.78 + 533859.5 στα φίλτρα BVRI. Πάνω χρησιμοποιείται η εφημερίδα του ζεύγους A (long period) και κάτω του ζεύγους B (short period).



Εικόνα 2.11: Φωτομετρικές καμπύλες BVRI του συστήματος V994 Her για το έτος 2014. Πάνω βρίσκεται το ζεύγος A με τη μεγαλύτερη τροχιακή περίοδο και κάτω το ζεύγος B με τη μικρότερη.



Εικόνα 2.12: Φωτομετρικές καμπύλες BVRI του συστήματος 1SWASP J093010.78 + 533859.5 για το έτος 2013. Πάνω βρίσκεται το αποχωρισμένο σύστημα (EA) και κάτω το σύστημα σε επαφή (EW).

Γι' αυτό, στην περίπτωσή μας ο καθαρισμός των καμπυλών έγινε με τον εξής τρόπο. Εισάγοντας σε αρχεία *txt* τη φάση και τη ροή για κάθε μία από τις δύο διαφορετικές περιόδους, με τη βοήθεια του *Topcat* επιλέξαμε τις περιοχές και τα ελάχιστα που σε κάθε περίπτωση αφορούν το συνοδό σύστημα και τις αφαιρέσαμε (Εικόνα 2.8). Έτσι τα εξαγόμενα από τον καθαρισμό αρχεία μας έδωσαν τα διαγράμματα φάσης για κάθε ζεύγος του συστήματος. Τέλος, αντικαταστήσαμε τις θεωρητικές εφημερίδες που χρησιμοποιήσαμε αρχικά με τις νέες του Πίνακα 2.2 και κατασκευάσαμε εκ νέου τα καθαρισμένα διαγράμματα φάσης. Τα τελικά διαγράμματα φαίνονται στις Εικόνες 2.11 και 2.12.

Κεφάλαιο 3

Μοντελοποίηση των τετραπλών συστημάτων

3.1 Ο κώδικας $Wilson - Devinney$

Ο κώδικας *Wilson-Devinney* (Wilson and Devinney 1971; Wilson 1967, 1990, 1994) χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση εκλειπτικών αστρικών συστημάτων με σκοπό τον προσδιορισμό των φυσικών παραμέτρων τους.

Για τον υπολογισμό των θεωρητικών καμπυλών χρησιμοποιεί δύο διαφορετικές μεθόδους. Τη μέθοδο LC ($Light\,Curve$) και τη μέθοδο DC ($Differential\,Corrections$). Η πρώτη μέθοδος χρησιμοποιείται για χειροκίνητη προσαρμογή των παραμέτρων και επομένως της θεωρητικής καμπύλης πάνω στα δεδομένα. Η δεύτερη αφορά την επίλυση του αντίστροφου προβλήματος, δηλαδή την προσαρμογή των παραμέτρων με σκοπό την ελαχιστοποίηση των διαφορών μεταξύ της θεωρητικής και παρατηρούμενης καμπύλης, μέσω διαφορικών διορθώσεων.

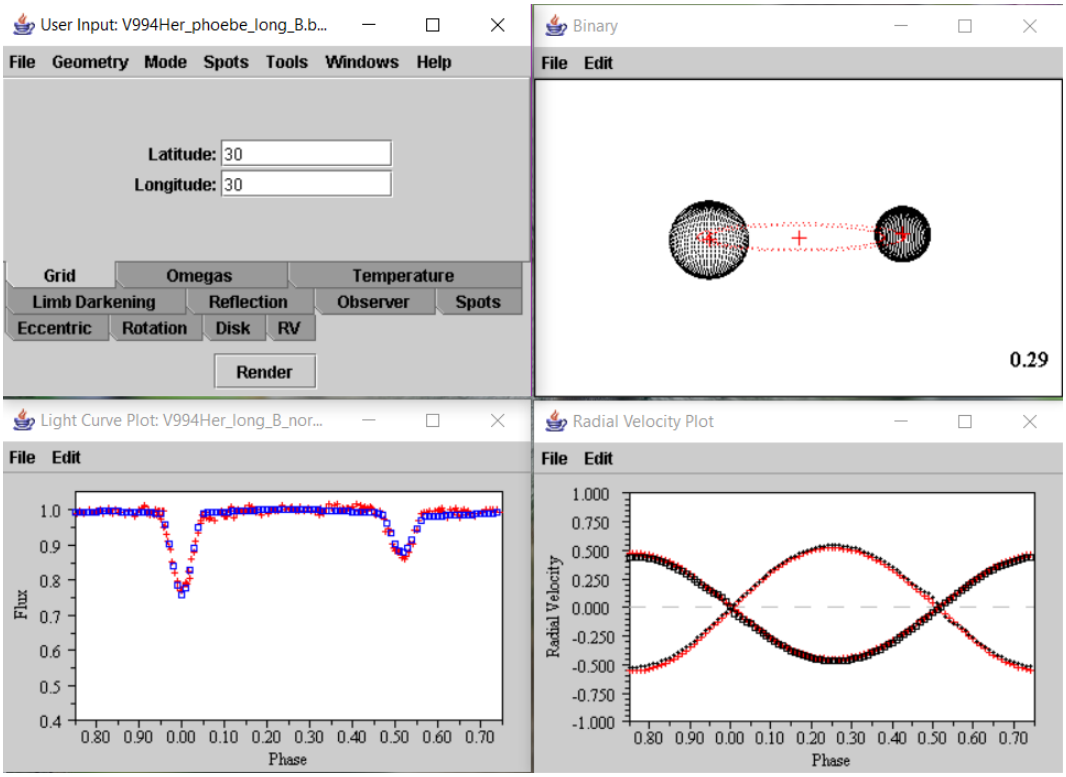
Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιεί λαμβάνει υπόψη παλιρροιακές και περιστροφικές παραμορφώσεις των αστρικών επιφανειών και φαινόμενα εγγύτητας, καθώς επίσης και συστήματα με έκκεντρη τροχιά εκκεντρότητας e και μεγάλου ημιάξονα τροχιάς α. Η πιθανή ασύγχρονη περιστροφή των μελών υπεισέρχεται με τον παράγοντα συγχρονισμού F (λόγος γωνιακής ταχύτητας ιδιοπεριστροφής προς τη γωνιακή ταχύτητα περιφοράς γύρω από το κοινό κέντρο μάζας). Οι ισοδυναμικές επιφάνειες των αστέρων υπολογίζονται από τη γεωμετρία *Roche* ως εξής:

$$\Omega(r,\Omega,f,d) = \frac{1}{r} + q(\frac{1}{\sqrt{d^2+2d\lambda r+r^2}-\frac{\lambda r}{d^2}} + \frac{q+1}{2}F^2r^2(1-\nu^2) \tag{3.1}$$

όπου q ο λόγος μαζών των αστέρων και r τα ακτινικά διανύσματα, τα οποία προσδιορίζονται για κάθε αστέρα-μέλος για συγκεκριμένες τιμές των ϑ και φ και καθιερώνουν ένα σύστημα επιφανειακών σημείων r_s. Τα δυναμικά Ω_1 και Ω_2 μετρώνται στο σύστημα αναφοράς του πρωτεύοντα αστέρα.

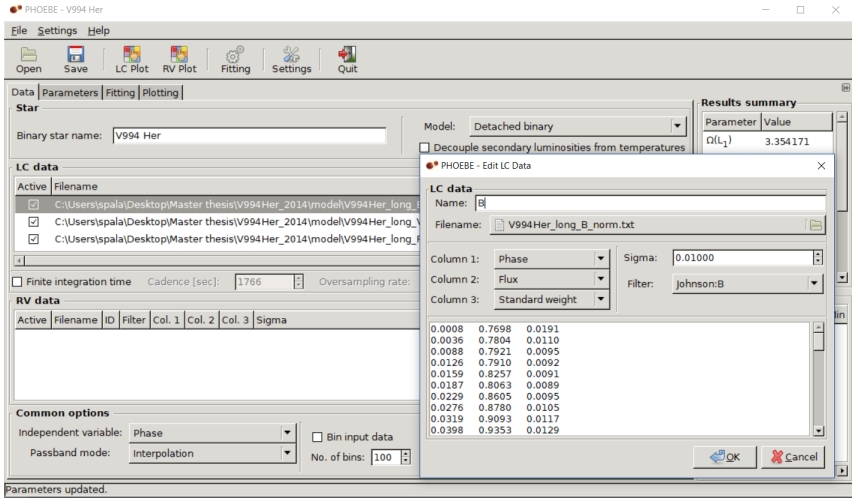
3.2 Μοντελοποίηση με τις μεθόδους *LC* και *DC*

Για τη μοντελοποίηση των φωτομετρικών καμπυλών, κάναμε μια πρώτη προσέγγιση των παραμέτρων με το λογισμικό *Binary Maker* 3 (Bradstreet 2005) , το οποίο χρησιμοποιεί τη μέθοδο *LC* (*Light Curve*) του κώδικα *Wilson-Devinney*. Με το άνοιγμα του προγράμματος εμφανίζονται τέσσερα παράθυρα (Εικόνα 3.1). Στο πρώτο με όνομα *User Input* εισάγονται οι παράμετροι του συστήματος. Στο δεύτερο παράθυρο με το όνομα *Binary* γίνεται αναπαράσταση της εικόνας του διπλού συστήματος, η οποία περιστρέφεται ανάλογα τη φάση κατά την προσαρμογή της θεωρητικής στην πειραματική καμπύλη, πατώντας το κουμπί *Render*. Στο παράθυρο *Light Curve Plot*, με βάση τα δεδομένα που θα εισάγει ο κάθε χρήστης στο πρόγραμμα, δημιουργείται αυτόματα η γραφική παράσταση της καμπύλης φωτός του διπλού συστήματος σε οποιοδήποτε φίλτρο (*B*,*V*,*R*,*I*) επιλεγεί από το χρήστη.



Εικόνα 3.1: Μοντελοποίηση με το λογισμικό Binary Maker 3 (BM3).

Τέλος, για τον έλεγχο των ακτινικών ταχυτήτων των δύο συνοδών, το πρόγραμμα με το παράθυρο *Radial Velocity Plot* δείχνει πώς μεταβάλλεται η ακτινική ταχύτητα των μελών του συστήματος, συναρτήσει της φάσης που βρίσκεται. Έτσι εισάγοντας τα δεδομένα ροής και φάσης σε αρχείο μορφής *txt* κάναμε μια αρχική εκτίμηση των μοντέλων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τις ήδη γνωστές παραμέτρους από τη βιβλιογραφία και ρυθμίζοντας τις υπόλοιπες, προσαρμόσαμε τη θεωρητική καμπύλη στα



Εικόνα 3.2: Εισαγωγή φωτομετρικών δεδομένων στο PHOEBE.

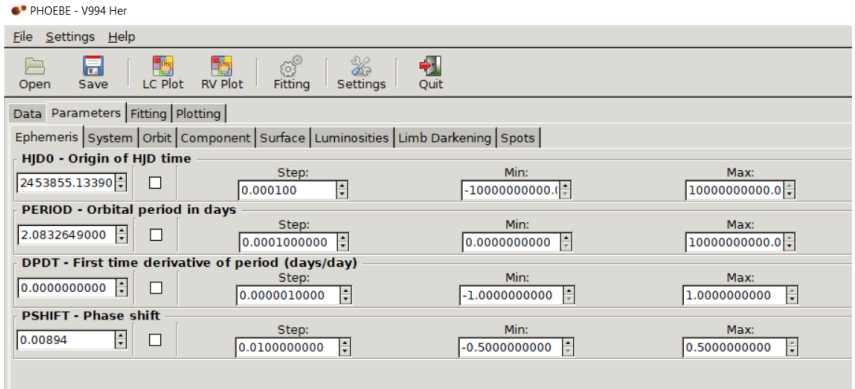
δεδομένα. Το αποτελέσματα αυτά τα χρησιμοποιήσαμε ως αρχική λύση για την εύρεση των παραμέτρων με τη μέθοδο DC ($Differential\ Corrections$) του λογισμικού $PHOEBE$.

Το λογισμικό $PHOEBE$ (Prša and Zwitter 2005) είναι ένα πακέτο μοντελοποίησης για τα εκλειπτικά αστρικά συστήματα, που βασίζεται στον κώδικα $W-D$. Παρέχει περισσότερες επιλογές και δυνατότητες συμπεριλαμβάνοντας ακόμα περισσότερες φυσικές παραμέτρους και ενισχύοντας έτσι την αξιοπιστία των λύσεων. Το $PHOEBE$ παρουσιάζει αρκετές βελτιστοποιήσεις στη μέθοδο DC και παρέχει μία νέα μέθοδο ελαχιστοποίησης σφαλμάτων, την $Nelder\ \&\ Mead's\ downhill\ Simplex$. Για την εργασία αυτή χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος DC, όπου η γραμμικοποίηση του μοντέλου γίνεται με τις εξισώσεις ελαχίστων τετραγώνων και οι παράγωγοι υπολογίζονται από πεπερασμένες διαφορές. Οι προσεγγίσεις αυτές γίνονται με τη χρήση επαναληπτικών διαδικασιών μέσω διαφορικών διορθώσεων (DC), όπως προαναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο.

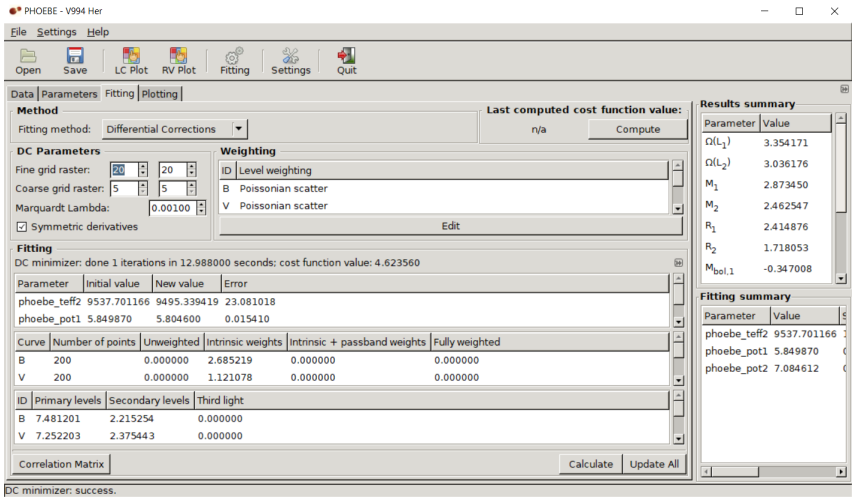
Για την μοντελοποίηση των φωτομετρικών καμπυλών στο $PHOEBE$ αρχικά εισάγαμε αρχεία txt με τη φάση και τη ροή για κάθε φίλτρο για κάθε σύστημα-μέλος των τετραπλών μας συστημάτων και επιλέξαμε την κατηγορία του συστήματος μας ως $Detached\ binary$ ή $Contact\ binary$ (Εικόνα 3.2 πάνω δεξιά).

Στη συνέχεια, συμπληρώσαμε τις καθορισμένες ($fixed$) φασματοσκοπικές και τροχιακές παραμέτρους της βιβλιογραφίας, μαζί με αυτές που υπολογίσαμε με το $BM3$, ως αρχικές τιμές στην καρτέλα των παραμέτρων (Εικόνα 3.3). Οι παράμετροι αυτές είναι η κλίση του συστήματος, η θερμοκρασία των μελών του συστήματος, ο λόγος μαζών τους, η φωτεινότητά τους, τα δυναμικά Ω, η ανακλαστικότητα, η αμαύρωση χείλους, η εκκεντρότητα, η διαφορά φάσης, η γωνία του περιάστρου και το τρίτο φως.

Αφήνοντας ως ελεύθερες παραμέτρους τα μεγέθη που θέλουμε να διερευνήσουμε και να υπολογίσουμε εκ νέου, μαρκάρουμε το αντίστοιχο κουτάκι και στην καρτέλα



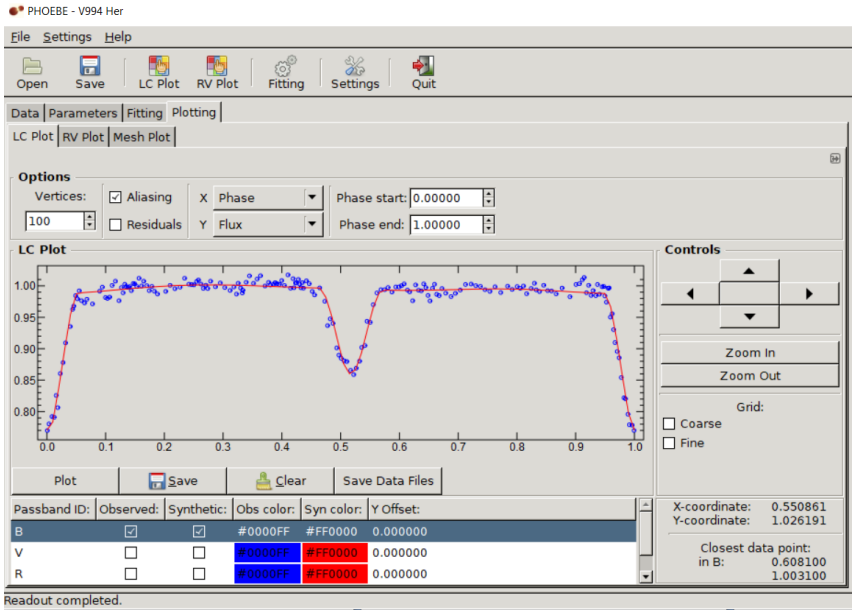
Εικόνα 3.3: Εισαγωγή αρχικών παραμέτρων στο PHOEBE.



Εικόνα 3.4: Υπολογισμός φυσικών παραμέτρων με επαναληπτική μέθοδο.

Fitting εμφανίζονται οι παράμετροι αυτές στη στήλη *initial value*. Πατώντας το κουμπί *calculate*, το πρόγραμμα συγκλίνει προς τη λύση του συστήματος με επαναληπτική μέθοδο, εμφανίζοντας τις νέες τιμές και τα σφάλματά τους στη στήλη *new value* (Εικόνα 3.4).

Αφού έχουμε καταλήξει στις τελικές παραμέτρους, στην καρτέλα *plotting* σχεδιάσαμε τη θεωρητική καμπύλη προσαρμοσμένη στα αρχικά φωτομετρικά δεδομένα που εισάγαμε (Εικόνα 3.5). Φυσικά, η γραφική αυτή απεικόνιση γίνεται και κατά τη διάρκεια καθορισμού των φυσικών παραμέτρων, ως κριτήριο για το κατά πόσο βρισκόμαστε κοντά στη λύση. Κατά την εύρεση της λύσης κρατήσαμε σταθερές τις παραμέτρους e,q και T_1 για το σύστημα $V994\ Her$. Για την πρώτη, χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της επεξεργασίας των διαγραμμάτων $O-C$, για τη δεύτερη, τη λύση των Zasche and Uhlař (2016) και για την τελευταία, τη λύση των Lee et al. (2008). Για το σύστημα $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ θεωρήσαμε σταθερά τα μεγέθη q και T_1, χρησιμο-



Εικόνα 3.5: Γραφική απεικόνιση των φωτομετρικών δεδομένων και της θεωρητικής καμπύλης του συστήματος V994 Her A στο B φίλτρο.

ποιώντας τις τιμές των Lohr et al. (2015). Σε κάθε περίπτωση λάβαμε υπόψη τις πιο σύγχρονες και αξιόπιστες βιβλιογραφικές μελέτες. Όσον αφορά την παράμετρο του τρίτου φωτός, λόγω έλλειψης πληροφοριών για τη συνεισφορά του κάθε μέλους στη συνολική φωτεινότητα, το θεωρήσαμε ελεύθερη παράμετρο και φροντίσαμε να ισχύουν οι σχέσεις:

$$L_{1i,j} + L_{2i,j} + L_{3i,j} = 1 \tag{3.2}$$

$$L_{3i} + L_{3j} = 1 \tag{3.3}$$

όπου i, j τα διαφορετικά ζεύγη του κάθε τετραπλού συστήματος.
Στην περίπτωση που δεν ήταν καλή η προσαρμογή της καμπύλης στα δεδομένα, επιστρέφαμε πίσω στις καρτέλες των παραμέτρων αλλάζοντας κατάλληλα τις τιμές και αναζητώντας εκ νέου τη λύση.

Τα αποτελέσματα της μοντελοποίησης, ύστερα από την παραπάνω επαναληπτική διαδικασία φαίνονται στους Πίνακες 3.1 και 3.2. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των Lee et al. (2008) με αυτά του Πίνακα 3.1 βλέπουμε ότι έχουν αρκετά μεγάλη διαφορά. Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο, αφού χρησιμοποιήσαμε λόγο μαζών και εκκεντρότητα πιο σύγχρονα και με μικρότερα σφάλματα, ενώ τα δεδομένα των φωτομετρικών καμπυλών της παρούσας εργασίας έχουν πολύ μικρότερη διασπορά.

Από την άλλη, αν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα των Lohr et al. (2015) με αυτά του Πίνακα 3.2, είναι πολύ παρόμοια με εξαίρεση τα δυναμικά Ω. Αυτό δικαιολογείται από την πολύ μεγάλη διασπορά των σημείων στα διαγράμματά τους, που είναι και ο λόγος που τα δικά μας αποτελέσματα θεωρούνται πιο αξιόπιστα.

Πίνακας 3.1: Οι τελικές παράμετροι με τη μέθοδο DC του συστήματος V994 Her για το έτος 2014.

	A		B	
Παράμετρος	Αα	Αβ	Βα	Ββ
T_0 (HJD)	2456888.3566(3)		2456859.3375(4)	
P (d)	2.0832649(29)		1.4200401(42)	
e	0.032(8)*		0.13(4)*	
ω (°)	33(4)		328(4)	
phase shift	0.0089(8)		0.0367(1)	
T (K)	12000(250)*	9538(50)	9000(250)*	9185(80)
q	0.857(24)*		1.050(28)*	
Ω	5.85(5)	7.09(9)	6.1(3)	6.9(2)
$i(°)$	82.3(1)		88.7(5)	
$L/(L_1+L_2+L_3)_B$	0.5983(4)	0.1772(4)	0.1292(2)	0.0953(2)
$L/(L_1+L_2+L_3)_V$	0.5804(1)	0.1901(1)	0.1378(2)	0.0916(2)
$L/(L_1+L_2+L_3)_R$	0.5622(2)	0.1891(2)	0.1537(1)	0.0950(1)
$L/(L_1+L_2+L_3)_I$	0.5352(1)	0.1872(1)	0.1677(1)	0.1098(1)
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_B$	0.2245(7)		0.7755(40)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_V$	0.2294(2)		0.7706(29)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_R$	0.2487(3)		0.7513(6)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_I$	0.2776(1)		0.7224(12)	
X_B**	0.412(8)	0.409(7)	0.52(2)	0.52(2)
X_V**	0.354(2)	0.354(2)	0.45(2)	0.45(2)
X_R**	0.292(3)	0.291(3)	0.35(1)	0.35(1)
X_I**	0.225(1)	0.224(1)	0.27(1)	0.27(1)
$fill-out\ factor$	-	-	-	-
	Spot parameters			
$co-latitude$	90*		-	
longitude	105.14(4)		-	
radius	17(2)		-	
temp.factor	0.94(1)		-	
$P/S***$	P		-	

*: Σταθερές παράμετροι
**: Συντελεστές *Limb Darkening* σύμφωνα με τους πίνακες *Van Hamme* (1993)
***: *Primary/Secondary*

Πίνακας 3.2: Οι τελικές παράμετροι με τη μέθοδο DC του συστήματος 1SWASP J093010.78 + 533859.5 για το έτος 2013.

	A		B	
Παράμετρος	Aα	Aβ	Bα	Bβ
T_0 (HJD)	2456346.78443(15)		2456347.85636(18)	
P (d)	1.30554317(68)		0.22771442(4)	
e	0*		0*	
ω (°)	-		-	
$phase\ shift$	0.0000(2)		0.0065(8)	
T (K)	5185(25)*	4207(12)	4700(50)*	4760(2)
q	0.806(7)*		0.397(6)*	
Ω	6.73(3)	8.04(2)	2.627(1)	2.627(1)
$i(°)$	84.4(1)		88.0(2)	
$L/(L_1+L_2+L_3)_B$	0.6796(1)	0.0556(1)	0.1693(3)	0.0955(3)
$L/(L_1+L_2+L_3)_V$	0.6271(7)	0.0740(7)	0.1993(4)	0.0996(4)
$L/(L_1+L_2+L_3)_R$	0.5975(8)	0.0938(8)	0.2034(3)	0.1052(3)
$L/(L_1+L_2+L_3)_I$	0.5773(1)	0.1097(1)	0.2062(4)	0.1069(4)
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_B$	0.2648(6)		0.7352(5)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_V$	0.2988(6)		0.7012(5)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_R$	0.3086(6)		0.6914(5)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_I$	0.3131(7)		0.6869(5)	
X_B**	0.79(2)	0.85(1)	1.2114(1)	0.8640(2)
X_V**	0.48(1)	0.52(1)	0.8687(3)	0.6470(4)
X_R**	0.28(2)	0.29(3)	0.7977(7)	0.3074(7)
X_I**	0.16(1)	0.12(1)	0.7228(7)	0.1379(6)
$fill-out\ factor$	-	-	0.1843	
	Spot parameters			
$co-latitude$	76(13)		89(1)	
$longitude$	80(1)		56.8(1)	
$radius$	34.2(3)		23.5(2)	
$temp.factor$	0.978(1)		0.905(4)	
P/S***	P		P	

*: Σταθερές παράμετροι
**: Συντελεστές *Limb Darkening* σύμφωνα με τους πίνακες *Van Hamme* (1993)
***: *Primary/Secondary*

3.3 Μοντελοποίηση με τη μέθοδο *Monte Carlo* (*MC*)

Η μέθοδος μοντελοποίησης *Monte Carlo* (*MC*) που χρησιμοποιήσαμε (Zola et al. 2015), περιλαμβάνει έναν κώδικα παρασκευής συνθετικών καμπυλών σε *Linux*. Βασίζεται και αυτή στον κώδικα *Wilson Devinney*, όπως το *BM*3 και το *PHOEBE*, με τη διαφορά ότι προσεγγίζει τη λύση με παραγωγή ψευδοτυχαίων αριθμών και όχι με τις μεθόδους *LC* και *DC*.

Για τον υπολογισμό των συνθετικών καμπυλών εισάγουμε στον κώδικα το εύρος τιμών των ζητούμενων παραμέτρων, στο οποίο θέλουμε να βρεθεί η λύση (Εικόνα 3.6). Όσο μεγαλύτερο το εύρος των τιμών τόσο περισσότερος είναι και ο χρόνος που θα χρειαστεί το πρόγραμμα για να βρει λύση. Στην περίπτωσή μας, θεωρήσαμε σταθερές τις τιμές της θερμοκρασίας των πρωτευόντων μελών και τους λόγους μαζών από φασματοσκοπικά δεδομένα (Lee et al. 2008; Lohr et al. 2015). Για το σύστημα *V*994 *Her* χρησιμοποιήσαμε συγκεκριμένη τιμή και για την εκκεντρότητα, η οποία έχει υπολογιστεί από τα διαγράμματα $O-C$ με τη μέθοδο *LITE*.

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 3.6 αριστερά, πάνω από τις τιμές των παραμέτρων υπάρχει ένα *header* που αποτελείται από τέσσερα νούμερα. Το καθένα από αυτά αντιπροσωπεύει τα *run*, τις επαναλήψεις και τον αριθμό των φίλτρων.

Όσον αφορά το δεύτερο εισαγόμενο αρχείο, αυτό περιλαμβάνει τα φωτομετρικά δεδομένα της φάσης, της ροής και του σφάλματος ροής. Πάνω από αυτό υπάρχει πάλι ένα *header* που αφορά τα φίλτρα, το πλέγμα (*grid*), τη φάση κανονικοποίησης, τα μήκη κύματος, το *Limb Darkening*, καθώς και άλλες παραμέτρους.

```
| 1000  5000     0     4
  80.00000  90.00000          INCLINATION
   1.20000   1.20000          TEMPERATURE OF PRIMARY
   0.80000   1.10000          TEMPERATURE OF SECONDARY
   1.80000   4.00000          POTENTIAL OF PRIMARY
   1.80000   4.00000          POTENTIAL OF SECONDARY
   0.85700   0.85700          MASS RATIO
   0.03100   0.03100          eccentricity
   0.00000  90.00000          PERIASTRON
  -0.02000   0.02000          phase shift
  80.00000 180.00000          co-lattitude
   0.00000 360.00000          longitude
  00.00000  30.00000          radius
   0.80000   1.00000          temperature
   5.00000  13.80000          LUMINOSITY OF PRIMARY
   5.00000   5.00000          LUMINOSITY OF SECONDARY
   0.01000   0.50000          THIRD LIGHT
```

```
1 1 1 1 1 1 0
 0  1  1  23.285 30.000 100 0.250 1
 0.000 90.000 50.0000 1.000 1.000 0.0000 0.0000
     4  0.00
  30    30   1 1
0.4400   200 0
0.5500   200 0
0.6500   200 0
0.8400   200 0
0.0008  0.7698  0.0191
0.0036  0.7804  0.0110
0.0088  0.7921  0.0095
0.0126  0.7910  0.0092
0.0159  0.8257  0.0091
0.0187  0.8063  0.0089
0.0229  0.8605  0.0095
0.0276  0.8780  0.0105
0.0319  0.9093  0.0117
0.0398  0.9353  0.0129
0.0439  0.9627  0.0112
0.0458  0.9678  0.0107
0.0490  0.9845  0.0109
0.0521  0.9794  0.0117
```

Εικόνα 3.6: Μορφή εισαγόμενων αρχείων αρχικών παραμέτρων (αριστερά) και φωτομετρικών δεδομένων (δεξιά) για τη μέθοδο MC.

Φτιάχνοντας ένα φάκελο με όλα τα παραπάνω αρχεία και τρέχοντας τον κώδικα για την περίπτωση που έχουμε ή οχι κηλίδες, προέκυψαν οι παράμετροι του Πίνακα 3.3 για το σύστημα *V*994 *Her* και του Πίνακα 3.4 για το σύστημα 1*SWASP J*093010.78 + 533859.5.

Πίνακας 3.3: Οι τελικές παράμετροι του συστήματος V994 Her με τη μέθοδο MC για το έτος 2014.

	A		B	
Παράμετρος	Αα	Αβ	Βα	Ββ
T_0 (HJD)	2456888.3566(3)		2456859.3375(4)	
P (d)	2.0832645(28)		1.4200409(37)	
e	0.032(8)*		0.13(4)*	
ω (°)	32.0(3)		285(19)	
phase shift	0.00913(2)		0.001(14)	
T (K)	12000(250)*	9411(7)	9000(250)*	8119(74)
q	0.857(24)*		1.05(28)*	
Ω	5.88(1)	7.09(2)	5.61(7)	8.87(7)
$i(°)$	82.19(6)		88.5(5)	
$L/(L_1+L_2+L_3)_B$	0.605(2)	0.168(2)	0.208(10)	0.048(3)
$L/(L_1+L_2+L_3)_V$	0.621(2)	0.193(2)	0.218(6)	0.056(2)
$L/(L_1+L_2+L_3)_R$	0.575(1)	0.187(2)	0.228(3)	0.061(2)
$L/(L_1+L_2+L_3)_I$	0.500(1)	0.194(2)	0.231(2)	0.064(1)
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_B$	0.217(3)		0.743(22)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_V$	0.224(3)		0.726(14)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_R$	0.238(2)		0.711(6)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_I$	0.256(2)		0.706(3)	
	Spot parameters			
$co-latitude$	140(1)		-	
longitude	109.1(6)		-	
radius	18.3(4)		-	
$temp.factor$	0.802(1)		-	
P/S**	P		-	

*: Σταθερές παράμετροι
**: *Primary/Secondary*

Πίνακας 3.4: Οι τελικές παράμετροι του συστήματος $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ *με τη μέθοδο MC για το έτος 2014.*

	A		B	
Παράμετρος	Αα	Αβ	Βα	Ββ
T_0 (HJD)	2456346.78443(15)		2456347.85636(18)	
P (d)	1.30554317(68)		0.22771442(4)	
e	0*		0*	
ω (°)	-		-	
$phase\ shift$	0.00094(0)		0.0191(4)	
T(K)	5185(25)*	4242.7(1)	4700(50)*	4012(1)
q	0.806(7)*		0.397(6)*	
Ω	7.031(1)	7.559(1)	2.672(1)	3.994(5)
$i(°)$	83.2(1)		89.2(6)	
$L/(L_1+L_2+L_3)_B$	0.6918(1)	0.1082(1)	0.2913(1)	0.0085(1)
$L/(L_1+L_2+L_3)_V$	0.6619(1)	0.1206(1)	0.2897(1)	0.0101(1)
$L/(L_1+L_2+L_3)_R$	0.5936(1)	0.1230(1)	0.2883(1)	0.0115(1)
$L/(L_1+L_2+L_3)_I$	0.5573(1)	0.1427(2)	0.2862(1)	0.0138(1)
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_B$	0.2000(1)		0.7001(1)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_V$	0.2175(1)		0.7002(1)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_R$	0.2833(1)		0.7002(1)	
$L_3/(L_1+L_2+L_3)_I$	0.3000(1)		0.7000(1)	
	Spot parameters			
$co-latitude$	80.10(2)		89.4(8)	
$longitude$	74.096(3)		200.7(1)	
$radius$	29.995(2)		29.98(2)	
$temp.factor$	0.962(1)		0.701(1)	
P/S**	P		P	

*: Σταθερές παράμετροι
**: $Primary/Secondary$

3.4 Τα τελικά θεωρητικά μοντέλα

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα των μεθόδων DC και MC, οι λύσεις βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους και περιγράφουν ικανοποιητικά το σύστημα. Για την τελική μοντελοποίηση των συστημάτων επιλέξαμε τη μέθοδο DC, παρ΄ όλο που έχει μεγαλύτερα σφάλματα, λόγω της μεγαλύτερης ορθότητας των παραμέτρων όσον αφορά το φυσικό τους νόημα. Οι θεωρητικές καμπύλες που προέκυψαν με βάση τα παραπάνω φαίνονται στις Εικόνες 3.7 και 3.8.

Για μια καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων, κατασκευάσαμε και την τριδιάστατη απεικόνιση των συστημάτων που φαίνεται στις Εικόνες 3.9-3.12. Για το σύστημα $V994$ Her, ο τρόπος που βλέπουμε τα συστήματα στη φάση 0.5 επιβεβαιώνει την εκκεντρότητα της τροχιάς τους, ενώ όσο μεγαλύτερη είναι αυτή τόσο μεγαλύτερη είναι και η απόσταση των μελών από τη στιγμή της έκλειψης. Για το σύστημα $1SWASP$ $J093010.78 + 533859.5$ οι τροχιές είναι κυκλικές, ενώ το μέγεθος των κηλίδων υποδηλώνει έντονη μαγνητική δραστηριότητα.

Τέλος, με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα μοντελοποίησης και τη φασματοσκοπία των Zasche and Uhlař (2016); Lohr et al. (2015), επαναπροσδιορίσαμε τις απόλυτες παραμέτρους των δύο συστημάτων. Αυτές είναι η μάζα M, ο ημιάξονας της τροχιάς α, η ακτίνα R, η θερμοκρασία T και η φωτεινότητα L. Οι αντίστοιχες τιμές για κάθε μέλος φαίνονται στον Πίνακα 3.5.

Πίνακας 3.5: Οι απόλυτες παράμετροι των τετραπλών εκλειπτικών συστημάτων $V994$ Her και $1SWASP$ $J093010.78 + 533859.5$.

		M $(M_\odot)$	α $(R_\odot)$	R $(R_\odot)$	T (K)	L $(L_\odot)$
$V994$ Her	Aα	3.04(14)	5.64(11)	2.46(4)	12000(250)	112.4(9.9)
	Aβ	2.61(20)	6.58(13)	1.75(3)	9538(50)	22.7(8)
	Bα	1.82(8)	4.22(8)	1.59(2)	9000(250)	14.9(1.7)
	Bβ	1.91(15)	4.02(8)	1.43(2)	9185(80)	13.0(6)
$1SWASP$ $J093010$	Aα	0.84(2)	2.576(18)	0.978(7)	5185(25)	0.619(15)
	Aβ	0.68(2)	3.197(36)	0.671(5)	4207(12)	0.126(2)
	Bα	0.86(4)	0.473(6)	0.786(11)	4700(50)	0.270(14)
	Bβ	0.34(1)	1.192(23)	0.520(7)	4760(2)	0.124(4)

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις:

$$M_{1,2} = 1.0361 \cdot 10^{-7}(1-e^2)^{3/2}(K_1+K_2)^2 K_{2,1} P(sini)^{-3} \tag{3.4}$$

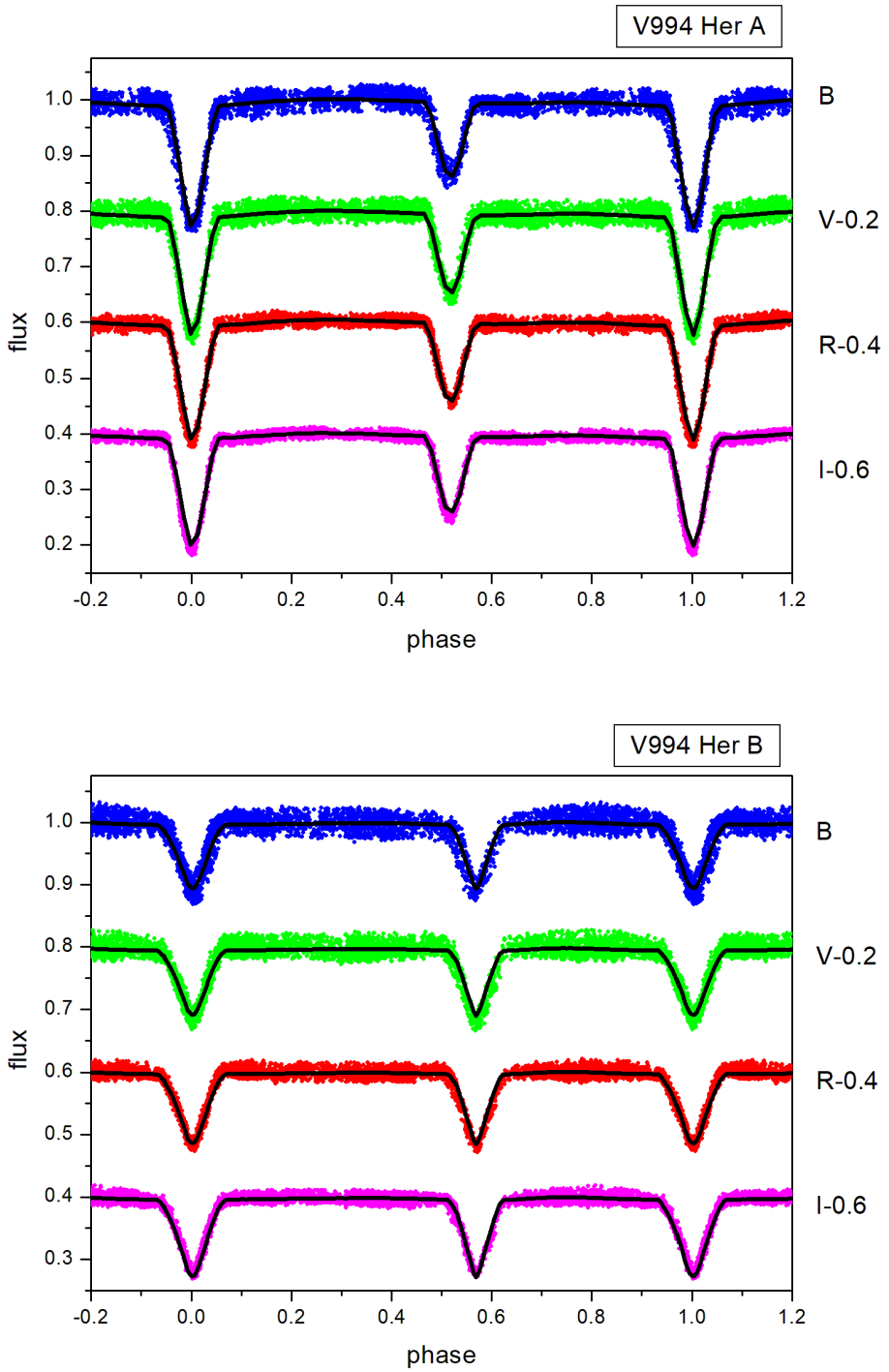
$$\alpha_{1,2} = 1.9758 \cdot 10^{-2}(1-e^2)^{3/2} K_{1,2} P(sini)^{-1} \tag{3.5}$$

$$R_{1,2} = \alpha r_{1,2} \tag{3.6}$$

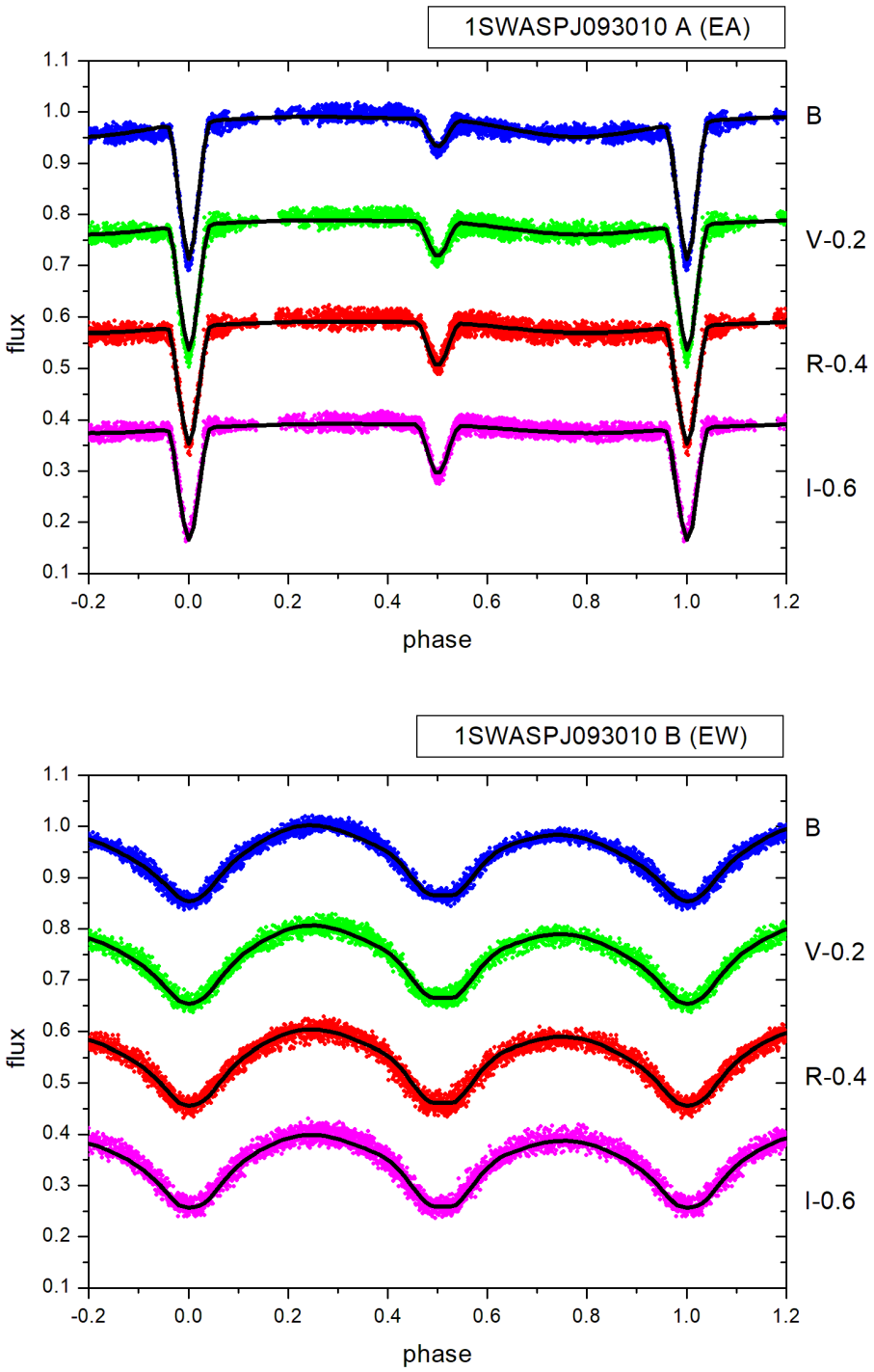
όπου $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ και $r_{1,2} = (r_{1,2,pole} \cdot r_{1,2,side} \cdot r_{1,2,back})^{1/3}$

$$L_{1,2} = R_{1,2}^2 (\frac{T_{1,2}}{T_\odot})^4 \tag{3.7}$$

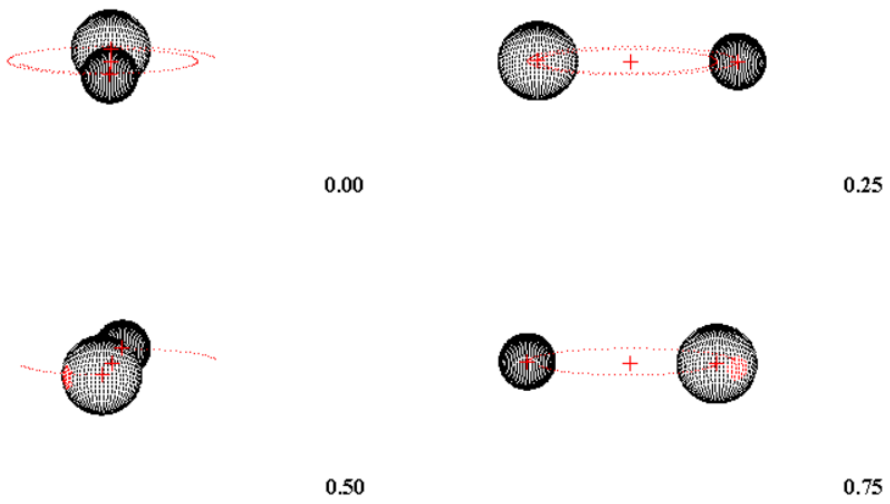
όπου $T_\odot = 5780\ K$.



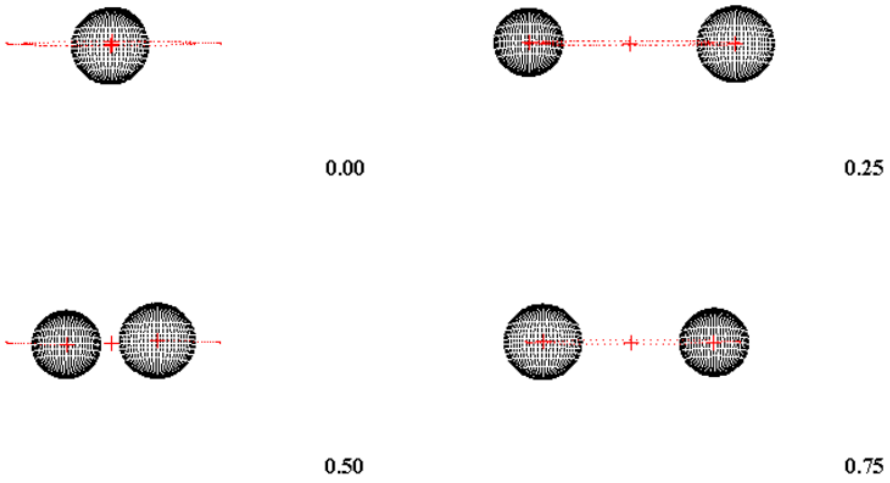
Εικόνα 3.7: Φωτομετρικές καμπύλες BVRI του συστήματος V994 Her για το έτος 2014, ύστερα από προσαρμογή των θεωρητικών μοντέλων που προέκυψαν με τη μέθοδο DC. Πάνω βρίσκεται το ζεύγος A με τη μεγαλύτερη τροχιακή περίοδο και κάτω το ζεύγος B με τη μικρότερη.



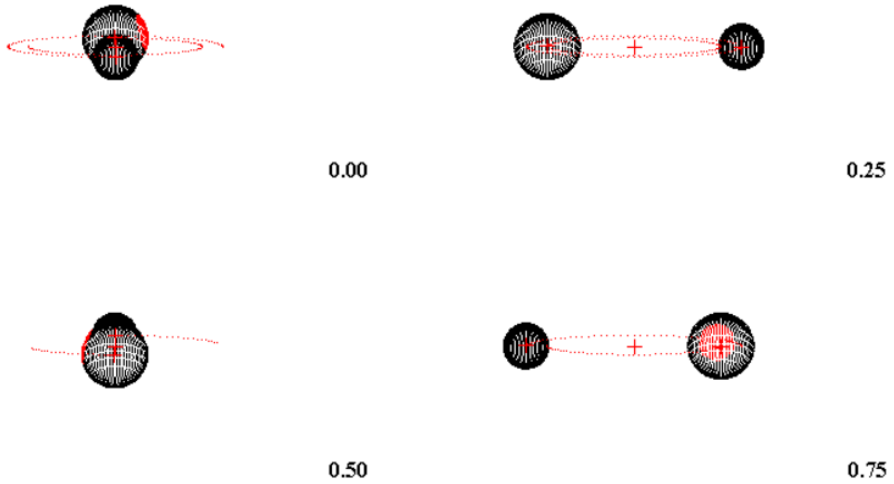
Εικόνα 3.8: Φωτομετρικές καμπύλες BVRI του συστήματος 1SWASP J093010.78+533859.5 για το έτος 2013, ύστερα από προσαρμογή των θεωρητικών μοντέλων που προέκυψαν με τη μέθοδο DC. Πάνω βρίσκεται το αποχωρισμένο σύστημα (EA) και κάτω το σύστημα σε επαφή (EW).



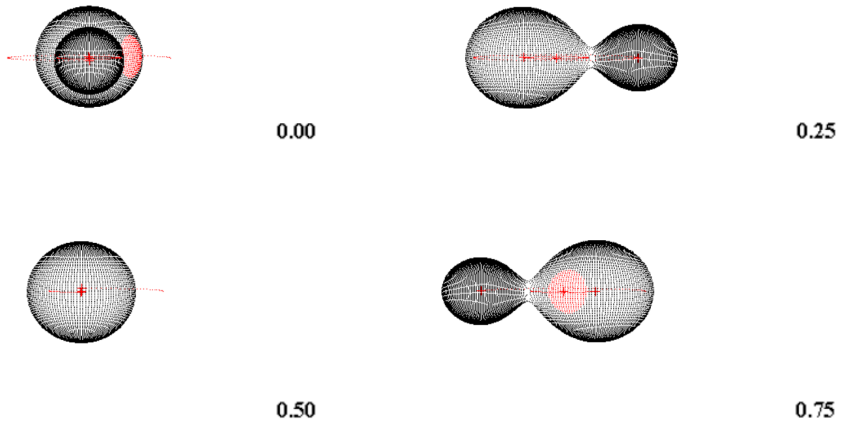
Εικόνα 3.9: Τριδιάστατη απεικόνιση του αποχωρισμένου ζεύγους A (long period) του συστήματος V994 Her.



Εικόνα 3.10: Τριδιάστατη απεικόνιση του αποχωρισμένου ζεύγους B (short period) του συστήματος V994 Her.



Εικόνα 3.11: Τριδιάστατη απεικόνιση του αποχωρισμένου ζεύγους A (EA) του συστήματος $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$.



Εικόνα 3.12: Τριδιάστατη απεικόνιση του ζεύγους σε επαφή B (EW) του συστήματος $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$.

Κεφάλαιο 4

Διερεύνηση διαγραμμάτων $O-C$

Τα διαγράμματα $O-C$ εκφράζουν τη διαφορά των μεγεθών O (*Observed*) και C (*Calculated*) συναρτήσει του χρόνου (Ηλιοκεντρική ημερομηνία (HJD), Εποχή (*Epoch*) κλπ.). Τα μεγέθη αυτά δίνονται από τις σχέσεις:

$$O = HJD \tag{4.1}$$

$$C = T_0 + PE \tag{4.2}$$

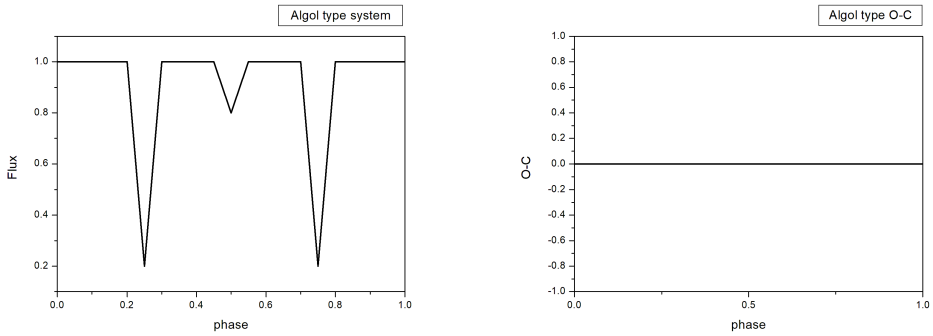
όπου HJD οι παρατηρούμενοι χρόνοι ελαχίστου, T_0 και P το ελάχιστο και η περίοδος της χρησιμοποιούμενης εφημερίδας και E η εποχή.

Στην αστρονομία ένα διάγραμμα $O-C$ σχετίζεται με τη μεταβολή ενός μεγέθους (συνήθως με την πάροδο του χρόνου) και χρησιμοποιείται για την αναζήτηση περιοδικοτήτων και μεταβολών. Αυτό έχει ως σκοπό την εύρεση και τη μελέτη φαινομένων και φυσικών μηχανισμών που σχετίζονται με το παρατηρούμενο αντικείμενο. Όταν οι μεταβολές αυτές υπερβαίνουν τα πειραματικά λάθη και είναι συστηματικές, υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής ενός καλύτερου μοντέλου για το σύστημα που βρίσκεται υπό μελέτη.

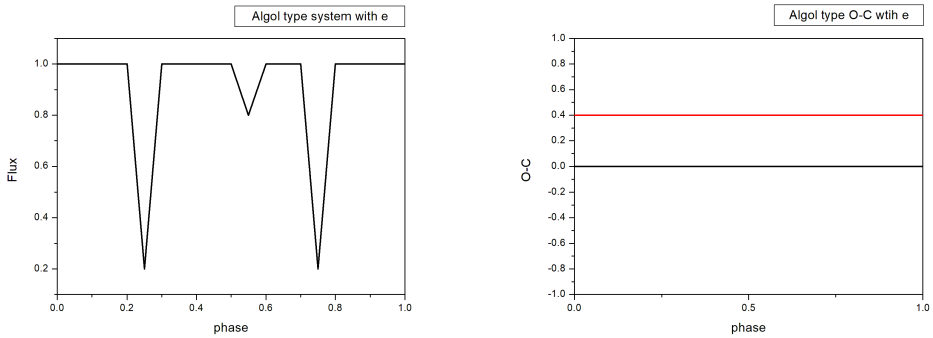
Όσον αφορά τα εκλειπτικά αστρικά συστήματα, τα διαγράμματα $O-C$ τα χρησιμοποιούμε για την ανίχνευση τυχόν μεταβολών της περιόδου περιφοράς του συστήματος, οι οποίες προκαλούνται στις εξής περιπτώσεις:

- *Μετάπτωση της γραμμής των αψίδων.* Περιοδικές μεταβολές στην περίπτωση συστημάτων με μεγάλη εκκεντρότητα που μπορεί να οφείλονται σε συνδυασμό παραγόντων όπως το φαινόμενο *Kozai*, σχετικιστικά φαινόμενα και παλιρροιακά φαινόμενα.

- *Παρέλξεις από τρίτο σώμα (φαινόμενο LITE).* Περιοδικές ημιτονοειδής μεταβολές με περίοδο ίση με εκείνη που απαιτείται για την περιφορά του τρίτου σώματος γύρω από το διπλό σύστημα.



Εικόνα 4.1: Φωτομετρική καμπύλη και διάγραμμα $O-C$ αποχωρισμένου συστήματος με $e=0$.



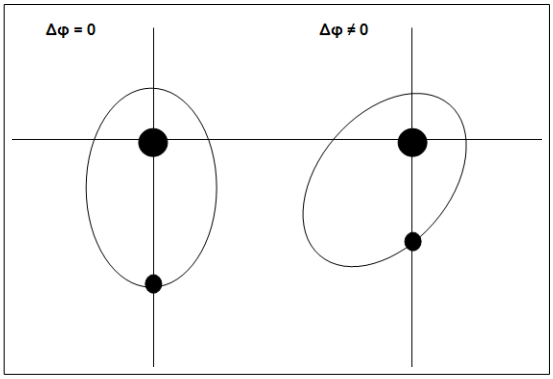
Εικόνα 4.2: Φωτομετρική καμπύλη και διάγραμμα $O-C$ αποχωρισμένου συστήματος με $e \neq 0$. Με μαύρο απεικονίζονται τα πρωτεύοντα ελάχιστα και με κόκκινο τα δευτερεύοντα.

- *Κύκλοι μαγνητικής δραστηριότητας.* Περιοδικές μεταβολές με περίοδο ίση με εκείνη της δραστηριότητας (αντίστοιχης της 11ετούς ηλιακής) ενός τουλάχιστον ψυχρού μέλους, οι οποίες μπορεί να οφείλονται και στη στενή αλληλεπίδραση των μελών του συστήματος.

Όταν το σύστημα δεν παρουσιάζει κάποια μεταβολή στην περίοδό του, το διάγραμμα $O-C$ αναμένεται να είναι μια οριζόντια ευθεία. Σε κάθε περίπτωση, αν η εφημερίδα που χρησιμοποιείται είναι λανθασμένη, το διάγραμμα αποκτά μια κλίση ως προς τον οριζόντιο άξονα ανεξαρτήτως της μορφής της καμπύλης.

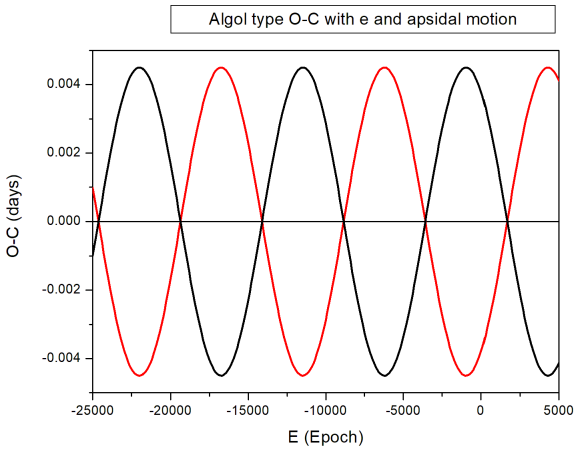
Αν έχουμε ένα αποχωρισμένο σύστημα που δεν παρουσιάζει μαγνητική δραστηριότητα, αναμένουμε φωτομετρική καμπύλη της μορφής της Εικόνας 4.1. Το αντίστοιχο διάγραμμα $O-C$ θα είναι μια οριζόντια ευθεία, αφού οι παρατηρούμενοι και υπολογιζόμενοι χρόνοι πρωτευόντων και δευτερευόντων ελαχίστων πρέπει να είναι ίσοι και επομένως να έχουν μηδενική διαφορά.

Στην περίπτωση που το σύστημα αυτό παρουσιάζει εκκεντρότητα, τότε τα δευτερεύοντα ελάχιστα θα εμφανίζονται σταθερά μετατοπισμένα και επομένως θα έχουν μη μηδενική διαφορά φάσης (Εικόνα 4.2), με αποτέλεσμα να μην ισαπέχουν οι χρόνοι εμφάνισης των πρωτευόντων και δευτερευόντων ελαχίστων.



Εικόνα 4.3: Μετατόπιση της γραμμής των αψίδων.

Όταν επιπλέον έχουμε και το φαινόμενο της μετάπτωσης της γραμμής των αψίδων (του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής τροχιάς του συστήματος), η τροχιά του συστήματος προβάλλεται κάθε στιγμή διαφορετικά στον παρατηρητή, όπως φαίνεται στην Εικόνα 4.3.

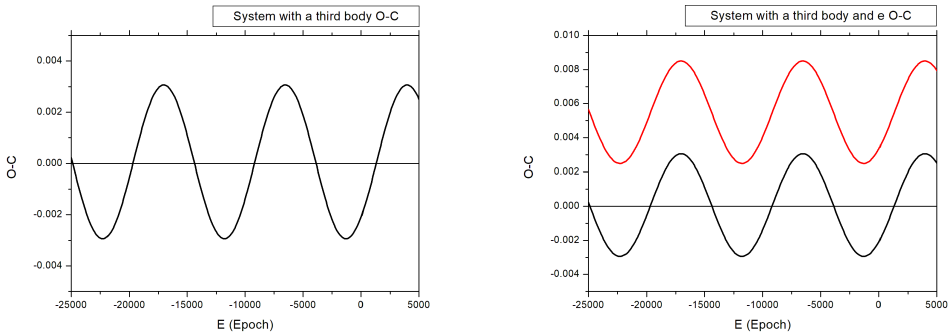


Εικόνα 4.4: Διάγραμμα $O-C$ αποχωρισμένου συστήματος με $e \neq 0$, q=1 και μετατόπιση της γραμμής των αψίδων. Με μαύρο απεικονίζονται τα πρωτεύοντα ελάχιστα και με κόκκινο τα δευτερεύοντα.

Έτσι, λόγω σταδιακής μετατόπισης του περιάστρου, η χρονική διαφορά μεταξύ πρωτεύοντος και δευτερευόντος ελαχίστου είναι περιοδικά μεταβαλλόμενη και όχι σταθερή. Το διάγραμμα $O-C$ σε αυτήν την περίπτωση θα έχει την ημιτονοειδή μορφή της Εικόνας 4.4, με διαφορά φάσης π (ή 180 μοιρών) σε κάθε είδος ελαχίστου, εφόσον οι αντίστοιχοι χρόνοι μετατόπισής τους μεταβάλλονται αντιδιαμετρικά. Όταν ο μεγάλος ημιάξονας της ελλειπτικής τροχιάς ευθυγραμμιστεί με τον παρατηρητή, τα ελάχιστα εμφανίζονται κανονικά στις φάσεις 0 και 0.5, με αποτέλεσμα τη μηδενική διαφορά στην τιμή του $O-C$. Αυτό αποτελεί το σημείο τομής των δύο ημιτονοειδών καμπυλών πάνω

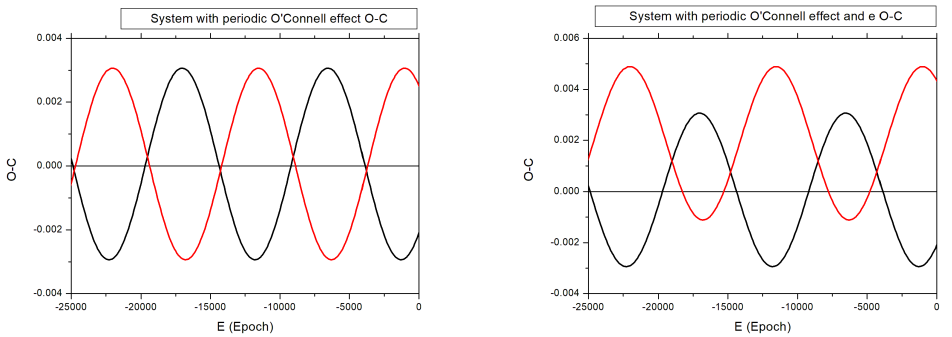
στον άξονα-X.

Όταν υπάρχει τρίτο σώμα σε τροχιά γύρω από το σύστημα το διάγραμμα $O-C$ αποκτά την ημιτονοειδή μορφή της Εικόνας 4.5, με περίοδο που εκφράζει την τροχιακή περίοδο της τροχιάς του γύρω από το σύστημα. Ένα τρίτο σώμα παρατηρείται με αυτό τον τρόπο, δεδομένου ότι πραγματοποιεί αμοιβαίες εκλείψεις με το σύστημα και επομένως μεταβάλλει τους παρατηρούμενους χρόνους ελαχίστων.



Εικόνα 4.5: Διάγραμμα $O-C$ συστήματος με τρίτο σώμα. Αριστερά $e=0$ και δεξιά $e \neq 0$.

Στην περίπτωση ύπαρξης περιοδικής μαγνητικής δραστηριότητας και συνεπώς φαινομένου $O'Connell$ τα παρατηρούμενα ελάχιστα (πρωτεύοντα και δευτερεύοντα) θα παρουσιάζουν μια περιοδική ημιτονοειδή μετατόπιση, αφού οι κηλίδες παραμορφώνουν τις καμπύλες φωτός, με αποτέλεσμα να υπολογίζεται εσφαλμένα ο ακριβής χρόνος των παρατηρούμενων ελαχίστων. Αν το φαινόμενο $O'Connell$ αντίστρεφεται περιοδικά, το διάγραμμα $O-C$ παίρνει την μορφή της Εικόνας 4.6. Στην περίπτωση αυτή τα ημίτονα έχουν τα ίδια πλάτη, γιατί οι φωτομετρικές καμπύλες έχουν ελάχιστα με παρόμοια βάθη τα οποία σαν αποτέλεσμα επηρεάζονται το ίδιο από τις κηλίδες.



Εικόνα 4.6: Διάγραμμα $O-C$ συστήματος περιοδική μαγνητική μεταβολή (φαινόμενο $O'Connell$). Αριστερά $e=0$ και δεξιά $e \neq 0$.

4.1 Κατασκευή διαγραμμάτων $O-C$

Για τη μελέτη των διαγραμμάτων $O-C$ και των μεταβολών αυτών χρησιμοποιήσαμε τον κώδικα των Zasche et al. (2009), που συνυπολογίζει την κίνηση των αψίδων μαζί με το φαινόμενο $LITE$ χρησιμοποιώντας τους χρόνους ελαχίστων των συστημάτων.

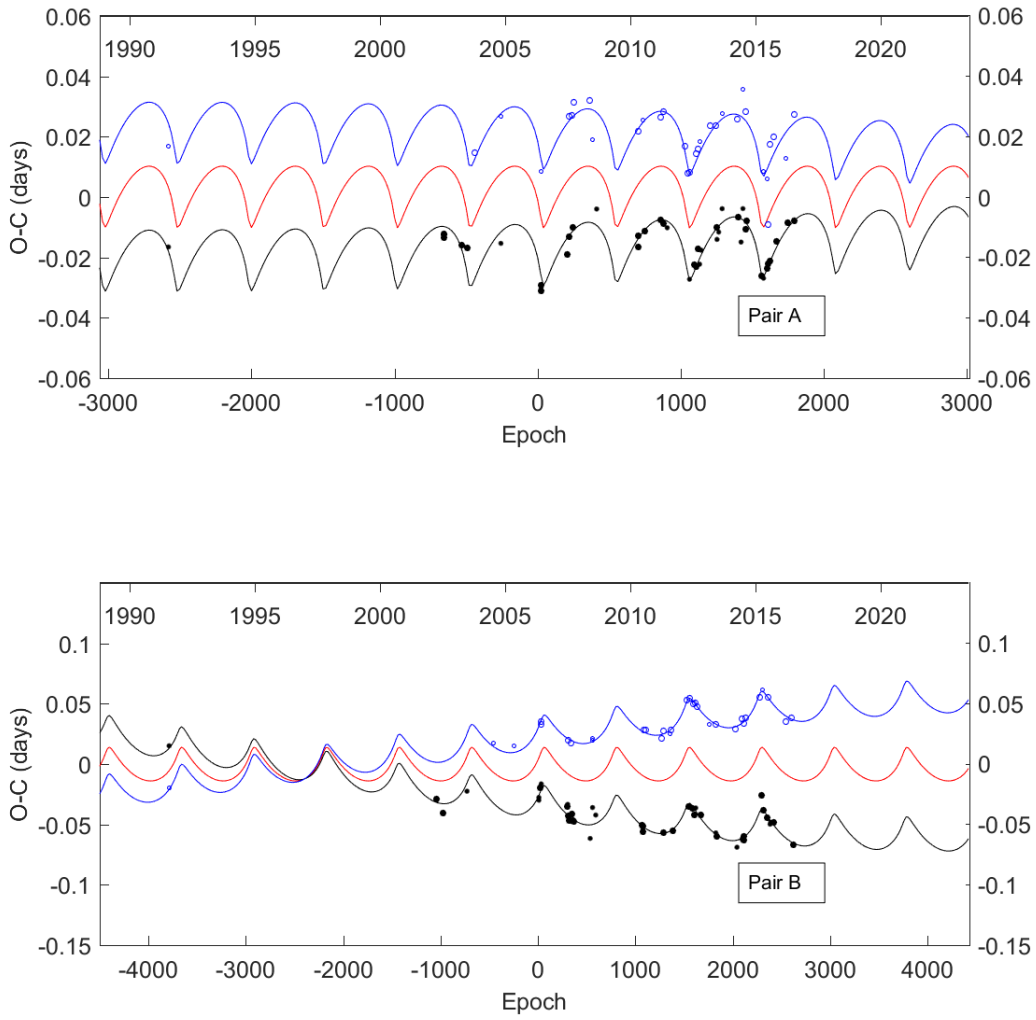
4.1.1 Το σύστημα $V994$ Her

Για την κατασκευή του διαγράμματος $O-C$ του συστήματος $V994$ Her χρησιμοποιήσαμε την ίδια εφημερίδα με τους Zasche and Uhlař (2016), προκειμένου να υπάρξει σύγκριση της χρονικής εξέλιξης του συστήματος και την κρατήσαμε σταθερή κατά την εύρεση των υπόλοιπων παραμέτρων. Για τα ελάχιστα με μεγάλα σφάλματα χρησιμοποιήσαμε μικρότερο στατιστικό βάρος. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 4.1.

Αυτό που βλέπουμε είναι ότι η εκκεντρότητα e_3, το πλάτος A, ο αρχικός χρόνος t_0, η κάθετη απόσταση $asini$ και η περίοδος P_3 προέκυψαν ίδια για τα δύο συστήματα στα πλαίσια του σφάλματος, που είναι αναμενόμενο αφού αναφέρονται στην κοινή τροχιά των δύο συστημάτων γύρω από το κοινό κέντρο μάζας. Οι παράμετροι της εκκεντρότητας e, του περιάστρου ω και της μετάπτωσης του περιάστρου $d\omega/dt$, αφορούν κάθε σύστημα ξεχωριστά. Η συνάρτηση μάζας $f(m_3)$ και η μάζα M_3 υπό γωνία i αφορούν το «τρίτο σώμα», δηλαδή το άλλο εκλειπτικό ζεύγος. Όπως γνωρίζουμε ήδη από φασματοσκοπία, η συνολική μάζα του $V994$ Her A είναι περίπου 6 $M_\odot$ και του $V994$ Her B είναι περίπου 4 $M_\odot$, το οποίο συνάδει με τη γωνία i που είναι σχεδόν 90° και άρα επιβεβαιώνει τα αποτελέσματα του κώδικα, με πολύ μεγάλη προσέγγιση λόγω των μεγάλων σφαλμάτων. Ακριβώς επειδή έχουμε μεγάλα σφάλματα στις μάζες, δεν μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την ύπαρξη του πέμπτου μέλους, τουλάχιστον από τα διαγράμματα $O-C$.

Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα του Πίνακα 4.1 με τον αντίστοιχο βιβλιογραφικό Πίνακα των Zasche and Uhlař (2016), παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα είναι σχεδόν ίδια και επιβεβαιώνουμε την ορθότητα αυτών, αφού η μόνη διαφορά βρίσκεται στα σφάλματα.

Από το διάγραμμα της Εικόνας 4.7 βλέπουμε αρχικά ότι υπάρχει ένας διαχωρισμός πρωτευόντων (μαύρη καμπύλη) και δευτερευόντων (μπλε καμπύλη) ελαχίστων, ο οποίος οφείλεται στην εκκεντρότητα της τροχιάς των δύο διπλών συστημάτων (e) για λόγους που εξηγήσαμε στην Παράγραφο 4. Από την άλλη, η περιοδικότητα των καμπυλών προκύπτει από την εκκεντρότητα της κοινής τροχιάς τους (e_3) γύρω από το κέντρο μάζας, ως αποτέλεσμα του φαινομένου $LITE$ (κόκκινη καμπύλη) για την περίπτωση τρίτου σώματος, που στην προκειμένη είναι το άλλο σύστημα. Αφαιρώντας την περιοδικότητα αυτή των 2.9 ετών λόγω της εκκεντρότητας e_3, προκύπτουν τα διαγράμματα της Εικόνας 4.8. Οι καμπύλες αυτές διατηρούν μια κλίση, η οποία οφείλεται στη μετάπτωση του περιάστρου πιθανώς λόγω διεργασιών που ερμηνεύονται από το φαινόμενο $Kozai$. Ενώ θα περιμέναμε να δούμε ένα ημιτονοειδές λόγω της μετάπτωσης της γραμμής των αψίδων, βλέπουμε απλά μια καμπύλη με κλίση, γιατί το φαινόμενο συμβαίνει με πολύ πιο αργό ρυθμό από την περιφορά του ενός συστήματος γύρω από το άλλο και έτσι το ημίτονο δεν είναι ορατό. Ο ρυθμός αυτός, δηλαδή το $d\omega/dt$, μεταφράζεται σε περίοδο



Εικόνα 4.7: Διάγραμμα $O-C$ του συστήματος $V994$ Her και προσαρμογή θεωρητικής καμπύλης λαμβάνοντας υπόψη το φαινόμενο $LITE$ και την κίνηση των αψίδων. Τα μαύρα σημεία συμβολίζουν τα πρωτεύοντα ελάχιστα και τα μπλε τα δευτερεύοντα.

Πίνακας 4.1: Οι παράμετροι της θεωρητικής καμπύλης του διαγράμματος $O-C$ για το σύστημα $V994\ Her$ με τη μέθοδο $LITE$.

Παράμετρος	A	B
T_0 (HJD)	2453855.1339(34)*	2453857.4361(63)*
P (d)	2.0832649(31)*	1.4200401(40)*
e	0.032(8)	0.13(4)
ω (°)	24(2)	300(2)
$d\omega/dt$ $(°/cycle)$	0.009(16)	0.012(10)
P_3 (yrs)	2.91(8)	2.90(15)
t_0 (HJD)	2456046(84)	2456043(161)
A $(days)$	0.010(3)	0.014(7)
ω_3 (°)	232(57)	64(91)
e_3	0.76(54)	0.67(86)
$\alpha sini$ (AU)	2.0(6)	3(1)
$f(m_3)$ $(M_\odot)$	1(4)	2(2)
$M_3(i = 90°)$ $(M_\odot)$	5(2)	5(5)
$M_3(i = 60°)$ $(M_\odot)$	6(2)	7(7)
$M_3(i = 30°)$ $(M_\odot)$	15(6)	21(24)

*: Σταθερές παράμετροι

228 ετών για το ζεύγος A και 117 ετών για το ζεύγος B από τη σχέση:

$$P_{aps} = \frac{360 \cdot P_{orb}}{\dot{\omega}} days \tag{4.3}$$

όπου P_{orb} η τροχιακή περίοδος και P_{aps} η περίοδος του φαινομένου μετάπτωσης των αψίδων. Στην Εικόνα 4.9 βλέπουμε τα τελικά σφάλματα αν αφαιρέσουμε τις καμπύλες από τα παρατηρησιακά σημεία, τα οποία πλέον δε φαίνεται να έχουν καμία κλίση ή περιοδικότητα.

Μια καλύτερη εποπτεία των αποστάσεων των ζευγών του συστήματος όπως υπολογίστηκαν από τα αστρομετρικά δεδομένα του *Gaia* και τα παραπάνω αποτελέσματα, δίνεται στον Πίνακα 4.2.

Για τον υπολογισμό των μεγεθών αυτών χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις:

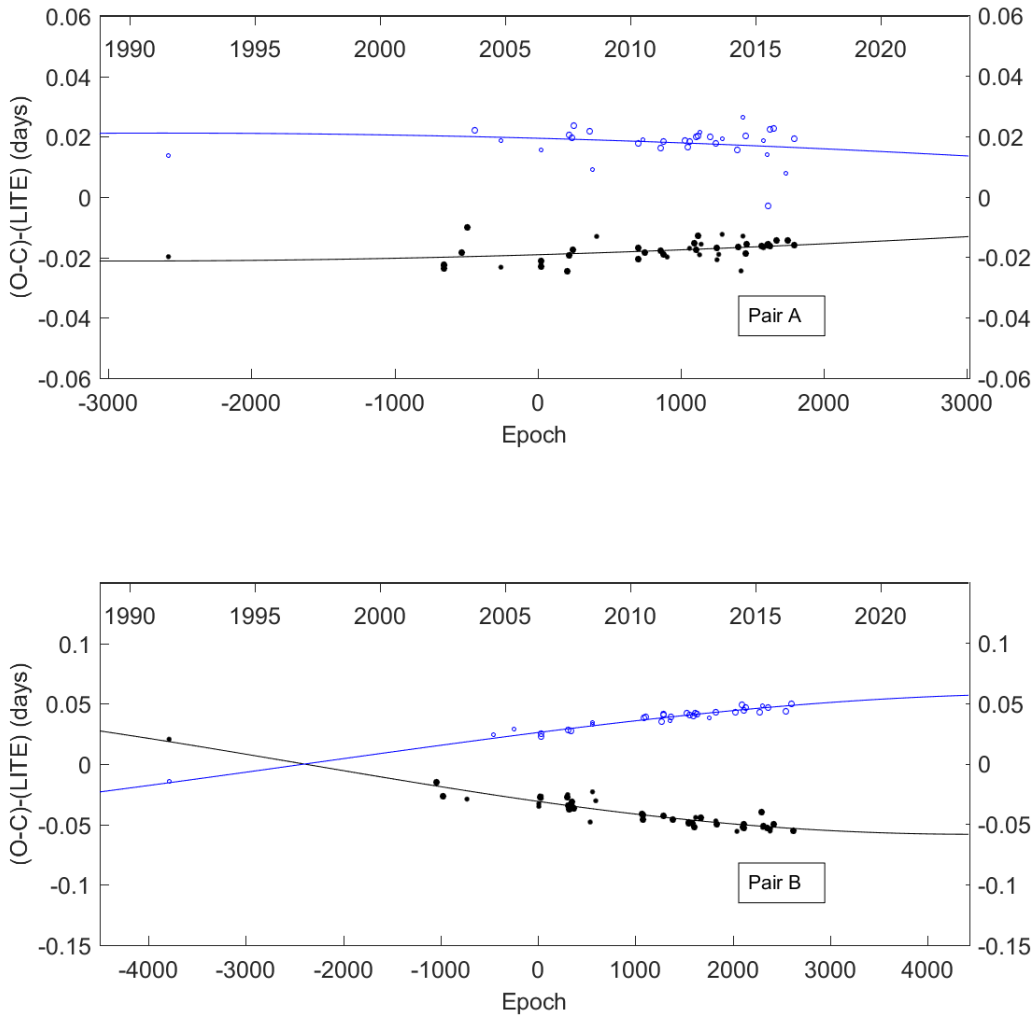
$$tan\pi_i = \frac{1}{D_i} A.U. \tag{4.4}$$

$$\theta = cos^{-1}[sin(\delta_1)sin(\delta_2) + cos(\delta_1)cos(\delta_2)cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \tag{4.5}$$

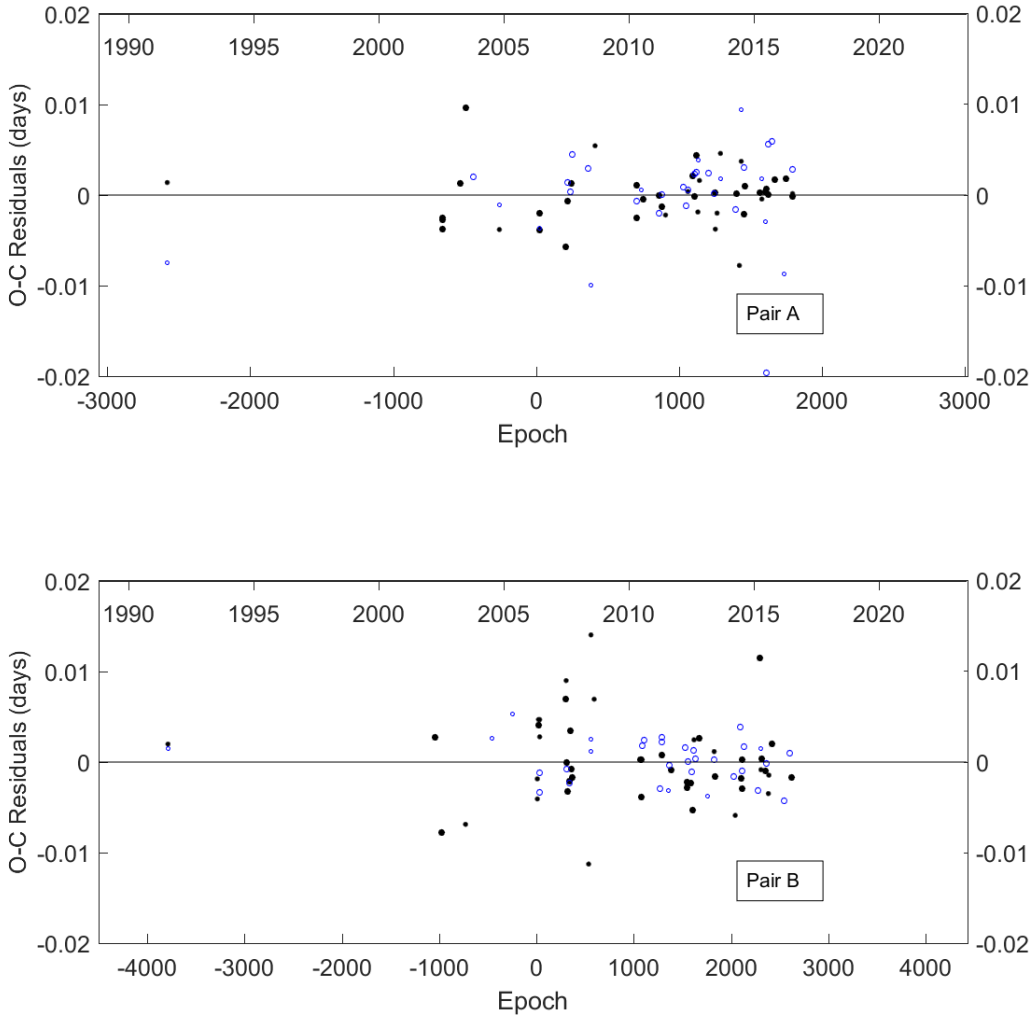
$$tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{\alpha_i}{D_i} \tag{4.6}$$

$$\alpha = \sum \alpha_i \tag{4.7}$$

$$\frac{\alpha^3}{T^2} = \frac{G \sum M_i}{4\pi^2} \tag{4.8}$$



Εικόνα 4.8: Διάγραμμα $O-C$ *του συστήματος* $V994$ Her *και προσαρμογή θεωρητικής καμπύλης λαμβάνοντας υπόψη μόνο την κίνηση των αψίδων. Τα μαύρα σημεία συμβολίζουν τα πρωτεύοντα ελάχιστα και τα μπλε τα δευτερεύοντα.*



Εικόνα 4.9: Σφάλματα διαγράμματος $O-C$ του συστήματος $V994\ Her$ ύστερα από προσαρμογή της θεωρητικής καμπύλης.

Πίνακας 4.2: Αποστάσεις και τροχιακές περίοδοι με βάση την αστρομετρία για το σύστημα $V994\ Her$.

$V994\ Her$	Ζεύγος Α	Ζεύγος Β	5ο μέλος
Παράλλαξη (mas)	3.1(1)		-
Απόσταση (pc)	322.58(1)		-
Γωνιακή απόσταση ($arcsec$)	0.013(1)		1.087
Τροχιακή απόσταση ($A.U.$)	4.3(2)		-
Τροχιακή περίοδος (yrs)	2.91(11)		-

όπου π_i η παράλλαξη του κάθε ζεύγους, D_i η απόσταση από τον παρατηρητή, θ η γωνιακή απόσταση των ζευγών μεταξύ τους, α και δ οι ουρανογραφικές συντεταγμένες RA, Dec, α_i και α ο μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς των ζευγών και του κέντρου μάζας, M_i οι μάζες των ζευγών και Τ η τροχιακή περίοδος γύρω από το κοινό κέντρο μάζας.

4.1.2 Το σύστημα $1SWASP\ J093010.78+533859.5$

Για την κατασκευή του διαγράμματος $O-C$ του συστήματος $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ υπολογίσαμε τη δική μας εφημερίδα συνδυάζοντας όλους τους βιβλιογραφικούς χρόνους ελαχίστων για μεγαλύτερη αξιοπιστία, δεδομένου ότι δεν έχουμε κάποια άλλη διαθέσιμη μελέτη διαγράμματος $O-C$ για να συγκρίνουμε. Τα σφάλματα των εφημερίδων υπολογίστηκαν με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Επίσης χρησιμοποιήσαμε στατιστικά βάρη, δίνοντας μεγαλύτερη αξιοπιστία στα ελάχιστα με τα μικρότερα σφάλματα.

Παρατηρώντας τα διαγράμματα $O-C$ της Εικόνας 4.10, βλέπουμε ότι για το ζεύγος Β φαίνεται να υπάρχει ένας παραβολικός όρος. Ο όρος αυτός υποδηλώνει μείωση της περιόδου του συστήματος και δεδομένου ότι το σύστημα βρίσκεται σε επαφή, είναι πιθανό να οφείλεται σε ανταλλαγή μάζας μεταξύ των μελών. Με κατάλληλη μαθηματική προσαρμογή η εξίσωση της παραβολής αυτής προκύπτει:

$$O-C = -2.1\cdot 10^{-9}(1)E^2 + 0.00023(5)E + const. \tag{4.9}$$

Από τον συντελεστή β του όρου $\sim E^2$ της παραπάνω εξίσωσης μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό μεταβολής της περιόδου και το ρυθμό μεταφοράς και απώλειας μάζας από τις σχέσεις:

$$\dot{P}(days/yr) = \frac{2*365.25}{P}\beta \tag{4.10}$$

$$\dot{M}(M_\odot/yr) = \frac{\dot{P}}{3P}\frac{M_1M_2}{M_1-M_2} \tag{4.11}$$

$$\dot{M}(M_\odot/yr) = -\frac{\dot{P}}{2P}(M_1+M_2) \tag{4.12}$$

Πίνακας 4.3: Οι μεταβολές της μάζας και της περίοδου του ζεύγους σε επαφή του συστήματος $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ λόγω ανταλλαγής μάζας.

$1SWASP\ J093010.78+533859.5\ B$	
Μεταβολή περιόδου $(days/yr)$	$-6.7\cdot10^{-6}(6)$
Μεταφορά μάζας $(M_{\odot}/yr)$	$-1.7\cdot10^{-5}(1)$
Απώλεια μάζας $(M_{\odot}/yr)$	$1.8\cdot10^{-5}(2)$

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 4.3.

Αφαιρώντας τον παραβολικό όρο από τα σημεία και προσαρμόζοντας κατάλληλα τα ελάχιστα, ακολουθήσαμε την ίδια διαδικασία με αυτή του συστήματος $V994\ Her$ και τα αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 4.4.

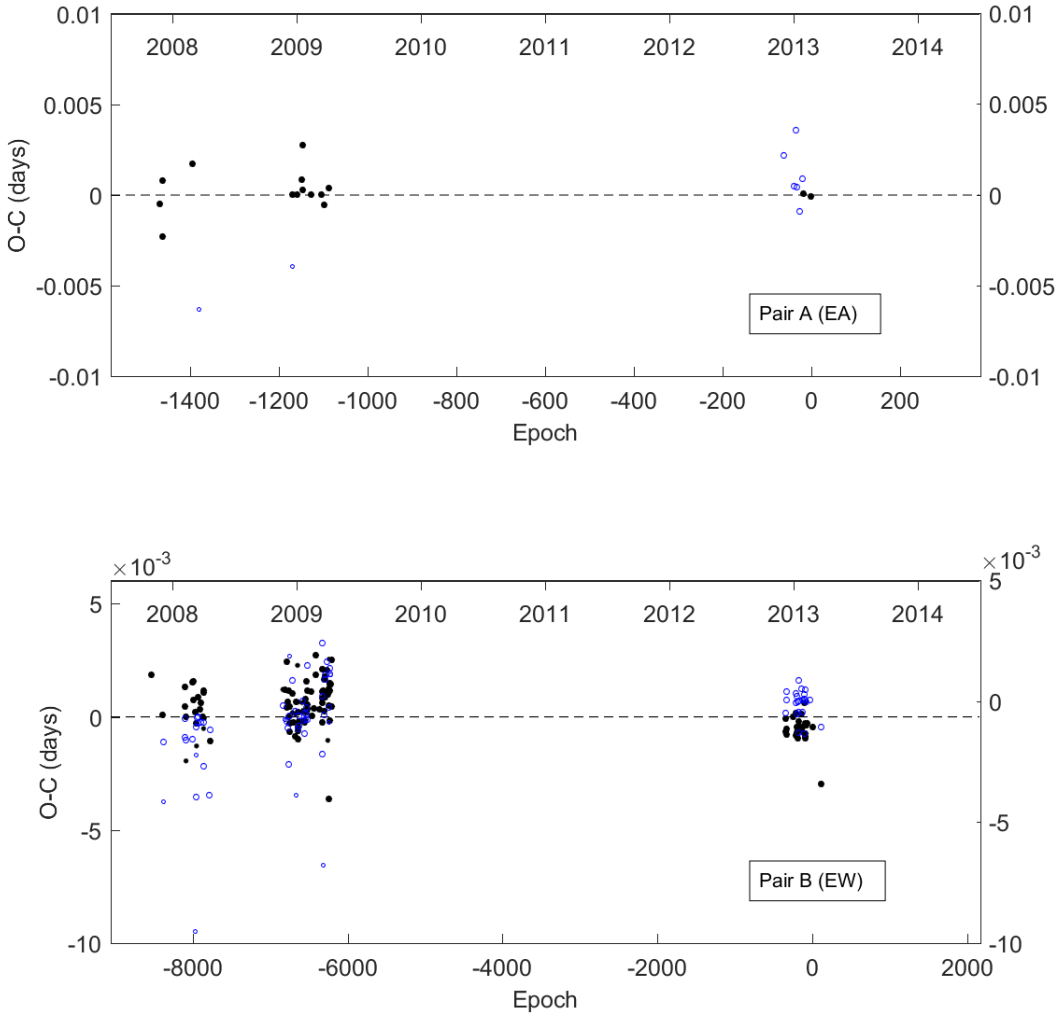
Πίνακας 4.4: Οι παράμετροι της θεωρητικής καμπύλης του διαγράμματος $O-C$ για το σύστημα $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ με τη μέθοδο $LITE$.

Παράμετρος	A	B
$T_0\ (HJD)$	2456346.78443(15)*	2456347.85636(18)*
$P\ (d)$	1.3055432(7)*	0.22771442(4)*
e	-	0.018(4)
ω (°)	-	68.4(1)
$d\omega/dt\ (°/cycle)$	-	0.0253(8)
$P_3\ (yrs)*$	1314	1314
$t_0\ (HJD)$	-	2372997
$A\ (days)$	-	0.0004
ω_3 (°)	-	-
e_3	-	-

*: Σταθερές παράμετροι

Στην περίπτωση του συστήματος $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ η κόκκινη καμπύλη του φαινομένου $LITE$ μοιάζει με ευθεία (Εικόνα 4.11) και για τα δύο συστήματα και ανταποκρίνεται σε τροχιακή περίοδο 816 ετών (Πίνακας 4.4), την οποία θεωρήσαμε σταθερή παράμετρο, αφού το φάσμα των παρατηρήσεών μας δε μας επιτρέπει τον επαναπροσδιορισμό της από τα διαγράμματα $O-C$. Την τιμή αυτή της περιόδου, η οποία εκφράζει την κίνηση των δύο συστημάτων γύρω από το κοινό κέντρο μάζας, υπολογίσαμε από τις νεότερες αστρομετρικές παραμέτρους του δορυφόρου $Gaia$, σύμφωνα με τις Σχέσεις 4.4-4.8. Οι παράμετροι αυτές μαζί με τις υπολογιζόμενες αποστάσεις και την τροχιακή περίοδο φαίνονται στον Πίνακα 4.5.

Παρόμοια τροχιακή περίοδο υπολογίζεται να έχει και το πέμπτο μέλος, σύμφωνα με τους Lohr et al. (2015) και άρα ούτε αυτή μπορεί να φαίνεται στα διαγράμματα $O-C$ για το χρονικό εύρος παρατηρήσεων που διαθέτουμε. Για το ζεύγος A βλέποντας και



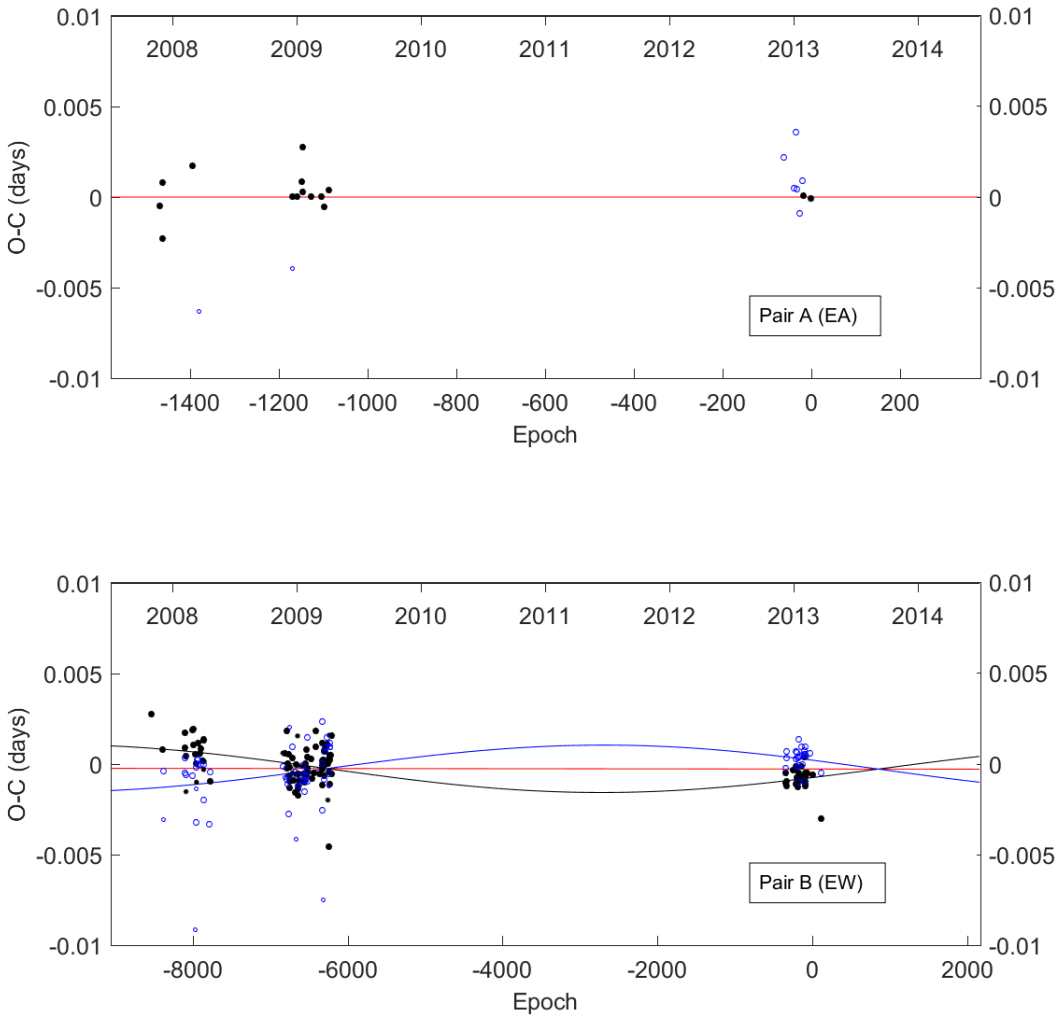
Εικόνα 4.10: Διάγραμμα $O-C$ *του συστήματος* $1SWASP\ J093010.78+533859.5$. *Τα μαύρα σημεία συμβολίζουν τα πρωτεύοντα ελάχιστα και τα μπλε τα δευτερεύοντα.*

Πίνακας 4.5: Αποστάσεις και τροχιακές περίοδοι με βάση την αστρομετρία για το σύστημα $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$.

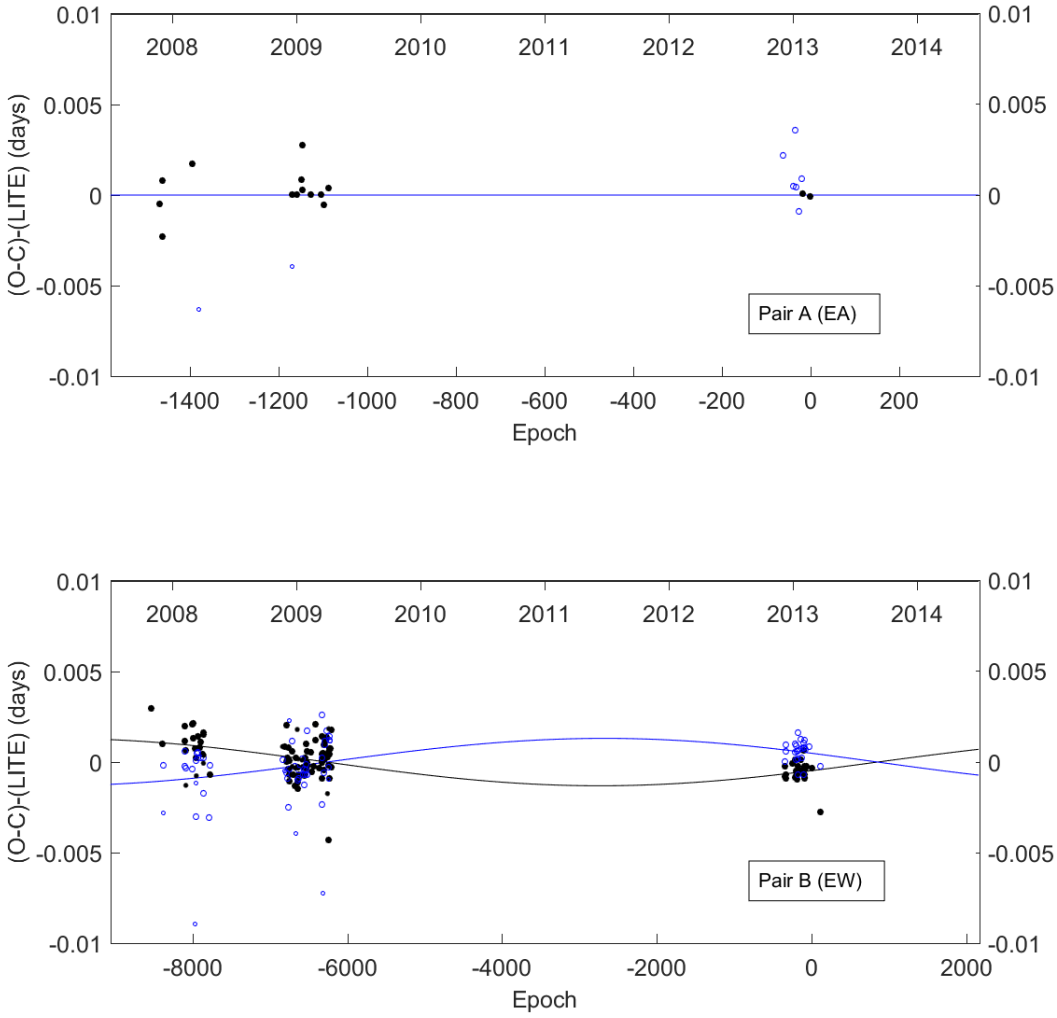
$1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$	Ζεύγος A	Ζεύγος B	5ο μέλος
Παράλλαξη (mas)	24(1)	14.29(6)	-
Απόσταση (pc)	42.44(1)	70.06(1)	83
Γωνιακή απόσταση ($arcsec$)	2.17		-
Τροχιακή απόσταση ($A.U.$)	122.06(2)		-
Τροχιακή περίοδος (yrs)	816(8)		-

το διάγραμμα της Εικόνας 4.12 βλέπουμε ότι δεν υπάρχει καμία μεταβολή ή περιοδικότητα και επομένως στο εύρος των ετών αυτών το σύστημα δε δίνει ένδειξη για τρίτο σώμα, εκκεντρότητα ή μαγνητικό κύκλο, γεγονός στο οποίο καταλήγουμε με μεγάλη αβεβαιότητα λόγω των πολύ λίγων σημείων. Για το ζεύγος B όμως, παρατηρούμε ένα περιοδικό διαχωρισμό πρωτευόντων και δευτερευόντων ελαχίστων. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι οφείλεται στη μετάπτωση του περιάστρου των συστημάτων, λόγω της μεταξύ τους βαρυτικής αλληλεπίδρασης. Όμως, κάτι τέτοιο είναι αδύνατο δεδομένου ότι οι τροχιές των μελών είναι κυκλικές.

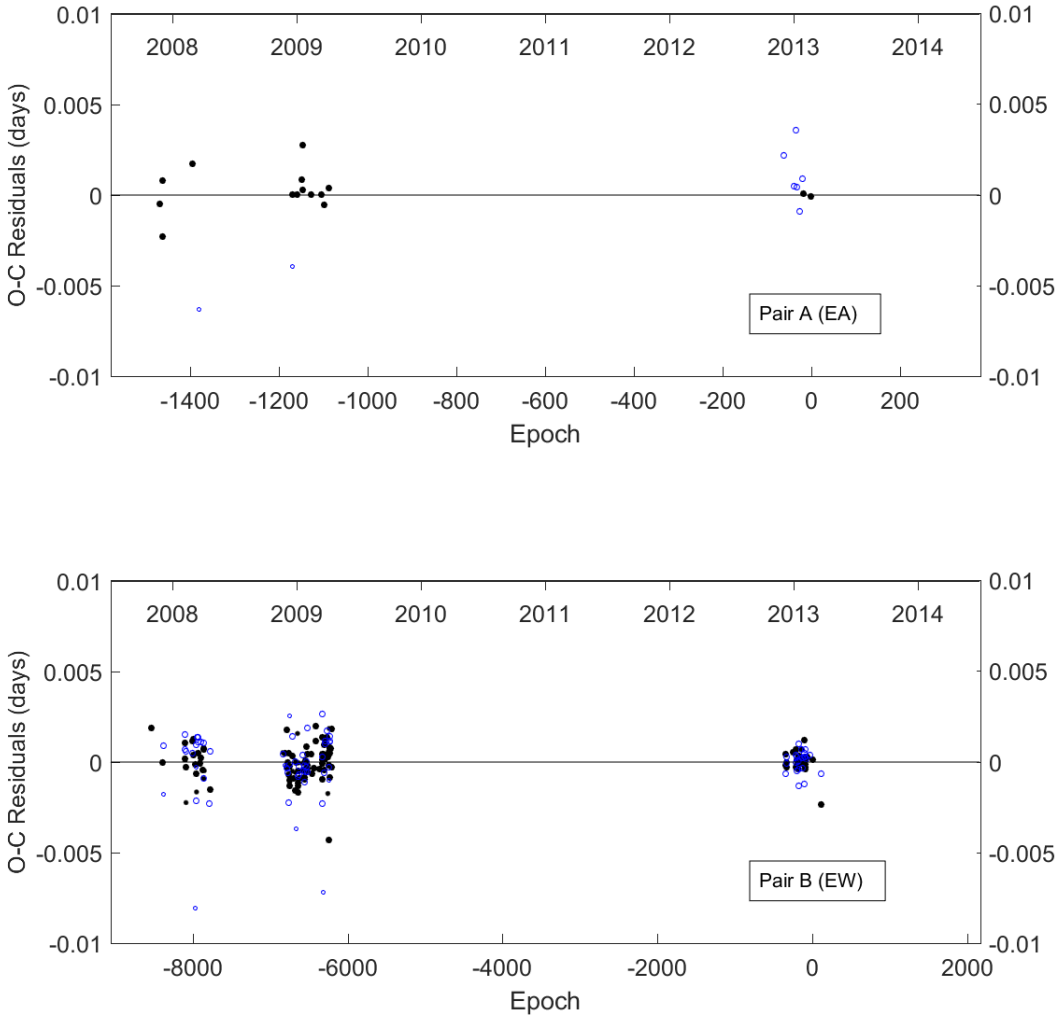
Από την άλλη, παρατηρώντας τις θερμοκρασίες των αστεριών βλέπουμε ότι είναι πολύ ψυχρά και επομένως είναι αναμενόμενο να εμφανίζουν έντονη μαγνητική δραστηριότητα, κάτι που επιβεβαιώνουν και οι φωτομετρικές καμπύλες που παρουσιάσαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο. Το συμπέρασμα αυτό ενισχύει και το γεγονός ότι το σύστημα είναι σε επαφή και παρουσιάζει ανταλλαγή μάζας και άρα μπορεί να εμφανίζει κηλίδες λόγω βαρυτικής αλληλεπίδρασης. Επομένως, η περιοδικότητα αυτή θα μπορούσε να συνδέεται με το φαινόμενο $O'Connell$, το οποίο αντιστρέφεται περιοδικά και προκαλεί το διαχωρισμό των πρωτευόντων και δευερευόντων ελαχίστων. Υπολογίζοντας την περιοδικότητα αυτής της μεταβολής προκύπτει ένας κύκλος 8.87(8) ετών. Η εξίσωση που περιγράφει τα πρωτεύοντα και τα δευτερεύοντα ελάχιστα είναι κοινή, αφού τα βάθη των ελαχίστων είναι σχεδόν ίδια στις καμπύλες και επομένως επηρεάζονται το ίδιο από το φαινόμενο $O'Connell$. Η αντιστροφή αυτή του φαινομένου υποδηλώνει *spot migration*, δηλαδή διαφορετική περιστροφή και περιφορά των μελών, κάτι που δεν μπορούμε να επιβεβαιώσουμε από τα διαγράμματα $O - C$, λόγω της διασποράς και της ποσότητας των σημείων. Όμως, βλέπουμε ότι οι φωτομετρικές καμπύλες του 2013 των Gazeas (2015); Koo et al. (2014); Lohr et al. (2015) παρουσιάζουν αντίστροφο φαινόμενο $O'Connell$, όπως προβλέπεται και από το διάγραμμα $O - C$, ενώ οι καμπύλες του 2008 από τα δεδομένα των Lohr et al. (2013) που μας δόθηκαν ύστερα από προσωπική επικοινωνία, παρουσιάζουν ορθό φαινόμενο $O'Connell$, κάτι που επίσης προβλέπεται από το διάγραμμα $O - C$. Επομένως, ενώ έχουμε μεγάλη διασπορά στα σημεία και άρα αβεβαιότητα, οι ενδείξεις που επιβεβαιώνουν το αποτέλεσμα είναι αρκετά ισχυρές. Στην Εικόνα 4.13, βλέπουμε τα τελικά σφάλματα αφού έχουμε αφαιρέσει τις παραπάνω περιοδικότητες, τα οποία δε φαίνεται να έχουν πλέον κάποιο μοτίβο.



Εικόνα 4.11: Διάγραμμα $O-C$ *του συστήματος* $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ *και προσαρμογή θεωρητικής καμπύλης λαμβάνοντας υπόψη το φαινόμενο* $LITE$. *Τα μαύρα σημεία συμβολίζουν τα πρωτεύοντα ελάχιστα και τα μπλε τα δευτερεύοντα.*



Εικόνα 4.12: Διάγραμμα $O-C$ του συστήματος $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ και προσαρμογή θεωρητικής καμπύλης, έχοντας αφαιρέσει την περιοδικότητα λόγω φαινομένου $LITE$. Τα μαύρα σημεία συμβολίζουν τα πρωτεύοντα ελάχιστα και τα μπλε τα δευτερεύοντα.



Εικόνα 4.13: Σφάλματα διαγράμματος $O-C$ *του συστήματος* $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ *ύστερα από προσαρμογή της θεωρητικής καμπύλης.*

Κεφάλαιο 5

Μελέτη της Κεπλεριανής κίνησης και των τροχιών

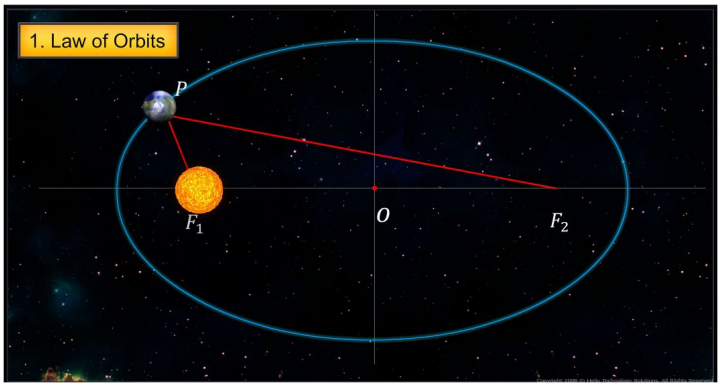
Προκειμένου να υπολογίσουμε την τροχιά των μελών των τετραπλών συστημάτων που μελετάμε θα πρέπει να μελετήσουμε την κίνηση που εκτελούν γύρω από το κέντρο μάζας τους. Στην περίπτωσή μας θα επιλύσουμε το Κεπλεριανό πρόβλημα για κάθε διπλό μέλος ξεχωριστά. Το Κεπλεριανό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα Μηχανικής, το οποίο αφορά ένα διπλό σύστημα σωμάτων, που εκτελούν ελλειπτικές τροχιές γύρω από το κέντρο μάζας τους. Η κίνησή τους αυτή βασίζεται στη βαρυτική αλληλεπίδραση, που σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{F} = \frac{-GMm}{\tau^3}\vec{\tau} \tag{5.1}$$

όπου τ η απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων.

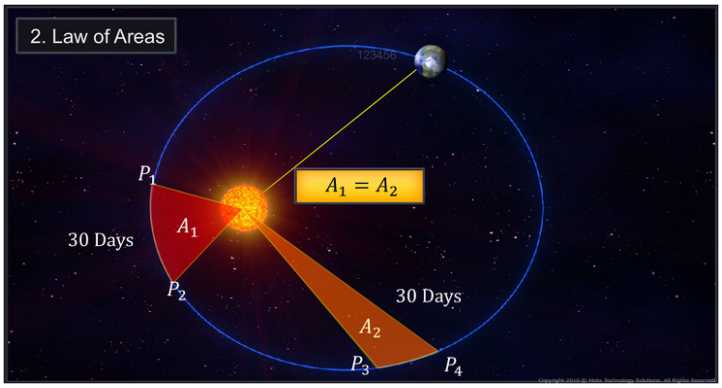
Επιπλέον, βασίζεται στους τρεις νόμους του Κέπλερ για τα πλανητικά συστήματα, οι οποίοι είναι:

i **Ο 1ος νόμος του Κέπλερ ή νόμος των ελλειπτικών τροχιών**: *Οι τροχιές των πλανητών είναι ελλείψεις, των οποίων τη μία εστία, κοινή σε όλες τις πλανητικές τροχιές, κατέχει ο Ήλιος (Σχήμα 5.1).*



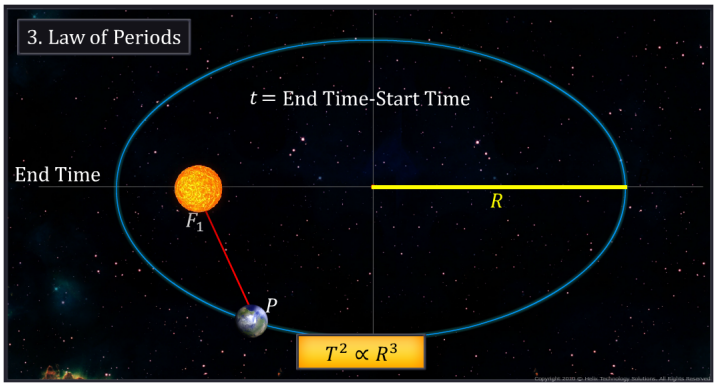
Εικόνα 5.1: Πλανητική τροχιά με βάση τον 1ο νόμο του Κέπλερ

ii **Ο 2ος νόμος του Κέπλερ ή νόμος των εμβαδών**:*Η επιβατική ακτίνα Ήλιου-πλανήτη γράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους ή εμβαδά ανάλογα των χρόνων (Σχήμα 5.2).*



Εικόνα 5.2: Πλανητική τροχιά με βάση τον 2ο νόμο του Κέπλερ

iii **Ο 3ος νόμος του Κέπλερ ή νόμος των αστρικών περιφορών**:*Τα τετράγωνα των χρόνων των αστρικών περιφορών των πλανητών είναι ανάλογα των κύβων της μέσης απόστασης από τον Ήλιο (Σχήμα 5.3).*



Εικόνα 5.3: Πλανητική τροχιά με βάση τον 3ο νόμο του Κέπλερ

Η Κεπλεριανή αυτή κίνηση είναι τετριμμένη όσον αφορά την εξέλιξη της στο χώρο, αλλά καθόλου τετριμμένη ως προς την εξέλιξή της στο χρόνο, η οποία μάλιστα απαιτεί διάφορες τεχνικές για την επίλυση της. Έτσι το Κεπλεριανό πρόβλημα αφορά τον προσδιορισμό των θέσεων και των ταχυτήτων ενός συστήματος αστρονομικών αντικειμένων, στο χρόνο.

Όταν παρατηρούμε συστήματα σωμάτων δεν βρισκόμαστε πάντα στο επίπεδο της τροχιάς τους, αλλά τα παρατηρούμε υπό διάφορες γωνίες ανάλογα με τη θέση τους στον ουράνιο θόλο, με αποτέλεσμα να βλέπουμε μια προβολή της πραγματικής έλλειψης της τροχιάς τους και το πρόβλημα να γίνεται τριδιάστατο. Γι' αυτό, είναι αναγκαία η εφαρμογή μετασχηματισμών που μας ανάγουν από το επίπεδο του παρατηρητή στο πραγματικό επίπεδο της έλλειψης.

Από την άλλη, τα αντικείμενα που μελετάμε δε βρίσκονται πάντα στο ηλιακό μας σύστημα, αλλά τις περισσότερες φορές βρίσκονται εκτός αυτού, με αποτέλεσμα όταν παρατηρούμε συστήματα τέτοιων αντικειμένων να υπεισέρχονται σχετικές κινήσεις που καθιστούν δύσκολη τη μελέτη τους στο ηλιοκεντρικό σύστημα. Γι' αυτό, είναι αναγκαίο να αναγάγουμε τις παρατηρήσεις μας από το ηλιοκεντρικό στο βαρυκεντρικό σύστημα.

Σαν πρώτο βήμα, λοιπόν, θα μελετήσουμε πώς μεταβάλλονται οι συντεταγμένες της τροχιάς από την προβαλλόμενη στην πραγματική έλλειψη και με ποιες σχέσεις και μετασχηματισμούς συνδέονται.

Έστω ότι η προβαλλόμενη (παρατηρούμενη) έλλειψη περιγράφεται από ένα σύστημα συντεταγμένων (ξ,η,ζ) και η πραγματική έλλειψη από ένα σύστημα συντεταγμένων (x, y, z).

Εφόσον αυτό που παρατηρούμε είναι οι ουρανογραφικές συντεταγμένες του αντικειμένου, θα πρέπει να τις μετατρέψουμε στο σύστημα συντεταγμένων (ξ,η,ζ), όπου οι άξονες ξ,η θα βρίσκονται στο επίπεδο του ουράνιου ισημερινού (το επίπεδο της εκλειπτικής για το ηλιοκεντρικό σύστημα) και ο ζ θα ταυτίζεται με τον άξονα παρατήρησης (*line of sight*).

Για να προσδιορίσουμε την πραγματική έλλειψη είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τρεις διαφορετικές γωνίες (Σχήμα 5.4). Τη γωνία Ω (*ascending node*) που σχηματίζει η γραμμή των κόμβων (τομή του επιπέδου της έλλειψης με τον ουράνιο ισημερινό) με

τη γραμμή του αναβιβάζοντος συνδέσμου (γγ′ στην περίπτωση του ηλιοκεντρικού συστήματος, κατά μήκος του άξονα ξ στην περίπτωσή μας), τη γωνία i (*inclination*) που σχηματίζει το επίπεδο της έλλειψης με το επίπεδο του ουράνιου ισημερινού και τη γωνία ω που εκφράζει τη στροφή της έλλειψης γύρω από την κύρια εστία, δηλαδή τη γωνία που σχηματίζει η γραμμή των κόμβων με το περίκεντρο της έλλειψης. Στην περίπτωσή μας θα θεωρήσουμε ω=0.

Για το σκοπό αυτό, θα εκμεταλλευτούμε την καθετότητα του διανύσματος της στροφορμής με το επίπεδο της πραγματικής έλλειψης. Δηλαδή, για τυχαίο διάνυσμα $\vec{\tau} \cdot \vec{l} = 0$. Άρα η στροφορμή στο σύστημα αξόνων (ξ,η,ζ) θα σχηματίζει γωνία i με τον άξονα ζ και γωνία Ω με τον άξονα ξ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αναλύοντας σε συνιστώσες τελικά προκύπτουν:

$$cosi = \frac{l_\zeta}{\sqrt{{l_\eta}^2 + {l_\xi}^2 + {l_\zeta}^2}} \Rightarrow i = arccos(\frac{l_\zeta}{\sqrt{{l_\eta}^2 + {l_\xi}^2 + {l_\zeta}^2}}) \tag{5.2}$$

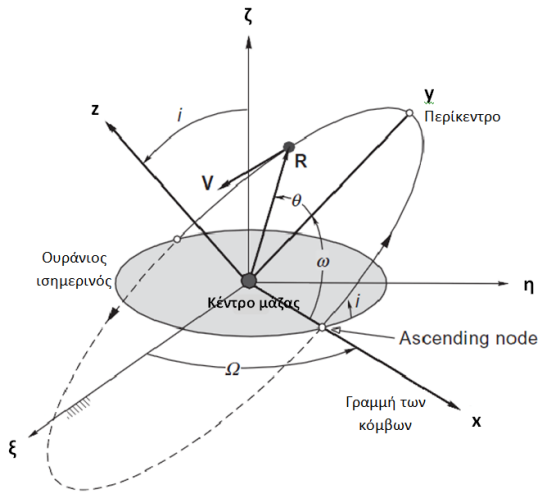
$$tan\Omega = -\frac{l_\eta}{l_\xi} \Rightarrow \Omega = arctan(-\frac{l_\eta}{l_\xi}) \tag{5.3}$$

σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$l_\eta = lsin\Omega sini \tag{5.4}$$

$$l_\xi = -lcos\Omega sini \tag{5.5}$$

$$l_\zeta = lcosi \tag{5.6}$$



Εικόνα 5.4: Στροφή αξόνων από το παρατηρούμενο σύστημα στο σύστημα της έλλειψης.

Το επόμενο βήμα είναι η εκτέλεση στροφών για τη μετάβαση από το σύστημα (ξ,η,ζ) στο σύστημα της έλλειψης (x, y, z). Αρχικά, στρέφουμε το σύστημα (ξ,η,ζ) ως προς

τον άξονα ζ κατά γωνία Ω και ονομάζουμε το νέο σύστημα αξόνων (x,ρ,ζ). Θεωρώντας την αριστερόστροφη φορά θετική ο αντίστοιχος πίνακας θα είναι:

$$R_\Omega = \begin{bmatrix} cos\Omega & sin\Omega & 0 \\ -sin\Omega & cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

δηλαδή,

$$\begin{bmatrix} x \\ \rho \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\Omega & sin\Omega & 0 \\ -sin\Omega & cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

Στη συνέχεια στρέφοντας το σύστημα (x,ρ,ζ) ως προς τον άξονα x κατά γωνία i, παίρνουμε το ζητούμενο σύστημα (x, y, z) και ο πίνακας στροφής θα είναι:

$$R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cosi & sini \\ 0 & -sini & cosi \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cosi & sini \\ 0 & -sini & cosi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \rho \\ \zeta \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Επομένως, τελικά η στροφή από το ένα σύστημα στο άλλο θα είναι:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cosi & sini \\ 0 & -sini & cosi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\Omega & sin\Omega & 0 \\ -sin\Omega & cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} cos\Omega & sin\Omega & 0 \\ -cosisin\Omega & cosicos\Omega & sini \\ sinisin\Omega & -sinicos\Omega & cosi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό, δηλαδή για τη μετάβαση από το σύστημα συντεταγμένων (x, y, z) στο σύστημα συντεταγμένων (ξ,η,ζ), ο πίνακας στροφής θα είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} cos\Omega & -sin\Omega & 0 \\ sin\Omega & cos\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cosi & -sini \\ 0 & sini & cosi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} cos\Omega & -sin\Omega cosi & sin\Omega sini \\ sin\Omega & cos\Omega cosi & -cos\Omega sini \\ 0 & sini & cosi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Στη συνέχεια, για τον προσδιορισμό της τροχιάς θα χρησιμοποιήσουμε την αναλυτική μέθοδο επίλυσης, ως μια από τις πιο αξιόπιστες υπολογιστικά, η οποία βασίζεται στην

εφαρμογή των εξισώσεων *Hamilton*. Για την επίλυση αυτή θα χρησιμοποιήσουμε αρχικά το ηλιοκεντρικό σύστημα συντεταγμένων όπου θεωρούμε ότι ο συνοδός μεγαλύτερη μάζας (έστω M_1) βρίσκεται ακίνητος στη μία εστία έλλειψης, ενώ ο άλλος περιφέρεται γύρω του.

Η Χαμιλτονιανή του προβλήματος είναι:

$$H = \frac{{p_\tau}^2}{2} + \frac{{p_\phi}^2}{2\tau^2} + V(\tau) \tag{5.13}$$

όπου $V(\tau) = -\dfrac{GM}{\tau}$ και M η μάζα του συστήματος.

Επομένως οι εξισώσεις *Hamilton* θα είναι:

$$\dot{\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_\tau} = p_\tau \Rightarrow \ddot{\tau} = \dot{p_\tau} \tag{5.14}$$

$$\dot{p_\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \tau} = -\frac{dV(\tau)}{d\tau} + \frac{{p_\phi}^2}{\tau^3} = \frac{l^2}{\tau^3} - \frac{GM}{\tau^2} = \ddot{\tau} \tag{5.15}$$

για το ακτινικό κομμάτι και

$$\dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{\tau^2} \Rightarrow p_\phi = \tau^2\dot{\phi} \tag{5.16}$$

$$\dot{p_\phi} = \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow p_\phi = l = const. \Rightarrow \dot{\phi} = \frac{l}{\tau^2} \tag{5.17}$$

για το αζιμουθιακό κομμάτι.

Στη συνέχεια ορίζοντας τη μεταβλητή $u = \dfrac{1}{\tau}$ και υπολογίζοντας την πρώτη και δεύτερη παράγωγο ως προς φ με τον κανόνα της αλυσίδας και με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων θα έχουμε:

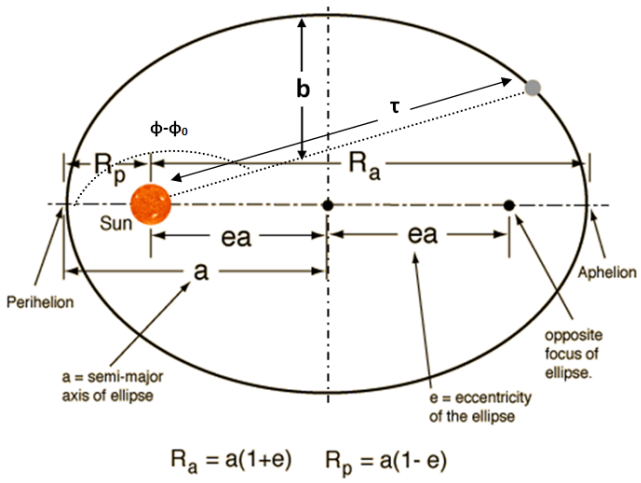
$$\begin{aligned} \frac{du}{d\phi} = -\frac{\dot{\tau}}{l} \Rightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} = -\frac{1}{\tau} + \frac{GM}{l^2} \\ \Rightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{l^2} \end{aligned} \tag{5.18}$$

Η λύση της ομογενούς εξίσωσης $\dfrac{d^2u}{d\phi^2} + u = 0$ είναι $u = u_0 cos(\phi - \phi_0)$ και προσθέτοντας την ειδική λύση:

$$\begin{aligned} u = &\frac{GM}{l^2} + u_0 cos(\phi - \phi_0) \Rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{GM}{l^2} + u_0 cos(\phi - \phi_0) \\ \Rightarrow \tau = &\frac{l^2/GM}{1 + u_0 l^2 cos(\phi - \phi_0)/GM} \end{aligned} \tag{5.19}$$

η οποία εκφράζει την εξίσωση της έλλειψης από φυσική άποψη.

Θεωρώντας ότι η εξίσωση αυτή μπορεί να πάρει τη μορφή $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2}$, όπου $\beta^2 = \alpha^2(1-e^2)$, μετατρέπουμε σε πολικές συντεταγμένες ως προς τη μία εστία της έλλειψης που βρίσκεται η μάζα M_1, αντικαθιστώντας $x = \tau cos(\phi - \phi_0) - \alpha e$ και $y = \tau sin(\phi - \phi_0)$. Οι παράμετροι α,β είναι ο μεγάλος και ο μικρός ημιάξονας αντίστοιχα, e η εκκεντρότητα, $\phi - \phi_0$ η γωνιακή απόσταση του M_2 από το περίκεντρο, και τ η απόσταση μεταξύ των μελών (Σχήμα 5.5).



Εικόνα 5.5: Χαρακτηριστικές αποστάσεις, ημιάξονες και εστίες έλλειψης

Έτσι, προκύπτει:

$$\tau = \frac{\alpha(1-e^2)}{1 + ecos(\phi - \phi_0)} \tag{5.20}$$

που είναι η εξίσωση της έλλειψης από γεωμετρική άποψη.

Εξισώνοντας με το προηγούμενο αποτέλεσμα:

$$\alpha(1-e^2) = \frac{l^2}{GM} \Rightarrow l^2 = GM\alpha(1-e^2) \tag{5.21}$$

και

$$e = \frac{u_0 l^2}{GM} \tag{5.22}$$

όπου συνδέσαμε τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προβλήματος.

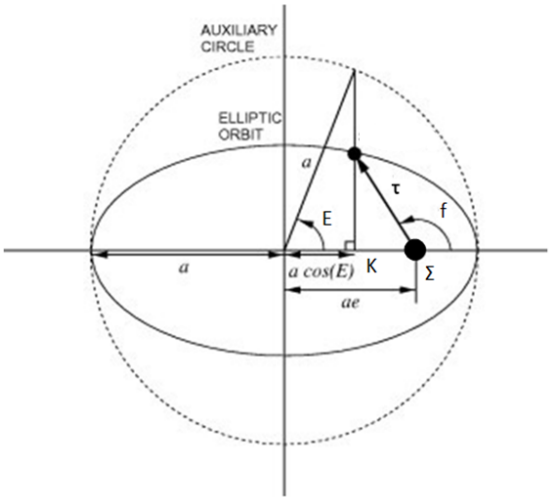
Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι το πρώτο αποτέλεσμα, το οποίο μας δίνει τη στροφορμή του συστήματος. Ένας άλλος τρόπος να την υπολογίσουμε, είναι εξισώνοντας τις ενέργειες στο περίκεντρο και στο απόκεντρο της έλλειψης (αφού η ενέργεια παραμένει σταθερή), δηλαδή $\frac{l^2}{2{\tau_\rho}^2} - \frac{GM}{\tau_\rho} = \frac{l^2}{2{\tau_\alpha}^2} - \frac{GM}{\tau_\alpha}$, όπου $\tau_\rho = \alpha(1-e)$ και $\tau_\alpha = \alpha(1+e)$. Έτσι:

$$l^2 = GM\alpha(1-e^2) \tag{5.23}$$

και

$$\varepsilon = -\frac{GM}{2\alpha} \tag{5.24}$$

Προκειμένου να μελετήσουμε τη χρονική εξέλιξη της ελλειπτικής τροχιάς των μελών, πρέπει να ορίσουμε την έκκεντρη ανωμαλία της έλλειψης και να εξάγουμε την εξίσωση του Κέπλερ. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.6, αληθής ανωμαλία είναι η γωνία $f \equiv \phi - \phi_0$ που αναφέραμε προηγουμένως και έκκεντρη ανωμαλία είναι η γωνία Ε που σχηματίζει η κατακόρυφος, στο σημείο που βρίσκεται το M_2, με τον κύκλο ακτίνας α ίσης με το μεγάλο ημιάξονα, με κορυφή τη γεωμετρική αρχή των αξόνων.



Εικόνα 5.6: Γωνίες και αποστάσεις ελλειπτικής τροχιάς

Εξισώνοντας τις σχέσεις που ισχύουν γεωμετρικά για την απόσταση (ΚΣ), δηλαδή $\alpha e - \alpha cosE = \tau cos(\pi - f)$ παίρνουμε:

$$cosf = \frac{\alpha(cosE - e)}{\tau} \tag{5.25}$$

το οποίο αν αντικαταστήσουμε στην εξίσωση της έλλειψης $\tau = \dfrac{\alpha(1-e^2)}{1+ecos(\phi-\phi_0)}$ προκύπτει:

$$\tau = \alpha(1 - ecosE) \tag{5.26}$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή ως προς το χρόνο:

$$\frac{d\tau}{dt} = aesinE\frac{dE}{dt} \tag{5.27}$$

και εξισώνοντας με το $\dfrac{d\tau}{dt}$ από τη σχέση της ενέργειας $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(\dfrac{d\tau}{dt})^2 + \dfrac{l^2}{2\tau^2} - \dfrac{GM}{\tau}$ έχουμε:

$$\sqrt{\frac{GM}{\alpha^3}}dt = (1 - ecosE)dE \tag{5.28}$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε:

$$\sqrt{\frac{GM}{\alpha^3}}(t-t_0) = E - esinE \tag{5.29}$$

δηλαδή την εξίσωση του Κέπλερ.

Αφού λοιπόν έχουμε μελετήσει θεωρητικά την κίνηση και έχουμε αποδείξει τις παραπάνω σχέσεις χτίσαμε τον κώδικα για τον υπολογισμό των τροχιών στο χρόνο, ακολουθώντας τα βήματα που φαίνονται στον Πίνακα 5.1. Θεωρήσαμε ως δεδομένα την εκκεντρότητα, τη γωνία φ_0, το χρόνο t_0 και την τροχιακή περίοδο P.

Πίνακας 5.1: Τα βήματα του κώδικα για τον υπολογισμό της θέσης και της τροχιάς των μελών σε χρόνο t, με τη μέθοδο Newton.

Βήμα	Σχέση	Παράμετρος
1	$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\alpha^3$	Μεγάλος ημιάξονας α
2	$E_{n+1} = E_n - \frac{E_n - esinE_n - \sqrt{\frac{GM}{\alpha^3}}(t-t_0)}{1-ecosE_n}$ (1)	Έκκεντρη ανωμαλία Ε
3	$\tau = \alpha(1-ecosE)$	Απόσταση τ
4	$\tau = \frac{\alpha(1-e^2)}{1+ecos(\phi-\phi_0)}$ για 0<E<π, $\tau = 2\pi - \frac{\alpha(1-e^2)}{1+ecos(\phi-\phi_0)}$ για π<E<2π	Αληθής ανωμαλία f
5	$\phi = \phi_0 + f$	Γωνία φ
6	$x = \tau cos(\phi)$, $y = \tau sin(\phi)$	Συντεταγμένες x, y
7	$\varepsilon = \frac{{v_\tau}^2}{2} + \frac{l^2}{2\tau^2} - \frac{GM}{\tau}$	Ακτινική ταχύτητα v_τ
8	$l^2 = GM\alpha(1-e^2)$	Στροφορμή l
9	$l = \tau v_\phi$	Αζιμουθιακή ταχύτητα v_ϕ
10	$v_x = \frac{v_\tau x}{\tau} - \frac{v_t y}{\tau}$, $v_y = \frac{v_\tau y}{\tau} + \frac{v_t x}{\tau}$	Ταχύτητες v_x, v_y

(1): με αρχική προσέγγιση την τιμή $\sqrt{\frac{GM}{\alpha^3}}(t-t_0)$, η οποία ικανοποιείται για κυκλική και επικυκλική κίνηση και αναγωγή στο διάστημα [0,2π], (2) με αναγωγή στο διάστημα [0,2π].

Φυσικά τα παραπάνω αφορούν το ηλιοκεντρικό σύστημα. Για την αναγωγή στο βαρυκεντρικό σύστημα χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις:

$$\overrightarrow{r_1} = \frac{M_2}{M}\overrightarrow{r}, \overrightarrow{r_2} = -\frac{M_1}{M}\overrightarrow{r} \tag{5.30}$$

που προκύπτουν όμοια με τις αντίστοιχες σχέσεις για τα α. Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο οι αντίστοιχες σχέσεις για τις ταχύτητες θα είναι:

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{M_2}{M}\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v_2} = -\frac{M_1}{M}\overrightarrow{v} \tag{5.31}$$

Τέλος, για την εύρεση της παρατηρούμενης τροχιάς στο σύστημα (ξ,η,ζ) χρησιμοποιήσαμε τους αντίστροφους πίνακες στροφών 5.12.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα, όπου με κόκκινο απεικονίζονται τα ζεύγη $V994\ Her\ A$ και $1SWASP\ J093010.78{+}533859.5\ A$ με τη μεγαλύτερη περίοδο και με μπλε τα ζεύγη $V994\ Her\ B$ και $1SWASP\ J093010.78{+}533859.5\ B$ με τη μικρότερη περίοδο. Οι πιο έντονες γραμμές απεικονίζουν τα πρωτεύοντα αστέρια και οι πιο αμυδρές τα δευτερεύοντα. Χρησιμοποιήσαμε τις μάζες που υπολογίστηκαν εκ νέου στην παρούσα εργασία για κάθε μέλος, οι οποίες απεικονίζονται σε συγκριτική κλίμακα μόνο για το κάθε τετραπλό σύστημα.

Στην Εικόνα 5.7 οι τροχιές των δύο διπλών συστημάτων του $V994\ Her$ φαίνεται να σχηματίζουν μεγάλη γωνία μεταξύ τους, κάτι που επιβεβαιώνουν και οι Πίνακες 4.1 και 4.4 συγκρίνοντας τα ω. Επομένως, η μεταξύ τους γωνία είναι μεγαλύτερη από 39 ° και είναι πιθανό το φαινόμενο των κύκλων $Kozai$ να είναι αυτό που προκαλεί τη μετάπτωση του περιάστρου με $\frac{de}{dt}, \frac{d\omega}{dt} \neq 0$.

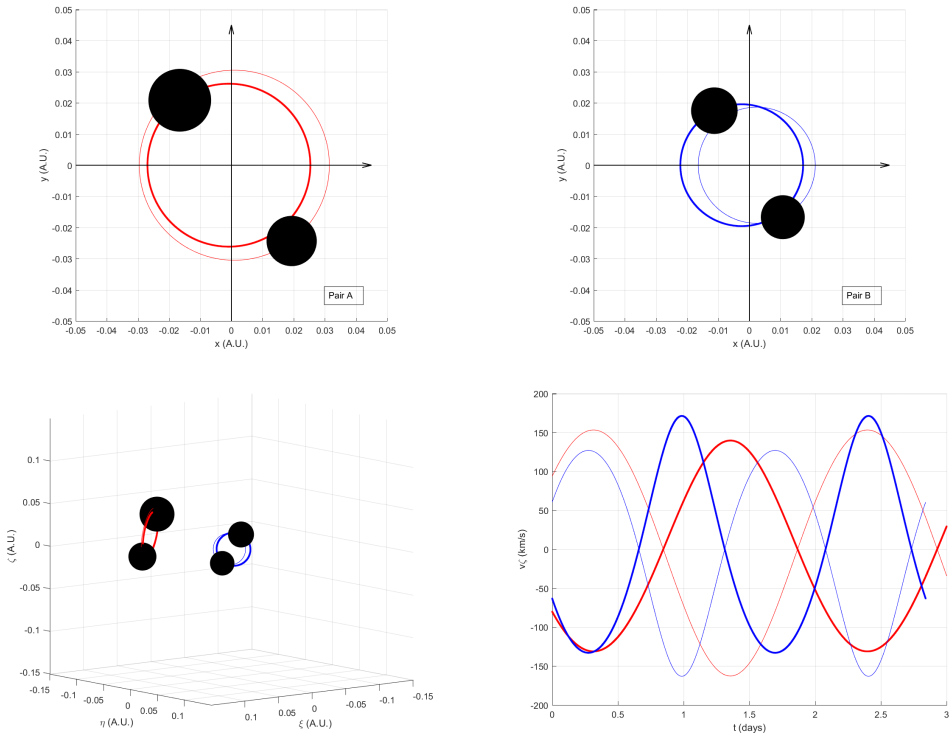
Θα περιμέναμε ότι αυτή η προσέγγιση αναπαράστασης των τροχιών που δε λάβαμε υπόψη τη βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ των ζευγών είναι λανθασμένη. Όμως, οι ταχύτητες της Εικόνας 5.7 φαίνεται να είναι ίδιες με τις παρατηρούμενες που παρουσίασαν οι Lee et al. (2008). Αν κοιτάξουμε την τροχιά που εκτελούν τα συστήματα το ένα γύρω απο το άλλο στην Εικόνα 5.8 θα δούμε ότι οι αποστάσεις τους είναι τάξεις μεγέθους μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες τροχιές της Εικόνας 5.7 και επομένως το φαινόμενο $Kozai$ δεν τις επηρεάζει στο χρονικό διάστημα των δύο τροχιακών περιόδων που τρέξαμε τον κώδικα. Αρκεί να συγκρίνουμε τις περιόδους P και P_3 του Πίνακα 4.1. Άρα μπορούμε με ασφάλεια να συμπεράνουμε ότι αυτός ο κώδικας της μεθόδου $Newton$ που εφαρμόσαμε για κάθε σύστημα ξεχωριστά, είναι μια πολύ καλή προσέγγιση της κίνησής τους για χρονικά διαστήματα συγκρίσιμα με την τροχιακή περίοδό τους.

Για να έχουμε μια καλύτερη εικόνα της τροχιάς του τετραπλού εκλειπτικού συστήματος, χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο σχεδιάσαμε την κίνηση των δύο διπλών συστημάτων γύρω από το κοινό κέντρο μάζας. Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 5.8, η κίνηση αυτή είναι εντόνως ελλειπτική, κάτι που επιβεβαιώνει και ο Πίνακας 4.1.

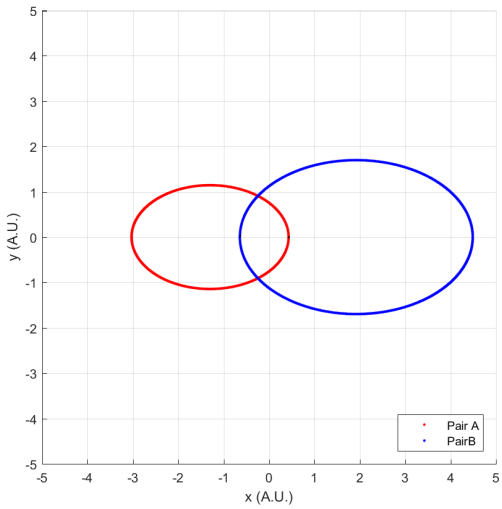
Αντίστοιχα την ίδια μέθοδο ακολουθήσαμε και για το σύστημα $1SWASP\ J093010.78{+}533859.5$ (Εικόνα 5.9). Για την απεικόνιση των μελών έχουν χρησιμοποιηθεί σφαίρες και δεν έχουν ληφθεί υπόψη οι παραμορφώσεις λόγω ανταλλαγής μάζας. Στο σύστημα αυτό οι τροχιές των δύο συστημάτων είναι σχεδόν παράλληλες και επομένως δεν μπορεί να εμφανίζεται το φαινόμενο $Kozai$. Επιπλέον, όπως έχουμε ήδη υπολογίσει από αστρομετρικές παρατηρήσεις του δορυφόρου $Gaia$, η απόσταση των δύο συστημάτων είναι $\sim 123\ AU$, γεγονός που επιβεβαιώνει το παραπάνω συμπέρασμα. Παρατηρώντας τις ταχύτητες του Σχήματος 5.9, αυτές ταιριάζουν με τις παρατηρούμενες των Lohr et al. (2015).

Σε συνδυασμό με τον Πίνακα 4.4 επιβεβαιώνουμε ότι οι τροχιές των δύο διπλών συστημάτων είναι σχεδόν κυκλικές, κάτι που είναι εντελώς αναμενόμενο για το σύστημα σε επαφή. Για το απομακρυσμένο σύστημα είναι επίσης αναμενόμενο, αφού τα μέλη βρίσκονται πολύ κοντά το ένα στο άλλο ($\sim 0.03\ AU$).

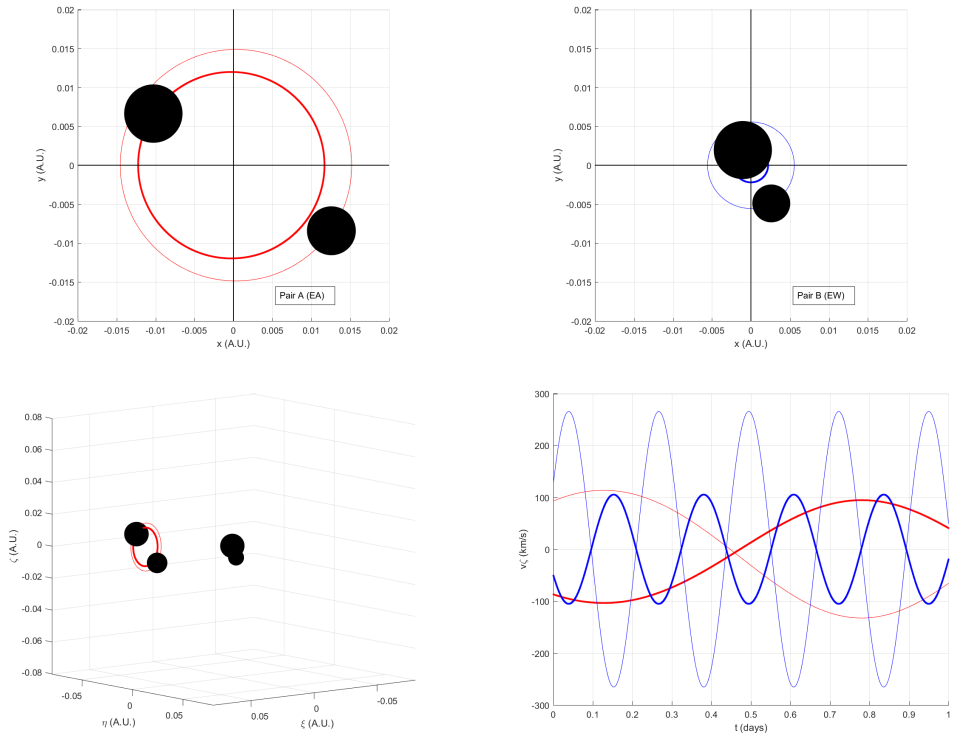
Για το $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$ δε γνωρίζουμε την εκκεντρότητα της



Εικόνα 5.7: Οι τροχιές και παρατηρούμενες ταχύτητες των μελών του V994 Her. Οι καμπύλες μεγαλύτερου πάχους αναφέρονται στα πρωτεύοντα μέλη, ενώ οι άλλες στα δευτερεύοντα.



Εικόνα 5.8: Οι τροχιές των δύο συστημάτων του V994 Her γύρω από το κοινό κέντρο μάζας.



Εικόνα 5.9: Οι τροχιές και παρατηρούμενες ταχύτητες των μελών του $1SWASP\ J093010.78+533859.5$. *Οι καμπύλες μεγαλύτερου πάχους αναφέρονται στα πρωτεύοντα μέλη, ενώ οι άλλες στα δευτερεύοντα.*

κίνησης των δύο μελών γύρω από το κοινό κέντρο μάζας, ενώ οι περιορισμένες μετρήσεις ελαχίστων δε μας επιτρέπουν να την υπολογίσουμε από το διάγραμμα $O-C$. Έτσι δε μελετήσαμε την κοινή τροχιά για το σύστημα αυτό.

Για κανένα από τα δύο τετραπλά συστήματα δεν σχεδιάσαμε την τροχιά του πέμπτου μέλους, λόγω έλλειψης των βασικών χαρακτηριστικών του. Ειδικά για το σύστημα $V994\ Her$ δεν έχει ακόμα επιβεβαιωθεί ότι το πέμπτο μέλος ανήκει στο σύστημα, γιατί οι μόνες ενδείξεις που έχουμε είναι από την αστρομετρία.

Κεφάλαιο 6

Εξελικτική κατάσταση και σύγκριση των τετραπλών συστημάτων

Για την μελέτη της εξελικτικής κατάστασης των τετραπλών εκλειπτικών συστημάτων κατασκευάσαμε τα διαγράμματα $M-L$, $M-R$ και $H-R$ χρησιμοποιώντας τα όρια $ZAMS$ και $TAMS$ της Κύριας Ακολουθίας, σύμφωνα με το μοντέλο $PARSEC$ (Girardi et al. 2000) για z=0.02. Οι απόλυτες παράμετροι που χρειάζονται για το σκοπό αυτό, είναι διαθέσιμες μόνο για τα συστήματα KIC 4247791, $V994$ Her και $1SWASP$ $J093010.78+533859.5$. Συγκεκριμένα, για το πρώτο που δε γνωρίζουμε τη θερμοκρασία, την προσδιορίσαμε από πειραματικούς πίνακες χρησιμοποιώντας το φασματικό τύπο, ενώ την απόλυτη φωτεινότητα την υπολογίσαμε από τη Σχέση 3.7. Για μάζες και ακτίνες χρησιμοποιήσαμε αυτές της βιλιογραφίας. Για το δεύτερο και το τρίτο χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της παρούσας μελέτης του Πίνακα 3.5, όπως προέκυψαν από τις Σχέσεις 3.4-3.7. Συγκεντρωτικά οι απόλυτες παράμετροι των συστημάτων αυτών φαίνονται στον Πίνακα 6.1.

Χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους αυτές τα διαγράμματα $M-L$, $M-R$ και $H-R$ που προέκυψαν φαίνονται στις Εικόνες 6.1, 6.2 και 6.3. Παρατηρούμε ότι οι μάζες κυμαίνονται μέχρι τα 3 $M_{\odot}$ και όλα τα αστέρια βρίσκονται κοντά ή πάνω στην Κύρια Ακολουθία, δηλαδή είναι χημικώς ομογενή και στον πυρήνα τους κυριαρχεί η μετατροπή υδρογόνου σε ήλιο. Επομένως, έχουμε να κάνουμε με αστέρια παρόμοια με τον Ήλιο. Συγκεκριμένα, τα μέλη του συστήματος $V994$ Her βρίσκονται στα όρια $ZAMS$ και αρκετά πάνω στην ΚΑ. Αυτό υποδηλώνει ότι είναι νεαρά αστέρια και έχουν μεγαλύτερες μάζες, όπως επιβεβαιώνουν και οι θερμοκρασίες τους. Λόγω της θέσης του στο διάγραμμα $H-R$, κατά την εξέλιξή τους θα περάσουν στον κλάδο των υπογιγάντων και στη συνέχεια στην περιοχή των γιγάντων και στον οριζόντιο κλάδο, πολύ πιο γρήγορα από τα μέλη των υπόλοιπων συστημάτων. Όσο μικρότερη είναι η μάζα των αστέρων τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η παραμονή τους στην ΚΑ, ενώ όσο μεγαλύτερη η μάζα τόσο ταχύτερη και η εξέλιξή τους. Από την άλλη, τα μέλη του $1SWASP$ $J093010.78+533859.5$ βρίσκονται αρκετά χαμηλά στην ΚΑ και τα περισσότερα κοντά

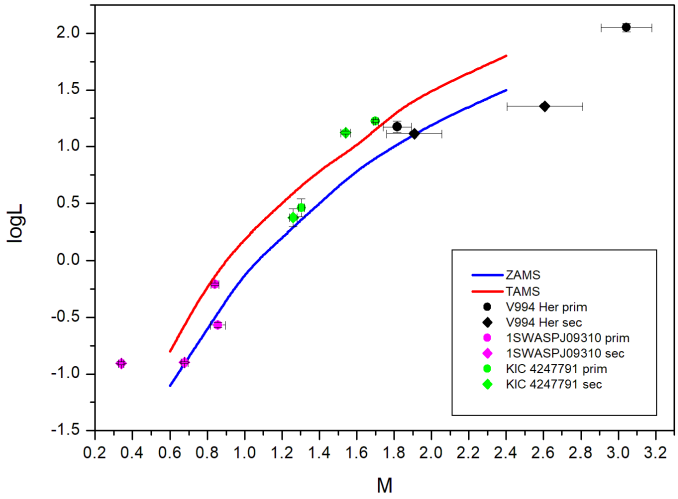
Πίνακας 6.1: Οι απόλυτες παράμετροι των τετραπλών εκλειπτικών συστημάτων KIC 4247791, $V994\ Her$ *και* $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$.

		$M\ (M_\odot)$	$R\ (R_\odot)$	$T\ (K)$	$L\ (L_\odot)$
$V994\ Her$	Αα	3.04(14)	2.46(4)	12000(250)	112.4(9.9)
	Αβ	2.61(20)	1.75(3)	9538(50)	22.7(8)
	Βα	1.82(8)	1.59(2)	9000(250)	14.9(1.7)
	Ββ	1.91(15)	1.43(2)	9185(80)	13.0(6)
$1SWASP$ $J093010$	Αα	0.84(2)	0.978(7)	5185(25)	0.619(15)
	Αβ	0.68(2)	0.671(5)	4207(12)	0.126(2)
	Βα	0.86(4)	0.786(11)	4700(50)	0.270(14)
	Ββ	0.34(1)	0.520(7)	4760(2)	0.124(4)
KIC 4247791	Αα	1.70(2)	2.50(1)	7400(50)	16.8(5)
	Αβ	1.54(2)	2.40(1)	7120(50)	13.3(4)
	Βα	1.54(1)	1.46(13)	6240(50)	2.9(5)
	Ββ	1.26(2)	1.35(12)	6170(50)	2.4(4)

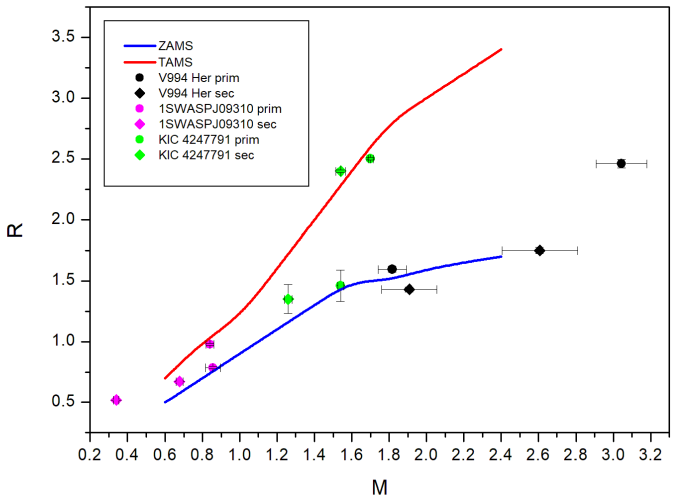
στα όρια $TAMS$ κάτι που υποδηλώνει ότι είναι πιο εξελιγμένα. Το μέλος Ββ επειδή έχει μάζα μικρότερη από $0.5M_\odot$, δε θα καταφέρει να φτάσει ποτέ στον κλάδο των γιγάντων και φεύγοντας από την ΚΑ θα οδηγηθεί στο θανατό του, δηλαδή θα καταλήξει σε ερυθρό νάνο και στη συνέχεια σε λευκό και τελικά μελανό νάνο. Για το σύστημα KIC 4247791 οι μάζες είναι παρόμοιες με αυτές του συστήματος $V994\ Her$ και θα ακολουθήσουν τα ίδια στάδια εξελικτικής κατάστασης. Κάποια από αυτά είναι πιο κοντά στα όρια $ZAMS$, δηλαδή είναι πιο νεαρά και κάποια από αυτά πιο κοντά στα όρια $TAMS$, δηλαδή πιο εξελιγμένα. Τέλος, παρατηρούμε ότι τα μέλη του κάθε συστήματος βρίσκονται στην ίδια περιοχή, δηλαδή έχουν παρόμοιες μάζες, ακτίνες και θερμοκρασίες σε σχέση με τα μέλη των υπόλοιπων τετραπλών, γεγονός που υποδηλώνει κοινή προέλευση και δημιουργία.

Όσον αφορά το σύστημα $CzeV343$, στον Πίνακα 1.4 φαίνεται ότι ο λόγος των τροχιακών περιόδων είναι 3:2. Ο συντονισμός 3:2 είναι δύσκολο να επιτευχθεί σε τέτοιου είδους συστήματα, δεδομένου ότι λόγω του φαινομένου $Kozai$ τείνουν στο **σύγχρονο συντονισμό**, δηλαδή στο να αποκτήσουν κυκλική τροχιά. Επομένως, μια τέτοια αναλογία θα μπορούσε να συμβεί κατά τη συρρίκνωση της τροχιάς λόγω των παλιρροικών φαινομένων που κλείδωσαν τις περιόδους σε αυτές τις αναλογίες.

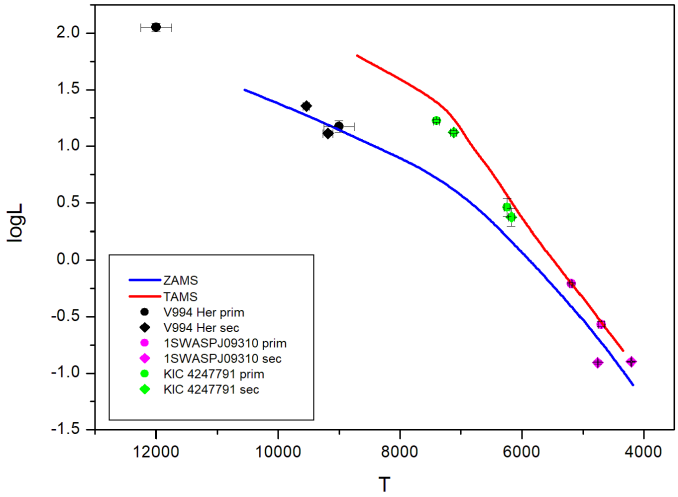
Δυστυχώς, κάτι τέτοιο δεν μπορεί να επαληθευτεί θεωρητικά, αφού δε γνωρίζουμε τη μάζα των μελών. Από την άλλη, αν το σύστημα τελικά δεν είναι βαρυτικά συνδεδεμένο, αυτή η αναλογία αποτελεί απλά μια σύμπτωση. Για το σύστημα KIC 4247791 ο λόγος των τροχιακών περιόδων είναι σχεδόν 1:1 και η εκκεντρότητα των συστημάτων σχεδόν μηδενική. Επομένως θα μπορούσαμε να πούμε ότι το σύστημα τείνει σε **σύγχρονο συντονισμό**. Όμως, επειδή όπως έχουμε ήδη αναφέρει το σύστημα αυτό αποτελείται από εξελιγμένα μέλη, είναι πιθανό η εκκεντρότητα αυτή να οφείλεται στην εξέλιξη των μελών και όχι στις παλιρροικές δυνάμεις που δέχονται από το συνοδό ζεύγος, ενώ η ομοιότητα των τροχιακών περιόδων να σχετίζεται με τις παρόμοιες μάζες



Εικόνα 6.1: Διάγραμμα $M - L$ των έξι τετραπλών εκλειπτικών συστημάτων και η θέση τους σε σχέση με την Κύρια Ακολουθία.



Εικόνα 6.2: Διάγραμμα $M - R$ των έξι τετραπλών εκλειπτικών συστημάτων και η θέση τους σε σχέση με την Κύρια Ακολουθία.



Εικόνα 6.3: Διάγραμμα $H-R$ των έξι τετραπλών εκλειπτικών συστημάτων και η θέση τους σε σχέση με την Κύρια Ακολουθία.

και αποστάσεις των μελών του κάθε συστήματος. Ένα τρίτο σενάριο είναι ένας συνδυασμός των προηγούμενων, δηλαδή ακριβώς επειδή εξελίχθηκαν τα μέλη και οι μάζες αυξήθηκαν, τα παλιρροικά φαινόμενα έγιναν πιο έντονα, όπως και η συρρίκνωση των τροχιών. Δεν μπορούμε όμως να συμπεράνουμε κάτι από αυτά με βεβαιότητα, δεδομένου ότι δε γνωρίζουμε την απόσταση και την κλίση των δύο διπλών συστημάτων και δεν έχουμε μακροχρόνιες παρατηρήσεις. Για τα συστήματα $OGLE-LMC-ECL-16549$, $1SWASP\ J093010.78+533859.5$, $V994\ Her$ και $BV\ Dra$ - $BW\ Dra$ δε φαίνεται να υπάρχει κάποια συσχέτιση μεταξύ των τροχιακών περιόδων. Όμως για το σύστημα $V994\ Her$ γνωρίζουμε ότι επηρεάζεται από το φαινόμενο $Kozai$, επομένως μπορούμε να πούμε ότι απλά ακόμα δε βρίσκεται σε κάποια ευσταθή τροχιακή κατάσταση και είναι πολύ πιθανό με τα χρόνια οι τροχιές να συρρικνωθούν και να γίνουν κυκλικές. Για το $1SWASP\ J093010.78+533859.5$, η απόσταση των δύο συστημάτων είναι τόσο μεγάλη που δε μπορούμε να κάνουμε υποθέσεις για την εξέλιξη του συστήματος, αφού πολύ δύσκολα μπορεί να μελετηθεί η κοινή τους τροχιά. Αξιοσημείωτο είναι ότι η περίοδος του ζεύγους που βρίσκεται σε επαφή είναι η μικρότερη που έχει παρατηρηθεί σε όλα τα τετραπλά συστήματα, ενώ φαίνεται να εμφανίζει κοινά χαρακτηριστικά με τα συστήματα της κατηγορίας $W\ UMa$ με τις μικρότερες τροχιακές περιόδους (Stepień and Gazeas 2012). Πολύ ενδιαφέρον είναι επίσης το γεγονός, ότι όλα τα συστήματα για τα οποία έχουμε τις κατάλληλες παρατηρήσεις φαίνεται να έχουν πολύ μικρή εκκεντρότητα, δηλαδή οι τροχιές των διπλών συστημάτων είναι σχεδόν κυκλικές. Αυτό γεννά το ερώτημα του τι συμβαίνει σε σχέση με τις τροχιές των συστημάτων γύρω από το κοινό κέντρο μάζας και κατά πόσο αυτές είναι ευσταθής, κάτι που μπορεί να απαντηθεί με εκτενέστερες μελέτες και παρατηρήσεις.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε τα φυσικά και τροχιακά χαρακτηριστικά δύο από των μέχρι τώρα γνωστών τετραπλών (και πιθανόν πενταπλών) εκλειπτικών συστημάτων. Αυτή η διαδικασία αποδείχθηκε να είναι μια πρόκληση λόγω των ελάχιστων παρατηρήσεων που έχουμε μέχρι τώρα στη διάθεσή μας, ενώ ακόμα πιο δύσκολη είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων συγκριτικά με τα υπόλοιπα τετραπλά συστήματα. Χρησιμοποιήσαμε φωτομετρικά και φασματοσκοπικά δεδομένα, τόσο δικά μας όσο και βιβλιογραφικά και μοντελοποιήσαμε τις φωτομετρικές καμπύλες, χρησιμοποιώντας τον κώδικα $Wilson - Devinney$ με τρεις τρόπους. Τη μέθοδο LC ($Light\ Curve$) για προσδιορισμό των αρχικών παραμέτρων, τη μέθοδο DC ($Differential\ Corrections$) ως την πιο διαδεδομένη για προσδιορισμό παραμέτρων και τη μέθοδο MC ($Monte\ Carlo$) για επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων. Στη συνέχεια, χρησιμοποιήθηκε κώδικας στη $Matlab$ που λαμβάνει υπόψη το φαινόμενο $LITE$ και την κίνηση των αψίδων για τη μελέτη των διαγραμμάτων $O - C$ των δύο τετραπλών συστημάτων. Για το σύστημα $V994$ Her επιβεβαιώθηκε η περιοδικότητα των 2.91(11) ετών λόγω της κίνησης των ζευγών γύρω από το κοινό κέντρο μάζας. Επίσης, παρουσιάστηκε το φαινόμενο μετάπτωσης της γραμμής των αψίδων με πιθανή αιτία το φαινόμενο των κύκλων $Kozai$, δηλαδή την μεταβολή των επιμέρους τροχιών λόγω της βαρυτικής αλληλεπίδρασης των δύο ζευγών του συστήματος. Η περιοδικότητα αυτού του φαινομένου ανιχθεύθηκε στα 228 έτη για το ζεύγος A και στα 117 για το ζεύγος B, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 7.1.

Το σύστημα $1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$ δε φάνηκε να επηρεάζεται από το

Πίνακας 7.1: Οι περιοδικότητες των τετραπλών συστημάτων.

	$V994\ Her$		$1SWASP\ J093010.78 + 533859.5$	
	Ζεύγος A	Ζεύγος B	Ζεύγος A	Ζεύγος B
Φαινόμενο $LITE$ (yrs)	2.91(11)		816(8)	
Κίνηση των αψίδων (yrs)	228	117	-	-
Φαινόμενο $O'Connell$ (yrs)	-	-	-	8.87(8)

φαινόμενο *Kozai*, αφού οι τροχιές του είναι κυκλικές και σχεδόν παράλληλες. Παρ΄ όλα αυτά, εμφάνισε περιοδικότητα ~ 816 ετών λόγω φαινομένου $LITE$, σύμφωνα με τις αστρομετρικές παρατηρήσεις του *Gaia* και περιοδικότητα 8.87(8) ετών για το ζεύγος B, η οποία συνδέθηκε με πιθανό μαγνητικό κύκλο και το φαινόμενο *O'Connell*. Τέλος, χρησιμοποιήθηκε η αναλυτική μέθοδος *Newton* για το σχεδιασμό των τροχιών των δύο τετραπλών συστημάτων, σε χρονική κλίμακα που δεν επηρεάζονται από τη μεταξύ βαρυτική τους αλληλεπίδραση, επιβεβαιώνοντας τα παραπάνω αποτελέσματα.

Τα μέλη των $V994$ Her, $1SWASP$ $J093010.78 + 533859.5$ και KIC 4247791, φαίνεται να έχουν κοινή εξελικτική πορεία, πιθανόν λόγω κοινής προέλευσης και δημιουργίας, ενώ παρουσιάζουν αρκετά κοινά χαρακτηριστικά, κάτι που γεννά το ερώτημα αν αυτά συμβαίνουν λόγω σύμπτωσης ή κάποιου μηχανισμού βαρυτικής αλληλεπίδρασης και εξέλιξης που συνδέεται με την τετραπλή φύση των συστημάτων.

Για τα συστήματα $V994$ Her, $1SWASP$ $J093010.78 + 533859.5$, BV Dra - BW Dra και KIC 4247791 έχουμε φασματοσκοπικά δεδομένα και λόγο μαζών, επομένως εκτεταμένες φωτομετρικές παρατηρήσεις θα μας βοηθούσαν να αποκτήσουμε μια πολύ καλή εικόνα των φυσικών και τροχιακών τους χαρακτηριστικών και να καταλάβουμε καλύτερα την τετραπλή ή πενταπλή φύση τους. Ακόμα και μικρά τηλεσκόπια, όπως είναι αυτό του Γεροσταθοπούλειου Αστεροσκοπείου του Πανεπιστημίου Αθηνών, είναι πολύ χρήσιμα λόγω της ρομποτικής και αυτοματοποιημένης διαδικασίας παρατήρησης που μας επιτρέπει την πραγματοποίηση πολλών παρατηρήσεων για μεγάλη χρονική περίοδο. Φυσικά, φασματοσκοπικές παρατηρήσεις από μεγαλύτερα τηλεσκόπια θα ήταν χρήσιμες για την επιβεβαίωση της τετραπλής ή πενταπλής φύσης των συστημάτων.

Τα τετραπλά και πενταπλά εκλειπτικά συστήματα που συνδέονται βαρυτικά είναι πολύ σπάνια και παρ΄ όλα αυτά έχουν παρατηρηθεί και μελετηθεί σε πολύ μικρό βαθμό, αφήνοντας ένα ανοιχτό ζήτημα. Με βάση τη μελέτη αυτή γίνεται κατανοητό πώς μπορούμε να μελετήσουμε περιοδικά φαινόμενα, όπως το φαινόμενο *Kozai*, το φαινόμενο $LITE$ και φαινόμενα μαγνητικής δραστηριότητας, συνδυάζοντας τη φωτομετρία, τη φασματοσκοπία και την αστρομετρία με τη μελέτη ενός μόνο αστρονομικού αντικειμένου, όταν κανονικά θα απαιτούνταν περισσότερος χρόνος και στόχοι παρατήρησης. Επομένως, είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουμε τους μηχανισμούς και την εξέλιξη τέτοιων συστημάτων συνδυάζοντας τη θεωρία και την παρατήρηση και συνδέοντας τη θεωρία της αστρικής εξέλιξης, της μηχανικής και της δυναμικής αστρονομίας, που είναι βασικοί συνδετικοί κρίκοι για την κατανόηση του σύμπαντος.

Παράρτημα

Πίνακας A.1: Πίνακας ελαχίστων για το σύστημα V994 Her (pair A : long period system, pair B : short period system).

HJD	*error*	*type*	*pair*	*filter*	*reference*
2448479.75947	0.00305	I	B	Hp	(1)
2448480.29371	0.00125	I	A	Hp	(1)
2448480.43493	0.00263	II	B	Hp	(1)
2448481.36885	0.00169	II	A	Hp	(1)
2452381.98540	0.00100	I	B	V	(1)
2452471.43630	0.00040	I	B	UBV	(2)
2452488.49840	0.00060	I	A	R	(3)
2452488.49940	0.00010	I	A	V	(3)
2452488.49970	0.00030	I	A	B	(3)
2452748.90410	0.00100	I	A	V	(1)
2452822.20440	0.00185	I	B	V	(1)
2452836.40020	0.00020	I	A	R	(4)
2452937.47010	0.00010	II	A	R	(5)
2453206.36500	0.00200	II	B	VR	(6)
2453319.71928	0.00239	I	A	V	(1)
2453320.80295	0.00542	II	A	V	(1)
2453504.57119	0.00454	II	B	V	(1)
2453870.18658	0.00154	I	B	V	(7)
2453870.18880	0.00255	I	B	B	(7)
2453887.23754	0.00107	I	B	V	(7)
2453887.23816	0.00216	I	B	B	(7)
2453902.20047	0.00048	II	B	V	(7)
2453902.20258	0.00097	II	B	B	(7)
2453904.09882	0.00169	II	A	V	(7)
2453904.27915	0.00265	I	B	V	(7)
2453904.28105	0.00170	I	B	B	(7)
2453909.26748	0.00089	I	A	B	(7)
2453909.26932	0.00072	I	A	V	(7)
2454283.41310	0.00010	I	B	V	(8)

Πίνακας A.1 (συνέχεια)

2454290.51500	0.00300	I	B	V	(8)
2454290.51700	0.00100	I	A	V	(8)
2454298.37870	0.00020	II	B	V	(8)
2454300.44570	0.00040	I	B	V	(8)
2454307.54240	0.00050	I	B	V	(8)
2454314.52040	0.00080	II	A	V	(8)
2454315.52200	0.00100	I	A	V	(8)
2454332.45700	0.00100	II	B	V	(8)
2454334.52300	-	I	B	V	(8)
2454347.30840	0.00030	I	B	V	(8)
2454360.35240	0.00040	II	A	V	(8)
2454361.35700	0.00020	I	A	V	(8)
2454364.34390	0.00030	I	B	V	(8)
2454374.28290	0.00070	I	B	V	(8)
2454383.27290	0.00030	II	A	V	(8)
2454610.34940	0.00080	II	A	BVR	(8)
2454618.51600	0.00130	I	B	BVR	(8)
2454650.54980	0.00300	II	B	BVR	(8)
2454652.62262	0.00681	I	B	V	(1)
2454653.38860	0.00130	II	B	BVR	(8)
2454654.08476	0.00256	II	A	V	(1)
2454699.47770	0.00140	I	B	BVR	(8)
2454713.43490	0.00140	I	A	BVR	(8)
2455313.40260	0.00068	I	A	R	(9)
2455314.48270	0.00046	II	A	I	(9)
2455315.48960	0.00042	I	A	I	(9)
2455375.40806	0.00037	I	B	I	(9)
2455389.48381	0.00225	II	A	I	(9)
2455392.44365	0.00090	I	B	RI	(10)
2455392.44779	0.00055	I	B	I	(9)
2455397.49810	0.00032	II	B	I	(9)
2455413.40450	0.00100	I	A	VRI	(10)
2455424.47871	0.00079	II	B	R	(9)
2455641.55985	0.00012	II	A	R	(9)
2455642.56748	0.00042	I	A	R	(9)
2455654.51845	0.00097	II	B	C	(9)
2455681.50533	0.00036	II	B	R	(9)
2455683.55108	0.00024	I	B	R	(9)
2455688.39802	0.00029	I	A	R	(9)
2455691.44530	0.00013	II	B	I	(9)
2455691.56016	0.00011	II	A	I	(9)
2455740.47826	0.00135	I	A	$BVRI$	(11)

Πίνακας A.1 (συνέχεια)

2455779.48535	0.00125	II	B	R	(9)
2455799.36956	0.00033	II	B	I	(9)
2455821.29667	0.00095	I	B	RV	(11)
2455993.62195	0.00007	II	A	I	(1)
2456026.60079	0.00063	II	B	C	(1)
2456041.52826	0.00101	II	A	I	(1)
2456048.52317	0.00028	I	B	R	(1)
2456058.46317	0.00020	I	B	I	(1)
2456064.44435	0.00049	II	A	C	(1)
2456065.45050	0.00159	I	A	R	(1)
2456073.46347	0.00029	II	B	R	(1)
2456102.48296	0.00058	I	B	R	(1)
2456127.42060	0.00062	II	B	R	(1)
2456136.55813	0.00106	I	B	R	(1)
2456138.36968	0.00059	I	A	I	(1)
2456154.40165	0.00039	II	B	C	(1)
2456156.44467	0.00159	I	B	C	(1)
2456162.36395	0.00040	II	A	R	(1)
2456163.36806	0.00026	I	A	R	(1)
2456181.37945	0.00018	II	B	R	(1)
2456187.36470	0.00076	II	A	IC	(1)
2456188.37316	0.00054	I	A	I	(1)
2456210.28311	0.00180	II	A	C	(1)
2456211.28403	0.00107	I	A	C	(1)
2456230.28075	0.00063	I	B	C	(1)
2456234.20460	0.00183	I	A	R	(1)
2456354.60974	0.00207	II	B	C	(12)
2456368.61655	0.00029	II	A	I	(12)
2456441.53093	0.00020	II	A	R	(12)
2456450.37231	0.00204	I	B	C	(12)
2456455.43271	0.00040	II	B	C	(12)
2456457.46946	0.00054	I	B	R	(12)
2456463.37125	0.00081	I	A	C	(12)
2456465.45059	0.00259	I	A	C	(12)
2456490.45220	0.00630	I	A	I	(13)
2456539.44830	0.00890	I	A	I	(14)
2456540.45830	0.00680	I	A	I	(14)
2456736.59690	0.00049	II	B	R	(12)
2456758.50910	0.00259	I	B	R	(12)
2456766.52219	0.00090	II	A	R	(12)
2456767.53147	0.00027	I	A	R	(12)
2456815.43820	0.00410	I	A	I	(15)

Πίνακας A.1 (συνέχεια)

2456827.48758	0.00078	II	B	I	(12)
2456839.44646	0.00247	II	A	C	(12)
2456842.53174	0.00132	I	A	C	(12)
2456849.39799	0.00045	I	B	$BVRI$	(16)
2456856.50055	0.00052	I	B	$BVRI$	(16)
2456857.30486	0.00055	II	B	$BVRI$	(16)
2456859.33751	0.00043	I	B	$BVRI$	(16)
2456888.35662	0.00030	I	A	$BVRI$	(16)
2456889.43724	0.00044	II	A	$BVRI$	(16)
2456890.44293	0.00040	I	A	$BVRI$	(16)
2456891.39044	0.00062	II	B	$BVRI$	(16)
2457091.63291	0.00116	II	B	R	(12)
2457119.58372	0.00049	I	A	C	(12)
2457123.50228	0.00057	I	B	R	(12)
2457128.56049	0.00279	II	B	R	(12)
2457133.42997	0.00248	I	B	R	(12)
2457141.49265	0.00127	II	A	R	(12)
2457142.49880	0.00135	I	A	R	(12)
2457150.47067	0.00049	I	B	R	(12)
2457189.40527	0.00119	II	A	R	(12)
2457190.41699	0.00066	I	A	R	(12)
2457204.42643	0.00054	I	B	R	(12)
2457209.49597	0.00062	II	B	I	(12)
2457214.38908	0.00093	II	A	R	(12)
2457215.41792	0.00039	I	A	R	(12)
2457240.41791	0.00029	I	A	R	(12)
2457241.34185	0.00229	I	B	R	(12)
2457241.49825	0.00055	II	A	R	(12)
2457248.44349	0.00149	I	B	R	(12)
2457287.33273	0.00062	II	A	C	(12)
2457295.30457	0.00069	I	B	R	(12)
2457336.25467	0.00038	I	A	C	(12)
2457470.65280	0.00173	II	A	CCD	(17)
2457473.60370	0.00113	II	B	CCD	(17)
2457494.58900	0.00041	I	A	CCD	(17)
2457547.44880	0.00115	II	B	R	(17)
2457576.45410	0.00110	I	B	R	(17)
2457589.41350	0.00032	II	A	I	(17)
2457590.41980	0.00029	I	A	I	(17)
2457590.42010	0.00160	I	A	I	(18)

Πίνακας A.1 (συνέχεια)

1: Zasche and Uhlař (2013), 2: Ak and Filiz (2003), 3: Borkovits et al. (2002), 4: Borkovits et al. (2004), 5: Biro et al. (2006), 6: Biro et al. (2007), 7: Lee et al. (2008), 8: Borkovits et al. (2011), 9: Zasche et al. (2011), 10: Brat et al. (2011), 11: Hoňková et al. (2013), 12: Zasche and Uhlař (2016), 13: Hubscher (2013), 14: Hubscher (2014), 15: Hubscher and Lehmann (2015), 16: *This study*, 17: Zasche et al. (2017), 18: Hubscher (2017)

Πίνακας A.2: Πίνακας ελαχίστων για το σύστημα $1SWASP\ J093010.78+533859.5$ *(pair A (EA): long period system, pair B (EW): short period system).*

HJD	$error$	$type$	$pair$	$filter$	$reference$
2454402.94984	0.00083	I	EW	C	(1)
2454427.63552	0.00038	I	EA	C	(1)
2454436.64977	0.00064	I	EW	C	(1)
2454436.77248	0.00062	I	EA	C	(1)
2454437.67066	0.00102	II	EW	C	(1)
2454437.67331	0.00083	II	EW	C	(1)
2454438.08116	0.00223	I	EA	C	(1)
2454438.70621	0.00186	II	EA	C	(1)
2454501.54878	0.00080	I	EW	C	(1)
2454501.66208	0.00028	II	EW	C	(1)
2454502.46049	0.00080	I	EW	C	(1)
2454502.57211	0.00071	II	EW	C	(1)
2454503.48286	0.00043	II	EW	C	(1)
2454503.59773	0.00072	I	EW	C	(1)
2454504.50665	0.00148	I	EW	C	(1)
2454524.24793	0.00293	I	EA	C	(1)
2454524.43262	0.00020	II	EW	C	(1)
2454524.54899	0.00054	I	EW	C	(1)
2454526.36992	0.00078	I	EW	C	(1)
2454527.50934	0.00053	I	EW	C	(1)
2454530.46826	0.00062	I	EW	C	(1)
2454530.57241	0.00217	II	EW	C	(1)
2454533.40037	0.00063	I	EA	C	(1)
2454533.54050	0.00110	I	EW	C	(1)
2454533.65576	0.00098	I	EW	C	(1)
2454535.36037	0.00077	II	EW	C	(1)
2454535.47647	0.00142	I	EW	C	(1)
2454535.59115	0.00032	II	EW	C	(1)
2454536.50244	0.00049	II	EW	C	(1)
2454539.46247	0.00030	II	EW	C	(1)
2454539.57750	0.00096	I	EW	C	(1)
2454540.37363	0.00053	II	EW	C	(1)
2454544.47580	0.00070	II	EA	C	(1)
2454544.58666	0.00048	I	EW	C	(1)
2454547.43251	0.00022	II	EW	C	(1)
2454547.54725	0.00059	I	EW	C	(1)
2454553.46718	0.00056	I	EW	C	(1)
2454555.40253	0.00054	II	EW	C	(1)
2454555.51780	0.00052	I	EW	C	(1)

Πίνακας A.2 (συνέχεια)

2454556.42697	0.00112	I	EW	C	(1)
2454556.53914	0.00042	II	EW	C	(1)
2454556.65629	0.00035	I	EW	C	(1)
2454558.47685	0.00249	I	EW	C	(1)
2454573.38874	0.00084	II	EW	C	(1)
2454574.41584	0.00045	I	EW	C	(1)
2454575.44107	0.00069	II	EW	C	(1)
2454789.60826	0.00107	I	EW	C	(1)
2454789.72140	0.00036	II	EW	C	(1)
2454794.61796	0.00031	I	EW	C	(1)
2454794.73051	0.00105	II	EW	C	(1)
2454800.53776	0.00057	I	EW	C	(1)
2454800.65098	0.00034	II	EW	C	(1)
2454800.76750	0.00094	I	EW	C	(1)
2454802.70014	0.00063	II	EW	C	(1)
2454804.63685	0.00057	I	EW	C	(1)
2454805.54823	0.00089	I	EW	C	(1)
2454805.65880	0.00043	II	EW	C	(1)
2454805.77476	0.00074	I	EW	C	(1)
2454808.50670	0.00060	I	EW	C	(1)
2454808.62123	0.00056	II	EW	C	(1)
2454808.73552	0.00009	I	EW	C	(1)
2454809.64563	0.00059	I	EW	C	(1)
2454809.76247	0.00101	II	EW	C	(1)
2454817.61611	0.00115	I	EW	C	(1)
2454818.52782	0.00055	I	EW	C	(1)
2454818.64225	0.00061	II	$EW + EA$	C	(1)
2454819.29899	0.00068	I	EA	C	(1)
2454821.48684	0.00056	I	EW	C	(1)
2454826.49690	0.00107	I	EW	C	(1)
2454826.61088	0.00037	II	EW	C	(1)
2454826.72363	0.00032	I	EW	C	(1)
2454829.45775	0.00070	I	EW	C	(1)
2454829.56747	0.00102	II	EW	C	(1)
2454832.64735	0.00109	I	EW	C	(1)
2454833.55546	0.00077	I	EW	C	(1)
2454833.65996	0.00046	I	EA	C	(1)
2454833.78384	0.00049	I	EW	C	(1)
2454834.46579	0.00079	I	EW	C	(1)
2454834.58012	0.00022	II	EW	C	(1)
2454834.69388	0.00019	I	EW	C	(1)
2454835.60602	0.00104	I	EW	C	(1)

Πίνακας A.2 (συνέχεια)

2454835.71880	0.00038	II	EW	C	(1)
2454836.63014	0.00029	II	EW	C	(1)
2454836.74374	0.00021	I	EW	C	(1)
2454846.53628	0.00102	I	EW	C	(1)
2454846.65022	0.00054	II	EW	C	(1)
2454846.71620	0.00128	I	EA	C	(1)
2454850.52050	0.00014	II	EW	C	(1)
2454850.63229	0.00042	I	EA	C	(1)
2454850.63475	0.00069	I	$EW + EA$	C	(1)
2454852.57620	0.00073	II	EA	C	(1)
2454852.68371	0.00031	I	EW	C	(1)
2454853.48020	0.00039	II	EW	C	(1)
2454853.59463	0.00088	I	EW	C	(1)
2454853.70883	0.00033	II	EW	C	(1)
2454856.55588	0.00064	I	EW	C	(1)
2454856.66881	0.00019	II	EW	C	(1)
2454857.46752	0.00074	I	EW	C	(1)
2454857.57992	0.00021	II	EW	C	(1)
2454859.51557	0.00054	I	EW	C	(1)
2454859.62965	0.00027	II	EW	C	(1)
2454860.53996	0.00018	II	EW	C	(1)
2454860.65511	0.00073	I	EW	C	(1)
2454861.56535	0.00070	I	EW	C	(1)
2454862.47602	0.00073	I	EW	C	(1)
2454862.59180	0.00060	II	EW	C	(1)
2454862.70369	0.00042	I	EW	C	(1)
2454873.63480	0.00062	I	EW	C	(1)
2454875.43733	0.00042	I	EA	C	(1)
2454875.45544	0.00074	I	EW	C	(1)
2454879.55463	0.00042	I	EW	C	(1)
2454886.61610	0.00061	I	EW	C	(1)
2454887.52610	0.00094	I	EW	C	(1)
2454896.63316	0.00075	I	EW	C	(1)
2454904.37721	0.00023	I	EW	C	(1)
2454904.49224	0.00095	II	EW	C	(1)
2454904.60259	0.00083	I	EW	C	(1)
2454905.40075	0.00018	II	EW	C	(1)
2454905.46481	0.00075	I	EA	C	(1)
2454905.51480	0.00087	I	EW	C	(1)
2454906.42518	0.00059	I	EW	C	(1)
2454906.53675	0.00024	II	EW	C	(1)
2454906.65308	0.00064	I	EW	C	(1)

Πίνακας A.2 (συνέχεια)

2454907.44269	0.00055	II	*EW*	*C*	(1)
2454907.56428	0.00043	I	*EW*	*C*	(1)
2454910.40963	0.00025	II	*EW*	*C*	(1)
2454910.52367	0.00085	I	*EW*	*C*	(1)
2454911.43590	0.00031	I	*EW*	*C*	(1)
2454911.66364	0.00059	I	*EW*	*C*	(1)
2454911.99198	0.00151	I	*EA*	*C*	(1)
2454912.46063	0.00049	II	*EW*	*C*	(1)
2454913.37168	0.00039	II	*EW*	*C*	(1)
2454913.48547	0.00073	I	*EW*	*C*	(1)
2454914.39544	0.00021	I	*EW*	*C*	(1)
2454914.62399	0.00104	I	*EW*	*C*	(1)
2454919.52056	0.00069	II	*EW*	*C*	(1)
2454919.63403	0.00086	I	*EW*	*C*	(1)
2454921.45469	0.00075	I	*EW*	*C*	(1)
2454921.68037	0.00112	I	*EW*	*C*	(1)
2454923.38970	0.00037	II	*EW*	*C*	(1)
2454923.50438	0.00065	I	*EW*	*C*	(1)
2454924.41037	0.00058	I	*EW*	*C*	(1)
2454924.64221	0.00052	I	*EW*	*C*	(1)
2454925.43844	0.00104	II	*EW*	*C*	(1)
2454925.55511	0.00123	I	*EW*	*C*	(1)
2454926.35391	0.00073	I	*EA*	*C*	(1)
2454926.46324	0.00070	I	*EW*	*C*	(1)
2454927.49027	0.00059	II	*EW*	*C*	(1)
2454927.37545	0.00015	I	*EW*	*C*	(1)
2454927.60347	0.00055	I	*EW*	*C*	(1)
2454928.40090	0.00020	II	*EW*	*C*	(1)
2454928.51431	0.00024	I	*EW*	*C*	(1)
2454929.42515	0.00037	I	*EW*	*C*	(1)
2454930.45029	0.00133	II	*EW*	*C*	(1)
2454932.38443	0.00043	I	*EW*	*C*	(1)
2454932.61424	0.00062	I	*EW*	*C*	(1)
2456267.80132	0.00017	II	*EA*	*BV*	(2)
2456267.81536	0.00023	II	*EW*	*BV*	(2)
2456267.92899	0.00030	I	*EW*	*BV*	(2)
2456268.83924	0.00051	I	*EW*	*BV*	(2)
2456269.86573	0.00017	II	*EW*	*BV*	(2)
2456269.97770	0.00015	I	*EW*	*BV*	(2)
2456270.88880	0.00017	I	*EW*	*BV*	(2)
2456271.00394	0.00015	II	*EW*	*BV*	(2)
2456288.87879	0.00020	I	*EW*	*BV*	(2)

Πίνακας A.2 (συνέχεια)

2456297.82710	0.00019	II	*EA*	*BV*	(2)
2456297.87410	0.00019	II	*EW*	*BV*	(2)
2456297.98655	0.00024	I	*EW*	*BV*	(2)
2456298.89837	0.00016	I	*EW*	*BV*	(2)
2456299.01309	0.00026	II	*EW*	*BV*	(2)
2456299.92307	0.00025	II	*EW*	*BV*	(2)
2456300.03608	0.00016	I	*EW*	*BV*	(2)
2456300.94721	0.00019	I	*EW*	*BV*	(2)
2456301.85768	0.00030	I	*EW*	*BV*	(2)
2456301.97328	0.00059	II	*EW*	*BV*	(2)
2456302.88386	0.00061	II	*EW*	*BV*	(2)
2456302.99612	0.00031	I	*EW*	*BV*	(2)
2456303.05239	0.00015	II	*EA*	*BV*	(2)
2456305.61742	0.00019	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456305.66032	0.00030	II	*EA*	*BVRI*	(3)
2456306.29823	0.00033	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456306.41237	0.00021	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456307.43819	0.00020	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456307.55117	0.00020	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456307.66541	0.00037	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456313.47205	0.00034	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456313.49227	0.00049	II	*EA*	*BVRI*	(3)
2456313.58703	0.00033	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456314.60988	0.00024	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456317.45714	0.00032	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456317.57033	0.00039	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456317.68540	0.00027	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456322.46743	0.00030	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456322.58114	0.00026	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456322.63283	0.00038	II	*EA*	*BVRI*	(3)
2456322.69364	0.00050	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456323.60622	0.00031	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456324.40196	0.00032	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456324.51727	0.00038	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456324.59034	0.00024	I	*EA*	*BVRI*	(3)
2456324.62898	0.00028	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456325.31236	0.00024	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456325.42769	0.00021	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456325.53992	0.00019	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456329.52645	0.00019	II	*EW*	*BVRI*	(3)
2456329.63928	0.00024	I	*EW*	*BVRI*	(3)
2456330.55023	0.00021	I	*EW*	*BVRI*	(3)

Πίνακας A.2 (συνέχεια)

2456340.00143	0.00050	II	EW	BV	(2)
2456346.78443	0.00015	I	EA	BV	(2)
2456347.85636	0.00018	I	EW	BV	(2)
2456372.33566	0.00015	II	EW	$BVRI$	(4)
2456372.44699	0.00020	I	EW	$BVRI$	(4)

1: Lohr priv comm. , 2: Koo et al. (2014), 3: Gazeas et al. (2017), 4: Haroon et al. (2018)

Κώδικας υπολογισμού τροχιών και ταχυτήτων διπλών εκλειπτικών συστημάτων με τη μέθοδο *Newton*

$clear;$
$clc;$

$G = 4 * pi()^2; z0 = 0;$
$dt = 0.001;$
$M1 = 1.511; M2 = 1.201; M = M1 + M2; T = 10.1849; a = (G * M * T^2/(2 * pi())^2)^(1/3);$
$e = 0.001; incl = 85 * pi()/180; t0 = 0; omega = 1.575; phi0 = 0;$
$ttot = 2 * T; k = floor(ttot./dt);$
$omegap = [cos(omega) - sin(omega)0; sin(omega)cos(omega)0; 001];$
$ip = [100; 0cos(incl) - sin(incl); 0sin(incl)cos(incl)];$
$p = omegap * ip;$

$t = zeros(k, 1); E = zeros(k, 10); Ef = zeros(k, 1); f = zeros(k, 1);$
$r = zeros(k, 1); phi = zeros(k, 1); vr = zeros(k, 1); vphi = zeros(k, 1);$
$x = zeros(k, 1); y = zeros(k, 1); z = zeros(k, 1);$
$vx = zeros(k, 1); vy = zeros(k, 1); vz = zeros(k, 1);$
$coor = zeros(3, k); coor_obs = zeros(3, k); coorv = zeros(3, k); coorv_obs = zeros(3, k);$
$ksi = zeros(k, 1); eta = zeros(k, 1); zeta = zeros(k, 1);$
$vksi = zeros(k, 1); veta = zeros(k, 1); vzeta = zeros(k, 1);$

$x1 = zeros(k, 1); y1 = zeros(k, 1); z1 = zeros(k, 1);$
$vx1 = zeros(k, 1); vy1 = zeros(k, 1); vz1 = zeros(k, 1);$
$coor1 = zeros(3, k); coor_obs1 = zeros(3, k); coorv1 = zeros(3, k); coorv_obs1 = zeros(3, k);$
$ksi1 = zeros(k, 1); eta1 = zeros(k, 1); zeta1 = zeros(k, 1);$
$vksi1 = zeros(k, 1); veta1 = zeros(k, 1); vzeta1 = zeros(k, 1);$

$x2 = zeros(k, 1); y2 = zeros(k, 1); z2 = zeros(k, 1);$
$vx2 = zeros(k, 1); vy2 = zeros(k, 1); vz2 = zeros(k, 1);$
$coor2 = zeros(3, k); coor_obs2 = zeros(3, k); coorv2 = zeros(3, k); coorv_obs2 = zeros(3, k);$
$ksi2 = zeros(k, 1); eta2 = zeros(k, 1); zeta2 = zeros(k, 1);$
$vksi2 = zeros(k, 1); veta2 = zeros(k, 1); vzeta2 = zeros(k, 1);$

$forj = 1 : 1 : k;$

$t(j) = j * dt;$

$fori = 1 : 1 : 10;$
$E(j, 1) = sqrt(G * M/a^3) * (t(j) - t0);$
$E(j, i + 1) = E(j, i) - (E(j, i) - e * sin(E(j, i))$
$- sqrt(G * M/a^3) * (t(j) - t0))/(1 - e * cos(E(j, i)));$
end

$Ef(j) = mod(E(j, 10), 2 * pi());$
$r(j) = a * (1 - e * cos(Ef(j)));$

$ifEf(j) > pi()$
$f(j) = 2 * pi() - acos((a * (1 - e^2) - r(j))/(e * r(j)));$
$elsef(j) = acos((a * (1 - e^2) - r(j))/(e * r(j)));$
end

$phi(j) = f(j) + phi0;$

$x(j) = r(j) * cos(phi(j)); x1(j) = M2 * x(j)/M; x2(j) = -M1 * x(j)/M;$
$y(j) = r(j) * sin(phi(j)); y1(j) = M2 * y(j)/M; y2(j) = -M1 * y(j)/M;$
$z(j) = 0; z1(j) = 0; z2(j) = 0;$

$En = -G * M/(2 * a);$
$L = sqrt(G * M * a * (1 - e^2)); L1 = M2^2 * L/M^2; L2 = M1^2 * L/M^2;$
$vphi(j) = L/r(j);$

$ifEf(j) > 0\&\&Ef(j) <= pi();$
$vr(j) = sqrt(2 * (G * M/r(j) + En - L^2/(2 * r(j)^2)));$
$elsevr(j) = -sqrt(2 * (G * M/r(j) + En - L^2/(2 * r(j)^2)));$
end

$vx(j) = vr(j) * x(j)/r(j) - vphi(j) * y(j)/r(j);$

$vx1(j) = M2 * vx(j)/M; vx2(j) = -M1 * vx(j)/M;$
$vy(j) = vr(j) * y(j)/r(j) + vphi(j) * x(j)/r(j);$
$vy1(j) = M2 * vy(j)/M; vy2(j) = -M1 * vy(j)/M;$
$vz(j) = 0; vz1(j) = 0; vz2(j) = 0;$

$coor(:, j) = [transpose(x(j)); transpose(y(j)); transpose(z(j))];$
$coor1(:, j) = [transpose(x1(j)); transpose(y1(j)); transpose(z1(j))];$
$coor2(:, j) = [transpose(x2(j)); transpose(y2(j)); transpose(z2(j))];$
$coor_obs(:, j) = p * coor(:, j); coor_obs1(:, j) = p * coor1(:, j); coor_obs2(:, j) = p * coor2(:, j);$
$ksi(j) = coor_obs(1, j); eta(j) = coor_obs(2, j); zeta(j) = coor_obs(3, j);$
$ksi1(j) = coor_obs1(1, j); eta1(j) = coor_obs1(2, j); zeta1(j) = coor_obs1(3, j);$
$ksi2(j) = coor_obs2(1, j); eta2(j) = coor_obs2(2, j); zeta2(j) = coor_obs2(3, j);$
$coorv(:, j) = [transpose(vx(j)); transpose(vy(j)); transpose(vz(j))];$
$coorv1(:, j) = [transpose(vx1(j)); transpose(vy1(j)); transpose(vz1(j))];$
$coorv2(:, j) = [transpose(vx2(j)); transpose(vy2(j)); transpose(vz2(j))];$
$coorv_obs(:, j) = p * coorv(:, j);$
$coorv_obs1(:, j) = p * coorv1(:, j); coorv_obs2(:, j) = p * coorv2(:, j);$
$vksi(j) = coorv_obs(1, j); veta(j) = coorv_obs(2, j); vzeta(j) = coorv_obs(3, j);$
$vksi1(j) = coorv_obs1(1, j); veta1(j) = coorv_obs1(2, j); vzeta1(j) = coorv_obs1(3, j);$
$vksi2(j) = coorv_obs2(1, j); veta2(j) = coorv_obs2(2, j); vzeta2(j) = coorv_obs2(3, j);$
end

$v = [vxvyvz]; v1 = [vx1vy1vz1]; v2 = [vx2vy2vz2]; coord1 = [xyz]; coord2 = [ksietazeta];$
$m = max(v1);$
$mxx = max(m);$
$m1 = max(coord1); m2 = max(coord2);$
$mxx1 = max(m1); mxx2 = max(m2);$
$datanew = [xyzvxvyvz]; datanew1 = [x1y1z1vx1vy1vz1]; datanew2 = [x2y2z2vx2vy2vz2];$
$data1 = abs(datanew(1, :) - datanew(i, :));$
$data2 = data1 * 100;$
$data = [data1; data2];$

$fig1 = figure(1);$
$holdon;$
$axissquare;$

$plot(x1, y1,' r.');$
$plot(x2, y2,' b-');$
$xlim([-55])$
$ylim([-55])$
$xlabel('x(A.U.)')$
$ylabel('y(A.U.)')$
$pbaspect([111])$
$rectangle('Position', [x2(find(x1, 1,' last')) - 0.33, y2(find(y1, 1,' last')) - 0.33, 0.66, 0.66],$
$'Curvature', [1, 1],' FaceColor',' k')$
$rectangle('Position', [x1(find(x2, 1,' last')) - 0.35, y2(find(y1, 1,' last')) - 0.35, 0.7, 0.7],$
$'Curvature', [1, 1],' FaceColor',' k')$
$gridon;$
$holdoff;$

$fig2 = figure(2);$
$holdon;$
$plot(vx1, vy1,' r.');$
$plot(vx2, vy2,' b-');$
$rectangle('Position', [vx1(find(vx1, 1,' last')) - 0.2, vy1(find(vy1, 1,' last')) - 0.2, 0.4, 0.4],$
$'Curvature', [1, 1],' FaceColor',' k')$
$rectangle('Position', [vx2(find(vx2, 1,' last')) - 0.15, vy2(find(vy2, 1,' last')) - 0.15, 0.3, 0.3],$
$'Curvature', [1, 1],' FaceColor',' k')$
$xlim([-mxx - 1, mxx + 1])$
$ylim([-mxx - 1, mxx + 1])$
$xlabel('vx(A.U./yr)')$
$ylabel('vy(A.U./yr)')$
$axissquare;$
$gridon;$

$fig3 = figure(3);$
$holdon;$
$plot3(ksi1, eta1, zeta1,' r.');$
$plot3(ksi2, eta2, zeta2,' b-');$
$xlim([-44])$
$ylim([-44])$

$zlim([-44])$
$axissquare;$
$[x, y, z] = sphere(100);$
$surf(0.3583 * x + ksi1(find(ksi1, 1,' last')), 0.3583 * y + eta1(find(eta1, 1,' last')), 0.3583 * z$
$+ zeta1(find(zeta1, 1,' last')),' FaceColor',' black')$
$surf(0.28 * x + ksi2(find(ksi2, 1,' last')), 0.28 * y + eta2(find(eta2, 1,' last')), 0.28 * z$
$+ zeta2(find(zeta2, 1,' last')),' FaceColor',' black')$
$xlabel('\xi(A.U.)')$
$ylabel('\eta(A.U.)')$
$zlabel('\zeta(A.U.)')$
$gridon;$
$view([20255])$

$fig4 = figure(4);$
$holdon;$
$plot3(vksi1, veta1, vzeta1,' r.');$
$plot3(vksi2, veta2, vzeta2,' b-');$
$surf(0.3 * x + vksi1(find(vksi1, 1,' last')), 0.3 * y + veta1(find(veta1, 1,' last')), 0.3 * z$
$+ vzeta1(find(vzeta1, 1,' last')),' FaceColor',' black')$
$surf(0.2 * x + vksi2(find(vksi2, 1,' last')), 0.2 * y + veta2(find(veta2, 1,' last')), 0.2 * z$
$+ vzeta2(find(vzeta2, 1,' last')),' FaceColor',' black')$
$xlim([-mxx - 1mxx + 1])$
$ylim([-mxx - 1mxx + 1])$
$zlim([-mxx - 1mxx + 1])$
$xlabel('v\xi(A.U./yr)')$
$ylabel('v\eta(A.U./yr)')$
$zlabel('v\zeta(A.U./yr)')$
$view([20255])$
$axissquare;$
$gridon;$

$fig5 = figure(5);$
$holdon;$
$plot(365 * t, 4.741 * vzeta1,' r.')$
$plot(365 * t, 4.741 * vzeta2,' b-')$

$xlabel('t(days)')$
$ylabel('v\zeta(km/s)')$
$gridon;$

Βιβλιογραφία

H. Ak and N. Filiz. Photoelectric Minimum Times of Some Eclipsing Binary Stars. *Information Bulletin on Variable Stars*, 5462, October 2003.

A. H. Batten and R. H. Hardie. ADS 9537-A Pair of Eclipsing Binaries. *aj*, 70:666, 1965. doi: 10.1086/109609.

A. H. Batten and W. Lu. The spectroscopic orbits of BV and BW Draconis. *pasp*, 98:92–98, January 1986. doi: 10.1086/131724.

I. B. Biro, T. Borkovits, S. Csizmadia, T. Hegedus, P. Klagyivik, Z. T. Kiss, T. Kovacs, P. Lampens, L. Patkos, A. Pal, Z. Regaly, and P. van Cauteren. New Times of Minima of Eclipsing Binary Systems and of Maximum of SXPHE Type Stars. *Information Bulletin on Variable Stars*, 5684, February 2006.

I. B. Biro, T. Borkovits, T. Hegedus, Z. T. Kiss, T. Kovacs, P. Lampens, Z. Regaly, C. W. Robertson, and P. van Cauteren. New Times of Minima of Eclipsing Binary Systems. *Information Bulletin on Variable Stars*, 5753, January 2007.

T. Borkovits, I. B. Biro, T. Hegedus, S. Csizmadia, T. Kovacs, A. Kospal, A. Pal, V. Konyves, and A. Moor. New Times of Minima of Eclipsing Binary Systems. *Information Bulletin on Variable Stars*, 5313, September 2002.

T. Borkovits, I. B. Biro, S. Csizmadia, L. Patkos, T. Hegedus, A. Pal, A. Kospal, and P. Klagyivik. New Times of Minima of Eclipsing Binary Systems. *Information Bulletin on Variable Stars*, 5579, December 2004.

T. Borkovits, I. B. Biro, T. Hegedus, Z. T. Kiss, R. Szakats, Z. Regaly, L. Patkos, P. Klagyivik, S. Simity, T. Grezsa, G. Gergely, and K. Lukacs. New and Unpublished Times of Minima of Eclipsing Binary Systems. *Information Bulletin on Variable Stars*, 5979, March 2011.

D. H. Bradstreet. Fundamentals of Solving Eclipsing Binary Light Curves Using Binary Maker 3. *Society for Astronomical Sciences Annual Symposium*, 24:23, May 2005.

L. Brat, J. Trnka, L. Smelcer, M. Lehky, H. Kucakova, F. Lomoz, D. Hanzl, M. Vrastak, G. Corfini, V. Pribik, R. Dreveny, R. Ehrenberger, R. Kocian,

M. Masek, J. Polak, J. Starzomski, F. Marchi, S. Poddany, M. Zejda, P. Cagas, M. Klos, R. Garofalo, J. Klimentova, P. Kliment, J. Speil, M. Magris, B. Hladik, K. Honkova, J. Jurysek, T. Smycka, M. Moudra, R. Naves, N. Ruocco, J. Zahajsky, M. Audejean, O. Pejcha, R. Uhlar, J. Vieira, P. Zasche, and R. Zambelli. B.R.N.O. Contributions #37 - Times of minima. *Open European Journal on Variable Stars*, 137:1, April 2011.

P. Cagaš and O. Pejcha. Discovery of a double eclipsing binary with periods near a 3:2 ratio. *aap*, 544:L3, August 2012. doi: 10.1051/0004-6361/201219815.

J. L. Coughlin, M. López-Morales, T. E. Harrison, N. Ule, and D. I. Hoffman. Low-mass Eclipsing Binaries in the Initial Kepler Data Release. *aj*, 141(3):78, Mar 2011. doi: 10.1088/0004-6256/141/3/78.

S. Dallaporta and U. Munari. Discovery and disentangling of multi-mode delta-Sct pulsations in the eclipsing binary V994 Her. *ArXiv Astrophysics e-prints*, November 2005.

P. P. Eggleton and L. Kisseleva-Eggleton. A Mechanism for Producing Short-Period Binaries. *apss*, 304:75–79, August 2006. doi: 10.1007/s10509-006-9078-z.

ESA, editor. *The HIPPARCOS and TYCHO catalogues. Astrometric and photometric star catalogues derived from the ESA HIPPARCOS Space Astrometry Mission*, volume 1200 of *ESA Special Publication*, 1997.

C. Fabricius, E. Høg, V. V. Makarov, B. D. Mason, G. L. Wycoff, and S. E. Urban. The Tycho double star catalogue. *aap*, 384:180–189, March 2002. doi: 10.1051/0004-6361:20011822.

H. Frieboes-Conde and T. Herczeg. Period variations of fourteen eclipsing binaries with possible light-time effect. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 12:1, Oct 1973.

Gaia Collaboration, A. G. A. Brown, A. Vallenari, T. Prusti, J. H. J. de Bruijne, C. Babusiaux, C. A. L. Bailer-Jones, M. Biermann, D. W. Evans, and L. Eyer. Gaia Data Release 2. Summary of the contents and survey properties. *aap*, 616: A1, Aug 2018. doi: 10.1051/0004-6361/201833051.

K. Gazeas. Disentangling the Quadruple System 1SWASP J093010.78+533859.5. In S. M. Rucinski, G. Torres, and M. Zejda, editors, *Living Together: Planets, Host Stars and Binaries*, volume 496 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 112, July 2015.

K. Gazeas. The robotic and remotely controlled telescope at the University of Athens Observatory. In *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Conference Series*, volume 48 of *Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica, vol. 27*, pages 22–23, December 2016.

K. Gazeas, G. Loukaidou, L. Tzouganatos, E. Karampotsiou, and M. Petropoulou. 110 Minima timings of ultra-short orbital period eclipsing binaries. *Information Bulletin on Variable Stars*, 6217, September 2017. doi: 10.22444/IBVS.6217.

L. Girardi, A. Bressan, G. Bertelli, and C. Chiosi. Evolutionary tracks and isochrones for low- and intermediate-mass stars: From 0.15 to 7 M_{sun}, and from Z=0.0004 to 0.03. *aaps*, 141:371–383, Feb 2000. doi: 10.1051/aas:2000126.

D. Graczyk, I. Soszyński, R. Poleski, G. Pietrzyński, A. Udalski, M. K. Szymański, M. Kubiak, Ł. Wyrzykowski, and K. Ulaczyk. The Optical Gravitational Lensing Experiment. The OGLE-III Catalog of Variable Stars. XII. Eclipsing Binary Stars in the Large Magellanic Cloud. *actaa*, 61(2):103–122, Jun 2011.

A. A. Haroon, A. Essam, and H. Basurah. BVRI Photometric Observations and Study of the Newly Discovered W UMa Type Eclipsing Binary of Multiple System 1SWASP J093010.78+533859.5. *Astrophysics*, 61:458–468, December 2018. doi: 10.1007/s10511-018-9550-9.

E. Høg, C. Fabricius, V. V. Makarov, S. Urban, T. Corbin, G. Wycoff, U. Bastian, P. Schwekendiek, and A. Wicenec. The Tycho-2 catalogue of the 2.5 million brightest stars. *aap*, 355:L27–L30, March 2000.

K. Hoňková, J. Juryšek, M. Lehký, L. Šmelcer, J. Trnka, M. Mašek, M. Urbaník, R. Auer, M. Vrašták, H. Kučáková, N. Ruocco, M. Magris, J. Polák, L. Brát, M. Audejean, M. Banfi, M. Moudrá, F. Lomoz, V. Přibík, R. Dřevěný, F. Scaggiante, R. Kocián, P. Cagaš, S. Poddaný, M. Zíbar, J. Jacobsen, P. Marek, C. Colazo, D. Zardin, P. Sobotka, J. Starzomski, B. Hladík, M. Vincenzi, M. Skarka, F. Walter, A. Chapman, N. D. Díaz, P. Aceti, P. Singh, L. Kalista, M. Kamenec, M. Zejda, F. Marchi, R. Bílek, P. Guzzo, G. Corfini, K. Onderková, A. Hečko, F. Mina, M. Vítek, R. Barsa, C. Quinones, M. Taormina, R. Melia, M. Schneiter, A. Scavuzzo, N. Marcionni, R. Ehrenberger, L. Tapia, G. Fasseta, N. Suarez, D. Scaggiante, E. Artusi, R. Garcia, J. Grnja, A. Fišer, T. Hynek, M. Vilášek, J. Rozehnal, T. Kalisch, K. Lang, S. Gorková, R. Novysedlák, F. Salvaggio, T. Smyčka, M. Spurný, T. Wikander, J. Mravik, J. Šuchaň, and J. Čaloud. B.R.N.O. Contributions #38 Times of minima. *Open European Journal on Variable Stars*, 160:1, December 2013.

J. Hubscher. BAV-Results of observations - Photoelectric Minima of Selected Eclipsing Binaries and Maxima of Pulsating Stars. *Information Bulletin on Variable Stars*, 6084, December 2013.

J. Hubscher. BAV Results of observations - Photoelectric Minima of Selected Eclipsing Binaries and Maxima of Pulsating Stars. *Information Bulletin on Variable Stars*, 6118, October 2014.

J. Hubscher. BAV-Results of observations - Photoelectric Minima of Selected Eclipsing Binaries and Maxima of Pulsating Stars. *Information Bulletin on Variable Stars*, 6196, January 2017. doi: 10.22444/IBVS.6196.

J. Hubscher and P. B. Lehmann. BAV-Results of observations - Photoelectric Minima of Selected Eclipsing Binaries and Maxima of Pulsating Stars. *Information Bulletin on Variable Stars*, 6149, September 2015.

J. B. Irwin. Standard light-time curves. *aj*, 64:149, May 1959. doi: 10.1086/107913.

E. V. Kazarovets, N. N. Samus, O. V. Durlevich, M. S. Frolov, S. V. Antipin, N. N. Kireeva, and E. N. Pastukhova. The 74th Special Name-list of Variable Stars. *Information Bulletin on Variable Stars*, 4659, January 1999.

J.-R. Koo, J. W. Lee, B.-C. Lee, S.-L. Kim, C.-U. Lee, K. Hong, D.-J. Lee, and S.-C. Rey. 1SWASP J093010.78+533859.5: A Possible Hierarchical Quintuple System. *aj*, 147:104, May 2014. doi: 10.1088/0004-6256/147/5/104.

Shinjirou Kouzuma. Starspots in contact and semi-detached binary systems. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 71(1):21, Jan 2019. doi: 10.1093/pasj/psy140.

Yoshihide Kozai. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *aj*, 67:591, November 1962. doi: 10.1086/108790.

K. K. Kwee and H. van Woerden. A method for computing accurately the epoch of minimum of an eclipsing variable. *bain*, 12:327, May 1956.

C.-U. Lee, S.-L. Kim, J. W. Lee, C.-H. Kim, Y.-B. Jeon, H.-I. Kim, J.-N. Yoon, and A. Humphrey. V994 Herculis: the multiple system with a quadruple-lined spectrum and a double eclipsing feature. *mnras*, 389:1630–1636, October 2008. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.13708.x.

H. Lehmann, M. Zechmeister, S. Dreizler, S. Schuh, and R. Kanzler. KIC 4247791: a SB4 system with two eclipsing binaries (2EBs). A quadruple system? *aap*, 541: A105, May 2012. doi: 10.1051/0004-6361/201118298.

M. E. Lohr, A. J. Norton, U. C. Kolb, D. R. Anderson, F. Faedi, and R. G. West. Period decrease in three SuperWASP eclipsing binary candidates near the short-period limit. *aap*, 542:A124, June 2012. doi: 10.1051/0004-6361/201219158.

M. E. Lohr, A. J. Norton, U. C. Kolb, P. F. L. Maxted, I. Todd, and R. G. West. VizieR Online Data Catalog: Period change for 143 SuperWASP eclipsing binaries (Lohr+, 2013). *VizieR Online Data Catalog*, 354, April 2013.

M. E. Lohr, A. J. Norton, E. Gillen, R. Busuttil, U. C. Kolb, S. Aigrain, A. McQuillan, S. T. Hodgkin, and E. González. The doubly eclipsing quintuple low-mass star system 1SWASP J093010.78+533859.5. *aap*, 578:A103, June 2015. doi: 10.1051/0004-6361/201525973.

Hiroyuki Maehara, Yuta Notsu, Shota Notsu, Kosuke Namekata, Satoshi Honda, Takako T. Ishii, Daisaku Nogami, and Kazunari Shibata. Starspot activity and superflares on solar-type stars. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 69(3):41, Jun 2017. doi: 10.1093/pasj/psx013.

B. D. Mason, G. L. Wycoff, W. I. Hartkopf, G. G. Douglass, and C. E. Worley. The 2001 US Naval Observatory Double Star CD-ROM. I. The Washington Double Star Catalog. *aj*, 122:3466–3471, December 2001. doi: 10.1086/323920.

Yuta Notsu, Takuya Shibayama, Hiroyuki Maehara, Shota Notsu, Takashi Nagao, Satoshi Honda, Takako T. Ishii, Daisaku Nogami, and Kazunari Shibata. Superflares on Solar-type Stars Observed with Kepler II. Photometric Variability of Superflare-generating Stars: A Signature of Stellar Rotation and Starspots. *apj*, 771(2):127, Jul 2013. doi: 10.1088/0004-637X/771/2/127.

D. J. K. O'Connell. The so-called periastron effect in close eclipsing binaries ; New variable stars (fifth list). *Publications of the Riverview College Observatory*, 2(6): 85–100, Aug 1951.

M. Pawlak, D. Graczyk, I. Soszyński, P. Pietrukowicz, R. Poleski, A. Udalski, M. K. Szymański, M. Kubiak, G. Pietrzyński, Ł. Wyrzykowski, K. Ulaczyk, S. Kozłowski, and J. Skowron. Eclipsing Binary Stars in the OGLE-III Fields of the Small Magellanic Cloud. *actaa*, 63:323–338, September 2013.

M. A. C. Perryman, L. Lindegren, J. Kovalevsky, E. Hoeg, U. Bastian, P. L. Bernacca, M. Crézé, F. Donati, M. Grenon, M. Grewing, F. van Leeuwen, H. van der Marel, F. Mignard, C. A. Murray, R. S. Le Poole, H. Schrijver, C. Turon, F. Arenou, M. Froeschlé, and C. S. Petersen. The HIPPARCOS Catalogue. *aap*, 323:L49–L52, July 1997.

D. L. Pollacco, I. Skillen, A. Collier Cameron, D. J. Christian, C. Hellier, J. Irwin, T. A. Lister, R. A. Street, R. G. West, D. R. Anderson, W. I. Clarkson, H. Deeg, B. Enoch, A. Evans, A. Fitzsimmons, C. A. Haswell, S. Hodgkin, K. Horne, S. R. Kane, F. P. Keenan, P. F. L. Maxted, A. J. Norton, J. Osborne, N. R. Parley, R. S. I. Ryans, B. Smalley, P. J. Wheatley, and D. M. Wilson. The WASP Project and the SuperWASP Cameras. *pasp*, 118:1407–1418, October 2006. doi: 10.1086/508556.

A. Prša and T. Zwitter. A Computational Guide to Physics of Eclipsing Binaries. I. Demonstrations and Perspectives. *apj*, 628:426–438, July 2005. doi: 10.1086/430591.

Andrej Prša, Natalie Batalha, Robert W. Slawson, Laurance R. Doyle, William F. Welsh, Jerome A. Orosz, Sara Seager, Michael Rucker, Kimberly Mjaseth, Scott G. Engle, Kyle Conroy, Jon Jenkins, Douglas Caldwell, David Koch, and William Borucki. Kepler Eclipsing Binary Stars. I. Catalog and Principal Characterization

of 1879 Eclipsing Binaries in the First Data Release. *aj*, 141(3):83, Mar 2011. doi: 10.1088/0004-6256/141/3/83.

Robert W. Slawson, Andrej Prša, William F. Welsh, Jerome A. Orosz, Michael Rucker, Natalie Batalha, Laurance R. Doyle, Scott G. Engle, Kyle Conroy, Jared Coughlin, Trevor A. Gregg, Tara Fetherolf, Donald R. Short, Gur Windmiller, Daniel C. Fabrycky, Steve B. Howell, Jon M. Jenkins, Kamal Uddin, F. Mullally, Shawn E. Seader, Susan E. Thompson, Dwight T. Sand erfer, William Borucki, and David Koch. Kepler Eclipsing Binary Stars. II. 2165 Eclipsing Binaries in the Second Data Release. *aj*, 142(5):160, Nov 2011. doi: 10.1088/0004-6256/142/5/160.

K. Stepień and K. Gazeas. Evolution of Low Mass Contact Binaries. *actaa*, 62(2): 153–177, Jun 2012.

R. E. Wilson. UBV extinction predictions based on numerical integrations of star and blackbody radiation functions. *aj*, 72:327, Apr 1967.

R. E. Wilson. Accuracy and Efficiency in the Binary Star Reflection Effect. *apj*, 356:613, Jun 1990. doi: 10.1086/168867.

R. E. Wilson. Binary Star Light-Curve Models. *pasp*, 106:921, Sep 1994. doi: 10.1086/133464.

R. E. Wilson and E. J. Devinney. Realization of Accurate Close-Binary Light Curves: Application to MR Cygni. *apj*, 166:605, June 1971. doi: 10.1086/150986.

M. Wolf. Light-time effect as a valuable tool in stellar astrophysics. *Contributions of the Astronomical Observatory Skalnate Pleso*, 43(3):493–497, Mar 2014.

P. Zasche and R. Uhlař. Ole Rømer's method still on the stage: the study of two bound eclipsing binaries in quintuple system V994 Her. *mnras*, 429:3472–3476, March 2013. doi: 10.1093/mnras/sts616.

P. Zasche and R. Uhlař. Updated study of the quintuple system V994 Herculis. *aap*, 588:A121, April 2016. doi: 10.1051/0004-6361/201628153.

P. Zasche, A. Liakos, P. Niarchos, M. Wolf, V. Manimanis, and K. Gazeas. Period changes in six contact binaries: WZ And, V803 Aql, DF Hya, PY Lyr, FZ Ori, and AH Tau. *na*, 14(2):121–128, Feb 2009. doi: 10.1016/j.newast.2008.06.002.

P. Zasche, R. Uhlar, H. Kucakova, and P. Svoboda. Collection of minima. *Information Bulletin on Variable Stars*, 6007, December 2011.

P. Zasche, R. Uhlar, P. Svoboda, H. Kucakova, M. Masek, and J. Jurysek. Collection of Minima of Eclipsing Binaries, part III. *Information Bulletin on Variable Stars*, 6204, April 2017. doi: 10.22444/IBVS.6204.

S. Zola, A. Baran, B. Debski, and D. Jableka. Observational Verification of the Limb-Darkening Law Based on Kepler Data. In S. M. Rucinski, G. Torres, and M. Zejda, editors, *Living Together: Planets, Host Stars and Binaries*, volume 496 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 217, Jul 2015.