Ο τελεστής Calderon στη θεωρία κυματικής σκέδασης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΑ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Μαρία Κούτρα

Αθήνα 2019.

Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τις μεταπτυχιακές μου σπουδές με τη συγγραφή της διπλωματικής αυτής εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα Καθηγήτριά μου Κυρία Ε. Κόττα-Αθανασιάδου για την καθοδήγηση που μου παρείχε καθ'όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της. Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Ομότιμο Καθηγητή μου Κύριο Χριστόδουλο Αθανασιάδη για την πολύτιμη βοήθειά του στην παρούσα εργασία. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους Καθηγητές κύριο Γεράσιμο Μπαρμπάτη και κύριο Αθανάσιο Γιαννακόπουλο για τις εύστοχες παρατηρήσεις στη διπλωματική εργασία.

Ευχαριστώ τους υποψήφιους διδάκτορες Στεφανία-Μαρία Ζώη και Ιωάννη Αρκούδη για τη βοήθειά τους.

Εισαγωγή

Κύμα είναι μία διαταραχή η οποία ταξιδεύει μέσα στον χώρο. Τα βασικά είδη κυμάτων είναι τα μηχανικά κύματα που ταξιδεύουν διαμέσου ενός υλικού, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που δε χρειάζονται ύλη για να ταξιδέψουν (ταξιδεύουν και στο κενό) και τα κύματα πιθανότητας της κβαντικής φυσικής όπου τα υποατομικά σωματίδια εμφανίζουν και κυματικές ιδιότητες. Εδω θα περιοριστούμε στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Ο Oersted ανακάλυψε ότι ο ηλεκτρισμός μπορεί να παράγει μαγνητισμό και ο Faraday ανακάλυψε ότι ο μαγνητισμός μπορεί να παράγει ηλεκτρισμό. Οι αναζητήσεις του Faraday κατέστησαν δυνατό στον James Clark Maxwell να καθιερώσει την αλληλεξάρτηση του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού.

Σκέδαση ονομάζεται το φαινόμενο κατα το οποίο ένα κυματικό πεδίο υφίσταται διαταραχές όταν στο χώρο διάδοσής του υπάρχει ένα εμπόδιο το οποίο ονομάζεται σκεδαστής. Τα προβλήματα σκέδασης χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία είναι τα ευθέα προβλήματα σκέδασης στα οποία γνωρίζουμε το προσπίπτον κύμα, τις συνθήκες στο σύνορο του σκεδαστή και αναζητούμε το σκεδασμένο πεδίο. Η δεύτερη κατηγορία είναι τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης στα οποία γνωρίζουμε το προσπίπτον κύμα, το σκεδασμένο κύμα και αναζητούμε τις φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες του σκεδαστή. Γενικά, ένα πρόβλημα σκέδασης ανήκει στην κατηγορία μαθηματικών προβλημάτων συνοριακών τιμών για μερικές διαφορικές εξισώσεις υπερβολικού τύπου. Η ακουστική σκέδαση με αρμονική χρονική εξάρτηση είναι ένα εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Helmholtz η οποία είναι ελλειπτικού τύπου.

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά το πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης από έναν σφαιρικό τέλειο αγωγό και τον τρόπο που αυτό μας οδηγεί στον ορισμό του τελεστή Calderon. Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο εισάγουμε τις κλασσικές εξισώσεις Maxwell για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε γραμμική μορφή. Στη συνέχεια ανάγουμε το σύστημα σε αρμονικά χρονικά εξαρτώμενο, υποθέτωντας ότι η διάδοση γίνεται σε ενιαία συχνότητα. Διατυπώνουμε προβλήματα συνοριακών τιμών και προβλήματα σκέδασης περιγράφοντας με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή.

Στο δεύτερο κεφάλαιο χρησιμοποιούμε τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz και διατυπώνουμε τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των Stratton-

Chu για φραγμένα και μη φραγμένα χωρία. Εκράζουμε την εξίσωση Helmholtz σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες και εφαρμόζοντας τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών λαμβάνουμε τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις και τις συναρτήσεις Bessel οι οποίες δίνουν την κλασική λύση του προβλήματος σκέδασης που μελετάμε.

Στο τρίτο κεφάλαιο δίνουμε τους ορισμούς και τις βασικές ιδιότητες των χώρων Sobolev για τις βαθμωτές και διανυσματικές συναρτήσεις. Στόχος μας είναι να διατυπώσουμε τον ορισμό του κατάλληλου χώρου Sobolev στον οποίο ορίζεται ο τελεστής Calderon.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο εκφράζουμε τη κλασική λύση του εξωτερικού προβλήματος σκέδασης για τον σφαιρικό τέλειο αγωγό μέσω των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων. Οι αναλυτικές εκφράσεις των συνοριακών συνθηκών στην επιφάνεια του σφαιρικού σγωγού δίνουν τον ορισμό των απεικονίσεων που αναφέρονται ως τελεστές Calderon και οι οποίες αντιστοιχούν την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στην εφαπτομενική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου και αντίστροφα. Διατυπώνουμε βασικές ιδιότητες των τελεστών αυτών και των γραμμικών συνδυασμών τους που βοηθούν στην μελέτη της ύπαρξης λύσης ενός τέτοιου προβλήματος. Κλείνουμε το κεφάλαιο με ένα θεώρημα για την μοναδικότητας της λύσης του προβλήματος σκέδασης για τον τέλειο σφαιρικό αγωγό.

Συμβολισμοί

1. Τελεστές

   (α΄) Ανάδελτα (gradient). Συμβολισμός: ∇f ή $gradf$.
   Το ανάδελτα μίας βαθμωτής συνάρτησης f είναι:

   $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

   με $i = (1,0,0),\ j = (0,1,0),\ k = (0,0,1)$.

   (β΄) Απόκλιση (divergence). Συμβολισμός: $\nabla \cdot f$ ή $divf$.
   Έστω $F = (P,Q,R)$ ένα διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^3$. Η απόκλιση του F, ορίζεται ως η εξής βαθμωτή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^3$

   $$\nabla \cdot f = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

   (γ΄) Λαπλασιανή ή τελεστής Laplace (Laplacian). Συμβολισμός: Δf.

   $$\Delta f = \nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

   (δ΄) Στροβιλισμός $(curl)$. Συμβολισμός $\nabla \times f$ ή $curlf$ ή $rotf$.

   $$\nabla \times f = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})$$

2. Χώροι

   (α΄) D = σκεδαστής

   (β΄) ∂D = επιφάνεια (σύνορο) του σκεδαστή

   (γ΄) $\bar{D} = D \cup \partial D$ = κλειστότητα του σκεδαστή

   (δ΄) $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} =$ ο χώρος εκτός του σκεδαστή D

   (ε΄) $\mathbb{R}$ = Ευκλείδειος χώρος μίας διάστασης/Πραγματικοί Αριθμοί

   (στ΄) $\mathbb{R}^3$ = Ευκλείδειος χώρος τριών διαστάσεων

   (ζ΄) $\mathbb{C}$ = χώρος των μιγαδικών αριθμών

   (η΄) C^1 = σύνολο των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων (θ΄) C^2 = σύνολο των δύο φορές συνεχών παραγωγίσιμων συναρτήσεων

(ι΄) ∂B_1 = $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ = επιφάνεια μοναδιαίας σφαίρας

(ια΄) B_R = μπάλα ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων

(ιβ΄) $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$: το σύνολο των συναρτήσεων ϕ στο Ω για τις οποίες το $|\phi|^p$ είναι ολοκληρώσιμο.

(ιγ΄) Για κάθε $U \subset \Omega$ που περιέχεται συμπαγώς στο Ω

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{C} : v \text{ μετρήσιμη και } v \in L^p(U)\},$$

(ιδ΄) $H^1(\Omega)$= συναρτήσεων με τετραγωνικά ολοκληρώσιμο $grad$ στο Ω

(ιε΄) $H(curl;\Omega)$= συναρτήσεις με τετραγωνικά ολοκληρώσιμο στροβιλισμό $curl$ στο Ω

(ιστ΄) $H(div;\Omega)$= συναρτήσεις με τετραγωνικά ολοκληρώσιμη απόκλιση div στο Ω

(ιζ΄) $H^{-1/2}(Div;\Omega)$= συναρτήσεις με τετραγωνικά ολοκληρώσιμη επιφανειακή απόκλιση Div στο Ω

3. Γενικοί Συμβολισμοί

(α΄) t = χρόνος

(β΄) x = (x_1, x_2, x_3) = διάνυσμα θέσης στον χώρο $\mathbb{R}^3$

(γ΄) ω = γωνιακή συχνότητα

(δ΄) $\delta(x)$ = συναρτησιακό Dirac

(ε΄) $\boldsymbol{\nu}$ = το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε επιφάνεια

4. Ηλεκτρομαγνητικά Κύματα

(α΄) ϵ = διηλεκτρική σταθερά μέσου διάδοσης

(β΄) μ = μαγνητική διαπερατότητα μέσου διάδοσης

(γ΄) σ = αγωγιμότητα μέσου διάδοσης

(δ΄) **E** = διάνυσμα έντασης ηλεκτρικού πεδίου

(ε΄) **B** = διάνυσμα πυκνότητας μαγνητικής ροής (στ´) $\mathbf{H}$ = διάνυσμα έντασης μαγνητικού πεδίου

(ζ´) $\mathbf{D}$ = διάνυσμα πυκνότητας ηλεκτρικής ροής

(η´) $\mathbf{J}$ = διάνυσμα πυκνότητας ηλεκτρικού ρεύματος

(θ´) $\mathbf{E}^i$) = προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο

(ι´) $\mathbf{E}^s$ = σκεδασμένο ηλεκτρικό πεδίο

(ια´) $\mathbf{E}^t$ = ολικό ηλεκτρικό πεδίο

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στον ηλεκτρομαγνητισμό

Ο James Clerk Maxwell υπήρξε ο μεγαλύτερος θεωρητικός φυσικός του περασμένου αιώνα. Στη διάρκεια της σταδιοδρομίας του, ο Maxwell ερεύνησε και ανέπτυξε την ηλεκτρομαγνητική θεωρία του φωτός και την κινητική θεωρία των αερίων. Οι εξισώσεις Maxwell αποτελούν θεωρητικό υπόβαθρο για τη μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε οποιοδήποτε υλικό μέσο.
Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισάγουμε τις κλασσικές εξισώσεις Maxwell για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε γραμμική μορφή. Στη συνέχεια θα ανάγουμε το σύστημα σε αρμονικά χρονικά εξαρτώμενο, υποθέτωντας ότι η διάδοση γίνεται σε ενιαία συχνότητα. Θα διατυπώσουμε προβλήματα σκέδασης περιγράφοντας με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες τα φυσικά και γεωμετρικά χαρακτηριστικά του σκεδαστή.

1.1 Εξισώσεις Maxwell

Οι εξισώσεις Maxwell περιγράφουν τους νόμους του ηλεκτρομαγνητισμού, τους οποίους θα αναπτύξουμε στη συνέχεια σε διαφορική μορφή.

1.1.1 Νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού

Έστω $\mathbf{D}$ η διηλεκτρική μετατόπιση του ηλεκτρικού φορτίου, $\mathbf{E}$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου, $\mathbf{B}$ η μαγνητική επαγωγή, $\mathbf{H}$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου, ρ μία βαθμωτή συνάρτηση πυκνότητας που περιγράφει την κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου και **J** η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος. Τα μεγέθη **D**, **E**, **B** και **H** είναι συναρτήσεις του διανύσματος θέσης $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και του χρόνου t. Οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού σε διαφορική μορφή διατυπώνονται ως ακολούθως.

Νόμος Maxwell-Faraday

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{1.1}$$

Ηλεκτρικός νόμος Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \tag{1.2}$$

Νόμος Maxwell-Ampere

$$-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \tag{1.3}$$

Ο νόμος του Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{1.4}$$

όπου τα **D**, **E**, **B**, **H**, **J** είναι διανυσματικές συναρτήσεις του διανύσματος **x** και του χρόνου t.
Η εξίσωση (1.1) δίνει το αποτέλεσμα της μεταβολής του μαγνητικού πεδίου στο ηλεκτρικό πεδίο. Η εξίσωση (1.2) δίνει το αποτέλεσμα της μεταβολής της πυκνότητας του φορτίου ρ στην ηλεκτρική μετατόπιση. Η εξίσωση (1.3) περιγράφει το νόμο του Ampere για το ηλεκτρικό κύκλωμα, τροποποιημενό από τον Maxwell. Η εξίσωση (1.4) εκφράζει ότι το πεδίο της μαγνητικής επαγωγής **B** είναι σωληνοειδές.
Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων για τον διαφορικό τελεστή της απόκλισης και του στροβιλισμού έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial E_i}{\partial x_i}, \tag{1.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = (\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}, \frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}, \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}). \tag{1.6}$$

Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^N$ $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ διάνυσμα θέσης τριών διαστάσεων με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$
$\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \sum\limits_{j=1}^{N} a_j b_j$ με $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^N$ και $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{C}^N$ και συμβολίζουμε $|\boldsymbol{\alpha}| = \sqrt{\boldsymbol{\alpha} \cdot \overline{\boldsymbol{\alpha}}}$ την ευκλείδεια νόρμα του $\boldsymbol{\alpha}$ με $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{C}^N$ και $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = (\overline{\alpha}_1, ..., \overline{\alpha}_N)$.

Οι συνθήκες της απόκλισης (1.2) και (1.4) προκύπτουν από τις εξισώσεις (1.1) και (1.3), αν θεωρήσουμε ότι το φορτίο διατηρείται. Αυτό αποδεικνύεται αν εφαρμόσουμε τον τελεστή της αποκλίσης ($\nabla\cdot$) στα πεδία των σχέσεων (1.1), (1.3) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ για κάθε διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{A}$. Συνεπώς έχουμε

$$\nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \;\; \text{και} \;\; \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Έχουμε υποθέσει ότι όταν το ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται τα μεγέθη ρ, $\mathbf{J}$ συνδέονται με τη σχέση

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{1.7}$$

οπότε

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D} - \rho) = 0,$$

διότι $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$.

1.1.2 Αρμονική χρονική εξάρτηση

Οι χρονο-εξαρτώμενες εξισώσεις (1.1)-(1.4) μπορούν να αναχθούν σε αρμονικά χρονικό σύστημα Maxwell είτε γιατί θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Fourier ως προς το χρόνο είτε γιατί θέλουμε να αναλύσουμε το ηλεκτρομαγνητικό κύμα σε μία ενιαία συχνότητα. Αν το ακτινοβολούμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει γωνιακή συχνότητα $\omega > 0$, τότε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο με αρμονική χρονική εξάρτηση είναι:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},\, t) = \Re(\exp(-i\omega t)\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x})), \tag{1.8}$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},\, t) = \Re(\exp(-i\omega t)\hat{\mathbf{D}}(\mathbf{x})), \tag{1.9}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x},\, t) = \Re(\exp(-i\omega t)\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x})), \tag{1.10}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},\, t) = \Re(\exp(-i\omega t)\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})), \tag{1.11}$$

με $i = \sqrt{-1}$ και $\Re(\cdot)$ το πραγματικό μέρος της έκφρασης εντός της παρενθέσεως. Τα πεδία $\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{D}}$, $\hat{\mathbf{H}}$, $\hat{\mathbf{B}}$ είναι μιγαδικές συναρτήσεις του διανύσματος θέσης αλλά όχι του χρόνου. Για τη βαθμωτή πυκνότητα ρ και την πυκνότητα του φορτίου $\mathbf{J}$ θεωρούμε επίσης αρμονική χρονική εξάρτηση

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},\, t) = \Re(\exp(-i\omega t)\hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x})), \tag{1.12}$$

$$\rho(\mathbf{x},\, t) = \Re(\exp(-i\omega t)\hat{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})). \tag{1.13}$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (1.8)-(1.13) στις εξισώσεις Maxwell (1.1)-(1.4) και προκύπτουν οι εξισώσεις Maxwell σε πεδίο συχνοτήτων ω έχοντας απαλοίψει το χρόνο. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\text{Η εξίσωση } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ γίνεται } -i\omega\hat{\mathbf{B}} + \nabla \times \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \tag{1.14}$$

$$\text{Η εξίσωση } \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \text{ γίνεται } \nabla \cdot \hat{\mathbf{D}} = \hat{\rho}, \tag{1.15}$$

$$\text{Η εξίσωση } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J} \text{ γίνεται } -i\omega\hat{\mathbf{D}} - \nabla \times \hat{\mathbf{H}} = -\hat{\mathbf{J}}, \tag{1.16}$$

$$\text{Η εξίσωση } \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ γίνεται } \nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \tag{1.17}$$

όπου η αρμονικά χρονική πυκνότητα του φορτίου $\hat{\rho}$ προκύπτει από τη σχέση διατήρησης του φορτίου (1.13) ή εφαρμόζοντας τον τελεστή $(\nabla \cdot)$ στα διανυσματικά πεδία της (1.16)

$$\nabla \cdot (-i\omega\hat{\mathbf{D}} + \nabla \times \hat{\mathbf{H}}) = -\nabla \cdot \hat{\mathbf{J}}$$

γίνεται

$$-i\omega\hat{\rho} = \nabla \cdot \hat{\mathbf{J}}$$

οπότε και απαλοίφεται από τις εξισώσεις.

Οι σχέσεις (1.14)-(1.17) δίνουν τις αρμονικά χρονικά εξισώσεις Maxwell σε διαφορική μορφή. Οι ίδιες εξισώσεις μπορούν να διατυπωθούν σε ολοκληρωτική μορφή (βιβλιογραφία φυσικών επιστημών). Παραδείγματος χάριν, αν θεωρήσουμε μία ομαλή επιφάνεια $S \in \mathbb{R}^3$ με σύνορο ∂S και μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια, $\boldsymbol{\nu}$, τότε από το θεώρημα Stokes στην σχέση (1.14) έχουμε

$$\int_S \hat{\mathbf{B}} \cdot \boldsymbol{\nu} dA = \int_S (\nabla \times \hat{\mathbf{E}}) \cdot \boldsymbol{\nu} dA = \int_{\partial S} \hat{\mathbf{E}} \cdot \boldsymbol{\tau} dS, \tag{1.18}$$

όπου $\boldsymbol{\tau}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο ∂S προσανατολισμένο δεξιόστροφα σε σχέση με το $\boldsymbol{\nu}$. Παρατηρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο $\hat{\mathbf{B}}$ σχετίζεται με τα επιφανειακά ολοκληρώματα ενώ το ηλεκτρικό πεδίο $\hat{\mathbf{E}}$ με τα επικαμπύλια.

1.1.3 Καταστατικές εξισώσεις για γραμμικά μέσα

Στις εξισώσεις (1.14)-(1.17) προστίθενται δύο καταστατικοί νόμοι που συνδέουν το $\hat{\mathbf{E}}$ και το $\hat{\mathbf{H}}$ με τα $\hat{\mathbf{D}}$ και $\hat{\mathbf{B}}$ αντίστοιχα. Οι νόμοι αυτοί εξαρτώνται κάθε φορά από το υλικό μέσο στο οποίο διαδίδεται το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(1) *Κενό ή ελεύθερος χώρος* Στον ελεύθερο χώρο τα πεδία συνδέονται με τις εξισώσεις

$$\hat{\mathbf{D}} = \epsilon_0 \hat{\mathbf{E}} \quad \hat{\mathbf{B}} = \mu_0 \hat{\mathbf{H}} \tag{1.19}$$

όπου οι σταθερές ϵ_0 και μ_0 είναι η ηλεκτρική επιτρεπτότητα και η μαγνητική αγωγιμότητα αντίστοιχα.

(2) *Μη ομογενή, ισοτροπικά μέσα* Στην πράξη η πιο συνηθισμένη περίπτωση είναι ο χώρος να αποτελείται από διαφορετικά υλικα, όπως χαλκός, αέρας κλπ. Τότε το μέσο καλείται μη ομογενές. Εαν οι ιδιότητες του υλικού μέσου δεν εξαρτώνται από την διεύθυνση του πεδίου και το υλικό είναι γραμμικό, έχουμε

$$\hat{\mathbf{D}} = \epsilon \hat{\mathbf{E}} \quad \hat{\mathbf{B}} = \mu \hat{\mathbf{H}} \tag{1.20}$$

όπου ϵ και μ είναι θετικές, φραγμένες, βαθμωτές συναρτήσεις του διανύσματος θέσης $\mathbf{x}$.

(3) *Μη ομογενενή, ανισοτροπικά μέσα* Σε κάποια υλικά η ηλετρική επιτρεπτότητα και η μαγνητική αγωγιμότητα εξαρτώνται από την διεύθυνση διάδοσης του πεδίου, όπως για παράδειγμα στη μακροσκοπική περιγραφή ενός πολυστρωμματικού μέσου. Σε αυτές τις περιπτώσεις τα ϵ και μ της (1.20) δίνονται ως 3×3 θετικά ορισμένοι πίνακες όπου τα στοιχεία τους είναι συναρτήσεις της θέσης.

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε τις δύο πρώτες περιπτώσεις. Επιπλέον, για ένα αγώγιμο μέσο ισχύει ο νόμος του Ohm

$$\hat{\mathbf{J}} = \sigma \hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}}, \tag{1.21}$$

όπου σ, η αγωγιμότητα, είναι μία μη αρνητική συνάρτηση του διανύσματος θέσης. Το διάνυσμα $\mathbf{J}_{\mathbf{a}}$ περιγράφει την πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος στη θέση $\mathbf{a}$. Χωρία όπου το $\sigma > 0$ ονομάζονται αγωγοί. Όταν $\sigma = 0$ και $\epsilon \neq \epsilon_0$, το υλικό χαρακτηρίζεται ως διηλεκτρικό, ενώ το ϵ καλείται διηλεκτρική σταθερά. Στο κενό, όταν το μέσο είναι ο αέρας ή υπάρχουν χαμηλής έντασης πεδία, θεωρούμε $\sigma = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$ και $\mu = \mu_0$.

1.1.4 Γραμμικά ισοτροπικά υλικά

Υποθέτουμε ότι έχουμε γραμμικά ισοτροπικά υλικά, τέτοια ώστε να ισχύουν οι καταστατικές εξισώσεις (1.20) και (1.21). Εφαρμόζουμε τις τελευταίες σχέσεις στις (1.14)-(1.17) και καταλήγουμε στο ακόλουθο αρμονικά χρονικά εξαρτώμενο σύστημα Maxwell

$$-i\omega\hat{\mathbf{H}} + \nabla \times \hat{\mathbf{E}} = \mathbf{0}, \tag{1.22}$$

$$\nabla \cdot (\epsilon\hat{\mathbf{E}}) = \frac{1}{i\omega}\nabla \cdot \hat{\mathbf{J}} \text{ ή } \nabla \cdot (\epsilon\hat{\mathbf{E}}) = \frac{1}{i\omega}\nabla \cdot (\sigma\hat{\mathbf{E}} + \hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}}), \tag{1.23}$$

$$-i\omega\epsilon\hat{\mathbf{E}} + \sigma\hat{\mathbf{E}} - \nabla \times \hat{\mathbf{H}} = -\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}}, \tag{1.24}$$

$$\nabla \cdot (\mu\hat{\mathbf{H}}) = \mathbf{0}. \tag{1.25}$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε το μετασχηματισμό

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}}\mathbf{E} \text{ και } \hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}\mathbf{H}.$$

Ο μετασχηματισμός αυτός μας επιτρέπει να εργαστούμε με τις σχετικές τιμές των φυσικών παραμέτρων των εξισώσεων Maxwell. Έτσι οι εξισώσεις (1.22)-(1.25) δίνουν το σύστημα των εξισώσεων Maxwell πρώτης τάξης στην ακόλουθη μορφή

$$-ik\mu_r\mathbf{H} + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{1.26}$$

$$-ik\epsilon_r\mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{1}{ik}\mathbf{F}, \tag{1.27}$$

όπου έχουμε ορίσει τη σχετική ηλεκτρική επιτρεπτότητα και τη σχετική μαγνητική αγωγιμότητα $\epsilon_r = \frac{1}{\epsilon_0}(\epsilon + \frac{i\sigma}{\omega})$, $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ αντίστοιχα με $\epsilon_r = \mu_r = 1$ στο κενό, $\mathbf{F} = ik\sqrt{\mu_0}\hat{\mathbf{J}}_{\mathbf{a}}$ και $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ ο κυματικός αριθμός. Από τις σχέσεις (1.23) και (1.25), για $k > 0$, προκύπτει

$$\nabla \cdot (\epsilon_r\mathbf{E}) = -\frac{1}{k^2}\nabla \cdot \mathbf{F}, \tag{1.28}$$

$$\nabla \cdot (\mu_r\mathbf{H}) = 0. \tag{1.29}$$

Σε πολλά προβλήματα απαλοίφεται το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}$ (ή το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$) από το σύστημα πρώτης τάξης των σχέσεων (1.26)-(1.29) και έτσι προκύπτει το σύστημα Maxwell δεύτερης τάξης

$$\nabla \times (\mu_r^{-1}\nabla \times \mathbf{E}) - k^2\epsilon_r\mathbf{E} = \mathbf{F}, \tag{1.30}$$

μαζί με την (1.28).
Εάν υποθέσουμε ότι $\sigma = 0$ και ότι $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ δηλαδή ότι δεν υπάρχουν πηγές τότε οι (1.26)-(1.27) δίνουν την ανηγμένη και συμμετρικοποιημένη μορφή του συστήματος Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \tag{1.31}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \tag{1.32}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{1.33}$$

και η αντίστοιχη σχέση ως προς το ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}$ δίνεται από

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k^2\mathbf{E}. \tag{1.34}$$

1.2 Προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων

Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε προβλήματα σκέδασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Όταν ένα προσπίπτον κυμα που διαδίδεται στο χώρο συναντά ένα εμπόδιο, τον σκεδαστή, ή μία ανομοιογένεια του υλικού μέσου τότε σκεδάζεται. Αυτό το οποίο δεν έχει προσδιοριστεί ακόμα είναι το είδος του χωρίου (σκεδαστή) ή της περιοχής στην οποία διαδίδεται το ηλεκτρομαγνητικό πέδίο.

1.2.1 Φραγμένος σκεδαστής

Πρώτα θα περιγράψουμε σκέδαση από ένα φραγμένο, μη ομογενές αντικείμενο (για παράδειγμα σκέδαση από ένα αεροσκάφος). Υποθέτουμε ότι το αντικείμενο (σκεδαστής) είναι ένας φραγμένος τέλειος αγωγός, καταλαμβάνει ένα χωρίο D και μπορεί να περιβάλλεται από ένα μη ομογενές περιβάλλον $\epsilon_r \neq 1$ ή $\mu_r \neq 1$. Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο διαδίδεται στο χώρο έξω από τον σκεδαστή, $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Θεωρούμε μία μπάλα ακτίνας α τέτοια ώστε να περιβάλλει το χωρίο D του σκεδαστή όπου για $|\mathbf{x}| > \alpha$ το μέσο διάδοσης θα καταλαμβάνεται από αέρα (ή κενό), δηλαδή $\epsilon_r(\mathbf{x}) = \mu_r(\mathbf{x}) = 1$.
Στο σύνορο του σκεδαστή D, το οποίο θα συμβολίζουμε με ∂D, το ολικό εξωτερικό πεδίο $\mathbf{E}$ ικανοποιεί τη συνθήκη του τέλειου αγωγού. Για την καλή τοποθέτηση του προβλήματος, είναι απαραίτητο να επιβάλλουμε ακόμα μία συνοριακή

συνθήκη στο άπειρο. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται να αναλύσουμε το πεδίο σε ένα δοθέν προσπίπτον πεδίο, που μπορεί να οφείλεται σε ένα ραντάρ ή σε κάποια άλλη πηγή ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και στο σκεδασμένο πεδίο. Το προσπίπτον πεδίο, $\mathbf{E}^i$, ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell κατά την απουσία του σκεδαστή (στην περιοχή του υλικού μέσου που τον περιβάλλει),

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^i - k^2\mathbf{E}^i = \mathbf{F} \text{ στο } \mathbb{R}^3, \tag{1.35}$$

όπου $\mathbf{F}$ είναι γνωστή συνάρτηση που περιγράφει το διάνυσμα της πηγής. Ένα τυπικό παράδειγμα προσπίπτοντος πεδίου είναι το επίπεδο κύμα που για το ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{p} \exp(ik\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}). \tag{1.36}$$

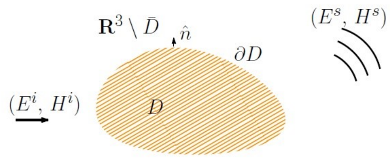
Το $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα που δίνει τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος ενώ το διάνυσμα $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ λέγεται πόλωση και είναι κάθετο στην διεύθυνση διάδοσης, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση είναι $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ και το ολικό πεδίο $\mathbf{E}$ είναι ίσο με το προσπίπτον $\mathbf{E}^i$ και το σκεδασμένο $\mathbf{E}^s$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s. \tag{1.37}$$

Το σκεδασμένο πεδίο είναι ένα σφαιρικό εξερχόμενο κύμα το οποίο πρέπει να εξασθενεί καθώς απομακρύνεται από το σκεδαστή. Αυτό επιτυγχάνεται με την επιβολή της συνθήκης ακτινοβολίας Silver-Müller [17] στο άπειρο

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho((\nabla \times \mathbf{E}^s) \times \mathbf{x} - ik\mathbf{E}^s) = \mathbf{0}, \tag{1.38}$$

όπου $\rho = |\mathbf{x}|$ και το όριο θεωρείται ότι λαμβάνεται ομοιόμορφα ως προς όλες τις κατευθύνσεις $\dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$.



Σχήμα 1.1: Σκεδαστής

Το μήκος κύματος για το προσπίπτον πεδίο της (1.36) είναι ίσο με $\dfrac{2\pi}{k}$ εφόσον $|\mathbf{d}| = 1$.
Ένα σύνηθες πρόβλημα που εμφανίζεται στη μελέτη προβλημάτων σκέδασης με αριθμητικές μεθόδους είναι ότι οι εξισώσεις ικανοποιούνται σε άπειρα χωρία. Ένας τρόπος ώστε να αντιμετωπιστεί αυτή η δυσκολία είναι να επιβάλλουμε τη συνθήκη ακτινοβολίας (1.38) σε μία επιφάνεια Σ βοηθητική, μακρυά από το σκεδαστή όπου $\epsilon_r = \mu_r = 1$. Με αυτόν τον τρόπο το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο προσεγγίζεται στο χώρο μεταξύ του συνόρου του σκεδαστή, ∂D, και της βοηθητικής επιφάνειας Σ, τον οποίο συμβολίζουμε με Ω. Οι επιφάνειες ∂D και Σ είναι ξένες μεταξύ τους και οι εξισώσεις Maxwell ικανοποιούνται στο Ω. Στο ∂D ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη του τέλειου αγωγού ενώ στη βοηθητική επιφάνεια Σ επιβάλλουμε μία συνοριακή συνθήκη που προέρχεται από τη Silver-M$\ddot{u}$ller συνθήκη:

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \times \boldsymbol{\nu} - ik\mathbf{E}_\tau = (\nabla \times \mathbf{E}^i) \times \boldsymbol{\nu} - ik\mathbf{E}^i_\tau \text{ στο } \Sigma, \tag{1.39}$$

όπου $\boldsymbol{\nu}$ είναι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια Σ και $\mathbf{E}_\tau = (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}|_\Sigma) \times \boldsymbol{\nu}$ η εφαπτομενική συνιστώσα (ομοίως για το $\mathbf{E}^i_\tau$). Η σχέση (1.39) είναι μία συνοριακή συνθήκη τύπου εμπέδησης και αποτελεί ένα παράδειγμα υλικού μέσου με απορρόφηση για την αναπαράσταση του άπειρου χώρου έξω από το Ω. Η λύση του πραγματικού προβλήματος σκέδασης και του αντίστοιχου σε φραγμένο χωρίο δεν είναι ίσες, αλλά η διαφορά μπορεί να ελαχιστοποιηθεί θεωρώντας τη βοηθητική επιφάνεια Σ επαρκώς μακρυά από το σκεδαστή.
Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα προς μελέτη που προκύπτει είναι όταν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο περιέχεται εξ ολοκλήρου σε μία τέλεια αγώγιμη κοιλότητα. Σε αυτήν την περίπτωση το Ω είναι ένα φραγμένο χωρίο με σύνορο ∂D και οι εξισώσεις Maxwell ικανοποιούνται στο Ω. Εάν δεν υπάρχει αγωγός, $\sigma = 0$, υπάρχουν τιμές

του κυματικού αριθμού k για τις οποίες το σύστημα των εξισώσεων $Maxwell$ δεν έχει μοναδική λύση. Οι τιμές αυτές ονομάζονται ιδιοτιμές του συστήματος Maxwell.

1.2.2 Μη φραγμένος σκεδαστής

Το δεύτερο πρόβλημα σκέδασης που θα μελετήσουμε είναι η περίπτωση του μη φραγμένου σκεδαστή. Πρόκειται για το απλό μοντέλο σκέδασης από θαμμένο αντικείμενο. Ο περιβάλλων χώρος του υλικού μέσου αποτελείται τώρα από δύο περιοχές. Η περιοχή $x_3 > 0$ είναι αέρας και η περιοχή $x_3 < 0$ είναι η γη. Η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του αέρα και της γης θεωρούμε ότι είναι μοναδιαία ενώ η σχετική ηλεκτρική επιτρεπτότητα της γης υποθέτουμε ότι είναι σταθερή (με μη μηδενικό φανταστικό μέρος διότι η γη συνήθως είναι αγωγός).
Υποθέτουμε ότι ο σκεδαστής (ο οποίος αποτελείται από τέλειους αγωγούς ή και από μη ομογενείς σκεδαστές) καταλαμβάνει μία περιοχή D η οποία βρίσκεται μέσα στο έδαφος. Οι πηγές του πεδίου υποθέτουμε ότι βρίσκονται στο στρώμμα του αέρα (οπότε $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ για $x_3 < 0$), επομένως το προσπίπτον πεδίο ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell στο χώρο εξωτερικά του σκεδαστή.
Εφόσον η διεπιφάνεια αέρα-γης εκτείνεται στο άπειρο, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άμεσα την Silver-M$\ddot{u}$ller συνθήκη και αντί αυτής χρησιμοποιούμε μία συνθήκη ακτινοβολίας σε ολοκληρωτική μορφή [23]. Θέτουμε ∂B_R^+ το ημισφαίριο ακτίνας R στο οποίο $x_3 > 0$ και ∂B_R^- το ημισφαίριο ακτίνας R στο οποίο $x_3 < 0$. Απαιτούμε να ισχύει

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial B_R^+} |(\nabla \times \mathbf{E}^s) \times \boldsymbol{\nu} - ik\mathbf{E}^s|^2 dA = 0, \tag{1.40}$$

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial B_R^-} |(\nabla \times \mathbf{E}^s) \times \boldsymbol{\nu} - ik\mathbf{E}^s|^2 dA = 0. \tag{1.41}$$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε τα βασικά προβλήματα συνοριακών συνθηκών σε μη ομογενές υλικό μέσο τα οποία περιγράψαμε παραπάνω.

1.2.3 Προβλήματα συνοριακών τιμών σε μη ομογενείς χώρους

Πρόβλημα σε κοιλότητα

Έστω Ω φραγμένο χωρίο με σύνορα ∂D και Σ, δύο επιφάνειες συνεκτικές και ξένες μεταξύ τους. Αναζητούμε το αρμονικά χρονικό ηλεκτρικό πεδίο **E** που οφείλεται στην πηγή **F** το οποίο ικανοποιεί τη σχέση (1.30), συνθήκη του τέλειου αγωγού στην επιφάνεια ∂D και τη συνθήκη εμπέδησης (1.39) στην βοηθητική επιφάνεια Σ

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \epsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{F} \text{ στο } \Omega, \tag{1.42}$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ στο } \partial D, \tag{1.43}$$

$$(\nabla \times \mathbf{E}) \times \boldsymbol{\nu} - ik\mathbf{E}_\tau = \mathbf{g} \text{ στο } \Sigma, \tag{1.44}$$

όπου **g** είναι γνωστό εφαπτομενικό διανυσματικό πεδίο στο Σ. Θεωρούμε ότι η επιφάνεια Σ είναι κλειστή όπου σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις περιγράφουν ένα μοντέλο διάδοσης σε κοιλότητα με έναν τέλεια αγώγιμο τοίχο. Για μία προσέγγιση του προβλήματος σκέδασης με συνοριακές συνθήκες με παραμέτρους απορρόφησης έχουμε $\mu_r = 1$ και $\lambda = 1$ στη Σ και $\epsilon_r = \mu_r = 1$ σε μία περιοχή του ∂D.

Ηλεκτρομαγνητικό αντηχείο

Δοθέντος ενός φραγμένου χωρίου Ω με σύνορο ∂D, αναζητούμε τιμές του κυματικού αριθμού k και μη τετριμμένα ηλεκτρικά πεδία **E** (όχι ταυτοτικά μηδέν) τα οποία ικανοποιούν την (1.30) με $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ώστε

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \epsilon_r \mathbf{E} &= \mathbf{0} \text{ στο } \Omega, \\ \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} &= \mathbf{0} \text{ στο } \partial D. \end{aligned}$$

Κατόπιν, εφόσον δεν υπάρχουν πηγές, επιβάλλουμε στο ηλεκτρικό πεδίο **E** να ικανοποιεί τη συνθήκη απόκλισης (1.28) με $\rho = 0$,

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{E}) = 0 \text{ στο } \Omega.$$

Η τελευταία συνθήκη εξασφαλίζει ότι υπάρχει το πολύ πεπερασμένος αριθμός γραμμικών ανεξάρτητων λύσεων του προβλήματος όταν $k = 0$.

Σκέδαση από φραγμένο αντικείμενο

Σε αυτό το πρόβλημα ο χώρος διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι η μη φραγμένη περιοχή $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, όπου D είναι φραγμένο χωρίο με συνεκτικό συμπλήρωμα. Δοθέντος ενός γνωστού προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου που ικανοποιεί τη σχέση (1.28), θέλουμε να υπολογίσουμε το ολικό πεδίο $\mathbf{E}$ και το σκεδασμένο πεδίο $\mathbf{E}^s$ ώστε

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \epsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{F} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \tag{1.45}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D. \tag{1.46}$$

Υποθέτουμε ότι ο σκεδαστής είναι φραγμένος έτσι ώστε το D να είναι φραγμένο και $\epsilon_r = \mu_r = 1$ έξω από μία επαρκώς μεγάλη μπάλα. Στο σύνορο ∂D του μη φραγμένου χωρίου $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ επιβάλλουμε τη συνθήκη του τέλειου αγωγού,

$$\mathbf{E} \times \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0} \text{ στο } \partial D. \tag{1.47}$$

Το σκεδασμένο πεδίο $\mathbf{E}^s$ πρέπει να ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Silver-M$\ddot{u}$ller

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho((\nabla \times \mathbf{E}^s) \times \mathbf{x} - ik\mathbf{E}^s) = \mathbf{0}, \tag{1.48}$$

όπου $\rho = |\mathbf{x}|$ ομοιόμορφα στο $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$.

Σκέδαση από θαμμένο αντικείμενο

Έστω

$$\mathbb{R}^3_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \big| x_3 > 0\} \text{ και } \mathbb{R}^3_- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \big| x_3 < 0\}$$

Υποθέτουμε ότι οι σκεδαστές περιέχονται σε μία φραγμένη περιοχή στον $\mathbb{R}^3_-$. Η διεπιφάνεια μεταξύ των στρωμμάτων συμβολίζεται με Σ_0 και είναι το επίπεδο $x_3 = 0$. Θα μελετήσουμε μόνο την περίπτωση του τέλεια αγώγιμου σκεδαστή, D, ο οποίος είναι φραγμένος και βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην περιοχή $\mathbb{R}^3_-$ ($\bar{D} \subset \mathbb{R}^3_-$), όπου το συμπλήρωμα του D υποθέτουμε ότι είναι συνεκτικό.

Το ηλεκτρικό πεδίο ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell στο $\mathbb{R}^3_+$ (με $\epsilon_r = \mu_r = 1$ αφου υποθέτουμε ότι το υλικό μέσο του άνω χωρίου είναι αέρας) και τη γενική εξίσωση Maxwell στο $\mathbb{R}^3_- \setminus \bar{D}$ με $\mu_r = 1$ και συνεχής $\epsilon_r = \epsilon_r^e$. Η συνθήκη ακτινοβολίας σε ολοκληρωτική μορφή επιβάλλεται στο άπειρο. Έτσι, αν η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{F}$ έχει συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R}^3_+$ (όπου $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ είναι μία επιλογή), το ολικό πεδίο $\mathbf{E}$, ικανοποιεί τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = \mathbf{F} \text{ στο } \mathbb{R}^3_+, \tag{1.49}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \epsilon_r^e \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3_- \setminus \bar{D}. \tag{1.50}$$

Στη διεπιφάνεια Σ_0 ικανοποιούνται οι συνθήκες

$$\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \mathbf{0} \text{ και } \boldsymbol{\nu} \times (\nabla \times \mathbf{E}_1 - \nabla \times \mathbf{E}_2) = \mathbf{0}, \tag{1.51}$$

όπου $\mathbf{E}_1$ είναι η οριακή τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στην περιοχή $\mathbb{R}^3_+$ και $\mathbf{E}_2$ η αντίστοιχη οριακή τιμή στην περιοχή $\mathbb{R}^3_-$.
Στο σύνορο του D, ∂D έχουμε τη συνθήκη του τέλειου αγωγού

$$\mathbf{E} \times \boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}. \tag{1.52}$$

Υποθέτουμε ότι το σκεδασμένο πεδίο οφείλεται σε ένα δοσμένο προσπίπτον πεδίο $\mathbf{E}^i$ που ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^i - k^2 \mathbf{E}^i = \mathbf{F} \text{ στο } \mathbb{R}^3_+$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^i - k^2 \epsilon_r^e \mathbf{E}^i = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3_-$$

και τις συνθήκες (1.52) στο Σ_0. Η $\mathbf{F}$ είναι μία συνάρτηση με συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R}^3_+$ και αναπαριστά την πηγή των προσπιπτόντων πεδίων της (1.49). Τότε έχουμε

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

και τη συνθήκη ακτινοβολίας για το σκεδασμένο πεδίο $\mathbf{E}^s$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R^+} |(\nabla \times \mathbf{E}^s) \times \boldsymbol{\nu} - ik\mathbf{E}^s|^2 dA = 0,$$

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R^-} |(\nabla \times \mathbf{E}^s) \times \boldsymbol{\nu} - ik\mathbf{E}^s|^2 dA = 0.$$

1.2.4 Προβλήματα σκέδασης σε ομογενείς χώρους

Θα κλείσουμε την ενότητα αυτή διατυπώνοντας προβλήματα σκέδασης σε ομογενείς χώρους. Αυτά είναι εξωτερικά προβλήματα συνοριακών τιμών όπου η μαγνητική διαπερατότητα και η ηλεκτρική επιτρεπτότητα είναι σταθερές και η σκέδαση γίνεται λόγω εμποδίου. Θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν πηγές, ο σκεδαστής είναι ένα φραγμένο χωρίο D με συνεκτικό συμπλήρωμα. Ο χώρος εξωτερικά του σκεδαστή, $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ είναι άπειρος.

Τέλειος αγωγός

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \tag{1.53}$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ στο } \partial D. \tag{1.54}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D, \tag{1.55}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho((\nabla \times \mathbf{E}^s) \times \mathbf{x} - ik\mathbf{E}^s) = \mathbf{0}, \tag{1.56}$$

ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{x}}$. Ο τέλειος αγωγός, όπως αναφέρθηκε, είναι ένας μη διαπερατός σκεδαστής δηλαδή το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δεν εισέρχεται στο εσωτερικό του.

Ανθεκτικός αγωγός (εμπέδηση)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \tag{1.57}$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} = \frac{z_s}{ik}\boldsymbol{\nu} \times (\boldsymbol{\nu} \times (\nabla \times \mathbf{E})) \text{ στο } \partial D, \tag{1.58}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D, \tag{1.59}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho((\nabla \times \mathbf{E}^s) \times \mathbf{x} - ik\mathbf{E}^s) = \mathbf{0}. \tag{1.60}$$

Στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο δεν εισέρχεται στο εσωτερικό του σκεδαστή αλλά σε μία μικρή περιοχή του συνόρου.

Διηλεκτρικό

Το διηλεκτρικό είναι ένας διαπερατός σκεδαστής όπου το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εισέρχεται στο εσωτερικό του. Αν συμβολίσουμε με άνω δείκτη $(+)$ και $(-)$ τα πεδία και τις φυσικές παραμέτρους στο εξωτερικό και το εσωτερικό του σκεδαστή αντίστοιχα ($D^- = D, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} = D^+$) τότε έχουμε

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^+ - (k^+)^2\mathbf{E}^+ = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \tag{1.61}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^- - (k^-)^2\mathbf{E}^- = \mathbf{0} \text{ στο } D, \tag{1.62}$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^+ = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^- \text{ στο } \partial D, \tag{1.63}$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \nabla \times \mathbf{E}^+ = \frac{\mu^+}{\mu^-}\boldsymbol{\nu} \times \nabla \times \mathbf{E}^- \text{ στο } \partial D, \tag{1.64}$$

$$\mathbf{E}^+ = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus D, \tag{1.65}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho((\nabla \times \mathbf{E}^s) \times \mathbf{x} - ik\mathbf{E}^s) = \mathbf{0}. \tag{1.66}$$

Κεφάλαιο 2

Σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις

Οι σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις, ως γωστόν, είναι λύσεις της εξίσωσης La place. Στην περίπτωση που ορίζονται στη μοναδιαία σφαίρα (εφαρμόζουμε τη μέθοδο χωριζομένων μεταβλητών σε σφαιρικές συντεταγμένες) έχουμε τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν στη μελέτη προβλημάτων σκέδασης και στον ορισμό του τελεστή Calderon. Στο κεφάλαιο αυτό χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz διατυπώνουμε τις ολικές αναπαραστάσεις των Stratton-Chu. Επίσης εφαρμόζοντας τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών της εξίσωσης Helmholtz σε σφαιρικές αρμονικές συντεταγμένες ορίζουμε τις συναρτήσεις Bessel που θα συμβάλλουν στην επίλυση προβλημάτων σκέδασης.

2.1 Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις

Στην ενότητα αυτή θα διατυπώσουμε θεωρήματα που δίνουν τις λύσεις των εξισώσεων Maxwell για ένα ομοιόμορφο, ομογενές και ισοτροπικό μέσο σε ολοκληρωτική μορφή, γνωστές ως ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των Stratton-Chu. Λεπτομερή ανάλυση των ολοκληρωτικών αναπαραστάσεων για τη σκέδαση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μπορεί να βρει κανείς στα βιβλία [10], [19], [11]. Για κάθε ανοιχτό σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$ ορίζουμε

$C^k(\Omega)$: το σύνολο των k φορές συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων στο Ω,

$C^k(\bar{\Omega})$: το σύνολο των συναρτήσεων στο $C^k(\Omega)$ οι οποίες έχουν φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχείς παραγώγους μέχρι k τάξης στο $\bar{\Omega}$,

$L^p(\Omega),\ 1 \le p < \infty$: το σύνολο των συναρτήσεων ϕ στο Ω για τις οποίες το $|\phi|^p$ είναι ολοκληρώσιμο. Ειδικότερα,

$$\int_\Omega |\phi|^p dV < \infty.$$

Η πιο σημαντική περίπτωση είναι για $p = 2$, όπου αποτελεί το σύνολο όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο Ω.
Ο χώρος των διανυσματικών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^3$ με τετραγωνικά ολοκληρώσιμο curl (στροβιλισμό) δίνεται

$$H(curl;\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3 \big| \nabla \times \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3\}.$$

2.1.1 Θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Helmholtz

Ο χωρός αυτός αποτελεί τον χώρο λύσεων των εξισώσεων Maxwell.
Για τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις θα χρειαστούμε τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{y}\}$

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|},\ \ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \tag{2.1}$$

Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz

$$\Delta_{\mathbf{y}}\Phi + k^2\Phi = -\delta_{\mathbf{x}} \ \text{ στον } \ \mathbb{R}^3 \tag{2.2}$$

όπου $\Delta_{\mathbf{y}}$ είναι η Λαπλασιανή ως προς το $\mathbf{y}$ και $\delta_{\mathbf{x}}$ είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac ορισμένη στο $\mathbf{x}$, τέτοια ώστε για οποιαδήποτε $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta_{\mathbf{x}} u dV = u(\mathbf{x}).$$

Παρατηρούμε ότι η Φ ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld (κατάλληλη συνθήκη ακτινοβολίας για την εξίσωση Helmholtz)

$$\lim_{\rho_y \to \infty} \rho_y \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho_y} - ik\Phi \right) = 0, \tag{2.3}$$

όπου $\rho_y = |\mathbf{y}|$ και το όριο είναι ομοιόμορφο ως προς $\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|}$ όπου $\mathbf{x}$ ανήκει σε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Γενικά θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\nabla_{\mathbf{y}}$,

$\nabla_{\mathbf{y}}\cdot$ και $\nabla_{\mathbf{y}}\times$ για την κλίση, απόκλιση και στροβιλισμό ως προς το $\mathbf{y}$ και $dA\mathbf{y}$, $dV\mathbf{y}$ για να θυμίζουμε ότι η ολοκληρώση γίνεται ως προς $\mathbf{y}$.
Ισχύει ότι $\nabla_{\mathbf{x}}\Phi = -\nabla_{\mathbf{y}}\Phi$ αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Επιπλέον χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικές προσεγγίσεις [10] μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\nabla_{\mathbf{y}}\Phi \times \hat{\mathbf{y}} = O(\frac{1}{\rho_y^2}) \text{ καθώς } \rho_y \to \infty. \tag{2.4}$$

2.1.2 Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των Stratton-Chu

Θα διατυπώσουμε αρχικά ένα απλό θεώρημα αναπαράστασης για μία κατάλληλα ομαλή διανυσματική συνάρτηση σε ένα φραγμένο χωρίο G με σύνορο C^2 [10]. Το θεώρημα είναι πιο γενικό και οι διανυσματικές συναρτήσεις δεν είναι απαραίτητο να ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell.

Θεώρημα 2.1.1 *Έστω G φραγμένο χωρίο στον $\mathbb{R}^3$ με C^2 σύνορο ∂G. Έστω $\boldsymbol{\nu}$ το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σύνορο ∂G του G. Για τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ για κάθε $\mathbf{x} \in G$,*

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \times \int_{\partial G} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E})(y)\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\, dA(\mathbf{y}) + \nabla \int_{\partial G} (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) \\ - ik \int_{\partial G} (\nu \times \mathbf{H})(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) - \nabla \int_G (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{E})(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) \\ + \nabla \times \int_G (\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H})(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}) + ik \int_G (\nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E})(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) dV(\mathbf{y}).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Έστω ότι τα πεδία $\mathbf{E}$ και $\mathbf{H}$ ικανοποιούν το ομογενές ισοτροπικό σύστημα Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = \mathbf{0}, \tag{2.6}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{2.7}$$

με την έννοια των κατανομών στο χωρίο G. Αρχικά, υποθέτουμε ότι το G είναι φραγμένο αλλά στη συνέχεια θα γενικεύσουμε για μη φραγμένο συμπλήρωμα ενός φραγμένου χωρίου.
Υποθέτουμε ότι τα $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ ικανοποιούν το σύστημα Maxwell (2.6)-(2.7), παρατηρούμε την ακόλουθη πιο απλή μορφή του προηγούμενου θεωρήματος, το οποίο αποτελεί τις Stratton-Chu ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις για ένα φραγμένο χωρίο.

Θεώρημα 2.1.2 *Έστω G φραγμένο χωρίο Lipschitz και $\boldsymbol{\nu}$ μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο. Έστω ότι τα πεδία* $\mathbf{E}$, $\mathbf{H} \in H(curl; G)$ *είναι λύσεις των* (2.6)-(2.7) *στο G. Τότε, για κάθε* $\mathbf{x} \in G$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla \times \int_{\partial G} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E})(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})dV(\mathbf{y}) \\ + \frac{1}{ik}\nabla \times \nabla \times \int_{\partial G} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H})(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})dV(\mathbf{y}).\end{aligned} \quad (2.8)$$

Σχόλιο. Ανάλογος τύπος ισχύει και για το $\mathbf{H}$

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{x}) = -\nabla \times \int_{\partial G} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H})(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})dA(\mathbf{y}) \\ - \frac{1}{ik}\nabla \times \nabla \times \int_{\partial G} (\boldsymbol{\nu}(\mathbf{y}) \times \mathbf{E}(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})dA(\mathbf{y})\end{aligned} \quad (2.9)$$

(παραπέμπουμε στο βιβλίο [10] για αποδείξεις των θεωρημάτων και περισσότερες λεπτομέρειες).
Σκοπός είναι να επεκτείνουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα για μη φραγμένα χωρία. Γι΄αυτό πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι το εξωτερικό σύνορο του G τείνει στο άπειρο μέσω κάποιου βοηθητικού ορίου. Η συνθήκη ακτινοβολίας μπορεί να είναι αυτό το όριο μέσω της οποίας μπορούμε να δείξουμε ότι τα πεδία έξω από αυτό το σύνορο μηδενίζονται.
Έστω D ένα φραγμένο χωρίο στο $\mathbb{R}^3$ του οποίου το συμπλήρωμα είναι συνεκτικό. Μία λύση $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ του συστήματος Maxwell (2.6)-(2.7) στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ είναι ακτινοβολούσα αν ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Silver-M$\ddot{u}ller$,

$$\lim_{\rho \to \infty} \rho(\mathbf{H} \times \mathbf{x} - \mathbf{E}) = 0, \quad (2.10)$$

όπου $\rho = |\mathbf{x}|$ και το όριο ισχύει ομοιόμορφα για όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\rho}$.
Έστω $H_{loc}(curl; \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ ο χώρος των συναρτήσεων $\mathbf{u} \in H(curl; B_R \setminus \bar{D})$ για κάθε μπάλα B_R που περιέχει το D στο εσωτερικό της. Το ακόλουθο θεώρημα δίνει τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των πεδίων $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ για μη φραγμένα χωρία.

Θεώρημα 2.1.3 *Έστω $\boldsymbol{\nu}$ το εξωτερικό κάθετο στο D (αντίστοιχα εσωτερικό του $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$), όπου D είναι ένα φραγμένο χωρίο με C^2 σύνορο ∂D. Έστω* $\mathbf{E}$, $\mathbf{H} \in H_{loc}(curl; \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ *ακτινοβολούσες λύσεις του συστήματος Maxwell* (2.6)-(2.7) *στο*

$\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. *Τότε για κάθε* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \nabla \times \int_{\partial D} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E})(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA(\mathbf{y}) - \frac{1}{ik} \nabla \times \nabla \times \int_{\partial D} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H})(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dA(\mathbf{y}). \quad (2.11)$$

Τέλος διατυπώνουμε ένα πόρισμα του αμέσως προηγούμενου θεωρήματος, για τις ασυμπτωτικές αναπαραστάσεις του ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ σε μεγάλες αποστάσεις από τον σκεδαστή. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει τη διαίσθηση ότι το σκεδασμένο πεδίο είναι ένα σφαιρικό κύμα.

Πόρισμα 2.1.1 *Κάθε ακτινοβολούσα λύση των εξισώσεων Maxwell* (2.6)-(2.7) *στο* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ *έχει την ασυμπτωτική ακόλουθη συμπεριφορά*

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\exp(ik|\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|} \{\mathbf{E}_\infty(\hat{\mathbf{x}}) + O(\frac{1}{|\mathbf{x}|})\} \text{ καθώς } |\mathbf{x}| \to \infty \quad (2.12)$$

ομοιόμορφα για κάθε $\hat{\mathbf{x}} = \dfrac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$. *Επιπλέον,*

$$\mathbf{E}_\infty(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{ik}{4\pi} \hat{\mathbf{x}} \times \int_{\partial D} ((\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E})(\mathbf{y}) + (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{H})(\mathbf{y}) \times \hat{\mathbf{x}}) \exp(-ik\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}) dA(\mathbf{y}). \quad (2.13)$$

Σημειώνουμε ότι υπάρχει αντίστοιχη ασυμπτωτική έκφραση για το μαγνητικό πεδίο ως προς το $\mathbf{H}_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ την οποία δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε διότι ισχύει $\mathbf{H}_\infty = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}_\infty$. Σημειώνουμε ότι το $\mathbf{E}_\infty$ είναι εφαπτόμενο στη μοναδιαία σφαίρα, $\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}_\infty(\hat{\mathbf{x}}) = 0$.

Ορισμός 2.1.1 *Η διανυσματική συνάρτηση* $\mathbf{E}_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ *ονομάζεται ηλεκτρικό μακρινό πεδίο ή μακρινό πεδίο για το ηλεκτρικό πεδίο.*

Ειδικότερα σε υπολογισμούς σχετικούς με ραντάρ το εξαγόμενο από μετρήσεις κυμάτων είναι το μακρινό πεδίο.

2.2 Σκέδαση από σφαίρα

Θα μελετήσουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα σκέδασης για την ειδική περίπτωση όπου το χωρίο του σκεδαστή έχει σφαιρικό σχήμα. Θεωρούμε $D = B_R$

τον σκεδαστή ο οποίος είναι σφαίρα ακτίνας R και κέντρο την αρχή των αξόνων. Αν $\mathbf{E}^i$ είναι το προσπίπτον πεδίο που ικανοποιεί τις ομογενείς ισοτροπικές εξισώσεις Maxwell σε όλο το $\mathbb{R}^3$, τότε αναζητούμε το σκεδασμένο πεδίο $\mathbf{E}^s$ και το ολικό πεδίο $\mathbf{E}$, έτσι ώστε

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) - k^2\mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R, \tag{2.14}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \;\text{ στο } \partial B_R, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus B_R, \tag{2.16}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho(\nabla \times \mathbf{E}^s \times \hat{\mathbf{x}} - ik\mathbf{E}^s) = \mathbf{0}, \tag{2.17}$$

ομοιόμορφα ως προς $\hat{\mathbf{x}}$ όπου $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, $\rho = |\mathbf{x}|$.
Γράφουμε το σύστημα ως προς το $\mathbf{E}^s$ μέσω της (2.16)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}^s) - k^2\mathbf{E}^s = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R, \tag{2.18}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^s = \mathbf{g} := -\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^i \;\text{ στο } \partial B_R, \tag{2.19}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho(\nabla \times \mathbf{E}^s \times \hat{\mathbf{x}} - ik\mathbf{E}^s) = \mathbf{0}. \tag{2.20}$$

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών για να λύσουμε με κλασικό τρόπο το παραπάνω πρόβλημα [20], [24]. Οι κατάλληλες συναρτήσεις για τη λύση που αναζητούμε είναι οι σφαιρικές αρμονικές και οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel [15].

2.2.1 Η εξίσωση Helmholtz σε σφαιρικές συντεταγμένες

Θα χρησιμοποιήσουμε λύσεις της εξίσωσης Helmholtz στην ακουστική περίπτωση για να κατασκευάσουμε λύσεις για τις εξισώσεις Maxwell. Υποθέτουμε ότι u είναι μία κλασική λύση της εξίσωσης Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R. \tag{2.21}$$

Τότε μία συνάρτηση $\mathbf{u}$ η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{u} = \nabla \times (u\mathbf{x}) \tag{2.22}$$

είναι λύση της (2.18). Η συνάρτηση u ονομάζεται Debye δυναμικό. Για να ελέγξουμε ότι η **u** είναι λύση των εξισώσεων Maxwell, ξαναγράφουμε την (2.22) εκφράζοντας τον τελεστή curl σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (ρ, θ, ϕ). Παρατηρούμε ότι $\mathbf{x}u = \rho u \mathbf{e}_\rho$, όπου $\mathbf{e}_\rho$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στην **x** διεύθυνση,

$$\mathbf{u} = -\frac{\partial u}{\partial \theta}\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \phi}\mathbf{e}_\theta, \tag{2.23}$$

όπου $\mathbf{e}_\theta$ και $\mathbf{e}_\phi$ μοναδιαία διανύσματα των σφαιρικών πολικών συντεταγμένων. Στη συνέχεια εκφράζουμε τον τελεστή curl σε αυτές τις συντεταγμένες

$$\nabla \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho\sin\theta}(\Delta_{\partial B_1}u)\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\theta})\mathbf{e}_\phi - \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\phi})\mathbf{e}_\theta, \tag{2.24}$$

όπου $\Delta_{\partial B_1}$ είναι ο τελεστής Laplace-Beltrami για την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας και δίνεται από τη σχέση

$$\Delta_{\partial B_1}u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε πάλι τον τελεστή curl σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\Delta u)\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}(\Delta u)\mathbf{e}_\phi$$

και αντικαθιστούμε στις εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) - k^2\mathbf{u} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(\Delta u + k^2 u)\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}(\Delta u + k^2 u)\mathbf{e}_\phi.$$

Έτσι, αν το u ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz η **u** ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell . Σε επόμενη ενότητα αυτού του κεφαλαίου θα δούμε ότι αν η u ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld τότε (2.3) τότε η **u** θα ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας Silver-M$\ddot{u}$ller (2.20).

Για να λύσουμε την (2.21) με τη μέθοδο των χωριζόμενων μεταβλητών, χρησιμοποιούμε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, ϕ) και ξαναγράφουμε την (2.21)

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\Delta_{\partial B_1} + k^2 u = 0 \tag{2.25}$$

Αν $u = u_1(\rho)u_2(\theta, \phi)$ έχουμε

$$\frac{1}{u_1}(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial u_1}{\partial\rho}) + k^2\rho^2 u_1) + \frac{1}{u_2}\Delta_{\partial B_1}u_2 = 0. \tag{2.26}$$

Συμπεραίνουμε ότι πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $\Delta_{\partial B_1} u_2 = \delta u_2$ για δ σταθερά ή ισοδύναμα να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace-Beltrami στην επιφάνεια ∂B_1. Οι ιδιοσυναρτήσεις είναι οι κλασικές σφαιρικές αρμονικές, ιδιότητες των οποίων μελετάμε στην επόμενη ενότητα. Με u_2 γνωστό έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}) + k^2 \rho^2 u_1 + \delta u_1 = 0. \tag{2.27}$$

Θέτουμε $t = k\rho$ οπότε προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^2 \frac{\partial u_1}{\partial t}) + t^2 u_1 + \delta u_1 = 0.$$

Για κατάλληλη επιλογή του δ η τελευταία εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση Bessel σε σφαιρικές συντεταγμένες. Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι οι σφαιρικές συναρτήσεις Bessel.

2.3 Σφαιρικές αρμονικές

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις κλασικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις οι οποίες είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace-Beltrami στην επιφάνεια μίας σφαίρας [10], [24]. $\tilde{P}_n$ είναι ο χώρος των ομογενών πολυωνύμων βαθμού n ως προς τα x_1, x_2 και x_3.

Ορισμός 2.3.1 *Το ίχνος στο σύνορο ∂B_1 μίας συνάρτησης $u \in \tilde{P}_n$ έτσι ώστε $\Delta u = 0$ στον $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται σφαιρικό αρμονικό τάξης n.*

Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν ακριβώς $2n + 1$ γραμμικά ανεξάρτητες σφαιρικές αρμονικές τάξης n. Θέλουμε να εκφράσουμε τις σφαιρικές αρμονικές χρησιμοποιώντας σφαιρικές πολικές συντεταγμένες $(\rho,\ \theta,\ \phi)$. Σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων κάθε πολυώνυμο $u \in \tilde{P}_n$ έχει τη μορφή $u = \rho^n Y_n(\theta, \phi)$. Πρώτα γράφουμε την εξίσωση Laplace σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες οπότε από την $\Delta u = 0$ προκύπτει

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\phi^2} + n(n+1)Y_n = 0, \tag{2.28}$$

ή μέσω του τελεστή Laplace-Beltrami για την επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας προκύπτει,

$$\Delta_{\partial B_1} Y_n + n(n+1)Y_n = 0 \ \text{ στο } \ \partial B_1.$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι οι ιδιοτιμές του $\Delta_{\partial B_1}$ στο σύνορο, ∂B_1, του B_1 είναι ίσες με $-n(n+1)$. Εφόσον ο $\Delta_{\partial B_1}^{-1}$ είναι αυτοσυζυγής και συμπαγής τελεστής από το $L^2(\partial B_1)$ στο $L^2(\partial B_1)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη θεωρία των Hilbert-Schmidt για να συμπεράνουμε

$$\int\limits_{\partial B_1} Y_n \overline{Y}_m \, dA = 0 \text{ για } n \neq m.$$

Η πιο απλή περίπτωση σφαιρικών αρμονικών είναι εκείνη όπου οι συναρτήσεις δεν εξαρτώνται από τη γωνία ϕ. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $t = \cos\theta$ και συμβολίζοντας την ανεξάρτητη σφαιρική αρμονική ως προς ϕ με $P_n(t)$, παρατηρούμε τη διαφορική εξίσωση του Legendre

$$\frac{\partial}{\partial t}(1-t^2)\frac{\partial}{\partial t}P_n + n(n+1)P_n = 0. \tag{2.29}$$

Οι λύσεις της (2.29) είναι πολυώνυμα βαθμού n ως προς t και ονομάζονται πολυώνυμα Legendre. Στη συνέχεια διατυπώνουμε ένα θεώρημα για τις ιδιότητες αυτών των πολυωνύμων [10], [15].

Θεώρημα 2.3.1 *Μία οικογένεια λύσεων της* (2.29) *δίνεται από τα πολυώνυμα Legendre* $P_n(t)$ *και από τον τύπο του Rodrigues*

$$P_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\,\frac{d^n}{dt^n}\,(1-t^2)^n \; n = 0,1,2,... \tag{2.30}$$

Αυτά τα πολυώνυμα ικανοποιούν την επαναληπτική σχέση

$$(n+1)P_n(t) - (2n+1)tP_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0, \; n = 0,1,2,...$$

και την ιδιότητα ορθογωνιότητας

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)P_m(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Τέλος, για $-1 \leq t \leq 1$*, ισχύει* $|P_n(t)| \leq 1$*,* $n = 0,1,2,...$

Σημειώνουμε ότι από τον τύπο του Rodrigues έχουμε

$$P_0(t) = 1, \; P_1(t) = 1, \; P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1).$$

Για n περιττό, το $P_n(t)$ είναι ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού ως προς t και για n άρτιο είναι ένα πολυώνυμο άρτιου βαθμού.
Μπορούμε να αναζητήσουμε λύσεις της (2.28) που εξαρτώνται από τα θ και ϕ (πολυώνυμα Legendre). Με τη μέθοδο χωριζόμενων μεταβλητών παρατηρούμε ότι η m σφαιρική αρμονική τάξης n, $Y_n^m(\theta,\, \phi)$, έχει τη μορφή

$$Y_n^m(\theta,\, \phi) = f(\cos\theta)\exp(im\phi)$$

για κάποια συνάρτηση f. Θέτουμε $t = \cos\theta$ στην (2.28) και η f ικανοποιεί την ακόλουθη διαφορική εξίσωση που προκύπτει από την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση του Legendre

$$(1-t^2)f''(t) - 2tf'(t) + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-t^2}]f(t) = 0. \tag{2.31}$$

Αντικαθιστούμε όπου $f(t) = (1-t^2)^{n/2}g(t)$ οπότε οι λύσεις της (2.31) δίνονται από $f = P_n^m(t)$, όπου $P_n^m(t)$ είναι η m είδους συνάρτηση Legendre και n τάξης [10]

$$P_n^m(t) = (1-t^2)^{m/2}(\frac{d}{dt})^m P_n(t), \;\; m = 0,\, 1,\, 2, \cdots,\, n.$$

Σημειώνουμε ότι δεν υπάρχει μοναδική κανονικοποίηση για το P_n^m. Η αντίστοιχη σφαιρική αρμονική είναι

$$Y_n^m(\theta,\phi) = \gamma_n^m P_n^m(\cos\theta)\exp(im\phi), \;\; n = 0,\, 1,\, 2, \cdots,$$

όπου γ_n^m είναι μία σταθερά κανονικοποίησης η οποία δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.2 *Οι σφαιρικές αρμονικές*

$$Y_n^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\cdot\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}}P_n^{|m|}(\cos\theta)\exp(im\phi) \tag{2.32}$$

για $m = -n, \cdots, n$ και $n = 0, 1, 2, \cdots$ αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $L^2(\partial B_1)$.

Σε ό,τι ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $Y_n^m(\hat{x})$, όπου $\hat{x}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα ως προς τις σφαιρικές πολικές συντεταγμένες (θ, ϕ).

Μία χρήσιμη επέκταση των σφαιρικών αρμονικών δίνεται από το ‘‘προσθετικό” θεώρημα (addition theorem)

$$\sum_{m=-n}^{n} Y_n^m(\hat{x})\overline{Y_n^m(\hat{y})} = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos\xi),$$

όπου ξ η γωνία ανάμεσα στα μοναδιαία διανύσματα $\hat{x}$ και $\hat{y}$.

2.4 Σφαιρικές συναρτήσεις Bessel

Στην προηγούμενη ενότητα μελετήσαμε τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή Laplace-Beltrami στη μοναδιαία σφαίρα, τις σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις. Στην παρούσα ενότητα θα προσδιορίσουμε την ακτινική εξάρτηση των λύσεων της εξίσωσης Helmholtz, τη συνάρτηση u_1 της σχέσης (2.27). Για $\delta = -n(n+1)$ ξαναγράφουμε την (2.27)

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}) + k^2\rho^2 u_1 - n(n+1)u_1 = 0. \tag{2.33}$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $t = k\rho$ οπότε από τη σχέση (2.33) προκύπτει η διαφορική εξίσωση για τις σφαιρικές Bessel

$$\frac{\partial}{\partial t}(t^2\frac{\partial u_1}{\partial t}) + (t^2 - n(n+1))u_1 = 0. \tag{2.34}$$

Η τελευταία εξίσωση δίνει δύο οικογένειες λύσεων

$$j_n(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l t^{n+2l}}{2^l l! 1\cdot 3\cdots(2n+2l+1)} \tag{2.35}$$

και

$$y_n(t) = -\frac{(2n)!}{2^n\cdot n!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l t^{2l-n-1}}{2^l l!(-2n+1)(-2n+3)\cdots(-2n+2l-1)}. \tag{2.36}$$

Η συνάρτηση j_n ονομάζεται σφαιρική συνάρτηση Bessel τάξης n και είναι αναλυτική για όλα τα $t \in \mathbb{R}^3$. Η συνάρτηση y_n ονομάζεται σφαιρική συνάρτηση Neumann και είναι αναλυτική για $t \in (0,\,\infty)$. Οι αντίστοιχες Hankel συναρτήσεις $h_n^{(1)}$ και $h_n^{(2)}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων Bessel και Neumann και δίνονται από τι σχέσεις

$$h_n^{(1)} = j_n + iy_n \;\text{ και }\; h_n^{(2)} = j_n - iy_n.$$

Επιπλέον, οι j_n και y_n με την βοήθεια τριγωνομετρικών συναρτήσεων γράφονται για $n = 0$

$$j_0(t) = \frac{\sin t}{t} \text{ και } y_0(t) = -\frac{\cos t}{t}, \tag{2.37}$$

συνεπώς

$$h_0^{(1)}(t) = \frac{\exp(it)}{it} \text{ και } h_0^{(2)}(t) = \frac{\exp(-it)}{-it}. \tag{2.38}$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το επόμενο θεώρημα το οποίο συνοψίζει τις ιδιότητες της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των σφαιρικών συναρτήσεων Hankel [10], [15].

Θεώρημα 2.4.1 *Εάν $f_n = j_n$, $f_n = y_n$, $f_n = h_n^{(1)}$ ή $f_n = h_n^{(2)}$, τότε ικανοποιούνται οι ακόλουθες επαναληπτικές σχέσεις*

$$f_{n+1}(t) + f_{n-1}(t) = \frac{2n+1}{t} f_n(t), \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{2.39}$$

$$f_{n+1}(t) = -t^n \frac{d}{dt}\{t^{-n} f_n(t)\}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \tag{2.40}$$

$$f_n'(t) = f_{n-1}(t) - \frac{n+1}{t} f_n(t), \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{2.41}$$

Για συγκεκριμένο n, το ακόλουθο ασυμπτωτικό ανάπτυγμα ισχύει:

$$h_n^{(1)}(t) = \frac{1}{t}\exp(i(t - n\pi/2 - \pi/2))\{1 + O(\frac{1}{t})\}, \tag{2.42}$$

$$(h_n^{(1)})'(t) = \frac{1}{t}\exp(i(t - n\pi/2))\{1 + O(\frac{1}{t})\}, \tag{2.43}$$

καθώς $t \to \infty$. Οι επόμενες ασυμπτωτικές σχέσεις ισχύουν για μεγάλο n:

$$h_n^{(1)}(z) = \frac{(2n-1)!!}{iz^{n+1}}\big(1 + O(\frac{1}{n})\big), \tag{2.44}$$

$$(h_n^{(1)})'(z) = -\frac{n+1}{z} h_n^{(1)}(z) + h_{n-1}^{(1)}(z), \tag{2.45}$$

$$(h_n^{(1)})'(z) = -(n+1)\frac{(2n-1)!!}{iz^{n+2}}\big(1 + O(\frac{1}{n})\big), \tag{2.46}$$

$$j_n(z) = \frac{z^n}{(2n+1)!!}\big(1 + O(\frac{1}{n})\big), \tag{2.47}$$

$$(j_n)'(z) = n\frac{z^{n-1}}{(2n+1)!!}\big(1 + O(\frac{1}{n})\big), \tag{2.48}$$

όπου $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$. Επιπλέον έχουμε την ταυτότητα του Wronski:

$$h_n^{(1)}(z)\overline{(h_n^{(1)})'(z)} - \overline{h_n^{(1)}(z)}(h_n^{(1)})'(z) = -\frac{2i}{z^2}. \tag{2.49}$$

Τελικά ισχύει

$$h_n^{(1)}(t) = O(\frac{2n}{et})^n, \ n \to \infty$$

ομοιόμορφα ως προς t σε συμπαγή υποσύνολα του $(0, \infty)$.

Από τα ασυμπτωτικά αναπτύγματα προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial r}(h_n^{(1)}(kr)) - ikh_n^{(1)}(kr) = O(\frac{1}{k^2r^2}).$$

Συμπεραίνουμε ότι η $u(r) = h_n^{(1)}(kr)$ ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας του Sommerfeld

$$\lim_{r\to\infty} r(\frac{\partial u}{\partial r} - iku) = 0. \tag{2.50}$$

Όπως έχουμε δει η (2.50) είναι η συνθήκη που ικανοποιούν τα βαθμωτά πεδία της εξίσωσης Helmholtz. Η αντίστοιχη συνθήκη ακτινοβολίας για τα διανυσματικά πεδία που ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell είναι αυτή των Silver- M$\ddot{u}$ller.
Στο επόμενο θεώρημα συνοψίζουμε τις ιδιότητες των σφαιρικών αρμονικών και των συναρτήσεων Bessel.

Θεώρημα 2.4.2 *Η συνάρτηση $\bar{\upsilon}_n^m(\mathbf{x}) = j_n(k|\mathbf{x}|)Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})$ ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz $\Delta\upsilon + k^2\upsilon = 0$ σε όλο το $\mathbb{R}^3$. Η συνάρτηση $\upsilon_n^m(\mathbf{x}) = h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})$ ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz στο $\mathbb{R}^3\backslash\{\mathbf{0}\}$ και τη συνθήκη ακτινοβολίας Sommerfeld* (2.50).

Κλείνουμε την ενότητα με δύο κλασικά αναπτύγματα. Το πρώτο είναι γνωστό ως Jacobi-Anger και αφορά τα επίπεδα κύματα [10]

$$\exp(ik\rho\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)j_n(k\rho)P_n(\cos\theta). \tag{2.51}$$

Το δεύτερο είναι γνωστό ως η Funk-Hecke φόρμουλα

$$\int_{\partial B_1} \exp(-ik\rho\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{z}})Y_n^m(\hat{\mathbf{z}})dA(\hat{\mathbf{z}}) = \frac{4\pi}{i^n}j_n(k\rho)(\hat{\mathbf{x}}), \tag{2.52}$$

για $\hat{\mathbf{x}} \in \partial B_1, \ \ \rho > 0$ και όλα τα $n \geq 0, -n \leq m \leq n$.

Κεφάλαιο 3

Χώροι συναρτήσεων

Η θεωρία μεταβολών των εξισώσεων Maxwell στηρίζεται στους χώρους Sobolev βαθμωτών και διανυσματικών συναρτήσεων. Θα δώσουμε τους ορισμούς και τις βασικές ιδιότητες των χώρων αυτών για τις βαθμωτές συναρτήσεις και για τις διανυσματικές. Στόχος μας είναι διατυπώσουμε τον ορισμό του κατάλληλου χώρου Sobolev στον οποίο ορίζεται ο τελεστής Calderon του οποίου ιδιότητες μελετάμε στο επόμενο κεφάλαιο.

3.1 Εισαγωγικές έννοιες

Για κάθε ανοιχτό σύνολο (ανοιχτό και συνεκτικό) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3$ ορίζουμε
$C^k(\Omega)$: το σύνολο των k φορές συνεχώς διαφορίσιμων συναρτήσεων στο Ω,

$C^k(\bar{\Omega})$: το σύνολο των συναρτήσεων στο $C^k(\Omega)$ οι οποίες έχουν φραγμένες και ομοιόμορφα συνεχείς παραγώγους μέχρι k τάξης στο $\bar{\Omega}$,

$L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$: το σύνολο των συναρτήσεων ϕ στο Ω για τις οποίες η συνάρτηση $|\phi|^p$ είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή

$$\int_\Omega |\phi|^p dV < \infty.$$

Για $p = 2$, το $L^2(\Omega)$ αποτελεί το σύνολο όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο Ω, εμφανίζεται σε βασικά προβλήματα.

Για κάθε $U \subset \Omega$ που περιέχεται συμπαγώς στο Ω

$$L^p_{loc}(\Omega) = \{\upsilon : \Omega \to \mathbb{C} : \upsilon \text{ μετρήσιμη και } \upsilon \in L^p(U)\},$$

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\upsilon : \Omega \to \mathbb{C} : \upsilon \in C^\infty(\Omega) \text{ και ο φορέας της } \upsilon \text{ περιέχεται συμπαγώς στο } \Omega\}.$$

Η μελέτη των εξισώσεων Maxwell γίνεται σε φραγμένα χωρία του $\mathbb{R}^3$ όπου οι ιδιότητες των χώρων Sobolev προσδιορίζονται από την ομαλότητα ή μη των συνόρων τους. Τα χωρία στα οποία θα αναφερόμαστε ονομάζονται Lipschitz πολυεδρικά χωρία. Ακολουθεί ο επόμενος ορισμός για $N = 2,\ 3$.

Ορισμός 3.1.1 *Το σύνορο $\partial\Omega$ ενός φραγμένου χωρίου Ω στο $\mathbb{R}^N$ είναι συνεχές κατά Lipschitz αν για κάθε $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $O \subset \mathbb{R}^N$ με $\mathbf{x} \in O$ και ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_N)$ το οποίο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες. Υπάρχει διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^N$ με την περιοχή O να είναι [13]*

$$O = \{\zeta | \ -\alpha_j < \zeta_j < \alpha_j,\ 1 \leq j \leq N\}$$

και μία Lipschitz συνεχή συνάρτηση ϕ ορισμένη στο

$$O' = \{\zeta' \in \mathbb{R}^{N-1} | -\alpha_j < \zeta_j < \alpha_j,\ 1 \leq j \leq N-1\}$$

με $|\phi(\zeta')| \leq \dfrac{\alpha_N}{2}$ για κάθε $\zeta' \in O'$ τέτοια ώστε

$$\Omega \cap O = \{\zeta | \ \zeta_N < \phi(\zeta'),\ \zeta' \in O'\}$$

και

$$\partial\Omega \cap O = \{\zeta | \ \zeta_N = \phi(\zeta'),\ \zeta' \in O'\}.$$

Θα λέμε ότι ένα χωρίο Ω είναι Lipschitz και θα εννοούμε ότι έχει σύνορο το οποίο είναι Lipschitz συνεχές. Μπορεί τα σύνορα των χωρίων να είναι C^ℓ όπου ο προηγούμενος ορισμός ισχύει για γραφήματα $\phi \in C^\ell(O')$ για κάθε περιοχή O' του ορισμού. Θα θεωρήσουμε για τη μελέτη του τελεστή Calderon σφαιρικό χωρίο το οποίο είναι ομαλό και έχει C^∞ σύνορο. Υπενθυμίζουμε ότι μία πολύ σημαντική ιδιότητα των χωρίων Lipschitz είναι πως έχουν καλά ορισμένο εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\boldsymbol{\nu}$ σχεδόν σε κάθε σημείο του συνόρου $\partial\Omega$ [21], $|\boldsymbol{\nu}| = 1$. Επιπλέον, για την ολοκλήρωση κατά παράγοντες για μία συνάρτηση $u \in C^1(\Omega)$, όπου $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ συνάρτηση δοκιμής ισχύει

$$\int_\Omega u(\mathbf{x})\phi_{x_i}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = -\int_\Omega u_{x_i}(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \tag{3.1}$$

Ορισμός 3.1.2 *Η συνάρτηση* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν υπάρχουν συναρτήσεις* $g_1, ..., g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ *τέτοιες ώστε*

$$\int_\Omega u(\mathbf{x})\phi_{x_i}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = -\int_\Omega g_i(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{3.2}$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$ *και για κάθε* $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$.

3.1.1 Χώροι Sobolev

Σημαντικό ρόλο στη μελέτη των προβλημάτων σκέδασης έχουν οι χώροι συναρτήσεων Sobolev. Αποδεικνύεται ότι αν η $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ είναι τέτοια ώστε $\int_\Omega u\phi\, d\mathbf{x} = 0$ για κάθε $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ τότε $u = 0$ στο Ω.

Ορισμός 3.1.3 *Ο* $H^1(\Omega)$ *είναι γραμμικός χώρος, ονομάζεται χώρος* $Sobolev$ *και ορίζεται ως εξής:*

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \text{ ασθενώς παραγωγίσιμη και } u_{x_i} \in L^2(\Omega)\}$$

Η απεικόνιση

$$< u, \upsilon >= \int_\Omega (u\overline{\upsilon} + u_{x_i}\overline{\upsilon}_{x_i} + ... + u_{x_n}\overline{\upsilon}_{x_n})\, d\mathbf{x} \tag{3.3}$$

ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $H^1(\Omega)$ *με νόρμα*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = [\int_\Omega (|u|^2 + |u_{x_1}|^2 + ... + |u_{x_n}|^2)]^{\frac{1}{2}} = (\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}} \tag{3.4}$$

Αποδεικνύεται ότι O $H^1(\Omega)$ εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο (3.3) είναι χώρος Hilbert. Επιπλέον, ο χώρος $H^1_0(\Omega)$ ορίζεται ως η κλειστή θήκη του $C_c^\infty(\Omega)$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Σημειώνουμε ότι αν το Ω είναι φραγμένο με C^1 σύνορο και $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, αποδεικνύεται ότι

$$u \in H^1_0(\Omega) \leftrightarrow u = 0 \text{ στο } \partial\Omega. \tag{3.5}$$

Συνεπώς λέμε ότι ο $H^1_0(\Omega)$ αποτελείται από στοιχεία του $H^1(\Omega)$ που μηδενίζονται στο σύνορο $\partial\Omega$.
Από την ανισότητα *Poincare* για Ω φραγμένο, υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},\ u \in H^1_0(\Omega) \tag{3.6}$$

συνάγεται το συμπέρασμα ότι η νόρμα $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ στον $H_0^1(\Omega)$ είναι ισοδύναμη με την $Sobolev$ νόρμα $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του δυϊκού ενός χώρου Hilbert X: Για έναν δοθέν χώρο Hilbert , ο δυϊκός χώρος X' είναι ο χώρος των φραγμένων γραμμικών συναρτησιακών στο X. Εάν $f \in X'$ τότε η νόρμα της f είναι

$$\|f\|_{X'} = \sup_{\mathbf{x}\in X,\ \mathbf{x}\neq o} \frac{|f(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|_X}.$$

Ορίζουμε το δυϊκό ζεύγος $<< \cdot,\ \cdot >>_X$

$$<< g,\ u >>_X = g(u) \ \text{ για κάθε } u \in X \text{ και } g \in X'.$$

Εάν μία συνάρτηση u είναι επαρκώς ομαλή, μπορούμε να ορίσουμε τη συνορική τιμή της στο $\partial\Omega$. Αυτή η τιμή ονομάζεται ίχνος της u στο σύνορο $\partial\Omega$. Για οποιαδήποτε συνάρτηση $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, η τιμή της στο σύνορο $\partial\Omega$ ορίζεται καλώς. Έτσι ορίζουμε τον τελεστή ίχνους γ_0 ώστε $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$.
Ο πιο σημαντικός χώρος στον οποίο ορίζεται ο τελεστής ίχνους είναι ο $H^{1/2}(\partial\Omega)$ και ο δυϊκός του $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Η νόρμα αυτού του χώρου είναι η συνήθης δυϊκή νόρμα. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε Lipschitz επιφάνεια S ορίζουμε

$$< f,\ g >_S = \int_S f\bar{g}dA.$$

Η νόρμα στον $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ μπορεί να γραφεί

$$\|f\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} = \sup_{g\in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{|< f,\ g >_{\partial\Omega}|}{\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}}, \tag{3.7}$$

όπου έχουμε θεωρήσει ότι ο χώρος $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ μπορεί να χαρακτηριστεί ως η πλήρωση του $L^2(\partial\Omega)$ [18].

3.2 Διανυσματικές συναρτήσεις

Το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\Omega)$ επεκτείνεται τετριμμένα για διανυσματικές συναρτήσεις. Θεωρούμε τις $\mathbf{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)^T \in (L^2(\Omega))^3$ και $\boldsymbol{\upsilon} = (\upsilon_1,\ \upsilon_2,\ \upsilon_3)^T \in (L^2(\Omega))^3$, τότε γράφουμε το $(L^2(\Omega))^3$ εσωτερικό γινόμενο

$$(\mathbf{u},\ \boldsymbol{\upsilon}) = \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} u_j\bar{\upsilon}_j\, dV. \tag{3.8}$$

3.2.1 Οι τελεστές στροβιλισμού και απόκλισης

Ορίζουμε τον τελεστή στροβιλισμου, curl, και τον τελεστή απόκλισης, divergence. Για μία διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{\upsilon} \in (C_0^\infty(\Omega)^{'})^3$ με $\boldsymbol{\upsilon} = (\upsilon_1,\, \upsilon_2,\, \upsilon_3)^T$ έχουμε

$$\nabla \times \boldsymbol{\upsilon} = (\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3}, \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1}, \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2}), \tag{3.9}$$

όπου οι παράγωγοι δίνονται με την έννοια των κατανομών. Ειδικότερα εφαρμόζοντας την (3.2) σε κάθε συνιστώσα του curl, προκύπτει

$$(\nabla \times \boldsymbol{\upsilon}, \boldsymbol{\phi}) = (\boldsymbol{\upsilon}, \nabla \times \boldsymbol{\phi}) \text{ για όλα τα } \boldsymbol{\phi} \in (C_0^\infty(\Omega))^3. \tag{3.10}$$

Αντίστοιχα, για να ορίσουμε τον τελεστή div έχουμε

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\upsilon} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_i}. \tag{3.11}$$

Εφαρμόζοντας πάλι την (3.2) σε κάθε συνιστώσα του div, προκύπτει

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\upsilon}, \phi) = -(\boldsymbol{\upsilon}, \nabla \phi) \text{ για όλα τα } \phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{3.12}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ασθενούς παραγώγου δείχνουμε ότι

$$\nabla \times (\nabla p) = 0 \text{ για όλα τα } p \in C_0^\infty(\Omega)^{'}, \tag{3.13}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\upsilon}) = 0 \text{ για όλα τα } \boldsymbol{\upsilon} \in (C_0^\infty(\Omega)^{'})^3. \tag{3.14}$$

Για να αποδείξουμε την (3.13) θέτουμε στην (3.10) $\boldsymbol{\upsilon} = \nabla p$ και καταλήγουμε στην $(\nabla \times \nabla p,\, \boldsymbol{\phi}) = (\nabla p,\, \nabla \times \boldsymbol{\phi})$ για όλα τα $\boldsymbol{\phi} \in (C_0^\infty(\Omega))^3$. Στη συνέχεια από τον ορισμό της κλίσης με την έννοια των κατανομών προκύπτει $(\nabla p,\, \nabla \times \boldsymbol{\phi}) = -(p,\, \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi})) = 0$ για όλα τα $\boldsymbol{\phi} \in (C_0^\infty(\Omega))^3$ όπου η τελευταία ισότητα ισχύει εφόσον $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) = 0$ για ομαλές συναρτήσεις. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε κατάλληλους χώρους συναρτήσεων οι οποίοι συνδέονται με αυτούς τους τελεστές. Θα επικεντρωθούμε σε αποτελέσματα πυκνότητας τα οποία μας επιτρέπουν να προσεγγίσουμε τις συναρτήσεις των χώρων αυτών με ομαλές συναρτήσεις. Με αυτόν τον τρόπο θα ορίσουμε κατάλληλους τελεστές ίχνους και θα διατυπώσουμε τα αντίστοιχα θεωρήματα.

Θα διατυπώσουμε αρχικά κάποιες βασικές ολοκληρωτικές ταυτότητες για επαρκώς παραγωγισίμες διανυσματικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.2.1 ***(Θεώρημα Απόκλισης)*** *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, με σύνορο $\partial\Omega$ και μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο $\boldsymbol{\nu}$, φραγμένο χωρίο Lipschitz. Έστω $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο με $\mathbf{F} \in (C^1(\Omega))^3$. Τότε*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} dA. \tag{3.15}$$

Μέσω του θεωρήματος της απόκλισης αποδεικνύονται οι επόμενες σημαντικές διανυσματικές ταυτότητες.

Πόρισμα 3.2.1 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα φραγμένο χωρίο Lipschitz με σύνορο $\partial\Omega$ και μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο $\boldsymbol{\nu}$.*

1. *Αν $\xi \in C^1(\bar{\Omega})$ και $\boldsymbol{\upsilon} \in (C^1(\bar{\Omega}))^3$ τότε*

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{\upsilon}\xi \, d\mathbf{V} = -\int_\Omega \boldsymbol{\upsilon} \cdot \nabla\xi \, d\mathbf{V} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\upsilon}\xi \, dA. \tag{3.16}$$

2. *(Πρώτη ταυτότητα Green) Αν $\xi \in C^1(\bar{\Omega})$ και $p \in C^2(\bar{\Omega})$ τότε*

$$\int_\Omega \Delta p\xi \, d\mathbf{V} = -\int_\Omega \nabla p \cdot \nabla\xi \, d\mathbf{V} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p}{\partial \nu}\xi \, dA \tag{3.17}$$

3. *(Δεύτερη ταυτότητα Green) Αν $\xi \in C^2(\bar{\Omega})$ και $p \in C^2(\bar{\Omega})$ τότε*

$$\int_\Omega (\Delta p\xi - p\Delta\xi) \, d\mathbf{V} = \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial p}{\partial \nu}\xi - \frac{\partial \xi}{\partial \nu}p) \, dA \tag{3.18}$$

4. *Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{\nu}$ και $\boldsymbol{\phi}$ ανήκουν στο $(C^1(\bar{\Omega}))^3$. Τότε*

$$\int_\Omega \nabla \times \boldsymbol{\upsilon} \cdot \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{V} = \int_\Omega \boldsymbol{\upsilon} \cdot \nabla \times \boldsymbol{\phi} \, d\mathbf{V} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\upsilon} \cdot \boldsymbol{\phi} \, dA \tag{3.19}$$

Αν συγκρίνουμε τη σχέση (3.16) με την (3.12) και την (3.19) με την (3.10) φαίνεται πως συσχετίζονται οι ορισμοί των παραγώγων του στροβιλισμού και της απόκλισης, με την έννοια των κατανομών, και οι κλασικές ολοκληρωτικές ταυτότητες. Αυτές οι ταυτότητες θα επεκταθούν σε κατάλληλους χώρους Sobolev.

3.2.2 Οι χώροι $H(div;\Omega)$, $H(curl;\Omega)$

Στη συνέχεια θα διατυπώσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα για τον χώρο των διανυσματικών συναρτήσεων με τετραγωνικά ολοκληρώσιμη απόκλιση [12]. Ο χώρος αυτός συμβολίζεται με $H(div;\Omega)$ και ορίζεται

$$H(div;\Omega) = \{\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^3 | \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\} \tag{3.20}$$

και η αντίστοιχη νόρμα δίνεται

$$\|\mathbf{u}\|_{H(div;\Omega)} = (\|\mathbf{u}\|^2_{(L^2(\Omega))^3} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.21}$$

Ο $H(div;\Omega)$ είναι χώρος Hilbert με το προφανές εσωτερικό γινόμενο.

Θεώρημα 3.2.2 *Έστω Ω φραγμένο χωρίο Lipschitz στον $\mathbb{R}^3$. Τότε*

$$H(div;\Omega) = \textit{κλειστότητα του } (C^\infty(\bar{\Omega}))^3 \textit{ ως προς την } H(div;\Omega) \textit{ νόρμα.} \tag{3.22}$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι οι συναρτήσεις του $H(div;\overline{\Omega})$ έχουν καλά ορισμένη κάθετη συνιστώσα στο σύνορο $\partial\Omega$. Αυτό σχετίζεται με τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται μεταξύ των διεπιφανειών με διαφορετικό υλικό μέσο ώστε οι κάθετες συνιστώσες των διανυσματικών πεδίων στο σύνορο του χωρίου να είναι συνεχείς.

Έστω συνάρτηση $\boldsymbol{v} \in (C^\infty(\bar{\Omega}))^3$, ο τελεστή ίχνους γ_n ορίζεται σχεδόν παντού με τον κλασικό τρόπο

$$\gamma_n(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega} \cdot \boldsymbol{\nu}. \tag{3.23}$$

Θεώρημα 3.2.3 *Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ φραγμένο χωρίο Lipschitz στον $\mathbb{R}^3$ με εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο $\boldsymbol{\nu}$. Τότε*

1. *Η απεικόνιση γ_n που ορίζεται από την (3.23) επεκτείνεται συνεχώς σε μία συνεχή γραμμική απεικόνιση γ_n από το $H(div;\Omega)$ επί του $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$*

2. *Το ακόλουθο Θεώρημα Green ισχύει για συναρτήσεις $\boldsymbol{v} \in H(div;\Omega)$ και $\phi \in H^1(\Omega)$*

$$(\boldsymbol{v}, \nabla\phi) + (\nabla \cdot \boldsymbol{v}, \phi) = <\phi, \gamma_n(\boldsymbol{v})>_{\partial\Omega} \tag{3.24}$$

Κατά την μελέτη προβλημάτων που ορίζεται η κάθετη συνιστώσα του διανυσματικού πεδίου στο σύνορο $\partial\Omega$, χρειάζεται να θεωρήσουμε τον υπόχωρο του $H(div;\Omega)$ στον οποίο ο τελεστής γ_n μηδενίζεται. Έτσι έχουμε

$$H_0(div;\Omega) = \text{κλειστότητα του } (C_0^\infty(\Omega))^3 \text{ ως προς την } H(div;\Omega) \text{ νόρμα.} \tag{3.25}$$

Το επόμενο θεώρημα επιβεβαιώνει ότι οι ορισμοί που δόθηκαν είναι οι κατάλληλοι.

Θεώρημα 3.2.4 *Θεωρούμε Ω φραγμένο χωρίο Lipschitz στον $\mathbb{R}^3$. Τότε*

$$H_0(div;\Omega) = \{\boldsymbol{v} \in H(div;\Omega) |\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{3.26}$$

Ορίζουμε το χώρο των διανυσματικών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^3$ με τετραγωνικά ολοκληρώσιμο στροβιλισμό

$$H(curl;\Omega) = \left\{\boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^3 | \nabla\times\boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^3\right\} \tag{3.27}$$

με νόρμα

$$\|\boldsymbol{v}\|_{H(curl;\Omega)} = (\|\boldsymbol{v}\|_{(L^2(\Omega))^3} + \|\nabla\times\boldsymbol{v}\|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}. \tag{3.28}$$

Κατά την μελέτη της ύπαρξης λύσης των εξισώσεων Maxwell με τις μεταβολικές μεθόδους ο χώρος λύσεων των ζητούμενων πεδίων είναι ο $H(curl;\Omega)$. Για τους χώρους Sobolev ανώτερης τάξης, για $s \geq 0$,

$$H^s(curl;\Omega) = \left\{\boldsymbol{v} \in (H^s(\Omega))^3 | \nabla\times\boldsymbol{v} \in (H^s(\Omega))^3\right\}. \tag{3.29}$$

Ο $H_0(curl;\Omega)$ ορίζεται μέσω της πυκνότητας

$$H_0(curl;\Omega) = \text{κλειστότητα του } (C_0^\infty(\Omega))^3 \text{ ως προς τον } H(curl;\Omega). \tag{3.30}$$

Στη συνέχεια διατυπώνουμε ένα λήμμα που δίνει έναν εναλλακτικό χαρακτηρισμό των συναρτήσεων στον $H_0(curl;\Omega)$.

Λήμμα 3.2.1 *Έστω Ω φραγμένο χωρίο Lipschitz στον $\mathbb{R}^3$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{u} \in H(curl;\Omega)$ τέτοια ώστε για κάθε $\boldsymbol{\phi} \in (C_0^\infty(\bar{\Omega}))^3$*

$$(\nabla\times\mathbf{u},\, \boldsymbol{\phi}) - (\mathbf{u},\, \nabla\times\boldsymbol{\phi}) = 0. \tag{3.31}$$

Τότε $\mathbf{u} \in H_0(curl;\Omega)$.

Μέσω του προηγούμενου λήμματος αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα πυκνότητας

Θεώρημα 3.2.5 *Έστω Ω φραγμένο χωρίο Lipschitz στον $\mathbb{R}^3$. Τότε η κλειστότητα του $(C_0^\infty(\bar{\Omega}))^3$ στον $H(curl;\Omega)$ με νόρμα είναι ο $H(curl;\Omega)$.*

Το θεώρημα Green στην (3.31) ισχύει για διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{u} \in H_0(curl;\Omega)$ και $\boldsymbol{\phi} \in H(curl;\Omega)$ το οποίο προκύπτει άμεσα από την πυκνότητα του $(C_0^\infty(\bar{\Omega}))^3$ στον $H(curl;\Omega)$.
Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις ιδιότητες των ιχνών των συναρτήσεων που ανήκουν στον $H(curl;\Omega)$. Για να μελετήσουμε προβλήματα συνοριακών τιμών των εξισώσεων Maxwell πρέπει το ίχνος του εφαπτόμενου ηλεκτρικού πεδίου να είναι καλά ορισμένο. Έτσι, αν ο $H(curl;\Omega)$ είναι ο χώρος λύσεων πρέπει να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις του χώρου αυτού έχουν καλά ορισμένο εφαπτομενικό ίχνος [12], [2], [6]. Ορίζουμε για μία ομαλή διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{v} \in (C^\infty(\Omega))^3$, τα ίχνη

$$\gamma_t(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega} \tag{3.32}$$

$$\gamma_T(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}) \times \boldsymbol{\nu} \tag{3.33}$$

όπου $\boldsymbol{\nu}$ μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο στο Ω.

Θεώρημα 3.2.6 *Υποθέτουμε ότι Ω φραγμένο χωρίο Lipschitz στον $\mathbb{R}^3$. Τότε ο τελεστής ίχνους γ_t της* (3.32) *που ορίστηκε με κλασικό τρόπο στο $(C^\infty(\Omega))^3$ μπορεί να επεκταθεί συνεχώς σε μία συνεχή γραμμική απεικόνιση από τον $H(curl;\Omega)$ στον $(H^{-1/2}(\partial\Omega))^3$. Επιπλέον, το θεώρημα Green ισχύει για κάθε $\boldsymbol{v} \in H(curl;\Omega)$ και $\boldsymbol{\phi} \in (H^1(\Omega))^3$*

$$(\nabla \times \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{\phi}) - (\boldsymbol{v},\, \nabla \times \boldsymbol{\phi}) = <\gamma_t(\boldsymbol{v}),\, \boldsymbol{\phi}>_{\partial\Omega} . \tag{3.34}$$

Σχόλιο. Η απεικόνιση $\gamma_t : H(curl;\Omega) \to (H^{-1/2}(\partial\Omega))^3$ δεν είναι $1-1$ και επί διότι για οποιοδήποτε $\boldsymbol{v}$, ο τελεστής ίχνους $\gamma_t(\boldsymbol{v})$ είναι εφαπτομενικός στο σύνορο $\partial\Omega$, ενώ ο χώρος $(H^{-1/2}(\partial\Omega))^3$ περιέχει διανύσματα τα οποία δεν είναι εφαπτομενικά του $\partial\Omega$. Ο πιο κατάλληλος χώρος για αυτόν τον τελεστή θα δοθεί παρακάτω.
Ανάλογο αποτέλεσμα θα μπορούσε να αποδειχθεί για τον τελεστή ίχνους γ_T αλλά αυτό γενικά δεν ισχύει, διότι αν μία $\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^3$ τότε δεν είναι απαραίτητο ο

τελεστής $\gamma_t(\upsilon) \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$. Για το λόγο αυτό [7] ορίζουμε το χώρο ίχνους (trace space) $Y(\partial\Omega)$ ως εξής:

$$Y(\partial\Omega) = \{\mathbf{f} \in (H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^3 | \text{ υπάρχει } \mathbf{u} \in H(curl;\Omega) \text{ με } \gamma_t(\mathbf{u}) = \mathbf{f}\} \quad (3.35)$$

με νόρμα

$$\|\mathbf{f}\|_{Y(\partial\Omega)} = \underset{\mathbf{u}\in H(curl;\Omega), \gamma_t(\mathbf{u})=\mathbf{f}}{inf} \|\mathbf{u}\|_{H(curl;\Omega)}$$

Με αυτή τη νόρμα, ο $Y(\partial\Omega)$ είναι χώρος Banach.
Ο χαρακτηρισμός του χώρου του τελεστή ίχνους φαίνεται ότι δεν είναι τόσο εύκολος διότι για να ελέγξουμε αν μία συνάρτηση ανήκει στον $Y(\partial\Omega)$ πρέπει να την επεκτείνουμε στο σύνορο $\partial\Omega$. Το θεώρημα που ακολουθεί χαρακτηριζεί τον χώρο $Y(\partial\Omega)$.

Θεώρημα 3.2.7 *Ο χώρος $Y(\partial\Omega)$ είναι χώρος Hilbert. Η απεικόνιση ίχνους γ_t : $H(curl;\Omega) \to Y(\partial\Omega)$ είναι επί. Η απεικόνιση γ_T : $H(curl;\Omega) \to Y(\partial\Omega)'$ είναι καλώς ορισμένη. Για κάθε $\boldsymbol{\upsilon} \in H(curl;\Omega)$ και $\boldsymbol{\phi} \in H(curl;\Omega)$*

$$(\nabla \times \boldsymbol{\upsilon},\, \boldsymbol{\phi}) - (\boldsymbol{\upsilon},\, \nabla \times \boldsymbol{\phi}) =< \gamma_t(\boldsymbol{\upsilon}), \gamma_T(\boldsymbol{\phi}) >_{\partial\Omega} . \quad (3.36)$$

Σημειώνουμε ότι για ένα χωρίο Lipschitz έχει αποδειχθεί ότι ο γ_T είναι $1-1$ και επί [6]. Τέλος, ο χαρακτηρισμός του $Y(\partial\Omega)$ μπορεί να γίνει με μεγαλύτερη σαφήνεια αφού εισάγουμε πρώτα τον ακόλουθο χώρο

$$H_t^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{\mathbf{s} \in (H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^3 | \, \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ σχεδόν παντού στο } \partial\Omega\}. \quad (3.37)$$

Συνεπώς έχουμε ότι $Y(\partial\Omega) \subset H_t^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Για να ελέγξουμε ότι ο $\gamma_t(\boldsymbol{\upsilon}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ακολουθούμε τον παρακάτω συλλογισμό:
Επιλέγουμε $\boldsymbol{\phi} = \nabla\xi$ για $\xi \in H^1(\Omega)$ και αντικαθιστούμε στην (3.36) από όπου προκύπτει $(\nabla \times \boldsymbol{\upsilon},\, \nabla\xi) =< \gamma_t(\boldsymbol{\upsilon}), \gamma_T(\nabla\xi) >_{\partial\Omega}$. Μέσω της σχέσης

$$(\nabla p)|_{\partial\Omega} = \nabla_{\partial\Omega} p + \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{\nu} \quad (3.38)$$

για μία συνάρτηση p διαφορίσιμη σε μία περιοχή του $\partial\Omega$ προκύπτει ότι
$\boldsymbol{\nu} \times \nabla p \times \boldsymbol{\nu} = \nabla_{\partial\Omega} p$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να γράψουμε
$< \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\upsilon},\, \nabla_{\partial\Omega}\xi >_{\partial\Omega}= (\nabla \times \boldsymbol{\upsilon},\, \nabla\xi)$. Ολοκληρώνουμε κατά μέρη και από την (3.24) με $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{\upsilon} = 0$ έχουμε $< \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\upsilon},\, \nabla_{\partial\Omega}\xi >_{\partial\Omega}=< \xi,\, \boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\upsilon}) >_{\partial\Omega}$.

Το αριστερό μέλος είναι ο ασθενής ορισμός της αρνητικής επιφανειακής απόκλισης και ισχύει ότι για κάθε $\boldsymbol{\upsilon} \in H(curl;\Omega)$

$$\nabla_{\partial\Omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\upsilon}) = -\boldsymbol{\nu} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\upsilon}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega). \tag{3.39}$$

Συνεπώς προκύπτει ότι η επιφανειακή απόκλιση του $\gamma_t(\boldsymbol{\upsilon})$ ανήκει στον $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Επομένως οι συναρτήσεις του χώρου $Y(\partial\Omega)$ έχουν καλά ορισμένη επιφανειακή απόκλιση. Για μία ομαλή επιφάνεια ο χώρος

$$Y(\partial\Omega) = \{\mathbf{u} \in H_t^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) | \nabla_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\} \tag{3.40}$$

συμβολίζεται συνήθως με $H^{-\frac{1}{2}}(Div;\, \partial\Omega)$ και ονομάζεται χώρος επιφανειακής απόκλισης. Ο δυϊκός του, $Y(\partial\Omega)'$ για ομαλά χωρία δίνεται

$$H^{-\frac{1}{2}}(Curl;\, \partial\Omega) = \{\mathbf{u} \in H_t^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) | \nabla_{\partial\Omega} \times \mathbf{u} \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\}$$

και ονομάζεται χώρος επιφανειακού στροβολισμού.

Κεφάλαιο 4

Ο τελεστής Calderon

Εισαγωγή

Ο Alberto Pedro Calderon γεννήθηκε στις 14 Σεπτεμβρίου 1920. Ήταν Αργεντίνος Μαθηματικός και θεωρήθηκε ως ένας από τους κορυφαίους Μαθηματικούς του τελευταίου μισού του προηγούμενου αιώνα.
Στα δώδεκά του χρόνια, μετά από τον ξαφνικό θάνατο της μητέρας του, φοίτησε σε οικοτροφείο αρρένων κόντα στην Ζυρίχη της Ελβετίας για δύο χρόνια όπου και εκδήλωσε το ενδιαφέρον του για τα Μαθηματικά. Στη συνέχεια τελείωσε το σχολείο στην γεννέτειρα πόλη του, Mondoza στην Αργεντινή.
Ολοκλήρωσε τις σπουδές του στη Μηχανική στο Πανεπιστήμιο του Μπουένος Άϊρες λαμβάνοντας πτυχίο πολιτικού μηχανικού το 1947. Κατά τη διάρκεια της πρώτης του εργασίας ως ερευνητής στο εργαστήριο του γεωφυσικού τμήματος μίας εταιρίας επεξεργασίας πετρελαίου, ήρθε σε επαφή με καθηγητές Μαθηματικούς του Πανεπιστημίου του Μπουένος 'Αϊρες. Εκείνη την περίοδο μελέτησε πειραματικά την πιθανότητα να προσδιοριστεί η αγωγιμότητα ενός σώματος από μετρήσεις του ηλεκτρικού ρεύματος στο σύνορο του σώματος. Τα αποτελέσματα αυτά δημοσιεύθηκαν πολύ αργότερα, το 1980 και έθεσαν τις βάσεις για μία νέα ερευνητική περιοχή στα Μαθηματικά, αυτή των αντίστροφων προβλημάτων.
Από το 1947 ξεκινά μία στενή συνεργασία με τον Πολωνό Μαθηματικό Antoni Zygmund, υπό την εποπτεία του οποίου λαμβάνει το διδακτορικό του στα Μαθηματικά, το 1950. Η διατριβή του Calderon αποδείχθηκε σημαντική: κάθε μία από τις τρεις εργασίες του επιλύει ένα μακροχρόνιο ανοικτό πρόβλημα στην ερ-

γοδική θεωρία ή την αρμονική ανάλυση. Η ερευνητική τους συνεργασία κράτησε περισσότερο από 30 έτη και συνέβαλλε στην θεωρία ολοκληρωτικών τελεστών με ιδιάζοντες πυρήνες. Η εργασία τους, ‘‘Calderón, A. P., Zygmund, A. (1952), ‘‘On the existence of certain singular integrals”, Acta Mathematica, 88 (1): 85–139” επηρέασε σημαντικά το Διεθνές Σχολείο Ανάλυσης του Πανεπιστημίου του Σικάγο (Chicago School of hard analysis) το οποίο και εξακολουθεί να αποτελεί σημαντική παράδοση στη μαθηματική ζωή του Eckhart Hall στο Πανεπιστήμιο του Σικάγο. Ένα από τα πρώτα κοινά αποτελέσματά τους ήταν το Calderon-Zygmund decomposition lemma, το οποίο οδήγησε στην μελέτη μίας ασθενούς τύπου συνέχειας των ολοκληρωτικών τελεστών με ιδιάζοντες πυρήνες, το οποίο χρησιμοποιείται σήμερα ευρέως σε όλη την ανάλυση και τη θεωρία πιθανοτήτων.
Ο Browder είχε πεί πως ‘‘Ο Calderon ήταν ένας από τους βασικούς δεσμούς μεταξύ της Ανάλυσης Fourier και των μερικών διαφορικών εξισώσεων”. Είναι σημαντικό να αναφερθεί, πως το έργο του Calderon έχει συμβάλλει πρακτικά στην επεξεργασία σήματος, στην τομογραφία, στην γεωφυσική και ευρύτερα στην εξήγηση του φυσικού σύμπαντος.
Η συνεισφορά του στα μαθηματικά αναγνωρίστηκε διεθνώς με πλήθος βραβείων, μεταξύ αυτών ήταν το βραβείο Wolf το 1989 και το Εθνικό Μετάλλιο Επιστήμης από τον πρόεδρο Τζωρτζ Μπους το 1991. Η Διεθνή Ένωση Αντίστροφων Προβλημάτων (IPIA), το 2007, προς τιμήν του Calderon, καθιέρωσε το βραβείο Calderon που απονέμει σε ´´ ερευνητή που έχει κάνει ευδιάκριτες συνεισφορές στο πεδίο των αντίστροφων προβλημάτων ´´.
Στην ακαδημαϊκή του πορεία ο Calderon δίδαξε σε πολλά Πανεπιστήμια, όπως στο Πανεπιστήμιο του Σικάγο, του Οχάϊο και του Μπουένος Άϊρες.
Επιπλέον, ήταν μέλος στο Ινστιτούτο Προηγμένων Μελετών στο Princeton (Institute for Advanced Study) και αναπληρωτής καθηγητής στο Ινστιτούτο Τεχνολογίας της Μασαχουσέτης (Massachusetts Institute of Technology). Ο Calderon απεβίωσε έπειτα από σύντομη ασθένεια στις 16 Απριλίου 1998 σε ηλικία 77 ετών.

4.1 Το εξωτερικό πρόβλημα Maxwell

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών για την επίλυση των εξισώσεων Maxwell στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R$, δηλαδή στο εξωτερικό χωρίο μίας σφαίρας ακτίνας R. Στην παρουσίαση μας θα ακολουθήσουμε [10] μελετώντας τη λύση του προβλήματος σε χώρους Sobolev. Πιο συγκεκριμένα, αναζητούμε το σκεδασμένο πεδίο $\mathbf{E}^s$:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^s - k^2 \mathbf{E}^s = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}^s = \boldsymbol{\lambda} \text{ στο } \partial B_R, \tag{4.2}$$

$$\rho(\nabla \times \mathbf{E}^s \times \hat{\mathbf{x}} - ik\mathbf{E}^s) \to \mathbf{0} \;\; \text{καθώς} \;\; \rho \to \infty, \tag{4.3}$$

όπου το $\boldsymbol{\lambda}$ είναι κατάλληλα δοσμένο εφαπτομενικό διανυσματικό πεδίο στο σύνορο της σφαίρας με δείκτη R. Για $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{g}$ έχουμε τη λύση του προβλήματος (2.18)-(2.20). Θα επεκτείνουμε τα συνοριακά δεδομένα στο σύνορο της σφαίρας με δείκτη R μέσω μίας κατάλληλης διανυσματικής βάσης συναρτήσεων. Θέτουμε $Y_n^m(\hat{\mathbf{x}}),\ m = -n, ..., n,\ n = 0, 1, ...$ την ορθοκανονική ακολουθία σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων στη μοναδιαία σφαίρα κανονικοποιημένων έτσι ώστε

$$\int_{\partial B_R} Y_n^m(\hat{\mathbf{x}}) \overline{Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{x}})} dA = \delta_{nn'} \delta_{mm'}. \tag{4.4}$$

Η βάση συναρτήσεων για τα εφαπτομενικά πεδία στο ∂B_R είναι οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις τάξης n και δίνονται από τους τύπους:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n^m &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \nabla_{\partial B_1} Y_n^m \\ \mathbf{V}_n^m &= \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{U}_n^m, \end{aligned} \tag{4.5}$$

για $n = 1, 2, ...$ και $m = -n, ..., n$. Το $\nabla_{\partial B_1}$ εκφράζει την επιφανειακή κλίση στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας, ∂B_1. Το επόμενο λήμμα επιβεβαιώνει ότι οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις είναι μία σωστή επιλογή για την επέκταση που θέλουμε να κάνουμε.

Λήμμα 4.1.1 *Οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις* $\mathbf{U}_n^m$ *και* $\mathbf{V}_n^m$ *που ορίστηκαν στην* (4.5) *είναι μία πλήρης ορθοκανονική βάση για τον* $L_t^2(\partial B_1)$.

Η απόδειξη του λήμματος μπορεί να βρεθεί στη βιβλιογραφία [19]. Μπορούμε να επεκτείνουμε κάθε συνάρτηση $\boldsymbol{\lambda} \in L_t^2(\partial B_R)$ μέσω της έκφρασης

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_{n,m} \mathbf{U}_n^m + b_{n,m} \mathbf{V}_n^m, \tag{4.6}$$

και από το θεώρημα Parseval μπορούμε να ορίσουμε

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|^2_{L_t^2(\partial B_R)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} (|a_{n,m}|^2 + |b_{n,m}|^2). \tag{4.7}$$

Ο κατάλληλος χώρος για να οριστεί το εφαπτομενικό διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{\lambda}$ είναι ο $H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R)$, που είναι η πλήρωση του χώρου $L_t^2(\partial B_R)$ ως προς τη νόρμα

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(Div;\partial B_R)} = \|\boldsymbol{\lambda}\|^2_{(H^{-\frac{1}{2}}(\partial B_R))^3} + \|\nabla_{\partial B_R} \cdot \boldsymbol{\lambda}\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial B_R)}. \tag{4.8}$$

Για ομαλό σύνορο και συγκεκριμένα για την επιφάνεια της σφαίρας ∂B_R, έχουμε

$$Y(\partial B_R) = H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R), \tag{4.9}$$

όπου το $Y(\partial B_R)$ είναι χώρος ίχνους που ορίστηκε στην (3.35) και ισχύει για τον δυϊκό του

$$Y(\partial B_R)' = H(Curl; \partial B_R). \tag{4.10}$$

Αν $\boldsymbol{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_{n,m} \mathbf{U}_n^m + b_{n,m} \mathbf{V}_n^m$ και

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial B_R} \cdot \boldsymbol{\lambda} &= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{a_{n,m}}{\sqrt{n(n+1)}} \Delta_{\partial B_1} Y_n^m \\ &= \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} a_{n,m} \sqrt{n(n+1)} Y_n^m, \end{aligned} \tag{4.11}$$

τότε μπορούμε ισοδύναμα να εκφράσουμε τη νόρμα (αγνοώντας το ακτινικό μέρος)

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(Div;\partial B_R)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \sqrt{n(n+1)} |a_{n,m}|^2 + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} |b_{n,m}|^2. \tag{4.12}$$

Για να δηλώσουμε την επιφανειακή απόκλιση ενός συνόρου χρησιμοποιούμε το Div στη θέση του div . Παρόλο που αποδεικνύεται ότι κατάλληλα ίχνη των συναρτήσεων του $H(curl; B_R)$ ανήκουν στον $H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R)$, μπορούμε να το επεκτείνουμε και να ορίσουμε $H^s(Div; \partial B_R)$ για κάθε s ως εξής

$$H^s(Div; \partial B_R) = \{\mathbf{u} \in (H^s(\partial B_R))^3 | \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \text{ και } \nabla_{\partial B_R} \cdot \mathbf{u} \in H^s(\partial B_R)\} \tag{4.13}$$

με νόρμα

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|^2_{H^s(Div;\partial B_R)} = \|\boldsymbol{\lambda}\|^2_{(H^s(\partial B_R))^3} + \|\nabla_{\partial B_R} \cdot \boldsymbol{\lambda}\|^2_{H^s(\partial B_R)} \tag{4.14}$$

ή ισοδύναμα αν το $\boldsymbol{\lambda}$ επεκτείνεται (4.6)

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|^2_{H^s(Div;\partial B_R)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \{(n(n+1))^{(s+1)}|\alpha_{n,m}|^2 + (n(n+1))^s |b_{n,m}|^2\}. \tag{4.15}$$

Μετά την αναπαράσταση για το $\boldsymbol{\lambda}$ και τις νόρμες του στο σύνορο της σφαίρας B_R θα αναπτύξουμε μία σειρά λύσεων από ακτινοβολούσες λύσεις των εξισώσεων Maxwell ((4.1)-(4.3)). Βάσει του δυναμικού Debye [19], θα ορίσουμε τις διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n^m &= \nabla \times \{\mathbf{x} h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|) Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})\}, \\ \mathbf{N}_n^m &= \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{M}_n^m, \end{aligned} \tag{4.16}$$

για $n = 0, 1, ...$ και $m = -n, ...n$, όπου $h_n^{(1)}$ είναι σφαιρική συνάρτηση Hankel πρώτου είδους και τάξης n που βρίσκεται στη βιβλιογραφία [10].

Θεώρημα 4.1.1 *Οι συναρτήσεις* $\mathbf{N}_n^m$ *και* $\mathbf{M}_n^m$ *που ορίστηκαν στην* (4.16) *είναι ακτινοβολούσες λύσεις των εξισώσεων Maxwell στο* $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Την απόδειξη μπορεί να τη βρει κανείς στις βιβλιογραφίες [10], [19]. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ένα γνωστό αποτέλεσμα για τις διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_n^m &= \nabla \times \{\mathbf{x} j_n(k|\mathbf{x}|) Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})\}, \\ \tilde{\mathbf{N}}_n^m &= \frac{1}{ik} \nabla \times \tilde{\mathbf{M}}_n^m. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Οι $\tilde{\mathbf{M}}_n^m$, $tilde\mathbf{N}_n^m$ είναι εσωτερικές διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται για την επέκταση της λύσης των εξισώσεων Maxwell στο εσωτερικό της σφαίρας. Επιπλέον, χρειαζόμαστε κατάλληλες λύσεις της εξίσωσης Helmholtz όπως ορίστηκαν στο προηγούμενο θεώρημα (2.4.2). Θεωρώντας τη Φ θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Helmholtz και ένα σταθερό διάνυσμα $\mathbf{p}$ γράφουμε την ακόλουθη σχέση που αναφέρεται ως προσθετικό θεώρημα για διανύσματα και εκφράζουμε τις διανυσματικές κυματικές συναρτήσεις σε σχέση με τις συναρτήσεις Bessel

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{y})\mathbf{p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ik}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^{n} \mathbf{N}_n^m(\mathbf{x})\overline{\tilde{\mathbf{N}}_n^m(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{p}$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ik}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^{n} \mathbf{M}_n^m(x)\overline{\tilde{\mathbf{M}}_n^m(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{p}$$
$$+ \frac{i}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \nabla \upsilon_n^m(\mathbf{x})\overline{\tilde{\upsilon}_n^m(\mathbf{y})} \cdot \mathbf{p}, \quad (4.18)$$

η οποία συγκλίνει ως προς $\mathbf{y}$ για σταθερό $\mathbf{x}$ ή ως προς $\mathbf{x}$ για σταθερό $\mathbf{y}$ εφόσον $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$. Επιπλέον, η φόρμουλα αυτή όπως και κάθε όρος που προκύπτει από την παραγώγιση ως προς $\mathbf{x}$ ή ως προς $\mathbf{y}$ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε συμπαγή σύνολα με $|\mathbf{x}| > |\mathbf{y}|$.

Θεώρημα 4.1.2 *Υποθέτουμε ότι $\mathbf{E}^s$ είναι ακτινοβολούσα λύση των εξισώσεων Maxwell για $|\mathbf{x}| > R > 0$. Τότε το σκεδασμένο πεδίο $\mathbf{E}^s$ έχει την αναπαράσταση*

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \alpha_{n,m}\mathbf{M}_n^m(\mathbf{x}) + \beta_{n,m}\mathbf{N}_n^m(\mathbf{x}). \quad (4.19)$$

Οι σειρές συγκλίνουν ομοιόμορφα μαζί με τις παραγώγους τους, σε συμπαγή υποσύνολα του $|\mathbf{x}| > R$. Αντίστροφα, αν η εφαπτομενική συνιστώσα των σειρών συγκλίνει ομοιόμορφα στον $L_t^2(\partial B_R)$ τότε η σειρά συγκλίνει ομοιόμρφα σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R$ και αναπαριστά ακτινοβολούσα λύση των εξισώσεων Maxwell.

Σημειώνουμε ότι οι αντίστοιχες λύσεις για το μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}^s = (\frac{1}{ik})\nabla \times \mathbf{E}^s$ είναι

$$\mathbf{H}^s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \{\alpha_{n,m}N_n^m(\mathbf{x}) - \beta_{n,m}M_n^m(\mathbf{x})\}. \quad (4.20)$$

Ανάλογο θεώρημα υπάρχει για τα εσωτερικά προβλήματα. Σε αυτήν την περίπτωση, για κάθε χωρίο Lipschitz D, μία λύση για το εσωτερικό σύστημα Maxwell μπορεί να αναπαρασταθεί σε μία μπάλα B που περιέχεται στο D από την (4.19) με το $\mathbf{M}_n^m$ να αντικαθίσταται από το $\tilde{\mathbf{M}}_n^m$ και το $\mathbf{N}_n^m$ να αντικαθίσταται από το $\tilde{\mathbf{N}}_n^m$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα της μπάλας . Αυτή η επέκταση είναι χρήσιμη στην αναπαράσταση προσπιπτόντων ηλεκτρομαγνητικών πεδίων σε μία περιοχή γύρω από τον σκεδαστή ή για τον υπολογισμό σειράς

λύσεων κατά τη σκέδαση από μία διηλεκτρική σφαίρα [24].
Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι τα συνοριακά δεδομένα $\boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R)$ μπορούν να αναπαρασταθούν από την (4.6). Θέλουμε να υπολογίσουμε το σκεδασμένο πεδίο που ικανοποιεί τις (4.1)-(4.3) συναρτήσει των συντελεστών της επέκτασης. Το παραπάνω θεώρημα, μας δείχνει ότι κάθε ακτινοβολούσα λύση των εξισώσεων Maxwell μπορεί να γραφτεί (για $|\mathbf{x}| > R$) στη μορφή

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \{\alpha_{n,m}\mathbf{M}_n^m(\mathbf{x}) + \beta_{n,m}\mathbf{N}_n^m(\mathbf{x})\}, \tag{4.21}$$

όπου η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε συμπαγή υποσύνολα του $|\mathbf{x}| > R$. Το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο $\mathbf{H}^s$ δίνεται από

$$\mathbf{H}^s(x) = \frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{E}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \{\alpha_{n,m}\mathbf{N}_n^m(x) - \beta_{n,m}\mathbf{M}_n^m(\mathbf{x})\}. \tag{4.22}$$

Θέλουμε να εκφράσουμε $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^s$ και $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^s$ στην επιφάνεια της σφαίρας $|\mathbf{x}| = R$ ως προς τους συντελεστές της επέκτασης για το $\mathbf{E}^s$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (4.21), παίρνουμε τη σχέση

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \{\alpha_{n,m}\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{M}_n^m(\mathbf{x}) + \beta_{n,m}\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{N}_n^m(\mathbf{x})\}, \tag{4.23}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των διανυσματικών κυματικών συναρτήσεων (4.16) και τη διανυσματική ταυτότητα για τις συναρτήσεις u(διανυσματική) και ϕ(βαθμωτή) ισχύει η ταυτότητα
$\nabla \times (\phi\mathbf{u}) = (\nabla\phi) \times \mathbf{u} + \phi\nabla \times \mathbf{u}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{M}_n^m(\mathbf{x}) &= \hat{\mathbf{x}} \times (\nabla \times \{h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})\} \times \mathbf{x}) && (4.24) \\ &= \nabla_{\partial B_1}\{h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})\}. && (4.25) \end{aligned}$$

Από τον ορισμό των διανυσματικών σφαιρικών αρμονικών συναρτήσεων (4.5) προκύπτει

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{M}_n^m(\mathbf{x}) = h_n^{(1)}(kR)\sqrt{n(n+1)}\mathbf{U}_n^m(\hat{\mathbf{x}}) \text{ για } |\mathbf{x}| = R. \tag{4.26}$$

Για τον υπολογισμό $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{N}_n^m(x)$ πάνω στη σφαίρα $|\mathbf{x}| = R$. Χρησιμοποιούμε τη διανυσματική ταυτότητα(βιβλιογραφία [19])

$$\nabla \times \nabla \times \{\mathbf{x}u(\mathbf{x})\} = -\mathbf{x}\Delta u(\mathbf{x}) + \nabla\{u(\mathbf{x}) + \rho\frac{\partial u}{\partial \rho}(\mathbf{x})\},$$

όπου η Δu είναι εκφρασμένη σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Επίσης, εφαρμόζουμε τον ορισμό του $\mathbf{N}_n^m$ και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα $\mathbf{x}$ και $\hat{\mathbf{x}}$ είναι παράλληλα, τη σχέση (3.38) και έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{N}_n^m(\mathbf{x}) =& \frac{1}{ik}\hat{\mathbf{x}} \times \nabla\{h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)Y_n^m(\hat{\mathbf{x}}) + |\mathbf{x}|\frac{\partial}{\partial r}[(h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|))Y_n^m]\}\\ =& \frac{1}{ikR}\{h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|) + |\mathbf{x}|\frac{\partial}{\partial r}[(h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)\}(\hat{\mathbf{x}} \times \nabla_{\partial B_R} Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})).\end{aligned}$$

Ο ορισμός του $\mathbf{V}_n^m$ δίνει

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{N}_n^m(\mathbf{x}) = \frac{1}{ikR}\{h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|) + |\mathbf{x}|\frac{\partial}{\partial r}h_n^{(1)}(k|\mathbf{x}|)\}\sqrt{n(n+1)}\mathbf{V}_n^m. \tag{4.27}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ισότητα και την (4.26) δείχνουμε ότι, πάνω στο $|\mathbf{x}| = R$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^s =& \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \alpha_{n,m} h_n^{(1)}(kR)\sqrt{n(n+1)}\mathbf{U}_n^m\\ &+ \frac{1}{ikR}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \beta_{n,m}\{h_n^{(1)}(kR) + kR(h_n^{(1)})'(kR)\}\sqrt{n(n+1)}\mathbf{V}_n^m.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Για να αναπτύξουμε σε σειρά την εφαπτομενική συνιστώσα $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^s$ πάνω στη σφαίρα $|\mathbf{x}| = R$, παρατηρούμε ότι το $\mathbf{H}^s$ έχει τον ίδιο τύπο με το $\mathbf{E}^s$, όπου τώρα το $\alpha_{n,m}$ έχει το ρόλο του $\beta_{n,m}$ και το $-\beta_{n,m}$ το ρόλο του $\alpha_{n,m}$. Έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^s = \frac{1}{ikR}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \alpha_{n,m}\{h_n^{(1)}(kR) + kR(h_n^{(1)})'(kR)\}\sqrt{n(n+1)}\mathbf{V}_n^m\\ -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \beta_{n,m} h_n^{(1)}(kR)\sqrt{n(n+1)}\mathbf{U}_n^m.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Με αυτόν τον τρόπο έχουμε εκφράσει τις εφαπτομενικές συνιστώσες του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου ως προς τις διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις n τάξης και m είδους. Τώρα μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα (4.1) -(4.3) συνοριακών τιμών για τυχαίο εφαπτομενικό συνοριακό δεδομένο λ. Για δοσμένο $\boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R)$, υποθέτουμε ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

$(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ ικανοποιεί

$$\begin{aligned} ik\mathbf{E}^s + \nabla \times \mathbf{H}^s =& \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R &(4.30)\\ ik\mathbf{H}^s - \nabla \times \mathbf{E}^s =& \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R &(4.31)\\ \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^s =& \boldsymbol{\lambda} \text{ στο } \partial B_R &(4.32)\\ \lim_{\rho\to\infty} \rho(\mathbf{H}^s \times \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}^s) =& \mathbf{0}. &(4.33) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (4.6), (4.28) και (4.32) λαμβάνουμε τη σειρά για κάθε πεδίο που συγκλίνει στον $H_{loc}(curl; \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R)$ όπως φαίνεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 4.1.2 *Για* $\boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R)$ *που δίνεται από την* (4.6), *η μοναδική λύση* $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s \in H_{loc}(curl; R^3 \setminus \bar{B}_R)$ *του προβλήματος* (4.30)-(4.33) *είναι*

$$\mathbf{E}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Big[\frac{a_{n,m}\mathbf{M}_n^m}{h_n^{(1)}(kR)\sqrt{n(n+1)}} + \frac{ikRb_{n,m}\mathbf{N}_n^m}{[h_n^{(1)}(kR) + kR(h_n^{(1)})'(kR)]\sqrt{n(n+1)}}\Big], \quad (4.34)$$

$$\mathbf{H}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Big[\frac{a_{n,m}\mathbf{N}_n^m}{h_n^{(1)}(kR)\sqrt{n(n+1)}} - \frac{ikRb_{n,m}\mathbf{M}_n^m}{[h_n^{(1)}(kR) + kR(h_n^{(1)})'(kR)]\sqrt{n(n+1)}}\Big]. \quad (4.35)$$

4.2 Electric-to-Magnetic τελεστής Calderon

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε απεικονίσεις ανάλογες της Dirichlet to Neumann (DtN) απεικόνισης για τις εξισώσεις Maxwell. Οι απεικονίσεις αυτές, αναφέρονται ως τελεστές Calderon και ως συνοριακές απεικονίσεις (είτε από ηλεκτρικό σε μαγνητικό πεδίο είτε από μαγνητικό σε ηλεκτρικό πεδίο [9]).
Ο electric-to-magnetic τελεστής Calderon συνδέει τα συνοριακά δεδομένα του ηλεκτρικού πεδίου με τα αντίστοιχα συνοριακά δεδομένα του μαγνητικού πεδίου. Για ένα δοθέν διανυσματικό εφαπτομενικό πεδίο $\boldsymbol{\lambda}$ στην επιφάνεια της σφαίρας ∂B_R ορίζουμε

$$G_e\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^s, \quad (4.36)$$

όπου $\mathbf{E}^s$ και $\mathbf{H}^s$ ικανοποιούν το πρόβλημα συνοριακών τιμών (4.30)-(4.33). Αν χρησιμοποιήσουμε την (4.29) μπορούμε να πάρουμε έναν αναλυτικό τύπο για την απεικόνιση G_e από το $\boldsymbol{\lambda}$ στο $\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^s$. Πράγματι για $\boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R)$ όπως ορίζεται στην (4.6), μέσω των (4.28), (4.29) και του λήμματος (4.1.2) έχουμε

$$G_e \boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^s = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \{-ikR \frac{b_{n,m}}{\delta_n} \mathbf{U}_n^m + \frac{a_{n,m}\delta_n}{ikR} \mathbf{V}_n^m\}, \tag{4.37}$$

όπου

$$\delta_n = kR \frac{(h_n^{(1)})'(kR)}{h_n^{(1)}(kR)} + 1. \tag{4.38}$$

Ακολουθώντας τα βήματα της εργασίας [16] θα αναλύσουμε τον τελεστή G_e σε σειρές λύσεων της εξίσωσης Helmholtz. Αρχικά διατυπώνουμε, μέ το επόμενο λήμμα, ότι οι συντελεστές δ_n της (4.38) που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα του $G_e \boldsymbol{\lambda}$ είναι φραγμένοι.

Λήμμα 4.2.1 *Υπάρχουν θετικές σταθερές c_1 και c_2 τέτοιες ώστε, για όλα τα n,*

$$c_1 n \leq |\delta_n| \leq c_2 n$$

.

Η απόδειξη προκύπτει από την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων Hankel [10].
Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύεται ότι ο τελεστής

$$G_e : H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R) \to H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R)$$

είναι μία συνεχής απεικόνιση.

Θεώρημα 4.2.1 *Υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε να ισχύει η ακόλουθη ανισότητα*

$$\|G_e \boldsymbol{\lambda}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(Div;\partial B_R)} \leq C \|\boldsymbol{\lambda}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(Div;\partial B_R)},$$

για κάθε $\boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R)$.

Η σταθερά C εξαρτάται από τα kR, c_1 και c_2.Η απόδειξη γίνεται μέσω της (4.37) και του λήμματος (4.2.1).
Στη συνέχεια αναλύουμε τον τελεστή G_e για φανταστικό κυματικό αριθμό $k = i$.
Για το σκοπό αυτό αρχικά διατυπώνουμε ένα λήμμα για το δ_n όταν $k = i$.

Λήμμα 4.2.2 *Υποθέτουμε*

$$\tilde{\delta}_n = iR\frac{(h_n^{(1)})'(iR)}{h_n^{(1)}(iR)} + 1. \tag{4.39}$$

Τότε το $\tilde{\delta}_n$ είναι πραγματικό και γνήσια αρνητικό για όλα τα n.

Η απόδειξη στηρίζεται στο ότι η συνάρτηση $i^n h_n^{(1)}(i|\hat{\mathbf{x}}|)Y_n^m(\hat{\mathbf{x}})$ είναι μη τετριμμένη λύση της εξίσωσης Hemholtz $\Delta u - u = 0$ στο $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R$ και εξασθενεί κατάλληλα στο άπειρο. Τώρα, θα αναλύσουμε τον τελεστή $Calderon$ G_e για φανταστικούς κυματικούς αριθμούς.
Θεωρούμε τον τελεστή $\tilde{G}_e : H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R) \to H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R)$ που ορίστηκε στην (4.37) για $k = i$, τότε για το λ της (4.6) έχουμε

$$\tilde{G}_e \boldsymbol{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} [R\frac{b_{n,m}}{\tilde{\delta}_n}\mathbf{U}_n^m - \frac{a_{n,m}\tilde{\delta}_n}{R}\mathbf{V}_n^m]. \tag{4.40}$$

όπου το $\tilde{\delta}_n$ δίνεται από την (4.39).

Λήμμα 4.2.3 *Ο τελεστής $\tilde{G}_e$ είναι αρνητικά ορισμένος, δηλαδή*

$$< \tilde{G}_e \boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\lambda} \times \hat{\mathbf{x}} >< 0, \tag{4.41}$$

για κάθε $\boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R)$ με $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$. Επιπλέον,

$$| < \tilde{G}_e \boldsymbol{\lambda},\, \boldsymbol{\lambda} \times \hat{\mathbf{x}} > | \geq c\|\boldsymbol{\lambda}\|^2_{H^{-\frac{1}{2}}(Div;\partial B_R)} \text{ για όλα τα } \boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(Div; \partial B_R). \tag{4.42}$$

Η απόδειξη προκύπτει από την αναλυτική έκφραση του $\boldsymbol{\lambda} \times \hat{\mathbf{x}}$, την ασυμπτωτική προσέγγιση του $\tilde{\delta}_n$ και τη σχέση (4.12). Το λήμμα που ακολουθεί δείχνει ότι ένας κατάλληλος συνδυασμός των G_e και $\tilde{G}_e$ είναι συμπαγής ορισμένος σε ένα κατάλληλο σύνολο συναρτήσεων στην επιφάνεια της σφαίρας ∂B_R. Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο όπου η εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίο ορίζεται ως συνάρτηση της διανυσματικής σφαιρικής αρμονικής συνάρτησης $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned} &H_{Div}^{-1/2}(Div;\, \partial B_R) \\ &\quad = \{\boldsymbol{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} b_{n,m}\mathbf{V}_n^m | \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+n(n+1)}}|b_{n,m}|^2 \,<\, \infty\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ο $H_{Div}^{-1/2}(Div;\, \partial B_R)$ είναι υπόχωρος του $H^{-1/2}(Div;\, \partial B_R)$ και ο $H_t^{3/2}(\partial B_R)$ εμφυτεύεται συμπαγώς στον $H^{-1/2}(Div;\, \partial B_R)$.

Λήμμα 4.2.4 *Ο τελεστής*

$$G_e + ik\tilde{G}_e\big|_{H_{Div}^{-1/2}(Div;\partial B_R)} : H_{Div}^{-1/2}(Div;\partial B_R) \to H_t^{3/2}(\partial B_R),$$

όπου $H_t^{3/2}(\partial B_R) = \{\mathbf{u} \in (H^{3/2}(\partial B_R))^3 | \, \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} = 0\}$ *είναι καλά ορισμένος και φραγμένος. Επομένως, ο τελεστής*

$$G_e + ik\tilde{G}_e : H_{Div}^{-1/2}(Div;\partial B_R) \to H^{-1/2}(Div;\partial B_R)$$

είναι συμπαγής.

4.2.1 Magnetic-to-Electric τελεστής Calderon

Αυτή την ενότητα θα την κλείσουμε διατυπώνοντας κάποια αποτελέσματα για τον τελεστή Calderon που απεικονίζει την εφαπτομενική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου στην αντίστοιχη εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου όπου πρόκειται για το ανάλογο της απεικόνισης Neumann to Dirichlet (NtD). Στο θεώρημα (4.2.1) έχουν ήδη διατυπωθεί ιδιότητες για τον τελεστή του εξωτερικού προβλήματος σκέδασης, εξωτερικός τελεστής Calderon. Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν και για τους δύο τελεστές λόγω της συμμετρίας που παρουσιάζουν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο στις εξισώσεις Maxwell. Εμείς όμως θα διατυπώσουμε και κάποιες επιπλέον ιδιότητες διότι εφαρμόζονται με διαφορετικό τρόπο στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών. Επιπλέον, θα αναλύσουμε τον τελεστή Calderon, εσωτερικός τελεστής Calderon, που προκύπτει από το εσωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών. Υποθέτουμε ότι $\boldsymbol{\lambda} \in H^{-\frac{1}{2}}(Div;\partial B_R)$ είναι ένα εφαπτομενικό διανυσματικό πεδίο στο ∂B_R, τότε ορίζουμε τον εξωτερικό τελεστή Calderon $\mathcal{G}_e$

$$\mathcal{G}_e\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}|_{\partial B_R}, \tag{4.43}$$

όπου $\mathbf{u}$ είναι η λύση του

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - k^2\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R, \tag{4.44}$$

$$\hat{\mathbf{x}} \times \frac{1}{ik}\nabla \times \mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda} \text{ στο } \partial B_R, \tag{4.45}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho((\nabla \times \mathbf{u}) \times \hat{\mathbf{x}} - ik\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \tag{4.46}$$

Ο εσωτερικός τελεστής Calderon $\mathcal{G}_i$ ορίζεται με ανάλογο τρόπο

$$\mathcal{G}_i\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{w}|_{\partial B_R}, \tag{4.47}$$

όπου $\mathbf{w}$ είναι η λύση του

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{w} - k^2 \epsilon_r \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ στο} B_R, \hat{\mathbf{x}} \times \frac{1}{ik} \nabla \times \mathbf{w} = \boldsymbol{\lambda} \text{ στο } \partial B_R. \tag{4.48}$$

Το επόμενο λήμμα συνοψίζει τις βασικές ιδιότητες του $\mathcal{G}_e$

Λήμμα 4.2.5 *Έστω $\boldsymbol{\lambda} \in H^s(Div; \partial B_R)$, $s \in \mathbb{R}$, που δίνεται από την* (4.6)*, τότε για τη λύση* $\mathbf{u}$ *του προβλήματος* (4.44)-(4.46) *έχουμε*

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{ikRb_n^m}{h_n^{(1)}(kR) + kR(h_n^{(1)}(kR))'(kR)} \frac{\mathbf{M}_n^m}{\sqrt{n(n+1)}} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{a_n^m}{h_n^{(1)}(kR)} \frac{\mathbf{N}_n^m}{\sqrt{n(n+1)}}, \tag{4.49}$$

ενώ ο εξωτερικός τελεστής Calderon έχει την ακόλουθη αναπαράσταση

$$\mathcal{G}_e \boldsymbol{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Big[\frac{b_n^m}{\delta_n} \mathbf{U}_n^m - \delta_n a_n^m \mathbf{V}_n^m \Big], \tag{4.50}$$

όπου

$$\delta_n = \frac{1}{ikR} (1 + kR \frac{h_n^{(1)'}(kR)}{h_n^{(1)}(kR)}).$$

Ειδικότερα, ο $\mathcal{G}_e : H^s(Div, \partial B_R) \to H^s(Div, \partial B_R)$ είναι αντιστρέψιμος.

Τέλος για τον εσωτερικό τελεστή Calderon $\tilde{\mathcal{G}}_i$ για την περίπτωση $\epsilon_r = \mu_r = 1$ έχουμε το ακόλουθο λήμμα

Λήμμα 4.2.6 *Έστω*

$$\tilde{\delta}_n = \frac{1}{ikR} (1 + kR \frac{j_n'(kR)}{j_n(kR)}),$$

και υποθέτουμε ότι η επιλογή του R είναι τέτοια ώστε $0 < |\tilde{\delta}_n| < \infty$. Τότε για $\epsilon_r = \mu_r = 1$

$$\tilde{\mathcal{G}}_i \boldsymbol{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \Big[\frac{b_n^m}{\delta_n} \mathbf{U}_n^m - \tilde{\delta}_n a_n^m \mathbf{V}_n^m \Big].$$

Ο τελεστής $\tilde{\mathcal{G}}_i : H^s(Div, \partial B_R) \to H^s(Div, \partial B_R)$ είναι γραμμικός και φραγμένος για κάθε s.

4.3 Μοναδικότητα λύσης

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη μοναδικότητα λύσης ενός προβλήματος σκέδασης από έναν σφαιρικό τέλειο αγωγό ακτίνας R. Υποθέτουμε ότι το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο είναι επίπεδο. Ειδικότερα θα εξετάσουμε αν το πρόβλημα σκέδασης (2.18)-(2.20), με προσπίπτον πεδίο της μορφής $\mathbf{E}^i = \mathbf{e}_1 \exp(ikx_3)$, έχει το πολύ μία λύση. Η απόδειξη θα γίνει με τη βοήθεια του λήμματος $Rellich$

Λήμμα 4.3.1 *(Λήμμα Rellich) Υποθέτουμε ότι το σκεδασμένο πεδίο* $\mathbf{E}^s$ *είναι λύση των εξισώσεων Maxwell* (2.18) *στο εξωτερικό μίας σφαίρας ακτίνας* R *και ότι ικανοποιεί τη συνθήκη ακτινοβολίας* (2.20). *Το μαγνητικό πεδίο δίνεται* $\mathbf{H}^s = (\frac{1}{ik})\nabla \times \mathbf{E}^s$. *Εάν*

$$Re\Big(\int_{\partial B_\rho} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^s) \cdot \overline{\mathbf{H}^s} dA \leq 0$$

για κάθε $\rho > R$, *τότε* $\mathbf{E}^s = \mathbf{H}^s = \mathbf{0}$ *στο* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\partial B_R}$.

Απόδειξη. Υπολογίζουμε την παράσταση $(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{H}^s) \times \hat{\mathbf{x}}$ και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (4.28), (4.30) και την (4.5) για μία σφαίρα ακτίνας ρ, οπότε προκύπτει

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_\rho} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^s) \cdot \overline{\mathbf{H}^s} dA \\
&\quad = \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} [|\alpha_{n,m}|^2 h_n^{(1)}(k\rho) \frac{n(n+1)}{-ik\rho} \overline{\{h_n^{(1)}(k\rho) + k\rho h_n^{(1)'}(k\rho)\}} \\
&\qquad + |\beta_{n,m}|^2 \overline{h_n^{(1)}(k\rho)} \frac{n(n+1)}{ik\rho} \{h_n^{(1)}(k\rho) + k\rho h_n^{(1)'}(k\rho)\}].
\end{aligned}$$

Παίρνουμε το πραγματικό μέρος της παραπάνω ισότητας

$$Re \int_{\partial B_\rho} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^s) \cdot \overline{\mathbf{H}^s} dA = \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[|\alpha_{n,m}|^2 + |\beta_{n,m}|^2 \right] \frac{n(n+1)}{-i} W$$

όπου W η ορίζουσα Wronski

$$W = (h_n^{(1)}(k\rho) \overline{h_n^{(1)'}(k\rho)} - \overline{h_n^{(1)}(k\rho)} h_n^{(1)'}(k\rho)).$$

Από τις ιδιότητες των συναρτήσεων Hankel προκύπτει $W = -\dfrac{2i}{(k\rho)^2}$ επομένως

$$Re \int_{\partial B_\rho} (\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^s) \cdot \overline{\mathbf{H}^s} dA = \frac{2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} n(n+1) \left[|\alpha_{n,m}|^2 + |\beta_{n,m}|^2 \right].$$

Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση του λήμματος έχουμε

$$\frac{2}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} n(n+1)\left[|\alpha_{n,m}|^2+|\beta_{n,m}|^2\right] \le 0$$

επομένως $\alpha_{n,m}=\beta_{n,m}=0$ για κατάλληλα n, m.

Το επόμενο πόρισμα είναι συνέπεια της απόδειξης του λήμματος (4.3.1).

Πόρισμα 4.3.1 *Έστω* $\mathbf{E}$ *μία ακτινοβολούσα λύση των εξισώσεων Maxwell στο συμπλήρωμα της μπάλας* B_R*. Εάν το μακρινό πεδίο* $\mathbf{E}_\infty = \mathbf{0}$ *τότε* $\mathbf{E}=\mathbf{0}$ *στο* $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R$*.*

Μέσω του λήμματος (4.3.1) μπορούμε να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα (2.18)-(2.20) έχει μοναδική λύση.

Πόρισμα 4.3.2 *Δοθέντος* $\mathbf{g} \in H^{-1/2}(Div;\partial B_R)$*, το πρόβλημα* (2.18)-(2.20) *έχει το πολύ μία λύση* $\mathbf{E}^s \in H_{loc}(curl;\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R)$*.*

Απόδειξη. Λόγω γραμμικότητας του προβλήματος αρκεί να αποδείξουμε ότι το (2.18)-(2.20) έχει μοναδική λύση όταν $\mathbf{g}=\mathbf{0}$. Πολλαπλασιάζουμε την (2.18) με $\overline{\mathbf{E}^s}$, ολοκληρώνουμε στο χωρίο $\Omega_{R,R_1}=B_{R_1}\setminus\overline{B_R}$, $R_1>R$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Gauss,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_{R,R_1}} (\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}^s - k^2\mathbf{E}^s)\cdot\overline{\mathbf{E}^s}dV \\ &= \int_{\Omega_{R,R_1}} |\nabla\times\mathbf{E}^s|^2 - k^2|\mathbf{E}^s|^2 dV + \int_{\partial\Omega_{R,R_1}} (\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times\mathbf{E}^s)\cdot\overline{\mathbf{E}^s}dA \end{aligned}$$

όπου $\boldsymbol{\nu}$ είναι το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο στο Ω_{R,R_1}. Από την συνθήκη του τέλειου αγωγού στην επιφάνεια ∂B_R και τον ορισμό του μαγνητικού πεδίου $\mathbf{H}^s$, παρατηρούμε

$$\int_{\Omega_{R,R_1}} |\nabla\times\mathbf{E}^s|^2 - k^2|\mathbf{E}^s|^2 dV + ik\int_{\partial B_{R_1}} (\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times\mathbf{H}^s)\cdot\overline{\mathbf{E}^s}dA = 0.$$

Το φανταστικό μέρος της ισότητας εφόσον $k\in\mathbb{R}$ δίνει

$$Im\big(ik\int_{\partial B_{R_1}} (\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times\mathbf{H}^s)\cdot\overline{\mathbf{E}^s}dA\big) = 0.$$

Επομένως

$$Re\big(\int_{\partial B_{R_1}} (\boldsymbol{\nu}\times\nabla\times\mathbf{H}^s)\cdot\overline{\mathbf{E}^s}dA\big) = 0.$$

Παίρνουμε τα συζυγή μιγαδικά στη συνθήκη του λήμματος (4.3.1) η οποία ικανοποιείται για $R<R_1<\infty$ οπότε $\mathbf{E}^s=\mathbf{0}$.

4.4 Ύπαρξη λύσης

Θα περιγράψουμε σύντομα την εφαρμογή του τελεστή Calderon στην απόδειξη ύπαρξης λύσης ενός προβλήματος σκέδασης σε μη ομογενή χώρο. Συγκεκριμένα, θεωρούμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \epsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{0} \;\text{ στο } \Omega, \qquad (4.51)\\
\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}^s - k^2 \mathbf{E}^s = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}_R, \qquad (4.52)\\
\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma, \qquad (4.53)\\
\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{E}^s \times \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{E}^i \times \hat{\mathbf{x}} \text{ στο } \;\Sigma, \qquad (4.54)\\
\frac{1}{ik}(\nabla \times \mathbf{E}) \times \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{ik}\nabla \times (\mathbf{E}^s + \mathbf{E}^i) \times \hat{\mathbf{x}} \text{ στο } \Sigma, \qquad (4.55)\\
\lim_{\rho \to \infty} \rho((\nabla \times \mathbf{E}^s) \times \hat{\mathbf{x}} - ik\mathbf{E}^s) = \mathbf{0}. \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Μετασχηματίζουμε το πρόβλημα σε μορφή Garlekin (ασθενής λύση) και είναι η

$$\begin{aligned}
(\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \boldsymbol{\phi}) - k^2(\epsilon_r \mathbf{E}, \boldsymbol{\phi}) + ik < G_e(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}), \boldsymbol{\phi}_\tau > \\
= < ikG_e(\hat{x} \times \mathbf{E}^i) - \hat{\mathbf{x}} \times \nabla \times \mathbf{E}^i, \boldsymbol{\phi}_\tau >, \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

για κάθε $\boldsymbol{\phi} \in \tilde{X}$, όπου

$$\tilde{X} = \{\mathbf{u} \in H(curl; \Omega) | \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}\}.$$

Γράφουμε την (4.57) στη μορφή

$$A(\mathbf{E}, \boldsymbol{\phi}) = B(\boldsymbol{\phi}) \text{ για όλα τα } \boldsymbol{\phi} \in \tilde{X}. \qquad (4.58)$$

όπου,

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{E}, \boldsymbol{\phi}) = (\mu_r^{-1} \nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \boldsymbol{\phi}) - k^2(\epsilon_r \mathbf{E}, \boldsymbol{\phi}) \\
+ ik < G_e(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}), (\hat{\mathbf{x}} \times \boldsymbol{\phi}) \times \hat{\mathbf{x}} >, \qquad (4.59)
\end{aligned}$$

$$B(\boldsymbol{\phi}) = < ikG_e(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{E}^i) - \hat{\mathbf{x}} \times \nabla \times \mathbf{E}^i, (\hat{\mathbf{x}} \times \phi) \times \hat{\mathbf{x}} > . \qquad (4.60)$$

Χρησιμοποιούμε τους χώρους

$$\tilde{S} = \{p \in H^1(\Omega) | p = 0 \text{ στο } \Gamma\}, \qquad (4.61)$$

$$\tilde{X}_0 = \{\mathbf{u} \in \tilde{X} | -k^2(\epsilon_r \mathbf{u}, \nabla\xi) + ik < G_e(\hat{x} \times \mathbf{u}), \nabla_\Sigma \xi >= 0 \text{ για όλα τα } \xi \in \tilde{S}\}$$
$$= \{\mathbf{u} \in \tilde{X} | \nabla \cdot (\epsilon_r \mathbf{u}) = 0 \text{ στο } \Omega, \text{ και } \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = -\frac{i}{k} \nabla_\Sigma \cdot G_e(\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{u}) \text{ στο } \Sigma\} \quad (4.62)$$

$$\tilde{X} = \tilde{X}_0 \oplus \nabla \tilde{S}. \quad (4.63)$$

Μετά από πολλούς υπολογισμούς αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 4.4.1 *Έστω $\epsilon_r = \mu_r = 1$ σε μία περιοχή της επιφάνειας Σ, όπου Σ είναι η βοηθητική επιφάνεια του προβλήματος, το σύνορο της μπάλας ακτίνας R. Ο σκεδαστής περιέχεται σε μία μπάλα ακτίνας R_0 έτσι ώστε $\mu_r = \epsilon_r = 1$, όταν $|\mathbf{x}| > R_0$, $D \subset B_{R_0}$. Το $\mathbf{E}^i$ ικανοποιεί το ομοιογενές ισοτροπικό σύστημα $Maxwell$ (με $\mu_r = \epsilon_r = 1$), για μπάλες ακτίνας $R_1 > R$. Κάτω από αυτές τις υποθέσεις η εξίσωση* (4.57) *έχει μοναδική λύση στο $\tilde{X}$ για κάθε προσπίπτον πεδίο E^i που είναι κλασική λύση για το σύστημα Maxwell στο B_R.*

Βιβλιογραφία

[1] Χριστόδουλος Ε. Αθανασιάδης, *Ειδικά Θέματα Μαθηματικών, Στοιχεία Κυματικής Διάδοσης και Εφαρμογές 2015*, Πάτρα.

[2] A. Alonso and A. Valli, *Some remarks on the characterization of the space of tangential traces of $H(rot;\Omega)$ and the construction of an extension operator*, Manuscripta Mathematica, 89, 159-178, 1996.

[3] K. Astala, M. Lassas and L. Paivarinta, *Calderon's Inverse Problem For Anisotropoic Conductivity In The Plane*, Comm. Partial Differential Equations, 30, 207-224, 2005.

[4] K. Astala and L. Paivarinta, *Calderon's Inverse Conductivity Problem In The Plane*, Ann. Math. 163, 265-299, 2006.

[5] T. Barcelo, D. Faraco and A. Ruiz, *Stability Of Calderon's Inverse Conductivity Problem In The Plane*, J. Math. Pur. Appl. (9), 8, 522-556, 2007.

[6] A. Buffa, M. Costabel and D. Sheen, *On the traces of $H(curl,\Omega)$ in Lipschitz domains*, Preprint, 2003.

[7] Z. Chen, Q. Du, J. Zou, *Finite element methods with matching and nonmatchin meshes for Maxwell equations with discontinuous coefficients*, SIAM J. Numer. Anal., 37, 1542-70, 2000.

[8] A. Clop, D. Faraco and A. Ruiz, *Stability Of Calderon's Inverse Conductivity Problem In The Plane For Discontinuous Conductivities*, Inv. Probl. and Imag., 4, 49-91, 2010.

[9] M. Cessenat, *Mathematical Methods in Electromagnetism*, World Scientific, Singapore, 1996.

[10] D. Colton and R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory* (2nd edn), Number 93 in Applied Mathematical Sciences. Springer, New York 1998.

[11] G. Dassios, R. Kleinman, *Low Frequency Scattering Theory*, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[12] V Girault and P.A. Raviart, *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer, New York, 1986.

[13] M.J. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, London, 1985.

[14] C. Kenig, J. Sjostrand, G. Uhlmann, *The Calderon Problem With Partial Data*, Ann. Math. 165, 567-591, 2007.

[15] N.N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, Dover, New York, 1972.

[16] M. Masmoudi, *Numerical solution for exterior problems*, Numer. Math., 51, 87-101, 1987.

[17] C. Müller, *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*, Springer, Berlin, 1969.

[18] W. MacLean, *Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[19] P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford Science Publications, Oxford, 2003.

[20] J.-C. Nèdèlec, *Acoustic and Electromagnetic Equations*, Number 144 in Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, 2001.

[21] Nečas J., *Les Methodes Directesen Thérie Équations Elliptiques*, Masson, France, 1967.

[22] G.F. Roach, I.G. Stratis, A.N. Yannacopoulos, *Mathematical Analysis of Deterministic and Stochastic Problems in Complex Media Electromagnetics*, Princeton Series in Applied Mathematics, 2012.

[23] F. Odeh, *Uniqueness theorems for the Helmholtz equation in domains with finite boundaries*, J. Math. Mech., 12, 857-67, 1963.

[24] J. Van Bladel, *Electromagnetic Fields*, Hemisphere, New York, 1985.

[25] G. Uhlmann, *Electrical Impedance Tomography And Calderon's Problem*, Inverse Problems, 25 123011, 39pp, 2009.