

Όρια Τυχαίων Πινάκων

Διπλωματική Εργασία

Σταύρος Ροζάκης

Επιβλέπων: Δημήτρης Χελιώτης

**Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2019**

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
2	Φασματικό μέτρο - Τριδιαγωνοποίηση Τυχαίων πινάκων	3
2.1	Benjamini-Schramm σύγκλιση	3
2.2	Τριδιαγωνοποίηση πινάκων	4
2.2α'	Φασματικό μέτρο	4
2.2β'	Αλγόριθμος Householder	7
2.3	β -μοντέλα Τυχαίων πινάκων	9
2.3α'	Εισαγωγικά περι τυχαίων πινάκων	9
2.3β'	Τα γενικά β -μοντέλα	16
2.3γ'	Οι νόμοι των Wigner και Marcenko-Pastur	28
3	Το όριο του τριδιαγώνιου μοντέλου	31
3.1	Στοχαστικός Τελεστής Airy	31
3.2	Ο τριδιαγώνιος τελεστής	41
3.3	Οριακός τελεστής - χαρακτηρισμός ιδιοτιμών	44
3.4	Διακριτή μορφή	50
3.5	Εφαρμογές για τα γνωστά μοντέλα	58
3.5α'	β -Hermite	58
3.5β'	β -Laguerre	61
4	Φράγματα Ουρών TW_β	63
4.1	Το πρώτο φράγμα	63
4.2	Μετασχηματισμός Riccati	64
4.3	Το δεύτερο φράγμα - Θεώρημα Girsanov	68

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το κυρίως θέμα της παρούσας διπλωματικής είναι να εισάγει δύο μοντέλα τυχαίων πινάκων (β -Hermite και β -Laguerre) και να μελετήσει τις ιδιοτιμές τους σε ένα συγκεκριμένο σημείο του φάσματός τους. Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 2 αρχικά εισάγονται γενικότερα εργαλεία, όπως η Benjamini-Schramm σύγκλιση (ενότητα 2.1) και το πως γίνεται να εξαχθούν αποτελέσματα σχετικά με την εμπειρική κατανομή των ιδιοτιμών μέσω του φασματικού μέτρου (ενότητα 2.2). Στη συνέχεια, αφού παρουσιαστούν τα βασικά (Γκαουσιανά Αναλλοίωτα, Wishart) μοντέλα, εισάγουμε τα μοντέλα υπό συζήτηση στην ενότητα 2.3. Αποδεικνύουμε ότι η από κοινού κατανομή των ιδιοτιμών τους γενικεύει την από κοινού των GOE, GUE, GSE και $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ -Wishart (όταν το $\beta = 1, 2, 4$) και δίνουμε ως εφαρμογή όλων των παραπάνω αποδείξεις για τους κλασικούς νόμους των Wigner και Marčenko-Pastur (Θεωρήματα 2.3.18, 2.3.19).

Ιστορικά, το πρώτο βήμα προς την ανακάλυψη αυτών των μοντέλων έγινε ακούσια από τον Trotter, [65]. Τα αποτελέσματα στην ενότητα 2.3 οφείλονται στη I. Dumitriu και στον A. Edelman. Το επόμενο βήμα (που αποτελεί το περιεχόμενο της ενότητας 3.1) οφείλεται στους A. Edelman και B. D. Sutton, που διατυπώσαν εικασίες σχετικά με την σύγκλιση αυτών των πινάκων καθώς το $n \rightarrow \infty$ (θεωρώντας τους ως τελεστές με δράση σε κατάλληλους χώρους) σε συγκεκριμένους στοχαστικούς διαφορικούς τελεστές. Για παράδειγμα οι k πρώτες ιδιοτιμές για το μοντέλο β -Hermite H_n , $\lambda_1(n) \geq \lambda_2(n) \geq \dots$, έπειτα από κατάλληλη αλλαγή κλίμακας, $n^{1/6}(2\sqrt{n} - H_n)$, συγκλίνουν ως διάνυσμα στο αντίστοιχο διάνυσμα των k μικρότερων ιδιοτιμών του στοχαστικού διαφορικού τελεστή στο $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathcal{H}_\beta := -\partial_{xx} + x + \sqrt{\frac{2}{\beta}}B'_x$, όπου B_x τυπική κίνηση Brown και οι οριακές συνθήκες είναι Dirichlet (δηλαδή μηδενισμό της συνάρτησης στα δύο άκρα). Παρουσιάζουμε αναλυτικά τα ευρεσιακά επιχειρήματά τους και μελετάμε τον χώρο που δρα ο τελεστής.

Με αυτόν τον τρόπο δίνεται η σκυτάλη στο [56] όπου οι Ramírez, Rider, Virág έκαναν μαθηματικά αυστηρά (και ενοποίησαν την εργασία για τα δύο μοντέλα σε ένα γενικότερο πλαίσιο). Στην ενότητα 3.2 ορίζεται ένα γενικότερο μοντέλο τριδιαγώνιου τελεστή το οποίο οφείλει να ικανοποιεί δύο υποθέσεις (1). Έπειτα ορίζεται ο αντίστοιχος γενικός στοχαστικός διαφορικός τελεστής $\mathcal{H}_y$ (ενότητα 3.3) και αποδεικνύεται η σχεδόν βέβαιη ύπαρξη των $k + 1$ πρώτων ιδιοτιμών του για κάθε k . Η βασική ιδέα είναι η κατασκευή δύο διγραμμικών μορφών· μίας που σχετίζεται με τον ορια-

κό τελεστή $\mathcal{H}_y$ στον χώρο των συναρτήσεων L^* που θα οριστεί και της διγραμμικής μορφής που αντιστοιχεί στον τριδιαγώνιο τελεστή της ενότητας 3.2. Αποδεικνύοντας (μέσω κατάλληλης εμφύτευσης του $\mathbb{R}^n$ στον $L^2(\mathbb{R}_+)$) πως η «διακριτή» διγραμμική μορφή συγκλίνει ασθενώς στην οριακή (αυτό είναι το αποτέλεσμα του θεωρήματος 3.4.4), προκύπτει το βασικό θεώρημα της διπλωματικής (θεώρημα [;]) Η τελευταία ενότητα του τρίτου κεφαλαίου αφιερώνεται στις εφαρμογές του γενικού τριδιαγώνιου μοντέλου· ορίζονται κατάλληλες ποσότητες ώστε τα συγκεκριμένα μοντέλα να αναλογούν στα β -Hermite, Laguerre και επιβεβαιώνοντας την ισχύς των υποθέσεων έπονται τα Θεωρήματα 3.5.5, 3.5.6.

Στο τελευταίο κεφάλαιο (κεφ. 4) παρουσιάζεται μια διαφορετική οπτική για τη συμπεριφορά της πρώτης ιδιοτιμής του β -Hermite μοντέλου. Μέσω της εξίσωσης ιδιοτιμών για τον οριακό τελεστή και εργαλείων από τη μελέτη διαφορικών εξισώσεων, εντοπίζουμε της ιδιοτιμές ως σημεία έκρηξης της λύσης της εξίσωσης. Η ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα μας επιτρέπει να γενικεύσουμε την γνωστή Tracy-Widom(β) κατανομή από $\beta = 1, 2, 4$ σε $\beta > 0$ (Θεώρημα 4.2.4). Τέλος, αποδεικνύονται άνω και κάτω φράγματα τόσο για την δεξιά όσο και την αριστερή ουρά της κατανομής της μικρότερης ιδιοτιμής, $TW(\beta)$.

Κεφάλαιο 2

Φασματικό μέτρο - Τριδιαγωνοποίηση Τυχαίων πινάκων

2.1 Benjamini-Schramm σύγκλιση

Ξεκινάμε ορίζοντας το σύνολο $\mathcal{G}_D$ των κλάσεων ισοδυναμίας κάτω από την σχέση του ισομορφισμού γραφημάτων, (δύο γραφήματα G, G' είναι ισόμορφα αν υπάρχει ένα προς ένα και επί απεικόνιση $f : V(G) \rightarrow V(H)$ τέτοια ώστε $\{x, y\} \in E(G)$ αν και μόνον αν $\{f(x), f(y)\} \in E(H)$) των συνεκτικών, μη-κατευθυνόμενων γραφημάτων G , όπου κάθε κορυφή $v \in V(G)$ έχει βαθμό $\deg v \leq D$, μαζί με μία συνάρτηση αποτίμησης των ακμών $\ell : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ για την οποία $|\ell(x, y)| \leq D$. Αν επιπλέον θεωρήσουμε τα γραφήματα του $\mathcal{G}_D$ μαζί με μία κορυφή τους ως ρίζα (ζανά, θεωρούμε έναν αντιπρόσωπο από κάθε κλάση) τότε έχουμε ένα σύνολο που καλούμε $\mathcal{RG}_D$. Σε αυτό το σύνολο ορίζουμε την εξής μετρική.

Αν $(G, o_G), (H, o_H) \in \mathcal{RG}_D$:

$$d(G, H) = 2^{-k}, \quad k = \sup_n \{B_n(G, o_G) \simeq B_n(H, o_H)\},$$

ο μεγαλύτερος φυσικός n για τον οποίο οι μπάλες μήκους n των δύο γραφημάτων γύρω από τις ρίζες τους είναι ισόμορφες. Προφανώς αν δύο γραφήματα είναι ισόμορφα το k ισούται με ∞ , αποτέλεσμα συνεπές με το γεγονός ότι το σύνολο $\mathcal{RG}_D$ αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας. Οπλισμένος με αυτή τη μετρική, ο χώρος γίνεται συμπαγής και *πλήρως μη-συνεκτικός* (δηλαδή οι συνεκτικές του συνιστώσες είναι μονοσύνολα).

Έχοντας ένα γράφημα του $\mathcal{G}_D$ μπορούμε να δημιουργήσουμε τυχαία γραφήματα επιλέγοντας μία κορυφή ομοιόμορφα στην τύχη για ρίζα του. *Τυχαίο γράφημα βαθμού D με ρίζα* θα λέμε ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathcal{RG}_D$. Έστω ένα $\mathcal{B} \subset \mathcal{PG}_D$ Borel. Ονομάζουμε $\nu_G(\mathcal{B})$ την πιθανότητα το γράφημα (G, ρ) , με ρ επιλεγμένο ομοιόμορφα από το $V(G)$, να ανήκει στο σύνολο $\mathcal{B}$. Από το ότι $\nu_G(\{(G, x)\}) = \nu_G(\{(G, y)\})$, $\forall x, y \in V(G)$, έπεται πως αν το γράφημα G είναι πεπερασμένο :

$$\nu_G(\{(G, x)\}) = \frac{1}{|V(G)|}.$$

Αν $x \in [0, 1]$, τότε η ακολουθία $\lceil nx \rceil$ αποτελείται από φυσικούς και ισχύει στο όριο $\lceil nx \rceil / n \rightarrow x$. Θεωρούμε γραφήματα G_n το καθένα με κορυφές στο $[n] = \{1, \dots, n\}$. Τότε, για $x \sim \text{Uniform}[0, 1]$, η κατανομή του $\lceil nx \rceil$ είναι η ίδια με την $\text{Uniform}[n]$.

Αν το G είναι άπειρο, τότε η κατασκευή του μέτρου εξασφαλίζεται από το φασματικό θεώρημα, όπως στο τέλος της επόμενης σελίδας. Ο χώρος των Borel κατανομών είναι συμπαγής ως προς την ασθενή τοπολογία. Με $\mathbb{P}_G$ συμβολίζουμε την πιθανότητα ως προς το μέτρο ν_G .

Ορισμός 2.1.1. ([2],[7]) Μία ακολουθία γραφημάτων $(G_n)_n$ στο $\mathcal{G}_D$ θα λέμε ότι συγκλίνει στο G κατά Benjamini-Schramm αν η ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον $\mathcal{RG}_D$ που προκύπτει επιλέγοντας ομοιόμορφα ρίζα, $\mathbb{P}_{G_n}$, συγκλίνει ασθενώς στην $\mathbb{P}_G$, δηλαδή

$$\int_{\mathcal{RG}_D} f(x) d\nu_{G_n}(x) \longrightarrow \int_{\mathcal{RG}_D} f(x) d\nu_G(x),$$

για κάθε $f : \mathcal{RG}_D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχή.

Ισοδύναμα [8], λέμε ότι $G_n \rightarrow G$ κατά Benjamini-Schramm αν για κάθε πεπερασμένο γράφημα με ρίζα α και για κάθε $k > 0$:

$$\mathbb{P}(G_n, \alpha) := \mathbb{P}_{G_n}((B_k(G_n, \rho_n), \rho_n) \simeq \alpha) \longrightarrow \mathbb{P}_G((B_k(G, \rho), \rho) \simeq \alpha) =: \mathbb{P}(G, \alpha). \quad (2.1.1)$$

Η ισοδυναμία στον παραπάνω ορισμό έπεται από το γεγονός ότι το σύνολο των k -περιοχών γύρω από τις ρίζες, $\{(B_k(G, \rho), \rho) : (G, \rho) \in \mathcal{RG}_D\}$ αποτελεί clopen βάση του $\mathcal{RG}_D$, από το θεώρημα 8.10.59 στο [8].

Παράδειγμα 2.1.2. Ο n -κύκλος C_n έχει ως Benjamini-Schramm όριο το $\mathbb{Z}$ με ρίζα (δίχως βλάβη της γενικότητας) το 0. Για να το δει κανείς αυτό, αρκεί να παρατηρήσει πως ισόμορφες k -μπάλες έχουν την ίδια πιθανότητα να είναι ισόμορφες με κάποιο πεπερασμένο γράφημα με ρίζα, δηλαδή αν $B(G', \rho') \simeq B(G, \rho)$ τότε $\mathbb{P}_{G'}(\alpha \simeq (B(G, \rho), \rho)) = \mathbb{P}_G(\alpha \simeq (B(G, \rho), \rho))$. Για α που δεν είναι μονοπάτια με ρίζα κάποια κορυφή, κανένα G_n ούτε το $\mathbb{Z}$ μπορούν να έχουν ισόμορφες k -μπάλες για όλα τα k . Επομένως, για α να είναι k -μονοπάτι και το n αρκούντως μεγάλο, η k -μπάλα του G_n γύρω από οποιαδήποτε κορυφή (στο συγκεκριμένο παράδειγμα όποια ρίζα και να επιλεχθεί δεν αλληλάζει τίποτα) γίνεται ισόμορφη με το α . Επομένως $G_n \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)$ κατά Benjamini-Schramm.

2.2 Τριδιαγωνοποίηση πινάκων

2.2α' Φασματικό μέτρο

Κάθε τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας μπορεί να θεωρηθεί και πίνακας γειτνίασης κάποιου γραφήματος. Οι τιμές του καθορίζουν και το είδος του γραφήματος, για παράδειγμα 0 στη διαγώνιο και η ίδια σταθερή (π.χ. 1) στις υπόλοιπες μη-μηδενικές θέσεις αντιστοιχεί σε κατευθυνόμενα απλά γραφήματα, ενώ αν επιπλέον είναι και συμμετρικός αντιστοιχεί στα συνηθισμένα απλά μη-κατευθυνόμενα γραφήματα. Κατά αυτόν τον τρόπο κάποιος θα μπορούσε να ρωτήσει σε τί γράφημα αντιστοιχεί ένας τυχαίος πίνακας.

Επιστρέφοντας στο πλαίσιο των τυχαίων γραφημάτων με ρίζα, για κάθε $G \in \mathcal{RG}_D$ θεωρούμε τον χώρο $\ell^2(G)$ των τετραγωνικά αθροισμών (πραγματικών) συναρτήσεων πάνω στις κορυφές του G . Ο *τελεστής γειννίασης* είναι απεικόνιση που δρα σε αυτόν τον χώρο

$$A : \ell^2(G) \rightarrow \ell^2(G), \quad (Af)(x) = \sum_{(x,y) \in E(G)} \ell(x,y)f(y).$$

Ο τελεστής A είναι αυτοσυζυγής και φραγμένος. Πράγματι, από την ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$\begin{aligned} \|Af\|^2 &= \sum_{x \in V} \left(\sum_{(x,y) \in E(G)} \ell(x,y)f(y) \right)^2 \\ &\leq \sum_{x \in V} \left(\sum_{(x,y) \in E(G)} \ell(x,y)^2 \right) \left(\sum_{(x,y) \in E(G)} f(y)^2 \right) \\ &\leq D^3 \sum_{x \in V} \sum_{(x,y) \in E(G)} f(y)^2 \leq D^4 \|f\|^2, \end{aligned}$$

δηλαδή $\|Af\| \leq D^2$. Επιπλέον, από τα παραπάνω φαίνεται πως ο A δεν εξαρτάται από την επιλογή της ρίζας.

Στην περίπτωση μη-κατευθυνόμενου γραφήματος μεγέθους n , όπως είπαμε ο πίνακας A αντιστοιχεί σε συμμετρικό, επομένως από το φασματικό θεώρημα θα υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\ell^2(G)$ από ιδιοσυναρτήσεις του A . Αν $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές, $\psi_1, \dots, \psi_n$ οι ιδιοσυναρτήσεις, και μ_G η *εμπειρική κατανομή ιδιοτιμών*

$$\mu_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\lambda_i}, \quad (2.2.1)$$

όπου δ το μέτρο Dirac, $\delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$, τότε έχουμε την εξής ενδιαφέρουσα ισότητα:

$$\int x^k d\mu_G(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \frac{1}{n} \text{tr}(A^k) = \frac{1}{n} \sum_{\rho \in V(G)} m_{G,\rho,k}, \quad (2.2.2)$$

με $m_{G,\rho,k}$ = πλήθος μονοπατιών μήκους k αρχίζοντας και τελειώνοντας στο ρ , το οποίο ισούται με

$$\sum_{(e_1, \dots, e_k) \text{ κλειστό } \mu \text{ μονοπάτι του } \rho} \prod_{i=1}^k \ell(e_i) = (A^k)_{\rho,\rho}.$$

Από αυτό γίνεται εμφανές πως το $m_{G,\rho,k}$ εξαρτάται μόνο από την k -γειτονιά του ρ .

Στην παραπάνω ανάλυση δεν καλύπτεται η περίπτωση του άπειρου γραφήματος G , καθώς ο πίνακας ενδέχεται να μην έχει καν ιδιοτιμές (Παράδειγμα, γραμμικός τελεστής στο χώρο Hilbert $L^2([0,1]) \cdot \phi \mapsto f\phi$, με $f(t) = t$).

Παρόλαυτα, είναι δυνατόν να ορίσουμε το φασματικό μέτρο ως προς κάποια κορυφή του γραφήματος. Από το φασματικό θεώρημα για φραγμένους αυτοσυζυγείς τελεστές, όπως ο A προκύπτει το projection valued measure

$$\{P_X : \ell^2(G) \rightarrow \ell^2(G) : X \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\},$$

το οποίο είναι τέτοιο ώστε για κάθε πολυώνυμο p :

$$p(A) = \int_{\mathbb{R}} p(x) dP_x, \quad P_x = P_{(-\infty, x]}.$$

Ένας διαισθητικός τρόπος αντίληψης του παραπάνω είναι να δουμε το P_X ως την ορθογώνια προβολή στον χώρο που παράγουν τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές στο X . Το παραπάνω μέτρο δρα στις συναρτήσεις/διανύσματα του $\ell^2(G)$ · συμβολίζουμε τη δράση $[P_X f](x)$.

Ορισμός 2.2.1. Φασματικό μέτρο του A ως προς τη ρίζα ρ ορίζεται

$$\mu_{G,\rho} = \sum_{x \in V(G)} \overline{[P_X \chi_\rho]}(x) \chi_\rho(x) = \langle P_X \chi_\rho, \chi_\rho \rangle,$$

όπου χ_ρ η χαρακτηριστική συνάρτηση της κορυφής ρ .

Ο παραπάνω ορισμός γενικεύει το φασματικό μέτρο για άπειρα γραφήματα, διότι στην περίπτωση που G_n είναι ένα πεπερασμένο γράφημα με n κορυφές (όπως στον ορισμό της Benjamini-Schramm σύγκλισης) τότε το $\mu_{G_n,\rho}$ ισούται με :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V} \overline{[P_X \chi_\rho]}(x) \chi_\rho(x) &= \sum_{x \in V} \left(\sum_{y \in V} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\lambda_j \in X\}} \bar{\psi}_j(y) \chi_\rho(y) \psi_j(x) \right) \chi_\rho(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\lambda_j \in X\}} |\psi_j(\rho)|^2. \end{aligned}$$

Τότε, παίρνοντας μέση τιμή ως προς το μέτρο ν_{G_n} παίρνουμε το μ_{G_n} :

$$\begin{aligned} \mu_{G_n}(X) &= \mathbb{E}_{G_n}[\mu_{G_n,o}(X)] = \sum_{\rho \in V} \mu_{G_n,\rho}(X) \nu_{G_n}(\{(G_n, o)\}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\rho \in V} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\lambda_j \in X\}} |\psi_j(\rho)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\lambda_j \in X\}} \sum_{\rho \in V} |\psi_j(\rho)|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\lambda_j \in X\}} \end{aligned}$$

Παρατήρηση 2.2.2. Αξίζει να σημειωθεί πως η τιμή $\mu_{G,\rho}(\{0\})$ δεν χρειάζεται το φασματικό θεώρημα για να οριστεί. Πράγματι, έστω v η προβολή του χ_ρ πάνω στον υπόχωρο $\ker A$. Ισχύει

$$\mu_{G,\rho}(\{0\}) = \langle v, v \rangle = \max \{f(\rho)^2 : f \in \ker A, \langle f, f \rangle = 1\},$$

καθώς εξ' ορισμού $\langle v, v \rangle = \langle v, \chi_\rho \rangle$, ενώ το $f(\rho)^2 = \max \{\langle f, u \rangle^2 : f \in \ker A, \|f\| = 1\}$. Τέλος, στην περίπτωση που το γράφημα είναι μεταβατικό ως προς τις κορυφές, το φασματικό μέτρο $\mu_{G,\rho}$ προκύπτει ανεξάρτητο της επιλογής της ρίζας. Αρκεί, δηλαδή, να θεωρήσουμε το φασματικό μέτρο με ρίζα οποιαδήποτε κορυφή.

Παρατήρηση 2.2.3. Από τα παραπάνω μπορεί να προκύψει μία μέθοδος μέσω της οποίας θα επιτυγχάνεται η εύρεση του φασματικού μέτρου του τελεστή γειννίας ενός αντικειμένου G :

- Εύρεση ακολουθίας με τις επιθυμητές ιδιότητες στον τελεστή γειννίασης, η οποία συγκλίνει κατά Benjamini-Schramm στο επιθυμητό όριο.
- Υπολογισμός των ιδιοτιμών/ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή γειννίασης, ώστε να βρεθεί το φασματικό μέτρο του οριακού αντικειμένου ως προς την τυχούσα ρίζα.
- Υπολογισμός της μέσης τιμής ως προς την τυχαιότητα της ρίζας για το τελικό αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 2.2.4. (συνέχεια του παραδείγματος (2.1.2))

Θα χρησιμοποιήσουμε την BS -σύγκλιση της $\{C_n\}_n$ στο $(\mathbb{Z}, 0)$ για να υπολογίσουμε το φασματικό μέτρο του τελεσταίου.

Ο τελεστής γειννίασης A μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα $T + T^\dagger$, με

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & 1 \\ 1 & \dots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον $T^{-1} = T^\dagger$, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα $A = 2 \cdot \left(\frac{T+T^{-1}}{2} \right)$. Λύνοντας την εξίσωση $\det(T - xI) = x^n - 1 = 0$, παίρνουμε πως οι ιδιοτιμές του T είναι οι ρίζες της μονάδας. Επομένως, για κάθε ιδιοτιμή λ του T με ιδιοδιάνυσμα ψ , ο πίνακας T^T έχει για ιδιοτιμή λ^{-1} με ιδιοδιάνυσμα ψ . Από αυτό παίρνουμε πως για τις ιδιοτιμές του A θα ισχύει $\lambda_k + \lambda_k^{-1} = 2 \cos(\frac{k}{n} 2\pi)$, δηλαδή απέχουν ομοιόμορφα πάνω στον κύκλο ακτίνας δύο. Καθώς $n \rightarrow \infty$ έχουμε την ομοιόμορφη κατανομή ενός σημείου (X, Y) στον ίδιο κύκλο. Το φασματικό μέτρο θα προκύψει από τον υπολογισμό της περιθώριας κατανομής του X και ισούται με

$$\mu_{\mathbb{Z}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4-x^2}} \mathbb{1}_{[-2,2]}(x) dx$$

2.26' Αλγόριθμος Householder

Ορισμός 2.2.5. Ως φασματικό μέτρο του συμμετρικού πίνακα A ως προς την πρώτη γραμμή/στήλη ορίζεται το $\mu_A = \sum_{j=1}^n \delta_{\lambda_j} \psi_j(1)^2$.

Επιπλέον ισχύει για το συγκεκριμένο μέτρο, όπως πριν, πως οι k -ροπές του ισούνται με το $(1, 1)$ στοιχείο του A^k . Μας ενδιαφέρει να δώσουμε έναν χαρακτηρισμό για τις κλάσεις ισοδυναμίας που δημιουργούνται από τη σχέση « $A \sim B \iff \mu_A = \mu_B$ » και ένα πρώτο βήμα είναι το εξής:

Λήμμα 2.2.6. Αν A, B είναι συμμετρικοί $n \times n$ πίνακες των οποίων τα φασματικά μέτρα συμπίπτουν, τότε υπάρχει ορθογώνιος O του οποίου η πρώτη γραμμή είναι $(1, 0, \dots, 0)$ και $O^{-1}AO = B$.

Ορισμός 2.2.7. Πίνακας Jacobi ονομάζεται ένας συμμετρικός πίνακας με πραγματικές τιμές ο οποίος είναι τριδιαγώνιος με αυστηρά θετικά μη-διαγώνια στοιχεία.

Όπως ένας αντιπρόσωπος των κλάσεων ισοδυναμίας της ισοδυναμίας πινάκων είναι οι διαγώνιοι πίνακες με φθίνοντα στοιχεία, ο αντιπρόσωπος των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς το φασματικό μέτρο επιλέγεται να είναι ο μοναδικός πίνακας Jacobi που το φέρει:

Θεώρημα 2.2.8. Για κάθε A συμμετρικό πίνακα, υπάρχει μοναδικός πίνακας Jacobi με $\mu_J = \mu_A$.

Απόδειξη. Όσον αφορά την ύπαρξη τέτοιου Jacobi πίνακα, θα επικαλεστούμε τον αλγόριθμο Householder Μπορούμε να γράψουμε τον A στη μορφή

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & b^T \\ \hline b & C \end{array} \right),$$

όπου $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^{n-1}$, και C ένας $(n-1) \times (n-1)$ υποπίνακας του A . Για έναν οποιοδήποτε ορθογώνιο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακα $\mathcal{O}$, ορίζοντας τον

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{O} \end{array} \right)$$

ισχύει ότι ο πίνακας

$$Q A Q^T = \left(\begin{array}{c|c} a & (\mathcal{O}b)^T \\ \hline \mathcal{O}b & \mathcal{O}C\mathcal{O}^T \end{array} \right) \quad (2.2.3)$$

είναι επίσης συμμετρικός. Επιλέγοντας για $\mathcal{O}$ την *ανάκλαση Householder* [35],

$$\mathcal{O}v = v - 2 \frac{\langle v, \omega \rangle}{\langle \omega, \omega \rangle} \omega, \quad \omega = b - |b| e_1$$

για την οποία ισχύει $\mathcal{O}\mathcal{O}^T = I$ και

$$\begin{aligned} \mathcal{O}b &= b - 2 \frac{\langle b, \omega \rangle}{2|b|(|b| - b_1)} b + 2 \frac{\langle b, \omega \rangle}{2|b|(|b| - b_1)} |b| e_1 \\ &= b - b + |b| e_1 \\ &= |b| e_1. \end{aligned}$$

Για αυτήν την επιλογή, η σχέση (2.2.3) γράφεται

$$Q A Q^T = \left(\begin{array}{c|cccc} a & |b| & 0 & \dots & 0 \\ \hline |b| & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \mathcal{O}C\mathcal{O}^T & \\ 0 & & & & \end{array} \right) \quad (2.2.4)$$

Δεδομένου πως ο $\mathcal{O}$ είναι ορθογώνιος, οι ιδιοτιμές μένουν αναλλοίωτες και ο υποπίνακας $\mathcal{O}C\mathcal{O}^T$ είναι συμμετρικός. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο επιχείρημα για αυτόν. Η προκύπτουσα ανάκλαση

$\mathcal{O}_1$ θα είναι ένας $(n-2) \times (n-2)$ ορθογώνιος πίνακας που θα σταθεροποιεί το στοιχείο $(1, 1)$ του $\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}^T$ και επιπλέον, επεκτείνοντας την σε ανάκλαση Q_1 για τον μεγαλύτερο πίνακα,

$$Q_1(QAQ^T)Q_1^T = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} a & |b| & 0 & \dots & 0 \\ \hline |b| & c & |b'| & \dots & 0 \\ \hline 0 & |b'| & & & \\ \vdots & \vdots & & \mathcal{O}'\mathcal{C}\mathcal{O}'^T & \\ \hline 0 & 0 & & & \end{array} \right),$$

όπου $c \in \mathbb{R}, b' \in \mathbb{R}^{n-2}$ είναι η ανάλογη ανάλυση του $\mathcal{O}\mathcal{C}\mathcal{O}^T$ με αυτή που έγινε για τον A στην αρχή της απόδειξης. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία προκύπτει πίνακας Jacobi J_A με ιδιοτιμές ίδιες με του A . Από τη φύση των μετασχηματισμών, η πρώτη συντεταγμένη των διανυσμάτων παραμένει αναλλοίωτη. Επομένως τα ιδιοδιανύσματα των A, J_A έχουν ίδια πρώτη συντεταγμένη. Από τα παραπάνω, $\sigma_A = \sigma_{J_A}$.

Για τη μοναδικότητα· έστω J, K πίνακες Jacobi με το ίδιο φασματικό μέτρο. Τότε, ελέγχοντας τις k -ροπές τους ισχύει πως

$$(J^m)_{11} = (K^m)_{11}, \quad \forall m.$$

Αναλύοντας αυτή τη σχέση, για άρτιο m παίρνουμε ισότητα των διαγωνίων, και για περιτό m ισότητα των μη-διαγώνιων στοιχείων. Αρκεί, δηλαδή, να εκμεταλλευτούμε την παραπάνω σχέση για $m = 1, \dots, 2n-1$. Πράγματι, για $m = 1$ ισχύει $J_{11} = K_{11}$, ενώ για $m = 2$ $J_{11}^2 + J_{12}^2 = K_{11}^2 + K_{12}^2$. Από το θετικό πρόσημο των μη διαγώνιων στοιχείων, $J_{12} = J_{21} = K_{12} = K_{21}$. Συνεχίζοντας με τις υπόλοιπες ροπές, προκύπτει η ισότητα $J = K$ κάθε δύο Jacobi πινάκων με το ίδιο φασματικό μέτρο. ■

2.3 β -μοντέλα Τυχαίων πινάκων

2.3α' Εισαγωγικά περι τυχαίων πινάκων

Η θεωρία πιθανοτήτων άρχισε σιγά σιγά να εισβάλλει στους περισσότερους από τους κλάδους των επιστημών εδώ και περίπου εκατό χρόνια, βοηθώντας κυρίως στη μοντελοποίηση μεγάλων συστημάτων. Με τον όρο μεγάλα συστήματα εννοούμε όσα εξαρτώνται από τέτοιο πλήθος μεταβλητών, ώστε η πολυπλοκότητα και το μέγεθος του προβλήματος να καθιστούν ντετερμινιστικές και συστηματικές μελέτες αδύνατες, όπως για παράδειγμα η μελέτη πληθυσμών ή αλληλεπιδράσεις μεταξύ ατόμων. Σε αυτές τις περιπτώσεις η εισαγωγή της τυχειότητας προσφέρει ευκολία στους υπολογισμούς.

Η πρώτη δημοσίευση πάνω στο αντικείμενο των τυχαίων πινάκων οφείλεται στον Wishart [68] η οποία σε συνδυασμό με τις εργασίες του Hsu [36] στις αρχές της δεκαετίας του '30 έδωσαν έναυσμα σε μία καινούρια ερευνητική περιοχή. Σύντομα, εφαρμογές αυτής της θεωρίας βρήκαν σπίτι στην πυρηνική φυσική ([23], [66], [31]), την υπολογιστική βιολογία [27], τα νευρωνικά δίκτυα [45], στη θεωρητική πληροφορική [19], τα τυχαία γραφήματα [47], όπως βεβαίως και στην πολυδιάστατη στατιστική [39], [17] αλλά και την αριθμητική ανάλυση [25]. Από τα παραπάνω, είναι φανερό ότι οι

τυχαίοι πίνακες άρχιζαν να προκύπτουν σε πολλά, φαινομενικά ασύνδετα αντικείμενα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, οι αποστάσεις (spacings) μεταξύ ριζών της συνάρτησης του Riemann, ζ και η σύνδεση τους με αποστάσεις μεταξύ ιδιοτιμών του μοναδιαίου Γκαουσιανού μοντέλου [49], [52]. Περισσότερες συνδέσεις μεταξύ διαφόρων αντικειμένων με στατιστικά τυχαίων πινάκων συζητώνται στις επόμενες παραγράφους.

Τα μοντέλα τυχαίων πινάκων (πολύ σύντομα: ένα μοντέλο καθορίζεται από τις κατανομές των στοιχείων του μαζί με ενδεχόμενους επιπλέον περιορισμούς) που έχουν εισαχθεί στη βιβλιογραφία είναι πάρα πολλά. Οι πιο δημοφιλείς επιλογές, όμως, είναι αυτές με στοιχεία κατανεμημένα σύμφωνα με την κανονική κατανομή. Κατά μία έννοια, εξ' αιτίας της ύπαρξης του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι και η πιο φυσιολογική για τις εφαρμογές. Τέτοια μοντέλα, πέρα από απλά στη σύλληψη είναι και αρκετά «ευέλικτα» στους υπολογισμούς, με κύρια αιτία το ορθογώνιο αναλλοίωτο που τα χαρακτηρίζει. Κατά συνέπεια, η πλειοψηφία των μοντέλων έχει ως βάση την κανονική κατανομή, μαζί με επιπλέον υποθέσεις που θα εξασφαλίζουν πραγματικό φάσμα (δηλαδή, ιδιοτιμές), όπως συμμετρία, ή να είναι θετικά ορισμένοι (στην μη-τετραγωνική περίπτωση). Αυτές οι υποθέσεις πέρα από τη διευκόλυνση, γίνονται και προκειμένου να ανταποκρίνονται στα φυσικά μοντέλα και στατιστικά αντικείμενα που μελετάνε.

Στη Στατιστική, η συμμετρία επιτυγχάνεται με το γινόμενο $AA^\dagger$ όπου A πίνακας με στοιχεία ανεξάρτητες κανονικές κατανομές, ενώ στο πλαίσιο της Φυσικής, η συμμετριοποίηση γίνεται μέσω του $(A + A^\dagger)/2$. Οι πρώτοι πίνακες που θεωρήθηκαν ήταν οι προαναφερθέντες A , ενώ παράλληλα η ερώτηση «Πάνω από ποιά άλλα σώματα μπορούμε να θεωρήσουμε κανονικές κατανομές;» δημιουργούταν. Η απάντηση του Dyson (1962, [24]) ήταν πως, για να είναι συνεπή τα μοντέλα με τη φυσική ερμηνεία, πρέπει οι κανονικές κατανομές να παίρνουν τιμές σε σώματα που είναι άλγεβρες διαίρεσης πάνω από το $\mathbb{R}$ (μία -μεταθετική- άλγεβρα $\mathcal{R}$ καλείται *άλγεβρα διαίρεσης επί του $\mathbb{R}$* αν και μόνον αν έχει μοναδιαίο στοιχείο και για κάθε μη-μηδενικό $a \in \mathcal{R}$ υπάρχει μοναδικό $x \in \mathcal{R}$ ώστε $ax = xa = 1$), αφήνοντας σαν μοναδικές επιλογές (από το θεώρημα του Frobenius) τρεις: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ (από αυτό προκύπτει και η λεγόμενη τριχοτόμηση του Dyson). Από τότε και μέχρι σήμερα, οι φυσικοί έχουν ασχοληθεί διεξοδικά με τα Γκαουσιανά μοντέλα (βλ. επόμενη παράγραφο). Αυτά αντιστοιχούν στις τιμές 1, 2, 4 της παραμέτρου β που θα μας απασχολήσει. Το γεγονός πως οι προσεγγίσεις για αυτές τις τρεις περιπτώσεις ήταν, κατά κάποιο τρόπο, παρεμφερείς έδωσε την ιδέα της παραμετροποίησης. Τα αποτελέσματα, παρολαυτά, για τα τρία αυτά β αποδείχθηκαν μεμονωμένα και στις περισσότερες περιπτώσεις, ανεξάρτητα. Το ερώτημα πλέον ήταν αν μπορούσαμε να δώσουμε φυσική ερμηνεία, δηλαδή κάποιο μοντέλο που να έχει ως πυκνότητα την ίδια με τις περιπτώσεις $\beta = 1, 2, 4$ αλλά για διαφορετικές, θετικές τιμές της παραμέτρου. Σαν θεωρητικές κατανομές, είχαν ήδη συνδεθεί με πληθώρα προβλημάτων, όπως τα πολυώνυμα Jack και τους Schrödinger τελεστής αυθαίρετης αντίστροφης θερμοκρασίας (βλ. [29] για λεπτομέρειες στα παραπάνω). Στις επόμενες ενότητες θα δούμε πως αυτό το ερώτημα μπορεί να απαντηθεί θετικά, κατασκευάζοντας ένα μοντέλο για γενικό β , τόσο για τη Γκαουσιανή, όσο και για τη Wishart περίπτωση.

Οι περιπτώσεις $\beta = 1, 2, 4$

Ξεκινάμε σημειώνοντας πως, σε αντιστοιχία με την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$, είναι δυνατόν να ορίσουμε τη μιγαδική κανονική $\mathcal{N}^2(0, 1)$ αλλά και την quaternion κανονική $\mathcal{N}^4(0, 1)$. Η σχέση τους με την $\mathcal{N}(0, 1)$ βρίσκεται στο ότι $\mathcal{N}^2(0, 1) = x + iy$ και $\mathcal{N}^4(0, 1) = x + iy + jz + kw$, με $x, y, z, w \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Εντελώς ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε και πολυδιάστατες κανονικές κατανομές, είτε πρόκειται για πίνακα ή για διάνυσμα (για παραπάνω λεπτομέρειες σχετικά με τις πολυδιάστατες κατανομές, βλ. [51]).

Ένας πίνακας A θα λέμε ότι ανήκει στο $G^\beta(n, m)$, αν είναι διάστασης $n \times m$, με τα στοιχεία του τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $\mathcal{N}^\beta(0, 1)$. Οι παραπάνω πίνακες χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι είναι αναλλοίωτοι κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Αυτό, στην πράξη, σημαίνει πως δεν έχουμε κάποιο τρόπο να ξεχωρίσουμε την κατανομή του διανύσματος Ae_1 από των διανυσμάτων $Q_1 Ae_1$ και $AQ_2 e_1$, με την προϋπόθεση ότι $Q_1(n, n), Q_2(m, m)$ είναι ορθογώνιοι (για $\beta = 1$, ή μοναδιαίοι για $\beta = 2$, ή αυτοδύτικοι για $\beta = 4$) πίνακες ανεξάρτητοι του A . Η εν λόγω ιδιότητα προκύπτει από το γεγονός πως ο πολλαπλασιασμός του (για παράδειγμα) $Q_1 A$ δίνει έναν πίνακα B του οποίου οι στήλες του είναι το γινόμενο του Q_1 με τις στήλες του A . Η ανάλυση της χαρακτηριστικής συνάρτησης μαζί με το ορθογώνιο αναλλοίωτο του Γκαουσιανού μέτρου συνάγει πως $Q_1 A \in G^\beta(n, m)$ ξανά (για την απόδειξη, βλ. την κατασκευή μετά την παρατήρηση (2.3.3)).

Με τη βοήθεια των $G^\beta(n, m)$ θα ορίσουμε αμέσως όλα μοντέλα (ensembles) τυχαίων πινάκων που θα μας απασχολήσουν.

Ένας $n \times n$ πίνακας $X = X_n$ θα αποτελεί δείγμα από το **Γκαουσιανό Ορθογώνιο Μοντέλο** (**Gaussian Orthogonal Ensemble**, $\text{GOE}(n)$) αν $X = (A + A^\dagger)/2$, με $A \in G^1(n, n)$. Τα διαγώνια στοιχεία του είναι τυχαίες μεταβλητές $\mathcal{N}(0, 1)$ και τα υπόλοιπα ακολουθούν $\mathcal{N}(0, \frac{1}{4}) + \mathcal{N}(0, \frac{1}{4}) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$. Εναλλακτικά, ο πίνακας X του μοντέλου αυτού μπορεί να εξαχθεί και από το πραγματικό μέρος του επόμενου.

Ένας $n \times n$ πίνακας $X = X_n$ θα είναι στοιχείο από το **Γκαουσιανό Μοναδιαίο Μοντέλο** (**Gaussian Unitary Ensemble**, $\text{GUE}(n)$) αν $X = (A + A^*)/2$, όπου αυτή τη φορά $A \in G^2(n, n)$. Τα διαγώνια στοιχεία είναι ξανά πραγματικές κανονικές $\mathcal{N}(0, 1)$ ενώ τα μη-διαγώνια ακολουθούν $\mathcal{N}^2(0, \frac{1}{2})$. Τέλος, ορίζουμε το **Γκαουσιανό Συμπλεκτικό Μοντέλο** $\text{GSE}(n)$ ως $X = (A + A^\#)/2$, όπου $A^\#$ ο δυϊκός ανάστροφος του A .

Παρατήρηση 2.3.1. Κάθε $q \in \mathbb{H}$ γράφεται $q = a + bi + cj + dk$. Σαν πίνακα με στοιχεία από το $\mathbb{C}$,

$$q = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}.$$

Ως συζυγές του q , $q^\#$ ορίζουμε τον αναστροφосуζυγή πίνακα και κατ' επέκταση ένας πίνακας (a_{ij}) με στοιχεία από το $\mathbb{H}$ θα έχει ως δυϊκό ανάστροφο τον πίνακα που στη θέση (i, j) έχει το στοιχείο $(a_{ji})^\#$.

Τα Γκαουσιανά μοντέλα εισήχθησαν από τον Wigner τη δεκαετία του '50, ο οποίος επίσης υπολόγισε την από κοινού πυκνότητα των ιδιοτιμών ενός τέτοιου πίνακα. Έπειτα, η έρευνα πάνω στα GOE , GUE προχώρησε με τον υπολογισμό των επιπέδων ενέργειας από τους Gaudin και

Mehta [32], [31] λίγο μετά, ενώ αρκετά αργότερα, οι Basor, Tracy, Widom εξήγαγαν ασυμπτωτικά αποτελέσματα [6]. Στους δύο τελευταίους οφείλονται και τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα για τις ακραίες τιμές των ιδιοτιμών (η γνωστή Tracy-Widom κατανομή) [62]. Όλα τα παραπάνω έχουν εξερευνηθεί για τις τιμές $\beta = 1, 2$, καθώς και $\beta = 4$ σε κάποιες περιπτώσεις. Από τη δεκαετία του '80 έως και σήμερα, πληθώρα προβλημάτων σε διάφορους κλάδους των μαθηματικών έχουν συνδεθεί με τους τυχαίους πίνακες, και πιο συγκεκριμένα με στατιστικά των GOE, καθώς και των GUE. Ανάμεσα τους βρίσκεται η εύρεση της μεγαλύτερης αύξουσας υπακολουθίας σε μία τυχούσα (Baik, Deift, Johansson, [5]), τα «μαγικά τετράγωνα» (Diaconis, Gamburd, [18]), καθώς και προβλήματα διαμέρισης επιφανειών (Borodin, Olshanski [10]).

Η άλλη κατηγορία πινάκων που θα μας απασχολήσει είναι αυτή των *Wishart πινάκων*. Ιστορικά, αποτελούν την έναρξη της ενασχόλησης με τους τυχαίους πίνακες και οφείλεται στον Wishart, ο οποίος τους εισήγαγε το 1928 και απέδειξε την από κοινού πυκνότητα των στοιχείων του, [68]. Σε πλήρη αναλογία με τα παραπάνω θα ορίσουμε τρεις κατηγορίες μοντέλων με το όνομα Wishart· ο **πραγματικός Wishart** ορίζεται ως ο συμμετρικός $n \times n$ πίνακας με $X = AA^t$, για $A \in G^1(n, m)$. Για έναν $X = X_n$ Ερμιτιανό $n \times n$ ο οποίος γράφεται στη μορφή AA^* με $A \in G^2(n, m)$ θα λέμε ότι ανήκει στο **μιγαδικό Wishart Μοντέλο**, ενώ για το **συμπλεκτικό Wishart Μοντέλο** έχουμε $X = AA^\#$, αυτή τη φορά ο $A \in G^4(n, m)$.

Στην μελέτη των πινάκων Wishart, τα level densities αποδείχθηκαν από τους Marcenko και Pastur [46] αρκετά χρόνια αργότερα. Την ίδια περίοδο, ο James θα ήταν ο πρώτος που χρησιμοποιούσε ειδικές συναρτήσεις προκειμένου να μελετήσει στατιστικά ιδιοτιμών, πιο συγκεκριμένα για τον πραγματικό Wishart [38]· αυτή η «μέθοδος» έχει επεκταθεί σε όλα τα δημοφιλή μοντέλα τυχαίων πινάκων. Για όλα τα παραπάνω, το ενδιαφερόμενο άτομο παραπέμπεται στα [3] (για τα GOE, GUE) και [51] (για τα μοντέλα Wishart). Τέλος, αξίζει να σημειωθεί πως η κατανομή της (έπειτα από κατάλληλη αλλαγή κλίμακας) μεγαλύτερης ιδιοτιμής τόσο στα Γκαουσιανά αλλά και στα μοντέλα Wishart δίνεται από τους νόμους Tracy-Widom, $TW(\beta)$, όπου το $\beta = 1, 2$ αναλόγως (βλ. [40], [41], [64]).

Ο τελικός στόχος αυτής της παραγράφου είναι να καταγράψει μοντέλα πινάκων των οποίων τις από κοινού κατανομές ιδιοτιμών να γενικεύουν τα μοντέλα της επόμενης παραγράφου. Για αυτό το σκοπό θα χρειαστούμε και τις κατανομές αυτών. Για παράδειγμα, για το GOE, βρίσκοντας κανείς την από κοινού πυκνότητα των στοιχείων του πίνακα και γνωρίζοντας την κατανομή των ιδιοδιανυσμάτων, είναι εφικτό διαγωνιοποιώντας τον πίνακα να βρει την περιθώρια κατανομή των ιδιοτιμών, ολοκληρώνοντας ως προς τα ιδιοδιανύσματα. Το μόνο που μένει είναι ο υπολογισμός της κατάλληλης Ιακωβιανής του μετασχηματισμού (βλ. [3]). Αυτή η μέθοδος, αλλά πιο «εκλεπτυσμένη» περνάει και στους πίνακες Wishart μέσω του θεωρήματος του Weyl ([3]).

Μέτρο Haar

Ένας πίνακας που ανήκει στο $GOE(n)$ είναι πραγματικός και συμμετρικός. Είναι συνεπώς γνωστό πως έχει n ιδιοτιμές και υπάρχει ορθοκανονική βάση από ιδιοδιανύσματά του. Μας ενδιαφέρει να διαμορφώσουμε μία εικόνα για το πως συμπεριφέρονται αυτά. Έχοντας στο μυαλό μας ότι ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων είναι ορθογώνιος, η λογική συμπεριφορά για ένα ιδιοδιάνυσμα

του $\text{GOE}(n)$ θα ήταν να είναι «ομοιόμορφα κατανεμημένο» στην κατάλληλης διάστασης σφαίρα. Σκεφτόμενοι τι είναι η ομοιόμορφη κατανομή στον κύκλο S^1 , μπορούμε να θεωρήσουμε τη μιγαδική τυχαία μεταβλητή στο $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ που είναι αναλλοίωτη ως προς τις στροφές· για κάθε $A \subseteq S^1$ η πιθανότητα να βρίσκεται στο A θα πρέπει να είναι ίδια με την πιθανότητα να βρίσκεται στο $e^{i\theta} \cdot A$, $\forall \theta \in [0, 2\pi)$. Θεωρώντας το ίδιο σενάριο για τους πίνακες, ένα ομοιόμορφα κατανεμημένο στοιχείο $U \in G = O(n), U(n)$, όπου $O(n)$ (αντίστοιχα, $U(n)$ οι $n \times n$ πραγματικοί (αντίστοιχα, μιγαδικοί) πίνακες με ορίζουσα ± 1 , να είναι πάλι αναλλοίωτο ως προς τα στοιχεία του G : Για κάθε $\mathcal{A} \subseteq G$ και δεδομένο $M \in G$:

$$\mu(M \cdot \mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A} \cdot M) = \mu(\mathcal{A}), \quad (2.3.1)$$

με $M \cdot \mathcal{A} = \{MU, U \in \mathcal{A}\}$.

Ορισμός 2.3.2. Το μοναδικό μέτρο που ικανοποιεί την (2.3.1) καλείται μέτρο Haar

Παρατήρηση 2.3.3. Το μέτρο Haar μπορεί να οριστεί γενικότερα για τοπικά συμπαγείς τοπολογικές ομάδες G με πιο ασθενείς συνθήκες, όπως μόνο αριστερό αναλλοίωτο και πεπερασμένο στα συμπαγή υποσύνολα. Αν G συμπαγής, τότε είναι πεπερασμένο καθώς και δεξιό αναλλοίωτο. Στην περίπτωση που εξετάζουμε, οι ομάδες που μας ενδιαφέρουν είναι ομάδες Lie, επομένως πάνω τους μπορεί να οριστεί ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας Haar. Για μία αναλυτική απόδειξη της ύπαρξης του καλή αναφορά είναι η [57].

Όλα τα παραπάνω μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη του μέτρου Haar χωρίς να προσφέρει κάποια περιγραφή για αυτό. Παρόλαυτα, υπάρχουν διάφορες μέθοδοι κατασκευής $O(n)$ -αναλλοίωτων μέτρων πιθανότητας στο $O(n)$ τα οποία λόγω μοναδικότητας καθίστανται το μέτρο Haar. Η πιο συνηθισμένη προσέγγιση είναι αυτή μέσω των τυχαίων πινάκων. Έστω $A \in G^1(n, n)$, δηλαδή $n \times n$ πίνακας με όλα του τα στοιχεία ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$. Λόγω της φυσικής απεικόνισης του $M_n(\mathbb{R})$ των $n \times n$ πινάκων με πραγματικά στοιχεία στο $\mathbb{R}^{n^2}$, είναι φανερό πως η από κοινού κατανομή των στοιχείων του πίνακα (ή, η κατανομή του πίνακα) είναι η

$$\frac{1}{(2\pi)^{n^2}} \prod_{i,j=1}^n e^{-x_{ij}^2/2} = \frac{1}{(2\pi)^{n^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n x_{ij}^2 \right\}.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y_{ij} = (MX)_{ij} = \sum_{k=1}^n M_{ik}x_{kj}$, η πυκνότητα των στοιχείων ως προς τις μεταβλητές y_j γράφεται

$$\frac{1}{|\det M| (2\pi)^{n^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (M^{-1}y)_{ij}^2 \right\} = \frac{1}{(2\pi)^{n^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n y_{ij}^2 \right\},$$

όπου χρησιμοποιήθηκε το ότι $M^\dagger = M^{-1}$. Το μόνο πρόβλημα στο παραπάνω είναι ότι ο πίνακας A δεν είναι ορθογώνιος, επομένως δεν θα μπορούσε να προέρχεται από την κατανομή που ορίζει το μέτρο Haar. Τη λύση σε αυτό έρχεται να δώσει η μέθοδος Gram-Schmidt· θα μετατρέψουμε τις στήλες του A σε ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Αυτό που πρέπει να προσέξει κανείς είναι πως

η «ορθοκανονικοποίηση» και ο πολλαπλασιασμός επί M μετατίθενται. Για την επαλήθευση των παραπάνω, ελέγχουμε το πρώτο βήμα της διαδικασίας Gram-Schmidt: αντικαθιστούμε τη στήλη X_2 με τη στήλη $X_2 - \langle X_1, X_2 \rangle X_1$. Επομένως η αντίστοιχη στήλη του MX θα είναι $MX_2 - \langle X_1, X_2 \rangle MX_1$. Από την αλλαγή, αν πάμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο κατευθείαν στον MX θα έχουμε αντικαταστήσει την $(MX)_2$ με τη

$$\begin{aligned} (MX)_2 - \langle (MX)_1, (MX)_2 \rangle (MX)_1 &= MX_2 - \langle M^\dagger MX_1, X_2 \rangle MX_2 \\ &= MX_2 - \langle X_1, X_2 \rangle MX_1. \end{aligned}$$

Επεκτείνοντας τον ίδιο ακριβώς συλλογισμό για τις υπόλοιπες στήλες, καταλήγουμε στο ότι η διαδικασία λήψης ενός δείγματος από το $G^1(n, n)$ και στη συνέχεια εφαρμογή της μεθόδου Gram-Schmidt δημιουργεί ένα δείγμα από το μέτρο Haar.

Αμέσως τώρα θα δώσουμε μία εναλλακτική κατασκευή δείγματος από το ίδιο μέτρο, καθώς η γεωμετρική ιδέα στην οποία βασίζεται φέρει πολλά κοινά με τη βασική ιδέα της επόμενης ενότητας. Η ιδέα αυτή, στο συγκεκριμένο πλαίσιο, είναι να ξεκινήσουμε με έναν «άδειο» πίνακα και να προσθέτουμε μία-μία στήλες μήκους ένα, κάθε μία κάθετη σε όλες τις προηγούμενες. Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας ρ στη σφαίρα $S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ που προκύπτει από την κανονικοποίηση του όγκου της σφαίρας. Για κάθε $\mathcal{B} \subseteq S_{n-1}$, έχουμε

$$\rho(\mathcal{B}) = \frac{\sigma_{n-1}(\mathcal{B})}{\sigma_{n-1}(S_{n-1})},$$

όπου $\sigma_{d-1}(\mathcal{B})$ είναι το $(d-1)$ -διάστατο Hausdorff μέτρο του συνόρου $\partial\mathcal{B}$ (το οποίο συμπίπτει με το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^{d-1}$). Επιλέγουμε U_1 διάνυσμα στην S_{n-1} κατανομημένο ομοιόμορφα σύμφωνα με το ρ : αυτή θα είναι η πρώτη στήλη του U . Για την επόμενη στήλη, θεωρούμε τον υπόχωρο $\langle U_1 \rangle^\perp \cap S_{n-1}$ της S_{n-1} , που αποτελείται από τα διανύσματα της μοναδιαίας σφαίρας, με την επιπρόσθετη προϋπόθεση να είναι κάθετα στο U_1 . Αυτόν το χώρο μπορούμε να το σκεφτόμαστε ως την σφαίρα S_{n-2} . Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με το ρ μπορούμε να ορίσουμε το ρ_1 μέτρο και να επιλέξουμε ένα U_2 σύμφωνα με αυτό. Το επιλεγμένο διάνυσμα θα πληροί τόσο την καθετότητα με το U_1 όσο και το μοναδιαίο μήκος: το προσθέτουμε ως δεύτερη στήλη στον U . Συνεχίζοντας κατ' αυτόν τον τρόπο, φτιάχνουμε έναν πίνακα $U = [U_1, \dots, U_n]$ ο οποίος ισχυριζόμαστε πως είναι κατανομημένος σύμφωνα με το μέτρο Haar. Πράγματι, για δεδομένο $M \in O(n)$, οι στήλες του MU είναι $MU_1, \dots, MU_n$, οι οποίες ικανοποιούν $\langle MU_j, MU_i \rangle = \langle U_j, U_i \rangle = \delta_{ij}$, όπου δ το Kronecker δέλτα. Η πρώτη στήλη, για παράδειγμα, είναι μία ομοιόμορφα κατανομημένη τυχαία μεταβλητή στη μοναδιαία σφαίρα, πολλαπλασιασμένη επί M . Επειδή ο M είναι ορθογώνιος, η αλλαγή μεταβλητής $Y_i = MU_i$ δίνει ότι για $U_i \in S_{n-i}$, τα Y_i επίσης θα ανήκουν στην S_{n-i} , και το γεγονός ότι θα έχουν την ίδια πυκνότητα προκύπτει από το ότι η Ιακωβιανή του παραπάνω μετασχηματισμού είναι η $|\det M| = 1$. Συνεπώς, ο πίνακας MU έχει την ίδια κατανομή με τον πίνακα U , που (πάλι εξ' αιτίας της μοναδικότητάς) σημαίνει ότι ο U είναι κατανομημένος σύμφωνα με το μέτρο Haar. Όσον αφορά τους Γκαουσιανούς Ορθογώνιους Πίνακες, ισχύει το εξής [3]:

Πόρισμα 2.3.4. Έστω $X \in GOE(n)$ με ιδιοδιανύσματα $v = (v_1, \dots, v_n)$ και ιδιοτιμές $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Τότε ισχύει πως οι τυχαίες μεταβλητές v και Λ είναι ανεξάρτητες και πως κάθε ένα v_j είναι ομοιόμορφα κατανομημένο στο $S_{n-1}^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1, x_1 > 0\}$. Επιπλέον, το v

είναι κατανεμημένο σαν δείγμα από το Haar μέτρο στον $O(n)$, με κάθε στήλη κανονικοποιημένη ώστε να ανήκει στο S_{n-1}^+ .

Απόδειξη. Γράφουμε την ανάλυση του πίνακα X σε $UDU^\dagger$, και έστω επιπλέον ένας πίνακας M κατανεμημένος σύμφωνα με το μέτρο Haar, ανεξάρτητος του X . Λόγω του ορθογώνιου αναλλοίωτου, η κατανομή του $MXM^\dagger$ είναι ίδια με αυτή του X , όπως και οι ιδιοτιμές τους, ενώ επιπλέον ισχύει $MXM^\dagger = (MU)D(MU)^\dagger \sim UDU^\dagger$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το γεγονός ότι $MU \sim M$ (ο πίνακας U εδώ είναι δεδομένος ορθογώνιος ως πίνακας ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων), προκύπτει πως οι ιδιοτιμές $\Lambda = (\lambda_i)$ είναι ανεξάρτητες των ιδιοδιανυσμάτων $v_1, \dots, v_n$. Συνεχίζοντας το παραπάνω επιχείρημα, βλέπουμε πως ο $[v_1, \dots, v_n]$ έχει την ίδια κατανομή με τον $[Mv_1, \dots, Mv_n]$, όπου εξ' ορισμού του ο M είναι κατανεμημένος σαν δείγμα από το μέτρο Haar του $O(n)$. Τέλος, έχοντας την γνώση του παραπάνω, είναι εμφανές ότι κάθε v_i μπορούμε να το πολλαπλασιάσουμε με το πρόσημο $\text{sign}(v_i(1))$ της πρώτης συντεταγμένης του· το αποτέλεσμα θα είναι ένα στοιχείο του S_{n-1}^+ , και είναι εμφανές πως για κάθε δείγμα M από το συγκεκριμένο μέτρο, ο τροποποιημένος M' παραμένει Haar κατανεμημένος. Αυτό διότι ο πίνακας M' προκύπτει από

το γινόμενο του M με έναν άλλον, δεδομένο, ορθογώνιο πίνακα, τον $\begin{pmatrix} -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ ■

Από κοινού κατανομές τυχαίων πινάκων

Δεδομένης της ανεξαρτησίας των στοιχείων του GOE (και ότι είναι κανονικής κατανομής) μπορούμε να δούμε πως το μοντέλο αυτό χαρακτηρίζεται από ένα Γκαουσιανό (άρα, αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς) μέτρο με πυκνότητα :

$$P_1(X) = \frac{1}{Z_{\beta,n}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x_i^2/2} \prod_{j=1}^{n^2-n} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_j^2} = \frac{1}{2^{n/2}} \frac{1}{\pi^{n/2+n(n-1)/2}} e^{\text{tr}-X^2/2}$$

Αντίστοιχα, για $\beta = 2, 4$ παίρνει τις πυκνότητες για τα GUE, GSE $n \times n$ μοντέλα :

$$P_\beta(X) = \frac{1}{2^{n/2}} \frac{1}{\pi^{n/2+n(n-1)\beta/2}} e^{\text{tr}(-\frac{\beta}{2}X^2)} \quad (2.3.2)$$

Ο πίνακας X από το $\text{GOE}(n)$ γράφεται $X = UDU^\dagger$, όπου U ορθογώνιος με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του X , και $D = \text{diag}(\Lambda)$. Τα παραπάνω κάνουν σαφές πως έχοντας τα U και D μπορούμε να ανακτήσουμε την κατανομή του X . Έχουμε έτσι μία απεικόνιση από τους συμμετρικούς $n \times n$ πίνακες (δηλαδή, το $\mathbb{R}^{\frac{n}{2}(n+1)}$) στο ζευγάρι (v, Λ) , το οποίο παίρνει τιμές στο $(S_{n-1}^+)^n \times \Delta_n^c$, όπου $\Delta_n^c = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq \dots \leq x_n\}$. Επιπλέον γνωρίζουμε την ανεξαρτησία των δύο αυτών μεταβλητών, καθώς και την κατανομή του πρώτου από το πόρισμα 2.3.4. Υπολογίζοντας την Ιακωβιανή της απεικόνισης, $|\Delta(\Lambda)|$, προκύπτει ότι οι ιδιοτιμές του Γκαουσιανού Ορθογώνιου Μοντέλου έχουν από κοινού κατανομή

$$f_1(\Lambda) = \frac{\pi^{\frac{n}{4}(n-1)}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{(\Gamma(1+1/2))^n}{\Gamma_n^1(1+1/2)} |\Delta(\Lambda)| e^{\text{tr}(-A^2/4)},$$

όπου $\Delta(x)$ η ορίζουσα *Vandermonde* του $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, που δίνεται από τον τύπο $\prod_{i < j} |x_i - x_j|$. Στο ίδιο πλαίσιο, προκύπτει για το Γκαουσιανό μοναδιαίο ($\beta = 2$) αλλά και για το συμπλεκτικό ($\beta = 4$) μοντέλο ότι η απο κοινού κατανομή των ιδιοτιμών είναι η

$$f_\beta(\Lambda) = \frac{\pi^{\frac{n\beta}{4}(n-1)}}{(2\pi)^{n/2}} \frac{(\Gamma(1 + \beta/2))^n}{\Gamma_n^\beta(1 + \beta/2)} |\Delta(\Lambda)|^\beta e^{\text{tr}(-\frac{\beta}{4}A^2)} \quad (2.3.3)$$

Αντίστοιχη εξάρτηση από την ποσότητα β υπάρχει και στις κατανομές των πινάκων Wishart. Η πυκνότητα των στοιχείων δίνεται από

$$P(X) = \frac{1}{2^{mn\beta/2}} \frac{1}{\Gamma_n^\beta(n\beta/2)} e^{\text{tr}(-\frac{\beta}{2}X)} \prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{\beta}{2}(m-n+1)-1}, \quad (2.3.4)$$

ενώ για τις ιδιοτιμές (singular values), η από κοινού κατανομή είναι η

$$L_\beta(\Lambda) = \frac{1}{Z_L} |\Delta(\Lambda)|^\beta e^{\text{tr}(-\frac{\beta}{2}\Lambda)} (\det \Lambda)^{\frac{\beta}{2}(m-n+1)-1}, \quad (2.3.5)$$

όπου η σταθερά Z_L ισούται με

$$\left(\frac{\pi^{m\beta(m-1)}}{2^{mn\beta}} \right)^{1/2} \frac{\Gamma(1 + \beta/2)^n}{\Gamma_n^\beta(1 + \beta/2) \Gamma_n^\beta\left((m-n+1)\frac{\beta}{2}\right)}.$$

Τα παραπάνω αποτελέσματα διατυπώθηκαν με απλό σχολιασμό καθώς οι αποδείξεις τους είναι εκτενείς και ξεφεύγουν από τα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής. Παραπάνω πληροφορίες μπορούν να ευρεθούν στα [3] για τα Γκαουσιανά μοντέλα, ενώ για τα μοντέλα Wishart η βασική αναφορά παραμένει το [51].

2.36' Τα γενικά β -μοντέλα

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα, μπορεί να παρατηρήσει κανείς πως η κατανομή για τις ιδιοτιμές στα μοντέλα Wishart και τα Γκαουσιανά μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$f_\beta(\Lambda) = c |\Delta(\Lambda)|^\beta \prod_{i=1}^n V_\beta(\lambda_i), \quad (2.3.6)$$

όπου $\Delta(\cdot)$ η ορίζουσα *Vandermonde* ενός διανύσματος, και το $V(\cdot)$ είναι το «δυναμικό», όπου για $V_\beta^1(\lambda) = e^{-\beta\lambda^2/4}$ και $V_\beta^2(\lambda) = \lambda^\alpha e^{-\beta\lambda/2}$ ($\alpha = \frac{\beta}{2}(n-m+1)-1$) παίρνουμε αντίστοιχα τις (::) και (::) για τα (όπως θα ονομάζουμε από εδώ και πέρα) β -Hermite και β -Wishart μοντέλα. Επιπλέον, για $V_\beta(\lambda) = \lambda^\alpha (1-\lambda)^b$, με $\alpha = \frac{\beta}{2}(n_1-m+1)$, $b = \frac{\beta}{2}(n_2-m+1)-1$ παίρνουμε τα μοντέλα MANOVA ή Jacobi.

Η (2.3.6) για τα δυναμικά που αναφέραμε δίνουμε για $\beta = 1, 2, 4$ τα γνωστά GOE/GUE/GSE και τα $\mathbb{R}/\mathbb{C}/\mathbb{H}$ -Wishart. Η παραπάνω κατασκευή αποτελεί γενίκευση της τριχοτόμησης του Dyson [24] για τα αναλλοίωτα μοντέλα.

β -Hermite

Θα ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας την τεχνική για την περίπτωση $\beta = 1$ δηλαδή στο μοντέλο GOE, και στη συνέχεια θα μεταφέρουμε την απόδειξη για τη γενική τιμή της παραμέτρου. Σε αυτήν την υποενότητα όταν αναφερόμαστε στην f_β θα είναι με το δυναμικό $V_\beta^1(\lambda) = e^{-\beta\lambda^2/4}$.

Θεώρημα 2.3.5. [65] Έστω ένας πίνακας A από το μοντέλο $\text{GOE}(n)$. Τότε, η αναγωγή του σε τριδιαγώνια μορφή δείχνει πως ο πίνακας $T = H_1$ έχει από κοινού κατανομή ιδιοτιμών $f_1(\Lambda)$.

Ορισμός 2.3.6. Ο πίνακας από το β -Hermite (ή $\text{Hermite}(\beta)$) μοντέλο πινάκων ακολουθεί την εξής κατανομή

$$H_n^\beta = H_\beta \sim \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{pmatrix} g_1 & \chi_{(n-1)\beta} & & & & \\ \chi_{(n-1)\beta} & g_2 & \chi_{(n-2)\beta} & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \chi_{2\beta} & g_{n-1} & \chi_\beta & \\ & & & \chi_\beta & g_n & \end{pmatrix}, \quad (2.3.7)$$

όπου $g_i \sim \mathcal{N}(0, 2)$ ανεξάρτητες και $\chi_r = \sqrt{\chi_r^2}$.

Απόδειξη. (Θεωρήματος (2.3.5))

Θα επαναλάβουμε την απόδειξη ύπαρξης Jacobi αντιπροσώπου για τις κλάσεις ισοδυναμίας του φασματικού μέτρου (2.2.8). Γράφουμε τον πίνακα

$$A = \left(\begin{array}{c|c} g_1 & b_{n-1}^T \\ \hline b_{n-1} & G_{n-1} \end{array} \right),$$

όπου $g_1 \sim N(0, 1)$, $b_k = (g_{i,k})_{i=1}^k$, ένα k -διάστατο Γκαουσιανό διάνυσμα ($k = 1, \dots, n-1$), και G_{n-1} ο κάτω δεξιά $(n-1) \times (n-1)$ υποπίνακας του A . Για $\mathcal{O}$ να είναι όπως στην (;) η $n-1$ ανάκλαση Householder [35]. παίρνουμε πως

$$\mathcal{O}b_{n-1} = (\|b_{n-1}\|, 0, \dots, 0) \sim \chi_{n-1},$$

και για $\mathcal{Q} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathcal{O} \end{array} \right)$ παίρνουμε

$$\mathcal{Q}A\mathcal{Q}^T \sim \left(\begin{array}{c|ccc} g_1 & \chi_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ \hline \chi_{n-1} & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & \mathcal{O}G_{n-1}\mathcal{O}^T & \\ 0 & & & & \end{array} \right).$$

Ο πίνακας $\mathcal{O}G_{n-1}\mathcal{O}^T$ έχει προέλθει από έναν $\text{GOE}(n-1)$ έπειτα από συζυγία με έναν ορθογώνιο. Από (2.3.3) είναι και αυτός $\text{GOE}(n-1)$. Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα για αυτόν τον πίνακα μπορούμε να αλλάξουμε τη δικιά του πρώτη γραμμή και στήλη. Στο τελευταίο βήμα

παίρνουμε τον πίνακα της οικογένειας β –Hermite. Αφού οι ανακλάσεις που χρησιμοποιήθηκαν είναι ορθογώνιες, ο μετασχηματισμός σε τριδιαγώνιο πίνακα δεν επηρεάζει τις ιδιοτιμές και έτσι, ο προκύπτων πίνακας T έχει πυκνότητα ιδιοτιμών ίση με $f_1(\Lambda)$. ■

Ανακαλούμε από την ενότητα (2.3α') ότι για τους πίνακες GOE ισχύει πως η πρώτη γραμμή του πίνακα ιδιοδιανυσμάτων τους είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο πάνω στη σφαίρα της κατάλληλης διάστασης, και ανεξάρτητο από τις ιδιοτιμές.

Πόρισμα 2.3.7. Έστω $T \sim H_1$ με ανάλυση σε διάγωνιο πίνακα $T = Q\Lambda Q^T$, $q = (q_{11}, \dots, q_{1n})$ η πρώτη συντεταγμένη από κάθε ιδιοδιάνυσμα και $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ οι ιδιοτιμές. Τότε, τα q, Λ είναι ανεξάρτητα και το πρώτο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στη μοναδιαία σφαίρα.

Απόδειξη. Έστω $A \in \text{GOE}(n)$ και $A = Q_1\Lambda Q_1^T$. Επιπλέον από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $T = HAH^T$, όπου H είναι το γινόμενο των ανακλάσεων Householder που χρησιμοποιήθηκαν. Κάθε μία από αυτές έχει πρώτη γραμμή e_1^T επομένως ο πολλαπλασιασμός με το H αφήνει αναλλοίωτη την πρώτη γραμμή. Επειδή $Q = HQ_1$, και γνωρίζουμε ήδη τα αποτελέσματα του πορίσματος για τον πίνακα Q_1 , το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. ■

Παρατήρηση 2.3.8. Η αναγωγή σε τριδιαγώνια μορφή μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε πραγματικό συμμετρικό, μιγαδικό Ερμιτιανό ή αυτοδυϊκό πίνακα από quaternions, με το αποτέλεσμα να είναι πάντα πραγματικός συμμετρικός. Το παραπάνω πόρισμα μπορεί να γενικευθεί.

Πόρισμα 2.3.9. Για τις τιμές $\beta = 2, 4$ η αναγωγή των πινάκων GUE, GSE σε τριδιαγώνια μορφή δίνουν πως οι πίνακες από τα μοντέλα 2, 4–Hermite έχουν από κοινού κατανομή ιδιοτιμών f_2 και f_4 αντίστοιχα.

Απόδειξη. Ακριβώς ίδια. ■

Το κλειδί για την απόδειξη πως οι ιδιοτιμές από το β –Hermite μοντέλο έχουν f_β πυκνότητα είναι ο υπολογισμός της Ιακωβιανής μίας συγκεκριμένης απεικόνισης.

Πιο συγκεκριμένα, ένας $n \times n$ πίνακας Jacobi T χαρακτηρίζεται από $2n - 1$ στοιχεία:

$$\begin{aligned} a &= (a_n, \dots, a_1), \quad a_i \in \mathbb{R} \\ b &= (b_{n-1}, \dots, b_1), \quad b_i > 0. \end{aligned}$$

Έστω, επιπλέον η ανάλυση του σε διαγώνιο πίνακα

$$T = Q\Lambda Q^T$$

και $q = (q_1^1, \dots, q_n^1)$ όπως πριν η πρώτη γραμμή του Q . Για τους πίνακες Jacobi ισχύει το εξής αποτέλεσμα

Λήμμα 2.3.10. Οι ιδιοτιμές ενός πίνακα Jacobi είναι διακεκριμένες και κάθε ιδιοδιάνυσμα έχει μη-μηδενική πρώτη συντεταγμένη.

Απόδειξη. Αρχικά, κάθε ιδιόχωρος ενός T πίνακα Jacobi είναι το πολύ μονοδιάστατος. Πράγματι, έστω $Tv = 0, v \neq 0$. Από το

$$\begin{pmatrix} a_n & b_{n-1} & & & \\ b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_2 & a_2 & b_1 \\ & & & b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0$$

παίρνουμε τις εξής σχέσεις

$$\begin{aligned} 0 &= a_n v_1 + b_{n-1} v_2 \\ 0 &= b_{n-1} v_1 + a_{n-1} v_2 + b_{n-2} v_3 \\ &\vdots \\ 0 &= b_1 v_{n-1} + a_1 v_n. \end{aligned}$$

Γενικά

$$b_{n-i} v_i + a_{n-i} v_{i+1} + b_{n-i-1} v_{i+2}, \quad i = 2, \dots, n-2. \quad (2.3.8)$$

Υποθέτοντας $v_1 \neq 0$ μπορούμε να βρούμε όλα τα $v_i, i = 2, \dots, n$ συναρτήσει της πρώτης συντεταγμένης, επομένως η διάσταση είναι μικρότερη ίση του ένα. Τώρα, για κάθε λ , ο πίνακας $T - \lambda I$ είναι ξανά Jacobi, επομένως λύνοντας το $(T - \lambda I)v = 0$ παίρνουμε πως $\dim V(\lambda) \leq 1$. Επιπλέον το ότι η πρώτη συντεταγμένη αυτού του διανύσματος είναι μη-μηδενική προκύπτει από το γεγονός πως, αν $v_1 = 0$ από την αναδρομική σχέση παίρνουμε διαδοχικά πως $v_2 = 0, v_3 = 0, \dots, v_n = 0$, δηλαδή $v = 0$, πράγμα αδύνατο. ■

Η βασική παρατήρηση είναι πως κάποιος μπορεί να επαναπροσδιορίσει πλήρως τους πίνακες Q και T χρησιμοποιώντας μόνο τα q και $\text{diag}(\Lambda)$. Η απόδειξη για το παραπάνω μπορεί να βρεθεί στο [55]. Ορίζουμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} \Delta_n^c &= \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 > \dots > x_n\} \\ S_+^{n-1} &= \{v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1, v_1 > 0\} \end{aligned}$$

και την απεικόνιση $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{n-1} \rightarrow S_+^{n-1} \times \Delta_n^c$

$$\phi(a, b) = (q, \lambda).$$

Λήμμα 2.3.11. (α') Η απεικόνιση ϕ είναι 1-1, επί και (β') η Ιακωβιανή της είναι ανάλογη του

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\prod_{i=1}^n b_i^{i-1}}.$$

Απόδειξη. (μέρους α') Έστω $\phi(a, b) = \phi(a', b')$. Τότε, έχουμε δύο πίνακες Jacobi, T, T' οι οποίοι έχουν το ίδιο q και λ , δηλαδή ίδιες ιδιοτιμές και ίδιες πρώτες συντεταγμένες στα ιδιοδιανύσματά τους. Δηλαδή, το φασματικό τους μέτρο είναι το ίδιο και από την απόδειξη μοναδικότητας για τον αντιπρόσωπο κάθε κλάσης φασματικού μέτρου (::) παίρνουμε πως $T = T'$. Έστω τώρα (q, λ) . Από τις παρατηρήσεις παραπάνω και την αναδρομική σχέση (2.3.8) είναι άμεση η επαναφορά των πινάκων Q, T και κατ' επέκταση των (a, b) που χρειάζονται ώστε $\phi(a, b) = (q, \lambda)$. ■

Πρωτού προχωρήσουμε στην απόδειξη του δεύτερου μέρους, θα χρειαστούμε το εξής

Λήμμα 2.3.12. Η ορίζουσα Vandermonde για τις διατεταγμένες ιδιοτιμές ενός Jacobi πίνακα με στοιχεία εκτός διαγωνίου τα $b = (b_1, \dots, b_n)$ δίνεται από τον εξής τύπο

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^i}{\prod_{i=1}^n q_i}, \quad (2.3.9)$$

όπου q οι πρώτες συντεταγμένες των ιδιοδιανυσμάτων του.

Απόδειξη. Ξεκινάμε με την εξής απλή παρατήρηση: Για κάθε $k = 1, \dots, n-1$ το διάνυσμα $T^k e_1$ έχει τις πρώτες $k+1$ θέσεις του μη-μηδενικές και τις υπόλοιπες μηδέν. Επιπλέον το τελευταίο μη-μηδενικό στοιχείο του είναι το $b_{n-1} \cdots b_{n-k}$. Για $k=1$ προφανώς η πρώτη στήλη του πίνακα T έχει τις δύο πρώτες θέσεις μη-μηδενικές και το δεύτερο στοιχείο είναι το b_{n-1} . Έστω τώρα πως η πρώτη στήλη του T^k , έστω $(x_1, \dots, x_k, b_{n-1} \cdots b_{n-k}, \dots, 0)^T$ ικανοποιεί τις υποθέσεις μας. Τότε

$$\begin{aligned} T^{k+1} e_1 &= T(T^k e_1) = \begin{pmatrix} a_n & b_{n-1} & & & \\ b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_2 & a_2 & b_1 \\ & & & b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \cdots b_{n-k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (x'_1, \dots, x'_{k+1}, b_{n-1} \cdots b_{n-k} b_{n-k-1}, 0, \dots, 0)^T, \end{aligned}$$

Αυτό που συμβαίνει στον παραπάνω πολλαπλασιασμό είναι πως από τη δεύτερη σειρά και μετά έχουμε τρεις διαδοχικές θέσεις να πολλαπλασιάζονται με το διάνυσμα $T^k e_1$. Η i σειρά ξεκινάει να πολλαπλασιάζεται με το x_i , επομένως η $(k+2)$ σειρά θα είναι αυτή που θα συνεισφέρει το τελευταίο μη-μηδενικό στοιχείο, το οποίο είναι $b_{n-k-1} \cdot (b_{n-1} \cdots b_{n-k}) + a_{n-k-1} \cdot 0 + b_{n-k-2} \cdot 0$. Από τα παραπάνω είναι εμφανές πως οι παρακάτω θέσεις του διανύσματος $T^{k+1} e_1$ δεν μπορούν παρά να είναι μηδέν.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω έχουμε το εξής

$$\begin{aligned} \det(E) &:= \det(e_1, T e^1, \dots, T^{n-1} e^1) = 1 \cdot \det(E_{11}) \\ &= 1 \cdot b_{n-1} \det((E_{11})_{11}) = \cdots = (b_{n-1}) \cdot (b_{n-1} b_{n-2}) \cdots (b_1 \cdots b_{n-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} b_i^i, \end{aligned}$$

όπου με $(A)_{11}$ συμβολίζουμε έναν πίνακα χωρίς την πρώτη γραμμή και στήλη του. Παράλληλα από τη σχέση $T = Q\Lambda Q^T$ έχουμε πως

$$\begin{aligned} \det(e_1, Q\Lambda Q^T e_1, \dots, Q\Lambda Q^T e_1) &= \det(Q^T) \det(Q^T e_1, Q^T Q\Lambda q_1, \dots, Q^T Q\Lambda^{n-1} q_1) \\ &= \pm \det(q_1, \Lambda q_1, \dots, \Lambda^{n-1} q_1) \\ &= \det \begin{pmatrix} q_1^1 & \lambda_1 q_1^1 & \dots & \lambda_1^{n-1} q_1^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1^n & \lambda_n q_1^n & \dots & \lambda_n^{n-1} q_1^n \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} q_1^1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & q_1^n & \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n q_i^i \right) \Delta(\Lambda), \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει πως

$$\Delta(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^i}{\prod_{i=1}^n q_i}$$

■

Απόδειξη. (μέρος β' του λήμματος (2.3.11))

Θα υπολογίσουμε την Ιακωβιανή

$$J = \left\{ \frac{\partial(a, b)}{\partial(q, \lambda)} \right\}$$

Από την στιγμή που το τελικό αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο του β , θα δουλέψουμε πάλι για την περίπτωση $\beta = 1$ και η Ιακωβιανή θα είναι η ίδια και για τυχούσες τιμές της παραμέτρου. Έστω $T \in \text{Hermite}(1)$. Τότε, οι ιδιοτιμές του είναι ίδιας κατανομής με του $A \in \text{GOE}(n)$, τέτοιου ώστε $T = HAH^T$. Τότε, η από κοινού κατανομή των στοιχείων του πίνακα T είναι

$$\begin{aligned} \mu(a, b) &= c_{a,b} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right\} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i-1} \\ &= c_{a,b} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{4} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i^2}{2} \right\} \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i-1}, \end{aligned}$$

με

$$c_{a,b} = \frac{2^{n-1}}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n-1} \Gamma(i/2)}$$

Για την απόδειξη του παραπάνω, βλ. την απόδειξη του Θεωρήματος ;; όπου αναλύεται η ίδια πυκνότητα για γενικό β .

Συμβολίζουμε τα παρακάτω wedge products ως εξής

$$da = da_1 \wedge \cdots \wedge da_n,$$

$$db = db_1 \wedge \cdots \wedge db_n,$$

$$d\lambda = d\lambda_1 \wedge \cdots \wedge d\lambda_n,$$

και dq για το στοιχείο της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας S^{n-1} .

Αν γράψουμε $\mu(a(q, \lambda), b(q, \lambda))$ για την πυκνότητα των ιδιοτιμών ως προς τις καινούριες συντεταγμένες, ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$\mu(a, b)dad b = J \cdot \mu(a(q, \lambda), b(q, \lambda)) dq d\lambda = \nu(q, \lambda) dq d\lambda.$$

Όμως, $\nu(q, \lambda)$ είναι η πυκνότητα των ιδιοτιμών και του πρώτου ιδιοδιανύσματος του $\text{GOE}(n)$, η οποία λόγω ανεξαρτησίας ισούται με

$$\nu(q, \lambda) dq d\lambda = n! c_H^1 \frac{2^{n-1} \Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \Delta(\Lambda) \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right\} dq d\lambda,$$

όπου η επιπλέον σταθερά προκύπτει από τη δέσμευση πως η πρώτη συντεταγμένη είναι θετική. Τότε, η Ιακωβιανή θα είναι απλά ο λόγος

$$\begin{aligned} \frac{\mu(a, b)}{\nu(q, \lambda)} &= [\cdot] \frac{\Delta(\Lambda)}{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^{i-1}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i}{\prod_{i=1}^n q_i}. \end{aligned}$$

■

Έχοντας όλα τα παραπάνω, μπορούμε να αποδείξουμε το εξής θεώρημα για έναν πίνακα H_β από το μοντέλο β -Hermite:

Θεώρημα 2.3.13. Έστω $H_\beta = Q\Lambda Q^T$ είναι η ανάλυση του σε διαγώνιο πίνακα, σταθεροποιώντας τα πρόσχημα της πρώτης γραμμής του Q και διατάσσοντας τις ιδιοτιμές $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Τότε τα q, Λ είναι ανεξάρτητα και επιπλέον

$$f_\beta(\Lambda) = c_H^\beta |\Delta(\Lambda)|^\beta \exp \left\{ -\frac{\beta}{4} \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \right\}, \quad (2.3.10)$$

ενώ το q ακολουθεί $\text{Dirichlet}(\frac{\beta}{2}, \dots, \frac{\beta}{2})$ κατανομή.

Απόδειξη. Με τον ίδιο συμβολισμό για τα $a, b, da, db, dq, d\lambda$ όπως πριν, έχουμε πως η από κοινού πυκνότητα των στοιχείων του πίνακα H_β , για γενικό β , είναι

$$\begin{aligned} (dH_\beta) &:= \mu(a, b)dad b = c_{ab} \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{k\beta-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|T_1\|_F \right\} dad b \\ &= c_{ab} J \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{k\beta-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|T_1\|_F \right\} dq d\lambda. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Αυτό διότι τα στοιχεία $a = (a_n, \dots, a_1)$ ακολουθούν την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$ και το κάθε $b_k \sim \chi_{k\beta}/\sqrt{2}$, της οποίας η πυκνότητα είναι $h_k(t) = \sqrt{2}f_{\chi_{k\beta}}(\sqrt{2}t)$. Ολοκληρώνοντας ως προς όλες τις $2n - 1$ μεταβλητές, τα εκθετικά των πυκνοτήτων θα έχουν ως εκθέτη $\sum_i a_i^2/2 + \sum_j b_j^2$ που είναι ακριβώς η Frobenius νόρμα ή, αλλιώς, το ίχνος του τετραγώνου. Ο όρος του γινομένου παραπάνω είναι ο όρος $x^{k\beta-1}$ της πυκνότητας της $\chi_{k\beta}$, ενώ το c_{ab} είναι το γινόμενο των σταθερών όλων των επιμέρους πυκνοτήτων,

$$c_{ab} = \frac{2^{n-1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma(\frac{\beta}{2}n)}$$

Αντικαθιστώντας τον τύπο της Ιακωβιανής από το λήμμα 2.3.11 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (dH_\beta) &= c_{ab} \frac{\prod_k b_k}{\prod_i q_i} \prod_k b_k^{k\beta-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|T_1\|_F \right\} dq d\lambda \\ &= c_{ab} \frac{\prod_k b_k^{k\beta}}{\prod_i q_i} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \|T_1\|_F \right\} dq d\lambda \\ &= c_{ab} \frac{\prod_k b_k^{k\beta}}{\prod_i q_i^\beta} \prod_i q_i^{\beta-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2 \right\} dq d\lambda, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

όπου το i παίρνει τιμές μέχρι n και το k μέχρι $n - 1$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.3.12 για την ορίζουσα Vandermonde, παίρνουμε πως τελικά η παραπάνω ισούται με

$$\begin{aligned} (dH_\beta) &= c_{ab} n! \prod_i q_i^{\beta-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2 \right\} |\Delta(\Lambda)|^\beta dq d\lambda \\ &= \left(c_q \prod_i q_i^{\beta-1} dq \right) \left(n! c_H |\Delta(\Lambda)|^\beta \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^2 \right\} d\lambda \right). \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Άμεση συνέπεια είναι η ανεξαρτησία του q από το Λ , ενώ επίσης από 2.3.13 προκύπτει πως η κατανομή του $q = (q_1, \dots, q_n)$ είναι η Dirichlet($\frac{\beta}{2}, \dots, \frac{\beta}{2}$). ■

β -Laguerre

Έστω $A_\beta = A \in G^\beta(n, m)$ (θεωρούμε πως $m \geq n$ δίχως βλάβη της γενικότητας). Οι Wishart πίνακες προκύπτουν από το γινόμενο AA^* . Ονομάζοντας $W_\beta = W$ την ανηγμένη διδιαγώνια μορφή του A , ισχύει ότι ο WW^* είναι συμμετρικός τριδιαγώνιος. Για να το παρατηρήσει αυτό κανείς για έναν οποιοδήποτε διδιαγώνιο W , αρκεί να κάνει τις πράξεις (παράδειγμα για W έναν 2×3 πίνακα)

$$\begin{pmatrix} x_3 & y_2 & 0 \\ 0 & x_2 & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & 0 \\ y_2 & x_2 \\ 0 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3^2 + y_2^2 & y_2 x_2 \\ y_2 x_2 & x_2^2 + y_1^2 \end{pmatrix}$$

Αυτή η διδιαγωνιοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί στον πίνακα A παίρνοντας το γινόμενο WW^* θα έχουμε ένα τριδιαγώνιο μοντέλο αντίστοιχο του β -Hermite για τους Wishart πίνακες, το β -Laguerre.

Θεώρημα 2.3.14. Έστω $A \in G^1(n, m)$ και $X = AA^*$. Τότε ο $L = WW^*$, όπου W η διδιαγώνια μορφή του A έχει πυκνότητα ιδιοτιμών την

$$\Lambda_1(\Lambda) = \frac{1}{Z_\Lambda} |\Delta(\Lambda)| e^{tr(-X/2)} \prod_i \lambda_i^{a-p}, \quad (2.3.14)$$

όπου $a = \frac{1}{2}n$ και $p = 1 + \frac{1}{2}(m-1)$.

Απόδειξη. Γράφουμε τον $A = \begin{pmatrix} x^\dagger \\ A_1 \end{pmatrix}$, όπου $x \in \mathbb{R}^m$ και A_1 είναι $(n-1) \times m$ πίνακας που προκύπτει αγνοώντας την πρώτη γραμμή του A . Έστω R δεξιά ανάκλαση, τέτοια ώστε $R^\dagger x = \|x\| e_1^\dagger$, όπου e_1 είναι m -διάνυσμα στήλη με μονάδα στην πρώτη συντεταγμένη. Επειδή η ανάκλαση αυτή είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός (και ανεξάρτητος του A_1), προκύπτει ότι ο $A_1 R$ είναι πάλι πίνακας από Γκαουσιανά στοιχεία, ενώ επιπλέον

$$AR = \begin{pmatrix} \|x\| & \dots & 0 \\ A_1 R \end{pmatrix}$$

Για να ολοκληρωθεί το πρώτο βήμα, γράφουμε $A_1 R = [y, A_2]$, όπου τώρα y είναι η πρώτη στήλη του $A_1 R$, η οποία ανήκει στο $\mathbb{R}^{n-1}$, ενώ A_2 είναι διάστασης $(n-1) \times (m-1)$. Αντίστοιχα, θεωρούμε L την αριστερή ανάκλαση ώστε $Ly = \|y\| e_1$ όπου το e_1 είναι το διάνυσμα στήλη $(1, \dots, 0)^\dagger \in \mathbb{R}^{n-1}$. Ξανά από το ορθογώνιο αναλλοίωτο του A_2 έχουμε ότι

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} AR = \left(\begin{array}{c|ccc} \|x\| & 0 & \dots & 0 \\ \hline \|y\| & & & \\ \vdots & & & LA_2 \\ 0 & & & \end{array} \right) \quad (2.3.15)$$

Εφαρμόζοντας ακριβώς την ίδια διαδικασία για τον LA_2 , και επαλαμβάνοντας μέχρι το αποτέλεσμα να είναι ένας κάτω διδιαγώνιος πίνακας παίρνουμε το ζητούμενο. Μέχρι τώρα δεν έχουμε ασχοληθεί με το τί είναι τα $\|x\|$ και τα υπόλοιπα. Επιστρέφοντας στην παραπάνω διαδικασία, παρατηρούμε πως στην πρώτη γραμμή του προκύπτοντος πίνακα έχουμε το μήκος ενός Γκαουσιανού διανύσματος μήκους m , δηλαδή χ_m . Για το $\|y\|$ το ίδιο επιχείρημα δίνει ότι ακολουθεί χ_{n-1} κατανομή. Επειδή οι μετασχηματισμοί ήταν ορθογώνιοι, έπεται πως ο πίνακας WW^* , όπου

$$W = \begin{pmatrix} \chi_m & & & & \\ \chi_{n-1} & \chi_{m-1} & & & \\ & \chi_{n-2} & \ddots & & \\ & & \ddots & \chi_p & \\ & & & \tilde{\chi}_1 & \end{pmatrix} \quad (2.3.16)$$

έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με τον AA^* . ■

Τα παραπάνω μπορούν να γενικευτούν και ως προς $\beta = 2, 4$ ακριβώς όπως το πόρισμα 2.3.7. Προκειμένου να αποδείξουμε το ανάλογο του Θεωρήματος 2.3.13 θα χρειαστεί να υπολογίσουμε μία ακόμη Ιακωβιανή. Γράφουμε $x = (x_n, \dots, x_1)$ για τα διαγώνια στοιχεία, και $y = (y_{n-1}, \dots, y_1)$ για τα πρώτα $n - 1$ κάτω μη-διαγώνια του W . Το γεγονός πως (στην περίπτωση μας) τα x, y έχουν θετικά στοιχεία μας δίνει πως ο $L = WW^*$ είναι θετικά ορισμένος. Επομένως, υπάρχει μία απεικόνιση ϕ , η οποία είναι $1 - 1$ και επί από το σύνολο των διδιαγώνιων πινάκων με θετικά στοιχεία, στο σύνολο των τριδιαγώνιων, θετικά ορισμένων πινάκων. Θέλουμε να υπολογίσουμε την Ιακωβιανή $\mathcal{J}_{BT}$ αυτής της απεικόνισης. Αν, όπως πριν, συμβολίσουμε με $a = (a_n, \dots, a_1)$ τα διαγώνια και $b = (b_{n-1}, \dots, b_1)$ τα μη-διαγώνια του τριδιαγώνιου πίνακα, έχουμε τις εξής σχέσεις, οι οποίες προκύπτουν ανοίγοντας απλά το γινόμενο των δύο διδιαγώνιων πινάκων WW^* .

Πρόταση 2.3.15. *Η απεικόνιση $\phi : W \mapsto WW^*$ από το σύνολο των κάτω διδιαγώνιων πινάκων*

$$\{W \in \text{Mat}_{nm}(\mathbb{F}) : W_{i,i} > 0, W_{j,k} = \delta_{j-1}(k)w_k > 0\}$$

στο σύνολο των θετικά ορισμένων τριδιαγώνιων

$$\{L \in \text{Mat}_n(\mathbb{F}) : F_{i,i} \in \mathbb{R}, F_{j,k} = (\delta_{j-1}(k) + \delta_{j+1}(k))w_k > 0\}$$

είναι $1 - 1$, επί και η Ιακωβιανή της ισούται με

$$\mathcal{J}_{BT} = \left(2^n x_1 \prod_{i=1}^n x_i^2 \right)^{-1} \quad (2.3.17)$$

Απόδειξη. Ότι είναι $1 - 1$ και επί έπεται από γραμμική άλγεβρα και το ίδιο επιχείρημα από το [55]. Για τον υπολογισμό της Ιακωβιανής, εξισώνοντας τους δύο πίνακες έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a_n &= x_n^2 \\ a_i &= y_i^2 + x_i^2, \quad 0 \leq i \leq n-1 \\ b_i &= y_i x_{i+1}. \end{aligned}$$

Αν $da = da_1 \cdots da_n, db = db_1 \cdots db_{n-1}$ και $dx = dx_1 \cdots dx_n, dy = dy_1 \cdots dy_{n-1}$, οι παραπάνω σχέσεις δίνουν

$$da_n = 2x_n dx_n \quad (2.3.18)$$

$$da_i = 2y_i dy_i + 2x_i dx_i, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (2.3.19)$$

$$db_i = x_{i+1} dy_i + y_i dx_{i+1}. \quad (2.3.20)$$

Επομένως, κάνοντας αλλαγή μεταβλητών παίρνουμε

$$\begin{aligned} dx dy &= \mathcal{J}_{BT} da db \\ &= \mathcal{J}_{BT} 2^n \prod_{i=1}^{n-1} (y_i dy_i + x_i dx_i) x_n dx_n \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} dy_i + y_i dx_{i+1}). \end{aligned}$$

Ανοίγοντας προσεκτικά τις παρενθέσεις, ο μόνος όρος που δεν περιέχει τετράγωνο κάποιου διαφορικού είναι ο

$$2^n x_1 \prod_{i=1}^n x_i^2,$$

το οποίο, σε συνδυασμό με το παραπάνω μας δίνει τη (2.3.17). ■

Για έναν πίνακα να ανήκει στο β -Laguerre μοντέλο σημαίνει πως προκύπτει ως το γινόμενο $W_\beta W_\beta^*$ όπου W_β ο διδιαγώνιος με στοιχεία στη διαγώνιο $x = (\chi_{2a}, \chi_{2a-\beta}, \dots, \chi_{2a-\beta(n-1)}) = (\chi_{n\beta}, \chi_{(n-1)\beta}, \dots, \chi_\beta)$, και $y = (\chi_{\beta(n-1)}, \dots, \chi_\beta)$ κάτω από τη κύρια διαγώνιο.

Θεώρημα 2.3.16. Έστω $\Lambda_\beta = Q\Lambda Q^\dagger$ η ιδιοανάλυση του Λ_β , δηλαδή $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ και Q ο πίνακας των (ορθοκανονικών) ιδιοδιανυσμάτων του. Υποθέτουμε σταθερό θετικό πρόσημο στην πρώτη γραμμή του Q , την οποία συμβολίζουμε $q = (q_1, \dots, q_n)$, αλλιώς και αύξουσα διάταξη στις ιδιοτιμές.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις, τα q και Λ είναι ανεξάρτητα, με το q να είναι κατανεμημένο ως κανονικοποιημένο n -διάστατο διάνυσμα με κανονικοποιημένα στοιχεία χ_β , ενώ η κατανομή του Λ είναι

$$\frac{1}{Z_\Lambda} |\Delta(\Lambda)|^\beta \prod_{i=1}^n \lambda_i^{a-p} \exp\left(-\sum_i \lambda_i/2\right), \quad (2.3.21)$$

με $a = \beta/2$ και $p = 1 + (\beta/2)(m-1)$.

Απόδειξη. Συμβολίζοντας ξανά με $d\cdot$ το κατάλληλο γινόμενο διαφορικών, γράφουμε για τη πυκνότητα του διδιαγώνιου πίνακα:

$$(dW_\beta) := \mu(x, y) dx dy = c_{xy} \prod_{i=1}^{n-1} x_{n-i}^{a-\beta i-1} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right) \prod_{i=1}^{n-1} y_i^{\beta i-1} \exp(-y_i^2/2) dx dy,$$

η οποία προκύπτει χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των στοιχείων και το γεγονός πως το καθένα ακολουθεί την κατάλληλη χ κατανομή κάθε φορά. Από τη (2.3.17) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} (d\Lambda_\beta) &:= \mathcal{J}_{BT}^{-1} \mu(x, y) dx dy \\ &= 2^{-n} c_{xy} x_1^{2n-\beta(n-1)-2} \exp(-x_1^2/2) \prod_{i=1}^{n-2} x_{n-i}^{a-\beta i-3} \exp(-x_i^2/2) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{n-1} y_i^{\beta i-1} \exp(-y_i^2/2) dx dy, \end{aligned}$$

με

$$c_{xy} = 2^{1-2n} \prod_{i=1}^{n-1} \Gamma\left(i\frac{\beta}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(a - \frac{\beta}{2}(i-1)\right)$$

Αναδιατάσσουμε τους όρους της παραπάνω ισότητας και κάνουμε την επιπλέον αλλαγή στα διαφορικά $dq d\lambda$, που μας δίνουν τον επιπλέον όρο $(\prod q_i)^{-1} (\prod_i b_i)$,

$$\begin{aligned} (d\Lambda_\beta) &= 2^{-n} c_{xy} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum (x_i^2 + y_i^2)\right) \frac{\prod_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i}{\prod_{i=1}^n q_i} x_1^{2a-\beta(n-1)-2} \prod_{i=1}^{n-2} x_{n-i}^{a-\beta i-3} \prod_{i=1}^{n-1} y_i^{\beta i-1} \\ &= 2^{-n} c_{xy} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum (x_i^2 + y_i^2)\right) \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} y_i)^{\beta i}}{\prod_{i=1}^n q_i^\beta} \prod_{i=1}^n q_i^{\beta-1} \prod_{i=1}^{n-1} x_{n-i}^{2a-\beta(n-1)-2} dq d\lambda \\ &= 2^{-n} c_{xy} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum (x_i^2 + y_i^2)\right) |\Delta(\Lambda)|^\beta \prod_{i=1}^n q_i^{\beta-1} \prod_{i=0}^{n-1} x_{n-i}^{2a-\beta(n-1)-2} dq d\lambda, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση της ορίζουσας Vandermonde, 2.3.9. Τέλος, επειδή το ίχνος και η ορίζουσα είναι αναλλοίωτα κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς, έπεται πως

$$\begin{aligned} \sum (x_i^2 + y_i^2) &= \sum_i \lambda_i, \\ \prod_i \lambda_i &= \prod_{i=0}^{n-1} x_{n-i}^2, \end{aligned}$$

από το οποίο παίρνουμε ότι

$$(d\Lambda_\beta) = \left(c_{\beta q} \prod_{i=1}^{n-1} q_i^{\beta-1} dq \right) \left(n! c_{L,\beta,a} e^{-\sum_i \lambda_i/2} |\Delta(\Lambda)|^\beta \prod_{i=1}^n \lambda_i^{a-p} \right).$$

Η ανεξαρτησία και οι κατανομές των q, Λ είναι πλέον άμεσο πόρισμα της παραπάνω γραμμής. ■

2.3γ' Οι νόμοι των Wigner και Marcenko-Pastur

Θεωρούμε τους H_β^n, L_β^n τυχαίους $n \times n$ πίνακες που αντιστοιχούν στα β -Hermite και β -Laguerre μοντέλα αντίστοιχα.

Ως τριδιαγώνιοι πίνακες, μπορούν να θεωρηθούν πίνακες γειτνίασης βεβαρημένων μονοπατιών με αυτο-ακμές, τα βάρη των οποίων είναι τυχαίες μεταβλητές. Εκμεταλλευόμενοι τη μέθοδο που αναφέραμε στην παρατήρηση (2.2.3), σε συνδυασμό με το θεώρημα από το [1], μπορούμε να δώσουμε μία άλλη απόδειξη για τους κλασικούς νόμους των Wigner και Marcenko-Pastur.

Θεώρημα 2.3.17. Έστω G_n μία ακολουθία πεπερασμένων τυχαίων γραφημάτων με ρίζα που συγκλίνουν στο G με την Benjamini-Schramm έννοια. Τότε το μ_{G_n} συγκλίνει ασθενώς στο μ_G και επιπλέον

$$\lim_n \mu_{G_n}(\{x\}) = \mu_G(\{x\}),$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Στην περίπτωση βεβαρημένων γραφημάτων, αν έχουμε επιπλέον ότι τα βάρη των ακμών στα G_n είναι τυχαίες μεταβλητές που καθορίζονται πλήρως από τις ροπές τους, και ότι κάθε k -ροπή συγκλίνει στις ροπές των βαρών του γραφήματος G , το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει.

Θεώρημα 2.3.18. (Νόμος του Wigner)[67] Η ακολουθία των τυχαίων γραφημάτων με ρίζα που προκύπτει από τον τριδιαγώνιο πίνακα H_β^n έχει Benjamini-Schramm όριο, του οποίου ο οριακός τελεστής γειτνίασης έχει ως αναμενόμενο μέτρο

$$\mu_H(dx) = \mathbb{1}_{\{x \in [-2\sqrt{\beta}, 2\sqrt{\beta}]\}} \frac{\sqrt{4\beta - x^2}}{2\pi\beta} dx \quad (2.3.22)$$

Θεώρημα 2.3.19. (Νόμος Marcenko-Pastur)[46] Η ακολουθία των τυχαίων γραφημάτων με ρίζα που προκύπτει από τον τριδιαγώνιο πίνακα L_β^n έχει Benjamini-Schramm όριο, του οποίου ο οριακός τελεστής γειτνίασης έχει ως αναμενόμενο μέτρο

$$\mu_L(dx) = \mathbb{1}_{\{x \in [L_-, L_+]\}} \frac{\sqrt{(x - L_-)(L_+ - x)}}{2\pi\beta x} dx, \quad (2.3.23)$$

όπου $L_\pm = \beta(1 \pm \sqrt{\gamma})^2$.

Απόδειξη. (Απόδειξη Θεωρήματος (2.3.18))

Θεωρούμε το γράφημα που έχει για ακμές μεταξύ ιδίων κορυφών $a_j^H \sim \mathcal{N}(0, 2)/\sqrt{n}$, και η κορυφή j ενώνεται με τις $j-1, j+1$ με βάρη $b_i^H \sim \chi_{\beta i}/\sqrt{n}$. Στο όριο, θα είναι το ίδιο γράφημα· μένει να ελέγξουμε τα βάρη. Έστω $j_n = \lceil nU \rceil$, η ρίζα που επιλέγεται τυχαία από κάθε H_n με $U \sim \text{Unif}[0, 1]$. Τότε $j_n \rightarrow \infty$ και $j_n/n \rightarrow U$. Τα βάρη στις ακμές από γνωστά ασυμπτωτικά αποτελέσματα για την κανονική και την χ_k συγκλίνουν ως εξής:

$$a_{j_n} \sim \frac{\mathcal{N}(0, 2)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0, \quad b_{j_n} \sim \left(\frac{\beta j_n}{n} \right)^{1/2} \frac{\chi_{\beta j_n}}{\sqrt{\beta j_n}} \rightarrow \sqrt{\beta u},$$

σχεδόν βέβαια. Το οριακό γράφημα H έχει για κορυφές τους ακεραίους, και τα βάρη των ακμών είναι όλα $\sqrt{\beta u}$. Το u υποδεικνύει το σημείο του γραφήματος που επιλέχθηκε για ρίζα. Για το H ο τελεστής γειτνίασης δίνεται από το

$$A_H f(x) = \sqrt{\beta u} (f(x-1) + f(x+1)).$$

Όπως στο παράδειγμα (2.1.2), ο τελεστής διαγωνιοποιείται με ιδιοτιμές

$$\lambda_{u,\omega} = 2\sqrt{\beta u} \cos(\omega)$$

και ιδιοσυναρτήσεις

$$\psi_\omega(x) = e^{i\omega x} / \sqrt{2\pi},$$

για $\omega \in [-\pi, \pi]$. Εναλλακτικά, θεωρώντας τη Fourier βάση $e^{i\omega x} / \sqrt{2\pi}$, $x \in [0, 2]$, $\omega \in [-\pi, \pi]$, έχουμε πως $f(x) = \sum_i a_i e^{i\omega x} / \sqrt{2\pi}$, άρα η εξίσωση ιδιοτιμών γράφεται ως εξής

$$\sqrt{\beta u} \left(\sum_{i=0}^n a_i e^{i\omega x} e^{-i\omega} + \sum_{i=0}^n a_i e^{i\omega x} e^{i\omega} \right) = \lambda \sum_{i=0}^n a_i e^{i\omega x},$$

από όπου παίρνουμε μέσω του $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ ότι για να ισχύει το παραπάνω, προκύπτει ότι $\lambda = 2\sqrt{\beta u} \cos(\omega)$

Έπεται πως

$$\mu_{H,u}(dx) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta_{\lambda_{u,\omega}}(dx) d\omega = \frac{\mathbf{1}\{x \in [-2\sqrt{\beta u}, 2\sqrt{\beta u}]\}}{2\sqrt{4\beta u - x^2}} dx.$$

Αυτό γιατί οι ιδιοτιμές είναι κατανομημένες ομοιόμορφα στον κύκλο ακτίνας $2\sqrt{\beta u}$, επομένως η περιθώρια κατανομή της πρώτης συντεταγμένης θα δίνεται από την παραπάνω scaled εκδοχή της κατανομής arcsine.

Τέλος, αν υπολογίσουμε το αναμενόμενο μέτρο ως προς το u θα πάρουμε το φασματικό μέτρο του H . Παρατηρούμε πως, λόγω της δείκτριας, το $\mu_{H,u}$ είναι μη-μηδενικό μόνο όταν $u \geq x^2/(4\beta)$. Ολοκληρώνοντας ως προς u :

$$\begin{aligned} \mu_H(dx) &= \int_0^1 \frac{\mathbf{1}\{x \in [-2\sqrt{\beta u}, 2\sqrt{\beta u}]\}}{\pi \sqrt{4\beta u - x^2}} du dx = \int_{x^2/(4\beta)}^1 \frac{\mathbf{1}\{x \in [-2\sqrt{\beta}, 2\sqrt{\beta}]\}}{\pi \sqrt{4\beta u - x^2}} du dx \\ &= \frac{1}{2\pi\beta} \mathbf{1}\{x \in [-2\sqrt{\beta}, 2\sqrt{\beta}]\} \int_{x^2/(4\beta)}^1 \frac{d(\sqrt{4\beta u - x^2})}{du} du \\ &= \frac{1}{2\pi\beta} \mathbf{1}\{x \in [-2\sqrt{\beta}, 2\sqrt{\beta}]\} \sqrt{4\beta - x^2}. \end{aligned}$$

■

Απόδειξη. (απόδειξη Θεωρήματος (2.3.19))

Η απόδειξη εδώ είναι ίδια με την προηγούμενη, με τις προφανείς αλλαγές. Το γράφημά μας τώρα, έστω L_n , προκύπτει από τον πίνακα (2.3.16)· έχει αυτοτομές σε κάθε κορυφή με βάρος

ακμών $a_0^L \sim \chi_{2a}^2/n$, $a_i^L \sim \chi_{2a+\beta(n-2i)}^2/n$ ενώ κάθε x_i συνδέεται με τα $x_{i\pm 1}$ με βάρη ακμών $b_i^L \sim \chi_{2a-\beta(i-1)} \chi_{\beta(n-i)}/\sqrt{n}$. Έστω $j_n = \lceil nU \rceil$, η ρίζα που επιλέγεται τυχαία από κάθε L_n με $U \sim \text{Unif}[0, 1]$. Τότε $j_n \rightarrow \infty$ και $j_n/n \rightarrow U$. Ξανά από τα ίδια ασυμπτωτικά, έχουμε πως σχεδόν βέβαια ισχύει

$$a_{j_n}^L \sim \frac{2a - \beta(n - j_n)}{n} \frac{\chi_{2a+\beta(n-j_n)}^2}{2a - \beta(n - j_n)} \rightarrow \beta(\gamma + 1 - 2u),$$

και

$$b_{j_n}^L \sim \sqrt{\frac{2a - \beta(j_n - 1)}{n} \frac{\chi_{2a-\beta(j_n-1)}}{2a - \beta(j_n - 1)}} \sqrt{\frac{\beta(n - j_n)}{n} \frac{\chi_{\beta(n-j_n)}}{\sqrt{\beta(n - j_n)}}} \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta\sqrt{\gamma - u}\sqrt{1 - u}.$$

Επομένως, η δράση του τελεστή γειννίασης θα είναι

$$A_L f(x) = \beta\sqrt{\gamma - u}\sqrt{1 - u}(f(x - 1) + f(x + 1)) + \beta(\gamma + 1 - 2u)f(x).$$

Όπως πριν, θεωρώντας τη βάση Fourier μπορούμε να βρούμε ότι οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_{u,\omega}^L = c_1(u) + 2c_2(u)\cos\omega, \\ c_1(u) = \beta(\gamma + 1 - 2u), \quad c_2(u) = \beta\sqrt{\gamma - u}\sqrt{1 - u}.$$

Τα παραπάνω δίνουν πως το φασματικό μέτρο θα είναι

$$\mu_u^L(dx) = \frac{\mathbb{1}\{x - c_1(u) \in [-2c_2(u), 2c_2(u)]\}}{\sqrt{4c_2^2(u) - (x - c_1(u))^2}} \frac{dx}{\pi}. \quad (2.3.24)$$

Η παραπάνω δείκτρια προκύπτει από το γεγονός πως το στήριγμα του παραπάνω μέτρου πρέπει να είναι όσο το εύρος των ιδιοτιμών $\lambda_{u,\omega}^L$, για $\omega \in [-\pi, \pi]$ ή ισοδύναμα, το x να ανήκει στο $[c_1(u) - 2c_2(u), c_1(u) + 2c_2(u)]$. Θα λύσουμε ως προς u για να πάρουμε ότι ισοδυναμεί με τη συνθήκη

$$u \leq \left(\frac{\beta(1 + \sqrt{\gamma})^2}{x} - 1 \right) \left(\frac{x}{\beta} - (1 - \sqrt{\gamma})^2 \right) = \frac{(L_+ - x)(x - L_-)}{\beta x} =: \ell_\beta(x).$$

Παίρνοντας μέση τιμή ως προς την τυχαία μεταβλητή u , τελειώνουμε την απόδειξη υπολογίζοντας το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$\mu_L(dx) = \mathbb{E}_L(\mu_u^L(dx)) = \int_0^{\ell_\beta(x)} \frac{\mathbb{1}\{x \in [L_-, L_+]\}}{\sqrt{2\beta x(\gamma + 1) - \beta^2(\gamma - 1)^2 - 4\beta x u - x^2}} \frac{du}{\pi} dx,$$

όπου κάναμε απλά αντικατάσταση από την (2.3.24). Ολοκληρώνοντας ως προς u ,

$$\mu_L(dx) = \mathbb{1}\{x \in [L_-, L_+]\} \sqrt{2\beta x(\gamma + 1) - \beta^2(\gamma - 1)^2 - 4\beta x \ell_\beta(x) - x^2} \frac{dx}{2\pi\beta x} \\ = \mathbb{1}_{\{x \in [L_-, L_+]\}} \frac{\sqrt{(x - L_-)(L_+ - x)}}{2\pi\beta x} dx$$

■

Κεφάλαιο 3

Το όριο του τριδιαγώνιου μοντέλου

3.1 Στοχαστικός Τελεστής Airy

Έχοντας υπόψη μας τα αποτελέσματα της παραγράφου 2.3b, η τριδιαγώνια μορφή των β -Hermite πινάκων προδίδει κάποια σχέση προσέγγισης μέσω πεπερασμένων διαφορών ενός διαφορικού τελεστή. Αυτή η ιδέα θα μας επιτρέψει να «μεταφέρουμε» στο όριο όχι μόνο συγκεκριμένα αποτελέσματα (όπως, για παράδειγμα, η κατανομή της μεγαλύτερης ιδιοτιμής), αλλά όλη τη δομή και τις πληροφορίες που προσφέρει ο πίνακας H_n^β . Σε αυτό το σημείο δημιουργούνται ερωτήσεις, όπως το αν όντως χρειαζόμαστε ολόκληρο τον πίνακα ή κάποιο κομμάτι του, αλλά και ποιο είναι εν τέλει αυτό το όριο;

Η προσέγγιση πεπερασμένων διαφορών διαφορικού τελεστή μας δίνει έπειτα από κατάλληλη εμφύτευση (βλ. παράγραφο 3.2) μία διακριτή εκδοχή παραγώγων συναρτήσεων. Στο [26] οι A. Edelman και B. Sutton διατύπωσαν την εικασία πως, έπειτα από κατάλληλη αλλαγή κλίμακας, ο τελεστής H_β προσεγγίζει τον στοχαστικό τελεστή Airy:

$$\tilde{H}_n^\beta := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} n^{1/6} \left(H_n^\beta - \sqrt{2\beta n} I \right) \longrightarrow -\frac{d^2}{dx^2} + x + \frac{2}{\sqrt{\beta}} dW =: \mathcal{H}_\beta, \quad (3.1.1)$$

με συνθήκες Dirichlet, $f(0) = f(\infty) = 0$ και W να είναι μία τυπική κίνηση Brown, δηλαδή με $W_0 = W(0) = 0$ και

$$dW_x = N(0, 1) \cdot \sqrt{dx}.$$

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να εξηγήσει τι σημαίνει η 3.1.1, και να δώσει μία πρώτη εικόνα για τον οριακό τελεστή. Στην επόμενη παράγραφο ορίζεται ένα γενικότερο πλαίσιο το οποίο εξασφαλίζει τις ζητούμενες συγκλίσεις και στη συνέχεια τα αποτελέσματα επιβεβαιώνονται για την περίπτωσή μας, ολοκληρώνοντας έτσι την παρουσίαση της παρούσας παραγράφου. Αρχικά διατυπώνουμε τρία ασυμπτωτικά αποτελέσματα τα οποία είναι χρήσιμα στην επερχόμενη ανάλυση

Λήμμα 3.1.1. (i) Συμβολίζοντας τη σύγκλιση κατά κατανομή με $\Rightarrow$, έχουμε πως

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(0, 2)/\sqrt{n} &\Rightarrow 0, \\ \chi_n - \sqrt{n} &\Rightarrow \mathcal{N}(0, 1/2). \end{aligned}$$

(ii) Το ανάπτυγμα Taylor πρώτης τάξης του $\sqrt{n-k}$, για $k/n \rightarrow 0$, είναι $\sqrt{n} - \frac{1}{2} \frac{k}{\sqrt{n}} + o(1)$.

Κατ' αντιστοιχία με την 3.2 γράφουμε $v_f = (f(1/m), \dots, f(n/m)) = (f_1, \dots, f_n)$, όπου $m = m_n = n^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ το μέγεθος του πίνακα που κρατάει την πληροφορία (και το οποίο θα οριστεί αργότερα). Θεωρώντας τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

ο πίνακας $B = m^2(A - 2I)$ προσεγγίζει τη δεύτερη παράγωγο υπό την έννοια πως, για λεία (έστω) f , το διάνυσμα Bv_f προσεγγίζει το $v_{f''}$. Πρωτού ελέγξουμε τη δράση του $m^\gamma(2\sqrt{n}I - H_\beta)$, παρατηρούμε πως από το προηγούμενο λήμμα μπορούμε να τον αναλύσουμε ως εξής ($\simeq$ στην παρακάτω εξίσωση θα δηλώνει ασυμπτωτικά αποτελέσματα)

$$\begin{aligned} m^\gamma(2\sqrt{n}I - H_n)f &\simeq m^\gamma n^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} v_f \\ &+ \frac{m^\gamma}{\sqrt{2\beta}} \begin{pmatrix} g_1 & \bar{g}_1 & & \\ \bar{g}_1 & g_2 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \bar{g}_{n-1} & g_n \end{pmatrix} v_f - \frac{m^\gamma}{2\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & n-1 \\ & & n-1 & 0 \end{pmatrix} v_f, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

όπου $\bar{g}$ είναι οι τυπικές κανονικές κατανομές που προκύπτουν από το λήμμα 3.1.1. Έστω $x \in \mathbb{R}_+$. Εφ' όσον $n/m \rightarrow \infty$, υπάρχουν $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$ ώστε $x \in [\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}]$. Από ανάπτυγμα Taylor δεύτερου βαθμού γύρω από το x παίρνουμε την εξής σχέση για τα f_i :

$$f_{k\pm 1} = f(x \pm m^{-1}) \simeq f(x) \pm m^{-1}f'(x) + m^{-2}f''(x)/2. \quad (3.1.3)$$

Το διάνυσμα που προκύπτει από την (3.1.2) έχει ως k^η συντεταγμένη (αριθμούμε Α, Β, Γ τη συνεισφορά του καθενός πίνακα με τη σειρά γραφής τους και αγνοώντας για την ώρα τον συντελεστή m^γ):

$$n^{\frac{1}{2}}(-f_{k-1} + 2f_k - f_{k+1}) + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}}(\bar{g}_{k-1}f_{k-1} + 2g_k f_k + f_{k+1}\bar{g}_k) + \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{2}((k-1)f_{k-1} + kf_{k+1})$$

Α: Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.1.3) γράφουμε

$$n^{\frac{1}{2}}(-f_{k-1} + 2f_k - f_{k+1}) \simeq n^{\frac{1}{2}}m^{-2}f''(x) \quad (3.1.4)$$

Γ: Αντικαθιστούμε έναν «μέσο όρο» μίας ακολουθίας με την ίδια για να πάρουμε

$$\begin{aligned} \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{2} ((k-1)f_{k-1} + kf_{k+1}) &= \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{2} ((k-1)f_{k-1} + (k+1)f_{k+1}) - n^{-\frac{1}{2}}f_{k+1} \\ &\simeq n^{-\frac{1}{2}}kf_k - n^{-\frac{1}{2}}f_{k-1} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\simeq n^{-\frac{1}{2}}xf(x). \quad (3.1.6)$$

Ο δεύτερος όρος της (3.1.5) μπορεί να παραλειφθεί, καθώς από τη σχέση Taylor (3.1.3) είναι ασυμπτωτικά ίσος με γραμμικούς συνδυασμούς των $f(x), f'(x), f''(x)$, με το x να παίρνει τιμές σε συμπαγές διάστημα, και οι συντελεστές τους τείνουν στο μηδέν.

Β: Γράφουμε

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}}(\bar{g}_{k-1}f_{k-1} + 2g_kf_k + f_{k+1}\bar{g}_k) \simeq \\ &\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}}\left(\bar{g}_{k-1}f_k - \bar{g}_{k-1}f'(x)m^{-1} + \bar{g}_{k-1}f''(x)m^{-2} \right. \\ &\quad \left. + 2g_kf_k + \bar{g}_kf_k + \bar{g}_kf'(x)m^{-1} + \bar{g}_kf''(x)m^{-2}\right) \\ &\simeq \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\beta}}(2g_k + \bar{g}_k + \bar{g}_{k-1})f_k, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

όπου οι μη-υπογραμμισμένοι όροι στην 2^η ισότητα παραλείφθηκαν με το ίδιο επιχείρημα με την (3.1.6).

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν στα (3.1.4), (3.1.6) μπορούν να ερμηνευθούν χωρίς περαιτέρω ανάλυση· είναι ικανοποιητικές προσεγγίσεις της δεύτερης παραγώγου και του πολλαπλασιασμού με το στοιχείο x του χώρου. Μία λογική (στα πλαίσια που ασχολούμαστε) ερμηνεία για την (3.1.7) είναι αυτή του «πολλαπλασιασμού με λευκό θόρυβο». Ο ορισμός της διαδικασίας Wiener μέσω της διαφοράς μίας κίνησης Brown μας επιτρέπει να σκεφτούμε την $2g_k$ και την $\bar{g}_k + \bar{g}_{k-1}$ ως τέτοιες διαφορές. Αν $W_x, \bar{W}_x$ είναι δύο κινήσεις Brown θα ορίσουμε τη διακριτή παράγωγό τους κατ' αντιστοιχία με τη διακριτή δεύτερη παράγωγο μίας συνάρτησης:

$$W'_x := W'(x) = W'\left(\frac{k}{m}\right) \simeq m \left(W\left(\frac{k+1}{m}\right) - W\left(\frac{k}{m}\right) \right).$$

Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown:

$$W'_x \sim m^{\frac{1}{2}}\mathcal{N}(0, 1).$$

Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε πως

$$g_k = m^{-\frac{1}{2}}W'_x, \quad \bar{g}_k + \bar{g}_{k-1} = m^{-\frac{1}{2}}\bar{W}'_x$$

και γράφοντας επιπλέον $B_x := (W_x + \bar{W}_x)/\sqrt{2}$ παίρνουμε πως η (3.1.7) αναλογεί σε

$$\frac{2m^{\gamma-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\beta}}B'_xf(x).$$

Τι σημαίνει όμως η παραπάνω έκφραση; Η παράγωγος της κίνησης Brown δεν ορίζεται, σε αντίθεση με μία λεία συνάρτηση (όπως θεωρούμε για την ώρα την f) της οποίας η διακριτή παράγωγος προσεγγίζει την $\partial_x f(x)$. Με αυτό το σκεπτικό, δίνουμε την ερμηνεία της παραπάνω έκφρασης μέσω παραγοντικής ολοκλήρωσης:

$$\int B'_x f(x) dx = - \int B_x f'(x) dx.$$

Από τη στιγμή που έχουμε την εμφύτευση στον χώρο των απλών $L^2(\mathbb{R}_+)$, το αριστερό ολοκλήρωμα αντιστοιχεί στο Riemann άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{\lfloor mx \rfloor} m^{-1} m \left(B \left(\frac{k+1}{m} \right) - B \left(\frac{k}{m} \right) \right) f \left(\frac{k}{m} \right)$$

το οποίο έπειτα από μία άθροιση κατά παράγοντες ισούται ασυμπτωτικά με

$$\sum_{k=1}^{\lfloor mx \rfloor} B \left(\frac{k}{m} \right) \left(f \left(\frac{k+1}{m} \right) - f \left(\frac{k}{m} \right) \right) \simeq \sum_{k=1}^{\lfloor mx \rfloor} B \left(\frac{k}{m} \right) f' \left(\frac{k}{m} \right) m^{-1},$$

το οποίο για $n \rightarrow \infty$ προσεγγίζει το $\int B_x f'(x) dx$. Επιστρέφοντας στο heuristic (ευρεσιακό::) επιχείρημα, η δράση στην k^η συντεταγμένη του v_f μαζί με τα ασυμπτωτικά αποτελέσματα μας δίνουν

$$m^\gamma (2\sqrt{n}I - H_n f)_k \simeq n^{\alpha\gamma + \frac{1}{2} - 2\alpha} f''(x) - n^{\gamma\alpha + \alpha - \frac{1}{2}} x f(x) + \frac{2}{\sqrt{\beta}} n^{\alpha\gamma - \frac{1}{2}\alpha} B'_x f(x)$$

και οι παράμετροι θα βρεθούν απαιτώντας να μηδενίζουν παράλληλα τους τρεις εκθέτες. Παίρνουμε το εξής

$$\alpha\gamma + \frac{1}{2} - 2\alpha = 0, \quad \alpha\gamma + \alpha - \frac{1}{2} = 0, \quad \alpha\gamma - \frac{1}{2}\alpha = 0$$

με λύσεις $\alpha = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{2}$. Επομένως μπορούμε να εικάσουμε ότι το όριο του

$$-n^{\frac{1}{6}} (H_n - 2\sqrt{n}I)$$

είναι ο τελεστής

$$\mathcal{H}_\beta := -\partial_{xx} + x + \frac{2}{\sqrt{\beta}} B'_x. \quad (3.1.8)$$

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη φύση αυτού του στοχαστικού Schrödinger τελεστή. Ο σκοπός μας είναι να απαντήσουμε ερωτήματα όπως το πού δρα ο τελεστής $\mathcal{H}_\beta$, και κατά ποια έννοια είναι το όριο του παραπάνω τελεστή του $\mathbb{R}^n$;

Για την πρώτη ερώτηση, θα παραλείψουμε προς στιγμήν το στοχαστικό κομμάτι του τελεστή, $\frac{2}{\sqrt{\beta}} B'_x$ (ή, στη γλώσσα της Μαθηματικής Φυσικής που το β ονομάζεται *αντίστροφη θερμοκρασία*, παίρνοντας όριο για $\beta \rightarrow \infty$). Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε τον τελεστή Airy:

$$Af = -\partial_x^2 f + xf, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

με $f(0) = 0$. Η εξίσωση $Af = 0$ έχει ως λύσεις τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις Airy [37] Ai , Bi , ενώ για $\lambda \in \mathbb{R}$, η λύση της $Af = \lambda f$ προκύπτει από μετατοπίσεις των παραπάνω συναρτήσεων. Πράγματι,

$$-\partial_x^2 f(x) + (x - \lambda)f(x) = 0 \xrightarrow{x-\lambda=y} -\partial_y^2 f(y + \lambda) + yf(y + \lambda) = 0$$

που έχει ως λύσεις τις $\text{Ai}(x - \lambda)$, $\text{Bi}(x - \lambda)$. Από τις δύο, μόνο η Ai^2 είναι ολοκληρώσιμη, επομένως οι ιδιοσυναρτήσεις του A είναι οι $\text{Ai}(x - \lambda)$ με αντίστοιχη ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, οι ρίζες της Ai είναι (ασυμπτωτικά) οι

$$z_k = -\left(\frac{3}{2}\pi k\right)^{\frac{2}{3}} + o_k(1),$$

άρα οι λύσεις που ζητάμε είναι οι $\lambda_k = -z_k$

Επιστρέφοντας τον όρο $\frac{2}{\sqrt{\beta}}B'_x$ στην ανάλυση, θα χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των κατανομών του Schwartz [59]. Γράφουμε $D = D(\mathbb{R}_+)$ για τον χώρο των κατανομών, ο οποίος αναγνωρίζεται ως ο τοπολογικός δυϊκός χώρος του C_0^∞ , του χώρου των λείων συναρτήσεων δοκιμής με συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R}_+$, μαζί με την τοπολογία που προκύπτει από την ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}_+$ ως προς όλες της τάξης παραγώγους. Η δράση των συνεχών συναρτήσεων και των τυπικών παραγώγων τους είναι αυτή της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\langle \phi, f^{(k)} \rangle := (-1)^k \int_0^\infty \phi^{(k)}(x) f(x) dx.$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο, η B'_x θεωρείται μία τυχαία κατανομή, όντας η τυπική παράγωγος μίας (τυχαίας) συνεχούς συνάρτησης. Ο SAO_β είναι μία καλώς ορισμένη γραμμική απεικόνιση από τον χώρο H_{loc}^1 των συναρτήσεων τέτοιων ώστε $f'1_I \in L^2(\mathbb{R}_+)$, για κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ στον χώρο των κατανομών D ,

$$f \mapsto \mathcal{H}_\beta f.$$

Υπενθυμίζουμε πως, εφ' όσον ο D είναι κλειστός κάτω από τον πολλαπλασιασμό με λείες συναρτήσεις, η έκφραση fB'_x ερμηνεύεται ως η παράγωγος μίας συνεχούς συνάρτησης έπειτα από (Stieltjes) ολοκλήρωση κατά μέρη,

$$\int_0^y f(x)B'_x dx := - \int_0^y B_x f'(x) dx + f(y)B_y - f(0)B_0.$$

Θα δούμε το πρόβλημα των ιδιοτιμών του τελεστή $\mathcal{H}_\beta$ από δύο οπτικές: (α') ως λύσεις ενός μεταβολικού προβλήματος, και (β') ως λύσεις της εξίσωσης $\mathcal{H}_\beta f = \lambda f$ μαζί με δεδομένες συνοριακές συνθήκες. Από την πρώτη προσέγγιση θα επωφεληθούμε μέσω του Courant-Fischer χαρακτηρισμού των ιδιοτιμών, ενώ η δεύτερη θα μας επιτρέψει να εισάγουμε τον μετασχηματισμό Riccati. Μέσω αυτού μπορούμε να δώσουμε μία «Μαρκοβιανή» δομή στην εξίσωση, γεγονός που θα φανεί χρήσιμο στον υπολογισμό φραγμάτων για τις β κατανομές Tracy-Widom.

Ορίζουμε ως L^* τον χώρο Hilbert των συναρτήσεων με $f(0) = 0$ και πεπερασμένη νόρμα $\|f\|_*^2 = \|f'\|^2 + \|f\sqrt{1+x}\|^2$. Για τον L^* ισχύει πως $L^* \subset C_0(\mathbb{R}_+) \subset D$, με $C_0(\mathbb{R}_+)$ οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Μία τιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ μαζί με μία $f \in L^*$ θα είναι ζευγάρι ιδιοτιμής-ιδιοσυνάρτησης για τον SAO_β αν $\mathcal{H}_\beta f = \lambda f$, όπου και οι δύο πλευρές θεωρούνται ως κατανομές (δηλαδή έπειτα από ολοκλήρωση με λείες συναρτήσεις).

Παρατήρηση 3.1.2. Η εξίσωση ιδιοτιμών μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$f''(x) = (x - \lambda)f(x) + \frac{2}{\sqrt{\beta}} B'_x f(x). \quad (3.1.9)$$

Ολοκληρώνοντας

$$f'(x) - f'(0) = \int_0^x (y - \lambda)f(y) - \frac{2}{\sqrt{\beta}} B_y f'(y) dy + \frac{2}{\sqrt{\beta}} f(x) B_x,$$

δηλαδή μπορούμε να θεωρήσουμε την f' ως μία σχεδόν παντού συνεχή συνάρτηση και να συνάγουμε επιπλέον την $\frac{3}{2} - \varepsilon$ Hölder συνέχεια της f .

Το επόμενο λήμμα είναι το 3.3.1. Στις επόμενες ενότητες που θα μελετήσουμε μία γενικότερη μορφή αυτού του τελεστή, θα θεωρήσουμε δύο διαφορετικά σενάρια· η διαφορά τους έγκειται στις συνοριακές συνθήκες που θα τεθούν στο πρόβλημα ιδιοτιμών, και άρα στον χώρο που δρά ο $\mathcal{H}$. Παρ' όλ' αυτά, τα προβλήματα είναι παρόμοια, και οι αποδείξεις του ενός απαιτούν απλά περισσότερες προϋποθέσεις.

Λήμμα 3.1.3. (i) Κάθε $f \in L^*$ είναι ομοιόμορφα Hölder(1/2)–συνεχής και ικανοποιεί το φράγμα $f(x) \leq \|f\|_*$, για κάθε x .

(ii) Κάθε L^* –φραγμένη ακολουθία έχει υπακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει υπό τις ακόλουθες έννοιες σε κάποια f :

- i Ασθενώς στον L^* ,
- ii Ασθενώς ως προς τις παραγώγους στον L^2 (δηλαδή $f'_n \xrightarrow{L^2} f'$),
- iii Ομοιόμορφα στα συμπαγή, και
- iv Στον L^2 .

Απόδειξη. Η απόδειξη του 3.3.1 για $\bar{\theta} = x$ ■

Δουλεύοντας στον χώρο L^* , το ντετερμινιστικό κομμάτι του τελεστή είναι ορισμένο δίχως πρόβλημα. Προκειμένου να ορίσουμε την τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί στον $\mathcal{H}_\beta$, μπορούμε να θεωρήσουμε την κατανομή $-\mathcal{H}_\beta f$ ως συναρτησοειδές, το οποίο εφαρμόζοντας το ξανά στην συνάρτηση f δίνει

$$\langle f, \mathcal{H}_\beta f \rangle := \|f'\|^2 + \|f\sqrt{x}\|^2 + \frac{4}{\sqrt{\beta}} \int_0^\infty B'_x f^2(x) dx.$$

Το πρόβλημά μας όπως είπαμε είναι το τελευταίο ολοκλήρωμα, $\int B'_x f^2 dx = -2 \int B_x f' f dx$. Αν στη θέση της κίνησης Brown είχαμε (για παράδειγμα) $\sqrt{x}$, θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο για $f \in L^*$. Όμως, καθώς ισχύει ότι $\lim_n |B_n|/\sqrt{n} = \infty$, δεν είναι άμεσο πως το ολοκλήρωμα θα συγκλίνει για $f \in L^*$ (σε αντίθεση με τις $f \in C_0^\infty$). Προκειμένου να έχουμε έναν καλύτερο έλεγχο στη συγκεκριμένη ποσότητα, εισάγουμε την εξής ανάλυση του όρου B_x :

$$B_x = \bar{B}_x + (B_x - \bar{B}_x), \quad \bar{B}_x = \int_x^{x+1} B_y dy.$$

Για τον όρο $\bar{B}_x$ ισχύει πως είναι παραγωγίσιμος, και ότι $\bar{B}'_x = B_{x+1} - B_x$. Με αυτήν την καινούρια ποσότητα, το αμφιλεγόμενο ολοκλήρωμα μπορεί να γραφτεί (κάνοντας επιλεκτικά ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty B'_x f^2(x) dx &= \int_0^\infty \bar{B}'_x f^2(x) dx - 2 \int_0^\infty (B_x - \bar{B}_x) f'(x) f(x) dx \\ &=: \int_0^\infty \bar{B}'_x f(x) dx - 2 \int_0^\infty \tilde{B}_x f'(x) f(x) dx \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

και σκοπός μας είναι να δείξουμε πως για $f \in L^*$ τα δύο παραπάνω ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα.

Η τετραγωνική μορφή πλέον γράφεται, (για την ώρα) για $f \in C_0^\infty$:

$$\begin{aligned} \prec f, \mathcal{H}_\beta f \succ &:= \\ \|f'\|^2 + \|f\sqrt{x}\|^2 - \frac{2}{\sqrt{\beta}} &\left(\int_0^\infty \bar{B}'_x f^2(x) dx - 2 \int_0^\infty \tilde{B}_x f'(x) f(x) dx \right) \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

Το παρακάτω λήμμα είναι το πρώτο βήμα για την επίτευξη του σκοπού μας:

Λήμμα 3.1.4. Για $x > 0$ και B_x τυπική κίνηση Brown, υπάρχει μία τυχαία σταθερά $C = C(B)$ ώστε

$$\sup_{x>0} \sup_{0<y\leq 1} \frac{|B_{x+y} - B_x|}{\sqrt{\log(2+x)}} \leq C.$$

Άμεσο πόρισμα του παραπάνω λήμματος είναι πως τόσο το $\bar{B}'_x = B_{x+1} - B_x$ όσο και το $\tilde{B}_x$ φράσσονται από το $C \log^{\frac{1}{2}}(2+x)$. Πράγματι,

$$|B_{x+1} - B_x| \leq \sup_{0<y\leq 1} |B_{x+y} - B_x| \leq C \sqrt{\log(2+x)},$$

ενώ

$$\begin{aligned} \left| B_x - \int_x^{x+1} B_y dy \right| &\leq \int_x^{x+1} |B_y - B_x| dy = \int_0^1 |B_{y+x} - B_x| dy \\ &\leq C \sqrt{\log(2+x)}. \end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\left| \bar{B}'_x \right| \leq C'(1 + \sqrt{x}) \leq C' + C'/\varepsilon + \varepsilon x = C_\varepsilon + \varepsilon x, \quad (3.1.12)$$

$$\left| \tilde{B}_x \right|^2 \leq C' \log(2+x) \leq C'(1 + \sqrt{x}) \leq C_\varepsilon + \varepsilon x, \quad (3.1.13)$$

όπου C_ε τυχαία σταθερά που εξαρτάται από τα B, C , και ε .

Απόδειξη. (Λήμματος 3.1.4):

Για κάθε x, y η τριγωνική ανισότητα δίνει πως

$$|B_{x+y} - B_x| \leq |B_{x+y} - B_{[x+y]}| + |B_{[x+y]} - B_{[x]}| + |B_x - B_{[x]}|. \quad (3.1.14)$$

Για $0 < y \leq 1$ ισχύει ότι $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + 1$, ενώ πάντα η διαφορά $z - \lfloor z \rfloor$ είναι πραγματικός αριθμός στο $[0, 1]$. Επομένως, για να δουλέψουμε το $\sup_x$ της παραπάνω σχέσης, αρκεί να φράξουμε το $\sup_n Z_n / \sqrt{\log n}$, όπου $Z_n = \sup_{0 < y \leq 1} |B_{n+y} - B_n|$. Από την ανακλαστική ιδιότητα της κίνησης Brown, για κάθε n ισχύει το εξής φράγμα :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n \geq t) &= 2\mathbb{P}(|B_{n+1} - B_n| \geq t) \\ &\leq 4 \int_t^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx \leq \frac{2\sqrt{2/\pi}}{t} \int_t^\infty x e^{-x^2/2} dx \\ &\leq 2t^{-1} e^{-t^2/2}, \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z_n / \sqrt{\log n} \geq \sqrt{2}(1 + \varepsilon)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(\sqrt{2}(1 + \varepsilon) \log n)^{1/2}} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα Borel-Cantelli έχουμε πως $\mathbb{P}(\liminf_n E_n^c(\varepsilon)) = 1$, όπου συμβολίζουμε με $E_n(\varepsilon)$ το ενδεχόμενο $\{Z_n / \sqrt{\log n} > \sqrt{2}(1 + \varepsilon)\}$. Έπεται πως για κάθε ω , υπάρχει ένας τυχαίος χρόνος $n_0(\omega)$ ώστε για κάθε $k \geq n_0$ να ισχύει $Z_k \leq \sqrt{2}(1 + \varepsilon)\sqrt{\log n}$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχαίο έπεται το ζητούμενο για αυτά τα k . Από την σχέση (3.1.14), η ζητούμενη ποσότητα φράσσεται, για $x > n_0$ από τρεις φορές το φράγμα της Z_n , ενώ τα μικρότερα x μπορούμε να τα φράξουμε από τρεις φορές το $\max_{k \in [n_0-1]} \{Z_k / \sqrt{\log n}\}$. Επιλέγοντας ως C τη μεγαλύτερη από αυτές τις δύο τιμές (που είναι μία τυχαία σταθερά επίσης, καθώς εξαρτάται από την πραγματοποίηση της κίνησης Brown) ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Το παραπάνω αποτέλεσμα αναλογεί στην οριακή εκδοχή της δεύτερης υπόθεσης 3.2.7, 3.2.9, μέσω του οποίου μπορούμε να διατυπώσουμε το ανάλογο θεώρημα με το 3.3.3:

Πρόταση 3.1.5. Η μορφή $\langle \cdot, \mathcal{H}_\beta \cdot \rangle$ ικανοποιεί $|\langle f, \mathcal{H}f \rangle| \leq c \|f\|_*^2$. Έπεται πως μπορεί να επεκταθεί σε μορφή του $L^* \times L^*$, με τον γενικό τύπο να δίνεται από το polarization identity

$$2\langle g, \mathcal{H}f \rangle = \langle f + g, \mathcal{H}(f + g) \rangle - \langle f, \mathcal{H}f \rangle - \langle g, \mathcal{H}g \rangle.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανάλυση του όρου όπως στην (3.1.11) μαζί με το ότι $\sqrt{\log(2+x)} \leq c\sqrt{1+x} \leq c'(1+x)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\overline{B}_x f^2(x)| dx &\leq \int_0^\infty C \log^{\frac{1}{2}}(2+x) f^2(x) dx \\ &\leq C \int_0^\infty (1+x) f^2(x) dx \leq C \|f\|_*^2. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Για τον άλλο όρο, μία εφαρμογή της Cauchy-Schwartz δίνει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\tilde{B}_x f'(x) f(x)| dx &\leq c \int_0^\infty \sqrt{1+x} |f(x) f'(x)| dx \\ &\leq c \left(\int_0^\infty (1+x) f^2(x) dx \right) \left(\int_0^\infty f'(x)^2 dx \right) \leq c \|f\|_*^2. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω με την (3.1.15) παίρνουμε πως $\langle f, \mathcal{H}f \rangle \leq C \|f\|_*^2$. ■

Για να συμπληρώσουμε την εικόνα για τον SAO_β μένει να χαρακτηρίσουμε τις ιδιοτιμές του, πράγμα που θα πετύχουμε με τη βοήθεια του Courant-Fischer χαρακτηρισμού· η μικρότερη ιδιοτιμή θα επιτυγχάνεται στο infimum της μορφής πάνω από συγκεκριμένους χώρους. Αναφέρουμε πως επιπλέον ισχύει το ανάλογο της πρότασης 3.3.3, δηλαδή

$$c_1 \|f\|_*^2 - c_2 \|f\|^2 \leq \langle f, \mathcal{H}f \rangle \leq c_3 \|f\|_*^2, \quad (3.1.16)$$

από το οποίο μπορούμε να πάρουμε το εξής πόρισμα

Λήμμα 3.1.6. *Η μικρότερη ιδιοτιμή Λ_0 του τελεστή $\mathcal{H}$ με ιδιοτιμή f_0 επιτυγχάνεται στο*

$$\Lambda_0 = \tilde{\Lambda}_0 := \inf \{ \langle f, \mathcal{H}f \rangle : f(0) = 0, \|f\| = 1 \}. \quad (3.1.17)$$

Παρομοίως, η ιδιοτιμή Λ_k ορίζεται αναδρομικά ως

$$\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k = \inf_{\substack{f \in L^*, \|f\|=1 \\ f \in \text{span}\{f_0, \dots, f_{k-1}\}^\perp}} \langle f, \mathcal{H}f \rangle.$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε για $k = 0$: Με τη βοήθεια της παρατήρησης ::, για $\varepsilon > 0$ αναλύουμε τη μορφή

$$\langle f, \mathcal{H}f \rangle = \quad (3.1.18)$$

$$\|f\|_*^2 - \|f\|^2 + \frac{2}{\sqrt{\beta}} \int_0^X f^2(x) \overline{B}'_x dx - \frac{4}{\sqrt{\beta}} \int_0^X f'(x) f(x) \tilde{B}_x dx + \mathcal{E},$$

όπου

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}| &= \left| \frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\int_X f^2(x) \overline{B}'_x dx - 2 \int_X f'(x) f(x) \tilde{B}_x dx \right) \right| \\ &\leq \varepsilon \int_X f^2(x) (1+x) dx + \varepsilon \int_X f'(x)^2 dx \int_X f^2(x) (1+x) dx \\ &= 2\varepsilon \|f\|_*^2. \end{aligned}$$

Εξ αιτίας της (3.1.16) έχουμε πως το $\tilde{\Lambda}_0$ είναι πεπερασμένο. Έστω λοιπόν μία ελαχιστοποιούσα ακολουθία $\{f_n\}_n \subset L^*$, με $\|f_n\| = 1$ και $\langle f_n, \mathcal{H}f_n \rangle \rightarrow \tilde{\Lambda}_0$. Ξανά από την (3.1.16) έχουμε

$$\|f_n\|_*^2 \leq c + \langle f_n, \mathcal{H}f_n \rangle \leq K,$$

για κάποια $K = K(B)$ τυχαία σταθερά επομένως από (3.1.3) υπάρχει κάποια $f_0 \in L^*$ στην οποία η ακολουθία $\{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή, ασθενώς στον H^1 , καθώς και στον L^2 . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \|f_n\|_*^2 &\leq \liminf_n \|f_0\|_*^2, & \text{από } f_n &\xrightarrow{L^*} f_0, \\ \|f_n\|^2 &\longrightarrow \|f_0\|^2, & \text{από } f_n &\xrightarrow{L^2} f_0 \\ \int_0^X f_n^2(x) \overline{B}'_x dx &\longrightarrow \int_0^X f_0^2(x) \overline{B}'_x dx, & \text{από } f_n \mathbb{1}_K &\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f_0 \mathbb{1}_K \\ \int_0^X f'_n(x) f_n(x) \tilde{B}_x dx &\longrightarrow \int_0^X f'_0(x) f_0(x) \tilde{B}_x dx & \text{από } f'_n &\xrightarrow{L^2} f'_0. \end{aligned}$$

Έτσι, για $\varepsilon > 0$

$$\langle f_0, \mathcal{H}f_0 \rangle \leq \langle f_n, \mathcal{H}f_n \rangle + \varepsilon,$$

το οποίο, καθώς $\varepsilon \rightarrow 0$ δίνει $\langle f_0, \mathcal{H}f_0 \rangle \leq \tilde{\Lambda}_0$. Επειδή $\tilde{\Lambda}_0$ είναι ορίζεται ως infimum, έχουμε εξ ορισμού την αντίστροφη ανισότητα, $\langle f_0, \mathcal{H}f_0 \rangle \geq \tilde{\Lambda}_0$. Για να είναι η f_0 ιδιοσυνάρτηση, οφείλουμε να δείξουμε πως ικανοποιείται η ισότητα $\mathcal{H}f_0 = \Lambda_0 f_0$ με την έννοια των κατανομών. Επειδή η f_0 είναι η συνάρτηση στην οποία επιτυγχάνει ακρότατο το συναρτησοειδές $\langle f_0 + \varepsilon\phi, \mathcal{H}(f_0 + \varepsilon\phi) \rangle$. Αν $f_0^\varepsilon = (f_0 + \varepsilon\phi) / \|f_0 + \varepsilon\phi\|$ για $\phi \in C_0^\infty$, υπολογίζουμε

$$(f_0^\varepsilon)^2 = \frac{1}{\|f_0 + \varepsilon\phi\|^2} (f_0^2 + 2f_0\varepsilon\phi + \varepsilon^2\phi^2), \quad (f_0^\varepsilon)'^2 = \frac{1}{\|f_0 + \varepsilon\phi\|^2} (2(f_0')^2 + 2f_0'\varepsilon\phi' + \varepsilon^2(\phi')^2),$$

δηλαδή

$$\langle f_0^\varepsilon, \mathcal{H}f_0^\varepsilon \rangle = \langle f, \mathcal{H}f \rangle / \|f + \varepsilon\phi\| + 2\varepsilon \left(\int_0^\infty f_0'\phi'dx + \int_0^\infty x\phi f dx + \int_0^\infty f\phi B'_x dx \right) + O(\varepsilon^2).$$

Παίρνοντας την παράγωγο $\frac{d}{d\varepsilon} \langle f_0^\varepsilon, \mathcal{H}(f_0^\varepsilon) \rangle|_{\varepsilon=0} = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} & \langle f_0^\varepsilon, \mathcal{H}f_0^\varepsilon \rangle - \langle f, \mathcal{H}f \rangle \\ &= -2\varepsilon \langle f, \mathcal{H}f \rangle + 2\varepsilon \left(\int_0^\infty (f'(x)\phi'(x) + xf(x)\phi(x)) \right) - \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\beta}} \int_0^\infty B'_x f(x)\phi(x) dx + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

(σημείωση: $\|f\| = 1$) το οποίο δίνει ακριβώς το ζητούμενο αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$ (το ότι δεν δημιουργούνται απροσδιοριστίες της μορφής $\varepsilon \cdot \infty$ όταν παίρνουμε το όριο $\varepsilon \rightarrow 0$ εξασφαλίζεται αναλύοντας το B_x σε $\tilde{B}_x, \bar{B}_x$ όπως προηγουμένως). Τέλος, μία παρατήρηση: αν (g, λ) είναι ένα ζευγάρι ιδιοτιμής-ιδιοσυνάρτησης, μία παραγοντική ολοκλήρωση στον ορισμό $\mathcal{H}g = \lambda g$ δίνει για $\phi \in C_0^\infty$ η σχέση

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty \phi(x)g(x)dx &= \int_0^\infty (\phi''(x)g(x) - x\phi(x)g(x)) dx \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\beta}} \left(\int_0^\infty \phi'(x)g(x)B_x dx + \int_0^\infty \phi(x)B_x g'(x)dx \right) \end{aligned}$$

γράφεται

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\infty \phi(x)g(x)dx &= \int_0^\infty (\phi''(x)g(x) - x\phi(x)g(x)) dx \\ &\quad - \frac{4}{\sqrt{\beta}} \left(\int_0^\infty \phi(x)g(x)\bar{B}_x dx - \int_0^\infty \tilde{B}_x(\phi(x)g(x))' dx \right) \end{aligned}$$

Επιλέγοντας ακολουθία $\{\phi_n\}_n \subset C_0^\infty$ τέτοια ώστε $\phi_n \rightarrow g$ έχουμε

$$\langle g, \mathcal{H}g \rangle = \lambda \|g\|^2,$$

δηλαδή $\lambda \geq \tilde{\Lambda}_0$, και έτσι η επιλογή του Λ_0 ως $\tilde{\Lambda}_0$ είναι συνεπής.

Έχοντας ορίσει τα $\Lambda_0 \leq \dots \leq \Lambda_{k-1}$ και

$$\tilde{\Lambda}_k = \inf_{\substack{f \in L^*, \|f\|=1 \\ f \in \text{span}\{f_0, \dots, f_{k-1}\}^\perp}} \langle f, \mathcal{H}f \rangle,$$

επειδή το $\text{span}\{f_0, \dots, f_{k-1}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του L^* υπάρχει ελαχιστοποιούσα ακολουθία $f_{n,k} \rightarrow f_k$ κατά τα γνωστά. Από τον τρόπο ορισμού του $\tilde{\Lambda}_k$ και το γεγονός πως $(f_k, \tilde{\Lambda}_k)$ είναι ζεύγος ιδιοσυνάρτησης-ιδιοτιμής, έπεται πως $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$. ■

Συνοψίζοντας, ορίσαμε τον στοχαστικό τελεστή στον οποίο τα heuristics υποδεικνύουν πως θα προσεγγίζει το μοντέλο του β -Hermite ως τελεστή. Επιπλέον ορίσαμε τις ιδιοτιμές του μέσω του παραπάνω μεταβολικού προβλήματος, ενώ στις παρακάτω ενότητες θα αποδειχθεί πως το μόνο σημείο συσσώρευσής τους είναι το ∞ , και πως κάθε ιδιόχωρος είναι διάστασης ένα.

Αφήνοντας για την ώρα τον SAO_β , θα προχωρήσουμε σε μία γενίκευση της κατάστασης. Η παραπάνω μελέτη εφαρμόζεται εξίσου στην περίπτωση των β -Laguerre που θα ασχοληθούμε, και όχι μόνο. Θεωρώντας έναν αρκετά γενικό τελεστή στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί δεδομένες υποθέσεις, θα αποδείξουμε τη σύγκλισή του στον αντίστοιχο οριακό τελεστή.

3.2 Ο τριδιαγώνιος τελεστής

Στο [56], έγινε το πρώτο βήμα για την απόδειξη της σύγκλισης των τριδιαγώνιων μοντέλων που θα παρουσιαστούν παρακάτω στους στοχαστικούς τελεστές τους, επαληθεύοντας τις εικασίες των Edelman, Sutton, [26] για τα μοντέλα β -Hermite, Laguerre. Οι ιδιοτιμές προέκυψαν ως λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών με δεδομένες συνοριακές συνθήκες. Στο [12], το παραπάνω αποτέλεσμα επεκτάθηκε σε άλλες κατηγορίες πινάκων (Spiked Wishart, perturbed Gaussian), κάνοντας την παρατήρηση πως οι ιδιοτιμές αντιστοιχούν σε ίδιους τελεστές με άλλες συνοριακές συνθήκες.

Ορίζουμε έναν «διακριτό στοχαστικό Schrödinger τελεστή» H_n στον $\mathbb{R}^n$ τον οποίον και θα ταυτίσουμε με τον πίνακα του ως προς την κανονική βάση. Στη συνέχεια θα οριστεί το οριακό αντικείμενό του, $\mathcal{H}_y$, και δεδομένων ορισμένων υποθέσεων θα αποδειχθεί η σύγκλιση των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων.

Θεωρούμε τον ℓ_n^2 , τον χώρο των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών με νόρμα $\|v\| = m_n^{-1} \sum_j v_j^2$, όπου $m_n = o(n)$ το οποίο θα οριστεί κατάλληλα στο κάθε μοντέλο. Επιπλέον θεωρούμε την εμφύτευση

$$\ell_n^2 \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}_+) : v = (v_0, v_1, \dots) \mapsto v(x) = v_{\lceil m_n x \rceil}, \quad x \in [0, n/m_n].$$

Σε όλα τα παρακάτω, θα αντιμετωπίζουμε διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ ως απλές συναρτήσεις στον $L^2(\mathbb{R}_+)$, καθώς μπορούμε να τον ταυτίσουμε με τον υπόχωρο $\{v \in \ell_n^2 : v_j = 0, j > n\}$. Για $n \in \mathbb{N}$, παρατηρούμε πως οι τελεστές του ℓ_n^2 μπορούν να επεκταθούν σε τελεστές στις συναρτήσεις του κλειστού γραμμικού υποχώρου $L^{2,n} := \{v(\cdot) \in L^2(\mathbb{R}_+) : v \in \mathbb{R}^n\}$ φυσικά, αναλύοντας τα ολοκληρώματα πάνω από τη θετική ημιευθεία σε ολοκληρώματα πάνω από τα $\xi_k = [\frac{k-1}{m_n}, \frac{k}{m_n})$. Πρωτού ορίσουμε τον τελεστή υπό μελέτη, ορίζουμε τους παρακάτω ℓ_n^2 -αναλλοίωτους τελεστές (τόσο για συναρτήσεις στον L^2 όσο και για διανύσματα). Ο *τελεστής μετατόπισης* είναι ο $T_n f(x) = f(x + m_n^{-1})$,

ενώ ο $D_n f(x) = m_n(T_n - 1)f(x)$ επεκτείνει τη διακριτή παράγωγο. Οι *ανάστροφες* συμβολίζονται $T_n^\dagger, D_n^\dagger$ και ισχύει $T_n^\dagger f(x) = f(x - m_n^{-1})$. Επίσης ο $R_n = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ αντιστοιχεί στον περιορισμό στο διάστημα $[0, n/m_n]$ και ο $E_n = \text{diag}(m_n, 0, \dots)$ στον πολλαπλασιασμό με $m_n \mathbb{1}_{[0, m_n^{-1}]}$.

Για το τυχαίο κομμάτι του τελεστή, ορίζουμε $(y_{n,1;k}, y_{n,2;k})_{k=1}^n$ μία $\mathbb{R}^2$ στοχαστική ακολουθία διακριτού χρόνου. Αυτές ορίζονται για κάθε n σε κάποιο χώρο πιθανότητας $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ που δεν είναι κατ' ανάγκη ο ίδιος κάθε φορά (και δεν έχει ιδιαίτερη σημασία όπως φαίνεται από τα παρακάτω καθώς αναφερόμαστε σε συγκλίσεις κατά κατανομή που αφορούν ασθενή σύγκλιση των μέτρων πιθανότητας πάνω από Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$). Και τις δύο αυτές τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να τις θεωρήσουμε ως απλές συναρτήσεις όπως πριν: $h(x) = h_{\lceil m_n x \rceil}$, για $x \in [0, n/m_n]$.

Τέλος, ο H_n δίνεται από τον τύπο

$$H_n = R_n(D_n^\dagger D_n + V_n), \quad (3.2.1)$$

όπου

$$V_n = \text{diag}(D_n y_{n,1}) + \frac{1}{2}(T_n^\dagger + T_n) \text{diag}(D_n y_{n,2}), \quad (3.2.2)$$

είναι ο τελεστής «δυναμικού». Ο πίνακας του H_n ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι τριδιαγώνιος συμμετρικός $n \times n$ πίνακας με διαγώνια στοιχεία $a_1, \dots, a_n$ και μη-διαγώνια στοιχεία $b_1, \dots, b_{n-1}$. Κάνοντας τη σύμβαση $e_0 = e_{n+1} = 0$ ισχύει πως $T_n e_k = e_{k+1}$ και $T_n^\dagger e_k = e_{k-1}$, επομένως για τον τελεστή D_n θα ισχύει:

$$\begin{aligned} D_n^\dagger D_n e_k &= m_n^2(T_n^\dagger - 1)(e_{k+1} - e_k) = m_n^2(e_k - e_{k-1} - e_{k+1} + e_k) \\ &= m_n^2(2e_k - e_{k-1} - e_{k+1}), \end{aligned}$$

ενώ για τον V_n :

$$\begin{aligned} V_n e_k &= \text{diag}(D_n y_{n,1}) e_k + \frac{1}{2}(T_n^\dagger + T_n) \text{diag}(D_n y_{n,2}) e_k \\ &= m_n(y_{n,1;k+1} - y_{n,1;k}) e_k + \frac{1}{2} m_n(y_{n,2;k+1} - y_{n,2;k})(e_{k+1} + e_{k-1}) \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε πως τα στοιχεία $a_1, \dots, a_n$ του πίνακα H_n είναι τα

$$2m_n^2 + m_n(y_{n,1;2} - y_{n,1;1}), \dots, 2m_n^2 + m_n(y_{n,1;k+1} - y_{n,1;k}), \quad (3.2.3)$$

$k = 2, \dots, n$, ενώ τα στοιχεία $b_1, \dots, b_{n-1}$ είναι

$$-m_n^2 + \frac{1}{2} m_n(y_{n,2;2} - y_{n,2;1}), \dots, -m_n^2 + \frac{1}{2} m_n(y_{n,2;k+1} - y_{n,2;k}). \quad (3.2.4)$$

Για να είμαστε σε θέση να μελετήσουμε την οριακή συμπεριφορά των παραπάνω, χρειάζονται μερικές υποθέσεις για τους εμπλεκόμενους όρους, τα οποία στη συνέχεια θα επιβεβαιώσουμε πως ισχύουν για κάθε μοντέλο.

Υπόθεσεις 1. (1) Υπάρχει μία συνεχής στοχαστική διαδικασία $\{y(x)\}_{x \geq 0}$, $y(0) = 0$ ώστε

$$\begin{aligned} \text{Οι } \{y_{n,i}(x)\}_{x \geq 0}, \quad i = 1, 2 \text{ έχουν σφικτή κατανομή,} \\ y_{n,1} + y_{n,2} \Rightarrow y, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

όπου η σύγκλιση είναι ασθενής ως προς την τοπολογία Skorokhod (βλ. τα τρίτα κεφάλαια από τα [11] και [28] για συζήτηση σχετικά με ασθενείς συγκλίσεις και ακριβή ορισμό της συγκεκριμένης ασθενούς σύγκλισης αντίστοιχα).

(2) Για κάθε k υπάρχει η ανάλυση

$$y_{n,i;k} = m_n^{-1} \sum_{j=0}^{k-1} \theta_{n,i;j} + \omega_{n,i;k}, \quad (3.2.6)$$

όπου $\theta_{n,i;j} \geq 0$ τέτοιες ώστε για συναρτήσεις $\bar{\theta}, \zeta$ θετικές, αύξουσες, συνεχείς και μη-φραγμένες (ανεξάρτητες από το n) και για τυχαίες μεταβλητές $\kappa_n \geq 1$ να ισχύουν τα εξής για κάθε n σχεδόν βέβαια:

$$\bar{\theta}(x)/\kappa_n - \kappa_n \leq \theta_{n,1}(x) + \theta_{n,2}(x) \leq \kappa_n (1 + \bar{\theta}(x)), \quad (3.2.7)$$

$$\theta_{n,2}(x) \leq 2m_n^2, \quad (3.2.8)$$

$$|\omega_{n,1}(\xi) - \omega_{n,1}(x)|^2 + |\omega_{n,2}(\xi) - \omega_{n,2}(x)|^2 \leq \kappa_n (1 + \bar{\theta}(x)/\zeta(x)), \quad (3.2.9)$$

για κάθε $x, \xi \in [0, n/m_n]$ τέτοια ώστε $|\xi - x| < 1$. Επιπλέον, η ακολουθία $\{\kappa_n\}_n$ είναι ορισμένη σε κοινό χώρο πιθανότητας για κάθε n , και η ακολουθία των κατανομών τους είναι σφικτή.

Οι παραπάνω υποθέσεις είναι κρίσιμες· κάθε μια είναι αναγκαία για τον ορισμό και την απόδειξη της σύγκλισης στον οριακό τελεστή όπως θα φανεί στη συνέχεια.

Σε αυτό το σημείο θα χρειαστεί να κάνουμε ένα βήμα για τεχνικούς λόγους· θα αναθούμε σε σχεδόν σίγουρες συγκλίσεις. Από τις υποθέσεις σφικτότητας μπορούμε να εξάγουμε υπακοιουθίες που συγκλίνουν κατά κατανομή. Το επιχείρημα θα ολοκληρωθεί με τη χρήση ενός κλασικού εργαλείου.

Από το ότι η $\{\kappa_n\}$ είναι σφικτή, έπεται πως για κάθε ε υπάρχει ένα συμπαγές $M = M(\varepsilon)$ ώστε $\mathbb{P}(\kappa_n \notin M) < \varepsilon$. Από αυτό και το άνω φράγμα της (3.2.7) παίρνουμε πως η διαδικασία $\{\int_0^x \theta_{n,i}(t) dt\}$ είναι σφικτή. Πράγματι, ολοκληρώνοντας από 0 έως x ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \theta_{n,i}(t) dt \right| &\leq \int_0^x |\theta_{n,1}(t) + \theta_{n,2}(t)| dt \leq \kappa_n \int_0^x 1 + \bar{\theta}(t) dt \\ &\leq \kappa_n M'(x). \end{aligned}$$

Έπεται πως για κάθε ε υπάρχει ένα συμπαγές $M \cdot M'(x)$ ώστε η διαδικασία $\{\int_0^x \theta_{n,i}(t) dt\}$ να περιλαμβάνεται σε αυτό με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - \varepsilon$.

Έστω υπακολουθία των φυσικών. Μπορούμε να βρούμε υπακολουθία ώστε τα παρακάτω όρια να υπάρχουν παράλληλα :

$$\begin{aligned} y_{n,i} &\Rightarrow y_i, & (i = 1, 2) \\ \int_0^{\cdot} \theta_{n,i} &\Rightarrow \theta_i^*, \\ \kappa_n &\Rightarrow \kappa, \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

όπου η πρώτη ασθενής σύγκλιση είναι ως προς την τοπολογία Skorokhod, ενώ η δεύτερη είναι ως προς την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}_+$. Πλέον μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Skorokhod, το οποίο είναι το εξής :

Θεώρημα 3.2.1. (Αναπαράσταση του Skorokhod, [11], κεφ. 3)

Έστω $X_0, \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικές τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες όχι απαραίτητα στον ίδιο χώρο πιθανότητας, ώστε $X_n \Rightarrow X_0$ (δηλαδή η ακολουθία των κατανομών $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ των τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ασθενώς στη μ της X_0). Τότε, υπάρχει ένας κοινός χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ και τυχαίες μεταβλητές $Y_0, \{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, ορισμένες στον Ω ώστε κάθε Y_i να έχει κατανομή μ_i , και $Y_n(\omega) \rightarrow Y(\omega)$, για κάθε ω .

Από εδώ και στο εξής οι παραπάνω συγκλίσεις τις παίρνουμε να ισχύουν σε κοινό χώρο πιθανότητας και σχεδόν βέβαια, γεγονός που μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε στις εξισώσεις (3.2.7), (3.2.9) την ποσότητα κ_n από το όριο της, κ . Ολοκληρώνοντας ξανά την (3.2.7) αυτή τη φορά στο διάστημα $[x, y]$ για $x > 0$ παίρνουμε πως

$$\left| \int_x^y \theta_{n,i}(t) dt \right| \leq \kappa |x - y| \sup_{t \in [x, y]} \{1 + \bar{\theta}(t)\},$$

έχουμε δηλαδή τοπικό φράγμα Lipschitz για την $\int_0^{\cdot} \theta_{n,i}, i = 1, 2$. Επομένως, το όριο της, θ_i^* θα είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση σχεδόν παντού. Γράφουμε $\theta_i = (\theta_i^*)'$ και παρατηρούμε πως $m_n^{-1} \sum_j \theta_{n,i;j} \rightarrow \int_0^x \theta_i = \theta_i^*$. Από τα παραπάνω μπορούμε να συμπεράνουμε πως το όριο για κάθε $\omega_{n,i,k} = y_{n,i,k} - m_n^{-1} \sum_j \theta_{n,i;j}$ είναι συνεχές (και το συμβολίζουμε ω_i). Κατα αυτόν τον τρόπο έχει ολοκληρωθεί η ανάλυση του $y = y_1 + y_2$ σε $y = \int \theta + \omega$.

3.3 Οριακός τελεστής - χαρακτηρισμός ιδιοτιμών

Στην παρούσα ενότητα θα ταυτίσουμε το όριο του H_n με το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$\mathcal{H}f = \Lambda f, \quad f(0) = 0, \quad (3.3.1)$$

στον $\mathbb{R}_+$. Με $\mathcal{H}$ (ή με $\mathcal{H}_y$) συμβολίζουμε τον τελεστή $-d^2/dx^2 + y'(x)$. Το επόμενο βήμα είναι να τεθεί ένα πλαίσιο που θα επιτρέψει τον χαρακτηρισμό των ιδιοτιμών του $\mathcal{H}$. Κινούμενοι προς αυτήν την κατεύθυνση, ορίζουμε τον χώρο C_0^∞ των συναρτήσεων δοκιμής, δηλαδή των λείων συναρτήσεων με συμπαγή φορέα, στον θετικό ημιάξονα. Η πλήρωση του C_0^∞ υπό τη νόρμα

$$\|f\|_* = \|f'\|^2 + \left\| f \sqrt{1 + \bar{\theta}} \right\|^2 \quad (3.3.2)$$

θα είναι ο χώρος Hilbert L^* .

Από την ανισότητα Cauchy-Schwartz προκύπτει για κάθε x, y :

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_x^y f'(t)^2 dt \right| \leq \|f'\| |x - y|^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.3)$$

ενώ για $f \in C_0^\infty$:

$$f(x)^2 = - \int_x^\infty f'(t) dt \leq 2 \|f'\| \|f\| \leq \|f\|_*^2.$$

Έστω $f \in L^*$. Τότε για την $\{f_n\} \subset C_0^\infty$ θα ισχύει, από Arzelá-Ascoli, πως κάποια υπακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή. Από αυτό

$$\begin{aligned} f(x)^2 &= \lim_n f_n(x)^2 = - \lim_n \int_x^\infty f'_n(t)^2 dt \\ &= - \int_x^\infty f'(t)^2 dt \leq 2 \|f'\| \|f\| \leq \|f\|_*^2, \end{aligned}$$

ενώ έχουμε επιπλέον πως $f(0) = \lim_n f_n(0) = 0$. Συνοψίζουμε όλα τα παραπάνω μαζί με μερικές επιπλέον ιδιότητες για τον L^* :

Πρόταση 3.3.1. 1 Κάθε $f \in L^*$ είναι ομοιόμορφα Hölder(1/2)–συνεχής και ικανοποιεί το φράγμα $f(x) \leq \|f\|_*$, για κάθε x . Επιπλέον, έχουμε $f(0) = 0$.

2 Κάθε L^* –φραγμένη ακολουθία έχει υπακολουθία $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ που συγκλίνει υπό τις ακόλουθες έννοιες σε κάποια f :

- i Ασθενώς στον L^* ,
- ii Ασθενώς ως προς τις παραγώγους στον L^2 (δηλαδή $f'_n \xrightarrow{L^2} f'$),
- iii Ομοιόμορφα στα συμπαγή, και
- iv Στον L^2 .

Απόδειξη. Ο χώρος L^* είναι χώρος Hilbert, επομένως από το θεώρημα Banach-Alaoglu ([58]) κάθε L^* –φραγμένη ακολουθία έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία. Επομένως τα i, ii είναι άμεσα, καθώς το ομοιόμορφο φράγμα στην $\|f\|_*$ συνεπάγεται αντίστοιχο φράγμα για την $\|f'\|$. Για το iii, από την (3.3.3) και το φράγμα για τις $\|f_n\|_*$ παίρνουμε (από Arzelá-Ascoli) πως κάποια υπακολουθία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή. Για το (iv) μία εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει πως εφ' όσον κάθε μία f_n ανήκει στον L^2 , η ακολουθία θα είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στον L^2 , το οποίο σε συνδυασμό με την L^2_{loc} σύγκλιση, η οποία προκύπτει από τα ομοιόμορφα στα συμπαγή το ζητούμενο έπεται. ■

Υπενθυμίζουμε εδώ το πόρισμα από το θεώρημα Arzelá-Ascoli που μας αφορά

Θεώρημα 3.3.2. Έστω μία ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ορισμένες σε ένα συμπαγές διάστημα του $[0, +\infty)$. Αν οι f_n είναι ομοιόμορφα φραγμένες και ομοιογενείς (δηλ. για κάθε $\varepsilon > 0$, x υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$), τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ώστε να συγκλίνει ομοιόμορφα.

Η φύση του L^* εξασφαλίζει την εγκυρότητα των υπόλοιπων επιχειρημάτων.

Η προσέγγιση που θα ακολουθηθεί για τον χαρακτηρισμό των ιδιοτιμών όπως είδαμε είναι η Courant-Fischer [60]. Για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε τη διγραμμική μορφή προερχόμενη από τον τελεστή $\mathcal{H}$. Ορίζουμε την εξής μορφή στο $C_0^\infty \times C_0^\infty$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_y(\phi, f) &:= \langle \phi, \mathcal{H}f \rangle = \\ &= -\langle \phi, f'' \rangle + \langle \phi, y'f \rangle = \int_0^\infty \phi'(x)f'(x) - \int_0^\infty (\phi f)'(x)y(x)dx \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Λήμμα 3.3.3. Υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ ώστε για κάθε $f \in C_0^\infty$:

$$c \|f\|_*^2 - C \|f\|^2 \leq \mathcal{H}_y(f, f) \leq C \|f\|_*^2 \quad (3.3.5)$$

Έπεται πως η μορφή $\langle \cdot, \mathcal{H} \cdot \rangle$ επεκτείνεται μονοσήμαντα σε συνεχή, συμμετρική διγραμμική μορφή στον $L^* \times L^*$. Επιπλέον, αυτό το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την ανάλυση (3.2.6) των $y_{n,i}$.

Απόδειξη. Ανακαλούμε την ανάλυση του στοχαστικού όρου σε $y = \int_0^\cdot \theta + \omega$ και τις υποθέσεις. Ο πρώτος όρος της

$$\mathcal{H}_{y,\omega}(f, f) = \langle f', f' \rangle - \langle (f^2)', y \rangle + \omega f^2(0) = \int_0^\infty f'(x)^2 dx - 2 \int_0^\infty f' f y(x) dx + \omega f^2(0)$$

είναι φραγμένος από την $\|f\|_*^2$. Για το δεύτερο έχουμε

$$-2 \int f f' y = -2 \int f f' \left(\int \theta + \omega \right) = -2 \int f f'(x) \int_0^x \theta(t) dt dx - 2 \int f f' \omega. \quad (3.3.6)$$

Προσθαφαιρώντας στην υπόθεση (3.2.7):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_n} f^2(\bar{\theta} - \kappa_n) &\leq f^2 \theta_n \leq \kappa_n(1 + \bar{\theta}) \implies \\ \frac{1}{\kappa_n} \int f^2(1 + \bar{\theta}) - \int f^2 \left(\frac{1}{\kappa_n} + \kappa_n \right) &\leq \int f^2 \theta_n \leq \kappa_n \int f^2(1 + \bar{\theta}), \end{aligned}$$

από το οποίο, περνώντας στο όριο, προκύπτει πως

$$\frac{1}{\kappa} \|f\|_*^2 - C' \|f\|^2 \leq \langle f^2, \theta \rangle \leq \kappa \|f\|_*^2, \quad (3.3.7)$$

ενώ μία ολοκλήρωση κατά μέρη στο πρώτο μέλος της (3.3.6) δίνει

$$-2 \int_0^\infty f(x)f'(x) \int_0^x \theta(t) dt dx = - \int (f^2)' \int \theta = \int f^2(x)\theta(x)dx. \quad (3.3.8)$$

Για το δεύτερο μέλος της ίδιας εξίσωσης, θα χρειαστούμε περαιτέρω ανάλυση του ω . χρειαζόμαστε έναν όρο που μπορούμε να ελέγξουμε τόσο αυτόν όσο και την διαφορά του από την αρχική ποσότητα. Θέτουμε $\bar{\omega}_x = \int_x^{x+1} \omega$ και τότε ισχύει $\omega = \bar{\omega} + (\omega - \bar{\omega})$ και πως $\bar{\omega}' = \omega(x+1) - \omega(x)$. Οδηγούμαστε έτσι στην τελική ανάλυση του όρου ως εξής

$$- \int (f^2)' \omega = - \int (f^2)' \bar{\omega} - \int (f^2)'(\omega - \bar{\omega}) = \int f(f\bar{\omega}') - 2 \int f f'(\omega - \bar{\omega}), \quad (3.3.9)$$

δηλαδή $\langle f, f\bar{\omega}' \rangle - 2\langle f', f(\omega - \bar{\omega}) \rangle$. Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ στην εξίσωση (3.2.9) έπεται το φράγμα $\max \left\{ |\omega_\xi - \omega_x|, |\omega_\xi - \omega_x|^2 \right\} \leq C_\varepsilon + \varepsilon \bar{\theta}(x)$. Πράγματι, από μία εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας και το γεγονός ότι $\zeta > 1$ παίρνουμε πως $|\omega_\xi - \omega_x|^2 \leq \kappa (1 + \bar{\theta}(x))$, το οποίο είναι μικρότερο ή ίσο από το $\kappa/\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \bar{\theta}(x) = C_\varepsilon + \varepsilon \bar{\theta}(x)$ (χρησιμοποιώντας την «ε-Cauchy» ανισότητα). Στην περίπτωση που το $\max$ είναι το $|\omega_\xi - \omega_x|$, έχουμε πως

$$|\omega_\xi - \omega_x| \leq \sqrt{\kappa (1 + \bar{\theta}(x))} \leq \kappa (1 + \bar{\theta}(x)),$$

αφού η υπόρριξη ποσότητα είναι μεγαλύτερη της μονάδας. Επιπλέον ολοκληρώνοντας το φράγμα που μόλις αποδείξαμε:

$$|\bar{\omega}_x - \omega_x| = \left| \int_x^{x+1} \omega_\xi - \int_x^{x+1} \omega_x \right| \leq \int_x^{x+1} |\omega_\xi - \omega_x| \leq \sqrt{C_\varepsilon + \varepsilon \bar{\theta}(x)}$$

Από τα παραπάνω, ο όρος $\langle f, f\bar{\omega}' \rangle$ φράσσεται ως εξής

$$|\langle f, f\bar{\omega}' \rangle| \leq \|f\|^2 \|\bar{\omega}' f\|^2 \leq \varepsilon \|\bar{\omega}' f\|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|f\|^2 \leq C_\varepsilon \varepsilon \|f\|^2 + \varepsilon^2 \|f\|_*^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|f\|^2,$$

όπου τροποποιώντας κατάλληλα τα ε είναι $\varepsilon \|f\|_*^2 + C'_\varepsilon \|f\|^2$.

Όσον αφορά τον δεύτερο όρο:

$$\begin{aligned} |\langle f', (\bar{\omega} - \omega)f \rangle| &\leq \|f'\|^2 \|(\bar{\omega} - \omega)f\|^2 \leq \sqrt{\varepsilon} \|f'\|^2 + \|(\bar{\omega} - \omega)f\|^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ &\leq \sqrt{\varepsilon} \|f\|_*^2 + \int f^2 (C_\varepsilon + \varepsilon \bar{\theta}(x)) dx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq 2\sqrt{\varepsilon} \|f\|_*^2 + C'_\varepsilon \|f\|^2. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας όλα όσα δείξαμε ως τώρα παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} \prec f, \mathcal{H}f \succ &= \|f'\|^2 + \langle f^2, \theta \rangle + \langle f, f\bar{\omega}' \rangle + 2\langle f', \bar{\omega} - \omega \rangle f \\ &\leq \kappa \|f\|_*^2 + \varepsilon \|f\|_*^2 + C_\varepsilon \|f\|^2 + \sqrt{\varepsilon} \|f\|_*^2 + C'_\varepsilon \|f\|^2 \\ &\leq C \|f\|_*^2, \end{aligned}$$

από το γεγονός ότι $\|f\| \leq \beta \|f\|_*$ για κάποια σταθερά β . Για το κάτω φράγμα αρκεί να παρατηρήσει κανείς πως οι $(::): (::)$ μαζί με το γεγονός πως ο όρος $\int f f' \omega$ είναι φραγμένος κατά απόλυτη τιμή από $c \|f\|_*^2 + c' \|f\|^2$. Έχοντας πλέον $|\mathcal{H}_y(f, f)| \leq C \|f\|_*^2$, για $f \in C_0^\infty$, είναι γεγονός πως μπορούμε να την επεκτείνουμε στον $L^* = \overline{(C_0^\infty, \|\cdot\|_*)}$. [33].

Η συνέχεια της μορφής προκύπτει από το γεγονός πως η εμφύτευση του $L^* \subset L^2$ είναι συνεχής, άρα για το εσωτερικό γινόμενο του L^2 , αρκεί να δείξουμε συνέχεια για την $\mathcal{H}_y(f, f) + C\langle f, f \rangle$, η οποία είναι μη-αρνητικά ορισμένη και έτσι μία εφαρμογή της Cauchy-Schwartz δίνει πως $\mathcal{H}_y(f_n, f_n) \rightarrow \mathcal{H}_y(f, f), \forall f_n \rightarrow f$. Επιπλέον, από το γεγονός πως κάθε $g \in L^*$ είναι όριο κάποιας ακολουθίας $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty$, προκύπτει πως κάθε ζεύγος ιδιοτιμής-ιδιοσυνάρτησης θα πρέπει να ικανοποιεί $\mathcal{H}_y(f, g) = \Lambda\langle f, g \rangle$. ■

Ορισμός 3.3.4. Ένα ζευγάρι (Λ, f) θα ονομάζεται **ζεύγος ιδιοτιμής-ιδιοσυνάρτησης** αν η f ανήκει στον L^* , έχει $\|f\| = 1$ και για κάθε συνάρτηση δοκιμής $\phi \in C_0^\infty$ ισχύει

$$\mathcal{H}_y(\phi, f) = \Lambda\langle \phi, f \rangle. \quad (3.3.10)$$

Ο παραπάνω ορισμός γράφεται επίσης ως

$$\begin{aligned}\langle \phi', f' \rangle - \langle (\phi f)', y \rangle &= \Lambda \langle \phi, f \rangle && \implies \\ \langle \phi', f' \rangle - \langle \phi', fy \rangle - \left\langle \left(\int_0^x f' y \right)', \phi \right\rangle &= -\Lambda \langle \phi', \int_0^x f \rangle && \implies \\ \langle \phi', f' \rangle - \langle \phi', fy \rangle + \left\langle \int_0^x f' y, \phi' \right\rangle &= -\Lambda \langle \phi', \int_0^x f \rangle,\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\langle \phi', \left(f' - fy + \int_0^x f' y + \Lambda \int_0^x f \right) \rangle = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty,$$

ή, ισοδύναμα,

$$f'(x) = y(x)f(x) - \int_0^x y(t)f'(t)dt - \Lambda \int_0^x f(t)dt, \quad (3.3.11)$$

σχεδόν για κάθε $x > 0$. Από αυτό είναι ασφαλές να υποθέσουμε συνέχεια για την f' και ότι κάθε ιδιόχωρος είναι πεπερασμένης διάστασης. Μπορούμε να αποδείξουμε κάτι πιο ισχυρό:

Λήμμα 3.3.5. Για κάθε $\Lambda \in \mathbb{R}$, ο ιδιόχωρος της ιδιοτιμής Λ είναι το πολύ διάστασης ένα.

Απόδειξη. Έστω $\Lambda \in \mathbb{R}$ και h_1, h_2 δύο λύσεις του προβλήματος ιδιοτιμών για την τιμή Λ . Τότε, η $h(x) = h_1(x)h_2(0) - h_2(x)h_1(0)$ είναι λύση (λόγω γραμμικότητας) και ικανοποιεί $h'(0) = h(0) = 0$. Από την (3.3.11) γράφουμε

$$\begin{aligned}h'(x) &= y(x)h(x) - \int_0^x yh' - \Lambda \int_0^x (t)'h(t)dt \\ &= y(x) \int_0^x h' - \int_0^x yh' - \Lambda x \int_0^x h' + \Lambda \int_0^x th'(t)dt\end{aligned}$$

από όπου έπεται πως

$$|h'(x)| \leq |y(x)| \int_0^x |h'| + \int_0^x |yh'| \leq 2 \sup_{[0,x]} |y| \int_0^x |h'|.$$

Μία εφαρμογή του λήμματος Gronwall ([28], σελ. 498) με $\varepsilon = 0$ μας δίνει ότι $h' \equiv 0$. Επομένως $h(x) = h(0) = 0$ που είναι ακριβώς το ζητούμενο, $h_1(x) = ch_2(x)$. ■

Χρησιμοποιούμε τον χαρακτηρισμό Courant-Fischer της k ιδιοτιμής ως το infimum της μορφής $\langle \cdot, \mathcal{H} \cdot \rangle$ που το ιδιοδιάνυσμά του είναι κάθετο στα προηγούμενα.

Πρόταση 3.3.6. Το μεταβολικό πρόβλημα

$$\inf_{\substack{f \in L^*, \|f\|=1 \\ f \in \text{span}\{f_0, \dots, f_{k-1}\}^\perp}} \mathcal{H}_y(f, f)$$

ορίζει αναδρομικά το $(k+1)$ -οστό ζευγάρι ιδιοτιμής-ιδιοσυνάρτησης (Λ_k, f_k) για τον τελεστή $\mathcal{H}$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε από $k = 0$. Αφού το infimum $\tilde{\Lambda}$ εξετάζεται πάνω σε στοιχεία του L^* , το λήμμα (3.3.3) διαβεβαιώνει πως είναι πεπερασμένο. Επομένως θα υπάρχει μία f_n ακολουθία που το επιτυγχάνει, και που λόγω του ιδίου λήμματος είναι επίσης φραγμένη. Από (::), μπορούμε να περάσουμε σε υπακολουθία (που θα συνεχίζουμε να την απαριθμούμε με n) f_n η οποία έχει όριο κατά τα γνωστά $f \in L^*$. Από την L^2 -σύγκλιση παίρνουμε πως $\|f\| = \lim \|f_n\| = 1$, που συνεπάγεται $\mathcal{H}_{y,\omega}(f, f) \geq \tilde{\Lambda}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, γράφουμε

$$\langle f, \mathcal{H}f \rangle = \|f'\|^2 + \int f^2 \theta + \langle f, \bar{\omega}' f \rangle + 2\langle f', (\bar{\omega} - \omega)f \rangle$$

Θα εξετάσουμε τον κάθε όρο της παραπάνω ισότητας ξεχωριστά και θα δείξουμε ότι είναι μικρότερη ή ίση από το $\liminf \mathcal{H}_{y,\omega}(f_n, f_n)$. Από την ασθενή σύγκλιση των παραγώγων στον L^2 παίρνουμε πως $\|f'\|^2 \leq \liminf \|f'_n\|^2$. Για τον δεύτερο όρο έχουμε

$$\int f^2(x) \theta(x) dx = \int \lim f_n^2(x) \theta(x) \leq \liminf \int f_n^2(x) \theta(x) dx,$$

όπου στην ισότητα χρησιμοποιήθηκε η κατά σημείο σύγκλιση (έχουμε πως $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή) και στην ανισότητα το λήμμα Fatou.

Για τους υπόλοιπους όρους κάνουμε την εξής παρατήρηση: Έστω $g_n \xrightarrow{L^2} g, h_n \xrightarrow{L^2} h$. Αν επιπλέον η h_n έχει φραγμένη L^2 -νόρμα, τότε $\langle h_n, g_n \rangle \rightarrow \langle h, g \rangle$. Για να το δούμε αυτό, γράφουμε

$$\begin{aligned} |\langle h_n, g_n \rangle - \langle h, g \rangle| &= |\langle h_n, g_n - g \rangle - \langle h_n - h, g \rangle| \leq \langle h_n, g_n - g \rangle + \langle h_n - h, g \rangle \\ &\leq (\|h_n\| \|g_n - g\|)^{\frac{1}{2}} + \langle h_n - h, g \rangle \\ &\leq M \|g_n - g\|^{\frac{1}{2}} + \langle h_n - h, g \rangle. \end{aligned}$$

Από τις υποθέσεις μας, υπάρχει ένα n_0 ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να ισχύει

$$\|g_n - g\|^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad \langle h_n - h, g \rangle < \frac{\varepsilon}{2},$$

το οποίο συνάγει το ζητούμενο.

Συνεχίζοντας την απόδειξη, έχουμε πως

$$\begin{aligned} \langle f_n, \bar{\omega}' f_n \rangle &\rightarrow \langle f, \bar{\omega}' f \rangle, \\ \langle f'_n, (\bar{\omega} - \omega) f_n \rangle &\rightarrow \langle f', (\bar{\omega} - \omega) f \rangle, \end{aligned}$$

αφού τόσο η $\bar{\omega}' f_n$ όσο και η $(\bar{\omega} - \omega) f_n$ συγκλίνουν στον L^2 (η f_n συγκλίνει στον L^2 , ενώ για τα άλλα έχουμε φράγματα ανεξάρτητα του n). Συνοψίζοντας,

$$\langle f, \mathcal{H}f \rangle \leq \liminf \langle f_n, \mathcal{H}f_n \rangle = \tilde{\Lambda}.$$

Για να ολοκληρωθεί η περίπτωση $k = 0$ μένει να δειχθεί πως το ζευγάρι $(\tilde{\Lambda}, f)$ είναι πράγματι ζευγάρι ιδιοτιμής-ιδιοσυνάρτησης· αυτό προκύπτει από τον μηδενισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου $\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{H}_{y,\omega}(f + \varepsilon\phi, f + \varepsilon\phi)|_{\varepsilon=0} = 0$ (βλ. το αντίστοιχο στην απόδειξη ::).

Για το επαγωγικό βήμα, ορίζουμε τον υπόχωρο του L^* ,

$$L_k^* = \{f \in L^* : \|f\| = 1 \quad \& \quad f \in \text{span}\{f_0, \dots, f_{k-1}\}\}$$

Θεωρώντας ελαχιστοποιούσα ακολουθία $\{f_{n,k}\}$ στον L_k^* , ακριβώς όπως πριν, παίρνουμε πως το όριο της, f_k είναι ιδιοσυνάρτηση της $\tilde{\Lambda}_k = \inf_{L_k^*} \mathcal{H}_{y,\omega}(f, f)$. Ορίζοντας $\Lambda_k = \tilde{\Lambda}_k$ ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

3.4 Διακριτή μορφή

Στην παρούσα ενότητα θα ορίσουμε μία ανάλογη νόρμα με την $\|\cdot\|_*$ για διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και διγραμμική μορφή συσχετισμένη με τον τελεστή H_n . Θα αποδείξουμε αποτελέσματα ανάλογα της προηγούμενης ενότητας, καθώς και σχέσεις μεταξύ των δύο αυτών μορφών. Υπενθυμίζουμε πως κάθε φορά που αναφερόμαστε σε τέτοια διανύσματα, τα αντιλαμβανόμαστε και ως εμφυτευμένα στον $L^2(\mathbb{R}_+)$. Για $v \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε την L_n^* -νόρμα

$$\|v\|_{*n}^2 = \|\Delta_n v\|^2 + \left\|v\sqrt{1+\bar{\theta}}\right\|^2, \quad (3.4.1)$$

με $\Delta_n = m(I - T_n^t)$ (η αλλαγή είναι απλά για να μην χρειαστεί να γράψουμε τον επιπλέον όρο $m_n v_0^2$). Τα παρακάτω δύο λήμματα μας δείχνουν ότι οι ιδιότητες του χώρου L^* ισχύουν, στο διακριτό ανάλογό τους, και για τον χώρο L_n^* :

Λήμμα 3.4.1. Υπάρχουν σταθερές $c, C > 0$ έτσι ώστε για κάθε $v \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$:

$$c \|v\|_{*n}^2 - C \|v\|^2 \leq \langle v, H_n v \rangle \leq C \|v\|_{*n}^2, \quad (3.4.2)$$

όπου $\langle \cdot, \cdot \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο στον $L^2(\mathbb{R}_+)$ θεωρώντας τα ως απλές συναρτήσεις.

Απόδειξη. Από τις υποθέσεις 1 προκύπτουν τα εξής διακριτά ανάλογα των φραγμάτων:

$$\bar{\theta}_k/\kappa - \kappa \leq \theta_{1,k} + \theta_{2,k} \leq \kappa \bar{\theta}_k + \kappa, \quad (3.4.3)$$

$$\theta_{2,k} \leq 2m_n^2, \quad (3.4.4)$$

$$|\omega_{i,\ell} - \omega_{i,k}|^2 \leq \varepsilon \bar{\theta}_k + C_\varepsilon, \quad (3.4.5)$$

Για $k \leq \ell \leq k+m$ και $i = 1, 2$. Έστω $\omega_k = \omega_{1,k}, u_k = \omega_{2,k}$. Έχουμε πως

$$\begin{aligned} m \langle v, H_n v \rangle &:= \sum_{k=0}^n ((\Delta_n v_k)^2 + \theta_{2,k} v_k v_{k+1} + \theta_{1,k} v_k^2) \\ &+ \sum_{k=0}^n (\Delta_n \omega_k v_k + D_n u_k v_k v_{k+1}) =: A + B = A + B_1 + B_2 \end{aligned}$$

Από την $ab \geq -(a-b)^2/3 + a^2/4$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\theta_{2,k}} v_k \sqrt{\theta_{2,k}} v_{k+1} &\geq -\frac{\theta_{2,k}}{3} (v_{k+1} - v_k)^2 + \frac{\theta_{2,k}}{4} v_k^2 \\ &\geq -\frac{2}{3} (\Delta_n v_k)^2 + \frac{\bar{\theta}_k}{4k} v_k^2 - \frac{k}{4} v_k^2 \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \sum_k \theta_{2,k} v_k v_{k+1} + \theta_{1,k} v_k^2 &\geq -\frac{2}{3} \|v\|_{*n} + \frac{5}{4\kappa} \sum_k (\bar{\theta}_k + 1) v_k^2 - c(\kappa) m \|v\|^2 \\ &\geq -\|v\|_{*n} + \frac{m}{4\kappa} \|v\|_{*n}^2 - c(\kappa) m \|v\|^2, \end{aligned}$$

από όπου παίρνουμε το τελικό

$$A > \frac{m}{4\kappa} \|v\|_{*n}^2 - cm \|v\|^2,$$

ενώ από το $\|v\| \leq \|v\|_{*n}$ την ανισότητα Cauchy-Schwartz παίρνουμε και το άνω φράγμα $A \leq c \|v\|_{*n}^2$.

Προχωρώντας στον όρο B , θέτουμε πρώτα $\delta\omega_k = \omega_{k+m} - \omega_k$ και προσθαφαιρούμε,

$$\sum_k (\Delta_n \omega_k) v_k^2 = \sum_k (\Delta_n \omega_k - \delta\omega_k) v_k^2 + \sum_k \delta\omega_k v_k^2$$

Παρατηρούμε πως $\delta\omega_k = \sum_{j=k}^{k+m} (\omega_{j+1} - \omega_j)$ και

$$\Delta_n \omega_k - \delta\omega_k = \sum_{j=k}^{k+m} ((\omega_{j+m} - \omega_{k+1}) - (\omega_{j-1+m} - \omega_k)).$$

Εφαρμόζοντας μία άθροιση κατά παράγοντες στο παραπάνω άθροισμα,

$$\sum_k (\Delta_n \omega_k) v_k^2 = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\ell=k+1}^{k+m} (\omega_\ell - \omega_k) (v_{k+1}^2 - v_k^2) \right) + \sum_k \delta\omega_k v_k^2. \quad (3.4.7)$$

Από ::, οι όροι του πρώτου αθροίσματος είναι μικρότεροι ή ίσοι του

$$\begin{aligned} m (\varepsilon \bar{\theta}_k + C_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} |v_{k+1}^2 - v_k^2| &\leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\varepsilon \bar{\theta}_k + C_\varepsilon) (v_{k+1} + v_k)^2 + \sqrt{\varepsilon} m^2 (v_{k+1} - v_k)^2 \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} (\varepsilon \bar{\theta}_k + C_\varepsilon) (v_{k+1}^2 + v_k^2) + \sqrt{\varepsilon} m^2 (v_{k+1} - v_k)^2, \end{aligned}$$

ενώ οι όροι του δεύτερου, $\delta\omega_k v_k^2 \leq (C_\varepsilon + \bar{\theta}_k \varepsilon) v_k^2$. Το φράγμα για το B_1 είναι

$$\left(\frac{4}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right) \sum_k (\varepsilon \bar{\theta}_k + C_\varepsilon) v_k^2 + \sqrt{\varepsilon} m^2 \sum_k (v_{k+1} - v_k)^2. \quad (3.4.8)$$

Για τον όρο B_2 ακολουθούμε ακριβώς το ίδιο σκεπτικό· θέτουμε $\delta u_k = u_{k+m} - u_k$ και αθροίζουμε κατά μέρη για να πάρουμε

$$\sum_k \Delta_n u_k v_k v_{k+1} = \sum_k \left(\sum_{\ell=k+1}^{k+m} (u_\ell - u_k) (v_{k+1} v_k - v_k v_{k-1}) \right) + \sum_k \delta u_k v_k v_{k+1}.$$

Εδώ το $v_k v_{k-1}$ έχει το ρόλο του v_k^2 στην προηγούμενη ποσότητα,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{\ell=k+1}^{k+m} (u_\ell - u_k)(v_{k+1}v_k - v_k v_{k-1}) \right| \\ & \leq m(\varepsilon \bar{\theta}_k + C_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} |v_{k+1}v_k - v_k v_{k-1}| \leq m(\varepsilon \bar{\theta}_k + C_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} (|v_k| |v_k - v_{k-1}| + |v_k| |v_{k+1} - v_k|) \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} |v_k|^2 (\varepsilon \bar{\theta}_k + C_\varepsilon) + m^2 \sqrt{\varepsilon} (v_k - v_{k-1})^2 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\varepsilon \bar{\theta}_k + C_\varepsilon) |v_k|^2 + m^2 \sqrt{\varepsilon} (v_{k+1} - v_k)^2, \end{aligned}$$

και

$$\delta u_k v_k v_{k+1} \leq \frac{1}{2} (\varepsilon \bar{\theta}_k + C_\varepsilon) (v_k^2 + v_{k+1}^2)$$

Τα παραπάνω δίνουν ίδιο φράγμα με την (3.4.8) για την B_2 . Επομένως $B \leq c\sqrt{\varepsilon}m \|v\|_{*n}^2 + C'_\varepsilon m \|v\|^2$. ■

Λήμμα 3.4.2. Έστω $f_n \in \mathbb{R}^n$ για την οποία η $\|f_n\|_{*n}$ είναι φραγμένη ομοιόμορφα ως προς n . Τότε, υπάρχει κάποια $f \in L^*$ για την οποία οι παρακάτω συγκλίσεις ισχύουν σε κάποια υπακολουθία της f_n :

- i $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή,
- ii $f_n \xrightarrow{L^2} f$,
- iii $D_n f_n \xrightarrow{L^2} f'$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_n(x) = f_n(0) + \int_0^x D_n f_n(t) dt$, όπου $x \in [0, n/m_n]$ και $D_n f_n(x) = m_n (f(x + m_n^{-1}) - f(x))$. Για $x \in \xi_k = [k/m_n, (k+1)/m_n]$ έχουμε πως

$$\begin{aligned} \|g_n\|_* &= \|g'_n\| + \int_0^{n/m_n} (1 + \theta(x)) g_n^2(x) dx \\ &\leq \|D_n f_n\| + \left\| \sqrt{1 + \theta} f_n \right\| = \|f_n\|_{*n} < \infty, \end{aligned}$$

διότι $g_n(x) = \int_{k/m_n}^x (f_n(t + m_n^{-1}) - f_n(t)) dt + f_n(k)$, και αναλύοντας το παραπάνω ολοκλήρωμα σε $\sum_k \int_{\xi_k}$ μαζί με την μονοτονία του ολοκληρώματος $\int_{k/m_n}^t \leq \int_{\xi_k}, t \in \xi_k$, παίρνουμε είναι μικρότερο ή ίσο από το

$$\sum_k \int_{\xi_k} (1 + \theta(x)) f_n(k+1)^2 dx = \int_0^{n/m_n} (1 + \theta(x)) f_n^2(x) dx.$$

Από το λήμμα ::, 3.1.3, υπάρχει υπακολουθία της g_n και $f \in L^*$ ώστε $g_n \rightarrow f$ ύπο τις τέσσερις γνωστές έννοιες. Για $x \in \xi_k$:

$$\begin{aligned} |g_n(x) - f_n(x)| &= \left| \int_0^x D_n f_n(t) dt - \int_0^{k/m_n} D_n f_n(t) dt \right| \\ &\leq \int_{k/m_n}^x |D_n f_n(t)| dt \leq \|D_n f_n\| \left(x \frac{k}{m_n} \right) \\ &\leq \|D_n f_n\| m_n^{-1/2}. \end{aligned} \tag{3.4.9}$$

Από τα παραπάνω, προσθαφαιρώντας

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x) - g_n(x) - (f(x) - g_n(x))$$

παίρνουμε πως $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή ($n/m_n \rightarrow \infty$, επομένως κάθε συμπαγές μπορεί να περιληφθεί σε ένα $[0, n/m_n]$, όπου n αρκούντως μεγάλο), ενώ υψώνοντας στο τετράγωνο την (3.4.9) παίρνουμε πως $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Εφ' όσον ισχύει ότι

$$g'_k(x) = \lim_n m_n (g_k(x + m_n^{-1}) - g_k(x)) = \lim_n m_n \int_x^{x+m_n^{-1}} D_k f_k(t) dt,$$

το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue μας δίνει πως $g'_n(x) = D_n f_n(x)$, σχεδόν για κάθε x , από όπου έπεται ότι $D_n f_n \xrightarrow{L^2} f'$ (έχουμε πως $g'_n \xrightarrow{L^2} f'$). ■

Παρατήρηση 3.4.3.

Το τελευταίο τεχνικό βήμα που θα κάνουμε είναι η συσχέτιση της διγραμμικής μορφής $\langle \cdot, H_n \cdot \rangle$ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ με τη $\mathcal{H}_y(\cdot, \cdot)$. Ορίζουμε την ορθογώνια προβολή από τον $L^2(\mathbb{R}_+)$ στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή την ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο $L^{2,n}$, έστω $\mathcal{P}_n$. Ο χώρος αυτός, L_n^* παράγεται από γραμμικούς συνδυασμούς των $\sqrt{m} \mathbb{1}_{\xi_i}$, όπου $\xi_i = [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m})$, $i = 1, \dots, n$. Για μία συνάρτηση του L^2 θα ισχύει ότι

$$\mathcal{P}_n(f)(x) = \sum_i \langle f, \mathbb{1}_{\xi_i} \rangle \mathbb{1}_{\xi_i}(x),$$

δηλαδή, αν $x \in \xi_j$ τότε $\mathcal{P}_n f(x) = m \int_{\xi_j} f(x) dx$. Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue μας δίνει πως σχεδόν για κάθε x ισχύει η κατά σημείο σύγκλιση $\mathcal{P}_n f(x) \rightarrow f(x)$. Αυτό, μαζί με την ομοιόμορφη L^2 -ολοκληρωσιμότητα της $\mathcal{P}_n f$ δίνουν πως $\mathcal{P}_n f \xrightarrow{L^2} f$. Αν η f είναι λεία, τότε η σύγκλιση της $\mathcal{P}_n f$ επιτυγχάνεται ομοιόμορφα στα συμπαγή. Για $\eta_n(x) = \dots$ έχουμε $f' * \eta_n(x) = D_n f$. Επομένως, αν επιπλέον υποθέσουμε πως $f' \in L^2$, έπεται πως $D_n f \xrightarrow{L^2} f'$. Τέλος, ο τελεστής $\mathcal{P}_n$ μετατίθεται με τον τελεστή R_n καθώς και με τον $D_n R_n$.

Λήμμα 3.4.4. Έστω $f_n \in \mathbb{R}^n$ με ομοιόμορφα φραγμένη $\|f\|_{*n}$ (δηλαδή ισχύει για αυτή πως $f_n \rightarrow f$ όπως στο λήμμα 3.4.2). Τότε για κάθε $\phi \in C_0^\infty$ έχουμε την εξής σύγκλιση: $\langle \phi, H_n f_n \rangle \rightarrow \mathcal{H}_{y,\omega}(\phi, f)$. Επιπλέον,

$$\langle \mathcal{P}_n \phi, H_n \mathcal{P}_n \phi \rangle \rightarrow \prec \phi, \mathcal{H} \phi \succ.$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε με το εξής λήμμα

Λήμμα 3.4.5. Έστω J πεπερασμένο διάστημα του $\mathbb{R}_+$, και δύο ακολουθίες $\{g_n\}_n, \{h_n\}_n$ τέτοιες ώστε $g_n \xrightarrow{L^2} g$ και η h_n έχει φραγμένη $L^2(I)$ -νορμα ενώ επιπλέον συγκλίνει ασθενώς στον $L^2(I)$ σε μία h . Τότε

$$\langle g_n, h_n \mathbb{1}_J \rangle \rightarrow \langle g, h \rangle.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} |\langle g_n, h_n \mathbf{1}_J \rangle - \langle g, h \mathbf{1}_J \rangle| &= |\langle g_n, (h_n - h) \mathbf{1}_J \rangle| + |\langle (g_n - g), h \mathbf{1}_J \rangle| \\ &\leq \|g_n\|^2 \|(h_n - h) \mathbf{1}_J\|^2 + \|g_n - g\|^2 \|h \mathbf{1}_J\|^2. \end{aligned}$$

Από τις συγκλίσεις των h_n, g_n μπορούμε να βρούμε N τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$ να ισχύει $\|g_n - g\| \leq \sqrt{\varepsilon}/\|h\|_{L^2(I)}$ και $\|h_n - h\|_{L^2(I)} < \sqrt{\varepsilon}/\sup \|g_n\|$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. ■

Υπενθυμίζουμε πως ο τελεστής δίνεται από το

$$H_n = R_n(D_n^\dagger D_n + V_n),$$

και πως η $f_n \in \mathbb{R}^n$ μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση με στήριγμα στο $[0, n/m]$ και τύπο $f_n(x) = f_n(\lceil mx \rceil)$.

Έστω κλειστό διάστημα $J \subset \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε να περιέχει τους φορείς των $\phi, \phi', D_n \phi$. Θεωρώντας αρκούντως μεγάλο n ώστε $R_n \phi = \phi$ (μπορούμε διότι $m = o(n)$), άρα υπάρχει κάποιος δείκτης από τον οποίον και μετά $[0, n/m]$ να περιέχει ολόκληρο το J μπορούμε να αγνοήσουμε τον R_n . Έτσι, για τον πρώτο όρο του $\langle \phi, H_n f_n \rangle = \langle \phi, R_n(D_n^\dagger D_n + V_n) f_n \rangle$ έχουμε

$$\langle \phi, D_n D_n^\dagger f_n \rangle = \langle D_n D_n^\dagger \phi, f_n \rangle \rightarrow \langle \phi'', f \rangle = \prec \phi, f'' \succ,$$

από την αυτοσυζυγία του τελεστή $D_n D_n^\dagger$ και το γεγονός πως $D_n D_n^\dagger \phi \xrightarrow{L^2} \phi''$ (στην προκειμένη μας αρκεί η σύγκλιση στον L^2) και $f_n \xrightarrow{L^2} f$. Για τους υπόλοιπους όρους θα χρησιμοποιήσουμε μία εκτίμηση για το $\langle \phi, V_n f_n \rangle$, διαβεβαιώνοντας παράλληλα πως το σφάλμα από την αρχική ποσότητα είναι αμελητέο. Γράφοντας $y_n = y_{n,1} + y_{n,2}$:

$$\langle \phi, \text{diag}(D_n y_n) f_n \rangle = \langle \phi f_n, \text{diag}(D_n y_n) \rangle = \langle D_n^\dagger (\phi f_n), y_n \rangle \quad (3.4.10)$$

$$= \langle \phi D_n^\dagger f_n + f_n D_n^\dagger \phi + m^{-1} D_n^\dagger f_n D_n^\dagger \phi, y_n \rangle \quad (3.4.11)$$

$$= \langle D_n^\dagger f_n, \phi y_n \rangle + \langle f_n, y_n D_n^\dagger \phi \rangle + m^{-1} \langle D_n^\dagger f_n, y_n D_n^\dagger \phi \rangle, \quad (3.4.12)$$

Για τον πρώτο όρο της (3.4.12) έχουμε $D_n^\dagger f_n \xrightarrow{L^2} f'$ και $y_n \phi \xrightarrow{L^2} y \phi$ ενώ για το δεύτερο, $f_n \xrightarrow{L^2} f$ και $y_n D_n^\dagger \phi \xrightarrow{L^2} y \phi'$ από το ότι $\phi \in C_0^\infty$. Όσον αφορά τον τελευταίο όρο,

$$\begin{aligned} m^{-1} \langle D_n^\dagger f_n, y_n D_n^\dagger \phi \rangle &= m^{-1} \langle D_n^\dagger f_n, y_n D_n^\dagger \phi \mathbf{1}_J \rangle \\ &\leq m^{-1} \|D_n^\dagger f_n\| \|D_n^\dagger \phi\|_{L^2(I)} \sup_{x \in J} y_n. \end{aligned}$$

Οι παραπάνω ποσότητες είναι ομοιόμορφα φραγμένες ως προς n χωρίς τον συντελεστή $m = m_n$, επομένως η ασυμπτωτική της συνεισφορά θα είναι μηδενική.

Το σφάλμα στην παραπάνω ανάλυση είναι πως αγνοήσαμε το $\frac{1}{2}(T_n + T_n^\dagger)$ μπροστά από το $y_{n,2}$. Ζητάμε, δηλαδή, έλεγχο πάνω στην εξέλιξη του $\frac{1}{2}(T_n + T_n^\dagger) - I = \frac{1}{2}(T_n - I) + \frac{1}{2}(T_n^\dagger - I)$, εξετάζοντας μεμονωμένα τους δύο προσθεταίους.

$$\begin{aligned} |\langle \phi, \text{diag}(D_n y_{n,2}) (I - T_n^\dagger) f_n \rangle| &= |\langle \phi, \text{diag}(D_n y_{n,2}) (D_n f_n) m^{-1} \rangle| \\ &= |\langle m^{-1} \phi D_n y_{n,2}, D_n f_n \rangle| \\ &\leq m^{-1} \sup_{x \in J} \phi(x) \|D_n f_n\| \|D_n y_{n,2}\|_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

Η βασική παρατήρηση σε αυτό το σημείο είναι πως $D_n y_{n,2} \mathbf{1}_J = (y_{n,2} - T_n^\dagger y_{n,2})|_J$, δηλαδή ο περιορισμός της στο διάστημα J . Επιπλέον, τόσο το $y_{n,2}$ (από υπόθεση) όσο και το $T_n^\dagger y_{n,2}$ (ως υπακολουθία της $y_{n,2}$) συγκλίνουν στο y καθώς το $n \rightarrow \infty$. Η σύγκλιση αυτή είναι στην τοπολογία Skorokhod, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε πως ισχύει σχεδόν παντού στο J . Έπεται πως $m^{-1} \|D_n y_{n,2}\|_{L^2(I)} \rightarrow 0$. Για τον άλλο όρο, $\frac{1}{2}(T_n^\dagger - I)$ η διαδικασία είναι ακριβώς η ίδια,

$$\begin{aligned} \left| \langle \phi, T_n^\dagger - I \rangle f \right| &= \left| \langle \phi m^{-1}, \text{diag}(D_n y_{n,2}) D_n^\dagger f_n \rangle \right| \\ &\leq \sup_{x \in J} \phi(x) \|f_n\|_{*n} \|m^{-1}(D_n y_{n,2}) \mathbf{1}_J\|. \end{aligned}$$

Μέχρι τώρα, δείξαμε πως για $\phi \in C_0^\infty$ και $f_n \in L^{*n}$, η διακριτή μορφή «συγκλίνει ασθενώς» στη συνεχή μορφή με την έννοια $\langle \phi, H_n f_n \rangle \rightarrow \mathcal{H}(\phi, f)$. Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε πως η ίδια σύγκλιση ισχύει για $\langle \phi, H_n \mathcal{P}_n \phi \rangle$, με σκοπό μετά να χρησιμοποιηθεί η συνέχεια της μορφής και να επεκταθεί το αποτέλεσμα στις συναρτήσεις του L^* . Αρχικά, $\mathcal{P}_n \phi \in L_n^*$. Πράγματι, από μία εφαρμογή της ανισότητας Jensen,

$$\|(\mathcal{P}_n \phi) \sqrt{1 + \bar{\theta}}\| = \|\mathcal{P}_n(\phi \sqrt{1 + \bar{\theta}})\| \leq \|\phi \sqrt{1 + \bar{\theta}}\|,$$

δηλαδή

$$\|\mathcal{P}_n \phi\|_{*n} \leq \|D_n \phi\|^2 + \|\phi \sqrt{1 + \bar{\theta}}\| \leq \|\phi\|_*^2,$$

όπου $\|D_n \phi\| \leq \|\phi'\|$ εξ αιτίας της ανισότητας Young για συνελίξεις και την συζήτηση στην παρατήρηση 3.4.3. Από την ίδια παρατήρηση έχουμε την σύγκλιση της $\mathcal{P}_n \phi$ στην ϕ ομοιόμορφα στα συμπαγή αλλά και στον L^2 . Επειδή η $\mathcal{P}_n$ είναι ορθογώνια προβολή ισχύει εξ ορισμού $\langle \mathcal{P}_n \phi, H_n \mathcal{P}_n \phi \rangle = \langle \phi, H_n \mathcal{P}_n \phi \rangle$. Συνεχίζοντας από αυτό και συνδυάζοντας τα γεγονότα $\mathcal{P}_n \phi \in L_n^*$, $\mathcal{P}_n \rightarrow \phi$ και το λήμμα 3.4.2, μαζί με το πρώτο σκέλος του παρόντος λήμματος, παίρνουμε

$$\langle \phi, H_n \mathcal{P}_n \phi \rangle \rightarrow \mathcal{H}(\phi, \phi),$$

όπου $\mathcal{H}$ είναι οποιαδήποτε από τις δύο μορφές με τις οποίες ασχολούμαστε. ■

Μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε το τελικό αποτέλεσμα,

Θεώρημα 3.4.6. Έστω H_n τελεστής της μορφής (3.2.1) με (λ_n^k, v_n^k) το $(k+1)$ -οστό ζευγάρι ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος (με διάταξη ως προς τις ιδιοτιμές). Με δεδομένες τις υποθέσεις (1), ορίζουμε τη διγραμμική μορφή $\mathcal{H}(\cdot, \cdot)$ κατά τις (3.3.1) με αντίστοιχο $(k+1)$ -οστό ζευγάρι ιδιοτιμής-ιδιοσυνάρτησης (Λ_k, f_k) , ορισμένα κατά την 3.3.6. Για τα παραπάνω ισχύει πως, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το διάνυσμα $\{\lambda_n^i\}_{i=0}^k \Rightarrow \{\Lambda_i\}_{i=0}^k$ συγκλίνει κατά κατανομή, και οι ιδιοσυναρτήσεις $v_n^k \xrightarrow{L^2} f_k$ συγκλίνουν ασθενώς στον L^2 στις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του $\mathcal{H}$.

Η παραπάνω σύγκλιση λέγεται ασθενής σύγκλιση κατανομών πεπερασμένης διάστασης, το οποίο σημαίνει ακριβώς πως για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το διάνυσμα $(\lambda_n^1, \dots, \lambda_n^k)$ συγκλίνει κατά κατανομή στο $(\Lambda_1, \dots, \Lambda_k)$. Για τις ιδιοσυναρτήσεις, η σύγκλιση είναι η κλασική ασθενής του L^2 .

Απόδειξη. Έστω (λ_n^k, v_n^k) τα $k+1$ μικρότερα ζευγάρια ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων, εμφυτεύοντας τα v_n^k στον L^2 όπως πάντα. Η απόδειξη θα χωριστεί σε δύο σκέλη. Στο πρώτο θα δείξουμε πως

$$\underline{\lambda}_k := \liminf_n \lambda_n^k \geq \Lambda_k, \quad (3.4.13)$$

ενώ στο δεύτερο πως

$$\limsup_n \lambda_n^k \leq \Lambda_k, \quad v_n^k \rightarrow f_k. \quad (3.4.14)$$

Για τον ισχυρισμό (3.4.13), υποθέτουμε πως $\underline{\lambda}_k < \infty$. Από 3.4.1 για κάθε ζευγάρι ιδιοτιμής-ιδιοσυνάρτησης (λ, v) ισχύει $\lambda \geq c \|v\|_{*n}^2 - C$, επομένως υπάρχει κάποια υπακολουθία της $(\lambda_n^1, \dots, \lambda_n^k)$ (την οποία απαριθμούμε ξανά με n δίχως σύγχυση) η οποία συγκλίνει σε κάποιο διάνυσμα $(z_1, \dots, z_k)$, με $z_k = \underline{\lambda}_k$. Εφαρμόζοντας ξανά τα λήμματα 3.4.1, αυτή τη φορά για τις ιδιοσυναρτήσεις $v_n^j, j = 0, \dots, k$ και το λήμμα 3.4.2, μπορούμε να βρούμε μία υπακολουθία για κάθε j και συναρτήσεις v_j με $v_n^j \rightarrow v_j$. Περνώντας σε κοινή υπακολουθία ώστε οι συγκλίσεις να ισχύουν για όλα τα j , μπορούμε να δούμε πως $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ και ότι οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες (λόγω ορθοκανονικότητας των v_n^i, v_n^j για κάθε n και του μονοδιάστατου των ιδιοχώρων), καθώς και ότι κάθε v_j είναι ιδιοσυνάρτηση του $\mathcal{H}$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή z_j . Έχουμε δηλαδή k ιδιοτιμές $z_1, \dots, z_k$ και $z_k = \liminf_n \lambda_n^k$. Έπεται πως $\Lambda_k \leq \underline{\lambda}_k$ διότι αν είχαμε το αντίστροφο θα έπρεπε οι k διακεκριμένες ιδιοτιμές που αντιστοιχούν στις $v_1, \dots, v_k$ να είναι κάτω από την k^η ιδιοτιμή, πράγμα αδύνατο.

Για το δεύτερο σκέλος θα κινηθούμε με επαγωγή. Υποθέτουμε πως η υπόθεση $\lambda_n^j \rightarrow \Lambda_k$ και $v_n^j \rightarrow f_j$ ισχύει για $j = 1, \dots, k-1$ και θέτουμε

$$f_{n,k} = \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_n^j, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle v_n^j,$$

όπου $f_k^\varepsilon \in C_0^\infty$ είναι τέτοια ώστε $\|f_k - f_k^\varepsilon\|_* \leq \varepsilon$ (μπορούμε να βρούμε τέτοια από τον ορισμό του L^* ως την κλειστότητα του C_0^∞ με τη νόρμα $\|\cdot\|_*$). Αρχικά παρατηρούμε πως οι συντελεστές στο άθροισμα ικανοποιούν

$$\begin{aligned} |\langle v_n^j, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle| &\leq |\langle v_n^j, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon - f_k \rangle| + |\langle v_n^j, f_k \rangle| \\ &\leq \|v_n^j\|_{*n} (\|\mathcal{P}_n f_k^\varepsilon - f_k^\varepsilon\|_* + \|f_k^\varepsilon - f_k\|_*) + |\langle v_n^j, f_k \rangle|, \end{aligned}$$

όπου για $n \rightarrow \infty$ γίνεται μικρότερο του $2c\varepsilon$, όπου c το ομοιόμορφο φράγμα των v_n^j από λήμμα 3.4.1, την επαγωγική υπόθεση αλλά και το ότι η $\mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \xrightarrow{L^*} f_k$ μαζί με την φραγμένη $\|\mathcal{P}_n f_k^\varepsilon\|_*$ νόρμα. Από τον μεταβολικό χαρακτηρισμό (Courant-Fischer) για τις ιδιοτιμές και το γεγονός πως η $f_{n,k}$ είναι ορθογώνια σε κάθε v_n^j (άμεσα από την κατασκευή της ως προβολή) θα ισχύει ότι

$$\limsup_n \lambda_n^k \leq \limsup_n \frac{\langle f_{n,k}, H_n f_{n,k} \rangle}{\langle f_{n,k}, f_{n,k} \rangle}.$$

$$\begin{aligned}
\langle f_{n,k}, f_{n,k} \rangle &= \langle \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle - 2 \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_n^j, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle^2 + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\ell=1}^{k-1} \langle v_n^j, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle \langle v_n^\ell, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle \langle v_n^j, v_n^\ell \rangle \\
&= \langle \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_n^j, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle^2 = \langle \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle + o_\varepsilon(1),
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

και

$$\langle f_{n,k}, H_n f_{n,k} \rangle = [\dots] = \langle \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon, H_n \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle + o_\varepsilon(1). \tag{3.4.16}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω,

$$\limsup_n \lambda_n^k \leq \limsup_n \frac{\langle \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon, H_n \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle + o_\varepsilon(1)}{\langle \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle + o_\varepsilon(1)} = \limsup_n \frac{\langle \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon, H_n \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle}{\langle \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle} + o_\varepsilon(1). \tag{3.4.17}$$

Από λήμμα 3.4.4 έχουμε πως

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon, H_n \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle &\longrightarrow \mathcal{H}(f_k^\varepsilon, f_k^\varepsilon), \\
\langle \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon, \mathcal{P}_n f_k^\varepsilon \rangle &\longrightarrow \|f_k^\varepsilon\|,
\end{aligned}$$

$$\mu_\varepsilon \|f_k^\varepsilon\| \leq \|f_k^\varepsilon - f_k\| + \|f_k\| = \|f_k\| + o_\varepsilon(1) = 1 + o_\varepsilon \text{ και}$$

$$\begin{aligned}
\langle f_k^\varepsilon, \mathcal{H} f_k^\varepsilon \rangle &= \langle f_k^\varepsilon - f_k, \mathcal{H} f_k^\varepsilon \rangle + \langle f_k, \mathcal{H}(f_k^\varepsilon - f_k) \rangle + \langle f_k, \mathcal{H} f_k \rangle \\
&\leq \|f_k^\varepsilon - f_k\| \|\mathcal{H} f_k^\varepsilon\| + \|f_k\| \|\mathcal{H}(f_k^\varepsilon - f_k)\| + \langle f_k, \mathcal{H} f_k \rangle \\
&\leq \|f_k^\varepsilon\|_* \|f_k^\varepsilon - f_k\| + \|f_k^\varepsilon - f_k\|_* + \langle f_k, \mathcal{H} f_k \rangle \\
&= \Lambda_k + o_\varepsilon(1).
\end{aligned}$$

Επομένως, η (3.4.17) θα ισούται με

$$\frac{\mathcal{H}(f_k^\varepsilon, f_k^\varepsilon)}{\langle f_k^\varepsilon, f_k^\varepsilon \rangle} + o_\varepsilon(1) = \frac{\Lambda_k + o_\varepsilon(1)}{1 + o_\varepsilon} + o_\varepsilon(1) = \Lambda_k + o_\varepsilon(1),$$

από όπου έπεται πως ($\varepsilon \rightarrow 0$) πως $\limsup_n \lambda_n^k \leq \Lambda_k$ που μαζί με το προηγούμενο σκέλος δίνουν $\lambda_n^k \rightarrow \Lambda_k$. Όσον αφορά τη σύγκλιση της v_n^k , έχουμε από το λήμμα 3.4.2 πως συγκλίνει στη $v_k \in L^*$, και ότι (Λ_k, v_k) είναι ζευγάρι ιδιοτιμής-ιδιοδιανύσματος για τον $\mathcal{H}$. Από το μονοδιάστατο του ιδιόχωρου, προκύπτει πως $v_k = f_k$. ■

3.5 Εφαρμογές για τα γνωστά μοντέλα

Στην παρούσα ενότητα θα δούμε πως η παραπάνω γενική κατασκευή της ενότητας 3.2 μπορεί να παράξει αποτελέσματα για τα β -(Hermite, Laguerre) μοντέλα. Βασικό εργαλείο και στις δύο περιπτώσεις είναι το παρακάτω, το οποίο μπορεί να βρεθεί σε ένα γενικότερο πλαίσιο, στο κεφάλαιο 7, σελίδα 354 του [28].

Θεώρημα 3.5.1. Έστω $a \in \mathbb{R}$ και μία συνάρτηση $h \in C_1(\mathbb{R}^+)$ με συνεχή παράγωγο. Επιπλέον, θεωρούμε μία ακολουθία $\{y_{n,k}\}_k$ τυχαίων μεταβλητών με $y_{n,0} = 0$ και τέτοιες ώστε η ακολουθία $\Delta y_{n,k} := y_{n,k} - y_{n,k-1}$ να αποτελείται από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν τα παρακάτω

$$m_n \mathbb{E} \Delta y_{n,k} = h' \left(\frac{k}{m_n} \right) + o(1), \quad m_n \mathbb{E} (\Delta y_{n,k})^2 = a^2 + o(1), \quad m_n \mathbb{E} (\Delta y_{n,k})^4 = o(1),$$

όπου όπως το $n \rightarrow \infty$, η παραπάνω σύγκλιση είναι για k/m_n ομοιόμορφα στα συμπαγή. Τότε, η $y_n(t) := y_{n, \lfloor tm_n \rfloor}$ συγκλίνει κατά κατανομή ως προς της τοπολογία Skorokhod στη διαδικασία $h(t) + aB_t$, όπου B_t είναι η τυπική κίνηση Brown.

3.5α' β -Hermite

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πίνακας από αυτό το μοντέλο, έπειτα από την κατάλληλη αλλαγή κλίμακας είναι της μορφής (3.1.1),

$$\tilde{H}_n^\beta := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}} n^{1/6} \left(H_n^\beta - \sqrt{2\beta n} I \right).$$

Θέλουμε να επαληθεύσουμε τις δύο πρώτες υποθέσεις, (3.2.5) – (3.2.9). Το m_n στην περίπτωση μας είναι $n^{\frac{1}{3}}$. Γράφουμε

$$y_{n,1,k} = w_{n,1,k} = -n^{-\frac{1}{6}} (2/\beta)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^k g_i,$$

$$y_{n,2,k} = n^{-\frac{1}{6}} \sum_{i=1}^k 2 \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \chi_{\beta(n-i)} \right),$$

επομένως θέτοντας $\theta_{n,1,k} \equiv 0$ και

$$\theta_{n,2,k} = 2\sqrt{n} - 2\beta^{-1/2} \mathbb{E} \chi_{\beta(n-k)},$$

μπορούμε να επαληθεύσουμε τα εξής δύο λήμματα, αφού πρώτα επιβεβαιώσουμε τα παρακάτω φράγματα για τη μέση τιμή της χ_r :

Λήμμα 3.5.2. Για την τυχαία μεταβλητή χ_r ισχύει ότι

$$\sqrt{r} \left(1 - \frac{1}{4r} \right) \leq \mathbb{E} \chi_r \leq \sqrt{r}$$

Απόδειξη. Το δεξί μέλος προκύπτει από την ανισότητα Jensen. Πράγματι,

$$\mathbb{E}\chi_r \leq (\mathbb{E}\chi_r^2)^{1/2} = \sqrt{r}.$$

Για το κάτω φράγμα, από τη σχέση (2.8) στο [54], $x^{1-s} \leq \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+s)} \leq (x+s)^{1-s}$, για $0 < s < 1$ και $x > 0$ προκύπτει πως

$$\mathbb{E}\chi_r = \sqrt{2} \frac{\Gamma((r+1)/2)}{\Gamma(r/2)} \geq \sqrt{r - \frac{1}{2}}.$$

■

Λήμμα 3.5.3. *Ισχύουν οι εξής συγκλίσεις κατά κατανομή ως προς την τοπολογία Skorokhod*

$$y_{n,i}(t) \Rightarrow (2/\beta)^{1/2} B_t + t^2(i-1),$$

για $i = 1, 2$.

Απόδειξη. Για $i = 1$, έχουμε $\Delta y_{n,1,k} = -n^{-1/6}(2/\beta)^{1/2}g_k$, επομένως

$$\begin{aligned} m_n \mathbb{E} \Delta y_{n,1,k} &= -n^{1/6}(2/\beta)^{1/2} \mathbb{E} g_k = 0 \\ m_n \mathbb{E} (\Delta y_{n,1,k})^2 &= (2/\beta) \mathbb{E} g_k^2 = 2/\beta \\ m_n \mathbb{E} (\Delta y_{n,1,k})^4 &= n^{-1/3}(2/\beta)^2 \mathbb{E} g_k^4 = 3(2/\beta)^2 n^{-1/6} = o(1). \end{aligned}$$

Επομένως, η $y_{n,1}(t) \Rightarrow (2/\beta)^{1/2} B_t + 0$ από το Θεώρημα 3.5.1 αφού η πρώτη ροπή ισούται με μηδέν, επομένως η h είναι σταθερή. Από το λήμμα 3.5.2

$$\sqrt{n-k} \left(1 - \frac{1}{4\beta(n-k)} \right) \leq \frac{1}{\sqrt{\beta}} \mathbb{E} \chi_{\beta(n-k)} \leq \sqrt{n-k}$$

Για $i = 2$ θα έχουμε ότι $\Delta y_{n,2,k} = 2n^{-1/6} \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \chi_{\beta(n-k)} \right)$ οπότε παίρνοντας μέση τιμή,

$$\begin{aligned} &= 2n^{1/6} \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} \mathbb{E} \chi_{\beta(n-k)} \right) \\ &\leq 2 \left(n^{2/3} - n^{2/3} + \frac{kn^{1/6}}{2\sqrt{n}} + \frac{n^{1/6}}{4\beta\sqrt{n-k}} \right) = km_n^{-1} + o(1). \end{aligned}$$

Για τη δεύτερη ροπή,

$$\begin{aligned} m_n \mathbb{E} (\Delta y_{n,2,k})^2 &= 4 \left(n + \beta^{-1} \mathbb{E} \chi_{\beta(n-k)}^2 - 2\beta^{-1/2} \sqrt{n} \mathbb{E} \chi_{\beta(n-k)} \right) \\ &\leq 4 \left(n + n - k - 2\sqrt{n} \left(\sqrt{n} - \frac{k}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{4\beta\sqrt{n-k}} \right) \right) \\ &= 4 \left(2n - k - 2n + k + \frac{2}{4\beta\sqrt{n-k}} \right) = \frac{2}{\beta} \sqrt{\frac{n}{n-k}}, \end{aligned}$$

όπου, για $n \rightarrow \infty$ μας δίνει $m_n \mathbb{E} (\Delta y_{n,2,k})^2 = a^2 + o(1)$. Τέλος, η $m_n \mathbb{E} (\Delta y_{n,2,k})^4$ ισούται με

$$16n^{-1/3} \left(n^2 - 4n^{3/2} \beta^{-1/2} \mathbb{E} \chi_{\beta(n-k)} + \frac{6n}{\beta} \mathbb{E} \chi_{\beta(n-k)}^2 - 4 \left(\frac{n}{\beta^3} \right)^{1/2} \mathbb{E} \chi_{\beta(n-k)}^3 + \beta^{-2} \mathbb{E} \chi_{\beta(n-k)}^4 \right).$$

Για τις παραπάνω ροπές της χ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}\chi_r = \sqrt{r} + O(1/\sqrt{r}), \quad \mathbb{E}(\chi_r - \sqrt{r})^2 = 1/2 + O(1/r), \quad \mathbb{E}(\chi_r - \sqrt{r})^4 = O(1). \quad (3.5.1)$$

■

Λήμμα 3.5.4. Οι υποθέσεις (3.2.7), (3.2.8) ισχύουν με $\bar{\theta}(x) = x$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση 3.5.2 έχουμε για την $\theta_{n,2,k}$:

$$kn^{-1/2} - c \leq \theta_{n,2,k} \leq 2kn^{-1/2} + c,$$

όπου $c = c(\beta)$. Για το κάτω φράγμα της θ , από το άνω φράγμα (3.5.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n} - 2\beta^{-1/2}\mathbb{E}\chi_{\beta(n-k)} &\geq 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-k} \\ &= \sqrt{n} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{k}{n}} \right) \geq 2\sqrt{n} \frac{k}{2n} = kn^{-1/2}, \end{aligned}$$

από το ότι $1 - \sqrt{1-x} \geq x/2$ για $x \in [0, 1]$. Για το άνω φράγμα, πάλι από την (3.5.2),

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n} - 2\beta^{-1/2}\mathbb{E}\chi_{\beta(n-k)} &\leq 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-k} + \frac{1}{2\beta\sqrt{n-k}} \\ &\leq 2kn^{-1/2} + \beta^{-1} + \frac{1}{4\beta(n-k)}. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που το $\beta(n-k) \leq 1$ έχουμε το ζητούμενο άμεσα. Αλλιώς, πρέπει να χρησιμοποιηθεί η εκτίμηση

$$\mathbb{E}\chi_{\beta(n-k)} \geq \frac{\beta(n-k)}{\sqrt{1 + \beta(n-k)}},$$

(βλ. [44], απόδειξη του λήμματος 5').

■

Τέλος, ζητάμε το φράγμα (3.2.9). Για να το πετύχουμε, αρκεί να δείξουμε πως για κάθε «μικρό» ε η παρακάτω ακολουθία τυχαίων μεταβλητών είναι σφιχτή ως προς n :

$$Y_n = \sup_{x=1\dots n/m_n} x^{\varepsilon-1} \sup_{j=0\dots m_n} |w_{n,i,xm_n+j} - w_{n,i,xm_n}|^2.$$

Αυτό γιατί για $x \in \xi_k \subset [0, n/m_n]$, και για ξ το πολύ 1 μακριά του, η τετραγωνική διαφορά του $\omega_{n,i}(x) - \omega_{n,i}(\xi)$ θα έχει κάποια υπακολουθία η οποία θα είναι φραγμένη από το $Mx^{1-\varepsilon}$, όπου M σταθερά. Αυτό με τη σειρά του είναι μικρότερο από $M(1+x)$. Για την παραπάνω ακολουθία, αν δείξουμε ότι $\mathbb{E}(Y_n^2) < \infty$ τότε έχουμε πως $\mathbb{E}(|Y_n|) \leq \mathbb{E}(Y_n^2) < \infty$, από το οποίο προκύπτει $|Y_n| = Y_n < \infty$ σχεδόν βέβαια. Για να δούμε το παραπάνω, αρκεί να φράξουμε το $\sup_x$ από το $\sum_x$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n^2) &= \mathbb{E} \left\{ \sup_{x=1\dots n/m_n} x^{2\varepsilon-2} \sup_{j=0\dots m_n} |w_{n,i,xm_n+j} - w_{n,i,xm_n}|^4 \right\} \\ &\leq \sum_{x=1}^{n/m_n} \frac{\mathbb{E} \sup_{j=0\dots m_n} |\omega_{n,i,xm_n+j} - \omega_{n,i,xm_n}|^4}{x^{2-2\varepsilon}} \leq \sum_{x=1}^{n/m_n} \frac{16\mathbb{E} |\omega_{n,i,(x+1)m_n} - \omega_{n,i,xm_n}|^4}{x^{2-2\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

εφαρμόζοντας τη μεγιστική L^p -ανισότητα για martingales [28]. ότι, για $i = 1$ έχουμε πως

$$\mathbb{E}\delta\omega^4 = \frac{n^{-2/3}}{\sqrt{\beta}} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=km_n+1}^{(k+1)m_n} g_\ell \right)^4,$$

με $g_\ell \sim \mathcal{N}(0, 1)$, ενώ για $i = 2$ έχουμε πως

$$\mathbb{E}\delta\omega^4 = \frac{n^{-2/3}}{\sqrt{\beta}} \mathbb{E} \left(\sum_{\ell=km_n+1}^{(k+1)m_n} \mathbb{E} \chi_{\beta(n-\ell)} - \chi_{\beta(n-\ell)} \right)^4.$$

Αναπτύσσοντας τις τέταρτες δυνάμεις, παρατηρούμε πως οι όροι που περιέχουν πρώτες δυνάμεις των προσθεταίων μηδενίζονται, επομένως η συνεισφορά έρχεται από τους όρους που έχουν τέταρτες δυνάμεις (που είναι m_n το πλήθος) και τα ζευγάρια δευτέρων δυνάμεων (που είναι $m_n^2 = n^{2/3}$), επομένως η (3.5.2) είναι ομοιόμορφα φραγμένη (ανεξάρτητα του n , καθώς η σειρά $\sum x^{2\varepsilon-2}$ συγκλίνει). Το αποτέλεσμα είναι το εξής

Θεώρημα 3.5.5. *Με πιθανότητα 1 για κάθε $k > 0$ το σύνολο των ιδιοτιμών του $\mathcal{H}_\beta$ έχει καλώς ορισμένο $(k+1)$ -οστό ελάχιστο στοιχείο Λ_k . Επιπλέον, αν $\lambda_1(n) \geq \lambda_2(n) \geq \dots$ είναι οι ιδιοτιμές του β -Hermite μοντέλου H_n^β , το διάνυσμα*

$$\left(n^{1/6}(2\sqrt{n} - \lambda_i) \right)_{i=1}^k$$

συγκλίνει κατά κατανομή στο διάνυσμα $(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{k-1})$.

3.56' β -Laguerre

Για να βρούμε τα y, θ ανακαλούμε τα δεδομένα για το β -Laguerre μοντέλο από την παράγραφο. Εκεί είδαμε πως τα διαγώνια στοιχεία του θα είναι της μορφής

$$\tilde{\chi}_{\beta(m-i)}^2 + \chi_{\beta(n-i-1)}^2$$

ενώ τα μη-διαγώνια θα είναι της μορφής $\tilde{\chi}_{\beta(m-i)}\chi_{\beta(n-i)}$. Η αντίστοιχη διαίσθηση με τον SAO μας υποδεικνύει πως στη διαγώνιο η τάξη του τελεστή είναι $n+m$ (αφού η χ^2 ασυμπτωτικά συμπεριφέρεται σαν τον αριθμο των βαθμών ελευθερίας της), ενώ πάνω και κάτω από τη διαγώνιο θα έχει $\sqrt{mn}$ τάξη. Επομένως, σύμφωνα με την εικασία των A. Edelman και B. Sutton στο [26], προκύπτει

Θεώρημα 3.5.6. *Θέτουμε*

$$m_n = \left(\frac{\sqrt{n\kappa}}{\sqrt{\kappa} + \sqrt{n}} \right)^{2/3}, \quad H_n = \frac{m_n^2}{\sqrt{n\kappa}} \left((\sqrt{\kappa} + \sqrt{n})^2 I_n - W_\beta W_\beta^\dagger \right). \quad (3.5.3)$$

Αν $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots$ είναι οι ιδιοτιμές του β -Laguerre τότε ισχύει ότι

$$(\lambda_i)_{i=1}^k \Rightarrow \{\Lambda_0, \dots, \Lambda_{k-1}\},$$

με Λ_j να είναι οι ιδιοτιμές του SAO.

Για τα y γράφουμε

$$\Delta y_{n,1,k} = \frac{m_n}{\sqrt{\kappa n}} \left(n + \kappa - \beta^{-1} (\chi_{\beta(n-k)}^2 + \tilde{\chi}_{\beta(\kappa-k+1)}^2) \right) \quad (3.5.4)$$

$$\Delta y_{n,2,k} = \frac{m_n}{\sqrt{\kappa n}} \left(\sqrt{\kappa n} - \beta^{-1} (\chi_{\beta(n-k)}^2 \tilde{\chi}_{\beta(\kappa-k)}^2) \right). \quad (3.5.5)$$

Αλλάζουμε το m με κ για να μην προκύψει σύγχυση με το m_n (με την προϋπόθεση πως $\kappa > n-1$). Άλλος ένας λόγος που το κάνουμε αυτό, είναι διότι αρκεί να δείξουμε τη ζητούμενη σύγκλιση σε μία υπακολουθία· επιλέγουμε τέτοια ώστε $n/\kappa \rightarrow u \in [0, 1]$. Τα θ ορίζονται ως η μέση τιμή των διαφορών, $\theta_{n,i,k} = \mathbb{E} \Delta y_{n,i,k}$, ενώ τα w είναι ξανά η «κεντράρισμένες» εκδοχές των y :

$$w_{n,i,k} = y_{n,i,k} - \mathbb{E} y_{n,i,k}.$$

Βλέπουμε πως οι y είναι ανεξαρτητων προσauξήσεων, αλλά όχι ανεξάρτητες μεταξύ τους (αφού και οι δύο έχουν $\chi, \tilde{\chi}$). Για αυτόν το λόγο, αφού δείξουμε την επιμέρους σύγκλισή τους σε συνεχείς διαδικασίες θα πρέπει να κάνουμε έναν τεχνικό ελιγμό. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

Λήμμα 3.5.7. *Θέτουμε $\gamma = \lim_n 2\sqrt{\frac{n}{\kappa}}(\sqrt{\frac{n}{\kappa}} + 1)^2 \in [0, \frac{1}{2}]$. Τότε, έχουμε τις εξής συγκλίσεις κατά κατανομή ως προς την τοπολογία Skorokhod:*

$$y_{n,1}(x) \Rightarrow \sqrt{\frac{\gamma}{2\beta}} B_x + \gamma x^2/2,$$

$$y_{n,2}(x) \Rightarrow \sqrt{\frac{1-\gamma}{2\beta}} B_x + (1-\gamma)x^2/2,$$

για $x = k/m_n$ ομοιόμορφα στα συμπαγή καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Για να δείξουμε τη σύγκλιση του αθροίσματος, ορίζουμε την

$$\Delta y_{n,k} = ((\sqrt{n} + \sqrt{\kappa})^2 - \beta^{-1} (\chi_{\beta(n-k)} + \tilde{\chi}_{\beta(n-k)})^2).$$

Κάνοντας την ίδια δουλειά παρατηρούμε πως συγκλίνει στην $2/\sqrt{\beta} B_x + x^2/2$ και σε συνδυασμό με το ότι η $y_{n,k} - y_{n,1,k} - y_{n,2,k}$ συγκλίνει στη μηδενική διαδικασία παίρνουμε το ζητούμενο. Για να δείξουμε τα (3.2.7), (3.2.8) έχουμε ότι

$$c_1 \frac{k}{m_n} \leq m_n (\theta_{n,1,k} + \theta_{n,2,k}) \leq c_2 \frac{k}{m_n}. \quad (3.5.6)$$

Τέλος, η ίδια δουλειά με την απόδειξη της (3.2.9) για τη β -Hermite περίπτωση μας δίνει την επιβεβαίωση της ανάλογης υπόθεσης. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι στην προηγούμενη απόδειξη χρησιμοποιήθηκαν «γενικά» δεδομένα για τα w , όπως το ότι είναι martingales με ανεξάρτητες διαφορές και φραγμένη τέταρτη ροπή.

Κεφάλαιο 4

Φράγματα Ουρών TW_β

4.1 Το πρώτο φράγμα

Από τη δουλειά στο προηγούμενο κεφάλαιο έχει γίνει σαφές ποιο είναι το όριο των ιδιοτιμών στο soft edge του φάσματος στην περίπτωση του β -Hermite μοντέλου. Για αυτές τις ιδιοτιμές, ο χαρακτηρισμός τους μέσω της μορφής $\langle f, \mathcal{H}f \rangle$ θα φανεί χρήσιμος στην εξαγωγή φραγμάτων για την κατανομή της μικρότερης ιδιοτιμής, γνωστή και ως Tracy-Widom(β) κατανομή, με το β να ποικίλει αναλόγως. Επιπλέον, στο παρόν κεφάλαιο θα εισαγάγουμε έναν εναλλακτικό χαρακτηρισμό των ιδιοτιμών μέσα από τους χρόνους έκρηξης μίας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Το παρακάτω θεώρημα βρίσκεται στο [56]. Θα αποδείξουμε μόνο την κάτω ουρά ((4.1.1)) ενώ για την πάνω ουρά αναφορές αποτελούν τα [56], [20].

Θεώρημα 4.1.1. Συμβολίζοντας με $TW_\beta = -\Lambda_0(\beta)$ τη μικρότερη ιδιοτιμή του Στοχαστικού Τελεστή Airy, (3.1.8) ισχύει το εξής αποτέλεσμα για $a \nearrow +\infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(TW_\beta \leq -a) &= \exp\left(-\frac{1}{24}\beta a^3(1+o(1))\right), \\ \mathbb{P}(TW_\beta \geq a) &= \exp\left(-\frac{2}{3}\beta a^{3/2}(1+o(1))\right).\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Το πάνω και το κάτω φράγμα για την (4.1.1) θα αποδειχθούν διαφορετικά.

Απόδειξη. (άνω φράγμα της (4.1.1)) Έστω πως $L_0 > a$. Τότε ο χαρακτηρισμός της L_0 μας εξασφαλίζει πως όποια f και να διαλέξουμε, θα ισχύει

$$\langle f, \mathcal{H}f \rangle > a\langle f, f \rangle.$$

Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι άνω φραγμένη από την $\mathbb{P}(\langle f, \mathcal{H}f \rangle > a\langle f, f \rangle)$. Υπενθυμίζουμε πως

$$\langle f, \mathcal{H}f \rangle = \|f'\|^2 + \|\sqrt{x}f\|^2 + 2/\sqrt{\beta} \int_0^\infty f^2 B'_x dx.$$

Ο μοναδικός στοχαστικός όρος είναι το ολοκλήρωμα που περιέχει το λευκό θόρυβο, το οποίο σύμφωνα με τη θεωρία στοχαστικής ολοκλήρωσης είναι το ίδιο (κατά κατανομή) με το $2/\sqrt{\beta} \int f^2 dB_x$, το

οποίο είναι μία κανονική κατανομή, με διασπορά τη τετραγωνική διακύμανση $4/\beta \int (f^2(x))^2 dx = 4/\beta \|f\|_4^4$. Επομένως, για διαφορετικές f , μπορούμε να βρούμε άνω φράγματα μέσω του

$$\mathbb{P} \left(\|f'\|^2 + \|\sqrt{x}f\|^2 + 2/\sqrt{\beta} \|f\|_4^2 \mathcal{N} > a \|f\|^2 \right) \leq 2 \exp \left(- \frac{\beta \left(a \|f\|^2 - \|f'\|^2 - \|\sqrt{x}f\|^2 \right)^2}{8 \|f\|_4^4} \right),$$

το οποίο προκύπτει με απλή αντικατάσταση από το φράγμα για την ουρά της Γκαουσιανής, $\mathbb{P}(\mathcal{N} > c) = e^{-c^2(\frac{1}{2}+o(1))}$.

Όπως στο [56], παραλείποντας τον όρο $\|f'\|$ παίρνουμε πως μία συνάρτηση που ελαχιστοποιεί το $\frac{(a\|f\|^2 - \|f\sqrt{x}\|)^2}{\|f\|_4^4}$ είναι η $\sqrt{(a-x)^+}$, με μία «τροποποίηση» που θα νομιμοποιεί την παράλειψη της νόρμας της παραγώγου από τον υπολογισμό,

$$f(x) = \sqrt{(a-x)^+} \wedge (a-x)^+ \wedge x\sqrt{a},$$

όπου με $\wedge$ συμβολίζουμε το $\min$ μεταξύ των εμπλεκόμενων συναρτήσεων. Υπολογίζουμε [...]. Συνοψίζοντας

$$a \|f\|^2 \sim a^3/2, \quad \|f'\|^2 = O(a), \quad \|f\sqrt{x}\|^2 \sim a^3/6, \quad \|f\|_4^4 \sim a^3/3,$$

όπου τώρα αντικαθιστώντας στα παραπάνω, παίρνουμε πως

$$\begin{aligned} \exp \left(- \frac{\beta \left(a \|f\|^2 - \|f'\|^2 - \|\sqrt{x}f\|^2 \right)^2}{8 \|f\|_4^4} \right) &\leq \exp \left(- \beta \frac{a^6 \left(\frac{1}{2} + o(1) - \frac{1}{6} \right)}{8a^3/3} \right) \\ &= \exp \left(- \frac{\beta}{24} a^3 (1 + o(1)) \right). \end{aligned}$$

■

Πριν συνεχίσουμε με το κάτω φράγμα, θα πρέπει να κάνουμε μία αρκετά μεγάλη παρένθεση για να δώσουμε μια διαφορετική οπτική στο πρόβλημα των ιδιοτιμών του SAO.

4.2 Μετασχηματισμός Riccati

Οι τελεστές που μπορούν να γραφτούν ως $-\partial_{xx} + V(x) + B'_x$ είναι πολυμελετημένοι στον κλάδο της στατιστικής μηχανικής και είναι γνωστοί ως (στοχαστικοί) Schrödinger τελεστές. Βασική αναφορά αποτελεί το [16]. Ένα κλασικό εργαλείο για τη μελέτη τέτοιων τελεστών είναι ο μετασχηματισμός Riccati, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε πρώτη φορά από τον Halperin [34] και στη συνέχεια από τους Fukushima, Nakao, [30] αλλά και από τους Cambrnoro, McKean μαζί με άλλους [13], [14], [15].

Υπενθυμίζω πως το πρόβλημα ιδιοτιμών γράφεται

$$\psi''(x) = \frac{2}{\sqrt{\beta}} \psi(x) B'_x + (x - \lambda) \psi(x), \quad (4.2.1)$$

το οποίο είναι να ερμηνευθεί έπειτα από παραγώγιση κατά παράγοντες. Θέτουμε $p = (\log f)' = \frac{f'}{f}$ και αντικαθιστώντας στην (4.2.1):

$$p'(x) = (x - \lambda) - p^2(x) - \frac{2}{\sqrt{\beta}} B'_x. \quad (4.2.2)$$

Η εξίσωση (4.2.1) με μία πρώτη ματιά φαίνεται να έχει δύο προβλήματα. Το πρώτο είναι πως η B'_x δεν είναι καλά ορισμένη, κάτι που διορθώνεται εύκολα θεωρώντας την καινούρια μεταβλητή $q(x) = p(x) + \frac{2}{\sqrt{\beta}} B_x$ από την οποία παίρνουμε τη συνήθη διαφορική

$$q'(x) = (x - \lambda) - \left(q(x) - \frac{2}{\sqrt{\beta}} B_x \right)^2, \quad (4.2.3)$$

$q(0) = -\infty$, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός πως ο συντελεστής του λευκού θορύβου είναι σταθερός. Από την αντικατάσταση $x - \lambda \rightarrow x$, μπορούμε να δούμε πως για κάθε λ , η λύση αντιστοιχεί στη λύση για $\lambda = 0$, με την αρχική συνθήκη όμως να γίνεται πλέον $q(-\lambda) = \infty$, το οποίο είναι το δεύτερο πρόβλημα. Παρόλαυτα, μπορεί επίσης να διορθωθεί κάνοντας την αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής $\tilde{q} = q^{-1}$. Έτσι, όποτε η q απειρίζεται μπορούμε να τη σκεφτόμαστε στην αντίστροφη μεταβλητή, η οποία θα είναι μηδέν. Η διαφορική για την $\tilde{q}$ είναι

$$\tilde{q}' = -\frac{1}{q^2} q' = -\tilde{q}^2 x + \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\beta}} b \tilde{q} \right)^2, \quad (4.2.4)$$

$\tilde{q}(0) = 0$, που επιπλέον δίνει ότι $\tilde{q}' = 1$ οποτεδήποτε $\tilde{q} = 0$ (δηλαδή στους χρόνους έκρηξης της q).

Ο τελεστής $\mathcal{H}_\beta$ είναι στην κατηγορία των Sturm-Liouville, επομένως σε κάθε διάστημα $(0, a)$ έχουμε n ιδιοτιμές για κάθε n με την n -οστή ιδιοσυνάρτηση να έχει $n - 1$ ρίζες, (οι οποίες εναλλάσσονται με τις ρίζες των προηγούμενων). Αν $\lambda < \Lambda_0$ τότε η εξίσωση (4.2.2) δεν εκρήγνυται ποτέ στο $-\infty$ [15]. Επομένως, αναλόγως τη θέση του λ σε σχέση με τις ιδιοτιμές του $\mathcal{H}_\beta$, ξέρουμε πόσες φορές η λύση $p_\lambda = p(x, \lambda)$ θα εκραγεί στο $-\infty$. Κάθε φορά που συμβαίνει, έστω σε χρόνο π_i , θεωρούμε πως επαναφέρεται ακαριαία στο $+\infty$ και ξαναρχίζει με αυτήν την αρχική συνθήκη το πρόβλημα (4.2.2). Αυτό στην πράξη θα μεταφράσεται με την εξής διαδικασία: Επειδή οι συντελεστές στη (4.2.4) ως προς την κίνηση Brown είναι τοπικά Lipschitz στο $\mathbb{R}_+$, μπορούμε να έχουμε συμπεράσματα. Από το πρώτο κεφάλαιο του [61] μπορούμε να χωρίσουμε το $\mathbb{R}$ σε διαστήματα με άκρα τους χρόνους έκρηξης. Σε κάθε τέτοιο διάστημα οι συντελεστές της (4.2.4) είναι Lipschitz, επομένως η λύση είναι μοναδική και συνεχής ως προς την τοπολογία. Για το τελευταίο διάστημα, $[\pi_n, a)$ από τη στιγμή που γνωρίζουμε ότι οι f_n δεν έχουν άλλες ρίζες, η ίδια θεωρία μας επιτρέπει να θεωρήσουμε λύση με $a = +\infty$. Υπενθύμιση πως για λ ιδιοτιμή του τελεστή, η συνθήκη θα δίνει $f(\infty) = 0$, επομένως ξανά η λύση είναι καλά ορισμένη για όλα τα $x \in \mathbb{R}_+$.

Για όλα τα παραπάνω, θα θεωρήσουμε πως η p παίρνει τιμές σε μία ξένη ένωση $\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_{-1}, \dots$ αντιτύπων του $\mathbb{R}$ (κάθε αντίτυπο αφορά τις τιμές που παίρνει η $p = (-n, y)$ μεταξύ εκρήξεων στο $-\infty$). Ο χώρος αυτός συνδυάζεται με τη φυσική τοπολογία της διπλής συμπαγοποίησης $\mathbb{R}_\pm = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ έτσι ώστε να ισχύει και η λεξικογραφική διάταξη:

$$(n_1, y_1) < (n_2, y_2) \iff (n_1 < n_2) \text{ ή } n_1 = n_2 \text{ με } x_1 < x_2.$$

Έχουμε το εξής λήμμα

Λήμμα 4.2.1. Έστω $p_\lambda(x) = p(x, \lambda)$ η λύση της (4.2.2). Τότε η $p(x, \lambda)$ είναι μοναδική, συνεχής στην παραπάνω τοπολογία, και για σταθερό x είναι φθίνουσα ως προς λ . Επίσης είναι φθίνουσα ως προς x σε περιοχές γύρω από τους χρόνους έκρηξης στο $-\infty$.

Απόδειξη. Η παραπάνω εξήγηση κάνει σαφές το κομμάτι της ύπαρξης και της συνέχειας. Όσον αφορά τη μονοτονία, τα θεωρήματα σύγκρισης του Sturm [60], [;] μας δίνουν πως για $\lambda_1 < \lambda_2$ θα έχουμε ότι οι λύσεις ικανοποιούν $\tilde{q}_{\lambda_1} < \tilde{q}_{\lambda_2}$ (παρατηρείστε πως το πρόσημο αλλάζει δύο φορές, αφού βρίσκονται στη μορφή $-(x - \lambda_i)$ μέσα στην εξίσωση). Από αυτό παίρνουμε το ότι η $q = 1/\tilde{q}$ είναι φθίνουσα για κάθε x ως προς λ . Για τον άλλο ισχυρισμό, όπως είδαμε η $\tilde{q}'$ είναι ίση με ένα, κάθε φορά που η q απειρίζεται. Από τη συνέχεια της $\tilde{q}'$ παίρνουμε πως είναι αυστηρά θετική σε περιοχή γύρω από το χρόνο έκρηξης, που σημαίνει πως η $\tilde{q}$ είναι αύξουσα. ■

Ένας από τους κλασικούς τρόπους μελέτης τέτοιων τελεστών, περιλαμβάνει τον περιορισμό τους σε ευθύγραμμα τμήματα και εξαγωγή αποτελεσμάτων για την ημιευθεία $\mathbb{R}_+$ μέσω ορίων [60]. Έστω $\mathcal{H}^L$ να είναι ο περιορισμός του $\mathcal{H}_\beta$ σε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $[0, L]$ αντί για $\mathbb{R}_+$. Οι συνθήκες είναι Dirichlet, δηλαδή ζητάμε τις ιδιοτιμές να μηδενίζονται στο μηδέν και το L .

Λήμμα 4.2.2. Για λ δεδομένο και $(-n, y) = p(L, \lambda)$, το πλήθος των εκρήξεων της $p_\lambda(x)$ στο $[0, L]$ ισούται με το πλήθος των ιδιοτιμών του $\mathcal{H}^L$ που είναι μικρότερες ή ίσες του λ .

Απόδειξη. (περιγραφή) Αρχικά, είναι σαφές πως ένα λ είναι ιδιοτιμή για τον $\mathcal{H}^L$ αν και μόνον αν η λύση p_λ εκρήγνυται στο $-\infty$ στο σημείο L . Όπως είπαμε, αν το λ είναι πολύ μικρό (κάτω από την πρώτη ιδιοτιμή), η λύση δεν απειρίζεται και δεν έχουμε ιδιοτιμή. Από τη μονοτονία ως προς λ της $p_\lambda(L)$, προκύπτει πως κάθε σημείο έκρηξης (καθώς το λ αυξάνει) μπορεί να προκύψει στο L . Οποτεδήποτε συμβαίνει αυτό, έχουμε πως το λ είναι ιδιοτιμή. ■

Παίρνοντας το όριο ως προς L , έχουμε

Λήμμα 4.2.3. Οι πρώτες k ιδιοτιμές του $\mathcal{H}^L$, $\Lambda_0^L, \dots, \Lambda_{k-1}^L$ συγκλίνουν στις πρώτες k ιδιοτιμές του $\mathcal{H}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη μιμείται την απόδειξη του θεωρήματος 3.4.6. Ορίζουμε $\underline{\Lambda}_k = \liminf_L \Lambda_k^L$. Για $\underline{\Lambda}_k < \infty$ οι ιδιοτιμές είναι φραγμένες (παρατήρηση: οι $f \in L^*$ είναι συνεχείς, επομένως κάθε υπόθεση που ισχύει για αυτές στο άπειρο θα ισχύει και για το $\lim_L f(L)$). Βρίσκοντας υπακολουθία ώστε $(\Lambda_i^L)_{i=1}^k \rightarrow (\xi_i)_{i=1}^k$, έχουμε πως οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις έχουν φραγμένη νόρμα, επομένως από το ;; θα συγκλίνουν στον L^2 σε συναρτήσεις $f_i \in L^*$. Έπεται πως αποτελούν ορθοκανονικό σύστημα με ιδιοτιμές το πολύ $\underline{\Lambda}_k$, που σημαίνει ότι η Λ_k , ώντας ορισμένη ως infimum, θα ικανοποιεί $\Lambda_k \leq \underline{\Lambda}_k$. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, πάλι από την απόδειξη του 3.4.6, έστω f_k^ε συνάρτηση με συμπαγή φορέα και $\|f_k - f_k^\varepsilon\|_* < \varepsilon$. Για

$$g_L = g_{L,k} = f_k^\varepsilon - \sum_{j=0}^{k-1} \langle f_k^\varepsilon, f_j^L \rangle f_j^L,$$

τα ίδια επιχειρήματα δίνουν πως οι συντελεστές είναι φραγμένοι (για μεγάλο L) από 2ε . Κατ' επέκταση, $\|g_L - f_k\|_* < c\varepsilon$, όπου μαζί με τον ορισμό των ιδιοτιμών μέσω του πηλίκου Rayleigh,

$$\limsup_{L \rightarrow +\infty} \Lambda_k^L \leq \limsup_{L \rightarrow +\infty} \frac{\langle g_L, \mathcal{H}_\beta g_L \rangle}{\langle g_L, g_L \rangle}.$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0$, έπεται ότι $\limsup_L \Lambda_k^L \leq \Lambda_k$. ■

Έπεται πως για λ δεδομένο, ο αριθμός n των εκρήξεων της p , $N(\lambda)$, ισούται με το πλήθος των ιδιοτιμών του $\mathcal{H}_\beta$ οι οποίες είναι κάτω από λ .

Ένας διαφορετικός τρόπος ερμηνείας του B'_x στην (4.2.2) είναι με την Itô έννοια,

$$dp(x) = -\frac{2}{\sqrt{\beta}} dB_x + (x - \lambda - p^2(x)) dx, \quad (4.2.5)$$

δηλαδή η p είναι ένα diffusion που ξεκινάει από το ∞ , εκρήγνυται σε πεπερασμένους χρόνους στο $-\infty$, και όποτε συμβαίνει αυτό επανακινείται από το $+\infty$. Η σύνδεση με τα παραπάνω καταγράφεται από το εξής:

Θεώρημα 4.2.4. Έστω $\kappa(t, \cdot)$ η κατανομή της πρώτης έκρηξης στο $-\infty$ του $p_0(x)$ με την αρχική συνθήκη $p(t) = \infty$ (δηλαδή ξεκινάει από χρόνο t). Τότε

$$\mathbb{P}(\Lambda_0 > \lambda) = \kappa(-\lambda, \{+\infty\}), \quad (4.2.6)$$

$$\mathbb{P}(\Lambda_k < \lambda) = \int_{\mathbb{R}^k} \kappa(-\lambda, dx_1) \kappa(x_1, dx_2) \cdots \kappa(x_{k-1}, dx_k), \quad (4.2.7)$$

όπου $\kappa(x, dy) = \kappa(x, y) dy$.

Απόδειξη. Η ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα για τη διάχυση p μεταφέρεται και στους χρόνους έκρηξης $\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_1, \dots$, καθώς έπειτα από κάθε έκρηξη επανεκκινούμε την p στο $+\infty$. Έστω $\mathbb{P}_{(\infty, t)}$ συμβολίζει το μέτρο που αντιστοιχεί στην εκκίνηση της διαδικασίας διάχυσης από το ∞ σε χρόνο t . Το στήριγμα αυτής της κατανομής είναι το $(x, +\infty]$ (δίνουμε μάζα και στο $+\infty$ καθώς υπάρχουν περιπτώσεις μη-έκρηξης της λύσης). Από όσα προηγήθηκαν ισχύει πως

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Lambda_{k-1} < \lambda) &= \mathbb{P}_{(\infty, 0)}(p_\lambda(x) \text{ εκρήγνυται τουλάχιστον } k \text{ φορές}) \\ &= \mathbb{P}_{(\infty, -\lambda)}(p_0(x) \text{ εκρήγνυται τουλάχιστον } k \text{ φορές}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^k} \kappa(-\lambda, dx_1) \kappa(x_1, dx_2) \cdots \kappa(x_{k-1}, dx_k). \end{aligned}$$

■

Το ότι οι ιδιοτιμές του $\mathcal{H}_\beta$ συγκλίνουν στο $+\infty$, μπορεί να το δει κανείς παίρνοντας το όριο των αποτελεσμάτων του λήμματος (4.2.2) για $L \rightarrow +\infty$. Λόγω της συνέχειας της p

$$\mathbb{P}(N(\lambda+) - N(\lambda) \leq 1) = 1.$$

Ξεκινώντας στο $+\infty$ από το x , υπάρχει πιθανότητα $\kappa(x, \{\infty\})$ να εκραγεί στο $-\infty$. Από τη μονοτονία για κάθε x ως προς λ , έπεται πως το πλήθος των ιδιοτιμών μικρότερες ή ίσες του

λ φράσσεται από μία γεωμετρική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο $\kappa(-\lambda, \{\infty\})$. Επειδή το να υπάρχουν πεπερασμένο πλήθος από ιδιοτιμές κάτω από κάθε δεδομένο αριθμό ισοδυναμεί με το να είναι το ∞ το μοναδικό σημείο συσσώρευσης, το ζητούμενο έπεται.

Τέλος, παρατηρούμε πως οι τύποι $TW_\beta, \beta = 1, 2, 4$ πλέον μπορούν να χαρακτηριστούν μέσω της (4.2.2).

$$\mathbb{P}_{(\infty, \lambda)}(\mathfrak{m}_1 = \infty) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_\lambda^\infty (s - \lambda) u^2(s) ds\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_\lambda^\infty u(s) ds\right\}, & \beta = 1 \\ \exp\left\{-\int_\lambda^\infty (s - \lambda) u^2(s) ds\right\}, & \beta = 2, \\ \exp\left\{\int_{\lambda'}^\infty (s - \lambda') u^2(s) ds\right\} \cosh\left(\int_{\lambda'}^\infty u(s) ds\right), & \beta = 4 \end{cases} \quad (4.2.8)$$

με $u(s)$ να είναι η λύση της Painlevé II εξίσωσης, $u'' = su + 2u^3$ με τη συνθήκη $u(s) \sim_s Ai(s)$, ενώ $\mathfrak{m}_0 = 0, \mathfrak{m}_1, \dots$ είναι οι χρόνοι έκρηξης της (4.2.5) και $\mathbb{P}_{(\infty, \lambda)}$ αντιστοιχεί στην εξίσωση που η p ξεκινάει από το $+\infty$ σε χρόνο λ .

4.3 Το δεύτερο φράγμα - Θεώρημα Girsanov

Έχοντας τον Riccati χαρακτηρισμό, μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη του κάτω φράγματος για την αριστερή ουρά· αρκεί να εφαρμοστεί το θεώρημα Cameron-Martin-Girsanov.

Αν $\{W_t\}_t$ είναι τυπική κίνηση Brown υπό ένα μέτρο $\mathbb{P}$ και διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_t$, τότε, για $\theta > 0$, το $Z_\theta(t) = e^{\theta W_t - \theta^2 t/2}$ είναι martingale ως προς τη διήθηση $\{\mathcal{F}_t\}_t$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_\theta(t) | \mathcal{F}_{t-1}) &= \mathbb{E}\left(e^{\theta W_t} | \mathcal{F}_{t-1}\right) e^{-\theta^2 t/2} = \mathbb{E}\left(e^{\theta(W_t - W_{t-1})} | \mathcal{F}_{t-1}\right) e^{-\theta^2 t/2} \mathbb{E}\left(e^{\theta W_{t-1}}\right) \\ &= e^{\theta^2/2} e^{-\theta^2 t/2} \mathbb{E}\left(e^{\theta W_{t-1}}\right) = \mathbb{E}\left(e^{\theta W_{t-1} - \theta^2(t-1)/2}\right) \\ &= Z_\theta(t-1). \end{aligned}$$

Για γ_s μία προσαρτημένη (δηλαδή F_s μετρήσιμη) συνάρτηση (ντετερμινιστική ή μη) και τοπικά στον $(2, 2)$ -χώρο Sobolev

$$W^{2,2} = \left\{ f : \left(\sum_{i=0}^2 \|f^{(i)}\|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\},$$

ορίζουμε το

$$Z(t) = \exp \left\{ \int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma_s^2 ds \right\}. \quad (4.3.1)$$

Από το θεώρημα του Novikov, [53] ισχύει πως αν $\mathbb{E} \left(\int_0^t \gamma_s^2 ds \right) < \infty$, τότε η μέση του τιμή είναι μονάδα για κάθε $t > 0$, $\mathbb{E}Z(t) = 1$. Προχωράμε ορίζοντας το εξής μέτρο

$$\mathbb{Q}(F) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z(t) \mathbb{1}_F), \quad t > 0.$$

Η $Z(t)$ δηλαδή, είναι η Radon-Nikodym παράγωγος, $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$. Το θεώρημα Girsanov περιγράφει την κατανομή της W_t υπό το νέο αυτό μέτρο $\mathbb{Q}$. Όταν έχουμε ένα diffusion, μπορούμε να κάνουμε μία αλλαγή μεταβλητής και να το δούμε ως τυπική κίνηση Brown. Για $\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \gamma_s ds$, έχουμε

Θεώρημα 4.3.1. (Girsanov, Θεώρημα 8.6.3, [53])

Η διαδικασία $\tilde{W}_t$ είναι μία $\mathcal{Q}$ -τυπική κίνηση Brown.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να προχωρήσουμε στο αποτέλεσμα που μας ενδιαφέρει.

Απόδειξη. (κάτω φράγμα της (4.1.1))

Από το θεώρημα 4.2.4 έχουμε για την p της (4.2.2) πως $\mathbb{P}(\text{TW}_\beta < -a) = \mathbb{P}(\Lambda_0(\beta) > a)$. Για κάθε a τώρα, είπαμε πως το να βρίσκεται κάτω από τη μικρότερη ιδιοτιμή ισοδυναμεί με τη μη-έκρηξη της λύσης $p_a(x)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a < \Lambda_0(\beta)) &= \\ &\mathbb{P}_{(\infty, -a)}(\text{η } p \text{ δεν εκρήγνυται στο } -\infty) \geq \mathbb{P}_{(1, -a)}(\text{η } p \text{ δεν εκρήγνυται στο } -\infty) \\ &\geq \mathbb{P}_{(1, -a)}(p(x) \in [0, 2], \forall x \in [-a, 0]) \cdot \mathbb{P}_{(0, 0)}(\text{η } p \text{ δεν εκρήγνυται στο } -\infty). \end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα οφείλεται στη μονοτονία της λύσης, ενώ η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από το γεγονός πως η τελευταία γραμμή είναι απλώς ένα σενάριο το οποίο ικανοποιεί το ενδεχόμενο της μη-έκρηξης της p : Ένας τρόπος για να μην έκραγει ξεκινώντας από το σημείο 1 στο $-a$ είναι η $(x, p(x))$ να μένει στη λωρίδα $[-a, 0] \times [0, 2]$. Σε χρόνο μηδέν, θα μπορούσε να είναι οπουδήποτε στο $[0, 2]$: παρόλαυτα το σενάριο με τη μεγαλύτερη πιθανότητα έκρηξης είναι ξεκινώντας σε χρόνο μηδέν στην αρχή των αξόνων, επομένως υπολογίζοντας αυτό αρκεί για να πάρουμε ένα άνω φράγμα. Στα παραπάνω, ο όρος $\mathbb{P}_{(0, 0)}$ είναι ανεξάρτητος από το a και κατά συνέπεια τον αγνοούμε. Για να υπολογίσουμε την αριστερή πιθανότητα, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 4.3.1. Η (4.2.2) γράφεται

$$dp(x) = -\frac{2}{\sqrt{\beta}}dB_x + (x - p^2(x))dx = -\frac{2}{\sqrt{\beta}}dB_x + \theta_x dx,$$

με $\theta_s = \theta(s, p) = s - p^2(s)$, και B_x τυπική κίνηση Brown. Κάτω από την αλλαγή μέτρου, η p θα ερμηνεύεται επίσης ως κίνηση Brown που συμβολίζουμε ξανά B_x , με διασπορά $2/\sqrt{\beta}$. Συνεπώς έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(1, -a)}(p(x) \in [0, 2], x \in [-a, 0]) &= \\ \mathbb{E}_{(1, -a)}\left(\exp\left\{\frac{\beta}{4}\int_{-a}^0 (x - B_x^2)dB_x - \frac{\beta}{8}\int_{-a}^0 (x - B_x^2)^2 ds\right\} \cdot \mathbb{1}(B_x \in [0, 2], x \in [-a, 0])\right) \end{aligned}$$

Δεδομένου πως είμαστε στην πραγματοποίηση του ενδεχομένου $B_x \in [0, 2]$, το $-B_x^2 \in [-4, 0]$ και μπορούμε να πάρουμε τις εξής εκτιμήσεις :

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{8}\int_{-a}^0 (x - B_x^2)^2 dx &= \frac{\beta}{8}\int_{-a}^0 (x^2 - 2xB_x + B_x^4) dx \\ &= \frac{\beta}{8}\left(a^3/3 + \int_0^{-a} 2xB_x dx + \int_{-a}^0 B_x^4 dx\right) \leq \frac{\beta}{24}a^3 + \beta \int_0^{-a} x dx + 2\beta \int_{-a}^0 dx \\ &= \frac{\beta}{24}a^3 + \beta a^2 + 2\beta a = \frac{\beta}{24}a^3 + O(a^2). \end{aligned}$$

Για τον όρο με το ολοκλήρωμα Ιτό, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} - \int_{-a}^0 (x - B_x^2) \, dB_x &= - \left(\int_{-a}^0 x B'_x dx 4/\beta - \int_{-a}^0 B_x^2 dB_x \right) \\ &= aB_{-a} 4/\beta + 4/\beta \int_{-a}^0 B_x dx + \frac{1}{3} (B_0^3 - B_{-a}^3) \\ &\leq \frac{4}{\beta} a - \frac{4}{\beta} a + \frac{1}{3} (B_0^3 - 1) = O(a), \end{aligned}$$

το οποίο είναι αμελητέας συνεισφοράς σε σχέση με το ντετερμινιστικό ολοκλήρωμα. Τελικά

$$\mathbb{P}_{(1,-a)} \geq \exp \left(-\frac{1}{24} \beta a^3 (1 + o(1)) \right) \cdot \mathbb{P}_{(1,-a)} (B_x \in [0, 2], x \in [-a, 0]).$$

Όπου για την πιθανότητα η κίνηση Brown ξεκινώντας από το 0 να μείνει στο $[0, 2]$ ως το χρόνο a ισχύει $\mathbb{P}_1 (B_x \in [0, 2], x \leq a) \geq e^{-ca}$ για κάποιο $c > 0$ (βλ. κεφ. 8 από το [43]). ■

Βιβλιογραφία

- [1] M. Abért, A. Thom, & B. Virág, *Benjamini-schramm convergence and pointwise convergence of the spectral measure*, σύνδεσμος (2013)
- [2] D. Aldous & J. M. Steele, *The Objective Method: Probabilistic Combinatorial Optimization and Local Weak Convergence*, In: Kesten H. (eds) Probability on Discrete Structures. Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Probability Theory), **110**. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2004).
- [3] G. Anderson, A. Guionnet & O. Zeitouni, *An Introduction to Random Matrices*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press (2009).
- [4] S. Andraus, *Benjamini-Schramm convergence and limiting eigenvalue density of random matrices*, RIMS Kôkyûroku, 2030 σελ. 84-91 (2017).
- [5] J. Baik, P. A. Deift & K. Johansson, *On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations*, J. Amer. Math. Soc., **12**, σελ. 1119-1178 (1999).
- [6] E. L. Basor, C. A. Tracy & H. Widom, *Asymptotic of level-spacing distributions for random matrices*, Phys. Rev. Letters, **69** σελ. 5-8 (1992).
- [7] I. Benjamini & O. Schramm, *Recurrence of distributional limits of finite planar graphs*, Electron. J. Probab., **6**, No. 23, σελ. 1-13 (2001)
- [8] V. I. Bogachev, *Measure Theory, Vol. 2*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007).
- [9] C. Bordenave, *Spectrum of Random Graphs (Σημειώσεις)*, <https://www.math.univ-toulouse.fr/~bordenave/coursSRG.pdf> (2016).
- [10] A. Borodin & G. Olshanski, *Z-measures on partitions and their scaling limits*, European Journal of Combinatorics, **26**, No. 6, σελ. 795-834 (2005)
- [11] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics, John Wiley & Sons Inc., New York, Second edition (1999).
- [12] A. Bloemendal & B. Virág, *Limits of spiked random matrices I*, Probab. Theory Relat. Fields **156**, σελ. 795-825 (2013).
- [13] S. Cambronerio & H. P. McKean, *The Ground State Eigenvalue of Hill's Equation with White Noise Potential*, Comm. Pure Appl. Math., **52**, No. 10 σελ. 1277-1294 (1999).
- [14] S. Cambronerio, J. Ramírez, & B. Rider *On the shape of the ground state eigenvalue density of a random Hill's equation*, Comm. Pure Appl. Math., **59**, No. 7, σελ. 935-976 (2006).
- [15] S. Cambronerio, J. Ramírez & B. Rider, *The Riccati map in random Schrödinger and random matrix theory*, Probability, Geometry and Integrable Systems, **55**, σελ. 77-101 (2008).
- [16] R. Carmona & J. Lacroix, *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators*, Birkhäuser, Boston, (1990).
- [17] A. G. Constantine, *Some noncentral distribution problems in multivariate analysis*, Ann. Math. Statist., **34**, σελ. 1270-1285 (1963).

- [18] P. Diaconis & A. Gamburd, *Random Matrices, Magic Squares and Matching Polynomials*, The Electronic Journal of Combinatorics, **11** No. 2 (2004)
- [19] P. Diaconis & M. Shahshahani, *Products of random matrices and computer image generation*, Random matrices and their applications (Brunswick, Maine, 1984), σελ. 173-182, Contemp. Math., **50**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1986).
- [20] L. Dumaz & B. Virág, *The right tail exponent of the Tracy-Widom beta distribution*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **49**, No. 4, σελ. 915-933 (2013).
- [21] I. Dumitriu & A. Edelman, *Matrix models for beta ensembles*, Journal of Mathematical Physics **43**, σελ. 5830-5846 (2002).
- [22] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge: Cambridge University Press (2010).
- [23] F. J. Dyson, *Statistical theory of energy levels of complex systems*, J. Math. Phys., **3**, σελ. 140-175 (1926).
- [24] F. J. Dyson, *The threefold way. Algebraic structures of symmetry groups and ensembles in Quantum Mechanics*, J. Math. Phys., **3** σελ. 1199-1215 (1963).
- [25] A. Edelman & N. Rao, *Random matrix theory*, Acta Numerica, **14**, σελ. 233-297 (2005).
- [26] A. Edelman & B. D. Sutton, *From Random Matrices to Stochastic Operators*, Journal of Statistical Physics, **127**, No. 6, σελ. 1121-1165 (2007).
- [27] M. B. Eisen, P. T. Spellman, P. O. Brown & D. Botstein, *Cluster analysis and display of genome-wide expression patterns*, Proc. Natl. Acad. Sci., **95**, σελ. 14863-14868 (1998).
- [28] S. N. Ethier & T. G. Kurtz, *Markov Processes, Characterization and Convergence*, John Wiley & Sons Inc., New York (1986).
- [29] P. J. Forrester, *Log-Gases and Random Matrices*, London Mathematical Society Monographs Series, **34** Princeton University Press (2010).
- [30] M. Fukushima & S. Nakao, *On spectra of the Schrödinger operator with a white Gaussian noise potential*, Z. Wahrscheinlichkeit-theorie und Verw. Gebiete, **37**, No. 3, σελ. 267-274 (1976).
- [31] M. Gaudin, *Sur la loi limite de l'espacement des valeurs propres d'une matrice aléatoire*, Nucl. Phys. **25** σελ. 447-458 (1961).
- [32] M. Gaudin & M. L. Mehta, *On the density of eigenvalues of a random matrix*, Nucl. Phys., **4**, σελ. 420-427 (1960).
- [33] P. Halmos, *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea Publishing Co, (1957).
- [34] B. I. Halperin, *Green's functions for a particle in a one-dimensional random potential*, Phys. Rev, **139**, No. 2, σελ. A104-A117 (1965).
- [35] A. S. Householder, *Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix*, Journal of the Association of Computing Machinery, **5**, σελ. 339-342 (1958).
- [36] P. L. Hsu, *On the distribution of the roots of certain determinantal questions*, Ann. Eugenics, **9**, sel. 250-258 (1939).
- [37] J. Huang, *Spectrum asymptotics of Airy's operator under perturbation*, MIT, σύνδεσμος (2013).
- [38] A. T. James, *Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples*, Ann. Math. Stat., **35**, σελ. 151-158 (1964).
- [39] A. T. James, *Special functions of matrix and single argument in Statistics*, In R. A. Askey (editor), *Theory and Application of Special Functions*, Academic Press, New York (1975).
- [40] K. Johansson, *Shape fluctuations and random matrices*, Commun. Math. Phys., **209**, σελ. 437-476, (2000).

- [41] I. M. Johnstone, *On the distribution of the largest principal component*, Ann.of Stat., **29**, No. 2, σελ. 295-327 (2001).
- [42] M. Krishnapur, B. Rider & B. Virág, *Universality of the stochastic Airy operator*, Comm. Pure Appl. Math., **69**, σελ. 145-199 (2016).
- [43] G. F. Lawler, *Introduction to Stochastic Processes*, Second Edition, Chapman & Hall, CRC: Boca Raton, FL (2006).
- [44] M. Ledoux & B. Rider, *Small deviations for beta ensembles*, Electronic Journal of Probability, **15**, No.41, σελ. 1319-1343 (2010).
- [45] C. Louart, Z. Liao & R. Couillet, *A random matrix approach to neural networks*, Ann. Appl. Probab., **28**, No. 2, σελ. 1190-1248 (2018).
- [46] V. A. Marčenko & L. A. Pastur, *Distribution of eigenvalues for some sets of random matrices*, Math USSR Sbornik, **1** σελ. 457-483 (1967).
- [47] B. D. McKay, *The expected eigenvalue distribution of a large regular graph*, Lin. Alg. Appl., **40**, σελ. 203-216 (1981).
- [48] M. L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd Edition, Academic Press (1990)
- [49] H. L. Montgomery, *The pair correlation of zeros of the zeta function*, In *Analytic Number Theory, Proceedings of the 1972 St. Louis Symposium*, σελ. 181-193, American Mathematical Society (1973).
- [50] P. Mörters & Y. Peres, *Brownian Motion*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge (2010).
- [51] R. J. Muirhead, *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, John Wiley & Sons Inc., New York (1982).
- [52] A. M. Odlyzko, *On the distribution of spacings between zeros of the zeta function*, In M. van Frankenhuysen and M. L. Lapidus, editors, *Dynamical, Spectral and Arithmetic Zeta-Functions, Contemporary Mathematics Series*, 290, σελ. 139-144, American Mathematical Society, Providence, RI (2001).
- [53] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2003).
- [54] F. Qi, *Bounds for the ratio of two Gamma functions*, Journal of Inequalities Appl. (2010).
- [55] B. N. Parlett, *The symmetric eigenvalue problem* SIAM Classics in Applied Mathematics **139-140** (1998)
- [56] J. Ramírez, B. Rider & B. Virág, *Beta ensembles, stochastic Airy spectrum, and a diffusion*, Journal of the American Mathematical Society, **24**, No. 4, σελ. 919-944 (2011).
- [57] W. Rudin, *Fourier Analysis on Groups*, Wiley Interscience Publishers, New York (1962).
- [58] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York (1991).
- [59] L. Schwartz, *Introduction to the Theory of Distributions: Based on the Lectures Given by Laurent Schwartz*, University of Toronto Press, CA (1952).
- [60] B. Simon, *Sturm Oscillation and Comparison Theorems*, <https://arxiv.org/abs/math/0311049v1> (2003).
- [61] T. Tao, *Nonlinear Dispersive Equations: Local and Global Analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, American Mathematical Society (2006).
- [62] C. A. Tracy & H. Widom, *Level spacing distributions and the Airy kernel*, Comm. Math. Phys., **159**, No. 1, σελ. 151-174 (1994).
- [63] C. A. Tracy & H. Widom, *On orthogonal and symplectic matrix ensembles*, Comm. Math. Phys., **177**, No. 3, σελ. 727-754 (1996).
- [64] C. A. Tracy & H. Widom, *Universality of the distribution functions of random matrix theory*, In *Statistical Physics on the Eve of the 21st Century: In Honour of J. B. McGuire on the Occasion of His 65th Birthday*, σελ. 230-239, World Scientific Pub (1999).

- [65] H. F. Trotter, *Eigenvalue distributions of large Hermitian matrices; Wigner's semicircle law and a theorem of Kac, Murdock, and Szegő*, Adv. Math., **54**, σελ. 67-82 (1984).
- [66] E. P. Wigner, *Characteristic vectors of bordered matrices with infinite dimensions*, Ann. of Math., **62** σελ. 548-564 (1955).
- [67] E. P. Wigner, *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*, Ann. of Math., **67**, σελ. 325-327 (1958).
- [68] J. Wishart, *The generalized product moment distribution in samples from a normal multivariate population*, Biometrika A, **20** σελ. 32-43 (1928).