

ΕΘΝΙΚΟΝ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ
ΑΘΗΝΩΝ



ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής

και

Στοιχειωδών Σωματιδίων

**Έμμεση ανίχνευση Σκοτεινής Ύλης με
βάση σήματα νετρίνων από τον Ήλιο**

Διπλωματική Εργασία

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΤΣΟΥΡΑΠΗΣ

A.M.: 201728

Επιβλέπων:

ΣΠΑΝΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής

Φυσικού ΕΚΠΑ

13 Ιουλίου 2019

ΕΘΝΙΚΟΝ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής

και

Στοιχειωδών Σωματιδίων

ΘΕΜΑ : Έμμεση ανίχνευση Σκοτεινής Ύλης με
βάση σήματα νετρίνων από τον Ήλιο

TITLE: Indirect detection of Dark Matter through
Neutrino signals coming from the Sun

Διπλωματική Εργασία

Master Thesis

Συγγραφή: ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ ΤΣΟΥΡΑΠΗΣ

Author: VASILEIOS TSOURAPIS

A.M.: 201728

Επιβλέπων:

ΣΠΑΝΟΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Αναπληρωτής Καθηγητής

Φυσικού ΕΚΠΑ

Τριμελής επιτροπή

Διαμάντης Γεώργιος

Σπανός Βασίλειος

Σφέτσος Κωνσταντίνος

Περίληψη

Στην Διπλωματική αυτή εργασία παρουσιάζεται η Υπερσυμμετρία ως λύση του προβλήματος της Σκοτεινής Ύλης και στη συνέχεια δίνεται ο τρόπος με τον οποίο αυτή μπορεί να ανιχνευθεί. Ύστερα από μια σύντομη αναφορά στο Καθιερωμένο Πρότυπο των Στοιχειωδών Σωματιδίων, ξεκινάμε να δομούμε την θεωρία της Υπερσυμμετρίας. Αρχικά, ορίζουμε συνεκτικούς συμβολισμούς, οι οποίοι διατηρούνται καθ' όλη την εργασία, και ύστερα από την απαραίτητη ανάλυση καταλήγουμε στην πλήρη υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή. Τα αποτελέσματα εξάγονται επίσης με τη βοήθεια του φορμαλισμού των Υπερπεδίων. Η συζήτηση συνεχίζει εξειδικεύοντας για το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (MSSM) και μελετώνται έννοιες όπως το ελαφρύ σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας και η διατήρηση της R-Ομοτιμίας. Στο σημείο αυτό δίνονται σε πλήρη μορφή οι πίνακες μάζας για όλα τα νεοεισαχθέντα σωματίδια του MSSM. Ιδιαίτερη σημασία δίνεται στο ελαφρύτερο Neutralino, το οποίο υποτίθεται ως το Ελαφρύτερο Υπερσυμμετρικό Σωματίδιο (LSP). Το Neutralino LSP θεωρείται ως το κύριο συστατικό της Σκοτεινής Ύλης. Τα διαγράμματα αλληλεπίδρασης του LSP οδηγούν στον υπολογισμό της ενεργού διατομής για την άμεση ανίχνευσή του. Στην παρούσα εργασία μελετάμε την έμμεση ανίχνευση του LSP μέσω των νετρίνων που παράγονται κατά την εξαϋλώσή του. Συζητάμε το μοντέλο όπου τα νετρίνα αυτά ανιχνεύεται να έρχονται από τον Ήλιο, επειδή εκεί είχαν πρότερα παγιδευτεί LSPs που κανονικά κατοικούσαν σε μια γαλαξιακή άλω Σκοτεινής Ύλης.

Λέξεις Κλειδιά: Υπερσυμμετρία, Σκοτεινή Ύλη, νιουτραλίνο, νετρίνο, Ήλιος, MSSM, LSP, έμμεση ανίχνευση, ρυθμός σύλληψης, ρυθμός εξαϋλωσης

Abstract

In this Master thesis Supersymmetry as a solution to the Dark Matter problem is presented and afterwards the way in which it can be detected is given. After a short mention of the Elementary Particles' Standard Model, we begin building the Supersymmetric theory. At first, we define coherent conventions, which are conserved throughout the project, and after the needed analysis we result in the complete supersymmetric Lagrangian. The results are also reached with the help of the Superfield formalism. The discussion continues specializing for the Minimal Supersymmetric Standard Model (MSSM) and concepts such as the soft Supersymmetry breaking and the conservation of R-Parity are studied. At this point the mass matrices for all the MSSM's fresh particles are given in full form. Especial importance is given to the lightest Neutralino, which is assumed to be the Lightest Supersymmetric Particle (LSP). The Neutralino LSP is considered to be Dark Matter's main ingredient. LSP's interaction graphs lead onto calculations for its direct detection cross section. In this thesis we study the indirect detection of LSPs via neutrinos produced by their annihilations. We discuss a model in which those neutrinos are traced to come from the Sun, for there LSPs had been captured beforehand, while normally they were living in a Dark Matter galactic halo.

Key Words: Supersymmetry, Dark Matter, neutralino, neutrino, Sun, MSSM, LSP, indirect detection, capture rate, annihilation rate

Ευχαριστίες

Θέλω να ευχαριστήσω τους γονείς μου για όλες τις θυσίες και την στήριξη που μου έχουν προσφέρει σε κάθε στάδιο της ζωής μου.

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Βασίλη Σπανό για την βοήθεια του κατά την συγγραφή αυτής της Διπλωματικής εργασίας.

Τέλος, όλοι οι συγγραφείς επιστημονικών κειμένων οφείλουν να είναι ευγνώμονες στους συντελεστές της προσπάθειας του L^AT_EX για τις αναρίθμητες ευκολίες που μας προσφέρει.

Περιεχόμενα

0	Το Καθιερωμένο Πρότυπο (Standard Model)	5
0.1	Η Λαγκρανζιανή	5
0.2	Σπάσιμο Ηλεκτρασθενούς Συμμετρίας (EWSB)	6
0.3	Δυναμικό Yukawa	8
0.4	Ο πίνακας Cabibbo-Kobayashi-Maskawa	8
0.5	Μερικές επιπλέον παρατηρήσεις	9
1	Υπερσυμμετρία I	10
1.1	Γιατί Υπερσυμμετρία;	10
1.2	Συμμετρία μεταξύ μποζονίων και φερμιονίων	11
	Συμμετρία Poincaré	11
	Υπερσυμμετρία Poincaré	12
1.3	Κατασκευή υπερ-συνοδών	13
1.4	Σπίνορες	14
	Συζυγές φορτίου	14
	Σπίνορες Majorana	15
	Δείκτες και ταυτότητες	17
1.5	Ιδιότητες καταστάσεων	18
1.6	Οι υπερ-πολλαπλέτες	19
1.7	Τα σωματίδια Higgs	22
1.8	Η Λαγκρανζιανή	24
	1.8.1 Η ελεύθερη χειραλική Λαγκρανζιανή	24
	Η γέννηση του όρου F	25
	1.8.2 Η ολική χειραλική Λαγκρανζιανή	26
	Η γέννηση του Υπερδυναμικού	26
	1.8.3 Η βαθμιδωτή (ανυσματική) Λαγκρανζιανή	29
	Η γέννηση του όρου D	29
	Η βαθμίδα (gauge) Wess-Zumino	30
	1.8.4 Η ολική Λαγκρανζιανή	30
2	Υπερπεδία (Superfields)	33
2.1	Μεταβλητές Grassmann	33
2.2	Υπερχώρος (Superspace)	33
2.3	Φτιάχνοντας την Λαγκρανζιανή	35
	2.3.1 Χειραλικό Υπερπεδίο H	35
	2.3.2 Ανυσματικό Υπερπεδίο Δ	36
	2.3.3 Η βαθμίδα Wess-Zumino	36
	2.3.4 Η Δράση A	37
	2.3.5 Η Δράση A στη βαθμίδα Wess-Zumino	38
3	Υπερσυμμετρία II - Το MSSM	39
3.1	Η Λαγκρανζιανή	39
3.2	Το Σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας	41
	3.2.1 Σπάσιμο μέσω των D-όρων	42
	3.2.2 Σπάσιμο μέσω των F-όρων	42

3.2.3	Πρακτικό σπάσιμο	42
3.3	R-Ομοτιμία	44
3.4	Μάζες	46
3.4.1	Μάζες των Bosinos	46
3.4.2	Μάζες των Sfermions	51
4	Ανίχνευση Σκοτεινής Ύλης	53
4.1	Αλληλεπιδράσεις των Bosinos	53
4.2	Διαγράμματα σκέδασης για το LSP	54
4.3	Άμεση ανίχνευση	57
4.3.1	Αλ/σεις εξαρτώμενες από το σπιν	58
4.3.2	Βαθμωτές αλληλεπιδράσεις	60
4.3.3	Ανιχνευτές	62
4.4	Έμμεση ανίχνευση	64
4.4.1	Ανάλυση σε μερικά κύματα	64
4.4.2	Φωτόνια	65
4.4.3	Νετρίνα	66
4.4.4	Αντιύλη	68
5	Ανίχνευση μέσω νετρίνων	71
5.1	Ρυθμός σύλληψης C	71
5.2	Γιατί μας ενδιαφέρει ο Ήλιος;	75
5.3	Ρυθμός εξαϋλωσης C_A	75
5.4	Πειραματικά αποτελέσματα	76
6	Συμπεράσματα	83
	Αναφορές	86

0 Το Καθιερωμένο Πρότυπο (Standard Model)

Η μεγάλη επιτυχία της Υπερσυμμετρίας, ή μάλλον αυτό που την κάνει τόσο δελεαστική, είναι ότι δεν πρόκειται για μια θεωρία που ανατρέπει όλα όσα ξέραμε μέχρι σήμερα, αλλά για μια απλή *επέκταση*. Η Υπερσυμμετρία διατηρεί τη συμμετρία Lorentz και γενικά όλοι οι κανόνες και η λογική που χρησιμοποιούμε για τη μελέτη της είναι όμοια με αυτή του Καθιερωμένου Προτύπου των Στοιχειωδών Σωματιδίων (ΚΠ). Καλό είναι, λοιπόν, να δούμε εν συντομία μερικά βασικά χαρακτηριστικά του.

0.1 Η Λαγκρανζιανή

Ξεκινάμε από την Λαγκρανζιανή της θεωρίας, η οποία σε *κλειστή μορφή*¹ μπορεί να γραφτεί ως:²

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\vec{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\vec{B}_{\mu\nu}\vec{B}^{\mu\nu} + \\ & + L^\dagger\gamma^\mu(i\partial_\mu - \frac{1}{2}g\vec{\tau}\vec{W}_\mu - \frac{1}{2}g'Y\vec{B}_\mu)L + R^\dagger\gamma^\mu(i\partial_\mu - \frac{1}{2}g'Y\vec{B}_\mu)R + \\ & + |(i\partial_\mu - \frac{1}{2}g\vec{\tau}\vec{W}_\mu - \frac{1}{2}g'Y\vec{B}_\mu)\Phi|^2 - V(\Phi) - \\ & - (G_1L^\dagger\Phi R + G_2L^\dagger\Phi^c R + h.c.) + \\ & + \mathcal{L}_{QCD} \end{aligned} \quad (0.1.1)$$

όπου

$$W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\epsilon_{ijk}W_\mu^j W_\nu^k \quad (0.1.2)$$

και

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (0.1.3)$$

Ας εξηγήσουμε τους όρους που περιλαμβάνει η σχέση 0.1.1,

- Η πρώτη γραμμή αναφέρεται στους κινητικούς όρους των μποζονίων W και B, καθώς και στις ιδιο-αλληλεπιδράσεις τους.
- Η δεύτερη γραμμή περιλαμβάνει τους κινητικούς όρους των δεξιόστροφων και αριστερόστροφων λεπτονίων και quark, καθώς και τις αλληλεπιδράσεις τους με τα μποζόνια W και B.
- Η τρίτη γραμμή προκύπτει από τον μηχανισμό BEH. Εδώ έχουμε τον κινητικό όρο του σωματιδίου Higgs, καθώς και τις αλληλεπιδράσεις αυτού με τα μποζόνια W και B.

¹Αν αναπτύξουμε όλους τους όρους της Λαγκρανζιανής -ώστε να γίνουν φανερά οι αλληλεπιδράσεις και οι όροι μάζας- χωρίς να αναπτύξουμε και τα επιμέρους αθροίσματα στο χρώμα και στις οικογένειες λεπτονίων και quark, θα πάρουμε μια έκφραση περίπου 165 διαφορετικών όρων! Αυτό βέβαια είναι αναμενόμενο, αν σκεφτούμε ότι η εν λόγω έκφραση περιγράφει με μαθηματικό τρόπο ολόκληρη την γνωστή Πραγματικότητα.

²Στην βιβλιογραφία, αντί για τη γραφή $L^\dagger$ μπορεί να δούμε το $\bar{L} \equiv L^\dagger\gamma^0$ το οποίο, εν τέλει, απλά εμφανίζει ένα επιπλέον πλην. Προτιμάμε την γραφή με σκέτο το dagger καθώς είναι πιο απλή, ενώ οποιαδήποτε αλλαγή προσήμου μπορεί να απορροφηθεί στις εκάστοτε σταθερές.

B. Λόγω του σπασίματος της Ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, η γραμμή αυτή δίνει επίσης όρους μάζας για τα W και B. V είναι το δυναμικό Higgs.

- Στην τέταρτη γραμμή έχουμε τους όρους Yukawa.
- Το Καθιερωμένο Πρότυπο ολοκληρώνεται με τη συνεισφορά της Λαγκρανζιανής των Ισχυρών αλληλεπιδράσεων.

0.2 Σπάσιμο Ηλεκτρασθενούς Συμμετρίας (EWSB)

⊙ Η ενοποίηση του Ηλεκτρομαγνητισμού και των Ασθενών αλληλεπιδράσεων επιτυγχάνεται με την ενοποίηση των αντίστοιχων ομάδων συμμετρίας. Από δύο ανεξάρτητες ομάδες ενός και δύο στοιχείων αντίστοιχα, πάμε σε μια ενιαία ομάδα 1+2 στοιχείων. Σχηματικά:

$$U(1)_{\text{HM}} \quad SU(2)_{\text{WEAK}} \rightarrow SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (0.2.1)$$

- Μετά από αυτή την ενοποίηση, αντί να μιλάμε για το ηλεκτρικό φορτίο Q ,³ κάνουμε λόγο για το υπερφορτίο Y και το "αριστερόστροφο" φορτίο (ισοσπίν) T_3 - το οποίο παίρνει τιμές $\pm \frac{1}{2}$ για αριστερόστροφα σωματίδια και 0 για δεξιόστροφα.

Ορίζουμε το Υπερφορτίο μέσω της έκφρασης,

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2} \quad (0.2.2)$$

- Το Ηλεκτρασθενές μοντέλο συνεπάγεται ακόμα τις αναμειξίξεις,

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad (0.2.3)$$

και

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_w & \sin\theta_w \\ -\sin\theta_w & \cos\theta_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (0.2.4)$$

- Η ταξινόμηση των λεπτονίων και quark γίνεται σε αριστερόστροφες διπλέτες και δεξιόστροφες απλέτες. Με αυτή τη γραφή **σταματάμε** να μιλάμε για σωματίδια και αντισωματίδια και ο φορμαλισμός απλοποιείται σε αριστερόστροφα και δεξιόστροφα σωματίδια (με τον τρόπο αυτό γίνεται ξεκάθαρος ο αριστερόστροφος χαρακτήρας της εκάστοτε διαδικασίας).

Η απλοποίηση επιτυγχάνεται χάρη στη σχέση για το συζυγές του φορτίου (charge conjugate),

$$f_L^c \equiv f_R^\dagger \quad (0.2.5)$$

Έχουμε,

Λεπτόνια

$$\begin{pmatrix} \nu_{l_i} \\ l_i \end{pmatrix}_L \quad l_R \quad i = 1, 2, 3 \quad (0.2.6)$$

Quarks

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad u_R \quad d'_R \quad \text{όμοια για κάθε οικογένεια} \quad (0.2.7)$$

³Ο γεννήτορας της $U(1)_{\text{HM}}$ είναι $U' = e^{-ig'\beta(x)}$, ενώ της $SU(2)_{\text{WEAK}}$ είναι $U = e^{-ig\frac{1}{2}\vec{\tau}\vec{a}(x)}$. Ο συνολικός γεννήτορας είναι UU' .

⊙ Στην καθημερινότητα οι Ασθενείς και οι Ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις εμφανίζονται ως δύο διαφορετικές αλληλεπιδράσεις, άρα θα πρέπει η Ηλεκτρασθενής συμμετρία να είναι σπασμένη. Το σπάσιμο εκδηλώνεται μέσα από την επιλογή της αναμενόμενης τιμής κενού του μποζονίου Higgs (VEV).

Το μποζόνιο Higgs

Ανοίγουμε μια μικρή παρένθεση για να μιλήσουμε για το σωματίο που μας επιτρέπει το σπάσιμο της συμμετρίας.

Το σωματίο Higgs μπορεί να γραφτεί ως μια διπλέτα με μιγαδικές συνιστώσες,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \Phi_B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi_1 + i\Phi_2 \\ \Phi_3 + i\Phi_4 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \quad (0.2.8)$$

Η μέση τιμή του πεδίου Φ θα είναι

$$\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \langle 0 | \Phi^+ | 0 \rangle \\ \langle 0 | \Phi^0 | 0 \rangle \end{pmatrix}$$

Προφανώς δεν μπορούμε να έχουμε δύο τιμές κενού και άρα πρέπει να επιλέξουμε μία από τις δύο. Αυτό ακριβώς λέγεται σπάσιμο της συμμετρίας!

Επιλέγουμε $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_4 = 0$ και άρα

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi_3 \end{pmatrix}$$

Η μέση τιμή της συνιστώσας Φ_3 θα μας δίνει την τιμή κενού v του μποζονίου Higgs. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να γράψουμε:

$\Phi_3 = v + H(x) \quad \text{με} \quad \langle 0 | H(x) | 0 \rangle = 0$

(0.2.9)

και άρα

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (0.2.10)$$

• Όποτε συναντάμε το μποζόνιο Higgs σε κάποια εξίσωση, προκειμένου να είναι έκδηλο το σπάσιμο της Ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, θα το λογίζουμε ως μια σταθερά με τιμή $\frac{v}{\sqrt{2}}$. Πολλές φορές η τιμή VEV δίνεται με τη ρίζα να έχει ενσωματωθεί στον ορισμό του v . Πάντως, για τη γραφή της σχέσης 0.2.10 έχουμε:

$v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}G_F} \right)^{1/2} = 256 \text{ GeV}$

(0.2.11)

Τέλος, ορίζουμε το συζυγές του φορτίου του πεδίου Higgs ως,

$$\Phi^c \stackrel{\text{def}}{=} i\tau_2 \Phi^* \quad (0.2.12)$$

0.3 Δυναμικό Yukawa

Η τέταρτη γραμμή την Λαγκρανζιανής 0.1.1 περιλαμβάνει τους όρους Yukawa. Οι όροι αυτοί δεν είναι τίποτα άλλο από τους όρους αλληλεπίδρασης των αριστερόστροφων διπλετών L και των δεξιόστροφων απλετών R με τη διπλέτα του σωματίου Higgs.

Οι όροι αυτοί κανονικά δεν θα μας απασχολούσαν, αν δεν ήταν το EWSB, χάρη στο οποίο, ο όρος $G_1 L^\dagger \Phi R$ για παράδειγμα, για την πρώτη οικογένεια δίνει:

$$G_1 L^\dagger \Phi R = G_1 (\nu_e^\dagger \ e^\dagger)_L \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} e_R = G_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \nu_e^\dagger e_R + G_1 \frac{1}{\sqrt{2}} H e_L^\dagger e_R$$

Έχουμε έναν διγραμμικό όρο μάζας (ο οποίος εμφανίζεται, φυσικά, μόνο όταν λαμβάνουμε την μέση αναμενόμενη τιμή του κενού) και έναν τριγραμμικό όρο αλληλεπίδρασης (ο οποίος όταν μιλάμε για το κενό δεν θα εμφανίζεται -πράγμα λογικό, αφού στο κενό **δεν** έχουμε αλληλεπιδράσεις).

○ Ο παραπάνω μηχανισμός δίνει μάζα στα άνω μέλη των αριστερόστροφων διπλετών, πράγμα που για τα λεπτόνια είναι επιθυμητό. Όσον αφορά τα quarks, όμως, θέλουμε να λαμβάνουν μάζα και τα κάτω μέλη. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω των όρων με σταθερά G_2 και την χρήση του φορτισμένου συζυγούς Φ^c .

0.4 Ο πίνακας Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

Λόγω της καινούριας συμμετρίας που εισαγάγαμε θα πρέπει να υπολογίσουμε τις αναμειξεις των διαφόρων σωματιδίων προκειμένου να πάρουμε τις ιδιοκαταστάσεις μάζας. Έχουμε ήδη αναμειξει τα μποζόνια W και B και το ίδιο πρέπει να συμβεί για τα φερμιόνια.

Η ανάμειξη λαμβάνει χώρα μεταξύ όμοιων πεδίων (δηλαδή με ίδιους βαρυονικούς, λεπτονικούς κ.τ.λ. αριθμούς). Σε μια διπλέτα θα πρέπει να αναμειγνύονται όλα τα πάνω μέλη μεταξύ τους και όλα τα κάτω αντίστοιχα μεταξύ τους. Οι δύο αναμειξεις (για τα άνω και κάτω μέλη) μπορούν, με κατάλληλες επιλογές φάσης, να απλοποιηθούν σε μία. Αρκεί δηλαδή να επιλέξουμε ένα μέλος της αρεσκείας μας το οποίο θα επωμιστεί το "βάρος" της ανάμειξης. Παραδοσιακά επιλέγουμε να αναμειχθούν τα κάτω μέλη.

Αν τα νετρίνα θεωρηθούν άμαζα, τότε η ανάμειξη στον λεπτονικό τομέα **δεν** είναι παρατηρήσιμη. Ακόμα όμως κι αν τα νετρίνα **έχουν** μάζα -πράγμα που έχει αποδειχθεί ότι ισχύει- η ανάμειξη θα είναι τόσο μικρή, ώστε δεν έχει νόημα να την αναφέρουμε εδώ.

Μας μένουν, λοιπόν, τα quarks. Στην εξίσωση 0.2.10 έχουμε γράψει τις διπλέτες και απλέτες οι οποίες εμφανίζονται στην Λαγκρανζιανή 0.1.1, η οποία περιγράφει τις Ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις. Με άλλα λόγια, οι τελεστές μάζας δεν μπορούν να δράσουν πάνω στις διπλέτες αυτές. Προκειμένου να πάρουμε τις ιδιοκαταστάσεις μάζας πρέπει να δούμε πως γίνεται η ανάμειξη των κάτω quarks. Ο πίνακας που προκύπτει είναι ο πίνακας Cabibbo-Kobayashi-Maskawa:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix}}_{\text{Ασθενείς ιδιοκαταστάσεις}} = V_{CKM} \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}}_{\text{Ιδιοκαταστάσεις μάζας}} \quad (0.4.1)$$

όπου οι πιο πρόσφατες (Ιούνιος 2018) τιμές του πίνακα, παρμένες από το Particle

Data Group, είναι,

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9745 & 0.2245 & 0.0037 \\ 0.2244 & 0.9736 & 0.0421 \\ 0.009 & 0.0413 & 0.9991 \end{pmatrix} \quad (0.4.2)$$

0.5 Μερικές επιπλέον παρατηρήσεις

Κλείνοντας αυτή τη σύντομη ανασκόπηση είναι χρήσιμο να σημειώσουμε τα εξής:

- Κάτω από την Ηλεκτρασθενή συμμετρία οι αριστερόστροφες και δεξιόστροφες καταστάσεις (διπλές και απλές αντίστοιχα) μετασχηματίζονται ως

$$\Psi_L \longrightarrow \Psi'_L = e^{-ig\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{\alpha}(x)} e^{-ig'\beta(x)} \Psi_L$$

$$\Psi_R \longrightarrow \Psi'_R = e^{-ig'\beta(x)} \Psi_R \quad (0.5.1)$$

- Το δυναμικό Higgs είναι

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (0.5.2)$$

- Το ισοσπίν T διατηρείται. Συνεπώς, ένα quark δεν διασπάται ποτέ μέσω της Ασθενούς αλληλεπίδρασης σε ένα quark με το ίδιο T_3 .

- **Υπάρχουν** φορτισμένα ρεύματα που αλλάζουν την γεύση (FCCC), αλλά **δεν υπάρχουν** ουδέτερα ρεύματα που αλλάζουν την γεύση (FCNC).
- Ισχύουν οι χρήσιμες σχέσεις:

$$\tan \theta_W \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g'}{g}$$

$$e \stackrel{\text{def}}{=} g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W \quad (0.5.3)$$

- Οι πίνακες Pauli είναι:

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0.5.4)$$

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.5.5)$$

- Για την μετρική χρησιμοποιούμε τη σύμβαση της Δυτικής ακτής:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) \quad (0.5.6)$$

1 Υπερσυμμετρία I

Το Καθιερωμένο Πρότυπο αποτελεί μια ολοκληρωμένη θεωρία -για συγκεκριμένα ενεργειακά όρια- και θα μπορούσε εύκολα να τοποθετηθεί ανάμεσα στα μεγαλύτερα επιτεύγματα του Ανθρώπου, χάρη στην κομψότητα και την απλότητα με την οποία περιγράφει την Πραγματικότητα. Ωστόσο, το εξαιρετικό αυτό μοντέλο χαρακτηρίζει μονάχα περί το 5% των συστατικών του Σύμπαντος, ενώ αδυνατεί να περιγράψει την βαρύτητα -και ενδεχομένως μια πέμπτη δύναμη που συνδέεται με την Σκοτεινή Ενέργεια. Η ανάγκη για νέα Φυσική είναι εμφανής. Η απλούστερη θεωρία που δίνει απαντήσεις σε αρκετά ερωτήματα, ενώ συγχρόνως είναι και *πειραματικά ελέγξιμη* είναι η Υπερσυμμετρία.

1.1 Γιατί Υπερσυμμετρία;

Η Υπερσυμμετρία είναι μια *καλή* θεωρία επειδή πληροί ορισμένες βασικές προϋποθέσεις. Αρχικά, αποτελεί μια θεωρία που διατηρεί τον καθιερωμένο τρόπο σκέψης και απλά επεκτείνει το ήδη υπάρχον μοντέλο, χωρίς όμως να το ακυρώνει. Επιπλέον, από τις διάφορες προτεινόμενες επεκτάσεις, η Υπερσυμμετρία φαντάζει ως η πιο απλή, κομψή και συμμετρική(!) δυνατότητα. Τέλος, οι Υπερσυμμετρικές επεκτάσεις μπορούν να είναι άμεσα ελέγξιμες, ενώ ήδη έχουν τεθεί και ανάλογα όρια. Ας δούμε τους λόγους που ενέπνευσαν την θεωρία.

- Το κλασικό έναυσμα στη βιβλιογραφία για να εισάγουμε την Υπερσυμμετρία είναι το λεγόμενο **πρόβλημα της ιεραρχίας (hierarchy problem)**, το οποίο έγκειται στο γεγονός ότι η ενέργεια της Μεγάλης Ενοποίησης είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή των Ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων. Το πρόβλημα αυτό προσωποποιείται μέσα από το μποζόνιο του Higgs.

Είναι πειραματικά γνωστό ότι η μάζα του σωματιδίου Higgs είναι περίπου 125 GeV. Ωστόσο, όπως είπαμε, θα αναμέναμε η ηλεκτρασθενής αυτή ποσότητα να είναι ανάλογη της M_{GUT} . Σε επίπεδο δέντρου η μάζα του Higgs είναι $m_H \simeq 90$ GeV. Οι διορθώσεις βρόχων ανώτερης τάξης ⁴ δίνουν τιμές M_P . Πρέπει με κάποιον τρόπο να κάνουμε την θεωρία να συμφωνήσει με το πείραμα. Μάλιστα, αν καταφέρουμε να βρούμε αυτόν τον τρόπο θα έχουμε απαντήσει και στο ερώτημα *γιατί $M_{EWK} \ll M_P$ εν αντιθέσει με τις προσδοκίες μας;* ή, διαφορετικά, *ποιο είναι το πρώτο από αυτά που λείπουν και έτσι το ΚΠ δεν μπορεί να περιγράψει τον Κόσμο για πολύ υψηλές ενέργειες;*

Οι διορθώσεις που αυξάνουν την τιμή προέρχονται από φερμιονικούς βρόχους. Ένας τρόπος να ακυρώσουμε τις συνεισφορές αυτές είναι η προσθήκη βρόχων αντίθετου προσήμου και ίδιων συντελεστών. Για καλή μας τύχη, οι μποζονικοί βρόχοι έχουν αντίθετο πρόσημο από τους φερμιονικούς, οπότε το μόνο που μένει είναι να τους εισάγουμε. Για κάθε φερμιονικό βαθμό ελευθερίας χρειαζόμαστε έναν μποζονικό ώστε η ακύρωση να γίνεται ένα προς ένα. Προκειμένου οι συντελεστές να είναι ίδιοι, απαιτούμε τα μποζόνια αυτά να έχουν *ίδιες μάζες* με τα φερμιόνια, ενώ ρυθμίζουμε κατάλληλα τις ζεύξεις. Φυσικά, τώρα, περισσεύουν τα μποζονικά διαγράμματα του Καθιερωμένου Προτύπου, οπότε

⁴Στην Κβαντική Θεωρία Πεδίου η βασική -ή ίσως και η μόνη- ποσότητα που μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε είναι η συνάρτηση συσχέτισης $\langle 0 | \Phi_i \dots \Phi_j | 0 \rangle$, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο ένα σωματίο δημιουργείται και καταστρέφεται μέσω κάποιων πεδίων Φ_k . Η μάζα ενός σωματίου προκύπτει από τον υπολογισμό του $\langle 0 | \Phi | 0 \rangle$. Η συνάρτηση συσχέτισης δίνεται από τις παραγωγίσεις του συναρτησοειδούς $Z[J] \sim e^{S_I}$, όπου S_I είναι το κομμάτι της Δράσης που περιλαμβάνει όλες τις αλληλεπιδράσεις του πεδίου με όλα τα υπόλοιπα μέλη της θεωρίας. Το εκθετικό αυτό μπορούμε να το χειριστούμε μονάχα διαταρακτικά, και έτσι προκύπτουν οι διαφορετικές τάξεις και οι βρόχοι.

όπως πριν προσθέτουμε νέα φερμιόνια.

Η παραπάνω διαδικασία διπλασιάζει (τουλάχιστον) τον αριθμό των ήδη υπαρχόντων σωματιδίων. Γενικά, προκειμένου να πετύχει η ακύρωση πρέπει να απαιτήσουμε

$$n_F = n_B$$

δηλαδή να εξισωθούν οι μποζονικοί με τους φερμιονικούς βαθμούς ελευθερίας. Η ισότητα αυτή, ή αλλιώς η συμμετρία μεταξύ μποζονίων και φερμιονίων, καλείται **Υπερσυμμετρία**.

- Η λύση του προβλήματος της ιεραρχίας εισάγει καινούρια σωματίδια, αλλά μόνο... στα λόγια! Πρόκειται να αναλύσουμε μια θεωρία η οποία περιλαμβάνει στοιχεία που δεν έχουμε παρατηρήσει ποτέ, οπότε μια κάποια δυσπιστία είναι δικαιολογημένη. Ευτυχώς υπάρχει απάντηση!

Η περιορισμένη περιγραφική ισχύς του Καθιερωμένου Προτύπου (5% του Σύμπαντος) μπορεί να βελτιωθεί αρκετά αν στο "παιχνίδι" συμπεριλάβουμε την Σκοτεινή Ύλη. Επιθυμούμε να ενσωματώνουμε μοντέλα και θεωρίες που είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στις προηγούμενες γνώσεις μας. Η Υπερσυμμετρία, λοιπόν, θα ήταν αρκετά βολική επιλογή. Πράγματι, ορισμένα σωματίδια του Υπερσυμμετρικού μοντέλου, τα *neutralinos*, για τα οποία θα μιλήσουμε στην συνέχεια, είναι μαζικά, ενώ συγχρόνως δεν φέρουν ηλεκτρικό φορτίο, πράγμα που τα καθιστά ιδανικούς υποψηφίους για να αποτελούν την Σκοτεινή Ύλη.

Η επιστημονική σκέψη έχει καταλήξει στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα της Σκοτεινής Ύλης μπορεί να λυθεί μόνο μέσω Φυσικής πέραν του Καθιερωμένου Προτύπου. Συνεπώς, το γεγονός ότι η Υπερσυμμετρία εισάγει καινούρια σωματίδια είναι παραπάνω από ευπρόσδεκτο.

- Όπως αναφέραμε, η Υπερσυμμετρία έρχεται και λύνει το πρόβλημα της ιεραρχίας. Δεν αρκεί, όμως, αυτό· πρέπει να μπορεί να προβλέπει σωστά και την μάζα του Higgs. Πράγματι, ακριβείς υπερσυμμετρικοί υπολογισμοί βρόχων τρίτης τάξης δίνουν ότι η μάζα του σωματιδίου **δεν** πρέπει να ξεπερνά τα 135 GeV. Το γεγονός ότι πειραματικά έχει βρεθεί πως $m_H \simeq 125$ GeV -και όχι ας πούμε 140 GeV, το οποίο θα ακύρωνε με μιας τη θεωρία- σημαίνει πως βρισκόμαστε σε καλό δρόμο.

- Τέλος, οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί συνδέονται με την συμμετρία Poincaré. Αν, λοιπόν, έχουμε τοπική Υπερσυμμετρία, αυτομάτως θα έχουμε και τοπικούς μετασχηματισμούς Poincaré. Οι τοπικοί, όμως, μετασχηματισμοί Poincaré αποτελούν την βάση για την Γενική Σχετικότητα. Με λίγα λόγια, η Υπερσυμμετρία μπορεί εν δυνάμει να γίνει μια θεωρία για την Βαρύτητα.

1.2 Συμμετρία μεταξύ μποζονίων και φερμιονίων

Συμμετρία Poincaré

Η θεμελιώδης συμμετρία του χωρόχρονου -και κατά συνέπεια των στοιχειωδών σωματιδίων- είναι η συμμετρία Poincaré, η οποία απαρτίζεται από δέκα επιμέρους· τέσσερις για τις χωροχρονικές Μεταθέσεις, τρεις για τις χωρικές Στροφές και τρεις για τα Boosts. Γενικά ο μετασχηματισμός της μεταβλητής x γράφεται:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \quad (1.2.1)$$

Η **Άλγεβρα Poincaré** δίνεται από τις σχέσεις:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \quad (1.2.2)$$

$$[M^{\mu\nu}, P^\lambda] = i\eta^{\nu\lambda} P^\mu - i\eta^{\mu\lambda} P^\nu \quad (1.2.3)$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} \quad (1.2.4)$$

όπου P^μ είναι ο γεννήτορας των μεταθέσεων και $M^{\mu\nu}$ ο γεννήτορας των μετασχηματισμών Lorentz. Συγκεκριμένα ισχύουν:

$$\text{Στροφές} \quad J_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M^{jk} \quad \text{Boosts} \quad K_i = M_{i0} \quad \text{Μεταθέσεις} \quad P_\mu = i\partial_\mu$$

Υπερσυμμετρία Poincaré

Η συμμετρία που θέλουμε να εισάγουμε είναι μια *αληθινή* συμμετρία και όχι κάποια προσέγγιση. Αυτό σημαίνει ότι η Υπερσυμμετρία θα πρέπει να επικοινωνεί με την συμμετρία Poincaré και αυτές οι δύο μαζί να φτιάχνουν μια καινούρια, ενιαία Άλγεβρα, την **Υπερ-Poincaré Άλγεβρα**.

Η κατάσταση ενός σωματιδίου (μποζόνιο ή φερμιόνιο) αποτελεί αντικείμενο της συμμετρίας που υποστηρίζουμε ότι υπάρχει στη Φύση. Εισάγουμε, λοιπόν, έναν⁵ τελεστή Q ο οποίος μπορεί να μας πηγαίνει από την μία κατάσταση στην άλλη [4], [11], [12]:

$$Q |\text{Boson}\rangle = |\text{fermion}\rangle \quad (1.2.5)$$

$$Q |\text{fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad (1.2.6)$$

Εφ' όσον ο τελεστής Q δρα σε σπινორιακές καταστάσεις θα πρέπει και ο ίδιος να είναι Weyl φερμιονικός, με σπιν $1/2$. Επομένως, θα πρέπει να έχει δύο συνιστώσες,

$$Q_a \quad \text{με} \quad a = 1, 2$$

Η παραπάνω γραφή ορίζουμε να αναφέρεται σε αριστερόστροφους Weyl σπίνορες. Όταν ο τελεστής Q δρα σε δεξιόστροφους Weyl σπίνορες γράφουμε,

$$Q_{\dot{a}}^\dagger \quad \text{με} \quad \dot{a} = 1, 2$$

Τώρα που γνωρίζουμε τι παριστάνουν οι σπινორιακοί δείκτες μπορούμε να γράψουμε την Υπερ-Poincaré Άλγεβρα:

$$[M^{\mu\nu}, Q_a] = (\sigma^{\mu\nu})_a^\beta Q_\beta \quad (1.2.7)$$

$$[Q_a, P^\mu] = 0 \quad (1.2.8)$$

$$\{Q_a, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\} = 2(\sigma^\mu)_{a\dot{\beta}} P_\mu \quad (1.2.9)$$

Ας θυμηθούμε ότι,

$$\sigma^{\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) \quad (1.2.10)$$

⁵Στην πραγματικότητα, μπορούμε να ορίσουμε παραπάνω από έναν γεννήτορες Υπερσυμμετρίας, Q^A , με το $A = 1, 2, \dots, N$ να δηλώνει κάποια εσωτερική συμμετρία. Ο λόγος που **δεν** το κάνουμε αυτό είναι γιατί πολύ απλά δεν χρειάζεται. Στο εξής κάνουμε λόγο για την απλούστερη Υπερσυμμετρία με $A = 1$.

Είναι καλό να σημειώσουμε για τους σπινωριακούς δείκτες,

$$(\sigma^{\mu\nu})_a{}^\beta \longleftrightarrow (\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{a}}{}_{\dot{\beta}} \quad (1.2.11)$$

$$(\sigma^\mu)_{a\dot{a}} \longleftrightarrow (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} \quad (1.2.12)$$

και βέβαια,

$$\sigma^\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma^0, \tau^i) = (I, \tau^i) \stackrel{\text{def}}{=} \tau^\mu \quad (1.2.13)$$

$$\bar{\sigma}^\mu \stackrel{\text{def}}{=} (\sigma^0, -\tau^i) = (I, -\tau^i) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\tau}^\mu \quad (1.2.14)$$

καθώς,

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2.15)$$

1.3 Κατασκευή υπερ-συνοδών

Προτού αναφέρουμε ενδελεχώς τα καινούρια σημεία και ιδιότητες που εισάγει η Υ-περσυμμετρία, θα πρέπει να δούμε πως χτίζονται οι Υπερσυμμετρικές καταστάσεις.

Για αρχή, θα αναφέρουμε ως *σωμάτια* τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου και ως *υπερ-σωμάτια* ή *υπερ-συνοδούς* ή *υπερσυμμετρικούς εταίρους* τα αντίστοιχα που εισάγουμε εξ' αιτίας της επέκτασης του μοντέλου μας.

★ Στο ελάχιστο, εισάγουμε τόσους καινούριους βαθμούς ελευθερίας, όσους και στο ΚΠ.

Έτσι, ένα μποζόνιο το οποίο έχει 2 πραγματικούς β.ε. (έχει **μία** μιγαδική συνιστώσα, εξ ου και οι δύο βαθμοί) θα απαιτήσει να το "συμπληρώσουμε" -ταιριάζουμε- με ένα φερμιόνιο με επίσης 2 β.ε. Τώρα, προκειμένου να διακρίνουμε μεταξύ αριστερόστροφων και δεξιόστροφων σωματιδίων, είναι προσφιλέστερο να θεωρούμε τις Weyl αναπαραστάσεις των φερμιονίων (και όχι τις Dirac). Ένας Weyl σπίνορας χαρακτηρίζεται, προφανώς, από δύο β.ε. Συνεπώς, από **ένα** μποζόνιο παίρνουμε *ένα* φερμιόνιο.

Σχετικά με τα φερμιόνια, ένας σπίνορας Dirac διαθέτει 4 β.ε., το οποίο υποδεικνύει ότι θα πάρουμε δύο μιγαδικά μποζόνια. Έτσι, **ένα** φερμιόνιο αντιστοιχεί σε **δύο** μποζόνια. Τα πράγματα περιπλέκονται, αν σκεφτούμε ότι μια ανάλογη διαδικασία πρέπει να ακολουθήσει και για το αντίστοιχο αντι-φερμιόνιο. Ξαφνικά, έχουμε παράξει πάρα πολλά μποζόνια.

Ωστόσο, όπως είδαμε στο εισαγωγικό κεφάλαιο, είναι προτιμότερο αντί για σωμάτια και αντισωμάτια να κάνουμε λόγο για αριστερόστροφες και δεξιόστροφες καταστάσεις. Η αλλαγή στην αντίληψη των σωματιδίων *δεν* αλλοιώνει το *κύρος της πολυπληθότητας*: ότι, δηλαδή, εξακολουθούν να υπάρχουν δύο *διαφορετικές* καταστάσεις για το ίδιο πράγμα, είτε αυτές τις ονομάσουμε σωμάτιο-αντισωμάτιο, είτε αριστερόστροφο-δεξιόστροφο.

Συνεπώς στο παραπάνω παράδειγμα με το φερμιόνιο **δεν** πρέπει να θεωρήσουμε το αντι-φερμιόνιο, και μάλιστα, οφείλουμε να σκεφτούμε ότι ένας σπίνορας Dirac περιγράφει στην πραγματικότητα **δύο** σωματίδια -δύο Weyl σπίνορες. Τελικά, από **δύο** φερμιόνια λαμβάνουμε **δύο** μποζόνια και όλα έχουν μπει στην θέση τους!⁶

★ **Σχηματικά**, η Υπερσυμμετρία μας δίνει την ακόλουθη εικόνα:

⁶Αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου ότι οι β.ε. που εισάγουμε είναι *τουλάχιστον* ίσοι με τους προηγούμενους. Αυτή η δήλωση, βέβαια, υπονοεί ότι οι υπερ-συνοδοί μπορούν να είναι περισσότεροι. Ωστόσο, βλέπουμε ότι η Υπερσυμμετρία χτίζεται πάνω στην λογική του να έχουμε τόσα μποζόνια όσα και φερμιόνια.

Είναι στο **ΚΠ**,

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} *1 \\ *2 \\ \dots \\ *3 \\ *4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \dots \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (1.3.1)$$

και

$$B = a + bi \quad (1.3.2)$$

Τότε οι **υπερ-συνοδοί** είναι,

$$\psi_L \longrightarrow \tilde{\psi}_L = “*1” + “*2”i \quad (1.3.3)$$

$$\psi_R \longrightarrow \tilde{\psi}_R = “*3” + “*4”i \quad (1.3.4)$$

και

$$B \longrightarrow \tilde{B} = \begin{pmatrix} “a” \\ “b” \end{pmatrix} \quad (1.3.5)$$

Τα μποζόνια προερχόμενα από φερμιόνια τα ονομάζουμε **βαθμωτά φερμιόνια** (scalar fermions - sfermions), και γενικά τοποθετούμε ένα “σ” μπροστά από το όνομα του αντίστοιχου φερμιονίου. Όσον αφορά τα καινούρια φερμιόνια, αυτά τα ονομάζουμε με βάση το αρχικό μποζόνιο και την κατάληξη “-ίνο”. Έτσι έχουμε τον όρο **“bosino”**. Επειδή, σε αντίθεση με τα φερμιόνια, τα μποζόνια εμφανίζουν δύο διαφορετικά είδη σπιν (0 και 1), τα αντίστοιχα bosinos ονομάζονται διαφορετικά: είναι τα gauginos (σπιν 1) και τα higgsinos (σπιν 0).

1.4 Σπίνορες

Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε τον απαραίτητο φορμαλισμό προκειμένου να κάνουμε πράξεις με τα υπερσυμμετρικά πεδία. Ξεκινάμε με τον προσδιορισμό του κατάλληλου συμβολισμού [11] και συμβάσεων [4].

Συζυγές φορτίου

Έστω ένας σπίνορας Dirac ο οποίος αναλύεται σε δύο Weyl,

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \xi_a \\ \chi^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (1.4.1)$$

Ο τελεστής για το συζυγές του φορτίου δίνεται,

$$C = -i \begin{pmatrix} -\tau^2 & 0 \\ 0 & \tau^2 \end{pmatrix} \quad (1.4.2)$$

Μάλιστα, όπως θα αναφερθεί παρακάτω, όταν τηρείται *ακριβώς* αυτή η επιθυμία, το μοντέλο ονομάζεται *Ελάχιστη Υπερσυμμετρικό*. Εδώ, παρατηρούμε μια κακή ονοματολογία. Η Ελάχιστη Υπερσυμμετρία *είναι* η Υπερσυμμετρία -τουλάχιστον όσον αφορά τους λόγους για τους οποίους εισήχθη. Συνεπώς, οι εκτεταμένες Υπερσυμμετρικές θεωρίες -που εισάγουν επιπλέον σωματία- **δεν** θα έπρεπε να μπαίνουν κάτω από την κοινή ονομασία της Υπερσυμμετρίας. Με άλλα λόγια, η Υπερσυμμετρία είναι αυτό που είναι και οτιδήποτε άλλο είναι διαφορετικό -που όμως συνδέεται στενά με αυτήν.

οπότε ο συζυγής του φορτίου σπίνορας γίνεται,

$$\begin{aligned}\Psi_D^c &= C\bar{\Psi}_D^T = C(\Psi_D^\dagger \gamma^0)^T = C\gamma^0 \Psi_D^* = C \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \Psi_D^* = \\ &= C \begin{pmatrix} (\chi^{\dagger\dot{a}})^* \\ \xi_a^* \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} -\tau^2 (\chi^{\dagger\dot{a}})^* \\ \tau^2 \xi_a^* \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (1.4.3)$$

Επειδή το πρώτο στοιχείο του παραπάνω σπίνορα μετασχηματίζεται κατά Lorentz σαν το $\chi^\dagger$, ενώ το δεύτερο στοιχείο ως το ξ , μπορούμε να δούμε εύκολα ότι ο συμβολισμός,

$$\boxed{\xi_a^* \stackrel{\text{def}}{=} \xi_{\dot{a}}^\dagger} \quad \textbf{και} \quad \boxed{(\chi^{\dagger\dot{a}})^* \stackrel{\text{def}}{=} \chi^a} \quad (1.4.4)$$

έχει νόημα.

Τώρα, βλέπουμε ότι στα παραπάνω εμφανίζονται οι πίνακες,

$$-i(-\tau^2) = -i(-1) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

και

$$-i\tau^2 = -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

τους οποίους μπορούμε να **ονομάσουμε** (οι τονούμενοι και άτονοι δείκτες *έχουν* νόημα, αφού κάθε πίνακας δρα σε διαφορετικό σκέλος του σπίνορα),

$$\boxed{\varepsilon_{a\beta} = \varepsilon_{\dot{a}\dot{\beta}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{και} \quad \varepsilon^{\dot{a}\dot{\beta}} = \varepsilon^{a\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \quad (1.4.5)$$

Υστερα απ' όλους αυτούς τους συμβολισμούς μπορούμε να γράψουμε,

$$\boxed{\Psi_D^c = \begin{pmatrix} \varepsilon_{a\beta} \chi^\beta \\ \varepsilon^{\dot{a}\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \xi^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix}} \quad (1.4.6)$$

Η σύντμηση των δεικτών γίνεται με τη βοήθεια των πινάκων ε .

Σπίνορες Majorana

* Μια σημαντική κατηγορία σωματιδίων είναι εκείνα τα οποία περιγράφονται από τους λεγόμενους σπίνορες Majorana.

Βασίζόμενοι και πάλι στο ηλεκτρικό φορτίο **ορίζουμε**, ένας σπίνορας Dirac ο οποίος έχει την ιδιότητα να ισούται με τον συζυγή του φορτίου του καλείται Majorana. Δηλαδή,

$$\boxed{\Psi_M : \Psi_D^c = \Psi_D} \quad (1.4.7)$$

Είναι προφανές, λοιπόν, ότι αν εξισώσουμε τις σχέσεις 1.4.1 και 1.4.6 θα πάρουμε,

$$\Psi_M = \begin{pmatrix} \xi_a \\ \xi^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_a \\ \chi^{\dagger\dot{a}} \end{pmatrix} \quad (1.4.8)$$

* Επειδή ενδεχομένως να υπάρχει μια μικρή σύγχυση όσον αφορά τους σπίνορες Majorana, είναι καλό να ξεκαθαρίσουμε μερικές βασικές έννοιες:

- Γενικά λέμε ότι ένα σωματίδιο είναι Majorana όταν είναι ίδιο με το αντισωματίό του. Αυτό, βέβαια, είναι λογικό, αφού το αντισωματίο ορίζεται μέσω του αντίθετου ηλεκτρικού φορτίου (και των άλλων φυσικών φορτίων). Δηλαδή, έχουμε ότι πρέπει να ισχύει, $q = -q$. Συνεπώς, Majorana μπορεί να είναι *μόνο* ένα **ουδέτερο** σωματίο.

- Το φωτόνιο είναι το αντισωματίο του εαυτού του. Αυτό εκδηλώνεται με δύο τρόπους: πρώτον, η αλληλεπίδραση δύο φωτονίων, που οδηγεί σε κάποια άλλα προϊόντα, μπορεί να *μην* έχει το συγκεκριμένο όνομα, αλλά στην πραγματικότητα *είναι* μία *εξαϋλωση*. Δεύτερον, το φωτόνιο έχει ηλεκτρικό φορτίο 0, οπότε το *αντίθετο φορτίο* που θα όφειλε να έχει το αντισωματίο του είναι και πάλι 0.

Ωστόσο, δεν καλούμε το φωτόνιο (και κανένα από τα μποζόνια με τις ίδιες ιδιότητες) Majorana.

- Τα κάτω μέλη ενός σπίνορα Dirac αναφέρονται στα αντισωματία. Από την 1.4.8 βλέπουμε ότι τα σωματίδια Majorana δεν έχουν μόνο ίδιο φορτίο με τα αντισωματία, αλλά και **ίδια χειραλικότητα**.

- Τα φωτόνια είναι μποζόνια και επομένως **δεν** έχουν χειραλικότητα. Συνεπώς, το σωματίο και το αντισωματίο μπορούμε να πούμε ότι έχουν *ίδια* χειραλικότητα. Και πάλι, όμως, τα φωτόνια δεν καλούνται Majorana.

- Ο λόγος που ο όρος Majorana έχει ταυτιστεί με τα σωματίδια που είναι ίδια με τα αντισωματίά τους, αλλά ωστόσο δεν εφαρμόζεται στην περίπτωση των μποζονίων είναι απλά ένας *περιοριστικός* ορισμός. Ο αρχικός ορισμός που έδωσε ο Ettore Majorana το 1937 αναφερόταν σε **σπίνορες** και μόνο, δηλαδή σε **φερμιόνια**.

Με άλλα λόγια, δηλαδή, το μπέρδεμα οφείλεται καθαρά και μόνο στην σύμβαση που έχουμε υιοθετήσει. Αν θέλουμε, μπορούμε να αναφερόμαστε σε *όλα* τα σωματίδια-ίδια-μετα-αντισωματία με τον όρο Majorana σωματίδια (όχι σπίνορες προφανώς), αρκεί να ξέρουμε για τι πράγμα μιλάμε κάθε φορά. Ανεξάρτητα από την διατύπωση του ορισμού, η ουσία παραμένει η ίδια.

- Γιατί, λοιπόν, τα νετρίνα δεν είναι Majorana, εφ' όσον είναι φερμιόνια με ηλεκτρικό φορτίο 0; Αρχικά να πούμε ότι η πιθανότητα τα νετρίνα να είναι Majorana πειραματικά δεν έχει ακόμα αποκλειστεί εντελώς. Ο λόγος, πάντως, που το ζήτημα ερευνάται ακόμα είναι η χειραλικότητα, η δεύτερη από τις ιδιότητες που αναφέραμε ώστε ένα σωματίο να χαρακτηριστεί ίδιο με το αντισωματίο του. Προκειμένου να είναι Majorana (ή τουλάχιστον να αυξήσουν τις πιθανότητές τους προς αυτή την κατεύθυνση) θα πρέπει να βρεθούν αριστερόστροφα αντineτρίνα, ή δεξιόστροφα νετρίνα.

- Τα Neutralinos -οι υπερσυμμετρικοί εταίροι των ανυσματικών μποζονίων- τα οποία θα εξετάσουμε στην συνέχεια, **είναι** Majorana, γιατί, αρχικά, είναι φερμιόνια με ηλεκτρικό φορτίο 0. Επιπλέον, επειδή τα ταιριάζουμε με μποζόνια, κληρονομούν κάποιες από τις ιδιότητές τους. Δηλαδή, μπορεί να είναι φερμιόνια, αλλά παρόλα αυτά **δεν** χαρακτηρίζονται από χειραλικότητα. Αυτό είναι λογικό, διότι για να υπάρξει η έννοια της

χειραλικότητας χρειαζόμαστε 4 β.ε. - σπίνορας Dirac-, ενώ τα bosinos διαθέτουν⁷ μονάχα 2.

- Σύμφωνα με τη σχέση 1.4.8 ένας σπίνορας Weyl -ο οποίος είναι υποσύνολο- ενός Dirac- δεν θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ποτέ ως Majorana. Αν όμως το σωματίο που θέλουμε να περιγράψουμε **είναι** το αντισωματίο του, τότε μπορούμε πάντα να φτιάξουμε -μαθηματικά- έναν σπίνορα Majorana από έναν Weyl.

Για παράδειγμα, ένα Neutralino είναι **ένας** σπίνορας Weyl. Ωστόσο, το εν λόγω φερμιόνιο είναι ίδιο με το αντισωματίο του. Οπότε, αν γράφαμε αυτό το σωματίο σε συμβολισμό Dirac, τότε τα πάνω δύο μέλη θα ήταν ο σπίνορας που έχουμε και τα κάτω δύο το συζυγές του πάνω. Με αυτόν τον τρόπο γράψαμε 4 β.ε. -κάτι που δεν ισχύει- όμως δηλώνουμε ταυτόχρονα ότι το αντισωματίο **δεν** διαφέρει. Συνεπώς οι 4 β.ε. γίνονται 2 και εν τέλει η καινούρια αυτή περιγραφή **δεν** διαφέρει από την αρχική. Γιατί χρειάστηκε να το κάνουμε όλο αυτό; κυρίως για να είμαστε σύμφωνοι με τον αρχικό ορισμό, αλλά και για μαθηματική ευκολία.

Δείκτες και ταυτότητες

- ο Η σύντμηση των σπινωριακών δεικτών εξαρτάται από την σειρά με την οποία εμφανίζονται και κατά σύμβαση γίνεται ως,

$$a \quad a$$

για τους μη τονούμενους δείκτες, ενώ για τους τονούμενους,

$$\dot{a} \quad \dot{a}$$

Η σειρά των δεικτών έχει οριστεί με βάση τον τρόπο που ορίσαμε τους πίνακες ε της σχέσης 1.4.5, δηλαδή σε ποιον από τους δύο πίνακες αντιστοιχούν οι άνω και σε ποιον οι κάτω δείκτες. Στην βιβλιογραφία οι ορισμοί της σύντμησης μπορεί να είναι αντεστραμμένοι, ή, ακόμα, και να υπάρχει κάποιο αρνητικό πρόσημο στους πίνακες ε .

Γενικά, πάντως, τα αποτελέσματα μένουν ίδια⁸ και αν τυχόν διαφέρουν, η διαφορά θα έγκειται σε κάποιο πρόσημο και όχι σε τάξη μεγέθους, οπότε, όσον αφορά την φαινομενολογία είμαστε εντάξει.

- ο Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω γενικό κανόνα για την σύντμηση των δεικτών, δεν υπάρχει κάποια ποσότητα που να μην μπορεί να υπολογιστεί εύκολα ύστερα από λίγη άλγεβρα. Σημειώνουμε την ακόλουθη αλληλουχία πράξεων, ενδεικτική του τρόπου εργασίας,

$$\chi\lambda = \chi_a \lambda^a = \varepsilon_{a\beta} \chi^\beta \varepsilon^{a\beta} \lambda_\beta = \chi^\beta \varepsilon_{a\beta} \varepsilon^{a\beta} \lambda_\beta = \chi^\beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{a\beta} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a\beta} \lambda_\beta =$$

[για να μπορέσουν να γίνουν οι συντμήσεις στα ε]

⁷Οπως μπορούμε να δούμε εύκολα, για να παρασταθεί μαθηματικά ένα σωματίο χρειάζονται 2 β.ε. και γι αυτό άλλωστε ένα μποζόνιο μας δίνει ένα φερμιόνιο, ενώ ένα φερμιόνιο -λογαριάζουμε το σωματίο και το αντισωματίο μαζί εφ' όσον ανήκουν στον ίδιο σπίνορα Dirac- μας δίνει δύο μποζόνια. Η έννοια της χειραλικότητας συσχετίζει τα στοιχεία ενός σπίνορα Dirac, ή αλλιώς δύο σπίνορες Weyl. Ένα bosino είναι ένας σπίνορας Weyl, άρα δεν μπορεί να συσχετιστεί με κάτι άλλο.

⁸Η σύντμηση των δεικτών στην παρούσα εργασία μπορεί να γίνεται ανάποδα απ' ότι σε μερική από την βιβλιογραφία (έχουμε $a \quad a$ αντί για $a \quad \dot{a}$), όμως έχουμε ορίσει και με διαφορετικό τρόπο τους πάνω και κάτω δείκτες των πινάκων ε .

$$\begin{aligned}
&= \chi^\beta (-\varepsilon_{\beta a}) \varepsilon^{a\beta} \lambda_\beta = \chi^\beta (-) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_{\beta a} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{a\beta} \lambda_\beta = \\
&= -\chi^\beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\beta^\beta \lambda_\beta = -\chi^\beta \lambda_\beta = -\chi^a \lambda_a
\end{aligned} \tag{1.4.9}$$

Άρα, ισχύει ότι,

$$\boxed{\chi\lambda = \lambda\chi} \tag{1.4.10}$$

ο Εύκολα προκύπτει οποιαδήποτε ταυτότητα. Για μεγαλύτερη πληρότητα, ο αναγνώστης παραπέμπεται -με ανάλογη προσοχή στις συμβάσεις- στο βιβλίο [4], καθώς και στις δημοσιεύσεις [6] και [11].

1.5 Ιδιότητες καταστάσεων

Έστω $|\Omega\rangle$ μια κατάσταση του Καθιερωμένου Προτύπου και $|\Omega'\rangle$ ο υπερσυννοδός της. Τότε, μπορούμε να δράσουμε με τους τελεστές της Υπερ-Poincaré άλγεβρας και να πάρουμε ενδιαφέρουσες ιδιότητες.

Πριν από αυτό, όμως, να σημειώσουμε ότι οι τελεστές $Q, Q^\dagger$ είναι αυτοί που μας πηγαίνουν από τα συνηθισμένα σώματα στα υπερσυμμετρικά. Επομένως, ανεξαρτήτως της κατάστασης $|\Omega\rangle$ θα ισχύει γενικά,

$$|\Omega'\rangle = \hat{A}(Q, Q^\dagger) |\Omega\rangle \tag{1.5.1}$$

Έχουμε,

- Επειδή $[P, Q] = 0 \Rightarrow [P^2, Q] = [P^2, Q^\dagger] = 0$, τότε

$$P^2 |\Omega'\rangle = \hat{A} P^2 |\Omega\rangle \Rightarrow m_{\Omega'}^2 |\Omega'\rangle = \hat{A} m_\Omega^2 |\Omega\rangle \Rightarrow m_{\Omega'}^2 |\Omega'\rangle = m_\Omega^2 |\Omega'\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m_{\Omega'} = m_\Omega} \tag{1.5.2}$$

- Οι τελεστές της Υπερσυμμετρίας Q και $Q^\dagger$ μετατίθενται με όλους τους μετασχηματισμούς βαθμίδας και συνεπώς, για όλα τα φορτία μπορούμε να διαπιστώσουμε τα ακόλουθα:

$$q_{\Omega'}^{em} = q_\Omega^{em} \tag{1.5.3}$$

$$T_{\Omega'} = T_\Omega \tag{1.5.4}$$

$$\text{Colour}_{\Omega'}^{dof} = \text{Colour}_\Omega^{dof} \tag{1.5.5}$$

- Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου -και μπορούμε να το δούμε με τη βοήθεια του τελεστή του σπιν- είναι

$$\boxed{n_B = n_F} \tag{1.5.6}$$

• Τέλος, μια σημαντική ιδιότητα της Υπερσυμμετρίας είναι ότι “κανονικοποιεί” τις καταστάσεις ώστε να έχουν μόνο **θετικές ενέργειες** [4], [11]. Αυτό μπορεί να διευκολύνει αρκετούς φαινομενολογικούς υπολογισμούς.

Ξεκινώντας από την σχέση 1.2.9 έχουμε:

$$\begin{aligned}
\{Q_a, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\} &= 2(\sigma^\mu)_{a\dot{\beta}} P_\mu \Rightarrow \\
\Rightarrow \{Q_a, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}a} &= 2(\sigma^\mu)_{a\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}a} P_\mu \Rightarrow \\
\Rightarrow \{Q_a, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}a} &= 2(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu)_a^{\dot{\beta}} P_\mu \Rightarrow \\
\Rightarrow \{Q_a, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}a} &= 2(\eta^{\mu\nu} + 2\sigma^{\mu\nu})_a^{\dot{\beta}} P_\mu \Rightarrow \\
\Rightarrow \{Q_a, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\}(\bar{\sigma}^\nu)^{\dot{\beta}a} &= 2\text{Tr}\{\eta^{\mu\nu} + 2\sigma^{\mu\nu}\}P_\mu = 2(2\eta^{\mu\nu})P_\mu = 4P^\nu
\end{aligned} \tag{1.5.7}$$

Αν θέσουμε $\nu = 0$ θα παρατηρήσουμε ότι,

$$\begin{aligned}
\{Q_a, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\}(\bar{\sigma}^0)^{\dot{\beta}a} &= 4P^0 \Rightarrow \{Q_a, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\}I^{\dot{\beta}a} = 4E \Rightarrow \\
\Rightarrow \langle \Xi | \{Q_a, Q_{\dot{\beta}}^\dagger\}I^{\dot{\beta}a} | \Xi \rangle &= 4 \langle \Xi | E | \Xi \rangle \Rightarrow \\
\Rightarrow 4 \langle \Xi | E | \Xi \rangle &= \langle \Xi | Q_1 Q_1^\dagger + Q_2 Q_2^\dagger + Q_1^\dagger Q_1 + Q_2^\dagger Q_2 | \Xi \rangle = \\
= \langle \Xi | Q_1 Q_1^* + Q_2 Q_2^* + Q_1^* Q_1 + Q_2^* Q_2 | \Xi \rangle &= \langle \Xi | Q_a Q_a^* + Q_a^* Q_a | \Xi \rangle \geq 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \boxed{\langle \Xi | E | \Xi \rangle \geq 0}
\end{aligned} \tag{1.5.8}$$

και ασφαλώς,

$$\boxed{\langle 0 | E | 0 \rangle = 0} \tag{1.5.9}$$

1.6 Οι υπερ-πολλαπλέτες

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε το σωματιδιακό περιεχόμενο της Υπερσυμμετρίας.

Μια γενική υπερσυμμετρική θεωρία μπορεί να περιέχει περισσότερα υπερ-σωμάτια απ’ όσα βρίσκονται στο Καθιερωμένο Πρότυπο. Ωστόσο, εδώ θα ασχοληθούμε μονάχα με το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (MSSM) και επομένως οι β.ε. των υπερ-συνοδών που θα κατασκευάσουμε θα είναι *ακριβώς* τόσοι όσοι και εκείνοι του ΚΠ. Άλλωστε, κάθε υπερσυμμετρικό μοντέλο *μεγαλύτερο* του MSSM, στην ουσία δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια *επέκταση*. Συνεπώς, για κάθε χρήση είναι απαραίτητο να αναλύσουμε πρώτα την ελάχιστη Υπερσυμμετρία.

★ Ας μιλήσουμε **συγκεκριμένα** για την περίπτωση των ηλεκτρονικών λεπτονίων. Στο ΚΠ έχουμε την αριστερόστροφη διπλέτα,

$$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad (1.6.1)$$

καθώς και την δεξιόστροφη απλέτα,

$$R_e = e_R \quad (1.6.2)$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε δει στα προηγούμενα, για την κατασκευή των υπερ-συνοδών, συμπεραίνουμε ότι από τα τρία λεπτόνια που έχουμε θα πάρουμε τρία μποζόνια κατανεμμένα, επίσης σε πολλαπλότητες,

$$\tilde{L}_e = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_e \\ \tilde{e} \end{pmatrix}_L \quad \tilde{R}_e = \tilde{e}_R \quad (1.6.3)$$

όπου εδώ τα μποζόνια φέρουν δείκτες χειραλικότητας, αλλά αυτό αποτελεί απλά **μέρος του συμβολισμού** προκειμένου να μας θυμίζει σε ποιο λεπτόνιο τα αντιστοιχούμε. Τα μποζόνια έχουν spin 0 και επομένως **δεν** χαρακτηρίζονται από χειραλικότητα.

Ενώνοντας τις παραπάνω πολλαπλότητες κατασκευάζουμε τις ηλεκτρονικές⁹ υπερ-πολλαπλότητες,

$$\hat{L}_e = \left\{ \begin{matrix} L_e \\ \tilde{L}_e \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \\ \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_e \\ \tilde{e} \end{pmatrix}_L \end{matrix} \right\} \quad (1.6.4)$$

και

$$\hat{R}_e^c = \{ R_e^c \quad \tilde{R}_e^c \} = \{ e_R^\dagger \quad \tilde{e}_R^* \} \quad (1.6.5)$$

Να παρατηρήσουμε εδώ ότι, απλά για θέμα διευκόλυνσης, αντί για τις δεξιόστροφες υπερ-διπλότητες επιλέγουμε να θεωρήσουμε τις συζυγείς του φορτίου. Αυτό το κάνουμε προκειμένου να έχουμε πάντα κατά νου ότι μεταχειριζόμαστε σωμάτια κι αντισωμάτια¹⁰. Άλλωστε, θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει εξ αρχής τις διπλότητες R , $\tilde{R}$ και $\hat{R}$ ως τις διπλότητες των μιγαδικών συζυγών πεδίων. ένας τέτοιος ορισμός, όμως, απλά θα πέταγε το σύμβολο c και συγχρόνως θα δημιουργούσε σύγχυση.

★ Η παραπάνω κατασκευή για τις ηλεκτρονικές υπερ-πολλαπλότητες μπορεί να εφαρμοσθεί με όμοιο συλλογισμό για όλα τα λεπτόνια του ΚΠ. Τα μποζόνια δεν κατανέμονται σε πολλαπλότητες -εκτός από τα Higgses- και κατά συνέπεια ούτε οι συνοδοί τους. Ωστόσο, στην ενοποιημένη υπερασυμμετρική θεωρία θα κατασκευαστούν υπερ-πολλαπλότητες, όπως περίπου και στην περίπτωση των δεξιόστροφων λεπτονίων.

Παρακάτω παρατίθεται πίνακας με *όλα* τα σωμάτια του MSSM:

⁹Η ονομασία της υπερ-πολλαπλότητας έχει να κάνει με το σωμάτιο από το οποίο όλα τα υπόλοιπα λαμβάνουν το όνομά τους και **δεν** υποδηλώνει τον τύπο των σωματιδίων που συμμετέχουν.

¹⁰Στο Καθιερωμένο Πρότυπο *δεν* είχε γίνει μια τέτοια επιλογή, αλλά και πάλι αυτό είναι καθαρά θέμα σύμβασης.

Πίνακας 1: Σωματίια του MSSM

Σωματίια του MSSM				
Υπερ-πολλαπλέτα	Περιεχόμενο	Σπιν	$Y = 2Q - 2T_3$	Παρατηρήσεις
$\hat{L}_l$	$\begin{pmatrix} \nu_l \\ l \end{pmatrix}_L$ $\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_l \\ \tilde{l} \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$ 0	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$l = e, \mu, \tau$
$\hat{R}_l^c$	$l_R^\dagger$ $\tilde{l}_R^*$	$\frac{1}{2}$ 0	-2 -2	$l = e, \mu, \tau$
$\hat{Q}_i$	$\begin{pmatrix} u_i \\ d'_i \end{pmatrix}_L$ $\begin{pmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{d}'_i \end{pmatrix}_L$	$\frac{1}{2}$ 0	$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$	$i = 1, 2, 3$ γενιά (π.χ. $u_3 = t$ και $d'_2 = s'$)
$\hat{U}_i^c$	$u_{R(i)}^\dagger$ $\tilde{u}_{R(i)}^*$	$\frac{1}{2}$ 0	$-\frac{4}{3}$ $-\frac{4}{3}$	$i = 1, 2, 3$ γενιά
$\hat{D}_i^c$	$d'_{R(i)}^\dagger$ $\tilde{d}'_{R(i)}^*$	$\frac{1}{2}$ 0	$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{3}$	$i = 1, 2, 3$ γενιά
$\hat{g}$	g $\tilde{g}$	1 $\frac{1}{2}$	0 0	gluon, gluino
$\hat{W}$	W^i $\tilde{W}^i$	1 $\frac{1}{2}$	0 0	$i = 1, 2, 3$
$\hat{B}$	B^0 $\tilde{B}^0$	1 $\frac{1}{2}$	0 0	ανάμειξη με το W^3
$\hat{H}_u$	$\begin{pmatrix} H_u^0 \\ H_u^- \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \tilde{H}_u^0 \\ \tilde{H}_u^- \end{pmatrix}$	0 $\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	Higgs τύπου up
$\hat{H}_d$	$\begin{pmatrix} H_d^+ \\ H_d^0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \tilde{H}_d^+ \\ \tilde{H}_d^0 \end{pmatrix}$	0 $\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Higgs τύ- που down
$\hat{G}$	G $\tilde{G}$	2 $\frac{3}{2}$	0 0	graviton, gravitino

★ Κλείνοντας την παράγραφο αυτή να ξεκαθαρίσουμε κάποιους συμβολισμούς χρήσιμους για την συνέχεια.

Τα φερμιόνια Dirac συμβολίζονται ως ψ , ενώ τα Majorana ως λ . Αντίστοιχα, τα βαθμωτά μποζόνια (σπιν 0) γράφονται ως ϕ , ενώ τα βαθμιδωτά (gauge) με σπιν 1 ως V_μ .

Οι υπερ-πολλαπλέτες που περιέχουν σωματίια με σπιν $\frac{1}{2}$ και σπιν 0 λέγονται **χειραλι-**

κές, εφ' όσον παράγονται από σωμάτια που χαρακτηρίζονται από χειραλικότητα. Βέβαια, αυτό δεν ισχύει στην περίπτωση του σωματιδίου Higgs, αφού, εκεί, από ένα βαθμωτό παίρνουμε ένα χειραλικό -και μάλιστα Majorana- σωματίδιο. Ωστόσο, όλες οι ιδιότητες είναι όμοιες με τις υπόλοιπες χειραλικές υπερ-πολλαπλές. Άλλωστε, κανείς θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι, στην πραγματικότητα, τα Higgsinos είναι τα σωμάτια του ΚΠ, ενώ τα Higgses οι υπερ-συνοδοί τους.

Οι υπερ-πολλαπλές που περιέχουν σωμάτια με σπιν 1 και σπιν $\frac{1}{2}$ λέγονται **βαθμι-δωτές ή ανυσματικές (gauge)**, εφ' όσον παράγονται από ανυσματικά σωμάτια. Σε αυτή την κατηγορία ανήκουν και τα γκλουόνια.

Η βαρυτική πολλαπλέτα δεν χαρακτηρίζεται κάπως.

Στα επόμενα, μπορεί να συναντήσουμε τους ίδιους συμβολισμούς, αλλά με **κεφαλαία** γράμματα. Αυτό σημαίνει ότι αναφερόμαστε στην αντίστοιχη *πολλαπλότητα*. Έτσι, θα έχουμε για παράδειγμα,

$$\Psi = L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \quad \textbf{και} \quad \psi = \nu_{eL} \textbf{ ή } e_L \quad (1.6.6)$$

αλλά και

$$\Psi = R_e = e_R \quad \textbf{και} \quad \psi = e_R \quad (1.6.7)$$

επίσης

$$\Phi = \tilde{L}_e = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_e \\ \tilde{e} \end{pmatrix}_L \quad \textbf{και} \quad \phi = \tilde{\nu}_{eL} \textbf{ ή } \tilde{e}_L \quad (1.6.8)$$

Αρκετές φορές η εναλλαγή μεταξύ των κεφαλαίων και των μικρών γραμμάτων είναι ισότιμη. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, αν έχουμε για παράδειγμα το γινόμενο ενός συνήθους σωματίου και του υπερ-εταίρου του, τότε εμείς θέλουμε,

$$\phi\psi = \tilde{\nu}_{eL}\nu_{eL} \quad (1.6.9)$$

αυτό όμως μας δίνει μόνο το νετρινικό (εδώ) μέρος της εξίσωσης που εξετάζουμε. Αν θέλουμε την ολοκληρωμένη εικόνα θα πρέπει να λάβουμε και το ηλεκτρονιακό μέρος.

Αντίθετα, ο συμβολισμός με τα κεφαλαία γράμματα (φυσικά με κατάλληλη τοποθέτηση των transpose των πινάκων) δίνει κατευθείαν ολόκληρο το περιεχόμενο,

$$\Phi^T \Psi = (\tilde{\nu}_e \quad \tilde{e})_L \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \tilde{\nu}_{eL}\nu_{eL} + \tilde{e}e \quad (1.6.10)$$

1.7 Τα σωματίδια Higgs

Στο Καθιερωμένο Πρότυπο το μποζόνιο Higgs εμφανίζεται σε **μία** διπλέτα η οποία με το σπάσιμο της Ηλεκτρασθενούς συμμετρίας "δίνει" μάζα σε όλα τα σωμάτια. Στην Υπερσυμμετρία η κατάσταση είναι ελαφρώς διαφορετική καθ' ότι οι διπλέτες που χρειαζόμαστε είναι **δύο**. Η ανάγκη γι' αυτό είναι κυρίως μαθηματική¹¹ και έχει να κάνει με την ολομορφία του Υπερδυναμικού.

¹¹Το μποζόνιο του Higgs είναι ένα σωμάτιο που εισήχθη αρχικά στο ΚΠ από μαθηματική ανάγκη. Είναι λοιπόν ευχάριστο(!) ότι **και** στην Υπερσυμμετρία το σωμάτιο αυτό διαμορφώνεται εξ αιτίας των Μαθηματικών. Υπάρχει και Φυσική αναγκαιότητα: αν κρατούσαμε μία διπλέτα για το σωματίδιο Higgs -όπως γίνεται στο ΚΠ- τότε θα έπρεπε να κατασκευάσουμε έναν υπερ-συνοδό φερμιόνιο με θετικό ή αρνητικό φορτίο, ενώ, όμως, όλα τα καινούρια σωμάτια εισάγονται με σκοπό να αναιρέσουν τις συνεισφορές βρόχων των ήδη υπάρχοντων, το **ένα** higgsino θα δημιουργούσε απλά επιπλέον συνεισφορά. Συνεπώς, ορίζουμε **δύο** διπλέτες με αντίθετα φορτία.

Έχουμε λοιπόν τις διπλές,

$$H_u = \begin{pmatrix} H_u^0 \\ H_u^- \end{pmatrix} \quad \textbf{και} \quad H_d = \begin{pmatrix} H_d^+ \\ H_d^0 \end{pmatrix} \quad (1.7.1)$$

Η παραπάνω γραφή μας οδηγεί να υποθέσουμε ότι στο σύστημα υπάρχουν 4 β.ε. Ωστόσο, οι συνιστώσες είναι μιγαδικές και άρα οι β.ε. γίνονται 8. Στην πραγματικότητα, όμως, όπως θα δούμε, οι βαθμοί αυτοί είναι πολύ λιγότεροι [7], [11].

* Για να το δούμε αυτό, ας σκεφτούμε πρώτα τι γίνεται στην περίπτωση του **σπάσιματος** της Ηλεκτρασθενούς συμμετρίας. Έχουμε,

$$H_u = \begin{pmatrix} \langle H_u^0 \rangle + f(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textbf{και} \quad H_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_d^0 \rangle + g(x) \end{pmatrix} \quad (1.7.2)$$

η οποία γραφή συμφωνεί με όσα είδαμε στις εξισώσεις 0.2.9 και 0.2.10.

Επομένως, **πριν το σπάσιμο** της συμμετρίας, μπορούμε να γράψουμε κατευθείαν τις διπλές 1.7.1 -με τις πεδιακές συναρτήσεις f και g να είναι γενικά οι μιγαδικές ποσότητες που φαίνονται παρακάτω- ως,

$$H_u = \begin{pmatrix} \langle H_u^0 \rangle + \frac{\xi_1 + iG^0}{\sqrt{2}} \\ H_u^- \end{pmatrix} \quad \textbf{και} \quad H_d = \begin{pmatrix} H_d^+ \\ \langle H_d^0 \rangle + \frac{\xi_2 + iA^0}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (1.7.3)$$

* Το επόμενο βήμα είναι να αναμειξουμε τους β.ε. που διαθέτουμε.

Η πρώτη ανάμειξη γίνεται μεταξύ των ουδέτερων *πραγματικών* - 2 β.ε. συνολικά- ξ_1, ξ_2 και τα προϊόντα θα τα ονομάσουμε *μικρό* (ελαφρύ) και *μεγάλο* (βαρύ) Higgs:

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (1.7.4)$$

Η δεύτερη ανάμειξη θα είναι μεταξύ των φορτισμένων *μιγαδικών* - 4 β.ε. συνολικά- H_u^-, H_d^+ . Επειδή οι συνιστώσες αυτές είναι μιγαδικές, η ανάμειξη θα γίνει *δύο φορές*: μία κανονικά και μία για τα συζυγή πεδία. Το μιγαδικό H_u^- κρύβει μέσα του δύο "αρνητικά" πεδία, ενώ το H_d^+ δύο θετικά.

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_d^+ \\ H_u^- \end{pmatrix} \quad \textbf{και} \quad \begin{pmatrix} G^- \\ H^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_d^+ \\ H_u^- \end{pmatrix}^* \quad (1.7.5)$$

* Τα πεδία G^0 και A^0 θα μπορούσαμε να τα αναμειξουμε και αυτά μεταξύ τους, αλλά αυτό δεν θα είχε κάποια ιδιαίτερη σημασία. Προτιμάμε να τα ονομάζουμε και να τα θεωρούμε ως έχουν.

* Τελικά, λοιπόν, οι 8 βαθμοί ελευθερίας, τα σωματίδια Higgs, είναι τα,

$$h^0, H^0, H^\pm, A^0, G^0, G^\pm$$

Ωστόσο, ανάμεσά τους θα πρέπει να υπάρχουν και κάποιοι Goldstone β.ε., οι οποίοι κατά το σπάσιμο της Ηλεκτρασθενούς συμμετρίας θα "φαγωθούν". Φυσικά, τα σωματίδια Goldstone δεν είναι άλλα από τα,

$$G^0, G^+, G^-$$

Επομένως, οι *αληθινοί* βαθμοί ελευθερίας, τα αληθινά Higgs σωματίδια, είναι πέντε:

$$\boxed{h^0, H^0, A^0, H^+, H^-} \quad (1.7.6)$$

1.8 Η Λαγκρανζιανή

Όλα όσα συζητήσαμε μέχρι τώρα είχαν ως σκοπό να προετοιμάσουν το έδαφος για την καλύτερη κατανόηση της υπερσυμμετρικής Λαγκρανζιανής¹². Η βασική αρχή κατασκευής είναι ίδια με αυτή του Καθιερωμένου Προτύπου.

Η Υπερσυμμετρία είναι η υπερ-θεωρία η οποία περιγράφει ολόκληρη την πραγματικότητα, ακριβώς όπως η Λαγκρανζιανή του ΚΠ περιέγραφε *κάποτε* όλες τις δυνατές αλληλεπιδράσεις. Η καινούρια Λαγκρανζιανή που ζητάμε θα πρέπει να περιέχει όρους συνηθισμένων σωματιδίων (Standard Model Particles -SMP), υπερσυμμετρικών εταίρων (YE), καθώς και τις μεταξύ τους αναμειξεις. Ιδιαίτερα, αν η Υπερσυμμετρία είναι σπασμένη¹³ -θα μιλήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο γι' αυτό- ένας επιπλέον όρος οφείλει να προστεθεί. Τελικά γράφουμε,

$$\mathcal{L}_{\text{reality}} \equiv \mathcal{L}_{SUSY} + \mathcal{L}_{\text{soft}} = \mathcal{L}_{SMP} + \mathcal{L}_{YE} + \mathcal{L}_{SMP+YE} + \mathcal{L}_{\text{soft}} \quad (1.8.1)$$

1.8.1 Η ελεύθερη χειραλική Λαγκρανζιανή

Ο πιο απλό τρόπος να οικοδομήσουμε το μοντέλο μας είναι να ξεκινήσουμε από την ελεύθερη περίπτωση και σιγά-σιγά να προσθέσουμε τις απαραίτητες αλληλεπιδράσεις.

Όσον αφορά τις χειραλικές υπερ-πολλαπλέτες η διαδικασία αυτή είναι απλή. Ωστόσο, οι ανυσματικές πολλαπλέτες δεν μπορούν να κατασκευαστούν με αυτόν *ακριβώς* τον τρόπο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα βαθμιδωτά (gauge) μποζόνια αλληλεπιδρούν με τους εαυτούς τους (self-interact) και έτσι δεν θα μπορούσαμε ποτέ να φτιάξουμε μια πραγματικά ελεύθερη ανυσματική Λαγκρανζιανή (δηλαδή να περιέχονται μόνο κινητικοί όροι)¹⁴.

Συνεπώς, χτίζουμε την χειραλική Λαγκρανζιανή και αργότερα θα επιστρέψουμε για την ανυσματική.

Στην ελεύθερη περίπτωση έχουμε **μόνο** τους κινητικούς όρους των πεδίων ψ και ϕ , έτσι ώστε οι μονάδες να είναι σωστές,

$$\mathcal{L}_{\text{free}}^{\text{chiral}} = \mathcal{L}_{\text{free}}^{\text{scalar}} + \mathcal{L}_{\text{free}}^{\text{fermion}} = -\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi + \left(\frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi + h.c. \right) \quad (1.8.2)$$

Ένας υπερσυμμετρικός μετασχηματισμός μετατρέπει ένα μποζόνιο σε φερμιόνιο και το αντίστροφο. Έτσι, έχουμε,

$$\boxed{\delta\phi = \varepsilon^a \psi_a} \quad \textbf{και} \quad \boxed{\delta\phi^* = \varepsilon_{\dot{a}}^\dagger \psi^{\dagger\dot{a}}} \quad (1.8.3)$$

Θέλουμε η Λαγκρανζιανή μας να μένει αναλλοίωτη κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή να είναι $\delta\mathcal{L} = 0$ με την ύπαρξη ίσως κάποιας ολικής παραγώγου, την οποία όμως "πετάμε". Για να γίνεται αυτό, θα πρέπει τα φερμιόνια,

$$\delta\psi_a = -i(\sigma^\mu \varepsilon^\dagger)_a \partial_\mu \phi \quad \textbf{και} \quad \delta\psi_a^\dagger = i(\varepsilon \sigma^\mu)_{\dot{a}} \partial_\mu \phi^* \quad (1.8.4)$$

¹²Το κεφάλαιο 3 της δημοσίευσης [11] είναι διαφωτιστικό επί του θέματος

¹³Αργότερα θα υποθέσουμε *ελαφρύ* (soft) σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας.

¹⁴Σύμφωνα με αυτά, θα ήταν λογικό να πούμε ότι η ελεύθερη Λαγκρανζιανή *ολόκληρης* της Υπερσυμμετρίας *είναι* η ελεύθερη χειραλική.

Η γέννηση του όρου F

Η Λαγκρανζιανή *είναι* αναλλοίωτη κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Ωστόσο, αυτό δεν είναι αρκετό. Υπάρχει μια επιπλέον συνθήκη που οφείλει να ικανοποιείται· προκειμένου να είναι ορθοί οι μετασχηματισμοί που γράψαμε στις σχέσεις 1.8.3 και 1.8.4 θα πρέπει η υπερσυμμετρική άλγεβρα να κλείνει· δηλαδή να ικανοποιούνται οι σχέσεις 1.2.7 με 1.2.9.

Για τα μποζόνια έχουμε *πράγματι*,

$$(\delta_{\varepsilon_2}\delta_{\varepsilon_1} - \delta_{\varepsilon_1}\delta_{\varepsilon_2})\phi \equiv [\delta_{\varepsilon_2}, \delta_{\varepsilon_1}]\phi = i(-\varepsilon_1\sigma^\mu\varepsilon_2^\dagger + \varepsilon_2\sigma^\mu\varepsilon_1^\dagger)\partial_\mu\phi \quad (1.8.5)$$

για τα φερμιόνια όμως είναι,

$$[\delta_{\varepsilon_2}, \delta_{\varepsilon_1}]\psi = i(-\varepsilon_1\sigma^\mu\varepsilon_2^\dagger + \varepsilon_2\sigma^\mu\varepsilon_1^\dagger)\partial_\mu\psi_a + \underbrace{i(\varepsilon_1)_a\varepsilon_2^\dagger \bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi - i(\varepsilon_2)_a\varepsilon_1^\dagger \bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi}_{=0 \text{ on-shell}} \quad (1.8.6)$$

όπου ο υπογραμμισμένος όρος είναι προβληματικός καθ' ότι **δεν** είναι σύμφωνος με την άλγεβρα που έχουμε ήδη δει. Ευτυχώς όταν ισχύουν οι εξισώσεις κίνησης ($\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi = 0$) ο όρος αυτός μηδενίζεται και όλα γίνονται όπως θα έπρεπε.

Το πρόβλημα βρίσκεται όταν είμαστε εκτός κελύφους (off-shell) και άρα ο υπογραμμισμένος όρος δεν μπορεί να μηδενιστεί.

Υπάρχει μια λύση. Το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να θεωρήσουμε ένα *βοηθητικό (ψεύτικο) μιγαδικό βαθμωτό πεδίο* F , το οποίο συμμετέχει στους μετασχηματισμούς του ψ και συγχρόνως δεν χαλάει την αναλλοιώτητα της Λαγκρανζιανής. **Αν**, λοιπόν, το φερμιονικό πεδίο ψ **δεν** μετασχηματίζεται όπως στην 1.8.4, αλλά ως,

$$\boxed{\delta\psi_a = -i(\sigma^\mu\varepsilon^\dagger)_a\partial_\mu\phi + \varepsilon_a F} \quad \textbf{και} \quad \boxed{\delta\psi_a^\dagger = i(\varepsilon\sigma^\mu)_a\partial_\mu\phi^* + \varepsilon_a^\dagger F^*} \quad (1.8.7)$$

τότε ο υπογραμμισμένος όρος θα εξαφανίζεται -ανεξαρτήτως του εάν είμαστε εντός ή εκτός του φλοιού- αρκεί το βοηθητικό πεδίο F να μετασχηματίζεται ως,

$$\boxed{\delta F = -i\varepsilon^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi} \quad \textbf{και} \quad \boxed{\delta F^* = i\partial_\mu\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\varepsilon} \quad (1.8.8)$$

* Τώρα, βέβαια, μπορεί να ρυθμίσαμε το πεδίο ψ , όμως εμφανίσαμε από το πουθενά ένα καινούριο πεδίο F . Πρέπει να δούμε ποια είναι η δικιά του Λαγκρανζιανή και να εξετάσουμε το φυσικό του περιεχόμενο.

Για αρχή, το πεδίο αυτό δεν ανταποκρίνεται σε κάποιο σωματίδιο, οπότε **δεν** του αποδίδουμε κινητικό όρο. Από τις σχέσεις 1.8.8 βλέπουμε ότι το βοηθητικό πεδίο θα έχει διαστάσεις [μάζα]² και, εφ' όσον είναι μιγαδικό, μια λογική Λαγκρανζιανή (πρέπει να έχει διάσταση μάζας 4) θα ήταν,

$$\mathcal{L}_F = F^*F \quad (1.8.9)$$

άρα το *βοηθητικό* πεδίο F εισάγεται στη θεωρία ως κάποιος όρος μάζας. Στην ουσία είναι σαν να λέμε ότι **μία** υπερ-πολλαπλέτα αποτελείται από ένα χειραλικό ψ , ένα βαθμωτό ϕ και ένα βοηθητικό F πεδίο.

Τελικά, αν θεωρήσουμε όλα τα διαφορετικά σωματίδια, έχουμε την **άθροιση**,

$$\boxed{\mathcal{L}_{free}^{chiral} = -\partial^\mu\phi^{*i}\partial_\mu\phi_i + i\psi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_i + F^{*i}F_i} \quad (1.8.10)$$

1.8.2 Η ολική χειραλική Λαγκρανζιανή

Η ολική Λαγκρανζιανή που θα γράψουμε εδώ βασίζεται στην ελεύθερη και περιέχει αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων που αναφέραμε. Βαθμιδωτές αλληλεπιδράσεις **δεν** θα υπάρχουν εφ' όσον **δεν** έχουμε θεωρήσει ακόμα τέτοια πεδία.

Μια οποιαδήποτε Λαγκρανζιανή έχει διαστάσεις [μάζα]⁴ προκειμένου η δράση να είναι αδιάστατη. Συνεπώς, ο όρος αλληλεπίδρασης θα περιλαμβάνει συνδυασμούς των πεδίων ψ , ϕ και F με σκοπό να έχουν διάσταση 4. Χρησιμοποιούμε πολυωνυμικές συναρτήσεις των πεδίων ϕ , διαστάσεων 0, 1, 2, 3 και 4, και με βάση αυτά ρυθμίζουμε τους υπόλοιπους συντελεστές.

Ο **πιο γενικός** όρος αλληλεπίδρασης που μπορούμε να γράψουμε είναι,

$$\mathcal{L}_{int}^{chiral} = \left[\kappa^{ij}(\phi_i, \phi^{*i}) F_i F_j - \frac{1}{2} W^{ij}(\phi_i, \phi^{*i}) \psi_i \psi_j + W^i(\phi_i, \phi^{*i}) F_i + \varpi(\phi_i, \phi^{*i}) \phi + c.c. \right] - U(\phi_i, \phi^{*i}) \quad (1.8.11)$$

○ Τώρα, ο όρος διάστασης 3, ϖ , δεν έχει λόγο ύπαρξης, διότι, λόγω της διάστασής του, θα περιέχει - μόνο - γινόμενα της μορφής $\phi\phi\phi$. Αυτά, μαζί με τον επιπλέον πολλαπλασιαστικό παράγοντα ϕ -ο μόνος δυνατός συνδυασμός ώστε να διατηρηθούν σωστές οι διαστάσεις- θα μας δώσει όρους $\phi\phi\phi\phi$. Τέτοιους όμως όρους έχουμε ήδη συμπεριλάβει στην συνάρτηση U .

○ Εφ' όσον η ελεύθερη Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για την $\mathcal{L}_{int}$ ξεχωριστά. Ωστόσο, η ύπαρξη των συναρτήσεων κ και U χαλάει την αναλλοιότητα όπως εύκολα μπορούμε να δούμε.

Τελικά, θα πάρουμε,

$$\mathcal{L}_{int}^{chiral} = -\frac{1}{2} W^{ij}(\phi_i, \phi^{*i}) \psi_i \psi_j + W^i(\phi_i, \phi^{*i}) F_i + c.c. \quad (1.8.12)$$

Η γέννηση του Υπερδυναμικού

Στο σημείο αυτό πρέπει να προσδιορίσουμε *ποιες* είναι οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στην σχέση 1.8.12. Γενικά, οι συναρτήσεις W^{ij} και W^i δεν συνδέονται κάπως μεταξύ τους, όμως, από την *αρχή της διαίσθησης* -όπως λέει ο S.P. Martin- γνωρίζουμε ότι αυτό δεν αληθεύει και άρα οι όμοιες ονομασίες δικαιολογούνται.

• Η Λαγκρανζιανή αλληλεπίδρασης οφείλει να είναι αναλλοίωτη κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή να ισχύει $\delta\mathcal{L}_{int} = 0$. Γράφουμε το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού, το οποίο θα μας χρειαστεί στην συνέχεια,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{int} = & -\frac{1}{2} \frac{\delta W^{ij}}{\delta \phi_k} (\varepsilon \psi_k) (\psi_i \psi_j) - \frac{1}{2} \frac{\delta W^{ij}}{\delta \phi^{*k}} (\varepsilon^\dagger \psi^{\dagger k}) (\psi_i \psi_j) + \\ & + i W^{ij} \partial_\mu \phi_j \psi_i \sigma^\mu \varepsilon^\dagger + i W^i \partial_\mu \psi_i \sigma^\mu \varepsilon^\dagger + O(F, F^*) + c.c. \end{aligned} \quad (1.8.13)$$

Κανείς μπορεί να δει -γίνεται φανερό εκ του αποτελέσματος- ότι από τους παραπάνω όρους, μόνο οι $O(F, F^*)$ ακυρώνονται μεταξύ τους. Όλοι οι υπόλοιποι παραμένουν ως έχουν και άρα, καθένας από αυτούς θα πρέπει να μηδενίζεται **ξεχωριστά**.

• Ας ξεκινήσουμε από τον ευκολότερο όρο, ο οποίος είναι η συνάρτηση W^{ij} . Έχουμε ορίσει τον όρο αυτό ως συνάρτηση **μόνο** των πεδίων ϕ , ενώ η διάσταση μάζας του πρέπει

να είναι 1. Αυτό σημαίνει ότι το πεδίο ϕ -και το συζυγές του- θα εμφανίζεται μονάχα *μία* φορά¹⁵,

$$W^{ij} = M^{ij} + y^{ijk}\phi_k + z^{ijk}\phi_k^* \quad (1.8.14)$$

Η μορφή αυτή απλοποιείται περαιτέρω χάρη στην εξίσωση 1.8.13. Το αντικείμενο W^{ij} είναι συμμετρικό στην εναλλαγή των δεικτών και άρα, με τη χρήση της ταυτότητας Fierz, προκύπτει ότι ο πρώτος όρος της 1.8.13 μηδενίζεται¹⁶. Η ίδια ταυτότητα -ή οποιαδήποτε άλλη- δεν μπορεί να εφαρμοστεί στον δεύτερο όρο και άρα, εφ' όσον αυτός δεν δύναται να μηδενιστεί κάπως αλλιώς, απαιτούμε να **μην** υπάρχει η παράγωγος. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση W^{ij} δεν θα πρέπει να εξαρτάται από το ϕ^* και επομένως,

$$W^{ij} = M^{ij} + y^{ijk}\phi_k \quad (1.8.15)$$

Η μορφή αυτή πρέπει να ισχύει αν θέλουμε η θεωρία μας να είναι υπερσυμμετρική, δηλαδή να παραμένει αναλλοίωτη κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς.

* Το αντικείμενο W^{ij} μπορεί να γραφτεί ως η δεύτερη παράγωγος του βαθμωτού (όχι τανυστικού, χωρίς δείκτες) αντικειμένου W , το οποίο *ονομάζουμε υπερδυναμικό (superpotential)*. Έχουμε,

$$W^{ij} = \frac{\delta^2}{\delta\phi_i\delta\phi_j}W \quad (1.8.16)$$

όπου,

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}M^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \quad (1.8.17)$$

Εφ' όσον χρησιμοποιούμε το υπερδυναμικό μέσω της δεύτερης παραγώγου του, θα μπορούσαμε να είχαμε προσθέσει και έναν γραμμικό όρο $L^i\phi_i$. Αυτό, όμως, δεν θα ήταν και τόσο βολικό όπως θα μας αποκαλύψει σε λίγο η συνάρτηση W^i .

• Προτού ασχοληθούμε με τη συνάρτηση W^i , πρέπει πρώτα να παρατηρήσουμε ότι ισχύει η σχέση,

$$W^{ij}\partial_\mu\phi_j = \partial_\mu\left(\frac{\delta W}{\delta\phi_i}\right) \quad (1.8.18)$$

Τώρα, από τη σχέση 1.8.13 έχουν απομείνει μονάχα ο τρίτος και ο τέταρτος όρος -μαζί με τα συζυγή τους. Όπως έχει αναφερθεί, οι όροι αυτοί δεν ακυρώνονται μεταξύ τους, αλλά ούτε μπορούν να φύγουν με κάποια άλλη σχέση. Επιπλέον, εδώ, δεν υπάρχει η παράγωγος κάποιας άγνωστης ποσότητας, ώστε να την ρυθμίσουμε ανάλογα -όπως για το W^{ij} - με σκοπό να την εξαφανίσουμε.

Η 1.8.13 θα γράφεται,

$$\delta\mathcal{L}_{int} = i\partial_\mu\left(\frac{\delta W}{\delta\phi_i}\right)\psi_i\sigma^\mu\varepsilon^\dagger + iW^i\partial_\mu\psi_i\sigma^\mu\varepsilon^\dagger + c.c. \quad (1.8.19)$$

Ο μόνος τρόπος που μας μένει για να διώξουμε τους παραπάνω όρους είναι **αν** το αποτέλεσμα 1.8.19 αποτελούσε μια **ολική παράγωγο**. Αυτό μπορεί να γίνει *μόνο* αν

¹⁵Ως συντελεστές των πεδίων ϕ **δεν** θεωρούμε "σταθερές" με αρνητική διάσταση μάζας.

¹⁶Όσα αναφέρονται για τις κανονικές ποσότητες ισχύουν, προφανώς, και για τα μιγαδικά συζυγή τους εκτός κι αν αναφέρεται διαφορετικά.

ορίσουμε,

$$W^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\delta}{\delta\phi_i} W \quad (1.8.20)$$

* Η σχέση 1.8.20 κάνει πλέον φανερούς τους λόγους για τους οποίους δεν επιθυμούμε τον όρο $L^i\phi_i$ στο υπερδυναμικό.

Έστω ότι υπήρχε, τότε θα είχαμε,

$$W^i = L^i + M^{ij}\phi_j + \frac{1}{2}y^{ijk}\phi_j\phi_k \quad (1.8.21)$$

και άρα στην Λαγκρανζιανή αλληλεπίδρασης θα εμφανιζόταν ο όρος $L^i F_i$.

Αυτό, όμως, υπονοεί την ύπαρξη μίας -ή περισσοτέρων- βαθμιδωτής απλότητας (gauge singlet), δηλαδή ενός πεδίου που *χαρακτηρίζεται* από χειραλικότητα, έχει όλα τα φορτία 0 και ταξινομείται σε απλέτα. Τα δεξιόστροφα κουάρκς είναι χειραλικά και βρίσκονται σε απλέτες, όμως φέρουν φορτίο χρώματος. Αντίθετα, τα νετρίνα είναι χειραλικά και έχουν όλα τα φορτία 0, όμως κατανέμονται σε διπλέτες. Συνεπώς, μέσα στο MSSM **δεν** υπάρχει κάποιο **gauge singlet** σωματίο. Ένας καλός υποψήφιος, αν υπάρχει, που πληροί τις παραπάνω προϋποθέσεις θα ήταν το δεξιόστροφο νετρίνο.

- Συνολικά, η Λαγκρανζιανή θα γράφεται,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{chiral} = & -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + \left(\frac{i}{2} \psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + h.c. \right) + F^{*i} F_i + \\ & + \left(-\frac{1}{2} \frac{\delta^2 W}{\delta\phi_i \delta\phi_j} \psi_i \psi_j + \frac{\delta W}{\delta\phi_i} F_i + c.c. \right) \end{aligned}$$

Η οποία ύστερα από την εφαρμογή των εξισώσεων κίνησης του F (βλ. εξίσωση 1.8.23) γίνεται,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{chiral} = & -\partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + \left(\frac{i}{2} \psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + h.c. \right) - W^i W_i^* + \\ & + \left(-\frac{1}{2} \frac{\delta^2 W}{\delta\phi_i \delta\phi_j} \psi_i \psi_j + c.c. \right) \end{aligned} \quad (1.8.22)$$

Από τις εξισώσεις κίνησης για το βοηθητικό πεδίο F παίρνουμε,

$$F_i = -W_i^* \equiv -\left(\frac{\delta W}{\delta\phi_i} \right)^* \quad \text{και} \quad F^{*i} = -W^i \equiv -\frac{\delta W}{\delta\phi_i} \quad (1.8.23)$$

Στο σημείο αυτό γίνεται φανερό ότι **το υπερδυναμικό ορίζει πλήρως τη φυσική του μοντέλου μας**. Φυσικά, το W που χρησιμοποιούμε εδώ είναι καλά προσδιορισμένο (σχέση 1.8.17) ώστε να αντικατοπτρίζει την φυσική του MSSM. Ωστόσο, αν θέλουμε να τροποποιήσουμε την θεωρία μας, δεν χρειάζεται να την ξαναφτιάξουμε απ' την αρχή, αρκεί μόνο να τροποποιήσουμε το Υπερδυναμικό, και αυτό γιατί οι σχέσεις της 1.8.23 ισχύουν ανεξαρτήτως της μορφής του W .

1.8.3 Η βαθμιδωτή (ανυσματική) Λαγκρανζιανή

Το τελευταίο κομμάτι του παζλ αποτελούν οι αλληλεπιδράσεις των ανυσματικών μποζονίων (W , B και γκλουόνια) και των υπερ-συνοδών τους. Το χτίσιμο της ανυσματικής Λαγκρανζιανής ακολουθεί μια παρόμοια διαδικασία με την περίπτωση της χειραλικής.

Όπως και πριν, η Λαγκρανζιανή πρέπει να έχει διάσταση μάζας 4, ενώ ταυτόχρονα πρέπει να συμπεριλάβουμε όρους για τα πεδία $V_\mu^{(a)}$ και $\lambda^{(a)}$. Ο δείκτης (a) , εδώ, βρίσκεται μέσα σε παρένθεση για να δηλώσει ότι **δεν** πρόκειται για σπινωριακό δείκτη, αλλά για έναν άλλο, διαφορετικό, ο οποίος τρέχει σε διαφορετικές τιμές ανάλογα με την ομάδα συμμετρίας του μποζονίου. Δηλαδή είναι,

$$V_\mu^{(a)} = g_\mu^{(a)} \quad \text{με } a = 1, \dots, 8 \quad \text{για τα γκλουόνια της } SU(3)_C \quad (1.8.24)$$

$$V_\mu^{(a)} = W_\mu^{(a)} \quad \text{με } a = 1, 2, 3 \quad \text{για το ασθενές ισοσπιν } SU(2)_L \quad (1.8.25)$$

$$V_\mu^{(a)} = B_\mu^{(a)} = B_\mu \quad \text{με } a = 1 \quad \text{για το ασθενές υπερφορτίο } U(1)_Y \quad (1.8.26)$$

και αντίστοιχα για τα gauginos.

* Ο "κινητικός" όρος των μποζονίων -ο οποίος περιέχει και τις αυτο-αλληλεπιδράσεις- έχει διάσταση μάζας 4 και άρα θα είναι ένας από τους όρους της Λαγκρανζιανής. Ο μοναδικός "**κινητικός**" όρος διάστασης μάζας 4 που μπορούμε να φτιάξουμε για τα gauginos (φερμιόνια - διάσταση 3/2) είναι αυτός που έχουμε προσθέσει στην Λαγκρανζιανή,

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^{(a)}G^{(a)\mu\nu} + \frac{i}{2}\lambda^{\dagger(a)}\bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^{(a)} \quad (1.8.27)$$

όπου,

$$G_{\mu\nu}^{(a)} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_\mu V_\nu^{(a)} - \partial_\nu V_\mu^{(a)} + \hat{g}f^{(abc)}V_\mu^{(b)}V_\nu^{(c)} \quad (1.8.28)$$

με το $\hat{g}$ να είναι είναι η σταθερά σύζευξης της εκάστοτε ομάδας και $f^{(abc)}$ το χαρακτηριστικό της εν λόγω άλγεβρας. Έτσι, **για παράδειγμα**, στην περίπτωση του ασθενούς ισοσπιν θα είναι,

$$\hat{g}f^{(abc)} = g\epsilon^{(abc)}$$

Επιπλέον, όταν στη θεωρία μας υπάρχουν ανυσματικά μποζόνια, αντί για την συνηθισμένη παράγωγο ∂_μ , οφείλουμε να χρησιμοποιούμε την **συναλλοίωτη παράγωγο**,

$$D_\mu = \partial_\mu + \hat{g}f^{(abc)}V_\mu^{(b)} \quad \text{για τα πεδία } \lambda \quad (1.8.29)$$

Η γέννηση του όρου D

Η παραπάνω Λαγκρανζιανή παραμένει αναλλοίωτη κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς. Τώρα, όπως και στην χειραλική περίπτωση, αυτό δεν αρκεί· πρέπει, επιπλέον, η άλγεβρα να κλείνει. Αυτό το τελευταίο επιτυγχάνεται μονάχα on-shell. Προκειμένου η άλγεβρα να κλείνει **και** off-shell πρέπει να προσθέσουμε ένα *βοηθητικό (ψευδύτικο) πραγματικό μποζονικό πεδίο* $D^{(a)}$, το οποίο θα συμμετέχει στους μετασχηματισμούς όπως γινόταν και με το πεδίο F [11].

Τελικά, θα είναι,

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^{(a)}G^{(a)\mu\nu} + \frac{i}{2}\lambda^{\dagger(a)}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\lambda^{(a)} + \frac{1}{2}D^{(a)}D^{(a)} \quad (1.8.30)$$

Η βαθμίδα (gauge) Wess-Zumino

Αν κανείς είναι προσεκτικός στους υπολογισμούς του θα δει ότι, στην πραγματικότητα, το πρόβλημα της μη κλειστής άλγεβρας λύνεται με **ένα** πεδίο $D^{(a)}$ *μόνο* στην περίπτωση που έχουμε **αβελιανές ομάδες** συμμετρίας για τα μποζόνια μας.

Αν οι ομάδες είναι **μη-αβελιανές** -όπως συμβαίνει στην περίπτωση μας- τότε, για να κλείσουμε την άλγεβρα of-shell, χρειαζόμαστε *περισσότερα* από ένα βοηθητικά πεδία. Άρα αυτό σημαίνει ότι το αποτέλεσμα της 1.8.30 είναι λανθασμένο; Ασφαλώς και όχι! Αυτό που κάναμε ήταν να επιλέξουμε να δουλέψουμε στην βαθμίδα Wess-Zumino.

Η βαθμίδα αυτή -όπως ακριβώς και η βαθμίδα Lorenz στον Ηλεκτρομαγνητισμό- δεν επηρεάζει καμία από τις υπάρχουσες συμμετρίες, ενώ συγχρόνως μας δίνει τη δυνατότητα να εφαρμόσουμε όποιους μετασχηματισμούς επιθυμούμε. Η χρησιμότητά της είναι να απαλείφει αυτά τα επιπλέον βοηθητικά πεδία που αναφέραμε.

Όπως κάθε βαθμίδα, έτσι και η Wess-Zumino, αυτό που κάνει είναι να επιλέγει το "βασικό επίπεδο", τον "τρόπο", δηλαδή, με τον οποίο "βαθμονομούνται" όλες οι εξισώσεις μας.

1.8.4 Η ολική Λαγκρανζιανή

Συνολικά, η υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή δεν θα είναι παρά η πρόσθεση του χειραλικού και του ανυσματικού μέρους... ή μήπως όχι; Η διαδικασία της ένωσης είναι ελαφρώς πιο περίπλοκη από μια απλή πρόσθεση. Ας δούμε πως γίνεται:

- Στην θεωρία μας συμμετέχουν βαθμιδωτά πεδία, οπότε πρέπει **όλες** οι παράγωγοι ∂_μ να αντικατασταθούν από τη συναλλοίωτη παράγωγο D_μ . Αυτό συνεπάγεται την *μετατροπή* της 1.8.22 ως,

$$\mathcal{L}_{chiral} = -D^\mu\phi^{*i}D_\mu\phi_i + i\psi^{\dagger i}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi_i + \dots \quad (1.8.31)$$

- Η μεταπήδηση στις συναλλοίωτες παραγώγους μας δίνει αυτομάτως -άλλωστε αυτός είναι ένας από τους λόγους που εισάγονται σε μια θεωρία- όλες τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων ϕ , ψ με τα βαθμιδωτά μποζόνια διαδότες V_μ .

Αυτό που *δεν* έχουμε είναι οι αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων ϕ , ψ με τα gauginos λ και τα D . Οι αλληλεπιδράσεις των F και D **δεν** μας ενδιαφέρουν καθ' ότι τα πεδία αυτά είναι απλά *βοηθητικά*.

Όλοι οι διαφορετικοί δυνατοί συνδυασμοί διάστασης μάζας 4 είναι οι ακόλουθοι [11],

$$(\phi^*T^{(a)}\psi)\lambda^{(a)} \quad \lambda^{\dagger(a)}(\psi^\dagger T^{(a)}\phi) \quad (\phi^*T^{(a)}\phi)D^{(a)}$$

όπου $T^{(a)}$ είναι ο χαρακτηριστικός πίνακας της άλγεβρας της ομάδας συμμετρίας του αντίστοιχου βαθμιδωτού μποζονίου. Συνδέεται με το χαρακτηριστικό $f^{(abc)}$ ως,

$$[T^{(a)}, T^{(b)}] = if^{(abc)}T^{(c)} \quad (1.8.32)$$

• Η συναλλοίωτη παράγωγος, **όταν δρα** στα πεδία ψ και ϕ ορίζεται *ελαφρώς* διαφορετικά απ' ότι προηγουμένως,

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu + i\hat{g}T^{(a)}V_\mu^{(a)}} \quad \text{για τα πεδία } \psi, \phi \quad (1.8.33)$$

Έτσι, **για παράδειγμα**, στην περίπτωση του ασθενούς ισοσπίν θα είναι,

$$i\hat{g}T^{(a)} = ig\frac{\vec{\tau}}{2}$$

• Κάνοντας τις πράξεις, προκειμένου η ολική Λαγκρανζιανή να είναι αναλλοίωτη κάτω από υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, και τροποποιώντας τον μετασχηματισμό του F ως,

$$\delta F_i = -i\varepsilon^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i + \sqrt{2}\hat{g}(T^{(a)}\phi)_i \varepsilon^\dagger \lambda^{\dagger(a)} \quad (1.8.34)$$

βρίσκουμε τους συντελεστές των προαναφερθέντων αλληλεπιδράσεων,

$$\boxed{i\sqrt{2}\hat{g}(\phi^* T^{(a)}\psi)\lambda^{(a)} - i\sqrt{2}\hat{g}\lambda^{\dagger(a)}(\psi^\dagger T^{(a)}\phi) + \hat{g}(\phi^* T^{(a)}\phi)D^{(a)}} \quad (1.8.35)$$

Έτσι, η ολική υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή θα είναι,

$$\mathcal{L}_{SUSY} = \mathcal{L}_{chiral} + \mathcal{L}_{gauge} + i\sqrt{2}\hat{g}(\phi^* T^{(a)}\psi)\lambda^{(a)} - i\sqrt{2}\hat{g}\lambda^{\dagger(a)}(\psi^\dagger T^{(a)}\phi) + \hat{g}(\phi^* T^{(a)}\phi)D^{(a)} \quad (1.8.36)$$

Η εξίσωση κίνησης για το βοηθητικό πεδίο D δίνει,

$$\boxed{D^{(a)} = -\hat{g}\phi^* T^{(a)}\phi} \quad (1.8.37)$$

• Οι διαδότες Feynman όλων των πεδίων του μοντέλου μας συμβολίζονται όπως παρακάτω,



Σχήμα 1: Διαδότες Feynman των σωματιδίων του MSSM

• Ήρθε η ώρα να γράψουμε την υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή στην πλήρη της δόξα. Με αυτό εννοείται ότι θα παραθέσουμε αναλυτικά *όλους* τους όρους που συμμετέχουν, χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς του υπερπεδίου W , ή των F και D όρων. Αυτή η γραφή δεν είναι πάντα η πιο πρακτική -καθώς το να ξέρουμε ποιες είναι οι εξαρτήσεις από το W είναι μια εξαιρετικά σημαντική πληροφορία- ωστόσο μας δίνει μια εικόνα για το τι είδους όροι επιτρέπεται να υπάρχουν, και αυτό, με τη σειρά του, καθορίζει τους κανόνες των διαγραμμάτων Feynman. Η πρακτική μορφή της Λαγκρανζιανής θα δοθεί στο κεφάλαιο *Υπερσυμμετρία II*.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SUSY} = & -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^{(a)}G^{(a)\mu\nu} - \partial^\mu \phi^{*i} \partial_\mu \phi_i + \left(\frac{i}{2} \psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_i + h.c. \right) + \frac{i}{2} \lambda^{\dagger(a)} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda^{(a)} + \\
& + \frac{i}{2} \hat{g} \lambda^{\dagger(a)} \bar{\sigma}^\mu f^{(abc)} V_\mu^{(b)} \lambda^{(a)} - i \hat{g} (\partial^\mu \phi^{*i}) V_\mu^{(a)} (T^{(a)} \phi)_i + i \hat{g} V^{\mu(a)} (\phi^* T^{(a)})^i \partial_\mu \phi_i + \\
& + \hat{g}^2 V^{\mu(a)} (\phi^* T^{(a)})^i V_\mu^{(a)} (T^{(a)} \phi)_i - \left(\frac{1}{2} \hat{g} \psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu V_\mu^{(a)} (T^{(a)} \partial_\mu \psi)_i + h.c. \right) + \\
& - \frac{1}{2} M^{ij} \psi_i \psi_j - \frac{1}{2} M_{ij}^* \psi_i^\dagger \psi_j^\dagger - \frac{1}{2} y^{ijk} \phi_i \psi_j \psi_k - \frac{1}{2} y_{ijk}^* \phi^* i \psi^{\dagger j} \psi^{\dagger k} + \\
& - M_{ik}^* M^{kj} \phi^* i \phi_j - \frac{1}{2} M^{in} y_{jkn}^* \phi_i \phi^* j \phi^* k - \frac{1}{2} M_{in}^* y^{jkn} \phi^* i \phi_j \phi_k - \frac{1}{4} y^{ijn} y_{klm}^* \phi_i \phi_j \phi^* k \phi^* l + \\
& + i\sqrt{2} \hat{g} (\phi^* T^{(a)} \psi) \lambda^{(a)} - i\sqrt{2} \hat{g} \lambda^{\dagger(a)} (\psi^\dagger T^{(a)} \phi) + \\
& - \frac{1}{2} \sum_a \hat{g}^2 (\phi^* T^{(a)} \phi)^2
\end{aligned}
\tag{1.8.38}$$

• Μια τελευταία παρατήρηση· κατά την κατασκευή της Λαγκρανζιανής -σε όλη την έκταση της παραγράφου- προσπαθήσαμε να κατασκευάσουμε όρους που να έχουν διάσταση μάζας 4. Η κατασκευή αυτή έγινε χρησιμοποιώντας πάντα συντελεστές θετικής διάστασης. Ωστόσο αυτό δεν είναι απόλυτο· θα μπορούσαμε να προσθέσουμε όρους $\sim \frac{1}{m}$. Αυτό, τώρα, μπορεί να οδηγήσει σε καταστάσεις που είναι μη-επανακανονικοποιήσιμες, οπότε επιλέγουμε να μην έχουμε τέτοιους όρους. Άλλωστε, για μεγάλες μάζες -όπως συμβαίνει με τους υπερ-συνοδούς- οι όροι με συντελεστές αρνητικής διάστασης μάζας είναι κατά πολύ μικρότεροι από αυτούς με θετική. Συνεπώς, στις πρακτικές εφαρμογές, οι όροι αυτοί, αν υπάρχουν, μπορούν πολύ εύκολα να αγνοηθούν. Πάντως, σε ορισμένες εφαρμογές, όπως η διάσπαση του πρωτονίου, τέτοιοι όροι μπορεί να παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεωρία μας.

2 Υπερπεδία (Superfields)

Αρκετές από τις σημαντικές φυσικές θεωρίες που μεταχειριζόμαστε χαρακτηρίζονται από τον δικό τους ιδιαίτερο μαθηματικό φορμαλισμό. Έτσι, για παράδειγμα, η Σχετικότητα έχει τη Διαφορική Γεωμετρία και η Κβαντομηχανική τον φορμαλισμό Dirac. Η Υπερσυμμετρία, αν και δεν αποτελεί έναν καινούριο τομέα της Φυσικής, έχει κι αυτή τον δικό της φορμαλισμό· τουτέστιν τα **Υπερπεδία**. Ο φορμαλισμός -του οποίου τα βασικά σημεία θα δοθούν παρακάτω- αποτελεί έναν σταθερό, έγκυρο και συνεκτικό τρόπο προκειμένου να οικοδομήσουμε την θεωρία μας και να φτάσουμε με ασφάλεια στα αποτελέσματα που μας ενδιαφέρουν [11].

2.1 Μεταβλητές Grassmann

Ο φορμαλισμός θεμελιώνεται πάνω στην ιδέα των μεταβλητών Grassmann (ή αλλιώς αριθμών Grassmann). Προκειμένου να εξετάσουμε καλύτερα το θέμα, εισάγουμε την έννοια του "επιπέδου". Έτσι, μια μεταβλητή πρώτου επιπέδου θα είναι ένα "άνυσμα" με **μία** συνιστώσα, μια μεταβλητή δευτέρου επιπέδου ένα "άνυσμα" με **δύο** συνιστώσες κ.ο.κ. Οι αριθμοί αυτοί αντιμετωπίζονται μεταξύ τους.

Οι μεταβλητές Grassmann **πρώτου** επιπέδου ορίζονται μέσω των ακόλουθων ιδιοτήτων [11]:

$$\eta^2 = 0 \quad (2.1.1)$$

$$\int d\eta = 0 \quad \& \quad \int d\eta \eta = 1 \quad (2.1.2)$$

$$\delta(\eta - \eta') = \eta - \eta' \quad (2.1.3)$$

Οι ολοκληρώσεις με τις συναρτήσεις δέλτα γίνονται όπως και στην περίπτωση των απλών αριθμών. Οι παραγωγίσεις ακολουθούν τους κανόνες παραγώγισης των συναρτησοειδών.

Τώρα, η Υπερσυμμετρία μεταχειρίζεται σπίνορες οι οποίοι είναι ανύσματα δύο συνιστωσών. Συνεπώς είναι λογικό να θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε μεταβλητές Grassmann **δευτέρου** επιπέδου. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, αυτές θα έχουν τις ιδιότητες:

$$\theta^3 = 0 \quad (2.1.4)$$

$$\int d^2\theta = \int d^2\theta \theta = 0 \quad \& \quad \int d^2\theta \theta\theta = 1 \quad (2.1.5)$$

$$\delta^{(2)}(\theta - \theta') = (\theta - \theta')(\theta - \theta') \quad (2.1.6)$$

2.2 Υπερχώρος (Superspace)

Η επόμενη σημαντική έννοια στην οποία θα αναφερθούμε είναι ο Υπερχώρος. Στην ουσία, ο Υπερχώρος είναι η *μαθηματική* επέκταση του συνηθισμένου τετραδιάστατου χώρου· είναι δηλαδή ο χώρος που εκτός από τις χωρικές συντεταγμένες περιέχει και όσες συντεταγμένες τύπου Grassmann ορίζουμε κάθε φορά.

Ο Υπερχώρος είναι ο μαθηματικός τόπος όπου ζουν τα Υπερπεδία, τα οποία με τη σειρά τους περιγράφουν την φυσική θεωρία μας. Ο όρος Υπερχώρος -όπως επίσης και το

Υπερπεδίο- προέκυψε επειδή ο συγκεκριμένος φορμαλισμός χρησιμοποιείται για την περιγραφή της Υπερσυμμετρίας. Στην πραγματικότητα τα μαθηματικά που παρουσιάζονται εδώ είναι πολύ πιο γενικά.

• Στην Υπερσυμμετρία θέλουμε να περιγράψουμε τον χώρο (μποζονικές συνιστώσες), ενώ παράλληλα έχουμε και δύο γεννήτορες της συμμετρίας (Q και $Q^\dagger$), έναν για κάθε είδος σπίνορα. Εισάγουμε, λοιπόν, δύο μεταβλητές Grassmann δευτέρου επιπέδου και έτσι παίρνουμε το **σετ των συντεταγμένων**,¹⁷

$$x^\mu \quad \theta^a \quad \theta_a^\dagger \quad (2.2.1)$$

Τότε, μια **γενική "στροφή"** σε αυτόν τον χώρο θα έχει τη μορφή [4],

$$G(x^\mu, \theta, \theta^\dagger) = e^{i(\theta Q + \theta^\dagger Q^\dagger - x^\mu P_\mu)} \quad (2.2.2)$$

Χρησιμοποιώντας την φόρμουλα των Baker-Campbell-Hausdorff έχουμε,

$$G(x^\mu, \theta, \theta^\dagger) \cdot G(a^\mu, \xi, \xi^\dagger) = G(x^\mu + a^\mu - i\xi\sigma^\mu\theta^\dagger + i\theta\sigma^\mu\xi^\dagger, \theta + \xi, \theta^\dagger + \xi^\dagger) \quad (2.2.3)$$

και άρα συμπεραίνουμε ότι ο γενικός μετασχηματισμός των μεταβλητών δίνεται από:

$$(x^\mu, \theta, \theta^\dagger) \longrightarrow (x^\mu + a^\mu - i\xi\sigma^\mu\theta^\dagger + i\theta\sigma^\mu\xi^\dagger, \theta + \xi, \theta^\dagger + \xi^\dagger) \quad (2.2.4)$$

Τώρα μπορούμε να ορίζουμε τους γεννήτορες των επιμέρους συμμετριών,

$$P_\mu = i\partial_\mu \quad (2.2.5)$$

$$Q_a = -i\frac{\partial}{\partial\theta^a} - i\sigma_{a\dot{a}}^\mu\theta^{\dagger\dot{a}}\partial_\mu \quad (2.2.6)$$

$$Q_{\dot{a}}^\dagger = -i\frac{\partial}{\partial\theta^{\dagger\dot{a}}} + i\theta^{\dot{a}}\sigma_{a\dot{a}}^\mu\partial_\mu \quad (2.2.7)$$

• Στον Υπερχώρο που έχουμε ορίσει το πιο γενικό πεδίο που μπορούμε να γράψουμε θα αποτελείται από το *πολύ* τετραγωνικούς όρους της εκάστοτε μεταβλητής Grassmann δευτέρου επιπέδου. Επιπλέον, η μοναδική ανάμειξη δύο τέτοιων μεταβλητών μπορεί να εμφανιστεί στην έκφραση ενός διανύσματος. Τέλος, οι όροι του πεδίου είναι βαθμωτά, οπότε και οι συντελεστές οφείλουν να φέρουν τους ανάλογους δείκτες. Όλοι οι συντελεστές είναι, προφανώς, συναρτήσεις των χωρικών συντεταγμένων x . Γράφουμε [4], [11],

$$S(x, \theta, \theta^\dagger) = a(x) + \theta\xi(x) + \theta^\dagger\chi^\dagger(x) + \theta\theta b(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger c(x) + \\ + \theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\theta u_\mu(x) + \theta^\dagger\theta^\dagger\theta\eta(x) + \theta\theta\theta^\dagger\zeta^\dagger(x) + \theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger d(x) \quad (2.2.8)$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι έχουμε 8 μιγαδικούς μποζονικούς βαθμούς ελευθερίας,

$$a, b, c, d, u_\mu$$

και 8 (4 επί δύο συνιστώσες ο καθένας) φερμιονικούς,

$$\xi, \chi^\dagger, \eta, \zeta^\dagger$$

Το κάθε Υπερπεδίο αντιστοιχεί σε μια υπερ-μουλτιπλέτα· περιγράφει ένα πεδίο του Καθιερωμένου Προτύπου, καθώς και ένα πεδίο υπερ-συνοδού.

Μπορούμε εύκολα να βρούμε πως μετασχηματίζεται καθένας από τους συντελεστές εφαρμόζοντας την φόρμουλα των Baker-Campbell-Hausdorff.

¹⁷Το dagger στην δεύτερη μεταβλητή θ **δεν** υπονοεί μιγαδική συζυγία, παρά μόνο είναι ένας συμβολισμός για να δηλώσει ότι αναφέρεται σε δεξιόστροφα φερμιόνια.

2.3 Φτιάχνοντας την Λαγκρανζιανή

Προτού ξεκινήσουμε να κατασκευάζουμε την Λαγκρανζιανή θα πρέπει, όπως σε κάθε θεωρία, να ορίσουμε την συναλλοίωτη παράγωγο. Η ανάγκη γι' αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η $\partial/\partial\theta^a$ **δεν** είναι υπερσυμμετρικά αναλλοίωτη.

Συνεπώς ορίζουμε,

$$D^a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial\theta^a} - i(\sigma^\mu\theta^\dagger)_a\partial_\mu \quad \text{και} \quad D^{\dagger\dot{a}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial\theta^{\dagger}_{\dot{a}}} - i(\bar{\sigma}^\mu\theta)^{\dot{a}}\partial_\mu \quad (2.3.1)$$

Στην συνέχεια θα δούμε τα διαφορετικά ήδη Υπερπεδίων (Χειραλικό, Ανυσματικό) τα οποία απαρτίζουν το *γενικότερο* Υπερπεδίο, το οποίο περιγράφει και την αντίστοιχη υπερ-μουλτιπλέτα. Κάθε μία από τις επόμενες κατηγορίες **είναι** κάποιο Υπερπεδίο, όσον αφορά τη μαθηματική έννοια του θέματος, στο φυσικό, υπερσυμμετρικό πλαίσιο, όμως, **δεν** μπορεί να νοηθεί αυτόνομα, χωρίς τη συμμετοχή και της άλλης κατηγορίας.

2.3.1 Χειραλικό Υπερπεδίο H

Τα χειραλικά πεδία είναι αυτά που αναφέρονται σε σπίνορες¹⁸ με δείκτες $a = 1, 2$ και $\dot{a} = 1, 2$ και για τον λόγο αυτό είναι λογικό να υποθέσουμε ότι το βασικό τους χαρακτηριστικό θα είναι ο τρόπος που μεταβάλλονται σε σχέση με τις συντεταγμένες $\theta, \theta^\dagger$. Συγκεκριμένα, τα πεδία αυτά οφείλουν να παραμένουν σταθερά όσον αφορά αυτές τις μεταβλητές.

Έτσι, για ένα **αριστερά χειραλικό** (αριστερόστροφο) πεδίο θα είναι,

$$D_a^\dagger H = 0 \quad (2.3.2)$$

ενώ για ένα **δεξιά χειραλικό** (αντι-χειραλικό ή αλλιώς δεξιόστροφο) πεδίο,

$$D_a H^* = 0 \quad (2.3.3)$$

ο Οι **λύσεις** των παραπάνω εξισώσεων -ή διαφορετικά παραγωγίζουμε κατευθείαν το γενικό πεδίο S - είναι [4], [11],

$$H(x, \theta, \theta^\dagger) = \phi + i\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu\phi + \frac{1}{4}\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\phi + \sqrt{2}\theta\psi - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi + \theta\theta F \quad (2.3.4)$$

και

$$H^*(x, \theta, \theta^\dagger) = \phi^* - i\theta^\dagger\bar{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu\phi^* + \frac{1}{4}\theta\theta^\dagger\theta^\dagger\partial_\mu\partial^\mu\phi^* + \sqrt{2}\theta^\dagger\psi^\dagger - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta^\dagger\theta^\dagger\theta\sigma^\mu\partial_\mu\psi^\dagger + \theta^\dagger\theta^\dagger F^* \quad (2.3.5)$$

όπου, προκειμένου να ωραιοποιήσουμε την μορφή του Υπερπεδίου, έχουμε κάνει τους βολικούς ορισμούς [11],

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \phi \quad \xi_a \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2}\psi_a \quad b \stackrel{\text{def}}{=} F \quad (2.3.6)$$

$$\zeta^{\dagger\dot{a}} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{i}{\sqrt{2}}(\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi)^{\dot{a}} \quad d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4}\partial_\mu\partial^\mu\phi \quad u_\mu \stackrel{\text{def}}{=} i\partial_\mu\phi \quad (2.3.7)$$

¹⁸Οχι μόνο. Αυτό που εννοούμε εδώ είναι ότι τα πεδία αυτά είναι εκείνα που λαμβάνονται *αν* ενδιαφερόμαστε μόνο για τους σπίνορες. Εξ ου, λοιπόν, και ο κατάλληλος περιορισμός.

- ο Αν τώρα αλλάξουμε τις συνήθεις συντεταγμένες ως,

$$y^\mu \stackrel{\text{def}}{=} x^\mu + i\theta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \theta \quad (2.3.8)$$

θα πάρουμε τις, διαφωτιστικά γραμμένες¹⁹, λύσεις,

$$H(y, \theta) = \phi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y) \quad (2.3.9)$$

$$H^*(y^*, \theta^\dagger) = \phi^*(y^*) + \sqrt{2}\theta^\dagger \psi^\dagger(y^*) + \theta^\dagger \theta^\dagger F^*(y^*) \quad (2.3.10)$$

ο Τέλος, φαίνεται ότι τα Υπερπεδία H μπορούν να δοθούν με άμεσο τρόπο από τις σχέσεις,

$$H = D^{\dagger\dot{a}} D_a^\dagger S \quad \text{και} \quad H^* = D_a D^a S^* \quad (2.3.11)$$

2.3.2 Ανυσματικό Υπερπεδίο Δ

Τα λεγόμενα ανυσματικά Υπερπεδία δίνονται από την συνθήκη,

$$\Delta = \Delta^* \quad (2.3.12)$$

η οποία, αν εξετάσουμε το γενικό Υπερπεδίο S όρο προς όρο, μας δίνει το πεδίο,

$$\begin{aligned} \Delta = & a + \theta\xi + \theta^\dagger \xi^\dagger + \theta\theta b + \theta^\dagger \theta^\dagger b^* + \theta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \theta A_\mu + \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \left(\lambda - \frac{i}{2} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi^\dagger \right) + \\ & + \theta\theta \theta^\dagger \left(\lambda^\dagger - \frac{i}{2} \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi \right) + \theta\theta \theta^\dagger \theta^\dagger \left(\frac{1}{2} D + \frac{1}{4} \partial_\mu \partial^\mu a \right) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

όπου, πάλι, προκειμένου να ωραιοποιήσουμε την μορφή του Υπερπεδίου, έχουμε κάνει τους βολικούς ορισμούς,

$$\eta_a \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_a - \frac{i}{2} (\sigma^\mu \partial_\mu \xi^\dagger)_a \quad d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} D + \frac{1}{4} \partial_\mu \partial^\mu a \quad (2.3.14)$$

$$u_\mu \stackrel{\text{def}}{=} A_\mu \quad (2.3.15)$$

2.3.3 Η βαθμίδα Wess-Zumino

Υπάρχει η δυνατότητα να επιλέξουμε μια βαθμίδα [5], [11] η οποία **δεν** αλλοιώνει ουσιαστικά τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί, ακριβώς όπως η Lorenz στον Ηλεκτρομαγνητισμό, και που απλοποιεί σημαντικά την έκφραση για το ανυσματικό Υπερπεδίο.

Μετά από την επιλογή αυτή έχουμε,

$$\Delta_{WZ} = \theta^\dagger \bar{\sigma}^\mu \theta A_\mu + \theta^\dagger \theta^\dagger \theta \lambda + \theta\theta \theta^\dagger \lambda^\dagger + \frac{1}{2} \theta\theta \theta^\dagger \theta^\dagger D \quad (2.3.16)$$

¹⁹Ας προσέξουμε εδώ ότι, τα Υπερπεδία και οι συντελεστές έχουν όλοι για ορίσματα τις συντεταγμένες x . Αντίθετα, προφανώς εξ αιτίας του ιδιόμορφου ορισμού τους, όταν οι συντεταγμένες y γίνονται ορίσματα αλλάζουν αναλόγως του πεδίου. Έτσι το H δέχεται όρισμα y , ενώ το H^* όρισμα y^* .

2.3.4 Η Δράση A

Το επόμενο βήμα είναι να καταφέρουμε να κατασκευάσουμε την δράση (action) A που αντιστοιχεί στη θεωρία μας [11].

- Η βασική ιδιότητα μια οποιασδήποτε δράσης είναι,

$$\delta A = 0 \quad (2.3.17)$$

Τώρα, η δράση θα είναι το ολοκλήρωμα σε όλο τον 4-χώρο *κάποιου* συνδυασμού Υπερπεδίων. Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση ικανοποιείται από ένα γενικό πεδίο S όταν αυτό ολοκληρωθεί κατάλληλα. Συνεπώς, γράφουμε,

$$A = \int d^4x \int d^2\theta \int d^2\theta^\dagger S(x, \theta, \theta^\dagger) \quad (2.3.18)$$

και άρα

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta \int d^2\theta^\dagger S(x, \theta, \theta^\dagger) \quad (2.3.19)$$

- Επιπλέον, η δράση είναι μια πραγματική ποσότητα,

$$A = A^\dagger \quad (2.3.20)$$

και επομένως, το πεδίο S που θα επιλέξουμε πρέπει να είναι πραγματικό.

◦ Ένας καλός υποψήφιος είναι το **ανυσματικό πεδίο**, το οποίο *είναι* πραγματικό. Η ολοκλήρωση ενός τέτοιου πεδίου Δ ονομάζεται D-όρος,

$$[\Delta]_D \stackrel{\text{def}}{=} \int d^2\theta \int d^2\theta^\dagger \Delta = \frac{1}{2}D + \frac{1}{4}\partial_\mu \partial^\mu a \quad (2.3.21)$$

◦ Η περιγραφή της Υπερσυμμετρίας, ωστόσο, δεν μπορεί να είναι πλήρης αν δεν συμπεριλάβουμε και κάποιο **χειραλικό πεδίο**. Συνεπώς, χρησιμοποιούμε τον συνδυασμό

$$H + c.c.$$

Υπάρχει, όμως, ένα σημαντικό εμπόδιο στην κατασκευή του ολοκληρώματος. Η ολοκλήρωση δίνει την -άχρηστη- ολική παράγωγο,

$$[H]_D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4}\partial_\mu \partial^\mu \phi \quad (2.3.22)$$

Μια λύση σε αυτό το πρόβλημα θα ήταν να ολοκληρώσουμε μόνο σε **μία** μεταβλητή. Όμως, για $d^2\theta^\dagger$ η ποσότητα δίνει επίσης μια ολική παράγωγο (ή μηδενίζεται στην y μεταβλητή) και αντίστοιχα με το $d^2\theta$ για το H^* . Η μόνη επιλογή είναι να "ολοκληρώσουμε ως προς την ίδια συζυγία", δηλαδή το H με $d^2\theta$ και το H^* με το $d^2\theta^\dagger$.

Έτσι παίρνουμε τον λεγόμενο F-όρο,

$$[H]_F \stackrel{\text{def}}{=} \int d^2\theta H \Big|_{\theta^\dagger=0} = \int d^2\theta \int d^2\theta^\dagger H \delta^{(2)}(\theta^\dagger) = F \quad (2.3.23)$$

- Τελικά, μπορούμε να γράψουμε:

$$\mathcal{L} = [\Delta]_D + ([H]_F + c.c.) \quad (2.3.24)$$

Η Λαγκρανζιανή που γράψαμε είναι μια αφηρημένη κατασκευή που μας δείχνει πως πρέπει να προχωρήσουμε για την κατασκευή της. Είναι ενδεικτική και **όχι** αυτή που χρησιμοποιούμε.

2.3.5 Η Δράση A στη βαθμίδα Wess-Zumino

Η Λαγκρανζιανή θα αποτελείται από D και F-όρους, όπως και η εξίσωση 2.3.24.

- Έχουμε δει ότι ο D-όρος του πεδίου H δεν είναι επιθυμητός. Κατασκευάζουμε, λοιπόν, D-όρους με τη βοήθεια περισσοτέρων πεδίων H . Η απλούστερη -αν και μακροσκελής- περίπτωση είναι το γινόμενο H^*H .

Για τον F-όρο δεν χρειάζεται να περιοριστούμε στην σχέση 2.3.23, αλλά μπορούμε να πάρουμε μια οποιαδήποτε συνάρτηση $W(H)^{20}$.

Φυσικά, η θεωρία μας δεν θα έχει μόνο ένα σωματίδιο, έτσι λοιπόν γράφουμε,

$$\mathcal{L}_{WZ} = [H^{*i}H_i]_D + \{[W(H)]_F + c.c.\} \quad (2.3.25)$$

Το δυναμικό W , προκειμένου η θεωρία μας να είναι επανακανονικοποιήσιμη, μπορεί να έχει τη γενική μορφή,

$$W(H) = \frac{1}{2}M^{ij}H_iH_j + \frac{1}{6}y^{ijk}H_iH_jH_k \quad (2.3.26)$$

- Θα κατασκευάσουμε τώρα όρους με τη βοήθεια των ανυσματικών πεδίων. Τα πεδία Δ εισάγονται φυσικά στις εκφράσεις αν απαιτήσουμε η 2.3.25 να είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας (το οποίο μάλιστα συμφωνεί και με την βαθμίδα Wess-Zumino). Αυτό γίνεται αν γράψουμε,

$$\mathcal{L}_{WZ} = [H^{*i}e^\Delta H_i]_D + \{[W(H)]_F + c.c.\} \quad (2.3.27)$$

όπου βέβαια το πεδίο Δ είναι τέτοιο ώστε να μπορεί να γραφτεί σαν "γεννήτορας".

- Τώρα που έχουμε τα στοιχεία που προκύπτουν αυθόρμητα, είναι ώρα να κατευθύνουμε το μοντέλο εκεί που θέλουμε. Για αρχή πρέπει να τοποθετήσουμε τους βαθμωτούς (gauge) κινητικούς όρους: οι χειραλικοί κινητικοί όροι έχουν ήδη θεωρηθεί στην 2.3.27.

Ορίζοντας,

$$\mathcal{W}_a \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{4}D^\dagger D^\dagger D_a \Delta \quad \mathcal{W}_a^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{4}D D D_a^\dagger \Delta \quad (2.3.28)$$

παίρνουμε τον όρο που θα μας χρειαστεί σε λίγο,

$$\mathcal{W}^a \mathcal{W}_a \quad (2.3.29)$$

- Τέλος, μπορούμε να προσθέσουμε έναν όρο που σπάει την Υπερσυμμετρία. Υπάρχουν αρκετοί τέτοιοι όροι, αλλά συνήθως χρησιμοποιείται ο όρος των Fayet-Ηλιόπουλου,

$$\mathcal{L}_{FI} = -2k[\Delta]_D \quad (2.3.30)$$

- Συνολικά, η Λαγκρανζιανή θα είναι,

$$\mathcal{L} = [H^{*i}e^\Delta H_i]_D + \{[W(H)]_F + c.c.\} + \frac{1}{4}([\mathcal{W}^a \mathcal{W}_a]_F + c.c.) - 2k[\Delta]_D \quad (2.3.31)$$

²⁰Όπως ίσως έχει γίνει φανερό, οι D-όροι είναι οι συντελεστές του συνδυασμού $\theta\theta\theta^\dagger\theta^\dagger$, ενώ οι F-όροι είναι οι συντελεστές του συνδυασμού $\theta\theta$, ή $\theta^\dagger\theta^\dagger$ αντίστοιχα.

3 Υπερσυμμετρία II - Το MSSM

Στο κεφάλαιο *Υπερσυμμετρία I* είδαμε πως κατασκευάζεται ένα υπερσυμμετρικό μοντέλο. Η κατασκευή εκείνη βασιζόταν στην Υπερσυμμετρία με το **ελάχιστο** πεδιακό περιεχόμενο. Ωστόσο, τα προηγούμενα αποτελέσματα παραμένουν αρκούντως γενικά. Στην ενότητα αυτή θα μιλήσουμε για το **Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (ΕΥΚΠ - MSSM)**. Το εν λόγω μοντέλο δεν είναι τίποτα άλλο πέρα από όσα συζητήσαμε μέχρι τώρα, με την προσθήκη όρων για το σπάσιμο της συμμετρίας, καθώς και την εισαγωγή της R-Ομοτιμίας.

3.1 Η Λαγκρανζιανή

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε την “πρακτική” μορφή της Λαγκρανζιανής [10] 1.8.38 με την προσθήκη του όρου σπασίματος της Υπερσυμμετρίας [10], [11] (θα συζητηθεί παρακάτω), η οποία μορφή αποτελεί και το λεγόμενο MSSM.

Η Λαγκρανζιανή δίνεται σε κλειστή μορφή, με τις εξαρτήσεις από το Υπερδυναμικό να είναι πλέον φανερές. Θεωρούμε από εδώ και στο εξής ότι η *Πραγματικότητα* περιγράφεται από το μοντέλο που αναφέραμε. Έχουμε,

$$\mathcal{L}_{\text{reality}} \equiv \mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} \quad (3.1.1)$$

οπότε,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MSSM}} = & (D_\mu \phi_i)^* (D^\mu \phi_i) + \left(\frac{i}{2} \psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i + h.c. \right) + \\ & - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^{(a)} G^{(a)\mu\nu} + \left(\frac{i}{2} \lambda^{\dagger(a)} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^{(a)} + h.c. \right) + \\ & - \left(\frac{1}{2} \frac{\delta^2 W}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \psi_i \psi_j + i\sqrt{2} \frac{\delta D^{(a)}}{\delta \phi_i} \psi_i \lambda^{(a)} + h.c. \right) + \\ & - V(F, F^\dagger, D) + \mathcal{L}_{\text{soft}} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

όπου το λεγόμενο **βαθμωτό δυναμικό** είναι το κομμάτι,

$$V(F, F^\dagger, D) \equiv V(\phi, \phi^*) = F^{\dagger i} F_i + \frac{1}{2} \sum_a D^{(a)} D^{(a)} \quad (3.1.3)$$

με,

$$F_i = - \left(\frac{\delta W}{\delta \phi_i} \right)^\dagger \quad (3.1.4)$$

$$D^{(a)} = -\hat{g}^{(a)} \phi^{*i} T^{(a)} \phi_i \quad (3.1.5)$$

καθώς οι παράγωγοι δίνονται²¹,

$$D_\mu = \partial_\mu + i\hat{g}T^{(a)}V_\mu^{(a)} \quad \text{για τα πεδία } \psi, \phi \quad (3.1.6)$$

$$D_\mu = \partial_\mu + \hat{g}f^{(abc)}V_\mu^{(b)} \quad \text{για τα πεδία } \lambda \quad (3.1.7)$$

μάλιστα, το μοντέλο μας το βλέπουμε υπό το πρίσμα της ενοποίησης των Ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων με τις Ασθενείς, οπότε θα υπάρχουν *δύο ειδών* αναλλοίωτες παράγωγοι: μία για τις Ηλεκτρασθενείς αλληλεπιδράσεις και μία για την Χρωμοδυναμική.

Ειδικότερα, για τις **Ηλεκτρασθενείς** έχουμε,

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + ig\frac{\vec{\tau}}{2}\vec{W}_\mu + ig'\frac{Y}{2}B_\mu = \\ &= \partial_\mu + i\frac{g}{\sqrt{2}}(\tau^+W_\mu^+ + \tau^-W_\mu^-) + ig\sin(\theta_W)Q_{em}A_\mu + i\frac{g}{\cos\theta_W}Q_WZ_\mu \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

και,

$$Q_W \stackrel{\text{def}}{=} T_3 - Q_{em}\sin^2\theta_W \quad \& \quad Q_{em} \equiv Q \stackrel{\text{def}}{=} T_3 + \frac{Y}{2} \quad (3.1.9)$$

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W = e \quad (3.1.10)$$

Τέλος, το **Υπερδυναμικό** ορίστηκε ως,

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}M^{ij}\phi_i\phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k \rightarrow \frac{1}{2}M^{ij}\Phi_i\Phi_j + \frac{1}{6}y^{ijk}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \quad (3.1.11)$$

και η σχέση που χρησιμοποιούμε στο MSSM -γραμμένη υπό μορφή πινάκων- είναι [10], [11],

$$\begin{aligned} W_{MSSM} &= -y_t(H_d)^T \varepsilon \tilde{Q}_3 \tilde{U}_3^c - y_b(H_u)^T \varepsilon \tilde{Q}_3 \tilde{D}_3^c - y_\tau(H_u)^T \varepsilon \tilde{L}_\tau \tilde{R}_\tau^c - \mu(H_d)^T \varepsilon H_u + \\ &- O(Q_{1,2}, L_{1,2}) \equiv \\ &\equiv -(\tilde{U}^c)^{ix}(y_{up-type})_i^j(\tilde{Q})_{jax}(H_d)_\beta \varepsilon^{a\beta} - (\tilde{D}^c)^{ix}(y_{down-type})_i^j(\tilde{Q})_{jax}(H_u)_\beta \varepsilon^{a\beta} + \\ &- (\tilde{R}^c)^{ix}(y_{lepton})_i^j(\tilde{L})_{jax}(H_u)_\beta \varepsilon^{a\beta} - \mu(H_d)_a(H_u)_\beta \varepsilon^{a\beta} \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

$i = 1, 2, 3$ είναι δείκτης της οικογένειας, $a = 1, 2$ είναι σπινωριακός δείκτης και $x = 1, 2, 3$ είναι δείκτης χρώματος.

²¹Είναι πολύ σημαντικό να προσέξουμε ότι εδώ, σε αντίθεση ίσως με κάποια από τη βιβλιογραφία, οι αναλλοίωτες παράγωγοι ορίζονται με **συν** πρόσημο *αντί* για **πλην**.

3.2 Το Σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας

Η Υπερσυμμετρία, όσο αποτελεσματική κι αν είναι, έχει ένα θεμελιώδες ελάττωμα· δεν έχει παρατηρηθεί! Η θεωρία μας μάς λέει ότι οι υπερ-συνοδοί θα έχουν ακριβώς ίδιες μάζες με τα συνηθισμένα σωματίδια του ΚΠ. Αν, όμως, ίσχυε κάτι τέτοιο, τότε η Υπερσυμμετρία θα είχε, προφανώς, ήδη ανιχνευτεί. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι θα πρέπει οι υπερ-συνοδοί να έχουν διαφορετικές μάζες και μάλιστα κατά πολύ μεγαλύτερες [11].

Ο μόνος τρόπος τα σωματίδια του ΚΠ να μην έχουν *ίδιες* μάζες με τους υπερ-συνόδους τους είναι αν η συμμετρία για την οποία κάνουμε λόγο δεν είναι ακριβής, αλλά σπασμένη. Αυτό ακριβώς υποθέτουμε εδώ· **αν η Υπερσυμμετρία υπάρχει, τότε είναι σπασμένη**.

- Το σπάσιμο μιας οποιαδήποτε συμμετρίας σημαίνει ότι η πραγματικότητα που περιγράφεται από την εν λόγω συμμετρία **δεν** περιστρέφεται γύρω από το 0 -όπως θα έπρεπε κανονικά. Με άλλα λόγια, αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει για το δυναμικό $\langle 0|V|0\rangle \neq 0$.

Όπως κάθε φορά στην Φυσική, προκειμένου να μετρήσουμε την “ένταση” μιας φυσικής διεργασίας χρειαζόμαστε ένα σημείο αναφοράς, μια βασική στάθμη, βάση της οποίας “βαθμονομούνται όλα τα γεγονότα.

Συνεπώς, είναι εύλογο να πούμε ότι το κενό θα αποτελεί αυτή τη θεμελιώδη κατάσταση. Όταν τα “γεγονότα” -αυτό μπορεί, ας πούμε, να αναφέρεται στις μάζες κάποιων σωματιδίων- παίρνουν διαφορετικές τιμές από αυτές που περιμένουμε, τότε πάει να πει ότι υπάρχει κάποιο σφάλμα στη βαθμονόμηση. Προκειμένου να διορθώσουμε αυτό το σφάλμα χρειάζεται να “μετατοπίσουμε” τη βασική στάθμη ή, αλλιώς, να της αλλάξουμε τιμή. Σπάσιμο μιας συμμετρίας είναι ο *εξαναγκασμός* μας να αλλάξουμε την τιμή του κενού.

- Γιατί μια συμμετρία λέμε ότι κρύβεται στις χαμηλές ενέργειες; Όπως αναφέραμε, το σπάσιμο της συμμετρίας εκδηλώνεται στο $|0\rangle$. Όλες οι καταστάσεις χαμηλής ενέργειας -όπως και η καθημερινότητα στην οποία ζούμε- βρίσκονται αρκετά κοντά στην κατάσταση του κενού και άρα το σπάσιμο είναι εμφανές. Όσο ανεβαίνουμε σε ενέργεια, κοντινές καταστάσεις διαφέρουν μεταξύ τους -ως προς τις “ιδιότητες”- όλο και λιγότερο²² και επομένως, εκεί, φαίνεται **σαν** η συμμετρία να είναι ακέραιη. Στις υψηλές ενέργειες μπορούμε να παρατηρήσουμε τι *θα συνέβαινε* αν η εν λόγω συμμετρία *δεν* ήταν σπασμένη.

- Όσο αφορά το σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας, παρατηρούμε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα. Καταρχάς, το σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας σημαίνει ότι το κενό **δεν** θα μένει αναλλοίωτο κάτω από τους υπερσυμμετρικούς μετασχηματισμούς, δηλαδή θα είναι: $Q_a|0\rangle \neq 0$ και $Q_a^\dagger|0\rangle \neq 0$.

Συναρτήσει των τελεστών αυτών, η Χαμιλτονιανή μπορεί να γραφτεί,

$$H = P^0 = \frac{1}{4}(Q_1 Q_1^\dagger + Q_1^\dagger Q_1 + Q_2 Q_2^\dagger + Q_2^\dagger Q_2) \quad (3.2.1)$$

ενώ μπορούμε να κάνουμε την προσέγγιση,

$$\langle 0|H|0\rangle = \langle 0|V|0\rangle \quad (3.2.2)$$

Η εφαρμογή των 3.2.1 και 3.2.2 μας οδηγεί στο αποτέλεσμα,

$$\langle 0|V|0\rangle > 0 \quad (3.2.3)$$

²²Το συμβαίνει αυτό είναι *ακριβώς ίδιο* στην περιγραφή του με ό,τι παρατηρούμε για την θερμοκρασία στην καθημερινή μας ζωή. Αν μια μέρα η θερμοκρασία είναι $5^\circ C$ και την άλλη $20^\circ C$, η διαφορά είναι τεράστια. Ωστόσο, η ίδια θερμοκρασιακή διαφορά των $15^\circ C$ ελάχιστη σημασία έχει όταν μιλάμε, για παράδειγμα, για τη θερμοκρασία του Ήλιου.

- Το βασικό επίπεδο θα πρέπει να είναι σταθερό καθ' ότι υποθέτουμε πως ταυτίζεται με την Πραγματικότητα στην οποία ζούμε. Ωστόσο, υπάρχει και η περίπτωση η σταθερή Πραγματικότητα στην οποία ζούμε να είναι απλά μια διεγερμένη κατάσταση -με, προφανώς, τεράστιο χρόνο ημιζωής- με αποτέλεσμα να *νομίζουμε* ότι η Υπερσυμμετρία είναι σπασμένη. Η διεγερμένη αυτή κατάσταση, η οποία *φαίνεται* να είναι σταθερή, καθώς ζει για τουλάχιστον τόσα χρόνια όση και η ηλικία του Σύμπαντός μας, καλείται μετασταθερή (metastable). Ανεξαρτήτως του τι ισχύει, τα αποτελέσματα του σπασίματος που παρατηρούμε -είτε είναι πραγματικό, είτε εικονικό (metastable)- παραμένουν τα ίδια.

- Το δυναμικό της θεωρίας είναι αυτό που φαίνεται στην σχέση 3.1.3 και επομένως βλέπουμε ότι δύο είναι οι βασικοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να σπάσει η Υπερσυμμετρία:

3.2.1 Σπάσιμο μέσω των D-όρων

Το σπάσιμο αυτό καλείται και αλλιώς μηχανισμός των Fayet-Ηλιόπουλος. Στην προσπάθειά μας να επιλύσουμε τη συνθήκη 3.2.3 **μηδενίζουμε τους F-όρους** και **προσθέτουμε** τον όρο,

$$\mathcal{L}_{FI} = -kD \quad (3.2.4)$$

ώστε ό,τι μείνει να είναι θετικό.

Το παραπάνω μοντέλο, ωστόσο, δεν είναι εύκολο να μελετηθεί φαινομενολογικά.

3.2.2 Σπάσιμο μέσω των F-όρων

Ο δεύτερος κύριος τρόπος -και ο πιο εύκολος να μελετηθεί φαινομενολογικά- να επιτευχθεί το σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας είναι τα λεγόμενα μοντέλα O'Raifeartaigh. Στην ουσία, δεν πρόκειται για έναν συγκεκριμένο μηχανισμό -όπως προηγουμένως- αλλά για ένα πλαίσιο εργασίας.

Εδώ, **μηδενίζουμε τους D-όρους** και απαιτούμε να **μην** υπάρχουν **ταυτόχρονες** λύσεις των εξισώσεων,

$$F_i = 0 \Leftrightarrow -\left(\frac{\delta W}{\delta \phi_i}\right)^\dagger = 0 \quad (3.2.5)$$

Δηλαδή **θέλουμε**,

$$\frac{\delta W}{\delta \phi_i} \neq 0 \quad (3.2.6)$$

Επειδή έχουμε τόσα μοντέλα όσα και τα υπερδυναμικά W , καταλαβαίνουμε γιατί το F-σπάσιμο αποτελεί πλαίσιο και όχι συγκεκριμένο μοντέλο.

Να σημειώσουμε ότι η λύση της 3.2.6 προϋποθέτει την προσθήκη ενός όρου $\sim L^i \phi_i$ στο υπερδυναμικό.

3.2.3 Πρακτικό σπάσιμο

Όπως είδαμε στις δύο προηγούμενες παραγράφους, το σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας επιβάλλει την προσθήκη νέων όρων στην Λαγκρανζιανή και, κατά συνέπεια, την *επέκταση* του MSSM. Ο αγώνας για το Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο, δηλαδή, έχει χαθεί προτού καν αρχίσει· δεν γίνεται Πραγματικότητα χωρίς σπασμένη Υπερσυμμετρία, όπως επίσης δεν γίνεται MSSM με σπάσιμο.

Το δίλημμα είναι προφανές, η λύση όμως εύκολη! Απλά θα δηλώσουμε ότι **δεν** μας ενδιαφέρει *ποιος* είναι ο λόγος για τον οποίο σπάει η Υπερσυμμετρία και θα εμείνουμε στα αποτελέσματα [10], [11].

- Υποθέτουμε ότι την Πραγματικότητα αποτελούν το MSSM **και** κάτι *Άλλο*. Το MSSM είναι το τμήμα που μπορούμε να αγγίζουμε με την φαινομενολογία, ενώ το *Άλλο* αποτελείται από Φυσική που μέχρι στιγμής *δεν* μπορούμε να ανιχνεύσουμε²³. Το Σπάσιμο λαμβάνει χώρα στο *Άλλο* και εμείς το αντιλαμβανόμαστε μέσω των αλληλεπιδράσεων του *Άλλου* με το MSSM.

Αυτό, λοιπόν, που βλέπουμε, στην πράξη, είναι μια *τροποποιημένη* υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή. Το σωματιδιακό της περιεχόμενο είναι το ίδιο με όσα έχουμε συζητήσει μέχρι τώρα, μόνο που στην συνάρτηση υπάρχουν, τώρα, κάποιοι επιπλέον όροι. Αυτοί οι όροι -σε αντίθεση με εκείνους που απαιτούνται από τα σπασίματα μέσω F και D όρων- **δεν** εισάγουν νέα φυσική στο μοντέλο μας και εξυπηρετούν απλά στο σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας.

- Το σπάσιμο εκδηλώνεται μέσα από το γεγονός ότι οι υπερ-εταίροι αποκτούν επιπλέον μάζα από αυτή που προβλέπεται. Είναι λογικό, λοιπόν, να σκεφτούμε ότι οι επιπλέον όροι που θα προσθέσουμε στη Λαγκρανζιανή θα είναι όροι μάζας και, μάλιστα, θα αναφέρονται **μόνο** στους υπερ-συνοδούς. Αυτό το τελευταίο έχει ως αποτέλεσμα το πολυπόθητο *σπάσιμο*, αφού οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί **δεν** θα είναι πλέον ακριβείς.

Υποθέτουμε **ελαφρύ soft σπάσιμο** της Υπερσυμμετρίας. Δηλαδή, παρότι οι υπερσυμμετρικοί μετασχηματισμοί δεν θα διατηρούνται ακριβώς, δεν θέλουμε η θεωρία μας να καταστραφεί εντελώς. Θέλουμε όσα έχουμε καταφέρει να αποκτήσουμε μέχρι τώρα να παραμείνουν ως έχουν. Συνεπώς, το σπάσιμο πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να μας δίνει ίσα-ίσα τις μάζες των σωμάτων.

Η συνολική διάσταση μάζας του $\mathcal{L}_{soft}$ είναι, φυσικά, 4.

Ελαφρύ ονομάζουμε το σπάσιμο που περιέχει όρους με συντελεστές **θετικής** διάστασης μάζας. Συντελεστές αρνητικής διάστασης αποτελούν αυτό που θα ονομάζαμε *βαρύ* σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας και θα είχαν ως αποτέλεσμα, μεταξύ άλλων, την καταστροφή την ιεραρχίας των κλιμάκων.

- Τελικά, το σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας που χρησιμοποιούμε -το ίδιο που εμφανίζεται στην σχέση 3.1.2- είναι,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{soft} = & - \sum_i m_i^2 |\phi_i|^2 + \\
 & - \{A_t y_t (H_d)^T \varepsilon \tilde{Q}_3 \tilde{U}_3^c + A_b y_b (H_u)^T \varepsilon \tilde{Q}_3 \tilde{D}_3^c + A_\tau y_\tau (H_u)^T \varepsilon \tilde{L}_\tau \tilde{R}_3^c + h.c.\} + \\
 & - \{\mu b (H_d)^T \varepsilon H_u + h.c.\} + \\
 & - \frac{1}{2} \{M_1 \tilde{B} \tilde{B} + M_2 \tilde{W}^i \tilde{W}^i + M_3 \tilde{g} \tilde{g} + h.c.\}
 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

²³Το μυστήριο του Άλλου είναι, βεβαίως, κατά πολύ μικρότερο από το αντίστοιχο της Σκοτεινής Ύλης και της Σκοτεινής Ενέργειας. Μάλιστα, το *Άλλο* μπορεί να είναι απλά κάποιο σωματίδιο τόσο κοινό, όσο ένα δεξιόστροφο νετρίνο.

όπου, φυσικά, στην δεύτερη γραμμή της 3.2.7 θα πρέπει να προσθέσουμε και τους αντίστοιχους όρους για τις άλλες δύο οικογένειες. Ο λόγος που δεν τις γράφουμε εδώ είναι, αφ' ενός, για να απλοποιήσουμε τη γραφή και, αφ' εταίρου, διότι οι όροι της τρίτης οικογένειας υπερσχύουν κατά πολύ.

Το άθροισμα της πρώτης γραμμής αναφέρεται σε όλα τα βαθμωτά σωμάτια του μποντίνου (σφερμιόνια και higgses μαζί). Βέβαια, ισχυριστήκαμε προηγουμένως ότι τα σωμάτια που θα αποκτήσουν μάζες μέσω του σπασίματος είναι οι υπερ-συνοδοί. Γιατί, λοιπόν, θεωρούμε όρους μάζας για τα higgses; Μια ενδιαφέρουσα φιλοσοφική άποψη έρχεται να απαντήσει σε αυτό: κανείς μπορεί να θεωρήσει τα higgses ως υπερ-συνοδούς και τα higgsinos ως σωμάτια του ΚΠ.

3.3 R-Ομοτιμία

Η συζήτηση που έχουμε κάνει μέχρι τώρα στιγματίζεται από ένα φοβερό ψέμα: οι επιτρεπτοί όροι του Υπερδυναμικού **W δεν** είναι μόνο αυτοί που εμφανίστηκαν στα προηγούμενα. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να έχουμε **και** όρους που *παραβιάζουν* τον Λεπτονικό (L) ή/και τον Βαρυονικό (B) αριθμό.

Τώρα, αυτό είναι προφανώς ένα σημαντικό πρόβλημα διότι γνωρίζουμε πολύ καλά ότι στο Καθιερωμένο Πρότυπο οι αριθμοί B και L *δεν* παραβιάζονται και, αν το κάνουν, αυτό γίνεται σε αμελητέο ποσοστό [11].

Αν είχε παρατηρηθεί διάσπαση του πρωτονίου, τότε η κατάσταση θα ήταν πολύ διαφορετική, καθώς μια τέτοια αλληλεπίδραση παραβιάζει συγχρόνως και τους δύο αριθμούς. Επιπλέον, στην Υπερσυμμετρία ο ρυθμός διάσπασης του πρωτονίου προκύπτει [11]

$$\Gamma_{p \rightarrow e^+ \pi^0} \sim m_p^5 \sum |\lambda \lambda'|^2 \frac{1}{m_d^4} \quad (3.3.1)$$

Όπου για σφερμιονικές μάζες ανάλογες του 1 TeV -το οποίο ισχύει λόγω του σπασίματος- είναι της τάξης του 1 sec. Είναι προφανές, λοιπόν, ακόμα κι αν δεχτούμε ότι το πρωτόνιο *κάποτε* διασπάται, ότι το παραπάνω αποτέλεσμα **δεν** μπορεί να γίνει αποδεκτό.

• Συνολικά, έχουμε: α) η Υπερσυμμετρία επιτρέπει την παραβίαση των B και L, β) στην φύση **δεν** παρατηρείται "εξόφθαλμη" παραβίαση των αριθμών αυτών. Τι κάνουμε, λοιπόν;

Ορίζουμε μια *νέα* συμμετρία, η οποία καταφέρνει ταυτόχρονα: α) να διατηρείται πάντα ως θεμελιώδης συμμετρία, β) να απαγορεύει τους όρους του Υπερδυναμικού που παραβιάζουν τα B και L, γ) να επιτρέπει -όχι να επιβάλλει- σε μικρό βαθμό την παραβίαση των B και L, αφού αυτοί *πλέον* θα αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της καινούριας συμμετρίας και δ) λόγω της διατήρησής της να περιορίζει αλληλεπιδράσεις που δεν θα επιτρέπονταν στο ΚΠ.

◦ Η συμμετρία αυτή είναι η **ομοτιμία μάζας**,

$$P_M \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{3(B-L)} \quad (3.3.2)$$

η οποία **μετατίθεται** με τους γεννήτορες της Υπερσυμμετρίας Q και $Q^\dagger$. Η ομοτιμία αυτή εκχωρεί **ίδιους** αριθμούς στα μέλη της **ίδιας** υπερ-πολλαπλέτας.

◦ Μια πιο πρακτική εκδοχή της παραπάνω συμμετρίας είναι η λεγόμενη -λόγω του ότι *μοιάζει*, αν και *δεν* είναι τέτοια, με τις R-συμμετρίες- **R-Ομοτιμία**,

$$P_R \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^R \equiv (-1)^{3B-3L+2s} \quad (3.3.3)$$

η οποία, όμως, **δεν μετατίθεται** με τους γεννήτορες της Υπερσυμμετρίας Q και $Q^\dagger$. Η ομοτιμία αυτή εκχωρεί **διαφορετικούς** αριθμούς στα μέλη της **ίδιας** υπερ-πολλαπλότητας. Πιο συγκεκριμένα, **τα σωματίδια του Καθιερωμένου Προτύπου θα έχουν $P_R = +1$, ενώ οι υπερ-συνοδοί τους $P_R = -1$.**²⁴

ο Πολλές φορές στην βιβλιογραφία, οι έννοιες Ομοτιμία μάζας και R-Ομοτιμία ταυτίζονται για προφανείς λόγους.

- Στην συνέχεια δίνεται ο πίνακας με τους αριθμούς των σωματιδίων του MSSM:

Πίνακας 2: R-Ομοτιμία και κβαντικοί αριθμοί

Σωματίο	B	L	Spin	R	R-Ομοτιμία	Ομοτιμία μάζας
L	0	1	1/2	-2	+1	-1
R^c	0	-1	1/2	4	+1	-1
$\tilde{L}$	0	1	0	-3	-1	-1
$\tilde{R}^c$	0	-1	0	3	-1	-1
Q	1/3	0	1/2	2	+1	-1
U^c, D^c	-1/3	0	1/2	0	+1	-1
$\tilde{Q}$	1/3	0	0	1	-1	-1
$\tilde{U}^c, \tilde{D}^c$	-1/3	0	0	-1	-1	-1
g, W, B	0	0	1	2	+1	+1
$\tilde{g}, \tilde{W}, \tilde{B}$	0	0	1/2	1	-1	+1
H	0	0	0	0	+1	+1
$\tilde{H}$	0	0	1/2	1	-1	+1
G	0	0	2	4	+1	+1
$\tilde{G}$	0	0	3/2	3	-1	+1

²⁴Αυτό είναι ένα ατυχές εννοιολογικό συμβάν διότι μας περιορίζει αρκετά στο να βαφτίσουμε το higgsino ως σωματίο του ΚΠ και το Higgs ως τον υπερ-εταίρο του. Βέβαια, μπορούμε πάντα να ισχυριστούμε ότι η κατανομή των τιμών ± 1 της R-Ομοτιμίας είναι παντελώς ανεξάρτητη του αν το εκάστοτε σωματίο είναι σύννηθες ή υπερ-εταίρος.

- Κλείνοντας να σημειώσουμε ότι η R-Ομοτιμία δουλεύει όπως οποιαδήποτε άλλη συμμετρία. Ειδικότερα, η συμμετρία που πραγματευόμαστε εδώ λέγεται $U(1)_R$ και είναι τέτοια ώστε, για τις μεταβλητές Grassmann και τους γεννήτορες της Υπερσυμμετρίας,

$$\theta' = U\theta = e^{ia}\theta \quad \theta'^{\dagger} = U^{\dagger}\theta^{\dagger} = e^{-ia}\theta^{\dagger} \quad (3.3.4)$$

$$\hat{Q}' = U^{\dagger}Q = e^{-ia}Q \quad \hat{Q}'^{\dagger} = UQ^{\dagger} = e^{ia}Q^{\dagger} \quad (3.3.5)$$

- Μια σημαντική -ίσως η σημαντικότερη- παρατήρηση πριν το τέλος είναι ότι, εφ' όσον απαιτούμε η **R-Ομοτιμία να διατηρείται**, τότε υπάρχει ένα υπερ-σωμάτιο, το ελαφρύτερο, το οποίο **δεν** μπορεί να διασπαστεί.

Ένα συνηθισμένο σωμάτιο μπορεί να διασπαστεί **μόνο** σε σωμάτια του Καθιερωμένου Προτύπου. Αυτό είναι προφανές, διότι, όπως έχουμε αναφέρει, **όλοι** οι υπερ-συνοδοί θα πρέπει να είναι *βαρύτεροι* απ' όλα τα συνηθισμένα σωμάτια.

Τώρα, εφ' όσον οι υπερ-συνοδοί είναι βαρύτεροι, αυτομάτως αποκτούν την δυνατότητα να διασπαστούν σε σωμάτια του ΚΠ. Ωστόσο, αν διασπώνταν μόνο σε αυτά, η διατήρηση της R-Ομοτιμίας θα παραβιαζόταν. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι **ένα υπερ-σωμάτιο θα διασπάται πάντα σε τουλάχιστον ένα υπερ-σωμάτιο** (ανάλογα με το πόσα σωματίδια παράγονται).

Η τελευταία αυτή διαπίστωση συνεπάγεται αμέσως πως **το ελαφρύτερο υπερσυμμετρικό σωματίδιο (LSP) θα είναι απόλυτα σταθερό**, εφ' όσον η διάσπασή του *δεν* γίνεται να δώσει άλλο υπερ-σωμάτιο μικρότερης μάζας. Το LSP, όπως θα αναλύσουμε σε επόμενα κεφάλαια, αποτελεί, λόγω αυτού, ιδανικό υποψήφιο ώστε να αποτελεί την Σκοτεινή Ύλη.

3.4 Μάζες

Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τους πίνακες μάζας για τα δι-άφορα σωμάτια που απαντώνται στο MSSM [9], [10], [11], [12], [13].

Η διαδικασία εξαγωγής των μαζών είναι αρκετά απλή. Αυτό που έχουμε να κάνουμε είναι να πάμε στην Λαγκρανζιανή 3.1.2 και να απομονώσουμε όλους τους όρους που μπορεί να αναφέρονται στη μάζα του εκάστοτε σωματιδίου. Αφού βρούμε αυτούς τους όρους θα τους ταξινομήσουμε σε πίνακες. Οι όροι μάζας **δεν** βρίσκονται στην Λαγκρανζιανή σε καθαρή μορφή και γι' αυτό θα πρέπει προτού πάρουμε το τελικό αποτέλεσμα να διαγωνοποιήσουμε.

Εν συνεχεία θα δουλέψουμε με δύο διαφορετικές κατηγορίες σωματιδίων: τα **sfermions** και τα **bosinos**.

3.4.1 Μάζες των Bosinos

Ξεκινάμε με τους υπερ-συνοδούς των μποζονίων [10], [11], [12]. Αναζητούμε όρους που περιέχουν είτε gauginos, λ , είτε higgsinos, ψ . Να σημειώσουμε εδώ, ότι το γράμμα ψ δηλώνει γενικά τα φερμιόνια τύπου Dirac, οπότε, εκτός από τα higgsinos, μπορεί να συμβολίζουν και τα *συνηθισμένα* φερμιόνια του ΚΠ. Προφανώς, αυτό δεν μας επηρεάζει με οποιονδήποτε τρόπο. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι συμμετέχουν και όροι από την $\mathcal{L}_{soft}$.

Το ξεκαθάρισμα των όρων δίνει,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass\ bosino}^{maybe} = & \left(\frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu D_\mu \psi_i + h.c. \right) + \left(\frac{i}{2} \lambda^{\dagger(a)} \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^{(a)} + h.c. \right) \\ & - \left(\frac{1}{2} \frac{\delta^2 W}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \psi_i \psi_j + i\sqrt{2} \frac{\delta D^{(a)}}{\delta \phi_i} \psi_i \lambda^{(a)} + h.c. \right) + \\ & - \frac{1}{2} \{ M_1 \tilde{B} \tilde{B} + M_2 \tilde{W}^i \tilde{W}^i + M_3 \tilde{g} \tilde{g} + h.c. \} \end{aligned} \quad (3.4.1.1)$$

Για αρχή, “πετάμε” όλους τους κινητικούς όρους που υπάρχουν.

Ως γνωστόν, σε μια θεωρία στο πλαίσιο της QFT, οι όροι μάζας προκύπτουν από τους διγραμμικούς όρους (όροι που περιέχουν **μόνο** δύο πεδία) της Λαγκρανζιανής.

Οι τριγραμμικοί (και άλλοι) όροι είναι όροι αλληλεπίδρασης και **δεν** μας ενδιαφέρουν.

Επιπλέον, **δεν** θα ασχοληθούμε με τις μάζες των gluinos και άρα δεν θα τα θεωρήσουμε (όταν τα σύμβολα ψ και λ αποκτήσουν σωματιδιακό περιεχόμενο). Επιπρόσθετα, ο τελευταίος όρος της $\mathcal{L}_{soft}$ μπορεί να παραλειφθεί.

Συνεπώς, θα μας μείνει,

$$\mathcal{L}_{mass\ bosino}^{maybe} = - \left(\frac{1}{2} \frac{\delta^2 W}{\delta \phi_i \delta \phi_j} \psi_i \psi_j + i\sqrt{2} \frac{\delta D^{(a)}}{\delta \phi_i} \psi_i \lambda^{(a)} + h.c. \right) - \frac{1}{2} \{ M_1 \tilde{B} \tilde{B} + M_2 \tilde{W}^i \tilde{W}^i + h.c. \}$$

Τώρα, το κομμάτι με τις παραγωγίσεις του Υπερδυναμικού θα δώσει τριγραμμικούς όρους, εκτός από τον όρο με τα πεδία Higgs. Τα σύμβολα ψ μπορούν, πλέον, να αντιστοιχούν **μόνο** σε higgsinos και μάλιστα, εδώ, οφείλουν να είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Τέλος, ο όρος αυτός είναι συμμετρικός, οπότε η παραγωγή θα δώσει και έναν παράγοντα 2 (είναι της μορφής $\partial^2 \phi^2 / \partial \phi^2$).

Η παραγωγή του D θα μας δώσει τριγραμμικούς όρους, **εκτός** από την περίπτωση όπου το πεδίο ϕ είναι σωματίδιο Higgs και, *επιπλέον*, θεωρήσουμε την αναμενόμενη τιμή του στο κενό (VEV).

• Συνολικά, αποδίδοντας σωματιδιακό περιεχόμενο στους συμβολισμούς, θα έχουμε,

$$\mathcal{L}_{mass\ bosino}^{maybe} = - \left(-\frac{1}{2} 2\mu (\tilde{H}_d)^T \varepsilon \tilde{H}_u - i\sqrt{2} \hat{g}^{(a)} \sum_i \phi^{*i} T^{(a)} \psi_i \lambda^{(a)} + h.c. \right) - \frac{1}{2} \left(M_1 \tilde{B} \tilde{B} + M_2 \tilde{W}^i \tilde{W}^i + h.c. \right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \mathcal{L}_{mass\ bosino} = \left(\mu (\tilde{H}_d)^T \varepsilon \tilde{H}_u + h.c. \right) + \\ & + \left(i\sqrt{2} \hat{g}^{(a)} (H_u)^\dagger T^{(a)} \tilde{H}_u \lambda^{(a)} + i\sqrt{2} \hat{g}^{(a)} (H_d)^\dagger T^{(a)} \tilde{H}_d \lambda^{(a)} + h.c. \right) + \\ & - \frac{1}{2} \left(M_1 \tilde{B} \tilde{B} + M_2 \tilde{W}^i \tilde{W}^i + h.c. \right) \end{aligned} \quad (3.4.1.2)$$

Όπου, φυσικά, για $\lambda^{(a)} = \tilde{W}^i$ θα είναι $i\hat{g}^{(a)}T^{(a)} = ig\frac{\tau^i}{2}$, ενώ για $\lambda^{(a)} = \tilde{B}$ θα είναι $i\hat{g}^{(a)}T^{(a)} = ig'\frac{Y}{2}$. Η σειρά γραφής των όρων υπονοεί ότι το $T^{(a)}$ θα δράσει πάνω στο εκάστοτε higgsino και όχι στο αντίστοιχο gaugino.

• Βρήκαμε τους όρους μάζας για τα **bosinos**, ωστόσο, δεν αναμειγνύονται όλα μεταξύ τους. Η ανάμειξη γίνεται ανάμεσα σε σωματίδια που έχουν τους ίδιους κβαντικούς αριθμούς. Θα έχουμε επομένως *διαφορετικές* αναμειξεις για τα φορτισμένα σωματίδια ($\tilde{H}_u^-, \tilde{H}_d^+, \tilde{W}^1, \tilde{W}^2$) και διαφορετικές για τα ουδέτερα ($\tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{W}^3, \tilde{B}$). Επιπλέον, τα **gluinos** (δεν θα ασχοληθούμε με αυτά) θα αναμειχθούν μεταξύ τους ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα.

Μεγαλύτερο ενδιαφέρον θα δώσουμε στα **ουδέτερα bosinos**, τα οποία όταν αναμειχθούν θα μας δώσουν ως **καταστάσεις μάζας** τα λεγόμενα **neutralinos**.

Κρατώντας τους ουδέτερους όρους από την Λαγκρανζιανή 3.4.1.2 έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{neutralino\ mass} = & -\mu\tilde{H}_d^0\tilde{H}_u^0 + h.c. + \\ & + \left(i\sqrt{2}\hat{g}^{(a)}T^{(a)}\lambda^{(a)}\langle H_u^0 \rangle \tilde{H}_u^0 + i\sqrt{2}\hat{g}^{(a)}T^{(a)}\lambda^{(a)}\langle H_d^0 \rangle \tilde{H}_d^0 + h.c. \right) + \\ & - \frac{1}{2} \left(M_1\tilde{B}\tilde{B} + M_2\tilde{W}^3\tilde{W}^3 + h.c. \right) \end{aligned} \quad (3.4.1.3)$$

όπου για το μποζόνιο Higgs, θεωρώντας την αναμενόμενη τιμή του στο κενό ισχύει,

$$H_u = \begin{pmatrix} \langle H_u^0 \rangle + h_u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad H_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle H_d^0 \rangle + h_d \end{pmatrix}$$

και επειδή δεν μας ενδιαφέρουν οι τριγραμμικοί όροι αλληλεπίδρασης, κρατήσαμε μονάχα τις μέσες τιμές.

Άρα,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass\ neutralino} = & -\mu\tilde{H}_d^0\tilde{H}_u^0 + h.c. - \frac{1}{2} \left(M_1\tilde{B}\tilde{B} + M_2\tilde{W}^3\tilde{W}^3 + h.c. \right) \\ & + \left(i\sqrt{2}g\frac{\tau^3}{2}\tilde{W}^3\langle H_u^0 \rangle \tilde{H}_u^0 + i\sqrt{2}g'\frac{Y}{2}\tilde{B}\langle H_u^0 \rangle \tilde{H}_u^0 + \right. \\ & \left. + i\sqrt{2}g\frac{\tau^3}{2}\tilde{W}^3\langle H_d^0 \rangle \tilde{H}_d^0 + i\sqrt{2}g'\frac{Y}{2}\tilde{B}\langle H_d^0 \rangle \tilde{H}_d^0 + h.c. \right) \end{aligned} \quad (3.4.1.4)$$

και επομένως,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass\ neutralino} = & -\mu \tilde{H}_d^0 \tilde{H}_u^0 - \frac{1}{2} M_1 \tilde{B} \tilde{B} - \frac{1}{2} M_2 \tilde{W}^3 \tilde{W}^3 + \\ & + \frac{1}{2} i \sqrt{2} g \tilde{W}^3 v_u \tilde{H}_u^0 - \frac{1}{2} i \sqrt{2} g' \tilde{B} v_u \tilde{H}_u^0 + \\ & - \frac{1}{2} i \sqrt{2} g \tilde{W}^3 v_d \tilde{H}_d^0 + \frac{1}{2} i \sqrt{2} g' \tilde{B} v_d \tilde{H}_d^0 + h.c. \end{aligned} \quad (3.4.1.5)$$

όπου αντικαταστήσαμε τις τιμές για το ισοσπίν και το υπερφορτίο των higgsinos, ενώ συμβολίσαμε,

$$\langle H_u^0 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} v_u \quad \textbf{και} \quad \langle H_d^0 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} v_d \quad (3.4.1.6)$$

καθώς,

$$v_u^2 + v_d^2 = v^2 = \frac{2m_Z^2}{g^2 + g'^2} \quad \textbf{και} \quad \tan \beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{v_u}{v_d} \quad (3.4.1.7)$$

- Σε μορφή πινάκων, η παραπάνω σχέση γράφεται,

$$\mathcal{L}_{mass}^{neutralino} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{B} & \tilde{W}^3 & i\tilde{H}_u^0 & i\tilde{H}_d^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} g' v_u & -\frac{\sqrt{2}}{2} g' v_d \\ 0 & M_2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} g v_u & \frac{\sqrt{2}}{2} g v_d \\ \frac{\sqrt{2}}{2} g' v_u & -\frac{\sqrt{2}}{2} g v_u & 0 & -\mu \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} g' v_d & \frac{\sqrt{2}}{2} g v_d & -\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{B} \\ \tilde{W}^3 \\ i\tilde{H}_u^0 \\ i\tilde{H}_d^0 \end{pmatrix} + \textbf{h.c.} \quad (3.4.1.8)$$

Έχουμε, λοιπόν, τον πίνακα μάζας για τα ουδέτερα bosinos,

$$M_{\tilde{N}} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & g' v_u / \sqrt{2} & -g' v_d / \sqrt{2} \\ 0 & M_2 & -g v_u / \sqrt{2} & g v_d / \sqrt{2} \\ g' v_u / \sqrt{2} & -g v_u / \sqrt{2} & 0 & -\mu \\ -g' v_d / \sqrt{2} & g v_d / \sqrt{2} & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.1.9)$$

ο οποίος, όταν διαγωνοποιηθεί, θα μας δώσει τις μάζες των Neutralinos, ούτως ώστε,

$$\mathcal{L}_{mass}^{neutralino} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} m_{\tilde{N}_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{\tilde{N}_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{\tilde{N}_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{\tilde{N}_4} \end{pmatrix}}_{M_{\tilde{N}}^D} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{pmatrix} + \textbf{h.c.} \quad (3.4.1.10)$$

με

$$M_{\tilde{N}}^D = O^T M_{\tilde{N}} O \quad (3.4.1.11)$$

Ας θυμηθούμε ότι τα *bosinos* είναι *φερμιόνια* και άρα έχουν διάσταση μάζας $\frac{3}{2}$. Επομένως, προκειμένου η Λαγκρανζιανή να έχει διάσταση μάζας 4, ο όρος μάζας τους θα πρέπει να είναι **της μορφής** $m(\text{πεδίο})(\text{πεδίο})$.

• Με ακριβώς όμοια διαδικασία, η Λαγκρανζιανή μάζας για τα **φορτισμένα bosinos** των οποίων οι καταστάσεις μάζας ονομάζονται **charginos** είναι,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass\ chargino} = & \frac{1}{2} 2 \mu \tilde{H}_d^+ \tilde{H}_u^- + h.c. - \frac{1}{2} \left(M_2 \tilde{W}^1 \tilde{W}^1 + M_2 \tilde{W}^2 \tilde{W}^2 + h.c. \right) \\ & + \left(i\sqrt{2}g \frac{\tau^3}{2} \tilde{W}^1 \langle H_u^0 \rangle \tilde{H}_u^- + i\sqrt{2}g \frac{\tau^3}{2} \tilde{W}^2 \langle H_u^0 \rangle \tilde{H}_u^- + \right. \\ & \left. + i\sqrt{2}g \frac{\tau^3}{2} \tilde{W}^1 \langle H_d^0 \rangle \tilde{H}_d^+ + i\sqrt{2}g \frac{\tau^3}{2} \tilde{W}^2 \langle H_d^0 \rangle \tilde{H}_d^+ + h.c. \right) \end{aligned} \quad (3.4.1.12)$$

και επομένως,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass\ chargino} = & \mu \tilde{H}_d^+ \tilde{H}_u^- - \frac{1}{2} M_2 \tilde{W}^1 \tilde{W}^1 - \frac{1}{2} M_2 \tilde{W}^2 \tilde{W}^2 \\ & - i\sqrt{2}g \frac{1}{2} \tilde{W}^1 v_u \tilde{H}_u^- - i\sqrt{2}g \frac{1}{2} \tilde{W}^2 v_u \tilde{H}_u^- + \\ & + i\sqrt{2}g \frac{1}{2} \tilde{W}^1 v_d \tilde{H}_d^+ + i\sqrt{2}g \frac{1}{2} \tilde{W}^2 v_d \tilde{H}_d^+ + h.c \end{aligned} \quad (3.4.1.13)$$

οπότε, αναμειγνύοντας τα $\tilde{W}^1, \tilde{W}^2$ **-ακριβώς** όπως και τα αντίστοιχα μποζόνια- για να πάρουμε τα $\tilde{W}^\pm$, έχουμε,

$$\mathcal{L}_{mass}^{chargino} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{W}^- & i\tilde{H}_u^- & | & \tilde{W}^+ & i\tilde{H}_d^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M_C \\ M_C^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{W}^- \\ i\tilde{H}_u^- \\ \cdots \\ \tilde{W}^+ \\ i\tilde{H}_d^+ \end{pmatrix} + \mathbf{h.c.} \quad (3.4.1.14)$$

με

$$M_C = \begin{pmatrix} M_2 & -gv_d \\ -gv_u & \mu \end{pmatrix} \quad (3.4.1.15)$$

Επειδή ο πίνακας αυτός δεν είναι συμμετρικός, η διαγωνοποίηση γίνεται με τη βοήθεια δύο διαφορετικών πινάκων U και V ,

$$M_C^D = U M_C V \Rightarrow (M_C^D)^2 = U M_C M_C^\dagger U^\dagger = V M_C^\dagger M_C V^\dagger \quad (3.4.1.16)$$

και οι ιδιοκαταστάσεις μάζας, τα charginos, είναι,

$$V \begin{pmatrix} \tilde{W}^+ \\ i\tilde{H}_d^+ \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \chi_1^+ \\ \chi_2^+ \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \tilde{W}^- & i\tilde{H}_d^- \end{pmatrix} U^\dagger \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \chi_1^- & \chi_2^- \end{pmatrix} \quad (3.4.1.17)$$

3.4.2 Μάζες των Sfermions

Η κατάσταση για τους υπερ-συνοδούς των φερμιονίων είναι πολύ πιο απλή και ξεκάθαρη, αν και το τελικό αποτέλεσμα προκύπτει έπειτα από αρκετές πράξεις. Η διαδικασία την οποία ακολουθούμε είναι **ακριβώς** όμοια με τα bosinos.

Χωρίς περαιτέρω καθυστέρηση παραθέτουμε τους πίνακες μάζας των σφερμιονίων [10]

• up-τύπου squarks

$$M_{\tilde{t}_i}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{Q}_i}^2 + y_{\tilde{t}_i}^2 v_d^2 + \frac{1}{4}(g^2 - g'^2 Y_{\tilde{t}_i L})(v_u^2 - v_d^2) & \mu v_u y_{\tilde{t}_i} + A_{\tilde{t}_i}^* y_{\tilde{t}_i}^* v_d \\ \mu v_u y_{\tilde{t}_i} + A_{\tilde{t}_i} y_{\tilde{t}_i} v_d & m_{\tilde{U}^c i}^2 + y_{\tilde{t}_i}^2 v_d^2 + \frac{1}{4}g'^2 Y_{\tilde{t}_i R}(v_u^2 - v_d^2) \end{pmatrix} \quad (3.4.2.1)$$

• down-τύπου squarks

$$M_{\tilde{b}_i}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{Q}_i}^2 + y_{\tilde{b}_i}^2 v_u^2 - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2 Y_{\tilde{b}_i L})(v_u^2 - v_d^2) & -\mu v_d y_{\tilde{b}_i} + A_{\tilde{b}_i}^* y_{\tilde{b}_i}^* v_u \\ -\mu v_d y_{\tilde{b}_i} + A_{\tilde{b}_i} y_{\tilde{b}_i} v_u & m_{\tilde{D}^c i}^2 + y_{\tilde{b}_i}^2 v_u^2 - \frac{1}{4}g'^2 Y_{\tilde{b}_i R}(v_u^2 - v_d^2) \end{pmatrix} \quad (3.4.2.2)$$

• sleptons τύπου ηλεκτρονίου

$$M_{\tilde{l}}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{L}_i}^2 + y_{\tilde{l}}^2 v_u^2 - \frac{1}{4}(g^2 + g'^2 Y_{\tilde{l} L})(v_u^2 - v_d^2) & -\mu v_d y_{\tilde{l}} + A_{\tilde{l}}^* y_{\tilde{l}}^* v_u \\ -\mu v_d y_{\tilde{l}} + A_{\tilde{l}} y_{\tilde{l}} v_u & m_{\tilde{R}^c i}^2 + y_{\tilde{l}}^2 v_u^2 - \frac{1}{4}g'^2 Y_{\tilde{l} R}(v_u^2 - v_d^2) \end{pmatrix} \quad (3.4.2.3)$$

• sneutrinos

$$M_{\tilde{\nu}_i}^2 = m_{\tilde{L}_i}^2 + y_{\tilde{\nu}_i}^2 v_d^2 + \frac{1}{4}(g^2 - g'^2 Y_{\tilde{\nu}_i L})(v_u^2 - v_d^2) \quad (3.4.2.4)$$

⊙ Η Λαγκρανζιανή για τη μάζα των sfermions είναι,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{mass}^{sfermion} = & - \begin{pmatrix} \tilde{t}_L^\dagger & \tilde{t}_R^\dagger \end{pmatrix} M_{\tilde{t}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{b}_L^\dagger & \tilde{b}_R^\dagger \end{pmatrix} M_{\tilde{b}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{b}_L \\ \tilde{b}_R \end{pmatrix} + (2 \text{ ακόμα οικογένειες}) + \\ & - \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_L^\dagger & \tilde{\tau}_R^\dagger \end{pmatrix} M_{\tilde{\tau}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_L \\ \tilde{\tau}_R \end{pmatrix} - \tilde{\nu}_\tau^\dagger M_{\tilde{\nu}_\tau}^2 \tilde{\nu}_\tau + (2 \text{ ακόμα οικογένειες}) \end{aligned} \quad (3.4.2.5)$$

Ας θυμηθούμε εδώ ότι, σε αντίθεση με τα bosinos, τα sfermions είναι *μποζόνια* και άρα έχουν διάσταση μάζας 1. Επομένως, προκειμένου η Λαγκρανζιανή να έχει διάσταση μάζας 4, ο όρος μάζας τους θα πρέπει να είναι **της μορφής** $m^2(\text{πεδίο})(\text{πεδίο})$.

⊙ Οι μάζες των σφερμιονίων προκύπτουν από την διαγωνοποίηση των παραπάνω πινάκων²⁵,

$$(M_{\tilde{t}_i}^2)^D = \Pi_{\tilde{t}_i}^T M_{\tilde{t}_i}^2 \Pi_{\tilde{t}_i} \quad (3.4.2.6)$$

$$(M_{\tilde{b}_i}^2)^D = K_{\tilde{b}_i}^T M_{\tilde{b}_i}^2 K_{\tilde{b}_i} \quad (3.4.2.7)$$

$$(M_{\tilde{l}}^2)^D = \Lambda_{\tilde{l}}^T M_{\tilde{l}}^2 \Lambda_{\tilde{l}} \quad (3.4.2.8)$$

και επομένως, οι καταστάσεις μάζας θα είναι,

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_{\tilde{u}}^T \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_R \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_{\tilde{c}}^T \begin{pmatrix} \tilde{c}_L \\ \tilde{c}_R \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Pi_{\tilde{t}}^T \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix} \quad (3.4.2.9)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} K_{\tilde{d}}^T \begin{pmatrix} \tilde{d}_L \\ \tilde{d}_R \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} \tilde{s}_1 \\ \tilde{s}_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} K_{\tilde{s}}^T \begin{pmatrix} \tilde{s}_L \\ \tilde{s}_R \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} K_{\tilde{b}}^T \begin{pmatrix} \tilde{b}_L \\ \tilde{b}_R \end{pmatrix} \quad (3.4.2.10)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\tilde{e}}^T \begin{pmatrix} \tilde{e}_L \\ \tilde{e}_R \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_1 \\ \tilde{\mu}_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\tilde{\mu}}^T \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_L \\ \tilde{\mu}_R \end{pmatrix} \quad \& \quad \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_{\tilde{\tau}}^T \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_L \\ \tilde{\tau}_R \end{pmatrix} \quad (3.4.2.11)$$

$$\tilde{\nu}_{eL} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\nu}_{e1} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\nu}_e \quad \& \quad \tilde{\nu}_{\mu L} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\nu}_{\mu 1} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\nu}_\mu \quad \& \quad \tilde{\nu}_{\tau L} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\nu}_{\tau 1} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\nu}_\tau \quad (3.4.2.12)$$

• Τέλος, ας μην ξεχνάμε ότι στις παραπάνω σχέσεις θα πρέπει να συμπεριλάβουμε και το στοιχείο πίνακα V_{CKM} όπου χρειάζεται, ώστε οι καταστάσεις των Ηλεκτρασθενών αλληλεπιδράσεων να γίνουν καταστάσεις μάζας του ΚΠ και έπειτα να αναμειχθούν στις νέες καταστάσεις μάζας του MSSM.

²⁵Οι πίνακες μάζας των sneutrinos στην πραγματικότητα δεν είναι πίνακες -λόγω του ότι δεν υπάρχουν δεξιόστροφα νετρίνα- και επομένως δεν χρήζουν διαγωνοποίησης.

4 Ανίχνευση Σκοτεινής Ύλης

Η Σκοτεινή Ύλη αποτελεί περί το 25% του Σύμπαντος και, ωστόσο, κανείς δεν ξέρει από τι απαρτίζεται. Όπως έχει αναφερθεί, η Υπερσυμμετρία θα μπορούσε να παράσχει μια καλή ερμηνεία για το σωματιδιακό περιεχόμενό της, χάρη στα Neutralinos (Νιουτραλίνο).

Έχει παρατηρηθεί ότι η μάζα του *ορατού* Σύμπαντος δεν επαρκεί για να συγκρατήσει τον εαυτό της και άρα, λογικά, θα πρέπει στο Σύμπαν να υπάρχει περισσότερη **ύλη**. Η ύλη αυτή δεν ανιχνεύεται (διαφορετικά θα την είχαμε ήδη παρατηρήσει) μέσω των κοινών μεθόδων παρατήρησης που εκμεταλλεύονται τις Ηλεκτρομαγνητικές/Ισχυρές αλληλεπιδράσεις. Εφ' όσον η ύλη αυτή δεν βγάζει φως, είναι αρμοστό να την ονομάσουμε **Σκοτεινή**.

Τα Neutralinos έχουν ακριβώς αυτές τις ιδιότητες· είναι ουδέτερα και μαζικά. Υπάρχει, όμως, και κάτι άλλο. Θέλουμε το όποιο σωματίδιο της Σκοτεινής Ύλης να είναι και σταθερό, διότι, διαφορετικά, αργά ή γρήγορα θα πάρουμε ακτινοβολούσα ύλη, πράγμα που δεν συνάδει με την "σκοτεινότητα". Όπως έχουμε ήδη περιγράψει, αν η R-Ομοτιμία διατηρείται, τότε το LSP θα είναι σταθερό. Αν, λοιπόν, το ελαφρύτερο Neutralino *είναι* το LSP τότε έχουμε τη λύση!

Προκειμένου για την επιβεβαίωση της Υπερσυμμετρίας ή/και για τον προσδιορισμό της Σκοτεινής Ύλης είναι απαραίτητο να καταφέρουμε να ανιχνεύσουμε άμεσα ή έμμεσα το LSP. Αυτό θα αναλύσουμε στην συνέχεια.

4.1 Αλληλεπιδράσεις των Bosinos

Με τον όρο Bosinos εννοούμε τους υπερσυμμετρικούς εταίρους των μποζονίων, τα οποία περιλαμβάνουν τα Higgsinos (εταίρους των σωματιδίων Higgs): $\tilde{H}_u^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^-, \tilde{H}_d^+$, καθώς και τα Gauginos (εταίρους των διανυσματικών μποζονίων - μποζονίων βαθμίδας): $\tilde{W}^i$ και $\tilde{B}$.

Βάσει του συμβολισμού που χρησιμοποιούμε,

τα Higgsinos είναι φερμιόνια ψ

τα Gauginos είναι φερμιόνια λ

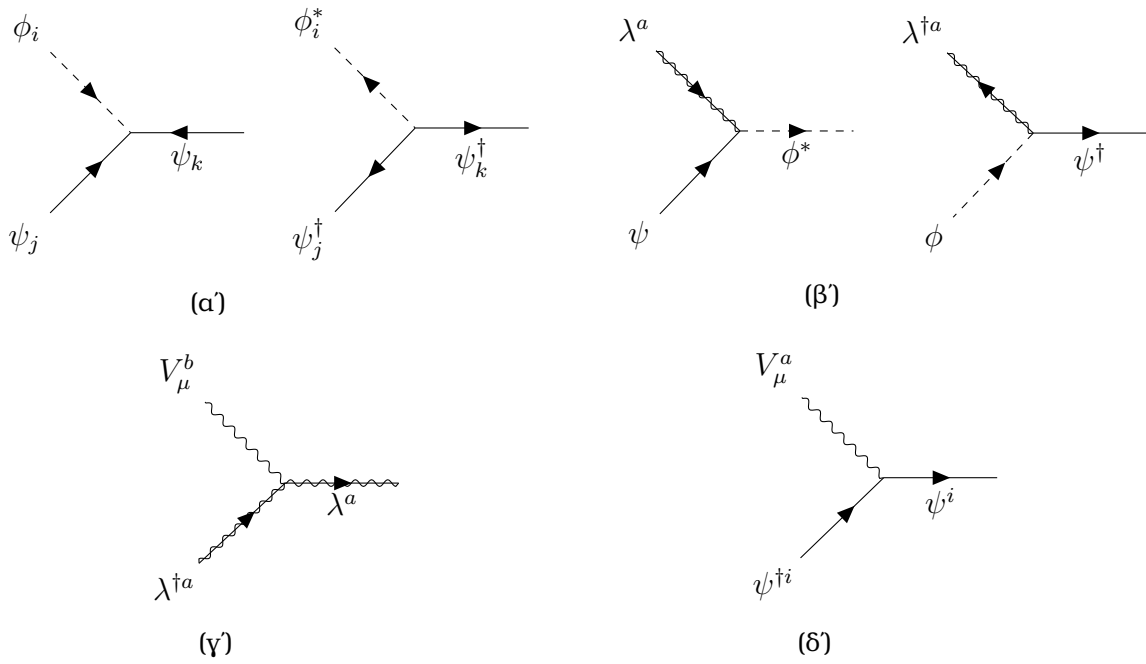
τα βαθμωτά μποζόνια (Higgs και sfermions) είναι ϕ

τα ανυσματικά μποζόνια είναι V_μ

Σκοπός μας είναι να προσδιορίσουμε τους όρους αλληλεπίδρασης του LSP. Συνεπώς, καθ' ότι το LSP αποτελεί μίξη των Higgsinos και Gauginos, ξεχωρίζουμε από την Υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή όλους τους όρους που περιέχουν πεδία **τύπου** ψ και λ . Φυσικά, επειδή μας ενδιαφέρουν *μόνο* οι αλληλεπιδράσεις και όχι οι όροι μάζας, πετάμε τους διγραμμικούς όρους. Τελικά [11]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{bosino} = & \frac{i}{2} \hat{g} \lambda^{\dagger(a)} \bar{\sigma}^\mu f^{(abc)} V_\mu^{(b)} \lambda^{(a)} - \frac{1}{2} y^{ijk} \phi_i \psi_j \psi_k - \frac{1}{2} y_{ijk}^* \phi^{*i} \psi^{\dagger j} \psi^{\dagger k} + \\ & - \hat{g} \psi^{\dagger i} \bar{\sigma}^\mu V_\mu^{(a)} (T^{(a)} \psi)_i + \\ & + i\sqrt{2} \hat{g} (\phi^* T^{(a)} \psi) \lambda^{(a)} - \sqrt{2} \hat{g} \lambda^{\dagger(a)} (\psi^\dagger T^{(a)} \phi) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

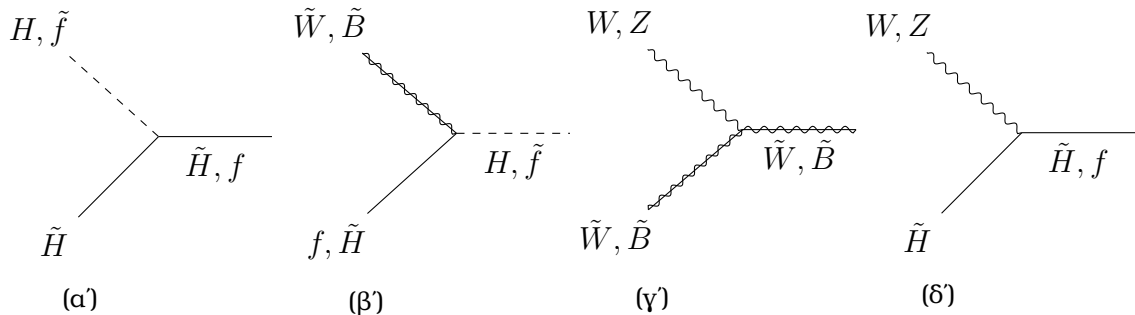
Η παραπάνω Λαγκρανζιανή αντιστοιχεί στις κορυφές που φαίνονται στο πρώτο Σχήμα. Τα μιγαδικά συζυγή των εκφράσεων αφορούν στον καθορισμό των συντελεστών και δεν θα



Σχήμα 4.2: Αλληλεπιδράσεις των Bosinos (ψ , λ)

μας απασχολήσουν ιδιαίτερα. Αυτό που θέλουμε να προσδιορίσουμε είναι όλες οι δυνατές αλληλεπιδράσεις.

Θεωρώντας τον συμβολισμό που έχουμε εισάγει, ας δούμε πως γίνονται πρακτικά τα παραπάνω διαγράμματα στο σωματιδιακό πλαίσιο του MSSM. Στο δεύτερο Σχήμα παρουσιάζονται όλες οι κορυφές που δύναται να σχηματιστούν για τα συγκεκριμένα σωματίδια. Δεν σημειώνουμε τα επιμέρους βέλη.



Σχήμα 4.3: Δυνατές κορυφές των Bosinos του MSSM

4.2 Διαγράμματα σκέδασης για το LSP

Αυτό που παρατηρούμε στα πειράματα (και γενικά η μορφή που έχουν τα σωματίδια στην πραγματικότητα) είναι οι καταστάσεις μάζας. Συνεπώς, αντί των διαγραμμάτων για τα Bosinos θέλουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα για τα Neutralinos και Charginos. Έχει ήδη αναφερθεί ο τρόπος με τον οποίο τα φορτισμένα Bosinos αναμειγνύονται μεταξύ τους για να δώσουν τα Charginos $\chi_1^\pm$ και $\chi_2^\pm$ και αντίστοιχα τα ουδέτερα για να δώσουν τα Neutralinos χ_1^0 , χ_2^0 , χ_3^0 και χ_4^0 .

Στο πλαίσιο της Σκοτεινής Ύλης μας ενδιαφέρουν -τουλάχιστον σε πρώτη ανάγνωση- μονάχα τα ουδέτερα Neutralinos και συγκεκριμένα το LSP. Για ευκολία -ακολουθώντας

την βιβλιογραφία- θα συμβολίζουμε το LSP ως σκέτο χ^0 , ή απλά χ .

$$\chi_1^0 \equiv \chi^0 \equiv \chi \quad (4.2.1)$$

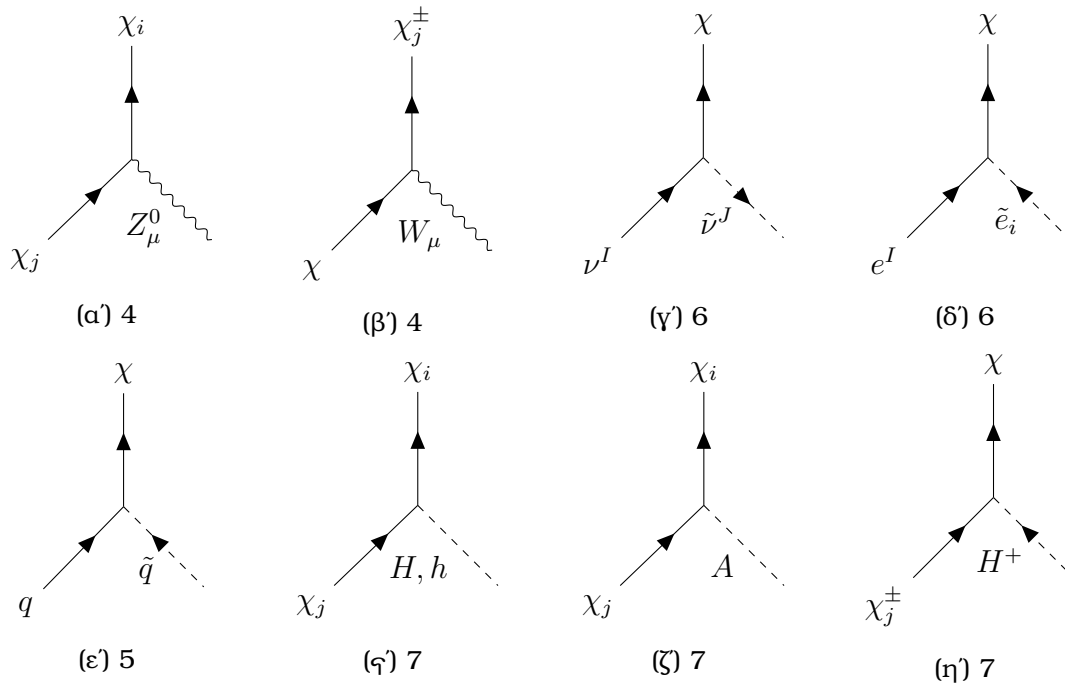
Γενικά, το LSP μπορεί να γραφεί ως:

$$\chi = a\tilde{B} + b\tilde{W}^3 + c\tilde{H}_d^0 + d\tilde{H}_u^0 \quad (4.2.2)$$

με τους συντελεστές να προσδιορίζονται κατάλληλα.

Για τους σκοπούς μας είναι καθαρότερο να δούμε τη μορφή που παίρνουν τα διαγράμματα όταν μεταχειριζόμαστε τις καταστάσεις μάζας. **Όλες** οι κορυφές που αφορούν στο MSSM, μαζί με τους συντελεστές τους, παρουσιάζονται εκτενώς στο Παράρτημα B.2 της δημοσίευσης [13]. Σταχυολογούμε τα διαγράμματα που αναφέρονται στα Neutralinos και ειδικότερα στο LSP ²⁶.

Σχεδιάζουμε το LSP με μια απλή γραμμή όπως οποιοδήποτε άλλο φερμιόνιο.

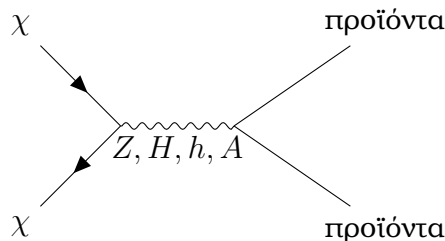


Σχήμα 4.4: Δυνατές κορυφές του LSP. Ο αριθμός κάτω από κάθε κορυφή δηλώνει το τμήμα του παραρτήματος B.2 της δημοσίευσης του Rosiek στο οποίο μπορούμε να βρούμε το αντίστοιχο διάγραμμα και τον συντελεστή. Ωστόσο τα πεδία στο Σχήμα ακολουθούν τον δικό μας συμβολισμό. Οι κορυφές ισχύουν και για τα υπόλοιπα Neutralinos, εμείς όμως ενδιαφερόμαστε μονάχα για το LSP, συνεπώς αποφεύγουμε τη χρήση επιπλέον δεικτών.

²⁶Στη Λαγκρανζιανή, αλλά και στα διαγράμματα της αναφερθείσας δημοσίευσης χρησιμοποιούνται οι ακόλουθοι συμβολισμοί, οι οποίοι διαφέρουν αρκετά από την σύμβαση της παρούσας εργασίας: χ_i^0 με $i = 1, 2, 3, 4$ και χ_i με $i = 1, 2$ για τα Neutralinos και Charginos, u^I και d^I με $I = 1, 2, 3$ για τον τύπο και την οικογένεια των quarks, e^I και ν^I με $I = 1, 2, 3$ για τα ηλεκτρονικά λεπτόνια και τα νετρίνα, U^i , D^i και L^i με $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ για τα squarks και τα ηλεκτρονικά sleptons αντίστοιχα, $\tilde{\nu}^I$ με $I = 1, 2, 3$ για τα sneutrinos. Όσον αφορά τα σωματίδια του Higgs: $H_i^\pm$ με $i = 1, 2$, όπου $H_1^\pm \equiv H^\pm$ και $H_2^\pm \equiv G^\pm$ για τα φορτισμένα και H_i^0 και A_i^0 με $i = 1, 2$, όπου $H_1^0 \equiv H$ και $H_2^0 \equiv h$ και $A_1^0 \equiv A$ και $A_2^0 \equiv G^0$ για τα ουδέτερα. Τις αλληλεπιδράσεις με τα μποζόνια Goldstone **δεν** θα τις θεωρήσουμε εδώ.

Έχοντας καταγράψει όλους τους όρους αλληλεπίδρασης που επιτρέπονται για το LSP μπορούμε πλέον να δούμε ποια είναι τα δυνατά διαγράμματα σκέδασης. Γενικά, για πρακτικούς σκοπούς μας ενδιαφέρουν οι εξαϋλώσεις και η αλληλεπίδραση με ένα quark.

- Ξεκινάμε, σε επίπεδο δέντρου, με τα διαγράμματα που έχουν δύο ευθείες συγκρουόμενα LSPs,



Σχήμα 4.5: "Καθαρή" εξαϋλωση LSP

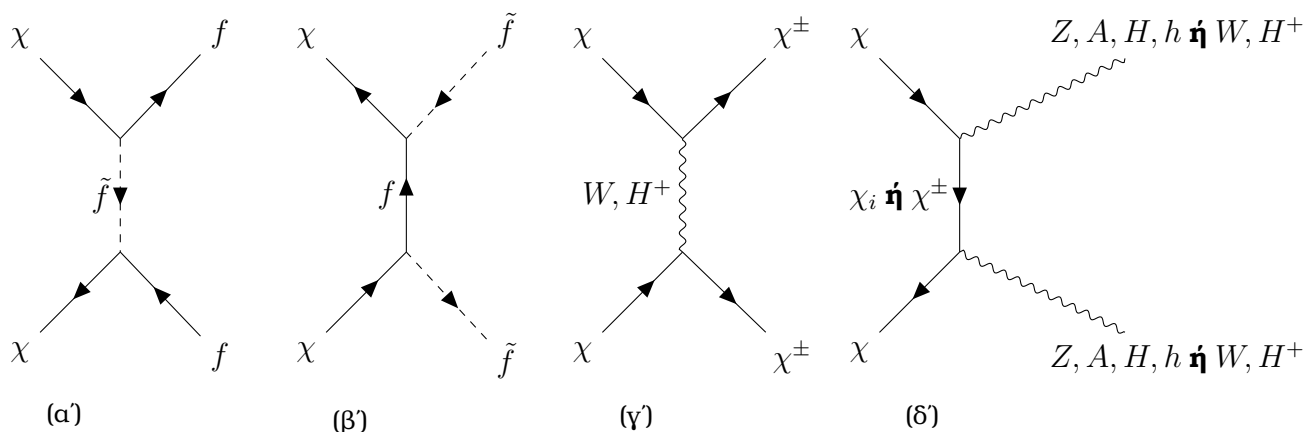
Τα προϊόντα στο δεξιό μέλος του σχήματος μπορούν να είναι δύο ή τρία σωματίδια ανάλογα με τις διαφορετικές ζεύξεις. Η πληθώρα αυτών των σωματιδίων-προϊόντων δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα. Η εξαϋλωση των χ είναι σημαντική όταν μελετάμε τους έμμεσους τρόπους ανίχνευσης της Σκοτεινής Ύλης, όπου και πάλι δεν μας ενδιαφέρουν τα προϊόντα της παραπάνω διαδικασίας, αλλά οι τελικές καταστάσεις που προκύπτουν από αυτά. Ωστόσο, στην άμεση ανίχνευση μπορεί να μας χρειαστούν κάποια διαγράμματα με **ακριβώς δύο** προϊόντα. Για το λόγο αυτό αναφέρουμε τις δυνατές περιπτώσεις ανάλογα με τον διαδότη.

$$Z \longrightarrow qq, \tilde{q}\tilde{q}, ll, \tilde{l}\tilde{l}, WW, H^-H^-, H^-h^-, H^-W, \chi^\pm\chi^\pm, \chi\chi \quad (4.2.3)$$

$$H, h \longrightarrow qq, \tilde{q}\tilde{q}, e^I e^I, \tilde{l}\tilde{l}, HH, hh, Hh, H^-H^-, \chi^\pm\chi^\pm, \chi\chi \quad (4.2.4)$$

$$A \longrightarrow qq, \tilde{q}\tilde{q}, e^I e^I, \tilde{e}^I \tilde{e}^I, H^-W, H^-H^-, \chi^\pm\chi^\pm, \chi\chi \quad (4.2.5)$$

- Τα μοναδικά, επιπλέον, διαγράμματα που μπορούμε να κατασκευάσουμε που να περιέχουν **δύο** LSPs είναι όσα προκύπτουν από τον συνδυασμό των διαγραμμάτων του Σχήματος 4:



Σχήμα 4.6: "Εξαϋλώσεις" LSP

Η ανίχνευση της Σκοτεινής Ύλης αποτελεί θέμα κομβικής σημασίας για τη μελέτη της, καθώς με το κατάλληλο ταίριασμα των μετρήσεων στα θεωρητικά μοντέλα είναι δυνατό να εξακριβωθεί η φύση της. Οι τρόποι παρατήρησης είναι, βασικά, δύο· η *άμεση* και η *έμμεση* ανίχνευση.

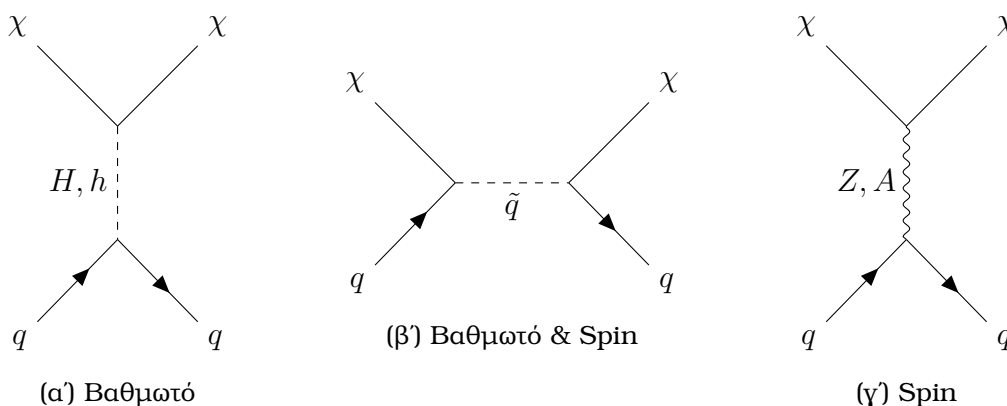
Κατά την **άμεση ανίχνευση** αναμένουμε ένα σωματίο σκοτεινής ύλης, φτάνοντας στην Γη, να αλληλεπιδράσει κατευθείαν με τον ανιχνευτή μας, ενώ κατά την **έμμεση ανίχνευση** προσπαθούμε να εντοπίσουμε τα προϊόντα που παράγονται από τις εξαϋλώσεις αυτών των σωματίων. Στην συνέχεια θα δούμε αναλυτικά πως υλοποιούνται αυτές οι διαδικασίες.

4.3 Άμεση ανίχνευση

Οι ανιχνευτές που χρησιμοποιούμε αποτελούνται από συνηθισμένη ύλη, ή διαφορετικά από πρωτόνια και νετρόνια. Θεωρούμε ότι η Σκοτεινή Ύλη απαρτίζεται εξ ολοκλήρου -ή τουλάχιστον στο μεγαλύτερο μέρος της- από LSP. Συνεπώς, για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής σε έναν ανιχνευτή θα μας απασχολήσουν τα διαγράμματα σκέδασης του LSP χ με τα quarks [23]. Οι σκεδάσεις από ηλεκτρόνια, ή άλλα σωματίδια μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες.

Γενικά, η αλληλεπίδραση ενός Neutralino με ένα quark δεν εξαρτάται μονάχα από αυτή καθ' εαυτή την αλληλεπίδραση, αλλά και από την θέση του quark στο νουκλεόνιο, καθώς και από τη θέση του νουκλεονίου στον πυρήνα. Ξεκινώντας, λοιπόν, από τα απλά διαγράμματα θα καταλήξουμε στις ολικές ενεργές διατομές για τον εκάστοτε πυρήνα.

Από τα Σχήματα 4 και 5 βλέπουμε ότι τρία είναι τα διαγράμματα που αφορούν στην ελαστική σκέδαση Neutralino-quark²⁷. Επειδή το ελαφρύτερο Neutralino είναι Majorana φερμιόνιο, θα το συμβολίζουμε με μια απλή γραμμή ακολουθώντας την βιβλιογραφία.



Σχήμα 4.7: Σκεδάσεις LSP-quark

Όπως μπορεί να δει κανείς εύκολα αν θεωρήσει τους συντελεστές των παραπάνω διαγραμμάτων, θα δει ότι γενικά οι σκεδάσεις του LSP μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες· στις *αλληλεπιδράσεις με σπιν* (axial-vector (spin) interactions), οι οποίες περιέχουν όρους γ_5 , και στις *βαθμωτές αλληλεπιδράσεις* (scalar interactions).

²⁷Είναι δυνατό να έχουμε διαγράμματα με διαδότη squark και στο κανάλι t. Το CP-odd A έχει σπιν 0, αλλά σχεδιάζεται έτσι για οικονομία χώρου.

4.3.1 Αλ/σεις εξαρτώμενες από το σπιν

• Με ευθύ, αν και μάλλον επίπονο, υπολογισμό των κατάλληλων ρευμάτων και διαδο-
τών μπορούμε να καταγράψουμε τα πλάτη μετάβασης των διαγραμμάτων του Σχήματος 7.
Γίνεται τότε φανερό ότι στην σκέδαση με σπιν συμμετέχουν τα διαγράμματα 7γ και μέρος
του 7β. Για διευκόλυνση ακολουθούμε -όπως και μεγάλο μέρος της βιβλιογραφίας- τον
συμβολισμό της δημοσίευσης [23]²⁸.

Το πλάτος, εφ' όσον αναφέρεται στο κομμάτι του σπιν, θα πρέπει να είναι της μορφής:

$$A = d_{qi}(\bar{\chi}\gamma^\mu\gamma_5\chi)(\bar{q}_i\gamma_\mu\gamma_5q_i) \quad (4.3.1)$$

όπου,

$$d_{qi} = -g^2 \frac{T_3^{(q_i)}}{4m_W^2} O_{00}''^R + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^6 \frac{(X'_{qij0})^2 + (W'_{qij0})^2}{m_{\tilde{q}_j}^2 - (m_\chi + m_{q_i})^2} \quad (4.3.2)$$

Να σημειώσουμε ότι ο πρώτος όρος προέρχεται από το μποζόνιο Z, ενώ ο δεύτερος απ' το squark $\tilde{q}$.²⁹ Επίσης, σε *όλες* τις εξισώσεις, το q αναφέρεται στον τύπο του quark (up ή down), ενώ το i στην γεύση.

• Κανονικά η δουλειά μας θα είχε τελειώσει εδώ, με τον υπολογισμό της ενεργού διατομής να ακολουθεί. Ωστόσο, προκειμένου να γίνει η παραπάνω σκέδαση, πρέπει πρώτα το Neutralino να βρεθεί στο περιβάλλον ενός πυρήνα, και αυτό περιπλέκει κάπως την κατάσταση.

Προτού φτάσουμε στο επίπεδο του πυρήνα είναι απαραίτητο να δούμε πως συμπεριφέρεται κάθε ένα από τα νουκλεόνια ξεχωριστά. Κάθε νουκλεόνιο, είτε είναι πρωτόνιο, είτε νετρόνιο, αποτελείται από τρία quarks τα οποία καλούνται **quarks σθένους**. Ωστόσο, τα γκλουόνια, που χαρακτηρίζουν τις αλληλεπιδράσεις στο εσωτερικό του νουκλεονίου, μπορούν να δημιουργούν εικονικά quarks, με αποτέλεσμα το σωματιδιακό περιεχόμενο του νουκλεονίου να αυξομειώνεται με τυχαίο τρόπο. Τα εικονικά αυτά σωματίδια αποτελούν την **θάλασσα των quarks**.

Συνεπώς, όχι μόνο δεν γνωρίζουμε με ακρίβεια τη θέση του quark με το οποίο αλληλεπιδρά ένα Neutralino, αλλά, επιπλέον, η αλληλεπίδραση αυτή μπορεί να γίνεται με ένα από τα εικονικά σωματίδια.

Παίρνουμε την μέση τιμή του ρεύματος των quarks στο νουκλεόνιο N [15], [23]:

$$\langle N | \bar{q}_i \gamma^\mu \gamma_5 q_i | N \rangle \stackrel{\text{def}}{=} 2s_\mu^{(N)} \Delta q_i^{(N)} \quad (4.3.3)$$

s_μ είναι το σπιν του νουκλεονίου N (πρωτόνιο ή νετρόνιο), ενώ το Δq_i είναι σταθερά που προσδιορίζεται για συγκεκριμένο είδος quark σε συγκεκριμένο είδος νουκλεονίου μέσω πειραμάτων Βαθείας Ανελαστικής Σκέδασης (DIS).

Το πρωτόνιο αποτελείται από τα uud quarks σθένους, ενώ το νετρόνιο από τα udd. Στη θάλασσα παράγονται όλα τα είδη των quarks, αλλά με διαφορετικές συχνότητες. Όπως είναι λογικό, περισσότερο συχνά (περίπου ίσες πιθανότητες) παράγονται τα τρία ελαφρύτερα quarks u, d και s. Επομένως, **σε πρώτη προσέγγιση**, μπορούμε να παραλείψουμε τα βαρύτερα c, b, t.

Άρα,

$$A = \sum_{q_i=u,d,s} d_{qi}(\bar{\chi}\gamma^\mu\gamma_5\chi)(\bar{N}s_\mu N)2\Delta q_i^{(N)}$$

²⁸ Αναλυτικές εκφράσεις των μεγεθών μπορούν να βρεθούν στο παράρτημα Α της αναφερθείσας δημοσίευσης.

²⁹ Στην βιβλιογραφία δεν υπολογίζονται τα διαγράμματα με διαδότη το μποζόνιο A.

και με μια μικρή αλλαγή στον συμβολισμό ($q_i \rightarrow q$) έχουμε,

$$A = (\bar{\chi} \gamma^\mu \gamma_5 \chi) (\bar{N} s_\mu N) \sum_{q=u,d,s} 2d_q \Delta q^{(N)} \quad (4.3.4)$$

• Το μόνο που έμεινε είναι να μιλήσουμε για ολόκληρο τον πυρήνα. Αρχικά, ακολουθώντας την βιβλιογραφία της Πυρηνικής Φυσικής, ορίζουμε τις ποσότητες:

$$a_p \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{q=u,d,s} \frac{d_q}{\sqrt{2}G_F} \Delta q^{(p)} \quad \textbf{και} \quad a_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{q=u,d,s} \frac{d_q}{\sqrt{2}G_F} \Delta q^{(n)} \quad (4.3.5)$$

• Όσα συμβαίνουν στον πυρήνα εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από το σπιν του. Είναι σύνηθες να παραμετροποιούμε το στοιχείο πίνακα του σπιν του πυρήνα με τις ποσότητες a_0 και a_1 , οι οποίες καλούνται αντίστοιχα ισοβαθμωτή (isoscalar) και ισοανυσματική (isovector),

$$a_0 \stackrel{\text{def}}{=} a_p + a_n \quad \textbf{και} \quad a_1 \stackrel{\text{def}}{=} a_p - a_n \quad (4.3.6)$$

Όπως λέει και το όνομά τους, οι ποσότητες αυτές μας δείχνουν κατά πόσο η συμπεριφορά του πυρήνα προσομοιάζει σε αυτή ενός βαθμωτού (σπιν 0), ή ενός ανύσματος (σπιν $\neq 0$).

• Αν **δεν υπάρχει** μεταφορά ορμής από το προσπίπτον σωματίο στον πυρήνα, τότε, όπως είναι προφανές, το στοιχείο πίνακα του σπιν του πυρήνα είναι απλώς ο μέσος όρος των σπιν των νουκλεονίων. Στην περίπτωση, όμως, που **υπάρχει** μεταφορά ορμής, το σωματίο δεν αλληλεπιδρά στο περιβάλλον ενός "τακτοποιημένου" πυρήνα -όπως προηγουμένως- αφού, σε μια απλοϊκή εικόνα, τα νουκλεόνια έχουν αλλάξει θέση -καθώς βρίσκονται σε κίνηση- εξ αιτίας της ενέργειας που εναποθέτει το προσπίπτον σωματίο. Ο μέσος όρος των σπιν δεν αρκεί. Η επιφερόμενη αλλαγή εξαρτάται από τον τρόπο που τακτοποιείται αυθόρμητα ο πυρήνας, δηλαδή από τον παράγοντα δομής του.

Τώρα, η κατάσταση σπιν του πυρήνα συναρτίζεται της μεταφερόμενης ορμής $|\vec{q}|$ δίνεται από τη σχέση:

$$S(|\vec{q}|) = a_0^2 S_{00}(|\vec{q}|) + a_1^2 S_{11}(|\vec{q}|) + a_0 a_1 S_{01}(|\vec{q}|) \quad (4.3.7)$$

όπου S_{ij} είναι επιμέρους παράγοντες δομής που δίνονται πειραματικά.

• Όπως γνωρίζουμε, η διαφορική ενεργός διατομή είναι,

$$\frac{d\sigma}{d|\vec{q}|^2} \sim \frac{|A|^2}{u_{rel}^2} \quad (4.3.8)$$

πράγμα που σημαίνει ότι θα τετραγωνιστεί ο όρος $\bar{N} s_\mu N$ και επομένως, εκτός από το στοιχείο πίνακα του σπιν στο τετράγωνο θα πάρουμε και το τετράγωνο του παράγοντα δομής - $F^2(|\vec{q}|)$.

Ακόμα, το άθροισμα που περιέχεται στο A θα δώσει όρους $\sim G_F^2 \cdot f(a_0^2, a_1^2, a_0 a_1)$. Συγκρίνοντας, παρατηρούμε ότι, τελικά, η διαφορική ενεργός διατομή θα είναι ευθέως ανάλογη της συνάρτησης $S(|\vec{q}|)$, η οποία, εμφανώς, θα συνδέεται με τον παράγοντα δομής. Όταν η μεταφερόμενη ορμή είναι 0, πρέπει ο παράγοντας δομής να μην συμμετέχει. Αυτό ρυθμίζεται αν θέσουμε:

$$F^2(0) = 1 \Rightarrow F^2(|\vec{q}|) = \frac{S(|\vec{q}|)}{S(0)} \quad (4.3.9)$$

Υστερα από μερικές πράξεις, που μπορεί να βρει κανείς στην βιβλιογραφία, βρίσκουμε,

$$\frac{d\sigma}{d|\vec{q}|^2} = \frac{8}{\pi u_{rel}^2} \Lambda^2 G_F^2 J(J+1) F^2(|\vec{q}|) \quad (4.3.10)$$

όπου,

$$\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{J} [a_p \langle S_p \rangle + a_n \langle S_n \rangle] \quad (4.3.11)$$

είναι ένας όρος που κατά κύριο λόγο υπολογίζεται μέσω πειραμάτων Πυρηνικής Φυσικής.

• Ο υπολογισμός της ολικής ενεργού διατομής δεν αποτελεί τετριμμένο εγχείρημα καθ' ότι θα πρέπει να γνωρίζουμε την ακριβή μορφή του παράγοντα δομής προκειμένου να γίνει η ολοκλήρωση.

Ευτυχώς, στο Καθιερωμένο Κοσμολογικό Μοντέλο η Σκοτεινή Ύλη είναι ψυχρή³⁰ - δηλαδή μη σχετικιστική- και άρα κατά την επαφή της με κάποιον πυρήνα **δεν υπάρχει μεταφορά ορμής**. Συνεπώς, ο παράγοντας μορφής είναι μονάδα και άρα η ολοκλήρωση δίνει εύκολα:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \int_0^{4m_r^2 u_{rel}^2} \frac{d\sigma(|\vec{q}|=0)}{d|\vec{q}|^2} d|\vec{q}|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \sigma_{0,SD} &= \frac{32}{\pi} \Lambda^2 G_F^2 J(J+1) m_r^2 \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

όπου m_r είναι η ανηγμένη μάζα του LSP και του πυρήνα:

$$m_r = \frac{m_\Pi m_\chi}{m_\Pi + m_\chi} \quad (4.3.13)$$

Γενικά, λοιπόν, αν τυχόν θέλουμε να μελετήσουμε περιπτώσεις μη-ψυχρής Σκοτεινής Ύλης, έχουμε:

$$\left. \frac{d\sigma}{d|\vec{q}|^2} \right|_{SD} = \frac{\sigma_{0,SD}}{4m_r^2 u_{rel}^2} F^2(|\vec{q}|) \quad (4.3.14)$$

4.3.2 Βαθμωτές αλληλεπιδράσεις

Στις σκεδάσεις όπου το σπιν **δεν** παίζει ρόλο -και άρα μπορούμε να τις χαρακτηρίσουμε *βαθμωτές*- συμμετέχουν τα διαγράμματα 7α και μέρος του 7β. Οι δυνατοί διαδότες, επομένως, σε αυτή την περίπτωση είναι το μεγάλο και μικρό Higgs, είτε κάποιο squark.

Εφ' όσον η αλληλεπίδραση καλείται βαθμωτή, είναι λογικό να αναμένουμε ότι το πλάτος της θα έχει τη μορφή:

$$A = a_{3i} (\bar{\chi}\chi) (\bar{q}q) \quad (4.3.1)$$

Αν και η σχέση αυτή φαίνεται απλούστερη από την αντίστοιχη για το σπιν, η πραγματικότητα μας διαψεύδει. Ο λόγος είναι ότι στη βαθμωτή αλληλεπίδραση θα πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας και διαγράμματα ενός βρόχου που προκύπτουν από την ύπαρξη των γκλουονίων.

³⁰Σε κάποια μοντέλα η Σκοτεινή Ύλη μπορεί να είναι *θερμή* (warm), όμως και πάλι οι σχετικιστικές διορθώσεις είναι ελάχιστες.

Ο συντελεστής του πλάτους δίνεται αναλυτικά στην δημοσίευση³¹ [18].

- Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, θα πρέπει να υπολογίσουμε την μέση τιμή του ρεύματος των quarks σε κάθε νουκλεόνιο N :

$$\langle N | \bar{q}q | N \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_N}{m_q} f_{Tq}^{(N)} \quad (4.3.2)$$

όπου, φυσικά, οι σταθερές f υπολογίζονται για συγκεκριμένο quark, σε συγκεκριμένο νουκλεόνιο μέσω πειραμάτων Βαθείας Ανελαστικής Σκέδασης (DIS).

Ακολουθώντας την γενική βιβλιογραφία μπορούμε να γράψουμε,

$$\langle N | m_q \bar{q}q | N \rangle = m_N f_{Tq}^{(N)} \equiv m_q B_q^{(N)} \quad (4.3.3)$$

Τελικά, το πλάτος θα γραφτεί,

$$A = (\bar{\chi}\chi)(\bar{N}N) \sum_{q=u,d,s,c,b,t} a_{3q} \frac{m_N}{m_q} f_{Tq}^{(N)} \quad (4.3.4)$$

Η διαφορά εδώ με την περίπτωση του σπιν είναι ότι δεν μπορούμε να αγνοήσουμε τα βαρύτερα quarks εξ αιτίας των ισχυρών αλληλεπιδράσεων των γκλουονίων.

- Προκειμένου να μπορέσουμε να μιλήσουμε με μεγαλύτερη ευκολία ορίζουμε τις ποσότητες,

$$\frac{f_N}{m_N} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{q=u,d,s} f_{Tq}^{(N)} \frac{a_{3q}}{m_q} + \frac{2}{27} f_{TG}^{(N)} \sum_{q=c,b,t} \frac{a_{3q}}{m_q} \quad (4.3.5)$$

όπου,

$$f_{TG}^{(N)} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \sum_{q=u,d,s} f_{Tq}^{(N)} \quad (4.3.6)$$

- Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε τον πολύ σημαντικό για την Πυρηνική Φυσική Σ-όρο του π-νουκλεονίου (π-nucleon Σ term), ο οποίος μας δίνει χρήσιμες πειραματικές πληροφορίες [29]:

$$\sigma_{\pi N} \equiv \Sigma = \frac{1}{2}(m_u + m_d)(B_u^{(N)} + B_d^{(N)}) \quad (4.3.7)$$

- Προφανώς, στην έκφραση του πλάτους θα πρέπει να εμφανίζονται και οι δύο συντελεστές f_p και f_n του πρωτονίου και νετρονίου αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα, οι συντελεστές αυτοί θα πρέπει να εμφανίζονται τόσες φορές, όσες και τα αντίστοιχα νουκλεόνια. Δηλαδή θα έχουμε κάτι $\sim Z f_p + (A - Z) f_n$.

- Η βαθμωτή περίπτωση -όπως και αυτή με το σπιν- διαφέρει ως προς τον παράγοντα δομής του πυρήνα ανάλογα με το αν έχουμε, ή όχι, μεταφορά ορμής από το προσπίπτον σωματίο. Προς διευκόλυνση των πράξεων, είναι προτιμότερο να γράψουμε τον παράγοντα δομής συναρτήσει του,

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\vec{q}|^2}{2m_\Pi} \quad (4.3.8)$$

με τον νορμαλισμό $F(0) = 1$.

³¹Σε αντίθεση με την χρήση του i στην παρούσα εργασία, στην αναφερθείσα δημοσίευση -και κατά συνέπεια και στην αυτή παράγραφο- το i δηλώνει τον τύπο του quark (up ή down). Μπορεί τώρα ο συντελεστής a να μην φέρει δείκτη q , αλλά, φυσικά, η άθροιση ως προς όλα τα quarks εννοείται.

Για τον υπολογισμό της ενεργού διατομής πρέπει να υπολογίσουμε το *τετράγωνο* του πλάτους A και επομένως, έπειτα από λίγες πράξεις, είναι λογικό να καταλήξουμε ότι,

$$\frac{d\sigma}{d|\vec{q}|^2} = \frac{1}{\pi u_{rel}^2} [Zf_p + (A - Z)f_n]^2 F^2(Q) \quad (4.3.9)$$

• Στην ευνοϊκή περίπτωση της ψυχρής Σκοτεινής Ύλης **δεν υπάρχει μεταφορά ορμής** και άρα, η ολική ενεργός διατομή θα είναι :

$$\sigma_0 = \int_0^{4m_r^2 u_{rel}^2} \frac{d\sigma(|\vec{q}|=0)}{d|\vec{q}|^2} d|\vec{q}|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{0,SI} = \frac{4m_r^2}{\pi u_{rel}^2} [Zf_p + (A - Z)f_n]^2} \quad (4.3.10)$$

Γενικά, αν αναφερθούμε σε περιπτώσεις μη-ψυχρής Σκοτεινής Ύλης, έχουμε :

$$\boxed{\left. \frac{d\sigma}{d|\vec{q}|^2} \right|_{SI} = \frac{\sigma_{0,SI}}{4m_r^2 u_{rel}^2} F^2(Q)} \quad (4.3.11)$$

4.3.3 Ανιχνευτές

Έχοντας κάνει τη θεωρητική ανάλυση σχετικά με την ενεργό διατομή της Σκοτεινής Ύλης, θα πρέπει να αναρωτηθούμε πώς θα την ανιχνεύσουμε. Ανεξάρτητα από το ποιος είναι ο συγκεκριμένος μηχανισμός, αυτό που λαμβάνουμε κάθε φορά από έναν επίγειο ανιχνευτή είναι ένα νούμερο, το οποίο παριστά το πλήθος των γεγονότων που έχουν καταγραφεί σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Ποιο είναι, λοιπόν, το αναμενόμενο πλήθος; Αν γνωρίζουμε τι περιμένουμε, τότε το μόνο που μένει είναι να συγκρίνουμε την πρόβλεψή μας με τα πειραματικά δεδομένα. Αν υπάρχει συμφωνία για μεγάλο πλήθος συγκρίσεων, τότε κατά πάσα πιθανότητα η θεωρία μας έχει επιβεβαιωθεί.

Το πλήθος (ο ρυθμός) των γεγονότων μετράται για συγκεκριμένη μάζα ανιχνευτή σε συγκεκριμένο χρόνο και προφανώς θα εξαρτάται από την ενεργό διατομή, την ταχύτητα και την τοπική πυκνότητα των σωματιδίων Σκοτεινής Ύλης. Χονδρικά μπορούμε να γράψουμε [23]:

$$\boxed{R \approx \sigma \frac{\rho_{DM} \langle u_{rel} \rangle}{m_{\Pi} m_{\chi}}} \quad \left[\frac{\text{number}}{\text{kg} \cdot \text{day}} \right] \quad (4.3.1)$$

• Προκειμένου ο Γαλαξίας μας να μπορέσει να "συγκρατήσει" τη μάζα του θα πρέπει να περιβάλλεται από μια άλω Σκοτεινής Ύλης. Η βασική ιδέα εδώ είναι ότι, εφ' όσον τα σκοτεινά σωματίδια δεν κάθονται ακίνητα, μπορεί κάποια από αυτά να κινούνται και στον ενδιάμεσο χώρο του Γαλαξία. Είναι φανερό, λοιπόν, πως η πυκνότητα της Σκοτεινής Ύλης -και εν γένει η κατανομή της στον Γαλαξία- παίζει καθοριστικό ρόλο στην ανίχνευσή της.

• Αυτό που χρειαζόμαστε είναι η σχετική ταχύτητα μεταξύ του στόχου και του σωματιδίου Σκοτεινής Ύλης. Οι ταχύτητες των σωματιδίων **δεν** είναι απαραίτητα ίδιες και γενικά θα δίνονται από μια *συνάρτηση πυκνότητας κατανομής ταχυτήτων* $f(u)d^3u$.

Μπορούμε να ολοκληρώσουμε την συνάρτηση αυτή ως προς τις γωνίες και άρα να μεταχειριζόμαστε μια καινούρια συνάρτηση $g(u)du$ που εξαρτάται καθαρά από το μέτρο της ταχύτητας. Φυσικά, η συνάρτηση είναι κανονικοποιημένη στη μονάδα.

Η μέση τιμή των ταχυτήτων θα είναι η ολοκλήρωση στην ποσότητα $ug(u)du$, ενώ η ελάχιστη ταχύτητα που μπορεί να έχει ένα σκοτεινό σώματιο είναι,

$$u_{min} = \sqrt{\frac{Qm_{\Pi}}{2m_r^2}} \quad (4.3.2)$$

• Είναι σχετικά βολικό να εκφράσουμε την μεταφερόμενη ορμή Q συναρτήσει της ταχύτητας. Οπότε:

$$Q = \frac{|\vec{q}|^2}{2m_{\Pi}} = \frac{2m_r^2 u^2 (1 - \cos\theta^*)}{2m_{\Pi}} = \frac{m_r^2 u^2 (1 - \cos\theta^*)}{m_{\Pi}} \quad (4.3.3)$$

με θ^* να είναι η γωνία σκέδασης στο κέντρο μάζας.

• Ο διαφορικός ρυθμός γεγονότων -έχοντας ολοκληρώσει στις γωνίες- γράφεται:

$$\begin{aligned} dR &= \frac{\rho_{DM}}{m_{\Pi}m_{\chi}} u f(u) du \frac{d\sigma}{d|\vec{q}|^2} d|\vec{q}|^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{dR}{dQ} &= \frac{\rho_{DM}\sigma_0}{2m_r^2 m_{\chi}} F^2(Q) \int_{u_{min}}^{\infty} \frac{g(u)}{u} du \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

• Το αποτέλεσμα μπορεί να πάρει μια πολύ πιο εύχρηστη μορφή αν ορίσουμε την συνάρτηση,

$$T(Q) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2} u_{\odot} \int_{u_{min}}^{\infty} \frac{g(u)}{u} du \quad (4.3.5)$$

η οποία εξαρτάται από την κατανομή ταχυτήτων της Σκοτεινής Ύλης του Γαλαξία μας. Η σταθερά $u_{\odot} \simeq 230 \text{ km/s}$ είναι η ταχύτητα του Ήλιου (άρα και της Γης) γύρω από το γαλαξιακό κέντρο.

Τότε,

$$\frac{dR}{dQ} = \frac{\rho_{DM}\sigma_0}{\sqrt{\pi}u_{\odot}m_r^2 m_{\chi}} F^2(Q) T(Q) \quad (4.3.6)$$

όπου, βέβαια, η ενεργός διατομή και ο παράγοντας δομής συμπληρώνονται ανάλογα με το είδος της σκέδασης που έχουμε. Για τον ολικό ρυθμό λαμβάνουμε υπ' όψιν μας και την ενέργεια κατωφλίου του ανιχνευτή,

$$R = \int_{E_T}^{\infty} \frac{dR}{dQ} dQ \quad (4.3.7)$$

• Κλείνοντας οφείλουμε να παρατηρήσουμε ορισμένες τεχνικές λεπτομέρειες:

• Για πιο ακριβείς μετρήσεις θα πρέπει στους υπολογισμούς μας να συμπεριλάβουμε και τη σχετική ταχύτητα της Γης ως προς τον Ήλιο. Συνεπώς αντί για την ταχύτητα u θα χρησιμοποιούμε την

$$u' = u - u_{\oplus} \quad (4.3.8)$$

- Αν προσέξουμε τις σχέσεις για τις ενεργές διατομές θα δούμε ότι,
 - για μαζικό αριθμό $A < 30$ είναι $\sigma_{0,SD} > \sigma_{0,SI}$
 - ενώ για μαζικό αριθμό $A > 30$ είναι $\sigma_{0,SD} < \sigma_{0,SI}$.
- Γενικά, καθαρότερες μετρήσεις φαίνεται να έχουμε για πυρήνες με $A > 28$ και έτσι, συχνά χρησιμοποιούνται στοιχεία όπως το Γερμάνιο και το Ιώδιο.

4.4 Έμμεση ανίχνευση

Σίγουρα η άμεση ανίχνευση, εφ' όσον δώσει θετικά αποτελέσματα, μπορεί να προσφέρει μια ευθεία επιβεβαίωση της θεωρίας της υπερσυμμετρικής Σκοτεινής Ύλης, ωστόσο οι πιθανότητες επιτυχίας δεν είναι οι καλύτερες δυνατές. Με την άμεση ανίχνευση έχουμε έναν τρόπο για να ανακαλύψουμε τα σκοτεινά σωματίδια. Αντίθετα, αν επικεντρωθούμε στην έμμεση ανίχνευση θα δούμε ότι υπάρχουν *τρία* δυνατά μέτωπα στα οποία μπορούμε να "πολεμήσουμε", οπότε, υπ' αυτή την έννοια, βελτιώνουμε τις πιθανότητές μας³².

Ανιχνεύουμε την Σκοτεινή Ύλη μέσω των σωματιδίων που παράγονται από την εξαϋλωση των LSPs. Όλα τα δυνατά διαγράμματα εξαϋλωσης φαίνονται στα σχήματα 4 και 5 αυτού του κεφαλαίου. Για κάθε ένα από τα εικονιζόμενα διαγράμματα να σημειώσουμε ότι μπορεί να έχουμε σκέδαση και σε διαφορετικό κανάλι. Για παράδειγμα, δείχνουμε τα t -κανάλια, αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχουν και τα αντίστοιχα u -κανάλια. Σε πρώτη ανάγνωση, πάντως, οι λεπτομέρειες των εξαϋλώσεων αυτών -όπως είναι ο διαδότης- δεν μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα. Μάλιστα, δεν μας αφορούν καν οι εξαϋλώσεις σε ασταθή μποζόνια και άλλα, αφού αυτά θα διασπασθούν, ή θα αδρονοποιηθούν, ώστε τελικά να αναγνωρίζουμε τρεις κατηγορίες προϊόντων του Καθιερωμένου Προτύπου:

- Εξαϋλωση σε φωτόνια
- Εξαϋλωση σε νετρίνα
- Εξαϋλωση σε αντιύλη (ποζιτρόνια, αντιπρωτόνια)

4.4.1 Ανάλυση σε μερικά κύματα

Όπως και σε κάθε άλλη φορά, το πρώτο πράγμα που πρέπει να γνωρίζουμε είναι η ενεργός διατομή της διαδικασίας που μελετάμε. Επειδή μας ενδιαφέρουν τα προϊόντα διάσπασης των προϊόντων των εξαϋλώσεων, είναι χρήσιμο να εφαρμόσουμε μια πιο γενική ανάλυση που θα μας γλιτώσει από τις πολλές λεπτομέρειες.

Συνήθως πρακτική είναι να αναλύσουμε το προσπίπτον κύμα-σωματίδιο σε κύματα συγκεκριμένης ορμής· με άλλα λόγια, να αναλύσουμε σε μερικά κύματα. Κάθε κύμα συγκεκριμένου κβαντικού αριθμού l σκεδάζεται με διαφορετικό τρόπο από τον στόχο. Αυτό είναι λογικό, αν σκεφτούμε ότι η παράμετρος κρούσης b και η ορμή k είναι ανάλογες του αριθμού l ,

$$kb_{max} \sim l_{max} \quad (4.4.1)$$

Η ανάλυση σε μερικά κύματα είναι ακριβής για όλες τις ενέργειες, αλλά ιδιαίτερα για τις χαμηλές. Τώρα, τα σκοτεινά σωματίδια είναι ψυχρά, επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συγκεκριμένη μέθοδο με ασφάλεια. Μάλιστα, τα σωματίδια "παγώνουν στις

³²Φυσικά, τα πειραματικά δεδομένα -ή η δυνατότητα κατασκευής ανιχνευτών, ή οτιδήποτε άλλο- μπορεί να αποδείξουν ότι η έμμεση ανίχνευση είναι απελπιστικά ελλιπής σε σχέση με την άμεση. Παρόλα αυτά, το επιχείρημα παραμένει· η έμμεση ανίχνευση μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε το θέμα της Σκοτεινής Ύλης από τρεις διαφορετικές πλευρές.

θέσεις τους” (**freeze-out**) όταν η παράμετρος $y \sim \frac{1}{23}$, όπου

$$y \stackrel{\text{def}}{=} \frac{T}{m_\chi} \sim \frac{u_{rel}^2}{6} \quad (4.4.2)$$

με τη σχετική ταχύτητα εδώ να είναι φυσικά η ταχύτητα μεταξύ των LSPs. T είναι η θερμοκρασία του Σύμπαντος.

Για την Υπερσυμμετρική Σκοτεινή Ύλη που μελετάμε, η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται και επιπλέον $y \ll 1$. Επομένως, τα σωμάτια χ κινούνται εξαιρετικά μη σχετικιστικά και άρα για την περιγραφή των συγκρούσεών τους αρκούν τα s και p κύματα (s-waves, p-waves),

$$\sigma u_{rel} = a + by + \dots \approx a + bu_{rel}^2 + O(u_{rel}^4) \quad (4.4.3)$$

◇ Γενικά, οι εξαυλώσεις στο μοντέλο που μελετάμε είναι s-κύματα και άρα μας απασχολεί ο συντελεστής a , ο οποίος είναι

$$a \sim \frac{m_f^2}{m_{SUSY}^4} \quad (4.4.4)$$

όπου m_f είναι η μάζα του προϊόντος της εξαύλωσης (με τα φερμιόνια να είναι συνηθέστερα).

4.4.2 Φωτόνια

Η πρώτη ένδειξη Σκοτεινής Ύλης είναι η περίσσεια φωτονίων [16]. Λόγω των σκοτεινών σωματιδίων, φωτόνια μπορούν να παραχθούν με τρεις τρόπους³³

- **Πρωτογενώς, α)** ως άμεσα προϊόντα της εξαύλωσης δύο LSP ($2\chi \rightarrow 2\gamma, Z\gamma$), ή **β)** ως έμμεσα προϊόντα κατόπιν διάσπασης ($2\chi \rightarrow \dots \rightarrow \gamma$).

- **Δευτερογενώς**, μέσω της Αντίστροφης Σκέδασης Compton (Inverse Compton Scattering - ICS). Τα LSPs εξαυλώνονται σε ηλεκτρόνια και ποζιτρόνια, τα οποία με τη σειρά τους δίνουν ζεύγος φωτονίων ($2\chi \rightarrow e^+e^- \xrightarrow{\text{ICS}} 2\gamma$).

Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να προσδιορίσουμε τη ροή της ακτινοβολίας που αναμένουμε να κατευθυνθεί προς την Γη. Αν γνωρίζουμε αυτή την ποσότητα -καθώς και άλλες ανιχνευτικές παραμέτρους που μπορεί να επηρεάσουν, τότε μπορούμε να τη συγκρίνουμε με τις μετρήσεις μας και να συμπεράνουμε αν έχουμε ανίχνευση ή όχι.

Η ροή δίνεται από τη σχέση:

$$\left. \frac{d\Phi_\gamma}{dE_\gamma} \right|_{(E_\gamma)} = \left. \frac{d\Phi_\gamma}{dE_\gamma} \right|_{\text{πρωτ}} + \left. \frac{d\Phi_\gamma}{dE_\gamma} \right|_{\text{δευτ}} \quad (4.4.1)$$

και, βέβαια, ολοκληρώνουμε ως,

$$\Phi_\gamma(E_{th}) = \int_{E_{th}}^{m_\chi} dE_\gamma \frac{d\Phi_\gamma}{dE_\gamma}(E_\gamma) \quad (4.4.2)$$

³³Υπάρχει και ακτινοβολία *σύγχροτρου* προερχόμενη από τα ζεύγη e^+e^- , αλλά η συνεισφορά της είναι αμελητέα. Μια ακόμη -γενικά, επίσης αμελητέα- συνεισφορά μπορεί να προέλθει από άγνωστες διαδικασίες, από εξωγαλαξιακές πηγές.

* Για την **πρωτογενή** ακτινοβολία έχουμε,

$$\left. \frac{d\Phi_\gamma}{d\Omega dE_\gamma} \right|_{\text{πρωτ}} = \frac{1}{2} \frac{R_\odot}{4\pi} \frac{1}{m_\chi^2} \rho_0^2 J \sum_k \frac{dN_\gamma^{(k)}}{dE_\gamma} \langle \sigma u \rangle_k \quad (4.4.3)$$

όπου $R_\odot$ είναι η απόσταση του Ήλιου από το γαλαξιακό κέντρο και ρ_0 είναι η τοπική πυκνότητα Σκοτεινής Ύλης³⁴. Ακόμα είναι,

$$J = \frac{1}{R_\odot \rho_0^2} \int_{los} \rho_{DM}^2 ds \quad (4.4.4)$$

με την ολοκλήρωση να γίνεται σε ολόκληρο το οπτικό πεδίο (**light of sight**).

Ο όρος του αθροίσματος αναφέρεται στο φάσμα των φωτονίων που παράγονται κατά την εξαϋλωση στο κανάλι με τελική κατάσταση την k (δηλαδή μπορεί για παράδειγμα το k να αναφέρεται στην κατάσταση $Z\gamma$ κ.τ.λ.).

* Για την **δευτερογενή** ακτινοβολία έχουμε,

$$\left. \frac{d\Phi_\gamma}{d\Omega dE_\gamma} \right|_{\text{δευτ}} \equiv \left. \frac{d\Phi_\gamma}{d\Omega dE_\gamma} \right|_{\text{ICS}} = \frac{1}{E_\gamma} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{m_\chi^2} \int_{m_e}^{m_\chi} dE_e \sum_k \frac{dN_e^{(k)}}{dE}(E_e) \cdot \langle \sigma u \rangle_k \cdot J_{ICS}(E_\gamma, E_e, \theta) \quad (4.4.5)$$

όπου E_γ είναι η ενέργεια του παραγόμενου φωτονίου και E_e η αρχική ενέργεια του ηλεκτρονίου ή του ποζιτρονίου (ανάλογα με την περίπτωση). Το άθροισμα έχει την ίδια έννοια με αυτό της πρωτογενούς ακτινοβολίας, μόνο που εδώ συμπεριλαμβάνουμε και τον συντελεστή εκπομπής J_{ICS} .

Είναι,

$$J_{ICS}(E_\gamma, E_e, \theta) = \int_{los} ds \rho_{DM}^2 \int_{m_e}^{E_e} dE \frac{\sum_a P_{ICS}^{(a)}(E, E_e, r)}{b(E, r)} \tilde{J}(E, E_e, r) \quad (4.4.6)$$

Η εξάρτηση της πυκνότητας της Σκοτεινής Ύλης είναι $\rho_{DM} = \rho_{DM}(r)$ και βέβαια $r = r(s, \theta)$. P_{ICS} είναι η ισχύς των φωτονίων λόγω του ICS και το άθροισμα τρέχει πάνω σε όλα τα δυνατά υπόβαθρα (CMB ακτινοβολία, ακτινοβολία αστερών στο γαλαξιακό επίπεδο, υπέρυθρη ακτινοβολία λόγω της επανασκέδασης του φωτός από τη σκόνη). Η συνάρτηση b είναι ο παράγοντας απώλειας ενέργειας. Η ποσότητα $\tilde{J}$ ονομάζεται *γενικευμένη συνάρτηση της άλω (generalized halo function)* και μπορεί να βρεθεί στην βιβλιογραφία για διαφορετικές περιπτώσεις.

4.4.3 Νετρίνα

Τα νετρίνα³⁵ οφειλόμενα στην Σκοτεινή Ύλη προέρχονται κυρίως από τον Ήλιο και σε μικρότερο βαθμό από την Γη [17].

Μέσα στον Γαλαξία μας -αναλόγως, βέβαια, και με τη συγκεκριμένη πυκνότητα κατανομής- κάποια από τα σκοτεινά σωμάτια μπορεί να έχουν -ή να αποκτούν- τροχιές που διέρχονται από το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, ή της Γης [17]. Τις περισσότερες φορές, τα σωμάτια

³⁴Το προφίλ της Σκοτεινής Ύλης είναι ένα πολύ σημαντικό θέμα που μένει να μελετηθεί. Αν η πραγματική κατανομή της Σκοτεινής Ύλης είναι διαφορετική από την αναμενόμενη, τότε είναι πιθανό να υπάρξουν δραματικές αλλαγές στην κατανόηση των μετρήσεών μας.

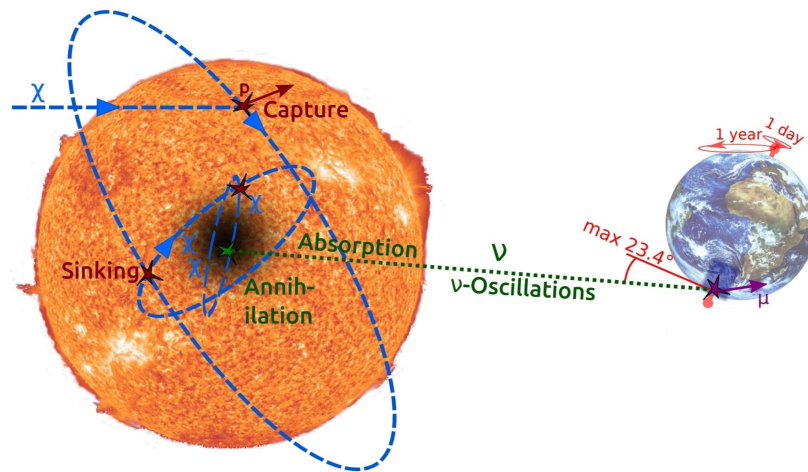
³⁵Το θέμα αυτό θα αναλυθεί περισσότερο σε επόμενη ενότητα.

αυτά δεσμεύονται από το εκάστοτε πεδίο και επομένως αναγκάζονται να σκεδαστούν στους πυρήνες που εμπεριέχονται στον Ήλιο ή τη Γη. Σε αυτό το σημείο, λοιπόν, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τις σχετικές ενεργές διατομές που αναλύσαμε στην άμεση ανίχνευση.

Επιπλέον σκεδάσεις ακολουθούν την αρχική και έτσι τα LSPs χάνουν ενέργεια με αποτέλεσμα να **μην** μπορούν να ξεπεράσουν την ταχύτητα διαφυγής και τελικά να εγκλωβιστούν στο εσωτερικό του Ήλιου, ή της Γης. Προφανώς, ο εγκλωβισμός αυτός θα είναι ισχυρότερος στον Ήλιο.

Τα εγκλωβισμένα σωματίδια φτάνουν κάποια στιγμή σε θερμική ισορροπία στο κέντρο του ουρανίου σώματος. Στην αρχή δεν συμβαίνουν αρκετές εξαυλώσεις μεταξύ των LSPs, όσο όμως περνάει ο καιρός, όλο και περισσότερα σκοτεινά σωματίδια παγιδεύονται στο ουράνιο σώμα. Η αύξηση του πληθυσμού έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της πιθανότητας αλληλεπίδρασης. Τελικά, λόγω της θερμικής ισορροπίας που επέρχεται λαμβάνουμε έναν, κατά βάση, σταθερό ρυθμό εξαύλωσης.

Σχηματικά έχουμε την εικόνα:



Σχήμα 4.8: Το μοντέλο εργασίας. Εικόνα από: [32], σελ. 16.

- Το πλήθος των σκοτεινών σωματιών σε θερμική ισορροπία μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου ως,

$$\frac{dN_{therm}}{dt} = C - C_E N - C_A N^2 \quad (4.4.1)$$

όπου C είναι ο ρυθμός δέσμησης (capture rate), C_E είναι ο ρυθμός εξατμησης (evaporation rate) και C_A είναι ο ρυθμός εξαύλωσης (annihilation rate).

Ο ρυθμός εξατμησης είναι σημαντικός μόνο για σκοτεινά σωματίδια με μάζα $m_\chi \leq 3\text{GeV}$. Επομένως στο μοντέλο μας (όπου $m_\chi \sim 500\text{GeV}$) μπορούμε με μεγάλη ασφάλεια να τον θεωρήσουμε 0. Άρα,

$$\boxed{\frac{dN_{therm}}{dt} = C - C_A N^2} \quad (4.4.2)$$

Οι ρυθμοί C και C_A αναλύονται σε επόμενη ενότητα.

- Τα σκοτεινά σωματίδια εξαυλώνονται μεταξύ τους και παράγουν σωματίδια τα οποία με τη σειρά τους διασπώνται σε νετρίνα. Επομένως, αυτό που επιθυμούμε περισσότερο να

παρατηρήσουμε στους ανιχνευτές είναι λεπτόνια τα οποία παράγονται από τα αντίστοιχα νετρίνα.

Τα νετρίνα οφειλόμενα στην Σκοτεινή Ύλη ξεχωρίζουν από τα νετρίνα προερχόμενα από οποιαδήποτε άλλη πηγή καθ' ότι είναι πιο ενεργητικά.

Να σημειώσουμε ότι, καθώς τα νετρίνα ταξιδεύουν προς τον ανιχνευτή μας ταλαντώνονται και η γεύση τους αλλάζει κυρίως σε νετρίνα μιονίου. Επίσης, προτού τα σωματίδια-προϊόντα διασπασθούν σε νετρίνα, ίσως χρειαστεί να ταξιδέψουν στο εσωτερικό του Ήλιου ή της Γης και συνεπώς να χάσουν ενέργεια, ή να απορροφηθούν εντελώς. Αυτό υπονοεί μια ελάττωση της αναμενόμενης ροής προς τον ανιχνευτή.

Τέλος, στις εξαυλώσεις συνήθως αγνοούμε τα κανάλια που οδηγούν σε σωματίδια Higgs.

Η ροή νετρίνων γεύσης i από τον Ήλιο η τη Γη ($\circ = \odot$ ή $\oplus$) γράφεται [23],

$$\left. \frac{d\Phi}{dE} \right|_{i,\circ} = \frac{\Gamma_A^\circ}{4\pi R_\circ^2} \sum_F B_F \left. \frac{dN}{dE} \right|_{F,i} (E_\nu, E_{in}) \quad (4.4.3)$$

όπου B_F είναι το ποσοστό (branching ratio) για το κανάλι εξαύλωσης F . Το ενεργειακό φάσμα των νετρίνων εξαρτάται από την ενέργεια του νετρίνου και την ενέργεια των "εισερχομένων" σωματιδίων. Η ακτίνα $R_\circ$ στην περίπτωση του Ηλίου είναι η απόσταση Γης-Ηλίου, ενώ στην περίπτωση της Γης είναι η ακτίνα της Γης.

Τέλος, ο "πραγματικός" (για να το ξεχωρίζουμε από το C_A) ρυθμός εξαύλωσης είναι,

$$\Gamma_A \sim \frac{1}{2} C \quad (4.4.4)$$

με τον παράγοντα 2 να εισέρχεται επειδή σε κάθε εξαύλωση χάνονται δύο σκοτεινά σωματίδια χ .

4.4.4 Αντιύλη

Η ανίχνευση μέσω αντιύλης είναι μια μέθοδος παρόμοια με την αντίστοιχη για τα φωτόνια, αλλά αρκετά πιο αδύναμη. Ωστόσο αξίζει να την αναφέρουμε.

Στην πραγματικότητα, ο όρος αντιύλη αναφέρεται μονάχα στα ποζιτρόνια και τα αντι-πρωτόνια, ενώ μπορεί να έχουμε και ροή ηλεκτρονίων. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι η ακτινοβολία αντιύλης είναι ό,τι έχει απομείνει από την εκπομπή φωτονίων.

Η ζητούμενη ροή αντιύλης είναι:

$$\frac{d\Phi_{\bar{M}}}{dE_{\bar{M}}} = \frac{d\Phi_e}{dE_e} + \frac{d\Phi_{\bar{p}}}{dE_{\bar{p}}} \quad (4.4.1)$$

• **Ηλεκτρόνια/Ποζιτρόνια.** Ο πρώτος όρος στην ροή της αντιύλης αναφέρεται στη ροή ποζιτρονίων, ή ηλεκτρονίων προερχόμενα, άμεσα λόγω των εξαυλώσεων των LSPs, ή έμμεσα λόγω των διασπάσεων των προϊόντων εξαύλωσης. Όπως έχουμε ήδη δει, τα σωματίδια αυτά θα έπρεπε να μετατρέπονται σε φωτόνια μέσω του ICS και της ακτινοβολίας σύγχροτου³⁶. Όσα σωματίδια (ηλεκτρόνια/ποζιτρόνια) **δεν** καταφέρουν να δώσουν φωτόνια, στην ουσία, θα φτάσουν στον ανιχνευτή μας ως ακτινοβολία αντιύλης.

³⁶Την ακτινοβολία σύγχροτου **δεν** την θεωρήσαμε στην περίπτωση των φωτονίων ως πολύ μικρή. Εδώ, επειδή η ροή αντιύλης είναι έτσι κι αλλιώς μικρή, αναμένουμε η συνεισφορά από το σύγχροτο να είναι υπολογίσιμη.

Η ροή τους υπολογίζεται να είναι,

$$\boxed{\frac{d\Phi_e}{dE_e} = \frac{u_e f}{4\pi} \approx \frac{cf}{4\pi}} \quad (4.4.2)$$

όπου η συνάρτηση

$$f(t, \vec{x}, E) \equiv \frac{dN_e}{dE} \quad (4.4.3)$$

δεν είναι τίποτα άλλο από το ενεργειακό φάσμα των παραγόμενων ηλεκτρονίων/ποζιτρονίων.

Σε αυτή την περίπτωση (σε αντίθεση με τα φωτόνια) η εύρεση της f είναι αρκετά πιο περίπλοκη καθώς πρέπει να προσδιορίσουμε με ακρίβεια όλους τους παράγοντες εξ αιτίας των οποίων “χάνονται” ηλεκτρόνια/ποζιτρόνια³⁷. Ο προσδιορισμός αυτός επιτυγχάνεται μέσω της επίλυσης της **εξίσωσης διάχυσης-απόσβεσης**,

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \nabla(K\nabla f) - \frac{\partial}{\partial E}(bf) = Q \quad (4.4.4)$$

όπου η συνάρτηση $K(E, \vec{x})$ είναι ο συντελεστής **διάχυσης** και περιγράφει τη μεταφορά μέσα σε μαγνητικά πεδία με τύρβη. Η συνάρτηση $b(E, \vec{x})$ είναι ο συντελεστής **απόσβεσης** και παραμετροποιεί την απώλεια ενέργειας λόγω ICS, ακτινοβολίας σύγχροτρου και υπέρυθρης ακτινοβολίας λόγω σκέδασης σε σκόνη (ακριβώς ο ίδιος συντελεστής όπως και στην παράγραφο με τα φωτόνια).

Τέλος, η συνάρτηση Q καλείται όρος πηγής και παίρνει διαφορετική τιμή για ηλεκτρόνια/ποζιτρόνια που προέρχονται κατευθείαν από την εξαϋλωση και από σωμάτια που έρχονται έμμεσα από διασπάσεις:

$$\underbrace{Q = \frac{1}{2} \frac{\rho_{DM}^2}{m_\chi^2} \sum_k \langle \sigma u \rangle_k f^{(k)}}_{\text{άμεσα}} \quad \& \quad \underbrace{Q = \frac{\rho_{DM}}{m_\chi} \sum_k \Gamma_k f^{(k)}}_{\text{έμμεσα}} \quad (4.4.5)$$

* Το τελικό αποτέλεσμα για τη ροή δίνεται μέσω της ολοκλήρωσης στην συνάρτηση Green I -γενικευμένη συνάρτηση της άλω³⁸.

• **Αντιπρωτόνια.** Για την ροή των αντιπρωτονίων δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο όπως και για τα ηλεκτρόνια/ποζιτρόνια. Είναι

$$\boxed{\frac{d\Phi_{\bar{p}}}{dE_{\bar{p}}} = \frac{u_{\bar{p}} f}{4\pi}} \quad (4.4.6)$$

με τη μόνη διαφορά ότι $E_{\bar{p}}$ **δεν** είναι η ολική ενέργεια του αντιπρωτονίου, αλλά απλά η κινητική του ενέργεια.

Η εξίσωση διάχυσης-απόσβεσης αυτή τη φορά είναι

$$\frac{\partial f}{\partial t} - K\nabla^2 f + \frac{\partial}{\partial z}[\text{sign}(z)f V_{wind}] = Q - 2h\delta(z)(\Gamma_{ann} + \Gamma_{non-ann})f \quad (4.4.7)$$

όπου z είναι η κάθετη διεύθυνση στο γαλαξιακό επίπεδο και h το πάχος του γαλαξιακού δίσκου.

³⁷ Ασφαλώς, αυτό που θέλουμε να προσδιορίσουμε είναι πόσα σωμάτια *περισεύουν*, αλλά επειδή μιλάμε για ηλεκτρόνια/ποζιτρόνια -και όχι φωτόνια- είναι προσφιλέστερο να κάνουμε λόγο για *χαμένα* σωμάτια.

³⁸ Η συνάρτηση αυτή μπορεί να τροποποιηθεί ώστε να εμπεριέχει και τις απώλειες ενέργειας κατά την διάδοση των ηλεκτρονίων/ποζιτρονίων.

Ο όρος V_{wind} αναφέρεται στον **άνεμο μεταφοράς**. Ο άνεμος αυτός θεωρείται σταθερός με κατεύθυνση έξω από την επιφάνεια του Γαλαξία μας. Αντιπρωτόνια με $E < 10m_p$ τείνουν να παρασυρθούν από αυτόν.

Τέλος, ο όρος Γ_{ann} σχετίζεται με την ενεργό διατομή των εξαϋλώσεων που λαμβάνουν χώρα μεταξύ των αντιπρωτονίων. Ο όρος $\Gamma_{non-ann}$ αναφέρεται σε όλες τις υπόλοιπες διαδικασίες που έχουν ως αποτέλεσμα την μείωση της ενέργειάς τους.

5 Ανίχνευση μέσω νετρίνων

Στο κεφάλαιο αυτό θα στρέψουμε την προσοχή μας στα νετρίνα. Έχουμε ήδη μιλήσει για την ροή των σωματιδίων που αναμένουμε να μετρήσουμε, καθώς και για τον μηχανισμό που προκαλεί την εν λόγω ροή. Αυτό που δεν γνωρίζουμε είναι ο ρυθμός με τον οποίο αυτή *γεννάται*. Με λιγότερο ποιητικά λόγια, αυτό που θέλουμε να εξετάσουμε είναι ο **ρυθμός σύλληψης**, όπως και ο **ρυθμός εξαΰλωσης** των σκοτεινών σωματιδίων. Οι δύο αυτές ποσότητες επηρεάζουν άμεσα την ζητούμενη ροή.

5.1 Ρυθμός σύλληψης C

Η συζήτηση που ακολουθεί στηρίζεται στις δημοσιεύσεις [20], [21]³⁹.

Από βαρυτικές μελέτες έχει παρατηρηθεί ότι γύρω από τον γαλαξία μας υπάρχει μία -κατά το δυνατόν- σφαιρική άλως Σκοτεινής Ύλης. Κατ' επέκταση, μπορούμε να πούμε ότι ο Ήλιος (ή η Γη) βρίσκεται στο σημείο μηδέν *μίας*⁴⁰ κατανομής f . Η κατανομή των σκοτεινών σωματιδίων εξαρτάται, προφανώς, από την ταχύτητα του κάθε σωματιδίου, καθώς και από την απόστασή του από το σημείο μηδέν. Αυτά τα δύο στοιχεία είναι ικανά να προσδιορίσουν πλήρως την κατανομή μας ανεξαρτήτως του αν θεωρούμε ως σημείο αναφοράς το Ηλιακό Σύστημα, ή το κέντρο του Γαλαξία.

- Έχουμε λοιπόν την κατανομή,

$$f(\vec{w}, \vec{r}) \quad (5.1.1)$$

όπου $\vec{w}$ είναι η ταχύτητα του σκοτεινού σωματιδίου χ στο σημείο $\vec{r}$, ενώ η ταχύτητα στο άπειρο, όπου και η κατανομή θεωρείται ομογενής, δίνεται,

$$u^2 = w^2 - v^2(r) \quad (5.1.2)$$

με v την ταχύτητα διαφυγής -από το πεδίο του ουρανίου σώματος- σε απόσταση r .

- Προφανώς, ο ρυθμός με τον οποίο τα σκοτεινά σωματίδια συλλαμβάνονται από το ουράνιο σώμα θα εξαρτάται από δύο βασικούς παράγοντες: πρώτον, από τον **ρυθμό με τον οποίο αλληλεπιδρούν** με τους πυρήνες -που περιέχονται στο σώμα- και δεύτερον, από την **πιθανότητα να χάσουν αρκετή ενέργεια** ώστε να εγκλωβιστούν.

Ένα σώμα το οποίο βρίσκεται μέσα σε ένα βαρυτικό πεδίο έχει συνολική ενέργεια,

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{GMm}{r} \quad (5.1.3)$$

Προκειμένου να μπορέσει το σώμα να διαφύγει του πεδίου, πρέπει η συνολική αυτή ενέργεια να είναι θετική -ή μηδέν- ή, διαφορετικά, το σώμα να έχει αποκτήσει **τουλάχιστον** την ταχύτητα διαφυγής,

$$u_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad (5.1.4)$$

³⁹Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι το μεγαλύτερο μέρος των αποτελεσμάτων μας μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε σκοτεινό σωματίο, ανεξαρτήτως του αν αυτό είναι τύπου LSP ή όχι.

⁴⁰Η απόσταση του Ηλιακού μας συστήματος από τα δύο άκρα του Γαλαξία **δεν** είναι προφανώς η ίδια. Συνεπώς, θα ήταν λάθος να ισχυριστούμε ότι ο Ήλιος (ή η Γη) βρίσκεται στο *κέντρο* της κατανομής Σκοτεινής Ύλης, αφού αυτή -όσον αφορά το Ηλιακό Σύστημα- **δεν** είναι συμμετρική, πόσο μάλλον σφαιρική.

Ποια είναι, λοιπόν, η ελάχιστη ενέργεια την οποία άμα χάσει το σωματίδιο -γενικά εξ αιτίας της κρούσης- θα αποκτήσεις $E_{tot} < 0$ και άρα θα παγιδευτεί; Φυσικά, η ποσότητα $\frac{1}{2}mu^2$ με m την μάζα του σκοτεινού σωματιδίου χ .

Επομένως γράφουμε,

$$C = I \cdot P\left(\frac{m_\chi u^2}{2}\right) \quad (5.1.5)$$

• Εφ' όσον οι πυρήνες που περιλαμβάνονται στο ουράνιο σώμα μπορούν να θεωρηθούν ότι βρίσκονται σε **ηρεμία**, τότε είναι λογικό να πούμε ότι η ενέργεια ΔE που χάνει το σκοτεινό σωματίο θα εξαρτάται *μονάχα* από την γωνία σκέδασης θ . Συνεπώς,

$$\Delta E = \Delta E(\theta) \quad (5.1.6)$$

◦ Ο ρυθμός αλληλεπίδρασης οφείλει να εξαρτάται από την ενεργό διατομή, την μέση ταχύτητα του εκάστοτε σκοτεινού σωματιδίου, καθώς και την αριθμητική πυκνότητα των συμμετεχόντων πυρήνων. Επομένως θα δίνεται από την σχέση,

$$I_i = \frac{d\sigma_i}{d\Omega} \cdot \int_{v(r)}^\infty d^3w w f(\vec{w}, \vec{r}) \cdot \int_0^R d^3r n_i(r) \quad (5.1.7)$$

όπου **ο δείκτης** i αναφέρεται στο i -οστό είδος πυρήνα του ουρανού σώματος. Προφανώς, στο τέλος, θα πρέπει να αθροίσουμε για όλα τα είδη πυρήνων που εμφανίζονται. R είναι η ακτίνα *του σώματος*.

◦ Η μέγιστη ενέργεια που δύναται να χάσει ένα σκοτεινό σωματίο εξ αιτίας του στοιχείου i είναι,

$$E_{max} = \frac{\beta_+^{(i)} m_\chi w^2}{2} \quad \text{με} \quad \beta_\pm^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{4m_\chi m_i}{(m_\chi \pm m_i)^2} \quad (5.1.8)$$

Τότε, η πιθανότητα να χαθεί η ελάχιστη ενέργεια είναι -όπως συμβαίνει με όλες τις πιθανότητες- ένα κλάσμα. Πιο συγκεκριμένα, ολοκληρώνουμε το διαφορικό της ενέργειας που μας ενδιαφέρει σε όλο το εύρος των επιτρεπόμενων ενεργειών, διαιρώντας με τη μέγιστη ενέργεια:

$$P\left(\frac{m_\chi u^2}{2}\right) = \frac{4\pi}{E_{max}} \int_{\frac{m_\chi u^2}{2}}^{E_{max}} d(\Delta E) \quad (5.1.9)$$

• Αν "ανοίξουμε" τα διαφορικά, συμπεριλαμβάνοντας τον συμβολισμό για την στερεά γωνία στον αντίστοιχο χώρο, έχουμε,

$$C_i = \frac{4\pi}{E_{max}} \int_{\frac{m_\chi u^2}{2}}^{E_{max}} d(\Delta E) \int_0^R dr r^2 \int d\Omega_r n_i(r) \int_{v(r)}^\infty dw w^2 \int d\Omega_w w f(\vec{w}, \vec{r}) \frac{d\sigma_i}{d\Omega}$$

και με μια μικρή ανακατάταξη προκειμένου να ταιριάζουν οι ολοκληρωτές ποσότητες με τα ολοκληρώματα,

$$C_i = \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty dw w^3 \frac{4\pi}{E_{max}} \int_{\frac{m_\chi u^2}{2}}^{E_{max}} d(\Delta E) \frac{d\sigma_i}{d\Omega} \int d\Omega_r \int d\Omega_w f(\vec{w}, \vec{r}) \quad (5.1.10)$$

Οι τελευταίες δύο ολοκληρώσεις απλά "αφαιρούν" την γωνιακή εξάρτηση από την συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων. Η κατανομή της 5.1.10 είναι η ίδια με αυτή που μεταχειριστήκαμε σε προηγούμενο χωρίο. Οπότε έχουμε την $f(\vec{u})$, η οποία ολοκληρούμενη

στις γωνίες θα δώσει μια συνάρτηση $g(u)$ όπως αυτή που χρησιμοποιούμε για παράδειγμα στην σχέση 4.3.4. Προκειμένου να συμφωνούμε με την βιβλιογραφία συμβολίζουμε **και** την συνάρτηση g ως f , αλλά με όρισμα το μέτρο της ταχύτητας αντί για το διάνυσμα.

Γράφουμε,

$$C_i = \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty dw w^3 \frac{4\pi}{E_{max}} \int_{\frac{m_\chi u^2}{2}}^{E_{max}} d(\Delta E) \frac{d\sigma_i}{d\Omega} f(u) \quad (5.1.11)$$

• Όπως έχουμε δει, η διαφορική ενεργός διατομή είναι γενικά ανάλογη της ολικής ενεργού διατομής για μηδενική μεταφορά ορμής και του (τετραγώνου του) παράγοντα δομής. Ο παράγοντας F εξαρτάται, προφανώς, από την μεταφερόμενη ορμή, ή αλλιώς από την ενέργεια που χάνει το σκοτεινό σωματίο.

Άρα έχουμε,

$$C_i \sim \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty dw w^3 \frac{4\pi}{E_{max}} \int_{\frac{m_\chi u^2}{2}}^{E_{max}} d(\Delta E) \sigma_0^{(i)} F_i^2(\Delta E) f(u) \quad (5.1.12)$$

Αν ορίσουμε, τώρα, την ποσότητα,

$$G_i(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\frac{m_\chi u^2}{2}}^{E_{max}} d(\Delta E) F_i^2(\Delta E) \quad (5.1.13)$$

ο ρυθμός σύλληψης γράφεται,

$$C_i \sim 4\pi \sigma_0^{(i)} \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty dw w^3 \frac{1}{E_{max}} f(u) G_i \quad (5.1.14)$$

• Σε συγκεκριμένη απόσταση r η ταχύτητα διαφυγής είναι σταθερή, οπότε από την σχέση 5.1.2 εξάγουμε για τα διαφορικά ότι,

$$du^2 = dw^2 \quad (5.1.15)$$

Τώρα, ισχύει ότι $dx^2 = 2xdx$ και άρα η 5.1.14 γίνεται,

$$C_i \sim 4\pi \sigma_0^{(i)} \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty \frac{1}{2} du^2 w^2 \frac{1}{E_{max}} f(u) G_i$$

και θέτοντας την τιμή της E_{max} :

$$\begin{aligned} C_i &\sim 4\pi \sigma_0^{(i)} \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty du^2 \frac{1}{\beta_+^{(i)} m_\chi} f(u) G_i = 4\pi \sigma_0^{(i)} \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty du^2 \frac{1}{\beta_+^{(i)} m_\chi} f(u) \frac{u}{u} G_i = \\ &= 4\pi \sigma_0^{(i)} \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty d^3u \frac{f(u)}{u} \frac{1}{\beta_+^{(i)} m_\chi} G_i \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

• Η σύνδεση με όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα γίνεται με απλό τρόπο. Για αρχή, θα θέλαμε να κάνουμε *ισότητα* την *αναλογία* της σχέσης 5.1.16. Αν παρατηρήσουμε τις σχέσεις για την διαφορική ενεργό διατομή -όπως την σχέση 4.3.11- που εξαγάγαμε σε προηγούμενα χωρία, θα δούμε ότι εκεί εξαρτούμε το διαφορικό από την ορμή αντί για την στερεά γωνία, όπως εδώ.

Γενικά, για μικρές γωνίες σκέδασης στο σύστημα κέντρου μάζας ισχύει ότι,

$$d\Omega = \frac{4\pi}{\sqrt{E_{tot}}} dp^2 \quad (5.1.17)$$

Επιπλέον, αν εισάγουμε μια αυθαίρετη σταθερά Ξ_i^2 ⁴¹ μπορούμε να αποκαταστήσουμε την ισότητα και μάλιστα να γράψουμε τον ρυθμό σύλληψης χρησιμοποιώντας με βολικό τρόπο τις ποσότητες β , m_i και m_χ :

$$\begin{aligned} C_i &= 4\pi\sigma_0^{(i)} \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty d^3u \frac{f(u)}{u} \frac{1}{\beta_+^{(i)} m_\chi} G_i \frac{1}{4\pi} \beta_+^{(i)} m_i m_\chi \Xi_i^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow C_i = m_i \sigma_0^{(i)} \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty d^3u \frac{f(u)}{u} G_i \Xi_i^2 \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

- Τέλος, ορίζουμε την ποσότητα⁴²,

$$\left\langle \frac{G_i(u, v)}{u} \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m_\chi m_i}{\rho_\chi \varepsilon_i M_B} \int_0^R dr r^2 n_i(r) \int_{v(r)}^\infty d^3u f(u) \frac{G_i(u, v)}{u} \quad (5.1.19)$$

και άρα σε συμμαζεμένη μορφή έχουμε,

$$C_i = \frac{\sigma_0^{(i)} \rho_\chi \varepsilon_i M_B}{m_\chi} \Xi_i^2 \left\langle \frac{G_i(u, v)}{u} \right\rangle \quad (5.1.20)$$

όπου M_B είναι η μάζα του ουρανίου σώματος (Ήλιος ή Γη) και ε_i είναι το κλάσμα μάζας του ισотопу i . Ισχύει ότι, $\varepsilon_i M_B = m_{total}^{(i)}$ με $m_{total}^{(i)}$ την συνολική μάζα όλων των πυρήνων τύπου i στο ουράνιο σώμα.

- Ο ρυθμός σύλληψης μπορεί να δοθεί σε διαφορική μορφή -για τον Ήλιο- [17] ως,

$$\frac{dC_i}{dM} = \frac{\rho_\chi \sigma_0^{(i)} \varepsilon_i}{m_\chi m_i} \int d^3u \frac{f(u)}{u} w^2 \frac{1}{E_{max}} \int_{\frac{m_\chi u^2}{2}}^{E_{max}} d(\Delta E) F_i^2(\Delta E) \theta(\beta_-^{(i)} v^2 - u^2) \quad (5.1.21)$$

Σε αυτή την έκφραση πρέπει να προσέξουμε δύο πράγματα: πρώτον, η συνάρτηση f αναφέρεται **μόνο** στην κατανομή ταχυτήτων και δεύτερον, διαφορίζουμε ως προς dM θέλοντας να υπονοήσουμε ότι ο ολικός ρυθμός δίνεται ύστερα από ολοκλήρωση στο κατάλληλο ηλεκτρομαγνητικό μοντέλο.

⁴¹Η ανάλυση που κάνουμε μπορεί να εφαρμοσθεί για οποιοδήποτε WIMP. Ειδικότερα, αν το σωματίο της Σκοτεινής Υλης είναι neutralino, τότε μπορούμε γενικά να γράψουμε [20]: $\Xi_i = m_i$. Δηλαδή ισούται με τη μάζα του πυρήνα στον οποίο σκεδάζεται το χ .

⁴²Ο όρος $\frac{m_\chi}{\rho_\chi}$ εισάγεται εύλογα στον ορισμό, αν σκεφτούμε ότι η συνάρτηση κατανομής **ταχυτήτων** f είναι συγχρόνως και η συνάρτηση **χωρικής** κατανομής των σκοτεινών σωματιδίων και άρα κανονικοποιείται στην ποσότητα $\frac{\rho_\chi}{m_\chi}$. Ακόμα και αν θεωρήσουμε την f *σκέτα* ως κατανομή ταχυτήτων -όπως κάναμε σε προηγούμενο χωρίο- τότε στην έκφραση του C θα εμφανιστεί και *πάλη* ο όρος $\frac{m_\chi}{\rho_\chi}$.

5.2 Γιατί μας ενδιαφέρει ο Ήλιος;

Έχει ήδη γίνει φανερό από τον τίτλο της εργασίας ότι όλα μας τα αποτελέσματα θέλουμε να τα συσχετίσουμε με τον Ήλιο. Η Γη μας δίνει σημαντικά λιγότερες μετρήσεις -πράγμα που θα γίνει φανερό σε λίγο- και γι' αυτό από εδώ και πέρα δεν θα μιλάμε γενικά για κάποιο ουράνιο σώμα, αλλά θα αναφερόμαστε *συγκεκριμένα* στον Ήλιο.

Το πλήθος των μετρήσεων που παίρνουμε εξαρτάται, προφανώς, από τον ρυθμό σύλληψης C . Στο εσωτερικό του ουρανίου σώματος στο οποίο έχουν εγκλωβιστεί τα περισσότερα σκοτεινά σωματίδια, εκεί θα γίνονται και οι περισσότερες εξαϋλώσεις και άρα, με τη σειρά του, το σώμα αυτό θα μας δίνει τις περισσότερες -και πιο αξιόπιστες;- μετρήσεις.

Για την ποιοτική σύγκριση ας χρησιμοποιήσουμε την σχέση 5.1.20. Βλέπουμε ότι ο ρυθμός σύλληψης εξαρτάται: από τα συγκεκριμένα στοιχεία που περιέχονται στο σώμα, από την μάζα του σώματος και από την μάζα του σκοτεινού σωματιδίου [23].

ο Αν υποθέσουμε ότι ο Ήλιος και η Γη περιέχουν περίπου τα ίδια στοιχεία, τότε είναι εμφανές ότι,

$$C_{\odot} \gg C_{\oplus} \quad (5.2.1)$$

αφού ο λόγος εξαρτάται από τις μάζες των σωμάτων.

ο Ένα επιπλέον επιχείρημα βρίσκεται στον A. Gould [20], ο οποίος συσχετίζει τους ρυθμούς με βάση τη μάζα του σκοτεινού σωματιδίου. Ο λόγος των δύο, για $m_{\chi} = 80 \text{ GeV}$ είναι $\gamma \sim 1$, ενώ για μεγαλύτερες τιμές ~ 6.5 . Μπορούμε να φανταστούμε πόσο μεγαλώνει ο λόγος αυτός για την δικιά μας περίπτωση όπου $m_{\chi} \sim 500 \text{ GeV}$.

ο Πάντως, αν θέλουμε να είμαστε δίκαιοι, ακόμα και οι Γη θα μπορούσε να προσφέρει καλές μετρήσεις χάρη στην μικρή απόσταση από τον πυρήνα της, καθώς και λόγω του ότι μας προσφέρει συνεχώς μετρήσεις.

5.3 Ρυθμός εξαϋλωσης C_A

Η μεταβολή της ποσότητας των σκοτεινών σωματιδίων στο εσωτερικό του Ήλιου (ή της Γης) ορίζεται από την εξίσωση 4.4.2:

$$\frac{dN}{dt} = C - C_A N^2 \quad (5.3.1)$$

στο σημείο αυτό μπορούμε να ορίσουμε τον *βοηθικό* “πραγματικό” ρυθμό εξαϋλωσης,

$$\Gamma_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} C_A N^2 \quad (5.3.2)$$

ο οποίος υπονοεί ότι ο ρυθμός εξαϋλωσης οφείλει να νοείται συναρτήσεως του πλήθους των σκοτεινών σωματιδίων. Δεν μας ενδιαφέρει *μόνο* πόσο συχνά λαμβάνουν χώρα εξαϋλώσεις, καθώς αυτές πρέπει να τις σταθμίσουμε με το συνολικό “απόθεμα” σωματιδίων.

Ο παράγοντας **2** εισάγεται στον παραπάνω ορισμό, επειδή σε κάθε διαδικασία εξαϋλωσης χάνονται 2 σκοτεινά σωματίδια.

• Η διαφορική 5.3.1 *μπορεί* να λυθεί και η λύση δίνεται στην δημοσίευση [22], ως [σχέση 22 εκεί]:

$$N = \sqrt{\frac{C}{C_A}} \tanh\left(\frac{t}{\tau_e}\right) \quad (5.3.3)$$

όπου,

$$\tau_e \equiv \frac{1}{\sqrt{C C_A}} \quad (5.3.4)$$

είναι η χρονική κλίμακα θερμικής ισορροπίας (equilibrium).

Η λύση 5.3.3 είναι αυτή που σημειώνουμε, **εφ' όσον** ο ρυθμός εξάτμισης C_E είναι μηδέν -όπως και δικαιολογημένα θεωρήσαμε.

Τώρα, χρησιμοποιώντας την σχέση 5.3.2, η λύση της διαφορικής γίνεται:

$$\Gamma_A = \frac{1}{2} C \tanh^2 \left(\frac{t}{\tau_e} \right) \quad (5.3.5)$$

- Σε καλή προσέγγιση ο ρυθμός εξαΰλωσης δίνεται ως [17],

$$C_A = \langle \sigma_A u_{rel} \rangle_{s-wave} \left(\frac{3kT_c}{2Gm_\chi \rho_c} \right)^{-3/2} \quad (5.3.6)$$

με T_c και ρ_c να είναι η θερμοκρασία και η πυκνότητα στο κέντρο του Ήλιου.

5.4 Πειραματικά αποτελέσματα

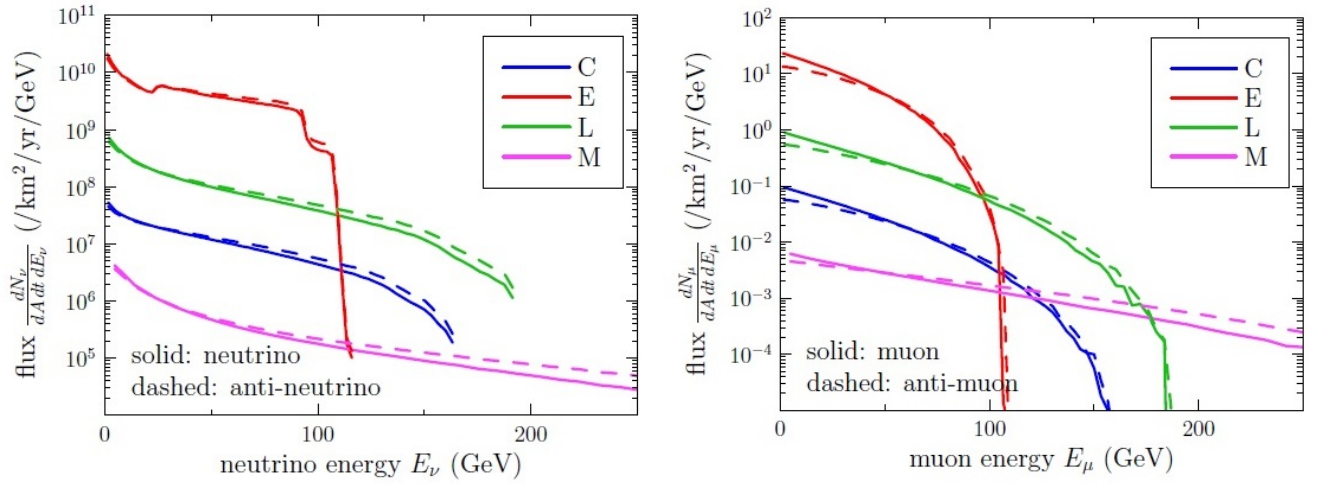
Το μοντέλο που μελετήσαμε μέχρι τώρα είναι αρκετά γενικό και στην ουσία αποτελεί ένα *πλαίσιο* μοντέλων, υπό την έννοια ότι **δεν** έχουμε αποδώσει *συγκεκριμένες* αριθμητικές τιμές στις παραμέτρους που εμφανίζονται.

Αυτές οι **παράμετροι** είναι οι επανακανονικοποιημένες τιμές των συντελεστών που εμφανίζονται στην Λαγκρανζιανή του ελαφρού σπασίματος, στην κλίμακα της Μεγάλης Ενοποίησης (GUT), όπου το σπάσιμο δεν έχει επέλθει ακόμα. Τότε, έχουμε την ενοποίηση των συντελεστών **μάζας των βαθμωτών σωματιδίων** $m_{sfermion} = m_{higgs} = m_0$, καθώς και την ενοποίηση των συντελεστών **μάζας των gauginos** $M_1 = M_2 = M_3 = m_{1/2}$. Επιπλέον, ενοποιούνται οι συντελεστές των **τριγραμμικών όρων των sfermions** $A_t = A_b = A_\tau = A_0$. Τέλος, ως ελεύθερες παράμετροι υπάρχουν ο **λόγος των VEVs** $\tan\beta$ και το **πρόσημο της παραμέτρου μάζας των Higgses** $sgn(\mu)$, καθώς επίσης και **η ίδια η παράμετρος** $B \stackrel{\text{def}}{=} \mu b$.

- Η διαδικασία για την πειραματική επιβεβαίωση της Υπερσυμμετρίας και κατ' επέκταση της σύστασης της Σκοτεινής Ύλης είναι απλή: πρώτα επιλέγουμε ένα μοντέλο με συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων και έπειτα υπολογίσουμε την αναμενόμενη ροή νετρίνων από τον Ήλιο. Στη συνέχεια, οι υπολογισμοί αυτοί συγκρίνονται με τα πειραματικά αποτελέσματα και έχουμε την επιβεβαίωση, ή την απόρριψη του μοντέλου.

Φυσικά, το λάθος μπορεί να μην βρίσκεται στις τιμές του μοντέλου, αλλά στην υπόθεσή μας περί εγκλωβισμένης Σκοτεινής Ύλης. Τέτοια σενάρια στις περισσότερες περιπτώσεις *δεν* μας απασχολούν, καθ' ότι, εν γένει, τα εξεταζόμενα μοντέλα συνδέονται άρρηκτα με τις σκοτεινές υποθέσεις.

Στο παρακάτω σχήμα [17] φαίνονται οι ροές των προσιπτόντων από τον Ήλιο σωματιδίων για κάποια γνωστά μοντέλα [24], [25], [27]:



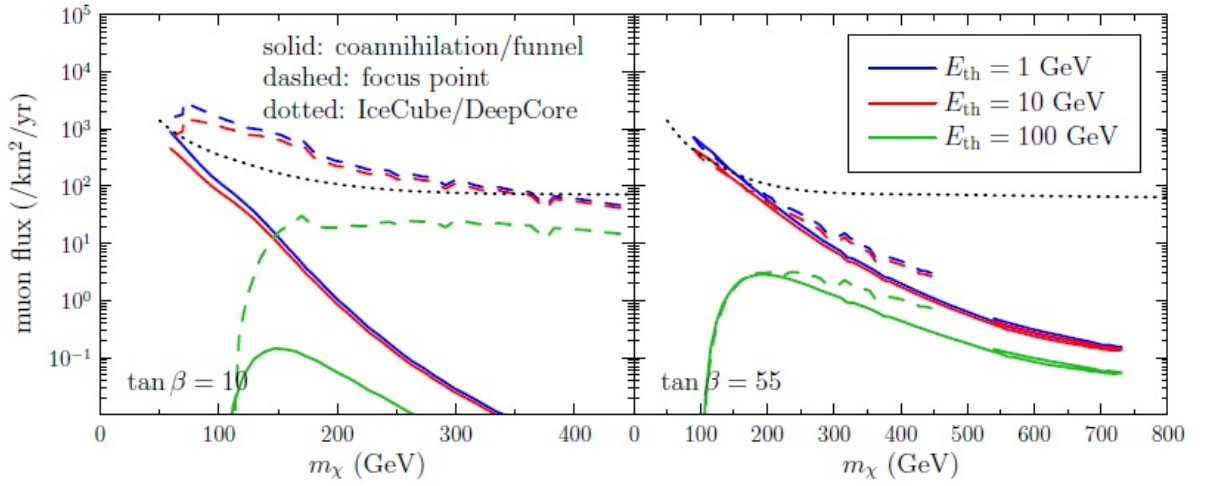
Σχήμα 5.1: Ροές σωματιδίων από τον Ήλιο για μερικά γνωστά μοντέλα, συναρτήσει της ενέργειας. Ενεργειακό φάσμα προσπιπόντων σωματιδίων.

- Το επόμενο βήμα είναι να συγκρίνουμε αυτούς τους θεωρητικούς υπολογισμούς με το πείραμα. Ακολουθούμε κυρίως τα δεδομένα από το παρατηρητήριο IceCube που βρίσκεται στο Νότιο Πόλο. Σε σχέση με άλλα γνωστά παρατηρητήρια, όπως το Super K στην Ιαπωνία, η ειδική περιοχή υψηλής ευκρίνειας του IceCube, DeepCore, δίνει για την ώρα μετρήσεις με την μεγαλύτερη ακρίβεια.

Ο ανιχνευτής προσπαθεί να ξεχωρίσει τα μίονια που προκύπτουν από την πρόσπτωση των νευτρίνων, ή αντινευτρίνων -προερχόμενων από τον Ήλιο- στην επιφάνειά του. Τα μίονια αυτά πρέπει να διαχωριστούν από άλλες πιθανές πηγές παραγωγής μιονίων, καθώς και από τα μίονια που ήδη στέλνει ο Ήλιος λόγω της Σκοτεινής Ύλης.

Παρουσιάζουμε ένα ενδεικτικό διάγραμμα [17] για δύο διαφορετικές περιπτώσεις του παραμετρικού χώρου συναρτήσει της μάζας του LSP. Αριστερά έχουμε $A_0 = 0$ και $\tan\beta = 10$, ενώ δεξιά $A_0 = 0$ και $\tan\beta = 55$. Ο λόγος που επιλέγουμε αυτές τις δύο τιμές για την εφαπτομένη είναι [17] ότι η $\tan\beta = 10$ βρίσκεται κοντύτερα στην βέλτιστη τιμή που δίνουν οι διάφορες αναλύσεις πιθανότητας εύρεσης Σκοτεινής Ύλης (likelihood analyses), ενώ η $\tan\beta = 55$ είναι πιο κοντά στην ανώτερη τιμή για την οποία οι λύσεις που βρίσκουμε για την κατάσταση κενού είναι "καλές". Οι τιμές αυτές αποτελούν επομένως δύο διαφορετικές ακραίες -αλλά πάντα βιώσιμες- περιπτώσεις.

Τα διαγράμματα δίνουν τις υπολογιζόμενες ροές για διαφορετικά κατώφλια τυχόντος ανιχνευτή. Με μαύρη γραμμή σημειώνεται η ανιχνευτική ικανότητα του IceCube με **κατώφλι 1 GeV**. Ένα μοντέλο που περνάει την γραμμή σημαίνει ότι **δύναται** να ανιχνευθεί.



Σχήμα 5.2: Ικανότητα ανίχνευσης.

Στο σημείο αυτό πρέπει να προσέξουμε ότι, ανάλογα με τον τρόπο που παράγονται τα νετρίνα, μπορεί να έχουμε διαφορετικές εισερχόμενες ροές. Έτσι, μπορεί να έχουμε τη λεγόμενη **συν-εξαύλωση (co-annihilation)** όπου, λόγω των αρκετά όμοιων μαζών τους, ένα σκοτεινό σωματίο θα εξαυλωθεί με ένα $\tilde{\text{stau}}$ σωματίο. Τέτοιες αλληλεπιδράσεις παρατηρούνται **αν** βρισκόμαστε στην περιοχή του παραμετρικού χώρου $m_{1/2} - m_0$ (θα συζητηθεί στην συνέχεια) κοντά στην κάτω δεξιά γωνία.

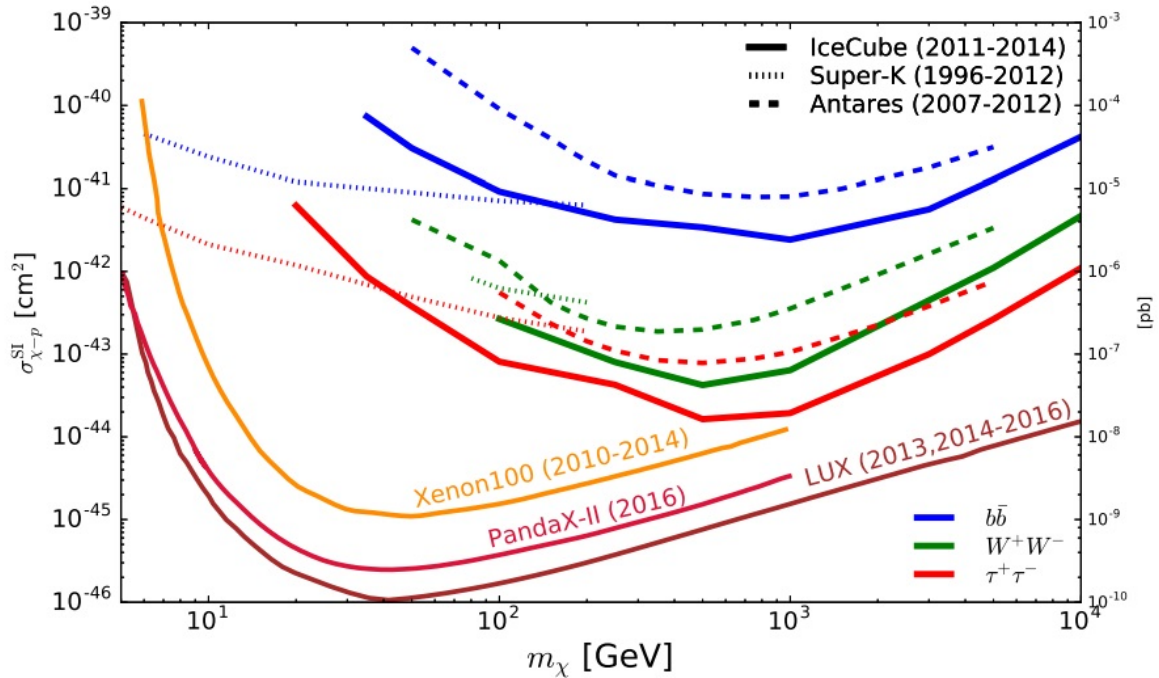
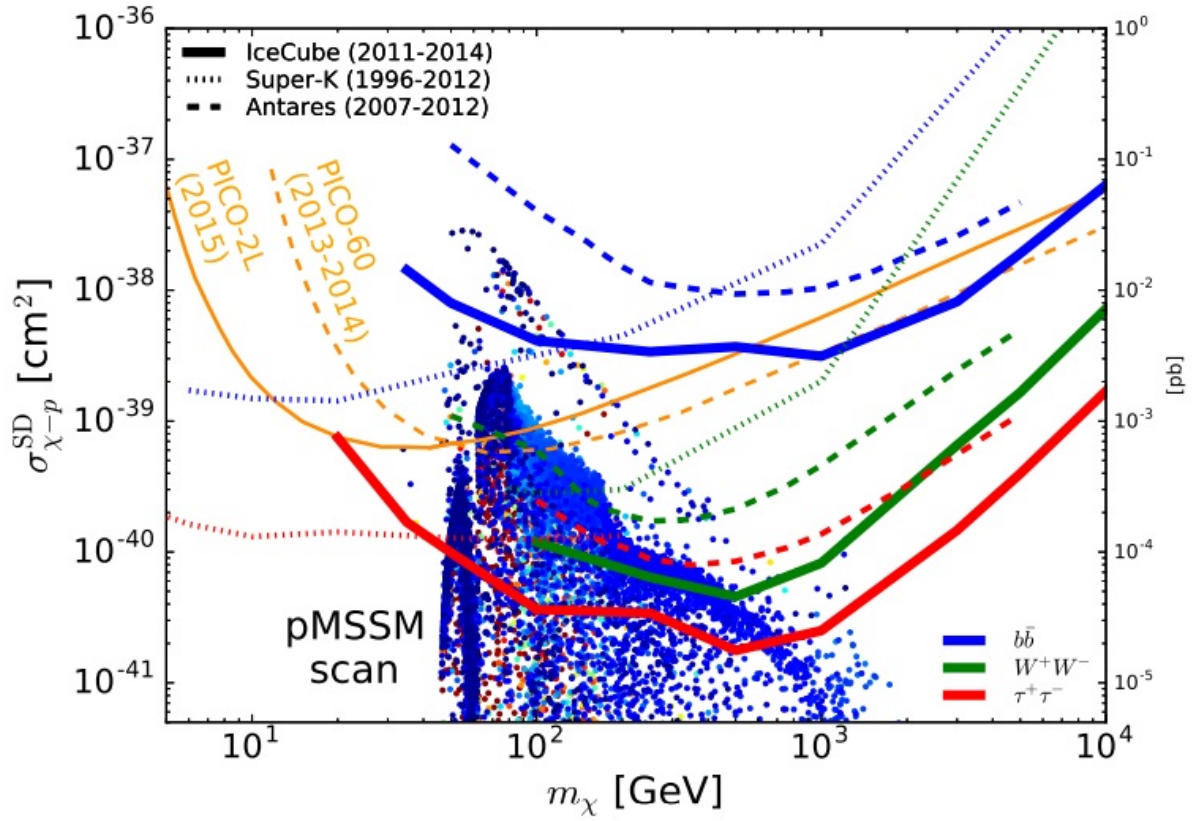
Επιπλέον, μπορεί να βρισκόμαστε στην λεγόμενη περιοχή **συγκέντρωσης σημείου (focus point)**. Έτσι ονομάζεται η περιοχή κοντά στην πάνω αριστερή γωνία του παραμετρικού χώρου. Εκεί, μπορεί να έχουμε εξαυλώσεις μεταξύ του σκοτεινού σωματιδίου και του neutralino χ_2 , λόγω όμοιων μαζών.

Το διάγραμμα, λοιπόν, μας δείχνει **αν δύναται** να έχουμε παρατήρηση στον IceCube, ανάλογα με την περιοχή του παραμετρικού χώρου στην οποία βρισκόμαστε. Βλέπουμε ότι αρκούντως μεγάλες ροές ώστε να έχουμε παρατήρηση παράγονται μόνο για την focus point περιοχή.

- Δυστυχώς, ο IceCube, ή οποιοσδήποτε άλλος ανιχνευτής, δεν έχει καταφέρει να δώσει μέχρι τώρα (έτος συγγραφής) θετικά αποτελέσματα στο κυνήγι της υπερσυμμετρικής Σκοτεινής Ύλης. Αντίθετα, τα περιθώρια ανίχνευσης όλο και μειώνονται.

Για τον αποκλεισμό κάποιας περίπτωσης, λαμβάνουμε τη μετρούμενη ροή και βάση αυτής μπορούμε να σχεδιάσουμε την καμπύλη της ενεργού διατομής συναρτήσει της μάζας του σκοτεινού σωματιδίου. Η καμπύλη αυτή μας δείχνει τις επιτρεπόμενες τιμές που μπορεί να έχει το μοντέλο μας. Η ενεργός διατομή είναι μια ποσότητα που εμφανίζεται στην άμεση ανίχνευση, **όμως** επηρεάζει με ευθύ τρόπο και την έμμεση ανίχνευση. Συνεπώς, μέσω της ανίχνευσης των νετρίνων από τον Ήλιο, είναι λογικό να μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα και για τις ενεργές διατομές πρωτονίου-σκοτεινού σωματιδίου.

Τα όρια αυτά είναι πολύ σημαντικά, καθώς μπορούν να οδηγήσουν ένα μοντέλο να **αλλάξει** τις τιμές του του παραμετρικού χώρου προκειμένου να ταιριάζει στα πειραματικά δεδομένα. Μια τέτοια αλλαγή, όμως, συνεπάγεται και ενδιαφέροντα θεωρητικά παρελκόμενα.



Σχήμα 5.3: Όρια ανίχνευσης Σκοτεινής Υλης δοσμένα από τον IceCube, σε σύγκριση με άλλους ανιχνευτές είτε άμεσων, είτε έμμεσων μεθόδων.

Στα παραπάνω διαγράμματα [30] δίνονται τα όρια που εξάγει το παρατηρητήριο IceCube για τα δύο διαφορετικά είδη ενεργού διατομής για διαφορετικά κανάλια συναρτήσε

της μάζας του σκοτεινού σωματιδίου. Επιπλέον, γίνεται σύγκριση με τα όρια που δίνουν άλλα παρατηρήτρια.

Οι περιοχές πάνω από τις εκάστοτε καμπύλες αποκλείονται. Άρα, βλέπουμε, ότι τα πειράματα **άμεσης** ανίχνευσης δίνουν **καλύτερα όρια από** τα αντίστοιχα **έμμεσης** ανίχνευσης (IceCube, Super-K, Antares).

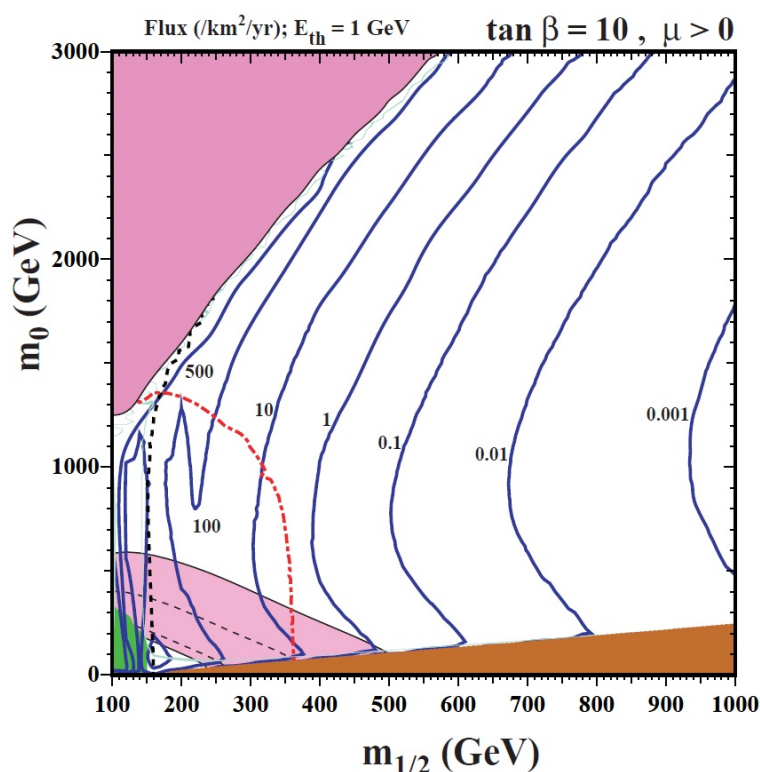
Τα σκοτεινά σωματίδια εξαϋλώνονται αρχικά στα τρία βασικά κανάλια που φαίνονται στα διαγράμματα και στη συνέχεια τα παραγόμενα σωματίδια δίνουν, δευτερογενώς, νετρίνα.

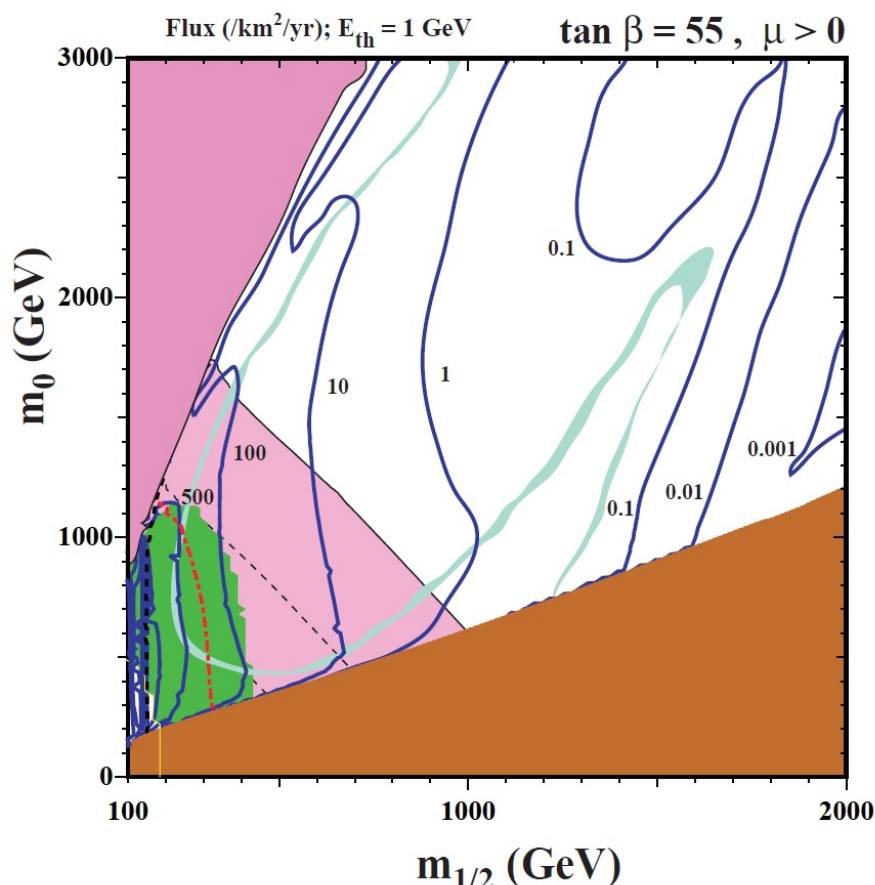
Το χρωματιστό "βουνό" που εμφανίζεται στο πρώτο διάγραμμα αντιστοιχεί σε μοντέλα του φαινομενολογικού MSSM. Οι μπλε και κόκκινοι χρωματισμοί αντιστοιχούν στα κανάλια εξαϋλωσης, όπως ακριβώς και στο υπόλοιπο διάγραμμα. Μια γρήγορη παρατήρηση μας λέει ότι το πλήθος των διαφορετικών μοντέλων που μπορούν να συνάδουν με τα πειραματικά αποτελέσματα είναι αρκετά μικρό.

- Τα σημαντικότερα, ίσως, διαγράμματα είναι εκείνα που παρουσιάζουν μια μετρούμενη ποσότητα (έστω τη ροή) συναρτήσει όλων των ποσοτήτων του παραμετρικού χώρου. Βέβαια, ο χώρος αυτός είναι πολυδιάστατος, οπότε *πλήρως* τέτοια διαγράμματα δεν είναι δυνατό να σχεδιαστούν. Αναγκαζόμαστε, λοιπόν, να περιοριστούμε σε ένα δισδιάστατο γράφημα στο οποίο όλες οι υπόλοιπες παράμετροι είναι σταθερές.

Ποιες είναι οι καλύτερες παράμετροι για να αφήσουμε ελεύθερες; Ασφαλώς αυτές που είναι και θεωρητικά δύσκολο να τις περιορίσουμε! Τουτέστιν, οι μάζες $m_{1/2}$ και m_0 .

Στα επόμενα διαγράμματα [17] φαίνονται οι ροές των μιονίων που οφείλονται σε νετρίνα. Επειδή η πειραματική ευαισθησία για την **παράμετρο** A_0 είναι μικρή, την θεωρούμε 0. Τα γραφήματα δίνονται για δύο -ευρέως χρησιμοποιούμενες για σύγκριση- τιμές του **λόγου των VEVs**, ενώ υποθέτουμε **ενέργεια κατωφλίου 1 GeV**, προκειμένου να αντιπαραθέσουμε με τις δυνατότητες του IceCube. Θεωρούμε $\mu > 0$.





Σχήμα 5.4: Παραμετρικός χώρος $m_{1/2} - m_0$ συναρτήσει της ροής μιονίων οφειλόμενων σε νετρίνα. Χρώματα: ροή (μπλε), μάζα Higgs (κόκκινο), όρια charginos (μαύρο), αποκλεισμένες περιοχές (σκούρο ροζ, πράσινο, καφέ) και ευνοούμενες περιοχές (τιρκουάζ, ανοιχτό ροζ).

Στα παραπάνω σχήματα, η **κόκκινη γραμμή** δίνει το κατώτερο όριο για τη μάζα του Higgs σύμφωνα με το LEP και συνεπώς απαγορεύεται να βρεθούμε κάτω από αυτήν. Οι **μαύρες γραμμές** δίνουν τα κατώτερα όρια για τα charginos σύμφωνα με το LEP και επομένως δεν μπορούμε να βρεθούμε ούτε κάτω από αυτές τις γραμμές.

Επιπλέον, οφείλουν να αποκλεισθούν: α) η **σκούρα ροζ περιοχή**, γιατί εκεί δεν συμβαίνει σπάσιμο της Ηλεκτρασθενούς συμμετρίας, β) η **η καφέ περιοχή**, γιατί εκεί το LSP δεν μπορεί να είναι το ελαφρύτερο neutralino και γ) η **πράσινη περιοχή**, γιατί οι τιμές μαζών εκεί αντίκεινται στους *πειραματικούς* περιορισμούς της διαδικασίας $b \rightarrow s\gamma$.

Επιπρόσθετα, υπάρχουν δύο περιοχές οι οποίες τυγχάνουν ευνοϊκού εδάφους, *χωρίς όμως* αυτό να είναι δεσμευτικό. Αυτές είναι: α) η **ανοιχτή ροζ περιοχή**, η οποία συμφωνεί με τις μετρήσεις του BNL για το $g_\mu - 2$ και β) η **τιρκουάζ περιοχή**, η οποία συμφωνεί με τον προσδιορισμό της πυκνότητας της Σκοτεινής Ύλης του WMAP.

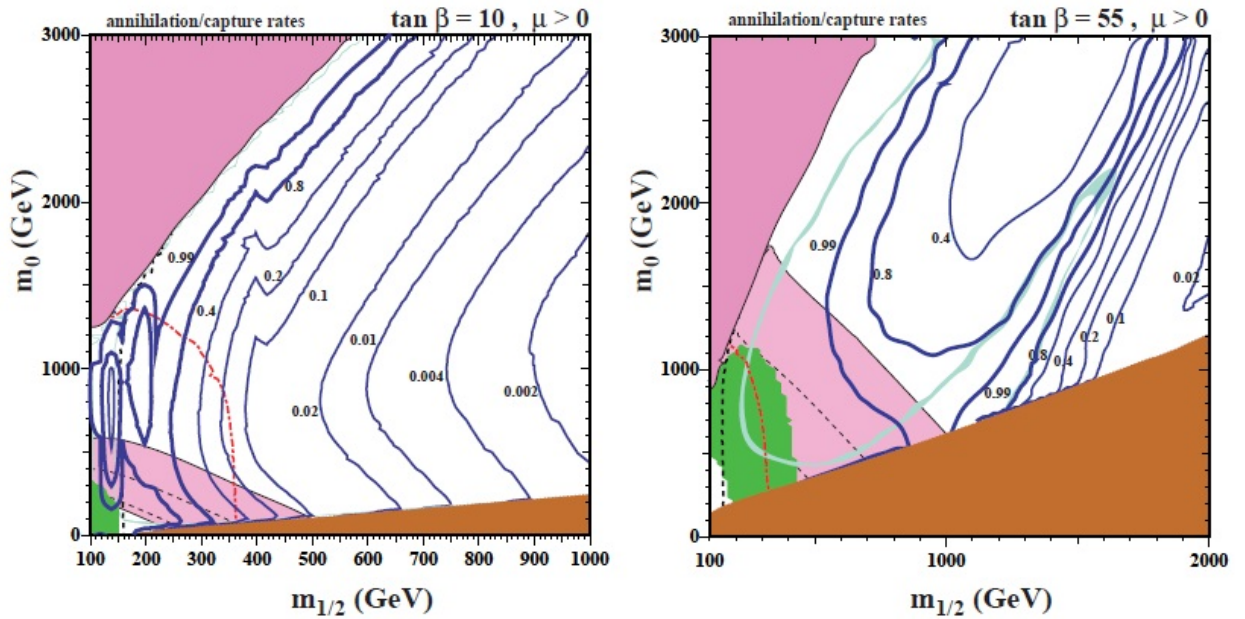
Τα γραφήματα που παρουσιάζουμε δίνουν πολύ περιορισμένες περιοχές ανίχνευσης. Αν μάλιστα κυνηγήσουμε τις ευνοούμενες περιοχές και συγκρίνουμε με το Σχήμα 2, θα δούμε (με λύπη!) ότι έχουμε ένα πολύ μικρό παράθυρο ανίχνευσης για $\tan\beta = 55$ προκύπτει $m_\chi \sim 200\text{GeV}$, ενώ για $\tan\beta = 10$ δεν έχουμε αποτέλεσμα. Ωστόσο, μπορούμε να μην λάβουμε σοβαρά υπ' όψιν μας την ευνοούμενη ανοιχτή ροζ περιοχή -παρόλα αυτά καλό θα ήταν να μην κάνουμε το ίδιο για την τιρκουάζ-, και άρα για $\tan\beta = 55$ προκύπτει

πάλι $m_\chi \sim 200\text{GeV}$, ενώ για $\tan\beta = 10$ προκύπτει $m_\chi \sim 300\text{GeV}$.

- Κλείνοντας, είναι ενδιαφέρον να δούμε άλλο ένα διάγραμμα [17], σχεδιασμένο στον παραμετρικό χώρο $m_{1/2} - m_0$, στο οποίο απεικονίζεται ο λόγος $\frac{\text{Ρυθμός εξαϋλώσης}}{\text{Ρυθμός σύλληψης}}$.

Ο λόγος αυτός μας δείχνει πόσο καλή -ή όχι- είναι η προσέγγιση ότι κάποια στιγμή επέρχεται **θερμική ισορροπία** στο εσωτερικό του Ήλιου. Μια τιμή του λόγου κοντά στη μονάδα συνεπάγεται ότι η προσέγγιση είναι αξιόλογη.

Το γράφημα δίνεται για $A_0 = 0$ και $\mu > 0$.



Σχήμα 5.5: Όρια για την προσέγγιση της θερμικής ισορροπίας στον πυρήνα του Ήλιου.

6 Συμπεράσματα

Το πρόβλημα της Σκοτεινής Ύλης είναι ένα από τα επιτακτικότερα θέματα που καλείται να λύσει η σύγχρονη Φυσική. Στην εργασία αυτή μελετήθηκε το πως η Σκοτεινή Ύλη μπορεί να ανιχνευθεί με έμμεσο τρόπο μέσω νετρίνων προερχόμενων από τον Ήλιο και έτσι, όχι μόνο να επιβεβαιωθεί πλήρως η ύπαρξή της, αλλά και να δοθεί μια ερμηνεία ως προς την προέλευσή της.

Η δομή της Σκοτεινής Ύλης προκύπτει με φυσικό τρόπο μέσα από την Υπερσυμμετρία. Για να φτάσουμε εκεί, κάναμε πρώτα μια μικρή ανασκόπηση στο Καθιερωμένο Πρότυπο πάνω στο οποίο και στηρίζομαστε. Η Υπερσυμμετρία δεν αποτελεί τίποτα άλλο παρά μια απλή *επέκταση* του ΚΠ, η οποία μάλιστα δεν αλλάζει τίποτα από τη δομή και τη λογική αυτού του σπουδαίου μοντέλου.

Εκτός των άλλων, η Υπερσυμμετρία δίνει άμεση λύση στο πρόβλημα της ιεραρχίας (hierarchy problem) -με το οποίο δεν ασχολούμαστε στην παρούσα εργασία- γεγονός το οποίο ενισχύει ακόμα περισσότερο την πίστη μας στην θεωρία αυτή.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αυτής παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο δομείται και κατασκευάζεται η Υπερσυμμετρία, ενώ παράλληλα γίνεται ο ορισμός ενός ενιαίου συμβολισμού και συμβάσεων που χρησιμοποιούνται καθ' όλη την έκταση της εργασίας. Τελικά δόθηκε η πλήρης υπερσυμμετρική Λαγκρανζιανή.

Βασικό χαρακτηριστικό της υπερσυμμετρικής θεωρίας είναι η εισαγωγή νέων βαθμών ελευθερίας στις ήδη υπάρχουσες πολλαπλότητες, προς κατασκευή των λεγόμενων υπερ-πολλαπλετών. Για κάθε σωματίο του ΚΠ προτύπου κατασκευάζουμε ένα *άλλο* σωματίο, τον υπερ-συννοδό, το σπιν του οποίου διαφέρει από το αρχικό κατά $\frac{1}{2}$. Έτσι, για κάθε φερμιόνιο αντιστοιχεί ένα **καινούριο** μποζόνιο (σφερμιόνιο - sfermion), ενώ για κάθε μποζόνιο ένα **καινούριο** φερμιόνιο (μποζίνο - bosino). Κάθε καινούριο σωματίο έχει *ιδιους* κβαντικούς αριθμούς και *idia* μάζα με το αντίστοιχο του ΚΠ.

Επίσης, προκύπτει ότι η Υπερσυμμετρία κανονικοποιείται με τέτοιο τρόπο, ώστε στη θεωρία μας να υπάρχουν *μόνο* καταστάσεις **θετικής ενέργειας**.

Το παραπάνω σωματιδιακό περιεχόμενο είναι το ελάχιστο που μπορούμε να υποθέσουμε, όμως υπάρχουν και υπερσυμμετρίες που εισάγουν παραπάνω σωματίδια από αυτά που αναφέρθηκαν. Δεν επεκτεινόμαστε σε τέτοιου είδους μοντέλα.

Εν τω μεταξύ, κάνουμε λόγο για το *Υπερδυναμικό* το οποίο είναι χαρακτηριστικό του μοντέλου που χρησιμοποιούμε κάθε φορά.

Οι ίδιες μάζες των υπερ-συννοδών και των συνήθων σωματιδίων υπονοούν ότι η Υπερσυμμετρία θα έπρεπε ήδη να έχει παρατηρηθεί. Επειδή κάτι τέτοιο δεν έχει συμβεί, αναγκάζομαστε να υποθέσουμε ότι **η Υπερσυμμετρία είναι σπασμένη**. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μάζες των υπερ-συννοδών να είναι κατά πολύ *μεγαλύτερες* από τις αντίστοιχες των σωματιδίων του ΚΠ. Επιθυμούμε η θεωρία μας να διατηρήσει τα αρχικά χαρακτηριστικά της και, επειδή δεν συντρέχει λόγος για το αντίθετο, υποθέτουμε **ελαφρύ (soft)** σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας. Προχωρήσαμε βλέποντας τους τρόπους με τους οποίους αυτό μπορεί να επιτευχθεί.

Τελικά, θεωρώντας το ελάχιστο σωματιδιακό περιεχόμενο μαζί με το ελαφρύ σπάσιμο της Υπερσυμμετρίας, καταλήγουμε στο Ελάχιστο Υπερσυμμετρικό Καθιερωμένο Πρότυπο (Minimal Supersymmetric Standard Model - MSSM). Το μοντέλο συμπληρώθηκε με την **R-Ομοτιμία**, ένα είδος ομοτιμίας το οποίο αποδίδει διαφορετικές τιμές στα σωματίδια του ΚΠ και στους υπερ-εταίρους τους, και η διατήρηση της οποίας βοηθάει στην ανάλυση της Σκοτεινής Ύλης. Στην εργασία, λοιπόν, αναλύθηκε ένα MSSM εφοδιασμένο με διατήρηση της R-Ομοτιμίας.

Η Υπερσυμμετρία μπορεί να παρασταθεί με κομψό φορμαλισμό με τη χρήση των Υπερπεδίων (Superfields).

Αναφέρθηκε ότι οι μάζες των υπερ-συνοδών είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες των σωματιδίων του ΚΠ, ενώ συγχρόνως φέρουν ίδιο ηλεκτρικό φορτίο. Αμέσως αμέσως, το γεγονός αυτό επιτρέπει στην ύπαρξη **μαζικών ουδέτερων φερμιονίων**, τα οποία, φυσικά, αποτελούν τους υπερ-συνοδούς των αντιστοιχών ουδέτερων μποζονίων B^0 , W^0 και Higgs. Τα σωματίδια αυτά καλούνται **νιουτραλίνο (neutralinos)** και είναι τέσσερα τον αριθμό.

Η Σκοτεινή Ύλη καταλαμβάνει περί το 25% του Σύμπαντος και οφείλεται για τη συγκρότηση των γαλαξιών, ενώ συνάμα δεν εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Συνεπώς, θα πρέπει να αποτελείται από ουδέτερα σωματίδια μεγάλης μάζας (και επιπλέον άχρωμα). Κάτω από αυτό το πρίσμα, τα neutralinos φαντάζουν ιδανικοί υποψήφιοι.

Ωστόσο, η Σκοτεινή Ύλη είναι σταθερή και δεν διασπάται. Εδώ υπεισέρχεται η διατήρηση της R-Ομοτιμίας. Κάθε συνηθισμένο σωματίο μπορεί να διασπαστεί μόνο σε άλλα σωματίδια του ΚΠ, εφ' όσον *όλοι* οι υπερ-συνοδοί είναι βαρύτεροι. Το ίδιο δεν ισχύει για τα υπερ-σωμάτια. Λόγω, όμως της R-Ομοτιμίας, ένα υπερ-σωμάτιο οφείλει **πάντα** να διασπάται σε άλλα υπερ-σωμάτια (μαζί με οποιαδήποτε συνηθισμένα). Επομένως, **το ελαφρύτερο υπερ-σωμάτιο (Lightest Supersymmetric Particle - LSP) θα είναι απόλυτα σταθερό.**

Θεωρήθηκε ότι το ελαφρύτερο neutralino είναι το LSP, το οποίο έχει, εν τέλει, *όλα* τα χαρακτηριστικά ώστε να απαρτίζει την Σκοτεινή Ύλη.

Προχωρώντας, μιλήσαμε για τις αλληλεπιδράσεις του LSP με τη συνηθισμένη ύλη και επομένως για την άμεση ανίχνευσή της. Οι αλληλεπιδράσεις αυτές χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: εκείνες που εξαρτώνται από το σπιν (spin dependent - SD) και εκείνες που δεν χαρακτηρίζονται από αυτό, τις λεγόμενες και βαθμωτές, ή spin independent - SI.

Επειδή η ροή Σκοτεινής Ύλης προς τη Γη είναι μάλλον μικρή, ένας περισσότερα υποσχόμενος τρόπος για την ανίχνευσή της είναι οι έμμεσες μέθοδοι. Έμμεση ανίχνευση της Σκοτεινής Ύλης μπορεί να γίνει με τρεις τρόπους με βάση τα προϊόντα εξαϋλώσεως των LSPs. Έτσι έγινε αναφορά στην ανίχνευση α) μέσω φωτονίων, β) μέσω νετρίνων και γ) μέσω αντιύλης. Στην εργασία αυτή σταθήκαμε στην ανίχνευση μέσω νετρίνων.

Τα νετρίνα οφειλόμενα στην Σκοτεινή Ύλη που (θα) παρατηρούνται στους ανιχνευτές προέρχονται κυρίως από τον Ήλιο και σε μικρότερο βαθμό από τη Γη.

Γνωρίζουμε ότι ο Γαλαξίας μας περικλείεται από μια άλω Σκοτεινής Ύλης. Η άλω αυτή – πρακτικά- δεν εκπέμπει ακτινοβολία λόγω εξαϋλώσεων, διότι πολύ απλά τέτοιες αντιδράσεις δεν λαμβάνουν χώρα εκεί. Τα LSPs βρίσκονται "παγωμένα" στις θέσεις τους ύστερα από το Big Bang και επομένως δεν καταφέρνουν να συναντήσουν το ένα το άλλο. Έχουν υποστεί το λεγόμενο **freeze out**. Επακόλουθο αυτού είναι η έντονα *μη-σχετικιστική* κίνηση των σκοτεινών σωματιδίων.

Παρόλα αυτά, κατά καιρούς συμβαίνει οι τροχιές των LSPs να είναι τέτοιες ώστε αυτά να περνάνε κοντά από Ήλιο, ή τη Γη, και εν συνεχεία να δεσμεύονται από το αντίστοιχο βαρυτικό πεδίο. Τα LSPs παγιδεύονται στο κέντρο του ουρανίου σώματος. Μετά από χρόνια, η συγκέντρωση είναι τέτοια, ώστε τελικά τα σκοτεινά σωματίδια να συναντιούνται μεταξύ τους και να εξαϋλώνονται. Η σύλληψη των σωματιδίων είναι, προφανώς, μεγαλύτερη και πιο ενδιαφέρουσα στην περίπτωση του Ήλιου.

Στην εργασία εξήχθη ο ρυθμός σύλληψης από τον Ήλιο, ο οποίος εξαρτάται τόσο από τα χαρακτηριστικά του LSP – μάζα, ενεργός διατομή- όσο και από την κατανομή της Σκοτεινής Ύλης γύρω από τον Γαλαξία και την ταχύτητα των σωματιδίων.

Ο ρυθμός με τον οποίο εξαϋλώνονται τα LSPs στο εσωτερικό του Ήλιου είναι συγκε-

κριμένος και μπορεί να συνδυαστεί με το ρυθμό σύλληψης στη διαφορική εξίσωση 5.3.1, ώστε να πάρουμε το ρυθμό μεταβολής των σκοτεινών σωματιδίων στον Ήλιο. Ο ρυθμός αυτός συνδέεται άμεσα με το ρυθμό παραγωγής νετρίνων και επομένως μας δίνει την αναμενόμενη ροή τους από τον Ήλιο προς τον ανιχνευτή.

Κλείνοντας, παρουσιάσαμε διαγράμματα που δίνουν την αναμενόμενη ροή σωματιδίων προς τον ανιχνευτή, καθώς και την δυνατότητα ανίχνευσης από τον IceCube, συναρτήσει της μάζας του σκοτεινού σωματιδίου. Επιπλέον, είδαμε γραφήματα του παραμετρικού χώρου του MSSM, τα οποία θέτουν πειραματικά όρια στη δυνατότητα ανίχνευσης της Σκοτεινής Ύλης. Η ανάγνωση των αποτελεσμάτων αυτών αφήνει, δυστυχώς, πολύ μικρά περιθώρια για την επιβεβαίωση της υπερσυμμετρικής Σκοτεινής Ύλης.

Τέλος, η ανάλυση των πειραματικών δεδομένων σε σχέση με τα διαγράμματα εξαϋλώσης που περιέχουν κορυφές $\chi\chi Z$ και $\chi\chi(Higgs)$ δίνει περιορισμούς για την περιοχή του παραμετρικού χώρου όπου το ελαφρύτερο neutralino είναι κυρίως higgsino.

Για μια πλήρη εισαγωγή στο θέμα της Υπερσυμμετρίας και της Υπερσυμμετρικής Σκοτεινής Ύλης, ο αναγνώστης παραπέμπεται στις αναφορές [4], [8], [11] και [23].

Αναφορές

Υπερσυμμετρία

- [1] Aitchison I.J.R. *Supersymmetry in Particle Physics - An Elementary Introduction*, Cambridge University Press, New York, 2007.
- [2] Bailin D. and Love A. *Cosmology in Gauge Field Theory and String Theory*, Institute of Physics Publishing, London, 2004.
- [3] Bailin D. and Love A. *Introduction to Gauge Field Theory*, Institute of Physics Publishing, London, 1993.
- [4] Bailin D. and Love A. *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, Institute of Physics Publishing, London, 1994.
- [5] Dedes A. *Introduction to Supersymmetry - Lecture II : Building SUSY Lagrangians with Superfields*, Διάλεξη στο Πανεπιστήμιο του Manchester, UK, 2014.
- [6] Dreiner H.K., Haber H.E. and Martin S.P. *Two-component Spinor Techniques and Feynman Rules for Quantum Field Theory and Supersymmetry*, Phys.Rept.494:1-196, (2010), DOI: 10.1016/j.physrep.2010.05.002.
- [7] Gunion J.F. and Haber H.E. *Higgs Bosons in Supersymmetric Models (I)*, Nuclear Physics B272 (1986) 1-76, North-Holland, Amsterdam.
- [8] Haber H.E. and Kane G.L. *The Search for Supersymmetry: Probing Physics Beyond the Standard Model*, Physics Reports, Volume 117, Issues 2-4, January 1985, Pages 75-263.
- [9] Kuroda M. *Complete Lagrangian of MSSM*, KEK CP-080, arXiv:hep-ph/9902340v3 27 Apr 2005.
- [10] Lahanas A.B. and Spanos V.C. *Our MSSM Conventions and Feynman Rules*.
- [11] Martin S.P. *A Supersymmetry Primer*, arXiv: hep-ph/9709356, (1997) DOI: 10.1142 /9789812839657 _ 0001.
- [12] Romão J.C. *The Minimal Supersymmetric Standard Model*, Departamento de Física, Instituto Superior Técnico, 2005.
- [13] Rosiek J. *Complete set of Feynman rules for the MSSM - erratum*, arXiv: hep-ph/9511250, (1995), DOI: 10.1103 /PhysRevD.41.3464.

Σκοτεινή Ύλη

- [14] Akrami Y. *Supersymmetry vis-à-vis Observation, Dark Matter Constraints, Global Fits and Statistical Issues*, Universitetsservice US-AB, Stockholm, PhD Thesis, 2011.

- [15] Drees M. and Nojiri M.M. *Neutralino-Nucleon Scattering reexamined*, Phys. Rev. D Vol. 48 number 8 (1993), DOI: 10.1103/PhysRevD.48.3483
- [16] Ellis J., Keith A.O. and Spanos V.C. *Galactic-centre Gamma Rays in CMSSM Dark Matter Scenarios*, John Ellis et al JCAP10(2011)024, DOI:10.1088/1475-7516/2011/10/024.
- [17] Ellis J., Keith A.O., Savage C. and Spanos V.C. *Neutrino Fluxes from CMSSM LSP Annihilations in the Sun*, Phys. Rev. D81:085004, (2010), DOI: 10.1103/PhysRevD.81.085004.
- [18] Ellis J., Keith A.O., Santoso Y. and Spanos V.C. *Update on the Direct Detection of Supersymmetric Dark Matter*, Phys.Rev.D71: 095007, (2005), DOI: 10.1103/PhysRevD.71.095007.
- [19] Engel J, Pittel S. and Vogel P. *Nuclear Physics of Dark Matter Detection*, Int. J. Mod. Phys. E Vol. 1 No. 1 p. 1-37, (1992), DOI: 10.1142/S0218301392000023.
- [20] Gould A. *Cosmological Density of WIMPs from Solar and Terrestrial Annihilations*, The Astrophysical Journal, Vol. 388 p. 338-344, (1992), DOI: 10.1086/171156.
- [21] Gould A. *Resonant Enhancements in Weakly Interacting Massive Particle Capture by the Earth*, The Astrophysical Journal, Vol. 321 p. 571-585, (1987), DOI: 10.1086/165653.
- [22] Griest K. and Seckel D. *Cosmic Asymmetry, Neutrinos and the Sun*, Nuclear Physics B283 (1987) 681-705, DOI: 10.1016/0550-3213(87)90293-8.
- [23] Jungman G., Kamionkowski M. and Griest K. *Supersymmetric Dark Matter*, Physics Reports Vol. 267 p. 195-373 (1996), DOI: 10.1016/0370-1573(95)00058-5.

Γενικά

- [24] Battaglia M., De Roeck A., Ellis J., Gianotti F., Matchev K.T., Olive K.A., Pape L., Wilson G. *Proposed Post-LEP Benchmarks for Supersymmetry*, Eur.Phys.J. C22: 535-561, (2001), arXiv:hep-ph/0106204.
- [25] Battaglia M., De Roeck A., Ellis J., Gianotti F., Olive K.A., Pape L. *Updated Post-WMAP Benchmarks for Supersymmetry*, Eur.Phys.J. C33: 273-296, (2004), arXiv:hep-ph/0306219.
- [26] Collins P.D.B., Martin A.D. and Squires E.J. *Particle Physics and Cosmology*, John Wiley & Sons, Inc., Canada, 1989.
- [27] De Roeck A., Ellis J., Gianotti F., Moortgat F., Olive K.A., Pape L. *Supersymmetric Benchmarks with Non-Universal Scalar Masses or Gravitino Dark Matter*, Eur.Phys.J. C49: 1041-1066, (2007), arXiv:hep-ph/0508198.
- [28] Dumont B. *Higgs, Supersymmetry and Dark Matter After Run I of the LHC*, Springer International Publishing, Switzerland, Ph.D Thesis, 2017.

- [29] Hoferichter M., Ruiz de Elvira J., Kubis B. and Meißner Ulf-G. *Remarks on the pion-nucleon σ -term*, Phys.Lett. B 760: 74-78, (2016), DOI: 10.1016/j.physletb.2016.06.038.
- [30] IceCube Collaboration. *Search for annihilating dark matter in the Sun with 3 years of IceCube data*, Eur. Phys. J. C (2017) 77: 146, DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-4689-9.
- [31] Najimuddin K. *Exploring Extensions of the Scalar Sector of the Standard Model*, arXiv:1701.02205v1 [hep-ph], Ph.D Thesis, 2017.
- [32] Zoll M.C.R. *A search for solar dark matter with the IceCube neutrino detector*, DiVA, id: diva2:892438, Ph.D Thesis, 2016.