

Αυτοόμοιοι μαγνητισμένοι πίδακες
πλάσματος σχετιζόμενοι με εκλάμψεις
ακτίνων γ

Βασίλης Μπισκετζής



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής
Βασίλης Μπισκετζής ΑΜ: 201734
Ιούνιος 2019
Επιβλέπων: Νεκτάριος Βλαχάκης

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, κύριο Νεκτάριο Βλαχάκη, για τη βοήθεια του τόσο στο τεχνικό όσο και στο θεωρητικό κομμάτι της εργασίας. Ακόμη ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Μάριο Νικολαΐδη για τις συμβουλές και την βοήθεια του σε υπολογιστικά ζητήματα που αντιμετώπισα

Περίληψη

Ροές που συνδέονται με εκλάμψεις ακτίνων γ θα μελετηθούν. Θα αναπαραχθούν ημι-αναλυτικές λύσεις στην υδροδυναμική και στη μαγνητουδροδυναμική περίπτωση με σκοπό την επίτευξη μεγάλων τιμών του παράγοντα Λορεντζ, όπως απαιτεί το πρόβλημα συμπαγότητας. Η απόδοση της μετατροπής της συνολικής ενέργειας σε κινητική ενέργεια εξετάζεται. Ο ασυμπτωτικός παράγοντας Λορεντζ φτάνει σε τάξη μεγέθους τη μέγιστη ενεργειακά επιτρεπτή τιμή του, αποτέλεσμα ενθαρρυντικό για τη προτεινόμενη μέθοδο. Η απόδοση της χρονοεξάρτησης στη ροή, απαραίτητη για την σύνδεση με τα GRB φαινόμενα, θα δοθεί αναλυτικά, χρησιμοποιώντας την προσέγγιση του σταθερού παλμού (frozen pulse approximation). Τέλος, θα ζητηθεί ο impulsive μηχανισμός επιτάχυνσης, άμεσα χρονοεξαρτώμενος, που βασίζεται στην αλληλεπίδραση κυμάτων.

Περιεχόμενα

1	Θεωρία των GRB και ο στόχος της εργασίας	6
1.1	Σύντομη Ιστορική Αναδρομή	6
1.2	Βασικά αποδεκτά χαρακτηριστικά	6
1.3	Παρατηρήσεις	7
1.3.1	Κύρια Έκρηξη του GRB	7
1.3.2	Afterglow	9
1.4	Σχετικιστικές τροποποιήσεις	10
1.4.1	Compatness problem	10
1.4.2	Γωνία εκπομπής και χαρακτηριστικοί χρόνοι	11
1.5	PLUTO Code	12
2	Μηχανισμός Internal-External Shocks	15
2.0.1	Γενικά συμπεράσματα και χρονικές κλίμακες	15
2.1	External shock	16
2.2	Υδροδυναμική ανάλυση των Internal shock	20
2.3	Αποδοτικότητα των Internal Shock	21
2.4	Καμπύλες φωτός απο internal shocks	22
3	Σχετικιστική Υδροδυναμική Προσέγγιση	26
3.1	Κύριες Εξισώσεις	26
3.2	Αριθμητικά και αναλυτικά αποτελέσματα	29
4	Σχετικιστική Μαγνητουδροδυναμική Προσέγγιση	32
4.1	Κύριες Εξισώσεις	32
4.2	Ανάλυση της δυανισματικής εξίσωσης ορμής	36
4.3	Ανάλυση του προβλήματος και η αναλυτική λύση των φυσικών μεγεθών	40
4.4	Κρίσημα σημεία και η αριθμητική επίλυση του προβλήματος	44
4.5	Αριθμητικά αποτελέσματα της περίπτωσης $F < 1$	47
4.6	Αριθμητικά αποτελέσματα της περίπτωσης $F > 1$	49
5	Χρονοεξαρτώμενες λύσεις σχετικιστικής μαγνητουδροδυναμικής προσέγγισης	53
5.1	Χρονοεξαρτώμενη μορφή των λύσεων	53
6	Επιτάχυνση ισχυρά μαγνητισμένων εκροών μέσω κυμάτων	58
6.1	Έλεγχος των μεθόδων επιτάχυνσης	58
6.2	Αυτο-όμοια μαγνητουδροδυναμικά κύματα	59

6.3	Ισχυρά μαγνητισμένο κέλυφος σε κενό περιβάλλον	60
6.4	Εφαρμογή σε GRB	63
7	Συμπεράσματα	67

Κεφάλαιο 1

Θεωρία των GRB και ο στόχος της εργασίας

Οι εκλάμψεις ακτίνων γάμμα -Gamma Ray Bursts (GRBs)- είναι έντονο, σύντομο και υψηλοενεργειακό γεγονός, όπου αποδεδειγμένα πυκνοί παλμοί ακτίνων γάμμα. Η διάρκεια της έκλαμψης κυμαίνεται από κλάσμα του δευτερολέπτου μέχρι εκατοντάδες δευτερόλεπτα. Η ολική ενέργεια, λόγω και διαφορετικών χαρακτηριστικών του ανιχνευτή, έχει εύρος 10^{-4} erg/cm^2 μέχρι 10^{-7} erg/cm^2 . Με αυτά τα όρια, και θεωρώντας ότι η εκπομπή είναι ισοτροπική, η λαμπρότητα προκύπτει αντίστοιχα να ισούται με $10^{51} - 10^{52} \text{ erg/sec}$. Είναι από τα πιο ενεργειακά φαινόμενα του διαστήματος, και η ανακάλυψή τους είναι αρκετά πρόσφατη. Η δημιουργία τους γίνεται συνήθως κατά τη σύγκρουση αστέρων νετρονίων, ή σε εκρήξεις supernova, κυρίως σε γαλαξίες υψηλής αστρικής παραγωγής.

1.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Η ανακάλυψη των GRBs συνδέεται στενά με τις αποστολές στο διάστημα και τη δραστηριότητα του ψυχρού πολέμου κατά τη δεκαετία του 60. Για την ανίχνευση τέτοιων φαινομένων σε μακρινές αποστάσεις, ήταν απαραίτητο να υπάρξουν ανιχνευτές εκτός της ατμόσφαιρας της Γης, κάτι που ξεκίνησε να συμβαίνει προς το τέλος της δεκαετίας αυτής. Το Υπουργείο Άμυνας των Η.Π.Α. διέταξε την αποστολή πολλών αισθητήρων σε διάφορες πλατφόρμες στο διάστημα. Αν και σκοπό είχαν την ανίχνευση πυρηνικών εκρήξεων, περιστασιακές εκρήξεις ακτίνων γάμμα εντοπίστηκαν σε τυχαίες διευθύνσεις στο διάστημα. Ο χρόνος καταγραφής αυτών από τους «αραιά» διασκορπισμένους αισθητήρες, καταδείκνυε πως τα γεγονότα δεν είχαν προέλευση από το ηλιακό σύστημα.

Το πρώτο άρθρο για την ανακάλυψη των GRBs δημοσιεύτηκε το 1973 από τους Klabesadel, Strong και Olsen. Στα επόμενα χρόνια, ο ρυθμός εντοπισμού τέτοιων γεγονότων αυξήθηκε στις 10 με 20 καταγραφές ετησίως, ενώ αυτή τη στιγμή ο αριθμός είναι μεγαλύτερος του 300. Η φυσική των GRBs δεν έχει κατανοηθεί πλήρως και τα χαρακτηριστικά του έχουν μεγάλη ποικιλία.

1.2 Βασικά αποδεκτά χαρακτηριστικά

Μετά την αρχική έκρηξη ακτίνων γάμμα, ακολουθείται μια ροή φωτονίων, μεγαλύτερης διάρκειας και μικρότερης ενέργειας, που ονομάζεται afterglow. Το εύρος των συχνοτήτων ξεκινά από ράδιο, και φτάνει μέχρι τις ακτίνες X. Ο ακριβής εντοπισμός του afterglow βοηθά στην αναγνώριση του γαλαξία-πηγή, και άρα της

αντίστοιχης ερυθρομετατόπισης. Τα μέχρι τώρα δεδομένα περιορίζουν τα GRBs σε ένα εύρος ερυθρομετατόπισης $z = 0.16-4.5$

Στην προσπάθεια να ερμηνευθούν τα κύρια χαρακτηριστικά, υπήρξε ικανοποιητική συμφωνία στο μοτνέλο των Fireball με τα πειραματικά δεδομένα. Σύμφωνα με αυτό, η αρχική έκρηξη οφείλεται σε διάχυση της ενέργειας προς το περιβάλλον, ενώ το afterglow απο αλληλεπίδραση των εξωτερικών shock με το μέσο της αρχικής έκρηξης.

Η εκροή σε όλες τα GRB models είναι σχετικιστική με παράγοντα Lorentz μεγαλύτερο του εκατό, όριο κρίσιμο που σχετίζεται με το πρόβλημα «συμπαγότητας», 1.4.1. Μία απο τις ενδείξεις για τη σχετικιστική φύση της ροής αποτελούν και οι παρατηρήσεις στο ράδιο και σε μεγαλύτερες συχνότητες, που καταλήγουν σε ένα χαρακτηριστικό μήκος για το Afterglow, 10^{17} cm σε χρόνο δύο εβδομάδων μετά την έκρηξη, μέγεθος αποδεκτό μόνο για ταχύτητες ροής κοντά σε αυτή του φωτός. Το μήκος της πηγής είναι μικρότερο κατα ένα παράγοντα $\frac{1}{c\Gamma^2}$, ενώ η σχετικιστική κίνηση επιδρά και στην εκπομπή των φωτονίων, καθώς αυτά παρατηρούνται μόνο εντός του ανοίγματος $\frac{1}{\Gamma}$. Όταν ο πίδακας επιβραδυνθεί, τότε παρατηρείται μειωμένη ροή ενέργειας, λόγω

του μεγαλύτερου ημιανοίγματος $\frac{1}{\Gamma}$, γεγονός που επιβεβαιώνει το beaming της ακτινοβολίας. Το ίδιο φαινόμενο θεωρείται ο λόγος που παρατηρούνται ορφανα afterglows χωρίς να έχει παρατηρηθεί πριν η κύρια έκρηξη, όπως θα εξηγηθεί στη συνέχεια. Η εκπομπή φαίνεται να πλησιάζει την ισοτροπική όταν η εκροή βρίσκεται στη φάση που ο παράγοντας Lorentz μειώνεται δραστικά με το χρόνο. Αν και η φύση του πίδακα, καθολικά θεωρείται σχετικιστική, η ενεργειακή κατανομή δεν είναι τετριμμένη, και διαφορετικά μοντέλα εξετάζουν διαφορετικές αναλογίες μεταξύ της κινητικής και ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας.

Στο βασικό ερώτημα για την προέλευση της ενέργειας του φαινομένου, οι περισσότερες υποθέσεις κάνουν λόγο για collisionless shocks μέσω ασταθειών, ως κυριότερο μέσω ενεργειακής «πηγής» για την κύρια έκρηξη GRB και το ύστερο Afterglow. Συγκεκριμένα, το Afterglow μάλλον τροφοδοτείται απο external shocks, διαχωρίζοντας τον μηχανισμό των δύο φαινομένων, ενώ η έκρηξη GRB τροφοδοτείται με ενέργεια μέσω των Internal-shocks, δηλαδή συγκρούσεις μεταξύ διαφορετικών παλμών εντός του τζέτ.

1.3 Παρατηρήσεις

Οι παρατηρήσεις των GRBs δεν παρουσίαζαν πολλές ομοιότητες μεταξύ τους, και για πολλά χρόνια η κατηγοριοποίηση τους ήταν επίπονο ζήτημα. Ξεχωριστά χαρακτηριστικά όμως καταγράφονται στη κύρια έκρηξη, και στα Afterglows

1.3.1 Κύρια Έκρηξη του GRB

Όπως μαρτυρά και το όνομα, η συχνότητα στην οποία παρατηρείται η μέγιστη ένταση, είναι μπάνα των ακτίνων γάμμα. Ταυτόχρονα όμως με αυτή την εκπομπή, υπάρχει και μία χαμηλότερης ενέργειας σε χαμηλότερες συχνότητες. Η εκπομπή στις ακτίνες X συμπληρώνει τη κύρια εκπομπή, ενώ υπάρχουν και περιπτώσεις όπου αυτές αποτελούν και το μόνο σήμα, λόγω ασθενικής ροής ακτίνων γάμμα. Οι περιπτώσεις αυτές ονομάζονται X-ray flashes (XFRs).

Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα της κύριας έκρηξης δεν είναι θερμικό. Η ροή ενέργειας παρουσιάζει μέγιστο στις μερικές εκατοντάδες keV ενώ παραμένει σημαντική σε αρκετές περιπτώσεις ακόμη και σε τάξης μεγέθους του ενός GeV .

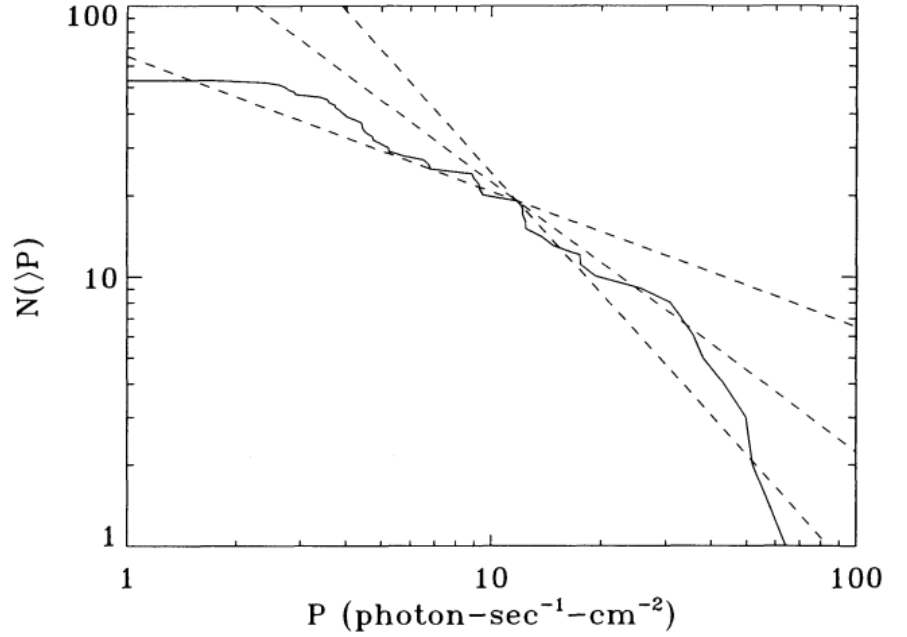
Παρά τις διαφορές που παρουσίαζαν τα φάσματα των διαφορετικών εκρήξεων, μία αρκετά ικανοποιητική εξίσωση παρουσιάστηκε απο τους [Band et al.(1993)], που εφαρμόζεται στα περισσότερα φάσματα των GRBs,

και δίνεται απο τον τύπο :

$$N(\nu) = (h\nu)^a \exp\left(-\frac{h\nu}{E_0}\right) \quad h\nu < (a-b)E_0$$

$$[(a-b)E_0]^{a-b} (h\nu)^b \exp(b-a) \quad h\nu > (a-b)E_0 \quad (1.1)$$

Αν και η προσαρμογή στα παρατηρησιακά δεδομένα είναι άριστη, δεν έχει υπάρξει θεωρητικό μοντέλο που να επιβεβαιώνει αυτού του είδους τη φασματική εξίσωση. Στη πλειονότητα των περιπτώσεων, η ροή ενέργειας νF_ν παρουσιάζει μέγιστο στη τιμή $E_p = (a+2)E_0$, ενώ ένα 10% των GRBs δεν παρουσιάζουν μέγιστο στο παρατηρούμενο εύρος, όπως φαίνεται στο 1.3, γεγονός που δημιουργεί αμφιβολίες στον καθορισμό της μέγιστης cut-off ενέργειας, που ίσως να οφείλεται στην ευαισθησία του BATSE (Burst And Transient Source Experiment) σε ενέργειες μεγαλύτερες των 3 MeV. Εκτός απο τα ερωτήματα γύρω απο το ενεργειακό κατώφλι, υπάρχει και το ζήτημα της χαμηλοενεργειακής εκπομπής. Συγκεκριμένα, το 1997 είχε προταθεί, [Cohen et al.(1997)], πως τα ισχυρά GRBs (αυτά με συγκριτικά μεγάλη τιμή στην ενέργεια cut-off) παρουσιάζουν στο νόμο δύναμης της χαμηλοενεργειακής εκπομπής, κλίση μεταξύ του 1/3 και $-1/2$. Η υπόθεση αυτή επιβεβαιώθηκε μέχρι ένα βαθμό απο τις παρατηρήσεις του HETE (High Energy Transient Explorer)



Σχήμα 1.1: Παράδειγμα του μοντέλου 1.1 που συμφωνεί με τα παρατηρησιακά δεδομένα για το GRB 1B 911127. Οι φασματικοί δείκτες έλαβαν τη τιμή $a = -0.968$ και $b = -2.427$ ενώ η κρίσιμη ενέργεια $E_0 = 149.5$. [Band et al.(1993)]

Περαιτέρω παρατηρήσεις χρειάζονται να γίνουν, καθώς και οι δύο ανιχνευτές, BATSE και HETE δεν έχουν ικανοποιητική ακρίβεια στο χαμηλοενεργειακό εύρος ενεργειών.

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η διάρκεια των εκρήξεων διαφέρουν μέχρι και τρεις τάξεις μεγέθους. Ένας συχνός τρόπος ταξινόμησης σχετίζεται με την ημιδιάρκεια (T_{50}), ή ένα κλάσμα του χρόνου (T_{90}) των εκρήξεων αυτών. Ο μεγαλύτερος αριθμός των GRB παρουσιάζουν έντονες μεταπτώσεις στη καμπύλη φωτός, με χαρακτηριστική κλίμακα πολύ μικρότερη του συνολικού χρόνου της εκρήξεως, που φτάνει μέχρι και της τάξεως του milliseconds, διαθέτοντας ταυτόχρονα ξεκάθαρη δομή.

Συνηθίζετε οι παλμοί με $T_{90} < 2$ 2sec να θεωρούνται Short Bursts, ενώ οι $T_{90} > 2$ Long Bursts.

Αποτελούν διαφορετικά φυσικά γεγονότα, και η κατηγοριοποίηση τους δεν σχετίζεται με τυχόν παρατηρησιακές συνθήκες. Αν και αυθόρμητα γίνεται η υπόθεση πως οι Short εκρήξεις αποτελούν απλώς μία κορυφή των Long εκρήξεων, οι [Nakar & Piran(2002)] έδειξαν πως οι δύο πρώτες κορυφές των τελευταίων έχουν σχεδόν την ίδια ένταση, άρα αν λόγω θορύβου, ήταν παρατηρήσιμη μόνο η πρώτη κορυφή, τότε θα ήταν και η δεύτερη, επομένως οι δύο ομάδες GRB είναι φυσικά διακριτές.

Τα Long GRBs είναι και πιο εύκολα στην ανίχνευση λόγω της μεγάλης χρονικής διάρκειας, αλλά η κυριότερη διαφορά των δύο, είναι πως αποτελούν τη μόνη ομάδα στα οποία έχει παρατηρηθεί το Afterglow,

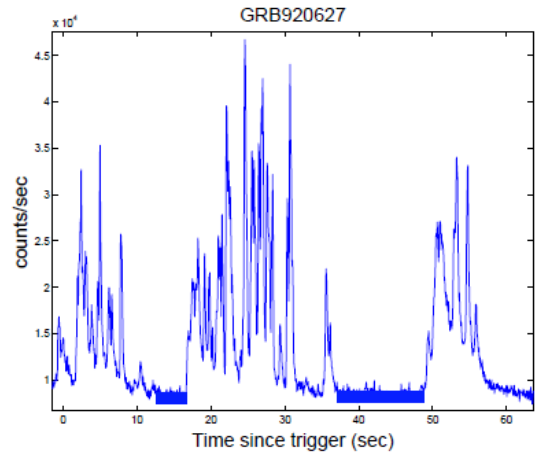
χωρίς όμως να υπάρχει βεβαιότητα για το αν αποτελεί ιδιότητα στους δύο ξεχωριστούς πληθυσμούς.

1.3.2 Afterglow

Η σύνδεση της του GRB με το Afterglow δεν είναι ακριβώς ξεκάθαρη μέχρι τώρα. Από τις μέχρι τώρα παρατηρήσεις δεν υπάρχει ρητή εξάρτηση μεταξύ της ροής των ακτίνων Gamma και τις οπτικές/ακτίνες-X του Afterglow. Γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με το μοντέλο των Internal-External shock που διαχωρίζει τα αίτια των δύο φαινομένων.

Η «επικρατούσα» συχνότητα στα Afterglow είναι αυτή των ακτίνων X, ενώ στα μισα σχεδόν από τα μέχρι τώρα καταγεγραμμένα εντοπίζονται και στο οπτικό - ράδιο. Ο ακριβής εντοπισμός του Afterglow επιτρέπει τον προσδιορισμό της πηγής(host-galaxy) και την ερυθρομετατόπιση αυτής. Ξεκινώντας από την πιο ισχυρή συχνότητα, οι ακτίνες-X είναι αυτές που εντοπίζει κάποιος στις πρώτες στιγμές κάθε Afterglow ενώ έχουν και το μικρότερο χρόνο ροής. Υποθετικά, μπορεί ακόμη να γίνει σύνδεση της εκπομπής αυτής με την κύρια έκρηξη GRB, και να θεωρηθεί ως «μεταβατική» φάση των δύο φαινομένων. Συνήθως, η καμπύλη φωτός των ακτίνων-X μπορεί να προκύψει από extrapolation της τελικής εκπομπής του GRB. Συναρτήσει του χρόνου και της συχνότητας, ακολουθεί ένα προφίλ $f_\nu(t) \propto \nu^{-a_1} t^{-a_2}$, με $a_1 \propto 1.4$ και $a_2 \propto 0.9$. Η συνολική ενέργεια για αυτή τη φάση του Afterglow είναι σχεδόν ίση με αυτή του GRB, ενώ η χρονική διάρκεια του είναι περίπου 11 ώρες και η μετρήσιμη λαμπρότητα έχει εξάρτηση από το ημιάνοιγμα της εκπομπής, και αν ληφθεί και αυτό υπόψιν, τότε παραμένει συνολικά σταθερή. Σημαντική συνεισφορά στο σήμα των Afterglow είναι και το οπτικό, που παρατηρείται συνήθως μία μέρα μετά την αρχική έκρηξη, με νόμο δύναμης $\nu^{-\beta}$, για χρόνο $t^{-\alpha}$. Αν και δεν εμφανίζονται σε όλες τις περιπτώσεις, περίπου στο 50%, οι γραμμές απορρόφησης στο φάσμα τους είναι ενδεικτικές για τη σύσταση της πηγής τους, με τη συνολική του διάρκεια να είναι της τάξεως των εβδομάδων.

Οι περιπτώσεις που το οπτικό Afterglow δεν είναι παρατηρήσιμο, δηλαδή το άλλο 50%, ονομάζονται Dark GRBs. Η εξήγηση της «απώλειας» του οπτικού σήματος δεν καταλογίζεται σε διαφορετικό μηχανισμό του φαινομένου. Μια πιθανή αιτιολόγηση σχετίζεται με την απόσταση της πηγής και τη ερυθρομετατόπιση αυτής. Το περιβάλλον, ακόμη, ενδιάμεσα του line-of-sight πιθανώς να περιέχει νέφη που παρουσιάζουν μεγάλη απορρόφιση στο οπτικό σήμα.



Σχήμα 1.2: Η Καμπύλη φωτός του GRB 920627, με συνολική διάρκεια 52 sec και τυπικό εύρος παλμών, 0.8 sec.

1.4 Σχετικιστικές τροποποιήσεις

Όταν η πηγή κινείται με παράγοντα Lorentz πολύ μεγαλύτερο της μονάδας, παρουσιάζονται τροποποιήσεις στις τιμές των χαρακτηριστικών μεγεθών του συστήματος. Η σχετικιστική φύση όμως του προβλήματος θεωρήθηκε αναγκαία λόγω ενός σημαντικότερου πρόβληματος που παρουσιάστηκε από τις παρατηρήσεις, χρησιμοποιώντας νευτώνια δυναμική.

1.4.1 Compattness problem

Δεδομένων των κοσμολογικών αποστάσεων, για μία τυπική ισοτροπική έκρηξη, ενεργειακής πυκνότητας F , η συνολική ενέργεια που εκλύεται θα ισούται με

$$E = 4\pi D^2 F = 10^{50} \text{ergs} \left(\frac{D}{3000 \text{Mpc}} \right)^2 \left(\frac{F}{10^{-7} \text{ergs/cm}^2} \right)$$

που για τυπικές τιμές του φαινομένου, υπολογίζεται περίπου 10^{50} . Κοσμολογικές αποστάσεις που υπεισέρχονται στο πρόβλημα, αλλάζουν την ακριβή τιμή ενέργεια με ένα παράγοντα της τάξεως της μονάδας, και άρα αγνοείται από τη παραπάνω σχέση.

Από τις καμπύλες φωτός, παρατηρείται συνήθως μία χρονική κλίμακα αλλαγής, της τάξεως του $\delta T \approx 10 \text{msec}$, και συνδέοντας αυτή με τη διαταρχή της πηγής, υποθέτοντας ότι η ταχύτητα των κυμάτων είναι περίπου c , προκύπτει το μήκος της πηγής $R \approx 310^8 \text{cm}$. Οι ενέργειες του μη θερμικού φάσματος είναι υψηλές και άρα η παραγωγή ηλεκτρονίων-ποζιτρονίων γίνεται εφικτή, ανάλογα με τα ζεύγη των δύο φωτονίων που συγκρούονται.

Με το τελευταίο παράγοντα να υπολογίζεται κατα μαθηματικά από το συντελεστή f_p , το μέσο οπτικό βάθος της διαδικασίας προκύπτει ίσο με

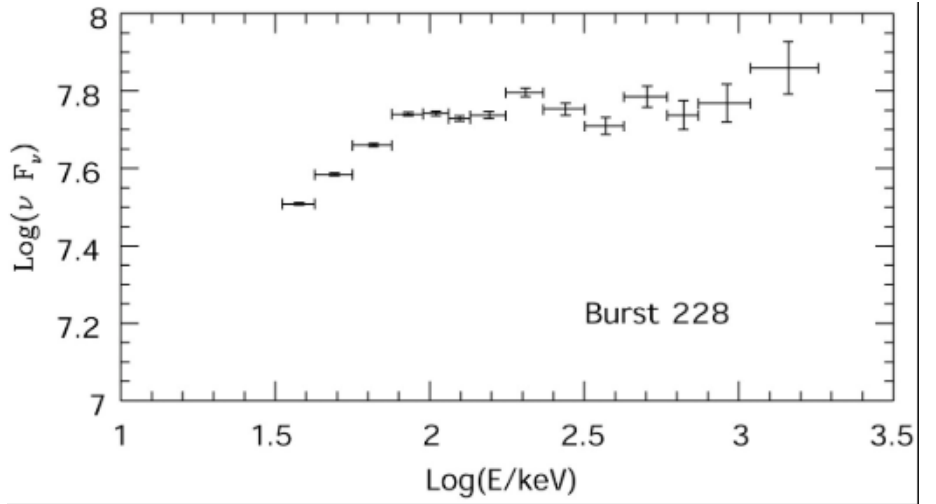
$$\tau_{\gamma\gamma} = \frac{f_p \sigma_T F D^2}{R_i^2 m_e c^2}$$

ή, αντίστοιχα με πρίν

$$\tau_{\gamma\gamma} = 10^{13} \left(\frac{D}{3000 \text{Mpc}} \right)^2 \left(\frac{F}{10^{-7} \text{ergs/cm}^2} \right) \frac{\delta T}{10 \text{msec}}$$

όπου σ_T η διατομή Thompson. Φαίνεται ότι για τυπικές τιμές, η διαδικασία είναι πολύ αδιαφανής. Ακόμη και αν στην αρχική κατάσταση, τα ζεύγη δεν έχουν δημιουργηθεί, μετά από μικρό, συγκρητικά με τη διάρκεια του φαινομένου, χρόνο θα είναι αριθμητικά αρκετά ώστε να σχεδιάζουν τα χαμηλοενεργειακά φωτόνια, οδηγώντας σε μεγάλο οπτικό βάθος για όλα τα φωτόνια.

Διαφορετικά, στο ίδιο πρόβλημα του οπτικού βάθους καταλήγει κανείς αν θεωρήσει ξεχωριστά την αδιαφάνεια των υψηλοενεργειακών GeV φωτονίων, που οφείλεται στη σύγκρουση τους με χαμηλοενεργειακά



Σχήμα 1.3: Το παρατηρούμενα ενεργειακό φάσμα του BATSE' 228. Πρόκειται για μη θερμικός φάσμα που φτάνει αρκετές εκατοντάδες keV

φωτόνια στη τροχιά τους. Ένα αντίστοιχο όριο προκύπτει με αυτή τη διαδικασία, που δεν επιβεβαιώνεται από τον αριθμό των παρατηρούμενων GeV φωτονίων.

Το πρόβλημα της συμπαγότητας πηγάζει από την υπόθεση ότι το μήκος της πηγής καθορίζεται από τη χρονική κλίμακα μεταβλητότητας. Αν συνυπολογιστούν οι σχετικιστικές διορθώσεις τότε οι τιμές που προκύπτουν έρχονται σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις:

Έστω μία κινούμενη προς το παρατηρητή πηγή με παράγοντα Lorentz $\Gamma \gg 1$. Τα παρατηρούμενα φωτόνια $h\nu_{obs}$, λόγω του φαινομένου Doppler είναι πιο ενεργητικά από ότι στο σύστημα της πηγής, όπου θα είχαν ενέργεια $h\nu_{source} \approx h\nu_{obs} \frac{1}{\Gamma}$. Λόγω ακριβώς αυτού του φαινομένου, τα ζευγάρια που είναι ενεργειακά ικανά να παράξουν ζεύγη ποζιτρονίου ηλεκτρονίου είναι αντίστοιχα λιγότερα. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, ο παράγοντας εκφράζεται μαθηματικά από τη σταθερά f_p , που στο σύστημα της πηγής θα είναι μικρότερο κατά ένα παράγοντα $\Gamma^{-2\alpha}$, όπου α , ο νόμος δύναμης της υψηλοενεργειακής γκάμας στο φάσμα. Ο χρόνος, τέλος, θα είναι μεγαλύτερος κατά ένα παράγοντα Γ^2 , ορίζοντας έτσι το πραγματικό μήκος της πηγής $R_e = c\delta T$.

Συνυπολογίζοντας όλους τους παραπάνω παράγοντες, προκύπτει το οπτικό βάθος ίσο με

$$\tau_{\gamma\gamma} = \frac{f_p \sigma_T F D^2}{\Gamma^{2\alpha} R_e^2 m_e c^2}$$

ή,

$$\tau_{\gamma\gamma} = \frac{10^{13}}{\Gamma^{4+2\alpha}} \left(\frac{F}{10^{-7} \frac{ergs}{cm^2}} \right) \left(\frac{D}{3000 Mpc} \right)^2 \left(\frac{\delta T}{10 msec} \right)^{-2}$$

Φαίνεται πως για

$$\Gamma_{flow} > 10^{\frac{13}{4+2\alpha}} \approx 10^2$$

υπάρχει διαφάνεια, και άρα οι καμπύλες φωτός μπορούν να ερμηνευθούν. Δημιουργείται έτσι ένα κάτω όριο στο παράγοντα Lorentz. Διαφορετικές τιμές έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία, φτάνοντας μέχρι και $\Gamma \approx 1000$.

1.4.2 Γωνία εκπομπής και χαρακτηριστικοί χρόνοι

Το παραπάνω όριο στο παράγοντα Lorentz δηλώνει και το γωνιακό άνοιγμα της εκπομπής των φωτονίων, δηλαδή $\theta_s = \frac{1}{\Gamma}$, που δεν σημαίνει αναγκαία πως η στερεά γωνία που καλύπτει η εκπομπή είναι αντίστοιχη αυτής της γωνίας. Η γωνία εκπομπής μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την θ_s , αν η ροή ύλης από τη πηγή είχε ημιάνοιγμα στο χώρο $\theta_{Matter} > \theta_s$. Σε αυτή τη περίπτωση, όλοι οι παρατηρητές που θα βρίσκονταν εντός της γωνίας θ_M θα παρατηρούσαν τη ροή φωτονίων, που θα προερχόταν όμως από μία μικρότερη περιοχή της πηγής, αυτής που το ημιάνοιγμα θ_s περιέχει το παρατηρητή. Επαχόλουθο αυτού, είναι πως οι ιδιότητες που προκύπτουν από τις παρατηρησιακές μετρήσεις, δεν θα εκφράζουν τις «μέσες» συνθήκες που θα επικρατούν στο GRB, αλλά μόνο αυτές, μίας μικρής περιοχής.

Σημαντικές τροποποιήσεις δημιουργούνται και στις χρονικές κλίμακες:

Θεωρείται πηγή που κινείται σε ευθεία γραμμή προς το παρατηρητή και εκπέμπει δύο φωτόνια στις αποστάσεις R_1, R_2 αντίστοιχα. Το πρώτο φωτόνιο θα φτάσει το παρατηρητή σε χρόνο

$$\delta t = \frac{R_2 - R_1}{u} - \frac{R_2 - R_1}{c}$$

μικρότερο από το δεύτερο. Για σχετικιστική κίνηση της πηγής, και για χρονικά μεταβαλλόμενη ταχύτητα, η τελευταία σχέση γράφεται βολικότερα

$$\delta t_{12} \approx \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{2c\Gamma^2(R)} \Leftrightarrow t_R = \frac{R}{2c\Gamma^2} \quad (1.2)$$

που ταυτίζεται άλλωστε με την εκτίμηση του μήκους της πηγής για δεδομένη χρονική κλίμακα μεταβλητότητας.

Σε μία δεύτερη υπόθεση, θεωρείται πηγή, σχετικιστικά εκτονόμενη πηγή, σφαιρικά ισοτροπική, τουλάχιστον για κλίμακες της τάξεως $\gtrsim \frac{1}{\Gamma}$. Με το ίδιο σκεπτικό, αν η πηγή εκπέμψει δύο φωτόνια, από την ίδια σφαιρική ακτίνα, αλλά το πρώτο ξεκινά από την ευθεία παρατήρησης ενώ το δεύτερο σχηματίζει γωνία θ με αυτή, το δεύτερο φωτόνιο θα φτάσει στον παρατηρητή με χρονική καθυστέρηση

$$\delta t_{ang} \approx \frac{R}{c}(1 - \cos \theta) \approx \frac{R\theta^2}{2c}$$

και λαμβάνοντας υπόψιν το beaming

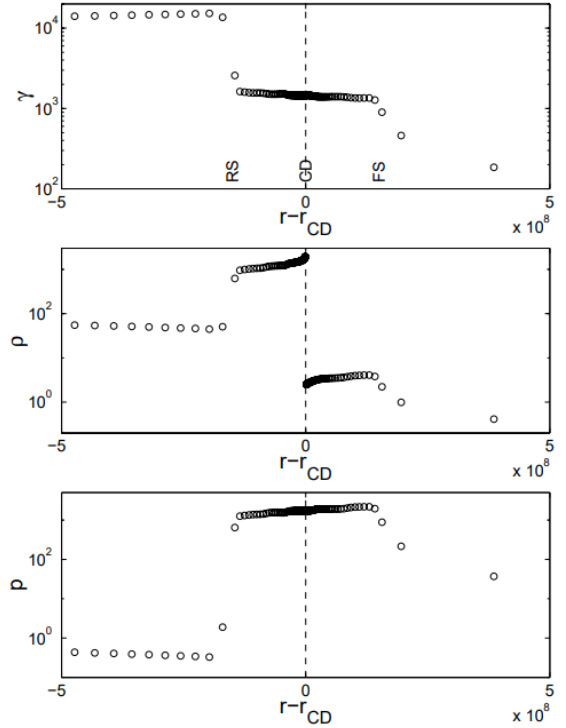
$$t_{ang} = \frac{R}{2c\Gamma^2}$$

τιμή που ταυτίζεται με τη σχέση 1.2. Οι δύο τελευταίες χρονικές κλίμακες είναι καθοριστικές για όλα τα GRB Models, αλλά και για το μηχανισμό των Internal-External Shocks:

1.5 PLUTO Code

Ο PLUTO είναι ένας ελεύθερος κώδικας που λύνει αριθμητικά, συστήματα από υπερβολικές/παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, και εξειδικεύεται σε αστροφυσικές ροές. Ολοκληρώνει ένα σύστημα που αποτελείται από νόμους διατήρησης, σε πεπερασμένο όγκο με βάση τους υπολογισμούς τύπου Godunov. Ο αρχικός όγκος του συστήματος, ορίζεται από το χρήστη, μαζί με το πόσα 'κελιά' θα χωρίζεται. Αφού οριστούν οι αρχικές συνθήκες, δίνεται σε κάθε κελί η πυκνότητα, η πίεση και οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητας και του μαγνητικού πεδίου, ως ένα θεμελιώδες διάνυσμα V που είναι εν γένει ξεχωριστό σε κάθε κυψελίδα του χώρου. Αν και στη πραγματικότητα μπορεί να μην υπάρχει κάποιος όγκος που τα μεγέθη να είναι ομογενή, αν είναι στοιχειώδης τότε η προσέγγιση θα είναι ικανοποιητική. Το πόσο μικρός είναι ο όγκος, και άρα η ακρίβεια του συστήματος, ορίζεται από τον χρήστη, και σε βάρος του υπολογιστικού χρόνου. Στη συνέχεια, λύνεται το πρόβλημα Riemann¹ σε κάθε κομμάτι του όγκου, για χρόνο που ορίζεται αυτοσυνεπώς από το κώδικα, και καθορίζεται από τους λόγους των μεγεθών μεταξύ των κελιών.

¹Πρόκειται για δύο ρευστά που βρίσκονται σε επαφή, με εν γένει διαφορετικά μεγέθη ομογενούς αρχικής ταχύτητας πυκνότητας πίεσης και μαγνητικού πεδίου, που όταν αφηθεί το σύστημα στο χρόνο, τα μεγέθη έχουν γνωστές αναλυτικές λύσεις σε όλο το χώρο.



Σχήμα 1.4: Τα μεγέθη της πίεσης της πυκνότητας και του παράγοντα Lorentz στο στάδιο της επιβράδυνσης όπως αυτά φαίνονται στο σύστημα του contact discontinuity. Η τιμή του άξονα x δηλώνει την απόσταση του σημείου του ρευστού από αυτή. [Kobayashi et al.(1999)]

Ο κώδικας είναι ικανός, ανάλογα με τις επιλογές του χρήστη, να περιγράψει ρευστά απο μία έως τρεις διαστάσεις και απο μία έως τρεις συνιστώσες δυανισμάτων. Δηλαδή στις ροές που εξετάσαμε στο ;; θα γινόταν χρήση δύο διαστάσεων και τρεις συνιστώσες - αφού το μαγνητικό πεδίο είναι στην αξιμουθιακή κατεύθυνση - ενώ σε μία steady state σχετικιστική ροή, μία διάσταση και ίδιο αριθμό συνιστωσών. Δίνονται τέσσερις επιλογές ανάλογα με τα μεγέθη που επικρατούν να χρησιμοποιηθούν οι ανάλογες εξισώσεις:

- Κλασσική Υδροδυναμική (HD)
- Μαγνητουδροδυναμική (MHD)
- Σχετικιστική Υδροδυναμική (RHD)
- Σχετικιστική Μαγνητουδροδυναμική (RMHD)

και διαλέγεται σύστημα συντεταγμένων απο τα παρακάτω:

- Καρτεσιανές Συντεταγμένες
- Πολικές συντεταγμένες
- Κυλινδρικές συντεταγμένες
- Σφαιρικές Συντεταγμένες

Αν και οι πολικές εμπεριέχονται στις κυλινδρικές, χρησιμοποιούνται στη περίπτωση που χρειάζεται να αγνοηθεί μόνο η z συνιστώσα. Επιλέγοντας 2 διαστάσεις στις κυλινδρικές συντεταγμένες, το σύστημα γίνεται αξισυμμετρικό και όχι πολικό. Στις περιπτώσεις που θα εξεταστούν στη συνέχεια, θα χρησιμοποιηθούν Κυλινδρικές συντεταγμένες και Σχετικιστικές Μαγνητουδροδυναμικές εξισώσεις.

Το σύστημα ολοκληρώνεται απο τον κώδικα, με βάση νόμους διατήρησης που έχουν τη μορφή

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla T(\vec{A}) + S(\vec{A})$$

Με το A να είναι η διατηρήσιμη ποσότητα, ο πρώτος όρος εκφράζει την άμεση εξάρτηση της ποσότητας απο το χρόνο, ο δεύτερος όρος την ροή της κάθε συνιστώσας και T να είναι εν γένει τανυστής 3 επι 3 και συμμετρικός, ενώ ο τρίτος όρος αφορά της πηγές και τις καταβόθρες της αντίστοιχης ποσότητας.

Επειδή στη πορεία, όλα τα μοντέλα έγιναν σε *RMHD* θα παρουσιαστούν οι αντίστοιχες εξισώσεις διατήρησης. Συγκεκριμένα είναι

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} D \\ \vec{m} \\ E \\ \vec{B} \end{bmatrix} + \nabla \begin{bmatrix} D\vec{u} \\ w_t \gamma^2 \vec{u}\vec{u} - \vec{b}\vec{b} + P_t I \\ \vec{m} \\ \vec{u}\vec{B} - \vec{B}\vec{u} \end{bmatrix} = 0^2 \quad (1.3)$$

Όπου D είναι η πυκνότητα στο σύστημα εργαστηρίου, $\vec{m}$ είναι το δυάνισμα της πυκνότητας ορμής, E το άθροισμα ενέργειας ύλης και Poynting. Υπάρχει σχέση μεταξύ των ποσοτήτων του πίνακα U και του θεμελιώδους δυανίσματος V που δίνεται στο κέντρο του κάθε κελιού στο χώρο. Συγκεκριμένα είναι $V = (\rho, \vec{u}, P, \vec{B})$ και η σχέση του με το U

²όπου $\vec{a}\vec{a}$ εννοείται η άθροιση $a_i a^j$ και όχι $|a|^2$

$$\begin{aligned} D &= \gamma \rho \\ \vec{m} &= w_t \gamma^2 \vec{u} - b^0 \vec{b} \\ E &= w_t \gamma^2 - b^0 b^0 - p_t \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ο κώδικας έχει αρκετές διαθέσιμες επιλογές για την καταστατική εξίσωση, δεδομένου ότι για σχετικιστικά αέρια ο αδιαβατικός δείκτης Γ έχει όριο $4/3$, και για την απόκλιση του μαγνητικού πεδίου. Δεν χρειάστηκαν στο μοντέλο που ακολουθούν και άρα δεν θα αναλυθούν στη συνέχεια. Ένα σύστημα εξισώσεων όπως το παραπάνω λύνεται με τη μέθοδο ο Runge-Kutta χωρίς να είναι δυνατή η εύρεση των χαρακτηριστικών στην παρούσα έκδοση.

Σκοπός της εργασίας

Θα γίνει ανάλυση του μοντέλου internal-external shock ως μία πρόταση για την ενεργειακή λύση του προβλήματος. Στη συνέχεια θα αναπαραχθούν αναλυτικές λύσεις στην υδροδυναμική προσέγγιση, σφαιρικής γεωμετρίας, με σκοπό την επίτευξη μεγάλων τιμών, όπως ορίζει το πρόβλημα συμπαγότητας, στο παράγωγο Lorentz. Θα επιχειρηθεί επιβεβαίωση των αναλυτικών αποτελεσμάτων με αριθμητικές προσομοιώσεις HD του κώδικα PLUTO. Θα ακολουθηθεί η ίδια διαδικασία για τη μαγνητουδροδυναμική προσέγγιση, χωρίς σφαιρική συμμετρία με σκοπό την εύρεση και την ανάλυση αυτοόμοιων steady state λύσεων. Η απόδοση της χρονοεξάρτησης στη ροή θα δοθεί αναλυτικά, χρησιμοποιώντας την στάσιμη λύση. Αντίστοιχες αριθμητικές προσομοιώσεις RMHD θα γίνουν για την αναπαραγωγή των αναλυτικών λύσεων.

Κεφάλαιο 2

Μηχανισμός Internal-External Shocks

Η σύγκρουση δύο «κελυφών» της ροής, ονομάζεται Internal Shock και παράγει ένα παλμό, χωρίς όμως να επηρεάζει τη συνολική κινητική ενέργεια της ροής, δηλαδή τον παράγοντα Lorentz, ανακατανέμοντας τον απλώς στο εσωτερικό αυτής. Η γωνιακή κατανομή αυτών, αποτελεί σημαντικό παράγοντα για το παλμό που θα λάβει ο παρατηρητής. Αν η ανομοιογένεια των «κελυφών» είναι σημαντική, τότε η συνεισφορά από τα διαφορετικά σημεία του πρέπει να συνυπολογιστεί. Σε επόμενη φάση, η ροή επιβραδύνεται από τα external shocks λόγω της αλληλεπίδρασης της ροής με τον ενδιάμεσο χώρο. Ανάλογη διαδικασία είναι η επιβράδυνση του υλικού κατά την έκρηξη supernova που αλληλεπιδρά με το ενδοαστρικό μέσο και εν τέλει επιβραδύνεται.

2.0.1 Γενικά συμπεράσματα και χρονικές κλίμακες

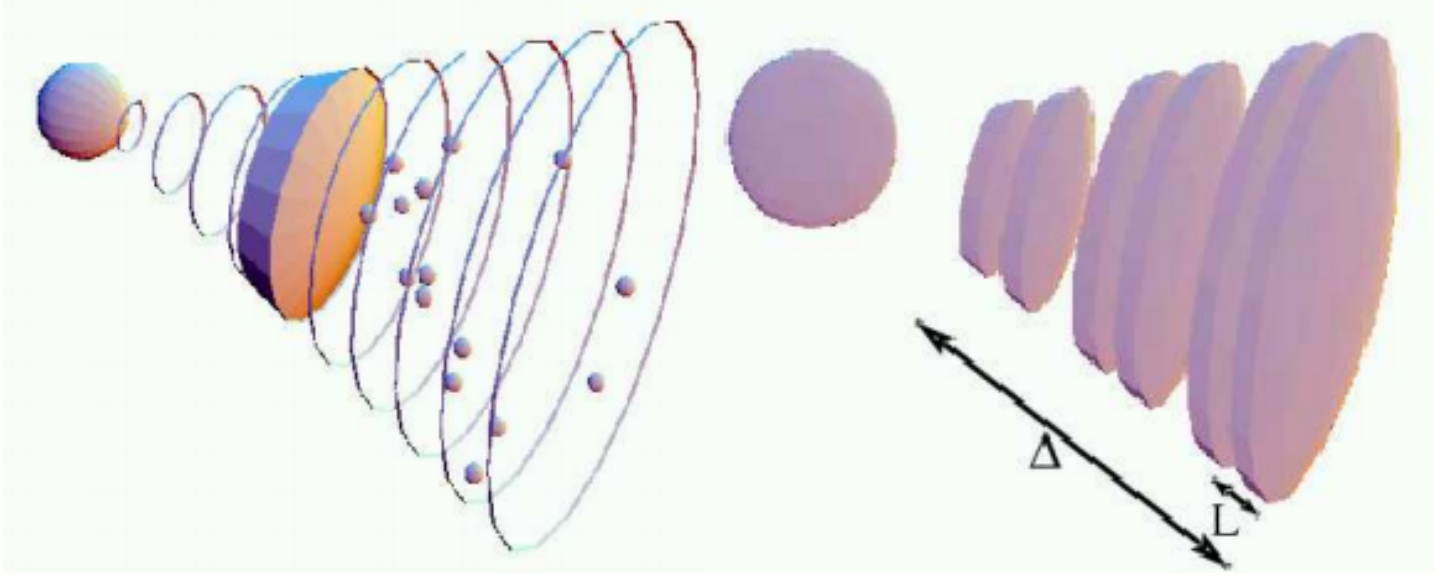
Όπως έχει αναφερθεί, η μείωση του παράγοντα Lorentz θα συνοδεύεται από όλο και μεγαλύτερη «παρατηρίσιμη» περιοχή της πηγής, μέχρι να φτάσει τη κρίσιμη τιμή $\Gamma = \theta_s^{-1}$.

Τα επακόλουθα της τελευταίας παρατήρησης είναι τα εξής: Στη περίπτωση που η αρχικά σχετικιστική ροή, έχει ανομοιογένειες με μικρή γωνιακή χαρακτηριστική κλίμακα, δύο παρατηρητές θα καταλήγουν σε διαφορετικές καμπύλες φωτός, αν αυτοί τοποθετούνται υπό γωνία μεγαλύτερη του $\frac{1}{\Gamma}$ μεταξύ τους. Μετά από αρκετό χρόνο όμως, και όταν η ροή έχει επιβραδυνθεί από τα external shocks και ξεκινήσει το Afterglow, οι παρατηρητές θα βλέπουν την ίδια γωνιακή περιοχή.

Επόμενο είναι, πως οι καταγραφές με τις συνθήκες για τα GRB να παρουσιάζουν μεγαλύτερες ανομοιοότητες συγκριτικά με τις αρχικές φάσεις του φαινομένου, ενώ στο Afterglow, τα κοινά χαρακτηριστικά θα είναι περισσότερα. Ο υπολογισμός της συνολικής ενέργειας θα παρουσιάζει συστηματικό σφάλμα, λόγω της μεγαλύτερης ευκολίας εντοπισμού υψηλοενεργειακών φαινομένων.

Οι διακυμάνσεις, που όπως αναφέρθηκε γίνονται σε μία χρονική κλίμακα δt , θα αρχίσουν να εξασθενούν όσο ο παράγοντας Lorentz μειώνεται, και τα παρατηρησιακά αποτελέσματα εκφράζουν πρακτικά τις average συνθήκες σε μία όλο και μεγαλύτερη γωνιακή περιοχή. Οι διακυμάνσεις που αφορούν μεγαλύτερες κλίμακες, διαισθητικά θα πρέπει να είναι ασθενέστερες. Σημασία έχει ακόμη, να ελεγχθεί η τιμή της μεταβλητότητας δt , και κυρίως η σύγκρισή με τις χαρακτηριστικές κλίμακες t_{ang} , t_R .

Ας εξετασθεί πρώτα η περίπτωση σφαιρικής ροής, με γωνιακό άνοιγμα $\theta_s > \frac{1}{\Gamma}$ και πλάτος Δ . Η διάρκεια του παλμού είναι $\frac{\Delta}{c}$. Θεωρητικά, η διάρκεια του παλμού έχει κατά τι μεγαλύτερη τιμή, αφού διαφορετικά σημεία του κελυφούς φθάνουν σε διαφορετικούς χρόνους στο σημείο εκπομπής. Για πρακτικούς λόγους, και χωρίς να υπεισέρχονται σημαντικά σφάλματα, η εκπομπή των φωτονίων από το κάθε κέλυφος θεωρείται ταυτόχρονη. Αν η έκρηξη περιέχει πολλά κελύφη, με έστω χαρακτηριστική απόσταση μεταξύ τους $L < \Delta$,



Σχήμα 2.1: Έκρηξη GRB με γωνιακή ισοτροπία, απο διακριτά κελύφοι που απέχουν μεταξύ τους απόσταση L , και συνολικά διαρκούν Δ/c (δεξιά), και η αντίστοιχη (αριστερά) θεώρηση, για ανομοιογενή κατανομή μικρών σφαιρών απο τις οποίες προέρχονται οι παλμοί που λαμβάνει ο παρατηρητής

και δεδομένου ότι η ροή καλύπτει μεγαλύτερη γωνιακή περιοχή απο αυτή του beaming, τότε άμεσα προκύπτει πως $t_{\Delta} < t_{ang} = t_R$. Διαφορετικά, η τελευταία σχέση εκφράζει πως η καμπύλη φωτός, λόγω της εκπομπής διαφορετικών «γωνιακών» σημείων της πηγής, θα είναι ομαλή τουλάχιστον ως προς χρόνους t_{ang} , και οι κλίμακες που θα εντοπίζονται θα είναι μεγαλύτερες ή ίσες αυτής. Ο χρόνος t_{Δ} εκφράζει τη συνολική διάρκεια του παλμού, ή το πόσο διαρκεί ο μηχανισμός που παράγει την έκρηξη.

Θεωρώντας πως τα δύο κελύφοι κινούνται σχετικιστικά, με παράγοντα Lorentz Γ τότε η σύγκρουση τους, θα γίνει σε ακτίνα

$$R_{shock} \approx \frac{L}{\delta u/c} \approx \frac{L}{\frac{1}{\Gamma^2}} = \Gamma^2 L \quad (2.1)$$

Μια διαφορετική προσέγγιση είναι αυτή που θεωρεί πως $t_{ang} < t_R$, δηλαδή επιχειρεί τα διαφορετικά φωτόνια που λαμβάνει ο παρατηρητής, να προέρχονται απο γωνιακό άνοιγμα, μικρότερο σε σχέση με αυτο της προηγούμενης περίπτωσης. Χρειάζεται να γίνει η υπόθεση της ανιστροπίας, και να θεωρήσει κανείς πως η περιοχή που εκπέμπει δεν βρίσκεται σε όλο το κέλυφος της ροής, αλλά σε πολύ μικρές σφαίρες αυτής, ακτίνας $d \ll \frac{R}{\Gamma}$, ανομοιόμορφα κατανομημένες. Η αντίστοιχη γωνιακή κλίμακα θα είναι $t_{ang} \approx \frac{d}{c\Gamma} < t_R$.

Όμοια σε αυτή τη περίπτωση $t_{ang} < t_R \approx T_{burst}$ και οι κλίμακες στη καμπύλη φωτός θα εντοπίζουν χρόνους μεταβλητότητας μεγαλύτερους απο t_{ang} .

Οι δύο περιπτώσεις φαίνονται σχηματικά στο γράφημα 2.1.

2.1 External shock

Εξετάζοντας την αποδοτικότητα του μηχανισμού, πρέπει να ελεγχθεί τι ποσοστό της κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε ακτινοβολία, κατα την αλληλεπίδραση δύο κελυφών. Θα επικεντρωθεί η προσοχή στην αποδοτικότητα των internal shocks, που οφείλονται για τη δημιουργία της αρχικής φάσης στη καμπύλη φωτός

του GRB , και όχι στα external shocks που δημιουργούνται απο την αλληλεπίδραση της σχετικιστικής ροής με το περιβάλλον και ευθύνονται για το afterglow.

Παρόλα αυτά, σίγουρο είναι πως τα internal shock, λαμβάνουν χώρα πριν τα external, και άρα πρέπει να συγκρίνει κανείς τις δύο κρίσιμες αποστάσεις για να βεβαιωθεί ότι η πρώτη είναι μικρότερη της δεύτερης. Αναφορικά με τα external shocks, πρέπει να ερευνηθεί η αλληλεπίδραση της ροής με το περιβάλλον.

Έστω ένα κρύο και σχετικιστικό κέλυφος εισέρχεται στο κρύο και ακίνητο απο το σύστημα της πηγής περιβάλλον. Η αλληλεπίδραση των δύο ρευστών μπορεί να αναλυθεί απο δύο shock. Ένα forward shock που κατευθύνεται μέσα στον ενδοαστρικό χώρο και ένα reverse shock με κατεύθυνση αντίθετη της ροής (1.4). Μπορεί επομένως να ορισθούν οι περιοχές ανάλογα με το αν έχουν υποστεί shock ή όχι:

Το περιβάλλον της ροής που ηρεμεί θα υποδηλώνεται με δείκτη 1, το περιβάλλον που έχει προσπεράσει το forward shock θα έχει δείκτη 2, ενώ η περιοχή της ροής που έχει περάσει το reverse shock front δείκτη 3, και τέλος η ανεπηρέαστη ροή 4.

Οι συνθήκες άλματος για ένα τουλάχιστον ασθενές σχετικιστικό shock, απο το σύστημα της unshocked περιοχής, γράφονται [Blandford & McKee(1976)]

$$\frac{e_{shocked}}{n_{shocked}} = \Gamma_{shocked} \frac{w_{unshocked}}{n_{unshocked}} \quad (2.2)$$

$$\frac{n_{shocked}}{n_{unshocked}} = \frac{\Gamma_{shocked} \hat{\Gamma} + 1}{\hat{\Gamma} - 1} \quad (2.3)$$

$$\Gamma_{Front} = \frac{(\Gamma_{shocked} + 1)[\hat{\Gamma}(\Gamma_{shocked} - 1) + 1]^2}{\hat{\Gamma}(2 - \hat{\Gamma})(\Gamma_{shocked} - 1) + 2} \quad (2.4)$$

όπου $w_{unshocked} = \rho_{unshocked} + P_{unshocked}$, $\hat{\Gamma}$ ο πολυτροπικός δείκτης του συστήματος και Γ_{Front} η ταχύτητα που κινείται το μέτωπο του shock.

Στο πρόβλημα των GRB έχει θεωρηθεί η ροή και το περιβάλλον κρύο. Τα κύρια σωματίδια που συνεισφέρουν στη μάζα είναι τα πρωτόνια. Επομένως ισχύουν οι ταυτότητες

$$e_1 \approx e_4 \approx 0, , \rho_1 \approx m_p n_1$$

ενώ για τις shocked περιοχές

$$p_2 = \frac{e_2}{3}, p_3 = \frac{e_3}{3}$$

Στο σύστημα που το ρευστό 1 είναι στάσιμο, στη περίπτωση του GRB το σύστημα του παρατηρητή, ο παράγοντας Lorentz του ρευστού 2, θα είναι περίπου ίσος με την ίδια σχετικιστική ροή, ενώ στο σύστημα του κελύφους, ο παράγοντας Lorentz του ρευστού 3 θα είναι περίπου ίσος με τη μονάδα

$$\Gamma_2 \approx \Gamma \quad \bar{\Gamma}_3 \approx 1$$

Ακολουθώντας τα jump-condition για το σύστημα των δύο σόκ προκύπτουν για τις διεπιφάνειες 1, 2 και 3, 4 οι εξείς συνθήκες: ¹

$$\frac{e_2}{n_2 m_p c^2} = \Gamma_2 - 1 \approx \Gamma_2, \quad \frac{n_2}{n_1} = 4\Gamma_2 + 3 \approx 4\Gamma_2$$

¹Όταν αλληλεπιδρούν δύο ρευστά, δεν είναι αναγκαίο ότι θα υπάρξουν δύο shock αλλά κάθε συνδιασμός Shock-Rarefaction είναι πιθανός, ανάλογα με τους λόγους των ταχυτήτων, ενεργειών και πυκνοτήτων

$$\frac{e_3}{n_3 m_p c^2} = \bar{\Gamma}_3 - 1, \quad \frac{n_3}{n_4} = 4\bar{\Gamma}_3 + 3$$

Η ισορροπία των πιέσεων και των ταχυτήτων στο contact discontinuity καταλήγει στις

$$e_2 = e_3, \quad \bar{\Gamma}_3 \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Gamma_4 \Gamma_2}{\Gamma_2 \Gamma_4} \right)$$

Η δομή των shock συνδέεται άμεσα με το λόγω των αριθμητικών πυκνοτήτων $f = \frac{n_4}{n_1}$ και το παράγοντα Lorentz .

Ο αντίστοιχος χρόνος που χρειάζεται το μέτωπο του reverse shock για να διασχίσει το κέλυφος, δηλαδή την απόσταση Δ θα δίνεται απο τη σχέση

$$t_\Delta = \frac{\Delta}{c(\beta_4 - \beta_2)} \left(1 - \frac{\Gamma n_4}{\Gamma_3 n_3} \right)$$

Στη περίπτωση που $\Gamma^2 \gg f$, το reverse shock είναι ultrarelativistic και οι παραπάνω σχέσεις καταλήγουν στις

$$\bar{\Gamma}_3 = \frac{\Gamma^{1/2}}{\sqrt{2}f^{1/2}}, \quad \Gamma_2 \approx \Gamma_3 = \frac{\Gamma^{1/2}f^{1/4}}{\sqrt{2}} \quad (2.5)$$

με χαρακτηριστικό χρόνο

$$t_\Delta = \Delta \gamma \sqrt{f} \frac{1}{2c} \quad (2.6)$$

Σε αυτό το όριο, φαίνεται πως ο παράγοντας Lorentz $\bar{\Gamma}_3$ είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας, και αφού

$$\Gamma_3 \ll \Gamma_4 = \Gamma$$

σχεδόν όλη η κινητική ενέργεια του κελύφους έχει μετατραπεί σε θερμική, με ένα μόλις πέρασμα του μετώπου.

Στο αντίθετο όριο, $f \gg \Gamma^2$, το reverse shock είναι Νευτώνειο και το ίδιο σύστημα καταλήγει να ισούται

$$\bar{\Gamma}_3 - 1 \approx \frac{4\Gamma^2 f^{-1}}{7} = 2\epsilon \ll 1, \quad \Gamma_2 = \Gamma_3 = \Gamma(1 - \sqrt{\epsilon}) \quad (2.7)$$

Να σημειωθεί πως το forward shock είναι πάντα ultrarelativistic για $\Gamma \gg 1$ και για $f < \frac{1}{\Gamma^2}$, με χαρακτηριστικό χρόνο

$$t_\Delta = \Delta \gamma \frac{\sqrt{\frac{9}{4}f}}{c} \quad (2.8)$$

που παραδόξως, είναι περίπου ίσος με τον αντίστοιχο χρόνο της σχετικιστικής περίπτωσης 2.6.

Παρατηρείται ότι ο παράγοντας Lorentz Γ_3 είναι σχεδόν ίσος με τον Γ και άρα μόλις ένα μικρό ποσοστό της κινητικής ενέργειας έχει μετατραπεί απο τη ροή. Σε αυτο το όριο, η μετατροπή της κινητικής ενέργειας βασίζεται κυρίως στα forward shock: Όταν περάσει ο χρόνος που χρειάζεται το shock για να δυανίσει το κέλυφος 2.8, θα ξεκινήσει ένα καινούριο κύμα αραίωσης προς την διαχωριστική επιφάνεια - discontinuity contact-

Το rarefaction θα διαδίδεται με ταχύτητα του ήχου και όταν αυτό φτάσει την διαχωριστική επιφάνεια των ρευστών, θα επιστρέψει ως shock, ασθενέστερο αυτή τη φορά, αφού ένα μικρό ποσοστό της ενέργειας έχει

μετατραπεί σε θερμότητα. Το ρευστό βρίσκεται σε quasi-steady state, και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται και επιβραδύνει τη ροή.

Στο fireball μοντέλο, σε πρώτο στάδιο, η πυκνότητα της σφαιρικά, εντός γωνίας θ_s , εκτονώμενης ροής είναι μεγαλύτερη από τον παράγοντα Lorentz, και το shock θεωρείται Νευτώνειο.

η απόσταση τους σχετίζεται γενικά με το μήκος Sedon, που είναι γνωστή ποσότητα στη θεωρία των supernova.

Ο ορισμός του δεν είναι διαφορετικός σε αυτή τη περίπτωση: Έστω η ενέργεια του φαινομένου E , και η πυκνότητα του περιβάλλοντος της εκροής $n(r)$. Το μήκος Sedon ορίζεται από την ισότητα

$$E = m_p c^2 \int_0^l 4\pi n(r) r^2 dr$$

που για ένα ομογενές μεσοαστρικό περιβάλλον προκύπτει ίσο με

$$l \approx 10^{18} E_{52}^{1/3} n_1^{1/3}$$

Η ακτίνα όμως που η επιβράδυνση αρχίζει να γίνεται σημαντική είναι μικρότερη από αυτή. Συγκεκριμένα, η αλληλεπίδραση με το περιβάλλον ξεκινά όταν η ροή έχει «διανύσει» μάζα ίση με $\frac{M}{\Gamma}$ [Rees & Meszaros(1992)]. Τότε, τα νευτόνια shock έχουν «καταναλώσει» τη μισή κινητική ενέργεια.

Η κρίσιμη ακτίνα, έστω R_Δ , θα ικανοποιεί τη σχέση

$$R_\Delta^3 n_1 m_p = \frac{M}{\Gamma}$$

Υπολογίζοντας την ενέργεια του κελύφους από τη σχέση $E = \frac{M}{\Gamma c^2}$, προκύπτει

$$R_\Gamma = \frac{l}{\Gamma^{2/3}} = \left(\frac{E}{n_{ism} m_p c^2 \Gamma^2} \right)^{1/3} = 5.410^{16} cm E_{52}^{1/3} n_1^{-1/3} \Gamma_{100}^{-2/3}$$

όπου E_{52} η ενέργεια σε μονάδες 10^{52} , και $n_1 = n_{ism}/1$. Το συγκεκριμένο όριο επαληθεύεται στη περίπτωση που το reverse shock είναι Νευτωνιανό μέχρι και αυτή την ακτίνα.

Πρέπει να εξετασθεί όμως το όριο που ο λόγος $\frac{f}{\Gamma^2}$ γίνεται μονάδα, καθώς τότε το reverse shock θα γίνει σχετικιστικό, και με μόλις ένα «πέρασμα» αυτού, η περισσότερη κινητική ενέργεια θα καταναλωθεί.

Για τον υπολογισμό της αντίστοιχης κρίσιμης ακτίνας, ακολουθεί κανείς το προηγούμενο σχηματικό: Η ακτίνα R_N που καθιστά μονάδα τη πυκνότητα της ροής ίση με

$$n_4 = \Gamma^2 n_1$$

Θεωρώντας πως η ροή βρίσκεται στη περιοχή που το κέλυφος διατηρεί το μήκος του Δ σταθερό, και κάνοντας την υπόθεση πως ο μεσοαστρικός χώρος είναι ομοιογενής, τουλάχιστον στη στερεά γωνία που αλληλεπιδρά η ροή, και πως οι γραμμές ροής είναι περίπου ακτινικές, τότε προκύπτει άμεσα $f \propto \frac{1}{R^2}$ ², αντικαθιστά στη παραπάνω σχέση τις

$$n_4 = \frac{M}{m_p (\Gamma \Delta) R^2 n_1} \quad M = \frac{E}{c^2 \Gamma}$$

² Αν η ροή έχει περάσει στο στάδιο που το κέλυφος αρχίζει και πλαταίνει σχεδόν γραμμικά με το χρόνο, όπως θα παρουσιαστεί στη συνέχεια, τότε ο λόγος f είναι ανάλογος του $\frac{1}{R^3}$, αλλά δεν εξετάζεται αυτή η περίπτωση

και προκύπτει

$$R_N = \frac{l^{3/2}}{\Delta^{1/2}\Gamma^2}$$

Ακολουθώντας εντελώς ίδιο σκεπτικό, και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.7, βρίσκεται ακόμη η ακτίνα που το reverse shock έχει φθάσει στην άκρη του κελύφους, και υπολογίζεται να είναι

$$R_\Delta = l^{3/4}\Delta^1$$

Έχοντας τώρα τα τρία χαρακτηριστικά μήκη, μπορεί να οριστεί πότε το reverse shock είναι relativistic και πότε Νευτώνειο:

$$\begin{cases} R_\Delta < R_\Gamma < R_N & \text{Νευτώνειο reverse shock} \\ R_N < R_\Gamma < R_\Delta & \text{Σχετικιστικό reverse shock} \end{cases} \quad (2.9)$$

2.2 Υδροδυναμική ανάλυση των Internal shock

Ξεκινώντας παρόμοια με την ανάλυση των external shock, χρειάζεται να βρεθεί η ακτίνα που τα δύο κελύφει συγκρούονται.

Η σχέση 2.1 γενικεύεται αν αντι για το μήκος L δωθεί αυθαίρετα η τιμή της απόστασης μέσω του χρόνου μεταβλητότητα, $c\delta t$.

$$R_{internal} = c\delta t\Gamma^2 = 3 \cdot 10^{14} \text{ cm} \Gamma_{100}^2 \delta t$$

όπου Γ_{100} , ο παράγοντας Lorentz σε εκατοστιαίες μονάδες, που προκύπτει ως κρίσιμη τιμή από το πρόβλημα συμπαγότητας.

Όπως αναφέρθηκε στη προηγούμενη ενότητα, τα κελύφη συγκρούονται σε ακτίνα μικρότερη από τη κρίσιμη απόσταση των ενεργειακών απωλειών λόγω των external shock. Καθορίζεται έτσι μία μέγιστη τιμή της ακτίνας, που περιορίζει το παράγοντα Lorentz, και συγκεκριμένα στη διαφορά $\delta\Gamma$ που παρουσιάζουν δύο κελύφη της ροής.

Η ανισότητα $R_{internal} < R_{external}$ συνεπάγεται από την 2.9

$$c\delta t\Gamma^2 < \max\left(\frac{l}{\Gamma^{2/3}}, l^{3/4}\Delta^{1/4}\right) \quad (2.10)$$

Με τις ποσότητες Δ, l να ακολουθούν τους ορισμούς της προηγούμενης ενότητας. Σε περίπτωση που ο παράγοντας Lorentz των δύο κελυφών έχει μεγαλύτερη τιμή από το παραπάνω όριο, τότε πριν τη σύγκρουση των κελυφών θα έχει προηγηθεί η απώλεια της κινητικής ενέργειας λόγω των external shock.

Για τυπικές τιμές και στις δύο περιπτώσεις

$$l \approx 10^{18} \text{ cm} \quad \Delta \approx 10^{12} \quad \Rightarrow \Gamma \approx 10^3$$

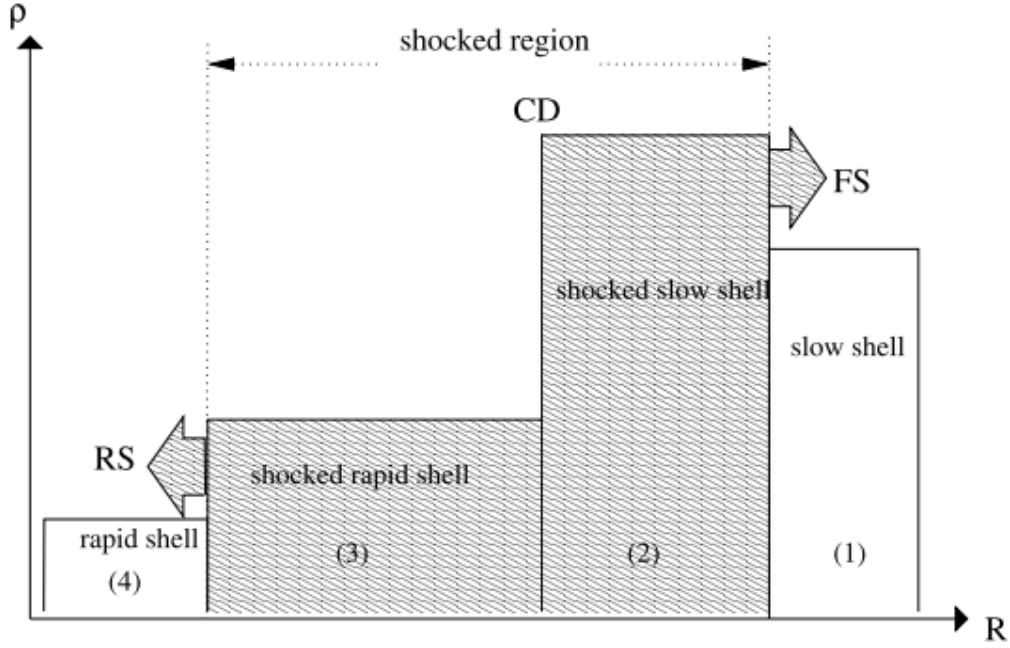
Ελέγχοντας ξανά το όριο στο 1.4.1 προκύπτει ένα εύρος τιμών

$$10^2 < \Gamma < 10^3$$

όρια που περιορίζουν όχι μόνο την κινητική ενέργεια της ροής, αλλά και το ενεργειακό εύρος του φαινομένου.

Το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης των δύο κελυφών είναι πιο σύνθετα ποσοτικά από τα external shock, καθώς κανένα σύστημα - του αργού, του γρήγορου κελύφους και του shock- δεν ηρεμεί ως προς τον παρατηρητή. Χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Lorentz

$$\Gamma_{12} = \Gamma_1\Gamma_2(1 - \beta_1\beta_2)$$



Σχήμα 2.2: Το σύστημα των δύο shock όπως φαίνεται απο το σύστημα του Contact Discontinuity. Το γρήγορο κέλυφος (4) έρχεται σε επαφή με το αργό (2), και δύο διαταραχές υπο μορφή shock ξεκινάνε απο την CD.[Kino et al.(2004)]

$$\Gamma_{34} = \Gamma_3 \Gamma_4 (1 - \beta_3 \beta_4)$$

ορίζοντας τις περιοχές των δύο shock που δημιουργούνται σύμφωνα με την 2.2, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 2.2 - 2.4 και τη συνέχεια της πίεσης και της ταχύτητας στην CD, καταλήγει κανείς στις:

$$e_2 = \Gamma_{12} \rho_2 \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\hat{\Gamma} \Gamma_{12} + 1}{\hat{\Gamma} - 1} \quad (2.11)$$

$$e_3 = \Gamma_{34} \rho_2 \quad \frac{\rho_3}{\rho_4} = \frac{\hat{\Gamma} \Gamma_{34} + 1}{\hat{\Gamma} - 1} \quad (2.12)$$

$$P_2 = P_3 \quad \Gamma_2 = \Gamma_3 \quad (2.13)$$

Προκύπτουν συμμετρικές εξισώσεις για τα δύο shock, όπου για $\hat{\Gamma} = \frac{4}{3}$ οι ενέργειες και πυκνότητες της shocked περιοχής ικανοποιούν τη σχέση

$$n_2 = (4\Gamma_{12} + 3)n_1 \approx 4\Gamma_{12}n_1 \quad e_2 = \Gamma_{12}n_1 m_p c^2$$

2.3 Αποδοτικότητα των Internal Shock

Έστω δύο ξεχωριστά κελύφοι με μάζα m_r και m_s αντίστοιχα, που κινούνται με σχετικιστικές ταχύτητες $\Gamma_r \gtrsim \Gamma_s \gg 1$. Αν η κρούση είναι ελαστική, τότε ο τελικός παράγοντας Lorentz θα είναι ίσος

$$\Gamma_m \approx \sqrt{\frac{m_r \Gamma_r + m_s \Gamma_s}{\frac{m_r}{\Gamma_r} + \frac{m_s}{\Gamma_s}}}$$

Η ενέργεια του παραγόμενου κελύφους στο σύστημα αυτού $\mathcal{E}$ και στου παρατηρητή E θα συνδέονται με τη σχέση $E_{int} = \Gamma_m \mathcal{E}_{int}$. Το ποσό αυτό της ενέργειας ισούται και με τις ενεργειακές απώλειες της κινητικής ενέργειας:

$$E_{int} = m_r c^2 (\Gamma_r - \Gamma_m) + m_s c^2 (\Gamma_s - \Gamma_m)$$

που ισοδυναμεί με αποδοτικότητα ίση με:

$$\epsilon = 1 - \frac{(m_r + m_s) \Gamma_m}{(m_r \Gamma_r + m_s \Gamma_s)}$$

Όπως θα περίμενε κανείς διαισθητικά, η μέγιστη απώλεια της κινητικής ενέργειας προϋποθέτει μεγάλη διαφορά του παράγοντα Lorentz των δύο κελυφών, καθώς και συγκρίσιμη μάζα $m_r \approx m_s$.

Ανάλογα τη μοντελοποίηση στο παράγοντα Lorentz των διάφορων κελυφών, καθώς και στην ενέργειά τους, θα λαμβάνεται διαφορετική αποδοτικότητα ϵ .

Για παράδειγμα, αν δωθούν τα προφίλ

$$\ln \frac{\Gamma - 1}{\Gamma_0 - 1} = A\xi \quad P(\xi) = \frac{e^{-\frac{\xi^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.14)$$

τότε η προκύπτουσα αποδοτικότητα ακολουθεί σχεδόν τη σχέση $\epsilon = \frac{1}{2}A$ μέχρι τη τιμή 1, όπου και φθάνει τη μέγιστη τιμή της κοντά στο 0.5 [Beloborodov(2000)]. Η τιμή $A = 1$ δηλώνει μία μεταβλητότητα του παράγοντα Lorentz κοντά στο 10%, με τη μέση τιμή του να είναι μεγαλύτερη του 10^2 , αν πρόκειται για μετατροπή ενέργειας ανάλογη των παρατηρήσεων.

Παρουσιάζεται έτσι ένα νέο πρόβλημα στην αποδοτικότητα του μηχανισμού των internal shock που σχετίζεται με το ποσοστό της εκπεμπόμενης ενέργειας, με αυτή που μετατράπηκε σε θερμικά απο τα shock. Η εξάρτηση του λόγου σχετίζεται με τη τιμή ϵ_e , που ορίζει το ποσοστό της ενέργειας που δώθηκε στο ηλεκτρόνιο. Αν αυτό είναι πολύ μικρό, και δεν υπάρχει ισχυρή σύζευξη μεταξύ των ηλεκτρονίων και των αδρονικών σωματιδίων, τότε η ενέργεια δεν θα ακτινοβοληθούν αλλά θα μετατραπεί εκ νέου σε κινητική, μέσω αδιαβατικής ψύξης.

Οι Kobayashi και Sari επιχειρηματολόγησαν, [Kobayashi & Sari(2001)], πως τα δύο κελύφη, κατά τη σύγκρουσή τους, δεν συγχωνεύονται για να ακολουθήσει η αδιαβατική εκτόνωση της ενέργειας, αλλά ανακλώνται, διατηρώντας ίδιο το ποσοστό ενέργειας που χάνουν, σαν να έχαναν ελαστική κρούση, με αποτέλεσμα να προκαλώνται πολλά παραπάνω internal shock στο σύστημα, υπερνικώντας κατά κάποιο τρόπο τον περιορισμό στην αποδοτικότητα λόγω του παράγοντα ϵ_e . Το προφίλ της διασποράς για το παράγοντα Lorentz των κελυφών είναι ίδιο με αυτό της σχέσης 2.14 και η αποδοτικότητα του μηχανισμού έφτανε μέχρι το $\epsilon = 0.6$, για τιμές του ϵ_e με κατώτατο όριο $\epsilon_e = 0.1$.

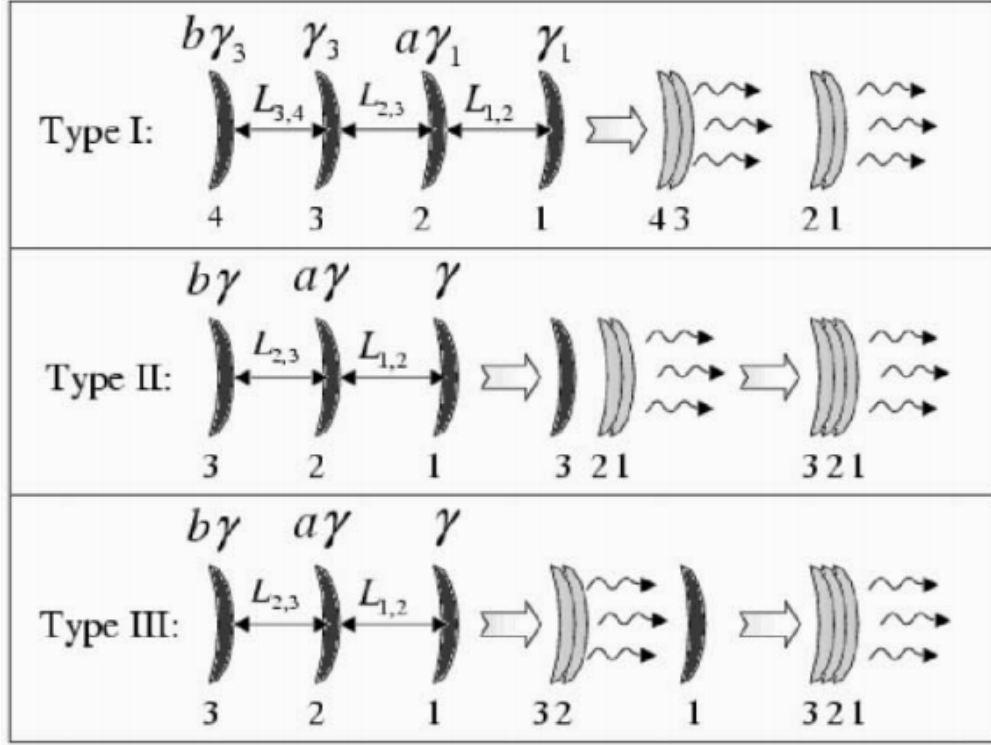
Ξανά, οι τιμές του παράγοντα Lorentz, έφταναν μέχρι την 10^4 , όριο απαγορευτικό απο τη προηγούμενη ανάλυση.

2.4 Καμπύλες φωτός απο internal shocks

Οι καμπύλες φωτός απο τις παρατηρήσεις καταδεινούν συσχετισμό μεταξύ της απόστασης δύο διαδοχικών κελυφών, και του πλάτους αυτών. Συγκεκριμένα, θα επιχειρηματολογηθεί οτι το πλάτος των παλμών δt ³, και το διάστημα μεταξύ τους Δt , συνδέονται με το μήκος μεταξύ δύο διαδοχικών κελυφών L . [Nakar & Piran(2002)]

Αρχικά, θα γίνουν κάποιες απλουστεύσεις αναφορικά με τις κρούσεις που γίνονται απο τα κελύφοι.

³Για την πορεία αυτής της ενότητας η ταχύτητα του φωτός θα θεωρηθεί ίση με τη μονάδα, κάνοντας απλούστερες τις σχέσεις



Σχήμα 2.3: Η σύγκρουση των κελυφών, σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις. Οι παραγόμενοι παλμοί φτάνουν στο παρατηρητή σε ίδιο ή διαφορετικό χρόνο με τα αντίστοιχα φωτόνια της πηγής, ανάλογα με την σειρά των συγκρούσεων

- Κάθε κέλυφος είναι ομογενές με αυστηρώς ορισμένα σύνορα και παράγοντα Lorentz
- Η σύγκρουση δύο κελύφων θα θεωρηθεί πάντα ελαστική και το αποτέλεσμα τους είναι ένα ενιαίο κέλυφος
- Μονο συγκρούσεις των οποίων η ενεργειακή αποδοτικότητα είναι μεγαλύτερη της $\epsilon \geq 0.05$ λαμβάνονται υπόψη

Με αυτές τις προϋποθέσεις, χρειάζεται πρωταρχικά να οριστούν οι παράμετροι: t_i , χρόνος «εκπομπής» του κελύφους από τη ροή, m , η μάζα του, ο παράγοντας Lorentz και το πλάτος του l_i . Ορίζεται επίσης το πλάτος $L_{i,j}$, ως το μήκος μεταξύ του τελευταίου σημείου του κελύφους i , και την αρχή του κελύφους j , για $j > i$. Άμεσα προκύπτει η σχέση

$$L_{i,i+1} = t_{i+1} - (t_i + l_i)$$

Έστω πως δύο διαδοχικά κελύφη με πλάτη l_1, l_2 αντίστοιχα, απόστασης L , και χρόνων $t_2 \approx t_1 + (l_1 + L)$. Αν ο παράγοντας Lorentz του πρώτου κελύφους ισούται με γ_1 , τότε το δεύτερο κέλυφος θα πρέπει να έχει αναγκαστικά παράγοντα Lorentz $\gamma_2 = a\gamma_1$ με $a > 1$, για να υπάρξει τελικά η σύγκρουση. Δεδομένης της απαίτησης $\epsilon > 0.05$, η σταθερά a είναι μεγαλύτερη του 2.

Ο χρόνος σύγκρουσης των δύο κελυφών, θα δίνονται από τη σχέση

$$R_s \approx \frac{L}{\beta_1 - \beta_2} = \gamma^2 L \frac{2a^2}{a^2 - 1} \approx 2\gamma^2 L$$

Απο τη τελευταία σχέση φαίνεται πως για $a > 2$ η απόσταση της κρούσης εξαρτάται ασθενώς από το παράγοντα Lorentz γ_2 . Ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει το φωτόνιο της σύγκρουσης στο παρατηρητή,

θεωρώντας πως η αλληλεπίδραση των δύο κελυφών γίνεται ακαριαία, ισούται με

$$t_{obs} \approx t_1 + l_1 + \frac{R_s}{2\gamma^2} \approx t_1 + l_1 + L \approx t_2$$

σχέση που δείχνει πως ο παρατηρητής θα λάβει το φωτόνιο της σύγκρουσης την ίδια περίπου χρονική στιγμή που θα λάμβανε ένα φωτόνιο της πηγής, αν αυτό είχε εκπεμφθεί την ίδια στιγμή με το κέλυφος 2. Πορισμα που αιτιολογεί εν μέρει τις αριθμητικές προσομοιώσεις των οποίων οι καμπύλες φωτός αναπαράγουν την δραστηριότητα της πηγής.

Περνώντας σε μία λίγο πιο σύνθετη περίπτωση, θα εξετασθεί το χρονικό διάστημα μεταξύ δύο παρατηρήσεων, απο φωτόνια λόγω σύγκρουσης, συγκρητικά με τον αντίστοιχο χρόνο εκπομπής της πηγής. Στη πρώτη περίπτωση -Type 1 2.3-, έχοντας τέσσερα κελύφη, με παράγοντα Lorentz $\gamma_2 = a_1\gamma_1$ και $\gamma_4 = a_2\gamma_3$ αντίστοιχα, με $a_1, a_2 > 2$, γίνεται η υπόθεση πως η αρχική χρούση είναι μεταξύ των 1 και 2 και έπειτα μεταξύ των 3 και 4 κελύφων. Σύμφωνα με το πρώτο παράδειγμα, το χρονικό διάστημα Δt , όπως ορίστηκε προηγουμένως, ισούται με

$$\delta T \approx t_4 - t_2 \approx l_2 + L_{2,3} + l_3 + L_{3,4}$$

Σε μια δεύτερη περίπτωση - Type 2- , με τρία κελύφη παράγοντα Lorentz $\gamma_1 = \frac{\gamma_2}{a_1} = \frac{\gamma_3}{a_2}$, έστω οτι η πρώτη χρούση γίνεται μεταξύ των κελυφών 1 και 2 ενώ μετά, βάσει των αρχικών υποθέσεων, συγκρούονται και το 12 με το 3. Όμοια, το φωτόνιο της πρώτης χρούσης θα φτάσε σε χρόνο $\sim t_2$, ενώ το δεύτερο, σε χρόνο $\sim t_3$. Άρα

$$\delta T \approx t_3 - t_2 \approx l_2 + L_{2,3}$$

Τέλος, η τρίτη περίπτωση - Type 3- , έχει ίδια «διάταξη» με την δεύτερη, μόνο που τώρα, τα δύο τελευταία κελύφη συγκρούονται αρχικά, και μετά ακολουθή η χρούση των 32 με το 1. Όλα τα παραγόμενα φωτόνια, φθάνουν σχεδόν σε χρόνο $\sim t_3$, άρα ένα GRB του οποίου τα κελύφοι ακολουθούν αυτό το τύπο των συγκρούσεων, θα παρήγαγαν ένα αρκετά πλατή και μοναδικό παλμό στη καμπύλη φωτός, κατι λιγότερο πιθανό συγκριτικά με τα δύο προηγούμενα σενάρια.

Για λεπτά κελύφη συγκρητικά με την ενδιαμέση απόσταση τους - δηλαδή $l_i \ll L_i$ - λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τοα δύο πρώτα ενδεχόμενα (Type 1, Type 2), προκύπτει οτι

$$\Delta_T \approx i \frac{L}{c} \approx \frac{L}{c}, \quad i = 1, 2 \quad (2.15)$$

Η παραπάνω προσέγγιση απλοποιεί πολύ τους χαρακτηριστικούς χρόνους, στη περίπτωση που δεν ισχύει, η ανάλυση είναι ίδια, και τα αποτελέσματα καταλήγουν στα ίδια συμπεράσματα με παρακάτω, [Piran(1999)].

Περνώντας στις καμπύλες φωτός, η χρονική κλίμακα του «γωνιακού» χρόνου λόγω της σχετικιστικής ροής, όπως ορίστηκε στο 1.4.2, καθορίζει και το πλάτος του παλμού, αν θεωρηθεί δεδομένη η σφαιρική γεωμετρία των κελυφών, τουλάχιστον για γωνίες $\theta_s \gtrsim \frac{1}{\gamma}$, ενώ έχει αγνοηθεί ο υδροδυναμικός χρόνος t_{hyd} που σχετίζεται με το crossing time του shock, λόγω της προηγούμενης υπόθεσης στη σχέση 2.15.

Λόγω του internal shock, ο γωνιακός χρόνος είναι ίσος με $t_{ang} \approx \frac{R_c}{2\gamma_{shock}^2}$ όπου γ_{shock} ο παράγοντας Lorentz της shocked περιοχής 2.2 και για ίδιες πυκνότητες είναι ίσως με $\gamma_s = \sqrt{a}\gamma$ ενώ για ίδιες ενέργειες, $\gamma_s = \gamma$. Προκύπτει τελικά

$$\delta t \approx \begin{cases} \frac{R_s}{2a\gamma^2 c} \approx \frac{L}{ac} & \text{Ίσες πυκνότητες} \\ \frac{R_s}{2\gamma^2 c} \approx \frac{L}{c} & \text{Ίσες ενέργειες} \end{cases} \quad (2.16)$$

Στην προσπάθεια για αποδοτικότερες κρούσεις, η σταθερά a πρέπει να δεχεται τιμές απο ένα μεγάλο εύρος, επομένως η συσχέτιση του των χρόνων 2.16 και 2.15 χάνεται για ισοενεργειακά κελύφη, αλλά διατηρείται για ισοβαρή, τα οποία είναι πιθανότερα να αναπαράγουν τις παρατηρήσιμες καμπύλες φωτός.

Κεφάλαιο 3

Σχετικιστική Υδροδυναμική Προσέγγιση

Για αρχή θα μελετηθεί η απλή σχετικιστική υδροδυναμική περίπτωση του fireball. Στο πρόβλημα αυτό θα υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί για την διευκόλυνση της ανάλυσης. Το Fireball αποτελεί ένα σφαιρικά συμμετρικό ρευστό που είναι απο την αρχή του σχετικιστικό, δηλαδή με παράγοντας Lorentz μεγαλύτερο της μονάδας αλλά ίδιας τάξης με αυτήν.

Η τελευταία απαίτηση δεν επιβάλλει στο φυσικό πρόβλημα την σχετικιστική ταχύτητα απο την αρχή της εκροής, αλλά περιορίζει το χώρο στον οποίο μπορεί να μελετηθεί μία ροή. Το ρευστό θεωρείται ακόμη οπτικά αδιαφανές, δηλαδή $\tau \gg 1$. Είναι γνωστό πως το οπτικό βάθος προέρχεται απο σχεδάσεις των φωτονίων με τα ηλεκτρόνια, τα τελευταία όμως μπορεί να προέρχονται είτε απο την βαρυονική ύλη που περιέχει το ηλεκτρικά ουδέτερο ρευστό πρωτονίων-ηλεκτρονίων, είτε απο τα ηλεκτρόνια λόγω της γένεσης των ζευγαριών e_+, e_- . Δηλαδή, θεωρούμε ότι

$$\tau = \tau_b + \tau_p \gg 1$$

με τ_p την αδιαφάνεια λόγω των ηλεκτρονίων απο τη δίδυμη γένεση, και τ_b λόγω των ηλεκτρονίων της αρχικής βαρυονικής ύλης.

Το αποτέλεσμα της μεγάλης αδιαφάνειας είναι η παγίδευση της ακτινοβολίας μαζί με το ρευστό. Όσο ισχύει η παραπάνω συνθήκη, αντιμετωπίζεται το πρόβλημα σαν σύστημα ενός ρευστού με αδιαβατικές μεταβολές. Λόγω σχεδάσεων φωτονίων-ηλεκτρονίων, ένα κομμάτι της παγιδευμένης ακτινοβολίας μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια της μέσης ροής, με αποτέλεσμα την επιθυμητή αύξηση τους παράγοντα Lorentz. Όταν το ρευστό γίνει οπτικά αδιαφανές, λόγω πτώσης της θερμοκρασία, η ακτινοβολία δεν θα αλληλεπιδρά με το ρευστό και η προηγούμενη προσέγγιση θα είναι λάθος.¹

3.1 Κύριες Εξισώσεις

Πριν γίνει αναφορά στις σχέσεις που διέπει το σύστημα, αξίζει να ορισθεί η παράμετρος $\eta = E/Mc^2$, όπου E η ενέργεια ακτινοβολίας και ο παρανομαστής η ενέργεια ηρεμίας. Γίνεται η υπόθεση ότι στην αρχή της εξέλιξης του συστήματος, ο λόγος αυτός είναι πολύ μεγαλύτερος της μονάδας και άρα η ακτινοβολία κυριαρχεί στο σύστημα, ώστε να συσχετιστεί η ενεργειακή πυκνότητα με τη πίεση, υπενθυμίζοντας πως και οι δύο είναι ανάλογες της τέταρτης δύναμης της θερμοκρασίας, μέσω της σχέσης $e = 3p$.

Για την εύρεση των βασικών σχέσεων θα χρειαστεί ο τανυστής ενέργειας ορμής, που στην σχετικιστική

¹Θα υπάρχουν σχεδασμοί Compton, στη περίπτωση που οι ακτινοβολία εξακολουθεί να επικρατεί ενεργειακά της ύλης, μέχρι της αύξησης της μέσης διαδρομής, αλλά δεν αφορά τη παρούσα μελέτη τέτοια φαινόμενα

υδροδυναμική έχει την απλή μορφή

$$T^{\kappa,\nu} = T_M^{\kappa,\nu} + T_R^{\kappa,\nu}$$

Με το πρώτο όρο του δεξί σκέλους να αναφέρεται στην ύλη, και τον δεύτερο στην ακτινοβολία. Συγκεκριμένα $T_M^{\kappa,\nu} = (\rho_0 c^2 + \rho_0 e_M + P_M/c^2)U^\kappa U^\nu + P_M \eta^{\kappa,\nu}$ και $T_R^{\kappa,\nu} = (\rho_R + P_R/c^2)U^\kappa U^\nu + P_R \eta^{\kappa,\nu}$

Εφαρμόζοντας τις σχέσεις διατήρησης ενέργειας, μάζας και ορμής, δηλαδή $U_\kappa T_\nu^{\kappa,\nu} = 0$, $[\rho_0 U^\nu]_\nu = 0$ και $T_\nu^{i,\nu} = 0$ αντίστοιχα², προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\gamma) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho\gamma u) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{3/4}\gamma) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 e^{3/4}\gamma u) = 0 \quad (3.2)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((\rho + \frac{4}{3}e)\gamma^2 u\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2(\rho + \frac{4}{3}e)\gamma^2 u^2) = -\frac{1}{3} \frac{\partial e}{\partial r} \quad (3.3)$$

όπου η ακτίνα και ο χρόνος είναι μετρημένα στο σύστημα του εργαστηρίου, ενώ η πίεση, η πυκνότητα ενέργειας και η πυκνότητα μάζας είναι μετρημένες στο co-moving frame του ρευστού.

Σε επόμενο βήμα, θα αλλάξουν οι μεταβλητές των εξισώσεων από r, t σε $r, s = t - r$ και έτσι χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}|_t &= \frac{\partial s}{\partial r} \frac{\partial}{\partial s}|_r + \frac{\partial r}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r}|_s = -\frac{\partial}{\partial r}|_s + \frac{\partial}{\partial s}|_r \\ \frac{\partial}{\partial r}|_r &= \frac{\partial}{\partial s}|_r \end{aligned}$$

και

$$\gamma(1 - \beta) = \frac{\sqrt{1 - \beta}}{\sqrt{1 + \beta}} = \frac{1}{\gamma(1 + \beta)}$$

το σύστημα 3.1-3.3 καταλήγει στο βολικότερο

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \rho\gamma u) = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\rho}{\gamma(1 + \beta)}\right) \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 e^{3/4}\gamma u) = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{e^{3/4}}{\gamma(1 + \beta)}\right) \quad (3.5)$$

και

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2(\rho + \frac{4}{3}e)\gamma^2 u^2\right) = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\beta}{\beta + 1}(\rho + \frac{4}{3}e)\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial e}{\partial r} - \frac{\partial e}{\partial s}\right) \quad (3.6)$$

Η υπόθεση που έγινε αρχικά για το παράγοντα Lorentz οδηγεί στην σχέση $\beta \approx 1$ και άρα οι όροι στο δεξί σκέλους είναι τουλάχιστον μικρότερη κατά $\frac{1}{\gamma}$ που σε μία ισχυρά σχετικιστική περίπτωση οδηγεί στις διατηρούμενες ποσότητες

$$r^2 \rho\gamma, \quad r^2 e^{3/4}\gamma, \quad r^2\left(\rho + \frac{4}{3}e\right)\gamma^2 \quad (3.7)$$

²ο ελληνικός δείκτης αναφέρεται και στις τέσσερις πιθανές τιμές του δείκτη, ενώ ο αγγλικός μόνο στις χωρικές συνιστώσες

Η φυσική ερμηνεία της έκφρασης

$$\frac{\partial A}{\partial r}|_s = 0$$

είναι πως η ποσότητα A είναι διατηρούμενη, ακολουθώντας ένα κομμάτι της ροής, όπως αυτό εκτονώνεται στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Οι προϋποθέσεις του $\gamma \gg 1$ και της σφαιρικής συμμετρίας έχουν αξιοποιηθεί και είναι απαραίτητες για την ισχύ του συστήματος 3.7

Διακρίνει κανείς δύο βασικές ενεργειακές καταστάσεις του συστήματος. Στη πρώτη, η ακτινοβολία κυριαρχεί, δηλαδή $\eta \gg 1$ που οδηγεί στις

$$\gamma \propto r, \quad \rho \propto r^{-3}, \quad e \propto r^{-4} \quad (3.8)$$

ενω στη δεύτερη, η κυριαρχεί η ύλη, $1 \gg \eta$,

$$\gamma = \gamma_f, \quad \rho \propto r^{-2}, \quad e \propto r^{-8/3} \quad (3.9)$$

Η μετάβαση από την φάση ακτινοβολίας στη φάση της ύλης, περιγράφεται με τη βοήθεια της βοηθητικής ποσότητας $\frac{1}{D} = \frac{\gamma_0}{\gamma} + \frac{3\gamma_0}{4\eta_0\gamma} - \frac{3}{4\eta_0}$ όπου ο δείκτης 0 αναφέρεται σε μία αρχική τιμή, από την οποία ξεκινά να ισχύει η προηγούμενη ανάλυση, όπου δηλαδή ικανοποιείται η συνθήκη η συνθήκη $\gamma \gtrsim 1$. Από το σύστημα 3.7 φθάνουμε στις σχέσεις

$$r = r_0 \left(\frac{\gamma_0 D^3}{\gamma} \right)^{1/2}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{D^3}, \quad e = \frac{e_0}{D^4} \quad (3.10)$$

Με την αντικατάσταση της ποσότητας $\eta_0 = \eta \cdot D$ οδηγείται κανείς στο γνωστό, από την θεωρία υψηλών ενεργειών, ολοκλήρωμα $\xi\gamma = \xi_0\gamma_0$ με $\xi = \frac{4}{3}\eta + 1$, που θέτει ένα άνω όριο στον μέγιστο παράγοντα Lorentz που μπορεί να αποκτήσει η ροή.

Αξίζει να σημειωθεί, πριν τον έλεγχο της τελικής φάσης της ροής όπου $\gamma \approx \gamma_f$, πως στη περίπτωση που το ρευστό γίνει οπτικά διαφανές κατά την φάση της ακτινοβολίας, τότε το μεγαλύτερο μέρος της ενέργειας θα ελευθερωθεί υπο μορφή φωτονίων και όχι μέσης κινητικής ενέργειας. Η περίπτωση αυτή δεν ελέγχεται στη παρούσα εργασία.

Σε μεγάλες ακτίνες όπου δεν κυριαρχεί ενεργειακά η ακτινοβολία, όπως προκύπτει και από τις σχέσεις 3.9 για $\eta \ll 1$, ο παράγοντας Lorentz είναι σταθερός και η ποσότητα e είναι αμελητέας στις εξισώσεις 3.1-4.5. Μετα από απλές πράξεις αποδυναμώνεται πως κάθε κομμάτι της ροής κινείται με σταθερή ακτινική ταχύτητα β_f πάνω σε χαρακτηριστικές $\beta_f t - r = C$

Πιο κατανοητά, κάθε κομμάτι της ροής, μπορεί να χαρακτηριστεί από μία «ταμπέλα». Αυτή θα μπορούσε να είναι ο χρόνος εκκίνησης από τη βάση ή, βολικότερα, το χαρακτηριστικό πλάτος, R_i , που αποκτά μετά το τέλος της εκροής της ύλης. Με αυτό το τρόπο, ορίζονται οι ασυμπτωτικές τιμές του παράγοντας Lorentz σαν συναρτήσει αυτού. Δηλαδή $\gamma_f = \gamma_f(R_i)$, ενώ όμοια, ορίζονται μονοσήμαντα και οι χρονικές και χωρικές διαστάσεις που ξεκινά το κάθε κομμάτι την τελική φάση της ροής του, δηλαδή την φάση $\gamma = \gamma_f$, $\eta \ll 1$, σαν $r_c(R_i), t_c(R_i)$.

Η σχέση για την ακτίνα του ρευστού ακτίνας R_i , υπολογίζεται να είναι

$$r(t, R_i) = r_c(R_i) + \left(1 - \frac{1}{2\gamma_f^2(R_i)} \right) (t - t_c(R_i))$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση ως προς R_i και στη συνέχεια ως προς t , υπενθυμίζοντας πως όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το R_i δεν έχουν έμμεση εξάρτηση από το χρόνο, προκύπτει η σχέση

$$\left[\frac{d}{dt} \frac{\partial r}{\partial R} \right] \Delta R = \left[\frac{1}{\gamma_f(R)^3} \frac{\partial \gamma_f}{\partial R} \right] \Delta R$$

όπου ΔR είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών «κελυφών», διαφορετικής «ταμπέλας» R_i . Κάνοντας το ανάπτυγμα προκύπτει τελικά

$$\Delta r(t) = \Delta r_c + \frac{\Delta \gamma_f(t - t_c)}{\bar{\gamma}^3} \approx R_i \frac{t - t_c}{\bar{\gamma}^2} \quad (3.11)$$

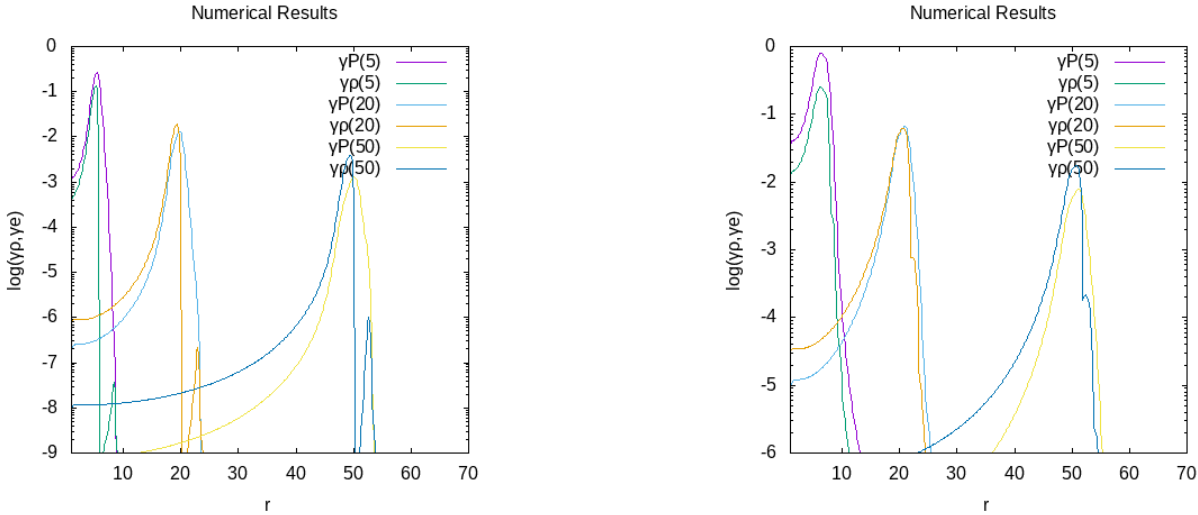
όπου $\bar{\gamma}$ είναι η μέση τιμή του γ για το κάθε «κέλυφος», ενώ $\Delta \gamma$ δηλώνει τη διασπορά του δείκτη γ , όπου θεωρήθηκε περίπου ίση με γ .

Αν ακόμη θεωρηθεί ότι η διαφορά των δύο φλοιών είναι τάξης R_i , καταλήγει η παραπάνω σχέση στην $\Delta r(t) = R_i + (t - t_c)/\bar{\gamma}^2$. Για χρόνους μεγαλύτερους από t_c , η απόσταση Δr αυξάνεται περίπου γραμμικά με το χρόνο, $\Delta r \propto t - t_c \approx t$, με αποτέλεσμα να αλλάζει ο νόμος δύναμης για τη πυκνότητα $n \propto r^{-3}$ και αντίστοιχα για την εσωτερική ενέργεια $e \propto r^{-4}$.

Ο χρόνος για τον οποίο ισχύει η ανάλυση 3.4-3.10, είναι από τον t_0 μέχρι $t = t_c + \bar{\gamma}^2 R_i^2$, ή διαφορετικά, τη στιγμή που το $\Delta r(t)$ γίνεται ίσο με R_i .

3.2 Αριθμητικά και αναλυτικά αποτελέσματα

Η παραπάνω αναλυτική προσέγγιση μένει να αποτυπωθεί και να επιβεβαιωθεί από αριθμητική προσομοίωση. Πριν από αυτό, να σημειωθεί ότι δεν έγινε αναφορά στο εξωτερικό περιβάλλον της ροής. Αναλυτικά, δεν γίνεται να προβλεφθεί η συμπεριφορά της ροής όταν αλληλεπιδρά με το περιβάλλον, χωρίς την εισαγωγή άμεσης χρονοεξάρτησης στις εξισώσεις του συστήματος.



(α') Ο παλμός εισέρχεται σε στατικό περιβάλλον πολύ χαμηλότερης ενέργειας.

(β') Ο παλμός ξεκινά από τη βάση της ακτίνας, με το περιβάλλον να υπακούει τις ίδιες εξισώσεις με αυτόν.

Σχήμα 3.1: Αριθμητική προσομοίωση της υδροδυναμικής περίπτωσης, αρχικών συνθηκών 3.12

Μπορεί να περιοριστεί η επίδραση του περιβάλλοντος υπο τη συνθήκη ότι η πίεση και η πυκνότητα αυτού είναι πολύ μικρότερη από τις αντίστοιχες τιμές της εκροής. Από τις σχέσεις 3.10, αντικαθιστώντας το μέγεθος

$D = D(\gamma)$, γίνεται να βρεθεί ο παράγοντας Lorentz συναρτήσει του r λύνοντας αριθμητικά τη πρώτη σχέση. Έχοντας την $\gamma = \gamma(r)$ προκύπτουν αμέσως οι $n = n(r)$ και $e = e(r)$. Οι «σταθερές» (e_0, n_0, r_0) σχετίζονται με τις αρχικές τιμές των μεγεθών.

Επιλέγονται τα προφίλ

$$e(r, t = 0) = \frac{e_0}{R_i^8 + r^8}, \quad \rho(r, 0) = \frac{e(r, 0)}{\eta_i}, \quad \gamma(r, 0) = 1 \quad (3.12)$$

των οποίων οι αριθμητικές λύσεις υπάρχουν στο [Piran et al.(1993)]. Η σταθερά η_i επιλέγεται ίση με 50 ενώ η σταθερά R_i , που εκφράζει την αρχική ακτίνα του Fireball ορίζεται ίση με τη μονάδα.

Ξεκινώντας με την αναλυτική λύση του συστήματος, χρησιμοποιούνται τα αρχικά προφίλ στις σχέσεις 3.9, όπου αντικαθιστούν τις σταθερές e_0, ρ_0 και γ_0 . Η χρονοεξάρτηση αποτυπώνεται από τις τροποποιημένες αυτές εξισώσεις, χρησιμοποιώντας μόνο τη σχέση $s = t - r$.

Δηλαδή για το προφίλ πυκνότητας του παλμού τη χρονική στιγμή $t = 50$, θα χρησιμοποιηθεί η σχέση $\rho = \frac{\rho_0}{D^3}$, όπου $\rho_0 = \frac{e(r - 50, 0)}{\eta_i}$, ενώ $D(r, 50) = D(r, 0)$ αφού τα προφίλς $\gamma(r, 0)$ και $\eta(r, 0)$ είναι σταθερές.

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο γραφήμα 3.2. Στη πρώτη φάση, που διαρκεί περίπου μέχρι $t = 100s$, η πίεση κυριαρχεί ενεργειακά στο σύστημα. Μετά από αυτό το χρόνο, η περισσότερη ενέργεια έχει μετατραπεί σε μέση κινητική. Στο χρονικό εύρος που παρουσιάζεται η λύση, φαίνεται η συμπεριφορά του συστήματος, ενώ δεν φθάνει σε μεγάλες ακτίνες, όπου δεν ισχύει η προσέγγιση Frozen Pulse.

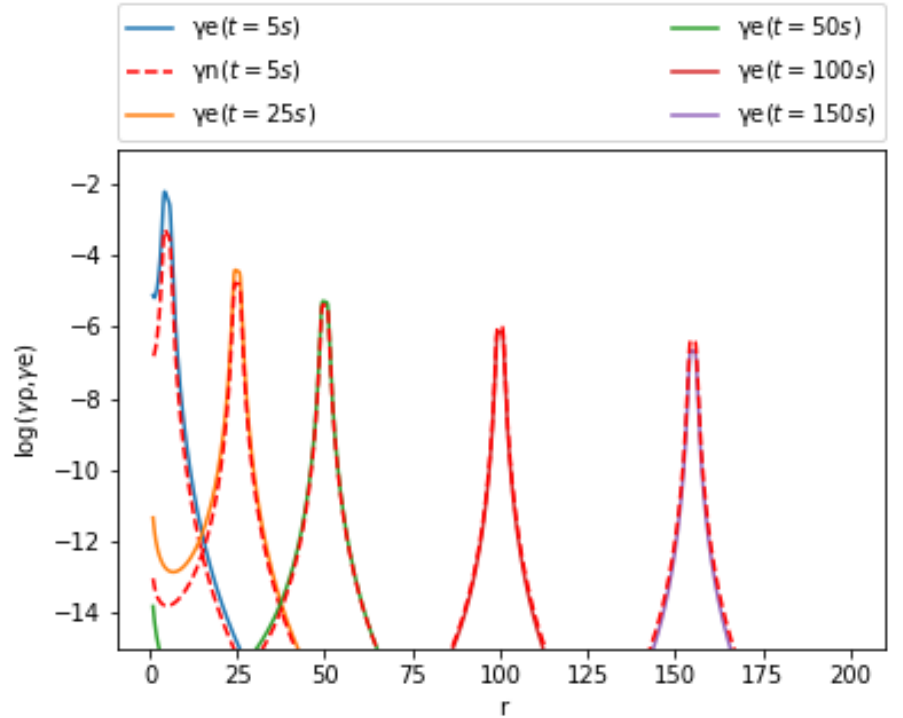
Στη συνέχεια επιχειρήθηκε η επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων με προσομοίωση που έγινε στο PLUTO.

Χρησιμοποιήθηκαν μονοδιάστατες σφαιρικές συντεταγμένες, με συνοριακές συνθήκες μηδενικής παραγώγου στη τελική ακτίνα $r_f = 200$, ενώ για τις συνοριακές συνθήκες στην αρχική ακτίνα $r_i = 1.0$, υπενθυμίζοντας πως $p = \frac{e}{3}$, μεταφράστηκε ο παλμός 3.12 σε

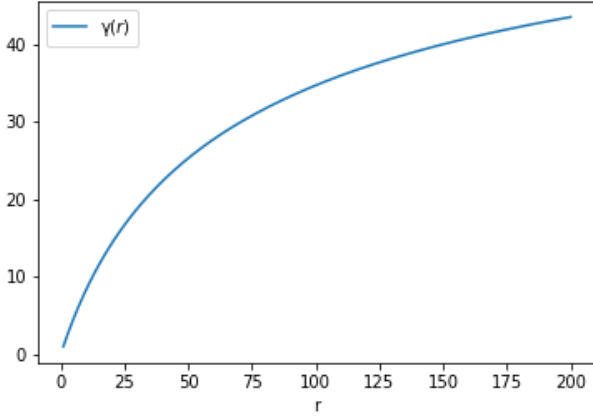
$$\rho(r = 0, t) = \frac{1.0}{1.0 + t^2}, \quad p = \frac{50}{3}\rho(0, t), \quad \vec{V}(0, t) = 0 \quad (3.13)$$

Η πίεση του περιβάλλοντος, σε πρώτη προσπάθεια, ήταν ίση με 10^{-9} , ενώ η πυκνότητα ικανοποιούσε τη

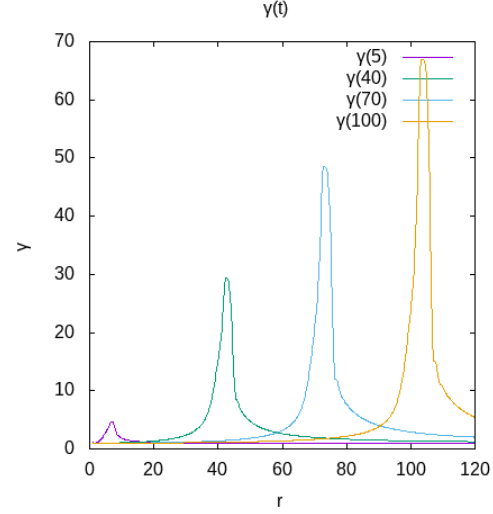
Σχήμα 3.2: Απεικονίζονται η χρονική εξέλιξη του παλμού, όπως προκύπτει από την αναλυτική λύση των εξισώσεων 3.10. Με διακεκομμένες γραμμές εκφράζεται η πυκνότητα από το σύστημα του εργαστηρίου, ενώ η συνεχή γραμμή εκφράζει την εσωτερική ενέργεια.



συνθήκη $c_s = 10^{-3}$. Στη συνέχεια, σε δεύτερη δοκιμή, για να ελεγχθεί η επίδραση της ατμόσφαιρας, δόθηκαν τα προφίλ 3.13 με την αντικατάσταση $t \leftrightarrow r - 1$, για να ικανοποιείται η συνέχεια με τις συνοριακές απο την εκκίνηση της προσομοίωσης. Τα αποτελέσματα της φαίνονται στα γραφήματα 3.1α', 3.1β'. Η συμπεριφορά του



(α') Ο παράγοντας Lorentz όπως προκύπτει απο τη λύση του συστήματος 3.10



(β') Ο παράγοντας Lorentz απο την αριθμητική προσομοίωση χωρίς να εξέρχεται σε περιβάλλον η εκροή.

Σχήμα 3.3: Σύγκριση αποτελεσμάτων, αριθμητικής και αναλυτικής μεθόδου, αρχικών συνθηκών 3.12 ως προς τον αριθμό γ .

συστήματος είναι παρόμοια με αυτήν της αναλυτικής λύσης. Η εναλλαγή φάσεων γίνεται και εδώ εμφανής. Το περιβάλλον φαίνεται να κάνει πιο απότομο το παλμό, ενώ το προφίλ της πυκνότητας παρουσίαζε ανεξαρτήτως αναλογία μία απότομη πτώση. Το δεύτερο γράφημα 3.1β' ταιριάζει ποιοτικά καλύτερα με την αναλυτική λύση, ενώ ποσοτικά φαίνεται πως η μετάβαση μεταξύ των δύο φάσεων γίνεται πιο γρήγορα στην προσομοίωση.

Πιθανώς να οφείλεται στην ασυμφωνία της προσέγγισης για σχετικιστική ροή, που δεν επαληθεύεται απο την αρχή της λύσης στο γράφημα 3.2, για $\gamma_0 = 1$. Ο παράγοντας Lorentz φθάνει ασυμπτωτικά τη τιμή $\gamma_f = 40$, στην αναλυτική λύση 4.21, ενώ η αριθμητική προσομοίωση φθάνει μέχρι και 70

Κεφάλαιο 4

Σχετικιστική Μαγνητουδροδυναμική Προσέγγιση

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα προσθεθεί η εστίαση της ροής, καθώς και η μαγνητική επιτάχυνση, μελετώντας αρχικά σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Η διαδικασία είναι ποιοτικά όμοια με την υδροδυναμική περίπτωση, έχοντας περισσότερα ολοκληρώματα που πρέπει να ελεγχθούν

4.1 Κύριες Εξισώσεις

Αντίστοιχα με πρίν, θα χρησιμοποιηθεί ο τανυστής ενέργειας ορμής, με την επιπλέον συνιστώσα του τανυστή της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας

$$T_{EM}^{\kappa,\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}$$

έτσι ο τανυστής γίνεται

$$T^{\kappa,\nu} = T_M^{\kappa,\nu} + T_R^{\kappa,\nu} + T_{EM}^{\kappa,\nu}$$

όπου εισάγωντας τις ποσότητες

$$\xi = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P}{\rho_0 c^2} \quad (4.1)$$

και τις εξισώσεις τους Maxwell,

$$\begin{aligned} \nabla \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \nabla \vec{E} &= 4\pi \frac{J^0}{c} & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.2)$$

προκύπτουν όλες οι εξισώσεις διατήρησης. Ξεκινώντας με την μάζα, απο την $(\rho_0 U^\nu)_{,\nu} = 0$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \nabla \right) (\gamma \rho_0) + \gamma \rho_0 \nabla \vec{V} = 0 \quad (4.3)$$

Όμοια, για τη κ συνιστώσα της εξίσωσης ομής $T^{\kappa,\nu} = 0$

$$(\gamma\rho_0)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\nabla\right)(\xi\gamma\vec{V}) = -\nabla P + \frac{J^0\vec{E} + \vec{J} \times \vec{B}}{c} \quad (4.4)$$

και τέλος για τη διατήρηση της ενέργειας

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\nabla\right)\left(\frac{P}{\rho^\gamma}\right) = 0 \quad (4.5)$$

απο την $U_\kappa T^{\kappa,\nu} = 0$

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων, γίνονται ορισμένες υποθέσεις. Ξεκινώντας με την αξισυμμετρία του συστήματος, ισχύει ότι $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$. Το μαγνητικό πεδίο στην $\hat{\phi}$ κατεύθυνση είναι μηδέν, $E_\phi = 0$. Ένας σημαντικός δεσμός που έχει εισηχθεί σε όλους τους παρακάτω υπολογισμούς είναι η σταθερότητα του μαγνητικού πεδίου. Ας θεωρηθεί ότι το φυσικό σύστημα που εξετάζεται είναι μια εκροή απο ένα δίσκο προσάυξεσης. Αν το μαγνητικό πεδίο έχει τις βάσεις του στον δίσκο, και άρα οι μαγνητικές γραμμές ξεκινάνε απο αυτόν, τότε η πολοειδή συνιστώσα του θα παραμένει «σχετικά» αμετάβλητη, για μία χρονική κλίμακα της τάξεως ϖ/V_ϖ . Η κλίμακα αυτή σχετίζεται με το ρυθμό που τροφοδοτείται το κεντρικό σώμα με ύλη. Επειδή η αναφορά γίνεται σε GRBs, το σώμα αυτό είναι μαύρη τρύπα, και το κυριότερο, η ροή είναι ισχυρά σχετικιστική. Δηλαδή το μαγνητικό πεδίο, θα αλλάξει στη χρονική κλίμακα που διαρκεί η έκρηξη, αλλά ύστερα, δεδομένου ότι η ταχύτητα διάδοσης των διαταραχών απο τη βάση του δίσκου είναι αρκετά μικρότερη απο τη ταχύτητα της ισχυρά σχετικιστικής ροής, η άμεση εξάρτηση του μαγνητικού πεδίου απο το χρόνο θα είναι σχεδόν μηδέν.

Με δεδομένο την ισχυρά σχετικιστική εκροή, μπορεί να μελετηθεί το χρονοεξαρτώμενο σύστημα, σαν «steady state». Πρώτα όμως, χρειάζεται να ορισθούν καινούριες χωρικές και χρονικές συντεταγμένες. Για μετάβαση αυτών, είναι απαραίτητος ο ορισμός της πολοειδής μαγνητικής ροής, που ορίζεται ως

$$A(\varpi, z) = \iint \vec{B}_p d\vec{S} \frac{1}{2\pi}$$

και ικανοποιεί την σχέση $\vec{B}_p = \frac{\nabla A \times \hat{\phi}}{\varpi}$.

Απο το Νόμο του Ohm εφαρμοσμένο στην αζιμουθιακή διεύθυνση προκύπτει ότι

$$\vec{V}_p \propto \vec{B}_p$$

και με τη χρήση των ολοκληρωμάτων κίνησης Ω και Ψ_A την

$$\vec{V} = \frac{\Psi_A}{4 \cdot \pi \gamma \rho_0} \vec{B} + \varpi \Omega \hat{\phi} \quad \frac{\Psi_A}{4 \cdot \pi \gamma \rho_0} = \frac{V_p}{B_p}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα σχετίζεται με τη κεπλεριανή περιστροφή, ή διαφορετικά, τη περιστροφική ταχύτητα κοντά στο δίσκο προσάυξεσης, ενώ το δεύτερο, εκφράζει το λόγο της ροής μάζας προς τη μαγνητική ροή.

Το επόμενο μέγεθος που θα χρειαστεί, είναι το μήκος της πολοειδής γραμμής (είτε μαγνητικής είτε ροής, αφού αυτές οι δύο είναι ταυτόσημες) και ορίζεται με $l(\varpi, z)$, ενώ για τη χρονική κλίμακα, ελέγχοντας την σταθερά της γραμμής ροής στο προηγούμενο κεφάλαιο $C = \beta_f \cdot t - r$, ορίζεται με παρόμοιο σκεπτικό η μεταβλητή $s = ct - l$.

Με τη χρήση των παραπάνω, μπορεί κανείς να μεταβεί απο το σύστημα συντεταγμένων (ϖ, z, ϕ, t) στο (A, l, ϕ, s) μελετώντας εκεί την εκροή.

Προχωρώντας στη μαθηματική ανάλυση, από γνωστά μαθηματικά, για κάθε συνάρτηση $\Phi(x, y)$ ισχύει η σχέση $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z}$, άρα προκύπτει η χρήσιμη ταυτότητα

$$\nabla_s \Phi \equiv \nabla \Phi - \frac{\partial \Phi}{\partial l} \nabla l = \nabla \Phi + \frac{\partial \Phi}{\partial s} \nabla l \quad (4.6)$$

Δηλαδή, χρησιμοποιούνται οι σχέσεις

$$\nabla = \nabla_s - \nabla l \frac{\partial}{\partial s} \quad \frac{\partial}{\partial t} = c \frac{\partial}{\partial s}$$

Το μαγνητικό πεδίο, χρησιμοποιώντας τη μαγνητική πολοειδή ροή, γράφεται ως

$$\vec{B} = \frac{\nabla A \times \hat{\phi}}{\varpi} + \vec{B}_\phi \quad (4.7)$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση της ταχύτητας στο νόμο του Ομ προκύπτει ότι

$$\vec{E} = -\frac{\Omega}{c} \nabla_s A \quad E = \frac{\varpi \Omega}{c} B_p \quad (4.8)$$

ενώ ελέγχοντας ξανά το νόμο του Faraday για μηδενικό αζιμουθιακό μαγνητικό πεδίο και αναλύοντας το μαγνητικό πεδίο στο πολοειδές επίπεδο, προκύπτει ότι

$$-\frac{\nabla \Omega \times \nabla A}{c} = -\frac{1}{c} \frac{\partial (\vec{B}_p + B_\phi \hat{\phi})}{\partial t}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\nabla \Omega = \nabla_s \Omega - \nabla l \frac{\partial}{\partial s}$, $\nabla A = \nabla_s A$, $\nabla l = \hat{b}$, όπου $\hat{b}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στο πολοειδές επίπεδο, και λαμβάνοντας υπόψιν την προϋπόθεση που τέθηκε για την χρονοανεξαρτησία του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου, προκύπτει ότι

$$\nabla_s \Omega \times \nabla_s A = c \frac{\partial E + B_\phi \hat{\phi}}{\partial s} \quad (4.9)$$

Από την έκφραση της διατήρησης της μάζας, 4.3, χρησιμοποιώντας πάλι τη σχέση $\vec{V} \nabla l = V_p$ προκύπτει η

$$\nabla_s (4\pi \gamma \rho_0 \vec{V} + (c - V_p) \frac{\partial (4\pi \gamma \rho_0)}{\partial s}) - 4\pi \gamma \rho_0 \frac{\partial V_p}{\partial s} = 0 \quad (4.10)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω σχέσεων, μπορεί να γραφτεί στο ορθογώνιο σύστημα των μοναδιαίων δυα-νισμάτων

$$\hat{n} = \frac{\vec{E}}{E} \quad \hat{b} = \frac{\vec{V}_p}{V} \quad \hat{\phi}$$

η εξίσωση της ορμής, 4.4, ίση με

$$\begin{aligned} \gamma \rho_0 (\vec{V} \nabla_s) (\xi \gamma \vec{V}) + \gamma \rho_0 (c - V_p) \frac{\partial}{\partial s} (\xi \gamma \vec{V}) = & -\frac{\partial (E + B_\phi)}{4\pi \partial s} \hat{n} \times \vec{B} - \hat{n} \frac{\nabla l \nabla A}{\nabla A} \frac{\partial (B_\phi^2 - E^2)}{8\pi \partial s} \\ & - \nabla P + \frac{\Omega}{4\pi c^2} [\nabla_s (\Omega \nabla_s A)] \nabla_s A + \frac{(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}}{4\pi} \end{aligned} \quad (4.11)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα

$$\vec{B}_\phi \times \nabla_s l - \vec{E} = B_\phi \hat{\phi} \times [(\hat{b} \nabla_s l) \hat{b} + (\hat{n} \nabla_s l) \hat{n}] - E \hat{n} = -(E + B_\phi) \hat{n} + B_\phi (\hat{n} \nabla_s l) \hat{b}$$

Οι εξισώσεις 4.26, 4.10, αν και δεν προσφέρουν κάποια χρήσιμη διευκόλυνση στην επίλυση του συστήματος με μία πρώτη ματιά, έχουν σαν κοινό χαρακτηριστικό, την εμφάνιση της χρονικής εξάρτησης υπο την μορφή της παραγώγου $(c - V_p) \frac{\partial}{\partial s}$ ή με την εμφάνιση του όρου $(E + B_\phi)$. Σε επόμενο βήμα θα αποδειχθεί πως αυτοί οι όροι είναι τάξης γ μικρότεροι, συγκρινόμενοι με τους υπόλοιπους, και άρα πολύ μικροί για σχετικιστική εκροή.

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή, λόγω σχετικιστικής συστολής, ένα μήκος της εκροής που μετρείται σαν R απο το σύστημα του εργαστηρίου, είναι γ φορές μικρότερο από ότι στο co-moving frame. Με το σκεπτικό αυτό, αν μία χρονική αλλαγή γίνει στη βάση του δίσκου, ή στη βάση της εκροής, αυτή θα μεταφερθεί στις γραμμές ροής και θα αλλάξει τα μεγέθη του πλάσματος σε αυτές. Στο σύστημα του εργαστηρίου όμως, το χρονικό διάστημα που διαρκεί η αλλαγή, διατηρείται, όμως το χωρικό διάστημα της αλλαγής είναι μικρότερο από ότι στο σύστημα του ρευστού, κατα γ φορές. Δηλαδή ισχύει η ισότητα $\frac{\partial}{\partial t} \propto \gamma \frac{\partial}{\partial l}$, ή στο βολικότερο σύστημα που οι μονάδες είναι ίδιες $\frac{\partial}{\partial s} \propto \gamma \frac{\partial}{\partial l}$.

Και με τη βοήθεια του τελεστή $\vec{V} \nabla = V_p \frac{\partial}{\partial l}$ (δεδομένης της σχέσης $\vec{V} \nabla A \frac{\partial}{\partial A} = 0$) συμπαιραίνει κανείς πως η παράγωγος $(c - V_p) \frac{\partial}{\partial s} \approx \frac{c}{2\gamma^2} \gamma \frac{\partial}{\partial l}$ και αφού $V_p \approx c$, η παράγωγος είναι τάξης γ^2 φορές μικρότερη απο το τελεστή $\vec{V} \nabla$.

Άρα στην εξίσωση 4.10 και 4.26 οι χρονικές παράγωγοι με αυτή τη μορφή, μπορούν υπο τις συνθήκες που έχουν οριοθετηθεί για το σύστημα -δηλαδή σχετικιστική εκροή και χρονοανεξάρτητη πολοειδής μαγνητική ροή- να αγνοηθούν. Μένουν οι όροι στη τροποποιημένη εξίσωση της ορμής, όπου λαμβάνοντας αρχικά την 4.8 και την $\hat{\phi}$ συνιστώσα της σχέσης $\vec{V} = \frac{V_p}{B_p} \vec{B} + \omega \Omega \hat{\phi}$ προκύπτει ότι

$$\frac{E + B_\phi}{B_p} = \frac{V_\phi}{V_p} - (1 - \beta_p) \omega \Omega \frac{1}{V_p}$$

Ο πρώτος όρος του δεύτερου μέρους της εξίσωσης είναι αμελητέος συγκριτικά με το δεύτερο, και για $\gamma_p \propto \omega$, όπως αποδείχθηκε και στο πρώτο μέρος της εργασίας, η πρώτη ποσότητα θα παραμείνει πολύ μικρότερη της μονάδας.

Τέλος, στην εξίσωση της ορμής, είναι αποδεκτά τα σφάλματα αν κανείς αγνοήσει τη δύναμη της πίεσης, ή ακόμη καλύτερα, να θεωρήσει

$$\nabla P \approx \nabla_s P$$

και χρησιμοποιώντας όλους τους παραπάνω υπολογισμούς να μη παρουσιάζεται καθ'όλο το σύστημα, η παράγωγος $\frac{\partial}{\partial s}$

Δηλαδή στο εξεταζόμενο σύστημα υπάρχει η συμπεριφορά steady-state ροής. Η απουσία της εξάρτησης απο τη μεταβλητή s και $\frac{\partial}{\partial s}$ απο τις παραπάνω διαφορικές, δείχνει πως η μόνη εξάρτηση των μεγεθών απο αυτήν, θα είναι στις αρχικές συνθήκες. Επομένως χρειάζεται να ορισθούν τα $z_{initial}, t_{initial}$.

Στις περιπτώσεις που θα αναλυθούν στο τρίτο κεφάλαιο, η ροή θα έχει χρονοανεξάρτητα μεγέθη στη βάση της, επομένως, οι αντίστοιχες αρχικές συνθήκες που είναι $l_{initial}, t_{initial}$ ¹, χωρίς να χαθεί η γενικότητα, μπορούν να ορισθούν αυθαίρετα $l_{initial} = s_{initial} = 0$.

Αξίζει να σημειωθεί, πως στη προηγούμενη ανάλυση, δεν έχει δοθεί βάρος στις περιοχές που το σύστημα, είτε δεν είναι άκρως σχετικιστικό, είτε η εσωτερική θερμική ενέργεια είναι σημαντικότερη από τη μαγνητική. Τα σφάλματα είναι μικρά στη περιοχή που οι παραπάνω προσεγγίσεις έχουν σχεδόν απόλυτη ισχύ αλλά στη subalfven περιοχή η ακρίβεια των εξισώσεων θα είναι μικρότερη.

Σε επόμενο βήμα, επιχειρείται να βρεθούν τα ολοκληρώματα κίνησης. Δηλαδή ποσότητες, που ακολουθώντας μία γραμμή ροής σταθερής «ταμπέλας» s , όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα παραμένουν σταθερές. Ξεκινώντας από την εξίσωση ορμής, χρησιμοποιώντας είτε την 4.4, είτε την 4.26, λαμβάνοντας μόνο την αζιμουθιακή συνιστώσα αυτής, προκύπτει το ολοκλήρωμα

$$L(A, s) = \xi \gamma \omega V_\phi - \frac{\omega B_\phi}{\Psi_A} \quad (4.12)$$

που εκφράζει τη συνολική στροφομή, μαγνητική και κινητική, ανά μονάδα μάζας ηρεμίας εξαρτώμενο από τη γραμμή ροής A και από το χρόνο s .

Ελέγχοντας την ίδια εξίσωση στη κατεύθυνση της γραμμής ροής, καταλήγει κανείς στο ολοκλήρωμα

$$\mu(A, s) = \xi \gamma - \frac{\omega \Omega B_\phi}{\Psi_A c^2} \quad (4.13)$$

εκφράζοντας τη ροή της συνολικής ενέργειας προς τη ροή της μάζας ηρεμίας και τέλος, από την εξίσωση ενέργειας

$$Q(A, s) = \frac{P}{\rho \Gamma} \quad (4.14)$$

4.2 Ανάλυση της δυανισματικής εξίσωσης ορμής

Έχοντας τα ολοκληρώματα του συστήματος καταγεγραμμένα, χρήσιμη είναι η ανάλυση της δυανισματικής εξίσωσης ορμής, στη παράλληλη και εγκάρσια κατεύθυνση επί της γραμμής ροής.

Ο πρώτος όρος της 4.4, αγνοώντας την άμεση εξάρτηση ως προς το χρόνο, γράφεται

$$(\gamma \rho_0) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \nabla \right) (\xi \gamma \vec{V}) = \xi \gamma^2 \rho_0 (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \gamma^2 \rho_0 \vec{V} (\vec{V} \nabla) \xi + \xi \gamma \vec{V} \rho_0 (\vec{V} \nabla) \gamma \quad (4.15)$$

Ξεκινώντας από την εγκάρσια εξίσωση της ορμής, ο δεύτερος και ο τρίτος όρος της παράστασης 4.15 δεν έχουν κάθετη συνιστώσα στο πολοειδές δυνάμισμα, αφού είναι παράλληλες στη ταχύτητα. Ο πρώτος όρος, πολλαπλασιάζοντας με $\hat{n}$ και αφαιρώντας τον όρο

$$F_{C\perp} = \xi \gamma^2 \rho_0 \frac{V_\phi^2}{\omega} \hat{n} \hat{\omega}$$

που είναι η φυγόκεντρος δύναμη λόγω της αζιμουθιακής ταχύτητας, δίνει $F_{I\perp} = -\hat{n} \gamma^2 \rho_0 \xi (\vec{V} \nabla) \vec{V} - \xi \gamma^2 \rho_0 \frac{V_\phi^2}{\omega} \hat{n} \hat{\omega}$

Αναλύοντας τον όρο $(\nabla \vec{V}) \vec{V} = (V_p \hat{b} \nabla) \vec{V}_p + (V_\phi \hat{\phi} \nabla) V_\phi \hat{\phi}$, ο τελευταίος από γνωστή διανυσματική ταυτότητα ισούται με $-\rho_0 \frac{V_\phi^2}{\omega}$ αναιρώντας την επίδραση του όρου $F_{C\perp}$. Για το πρώτο, χρησιμοποιείται οι σχέσεις Frenet

¹ Αντί για $u_z \approx c$, εξετάζεται το όριο $u_p \approx c$, και άρα αντί για $\int u_z dt = z$ ισχύει $\int u_p dt = l$

-Serret για το ορθοκανονικό σύστημα $(\hat{n}, \hat{b})$, σύμφωνα με τις οποίες, η ποσότητα $\hat{n}(\frac{\partial}{\partial l} \hat{b})$ ισούται με την ακτίνα καμπυλότητας της πολοειδούς γραμμής ροής, για τη περίπτωση μας, και τελικά προκύπτει ότι

$$F_{I\perp} = -\frac{\gamma^2 \rho_0 \xi V_p^2}{\mathcal{R}}$$

Ενώ η βαθμίδα της πίεσης κάθετα στην γραμμή ροής δίνει απλώς

$$F_{P\perp} = -\hat{n} \nabla P$$

Η δύναμη του ηλεκτρικού πεδίου, κάθετα στη γραμμή ροής θα δίνεται από τη σχέση $-F_{E\perp} = \frac{J^0 \vec{E} \hat{n}}{c}$ και, αφού $\vec{E} = E \hat{n}$ γράφεται σαν $-\frac{(\nabla(E \hat{n}) \vec{E})}{4} \hat{n} = -\frac{E^2}{4\pi} \nabla \hat{n} + \hat{n} \nabla E^2 \frac{1}{8\pi}$ και αλλάζοντας τον δεύτερο όρο σε $\frac{(\hat{n} \nabla)}{8\pi \varpi^2} (E^2 \varpi^2) - \frac{E^2}{4\pi \varpi^2} (\hat{n} \nabla)(\varpi)$, χρησιμοποιώντας και την σχέση για την ακτίνα καμπυλότητας, προκύπτει τελικά ότι

$$F_{E\perp} = -\frac{E^2}{4\pi \mathcal{R}} + \frac{1}{8\pi \varpi^2} \hat{n} \nabla (\varpi^2 E^2)$$

Με όμοιο σκεπτικό, η μαγνητική δύναμη κάθετη στη γραμμή ροής, ισούται με $F_{B\perp} = \frac{1}{4\pi} \hat{n} \left[(\vec{B} \nabla) \vec{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) \right]$. Γράφοντας πάλι το μαγνητικό πεδίο σαν $\vec{B} = \vec{B}_p + B_\phi \hat{\phi}$, τροποποιώντας ξανά τον δεύτερο όρο υπο τη μορφή $-\frac{(\hat{n} \nabla)}{8\pi \varpi^2} (B^2 \varpi^2) + \frac{B^2}{4\pi \varpi} (\hat{n} \nabla) \varpi$ και χρησιμοποιώντας ότι και στις προηγούμενες μορφές, καταλήγει με τον ίδιο τρόπο στη μορφή

$$F_{B\perp} = -\frac{1}{8\pi \varpi^2} \hat{n} \nabla (\varpi^2 B^2) + \frac{B_p^2}{4\pi \mathcal{R}} + \frac{B_p^2}{4\pi \varpi} \hat{n} \hat{\omega}$$

Αθροιστικά, οι παραπάνω δυνάμεις ικανοποιούν το νόμο

$$F_{B\perp} + F_{E\perp} + F_{P\perp} + F_{I\perp} + F_{C\perp} = 0$$

και ο κάθε όρος εκφράζει τη διαφορετική φύση της δύναμης. Παρόλα αυτά, η μορφή αυτή δεν είναι εύκολα διαχειρίσιμη και για αυτό επιχειρείται να συμπτυχθεί η παραπάνω σχέση σε μία ισοδύναμη βολικότερη σχέση.

Αρχικά, το άθροισμα της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης γράφεται ως

$$f_{E\perp} + f_{B\perp} = -\frac{1}{8\pi \varpi^2} \hat{n} \nabla [\varpi^2 (B^2 - E^2)] + \frac{B_p^2 (1 - x^2)}{4\pi \mathcal{R}} + \frac{B_p^2}{4\pi \varpi} \hat{n} \hat{\omega}$$

Τελικώς, η transfield συνιστώσα της ορμής γράφεται συνολικά

$$\frac{B_p^2}{4\pi \mathcal{R}} (M^2 + x^2 - 1) = -\frac{1}{8\pi \varpi^2} \hat{n} \nabla [\varpi^2 (B^2 - E^2)] + \frac{B_p^2}{4\pi \varpi} \left[1 + \left(\frac{M V_\phi}{V_p} \right)^2 \right] \hat{n} \hat{\omega} - \hat{n} \nabla P \quad (4.16)$$

Ξεκινώντας από το ολοκλήρωμα 4.13, λύνοντας ως προς γ δίνει $\gamma = \frac{\mu}{\xi} \left(1 + \frac{\varpi \Omega B_\phi}{\mu \Psi_A c^2} \right) = \frac{\mu}{\xi} \left(1 + \frac{\Omega}{\mu c^2} (\xi \gamma \varpi V_\phi - L) \right)$, και χρησιμοποιώντας τις $\frac{\varpi B_\phi}{\Psi_A} = \xi \gamma \varpi V_\phi - L$ και $\Omega \varpi^2 = \varpi V_\phi - \frac{\Psi_A}{4\pi \gamma \rho_0} \varpi B_\phi$ μετά από απλές αντικαταστάσεις, και αφού πρώτα οριστούν για ευκολία τα βοηθητικά μεγέθη

- $x \equiv \frac{\varpi\Omega}{c}$ εκφράζει την ακτίνα του στοιχείου της κάθε γραμμη ροής, σε μονάδες ακτίνες κυλίνδρου του φωτός
- $M \equiv \left(\frac{\gamma V_p}{B_p}\right)(4\pi\rho_0\xi)^{1/2} = \Psi_A\left(\frac{\xi}{4\pi\rho_0}\right)^{1/2}$ εκφράζει τον αριθμό Μαχ της πολοειδούς ταχύτητας Alfven
- x_A το σημείο που η πολοειδής ταχύτητα γίνεται ίση με την Alfven, ή διαφορετικά $M = 1$
- $G \equiv \frac{x}{x_A}$

καταλήγει στην πιο βολική σχέση για το παράγοντα Lorentz

$$\gamma = \frac{\mu}{\xi} \frac{1 - M^2 - x_a^2}{1 - M^2 - x^2} \quad (4.17)$$

ενώ επιλύοντας το προηγούμενο σύστημα ως προς B_ϕ προκύπτει όμοια ότι

$$B_\phi = -\frac{1 - G^2}{1 - M^2 - x^2} \frac{\mu\Psi_A x_A^2 c}{x}$$

και άρα το ολικό μαγνητικό πεδίο θα ικανοποιεί την

$$\vec{B} = \frac{\nabla A \times \hat{\phi}}{\varpi} - \frac{G^2 - M^2 - x^2}{1 - M^2 - x_a^2} \frac{\varpi_A \Omega}{G} \quad (4.18)$$

Κάνοντας όμοια διαδικασία για την αζιμουθιακή συνίστωσα της ταχύτητας, καταλήγει κανείς στην σχέση

$$\vec{V} = \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma\rho_0} \vec{B} + \frac{1 - G^2}{1 - M^2 - x^2} \quad (4.19)$$

ενώ ήδη καλώς ορισμένες είναι οι ποσότητες

$$\rho_0 = \frac{\xi\Psi_A^2}{4\pi M^2}, \quad \xi = 1 + \frac{\Gamma}{\Gamma - 1} \frac{P}{\rho_0 c^2}, \quad P = Q\rho_0^\Gamma \quad (4.20)$$

Μπορεί με μία πρώτη ανάγνωση να μη φαίνεται η ευκολία στη παραπάνω τροποποίηση των μεγεθών, αλλά είναι σημαντική ιδιότητα των 4.17,4.18,4.19 να έχουν εξάρτηση μόνο απο τις ποσότητες $(\xi, M^2, x, G, \nabla A)$

Περνώντας τώρα στην παράλληλη συνιστώσα, ελέγχοντας ξανά την σχέση 4.15, όπως έγινε και πριν, γράφεται η εξίσωση ορμής σε ξεχωριστές συνιστώσες.

Η δύναμη που προκαλείται απο τη βαθμίδα του παράγοντα Lorentz γ , ισούται με

$$F_G = -\gamma\rho_0\xi(\vec{V}\nabla_s\gamma)\vec{V}$$

Αφού τροποποιηθεί η παράγωγος $\gamma(\vec{V}\nabla\gamma) = \frac{1}{2}(\vec{V}\nabla)\gamma^2 = \gamma^4 \frac{1}{2c^2}(\vec{V}\nabla)(V^2)$ και διαχωρισθεί η κλίση του μέτρου της ταχύτητας σε αζιμουθιακή και πολοειδή καταλήγει κανείς στις

$$F_{G_p} = -\gamma^4 \frac{\rho_0\xi}{2c^2}(\vec{V}\nabla V_p^2)\vec{V} \text{ και } F_{G_\phi} = -\gamma^4 \frac{\rho_0\xi}{2c^2}(\vec{V}\nabla V_\phi^2)\vec{V}$$

Πολλαπλασιάζοντας με $\hat{b}$, και χρησιμοποιώντας ταυτότητες που προαναφέρθηκαν, βρίσκει κανείς τη παράλληλη συνιστώσα της δύναμης ίση με

$$F_{G\parallel} = V_p^2 \left(\gamma^4 \frac{\rho_0 \xi}{2c^2} \frac{\partial V_p^2}{\partial l} + \gamma^4 \frac{\rho_0 \xi}{2c^2} \frac{\partial V_\phi^2}{\partial l} \right) \quad (4.21)$$

Όμοια, η βαθμίδα της ενθαλπίας, που σχετίζεται με τη δύναμη της θερμοκρασίας ορίζεται

$$F_T = -\gamma^2 \rho_0 (\vec{V} \nabla_s \xi) \vec{V}$$

και με εντελώς ίδια λογική με πριν, η παράλληλη συνιστώσα ισούται με

$$F_{T\parallel} = -\gamma^2 \rho_0 V_p^2 \frac{\partial \xi}{\partial l} \quad (4.22)$$

Η φυγόκεντρος δύναμη λόγω της αζιμουθιακής ταχύτητας, δίνεται από τη σχέση

$$F_C = \frac{\hat{\omega} \gamma^2 \rho_0 \xi V_\phi^2}{\varpi}$$

και δεδομένου ότι $\hat{\omega} \cdot \hat{b} = \cos \psi$, όπου ψ η γωνία μεταξύ της γραμμής ροής και του δίσκου προσάυξης, η δύναμη παράλληλα στη γραμμή ροής προκύπτει

$$F_{C\parallel} = \frac{\cos \psi \gamma^2 \rho_0 \xi V_\phi^2}{\varpi} \quad (4.23)$$

Η δύναμη του ηλεκτρικού πεδίου ικανοποιεί τη σχέση

$$F_E = \frac{(\nabla_s \vec{E}) \vec{E}}{4\pi}$$

και η διανυσματική του κατεύθυνση είναι πάντα κάθετη στη γραμμή ροής!

Για την μαγνητική δύναμη, από γνωστή διανυσματική ταυτότητα καταλήγει κανείς στην

$$F_{B\parallel} = \frac{1}{4\pi} \hat{b} \left[(\vec{B} \nabla) \vec{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) \right]$$

και ακολουθώντας όμοια τακτική με την απόδειξη της κάθετης συνιστώσας, προκύπτει ότι

$$F_{B\parallel} = -\frac{B_\phi}{4\pi \varpi} \frac{\partial \varpi B_\phi}{\partial l} \quad (4.24)$$

Για τον υπολογισμό της βαθμίδας της πίεσης, γίνονται τα εξής βήματα:

Λύνοντας την 4.1 ως προς τη πίεση και παραγωγίζοντας τη, προκύπτει η σχέση

$$\nabla P = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} c^2 (\xi \nabla \rho_0 + \rho_0 \nabla \xi - \nabla \rho_0)$$

ενώ παραγωγίζοντας με όμοιο τρόπο την διατηρήσιμη ποσότητα $\frac{P}{\rho_0^\Gamma}$ θα δώσει

$$\nabla P = c^2 (\xi - 1) (\Gamma - 1) \nabla \rho_0$$

και χρησιμοποιώντας πάλι την ξ με μερικές πράξεις και αφού προβληθεί στη διεύθυνση $\hat{b}$ δίνει το αποτέλεσμα

$$F_{P\parallel} = -\rho_0 c^2 \frac{\partial \xi}{\partial l} \quad (4.25)$$

Συνδυάζοντας τις 4.21, 4.22, 4.23, 4.24, 4.25 λαμβάνει τη συνολική εξίσωση ορμής παράλληλα στη γραμμή ροής

$$\begin{aligned} \gamma^2 \rho_0 (1 + \gamma^2 \frac{V_p^2}{c^2}) \frac{\partial V_p^2}{\partial l} = & -\gamma^4 \frac{\rho_0 \xi}{2c^2} \frac{\partial V_\phi^2}{\partial l} - \gamma^2 \rho_0 V_p^2 \frac{\partial \xi}{\partial l} + \frac{\cos \psi \gamma^2 \rho_0 \xi V_\phi^2}{\varpi} \\ & - \frac{B_\phi}{4\pi \varpi} \frac{\partial \varpi B_\phi}{\partial l} - \rho_0 c^2 \frac{\partial \xi}{\partial l} \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.3 Ανάλυση του προβλήματος και η αναλυτική λύση των φυσικών μεγεθών

Έχοντας τις κύριες εξισώσεις σε κατάλληλη μορφή, ιδιαίτερη σημασία έχει να προβλεφθεί σε γενικές γραμμές την εξέλιξη του συστήματος, εκφράζοντας κάποιες φυσικές ποσότητες και την αλλαγή αυτών.

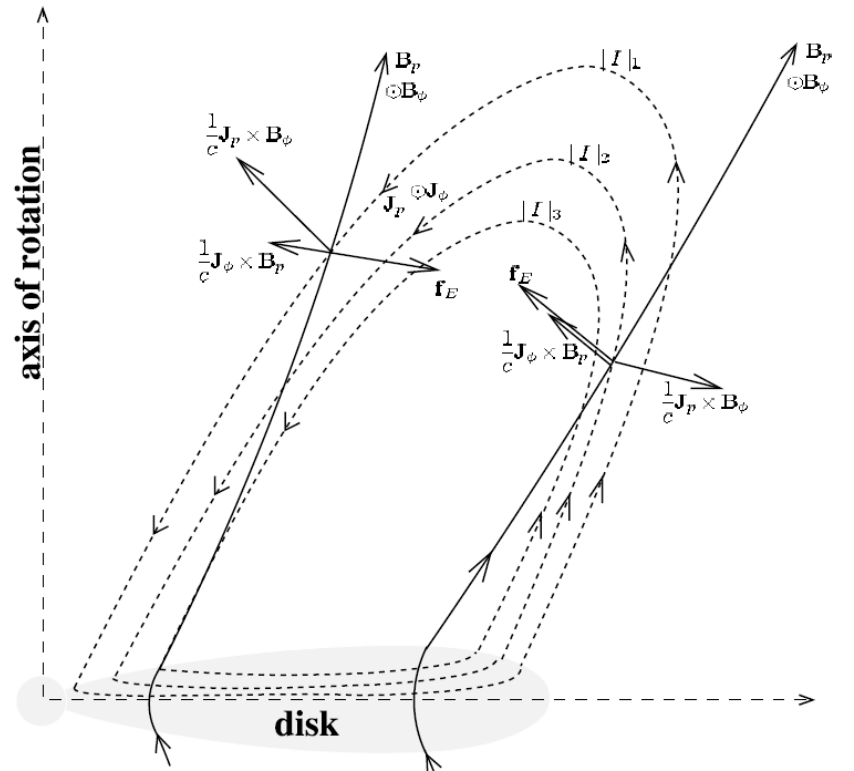
Απο την εξίσωση της ορμής μπορεί να ξεχωρίσει κανείς τις δυνάμεις σε θερμικές, ηλεκτρικές και μαγνητικές. Το ποιά δύναμη κυριαρχεί εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, αλλά στα πλαίσια των εκροών που εξετάζονται, κυρίαρχες είναι οι μαγνητικές και οι ηλεκτρικές, ενώ οι θερμικές δυνάμεις επηρεάζουν το σύστημα κυρίως στα πρώτα στάδια της εκροής.

Η μαγνητική δύναμη είναι ίση με

$$\frac{1}{c} \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \left(\vec{J}_p \times B_\phi \hat{\phi} + J_\phi \hat{\phi} \times \vec{B}_p \right)$$

Ο πρώτος όρος, είναι δυνάμιση στο πολοειδές επίπεδο, και ανάλογα με τον λόγο $\frac{J_\perp}{J_\parallel}$ συνεισφέρει περισσότερο εγκάρσια ή παράλληλα στη ροή. Ο δεύτερος όρος, δεδομένου ότι βρίσκεται κάθετα στο $\hat{\phi}$ και $\hat{b}$ βρίσκεται στην εγκάρσια διεύθυνση της γραμμής ροής, και ευθυγραμμίζει ή αυξάνει το άνοιγμα της ροής ανάλογα με το πρόσημο του J_ϕ .

Σχήμα 4.1: Απεικονίζεται ποιητικά το ολοειδές επίπεδο του συστήματος. Οι έντονες γραμμές δείχνουν τη γραμμή ροής στο δεδομένο επίπεδο. Οι διακεκομμένες γραμμές αφορούν τα σταθερά ρεύματα στο επίπεδο. Είναι δηλαδή γεωμετρικοί τόποι όπου η έκφραση $\vec{J}_p$ έχουν σταθερή τιμή. Η δεξιά γραμμή ροής ονομάζεται return-current λόγω του θετικού πρόσημου της ποσότητας $J_\parallel$, ενώ η αριστερή γραμμή current-carrying για τον αντίθετο λόγο [Vlahakis & Königl(2003)]



Η ηλεκτρική δύναμη θα βρίσκεται πάντα στο εγκάρσιο επίπεδο της γραμμής ροής, και ανάλογο με το πρόσημο του φορτίου, θα τείνει να συγκλίνει (αν το φορτίο είναι θετικό) ή να αποκλείνει (αν είναι αρνητικό) τη ροή.

Το πρόσημο του φορτίου μπορεί να βρεθεί στη περίπτωση της ισχυρά σχετικιστικής ροής, χρησιμοποιώντας τη ταυτότητα $\nabla(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \times \vec{B}) + \vec{B}(\nabla \times \vec{A})$ και για $V_p \approx c, V_\phi \ll V_p$ προκύπτει ότι

$$J^0 = -(1/4\pi)\nabla_s(\vec{V} \times \vec{B}) \approx J_{\parallel}$$

Τελικά η ηλεκτρική δύναμη

$$F_E = \left(\frac{J^0}{c}\right)E\hat{n}$$

θα είναι θετική στις return-current γραμμές ροών, και αρνητική στις current-carrying γραμμές, όπως φαίνεται στη 4.1. Στο σχετικιστικό όριο που γίνεται η αναφορά, η ηλεκτρική δύναμη σχεδόν μηδενίζει τη μαγνητική, αναφορικά στην εγκάρσια συνιστώσα της τελευταίας. Η μη σχετικιστική περίπτωση, λόγω της εμφάνισης του όρου $\frac{V}{c}$ στο μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου, κάνει την μαγνητική δύναμη πολλές τάξεις μεγαλύτερης της ηλεκτρικής. Αυτή η περίπτωση δεν εξετάζεται στα πλαίσια αυτής της εργασίας.

Για την επίλυση του συστήματος, απαιτείται η επεξεργασία των σχέσεων της προηγούμενης ενότητας. Χωρίς να αποδοθούν οι μαθηματικές λεπτομέρειες, ξεκινώντας από τις σχέσεις 4.20, και από τον ορισμό του x_A , καταλήγει εύκολα στις

$$M^2 = q \frac{\xi}{(\xi - 1)^{1/(\Gamma-1)}} \quad x = x_A G \quad (4.27)$$

Με όμοιο τρόπο, από τις σχέσεις 4.17, 4.18, 4.19 μπορεί να αναπαραστήσει κανείς την εξίσωση Bernulli, που προκύπτει από αντικατάσταση των αντίστοιχων ποσοτήτων στην ισότητα $\gamma^2(1 - V_\phi^2/c^2) = 1 + \gamma^2 V_p^2/c^2$

$$\frac{\mu^2 G^2(1 - M^2 - x_A^2) - x_A^2(G^2 - M^2 - x^2)}{\xi^2} = 1 + \frac{\sigma_M^2 M^4 (\varpi \nabla_s A)^2}{\xi^2 x^4 A^2} \quad (4.28)$$

Στη περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο είναι δεδομένο, και άρα γνωστή η γεωμετρία των γραμμών ροών, οι εξισώσεις 4.27, 4.28 είναι ικανές να παράξουν λύσεις, αλλά στη γενικότερη περίπτωση χρειάζεται η επιστράτευση της πιο συνθετής εξίσωσης για την εγκάρσια συνιστώσα της ορμής.

Η τελική εξίσωση της transfield που αποδείχθηκε προηγουμένως, 4.16, γράφεται με χρήση της ταυτότητας $\nabla \hat{n} = +\frac{\nabla^2 A}{|\nabla A|} - \frac{\nabla A}{|\nabla^2 A|} \nabla(|\nabla A|)$, του τελεστή $\bar{L} \equiv \nabla^2 - (2/\varpi)\hat{\omega} \nabla$, της σχέσης $\mathcal{R} = |\nabla A|(\bar{L}A - \nabla A \nabla \ln(|\nabla A/\varpi|)^{-1})$ και της 4.28 ως:

$$\begin{aligned} & \left[x^2 (\nabla_s A)^2 \frac{\ln(x_A/\varpi_a)}{\partial A} - \bar{L}A(1 - M^2 - x^2) \right] \left(\frac{\nabla_s A}{\varpi} \right)^2 + \left[\frac{2x_A^2}{\varpi_A^2 G} \nabla_s A^2 + \left(\frac{G^2 - M^2 - x^2}{1 - M^2 - x^2} \right)^2 \frac{\mu^2 A^2 x_A^6}{\varpi_A^5 \sigma_M^2 M^2 G^3} \right] \hat{\omega} \nabla A \\ & - \frac{M^2}{2} \nabla_s \left(\frac{\nabla_s A}{\varpi} \right)^2 \nabla_s A - \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \nabla_s \left[\frac{\xi(x_i - 1)}{M^2} \frac{A^2 x_A^4}{\sigma_M^2 \varpi_A^4} \right] \nabla_s A - \frac{1}{2\varpi^2} \nabla_s \left[\frac{\mu^2 A^2 x_A^6}{\sigma_M^2 \varpi_A^2} \left(\frac{1 - G^2}{1 - M^2 - x^2} \right)^2 \right] \nabla_s A = 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Το σύστημα 4.28-4.29 είναι ισχυρά μή γραμμικό και για να οδηγηθεί κανείς σε αναλυτική λύση, χρειάζεται να γίνουν κάποιες προσεγγίσεις, που αφορά τις ισουψείς επιφάνειες στο χώρο του συστήματος. Συγκεκριμένα, όπως είχε αναφερθεί στην ανάλυση των εξισώσεων, προκύπτει ότι οι άγνωστες μεταβλητές του προβλήματος, (ξ, M^2, x, G) πρέπει να εξαρτώνται μόνο από μία μεταβλητή χ .

Ελέγχοντας ξανά την εξίσωση Bernulli, 4.28 φαίνεται πως με απλή τροποποίηση της μπορεί να γραφτεί σαν $\frac{\varpi \nabla_s A}{A} = U(M, \xi, x, G) = U(\chi)$. Για να μπορεί να χωρισθεί η εξίσωση σε μία μορφή $U_1(\chi) \cdot U_2(A)$ χρειάζεται η κλίση του A να γράφεται σαν το γινόμενο μίας συνάρτησης του A και μίας του χ , δηλαδή $\nabla_s A = Y_1(A)Y_2(\chi)$. Υπενθυμίζεται πως η ποσότητα A είναι συνάρτηση του $\frac{\varpi}{G(\chi)}$, αφού $G = \frac{\varpi}{\varpi_A}$, με τη ποσότητα ϖ_A να μεταβάλλεται αλλάζοντας γραμμή ροής. Η επιλογή της ποσότητας χ γίνεται με κατάλληλο τρόπο ώστε η λύση να μην είναι τετρημένη και προκύπτει ότι $\chi = \theta$. Το πρόβλημα έχει αυτο-ομοιότητα ως προς τη μεταβλητή r , καμία ποσότητα δεν εξαρτάται από την ακτίνα, όσο αυτή εξετάζεται πάνω σε συγκεκριμένη γραμμή ροής, ενώ εξετάζοντας διαφορετικό εύρος ως προς το μήκος της ακτίνας, τα ποιοτικά αποτελέσματα αυτών, παραμένουν ίδια.

Γνωρίζοντας πως το σύστημα έχει αξιμουθιακή συμμετρία, γίνεται η αλλαγή του συστήματος από (θ, r) σε (θ, α)

– [Vlahakis & Tsinganos(1998)] . Η μαγνητική ροή εξαρτάται από την ακτίνα, και ορίζοντας τις ποσότητες $\sigma_0, \alpha_0, \varpi_0, B_0$ ως κλίμακα για τα αντίστοιχα μεγέθη, οι εξεταζόμενες ποσότητες θα έχουν στο αυτο-ομοιο πρόβλημα την εξής μορφή:

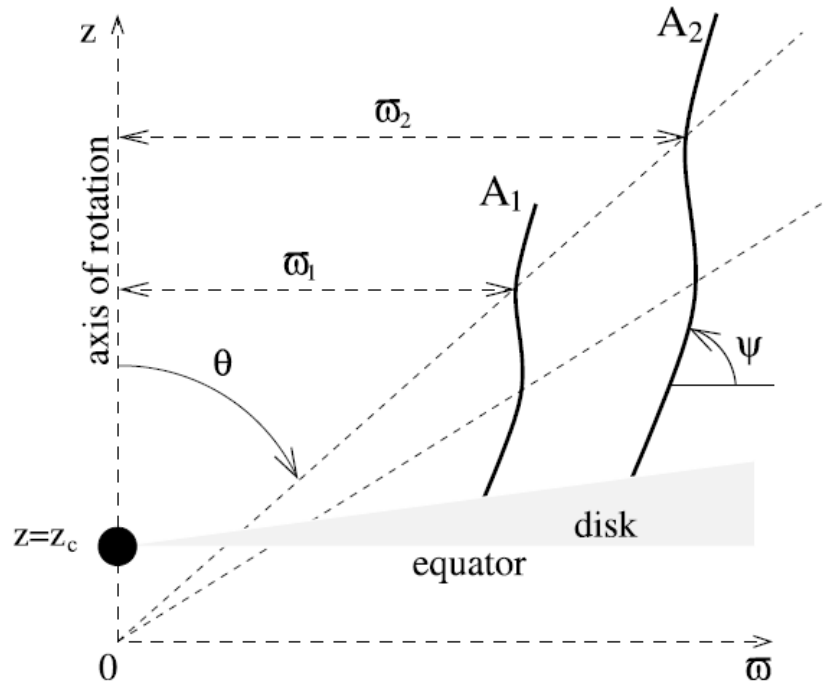
$$\begin{aligned} \sigma_M &= \sigma_0 \left[1 - \left(\frac{\alpha_0}{\alpha} \right)^{F/2} \right] \\ \mu, x_A, q, F &= C \\ A &= \frac{B_0 \varpi_0^2}{F} (\alpha^{F/2} - \alpha_0^{F/2}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Παρατηρώντας πως η πολοειδής μαγνητική ροή για $\alpha = 0$ έχει τη τιμή $A(\alpha = 0) = \frac{B_0 \varpi_0^2}{F} (-\alpha_0)^{F/2} \neq 0$ για $\alpha_0 \neq 0$. Από ορισμό, η σχέση $\alpha = 0$ δηλώνει τον άξονα περιστροφής, όπου αναγκαστικά η μαγνητική ροή είναι μηδενική. Άρα $\alpha_0 = 0$. Σε επόμενο βήμα, θα βρεθεί η εξίσωση του $G(\theta)$, χρησιμοποιώντας αρχικά τη βασική σχέση $\tan \psi = \frac{\partial z}{\partial \varpi_A}$ όπου ορίζει πως μεταβάλλεται η γωνία της γραμμής ροής με το δίσκο, μεταβάλλοντας τη κυλινδρική ροή, πάνω στην γραμμή ροής.

Από τον ορισμό της ποσότητας $G^2 = \frac{\varpi^2}{\varpi_\alpha^2}$ προκύπτει ότι, πάνω στη

γραμμή ροής, $G \propto \varpi$ αφού $\frac{\partial \alpha}{\partial \varpi}|_A = 0$. Ενώ το κυλινδρικό ύψος δίνεται εξορισμού από τη σχέση $z = \frac{\varpi}{\tan \theta}$.

Σχήμα 4.2: Παρουσιάζονται οι γραμμές ροής στο πολοειδές επίπεδο του συστήματος. Φαίνεται πως εξετάζοντας διαφορετικά μήκη ακτίνων, οι γραμμές παραμένουν ποιοτικά ίδιες. Η μεταβλητή A συνδέεται με την μαγνητική ροή, άρα αφού σε κάθε διαφορετική γωνία, οι ροές A_1, A_2 παραμένουν σταθερές, το ίδιο θα ισχύει και για τον λόγω των κυλινδρικών ακτίνων ϖ_1, ϖ_2 [Vlahakis & Königl(2003)]



Συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω σχέσεις καταλήγει κανείς μετα απο απλές πράξεις

$$\begin{aligned} \tan \psi &= \frac{d(\frac{G}{\tan \theta})}{dG} \Leftrightarrow \\ \frac{dG^2}{d\theta} &= \frac{2G^2 \cos \psi}{\sin \theta \cos(\psi + \theta)} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Για τις εξισώσεις Bernulli και Transfield χρειάζεται ο υπολογισμός της ποσότητας ∇A , αφού είναι η μόνη που δεν έχει εκφραστεί ως προς τις άγνωστες πλέον μεταβλητές του συστήματος $(\theta, \psi, \xi, M, G)$.

Απο τη σχέση 4.30, η κλίση του A προκύπτει ανάλογη της ποσότητας $\alpha^{(F-2)/2} \nabla \alpha$. Χρησιμοποιώντας την απόκλειση για σφαιρικές συντεταγμένες, γράφοντας την κυλινδρική ακτίνα σαν $\varpi = \sin \theta r$, η τελευταία παράσταση ισούται με

$$\alpha^{(F-2)/2} \nabla \alpha = \alpha^{(F-2)/2} \frac{r \sin \theta}{G^2} \left[2 \sin \theta \hat{r} + \left(2 \cos \theta - \frac{\cos \psi}{\cos(\psi + \theta)} \right) \hat{\theta} \right]$$

Μετα απο λίγη άλγεβρα και τριγωνομετρικές ταυτότητες καταλήγει κανείς στη σχέση

$$\nabla A = \varpi B_0 \alpha^{(F-2)/2} \frac{\sin \theta}{G^2 \cos(\psi + \theta)} \quad (4.32)$$

Οι εξισώσεις που κλείνουν το σύστημα, που προέρχονται απο τις 4.28, 4.29 γίνονται με τους προηγούμενους συλλογισμούς:

$$\frac{\mu^2 G^2 (1 - M^2 - x_A^2) - x_A^2 (G^2 - M^2 - x^2)}{\xi^2} = 1 + \frac{\sigma_M^4 F^2 \sin^2 \theta}{\xi^2 x^4 \cos^2(\psi + \theta)} \quad (4.33)$$

και

$$\begin{aligned} G \sin^2 \theta \frac{d}{d\theta} \left[\tan(\psi + \theta) \frac{1 - M^2 - x^2}{G} \right] &= (F - 1) \frac{x_A^4 \mu^2 x^2}{F^2 \sigma_M^2} \left(\frac{1 - G^2}{1 - M^2 - x^2} \right)^2 - \sin^2 \theta \frac{M^2 + Fx^2 - F + 1}{\cos^2(\psi + \theta)} \\ &- \frac{x_A^4 \mu^2 x^2}{F^2 \sigma_M^2 M^2} \left(\frac{G^2 - M^2 - x^2}{1 - M^2 - x^2} \right)^2 + 2 \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \frac{F - 2}{F^2 \sigma_M^2} \frac{\xi(\xi - 1)x^4}{M^2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Οι εξισώσεις 4.27, 4.31, 4.33, 4.34 είναι ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεως που μπορεί να λυθεί αριθμητικά, αφού όλες οι άγνωστες μεταβλητές του προβλήματος $y = [\xi, M, G, \psi]$, έχουν παράγωγο υπο τη μορφή $\frac{dy_i}{d\theta} = F(y, \theta)$ μετά απο αλγεβρικές πράξεις στο σύστημα.

Τα μεγέθη που είχαν εκφραστεί στις σχέσεις 4.17, 4.18, 4.19, 4.20 χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες 4.30, 4.32 έρχονται στη μορφή

$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{\vec{B}}{B_0 \alpha^{(F-2)/2}} &= \frac{\sin \theta \hat{b}}{G^2 \cos(\psi + \theta)} - \frac{\mu x_A^2 (1 - G^2) \hat{\phi}}{F \sigma_M x (1 - M^2 - x^2)} \bullet \quad \rho = \frac{B_0^2 x_A^4 \xi}{4\pi c^2 F^2 \sigma_M M^2} \alpha^{F-2} \\ \bullet \quad \frac{\vec{E}}{B_0 \alpha^{(F-2)/2}} &= \frac{x_A \sin \theta}{G \cos(\psi + \theta)} \hat{n} \bullet \quad \vec{\beta} = \frac{F \sigma_M M^2 \sin \theta}{\gamma \xi x^2 \cos(\theta + \psi)} \hat{b} + \frac{x_A \mu (G^2 - M^2 - x^2)}{\gamma \xi G (1 - M^2 - x^2)} \hat{\phi} \\ \bullet \quad \gamma &= \frac{\mu}{\xi} \frac{1 - M^2 - x_A^2}{1 - M^2 - x^2} \bullet \quad P = \frac{B_0^2 (\Gamma - 1)}{4\pi \Gamma} \frac{x_A^4 \xi (\xi - 1)}{F^2 \sigma_M^2 M^2} \alpha^{F-2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.4 Κρίσημα σημεία και η αριθμητική επίλυση του προβλήματος

Γίνεται φανερό από τις σχέσεις 4.3, πως τα φυσικά μεγέθη, όσο εξετάζονται πάνω σε μία γραμμή ροής ($\alpha, \mu, \sigma_M, x_A$ είναι συναρτήσεις του A) εξαρτώνται από τις ποσότητες $y = [\xi, M, G, \psi]$, τις σταθερές κλίμακας w_0, B_0 , το πολυτροπικό δείκτη Γ , και τη σταθερά F .

Είναι εμφανές εξετάζοντας τη ταχύτητα, πως το κρίσιμο σημείο είναι ο μηδενισμός των παρονομαστών, όπου ισχύει $G^2 = M^2 + x^2 = 1$ και η ακτίνα γίνεται ίση με την ακτίνα Alfven, από ορισμό του G .

Τα κρίσημα σημεία σχετίζονται με την διάδοση αντίστοιχων κυμάτων, και ορίζουν, αναφερόμενοι πάντα σε μία γραμμή ροής, πόσο η ταχύτητα του ρευστού είναι τόσο μεγάλη, ώστε το εν λόγω κύμα να μεταδίδει την πληροφορία της διαταραχής από την αρχή του, μόνο σε επόμενα σημεία της ροής.

Το κρίσημα σημεία θεωρητικά είναι περισσότερα από ένα, και αντιστοιχούν στα τρία διαφορετικά κύματα (Slow, Alfven, Fast). Όταν η ροή προσπεράσει καθέ ένα από τα προηγούμενα σημεία, κύματα με κυματόνισμα αντιπαράλληλο στη γραμμή ροής δεν δύναται να υπάρξει. Παρό' όλα αυτά, ενδιαφέρει παρουσιάζει το αντίστοιχο σημείο που ορίζει την μετάβαση της κάθε γραμμής ροής στη περιοχή που τα κυματόνισμα δεν είναι παράλληλα στη διεύθυνση $\hat{\theta}$. Αυτά είναι τα σημεία ενδιαφέροντος, δεδομένου πως η ροή έχει αξιμουθιακή συμμετρία αυτοομοιότητα ως προς την ακτίνα.

Τα μεγέθη έχουν οριστεί συναρτήσει της γωνίας θ , και άρα ο τρόπος που μπορεί να βρεθούν οι συνθήκες που ικανοποιούν τα σημεία αυτά είναι από τον έλεγχο των μηδενισμών στις παραγώγους των εκφράσεων τους.

Βρίσκοντας τις $\frac{dy_i}{d\theta} = F(y)$ $y = [\theta, \psi, \xi, M, G]$, διαπιστώνει κανείς πως οι παρανομαστές είναι ανάλογοι της ποσότητας

$$D = \left(\gamma \frac{V_\theta}{c}\right)^4 - \left(\gamma \frac{V_\theta}{c}\right)^2 \left(\frac{U_s^2}{c^2} + \frac{B^2 - E^2}{4\pi\rho_0\xi c^2}\right) + \frac{U_s^2}{c^2} \frac{B_\theta^2(1 - x^2)}{4\pi\rho_0\xi c^2} \quad (4.36)$$

$$\text{Όπου } U_s = \frac{c_s^2}{1 - \frac{c_s^2}{c^2}}$$

Τα μεγέθη παραμένουν αριθμησιμα σε όλο το χώρο, άρα για να ορίζονται τα κλάσματα, θα πρέπει ταυτόχρονα μηδενίζονται και οι αριθμητές των αντίστοιχων μεγεθών. Τα πιθανά σημεία στη λύση του συστήματος είναι τρία, και πάντα το σημείο Slow/Fast θα προηγείται/ακολουθεί του σημείου Alfven. Για αυτό αποτελεί έξυπνη επιλογή, η ολοκλήρωση του συστήματος να ξεκινά από το κρίσιμο σημείο Alfven

Εκεί οι φυσικές ποσότητες όπως ειπώθηκε και πριν έχουν τιμές $G_A = 1$, $M_A = 1 - x_A^2$, $\xi = \xi(M_A)$ από 4.27, και $\psi = \psi_A$.

Τα μεγέθη όμως στο κρίσιμο σημείο έχουν αριθμητές και παρανομαστές ίσους με το μηδέν, άρα η ολοκλήρωση δεν γίνεται να ξεκινήσει ακριβώς στη γωνία θ_A . Γνωρίζοντας πως η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στη γραμμή ροής, πρέπει οι αρχικές συνθήκες που αφορούν τη γωνία $\theta_0 = \theta_A \pm d\theta$, διαλέγοντας το πρόσημο ανάλογα με το αν εξετάζεται η γραμμή ροής παράλληλα (αρνητικό) στη ταχύτητα, ή όχι (θετικό), να βρίσκονται στη κατάλληλη κλίση, για να μην αλλάζουν οι σταθερές της γραμμής. Δηλαδή η σταθερά A στις γωνίες θ_A και θ_0 πρέπει να είναι ίδια.

Για την ικονοποίηση της παραπάνω συνθήκης, το σκεπτικό είναι το εξής:

Έστω πως για γνωστό x_A , ο αριθμός M έχει παράγωγο στο σημείο Alfven

$$\frac{dM^2}{d\theta} = \pm p_A \Leftrightarrow M_0^2 = 1 - x_A^2 \pm p_A \quad (4.37)$$

με p_A ορισμένο κατάλληλα ώστε το M_0^2 να βρίσκεται στην ίδια γραμμή ροής.

Η κανονικοποιημένη κυλινδρική ακτίνα, απο τη σχέση 4.31, ορίζεται

$$G_0^2 = 1 \pm \frac{2 \cos \psi_A}{\sin \theta_A \cos(\psi_A + \theta_A)} \quad (4.38)$$

όπου θ_A, ψ_A ελεύθερες σταθερές ολοκλήρωσής, που ικανοποιούν τη σχέση $\psi_A + \theta_A > \frac{\pi}{2}$. Ο λόγος που ικανοποιείται αυτή η σχέση είναι λόγω της ολοκληρωτέας μεταβλητής θ . Στη περίπτωση που $\theta = \psi$ η γραμμή ροής θα έχει κλίση παράλληλη στο διάνυσμα $\hat{r}$

Ορίζοντας τη μαγνήτιση $\sigma = \frac{-\varpi \Omega B_\phi}{\xi \gamma \Psi_A c^2} = \frac{x_A^2 - x^2}{1 - M^2 - x_A^2}$, με τη σχέση $\frac{dx^2}{d\theta} = x_A^2 \frac{dG^2}{d\theta}$, την 4.38, 4.37 και τον κανόνα l'Hopital προκύπτει η σχέση

$$\sigma_A = \frac{2x_A^2 \cos \psi_A}{p_A \sin \theta_A \cos(\theta_A + \psi_A)} \quad (4.39)$$

Εφαρμόζοντας την ίδια διαδικασία για τα κλάσματα της σχέσης 4.33, προκύπτει

$$\mu^2 = \frac{(\sigma_A + 1)^2}{x_A^2 - [x_A^2 - \sigma_A(1 - x_A^2)]} \left[x_A^2 \xi^2 + \frac{F^2 \sigma_M^2 (1 - x_A^2)^2 \sin^2 \theta_A}{x_A^2 \cos^2(\theta_A + \psi_A)} \right] \quad (4.40)$$

ενώ αντίστοιχα στην 4.34 δίνει τη σχέση

$$\begin{aligned} \frac{F^2 \sigma_M^2 (1 - x_A^2) (\sigma_A + 1)^2 \sin \theta_A}{\mu^2 \cos^2(\theta_A + \psi_A)} \left[-2 \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \frac{(F - 2)(\xi_A - 1)(1 - x_A)}{\xi_A x_A^2} \sin(\theta_A) + 2 \cos \psi_A \sin(\theta_A + \psi_A) \frac{\sigma_A + 1}{\sigma_A} + \right. \\ \left. \frac{[(F - 1)(1 - x_A^2) - 1] \sin \theta_A}{x_A^2} \right] = [x_A^2 - \sigma_A(1 - x_A^2)]^2 - (F - 1) \sigma_A^2 (1 - x_A^2) - \\ 2 \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} (F - 2) \frac{\xi_A - 1}{\xi_A} [x_A^2 - (x_A^2 - \sigma_A + \sigma_A x_A^2)^2] \end{aligned} \quad (4.41)$$

Αρκεί τώρα να δώσει κανείς τις σταθερές $\theta_A, \psi_A, x_A, \sigma_M, \Gamma, F, z_c$ και να χρησιμοποιήσει τις σχέσεις 4.39, 4.40, 4.41, για να βρεί αρχικά το σ_A και μετέπειτα το ολοκλήρωμα κίνησης μ και το βήμα της αρχικής συνθήκης p_A .

Πριν όμως ληφθούν οι απαραίτητες σταθερές για την ολοκλήρωση, πρέπει να εξετασθεί το φυσικό περιεχόμενο της κάθε σταθεράς.

Ξεκινώντας απο αυτές που επιλέγονται αδέσμευτα, η σταθερά z_c ισούται με το ύψος του δίσκου συγκριτικά με την αρχή των αξόνων. Για ευκολία επιλέγεται $z_c = 0$ περίπτωση στην οποία η απόσταση του στοιχείου της γραμμής ροής απο το κεντρικό αντικείμενο ισούται με την απόσταση απο τους άξονες. Ο κεπλεριανός νόμος περιστροφής ικανοποιείται απο την εύκολη μαθηματική σχέση $\Omega = \frac{x(\theta)}{\varpi} c$.

Ο πολυτροπικός δείκτης, λόγω της απαίτησης το πλάσμα να είναι σχετικιστικό με $\gamma > 1$, λαμβάνεται σε όλα τα μοντέλα, $\Gamma = \frac{4}{3}$, ακόμη και αν στην Hyper-Alfvenic περιοχή, το ρευστό δεν έχει σχετικιστική θερμοκρασία.

Η μαγνήτιση σ_M , σχετίζεται με το τελικό παράγοντα Lorentz. Απο τον ορισμό της 4.39, προκύπτει ότι $\sigma_M = \frac{\mu - \xi \gamma}{\xi \gamma}$ που λύνοντας ως προς $\xi \gamma$:

$$\xi \gamma = \frac{\mu}{\sigma + 1}$$

Σε μεγάλες αποστάσεις, η ενθαλπία ξ τείνει στη μονάδα ενώ μπορεί να υποθέσει κανείς με σχετική ακρίβεια, ότι υπάρχει ισοκατανομή στη μαγνητική και κινητική ενέργεια, και άρα $\sigma_f \approx 1$, ή αλλιώς $\gamma_f \approx \frac{\mu}{2}$. Επειδή ακόμη, η ανάλυση έχει γίνει θεωρώντας το μαγνητικό πεδίο σημαντικό, η αρχική μαγνήτιση πρέπει να είναι σε τάξη μεγέθους περίπου η μισή του μ .

Περνώντας στη σταθερά x_A , εξετάζοντας τη σχέση 4.3 για το παράγοντας Lorentz, κοντά στο δίσκο προσαύξησης, ισχύει ότι $M^2 \ll 1$ και άρα $\xi_i \gamma_i (1 - x_i^2) \approx \mu(1 - x_A^2)$ ή καλύτερα

$$\mu = \frac{1 - x_i^2}{1 - x_A^2} \xi_i \gamma_i$$

που για $M^2 \ll x_i \ll 1$, δηλώνει πως η συνολική ενέργεια είναι $\frac{1}{1 - x_A^2}$ φορές μεγαλύτερη της ενέργειας της «ύλης». Επιθυμητό είναι λοιπόν, η σταθερά x_A να είναι κοντά στη μονάδα, ώστε η μαγνητική ενέργεια να έχει το πιο κρίσιμο ρόλο στο πρόβλημα.

Για πολύ μικρές τιμές της σταθεράς, συγκρητικά με τη μονάδα, οδηγείται κανείς στην υδροδυναμική περίπτωση.

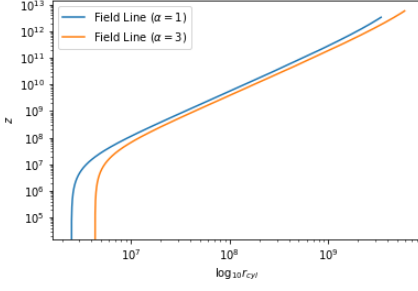
Οι αρχικές γωνίες θ_A, ψ_A , εκτός από τη σχέση που ικανοποιούν, δείχνουν πόσο γρήγορη είναι η διαδικασία της «σταθεροποίησης» της ακτίνας, δηλαδή από ποιά γωνία και έπειτα, αποκτά ο πίδακας κυλινδρική μορφή, ή διαφορετικά, $\pi/2 - \psi_A \approx 0$. Για μικρές γωνίες θ_A , ισοδύναμη με μεγάλη μήκη της γραμμής ροής, και μικρές γωνίες ψ_A , ο πίδακας θα έχει μεγαλύτερο ρυθμό αύξησης της κυλινδρικής του ακτίνας ω , και η επιτάχυνση του θα «διαρκεί» περισσότερο, αναφερόμενοι στο εύρος της γωνίας που μεγαλώνει ο παράγοντας Lorentz. Η απόκλιση από το νόμο $\gamma \propto \omega$ θα είναι επίσης μεγαλύτερη, δηλαδή το β θα έχει μεγαλύτερη θετική τιμή στη σχέση $\gamma \propto \omega^{1-b}$.

Τέλος, η σταθερά F είναι σταθερά του συστήματος, με το τρόπο που έχουν προκύψει οι εξισώσεις του συστήματος. Δηλαδή, αν και εξετάζεται μόλις μία γραμμή ροής, η σταθερά F είναι ίδια για κάθε μία από αυτές. Σχετίζεται με τη κατανομή του ρεύματος στο πολοειδές επίπεδο. Συγκεκριμένα, το ρεύμα δίνεται από τη σχέση $\vec{J}_p = \frac{c}{4\pi} \nabla_s \times \vec{B}_\phi = \frac{c}{4\pi\omega} \nabla_s B_\phi \omega \times \hat{\phi}$ με χρήση διανυσματικής ταυτότητας. Από θεώρημα Stokes για την επιφάνεια που ωB_ϕ διατηρείται σταθερό, ισχύει ότι $I = \iint \nabla_s \times \vec{B}_\phi = \frac{c}{4\pi} \int_0^{2\pi} \omega B_\phi d\phi = \frac{c}{2} \omega B_\phi = \text{const}$. Που χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 4.3 δίνει

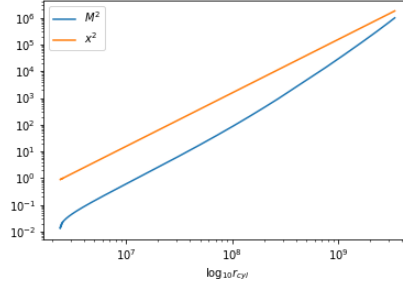
$$I = c\omega_0 B_0 \frac{\mu x_A^3 (1 - G^2)}{2F\sigma_M (1 - M^2 - x^2)} a^{\frac{F-1}{2}} \quad (4.42)$$

Εξετάζοντας το ρεύμα κοντά στο δίσκο προσαύξησης, ισχύει ότι $M^2 \ll x^2 \ll 1$, άρα το ρεύμα εξαρτάται από το α με το δείκτη δύναμης $\frac{F-1}{2}$, δηλαδή διακρίνεται η κρίσιμη τιμή $F = 1$. Όταν η παράμετρος είναι μεγαλύτερη της μονάδας, τότε μεταβαίνοντας από την εξεταζόμενη γραμμή ροής, σε μία άλλα μεγαλύτερης κυλινδρικής ακτίνας, και άρα μεγαλύτερου α , το ρεύμα ελαττώνεται, ενώ αντίθετα, για $F < 1$, το ρεύμα αυξάνεται. Η περίπτωση $F = 1$ δεν εξετάζεται και φαίνεται πιο καθαρά, μαζί με τις υπόλοιπες, στο σχήμα 4.1, και αναφέρεται στη περιοχή που συνδέονται οι return-current και current-carrying γραμμές.

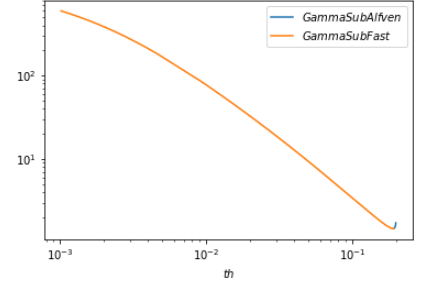
Ένα γενικότερο μοντέλο, θα έπρεπε να συνδέει μία περιοχή σε μικρές κυλινδρικές ακτίνες του δίσκου σταθεράς $F < 1$, με μία πιο απομακρυσμένη από το κέντρο περιοχή, σταθεράς $F > 1$. Στα πλαίσια αυτής της ανάλυσης, αυτό δεν είναι επιτρεπτό, οπότε μπορεί να εξειδικεύσει κανείς την περίπτωση $F > 1$ σε μία εκροή που οι γραμμές return-current είναι συγκεντρωμένες στον άξονα, δηλαδή υπάρχει γραμμικό ρεύμα, ενώ η $F < 1$, θεωρεί τις γραμμές current-carrying, πολύ απομακρυσμένες από τον άξονα. Η περίπτωση $F = 1$ δεν έχει φυσικό νόημα.



(α') Συγκρητικά η εξέλιξη των δύο γραμμών ροής για την περίπτωση $F < 1$



(β') Η εξέλιξη του αριθμού M συναρτήσει της ακτίνας. ($F < 1$)



(γ') Ο παράγοντας Lorentz συναρτήσει της γωνίας θ . Η επιτάχυνση πριν και μετά το σημείο Alfven φαίνεται με διαφορετικό χρώμα και παρουσιάζει διαφορετική συμπεριφορά. ($F < 1$)

4.5 Αριθμητικά αποτελέσματα της περίπτωσης $F < 1$

Αφού έχει διατυπωθεί το φυσικό νόημα της κάθε σταθεράς και μεταβλητής, σειρά έχει η διαδικασία της παραγωγής των αποτελεσμάτων.

Δίνοντας ένα σετ αρχικών σταθερών ($x_A, \sigma_M, \theta_A, \psi_A, q$) προσέχοντας τα παραγόμενα μ, ξ_A να ικανοποιούν τις κατάλληλες αναλογίες, ξεκινά η ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας για αρχικές συνθήκες των άγνωστων μεταβλητών, τις τιμές $G_0^2, M_0^2, \xi(M_0^2), \psi_A$, όπως ορίζονται απο τις σχέσεις [4.38,4.37,4.27](#).

Ξεκινώντας αντίθετα απο τη ροή, δηλαδή χρησιμοποιώντας το αρνητικό πρόσημο στις αρχικές συνθήκες, η λύση πλησιάζει το Slow-Magnetosonic point. Λόγω της σχετικά ελεύθερης επιλογής των σταθερών, η λύση δεν θα προσπεράσει το κρίσιμο σημείο, αντίθετα πριν απο αυτό, θα πάψει να είναι ακριβής και μονότιμη ως προς τη γωνία θ . Παρόλα αυτά, η συνθήκη για σχετικιστικές ταχύτητες έχει ήδη αρχίσει να παραβιάζεται στη περιοχή αυτή. Οπότε δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η εύρεση κατάλληλων σταθερών για την ομαλή διάβαση της λύσης απο το σημείο αυτό. Αντίθετα, ολοκληρώνοντας παράλληλα στη ροή, η λύση έχει διαφορετική εξέλιξη ανάλογα το σέτ των σταθερών.

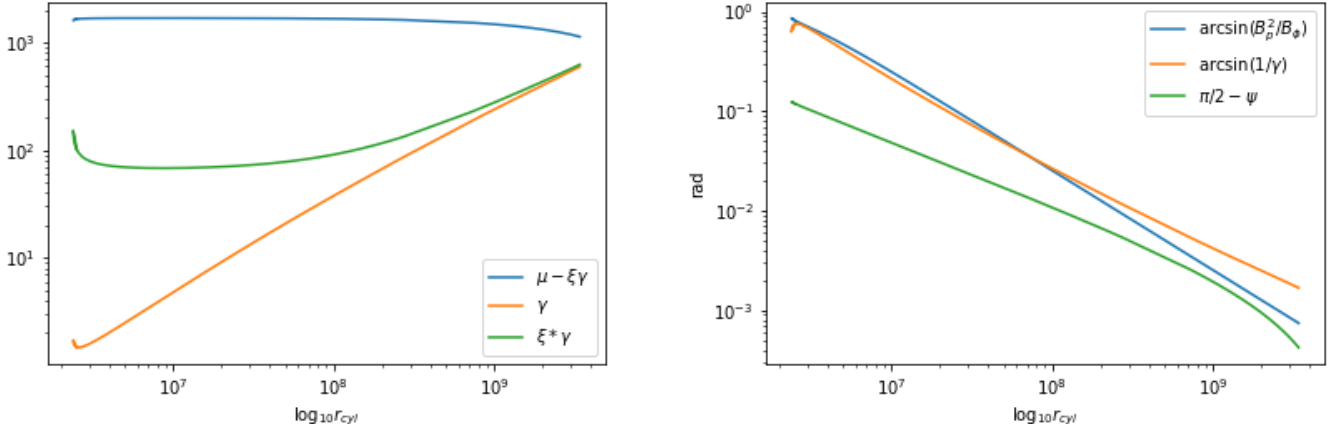
Συγκεκριμένα, η ροή πλησιάζει το Fast-Magnetosonic point και, εξετάζοντας τον fast magnetosonic Mach number, που θα δίνεται απο τη μεγαλύτερη λύση του τρυανύμου

$$\left(\frac{U_f}{c}\right)^4 - \left(\frac{U_f}{c}\right)^2 \left(\frac{U_s^2}{c^2} + \frac{B^2 - E^2}{4\pi\rho_0\xi c}\right) + \frac{U_s^2}{c^2} \frac{B_p^2(1-x^2)}{4\pi\rho_0\xi c^2}$$

παρουσιάζει την εξής συμπεριφορά:

- Επιβραδύνεται ραγδαία πριν η λύση φτάσει στο γρήγορο-κρίσιμο σημείο
- Επιταχύνεται ραγδαία και αρχίζει να εστιάζεται η ροή. Δηλαδή παυει να ισχύει η συνθήκη $\psi + \theta < \pi/2$. Η ενέργεια απο μαγνητική μετατρέπεται σε κινητική
- Η επιτάχυνση συνεχίζεται αλλα δεν περνά το κρίσιμο σημείο, $M_f = 1$.

Απο τις παραπάνω περιπτώσεις, μόνο η τελευταία εκφράζει τη φυσική λύση. Επιλέγοντας να ρυθμίζεται μόνο μία σταθερά, μπορεί να εντοπίσει κανείς την εναλλαγή της πρώτης και της δεύτερης συμπεριφοράς. Η μεταβλητή στην οποία ήταν λιγότερο ευαίσθητη η λύση, τουλάχιστον με το τρόπο που αναπαράχθηκε, ήταν η μαγνήτιση σ_M . Προχωρώντας σε όλο και μεγαλύτερα δεκαδικά αυτής, εντοπίζει κανείς τη φυσική λύση, δηλαδή



(α') Η εξέλιξη των δύο ενεργειών του ολοκληρώματος μ και (β') Οι γωνίες που συνδέονται με την εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου, της μέγιστης γωνίας εκπομπής και την εφαπτομένη της γραμμής ροής. ($F < 1$)

της σταθερές $x_A, \sigma_M, \theta_A, \psi_A, q$, για τις οποίες το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι αποδεκτό. Κρατώντας αυτές τις σταθερές, γίνεται η ολοκλήρωση αντίθετα απο τη ροή, μέχρι να φανεί η εσφαλμένη συμπεριφορά λόγω της μικρής απόστασης απο το Slow-Magnetosonic point. Η υπέρθεση των δύο ολοκληρώσεων δίνει τη φυσικά αποδεκτή λύση του συστήματος.

Η πρώτη περίπτωση που εξετάστηκε είναι αυτή με $F < 1$. Συγκεκριμένα, η βέλτιστη λύση βρέθηκε για τις σταθερές

$$F = 0.8, q = 100, \sigma_M = 827, x_A^2 = 0.978, \theta_A = 11, \psi_A = 83, 2$$

που δίνει επίσης

$$\xi_A = 62.64, \mu = 1758$$

Απο τα αποτελέσματα, όπως παρουσιάζονται στα σχήματα 4.3α', 4.3β', 4.3γ', 4.4α', 4.4β' φαίνεται οτι το μαγνητικό πεδίο κυριαρχεί ενεργειακά της ύλης. Η ανάλυση που έγινε είχε ως βάση το μαγνητικό πεδίο, άρα η ενεργειακή κατανομή είναι η επιθυμητή. Τα scaling των αξόνων καθορίζονται κυρίως απο τις σταθερές ω_0 και B_0 . Ο αριθμός Mach φαίνεται πως σε μεγαλύτερες κυλινδρικές αποστάσεις, αυξάνεται πιο γρήγορα απο x .

Η γωνία εκπομπής, που δίνεται απο τη τιμή της ποσότητας $\frac{1}{\gamma}$, μικραίνει καθ όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης, καθώς ο παράγοντας Lorentz δεν φτάνει σε μία σταθερή τιμή, στο εξεταζόμενο εύρος της γωνίας θ . Η να πλησιάζει σε κυλινδρικό σχήμα, αφού η γωνία ψ πλησιάζει «επιταχυνόμενα» την κρίσιμη τιμή $\frac{\pi}{2}$.

Ο λόγος των δύο συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου δείχνουν τον νόμο $\frac{B_p}{B_\phi} \propto \frac{1}{\omega}$, κάτι αναμενόμενο, λόγω των γνωστών σχέσεων $B_p \propto \omega^{-2}$ $B_\phi \propto \omega^{-1}$, που ισχύουν κυρίως στη περιοχή μετα του σημείο Alfven.

Συγκρίνοντας το λόγο των μαγνητικών συνιστωσών με τη γωνία εκπομπής, φαίνεται πως ο παράγοντας Lorentz αυξάνεται με το νόμο $\gamma \propto \omega^{1-b}$. Ελέγχοντας την εξέλιξη των συνιστωσών του ολοκληρώματος της ενέργειας, μπορεί να διακρίνει κανείς πως μετά όσο μεγαλώνει η ακτίνα, η ενθαλπία τείνει στη μονάδα, και άρα η θερμική ενέργεια που μπορεί να μετατραπεί σε κινητική είναι περιορισμένη. Αντίθετα η μαγνητική ενέργεια φαίνεται ανεπηρέαστη στο πρώτο στάδιο της εκροής, ενώ προς το τέλος της προσομοίωσης, αρχίζει

και ελαττώνεται. Φαίνεται πως ικανοποιείται η σχέση $\gamma \propto \omega$ καθ'όλη τη λύση, αφού η ροή δεν έχει φτάσει τη τελική ακτίνα.

Η συνεισφορά της κάθε συνιστώσας της επιτάχυνσης φαίνεται καλύτερα στο γράφημα 4.5, που παρουσιάζεται η προβολή της κάθε δύναμης στο επίπεδο στη γραμμή ροής. Απο την έναρξη της ολοκλήρωσης μέχρι την ακτίνα $\omega_c \approx 10^8$ η μαγνητική δύναμη είναι πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερη της θερμικής. Η κλίση μάλιστα του παράγοντα Lorentz ταυτίζεται σχεδόν με τη θερμική δύναμη F_T , που σημαίνει ότι οποιαδήποτε μεταβολή στη κινητική ενέργεια, θα ακολουθηθεί από μία σχεδόν ίση μεταβολή της ενθαλπίας.

Εξετάζοντας το ολοκλήρωμα μ και θεωρώντας τη μαγνητική ενέργεια σταθερή, θα ισχύει η σχέση $\xi\gamma = \xi_i\gamma_i$ για $\omega \ll 10^8$. Στη συνέχεια της ροής όμως, και σε μεγαλύτερες κυλινδρικές ακτίνες, η μαγνητική δύναμη είναι η επικρατέστερη. Η ενθαλπία είναι σχεδόν μονάδα και ελέγχοντας ξανά το γράφημα των δυνάμεων, όλη η κινητική ενέργεια προέρχεται από τη μαγνητική. Η δύναμη της πίεσης είναι αμελητέα για όλη την εξεταστέα περιοχή.

Ορίζοντας στη συνέχεια με σύμβολο F την ροή ενέργειας, ισχύει ότι

$$\frac{F_{EM}}{F_\rho} = \frac{\mu - \xi\gamma}{\xi\gamma}$$

και αντικαθιστώντας από τις σχέσεις 4.3, για το όριο $x^2, M^2 \gg 1 \approx x_A^2$ προκύπτει ότι

$$\frac{F_{EM}}{F_\rho} \approx \frac{x^2}{M^2}$$

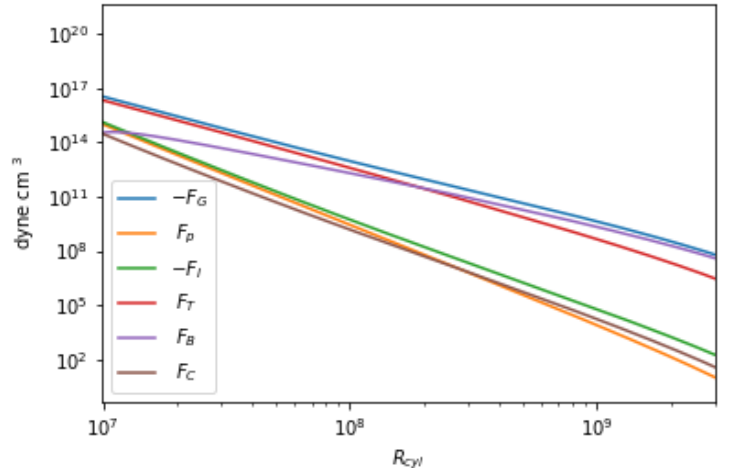
Ασυμπτωτικά όμως η ενέργεια της ύλης είναι $\gamma_f \xi_f \approx \gamma_f \approx \frac{\mu}{2}$ άρα $M^2 \approx x^2$.

Ο παράγοντας Lorentz μέχρι το τέλος της ολοκλήρωσης δεν φθάνει στη τελική του τιμή.

Στη προσπάθεια ολοκλήρωσης σε μικρότερες τελικές γωνίες, παρουσιάστηκε πρόβλημα με κυλινδρική ακτίνα, δηλαδή τη μεταβλητή G^2 , που άρχισε να μειώνεται. Την ίδια συμπεριφορά παρουσίαζαν όλες οι λύσεις με $F < 1$

Θα γίνει αναφορά και στη συνέχεια για το συγκεκριμένο πρόβλημα

Σχήμα 4.5: Απεικονίζονται οι πυκνότητες δυνάμεων παράλληλα στη γραμμή ροής συναρτήσει της κυλινδρικής ακτίνας για τη περίπτωση $F < 1$. Οι δυνάμεις F_T, F_P, F_B, F_G, F_I , εκφράζουν αντίστοιχα τη δύναμη λόγω κλίσης της ενθαλπίας, της πίεσης, του πωλοειδούς ρεύματος, του παράγοντα Lorentz, και ο τελευταίος όρος σχετίζεται με την εσωτερική δύναμη [Vlahakis & Königl(2003)]



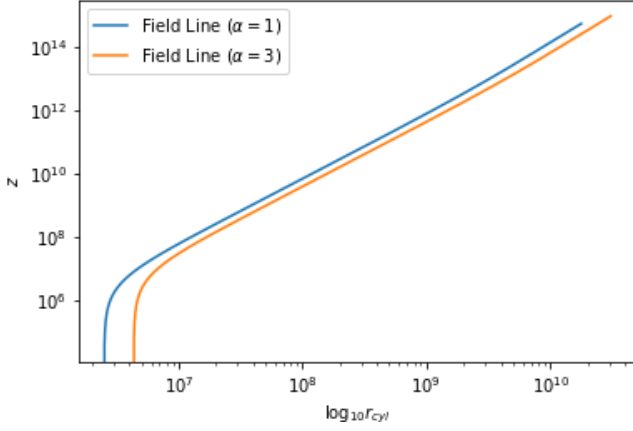
4.6 Αριθμητικά αποτελέσματα της περίπτωσης $F > 1$

Λόγω των παραπάνω προβλημάτων, θα αναπαρασταθεί η γενική λύση, με τη σταθερά F μεγαλύτερη της μονάδας, και το μαγνητικό πεδίο να υπερέχει ενεργειακά της ύλης. Συγκεκριμένα, το σετ των σταθερών που δόθηκε αντιστοιχεί στις

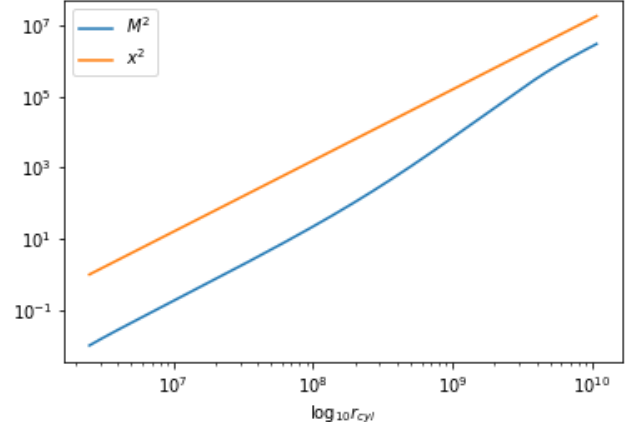
$$F = 1, 01, q = 37, \sigma_M = 5000, x_A^2 = 0.99, \theta_A = 35, \psi_A = 73$$

που δίνει επίσης

$$\xi_A = 70, \mu = 10116$$



Σχήμα 4.6: Συγκρητικά η εξέλιξη των δύο γραμμών ροής για την περίπτωση $F > 1$



Σχήμα 4.7: Η εξέλιξη του αριθμού M συναρτήσει της ακτίνας. ($F > 1$)

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης φαίνονται στα γραφήματα 4.6,4.7,4.8,4.10,4.9. Η ομοιότητα των δύο λύσεων είναι μεγάλη, ειδικότερα αφού οι σταθερές επιλέχθηκαν με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην είναι η λύση «κρύα» αλλά να υπερिशύχει το μαγνητικό πεδίο. Η πορεία απο την αρχή της ολοκλήρωσης μέχρι το σημείο που η θερμική δύναμη είναι αμελητέα, ταυτίζεται με τη λύση $F < 1$, με εξαίρεση τη περιοχή κοντά στο σημείο Alfvén.

Ο ρυθμός αύξησης του αριθμού M είναι πιο αργός ενώ ο παράγοντας Lorentz φαίνεται να ικανοποιεί τον γωνστό ρυθμό $\gamma \approx \gamma_0 \omega$. Η κρίσιμη ακτίνα που η επιτάχυνση απο θερμική γίνεται μαγνητική, είναι σχεδόν μία τάξη μεγαλύτερη απο τη προηγούμενη περίπτωση, με $\omega_c \approx 10^{8.5}$. Οι γωνίες του γραφήματος 4.9 επιβεβαιώνουν τους ίδιους νόμους με πριν.

Χρήσιμη είναι η σύγκριση του νόμου δύναμης που ακολουθεί το γ . Στη πρώτη περίπτωση υπολογίζεται ότι

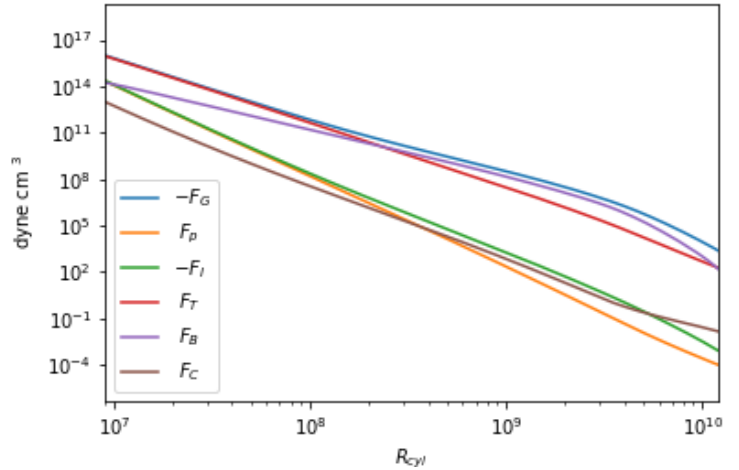
$$F < 1 \quad \xi_A = 70 \quad \gamma \propto \omega^{0.76}$$

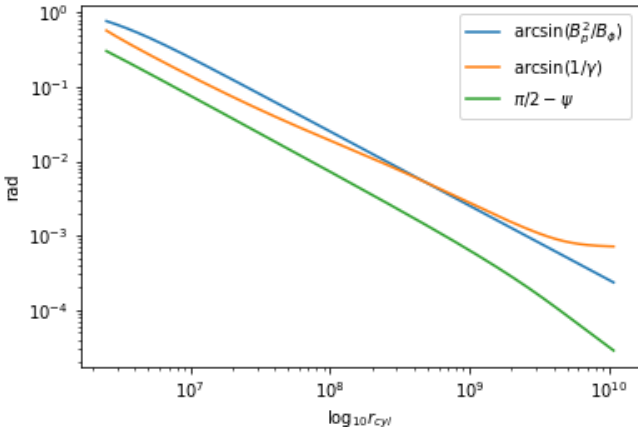
ενώ απο το τελευταίο γράφημα

$$F > 1 \quad \xi_A = 62.9 \quad \gamma \propto \omega^{0.83}$$

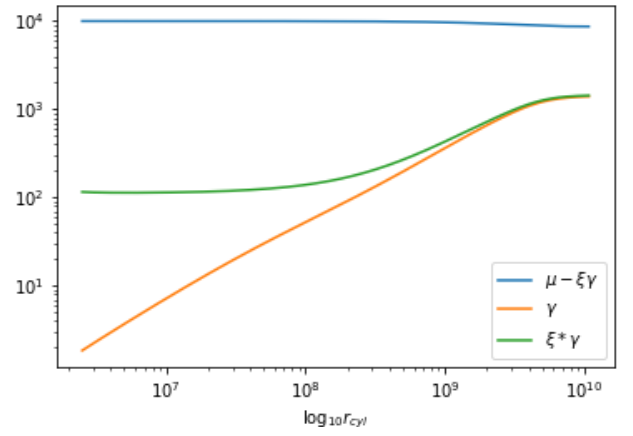
Παρατηρείται πως για μεγαλύτερη αρχική ενθαλπία, ο νόμος δύναμης είναι πιο ασθενής, κάτι που πράγματι επιβεβαιώνεται κάνοντας παραπάνω δοκιμές για διαφορετικά σέτ σταθερών. Η σημαντικότερη διαφορά του

Σχήμα 4.8: Απεικονίζονται οι πυκνότητες δυνάμεων παράλληλα στη γραμμή ροής συναρτήσει της κυλινδρικής ακτίνας για τη περίπτωση $F > 1$. Οι δυνάμεις F_T, F_P, F_B, F_G, F_I , εκφράζουν αντίστοιχα τη δύναμη λόγω κλίσης της ενθαλπίας, της πίεσης, του πωλοειδούς ρεύματος, του παράγοντας Lorentz, και ο τελευταίος όρος σχετίζεται με την εσωτερική δύναμη [Vlahakis & Königl(2003)]





Σχήμα 4.9: Η εξέλιξη των δύο ενεργειών του ολοκληρώματος μ και του παράγοντα Lorentz για την περίπτωση $F > 1$



Σχήμα 4.10: Η εξέλιξη των δύο ενεργειών του ολοκληρώματος μ και του παράγοντα Lorentz για την περίπτωση $F > 1$

γραφήματος 4.10 είναι πως ο παράγοντας Lorentz φθάνει σε μία μέγιστη τιμή, που είναι σχεδόν $\gamma_f \approx \frac{\mu}{2} \gtrsim 10^3$. Σε διαφορετικές λύσεις, με σταθερά $F \gtrsim 1$, όμοια συμπεριφορά παρατηρήθηκε, υπονοώντας μία αποδοτικότητα ≈ 0.5 ως προς τη συνολική ενέργεια που εξέρχεται από τη ροή.

Όπως και πριν, γωνία ψ τείνει στη τιμή $\frac{\pi}{2}$, και η ακτίνα ϖ_f , θα βρίσκεται σε ύψος z πολύ μεγαλύτερο από το τελικό της λύσεις, αφού οι γραμμές ροής έχουν ακόμη παραβολική μορφή στα γραφήματα 4.3α', 4.6. Στη σχετικιστική περίπτωση που εξετάζεται, μπορεί να ελεγχθεί κατά πόσο η ροή θα οδηγηθεί σε κυλινδρική δομή. Διατυπώνοντας αρχικά την εξίσωση Bernulli στο όριο που $V_\phi \ll V_p \approx c$, ως $\gamma c = V_p \gamma$ και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις για τη πολοειδή ταχύτητα και το γ από τις 4.3, στο όριο $x^2, M^2 \gg 1 \approx x a^2$ προκύπτει η σχέση

$$1 - \frac{F \sigma_M x^2 + M^2}{\mu} = 1 - \frac{\cos(\theta + \psi)}{\sin(\theta)} \approx 1 - \frac{\sin(\theta - \vartheta)}{\sin \theta} \approx \frac{\vartheta}{\theta} = \frac{\frac{d\varpi}{dz}}{\frac{\varpi}{z}} \quad \text{ή αλλιώς}$$

$$1 - \frac{F \sigma_M x^2 + M^2}{\mu} \approx \left(\frac{d \ln \varpi}{d \ln z} \right)_A \quad (4.43)$$

Ισχύει ότι $\gamma_f \approx \frac{\mu}{2} \Leftrightarrow \sigma_M = \frac{\mu}{2}$, και για την συγκεκριμένη λύση $F = 1.01 \approx 1$. Το πρώτο μέρος της σχέσης 4.43, αναλόγως τη περιοχή που εξετάζεται, έχει διαφορετικές οριακές τιμές.

Στην αρχή της ολοκλήρωσης, και για μεγάλες γωνίες, κοντά στο σημείο Alfven όπου $x^2 \gg M^2$, η παράγωγος $\left(\frac{d \ln \varpi}{d \ln z} \right)_A$ παίρνει τη τελική τιμή $\frac{1}{2}$, αιτιολογώντας τη μορφή των δυναμικών γραμμών. Στο όριο που $M^2 \rightarrow x^2$ και για $F \approx 1$ η παράγωγος μηδενίζεται και $d\varpi = 0$ με τη ροή να αποκτά τελικά κυλινδρική μορφή.

Στη αρχική περίπτωση η σταθερά F είχε τιμή αρκετά μικρότερη της μονάδας, $F = 0.82$, και από το γράφημα 4.3β' φαίνεται πως σε μεγάλες αποστάσεις ο αριθμός M ξεπερνά τη κανονικοποιημένη ακτίνα x και άρα η παράγωγος της, ελέγχοντας ξανά τη σχέση 4.43, γίνεται αρνητική. Για αυτό το λόγο πιθανώς να παρουσιάστηκαν τα ζητήματα που συζητήθηκαν στο τέλος της πρώτης λύσης. Ενδιαφέρον θα παρουσιάζει η συμπεριφορά μίας θερμής λύσης, δηλαδή μίας εκροής όπου $\xi \gamma = \frac{\mu}{\sigma + 1} \approx \mu$ χρησιμοποιώντας τις ίδιες

αναλυτικές εξισώσεις.

Για τις αναλυτικές λύσεις που παρουσιάστηκαν, επιχειρήθηκαν να γίνουν αριθμητικές προσομοιώσεις σε σφαιρικές συντεταγμένες σε RMHD φυσική. Το box είχε διαστάσεις $[\theta_A, \theta_{min}]$ ως προς τις γωνίες που ταυτιζόταν με το εύρος των γωνιών της αναλυτικής λύσης. Όμοια όρια δώθηκαν και στην ακτίνα, με σκοπό οι αναλυτικές λύσεις να δοθούν ως συνοριακές συνθήκες.

Δυστυχώς τα αριθμητικά προβλήματα δεν επέτρεπαν την ολοκλήρωση των προσομοιώσεων και άρα δεν επιβεβαιώθηκαν τα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 5

Χρονοεξαρτώμενες λύσεις σχετικιστικής μαγνητουδροδυναμικής προσέγγισης

5.1 Χρονοεξαρτώμενη μορφή των λύσεων

Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή της εργασίας, η επικρατέστερη μέχρι στιγμής ιδέα για τις εκροές των GRB, είναι αυτή των διακριτών στρωμάτων, και των internal-external shocks. Στις λύσεις που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, η ροή ήταν συνεχής και χρονοανεξάρτητη.

Όπως και στο πρώτο κεφάλαιο, σκοπός είναι να δωθεί ένας παλμός, και να βρεθεί η εξέλιξη του στο χρόνο. Στη πραγματικότητα, οι παλμοί είναι περισσότεροι από έναν, και αν γίνει υπόθεση ότι γνωρίζεται ο ακριβής αριθμός αυτών, έστω N , και η συνολική διάρκεια της εκπομπής, έστω ΔT , τότε προσεγγιστικά, το εύρος του παλμού είναι $\delta s = \frac{c\Delta T}{N}$

Το μήκος l , αν και εκφράζει το μήκος της πολοειδούς γραμμής, δεν εισέρχεται στο σύστημα των εξισώσεων παρα μόνο υπο μορφή παραγώγου $\frac{\partial}{\partial l}$, και άρα η αρχική τιμή του, αν και «φυσικά» έπρεπε να ήταν 0 στο σημείο που η γραμμή ροής εξέρχεται από το δίσκο, μπορεί να πάρει αυθαίρετα οποιαδήποτε τιμή.

Επειδή η προσέγγιση του Frozen-Pulse έχει εφαρμογή σε σχετικιστική περιοχή, ή διαφορετικά, στη Hyper-Alfvenic περιοχή, ορίζεται ίσο με το 0, στο σημείο Alfven για τη συνέχεια του κεφαλαίου.

Η απόσταση δύο ξεχωριστών παλμών, σε κάθε χρονική στιγμή θα δίνεται από το τύπο

$$\delta l = \int_{s/c}^t \delta V_p dt \approx -\delta s + \int_0^t \frac{c}{\bar{\gamma}^3} \delta \gamma dt$$

όπου $\bar{\gamma}$ εκφράζει το μέσο παράγοντα Lorentz ανάμεσα σε δύο διαδοχικούς παλμούς και $\delta \gamma$ τη διαφορά τους.

Κατά την αρχική φάση, ο δεύτερος όρος της τελευταίας παράστασης είναι πολύ μικρός, και άρα η απόσταση είναι σχετικά σταθερή. Παρόλα αυτά, εφόσον το γ αυξάνεται από παλμό σε παλμό, είναι δεδομένο πως κάποια στιγμή θα συγκρουστούν. Αντίθετα, αν μειώνεται, τότε κάποια στιγμή η απόσταση θα αρχίσει να αυξάνεται σχεδόν γραμμικά με το χρόνο. Το σκεπτικό είναι ίδιο με αυτό του πρώτου κεφαλαίου.

Μετά το τέλος της φάσης της επιτάχυνσης, οι δύο παλμοί θα συγκρουστούν, σε χρόνο ανάλογο της διαφοράς των ταχυτήτων $V_{z,f}(s) - V_{z,f}(s + \delta s)$, όπου χρησιμοποιείται η z συνιστώσα, αφού η ροή θα έχει γίνει πλέον κυλινδρική.

Οι υποθέσεις που έχουν χρησιμοποιηθεί για την παραγωγή των διαφορικών εξισώσεων, έγινε κάνοντας χρήση της μεταβλητής $s = ct - l$, και όχι $s = V(z, t)t - l$, όπου είναι και η πληρέστερη προσέγγιση. Επομένως

η μελέτη αφορά τη διαμόρφωση του παλμού μέχρι το τέλος της φάσης της επιτάχυνσης, και όχι το στάδιο της σύγκρουσης, που γίνεται πολύ «αργότερα» χωρικά. Ο παλμός θα διατηρεί ακόμη το μήκος του αφού κάθε στοιχείο αυτού κινείται με ίδια ταχύτητα.

Συγκεκριμένα, η απόσταση και μετα όπου έχει μεγαλύτερη ισχύ η προσέγγιση, είναι εκεί όπου $\gamma^2 \gg \sigma_M$, δεδομένου ότι βρίσκεται η ροή στην Force Free περιοχή. Ο λόγος μπορεί να φανεί με τον εξής συλλογισμό, σε ένα υποθετικό, και απλουστευμένο μαγνητουδροδυναμικό σύστημα:

Ας υιοθετηθεί η ροή σε άξονες x, y, z ¹ και η απουσία εξάρτησης της ροής από τη γωνία φ , θα αντικατασταθεί με την απουσία εξάρτησης από την μεταβλητή y . Επίσης, οι φ συνιστώσες διανυσμάτων θα αντικατασταθούν με y συνιστώσες. Θεωρούνται ακόμη τα απλούστερα πεδία $u_y = 0$, $\hat{B} = \hat{y}$

Η εξίσωση διατήρησης της μάζας 4.3 διαίρωντας με c και αγνοώντας το $\frac{\partial}{\partial y}$ στον τελεστή $\vec{\nabla}$ γίνεται

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \gamma \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\gamma \rho \frac{u_z}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \rho \frac{u_x}{c} \right) = 0 \quad (5.1)$$

Απο την εξίσωση ohm, το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται σαν

$$\vec{E} = -\frac{u_x}{c} B \hat{z} + \frac{u_z}{c} B \hat{x} \quad (5.2)$$

ενώ πηγαίνοντας στην εξίσωση Faraday, γράφεται σαν $\frac{\partial u_x B}{\partial x} + \frac{\partial u_z B}{\partial z} = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow B(\nabla \vec{u}) + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \nabla\right) B = 0$.

Αλλάζοντας την εξίσωση συνέχειας σαν $\frac{\partial \gamma \rho}{\partial t} + \nabla(\gamma \rho) = -\nabla \vec{u}$ με αντικατάσταση του τελευταίου όρου στην πρώτη εξίσωση προκύπτει τελικά

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_z}{c} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u_x}{c} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{B}{\gamma \rho} \right) = 0 \quad (5.3)$$

Το ολοκλήρωμα της ενέργειας με όμοιο τρόπο όπως με αυτό της διατήρησης της μάζας δίνει

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_z}{c} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u_x}{c} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{P}{\rho \Gamma} \right) = 0 \quad (5.4)$$

Χρησιμοποιώντας τις 5.2-5.4, η παράλληλη συνιστώσα της εξίσωσης της ορμής είναι ίση με

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_z}{c} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{u_x}{c} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(h\gamma + \frac{B^2}{4\pi h \gamma \rho_o c^2} \right) = \frac{1}{\gamma \rho c^3} \frac{\partial}{\partial t} \left(p + \frac{B^2}{8\pi \gamma^2} \right) \quad (5.5)$$

Όπως και πριν, θεωρείται ο πίδακας σχετικιστικός, και άρα ισχύει και $u_z \approx c$.

Ελέγχοντας διαστατικά την εξίσωση 5.5, προκύπτει η ισότητα

$$\frac{u_z}{c} h\gamma \left(1 + \frac{B^2}{4\pi h \gamma^2 \rho c^2} \right) = 0$$

Ο όρος $\frac{u_z}{c}$ γράφεται κάνοντας χρήση Taylor σαν $1 - \frac{1}{2\gamma^2}$, και ο δεύτερος $\left(1 + \frac{1}{\sigma_M} \right)$. Ο όρος που πολλαπλασιάζει τη παραγώγο $\frac{u_z}{c} \partial_z$ θεωρείται μονάδα, ενώ η ποσότητα που παραγωγίζει, αν και περιέχει την αντίστοιχα

¹Η πορεία που ακολουθήθηκε για τη κατασκευή των εξισώσεων είναι εντελώς ίδια με μόνες διαφορές στις διανυσματικές ταυτότητες

μικρή ποσότητα $\left(1 + \frac{1}{\sigma_M}\right)$, δεν απλοποιείται παραπάνω, και το ολοκλήρωμα μ προκύπτει ίσο με αυτό του συστήματος l, A, s .

Η προσέγγιση ισχύει μόνο όταν $\frac{\gamma^2}{\sigma_M} \gg 1$, δηλαδή όταν είναι ισχυρά Super-Fast ροή.

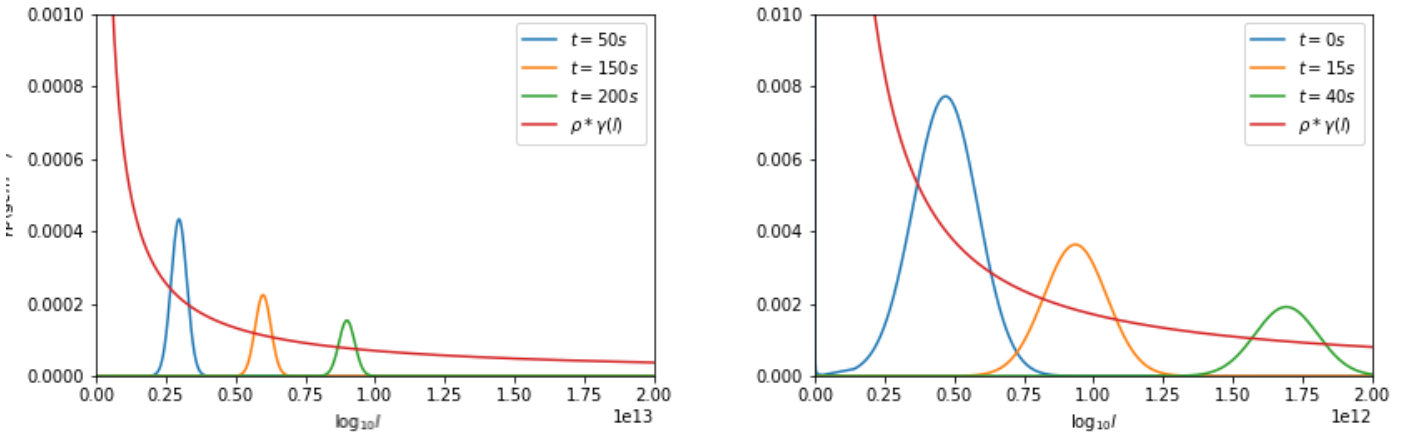
Για όσο ισχύει η προσέγγιση Frozen-Pulse - δηλαδή για την Super- Alfvénic- θα επιχειρηθεί να βρεθεί η χρονοεξαρτώμενη λύση της «μονοδιάστατης» ροής. Έστω ότι εξετάζεται η ροή της δεύτερης λύσης του τρίτου κεφαλαίου, με σταθερές $F = 1.01, q = 37, \sigma_M = 5000, x_A^2 = 0.99, \theta_A = 35, \psi_A = 73$, που συνυπολογίζοντας την σταθερά κλίμακας $B_0\varpi_0$, αντιστοιχούν σε ένα σετ φυσικών σταθερών

$$F(s = s_0) = 1.01, q(s_0) = 37, \sigma_M(s_0) = 5000, \mu(s_0) = 10116, B_0\varpi_0(s_0)$$

για τις οποίες η λύση είναι γνωστή. Σκοπός είναι να βρεθεί η λύση για οποιοδήποτε σετ

$$F(s_0), q(s), \sigma_M(s), \mu(s), B_0\varpi_0(s)$$

γνωρίζοντας μόνο τη λύση $M(\theta, s_0), x(\theta, s_0), \psi(\theta, s_0)$.



Σχήμα 5.1: Χρονοεξαρτώμενη αναπαράσταση της πυκνότητας από το σύστημα του εργαστηρίου συναρτήσει του μήκους της πολοειδούς γραμμής ροής, για τις δύο λύσεις του τρίτου κεφαλαίου. Αριστερά η περίπτωση $F > 1$, και δεξιά η $F < 1$.

Σημαντική λεπτομέρεια είναι οι χρονοεξαρτώμενες «σταθερές» να ικανοποιούν τη σταθερή μαγνητική ροή σε κάθε χρονική στιγμή. Η ισχύς αυτής της λύσης θα αφορά μόνο τη περιοχή μακριά από το σημείο Alfvén, που η ροή είναι πρακτικά κρύα, και το μαγνητικό πεδίο καθορίζει τη ροή. Στη περιοχή κοντά στο δίσκο, η επιλογή των σταθερών δεν μπορεί να είναι τυχαία, έχοντας αφήσει όμως απροσδιόριστες τις σταθερές x_A, ψ_A , μπορεί να ορίσει κανείς αυθαίρετα τα παραπάνω μεγέθη που θα λαμβάνει η λύση μακριά.

Λαμβάνοντας υπόψιν τις ανισότητες $M^2 \gg 1, x^2 \gg 1$, η εξίσωση Bernuli, 4.33, και η εγκάρσια εξίσωση της ορμής, 4.34, γίνονται πλήρως χρονοανεξάρτητες, αν χρησιμοποιήσουμε τη τέχνασμα

$$M^2(\theta, s) = \mathcal{M}^2(\theta, s_0)g(s), \quad x^2(\theta, s) = \mathcal{X}^2(\theta, s_0)g(s), \quad \mu(s) = \sigma_M(s) \frac{\mu(s_0)}{\sigma_M(s_0)}$$

Για την διατήρηση της ροής, χρειάζεται $\frac{\partial A}{\partial s} = 0$ Αφού $\alpha = \frac{\varpi^2}{\varpi_0 G^2} = \frac{\varpi^2 x_A^2}{\varpi_0 \mathcal{X}^2(\theta, s_0) g(s)}$ Η κυλινδρική ακτίνα είναι ανεξάρτητη του s , όπως και η λύση $\mathcal{X}$. Προκύπτει έτσι η συνθήκη

$$\frac{B_0(s)\varpi_0^2(s)x_A(s)^F}{g^{F/2}(s)\varpi_0^F(s)} = \frac{B_0(s_0)\varpi_0^2(s_0)x_A(s_0)^F}{g^{F/2}(s_0)\varpi_0^F(s_0)} \quad (5.6)$$

Με το παραπάνω σκεπτικό, είναι σε θέση κάποιος να ελέγξει τη χρονοεξάρτηση των ολοκληρώσιμων ποσοτήτων, ορίζοντας οποιαδήποτε χρονοεξάρτηση στο σέτ των «σταθερών», ικανοποιώντας παράλληλα τη παραπάνω συνθήκη.

Η απεικόνιση γίνεται με τρόπο παρόμοιο με αυτού του πρώτου κεφαλαίου:

Έστω ένα μέγεθος $Q_i(A, l, s)$. Αντί για την αντικατάσταση $r = t - l$, δουλεύοντας στο σύστημα με μοναδιαία ταχύτητα φωτός, επιχειρήται τώρα η $s = ct - l$, ώστε να βρεθεί η χρονοεξάρτηση ενός σταθερού σημείου, αυτό που αντιστοιχεί στο μήκος πολοειδούς γραμμής l και ροής A , στο γράφημα

$$Q_i(A, l, ct - l) \equiv Q_{i,l,A}(t)$$

Αντίστοιχα, πραγματοποιώντας την αλλαγή $l = ct - s$, ελέγχει την εξέλιξη ενός στοιχείου της ροής, ή του παλμού, συναρτήσει του χρόνου, στο γράφημα

$$Q_i(A, ct - s, s) \equiv Q_{i,s,A}(t)$$

Οι αρχικές τιμές της ποσότητας Q_i , στην επιφάνεια απο την οποία λύνεται το πρόβλημα -για αυτή τη περίπτωση, η επιφάνεια Alfvén-, θα δίνονται απο την έκφραση $Q_i(A, 0, ct) \equiv Q_{i,0,A}(t)$. Στη περίπτωση ο παλμός δεν έχει μεγάλη διάρκεια, τα αντίστοιχα μεγέθη πρέπει να ορίζονται καθ'όλη τη «διάρκεια» της λύσης. Με τον όρο διάρκεια εννοείται ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει ο παλμός απο την αρχική επιφάνεια ορισμού του, στο τέλος της ολοκλήρωσής.

Εξετάζοντας την πυκνότητα στο σύστημα του εργαστηρίου, ελέγχοντας τις εξίσωσεις 4.3 προκύπτει $\gamma\rho_0(l, A, s) = \frac{\mu(s)B_0^2 x_A^4 \xi(l, A, s) \alpha^{F-2}(A)}{\xi(l, A, s) 4\pi c^2 F^2 \sigma_M(s)^2 \mathcal{M}^2(\theta, s_0) g(s)} \frac{1 - \mathcal{M}^2(\theta, s_0) g(s) - x_A(s)^2}{1 - \mathcal{M}^2(\theta, s_0) g(s) - \mathcal{X}^2(\theta, s_0) g(s)}$. Ενώ εφαρμόζοντας τη συνθήκη διατήρησης της ροής, 5.6, και αντικαθιστώντας τη ροή ενέργειας, προκύπτει

$$\gamma\rho_0(l, A, s) = \frac{([B_0(s_0)\varpi_0^{2-F}]^{4/F} \mu_{s_0} x_A^4(s_0) A^{2-4/F} g(s))}{(4\pi c^2 F^{4/F} \sigma_M(s_0)^2 g(s_0)) \frac{g(s_0)\sigma_M(s_0)}{\sigma_M(s_0)^2}} \frac{1}{\mathcal{M}^2(\theta) + \mathcal{X}^2(\theta)} \frac{\mathcal{M}^2(\theta) + \mathcal{X}^2(\theta)}{1 - \mathcal{M}^2(\theta, s_0) g(s) - \mathcal{X}^2(\theta, s_0) g(s)} \frac{1 - \mathcal{M}^2(\theta, s_0) g(s) - \mathcal{X}^2(\theta, s_0) g(s)}{\mathcal{M}^2(\theta, s_0) g(s)} \quad (5.7)$$

Οι δύο τελευταίο όροι, δεδομένου της Super-Fast περιοχής, είναι περίπου ίσοι με τη μονάδα, και άρα η τελευταία σχέση καταλήγει στη πολύ βολικότερη

$$\gamma\rho_0(l, A, s) = \gamma\rho_0(l, A, s_0) \frac{g(s)}{\sigma_M(s)} \frac{g(s_0)}{\sigma_M(s_0)} \quad (5.8)$$

Επομένως, γνωρίζοντας το προφίλ της πυκνότητας για ένα μία δεδομένη, χρονοανεξάρτητη ροή, $\gamma\rho_0(l, A, s_0)$, μπορεί να αποτυπωθεί η χρονοεξαρτώμενη μορφή της, για κάθε επιλογή της συνάρτησης $\frac{g(s)}{\sigma_M(s)} \frac{g(s_0)}{\sigma_M(s_0)}$, που δηλώνει κατα πόσο η ροή μάζας μεγαλώνει ή όχι.

Για την κατασκευή της λύσής, χρειαζόταν ο υπολογισμός του μήκους της πολοειδής γραμμής, το οποίο υπολογίστηκε σαν μία νέα άγνωστη μεταβλητή, με παράγωγο

$$dl = \sqrt{d\varpi^2 + dz^2} \Leftrightarrow \frac{dl}{d\theta} = \sqrt{1 + \tan^2(\psi)} \frac{\varpi_A}{2G} \frac{dG^2}{d\theta}$$

Επίσης δόθηκε γκαουσιανής μορφή στη συνάρτηση $\frac{g(s)}{\sigma_M(s)} \frac{g(s_0)}{\sigma_M(s_0)}$, μετατοπισμένη δεξιά. Τα αποτελέσματα της διαδικασίας και για τις δύο λύσεις φαίνονται στα γραφήματα 5.1.

Η κόκκινη γραμμή αναπαριστά σε κάθε γράφημα την χρονοανεξάρτητη λύση για τις σταθερές που αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο παλμός φαίνεται σε διαφορετικές στιγμές και το σημείο τομής με τη κόκκινη καμπύλη, δηλώνει σε ποια χρονική στιγμή, έχει τη τιμή που αναγράφεται στον άξονα y .

Κεφάλαιο 6

Επιτάχυνση ισχυρά μαγνητισμένων εκροών μέσω κυμάτων

6.1 Έλεγχος των μεθόδων επιτάχυνσης

Με τις προηγούμενες μεθόδους, επιχειρήθηκε να αναπαραχθεί εκροή πλάσματος με τελικό παράγοντα Lorentz αρκετά μεγάλο, ώστε να ικανοποιεί τις τα χαρακτηριστικά των καμπύλων φωτός που παρατηρούνται.

Και στις δύο περιπτώσεις- υδροδυναμική και μαγνητουδροδυναμική ροή- δεν εξετάστηκε η αλληλεπίδραση με το περιβάλλον. Στην υδροδυναμική περίπτωση, η ροή είναι ακτινική, και η αλληλεπίδραση με το εξωτερικό χώρο θεωρείται αμελητέα. Στην μαγνητουδροδυναμική περίπτωση οι γραμμές ροής είναι εν γένει υπερβολικές καμπύλες στο χώρο των κυλινδρικών συντεταγμένων, με την ροή να «εκτείνεται» θεωρητικά μέχρι το όριο $r_{cyl} \rightarrow \infty$. Πάλι δεν εξετάζεται η αλληλεπίδραση με τον εξωτερικό χώρο.

Στη πρώτη γεωμετρία, ένας σφαιρικός μαγνητισμένος άνεμος καταλήγει σε ασυμπτωτικό παράγοντα Lorentz της τάξεως $\Gamma \approx \sigma_0^{1/3}$, όπου $\sigma_0 = B_0^2/4\pi\rho_0 c^2$, η αρχική μαγνήτιση της εκροής, που καθορίζει το άνω όριο της τελικής τιμής του παράγοντα Lorentz.

Αφού απαιτείται $\Gamma_F \gg 1$, τότε

$$\sigma_F \approx \sigma_0^{2/3} = \Gamma_F^2 \gg 1$$

Σχέση που δηλώνει υψηλή μαγνήτιση στην εκροή ακόμη και μετά το τέλος της «επιτάχυνσης» λόγω εσωτερικών δυνάμεων. Όπως αναφέρθηκε στο δεύτερο κεφάλαιο, τα internal shock δεν θα είναι αποδοτικά όταν στα κελύφοι δεν επικρατεί η κινητική ενέργεια.

Ένας τρόπος για να λυθεί μερικώς το ζήτημα, είναι η ύπαρξη εγχάρσιων δυνάμεων στις γραμμές ροής, με αποτέλεσμα την ελαχιστοποίηση του γωνιακού ημιανοίγματος της ροής. Συγκεκριμένα, μειώνεται η τελική μαγνήτιση της ροής μέχρι ένα παράγοντα $\theta_{jet}^{-2/3}$. Όπως φάνηκε στο τέταρτο κεφάλαιο, ο ασυμπτωτικός παράγοντα Lorentz φτάνει $\Gamma \approx \sigma_0/2$. Δηλαδή η ασυμπτωτική μαγνήτιση θα είναι τάξης μεγέθους 1, επιτρέποντας την αποτελεσματική παραγωγή internal shock, έχοντας όμως πάλι ισοκατανομή μεταξύ της μαγνητικής και της κινητικής ενέργειας.

Μία διαφορετική ιδέα προτάθηκε από τον [Blandford(2002)], που θεώρησε πως η εκροή παραμένει ισχυρά μαγνητιζόμενη σε όλες τις κλίμακες της. Άλλες προτάσεις σχετίζονται με την αγνόηση της αζιμουθιακής συμμετρίας [Drenkhahn & Spruit(2002)], που επιτρέπει σε αντίστοιχες αστάθειες να επιδεινώσουν την μετατροπή μαγνητικής σε κινητικής ενέργειας.

6.2 Αυτο-όμοια μαγνητουδροδυναμικά κύματα

Οι [Granot et al.(2011)] πρότειναν έναν διαφορετικό τρόπο επιτάχυνσης απο αυτούς που συναντήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια. Η βασική φυσική διεργασία κατα την επιτάχυνση του κελλύφους πλάσματος είναι τα χρονοεξαρτώμενα κύματα που δημιουργούνται κατα την αλληλεπίδραση του με το περιβάλλον.

Πρίν γίνει αναφορά στις αστροφυσικές συνθήκες που απαιτούνται για να έχει ισχύ η μέθοδος, αξίζει να αναλυθεί η απλή περίπτωση αλληλεπίδρασης κελλύφους-περιβάλλον. Το αποτέλεσμα της δίνεται απο τις λύσεις του προβλήματος Riemann. Ελέγχοντας τις εξισώσεις της σχετικιστικής μαγνητουδροδυναμικής, όπως φαίνονται στη σχέση 1.3, για καρτεσιανές συντεταγμένες, με μοναδική χωρική εξάρτηση η x συνιστώσα, δίνουν

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho\Gamma \\ \rho h\Gamma^2 - p - \rho\Gamma - b^0b^0 \\ \rho h\Gamma^2 u^x - b^0b^x \\ \rho h\Gamma^2 u^y - b^0b^y \\ \rho h\Gamma^2 u^z - b^0b^z \\ B^y \\ B^z \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho\Gamma u^x \\ \rho h\Gamma^2 u^x - b^0b^x - \rho\Gamma u^x \\ \rho h\Gamma^2 u^x u^x - b^x b^x + p \\ \rho h\Gamma^2 u^y u^x - b^x b^y \\ \rho h\Gamma^2 u^z u^x - b^x b^z \\ B^y u^x - B^x u^y \\ B^z u^x - B^x u^z \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Όπου $h = h_t + \frac{b^2}{\rho}$, με h_t να συμβολίζει την ενθαλπία ανα μονάδα μάζας ηρεμίας.

Προσαρμόζοντας το σύστημα στις περιπτώσεις που θα εξετασθούν, ορίζονται $\vec{u} = u\hat{x}$ και $\vec{B} = B\hat{y}$. Έτσι προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho\Gamma \\ \rho h\Gamma^2 - p - \rho\Gamma \\ \rho h\Gamma^2 u \\ B \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho\Gamma u \\ \rho h\Gamma^2 u - \rho\Gamma u \\ \rho h\Gamma^2 u^2 + p \\ Bu \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Το παραπάνω σύστημα εκφράζει ένα καρτεσιανό δισδιάστατο ρευστό. Αν έστω η ταχύτητα του ρευστού βρίσκεται στη $\hat{x}$ διεύθυνση, τότε το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο σε αυτήν, έστω $\hat{y}$. Δεν έχει γίνει κάποια υπόθεση στο ενεργειακό σκέλος του ρευστού. Με βάση αυτές τις απλοποιήσεις, οι εξισώσεις διατήρησης, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, δίνουν ευκολότερα ολοκληρώματα.

Με όμοια διαδικασία σε προηγούμενο κεφάλαιο, απο τη σχέση 5.3 προκύπτει πως

$$\Phi_\Psi = -\frac{B}{\Gamma\rho}$$

είναι σταθερά της γραμμής ροής. Επομένως το 6.2 καταλήγει σε τρεις αγνώστους τελικά: της μονοδιάστατης ταχύτητας, της πυκνότητας και της πίεσης.

Όπως και στα απλά κύματα πεπερασμένου μήκους, έτσι και εδώ, αναζητούνται λύσεις με αυτο-όμοια εξάρτηση απο την μεταβλητή $\xi = \frac{x}{t}$. Αντίστοιχα, οι μερικές παράγωγοι θα δίνουν

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\xi}{t} \frac{d}{d\xi} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{t} \frac{d}{d\xi}$$

Η πρώτη σχέση της εξίσωσης 6.2 δίνει

$$(u - \xi)\rho\dot{\Gamma} + \rho\Gamma\dot{u} = 0$$

Σε συνδυασμό με τη δεύτερη

$$-\xi(\rho h \Gamma^2 - \dot{p} - \rho \Gamma) + u(\rho h \Gamma^2 - \rho \Gamma) + \dot{u}(\rho h \Gamma^2 - \rho \Gamma) = 0$$

δίνουν τελικά

$$(u - \xi)(\rho h \Gamma^2) + \xi \dot{p} + \rho h \Gamma^2 \dot{u} = 0 \quad (6.3)$$

Όπου η τελεία, δηλώνει ολική παράγωγο ως προς την αυτοόμοια μεταβλητή ξ . Με όμοιο τρόπο, απο τις άλλες συνιστώσες της 6.2, προκύπτει

$$(u - \xi)(\dot{\rho} + \rho \Gamma^2 u \dot{u}) + \rho \dot{u} = 0 \quad (6.4)$$

$$(1 - u\xi)(\dot{p} + (u - \xi)\rho h \Gamma^2 u \dot{u}) = 0 \quad (6.5)$$

Επιχειρώντας να βρεθεί η superfast ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων, υπενθυμίζοντας τη σχέση

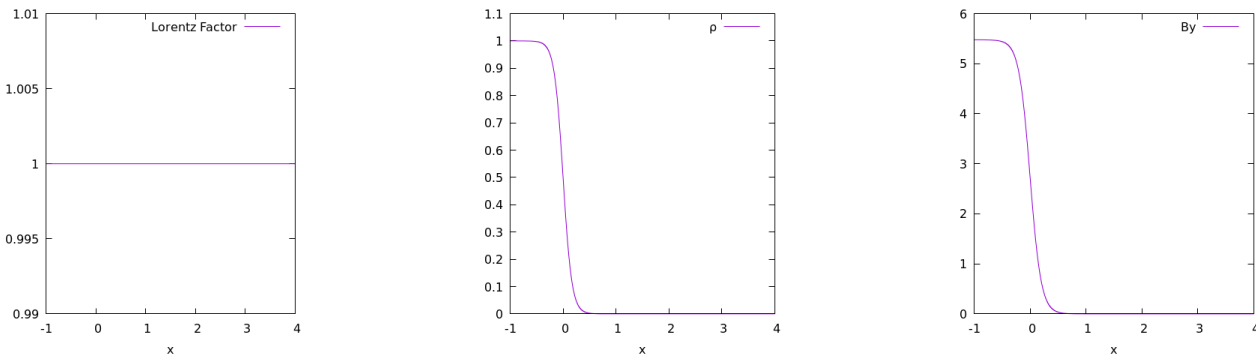
$$c_{ms}^2 = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (6.6)$$

όπου s νοείται ένα στοιχειώδες κομμάτι του ρευστού. Άμεσα η σχέση αυτή δίνει $c_{ms}^2 = \frac{1}{h} \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}}$ Σε συνδυασμό με τις 6.3-6.5, προκύπτει

$$c_{ms} = \pm \frac{u - \xi}{1 - u\xi} \quad \xi = \frac{u \mp c_{ms}}{1 \mp u c_{ms}} \quad (6.7)$$

Όπου το πρόσημο να καθορίζει αν το κύμα κινείται αριστερά (θετικό) ή δεξιά (αρνητικό)

6.3 Ισχυρά μαγνητισμένο κέλυφος σε κενό περιβάλλον



Σχήμα 6.1: Αρχικές συνθήκες του ισχυρά μαγνητισμένου κελύφους για την Reflective Boundaries περίπτωση

Σκοπός του κεφαλαίου είναι να εξετασθεί η επιτάχυνση ενός κελύφους πλάσματος, που εισέρχεται στο κενό. Επειδή η λύση τέτοιων συστημάτων γίνεται μέσω αριθμητικών προσομοιώσεων, το περιβάλλον δεν μπορεί να είναι κενό, αλλά αρκετά χαμηλοενεργειακό και με πυκνότητα που τείνει στο μηδέν.

Εστω δηλαδή ένα ομοιογενές ισχυρά μαγνητισμένο κέλυφος, σε καρτεσιανές συντεταγμένες, που εκτείνεται απο $x = -l_o$ έως $x = 0$, ενώ στο χώρο $x > 0$ υπάρχει «κενό».

Οι συνοριακές συνθήκες στο δεξή μέρος του x άξονα είναι τετριμμένα outflow, θεωρώντας πως δεν θα αφηθεί η λύση να φτάσει μέχρι εκεί. Οι συνοριακές συνθήκες του αριστερού «τοίχους» του κελύφους αντιστοιχούν και στις φυσικές διεργασίες που γίνονται εκεί. Η πιο απλή περίπτωση, να τοποθετηθούν και εδώ outflow συνοριακές θα σημαίνει πως το ρευστό του κελύφους συνεχίζεται αδιάκοπα να παράγεται απο την «πηγή» του grid, ενώ η επιβολή των μεγεθών του περιβάλλοντος θα σήμαινει αντίστοιχα την ασυνέχεια του κελύφους στο σημείο $x = -l_0$, όμοια με αυτή στο $x = 0$. Εφόσον οι Komissarov και Granot κάνουν λόγο για αγωγή επιφάνεια, χρησιμοποιήθηκαν reflective συνοριακές συνθήκες.¹ Οι αρχικές συνθήκες φαίνονται συνοπτικά στα γραφήματα 6.1 Τα μεγέθη δόθηκαν ώστε η αρχική μαγνήτιση του κελύφους να φθάνει μέχρι $\sigma_{0,max} = 30$.

Για την συμπεριφορά του συστήματος, πρώτα χρειάζεται το όριο που η θερμική πίεση είναι πολύ μικρότερη της μαγνητικής, με τη σχέση 6.6 να δίνει

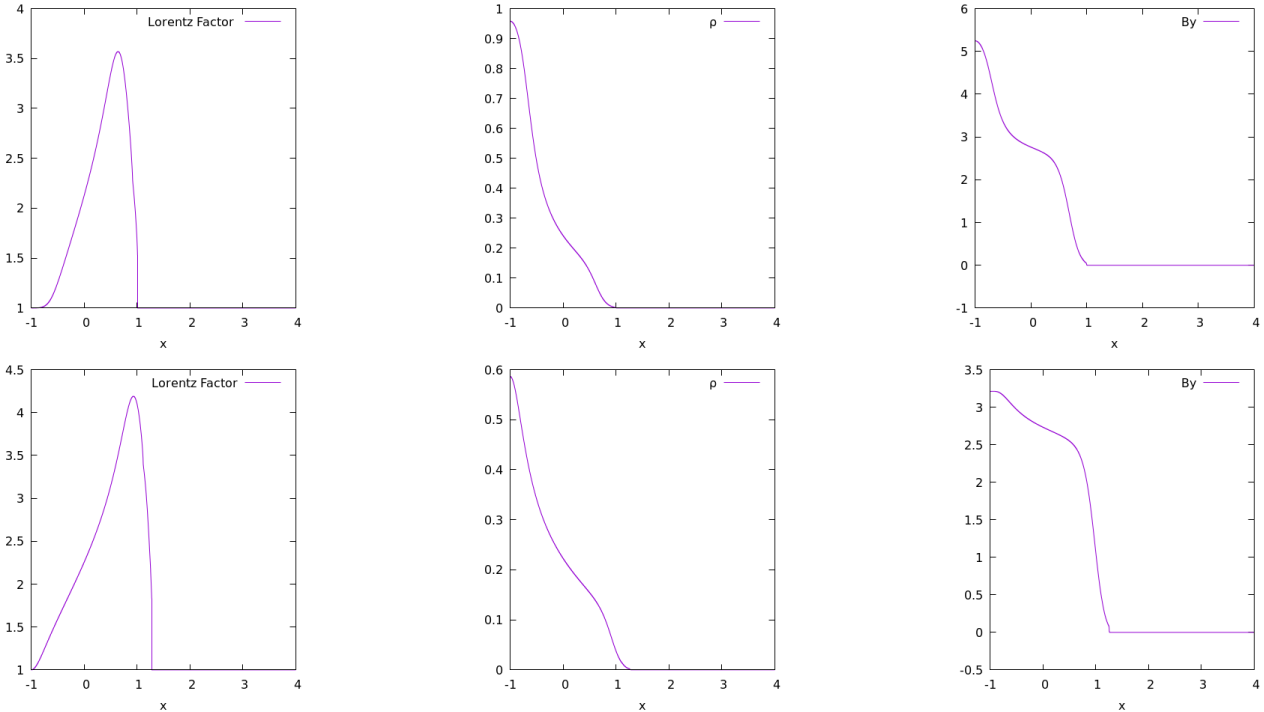
$$c_{ms}^2 = \frac{\sigma}{1 + \sigma} \quad (6.8)$$

Όπου η μαγνήτιση σ αρχικά πολύ μεγαλύτερη της μονάδας. Οι σχέσεις 6.5, 6.7, 6.6, δίνουν

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+u}{1-u} \right) \pm \iint_0^\rho \frac{c_{ms}(\rho)}{\rho} d\rho \xrightarrow{p=0} \frac{1+u}{1-u} \left(\frac{1+c_{ms}}{1-c_{ms}} \right)^2 = C \quad (6.9)$$

Χρησιμοποιώντας το όριο 6.8, η σταθερά

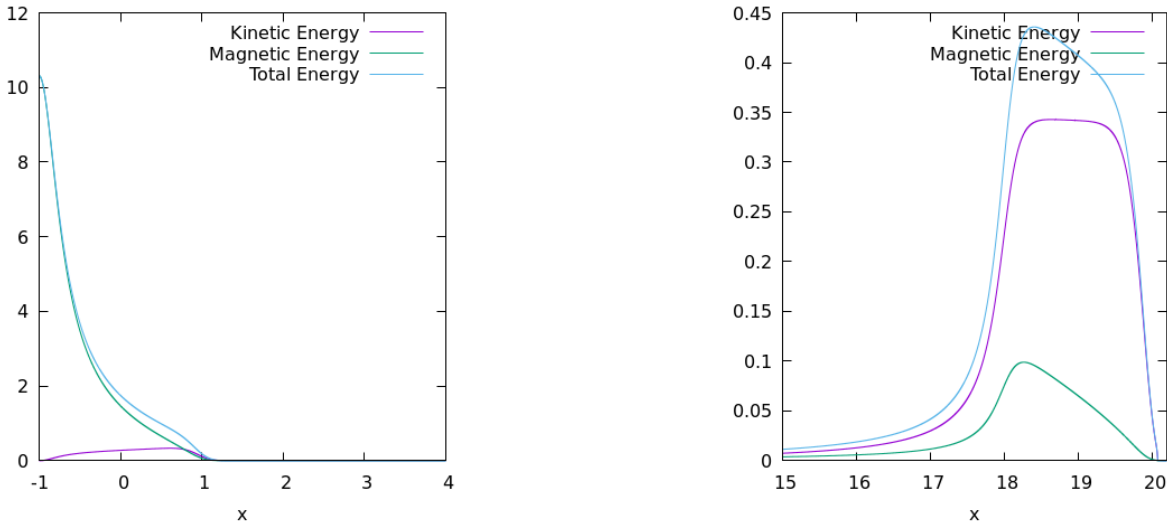
$$C = (\sqrt{\sigma_0} + \sqrt{\sigma_0 + 1}) \approx 16\sigma_0^2$$



Σχήμα 6.2: Τα μεγέθη του ισχυρά μαγνητισμένου κελύφους για την Reflective Boundaries περίπτωση στους χρόνους $t = 0.7$ και $t = 1$, με πυκνότητα εξωτερικού περιβάλλοντος $\rho_{density} = 10^{-6}$

¹ $u_\perp^+ \rightarrow -u_\perp^+$, outflow τα υπόλοιπα μεγέθη

Για αρκετά μεγάλη μαγνήτιση, η ταχύτητα των κυμάτων 6.6 είναι πολύ κοντά στη μονάδα, άρα ικανοποιητική είναι η προσέγγιση πως απο τη στιγμή που το σύστημα αφήνεται ελεύθερο, το κύμα που ξεκινά απο τη θέση $x = 0$ διανύει απόσταση ίση με το χρόνο της λύσης (για $c = 1$). Για $t = t_0$ αναμένεται να έχει φτάσει τον τοίχο, και σε επόμενη στιγμή να ανακλαστεί. Σε προηγούμενους χρόνους, ένα κομμάτι του κελύφους αναμένεται να μένει ανεπηρέαστο. Τα στιγμιότυπα για χρονικές στιγμές $t = 0.7$ και $t = 1$ 6.2 επιβεβαιώνουν τις παραπάνω υποθέσεις, ενώ βρίσκονται σε πολύ καλή ταύτιση με τα αντίστοιχα γραφήματα της δημοσίευσης 6.5. Η εξέλιξη του συστήματος σε μεγάλους χρόνους δείχνουν πως ο παράγοντας Lorentz μεγαλώνει στη περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στη contact discontinuity και το μέτωπο του δεύτερου κύματος, 6.4. Φαίνεται πως οι τιμές των μεγεθών στο εξωτερικό περιβάλλον του κελύφους επηρεάζουν την κατανομή των μεγεθών μέσα σε αυτό, όπως είναι λογικό αφού το Riemann πρόβλημα εξαρτάται και απο τα δύο ρευστά. Οι λύσεις για $\rho = 10^{-4}$, και $\rho = 10^{-6}$ παρουσιάζονται ενδεικτικά, σημειώνοντας τη δυσκολία που υπάρχει σε προσομοιώσεις χαμηλότερης πυκνότητας, λόγω υπολογιστικής ακρίβειας και χρόνου.

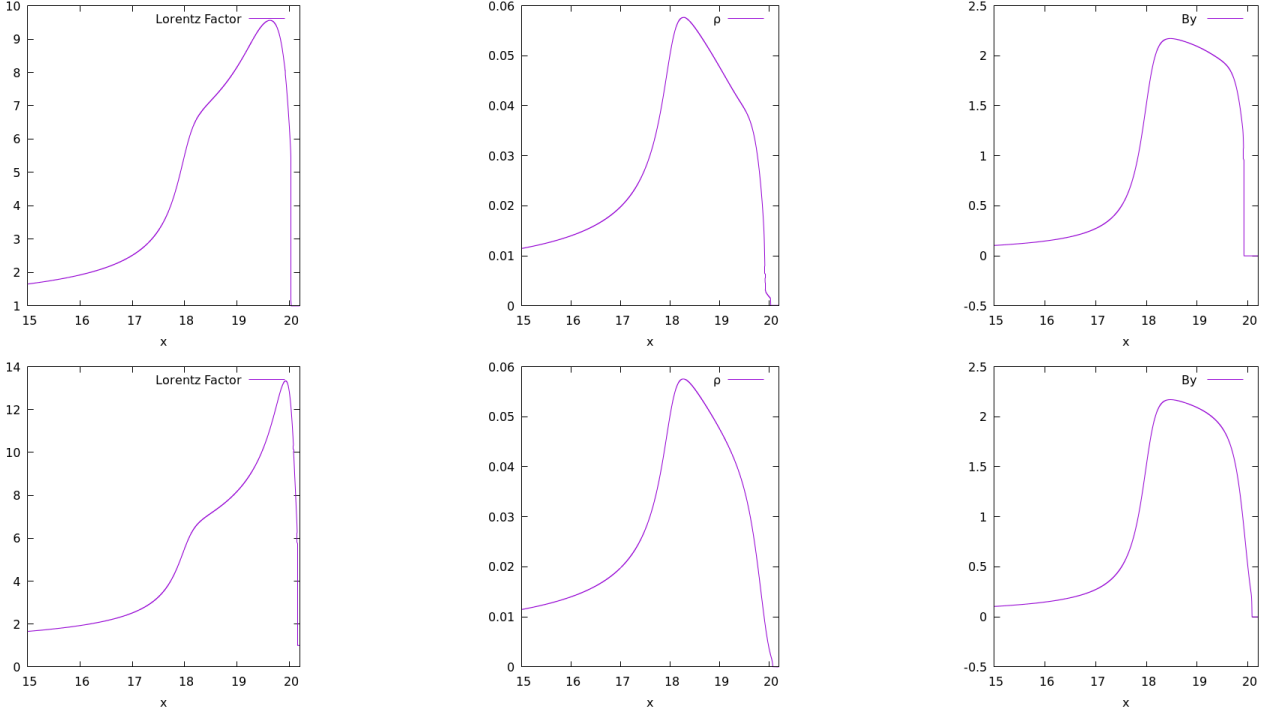


Σχήμα 6.3: Ενδεικτικά η μεταβολή της ενεργειακής κατανομής του κελύφους σε χρόνους $t = 0$ και $t = 20$, με πυκνότητα εξωτερικού περιβάλλοντος $\rho_{density} = 10^{-6}$

Αντίθετα, στα γραφήματα 6.5, η εξέλιξη του συστήματος αφήνεται για τάξεις παραπάνω χρόνο. Ο λόγος είναι πως χρησιμοποιήθηκε ένα τέχνασμα όπου, διατηρώντας το χώρο προσομοίωσης σταθερός, οι ποσότητες μετακινούνται αριστερά κάθε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα Δt , κατα μήκος $c\Delta t$, υπονοώντας πως ο παλμός κινείται με ταχύτητα $u \approx 1$ και πως οι συνοριακές συνθήκες στο αριστερό σύνορο του χώρου δεν επηρεάζουν τη λύση. Η τελευταία υπόθεση για μεγαλύτερους χρόνους φαίνεται να έχει μεγαλύτερο σφάλμα, όπως φαίνεται απο τα γραφήματα του $t = 7100$, αφού ο παράγοντας Lorentz είναι συγκρίσιμος στις δύο περιοχές του παλμού.

Τέλος, στα γραφήματα 6.3 φαίνεται πως επιτυγχάνεται σε ικανοποιητικό βαθμό η μετατροπή της μαγνητικής σε κινητικής ενέργειας.

Αξιοσημείωτο είναι πως η πυκνότητα του κελύφους και η συνολική μάζα του παλμού μειώνεται με το χρόνο, μέρος αυτής χάνεται απο το μέτωπο του δεύτερου κύματος και εναποτίθεται στο ρευστό που αφήνει πίσω. Σε μεγάλους χρόνους η μάζα του θα είναι σχεδόν αμελητέα και ίδιας τάξης μεγέθους με το περιβάλλον.



Σχήμα 6.4: Τα μεγέθη του ισχυρά μαγνητισμένου κελύφους για την Reflective Boundaries περίπτωση στο χρόνο $t = 20$, με πυκνότητα εξωτερικού περιβάλλοντος $\rho_{density} = 10^{-4}$ και $\rho_{density} = 10^{-6}$

6.4 Εφαρμογή σε GRB

Ενα δεύτερο ζήτημα εντοπίζεται στο «αστροφυσικό ανάλογο» πρόβλημα. Σίγουρα η αγωγή επιφάνεια δεν εντοπίζεται στην άκρη ενός σχετικιστικού κελύφους, επομένως η ανάκλαση των κυμάτων που οδηγεί στο δεύτερο μέτωπο και στην επιτάχυνση, πρέπει να επέλθει με διαφορετικό τρόπο. Οι Granot και Komissarov προτείνουν πως το κάθε κέλυφος εμφανίζεται στο χώρο με σχετικιστική ταχύτητα και εκατέρωθεν αυτού υπάρχει περιβάλλον μεσοαστρικού χώρου - αντίστοιχο του κενού στη προηγούμενη υπόθεση.

Εκεί, λόγω της σχετικιστικής ταχύτητας, τα δύο κύματα που θα ξεκινούσαν ταυτόχρονα στο σύστημα ηρεμίας του παλμού, θα είναι ετερόχρονα στο σύστημα εργαστηρίου, με πρώτο το μέτωπο που ταξιδεύει αντίθετα απο το παρατηρητή. Θεωρώντας πως κινούνται σχεδόν με τη ταχύτητα του φωτός, η σύγκρουση των κυμάτων θα υπακούει τα παρακάτω:

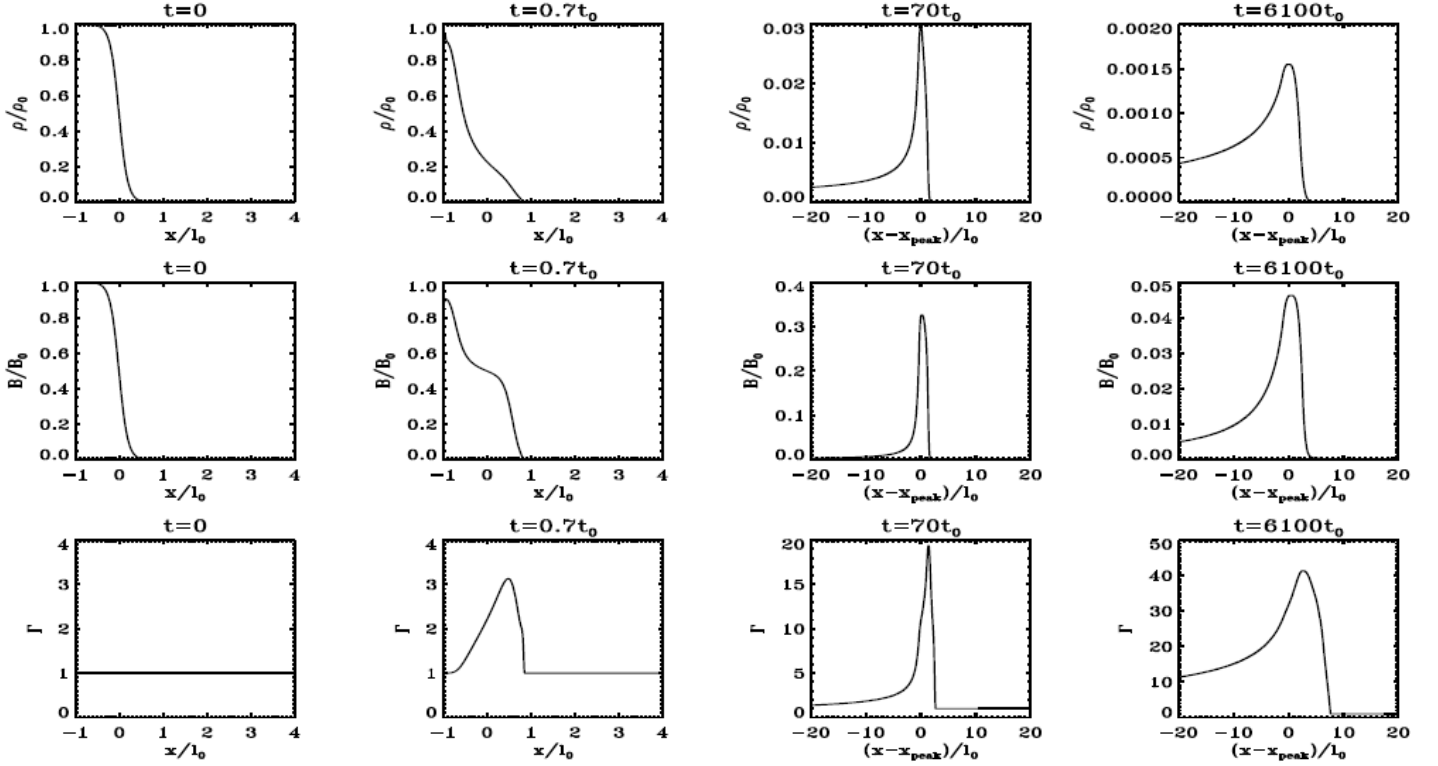
Το κύμα ξεκινά απο το τέλος του κελύφους, θα κατευθύνεται δεξιά, ενώ το αντίστοιχο του μετώπου αριστερά. Απο τη σχέση 6.7 προκύπτει αντίστοιχα, για $\Gamma \gg 1, \Gamma_{ms} \gg 1$:

$$\beta_t = \frac{\beta + \beta_{ms}}{1 + \beta\beta_{ms}} \approx 1 - \frac{1}{8\Gamma^2\Gamma_{ms}^2} \quad (6.10)$$

$$b_h = \frac{\beta - \beta_{ms}}{1 - \beta\beta_{ms}} \approx \frac{\Gamma^2 - \Gamma_{ms}^2}{\Gamma^2 + \Gamma_{ms}^2} \quad (6.11)$$

Το μήκος του κελύφους που έχει υποστεί μεταβολές στα μεγέθη του απο το εκάστοτε κύμα εξαρτάται απο τη διαφορά $\Delta\beta_h = \beta - \beta_h, \Delta\beta_t = \beta_t - \beta$ και προκύπτει τελικά

$$\Delta\beta_h = \beta - \beta_h \approx \frac{2\Gamma_{ms}^2}{\Gamma^2 + \Gamma_{ms}^2} \quad (6.12)$$



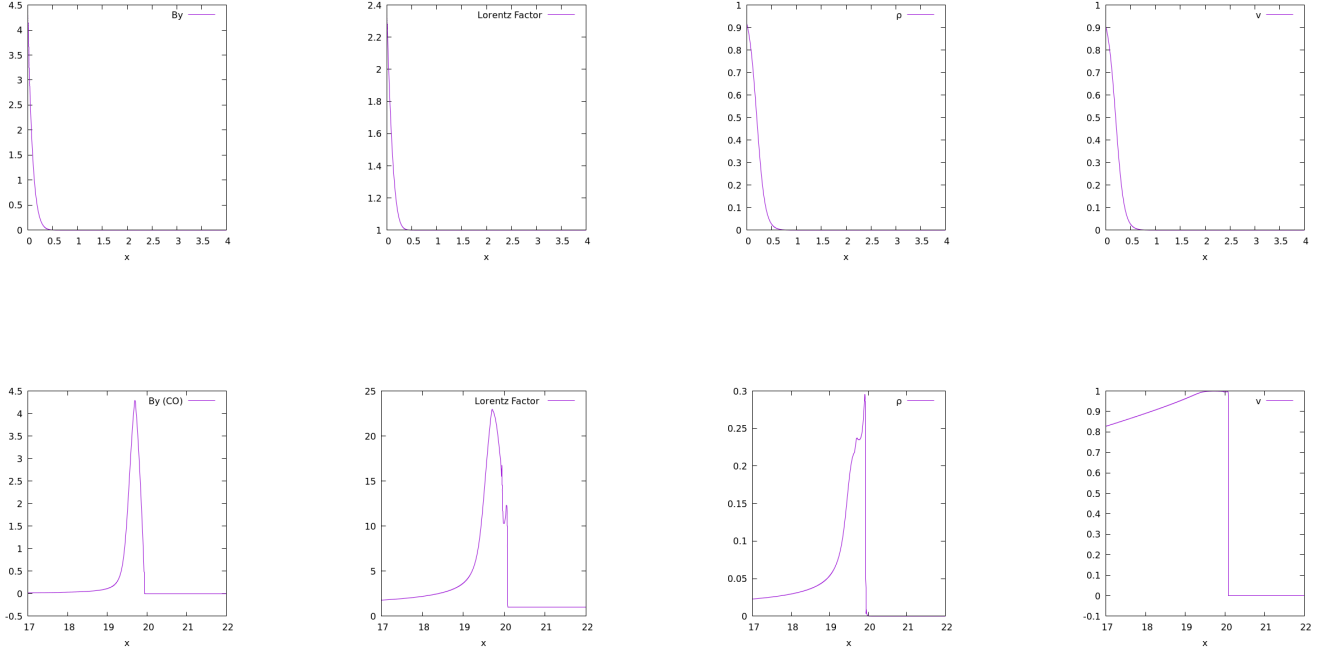
Σχήμα 6.5: Τα μεγέθη του ισχυρά μαγνητισμένου κελύφους όπως υπολογίστηκαν από τους Garnott και Komissarov [Granot et al.(2011)]

$$\Delta\beta_t = \beta_t - \beta \approx \frac{1}{\Gamma^2} \ll \Delta\beta_h \quad (6.13)$$

Δηλαδή το μεγαλύτερο μέρος του κελύφους θα έχει επηρεαστεί από το κύμα αραιώσης του μετώπου, μέχρι και πριν τη σύγκρουση. Μετά από αυτή, το πρόβλημα θεωρείται ανάλογο με αυτό του αγωγίμου τοίχου, όταν οι ποσότητες που μελετώνται, μετρώνται στο σύστημα αναφοράς του αρχικά σχετικιστικού με σταθερή ταχύτητα κελύφους. Δηλαδή οι αρχικές συνθήκες τροποποιούνται όσον αφορά το μήκος, σε $\Gamma_s R$, ενώ ο τελικός παράγοντας Lorentz, αν αυτός είναι αρκετά μεγαλύτερος της μονάδας, θα δίνεται από την απλή σχέση $\Gamma_{f,lab} = \Gamma_{test} \cdot \Gamma_s$.

Σε προσομοιώσεις που έγιναν με το κέλυφος να ξεκινά ολόκληρο στο περιβάλλον, τα δύο κύματα στα δύο άκρα του παλμού ξεκινούσαν ταυτόχρονα όπως ήταν λογική, και το παραπάνω επιχείρημα δεν μπορούσε να ικανοποιηθεί. Πιθανώς να οφείλεται στο ότι ένα σύστημα που ξεκινά από αυτή τη κατάσταση αγνοεί το πως έφτασε εκεί: Τα χρονοανεξάρτητα κύματα σε ένα δοκιμαστικό πρόβλημα δύο ρευστών ξεκινάνε όταν η «θεωρητική» μεμβράνη αφαιρεθεί από το σύστημα. Για να ξεκινήσουν τα δύο κύματα ετερόχρονα πρέπει οι δύο ακριανές επιφάνειες να μην τοποθετούνται στο περιβάλλον ταυτόχρονα και στα δύο συστήματα. Για αυτό το λόγο, σε μία δεύτερη προσπάθεια, το κέλυφος «εκτοξευόταν» από τις συνοριακές συνθήκες της βάσης, με ένα μέρος να βρίσκεται ήδη στο κουτί. Σκοπό είχε να ξεκινήσει το κύμα αραιώσης στο μέτωπο του παλμού τις πρώτες στιγμές και να καθυστερήσει η αραιώση της «ουράς». Ελέγχθηκε επίσης η ταχύτητα του κελύφους να είναι μεγαλύτερη από την superfast ταχύτητα του πλάσματος, ώστε η σύγκρουση να μη γίνει μέχρι να έχει εκτοξευθεί εξολοκλήρου το πλάσμα. Οι αρχικές συνθήκες φαίνονται στα γραφήματα 6.6

Πράγματι, η πορεία των μεγεθών παρουσιάζει μία ομοιότητα με αυτές των 6.3. Η πορεία της πυκνότητας και της ταχύτητας παρουσιάζει ομοια συμπεριφορά στην «ουρά» του παλμού, αλλά μόνο ποιοτικά. Συγκρίνοντας



Σχήμα 6.6: Οι αρχικές συνθήκες και η χρονική εξέλιξη του αστροφυσικού ανάλογου της αρχικής περίπτωσης. Η πυκνότητα του περιβάλλοντος ήταν $\rho_{density} = 10^{-6}$

το παράγοντα Lorentz για αντίστοιχους μεγάλους χρόνους, το σφάλμα είναι μέχρι και μία τάξη μεγέθους, ενώ η αναφορά είναι ήδη σε μικρά γάμμα. Γεγονός που δείχνει πως μάλλον οι αντιστοιχίες των δύο προβλημάτων δεν είναι τόσο άμεσες. Αναφερόμενοι σε φυσικά συστήματα, τα προβλήματα που εντοπίζονται στις παραπάνω προσομοιώσεις είναι αρκετά. Ακόμη και στο πρώτο βήμα, που είναι η αφαίρεση του αγωγίμου τοίχους, το εγχείρημα παρουσίασε ζητήματα. Μία πιθανή αιτιολόγηση είναι πως συγκριτικά με τα κύματα, οι συνοριακές συνθήκες της πρώτης περίπτωσης, αντικατοπτρίζουν τη ροή πίσω από το τοίχος. Έτσι η ανάκλαση των δύο κυμάτων πρόκειται για δύο ίδια κύματα αραίωσης.

Στη τελευταία προσομοίωση, η ροή ξεκινά με ταχύτητα κοντά στη μονάδα, ενώ το περιβάλλον παραμένει ακίνητο στο σύστημα του εργαστηρίου. Στο σύστημα του κελύφους, μπορεί η ταχύτητα να είναι μηδέν, όμως η επίλυση του Riemann προβλήματος, στην αρχή και στο τέλος του κελύφους, έχουν διαφορετική λύση, αφού στο πρώτο το περιβάλλον κινείται με ταχύτητα $\vec{\beta} = -\beta_s$, ενώ στο δεύτερο $\vec{\beta} = +\beta_s$. Η ανάκλαση δύο τέτοιων κυμάτων δεν θα μπορούσε να δώσει ίδιο αποτέλεσμα με τον αγωγίμο τοίχο.

Προβληματική είναι και η υπόθεση για τη πυκνότητα του περιβάλλοντος. Δεδομένου του πόσο ευαίσθητη είναι μέγιστη τιμή του παράγοντα Lorentz σε σχέση με αυτή, θέλει προσοχή στην επιλογή της, και ο λόγος της πυκνότητας του κελύφους με το περιβάλλον δεν έχει ρεαλιστικά τόσο μεγάλη τιμή.

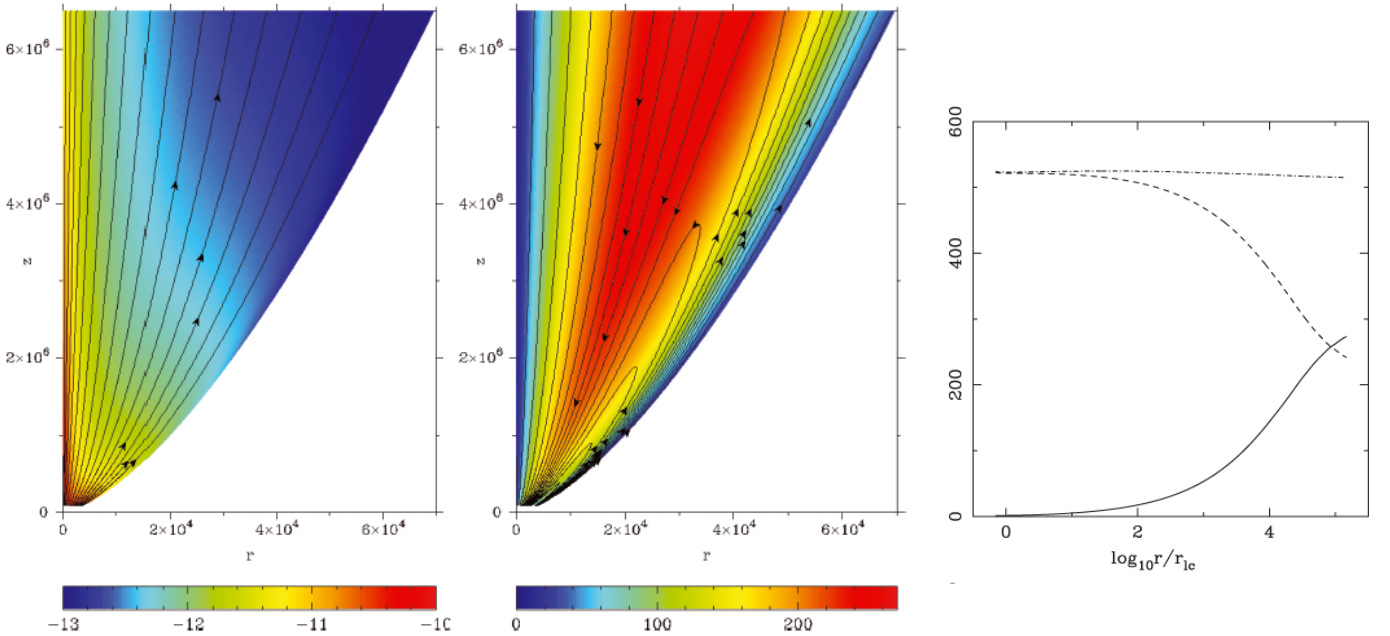
Το αστροφυσικό ανάλογο πρόβλημα έχει επίσης πολλά κενά στη θεώρησή του. Ξεκινώντας με την βάση της επιτάχυνσης που είναι τα δύο κύματα που συγκρούονται ενδιάμεσα του κελύφους. Ο τρόπος που φτάνει στο περιβάλλον χωρίς να είναι σε υδροστατική ισορροπία με αυτό δεν είναι τετριμμένος, πόσο μάλλον να υπάρχει και ένας μηχανισμός παραγωγής τέτοιων «παλμών». Αν η μόνη αραίωση που υποστεί το κέλυφος προέλθει από το πρώτο μέτωπο του κύματος, τότε η επιτάχυνσης μειώνεται σε αντίστοιχες τιμές των χρονοανεξάρτητων προβλημάτων, $\Gamma \approx \sigma_0^{1/3}$. Το περιβάλλον επίσης φαίνεται να επηρεάζεται από το προηγούμενο κέλυφος, αν θεωρηθεί ότι το ένα εξέρχεται μετά το άλλο. Η τιμή μάλιστα της πυκνότητας της «ουράς» είναι συγκρίσιμη με αυτή του επιταχυνόμενου πλάσματος, ελαττώνοντας την πραγματική μέγιστη τιμή του παράγοντα Lorentz. Μία τελευταία παρατήρηση σχετίζεται με την αρχική κατανομή της ενέργειας, όπου ένας ισχυρά μαγνητισμένος

παλμός θεωρήθηκε. Οι λύσεις του Riemann προβλήματος είναι ευαίσθητες στις αρχικές καταστάσεις των δύο ρευστών. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, τα δύο ρευστά είναι το κέλυφος πλάσματος και το περιβάλλον. Περισσότερη διερεύνηση χρειάζεται ο συγκεκριμένος μηχανισμός επιτάχυνσης για να ανταποκρίνεται ικανοποιητικά στις παρατηρούμενες συνθήκες.

Κεφάλαιο 7

Συμπεράσματα

Ο κυριότερος σπόδος της εργασίας ήταν να επιτευχθούν ροές πλάσματος με bulk παραγοντα Lorentz μεγαλύτερο του 100, όπως προκύπτει απο το Compactness Problem 1.4.1. Κρίσιμο σημείο είναι η αποδοτική μετατροπή μαγνητικής σε κινητική ενέργεια, με τη τελική ασυμπτωτική μαγνήτιση να μή ξεπερνά τη μονάδα. Η σφαιρική γεωμετρία σε RMHD ροές αποτυγχάνουν στο τελευταίο με τελική μαγνήτιση $\sigma_f \approx \sigma_0^{2/3}$, ενώ ο μηχανισμός της αλληλεπιδράσης των κυμάτων που παρουσιάστηκε στο 6ο κεφάλαιο, βασιζόμενος σε χρονο-εξαρτώμενη επιτάχυνση, παρουσιάζει πολλά ζητήματα στη μεταφορά του σε ρεαλιστικά αστροφυσικά ανάλογα προβλήματα, παράλληλα με το δεδομένο πρόβλημα της όλο και μικρότερης μάζας που παραμένει στο παλμό σε μεγαλύτερους χρόνους.



Σχήμα 7.1: Σχήμα 2 και 8 [Komissarov, Barkov, Vlahakis & Königl(2007)]. Στην πρώτη εικόνα φαίνονται οι γραμμές ροής και η πυκνότητας στο σύστημα του παρατηρητή. Στη δεύτερη εικόνα ο παράγοντας Lorentz και οι αντίστοιχες γραμμές ρεύματος. Στο τελευταίο σχήμα φαίνεται το συνολικό ολοκλήρωμα μ (dashed, το Poynting) κομμάτι αυτής (Dash-Dotted) και το παράγοντα Lorentz (Solid Line)

Για την επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων της Self-Similar λύσης του 4ου κεφαλαίου, έγιναν προσομοι-

ώσεις RMHD [Komissarov, Barkov, Vlahakis & Königl(2007)] με τα αποτελέσματα τους να φαίνονται στα γραφήματα 7.1.

Αν και έγιναν για λιγότερο ενεργειακές ροές ($\mu \approx 300$), οι γραμμικές ροές με παραβολοειδή μορφή παρουσιάζουν απόδοση $\geq 50\%$, δηλαδή $\Gamma \approx \frac{\mu}{2}$

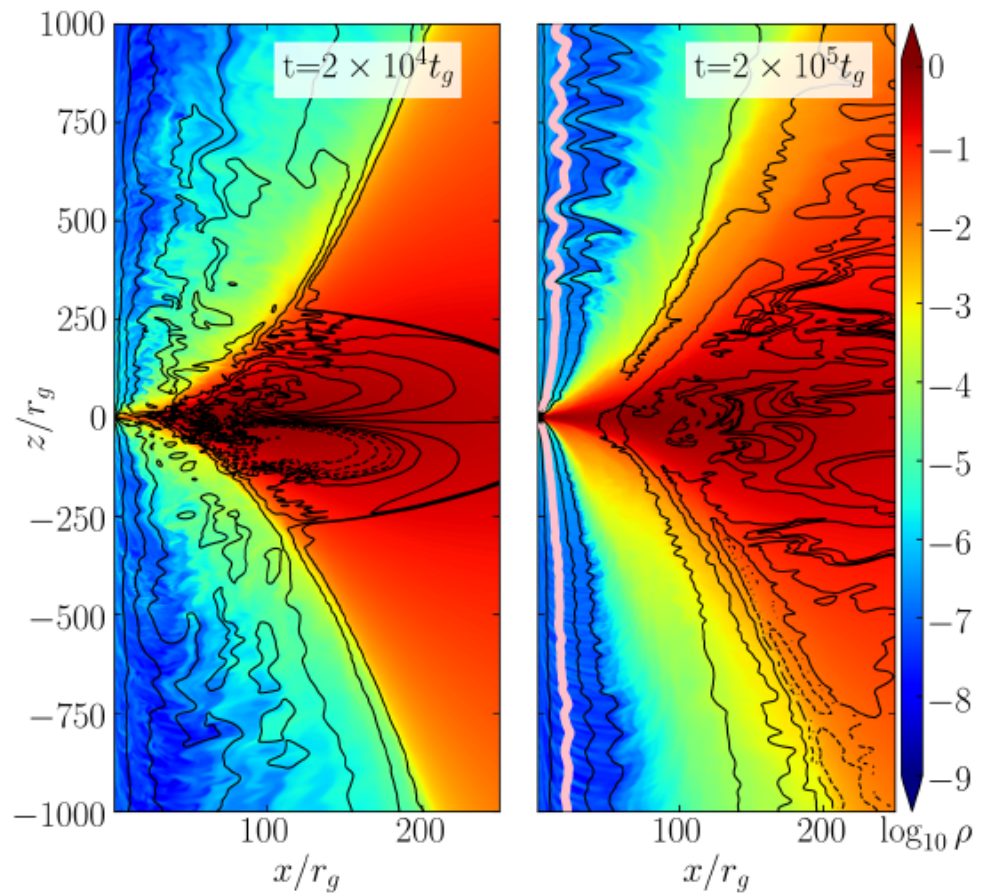
Η αυτο-όμοια λύση όμως δεν είναι απόλυτα ρεαλιστική. Απουσιάζει η αλληλεπίδραση της ροής με το εξωτερικό περιβάλλον, καθώς όλος ο χώρος θεωρείται γραμμικές ροές που έχουν βάση στο δίσκο προσάυξης.

Η διατήρηση της μαγνητικής ροής, ακόμη και στην χρονοεξαρτώμενη μορφή της λύσης, αποτρέπει την εξήγηση των μεταβολών του δίσκου. Ακόμη και στις προσομοιώσεις που παρουσιάστηκαν παραπάνω «απέφυγαν» την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον χρησιμοποιώντας ελλειπτικής μορφής συντεταγμένες, υποβάλλοντας κατά κάποιο τρόπο τη τοπολογία των γραμμών ροής και θεωρώντας συνθήκες ανάκλασης στα όρια του πίδακα.

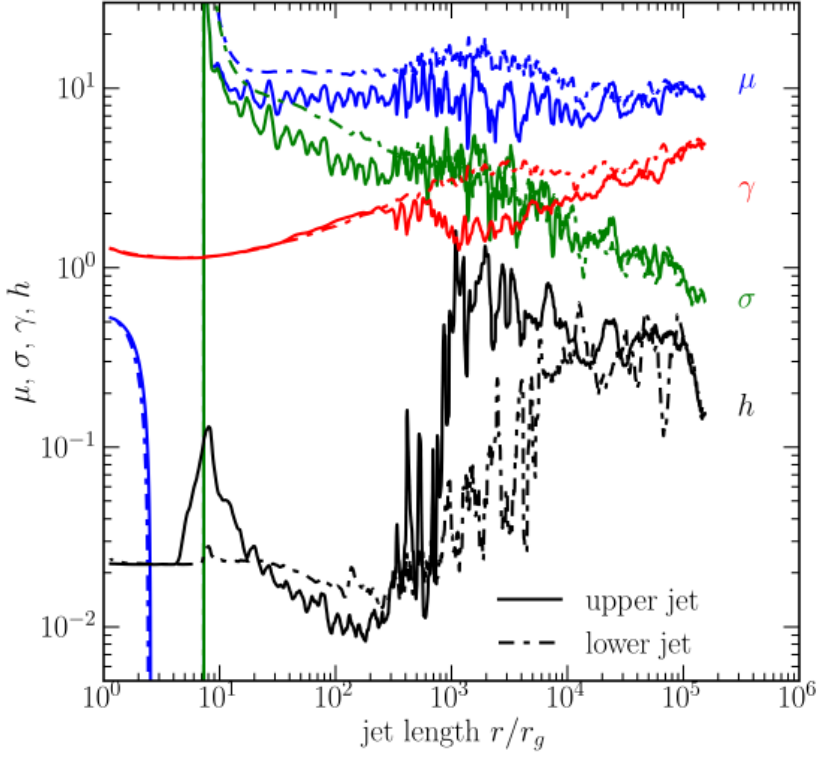
Για να εξηγηθεί συνολικά το πρόβλημα της επιτάχυνσης, προσομοιώσεις που περιλαμβάνουν το δίσκο, τον άνεμο και τον εστιασμένο πίδακα είναι απαραίτητες. GRMHD ροές έχουν μελετηθεί αριθμητικά με όχι τόσο ικανοποιητικές αποδόσεις στη μετατροπή μαγνητικής σε κινητική ενέργεια [Barniol Duran, Tchekhovskoy & Giannios(2017)], [Bromberg & Tchekhovskoy(2016)].

Τελευταίες προσομοιώσεις [Chatterjee, Liska, Tchekhovskoy & Markoff(2019)] πραγματοποιήθηκαν με πολύ μεγάλη υπολογιστική ισχύ, και για πολύ μεγάλους χρόνους προσομοίωσης. Όπως φαίνεται από τα σχήματα 7.2, 7.3, η δομή του συστήματος είναι πλήρης. Περιλαμβάνεται τόσο η αλληλεπίδραση του δίσκου, του περιβάλλοντος και του πίδακα, σε χρονοεξαρτώμενη μορφή. Η επιτάχυνση δεν φαίνεται να απέχει ποιοτικά από αυτή του self-similar model παρόλο των pinch ασταθειών που εμφανίζονται στο κεντρικό πίδακα.

Σχήμα 7.2: Απεικονίζονται οι αναγραφόμενες ποσότητες των προμοιώσεων, Σχήμα 5 [Chatterjee, Liska, Tchekhovskoy & Markoff(2019)]. Η χαρακτηριστική χρονική κλίμακα $t_G = \frac{GM}{c^2}$ όπου M η μάζα της μαύρης τρύπας. Φαίνεται η παρουσία του δίσκου, του πιο «ανοργάνωτου» ανέμου και του εστιασμένου πίδακα. Η ρόζ «περιοχή» του δεύτερου σχήματος αφορά τις γραμμές ροής κατά την οποία μετρήθηκε η ενεργειακή κατανομή 7.3



Σχήμα 7.3: Η επιτάχυνση σε συνδυασμό με τις γνώριμες ποσότητες των προηγούμενων κεφαλαίων. Φαίνεται πως σε λογαριθμική κλίμακα ο παράγοντας Lorentz πλησιάζει τη τιμή του ολοκληρώματος μ επιβεβαιώνοντας την ασυμπτωτική τιμή του Self Similar Model. Οι ποσότητες είναι αποτέλεσμα μέσης τιμής σε μία περιοχή $\delta r = 0.01$



Μειονεκτήματα παρουσιάζονται όσον αφορά τις floor τιμές ορισμένων φυσικών μεγεθών, όπως της μαγνήτισης και της πυκνότητας. Σε περίπτωση που η αριθμητική λύση της ροής οδηγήσει σε τιμές χαμηλότερης αυτής, η λύση τροποποιείται «χειροκίνητα» επαναπροσδιορίζοντας τις τιμές αυτές, επηρεάζοντας ταυτόχρονα και τα ενεργειακά αποθέματα αυτής. Περαιτέρω προσομοιώσεις είναι απαραίτητες για την επιβεβαίωση των παραπάνω μηχανισμών επιτάχυνσης.

Βιβλιογραφία

- [Piran et al.(1993)] Piran, T., Shemi, A., & Narayan, R. 1993, MNRAS, 263, 861
- [Vlahakis & Königl(2003)] Vlahakis, N., & Königl, A. 2003, ApJ, 596, 1104
- [Vlahakis & Tsinganos(1998)] Vlahakis, N., & Tsinganos, K. 1998, MNRAS, 298, 777
- [Band et al.(1993)] Band, D., Matteson, J., Ford, L., et al. 1993, ApJ, 413, 281
- [Cohen et al.(1997)] Cohen, E., Katz, J. I., Piran, T., et al. 1997, ApJ, 488, 330
- [Preece et al.(2002)] Preece, R. D., Briggs, M. S., Giblin, T. W., et al. 2002, ApJ, 581, 1248
- [Nakar & Piran(2002)] Nakar, E., & Piran, T. 2002, MNRAS, 330, 920
- [Rees & Meszaros(1992)] Rees, M. J., & Meszaros, P. 1992, MNRAS, 258, 41P
- [Sari & Piran(1995)] Sari, R., & Piran, T. 1995, ApJ, 455, L143
- [Kobayashi et al.(1999)] Kobayashi, S., Piran, T., & Sari, R. 1999, ApJ, 513, 669
- [Blandford & McKee(1976)] Blandford, R. D., & McKee, C. F. 1976, Physics of Fluids, 19, 1130
- [Kino et al.(2004)] Kino, M., Mizuta, A., & Yamada, S. 2004, ApJ, 611, 1021
- [Beloborodov(2000)] Beloborodov, A. M. 2000, ApJ, 539, L25
- [Kobayashi & Sari(2001)] Kobayashi, S., & Sari, R. 2001, ApJ, 551, 934
- [Nakar & Piran(2002)] Nakar, E., & Piran, T. 2002, ApJ, 572, L139
- [Piran(1999)] Piran, T. 1999, Phys. Rep., 314, 575
- [Nakar & Piran(2002)] Nakar, E., & Piran, T. 2002, MNRAS, 330, 920
- [Blandford(2002)] Blandford, R. D. 2002, Lighthouses of the Universe: The Most Luminous Celestial Objects and Their Use for Cosmology, 381
- [Drenkhahn & Spruit(2002)] Drenkhahn, G., & Spruit, H. C. 2002, A&A, 391, 1141
- [Granot et al.(2011)] Granot, J., Komissarov, S. S., & Spitkovsky, A. 2011, MNRAS, 411, 1323
- [Komissarov, Barkov, Vlahakis & Königl(2007)] Komissarov S. S., Barkov M. V., Vlahakis N., Königl A., 2007, MNRAS, 380, 51

[Chatterjee, Liska, Tchekhovskoy & Markoff(2019)] Chatterjee K., Liska M., Tchekhovskoy A., Markoff S. B., 2019, arXiv e-prints, arXiv:1904.03243

[Barniol Duran, Tchekhovskoy & Giannios(2017)] Barniol Duran R., Tchekhovskoy A., Giannios D., 2017, MNRAS, 469, 4957

[Bromberg & Tchekhovskoy(2016)] Bromberg O., Tchekhovskoy A., 2016, MNRAS, 456, 1739

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Παράδειγμα του μοντέλου 1.1 που συμφωνεί με τα παρατηρησιακά δεδομένα για το GRB 1B 911127. Οι φασματικοί δείκτες έλαβαν τη τιμή $a = -0.968$ και $b = -2.427$ ενώ η κρίσιμη ενέργεια $E_0 = 149.5$. [Band et al.(1993)]	8
1.2	Η Καμπύλη φωτός του GRB 920627, με συνολική διάρκεια 52 sec και τυπικό εύρος παλμών, 0.8 sec.	9
1.3	Το παρατηρούμενα ενεργειακό φάσμα του BATSE' 228. Πρόκειται για μη θερμικός φάσμα που φτάνει αρκετές εκατοντάδες keV	10
1.4	Τα μεγέθη της πίεσης της πυκνότητας και του παράγοντα Lorentz στο στάδιο της επιβράδυνσης όπως αυτά φαίνονται στο σύστημα του contact discontinuity. Η τιμή του άξονα x δηλώνει την απόσταση του σημείου του ρευστού από αυτή. [Kobayashi et al.(1999)]	12
2.1	Έκρηξη GRB με γωνιακή ισοτροπία, απο διακριτά κελύφοι που απέχουν μεταξύ τους απόσταση L , και συνολικά διαρκούν Δ/c (δεξιά), και η αντίστοιχη (αριστερά) θεώρηση, για ανομοιογενή κατανομή μικρών σφαιρών απο τις οποίες προέρχονται οι παλμοί που λαμβάνει ο παρατηρητής	16
2.2	Το σύστημα των δύο shock όπως φαίνεται απο το σύστημα του Contact Discontinuity. Το γρήγορο κέλυφος (4) έρχεται σε επαφή με το αργό (2), και δύο διαταραχές υπο μορφή shock ξεκινάνε απο την CD.[Kino et al.(2004)]	21
2.3	Η σύγκρουση των κελυφών, σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις.Οι παραγόμενοι παλμοί φτάνουν στο παρατηρητή σε ίδιο ή διαφορετικό χρόνο με τα αντίστοιχα φωτόνια της πηγής, ανάλογα με την σειρά των συγκρούσεων	23
3.1	Αριθμητική προσομοίωση της υδροδυναμικής περίπτωσης, αρχικών συνθηκών 3.12	29
3.2	Απεικονίζονται η χρονική εξέλιξη του παλμού, όπως προκύπτει απο την αναλυτική λύση των εξισώσεων 3.10. Με διακεκομμένες γραμμές εκφράζεται η πυκνότητα απο το σύστημα του εργαστηρίου, ενώ η συνεχή γραμμή εκφράζει την εσωτερική ενέργεια.	30
3.3	Σύγκριση αποτελεσμάτων, αριθμητικής και αναλυτικής μεθόδου, αρχικών συνθηκών 3.12 ως προς τον αριθμό γ .	31
4.1	Απεικονίζεται ποιητικά το ολοειδές επίπεδο του συστήματος. Οι έντονες γραμμές δείχνουν τη γραμμή ροής στο δεδομένο επίπεδο. Οι διακεκομμένες γραμμές αφορούν τα σταθερά ρεύματα στο επίπεδο. Είναι δηλαδή γεωμετρικοί τόποι όπου η έκφραση $\vec{J}_p$ έχουν σταθερή τιμή. Η δεξιά γραμμή ροής ονομάζεται return-current λόγω του θετικού πρόσημου της ποσότητας $J_{ }$, ενώ η αριστερή γραμμή current-carrying για τον αντίθετο λόγο [Vlahakis & Königl(2003)]	40

4.2	Παρουσιάζονται οι γραμμές ροής στο πολοειδές επίπεδο του συστήματος. Φαίνεται πως εξετάζοντας διαφορετικά μήκη ακτίνων, οι γραμμές παραμένουν ποιοτικά ίδιες. Η μεταβλητή A συνδέεται με την μαγνητική ροή, άρα αφού σε κάθε διαφορετική γωνία, οι ροές A_1, A_2 παραμένουν σταθερές, το ίδιο θα ισχύει και για τον λόγο των κυλινδρικών ακτίνων ϖ_1, ϖ_2 [Vlahakis & Königl(2003)]	42
4.5	Απεικονίζονται οι πυκνότητες δυνάμεων παράλληλα στη γραμμή ροής συναρτήσει της κυλινδρικής ακτίνας για τη περίπτωση $F < 1$. Οι δυνάμεις F_T, F_P, F_B, F_G, F_I , εκφράζουν αντίστοιχα τη δύναμη λόγω κλίσης της ενθαλπίας, της πίεσης, του πωλοειδούς ρεύματος, του παράγοντα Lorentz, και ο τελευταίος όρος σχετίζεται με την εσωτερική δύναμη [Vlahakis & Königl(2003)]	49
4.6	Συγκρητικά η εξέλιξη των δύο γραμμών ροής για την περίπτωση $F > 1$	50
4.7	Η εξέλιξη του αριθμού M συναρτήσει της ακτίνας. ($F > 1$)	50
4.8	Απεικονίζονται οι πυκνότητες δυνάμεων παράλληλα στη γραμμή ροής συναρτήσει της κυλινδρικής ακτίνας για τη περίπτωση $F > 1$. Οι δυνάμεις F_T, F_P, F_B, F_G, F_I , εκφράζουν αντίστοιχα τη δύναμη λόγω κλίσης της ενθαλπίας, της πίεσης, του πωλοειδούς ρεύματος, του παράγοντα Lorentz, και ο τελευταίος όρος σχετίζεται με την εσωτερική δύναμη [Vlahakis & Königl(2003)]	50
4.9	Η εξέλιξη των δύο ενεργειών του ολοκληρώματος μ και του παράγοντα Lorentz για την περίπτωση $F > 1$	51
4.10	Η εξέλιξη των δύο ενεργειών του ολοκληρώματος μ και του παράγοντα Lorentz για την περίπτωση $F > 1$	51
5.1	Χρονοεξαρτώμενη αναπαράσταση της πυκνότητας απο το σύστημα του εργαστηρίου συναρτήσει του μήκους της πολοειδούς γραμμής ροής, για τις δύο λύσεις του τρίου κεφαλαίου. Αριστερά η περίπτωση $F > 1$, και δεξιά η $F < 1$.	55
6.1	Αρχικές συνθήκες του ισχυρά μαγνητισμένου κελύφους για την Reflective Boundaries περίπτωση	60
6.2	Τα μεγέθη του ισχυρά μαγνητισμένου κελύφους για την Reflective Boundaries περίπτωση στους χρόνους $t = 0.7$ και $t = 1$, με πυκνότητα εξωτερικού περιβάλλοντος $\rho_{density} = 10^{-6}$	61
6.3	Ενδεικτικά η μεταβολή της ενεργειακής κατανομής του κελύφους σε χρόνους $t = 0$ και $t = 20$, με πυκνότητα εξωτερικού περιβάλλοντος $\rho_{density} = 10^{-6}$	62
6.4	Τα μεγέθη του ισχυρά μαγνητισμένου κελύφους για την Reflective Boundaries περίπτωση στο χρόνο $t = 20$, με πυκνότητα εξωτερικού περιβάλλοντος $\rho_{density} = 10^{-4}$ και $\rho_{density} = 10^{-6}$	63
6.5	Τα μεγέθη του ισχυρά μαγνητισμένου κελύφους όπως υπολογίστηκαν απο τους Garnott και Komissarov[Granot et al.(2011)]	64
6.6	Οι αρχικές συνθήκες και η χρονική εξέλιξη του αστροφυσικού ανάλογου της αρχικής περίπτωσης. Η πυκνότητα του περιβάλλοντος ήταν $\rho_{density} = 10^{-6}$	65
7.1	Σχήμα 2 και 8 [Komissarov, Barkov, Vlahakis & Königl(2007)]. Στην πρώτη εικόνα φαίνονται οι γραμμές ροής και η πυκνότητας στο σύστημα του παρατηρητή. Στη δεύτερη εικόνα ο παράγοντας Lorentz και οι αντίστοιχες γραμμές ρεύματος. Στο τελευταίο σχήμα φαίνεται το συνολικό ολοκλήρωμα μ (dashed, το Poynting) κομμάτι αυτής (Dash-Dotted) και το παράγοντα Lorentz (Solid Line)	67

- 7.2 Απεικονίζονται οι αναγραφόμενες ποσότητες των προμοιώσεων, Σχήμα 5 [Chatterjee, Liska, Tchekhovskoy
 Η χαρακτηριστική χρονική κλίμακα $t_G = \frac{GM}{c^2}$ όπου M η μάζα της μαύρης τρύπας. Φαίνεται η
 παρουσία του δίσκου, του πιο «ανοργάνωτου» ανέμου και του εστιασμένου πίδακα. Η ρόζ «πε-
 ριοχή» του δεύτερου σχήματος αφορά τις γραμμές ροής κατά την οποία μετρήθηκε η ενεργειακή
 κατανομή 7.3 68
- 7.3 Η επιτάχυνση σε συνδυασμό με τις γνώριμες ποσότητες των προηγούμενων κεφαλαίων. Φαίνε-
 ται πως σε λογαριθμική κλίμακα ο παράγοντας Lorentz πλησιάζει τη τιμή του ολοκληρώματος μ
 επιβεβαιώνοντας την ασυμπτωτική τιμή του Self Similar Model. Οι ποσότητες είναι αποτέλεσμα
 μέσης τιμής σε μία περιοχή $\delta r = 0.01$ 69