



**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΤΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΤΜΗΜΑ ΔΗΜΟΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ**

**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Διπλωματική Εργασία

**«Η ανάπτυξη και ενίσχυση της κατανόησης
της πρόσθεσης των ετερόνυμων κλασμάτων:
Η περίπτωση μιας μαθήτριας ΣΤ΄ δημοτικού»**

ΡΙΦΙΩΤΗ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ

A.M.: 217327

Επιβλέπουσα: Μπούφη Ανδρονίκη, Καθηγήτρια
Συνεπιβλέποντες: Βουδούρη Αγγελική, Καθηγήτρια
Μπαραλής Γεώργιος, Αναπλ. Καθηγητής

Αθήνα

Σεπτέμβριος, 2019

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα.....	2
Περίληψη	4
Εισαγωγή	5
Κεφάλαιο 1: Γενικό θεωρητικό πλαίσιο	7
1.1 Εποικοδομιστική θεωρία μάθησης στα Μαθηματικά	7
1.2 Θεωρία Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης.....	11
Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφική ανασκόπηση.....	15
2.1 Η έννοια και οι ερμηνείες του κλάσματος	15
2.2 Πρόσθεση και ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο	18
2.3 Συχνά λάθη των μαθητών στην πρόσθεση κλασμάτων	19
2.4 Ενέργειες που εμπλέκονται στην πρόσθεση των κλασμάτων	20
Κεφάλαιο 3: Σχολιασμός σχολικών εγχειριδίων Ε΄ και ΣΤ΄ δημοτικού.....	24
3.1 Σχολικά εγχειρίδια Ε΄ δημοτικού	24
3.1.1 Βιβλίο του Μαθητή Ε΄ δημοτικού.....	24
3.1.2 Τετράδιο εργασιών Ε΄ δημοτικού.....	26
3.2 Σχολικά εγχειρίδια ΣΤ΄ δημοτικού.....	27
3.2.1 Βιβλίο μαθητή ΣΤ΄ δημοτικού.....	27
3.2.1 Τετράδιο εργασιών ΣΤ΄ δημοτικού	30
Κεφάλαιο 4: Μεθοδολογικό πλαίσιο	33
4.1 Πείραμα σχεδιασμού	33
4.1.1 Τα χαρακτηριστικά ενός πειράματος σχεδιασμού.....	33
4.1.2 Τα στάδια ενός πειράματος σχεδιασμού	35
Κεφάλαιο 5: Ανάλυση του πειράματος σχεδιασμού.....	37
5.1 Προετοιμασία πειράματος.....	37
5.1.1 Γενικός σκοπός διδακτικού πειράματος.....	37
5.1.2 Ειδικοί στόχοι	37
5.1.3 Τεκμηρίωση των σημείων αφετηρίας.....	38
5.1.4 Υποθετική πορεία μάθησης.....	39

5.2 Διεξαγωγή πειράματος	40
5.2.1 Α΄ Φάση: 1 ^η συνάντηση	40
5.2.2 Α΄ Φάση: 2 ^η συνάντηση	44
5.2.3 Β΄ Φάση: 3 ^η συνάντηση.....	46
5.2.4 Β΄ Φάση: 4 ^η συνάντηση.....	47
5.2.5 Β΄ Φάση: 5 ^η συνάντηση.....	49
5.2.6 Β΄ Φάση: 6 ^η συνάντηση.....	51
5.2.7 Β΄ Φάση: 7 ^η συνάντηση.....	52
5.2.8 Γ΄ Φάση: Αναστοχαστική ανάλυση και 8 ^η συνάντηση	57
Συμπεράσματα	66
Βιβλιογραφία	68
Παράρτημα.....	75

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την προσπάθεια υποστήριξης μιας μαθήτριας ΣΤ΄ δημοτικού σχετικά με την κατανόηση της πρόσθεσης των ετερόνυμων κλασμάτων μέσα από την προσέγγιση του κλάσματος ως μέτρο. Στα πλαίσια της μεθοδολογίας του πειράματος σχεδιασμού επιχειρείται η αναγνώριση και η ενίσχυση των ενεργειών που εμπλέκονται στο συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα, λαμβάνοντας συνεχώς υπόψη τις ανάγκες και τις δυνατότητες της μαθήτριας.

Λέξεις-κλειδιά: πείραμα σχεδιασμού, πρόσθεση, κλάσματα, μέτρο

Abstract

This present master's thesis deals with the attempt to support a primary school 6th grade student to understand the addition of dissimilar fractions through the sub-construct of fraction as a measure. Within the methodology context of the design research it is attempted to identify and reinforce the actions involved in this particular mathematical subject, taking always into account the learner's needs and abilities.

Keywords: design research, addition, fractions, measure

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται την προσπάθεια στήριξης μιας μαθήτριας της ΣΤ΄ τάξης του δημοτικού σχολείου προκειμένου να εμβαθύνει στην πρόσθεση των κλασμάτων στα πλαίσια ενός πειράματος σχεδιασμού.

Η πρόσθεση των κλασμάτων και γενικότερα η ευρύτερη περιοχή των κλασμάτων δυσκολεύει αρκετά τόσο τους εκπαιδευτικούς σε επίπεδο διδασκαλίας, όσο και τους μαθητές σε επίπεδο μάθησης (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Stefffe & Olive, 2010· Tunç-Pekkan, 2015). *Το βασικό ερώτημα που τίθεται στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας είναι το πώς θα μπορούσε να ενισχυθεί ένας μαθητής ώστε να κατανοήσει την πρόσθεση των κλασμάτων μέσα από την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο.*

Σύμφωνα με την εποικοδομιστική θεωρία της μάθησης, η μάθηση ουσιαστικά προκύπτει μέσα από την οργάνωση των εμπειριών του ανθρώπου. Ο άνθρωπος καθώς αλληλεπιδρά με το περιβάλλον του, προσπαθεί να οργανώσει τις εμπειρίες του, δημιουργώντας έτσι τα γνωστικά του σχήματα. Τα σχήματα αυτά εξελίσσονται, συγκρούονται μεταξύ τους, ενώνονται και συνδέονται, οδηγώντας έτσι στην δημιουργία των εννοιών (Hackenberg, 2010· Tzur, 1999). Το ίδιο ισχύει και στην μάθηση των Μαθηματικών και ακόμα πιο συγκεκριμένα της πρόσθεσης των κλασμάτων.

Ο εκπαιδευτικός βοηθά την οργάνωση των γνωστικών σχημάτων των μαθητών του επιλέγοντας τα κατάλληλα μέσα διδασκαλίας. Σύμφωνα με την ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση, οι μαθητές μπορούν να οικοδομήσουν τις μαθηματικές έννοιες ξεκινώντας από την άτυπη δραστηριότητά τους και μέσα από τα κατάλληλα προβλήματα να δημιουργηθεί η ανάγκη για να επεκτείνουν τα ήδη υπάρχοντα γνωστικά τους σχήματα (Gravemeijer, 1997).

Ο προβληματισμός σχετικά με το πώς θα μπορούσε να βελτιωθεί η διδασκαλία της πρόσθεσης κλασμάτων, ξεκινά από το γεγονός ότι τα τελευταία χρόνια στην εκπαίδευση υπάρχει μία έμφαση στην εννοιολογική μάθηση, την μάθηση κατά την οποία οι μαθητές αντιλαμβάνονται τις μαθηματικές έννοιες που κρύβονται πίσω από την μαθηματική τους δραστηριότητα και δεν χειρίζονται απλά αριθμητικά σύμβολα. Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η αλγοριθμοποίηση των Μαθηματικών, ειδικά στην περιοχή των κλασμάτων, χωρίς κατανόηση μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο στην ανάπτυξη των μαθηματικών εννοιών (McCloskey & Norton, 2009). Οι αλγόριθμοι

μπορεί να αποτελούν το επιδιωκόμενο αποτέλεσμα, με την προϋπόθεση όμως ότι η μάθηση έχει ξεκινήσει από την άτυπη δραστηριότητα του παιδιού.

Σε αυτά τα πλαίσια, το ερώτημα που τίθεται είναι πώς θα μπορούσε ένας εκπαιδευτικός να βοηθήσει τους μαθητές του να αντιληφθούν τον τρόπο που μεταβάλλονται οι ποσότητες όταν πρόκειται να συνδυαστούν για να γίνει η πρόσθεση των κλασμάτων και ο αλγόριθμος, που περιλαμβάνει την δημιουργία κοινών παρονομαστών μέσω της εύρεσης Ε.Κ.Π., να αποκτήσει κάποιο νόημα για τους μαθητές αφού θα προέρχεται από τη δική τους μαθηματική δραστηριότητα και σκέψη. Η ανάγκη για την εύρεση μια κοινής μονάδας μέτρησης μεταξύ δύο κλασμάτων (ουσιαστικά η εύρεση Ε.Κ.Π.), ή αλλιώς ενός κοινού τεμαχισμού των ποσοτήτων μπορεί να γεννηθεί μέσα από τις κατάλληλες προβληματικές καταστάσεις και μέσα από μια διαδικασία προοδευτικής μαθηματοποίησης με τη βοήθεια του δασκάλου και των ανάλογων μέσων στήριξης.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα παρουσιαστούν αρχικά οι βασικές αρχές της εποικοδομιστικής θεωρίας της μάθησης και της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης που αξιοποιήθηκαν για την συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Στην συνέχεια θα γίνει αναφορά σε έρευνες σχετικά με τις διάφορες ερμηνείες του κλάσματος και τις ενέργειες που εμπλέκονται στην πρόσθεση βάσει της διεθνούς βιβλιογραφίας. Θα ακολουθήσει κριτική θεώρηση των σχολικών εγχειριδίων των μαθηματικών της Ε' και ΣΤ' τάξης και τέλος θα αναλυθούν οι φάσεις της προετοιμασίας, της διεξαγωγής και του αναστοχασμού του πειράματος σχεδιασμού που πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια μιας μαθήτριας της ΣΤ' τάξης του δημοτικού.

Κεφάλαιο 1: Γενικό θεωρητικό πλαίσιο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί το βασικό θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηρίχθηκε η παρούσα διπλωματική. Οι βασικές θεωρίες που αξιοποιήθηκαν είναι η εποικοδομιστική θεωρία της μάθησης και η ρεαλιστική θεωρία της μαθηματικής εκπαίδευσης.

1.1 Εποικοδομιστική θεωρία μάθησης στα Μαθηματικά

Τα τελευταία χρόνια αρκετοί ερευνητές έχουν στραφεί στη θεωρία του κονστρουκτιβισμού ή αλλιώς εποικοδομισμού για την εκπαίδευση των Μαθηματικών.

Ο κονστρουκτιβισμός ως φιλοσοφικό ρεύμα έχει κυρίως δύο προσεγγίσεις. Η πρώτη είναι ο *γνωστικός κονστρουκτιβισμός* που ξεκίνησε από το έργο του Piaget και η δεύτερη είναι ο *κοινωνικός κονστρουκτιβισμός* που βασίστηκε στο έργο του Vygotsky. Ο γνωστικός κονστρουκτιβισμός δίνει μεγαλύτερη έμφαση στο άτομο και στις λειτουργίες του μυαλού κατά τη διαδικασία της μάθησης, ενώ ο κοινωνικός κονστρουκτιβισμός αναδεικνύει την σημασία της αλληλεπίδρασης με τους άλλους και με το περιβάλλον, θεωρώντας τη μάθηση ως κοινωνικό φαινόμενο. Οι δύο αυτές προσεγγίσεις δεν αποκλίνουν μεταξύ τους (Scholnik, Kol & Abarbanel, 2006). Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής, και σε σύμπνοια με τους Cobb, Yackel και Wood (1992) δεν επιλέγεται μία εκ των δύο προσεγγίσεων αλλά η σύγκλιση αυτών. Έτσι, η μάθηση των Μαθηματικών θεωρείται ατομική και ταυτόχρονα συλλογική δραστηριότητα. Τα παιδιά έχουν την ευκαιρία να μάθουν καθώς αλληλεπιδρούν με άλλους και προσπαθούν να κατανοήσουν τις ιδέες τους και να γίνουν και οι ίδιοι κατανοητοί ως προς αυτά που εκφράζουν.

Σύμφωνα με τον von Glasersfeld (στο Confrey & Kazak, 2006: 313) «η μάθηση είναι το αποτέλεσμα της δραστηριότητας αυτού που μαθαίνει παρά η παθητική αποδοχή πληροφοριών ή οδηγιών». Υπό το πρίσμα της θεωρίας του εποικοδομισμού, ο άνθρωπος εμπλέκεται ενεργά στη διαδικασία κατασκευής της γνώσης του καθώς προσπαθεί να νοηματοδοτήσει και να οργανώσει τον κόσμο και την εμπειρία του (Cobb, κ.ά. 1992· Scholnik, κ.ά. 2006· Simon, 1995). Η προσπάθεια αυτή υποστηρίζεται από την διδασκαλία στα πλαίσια του σχολείου (Duffy & Cunningham, 1996). Τα παιδιά θεωρούνται κατασκευαστές της γνώσης τους και όχι άδεια δοχεία έτοιμα να γεμίσουν με τις γνώσεις που θα μεταφέρει ο εκπαιδευτικός (Scholnik, κ.ά., 2006).

Η θεωρία του εποικοδομισμού θέτει στο κέντρο της διδασκαλίας και της μάθησης των μαθηματικών τις ανάγκες και τις δυνατότητες του εκάστοτε παιδιού (Confrey & Kazak, 2006). Εστιάζει στο πώς μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες, θα μπορέσουν οι ενέργειες και οι παρατηρήσεις του παιδιού σχετικά με τον κόσμο της εμπειρίας του να εξελιχθούν σε πιο ισχυρές και επεξηγηματικές ιδέες και αυτές με τη σειρά τους να συμβάλλουν στην κατασκευή των μαθηματικών εννοιών (Confrey & Kazak, 2006· Gravemeijer, 2004). Ο απώτερος σκοπός είναι οι μαθητές να χτίζουν σταδιακά όλο και πιο αφηρημένες έννοιες στηριζόμενοι στις δικές τους δυνατότητες (Confrey & Kazak, 2006).

Γνωστικά δομήματα (cognitive constructs)

Απαραίτητα για την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών θεωρούνται τα γνωστικά δομήματα, τα οποία αποτελούνται από τις γνωστικές λειτουργίες (cognitive operations), τα σχήματα (schemes) και τις έννοιες (concepts) (Hackenberg, 2010).

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι μαθητές κατασκευάζουν οι ίδιοι τη γνώση τους μέσα από την δημιουργία και την τροποποίηση των γνωστικών τους σχημάτων (Hackenberg, 2010· Tzur, 1999). Σύμφωνα με τον von Glasersfeld (στο Boyce & Norton, 2016) τα σχήματα είναι καθιερωμένοι τρόποι ενέργειας που αποσκοπούν σε κάποιο στόχο. Αποτελούνται από τρία μέρη: μια κατάσταση που το άτομο ερμηνεύει ως οικεία (*αφομοιωμένη κατάσταση*), τις *ενέργειες* που πυροδοτούνται από αυτή την αφομοίωση και το *αποτέλεσμα* αυτών το οποίο είτε ικανοποιεί είτε όχι τις αρχικές προσδοκίες του ατόμου (von Glasersfeld, 1989).

Καθώς το άτομο αναγνωρίζει κάποια κατάσταση ως οικεία, βάσει της εμπειρίας του, ενεργοποιεί και το κατάλληλο σχήμα. Η αφομοιωμένη κατάσταση πυροδοτεί έναν σκοπό και τις αντίστοιχες νοητικές ή φυσικές ενέργειες για την ικανοποίησή του. Τα αποτελέσματα αυτών των ενεργειών είτε ανταποκρίνονται είτε όχι στις αρχικές προσδοκίες του ατόμου, γεγονός που «τονίζει και την φύση των σχημάτων ως κατευθυνόμενη από έναν σκοπό» (Hackenberg, 2010: 386).

Οι *γνωστικές λειτουργίες* είναι συστατικά των σχημάτων. Πρόκειται ουσιαστικά για νοητικές ενέργειες που έχουν αποσπαστεί από την εμπειρία (Boyce & Norton, 2016· Hackenberg, 2010· Norton & McCloskey, 2008). Για παράδειγμα, στην περιοχή των κλασμάτων υπάρχουν κάποιες βασικές λειτουργίες όπως: η ενοποίηση (unitizing) κατά την οποία μια συλλογή από αντικείμενα γίνεται αντιληπτή ως μονάδα ή σύνολο, ο τεμαχισμός (partitioning), δηλαδή η νοητική ενέργεια

του χωρισμού μιας μονάδας σε ίσου μεγέθους τμήματα, η απόσπαση (disembedding), η ενέργεια δηλαδή του να μπορώ να πάρω το μέρος ενός συνόλου χωρίς να πειράξω το όλο, η επανάληψη (iterating), η αντιγραφή δηλαδή ενός μέρους του όλου και η αποσυναρμολόγηση (splitting) που περιλαμβάνει ταυτόχρονο τεμαχισμό και επανάληψη. (Hackenberg, 2010· Hackenberg & Lee, 2015· Norton & McCloskey, 2008· Steffe, 2001).

Οι έννοιες ουσιαστικά κατασκευάζονται από τον συνδυασμό των γνωστικών σχημάτων. Είναι τα εσωτερικοποιημένα αποτελέσματα των γνωστικών σχημάτων πάνω στα οποία το άτομο μπορεί να ενεργήσει εκ νέου. Όταν το άτομο έχει κατανοήσει μία έννοια, αυτό σημαίνει ότι δεν χρειάζεται να επαναλάβει όλα τα βήματα του σχήματος, αλλά μπορεί να χρησιμοποιήσει τα αποτελέσματά του οποιαδήποτε στιγμή (Hackenberg, 2010).

Προκαταβολικά σχήματα και έννοιες (Anticipatory schemes and concepts)

Ένα σχήμα ονομάζεται προκαταβολικό όταν τα αποτελέσματά του είναι διαθέσιμα πριν από την εκτέλεση της ενέργειας (Steffe, 2010). Επειδή τα αποτελέσματα δεν είναι πάντοτε διαθέσιμα πριν την ενέργεια, τα σχήματα δεν είναι εξ ορισμού προκαταβολικά. Αντίθετα, οι έννοιες είναι προκαταβολικές εκ φύσεως καθώς «είναι εκείνες που κάνουν τα αποτελέσματα ενός σχήματος διαθέσιμα πριν από την δραστηριοποίηση σε μια κατάσταση» (Hackenberg, 2010: 388).

Αντιστρέψιμα σχήματα και έννοιες (reversible schemes and concepts)

Η έννοια της αντιστρεψιμότητας αναφέρεται στην δυνατότητα επιστροφής σε κάποια αρχική κατάσταση είτε αναιρώντας μία ενέργεια (αντιστροφή) είτε εκτελώντας κάποια άλλη ενέργεια που θα επιφέρει μια ισοδύναμη με την αρχική κατάσταση (αντιστάθμιση).

Οι έννοιες περιλαμβάνουν την αντιστρεψιμότητα καθώς, έχοντας εσωτερικοποιήσει τα αποτελέσματα ενός σχήματος, το άτομο μπορεί να γυρίσει πίσω στην κατάσταση ή την ενέργεια του σχήματος. Όταν κάποιος κατασκευάσει ένα σχήμα δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το σχήμα είναι και αντιστρέψιμο. Στην περίπτωση που το άτομο έχει τη δυνατότητα είτε μέσω αντιστροφής είτε μέσω αντιστάθμισης να επιστρέψει στην αρχική κατάσταση του σχήματος ή σε κάποια ισοδύναμή της τότε το σχήμα είναι πράγματι αντιστρέψιμο (Hackenberg, 2010).

Γνωστικές διεργασίες (cognitive processes)

Τα γνωστικά σχήματα κατασκευάζονται με τη βοήθεια των γνωστικών διεργασιών της αφομοίωσης, της τροποποίησης και της εσωτερίκευσης.

Η *αφομοίωση* (assimilation) αποτελεί βασική διεργασία για να κατασκευάσει και να τροποποιήσει ένα άτομο τα γνωστικά του σχήματα (von Glaserfeld στο Hackenberg, 2010). Κατά την αφομοίωση το άτομο προσπαθεί να εντάξει τα νέα δεδομένα στα υπάρχοντα γνωστικά του σχήματα (Lee & Shin, 2013).

Η *τροποποίηση* (accommodation) επέρχεται όταν τα αποτελέσματα ενός σχήματος δεν ικανοποιούν τις προσδοκίες ή τον αρχικό στόχο του ατόμου και τότε δημιουργείται μία διανοητική σύγχυση. Το άτομο προσπαθώντας να εξαλείψει αυτή τη σύγχυση, ενδεχομένως θα τροποποιήσει ή θα αναδιοργανώσει το σχήμα του. Όταν συντονίζονται δύο ή περισσότερα σχήματα ή συνδυάζεται ένα σχήμα και μία λειτουργία τότε η τροποποίηση ονομάζεται λειτουργική (functional) και οδηγεί σε ένα πιο βελτιωμένο γνωστικό σχήμα (Hackenberg, 2010· Steffe, 2010α).

Εσωτερίκευση (interiorisation) των αποτελεσμάτων ενός σχήματος, σύμφωνα με την Hackenberg (2010: 387) συμβαίνει όταν «τα αποτελέσματα και οι λειτουργίες που χρησιμοποιήθηκαν για να παραχθούν αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως βάση σε περαιτέρω διεργασία».

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο αναστοχασμός που κάνει κάποιος πάνω στην σχέση μεταξύ των ενεργειών του και των αποτελεσμάτων τους μπορεί να επιφέρει την τροποποίηση και την εσωτερίκευση ενός σχήματος. (Hackenberg, 2010). Μέσω της αναστοχαστικής αφαίρεσης τα παιδιά μπορούν να αναπτύξουν ολοένα και πιο σύνθετες έννοιες (Boyce & Norton, 2016· Steffe, 2002). Αναδεικνύεται, λοιπόν, η σημασία της παροχής ευκαιριών στους μαθητές ώστε να στοχάζονται τις ενέργειές τους και να προσπαθούν να προβλέψουν το αποτέλεσμα αυτών πριν τις εφαρμόσουν για να καταφέρουν να αναπτύξουν βαθύτερα νοήματα (Tzur, 1999).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η δουλειά του εκπαιδευτικού-ερευνητή είναι να φέρνει στην επιφάνεια τα υπάρχοντα σχήματα του παιδιού και να ενθαρρύνει την λειτουργία της αφομοίωσης. Για να δημιουργήσει στην συνέχεια ευκαιρίες για τροποποίηση, μπορεί να επιλέξει δραστηριότητες που θα ανταποκρίνονται στα υπάρχοντα σχήματα του παιδιού, ωστόσο θα περιέχουν και κάποια στοιχεία που θα μπορούσαν να δημιουργήσουν μία νοητική σύγχυση στον

μαθητή ωθώντας τον να χρησιμοποιήσει τα γνωστικά του σχήματα με έναν διαφορετικό τρόπο ή να τα συνδυάσει με άλλα σχήματα και άλλες ενέργειες (Steffe & Thompson, 2000).

1.2 Θεωρία Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η εποικοδομιστική θεωρία της μάθησης ερμηνεύει τη μάθηση ως μία ενεργή διαδικασία. Το άτομο κατασκευάζει τη γνώση του μέσω των γνωστικών του σχημάτων καθώς προσπαθεί να οργανώσει τον κόσμο της εμπειρίας του. Ωστόσο αρκετοί ερευνητές έχουν επισημάνει ότι ο εποικοδομισμός είναι μια γενική θεωρία που δεν είναι εξειδικευμένη για τα Μαθηματικά και δεν μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας στην εκπαίδευση, καθώς δεν παρέχει συγκεκριμένες οδηγίες για το πώς θα διδάξει κάποιος εκπαιδευτικός τα Μαθηματικά (Confrey & Kazak, 2006· Simon, 1995). Σύμφωνα με τον Simon (1995) ο κονστρουκτιβισμός δεν μας δίνει κατευθύνσεις για το πώς θα διδάξουμε τα Μαθηματικά αλλά για το πώς να ερμηνεύσουμε τη μάθηση. Το ερώτημα λοιπόν είναι πώς θα μπορέσει ένας εκπαιδευτικός να σχεδιάσει τη διδασκαλία του με τέτοιο τρόπο ώστε να παρέχει στους μαθητές του την ευκαιρία να αναπτύξουν τις επιδιωκόμενες αφηρημένες μαθηματικές έννοιες σεβόμενος ταυτόχρονα τις δυνατότητες και τις ανάγκες των παιδιών. Σύμφωνα με τους Confrey και Kazak (2006) η θεωρία της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης, εν συντομία PME, μπορεί να προσφέρει τα μέσα για να γίνει η σύνδεση του κονστρουκτιβισμού με την πράξη.

Η PME είναι μια ειδική θεωρία για τα Μαθηματικά που βασίζεται στην έρευνα (Cobb, Zhao & Visnovska, 2008· Gravemeijer, 1997· Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014) και θεμελιώνεται στην ιδέα του Freudenthal ότι τα Μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα (Gravemeijer, 2004· Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014). Οι μαθητές εμπλέκονται ενεργά στην διαδικασία της κατασκευής της γνώσης, οικοδομώντας έτσι τις μαθηματικές έννοιες (Wijya στο Laurens, Batlolona, Batlolona & Leasa, 2018). Στα πλαίσια της PME, αφού η μάθηση ερμηνεύεται ως διαδικασία, οι μαθητές δεν αντιμετωπίζονται ως παθητικοί δέκτες της γνώσης, αλλά ως κατασκευαστές της. Καθώς εμπλέκονται ενεργά στη διαδικασία της μάθησης αναπτύσσουν τα μαθηματικά τους νοήματα (Van den Heuvel- Panhuizen, 2003· Van den Heuvel-Panhuizen & Drijvers, 2014).

Ο Freudenthal (στο Cobb, κ.ά., 2008) υποστήριξε ότι τα παιδιά θα πρέπει να εμπλέκονται σε ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις που θα τους παρέχουν την ευκαιρία να αναπτύξουν τις επιδιωκόμενες μαθηματικές έννοιες. Γι' αυτό και η προσέγγιση ονομάστηκε «ρεαλιστική». Ο όρος «ρεαλιστική» αναφέρεται όχι μόνο στον πραγματικό κόσμο αλλά και στον κόσμο της φαντασίας των παιδιών, δηλαδή και σε αυτά που μπορούν να φανταστούν (Van den Heuvel- Panhuizen, 2003· Van den Heuvel- Panhuizen & Drijvers, 2014).

Η PME τοποθετεί στο κέντρο όλης της εκπαιδευτικής διαδικασίας τις ανάγκες και τη σκέψη του παιδιού και τα μέσα που μπορούν να υποστηρίξουν τη μάθησή του (Cobb, κ.ά., 2008). Βασική αρχή της αποτελεί το γεγονός ότι οι μαθητές μπορούν να μάθουν μαθηματικά στηριζόμενοι στα δικά τους νοήματα και στις δικές τους νοητικές ενέργειες (Gravemeijer, 2004).

Σύμφωνα με τον Freudenthal (1973) τα μαθηματικά είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα και όχι απλώς ένα οργανωμένο σύστημα γνώσης που μεταφέρεται αυτούσιο στους μαθητές. Οι μαθητές θα έπρεπε να έχουν τις κατάλληλες ευκαιρίες ώστε καθοδηγούμενοι από τον εκπαιδευτικό να επανεπινοήσουν τις μαθηματικές έννοιες. Η μάθηση των μαθηματικών σε αυτά τα πλαίσια νοείται ως μια διαδικασία *καθοδηγούμενης επανεφεύρεσης* των μαθηματικών εννοιών (Cobb, κ.ά., 2008· Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Σύμφωνα με τον Freudenthal (1973) οι μαθητές θα έπρεπε ως έναν βαθμό να ακολουθούν την ίδια πορεία που ακολούθησαν οι ειδικοί για να φτάσουν στην τυποποιημένη μαθηματική γνώση. Ο στόχος της διδασκαλίας είναι να υποστηριχθεί η παραπάνω διαδικασία ώστε οι μαθητές να καταφέρουν να ενεργούν βάσει των καθιερωμένων μαθηματικών πρακτικών (Cobb, κ.ά., 2008· Gravemeijer, 2004). Για να μπορέσουν οι μαθητές να επανεφεύρουν τις μαθηματικές έννοιες, απαραίτητη είναι η διαδικασία της προοδευτικής μαθηματοποίησης, με τη βοήθεια της οποίας γίνεται η μετάβαση από τις άτυπες λύσεις των παιδιών σε πιο εκλεπτυσμένες και τυποποιημένες (Cobb, κ.ά., 2008· Gravemeijer, 1997· Gravemeijer, 2004).

Για τον Freudenthal (στο Cobb, κ.ά., 2008) η μαθηματοποίηση είναι θεμελιώδης δραστηριότητα στην διδασκαλία των Μαθηματικών. Η μαθηματοποίηση είναι ουσιαστικά η οργάνωση τόσο του καθημερινού κόσμου όσο και των ίδιων των Μαθηματικών και μέσω αυτής τα παιδιά τυποποιούν την άτυπη μαθηματική τους δραστηριότητα (Gravemeijer, 2004· Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Διακρίνεται σε οριζόντια και κάθετη (Freudenthal στο Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Στην οριζόντια μαθηματοποίηση τα παιδιά περνούν από τα καθημερινά προβλήματα στα σύμβολα (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Καθώς προσπαθούν να επιλύσουν

μαθηματικά προβλήματα αναπτύσσουν άτυπα τους δικούς τους συμβολισμούς, τους δικούς τους τρόπους επικοινωνίας και συλλογισμού (Confrey & Kazak, 2006). Στην κάθετη μαθηματικοποίηση τα παιδιά ενεργούν μέσα στα πλαίσια του συστήματος των μαθηματικών, χειρίζονται τα σύμβολα και αναδιοργανώνουν το σύστημα των μαθηματικών συνδέοντας μεταξύ τους τις μαθηματικές έννοιες και στρατηγικές (Confrey & Kazak, 2006· Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Οι δύο αυτές έννοιες της οριζόντιας και της κάθετης μαθηματικοποίησης συνδέονται μεταξύ τους και θεωρούνται εξίσου σημαντικές και αναγκαίες, με τα όριά τους να είναι ασαφή (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Για να μπορέσει να προωθηθεί η μαθηματικοποίηση απαραίτητη είναι η προσεκτική επιλογή των κατάλληλων ρεαλιστικών προβλημάτων που θα αναδεικνύουν τις επιδιωκόμενες μαθηματικές έννοιες και των οποίων οι σχετικές λύσεις θα μπορούν σε βάθος χρόνου να γενικευτούν και να τυποποιηθούν (Gravemeijer, 1997).

Στα πλαίσια της PME ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στα μέσα που υποστηρίζουν την προοδευτική μαθηματικοποίηση. Ένα από αυτά είναι οι δραστηριότητες στις οποίες εμπλέκονται οι μαθητές. Στα πλαίσια αυτών, οι μαθητές αναπτύσσουν την άτυπη μαθηματική τους δραστηριότητα καθώς και μοντέλα που την συμβολίζουν. Τα μοντέλα αυτά μπορεί να έχουν τη μορφή σχεδίων, συμβόλων, διαγραμμάτων, πινάκων, σχημάτων κ.ά. (Cobb, κ.ά., 2008· Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Σε πρώτη φάση, τα μοντέλα περιγράφουν την μαθηματική δραστηριότητα των παιδιών στα πλαίσια της συγκεκριμένης προβληματικής κατάστασης και αργότερα εξελίσσονται ώστε να περιγράφουν έναν γενικότερο μαθηματικό συλλογισμό σε ένα εύρος καταστάσεων (Cobb, κ.ά., 2008· Gravemeijer, 1997· Gravemeijer, 2004).

Αρκετές φορές κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών, παρουσιάζονται στα παιδιά έτοιμα μοντέλα για να τα βοηθήσουν να κατακτήσουν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες. Ωστόσο, σύμφωνα με τον Gravemeijer (1997), δεν μπορούμε ως εκπαιδευτικοί να υποθέσουμε ότι τα παιδιά θα δουν αυτές τις έννοιες όπως οι ειδικοί, καθώς εμείς ήδη τις κατέχουμε. Τα παιδιά θα δουν μόνο το χειροπιαστό υλικό, όχι τις έννοιες.

Στα πλαίσια της PME τα μοντέλα δεν γίνονται αντιληπτά ως ενσαρκώσεις αφηρημένων εννοιών αλλά ως μέσα που αναπτύσσονται από τα παιδιά για να αναπαραστήσουν τη μαθηματική τους δραστηριότητα. Τα μοντέλα μπορούν να υποστηρίξουν την διαδικασία της προοδευτικής

μαθηματοποίησης καθώς συμβάλλουν στην σύνδεση της άτυπης μαθηματικής γνώσης των παιδιών με τα τυπικά Μαθηματικά (Gravemeijer, 1997· Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Η σύνδεση αυτή μπορεί να επιτευχθεί μέσα από τη μετάβαση από τα «μοντέλα του» (model of) σε «μοντέλα για» (model for) (Streefland στο Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). Αρχικά, το μοντέλο είναι στενά συνδεδεμένο με το πλαίσιο από το οποίο αναδύθηκε και αναπαριστά την μαθηματική δραστηριότητα των παιδιών στο συγκεκριμένο πλαίσιο (model of). Αργότερα, αρχίζει να γίνεται πιο γενικό και να αποπλαισιοποιείται, καθώς οι μαθητές αρχίζουν να στοχάζονται τις μαθηματικές σχέσεις που εμπλέκονται. Έτσι το μοντέλο δεν αποκτά νόημα μόνο από την δραστηριότητα των παιδιών αλλά από τις μαθηματικές σχέσεις και πλέον αναπαριστά έναν γενικότερο μαθηματικό συλλογισμό (model for) (Gravemeijer, 2004· Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Τα μοντέλα λοιπόν για να μπορέσουν να υποστηρίξουν τη μάθηση και την διαδικασία της προοδευτικής μαθηματοποίησης θα πρέπει αφενός να προκύπτουν από την ενασχόληση των παιδιών με ρεαλιστικές προβληματικές καταστάσεις, αφετέρου να μπορούν να εφαρμοστούν με πιο γενικό και εκλεπτυσμένο τρόπο για να καταφέρουν να συνδέσουν την άτυπη μαθηματική γνώση των παιδιών με τις καθιερωμένες μαθηματικές πρακτικές (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να οργανώσει τη διδασκαλία του με τέτοιο τρόπο ώστε ξεκινώντας από τα υπάρχοντα γνωστικά σχήματα των μαθητών του και μέσω κατάλληλων προβλημάτων να οδηγήσει στην επέκταση αυτών των γνωστικών σχημάτων και στην δημιουργία των μαθηματικών εννοιών. Τα παιδιά ξεκινώντας από την δική τους σκέψη και δραστηριότητα κατασκευάζουν εκ νέου τις μαθηματικές έννοιες σε μια διαδικασία προοδευτικής μαθηματοποίησης μέσα στο οργανωμένο περιβάλλον μάθησης που παρέχει ο εκπαιδευτικός.

Κεφάλαιο 2: Βιβλιογραφική ανασκόπηση

2.1 Η έννοια και οι ερμηνείες του κλάσματος

Το κλάσμα είναι μία από τις πιο πολύπλοκες μαθηματικές έννοιες με τις οποίες έρχονται σε επαφή τα παιδιά του δημοτικού σχολείου (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005). Τα κλάσματα αποτελούν έναν τομέα των Μαθηματικών που οι εκπαιδευτικοί δυσκολεύονται να διδάξουν και οι μαθητές να κατανοήσουν (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Steffe & Olive, 2010· Tunç-Pekkan, 2015). Αρκετοί ερευνητές έχουν μελετήσει την κατανόηση των μαθητών για τα κλάσματα, καταλήγοντας στην παραδοχή ότι η γνώση τους είναι περιορισμένη (Boyce & Norton, 2016· Clarke, Roche & Mitchell, 2007· Hackenberg & Tillema, 2009· Norton & Wilkins, 2009· Pantziara-Philippou, 2012).

Η δυσκολία των παιδιών να κατανοήσουν σε βάθος την έννοια των κλασμάτων οφείλεται σε πολλούς παράγοντες. Η Mack (1995) αναφέρει τον συμβολισμό των κλασμάτων ως παράγοντα δυσκολίας. Οι δύο φυσικοί αριθμοί γραμμένοι ο ένας κάτω από τον άλλο διαχωρισμένοι από μία γραμμή δυσχεραίνουν τους μαθητές στην αντίληψη ενός κλάσματος ως αριθμό με συγκεκριμένο μέγεθος. Μία άλλη πιθανή αιτία είναι η έμφαση της διδασκαλίας στην εκμάθηση των αλγορίθμων παρά στην ανάπτυξη της εννοιολογικής κατανόησης (Mack, 2001). Σύμφωνα με αρκετούς ερευνητές (Kieren, 1993· Lamon, 2012) ένας ακόμη παράγοντας που δυσχεραίνει την εκμάθηση των κλασμάτων είναι η πολυπλοκότητα της έννοιάς τους. Ο Kieren (στο Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) είναι ο πρώτος που υποστηρίζει ότι η έννοια του κλάσματος είναι πολυδιάστατη και ουσιαστικά μπορεί να γίνει αντιληπτή μέσα από τέσσερις διαφορετικές αλλά αλληλοσυνδεόμενες ερμηνείες: το κλάσμα ως πηλίκο, το κλάσμα ως μέτρο, το κλάσμα ως λόγο και το κλάσμα ως τελεστή. Οι Behr, Lesh, Post και Silver (1983) επεκτείνουν την ιδέα του Kieren προσθέτοντας την ερμηνεία του κλάσματος ως μέρος-όλο ως ξεχωριστή υποκατηγορία. Για τον Kieren το μέρος-όλο δεν αποτελεί ξεχωριστή υπο-κατηγορία καθώς εμπλέκεται στις άλλες ερμηνείες.

Στην συνέχεια παρουσιάζονται οι 5 υποκατηγορίες της έννοιας του κλάσματος, ενώ έμφαση δίνεται στην ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο που είναι και η ερμηνεία με την οποία προσεγγίστηκαν τα κλάσματα στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής.

Το κλάσμα ως *μέρος-όλο* σχετίζεται με τον τεμαχισμό είτε μιας συνεχούς ποσότητας είτε ενός συνόλου διακριτών αντικειμένων σε ισομεγέθη μικρότερα μέρη. Το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ σε αυτή την περίπτωση σημαίνει α μέρη από β ίσα μέρη (Lamon, 2012). Για παράδειγμα, το $\frac{3}{4}$ αναγνωρίζεται ως «τρία από τα τέσσερα ίσα μέρη». Βάσει αυτής της ερμηνείας ο αριθμητής θα πρέπει να είναι ίσος ή μικρότερος από τον παρονομαστή (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Αρκετοί ερευνητές έχουν υποστηρίξει ότι η διδασκαλία μέσω της προσέγγισης του κλάσματος μονάχα ως μέρος-όλο δημιουργεί περιορισμένη αντίληψη για το κλάσμα (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992· Mack, 2001· Olive & Vomvoridi, 2006· Thompson & Saldanha, 2003· Tzur, 1999). Μία βασική δυσκολία των παιδιών είναι ότι δεν μπορούν να κατανοήσουν τι σημαίνει $\frac{4}{3}$ από τη στιγμή που βλέπουν το κλάσμα ως «τόσα από τόσα». Το 4 από τα 3 ίσα μέρη δεν έχει κάποιο νόημα για αυτά. Τέλος, η ερμηνεία του κλάσματος ως «τόσα από τόσα» δεν αναδεικνύει το σχετικό μέγεθός του αφού δεν γίνεται αντιληπτό πολλαπλασιαστικά αλλά προσθετικά (Thompson & Saldanha, 2003).

Το κλάσμα ως *λόγος* χαρακτηρίζει την πολλαπλασιαστική σύγκριση μεταξύ δύο ποσοτήτων (Lamon στο Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010) όπως μια σύγκριση μεταξύ των αγοριών και των κοριτσιών μιας τάξης. Σύμφωνα με τον Marshall (στο Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) η ερμηνεία αυτή του κλάσματος βοηθά στην ανάπτυξη των ισοδύναμων κλασμάτων.

Το κλάσμα ως *τελεστής* γίνεται αντιληπτό ως μια συνάρτηση που αντιστοιχίζει κάποιο σύνολο ή περιοχή σε άλλο σύνολο ή περιοχή. Ή με άλλα λόγια το κλάσμα που μεγεθύνει ή συρρικνώνει, μειώνει ή επεκτείνει, πολλαπλασιάζει ή διαιρεί (Lamon, 2012). Εδώ, η ποσότητα που εκφράζει ο αριθμητής εφαρμόζεται σε μία δοσμένη ποσότητα και στην συνέχεια εφαρμόζεται η ποσότητα του παρονομαστή ή και αντίστροφα (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Ο παρονομαστής εκφράζει τον αριθμό των ίσων υπο-συνόλων στον οποίο έχει χωριστεί ένα μεγαλύτερο σύνολο και ο αριθμητής τον αριθμό των υπο-συνόλων που παίρνουμε (Nunes, κ.ά. στο Mamede & Oliveira, 2010). Για παράδειγμα, τα $\frac{2}{3}$ μιας συλλογής από 12 βόλους σημαίνει ότι οι 12 βόλοι έχουν χωριστεί σε 3 ομάδες των 4 και παίρνουμε τις 2 ομάδες, δηλαδή 8 βόλους. Τα παιδιά πρέπει να είναι σε θέση να αναγνωρίζουν το κλάσμα ως τελεστή με δύο τρόπους. Το $\frac{2}{3}$ για παράδειγμα σημαίνει 2 φορές το $\frac{1}{3}$ της μονάδας και επίσης σημαίνει $\frac{1}{3}$ των 2 φορές της μονάδας (Lamon, 2012).

Το κλάσμα ως *μέτρο* αναφέρεται στην μέτρηση κάποιου διαστήματος ή εμβαδού (Lamon, 2012). Το κλάσμα σε αυτή την περίπτωση εκφράζει μια ποσότητα (Wright, 2013) και προκύπτει από τον προσδιορισμό της σχέσης που έχει το όλο με το μέρος που πρόκειται να μετρηθεί (Watanabe στο Wong & Evans, 2008). Μια βασική ενέργεια που εμπλέκεται σε αυτή την ερμηνεία είναι αυτή του τεμαχισμού (Lamon, 2012). Το όλο τεμαχίζεται σε ίσα μέρη και η επανάληψη ενός από αυτά τα μέρη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση της δοσμένης ποσότητας (Naik & Subramaniam, 2008). Σε αυτά τα πλαίσια, η κλασματική μονάδα $\frac{1}{n}$ είναι το μέτρο ενός από τα n ίσα μέρη ενός συνόλου, ενώ το σύνθετο κλάσμα $\frac{\mu}{n}$ ερμηνεύεται ως το μέτρο μ κομματιών μεγέθους $\frac{1}{n}$ (Subramaniam & Verma, 2009). Για παράδειγμα, το κλάσμα $\frac{3}{4}$ ερμηνεύεται ως 3 φορές το $\frac{1}{4}$. Για την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο μπορεί να αξιοποιηθεί το μαθηματικό μοντέλο της αριθμογραμμής αλλά και μοντέλα αναπαράστασης εμβαδού ή όγκου (Wong & Evans, 2008). Σύμφωνα με τους Wright (2013) και Simon, Placa, Avitzur και Kara (2018), το κλάσμα ως μέτρο μπορεί να καλύψει τους περιορισμούς του κλάσματος ως μέρος-όλο, καθώς αναδεικνύει την πολλαπλασιαστική σύγκριση μεταξύ του όλου και του μέρους (Thompson & Saldanha, 2003).

Το κλάσμα ως *πηλίκο* αναφέρεται στην αντίληψη του κλάσματος ως το αποτέλεσμα μιας διαίρεσης (Lamon στο Charalambous, κ.ά., 2010) και προκύπτει μέσα από καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς, (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007· Clarke, Roche & Mitchell, 2008) όπου μ αγαθά μοιράζονται δίκαια μεταξύ n ατόμων και το μερίδιο του ενός ορίζεται ως $\frac{\mu}{n}$ (Lamon, 2012· Mamede & Oliveira, 2010· Naik & Subramaniam, 2008). Για παράδειγμα, «τρεις πίτσες μοιράζονται δίκαια σε τέσσερα άτομα», το αποτέλεσμα της διαίρεσης $3:4$, δηλαδή το κλάσμα $\frac{3}{4}$, δείχνει το μερίδιο του κάθε ατόμου, το πόση πίτσα θα φάει ο καθένας. Ο αριθμητής αναφέρεται στον αριθμό των μερών σε κάθε μοιρασιά και ο παρονομαστής υποδηλώνει το κλασματικό μέγεθος της κάθε μοιρασιάς. (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Επειδή σε κάθε ερμηνεία αναδεικνύονται διαφορετικές πτυχές του κλάσματος, η ολόπλευρη κατανόηση των κλασμάτων προϋποθέτει την εμπλοκή των μαθητών και με τις πέντε ερμηνείες (Boyce & Norton, 2016).

2.2 Πρόσθεση και ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο

Όσον αφορά στην πρόσθεση των κλασμάτων αρκετοί ερευνητές έχουν προτείνει ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο υποστηρίζει καλύτερα την διδασκαλία του συγκεκριμένου θέματος (Behr, κ.ά., 1983· Brousseau, Brousseau & Warfield, 2004· Stafylidou & Vosniadou, 2004). Οι Simon, κ.ά. (2018) υποστηρίζουν ότι με την προσέγγιση του κλάσματος ως μέτρο τα παιδιά μπορούν να καταλήξουν σε ισχυρότερα νοήματα για το κλάσμα.

Οι Subramanian και Verma (2009) εισάγουν την πρόσθεση των κλασμάτων μέσα από συνδυασμό της ερμηνείας του κλάσματος ως μέτρο και ως πηλίκο. Τα παιδιά στο συγκεκριμένο πείραμα εμπλέκονται σε καταστάσεις όπου ένας αριθμός ατόμων μοιράζεται στρογγυλά ψωμάκια. Το κλάσμα σε αυτή την περίπτωση εκφράζει το μερίδιο του ενός ατόμου. Για παράδειγμα, αν τρία άτομα θέλουν να μοιραστούν τέσσερα ψωμάκια, τότε ο καθένας θα φάει 3:4 ή αλλιώς $\frac{3}{4}$. Ως αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης τα παιδιά καταφέρνουν να συνδέσουν τον συμβολισμό των κλασμάτων με τις καθημερινές καταστάσεις και να προσθέσουν ετερόνυμα κλάσματα ακολουθώντας βήματα αντίστοιχα με αυτά του καθιερωμένου αλγόριθμου.

Τα αποτελέσματα της έρευνας των Naik και Subramaniam (2008) δείχνουν ότι ο συνδυασμός της προσέγγισης του κλάσματος ως μέτρο και ως πηλίκο ενισχύει την εννοιολογική κατανόηση των μαθητών γύρω από τα κλάσματα και συμπληρώνει την έννοια του κλάσματος ως μέρος-όλο, η οποία όπως έχει ήδη σημειωθεί θεωρείται περιορισμένη όταν η διδασκαλία περιορίζεται αποκλειστικά σ' αυτήν.

Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής γίνεται μία προσπάθεια να προσεγγιστεί το κλάσμα ως μέτρο και να ενισχυθεί η εννοιολογική κατανόηση της πρόσθεσης των κλασμάτων. Το κλάσμα ως μέτρο γίνεται αντιληπτό περισσότερο ως επαναλήψεις μιας κλασματικής μονάδας παρά ως μέρη από ένα όλο (Norton & Wilkins, 2010). Στα πλαίσια αυτά και σε σύμπνοια με τους Naik και Subramaniam (2008) το όλο τεμαχίζεται σε n ισομεγέθη μέρη, καθένα από τα οποία αναπαριστά η κλασματική μονάδα $\frac{1}{n}$. Στην προσέγγιση αυτή δίνεται έμφαση στην σχέση που έχει η κλασματική μονάδα $\frac{1}{n}$ με το όλο. Τα σύνθετα κλάσματα (composite fractions) κατασκευάζονται από τις κλασματικές μονάδες. Το κλάσμα $\frac{m}{n}$ ερμηνεύεται ως m « $\frac{1}{n}$ » μονάδες. Η ερμηνεία αυτή του κλάσματος διευκολύνει την απάντηση στην ερώτηση «πόσο έφαγε ο καθένας;»

2.3 Συχνά λάθη των μαθητών στην πρόσθεση κλασμάτων

Οι Idris και Narayanan (2011) ύστερα από έρευνα σε μαθητές γυμνασίου στην οποία εξετάζουν τα συστηματικά λάθη που κάνουν στην πρόσθεση και την αφαίρεση των κλασμάτων, αναφέρουν πως αρκετά από αυτά οφείλονται στην στείρα απομνημόνευση κανόνων για την εκτέλεση των αριθμητικών πράξεων και στην έλλειψη πολλαπλών αναπαραστάσεων για τα κλάσματα. Για παράδειγμα, αναφέρουν ότι ένα συχνό λάθος των παιδιών είναι να προσθέτουν αριθμητές και παρονομαστές π.χ. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{6})$ και να δικαιολογούν την απάντησή τους λέγοντας πως βάζοντας μαζί ένα κομμάτι από τα δύο μίας πίτσας και ένα δεύτερο κομμάτι από τα τέσσερα μιας άλλης ίδιου μεγέθους πίτσας, το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι δύο από τα έξι συνολικά κομμάτια. Εύρημα με το οποίο συμφωνούν και οι Charalambous, κ.ά. (2010).

Οι Aksoy και Yazlik (2017) μελετούν τα λάθη και τις παρανοήσεις των μαθητών του γυμνασίου όσον αφορά τις πράξεις με κλάσματα. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρουν, οι μαθητές μαθαίνουν από την αρχή τους κανόνες για να εκτελέσουν τις αριθμητικές πράξεις, χωρίς να δίνεται έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση, με αποτέλεσμα σε επόμενες σχολικές χρονιές να τους ξεχνούν.

Ο Kerslake (στο Pantziara & Philippou, 2012) αναφέρει ότι πολλά παιδιά μπορούν να προσθέσουν επιτυχώς κλάσματα, αλλά δεν μπορούν να εξηγήσουν ακριβώς γιατί ακολουθούν τα συγκεκριμένα βήματα.

Αρκετοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να προσδιορίσουν τις αιτίες για αυτά τα λάθη. Οι Charalambous, κ.ά. (2010) επισημαίνουν ότι τα λάθη που παρατηρούνται κατά την πρόσθεση και την αφαίρεση εξαρτώνται άμεσα από τις παρανοήσεις των μαθητών για την γενικότερη έννοια των κλασμάτων. Οι Stafylidou και Vosniadou (2004) αναφέρουν ότι μία πιθανή αιτία είναι το γεγονός ότι οι μαθητές χειρίζονται τον αριθμητή και τον παρονομαστή του κλάσματος ως δύο ξεχωριστούς φυσικούς αριθμούς, αγνοώντας την μεταξύ τους πολλαπλασιαστική σχέση. Οι Vinner, Hershkowitz, Bruckheimer (στο Charalambous, κ.ά., 2010) υποστηρίζουν ότι μια πιθανή αιτία για την πρόσθεση αριθμητών και παρονομαστών μεταξύ τους είναι η τάση των παιδιών να χρησιμοποιούν γνώριμες στρατηγικές όπως αυτή του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων και να θεωρούν εσφαλμένα ότι εφαρμόζεται σε όλες τις περιπτώσεις αριθμητικών πράξεων με κλάσματα.

Από τα παραπάνω προκύπτει η αναγκαιότητα για τη μελέτη μιας πιθανής πορείας μάθησης σχετικά με την πρόσθεση των κλασμάτων υπό την ερμηνεία του μέτρου που θα ενισχύσει την βαθύτερη κατανόηση των μαθητών. Στη συνέχεια γίνεται μια προσπάθεια αναγνώρισης των ενεργειών και των εννοιών που εμπλέκονται στην πρόσθεση ώστε να σχεδιαστεί με πιο αποτελεσματικό τρόπο αυτή η πιθανή πορεία μάθησης.

2.4 Ενέργειες που εμπλέκονται στην πρόσθεση των κλασμάτων

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει μία προσπάθεια να προσδιοριστούν οι ενέργειες και οι έννοιες οι οποίες βάσει της διεθνούς βιβλιογραφίας εμπλέκονται ή θεωρούνται ως προαπαιτούμενες κατά την διδασκαλία της πρόσθεσης των κλασμάτων.

Βάσει των ενεργειών που κάνουν οι μαθητές καθώς εμπλέκονται σε προβληματικές καταστάσεις με κλάσματα, οι Steffe και Olive (2010) αναγνωρίζουν και περιγράφουν τα σχήματα των κλασμάτων (fraction schemes). Τα σχήματα αυτά είναι ερευνητικά βασισμένα μοντέλα της κλασματικής γνώσης των παιδιών τα οποία μπορούν να χρησιμοποιούν οι εκπαιδευτικοί για να εξηγήσουν τις ενέργειες των μαθητών, αναδεικνύοντας έτσι μία πιθανή πορεία της μάθησης όσον αφορά στα κλάσματα (Norton & McCloskey, 2008· Steffe, 2010α· Tzur, 1999). Κάθε σχήμα προέρχεται από αναδιοργάνωση του προηγούμενου (McCloskey & Norton, 2009). Παρέχοντας τις κατάλληλες δραστηριότητες που θα δημιουργήσουν νοητική σύγχυση, οι μαθητές ωθούνται να αναδιοργανώσουν τα σχήματά τους, επεκτείνοντας και εμβαθύνοντας τις γνώσεις τους για τα κλάσματα.

Όσον αφορά στην πρόσθεση των κλασμάτων ο Steffe (2003) κάνει λόγο για το κλασματικό σχήμα της πρόσθεσης (fractional adding scheme) το οποίο αναφέρεται στις ενέργειες και τις λειτουργίες εκείνες που εμπλέκονται στην προσπάθεια κάποιου να συνδυάσει, για παράδειγμα, το $\frac{1}{3}$ μιας ποσότητας με το $\frac{1}{4}$ της ίδιας ή μιας άλλης ποσότητας προσδιορίζοντας τι μέρος της συνολικής ποσότητας είναι το αποτέλεσμα. Για την ανάπτυξη του εν λόγω σχήματος ο Steffe θεωρεί βασική προϋπόθεση την κατασκευή σχημάτων για τα ισοδύναμα κλάσματα (commensurate fractional scheme) και για τον πολλαπλασιασμό των κλασμάτων (fractional composition scheme), καθώς επίσης και για την ενέργεια του επαναλαμβανόμενου τεμαχισμού (recursive partitioning).

Ο Olive (2003) αναφέρει ότι για να προσθέσει ένας μαθητής κλάσματα, πρέπει να εξασκηθεί πρώτα στην εύρεση ενός κοινού τεμαχισμού ή αλλιώς μιας κοινής μονάδας μέτρησης και ότι σημαντικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία παίζει ο *επαναλαμβανόμενος τεμαχισμός* (recursive partitioning).

Σύμφωνα με τους Petit, Laird, Marsden και Ebby (2015), η βαθιά κατανόηση της πρόσθεσης αλλά και της αφαίρεσης των κλασμάτων προϋποθέτει τόσο διαδικαστική ευχέρεια όσο και εννοιολογική κατανόηση. Η διαδικαστική ευχέρεια αφορά την ικανότητα της επιλογής και εφαρμογής των κατάλληλων διαδικασιών με αποδοτικότητα και ακρίβεια. Η διαδικαστική ευχέρεια όμως δεν είναι αρκετή για την βαθιά κατανόηση της πρόσθεσης των κλασμάτων. Σημαντικό ρόλο παίζει και η εννοιολογική κατανόηση, η οποία αναφέρεται στην ικανότητα των ατόμων να κατανοούν γιατί μια μαθηματική ιδέα είναι σημαντική και σε ποια πλαίσια εφαρμόζεται και γιατί (National Research Council [NRC], 2001 στο Petit, κ.ά., 2015). Για να μπορέσουν οι μαθητές να προσθέσουν κλάσματα, σύμφωνα με τους Petit, κ.ά. (2015) θα πρέπει να έρθουν σε επαφή με ενέργειες και έννοιες όπως ο ισοτεμαχισμός, η ισοδυναμία και η σύγκριση των κλασμάτων.

Ίδια αντίληψη εκφράζεται και από τους Byrnes και Wasik (στο Pantziara & Philippou, 2012), σύμφωνα με τους οποίους, οι μαθητές για να καταφέρουν να προσθέσουν κλάσματα θα πρέπει να κάνουν ενέργειες παρόμοιες με αυτές που κάνουν όταν συγκρίνουν ή διατάσσουν ετερόνυμα κλάσματα. Παρομοίως και οι Cramer, Post και delMas (2002) τονίζουν τη σημασία της γνώσης της ισοδυναμίας των κλασμάτων για την πρόσθεση.

Η ενέργεια της *αποσυναρμολόγησης* (splitting) περιλαμβάνει τις ενέργειες του τεμαχισμού και της επανάληψης, τις οποίες το άτομο δεν χρειάζεται να εκτελέσει για να δει πώς η μία αντιστρέφει την άλλη (Hackenberg, κ.ά., 2016). Η ενέργεια αυτή αναφέρεται σε δραστηριότητες όπως π.χ. να δίνεται μία μπάρα που είναι η τριπλάσια της ζητούμενης. Επομένως κάποιος θα πρέπει να φανταστεί μία υποθετική μπάρα που αν την επαναλάβει τρεις φορές, θα είναι ίση με την αρχική (Steffe, 2010β). Οι Olive και Steffe (2010) υποστηρίζουν ότι η ενέργεια της αποσυναρμολόγησης (splitting) είναι βασική για να βρεθεί ένας κοινός τεμαχισμός, συνεπώς και μία κοινή μονάδα μέτρησης.

Οι Olive και Steffe (2010) επισημαίνουν ότι η ενέργεια του επαναλαμβανόμενου τεμαχισμού (recursive partitioning) είναι βασική για την πρόσθεση δύο ετερόνυμων κλασμάτων, καθώς τα

κλάσματα θα πρέπει να εκφραστούν με μια κοινή μονάδα μέτρησης. Θα πρέπει να βρεθεί το κλάσμα εκείνο που να μετρά ταυτόχρονα και τις δύο ποσότητες που προστίθενται.

Ο επαναλαμβανόμενος τεμαχισμός περιλαμβάνει την διαδικασία του τεμαχισμού ενός τεμαχισμού (Steffe, 2010β· Steffe, Liss & Lee, 2014). Για παράδειγμα, στην προσπάθεια να βρεθεί το $\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{3}$ ο μαθητής μπορεί να τεμαχίσει αρχικά το όλο σε τρία ίσα μέρη και στην συνέχεια να μεταφέρει τον τεμαχισμό σε καθένα από αυτά σε τέσσερα ίσα μέρη (για να προσδιοριστεί η σχέση του μικρού κομματιού με το όλο). Ο προσδιορισμός του μικρού κομματιού σε σχέση με το όλο μπορεί να επιτευχθεί επαναλαμβάνοντας το κομμάτι όσες φορές χρειαστεί μέχρι να δώσει το όλο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα πρέπει να επαναληφθεί δώδεκα φορές, συνεπώς είναι το $\frac{1}{12}$ του όλου. Για να θεωρηθεί η σύνθεση δύο τεμαχισμών ως επαναλαμβανόμενος τεμαχισμός, σύμφωνα με τον Steffe (2004), θα πρέπει το παιδί να είναι σε θέση να παράξει το όλο δεδομένου του μερικού κομματιού. Ο τεμαχισμός του τεμαχισμού είναι πολύ σημαντική ενέργεια για την εύρεση κοινών παρονομαστών ή αλλιώς κοινής μονάδας μέτρησης συνεπώς και στην πρόσθεση των κλασμάτων (Izsák, Tilemma & Tunç-Pekkan, 2008).

Ο *επιμεριστικός τεμαχισμός* (distributive partitioning) αποτελεί την πιο ανεπτυγμένη μορφή τεμαχισμού (Steffe, 2010β) και αναδύεται μέσα από καταστάσεις δίκαιης μοιρασιάς (Lee & Shin, 2013). Σύμφωνα με την Lamon (στο Steffe, κ.ά., 2014). Σύμφωνα με τον Steffe (2010β) ο επιμεριστικός τεμαχισμός αναφέρεται στον τεμαχισμό n αντικειμένων σε m μερίδια, μέσω της διαδικασίας του τεμαχισμού καθενός από τα n αντικείμενα σε m μέρη και της κατανομής ενός μέρους από κάθε ένα από τα n αντικείμενα σε m μερίδια. Για παράδειγμα, μία χαρακτηριστική δραστηριότητα που αναφέρεται στην γενικότερη έννοια του επιμεριστικού τεμαχισμού είναι: «μοίρασε δίκαια τρεις άνισες πίτσες σε πέντε άτομα». Ένας μαθητής που κατέχει τον επιμεριστικό τεμαχισμό θα τεμαχίσει κάθε μία πίτσα σε πέντε ίσα μέρη και θα κατανείμει κάθε ένα από αυτά σε καθένα από τα πέντε άτομα. Επιπλέον, θα έχει συνειδητοποιήσει ότι το μερίδιο του κάθε ατόμου αν επαναληφθεί πέντε φορές θα δώσει το όλο, δηλ. τις τρεις πίτσες (Lee & Shin, 2013· Steffe, κ.ά., 2014).

Συχνά επικρατεί η αντίληψη ότι οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων θα πρέπει να προηγούνται του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων ως πιο απλές. Ωστόσο, σύμφωνα με τα παραπάνω οι Hackenberg, Norton και Wright (2016) επισημαίνουν ότι βασικές

ενέργειες και ιδέες του πολλαπλασιασμού των κλασμάτων εμπλέκονται στην πρόσθεση. Αν θέλουμε να εκφράσουμε το αποτέλεσμα της πρόσθεσης ή της αφαίρεσης κλασμάτων με ένα κλάσμα θα πρέπει να τα μετρήσουμε με ίσου μεγέθους μέρη. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να προσθέσουμε το $\frac{1}{2}$ μιας μονάδας και το $\frac{1}{3}$ της ίδιας ή μιας άλλης ισομεγέθους μονάδας, θα πρέπει να τα μετρήσουμε με το ίδιο μικρότερο κλάσμα που η επανάληψή του θα μπορεί να δώσει και το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{1}{3}$. Θα πρέπει δηλαδή να βρεθεί μια κοινή μονάδα μέτρησης αυτών των δύο κλασμάτων, ώστε να μπορέσουν να εκφραστούν με βάση αυτή τη κοινή μονάδα και να προστεθούν. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η κοινή μονάδα μέτρησης είναι το $\frac{1}{6}$, καθώς και το $\frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{2}$ μπορούν να μετρηθούν με το $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ ή αλλιώς $\frac{1}{2}$. Το $\frac{1}{3}$ μπορεί να μετρηθεί με δύο $\frac{1}{6}$, γιατί το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{3}$ είναι το $\frac{1}{6}$ (πολλαπλασιασμός κλασμάτων). Με βάση αυτή την κοινή μονάδα μέτρησης (το $\frac{1}{6}$), η πρόσθεση $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ γίνεται $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Σύμφωνα με τους ίδιους ερευνητές, μία δραστηριότητα που θα πρέπει να προηγείται της πρόσθεσης των κλασμάτων είναι το να φτιάχνουν οι μαθητές διάφορα κλάσματα στην ίδια μπάρα. Για παράδειγμα, «Μπορείς να κάνεις μία μπάρα που είναι $\frac{3}{3}$, $\frac{21}{21}$;» ή αντίστοιχα αλλά σε πιο ανεβασμένο επίπεδο «Πώς θα μπορούσες να κάνεις αυτή την $\frac{2}{2}$ μπάρα $\frac{3}{3}$;». Η δυσκολία εδώ σε σχέση με το προηγούμενο έγκειται στο ότι ο δοσμένος αριθμός των μερών δεν είναι παράγοντας του ζητούμενου αριθμού μερών της μπάρας (το 2 δεν διαιρεί το 3). Για να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα, θα πρέπει το κάθε μέρος ($\frac{1}{2}$) της μπάρας να χωριστεί σε τρία ίσα μικρότερα μέρη (άρα θα προκύψουν έξι μικρότερα μέρη) και να αναδιοργανωθούν αυτά τα μικρότερα μέρη σε τρία ίσα μέρη που το καθένα θα περιλαμβάνει δύο μικρότερα μέρη. Τέτοια προβλήματα σύμφωνα με τους Hackenberg, κ.ά. (2016) εξασκούν τα παιδιά στο να βρίσκουν μια κοινή μονάδα μέτρησης μεταξύ διαφόρων κλασμάτων.

Συμπερασματικά, στην παρούσα εργασία θα αναλυθεί η προσπάθεια ενίσχυσης της κατανόησης της πρόσθεσης κλασμάτων μέσα από την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο, ένα κλάσμα που μετράει ποσότητα και δείχνει την σχέση του μεριδίου – όλου. Βασική ενέργεια σε αυτή την διαδικασία όπως αναδείχθηκε από την παραπάνω επισκόπηση της βιβλιογραφίας θα είναι ο επαναλαμβανόμενος τεμαχισμός (recursive partitioning).

Κεφάλαιο 3: Σχολιασμός σχολικών εγχειριδίων Ε΄ και ΣΤ΄ δημοτικού

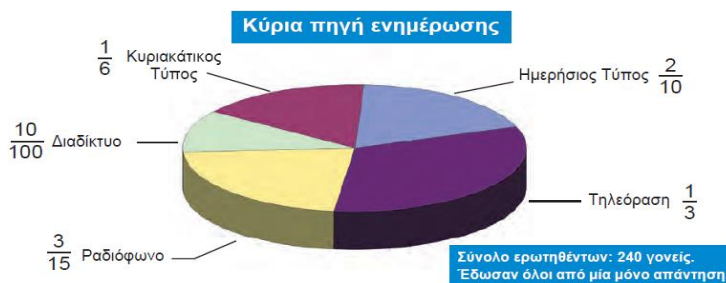
Στο παρόν κεφάλαιο θα επιχειρηθεί μία κριτική θεώρηση των σχολικών εγχειριδίων της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης του δημοτικού σχετικά με την πρόσθεση των κλασμάτων, με σκοπό να εξεταστεί κατά πόσο παρέχονται ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύξουν τις ενέργειες και τις έννοιες που θεωρούνται απαραίτητες για το συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα (όπως αυτές προσδιορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο).

Τα κλάσματα εισάγονται στα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών στην Γ΄ τάξη. Η πρόσθεση των κλασμάτων παρουσιάζεται για πρώτη φορά στο εγχειρίδιο της Ε΄ τάξης. Η μαθήτριά της ΣΤ΄ τάξης που συμμετείχε στο διδακτικό πείραμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας είχε διδαχθεί κατά το σχολικό έτος 2017-2018 το εγχειρίδιο των Μαθηματικών της Ε΄ που αντικαταστάθηκε το τρέχον σχολικό έτος 2018-2019 από νέο εγχειρίδιο. Για τον λόγο αυτό, η κριτική θεώρηση που θα ακολουθήσει θα αφορά πρωτίστως τα σχολικά εγχειρίδια της ΣΤ΄ τάξης, ενώ θα παρουσιαστεί συνοπτικά και ενδεικτικά το κεφάλαιο της πρόσθεσης κλασμάτων του εγχειριδίου της Ε΄ τάξης του σχολικού έτους 2017- 2018.

3.1 Σχολικά εγχειρίδια Ε΄ δημοτικού

3.1.1 Βιβλίο του Μαθητή Ε΄ δημοτικού

Το κεφάλαιο της πρόσθεσης κλασμάτων του Βιβλίου του μαθητή (Κακαδιάρης, Μπελίτσου, Στεφανίδης & Χρονοπούλου, 2016α) ξεκινά με μία εισαγωγική δραστηριότητα κατά την οποία οι μαθητές καλούνται να ερμηνεύσουν δεδομένα ενός γραφήματος σε μορφή τρισδιάστατης πίτας (Εικόνα 1) και μέσω αυτών να συγκρίνουν, να διατάζουν και να προσθέσουν κλάσματα υπό την ερμηνεία του κλάσματος ως τελεστή. Υπενθυμίζεται πως αυτή είναι η πρώτη επαφή των μαθητών με την πρόσθεση των κλασμάτων στο δημοτικό σχολείο.



Εικόνα 1. Δραστηριότητα- Ανακάλυψη (Β.Μ., σελ. 100)

Οι μαθητές παροτρύνονται είτε να απλοποιήσουν όσα κλάσματα μπορούν και κατόπιν μέσω της εύρεσης του ελάχιστου κοινού πολλαπλάσιου (Ε.Κ.Π.) να τα κάνουν ομώνυμα και να τα προσθέσουν είτε να μετατρέψουν τα κλάσματα σε ποσοστά και να τα προσθέσουν (Εικόνα 2).

1η στρατηγική

Απλοποιώ τα κλάσματα $\frac{1}{6}$, $\frac{10}{100}$, $\frac{3}{15}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{1}{3}$ για να έχω όσο γίνεται μικρότερους παρονομαστές:

$$\bullet \frac{1}{6} \bullet \frac{10}{100} = \frac{\dots}{10} \bullet \frac{3}{15} = \frac{\dots}{5} \bullet \frac{2}{10} = \frac{\dots}{5} \bullet \frac{1}{3}$$

Και στη συνέχεια τα κάνω ομώνυμα (με ίδιους παρονομαστές):

- Με παρονομαστή 240:

Κ.Π. (6, 10, 5, 3) = 240

$$\frac{1}{6} = \frac{\dots}{240}, \frac{10}{100} = \frac{\dots}{240}, \frac{3}{15} = \frac{\dots}{240}, \frac{1}{3} = \frac{\dots}{240}$$



- Με παρονομαστή 60:

Κ.Π. (6, 10, 5, 3) = 60

- Με παρονομαστή 30:

Ε.Κ.Π. (6, 10, 5, 3) = 30

- Με παρονομαστή ... :

Κ.Π. (6, 10, 5, 3) = ...

2η στρατηγική

Θα μπορούσαμε να εκφράσουμε υπολογίζοντας με ακρίβεια τα αποτελέσματα της έρευνας με ποσοστό επί τοις εκατό;

Έχω μια ιδέα! Αν μετατρέψουμε τα κλάσματα στα ισοδύναμά τους με παρονομαστή το 100, ουσιαστικά θα έχουμε εκφράσει τα αποτελέσματα της έρευνας σε %.



Συζητάμε στην τάξη την ιδέα του Οδυσσέα. Υπάρχει άλλος τρόπος;

- Καταγράφουμε τα αποτελέσματα, αφού πρώτα ελέγξουμε με .

$$\bullet \frac{1}{6} = \dots\% \text{ ή } \dots\% \bullet \frac{1}{10} = \dots\% \text{ ή } \dots\% \bullet \frac{1}{5} = \dots\% \text{ ή } \dots\%$$

$$\bullet \frac{2}{10} = \dots\% \text{ ή } \dots\% \bullet \frac{1}{3} = \dots\% \text{ ή } \dots\%$$

Εικόνα 2. Στρατηγικές επίλυσης της Δραστηριότητας-Ανακάλυψη (Β.Μ., σελ. 101)

Το κεφάλαιο κλείνει με το Συμπέρασμα στο οποίο περιγράφεται ο αλγόριθμος της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των κλασμάτων (Εικόνα 3).

Συμπέρασμα

Για να **συγκρίνω**, να **προσθέσω** ή να **αφαιρέσω** ετερόνυμα κλάσματα, τα μετατρέπω σε **ομώνυμα**, δηλαδή σε **ισοδύναμα κλάσματα με κοινό παρονομαστή**. Ο παρονομαστής των ομώνυμων κλασμάτων μπορεί να είναι **οποιοδήποτε κοινό πολλαπλάσιο των παρονομαστών των αρχικών κλασμάτων ή άλλων που είναι ισοδύναμά τους**. Αν χρησιμοποιήσω το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών, θα έχω τα ομώνυμα κλάσματα με τους πιο μικρούς όρους.

Εικόνα 3. Συμπέρασμα (Β.Μ., σελ. 101)

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, τα παιδιά εξασκήθηκαν περισσότερο στον χειρισμό συμβόλων παρά ποσοτήτων. Δεν είχαν την ευκαιρία να εμπλακούν σε ενέργειες τεμαχισμού και πολύ

περισσότερο επαναλαμβανόμενου τεμαχισμού που όπως αναφέρθηκε πιο πάνω θεωρούνται βασικές για την κατανόηση της πρόσθεσης (Izsák, Tilemma & Tunç-Pekkan, 2008).

3.1.2 Τετράδιο εργασιών Ε΄ δημοτικού

Η πρώτη δραστηριότητα στο τετράδιο εργασιών (Κακαδιάρης, Μπελίτσου, Στεφανίδης & Χρονοπούλου, 2016β) παρουσιάζει την πρόσθεση του $\frac{1}{2}$ με το $\frac{1}{5}$ με τη χρήση ήδη τεμαχισμένων ράβδων, αποσκοπώντας στο να καταφέρουν τα παιδιά να δουν ότι το $\frac{1}{5}$ ισούται με $\frac{2}{10}$ και το $\frac{1}{2}$ με $\frac{5}{10}$, συνεπώς το αποτέλεσμα της πρόσθεσης θα είναι $\frac{7}{10}$ (Εικόνα 4). Ωστόσο, όπως έχει ήδη σημειωθεί, ο εκπαιδευτικός δεν μπορεί να προσδοκά από τους μαθητές του να δουν στα δοσμένα μοντέλα τις μαθηματικές έννοιες που ακόμα δεν έχουν κατασκευάσει. Επιπλέον, η ΡΜΕ έχει τονίσει τη σημασία των μοντέλων όταν κατασκευάζονται από τα ίδια τα παιδιά για να εξηγήσουν τον δικό τους μαθηματικό συλλογισμό και όχι τον συλλογισμό του δασκάλου (Gravemeijer, 1997· Van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

α. Παρατηρώ και συμπληρώνω.

- Το κόκκινο μέρος της ταινίας είναι:
 -  1 ολόκληρο
 -  $\frac{1}{2}$ του ολόκληρου
 -  $\frac{1}{5}$ του ολόκληρου

Βρίσκω

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \dots\dots\dots$ του ολόκληρου.
- Χρωματίζω το αποτέλεσμα


Εικόνα 4. Δραστηριότητα α (Τ. Ε., γ' τεύχος, σελ.26)

Σε επόμενη δραστηριότητα οι μαθητές καλούνται να βρουν την συνολική ποσότητα πίτσας που θα καταναλώσουν τα παιδιά αν το καθένα πάρει ένα κλασματικό μέρος της πίτσας (Εικόνα 5). Η συγκεκριμένη δραστηριότητα θα μπορούσε να ωθήσει τα παιδιά σε τεμαχισμό, τουλάχιστον για

να εκφράσουν την ποσότητα που θα φάει ο καθένας ξεχωριστά, ωστόσο ίσως να χρειαζόταν μεγαλύτερη εμπλοκή με δραστηριότητες τεμαχισμού για να καταφέρουν να εκφράσουν με κοινή μονάδα μέτρησης ή αλλιώς με κοινό τεμαχισμό τα τρία κλάσματα, ειδικά εφόσον μέχρι και πριν από αυτή τη δραστηριότητα τους παρέχονταν σχήματα που ήταν ήδη τεμαχισμένα.



Αγοράσαμε 3 ίδιες πίτσες. Ο Γιώργος έφαγε το $\frac{1}{4}$ από την πρώτη, $\frac{1}{5}$ από τη δεύτερη και το $\frac{1}{8}$ από την τρίτη. Πόση πίτσα έφαγε συνολικά ο Γιώργος;

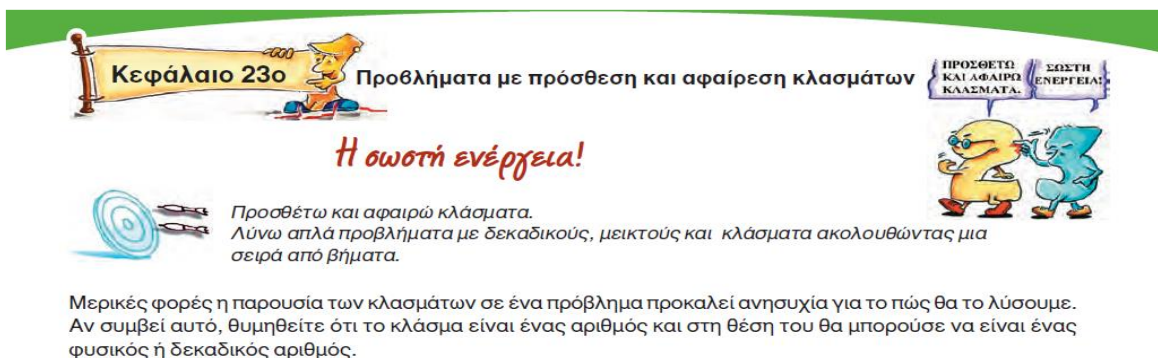
Εικόνα 5. Δραστηριότητα γ (Τ.Ε., γ' τεύχος, σελ.26)

Οι επόμενες δραστηριότητες του κεφαλαίου έχουν να κάνουν με τον χειρισμό των κλασμάτων ως αριθμούς. Αυτό βέβαια αποτελεί και απώτερο σκοπό της διδασκαλίας των κλασμάτων, ωστόσο έχει μεγαλύτερη εκπαιδευτική αξία όταν η διαδικασία της μάθησης ξεκινά από τον συλλογισμό των παιδιών και βασίζεται στις δικές τους ενέργειες οι οποίες μέσα στο κατάλληλο πλαίσιο οδηγούν προοδευτικά σε μια μαθηματικοποίηση της γνώσης (Gravemeijer, 2004).

3.2 Σχολικά εγχειρίδια ΣΤ' δημοτικού

3.2.1 Βιβλίο μαθητή ΣΤ' δημοτικού

Το Κεφάλαιο 23 του βιβλίου του μαθητή (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2017α) αναφέρεται στην πρόσθεση και την αφαίρεση των κλασμάτων. Το κεφάλαιο ξεκινά υπενθυμίζοντας στους μαθητές ότι σε προβλήματα όπου εμφανίζονται κλάσματα, δεκαδικοί αριθμοί ή φυσικοί αριθμοί και χρειάζεται να εκτελεστεί κάποια αριθμητική πράξη, οι μαθητές μπορούν να μετατρέψουν όλους τους αριθμούς σε μία μορφή ώστε να τους χειριστούν αριθμητικά (Εικόνα 6).



Εικόνα 6. Εισαγωγή κεφαλαίου 23 (Β.Μ., σελ. 53)

Στη συνέχεια η πρώτη δραστηριότητα ζητά από τους μαθητές να υπολογίσουν την ενέργεια που παράχθηκε από υδροηλεκτρικούς σταθμούς παρουσιάζοντας τα δεδομένα σε μορφή κλάσματος και δεκαδικού αριθμού (Εικόνα 7), αναμένοντας σύμφωνα με το βιβλίο του δασκάλου (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2017β) να μετατρέψουν όλους τους εμπλεκόμενους αριθμούς σε κλάσματα και να συνειδητοποιήσουν ότι για να τους προσθέσουν θα πρέπει να είναι τα κλάσματα ομώνυμα, δηλαδή να έχουν μια κοινή μονάδα μέτρησης.

Δραστηριότητα 1η

Διαβάζοντας στην ιστοσελίδα της Δ.Ε.Η. (www.dei.gr) στοιχεία σχετικά με την παραγωγή ενέργειας για το 2003 διαπιστώσαμε ότι η ενέργεια που παράχθηκε στη χώρα μας από ανανεώσιμες πηγές ήταν πολύ μικρή. Παρακάτω παρουσιάζονται τα στοιχεία για την ενέργεια που παράχθηκε το 2003 σε θερμοηλεκτρικούς σταθμούς:

- Το 0,15 της ενέργειας παράχθηκε με τη χρήση πετρελαίου.
- Τα $\frac{9}{20}$ παράχθηκαν με τη χρήση λιγνίτη.
- Το $\frac{1}{4}$ παράχθηκε με τη χρήση φυσικού αερίου.
- Η υπόλοιπη ενέργεια παράχθηκε σε υδροηλεκτρικούς σταθμούς.
- Είναι εύκολο να υπολογίσουμε αμέσως αυτό το μέρος της ενέργειας;
- Τι πρέπει να κάνουμε πριν προχωρήσουμε στις πράξεις για την επίλυση του προβλήματος;



Εικόνα 7. Δραστηριότητα 1 (Β.Μ., σελ. 53)

Ωστόσο με βάση την αρχική πρόταση του βιβλίου σύμφωνα με την οποία μπορεί κάποιος να μετατρέψει το κλάσμα σε δεκαδικό αριθμό για να διευκολυνθεί στις αριθμητικές πράξεις, οι μαθητές θα μπορούσαν να μετατρέψουν τα κλάσματα $\frac{9}{20}$ και $\frac{1}{4}$ σε 0,45 και 0,25 αντίστοιχα και να μην προκύψει έτσι πρόσθεση κλασμάτων, αλλά δεκαδικών αριθμών.

Το συγκεκριμένο προβληματικό πλαίσιο αφενός δεν είναι εύκολο να σχηματοποιηθεί αφετέρου δεν προωθεί καμία ενέργεια τεμαχισμού που όπως έχει ήδη αναφερθεί είναι σημαντική για την κατανόηση της πρόσθεσης, ούτε δημιουργεί κάποια ανάγκη για την εύρεση κοινής μονάδας μέτρησης ή αλλιώς κοινού τεμαχισμού. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι αυτές οι ενέργειες δεν είχαν προωθηθεί ούτε στα εγχειρίδια της Ε΄ δημοτικού.

Η δραστηριότητα που ακολουθεί (Εικόνα 8) ζητά από τους μαθητές να βρουν αν υπάρχει διαθέσιμος χώρος στον κήπο για να φυτέψουν φράουλες. Ουσιαστικά θα πρέπει πρώτα να

μετατρέψουν τον δεκαδικό (0,1) σε κλάσμα ($\frac{1}{10}$), να το προσθέσουν μαζί με τα άλλα δύο κλάσματα ($\frac{1}{4}$ και $\frac{2}{5}$) κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα και να αφαιρέσουν το αποτέλεσμα από τη μονάδα. Κατόπιν θα πρέπει στο ήδη τεμαχισμένο σε είκοσι ίσα τετραγωνάκια σχήμα να χρωματίσουν το μέρος που θα καλυφθεί από τις φράουλες και από τα άλλα φυτά. Τα παιδιά ξεκινούν δηλαδή από τον αλγόριθμο της πρόσθεσης και στην συνέχεια εμπλέκονται με το σχήμα το οποίο παρουσιάζεται έτοιμο και μάλιστα τεμαχισμένο με βάση την κοινή μονάδα μέτρησης των κλασμάτων ($\frac{1}{20}$) χωρίς να δίνεται η ευκαιρία στα παιδιά να ενεργήσουν με σχήματα και να αναστοχαστούν πάνω σε αυτές τις ενέργειές τους.

Δραστηριότητα 2η

Τα παιδιά θέλησαν να φυτέψουν στον κήπο του σχολείου φράουλες (ωριμάζουν στις αρχές Ιουνίου) και ρώτησαν αν υπάρχει καθόλου ελεύθερος χώρος. Ο δάσκαλος τους είπε: «Σωστή ενέργεια! Λοιπόν, το 0,1 του παρτεριού έχει γαρίφαλα, το $\frac{1}{4}$ έχει μαργαρίτες και τα $\frac{2}{5}$ έχουν γκαζόν. Αν υπάρχει ελεύθερος χώρος, είναι δικός σας!».

- Πώς θα βρούμε αν υπάρχει χώρος;.....
- Γράψτε με τη σειρά τις ενέργειες που πρέπει να κάνουν τα παιδιά για να βρουν τη λύση στο πρόβλημά τους:.....
- Κάντε τις πράξεις. Μετά χωρίστε το σχεδιάγραμμα του παρτεριού σε όσα μέρη πρέπει και βάψτε με κίτρινο το μέρος με τις μαργαρίτες, με μοβ το μέρος με τα γαρίφαλα, με πράσινο το μέρος με το γκαζόν και με κόκκινο το μέρος με τις φράουλες.



Εικόνα 8. Δραστηριότητα 2 (B.M., σελ.53)

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της πρόσθεσης και της αφαίρεσης ως φυσικό επακόλουθο των προηγούμενων δραστηριοτήτων (Εικόνα 9). Βέβαια χωρίς κάποιος να γνωρίζει τον αλγόριθμο από πριν είναι αμφίβολο κατά πόσο θα μπορούσε να ανταποκριθεί σε αυτές.

Οι δραστηριότητες αυτές μας βοηθούν να καταλήξουμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

Πρόσθεση και αφαίρεση κλασμάτων

Για να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε ετερόνυμα κλάσματα, τα μετατρέπουμε πρώτα σε ομώνυμα.

Προσθέτουμε ομώνυμα κλάσματα προσθέτοντας τους αριθμητές τους.

Αφαιρούμε ομώνυμα κλάσματα αφαιρώντας τους αριθμητές τους.

Παραδείγματα

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{15}{20} + \frac{4}{20}$$

$$\frac{11}{18} + \frac{2}{18} = \frac{11+2}{18} = \frac{13}{18}$$

$$\frac{11}{18} - \frac{2}{18} = \frac{11-2}{18} = \frac{9}{18}$$

Όταν πρέπει να λύσω ένα πρόβλημα που έχει κλάσματα ή μεικτούς αριθμούς:

- ✓ Ελέγχω αν οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
- ✓ Αν δεν είναι στην ίδια μορφή, τους μετατρέπω σε αριθμούς μιας μορφής.
- ✓ Αποφασίζω ποιες πράξεις πρέπει να κάνω.
- ✓ Εκτελώ τις πράξεις και ελέγχω το αποτέλεσμα.

Εικόνα 9. Ο αλγόριθμος της πρόσθεσης και της αφαίρεσης κλασμάτων (B.M., σελ. 54)

Στο τέλος του κεφαλαίου παρουσιάζονται δύο εφαρμογές (Εικόνα 10). Στην 1^η Εφαρμογή, τα παιδιά καθοδηγούνται σε απλή συμπλήρωση κενών κάνοντας αριθμητικές πράξεις με τους αριθμητές και τους παρονομαστές των κλασμάτων χωρίς να δίνεται έμφαση στο τρόπο που συµμεταβάλλονται οι ποσότητες. Η λύση της δραστηριότητας δίνεται σχεδόν έτοιμη με τα αριθμητικά σύμβολα να μην έχουν προέλθει από ενέργειες των παιδιών. Αντίστοιχα στην 2^η Εφαρμογή η λύση παρουσιάζεται έτοιμη χωρίς περιθώρια ενέργειας και σκέψης για τους μαθητές.



Εφαρμογή 1η

Η Μυρτώ κούρεψε τα $\frac{3}{5}$ του γκαζόν και ο αδερφός της ο Λευτέρης το $\frac{1}{4}$.

Κούρεψαν όλο το γκαζόν; Αν όχι, πόσο έμεινε;

Λύση

- ✓ Οι αριθμοί του προβλήματος είναι στην ίδια μορφή.
- ✓ Αρκεί λοιπόν να τους προσθέσουμε για να δούμε αν το κλάσμα που θα προκύψει θα έχει αριθμητή και παρονομαστή ίσους. Αν ναι, τότε θα είναι ίσο με τη μονάδα, δηλαδή θα έχουν κουρέψει όλο το γκαζόν. Αν όχι, θα αφαιρέσουμε αυτό που θα βρούμε από το κλάσμα «μονάδα» για να βρούμε τη διαφορά τους:
- ✓ $\frac{3}{5} + \frac{1}{4}$ Ε.Κ.Π. (5, 4) = 20. Άρα: $\frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{12}{20} + \frac{5}{20} = \frac{17}{20}$. Άρα: $\frac{17}{20}$.

Απάντηση: Κούρεψαν τα $\frac{17}{20}$ του γκαζόν και μένουν ακόμη $\frac{3}{20}$ για κούρεμα.



Εφαρμογή 2η

Ένα δοχείο χωράει 3 λίτρα. Κάποια στιγμή έχει $1\frac{3}{4}$ λίτρα νερό. Πόσο νερό χρειάζεται ακόμα για να γεμίσει;

Λύση

- ✓ Οι αριθμοί του προβλήματος δεν είναι στην ίδια μορφή. Θα τους μετατρέψουμε σε κλάσματα ομώνυμα, με παρονομαστή το 4. Έτσι: $3 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$ και $1\frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$
- ✓ Τώρα θα αφαιρέσουμε το νερό που υπάρχει από τη συνολική χωρητικότητα του δοχείου για να βρούμε τη διαφορά τους: $\frac{12}{4} - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$. Δηλαδή $\frac{4}{4} + \frac{1}{4}$ ή $1\frac{1}{4}$.

Απάντηση: Χρειάζεται ακόμη $1\frac{1}{4}$ λίτρα νερού για να γεμίσει.



Εικόνα 10. Εφαρμογές 1 και 2 (Β.Μ., σελ.54)

3.2.1 Τετράδιο εργασιών ΣΤ΄ δημοτικού

Στην 1^η άσκηση του τετραδίου εργασιών (Κασσώτη, Κλιάπης & Οικονόμου, 2017γ) το κλάσμα ερμηνεύεται ως μέτρο της απόστασης από ένα σημείο (Εικόνα 11).

Άσκηση 1η

Να βρεις το συνολικό μήκος των δύο διαδρόμων στους οποίους μπορούν να κινούνται τα παιδιά ανάμεσα στα θρανία της ΣΤ΄ τάξης όταν ο ένας είναι $3\frac{5}{8}$ μ. και ο άλλος $1\frac{7}{12}$ μ.

Εικόνα 11. Άσκηση 1^η (Τ.Ε., β΄ τεύχος, σελ. 15)

Η 2^η άσκηση καλεί τους μαθητές να λύσουν μία αριθμητική παράσταση που δεν εμπίπτει σε κάποιο προβληματικό πλαίσιο (Εικόνα 12). Παρότι αυτός είναι και ο απώτερος σκοπός της διδασκαλίας των κλασμάτων, δηλαδή ο χειρισμός τους ως αριθμούς, όταν η μάθηση δεν έχει ξεκινήσει από τον συλλογισμό και τις ενέργειες των παιδιών είναι αμφίβολο το κατά πόσο θα επιτευχθεί αυτός ο στόχος με ένα τρόπο που να σέβεται τις δυνατότητες των παιδιών και να έχει νόημα για αυτά.

Άσκηση 2η

Να υπολογίσεις την παρακάτω αριθμητική παράσταση:

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{7}{8} + \frac{11}{12} + \frac{7}{24}\right) - 2\frac{2}{6}$$



Εικόνα 12. Άσκηση 2^η (Τ.Ε., β' τεύχος, σελ. 15)

Τα προβλήματα 2 και 3 ζητούν από τους μαθητές να συγκρίνουν και να διατάξουν κλάσματα (Εικόνες 13, 14).

Πρόβλημα 2ο

Σε πολυσύχναστο χιονοδρομικό κέντρο μια συγκεκριμένη μέρα τα $\frac{4}{15}$ των αθλούμενων είναι γυναίκες, τα $\frac{2}{5}$ παιδιά και το $\frac{1}{3}$ άντρες. Οι γυναίκες, οι άντρες ή τα παιδιά ήταν περισσότερα;

Λύση

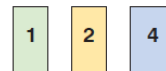


Απάντηση:.....

Εικόνα 13. Πρόβλημα 2 (Τ.Ε., β' τεύχος, σελ. 15)

Πρόβλημα 3ο

Κόψτε 3 κάρτες με τους αριθμούς 1, 2 και 4 όπως αυτές που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα.



Χρησιμοποιώντας όλες τις κάρτες και το μολύβι σου για γραμμή του κλάσματος επάνω στο θρανίο να σχηματίσετε με την ομάδα σας τα εξής:

- Το μικρότερο δυνατό κλάσμα.....
- Το μεγαλύτερο δυνατό κλάσμα.....
- Ένα κλάσμα ισοδύναμο με το $\frac{1}{3}$
- Ένα κλάσμα ισοδύναμο με 3

Εικόνα 14. Πρόβλημα 3 (Τ.Ε., β' τεύχος, σελ. 16)

Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τη «Δραστηριότητα με επεκτάσεις» κατά την οποία τα παιδιά καλούνται να προσθέσουν και να αφαιρέσουν καθώς χειρίζονται το κλάσμα ως τελεστή (Εικόνα 15).

Δραστηριότητα με επεκτάσεις: «Επιλογή ψαριών για το ενυδρείο» _____

Σε μια εκπαιδευτική εκδρομή τα παιδιά της Στ' τάξης επισκέφτηκαν ένα κατάστημα με κατοικίδια ζώα και πουλιά. Μόλις μπήκαν στο κατάστημα ο ιδιοκτήτης τους είπε:

— Παιδιά, βοηθήστε με. Πριν από λίγο ήρθε ένας πελάτης, ο οποίος μου παρήγγειλε να του ετοιμάσω ένα πλήρες ενυδρείο και μου άφησε έναν κατάλογο με τα ψάρια που θέλει.

— Πού είναι η δυσκολία; ρώτησαν τα παιδιά.

— Να, ετοίμασα το ενυδρείο, αλλά, όταν πήγαν να διαλέξω τα ψάρια, απελπίστηκα.

— Εδώ είναι το χαρτί με τα ψάρια που θέλει ο πελάτης, απάντησε ο καταστηματάρχης.

Τα παιδιά ξαφνιάστηκαν όταν είδαν τον κατάλογο. Είναι δυνατόν να ζητάει ο πελάτης κλάσμα ψαριού; Αφού το σκέφτηκαν λίγο, ο Κώστας, ο Θωμάς και ο Δημήτρης ρώτησαν:

— Πόσα ψάρια χωράει το ενυδρείο που παρήγγειλε ο πελάτης;

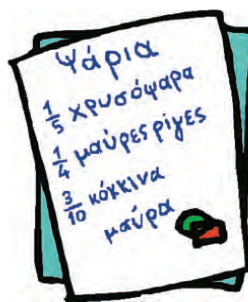
— Είκοσι απάντησε, ο καταστηματάρχης.

— Το βρήκαμε! είπαν τότε οι τρεις φίλοι.

Τι βρήκαν;

Συμπλήρωσε τον πίνακα:

Είδος ψαριού	Κλάσμα στο χαρτί	Αριθμός ψαριών	Τι σκέφτηκα για να το βρω
Χρυσόψαρο			
Ψάρι με μαύρες ρίγες			
Κόκκινο ψάρι			
Μαύρο ψάρι			



Εικόνα 15. Δραστηριότητα με επεκτάσεις (Τ.Ε., β' τεύχος, σελ.16)

Αξίζει να σημειωθεί ότι με αφορμή μια δραστηριότητα όπως η παραπάνω και μέσα από μία οργανωμένη αλληλουχία αντίστοιχων δραστηριοτήτων, οι μαθητές θα είχαν την ευκαιρία να αντιληφθούν ότι η πρόσθεση κλασματικών αριθμών αναφέρεται σε προσθέσεις που είναι ανεξάρτητες από την μονάδα αναφοράς. Μια τέτοια γενίκευση θα αποτελούσε και το αποκορύφωμα της γνώσης όσον αφορά στην πρόσθεση των κλασμάτων.

Λαμβάνοντας υπόψη τα εγχειρίδια και των δύο τάξεων εικάζεται ότι οι ενέργειες που αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως απαραίτητες για την κατανόηση της πρόσθεσης δεν έχουν ενισχυθεί. Επιπλέον, δεν δίνονται ευκαιρίες στα παιδιά ώστε να αναπτύξουν τον μαθηματικό τους συλλογισμό, αλλά ωθούνται στην απομνημόνευση κανόνων και αλγορίθμων που δεν έχουν νόημα για αυτά. Η παρούσα διπλωματική αποτελεί μία προσπάθεια να σχεδιαστεί μια πορεία μάθησης της πρόσθεσης κλασμάτων που θα βασίζεται στον συλλογισμό του παιδιού ώστε να καταφέρει να νοηματοδοτήσει τον αλγόριθμο που, όπως θα αναφερθεί και παρακάτω, μέχρι πρότινος εκτελούσε μηχανικά.

Κεφάλαιο 4: Μεθοδολογικό πλαίσιο

4.1 Πείραμα σχεδιασμού

Μία μεθοδολογία που τα τελευταία χρόνια κερδίζει έδαφος στον κλάδο της εκπαίδευσης είναι το πείραμα σχεδιασμού. Το πείραμα σχεδιασμού επιλέχθηκε καθώς είναι μια μεθοδολογία συμβατή με τις αρχές των θεωριών του κονστρουκτιβισμού και της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης (Cobb, 2003· Confrey & Kazak, 2006· Gravemeijer, 2004) και αποτελεί μέσο σύνδεσης της θεωρίας και της πράξης. Ο βασικός σκοπός του είναι να αναπτυχθούν και να ελεγχθούν τοπικές θεωρίες (σε συγκεκριμένη περιοχή των Μαθηματικών π.χ. κλάσματα) σχετικά με τον τρόπο με τον οποίο συντελείται η μάθηση και με τα μέσα που μπορούν να την υποστηρίξουν (Cobb, 2003· Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003).

Η μάθηση αποτελεί ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο φαινόμενο που επηρεάζεται και καθορίζεται από ποικίλους παράγοντες. Τα πειράματα σχεδιασμού σε μια προσπάθεια κατανόησης αυτού του φαινομένου, μελετούν και οργανώνουν συγκεκριμένους τύπους μάθησης καθώς και τα μέσα υποστήριξής τους. Η οργάνωση αυτή υπόκειται σε συνεχή έλεγχο και αναστοχασμό (Cobb, κ.ά., 2003). Μέσα από τις θεωρίες που παράγονται στα πλαίσιά τους προκύπτουν κάποια μοτίβα συλλογισμού των μαθητών καθώς και πιθανά μέσα στήριξής τους. Ο στόχος των πειραμάτων σχεδιασμού δεν είναι να αποδειχθεί ότι κάτι δουλεύει αλλά γιατί δουλεύει και κάτω από ποιες συνθήκες (Cobb, κ.ά., 2003· McKenney & Reeves, 2012).

Τα πειράματα σχεδιασμού μπορεί να πραγματοποιούνται με διάφορες μορφές. Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας το πείραμα είχε τη μορφή «ένας-προς-έναν» όπου ένας ερευνητής-εκπαιδευτικός αλληλεπιδρά με έναν μαθητή.

Ακολούθως παρουσιάζονται τα βασικά χαρακτηριστικά και τα στάδια ενός πειράματος σχεδιασμού.

4.1.1 Τα χαρακτηριστικά ενός πειράματος σχεδιασμού

Σύμφωνα με τους Cobb, κ.ά. (2003) τα πειράματα σχεδιασμού διακρίνονται από πέντε αλληλοσυνδεόμενα χαρακτηριστικά όπως θα περιγραφούν παρακάτω:

Σκοπός: Το πρώτο βασικό χαρακτηριστικό αναφέρεται στο γεγονός ότι τα πειράματα σχεδιασμού στοχεύουν στην ανάπτυξη θεωριών τόσο για τον τρόπο με τον οποίο αναπτύσσεται η μάθηση όσο και για τα μέσα που την υποστηρίζουν (Cobb, 2003· Gravemeijer & Cobb, 2013). Ως μέσα, αναφέρονται τα εποπτικά υλικά, οι εκπαιδευτικές πρακτικές καθώς και οι πολιτικές του εκάστοτε εκπαιδευτικού συστήματος.

Παρεμβατική φύση: Το δεύτερο χαρακτηριστικό αναφέρεται στην παρεμβατική φύση των πειραμάτων σχεδιασμού. Τα πειράματα σχεδιασμού επεμβαίνουν στις υπάρχουσες διδακτικές πρακτικές καθώς δοκιμάζουν εκπαιδευτικές καινοτομίες προκειμένου να αναδυθούν νέοι τύποι μάθησης και μέσα υποστήριξής τους που θα συμβάλλουν στην ευρύτερη βελτίωση της μάθησης (Cobb, κ.ά., 2003). Σε βάθος χρόνου τα πειράματα σχεδιασμού προσφέρουν εμπειρισματομένες λύσεις σε προβλήματα που προκύπτουν στη διαδικασία της μάθησης (McKenney & Reeves, 2012).

Αναμενόμενη (prospective) και αναστοχαστική (reflective) όψη: Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, στα πειράματα σχεδιασμού δημιουργούνται και ταυτόχρονα υπόκεινται σε έλεγχο νέες θεωρίες. Η αναμενόμενη όψη (prospective) αναφέρεται στην υποθετική πορεία μάθησης που αναμένεται και τα εκτιμώμενα μέσα υποστήριξής της. Η αναστοχαστική (reflective) όψη αναφέρεται στο γεγονός ότι κατά την διεξαγωγή του πειράματος, η αρχική υποθετική πορεία μπορεί να τροποποιηθεί και να δημιουργηθεί νέα υποθετική πορεία η οποία θα εξεταστεί και πιθανόν θα τροποποιηθεί εκ νέου (Cobb, κ.ά., 2003).

Κυκλικός χαρακτήρας: Το τέταρτο χαρακτηριστικό ουσιαστικά προκύπτει από τις δύο προηγούμενες όψεις και είναι ο κυκλικός χαρακτήρας. Αρχικά γίνονται υποθέσεις που στην συνέχεια εξετάζονται και με την συλλογή νέων δεδομένων, τροποποιούνται και οδηγούν σε νέες υποθέσεις αναδεικνύοντας μία κυκλικότητα στις διαδικασίες (McKenney & Reeves, 2012).

Πραγματικές ρίζες: Ο σκοπός των πειραμάτων σχεδιασμού όπως προαναφέρθηκε είναι να αναπτυχθούν κάποιες τοπικές θεωρίες που αφορούν συγκεκριμένη περιοχή των Μαθηματικών και αναφέρονται σε συγκεκριμένες συνθήκες. Οι θεωρίες αυτές ξεκινούν από την πράξη και έχουν δυνατότητα γενίκευσης (Cobb, κ.ά., 2003).

4.1.2 Τα στάδια ενός πειράματος σχεδιασμού

Εκτός από τα παραπάνω πέντε χαρακτηριστικά ενός πειράματος σχεδιασμού είναι σημαντικό να γίνει αναφορά και στα τρία στάδια από τα οποία αποτελείται ένα τέτοιο πείραμα.

Προετοιμασία πειράματος:

Το πρώτο στάδιο ενός πειράματος αφορά την προετοιμασία του. Κατά την προετοιμασία, καθορίζεται ο γενικός θεωρητικός σκοπός του πειράματος. Στη συνέχεια, προσδιορίζονται τα πιθανά τελικά σημεία της πορείας μάθησης καθώς και τα σημεία αφετηρίας, είτε αξιοποιώντας την προγενέστερη σχετική βιβλιογραφία είτε διενεργώντας πιλοτική έρευνα (Gravemeijer & Cobb, 2013). Τα τελικά σημεία αφορούν το πού θέλει ή πού φαντάζεται η ερευνητική ομάδα ότι θα φτάσει η πορεία της μάθησης. Τα σημεία αφετηρίας ουσιαστικά αναφέρονται στις τωρινές κατανοήσεις ή παρανοήσεις των μαθητών, δείχνουν δηλαδή το πού βρίσκεται ο μαθητής εκείνη τη στιγμή. Αν υπάρχει σχετική βιβλιογραφία, οι ερευνητές μπορούν να ορίζουν πιθανά σημεία αφετηρίας, αλλιώς μπορούν να διεξάγουν πιλοτική έρευνα για να καταφέρουν να τα προσδιορίσουν. Τέλος, αφού καθοριστούν όλα τα παραπάνω, οι ερευνητές θα πρέπει να ορίσουν κάποιες ελέγξιμες εικασίες βάσει των οποίων θα καταφέρουν να διαπιστώσουν πιθανές αλλαγές στον τρόπο σκέψης των μαθητών και να προσδιορίσουν τα μέσα που στήριζαν αυτές τις αλλαγές. Ουσιαστικά οι ερευνητές σχεδιάζουν μια υποθετική πορεία μέσω της οποίας θα προβλεφθούν οι ενέργειες των μαθητών και η συνάφεια αυτών με το επιδιωκόμενο μαθησιακό αποτέλεσμα (Gravemeijer & Cobb, 2013· Simon, 1995).

Διεξαγωγή πειράματος:

Στο στάδιο της διεξαγωγής, η ερευνητική ομάδα ελέγχει συνεχώς τις υποθέσεις της και τις τροποποιεί όταν αυτό κρίνεται απαραίτητο. Είναι πολύ σημαντικό να συζητούν τα μέλη της συνεχώς για την πορεία μάθησης και τα μέσα στήριξής της ώστε να έχουν όσο γίνεται μια καθαρή εικόνα αυτών, με στόχο να την κατανοήσουν. Γι' αυτό κρίνονται απαραίτητες οι συχνές συναντήσεις μεταξύ των μελών στις οποίες συζητούνται και εξετάζονται όσα έχουν διαδραματιστεί στην διάρκεια του πειράματος και όσα πρόκειται να διαδραματιστούν στο μέλλον. Σε αυτή τη φάση επίσης οι ερευνητές αποκτούν βαθύτερη γνώση του φαινομένου των Μαθηματικών που εξετάζουν. Η λεπτομερής καταγραφή του πειράματος βοηθάει τα άτομα να διατηρούν ένα αρχείο στο οποίο μπορούν να ανατρέχουν καθώς σχεδιάζουν τις επόμενες

συναντήσεις και αναστοχάζονται τις προηγούμενες (Cobb, κ.ά., 2003· Gravemeijer & Cobb, 2013).

Αναστοχαστική ανάλυση:

Στην φάση του αναστοχασμού, οι ερευνητές, εκθέτοντας τις διαφορετικές απόψεις τους, αναλύουν το τι έχει συμβεί στο πείραμα σχεδιασμού και εξηγούν τον τρόπο που εξελίχθηκε η μάθηση και πώς τα μέσα υποστήριξης ενθάρρυναν αυτή τη μάθηση. Σε αυτό το σημείο γίνεται μια προσπάθεια ώστε «να ενταχθεί το πείραμα σχεδιασμού σε ένα ευρύτερο θεωρητικό πλαίσιο» (Cobb, κ.ά., 2003: 13).

Κεφάλαιο 5: Ανάλυση του πειράματος σχεδιασμού

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν τα στοιχεία του πειράματος σχεδιασμού που διεξήχθη στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής και θα αναλυθούν τα τρία στάδια του πειράματος (προετοιμασία, διεξαγωγή και αναστοχαστική ανάλυση).

Το εν λόγω διδακτικό πείραμα πραγματοποιήθηκε με τη βοήθεια μίας μαθήτριας ΣΤ΄ τάξης ενός δημοτικού σχολείου της Αθήνας. Οι οχτώ συναντήσεις έγιναν στο χρονικό διάστημα από 19 Φεβρουαρίου 2019 μέχρι και 10 Ιουνίου 2019 και η διάρκειά τους ήταν περίπου 30 λεπτά η καθεμία. Κατά τη διάρκεια των συναντήσεων με την μαθήτρια ένα μέλος της ερευνητικής ομάδας αλληλεπιδρούσε με το παιδί και ένα άλλο μέλος κατέγραφε σε μορφή χειρόγραφων σημειώσεων τα όσα διαδραματίζονταν. Τα δεδομένα που συλλέχτηκαν προήλθαν από τις σημειώσεις της ερευνητικής ομάδας, από τα σχήματα και τις απαντήσεις της μαθήτριας στα φύλλα εργασίας που της παραδόθηκαν και από απομαγνητοφώνηση.

Στην συνέχεια, παρουσιάζονται αναλυτικότερα τα στοιχεία του εν λόγω διδακτικού πειράματος.

5.1 Προετοιμασία πειράματος

5.1.1 Γενικός σκοπός διδακτικού πειράματος

Ο γενικός σκοπός του διδακτικού πειράματος ήταν να καταφέρει η μαθήτρια να προσεγγίσει βασιζόμενη στις δικές της δυνατότητες τον αλγόριθμο της πρόσθεσης ετερόνυμων κλασμάτων ή σε περίπτωση που τον κατείχε ήδη να εμβαθύνει ώστε οι πράξεις που εκτελεί να έχουν κάποιο νόημα για εκείνη, καθώς επίσης και να προσδιοριστούν τα μέσα που θα υποστήριζαν αυτή την προσπάθειά της.

5.1.2 Ειδικοί στόχοι

Πιο συγκεκριμένα, για να καταφέρει να προσεγγίσει τον αλγόριθμο της πρόσθεσης θεωρήθηκε ότι είναι σημαντικό, αρχικά να προκύψει και κατόπιν να ενισχυθεί η ανάγκη ύπαρξης μιας κοινής μονάδας μέτρησης μεταξύ των κλασματικών ποσοτήτων που εκφράζουν τα προστιθέμενα κλάσματα. Με άλλα λόγια ο στόχος ήταν να συνειδητοποιήσει η μαθήτρια ότι θα πρέπει να βρεθεί ένας κοινός τεμαχισμός που θα επιτρέψει σε δύο ετερόνυμα κλάσματα να μετρηθούν και να

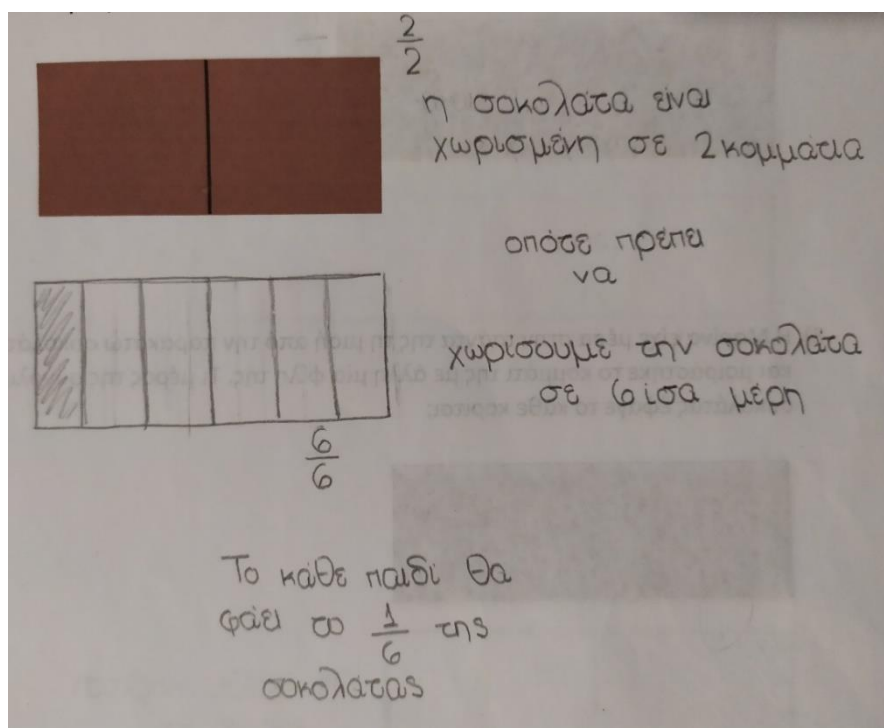
προστεθούν. Για παράδειγμα, προκειμένου να προσθέσει κάποιος το $\frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{4}$, θα πρέπει να βρει μία κοινή μονάδα μέτρησης, ένα κλάσμα δηλαδή του οποίου η επανάληψη θα μπορεί να δώσει και το $\frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{4}$. Στην συγκεκριμένη περίπτωση αυτό το κλάσμα είναι το $\frac{1}{12}$.

5.1.3 Τεκμηρίωση των σημείων αφετηρίας

Προκειμένου να καθοριστούν τα σημεία αφετηρίας της μαθήτριας δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο που περιελάμβανε ασκήσεις και προβλήματα σχετικά με την πρόσθεση των κλασμάτων σε ολόκληρη την ΣΤ' τάξη (βλ. Παράρτημα).

Κατόπιν αξιολόγησης των απαντήσεων στο ερωτηματολόγιο, διαπιστώθηκε ότι η μαθήτρια μπορούσε να εκτελέσει με επιτυχία τον αλγόριθμο της πρόσθεσης κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα π.χ. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Σε πρόβλημα όπου της ζητήθηκε να προσδιοριστεί πόση πίτσα έφαγαν συνολικά δύο παιδιά, έχοντας φάει ο ένας το $\frac{1}{2}$ και ο άλλος το $\frac{1}{4}$ βρήκε μέσω του αλγόριθμου ότι θα φάνε μαζί $\frac{3}{4}$ χωρίς ωστόσο να καταφέρει να το δείξει με ένα σχήμα. Επιπλέον, σε προβλήματα που απαιτούσαν τον τεμαχισμό ενός τεμαχισμού, που αποτελεί μία κεντρική δραστηριότητα για την πρόσθεση, δεν επέδειξε μεγάλη ευχέρεια. Για παράδειγμα, της ζητήθηκε να μοιράσει δίκαια σε έξι φίλους μία σοκολάτα που ήταν ήδη χωρισμένη σε 2 κομμάτια. Ο τεμαχισμός του τεμαχισμού θα περιελάμβανε τον χωρισμό του κάθε μισού της σοκολάτας είτε σε έξι ίσα μέρη είτε σε τρία. Οπότε ο κάθε φίλος θα έτρωγε τα $\frac{2}{12}$ ή αλλιώς το $\frac{1}{6}$. Ωστόσο η μαθήτρια σχεδίασε ένα σχήμα ίσο με το αρχικό και το χώρισε σε έξι ίσα τμήματα και έγραψε ότι $\frac{1}{6}$ είναι η ποσότητα που θα φάει ο καθένας (Εικόνα 16). Η ενέργεια αυτή μας δίνει πληροφορίες για το γεγονός ότι μπορεί να τεμαχίσει μία ποσότητα σε ίσα μέρη και να προσδιορίσει τη σχέση του ενός κομματιού με το όλο, όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν μας δίνει πληροφορίες για το αν θα μπορούσε να προσδιορίσει τη σχέση μιας κλασματικής μονάδας μιας άλλης κλασματικής

μονάδας σε σχέση με το όλο (ή αλλιώς το αποτέλεσμα ενός τεμαχισμού του τεμαχισμού σε σχέση με το όλο).



Εικόνα 16. Τεμαχισμός σχήματος σε έξι ίσα μέρη

5.1.4 Υποθετική πορεία μάθησης

Η αρχική εκτίμηση ήταν πώς μέσα από την εμπλοκή με την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο θα μπορούσε να ενισχυθεί η ανάγκη για μια κοινή μονάδα μέτρησης ή αλλιώς για έναν κοινό τεμαχισμό τεμαχισμού ώστε να μπορέσει να συνδυάσει δύο κλασματικές ποσότητες και να εκφράσει το αποτέλεσμά τους σε σχέση με το όλο (Hackenberg, Norton & Wright, 2016). Δόθηκε έμφαση στα ορθογώνια σχήματα και τη μέτρηση του μήκους ή της επιφάνειάς τους καθώς θεωρήθηκε ότι θα μπορούν να τεμαχιστούν πιο εύκολα με διάφορους τρόπους σε ίσα μέρη συγκριτικά με ένα κυκλικό σχήμα.

5.2 Διεξαγωγή πειράματος

5.2.1 Α΄ Φάση: 1^η συνάντηση

Στις πρώτες δύο συναντήσεις ο στόχος ήταν να οριστικοποιηθούν τα σημεία αφετηρίας βάσει των απαντήσεων του παιδιού στο ερωτηματολόγιο που είχε δοθεί αρχικά.

Βάσει της απάντησής της στο πρόβλημα του ερωτηματολογίου: «Έξι φίλοι μοιράζονται δίκαια την παρακάτω σοκολάτα. Πόσο θα φάει ο καθένας;» (δινόταν μία ορθογώνια σοκολάτα $\frac{2}{2}$) (βλ. Εικόνα 16), δόθηκε αντίστοιχο πρόβλημα στην πρώτη συνάντηση με τη διαφορά ότι της ζητήθηκε να δείξει πάνω στο σχήμα μιας $\frac{3}{3}$ σοκολάτας πόσο θα φάει καθένας από έξι φίλους. Η μαθήτρια αντί να φτιάξει μία ξεχωριστή σοκολάτα και να την χωρίσει σε έξι ίσα μέρη όπως είχε κάνει στο ερωτηματολόγιο τεμάχισε το κάθε $\frac{1}{3}$ στην μέση παράγοντας έτσι έξι κομμάτια. Στο απόσπασμα που ακολουθεί¹, η μαθήτρια δικαιολογεί αυτή την ενέργειά της.

M: Η σοκολάτα είναι κομμένη σε τρία μέρη. Κάθε κομμάτι πρέπει να το κόψουμε άλλη μια φορά στη μέση (Εικόνα 17).

E: Και πόσο θα φάει το κάθε παιδί;

M: Το $\frac{1}{6}$.



Εικόνα 17. Τεμαχισμός κάθε $\frac{1}{3}$ σε δύο ίσα μέρη

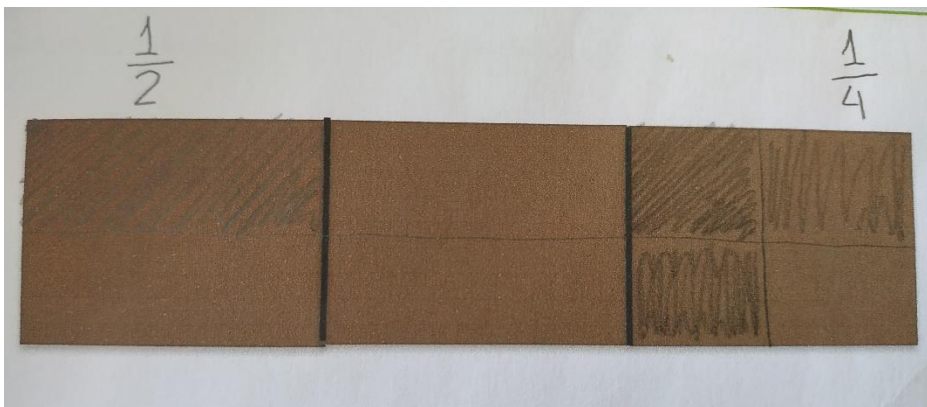
¹ Όπου αναγράφεται το «E» είναι τα λόγια της ερευνήτριας και όπου αναγράφεται το «M» είναι τα λόγια της μαθήτριας. Μέσα στις παρενθέσεις των αποσπασμάτων αναγράφονται οι ενέργειες που συνοδεύουν τα λόγια της μαθήτριας.

Από αυτή την απάντηση, γίνεται σαφές ότι έλαβε υπόψη της τους αρχικούς χωρισμούς της σοκολάτας και κατάφερε να τεμαχίσει εκ νέου κάθε $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας στη μέση για να προσδιορίσει το μερίδιο του ενός εκ των έξι φίλων.

Στην συνέχεια θέλοντας να εξακριβωθεί κατά πόσο θα μπορούσε να βρει μια κοινή μονάδα μέτρησης μεταξύ δύο κλασμάτων που ο παρονομαστής του ενός δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του παρονομαστή του άλλου (π.χ. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$) δόθηκε το εξής πρόβλημα:

«Τέσσερις φίλοι μοιράζονται δίκαια την παρακάτω σοκολάτα. Μπορείς να δείξεις στο σχήμα τι μέρος της σοκολάτας θα φάει το κάθε παιδί, αν την μοιραστούν δίκαια;»

Η μαθήτρια ουσιαστικά τεμάχισε τα δύο κομμάτια του $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας στη μέση και το τελευταίο κομμάτι $\frac{1}{3}$ το τεμάχισε σε 4 ίσα μέρη (Εικόνα 18). Με αυτό τον τρόπο ο κάθε φίλος θα έπαιρνε το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{3}$ δηλαδή θα έτρωγε $\frac{1}{6} + \frac{1}{12}$.



Εικόνα 18. Προσπάθεια δίκαιης μοιρασιάς μιας $\frac{3}{3}$ σοκολάτας σε τέσσερα άτομα

Ε: Και πόσο θα φάει το κάθε παιδί;

Μ: Θα φάει ενάμισι.

Ε: Τι μέρος ολόκληρης της σοκολάτας θα φάει; Τι μέρος από όλη τη σοκολάτα είναι αυτά τα δύο κομμάτια;

Μ: Αυτό το κομμάτι θα μπορούσε να είναι το $\frac{1}{2}$ (εννοεί το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{3}$).

Ε: Το $\frac{1}{2}$ από όλη τη σοκολάτα;

Μ: Ναι.

Διακρίνεται, λοιπόν μία δυσκολία ως προς την σχέση που έχει το κάθε κομμάτι με το όλο. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην συγκεκριμένη προβληματική κατάσταση προκύπτει ότι ο κάθε φίλος θα φάει το $\frac{1}{6}$ και το $\frac{1}{12}$ της σοκολάτας. Για να προσδιοριστεί η σχέση που έχουν αυτά τα δύο κομμάτια μαζί με το όλο (είναι τα $\frac{3}{12}$ όλης της σοκολάτας) θα πρέπει να βρεθεί μια κοινή μονάδα μέτρησης ή αλλιώς ένας κοινός τεμαχισμός (το $\frac{1}{12}$). Πιθανόν η δυσκολία της να προσδιορίσει τη σχέση των μικρών κομματιών με το όλο να οφείλεται στην αντίληψη της για το κλάσμα μόνον ως μέρος όλου μη δίνοντας σημασία στο μέγεθος του μέρους το οποίο καθορίζεται πάντα σε σχέση με κάποια συγκεκριμένη μονάδα αναφοράς. Για αυτό και προσδιόρισε το $\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{3}$ ως $\frac{1}{4}$ όλης της σοκολάτας, καθώς έβλεπε ότι είναι το ένα από τέσσερα ίσα κομμάτια, χωρίς να δίνει σημασία στη σχέση τους με ολόκληρη τη σοκολάτα. Θεωρήθηκε ότι ίσως ο τεμαχισμός των κομματιών που έχει κάνει θα την δυσκόλευε να προσδιορίσει τη σχέση τους με το όλο. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία, σε επόμενη συνάντηση δόθηκε παρόμοιο πρόβλημα με διαφορετικά νούμερα που δεν θα επέτρεπαν έναν τέτοιο τεμαχισμό (όπως αυτόν που έκανε η μαθήτρια στην Εικόνα 18).

Η παραπάνω δυσκολία έγινε αντιληπτή από το ερωτηματολόγιο και την απάντηση της μαθήτριας σε πρόβλημα που ζητούσε να προσδιοριστεί πόσο έφαγε καθεμία από τις δύο φίλες που μοιράστηκαν μισή σοκολάτα. Αντί για την απάντηση $\frac{1}{4}$ η μαθήτρια απάντησε ότι κάθε φίλη θα φάει το $\frac{1}{2}$ της συνολικής σοκολάτας. Ωστόσο πριν εξαχθεί κάποιο συμπέρασμα έπρεπε να διαπιστωθεί αν η λανθασμένη απάντησή της οφειλόταν σε πιθανή δυσνόητη διατύπωση του παραπάνω προβλήματος. Για να εξεταστεί και να ξεπεραστεί η δυσκολία σχετικά με την σχέση που έχει το αποτέλεσμα κάποιου τεμαχισμού ή τεμαχισμών με το όλο, δόθηκε μία σειρά προβλημάτων.

«Η Μαρίνα έκοψε τη μισή από την παρακάτω σοκολάτα και τη μοιράστηκε με τη φίλη της τη Γιώτα. Τι μέρος της συνολικής σοκολάτας θα φάει το κάθε κορίτσι;»

Για να προσδιοριστεί η σχέση του κομματιού του κάθε κοριτσιού, ο τεμαχισμός που έγινε στο πρώτο μισό της σοκολάτας θα έπρεπε να επεκταθεί και στην υπόλοιπη (επαναλαμβανόμενος τεμαχισμός) (Steffe, 2010β). Η μαθήτρια κατάφερε να ορίσει τη σχέση μεταξύ του μεριδίου του κάθε παιδιού και του όλου, δηλαδή της σοκολάτας ως εξής:



Εικόνα 19. Προσδιορισμός του $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{2}$ ως $\frac{1}{4}$.

E: Μπορείς να μου δείξεις στο σχήμα που έφτιαξες ποιο κομμάτι θα φάει η Γιώτα και τι μέρος της σοκολάτας είναι;

M: Το μισό.

E: Το μισό από όλη τη σοκολάτα;

M: Όχι. Από αυτό εδώ (δείχνει την μισή σοκολάτα).

E: Πόσες φορές πρέπει να πάρουμε αυτό το κομμάτι για να μας δώσει όλη τη σοκολάτα;

M: Τέσσερις φορές.

E: Πώς το ξέρεις;

M: Γιατί αν ξαναχωρίσουμε και την άλλη μισή σοκολάτα σε δύο ίσα μέρη θα είναι

συνολικά τέσσερα κομμάτια, άρα θα φάει το $\frac{1}{4}$.

E: Πόσο έφαγαν και τα δύο κορίτσια μαζί;

M: Τα $\frac{2}{4}$.

Η μαθήτρια επεκτείνοντας τον τεμαχισμό και στην υπόλοιπη σοκολάτα κατάφερε να προσδιορίσει τη σχέση του κομματιού του κάθε κοριτσιού με το όλο ($\frac{1}{4}$). Όμοια έπραξε και σε

επόμενα προβλήματα με τη διαφορά ότι η μισή σοκολάτα μοιραζόταν όχι σε δύο αλλά σε τρία και τέσσερα άτομα. Η ερώτηση «Πόσες φορές θα πρέπει να πάρουμε αυτό το κομμάτι για να μας δώσει το όλο;» φάνηκε πως την βοηθούσε να προσδιορίσει τη σχέση του κάθε κομματιού με το όλο. Μάλιστα στα τελευταία προβλήματα αυτής της σειράς προσδιόριζε το μέγεθος των κομματιών σε σχέση με το όλο χωρίς να χρειάζεται να τεμαχίσει και τα υπόλοιπα κομμάτια. Μπορούσε να προβλέψει το αποτέλεσμα αυτών των ενεργειών από πριν.

Δεδομένης της επιτυχίας της σε αυτά τα προβλήματα και λίγο πριν ολοκληρωθεί η 1^η συνάντηση, θεωρήθηκε ότι θα μπορούσε να στραφεί η προσοχή της και πάλι στο πρόβλημα της Εικόνας 18, μήπως καταφέρει και προσδιορίσει τη σχέση των μικρών κομματιών με το όλο. Πράγματι, με την ερώτηση «Πόσες φορές αν επαναλάβω αυτό το κομμάτι θα έχω όλη τη σοκολάτα;» κατάφερε να προσδιορίσει τα κομμάτια $\frac{1}{6}$ και $\frac{1}{12}$. Για να προσδιορίσει όμως πόσο έφαγε ο καθένας εκτέλεσε τον γνωστό της αλγόριθμο $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12}$, χωρίς να μπορεί ωστόσο να δείξει στο σχήμα το αποτέλεσμα του αλγόριθμου ή να εξηγήσει πώς κατέληξε στο αποτέλεσμα αυτό.

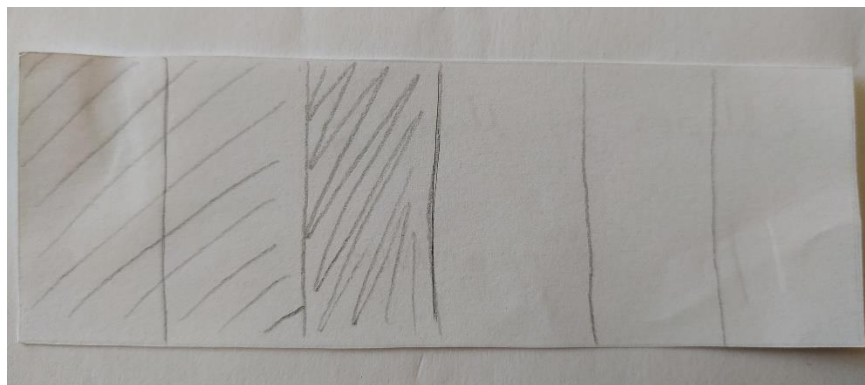
5.2.2 Α΄ Φάση: 2^η συνάντηση

Στην συγκεκριμένη συνάντηση επιχειρήθηκε να προσδιοριστεί η κατανόησή της σε προβλήματα πρόσθεσης με τους παρονομαστές να μην είναι ο ένας ακέραιο πολλαπλάσιο του άλλου.

« Ο Μάριος θέλει να φάει το $\frac{1}{3}$ από μία ορθογώνια πίτσα και η Μαρίνα θέλει να φάει το $\frac{1}{4}$ της ίδιας πίτσας. Σε πόσα κομμάτια πρέπει να κόψουν την πίτσα; Πόση πίτσα θα φάνε και οι δύο μαζί; »

Η μαθήτρια αρχικά έκοψε τη σοκολάτα σε τρία ίσα μέρη για να δείξει το κομμάτι που έφαγε ο Μάριος (το $\frac{1}{3}$). Στην συνέχεια έκοψε το κάθε κομμάτι στη μέση και επειδή είχε γραμμοσκιάσει τα $\frac{2}{6}$ ως το μερίδιο του Μάριου, της έμειναν τέσσερα κομμάτια ($\frac{4}{6}$) (Εικόνα 20). Πιθανόν, λόγω της έντονης αντίληψής της για το κλάσμα ως μέρος-όλο υπέθεσε ότι η Μαρίνα θα φάει το ένα από τα υπολειπόμενα τέσσερα κομμάτια. Δηλαδή αντί για το $\frac{1}{4}$ όλης της σοκολάτας, η μαθήτρια γραμμοσκίασε το $\frac{1}{4}$ της υπόλοιπης, δηλαδή το $\frac{1}{6}$ της ολόκληρης ως το μερίδιο της Μαρίνας.

Επιπλέον προσδιόρισε το πόσο έχουν φάει και τα δύο παιδιά λέγοντας ότι θα έχουν φάει τα $\frac{3}{6}$. Η απάντησή της αυτή αναδεικνύει για ακόμη μία φορά την αντίληψή της για το κλάσμα ως «τόσα από τόσα» (Thompson & Saldanha, 2003).



Εικόνα 20. Προσπάθεια προσδιορισμού του $\frac{1}{4}$ και του $\frac{1}{3}$ μιας πίτσας

M: Ο Μάριος θα φάει τόσο (δείχνει το $\frac{1}{3}$) και η Μαρίνα αν κόψει αυτά που περισσεύουν στη μέση, θα έχει φάει το $\frac{1}{4}$. Και μαζί έχουν φάει τα $\frac{3}{6}$, γιατί αν είχε κόψει και ο Μάριος το κομμάτι του στη μέση (το $\frac{1}{3}$) θα είχε φάει ουσιαστικά $\frac{2}{6}$ (Εικόνα 20).

E: Αυτό το κομμάτι που μου έδειξες ότι θα φάει η Μαρίνα αν το πάρουμε τέσσερις φορές θα μας δώσει όλη την πίτσα;

M: Όχι ακριβώς. Αν το πάρω έξι φορές θα μου κάνει όλη την πίτσα.

E: Άρα τι μέρος της πίτσας είναι; Το $\frac{1}{4}$;

M: Όχι, είναι το $\frac{1}{6}$ της πίτσας.

Σε αυτό το σημείο φαίνεται ότι δεν κατάφερε να βρει έναν κοινό τεμαχισμό που θα δημιουργήσει την κοινή μονάδα μέτρησης του $\frac{1}{3}$ και του $\frac{1}{4}$ δηλαδή το $\frac{1}{12}$.

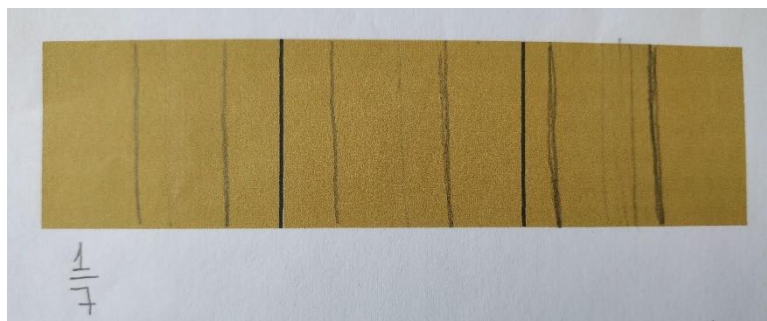
Από τις απαντήσεις της μαθήτριας στις δύο πρώτες συναντήσεις μαζί της φάνηκε πως παρότι γνώριζε τον αλγόριθμο της πρόσθεσης δεν μπορούσε να δείξει ή να εξηγήσει τα βήματα που ακολουθούσε ή να αναπαραστήσει το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε. Επιπροσθέτως, επισημάνθηκε μία δυσκολία στο να βρει έναν κοινό τεμαχισμό (μία κοινή μονάδα μέτρησης) για κλάσματα με παρονομαστές που ο ένας δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του άλλου. Αυτή η δυσκολία της ήταν και το επίκεντρο των επόμενων συναντήσεων. Δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στην ενίσχυση της ενέργειας του επαναλαμβανόμενου τεμαχισμού που θεωρείται και αναγκαία για την κατανόηση της πρόσθεσης των κλασμάτων (Izsák, Tilemma & Tunç-Pekkan, 2008).

5.2.3 Β' Φάση: 3^η συνάντηση

Στην Β' Φάση της διεξαγωγής του διδακτικού αυτού πειράματος, ο κυρίαρχος στόχος ήταν να ενθαρρυνθεί η ενέργεια του επαναλαμβανόμενου τεμαχισμού ώστε να καταφέρει η μαθήτρια να βρει έναν κοινό τεμαχισμό (κοινή μονάδα μέτρησης) για κλάσματα με παρονομαστές που ο ένας δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του άλλου. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν προβλήματα όπως τα παρακάτω:

« Επτά φίλοι μοιράζονται δίκαια την παρακάτω μπάρα δημητριακών. Μπορείς να δείξεις τι μέρος της μπάρας θα φάει ο καθένας; »

Η μαθήτρια φαίνεται ότι αγνόησε τους τεμαχισμούς του σχήματος και χώρισε την μπάρα σε επτά ίσα μέρη χωρίς να δίνει σημασία στις γραμμές των $\frac{3}{3}$, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 21.

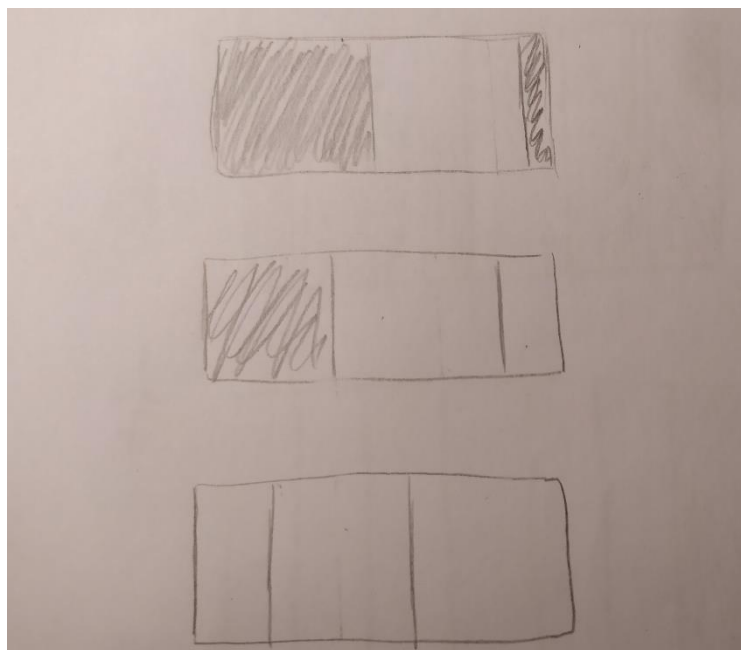


Εικόνα 21. Αδυναμία προσδιορισμού του $\frac{1}{7}$ σε $\frac{3}{3}$ μπάρα

Δεδομένης της αδυναμίας της να λάβει υπόψη της τα σημάδια του $\frac{3}{3}$, δόθηκε το επόμενο πρόβλημα με σκοπό να την ωθήσει σε επαναλαμβανόμενο τεμαχισμό.

«Επτά παιδιά μοιράζονται δίκαια τρεις ίσες σοκολάτες. Πόσο θα φάει το κάθε παιδί;»

Η μαθήτριά ζωγράφισε τρεις σοκολάτες και προσπάθησε να χωρίσει και τις τρεις σε επτά κομμάτια και όχι την κάθε μία σε επτά όπως αναμενόταν (Εικόνα 22).



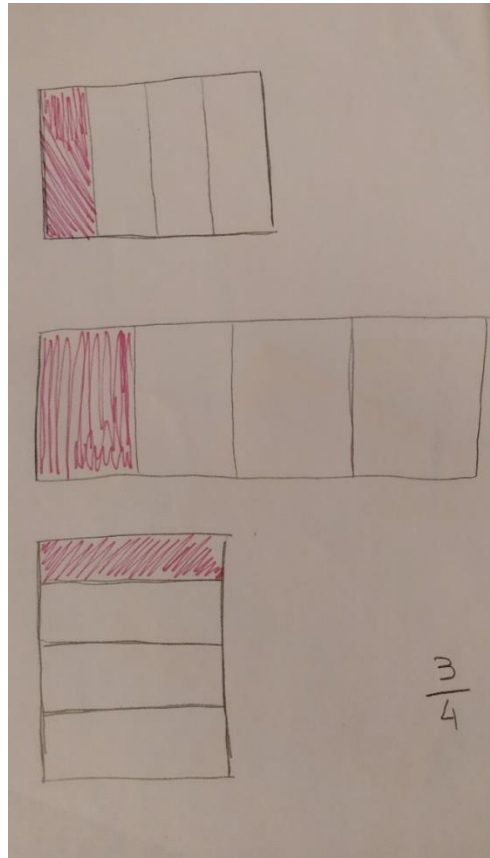
Εικόνα 22. Προσπάθεια προσδιορισμού του $\frac{1}{7}$ τριών σοκολατών

5.2.4 Β' Φάση: 4^η συνάντηση

Το πλαίσιο του προηγούμενου προβλήματος φαίνεται πως δεν την ώθησε σε έναν επαναλαμβανόμενο τεμαχισμό, γι' αυτό σε αυτή την συνάντηση δόθηκε ένα προβληματικό πλαίσιο πάλι με τρεις σοκολάτες, αυτή τη φορά όμως άνισες μεταξύ τους. Σύμφωνα με τους Steffe, Liss και Lee (2014) τέτοια προβλήματα μπορούν να ενισχύσουν την δραστηριότητα του επιμεριστικού τεμαχισμού (distributive partitioning).

«Τέσσερις φίλοι θέλουν να μοιραστούν δίκαια τρεις ορθογώνιες πίτσες διαφορετικού μεγέθους. Πόση πίτσα θα φάει το κάθε παιδί;»

Η μαθήτρια τεμάχισε κάθε πίτσα σε τέσσερα ίσα μέρη και χρωμάτισε το $\frac{1}{4}$ κάθε πίτσας ως το μερίδιο που θα φάει το κάθε παιδί (Εικόνα 23).



Εικόνα 23. Τρεις άνισες πίτσες μοιράζονται σε τέσσερα παιδιά

Ε: Πόση πίτσα θα φάει το κάθε παιδί;

Μ: Τα $\frac{3}{12}$. Γιατί όλα τα κομμάτια μαζί είναι δώδεκα και κάθε παιδί πρέπει να φάει τρία

κομμάτια από όλες τις πίτσες.

Ε: Πόσες φορές πρέπει να επαναλάβω το μερίδιο του ενός παιδιού για να μου δώσει όλες τις πίτσες;

Μ: Τέσσερις φορές.

Ε: Πολύ ωραία. Άρα τι μέρος από όλες τις πίτσες θα φάει ο καθένας;

Μ: Τρία κομμάτια θα φάει. Τα $\frac{3}{4}$;

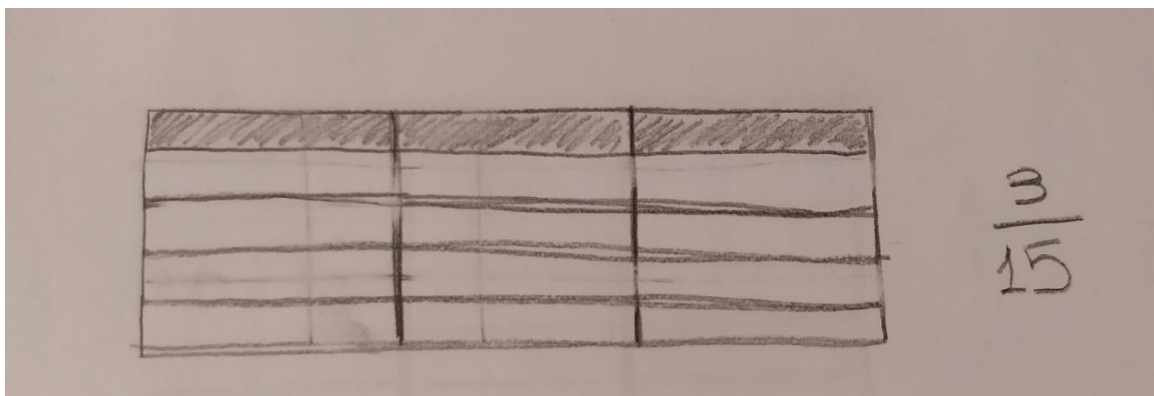
Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι κατάφερε να τεμαχίσει κάθε πίτσα σε τέσσερα ίσα κομμάτια, ωστόσο δεν κατάφερε να προσδιορίσει το μερίδιο του κάθε παιδιού ως το $\frac{1}{4}$ της συνολικής ποσότητας πίτσας. Η απάντησή της $\frac{3}{12}$ θα ήταν σωστή μόνο στην περίπτωση που οι πίτσες είχαν το ίδιο μέγεθος.

5.2.5 Β΄ Φάση: 5^η συνάντηση

Μετέπειτα, με στόχο την ενίσχυση της δραστηριότητας του τεμαχισμού ενός τεμαχισμού, και θέλοντας να μην αγνοήσει τα σημάδια ενός υπάρχοντος τεμαχισμού δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα:

«Τρεις φίλοι θέλουν να μοιραστούν δίκαια μια σοκολάτα και την κόβουν σε τρία κομμάτια. Όμως πριν προλάβουν να τη φάνε, έρχονται άλλοι δύο φίλοι τους και θέλουν κι εκείνοι να φάνε από τη σοκολάτα. Σε πόσα κομμάτια θα πρέπει να κόψουν τη σοκολάτα για να την μοιραστούν δίκαια και πόσο θα φάει το κάθε παιδί;»

Η μαθήτρια έφτιαξε μία ορθογώνια σοκολάτα τεμαχίζοντάς την οριζόντια σε πέντε ίσα μέρη και κάθετα σε τρία ίσα μέρη, παράγοντας έτσι δεκαπέντε κομμάτια από τα οποία γραμμοσκίασε τα τρία ως το μερίδιο που αναλογεί σε κάθε παιδί (Εικόνα 24).



Εικόνα 24. Σταυρωτός τεμαχισμός για τον προσδιορισμό του $\frac{1}{5}$ του $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας

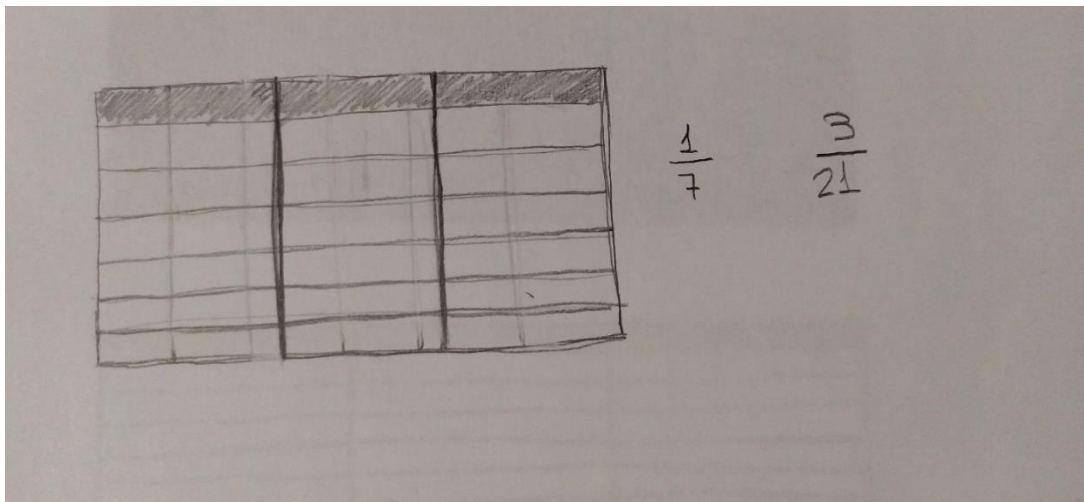
Η συγκεκριμένη ενέργειά της θεωρείται μία εξέλιξη στον συντονισμό ετερόνυμων κλασμάτων στην ίδια μπάρα. Ουσιαστικά κατάφερε να συντονίσει το $\frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{5}$ δημιουργώντας μια κοινή

μονάδα μέτρησης που είναι το $\frac{1}{15}$ με οριζόντιο και κάθετο τεμαχισμό. Ωστόσο, σε αρχικό στάδιο δεν κατάφερε να προσδιορίσει ότι τα $\frac{3}{15}$ που θα φάει ο καθένας είναι και το $\frac{1}{5}$ όλης της σοκολάτας.

Στη συνέχεια ασχολήθηκε με ένα αντίστοιχο πρόβλημα όπου:

«Τρεις φίλοι μοιράζονται δίκαια μια σοκολάτα. Όμως πριν προλάβουν να την φάνε έρχονται άλλοι τέσσερις φίλοι που θέλουν κι αυτοί να φάνε από τη σοκολάτα. Σε πόσα κομμάτια θα πρέπει να την χωρίσουν για να φάνε όλοι το ίδιο και πόσο θα φάει ο καθένας;»

Ενεργώντας αντίστοιχα με το προηγούμενο πρόβλημα, τεμάχισε τη σοκολάτα που έφτιαξε πρώτα οριζόντια σε επτά ίσα μέρη και στη συνέχεια κάθετα σε τρία ίσα μέρη, παράγοντας είκοσι ένα ίσα κομμάτια από τα οποία γραμμοσκίασε τα τρία ως το μερίδιο που αναλογεί σε κάθε παιδί (Εικόνα 25). Η εξέλιξη σε σχέση με το προηγούμενο πρόβλημα ήταν ότι προσδιόρισε το μερίδιο του κάθε παιδιού ως το $\frac{1}{7}$ της συνολικής σοκολάτας.



Εικόνα 25. Προσδιορισμός του $\frac{1}{7}$ του $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας με σταυρωτό τεμαχισμό

Ε: Και τι μέρος της συνολικής σοκολάτας είναι αυτό που θα φάει το κάθε παιδί;

Μ: Το $\frac{1}{7}$.

Ε: Γιατί το $\frac{1}{7}$;

Μ: Γιατί αν πούμε πως δεν ήταν χωρισμένη σε τρία κομμάτια (κάθετα), θα ήταν $\frac{1}{7}$.

E: Τώρα δηλαδή που είναι χωρισμένη σε τρία δεν θα είναι το $\frac{1}{7}$;

M: Θα είναι τα $\frac{3}{21}$.

E: Άρα πόσο έφαγε το κάθε παιδί $\frac{1}{7}$ ή $\frac{3}{21}$;

M: $\frac{3}{21}$, γιατί ήταν χωρισμένη η σοκολάτα.

E: Το $\frac{1}{7}$ είναι λάθος;

M: Όχι. Ισχύει και αυτό.

Από το παραπάνω απόσπασμα φάνηκε ότι δεν ένιωθε πολύ σίγουρη ότι τα $\frac{3}{21}$ είναι το $\frac{1}{7}$ της σοκολάτας, παρότι αρχικά προσδιόρισε το μερίδιο του ενός παιδιού ως το $\frac{1}{7}$.

Θέλοντας να εξεταστεί κατά πόσο θα μπορούσε να αντιληφθεί δύο διαφορετικά κλάσματα ότι εκφράζουν την ίδια ποσότητα (ισοδύναμα) ασχολήθηκε και πάλι με το προηγούμενο πρόβλημα (Εικόνα 24) και ακολούθησε ο παρακάτω διάλογος:

E: Εδώ πώς αλλιώς θα μπορούσαμε να πούμε το μερίδιο του ενός τι μέρος της συνολικής σοκολάτας είναι;

M: $\frac{1}{5}$, γιατί αν δεν ήταν κομμένη η σοκολάτα σε μικρότερα κομμάτια θα ήταν 5 όλα μαζί.

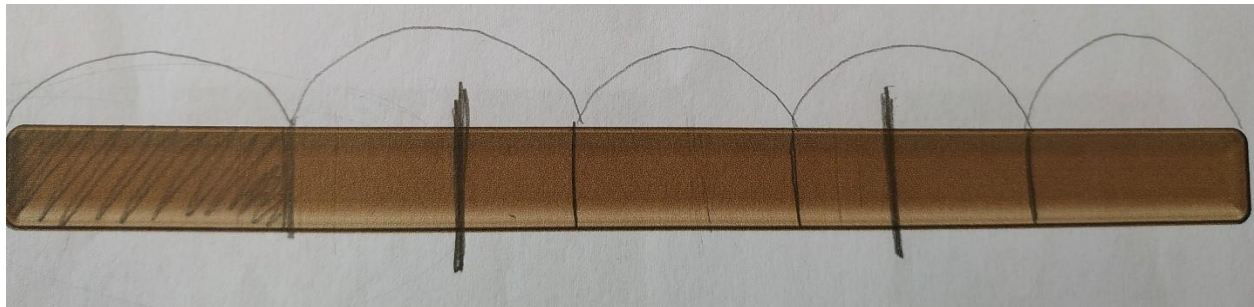
5.2.6 Β' Φάση: 6^η συνάντηση

Σε σχέση με τις αρχικές συναντήσεις με την μαθήτριά, υπήρξε εξέλιξη όσον αφορά τη δημιουργία κοινής μονάδας μέτρησης, ωστόσο εκτιμήθηκε ότι πιθανόν ο οριζόντιος και ο κάθετος τεμαχισμός (cross partitioning) θα δημιουργούσε δυσκολίες σε επόμενες δραστηριότητες όπου θα χρειαζόταν να προσθέσει για παράδειγμα το $\frac{1}{7}$ και το $\frac{1}{3}$, γιατί με βάση αυτόν τον τεμαχισμό κάποιο κομμάτι από τα είκοσι ένα θα ήταν κοινό για το $\frac{1}{7}$ και το $\frac{1}{3}$. Έτσι, κρίθηκε σκόπιμο να ενισχυθεί ο

κατακόρυφος τεμαχισμός ενός τεμαχισμού και η επέκτασή του σε όλα τα μέρη του όλου για τον προσδιορισμό του σχετικού μεγέθους του μεριδίου, με απώτερο σκοπό να διευκολυνθεί η πρόσθεση. Για να ωθηθεί η μαθήτρια να τεμαχίσει κάθετα και όχι οριζόντια επιλέχθηκε ένα προβληματικό πλαίσιο στο οποίο το σχήμα θα είχε τέτοια μορφή που να μην επιτρέπει εύκολα τον οριζόντιο τεμαχισμό.

«Τρεις φίλοι έκοψαν μία σοκολάτα ώστε να την μοιραστούν δίκαια. Πριν προλάβουν να φάνε όμως ήρθαν άλλοι δύο φίλοι τους και τώρα θα πρέπει να την μοιραστούν δίκαια όλοι μαζί. Πόση σοκολάτα θα φάει ο καθένας;»

Η μαθήτρια σε αυτή την περίπτωση όπου δεν μπορούσε να κάνει οριζόντιο τεμαχισμό, επέστρεψε σε μια παλαιότερη ενέργεια που χρησιμοποιούσε στην αρχή των συναντήσεων, τον χωρισμό της σοκολάτας σε πέντε ίσα μέρη χωρίς να λαμβάνει υπόψη της τις γραμμές των $\frac{3}{3}$ (Εικόνα 26).



Εικόνα 26. Αδυναμία προσδιορισμού του $\frac{1}{5}$ σε $\frac{3}{3}$ μπάρα

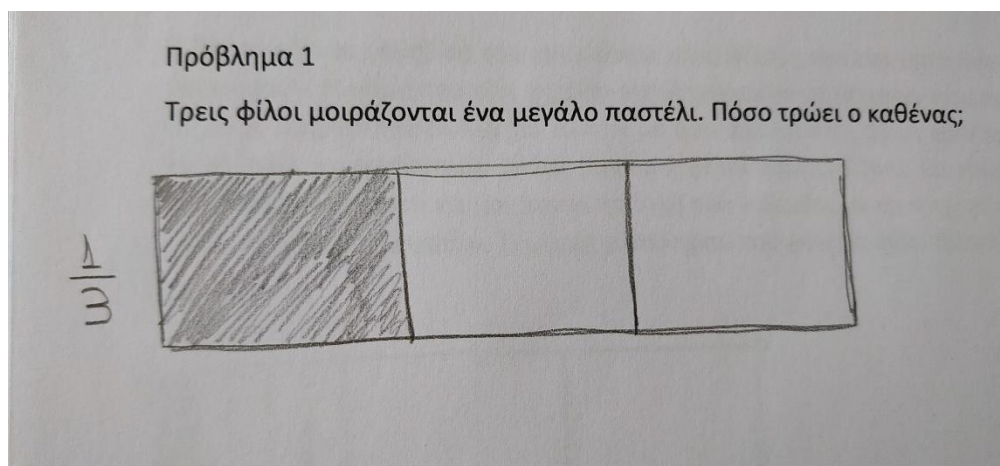
Από ότι φάνηκε η δυσκολία της να τεμαχίσει κάθετα εκ νέου έναν τεμαχισμό και να προσδιορίσει τη σχέση του με το όλο επέμενε.

5.2.7 Β' Φάση: 7^η συνάντηση

Για να ξεπεραστεί η παραπάνω δυσκολία δόθηκε ένα πρόβλημα που θεωρήθηκε ότι θα την ωθήσει σε τεμαχισμό τεμαχισμού και στην συσχέτιση του αποτελέσματός του με το όλο.

«Τρεις φίλοι μοιράζονται ένα μεγάλο παστέλι. Πόσο τρώει ο καθένας;»

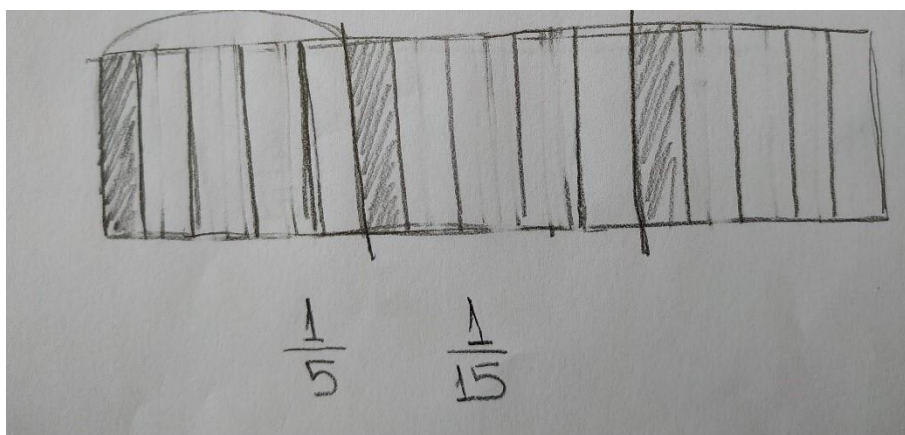
Η μαθήτρια σχεδίασε ένα παστέλι και το τεμάχισε σε τρία ίσα μέρη, προσδιορίζοντας το μερίδιο του ενός ως το $\frac{1}{3}$ ολόκληρης της ποσότητας (Εικόνα 27).



Εικόνα 27. Προσδιορισμός του $\frac{1}{3}$ του όλου

«Ο καθένας από αυτούς μοιράζεται το κομμάτι του με άλλους τέσσερις. Πόσο θα φάει ο καθένας σε σχέση με όλο το παστέλι;»

Όπως φαίνεται και στην Εικόνα 28 η μαθήτρια τεμάχισε κάθε $\frac{1}{3}$ εκ νέου σε 5 ίσα μέρη και προσδιόρισε σωστά το μερίδιο του ενός σε σχέση με το όλο ως $\frac{1}{15}$.



Εικόνα 28. Επαναλαμβανόμενος τεμαχισμός για την εύρεση του $\frac{1}{5}$ του $\frac{1}{3}$ του όλου

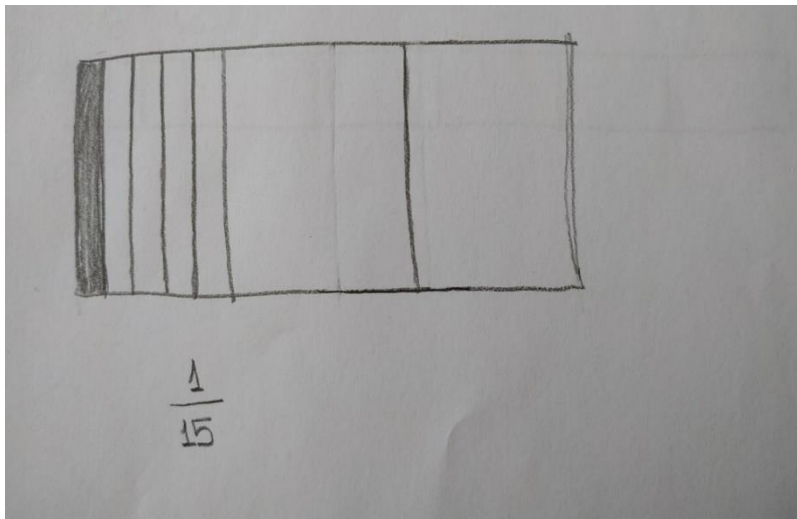
Ε: Τι μέρος από όλο το παστέλι θα φάει ο καθένας;

Μ: Το $\frac{1}{15}$.

Ένα επόμενο στάδιο ώστε να ενισχυθεί ο επαναλαμβανόμενος τεμαχισμός που επεκτείνεται θεωρήθηκε ότι είναι το εξής πρόβλημα:

«Ο Τάσος είχε τα γενέθλιά του και κάλεσε τους φίλους του στο σπίτι του για να το γιορτάσουν. Η μαμά του είχε φτιάξει ένα ορθογώνιο κέικ σοκολάτας. Ο Τάσος μοιράστηκε ολόκληρο το κέικ με δύο φίλους του, όμως πριν προλάβουν να το φάνε εμφανίστηκαν άλλοι τέσσερις φίλοι του. Ο Τάσος ως οικοδεσπότης που ήταν αποφάσισε να μοιραστεί το δικό του κομμάτι με τους τέσσερις φίλους του που ήρθαν τελευταίοι. Τι μέρος ολόκληρου του κέικ θα φάει τελικά ο Τάσος;»

Η απάντηση της μαθήτριας σε αυτό το πρόβλημα αποτέλεσε έκπληξη καθώς τεμάχισε το σχήμα της σε τρία ίσα μέρη και στη συνέχεια ένα από αυτά το τεμάχισε εκ νέου σε πέντε ίσα μέρη προσδιορίζοντας το κομμάτι που θα φάει ο Τάσος ως το $\frac{1}{15}$, επεκτείνοντας στον νου της τον τεμαχισμό και στα υπόλοιπα κομμάτια (Εικόνα 29).



Εικόνα 29. Προσδιορισμός του $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{5}$ με νοητή επέκταση του τεμαχισμού

Ε: Πόσο κέικ θα φάει ο Τάσος;

Μ: Θα φάει το $\frac{1}{15}$.

Ε: Πώς το ξέρεις;

Μ: Γιατί αν χωρίζαμε και τα άλλα δύο κομμάτια (εννοεί τα $\frac{1}{3}$) σε πέντε θα ήταν δεκαπέντε όλα τα κομμάτια μαζί.

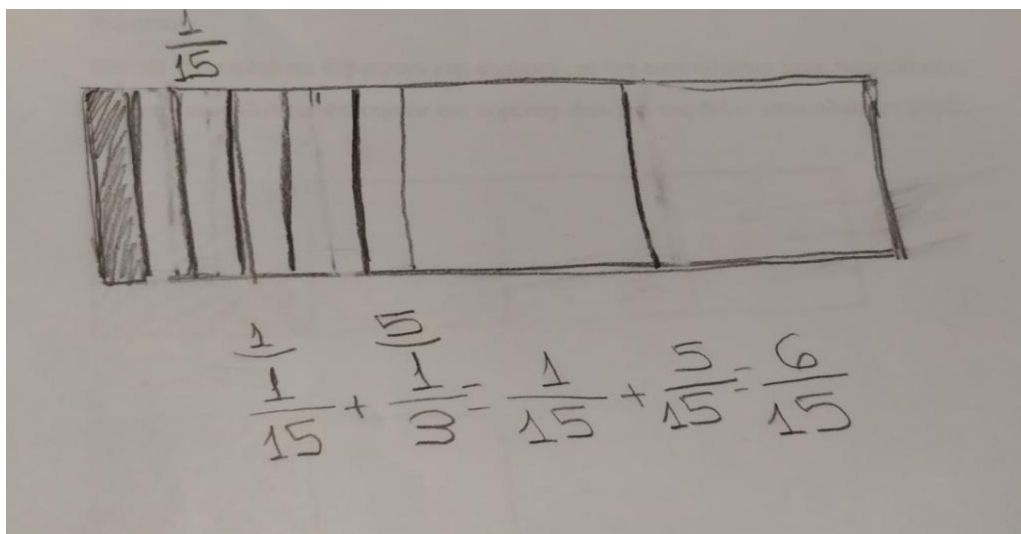
Ε: Και πώς σκέφτηκες να χωρίσεις και τα άλλα δύο κομμάτια σε 5;

Μ: Γιατί θα μου ήταν πιο εύκολο να πω τι μέρος από όλο το κέικ θα φάει ο Τάσος.

Όπως φαίνεται από το παραπάνω απόσπασμα, η μαθήτρια κατάφερε να συσχετίσει το μερίδιο του Τάσου που προέκυψε από επαναλαμβανόμενο τεμαχισμό με ολόκληρο το κέικ σοκολάτας. Δεδομένης αυτής της εξέλιξης της δόθηκε ένα πρόβλημα πρόσθεσης κλασμάτων με παρονομαστές που ο ένας δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του άλλου, που ήταν και ο αρχικός στόχος αυτού του διδακτικού πειράματος.

«Η κυρία Μαρία έφτιαξε ένα λαχταριστό γλυκό κορμό για τα παιδιά της. Τα τρία παιδιά της τον μοιράστηκαν δίκαια καθώς ανυπομονούσαν να φάνε. Πριν προλάβουν όμως να φάνε, ήρθαν τέσσερα ξαδερφάκια τους από την απέναντι πολυκατοικία και το μεγαλύτερο παιδί της κυρίας Μαρίας, αποφάσισε να μοιραστεί το κομμάτι του με τα τέσσερα ξαδερφάκια του γιατί δεν πεινούσε πολύ. Πόσο κορμό θα φάει το κάθε αδερφάκι και πόσο κορμό θα φάει το κάθε ξαδερφάκι; Πόσο θα φάει ένα παιδί που δεν μοιράστηκε το κομμάτι του και ένα ξαδερφάκι μαζί;»

Η μαθήτρια τεμάχισε αρχικά ένα ορθογώνιο σχήμα σε τρία ίσα μέρη και στη συνέχεια τεμάχισε το πρώτο κομμάτι σε πέντε ίσα μέρη και προσδιόρισε το κομμάτι που θα φάει το ένα ξαδερφάκι ως το $\frac{1}{15}$ του όλου (Εικόνα 30).



Εικόνα 30. Προσδιορισμός του $\frac{1}{5}$ του $\frac{1}{3}$ και σύνθεση του $\frac{1}{15}$ με το $\frac{1}{3}$ της συνολικής ποσότητας

M: Χωρίζω τον κορμό σε τρία κομμάτια και το καθένα σε πέντε κομμάτια, γιατί ήρθαν τέσσερα ξαδέρφια και ο μεγαλύτερος αδερφός θα μοιραστεί το κομμάτι του με άλλους τέσσερις.

E: Ωραία, το ένα ξαδερφάκι πόσο γλυκό θα φάει;

M: Σε αυτό το κομμάτι (δείχνει το $\frac{1}{3}$ του σχήματός της) θα είναι το $\frac{1}{5}$.

E: Και σε όλο το γλυκό;

M: Το $\frac{1}{15}$.

E: Πώς το βρήκες;

M: Γιατί αν χωρίσουμε και τα άλλα δύο κομμάτια σε πέντε ίσα μικρότερα κομμάτια θα ήταν δεκαπέντε όλα μαζί.

E: Και το κάθε ένα αδερφάκι που δεν μοιράστηκε το κομμάτι του, πόσο θα φάει;

M: Το $\frac{1}{3}$ του γλυκού.

Αξιοσημείωτο είναι ότι και πάλι ο τεμαχισμός και των υπόλοιπων κομματιών επεκτάθηκε στον νου της και δεν χρειάστηκε να σχεδιάσει επιπλέον τεμαχισμούς. Στη συνέχεια για να προσδιορίσει την συνολική ποσότητα που έφαγε κάποιος που μοιράστηκε με κάποιον που δεν μοιράστηκε το κομμάτι του εκτέλεσε τον καθιερωμένο αλγόριθμο.

E: Και πόσο θα φάνε μαζί ένας που μοιράστηκε το κομμάτι του και ένας που δεν μοιράστηκε το κομμάτι του;

M: Δηλαδή $\frac{1}{15} + \frac{1}{3}$. Ε, πρόσθεση είναι. (Εικόνα 30)

(Καταλήγει στο αποτέλεσμα $\frac{6}{15}$.)

E: Θα μπορούσες να μου δείξεις αυτό το $\frac{6}{15}$ στο σχήμα;

M: Ναι, θα ήταν αυτό το κομμάτι (δείχνει το $\frac{1}{3}$ του σχήματος) και ένα μικρό ακόμα (σχεδιάζει ακόμα ένα $\frac{1}{15}$).

E: Και πώς προέκυψε αυτό το $\frac{6}{15}$; Εγώ βλέπω ότι έχεις γράψει $\frac{1}{15} + \frac{1}{3}$ και το $\frac{1}{3}$ μετά έγινε $\frac{5}{15}$. Πώς έγινε αυτό;

M: Γιατί με τους παρονομαστές δεν μπορώ να τους προσθέσω έτσι.

E: Γιατί όχι;

M: Έπρεπε να τους κάνω ίδιους, 15.

E: Και πώς έγινε το $\frac{1}{3} \frac{5}{15}$; Θα μπορούσες να μου το δείξεις στο σχήμα;

M: Ναι. Αυτό είναι το $\frac{1}{3}$ και ταυτόχρονα $\frac{5}{15}$ (δείχνει το $\frac{1}{3}$ που έχει τεμαχίσει σε πέντε ίσα μέρη).

Η απάντηση της μαθήτριας σε αυτό το πρόβλημα αποτέλεσε δείγμα προόδου, καθώς φάνηκε ότι κατάφερε να νοηματοδοτήσει τα βήματα του αλγόριθμου σε συνδυασμό με το σχήμα που κατασκεύασε.

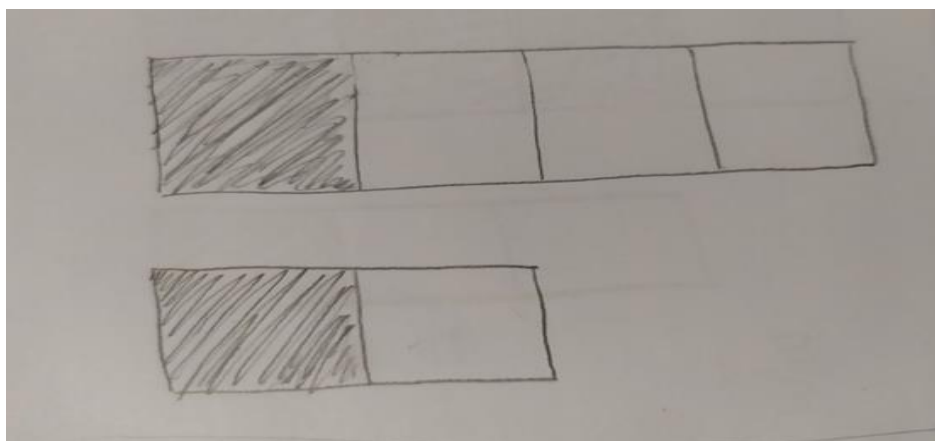
5.2.8 Γ΄ Φάση: Αναστοχαστική ανάλυση και 8^η συνάντηση

Αφού η μαθήτρια έδειξε εξέλιξη στην ενέργεια του επαναλαμβανόμενου τεμαχισμού και φαινομενικά τουλάχιστον συνδύασε τον αλγόριθμο της πρόσθεσης κλασμάτων με τις ενέργειες στα σχήματά της, θεωρήθηκε ότι η επιτυχής ενασχόλησή της με προβλήματα στα οποία η μονάδα αναφοράς αλλάζει θα έδινε περισσότερες πληροφορίες για το πόσο στέρεη είναι η γνώση της σε ό,τι αφορά την πρόσθεση κλασμάτων και τις ενέργειες που εμπλέκονται σε αυτή.

Στην 8^η και τελευταία συνάντηση με την μαθήτριά δόθηκε έμφαση σε μια σειρά από προβλήματα πρόσθεσης κλασμάτων με τους προσθετέους να αναφέρονται σε διαφορετική μονάδα.

«Ο Κώστας και η Αγγελική έχουν δύο νοστιμότατες σοκολάτες. Η σοκολάτα του Κώστα είναι διπλάσια από τη σοκολάτα της Αγγελικής. Ο Κώστας έφαγε το $\frac{1}{4}$ της σοκολάτας του και η Αγγελική το $\frac{1}{2}$ της δικής της σοκολάτας. Πόση σοκολάτα έφαγαν και τα δύο παιδιά μαζί σε σχέση με τη σοκολάτα του Κώστα; Πόση σοκολάτα έφαγαν σε σχέση με τη σοκολάτα της Αγγελικής; Πόση σοκολάτα έφαγαν σε σχέση και με τις δύο σοκολάτες μαζί;»

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι σοκολάτες των δύο παιδιών δεν είναι ίσες μεταξύ τους, ωστόσο έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους. Η μία είναι διπλάσια της άλλης. Η μαθήτριά προσπάθησε να σχεδιάσει τις σοκολάτες ώστε να φαίνεται η μεταξύ τους σχέση και ταυτόχρονα το μερίδιο του κάθε παιδιού (Εικόνα 31).



Εικόνα 31. Ταυτόχρονη απεικόνιση του μεριδίου του κάθε παιδιού και της πολλαπλασιαστικής σχέσης των δύο σοκολατών

Ε: Πόσο θα έχουν φάει μαζί σε σχέση με τη σοκολάτα της Αγγελικής;

Μ: Όλη τη σοκολάτα της Αγγελικής θα έχουν φάει.

Ε: Και σε σχέση με τη σοκολάτα του Κώστα;

Μ: Θα έχουν φάει τη μισή σοκολάτα του Κώστα.

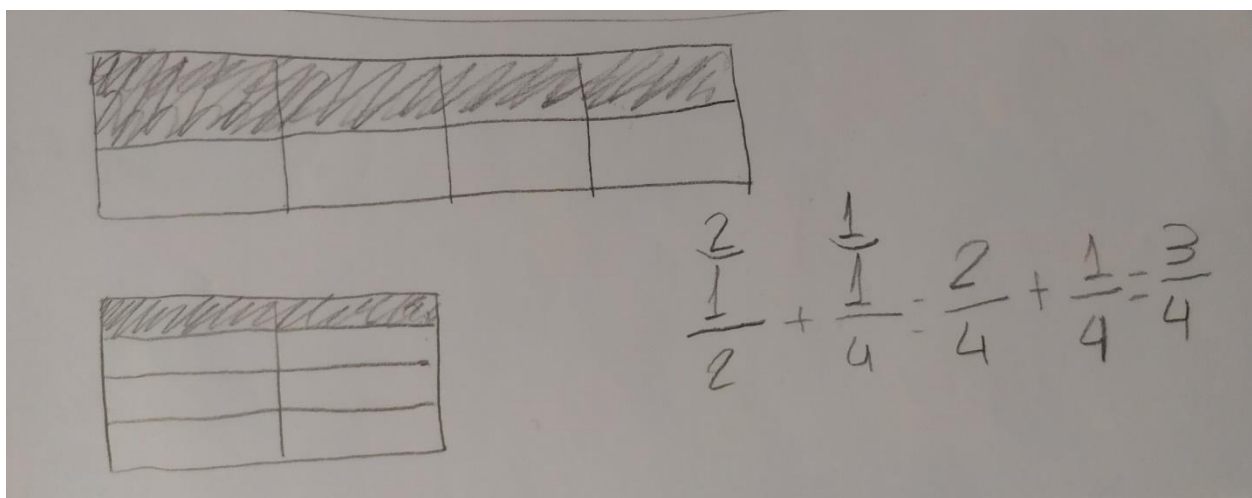
Ε: Πολύ ωραία. Και σε σχέση και με τις δύο μαζί;

Μ: Τα $\frac{2}{6}$ θα είχαν φάει τότε.

Από το παραπάνω απόσπασμα φαίνεται πως η μαθήτρια ανταπεξήλθε στην προβληματική κατάσταση. Επειδή όμως θεωρήθηκε ότι λόγω σχήματος θα μπορούσε και οπτικά να προσδιορίσει το πόσο θα φάνε τα δύο παιδιά, στο επόμενο πρόβλημα αντιστράφηκαν οι ποσότητες που έφαγαν τα παιδιά με τη σχέση μεταξύ των σοκολατών τους να παραμένει η ίδια.

«Η σοκολάτα του Κώστα είναι διπλάσια από τη σοκολάτα της Αγγελικής. Ο Κώστας έφαγε το $\frac{1}{2}$ της σοκολάτας του και η Αγγελική το $\frac{1}{4}$ της δικής της σοκολάτας. Πόση σοκολάτα έφαγαν και τα δύο παιδιά μαζί σε σχέση με τη σοκολάτα του Κώστα; Πόση σοκολάτα έφαγαν σε σχέση με τη σοκολάτα της Αγγελικής; Πόση σοκολάτα έφαγαν σε σχέση και με τις δύο σοκολάτες μαζί;»

Η μαθήτρια όπως φαίνεται και στην Εικόνα 32 προσπάθησε να βρει μία κοινή μονάδα μέτρησης τεμαχίζοντας τις σοκολάτες σε οχτώ ίσα μέρη, ωστόσο επειδή η μία ήταν διπλάσια της άλλης το $\frac{1}{8}$ της μίας δεν είναι ίδιου μεγέθους με το $\frac{1}{8}$ της άλλης. Τα γραμμοσκιασμένα μέρη στις σοκολάτες δείχνουν το μερίδιο του κάθε παιδιού. Σύμφωνα με τα σχέδια της μαθήτριας, ο Κώστας έφαγε τα $\frac{4}{8}$ της σοκολάτας του και η Αγγελική τα $\frac{2}{8}$ της σοκολάτας της.



Εικόνα 32. Τεμαχισμός των δύο σοκολατών σε οχτώ μέρη χωρίς ανάδειξη της πολλαπλασιαστικής σχέσης των δύο μονάδων αναφοράς

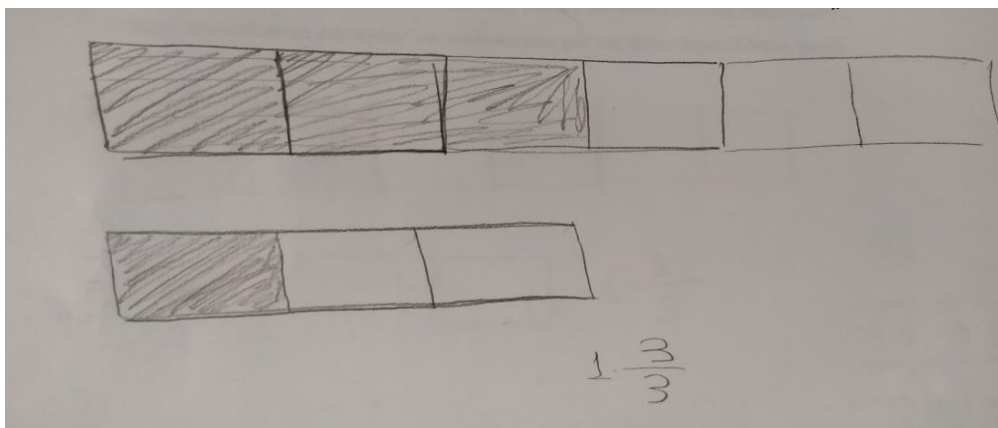
Ε: Πόσο έφαγαν μαζί σε σχέση με τη σοκολάτα του Κώστα;

Μ: Έφαγαν $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Από την απάντησή της φαίνεται ότι δεν έλαβε υπόψη της ότι το $\frac{1}{2}$ που έφαγε ο Κώστας αναφερόταν στη δική του σοκολάτα και δεν είναι το ίδιο με το $\frac{1}{2}$ της σοκολάτας της Αγγελικής. Εικάζεται ότι επειδή χώρισε και τις δύο σοκολάτες σε οχτώ κομμάτια γιατί την διευκόλυνε να δείξει ταυτόχρονα το $\frac{1}{2}$ και το $\frac{1}{4}$ πίστεψε ότι με αυτή την ενέργεια βρήκε μια κοινή μονάδα μέτρησης, κάτι που δεν ισχύει όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, καθώς το $\frac{1}{8}$ της σοκολάτας του Κώστα είναι διπλάσια ποσότητα από το $\frac{1}{8}$ της σοκολάτας της Αγγελικής.

«Η σοκολάτα του Νίκου είναι διπλάσια από την σοκολάτα της Άννας. Ο Νίκος έφαγε το $\frac{1}{2}$ από την σοκολάτα του και η Άννα το $\frac{1}{3}$ από τη δική της σοκολάτα. Πόση σοκολάτα έφαγαν μαζί σε σχέση με τη σοκολάτα του Νίκου; Πόση σοκολάτα έφαγαν μαζί σε σχέση με τη σοκολάτα της Άννας; Πόση σοκολάτα έφαγαν μαζί σε σχέση και με τις δύο σοκολάτες;»

Η μαθήτριά αρχικά σχεδίασε την σοκολάτα της Άννας την οποία και τεμάχισε σε τρία ίσα μέρη και στη συνέχεια σχεδίασε την διπλάσια, τεμαχισμένη σε έξι ίσα μέρη από την οποία γραμμοσκίασε τα τρία ως το μερίδιο που θα φάει ο Νίκος (Εικόνα 33).



Εικόνα 33. Απεικόνιση της σχέσης των δύο μονάδων αναφοράς και των μεριδίων του κάθε παιδιού

E: Γιατί χρωμάτισες τρία κομμάτια στον Νίκο;

M: Γιατί το μισό του έξι είναι το τρία και άμα δεν είχαμε χωρίσει αυτή τη σοκολάτα σε έξι κομμάτια και την κόβαμε σε δύο μόνο, θα ήταν τόσο μεγάλη.

E: Και δηλαδή πόση σοκολάτα έφαγε ο Νίκος;

M: Τα $\frac{3}{6}$.

E: Και είναι το ίδιο με το $\frac{1}{2}$ που έλεγε η εκφώνηση του προβλήματος;

M: Ναι, το ίδιο είναι.

E: Γιατί;

M: Γιατί η σοκολάτα του Νίκου ήταν διπλάσια από της Άννας και η Άννα είχε τρία κομμάτια. Γι' αυτό έκοψα του Νίκου σε έξι ίσα κομμάτια. Και επειδή ο Νίκος έφαγε τη μισή σοκολάτα του, χρωμάτισα τρία κομμάτια αφού το μισό του έξι είναι το τρία.

Στη συνέχεια προσδιόρισε την ποσότητα που θα έχουν φάει και τα δύο παιδιά μαζί σε σχέση με τη σοκολάτα του Νίκου ως $\frac{4}{6}$ και σε σχέση και με τις δύο σοκολάτες τα $\frac{4}{9}$. Ωστόσο όταν χρειάστηκε να προσδιορίσει πόση σοκολάτα έφαγαν τα δύο παιδιά σε σχέση με της Άννας, δυσκολεύτηκε.

M: Σε σχέση με της Άννας θα έχουν φάει όλη τη σοκολάτα της Άννας και ένα ακόμα κομμάτι. (Γράφει $1\frac{3}{3}$).

E: Αυτό που έγραψες τι σημαίνει;

M: Πως μαζί έφαγαν όλη τη σοκολάτα και άλλο ένα κομμάτι.

E: Αυτό το 1 δηλαδή είναι κομμάτι ή σοκολάτα;

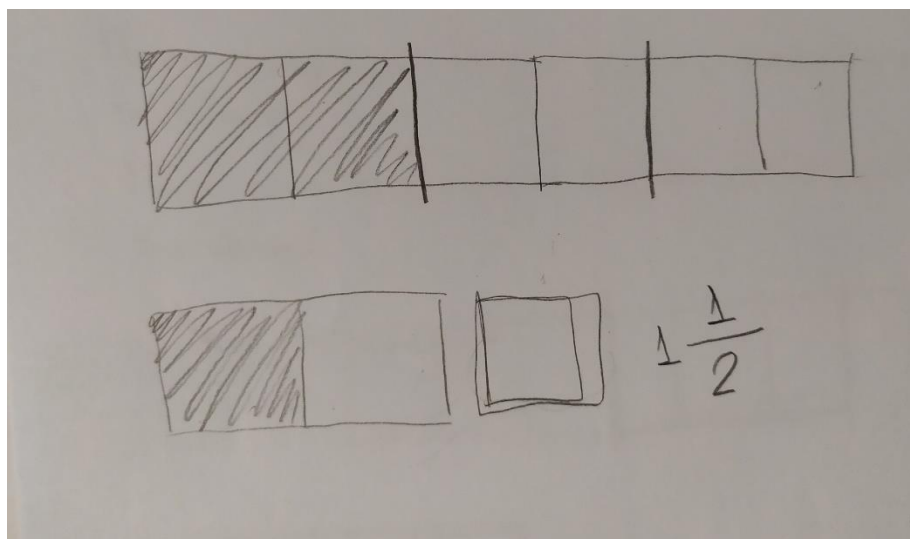
M: Είναι κομμάτι.

Ο συμβολισμός $1\frac{3}{3}$ για εκείνη σήμαινε 1 κομμάτι και $\frac{3}{3}$ που είναι ολόκληρη η σοκολάτα. Ωστόσο δεν κατάφερε να προσδιορίσει το επιπλέον κομμάτι ως το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας της Άννας.

Κατόπιν δόθηκε ένα αντίστοιχο πρόβλημα με τη σχέση μεταξύ των σοκολατών αυτή τη φορά να είναι τριπλάσια.

« Η σοκολάτα του Γιάννη είναι τριπλάσια από τη σοκολάτα της Έλλης. Ο Γιάννης έφαγε το $\frac{1}{3}$ της σοκολάτας του και η Έλλη έφαγε το $\frac{1}{2}$ της δικής της σοκολάτας. Πόσο έφαγαν και τα δύο παιδιά σε σχέση με τη σοκολάτα του Γιάννη, πόσο σε σχέση με τη σοκολάτα της Έλλης και πόσο σε σχέση και με τις δύο μαζί; »

Η μαθήτρια αρχικά σχεδίασε τη σοκολάτα της Έλλης την οποία και τεμάχισε σε δύο κομμάτια και στην συνέχεια σχεδίασε τη σοκολάτα του Γιάννη ως τρεις φορές η σοκολάτα της Έλλης, καταλήγοντας έτσι σε ένα σχήμα τεμαχισμένο σε έξι ίσα μέρη από τα οποία γραμμοσκίασε τα δύο για να προσδιορίσει το μερίδιο του Γιάννη (Εικόνα 34).



Εικόνα 34. Απεικόνιση των μεριδίων του κάθε παιδιού και της σχέσης μεταξύ των δύο σοκολατών

Ακολουθώντας προσδιόρισε ότι τα δύο παιδιά θα φάνε μαζί σε σχέση με τη σοκολάτα του Γιάννη τα $\frac{3}{6}$, δηλαδή τη μισή σοκολάτα του Γιάννη και σε σχέση και με τις δύο σοκολάτες ότι θα φάνε τα $\frac{3}{8}$. Επιπλέον προσδιόρισε ότι τα δύο παιδιά θα φάνε μιάμιση σοκολάτα της Έλλης, όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα.

M: Σε σχέση με της Έλλης θα φάνε όλη τη σοκολάτα της Έλλης και άλλο ένα κομμάτι.

E: Το κομμάτι αυτό τι μέγεθος έχει σε σχέση με τη σοκολάτα της Έλλης;

M: Είναι το μισό.

E: Πολύ ωραία. Πώς θα μπορούσαμε να το πούμε με ένα κλάσμα;

M: Θα είναι το $1\frac{1}{2}$.

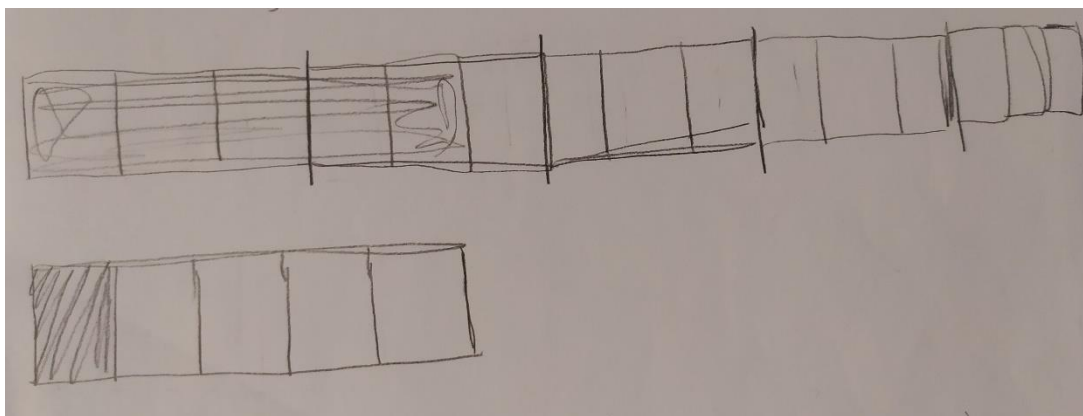
Στο συγκεκριμένο πρόβλημα κατάφερε να προσδιορίσει το σχετικό μέγεθος του επιπλέον κομματιού ως το $\frac{1}{2}$ της σοκολάτας της Έλλης, οπότε σε αυτό το σημείο θα μπορούσε να έχει στρέψει την προσοχή της και πάλι στο προηγούμενο πρόβλημα για να συνειδητοποιήσει το λάθος στον συμβολισμό της « $1\frac{3}{3}$ », κάτι το οποίο δεν έγινε. Ίσως να κατάφερνε να προσδιορίσει τελικά ότι τα δύο παιδιά θα είχαν φάει $1\frac{1}{3}$ και όχι $1\frac{3}{3}$.

Η τελευταία συνάντηση με την μαθήτριά στα πλαίσια του διδακτικού πειράματος έκλεισε με ένα πρόβλημα που θεωρήθηκε ελαφρώς πιο δύσκολο από τα προηγούμενα.

«Η σοκολάτα του Νίκου είναι τριπλάσια από τη σοκολάτα της Άννας. Ο Νίκος έφαγε το $\frac{1}{3}$ από την σοκολάτα του και η Άννα το $\frac{1}{5}$ από τη δική της σοκολάτα. Πόση σοκολάτα έφαγαν μαζί σε σχέση με τη σοκολάτα του Νίκου; Πόση σε σχέση με της Άννας και πόση σε σχέση και με τις δύο σοκολάτες μαζί;»

Η μαθήτριά σχεδίασε αρχικά τη σοκολάτα της Άννας τεμαχισμένη σε 5 ίσα μέρη και στην συνέχεια την τριπλάσια σοκολάτα του Νίκου τεμαχισμένη σε 15 ίσα μέρη. Προσδιόρισε ότι η

Άννα θα φάει το $\frac{1}{5}$ της σοκολάτας της και ο Νίκος τα $\frac{5}{15}$ της δικής του όπως φαίνεται και στην Εικόνα 35.



Εικόνα 35. Προσδιορισμός του $\frac{1}{5}$ της μίας σοκολάτας και του $\frac{1}{3}$ της τριπλάσιας σοκολάτας

Κατόπιν σχολίασε ότι τα δύο παιδιά μαζί θα έχουν φάει τα $\frac{6}{15}$ της σοκολάτας του Νίκου, τα $\frac{6}{20}$ και των δύο σοκολατών και το $1\frac{1}{5}$ της σοκολάτας της Άννας.

Φαινομενικά στα παραπάνω προβλήματα η μαθήτρια κατάφερε να βρει μια κοινή μονάδα μέτρησης για να προσδιορίσει το πόσο έφαγαν και τα δύο παιδιά μαζί αλλάζοντας την μονάδα αναφοράς. Ουσιαστικά αυτό που έκανε ήταν να σχεδιάζει πρώτα την μικρή σοκολάτα και στην συνέχεια επαναλαμβάνοντάς την όσες φορές χρειάζεται να δημιουργεί και την μεγαλύτερη σοκολάτα. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι τα νούμερα και οι σχέσεις που δόθηκαν ευνοούσαν την παραπάνω στρατηγική και δεν την ωθούσαν σε επαναλαμβανόμενο τεμαχισμό.

Ας πάρουμε για παράδειγμα το τελευταίο πρόβλημα που δόθηκε. Αν η σχέση μεταξύ των δύο σοκολατών ήταν διπλάσια και όχι τριπλάσια τότε στην σοκολάτα του Νίκου θα προέκυπταν από επανάληψη της σοκολάτας της Άννας δέκα κομμάτια από τα οποία η μαθήτρια θα έπρεπε να δείξει το $\frac{1}{3}$ που έφαγε ο Νίκος. Για να το κάνει αυτό θα έπρεπε μέσω του επαναλαμβανόμενου και του επιμεριστικού τεμαχισμού να τεμαχίσει κάθε ένα από τα δέκα κομμάτια σε τρία και να συνθέσει κάθε $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{10}$ ώστε να προκύψει ότι ο Νίκος θα φάει τα $\frac{10}{30}$. Μια τέτοια ενέργεια θα δήλωνε ευχέρεια στον χειρισμό των σύνθετων μονάδων και θα ενίσχυε την ανάγκη για μια κοινή μονάδα μέτρησης.

Εναλλακτικά θα μπορούσε η σχέση μεταξύ των σοκολατών να παραμείνει ίδια (τριπλάσια) αλλά ο Νίκος να έπρεπε αντί για το $\frac{1}{3}$ να φάει το $\frac{1}{7}$. Δεδομένου ότι θα είχαν προκύψει δεκαπέντε κομμάτια, για να βρει το $\frac{1}{7}$ η μαθήτρια θα έπρεπε να τεμαχίσει κάθε $\frac{1}{15}$ σε επτά ίσα μέρη, οπότε ο Νίκος θα έτρωγε τα $\frac{15}{105}$.

Τέτοιες ενέργειες θα δήλωναν ισχυρή ικανότητα εύρεσης μιας κοινής μονάδας μέτρησης.

Συμπεράσματα

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί μια προσπάθεια υποστήριξης μιας μαθήτριας ΣΤ΄ δημοτικού στην κατανόηση της έννοιας της πρόσθεσης των κλασμάτων, αξιοποιώντας την ερμηνεία του κλάσματος ως μέτρο. Στα πλαίσια ενός πειράματος σχεδιασμού και αξιοποιώντας τις θεωρίες του εποικοδομισμού και της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης επιχειρήθηκε να σχεδιαστεί και να ελεγχθεί μία υποθετική πορεία μάθησης στο συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα.

Όπως προέκυψε από το αρχικό στάδιο της διεξαγωγής του πειράματος σχεδιασμού και κατά την τεκμηρίωση των σημείων αφετηρίας, η μαθήτρια που συμμετείχε σε αυτή την προσπάθεια επέδειξε ευχέρεια στην εκτέλεση του καθιερωμένου αλγόριθμου της πρόσθεσης κλασμάτων, κάτι που αποτελεί και στόχο της διδασκαλίας του συγκεκριμένου θέματος. Ωστόσο δεν μπορούσε να εξηγήσει για ποιον λόγο ακολουθούσε τα συγκεκριμένα βήματα ούτε να δείξει σε κάποιο σχήμα το αποτέλεσμα του αλγόριθμου, ενώ φανερώθηκαν και δυσκολίες σε μια βασική ενέργεια για την πρόσθεση, αυτή του τεμαχισμού ενός τεμαχισμού (Hackenberg, Norton & Wright, 2016· Izsák, Tilemma & Tunç-Pekkan, 2008· Steffe, 2003).

Σταδιακά και με γνώμονα πάντοτε τις δυνατότητες της μαθήτριας σχεδιάστηκαν προβλήματα που θα την βοηθούσαν να εμβαθύνει στην έννοια της πρόσθεσης κλασμάτων και θα της δημιουργούσαν την ανάγκη για εύρεση μιας κοινής μονάδας μέτρησης. Όπως φαίνεται και από την ανάλυση των αποτελεσμάτων (βλ. §5.2) η μαθήτρια κατάφερε να εμπλακεί σε ενέργειες επαναλαμβανόμενου τεμαχισμού και να προσδιορίσει το αποτέλεσμα αυτού σε σχέση με το όλο. Επιπλέον, κατάφερε να νοηματοδοτήσει τον αλγόριθμο της πρόσθεσης εξηγώντας τα βήματα που ακολούθησε και δείχνοντας σε σχήμα το αποτέλεσμα αυτού (βλ. §5.2.7). Στο τέλος του διδακτικού πειράματος για να εξεταστεί κατά πόσο έχει εμβαθύνει η μαθήτρια στην ανάγκη ενός κοινού τεμαχισμού, δόθηκαν προβλήματα με διαφορετική μονάδα αναφοράς (βλ. §5.2.8). Η μαθήτρια στα περισσότερα προβλήματα κατάφερε να βρει έναν κοινό τεμαχισμό και να προβεί σε πρόσθεση ωστόσο θεωρήθηκε πως με αντίστοιχα προβλήματα αλλά διαφορετικές σχέσεις μεταξύ των εμπλεκόμενων ποσοτήτων θα αναδεικνυόταν με μεγαλύτερη ακρίβεια κατά πόσο έχει εμβαθύνει στην έννοια της πρόσθεσης.

Η παραπάνω προσπάθεια ενίσχυσης της κατανόησης της μαθήτριας στην πρόσθεση των κλασμάτων αναδεικνύει αφενός την δυσκολία της μάθησης αφετέρου την αναγκαιότητα ενός

οργανωμένου πλαισίου στο οποίο συντελείται η διδασκαλία. Ένα κατάλληλο πρόβλημα ή ακόμα και μια κατάλληλη ερώτηση του εκπαιδευτικού όπως «Πόσες φορές πρέπει να επαναλάβω αυτό το κομμάτι για να έχω το όλο;» μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να ξεπεράσουν πιθανά εμπόδια στην μάθησή τους.

Όπως αναφέρει, ο Tzur (1999) η συμμετοχή σε τέτοια πειράματα δεν συνεπάγεται μόνο μάθηση για τον μαθητή αλλά και για τον εκπαιδευτικό-ερευνητή. Μέσα από την αλληλεπίδραση με το παιδί ο εκπαιδευτικός εμβαθύνει ακόμη περισσότερο στις μαθηματικές έννοιες, καθώς προσπαθεί να ενισχύσει την κατανόηση του μαθητή. Συνεπώς η πορεία μάθησης της μαθήτριας του εν λόγω πειράματος μπορεί να αποτελέσει πηγή γνώσης και για άλλους εκπαιδευτικούς σχετικά με τις δυσκολίες που αντιμετώπισε στην προσπάθειά της να προσθέσει δύο ετερόνυμα κλάσματα και τους τρόπους με τους οποίους επιχειρήθηκε να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες.

Αξίζει να σημειωθεί πως στα πλαίσια του συγκεκριμένου διδακτικού πειράματος τα κλάσματα αναφέρονταν σε κάποιο όλο (συνήθως μία σοκολάτα ή πίτσα). Θα παρουσίαζε ενδιαφέρον κάποια μελλοντική έρευνα στην οποία οι μαθητές μέσα από μία καλά οργανωμένη ακολουθία δραστηριοτήτων θα μπορούσαν να απεγκλωβιστούν από την μονάδα αναφοράς και να αντιληφθούν ότι η πρόσθεση των κλασματικών αριθμών αφορά σε προσθέσεις κλασμάτων ανεξάρτητων από το όλο. Η γενίκευση αυτή θα αποτελούσε και την κορύφωση της γνώσης των μαθητών αναφορικά με την πρόσθεση των κλασμάτων.

Βιβλιογραφία

- Aksoy, N. C., & Yazlik, D. O. (2017). Student errors in fractions and possible causes of these errors. *Journal of Education and Training Studies*, 5(11), 219-233.
- Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 296-333). New York, NY: Macmillan.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.
- Boyce, S., & Norton, A. (2016). Co-construction of fractions schemes and units coordinating structures. *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 10-25.
- Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum: Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathematical Behavior*, 23(1), 1-20.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theoretical model on fractions: Implications for teaching and research. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 233-240). Melbourne, Australia: PME.
- Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), 293-316.
- Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2007). Year six fraction understanding: A part of the whole story. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Mathematics: essential research, essential practice* (Vol.1, pp. 207-216). Sydney: MERGA.

- Cobb, P. (2003). Investigating students' reasoning about linear measurement as a paradigm case of design research. *Supporting students' development of measuring conceptions: Analyzing students' learning in social context. Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, (12), 1-16.
- Cobb, P., Confrey, J., DiSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), 9-13.
- Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(1), 2-33.
- Cobb, P., Zhao, Q., & Visnovska, J. (2008). Learning from and adapting the theory of realistic mathematics education. *Education et Didactique*, 2(1), 105-124.
- Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 305-345). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Cramer, K. A., Post, T. R., & delMas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth-and fifth-grade students: A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), 111-144.
- Duffy, M., & Cunningham, J. (1996). Constructivism: Implications for the design and delivery of instruction. In D. H. Jonassen (Ed.), *Educational Communications and Technology* (pp. 170–199). New York: Simon & Schuster Macmillan.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.
- Gravemeijer, K. P. E. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics. An international perspective* (pp. 315-345). East Sussex, UK: Psychology press.
- Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 105-128.

- Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research- Part A: An Introduction* (pp. 72-113). Enschede, the Netherlands: SLO.
- Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction*, 28(4), 383-432.
- Hackenberg, A. J., & Lee, M. Y. (2016). Students' distributive reasoning with fractions and unknowns. *Educational Studies in Mathematics*, 93(2), 245-263.
- Hackenberg, A. J., Norton, A., & Wright, R. J. (2016). *Developing Fractions Knowledge*. Glasgow, UK: Sage.
- Hackenberg, A. J., & Tillema, E. S. (2009). Students' whole number multiplicative concepts: A critical constructive resource for fraction composition schemes. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(1), 1-18.
- Idris, N., & Narayanan, L. M. (2011). Error patterns in addition and subtraction of fractions among form two students. *Journal of Mathematics Education*, 4(2), 35-54.
- Izsák, A., Tillema, E., & Tunç-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1) 33-62.
- Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (2016α). Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού – Βιβλίο Μαθητή. Αθήνα: Διόφαντος.
- Κακαδιάρης, Χ., Μπελίτσου, Ν., Στεφανίδης, Γ., & Χρονοπούλου, Γ. (2016β). Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού – Τετράδιο Εργασιών, Γ΄ Τεύχος. Αθήνα: Διόφαντος.
- Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2017α). Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού – Βιβλίο Μαθητή. Αθήνα: Διόφαντος.
- Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2017β). Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού – Βιβλίο Δασκάλου. Αθήνα: Διόφαντος.
- Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π., & Οικονόμου, Θ. (2017γ). Μαθηματικά ΣΤ΄ Δημοτικού – Τετράδιο Εργασιών, Β΄ Τεύχος. Αθήνα: Διόφαντος.

- Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An Integration of Research* (pp. 49-84). New York: Routledge.
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. New York: Routledge.
- Laurens, T., Batlolona, F. A., Batlolona, J. R., & Leasa, M. (2018). How does Realistic Mathematics Education (RME) improve students' mathematics cognitive achievement. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(2), 569-578.
- Lee, S. J., & Shin, J. (2015). Distributive partitioning operation in mathematical situations involving fractional quantities. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(2), 329-355.
- Mack, N. K. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(5), 422-441.
- Mack, N. K. (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(3) 267-295.
- Mamede, E., & Oliveira, M. (2010). Issues on children's ideas of fraction when quotient interpretation is used. Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Poland: Rzeszów.
- McCloskey, A. V., & Norton, A. H. (2009). Using Steffe's advanced fraction schemes. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(1), 44-50.
- McKenney, S., & Reeves, T. C. (2012). *Conducting Educational Research Design*. New York: Routledge.
- Naik, S., & Subramaniam, K. (2008). Integrating the measure and quotient interpretation of fractions. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.), *International Group of the Psychology of Mathematics Education: Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, pp. 17-24). Morelia, Mexico: Cinvestav-UMSNH.

- Norton, A. H., & McCloskey, A. V. (2008). Modeling students' mathematics using Steffe's fraction schemes. *Teaching Children Mathematics*, 15(1), 48-54.
- Norton, A., & Wilkins, J. L. M. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *Journal of Mathematical Behavior*, 28(2-3), 150-161.
- Norton, A., & Wilkins, J. L. (2010). Students' partitive reasoning. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(4), 181-194.
- Olive, J. (2003). Nathan's strategies for simplifying and adding fractions in third grade. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 421-428). Honolulu, HI: University of Hawai'i at Manoa.
- Olive, J., & Steffe, L. P. (2010). The construction of fraction schemes using generalized number sequence. In L. P. Steffe & J. Olive (Eds.), *Children's Fractional Knowledge* (pp. 277-314). New York: Springer.
- Olive, J., & Vomvoridi, E. (2006). Making sense of instruction on fractions when a student lacks necessary fractional schemes: The case of Tim. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 18-45.
- Pantziara, M., & Philippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 61-83.
- Petit, M. M., Laird, R. E., Marsden, E. L., & Ebby, C. B. (2015). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom* (2nd ed.). New York: Routledge.
- Scholnik, M., Kol, S., & Abarbanel, J. (2006). Constructivism in theory and in practice. *English Teaching Forum*, 44(4), 12-20.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the learning through activity research program. *Journal of Mathematical Behavior*, 52, 122-133.

- Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, 14(5), 503-518.
- Steffe, L. P. (2001). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, 20(3), 267-307.
- Steffe, L. P. (2002). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 177-194). New York, USA: Kluwer.
- Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes: Learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *Journal of Mathematical Behavior*, 22(3), 237-295.
- Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 129-162.
- Steffe, L. P. (2010 α). Articulation of the reorganization hypothesis. In L. P. Steffe & J. Olive (Eds.), *Children's Fractional Knowledge* (pp. 49-74). New York: Springer.
- Steffe, L. P. (2010 β). The partitioning and fraction schemes. In L. P. Steffe & J. Olive (Eds.), *Children's Fractional Knowledge* (pp. 315-340). New York: Springer.
- Steffe, L. P., Liss, D. R. I., & Lee, H. Y. (2014). On the operations that generate intensive quantity. *Epistemic algebraic students: Emerging models of students' algebraic knowing*, 4, 49-79.
- Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge*. New York: Springer.
- Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267- 307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Subramanian, J., & Verma, B. (2009). Introducing fractions using share and measure interpretations: A report from classroom trials. In K. Subramaniam & A. Mazumdar (Eds.), *Proceedings of epiSTEME-3 conference* (pp.139-145). Mumbai: HBCSE

- Thompson, P. W., & Saldanha, L. A. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to the Principles and Standards for School Mathematics* (pp.95-113). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, 89(3), 419-441.
- Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), 390-416.
- Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54(1), 9-35.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.521-525). New York: Springer.
- Von Glasersfeld, E. (1989). Cognition, construction of knowledge, and teaching. *Synthese*, 80(1), 121-140.
- Wong, M., & Evans, D. (2008). Fractions as a measure. In M. Goos, R. Brown & K. Makar (Eds.), *Navigating Currents and Charting Directions: Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol.1, pp. 597-603). Brisbane, Australia: MERGA.
- Wright, V. (2013). In search of the prototypical fraction. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 18(2), 27–32.

Παράρτημα

Διαγνωστικό φυλλάδιο που μοιράστηκε στα πλαίσια του διδακτικού πειράματος στην ΣΤ΄ τάξη.

ΤΑΞΗ: ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΟΝΟΜΑ:

- 1) Βρες τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$$

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} =$$

- 2) Η παρακάτω σοκολάτα είναι κομμένη σε τρία ίσα μέρη. Μπορείς να φτιάξεις μία σοκολάτα που να είναι κατά $\frac{1}{3}$ μεγαλύτερη;



- 3) Η Μαρίνα είχε μέσα στην τσάντα της τη μισή από την παρακάτω σοκολάτα και μοιράστηκε το κομμάτι της με άλλη μία φίλη της. Τι μέρος της συνολικής σοκολάτας έφαγε το κάθε κορίτσι;



- 4) Αν πάρεις το $\frac{1}{2}$ από μία πίτσα και το $\frac{1}{4}$ από μία άλλη ίδια πίτσα, πόση πίτσα θα φας? Μπορείς να δείξεις τη λύση σου με ένα σχήμα;

- 5) Μια παρέα 6 παιδιών θέλουν να μοιραστούν την παρακάτω σοκολάτα.
Μπορείς να δείξεις πόσο θα φάει το κάθε παιδί;

