

ΜΟΝΤΕΛΑ ΠΑΙΓΝΙΩΝ ΜΕ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ ΣΕ ΕΦΟΔΙΑΣΤΙΚΕΣ ΑΛΥΣΙΔΕΣ

Διπλωματική εργασία του Ηλία Κουτεντάκη

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα Στατιστικής και
Επιχειρησιακής Έρευνας.

Επιβλέπων καθηγητής: Απόστολος
Μπουρνέτας



Τμήμα Μαθηματικών
ΕΚΠΑ
Οκτώβριος 2019

Περιεχόμενα

1	Θεωρία Παιγνίων	4
1.1	Χαρακτηριστική συνάρτηση	4
1.2	Πυρήνας	5
1.3	Τιμή Shapley	6
2	Διαχείριση αποθεμάτων	9
2.1	Διαχείριση αποθεμάτων με αβέβαιη ζήτηση	9
2.1.1	Στοχαστικά συστήματα διάρκειας μίας περιόδου για ευπαθή αγαθά	10
3	Πυρήνας παιχνιδιών συγκέντρωσης αποθεμάτων με όμοια κόστη καταστημάτων	13
3.1	Εισαγωγή	13
3.2	Μοντέλα εφημεριδοπώλη	14
3.3	Συμμετρικές συναρτήσεις κατανομής ζήτησης	15
3.4	Ζήτηση με κανονική συνάρτηση κατανομής	17
3.5	Αναπαράσταση μέσω της spread κατανομής	18
3.6	Ανεξάρτητες και ισόνομες κατανομές ζήτησης	20
3.7	Ανεξάρτητες και ισόνομες διακριτές κατανομές ζήτησης.	22
3.8	Ανεξάρτητες εκθετικές κατανομές ζήτησης	24
3.9	Γενικά αποτελέσματα για το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη	25
4	Πυρήνας παιχνιδιών συγκέντρωσης αποθεμάτων με ζητήσεις κανονικές τυχαίες μεταβλητές και με ανόμοια κόστη καταστημάτων- Παιχνίδι ωφέλειας	27
4.1	Εισαγωγή	27
4.2	Άνισα κόστη μεταξύ καταστημάτων	27
4.3	Παιχνίδι ωφέλειας	33
4.4	Διαχωρισμός κόστους-ωφέλειας και υλοποίηση της ζήτησης	34
5	Διαμοιρασμός κέρδους σε παιχνίδια συγκέντρωσης απο- θεμάτων μέσω της τιμής Shapley	38
5.1	Εισαγωγή	38
5.2	Ωφέλεια λόγω συγκέντρωσης αποθεμάτων	39
5.2.1	Ωφέλεια σε καθετοποιημένη εφοδιαστική αλυσίδα	40
5.3	Ωφέλεια σε αποκεντρωμένη εφοδιαστική αλυσίδα	40
5.4	Διαχωρισμός έξτρα κέρδους λόγω αλλαγής σε κοινόχρηστη πολιτική	42
5.4.1	Μοίρασμα κερδών μέσω της τιμής Shapley	44
5.5	Γενικές ιδιότητες σχετικά με το διαχωρισμό μέσω της τιμής Shapley	46
5.5.1	Πυρήνας-Τιμή Shapley	47
5.5.2	Ευστάθεια	48
5.5.3	Σχέση μεγέθους συμμαχιών με κέρδη παικτών	49
5.6	Διαχωρισμός αποθέματος	51
5.7	Επιδράσεις της διασποράς της ζήτησης και του περιθωρίου κέρδους καταστημάτων	52
5.8	Συνεργασία καταστημάτων και διαπραγμάτευση με προμηθευτή . . .	55
5.8.1	Συνεργασία στην περίπτωση της εφοδιαστικής αλυσίδας 2 καταστημάτων	56

5.8.2	Συνεργασία στην περίπτωση της εφοδιαστικής αλυσίδας 3 καταστημάτων	57
5.8.3	Συνεργασία στην περίπτωση της εφοδιαστικής αλυσίδας n καταστημάτων	58
6	Παιχνίδι συνεργασίας μεταξύ δύο καταστημάτων και σχέση μεταξύ πυρήνα και συσχέτισης για γενικό αριθμό καταστημάτων	59
6.1	Ιδιότητες πυρήνα για το πρόβλημα συγκέντρωσης αποθεμάτων μεταξύ δύο καταστημάτων	59
6.2	Πλήρως συσχετισμένες τυχαίες μεταβλητές ζήτησης.	63
7	Βιβλιογραφία	65

Εισαγωγή

Η θεωρία διαχείρισης αποθεμάτων αποτελεί ένα πεδίο έρευνας το οποίο διαθέτει μία ιδιαίτερα δραστήρια επιστημονική κοινότητα. Συντάκτες και ιδρύματα από όλον τον κόσμο προβαίνουν επί καθημερινής βάσεως σε έντυπες ή ηλεκτρονικές δημοσιεύσεις των έργων τους. Ειδικότερα ο συνδυασμός του παραπάνω πεδίου με διάφορους κλάδους της θεωρίας παιγνίων είναι ένα αντικείμενο μελέτης που απασχολεί διαχρονικά τον επιστημονικό κόσμο καθώς βρίσκει πρακτικές εφαρμογές σε πολλούς τομείς του επιχειρηματικού κόσμου και της καθημερινότητας του.

Το βασικό πλαίσιο γύρω από το οποίο έχει αναπτυχθεί η εργασία περιλαμβάνει n καταστήματα, σε μερικές περιπτώσεις υπάρχει και ένας προμηθευτής, τα οποία έχουν ως εμπόρευμα ένα μόνο προϊόν, κοινό για όλα, του οποίου η ζήτηση δεν είναι γνωστή αλλά ακολουθεί γνωστή κατανομή. Τέλος το προϊόν αυτό μπορεί να πωληθεί στους πελάτες κατά τη διάρκεια μίας μόνο περιόδου.

Η παρούσα εργασία, η οποία είναι κατά κύριο λόγο μία βιβλιογραφική μελέτη, αποσκοπεί στην παρουσίαση κάποιων βασικών αποτελεσμάτων σχετικά με το πόσο εφικτή μπορεί να είναι μια συνεργασία μεταξύ διαφόρων καταστημάτων στη διαδικασία παραγγελίας και αποθήκευσης ενός συγκεκριμένου προϊόντος, υπό ποιές προϋποθέσεις μπορεί να είναι συμφέρουσα, καθώς και το ποια θα είναι και πώς θα μοιραστούν τα πιθανά οφέλη που θα αποκομηθούν από μία πιθανή συνεργασία.

Η δομή της εργασίας είναι η εξής: στην ενότητα 1 γίνεται μια γενική εισαγωγή στη θεωρία παιγνίων και αναλύονται οι έννοιες του πυρήνα και της τιμής Shapley ενός παιχνιδιού. Στην ενότητα 2 εισάγεται η έννοια της διαχείρισης αποθεμάτων και αναλύεται το γενικό πλαίσιο γύρω από τα μοντέλα παιχνιδιών τα οποία θα εξεταστούν στη συνέχεια. Στη συνέχεια, στην ενότητα 3 αναλύονται οι μελέτες των Hartman, Dror και Shaked με τίτλο "Cores of Inventory Centralization Games" και των Muller, Scarsini και Shaked με τίτλο "The Newsvendor Game Has a Nonempty Core", στη ενότητα 4 παρουσιάζεται η μελέτη των Hartman και Dror με τίτλο "Allocation of gains from inventory centralization in newsvendor environments", ενώ στη ενότητα 5 έχουμε μία ανάλυση που βασίζεται στην εργασία των Kemahlioglu-Ziya και Bartholdi με τίτλο "Centralizing Inventory in Supply Chains by Using Shapley Value to Allocate the Profits". Τέλος, στην ενότητα 6, παρουσιάζονται γραφικά και αναλυτικά μερικά αποτελέσματα για την περίπτωση των δύο καταστημάτων και τέλος αποδεικνύεται ένα γενικό συμπέρασμα που ισχύει για οποιοδήποτε αριθμό καταστημάτων, με την προϋπόθεση ότι η ζήτηση για το προϊόν το οποίο μας απασχολεί, είναι τυχαία μεταβλητή και ακολουθεί την κανονική κατανομή.

1 Θεωρία Παιγνίων

Η θεωρία παιγνίων είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την ανάλυση καταστάσεων, στις οποίες οι αποφάσεις ενός παράγοντα επηρεάζουν τις αποφάσεις και τις πληρωμές των άλλων παραγόντων. Οι δύο βασικές κατηγορίες στις οποίες μπορεί να χωριστεί είναι τα παιχνίδια με συνεργασία και τα παιχνίδια χωρίς συνεργασία. Στα μη συνεργατικά παιχνίδια, οι παίκτες λειτουργούν ανεξάρτητα, χωρίς να μπορούν να συνεννοηθούν μεταξύ τους με σκοπό τη χάραξη στρατηγικής. Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, όμως, θα μας απασχολήσει η κατηγορία των συνεργατικών παιχνιδιών.

Στη συγκεκριμένη κατηγορία παιχνιδιών, οι παίκτες έχουν την επιλογή να σχηματίσουν συμμαχίες μεταξύ τους και να σχεδιάζουν τη στρατηγική τους ομαδικά. Σε αυτή την περίπτωση, οι πιθανές συμμαχίες που μπορούν να σχηματιστούν αλλά και η συνολική πληρωμή που εξασφαλίζει κάθε συμμαχία, είναι γνωστά σε όλους τους παίκτες. Δεδομένου των παραπάνω γνώσεων λοιπόν, το κρίσιμο ερώτημα είναι ποία θα είναι η τελική πληρωμή σε κάθε παίκτη ξεχωριστά, δηλαδή αν μπορεί να γίνει μια πρόβλεψη ή μια πρόταση που θα δίνει την πληρωμή ή ένα σύνολο από πιθανές πληρωμές για κάθε παίκτη. Στο παρόν άρθρο, θα ασχοληθούμε με δύο έννοιες που δίνουν λύση στο παραπάνω πρόβλημα: τον πυρήνα και την τιμή Shapley.

1.1 Χαρακτηριστική συνάρτηση

Πριν ορίσουμε αναλυτικότερα τις έννοιες του πυρήνα και της τιμής Shapley πρέπει να παρουσιάσουμε την έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης ενός παιχνιδιού σε συμμαχική μορφή.

Έστω $N = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ το πεπερασμένο σύνολο όλων των παικτών. Κάθε μη κενό υποσύνολο του N θα ονομάζεται συμμαχία. Για κάθε συμμαχία S πρέπει να προσδιορίσουμε ένα σύνολο $V(S) \subset \mathbb{R}^{|S|}$ που περιέχει διανύσματα πληρωμών διάστασης $|S|$ που να είναι εφικτά για κάθε συμμαχία. Χαρακτηριστική συνάρτηση θα ονομάζουμε κάθε συνάρτηση $V : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $V(\emptyset) = 0$

2. Εάν $S \cap T = \emptyset$, τότε $V(S \cup T) \geq V(S) + V(T)$.

Συνεπώς, η χαρακτηριστική συνάρτηση δίνει μία τιμή σε κάθε υποσύνολο παικτών. Την τιμή που δίνει η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορούμε να την θεωρήσουμε ως την 'αξία' της κάθε συμμαχίας. Το ζευγάρι $\langle N, V \rangle$ το ονομάζουμε παιχνίδι σε συμμαχική μορφή. Σε αυτή τη μορφή των παιχνιδιών υποθέτουμε ότι η συμπληρωματική συμμαχία $N \setminus S$ δεν μπορεί να αποτρέψει τη συμμαχία S να επιτύχει κάθε ένα από τα διανύσματα πληρωμών του $V(S)$. Τέλος ορίζουμε ως 'κοινωνικό πλούτο' την τιμή $V(N)$ της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Δεχόμενοι λοιπόν ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση αντιπροσωπεύει επαρκώς ένα παιχνίδι σε συμμαχική μορφή και δεδομένου του συνόλου των παικτών N , θα αναζητήσουμε μια λύση για το πως μπορεί να μοιραστεί ο κοινωνικός πλούτος στους παίκτες σύμφωνα με τους μεταξύ τους συσχετισμούς, όπως αυτοί εκφράζονται μέσω της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Η λύση αυτή θα είναι γενικά ένα σύνολο, το οποίο μπορεί να είναι ακόμα και κενό ή μονοσύνολο. Η πιο διαδεδομένη λύση η οποία μας δίνει ως αποτέλεσμα ένα μονοσύνολο, είναι η τιμή Shapley ενώ η κυρίαρχη λύση που μας δίνει σύνολο διανυσμάτων, είναι ο πυρήνας.

1.2 Πυρήνας

Για τον υπολογισμό του πυρήνα υποθέτουμε ότι οι παίκτες συνεργάζονται όλοι μαζί σε μια μεγάλη συμμαχία που τους περιέχει όλους. Η βασική ιδέα πάνω στην οποία στηρίχθηκε ο πυρήνας ενός παιχνιδιού είναι το γεγονός ότι τα προτεινόμενα διανύσματα πληρωμών για τους παίκτες δεν πρέπει να περιέχουν τιμές, οι οποίες να μπορούν να βελτιωθούν αν ο παίκτης λάβει μέρος σε οποιαδήποτε συμμαχία, καθώς αν υπήρχε συμμαχία στην οποία κάποιοι παίκτες μπορούσαν να εξασφαλίσουν πληρωμή μεγαλύτερη από την προτεινόμενη, τότε δε θα δεχόταν την αρχική πρόταση για την κατανομή του κοινωνικού πλούτου και θα συνεργάζονταν μεταξύ τους ώστε να εξασφαλίσουν αυτή τη μεγαλύτερη πληρωμή. Συνεπώς, για να αναπτύξουμε πλήρως αυτή τη θεωρία θα χρειαστούν οι εξής ορισμοί:

1. Ατομικός ορθολογισμός: Το γεγονός ότι ένας παίκτης, i , ζητάει στην κατανομή του πλούτου, να παίρνει τουλάχιστον όσο θα έπαιρνε αν λειτουργούσε μόνος του, όσο είναι δηλαδή το ατομικό επίπεδο ασφαλείας του $V(i)$, ονομάζεται ατομικός ορθολογισμός. Σε αντίθετη περίπτωση ο παίκτης θα αρνηθεί να συμμετάσχει, καθώς μόνος του θα εξασφαλίζει καλύτερη πληρωμή.
2. Συλλογικός ορθολογισμός: Το γεγονός ότι η πληρωμή που θα προταθεί σε όλους τους παίκτες συνολικά θα πρέπει να είναι ακριβώς όσος είναι ο κοινωνικός πλούτος, δηλαδή δεν επιτρέπεται ούτε να χάνεται πλούτος αλλά ούτε να εισάγεται μέσω εξωτερικών, από το παιχνίδι, παραγόντων, ονομάζεται συλλογικός ορθολογισμός.
3. Συμμαχικός ορθολογισμός: Μια προτεινόμενη πληρωμή, X , που ικανοποιεί τον ατομικό και τον συλλογικό ορθολογισμό, θα λέγεται ορθολογική για τη συμμαχία S αν ικανοποιεί τη σχέση:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq V(S)$$

αν δηλαδή η συμμαχία S δεν μπορεί να μπλοκάρει την πληρωμή X .

Στο παιχνίδι συμμαχικής μορφής $\langle N, V \rangle$, θα καλείται σύνολο των αποδόσεων του παιχνιδιού, το σύνολο A που θα περιέχει όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ τα οποία ικανοποιούν τον ατομικό και το συλλογικό ορθολογισμό, όπου $|N| = n$. Συνεπώς είναι το σύνολο όλων των δυνατών κατανομών του κοινωνικού πλούτου που είναι συλλογικά και ατομικά ορθολογικές. Για τον σχηματισμό του πυρήνα, θα αποκόψουμε από το παραπάνω σύνολο όλες τις αποδόσεις που δεν είναι συμμαχικά ορθολογικές, έστω και για μία συμμαχία. Μετά τα παραπάνω έχουμε τον εξής ορισμό:

Πυρήνα C ενός παιχνιδιού $\langle N, V \rangle$ σε συμμαχική μορφή ονομάζουμε το υποσύνολο του συνόλου των αποδόσεων A που ικανοποιεί τον ατομικό, το συλλογικό

και τον συμμαχικό ορθολογισμό, δηλαδή τις εξής σχέσεις:

$$\begin{aligned} 1) & x_i \geq V(i), \forall i \in N \\ 2) & \sum_{i \in N} x_i = V(N) \\ 3) & \sum_{i \in S} x_i \geq V(S), \forall S \subset N \end{aligned}$$

Σε μορφή συνόλου δηλαδή, ο πυρήνας εκφράζεται ως:

$$C(N, V) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} x_i = V(N) \text{ και } \sum_{i \in S} x_i \geq V(S), \forall S \subset N\}$$

Υπάρχουν περιπτώσεις, όμως, στις οποίες ο πυρήνας ενός παιχνιδιού είναι το κενό σύνολο. Τα παιχνίδια σε συμμαχική μορφή τα οποία έχουν κενό πυρήνα θεωρούνται ασταθή καθώς οποιαδήποτε πληρωμή προτείνεται στους παίκτες μπορεί να μπλοκαριστεί από κάποια συμμαχία. Συνήθως τα 'οικονομικά' παιχνίδια είναι αυτά τα οποία είναι ευσταθή και έχουν πυρήνα, ενώ τα 'πολιτικά' παιχνίδια είναι συχνά ασταθή και ο πυρήνας τους είναι κενός. Το παραπάνω αποτελεί μια εμπειρική θεώρηση, όμως και δεν μπορεί να εκφραστεί ως γενικός κανόνας.

Τέλος θα πρέπει να τονιστεί ότι με αντίστοιχο τρόπο μπορεί να γίνει ο υπολογισμός του πυρήνα ενός παιχνιδιού, αν οι παίκτες συνεργάζονται με σκοπό, όχι την εξασφάλιση κέρδους αλλά την μείωση του κόστους τους. Αν δηλαδή η χαρακτηριστική συνάρτηση δεν εκφράζει την πληρωμή που θα λάβει κάθε συμμαχία αλλά το κόστος που θα πρέπει να πληρώσει. Συνεπώς, για παράδειγμα, ο ατομικός ορθολογισμός σε αυτή την περίπτωση εκφράζει το γεγονός ότι ο κάθε παίκτης, για να δεχτεί να πάρει μέρος στη μεγάλη συμμαχία, θα πρέπει το προτεινόμενο κόστος του να είναι το πολύ ίσο με αυτό που θα είχε αν λειτουργούσε μόνος του. Αντίστοιχα τροποποιώντας τις υπόλοιπες σχέσεις, έχουμε ότι σε αυτή την περίπτωση ο πυρήνας του παιχνιδιού εκφράζεται ως το εξής σύνολο:

$$C(N, V) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} x_i = V(N) \text{ και } \sum_{i \in S} x_i \leq V(S), \forall S \subset N\}$$

1.3 Τιμή Shapley

Η τιμή Shapley αποτελεί μία σημειακή έννοια λύσης για παιχνίδια σε συμμαχική μορφή $\langle N, V \rangle$, δηλαδή για παιχνίδια που περιγράφονται μέσω της χαρακτηριστικής συνάρτησης. . Σημειακή, καθώς επιλέγει ως λύση ένα μοναδικό σημείο του συνόλου των αποδόσεων, το οποίο ικανοποιεί κάποιες συγκεκριμένες ιδιότητες. Η τιμή Shapley, σε αντίθεση με τον πυρήνα που όπως είδαμε μπορεί να είναι κενός, υπάρχει πάντα και μάλιστα, ακόμα και όταν ο πυρήνας του παιχνιδιού δεν είναι κενός, μπορεί να μην ανήκει σε αυτόν. Συνήθως συμβολίζεται με το γράμμα φ . Διαισθητικά η τιμή Shapley, $\varphi[V]$ του παιχνιδιού με χαρακτηριστική συνάρτηση V , ορίζει μια διανομή του κοινωνικού πλούτου $V(N)$, στηριγμένη στη συνεισφορά

του κάθε παίκτη όταν εισέρχεται σε μία συμμαχία. Με $\varphi_i(V)$ συμβολίζουμε την i -συντεταγμένη της, η οποία αντιπροσωπεύει το ποσό που θα δοθεί στον i παίκτη, $i = 1, \dots, n$. Στη συνέχεια ορίζουμε τέσσερα πολύ σημαντικά αξιώματα, τα οποία είναι απαραίτητα στον ορισμό της τιμής Shapley.

Αξίωμα 1:Αποτελεσματικότητα

Το άθροισμα των πληρωμών των παικτών πρέπει να ισούται με τον κοινωνικό πλούτο, δηλαδή να ικανοποιείται το αξίωμα του συλλογικού ορθολογισμού. Έχουμε λοιπόν την εξής σχέση:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i[V] = V(N)$$

Αξίωμα 2:Ανωνυμία

Δυο παίκτες λέγονται συμμετρικοί όταν η συνεισφορά τους στη συμμαχία στην οποία εισέρχονται είναι ίδια, ανεξάρτητα από το ποια είναι αυτή η συμμαχία. Το αξίωμα της ανωνυμίας εκφράζει την ιδέα ότι αυτοί οι παίκτες θα πρέπει να θεωρούνται ίσοι στη διαδικασία του διαχωρισμού του κοινωνικού πλούτου. Συνεπώς στη μορφή του παιχνιδιού δεν έχει καμία σημασία το ποιόν παίκτη θα ονομάσουμε παίκτη 1, παίκτη 2, κλπ. Συνεπώς έχουμε την παρακάτω πρόταση:

Κάτω από το αξίωμα της ανωνυμίας, εάν οι παίκτες i και j είναι συμμετρικοί τότε:

$$\varphi_i[V] = \varphi_j[V]$$

Αξίωμα 3:Προσθετικότητα

Αρχικά τονίζουμε ότι αν V, W είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις, τότε και η $V+W$ είναι χαρακτηριστική συνάρτηση. Το αξίωμα της προσθετικότητας δηλώνει ότι η τιμή Shapley του παιχνιδιού $\langle N, V+W \rangle$ ισούται με το άθροισμα των τιμών Shapley των παιχνιδιών $\langle N, V \rangle$ και $\langle N, W \rangle$. Δηλαδή ότι:

$$\varphi[V+W] = \varphi[V] + \varphi[W]$$

Το αξίωμα αυτό οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι η τιμή Shapley του παιχνιδιού που προκύπτει από μια πιθανοθεωρητική μείξη δύο παιχνιδιών σε συμμαχική μορφή, είναι ίση με την αντίστοιχη μείξη των τιμών Shapley.

Αξίωμα 4:Μηδέν-Άχρηστου

Ένας παίκτης i που, ερχόμενος σε μία συμμαχία, προσφέρει μόνο το επίπεδο ασφαλείας του, $V(i)$ καλείται άχρηστος, καθώς οι υπόλοιποι παίκτες της συμμαχίας δεν κερδίζουν κάτι από την παρουσία του, αφού στο τέλος θα απαιτήσει πληρωμή τουλάχιστον $V(i)$. Αν μάλιστα $V(i) = 0$ τότε ο παίκτης καλείται 0-άχρηστος. Σε αυτή την περίπτωση, το αξίωμα του 0-άχρηστου, ορίζει ότι ο παίκτης αυτός θα πρέπει να πάρει μηδενικό μερίδιο από τον κοινωνικό πλούτο. Δηλαδή:

Αν ο i είναι 0-άχρηστος τότε $\varphi_i[V] = 0$.

Το σύνολο όλων των παιχνιδιών σε συμμαχική μορφή που μπορούν να παιχτούν από ένα σύνολο N παικτών αποτελούν ένα κώνο στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^n$, που συμβολίζουμε με G .

Ορισμός: Ορίζουμε ως τιμή Shapley κάθε τελεστή $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ο οποίος αξιοποιεί τα αξιώματα της αποτελεσματικότητας, της ανωνυμίας, της προσθετικότητας και του 0-άχρηστου όπως αυτά ορίστηκαν παραπάνω.

Τονίζουμε ότι η τιμή Shapley ικανοποιεί τόσο τον συλλογικό όσο και τον ατομικό ορθολογισμό και για αυτό το λόγο ανήκει στο σύνολο των αποδόσεων του παιχνιδιού, όμως δεν ικανοποιεί απαραίτητα τον συμμαχικό ορθολογισμό, συνεπώς αυτή είναι η αιτία για την οποία δεν ανήκει αναγκαστικά και στον πυρήνα του παιχνιδιού, ακόμα και όταν αυτός δεν είναι κενός.

Η τιμή Shapley $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ υπάρχει, είναι μοναδική και δίνεται από τη σχέση:

$$\varphi_i[V] = \sum_{S, i \in S} \gamma_S [V(S) - V(S - \{i\})]$$

, όπου $\gamma_S = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$, με $n = |N|$ και $s = |S|$.

από τον παραπάνω τύπο φαίνεται καθαρά ότι οι πληρωμές κάθε παίκτη βασίζονται στη συνεισφορά του σε κάθε συμμαχία που λαμβάνει μέρος.

Τέλος αναφέρουμε συνοπτικά, χωρίς απόδειξη μιας και προκύπτουν άμεσα από τον παραπάνω τύπο και τα αξιώματα, μερικές βασικές ιδιότητες της τιμής Shapley.

1. **Συνέχεια:** Η τιμή Shapley είναι συνεχής πάνω στο G .
2. **Μονοτονία:** Η $\varphi_i(V)$ είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) ως προς τη συνεταγμένη $V(S)$ για κάθε $i \in S$ (αντίστοιχα για $i \notin S$)
3. **Μείξη παιχνιδιών:** Αν $p \in (0, 1)$ και $V, W \in G$ τότε:
 $\varphi(pV + (1-p)W) = p\varphi(V) + (1-p)\varphi(W)$

2 Διαχείριση αποθεμάτων

Αποθέματα είναι άεργοι πόροι που διατηρούνται σε διάφορες μορφές, οι οποίες φυλάσσονται σε αποθήκες για μελλοντική χρήση. Τα προϊόντα αυτά μπορεί να είναι πρώτες ύλες, ημικατεργασμένα ή έτοιμα προϊόντα, κεφάλαια, μηχανές κτλ. Τα αποθέματα, εάν διατηρούνται με ασφάλεια, συμβάλλουν σημαντικά στη σωστή λειτουργία των επιχειρήσεων. Επομένως, αποτελούν για τις διοικήσεις των επιχειρήσεων ένα τομέα με πολλές παραμέτρους, οι οποίες θα πρέπει να αντιμετωπίζονται με τον πιο συμφέροντα για την επιχείρηση τρόπο.

Εάν η ποσότητα των αποθεμάτων που διατηρεί κάποια επιχείρηση είναι αρκετά μεγάλη, τότε αντιμετωπίζεται σε μεγάλο βαθμό μια αύξηση της ζήτησης που τυχόν θα παρουσιασθεί στην αγορά, αλλά για την απόκτηση και τη διατήρηση αυτών των αποθεμάτων, δεσμεύονται μεγάλα ποσά κεφαλαίων. Εάν, αντίθετα, η ποσότητα των αποθεμάτων είναι μικρή, τότε το επενδεδυμένο σε αυτά κεφάλαιο μειώνεται, αλλά η επιχείρηση αντιμετωπίζει τον κίνδυνο της πιθανής έλλειψης αποθεμάτων που συνεπάγεται απώλεια κερδών και αξιοπιστίας. Η διαχείριση των αποθεμάτων είναι ένα πρόβλημα εξισορρόπησης μεταξύ κόστους έλλειψης και κόστους υπερ-ποθεματοποίησης υπό αβέβαιη ζήτηση.

Επομένως, για μια επιχείρηση τίθεται το πρόβλημα του ελέγχου και της διαχείρισης των αποθεμάτων με τέτοιο τρόπο, ώστε να εξασφαλίζονται για την επιχείρηση τα μεγαλύτερα δυνατά κέρδη. Ο βασικός σκοπός ενός συστήματος διαχείρισης αποθεμάτων είναι να καθορίζει πότε θα πρέπει να παραγγελθούν τα αγαθά, πόσο μεγάλη θα πρέπει να είναι η παραγγελιά σε ποια χρονική περίοδο θα γίνει. Ορισμένες επιχειρήσεις προτιμούν να διατηρούν μακροχρόνιες σχέσεις με τους προμηθευτές τους για την ικανοποίηση των αναγκών τους για σχεδόν έναν ολόκληρο χρόνο. Στην περίπτωση αυτή ένα σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων θα καθορίζει πότε και τι ποσότητα θα διανέμεται. Ένα αποτελεσματικό σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων, εξοικονομεί πόρους για την επιχείρηση ελαχιστοποιώντας το κόστος. Στο πλαίσιο της Επιχειρησιακής Έρευνας έχει αναπτυχθεί η Θεωρία Αποθεμάτων, που εξετάζει συστηματικά τα προβλήματα δημιουργίας και διαχείρισης αποθεμάτων. Η σπουδαιότερη παράμετρος που εμφανίζεται σε ένα σύστημα διαχείρισης αποθεμάτων είναι η έννοια της ζήτησης.

Η ζήτηση αντιπροσωπεύει τις ποσότητες των προϊόντων που ζητούνται ανά περίοδο. Το μέγεθος της ζήτησης, για μια ορισμένη μελλοντική χρονική περίοδο, είναι δυνατό να είναι εκ των προτέρων γνωστό. Τότε, τα συστήματα αυτά των αποθεμάτων ονομάζονται προσδιοριστικά. Στα προσδιοριστικά συστήματα αποθεμάτων, το μέγεθος της ζήτησης μπορεί να είναι σταθερό για ίσα χρονικά διαστήματα (στατική ζήτηση) ή να είναι γνωστός ο τρόπος μεταβολής του (δυναμική ζήτηση). Σε πολλά συστήματα αποθεμάτων, είναι αδύνατο να προσδιοριστεί εκ των προτέρων το μέγεθος της ζήτησης για ένα προϊόν, αλλά μπορούμε να γνωρίζουμε την κατανομή της. Η κατανομή αυτή μπορεί να είναι ασυνεχής ή συνεχής. Τα συστήματα αυτά των αποθεμάτων ονομάζονται στοχαστικά. Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με στοχαστικά συστήματα αποθεμάτων.

2.1 Διαχείριση αποθεμάτων με αβέβαιη ζήτηση

Τα στοχαστικά συστήματα αποθεμάτων είναι σχεδιασμένα για την ανάλυση μοντέλων στα οποία υπάρχει αβεβαιότητα γύρω από τη ζήτηση. Οι μέθοδοι με τους οποίους μπορούμε να κάνουμε πρόβλεψη για την κατανομή της ζήτησης ενός προϊόντος ποικίλουν ανάλογα με το πρόβλημα. Στο παρόν κεφάλαιο δε θα ασχο-

ληθούμε με τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να προβλεφθεί, αλλά θα τη θεωρήσουμε γνωστή.

Ο βασικός διαχωρισμός των παραπάνω στοχαστικών προβλημάτων γίνεται με βάση το προϊόν το οποίο βρίσκεται σε απόθεμα. Οι κατηγορίες στις οποίες χωρίζονται τα προϊόντα είναι δύο: τα σταθερά και τα ευπαθή. Στην πρώτη περίπτωση ταξινομούνται τα προϊόντα τα οποία μπορούν να πωληθούν όσος χρόνος και αν περάσει, συνεπώς δεν υπάρχει προθεσμία για το πόσο καιρό μπορεί να φυλαχθούν ως απόθεμα. Τέτοια προϊόντα είναι για παράδειγμα τα βιβλία, τα παιδικά παιχνίδια ή ακόμα και τα ρούχα. Στη δεύτερη περίπτωση συγκαταλέγονται τα προϊόντα τα οποία μπορούν να φυλαχθούν ως απόθεμα για περιορισμένο χρονικό διάστημα καθώς μετά από λίγο δε θα είναι σε κατάσταση να πωληθούν. Αυτές τις δυο κατηγορίες προϊόντων πρέπει να τις αντιμετωπίσουμε πολύ διαφορετικά.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τη δεύτερη κατηγορία, στην οποία μάλιστα θα θεωρήσουμε ότι η διάρκεια 'ζωής' των προϊόντων θα είναι μία περίοδος και το προϊόν είναι μοναδικό.

2.1.1 Στοχαστικά συστήματα διάρκειας μίας περιόδου για ευπαθή αγαθά

Υποθέσεις μοντέλου:

1. Κάθε εφαρμογή περιλαμβάνει μόνο ένα ευπαθές προϊόν.
2. Κάθε εφαρμογή αποτελείται από μια μοναδική χρονική περίοδο καθώς το προϊόν δεν μπορεί να πωληθεί μετά το πέρας αυτής της περιόδου.
3. Είναι πιθανόν οι μονάδες του προϊόντος που έμειναν αδιάθετες το τέλος της περιόδου να μπορούν να επιστραφούν ή ακόμα και να πωληθούν έναντι κάποιας διασωθείσας αξίας, μικρότερης από την αρχική αξία αγοράς του προϊόντος.
4. Δεν υπάρχει αρχικό απόθεμα πριν γίνει η παραγγελία.
5. Η μόνη απόφαση που λαμβάνεται είναι ο αριθμός, y , των μονάδων του προϊόντος που θα παραχθούν (ή αγοραστούν) στην αρχή της περιόδου και θα τοποθετηθούν ως απόθεμα.
6. Η ζήτηση για το προϊόν αυτή την περίοδο, που θα καλυφθεί από το απόθεμα που δημιουργήθηκε στην αρχή της, είναι μια τυχαία μεταβλητή D . Η κατανομή αυτής της μεταβλητής, όμως, είναι γνωστή.
7. Σκοπός του μοντέλου είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού αναμενόμενου κόστους όπου οι παράμετροι είναι οι εξής:
 c = το κόστος για την αγορά (ή παραγωγή) κάθε μονάδας προϊόντος.
 h = το κόστος για το προϊόν που έμεινε αδιάθετο στο τέλος της περιόδου ανά μονάδα. Αν υπάρχει η δυνατότητα για επιστροφή των απούλητων μονάδων, η διασωθείσα αξία ανά μονάδα θα αφαιρεθεί από το κόστος.
 p = το κόστος που προκύπτει για κάθε μονάδα προϊόντος που δεν ικανοποιήθηκε από τη ζήτηση της περιόδου.

Ανάλυση μοντέλου

Η απόφαση για την τιμή του y εξαρτάται από την κατανομή πιθανότητας της ζήτησης. Απαιτείται μια ισορροπία ανάμεσα στο ρίσκο του να υπάρξουν χαμένες πωλήσεις και του να υπάρξουν αναξιποίητα προϊόντα.

Η ποσότητα του προϊόντος που τελικά πωλείται κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι η εξής:

$$\min[D, y] = \begin{cases} y & \text{if } D \geq y \\ D, & \text{if } y \geq D \end{cases}$$

Συνεπώς το κόστος για ζήτηση D και απόθεμα y είναι:

$$C(D, y) = cy + p * \max\{0, D - y\} + h * \max\{0, y - D\}.$$

Επειδή η ζήτηση D είναι τυχαία μεταβλητή και το κόστος θα είναι τυχαία μεταβλητή. Το αναμενόμενο κόστος θα δίνεται από τη συνάρτηση $C(y)$ ως εξής:

$$C(y) = cy + \int_0^y h(y-x)dF(x) + \int_y^\infty p(x-y)dF(x)$$

όπου F η συνάρτηση κατανομής της ζήτησης D .

Η συνάρτηση F μπορεί να είναι και διακριτή συνάρτηση κατανομής αλλά όταν το εύρος των πιθανών τιμών της ζήτησης είναι πολύ μεγάλο, η αναπαράσταση αυτής της συνάρτησης κατανομής είναι δύσκολη, συνεπώς ακόμα και σε αυτή την περίπτωση μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω μίας συνεχούς συνάρτησης. Συνεπώς, εκτός και αν τονίζεται το αντίθετο, θεωρούμε ότι η συνάρτηση F είναι συνεχής.

Αποδεικνύεται ότι η τιμή y_0 η οποία ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση του αναμενόμενου κόστους δίνεται από τη σχέση:

$$F(y_0) = \frac{p-c}{p+h}$$

Τέλος αν συμβολίσουμε με C_{under} το συνολικό κόστος για κάθε μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης και με C_{over} το συνολικό κόστος για κάθε μονάδα που δεν πωλήθηκε μετά την ικανοποίηση της ζήτησης, τότε:

$$C_{under} = p - c$$

$$C_{over} = h + c \text{ και}$$

$$F(y_0) = \frac{C_{under}}{C_{under} + C_{over}}$$

Η πρώτη από τις παραπάνω σχέσεις δηλώνει ότι το συνολικό κόστος ανά μονάδα ζήτησης που δεν ικανοποιήθηκε θα είναι η ποινή που επιβάλλεται ανά μονάδα μείον το κόστος για να αγορασθεί (ή να παραχθεί) αυτή η μονάδα, καθώς με τη μη αγορά του προϊόντος δεν υπάρχει επιβάρυνση με αυτό το κόστος. Η δεύτερη σχέση δηλώνει ότι το συνολικό κόστος για της μονάδες που δεν πωλήθηκαν αποτελείται και από την ποινή για το αδιάθετο προϊόν, όπως για παράδειγμα από ενδεχόμενο κόστος αποθήκευσης ή καταστροφής του προϊόντος, αλλά και από το κόστος αγοράς(ή παραγωγής), καθώς το προϊόν παράχθηκε χωρίς να χρειάζεται, συνεπώς το κόστος c θα μπορούσε να αποφευχθεί.

Το παραπάνω γενικό μοντέλο είναι ευρέως γνωστό ως το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη, καθώς ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ευπαθούς προϊόντος με διάρκεια ζωής μία χρονική περίοδο, είναι οι εφημερίδες, μιας και την επόμενη μέρα αποσύρονται από την κυκλοφορία και δεν μπορούν να πωληθούν. Το απλό πρόβλημα του εφημεριδοπώλη είναι ένα από τα κλασικά προβλήματα που συναντώνται στη βιβλιογραφία πάνω στον έλεγχο αποθεμάτων. Εφαρμογή μπορεί να βρει στον προγραμματισμό των εργασιών διαφόρων εταιρειών που τα προϊόντα τους θεωρούνται χρήσιμα για μια περίοδο. Συνεπώς, παρόλο που το όνομα του παραπέμπει σε προβλήματα στα οποία το προϊόν είναι εφημερίδες, το μοντέλο εφαρμόζεται εξίσου σε

όλα τα ευπαθή προϊόντα. Στην πραγματικότητα, στην πλειοψηφία των εφαρμογών, τα προϊόντα θα είναι διαφορετικά από εφημερίδες.

Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα ευπαθών προϊόντων που ταιριάζουν στο παραπάνω μοντέλο είναι τα περιοδικά, το φρέσκο φαγητό, τα λαχανικά με τα φρούτα, τα εποχιακά προϊόντα όπως τα χριστουγεννιάτικα δέντρα και ρούχα τα οποία βγαίνουν εκτός μόδας, αλλά και διάφορα προϊόντα κρατήσεων όπως τα αεροπορικά εισιτήρια ή τα εισιτήρια γηπέδου.

Υπάρχουν και αρκετές παραλλαγές του παραπάνω μοντέλου με τον εφημεριδοπώλη όπως για παράδειγμα ο προμηθευτής δεν είναι αξιόπιστος ή το αρχικό απόθεμα στην αρχή της περιόδου δεν είναι μηδενικό, όμως στην παρούσα έρευνα δε θα ασχοληθούμε με αυτές τις περιπτώσεις.

3 Πυρήνας παιχνιδιών συγκέντρωσης αποθεμάτων με όμοια κόστη καταστημάτων

Η παρακάτω μελέτη βασίζεται στις εργασίες των Hartman, Dror και Shaked με τίτλο "Cores of Inventory Centralization Games" και των Muller, Scarsini και Shaked με τίτλο "The Newsvendor Game Has a Nonempty Core".

3.1 Εισαγωγή

Θεωρούμε ένα σύνολο από n καταστήματα, τα οποία έχουν προς πώληση ένα μοναδικό προϊόν, ίδιο σε κάθε κατάστημα, για μια και μοναδική χρονική περίοδο. Υποθέτουμε ότι τα καταστήματα έχουν την επιλογή της συνεργασίας, με την έννοια ότι μπορούν να ομαδοποιήσουν τις παραγγελίες που δέχονται καθώς και τη φύλαξη του αποθέματος στο τέλος της περιόδου, υπό της μορφή μίας κεντρικής διαχείρισης. Το κόστος για κάθε μονάδα προϊόντος που δεν πωλείται αλλά και η ποινή που επιβάλλεται ανά μονάδα προϊόντος που δεν ικανοποιήθηκε από την απαιτούμενη ζήτηση, είναι ίδια για κάθε κατάστημα και σταθερή, ανεξάρτητα από την ποσότητα του προϊόντος. Η παραγγελία του προϊόντος από τα καταστήματα γίνεται στην αρχή της περιόδου και μπορεί να εξυπηρετήσει τη ζήτηση μόνο από τη συγκεκριμένη περίοδο. Τέλος το προϊόν που μένει αδιάθετο στο τέλος της περιόδου δεν μπορεί να επιστραφεί στον αρχικό προμηθευτή, έναντι κάποιας αμοιβής.

Σκοπός της συγκεκριμένης μελέτης είναι να καθορίσει το πως θα κατανεμηθεί το κόστος ανάμεσα στα συνεργαζόμενα καταστήματα. Αφού δεν έχουμε υποθέσει ότι τα καταστήματα είναι όμοια μεταξύ τους, ο ισόποσος διαχωρισμός του συνολικού κόστους σε κάθε κατάστημα δεν είναι μια εφαρμόσιμη πρόταση, καθώς τότε μερικές επιχειρήσεις δε θα είχαν συμφέρον να συμμετάσχουν στη συμμαχία καθώς ατομικά θα μπορούσαν να έχουν μικρότερο κόστος. Η συνεργατική θεωρία παιγνίων εξετάζει το πρόβλημα διαχωρισμού του κόστους και ορίζει την έννοια του πυρήνα ενός συνεργατικού παιχνιδιού. Μια κατανομή του κόστους μέσω του πυρήνα μπορεί να προσφέρει ευστάθεια στο παραπάνω μοντέλο. Εξετάζονται στη συνέχεια, λοιπόν, συνθήκες κάτω από τις οποίες ο πυρήνας των παιχνιδιών συγκέντρωσης αποθεμάτων είναι μη κενός.

Υποθέτουμε ότι η ζήτηση του προϊόντος δεν είναι γνωστή, αλλά κάθε κατάστημα αντιμετωπίζει ζήτηση που ακολουθεί κάποια γνωστή κατανομή, η οποία είναι συσχετισμένη με τη ζήτηση των υπόλοιπων καταστημάτων. Η βασική υπόθεση, ωστόσο, είναι ότι κάθε κατάστημα αποφασίζει είτε να διαχειριστεί ατομικά τη διαδικασία προμήθειας και αποθήκευσης των προϊόντων είτε να συμμετάσχει σε μία κεντρική συμφωνία για τη διαχείριση των παραγγελιών και της αποθήκευσης και να μοιράζεται το κόστος λειτουργίας της κεντρικής εγκατάστασης. Αν ένα κατάστημα συμμετάσχει στη συμμαχία, οι πελάτες του εξυπηρετούντε, χωρίς επιπλέον κόστος, από την κεντρική εγκατάσταση, ενώ σε διαφορετική περίπτωση κάθε πελάτης του εξυπηρετείται μέσω του τοπικού καταστήματος.

Συμπερασματικά, το αναμενόμενο κόστος μέσω της κεντρικής διαχείρισης πρέπει να είναι μικρότερο από ότι αν κάθε κατάστημα λειτουργούσε ξεχωριστά καθώς σε διαφορετική περίπτωση η συμμαχία δε θα σχηματίζεται. Επιπλέον είναι λογικό να υποτεθεί ότι ο διαχειριστής μίας τέτοιας συμφωνίας επιθυμεί να βεβαιώσει τη συμμετοχή των καταστημάτων σε αυτή επιλέγοντας μια ευσταθή πολιτική διαχωρισμού του κόστους, στα πλαίσια του πυρήνα του παιχνιδιού.

Η μελέτη ξεκινάει περιγράφοντας, την κατηγορία των μοντέλων που είναι γνω-

στά ως το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη, τη σύνθεση των πολλαπλών καταστημάτων και τη δομή του συνεργατικού αυτού παιχνιδιού.

3.2 Μοντέλα εφημεριδοπώλη

Το παρόν μοντέλο αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα του μοντέλου του εφημεριδοπώλη καθώς ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις του, όπως τις είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Συνήθως το μέσο αναμενόμενο κόστος για αυτό το μοντέλο είναι μια συνάρτηση της ποσότητας y , της αρχικής παραγγελίας για το προϊόν. με $y \in [0, \infty]$, καθώς πρακτικά τα καταστήματα δεν μπορούν να παραγγείλουν αρνητικές ποσότητες. Όμως στην ανάλυση που ακολουθεί η τιμή της τυχαίας ζήτησης, συνεπώς και η τιμή y μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Αυτό είναι χρήσιμο όταν η κατανομή της ζήτησης προσεγγίζεται από την κανονική κατανομή.

Εστω X η τυχαία ζήτηση. Θα συμβολίζουμε με p την ποινή που επιβάλλεται ανά μονάδα προϊόντος όταν $y < X$, όταν δηλαδή η ποσότητα που παρήγγειλε ένα κατάστημα είναι μικρότερη από τη ζήτηση και με h το κόστος ανά μονάδα όταν $y > X$. Όταν $y = X$ δεν υπάρχει κάποιο κόστος.

Αν η ζήτηση X έχει συνάρτηση κατανομής F τότε η συνάρτηση κόστους δίνεται από την εξής σχέση:

$$H(y) = \int_{-\infty}^y h(y-x)dF(x) + \int_y^{\infty} p(x-y)dF(x) \quad (1)$$

Για κάθε συνεχή συνάρτηση F , η συνάρτηση H ελαχιστοποιείται για $y = y^*$, η οποία ορίζεται ως η λύση της κρίσιμης εξίσωσης $F(y^*) = \frac{p}{h+p} = r$. Όταν το X είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή τότε αξιολογούμε το H με τις διακριτές τιμές από την λύση της κρίσιμης εξίσωσης και επιλέγουμε το ελάχιστο, για τη βέλτιστη τιμή y^* (Johnson & Montgomery, 1974).

Από την εξίσωση (1) φαίνεται ότι ο υπολογισμός και η ελαχιστοποίηση του κόστους εξαρτάται μόνο από τις τιμές h και p , συνεπώς χωρίς βλάβη της γενικότητας στη συνέχεια θα θεωρούμε ότι το p ισούται με 1. Συνεπώς η συνάρτηση κόστους μπορεί να εκφραστεί και ως:

$$H(y) = \frac{1-r}{r} \int_{-\infty}^y (y-x)dF(x) + \int_y^{\infty} (x-y)dF(x)$$

Διαφορετικά, μετά από πράξεις:

$$H(y) = \frac{1-r}{r} yF(y) - \frac{1-r}{r} \int_{-\infty}^y x dF(x) + \int_y^{\infty} x dF(x) - y[1-F(y)]$$

Για το y^* έχουμε ότι $F(y^*) = r$ συνεπώς για το ελάχιστο δυνατό κόστος έχουμε ότι:

$$H(y^*) = \int_{y^*}^{\infty} x dF(x) - \frac{1-r}{r} \int_{-\infty}^{y^*} x dF(x) \quad (2)$$

Μέσω αυτού του τύπου επιχειρήθηκε να εξαχθούν συμπεράσματα για τα ερωτήματα που τέθηκαν παραπάνω σχετικά με τον πυρήνα του παιχνιδιού.

Θεωρούμε το σύνολο $N = \{1, 2, \dots, n\}$ των καταστημάτων με επιμέρους ζήτηση $X_1, X_2, \dots, X_n$ για κάθε ένα από αυτά. Το κόστος για κάθε συμμαχία $S \subset N$ ισούται με

$$C(S) = H_S(y_S^*) = \int_{y_S^*}^{\infty} x dF_S(x) - \frac{1-r}{r} \int_{-\infty}^{y_S^*} x dF_S(x),$$

όπου F_S η συνάρτηση κατανομής της $X_S = \sum_{i \in S} X_i$ και y_S^* η ποσότητα του προϊόντος που πρέπει να παραγγείλει η συμμαχία S , ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος. Έχουμε λοιπόν το παιχνίδι $\langle N, C \rangle$. Ο πυρήνας αυτού του παιχνιδιού ορίζεται ως:

$$Core(N, C) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in N} x_i = C(N) \text{ και } \sum_{i \in S} x_i \leq C(S), \forall S \subset N\}$$

Επισημαίνουμε ότι εδώ τα x_i αναφέρονται σε πιθανούς διαχωρισμούς του κόστους για κάθε κατάσταση και όχι στην εκάστοτε ζήτηση του προϊόντος.

Στη συνέχεια ορίζουμε την έννοια του ισορροπημένου χάρτη.

Έστω $\lambda : 2^N \rightarrow [0, 1]$ ένας χάρτης. Αυτός ο χάρτης θα καλείται ισορροπημένος αν:

$$\sum_{S: i \in S} \lambda(S) = 1$$

για όλα τα $i \in N$. Αν Λ είναι το σύνολο όλων των ισορροπημένων χαρτών στο N , το παιχνίδι (N, C) καλείται ισορροπημένο αν:

$$C(N) \leq \sum_{S \subset N} \lambda(S) C(S), \forall \lambda \in \Lambda \quad (3)$$

Το παιχνίδι είναι ισορροπημένο αν και μόνο αν, έχει μη κενό πυρήνα (Bondareva(1963), Shapley(1967)).

Έχουμε λοιπόν μια πρόταση με την οποία μπορεί ναδειχθεί αν ο πυρήνας ενός παιχνιδιού είναι μη κενός ή όχι.

3.3 Συμμετρικές συναρτήσεις κατανομής ζήτησης

Στην παράγραφο αυτή θα θεωρήσουμε ότι οι κατανομές για τη ζήτηση των προϊόντων σε κάθε κατάσταση είναι συμμετρικές. Για ναδειχθεί αν ο πυρήνας του παιχνιδιού $\langle N, C \rangle$ είναι μη κενός, πρέπει να εξετασθούν οι ανισότητες της σχέσης (3).

Υποθέτουμε επίσης ότι $h = p$ (άρα $r = \frac{1}{2}$). Τότε, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θέσουμε τα κόστη ανά μονάδα προϊόντος ίσα με 1. Αρχικά θεωρούμε ότι υπάρχει μοναδικό κατάστημα, με ζήτηση X η οποία έχει κατανομή F . Τότε έχουμε μέσω της σχέσης (1) ότι: $H(y) = E|X - y|$.

Αν η κατανομή της X είναι συμμετρική γύρω από κάποια τιμή α τότε, επειδή $r = \frac{1}{2}$, έχουμε ότι η συνάρτηση H ελαχιστοποιείται για $y^* = \alpha$. Συνεπώς τα ελάχιστο κόστος για ένα κατάστημα είναι

$$H(\alpha) = E|X - \alpha|. \quad (4)$$

Έστω, τώρα, ότι υπάρχουν n καταστήματα, με επιμέρους, ανεξάρτητες, ζήτησεις $X_1, X_2, \dots, X_n$, έτσι ώστε η κατανομή του X_i να είναι συμμετρική γύρω από ένα $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$. Ορίζουμε ως

$$X_S = \sum_{i \in S} X_i$$

τη συνολική ζήτηση της συμμαχίας S , με $S \subset N$.

Πορίσμα: Η κατανομή της X_S είναι συμμετρική γύρω από το α_S , με $\alpha_S = \sum_{i \in S} \alpha_i$.

Απόδειξη: Έστω $S = \{1, 2\}$. Θέτουμε $X'_1 = X_1 - \alpha_1$ και $X'_2 = X_2 - \alpha_2$. Τότε για κάθε z έχουμε:

$$\begin{aligned} P\{X_1 + X_2 - \alpha_1 - \alpha_2 < -z\} &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{X'_1}(-z - y) dF_{X'_2}(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{X'_1}(-z + y) dF_{X'_2}(-y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_{X'_1}(-z + y) d(-F_{X'_2}(-y)). \end{aligned}$$

από τη συμμετρία των X'_1 και X'_2 γύρω από το 0 έχουμε ότι $F_{X'_1}(-z + y) = 1 - F_{X'_1}(z - y)$ και $d(-F_{X'_2}(-y)) = d(F_{X'_2}(y))$.

Εφαρμόζοντας αυτές τις δύο σχέσεις στην παραπάνω, καταλήγουμε στο ότι:

$$\begin{aligned} P\{X_1 + X_2 - \alpha_1 - \alpha_2 < -z\} &= \int_{-\infty}^{\infty} 1 - F_{X'_1}(z - y) d(F_{X'_2}(y)) \\ &= P\{X'_1 + X'_2 > z\} \\ &= P\{X_1 + X_2 - \alpha_1 - \alpha_2 > z\} \end{aligned}$$

δηλαδή ότι η $X_1 + X_2$ είναι συμμετρική γύρω από το $\alpha_1 + \alpha_2$. Με επαγωγή καταλήγουμε και στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

Μέσω αυτού του πορίσματος μπορεί να γενικευθεί η σχέση (4) ως εξής:
 $C(S) = E|X_S - \alpha_S|$, για κάθε συμμαχία S .

Έστω λ ένας ισορροπημένος χάρτης. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \sum_{S \subset N} \lambda(S) C(S) &= \sum_{S \subset N} \lambda(S) E \left| \sum_{i \in S} (X_i - \alpha_i) \right| \geq E \left| \sum_{S \subset N} \lambda(S) \sum_{i \in S} (X_i - \alpha_i) \right| \\ &= E \left| \sum_{i \in N} \sum_{S: i \in S} \lambda(S) (X_i - \alpha_i) \right| = E \left| \sum_{i \in N} (X_i - \alpha_i) \sum_{S: i \in S} \lambda(S) \right| \\ &= E \left| \sum_{i \in N} (X_i - \alpha_i) \right| \\ &= C(N) \end{aligned}$$

Συνεπώς η συνθήκη (3) ικανοποιείται, άρα έχουμε το εξής συμπέρασμα:

Θεώρημα 1. Το παιχνίδι συγκέντρωσης αποθεμάτων για το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη, με ανεξάρτητες συμμετρικές συναρτήσεις κατανομής για τις επιμέρους ζητήσεις, για το οποίο ισχύει επίσης ότι $h = p$, έχει μη κενό πυρήνα.

Το παραπάνω θεώρημα ευσταθεί ακόμα και αν οι επιμέρους συναρτήσεις κατανομής δεν είναι ανεξάρτητες, αρκεί τα επιμέρους αθροίσματα των X_i να έχουν συμμετρικές κατανομές. Η απόδειξη είναι όμοια με την παραπάνω.

Η υπόθεση για $h = p$ στο παραπάνω θεώρημα είναι πολύ περιοριστική, αλλά απαραίτητη. Στο παρακάτω κεφάλαιο ωστόσο, θα δείξουμε ότι όταν οι επιμέρους

ζητήσεις ακολουθούν κανονική κατανομή, τότε ο πυρήνας του παιχνιδιού είναι μη κενός ακόμα και όταν $h \neq p$.

3.4 Ζήτηση με κανονική συνάρτηση κατανομής

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν n καταστήματα, με επιμέρους ζήτηση για ένα προϊόν $X_1, X_2, \dots, X_n$ σε κάθε κατάσταση, όπου $X^* = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ακολουθεί μια πολυδιάστατη κανονική κατανομή με μέσο μ και πίνακα συνδιακύμανσης V . Το εύρος τιμών για κάθε X_i είναι το $(-\infty, \infty)$, συνεπώς η υπόθεση της κανονικότητας δεν είναι εντελώς ικανοποιητική, μιας και οι πραγματικές τιμές της ζήτησης δεν μπορούν να είναι αρνητικές στα ρεαλιστικά προβλήματα. Παρόλα αυτά σε πολλές πραγματικές περιπτώσεις η υπόθεση της κανονικότητας είναι πολύ λογική, μιας και η πιθανότητα να πάρει κάποιο από τα X_i αρνητική τιμή είναι αμελητέα. Συνεπώς πολύ συχνά χρησιμοποιείται στην πράξη.

Αρχικά υποθέτουμε ότι ένα κατάστημα, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε το κατάστημα 1, θέλει να διαχειριστεί ατομικά τις διαδικασίες παραγωγής και αποθήκευσης του προϊόντος. Η ζήτηση X_1 ακολουθεί κανονική κατανομή με μέσο μ_1 και τυπική απόκλιση σ_1 . Έστω y^* η τιμή που ελαχιστοποιεί το κόστος H του καταστήματος. Αποδεικνύεται ότι (Eppen, 1979):

$$H(y^*) = [hz^* + (h + p)R^*(z^*)]\sigma_1, \quad (5)$$

όπου z^* η τιμή που ελαχιστοποιεί το κόστος του καταστήματος αν η ζήτηση του ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή και $R^*(z) = \int_z^\infty (x-z) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$. Αν θέσουμε $K = hz^* + (h + p)R^*(z^*)$ τότε η σχέση (5) δηλώνει το γεγονός ότι το βέλτιστο κόστος για ένα κατάστημα που λειτουργεί ατομικά εκφράζεται ως γινόμενο μίας σταθεράς με την τυπική απόκλιση της κατανομής της ζήτησης του.

Στη συνέχεια εστιάζουμε στην περίπτωση στην οποία όλα τα καταστήματα σχηματίζουν μια συμμαχία. Εδώ η συνολική ζήτηση είναι η $X = \sum_{i=1}^n X_i$ η οποία ακολουθεί κανονική κατανομή. Αν ο πίνακας συνδιακύμανσης V είναι θετικά ορισμένος, τότε έχει μια μοναδική παραγοντοποίηση κατά *Cholesky*, η οποία εκφράζεται ως το γινόμενο ενός κάτω τριγωνικού πίνακα L και του ανάστροφου του (LL^T). Έστω $L_1, L_2, \dots, L_n$ οι γραμμές του L . Τότε η τυπική απόκλιση, σ , του X είναι η ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος που αποτελείται από το άθροισμα των γραμμών του L (Hartman, 1994), δηλαδή:

$$\sigma = \left\| \left(\sum_{i=1}^n L_i \right) \right\| \quad (6)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση (5) σε αυτή την περίπτωση φαίνεται ότι το βέλτιστο κόστος ισούται με μια νόρμα πολλαπλασιασμένη με τη σταθερά K .

Γενικά, αν ορίσουμε ως N το σύνολο όλων των καταστημάτων, έχουμε για κάθε $S \subset N$, το οποίο αντιπροσωπεύει κάποια πιθανή συμμαχία, ότι $X_S = \sum_{i \in S} X_i$ η συνολική ζήτηση της συμμαχίας. Η X_S ακολουθεί επίσης την κανονική κατανομή.

Υποθέτουμε ότι τα κόστη h και p είναι ίδια για κάθε συμμαχία, αλλά γενικά $h \neq p$. Έστω $H_S(y)$ η συνάρτηση του αναμενόμενου κόστους όπως ορίζεται στη σχέση (1) για την τυχαία μεταβλητή X_S και y_S^* η ποσότητα προϊόντος που πρέπει

να παραγγείλει η συμμαχία ώστε να ελαχιστοποιήσει το κόστος της. Συνδυάζοντας τις (5) και (6) έχουμε ότι:

$$C(S) = H_S(y_S^*) = K \left\| \left(\sum_{i \in S} L_i \right) \right\| \quad (7)$$

Αφού το K είναι σταθερό για κάθε συμμαχία S , μπορούμε να το θέσουμε ίσο με 1, χωρίς βλάβη της γενικότητας, συνεπώς το κόστος C είναι μια νόρμα. Άρα για ξένα υποσύνολα S, T του N έχουμε ότι $C(S \cup T) \leq C(S) + C(T)$. Το παραπάνω εκφράζει ουσιαστικά την τριγωνική ανισότητα και καταλήγουμε στο ότι η συνάρτηση C είναι υποπροσθετική. Συνεπώς είναι πάντα πιο συμφέρον για τα καταστήματα να ενωθούν όλα σε μια κεντρική συμμαχία παρά να σχηματίσουν επιμέρους μικρότερες συμμαχίες

Θεώρημα 2. Το παιχνίδι συγκέντρωσης αποθεμάτων για το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη, στο οποίο οι επιμέρους ζητήσεις ακολουθούν πολυδιάστατη κανονική κατανομή και τα κόστη h, p είναι ίδια για κάθε συμμαχία, έχει μη κενό πυρήνα

Απόδειξη: Έστω $\lambda \in \Lambda$ όπως στη σχέση (3) και L_i οι γραμμές του πίνακα L όπως ορίστηκε παραπάνω από την παραγοντοποίηση κατά *Cholesky*. Τότε:

$$\begin{aligned} \sum_{S \subset N} \lambda(S) C(S) &= \sum_{S \subset N} \lambda(S) \left\| \left(\sum_{i \in S} L_i \right) \right\| \\ &\geq \left\| \left(\sum_{S \subset N} \sum_{i \in S} \lambda(S) L_i \right) \right\| \\ &= \left\| \left(\sum_{i \in N} \sum_{S: i \in S} \lambda(S) L_i \right) \right\| \\ &= \left\| \left(\sum_{i \in N} L_i \right) \right\| \\ &= C(N) \end{aligned}$$

Συνεπώς ικανοποιείται η σχέση (3), άρα το παιχνίδι έχει μη κενό πυρήνα.

Η κοιλότητα της συνάρτησης κόστους, η ικανοποίηση δηλαδή της συνθήκης $C(S) + C(T) \geq C(S \cup T) + C(S \cap T)$ για κάθε S, T που είναι ξένα μεταξύ τους, είναι πιο ισχυρή από την υποπροσθετικότητα. Αν η συνθήκη της κοιλότητας μπορούσε να αποδειχθεί για μία συνάρτηση κόστους, τότε ο πυρήνας αυτού του παιχνιδιού θα είναι μη κενός (Shapley, 1971).

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με διάφορες συνθήκες οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ο πυρήνας ενός παιχνιδιού συγκέντρωσης αποθεμάτων για το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη θα είναι μη κενός, όταν $h \neq p$ ακόμα και αν η κατανομή της ζήτησης δεν είναι η πολυδιάστατη κανονική.

3.5 Αναπαράσταση μέσω της spread κατανομής

Σε αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι οι επιμέρους ζητήσεις $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι συνεχείς μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές με μέσες τιμές $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ αντίστοιχα.

Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f , συνάρτηση κατανομής F και μέσο μ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας και για να απλοποιηθούν οι πράξεις θέτουμε $p = 1$. Για περαιτέρω απλοποίηση της σχέσης (2), εισάγουμε μία νέα τυχαία μεταβλητή, Y , με συνάρτηση πυκνότητας g , όπου:

$$g(x) = \frac{1}{\mu} x f(x)$$

Η τυχαία μεταβλητή Y συχνά αναφέρεται στην ανανεωτική θεωρία ως spread. Επίσης καλούμε την g ως spread πυκνότητα και την G ως spread κατανομή.

Τώρα η σχέση (2) μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$H(y^*) = \mu(1 - G(y^*)) - \frac{1-r}{r} \mu G(y^*) = \frac{\mu}{r} (r - G(y^*)) \quad (8)$$

Σε αυτή την περίπτωση το κόστος εκφράζεται συνάρτηση της κατανομής της τυχαίας μεταβλητής Y και του μέσου, μ , του X .

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα της σχέσης (8) συγκριτικά με την (2) είναι ότι το r που βρίσκεται στον παρανομαστή, είναι το ίδιο για κάθε συμμαχία, συνεπώς στην απόδειξη των ανισοτήτων της σχέσης (3), δε χρειάζεται να ληφθεί υπόψιν.

από τη στιγμή που κάθε συμμαχία S έχει ζήτηση η οποία είναι το άθροισμα των επιμέρους ζητήσεων του κάθε καταστήματος της συμμαχίας και η μέση τιμή ενός αθροίσματος τυχαίων μεταβλητών είναι το άθροισμα των μέσων τιμών αυτών των μεταβλητών, έχουμε ότι η μέση τιμή για τη ζήτηση της συμμαχίας S είναι $\mu_S = \sum_{i \in S} \mu_i$.

Με τη βοήθεια των παραπάνω, έχουμε τη δυνατότητα να μετασχηματίσουμε τις ανισότητες της σχέσης (3) ώστε να εκφράζονται σε πιο απλή μορφή. Έστω G_S η spread κατανομή για την $\sum_{i \in S} X_i$ και y_S^* η τιμή που ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους της συμμαχίας. Μέσω της σχέσης (7) έχουμε ότι:

$$C(N) = \frac{1}{r} \mu_N r - \frac{1}{r} \mu_N G_N(y_N^*)$$

Όμοια για $\lambda \in \Lambda$ έχουμε:

$$\sum_{S \subset N} \lambda(S) C(S) = \frac{1}{r} \sum_{S \subset N} \lambda(S) \mu_S r - \frac{1}{r} \sum_{S \subset N} \lambda(S) \mu_S G_S(y_S^*)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες αθροισμάτων καταλήγουμε στο ότι:

$$\sum_{S \subset N} \lambda(S) \mu_S r = r \mu_N$$

Συνεπώς η (3) γράφεται ως:

$$-\frac{1}{r} \mu_N G_N(y_N^*) \leq -\frac{1}{r} \sum_{S \subset N} \lambda(S) \mu_S G_S(y_S^*)$$

ή

$$\sum_{S \subset N} \lambda(S) \mu_S G_S(y_S^*) \leq \mu_N G_N(y_N^*) \quad (9)$$

3.6 Ανεξάρτητες και ισόνομες κατανομές ζήτησης

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε ισοδύναμες συνθήκες σχετικά με την ύπαρξη του πυρήνα ενός παιχνιδιού συγκέντρωσης αποθεμάτων, στην περίπτωση που οι κατανομές των επιμέρους ζητήσεων των καταστημάτων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Σημειώνουμε ότι για αυτές τις κατανομές, η spread συνάρτηση κατανομής G_S εξαρτάται μόνο από το $k = |S|$. Συνεπώς και το y_S^* εξαρτάται από το k . Συνεπώς στη συνέχεια συμβολίζουμε με G_k την *spread* κατανομή οποιασδήποτε συμμαχίας αποτελείται από k καταστήματα και με y_k^* την τιμή που ελαχιστοποιεί το κόστος αυτής της συμμαχίας.

Το επόμενο θεώρημα παρουσιάζει κάποιες ισοδύναμες προτάσεις, οι οποίες θα αποδειχθούν χρήσιμες στη συνέχεια.

Θεώρημα 3: Για κάθε σύνολο από ανεξάρτητες και ισόνομες ζητήσεις X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες (στο δ θεωρούμε ότι οι X_i είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές).

α) Για κάθε $T \subset \{1, 2, \dots\}$, και για κάθε $\lambda \in \Lambda$, όπου Λ το σύνολο των ισορροπημένων χαρτών στο T , έχουμε ότι:

$$C(T) \leq \sum_{S \subset T} \lambda(S) C(S) \quad (10)$$

(β) Για κάθε $T \subset \{1, 2, \dots\}$, έχουμε ότι:

$$\frac{C(T)}{|T|} \leq \frac{C(T - \{i\})}{|T| - 1}, \forall i \in T, \quad (11)$$

δηλαδή το κόστος ανά κατάστημα σε μία συμμαχία μειώνεται όσο αυξάνεται το μέγεθος της συμμαχίας,

(γ) Για κάθε $T \subset \{1, 2, \dots\}$, ο ισόποσος διαχωρισμός του κόστους, $y = \frac{1}{n} C(T)$, κάθε συμμαχίας T στα μέλη της, όπου $n = |T|$, ανήκει στον πυρήνα του παιχνιδιού $< T, C >$

(δ) Για κάθε n , όταν τα X_i είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με μέσο μ , έχουμε ότι:

$$G_{n-1}(y_{n-1}^*) \leq G_n(y_n^*) \quad (12)$$

Απόδειξη. (γ) $\Rightarrow$ (α). Σύμφωνα με το θεώρημα του Bondareva (1963), αφού ο πυρήνας του παιχνιδιού είναι μη κενός, πρέπει να ικανοποιείται η σχέση (3). Συνεπώς έχουμε άμεσα το ζητούμενο.

(β) $\Rightarrow$ (γ). Έστω $T = \{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subset \{1, 2, \dots\}$. Τότε από τη σχέση (10) έχουμε:

$$C(T) \leq \frac{n}{n-1} C(T - \{i_1\}) \leq \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n-2} C(T - \{i_1, i_2\}) \leq \dots \leq \frac{n}{k} C(S)$$

για κάθε $S \subset T$ με $|S| = k$.

Τότε:

$$ky = \frac{k}{n} C(T) \leq C(S)$$

για κάθε $S \subset T$ με $|S| = k$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$.

Άρα το y ικανοποιεί τις ανισότητες (και προφανώς την ισότητα) του πυρήνα για το παιχνίδι $< T, C >$, άρα ανήκει σε αυτόν.

(α) $\Rightarrow$ (β). Έστω $T = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Θεωρούμε το σύνολο T_k όλων των υποσυνόλων του T που περιέχουν k στοιχεία. Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τέτοια υποσύνολα και

κάθε στοιχείο εμφανίζεται σε $\binom{n-1}{k-1}$ από αυτά. Εφαρμόζοντας την (9) στο T_k για τον ισορροπημένο χάρτη:

$$\lambda(S) = \binom{n-1}{k-1}^{-1}, S \in T_k$$

έχουμε ότι:

$$C(T) \leq \sum_{S' \in T_k} \lambda(S')C(S') = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n-1}{k-1}}C(S) = \frac{n}{k}C(S), \forall S \in T, |S| = k,$$

Άρα $kC(T) \leq nC(S)$. Για $k = n-1$ έχουμε τη σχέση (10).

(δ) $\Rightarrow$ (β). από τη σχέση (7) για $p = 1$, έχουμε:

$$H(y^*) = \mu(1 - \frac{G(y^*)}{r}) = \mu(1 - (1+h)G(y^*)). \quad (13)$$

Έστω $T = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Εφαρμόζοντας την (12) για $\sum_{j=1}^{n-1} X_{i_j}$ και $\sum_{j=1}^n X_{i_j}$, έχουμε μέσω της σχέσης (10) ότι:

$$(n-1)(n\mu)(1 - (1+h)G_n(y_n^*)) \leq n((n-1)\mu)(1 - (1+h)G_{n-1}(y_{n-1}^*))$$

η οποία κατόπιν απλοποιήσεων καταλήγει στη σχέση (11).

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι το επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 4: Έστω X_i μη αρνητικές συνεχείς ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Τότε:

(α) ο πυρήνας του παιχνιδιού συγκέντρωσης αποθεμάτων $< N, C >$ είναι μη κενός αν και μόνο αν οι spread κατανομές στα σημεία ελαχιστοποίησης του κόστους, $G_k(y_k^*)$, είναι αύξουσες (όχι κατάναγκη γνησίως) ως προς k , $\forall k \leq |N|$.

(β) Ο πυρήνας για τα παιχνίδια αποθεμάτων, για όλα τα σύνολα n παικτών είναι μη κενός αν και μόνο αν η $\{G_n(y_n^*)\}$ είναι αύξουσα συνάρτηση.

Η από κοινού συνάρτηση κατανομής F, n τυχαίων μεταβλητών καλείται συμμετρική ως προς τις μεταθέσεις αν για κάθε $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_{\pi_1}, x_{\pi_2}, \dots, x_{\pi_n})$ για κάθε μετάθεση π του συνόλου $(1, 2, \dots, n)$.

Για παράδειγμα, έστω $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ ένα διάνυσμα ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και Z μια τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη της Y . Τότε η

$$X_i = Y_i + Z, i = 1, 2, \dots, n$$

έχει μια συμμετρική ως προς τις μεταθέσεις από κοινού συνάρτηση κατανομής (Shaked(1977), (1979), Shaked and Tong(1985)).

Αν οι τυχαίες μεταβλητές $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ έχουν μια συμμετρική ως προς τις μεταθέσεις κατανομή τότε η κατανομή του $X_S = \sum_{i \in S} X_i$ εξαρτάται μόνο από τον αριθμό των στοιχείων του S και όχι από το ποία είναι τα εκάστοτε στοιχεία. Σημειώνουμε ότι το πόρισμα 4(α) παραμένει αληθές ακόμα και όταν οι επιμέρους τυχαίες μεταβλητές δεν είναι ανεξάρτητες και ισόνομες αλλά έχουν μια μεταθετικά συμμετρική από κοινού συνάρτηση κατανομής.

Πόρισμα 5: Έστω $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα συνεχές, μη αρνητικό, τυχαίο διάνυσμα με συμμετρική ως προς τις μεταθέσεις από κοινού κατανομή. Τότε ο πυρήνας

του παιχνιδιού συγκέντρωσης αποθεμάτων $< N, C >$ είναι μη κενός αν και μόνο αν οι spread κατανομές στα σημεία ελαχιστοποίησης του κόστους, $G_k(y_k^*)$, είναι αύξουσες ως προς k , $\forall k \leq |N|$.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με μία εφαρμογή του θεωρήματος 3(β). Διευκρινίζουμε ότι αφού ασχολούμαστε με το (β) μέρος του θεωρήματος, η συνάρτηση κατανομής δεν είναι αναγκαστικά συνεχής. Το παράδειγμα θα είναι αρκετά γενικό καθώς δεν απαιτείται ούτε συμμετρία της συνάρτησης κατανομής, ούτε να ικανοποιείται η σχέση $h = p$, σε αντίθεση με το θεώρημα 1.

3.7 Ανεξάρτητες και ισόνομες διακριτές κατανομές ζήτησης.

Σε αυτό το κεφάλαιο υποθέτουμε ότι οι επιμέρους ζητήσεις $X_1, X_2, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες διακριτές τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = \begin{cases} 1-\alpha, & x=0 \\ \alpha, & x=1 \end{cases}$$

Και εδώ θεωρούμε $p = 1$ χωρίς βλάβη της γενικότητας. Έστω $H_n(y)$ η συνάρτηση κόστους για μια συμμαχία που αποτελείται από n καταστήματα, καθένα από τα οποία έχει ζήτηση η οποία είναι τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας f . Για την ελαχιστοποίηση του κόστους αρκεί να ελέγξουμε τις τιμές της $H_n(i)$ για $i = 1, 2, \dots, n$ και να επιλέξουμε την ελάχιστη. Έστω j_n^* η τιμή που ελαχιστοποιεί την H_n .

Παρακάτω παρουσιάζουμε αναλυτικά τα πρώτα βήματα αυτής της διαδικασίας.
Για $n=1$:

$$H_1(j) = \begin{cases} a, & j=0 \\ (1-a)h, & j=1 \end{cases}$$

$$H_1(j_1^*) = \begin{cases} (1-a)h, & h \leq \frac{a}{1-a} \\ a, & \frac{a}{1-a} \leq h \end{cases}$$

Για $n=2$:

$$H_2(j) = \begin{cases} 2a, & j=0 \\ (1-a)^2h + a^2, & j=1 \\ 2(1-a)h, & j=2 \end{cases}$$

$$H_2(j_2^*) = \begin{cases} 2(1-a)h, & h \leq \frac{a^2}{1-a^2} \\ (1-a)^2h + a^2, & \frac{a^2}{1-a^2} \leq h \leq \frac{1-(1-a)^2}{(1-a)^2} \\ 2a, & \frac{1-(1-a)^2}{(1-a)^2} \leq h \end{cases}$$

Για $n=3$:

$$H_3(j) = \begin{cases} 3a, & j=0 \\ (1-a)^3 h + 3a^2 - a^3, & j=1 \\ (1-a)^2(2+a)h + a^3, & j=2 \\ 3(1-a)h, & j=3 \end{cases}$$

$$H_3(j_3^*) = \begin{cases} 3(1-a)h, & h \leq \frac{a^3}{1-a^3} \\ (1-a)^2(2+a)h + a^3, & \frac{a^3}{1-a^3} \leq h \leq \frac{3a^2-2a^3}{1-3a^2+2a^3} \\ (1-a)^3 h + 3a^2 - a^3, & \frac{3a^2-2a^3}{1-3a^2+2a^3} \leq h \leq \frac{1-(1-a)^3}{(1-a)^3} \\ 3a, & \frac{1-(1-a)^3}{(1-a)^3} \leq h \end{cases}$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω, θα διατυπώσουμε μια έκφραση για τα κόστη για γενικό n . Φαίνεται ότι η $H_n(j)$ είναι μία γραμμική συνάρτηση του h . Συμβολίζουμε λοιπόν με $S(j, n)$ τον συντελεστή του h και με $U(j, n)$ τον σταθερό όρο της συνάρτησης. Δηλαδή:

$$H_n(j) = S(j, n)h + U(j, n)$$

Αρχικά ορίζουμε δύο σχέσεις που είναι χρήσιμες για τη συνέχεια.

$$B(m, n) = \sum_{i=0}^m \binom{n}{i} a^i (1-a)^{n-i}, 0 \leq m \leq n$$

και

$$D(m, n) = \sum_{i=m}^n \binom{n}{i} a^i (1-a)^{n-i}, 0 \leq m \leq n$$

Τότε:

$$S(j, n) = \sum_{m=0}^{j-1} B(m, n), 1 \leq j \leq n \quad (14)$$

και

$$U(j, n) = \sum_{m=j+1}^n D(m, n), 1 \leq j \leq n \quad (15)$$

Ουσιαστικά το $U(j, n)$ περιγράφει το συνολικό κόστος για την περίπτωση της μη ικανοποίησης της ζήτησης, μιας και το $p = 1$, και το $S(j, n)h$ περιγράφει το συνολικό κόστος στην περίπτωση που η ποσότητα παραγγελίας ήταν μεγαλύτερη της πραγματικής ζήτησης.

Για να βρούμε το ελάχιστον κόστος $H_n(j_n^*)$ κάνουμε την εξής παρατήρηση: Για $j = 0, 1, \dots, n$ έχουμε

$$H_n(j) \leq H_n(j+1) \Leftrightarrow h \geq \frac{U(j, n) - U(j+1, n)}{S(j+1, n) - S(j, n)}.$$

Μέσω των (13), (14) η παραπάνω σχέση απλοποιείται ως εξής:

$$H_n(j) \leq H_n(j+1) \Leftrightarrow h \geq \frac{D(j+1, n)}{B(j, n)}.$$

Παρατηρούμε ότι η $\frac{D(j+1,n)}{B(j,n)} = \frac{1}{B(j,n)} - 1$ είναι φθίνουσα ως προς j για κάθε n . Συνεπώς έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$H_n(j_n^*) = \begin{cases} S(n, n)h, & h \leq \frac{D(n,n)}{B(n-1,n)} \\ S(n-1, n)h + U(n-1, n), & \frac{D(n,n)}{B(n-1,n)} \leq h \leq \frac{D(n-1,n)}{B(n-2,n)} \\ \vdots & \vdots \\ S(j, n)h + U(j, n), & \frac{D(j+1,n)}{B(j,n)} \leq h \leq \frac{D(j,n)}{B(j-1,n)}, j=n-2, \dots, 3, 2 \\ \vdots & \vdots \\ S(1, n)h + U(1, n), & \frac{D(2,n)}{B(1,n)} \leq h \leq \frac{D(1,n)}{B(0,n)} \\ U(0, n), & \frac{D(1,n)}{B(0,n)} \leq h \end{cases}$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 6: Τα παιχνίδια συγκέντρωσης αποθεμάτων με ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες είναι διακριτές και μάλιστα δίτιμες, έχουν μη κενό πυρήνα.

3.8 Ανεξάρτητες εκθετικές κατανομές ζήτησης

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε μερικά αποτελέσματα για ζητήσεις οι οποίες ακολουθούν την κατανομή $Erlang(n)$ με συνάρτηση πυκνότητας: $f_n(x) = x^{n-1} \frac{e^{-x}}{(n-1)!}$, $n \geq 1$. Συμβολίζουμε με F_n τη συνάρτηση κατανομής. Παρατηρούμε ότι η spread πυκνότητα της $Erlang(n)$ είναι η $Erlang(n+1)$.

Έστω οι επιμέρους ζητήσεις Q_i ακολουθούν ανεξάρτητες $Erlang(1)$ κατανομές (δηλαδή εκθετικές). Τότε η ανισότητα (11) του θεωρήματος 3 γράφεται ως:

$$F_n(F_{n-1}^{-1}(r)) \leq F_{n+1}(F_n^{-1}(r)), \forall n > 1 \quad (16)$$

Εύκολα επαληθεύεται επίσης ότι

$$F_{m+1}(x) + f_{m+1}(x) = F_m(x), \quad (17)$$

για $m = 1, 2, \dots$, και $x \geq 0$.

Έστω $y_n^* = F_n^{-1}(r)$. Με τη βοήθεια της σχέσης (17) έχουμε ότι η (16) γράφεται ως:

$$F_n(y_{n-1}^*) \leq F_{n+1}(y_n^*), \forall n > 1 \quad (18)$$

Η αλγεβρική απόδειξη της σχέσης (18) είναι πολύ δύσκολη καθώς η αντίστροφη συνάρτηση της κατανομής γάμμα δεν μπορεί να βρεθεί σε κλειστή μορφή. Συνεπώς το y_n^* πρέπει να βρεθεί αριθμητικά. Άρα δεν έχει βρεθεί, ακόμα, τρόπος για να ελέγξουμε τις σχέσεις (16) και (18) γενικά. Όμως είναι εύκολο να ελεγχθούν αυτές οι δύο σχέσεις αριθμητικά. Η συνάρτηση γάμμα είναι άπειρα διαχωρίσιμη συνάρτηση και οι συναρτήσεις που εμπλέκονται στις σχέσεις που θέλουμε να δείξουμε διαφέρουν ελαφρώς ως προς τις παραμέτρους τους. Για ένα, λογικού μεγέθους, n το ζητούμενο αποτέλεσμα μπορεί να ελεγχθεί προγραμματιστικά μέσω υπολογιστή.

Για να παρέχουμε μία αριθμητική απόδειξη για το γεγονός ότι ο πυρήνας του παιχνιδιού είναι μη κενός ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση $T_{\alpha,\delta}(r) : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \forall \alpha \geq 1$ ως εξής:

$$T_{\alpha,\delta}(r) = F_{\alpha+\delta}(F_{\alpha}^{-1}(r)).$$

Η ανισότητα (11) του θεωρήματος 3 είναι ισοδύναμη με τον να δείξουμε ότι για $\delta=1$ η $T_{\alpha,\delta}(r)$ είναι αύξουσα ως προς α .

Μέσω της γραφικής παράστασης αυτής της συνάρτησης είναι εμφανές ότι είναι αύξουσα τόσο ως προς α όσο και ως προς r .

3.9 Γενικά αποτελέσματα για το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη

Αρχικά ορίζουμε ως:

$$\varphi[y, x] = \begin{cases} h(y - x), & \text{αν } y \geq x \\ p(x - y), & \text{αν } y < x \end{cases}$$

Επίσης θέτω ως:

$$\Phi(X) = \min_y E[\varphi(y, X)].$$

Η συνάρτηση Φ είναι ομογενής και υποπροσθετική στο $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, δηλαδή

$$\Phi(\alpha X) = \alpha \Phi(X) \quad (19)$$

και

$$\Phi(X_1 + X_2) \leq \Phi(X_1) + \Phi(X_2) \quad (20)$$

Τέλος, αν $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας, τότε μία τυχαία μεταβλητή X ανήκει στο σύνολο $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ αν $\forall y \in \mathbb{R}, E[\varphi(y, X)] < \infty$.

Βασισμένοι στην παραπάνω μελέτη των Hartman et al. και ειδικότερα στην απόδειξη μη κενότητας του πυρήνα στο παιχνίδι του προβλήματος του εφημεριδοπώλη, στο οποίο οι κατανομές ζήτησης ακολουθούσαν την κανονική κατανομή, οι Muller et al. (2002) απέδειξαν το παρακάτω πολύ σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα: Για όλες τις τυχαίες μεταβλητές στο σύνολο $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ο πυρήνας του παιχνιδιού $< N, C >$ είναι μη κενός.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδειχθεί το θεώρημα του Bondareva, δηλαδή η σχέση (3).

Για κάθε ισορροπημένο χάρτη λ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{J \subset N} \lambda(J) C(J) &= \sum_{J \subset N} \lambda(J) \Phi(X_J) \\ &= \sum_{J \subset N} \lambda(J) \Phi\left(\sum_{i \in J} X_i\right) \\ &\geq \Phi\left(\sum_{J \subset N} \sum_{i \in J} \lambda(J) X_i\right) \\ &= \Phi\left(\sum_{i \in N} \sum_{J: i \in J} \lambda(J) X_i\right) \\ &= \Phi\left(\sum_{i \in N} X_i\right) \\ &= C(N) \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι πολύ πιο ισχυρό από τα προηγούμενα, μιας και ισχύει κάτω από πολύ γενικές υποθέσεις, καθώς δείχνει ότι ο πυρήνας του παιχνιδιού είναι μη κενός ανεξάρτητα από τη συνάρτηση κατανομής που ακολουθούν οι ζητήσεις του προϊόντος σε κάθε κατάσταση αλλά και χωρίς να χρειάζεται να ικανοποιείται η συνθήκη $h = p$.

4 Πυρήνας παιχνιδιών συγκέντρωσης αποθεμάτων με ζητήσεις κανονικές τυχαίες μεταβλητές και με ανόμοια κόστη καταστημάτων- Παιχνίδι ωφέλειας

Η παρακάτω μελέτη βασίζεται στην εργασία των Hartman και Dror με τίτλο "Allocation of gains from inventory centralization in newsvendor environments"

4.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο καταλήξαμε στο πολύ σημαντικό συμπέρασμα, ότι ο πυρήνας των παιχνιδιών συγκέντρωσης αποθεμάτων είναι μη κενός στην περίπτωση που η ζήτηση του, μοναδικού, προϊόντος που τίθεται προς πώληση είναι τυχαία μεταβλητή με γνωστή συνάρτηση κατανομής. Απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει το παραπάνω είναι τα κόστη h και p , όπως έχουν ήδη οριστεί, να είναι ίδια σε κάθε κατάσταση ή συμμαχία καταστημάτων

Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε την περίπτωση που τα κόστη αυτά διαφέρουν από κατάσταση σε κατάσταση και η ζήτηση του προϊόντος ακολουθεί, συγκεκριμένα, την κανονική κατανομή. Σε αυτήν την περίπτωση ο πυρήνας του παιχνιδιού μπορεί να είναι κενός. Θα δοθούν συνθήκες για αυτά τα κόστη με σκοπό να διασφαλιστεί η υποπροσθετικότητα της συνάρτησης του συνολικού κόστους. Οι υπόλοιπες υποθέσεις για το μοντέλο είναι ακριβώς ίδιες με αυτές του προηγούμενου κεφαλαίου. Επίσης και σε αυτή την περίπτωση, θα επικεντρώσουμε την ανάλυση μας μόνο στα κόστη που σχετίζονται με τη διαχείριση αποθεμάτων και δε θα ασχοληθούμε με άλλα κόστη που επηρεάζονται από εξωτερικούς παράγοντες.

Το αποτέλεσμα της μη κενότητας του πυρήνα και η ελαχιστοποίηση του κόστους είναι πολύ σημαντικά αλλά εκτός από αυτά, στα σύγχρονα οικονομικά περιβάλλοντα, είναι πολύ σημαντικό και το σχέδιο για παροχή κινήτρων στους παίκτες ώστε να συνεργαστούν με σκοπό να φτάσουμε στα παραπάνω αποτελέσματα. Τέλος λοιπόν, θα παρουσιάσουμε μια παραλλαγή του αρχικού μοντέλου στο οποίο ο διαχωρισμός του κόστους δεν βασίζεται μόνο στο αναμενόμενο κόστος αλλά και στο πραγματικό, όπως αυτό υπολογίζεται μετά την παρατήρηση της πραγματικής ζήτησης. Σε αυτή την περίπτωση, ακόμα και αν τα κόστη h και p είναι όμοια σε κάθε κατάσταση, ο πυρήνας του παιχνιδιού μπορεί να είναι κενός.

4.2 Άνισα κόστη μεταξύ καταστημάτων

Σε αρκετές περιπτώσεις τα κόστη για κάθε μονάδα αδιάθετου προϊόντος ή για κάθε μονάδα μη ικανοποιημένης ζήτησης, μπορεί να διαφέρουν μεταξύ των καταστημάτων. Αυτό θα μπορούσε να έχει ως συνέπεια ο συγκεντρωτισμός της διαδικασίας να είναι μη οικονομικός, δηλαδή το να μην είναι ως προς το συμφέρον όλων των καταστημάτων να σχηματίσουν μια μεγάλη συμμαχία. Συνεπώς ορίζουμε μερικές συνθήκες κάτω από τις οποίες η συνάρτηση του συνολικού κόστους είναι υποπροσθετική, άρα και ο σχηματισμός της μεγάλης συμμαχίας είναι προς όφελος όλων των παιχτών.

Αρχικά ορίζουμε ως h_S το κόστος ανά μονάδα προϊόντος που δεν πωλήθηκε για τη συμμαχία S , $S \subset N$ και ως p_S το αντίστοιχο κόστος ανά μονάδα 'χαμένης' ζήτησης. Θέτουμε ως

$$K_S = h_S z_S + (h_S + p_S)R(z_S) \quad (21)$$

όπου z_S η ποσότητα παραγγελίας που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο συνολικό κόστος της συμμαχίας S όταν η ζήτηση προϊόντος για κάθε κατάσταση ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Παρατηρούμε ότι όταν $h_S = h$ και $p_S = p$, τότε η K_S είναι μία σταθερά και αναγώμαστε στο πρόβλημα του προηγούμενου κεφαλαίου.

Αντίθετα όταν τα επιμέρους κόστη διαφέρουν από συμμαχία σε συμμαχία, το K_S είναι μία συνάρτηση των h_S, p_S και z_S . Θέτουμε $\theta_S = \frac{h_S}{p_S}$, δηλαδή $h_S = p_S \theta_S$. Τότε:

$$z_S = F^{-1}\left(\frac{1}{1 + \theta_S}\right) \quad (22)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα για την κανονική κατανομή (Johnson and Montgomery, 1974) έχουμε ότι:

$$R(z) = zF(z) + f(z) - z \quad (23)$$

Συνεπώς η (1) μπορεί να γραφτεί ως:

$$K_S = p_S(1 + \theta_S)f\left(F^{-1}\left(\frac{1}{1 + \theta + S}\right)\right), \quad (24)$$

χρησιμοποιώντας το παρακάτω επιχείρημα.

$$\begin{aligned} K_S &= \theta_S p_S z_S + (\theta_S p_S + p_S)R(z_S) \\ &= p_S(\theta_S z_S + (1 + \theta_S)R(z_S)) \\ &= p_S(\theta_S z_S + (1 + \theta_S)(z_S F(z_S) + f(z_S) - z_S)) \\ &= p_S[z_S F(z_S) + f(z_S) - z_S + \theta_S z_S F(z_S) + \theta_S f(z_S)] \\ &= p_S[(1 + \theta_S)z_S F(z_S) + (1 + \theta_S)f(z_S) - z_S] \\ &= p_S[(1 + \theta_S)z_S \frac{1}{1 + \theta_S} + (1 + \theta_S)f(z_S) - z_S] \\ &= p_S(1 + \theta_S)f(z_S) \\ &= p_S(1 + \theta_S)f\left(F^{-1}\left(\frac{1}{1 + \theta + S}\right)\right) \end{aligned}$$

Άρα το συνολικό κόστος για κάθε συμμαχία S , $H(S)$, μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των p_S, θ_S ως εξής

$$H(S) = p_S K(\theta_S) \sigma(S) \quad (25)$$

, όπου:

$$K(\theta_S) = (1 + \theta_S)f\left(F^{-1}\left(\frac{1}{1 + \theta_S}\right)\right) \quad (26)$$

Σε περιπτώσεις στις οποίες η πελατεία μεταξύ των καταστημάτων είναι όμοια, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κόστος ανά μονάδα προϊόντος για την ανικανοποίητη ζήτηση είναι ίδιο για κάθε συμμαχία S , δηλαδή $p_S = p, \forall S \subset N$. Το κόστος

ανά μονάδα αδιάθετου προϊόντος όμως εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, όπως τη διαδικασία αποθήκευσης του προϊόντος, τον τρόπο και την αποτελεσματικότητα της διαχείρισης της συνολικής διαδικασίας κ. α. Συνεπώς το να υποθέσουμε ότι στη γενική περίπτωση $h_S = h, \forall S \subset N$ ίσως δεν είναι λογικό. Στη συνέχεια λοιπόν μελετάμε τις περιπτώσεις στις οποίες μόνο το κόστος για τα αδιάθετα προϊόντα διαφέρει μεταξύ των καταστημάτων.

Αρχικά υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $p = 1$. Αυτό μπορεί να γίνει καθώς όπως είδαμε στη σχέση (25) η σχέση του κόστους p και του συνολικού κόστους είναι πολλαπλασιαστική και το p είναι σταθερό. Τέλος θα αναφερόμαστε στη συνάρτηση $K(\theta)$ ως κλασματική συνάρτηση ποινής.

Στη συνέχεια, με βάση τα παραπάνω, αποδεικνύουμε 2 πολύ σημαντικά λήμματα για τη συνάρτηση K , στην περίπτωση που τα επιμέρους κόστη h, p είναι ίδια για κάθε συμμαχία.

Λήμμα 1: Η $K(\theta)$ είναι μια φραγμένη κοίλη συνάρτηση με φραγμένη παράγωγο.

Απόδειξη: Εστω $u = \frac{1}{1+\theta}$. Παρατηρούμε ότι όταν $\theta \rightarrow 1$ (μεγάλες τιμές του h), $u \rightarrow \frac{1}{2}$ και όταν $\theta \rightarrow 0$ (μικρές τιμές για το h), το $u \rightarrow 1$. Συνεπώς το $z = F^{-1}(u)$ είναι θετικό αφού η F είναι η συνάρτηση κατανομής της τυποποιημένης κανονικής. Επίσης η $f(z)$ είναι φραγμένη από το $f(0) \approx 0.39$ και το 0. Άρα το

$$K = (1 + \theta)f(z) \in (0, 2f(0))$$

Παραγωγίζοντας την

$$K(\theta) = (1 + \theta)f\left(F^{-1}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)\right) = (1 + \theta)f(z)$$

έχουμε ότι

$$K'(\theta) = (1 + \theta)f'(z)\frac{dz}{du}\frac{du}{d\theta} + f(z)$$

Όμως αφού

$$\frac{du}{d\theta} = -(1 + \theta)^{-2}$$

και

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dz}} = \frac{1}{f(z)}$$

άρα

$$K'(\theta) = \frac{-1}{1 + \theta} \frac{f'(z)}{f(z)} + f(z) \quad (27)$$

και αφού $z > 0, f'(z) < 0$ και $f(z) > 0$, έχουμε ότι $K'(\theta) > 0$.

$$\begin{aligned}
K''(\theta) &= \frac{-1}{1+\theta} \frac{f''(z) \frac{dz}{du} \frac{du}{d\theta} f(z) - (f'(z))^2 \frac{dz}{du} \frac{du}{d\theta}}{f^2(z)} + \frac{1}{(1+\theta)^2} \frac{f'(z)}{f(z)} + f'(z) \frac{dz}{du} \frac{du}{d\theta} \\
&= \frac{1}{(1+\theta)^2} \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{(1+\theta)^2} \frac{f'(z)}{f(z)} + \frac{z^2 f(z) \frac{-1}{(1+\theta)^2} + \frac{-f(z)-zf'(z)}{(1+\theta)^2}}{(1+\theta)f^2(z)} \\
&= \frac{\frac{-z^2 f(z)-f(z)-zf'(z)}{(1+\theta)^2}}{(1+\theta)f^2(z)} \\
&= \frac{\frac{-z^2 f(z)-f(z)+z^2 f(z)}{(1+\theta)^2}}{(1+\theta)f^2(z)} \\
&= \frac{\frac{-f(z)}{(1+\theta)^2}}{(1+\theta)f^2(z)}
\end{aligned}$$

Συνεπώς $K''(\theta) < 0$, άρα η K είναι κοίλη συνάρτηση.

Λήμμα 2: $K(\theta) > \theta K'(\theta)$

Απόδειξη: Μέσω της σχέσης (7) έχουμε ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει αν:

$$\begin{aligned}
f(z) + \theta f(z) &> \frac{-\theta}{1+\theta} \frac{f'(z)}{f(z)} + \theta f(z) \\
f(z) &> \frac{-\theta}{1+\theta} \frac{f'(z)}{f(z)} \\
f(z) &> -\theta u \frac{f'(z)}{f(z)} \\
f^2(z) &> -\theta u f'(z)
\end{aligned}$$

Επίσης έχουμε δει ότι $u = F(z) = \frac{1}{1+\theta}$ άρα το θ μπορεί να γραφτεί ως:

$$\theta = \frac{1 - F(z)}{F(z)}$$

Συνεπώς καταλήγω στη σχέση

$$f^2(z) > -(1 - F(z))f'(z)$$

Όμως

$$f'(z) = \frac{d}{dz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = -zf(z)$$

Άρα αρκεί να δείξω ότι:

$$\begin{aligned}
f(z) &> -z(1 - F(z)) \\
f(z) + z &> zF(z)
\end{aligned}$$

που ισχύει καθώς $zF(z) < z$ και $f(z) > 0$.

Θεώρημα 1: Για τη συνάρτηση του συνολικού κόστους $H(p, \theta, \sigma)$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} > 0, \frac{\partial H}{\partial \theta} > 0, \quad \text{αν } \sigma(S) > 0 \\ \frac{\partial H}{\partial p} = 0, \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad \text{αν } \sigma(S) = 0 \end{aligned}$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση H είναι διαχωρίσιμη και $K' > 0$ (Λήμμα 1), άρα:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = pK'(\theta)\sigma(S) \geq 0.$$

Επειδή η υπόθεση $p = 0$ δεν έχει πρακτική εφαρμογή στα πραγματικά προβλήματα έχουμε το ζητούμενο για την μία περίπτωση.

Στη συνέχεια έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= K'(\theta) \frac{-\theta}{p} p\sigma(S) + K(\theta)\sigma(S) \\ &= [-\theta K'(\theta) + K(\theta)]\sigma(S) \geq 0, \end{aligned}$$

λόγω του λήμματος 2. Συνεπώς το παραπάνω ισούται με 0 μόνο όταν $\sigma(S) = 0$

από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι για συγκεκριμένη διασπορά $\sigma(S)$, αν μια συμμαχία θελήσει να μειώσει το κόστος της και έχει την επιλογή να καθορίσει τις τιμές των p και θ θα πρέπει να τις μειώσει όσο περισσότερο γίνεται. Βέβαια για σταθερό h , σύμφωνα με τον ορισμό του θ , βλέπουμε ότι όσο η τιμή του μειώνεται, η τιμή του p αυξάνεται και το αντίθετο, οπότε η συγκεκριμένη προσαρμογή των τιμών απαιτεί προσοχή.

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, στην περίπτωση που το κόστος h_S διαφέρει για κάθε κατάσταση, η συγχέντρωση όλων των καταστημάτων σε μία μεγάλη συμμαχία ίσως δεν είναι προς όφελος των καταστημάτων. Δηλαδή μπορεί η συνάρτηση του συνολικού κόστους $H(S)$ να μην είναι υποπροσθετική. Θα διατυπώσουμε, λοιπόν, ορισμένες συνθήκες σχετικά με το θ_S , οι οποίες εξασφαλίζουν την υποπροσθετικότητα, ανεξάρτητα από τις επιμέρους κατανομές ζήτησης και τις συσχετίσεις τους. Όταν οι συνθήκες αυτές δεν ικανοποιούνται, η υποπροσθετικότητα δεν μπορεί να διασφαλιστεί

Ορίζουμε το άθροισμα των διανυσμάτων *Cholesky* ενός συνόλου $S, S \subset N$ ως $L_S = \sum_{i \in S} L_i$.

Θεώρημα 2: Η $H(S)$ είναι μια υποπροσθετική συνάρτηση αν και μόνο αν για κάθε $S, T \subset N$ έτσι ώστε $S \cap T = \emptyset$:

$$K(\theta_{S \cup T}) \leq K(\theta_S) \frac{\|L_S\|}{\|L_S + L_T\|} + K(\theta_T) \frac{\|L_T\|}{\|L_S + L_T\|} \quad (28)$$

Απόδειξη: Για κάθε σύνολο S, T , αρκεί να δείξω ότι:

$$H(S) + H(T) \geq H(S \cup T).$$

$$\begin{aligned}
H(S) &= \left\| \sum_{i \in S} K(\theta_S) L_i \right\| = \left\| K(\theta_S) \sum_{i \in S} L_i \right\| = K(\theta_S) \|L_S\|, \\
H(T) &= \left\| \sum_{i \in T} K(\theta_T) L_i \right\| = \left\| K(\theta_T) \sum_{i \in T} L_i \right\| = K(\theta_T) \|L_T\|, \\
H(S \cup T) &= \left\| \sum_{i \in S \cup T} K(\theta_{S \cup T}) L_i \right\| \\
&= \left\| K(\theta_{S \cup T}) \sum_{i \in S \cup T} L_i \right\| = K(\theta_{S \cup T}) \|L_{S \cup T}\|,
\end{aligned}$$

Συνεπώς η παραπάνω ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}
K(\theta_S) \|L_S\| + K(\theta_T) \|L_T\| &\geq K(\theta_{S \cup T}) \|L_{S \cup T}\| \\
\frac{\|L_S\|}{\|L_{S \cup T}\|} + K(\theta_T) \frac{\|L_T\|}{\|L_{S \cup T}\|} &\geq K(\theta_{S \cup T}) \\
\frac{\|L_S\|}{\|L_S + L_T\|} + K(\theta_T) \frac{\|L_T\|}{\|L_S + L_T\|} &\geq K(\theta_{S \cup T})
\end{aligned}$$

πού είναι και το ζητούμενο. Η ισότητα $L_S + L_T = L_{S \cup T}$ ισχύει γιατί τα σύνολα S, T έχουν υποτεθεί ξένα.

Από τη στιγμή που το κόστος, h_S , ανά μονάδα προϊόντος που δεν πωλήθηκε (και συνεπώς και το θ_S) είναι διαφορετικά για κάθε συμμαχία S , τότε υπάρχει η πιθανότητα, όταν κάθε συμμαχία αποκαλύπτει αυτό το κόστος στις υπόλοιπες, να πει ψέματα. Σε αυτή την περίπτωση μπορεί να γίνει εμφανή η ισχύ που έχει το παραπάνω θεώρημα. Συγκεκριμένα, μια συμμαχία, παρόλο που η σχέση του θεωρήματος 2 ικανοποιείται και το παιχνίδι είναι υποπροσθετικό, μπορεί να κρίνει, λόγω δικών της συμφερόντων, ότι πρέπει να αποχωρήσει από τη μεγάλη συμμαχία και να εμποδίσει την επιλογή της κεντρικής διαχείρισης του παιχνιδιού για όλα τα καταστήματα. Λέγοντας ψέματα λοιπόν για την τιμή του θ_S , μπορεί να πείσει τους υπόλοιπους παίκτες ότι η συνθήκη (28) παραβιάζεται. Στη συνέχεια και εκτός αν οι υπόλοιποι παίκτες μπορέσουν να καταλάβουν το ψέμα, αναγνωρίζεται ότι η συμμαχία S δεν έχει συμφέρον ώστε να μπει στην μεγαλύτερη δυνατή συμμαχία.

Τέλος, γενικεύοντας στην περίπτωση που και το κόστος p_S , διαφέρει ανάμεσα στις συμμαχίες, καταλήγουμε στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3: Η $H(S)$ είναι μια υποπροσθετική συνάρτηση αν και μόνο αν για κάθε $S, T \subset N$ έτσι ώστε $S \cap T = \emptyset$:

$$p_{S \cup T} K(\theta_{S \cup T}) \leq p_S K(\theta_S) \frac{\|L_S\|}{\|L_S + L_T\|} + p_T K(\theta_T) \frac{\|L_T\|}{\|L_S + L_T\|} \quad (29)$$

Η απόδειξη για το παραπάνω θεώρημα είναι όμοια με του θεωρήματος 2 και συνεπώς παραλείπεται.

4.3 Παιχνίδι ωφέλειας

Στο παρών κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μία παραλλαγή του παραπάνω παιχνιδιού, που ονομάζεται παιχνίδι ωφέλειας και θα το συγκρίνουμε με το υπάρχον παιχνίδι. Ονομάζουμε παιχνίδι κόστους, το παιχνίδι $\langle C, N \rangle$ που έχουμε δει μέχρι τώρα, με συνάρτηση $C(S) = H(S)$ και παιχνίδι ωφέλειας το παιχνίδι $\langle U, N \rangle$ με χαρακτηριστική συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$U(S) = H_D - H_C = \sum_{i \in S} C(\{i\}) - C(S) \quad (30)$$

Ουσιαστικά η παραπάνω χαρακτηριστική συνάρτηση εκφράζει τη διαφορά μεταξύ του συνολικού κόστους που θα έχουν τα επιμέρους καταστήματα της συμμαχίας S αν εργαστούν ανεξάρτητα και του συνολικού κόστους της συμμαχίας κάτω από την κεντρική διαχείριση. Όπως έχουμε δει, για ζήτηση που ακολουθεί την κανονική κατανομή, σε περίπτωση που τα κόστη h, p είναι ίδια για κάθε συμμαχία, η παραπάνω συνάρτηση εξαρτάται μόνο από τον πίνακα συνδιακύμανσης V .

Αρχικά αναφέρουμε μερικά γενικά πορίσματα που αφορούν την χαρακτηριστική συνάρτηση U και μπορούν να αποδειχθούν εύκολα λόγω της αναπαράστασης του κόστους μέσω των διανυσμάτων *Cholesky*.

Πόρισμα 1: Η συνάρτηση U έχει ως ελάχιστο την τιμή 0. Συγκεκριμένα $U(N) = 0$ αν και μόνο αν τα διανύσματα $Cholesky(L_i : i \leq i \leq n)$ για τον εκάστοτε πίνακα συνδιακύμανσης V είναι συγγραμικά, δηλαδή $\|\sum_{i=1}^n L_i\| = \sum_{i=1}^n \|L_i\|$. Σε αυτή την περίπτωση οι ζητήσεις για τα N καταστήματα είναι όλες τέλεια, θετικά συσχετισμένες τυχαίες μεταβλητές και συνεπώς δεν έχω κανένα όφελος από την ενοποίηση τους.

Πόρισμα 2: Αν κάποιες από τις επιμέρους ζητήσεις για τα προϊόντα, (όχι αναγκαστικά όλες) είναι ανεξάρτητες τότε $U(N) \geq 0$

Για παράδειγμα όταν έχω 3 καταστήματα τα οποία έχουν ανεξάρτητες ζητήσεις, με τις επιμέρους διασπορές για το κάθε κατάστημα να δίνονται από το διάνυσμα $(1, 2, 0.5)$, τότε ο πίνακας V θα έχει το παραπάνω διάνυσμα στη διαγώνιο και όλα τα άλλα στοιχεία ίσα με το 0. Τότε μέσω της παραγοντοποίησης *Cholesky* έχουμε ότι $L = (1, \sqrt{2}, \sqrt{0.5})$. Τότε η ωφέλεια για τη συμμαχία που περιέχει και τα 3 καταστήματα είναι $U(\{1, 2, 3\}) = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{0.5}) - \sqrt{3.5} \geq 0$

Βλέπουμε ότι το $H_D = \sum_{i=1}^n \|L_i\|$ είναι ένα άνω φράγμα της $U(N)$ και επιτυγχάνεται αν και μόνο αν το άθροισμα των συνδιακυμάνσεων του πίνακα V ισούται με $-\sum_{i=1}^n \|L_i\|^2$, όταν δηλαδή το άθροισμα των μη διαγώνιων στοιχείων του πίνακα συνδιακύμανσης ισούται με το αντίθετο από το άθροισμα των στοιχείων της διαγώνιου. Συνεπώς για να επιτύχουν τη μέγιστη δυνατή ωφέλεια, τα καταστήματα θα πρέπει να έχουν αρνητικά συσχετισμένες ζητήσεις, ή να τους δίνεται κάποιο κίνητρο γενικά, ώστε να επιτύχουν αρνητική συσχέτιση.

Ουσιαστικά για να πετύχουν τη βέλτιστη αναμενόμενη ωφέλεια θα πρέπει το αναμενόμενο κόστος κάτω από τη συμμαχία τους να είναι μηδέν, δηλαδή η συνολική παραγγελία τους να είναι ακριβώς ίση με τη συνολική ζήτηση. Η αρνητική συσχέτιση βοηθάει με την έννοια ότι κάποιο απόθεμα που ίσως προοριζόταν για το

κατάστημα i , λόγω χαμηλής ζήτησης του καταστήματος, θα καλύψει τις ανάγκες του καταστήματος j , που τελικά είχε μεγάλη ζήτηση.

Τέλος αναφέρουμε το εξής σημαντικό θεώρημα για τα παραπάνω παιχνίδια:

Θεώρημα 6: Κάθε παιχνίδι ωφέλειας $\langle U, N \rangle$, κάτω από ένα μοντέλο συγγέντρωσης αποθεμάτων όπως το παραπάνω, είναι υπερπροσθετικό. Το αντίστοιχο παιχνίδι κόστους είναι υποπροσθετικό.

4.4 Διαχωρισμός κόστους-ωφέλειας και υλοποίηση της ζήτησης

Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο (Muller et al., 2002) ο πυρήνας τέτοιων παιχνιδιών είναι πάντα μη κενός, οπότε ο διαχωρισμός του κόστους και της ωφέλειας για τα 2 παιχνίδια αντίστοιχα μπορεί να γίνει με ένα ευσταθή τρόπο. Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι για να είναι απόλυτα ευσταθή τα δύο παιχνίδια συνολικά, θα πρέπει ο διαχωρισμός του κόστους στο παιχνίδι $\langle C, N \rangle$ να ανταποκρίνεται στον διαχωρισμό της ωφέλειας στο παιχνίδι $\langle U, N \rangle$. Ο συγκεκριμένος διαχωρισμός εξετάζεται κυρίως από τους Hartman and Dror (1996) και συνεπώς παραπάνω ανάλυση δε θα γίνει στο συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Ο διαχωρισμός κόστους και ωφέλειας, όπως έχουμε δει μέχρι τώρα βασίζεται εξ ολοκλήρου στις αναμενόμενες τιμές της ζήτησης. Αυτό μπορεί να έχει αμφισβητούμενα αποτελέσματα μετά το τέλος της περιόδου και όταν οι πραγματικές τιμές της ζήτησης έχουν αποκαλυφθεί. Είναι λογικό λοιπόν να υπάρχουν ερωτήματα σχετικά με το πως μπορεί να γίνει ο διαχωρισμός της πραγματικής ωφέλειας στο τέλος κάθε περιόδου. Δηλαδή πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος να καθοριστεί και μάλιστα εκ των προτέρων ένας διαχωρισμός για τα οφέλη που θα προκύψουν εκ των υστέρων κατά την ολοκλήρωση της διαδικασίας και την αποκάλυψη της πραγματικής ζήτησης και όχι να βασιζόμαστε εξ ολοκλήρου στην αναμενόμενη τιμή της ωφέλειας.

Συμβολίζουμε λοιπόν με R -game το παιχνίδι που βασίζεται στις πραγματικές τιμές της ζήτησης όταν η όλη διαδικασία στηρίζεται σε μία διαδικασία κεντρικής διαχείρισης και με E -game το αντίστοιχο παιχνίδι που βασίζεται στις αναμενόμενες τιμές. Τα 2 αυτά παιχνίδια έχουν πολύ σημαντικές διαφορές μεταξύ τους, με βασικότερη το ότι το πρώτο παιχνίδι μπορεί να έχει κενό πυρήνα, σε αντίθεση με το δεύτερο όπως έχουμε δει.

Εδώ αφού παρουσιάσουμε λίγο πιο αναλυτικά το πρώτο παιχνίδι, θα αποδείξουμε ότι ο πυρήνας του μπορεί να είναι κενός και θα παρουσιάσουμε μία πρόταση για τον διαχωρισμό του κόστους και της ωφέλειας που θα στηρίζεται τόσο στην πραγματική ζήτηση, όσο και στην αναμενόμενη.

Αρχικά δίνουμε κάποιους γενικούς ορισμούς και υποθέσεις. Όπως πριν, θέτουμε ως $\mu_S = \sum_{i \in S} \mu_i$ και σ_S την τυπική απόκλιση της κατανομής ζήτησης για τη συμμαχία S των καταστημάτων. Έχουμε ότι $y_S = \sum_{i \in S} \mu_i + z\sigma_S$ είναι η βέλτιστη ποσότητα προϊόντος που πρέπει να παραγγείλει η συμμαχία S . Η μεταβλητή z είναι ίδια για όλες τις συμμαχίες στην περίπτωση που $h_S = h, p_S = p, \forall S \subset N$. Τέλος ορίζουμε ως $d(S)$ τη διαφορά ανάμεσα στο άθροισμα των επιμέρους $y_i, i \in S$, δηλαδή τη βέλτιστη ποσότητα για κάθε κατάστημα όταν αυτό λειτουργεί ανεξάρτητα και στο y_S . Το $d(S)$ αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη διαφορά στις μονάδες προϊόντος που απαιτούνται όταν τα καταστήματα λειτουργούν ως μονάδες και όταν λειτουργούν ως συμμαχία.

Βλέπουμε ότι $d(S) = z(\sum_{i \in S} \sigma_i - \sigma_S)$. Αφού ξέρουμε ότι το $\sum_{i \in S} \sigma_i - \sigma_S \geq 0$, το πρόσημο του $d(S)$ εξαρτάται από το πρόσημο του z . Όταν το z είναι θετικό,

τότε η παραγγελλθείσα ποσότητα είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση που τα καταστήματα λειτουργούν ανεξάρτητα, ενώ όταν είναι αρνητικό, η παραγγελία κάτω από την κεντρική διαχείρισης της διαδικασίας θα είναι μεγαλύτερη. Ουσιαστικά το πρόσημο του z εξαρτάται από το κλάσμα $\frac{p}{h+p}$.

Υποθέτουμε τώρα ότι για μια συγκεκριμένη περίοδο, η βέλτιστη ποσότητα παραγγελίας για μία συμμαχία S είναι y_S και ορίζουμε ένα διαχωρισμό του κόστους που δίνεται από το διάνυσμα γ , βασισμένο μόνο στις αναμενόμενες τιμές της ζήτησης. Στη συνέχεια παρατηρούμε την υλοποίηση της ζήτησης κατά την οποία οι πραγματικές ποσότητες της θα συμβολίζονται με q_i και συνεπώς η συνολική ζήτηση που απαιτείται για της ανάγκες μίας συμμαχίας είναι $q(S) = \sum_{i \in S} q_i$. Το αποτέλεσμα της πραγματοποίησης της ζήτησης είναι ότι κάθε συμμαχία είτε έχει περίσσεια ποσότητα προϊόντος, είτε ότι δεν κάλυψε όλη την απαιτούμενη ποσότητα προϊόντος που ζήτησαν οι πελάτες της. Το ενδεχόμενο η ποσότητα παραγγελίας για κάθε συμμαχία να ισούται ακριβώς με την πραγματική ζήτηση είναι απίθανο, όποτε παραλείπεται από τη συνέχεια της μελέτης μας.

Συνεπώς το

$$C_R(S) = \max\{p(q(S) - y_S), h(y_S - q(S))\} \quad (31)$$

είναι το κόστος της συμμαχίας μετά την παρατήρηση της πραγματικής ζήτησης. Επίσης για λόγους ευκολίας συμβολίζουμε με $C_R^i = C_R(\{i\})$ το πραγματικό κόστος για κάθε κατάσταση που λειτουργεί ανεξάρτητα. Σε όρους ωφέλειας, η αντίστοιχη συνάρτηση, μετά την εξακρίβωση των πραγματικών τιμών ζήτησης, είναι η

$$U_R(S) = \sum_{i \in S} C_R^i - C_R(S). \quad (32)$$

Προφανώς τα παιχνίδια $\langle C_R, N \rangle$ και $\langle U_R, N \rangle$ είναι δύο νέα συνεργατικά παιχνίδια που αφορούν το συνολικό κόστος και ωφέλεια αντίστοιχα για τα καταστήματα. Παρόλο που τα παραπάνω αυτά παιχνίδια σχετίζονται μεταξύ τους και όπως είδαμε τα $\langle C, N \rangle$ και $\langle U, N \rangle$ έχουν μη κενό πυρήνα, δεν μπορεί να υποθεθεί το ίδιο και για τα $\langle C_R, N \rangle$ και $\langle U_R, N \rangle$. Συγκεκριμένα παρακάτω διατυπώνουμε το εξής πολύ σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 7: Ο πυρήνας του παιχνιδιού $\langle U_R, N \rangle$ μπορεί να είναι κενός

Με βάση τα παραπάνω το βασικό ερώτημα είναι το εξής: Δεδομένου ότι κάθε κατάσταση συμφωνεί να συμμετάσχει σε μία κεντρική συμμαχία στη συνολική διαδικασία, με τη συμφωνία ότι το κόστος που προκύπτει από τις αναμενόμενες τιμές θα μοιραστεί σύμφωνα με το διάνυσμα γ_E , πώς θα μοιραστεί το έξτρα κόστος (ή ωφέλεια) που θα προκύψει μετά την αποκάλυψη της πραγματικής ζήτησης. Είναι λογικό, ότι για να είναι λειτουργικό αυτό το παιχνίδι, θα πρέπει τα καταστήματα να έχουν συμφωνήσει εκ των προτέρων τον διαχωρισμό αυτού του κόστους (ή ωφέλειας) που θα προκύψει εκ των υστέρων.

Είναι σημαντικό να διαλέξουμε μία μέθοδο για αυτόν τον διαχωρισμό η οποία να ικανοποιεί τις συνθήκες που έχουμε ορίσει για τον πυρήνα του παιχνιδιού και να μπορεί να εφαρμοστεί εξίσου, είτε μιλάμε για διαχωρισμό κόστους είτε για διαχωρισμό ωφέλειας. Το δεύτερο ουσιαστικά απαιτεί για κάθε ζευγάρι $\langle \gamma, x \rangle$,

όπου γ , x είναι ένας προτεινόμενος διαχωρισμός κόστους και ωφέλειας αντίστοιχα, να ισχύει ότι:

$$\gamma_i + x_i = c_i \quad (33)$$

για κάθε κατάσταση i , όπου c_i το κόστος για κάθε κατάσταση που λειτουργεί ανεξάρτητα. Οι Hartman and Dror(1996) δίνουν διάφορα παραδείγματα για τέτοια ζευγάρια διανυσμάτων και δείχνουν ότι υπάρχουν τέτοια διανύσματα που παρόλο που ανήκουν στον επιμέρους πυρήνα, δεν ικανοποιούν αυτή την απαίτηση.

Παρόλο που μπορεί να υπάρχουν αρκετές ενστάσεις για τη συμμετοχή σε κάποια συμμαχία αν τα κόστη χωρίζονται σύμφωνα με τις αναμενόμενες τιμές, καθώς τα πραγματικά αποτελέσματα μπορεί να είναι πολύ διαφορετικά, μερικές φορές απαιτείται και για λόγους πρακτικής ευκολίας ή στρατηγικών, ένα μέρος από τα κόστη(ή την ωφέλεια), να υπολογίζεται από τις αναμενόμενες τιμές και ένα άλλο μέρος από τις πραγματικές τιμές.

Ένας απλός τρόπος για να αποτυπωθεί αυτή η τεχνική είναι να αποφασιστεί ένα ποσοστό g το οποίο θα βασίζεται στο παιχνίδι το οποίο στηρίζεται στις αναμενόμενες τιμές ($E - game$) και το υπόλοιπο ποσοστό $1 - g$ στο παιχνίδι με τις πραγματικές τιμές ($R - game$).

Υποθέτουμε ότι $g \in [0, 1]$, άρα και η περίπτωση που ο διαχωρισμός βασίζεται εξ ολοκλήρου στα αναμενόμενα ή στα πραγματικά κόστη (ή ωφέλεια) συμπεριλαμβάνεται στην υπόθεση μας. Προφανώς στις περιπτώσεις που $g \neq 1$, η πληρωμή του κόστους (ή η είσπραξη της ωφέλειας) πρέπει να πραγματοποιηθεί στο τέλος της περιόδου, όταν και η πραγματική ζήτηση έχει παρατηρηθεί. Όμως όπως είδαμε, η ουσία εδώ δεν είναι το πότε θα γίνει η πληρωμή αλλά το πότε μπορεί να υπολογιστεί η τιμή που πρέπει να πληρωθεί.

Για να εκφράσουμε τα παραπάνω σε μορφή παιχνιδιού, ορίζουμε δύο νέες χαρακτηριστικές συναρτήσεις ως κυρτό συνδυασμό κάποιον ήδη γνωστών συναρτήσεων ως εξής:

$$A_g(S) = gC(S) + (1 - g)C_R(S) \quad (34)$$

$$a_g(S) = gU(S) + (1 - g)U_R(S) \quad (35)$$

Προφανώς η πρώτη συνάρτηση αφορά τη συνάρτηση για το κόστος και η δεύτερη για την ωφέλεια. Τέτοιου είδους παιχνίδια θα τα συμβολίζουμε ως $G - games$.

Αν υποθέσουμε ότι επιλέχθηκε ως μοίρασμα το $\langle \gamma_E, x_E \rangle$ για το $E - game$ και το $\langle \gamma_R, x_R \rangle$ για το $R - game$, τότε ως μοίρασμα για το $G - game$ έχουμε την μείξη $\langle \gamma, x \rangle$, όπου:

$$\gamma = g\gamma_E + (1 - g)\gamma_R \quad \text{και} \quad x = gx_E + (1 - g)x_R$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα πολύ σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 8: Αν $\gamma_E \in Core_E$ και $\gamma_R \in Core_R$ τότε $\gamma \in Core_G$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \gamma_E \in Core_E &\Rightarrow \forall S \neq N, \gamma_E(S) \leq C(S), \quad \gamma_E(N) = C(N) \\ \gamma_R \in Core_R &\Rightarrow \forall S \neq N, \gamma_R(S) \leq C_R(S), \quad \gamma_R(N) = C_R(N) \end{aligned}$$

Έχουμε δει ότι για κάθε σύνολο $S, S \subset N$, ισχύει ότι $A_g(S) = gC(S) + (1 - a)gC_R(S)$, συνεπώς:

$$\gamma(S) = g\gamma_E(S) + (1 - g)\gamma_R(S) \leq gC(S) + (1 - g)C_R(S) = A_g(S)$$

και

$$\gamma(N) = g\gamma_E(N) + (1 - g)\gamma_R(N) = gC(N) + (1 - g)C_R(N) = A_g(N)$$

Άρα το $\gamma = g\gamma_E + (1 - g)\gamma_R \in \text{Core}_G$.

Επίσης σημειώνουμε ότι όταν για τα διανύσματα x , γ ισχύει ή σχέση (43), τότε ανάλογα αποτελέσματα με το παραπάνω θεώρημα ισχύουν και για το παιχνίδι ωφέλειας (Hartman and Dror(1996)). Τέλος τονίζουμε ότι αν τα ζευγάρια διανυσμάτων $\langle \gamma_E, x_E \rangle$ και $\langle \gamma_R, x_R \rangle$ ικανοποιούν την (43) για το $E - game$ και $R - game$ αντίστοιχα, τότε και το $\langle \gamma, x \rangle$ την ικανοποιεί για το $G - game$.

5 Διαμοιρασμός κέρδους σε παιχνίδια συγ- κέντρωσης αποθεμάτων μέσω της τιμής Shap- ley

Η παρακάτω μελέτη βασίζεται στην εργασία των Kemahlioglu-Ziya και Bartholdi με τίτλο "Centralizing Inventory in Supply Chains by Using Shapley Value to Allocate the Profits"

5.1 Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε μία εφοδιαστική αλυσίδα δύο σταδίων και συγκεκριμένα το πως μπορεί να μοιραστούν τα κέρδη που ίσως προκύπτουν εξαιτίας της συγκέντρωσης των αποθεμάτων, με τη βοήθεια κυρίως της τιμής Shapley μεταξύ των επιμέρους εταίρων αυτής της αλυσίδας.

Στο συγκεκριμένο μοντέλο υποθέτουμε ότι η αλυσίδα αποτελείται από ένα προμηθευτή στο πρώτο στάδιο και n καταστήματα στο δεύτερο στάδιο, τα οποία παρέχουν στην αγορά ένα μοναδικό προϊόν. Θεωρούμε ότι το προϊόν μπορεί να πωληθεί μόνο για μία περίοδο (το παιχνίδι μπορεί να επαναληφθεί από την αρχή για άπειρο αριθμό φορών). Κάθε κατάσταση αντιμετωπίζει τη δική του τοπική ζήτηση η οποία είναι μία τυχαία μεταβλητή, με γνωστή όμως συνάρτηση κατανομής. Ο προμηθευτής διαθέτει όλο το απόθεμα της εφοδιαστικής αλυσίδας, ενώ τα καταστήματα δε διαθέτουν τίποτα, συνεπώς για να καλυφθεί η ζήτηση, τα καταστήματα πρέπει να απευθυνθούν στον προμηθευτή. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα επίσης ότι το αναμενόμενο κέρδος κάθε καταστήματος είναι συνάρτηση μόνο της αναμενόμενης ζήτησης που θα έχει.

Αρχικά τα καταστήματα παρατηρούν την επιμέρους ζήτηση τους και θέτουν την παραγγελία τους στον προμηθευτή, ο οποίος την ικανοποιεί αμέσως, στην περίπτωση που έχει αρκετό απόθεμα στη διάθεση του. Ο προμηθευτής μπορεί να διαχειριστεί το απόθεμα του με διάφορους τρόπους, εδώ όμως θα ασχοληθούμε με δύο πολύ σημαντικούς. Την πρώτη, θα την ονομάσουμε πολιτική κράτησης αποθέματος και σε αυτή την περίπτωση ο προμηθευτής θα κρατάει n διαφορετικά αποθέματα για κάθε κατάσταση χωριστά. Στη δεύτερη περίπτωση, που θα την ονομάσουμε κοινόχρηστη πολιτική αποθέματος, ο προμηθευτής κρατάει όλο το απόθεμα μαζεμένο, χωρίς να έχει περιορισμό στην ποσότητα που μπορεί να διαθέσει σε κάθε κατάσταση. Σε αυτή την περίπτωση υποθέτουμε ότι, αρχικά, ο προμηθευτής διαχειρίζεται το απόθεμα για όλους τους πελάτες σύμφωνα με την πρώτη πολιτική αλλά προτιμάει και συνεπώς προσπαθεί να τους πείσει ώστε να αλλάξουν και να εφαρμόσουν τη δεύτερη.

Είναι προφανές ότι για την ίδια ποσότητα αποθέματος, η κοινόχρηστη πολιτική αποθέματος είναι πιο συμφέρουσα για την αλυσίδα συνολικά απ'ότι η πολιτική κράτησης αποθέματος. Όμως το κέρδος κάποιων καταστημάτων ίσως είναι μικρότερο κάτω από αυτή τη στρατηγική καθώς μπορεί να τους παραδοθεί μικρότερη ποσότητα προϊόντος από αυτή που θα λάμβαναν κάτω από την πολιτική κράτησης αποθέματος. Στο παρόν κεφάλαιο θα προτείνουμε ένα πιθανό διαχωρισμό των κερδών που ίσως προκύψουν από την αλλαγή της πολιτικής σε κοινόχρηστη πολιτική αποθέματος, βασισμένο στην τιμή Shapley. Κάτω από αυτόν τον διαχωρισμό ο προμηθευτής ορίζει τη ποσότητα που θα έχει ως απόθεμα κάτω από τη δεύτερη πολιτική, αυτή που μεγιστοποιεί το κέρδος της εφοδιαστικής αλυσίδας. Επίσης αναφέρουμε ότι για να έχουν τα καταστήματα κίνητρο ώστε να αλλάξ-

ουν τη στρατηγική τους, θα πρέπει να εξασφαλίζουν κάτω από την κοινόχρηστη στρατηγική αποθέματος τουλάχιστον ότι και στην πολιτική κράτησης αποθέματος, πράγμα που λαμβάνεται υπόψη στον προτεινόμενο διαχωρισμό των κερδών.

Θα δούμε ότι ο πυρήνας του παιχνιδιού που αποτελείται από αυτούς τους $n + 1$ παίκτες παίκτες και αφορά τον διαχωρισμό των αναμενόμενων κερδών που προκύπτουν από πιθανή αλλαγή στρατηγικής ως προς τα αποθέματα, είναι μη κενός. Στην περίπτωση που και τα n καταστήματα αποφασίζουν να επιλέξουν την κοινόχρηστη πολιτική αποθέματος, τότε το σύνολο όλων των καταστημάτων μαζί με τον προμηθευτή θα ονομάζεται κεντρική συμμαχία. Στη συνέχεια θα δώσουμε κάποιες ικανές συνθήκες κάτω από τις οποίες οι προτεινόμενοι διαχωρισμοί, μέσω της τιμής Shapley, ανήκουν στον πυρήνα. Επίσης δείχνουμε ότι τελικά όλοι οι παίκτες προτιμούν την κεντρική συμμαχία από μία μικρότερη συμμαχία, πράγμα που είναι πολύ σημαντικό καθώς όπως είπαμε, το κέρδος της ανεφοδιαστικής αλυσίδας μεγιστοποιείται όταν όλοι οι παίκτες προτιμούν την κοινόχρηστη πολιτική.

Έπειτα δείχνουμε ότι οι διαχωρισμοί του κέρδους που βασίζονται στην τιμή Shapley δίνουν κίνητρα στους παίκτες ώστε να αλλάξουν το συνολικό κέρδος της αλυσίδας ή και τα επιμέρους κέρδη των άλλων παικτών κάτω από την κοινόχρηστη πολιτική αποθεμάτων. Μια τέτοια δράση είναι οι πιθανές επενδύσεις με σκοπό την μείωση της μεταβλητότητας της ζήτησης μέσω της οποίας θα επέλθει η αύξηση του κέρδους. Τέτοια μείωση μπορούμε να έχουμε για παράδειγμα μέσω βελτίωσης της διαδικασίας πρόβλεψης για τα αναμενόμενα κέρδη. Θα αποδείξουμε ότι τα καταστήματα έχουν κίνητρο να λάβουν δράσεις για αυτή τη μείωση όταν το περιθώριο κέρδους τους είναι μεγάλο, ενώ αντίθετα ο προμηθευτής έχει αυτό το κίνητρο όταν είναι μικρό.

Τέλος ελέγχουμε τότε ένα σύνολο καταστημάτων έχει κίνητρο να συνεργαστεί και να δράσει ως ένα μεγάλο κατάστημα, ώστε να συγκρουστεί με τον προμηθευτή με σκοπό να εξασφαλίσει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο κέρδος, κάτω από την κοινόχρηστη πολιτική. Αυτή η σύγκρουση μπορεί να αλλάξει τα κέρδη όλων των παικτών αλλά όχι τα συνολικά κέρδη της αλυσίδας. Παραδόξως υπάρχουν περιπτώσεις κάτω από τις οποίες αυτή η συνεργασία των καταστημάτων τους αποφέρει μικρότερα κέρδη από ότι πριν και συνεπώς δεν προτιμάτε. Αυτό εξαρτάται κυρίως από τα περιθώρια κέρδους των καταστημάτων.

5.2 Ωφέλεια λόγω συγκέντρωσης αποθεμάτων

Αρχικά συμβολίζουμε ως d_i την πραγματική τιμή της ζήτησης και ως D_i τη ζήτηση ως τυχαία μεταβλητή, για το κατάστημα $i, i = 1, 2, \dots, n$. Η D_i έχει συνάρτηση κατανομής F_i και συνάρτηση πιθανότητας f_i , όπου και οι δύο είναι γνωστές και μάλιστα η F_i υποθέτουμε ότι είναι επίσης αύξουσα, διαφορίσιμη και με πεπερασμένη μέση τιμή. Υποθέτουμε επίσης ότι οι D_i για $i = 1, 2, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Έστω x η ποσότητα αποθέματος που έχει στην κατοχή του ο προμηθευτής. Το ύψος αυτής της ποσότητας μπορεί να επηρεαστεί από τα καταστήματα αν αποφασίσουν να απαιτήσουν για ασφάλεια, να οριστεί μία πιθανότητα p_i η οποία θα είναι η ελάχιστη πιθανότητα για το κατάστημα i , ώστε να μην καλύψει πλήρως τη ζήτηση του προϊόντος. Στη συνέχεια ορίζουμε ως p τη χονδρική τιμή πώλησης που χρεώνει ο προμηθευτής τα καταστήματα, ανά μονάδα προϊόντος, w την τιμή που κοστίζει κάθε μονάδα προϊόντος στον προμηθευτή(είτε για να το παράξει, είτε για να το προμηθευτεί από αλλού), h το κόστος

αποθήκευσης ανά μονάδα αδιάθετου προϊόντος και p_M το περιθώριο κέρδους ανά μονάδα προϊόντος, που είναι ίδιο σε κάθε κατάσταση, δηλαδή τα καταστήματα θέτουν προς πώληση το προϊόν στους πελάτες τους ως προς $p + p_M$ ανά μονάδα. Τέλος υποθέτουμε ότι όλα τα παραπάνω είναι κοινή γνώση για όλα τα μέρη της εφοδιαστικής αλυσίδας.

Όπως είδαμε, για να διαχειριστεί την ποσότητα αποθέματος που πρέπει να κρατήσει, ο προμηθευτής είτε παραγγέλνει ανεξάρτητα την ποσότητα που θέλει για κάθε κατάσταση ξεχωριστά (πολιτική κράτησης αποθέματος), είτε κάνει μία συνολική παραγγελία του προϊόντος και το κρατάει σε απόθεμα, ώστε στη συνέχεια να αντλεί από αυτή την ποσότητα και να εξυπηρετεί όλα τα καταστήματα (κοινόχρηστη πολιτική αποθέματος). Σκοπός μας είναι να συγκρίνουμε τα κέρδη για τον προμηθευτή και τα καταστήματα κάτω από αυτές τις δύο πολιτικές, πριν γίνει αυτό όμως πρέπει να κοιτάξουμε την περίπτωση στην οποία ο προμηθευτής και τα καταστήματα αποτελούν μέρος μίας καθετοποιημένης αλυσίδας και συνεπώς η απόφαση για την ποσότητα αποθέματος x λαμβάνεται από έναν κεντρικό διαχειριστή.

5.2.1 Ωφέλεια σε καθετοποιημένη εφοδιαστική αλυσίδα

Στην περίπτωση της καθετοποιημένης εφοδιαστικής αλυσίδας, όταν δηλαδή όλα τα μέλη της ανήκουν στην ίδια εταιρία, τότε ένας κεντρικός διαχειριστής αποφασίζει για το ύψος του αποθέματος x , με σκοπό να μεγιστοποιήσει τα αναμενόμενα κέρδη της αλυσίδας συνολικά. Προφανώς σε αυτή την περίπτωση δεν ασχολούμαστε με τις επιμέρους ζητήσεις, D_i , των καταστημάτων αλλά με τη συνολική ζήτηση, D_c . Αν συμβολίσουμε με x_c την ποσότητα αποθέματος του προμηθευτή σε αυτή την περίπτωση και με $F_c = F_1 * \dots * F_n$ τη συνάρτηση κατανομής της συνολικής ζήτησης, τότε σκοπός μας είναι ο υπολογισμός του εξής:

$$\max_{x_c} [(p + p_M)E[\min\{x_c, D_c\}] - h(x_c - E[\min\{x_c, D_c\}]) - wx_c].$$

Αποδεικνύεται ότι $x_c^* = F_c^{-1}(\frac{p+p_M-w}{p+p_M+h})$, η ποσότητα αποθέματος που μεγιστοποιεί το κέρδος της αλυσίδας.

Συνεπώς το

$$(p + p_M)E[\min\{x_c^*, D_c\}] - h(x_c^* - E[\min\{x_c^*, D_c\}]) - wx_c^*,$$

είναι το βέλτιστο κέρδος που μπορεί να έχει μία εφοδιαστική αλυσίδα γενικά, καθώς επιτυγχάνεται όταν όλα τα μέλη της συνεργάζονται όχι για το ατομικό τους συμφέρον αλλά για το καλό της αλυσίδας συνολικά και άρα θα χρησιμοποιείται ως κριτήριο σύγκρισης για τα κέρδη της, σε διαφορετικές περιπτώσεις που θα εξεταστούν παρακάτω.

5.3 Ωφέλεια σε αποκεντρωμένη εφοδιαστική αλυσίδα

Στην προηγούμενη παράγραφο εξετάσαμε την περίπτωση που όλα τα μέλη της αλυσίδας ανήκουν σε μία κοινή επιχείρηση και συνεπώς λειτουργούν για τη βελτιστοποίηση του κέρδους της αλυσίδας συνολικά. Εδώ θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που κάθε μέλος ενδιαφέρεται μόνο για το δικό του κέρδος και για το πως θα το μεγιστοποιήσει. Αυτή η περίπτωση χωρίζεται σε 2 υποκατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται η διαχείριση του αποθέματος.

1) Πολιτική κράτησης

Όταν ο προμηθευτής διαχειρίζεται ανεξάρτητα n ξεχωριστά αποθέματα για τα καταστήματα, σκοπός του είναι να ορίσει ως απόθεμα για κάθε κατάστημα ποσότητες x_i τέτοιες ώστε να βελτιστοποιούν τα παρακάτω n προβλήματα:

$$\max_{x_i} [pE[\min\{x_i, D_i\}] - h(x_i - E[\min\{x_i, D_i\}]) - wx_i].$$

έτσι ώστε $F_i(x_i) \geq p_i$.

Το παραπάνω αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα προβλήματος του εφημεριδοπώλη, συνεπώς λαμβάνοντας υπόψιν και τον περιορισμό με την ανισότητα έχουμε ότι η βέλτιστη ποσότητα αποθέματος για το κατάστημα i είναι

$$x_i^* = F_i^{-1}(\max\{p_i, \frac{p-w}{p+h}\}), i = 1, 2, \dots, n$$

και το συνολικό απόθεμα που έχει ο προμηθευτής είναι

$$\sum_{i=1}^n F_i^{-1}(\max\{p_i, \frac{p-w}{p+h}\}).$$

Αυτό θεωρείται το βασικό σενάριο στην περίπτωση που ο προμηθευτής δεν πείσει κανένα από τα καταστήματα να αλλάξουν τη στρατηγική τους από κρατημένη σε κοινόχρηστη και μας δίνει μία τιμή για το συνολικό κέρδος, την οποία θα λάβουμε επίσης υπόψιν για μελλοντικές συγκρίσεις με άλλες στρατηγικές για τη διαχείριση των αποθεμάτων.

2) Κοινόχρηστη πολιτική

Όπως έχουμε δει ο προμηθευτής θα επωφεληθεί σε περίπτωση που τα καταστήματα αποφασίσουν να αλλάξουν τη στρατηγική τους σε κοινόχρηστη, κυρίως λόγω του φαινομένου της συγκέντρωσης κινδύνου. Σε περίπτωση, λοιπόν, που γίνει αυτή η αλλαγή για όλα τα καταστήματα τότε ο προμηθευτής καλείται να πάρει την απόφαση για την ποσότητα του αποθέματος, x_S , βασισμένος πάλι στη συνολική ζήτηση D_c και συνεπώς η περίπτωση είναι παρόμοια με αυτή στην οποία την απόφαση έπαιρνε ένας κεντρικός διαχειριστής. Εδώ ο προμηθευτής προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το προσωπικό του κέρδος ως εξής:

$$\max_{x_S} [pE[\min\{x_S, D_c\}] - h(x_S - E[\min\{x_S, D_c\}]) - wx_S],$$

με βέλτιστη ποσότητα το $x_S^* = F_c^{-1}(\frac{p-w}{p+h})$.

Συγκρίνοντας με τα προηγούμενα βλέπουμε ότι αυτή η λύση δεν είναι βέλτιστη για την αλυσίδα, καθώς η ποσότητα αποθέματος, x_S^* , είναι μικρότερη από την αντίστοιχη ποσότητα x_c^* , η οποία όπως είπαμε είναι η βέλτιστη για την αλυσίδα συνολικά.

Επίσης, σύμφωνα με τους Anupidi και Bassok (1999) οι αναμενόμενες πωλήσεις των καταστημάτων και συνεπώς τα κέρδη, ίσως μειωθούν συγκριτικά με τις πωλήσεις στην περίπτωση της πολιτικής κράτησης αποθέματος. Αυτό συμβαίνει όταν ένας ισχυρός προμηθευτής κρατάει λιγότερο απόθεμα από ότι στην περίπτωση που χειριζόταν το απόθεμα κάθε καταστήματος ξεχωριστά και ανεξάρτητα. Τότε τα καταστήματα, στην προσπάθεια να περιορίσουν την απώλεια στα κέρδη απαιτούν να δεχθούν τουλάχιστον μια ποσότητα k_i από το προϊόν, πράγμα που σε τέτοιες

περιπτώσεις όμως, δεν λειτουργεί πάντα καθώς τέτοια περιορισμοί του προμηθευτή μπορούν να οδηγήσουν τα συνολικά κέρδη της αλυσίδας ακόμα χαμηλότερα.

Ένας ιδανικός τρόπος για να χειριστούμε αυτή την κατάσταση είναι να μεγιστοποιήσουμε το συνολικό κέρδος της αλυσίδας και στη συνέχεια να προτείνουμε ένα δίκαιο διαχωρισμό αυτού του κέρδους μεταξύ του προμηθευτή και των καταστημάτων, έτσι ώστε όλοι να εξασφαλίζουν το βέλτιστο για αυτούς κέρδος.

5.4 Διαχωρισμός έξτρα κέρδους λόγω αλλαγής σε κοινόχρηστη πολιτική

Όπως έχουμε πεί, το αρχικό καθεστώς στην αλυσίδα είναι ότι ο προμηθευτής ακολουθεί την πολιτική κράτησης αποθέματος και τα καταστήματα έχουν συμφωνήσει ότι θα λάβουν τουλάχιστον ένα ελάχιστο μέρος από αυτό το απόθεμα ώστε η πιθανότητα να μην έχουν έλλειψη προϊόντος όταν αποκαλυφθεί η ζήτηση να είναι τουλάχιστον p_i για $i = 1, 2, \dots, n$. Στη συνέχεια ο προμηθευτής προτείνει στα καταστήματα να αλλάξει τη στρατηγική σε κοινόχρηστη πολιτική αποθέματος, ώστε να εξυπηρετούνται όλα τα καταστήματα από ένα κοινό απόθεμα, το μέγεθος του οποίου πάλι καθορίζεται από αυτόν. Τα πιθανά έξτρα κέρδη που θα προκύπτουν από αυτή την αλλαγή θα μοιράζονται ανάμεσα στα καταστήματα και τον προμηθευτή με τρόπο που θα προτείνουμε αργότερα.

Κάθε κατάστημα, για να αποφασίσει αν θα δεχτεί ή όχι την πρόταση για αλλαγή, βασίζεται στα εξής δεδομένα: στην ποσότητα του συνολικού αποθέματος την οποία πιστεύουν ότι θα επιλέξει ο προμηθευτής, στο πως θα μοιραστεί αυτό το απόθεμα στην περίπτωση που δεν επαρκεί για να καλύψει τις ανάγκες όλων των καταστημάτων και τέλος στο πως θα μοιραστούν τελικά τα κέρδη από αυτή την αλλαγή. Ο προμηθευτής, αντίστοιχα, για να καθορίσει το ύψος του αποθέματος, βασίζεται στο πόσα καταστήματα θα δεχτούν την αλλαγή και στην αύξηση του αναμενόμενου κέρδους που θα έχει, απόρροια αυτής της αλλαγής.

Αν υποθέσουμε ότι το κατάστημα i , για το οποίο ο προμηθευτής έχει κρατήσει ως απόθεμα ποσότητα x_i^* κάτω από την πολιτική κράτησης αποθέματος, έχει πραγματική ζήτηση d_i , τότε το κέρδος του κάτω από αυτή τη στρατηγική είναι $p_M \min\{x_i^*, d_i\}$. Άρα είναι λογικό ότι για να δεχτεί το κατάστημα να αλλάξει, πρέπει να ξέρει ότι θα εξασφαλίσει πληρωμή τουλάχιστον ίση με αυτή που είχε κάτω από την πολιτική κράτησης, ακόμα και αν η ποσότητα αποθέματος που θα λάβει είναι μικρότερη από x_i^* , αλλιώς σε διαφορετική περίπτωση δε θα δεχτεί την αλλαγή. Συνεπώς το κατάστημα i περιμένει να λάβει ποσότητα τουλάχιστον ίση με x_i^* , ανεξάρτητα από την πολιτική που ακολουθείται και όταν ο προμηθευτής δεν καταφέρει να του παραδώσει αυτή την ποσότητα, θα πρέπει να το αποζημιώσει.

Έστω $\varphi_i(x, x_i^*, d_i) \geq 0$ το έξτρα κέρδος μοιράζεται στο κατάστημα i όταν επιλέξει την αλλαγή και ο προμηθευτής έχει x μονάδες ως απόθεμα. Τότε το συνολικό κέρδος του καταστήματος κάτω από την κοινόχρηστη πολιτική είναι $p_M \min\{x_i^*, d_i\} + \varphi_i(x, x_i^*, d_i)$, ενώ το αντίστοιχο κέρδος του προμηθευτή είναι:

$$(p + p_M) \min\{x, \sum_{i=1}^n d_i\} - h \max\{0, x - \sum_{i=1}^n d_i\} - w x - \sum_{i=1}^n [p_M \min\{x_i^*, d_i\} + \varphi_i(x, x_i^*, d_i)].$$

Σημειώνουμε ότι για δοθείσα συνολική ζήτηση, το κέρδος του προμηθευτή σε αυτή την περίπτωση μπορεί να είναι μικρότερο από ότι κάτω από την πολιτική

κράτησης και αυτό γίνεται για παράδειγμα όταν $\sum_{i=1}^n x_i^* \geq \sum_{i=1}^n d_i \geq x$, όταν δηλαδή έχει απόθεμα μικρότερο και από τη συνολική ζήτηση αλλά και μικρότερο από ότι θα είχε κάτω από την πολιτική κράτησης. Μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί ως ένα είδος ποινής για τον προμηθευτή λόγω του κακού υπολογισμού και της μη κάλυψης της ανάγκης των καταστημάτων.

Τα αντίστοιχα αναμενόμενα κέρδη για τα καταστήματα και τον προμηθευτή είναι:

$$\Pi(R_i) = \pi_{R_i} + \varphi_{R_i} \quad (36)$$

και

$$\Pi(S) = (p + p_M)E[\min\{x, \sum_{i=1}^n D_i\} - \max\{0, x - \sum_{i=1}^n D_i\}] - wx - \sum_{i=1}^n (\pi_{R_i} - \varphi_{R_i}), \quad (37)$$

όπου

$$\pi_{R_i} = p_M E[\min\{x_i^*, D_i\}]$$

και

$$\varphi_{R_i} = E[\varphi_i(x, x_i^*, D_i)].$$

Αν συμβολίσουμε με π_{S_i} το αναμενόμενο κέρδος που έχει ο προμηθευτής μέσω του i καταστήματος, κάτω από την πολιτική κράτησης αποθέματος, τότε η (47) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\Pi(S) = \sum_{i=1}^n \pi_{S_i} + a - b - c$$

όπου

$$a = (p + p_M)E[\min\{x, \sum_{i=1}^n D_i\} - \max\{0, x - \sum_{i=1}^n D_i\}] - wx,$$

$$b = \sum_{i=1}^n (\pi_{S_i} + \pi_{R_i})$$

και

$$c = \sum_{i=1}^n \varphi_{R_i}.$$

Παρατηρούμε ότι το a εκφράζει το αναμενόμενο συνολικό κέρδος της αλυσίδας κάτω από την κοινόχρηστη πολιτική, το b το αναμενόμενο συνολικό κέρδος της αλυσίδας κάτω από την πολιτική κράτησης και το c είναι το συνολικό αναμενόμενο κέρδος που προκύπτει από την αλλαγή πολιτικής και μοιράζεται στα καταστήματα. Συνεπώς το $\varphi_S = a - b - c$, είναι το επιπλέον αναμενόμενο κέρδος που έχει ο προμηθευτής όταν πείθει όλα τα καταστήματα να αλλάξουν την πολιτική αποθέματος. Τότε το συνολικό αναμενόμενο κέρδος του εκφράζεται πιο απλά ως:

$$\Pi(S) = \sum_{i=1}^n \pi_{S_i} + \varphi_S. \quad (38)$$

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να βρεθούν τα έξτρα κέρδη $\varphi_i(x, x_i^*, d_i)$ για κάθε κατάσταση i , έτσι ώστε $\varphi_S \geq 0$, δηλαδή πρέπει και ο προμηθευτής να αποκομίζει κέρδος από αυτή τη διαδικασία. Το γεγονός ότι $\varphi_{R_i} \geq 0$ εξασφαλίζεται από την υπόθεση ότι $\varphi_i(x, x_i^*, d_i) \geq 0$.

Επιπλέον θέλουμε, δοθέντος του φ_S , ο προμηθευτής να επιλέγει τη βέλτιστη, όσον αφορά την αλυσίδα συνολικά, ποσότητα ως απόθεμα κάτω από την κοινόχρηστη πολιτική.

Δεδομένου ότι $\varphi_i(x, x_i^*, d_i) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, οι αποφάσεις των παικτών (τα καταστήματα αποφασίζουν για το αν θα αλλάξουν πολιτική και ο προμηθευτής την ποσότητα του αποθέματος) εξαρτώνται μόνο από τα αναμενόμενα κέρδη φ_{R_i} και φ_S . Συνεπώς στη συνέχεια θα προτείνουμε ένα τρόπο υπολογισμού τους έτσι ώστε όλα τα καταστήματα να έχουν κίνητρο για αλλαγή και ο προμηθευτής να έχει κίνητρο να επλέξει τη βέλτιστη, για την αλυσίδα, ποσότητα αποθέματος. Έπειτα θα παρουσιάσουμε ένα πιθανό διαχωρισμό των αποθεμάτων από τον προμηθευτή στα καταστήματα και τέλος θα υπολογίσουμε τις τιμές των $\varphi_i(x, x_i^*, d_i)$ για τις παρατηρούμενες τιμές ζήτησης των καταστημάτων με τέτοιο τρόπο ώστε όταν όλα τα καταστήματα αποζημιώνονται με αυτό τον τρόπο, οι αναμενόμενες τιμές που λαμβάνουν είναι φ_{R_i} για κάθε κατάσταση και φ_S για τον προμηθευτή. Για τον υπολογισμό των παραπάνω, θα χρησιμοποιήσουμε εργαλεία της θεωρίας παιγνίων.

Ψάχνουμε ένα τρόπο για το διαχωρισμό των αναμενόμενων κερδών ο οποίος να είναι δίκαιος, διαφανής, να μοιράζει όλα τα κέρδη στους παίκτες και να μπορεί να υπολογιστεί εύκολα. Αυτά μπορούν να εκφραστούν καλύτερα με τις εξής συνθήκες:

- 1) Όλα τα κέρδη που παράγονται από τη συμμαχία πρέπει να μοιράζονται στους παίκτες ώστε να μην μένει κάτι ανεκμετάλλετο
- 2) Να φροντίζεται όταν ένας παίκτης δεν συνεισφέρει κάτι σε αυτή, να μη μοιράζεται τίποτα από τα κέρδη.
- 3) Όταν δύο καταστήματα είναι όμοια, πρέπει να λαμβάνουν το ίδιο μερίδιο από τα κέρδη
- 4) Για οποιαδήποτε δύο παιχνίδια v, w , η συνολική πληρωμή ενός παίκτη για το παιχνίδι $v + w$ ισούται με το άθροισμα των πληρωμών του στα επιμέρους παιχνίδια.

Όλα τα παραπάνω ικανοποιούνται, όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, μόνο από την τιμή Shapley του παιχνιδιού και με αυτή θα ασχοληθούμε στη συνέχεια.

Έστω $N = \{1, 2, \dots, n\}$ το σύνολο των καταστημάτων και S ο προμηθευτής και $K = N \cup \{S\}$. Η τιμή Shapley απονέμει σε κάθε παίκτη την αναμενόμενη συνεισφορά που προσφέρει ως μέλος σε μία συμμαχία και υπολογίζεται ως εξής:

$$\varphi_i(u) = \sum_{J \subset K - \{i\}} \frac{|J|!(|K| - |J|)!}{|K + 1|!} (u(J \cup \{i\}) - u(J)). \quad (39)$$

5.4.1 Μοίρασμα κερδών μέσω της τιμής Shapley

Θα ορίσουμε ως χαρακτηριστική συνάρτηση, $u(J)$, του παιχνιδιού την αναμενόμενη αύξηση του κέρδους όταν ένα υποσύνολο, J , των παικτών αποφασίσει να ακολουθήσει την κοινόχρηστη πολιτική. Προφανώς $u(\emptyset) = 0$.

από τον ορισμό της, η τιμή Shapley μοιράζει σε κάθε παίκτη ένα ποσό το οποίο αποτελεί ένα σταθμισμένο μέσο όρων της συνεισφοράς του, $u(J \cup \{i\}) - u(J)$, σε κάθε συμμαχία. Για των υπολογισμό του $u(J)$ για κάθε συμμαχία J πρέπει να υποθέσουμε τα εξής:

α) Αν ένα κατάστημα δεν συμφωνήσει στην αλλαγή, συνεχίζει να λαμβάνει το προϊόν από τον προμηθευτή από ένα μέρος του αποθέματος που έχει κρατηθεί αποκλειστικά για αυτό

β) Τα καταστήματα δεν έχουν τα μέσα να επικοινωνήσουν και να διαχειριστούν ένα κεντρικό απόθεμα χωρίς τη συμμετοχή του προμηθευτή. Ουσιαστικά, ακόμα και αν όλα τα καταστήματα θέλουν την αλλαγή, αν ο προμηθευτής, για τους δικούς του λόγους, δεν συμφωνεί με αυτή, τότε η αλλαγή δεν μπορεί να γίνει. Δηλαδή έχουμε ότι αν για μια συμμαχία J , $J \cap \{S\} = \emptyset$, τότε $u(J) = 0$.

γ) Αν ο προμηθευτής δεν πείσει κανένα κατάστημα να κάνει την αλλαγή, τότε δεν έχουμε καμία αύξηση στο αναμενόμενο κέρδος, δηλαδή $u(\{S\}) = 0$.

Ορίζουμε ως $D_J = \sum_{i \in J - \{S\}} D_i$, τη συνολική ζήτηση για τη συμμαχία J . Αν x είναι το συνολικό απόθεμα που κουβαλάει ο προμηθευτής, τότε το διαθέσιμο απόθεμα για τη συμμαχία J είναι ίσο με $x^J = x - \sum_{i \in N - (J - \{S\})} x_i^*$. Αυτό συμβαίνει διότι τα καταστήματα του συνόλου $N - (J - \{S\})$ δεν ανήκουν στη συμμαχία και συνεπώς ο προμηθευτής υποχρεούται να διαθέσει απόθεμα x_i^* σε κάθε κατάστημα $i \in N - (J - \{S\})$.

Συνεπώς έχουμε ότι το $u(J)$ υπολογίζεται ως η διαφορά του μέγιστου αναμενόμενου κέρδους της συμμαχίας μέσω της κοινόχρηστης πολιτικής, μείον το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος της συμμαχίας κάτω από την πολιτική κράτησης, δηλαδή:

$$u(J) = [(p + p_M)E[\min\{x^J, D_J\} - \max\{0, x^J - D_J\}] - wx^J - \sum_{i \in J - \{S\}} ((p + p_M)E[\min\{x_i^*, D_i\} - \max\{0, x_i^* - D_i\}] - wx_i^*). \quad (40)$$

Αν συμβολίσουμε με $\pi(J)$ το μέγιστο αναμενόμενο κέρδος της συμμαχίας μέσω της κοινόχρηστης πολιτικής, τότε η σχέση (50), με τη βοήθεια των παραπάνω, μπορεί να γραφτεί πιο απλά ως:

$$u(J) = \pi(J) - \sum_{i \in J - \{S\}} (\pi_{S_i} + \pi_{R_i}). \quad (41)$$

Έχουμε πλέον ότι χρειάζεται για να υπολογίσουμε το μοίρασμα των κερδών σύμφωνα με την τιμή Shapley για τα καταστήματα (φ_{1R_i}) και τον προμηθευτή (φ_{1S}).

Πόρισμα 1: Στο παραπάνω συνεργατικό παιχνίδι μεταξύ των n καταστημάτων και του ενός προμηθευτή, η κατανομή του κέρδους μέσω της τιμής Shapley είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \varphi_{1R_i} = & \sum_{\substack{J \subset K - \{i\}: \\ \{S\} \subset J, |J| \geq 1}} \frac{|J|!(N - |J|)!}{(N + 1)!} \pi(J \cup \{i\}) \\ & - \sum_{\substack{J \subset K - \{i\}: \\ \{S\} \subset J, |J| \geq 2}} \frac{|J|!(N - |J|)!}{(N + 1)!} \pi(J) \\ & - \frac{1}{2}(\pi_{S_i} + \pi_{R_i}) \end{aligned} \quad (42)$$

και

$$\begin{aligned} \varphi_{1S} = & \sum_{J \subset N: |J| \geq 1} \frac{|J|!(N-|J|)!}{(N+1)!} \pi(J \cup \{S\}) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i \in N} (\pi_{S_i} + \pi_{R_i}). \end{aligned} \quad (43)$$

Άρα όταν όλα τα καταστήματα συμφωνούν στην αλλαγή, το συνολικό αναμενόμενο κέρδος τους δίνεται από τη σχέση (51), ενώ αυτό του προμηθευτή δίνεται από τη σχέση (53), όπου $\varphi_S = \varphi_{1S}$ και $\varphi_{R_i} = \varphi_{1R_i}$.

5.5 Γενικές ιδιότητες σχετικά με το διαχωρισμό μέσω της τιμής Shapley

Όπως ήδη είπαμε, όταν οι παίκτες δεν συνεργάζονται μεταξύ τους, ο προμηθευτής σηκώνει όλο το βάρος σε περίπτωση που η ποσότητα αποθέματος που κρατάει είναι πολύ μεγαλύτερη ή μικρότερη από την πραγματική ανάγκη και συνεπώς έχει την τάση να παραγγέλνει λιγότερη ποσότητα από τη βέλτιστη. Στην περίπτωση όμως που το μερίδιο του, σε περίπτωση του συνεργατικού παιχνιδιού, καθορίζεται από την τιμή Shapley, όπως είδαμε παραπάνω, τότε ο προμηθευτής θα επιλέγει πάντα τη βέλτιστη ποσότητα ως απόθεμα, ανάλογα και τη συμμαχία στην οποία περιλαμβάνεται. Συνεπώς όταν όλα τα καταστήματα μαζί με τον προμηθευτή σχηματίζουν μία μεγάλη συμμαχία, το απόθεμα που κουβαλάει ο τελευταίος είναι το βέλτιστο για την αλυσίδα συνολικά. Αυτό εκφράζεται καθαρά από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1: Η διανομή των κερδών μέσω της τιμής Shapley ωθεί τον προμηθευτή στο να επιλέξει τη βέλτιστη ποσότητα ως απόθεμα, η οποία θα μεγιστοποιεί το κέρδος της εκάστοτε συμμαχίας στην οποία λαμβάνει μέρος.

Αυτό φαίνεται κυρίως από τη σχέση (53) καθώς το μερίδιο του προμηθευτή είναι γραμμικός συνδυασμός του κέρδους της συμμαχίας λόγω της αλλαγής πολιτικής. Συνεπώς όταν ξέρει ότι θα πληρωθεί με τρόπο που δίνεται από τη σχέση αυτή, έχει κίνητρο ώστε να ανεβάσει τα κέρδη της συμμαχίας συνολικά.

Στη συνέχεια κάνουμε μία παρατήρηση για τη χαρακτηριστική συνάρτησης η οποία μας οδηγεί σε ένα σημαντικό πόρισμα.

Πρόταση 1: Η χαρακτηριστική συνάρτηση του παραπάνω συνεργατικού παιχνιδιού είναι υπερπροσθετική, δηλαδή για κάθε συμμαχίες I, J με $I \cap J = \emptyset$, $u(I \cup J) \geq u(I) + u(J)$.

Αυτή η ιδιότητα μας εγγυάται ότι όταν ένα νέο κατάστημα εισέλθει σε μία συμμαχία, τότε αυξάνει τα κέρδη της κατά ένα ποσό το οποίο είναι τουλάχιστον ίσο με τα κέρδη που θα είχε αυτό το κατάστημα αν δρούσε μόνο του. Ουσιαστικά αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι κάτω από αυτό το μοίρασμα των κερδών, κάθε παίκτης κερδίζει τουλάχιστον όσα θα κέρδιζε αν όλοι ακολουθούσαν την πολιτική κράτησης αποθέματος.

Τέλος καταλήγουμε στο εξής πόρισμα:

Πόρισμα 2: Ο διαχωρισμός των κερδών για κάθε παίκτη σύμφωνα με την τιμή Shapley μας εγγυάται ότι όλοι θα λάβουν ένα ποσό το οποίο θα είναι μη αρνητικό.

5.5.1 Πυρήνας-Τιμή Shapley

Έχουμε δει ότι για να ανήκει ένα διάνυσμα φ στον πυρήνα του παιχνιδιού πρέπει να ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

$$\sum_{i \in K} \varphi_i = u(K) \quad (44)$$

$$\sum_{i \in J} \varphi_i \geq u(J), \forall J \subset K \quad (45)$$

Αν ένα διάνυσμα πληρωμών φ , δεν ανήκει στον πυρήνα, τότε ένα υποσύνολο παικτών θα μπορεί να βρει μεγαλύτερες πληρωμές μόνο του, παρά ως μέρος μίας μεγάλης συμμαχίας. Αρχικά θα δείξουμε ότι ο πυρήνας του παιχνιδιού είναι μη κενός.

Έστω ένας διαχωρισμός που δίνει όλα τα έξτρα κέρδη λόγω της συγκέντρωσης αποθεμάτων, στον προμηθευτή και τίποτα στα καταστήματα. Αυτό το μοίρασμα θα το ονομάσουμε ως μοίρασμα του ισχυρού προμηθευτή και προφανώς ανήκει στον πυρήνα καθώς ικανοποιεί τις σχέσεις (54) και (55) και μάλιστα με ισότητα σε όλες τις περιπτώσεις. Κάτω από αυτό το διαχωρισμό φαίνεται ότι κανένα κατάστημα δεν έχει κίνητρο να αλλάξει την πολιτική αποθέματος του.

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι αν ο διαχωρισμός του κέρδους με βάση την τιμή Shapley, ανήκει στον πυρήνα του παιχνιδιού, τότε είναι προς το συμφέρον όλων να συνεργαστούν σε μία μεγάλη συμμαχία. Αντίθετα όταν δεν ανήκει στον πυρήνα, τότε δεν υπάρχει μεγάλη ευστάθεια, με την έννοια ότι μπορεί να υπάρχει κίνητρο να σχηματιστούν διαφορετικές, μικρότερες συμμαχίες. Αυτό θα μπορούσε να οδηγήσει σε αποφάσεις οι οποίες δεν μεγιστοποιούν τα κέρδη της αλυσίδας συνολικά τα οποία μπορούν να προκύψουν από την αλλαγή της στρατηγικής αποθήκευσης.

Όπως έχει αποδείξει ο Shapley(1971), η τιμή Shapley δεν ανήκει πάντα στον πυρήνα του παιχνιδιού, με εξαίρεση όταν το παιχνίδι είναι κυρτό. Θα πρέπει δηλαδή η χαρακτηριστική του συνάρτηση να ικανοποιεί την εξής σχέση:

$$u(J \cup \{i\}) - u(J) \geq u(I \cup \{i\}) - u(I) \quad (46)$$

για κάθε $i \in K$ και $I, J \subset K - \{i\}$, με $I \subset J$.

Σε άρθρο του ο Ozen(2005) μελετούσε μοντέλα εφημεριδοπώλη στα οποία όμως δεν υπήρχε προμηθευτής στην αλυσίδα, πράγμα που κάνει την ανάλυση απλούστερη, παρα μόνο τα καταστήματα και τα οποία μοίραζαν το συνολικό κέρδος μετά την αποκάλυψη της πραγματικής ζήτησης. Απέδειξε ότι αυτά τα παιχνίδια ήταν κυρτά όταν οι συναρτήσεις κατανομής για τη ζήτηση των καταστημάτων ήταν ανεξάρτητες, συμμετρικές και μονοκόρυφες.

Εδώ θα θεωρήσουμε (η απόδειξη παραλείπεται), ότι η κυρτότητα σε αυτά τα μοντέλα συνεπάγεται την κυρτότητα και στη δική μας περίπτωση, συνεπώς έχουμε το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 3: Ο διαχωρισμός του κέρδους, όπως ορίστηκε παραπάνω σύμφωνα με την τιμή Shapley ανήκει πάντα στον πυρήνα του παιχνιδιού όταν για τη ζήτηση των καταστημάτων ισχύει ένα από τα εξής:

- α) ακολουθεί την κανονική κατανομή
- β) έχει συμμετρική, μονοκόρυφη κατανομή και $\frac{p+p_M-w}{p+p_M+h} = \frac{1}{2}$.

Το πόρισμα 3 ισχύει για οποιοδήποτε αριθμό καταστημάτων. Συνεπώς έχουμε ότι η τιμή Shapley ανήκει πάντα στον πυρήνα μόνο για συγκεκριμένο τύπο κατανομών της ζήτησης.

Ως ειδικότερα αποτελέσματα έχουμε τις εξής δύο προτάσεις:

Πρόταση 1: Στην περίπτωση που ο αριθμός των καταστημάτων είναι μόνο δύο, τότε η τιμή Shapley είναι πάντα στον πυρήνα.

Πρόταση 2: Η τιμή Shapley του παιχνιδιού ανήκει πάντα στον πυρήνα όταν όλα τα καταστήματα είναι όμοια.

5.5.2 Ευστάθεια

Έχουμε πει ότι είναι σημαντικό για την ευστάθεια του παιχνιδιού, ένα προτεινόμενο μοίρασμα των κερδών, όπως είναι η τιμή Shapley να ανήκει και στον πυρήνα του παιχνιδιού, όταν αυτός είναι μη κενός. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι προτιμάμε πάντα τους διαχωρισμούς που ανήκουν στον πυρήνα συγκριτικά με άλλους. Για παράδειγμα, στο συγκεκριμένο μοντέλο, είδαμε ότι το μοίρασμα του ισχυρού προμηθευτή ανήκει στον πυρήνα σε αντίθεση με την τιμή Shapley η οποία πιθανώς και να μην ανήκει. Όμως στην περίπτωση του ισχυρού προμηθευτή και αν εξαίρεσουμε την περίπτωση που επιβληθεί στα καταστήματα το αντίθετο, είναι λογικό να απαιτηθεί από τη μεριά τους να λάβουν ένα μέρος από τα πιθανά κέρδη, αλλιώς δε θα συμμετάσχουν στη συμμαχία. Συνεπώς παρόλο που το μοίρασμα αυτό ανήκει στον πυρήνα, στην πράξη είναι δύσκολο να εφαρμοστεί, σε αντίθεση με το διαχωρισμό των κερδών σύμφωνα με την τιμή Shapley. Αντίστοιχα ζητήματα έχουμε και για άλλους διαχωρισμούς που ανήκουν στον πυρήνα (Anupindi et al. (1999)).

Ένα άλλο χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το αποτέλεσμα που έδειξε ο Young (1995), το οποίο αναφέρει ότι υπάρχουν διαχωρισμοί του κέρδους, που ανήκουν στον πυρήνα, οι οποίοι επιτρέπουν στους παίκτες να ανεβάσουν το κέρδος τους, μειώνοντας τη συνεισφορά τους στο παιχνίδι, το οποίο είναι πολύ αρνητικό για την αλυσίδα συνολικά. Έχουμε δει ότι για την τιμή Shapley, όταν ένας παίκτης θέλει να αυξήσει το μερίδιό του, πρέπει να αυξήσει τη συνεισφορά του στο παιχνίδι. Συνεπώς σε περιπτώσεις που είναι σημαντικό οι παίκτες να έχουν κίνητρο να αυξάνουν τη συνολική αξία της συμμαχίας στην οποία συμμετέχουν, η τιμή Shapley θεωρείται καλύτερος τρόπος για το διαχωρισμό των κερδών (Maschler 1992).

Ένα ακόμα μειονέκτημα του πυρήνα, σαν βασικό κριτήριο ευστάθειας, είναι η μυωπική πολιτική του. Έχουμε δει, για παράδειγμα, ότι η συμμαχία που περιλαμβάνει όλους τους παίκτες θεωρείται ασταθής όταν υπάρχει ένα υποσύνολο παικτών που επωφελείται όταν αποχωρεί από τη μεγάλη συμμαχία. Σε πολλά ρεαλιστικά προβλήματα όμως, μπορεί αυτή η απόκλιση να οδηγήσει σε περαιτέρω αλλαγές στις συμμαχίες και στο τέλος αυτών των αλλαγών, όταν η κατάσταση σταθεροποιηθεί, μπορεί να καταλήξουμε πάλι στη μεγάλη συμμαχία, ή ακόμα και στην περίπτωση που οι παίκτες που πραγματοποίησαν την αρχική αλλαγή, να έχουν καταλήξει σε συμμαχία που τους εξασφαλίζει λιγότερα απ'ότι η μεγάλη συμμαχία και χωρίς να έχουν την επιλογή να επιστρέψουν σε αυτή. Υπάρχει πιθανότητα λοιπόν, παρότι η μεγάλη συμμαχία δείχνει ασταθής από την μυωπική σκοπιά, να είναι τελικά ευσταθής. Όταν λοιπόν οι παίκτες αντιμετωπίζουν το παιχνίδι με μία πιο μακροπρόθεσμη στρατηγική, τέτοια περιστατικά μπορούν να αποτραπούν.

Θέτουμε ως $\mathcal{L}$, μία διαμέριση του συνόλου των παικτών, K . Θεωρούμε ότι ένας παίκτης, i , προτιμάει αυστηρά τη διαμέριση $\mathcal{L}_2$ από τη διαμέριση $\mathcal{L}_1$ όταν το κέρδος που θα λάβει μετά το μοίρασμα είναι μεγαλύτερο κάτω από την $\mathcal{L}_2$. Αυτό θα το συμβολίζουμε ως:

$$\mathcal{L}_1 \prec_i \mathcal{L}_2 \Leftrightarrow u_i^{\mathcal{L}_1} < u_i^{\mathcal{L}_2},$$

όπου $u_i^{\mathcal{L}}$ η πληρωμή του i καταστήματος κάτω από τη διαμέριση $\mathcal{L}$. Συνεπώς εδώ το $u_i^{\mathcal{L}}$ αντιπροσωπεύει την τιμή Shapley για το κατάστημα i . Αν για μία συμμαχία J ισχύει ότι $\mathcal{L}_1 \prec_i \mathcal{L}_2$ για κάθε $i \in J$, τότε γράφουμε $\mathcal{L}_1 \prec_J \mathcal{L}_2$.

Τέλος θα συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_1 \rightarrow_J \mathcal{L}_2$, την περίπτωση που η διαμέριση $\mathcal{L}_2$ σχηματιστεί όταν η συμμαχία J αλλάζει κατά ένα βήμα από τη διαμέριση $\mathcal{L}_1$. Για παράδειγμα αν $K = \{1, 2, 3, S\}$, $\mathcal{L}_1 = \{(1, 2), (3, S)\}$ και $\mathcal{L}_2 = \{(1, 2, 3), (S)\}$, τότε $\mathcal{L}_1 \rightarrow_{\{3\}} \mathcal{L}_2$.

Ορισμός

α) Η διαμέριση $\mathcal{L}_1$ κυριαρχείται άμεσα από την $\mathcal{L}_2$ ($\mathcal{L}_1 < \mathcal{L}_2$) όταν υπάρχει κάποια συμμαχία J έτσι ώστε: $\mathcal{L}_1 \rightarrow_J \mathcal{L}_2$ και $\mathcal{L}_1 \prec_J \mathcal{L}_2$.

β) Η διαμέριση $\mathcal{L}_m$ κυριαρχείται έμμεσα από την $\mathcal{L}_{m+l}$ ($\mathcal{L}_1 \ll \mathcal{L}_2$) όταν υπάρχουν διαμερίσεις $\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_{m+1}, \dots, \mathcal{L}_{m+l}$ και συμμαχίες $J_m, J_{m+1}, \dots, J_{m+l}$ έτσι ώστε $\mathcal{L}_i \rightarrow_{J_i} \mathcal{L}_{i+1}$ και $\mathcal{L}_i \prec_{J_i} \mathcal{L}_{i+1}$ για κάθε $i = m, m+1, \dots, m+l-1$.

Συνεπώς αν $\mathcal{L}_1$ η μεγάλη συμμαχία που περιλαμβάνει όλους τους παίκτες και επιπλέον υπάρχει μία άλλη διαμέριση $\mathcal{L}_2$ η οποία κυριαρχεί άμεσα της μεγάλης συμμαχίας, τότε ο διαχωρισμός $u^{\mathcal{L}_1}$ δεν ανήκει στον πυρήνα.

από το δεύτερο μέρος του ορισμού, φαίνεται καθαρά το μειονέκτημα που έχει ο πυρήνας λόγω της μυωπικής πολιτικής του, καθώς μία συμμαχία J μπορεί να προτιμάει αυστηρά τη διαμέριση $\mathcal{L}_5$ από την $\mathcal{L}_2$ αλλά να έχει "κολλήσει" στη δεύτερη λόγω αυτού.

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, θα θεωρήσουμε ότι μία συμμαχία είναι προνοητικά ευσταθής όταν οποιαδήποτε παρέκκλιση από αυτή, ακόμα και μετά από k αριθμό βημάτων, μπορεί να παρεμποδιστεί καθώς δεν είναι συμφέρουσα για τα μέλη της.

Θεώρημα 2: Όταν ο διαχωρισμός του κέρδους γίνεται με βάση την τιμή Shapley, η μεγάλη συμμαχία, που περιέχει όλους τους παίκτες, είναι προνοητικά ευσταθής.

Από το παραπάνω θεώρημα δεν βγαίνει το συμπέρασμα ότι η μεγάλη συμμαχία είναι η μόνη προνοητικά ευσταθής συμμαχία. Όμως γενικά προτιμάτε καθώς είναι αυτή που μεγιστοποιεί τα κέρδη της αλυσίδας συνολικά. Συνεπώς στη συνέχεια του κεφαλαίου θα θεωρούμε ότι η μεγάλη συμμαχία σχηματίζεται κάτω από το διαχωρισμό του κέρδους σύμφωνα με την τιμή Shapley.

5.5.3 Σχέση μεγέθους συμμαχιών με κέρδη παικτών

Παρόλο που η ευστάθεια της μεγάλης συμμαχίας μας εγγυάται ότι κανένας παίκτης δεν μπορεί να επιτύχει μεγαλύτερο μερίδιο στα κέρδη μακριά από αυτή, αυτό δεν σημαίνει ότι τα επιμέρους καταστήματα πετυχαίνουν τη βέλτιστη πληρωμή που θα μπορούσαν να έχουν. Θεωρητικά ένα κατάστημα ίσως μπορούσε να εξασφαλίσει μεγαλύτερη πληρωμή, την οποία όμως στην πράξη δεν μπορεί να την επιτύχει, καθώς για να γίνει αυτό, θα έπρεπε να υπόλοιπα καταστήματα να δράσουν κόντρα στο δικό τους συμφέρον.

Είναι λογικό ότι όσο περισσότερα καταστήματα δέχονται την αλλαγή τόσο περισσότερα είναι τα κέρδη της αλυσίδας λόγω της αλλαγής πολιτικής, δηλαδή το συνολικό ποσό που μοιράζεται μεταξύ των παικτών. Παρόλα αυτά, μόνο ο προμηθευτής εξασφαλίζει ότι τα κέρδη του θα αυξάνονται όσο περισσότερα καταστήματα επιλέγουν την αλλαγή (ή τουλάχιστον δεν μειώνονται).

Θεώρημα 3: Το κέρδος του προμηθευτή, μέσω της τιμής Shapley, είναι αύξων (όχι αναγκαστικά γνησίως), ως προς τον αριθμό των καταστημάτων στη συμμαχία στην οποία συμμετέχουν.

Αντίθετα το μερίδιο από τα κέρδη που λαμβάνει ένα κατάστημα ίσως μειώνεται όσο το μέγεθος της συμμαχίας στην οποία συμμετέχει αυξάνεται. Αυτό μπορεί να συμβεί σε περίπτωση που το παιχνίδι δεν είναι κυρτό.

Παράδειγμα: Έστω ότι η αλυσίδα αποτελείται από 3 καταστήματα και ένα προμηθευτή. Η ζήτηση για το πρώτο κατάστημα είναι 0 ή 1 με αντίστοιχες πιθανότητες $\frac{1}{2}$, για το δεύτερο είναι 0 με πιθανότητα 0.4 και 1 με 0.6 και τέλος για το τρίτο είναι 0 με πιθανότητα 0.01 και 1 με 0.99. Επίσης θεωρούμε ότι $p = 1, p_M = 0.2, w = 0.6$ και $h = 0$, άρα $\frac{p-w}{p+h} = 0.4$.

Συνεπώς κάτω από την πολιτική κράτησης αποθέματος, η βέλτιστη στρατηγική για τον προμηθευτή είναι να παραγγείλει μία μονάδα προϊόντος για το τρίτο κατάστημα και τίποτα για τα άλλα δύο. Άρα το κέρδος του προμηθευτή όταν κανένα κατάστημα δεν αποφασίζει αλλαγή πολιτικής είναι 0. 39 (όλα λόγω του τρίτου καταστήματος) και τα κέρδη των καταστημάτων είναι μηδέν για τα δύο πρώτα και 0.198 για το τρίτο.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα κέρδη στην περίπτωση που τα καταστήματα αποφασίζουν να αλλάξουν σε κοινόχρηστη πολιτική και συνεπώς να συμμετάσχουν μαζί με τον προμηθευτή σε συμμαχίες. Υπενθυμίζουμε ότι οι συμμαχίες χωρίς τη συμμετοχή του προμηθευτή έχουν μηδενικό κέρδος και συνεπώς δεν έχει σημασία η περαιτέρω ανάλυσή τους. Τα κέρδη αλλά και η βέλτιστη ποσότητα αποθέματος της κάθε συμμαχίας παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

Καταστήματα στη συμμαχία	Ποσότητα παραγγελίας	Αναμενόμενο κέρδος
1	0	0
2	1	0.12
3	1	0.588
1, 2	1	0.36
1, 3	1	0.594
2, 3	2	0.708
1, 2, 3	2	0.9516

Ουσιαστικά από τον παραπάνω πίνακα έχουμε τις τιμές της χαρακτηριστικής συνάρτησης για κάθε συμμαχία συνεπώς, μετά από πράξεις, έχω ότι το κέρδος μέσω της τιμής Shapley για το κατάστημα 3 είναι 0.002 όταν μόνο αυτό και το κατάστημα 1 αποφασίζουν να αλλάξουν τη στρατηγική τους ενώ είναι 0.0014 όταν συμμετάσχει στη μεγάλη συμμαχία. Όμως η πληρωμή του καταστήματος 2 είναι μηδέν όταν δεν αλλάξει τη στρατηγική του ενώ είναι 0.1394 όταν συμμετάσχει στη μεγάλη συμμαχία, συνεπώς βλέπουμε ότι το τρίτο κατάστημα δε θα καταφέρει ποτέ να επιτύχει πληρωμή 0.002 όταν κάθε παίκτης λειτουργεί για το δικό του συμφέρον.

Ο Sprumont (1990) έδειξε ότι για κάθε κυρτό παιχνίδι, το μερίδιο από τα κέρδη που δίνεται σύμφωνα με την τιμή Shapley αυξάνεται για κάθε παίκτη όσο αυξάνεται η συμμαχία στην οποία συμμετέχει. Το παραπάνω σε συνδυασμό με το πόρισμα 3 μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για το συγκεκριμένο τύπο παιχνιδιών που αναφέρονται σε αυτό το πόρισμα, η συμμετοχή στη μεγάλη συμμαχία

μεγιστοποιεί όχι μόνο το μερίδιο από το συνολικό κέρδος που μπορούν να κερδίσουν οι παίκτες όταν δρουν για το ατομικό τους συμφέρον, αλλά το ατομικό τους κέρδος συνολικά, σε κάθε πιθανή περίπτωση.

5.6 Διαχωρισμός αποθέματος

Μέχρι τώρα δείξαμε ότι αν τα μέλη μίας εφοδιαστικής αλυσίδας συμφωνήσουν να μοιραστούν τα κέρδη που ίσως προκύψουν λόγω της συγκέντρωσης αποθεμάτων, σύμφωνα με την τιμή Shapley, τότε όλοι θα δεχτούν την αλλαγή, το απόθεμα θα διαχειρίζεται σύμφωνα με την κοινόχρηστη πολιτική και ο προμηθευτής θα επιλέγει τη βέλτιστη, για την αλυσίδα, ποσότητα ως απόθεμα. Σε αυτή την παράγραφο θα προτείνουμε ένα τρόπο κατανομής του αποθέματος μεταξύ των καταστημάτων όταν η συνολική ζήτηση υπερβαίνει το συνολικό απόθεμα. Με αυτόν τον τρόπο, το μερίδιο όλων των παικτών στα αναμενόμενα κέρδη λόγω της συγκέντρωσης αποθεμάτων, συνεχίζει να ισούται με την τιμή Shapley τους. Επίσης, με αυτόν τον τρόπο, για κάθε παρατηρούμενη ζήτηση d_i και διαμέριση αποθέματος α_i , το κατάστημα i βγάζει τουλάχιστον όσο κέρδος θα έβγαζε κάτω από την πολιτική κράτησης αποθέματος, στην οποία είχε θέσει ως όριο στο απόθεμα του την ποσότητα x_i^* .

Αρχικά παρουσιάζουμε ένα τρόπο για τη διαμέριση του αποθέματος στα καταστήματα, ο οποίος προτάθηκε από τους Cachon και Lariviere(1999) και καλείται τροποποιημένος γραμμικός διαχωρισμός. Έχουμε πει ότι έστω x το συνολικό απόθεμα που κουβαλάει ο προμηθευτής, ο οποίος τοποθετεί τα καταστήματα σε φθίνουσα σειρά με βάση την παρατηρούμενη ζήτηση τους. Στη συνέχεια κατανέμει στο καθένα από αυτά ποσότητα ίση με α_i , όπου:

$$\alpha_i = \begin{cases} d_i - \frac{1}{n_1} \max\{0, \sum_{j=1}^{n_1} d_j - x\} & i \leq n_1 \\ 0, & i > n_1 \end{cases}$$

όπου n_1 ο μεγαλύτερος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος από τον συνολικό αριθμό καταστημάτων, για τα οποία ισχύει ότι $\alpha_{n_1} \geq 0$.

Παρόλο που με αυτό το διαχωρισμό του αποθέματος μπορεί να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος των καταστημάτων, αυτό μπορεί να οδηγήσει στο να μην πάρουν καμία ποσότητα από το απόθεμα και συνεπώς κανένα κέρδος τα καταστήματα τα οποία αντιμετωπίζουν χαμηλή ζήτηση (Cachon και Lariviere(1999)).

Συνεπώς πρέπει να τροποποιήσουμε λίγο τον παραπάνω τρόπο διαμέρισης αποθέματος αν θέλουμε να επιτύχουμε βέλτιστα αποτελέσματα και τη συγκέντρωση των αποθεμάτων.

Θεωρούμε τον εξής μηχανισμό:

1)πριν την αποκάλυψη της πραγματικής ζήτησης, κάθε κατάστημα κρατάει ποσότητα αποθέματος x_i^* με τιμή p ανά μονάδα.

2)Μετά την αποκάλυψη της ζήτησης, ο προμηθευτής μοιράζει σε κάθε κατάστημα α_i μονάδες αποθέματος, σύμφωνα με τον παραπάνω διαχωρισμό.

3)Ο προμηθευτής χρεώνει ή επιστρέφει κάποιο έξτρα ποσό τα καταστήματα, ανάλογα με το πόσο μεγάλη είναι η τιμή του α_i συγκριτικά με το x_i .

Συνεπώς με αυτό τον τρόπο τα καταστήματα κάνουν μία παραγγελία στον προμηθευτή, αλλά σε περίπτωση που το απόθεμα δεν φτάσει για να τα καλύψει όλα, αυτό μοιράζεται με ένα συγκριμένο τρόπο και στη συνέχεια τα καταστήματα

αποζημιώνονται ή πληρώνουν κάποιο έξτρα ποσό στον προμηθευτή, ανάλογα με την ποσότητα που έλαβαν. Αυτό υπολογίζεται με τον παρακάτω τρόπο.

Δοθέντος ότι και τα n καταστήματα επιλέγουν την κοινόχρηστη πολιτική, συμβολίζουμε με $\pi_C^n(x, \sum_{j=1}^n d_j)$ το αναμενόμενο συνολικό κέρδος για πραγματική ζήτηση ίση με $\sum_{j=1}^n d_j$ και με $\Pi_C^n(x)$ το αναμενόμενο συνολικό κέρδος. Επίσης θέτουμε ως $t_i = \frac{\Phi_{R_i}}{\Pi_C^n(x) - \Pi_C^{n-1}(\max[0, x - x_i^*])}$ ως το λόγο της τιμής Shapley για το κατάστημα i ως προς την αναμενόμενη συνεισφορά του στη συμμαχία που σχηματίζουν τα υπόλοιπα $n - 1$ καταστήματα. Τέλος αν z_i η χρέωση (ή η αποζημίωση, ανάλογα με το πρόσημο του) ανά μονάδα το οποίο αναφέραμε στο βήμα 3 και $\varphi_i(x, x_i^*, d_i) = t_i(\pi_C^n(x, \sum_{j \in N} d_j) - \pi_C^{n-1}(\max[0, x - x_i^*], \sum_{j \in N - \{i\}} d_j))$ το έξτρα κέρδος που μοιράζεται στο κατάστημα i κάτω από την κοινόχρηστη πολιτική, τότε ορίζουμε ότι η τιμή του z_i καθορίζεται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned} (p + p_M)\alpha_i - px_i^* - z_i[\alpha_i - x_i^*] \\ = p_M \min[x_i^*, d_i] + \varphi_i(x, x_i^*, d_i) \end{aligned} \quad (47)$$

όταν $\alpha_i \neq x_i^*$ και

$$\begin{aligned} (p + p_M)x_i^* - (p + z_i)x_i^* \\ = p_M \min[x_i^*, d_i] + \varphi_i(x, x_i^*, d_i) \end{aligned} \quad (48)$$

όταν $\alpha_i = x_i^*$.

Τα παραπάνω αποδεικνύονται πολύ σημαντικά όταν λάβουμε υπόψιν μας το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4: Όταν ο προμηθευτής μοιράσει το απόθεμα στα καταστήματα σύμφωνα με τον τροποποιημένο γραμμικό διαχωρισμό και την προσαρμογή στην τιμή η οποία δίνεται από τις σχέσεις (57) και (58), τότε τα αναμενόμενα κέρδη των καταστημάτων, μετά τη συγκέντρωση των αποθεμάτων, είναι ίσα με την κατανομή του εκάστοτε κέρδους σύμφωνα με την τιμή Shapley συν τα κέρδη που θα είχαν οι παίκτες κάτω από την πολιτική κράτησης. Επίσης ο προμηθευτής θα κρατήσει απόθεμα το οποίο είναι βέλτιστο για την εφοδιαστική αλυσίδα.

Σύμφωνα με τα παραπάνω λοιπόν ένα κατάστημα i βγάζει όσο κέρδος θα είχε κάτω από την πολιτική κράτησης, με x_i^* μονάδες προς πώληση, συν ένα κλάσμα που βασίζεται στη συνεισφορά του καταστήματος αυτού στη συμμαχία που περιλαμβάνει τα υπόλοιπα $n - 1$ καταστήματα.

5.7 Επιδράσεις της διασποράς της ζήτησης και του περιθωρίου κέρδους καταστημάτων

Ένας κύριος στόχος της συγκέντρωσης αποθεμάτων είναι η μείωση των αρνητικών επιδράσεων που έχει η διασπορά της ζήτησης ως προς τα κέρδη της εφοδιαστικής αλυσίδας. Συνεπώς πρέπει αρχικά να μελετήσουμε πως τα αναμενόμενα κέρδη κάτω από την κοινόχρηστη πολιτική επηρεάζονται λόγω της διασποράς ώστε να κρίνουμε αν τα καταστήματα πρέπει να έχουν κίνητρο να μειώσουν τη διασπορά τους στη συγκεκριμένη περίπτωση.

Όπως είπαμε, η μεταβλητότητα της ζήτησης μπορεί να μειωθεί, για παράδειγμα, μέσω βελτίωσης της ακρίβειας των προβλέψεων. Όμως υπάρχουν και περιπτώσεις

στις οποίες τα καταστήματα, ακούσια, μπορούν να αυξήσουν αυτή τη μεταβλητότητα. Αυτό μπορεί να γίνει π. χ ενθαρύνοντας τους πελάτες να αγοράζουν ποσότητες διαφορετικές απ'ότι η ζήτηση τους ή πουλώντας το προϊόν σε συσκευασίες διαφορετικού μεγέθους. Συνεπώς όταν τα αναμενόμενα κέρδη των καταστημάτων είναι αρνητικά συσχετισμένα με την μεταβλητότητα της ζήτησης, τότε τέτοιες μέθοδοι αποφεύγονται να εφαρμόζονται. Αντίστοιχα όταν τα αναμενόμενα κέρδη του προμηθευτή φθίνουν όσο η διασπορά αυξάνεται, αυτός επιλέγει να δίνει κίνητρα, όπως προσφορές και εκπτώσεις, στα καταστήματα με σκοπό να μην εφαρμόσουν τέτοιες πρακτικές. Σκοπός μας είναι να καταλάβουμε πότε τέτοια κίνητρα, για μείωση της διασποράς, απαιτούνται όταν το μοίρασμα των κερδών γίνεται σύμφωνα με την τιμή Shapley.

Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι για να έχει κίνητρο ένας παίκτης ώστε να μειώσει τη διασπορά για τη ζήτηση του, θα ελέγξει τη σχέση της με τα συνολικά κέρδη που θα έχει και όχι μόνο με τα πιθανά κέρδη που θα μοιραστούν σε αυτόν λόγω της αλλαγής της πολιτικής του σχετικά με το απόθεμα. Όπως θα δούμε αργότερα υπάρχει σχέση μεταξύ των αναμενόμενων κερδών της διασποράς της ζήτησης και του περιθωρίου κέρδους των καταστημάτων.

Έστω δύο εφοδιαστικές αλυσίδες. Συμβολίζουμε με X_i τη ζήτηση του καταστήματος i στην πρώτη αλυσίδα και F_i η αντίστοιχη κατανομή της και με Y_i , G_i τη ζήτηση και την κατανομή της αντίστοιχα στη δεύτερη αλυσίδα. Υποθέτουμε ότι για κάθε i , οι X_i, Y_i είναι μη αρνητικές με πεπερασμένες μέσες τιμές και η Y_i είναι μεγαλύτερη από την X_i ως προς τη διάταξη σύμφωνα με τον επιπλέον πλούτο ($X_i \leq_{ew} Y_i$), δηλαδή:

$$\int_{F_i^{-1}(p)}^{\infty} 1 - F_i(x) dx \leq \int_{G_i^{-1}(p)}^{\infty} 1 - G_i(x) dx, \forall p \in (0, 1).$$

Ουσιαστικά η μεταβλητή που είναι μεγαλύτερη ως προς τη διάταξη σύμφωνα με τον επιπλέον πλούτο έχει υψηλότερη διασπορά. Συνεπώς από τις ιδιότητες της διάταξης σύμφωνα με τον επιπλέον πλούτο, οι οποίες δε θα μας απασχολήσουν στο παρόν κεφάλαιο, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η ζήτηση μίας συμμαχίας στη δεύτερη αλυσίδα έχει μεγαλύτερη διασπορά απ'ότι η ζήτηση της ίδιας συμμαχίας στην πρώτη εφοδιαστική αλυσίδα.

Υποθέτουμε ακόμα ότι για κάθε κατάστημα i , οι κατανομές ζήτησης του, F_i , G_i τέμνονται σε μοναδικό σημείο, m_i . Αυτή δεν είναι δεσμευτική υπόθεση καθώς στις περισσότερες γνωστές περιπτώσεις κατανομών οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή σε τέτοια προβλήματα, το παραπάνω ισχύει.

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, έχουμε τα εξής συμπεράσματα:

Πρόταση 3:

α) Αν $p_M \leq p + h$ και $\max[p_i, \frac{p-w}{p+h}] \geq \max_j m_j$ τότε το αναμενόμενο κέρδος για τον προμηθευτή, μετά τη συγκέντρωση αποθεμάτων είναι μεγαλύτερο στην πρώτη αλυσίδα

β) Υπάρχει κάποια τιμή p_M^* , έτσι ώστε όταν $p_M > p_M^*$, το αναμενόμενο κέρδος για τον προμηθευτή, μετά τη συγκέντρωση αποθεμάτων είναι μεγαλύτερο στη δεύτερη αλυσίδα.

Βλέπουμε λοιπόν ότι δεν ισχύει πάντα το γεγονός ότι η μεγάλη διασπορά της ζήτησης μειώνει τα κέρδη του προμηθευτή, καθώς όταν το περιθώριο κέρδους των καταστημάτων είναι πολύ υψηλό, ο προμηθευτής όχι απλά δεν επιζητά μείωση της διασποράς, αλλά αύξηση της. Η εξήγηση για αυτό το φαινόμενο είναι απλή.

Όπως είδαμε, τα συνολικά κέρδη του προμηθευτή είναι το αναμενόμενο κέρδος

που θα είχε κάτω από την πολιτική κράτησης συν το μερίδιο του από τα αναμενόμενα κέρδη λόγω της αλλαγής πολιτικής που του δίνεται μέσω της τιμής Shapley. Τα αναμενόμενα κέρδη λόγω της πολιτικής κράτησης μειώνονται όσο η διασπορά της ζήτησης αυξάνεται και το μέγεθος αυτής της μείωσης είναι ανεξάρτητο από το περιθώριο κέρδους των καταστημάτων. Την ίδια στιγμή, όταν η διασπορά αυξάνεται, τα αναμενόμενα κέρδη της αλυσίδας λόγω της αλλαγής πολιτικής αυξάνονται. Αυτή η αύξηση γίνεται ακόμα μεγαλύτερη για προϊόντα που δίνουν μεγαλύτερο περιθώριο κέρδους στα καταστήματα. Όταν το περιθώριο κέρδους είναι μεγαλύτερο από μια συγκεκριμένη τιμή, τότε η αύξηση στα αναμενόμενα κέρδη λόγω της αλλαγής πολιτικής, υπερκαλύπτει την απώλεια που έχουν τα κέρδη κάτω από την πολιτική κράτησης και συνεπώς είναι στο συμφέρον του προμηθευτή αυτή η μεγάλη διασπορά.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου και έκτος και αν τονίζεται το αντίθετο, υποθέτουμε ότι τα καταστήματα έχουν ανεξάρτητες ζητήσεις οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ . Επιπλέον υποθέτουμε ότι η πιθανότητα η συνολική πραγματική ζήτηση των καταστημάτων να υπερβεί το απόθεμα που έχει κρατήσει ο προμηθευτής είναι μικρότερη του 50 τις εκατό, πριν τη συγκέντρωση αποθεμάτων. Με βάση αυτές τις υποθέσεις λοιπόν, έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Πρόταση 4: Όταν για κάθε κατάσταση ισχύει ότι $p_i = p^c, \forall i = 1, 2, \dots, n$, τότε υπάρχουν τιμές, p_M^1, p_M^2 , σχετικά με το περιθώριο κέρδους, έτσι ώστε:

1) Όταν το περιθώριο κέρδους των καταστημάτων είναι μικρότερο από p_M^1 , τότε το συνολικό κέρδος του προμηθευτή, μετά τη συγκέντρωση αποθεμάτων, φθίνει και τα αντίστοιχα κέρδη για κάθε κατάσταση αυξάνονται, όσο αυξάνεται η διασπορά της ζήτησης.

2) Όταν το περιθώριο κέρδους των καταστημάτων είναι μεγαλύτερο από p_M^2 , τότε το συνολικό κέρδος του προμηθευτή, μετά τη συγκέντρωση αποθεμάτων, αυξάνει και τα αντίστοιχα κέρδη για κάθε κατάσταση φθίνουν, όσο αυξάνεται η διασπορά της ζήτησης.

Ουσιαστικά η πρόταση 4 μας λέει επιπλέον ότι για πολύ μικρά περιθώρια κέρδους, τα καταστήματα επιδιώκουν μεγάλες τιμές της διασποράς. Ο λόγος είναι παρόμοιος με αυτόν που είπαμε και στην περίπτωση του προμηθευτή, δηλαδή, το συνολικό κέρδος κάθε καταστήματος ισούται με το άθροισμα του αναμενόμενου κέρδους που θα είχε κάτω από την πολιτική κράτησης συν το μερίδιο του από τα αναμενόμενα κέρδη λόγω της αλλαγής πολιτικής που του δίνεται μέσω της τιμής Shapley. Όταν η διασπορά της ζήτησης αυξάνεται, το αναμενόμενο κέρδος κάθε καταστήματος πριν τη συγκέντρωση των αποθεμάτων μειώνεται, όμως αντίθετα με την περίπτωση του προμηθευτή, εδώ η μείωση εξαρτάται από το περιθώριο κέρδους και μάλιστα όσο αυτό αυξάνει, τόσο αυξάνεται και η μείωση. Είδαμε ότι τα κέρδη λόγω της αλλαγής πολιτικής αυξάνονται όσο αυξάνεται η διασπορά. Συνεπώς για μικρές τιμές του περιθωρίου κέρδους η απώλεια κέρδους κάτω από την πολιτική κράτησης υπερκαλύπτεται λόγω της αύξησης των κερδών λόγω της συγκέντρωσης αποθεμάτων, ενώ για μεγάλες τιμές, η απώλεια είναι μεγαλύτερη από την αύξηση και συνεπώς τα συνολικά κέρδη μειώνονται.

Από τα παραπάνω λοιπόν, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα καταστήματα και ο προμηθευτής έχουν το κίνητρο για να κάνουν κοινές ενέργειες σχετικά με τη μείωση της διασποράς, μόνο όταν το περιθώριο κέρδους των καταστημάτων είναι ανάμεσα στις τιμές p_M^1, p_M^2 . Σε αυτές τις περιπτώσεις, η αύξηση στο μερίδιο των παικτών στα κέρδη λόγω της συγκέντρωσης αποθεμάτων δεν είναι αρκετό για να υπερκαλύψει τη μείωση που έχουν στα αναμενόμενα κέρδη τους κάτω από την πολι-

τική κράτησης και συνεπώς όλοι έχουν ως κοινό σκοπό να προβούν σε ενέργειες με τις οποίες η μεταβλητότητα της ζήτησης θα μειωθεί.

5.8 Συνεργασία καταστημάτων και διαπραγμάτευση με προμηθευτή

Μέχρι τώρα έχουμε ασχοληθεί με την περίπτωση που ο προμηθευτής διαπραγματεύεται με κάθε κατάστημα ξεχωριστά ώστε να αλλάξει την πολιτική σχετικά με το απόθεμα του και στη συνέχεια παίρνει την απόφαση για το απόθεμα που θα κρατήσει λαμβάνοντας υπόψιν τις ζητήσεις που έχει κάθε κατάστημα, οι οποίες είναι τυχαίες μεταβλητές. Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια αυτής της παραγράφου είναι πότε τα καταστήματα έχουν κίνητρο να σχηματίσουν επιμέρους συμμαχίες και να παρουσιάσουν στον προμηθευτή ως ένα μεγάλο κατάστημα με ζήτηση το άθροισμα της ζήτησης των επιμέρους καταστημάτων. Αυτή η συνεργασία μπορεί να πραγματοποιηθεί μετά την πρόταση του προμηθευτή σχετικά με την αλλαγή πολιτικής αποθέματος και πριν κάθε κατάστημα δώσει απάντηση για το αν θα δεχτεί αυτή την αλλαγή.

Υποθέτουμε ότι μόλις κάποια υποσύνολα των καταστημάτων αποφασίσουν ότι θα συνεργαστούν και θα διαπραγματευτούν ως ένα, το αναμενόμενο μερίδιο που θα λάβουν από τα αναμενόμενα κέρδη λόγω της συγκέντρωσης αποθεμάτων, ο προμηθευτής θα συμπεριφέρεται σε αυτό το υποσύνολο σαν να είναι ένα κατάστημα και αναλόγως καθορίζει και την ποσότητα του αποθέματος. Θα θεωρούμε ως τη βέλτιστη συνεργασία, το σύνολο των συνεργαζόμενων καταστημάτων που παράγει το μεγαλύτερο αναμενόμενο κέρδος για τα μέλη του.

Με τη συνεργασία μεταξύ των καταστημάτων, τα συνολικά κέρδη της αλυσίδας μένουν ίδια, αυτό που αλλάζει είναι ο τρόπος που μοιράζονται μεταξύ των παικτών. Μας ενδιαφέρει λοιπόν να προσδιορίσουμε πότε τέτοιες συνεργασίες αυξάνουν το μερίδιο των καταστημάτων που συμμετέχουν σε αυτές. Στις περιπτώσεις που το μερίδιο από τα αναμενόμενα κέρδη τους αυξηθεί, ένα μερίδιο που θα λάβει η συνεργασία συνολικά μιας και υπολογίζεται ως ένα κατάστημα πλέον, τότε τα μέλη που μετέχουν σε αυτή τη συνεργασία θα κανονίσουν έναν ακόμη τρόπο για να μοιραστούν τα κέρδη που προέκυψαν από αυτή τη συνεργασία, με τρόπο που προφανώς αποφέρει σε κάθε κατάστημα τουλάχιστον όσα θα κέρδιζε αν αποφάσιζε να μην συμμετάσχει σε αυτή τη συνεργασία. Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δούμε πως αλλάζουν τα μερίδια του προμηθευτή και των συνεργαζόμενων καταστημάτων κάτω από αυτές τις συνθήκες οπότε δε θα μας απασχολήσει περαιτέρω ο τρόπος με τον οποίο θα γίνει το μοίρασμα των κερδών μεταξύ των συνεργαζόμενων καταστημάτων, αλλά μόνο πότε αυξάνεται συνολικά το μερίδιο της συμμαχίας.

Λόγω της συγκέντρωσης αποθεμάτων, η συνολική ζήτηση συνεργαζόμενων καταστημάτων έχει μικρότερη διασπορά απ'ότι θα είχε η συνολική ζήτηση των καταστημάτων αυτών αν καθένα λειτουργούσε ξεχωριστά. Συνεπώς όπως έχουμε δει το συνολικό αναμενόμενο κέρδος αυτής της συμμαχίας κάτω από την πολιτική κράτησης θα είναι μεγαλύτερο. , όμως στη γενική περίπτωση δεν ισχύει πάντα το ίδιο και για το συνολικό κέρδος της συμμαχίας. Επίσης, παρόλο που θα περιμέναμε το αντίθετο, μία συμμαχία δεν επηρεάζει πάντα αρνητικά τα αναμενόμενα κέρδη του προμηθευτή και των μη συνεργαζόμενων καταστημάτων.

Αρχικά αναλύουμε τις περιπτώσεις στις οποίες υπάρχουν 2 και 3 καταστήματα στην αλυσίδα και στη συνέχεια δίνουμε μια πιο γενική ιδέα για το τι μπορεί να ισχύει στην περίπτωση των n καταστημάτων.

5.8.1 Συνεργασία στην περίπτωση της εφοδιαστικής αλυσίδας 2 καταστημάτων

Πρόταση 5: Η συνεργασία μεταξύ των δύο καταστημάτων μπορεί να μειώσει τα αναμενόμενα κέρδη της συμμαχίας μετά τη συγκέντρωση αποθεμάτων όταν ισχύουν οι δύο παρακάτω συνθήκες:

1) $p_M \leq p + h$ και

2) το βέλτιστο επίπεδο αποθέματος υπό τη συγκέντρωση αποθεμάτων είναι μικρότερο από το βέλτιστο επίπεδο στην περίπτωση που δεν εφαρμόζεται συγκέντρωση αποθεμάτων.

Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι p_M και $p + p_M - w$ για τα καταστήματα και την αλυσίδα συνολικά, αντίστοιχα. Συνεπώς για μεγαλύτερες τιμές του περιθωρίου κέρδους, μεγαλώνει και το μερίδιο που έχουν τα καταστήματα στα κέρδη. Επιπλέον, για συγκεκριμένες τιμές στις υπόλοιπες μεταβλητές, βλέπουμε ότι όσο μεγαλύτερο είναι το περιθώριο κέρδους, τόσο μεγαλύτερα είναι τα κέρδη των καταστημάτων σε περίπτωση μη συγκέντρωσης αποθεμάτων και αντίστοιχα για μικρό περιθώριο κέρδους, έχουμε και μικρότερα κέρδη. Συνεπώς μία πρώτη υπόθεση έπρεπε να είναι ότι τα δύο καταστήματα ίσως έπρεπε να συνεργαστούν ώστε να ισχυροποιήσουν λίγο τη θέση τους. Όμως σύμφωνα με την πρόταση 5 βλέπουμε ότι για μικρές τιμές του p_M , η συνεργασία των καταστημάτων κάνει την κατάσταση τους χειρότερη και όχι καλύτερη.

Ο λόγος που συμβαίνει είναι σχετικά απλός. Στην περίπτωση της συνεργασίας, το αναμενόμενο κέρδος, τόσο των καταστημάτων όσο και της αλυσίδας συνολικά, κάτω από την πολιτική κράτησης αυξάνεται όπως έχουμε πει. Όμως αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, μιας και τα συνολικά κέρδη της αλυσίδας, μετά και τη συγκέντρωση αποθεμάτων, μένουν ίδια σε περίπτωση συνεργασίας, να μειωθεί το αναμενόμενο κέρδος της αλυσίδας, άρα και των καταστημάτων, λόγω της συγκέντρωσης. Συνεπώς σε περίπτωση που η μείωση στο κέρδος δεν μπορεί να υπερκαλυφθεί από την αντίστοιχη αύξηση, τότε το συνολικό κέρδος, μετά τη συγκέντρωση αποθεμάτων, μπορεί να μειωθεί λόγω αυτής της συνεργασίας.

Το δεύτερο μέρος της πρότασης απαιτεί το βέλτιστο επίπεδο αποθέματος να μειωθεί λόγω της συγκέντρωσης αποθεμάτων. Αν λοιπόν τα καταστήματα συνεργαστούν και είμαστε στην περίπτωση που το επίπεδο του αποθέματος μειώνεται λόγω της συγκέντρωσης, τότε ο προμηθευτής επωφελείται, με την έννοια ότι το απόθεμα που κουβαλάει μειώνεται, λόγω και της μείωσης της διασποράς εξαιτίας της συνεργασίας, άρα το μερίδιο που θα πάρει σύμφωνα με την τιμή Shapley θα αυξηθεί. Αυτό έχει ως άμεση συνέπεια να μειωθεί το αντίστοιχο μερίδιο των καταστημάτων.

Οι Gerchak και Mossman (1992) αλλά και οι Yang και Schrage (2009) έδειξαν ότι το βέλτιστο επίπεδο αποθεμάτων κάτω από τη συγκέντρωση αποθεμάτων δεν είναι πάντα χαμηλότερο απ'ότι το επίπεδο πριν τη συγκέντρωση, αλλά όταν η ζήτηση ακολουθεί κανονική κατανομή και κάτω από την υπόθεση που κάναμε ότι κρίσιμο κλάσμα είναι μικρότερο του 0.5, το βέλτιστο επίπεδο αποθεμάτων είναι πάντα μικρότερο κάτω από τη συγκέντρωση αποθεμάτων και συνεπώς για να ελέγξουμε την ισχύ της πρότασης 5, αρκεί να ελέγξουμε αν $p_M \leq p + h$.

5.8.2 Συνεργασία στην περίπτωση της εφοδιαστικής αλυσίδας 3 καταστημάτων

Στη συγκεκριμένη παράγραφο χαρακτηρίζουμε τη βέλτιστη στρατηγική όσον αφορά τα καταστήματα, σε μία εφοδιαστική αλυσίδα στην οποία υπάρχουν τρία καταστήματα, των οποίων η ζήτηση είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αρχικά έχουμε το εξής αποτέλεσμα, που και πάλι στηρίζεται στο πόσο μεγάλο ή όχι είναι το περιθώριο κέρδους των καταστημάτων.

Πρόταση 6:Κάτω από την κανονική κατανομή υπάρχουν δύο τιμές, p_M^1, p_M^2 , όπου $p_M^1 \leq p_M^2$, έτσι ώστε όταν:

1) $p_M \leq p_M^1$, η συνεργασία μεταξύ οποιονδήποτε καταστημάτων θα επιφέρει μείωση στα συνολικά αναμενόμενα κέρδη των μελών της.

2) $p_M^1 \leq p_M \leq p_M^2$, η μόνη συμφέρουσα συνεργασία είναι αυτή μεταξύ των δύο καταστημάτων με την μικρότερη τυπική απόκλιση, η οποία μεγιστοποιεί τα συνολικά αναμενόμενα κέρδη των μελών της.

3) $p_M \geq p_M^2$, η συνεργασία μεταξύ και των τριών καταστημάτων μεγιστοποιεί τα συνολικά αναμενόμενα κέρδη τους.

Η παραπάνω πρόταση ουσιαστικά μας λέει ότι όσο αυξάνεται το περιθώριο κέρδους τα καταστήματα έχουν το κίνητρο να συνεργάζονται και να δημιουργούν όλο και μεγαλύτερες συμμαχίες. Όταν μάλιστα υπερβεί μία καθορισμένη τιμή, η συνεργασία μεταξύ όλων των καταστημάτων προτιμάται έναντι οποιασδήποτε συμμαχίας μεταξύ δύο καταστημάτων. Ο λόγος που ισχύουν τα παραπάνω είναι ακριβώς ο ίδιος με αυτόν που είπαμε και στην περίπτωση της πρότασης 5 και για αυτό το λόγο βλέπουμε ότι για μεσαίες τιμές του περιθωρίου κέρδους η συμφέρουσα συμμαχία είναι αυτή μεταξύ των καταστημάτων με τη μικρότερη διασπορά.

Στην περίπτωση του προμηθευτή όμως βλέπουμε ότι έχουμε τα ακριβώς αντίθετα αποτελέσματα. Συγκεκριμένα:

Πρόταση 7:Όταν η ζήτηση για κάθε κατάστημα είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή, υπάρχει μία τιμή p_M^* , για την οποία ισχύει ότι αν το περιθώριο κέρδους των καταστημάτων είναι κάτω από αυτή την τιμή, τότε το συνολικό αναμενόμενο κέρδος του προμηθευτή είναι ψηλότερο όταν και τα τρία καταστήματα συνεργάζονται. Στην αντίθετη περίπτωση προτιμάει να μην υπάρξει καμία συνεργασία μεταξύ τους.

Αυτό γίνεται καθώς κάτω από τη συνεργασία των καταστημάτων η μεταβλητότητα της συνολικής ζήτησης που παρατηρεί ο προμηθευτής μειώνεται και συνεπώς τα κέρδη του πριν τη συγκέντρωση αποθεμάτων αυξάνονται. Όμως αντίστοιχα τα κέρδη λόγω της συγκέντρωσης θα μειωθούν και συνεπώς έτσι ξεχωρίζουμε τις περιπτώσεις στις οποίες η μείωση είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αύξηση και το αντίθετο.

Τέλος αναφέρουμε και μία πρόταση για να καθορίσουμε το τι συμβαίνει με το κατάστημα με την υψηλότερη διασπορά όταν τα άλλα δύο καταστήματα αποφασίζουν να συνεργαστούν.

Πρόταση 8:Κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας ως προς τις ζητήσεις των καταστημάτων και στην περίπτωση της συνεργασίας δύο καταστημάτων, το τρίτο κατάστημα, που δεν συμμετέχει σε αυτή, έχει αναμενόμενα συνολικά κέρδη μικρότερα από όσα θα είχε στην περίπτωση που δεν γινόταν καμία συνεργασία.

Γενικά το κέρδος που χάνει το τρίτο κατάστημα λόγω της συνεργασίας των άλλων δύο, συνήθως μοιράζεται στα άλλα καταστήματα, όμως υπάρχουν και περιπτώσεις, για συγκεκριμένες τιμές του περιθωρίου κέρδους των καταστημάτων, στις οποίες ένα μέρος από αυτά τα κέρδη τα καρπώνεται και ο προμηθευτής.

Συμπερασματικά, η συνεργασία μεταξύ των καταστημάτων δεν είναι πάντα προς όφελος τους, αλλά όταν είναι, τα συνεργαζόμενα καταστήματα ανεβάζουν τα κέρδη τους κυρίως εις βάρος των μη συνεργαζόμενων καταστημάτων αλλά και σε αρκετές περιπτώσεις εις βάρος του προμηθευτή.

5.8.3 Συνεργασία στην περίπτωση της εφοδιαστικής αλυσίδας n καταστημάτων

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο αριθμός των πιθανών συμμαχιών είναι πολύ μεγάλος για να υπολογιστούν και να συγκριθούν μεταξύ τους σε αναλυτική μορφή οι συγκεκριμένες δομές τους. Κάτω από συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα όμως, μπορούμε να ελέγξουμε αν ισχύει, χωρίς τη διατύπωση γενικής πρότασης, η ένδειξη που έχουμε ήδη από τις προτάσεις 7 και 8, ότι δηλαδή ο βέλτιστος αριθμός αλλά και το ποια καταστήματα πρέπει να συμμετάσχουν σε μία συμμαχία εξαρτάται από το περιθώριο κέρδους των καταστημάτων και την τιμή της διασποράς για τις ζητήσεις τους. Μπορεί να ελεγχθεί δηλαδή ότι όσο ανεβαίνει το περιθώριο κέρδους, οι μεγαλύτερες συμμαχίες είναι και οι πιο κερδοφόρες.

Το παραπάνω μπορεί να πραγματοποιηθεί αν υπολογιστούν τα αναμενόμενα κέρδη μίας συμμαχίας με k καταστήματα και τα κέρδη μίας συμμαχίας με $k - 1$ καταστήματα και το αναμενόμενο κέρδος του k καταστήματος. Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε διατάξει τα καταστήματα σε αύξουσα σειρά ως προς την τιμή της διασποράς τους. Σχηματίζοντας την γραφική παράσταση της παραπάνω διαφοράς θα έχουμε εικόνα σχετικά με το επιθυμητό αποτέλεσμα. Προφανώς για να προτιμάτε η συμμαχία με k καταστήματα έναντι αυτής με $k - 1$ θα πρέπει αυτή η διαφορά να είναι θετική.

Σχηματίζοντας και παρατηρώντας τα παραπάνω διαγράμματα για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων, μπορούμε να δούμε ότι οι υποψίες μας δείχνουν να επιβεβαιώνονται καθώς για πολύ μικρές τιμές του περιθωρίου κέρδους, η παραπάνω διαφορά είναι πάντα αρνητική και συνεπώς η συνεργασία δεν προτιμάται από τα καταστήματα, ενώ αντίθετα για μεγάλες τιμές του κέρδους τα καταστήματα προτιμούν να σχηματίζουν μια μεγάλη συμμαχία. Τέλος για μεσαίες τιμές του p_M μπορούμε να παρατηρήσουμε, ανάλογα και με τις τιμές που επιλέξαμε για τις παραμέτρους ότι η τιμή αυτής της διαφοράς αρχικά αυξάνει όσο αυξάνονται τα καταστήματα στη συμμαχία, όμως μετά από ένα συγκεκριμένο αριθμό καταστημάτων, η διαφορά αυτή αρχίζει πάλι να μειώνεται, πράγμα που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ανεξαρτήτων αριθμό καταστημάτων, ο βέλτιστος αριθμός που πρέπει να συμμετάσχει στη συμμαχία δίνεται από σχέσεις ανάλογες των θεωρημάτων 7 και 8.

Τέλος αντίστοιχα είναι τα αποτελέσματα όταν τα εξετάσουμε ως προς το συμφέρον του προμηθευτή.

6 Παιχνίδι συνεργασίας μεταξύ δύο καταστημάτων και σχέση μεταξύ πυρήνα και συσχέτισης για γενικό αριθμό καταστημάτων

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε πάλι με την περίπτωση στην οποία τα καταστήματα έχουν ζήτηση η οποία είναι τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αρχικά θα επιβεβαιώσουμε, για την περίπτωση που ο αριθμός των καταστημάτων είναι 2 το θεώρημα που αναφέραμε στο δεύτερο κεφάλαιο, το οποίο λέει ότι ο πυρήνας του παιχνιδιού το οποίο αναλύθηκε σε αυτό το κεφάλαιο είναι πάντα μη κενός. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι για n αριθμό καταστημάτων, όταν οι επιμέρους ζήτησεις είναι πλήρως συσχετισμένες μεταξύ τους, ο πυρήνας του παιχνιδιού είναι μονοσύνολο αποτελούμενο από το επίπεδο ασφαλείας του κάθε παίκτη.

6.1 Ιδιότητες πυρήνα για το πρόβλημα συγκέντρωσης αποθεμάτων μεταξύ δύο καταστημάτων

Στη συγκεκριμένη παράγραφο θεωρούμε ότι υπάρχουν δύο καταστήματα, A και B, τα οποία έχουν ζήτηση που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_1 και μ_2 αντίστοιχα και πίνακα συνδιακύμανσης :

$$\begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \theta\sigma^2 \end{bmatrix}$$

, όπου σ_1, σ_2 η τυπική απόκλιση του καταστήματος A και B αντίστοιχα, ρ η μεταξύ τους συσχέτιση και $\theta = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$.

Όλες οι υπόλοιπες υποθέσεις είναι ίδιες με το μοντέλο που ορίσαμε στην παράγραφο 4. 4 αν θέσουμε για $n = 2$.

Θα μελετήσουμε μερικές από τις ιδιότητες που παρουσιάζει ο πυρήνας του συγκεκριμένου παιχνιδιού και θα δούμε αν έρχονται σε συμφωνία με τα όσα έχουμε δει στα προηγούμενα κεφάλαια.

Έχουμε πει ότι για να ανήκει ένα διάνυσμα (x_1, x_2) στον πυρήνα του παιχνιδιού πρέπει να ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

$$x_1 \leq \sigma \quad (49)$$

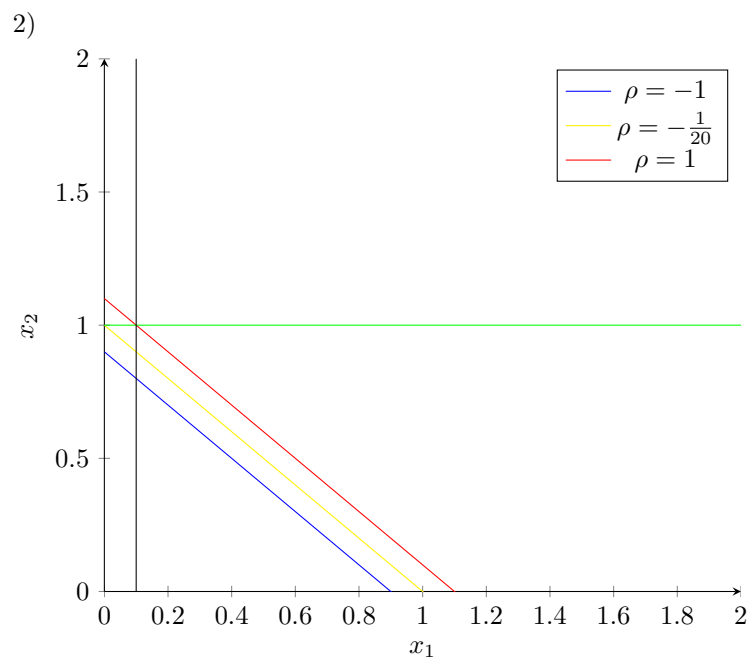
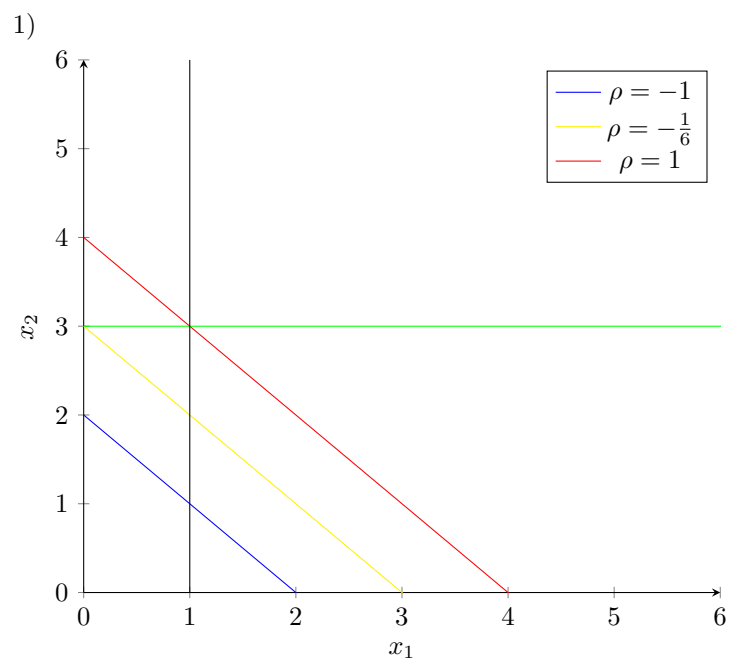
$$x_2 \leq \sigma\sqrt{\theta} \quad (50)$$

$$x_1 + x_2 = \sigma\sqrt{1 + \theta + 2\rho\sqrt{\theta}} \quad (51)$$

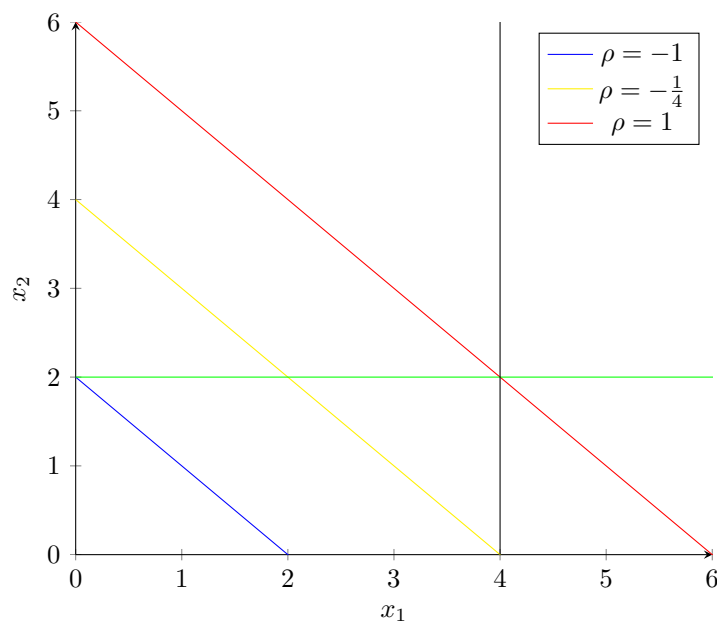
, καθώς είπαμε ότι η ζήτηση για κάθε κατάστημα ακολουθεί κανονική κατανομή και συνεπώς τα επιμέρους κόστη δίνονται από τις σχέσεις του κεφαλαίου 4. 4.

Αρχικά έχουμε την επιβεβαίωση του θεωρήματος που είδαμε στο κεφάλαιο 4. 4 καθώς φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις ότι ο πυρήνας του παιχνιδιού είναι μη κενός.

Σχηματίζοντας γραφικά τις παραπάνω σχέσεις για διάφορες τιμές των σ και θ , έχουμε τα εξής αποτελέσματα:



3)



Οι τιμές των σ και θ είναι $(1, 9)$, $(0.1, 100)$ και $(4, 0.25)$ αντίστοιχα για τα τρία διαγράμματα.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι όταν οι ζητήσεις για τα δύο καταστήματα είναι πλήρως συσχετισμένες, δηλαδή $\rho=1$, τότε το μόνο διάνυσμα πληρωμών που ανήκει στον πυρήνα είναι το $(\sigma, \sigma\sqrt{\theta})$, δηλαδή η περίπτωση που κάθε κατάσταση έχει κόστος ίδιο με αυτό που θα είχε αν αποφάσιζε να μην συνεργαστεί. Αυτό επιβεβαιώνεται και αλγεβρικά καθώς η σχέση 3) γράφεται ως:

$$x_1 + x_2 = \sigma + \sigma\sqrt{\theta}$$

και δεδομένου των σχέσεων 1) και 2) είναι προφανές ότι οι μόνες τιμές που ικανοποιούν και τις τρεις σχέσεις είναι οι σ και $\sigma\sqrt{\theta}$ για οποιοδήποτε τιμές των σ και θ .

Επειτα βλέπουμε ότι, για δεδομένα σ και θ , ανάλογα με τις τιμές του ρ , το μέγεθος του πυρήνα μπορεί να παραμένει ίδιο. Για να δείξουμε τότε ισχύει αυτό, ξεχωρίζουμε τις δύο εξής περιπτώσεις:

α) $\theta \geq 1$: Στη συγκεκριμένη περίπτωση θα πρέπει να ισχύουν οι εξής δύο σχέσεις:

- 1) Για $x_2 = 0$, πρέπει $x_1 \geq \sigma$ και
- 2) Για $x_1 = 0$, πρέπει $x_2 \leq \sigma\sqrt{\theta}$

Πιο συγκεκριμένα και λόγω της σχέσης 3) έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned}\sigma\sqrt{1+\theta+2\rho\sqrt{\theta}} &\geq \sigma \\ \sqrt{1+\theta+2\rho\sqrt{\theta}} &\geq 1 \\ 1+\theta+2\rho\sqrt{\theta} &\geq 1 \\ \rho &\geq -\frac{\sqrt{\theta}}{2}\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\sigma\sqrt{1+\theta+2\rho\sqrt{\theta}} &\leq \sigma\sqrt{\theta} \\ \sqrt{1+\theta+2\rho\sqrt{\theta}} &\leq \sqrt{\theta} \\ 1+\theta+2\rho\sqrt{\theta} &\leq \theta \\ \rho &\leq -\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\end{aligned}$$

Συνεπώς όταν $\rho \in [-\frac{\sqrt{\theta}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{\theta}}]$, το μέγεθος του πυρήνα παραμένει ίδιο. Στην περίπτωση μάλιστα που το θ έχει τιμή μεγαλύτερη ή ίση με το 4, το παραπάνω διάστημα μπορεί να γραφτεί ως $[-1, -\frac{1}{2\sqrt{\theta}}]$ μιας και η συσχέτιση δεν μπορεί να λάβει τιμές μικρότερες του -1.

Φαίνεται επίσης ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση, όπου $\rho \in [-\frac{\sqrt{\theta}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{\theta}}]$, η προτεινόμενη πληρωμή στην οποία το κατάστημα Α, με τη μικρότερη διασπορά, δεν πληρώνει τίποτα και το κατάστημα Β επωμίζεται όλο το κόστος ανήκει στον πυρήνα του παιχνιδιού.

Τέλος, αφού η ευθεία που σχηματίζεται από τη σχέση 3) μετακινείται παράλληλα και προς τα πάνω στον άξονα όσο ανεβαίνει η τιμή της συσχέτισης, παρατηρούμε ότι είναι προς όφελος και των δύο καταστημάτων οι ζητήσεις να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο αρνητικά συσχετισμένες μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα, όσο η τιμή του ρ είναι μέσα στο διάστημα που αναφέραμε παραπάνω, οποιαδήποτε αύξηση στην τιμή του θα προκαλέσει αύξηση του συνολικού κόστους της συμμαχίας, την οποία όμως θα καλύψει εξ ολοκλήρου το κατάστημα Β. Σε περίπτωση που το ρ υπερβεί τις παραπάνω τιμές, τότε μέρος του κόστους θα χρειαστεί να καλυφθεί και από το κατάστημα Α.

β) $\theta \leq 1$: Σε αυτή την περίπτωση η διασπορά της ζήτησης για το κατάστημα Β είναι μικρότερη από αυτή του καταστήματος Α. Με ανάλογες πράξεις καταλήγουμε στα παρακάτω όμοια συμπεράσματα:

1) Για γνωστά σ, θ , το μέγεθος του πυρήνα είναι ίδιο όταν $\rho \in [-\frac{1}{2\sqrt{\theta}}, -\frac{\sqrt{\theta}}{2}]$ ή αντίστοιχα όταν $\rho \in [-1, -\frac{\sqrt{\theta}}{2}]$ για $\theta \leq 0.25$.

2) Όταν $\rho \in [-\frac{1}{2\sqrt{\theta}}, -\frac{\sqrt{\theta}}{2}]$, η προτεινόμενη πληρωμή στην οποία το κατάστημα Β δεν πληρώνει τίποτα και το κατάστημα Α αναλαμβάνει την πληρωμή όλου του κόστους ανήκει στον πυρήνα του παιχνιδιού.

3) Όσο ανεβαίνει η τιμή του ρ , έχουμε αύξηση και του συνολικού κόστους. Αυτή η αύξηση καλύπτεται εξ ολοκλήρου από το κατάστημα Α όσο η τιμή του ρ

δεν υπερβαίνει το $-\frac{\sqrt{\theta}}{2}$, ενώ από κει και έπειτα, η αύξηση του κόστους επιβαρύνει και τους δύο.

6.2 Πλήρως συσχετισμένες τυχαίες μεταβλητές ζήτησης.

Είναι προφανές ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των καταστημάτων τόσο ανεβαίνει και η περιπλοκότητα στον υπολογισμό του πυρήνα. Η γραφική του αναπαράσταση μάλιστα στις περισσότερες περιπτώσεις είναι αδύνατη. Μία ανάλυση συνεπώς όπως αυτή που έγινε παραπάνω είναι δύσκολο να πραγματοποιηθεί για γενικό αριθμό, n καταστημάτων.

Στην περίπτωση όμως που οι επιμέρους ζήτησεις για τα n καταστήματα ακολουθούν πολυδιάστατη κανονική κατανομή, έχουμε δει ότι είναι γνωστά τα επιμέρους κόστη για κάθε πιθανή συμμαχία S των n καταστημάτων. Στη συνέχεια, χωρίς βλάβη της γενικότητας θέτουμε τη σταθερά K που υπάρχει σε κάθε συνάρτηση κόστους ίση με 1 και έπειτα κάνουμε την υπόθεση ότι τα καταστήματα έχουν πλήρως συσχετισμένη ζήτηση, δηλαδή ισχύει ότι $\rho_{ij} = 1, \forall i, j \in N$, όπου $N = \{1, 2, \dots, n\}$ και ρ_{ij} η συσχέτιση της ζήτησης για τα καταστήματα i και j .

Με βάση τα παραπάνω έχουμε ότι $\forall S$ με $|S| > 1$:

$$\begin{aligned}\sigma_S^2 &= \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \sigma_i \sigma_j \\ &= \sum_{i \in S} \sigma_i^2 + 2 \sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} \sigma_i \sigma_j \\ &= \left(\sum_{i \in S} \sigma_i \right)^2\end{aligned}$$

, άρα

$$\sigma_S = \sum_{i \in S} \sigma_i$$

, όπου σ_i είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα συνδιακύμανσης της πολυδιάστατης κανονικής.

Συνεπώς για να ανήκει ένα διάνυσμα $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ στον πυρήνα του παιχνιδιού θα πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω σχέσεις:

$$x_i \leq \sigma_i, \forall i \in N \quad (52)$$

$$\sum_{i \in S} x_i \leq \sum_{i \in S} \sigma_i, \forall S \subset N \quad (53)$$

$$\sum_{i \in N} x_i = \sum_{i \in N} \sigma_i \quad (54)$$

Είναι προφανές ότι το μόνο διάνυσμα που ικανοποιεί τις τρεις παραπάνω σχέσεις είναι το $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Καταλήγουμε συνεπώς στο συμπέρασμα ότι στην περίπτωση που οι επιμέρους ζήτησεις κάθε καταστήματος είναι πλήρως συσχετισμένες μεταξύ τους, ανεξάρτητα από τον αριθμό των καταστημάτων, τότε είναι αδιάφορο αν τα καταστήματα αποφασίσουν να συνεργαστούν ή όχι μεταξύ τους όταν το κόστος που θα επωμιστεί το

κάθε κατάσταση αποφασίζεται μέσω του πυρήνα του παιχνιδιού καθώς τότε κάθε κατάσταση θα πρέπει να πληρώσει το ίδιο ποσό είτε πραγματοποιηθεί η συνεργασία είτε όχι.

7 Βιβλιογραφία

References

- [1] ΜΗΛΟΛΙΔΑΚΗΣ ΚΩΣΤΗΣ 2009 *Θεωρία Παιγνίων. Μαθηματικά Μοντέλα Σύγκρουσης και Συνεργασίας*. Εκδότης: ΣΟΦΙΑ ΑΕ ΕΚΔΟΣΕΙΣ
- [2] Anupindi, R. and Bassok, Y. (1999) *Centralization of stocks: retailers vs manufacturer*. . Management Science, 45, 178–191.
- [3] Anupindi, R. , Bassok, Y. and Zemel, E. (1999b) *Study of decentralized distributed systems: part II—applications*. . Working paper, Kellogg Graduate School of Management, Northwestern University, Evanston, IL.
- [4] Bartholdi, J. J. , E. Kemahoglu-Ziya. 2005. *Using Shapley value to allocate savings in a supply chain*. J. Geunes, P. Pardalos, eds. Supply Chain Optimization. Springer-Verlag, New York, 169–208.
- [5] Bondareva, O. N. (1963). *Some Applications of Linear Programming Methods to the Theory of Cooperative Games*. . Problemy Kibernet. 10, 119133.
- [6] Cachon, G. P. , M. Lariviere. 1999. *Capacity choice and allocation: Strategic behavior and supply chain performance*. Management Sci. 45(8) 1091–1108.
- [7] Eppen, G. D. (1979). *Effects of Centralization on Expected Costs in a Multi-Location Newsboy Problem*, . Manage. Sci. 25, No. 5 498501.
- [8] Gerchak, Y. , D. Mossman. 1992. *On the effect of demand randomness on inventories and costs*. Oper. Res. 40(4) 804–807.
- [9] Hartman, B. C. (1994). *Cooperative Games and Inventory Cost Allocation*, . Ph. D. thesis, MIS Department, College of Business and Public Administration, The University of Arizona, Tucson, AZ.
- [10] Hartman, B. C. and Dror, M. (1996). *Cost Allocation in Continuous-Review Inventory Models*, . Naval Res. Logist. 43, 549561.
- [11] Hartman, B. C. , Dror, M. , and Shaked, M. (2000). *“Cores of inventory centralization games, ”*. Games Econ. Behav. 31, 26–49.
- [12] Hartman, B. C, M. Dror. 2005. *Allocations of gains from inventory centralization in newsvendor environments*. IIE Trans. 37(2) 93–107.
- [13] Johnson, L. A. , and Montgomery, D. C. (1974). *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control*. New York: Wiley.
- [14] Maschler, M. 1992. *The bargaining set, kernel, and nucleolus*. R. J. Aumann, S. Hart, eds. Handbook of Game Theory with Economic Applications, Vol. 1. North Holland, Amsterdam, 591–667.
- [15] Muller, A. , Scarsini, M. and Shaked, M. (2002) *The newsvendor game has a nonempty core*. . Games and Economic Behavior, 38, 118–126.
- [16] Özen, U. , H. Norde, M. Slikker. 2005. *On the convexity of newsvendor games*. Technical report, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands.

- [17] Shaked, M. (1977). *A Concept of Positive Dependence for Exchangeable Random Variables*, . Ann. Statist. 5, 505-515.
- [18] Shaked, M. (1979). *Some Concepts of Positive Dependence for Bivariate Interchangeable Distributions*, . Ann. Inst. Statist. Math. 31, 67-84.
- [19] Shaked, M. , and Tong, Y. L. (1985). *Some Partial Ordering of Exchangeable Random Variables by Positive Dependence*. . J. Multivariate Anal. 17, 333-349.
- [20] Shapley, L. S. (1967). *On Balanced Sets and Cores*. Naval Res. Logist. Quart. 14, 453-460.
- [21] Shapley, L. S. (1971). *Cores of Convex Games*. Int. J. Game Theory 1, 11-26.
- [22] Sprumont, Y. 1990. *Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility*. Games Econom. Behav. 2(4) 378–394.
- [23] Yang, H. , L. Schrage. 2009. *Conditions that cause risk pooling to increase inventory*. Eur. J. Oper. Res. 192(3) 837–851.