Η διάταξη Bruhat στην άλγεβρα, τη γεωμετρία και τη συνδυαστική

Περικλής Βασιλείου

Επιβλέπων καθηγητής: Χρήστος Αθανασιάδης

Μεταπτυχιακή Εργασία

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, Σεπτέμβριος 2019

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Τη διάταξη Bruhat εισήγαγε για πρώτη φορά ο Ehressman το 1934, στην προσπάθεια του να μελετήσει τις schubert varieties στα Grassmanian και στα flag manifolds. Ήταν μία διάταξη πάνω στα στοιχεία της συμμετρικής ομάδας. Το 1958, ο Chevalley γενίκευσε τον ορισμό αυτό με σκόπο την μελέτη των ημιαπλών αλγεβρικών ομάδων. Το 1968 ο Verma όρισε τη διάταξη Bruhat μίας ομάδας Weyl για να έχουμε σήμερα τον ορισμό της διάταξης αυτής σε μία ομάδα Coxeter. Στην εργασία αυτή ο ορισμός της διάταξης Bruhat θα δοθεί γία κάθε ομάδα Coxeter. Είναι εμφανής λοιπόν η σημασία της σε αρκετές περιοχές των μαθηματικών. Για παράδειγμα, οι Kazhdan και Lusztig στην προσπάθεια τους να μελετήσουν αναπαραστάσεις των Hecke αλγεβρών όρισαν μία οικογένεια πολυωνύμων, τα λεγόμενα πολυώνυμα Kazhdan-Lusztig, τα οποία εξαρτώνται από τη διάταξη Bruhat.

Το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας δομείται σε τέσσερα κεφάλαια. Ειδικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο εισάγουμε τη διάταξη Bruhat μίας ομάδας Coxeter και δείχνουμε κάποιες ιδιότητες που απολαμβάνει. Στο δεύτερο κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε στη διάταξη Bruhat της συμμετρικής ομάδας και δείχνουμε κάποια εύχρηστα κριτήρια για να συγκρίνουμε στοιχεία στη συγκεκριμένη διάταξη. Ένα από τα κριτήρια αυτά, συγκεκριμένα το κριτήριο tableau του Ehressman, θα μας φανεί χρήσιμο στο τρίτο κεφάλαιο, στο οποίο ορίζουμε τις schubert varieties των flag manifolds και δείχνουμε τις σχέσεις εγκλεισμού που υπάρχουν μεταξύ τους. Στο τέταρτο κεφάλαιο ορίζουμε τα πολυώνυμα Kazhdan-Lusztig, τα οποία όπως θα δούμε εξαρτώνται άμεσα από τη διάταξη Bruhat και θα αναφέρουμε τη σύνδεση τους με τις schubert varieties. Τέλος, δείχνουμε μία ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ των Kazhdan-Lusztig πολυωνύμων της συμμετρικής ομάδας και των $g-$πολυωνύμων, τα οποία αποτελούν ένα σημαντικό εργαλείο στην απαριθμητική συνδυαστική.

Κλείνοντας τον πρόλογο, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Καθηγητή μου Χρήστο Αθανασιάδη για τις πολύτιμες διορθώσεις και όλη την καθοδήγηση που μου παρείχε.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές Έννοιες

Στόχος αυτού του κεφαλαίου είναι να ορίσουμε τη διάταξη Bruhat σε μία ομάδα Coxeter και να την κατανοήσουμε σε κάποιο βαθμό. Για το λόγο αυτό θα περιγράψουμε βασικές έννοιες, όπως αυτή του μερικώς διατεταγμένου συνόλου και της ομάδας Coxeter .

1.1 Μερικώς διατεταγμένα σύνολα

Ορισμός 1.1.1. *Μερικώς διατεταγμένο σύνολο ονομάζεται ένα μη κενό σύνολο P, εφοδιασμένο με μία σχέση $\preceq$, η οποία έχει τις εξής ιδιότητες:*

(i) $a \preceq a \ \forall a \in P$

(ii) *αν* $a \preceq b$ *και* $b \preceq a$, *τότε* $a = b$

(iii) *αν* $a \preceq b$ *και* $b \preceq c$, *τοτε* $a \preceq c$

Τα $a, b \in P$ θα λέγονται συγκρίσιμα αν $a \preceq b$ ή $b \preceq a$, αλλιώς θα λέγονται μη συγκρίσιμα. Θα γράφουμε $a \prec b$, αν $a \preceq b$ και $a \neq b$. Επίσης, θα λέμε ότι το a καλύπτει το b αν $a \prec b$ και δεν υπάρχει $c \in P$ ώστε $a \prec c \prec b$. Κάθε πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P απεικονίζεται με το διάγραμμα Hasse, το οποίο έχει ως κορυφές τα στοιχεία του P και ακμές μεταξύ των $a, b \in P$, με το b να εμφανίζεται ψηλότερα από το a, αν το b καλύπτει το a.

Για a, b με $a \preceq b$ ορίζουμε το κλειστό διάστημα $[a, b] := \{c \ \varepsilon \ P : a \preceq c \preceq b\}$. Το σύνολο όλων των κλειστών διαστημάτων του P το συμβολίζουμε με $Int(P)$.

Ορισμός 1.1.2. *Έστω μερικώς διατεταγμένα σύνολα P, Q με διατάξεις $\leqslant_P$ και $\leqslant_Q$ αντίστοιχα. Λέμε ότι μία απεικόνιση $f : P \to Q$ είναι μορφισμός διατάξεων αν για όλα τα $x, y \in P$ ισχύει:*

$$x \leqslant_P y \Rightarrow f(x) \leqslant_Q f(y).$$

Μία απεικόνιση $f : P \to Q$ είναι ισομορφισμός διατάξεων αν είναι αμφιμονοσήμαντη και για $x, y \in P$ ισχύει:

$$x \leqslant_P y \Leftrightarrow f(x) \leqslant_Q f(y).$$

Το σύνολο P, μερικώς διατεταγμένο με $x \leqslant y$ αν και μόνον αν $y \leqslant_P x$, λέγεται δυϊκό του P και συμβολίζεται με P^*. Το P λέγεται αυτοδυϊκό αν το P είναι ισόμορφο με το δυϊκό του, δηλαδή αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : P \to P$ με $x \leqslant_P y$ αν και μόνον αν $f(y) \leqslant_P f(x)$, για όλα τα $x, y \in P$. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτοδυϊκου μερικώς διατεταγμένου συνόλου περιγράφεται στο Παράδειγμα 1.1.4.

Ορισμός 1.1.3. *Έστω $(P, \preceq)$ ένα πεπερασμενο μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Η συνάρτηση Möbius $\mu : Int(P) \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:*

(i) $\mu(a, a) = 1$ *για κάθε* $a \in P$,

(ii) $\mu(a, b) = -\sum_{a \preceq c \prec b} \mu(a, c)\ \forall\ a, b \in P$ *με* $a \prec b$.

Παράδειγμα 1.1.4. *Έστω B_n το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $[n] := \{1, 2, ..., n\}$, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση αυτή του υποσυνολου, δηλαδή $A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Θα δείξουμε ότι για την συνάρτηση Möbius του B_n ισχύει :*

$$\mu(A, B) = (-1)^{|B \smallsetminus A|}$$

όπου $A \subseteq B \subseteq [n]$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $\mid B \smallsetminus A \mid$. Αν $\mid B \smallsetminus A \mid= 0$, τότε $A = B$ και από τον ορισμό της συνάρτησης Möbius ισχύει το ζητούμενο. Έστω $\mid B \smallsetminus A \mid= k \geq 1$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\mu(A, B) &= -\sum_{A \subseteq C \subsetneq B} \mu(A, C) \\
&= -\sum_{A \subseteq C \subsetneq B} (-1)^{|C \smallsetminus A|} \\
&= -((\sum_{A \subseteq C \subseteq B} (-1)^{|C \smallsetminus A|}) - (-1)^{|B \smallsetminus A|}) \\
&= -((\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} - (-1)^{|B \smallsetminus A|}) \\
&= (-1)^{|B \smallsetminus A|},
\end{aligned}$$

κάνοντας χρήση του διωνυμικού θεωρήματος . □

Πρόταση 1.1.5. *(Αντιστροφή Möbius)*
Έστω P ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $f, g : P \to K$, όπου K αβελιανή ομάδα . Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) $g(t) = \sum_{s \leqslant t} f(s)$, *για κάθε* $t \in P$,

(ii) $f(t) = \sum_{s \leqslant t} g(s)\mu(s,t)$, *για κάθε* $t \in P$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [11] . □

Ορισμός 1.1.6. *Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, \preceq)$ θα λέγεται διαβαθμισμένο όταν είναι εφοδιασμένο με μία μοναδική συνάρτηση ρ: $P \to \mathbb{N}$ η οποία έχει τις εξής δύο ιδιότητες:*

(i) $a \prec b \Rightarrow \rho(a) < \rho(b)$,

(ii) *Αν το a καλύπτει το b, τότε* $\rho(b) = \rho(a) + 1$.

Ορισμός 1.1.7. *Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $(P, \preceq)$ θα λέγεται directed αν για όλα τα $u, w \in P$, υπάρχει $z \in P$ τέτοιο ώστε $u, w \leqslant z$.*

1.1.1 Διατάξεις Euler

Ορισμός 1.1.8. *Ένα πεπερασμένο διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο P με ελαχιστικό και μεγιστικό στοιχείο θα λέγεται Eulerian αν $\mu(s,t) = (-1)^{l(s,t)}$ για όλα τα $s \leqslant t$ στο P.*

Το B_n όπως είδαμε παρπάνω αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα Eulerian μερικώς διατεταγμένου συνόλου. Παρακάτω, θα δούμε ότι και η διάταξη Bruhat μίας ομάδας Coxeter, γενικά, αποτελεί άλλο ένα τέτοιο παράδειγμα. Αξίζει να αναφερθεί άλλη μία κατηγορία Eulerian μερικων διατεταγμένων συνόλων, αυτή των face lattices των regular CW σφαιρών (βλέπε [11], proposition 3.8.9).

Ορισμός 1.1.9. *Για κάθε Eulerian διάταξη P θα ορίσουμε επαγωγικά τα εξής πολυώνυμα.*

(i) *Αν* $\mid P \mid = 1$, *τότε* $f(P;q) = g(P;q) = 1$,

(ii) *Αν* $\mid P \mid = n + 1 > 0$, *τότε* $deg(f(P;q)) = n$ *και έστω* $f(P;q) = h_0 + ... + h_n q^n$.
Τότε ορίζουμε

$$g(P;q) = h_0 + (h_1 - h_0)q + ... + (h_m - h_{m-1})q^m,$$

όπου $m = [\frac{n}{2}]$.

(iii) *Αν* $|P| = n+1 > 0$, *τότε ορίζουμε*

$$f(P;q) = \sum_{a \in P \setminus \{\hat{1}\}} g([\hat{0},a];q)(q-1)^{n-\rho(a)}.$$

Τα πολυώνυμα $f(P;q)$ *και* $g(P;q)$ *θα τα λέμε* $f-$*πολυώνυμο και* $g-$*πολυώνυμο του* P, *αντίστοιχα, και το διάνυσμα* $(h_0,...,h_n)$ $h-$*διάνυσμα.*

Είναι σημαντικό να παρατηρήσει κανείς ότι τα f και g πολυώνυμα αποτελούν αναλοίωτα στην κατηγορία των Eulerian μερικώς διατεταγμένων συνόλων, δηλαδή

$$(P, \leqslant_p) \simeq (Q, \leqslant_q) \Rightarrow f(P;q) = f(Q;q) \text{ και } g(P;q) = g(Q;q).$$

Παράδειγμα 1.1.10. *Ας υπολογίσουμε τα* $f(B_n;q)$ *και* $g(B_n;q)$,*όπου* B_n *είναι το Boolean μερικώς διατεταγμένο σύνολο.Υπενθυμίζουμε ότι* $\mu(A,B) = (-1)^{|B \setminus A|}$, *άρα το* B_n *είναι Eulerian. Οπότε έχει νόημα να υπολογίσουμε τα* $f(B_n;q)$ *και* $g(B_n;q)$. *Θα δείξουμε επαγωγικά ότι* $f(B_n;q) = 1+q+\cdots+q^{n-1}$ *και* $g(B_n;q) = 1$. *Τα (i) και (ii) του ορισμού των* f *και* g *πολυωνύμων προφανώς ισχύουν. Για το (iii) έχουμε την εξης σχέση:*

$$f(B_{n+1};q) = \sum_{k=0}^{n} g(B_n;q)\binom{n+1}{k}(q-1)^{n-k}.$$

Αντικαθιστώντας το $g(B_n;q) = 1$ *παίρνω ότι*

$$\begin{aligned} f(B_{n+1};q) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}(q-1)^{n-k} \\ &= (q-1)^{-1}[((q-1)+1)^{n+1} - 1] \\ &= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1+q+\cdots+q^n. \end{aligned}$$

Θεώρημα 1.1.11. *Για κάθε Eulerian διάταξη με* $n+1$ *στοιχεία έχουμε* $f(P;q) = q^n f(P;\frac{1}{q})$. *Ισοδύναμα, αν* $f(P;q) = \sum_{i=0}^{n} h_i q^{n-i}$, *τότε* $h_i = h_{n-i}$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το (*iii*) του ορισμού 1.1.9 έχουμε

$$g(P;q) + (q-1)f(P;q) = \sum_{a \in P} g([\hat{0},a];q)(q-1)^{n+1-\rho(a)}$$

$$\Rightarrow (q-1)^{-(n+1)}(g(P;q) + (q-1)f(P;q)) = \sum_{a \in P} g([\hat{0},a];q)(q-1)^{-\rho(a)}.$$

Από την αντιστροφή Möbius παίρνουμε

$$g(P;q)(q-1)^{-(n+1)} = \sum_{a\in P}(g([\hat{0},a];q) + (q-1)f([\hat{0},a];q))(q-1)^{-\rho(a)}\mu(a,\hat{1}).$$

Όμως, το $[a,\hat{1}]$ είναι Eulerian, άρα

$$g(P;q) = \sum_{a\in P}(g([\hat{0},a];q) + (q-1)f([\hat{0},a];q))(1-q)^{n+1-\rho(a)}.$$

Έστω $f([\hat{0},a];q) = a_0 + a_1 q + \cdots + a_r q^r$, όπου $\rho(a) = r+1$. Τότε,

$$g([\hat{0},a];q) + (q-1)f([\hat{0},a];q) = (a_s - a_{s+1})q^{s+1} + (a_{s+1} - a_{s+2})q^{s+2} + ...,$$

όπου $s = [\frac{r}{2}]$. Κάνοντας επαγωγή στο $\rho(a)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a_i = a_{r-i}$ για $r < n$. Σε αυτή την περίπτωση,

$$g([\hat{0},a];q)+(q-1)f([\hat{0},a];q) = \begin{cases} (a_s - a_{s+1})q^{s+1} + (a_{s-1} - a_{s-2})q^{s+2} + ..., & \text{αν } r = 2m, \\ (a_s - a_{s+1})q^{s+2} + (a_{s-1} - a_{s-2})q^{s+3} + ..., & \text{αν } r = 2m+1, \end{cases}$$

$$= q^{\rho(a)} g([\hat{o},a];q^{-1}).$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε την εξής σχέση:

$$g(P;q) - (g(P;q) + (q-1)f(P;q)) = \sum_{a\in P\backslash\{\hat{1}\}} q^{\rho(a)} g([\hat{o},a];q^{-1})(1-q)^{n+1-\rho(a)}$$

$$\Rightarrow f(P;q) = \sum_{a\in P\backslash\{\hat{1}\}} q^{\rho(a)} g([\hat{o},a];q^{-1})(1-q)^{n-\rho(a)}$$

$$\Rightarrow f(P;q) = q^n \sum_{a\in P\backslash\{\hat{1}\}} q^{-n+\rho(a)} g([\hat{o},a];q^{-1})(1-q)^{n-\rho(a)}$$

$$\Rightarrow f(P;q) = q^n \sum_{a\in P\backslash\{\hat{1}\}} g([\hat{o},a];q^{-1})(\frac{1}{q}-1)^{n-\rho(a)}$$

$$\Rightarrow f(P;q) = q^n f(P;\frac{1}{q})$$

χρησιμοποιώντας πάλι το (iii) του ορισμού 1.1.9. $\square$

1.2 Ομάδες Coxeter

Ορισμός 1.2.1. *Έστω S ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο και έστω συνάρτηση $m : S \times S \to \mathbb{N}$ για την οποία ισχύουν $m(s_1, s_2) = m(s_2, s_1)$ και $m(s_1, s_2) = 1 \Leftrightarrow s_1 = s_2 \ \forall \ s_1, s_2 \in S$. Η m καθορίζει μια ομαδα $W = \langle s \ \varepsilon \ S | (s_1 s_2)^{m(s_1,s_2)} = e \rangle$ όπου e το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας. Η W ονομάζεται ομάδα Coxeter με σύνολο γεννητόρων S και το (W, S) σύστημα Coxeter. Έστω $T = \{wsw^{-1} : s \in S \ , \ w \ \varepsilon \ W\}$. Τα στοιχεία του T λέγονται ανακλάσεις.*

Παράδειγμα 1.2.2. *Η $Z_2 \times Z_2 \times ... \times Z_2$ είναι ομάδα Coxeter. Πράγματι, θέτουμε $s_i = (0, .., 1, ..., 0)$ με τον άσσο να βρίσκεται στην $i-$οστή θέση. Τότε,*

$$Z_2 \times Z_2 \times ... \times Z_2 = \langle S \mid (s_i s_j)^{m(s_i,s_j)} \rangle,$$

όπου

$$m(s_i, s_j) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j, \\ 2, & \text{αν } i \neq j. \end{cases}$$

Έστω (W, S) ένα σύστημα $Coxeter$. Κάθε $w \in W$ μπορεί να γραφτεί ως $w = s_1 s_2 ... s_k$, $s_i \ \varepsilon \ S$. Μήκος του w θα λέμε τον ελάχιστο φυσικό αριθμό k και τη λέξη $s_1 s_2 ... s_k$ θα τη λέμε ανηγμένη. Θα συμβολίζουμε το μήκος με $l(w)$.

Πρόταση 1.2.3. *(Ισχυρή ιδιότητα ανταλλαγής). Έστω $w \in W$. Αν $s_1 s_2 .... s_k$ είναι μία ανηγμένη λέξη για το w και $l(wt) \leqslant l(w)$ για $t \in T$, τότε $wt = s_1 ... \hat{s_i} ... s_k$ για κάποιο $i \in [k]$.*

Αν στην παραπάνω πρόταση αντικαταστήσουμε την υπόθεση $t \in T$ με την υπόθεση $s \in S$, τότε θα λέμε ότι έχουμε την ιδιότητα της ανταλλαγής.

Πρόταση 1.2.4. *(Ιδιότητα διαγραφής) Αν $w = s_1 s_2 ... s_k$ και $l(w) < k$,τότε $w = s_1 .. \hat{s_i} ... \hat{s_j} .. s_k$ για κάποια $1 \leqslant i < j \leqslant k$*

Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη ένα θεώρημα το οποίο χαρακτηρίζει πλήρως τις ομάδες $Coxeter$ και θα μας φανεί χρήσιμο στη συνέχεια, όπου θα επικεντρωθούμε στη συμμετρική ομάδα.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω W μία ομάδα και S ένα σύνολο γενητόρων με $s^2 = e \ \forall \ s \in S$.Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το (W, S) είναι ένα σύστημα Coxeter*

(ii) *Το (W, S) έχει την ιδιότητα της ισχυρής ανταλλαγής*

(iii) *Το (W, S) έχει την ιδιότητα της ανταλλαγής*

(iv) *Το (W, S) έχει την ιδιότητα της διαγραφής*

1.3 Διάταξη Bruhat

Έστω $u, w \in W$. Θα γράφουμε $u \xrightarrow{t} w$ αν $u^{-1}w \in T$ και $l(u) < l(w)$, όπου T είναι το σύνολο των ανακλάσεων. Επίσης θα γράφουμε $u \to w$ αν $u \xrightarrow{t} w$ για κάποιο $t \in T$. Τότε $u \leqslant w$ αν $u = w$ ή $u \to \cdots \to w$.

Είναι φανερό ότι το $(W, \leqslant)$ είναι μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Η $\leqslant$ λέγεται διάταξη Bruhat.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την διάταξη Bruhat θα δώσουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο αποδεικνύεται πιο εύχρηστο από τον ορισμό, τουλάχιστον για τους σκοπούς αυτής της εργασίας.

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω $u, w \in W$ και έστω $s_1..s_k$ μία ανηγμένη λέξη για το w. Τότε $u \leqslant w$ στην διάταξη Bruhat αν και μόνον αν η $s_{i_1}...s_{i_m}$ είναι μία ανηγμένη λέξη για το u, για κάποια $1 \leqslant i_1 < ... < i_m \leqslant k$.*

Απόδειξη. $\Rightarrow$)Έστω ότι $u = x_0 \to x_1 \to ... \to x_m = w$. Τότε $x_{m-1} = wt_m = s_1...\hat{s_j}...s_k$ για κάποιο j από την Πρόταση 1.2.3 . Συνεχίζοντας επαγωγικά για τα $x_{m-2}, x_{m-3}...$ έχουμε μία έκφραση για το u με $u = s_{i_1}s_{i_2}..s_{i_m}$ η οποία ανάγεται σε μία ανηγμένη λέξη από την 1.2.4 .

$\Leftarrow$)Έστω ότι $s_{i_1}...s_{i_m} = s_1...s_k$. Τότε δεν έχω τίποτα να δείξω εφόσον $u = w$. Υποθέτουμε ότι $u \neq w$.

Ισχυρισμός 1.3.2. *Υπάρχει $v \in W$ τέτοιο ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $v > u$

(ii) $l(v) = l(u) + 1$

(iii) *κάποια ανηγμένη λέξη για την v είναι υπολέξη της $s_1...s_k$*

Ας αποδείξουμε τον ισχυρισμό. Από όλες τις ανηγμένες υπολέξεις της $u = s_1..\hat{s_{i_1}}...\hat{s_{i_q}}...s_k$ διαλέγω εκείνη η οποία έχει το s_{i_q} ελαχιστικό. Έστω $t = s_k s_{k-1}...s_{i_q}...s_{k-1}s_k$.Τότε $ut = s_1...\hat{s_{i_1}}...\hat{s_{i_{q-1}}}...s_{i_q}...s_k$.Άρα $l(ut) \leqslant l(u) + 1$. Αρκεί να δείξω ότι $ut > u$ καθώς αν θέσω $v = ut$ έχω αποδείξει τον ισχυρισμό. Έστω προς άτοπο ότι $ut < u$. Τότε από την Πρόταση 1.2.3 θα έχω είτε

$$t = s_k s_{k-1}...s_p...s_{k-1}s_k, \text{ για κάποιο } p > i_q$$

και άρα $w = wt^2 = (s_1...s_k)(s_k...s_{i_q}..s_k)(s_k...s_p...s_k) = s_1...\hat{s_{i_q}}...\hat{s_p}...s_k$ το οποίο είναι άτοπο επειδή $l(w) = k$, είτε θα έχω

$$t = s_k...\hat{s_{i_q}}...\hat{s_{i_d}}...s_r...\hat{s_{i_d}}...\hat{s_{i_q}}...s_k \text{ για κάποιο } r < i_q,\ r \neq i_j$$

και άρα $u = ut^2 = (s_1...\hat{s_{i_1}}...\hat{s_{i_q}}...s_k)(s_k...\hat{s_{i_q}}...s_r...\hat{s_{i_q}}...s_k)(s_k...s_{i_q}...s_k) = s_1...\hat{s_{i_1}}...\hat{s_r}...s_{i_q}...s_k$ *το οποίο είναι άτοπο λόγω ελαχιστικότητας του* i_q.

Το ζητούμενο έπεται με επαγωγή στο $l(w) - l(u)$. □

Το παρακάτω πόρισμα, γνωστό και ως chain property, είναι άμεση συνέπεια από το παραπάνω θεώρημα και αποδεικνύει ότι η διάταξη Bruhat είναι διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο με συνάρτηση τάξης ρ την συνάρτηση μήκους l.

Πόρισμα 1.3.3. *Αν* $u < w$, *τότε υπάρχει μία αλυσίδα* $u = x_0 < x_1 < ... < x_k = w$ *τέτοια ώστε* $l(x_i) = l(u) + i$, $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant k$.

Η παρακάτω πρόταση είναι γνωστή ως lifting property και θα την χρησιμοποιήσουμε αρκετές φορές στη συνέχεια.

Πρόταση 1.3.4. *Αν* $u < w$ *και* $s \in D_L(w) \setminus D_L(u)$, *τότε* $u \leqslant sw$ *και* $su \leqslant w$, *όπου* $D_L(u) = \{s \in S : l(su) < l(u)\}$.

Απόδειξη. Έστω μία ανηγμένη έκφραση $sw = s_1....s_q$. Τότε η $w = ss_1...s_q$ είναι επίσης ανηγμένη λέξη. Άρα, υπάρχει ανηγμένη λέξη για το $u = s_{i_1}...s_{i_k} < ss_1...s_q = w$. Παρατηρώ ότι $s_{i_1} \neq s$ εφόσον $su > u$. Συνεπώς,

$$s_{i_1}...s_{i_k} < s_1...s_q \Rightarrow u \leqslant sw$$

και

$$ss_{i_1}..s_{i_k} < ss_1...s_q \Rightarrow su \leqslant w.$$

□

Πρόταση 1.3.5. *Η διάταξη Bruhat είναι directed μερικώς διατεταγμένο σύνολο.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $l(u) + l(w)$. Αν $l(u) + l(w) = 0$, τότε $u = w = e$ και άρα ισχύει με τετριμμένο τρόπο. Διαφορετικά , διαλέγουμε $s \in S$ τέτοιο ώστε $su < u$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $x \in W$ τέτοιο ώστε $su \leqslant x$ και $w \leqslant x$. Από την Πρόταση 1.3.4 έχω τις εξής δύο περιπτώσεις:

(i) $sx < x \Rightarrow u \leqslant x$ και άρα τα u, w έχουν άνω φράγμα το x.

(ii) $sx > x \Rightarrow u \leqslant sx$ και άρα τα u, w έχουν άνω φράγμα το sx.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συμμετρική ομάδα

Σε αυτό το κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε στη συμμετρική ομάδα. Συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι είναι ομάδα Coxeter και αποδεικνύουμε κάποια επιπλέον κριτήρια για να συγκρίνουμε στοιχεία στην διάταξη Bruhat αυτής.

2.1 Βασικές γνώσεις

Θεωρούμε την S_n , την ομάδα των μεταθέσεων του συνόλου $\{1, ..., n\}$. Έστω $x \in S_n$. Με $x(i)$ θα συμβολίζουμε την θέση i της μετάθεσης. Διαλέγω ως σύνολο γεννητόρων της S_n να είναι το σύνολο των αντιμεταθέσεων $S = \{s_1, s_2, ..., s_{n-1}\}$ όπου $s_i = (i, i+1)$ για $i = 1, 2, ..., n-1$.Η S_n τότε θα έχει την εξης παράσταση:

$$S_n = \langle S \mid (s_i s_j)^{m(s_i, s_j)} \rangle,$$

όπου $m(s_i, s_j) = m(s_j, s_i)$ και

$$m(s_i, s_j) = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 2, & \text{αν } j > i+1 \\ 3, & \text{αν } j = i+1 \end{cases}$$

για $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$. Εδώ $T = \{(ij) : 1 \leqslant i < j \leqslant n-1\}$

Ορίζουμε $inv(x)$ το πλήθος των αντιστροφών του $x \in S_n$, δηλαδή

$$inv(x) = \mid \{(i,j) : i < j, x(i) > x(j)\} \mid$$

Παρατηρούμε ότι

$$inv(xs_i) = \begin{cases} inv(x) + 1, & \text{αν } x(i) < x(i+1) \\ inv(x) - 1, & \text{αν } x(i) > x(i+1) \end{cases}$$

Στη συμμετρική ομάδα το μήκος ενός στοιχείου είναι ίσο με το πλήθος των αντιστροφών του, όπως φαίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω $x \in S_n$. Τότε $l(x) = inv(x)$.*

Απόδειξη. $\Rightarrow$) Είναι άμεσο ότι $inv(x) \leqslant l(x)$ εφόσον $l(e) = inv(e) = 0$.

$\Leftarrow$) Θα κάνουμε επαγωγή στο $inv(x)$. Αν $inv(x) = 0$, τότε $x = e$ και άρα $inv(x) = l(x)$. Έστω τώρα $x \in S_n$ και $k \in \mathbb{N}$ με $inv(x) = k + 1$. Τότε $x \neq e$ και άρα υπάρχει $s \in S$ τέτοιο ώστε $inv(xs) = k$. Από επαγωγική υπόθεση έχω ότι $l(xs) \leqslant k$ και άρα προκύπτει ότι $l(x) \leqslant k + 1$. □

Πρόταση 2.1.2. *Το (S_n, S) είναι σύστημα Coxeter.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι το ζευγάρι (S_n, S) έχει την ιδιότητα της ανταλλαγής. Τότε από το Θεώρημα 1.2.5 έπεται ότι το (S_n, S) είναι *Coxeter* σύστημα. Έστω $i_1, ..i_k, i \in [n-1]$ και υποθέτουμε ότι $l(s_{i_1}...s_{i_k}s_i) < l(s_{i_1}..s_{i_k})$. Ψάχνουμε $j \in [k]$ τέτοιο ώστε

$$s_{i_1}...s_{i_k}s_i = s_{i_1}...\hat{s_{i_j}}..s_{i_k}$$

Από την Πρόταση 2.1.1 έχω ότι $x(i) > x(i+1)$ όπου $x = s_{i_1}...s_{i_k}$.Άρα υπάρχει $j \in [k]$ τέτοιο ώστε το $s_{i_1}...s_{i_{j-1}}$ να έχει το $x(i)$ δεξιά από το $x(i+1)$, ενώ το $s_{i_1}...s_{i_j}$ να έχει το $x(i+1)$ δεξιά από το $x(i)$. Άρα το x θα είναι το ίδιο με το $s_{i_1}..\hat{s_{i_j}}..s_{i_k}$ με μόνη εξαίρεση ότι το $x(i)$ με το $x(i+1)$ θα έχουν αλλάξει θέσεις. Από αυτό όμως έπεται το ζητούμενο. □

2.2 Διάταξη Bruhat της S_n

Υπενθυμίζουμε ότι $T = \{(i,j) : 1 \leqslant i < j \leqslant n-1\}$.

Από τον τρόπο που ορίσαμε τη διάταξη Bruhat σε μία ομάδα Coxeter είναι εύκολο να δούμε ότι $x \xrightarrow{(a,b)} y \Rightarrow x^{-1}y = (a,b) \Rightarrow y = x \cdot (a,b)$. Ουσιαστικά για να μεταβούμε στην μετάθεση y απλά εναλλάσουμε τις θέσεις $x(a)$ με $x(b)$. Για παράδειγμα,

$$21543 \xrightarrow{(a,b)} 23541$$

Από το Πόρισμα 1.3.3 είναι φανερό ότι το $(S_n, \leqslant)$ είναι διαβαθμισμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο με συνάρτηση τάξης ρ= $l = inv$.

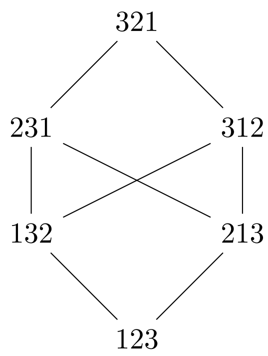
Αυτόματα λοιπόν τίθεται το εξής ερώτημα: Πώς μπορώ να αποφασίσω αν δύο στοιχεία της S_n είναι συγκρίσιμα στη διάταξη Bruhat. Για το λόγο αυτό θα δώσουμε κάποια κριτήρια για να συγκρίνουμε στοιχεία στη διάταξη Bruhat.

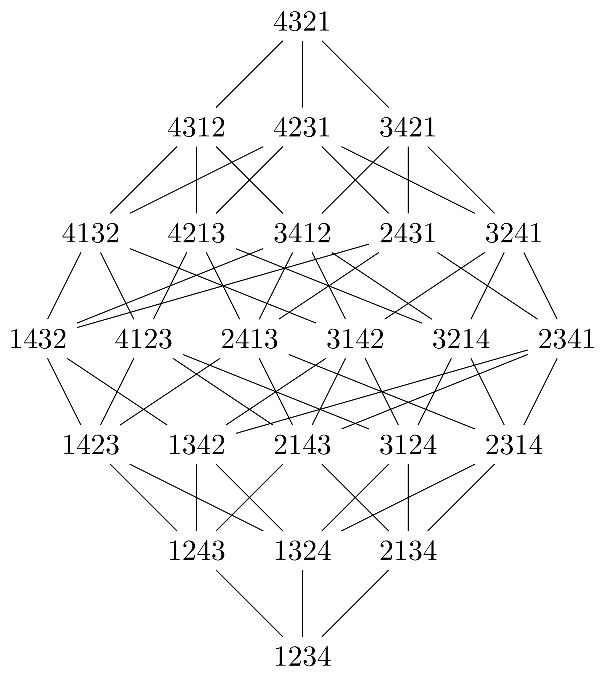
Λήμμα 2.2.1. *Έστω $x, y \in S_n$. Τότε το x καλύπτεται από το y στη διαταξη Bruhat αν και μόνον αν $y = x \cdot (a, b)$ για κάποια $a < b$ τέτοια ώστε $x(a) < x(b)$ και δεν υπάρχει c τέτοιο ώστε $a < c < b$, $x(a) < x(c) < x(b)$.*

Απόδειξη. $\Leftarrow$) Με τις παραπάνω υποθέσεις είναι φανερό ότι $inv(y) = inv(x) + 1$ οπότε έχω σχέση κάλυψης.

$\Rightarrow$) Έστω $y = x \cdot (a, b)$, $a < b$ και $inv(y) > inv(x)$. Τότε $x(a) < x(b)$. Αν $x(a) < x(c) < x(b)$ για κάποιο $a < c < b$ τότε $x < x \cdot (a, c) < y$, άρα $x < y$ δεν θα είναι σχέση κάλυψης το οποίο είναι άτοπο. □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2.1 έχουμε το διάγραμμα Hasse για την S_3 και την S_4 όπως φαίνονται στα παρακάτω σχήματα.



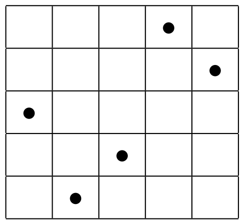


Όμως, το λήμμα αυτό είναι πολύπλοκο αλγοριθμικά για μεγάλα n. Οπότε θα χρειαστούμε μία διαφορετική προσσέγγιση η οποία θα δωθεί αμέσως τώρα.

Για $x \in S_n$ ορίζουμε $x[i,j] = \mid \{a \in [i] : x(a) \leqslant j\} \mid$ για $i, j = 1, ..., n$. Για παράδειγμα αν $x = 31254$ τότε $x[1,3] = 1, x[3,3] = 3, x[4,2] = 2$.

Επίσης παρατηρούμε ότι $x[n,i] = i$.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το x όπου το $x[i,j]$ δείχνει πόσες κουκίδες υπάρχουν από το j και κάτω και αριστερά από το i.



Θεώρημα 2.2.2. *Έστω $x, y \in S_n$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) $x \leqslant y$

(ii) $x[i,j] \geq y[i,j] \; \forall \; i,j \in [n]$

Απόδειξη. $\Rightarrow$)
Εστω ότι ισχύει το (i). Τότε υπάρχει $(a,b) \in T$ τέτοιο ώστε $y = x \cdot (a,b)$ και $x(a) < x(b)$. Τότε από τον ορισμό του $x[i,j]$ έχω

$$y[i,j] = \begin{cases} x[i,j] - 1, & \text{αν } a \leqslant i < b, x(a) < j \leqslant x(b) \\ x[i,j], & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και άρα έχω το (ii).
$\Leftarrow$)
Έστω $x[i,j] \geq y[i,j] \; \forall \; 1 \leqslant i,j \leqslant n$. Έστω a η πρώτη στήλη στην οποία διαφέρουν τα δύο διαγράμματα. Σε αυτή τη στήλη το x έχει τελεία στην γραμμή c και το y στην γραμμή d. Παρατηρούμε ότι $c < d$ εφόσον $x[a,c] \geq y[a,c]$. Έστω η περιοχή $[a+1,n] \times [c+1,d]$ και έστω b η πιο αριστερά τελεία του x στην περιοχή αυτή. Τότε δεν υπάρχουν τελείες του x στο $[a+1,b-1] \times [c,d]$. Έστω $z = x \cdot (a,b)$.

Ισχυρισμός 2.2.3. $z[i,j] \geq y[i,j]$
Ας αποδείξουμε τον ισχυρισμό.
Πράγματι, παρατηρούμε ότι $x[i,j] = z[i,j]$ εκτός αν $a \leqslant i < b$ και $c \leqslant j < d$, όπου έχω $z[i,j] = x[i,j] - 1 = x[i,d] - 1 \geq y[i,d] - 1 \geq y[i,j]$.

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε στο y και άρα $x \leqslant y$.

□

Πόρισμα 2.2.4. *(Tableau Criterion). Έστω $x, y \in S_n$. Τότε $x \leqslant y$ αν και μόνον αν $x_{i,j} \leqslant y_{i,j}$ $\forall$ $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, όπου $x_{i,j}$ είναι η i-οστή είσοδος στην αύξουσα διάταξη $x_1, .., x_j$ και όμοια για τα $y_{i,j}$.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς πως συνδέονται τα $x[i, j]$ με τα $x_{i,j}$. Συγκεκριμένα,

$$x[i, j] = max\{k \mid x_{k,i} \leqslant j\},$$

$$x_{i,j} = min\{k \mid x[j, k] = i\}.$$

Από αυτές τις δύο σχέσεις είναι φανερό ότι $x[i, j] \geq y[i, j] \Leftrightarrow x_{i,j} \leqslant y_{i,j}$. □

2.3 Παραβολικές υποομάδες

Για $J \subseteq S$, έστω W_J η υποομάδα της W που παράγεται απο το J. Υποομάδες των *Coxeter* ομάδων αυτής της μορφής ονομάζονται παραβολικές. Επίσης ορίζουμε $W^J = \{w \in W : ws > w \ \forall s \in J\}$ και θα τα ονομάζουμε πηλίκα.

Πρόταση 2.3.1. *Το (W_J, J) είναι σύστημα Coxeter και ισχύει ότι $l_J(w) = l(w)$, για όλα τα $w \in W_J$.*

Απόδειξη. Έστω $w \in W_J$. Τότε $w = s_1...s_q$ για κάποια $s_i \in J$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι η λέξη είναι ανηγμένη στην W , άρα και στην W_J. Άρα $l_J(w) = l(w)$ και άρα ισχύει η ιδιότητα της ανταλλαγής στην (W_J, J). Το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 1.2.5 . □

Πρόταση 2.3.2. *Έστω $J \subseteq S$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Κάθε $w \in W$ έχει μοναδική παραγοντοποίηση $w = w^J \cdot w_J$ όπου $w^J \in W^J$ και $w_J \in W_J$.*

(ii) *Για την παραγοντοποίηση αυτήν έχω $l(w) = l(w^J) + l(w_J)$*

Απόδειξη. (Ύπαρξη): Διαλέγουμε $s_1 \in J$ τέτοιο ώστε $ws_1 < w$, αν υπάρχει αυτό το s_1. Συνεχίζουμε την διαδικασία μέχρι να μην μπορούμε να βρούμε άλλο τέτοιο s_k. Η διαδικασία τελειώνει το πολύ σε $l(w)$ βήματα. Όταν τελειώσει θα έχω $w_k = ws_1...s_k$ και $w_k s > w_k$ $\forall$ $s \in J$. Άρα $w_k \in W^J$. Έστω $u = s_k s_{k-1}...s_1 \in W_J$. Ισχύει ότι $w = w_k u$ και από κατασκευή $l(w) = l(w_k) + k$.

(Μοναδικότητα): Έστω $w = uv = xy$ με $u, x \in W^J$ και $v, y \in W_J$. Έστω $u = s_1 s_2...s_k$, ανηγμένη λέξη, και $vy^{-1} = s'_1 s'_2...s'_q$ με $s_i \in S$ και $s'_i \in J$. Τότε

$$x = uvy^{-1} = s_1..s_k s'_1..s'_q$$

. Τώρα παίρνω μια ανηγμένη λεξη για το x. Επειδή $x \in W^J$ προκύπτει ότι το η ανηγμένη αυτή λέξη δεν μπορεί να τελειώνει σε κάποιο s'_j. Άρα x υπολέξη του w. Άρα $x \leqslant u$. Λόγω συμμετρίας θα έχω ότι $u \leqslant x$. Άρα $u = x$ και $v = y$. □

Κλείνουμε αυτή τη παράγραφο με το κριτήριο του *Deodhar* το οποίο θα μας βοηθήσει να δώσουμε ένα πολύ αποτελεσματικό τρόπο να συγκρίνουμε στοιχεία στην διάταξη *Bruhat* της S_n. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο [2].

Θεώρημα 2.3.3. *(Deodhar:) Έστω $J_i \subseteq S$, $i \in E$, οικογένεια υποσυνόλων τέτοια ώστε $\bigcap_{i\in\ E} J_i = I$, και έστω $x \in W^I$, $y \in W$.Τότε:*

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x^{J_i} \leqslant y^{J_i},\ \forall\ i \in E.$$

2.3.1 Παραβολικές υποομάδες της S_n

Έστω $D_R(x) = \{i : x(i) > x(i+1)\}$ το σύνολο των καθόδων μίας μετάθεσης. Επίσης έχω $(k) = \{1, ..., n-1\}\setminus\{k\}$. Θέτω $S_n^{(k)} = \{x \in S_n : x(1) < ... < x(k)$ και $x(k+1) < .. < x(n)\}$ με $k \in [n-1]$.

Λήμμα 2.3.4. *Σταθεροποιούμε $k \in [n]$ και θέτουμε $J = S \smallsetminus \{s_k\}$. Τότε,*

$$S_n^{(k)} = (S_n)^J$$

και

$$(S_n)_J \cong S_k \times S_{n-k}.$$

Απόδειξη. Πράγματι, $(S_n)^J = \{w \in S_n : ws > w\ \forall s \in J\}$, άρα οι πρώτες k και οι τελευταίες $n-k$ είσοδοι πρέπει να είναι διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά, και άρα

$$(S_n)_J \cong S_k \times S_{n-k}.$$

Επιπλέον,

$$(S_n)_J \cong S_k \times S_{n-k}$$

, εφόσον επιτρέπεται να μεταθέτουμε στοιχεία στις k πρώτες και στις τελευταίες $n-k$ είσοδους, αλλά όχι μεταξύ τους. □

Τα επόμενα πορίσματα είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 2.3.3 .

Πόρισμα 2.3.5. *Έστω $x, y \in S_n$. Τότε*

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x^{(s)} \leqslant y^{(s)},\ \text{για όλα τα}\ s \in D_R(x).$$

Πόρισμα 2.3.6. *Έστω $x, y \in S_n$. Τότε*

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow (w_0y)^{(s)} \leqslant (w_0x)^{(s)},\ \text{για όλα τα}\ s \in S \setminus D_R(y).$$

όπου w_0 η μετάθεση με $w_0(1) = n, w_0(2) = n-1, ..., w_0(n) = 1$.

Λήμμα 2.3.7. *Για* $x, y \in S_n^{(k)}$*:*

$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x(i) \leqslant y(i), \text{ για κάθε } 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Απόδειξη. Έστω $x < y$ μία σχέση κάλυψης. Τότε $y = x \cdot (j, m)$ με $j \leqslant k < m$. Θα έχω $x(j) < x(m) = y(j)$ και $x(i) = y(i)$ $\forall$ $i \in \{1, ..., k\} \setminus \{j\}$.

Αντίστροφα, έστω $x(i) \leqslant y(i)$ $\forall$ i, και $x(j) < y(j)$ για κάποιο $1 \leqslant j \leqslant k$, ενώ $x(i) = y(i)$ για όλα τα $j+1 \leqslant i \leqslant k$. Τότε $x(j) + 1 = x(m)$ για κάποιο $m > k$, αφού

$$x(j) + 1 \leqslant y(j) < y(j+1) = x(j+1)$$

αν $j < k$. Θέτω $x' = x \cdot (j, m)$. Τότε $x'(i) \leqslant y(i)$ $\forall$ $1 \leqslant i \leqslant k$ και $x < x'$ είναι μια κάλυψη Bruhat. Το ζητούμενο έπεται με επαγωγή στο $l(y) - l(x)$. □

Είμαστε έτοιμοι να ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο με το παρακάτω αποτέλεσμα το οποίο οφείλεται στους Björner και Brenti.

Πόρισμα 2.3.8. *Έστω* $x, y \in S_n$*. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) $x \leqslant y$

(ii) $x_{i,k} \leqslant y_{i,k}$ *για όλα τα* $k \in D_R(x)$ *και* $1 \leqslant i \leqslant k$*.*

(iii) $x_{i,k} \leqslant y_{i,k}$ *για όλα τα* $k \in \{1, ..., n-1\} \setminus D_R(y)$ *και* $1 \leqslant i \leqslant k$*.*

Απόδειξη. Από το 2.3.7 για το (ii) αρκεί να δείξω ότι $x^{(k)} \leqslant y^{(k)}$ για όλα τα $k \in D_R(x)$ και για το (iii) ότι $(w_0 y)^{(k)} \leqslant (w_0 x)^{(k)}$ για όλα τα $k \in \{1, ..., n-1\} \setminus D_R(w_0 y)$.

Αυτό όμως έπεται από τα πορίσματα 2.3.5 και 2.3.6 αντίστοιχα. □

Για παράδειγμα, ας συγκρίνουμε το $x = 368475912$ με το $y = 694287531$. Τότε $D_R(x) = \{3, 5, 7\}$ και $[8] \setminus D_R(y) = \{1, 4\}$.

Χρησιμοποιώντας το (ii) του πορίσματος 2.3.8 έχουμε τα εξής tableau:

3	4	5	6	7	8	9
3	4	6	7	8		
3	6	8				

2	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	9		
4	6	9				

Παρατηρούμε ότι $3 > 2$ στην δεύτερη γραμμή του πορίσματος tableau οπότε τα δύο στοιχεία είναι μη συγκρίσιμα μεταξύ τους.

Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το (iii) του 2.3.8 και έχουμε :

3	4	6	8
3			

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 4 & 6 & 9 \\ \hline 6 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

από το οποίο είναι πάλι φανερό ότι τα x, y έιναι μη συγκρίσιμα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Πολύπτυχο Grassman και flag

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε για τα Grassmanian και τα flag manifolds. Αρχικά, θα ρίσουμε το Grassmanian manifold σαν σύνολο και θα του δώσουμε τη δομή μίας projective variety. Ύστερα, θα ορίσουμε το flag manifold και μέσω της διάσπασης Bruhat θα του δώσουμε δομή CW-complex. Η σύνδεση με τη διάταξη Bruhat θα φανεί στο τέλος του κεφαιλαίου, όπου θα δείξουμε ότι για να ξέρουμε πότε ένα κελί περιέχεται σε ένα άλλο, αρκεί να δούμε τη διάταξη Bruhat της συμμετρικής ομάδας.

3.1 Στοιχεία αλγεβρικής γεωμετρίας

Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε κάποια βασικά πράγματα από την αλγεβρική γεωμετρία.

Έστω E ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος. Με $\mathbb{P}(E)$ θα συμβολίζουμε το σύνολο των ευθειών που περνάνε από την αρχή του E και θα τον ονομάζουμε προβολικό χώρο. Αν $E = \mathbb{C}^{n+1}$ τότε $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) = \mathbb{P}^n$. Με άλλα λόγια ,

$$\mathbb{P} = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/ \backsim$$

με σχέση ισοδυναμίας

$$(x_0, ..., x_n) \backsim (y_0, ..., y_n) \Leftrightarrow x_i = \lambda y_i \text{ για κάποιο } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ και } i = 0, ..., n.$$

Τον αντιπρόσωπο του $(x_0, ..., x_n)$ θα τον συμβολίζουμε με $(x_0 : ... : x_n)$ και θα τις ονομάζουμε ομογενείς συντεταγμένες.

Έστω S ένα σύνολο ομογενών πολυωνύμων στο $k[x_0, ..., x_n]$.Τότε,

$$Z(S) = \{P = (a_0 : ... : a_n) \in \mathbb{P}^n \mid F(P) = 0 \ \forall F \in S\}.$$

Ορισμός 3.1.1. *Μία projective variety είναι ένα υποσύνολο κάποιου $\mathbb{P}^n$ πάνω από το $\mathbb{C}$ που περιγράφεται από τα $Z(S)$ για καποιο S στο $k[x_o, ..., x_n]$.*

Ορισμός 3.1.2. *Η zariski τοπολογία στον $\mathbb{P}^n$ είναι η τοπολογία της οποίας τα κλειστά σύνολα είναι υποσύνολα της μορφής $Z(S)$ για κάποιο $S \subset k[x_0, ..., x_n]$.*

Μία *closed embedding* μίας *variety* X σε μία *variety* Y είναι ένας ισομορφισμός του X με μία *subvariety* του Y.

3.2 Τανυστική άλγεβρα

Έστω V, W διανυσματικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{C}$. Ορίζουμε $V \bigotimes_{\mathbb{C}} W$ και το ονομάζουμε τανυστικό γινόμενο να είναι ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τα σύμβολα $u \otimes w$ με $u \in V$ και $w \in W$, με τις σχέσεις $au \otimes w = u \otimes aw$, $(u_1 + u_2) \otimes w = u_1 \otimes w + u_2 \otimes w$ και $u \otimes (w_1 + w_2) = u \otimes w_1 + u \otimes w_2$. Αν έχουμε $\{u_1, ..., u_n\}$ μία βάση για τον V και $\{w_1, ..., w_m\}$ μία βάση για τον W, τότε $\{u_i \otimes w_j \mid i = 1, ..., n, j = 1, ..., m\}$ είναι μία βάση για τον $V \bigotimes_{\mathbb{C}} W$. Τώρα ορίζουμε την τανυστική άλγεβρα του V ως εξής:

$$T^k V = V^{\otimes k} = V \otimes ... \otimes V$$

και

$$T(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} T^k V = \mathbb{C} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus ....$$

Είναι άλγεβρα εφόσον μπορούμε να ορίσουμε πολλαπλασιαμό ως εξής:

$$(x_1 \otimes ... \otimes x_n) * (y_1 \otimes ... \otimes y_m) = (x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_m).$$

Η exterior άλγεβρα $\bigwedge E = \bigoplus_{k \geq 0} \bigwedge^k E$ είναι το πηλίκο της *tensor* άλγεβρας με το ιδεώδες που παράγεται από τα στοιχεία $e \otimes e$ με $e \in E$. Αν $e_1, ..., e_n$ είναι μία βάση για το E, τότε τα $\binom{n}{k}$ στοιχεία $e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}$, όπου $i_1 < .. < i_k$, αποτελούν μία βάση για το $\bigwedge^k E$. Επίσης παρατηρούμε ότι

$$(x+y) \otimes (x+y) = 0 \Rightarrow x \otimes x + x \otimes y + y \otimes x + y \otimes y = 0 \Rightarrow x \otimes y + y \otimes x = 0 \Rightarrow x \otimes y = -y \otimes x.$$

Η ιδιότητα αυτή της αντισυμμετρικότητας θα μας φανεί χρήσιμη παρακάτω.

3.3 Το πολύπτυχο του Grassman

Ορίζουμε ως $G(k, n)$ να είναι το σύνολο όλων των $k-$διάστατων διανυσματικών υποχώρων ενός διανυσματικού χώρου E διάστασης n πάνω από το $\mathbb{C}$. Για παράδειγμα,

$$G(1, n) = \mathbb{P}(E).$$

Θα ορίσουμε τη δράση της $Gl(n, \mathbb{C})$ στη $G(k, n)$. Από εδώ και στο εξής $E = \mathbb{C}^n$. Έστω V ένας υπόχωρος του E με $dim V = k$. Θεωρούμε τον υπόχωρο $g \cdot V$ όπου

$$g \cdot V = \{gv \mid v \in V\}.$$

Παρατηρούμε ότι η δράση αυτή είναι μεταβατική. Πράγματι,

$$Gl(n,\mathbb{C})\cdot\mathbb{C}^k = G(k,n)$$

, όπου ο $\mathbb{C}^k$ αποτελείται από όλα τα διανύσματα τα οποία έχουν στις τελευταίες $n-k$ θέσεις μηδενικά και άρα με τη δράση αυτή μπορείς να πάρεις οποιαδήποτε k γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα τα οποία αποτελούν βάση για ένα μοναδικό υπόχωρο $E \in G(k,n)$. Ας δούμε τώρα ποια είναι η σταθεροποιούσα

$$Gl(n,\mathbb{C})_{\mathbb{C}^k} = \{g \in Gl(n,\mathbb{C}) \mid g\cdot\mathbb{C}^k = \mathbb{C}^k\}.$$

Πρόταση 3.3.1. $Gl(k,\mathbb{C})_{\mathbb{C}^k} = \{g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \mid A \in Gl(k,\mathbb{C}), C \in Gl(n-k,\mathbb{C}), B \in M(k\times(n-k),\mathbb{C})\}$.

Απόδειξη. Επειδή $dim(g\cdot\mathbb{C}^k) = k$ έχουμε

$$Gl(n,\mathbb{C})_{\mathbb{C}^k} = \{g \in Gl(n,\mathbb{C}) \mid g\cdot\mathbb{C}^d \subset \mathbb{C}^d\}.$$

Όμως,ένα διάνυσμα $v \in \mathbb{C}^n$ θα ανήκει στο $\mathbb{C}^k$ αν και μόνον αν οι τελευταίες $n-k$ συντεταγμένες του είναι 0. Άρα

$$Gl(n,\mathbb{C})_{\mathbb{C}^k} = \{g \in Gl(n,\mathbb{C}) \mid g = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, A \in M(k\times k,\mathbb{C}),$$
$$C \in M((n-k)\times(n-k),\mathbb{C}), B \in M(d\times(n-k),\mathbb{C})\}$$

.

Για έναν πίνακα $g \in Gl(n,\mathbb{C})_{\mathbb{C}^k}$ έχω $detg = (detA)(detC)$ άρα $g \in Gl(n,\mathbb{C})$ αν και μόνον αν $A \in Gl(k,\mathbb{C})$ και $C \in Gl(n-k,\mathbb{C})$. □

Μπορούμε να εμφυτεύσουμε το $G(k,n)$ στο $P(\bigwedge^k V)$ με τον παρακάτω τρόπο. Έστω U ένας υπόχωρος του V διάστασης k με βάση $\{u_1,...,u_k\}$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$P : G(k,n) \to P(\bigwedge^k V)$$

με $P(U) = u_1\wedge u_2\wedge\ldots\wedge u_k$. Πρώτα πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση είναι καλά ορισμένη. Το παρακάτω λήμμα μας το εξασφαλίζει αυτό.

Λήμμα 3.3.2. *Έστω $\{u_1,...u_k\}$ και $\{v_1,...v_k\}$ δυο οικογένειες διανυσμάτων και πίνακας $A = (a_{ij})_{k\times k}$ τέτοιος ώστε $(u_1,...,u_k) = (v_1,...,v_k)(a_{ij})_{k\times k}$. Τότε*

$$u_1\wedge\ldots\wedge u_k = det(A)v_1\wedge\ldots\wedge v_k$$

.

Απόδειξη. Έπεται από γνώσεις γραμμικής άλγεβρας. $\square$

Είναι επίσης εύκολο να ελέγξουμε ότι η απεικόνιση είναι $1-1$.Πράγματι,

$$u_1 \wedge ... \wedge u_k \wedge u = 0 \Leftrightarrow u \in U.$$

Οι συντεταγμένες της εικόνας $P(U) = u_1 \wedge ... \wedge u_k$ θα ονομάζονται Plücker συντεταγμένες όπου $u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω $w \in \bigwedge^k V$ και $v \in V$.Τότε $w = v \wedge \varphi$ για κάποιο $\varphi \in \bigwedge^{k-1} V$ αν και μόνον αν $w \wedge v = 0$.*

Απόδειξη. $\Rightarrow) w \wedge v = v \wedge \varphi \wedge v = 0$

$\Leftarrow$) Έστω $\{e_1, ..., e_n\}$ μία βάση για το V με $e_1 = v$. Γράφουμε το w σαν γραμμικό συνδυασμό της βάσης του $\bigwedge^k V$ ως εξής:

$$w = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} a_{i_1,...,i_k} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k}.$$

Τότε

$$w \wedge v = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} a_{i_1,...,i_k} e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_k} \wedge e_1.$$

Όμως $w \wedge v = 0$, άρα $a_{i_1,...,i_k} = 0 \ \forall \ i_1, ..., i_k$ με $1 < i_1$ το οποίο δίνει το ζητούμενο. $\square$

Έστω $M(w) = \{v \in V : w \wedge v = 0\}$. Είναι πολύ εύκολο να διπιστώσει κανείς ότι ο $M(w)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του V. Πράγματι, αν $v_1, v_2 \in M(w)$, τότε $w \wedge (v_1 + a v_2) = w \wedge v_1 + a w \wedge v_2 = 0$.

Ορισμός 3.3.4. *Ένα $w \in \bigwedge^k V$ θα το λέμε totally decomposable αν υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα $v_1, ..., v_k \in V$ τέτοια ώστε $w = v_1 \wedge ... \wedge v_k$.*

Λήμμα 3.3.5. *Έστω $w \in \bigwedge^k V$. Τότε το w είναι totally decomposable αν και μόνον αν $dim M(w) = k$.*

Απόδειξη. $\Rightarrow$)Έστω ένα *totally decomposable* διάνυσμα $w \in \bigwedge^k V$, δηλαδή $w = v_1 \wedge ... \wedge v_k$ για κάποια γραμμικά ανεξάρτητα $v_i \in V$. Παρατηρούμε ότι $v \in M(w)$ αν και μόνο αν είναι γραμμικά εξαρτημένο με τα $v_1, ..., v_k$. Άρα τα $\{v_1, .., v_k\}$ αποτελούν βάση για τον $M(w)$ και άρα $dim M(w) = k$.

$\Leftarrow$)Έστω $\{v_1, ..., v_k\}$ μία βάση για τον $M(w)$. Επεκτείνουμε και παίρνουμε μία βάση $\{v_1, ..., v_k, v_{k+1}, ..., v_n\}$ για τον V.Άρα,

$$w = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} a_{i_1,...,i_k} v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_d}.$$

Για κάθε $j = 1, ..., k$ έχουμε $w \wedge v_j = 0$. Έτσι προκύπτει ότι

$$w \wedge v_j = \sum_{1 \leqslant i_1 < ... < i_k \leqslant n} a_{i_1,...,i_k} v_{i_1} \wedge ... \wedge v_{i_k} \wedge v_j.$$

Με την ίδια λογική που χρησιμοποιήσαμε στο παραπάνω λήμμα θα ισχύει

$$w \wedge v_1 = ... = w \wedge v_k = 0$$

αν και μόνον αν $a_{i_1,...,i_k} = 0 \ \forall \ i_1, ..., i_k$ εκτός αν $\{i_1, ..., i_k\} = \{1, ..., k\}$. Τελικά έχουμε

$$w = a_{1,...,k} v_1 \wedge ... \wedge v_k.$$

□

Πόρισμα 3.3.6. *Έστω $w \in \bigwedge^k V$. Θεωρούμε την γραμμική απεικόνιση*

$$\varphi_w : V \to \bigwedge^{k+1} V$$

για την οποία ισχύει ότι

$$\varphi_w(v) = w \wedge v.$$

Τότε το w είναι totally decomposable αν και μόνον αν $dimKer(\varphi_w) = k$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $Ker(\varphi_w) = \{v \in V : \varphi_w(v) = w \wedge v = 0\} = M(w)$. Το συμπέρασμα λοιπόν έπεται από τα δύο προηγούμενα λήμματα. □

Είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.3.7. *Η εικόνα της $G(k, n)$ μέσω της απεικόνισης P είναι ένα algebraic set του προβολικού χώρου $\mathbb{P}(\bigwedge^k V)$.*

Απόδειξη. Η εικόνα $P(G(k, n))$ είναι το σύνολο όλων των *totally decomposable* διανυσμάτων $w \in \bigwedge^k V$. Από το Πόρισμα 3.3.6 είναι το σύνολο όλων των $w \in \bigwedge^k V$ για τα οποία $dimKer(\varphi_w) = k$. Ισοδύναμα η τάξη της φ_w να είναι $n - k$. Τώρα ορίζουμε $\varphi : \bigwedge^k V \to Hom(V, \bigwedge^k V)$ που στέλνει το w στο φ_w. Η φ είναι γραμμική απεικόνιση . Έτσι, το $P(G(k, n) \subset P(\bigwedge^k V)$ σαν *subvariety* που ορίζεται από τις $(n-k+1)\times(n-k+1)$ υποορίζουσες κοιτώντας τον $Hom(V, \bigwedge^k V)$ σαν πίνακα. □

Παράδειγμα 3.3.8. *Grassmanian $G(2, 4)$. Έστω $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ μια βάση του V.Η βάση για τον $\Lambda^2 V$ είναι η εξής: $\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$.*

Αν $\{u_1, u_2\}$ είναι μία βάση για το $U \in G(2, 4)$ με

$$u_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + a_{41}e_4,$$

$$u_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + a_{42}e_4.$$

Τότε,

$$u_1 \wedge u_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1 \wedge e_2 + (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{22})e_1 \wedge e_3 + (a_{11}a_{42} - a_{12}a_{41})e_1 \wedge e_4 + (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})e_2 \wedge e_3 + (a_{21}a_{42} - a_{41}a_{22})e_2 \wedge e_4 + (a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})e_3 \wedge e_4$$

Άρα οι συντεταγμένες Plücker είναι ακριβώς οι 2×2 υποορίζουσες του πίνακα

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$$

3.4 Πολύπτυχο σημαιών

Ορισμός 3.4.1. *Μία flag είναι μία ακολουθία γραμμικών υποχώρων $F_\bullet = (F_1 \subset F_2 \subset ... \subset F_k)$ του $\mathbb{C}^n$. Μία flag θα λέγεται πλήρης αν $dimF_i = i$ και $k = n$*

Το σύνολο των full flags θα το συμβολίζουμε με $Fl(n)$. Η $Fl(n)$ έχει τη δόμη μιας projective variety. Πράγματι,

$$Fl(n) \subset \prod_{d=1}^{n} G(d,n) \subset \prod_{d=1}^{n} \mathbb{P}(\bigwedge^{d} \mathbb{C}^n) \subset \mathbb{P}(\bigotimes_{d=1}^{n} \bigwedge^{d} \mathbb{C}^n) = \mathbb{P}^r$$

Η $Gl(n,\mathbb{C})$ δρα στην $Fl(n)$ ως εξής: Αν $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V_n$ μία full flag και $g \in Gl(n,\mathbb{C})$, τότε $g \cdot V_1 \subset g \cdot V_2 \subset ... \subset g \cdot V_n$ είναι επίσης μία full flag. Η δράση αυτή είναι μεταβατική. Πράγματι,θεωρώντας την $full\ flag$

$$F_\bullet = \langle e_1 \rangle \subset .... \subset \langle e_1, ..., e_{n-1} \rangle \subset \mathbb{C}^n,$$

όπου $\{e_1, ..., e_n\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{C}^n$, τότε κάθε άλλη $full\ flag$ είναι της μορφής

$$V_\bullet = \langle ge_1 \rangle \subset .... \subset \langle ge_1, ..., ge_{n-1} \rangle \subset \mathbb{C}^n,$$

για κάποιο $g \in Gl(n,\mathbb{C})$. Η σταθεροποιούσα $Gl(n,\mathbb{C})_{F_\bullet}$ είναι η ομάδα B των αντιστρέψιμων άνω τριγωνικών πινάκων όπως προκύπτει άμεσα αν μιμηθούμε την απόδειξη της πρότασης 3.3.1.

Ορισμός 3.4.2. *Για κάθε $w \in S_n$ υπάρχει ένα Schubert κελί $C_w \subset Fl(n) = Fl(E)$, το οποίο ορίζεται ως εξής:*

$$C_w = \{E_\bullet \in Fl(E) : dim(E_p \cap F_q) =\mid i \leqslant p : w(i) \leqslant q \mid \text{ για } 1 \leqslant p, q \leqslant m\}$$

Παρατηρούμε ότι $C_w \cong \mathbb{C}^{l(w)}$.

Εφόσον κάθε σημαία καθορίζεται από έναν πίνακα σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή, το $Fl(n)$ είναι ξένη ένωση των Schubert κελιών C_w, για κάθε $w \in S_n$.Τα κελιά αυτά είναι ακριβώς οι τροχιές από τη δράση της ομάδας $B \subset GLn(\mathbb{C})$ των άνω τριγωνικών πινάκων.

Παράδειγμα 3.4.3. *Το Schubert κελί που αντιστοιχεί στη μετάθεση $w = 2413$ είναι το*

$$C_w = \begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω T το σύνολο των αντιστρέψιμων διαγώνιων πινάκων. Παρατηρούμε ότι $T \cdot C_w = C_w$ εφόσον αν πολλαπλασιάσω ένα πίνακα g με ένα διαγώνιο πίνακα απλώς πολλαπλασιάζω τις γραμμές του, τα στοιχεία της γραμμής με τον ίδιο αριθμό, και έτσι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του δεν αλλάζει.Τώρα παρατηρούμε ότι η δράση της T στη $Gl(n, \mathbb{C})/B$ έχει σταθερά σημεία τους πίνακες μεταθέσεων, δηλαδή ένα σταθερό σημείο σε κάθε schubert κελί όπως φαίνεται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.4.4. *Τα σταθερά σημεία της δράσης της T στο $Fl(n)$ είναι οι $n!$ σημαίες της μορφής*

$$\langle e_{w(1)} \rangle \subset \langle e_{w(1)}, e_{w(2)} \rangle \subset ... \subset \langle e_{w(1)}, ..., e_{w(n)} \rangle = \mathbb{C}^m$$

για όλα τα $w \in S_n$.

Απόδειξη. Έστω μία σημαία $E_1 \subset ... \subset E_m = \mathbb{C}^n$ η οποία μένει αναλλοίωτη κάτω από τη δράση της T. Έστω ότι το E_1 παράγεται από το $v = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n$. Τότε το E_1 μένε αναλλοίωτο από την T αν και μόνον αν ακριβώς ένας συντελεστής λ_p είναι μη μηδενικός και άρα $E_1 = \langle e_p \rangle$. Το E_2 τώρα παράγεται από $\langle e_p, u \rangle$ με $u = \sum_{q \neq p} \lambda_q e_q$. Ομοίως λοιπόν το u πρέπει να έχει ακριβώς έναν μη μηδενικό συντελεστή λ_q, άρα $E_2 = \langle e_p, e_q \rangle$ με $q \neq p$. Συνεχίζοντας επαγωγικά βλέπουμε ότι μία flag καθορίζεται από μία αναδιάταξη των στοιχείων της βάσης. □

Θεώρημα 3.4.5. *(Bruhat Decomposition) Έστω $G = Gl(n, \mathbb{C})$ και B η ομάδα των αντιστρέψιμων άνω τριγωνικών πινάκων. Τότε,*

$$G = \bigcup_{w \in S_n} BwB$$

και άρα έχουμε

$$Fl(n) = G/B = \bigcup_{w \in S_n} Bw = \bigcup_{w \in S_n} C_w$$

Ορισμός 3.4.6. *Schubert variety θα ονομάζουμε τη* **zariski** *κλειστότητα του κελιού C_w και θα τη συμβολίζουμε με X_w, δηλαδή $X_w = \overline{C_w}$.*

Παράδειγμα 3.4.7. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 & 0 \\ 0 & * & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in X_{2341} = \overline{\begin{pmatrix} * & 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Σκοπός μας είναι να περιγράψουμε για ποια ζευγάρια (u, v) η X_u περιέχεται στη X_v. Καθοριστικό ρόλο για το σκοπό αυτό παίζει η διάταξη Bruhat όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.8. *Για $u, v \in S_n$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $u \leqslant v$

(ii) $X_u \subset X_v$

Απόδειξη. $(i) \Rightarrow (ii)$. Αν $u \leqslant v$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u = v(j, k)$ με $j < k$ και $v(j) > v(k)$. Όπως είδαμε νωρίτερα, τα X_u και X_v διατηρούνται από τη δράση της B, άρα είναι αρκετό να δείξουμε ότι το σημείο $x(u)$ είναι και στο X_v. Για $t \neq 0$, θεωρούμε τη σημαία $E_\bullet(t)$ η οποία παράγεται από τα $\{f_1, ..., f_n\}$,όπου $f_i = e_{v(i)}$ για κάθε $i \neq j, k$ και

$$f_j = e_v(j) + \frac{1}{t} e_{v(k)},$$

$$f_k = e_u(k).$$

Ισοδύναμα,μπορούμε να πάρουμε

$$f_j = e_{v(k)} + te_{v(j)} = e_{u(j)} + te_{u(k)},$$

$$f_k = e_{u(k)}.$$

Η πρώτη μορφή δείχνει ότι κάθε $E_\bullet(t) \in C_v$ και αν πάρω όριο $t \to 0$ στη δεύτερη μορφή, τότε παίρνω το $x(u)$. Άρα $x(u) \in X_v$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Έστω Ω_w το σύνολο όλων των $flags$ $E_\bullet$ στο $Fl(n)$ για τις οποίες

$$dim(E_p \cap F_q) \geq | \, i \leqslant p : w(i) \leqslant q \, |$$

για $1 \leqslant p, q \leqslant n$. Αυτό είναι ένα αλγεβρικά κλειστό σύνολο του $Fl(n)$. Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $C_w \in \Omega_w$. Άρα και η κλειστότητα του $X_w \in \Omega_w$. Αρκεί λοιπόν να δείξω ότι αν $u \nleq v$, τότε $C_u \cap \Omega_v = \varnothing$. Έστω ότι επιλέγουμε p, q τέτοια ώστε $u[p, q] < v[p, q]$. Τότε είναι φανερό από τους ορισμούς ότι κανένα σημείο του C_u δεν μπορεί να είναι στο Ω_v. Από αυτό συνεπάγεται ότι $X_u \nsubseteq X_v$ και μάλιστα $X_w = \Omega_w \; \forall \; w \in S_n$. □

Από την παραπάνω απόδειξη είναι φανερό ότι

$$X_w = \{E_\bullet \in Fl(E) : dim(E_p \cap F_q) \geq | \, i \leqslant p : w(i) \leqslant q \, | \text{ για } 1 \leqslant p, q \leqslant n\}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Πολυώνυμα Kazhdan-Lusztig

4.1 R-πολυώνυμα

Στην παράγραφο αυτή ορίζουμε μία οικογένεια πολυωνύμων, τα λεγόμενα $R-$πολυώνυμα, μέσω των οποίων θα μπορέσουμε να περιγράψουμε τα Kazhdan-Lusztig πολυώνυμα, που είναι και ο στόχος αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω $A = \mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$. Η άλγεβρα Hecke $H = H_q(W)$ είναι το ελεύθερο $A-$πρότυπο πάνω από το σύνολο W, με στοιχεία βάσης τα T_w, με $w \in W$, τα οποία υπακούουν στις εξής σχέσεις:*

$$T_sT_w = T_{sw}, \text{ αν } l(sw) > l(w)$$

$$T_s^2 = (q-1)T_s + qT_e$$

Πρόταση 4.1.2. *Για όλα τα $w \in W$,*

$$(T_{w^{-1}})^{-1} = (-1)^{l(w)}(q^{l(w)})^{-1}\sum_{x \leqslant w}(-1)^{l(x)}R_{x,w}(q)T_x,$$

όπου $R_{x,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ είναι πολυώνυμο βαθμού $l(w,x)$ στο q και $R_{w,w}(q) = 1$.

Απόδειξη. Για $w = e$ είναι προφανές. Επίσης από το Θεώρημα 4.1.1 έχω το ζητούμενο και για $w = s$ με $s \in S$ θέτοντας $R_{1,s} = q - 1$. Προχωράμε με επαγωγή στο $l(w)$. Έστω $l(w) > 0$. Τότε $w = su$ για κάποιο $s \in S$ και $l(u) = l(w) - 1$. Τότε έχω:

$$(T_{w^{-1}})^{-1} = (T_{u^{-1}}T_s)^{-1} = T_s^{-1}(T_{u^{-1}})^{-1} =$$
$$q^{-1}(T_s - (q-1)T_e)((-1)^{l(u)}(q^{l(u)})^{-1}\textstyle\sum_{y \leqslant u}(-1)^{l(y)}R_{y,u}Ty) =$$
$$(-1)^{l(w)}(q^{l(w)})^{-1}[(q-1)\textstyle\sum_{y \leqslant u}(-1)^{l(y)}R_{y,u}T_y - \sum_{y \leqslant u}(-1)^{l(y)}R_{y,u}T_sT_y].(1)$$

Το δεύτερο άθροισμα στην (1) σπάει σε δύο περιπτωσεις εξής:

Αν $sy > y$ τότε $T_sT_y = T_{sy}$ και άρα $(-1)^{l(y)}R_{y,u}T_sT_y = (-1)^{l(y)}R_{y,u}T_{sy}$.

Αν $sy < y$ τότε $(-1)^{l(y)}R_{y,u}T_sT_y = (q-1)(-1)^{l(y)}R_{y,u}T_y + q(-1)^{l(y)}R_{y,u}T_{sy}$.

Στην δεύτερη περίπτωση ο πρώτος όρος ακυρώνει έναν όρο από το πρώτο άθροισμα της (1) και έτσι η (1) μπορεί να ξαναγραφτεί σαν άθροισμα τριών όρων:

- $(q-1)(-1)^{l(y)}R_{y,u}T_y$, με $y \leqslant u, y < sy$
- $-(-1)^{l(y)}R_{y,u}T_{sy}$, με $y \leqslant u, y < sy$
- $-q(-1)^{l(y)}R_{y,u}T_{sy}$, με $y \leqslant u, y > sy$

Σε κάθε περίπτωση, έχουμε $y < w$ και $sy \leqslant w$ από την Πρόταση 1.3.4 . Κάθε $x \leqslant w$ εμφανίζεται είτε σαν $y \leqslant u$ είτε σαν sy με $y \leqslant u$ το οποίο προκύπτει από το Θεώρημα 1.3.1 . Πρέπει να ελέγξουμε αν ο συντελεστής του T_x στην (1) ικανοποιεί το κριτήριο της πρότασης.

(i) Έστω $x \leqslant w$ με $x > sx$. Τότε το x εμφανίζεται μόνο στην δεύτερη περίπτωση με $x = sy$ για $y \leqslant u$ και άρα έχει τον εξής συντελεστή : $-(-1)^{l(y)}R_{y,u} = (-1)^{l(x)}R_{sx,sw}$ με βαθμό $l(sw, sx) = l(w, x)$. Στην περίπτωση που $x = w$,τότε $y = u$ και $R_{y,y} = 1$ από επαγωγική υπόθεση. Είναι φανερό ότι τα πολυώνυμα $R_{x,w} := R_{sx,sw}$ έχουν τα απαιτούμενα χαρακτηριστικά.

(ii) Έστω τώρα $x < w$ με $sx > x$. Τότε έχω τις εξής δύο πιθανές περιπτώσεις:

(α′) Αν $sx < u$,το T_x εμανίζεται και στην πρώτη περίπτωση με $x = y \leqslant u$ και στην τρίτη περίπτωση με $x = sy, y = sx \leqslant u$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω δύο έχουμε για τον T_x τον εξής συντελεστή:

$$(q-1)(-1)^{l(x)}R_{x,u} - q(-1)^{l(sx)}R_{sx,u}.$$

Το $(q-1)R_{x,u}$ έχει βαθμό $1 + l(u, x) = l(w) - 1 - l(x) + 1 = l(w, x)$, ενώ το $qR_{sx,u}$ έχει βαθμό $l(u) - l(sx) + 1 = l(w) - 1 - (l(x) + 1) + 1 = l(w, x) - 1$. Άρα ο συντελεστής του T_x έχει βαθμό $l(w, x)$, και έτσι ορίζουμε

$$R_{x,w} := (q-1)R_{x,sw} + qR_{sx,sw}.$$

(β′) Αν $sx \nleq u$,το T_x εμφανίζεται μόνο στην πρώτη περίπτωση με συντελεστή $(-1)^{l(x)}(q-1)R_{x,u}$. Κάι πάλι θέτοντας $R_{sx,u} = 0$ μπορούμε να ορίσουμε τα $R_{x,w}$ ακριβώς όπως στην προηγούμενη περίπτωση.

□

Πόρισμα 4.1.3. *Υπάρχει μοναδική οικογένεια πολυωνύμων* $\{R_{u,v}(q)\}_{u,v\in W} \subseteq \mathbb{Z}[q]$ *η οποία ικανοποιεί τα εξής:*

(i) $R_{u,v}(q) = 0$, *αν* $u \nleq v$.

(ii) $R_{u,v}(q) = 1$, *αν* $u = v$.

(iii) *Αν* $s \in D_R(v)$, *τότε*

$$R_{u,v}(q) = \begin{cases} R_{us,vs}(q), & \text{αν } s \in D_R(u), \\ qR_{us,vs}(q) + (q-1)R_{u,vs}(q), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Τα παραπάνω πολυώνυμα ονομάζονται $R-$πολυώνυμα και το παραπάνω πόρισμα δίνει έναν αλγοριθμικό τρόπο υπολογισμού των πολυωνύμων αυτών όπως θα φανεί αργότερα στο Παράδειγμα 4.1.6.

Παρατήρηση 4.1.4. *Στην απόδειξη της πρότασης* 3.0.2 *είναι φανερό ότι αν* $u \leqslant v$ *με* $u, v \in W$, *τότε* $R_{u,v}(0) = (-1)^{l(u,v)}$.

Πρόταση 4.1.5. $R_{x,w} = R_{w_0w,w_0x}$ $\forall\ x, w \in W$ *με* $x \leqslant w$. *όπου* w_0 *το στοιχείο με το μεγαλύτερο μήκος στην* W.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $l(w)$. Προφανώς $R_{e,e} = R_{w_0,w_0} = 1$. Αν $l(w) > 0$, τότε βρίσκω $s \in S$ για το οποίο $ws < w$ και διακρίνω τις εξής δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $xs < x$, τότε $w_0x < w_0xs$ και άρα από το Πόρισμα 4.1.3 έχουμε ότι

$$R_{x,w} = R_{xs,ws} = R_{w_0ws,w_0xs} = R_{w_0w,w_0x}.$$

(ii) Αν $x < xs$ τότε από το Πόρισμα 4.1.3 και την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι

$$R_{x,w} = (q-1)R_{x,ws} + qR_{xs,ws} = (q-1)R_{w_0ws,w_0x} + qR_{w_0ws,w_0xs} =$$
$$(q-1)R_{w_0w,w_0xs} + qR_{w_0ws,w_0xs} = R_{w_0w,w_0x}.$$

□

Παράδειγμα 4.1.6. *Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το* $R_{123,321}(q)$ *στην* S_3. *Διαλέγοντας* $s = (1,2) \in D(321)$ *έχουμε ότι*

$$R_{123,321}(q) = qR_{213,231}(q) + (q-1)R_{123,231}(q).$$

Τώρα αν διαλέξουμε $s = (2,3) \in D(231)$ *παίρνουμε ότι*

$$R_{213,231}(q) = qR_{231,213}(q) + (q-1)R_{213,213}(q) = q - 1$$

και

$$R_{123,231}(q) = qR_{132,213}(q) + (q-1)R_{123,213}(q) = (q-1)R_{123,213}(q).$$

Τελικά προκύπτει ότι

$$R_{123,321}(q) = q(q-1) + (q-1)^3 = q^3 - 2q^2 + 2q - 1.$$

4.2 Πολυώνυμα Kazhdan-Lusztig

Έχοντας δει ότι μπορούμε να αντιστρέφουμε τα T_w στην H ορίζουμε έναν αυτομορφισμό δακτυλίων τάξης 2, $i : H \to H$ με $i(T_w) = (T_{w^{-1}})^{-1}$. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξει κανείς ότι $i^2(T_w) = T_w$ για κάθε $w \in W$ αλλά για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [6].

Τώρα σκοπός είναι να βρούμε μία νέα βάση $\{C_w\}$ για την H, τα στοιχεία της οποίας μένουν σταθερά όταν εφαρμόσουμε σε αυτά την i. Αυτό ακριβώς κατάφεραν οι Kazhdan και Lusztig στο [7] το 1979 δίνοντας το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.2.1. *Για κάθε $w \in W$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $C_w \in H$ που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:*

(i) $i(C_w) = C_w$,

(ii) $C_w = (-1)^{l(w)}(q^{l(w)})^{\frac{1}{2}} \sum_{x \leqslant w} (-1)^{l(x)}(q^{l(x)})^{-1}\bar{P}_{x,w}T_x$, *όπου* $P_{x,u}(q) \in \mathbb{Z}[q]$ *και* $\bar{P}_{x,w} = P_{x,w}(q^{-1})$.

Πόρισμα 4.2.2. *Υπάρχει μοναδική οικογένεια πολυυωνύμων $\{P_{u,v}(q)\}_{u,v \in W} \subseteq \mathbb{Z}[q]$ η οποία ικανοποιεί τα εξής:*

(i) $P_{u,v}(q) = 0$,*αν* $u \not\leqslant v$.

(ii) $P_{u,v}(q) = 1$,*αν* $u = v$.

(iii) $deg(P_{u,v}(q)) \leqslant \frac{1}{2}(l(u,v) - 1)$,*αν* $u < v$.

(iv) $q^{l(u,v)}P_{u,v}(q^{-1}) = \sum_{a \in [u,v]} R_{u,a}(q)P_{a,v}(q)$,*αν* $u \leqslant v$.

Τα παραπάνω πολυώνυμα ονομάζονται Kazhdan-Lusztig και το παραπάνω πόρισμα δίνει έναν τρόπο, πολύπλοκο βέβαια, για τον υπολογισμό τους, όπως φαίνεται στο Παράδειγμα 4.2.3.

Παράδειγμα 4.2.3. *Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $P_{123,321}(q)$ στην S_3. Από το (iv) του πορίσματος 4.2.2 έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} q^3P_{123,321}(q^{-1}) - P_{123,321}(q) = R_{123,213}(q)P_{213,321}(q) + R_{123,132}(q)P_{132,321}(q) + \\ R_{123,231}(q)P_{231,321}(q) + R_{123,312}(q)P_{312,321}(q) + R_{123,321}P_{321,321}(q). \end{aligned}$$

Όμως, από το (iii) του πορίσματος 4.2.2 καθώς και από την Πρόταση 4.2.7 που θα δούμε παρακάτω, ξέρουμε ότι $P_{u,321} = 1$ *για όλα τα* $u \in S_3 \setminus \{123\}$ *και άρα παίρνουμε ότι*

$$q^3 P_{123,321}(q^{-1}) - P_{123,321}(q) =$$
$$R_{123,213}(q) + R_{123,132}(q) + R_{123,231}(q) + R_{123,312}(q) + R_{123,321}(q).$$

Εργαζόμαστε όπως στο Παράδειγμα 4.1.6 για τον υπολογισμό των $R-$*πολυωνύμων και έτσι προκύπτει ότι*

$$q^3 P_{123,321}(q^{-1}) - P_{123,321}(q) = (q-1)+(q-1)+(q-1)^2+(q-1)^2+(q^3-2q^2+2q-1) = q^3-1.$$

Τώρα επειδή $\frac{1}{2}(l(321) - l(123)) = \frac{3}{2}$ *από το Πόρισμα 4.2.2 συμπεραίνουμε ότι*

$$P_{123,321}(q) = 1.$$

4.2.1 0-Hecke άλγεβρα

Στόχος αυτής της υποενότητας είναι να υπολογίσουμε τους σταθερούς όρους των Kazhdan-Lusztig πολυωνύμων. Για το σκοπό αυτό θα επικεντρωθούμε στην 0-Hecke άλγεβρα μέσω της οποίας θα συνάγουμε την συνάρτηση Möbius της διάταξης Bruhat η οποία με τη σειρά της θα μας δώσει αυτό που θέλουμε.

Θέτοντας $q = 0$ στο Θεώρημα 4.1.1 έχω για τα στοιχεία της βάσης τις εξής σχέσεις:

$$T_s T_w = T_{sw}, \text{ αν } l(sw) > l(w)$$

$$T_s^2 = -T_s.$$

Λήμμα 4.2.4. *Αν* $w = s_1 ... s_k$ *ανηγμένη λέξη, τότε*

$$(T_{s_1} + T_e)...(T_{s_k} + T_e) = \sum_{x \leqslant w} T_x.$$

Απόδειξη. Αν $w = e$ τότε το λήμμα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. Οπότε υποθέτουμε ότι $k > 0$ και έστω $s = s_1$. Ισχυει ότι $sw = s_2 ... s_k$ και άρα κάνοντας επαγωγή προκύπτει ότι $(T_{s_2} + T_e)..(T_{s_k} + T_e) = \sum_{x \leqslant sw} T_x$. Άρα,

$$\begin{gathered}
(T_{s_1} + T_e)...(T_{s_k} + T_e) = \textstyle\sum_{x \leqslant sw} (T_s + T_e) T_x \\
= \textstyle\sum_{x \leqslant sw, l(sx) > l(x)} (T_s T_x + T_x) + \sum_{x \leqslant sw, l(sx) < l(x)} (T_s + T_e) T_x \\
= \textstyle\sum_{x \leqslant sw, l(sx) > l(x)} (T_{sx} + T_x) + \sum_{x \leqslant sw, l(sx) < l(x)} (T_s + T_e) T_s T_{sx} \\
= \textstyle\sum_{x \leqslant sw, l(sx) > l(x)} (T_{sx} + T_x) + \sum_{x \leqslant sw, l(sx) < l(x)} (T_s^2 + T_s) T_{sx} \\
= \textstyle\sum_{x \leqslant sw, l(sx) > l(x)} (T_{sx} + T_x) + \sum_{x \leqslant sw, l(sx) < l(x)} (-T_s + T_s) T_{sx} \\
= \textstyle\sum_{x \leqslant sw, l(sx) > l(x)} (T_{sx} + T_x) = \sum_{x \leqslant sw, l(sx) > l(x)} T_{sx} + \sum_{x \leqslant sw, l(sx) > l(x)} T_x \\
= \textstyle\sum_{sy \leqslant sw, l(y) > l(sy)} T_y + \sum_{y \leqslant sw, l(sy) > l(y)} T_y = \sum_{y \leqslant w} T_y.
\end{gathered}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 1.3.4. □

Πρόταση 4.2.5. *Έστω* $\psi : H \to H$ *με* $\psi(T_s) = -(T_s + T_e)$. *Τότε η* ψ *είναι ένας ομομορφισμός δακτυλίων τάξης δύο.*

Απόδειξη. $(-(T_s+T_e))^2 = T_s^2 + 2T_s + T_e = -T_s + 2T_s + T_e = T_s + T_e$. Επιπλέον, έστω $s \in S$ με $l(sw) > l(w)$. Τότε,

$$(T_s + T_e)(T_w + T_e) = T_sT_w + T_s + T_w + T_e = T_{sw} + T_s + T_w + T_e = T_{sw} + T_e,$$

όπου η τελευτέα ισότητα ισχύει από το προηγούμενο λήμμα.
Τα στοιχεία $\{-(T_s + T_e)\}$ υπακούουν λοιπόν στις σχέσεις που συμβαίνουν στα στοιχεία βάσης της H, άρα η ψ είναι αυτομορφισμός και μάλιστα

$$\psi^2(T_s) = \psi(-T_s - T_e) = -(-T_s - T_e + T_e) = T_s$$

άρα είναι και τάξης δύο. □

Θεώρημα 4.2.6. *Ισχύει* $\mu(x,w) = (-1)^{l(w)-l(x)}$ *για όλα τα* $x \leqslant w$ *στη* W.

Απόδειξη. Συνδυάζοντας το προηγούμενο λήμμα με την προηγούμενη πρόταση έχω:

$$(T_{s_1} + T_e)...(T_{s_k} + T_e) = \sum_{x\leqslant w} T_x \Rightarrow \psi(T_{s_1} + T_e)...\psi(T_{s_k} + T_e) = \sum_{x\leqslant w} \psi(T_x) \Rightarrow$$
$$(-1)^{l(w)}T_w = \sum_{x\leqslant w}(-1)^{l(x)}(T_x + T_e) \Rightarrow T_w = \sum_{x\leqslant w}(-1)^{l(w)-l(x)}(T_x + T_e)$$

Από την αντιστροφή του Möbius έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 4.2.7. *Έστω* $u, v \in W$, $u \leqslant v$. *Τότε* $P_{u,v}(0) = 1$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $l(u,v)$. Αν $l(u,v) = 0$ τότε $P_{u,v}(0) = 1$ από το (ii) του πορίσματος 4.2.2. Έστω τώρα $l(u,v) > 0$. Τότε πάλι από το (iv) του πορίσματος 4.2.2 έχουμε ότι

$$\sum_{a\in[u,v]} R_{u,a}(0)P_{a,v}(0) = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση 4.1.4 και την επαγωγική υπόθεση παίρνουμε

$$P_{u,v}(0) = -\sum_{u<a\leqslant v}(-1)^{l(u,a)}.$$

Τέλος, από το Θεωρήμα 4.2.6 έχουμε

$$P_{u,v}(0) = -\sum_{u<a\leqslant v}\mu(u,a) = \mu(u,u) = 1,$$

όπως ακριβώς θέλαμε. □

Στην απόδειξη φάνηκε ότι ακόμα και για να υπολογίσουμε το σταθερό όρο των πολυωνύμων αυτών έπρεπε να υπολογίσουμε την συνάρτηση Möbius. Άρα ο υπολογισμός τους είναι αρκετά περίπλοκος και υπάρχουν αρκετά πράγματα τα οποία δεν γνωρίζουμε για αυτά. Για παράδειγμα, οι Kazhdan και Lusztig στο [7] είχαν κάνει την εικασία ότι οι συντελεστές των Kazhdan-Lusztig πολυωνύμων σε μία ομάδα Coxeter είναι θετικοί. Η εικασία αυτή αποδείχτηκε μόλις το 2013 από τον Ben Elias και Geordie Williamson στο [4] και η απόδειξη τους είναι καθαρά αλγεβρική.

Το παρακάτω θεώρημα δείχνει την σύνδεση των Kazhdan-Lusztig πολυωνύμων με τις Schubert varieties.

Θεώρημα 4.2.8. *Έστω $u \in S_n$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) $P_{e,u}(q) = 1$,

(ii) X_u *ομαλή variety.*

4.3 $h-$διανύσματα και πολυώνυμα Kazhdan-Lusztig

Στην παράγραφο αυτή, μελετάμε από μία πιο συνδυαστική σκοπιά τα R και Kazhdan-Lusztig πολυώνυμα της συμμετρικής ομάδας, δίνοντας μία σύνδεση με τα g-πολυώνυμα και τα h-διανύσματα.

Ορισμός 4.3.1. *Έστω $s \in S_n$. Για $a, b, i, j \in [n]$ ορίζουμε:*

$$\mathcal{B}_{i,j}(s) = \{(s_{i_k}, ..., s_{i_1}) \in S_n : k \in [n], i = i_1 < i_2 < ... < i_k = j, s_{i_1} < ... < s_{i_k}\},$$

$$\mathcal{B}(s) = \bigcup_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathcal{B}_{i,j}(s),$$

$$T_s[i, j; a, b] = \{r \in [n] : i < r < j, a < s_r < b\},$$

Δοθέντος $w = (s_{i_k}, ..., s_{i_1}) \in \mathcal{B}_{i,j}(s)$ ορίζουμε :

$$n(w, s) = \sum_{r=1}^{k-1} \mid T_s[i_r, i_{r+1}; s_{i_r}, s_j] \mid .$$

Παράδειγμα 4.3.2. *Έστω $s = 215496378$. Τότε*

$$\mathcal{B}_{1,6}(s) = \{(6, 2), (6, 5, 2,), (6, 4, 2)\}$$

και

$$T_s[2, 6; 4, 8] = \{3\}.$$

Επίσης,αν $w = (8, 6, 4, 2) \in \mathcal{B}_{1,9}(s)$,*τότε*

$$n(w, s) = 1 + 0 + 1 = 2.$$

Πρόταση 4.3.3. *Έστω* $s \in S_n$ *και* $w \in \mathcal{B}(s)$. *Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) $s < ws$

(ii) $l(ws) - l(s) = 2n(w, s) + k(w) - 1$,
όπου με $k(w)$ *συμβολίζουμε το μήκος του μεγαλύτερου κύκλου στην* w.

Απόδειξη. Έστω $w = (s_{i_k}, ..., s_{i_1}) \in \mathcal{B}(s)$. Τότε $w = t_1...t_{k-1}$ όπου $t_r = (s_{i_k}, s_{i_r})$ $\forall$ $r = 1, ..., k-1$.Άρα,

$$ws = t_1...t_{k-1}s$$

και επειδή $s_{i_k} > s_{i_r}$ και $i_k > i_r$ ισχύει ότι

$$l(t_r...t_{k-1}s) - l(t_{r+1}...t_{k-1}s) = 2 \mid T_s[i_r, i_{r+1}; s_{i_r}, s_{i_k}] \mid +1$$

για κάθε $r = 1, ..., k-1$.Προσθέτωντας κατά μέλη προκύπτει :

$$\sum_{r=1}^{k-1}(l(t_r...t_{k-1}s) - l(t_{r+1}...t_{k-1})) = 2n(w, s) + k(w) - 1$$

$$\Leftrightarrow l(ws) - l(s) = 2n(w, s) + k(w) - 1.$$

Άρα έπεται το (ii) και από τον ορισμό της διάταξης Bruhat έπεται και το (i) εφόσον $l(ws) - l(s) > 0$ και το $ws = t_1...t_{k-1}s$. □

Πρόταση 4.3.4. *Έστω* $s \in S_n$ *και* $i, j \in [n]$ *τέτοια ώστε* $\mathcal{B}_{i,j}(s) \neq \emptyset$. *Τότε υπάρχει μοναδικό* $w \in \mathcal{B}_{i,j}(s)$ *τέτοιο ώστε* $n(w, s) = 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{B}_{i,j}(s) \neq \emptyset \Leftrightarrow i \leqslant j$ και $s_i \leqslant s_j$. Μπορούμε να υποθέσουμε λοιπόν ότι $i < j$ και $s_i < s_j$. Τώρα θέτουμε $i_1 = i$ και

$$i_{r+1} = \begin{cases} min(T_s[i_r, j+1; s_{i_r}, s_j + 1]), & \text{αν } i_r < j \text{ και } s_{i_r} < s_j \\ j, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

για $r = 1, 2, ...$Τότε, προφανώς

$$i = i_1 < ... < i_k = j$$

και

$$s_i = s_{i_1} < ... < s_{i_k} = s_j$$

όπου $k = min\{r \in P : i_r = j\}$. Οπότε το στοιχείο $w_0 = (s_{i_k}, ..., s_{i_1}) \in \mathcal{B}_{i,j}(s)$. Επιπλέον, για κάθε $r \in [k-1]$ έχουμε ότι

$$T_s[i_r, i_{r+1}; s_{i_r}, s_j] = \emptyset.$$

Πράγματι, αν $w \in T_s[i_r, i_{r+1}; s_{i_r}, s_j]$ τότε $w < i_{r+1}$ και $w \in T_s[i_r, j+1; s_{i_r}, s_j+1]$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την ελαχιστικότητα του i_{r+1}. Τότε όμως

$$n(w_0, s) = \sum_{r=1}^{k-1} \mid T_s[i_r, i_{r+1}; s_{i_r}, s_j] \mid \Rightarrow n(w_0, s) = 0.$$

Έστω $\sigma = (s_{j_m}, ..., s_{j_1})$ μία άλλη μετάθεση τέτοια ώστε $\sigma \in \mathcal{B}_{i,j}(s)$ και $n(\sigma, s) = 0$. Τότε,

$$i = j_1 < ... < j_m = j,$$

$$s_i = s_{j_1} < ... < s_{j_m} = s_j,$$

και επειδή $n(\sigma, s) = 0$,

$$T_s[j_r, j_{r+1}; s_{j_r}, s_j] = \emptyset$$

για $r = 1, ..., m-1$. Ισχυριζόμαστε ότι $i_r = j_r$ για $r = 1, ..., min(k, m)$. Η απόδειξη του ισχυρισμού θα γίνει με επαγωγή στο r. Για $r = 1$ ισχύει $i_1 = j_1 = i$.Έστω $t \in [min(k, m) - 1]$ και υποθέτουμε ότι $i_r = j_r$ για $r = 1, ..., t$. Τότε, $j_{t+1} \in T_s[i_t, j+1; s_{i_t}, s_j+1]$.Από την ελαχιστικότητα του i_{t+1} έχουμε

$$i_{t+1} \leqslant j_{t+1}.$$

Τώρα, αν $i_{t+1} < j_{t+1}$,τότε από επαγωγική υπόθεση ισχύει $j_t = i_t < i_{t+1} < j_{t+1}$ και $s_{j_t} = s_{i_t} < s_{i_{t+1}} < s_j$, άρα $i_{t+1} \in T_s[j_t, j_{t+1}; s_{j_t}, s_j]$, το οποίο είναι άτοπο εφόσον $T_s[j_r, j_{r+1}; s_{j_r}, s_j] = \emptyset$ για κάθε $r = 1, ..., m-1$. Άρα $i_{t+1} = j_{t+1}$ και ο ισχυρισμός αποδείχτηκε. Μάλιστα, $i_{min(k,m)} = j_{min(k,m)} = j$ και άρα $k = m$, δηλαδή $w_0 = \sigma$, όπως ακριβώς θέλαμε. □

Τώρα θα ορίσουμε μία μετρική στην S_n η οποία θα παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στη συνέχεια.

Ορισμός 4.3.5. *Έστω $s, t \in S_n$. Ορίζουμε*

$$d(s, t) = max\{i \in [n] : s_i^{-1} \neq t_i^{-1}\}.$$

Κάνουμε τη σύμβαση ότι $max\{\emptyset\} = 0$

Παράδειγμα 4.3.6. $d(198265374, 298461357) = max\{1, 2, 4, 5, 7\} = 7$

Η παρακάτω πρόταση αποδεικνύει ότι η d είναι πράγματι μετρική και μάλιστα αναλλοίωτη ως προς τον από δεξια πολλαπλασιασμό.

Πρόταση 4.3.7. *Για όλα τα $s, t, w \in S_n$ ισχύει:*

(i) $d(s, t) = 0 \Leftrightarrow s = t$

(ii) $d(s, t) = d(t, s)$

(iii) $d(s, t) \leqslant d(s, w) + d(w, t)$

(iv) $d(sw, tw) = d(s, t)$.

Απόδειξη. Για το $(i), (ii)$ και (iv) δεν έχω τίποτα να δείξω. Για να αποδείξουμε το (iii) θέτουμε $j = d(s, t)$ και υποθέτουμε ότι $j > 0$. Τότε $s_j^{-1} \neq t_j^{-1}$ και άρα είτε $s_j^{-1} \neq w_j^{-1}$ είτε $w_j^{-1} \neq t_j^{-1}$. Άρα είτε $d(s, w) \geq j$ ή $d(t, w) \geq j$. Σε κάθε περίπτωση $d(s, t) \leqslant d(s, w) + d(w, t)$. □

Σκοπός τώρα είναι να ορίσουμε μία οικογένεια πολυωνύμων, στενά συνδεδεμένη με τα R πολυώνυμα όπως θα φανεί παρακάτω, μέσω των οποίων θα συνάγουμε έναν εύχρηστο τύπο για τα R πολυώνυμα. Ο παρακάτω ορισμός οφείλεται στον F.Brenti.

Ορισμός 4.3.8. *Για $s, t \in S_n$ ορίζουμε το πολυώνυμο $\mathcal{R}_{s,t}(q)$ ως εξής:*

$$\mathcal{R}_{s,t}(q) = \begin{cases} 0, & \text{αν } s \nleq t, \\ \sum_{w \in \mathcal{B}_{i,j}(s)} q^{k(w)-1} \mathcal{R}_{ws,t}(q), & \text{αν } s < t, \\ 1, & \text{αν } s = t, \end{cases}$$

όπου $i = t_d^{-1}$, $j = s_d^{-1}$ και $d = d(s, t)$.

Η σύνδεση των $R-$πολυωνύμων με των $\mathcal{R}-$πολυωνύμων θα φανεί στο παρακάτω θεώρημα το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [3].

Θεώρημα 4.3.9. *Έστω $s, t \in S_n$,τότε*

$$R_{s,t}(q) = q^{(l(t)-l(s))/2} \mathcal{R}_{s,t}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})$$

Πόρισμα 4.3.10. *Έστω $s, t \in S_n$ με $s < t$.Τότε*

$$R_{s,t}(q) = \sum_{w \in \mathcal{B}_{i,j}(s)} q^{n(w,s)} (q-1)^{k(w)-1} R_{ws,t}(q),$$

όπου $i = t_d^{-1}$, $j = s_d^{-1}$ και $d = d(s, t)$.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια από το παραπάνω θεωρημα, τον ορισμό των $\mathcal{R}-$πολυωνύμων και την Πρόταση 4.3.3 . Πιο συγκεκριμένα,

$$R_{s,t}(q) = q^{(l(t)-l(s))/2} \sum_{w \in \mathcal{B}_{i,j}(s)} (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})^{k(w)-1} \mathcal{R}_{ws,t}(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) \Rightarrow$$
$$R_{s,t}(q) = q^{(l(t)-l(s))/2} \sum_{w \in \mathcal{B}_{i,j}(s)} (q-1)^{k(w)-1} q^{(-k(w)+1)/2} q^{(-l(t)+l(ws))/2} R_{ws,t}(q) \Rightarrow$$
$$R_{s,t}(q) = \sum_{w \in \mathcal{B}_{i,j}(s)} q^{(l(ws)-l(s)-k(w)+1)/2} (q-1)^{k(w)-1} R_{ws,t}(q) \Rightarrow$$
$$R_{s,t}(q) = \sum_{w \in \mathcal{B}_{i,j}(s)} q^{n(w,s)} (q-1)^{k(w)-1} R_{ws,t}(q).$$

□

Λήμμα 4.3.11. *Έστω $s \in S_n$ και $t \in T$ ώστε $l(ts) > l(s)+1$. Τότε το διάστημα $[s, ts]$ περιέχει ένα διάστημα το οποίο είναι ισόμορφο μερικώς διατεταγμένο σύνολο με αυτό της S_3.*

Απόδειξη. Έστω $i, j \in [n]$, $i < j$, τέτοια ώστε $t = (s_i, s_j)$. Αφού $l(ts) > l(s)+1$ ισχύει ότι $s_i < s_j$ και $T_s[i, j; s_i, s_j] \neq \emptyset$. Δηλαδή έχουμε

$$T_s[i, j; s_i, s_j] = \{k_1, ..., k_r\}$$

και ορίζουμε $k_1 < ... < k_r$. Για να δείξουμε το ζητούμενο θα κάνουμε επαγωγή στο $l(ts, s)$. Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι το $l(ts, s)$ είναι μονός αριθμός . Οπότε έστω ότι $l(ts, s) = 3$. Τότε $r = 1$ και έτσι παρατηρούμε ότι $[s, ts] \backsimeq S_3$ σαν μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Έστω τώρα ότι $l(ts, s) \geq 5$ και έστω $\sigma = (s_{k_r}, s_j)s$. Τότε ισχύει

$$s < \sigma < t\sigma < ts,$$

$l(t\sigma) = l(ts) - 1$ και $l(\sigma) = l(s) + 1$. Συνεπώς,

$$1 < l(t\sigma) - l(\sigma) < l(ts) - l(s).$$

Από επαγωγική υπόθεση, το διάστημα $[\sigma, t\sigma]$ περιέχει ένα διάστημα ισόμορφο με το μερικώς διατεταγμένο σύνολο της S_3. Όμως, $[\sigma, t\sigma] \subset [s, ts]$ και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 4.3.12. *Έστω $s, t \in S_n$, $s \leqslant t$, τέτοιο ώστε το διάστημα $[s, t]$ να μην περιέχει διάστημα ισόμορφο με το μερικώς διατεταγμένο σύνολο της S_3. Τότε,*

$$R_{s,t}(q) = (q-1)^{l(t,s)}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $d(s,t)$. Αν $d(s,t) = 0$, τότε $s = t$ και από τον ορισμό των $R-$πολυωνύμων το ζητούμενο ισχύει προφανώς. Τώρα υποθέτουμε ότι $s < t$ και παίρνουμε $w \in \mathcal{B}_{i,j}(s)$ τέτοιο ώστε $ws \leqslant t$, όπου $i = t_d^{-1}$, $j = s_d^{-1}$ και $d = d(s,t)$.Τότε,

$$w = (s_{i_k}, ..., s_{i_1})$$

όπου $i = i_1 < ... < i_k = j$, και $s_i = s_{i_1} < ... < s_{i_k} = s_j$. Ισχυριζόμαστε ότι $n(w,s) = 0$.Πράγματι, αν $n(w,s) \geq 1$, τότε εξ' ορισμού υπάρχει ένα $r \in [k-1]$ και $i_r < a < i_{r+1}$ τέτοιο ώστε $s_{i_r} < s_a < s_j$.Αν $\sigma_l = (s_{i_k}, s_{i_l})$ για $l = 1, ..., k-1$, τότε $ws = \sigma_1 ... \sigma_{k-1} s$. Ορίζουμε τώρα το στοιχείο

$$u = \sigma_{r+1} ... \sigma_{k-1} s$$

και παρατηρούμε ότι για αυτό ισχύει

$$l(\sigma_r u) - l(u) > 1$$

και ότι $s \leqslant u < \sigma_r u \leqslant ws \leqslant t$.
Από το Λήμμα 4.3.11, το διάστημα $[u, \sigma_r u]$ περιέχει διάστημα το οποίο είναι ισόμορφο με το μερικώς διατεταγμένο σύνολο της S_3, άρα και το $[s,t]$ θα περιέχει, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.
Άρα για κάθε $w \in \mathcal{B}_{i,j}(s)$ ισχύει ότι $n(w,s) = 0$. Όμως, από την Πρόταση 4.3.4 υπάρχει μοναδικό $w_0 \in \mathcal{B}_{i,j}(s)$ τέτοιο ώστε $n(w_0, s) = 0$. Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 4.3.10 έχουμε

$$R_{s,t}(q) = (q-1)^{k(w_0)-1} R_{w_0 s,t}(q).$$

Επειδή $s \leqslant t$, από τον ορισμό των $R-$πολυωνύμων προκύπτει ότι $R_{s,t}(q) \neq 0$ και άρα $R_{w_0 s,t}(q) \neq 0$, δηλαδή $w_0 s \leqslant t$. Συνεπώς, το διάστημα $[w_0 s, t]$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $[s,t]$ και άρα δεν περέχει επίσης διάστημα ισόμορφο με την S_3. Έτσι, από επαγωγική υπόθεση ισχύει

$$R_{w_0 s,t}(q) = (q-1)^{l(t)-l(w_0 s)}.$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.3 προκύπτει ότι

$$R_{s,t}(q) = (q-1)^{k(w_0)-1+l(t)-l(s)+l(s)-l(w_0 s)} = (q-1)^{k(w_0)-1+l(t)-l(s)-2n(w_0,s)-k(w_0)+1} \Rightarrow$$
$$R_{s,t}(q) = (q-1)^{l(t)-l(s)},$$

εφόσον $n(w_0, s) = 0$ και αρα ολοκληρώθηκε η απόδειξη. □

Έχοντας δείξει στο Θεώρημα 4.2.6 ότι η διάταξη Bruhat είναι Eulerian μερικώς διατεταγμένο σύνολο, έχουμε την εξής όμορφη σύνδεση μεταξύ των Kazhdan-Lusztig και των g πολυωνύμων.

Θεώρημα 4.3.13. *Έστω $u, v \in S_n$ με $u \leqslant v$ ώστε το διάστημα $[u,v]$ να μην περιέχει διάστημα ισόμορφο με το μερικώς διατεταγμένο σύνολο της S_3. Τότε,*

$$P_{u,v}(q) = g([u,v]^*; q).$$

Συγκεκριμένα,

$$P_{u,v} = 1 + \sum_{i=1}^{[\frac{d}{2}]} (h_i - h_{i-1}) q^i$$

όπου $d = l(u,v) - 1$ *και* $(h_0, ..., h_d)$ *είναι το h-vector του* $[u,v]^*$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $l(v,u)$. Αν $l(v,u) = 0$, τότε $u = v$ και άρα $P_{u,v}(q) = 1 = g([u,v]^*; q)$. Λόγω της υπόθεσης και του παραπάνω θεωρήματος έχουμε $R_{u,x}(q) = (-1)^{l(x)-l(u)}\ \forall\ x \in [u,v]$. Χρησιμοποιώντας το (iv) του πορίσματος 4.2.2 και την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$q^{d+1}P_{u,v}(q^{-1}) - P_{u,v}(q) = \sum_{u<x\leqslant v} R_{u,x}(q)P_{x,v}(q)$$
$$= \sum_{u<x\leqslant v}(q-1)^{l(x)-l(u)}g([x,v]^*; q) = (q-1)f([u,v]^*; q)$$

Από το 4.2.2 ισχύει $deg(P_{u,v}(q)) \leqslant [\frac{d}{2}]$, οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές του q^i, για $i = 0, ..., [\frac{d}{2}]$ παίρνουμε ότι

$$P_{u,v}(q) = g([u,v]^*; q)$$

όπως ακριβώς επιθυμούσαμε. Η δεύτερη σχέση είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος 1.1.11 . □

Πόρισμα 4.3.14. *Έστω* $u, v \in S_n$ *με* $u \leqslant v$ *ώστε το διάστημα* $[u,v] \backsimeq B_{l(u,v)}$ *σαν μερικώς διατεταγμένα σύνολα. Τότε,*

$$P_{u,v}(q) = 1.$$

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια από το παραπάνω θεώρημα, το Παράδειγμα 1.1.10 και το γεγονός ότι το B_n είναι αυτοδυϊκό μερικώς διατεταγμένο σύνολο. □

Παρατήρηση 4.3.15. *Αν* $[e,u] \backsimeq B_{l(e,u)}$, *τότε η* X_u *είναι smooth variety.*

Βιβλιογραφία

[1] A. Björner and F. Brenti, An improved tableau criterion for Bruhat order, Electron. J. Combin. **3** (1996), Research Paper 22, 5pp (electronic).

[2] A. Björner and F. Brenti, Combinatorics of Coxeter groups, GTM 231, Springer, 2005.

[3] F. Brenti, Combinatorial Properties of the Kazhdan-Lustig R-Polynomials for S_n, Adv. Math. 126 (1997), 21–51.

[4] B. Elias, G. Williamson. The Hodge Theory of Soergel Bimodules. Ann. of Math. 217 (2008), no. 2, 683-712.

[5] W. Fulton, Young Tableaux, London Mathematical Society Student Texts 35, Cambridge University Press, second edition, 1996.

[6] J.E. Humphreys, Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[7] D. Kazhdan, G. Lusztig, Representations of Coxeter groups and Hecke algebras, Invent. Math. 53 (1979), no. 2, 165-184.

[8] S. L. Kleiman and D. Laksov, Schubert calulus, Amer.Math. Monthly 79(1972), 1061-1082.

[9] J. S. Milne, Algebraic Geometry.

[10] Sara Billey, Lectures on Schubert varieties, spring 2007 course.

[11] R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics vol.1, Cambridge University Press, Cambridge, UK 1997.

[12] J. R. Stembridge, A short derivation of the Möbius function for the Bruhat order, J. Algebr. Comb. 25 (2007), 141–148.

[13] Y. Zhao, On the Bruhat order of the symmetric group and it's shellability.